



HAL
open science

Contributions à l'étude micromécanique des transformations martensitiques thermoélastiques

Mohammed El Amrani Zirifi

► **To cite this version:**

Mohammed El Amrani Zirifi. Contributions à l'étude micromécanique des transformations martensitiques thermoélastiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ013S . tel-01776051

HAL Id: tel-01776051

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776051>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Nb 79 395
D52

ISGMP

**INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE**

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

Mohammed EL AMRANI ZIRIFI

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19940395
Cote	S/M3 94/13
Loc	Magasin

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : Sciences de l'ingénieur
OPTION : Mécanique

**CONTRIBUTIONS A L'ETUDE
MICROMECHANIQUE DES TRANSFORMATIONS
MARTENSITIKUES THERMOELASTIQUES**

Soutenu le 16 Mars 1994 devant le jury composé de :

Rapporteur	Mr. G. MAUGIN	Directeur de recherche CNRS. Université PARIS 6
Rapporteur	Mr. G. GUENIN	Professeur INSA LYON
Examineurs	Mr. M. O. BENSALAH	Professeur. Université Mohammed V Rabat-MAROC
	Mr. M. BERVEILLER	Professeur ENIM METZ Directeur de Thèse
	Mr. A. EBERHARDT	Professeur ENIM METZ
	Mme. E. GAUTIER	Directeur de recherche. CNRS. Ecole des Mines NANCY
	Mr. E. PATOOR	Chargé de recherche CNRS Université de METZ

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux U. R. A. CNRS. 1215

AVANT-PROPOS

J'ai effectué ce travail de recherche au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux (LPMM) à l'Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique URA CNRS 1215, Université de Metz, dans l'équipe que dirige Monsieur **M. BERVEILLER**, Professeur à l'ENIM de Metz, à qui j'adresse mes sincères remerciements et toute ma reconnaissance. Il m'a initié à la recherche en me donnant la chance de travailler sur un sujet d'actualité abordé de façon originale. Qu'il trouve ici l'expression de mon amitié et de toute mon estime.

Que Monsieur **E. PATOOR**, Chargé de Recherche CNRS à l'ISGMP, trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour la confiance et l'intérêt qu'il m'a toujours témoigné au cours de mes travaux, je tiens à lui exprimer mes plus sincères remerciements pour l'aide qu'il m'a apporté au cours de ce travail et avec qui travailler est un plaisir.

Je remercie vivement Monsieur **G. MAUGIN**, Directeur de Recherche CNRS. PARIS 6, qui a accepté d'être rapporteur de ma Thèse.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur **G. GUENIN**, Professeur INSA LYON, pour avoir bien voulu être rapporteur de ma Thèse.

Je prie Madame **E. GAUTIER**, Directeur de Recherche CNRS. Ecole des Mines NANCY, de bien vouloir accepter ma profonde reconnaissance pour l'honneur qu'elle m'accorde en participant à mon jury de Thèse.

J'adresse tous mes remerciements à Monsieur **M. O. BENSALAH**, Professeur à l'université Mohammed V RABAT MAROC, pour avoir bien voulu participer à ce jury.

Je remercie tout particulièrement Monsieur **A. EBERHARDT**, Professeur. ENIM de Metz, de l'honneur qu'il me fait de juger ce travail et pour avoir bien voulu participer à ce jury.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance et ma grande amitié à mes collègues et à mon entourage pour leur soutien et leur aide.

SOMMAIRE

INTRODUCTION.....	5
--------------------------	----------

CHAPITRE I

Aspects fondamentaux de la transformation martensitique

I.1 / Caractéristiques générales des transformations martensitiques.....	8
I.2 / Aspect cristallographique.....	10
I.2 a / Relation d'orientation.....	10
I.2 b / Mécanisme de la transformation.....	11
I.3 / Relation structure et propriétés thermomécaniques.....	12
I.3 a / Effet pseudoélastique (ou superélastique).....	13
I.3 b/ Effet mémoire simple sens.....	15
I.3 c/ Effet mémoire double sens.....	17

CHAPITRE II

Différents modèles du comportement des alliages à mémoire de forme

II.1 / Introduction.....	20
II.2 / Modèle phénoménologique de B. Raniecki, C. L'excellent et K. Tanaka.....	20
II.3 / Modèle de M. Fremond.....	23
II.4 / Modèle de I. Müller.....	25
II.5 / Modèle de F. Falk.....	27

II.6 / Modèle micromécanique de Q. P. Sun et	
K. C. Hwang.....	30
II.7 / Conclusion.....	34

CHAPITRE III

Optimisation d'un potentiel thermodynamique

III.1 / Introduction.....	37
III.2 / Cinématique de la transformation.....	37
III.3 / Potentiel thermodynamique associé	
à la transformation.....	46
III.4 / Détermination du comportement global en	
superélasticité.....	49
III.5 / Résultats obtenus.....	52
III.5-1 / Paramètres utilisés.....	52
III.5-2 / Résultats en traction uniaxiale.....	53
III.5-3 / Dissymétrie du comportement en traction et compression...	57
III.6 / Surfaces de charge et de déformation au cours	
de la transformation.....	65
III.7 / Conclusion.....	69

CHAPITRE IV

Interaction entre variantes de martensite.

IV.1 / Introduction.....	71
IV.2 / Compatibilité de la déformation de transformation.....	71
IV.2-1 / Conditions d'existence d'une interface plane compatible.....	72

IV.2-2 / Interface compatible entre variantes de martensite.....	76
IV.2-3 / orientation des interfaces compatibles.....	81
IV.3 / Contraintes internes et énergie d'interaction	91
IV.3-1 / Calcul de l'énergie d'interaction.....	92
IV.3-2 / Calcul des contraintes internes.....	94
IV.3-3 / Détermination de la matrice d'interaction H^{nm} par paire de variantes.....	96
IV.5 / Conclusion.....	100

CHAPITRE V

Approche autocohérente

V.1 / Introduction.....	102
V.2 / Comportement du monocristal.....	103
V.2-1 / Force thermodynamique associée à la transformation.....	106
V.2-2 / Loi de comportement.....	108
V.3 / Détermination du comportement polycristallin.....	108
V.3-1 / Equation integrale du comportement.....	112
V.3-2 / Utilisation de l'approximation Self-Consistante.....	115
V.4 / Choix des paramètres de bases.....	116
V.5 / Résultats pour la traction uniaxiale.....	119
V.6 / Sensibilité aux paramètres.....	119
V.6-a / Nombre d'orientations cristallines prises en compte.....	119
V.6-b / Variation de l'amplitude du déplacement g	120
V.6-c / Influence de la matrice d'interaction H^{nm}	120
V.7 / Comparaison avec des résultats expérimentaux.....	122
V.8 / Dissymétrie du comportement en traction et compression..	123
V.9 / Influence de la texture initiale.....	124

V.10 / Surfaces de charges et de déformations au cours de la transformation.....	124
V.11 / Détermination d'un critère phénoménologique de transformation.....	127
V.12 / Conclusion.....	146
CONCLUSION GENERALE.....	149

INTRODUCTION

INTRODUCTION GENERALE

Le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme se caractérise par l'existence de deux modes de déformation particuliers. D'une part un mécanisme de déformation associé à la formation sous contrainte de la phase martensitique. D'autre part la possibilité, dans l'état martensitique, de réorientation par une action mécanique extérieure, des variantes de martensite existantes. Dans ce travail seul le premier mode de déformation est pris en compte. Cette restriction est directement liée à l'adoption d'un formalisme thermoélastique isotherme pour décrire la transformation martensitique. On néglige également les contributions énergétiques à l'origine du phénomène d'hystérésis. Seuls les chargements monotones à partir de l'état austénitique peuvent donc être décrits dans le cadre de ce travail de thèse.

A de rares exceptions près, toutes les modélisations entreprises sur le comportement des A.M.F l'ont été dans le cadre de la thermodynamique macroscopique. Cependant pour tenir compte de la complexité des phénomènes à modéliser, ce type de modèle est obligé de multiplier le nombre de paramètres et ces modèles possèdent peu de capacité prédictive. Un problème identique est rencontré dans la modélisation élastoplastique des métaux et plus généralement pour tous les matériaux hétérogènes. De nombreux travaux ont été effectués au LPMM pour résoudre ces problèmes à partir d'une identification des mécanismes physiques responsables de la déformation, d'une détermination des lois de comportement à une échelle locale suivie de l'obtention du comportement macroscopique par une méthode de transition d'échelle (passage micro-macro). Ce travail s'inscrit dans cette lignée. Il poursuit les travaux menés depuis 1983 par E. Patoor, A. Eberhardt et M. Berveiller sur la modélisation du comportement superélastique des A.M.F. L'objectif de ce travail consiste à valider le choix de l'échelle de description

utilisée en comparant les résultats ainsi obtenus avec des résultats expérimentaux et à montrer les aspects prédictifs du comportement apporté par cette modélisation.

Après quelques rappels succincts sur le comportement des A.M.F et sur la transformation martensitique (chapitre I), on analyse quelques modèles récents de comportement de façon à situer clairement les apports du groupe de Metz dans ce domaine (chapitre II). Ensuite au chapitre III on commence par rappeler la description cinématique adoptée pour la déformation de transformation ainsi que le potentiel thermodynamique choisi pour décrire le changement de phase. Ces deux points sont à la base du comportement local utilisé. Une première résolution par transition d'échelle est alors effectuée à l'aide d'un modèle statique. On développe ici la méthode de résolution développée par Bensalah dans sa thèse d'Etat (Rabat 1992). On montre que cette approche simple permet déjà d'établir des caractéristiques essentielles pour le comportement superélastique (cinétique de transformation, déformation moyenne de transformation). Le modèle est utilisé pour décrire la surface de transformation dans l'espace des contraintes et la surface de déformation maximale dans l'espace des déformations. On met ainsi en évidence le caractère non isotrope de la transformation. On utilise les possibilités du modèle pour rechercher l'origine physique de cette anisotropie. Cependant l'approximation statique néglige totalement la structure interne de la martensite et conduit à des résultats trop éloignés de la réalité expérimentale. Le chapitre IV a donc pour objectif d'étudier la transformation martensitique d'un point de vue micromécanique. On adopte tout d'abord une approche purement cinématique qui, à partir de l'étude de la compatibilité des déformations de transformation entre variantes de martensite détermine, quand elles existent, l'orientation des interfaces intervariantes. Les résultats ainsi obtenus sont comparés avec succès aux mesures expérimentales réalisées par (Adachi et al.) sur un alliage de CuZnAl. On détermine ensuite la matrice

d'interactions à partir du calcul de l'énergie élastique d'interaction associées aux incompatibilités de déformation. Les résultats ainsi obtenus sont conformes à ceux obtenus par ailleurs à l'aide d'autres approches.

Le chapitre V se propose d'intégrer l'énergie d'interaction ainsi obtenue dans le potentiel thermodynamique défini au chapitre III. Cette prise en compte impose d'utiliser une méthode de transition d'échelle plus précise que le module statique du chapitre III. On utilise l'approximation autocohérente définie à l'origine pour l'étude du comportement élastique des matériaux hétérogènes puis pour l'élastoplasticité. Cette approche a été à l'origine appliquée à l'étude de la superélasticité des A.M.F par E. Patoor et M. O. Bensalah. Le travail présenté ici a pour objectif d'une part de définir la sensibilité des résultats obtenus par rapport à une variation des paramètres de base utilisés, d'autre part de déterminer la forme de la surface de transformation dans l'espace des contraintes. On compare les résultats obtenus aux mesures expérimentales disponibles sur les alliages de type CuZnAl et CuAlBe. En conclusion on définit à partir des résultats obtenus un critère non symétrique phénoménologique de transformation.

CHAPITRE I

Aspects fondamentaux
de la transformation martensitique

I.1 / CARACTERISTIQUES GENERALES DE LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE

Le nom "martensite" désigne à l'origine, le produit résultant de la transformation au cours du refroidissement rapide de la phase mère des alliages Fer-Carbone. La martensite est le constituant de trempe des aciers.

La transformation martensitique est une transition de phase du premier ordre, présentant une déformation homogène du réseau cristallin constitué principalement par un cisaillement. Elle se produit selon deux critères:

-le passage de la structure cristalline de la phase mère à celle de la nouvelle phase s'effectue par un mécanisme cristallographique correspondant à un déplacement coopératif de type cisaillement de tous les atomes [1].

Les déplacements de ces atomes sont inférieurs à une distance interatomique, ce qui exclut tout mécanisme de diffusion. La composition chimique du produit de transformation est identique à celle de la phase mère. Par extension, le terme de transformation martensitique a été généralisé à un nombre de systèmes d'alliages dont les transformations possèdent certaines caractéristiques typiques de la transformation martensitique des aciers. C'est le cas non seulement des alliages à base de Fer [Fe-C / Fe-Ni / Fe-Cr / Fe-Ni-Cr / ...], mais également des alliages cuivreux [Cu-Zn / Cu-Sn / Cu-Al / Cu-Zn-Al]. Les alliages à base de titane et même de certains métaux purs [Co, Ti, Cr,], dont les transformations allotropiques s'effectuent par cisaillement, bien que le produit de transformation puisse présenter une structure cristalline différente de la martensite des aciers au carbone [1].

Parmi toutes les transformations de phase à l'état solide, la transformation martensitique possède des caractéristiques bien définies qui permettent de la distinguer des autres transformations structurales des matériaux (précipitation, diffusion, oxydation ,). Par référence aux transformations martensitiques

des aciers, on appelle "austénite" la phase mère stable à haute température, et martensite, la phase issue de l'austénite par une transformation martensitique. La martensite est également la phase stable à basse température. Les caractéristiques d'une transformation martensitique sont au nombre de cinq:

- * Il s'agit d'un changement de phase à l'état solide dû à une déformation inélastique du réseau cristallin. Cette déformation n'est pas due à un mouvement individuel des atomes sur les grandes distances (comme dans le cas de la diffusion) mais à un déplacement collectif et coopératif des atomes sur des distances relativement faibles par rapport aux paramètres des mailles cristallines.
- * L'absence de la diffusion rend la transformation martensitique quasiment instantanée. Pour un état d'avancement de la transformation donné, il y a coexistence des deux phases (transformation du premier ordre).
- * Par rapport à sa forme antérieure, un élément de volume de matière subit, lors de sa transformation de phase, une déformation caractérisée par:
 - une faible variation de volume (pour les alliages à mémoire de forme)
 - un cisaillement important selon un plan et une direction bien définis. Cette déformation est le résultat d'une transformation du réseau cristallin (déformation de Bain) et d'une transformation à réseau invariant (glissement ou maclage).
- * Afin de minimiser l'énergie d'interaction entre la martensite formée et l'austénite encore présente, les domaines constitués de martensite ont généralement la forme de plaquette aplatie dont le plan principal est appelé plan d'habitat ou plan d'accolement. Ce plan est généralement bien défini pour une classe d'alliages et possède des indices cristallographiques souvent complexes. Ce plan est le plan de cisaillement de la martensite. Dans le cas des alliages à mémoire de forme, la direction de cisaillement est pratiquement contenue dans ces plans. Du fait de la symétrie cristallographique de la phase mère (austénite), de multiples plans d'habitat peuvent coexister dans un

monocristal d'austénite en cours de transformation. L'ensemble des plaquettes ayant même plan d'habitat et même direction de cisaillement est appelé "variante de martensite".

* Les variables thermodynamiques extérieures qui ont une action sur la transformation martensitique sont comme pour tous les changements d'état, la température et la contrainte.

I.2 / ASPECT CRISTALLOGRAPHIQUE

I.2 1 / RELATION D'ORIENTATION

La relation d'orientation qui existe entre le réseau cristallin du produit martensitique et celui de la phase mère constitue l'une des données les plus importantes qui concerne une transformation martensitique. Elle peut être établie à l'aide de technique de diffraction des rayons X ou de la diffraction électronique. Dans le cas des alliages Ferreux, ces relations d'orientations peuvent être regroupées en trois types principaux [2]:

- Les relations de Kurdjumov et Sachs observées dans des alliages Fe-C et pour des teneurs en carbone s'étendant entre 0,55 et 1,4% en poids

$$(111)_A // (011)_M \text{ et } [011]_A // [111]_M$$

- Les relations de Nishyama, observées dans les alliages Fe-Ni pour des teneurs en nickel s'étendant entre 2 et 4% en poids

$$(111)_A // (101)_M \text{ et } [121]_A // [101]_M$$

- Les relations de Greninger et Troino observées dans les alliages Fe-Ni-C contenant 22% en poids de nickel et 0,8% en poids de carbone et qui correspondent à une situation intermédiaire.

$(111)_A // (011)_M \text{ et } [51217]_A // [71717]_M$. Ces relations d'orientation dépendent de plusieurs facteurs [alliage considéré, structure cristallographique des deux phases, température de formation du produit martensitique.....]

I.2 b /MECANISME DE TRANSFORMATION

La transformation martensitique peut être définie comme étant un mode de déformation ayant pour origine un changement de réseau cristallin. Ce changement de réseau appelé déformation de Bain, s'accompagne de contraintes internes très importantes dues à la coexistence des deux phases et au changement de volume accompagnant la transition. Pour relaxer ces contraintes internes, on introduit un mécanisme d'accommodation à réseau invariant. L'une des théories cristallographiques et phénoménologiques les plus utilisées, est celle développée par Wechsler, Libermann et Read [3]. Cette théorie repose sur deux axiômes :

Premier axiôme: parmi toutes les déformations géométriques possibles permettant de passer de la maille de la phase mère à la maille transformée, celle qui se produira réellement est celle qui entraînera un minimum de distorsion et nécessitera ainsi une énergie minimale.

Deuxième axiôme: l'interface séparant les deux phases est supposée être un plan invariant, c'est à dire un plan de distorsion nulle dont la position reste fixe au cours de la déformation.

La déformation de Bain correspond au premier axiôme mais elle est généralement incompatible avec l'existence d'un plan invariant. Une déformation supplémentaire à réseau invariant est donc nécessaire pour assurer le deuxième axiôme. Cette dernière déformation peut être un glissement pur, du maclage ou une combinaison de glissement et de macles pouvant se réaliser soit dans l'austénite soit dans la martensite. En grandes déformations, l'addition de ces deux déformations n'assurent toujours pas l'invariance du plan d'habitat. Une transformation supplémentaire par rotation est donc nécessaire pour décrire totalement la transformation globale. Ainsi la théorie de Wechsler, Liberman et Read permet de déterminer à partir des mesures

cristallographiques effectuées sur les deux phases et la donnée de la déformation à réseau invariant [5], les caractéristiques de la transformation qui sont:

- * La normale au plan d'habitat
- * La direction de déplacement
- * L'amplitude de déplacement g
- * Les relations d'orientation

I.3 /.RELATION STRUCTURE ET PROPRIETES THERMOMECANIQUES

La transformation martensitique apparaît essentiellement dans des traitements thermomécaniques visant à confier au matériau des caractéristiques mécaniques spécifiques par exemple dans les alliages ferreux, elle apparaît dans les opérations de soudure, traitement thermique des aciers.....

Dans les matériaux non ferreux, la transformation martensitique intervient dans l'effet de mémoire de forme. Les alliages à mémoire de forme ont une réponse à un chargement thermodynamique tout à fait différente des matériaux usuels. L'appellation AMF ne correspond en fait qu'à l'un des aspects du comportement complexe que présentent ces matériaux. Selon le nombre, la nature et la séquence des cycles de chargement thermomécanique, on peut distinguer des classes de comportement correspondant à des mécanismes physiques différents mais faisant toujours intervenir la transformation martensitique. Ces mécanismes sont:

- Formation de martensite orientée par des contraintes (internes ou appliquées) et retour à l'état austénitique.
- Réorientation partielle et réversible des variantes par application des contraintes externes.

Selon le chargement thermomécanique et souvent en fonction de toute l'histoire

de ce chargement, les mécanismes précédents conduisent aux différentes classes de comportement (figure (I-3)):

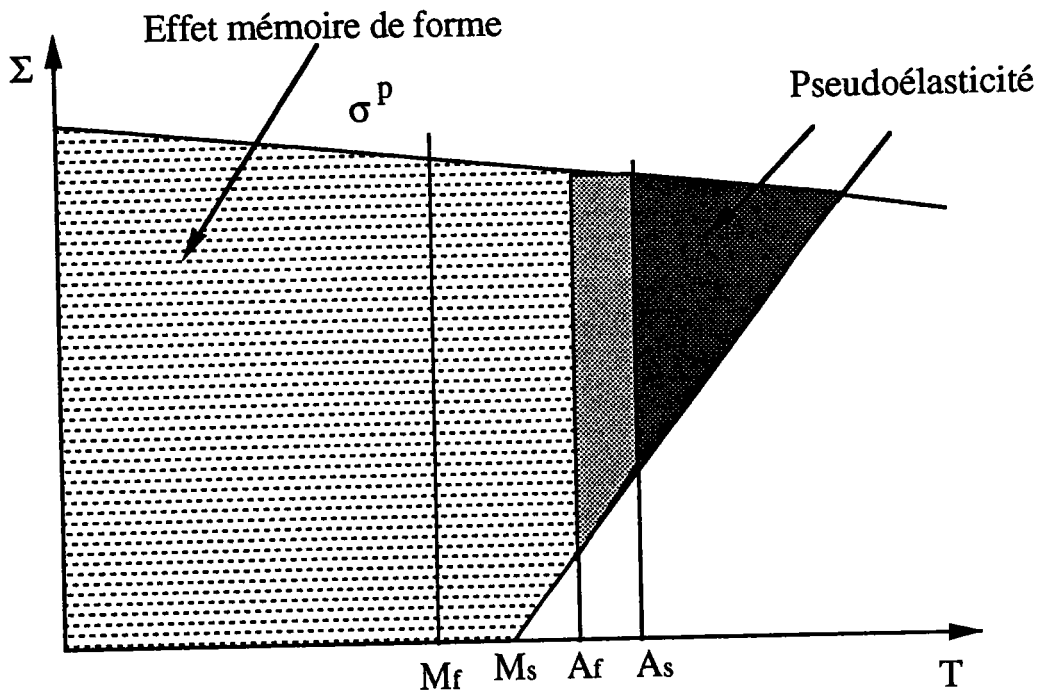


Figure (I-3) *Domaine d'existence de l'effet mémoire de forme et de la pseudoélasticité pour un alliage à mémoire de forme. σ^P représente la contrainte d'écoulement plastique, par mouvement de dislocation cette valeur est élevée dans le cas des A.M.F [4]*

I.3 a / EFFET PSEUDOELASTIQUE (OU SUPERELASTIQUE)

La superélasticité résulte de la formation, de la croissance et de la réversion des plaquettes de martensite, induites sous contraintes à des températures proches, mais supérieures aux températures de transformation. L'application d'une contrainte sur un échantillon en état initial austénitique a pour conséquence de modifier les températures de transformation conduisant aussi à l'apparition de variantes de martensite orientées de façon privilégiée. Il résulte une forte déformation macroscopique inélastique réversible [4]. On distingue 5 principaux stades de l'effet pseudoélastique (figure (I-1)):

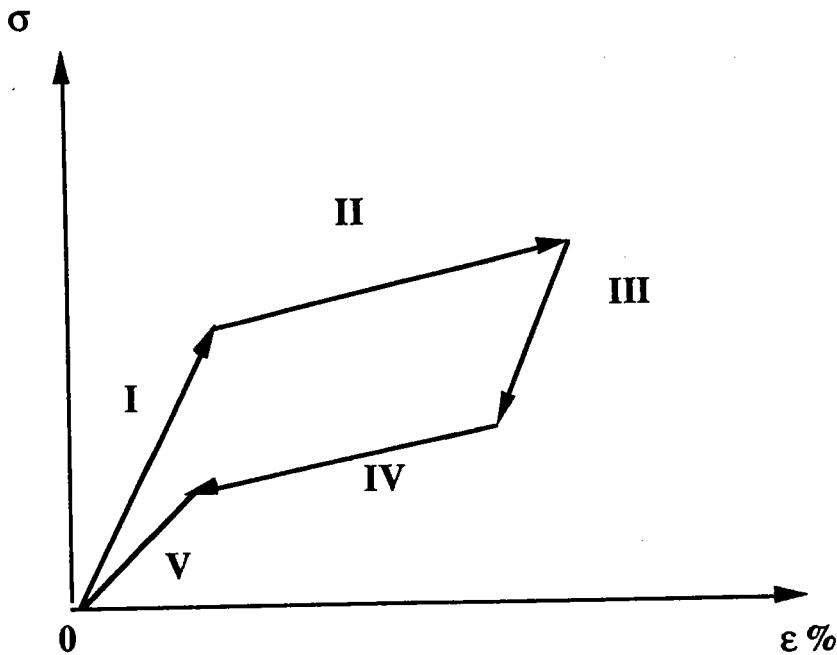


Figure (I-1): Représentation schématique de l'effet superélastique

- * Le premier stade (I): correspond à la déformation élastique classique de la phase austénitique
- * Le second stade (II): au cours duquel on observe, à partir d'une contrainte seuil σ^{Ms} , une création et une croissance de variantes de martensite s'accompagnant d'une forte déformation macroscopique pseudoélastique
- * Le troisième stade (III): durant la décharge jusqu'à σ^{As} , correspond à un retour élastique de l'alliage biphasé austénite-martensite
- * Le quatrième stade (IV): est lié au retour quasi complet des variantes de martensite
- * Enfin le dernier domaine (V): dans lequel on retrouve une déformation élastique de l'austénite pure. La microstructure obtenue dans ce type de chargement est représentée schématiquement par la (figure (I-2)).

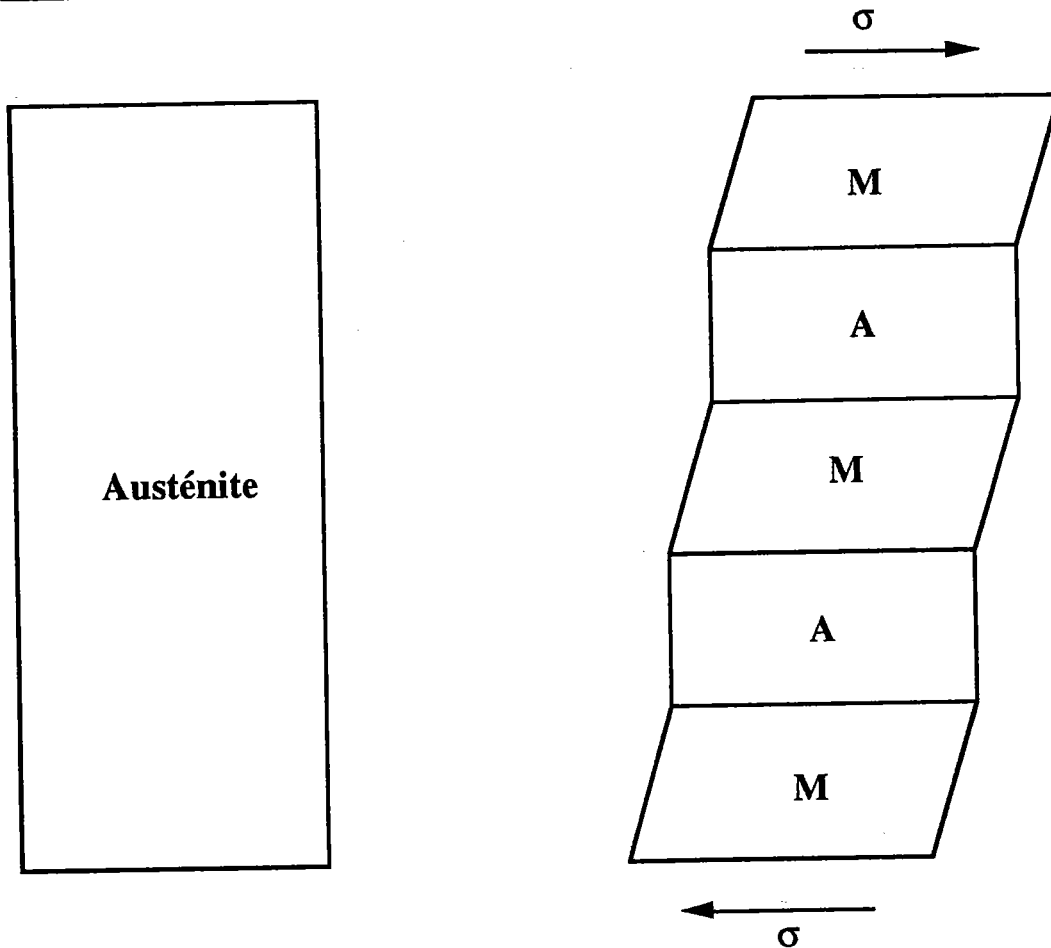


Figure (I-2): Représentation d'une transformation martensitique induite sous contrainte (à $T > A_f$)

Pour ce type d'essai, l'évolution des contraintes critiques de transformation en fonction de la température, peut être déterminée expérimentalement. Les alliages polycristallins CuZnAl présentent un effet pseudoélastique pur, pour des déformations totales maximales en traction de l'ordre de 3 à 4% (contre 5 à 10% sur des monocristaux de même composition [9,10]).

I.3 b / EFFET MEMOIRE SIMPLE SENS

L'effet mémoire simple sens, fait intervenir successivement plusieurs phénomènes physiques liés à la transformation martensitique. De plus, celui-ci

nécessite de faire subir au matériau un chargement plus complexe qu'une simple contrainte externe (figure (I-3)):

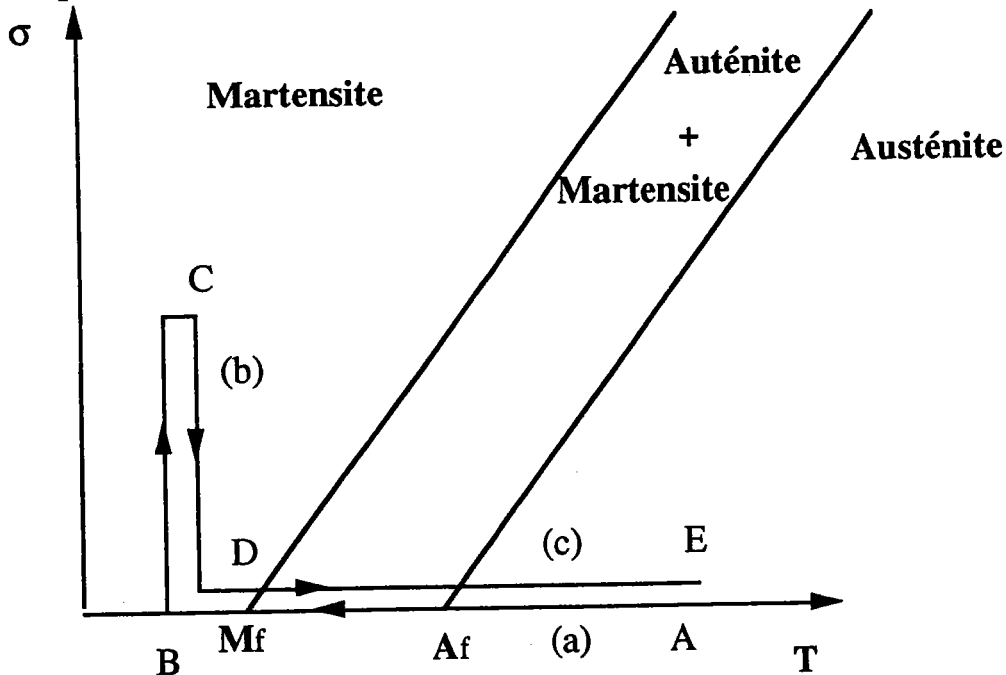


Figure (I-3): Chargement séquentiel ABCDE permettant d'obtenir un effet mémoire de forme simple sens

a/ L'échantillon est d'abord refroidi à une température inférieure à M_f sous une contrainte macroscopique nulle ($\sigma = 0$, $d\sigma = 0$ et $dT < 0$); trajet A---->B. Cette séquence provoque une transformation martensitique complète ($f=1$ pour $T < M_f$) mais sans déformation macroscopique car les variantes formées ne sont pas orientées par les contraintes appliquées qui sont nulles. Les groupes de variantes auto accommodantes sont les seuls développés.

b/ On applique au matériau puis on relâche une contrainte σ dans l'état martensitique (σ , $d\sigma \neq 0$ et $dT=0$); trajet B—>C—>D. Dans cette séquence, l'application des contraintes modifie la fraction volumique des différentes variantes par le mécanisme de réorientation tout en conservant (la fraction volumique totale de martensite égale à 1). Cette réorientation crée une déformation stable lors de la décharge ($\sigma = 0$). On est alors en présence d'un état martensitique, mais déformé de ϵ_p par rapport à l'état austénitique initial.

c/ On réchauffe l'échantillon sous contrainte nulle au delà de la température A_f ($\sigma = 0$, $d\sigma = 0$ et $dT > 0$) trajet D \longrightarrow E. Cette séquence a pour objet la transformation inverse de la martensite vers l'austénite. Puisque la martensite a été orientée par la contrainte σ , sa réversion en austénite provoque une déformation ($-\epsilon_p$) inverse de celle créée par l'application des contraintes σ . La forme du solide dans l'état D est modifiée et le corps recouvre sa forme initiale dans l'état E. Ce phénomène est appelé mémoire de forme simple sens car la recouvrance de la forme se fait uniquement dans le sens D \longrightarrow E. On peut également obtenir un effet mémoire simple sens par d'autres chargements thermomécaniques séquentiels.

I.3 3 / EFFET MEMOIRE DOUBLE SENS (EMDS)

L'effet mémoire double sens correspond au phénomène de recouvrance de forme de l'effet mémoire simple sens mais la recouvrance se fait dans les deux sens au chauffage et au refroidissement. Après application d'un traitement thermomécanique approprié appelé traitement d'éducation, un alliage à mémoire de forme peut mémoriser deux formes associées chacune à l'un ou l'autre des deux états cristallographiques. Par conséquent, l'échantillon changera spontanément de forme par simple chargement thermique de part et d'autre des températures de transformation. La forme mémorisée en phase martensitique résulte de la formation préférentielle, en l'absence de contrainte appliquée, de variantes orientées par le champs de contraintes internes générées dans le matériau par le processus d'éducation [6]. Deux hypothèses concernant les mécanismes exacts à l'origine de l'effet mémoire double sens sont proposées par Contardo [7]:

- le champ de contraintes internes qui accompagne les dislocations ou les arrangements de dislocations favorise la formation de variantes particulières de martensite.

- La variante de martensite qui se forme dans une zone où il existe une densité de dislocations de même nature, est celle qui a un plan de base proche du plan de glissement des dislocations majoritaires. Dans le cas d'une transformation martensitique thermoélastique à un interface unique, progressant dans un monocristal il n'y a pas d'énergie élastique emmagasinée [8].

Plusieurs observations microstructurales [9, 10] ont permis de constater, au cours des transformations successives l'introduction dans les métaux de défauts orientés (dislocations, précipités, martensite résiduelle.....),

BIBLIOGRAPHIE

- [1]: Elément de métallurgie physique. Chap,31, Transformation par cisaillement Tome (4). Documentation Française. Saclay (1979)
- [2]: M. O. Bensalah Thèse d'État, Université Mohamed V, Rabat 1992 (MAROC)
- [3]: M. S. Wechsler, D. S. Lieberman, T. A. Read Trans Aime 197, 1503 (1953)
- [4]: E. Patoor et M. Berveiller, Edition Hermes (1990), (10-14)
- [5]: L. Delaey, A. Deruytter, E. Aernoudt et J. O. Roos, Katolieke Universiteit leuven (Belgique) Report 78R1, (1978)
- [6]: E. Patoor, A. Eberhardt et M. Berveiller Traitement Thermique, 234, 901, 1990
- [7]: L. Contardo, Thèse de Docteur Ingenieur, INSA de Lyon (1988)
- [8]: C. M. Wayman, physical metallurgy, Elviesier Science publishers BV, (1983)
- [9]: D. Rios Jara et G. Guenin. acta-metal, V35, pp, 109-119 (1987)
- [10]: J. Perkins et R. O Sponholz Metal. trans, A, 15A, pp, 313-321, (1984)

CHAPITRE II

Différents modèles du comportement
des alliages à mémoire de forme

II 1 / INTRODUCTION

Depuis le début des années 80 de nombreuses modélisations ont été élaborées pour décrire le comportement particulier des alliages à mémoire de forme. Des modèles de plus en plus complexes ont été proposés permettant de passer d'une description qualitative à des résultats quantitatifs. Actuellement la plupart des modèles sont écrit dans un formalisme 3 D ce qui permet d'envisager leur application au calcul de structure. Cependant de nombreux points restent encore dans l'ombre. La plupart des modèles sont élaborés dans le cadre de la thermodynamique macroscopique (Fremond, Raniecki et al. I. Müller..) et nécessitent d'introduire a priori une loi cinétique de transformation. Ces modèles imposent également d'effectuer des hypothèses sous la forme de la déformation de transformation et de postuler que la transformation s'opère de façon isotrope. Une seconde voie de modélisation est représentée par les approches micro-macro (Falk, Sun et al. Patoor et al.). Dans ce type d'approches le choix d'élément de volume représentatif du comportement local et la détermination des lois locales qui en résultent ainsi que celui de l'approximation utilisée pour effectuer la transition d'échelle, possèdent une grande influence sur les résultats obtenus.

II 2 / MODELE PHENOMENOLOGIQUE DE B. RANIECKI, C. LEXCELLENT ET K. TANAKA

Le modèle développé par B. RANIECKI, C. LEXCELLENT et K. TANAKA [1] est un modèle phénoménologique macroscopique. Il est basé sur les concepts de la thermodynamique des processus irréversibles. Les auteurs considèrent que l'énergie spécifique d'un système biphasé dans un état hors équilibre s'écrit:

$$\Phi = (1-z)\Phi^{(1)} + z\Phi^{(2)} + \Delta\Phi \quad (\text{II.1})$$

Où z représente la fraction massique de martensite formée et $\Phi^{(\alpha)}$ est l'énergie libre spécifique de la phase α

$\alpha=1$: phase mère (Austénite)

$\alpha=2$: phase produite (Martensite)

$\Delta\Phi$ est le terme d'énergie de configuration. La forme choisi par L'excellent et al. pour ce terme de couplage est:

$$\Delta\Phi = z(1-z)\Phi_{it}(T) \quad (\text{II.2})$$

Avec:

$$\Phi_{it} = \bar{U}_0 + T\bar{S}_0 \quad (\text{II.3})$$

Où \bar{U}_0 et (\bar{S}_0) désignent l'énergie interne et l'entropie de cohésion entre les deux phases. La notion d'équilibre thermodynamique est alors remplacée par le concept d'équilibre contraint introduit par Kestin et Rice. Dans ce modèle, les contraintes sont supposées identiques dans les deux phases et égales à la contrainte appliquée (modèle à contrainte uniforme).

Cette hypothèse conduit à la forme suivante pour l'énergie libre à l'état d'équilibre contraint :

$$\begin{aligned} \Phi_c = & \frac{1}{2} [\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{\text{PE}}(z, K)]_{\underline{L}} [\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{\text{PE}}(z, K)] - (T - T_0) \underline{\alpha}_0 \underline{L} [\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^{\text{PE}}(z, K)] \\ & + C_v(T - T_0) - C_v T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + \Phi^*(z, T) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Où:

$$\Phi^*(z, T) = U_0^{*(1)} - TS_0^{*(1)} - z\Pi_0^f(T) + \Phi_{it}z(1-z)$$

avec $\Pi_0^f(T)$ la force motrice de la transformation de phase à $\sigma = 0$

$$\Pi_0^f = \Delta U^* - T\Delta S^*$$

La déformation pseudoélastique ε^{PE} est définie a priori comme:

$$\varepsilon^{\text{PE}} = zK \quad \text{avec} \quad K = Y \frac{d\varepsilon^{\text{PE}}}{d\varepsilon} \quad (\text{II.5})$$

Où Y représente la déformation pseudoélastique associée à une transformation complète. Cela revient à supposer la transformation comme étant totalement isotrope. Dans la relation (II.4) les notations suivantes sont utilisées.

L : Tenseur des constantes élastiques

α_0 : Coefficient de dilatation thermique

C_v : Chaleur spécifique à volume constant

$U^*(\alpha)$ et $S^*(\alpha)$ désigne l'énergie interne et l'entropie de la phase α à $\sigma = 0$ et à $T = T_0$

La donnée du potentiel (II.4) permet de définir les équations d'états qui régissent le comportement

$$S(\underline{\varepsilon}, T, z) = -\frac{\partial \phi_c}{\partial T}$$

$$\Pi^F(\underline{\varepsilon}, T, z) = -\frac{\partial \phi_c}{\partial z}$$

Cependant, il est nécessaire pour résoudre totalement le problème d'introduire une équation supplémentaire définissant la cinétique du changement de phase.

Pour définir cette cinétique deux fonctions $\Psi^\alpha(\Pi^F, z)$, ($\alpha = 1, 2$) sont

introduites telles que la transformation ne peut progresser (ou régresser) que

si

$$\Psi^1 = \text{cste} \quad \text{pour } dz > 0 \quad (\text{II.6a})$$

$$\Psi^2 = \text{cste} \quad \text{pour } dz < 0 \quad (\text{II.6b})$$

Ces fonctions sont définies par :

$$\Psi^{(1)} = \Pi^f + K^{(1)}(z) \quad (\text{II.7})$$

$$\Psi^{(2)} = \Pi^f + K^{(2)}(z)$$

avec $K^1 = -(A_1 + B_1 z) \ln(1-z) + C_1 z$

$$K^2 = [A_2 - B_2 (1 - z)] \ln z - C_2 (1 - z)$$

où A_α , B_α et C_α sont des constantes positives. La forme des fonctions K^α est choisie de telle façon à y inclure la relation classique de Koistinen et Marburger [2].

Les paramètres nécessaires à la mise en oeuvre de ce modèle sont obtenus par ajustement aux courbes expérimentales.

Les principales limitations de ce modèle proviennent de la nécessité d'introduire a priori une cinétique de transformation (relation II.7) et d'imposer une forme macroscopique pour la déformation de transformation (relation II.5). La détermination du paramètre Y représente un grave handicap pour cette approche. Ces limitations conduisent à envisager l'introduction de variables supplémentaires dans le modèle [9]

II 3 / MODELE DE M. FREMOND

M. Fremond [3], donne une description macroscopique du comportement des alliages à mémoire de forme, cette description est fondée sur la théorie des matériaux standards généralisés. Ce modèle suppose que les variantes de martensite et la phase mère coexistent en diverse proportion volumique. Pour simplifier il considère que le matériau se présente sous 3 phases: deux variétés de martensite et l'austénite (de fraction volumique β_1 et β_2 pour les martensites et β_3 pour l'austénite). Ces proportions doivent vérifier les relations suivantes:

$$0 \leq \beta_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 1 \quad (\text{II.8})$$

L'énergie spécifique de chacune de ces phases est donnée par:

$$\begin{aligned} \Psi_{m_1} &= \frac{1}{2} \varepsilon K \varepsilon - \alpha(T) \text{Tr} \varepsilon \\ \Psi_{m_2} &= \frac{1}{2} \varepsilon K \varepsilon - \alpha(T) \text{Tr} \varepsilon \\ \Psi_A &= \frac{1}{2} \varepsilon K \varepsilon - \left(\frac{L}{T_0}\right)(T - T_0) \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Dans ces équations K désigne la matrice de rigidité supposée identique pour toutes les phases, L désigne la chaleur latente du changement de phase austénite-martensite. On note ε le tenseur des petites déformations

macroscopiques, α le coefficient de dilatation thermique et T_0 la température absolue au dessous de laquelle les deux variétés de martensite existent de façon préférentielle. En négligeant le terme d'interaction entre phases, l'énergie du mélange a pour expression:

$$\rho \Psi(\epsilon, T, \beta_i) = \rho \sum_{i=1}^3 \beta_i \Psi_i + TI(\beta_i) \quad (\text{II.10})$$

Où ρ est la masse volumique (supposée la même pour toute les phases) et $I(\beta_i)$ la fonction indicatrice de l'ensemble des valeurs physiquement admissibles pour les variables (β_i) . Les variables d'état utilisées sont la température T , le tenseur des déformations et les proportions volumiques des variantes de martensite. Avec l'hypothèse des petites perturbations la relation de Clausius Duhem permet d'écrire:

$$\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_1} \dot{\beta}_1 + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_2} \dot{\beta}_2 + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} \leq \sigma \dot{\epsilon} \quad (\text{II.11})$$

Avec σ le tenseur des contraintes. Pour un comportement non dissipatif l'inégalité (II.11) se réduit à une égalité. On en déduit la loi de comportement:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon} = \alpha(T)(\beta_2 - \beta_1)I + K\epsilon \quad (\text{II.12})$$

Pour décrire un comportement dissipatif M. Fremond définit la dissipation sur les paramètres β en introduisant un pseudo potentiel de dissipation $\phi(\dot{\beta})$ convexe, positif et nul à l'origine. La loi de comportement est alors donnée

par:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \beta} + B + T \frac{\partial I_k}{\partial K}(\beta) = 0 \quad (\text{II.13})$$

où B représente la partie régulière de $\partial \Psi / \partial \beta$

Cette approche a l'avantage d'introduire le formalisme des indicatrices pour tenir compte des contraintes physiques s'exerçant sur les fractions volumiques de martensite. Cependant elle fait l'impasse sur les interactions entre phases, elle est de ce fait difficilement exploitable en dehors de l'étude du comportement monocristallin.

II 4 / MODELE DE I. MÜLLER

Pour modéliser le comportement pseudoélastique d'un monocristal en alliages à mémoire de forme I. Müller [4] choisit de définir l'énergie libre spécifique de Helmholtz de chaque phase sous la forme:

$$\begin{cases} \Phi_1(d, T) = \Phi_1^0(d, T) + \frac{1}{2}\alpha d^2 \\ \Phi_2(d, T) = \Phi_2^0(d, T) + \frac{1}{2}\alpha(d - \Delta d)^2 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Où "1" symbolise l'austénite et "2" la martensite.

Dans ces relations d désigne l'élongation Δd représente l'élongation due à la transformation complète de phase austénitique (constante positive) et α est la raideur élastique. Les fonctions Φ_1^0 et Φ_2^0 vérifient:

$$\begin{cases} \Phi_1^0(T) = U_1^0(T) - TS_1^0(T) \\ \Phi_2^0(T) = U_2^0(T) - TS_2^0(T) \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Où les énergies internes spécifiques U_α^0 et les entropies spécifiques S_α^0 de chaque phase sont définies par:

$$\begin{cases} U_1^0(T) = c(T - T_R) + \varepsilon_1 \\ U_2^0(T) = c(T - T_R) + \varepsilon_2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} S_1^0(T) = c \text{Ln}(T - T_R) + \eta_1 \\ S_2^0(T) = c \text{Ln}(T - T_R) + \eta_2 \end{cases}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1$ et η_2 représentent les énergies et les entropies spécifiques de chaque phase à la température de référence T_R . La chaleur spécifique notée C est considérée comme constante à déformation constante. I. Müller définit l'énergie libre Φ du mélange biphasée en ajoutant à la loi des mélanges classique un terme $\Delta\Phi$ qui prend en compte l'énergie relative aux interactions entre les deux phases:

$$\Phi(d, t) = (1 - z)\Phi_1(d_1) + z\Phi_2(d_2) + \Delta\Phi \quad (\text{II.16})$$

I. Müller propose d'adopter une expression très simple pour $\Delta\Phi$. Il considère que cette énergie doit s'annuler pour un état monophasé. Elle s'écrit donc sous la forme:

$$\Delta\Phi = A z(1-z) \quad (\text{II.17})$$

Où z désigne la proportion de martensite et A le coefficient de cohésion. Les deux premiers principes de la thermodynamique conjugués à l'expression de l'énergie libre permettent d'écrire l'inégalité de Clausius-Duhem. On peut donc calculer l'incrément de l'entropie produite à tout instant lors de l'application d'une charge P à la température T . Les états d'équilibre sont définis par une production nulle d'entropie S . Il obtient ainsi 4 équations définissant z , P , d et T à l'équilibre:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = (1-z)S_1^0(T) + zS_2^0(T) = S_1^0(T) + z\Delta\eta \\ d_2 - d_1 = \Delta d \\ P = \alpha(d - \Delta d) \\ P\Delta d - (\Delta\varepsilon - T\Delta\eta) - A(1-2z) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.18})$$

Où $\Delta\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ et $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1$ sont des constantes.

En éliminant la variable z , une relation d'équilibre entre P , d et T peut également être écrite:

$$\frac{\alpha\Delta_d^2 - 2A}{\alpha\Delta_d} P + \frac{2A}{\Delta_d} d - (\Delta\varepsilon - T\Delta\eta) - A = 0 \quad (\text{II.19})$$

I. Müller met en évidence l'existence d'une ligne particulière de transition qui est le lieu des états d'équilibres instables (figure II-1).

Pour simuler le comportement réel du monocristal, I. Müller trace ensuite des droites parallèles à l'axe d'élongation d (figure II-1).

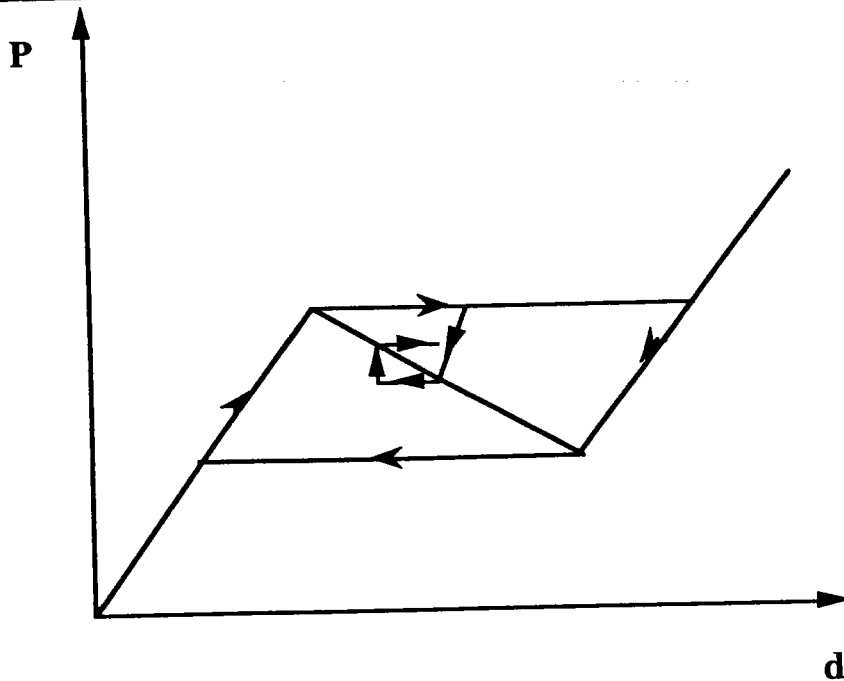


Figure (II-1): Modélisation du comportement pseudoélastique d'un monocristal de type $CuZnAl$ par I. Müller [5]

Comme pour le modèle de Fremond, cette approche est difficilement extrapolable au comportement polycristallin. Le modèle de Raniecki, L'excellent et Tanaka [1] constitue une telle tentative mais il est alors nécessaire d'introduire à priori plusieurs lois complémentaires (cinétique de transformation et évolution de la déformation de transformation). De plus le choix $\Delta\Phi = Az(1 - z)$ n'est pas réaliste.

II 5 / MODELE DE F. FALK

F. Falk [6] détermine le comportement superélastique des alliages à mémoire de forme en adoptant une approche par transition d'échelle. Il détermine le comportement d'un échantillon polycristallin à partir de la description de celui du monocristal. Le polycristal est alors considéré comme étant constitué de grains d'orientation cristallographique donnée et possédant un comportement identique à celui des monocristaux. Il détermine ensuite le comportement en effectuant une

opération de moyenne sur toutes les orientations. F. Falk utilise successivement les hypothèses de Voigt et de Reuss pour réaliser ces opérations de moyenne. Il compare ensuite les résultats ainsi obtenus. F. Falk modélise le comportement des monocristaux en supposant que la transformation se réalise selon une seule variante et à contrainte de transformation constante σ_u (figure II-3).

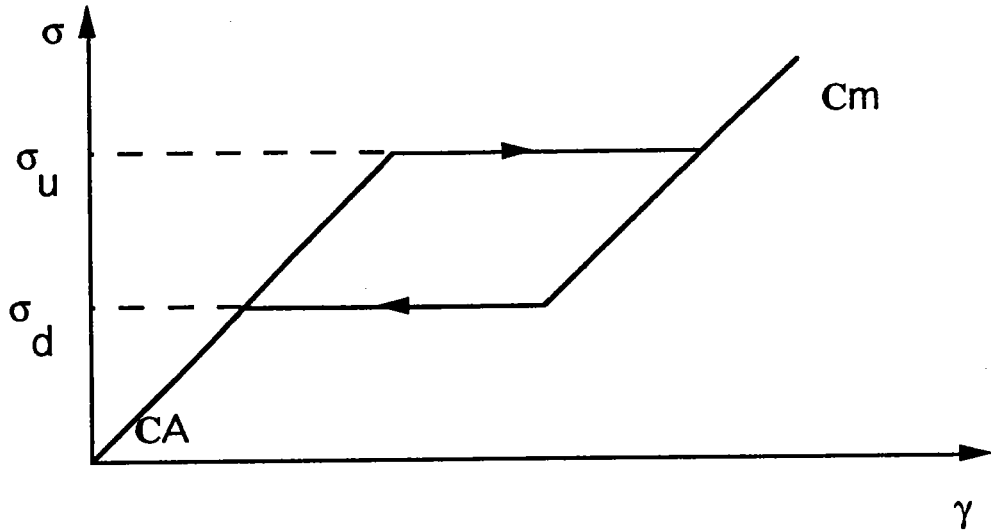


Figure (II-2): Comportement pseudoélastique des monocristaux adopté par F. Falk [6]

Il prend en compte l'hystérésis de la transformation en considérant une contrainte de transformation inverse σ_d différente de σ_u . Les contraintes critiques σ_d et σ_u sont des fonctions de la température.

1) Hypothèse de Reuss

Dans cette hypothèse l'état de contrainte est supposé identique dans chaque grain et égal à celui de la contrainte appliquée Σ

$$\sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma \end{bmatrix}$$

En fonction de l'orientation de chaque grain, on peut à l'aide de cette hypothèse, déterminer la contrainte résolue exercée sur chaque variante de martensite. La variante activée est alors celle pour laquelle la contrainte résolue est la plus importante. La déformation macroscopique est ensuite déterminée par une opération de moyenne portant sur toutes les déformations locales.

2) Hypothèse de Voigt modifiée

A l'inverse, l'hypothèse de Voigt consiste à considérer que la déformation est uniforme dans tous les grains. Pour prendre en compte la particularité de la loi de comportement adoptée pour le monocristal, F. Falk utilise une approximation de Voigt relâchée en imposant uniquement $\epsilon_{33} = E_{33}$. Les autres composantes du tenseur de déformation peuvent varier de grain à grain. Dans chaque grain, il choisit comme variante activée celle donnant la déformation voulue E_{33} pour la contrainte de transformation la plus faible.

La contrainte macroscopique est ensuite obtenue en effectuant la moyenne sur tous les grains.

3) Discussion

Dans les deux hypothèses, le comportement obtenu est isotrope. Cependant les deux réponses ainsi obtenues diffèrent considérablement (figure II-3).

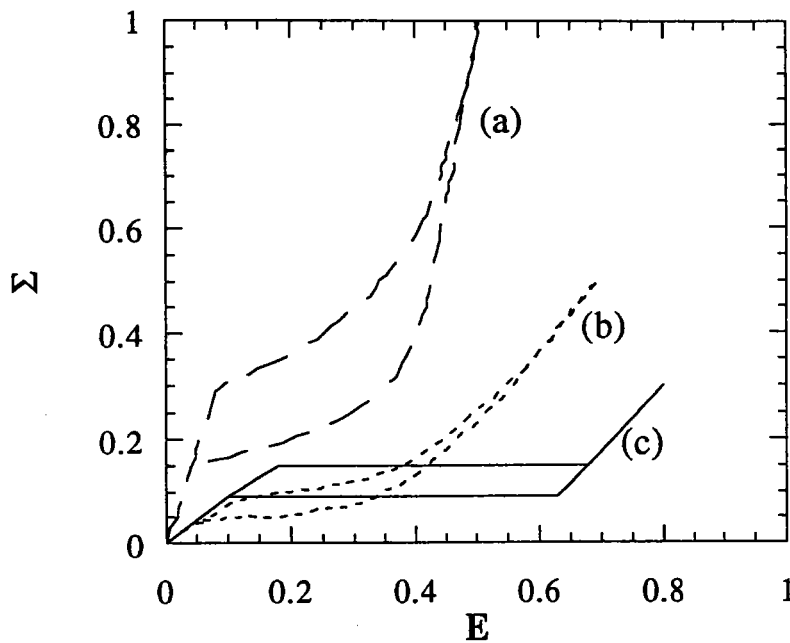


Figure (II-3): Comportement d'un polycristal CuZnAl obtenu par le modèle de F. Falk [6] (a) Reuss, (b) Voigt relâché et (c) comportement du monocristal

Le modèle de Voigt modifié détermine un plateau de transformation pour une contrainte critique égale au 2/3 de celle adoptée pour le monocristal, de la même façon il conduit à un hystéresis plus faible. Ce résultat est en contradiction avec les observations expérimentales effectuées sur des mono et des polycristaux d'alliage CuZnAl [7]. Le modèle de Reuss semble conduire à des résultats plus proches du comportement réel. Il faut cependant remarquer que dans son travail F. Falk approxime les normales au plan d'habitat et les directions de transformations par des plans $\{110\}$ et des directions $\langle 110 \rangle$. Cette hypothèse a pour conséquence de réduire à 6 les 24 variantes de martensite. Les effets de cette simplification sur les résultats obtenus ne sont pas évalués.

K. C. HWANG

Pour déterminer le comportement des alliages à mémoire de forme Q. P. SUN et K. C. HWANG [8], utilisent une approche micromécanique basée sur la thermodynamique de la transformation. Sun et al. choisissent comme élément de volume représentatif du comportement global un volume constitué de plusieurs grains non transformés (constituant la matrice) et de grains transformés se comportant comme une inclusion de fraction volumique f dans une matrice élastique (figure II.4)

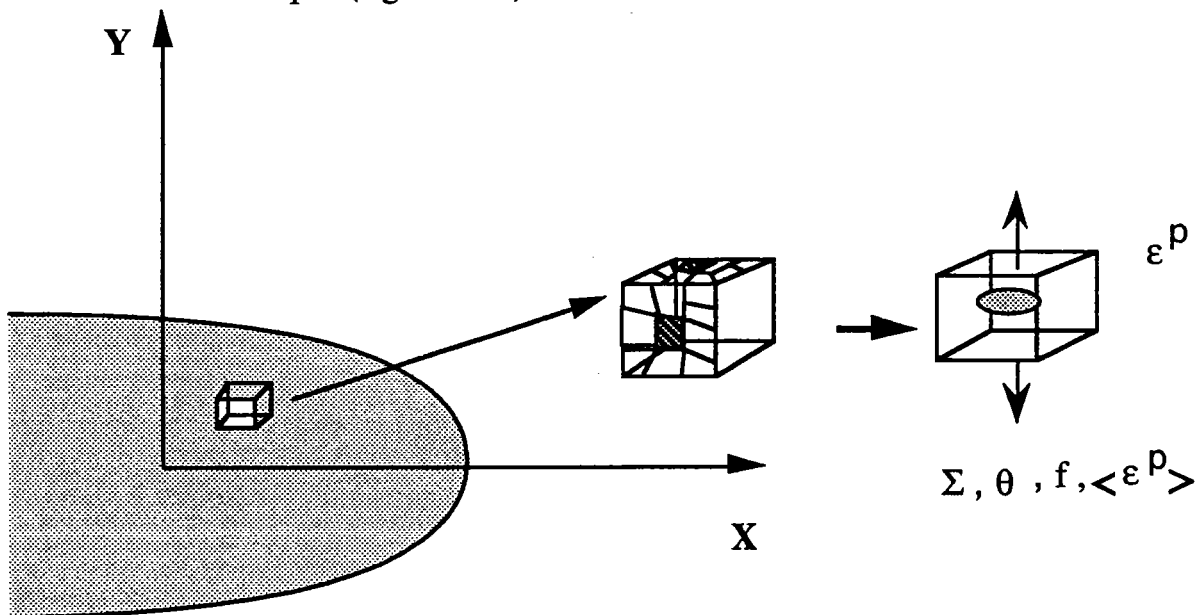


Figure (II-4): Représentation de la microstructure adoptée par le modèle micromécanique de Sun et al. [8]

Ce choix de microstructure définit le potentiel thermodynamique de transformation comme une fonction des variables de contrôle Σ (la contrainte appliquée) et θ (la température) et des variables internes f (fraction volumique de martensite) et $\langle \epsilon^P \rangle$ (déformation moyenne de transformation).

Dans l'hypothèse des petites déformations et en négligeant la variation de volume, la déformation totale macroscopique est donnée sous la forme de la moyenne d'une déformation élastique et d'une déformation inélastique:

$$E = \langle \varepsilon \rangle_v = \langle \varepsilon^e \rangle_v + \langle \varepsilon^p \rangle_v \quad (\text{II.20})$$

Où la déformation inélastique locale est donnée par Sun et al. sous la forme suivante:

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{\sqrt{3}}{2} g \frac{S_{ij}^M}{\sigma_e^M} \quad (\text{II.21})$$

Où:

$$g = \sqrt{3} \varepsilon_{eq}^p \quad \text{et} \quad \sigma_e^M = \frac{3}{2} (S_{ij}^M S_{ij}^M)^{\frac{1}{2}}$$

S_{ij}^M : représente la mesure de l'effet combiné entre les contraintes macroscopiques extérieures et les contraintes internes. Pour une inclusion sphérique selon Eshelby et M. Tanaka:

$$S_{ij}^M = \langle s_{ij} \rangle_{v_m} = S_{ij} - 7B_1(T) \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{v_m} \quad (\text{II.22})$$

Avec:

$$B_1(T) = \frac{2\mu(T)(5\nu - 7)}{15(1 - \nu)} \quad (\text{II.23})$$

Pour un volume unitaire l'énergie complémentaire Ψ est donnée sous la forme suivante:

$$\Psi(\Sigma, T, f, \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{v_m}) = -(W_1 + W_2 + W_{sur} + \Delta G_{ch} - \Sigma : E) \quad (\text{II.24})$$

Où:

- W_1 désigne l'énergie élastique

$$W_1 = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} M_{ijkl} \Sigma_{kl}$$

- W_2 représente l'énergie stockée due aux contraintes internes

$$W_2 = -\frac{1}{4} B_1(T) g^2 f + \frac{1}{2} B_1(T) f^2 \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{v_1} \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{v_1} \quad (\text{II.25})$$

- ΔG est l'énergie chimique définie par:

$$\Delta G = \Delta G^{A-M}(T) f$$

- W_{sur} constitue l'énergie surfacique. Sun considère que pour des grains de même taille cette énergie est exprimée par:

$$W_{\text{sur}} = \frac{6\gamma_s f}{d_0} \quad (\text{II.26})$$

Avec: $\gamma_s = \gamma_m - \gamma_A$ où γ_m et γ_A sont les énergies surfaciques des phases martensitique et austénitique et d_0 le diamètre du grain.

Pour décrire le comportement pseudoélastique de la transformation le second principe de la thermodynamique impose:

$$\dot{\Psi}_{/\Sigma, T} = \frac{\partial \Psi}{\partial f} \dot{f} + \frac{\partial \Psi}{\partial \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle} \langle \dot{\varepsilon}_{ij}^p \rangle_{v_1} \geq 0 \quad (\text{II.27})$$

Avec:

$$\dot{\Psi}_{/\Sigma, T} = \dot{W}_d$$

Où W_d représente l'énergie dissipée durant la transformation. Cette énergie est décrite par Sun et al. comme étant proportionnelle à la fraction volumique cumulée de martensite :

$$W_d = D_0 f_{\text{cu}} \quad (\text{II.28})$$

Avec $f_{\text{cu}} = \int_0^f |df|$ et D_0 une constante matérielle.

A partir de la relation (II.24), il obtient la définition suivante pour la fonction critère de transformation F_f :

$$F_f(\Sigma, T, f, \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_v) = \frac{g}{\sqrt{3}} J(S_{ij} - fB_1(T) \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_v) - C_0(T) = 0 \quad (\text{II.29})$$

Où il pose :

$$C_0(T) = D_0 + \frac{6\gamma_s}{d_0} + \Delta G^{A-m}(T) - \frac{1}{4} B_1(t) g^2$$

L'équation (II.29) est équivalente en plasticité classique à une équation de type:

$$\frac{g}{\sqrt{3}} \sigma_e^M - C_0(T) = 0 \quad (\text{II.30})$$

Cette expression est indépendante de la fraction volumique et est associée à une fonction décroissante. Pour résoudre cette difficulté qui provient d'une mauvaise description de la microstructure, Sun et al supposent que la fonction $C_0(T)$ dépend également de la fraction volumique de telle façon que :

$$C_0(T, f) = C_0(T) + \alpha(T)f(T) \quad (\text{II.31})$$

où $\alpha(T)$ est ajustée pour obtenir une fonction croissante.

En introduisant cette fonction, le comportement pseudoélastique ainsi déterminé est analogue aux observations expérimentales.

II 7 / CONCLUSION

Les différents modèles présentés dans ce chapitre ont été choisis parmi les plus récents et les mieux argumentés. Des constatations communes peuvent s'en dégager. Toutes ces approches (à l'exception de celle de F. Falk) nécessitent d'introduire dans le modèle une cinétique de transformation. De la même façon, la déformation de transformation doit posséder une forme à priori. Ces hypothèses supplémentaires sont d'une part difficiles à justifier sur un plan théorique, d'autre part elles réduisent fortement la généralité des modèles ainsi réalisés. Par exemple, aucun de ces modèles n'est capable en l'état de tenir compte de la dissymétrie constatée expérimentalement entre le comportement superélastique en traction et en compression [10]. Cela est dû en grande partie au fait que ces modèles ignorent la réalité physique du mécanisme de déformation associée à la transformation martensitique sous contrainte.

On remarque également à partir de cette étude bibliographique que le choix de l'échelle locale de description du comportement joue un rôle primordial. Cela est également le cas pour le choix de la méthode de transition d'échelle.

Il est possible de corriger en grande partie ces inconvénient en utilisant un plus grand nombre de variables internes. C'est le choix qui est effectué dans ce travail. Au lieu d'utiliser comme variables internes f (la fraction volumique de martensite) et $\langle \epsilon \rangle$ la déformation moyenne de transformation, on utilise les fractions volumiques f^n des différentes variantes de martensite. Ce choix complique quelque peu le formalisme car il faut maintenant tenir compte des conditions physiques portant sur toutes ces variables. Il faut également

déterminer les interactions entre variantes de martensite et entre les variantes et les joints de grains. On réalise ce travail dans le cadre de la thermodynamique des processus réversibles. E. Patoor a montré qu'il était possible également de modéliser l'hystérésis de la transformation et de prendre en compte le mécanisme de réorientation des variables à partir de la définition d'un pseudo potentiel de dissipation.

BIBLIOGRAPHIE:

- [1]: B. Raniecki, C. Lexcellent, K. Tanaka. Arch. Mech, 44, 3, pp 261-284
(1992)
- [2]: D. P. Koistinen et R. E. Marburger. Act Metal, Vol, 7 (1958)
- [3]: M. Fremond. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 304, pp 239, (1987),
- [4]: I. Müller, H. Xu. Acta Metal of Japan, 39, pp 263, 1991
- [5]: I. Müller, H. Xu et S. Fu. Acta Mechanica 99, pp (1-19), 1993
- [6]: F. Falk. Int. J. Engng Sci. vol 27, No. 3, PP 277-284, 1998
- [7]: E. Patoor, A. Eberhardt, M. Berveiller. Acta Metal, 11, 135, 1987
- [8]: Q. P. Sun and K. C. Hwang. J. Mech phys. Solids Vol 41, No. 1, pp 1-17
(1993)
- [9]: C. Rogerda. Thèse Université de Franche-Comté, Besançon (1993)
- [10]: P. Vacher. Thèse Université de Franche-Comté, Besançon (1991)

CHAPITRE III

Optimisation d'un potentiel thermodynamique

III.1 / INTRODUCTION

Les difficultés rencontrées dans les modèles présentés au chapitre précédent peuvent se résoudre à partir d'un choix judicieux pour l'échelle de description du mécanisme physique de transformation. On utilise une approche dérivée de l'étude de la plasticité cristalline appliquée à la transformation martensique thermoélastique [3]. Cette approche s'appuie sur une description cinématique des mécanismes physiques à l'origine du phénomène et sur la détermination d'un potentiel thermodynamique associé à la transformation. Les variables internes utilisées sont alors les fractions volumiques des différentes variantes de martensite. Les contraintes physiques s'exerçant sur ces variables sont prises en compte par l'intermédiaire de la définition d'un potentiel contraint [15,16]. La réponse macroscopique est alors obtenue en utilisant une approximation de contrainte uniforme (modèle statique). On obtient un résultat analogue à celui obtenu par F. Falk. Mais dans le cas présent on utilise des données expérimentales pour décrire la cinématique de la transformation. La résolution est effectuée par minimisation du potentiel contraint linéarisé [7,8]. On montre que cette approche permet d'obtenir directement la cinétique de transformation ainsi que l'évolution de la déformation moyenne de transformation. On applique ensuite ce modèle pour interpréter un résultat expérimental souvent attribué à tort à la variation de volume liée au changement de phase. On détermine ensuite l'allure des surfaces de charge et de déformation au cours de la transformation.

III.2 / CINÉMATIQUE DE LA TRANSFORMATION

Dans un matériau de volume V subissant une transformation de phase, la déformation totale locale $\epsilon(\mathbf{r})$ possède plusieurs origines physiques

différentes. Cette déformation se compose d'une déformation élastique $\varepsilon^e(\mathbf{r})$, d'une dilatation thermique $\varepsilon^{th}(\mathbf{r})$, d'une déformation plastique par mouvement de dislocations $\varepsilon^p(\mathbf{r})$ et de la déformation de plasticité de transformation $\varepsilon^{Tr}(\mathbf{r})$. Dans le cadre de l'approximation des petites déformations cette décomposition s'écrit:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon^e(\mathbf{r}) + \varepsilon^{th}(\mathbf{r}) + \varepsilon^p(\mathbf{r}) + \varepsilon^{Tr}(\mathbf{r}) \quad (\text{III.1})$$

Dans les alliages à mémoire de forme, la déformation plastique classique est presque nulle, la limite d'écoulement plastique de l'austénite est élevée. Dans la suite de cette étude on considérera $\varepsilon^p(\mathbf{r})$ égale à zéro. Pour ne pas alourdir les calculs et afin de concentrer toute l'attention sur le terme de plasticité de transformation on supposera que les constantes d'élasticité S_{ijkl} et le coefficient de dilatation thermique α sont identiques dans les deux phases.

L'application des lois classiques de la thermoélasticité nous donne donc:

$$\varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) = S_{ijkl} \sigma_{kl}(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in V \quad (\text{III.2})$$

$$\varepsilon_{ij}^{th}(\mathbf{r}) = \alpha \Delta T \delta_{ij}$$

On note ΔT la variation de température uniforme et $\sigma(\mathbf{r})$ l'état de contrainte local dans le matériau. La déformation globale est égale à la valeur moyenne des contributions locales:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) dV \\ &= S_{ijkl} \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) dV + \alpha \Delta T \delta_{ij} \frac{1}{V} \int_V dV + \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) dV \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

Cette propriété de moyenne est également vérifiée par le champ de contrainte macroscopique Σ :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{III.4})$$

Les relations (III.3) et (III.4) permettent de décomposer la déformation globale en partie élastique E^e , thermique E^{th} et de plasticité de transformation E^{Tr} :

$$E_{ij}^e = S_{ijkl} \Sigma_{kl} \quad (\text{III.5.a})$$

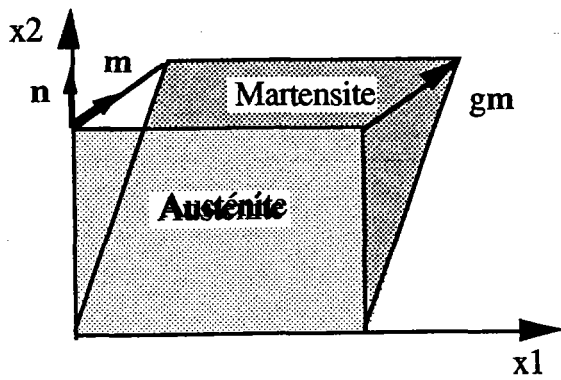
$$E_{ij}^{th} = \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (\text{III.5.b})$$

$$E_{ij}^{Tr} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) dV \quad (\text{III.5.c})$$

Dans la suite de ce travail on s'intéressera uniquement à la détermination du terme de plasticité de transformation et à celle de son évolution avec les paramètres du chargement thermomécanique (Σ et T). Dans les alliages à mémoire de forme, le fait de pouvoir isoler la contribution due à la plasticité de transformation relation (III.5.c) justifie l'appellation de plasticité de transformation pure [1]. La déformation locale de transformation est une caractéristique intrinsèque du changement de phase. Elle se compose de deux contributions [2]:

- La déformation du réseau cristallographique qui transforme le réseau initial de la phase mère en celui de la martensite. Cette déformation est appelée déformation de Bain.
- La déformation à réseau invariant qui assure l'existence d'un plan invariant (appelé plan d'habitat) séparant les deux phases au cours de la transformation. Cette déformation peut être réalisée par un glissement ou un maclage.

Les théories cristallographiques phénoménologiques usuelles [2] permettent de déterminer les caractéristiques de la déformation $\epsilon^{Tr}(\mathbf{r})$ à partir de la donnée des paramètres du réseau cristallin des deux phases. Ces théories permettent de déterminer la normale \mathbf{n} au plan d'habitat, la direction \mathbf{m} de transformation et l'amplitude \mathbf{g} du déplacement dans la direction \mathbf{m} (figure (III-1)):



n : normale au plan
d'habitat
 m : direction de
transformation
 g : déplacement dans la
direction de transformation

Figure (III-1): Représentation schématique de la formation d'une variante de martensite à partir de l'austénite. Définition des grandeurs caractéristiques

Comme le réseau cristallin de la phase mère possède un degré de symétrie élevé, la transformation d'un monocristal d'austénite peut se réaliser selon plusieurs variantes de martensite [3]. La transformation inverse de ces différentes variantes restitue l'orientation initiale du monocristal d'austénite. Les différentes variantes se caractérisent par des normales et directions de transformation différentes, se déduisant l'une de l'autre par des rotations du réseau cristallin [4]. Le déplacement g est identique pour toutes les variantes. Au cours de la formation d'une variante donnée n , un point M de coordonnées x_k dans un repère en coordonnées cartésiennes rectangulaires subit un déplacement de composante U_i tels que:

$$U_i = g x_k n_k m_i \quad (\text{III.6})$$

La déformation de transformation ϵ_{ij}^n associée à la formation de la variante n ,

s'obtient en prenant la partie symétrique du gradient de ce déplacement:

$$\epsilon_{ij}^n = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) = \frac{g}{2}(n_i m_j + n_j m_i) = g R_{ij}^n \quad (\text{III.7})$$

Où $(R_{ij})^n$ représente le tenseur d'orientation de la variante n

ϵ^n est donc une constante sur tout le volume V^n transformée selon la variante n .

Soit un monocristal d'austénite de volume initial V , dans lequel n variantes de martensite de volume V^n se sont formées. Si on note V^A le volume

d'austénite non transformé, le volume V est maintenant constitué par la réunion des différents volumes V^n et V^A :

$$V = V^A \cup (V^1 \cup V^2 \dots \cup V^n) \tag{III.8}$$

La déformation de transformation (III.5.c) s'écrit alors:

$$E_{ij}^{Tr} = \frac{1}{V} \int \epsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{V} \int_{V^A} \epsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) dV + \sum_n \frac{1}{V} \int_{V^n} \epsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) dV \tag{III.9}$$

A partir de la relation (III.7) on considère:

$$\epsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) = \sum_n \epsilon_{ij}^n \theta^n(\mathbf{r}) \tag{III.10}$$

$\theta^n(\mathbf{r})$ est une fonction indicatrice égale à l'unité quand \mathbf{r} appartient au volume V^n de martensite, $\theta^n(\mathbf{r})$ a pour valeur zéro quand \mathbf{r} est extérieur à V^n . La relation (III.9) nous donne alors:

$$E_{ij}^{Tr} = \sum_n \epsilon_{ij}^n \frac{1}{V} \int_{V^n} \theta^n(\mathbf{r}) dV = \sum_n \epsilon_{ij}^n \frac{V^n}{V} \tag{III.11}$$

On note $f^n = \frac{V^n}{V}$ la fraction volumique de la variante n dans le cristal de volume V .

$$E_{ij}^{Tr} = \sum_n \epsilon_{ij}^n f^n \tag{III.12}$$

Cette relation cinématique montre que les variables f^n permettent de caractériser l'état de déformation du matériau. Dans la suite de ce travail, on choisit donc ces paramètres pour décrire les évolutions microstructurales au cours de la transformation. Deux contraintes physiques s'exercent sur ces quantités. Tout d'abord, un volume V^n doit toujours posséder une valeur positive ou nulle. Cela donne la condition cinématique suivante:

$$f^n \geq 0 \quad \forall n \tag{III.13}$$

Il faut également vérifier que la réunion des volumes transformés V^n reste inférieure ou égale au volume unitaire initial V . Cette seconde condition cinématique s'exprime par:

$$\sum_n f^n \leq 1 \tag{III.14}$$

La description cinématique de la plasticité de transformation dans un cristal constitué par un alliage à mémoire de forme est donnée par les relations (III.7), (III.12), (III.13) et (III.14).

Pour déterminer la cinématique dans les polycristaux, on considère qu'un polycristal de volume \mathcal{V} est formé de N grains de volume \mathcal{V}^N :

$$\mathcal{V} = \cup \mathcal{V}^N \tag{III.15}$$

Chaque grain constituant le polycristal possède une orientation cristallographique propre caractérisée par la donnée des angles d'Euler définissant le repère cristallographique du grain Ω^n par rapport au repère du polycristal Ω^p figure (III-2).

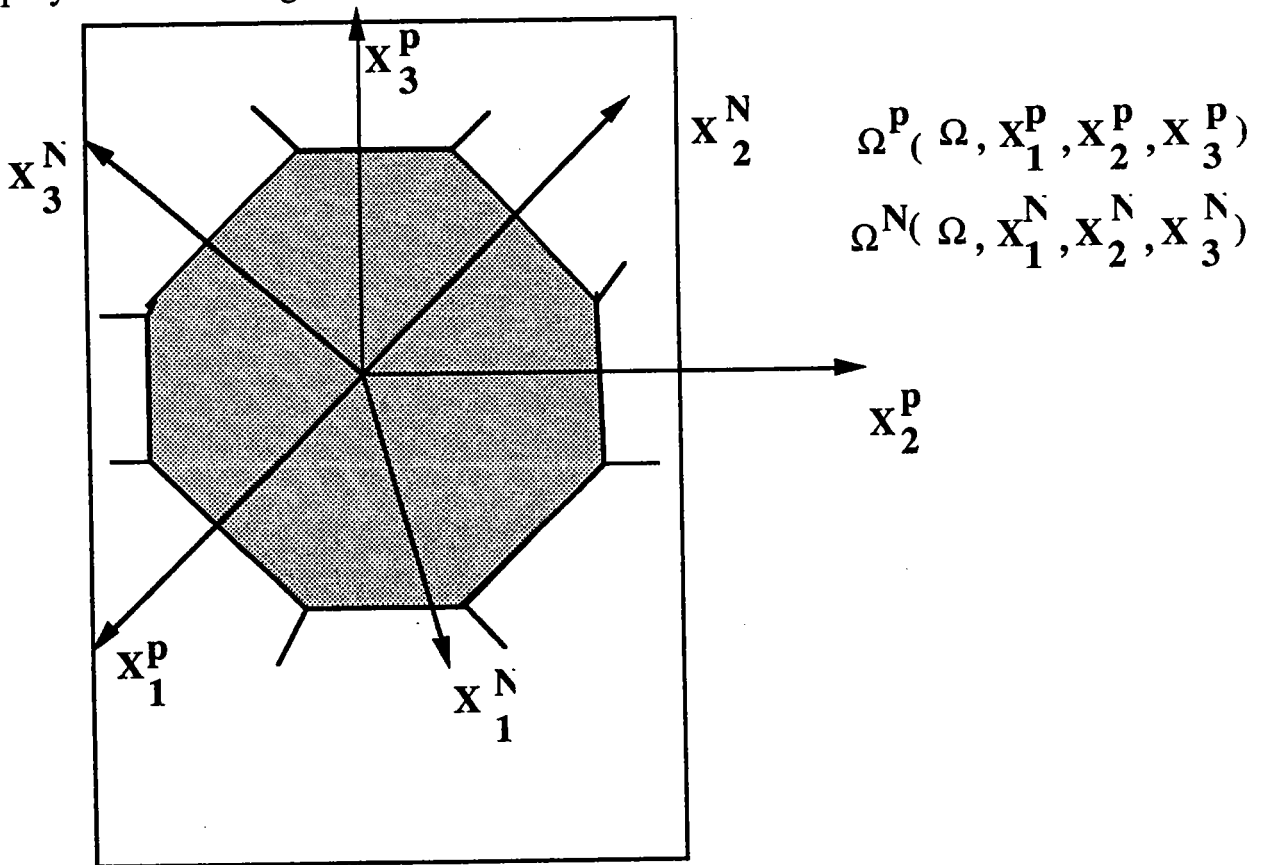


Figure (III-2): Définition du repère cristallographique Ω^n d'un grain N, par rapport au repère Ω^p du polycristal au moyen des angles d'Euler $\phi_1 \Phi \phi_2$

Le tableau (III-1) donne un exemple d'orientations cristallographiques pour un polycristal non texturé figure (III-3) constitué par 100 grains.

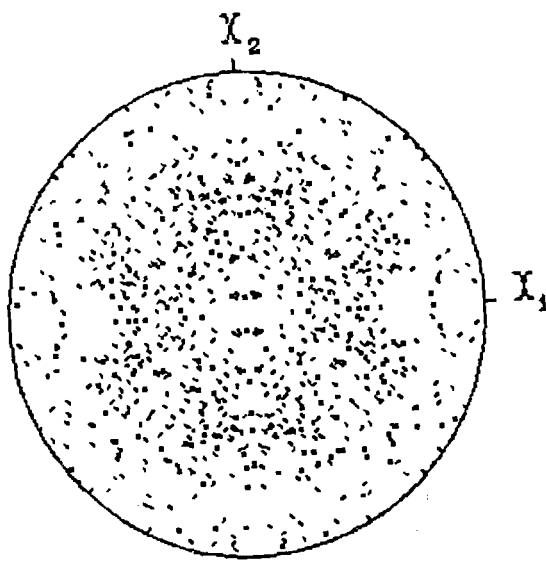


Figure (III-3): *Figure de pôle pour un matériau non texturé obtenue à partir des données du tableau(III-1)*

φ_1	Φ	φ_2	φ_1	Φ	φ_2
3.1100	73.240	335.88	109.74	69.890	207.67
354.73	88.910	229.61	81.560	59.650	86.050
230.74	44.620	49.330	128.96	77.310	319.00
33.240	44.420	275.46	357.80	28.840	269.20
250.77	68.080	322.54	321.98	82.380	156.58
341.26	83.980	34.970	259.50	49.160	64.130
197.22	67.550	235.42	228.38	84.810	205.27
255.48	71.430	228.23	47.860	12.460	78.670
43.880	85.950	49.560	226.67	86.080	131.86
140.56	67.640	181.40	202.98	89.510	310.47
193.35	31.860	59.690	238.44	35.870	27.840
232.37	23.290	294.81	8.3600	17.450	138.17
47.900	87.620	192.76	191.64	68.040	193.93
54.490	76.140	69.660	90.300	73.220	52.670
122.07	29.780	135.24	196.75	76.230	254.10
324.90	48.940	45.770	167.56	52.670	51.890
3.0300	30.070	264.76	22.030	89.380	220.84
332.08	38.880	142.41	346.87	87.070	325.88
57.910	16.630	258.28	7.2800	76.220	26.600
84.150	86.890	199.18	77.690	21.550	236.50
39.730	79.600	17.700	158.66	57.380	198.90
310.03	57.340	254.26	263.29	33.730	301.09
350.13	74.240	155.37	143.88	65.280	201.04
216.61	74.020	148.48	275.94	41.850	153.39
40.280	58.630	254.25	245.82	77.110	274.17
23.370	54.620	113.60	137.53	56.430	159.68
21.100	82.210	207.66	23.670	64.300	285.95
25.000	73.530	202.38	237.83	53.270	145.15
204.48	89.120	199.97	174.10	27.860	294.66
200.15	66.290	196.33	227.79	79.920	176.31
259.65	53.670	358.40	185.99	57.190	110.77
334.57	70.690	293.18	0.75000	67.860	146.62
335.74	27.990	277.08	102.61	17.580	136.53
13.980	46.020	156.23	134.16	60.320	138.86
17.750	69.170	353.73	89.830	49.600	347.44
38.080	31.900	8.0800	310.18	83.770	81.690
235.30	54.200	34.710	116.66	76.330	252.79
25.270	84.720	110.30	309.12	55.750	322.29
17.080	76.590	354.88	40.330	75.130	302.49
100.32	44.500	3.3800	7.0400	73.650	259.79
171.16	77.700	233.32	236.81	79.130	338.08
123.48	53.940	155.49	287.49	9.3900	230.87
277.83	72.270	165.07	207.80	74.350	231.97
0.10000	77.430	74.590	194.98	18.360	33.080
113.45	75.830	282.83	331.35	31.360	14.350
209.66	64.470	259.79	80.960	40.680	64.950
349.53	61.510	284.31	258.05	34.370	47.500
281.31	64.440	69.380	84.330	83.810	100.66
314.93	48.960	3.0700	355.52	51.190	221.93
273.65	55.600	26.210	47.100	46.350	170.92

Tableau (III-1): Orientation d'un matériau non texturé au moyen des angles d'Euler $\varphi_1 \Phi \varphi_2$

On suppose que les constantes d'élasticité et le coefficient de dilatation sont identiques dans tous les grains et que la température T est uniforme dans le matériau. Avec ces hypothèses, les relations (III.5) restent vérifiées. La déformation de transformation du polycristal s'écrit:

$$E_{ij}^{Tr} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} \epsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) d\mathcal{V} = \sum_N \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}^N} \epsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) d\mathcal{V} \quad (\text{III.16})$$

On pose ϵ^N la déformation de transformation dans le grain N définie dans le repère Ω^P :

$$\epsilon_{ij}^N = \frac{1}{\mathcal{V}^N} \int_{\mathcal{V}^N} \epsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) d\mathcal{V} \quad (\text{III.17})$$

(III.16) devient alors:

$$E_{ij}^{Tr} = \sum_N \epsilon_{ij}^N \frac{\mathcal{V}^N}{\mathcal{V}} = \sum_N \epsilon_{ij}^N F^N \quad (\text{III.18})$$

Où F^N est une constante qui représente la fraction volumique du grain N . En utilisant la relation (III.12) déterminée pour un cristal unique on obtient:

$$\epsilon_{ij}^N = \sum_n (\epsilon_{ij}^n)_N f_N^n \quad (\text{III.19})$$

Où ϵ_N^n représente la déformation de transformation et f_N^n la fraction volumique associées à la formation de la variante n dans le grain N . ϵ_N^n est exprimée dans le repère R^P . La relation (III.18) devient:

$$E_{ij}^{Tr} = \sum_N \left[\sum_n (\epsilon_{ij}^n)_N f_N^n \right] F^N \quad (\text{III.20})$$

L'état microstructural du matériau est maintenant défini par la donnée des variables f_N^n . Ces variables doivent respecter les conditions (III.13) et (III.14)

dans chaque grain du polycristal.

$$f_N^n \geq 0 \quad \forall n \text{ et } \forall N \quad (\text{III.21})$$

$$\sum_n f_N^n \leq 1 \quad \forall N \quad (\text{III.22})$$

Les relations (III.20), (III.21) et (III.22) définissent la cinématique de la plasticité de transformation dans les alliages à mémoire de forme. Dans ces relations les ϵ_N^n dépendent de la nature cristallographique de la transformation et de l'orientation cristallographique du grain N . Ces valeurs peuvent être

déterminées expérimentalement. Les paramètres f_N^n caractérisent l'état interne du matériau, ils sont fonctions de l'histoire thermomécanique du chargement. Pour obtenir la réponse du matériau à une sollicitation donnée il faut maintenant déterminer les forces thermodynamiques agissant sur les variables internes f_N^n .

III 3 / POTENTIEL THERMODYNAMIQUE ASSOCIE A LA TRANSFORMATION

Les comportements observés dans les alliages à mémoire de forme sont associés à une transformation de phase de l'état solide: la transformation martensitique. Cette transformation du premier ordre s'accompagne d'une forte déformation déviatorique et d'une variation de volume. Dans les alliages à mémoire de forme la transformation présente un caractère thermoélastique: le matériau se transforme en passant par une succession d'états d'équilibres. Les phénomènes de burst peuvent être négligés dans ce cas :

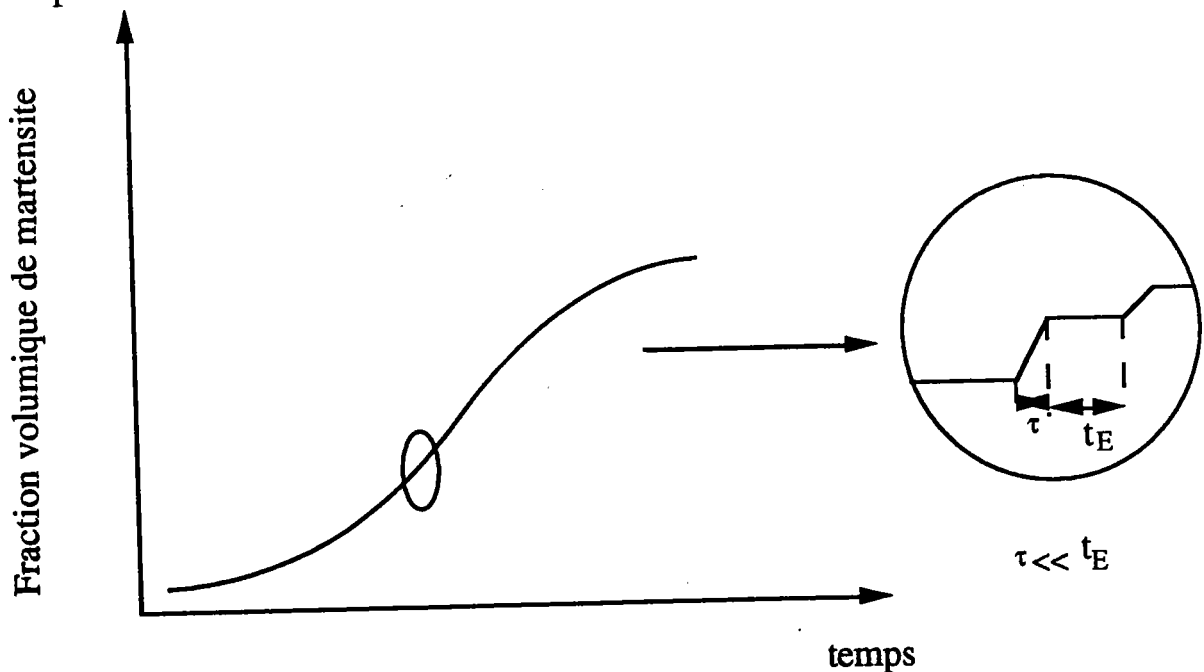


Figure (III-4): Caractère thermoélastique de la transformation martensitique dans les A.M.F. Les temps τ pendant lesquels le système est hors équilibre sont négligeables devant les temps t_E de maintien dans un état d'équilibre

La durée des transitions entre deux états d'équilibres successifs est négligeable devant le temps passé par le système dans un état d'équilibre donné.

La définition du potentiel thermodynamique associé à cette transformation permet dans ce cas de déterminer les équations d'états pour ce type de comportement [5]. Dans une transformation de phase le potentiel thermodynamique est constitué d'un terme d'énergie libre chimique ΔG_{ch} , d'un terme d'énergie libre interfaciale associée à la création d'interfaces dans le matériau au cours de la transformation.

$$\Phi(E, T, y_k) = \Delta G_{ch} + W_{mec} + W_{int} \quad (III.23)$$

Cette énergie dépend des variables de contrôle (E , la déformation totale et T la température) et des variables internes y_k . L'étude cinématique a montré que les fractions volumiques des différentes variantes de martensite peuvent décrire correctement l'état interne du matériau. On choisit donc ces paramètres comme variables internes. Le potentiel thermodynamique associé à la transformation d'un polycristal formé de I grains sera donc une fonction de E , T et des f_I^n . Dans ce travail on choisit la contrainte appliquée Σ comme variable de contrôle. Cela revient à utiliser comme potentiel l'énergie complémentaire Ψ à la place de l'énergie libre d'Helmoltz Φ :

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, f_I^n) = -[\Phi(E_{ij}, T, f_I^n) - \Sigma_{ij} E_{ij}] \quad (III.24)$$

Dans les relations (III.23) et (III.24) la variation de l'énergie libre chimique ΔG_{ch} associée au changement de phase peut être approximée au voisinage de l'équilibre par une fonction linéaire de la température. Par unité de volume de phase mère cette énergie s'exprime comme:

$$\Delta G_{ch} = B(T - T_0)f \quad (III.25)$$

Avec T_0 la température de transformation à l'équilibre définie pour un état libre de contrainte ($\Sigma = 0$). Cette température est une caractéristique de la transformation. B est un coefficient qui dépend de la nature de la transformation et du matériau étudié. Dans la relation (III.25) ΔG_{ch} est

également une fonction linéaire de la fraction volumique totale de la phase formée f . f est relié aux variables internes f_I^n par la relation suivante:

$$f = \sum_I \left[\sum_n f_I^n \right] F^I \quad (\text{III.26})$$

L'énergie interfaciale W_{int} est associée à la création de multiples interfaces (Martensite-Austénite et Martensite / Martensite) dans le matériau au cours de la transformation. La forme allongée observée par les variantes de martensite permet de négliger l'énergie d'interface associée à une telle configuration devant l'énergie mécanique. Elle sera donc négligée dans la suite de cette étude. Cette hypothèse revient à ignorer la phase de nucléation et à ne considérer que la propagation de la transformation. L'énergie mécanique W_{mec} est constituée de termes d'origines physiques différentes d'une part l'énergie élastique de déformation causée par le champ de contrainte appliquée définie par:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{ij} E_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} \quad (\text{III.27})$$

d'autre part l'énergie élastique d'interaction W_B dues aux contraintes internes associées à la transformation. En faisant l'hypothèse de la partition des déformations élastiques et de transformation cette énergie se définit par (voir chapitre Iv):

$$W_B = \frac{1}{2V} \int \sigma_{ij}(r) \epsilon_{ij}^e(r) dv = - \frac{1}{2V} \int \sigma_{ij}(r) \epsilon_{ij}^{\text{Tr}}(r) dv \quad (\text{III.28})$$

Où $\sigma(r)$ est la contrainte interne au point r et $\epsilon^e(r)$, $\epsilon^{\text{Tr}}(r)$ les déformations élastique et de transformation. Ce terme énergie est quadratique en f_I^n . $W_B(f_I^n)$ prend en compte les incompatibilités intragranulaires qui correspondent essentiellement aux interactions entre les variantes de martensite et les incompatibilités intragranulaires associées aux interactions entre les grains. L'étude détaillée de l'énergie d'interaction est réalisée au chapitre IV.

Avec les définitions (III.25), (III.26), (III.27) et (III.28) l'énergie libre complémentaire (III.24) s'écrit finalement:

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, f_I^n) = -B(T - T_0)f + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ij} E_{ij}^{Tr} - W_B(f_I^n) \quad (III.29)$$

Le terme $\Sigma_{ij} E_{ij}^{Tr}$ représente le terme d'énergie d'interaction avec le champ de contrainte appliqué. Cette contribution d'énergie provient de la définition (III.24) de l'énergie libre complémentaire. L'énergie définie par la relation (III.29) décrit l'état du système austénite-martensite. En l'absence de processus dissipatif, l'optimisation de cette fonctionnelle permet de définir l'état d'équilibre d'un mélange austénite-martensite soumis à un chargement thermomécanique (Σ, T) donné.

III 4 / DETERMINATION DU COMPORTEMENT GLOBAL EN SUPERTHERMOELASTICITE

Dans ce chapitre, le comportement globale associé à la formation sous contrainte de la martensite dans les alliages à mémoire de forme, est réalisé par une approche variationnelle. Sous réserve de négliger les aspects dissipatifs, l'optimisation de l'énergie libre complémentaire (III.29) détermine les conditions d'équilibre pour la transformation sous un chargement donné (Σ, T) . Dans ce potentiel, l'état interne du matériau est décrit pour les variables f_I^n . Ces variables sont des grandeurs physiques soumises aux contraintes cinématiques (III.21) et (III.22) déterminées au paragraphe III 2.

$$f_N^n \geq 0 \quad \forall n \text{ et } \forall I$$

$$\sum_n f_N^n \leq 1 \quad \forall I$$

Ces contraintes, au nombre de $[I(n+1)]$ peuvent s'écrire sous la forme:

$$A_i(f_I^n) \leq B_i \quad i \in [1, I(n+1)] \quad (III.30)$$

Pour i compris entre 1 et n modulo I , (III.30) est équivalente à (III.21):

$$A_i(f_I^n) = -f_I^n \leq B_i = 0 \quad (III.31)$$

Pour i égal à $(n+1)$ modulo I , (III.30) est équivalente à (III.22)

$$A_i(f_I^n) = \sum_n f_I^n \leq B_i = 1 \quad (\text{III.32})$$

Le problème à résoudre donc à optimiser une fonctionnelle Ψ quadratique en f_I^n sous une contrainte linéaire d'inégalité figure (III-5):

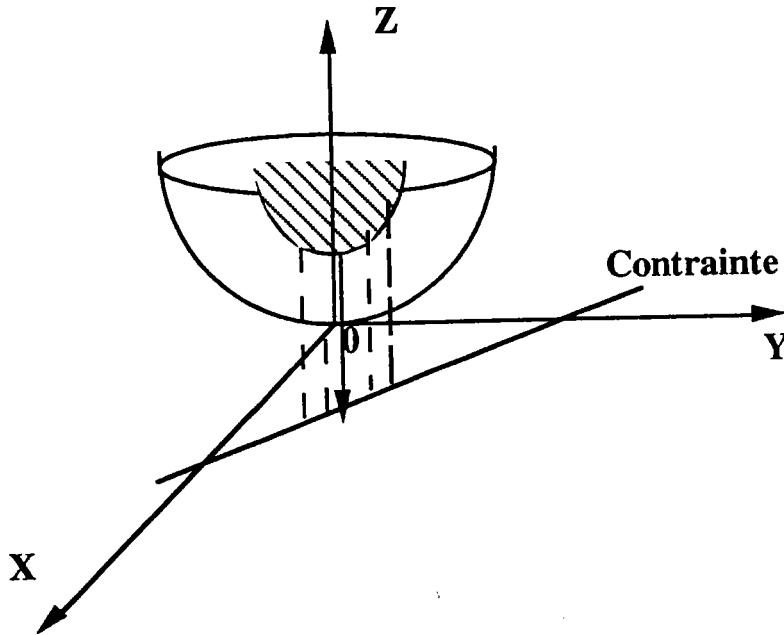


Figure (III-5): Principe de l'optimisation sous contrainte

L'utilisation des conditions d'optimisation de Kuhn et Tucker [6] permet de résoudre ce type de problème. A partir du potentiel (III.29) et de la condition (III.30) on définit un potentiel contraint $L(\Sigma, T, f_I^n)$ appelé Lagrangien.

$$L(\Sigma, T, f_I^n) = \Psi(\Sigma, T, f_I^n) - \sum_{i=0}^{I(n+1)} \lambda_i [A_i(f_I^n) - B_i] \quad (\text{III.33})$$

λ_i est analogue à un multiplicateur de Lagrange. Cette relation vérifie la propriété suivante:

$$\lambda_i [A_i(f_I^n) - B_i] = 0 \quad (\text{III.34})$$

Deux cas sont possibles. Soit l'inégalité (III.30) est strictement vérifiée dans ce cas (III.34) impose à λ_i d'être égal à zéro. Soit la contrainte agit $A_i(f_I^n) = B_i$ dans ce cas la relation (III.34) est automatiquement vérifiée, λ_i est indéterminé mais à valeur positive

$$\lambda_i \geq 0$$

(III.35)

Les relations (III.33), (III.34) et (III.35) permettent de déterminer pour un chargement donné (Σ, T) l'état à l'équilibre du système austénite-martensite. Dans cette étude, on effectue cette optimisation en limitant le potentiel (III.33) au premier ordre en f_I^n . Cette approximation revient à négliger le terme de l'énergie d'interaction dans le potentiel thermodynamique. Ceci équivaut à faire l'hypothèse d'un champ de contrainte uniforme dans le matériau (modèle de type statique), on a alors $\sigma(r) = \Sigma$. Avec cette hypothèse, et avec les relations (III.20) et (III.26) le potentiel (III.29) s'écrit maintenant:

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, f_I^n) = -B(T - T_0) \sum_I \left[\sum_n f_I^n \right] F^I + \sum_{ij} \sum_I \left[\sum_n (\epsilon_{ij})_I^n f_I^n \right] F^I + \frac{1}{2} \sum_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} \quad (III.36)$$

L'optimisation de cette fonctionnelle linéaire en présence des contraintes (III.31) détermine une approximation du comportement superthermique. Une résolution numérique de type simplexe a été réalisée pour résoudre ce problème. L'organigramme de résolution est donné en annexe [A-III]. La méthode de résolution consiste à considérer chaque grain d'une manière indépendante, caractérisée par son orientation cristallographique. Le potentiel Ψ est maintenant égal à la somme des énergies libres complémentaires Ψ^I définie pour chacun des grains.

$$\Psi(\Sigma, T, f_I^n) = \sum_I \Psi^I(\Sigma, T, f_I^n) F^I \quad (III.37)$$

avec:

$$\Psi^I(\Sigma_{ij}, T, f_I^n) = -B(T - T_0) \sum_n f_I^n + \sum_{ij} \sum_n \epsilon_{ij}^n f_I^n + \frac{1}{2} \sum_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} \quad (III.38)$$

Où ϵ^n doit tenir compte de l'orientation du grain considéré. La condition cinématique (III.32) s'exprime alors de façon analogue à (III.13) et (III.14):

$$f_I^n \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_n f_I^n \leq 1 \quad \text{pour chaque grain } I$$

Soit 25 conditions à vérifier par grain. Dans l'étude réalisée on néglige les effets de la dissipation sur le comportement. Cela revient à confondre T_0 avec la température de transformation M_s

III.5 / RESULTATS OBTENUS

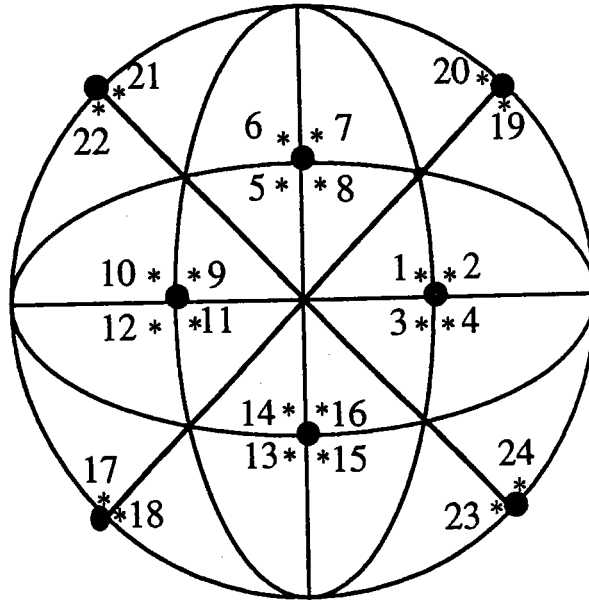
III.5 1 / PARAMETRES UTILISES

Nous appliquons la formulation proposée pour déterminer le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme de type CuZnAl. Dans cette classe de matériau, la martensite peut se former selon 24 variantes cristallographiquement indépendantes. Ces variantes forment 6 groupes autoaccommodants (Tableau IV-3). Le choix de cet alliage pour tester la modélisation développée comporte plusieurs avantages:

- La variation de volume due à la transformation est négligeable
- Ces matériaux ne présentent pas de couplage entre la plasticité classique et la plasticité de transformation.
- Les normales au plan d'habitats et les directions de transformation de type (2,11,12) sont connues et représentées sur la figure (III-6)
- Il existe de nombreux résultats expérimentaux sur leur comportement

Les calculs sont effectués en considérant un polycristal non texturé de 100 grains de forme sphérique et de fraction volumique identique $F^I = \frac{1}{100}$ $\forall I \in [0,100]$. Les orientations de ces grains (tableau III.1) sont représentées sur la figure (III.2). Elles sont choisies de façon à représenter un matériau sans texture initiale. On choisit une température M_s de transformation égale à 273 K. Le coefficient de proportionnalité B est choisi à partir des résultats expérimentaux obtenus sur des monocristaux [3] de CuZnAl. Pour ce type de matériau on mesure $\frac{d\Sigma}{dT} = \frac{B}{\epsilon^n} = 2 \text{ MPaK}^{-1}$ où n désigne la

variante la mieux orientée par rapport au champ Σ_{ij} . On obtient $B = 0,23$ MPaK⁻¹ pour un volume unitaire d'austénite.



* variantes (2 11 12) ● pôles (0 1 1)

figure (III-6): Répartition des 24 variantes (2 11 12) autour des pôles (0 1 1) dans les alliages de type CuZnAl

III 5 2 / RESULTATS EN TRACTION UNIAXIALE

Pour un mode de chargement donné à température constante T , on retrouve l'influence de l'orientation cristalline déterminée par Bensalah [7], figure (III-7). On observe que pour chaque grain d'orientation $\varphi_1, \varphi, \varphi_2$ donnée correspond une contrainte critique Σ_c de début de transformation et une déformation ϵ_{\max} de transformation particulière. Ces quantités varient de 1 à 3 en fonction de l'orientation cristallographique du grain. Connaissant l'orientation des grains constituant le polycristal, on détermine à l'aide de la relation (III.30) les variantes actives et leurs fractions volumiques respectives. La déformation macroscopique de transformation correspondante est alors

obtenue en utilisant la relation cinématique (III.20). Ainsi, alors que dans chaque grain la transformation se produit à contrainte constante, les contraintes macroscopiques de début et de fin de transformation sont différentes dans la réponse du polycristal figure (III-8).

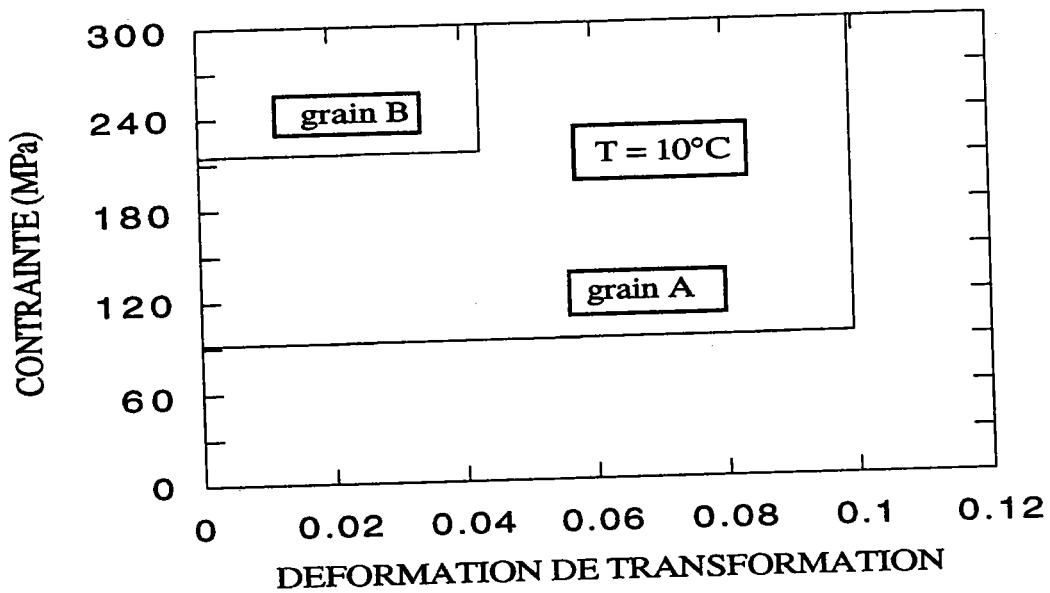


Figure (III-7): Influence de l'orientation cristallographique sur le comportement des grains à température constante. [8] :

grain A: $\varphi_1 = 3.11^\circ$	grain B: $\varphi_1 = 355.52^\circ$
$\varphi = 73.04^\circ$	$\varphi = 51.19^\circ$
$\varphi_2 = 335.88^\circ$	$\varphi_2 = 221.93^\circ$

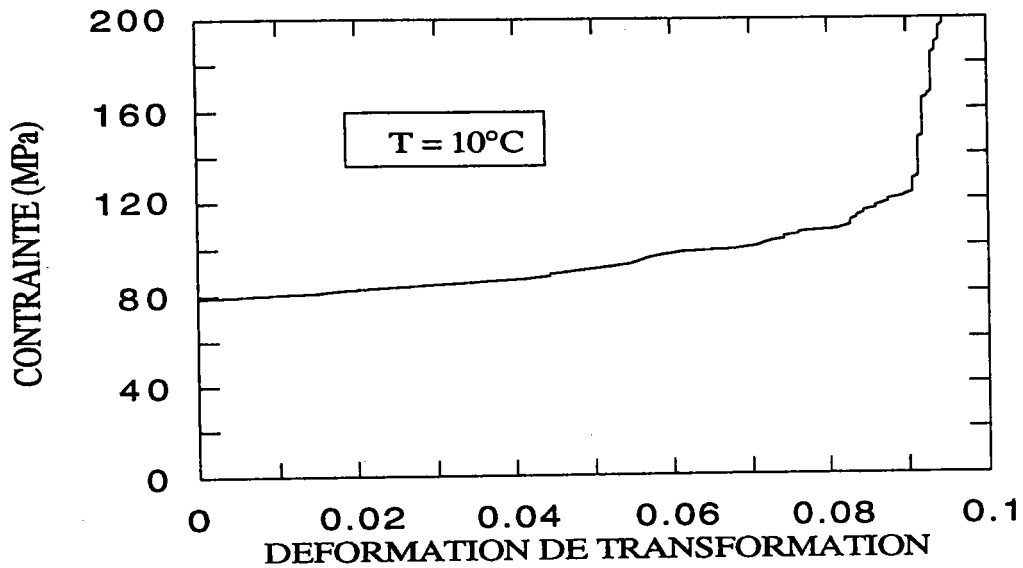


Figure (III-8): *Comportement superélastique obtenu pour un matériau polycristallin en traction uniaxiale ($N=100$ grains). Mise en évidence de l'influence de la désorientation relative des grains sur le comportement global [8].*

L'approche micromécanique utilisée présente l'avantage de fournir des informations sur la cinétique de transformation sans introduire d'hypothèse supplémentaire figure (III-9)

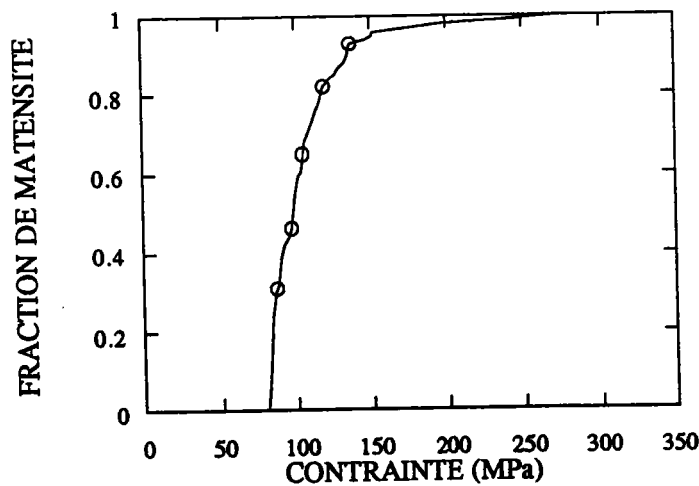


Figure (III-9): *Cinétique de transformation déterminée par minimisation du potentiel (III.36)*

De la même façon on détermine l'évolution de la déformation moyenne de transformation $\bar{\epsilon}^T$.

La déformation moyenne de transformation dans la martensite se définit comme:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{V_n} \int_{V_n} \epsilon^{Tr} dV \quad (\text{III.39})$$

On établit que la déformation moyenne de transformation $\bar{\epsilon}^T$ est une fonction de la fraction volumique de martensite. Sa valeur est maximale au début de la transformation, elle est alors égale à $\frac{g}{2}$, valeur associée à la formation des variantes les plus favorablement orientées par rapport à la contrainte appliquée, puis elle décroît au fur et à mesure que les orientations moins favorables sont activées figure (III-10)

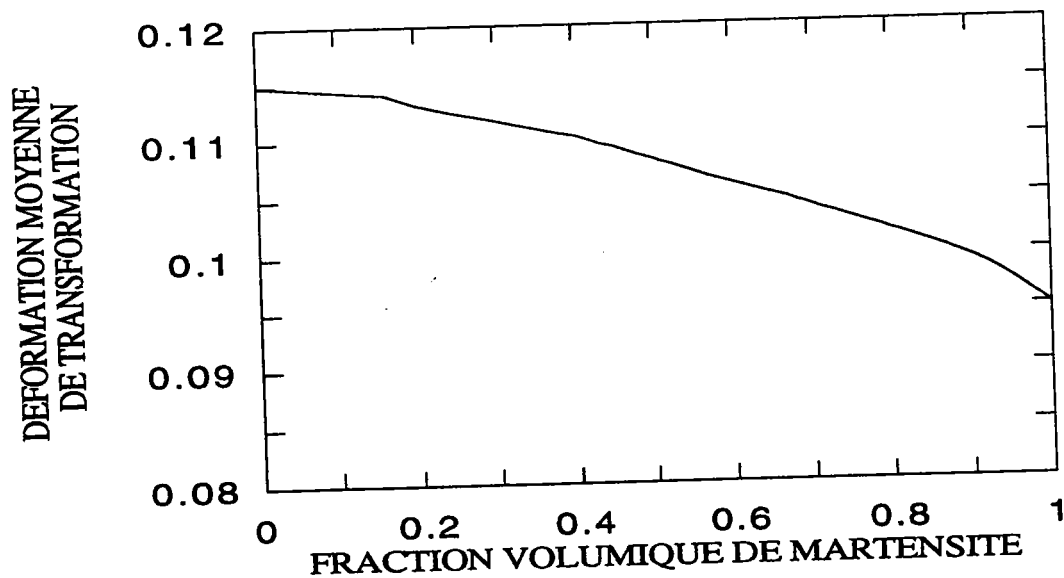


Figure (III-10): Influence de la fraction volumique de martensite sur la déformation moyenne de transformation en traction uniaxiale. [8]

III.5.3 / DISSYMETRIE DU COMPORTEMENT EN TRACTION ET COMPRESSION

De nombreux auteurs ont observé que le comportement des alliages à mémoire de forme présente une dissymétrie importante en traction et en compression (Vacher 1991) [9]. Cependant il est établi expérimentalement que le comportement est symétrique pour le cisaillement (Manach 1993) [10].

L'origine de la dissymétrie en traction et compression est souvent attribuée à la variation de volume engendrée par la transformation de phase. Par conséquent, l'introduction des effets de la pression hydrostatique dans le critère de transformation permettrait de tenir compte de cette observation dans les modélisations. Cependant la variation de volume est très faible pour les transformations martensitiques thermoélastiques et l'effet d'une pression hydrostatique sur le seuil de transformation est presque négligeable (Patel et al.) [11]. La modélisation micromécanique utilisée permet d'expliquer cette contradiction. En effet, les courbes de traction et de compression simulées à l'aide de ce modèle présentent une dissymétrie très nette entre ces deux modes de sollicitation figure (III-11). Ce résultat est obtenu sans hypothèse supplémentaire [14].

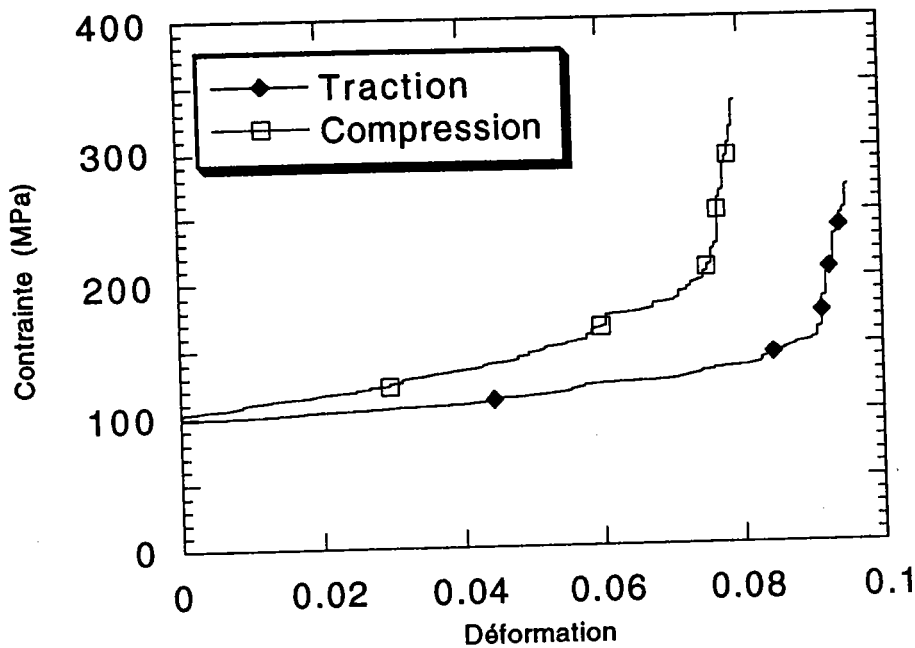


Figure (III-6): Différence de comportement entre la traction et la compression obtenu à l'aide du modèle

Pour déterminer si la variation de volume accompagnant la transformation est à l'origine responsable de cette différence de comportement, on simule une transformation isovolumique. Ceci se réalise en projetant la direction de transformation (\mathbf{m}) sur le plan d'habitat de normale (\mathbf{n}). On obtient ainsi une nouvelle direction de transformation (\mathbf{m}')

$$[m'_1 = 0,1634 \quad m'_2 = 0,7435 \quad m'_3 = 0,6487.]$$

La déformation de transformation ε' déterminée de cette façon est isovolumique. ($\varepsilon'_{kk} = 0$)

$$(\varepsilon'_{ij})^n = \frac{\mathbf{g}}{2} (n_i m'_j + n_j m'_i) \quad (\text{III.40})$$

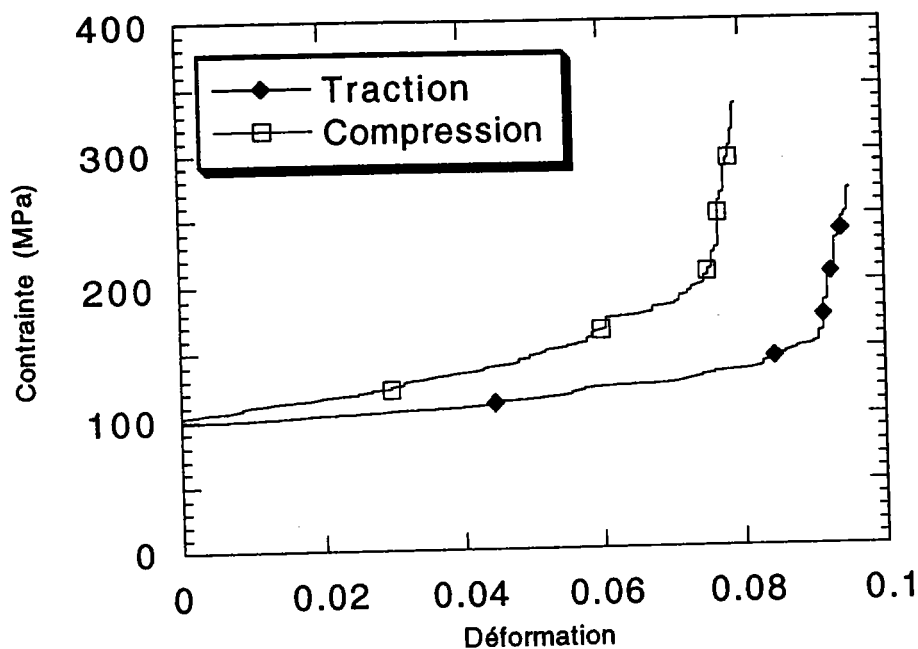


Figure (III-12): Résultats obtenus pour la traction et la compression en simulant une transformation isovolumique. La dissymétrie de comportement entre ces deux modes de chargement est conservée

Les résultats obtenus de cette façon conservent une dissymétrie très nette entre les deux modes de sollicitation figure (III-12). Ce résultat montre que l'explication physique du phénomène est de nature différente. Les normales au plan d'habitat et les directions de transformation possèdent des directions cristallographiques de type $[2\ 11\ 12]$. De telles directions sont regroupées autour des pôles cristallographiques $[0\ 1\ 1]$ (Saburi 1980) [12] figure (III-6). En approximant les directions $[2\ 11\ 12]$ par les directions $[0\ 1\ 1]$ (Falk 1989) [13] on réduit le nombre de variantes et on augmente la symétrie de la transformation. Les résultats obtenus en utilisant des normales et des directions de transformation de type $[0\ 1\ 1]$ montrent maintenant une totale symétrie du comportement polycristallin par rapport à la direction de sollicitation figure (III-13).

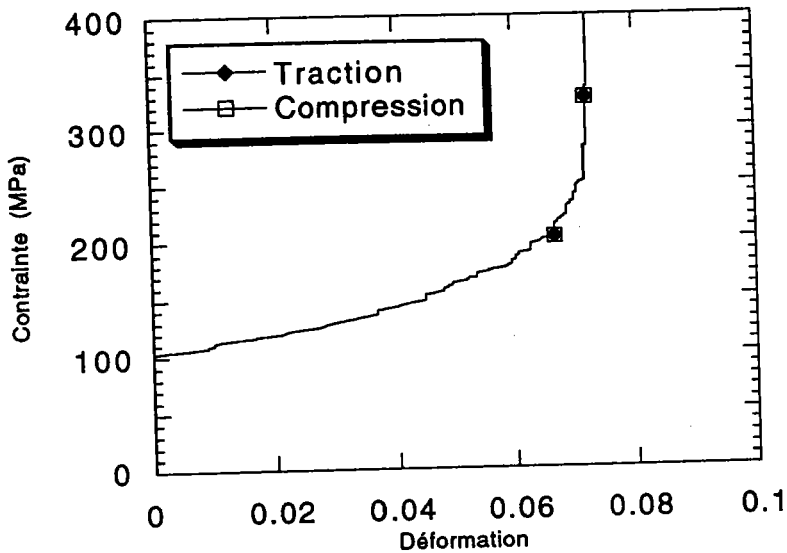


Figure (III-13): réponse identique à la traction et à la compression pour des variantes de type [0 1 1]

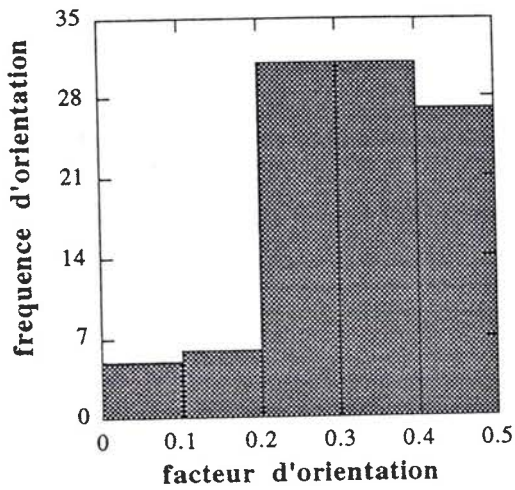
On établit de cette façon que l'origine du phénomène réside dans le faible degré de symétrie de la phase martensitique. En comparant les différents résultats obtenus sur les figures (III-11 et III-13) on observe que l'approximation [0 1 1] conduit à un durcissement du matériau et à une réduction de déformation de transformation. L'explication est également d'origine cristallographique. Pour les variantes de type [0 1 1] le facteur de Schmidt R correspondant à une direction de traction d'axe [0 1 1] est égal à zéro. Il est alors impossible d'induire la transformation sous contrainte dans cette direction. Dans un polycristal, il est normal que plusieurs grains soient proches de telles directions. Ces grains contribueront alors faiblement à la déformation de transformation et cela pour une contrainte élevée.

$$\epsilon^{\text{Tr}} = g R$$

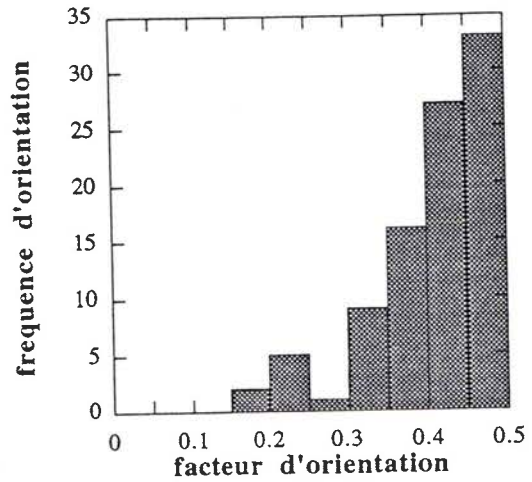
$$\tau_0 = R \sigma_c$$

Cette analyse est confortée par l'observation de la répartition du facteur de Schmidt maximal dans chaque grain. Pour les variantes de type [0 1 1] la moitié des grains présentent des facteurs de Schmidt compris entre 0 et 0,3

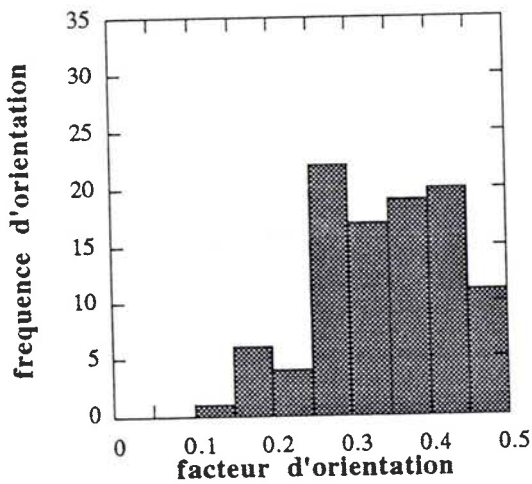
figure (III-14). La répartition est identique pour la traction et la compression. Pour les variantes réelles (de type [2 11 12]) cette proportion touche à 10% en traction et aucun facteur de Schmidt n'est inférieur à 0,147 figure (III-15). Par contre une inversion de sens de la sollicitation a des effets très importants sur cette répartition figure (III-17) confirmant le rôle central joué par la faible symétrie de phase martensitique dans ce phénomène. Les variantes formées en compression possèdent des orientations cristallographiques différentes de celles formées en traction. La modification des directions de transformation conduisent à une transformation isovolumique (équation III.40) n'apporte aucune modification sensible de cette répartition figure (III-17). Cela est en accord avec la faible importance de la variation de volume dans les alliages à mémoire de forme. On montre que le nombre d'orientations cristallines pris en compte n'influe pas sur le résultat obtenu. Pour des polycristaux sans texture initiale formés de 1000 grains puis de 10000 grains, les répartitions obtenues figures (III-18, III-19 et III-20) possèdent la même allure générale que celle déterminée avec 100 grains. On vérifie également que quelle que soit la direction de traction dans le plan principal des contraintes, la répartition des orientations est la même, l'isotropie initiale du matériau est donc vérifiée figures (III-21 et III-22).



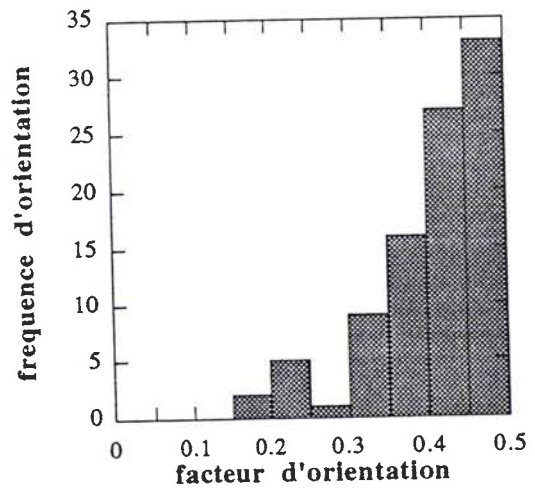
Figure(III-14): Répartition du facteur d'orientation en traction et en compression pour des variantes [0 1 1]



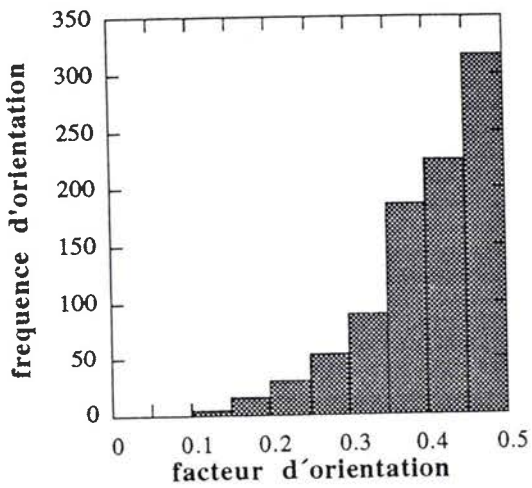
Figure(III-15): Répartition du facteur d'orientation en traction pour des variantes [2 11 12]



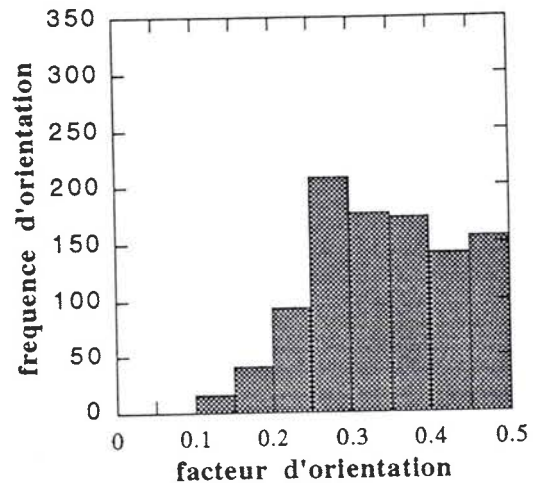
Figure(III-16): Répartition du facteur d'orientation en compression pour des variantes [2 11 12]



Figure(III-17): Répartition du facteur d'orientation en traction pour des variantes [2 11 12] isovolumique



Figure(III-18): Répartition du facteur d'orientation en traction pour 1000 grains (variantes de type [2 11 12])



Figure(III-19): Répartition du facteur d'orientation en compression pour 1000 grains (variantes de type [2 11 12])

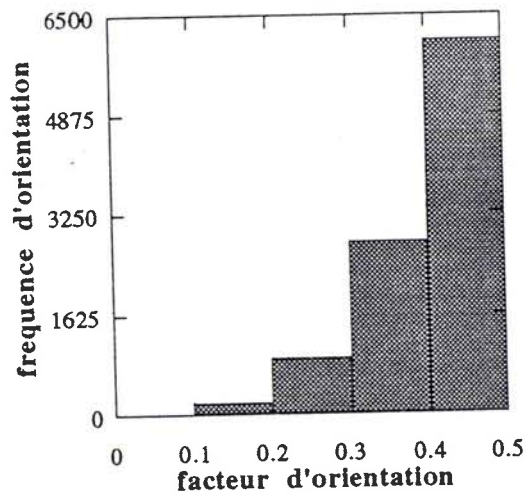
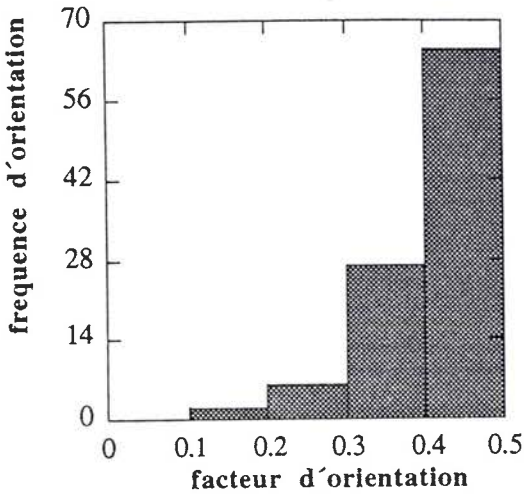
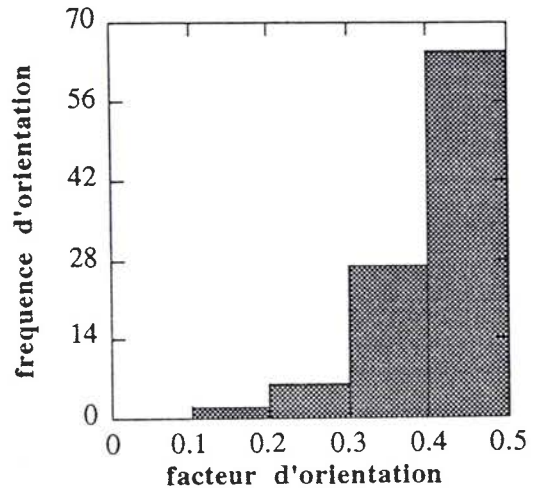


Figure (III-20): Répartition du facteur d'orientation pour 10000 grains (variantes de type [2 11 12])



Figure(III-21): Influence des directions de chargement en traction. Chargement à 90° (variantes de type [2 11 12])



Figure(III-22): Influence des directions de chargement en traction. Chargement à 280° variantes de type [2 11 12])

Le comportement symétrique établie expérimentalement en cisaillement [10] est également obtenu à partir de ce modèle micromécanique figure (III-23). La répartition des facteurs d'orientation est identique quelque soit la direction de cisaillement figures (III-24 et III-25)

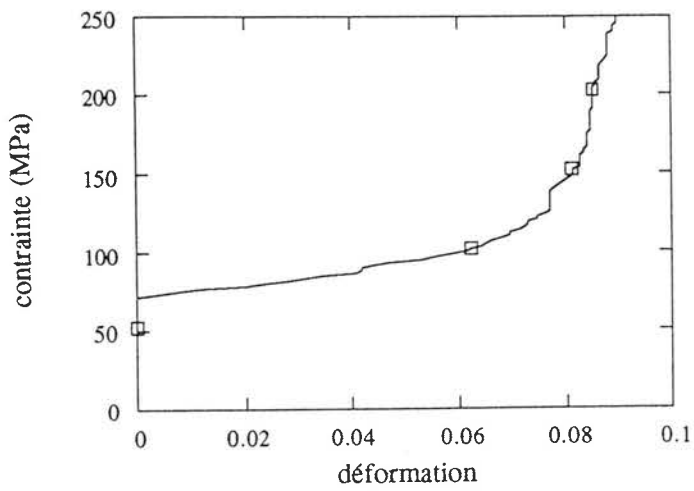
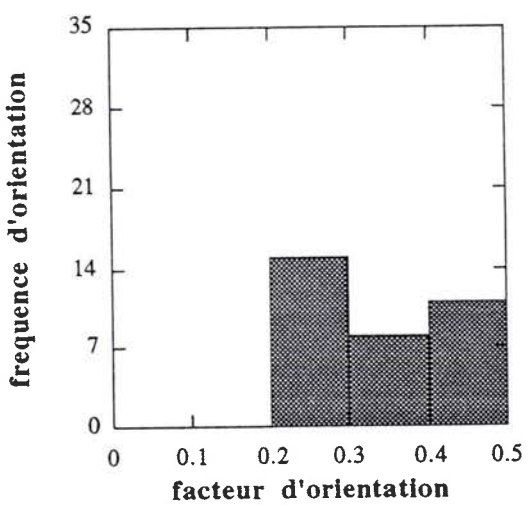
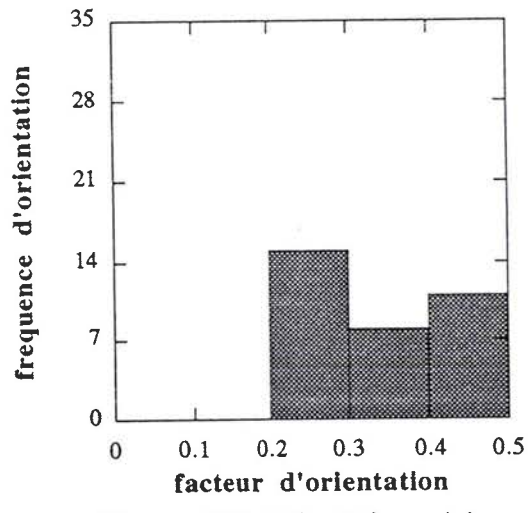


Figure (III-23): Comportement obtenu en cisaillement par minimisation du potentiel (III.36)



Figure(III-24): Répartition du facteur d'orientation en traction pour un cisaillement positif (variantes de type [2 11 12])



Figure(III-25): Répartition du facteur d'orientation en traction pour un cisaillement négatif (variantes de type [2 11 12])

III 6 / SURFACES DE CHARGE ET DE DEFORMATION AU COURS DE LA TRANSFORMATION

Le modèle micromécanique présenté dans ce chapitre est défini à partir d'une description tridimensionnelle de la répartition des orientations cristallographiques des grains constituant le polycristal et de la cristallographie de la transformation. Il peut donc être utilisé pour décrire un trajet de chargement tridimensionnel. On utilise donc ce modèle pour déterminer des surfaces de charge (ou surface de transformation dans l'espace des contraintes). Pour observer l'évolution de la surface de charge en cours de transformation on effectue différents chargements dans le plan principal des contraintes $\sigma_1 \sigma_2$. Cette détermination est tout d'abord effectuée en décrivant le mécanisme de transformation à l'aide de normales et de directions de transformation de type $[0\ 1\ 1]$. On observe tout d'abord une évolution classique de la surface, initialement de type Tresca, puis évoluant vers une ellipse de Mises quand la fraction de martensite augmente figure (III-26).

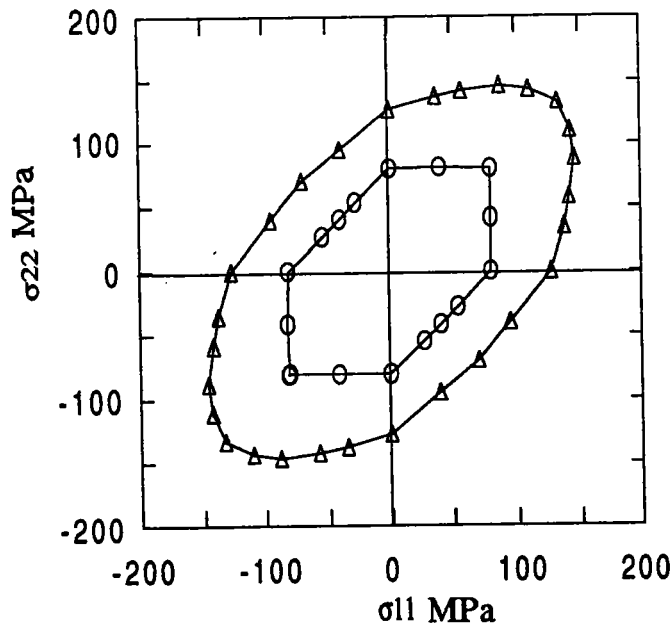


Figure (III-26): Surfaces de chargement correspondants à $f = 0$ et $f = 50\%$ de martensite. Détermination avec des variantes de type $[0\ 1\ 1]$

On compare ensuite ces résultats avec ceux obtenus en utilisant les valeurs expérimentales de type [2 11 12] pour les normales au plan d'habitat et les directions de transformation de type CuZnAl. On observe que pour une fraction volumique identique, la surface de chargement est fortement déformée figure (III-27). Cependant la première bissectrice du plan $\sigma_1\sigma_2$ reste axe de symétrie. Une telle symétrie est établie expérimentalement pour le cisaillement [9]. On confirme également, en utilisant comme données de base la direction de transformation isovolumique (relation III. 40) que la variation volumique n'est qu'un effet de second ordre pour les transformations thermoélastiques

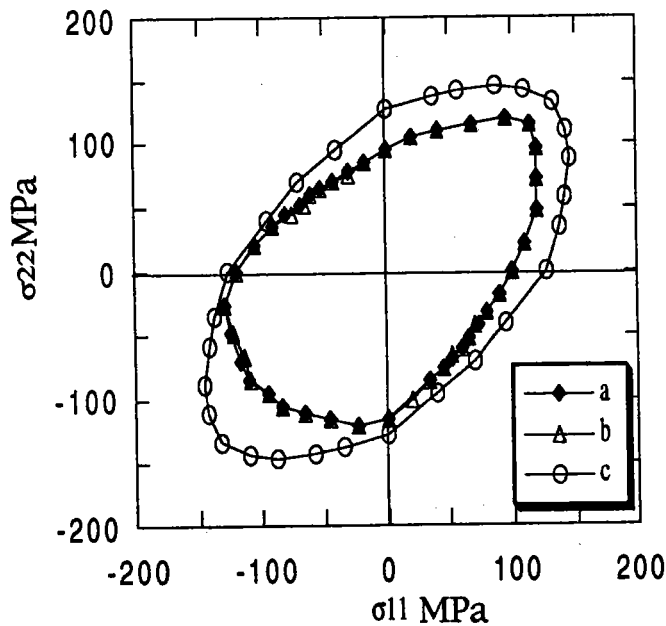
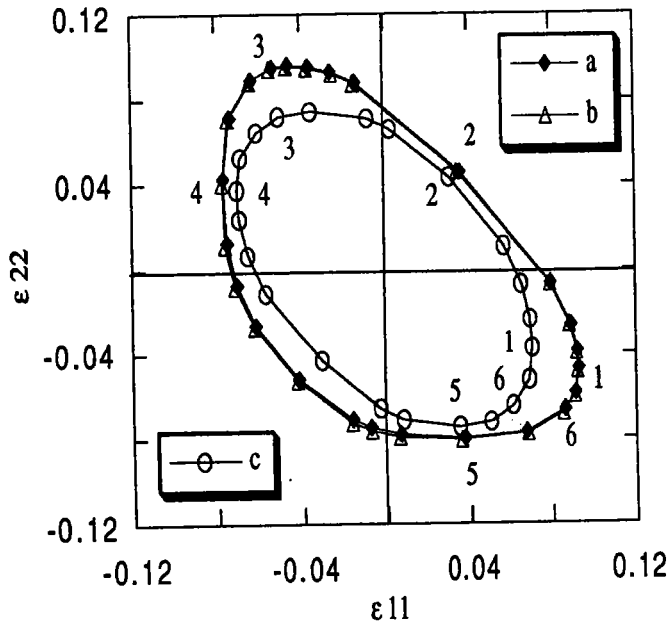


Figure (III-27): Différentes surfaces de chargement pour $f = 50\%$ de martensite en fonction du type de variantes utilisées

a/ variantes [2 11 12] b/ transformation isovolumique c/ variantes [0 1 1]

On détermine également ensuite la déformation maximale de transformation que l'on peut obtenir pour un chargement donné. Avec les paramètres correspondants aux variantes de type [0 1 1]. Dans le repère principal des

déformations, la surface de déformation maximale de transformation définit une ellipse possédant la seconde bissectrice comme grand axe pour les variantes de type [0 1 1]. Cette surface se déforme fortement pour les variantes réelles. Dans ce dernier cas seule la 1^{ère} bissectrice du plan $\varepsilon_1\varepsilon_2$ reste axe de symétrie figure (III-28).



Chargement:

- 1 - Traction axe1
- 2 - Traction biaxée
- 3 - Traction axe2
- 4 - Compression axe1
- 5 - Compression axe2
- 6 - Cisaillement

Cristallographie:

- a - variantes 2-11-12
- b - isovolumique
- c - variantes 0-1-1

Figure (III-28): Déformation maximale de transformation en fonction du chargement dans le plan principal $\sigma_1\sigma_2$. Evolution pour différents types de variantes

III 7 / CONCLUSION

L'approche au premier ordre utilisée dans ce chapitre pour modéliser le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme est analogue à une approximation de contrainte uniforme (modèle statique), il fournit une borne inférieure pour le comportement. Les résultats obtenus mettent en évidence le caractère non intrinsèque du seuil de fin de transformation et l'influence de l'aspect polycristallin des matériaux sur le comportement à travers la désorientation relative des grains les uns par rapport aux autres. Ce modèle est limité par la non prise en compte de l'influence des termes d'énergie d'interaction sur le comportement. Il néglige également les aspects dissipatifs. Malgré ces approximations, il fournit cependant des résultats qualitatifs intéressants, car dans le cas des alliages à mémoire de forme l'hypothèse d'uniformité des contraintes constitue une approximation plus proche du comportement réel que celle de l'uniformité des déformations. Ceci est dû à la forte hétérogénéité de déformation due à la transformation de phase.

Ce modèle simple permet de mettre en évidence l'importance des paramètres cristallographiques de la transformation sur le comportement macroscopique observé.

Il confirme que la pression hydrostatique ne joue qu'un rôle de second ordre pour les transformations thermoélastiques. On montre également que les surfaces de charge dans ces matériaux sont fortement dissymétriques et que cette dissymétrie est intrinsèquement liée à la faible symétrie cristallographique de la phase martensitique. La prise en compte des termes quadratiques liés à l'existence des contraintes internes d'incompatibilité permet d'affiner ces résultats. Ceci constitue l'objet des deux chapitres suivants

BIBLIOGRAPHIE

- [1]: E. Patoor, Thèse Docteur Ingénieur (1986) Metz
- [2]: M.S. Wechsler, D.S. Lieberman, T.A. Read, : Trans AIME, 1953, 197, 1503.
- [3]: E. Patoor, A.Eberhardt, M. Berveiller. Arch.Mech.,(1988), 40, 775.
- [4]: H. Warlimont, L. Delaey, R.V. Krishnan, H. Tass, Mater. Sci., (1974), 2, 1536.
- [5]: J.R. Rice : J. Mech. Phys. Solids, (1971), 19, 433.
- [6]: S. Gilbert: Massachusetts institute of Technologie. Published by Wellesley -Cambridge Press Box 157 (1986)
- [7]: M.O. Bensalah: Thèse d'État, Université Mohammed V, Rabat (1992).
- [8]: E. Patoor, M.O. Bensalah, A.Eberhardt, M. Berveiller: Revue de Métallurgie (1993), 1587-1592
- [9]: P. Vacher, Thèse, Université de Franche-Comté, Besançon (1991).
- [10]: P.Y. Manach, Thèse de l'INPG, Grenoble (1993).
- [11]: J.R. Patel, M. Cohen, Acta Metal., vol.1, (1953).
- [12]: T. Saburi, C.M.Wayman, K. Tanaka, S. Nenno: Acta Metal, 28, 15 (1980).
- [13]: F. Falk: Int. J. Engng Sci, vol. 27. No. 3, pp. 277-284. (1989)
- [14]: El. Amrani, E. Patoor, M.O. Bensalah, A.Eberhardt, M. Berveiller, premier congrès de mécanique (Avril 93, Rabat. MAROC)
- [15]: E. Patoor, M.O. Bensalah, A.Eberhardt, M. Berveiller, ICOMAT, 92 Monterey. CA
- [16]: E. Patoor., A.Eberhardt., M. Berveiller. Pitman Research Note in Mathematics Series 296 pp 38-54 (1993)

CHAPITRE IV

Interaction entre variantes de martensite

IV.1/ INTRODUCTION

Le modèle de contrainte uniforme développé au chapitre précédent conduit à des premiers résultats. Cependant ceux-ci sont encore très éloignés de la réalité expérimentale. L'effet des contraintes internes liées aux incompatibilités de la déformation de transformation n'est pas pris en compte. De la même façon la structure de la phase martensitique (formation de plusieurs variantes) est ignorée. Ce chapitre a pour objet d'étudier plus précisément la phase martensitique. On regarde tout d'abord les aspects cinématiques liés à la description de la déformation de transformation effectué au chapitre III. Après un rappel portant sur la détermination des plans d'habitat (interface Austénite / Martensite) par l'utilisation des équations de comptabilité de la déformation, on détermine les conditions d'existence d'une interface plane compatible entre deux variantes. On détermine ensuite les orientations de telles interfaces dans le cas d'un alliage de type CuZnAl. Les résultats ainsi obtenus sont confrontés aux observations expérimentales réalisées par Adachi et al [6]. sur ce type d'alliage.

Ensuite on développe le terme d'énergie d'interaction qui apparaît dans le potentiel thermodynamique définis au chapitre III. On détermine complètement cette énergie dans le cas particulier où le matériau se compose de deux variantes de martensite. On définit de cette façon une matrice d'interaction entre les variantes de martensite. Les résultats obtenus de cette façon sont confrontés à ceux obtenus à l'aide d'approches différentes réalisées par O. Fassi-Fehri (paire d'inclusions) et par M. O. Bensalah [7,13]

IV.2 / COMPATIBILITE DE LA DEFORMATION DE TRANSFORMATION.

IV.2 1/ CONDITIONS D'EXISTENCE D'UNE INTERFACE PLANE COMPATIBLE

L'étude cinématique réalisée au chapitre III utilise une description en petite déformation. Ce formalisme simplifie beaucoup les calculs et reste suffisamment proche de la réalité. On conserve donc cette description pour déterminer les conditions de compatibilité de la déformation totale locale $\varepsilon(\mathbf{r})$. Cette déformation se compose alors de plusieurs termes d'origine physique différente: la déformation élastique $\varepsilon^e(\mathbf{r})$, la dilatation thermique $\varepsilon^{th}(\mathbf{r})$, la plasticité par mouvement de dislocations $\varepsilon^p(\mathbf{r})$ et le terme de plasticité de transformation $\varepsilon^{Tr}(\mathbf{r})$:

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \varepsilon^e(\mathbf{r}) + \varepsilon^{th}(\mathbf{r}) + \varepsilon^p(\mathbf{r}) + \varepsilon^{Tr}(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.1})$$

Les matériaux à mémoire de forme se déforment suivant un mécanisme particulier associé à un changement de phase solide: la transformation martensitique thermoélastique. Cette transformation est une transition du premier ordre ce qui veut dire qu'il y a coexistence des deux phases pendant la transformation Figure (IV-1):

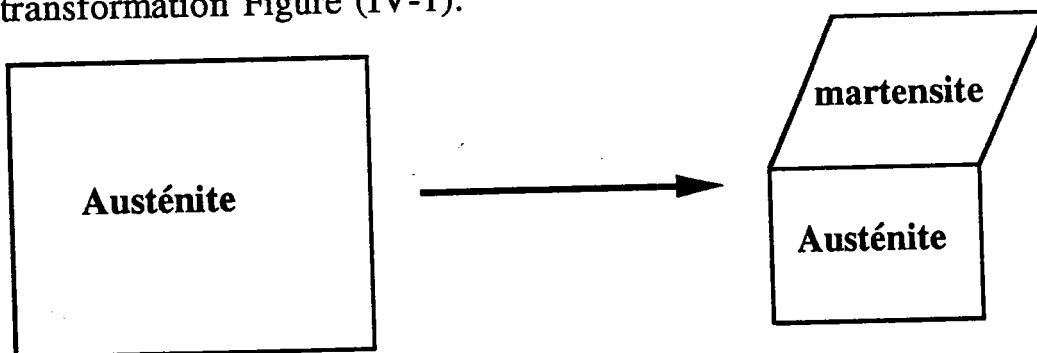


Figure (IV-1): Représentation schématique des deux phases provenant d'une transformation martensitique thermoélastique

Le mécanisme de déformation associé à la transformation austénite-martensite peut être décomposée en:

- Une transformation de réseau ε^B . Cette transformation appelée transformation de Bain, transforme le réseau de la structure austénitique (haute température) en

structure martensitique (basse température). Une rotation de Bain peut également affecter le réseau de la martensite.

- Une déformation à réseau invariant $\varepsilon^{R.I}$ car la transformation du Bain seule est incapable d'expliquer l'existence du plan invariant. On peut donc écrire :

$$\varepsilon^{Tr} = \varepsilon^B + \varepsilon^{R.I} \quad (IV.2)$$

On conserve donc cette description pour déterminer les relations de compatibilité de la déformation totale globale $\varepsilon(\mathbf{r})$. Dans ce paragraphe on détermine les conditions de compatibilité liées à l'existence de cette interface austénite-martensite. La condition de compatibilité de la déformation totale, d'après Kröner [1] est donnée par:

$$\text{Inc } \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jln} \varepsilon_{mn,kl}(\mathbf{r}) = 0 \quad (IV.3)$$

où ε_{ijk} désigne le tenseur permutation

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ijk direct} \\ 0 & \text{deux indices identique} \\ -1 & \text{ijk indirect} \end{cases}$$

Soit d'après la relation (IV.1):

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \text{Inc} \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) + \text{Inc} \varepsilon_{ij}^{th}(\mathbf{r}) + \text{Inc} \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) + \text{Inc} \varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) \quad (IV.4)$$

Considérons un milieu austénite-martensite séparé par une interface plane de normale \vec{n} . On suppose que les déformations sont uniformes de part et d'autre du plan d'habitat:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) &= \varepsilon_{ij}^{eA} + (\varepsilon_{ij}^{eM} - \varepsilon_{ij}^{eA})\theta(\mathbf{r}) \\ \varepsilon_{ij}^{th}(\mathbf{r}) &= \varepsilon_{ij}^{thA} + (\varepsilon_{ij}^{thM} - \varepsilon_{ij}^{thA})\theta(\mathbf{r}) \\ \varepsilon_{ij}^p(\mathbf{r}) &= \varepsilon_{ij}^{pA} + (\varepsilon_{ij}^{pM} - \varepsilon_{ij}^{pA})\theta(\mathbf{r}) \\ \varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) &= (\varepsilon_{ij}^B + \varepsilon_{ij}^{R.I})\theta(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (IV.5)$$

Avec ε^{xA} et ε^{xM} les déformations dans l'austénite et $\theta(\mathbf{r})$ dans la martensite et une fonction indicatrice

$$\theta(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V_m \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin V_m \end{cases}$$

Où V_m désigne le volume de la martensite. Les relation (IV.5) nous permettent d'exprimer le champ de déformation (IV.1) sous la forme suivante:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^A + \Delta\varepsilon_{ij} \theta(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.6})$$

où $\Delta\varepsilon_{ij}$ représente la discontinuité de déformation au passage de l'interface austénite-martensite et ε^A la déformation totale dans l'austénite. La relation de compatibilité s'exprime alors comme:

$$\text{Inc } \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = \text{Inc } \varepsilon_{ij}^A + (\text{Inc } \Delta\varepsilon_{ij})\theta(\mathbf{r}) \quad (\text{IV.7})$$

Dans les alliages à mémoire de forme, la plasticité par mouvement de dislocation joue un rôle négligeable on considère donc:

$$\varepsilon_{ij}^{pA} = \varepsilon_{ij}^{pM} = 0 \quad (\text{IV.8})$$

De la même façon on suppose que l'élasticité est homogène et isotrope, ce qui pour effet d'éliminer les incompatibilités de deuxième et troisième type. En l'absence de contrainte interne un chargement Σ_0 produit une déformation

élastique E^0 compatible telle que:

$$\varepsilon_{ij}^{eA} = \varepsilon_{ij}^{eM} = E^0 \quad (\text{IV.9})$$

On suppose également que la dilatation thermique est linéaire et que les deux phases possèdent le même coefficient de dilatation α . La température est supposée uniforme dans le matériau:

$$\varepsilon_{ij}^{\text{thA}} = \varepsilon_{ij}^{\text{thM}} = \alpha\Delta T\delta_{ij} \quad (\text{IV.10})$$

Ce qui entraîne:

$$\text{Inc } \varepsilon_{ij}^{\text{thA}}(\mathbf{r}) = \alpha\Delta T\text{Inc } \delta_{ij} = 0 \quad (\text{IV.11})$$

En l'absence de contrainte interne il faut donc vérifier:

$$\text{Inc } \Delta\varepsilon_{ij} = \text{Inc } (\varepsilon_{ij}^B + \varepsilon_{ij}^{\text{R.I}}) = 0 \quad (\text{IV.12})$$

En général, un tel champ de déformation inélastique est incompatible et il est nécessaire pour conserver la continuité du milieu de superposer une déformation supplémentaire. Dans le cas des matériaux à fort module élastique (par rapport au seuil d'écoulement plastique) il est peu vraisemblable que cette déformation puissent être totalement élastique car cela entraînerait la production de contraintes internes très élevées. Dans le cas des alliages à mémoire de forme où

la transformation est thermoélastique on supposera que la déformation supplémentaire est égale à zéro. Cela revient à considérer que les deux phases sont séparées par une interface plane dont on détermine l'orientation \vec{n} par la résolution de l'équation (IV.12). Pour une déformation de transformation donnée on cherche \vec{n} tel que:

$$\epsilon_{ikm} \epsilon_{ijn} \Delta \epsilon_{ij} n_k n_l = 0 \quad (IV.13)$$

Ce système comporte 9 équations qui se réduisent à 6 par raison de symétrie, Dans le repère principal (Ω_p) de la déformation de transformation on écrit

$$\begin{cases} \Delta \epsilon^I n_3^2 + \Delta \epsilon^{III} n_1^2 = 0 \\ \Delta \epsilon^{II} n_3^2 + \Delta \epsilon^{III} n_2^2 = 0 \\ \Delta \epsilon^I n_2^2 + \Delta \epsilon^{II} n_1^2 = 0 \\ \Delta \epsilon^I n_2 n_3 = \Delta \epsilon^{II} n_3 n_1 = \Delta \epsilon^{III} n_2 n_1 = 0 \end{cases} \quad (IV.14)$$

Dans le repère principal des déformations, en vertu des propriétés du troisième invariant scalaire associé à un tenseur d'ordre deux, la condition (IV.13) est équivalente à:

$$\det|\Delta \epsilon_{ij}| = 0 = \Delta \epsilon^I \Delta \epsilon^{II} \Delta \epsilon^{III} \quad (IV.15)$$

On note $\Delta \epsilon^I$, $\Delta \epsilon^{II}$ et $\Delta \epsilon^{III}$, les valeurs propres de $\Delta \epsilon_{ij}$. Il existera donc une interface plane compatible si une au moins des déformations principales est nulle. Le système (IV.14) définit alors une droite vectorielle. En imposant $\Delta \epsilon^{III} = 0$ on obtient:

$$\Delta \epsilon^{II} n_2^2 + \Delta \epsilon^I n_1^2 = 0 \quad (IV.16)$$

Avec n_3 nulle également. Une condition supplémentaire nous est donné par:

$\|\vec{n}\| = 1$. On obtient alors la solution suivante:

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\Delta \epsilon^I}{\Delta \epsilon^{II} - \Delta \epsilon^I} \\ n_2^2 = \frac{\Delta \epsilon^{II}}{\Delta \epsilon^{II} - \Delta \epsilon^I} \\ n_3 = 0 \end{cases} \quad (IV.17)$$

Les résultats obtenus par cette approche cinématique sont indiqués dans le tableau (IV-1) pour un alliage à mémoire de forme de type CuZnAl. On remarque que ces résultats concordent avec ceux déterminés à l'aide de la théorie cristallographique phénoménologique (W.L.R) [1]. On va donc appliquer la même démarche pour calculer les directions des interfaces intervariantes dans la martensite. Les résultats obtenus par la relation (IV.17) sont donnés dans le tableau (IV-1)

	W.L.R [1]	Résultats de la relation (IV.17) [11]
plan d'habitat $\begin{cases} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{cases}$	$\begin{cases} 0.672 \\ 0.619 \\ 0.407 \end{cases}$	$\begin{cases} 0.694 \\ 0.613 \\ 0.380 \end{cases}$

Tableau (VI-1): Comparaison des résultats obtenus en petites déformations avec ceux obtenus par la théorie de W.L.R

IV.2 2/ INTERFACE COMPATIBLE ENTRE VARIANTES DE MARTENSITE

Le degré de symétrie de la martensite étant inférieur à celui de l'austénite, un cristal de phase mère d'orientation donnée se transformera en formant plusieurs variantes de la même martensite. Ces différentes variantes sont équivalentes du point de vue cristallographique. Elles diffèrent uniquement par leur orientation.

Pour déterminer les interfaces compatibles entre variantes de martensite, on considère les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent: interface plane et infinie, s'est à dire ϵ^1, ϵ^2 constantes par morceaux à $\sigma = 0$. On a alors d'après la relation (IV.12):

$$\text{Inc } \Delta \epsilon = 0$$

Dans ce cas $\Delta\varepsilon$ est égale à la différence des déformations de transformation entre deux variantes adjacentes.

$$\Delta\varepsilon = (\varepsilon^{\text{Tr}})^n - (\varepsilon^{\text{Tr}})^m \quad (\text{IV.18})$$

L'utilisation des relations cinématiques définies au chapitre III nous permet de relier ces déformations aux normales et directions de transformation définies au paragraphe précédent. D'après (III.7) on a :

$$(\varepsilon^{\text{Tr}})^n = \frac{1}{2} g(n_i^n m_j^n + n_j^n m_i^n) = gR_{ij}^n \quad (\text{IV.19})$$

$$(\varepsilon^{\text{Tr}})^m = \frac{1}{2} g(n_i^m m_j^m + n_j^m m_i^m) = gR_{ij}^m$$

Donc il existera une interface plane compatible entre deux variantes n et m si :

$$\text{Inc} (R_{ij}^n - R_{ij}^m) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Cette équation possède une solution quand :

$$\det (R_{ij}^n - R_{ij}^m) = 0 \quad (\text{IV.21})$$

Nous nous intéressons aux alliages ternaires CuZnAl. Ces alliages présentent une caractéristique thermoélastique très intéressante: l'auto accommodation, celle ci se manifeste par un groupement de quatre plaquettes de martensite d'orientation cristallographique différentes et suivant des géométries bien définie, ce groupement permet alors, entre plaquettes adjacentes, une accommodation réciproque de la déformation locale associée au changement de forme de chaque plaquette, ce qui minimise la déformation totale globale. Le mécanisme de transformation développé par Devos et al. [2], montre que la transformation est le résultat d'un cisaillement double. Le premier sur des plans $\{011\}_A$ et le second sur des plans de la famille $\{011\}_A$. Chaque plan donne un groupe de 4 variantes auto accommodantes. Puisqu'il existe 6 plans de type $\{011\}_A$ différents, il existe 24 variantes de martensite différentes qui peuvent être formées à partir du même monocristal de la phase austénitique β . Les pôles des normales aux plans d'habitat des 24 variantes sont représentées dans la projection stéréographique de la figure (IV-2).

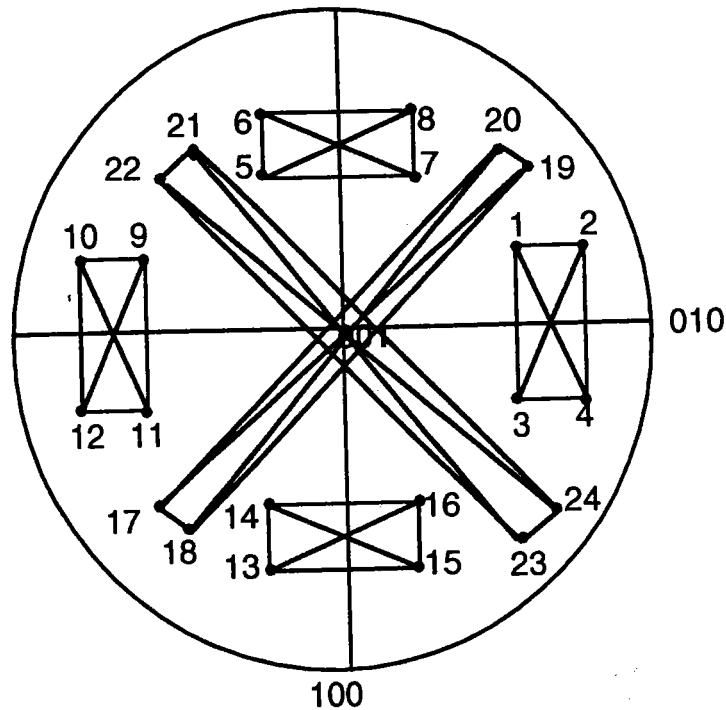


Figure (IV-2): projection stéréographique des normales aux plans d'habitat des 24 variantes

Dans cette représentation les plans d'habitat apparaissent distribué par groupes de 4, autour des 6 plans $\{011\}$. Les valeurs des normales au plan d'habitat et les directions de transformation déterminées par Delaey [3] sont données dans le Tableau (IV-2).

	n1	n2	n3	m1	m2	m3
1	-0.182	0.669	0.721	-0.165	-0.737	0.655
2	-0.182	0.721	0.669	-0.165	0.655	-0.737
3	0.182	0.669	0.721	0.165	-0.737	0.655
4	0.182	0.721	0.669	0.165	0.655	-0.737
5	-0.669	-0.182	0.721	0.737	-0.165	0.655
6	-0.721	-0.182	0.669	-0.655	-0.165	-0.737
7	-0.669	0.182	0.721	0.737	0.165	0.655
8	-0.721	0.182	0.669	-0.655	0.165	-0.737
9	-0.182	-0.669	0.721	-0.165	0.737	0.655
10	-0.182	-0.721	0.669	-0.165	-0.655	-0.737
11	0.182	-0.669	0.721	0.165	0.737	0.655
12	0.182	-0.721	0.669	0.165	-0.655	-0.737
13	0.721	-0.182	0.669	0.655	-0.165	-0.737
14	0.669	-0.182	0.721	-0.737	-0.165	0.655
15	0.721	0.182	0.669	0.655	0.165	-0.737
16	0.669	0.182	0.721	-0.737	0.165	0.655
17	0.669	-0.721	0.182	-0.737	-0.655	0.165
18	0.721	-0.669	0.182	0.655	0.737	0.165
19	-0.669	0.721	0.182	0.737	0.655	0.165
20	-0.721	0.669	0.182	-0.655	-0.737	0.165
21	-0.721	-0.669	0.182	-0.655	0.737	0.165
22	-0.669	-0.721	0.182	0.737	-0.655	0.165
23	0.721	0.669	0.182	0.655	-0.737	0.165
24	0.669	0.721	0.182	-0.737	0.655	0.165

Tableau (IV-5): Normales au plan d'habitat et directions de transformation dans les alliages de CuZnAl déterminées par DELAEY [3]

A partir de la résolution de la relation (IV.17) on peut établir une classification entre paire de variantes de martensite formées dans les alliages de type CuZnAl. Nous constatons ainsi sur le tableau (IV-1), deux familles de couples de variantes:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
1	C	C	C	C	I	I	C	I	C	I	C	I	I	C	I	I	I	I	I	C	C	I	I	I	
2	C	C	C	C	I	I	I	C	I	C	I	C	C	I	I	I	I	I	C	I	I	C	I	I	
3	C	C	C	C	C	I	I	I	C	I	C	I	I	I	I	C	I	C	I	I	I	I	I	C	I
4	C	C	C	C	I	C	I	I	I	C	I	C	I	I	C	I	C	I	I	I	I	I	I	I	C
5	I	I	C	I	C	C	C	C	C	I	I	I	I	C	I	C	C	I	I	I	I	C	I	I	I
6	I	I	I	C	C	C	C	C	I	C	I	I	C	I	C	I	I	C	I	I	C	I	I	I	I
7	C	I	I	I	C	C	C	C	I	I	C	I	I	C	I	C	I	I	C	I	I	I	I	C	I
8	I	C	I	I	C	C	C	C	I	I	I	C	C	I	C	I	I	I	I	C	I	I	C	I	I
9	C	I	C	I	C	I	I	I	C	C	C	C	C	I	I	I	C	I	I	I	C	C	I	I	I
10	I	C	I	C	I	C	I	I	C	C	C	C	C	I	I	C	I	I	I	C	I	I	C	I	I
11	C	I	C	I	I	I	C	I	C	C	C	C	C	I	C	I	I	I	C	I	I	I	I	C	I
12	I	C	I	C	I	I	I	C	C	C	C	C	C	C	I	I	I	C	I	I	I	I	I	I	C
13	I	C	I	I	I	C	I	C	I	I	I	C	C	C	C	C	I	C	I	I	C	I	I	I	I
14	C	I	I	I	C	I	C	I	I	I	C	I	C	C	C	C	C	I	I	I	C	I	I	C	I
15	I	I	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C	I	C	C	C	C	I	I	I	C	I	I	C	I
16	I	I	C	I	C	I	C	I	C	I	I	I	I	C	C	C	C	I	I	C	I	I	I	I	C
17	I	I	I	C	C	I	I	I	I	I	I	I	I	C	I	I	C	C	C	C	C	I	C	I	C
18	I	I	C	I	I	C	I	I	C	I	C	I	C	I	I	I	C	C	C	C	C	C	I	C	I
19	I	C	I	I	I	I	C	I	I	I	I	C	I	I	I	C	C	C	C	C	C	C	I	C	I
20	C	I	I	I	I	I	I	C	C	C	I	I	I	I	C	I	C	C	C	C	C	C	C	C	C
21	C	I	I	I	I	C	I	I	C	I	I	I	C	I	I	I	I	C	I	C	C	C	C	C	C
22	I	C	I	I	C	I	I	I	I	I	I	I	I	I	C	I	I	C	I	C	I	C	C	C	C
23	I	I	C	I	I	I	I	C	I	C	C	I	I	I	C	I	I	C	I	C	C	C	C	C	C
24	I	I	I	C	I	I	C	I	I	I	I	C	I	I	I	C	C	I	C	I	C	C	C	C	C

Tableau (IV-3): Interaction entre les variantes de martensite dans les alliages CuZnAl: C: Interaction compatible. I: Interaction incompatible

- a/ Celles pour les quelles la condition (IV.17) est vérifiée ils ne créent pas de contraintes internes, elles sont appelées variantes auto accommodantes.
- b/ Et celles qui ne vérifient pas la condition (IV.17) elles sont alors incompatibles. Ces variantes créent des contraintes internes, ces dernière peuvent être éventuellement relaxées par d'autre mécanisme de déformation.

Les résultats ainsi obtenu définissent correctement les 6 groupes autoaccommodants observés expérimentalement. Chaque variante est compatible avec les 3 variantes de son groupe, elle est également compatible avec au moins une variante dans chacun des autres groupes. Chaque variante possède neuf possibilités de compatibilité. Nous allons maintenant définir l'orientation de ces interfaces compatibles.

IV.2 3/ ORIENTATION DES INTERFACES COMPATIBLES

Pour déterminer l'orientation des interfaces compatibles, on suppose que l'élasticité est homogène et isotrope et que les deux variantes ont subi chacune un déplacement uniforme mais différent que l'on peut caractériser par :

$$\beta_{ij}^1 = g n_j^1 m_i^1 \quad (IV.22)$$

$$\text{et } \beta_{ij}^2 = g n_j^2 m_i^2 \quad (IV.23)$$

Le gradient de déplacement martensite-martensite est donnée par:

$$\Delta\beta_{ij}^{12} = \beta_{ij}^1 - \beta_{ij}^2 = g(n_j^1 m_i^1 - n_j^2 m_i^2) \quad (IV.24)$$

cette déformation s'écrit en fonction des normales et des directions des variantes compatibles (où auto accommodantes) comme:

$$\Delta\beta_{ij}^{12} = a N_j M_i \quad (IV.25)$$

Pour déterminer \vec{N} et \vec{M} il faut résoudre les équation suivantes:

$$[\Delta\beta_{ij}\Delta\beta_{kj} - a^2\delta_{ik}]N_k = 0 \quad (IV.26)$$

$$\text{et } [\Delta\beta_{ij}\Delta\beta_{ik} - a^2\delta_{jk}]M_k = 0 \quad (IV.27)$$

avec a^2 valeur propre de $\Delta\beta_{ij}\Delta\beta_{kj}$ et $\Delta\beta_{ij}\Delta\beta_{ik}$

\vec{N} vecteur propre associée à a^2 de la matrice $\Delta\beta_{ij}\Delta\beta_{kj}$

\vec{M} vecteur propre associée à a^2 de la matrice $\Delta\beta_{ij}\Delta\beta_{ik}$

Cette recherche de vecteur propre permet de définir l'orientation des interfaces intervariantes \vec{N} et la direction de réorientation \vec{M} entre deux variantes de martensite. On applique cette résolution au cas des alliages de CuZnAl. Les

déformations de transformation sont déterminées à partir des données du tableau (IV-2). Les résultats ainsi obtenus sont comparés aux observations expérimentales réalisées sur ce type d'alliages par Adachi et al. [6]. Le tableau (IV-4) définit les corrélations entre les différentes numérotations adoptées pour les variantes au LPMM et dans les références [5] et [6].

NOTATION L.P.M.M	NOTATION SABURI [5]	NOTATION ADACHI. PERKINS [6]
1	4'+	D1
2	6-	C1
3	3-	A1
4	5'+	B1
5	2+	D4
6	5+	C4
7	1'-	A4
8	6'-	B4
9	4'-	A2
10	5'-	B2
11	3+	D2
12	6+	C2
13	6'+	B3
14	2-	A3
15	5-	C3
16	1'+	D3
17	2'-	C6
18	3'-	D6
19	1+	B6
20	4+	A6
21	4-	A5
22	2'+	B5
23	3'+	D5
24	1-	C5

Tableau (IV-4): Différentes notations des variantes de martensite

Dans leur observations, Adachi et al. ont déterminé cristallographiquement l'existence de 16 combinaisons intervariantes uniques sur les 276 possibles. Parmi ces conditions 9 sont de type compatible et 7 sont incompatibles. La

résolutions de la condition de compatibilité (IV.21) fourni le même résultat (Tableau IV-5).

Type de combinaison	Adachi	Metz			Equivalences
1	A1/B1	3/4	T	C	1/2 5/6 7/8 9/10 11/12 13/14 15/16 17/18 19/20 21/22 23/24
2	A1/C1	3/2	T	C	1/4 5/8 6/7 9/12 10/11 13/16 14/15 17/20 18/19 21/24 22/23
3	A1/D1	3/1	T	C	2/4 5/7 6/8 9/11 10/12 13/15 14/16 17/19 18/20 21/23 22/24
4	A1/A2	3/9	T	C	1/11 2/12 4/10 17/24 18/23 19/22 20/21
5	A1/B2	3/10	P	X	
6	A1/D2	3/11	I	C	1/9 2/10 4/12 5/14 6/13 7/16 8/15 17/22 18/21 19/24 20/23
7	A1/A3	3/14	P	X	
8	A1/B3	3/13	P	X	
9	A1/C3	3/15	P	X	
10	A1/D3	3/16	T	C	1/7 2/19 4/24 5/9 6/18 8/23 10/22 11/14 12/17 13/21 15/20
11	A1/B4	3/8	P	X	
12	A1/C4	3/6	P	X	
13	A1/D4	3/5	T	C	1/14 2/22 4/17 6/21 7/11 8/20 9/16 10/19 12/24 13/18 15/23
14	A1/A5	3/21	P	X	
15	A1/D5	3/23	T	C	1/20 2/8 4/15 5/17 6/10 7/24 9/21 11/18 12/13 14/22 16/19
16	A1/D6	3/18	T	C	1/21 2/13 4/6 5/22 7/19 8/12 9/20 10/15 11/23 14/17 16/24

Tableau (IV-5): Différents type de combinaison pouvant se produire entre deux variantes de martensite. Sur les 16 combinaisons possibles 9 sont compatibles (notées T et I pour les observations d'Adachi et C pour la détermination avec la condition IV-21) et 7 sont incompatibles (notées P pour Adachi et X dans le présent travail) Les équivalences sont déterminées par résolution du système (IV-2), celle en caractère gras ont été observées expérimentalement par Adachi.

Pour les variantes compatibles la résolution du système (IV.26) permet de déterminer l'orientation des interfaces. Les résultats ainsi obtenus sont en très bon accord avec les observations expérimentales (Tableau IV-6).

Interfaces type 1: observation plan $(\bar{1}55)_\beta$

Combinaison de variantes	n1	n2	n3	Ecart théorique /expérimental
3/4	0,182	0,695	0,695	1,5°
1/2	-0,182	0,695	0,695	1,5°
5/6	-0,695	-0,182	0,695	1,5°
7/8	-0,695	0,182	0,695	1,5°
9/10	-0,182	-0,695	0,695	1,5°
11/12	0,182	-0,695	0,695	1,5°
13/14	0,695	-0,182	0,695	1,5°
15/16	0,695	0,182	0,695	1,5°
17/18	0,695	-0,695	-0,182	1,5°
19/20	-0,695	0,695	0,182	1,5°
21/22	-0,695	-0,695	0,182	1,5°
23/24	0,695	0,695	0,182	1,5°

Interfaces type 2: observation plan $(\bar{1}28)_\beta // (011)_\beta$ (déviation 0,12°)

Combinaison de variantes	n1	n2	n3	Ecart théorique /expérimental
3/2	0	0,707	0,707	1,5°
1/4	0	0,707	0,707	1,5°
5/8	0,707	0	0,707	1,5°
6/7	0,707	0	0,707	1,5°
9/12	0	-0,707	0,707	1,5°
10/11	0	-0,707	0,707	1,5°
13/16	-0,707	0	0,707	1,5°
14/15	-0,707	0	0,707	1,5°
17/20	-0,668	0,743	0	4,5°
18/19	0,743	0,668	0	4,5°
21/24	-0,743	0,668	0	4,5°
22/23	0,668	0,743	0	4,5°

Interfaces type 3: observation plan $(1,0,10)_{\beta'}$ // $(100)_{\beta}$ (déviation $1,84^{\circ}$)

Combinaison de variantes	n1	n2	n3	Ecart théorique /expérimental
1/3	1	0	0	$2,5^{\circ}$
2/4	1	0	0	$2,5^{\circ}$
5/7	0	1	0	$2,5^{\circ}$
6/8	0	1	0	$2,5^{\circ}$
9/11	0	1	0	$2,5^{\circ}$
10/12	0	1	0	$2,5^{\circ}$
13/15	1	0	0	$2,5^{\circ}$
14/16	1	0	0	$2,5^{\circ}$
17/19	0	0	1	$2,5^{\circ}$
18/20	0	0	1	$2,5^{\circ}$
21/23	0	0	1	$2,5^{\circ}$
22/24	0	0	1	$2,5^{\circ}$

Interfaces type 4: observation plan $(\bar{1}08)_{\beta'}$ // $(001)_{\beta}$ (déviation $5,38^{\circ}$)

Combinaison de variantes	n1	n2	n3	Ecart théorique /expérimental
3/9	0	0	1	5°
1/11	0	0	1	5°
2/12	0	0	1	5°
4/10	0	0	1	5°
5/16	0,081	0,998	0	4°
6/15	0,081	0,997	0	4°
7/14	-0,082	-0,998	0	4°
8/13	-0,081	-0,997	0	4°
17/24	0,998	0,	0,089	4°
18/23	0,998	0	0,089	4°
19/22	-0,998	0	0,089	4°
20/21	-0,998	0	0,089	4°

Interfaces type 6: observation plan $(010)_\beta // (010)_\beta$ (déviation $5,35^\circ$)

Combinaison de variantes	n1	n2	n3	Ecart théorique /expérimental
3/11	0,986	0	0,165	$2,5^\circ$
1/9	-0,986	0	0,165	$2,5^\circ$
2/10	-0,986	0	0,165	$2,5^\circ$
4/12	0,986	0	0,165	$2,5^\circ$
5/14	0	0,986	-0,165	$2,5^\circ$
6/13	0	0,986	0,165	$2,5^\circ$
7/16	0	-0,165	0,986	$2,5^\circ$
8/15	0	-0,165	0,986	$2,5^\circ$
17/22	0	0,986	-0,165	$2,5^\circ$
18/21	0	0,986	0,165	$2,5^\circ$
19/24	0,166	0	0,986	$2,5^\circ$
20/23	0,165	0	0,986	$2,5^\circ$

Interfaces type 10 : observation plan $(1,2,10)_\beta // (110)_\beta$ (déviation $6,33^\circ$)

Combinaison de variantes	n1	n2	n3	Ecart théorique /expérimental
3/16	0,765	0,275	0,610	6°
1/7	0,765	0,275	0,610	6°
2/19	0,275	0,765	0,610	6°
4/24	0,275	0,765	0,610	6°
5/9	-0,765	0,610	0,275	6°
6/18	0,765	0,610	-0,275	6°
8/23	0,610	-0,275	0,765	6°
10/22	0,610	0,275	0,765	6°
11/14	-0,275	0,610	0,765	6°
12/17	-0,275	0,610	0,765	6°
13/21	0,610	0,765	0,275	6°
15/20	-0,610	0,765	0,275	6°

Interfaces type 13: observation plan $(\bar{1}, 2, 10)_{\beta'}$ // $(011)_{\beta}$ (déviation $3,31^{\circ}$)

Combinaison de variantes	n1	n2	n3	Ecart théorique /expérimental
3/5	0,865	0,018	0,500	$9,5^{\circ}$
1/14	0,865	0,0018	0,500	$9,5^{\circ}$
2/22	-0,865	-0,018	-0,500	$9,5^{\circ}$
4/17	0,865	-0,018	0,500	$9,5^{\circ}$
6/21	0,018	0,500	0,865	$9,5^{\circ}$
7/11	-0,018	-0,500	0,865	$9,5^{\circ}$
8/20	0,018	0,500	0,865	$9,5^{\circ}$
9/16	0,0017	-0,500	0,865	$9,5^{\circ}$
10/19	-0,500	0,865	0,018	$9,5^{\circ}$
12/24	0,500	0,865	0,018	$9,5^{\circ}$
13/18	0,500	0,865	0,018	$9,5^{\circ}$
15/23	0,500	-0,865	0,018	$9,5^{\circ}$

Interfaces type 15: observation plan $(001)_{\beta'}$ // $(\bar{1}01)_{\beta}$ (déviation $3,34^{\circ}$)

Combinaison de variantes	n1	n2	n3	Ecart théorique /expérimental
3/23	0,071	0,550	0,859	$7,5^{\circ}$
1/20	-0,071	0,550	0,859	$7,5^{\circ}$
2/8	0,078	0,550	0,857	$7,5^{\circ}$
4/15	0,071	0,550	0,859	$7,5^{\circ}$
5/17	0,859	0,017	0,550	$7,5^{\circ}$
6/10	-0,859	0,018	0,550	$7,5^{\circ}$
7/24	-0,859	0,017	0,550	$7,5^{\circ}$
9/21	0,859	0,016	0,550	$7,5^{\circ}$
11/18	0,550	0,858	0,016	$7,5^{\circ}$
12/13	0,550	0,859	0,017	$7,5^{\circ}$
14/22	-0,550	0,856	0,018	$7,5^{\circ}$
16/19	-0,550	0,857	0,019	$7,5^{\circ}$

Interfaces type 16: observation plan $(101)_{\beta'} // (101)_{\beta}$ (déviation $5,04^{\circ}$)

Combinaison de variantes	n1	n2	n3	Ecart théorique /expérimental
3/18	-0,614	-0,765	0,311	3°
1/21	0,614	0,760	0,312	3°
2/13	-0,765	0,617	-0,311	3°
4/6	0,765	0,614	0,311	3°
5/22	0,311	0,618	0,765	3°
7/19	-0,311	0,614	0,765	3°
8/12	0,311	-0,765	0,614	3°
9/20	0,614	0,311	0,765	3°
10/15	0,614	0,311	-0,765	3°
11/23	0,311	0,765	0,614	3°
14/17	0,765	0,312	0,611	3°
16/24	0,765	0,310	0,615	3°

Tableau (IV-6): Comparaison des normales aux plans intervariantes \vec{N} obtenues par résolution de l'équation (IV-26) dans le cas d'un alliage de CuZnAl avec les observations expérimentales réalisées par Adachi et al. sur un alliage (Cu-14,6%, Zn-16,1 Al(at%)) [6].

On retrouve les 9 orientations cinématique adoptées pour décrire la déformation de transformation est cohérente avec les observations métallographiques réalisées sur des échantillons de CuZnAl à l'état martensitique. Par exemple les différentes morphologies observées dans les groupes autoaccommodant (Spear, Wear Fork) sont prise en compte dans cette description (Figure IV-3).

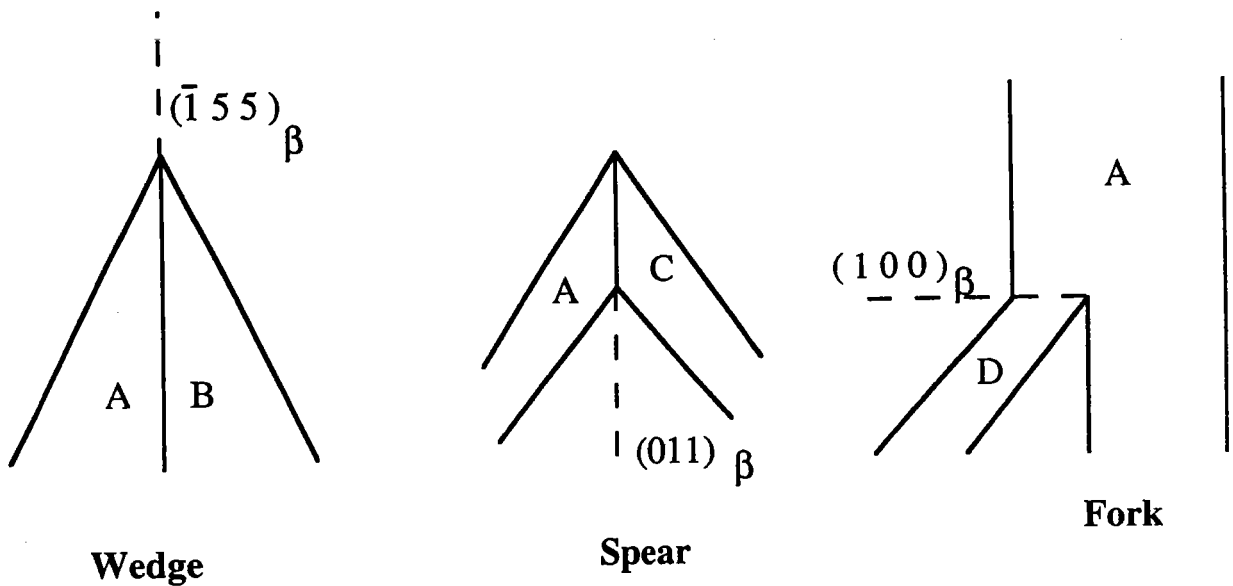


Figure (IV-3): Différentes configurations possibles dans un groupe autoaccommodant [6]

Si on considère maintenant les 24 variantes de martensite, les équivalences observées par Adachi se déterminent également par la résolution du système (IV.26). Les équivalences $A/B \parallel D/C$, $C/A \parallel D/B$ et $D/A \parallel C/B$ à l'intérieur des groupes autoaccommodant sont retrouvées ainsi que les équivalences $11/12 \parallel 3/4$, $5/8 \parallel 10/11 \parallel 3/2$ et $2/8 \parallel 3/23$. Les résultats ainsi obtenus sont résumés dans le (Tableau IV-7). On y remarque que les interfaces de type 1, 2 et 3 interviennent dans les groupes autoaccommodant. Les interfaces 4 et 6 correspondent aux interactions entre groupes de type 60° (selon la dénomination d'Adachi). Les interfaces 10/ 13 / 15/ 16 sont associées au interaction entre groupes de type 90° .

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
1		1	3	2	X	X	10	X	6	X	4	X	X	13	X	X	X	X	X	15	16	X	X	X			
2	1		2	3	X	X	X	15	X	6	X	4	16	X	X	X	X	X	10	X	X	13	X	X			
3	3	2		1	13	X	X	X	4	X	6	X	X	X	X	10	X	16	X	X	X	X	15	X			
4	2	3	1		X	16	X	X	X	4	X	6	X	X	15	X	13	X	X	X	X	X	X	10			
5						1	3	2	10	X	X	X	X	6	X	4	15	X	X	X	X	16	X	X			
6					1		2	3	X	15	X	X	6	X	4	X	X	10	X	X	13	X	X	X			
7					3	2		1	X	X	13	X	X	4	X	6	X	X	16	X	X	X	X	15			
8					2	3	1		X	X	X	16	4	X	6	X	X	X	X	13	X	X	10	X			
9										1	3	2	X	X	X	13	X	X	X	16	15	X	X	X			
10									1		2	3	X	X	16	X	X	X	13	X	X	10	X	X			
11									3	2		1	X	10	X	X	X	15	X	X	X	X	16	X			
12									2	3	1		15	X	X	X	10	X	X	X	X	X	X	13			
13														1	3	2	X	13	X	X	10	X	X	X			
14														1		2	3	16	X	X	X	X	15	X	X		
15														3	2		1	X	X	X	10	X	X	13	X		
16														2	3	1		X	X	15	X	X	X	16			
17																			1	3	2	X	6	X	4		
18																		1		2	3	6	X	4	X		
19																		3	2		1	X	4	X			
20																		2	3	1		4	X		X		
21																							1	3	2		
22																								2	3		
23																									1		
24																									2	3	1

Tableau (IV-7): Différents type d'interactions se produisant entre les 24 variantes de martensite dans les alliages de CuZnAl (X: variantes incompatibles, 1 à 16 différents type d'interfaces)

Nous avons montré qu'il existe 2 classes d'interactions entre les différentes variantes de la martensite. Les interactions compatibles correspondent à une situation de compatibilité de la déformation de transformation associée à chaque variante. Dans cette situation, les contraintes internes sont nulles, ainsi que l'énergie élastique associée. L'autre classe d'interaction entre les variantes correspondent à une situation d'incompatibilité, entraînant la présence des contraintes internes et d'une énergie élastique associée. Le développement de ces contraintes internes va en retour exercer une influence sur la progression des

variantes sous l'action des contraintes appliquées conduisant ainsi à un effet d'écrouissage macroscopique associée aux contraintes internes [4].

IV.3/ CONTRAINTE INTERNE ET ENERGIE D'INTERACTION

Dans ce paragraphe nous allons décrire l'effet d'écrouissage macroscopique associés aux contraintes internes, en ne prenant en compte que les interactions entre variantes de martensite. Ce type d'interaction est due aux incompatibilités de la déformation associée à la transformation martensitique. Nous adoptons une approche thermodynamique, utilisant le potentiel déterminé au chapitre III. Nous nous intéressons ici à la formation de la martensite dans des conditions isothermes. Soit un volume V d'austénite soumis à la température T , à une contrainte σ . Le potentiel pseudoélastique Ψ associé à la transformation austénite-martensite s'écrit en présence de sollicitation extérieure sous la forme:

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) = -\Delta G_{ch} - W_{mec} + \Sigma_{ij} E_{ij} \quad (IV.28)$$

$\Sigma_{ij} E_{ij}$ correspond à l'énergie mécanique associée aux champ de contraintes macroscopiques Σ_{ij} , E_{ij} est la déformation macroscopique totale, elle est composée d'une déformation élastique E_{ij}^e et d'une déformation de transformation E_{ij}^c :

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^{Tr} \quad (IV.29)$$

ΔG_{ch} représente la variation de l'énergie chimique. W_{mec} désigne l'énergie mécanique stockée dans le milieu. Dans le cas où les contraintes internes sont d'origine purement élastique nous écrivons:

$$W_{mec} = W_e + W_B.$$

Où W_e représente l'énergie élastique et W_B l'énergie d'interaction. L'énergie mécanique s'écrit donc sous la forme suivante:

$$W_{mec} = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} E_{ij} + \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{int}(\mathbf{r}) \epsilon_{ij}^e dV \quad (IV.30)$$

avec $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$ le tenseur local associé aux contraintes internes et $\varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r})$ la déformation élastique locale. Nous écrivons Ψ en tenant compte des expressions précédentes:

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} M_{ijkl} \Sigma_{kl} + \Sigma_{ij} E_{ij}^{Tr} - \Delta G_{ch} \sum_n f^n - \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{int}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^e d\mathbf{v} \quad (IV.31)$$

En utilisant les relations cinématique du chapitre III:

$$E_{ij}^{Tr} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) d\mathbf{v} = \frac{1}{V} \int_V \sum_n \varepsilon_{ij}^n \theta(\mathbf{r}) d\mathbf{v} = \sum_n \varepsilon_{ij}^n f^n \quad (IV.32)$$

Où $\varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r})$ désigne la déformation locale de transformation et $\theta(\mathbf{r})$ une fonction indicatrice. Dans ce potentiel, les interactions entre variantes sont prise en compte dans le terme d'énergie d'interaction. Nous allons donc déterminer cette contribution par une approche micromécanique.

IV.3 1 / CALCUL DE L'ENERGIE D'INTERACTION

Supposons que le milieu transformé est constitué de n variantes de volume V_m et que chaque variante a subi une déformation de transformation ε^m uniforme telle que:

$$\varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^m \varepsilon_{ij}^n \theta^n(\mathbf{r})$$

$$\text{Où } \theta^n(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V_m \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin V_m \end{cases}$$

Si la déformation ε_{ij}^{Tr} est incompatible, il va s'ajouter une déformation supplémentaire supposée élastique ε_{ij}^e , telle que la déformation totale ε_{ij}^T soit compatible:

$$\varepsilon_{ij}^T(\mathbf{r}) = \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) + \varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) \quad (IV.33)$$

La loi de Hooke en élasticité permet de relier cette déformation élastique à la contrainte interne associée à l'incompatibilité de $\varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r})$. Nous écrivons l'énergie d'interaction en tenant compte de l'expression (IV.33):

$$W_B = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{int}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^e(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) [(\varepsilon_{ij}^T(\mathbf{r}) - \varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}))] dv \quad (IV.34)$$

La déformation totale est égale à la partie symétrique du gradient du déplacement totale $U(\mathbf{r})$.

$$\varepsilon_{ij}^T(\mathbf{r}) = U_{i,j}(\mathbf{r})$$

En tenant compte de la symétrie du tenseur σ nous pouvons écrire l'expression (IV.34) sous la forme:

$$W_B = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) U_{i,j}(\mathbf{r}) dv - \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) dv \quad (IV.35)$$

$$\text{Or } \sigma_{ij}(\mathbf{r}) U_{i,j}(\mathbf{r}) = [(\sigma_{ij}(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}))_{,j} - \sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r})] \quad (IV.36)$$

En remplaçant (IV.35) dans (IV.36) nous obtenons:

$$W_B = \frac{1}{2V} \int_V (\sigma_{ij}(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}))_{,j} dv - \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}) dv - \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) dv \quad (IV.37)$$

L'équation d'équilibre donne en absence des forces volumique $\sigma_{ij,j}(\mathbf{r}) = 0$ et d'après le théorème de Gauss nous écrivons:

$$W_B = \frac{1}{2V} \int_S \sigma_{ij}(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}) n_j ds - \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) dv \quad (IV.38)$$

L'équilibre en surface permet d'écrire:

$$W_B = \frac{1}{2V} \int_S \sigma_{ij}(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}) n_j ds = 0 \quad (IV.39)$$

l'expression finale de l'énergie d'interaction s'écrit alors:

$$W_B = -\frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \varepsilon_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) dv \quad (IV.40)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_n \overline{\sigma_{ij}^n} \varepsilon_{ij}^n f^n$$

$\overline{\sigma_{ij}}$ désigne la valeur moyenne des contraintes internes dans le volume de la variante n :

$$\overline{\sigma}_{ij}^n = \frac{1}{v^n} \int_{v^n} \sigma_{ij}(r) dv \quad (\text{IV.41})$$

En tenant compte des expressions précédentes le potentiel pseudoélastique Ψ s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) = & -\Delta G_{ch}(T) \sum_n f^n + \frac{1}{2} \sum_{ij} M_{ijkl} \Sigma_{kl} + \sum_n \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^n f^n \\ & + \frac{1}{2} \sum_n \overline{\sigma}_{ij}^n \varepsilon_{ij}^n f^n \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Dans cette expression nous pouvons identifier le terme d'énergie d'interaction avec le champ de contrainte extérieure ($\sum_n \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^n f^n$), et le terme d'énergie d'interaction associé aux contraintes internes ($\frac{1}{2} \sum_n \overline{\sigma}_{ij}^n \varepsilon_{ij}^n f^n$). Pour évaluer précisément ce dernier terme il faut calculer les contraintes internes associées aux incompatibilités nées des interactions entre les variantes de martensite.

IV.3 2 / CALCUL DES CONTRAINTES INTERNES

Les contraintes internes sont déterminées, en utilisant le déplacement total par l'intermédiaire des équations de Navier, la résolution de ces équations passe par le calcul du tenseur de Green [9]. Cette méthode nous permet dans le cas homogène d'utiliser le calcul explicite du tenseur d'Eshelby [7]. Nous nous limitons aux transformations infinitésimales, dans l'approximation quasi-statique les forces d'inertie sont négligées. L'hypothèse du milieu continu impose au champ de déformation des conditions qui se traduisent par les équations de compatibilité. Ainsi le calcul de l'énergie élastique associée à la création des variantes de martensite se ramène à l'étude du problème d'une variante de martensite, considérée comme une inclusion ellipsoïdale aplatie, de fraction volumique f^n , dans un milieu homogène équivalent formé de la moyenne des déformations sur toutes les variantes de volume V_m

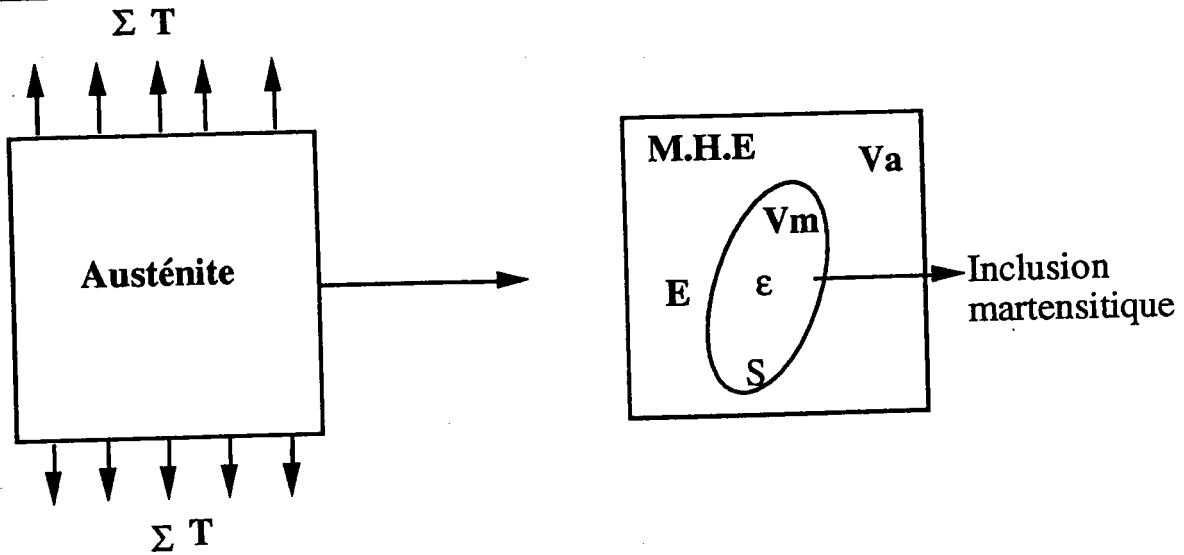


Figure (IV-4): Formation d'une variante de martensite sous contrainte à température T

Dans le cas d'une accommodation purement élastique nous écrivons la contrainte σ sous la forme:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{r}) = C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e = C_{ijkl} (\epsilon_{ij}^T(\mathbf{r}) - \epsilon_{ij}^{Tr}) \quad (IV.43)$$

Le milieu étant supposé homogène nous avons:

$$C_{ijkl}(\mathbf{r}) = C_{ijkl}^0 \quad (IV.44)$$

Pour le milieu homogène équivalent Eshelby [7] relie la déformation totale à la déformation dans l'inclusion (variante n) par:

$$\epsilon_{kl}^T(\mathbf{r}) = S_{klpq}^n \epsilon_{pq}^{Tr}(\mathbf{r}) \quad (IV.45)$$

La contrainte interne moyenne dans la variante n est donné par [8] :

$$\overline{\sigma}_{ij}^n = C_{ijkl}^0 (I_{klpq} - S_{klpq}^n) (E_{pq} - \epsilon_{pq}^n) \quad (IV.46)$$

avec $E_{ij} = \sum_n \epsilon_{ij}^n f^n$, I le tenseur identité d'ordre 4:

$$I_{klpq} = \frac{1}{2} (\delta_{kl} \delta_{pq} + \delta_{kp} \delta_{lq}), \text{ où } \delta \text{ est le symbole de Kröner. } S_{klpq}^n \text{ désigne le}$$

tenseur d'Eshelby associé à la variante n . Dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale de rapport $\frac{c}{a}$ donné les composantes de S_{klpq}^n présentent une symétrie en (k, l) et

(p, q) ils sont données par:

$$\begin{aligned}
 S_{1111} = S_{2222} &= \frac{13-8\nu}{32(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \\
 S_{3333} &= 1 - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \pi \frac{c}{4a} \\
 S_{1122} = S_{2211} &= \frac{8\nu-1}{32(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \\
 S_{1133} = S_{3322} &= \frac{\nu}{1-\nu} \left(1 - \frac{4\nu+1}{8\nu} \pi \frac{c}{a} \right) \\
 S_{1212} &= \frac{7-8\nu}{32(1-\nu)} \pi \frac{c}{a} \\
 S_{1313} = S_{2323} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\nu-2}{1-\nu} \pi \frac{c}{4a} \right)
 \end{aligned} \tag{IV.47}$$

où ν est le coefficient de poisson.

L'énergie d'interaction s'écrit alors en tenant compte des expression précédentes:

$$W_B = -\frac{1}{2} \sum_{n,m} C_{ijkl}^0 (I_{klpq} - S_{klpq}^n) (\epsilon_{pq}^m f^m - \epsilon_{pq}^n) \epsilon_{ij}^{n f^n} \tag{IV.48}$$

On remarque que cette énergie est quadratique en f^n , elle dépend de la nature de la transformation, de l'orientation respective des différentes variantes, de la forma des inclusion, du comportement élastique du matériau et des fraction volumique des variantes actives f^n .

IV.3 3 / DÉTERMINATION DE LA MATRICE D'INTERACTION

H_{nm}

L'analyse des interactions entre variantes de martensite par la formulation des paragraphes précédentes a montré qu'il existe des variantes incompatibles. Ce type de variante est source de contraintes internes qui peuvent être très importantes et conduit à l'endommagement du matériau. L'existence de la réorientation des variantes qui est un mécanisme d'accommodation supplémentaire dans la transformation joue un rôle essentiel. Les variantes de

martensite prendront une orientation qui minimisera l'énergie d'interaction. Pour analyser ce problème on détermine la nature de l'interaction entre variantes de martensite en minimisant l'énergie d'interaction. Pour cela, on suppose que chaque variante de martensite est représentée par une penny-shape inclusion de rapport $\frac{c}{a}$ donné et que l'élasticité est isotrope, linéaire et homogène de module de cisaillement μ . En considérant le volume d'austénite comme analogue à une 25^{ième} variante de martensite pour laquelle la déformation de transformation ϵ^{25} est égale à zéro. De cette façon l'équation (IV.48) s'écrit de façon plus symétrique, l'énergie d'interaction peut s'écrire en faisant intervenir le terme $(\epsilon^m - \epsilon^n)$ de réorientation comme:

$$W_B = \frac{1}{2} \sum_{n,m} 2\mu(\epsilon_{ij}^m - \epsilon_{ij}^n)(I_{ijkl} - S_{ijkl}^n)(\epsilon_{kl}^m - \epsilon_{kl}^n)f^m f^n \quad (IV.49)$$

Pour minimiser on note respectivement $(\varphi_1^n, \varphi_2^n)$ et $(\varphi_1^m, \varphi_2^m)$ l'orientation des variantes n et m par rapport au même repère cristallographique Ω_c .

$$A_{kl}^n = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1^n & \sin \varphi_1^n & 0 \\ -\cos \varphi_2^n \sin \varphi_1^n & \cos \varphi_2^n \sin \varphi_1^n & \sin \varphi_2^n \\ \sin \varphi_2^n \sin \varphi_1^n & -\sin \varphi_2^n \sin \varphi_1^n & \cos \varphi_2^n \end{bmatrix} \quad (IV.50)$$

Avec A_{kl}^n la matrice de passage du repère lié à la variante n au repère cristallographique Ω_c . Nous appliquons l'analyse de la matrice d'écrouissage décrivant les interactions entre les variantes de martensite dans le cas des alliages ternaires CuZnAl. Dans ce cas nous obtenons l'énergie d'interaction sous la forme:

$$W_B = -\frac{1}{2} \sum_{n,m} H^{nm} f^m f^n \quad (IV.51)$$

H^{nm} désigne la matrice d'interaction entre variante de martensite. Pour simplifier l'analyse de cette matrice d'interaction nous supposons qu'il n'y a que deux variantes n et m actives dans l'échantillon austénitique. Dans ce cas nous avons $f^m + f^n = 1$. Nous écrivons alors la matrice d'interaction en fonction des orientations des variantes sous la forme suivante:

$$H^{nm} = \sum 2\mu(A_{k'k}^m A_{l'l}^m \epsilon_{kl}^m - A_{k'k}^n A_{l'l}^n \epsilon_{kl}^n)(I_{klpq} - S_{klpq}^n)(A_{p'p}^m A_{q'q}^m \epsilon_{pq}^m - A_{p'p}^n A_{q'q}^n \epsilon_{pq}^n) \quad (IV.52)$$

On prends les caractéristiques des variantes de martensite suivant Delaey [3]. La

normale au plan d'habitat est de la famille $\vec{n} \begin{cases} 0,182 \\ 0,669 \\ 0,721 \end{cases}$ et la direction de

déplacement $\vec{m} \begin{cases} 0,165 \\ 0,737 \\ 0,655 \end{cases}$ avec une amplitude de déplacement $g = 0,23$. On minimise

L'énergie d'interaction par rapport aux orientations $(\varphi_1^n, \varphi_2^n)$ et $(\varphi_1^m, \varphi_2^m)$ (figure (IV-2)), nous cherchons l'orientation de la variante n par rapport à la variante m qui minimise l'énergie d'interaction entre n et m. les résultats obtenus subdivisent la matrice d'interaction en deux séries de termes [12] (tableau (IV-8).

-Les termes d'interaction entre les variantes compatibles H_1 : sont de l'ordre de $\frac{\mu}{1000}$ MPa

-Les termes d'interaction entre les variantes incompatibles H_2 :sont de l'ordre de $\frac{\mu}{150}$ MPa

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H2	H1	H1	H2	H2	H2
2	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H1	H1	H2	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2
3	H1	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2
4	H1	H1	H1	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H2	H2	H1
5	H2	H2	H1	H2	H1	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H2
6	H2	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H1	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H2
7	H1	H2	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1
8	H2	H1	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H2	H1	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2
9	H1	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H1	H2	H2	H2
10	H2	H1	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2
11	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H1	H1	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2
12	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H2	H2	H1
13	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H1	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H2
14	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H2
15	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H1	H2	H1	H2	H1	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2
16	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1
17	H2	H2	H2	H1	H1	H2	H2	H2	H2	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H2	H1	H2	H1
18	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H1	H1	H2	H1
19	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H1	H1	H1	H1	H2	H1	H2	H1
20	H1	H2	H2	H2	H2	H2	H2	H1	H1	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H1	H1	H1	H1	H1	H2	H1
21	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H1	H1	H1	H1
22	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H1	H2	H1	H1	H1	H1
23	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H1	H1	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H1	H1	H1	H1	H1
24	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H2	H1	H2	H2	H2	H1	H1	H2	H1	H2	H1	H1	H1	H1

Tableau (IV- 8): Matrice d'interaction entre les variantes de martensite dans les alliages à mémoire de forme de type CuZnAl. H1 variantes compatibles et H2 variantes incompatibles

IV.5 / CONCLUSION:

Les résultats obtenus dans ce chapitre ont montré que la description cinématique adoptée pour la déformation de transformation est suffisamment précise pour retrouver avec une précision acceptable l'essentiel des observations expérimentales réalisées par Adachi et al; sur la phase martensitique dans les alliages de type CuZnAl. On retrouve les 16 types d'interaction entre variantes (dont 9 compatibles). L'orientation déterminée dans le cas des interfaces séparant deux variantes compatibles est en bon accord avec les observations expérimentales. Le calcul de l'énergie d'interaction permet également d'effectuer la distinction entre variantes compatibles et variantes incompatibles. On montre que ce terme d'énergie peut s'exprimer à l'aide d'une matrice d'interaction. L'introduction de cette énergie d'interaction dans la détermination du comportement global constitue l'objet du chapitre suivant.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]: E. Kröner, Acta Metal 9, 155 (1961).
- [2]: A. Zaoui, 15ème colloque G . F . R. (1980) Paris.
- [3]: J. Devos, L. Delaey et E. Aernould, Academic Press (1978).
- [4]: J. W. Christian, Metals lecture The Metallurgical society of Aime, ol 13A, 509 - 527 (1988).
- [5]: T. Saburi, Y. Inada, S. Nenno et N. Hori, J. Physique C4 Supp., 12, 43, 819 (1982).
- [6]: C. Wayman, K. Adachi, J. Perkins; Acta Metal., Vol 36, N 5, 1343 - 1364 (1988).
- [7]: M. O. Bensalah, Thèse 3ème cycle Metz (1986).
- [8]: E. Patoor, A. Eberhardt, M. Berveiller, Acta Metal., 11, 135 (1987).
- [9]: Timoshinko edition moscou (1979).
- [10]: J. D. Eshelby Prog. sol. mec. (1961) North- Holland.
- [11]: M. O. Bensalah, thèse d'état Rabat (1992).
- [12]: M. El Amrani, M. O. Bensalah, E. Patoor, M. Berveiller colloque de plasticité (1992) Toulouse.
- [13]: O. Fassi-Fehri, Thèse d'état Metz (1985).

CHAPITRE V

Approche autocohérente

V.1 / INTRODUCTION

Nous avons proposé au chapitre précédent le calcul des contraintes internes associées aux incompatibilités de déformation dans les transformations martensitiques. Ce calcul a été effectué en considérant uniquement les incompatibilités intragranulaires associées aux interactions entre variantes de martensite. Ces interactions entre variantes ont été modélisées par une matrice d'interaction analogue à la matrice d'écrouissage définie en plasticité classique. Dans ce chapitre nous allons étudier le comportement thermomécanique du polycristal sachant qu'il présente des difficultés supplémentaires associées à sa structure granulaire. En effet dans le polycristal nous avons deux sources d'incompatibilités de déformations associées d'une part aux interactions entre variantes de martensite, d'autre part aux interactions entre les grains.

Pour décrire la réponse du polycristal microhétérogène à un chargement donné, il est nécessaire de connaître le comportement du monocristal et d'effectuer les opérations d'homogénéisation. Ces dernières nécessitent la description de l'agrégat et la prise en compte des lois de conservation et de continuité dont on fait un choix qui consiste à utiliser le gradient de la vitesse et le taux de contrainte pour décrire à la fois:

- les lois d'équilibre et de compatibilité
- les transitions d'échelles.

Dans ce chapitre nous appliquerons la cinématique de la transformation définie au chapitre III. Nous utiliserons ensuite les résultats du chapitre IV pour tenir compte de l'influence des termes quadratiques dans le potentiel thermodynamique déterminé au chapitre III. Le comportement global sera ensuite déterminé par une approche auto cohérente adaptée à la plasticité de transformation pure. Ce travail est réalisé dans le cadre de la thermodynamique des processus réversibles. Les effets d'hystérésis sont donc

négligés. Les résultats obtenus à l'aide de cette approche sont confrontés à des résultats expérimentaux réalisés sur des alliages à base de cuivre. Ces alliages ont la particularité de ne présenter qu'une très faible variation de volume et de se transformer totalement pour des contraintes inférieures à la limite d'élasticité de la phase austénitique.

V.2 / COMPORTEMENT DU MONOCRISTAL

V.2.1 / FORCE THERMODYNAMIQUE ASSOCIÉE A LA TRANSFORMATION

Pour prendre en compte le mécanisme physique à l'origine du comportement superélastique, on considère la déformation de transformation associée à la formation d'une variante de martensite. Cette déformation intrinsèque dépend uniquement de la nature cristallographique de la transformation [1,2]. Elle a été déterminée au chapitre III (relation (III.7)) comme:

$$\varepsilon_{ij}^n = R_{ij}^n g \quad (V.1)$$

Où R_{ij}^n est le tenseur d'orientation de la variante n et g l'amplitude de la déformation dans la direction de transformation. Dans un cristal de volume V la formation d'une variante de martensite unique de volume V^n donne un champ de déformation de transformation $\varepsilon_{ij}^{Tr}(r)$ définie par:

$$\varepsilon_{ij}^{Tr}(r) = \theta^n(r) \varepsilon_{ij}^n$$

avec $\theta^n(r) = 1$ si r appartient à V^n et $\theta^n(r) = 0$ si r n'appartient pas à V^n

Dans le cas où plusieurs variantes sont formées, on écrit la relation (III.10):

$$\varepsilon_{ij}^{Tr}(r) = \sum_n \varepsilon_{ij}^n \theta^n(r)$$

une opération de moyenne effectuée sur le volume total donne:

$$E_{ij}^{Tr} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}^{Tr}(r) dV = \sum_n R_{ij}^n g f^n \quad (V.2)$$

Les variables f^n utilisées comme paramètres de la microstructure, sont

soumises à des contraintes physiques . Les fractions volumiques de martensite ne peuvent pas être négatives et leur somme dans le cristal ne peut excéder l'unité (III.13), (III.14):

$$f^n \geq 0 \text{ et } \sum_n f^n \leq 1 \quad (\text{V.3})$$

On veut relier la déformation de transformation totale aux conditions du chargement Σ et de T . Pour cela on fait une analyse thermodynamique de la transformation martensitique. On considère à nouveau l'énergie libre complémentaire $\Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n)$ définie au chapitre III (relation III 29) pour un volume unitaire de phase mère ce potentiel s'écrit:

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) = -B(T-T_0) f + \Sigma_{ij} \sum_n \epsilon_{ij}^n f^n + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} M_{ijkl} \Sigma_{kl} + \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{\text{int}}(r) \epsilon_{ij}^{\text{Tr}}(r) dV. \quad (\text{V.4})$$

Avec $\sigma_{ij}^{\text{int}}(r)$ le champ de contrainte interne associée aux incompatibilités de déformation de la transformation. La force thermodynamique A^n associée à la formation de la variante n est donnée par la dérivée partielle de ce potentiel par rapport à la variable f^n :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial f^n} = A^n$$

Or ici il y a un problème supplémentaire provenant des contraintes cinématiques sur les variables f^n , relation (V.3). Il faut respecter 25 conditions de type $A_i(f^n) \leq B_i$. Pour tenir compte de ces contraintes, on définit un potentiel contraint $L(\Sigma_{ij}, T, f^n)$ qui s'écrit sous la forme suivante (relation III.33):

$$L(\Sigma_{ij}, T, f^n) = \Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) - \sum_i \lambda_i [A_i(f^n) - B_i] \quad (\text{V.5})$$

Chaque multiplicateur de Lagrange λ_i est associé à une inégalité $A_i(f^n) \leq B_i$. On note λ_0 le multiplicateur qui est associé au fait que la fraction volumique totale de martensite dans le cristal ne peut excéder l'unité.

$$A_0(f^n) = \sum_n f^n \leq B_0 = 1$$

On désigne par λ_n les multiplicateurs associés aux conditions $f^n \geq 0$

$$A_n(f^n) = -f^n \leq B_n = 0$$

Les λ_i sont analogues à des forces fictives et les conditions $[A_i(f^n) - B_i]$ sont analogues à des déplacements. Le travail des forces fictives λ_i dans le déplacement $[A_i(f^n) - B_i]$ doit être nul:

$$\lambda_i [A_i(f^n) - B_i] = 0 \quad (\text{V.6})$$

La condition (V.6) entraîne des conséquences importantes. Deux cas sont à distinguer. Soit l'inégalité est strictement vérifiée $A_i(f^n) < B_i$, ce qui impose à λ_i d'être nul. Soit la contrainte est active $A_i(f^n) = B_i$ et dans ce cas il faut vérifier:

$$\lambda_i \geq 0$$

A $\dot{\Sigma} = 0$ et $\dot{T} = 0$, la dérivée partielle de ce potentiel contraint par rapport à f^n détermine la force thermodynamique F^n qui est égale à la somme de la dérivée de l'énergie libre complémentaire et du terme supplémentaire provenant des conditions cinématiques (V.3) sur les f^n elle s'écrit:

$$F^n = \frac{\partial L}{\partial f^n} = \frac{\partial \Psi}{\partial f^n} - \sum_i \lambda_i \frac{\partial A_i(f^n)}{\partial f^n} \quad (\text{V.7})$$

$$= -B(T-T_0) + \Sigma_{ij} \epsilon_{ij}^n + \frac{\partial}{\partial f^n} \left[\frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{\text{int}}(r) \epsilon_{ij}^{\text{Tr}}(r) dV \right] + \lambda_n - \lambda_0 \quad (\text{V.8})$$

Dans cette expression le terme dérivée de l'énergie bloquée décrit l'influence des interactions entre les variantes de martensite sur le comportement. Il représente une contribution résistive due aux interactions locales entre les différentes variantes déjà formées dans le cristal. On représente cette contribution en utilisant la matrice d'interaction définie au chapitre (IV.3.3):

$$\frac{\partial}{\partial f^n} \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{\text{int}}(r) \epsilon_{ij}^{\text{Tr}}(r) dV = \frac{1}{2} \sum_m (H^{nm}) f^m \quad (\text{V.9})$$

L'expression finale de la force thermodynamique F^n est alors :

$$F^n = -B(T-T_0) + \sum_{ij} \epsilon_{ij}^n + \frac{1}{2} \sum_m (H^{nm}) f^m + \lambda_n - \lambda_0 \quad (V.10)$$

La transformation martensitique est une transformation thermoélastique, en faisant l'hypothèse d'absence de dissipation ($T_0 = M_S$) on définit le critère de transformation, lorsque F^n est égale à zéro:

$$F^n = -B(T-M_S) + \sum_{ij} \epsilon_{ij}^n + \frac{1}{2} \sum_m (H^{nm}) f^m + \lambda_n - \lambda_0 = 0 \quad (V.11)$$

Si cette relation est vérifiée et si $\lambda_n \geq 0$

$$\lambda_n = -B(T-M_S) - \sum_{ij} \epsilon_{ij}^n - \frac{1}{2} \sum_m (H^{nm}) f^m - \lambda_0 \geq 0 \quad (V.12)$$

et si $\lambda_0 \geq 0$:

$$\lambda_0 = +B(T-M_S) + \sum_{ij} \epsilon_{ij}^n + \frac{1}{2} \sum_m (H^{nm}) f^m + \lambda_n \geq 0 \quad (V.13)$$

alors la variante n est potentiellement active dans le cristal. Ce qui implique la possibilité de former les vingt-quatre variantes dans le cristal selon un mécanisme seuil de début et de fin de transformation imposé par les contraintes cinématiques.

Comme pour la minimisation linéaire réalisée au chapitre III, on remarque que le début de la transformation suit une loi de type Clausius Clapeyron (Patel et Cohen) [3]. Cette loi est définie à partir des paramètres intrinsèques (ϵ^n , B, T_0) qui caractérisent la transformation. De la même façon, on observe que la fin de la transformation est fortement déterminée par la microstructure (orientation des grains ..), mais dans l'approche développée ici on tient compte également de la structure de la phase martensitique (nombre, répartitions et orientations des variantes).

V.2 2 / LOI DE COMPORTEMENT DU MONOCRISTAL

On a déterminé au paragraphe précédent les conditions d'existence de la transformation, il faut maintenant relier l'évolution des paramètres du

chargement avec celle des variables internes f^n . Les mécanismes à la base du comportement sont des mécanismes à seuil, plusieurs systèmes peuvent être activés à l'intérieur d'un cristal avec comme condition supplémentaire par rapport au glissement plastique l'existence d'un seuil de fin de transformation. Au cours d'un trajet de chargement (même monotone), un grand nombre d'événements peuvent se produire dans le grain. Ceci impose de choisir une description incrémentale de façon à pouvoir suivre le déroulement de ces événements successifs (activation, blocage..). Le paramètre temps qui va intervenir dans les relations constitue une variable utile pour la description des grandeurs physiques ou mécaniques mais ne correspond pas forcément au temps physique. Pour réaliser cette description incrémentale, il faut alors vérifier la relation de consistance $\dot{F}^n = 0$ pour des variantes telle que

$$\lambda_n = \lambda_0 = 0:$$

$$\dot{F}^n = \frac{\partial F}{\partial \Sigma_{ij}} \dot{\Sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} + \sum_m \frac{\partial F}{\partial f^m} \dot{f}^m = 0 \quad (\text{V.14})$$

avec d'après la relation (V.11):

$$\frac{\partial F^n}{\partial \Sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij}^n, \quad \frac{\partial F^n}{\partial T} = -B \quad \text{et} \quad \frac{\partial F^n}{\partial f^m} = \frac{1}{2} H^{nm}$$

Finalement \dot{F}^n s'écrit sous forme d'un système d'équations pour les variantes potentiellement actives:

$$\dot{F}^n = -B\dot{T} + \varepsilon_{ij}^n \dot{\Sigma}_{ij} + \frac{1}{2} \sum_m (H^{nm}) \dot{f}^m = 0 \quad (\text{V.15})$$

La résolution de ce système d'équations composé d'un même nombre d'équations que de variantes potentiellement actives permet de définir les \dot{f}^n pour les variantes potentiellement actives:

$$\dot{f}^n = \sum_m (H^{nm})^{-1} (\varepsilon_{ij}^n \dot{\Sigma}_{ij} - B\dot{T}) \quad (\text{V.16})$$

On obtient ensuite la loi de comportement du monocristal à partir de la relation cinématique (V.2) Elle est donnée en fonction des variables de contrôle T et Σ , de la déformation de transformation et des interactions entre

les variantes de martensite par:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{Tr} = \sum_n \epsilon_{ij}^n \dot{f}^n = \sum_n \epsilon_{ij}^n \sum_m (H^{nm})^{-1} (\epsilon_{kl}^n \dot{\Sigma}_{kl} - B\dot{T}) \quad (V.17)$$

Comme nous avons vu dans le chapitre III, par analogie à la loi de Schmidt, une variante n est active lorsque sa contrainte résolue atteint une valeur critique τ_c^n . En tenant compte de l'écroûissage intragranulaire et en faisant l'hypothèse que l'état initial τ_c^0 est identique pour toutes les variantes nous obtenons:

$$\tau_c^n = \tau_c^0 + \sum_m (H^{nm}) f^m \quad (V.18)$$

Le comportement de la variante n est caractérisé par:

$$\begin{aligned} & * n \text{ est active c'est à dire } \dot{f}^n > 0 \\ & \text{si } \tau_c^n = \tau_c^0 + \sum_m (H^{nm}) f^m = R_{ij}^n \Sigma_{ij} \end{aligned} \quad (V.19)$$

$$\text{et: } \dot{\tau}_c^n = R_{ij}^n \dot{\Sigma}_{ij} > 0 \quad (V.20)$$

$$\begin{aligned} & * n \text{ est inactive c'est à dire } \dot{f}^n = 0 \\ & \text{si } \tau_c^0 + \sum_m (H^{nm}) f^m < R_{ij}^n \Sigma_{ij} \end{aligned} \quad (V.21)$$

où si $\tau_c^0 + \sum_m (H^{nm}) f^m = R_{ij}^n \Sigma_{ij}$ mais $\sum_m (H^{nm}) \dot{f}^m < R_{ij}^n \dot{\Sigma}_{ij}$

de même les variantes sont inactives quelque soient les valeurs de $R_{ij}^n \Sigma_{ij}$ et $R_{ij}^n \dot{\Sigma}_{ij}$ si le volume est entièrement transformé c'est à dire si $\sum_n f^n = 1$. Ces relations définissent le comportement du monocristal en plasticité de transformation pure. Nous allons maintenant, à partir de ces relations, effectuer la transition d'échelle du monocristal au polycristal.

V.3 / DETERMINATION DU COMPORTEMENT POLYCRISTALLIN

V.3 1 / EQUATION INTEGRALE DU COMPORTEMENT

Les équations du comportement local étant précisées, il est nécessaire pour

déterminer le comportement global, d'effectuer une transition d'échelle permettant de relier les grandeurs locales aux grandeurs macroscopiques moyennes [7]. La vitesse de déformation locale s'écrit:

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{r}) = \dot{\epsilon}_{ij}^e(\mathbf{r}) + \dot{\epsilon}_{ij}^{pt}(\mathbf{r}) \quad (\text{V.22})$$

Avec $\dot{\epsilon}_{ij}^e(\mathbf{r})$ la vitesse de déformation élastique donnée par la loi de Hooke, $\dot{\epsilon}_{ij}^{pt}(\mathbf{r})$ la vitesse de déformation de transformation déterminée par la loi de comportement du monocristal (V.18). La loi locale (V.18) s'exprime comme:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) = g_{ijkl}(\mathbf{r}) \dot{\sigma}_{kl}(\mathbf{r}) + n_{ij}(\mathbf{r}) \dot{T} \quad (\text{V.23})$$

Avec $g(\mathbf{r})$ le module local tangent de transformation et $n(\mathbf{r})$ la sensibilité locale à la température

On suppose que la température est uniforme dans le matériau. L'inversion de la relation (V.23) donne l'expression suivante pour la contrainte locale $\sigma(\mathbf{r})$:

$$\dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) = l_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{Tr}(\mathbf{r}) - m_{ij}(\mathbf{r}) \dot{T} \quad (\text{V.24})$$

Avec les propriétés suivantes entre les modules locaux du comportement

$$l_{ijkl}(\mathbf{r}) = g_{ijkl}^{-1}(\mathbf{r})$$

$$m_{ij}(\mathbf{r}) = l_{ijkl}(\mathbf{r}) n_{kl}(\mathbf{r})$$

On postule que la loi de comportement du polycristal s'exprime sous la même forme:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{Tr} = G_{ijkl} \dot{\Sigma}_{kl} + N_{ij} \dot{T} \quad (\text{V.25})$$

ou encore sous forme duale:

$$\dot{\Sigma}_{ij} = L_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{Tr} - M_{ij} \dot{T} \quad (\text{V.26})$$

avec L et G les modules tangents macroscopiques et N et M les sensibilités globales à la température. Ces quantités sont liées par les relations suivantes:

$$L_{ijkl} = G_{ijkl}^{-1}$$

$$M_{ij} = L_{ijkl} N_{kl}$$

Pour avoir le comportement global à partir de l'évolution des paramètres de la microstructure, il faut déterminer les relations qui existent entre les grandeurs globales G , L , N , M et les tenseurs locaux $g(\mathbf{r})$, $n(\mathbf{r})$, $m(\mathbf{r})$ et $l(\mathbf{r})$, qui

définissent le comportement à l'échelle micro. Les taux de contraintes et la vitesse de déformation macroscopique sont égales aux moyennes des taux de contraintes et des vitesses de déformation locales:

$$\dot{\Sigma}_{kl} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\sigma}_{kl}(\mathbf{r}) d\mathbf{v} \quad \dot{E}_{ij}^{Tr} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) d\mathbf{v}$$

Dans les cas particuliers des approximations à vitesse de déformation uniforme (modèle de Taylor $\dot{\epsilon}_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) = \dot{E}_{ij}^{Tr}$) ou à taux de contrainte uniforme ($\dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) = \dot{\Sigma}_{ij}$ modèle de statique) comme cela a été présenté au chapitre III, ces relations sont suffisantes pour déterminer complètement le problème. Mais cela ne constitue pas le cas général. La résolution du problème dans le cas général nécessite l'introduction des relations de localisations [4]:

$$\dot{\sigma}_{kl}(\mathbf{r}) = B_{ijkl}(\mathbf{r}) \dot{\Sigma}_{kl} + b_{ij}(\mathbf{r}) \dot{T} \quad (V.27)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{Tr}(\mathbf{r}) = A_{ijkl}(\mathbf{r}) \dot{E}_{kl}^{Tr} + a_{ij}(\mathbf{r}) \dot{T} \quad (V.28)$$

Ces deux relations ne sont pas indépendantes car les tenseurs de localisations A, B, a et b doivent satisfaire aux équations (V.24, V.26, V.27 et V.28). Ces conditions sont vérifiées si:

$$A_{ijkl}(\mathbf{r}) = l_{ijmn}^{-1}(\mathbf{r}) B_{mnkl}(\mathbf{r}) L_{mnkl} \quad (V.29)$$

$$a_{ij}(\mathbf{r}) = l_{ijmn}^{-1}(\mathbf{r}) [B_{mnpq}(\mathbf{r}) M_{pq} - b_{mn}(\mathbf{r}) - m_{mn}(\mathbf{r})] \quad (V.30)$$

On peut maintenant déterminer les modules globaux à partir des variables locales:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) d\mathbf{V} = \frac{1}{V} \int_V (l_{mnkl} (A_{mnkl} \dot{E}_{ij} + a_{ij} \dot{T}) - m_{ij} \dot{T}) d\mathbf{V} \\ &= \frac{1}{V} \int_V l_{mnkl}(\mathbf{r}) A_{mnkl}(\mathbf{r}) \dot{E}_{ij} d\mathbf{V} + \frac{1}{V} \int_V (l_{ijkl}(\mathbf{r}) a_{kl}(\mathbf{r}) - m_{ij}(\mathbf{r})) \dot{T} d\mathbf{V} \end{aligned}$$

par identification avec (V.26) on obtient:

$$L_{ijmn} = \frac{1}{V} \int_V l_{ijkl}(\mathbf{r}) A_{klmn}(\mathbf{r}) d\mathbf{v} \quad (V.31)$$

et

$$M_{ij} = \frac{1}{V} \int_V (l_{ijkl}(r)a_{kl}(r) - m_{kl}(r)) dv \quad (V.32)$$

Dans ces relations, les tenseurs locaux $l(r)$ et $m(r)$ sont connus à priori. Pour déterminer les tenseurs de localisations $A(r)$ et $a(r)$, on recherche la configuration actuelle satisfaisant les équations d'équilibre:

$$\dot{\sigma}_{ij,j}(r) = 0 \quad (V.33)$$

L'équation (V.24) donne alors [4]:

$$(l_{ijkl}(r)\dot{\epsilon}_{kl}^{Tr}(r) - m_{ij}(r)\dot{T})_{,j} = 0 \quad (V.34)$$

On décompose le tenseur $l(r)$ en une partie uniforme L^o et une déviation $\delta l(r)$ telle que:

$$l(r) = L^o + \delta l(r)$$

Comme la déformation locale de transformation dérive d'un déplacement U^{Tr} (relation III 2, on peut exprimer V.34 sous la forme suivante:

$$L^o_{ijkl} \dot{U}_{k,jj}^{Tr} + (\delta l_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{Tr}(r) - m_{ij}(r)\dot{T})_{,j} = 0 \quad (V.35)$$

Le second terme est analogue à une force de volume. Pour transformer l'équation V.34 en une équation intégrale, on lui adjoint un tenseur de Green G^* définie par:

$$L^o_{lkji} G^*_{km,li}(r-r') + \delta_{jm} \delta(r-r') = 0 \quad (V.36)$$

En multipliant (V.35) par $G^*_{jm}(r-r')$ et (V.36) par \dot{U}_k^{Tr} on obtient par différence :

$$\{G^*_{jm} L^*_{ijkl} \dot{U}_{k,l}^{Tr} - \dot{U}_k^{Tr} L^o_{ijkl} G^*_{jm,l}\}_{,j} + G^*_{jm} f_i - \dot{U}_k^{Tr} \delta(r-r') = 0 \quad (V.37)$$

$$\text{avec: } f_i = (\delta l_{ijkl}(r)\dot{\epsilon}_{kl}^{Tr}(r) - m_{ij}(r)\dot{T})_{,j} \quad (V.38)$$

\dot{U}_k^{Tr} est obtenue par intégration sur V , si \dot{U}_j est imposé sur ∂V alors $G^*_{jm} = 0$ sur ∂V et le premier terme de l'équation intégrale n'est autre que la vitesse de déplacement \dot{U}_j du milieu homogène considéré L^o , soumis aux mêmes conditions sur ∂V . En posant $G^*_{jm,in} = \Gamma_{mnij}$ la partie symétrique du tenseur de Green, la formulation de cette équation intégrale en pseudoélasticité conduit

à une équation analogue à celle introduite en élastoplasticité par Berveiller et Zaoui [4]:

$$\dot{\epsilon}_{mn}^{Tr}(\mathbf{r}) = \dot{\epsilon}_{mn}^0 + \int_V \Gamma_{mnij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv (\delta l_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^{TR}(\mathbf{r}') - m_{ij}(\mathbf{r}') \dot{T}) \quad (V.39)$$

La résolution de cette équation donne les tenseurs de localisation [7] A_{ijkl} et a_{ij} . Dans la suite de ce travail on considère uniquement le cas où $\dot{T} = 0$, c'est à dire que l'on s'attache à résoudre le cas du comportement superélastique.

V.3 2 / UTILISATION DE L'APPROXIMATION AUTO-COHERENTE

Par rapport aux différentes solutions de l'équation intégrale (V.39) l'approximation self-consistent formulée pour la première fois par Kröner[5] dans le cas de l'élasticité linéaire constitue un compromis raisonnable entre les approximations de champs uniformes (Taylor, Lin, Voigt....) qui négligent systématiquement toute hétérogénéité y compris intergranulaire et les méthodes statistiques systématiques qui sont difficiles à mettre en oeuvre et pas nécessairement justifiées en égard des simplifications faites pour décrire le monocristal. De plus dans le cas de l'élasticité, Kröner[6] a démontré que la solution autocohérente constitue une solution exacte pour les milieux parfaitement désordonnés.

Nous considérons le polycristal comme constitué de grains d'orientations cristallographiques différentes [7,9]. Une première approximation consiste à supposer que le comportement thermomécanique est uniforme dans chaque grain, ce qui revient à négliger les hétérogénéités intergranulaires, ce type d'hétérogénéité doit alors être décrit de façon phénoménologique dans la loi de comportement. Dans un milieu dont les propriétés sont constantes par morceau, les déviations $\delta(\mathbf{r}')$ s'écrivent:

$$\delta(\mathbf{r}') = \sum_{I=1}^N \Delta l^I \theta^I(\mathbf{r}') \quad (V.40)$$

$$\text{ou } \theta^I(\mathbf{r}') = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r}' \in \text{à } v_I \\ 0 & \text{si } \mathbf{r}' \notin \text{à } v_I \end{cases}$$

N représente le nombre de grains et V_I désigne le volume occupé par le grain I. De la même façon, si on note $\dot{\epsilon}^I$ la valeur moyenne de la vitesse de déformation de transformation dans le grain, nous écrivons:

$$\dot{\epsilon}^I = \frac{1}{V_I} \int \dot{\epsilon}^{\text{Tr}}(\mathbf{r}) dv \quad (\text{V.41})$$

Dans ce cas le champ des vitesses de déformation peut être approché par la somme:

$$\dot{\epsilon}^{\text{Tr}}(\mathbf{r}') = \sum_{I=1}^N \dot{\epsilon}^I \theta^I(\mathbf{r}') \quad (\text{V.42})$$

En conséquence le produit $\delta(\mathbf{r}') \dot{\epsilon}^{\text{Tr}}(\mathbf{r}')$ peut s'écrire:

$$\delta(\mathbf{r}') \dot{\epsilon}^{\text{Tr}}(\mathbf{r}') = \sum_{I=1}^N \Delta l^I \dot{\epsilon}^I \theta^I(\mathbf{r}') \quad (\text{V.43})$$

En remplaçant $\dot{\epsilon}^{\text{Tr}}(\mathbf{r})$ par l'expression (V.42) dans l'équation intégrale (V.39), nous obtenons pour la valeur moyenne $\dot{\epsilon}^I$ dans le grain I:

$$\dot{\epsilon}^I = \dot{\epsilon}^0 + \frac{1}{V_I} \int \int_{v_I} \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sum_{J=1}^N \Delta l^J \dot{\epsilon}^J \theta^J(\mathbf{r}') dv' dv \quad (\text{V.44})$$

qui s'écrit en posant:
$$T^{IJ} = \frac{1}{V_I} \int \int_{v_I} \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' dv \quad (\text{V.45})$$

$$\dot{\epsilon}^J = \dot{\epsilon}^0 + \sum_{J=1}^N T^{IJ} [\Delta l^J \dot{\epsilon}^J \theta^J(\mathbf{r}')] \quad (\text{V.46})$$

Pour des grains de forme ellipsoïdale et pour $J=I$, le tenseur T^{II} est relié au tenseur S d'Esheby [8] par la relation:

$$S = T^{II} L^0 \quad (\text{V.47})$$

pour $I \neq J$, les tenseurs T^{IJ} décrivent les interactions entre les grains I et J. Ces termes ont été calculés par (Fassi-Fehri et al.) [10]. L'expression (V.46) constitue alors un système d'équations linéaire d'inconnus $\dot{\epsilon}^I$. Le rang de ce système est égal au nombres de grains considérés.

Plutôt que de résoudre directement un tel système, il est préférable de choisir L^0 proche ou égal à L^{eff} . Dans ce cas, les contributions de termes tels que

$T^{II} \Delta L^J \dot{\epsilon}^I$ pour ($I \neq J$) peuvent être négligées puisque leur effet sur $\dot{\epsilon}^I$ a été pris en compte au travers de l'interaction entre le grain J et le milieu homogène équivalent L^{eff} . Le choix de $L^o = L^{eff}$ et la limitation à $I = J$ des termes de l'expression (V.46) constituent la solution autocohérente à un site de l'équation intégrale [7] (V.39).

Ainsi en adoptant les hypothèses précédentes, nous transformons l'équation intégrale en une équation algébrique.

L'équation (V.46) s'écrit alors:

$$\dot{\epsilon}^I = \dot{\epsilon}^0 + T^{II} \Delta l^I \dot{\epsilon}^I \quad (V.48)$$

Par analogie avec la relation V.28 on déduit de l'expression V.48, la valeur du tenseur localisation $A(r)$:

$$A(r) = \sum_{I=1}^N A^I \theta^I(r) = \sum_{I=1}^N (1 - T^{II} \Delta l^I)^{-1} \theta^I(r) \quad (V.49)$$

L'utilisation de V.31, nous permet maintenant de relier le module tangent macroscopique L^{eff} au module tangent local l^I .

$$L^{eff} = \frac{1}{V} \int_V l(r) A(r) dv = \frac{1}{V} \int_V \left(\sum_{I=1}^N l^I \theta^I(r) \right) \left(\sum_{J=1}^N A^J \theta^J(r) \right) dv \quad (V.50)$$

Finalement on obtient:

$$L^{eff} = \sum_I l^I A^I \frac{V^I}{V} = \sum_I l^I A^I F^I \quad (V.51)$$

En notant F^I la fraction volumique des grains de la classe I .

L'équation (V.51) constitue une relation implicite pour L puisque T^{II} et Δl^I dépendent du tenseur inconnu L^{eff} . Le module local l^I définissant le comportement du grain pendant la transformation est donné par la loi de comportement V.18 on a:

$$g_{ijkl}(r) = \sum_n \epsilon_{ij}^n(r) \sum_m (H^{nm})^{-1} \epsilon_{kl}^m(r) \text{ si } r \in V^n \quad (V.52)$$

$$n_{ij}(r) = \sum_n \epsilon_{ij}^n \sum_n (H^{nm})^{-1} B \text{ si } r \in V^n \quad (V.53)$$

$$l_{ijkl}^I = \left[\sum_n \epsilon_{ij}^n \sum_m (H^{nm})^{-1} \epsilon_{kl}^m \right]^{-1} \quad (V.54)$$

Le module effectif du polycristal va donc dépendre de l'orientation des grains, de la température, par le biais de la contrainte critique de transformation, mais également du nombre et de la nature des variantes de martensite formées dans chaque grain. La détermination numérique de ce code de calcul a été conçue au laboratoire par [P. Lipinski et A Nadari....] puis adaptée aux AMF par M. O. Bensalah et E. Patoor [15,16]

V.4 / CHOIX DES PARAMETRES DE BASES:

On considère un polycristal constitué de 100 grains de forme sphérique, dont les orientations $\phi_1 \phi \phi_2$ sont choisies de façon aléatoire pour constituer un matériau isotrope sans texture initiale [tableau (III-1) figure (III-3)].

Le comportement élastique est supposé homogène et isotrope, déterminé par la donnée du module de cisaillement ($\mu = 40000$ MPa) et du coefficient de Poisson ($\nu = 0,3$). Pour décrire la transformation on prend les paramètres types correspondant à la transformation martensitique $\beta \rightarrow \beta'$ dans les alliages à mémoire de forme de type CuZnAl. Dans cette classe de matériau, la martensite peut se former selon 24 variantes cristallographiquement équivalentes. Ces variantes forment 6 groupes autoaccommodant (Tableau IV). On choisit une température M_s de transformation égale à 273 K. Le coefficient de proportionnalité B est choisi à partir des résultats expérimentaux obtenus sur des monocristaux [20] de CuZnAl. Pour ce type de matériau on mesure $\frac{d\Sigma}{dT} = \frac{B}{\epsilon^n} = 2 \text{ MPaK}^{-1}$ où n désigne la variante la mieux orientée par rapport au champ Σ_{ij} . On obtient $B = 0,23 \text{ MPaK}^{-1}$ pour un volume unitaire d'austénite. Les interactions entre les variantes de martensite, sont prises en compte par la matrice d'interaction H^{nm} définie au chapitre IV. Les termes d'interaction entre les variantes compatibles sont de l'ordre de $\frac{\mu}{1000}$ et de

l'ordre de $\frac{\mu}{150}$ pour les interactions incompatibles. La cission critique initiale est supposée identique sur toutes les variantes d'un grain. Ainsi le nombre de paramètres ou de variables décrivant le matériau est restreint. Ces paramètres sont entièrement déterminés par le comportement intrinsèque du monocristal.

V.5 / RESULTATS POUR LA TRACTION UNIAXIALE:

Les résultats numériques présentés dans ce paragraphe sont obtenus à partir de la résolution de l'équation (V.54) [15,16]. Dans cette approche on choisit comme milieu de référence L^0 , le module effectif calculé au pas précédent. A l'aide de ce modèle et à partir des paramètres de base définie au paragraphe précédent, on simule le comportement en traction uniaxiale d'un alliage à mémoire de forme de type CuZnAl (figure(V-1)). On distingue sur cette figure, 4 domaines de comportement distincts. Le premier stade correspond au comportement élastique du matériau, il se produit pour des valeurs de contrainte inférieure à Σ_0 . Σ_0 représente la contrainte critique de transformation, c'est une fonction de la température. Cette valeur correspond à l'initiation de la transformation dans le grain le plus favorablement orienté par rapport à l'axe de traction. On a vu au chapitre III que pour un polycristal, du fait du grand nombre d'orientations cristallines possible, il existe toujours des grains possédant un facteur de Schmidt proche de 0,5. La valeur Σ_0 sera donc directement reliée à la valeur de la cission critique de transformation τ_0 . On a la relation suivante: $\Sigma_0 = 2\tau_0$

Dans l'exemple présenté dans la figure (V-1) τ_0 est choisie égale à 50 MPa et on obtient $\Sigma_0 \approx 100$ MPa. Le second stade se caractérise par un module de transformation important ($\frac{d\sigma}{d\varepsilon^{pt}} \approx 30000$ MPa) dans le domaine $1 < \frac{\Sigma}{\Sigma_0} < 3$.

On observe ensuite un troisième stade où le module de transformation devient

beaucoup plus faible ($\frac{d\sigma}{d\varepsilon^{pt}} \approx 5000 \text{ MPa}$) pour $3 < \frac{\Sigma}{\Sigma_0} < 4,5$. Dans ce

domaine le module de transformation calculé possède le même ordre de grandeur que ceux mesurés expérimentalement. Le dernier stade $\frac{\Sigma}{\Sigma_0} > 4,5$ se

caractérise pour finir par une consolidation importante de la courbe de comportement. Dans les alliages à mémoire de forme à base de cuivre, le dernier stade n'est jamais observé expérimentalement. Cependant il est mis en évidence dans les NiTi (Manach [11] figure 4.4).

L'utilisation d'un modèle de type micro-macro fondé sur la description des mécanismes physiques élémentaires de déformation permet d'obtenir directement la cinétique de la transformation martensitique, sans recourir à l'introduction dans le modèle d'une loi de cinétique phénoménologique particulière comme par exemple la relation de Koistinen et Marburger [12]. La cinétique de transformation déterminée par le modèle (figure (V-2)), présente l'allure en S caractéristique de nombreux phénomènes physiques comportant une période d'amorçage pour ($f < 10\%$), un stade de propagation et un domaine de saturation pour ($f > 70\%$), on remarque que ces différentes étapes correspondent avec celles observées sur la courbe de comportement.

La modélisation micromécanique utilisée donne également des informations sur l'évolution de la déformation moyenne de transformation dans la martensite. On obtient une évolution beaucoup plus importante (figure (V-3)), que celle obtenue au chapitre III à partir de la minimisation du potentiel thermodynamique linéarisé. Les résultats ainsi obtenus correspondent maintenant aux valeurs habituellement admises comme valeurs maximales pour la déformation de transformation dans les polycristaux. L'échelle de modélisation adoptée dans ce travail permet de donner une interprétation physique à ces différents résultats. Ainsi on peut suivre l'évolution du nombre de grains en cours de transformation pendant le chargement et celle du nombre

de variantes activées dans chaque grain (figure (V-4)). On observe que le stade d'amorçage de la transformation obtenu pour la cinétique et le stade II du comportement ($\frac{d\sigma}{d\varepsilon^{pt}} \approx 30000 \text{ MPa}$), sont analogues à un phénomène de microplasticité dans le matériau. Pendant cette période, la transformation se met progressivement en place dans les différents grains constituant le matériau. Le nombre de variantes dans chaque grain est alors légèrement supérieur à 1. Au cours de ce stade la déformation moyenne de transformation (figure (V-3)) présente une première saturation autour de 9,5%, valeur qui correspond à celle déterminée par la minimisation linéaire [Chapitre III figure (III-5)]. Cette concordance des résultats s'explique par la croissance d'une seule variante active par grain, celle possédant le facteur de Schmidt le plus élevé. A partir du moment où la transformation se réalise dans tout les grains, on observe une croissance continue du nombre de variantes activées à l'intérieur de chaque grain. Cette évolution semble tendre de façon asymptotique vers une moyenne de 4 variantes par grain. Cette augmentation du nombre de variantes correspond à un accroissement des contraintes internes d'incompatibilités d'origine intergranulaire. Ces contraintes internes sont alors accommodées par la formation de variantes de martensite moins bien orientées par rapport au chargement extérieur que celles initialement formées au stade précédent. La seconde décroissance de la déformation moyenne de transformation observée sur la (figure (V-3)) trouve son origine dans ce phénomène. La forte capacité du matériau à accommoder les contraintes internes en multipliant le nombre de variantes formées, explique les régimes stationnaires rencontrés sur les figures (V-1) et (V-2). De la même façon la saturation de la cinétique et la forte consolidation obtenue lors du stade IV proviennent de la moindre capacité du matériau à se déformer à partir du moment où certains grains sont totalement transformés et retrouvent alors un comportement élastique (pour $f=1$). Cette dernière étape du comportement souligne l'importance de l'introduction de la

condition cinématique, $f \leq 1$ dans la description du comportement de chaque grain. Ces résultats montrent le rôle très important joué par les contraintes internes dans la sélection des variantes de martensite. D'autres résultats ont également été mis en évidence à l'aide du schéma autocohérent adopté [13,14]. On détermine de cette façon l'influence de la température sur le comportement (figure (V-5)). On observe que le début de la transformation varie fortement en fonction de l'écart $T-M_s$. Ceci s'explique par la relation unissant la contrainte Σ_0 critique à la température T . Rapportées à la contrainte critique, les caractéristiques du stade II restent inchangées $1 < \frac{\Sigma}{\Sigma_0} < 3$ mais le niveau de

contraintes atteint à la fin de ce stade provoque des répercussions sur les stades suivants. On observe une augmentation de la déformation maximale de transformation avec la température (figure (V-6)) et une croissance de la pente de transformation du stade III (figure (V-7)).

L'étude de l'évolution des directions principales de la déformation totale montrent que celles ci restent inchangées au cours de la transformation (figure V-8).

V.6 / SENSIBILITE AUX PARAMETRES

Dans ce paragraphe on détermine l'influence des paramètres de base (nombre d'orientations cristallines prises en compte, amplitude g du déplacement dans la direction de transformation et valeur des termes de la matrice d'interaction H) sur le comportement superélastique des alliages à mémoire de forme

a. / Nombre d'orientations cristallines prises en compte

Les résultats précédents ont été obtenus en simulant la réponse d'un polycristal non texturé représenté par une distribution de 100 orientations cristallines. On

compare ces résultats avec ceux obtenus à l'aide d'une distribution de 1000 orientations aléatoires n'induisant aucune texture initiale. On remarque que la réponse ainsi obtenue est presque identique à celle obtenue précédemment (figure (V-9)). Par contre le temps de calcul nécessaire est supérieur d'un facteur de 4. 100 grains d'orientations différentes constituent donc une description satisfaisante du polycristal pour les applications aux alliages à mémoire de forme.

V.6.b / Variation de l'amplitude du déplacement g

La variation de l'amplitude du déplacement g dans la direction de transformation (figure (V-10)), n'a pas d'influence sur le début de la transformation. Par contre l'apparition du stade IV est fortement dépendant de la valeur de g . L'évolution de la déformation maximale de transformation en fonction de g , est illustrée sur la (figure (V-11)). La (figure (V-12)) donne l'allure de la cinétique de la transformation. Celle ci montre que la cinétique de la transformation est fortement dépendante de la valeur de g . Plus g est faible plus la condition de saturation ($f=1$) et le durcissement du matériau apparaissent rapidement.

V.6.c / Influence de la matrice d'interaction H^{nm}

La sensibilité des résultats obtenues à l'aide de l'approche autocohérente par rapport aux paramètres d'entrée du modèle a également été vérifiée pour les données de la matrice d'interaction. La forme générale de cette matrice (compatibilité des variantes, répartition des groupes autoaccommodants) est déterminée à partir des résultats obtenus par l'étude micromécanique de la transformation réalisée au chapitre IV. Les résultats ainsi obtenus sont en bon accord avec les relevés expérimentaux effectués par plusieurs auteurs [13,14].

Deux types de contributions constituent cette matrice. Les termes d'interaction faible entre variantes compatibles $H_1 = \frac{\mu}{1000} = \frac{\mu}{h_1}$ et les termes d'interaction

forte entre variantes incompatibles $H_2 = \frac{\mu}{150} = \frac{\mu}{h_2}$. Dans ce paragraphe on

étudie l'influence du degré d'anisotropie A de la matrice d'interaction $A = \frac{H_1}{H_2} = \frac{h_1}{h_2}$. Pour un coefficient d'anisotropie donné on détermine

également l'influence du paramètre h_1 . Une perturbation de 30% des paramètres A et h_1 ne possède aucune influence sensible sur la réponse globale obtenue (figure (V-13)). On peut donc en déduire que le comportement modélisé est très stable par rapport à ces facteurs. Une étude plus approfondie de la sensibilité à ces paramètres montre en effet que pour obtenir des effets véritablement sensibles il est nécessaire de changer l'ordre de grandeur de ces paramètres. La figure (V-14) montre l'influence du coefficient d'anisotropie A (pour $h_1 = 1000$) sur le comportement. Le rapport A prend les valeurs 1, 6.7, 67 et 667; lors de cette variation, les deux premiers stades du comportement sont identiques pour toutes ces valeurs. Cependant à partir du moment où la transformation se met en place dans tous les grains, le durcissement du matériau est d'autant plus grand que le rapport d'anisotropie A est élevé (figure (V-14)). Ceci s'explique par la diminution du nombre moyen de variantes formées dans chaque grain avec l'augmentation de l'anisotropie de la matrice H (figure (V-15)). On étudie également l'influence du paramètre h_1 pour A donné figure (V-16). On observe un comportement similaire à celui de la (figure (V-14)). De la même façon quand h_1 décroît, le nombre moyen de variantes actives dans chaque grain décroît également (figure (V-17)). On observe la même évolution pour un coefficient A plus élevé (figure (V-18) et (V-19)). La faible influence d'une perturbation des paramètres h_1 et A autour des valeurs déterminées par différentes approches micromécaniques [8,13] et la valeur moyenne de 3,5 variantes actives par grain (qui est en concordance

avec les observations métallographiques) montre que la matrice d'interaction H choisie est correctement dimensionnée. les résultats qui suivent sont donc réalisés avec les valeurs $A=6,7$ et $h_1 = 1000$

V.7 / COMPARAISON AVEC LES RESULTATS EXPERIMENTAUX

On utilise les résultats expérimentaux réalisés au L.P.M.M par A. Hautcoeur [17] et à au LMA par P. Vacher [18] pour valider la modélisation micromécanique présentée dans ce chapitre. L'alliage utilisé par (A. Hautcoeur) est élaboré par Trefimétaux, c'est un polycristal R58, il possède la composition suivante: (Cu 68,9% en poids, Zn 27,3 en poids % et Al 3,7% en poids). Il a subi les traitements thermique suivants: Recuit 850°C pendant 15 min, trempe à l'eau à 20°C. Pour obtenir la phase austénitique métastable à l'ambiante. La température M_s mesurée sur cet alliage est de $M_s = -10^\circ\text{C}$. L'alliage utilisé par P. Vacher est élaboré par Trefimétaux, c'est un polycristal R205, il possède la composition suivante: (Cu 67,94% en poids, Zn 28,06 en poids % et Al 4% en poids). Il a subi les traitements thermiques suivants: Recuit 850°C pendant 10 min, trempe à température ambiante dans l'eau maintien à 20°C pendant 48h. La température M_s mesurée sur cet alliage est de $M_s = -98^\circ\text{C}$.

Les paramètres de calcul utilisés par la détermination numérique sont donnés dans le tableau (V-1):

nombre de grains	$N = 100$
forme des grains	Sphérique
fraction volumique des grains	0,01
orientation des grains	$\varphi_1 \Phi \varphi_2$ données du tableau (III-1)
nature des variantes	n, m de type [2 11 12] données du tableau (IV-5)
amplitude g	0,23
matrice d'interaction H_{nm}	$A = 6,7 \quad h_1 = 1000$
coefficient $B = \frac{\partial \tau}{\partial T}$	1 MPa K ⁻¹
module de cisaillement	$\mu = 40\,000$ MPa
module de poisson	$\nu = 0,3$

Tableau (V-1): Paramètres utilisés dans la résolution numérique du modèle de comportement Self-consistent développé dans ce chapitre

Les calculs effectués dans ces conditions ont donné des résultats en bon accord avec le comportement expérimental (figure (V-20)). Le stade IV obtenu avec la modélisation n'est pas observé expérimentalement. Dans les matériaux réels, le niveau de contrainte interne atteint dans ce stade est trop important et d'autres mécanismes de déformation sont alors activés (plasticité classique, rupture...). L'allure de la cinétique de transformation déterminée par le modèle est comparable au résultat expérimental obtenu par Vacher (figure (V-21)). On y distingue nettement les trois stades du comportement. L'influence de la température sur le comportement est aussi en bon accord avec les résultats expérimentaux. A partir de la courbe (V-22) on détermine une relation $\frac{d\sigma}{dT}$ égale à 2. Cette valeur est en accord avec les mesures expérimentales effectuée par P. Vacher [18].

V.8 / DISSYMETRIE DU COMPORTEMENT EN TRACTION ET EN COMPRESSION

Les résultats du chapitre III concernant la dissymétrie du comportement en traction et en compression (figure(V-23,24)) sont confirmés par cette approche. Ceci s'explique par la formation de variantes différentes pour la traction et pour la compression. Ce résultat est en accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Vacher (figure (V-25)).

V.9 / INFLUENCE DE LA TEXTURE INITIALE

Les résultats présentés précédemment sont obtenus à partir d'une texture isotrope. Dans ce paragraphe nous étudions le comportement superélastique des alliages à mémoire de forme pour un polycristal texturé pour déterminer l'influence de la texture sur la transformation. Pour cela, les calculs sont réalisés sur un polycristal représenté par 400 grains et possédant une texture de laminage (figure V-26). Les calculs effectués sur ces 400 grains texturés montre une évolution sensible par rapport à un calcul réalisé pour 400 grains non texturés (figure V-27). Le seuil de transformation est modifié, la déformation maximale de transformation également ainsi que la pente $\frac{d\varepsilon^{pt}}{d\sigma}$.

V.10 / SURFACES DE CHARGES ET DE DEFORMATIONS AU COURS DE LA TRANSFORMATION

Dans cette étude on utilise une description tridimensionnelle pour la répartition des orientations cristallographiques des grains constituant le polycristal et pour la cristallographie de la transformation. Cette approche peut être donc utilisée

pour décrire des sollicitations triaxiales dans l'espace des contraintes et des déformations.

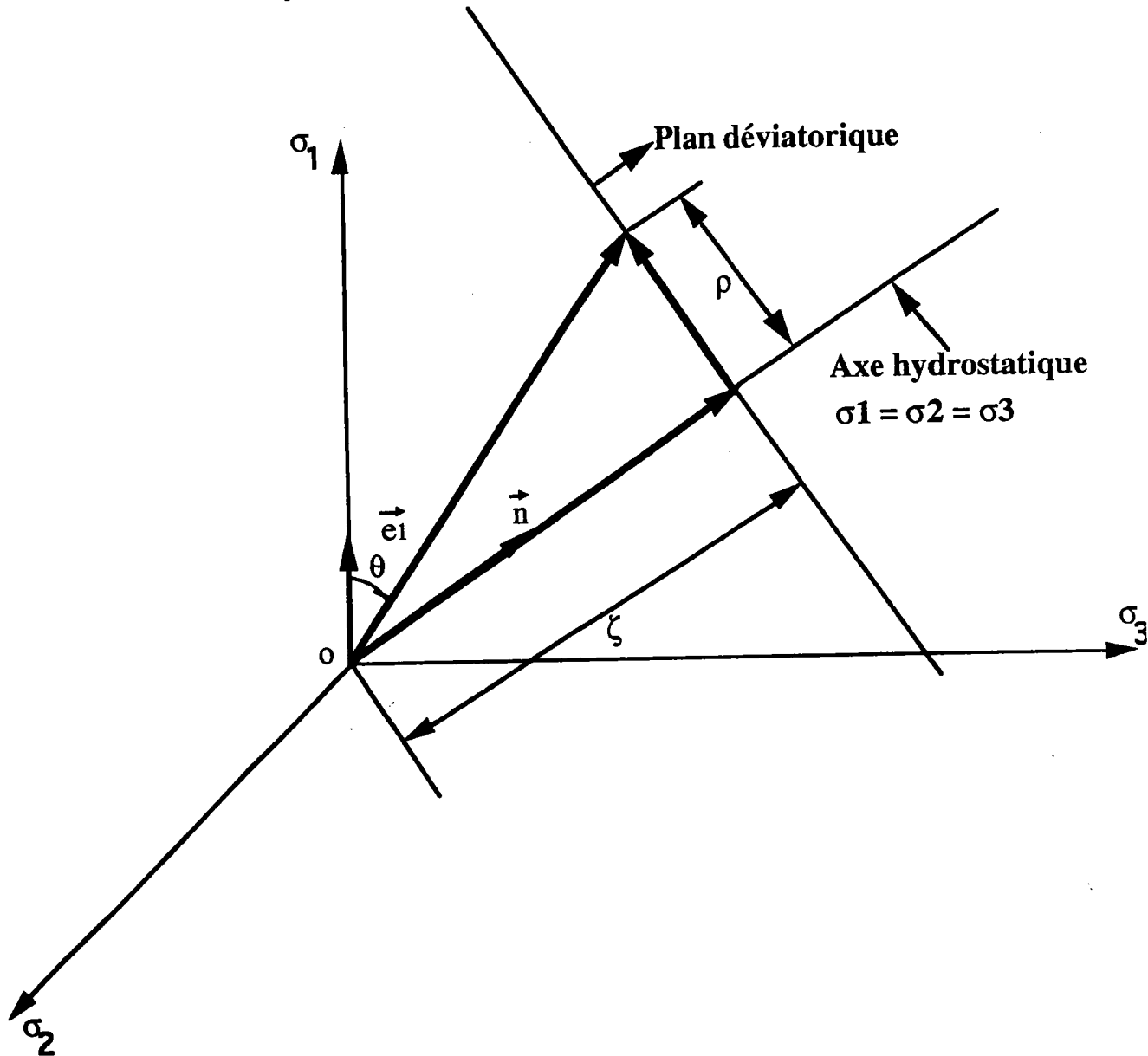
En effectuant différents chargements dans le plan principal des contraintes $\sigma_1 \sigma_2$ (figure V-28), la dissymétrie en traction et en compression est observée pour différentes fractions volumiques de martensite. Par contre le cisaillement est parfaitement symétrique, ce qui a été également trouvé expérimentalement par Manach [11].

En calculant le rapport σ/σ_0 pour différentes fractions volumiques (où σ_0 représente la contrainte critique pour $f = 0$), on obtient une surface de charge unique. Ce résultat permet de conclure à une évolution homothétique de la surface de transformation avec la fraction volumique de martensite (figure V-29). On détermine aussi les surfaces de déformation de transformation ϵ_{11} et ϵ_{22} (figure (V-30)). On définit donc à partir de ce modèle l'allure théorique des surfaces de transformation dans le plan principal des contraintes (figure V-28). Le résultat obtenu montre une surface fortement non symétrique d'allure générale proche de celle déterminée par minimisation linéaire (figure III-27). Cette surface théorique est en accord avec les points expérimentaux connus: dissymétrie prononcée entre la contrainte de transformation pour la traction et la compression [18], symétrie du comportement en cisaillement [11]. On détermine également l'allure de la surface de déformation (figure (V-30)). On obtient également une surface fortement non symétrique analogue à celle déterminée au chapitre III (figure (V-28)). La prise en compte d'un nombre plus grand d'orientations cristallines n'a pas d'influence sensible sur les résultats obtenus (figure (V-31)).

Le caractère tridimensionnel des résultats obtenus peut être généralisé en choisissant de représenter les surfaces de transformation dans l'espace de Haigh-Westergaard (figure V-32) [21]. Dans ce cas on a les relations suivantes pour les contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{Bmatrix} \xi \\ \xi \\ \xi \end{Bmatrix} + \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{Bmatrix} \quad (\text{V.55})$$

Le tenseur des contraintes est maintenant caractérisé à l'aide des trois paramètres scalaires (ξ, θ et ρ).



Figuré (V-32): Définition de l'espace des contraintes de Haigh-Westergaard (ξ, θ et ρ) à partir de l'espace des contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3

Dans le cas du plan déviatorique pour $\xi = 0$ on a la relation suivante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \rho \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \end{Bmatrix} \quad (\text{V.56})$$

En faisant varier θ on obtient la surface de transformation dans le plan déviatorique (figure (V-33)).

Dans le cas où $\xi \neq 0$ on détermine l'évolution de la surface de transformation à partir de la relation (V.55) pour $\theta = 30^\circ$ et 90° (figure (V-35)). Cette représentation montre que la pression hydrostatique joue un rôle très négligeable dans la transformation ceci s'explique par le fait que dans les alliages à mémoire de forme de type CuZnAl la variation de volume liée à la transformation est très faible

V.11 / DETERMINATION D'UN CRITERE PHENOMENOLOGIQUE DE TRANSFORMATION

Les résultats obtenus à partir du calcul par transition d'échelle ont montré que la surface de charge est fortement dissymétrique au cours de la transformation. Il n'est donc pas acceptable de représenter cette surface à l'aide d'un critère isotrope de type Von Mises [19,20,2]. Les résultats du chapitre III et ceux du paragraphe précédent ont montré le rôle négligeable joué par la variation de volume on peut donc utiliser un critère insensible à la pression hydrostatique. Pour tenir compte du caractère anisotrope de la transformation il est nécessaire d'utiliser une fonction critère faisant intervenir le troisième invariant du déviateur des contraintes:

$$F(J_2, J_3, A_k) = 0 \quad (\text{V.58})$$

On utilise la relation de Prager :

$$J_2 \left(1 + b \frac{J_3^{2n}}{J_2^{3n}} \right) = K^2 \quad (\text{V.59})$$

Le comportement étant non symétrique $2n$ doit être impair. On a identifié ce critère en considérant n égal à $1/2$. Dans ce cas il reste deux paramètres b et K à identifier à partir de deux essais. Pour effectuer cette identification on utilise les résultats de la modélisation autocohérente. Pour une fraction f volumique donnée on détermine une contrainte de transformation σ_t en traction uniaxiale et une contrainte σ_c ($\sigma_t \neq \sigma_c$) pour la compression.

L'identification du critère (V.59) pour ces contraintes critiques nous donne:

$$b = \frac{\sqrt{27}}{2} \frac{\sigma_c^2 - \sigma_t^2}{\sigma_c^2 + \sigma_t^2} \quad (\text{V.60})$$

$$K^2 = \frac{2}{3} \sigma_t^2 \frac{\sigma_c^2}{\sigma_c^2 + \sigma_t^2}$$

A partir de ce résultat on compare dans l'espace des contraintes la forme du critère phénoménologique ainsi obtenu avec celle déterminé numériquement par l'approche autocohérente (figure (V-36)). Les deux surfaces sont en bon accord. Nous disposons donc ainsi d'un critère de transformation phénoménologique utile pour le calcul de structure.

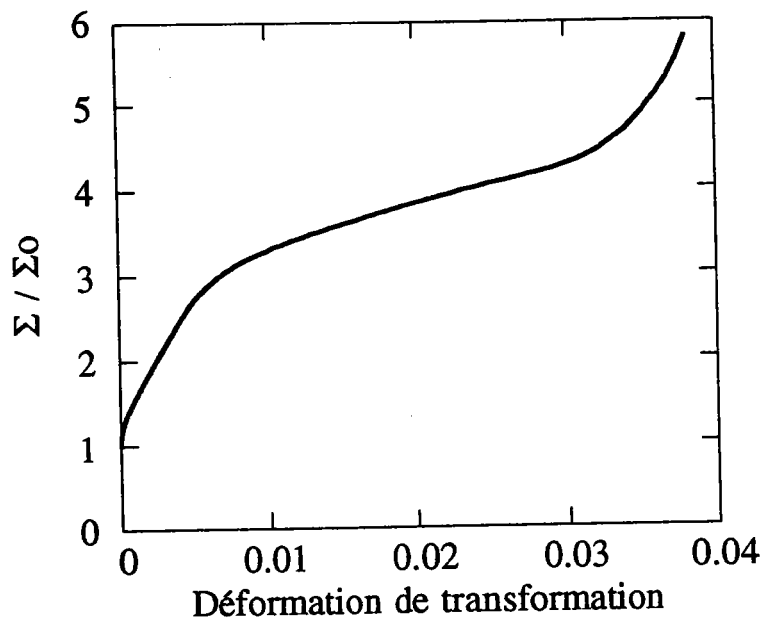


Figure (V-1): Simulation par l'approche autocohérente du comportement superélastique d'un alliage à mémoire de forme de type CuZnAl. Résultats pour la traction uniaxiale rapportée à la contrainte seuil de transformation Σ_0 (T-Ms=50°C, N=100 grains)

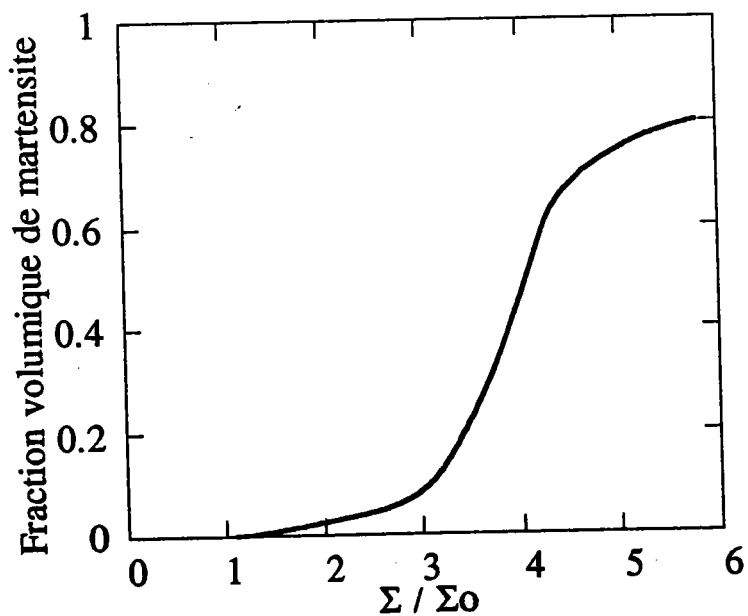


Figure (V-2): Cinétique de la transformation déterminée numériquement à l'aide de l'approche autocohérente pour la traction uniaxiale représentée en figure (V-1) (T-Ms=50°C, N=100 grains)

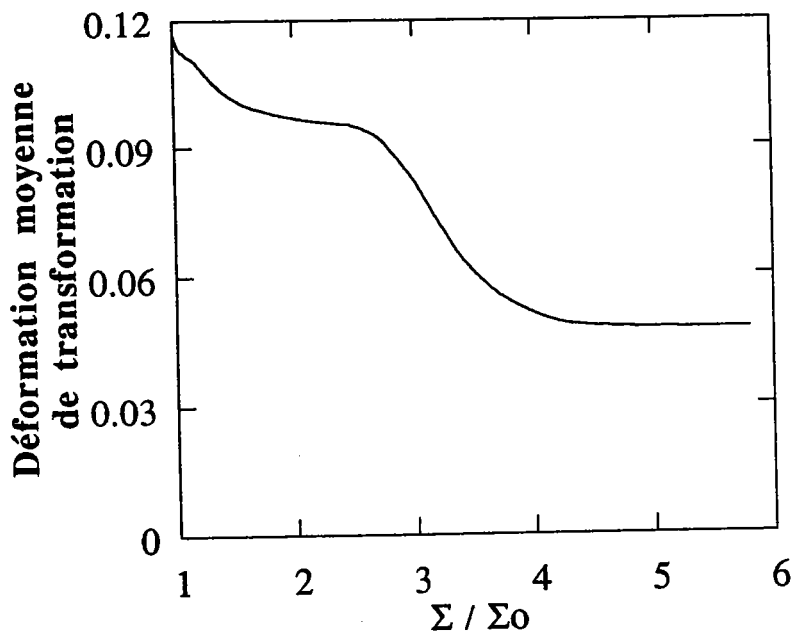


Figure (V-3): Evolution calculée de la déformation moyenne de transformation dans la martensite pour la traction uniaxiale représentée en figure (V-1)

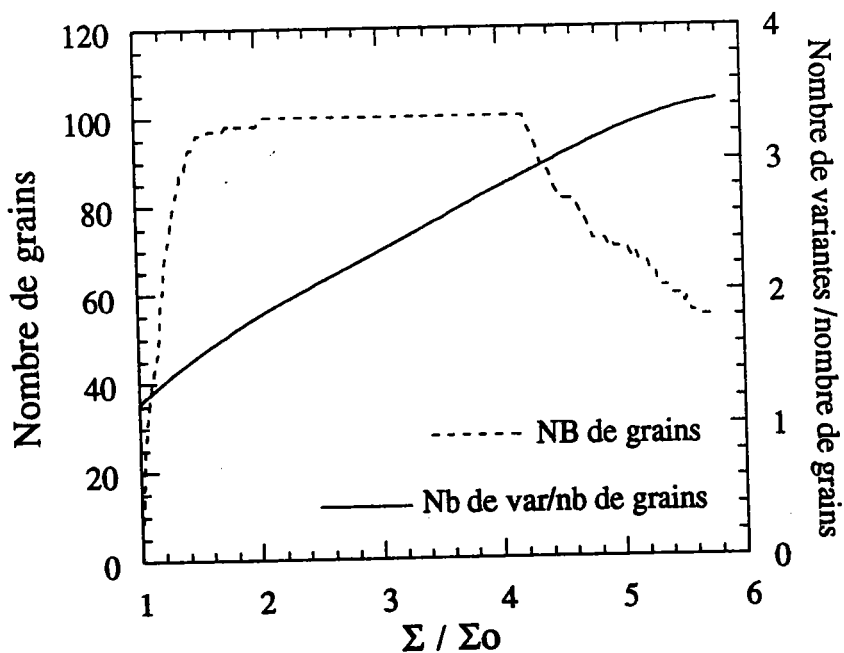


Figure (V-4): Evolution du nombre de grains se transformant au cours du chargement et variation du nombre moyen de variantes actives dans chaque grain pour le comportement simulé en figure (V-1)

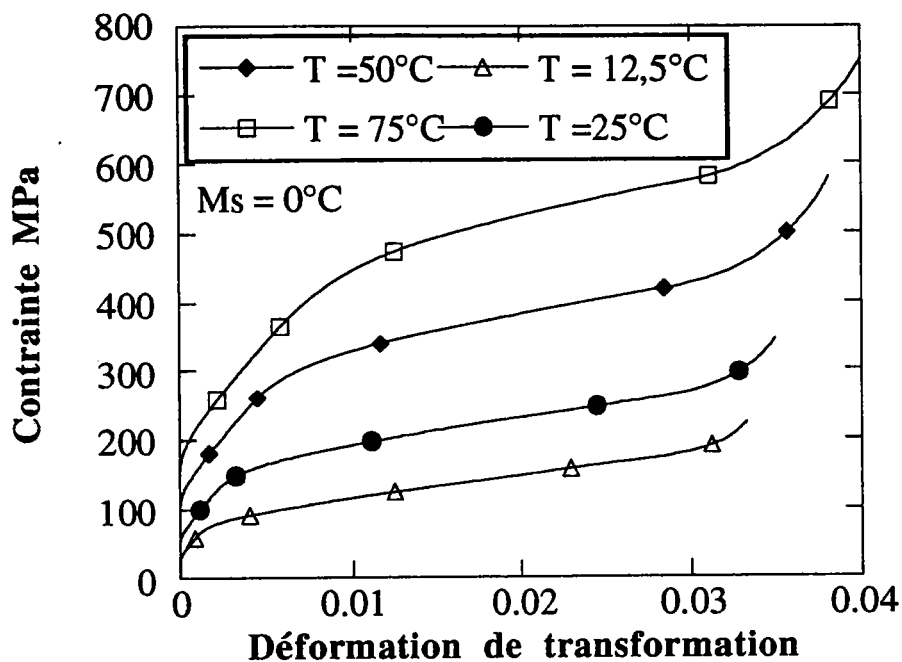


Figure (V-5): Influence de la température sur le comportement superélastique d'un polycristal au cours de la transformation

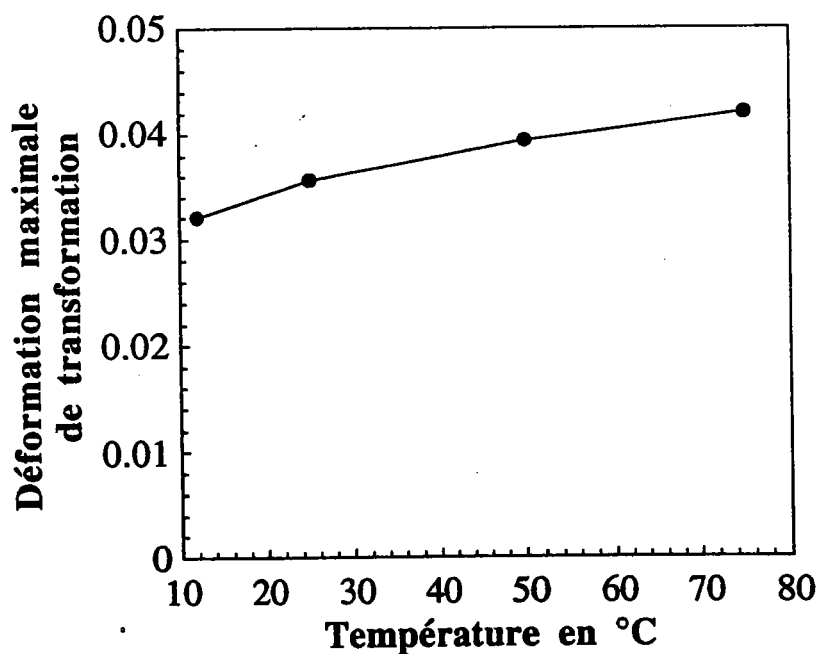


Figure (V-6): Evolution de la déformation maximale de transformation en fonction de la température de l'essai.

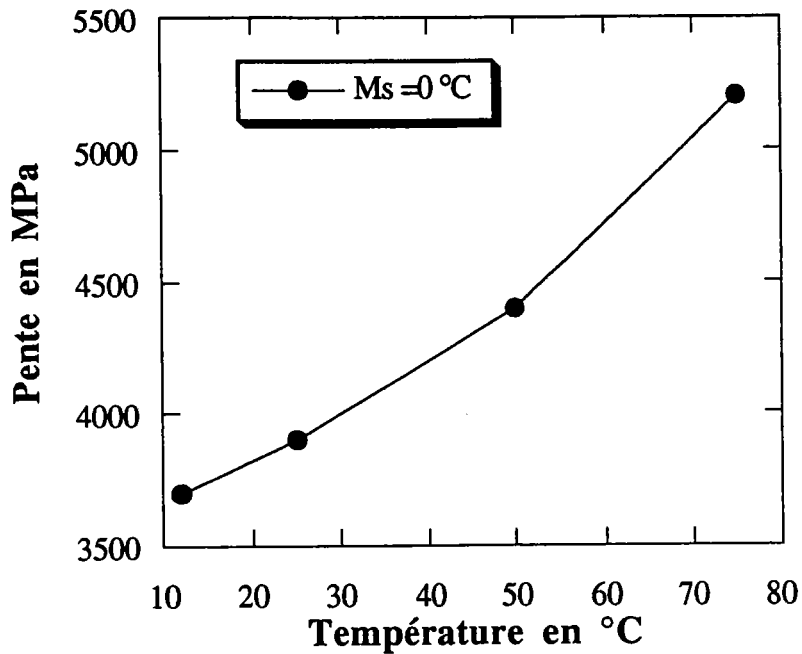
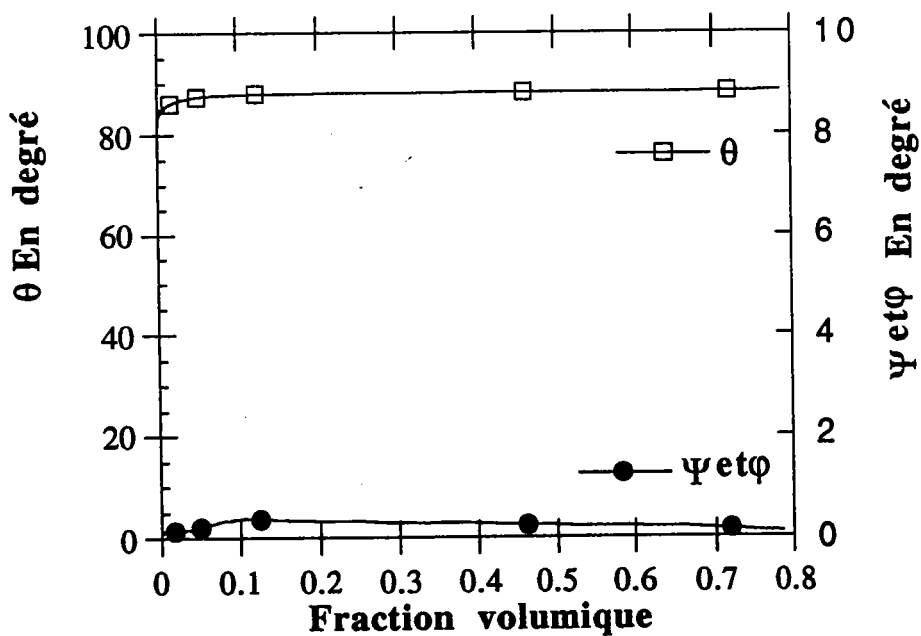


Figure (V-7): Evolution de la pente de transformation du stade III en fonction de la température d'essai.



Figure(V-8): Evolution des directions principales de la déformation au cours de la transformation

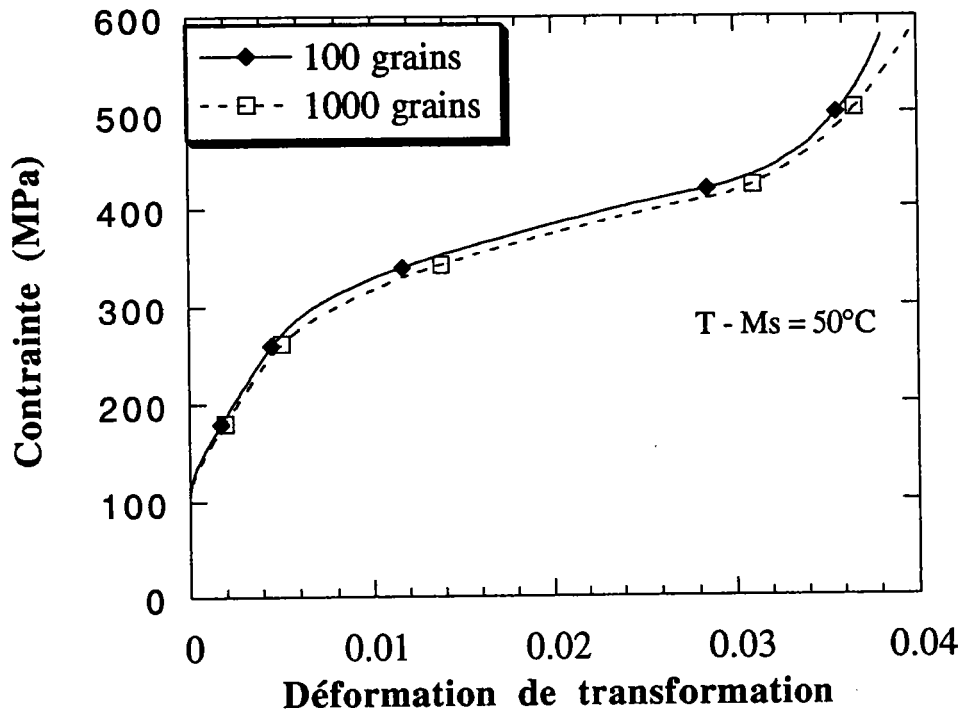


Figure (V-9): Influence du nombre de grains pris en compte sur le comportement superélastique d'un polycristal non texturé

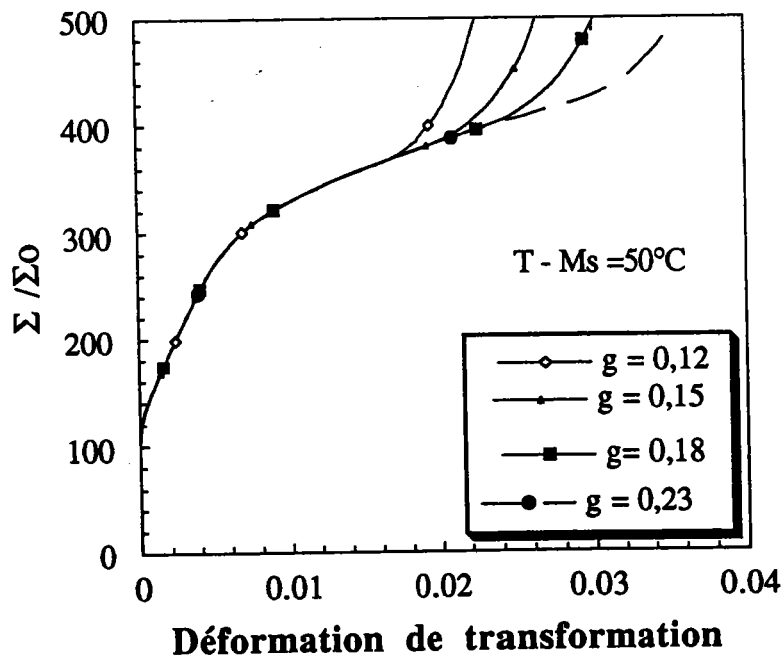


Figure (V-10): Influence de g sur le comportement des A.M.F

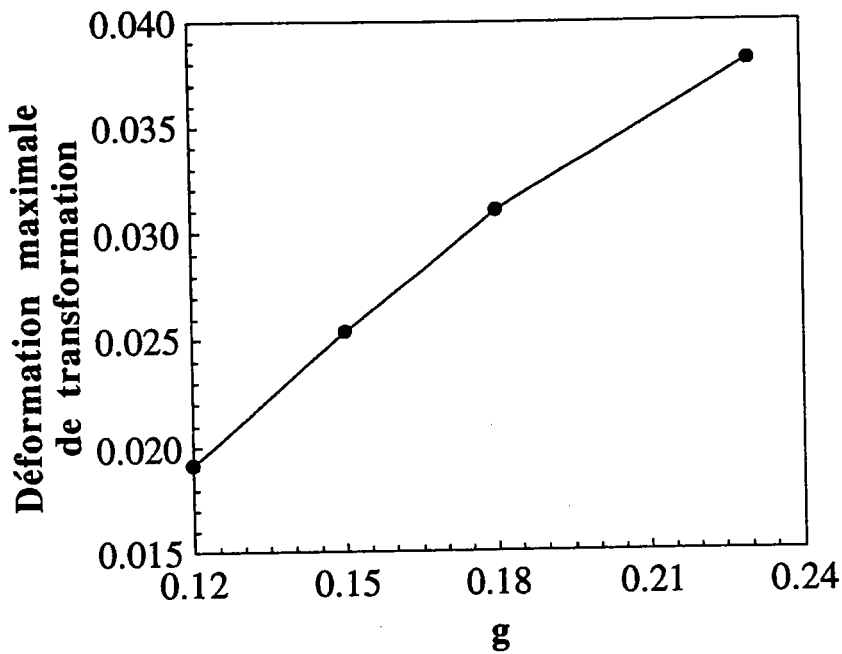


Figure (V-11): Evolution de la déformation maximale de transformation pour différentes valeurs de g (résultats figure (V-10))

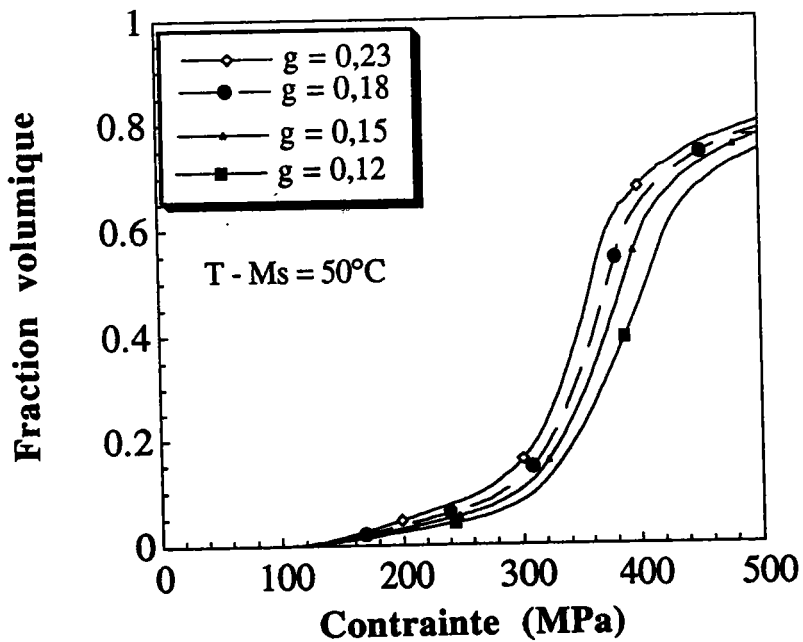


Figure (V-12): Influence de l'amplitude de la déformation de transformation g sur l'allure de la cinétique

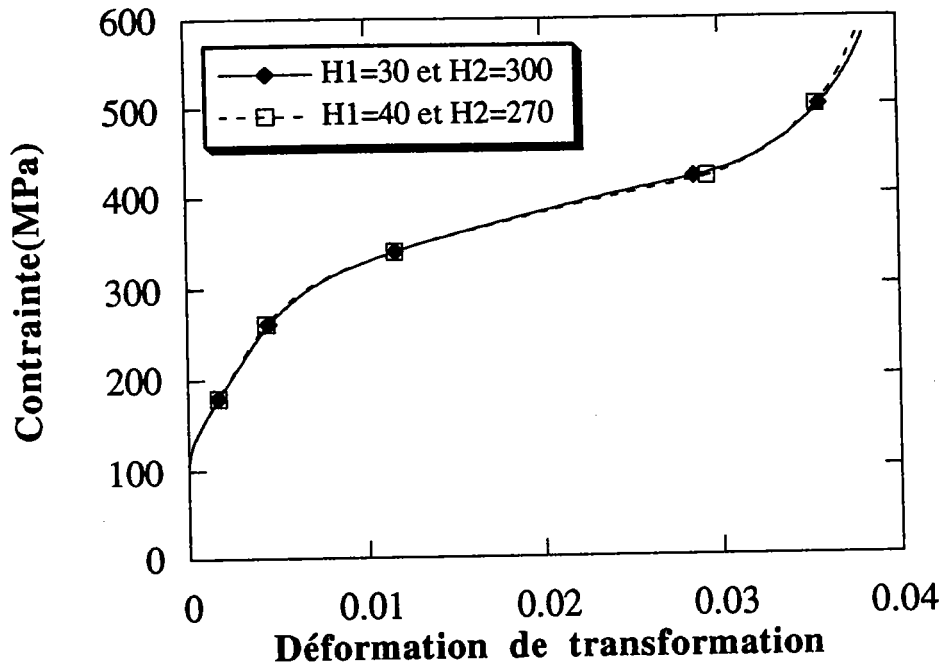


Figure (V-13): Influence sur le comportement globale d'une faible perturbation des paramètres A et h_1 de la matrice d'interaction ($A=10$ et $h_1 = 1334 \rightarrow H_1 = 30$ MPa $H_2 = 300$ MPa, $A=6,7$ et $h_1 = 1000 \rightarrow H_1 = 40$ MPa $H_2 = 270$ MPa)

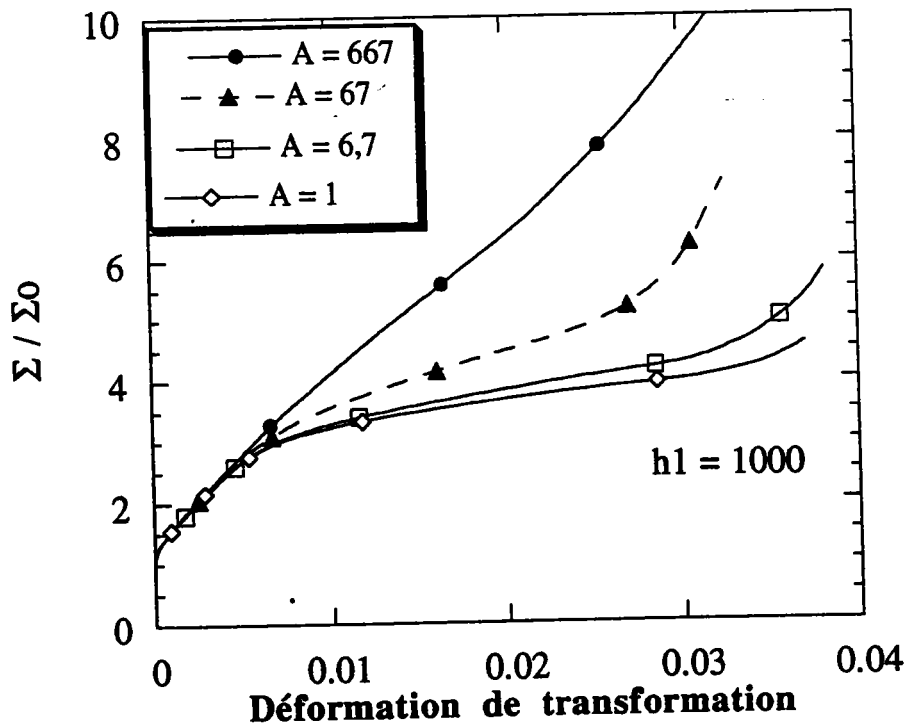


Figure (V-14): Influence du rapport d'anisotropie A sur le comportement au cours de la transformation

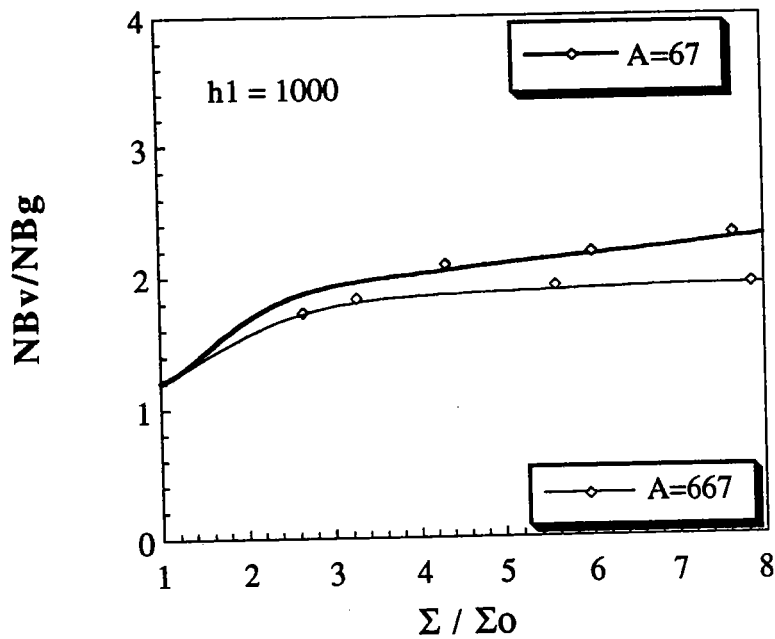


Figure (V-15): Evolution du nombre de variantes actives par grain en fonction du paramètre A pour h_1 donné

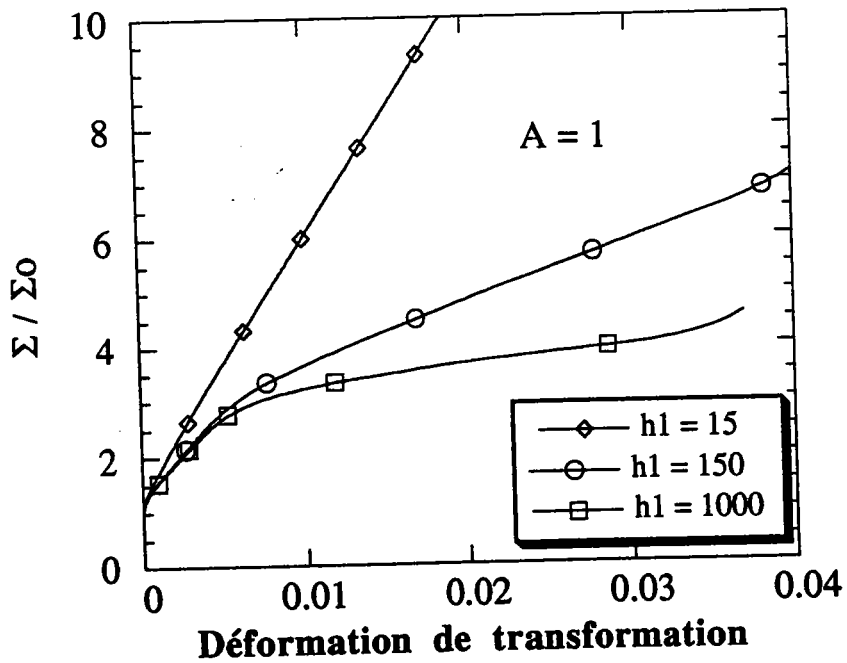


Figure (V-16): Réponses obtenues en traction uniaxiale pour différentes valeurs h_1 ($A = 1$)

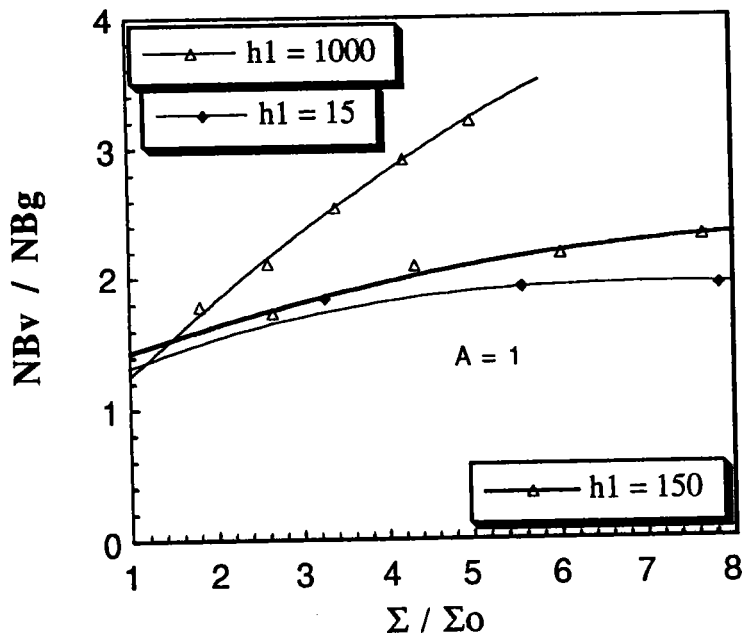


Figure (V-17): Evolution du nombre de variantes actives par grain en fonction de paramètre h_1 pour A donné. ($A = 1$)

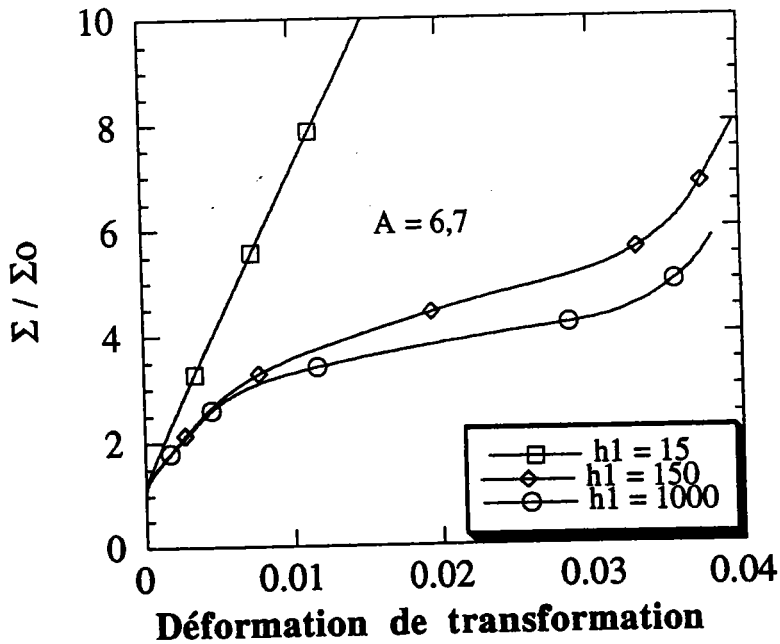


Figure (V-18): Même figure que (V-16) mais pour un paramètre fixé différent ($A = 6,7$)

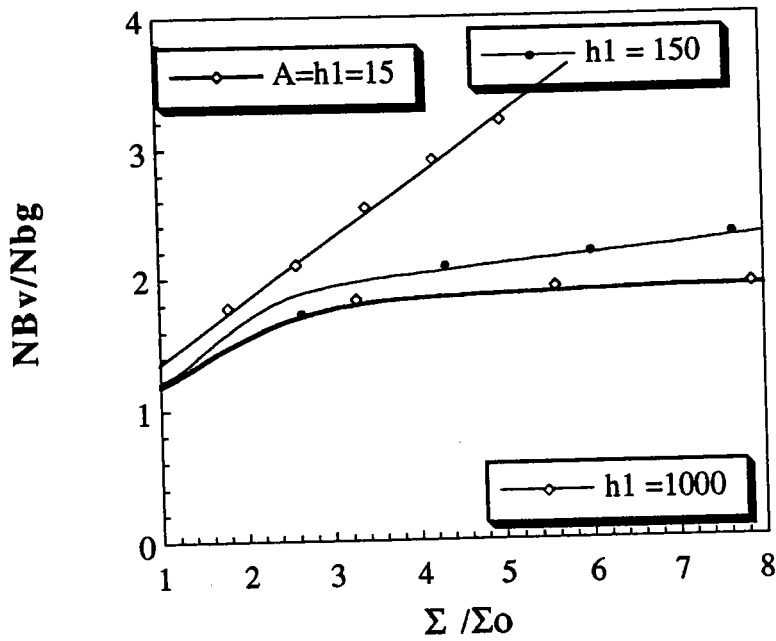


Figure (V-19): Evolution du nombre de variantes actives par grain en fonction du paramètre h_1 pour A donné. ($A=6,7$)

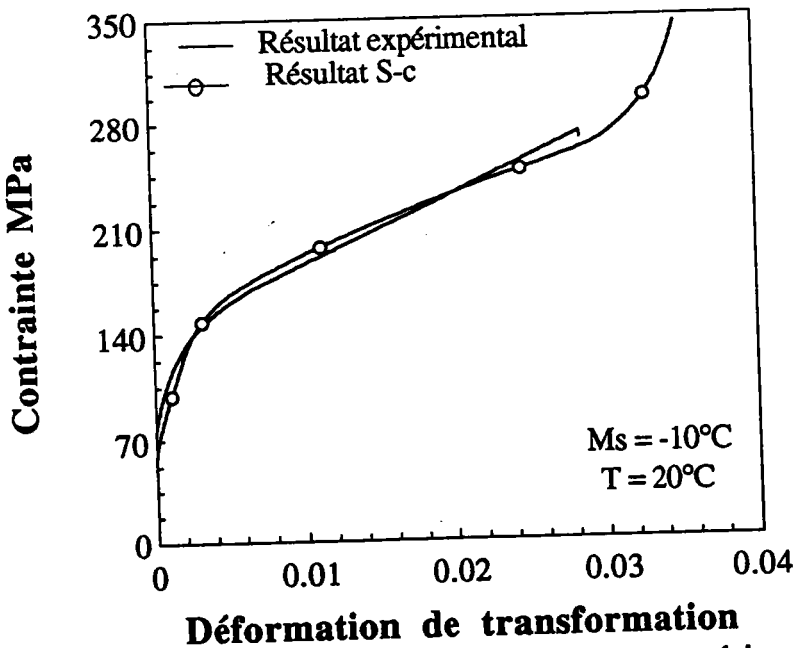


Figure (V-20): Comparaison entre le comportement expérimental obtenu par Hautcoeur [14] sur un alliage CuZnAl (R58) (Cu 68,9% Zn 27,3% et Al 3,7% en poids) et la modélisation autocohérente réalisée à partir des données du tableau (V-1)

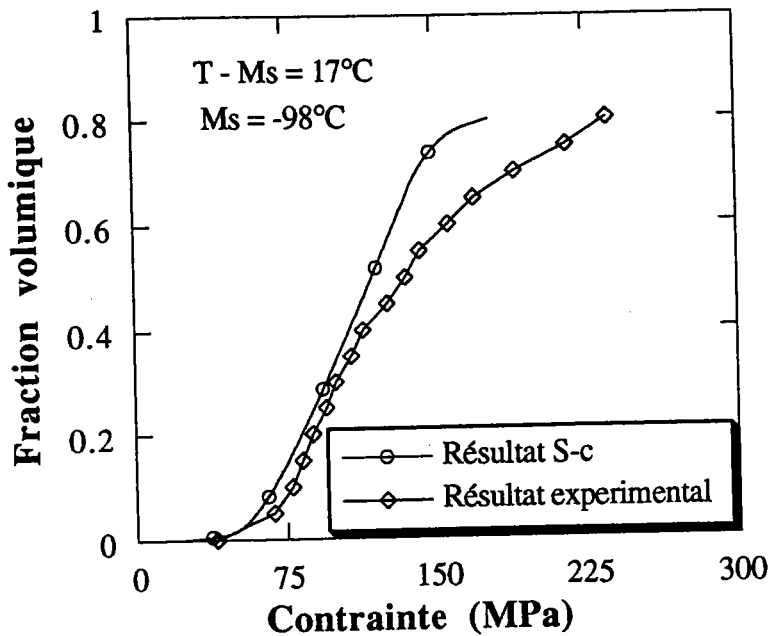


Figure (V-21): Cinétique de la transformation martensitique pendant un essai de traction uniaxiale comparaison du résultat obtenu par le modèle avec la détermination expérimentale réalisée par Vacher [15] sur un alliage de CuZnAl (R205) avec (Cu 67,94% Zn 28,06% Al 4% en poids)

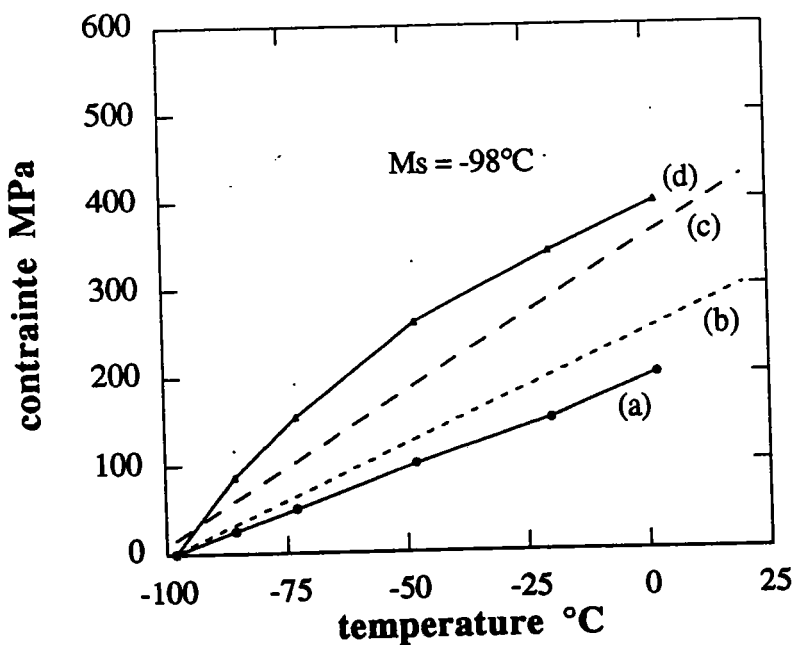


Figure (V-22): Evolution de la contrainte critique de transformation avec la température. Comparaison entre les résultats théorique du modèle et l'étude expérimentale de P. Vacher [15] pour différentes définition du seuil de transformation: 1/ perte de linéarité :(a / théorique b / expérimental) 2 / intersection des tangentes:(c / expérimental d / théorique)

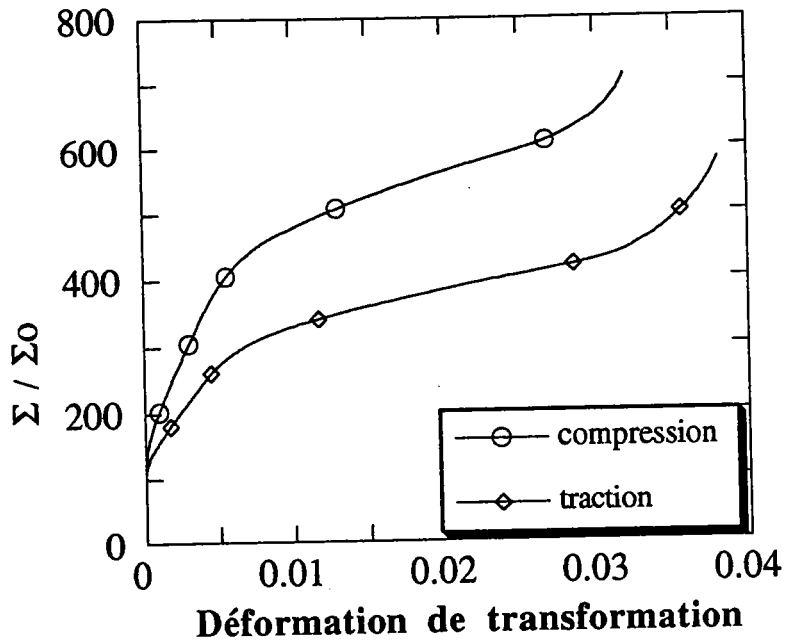


Figure (V-23): Différence du comportement obtenu entre la traction et la compression par le modèle Self-consistent.

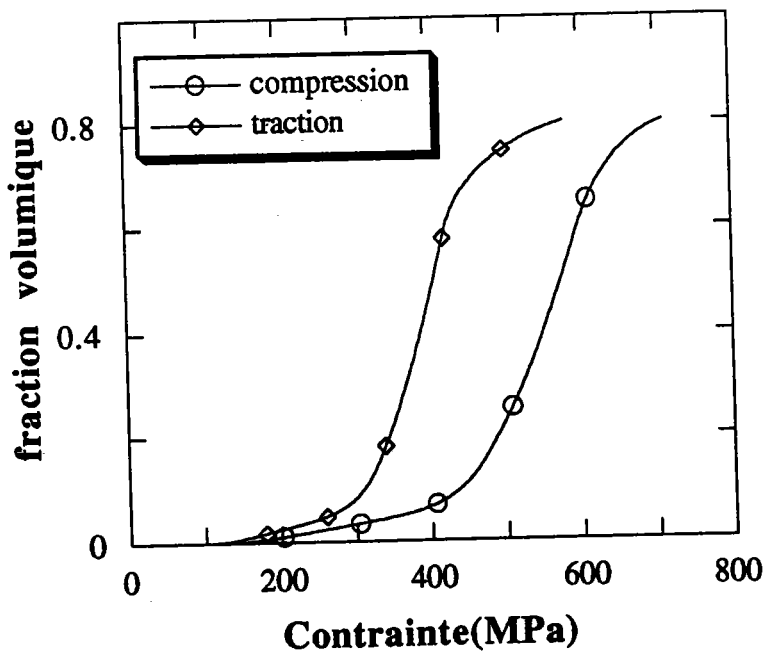


Figure (V-24): Différente cinétique de transformation déterminée par le modèle pour la traction et la compression

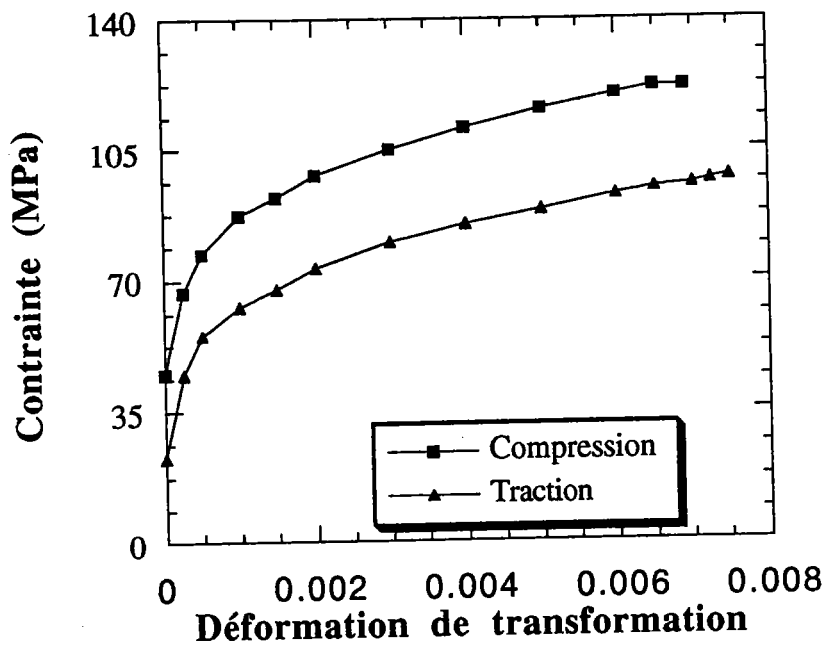


Figure (V-25): Différence de comportement déterminée par Vacher [15] sur un alliage de CuZnAl (R244) avec (Cu 69,64% Zn 26,21% Al 4,09% en poids) pour la traction et la compression

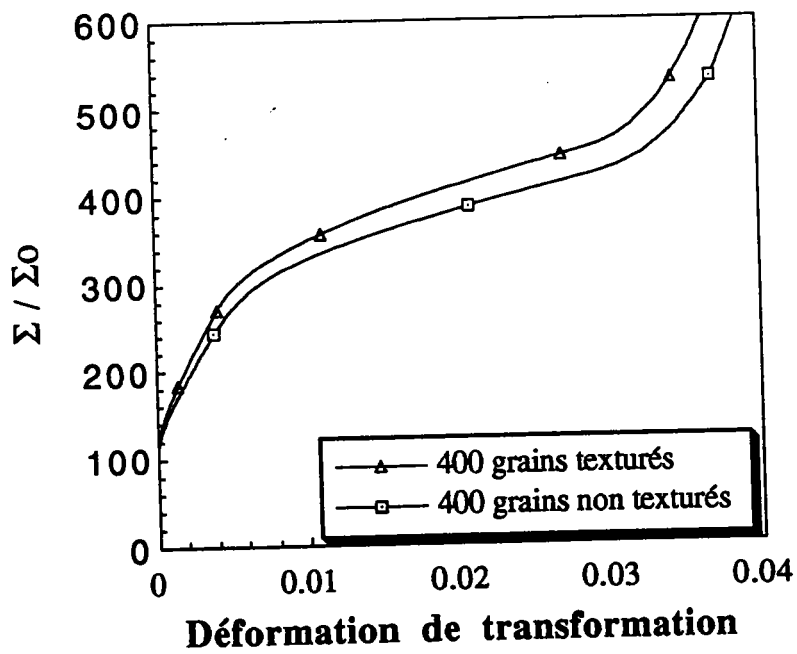


Figure (V-26): Comparaison du comportement superélastique entre un polycristal de 400 grains texturé et un polycristal non texturé de 400 grains

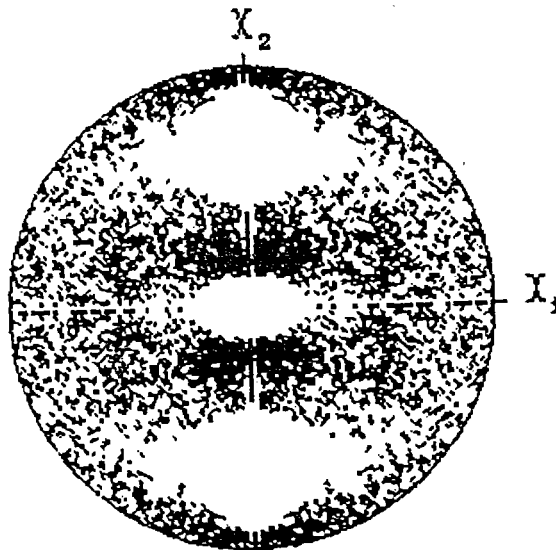


Figure (V-27): figure de pôle D'un polycristal de 400 grains avec une texture de laminage

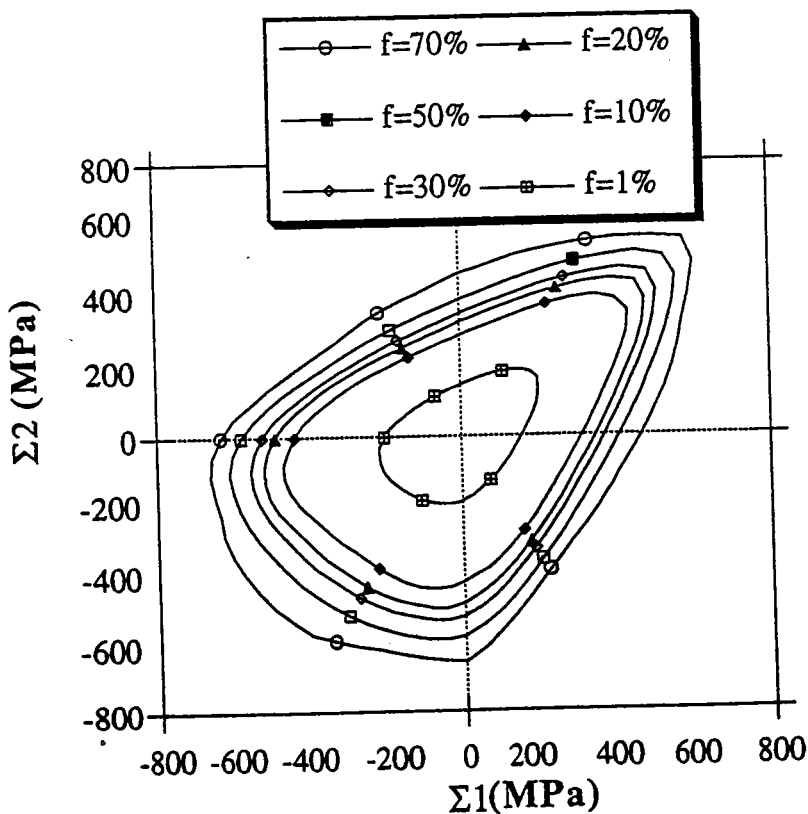


Figure (V-28): Surfaces de transformation pour différente valeur de la fraction totale de martensite déterminée à partir du modèle Self-consistent

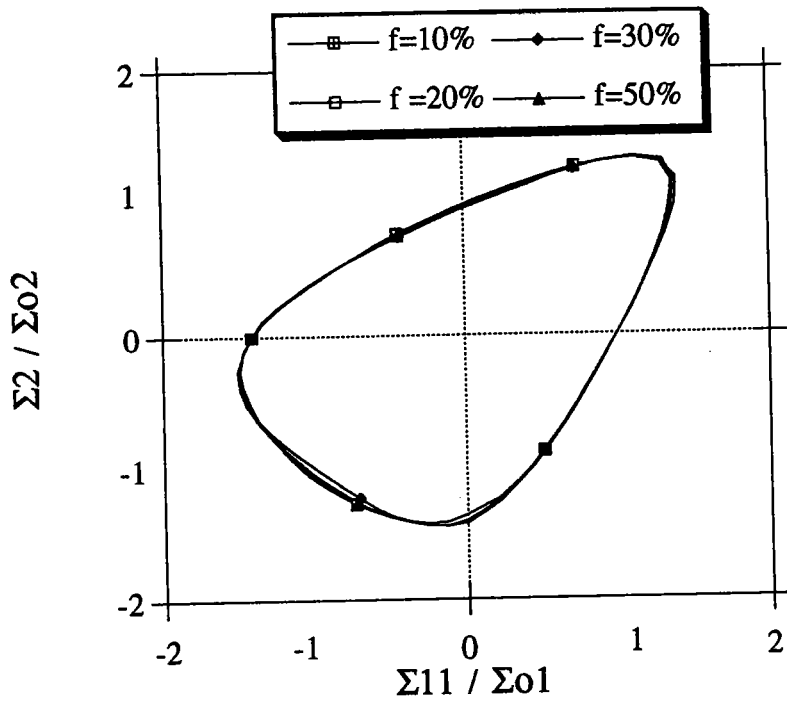


Figure (V-29): Mise en évidence du caractère homothétique de la déformation de la surface de transformation par rapport au paramètre f

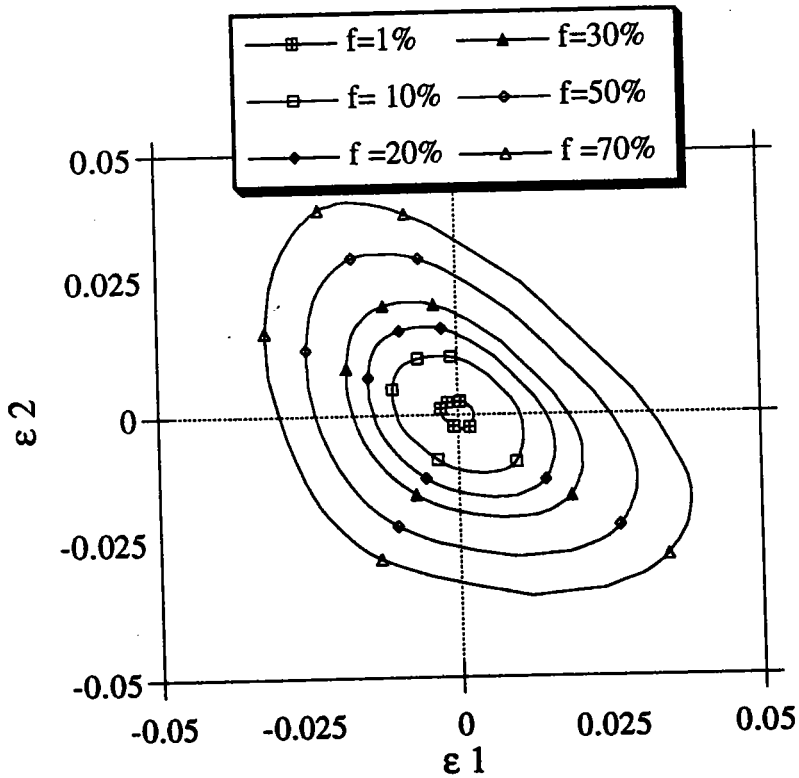


Figure (V-30): Evolution de la déformation de transformation avec la fraction de martensite dans le plan principal des déformation ϵ_1 ϵ_2

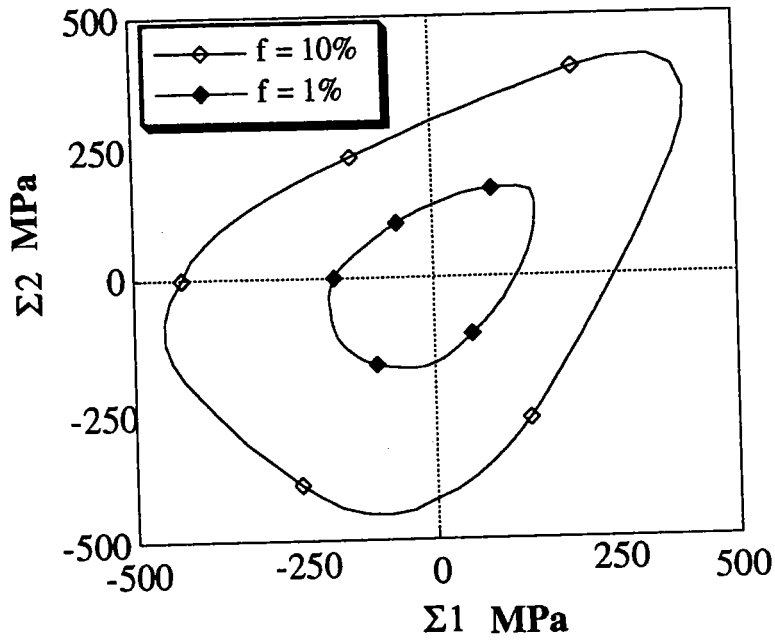


Figure (V-31): Surface de transformation déterminée à l'aide de 1000 grains non texturé.

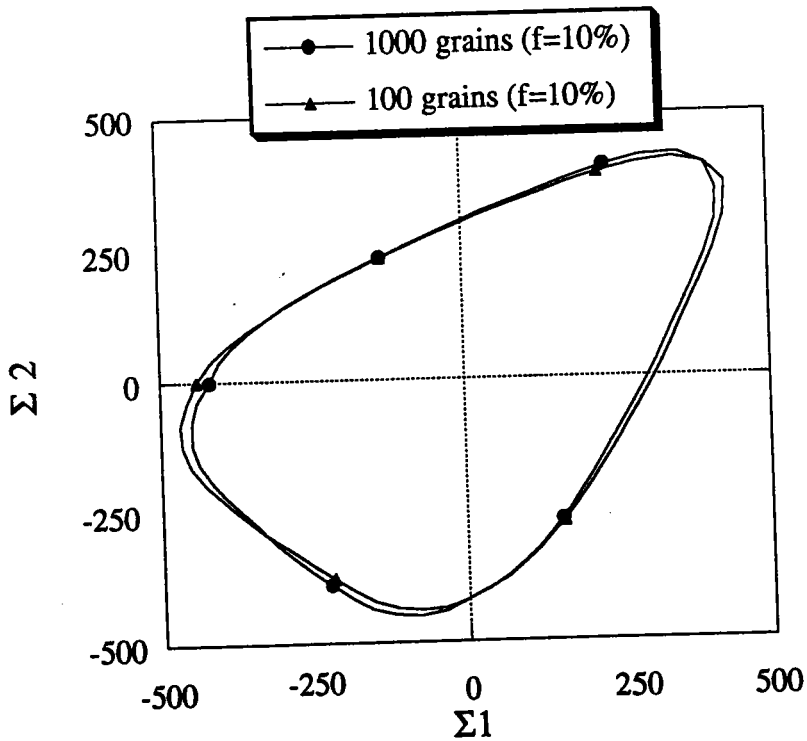


Figure (V-32): Comparaison de surfaces de transformation déterminées à l'aide de l'approche Self-consistante à l'aide de 100 grains et 1000 grains

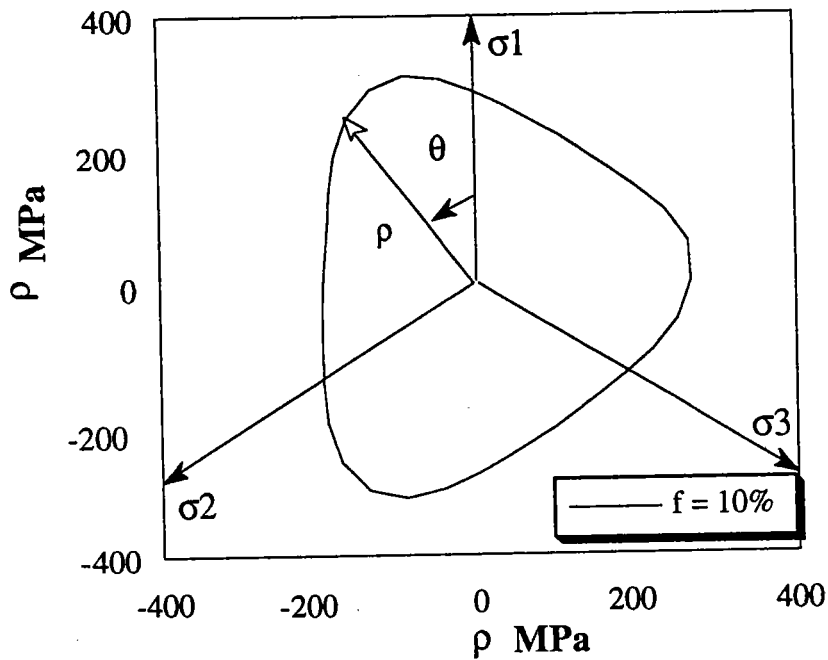


Figure (V-34): Evolution de la surface de transformation à une fraction volumique de martensite égale à 10% dans le plan déviatorique

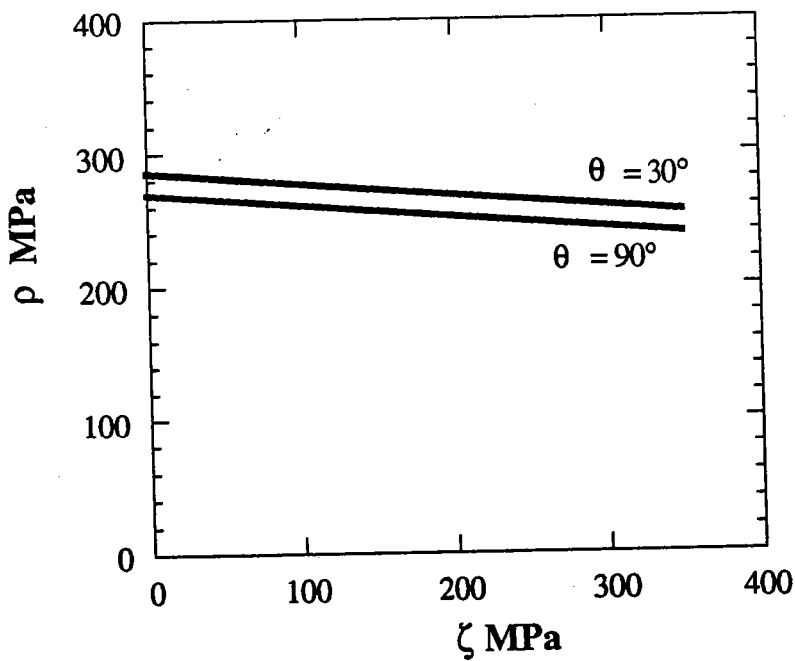


Figure (V-35): Evolution de la surface de transformation à $f = 10\%$ de martensite dans le plan méridien

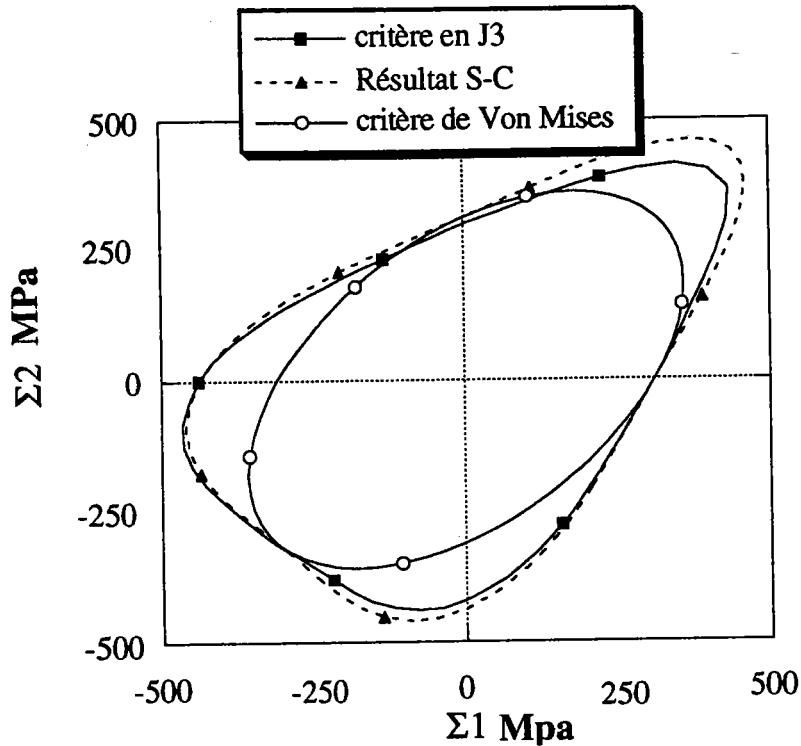


Figure (V-36): Comparaison des surfaces de charge déterminées pour une fraction totale de martensite ($f = 10\%$) par le critère phénoménologique de transformation, le critère de Von Mises et les résultats de l'approche autocohérente

V.11 / CONCLUSION

L'application d'un code self-consistent dérivé de l'élasto plasticité pour modéliser le comportement superélastique des AMF donne de bon résultats. A partir de la données des paramètres cristallographiques de la transformation ($\epsilon^{\mathbf{n}}$, 24 variantes), des paramètres thermodynamiques (M_s et B) et de la définition de la matrice d'interaction entre variantes ($\frac{\mu}{1000}$, $\frac{\mu}{150}$) et de la description de l'agrégat (nombre et orientation cristalline des grains) ont déterminé la réponse du matériau pour n'importe quel type de chargement. Le choix de rester dans le cadre de la thermodynamique des processus réversible limite cependant le chargement aux chargements radiaux monotones. En introduisant un pseudo potentiel de dissipation E . Patoor a montré que cette

approche permet également de traiter les problèmes liés à la présence de l'hystéresis et aux phénomènes de réorientation.[16]

BIBLIOGRAPHIE

- [1]: M. S. Wechsler, D. S. Lieberman, T. A. Read, *Trans Aime*, 1953, 197, 1503.
- [2]: E. Patoor, A. Eberhardt, M. Berveiller, *Arch. Mech*, 1988, 40, 775
- [3]: J. R. Patel, M. Cohen, *Acta Metal*, 1953, 1, 531
- [4]: M. Berveiller, A. Zaoui, *J. of Eng Mat and Techni*, (1984) pp, 106-295
- [5]: E. Kröner, *Z. phy. Solids*, 5 pp 143, 1957
- [6]: E. Kröner, *Comp Rhéologique et structure des matériaux*, Colloque GRR Ed Huet-Zaoui, pp 15-40, 1980
- [7]: P. Lipinski, M. Berveiller, *Int. J. of Plasticity*, Vol 5, pp 149-172, (1989)
- [8]: J. D. Eshelby *Prog. Solid Mech*, 2 89, (1961)
- [9]: P. Lipinski, M. Berveiller, P. Lipinski, A. Naddari, J. Krier et F. Corvasce
Rapport. DRET. Contrat (85/93) pp (14-34) 1990
- [10]: O. Fassi-Fehri, Thèse d'état, Metz (1985)
- [11]: P. Y. Manach, Thèse de l'INPG, Grenoble (1993)
- [12]: D. P. Koistinen, R. E. Marburger, *Acta Metal*, vol, 7 (1958)
- [13]: T. Saburi, Y. Inada, S. Nenno et N. Hori, *J. phy. cu Supp* 12, 43, 819 (1982)
- [14]: C. Wayman, K. Adachi, J. Perkins, *Acta Metal*, volume 36, No, 5, pp, 1343-1364, (1988)
- [15]: M. O. Bensalah, Thèse d'Etat Université Mohamed V, Rabat (1992)
- [16]: E. Patoor, A. Eberhardt, M. Berveiller, *Pitman Research Note in Mathematics Series* 296 pp 38-54 (1993)
- [17]: A. Hautcoeur, (Rapport de DEA) Université de Metz (1991)
- [18]: P. Vacher Thèse Université de Franche-Comté, Besançon (1991)
- [19]: C. Liang, C. A. Rogers. *Journal of Engineering Mathematics*, 26, 429-443, (1992)
- [20]: E. N Bondaryef, C. M. Wayman, *Metal. Trans*, Vol 19A, 2407-2413, (1988)
- [21]: W. F. Chen, D. J. Han, *Plasticity for structural Engineers* pp, 67-99 (1988)

CONCLUSION

CONCLUSION GENERALE

On a montré dans ce travail qu'à partir de la définition de quelques paramètres physiquement identifiables (normale au plan d'habitat, direction de transformation, texture cristalline.....), il est possible de décrire avec une bonne précision le comportement superélastique des A.M.F. Une approche purement cinématique a permis de déterminer l'orientation des interfaces intervariantes dans les alliages de type CuZnAl.

Dans l'hypothèse d'un comportement thermoélastique isotherme, la définition d'un potentiel thermoélastique permet d'obtenir une loi locale de comportement adaptée à la modélisation des chargements monotones à partir d'un état austénitique. Le comportement global est alors obtenu par transition d'échelle. Les deux approximations utilisées dans ce travail (modèle statique et approche autocohérente) ont permis de déterminer sans hypothèse supplémentaire, l'allure de la cinétique de transformation et l'évolution de la déformation moyenne de transformation.

Ce travail a également mis en évidence le caractère non isotrope de la transformation et relié l'origine physique de cette anisotropie à la faible symétrie cristalline de la phase martensitique. Dans le cas de l'approximation self consistente, l'étude de l'influence des paramètres utilisés a mis en évidence une bonne stabilité des résultats obtenus. Ce travail débouche sur la définition d'un critère macroscopique de transformation tenant compte du caractère anisotrope de celle-ci. La connaissance d'un tel critère est très utile pour réaliser le calcul de structures en alliage à mémoire de forme.

RESUME

Cette étude porte sur la détermination du comportement superélastique des alliages à mémoire de forme polycristallin. Ce comportement lié à la réalisation sous contrainte d'une transformation martensitique thermoélastique est modélisé à partir des approches de type micro-macro développées par E. Patoor, A. Eberhardt et M. Berveiller. On se place dans un cadre thermoélastique isotherme et on décrit la physique de la transformation à l'échelle des variantes de martensite. Le comportement est donc déterminé à partir de la définition du potentiel thermodynamique de transformation en adoptant les fractions volumiques des variantes comme variables internes. Les contraintes physiques portant sur ces variables sont prises en considération en utilisant les conditions de Kuhn et Tucker.

Un premier schéma de réalisation basé sur une hypothèse de contrainte uniforme fournit une borne inférieure pour le comportement. Cette approche simple établit que si le début de la transformation est essentiellement lié à la nature de celle-ci (relation de Clausius Clayperon) la fin de la transformation dépend par contre fortement de la microstructure du matériau (texture cristallographique...). Cette approche a également permis de déterminer l'origine physique de la dissymétrie observée expérimentalement entre le comportement en traction et en compression sur ces matériaux.

Pour améliorer les résultats obtenus on détermine les interactions se produisant entre variantes de martensite à partir du calcul micromécanique de l'énergie d'interaction liée à la transformation. Ce travail a débouché sur la définition d'une matrice d'interaction analogue à la matrice d'écrouissage en plasticité classique. Ce résultat a permis d'affiner les résultats de la première partie en utilisant un code de calcul autocohérent développé pour la plasticité cristalline par P. Lipinski et M. Berveiller et adopté au comportement superélastique par M. O. Bensalah et E. Patoor. Cette approche permet d'obtenir un bon accord avec les résultats expérimentaux et de déterminer sans hypothèse supplémentaire la cinétique de la transformation et l'évolution de la déformation moyenne de transformation. L'exploitation tridimensionnelle du modèle a permis de déterminer les surfaces de charges et de déformations au cours de la transformation, elle a permis aussi de définir un critère macroscopique de transformation non symétrique (équation de Hill-Prager modifiée). Ce dernier permet maintenant de définir une loi de comportement associé, applicable aux calculs de structures en alliage à mémoire de forme.

Mots clefs:

Alliage à mémoire de forme	Optimisation sous contraintes
Transformation martensitique	Thermoélasticité
Potentiel thermodynamique	Méthode autocohérente
Passage micro-macro	micromécanique

ABSTRACT

This study carrying on the determination of the superelastic behaviour of the polycrystal memory shape alloys. This behaviour related the realisation under stress of thermoelastic martensite transformation modelled by E. Patoor, A. Eberhardt and M. Berveiller. We place in the limit of isotherm thermoelastic and describe the physic transformation on the variables of martensite scale. The behaviour is determined from the definition of the transformation thermodynamique potential by adopting the volumics fractions of the variables. The physics stresses carrying on the variables are taking in to consideration by used the conditions of Kuhn and Tucker. Uniform stress assumption provide a lower boundary for the behaviour. This simple approach establish that if start of the transformation is related to the nature of this (relation of Clausius Clayperon) the end of the transformation depend strongly on the materials microstructure (crystallographic texture). This approach allowed too the determination of physical origin of the dissymmetry observed experimentally between the behaviour in traction and compression. to improve the results, we determined the interactions between the martensite variables from the computation micromechanic of the interaction energy related to the transformation. This work emerged on the definition of interaction matrix analogue to the work-hardening matrix in the classic plasticity. This results allowed to improve the results of first part by used of a computation code developed for the crystal plasticity by P. Lipinski and M. Berveiller and adopted to the superelastic behaviour by M. O. Bensalah and E. Patoor. This approach allow to obtain a good agreement with the experimental results and to determine without supplementary assumption the kinetic of the transformation and the evolution of the transformation average strain. The tridimensionnelle exploitation of the model allowed the determination of the load surfaces and strain throw the transformation, it allowed to define a macroscopic criteria of the transformation non symmetric (modified equation of Hill-Prager). The last allowed to define a behaviour law, applicable to the computation in shape memory alloys.