

Tenseur de déformation de l'espace-temps et gravitation

Abdelaziz Maaroufi

▶ **To cite this version:**

Abdelaziz Maaroufi. Tenseur de déformation de l'espace-temps et gravitation. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ027S . tel-01776105

HAL Id: tel-01776105
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776105

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

b 88999

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

Abdelaziz MAAROUFI

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : **Sciences de l'ingénieur**
OPTION : **Mécanique**

TENSEUR DE DEFORMATION DE L'ESPACE-TEMPS ET GRAVITATION

Soutenue *le 10 juin 1994* devant le jury composé de :

Rapporteur	Mr	**R.GERARD**	Professeur I.R.M.A Université de STRASBOURG
Rapporteur	Mr	**R. LUTZ**	Professeur Faculté des sciences et techniques MULHOUSE.
Rapporteur	Mr	**Z.SOBOTKA**	Professeur à l'Université de l'Académie Tchèque des sciences.PRAGUE.
Examinateurs	Mr	**D.ARNAL**	Professeur. Université de METZ
	Mr.	**R.HOCQUART**	Professeur Université de STRASBOURG
	Mr	**J.C.ROTH**	Professeur. Université de METZ.
	Mr	**J.D.WEBER**	Professeur.Directeur deThèse Université de METZ

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux U. R. A. CNRS. 1215

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
Section Technopole
Rue Marconi
57070 METZ

REMERCIMENTS

Monsieur J.D.WEBER a suivi avec attention mon travail de thèse. Je le remercie pour ses conseils attentifs et sa gentillesse.

Je souhaite remercier Monsieur R.GERARD, Monsieur R.LUTZ et Monsieur Z.SOBOTKA qui ont bien voulu rapporter sur ce travail.

Je remercie également Monsieur D.ARNAL, Monsieur R.HOCQUART et Monsieur J.C.ROTH qui ont bien voulu examiner mon travail.

Mes remerciments pour Monsieur P.MAZILU pour avoir bien voulu discuter à plusieurs reprises de mon travail et pour ses conseils.

Je souhaite exprimer ma gratitude à l'ensemble de mes camarades de travail pour les nombreuses discutions scientifiques dont ils m'ont fait bénéficier et pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la réalisation de ce travail.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
TECHNOPOLE - METZ -

N° Inv	1994081 S
Cote	S/M3 94/27
Loc.	Magasin
Cat	OCLC

TABLE DES MATIERES

pages

TABLE DE NOTATIONS..... 4

RESUME..... 7

INTRODUCTION..... 8

CHAPITRE I

TEMPS PROPRE EN L'ABSENCE DE GRAVITATION

1) Tenseur métrique..... 12

2) Géodésique..... 12

3) Métrique d'un espace..... 13

4) Espace de Riemann..... 13

5) Transformation de Galilée..... 14

6) Transformation de Lorentz..... 16

7) Temps propre en l'absence de gravitation..... 18
8)Métrique de Schwarzschild.....20

CHAPITRE II

TENSEUR DE DEFORMATION DE L'ESPACE-TEMPS

1) Tenseur de déformation de l'espace-temps $\bar{\bar{\varepsilon}}$..... 23
2) $\bar{\bar{\varepsilon}}$ vérifie les conditions de compatibilité contractées.....26
3) Approximation quasi-galiléenne de la métrique de Schwarzschild.27

.CHAPITRE III

LES EFFETS DU PREMIER ORDRE

1) Vitesse de la lumière à la distance r du soleil.....33
2) Déviation des rayons lumineux..... 34
3) Marche des horloges..... 37
3.1) Temps marqué par les horloges..... 37
3.2) Horloges placées à différentes altitudes..... 37
4) Décalage vers le rouge..... 40

CHAPITRE IV

CALCUL DES PERTURBATIONS

1) Introduction..... 44
2) Avance des périhélies des planètes..... 45
3) Equations des trajectoires.....46

4) Introduction des composantes perturbatrices..... 41

5) Résultats Newtoniens..... 52
6) Forme réduite des équations des perturbations..... 55
7) Déplacements des périhélies des planètes en fonction des composantes perturbatrices..... 58
V **CONCLUSION**..... 67

TABLE DE NOTATIONS

Les unités sont choisies de façon que dans le vide infiniment loin des masses, c = 1.

SYMBOLE	DESIGNATION	UNITES
G	Constante de gravitation	$2.468\ 10^{-39}$ $g^{-1}sec$
M_S	Masse du soleil.	$1.983\ 10^{33}g$
M_t	Masse de la terre.	$6.10^{27}g$
K_S	$K_S = GM_S$	$4.95.10^{-6}$ sec
K_t	$K_t = GM_t$	7.10^{-10} sec
R_S	Rayon du soleil	2.32. sec
R_t	Rayon de la terre	0.0213 sec
R_{s-t}	Distance soleil-terre	500 sec
$X_0 X_1 X_2 X_3$	Coordonnées d'un point de l'espace-temps dans un repère.	En sec
y_i (i = 1à3)	Coordonnées du mouvement non perturbée	En sec
r_0	Rayon de la trajectoire non perturbée	En sec
u_0	$u_0 = \frac{1}{r_0}$	En sec^{-1}

r_m	Rayon minimum de la trajectoire non perturbée	En sec
p_i	Composantes perturbatrices	En sec
x_i	Coordonnées du mouvement perturbé $x_i = y_i + p_i$ (i = 1 à 3)	En sec
r	Rayon de la trajectoire perturbée	En sec
U V	$U = \frac{p_1}{K_S}$ $\quad$ $V = \frac{P_2}{K_s}$	Sans dim
e	Excentricité	Sans dim
φ_0	Angle polaire	En radians
X_0 ou x_0 ou t	Coordonnée temps	En sec
d s	Variation temps propre	En sec
δ_{ij}	Symbôle de Kroneker $\delta_{ij} = 1$ si i = j , $\delta_{ij} = 0$ si i ≠ j (i,j = 1 à 3)	Sans dim
ε_{ij}	Tenseur de déformation de l'espace temps.	Sans dim
$\Delta\Omega$	Avance du périhélie	En sec d'arc par siècle

RESUME

On propose une description simple de l'espace-temps en présence de gravitation, en s'inspirant de la mécanique des milieux continus.

Dans tout repère galiléen un événement est repéré par des coordonnées X_0, X_1, X_2, X_3, où X_0 (réel) est le temps du repère, et où $X_1X_2X_3$ (imaginaires purs) sont les coordonnées d'espace.

L'accroissement du temps propre d'un mobile est par hypothèse

$$ds^2 = (\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij})dX_i dX_j \qquad (1)$$

ε_{ij} est appelé tenseur de déformation de l'espace-temps par analogie avec la mécanique des milieux continus.

Pour une masse attractive ponctuelle,

$$\varepsilon_{00} = -\frac{K}{r}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{K}{r}$$

$$\varepsilon_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j$$

K produit de la masse attractive par la constante de gravitation.

La condition d'Einstein $\delta \int ds = 0$ conduit à un mouvement de la planète voisin du mouvement newtonien. La perturbation relativiste par rapport à ce mouvement est étudiée en détail.

La formule (1) conduit à distinguer les effets du premier ordre (sur lesquels un consensus semble être établi entre les auteurs) et le calcul de l'avance des périhélies des planètes où le point de vue est original.

INTRODUCTION

Nous essayons d'apporter une contribution à un domaine de recherches immense.

A titre d'illustration, le livre de M^{me} Tonnelat [2] contient 491 références bibliographiques.

Notre originalité a été de nous inspirer des méthodes de la mécanique des milieux continus (Résistances des matériaux, Mécanique des fluides) pour aboutir, nous l'espérons, à un exposé un peu plus simple de ces difficiles questions.

Ainsi, soit au changement de coordonnées orthogonales de la mécanique des milieux continus

$$y_i=\alpha_{ij}x_j \qquad (i,j=1,2,3) \tag{1}$$

x_i, y_i, α_{ij} tous réels

$$\alpha_{ki}\alpha_{kj}= \delta_{ij} \tag{2}$$

(en d'autres termes, α_{ij} est un tenseur orthogonale)

(1) correspond dans l'espace-temps à

$$Y_i=\beta_{ij}X_j \qquad (i,j = 0, 1, 2, 3)$$

X_0 réel (c'est le temps du repère galiléen R)
$X_1\ X_2\ X_3$ imaginaires purs ($X_1 = ix_1$, $X_2 = ix_2$, $X_3 = ix_3$)
Y_0 réel (c'est le temps du repère galiléen R')
$Y_1\ Y_2\ Y_3$ imaginaires purs ($Y_1 = iy_1$, $Y_2 = iy_2$, $Y_3 = iy_3$)
β_{00} est réel, $\beta_{01}\ \beta_{02}\ \beta_{03}\ \beta_{10}\ \beta_{20}\ \beta_{30}$ imaginaires purs
β_{ij} (i,j=1,2,3) sont réels.

$$\beta_{ki}\beta_{kj} = \delta_{ij} \tag{3}$$

en d'autres termes, β_{ij} est un tenseur orthogonal.)

En mécanique des milieux continus [1], en l'absence de déformation de la matière

$$dl^2 = dx_i dx_i = dy_i dy_i \qquad (i = 1 \text{ à } 3) \tag{4}$$

dl est la longueur d'un segment infiniment petit.

En relativité, en l'absence de champ de gravitation

$$ds^2 = dX_i dX_i = dY_i dY_i \qquad (i = 0 \text{ à } 3) \tag{5}$$

où ds est le temps propre d'un mobile de mouvement défini par $dX_0\, dX_1\, dX_2\, dX_3$ dans le repère R, ou de mouvement défini par $dY_0\, dY_1\, dY_2\, dY_3$ dans le repère R' .

En mécanique des milieux continus, lorsque la matière a été déformée, on connait la formule

$$dl^2 = (\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij})dX_i dX_j \tag{6}$$

ε_{ij} est le tenseur de déformation de Green.

L'étude développée dans le présent mémoire est d'appliquer à l'espace-temps en présence de gravitation la formule analogue à (6)

$$ds^2 = (\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij})dX_i dX_j \tag{7}$$

et de montrer que la formule (7) permet de retrouver :

a) Les effets du premier ordre, prévus également par d'autres théories.

b) L'avance du périhélie des planètes en se servant du calcul des perturbations relativistes.

Le caractère tensoriel de la relation (7) montre l'invariance de cette relation pour tout changement de repère galiléen.

La formule (7) est plus simple que celle de Schwarzchild [2]

CHAPITRE I

TEMPS PROPRE EN L'ABSENCE DE GRAVITATION

1) Tenseur métrique..... 12

2) Géodésique..... 12

3) Métrique d'un espace..... 13

4) Espace de Riemann..... 13

5) Transformation de Galilée..... 14

6) Transformation de Lorentz..... 16

7) Temps propre en l'absence de gravitation..... 18

8) Métrique de Scshwarzschild.....20

TEMPS PROPRE EN L'ABSENCE DE GRAVITATION

1) TENSEUR METRIQUE

Nous commençons par introduire dans ce paragraphe le tenseur métrique dont le rôle est fondamentale en relativité générale.

Considérons un repère R quelconque muni d'une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ (repère orthonormé ou repère curviligne).

Soient deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de composantes contravariantes A_i et B_j.

Nous avons :

$$\vec{A}\ \vec{B}\ . = A_i \vec{e_i} B_j\ \vec{e_j} = A_i\ B_j \vec{e_i}\vec{e_j} = g_{ij}\ A_i\ B_j$$

Les g_{ij} forment les composantes d'un tenseur métrique.

Définition :

Le tenseur métrique est le tenseur symétrique du second rang dont les composantes sont les produits scalaires des vecteurs de bases.

2) GEODESIQUE

Dans un espace euclidien, on peut choisir un système de coordonnées rectilignes valable pour tout l'espace.

Le transport parallèle d'un vecteur $\vec{V}$ se définit facilement. Ses composantes V_i (i = 1 à 3) demeurent constantes au cours du déplacement.

$$dV_i = \frac{\partial V_i}{\partial x_i}\, dx_i = 0 \qquad (1)$$

Le transport parallèle est possible dans toutes les directions de l'espace euclidien.

Dans un espace de Riemann, on ne peut pas rapporter l'ensemble de cet espace à un système de coordonnées rectilignes. Le transport parallèle des vecteurs est beaucoup moins facile à définir.

La variation des composantes V_i (i = 1 à 3) dans un déplacement quelconque s'écrit :

$$\Delta\vec{V} = dV_i \vec{e_i} + V_i d\vec{e_i} .$$

Dans un espace de Reimann, ce n'est plus que dans certains déplacements particuliers que les composantes d'un vecteur restent inchangées. On peut donc envisager un déplacement infinitésimale ds du vecteur V parallèlement à lui même, si la condition (1) est vérifiée.

L'ensemble des déplacements successifs ds dans l'espace de Reimann définira des lignes particulières. Ces lignes sont appelées géodésiques de l'espace de Reimann.

3) METRIQUE D'UN ESPACE :

Un espace est dit avoir une métrique géométrique si on possède un moyen de mesurer l'intervalle séparant deux points infiniment voisins.

L'intervalle ds^2 entre deux points infiniment voisins sera donc :

$$ds^2 = d\vec{s}\ d\vec{s} = g_{ij}\, dX_i\, dX_j$$

4) ESPACE DE RIEMANN

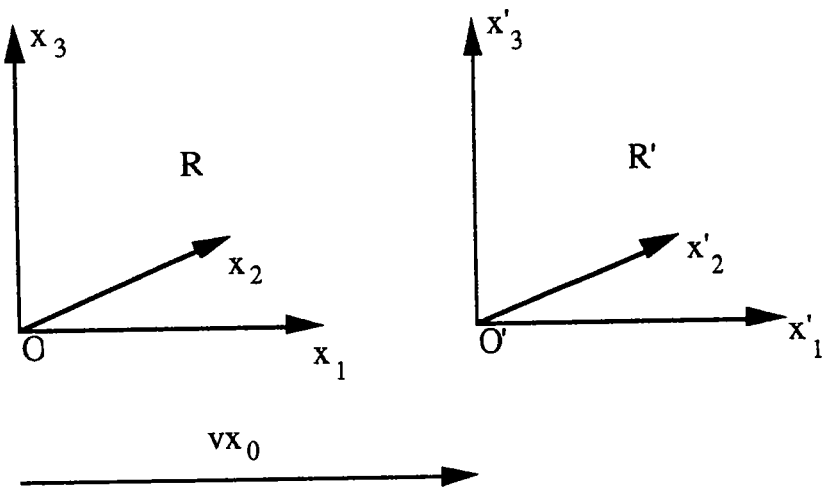
Un espace de Riemann est un espaçe métrique défini par un tenseur métrique symétrique g_{ij} (i, j = 0 à 3) dont les 10 éléments indépendants

sont des fonctions continues et différentiables des coordonnées et où l'intervalle élémentaire ds entre deux points infinement voisins est, par définition, fourni par la forme quadratique

$$ds^2 = g_{ij}\, dX_i\, dX_j$$

6) TRANSFORMATION DE GALILEE

Soient deux référentiels R(O x_1 x_2 x_3) et R'(O' x'_1 x'_2 x'_3) tels que :
$O'x'_1$ coïncide avec Ox_1
$O'x'_2$ (respectivement $O'x'_3$) est parallèle à Ox_2 (respectivement Ox_3)



Le repère R' est en translation rectiligne uniforme de vitesse v par rapport au repère R (à $x_0 = 0$, O' coïncide avec O).

Soit M, un point quelconque de l'espace, dont les coordonnées sont (x_1, x_2, x_3) dans le référentiel R, les coordonnées du point M dans le référentiel R' sont (x'_1, x'_2, x'_3).

Nous avons :

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 - vx_0 \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned} \qquad (2)$$

Cette transformation de coordonnées est appelée transformation de Galilée.

La transformation de Galilée (2) prédit que la vitesse de la lumière sera différente dans les deux référentiels R et R'.

En effet :
supposons qu'en O se trouve une source de lumière se propageant à la vitesse c. La position d'un point de la surface d'onde (on concidère que l'espace est homogène) sera définie par le vecteur

$$\vec{OM} = \vec{r} \ .$$

La vitesse d'un point de la surface d'onde sera dans le repère R,

$$\vec{OM} = c\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire dans le repère R. Cette même vitesse sera, dans le repère R' (qui est en translation par rapport au repère R),

$$\vec{O'M} = c\vec{n} - \vec{v}$$

donc différente de c.

Une série d'expériences dûes à Michelson et Morley [15] a montré que la vitesse de la lumière était la même dans toutes les directions. Par conséquent, la transformation de Galilée appliquée aux systèmes en translation rectiligne uniforme de vitesse v non négligeable devant c n'est pas correcte et doit être remplacée par une transformation qui laisse invariante la vitesse de la lumière et qui, aux vitesses faibles redonne la transformation de Galilée.

Einstein a montré que ces concepts induisaient une révision complète de notre approche du temps et de l'espace et qu'en particulier le temps ne peut être uniforme et unique, mais doit être lié au référentiel en mouvement. C'est la relativité restreinte.

" Toutes les lois physiques doivent être exprimées de manière identiques dans tous systèmes en translation rectiligne et uniforme ."

Principe fondamental établi par Einstein.

6) TRANSFORMATION DE LORENTZ

Il faut donc reconsidérer très soigneusement le passage d'un référentiel à un autre pour lever la contradiction vue dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire, le résultat de la transformation de Galilée, la vitesse de la lumière n'est pas constante dans les deux référentiels en translation rectiligne uniforme.

Considérons donc deux référentiels R et R' en translation rectiligne uniforme suivant l'axe Ox_1 (à la vitesse v) et ayant même origine à l'instant $x_0 = 0$. A cet instant, une source de lumière fixée en O émet un éclair lumineux.

Un observateur se trouvant dans le référentiel R verra donc une onde sphérique se propager à la vitesse c et le front d'onde sera décrit par l'équation [6] :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2 x_0^2$$

Cet observateur définit donc dans son propre repère R, les coordonnées (x_1, x_2, x_3) de l'onde et également le temps de l'expérience.

Un autre observateur lié au repère R' verra aussi se propager une onde sphérique à partir de son origine à la même vitesse c (la vitesse c est invariante) et le front d'onde sera décrit dans le référentiel R' par l'équation :

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = c^2 x_0'^2$$

Cet observateur, lui aussi, définit dans son propre repère les coordonnées (x_1', x_2', x_3') de l'onde et le temps x_0' de l'expérience.

Nous devons donc chercher la transformation faisant passer de (x_1, x_2, x_3) (repère R) à (x_1', x_2', x_3') (repère R'), de façon que le principe de la relativité restreinte soit vérifié dans les deux référentiels, et qui pour v faible devant la vitesse de la lumière redonne la transformation de Galilée (2).

Cette transformation est

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (x_1 - v x_0) \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_0' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(x_0 - \frac{v}{c^2} x_1\right) \end{aligned} \qquad (3)$$

C'est la transformation de Lorentz.

Soit en posant $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$ $\quad c = 1$

$$\begin{aligned} x_1' &= \gamma (x_1 - v x_0) \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \gamma (x_1' + v x_0') \\ x_2 &= x_2' \\ x_3 &= x_3' \end{aligned}$$

$$x_0' = \gamma\,(x_0 - vx_1) \qquad\qquad x_0 = \gamma\,(x_0' + vx_1')$$

Lorsque la vitesse v est faible devant la vitesse de la lumière, γ tend vers 1 et la transformation de Lorentz (3) devient alors la transformation de Galilée (2).

7) TEMPS PROPRE EN L'ABSENCE DE GRAVITATION

Le paradoxe du voyageur de Langevin, est bien connu, ainsi que celui des jumeaux. Il sont dus au fait que le temps propre d'un mobile diffère du temps du repère Galilèen servant de réfèrence.

Le temps propre d'un point matériel M au sens relativiste est, par définition, le temps marqué par une horloge H accompagnant ce point dans son mouvement ; ce mouvement est rapporté à un référentiel galiléen R. Il peut être quelconque, rectiligne ou non, uniforme ou varié.. L'horloge H doit être de même construction que les horloges H_1, H_2, H_3, fixes dans R et servant à mesurer le temps dans ce référentiel. Par hypothèse, aucun champ de gravitation n'existe dans R.

Les horloges H_1, H_2, H_3... au repos dans R sont synchronisées au moyen de rayons lumineux suivant le procédé bien connu en relativité : deux horloges H_i et H_j fixes dans R sont synchronisées si un rayon lumineux issu de H_i à l'instant x_{0i} (marqué par H_i) atteint à un instant x_{0j} (marqué par H_j) égal à

$$x_{0i} + \frac{d_{ij}}{c}$$

où d_{ij} est la distance entre H_i et H_j et où c est la vitesse de la lumière. On doit admettre qu'en chaque point de R se trouve une horloge de même construction que H_1, H_2, H_3, ces horloges étant toutes synchrones. Le temps x_0 d'un événement quelconque est le temps marqué par l'horloge de R qui coïncide avec cet événement .

Dans n'importe quel mouvement, le temps propre s du point matériel M et le temps x_0 du référentiel R vérifient la relation :

$$ds = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dx_0$$

qui découle du principe de la constance de la lumière dans tout référentiel galiléen [5]. v désigne la vitesse de la lumière dans R ; ce point M décrit une courbe dont l'origine est l'événement A (à l'instant x_{01} dans R) et dont l'extrémité est l'événement B (à l'instant x_{02} dans R). On en déduit pour les temps propres correspondants :

$$s_2 - s_1 \leq x_{02} - x_{01}$$

Plaçons nous dans un référentiel R' animé d'un mouvement uniforme par rapport à R et choisi de façon que A et B se produisent en un même point géométrique de R' à des instants différents dans le temps de R'.
On a alors :

$$s_2 - s_1 < x'_{02} - x'_{01}$$

x'_0 est aussi le temps propre d'un point matériel allant de A à B par un mouvement rectiligne uniforme. Voici quelles conséquences en tirait Langevin [7].

"La loi d'inertie peut encore s'exprimer comme loi du temps propre maximum et elle nous apparait comme liée de façon nécessaire aux conclusions suivantes dont l'aspect semble plus paradoxal encore que celles relatives à la simultanéité et à la contraction apparente réciproque des corps en mouvement."

Imaginons deux portions de matière dont les lignes d'univers se croisent en deux évènements A et B, c'est-à-dire qui se séparent en A pour se retrouver en B mais l'une se meut entre A et B d'un mouvement rectiligne et uniforme tandis que l'autre a un mouvement varié subit

des accélérations. Il résulte de ce qui précède que l'intervalle de temps, la durée de la séparation, mesuré par la seconde est moindre que pour la première. Et, si nous admettons, conformément au principe de relativité, qu'aucune autre mesure du temps n'est possible, il en résulte que la seconde a dans l'intervalle moins vieilli que la premiere. On peut déduire, de là, des conséquences amusantes qui ne sont en opposition avec aucun fait expérimental.

Un peu d'attention montre d'ailleurs, que la mise en oeuvre de cette possibilité de ralentir le cours du temps, grâce à une agitation suffisante , obligerait à réaliser des vitesses de même ordre que celle de la lumière : elle ne présente par conséquent aucun intérêt pratique.

8) METRIQUE DE SCHWARZSCHILD

Dans le cas d'un champ statique produit par une masse à symétrie sphérique, Schwarzschild a montré qu'il est possible de calculer rigoureusement les gij qui sont solutions de la relativité générale.

La métrique de Minkowski pour l'espace vide dans un système de coordonnées y_1 , y_2 , y_3 est

$$ds^2 = dt^2 - (dy_i)^2 \qquad i = 1;2;3 \tag{4}$$

Dans un système de coordonnées polaires r , θ, ϕ et le temps t et avec le changement de coordonnées suivant :

$$y_1 = r \cos\phi \sin\theta$$
$$y_2 = r\sin\phi \sin\theta$$
$$y_3 = r \cos\theta$$

(4) prend la forme suivante

$$ds^2 = dt^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 - dr^2 \tag{5}$$

On peut s'arranger, par un changement de coordonnées approprié, à n'avoir que des composantes de la forme gii non nulles, c'est à dire pas

d'effets transverseaux, et les composantes non radiales doivent être les mêmes que celles de l'espace vide.

Le ds^2 d'un espace à symétrie sphérique prend la forme

$$ds^2 = e^{\nu}dt^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 - e^{\lambda}dr^2 \qquad (6)$$

e^{ν} et e^{λ} sont des fonctions de r seulement.

Pour calculer e^{ν} et e^{λ}, il faut tenir compte que dans le cas du champ gravitationnel, la densité d'energie du champ est faible en dehors de la masse gravitationnelle elle même, ce qui donne :

$$e^{\nu} = e^{b-\lambda}\left(1 - 2\frac{a}{r}\right)e^{b}$$

$$a = G\,M$$

b est une constante.

Pour r très grand, le champ est alors nul, et on doit retrouver la métrique de Minkowski (4), c'est-à-dire $e^{\lambda} = 1$ et $e^{\nu} = 1$

$$e^{\nu} = e^{b-\lambda}\left(1 - 2\frac{a}{r}\right)e^{b}$$

ce qui exige que b est nulle

donc

$$e^{\nu} = 1 - 2\frac{a}{r} = e^{-\lambda}$$

et la métrique de Schwarzschild (6) s'écrit

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{a}{r}\right)dt^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 - \left(1 - 2\frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 \qquad (7)$$

CHAPITRE II

TENSEUR DE DEFORMATION DE L'ESPACE-TEMPS

1) Tenseur de déformation de l'espace-temps $\bar{\bar{\varepsilon}}$.....23
2) $\bar{\bar{\varepsilon}}$ vérifie les conditions de compatibilité contractées.....26
3) Approximation quasi-galiléenne de la métrique de Schwarzschild.27

TENSEUR DE DEFORMATION DE L'ESPACE-TEMPS

Nous limitons nos considérations aux corps d'épreuve, planètes et photons, soumis au champs de gravitation d'un corps centrale, soleil ou terre.

Considérons le système de coordonnées u_i.

Un vecteur de l'espace-temps $\vec{U}$ de coordonnées u_i est tel que u_0 est réel (coordonnée du temps) et u_1 u_2 u_3 imaginaires purs (coordonnées de l'espace).

Un scalaire tel que u_i u_i est réel.

Un tenseur t_{ij} de la forme $u_i u_j$ est tel que t_{00} soit réel, t_{01} t_{02} t_{03} t_{10} , t_{20}, t_{30} imaginaires purs t_{ij} (i , j = 1 à 3) réels.

C'est le cas du tenseur de déformation de l'espace-temps ε_{ij} que nous allons introduire dans ce chapitre.

Nous pouvons choisir des axes dans lesquels ε_{ij} est diagonal.

$\varepsilon_{ij}dXidXj$ est un scalaire, donc réel.

1) Tenseur de déformation de l'espace-temps :

Nous définissons le tenseur de déformation de l'espace-temps (par analogie avec la mécanique des milieux continus) dû à la présence d'une masse attractive M par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} -\frac{K}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{K}{r} \end{bmatrix}$$

où K est le produit de la masse M par la constance de gravitation G, dans un système d'unité où la vitesse de la lumière est égale à 1.

Le tenseur de déformation de l'espace-temps défini ci-dessus est un tenseur diagonal, les seules composantes non nulles sont

$$\varepsilon_{00} = -\frac{K}{r}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{K}{r}$$

Soit, par exemple, une planète d'orbite circulaire (rayon r) gravitant autour du soleil S à la vitesse v.
Nous avons :

$$\frac{v^2}{r} = \frac{K_s}{r^2}, \text{ soit } K_s = v^2 r.$$

Dans des unités où le temps est la seconde, les longueurs ainsi que K s'expriment en secondes.

Nous avons pour le soleil $K_s = 4.95\ 10^{-6}$ sec
et pour la terre $K_t = 1.4807\ 10^{-11}$ sec

D'autre part, un point de l'orbitre terrestre à la distance r_{s-t} du soleil, avec

$$R_{s-t} = 150\ 10^6\ \text{Km} = \frac{150\ 10^6}{300\ 000} = 500\ \text{sec}$$

Les valeurs propres du tenseur de déformation de l'espace-temps définies ci-dessus (en valeur absolue) sont égales à

$$\frac{K_s}{R_{s-t}} = 9.9\ 10^{-9}$$

De même, un point de la surface de la terre où

$$R_t = 6400\ \text{Km} = \frac{6400}{300\ 000} = 0.0213\ \text{sec, nous avons :}$$

$$\frac{K_t}{R_t} = 7.10^{-10}$$

La principale justification de ce choix de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est qu'il conduit approximativement au mouvement newtonien des planètes.

Nous allons utiliser le tenseur de déformation de l'espace-temps défini ci-dessus pour expliquer et retrouver d'une façon plus simple :

a) Les effets du premier ordre en posant :

$$ds^2 = (\delta ij + 2\varepsilon_{ij})\ dX_i dX_j \qquad (1)$$

Ces effets sont : la vitesse de la lumière à la distance r du soleil, les déviations des rayons lumineux, les marches des horloges et le décalage vers le rouge.

b) L'avance des périhélies des planètes en décomposant le mouvement de chaque planète en un mouvement non perturbé auquel en ajoute les perturbations relativistes.

Dans ce chapitre et le chapitre III, nous ne nous intéressons qu'au ds^2 donné par la formule (1) .

Ce n'est que dans le chapitre IV que nous allons étudier en détail les perturbations relativistes.

Reprenons l'expression de ds^2 formule (1).

$$ds^2 = (\delta ij + 2\mathcal{E}_{ij})\ dXidXj$$

X_0 est réel. C'est la coordonnée du temps.

$X_1\, X_2\, X_3$ sont les imaginaires purs. Ce sont les coordonnées de l'espace.

Posons

$X_0 = x0,$
$X_1 = ix_1,$
$X_2 = ix_2$
$X_3 = ix_3$

avec $i^2 = -1$ et nous pouvons écrire le ds^2 comme suit :

$$ds^2 = (1 + 2\mathcal{E}_{00})dx_0^2 - (1 + 2\mathcal{E}_{11})dx_1^2 - (1 + 2\mathcal{E}_{22})dx_2^2 - (1 + 2\mathcal{E}_{33})dx_3^2 \qquad (2)$$

2) $\bar{\bar{\varepsilon}}$ vérifie les conditions de compatibilité contractées.[1]

Comme s'il s'agissait d'une déformation infiniment petite, nous remarquons que les composantes du tenseur de déformation de l'espace temps vérifient les conditions de compatibilitées contractées :

$$\mathcal{E}_{ij,nn} + \mathcal{E}_{nn,ij} = \mathcal{E}_{in,jn} + \mathcal{E}_{jn,in} \qquad (3)$$

Pour vérifier la condition (4), nous tenons compte des quatres conditions suivantes :

a) Dans les problèmes gravitationnels, on a très souvent à considérer le cas d'un champ statique produit par une masse sphérique (cas du soleil), la dérivée par rapport au temps de $\frac{1}{r}$ est nulle, c'est à dire $\frac{\partial}{\partial x_0}(\frac{1}{r}) = 0$

b) $\Delta(\frac{1}{r}) = 0$ avec $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$

c) $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = - \varepsilon_{00}$

d) $\varepsilon_{ij} = 0$ pour $i \neq j$

Nous nous limitons à la démonstration d'un seul cas puisque les mêmes raisons de preuve se répétent pour chaque cas.

Démontrons par exemple les équations (3) pour i = 0, j =0.

$$\varepsilon_{00,nn} + \varepsilon_{nn,00} = \varepsilon_{0n,0n} + \varepsilon_{0n,0n} = 2\varepsilon_{0n,0n} \quad n = 0 \text{ à } 3$$

or

$$\varepsilon_{00,nn} = \varepsilon_{00,00} + \varepsilon_{00,11} + \varepsilon_{00,22} + \varepsilon_{00,33}.$$

$\varepsilon_{00,nn} = 0$ puisque

$\varepsilon_{00,00} = 0$ (condition a) et $\varepsilon_{00,11} + \varepsilon_{00,22} + \varepsilon_{00,33} = 0$ (condition b)

$\varepsilon_{nn,00} = 0$ (condition a)

$\varepsilon_{0n,0n} = 0$ (condition a)

donc les équations (3) sont vérifiées pour i = 0, j = 0

i=0, j=1

$$\varepsilon_{01,nn} + \varepsilon_{nn,01} = \varepsilon_{0n,1n} + \varepsilon_{1n,0n}$$

i=0, j=2

$$\varepsilon_{02,nn} + \varepsilon_{nn,02} = \varepsilon_{0n,2n} + \varepsilon_{2n,0n}$$

i=0, j=3

$$\varepsilon_{03,nn} + \varepsilon_{nn,03} = \varepsilon_{0n,3n} + \varepsilon_{3n,0n}$$

i=1, j=1

$$\varepsilon_{11,nn} + \varepsilon_{nn,11} = \varepsilon_{1n,1n} + \varepsilon_{1n,1n}$$

i=1, j=2

$$\varepsilon_{12,nn} + \varepsilon_{nn,12} = \varepsilon_{1n,2n} + \varepsilon_{2n,1n}$$

i=1, j=3

$$\varepsilon_{13,nn} + \varepsilon_{nn,13} = \varepsilon_{in,3n} + \varepsilon_{3n,1n}$$

i=2, j=2

$$\varepsilon_{22,nn} + \varepsilon_{nn,22} = \varepsilon_{2n,2n} + \varepsilon_{2n,2n}$$

i=2, j=3

$$\varepsilon_{23,nn} + \varepsilon_{nn,23} = \varepsilon_{2n,3n} + \varepsilon_{3n,2n}$$

i=3, j=3

$$\varepsilon_{33,nn} + \varepsilon_{nn,33} = \varepsilon_{3n,3n} + \varepsilon_{3n,3n}$$

3)Approximation quasi-galiléenne de la métrique de Schwarzschild

Pour comparer notre métrique à celle de Scwarzschild (formule (7) chapitre I), nous allons faire une approximation quasi-galiléenne de la métrique de Scwarzschild.

Rappelons que la métrique de Schwarzschild s'écrit

$$ds^2 = (1 - 2\frac{a}{r})dt^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2 - (1 - 2\frac{a}{r})^{-1}dr^2 \qquad (4)$$

Effectuons le changement de variables suivant

$$r = (1 + \frac{a}{2r_1})^2 r_1 \qquad (5)$$

Nous avons donc

$$dr = (1 - \frac{a}{2r_1})(1 + \frac{a}{2r_1})dr_1$$

et

$$(1 - 2\frac{a}{r}) = \frac{(1 - \frac{a}{2r_1})^2}{(1 + \frac{a}{2r_1})^2}$$

et la métrique (4) s'écrit

$$ds^2 = \frac{(1 - \frac{a}{2r_1})^2}{(1 + \frac{a}{2r_1})^2} dt^2 - (1 + \frac{a}{2r_1})^2(dr_1 + d\theta^2 r^2\sin^2\theta d\phi^2) \qquad (6)$$

Posons

$$x_1 = r_1 \sin\theta \cos\phi$$

$$x_2 = r_1 \sin\theta \cos\phi$$
$$x_3 = r_1 \cos\theta$$

x_1, x_2, x_3 représentent le système rectiligne d'axes de coordonnées de meme origine que le système de coordonnées polaires r, θ, ϕ

Dans le système t, x_1, x_2, x_3 le ds^2 (6) s'écrit

$$ds^2 = \frac{(1 - \frac{a}{2r_1})^2}{(1 + \frac{a}{2r_1})^2} dt^2 - (1 + \frac{a}{2r_1})^4 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \qquad (7)$$

si r_1 est suffisament grand

$$(1 + \frac{a}{2r_1})^4 = 1 + 2\frac{a}{r_1}$$

$$\frac{(1 - \frac{a}{2r_1})^2}{(1 + \frac{a}{2r_1})^2} = 1 - 2\frac{a}{r_1}$$

et le ds^2 (7) s'écrit

$$ds^2 = (1 - 2\frac{a}{r_1})dt^2 - (1 + 2\frac{a}{r_1})(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \qquad (8)$$

d'après(5)

$$\frac{r_1}{r} = \frac{1}{1(+\frac{a}{2r_1})^2} = 1 - \frac{a}{r_1}$$

En d'autres termes, dans l'approximation quasi-galilléenne, on peut approximer r_1 à r et le ds^2 (8) s'écrit

$$ds^2 = (1 - 2\frac{a}{r})dt^2 - (1 + 2\frac{a}{r})(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \qquad (9)$$

sachant que a = K , K est la constante de gravitation, nous remarquons que la métrique que nous avons introduit dans ce chapitre n'est autre que l'approximation quasi-galiléenne de la métrique de Schwarzschild.

CHAPITRE III

LES EFFETS DU PREMIER ORDRE

pages

1) Vitesse de la lumière à la distance r du soleil 33

2) Déviation des rayons lumineux 34

3) Marche des horloges 37
3.1) Temps marqué par des horloges 37
3.2) Horloges placées à différentes altitudes 37

4) Décalage vers le rouge 40

LES EFFETS DU PREMIER ORDRE

Dans ce chapitre nous allons utiliser le tenseur de déformation de l'espace-temps défini dans le chapitre II pour retrouver les effets du premier ordre, c'est-à-dire la vitesse de la lumière à la distance r du soleil, la déviation des rayons lumineux, la marche des horloges et le décalage vers le rouge.

I) Vitesse de la lumière à la distance r du soleil

Considérons le champ de gravitation créé par une masse possédant la symétrie sphérique (cas du soleil). Le ds^2 au voisinage de cette masse est

$$ds^2 = (1 + 2\varepsilon_{00})dx_0^2 - (1 + 2\varepsilon_{11})dx_1^2 + (1 + 2\varepsilon_{22})dx_2^2 + (1 + 2\varepsilon_{33})dx_3^2) \qquad (1)$$

or, nous avons vu au chapitre II que $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$

La variation du temps propre (1) s'écrit

$$ds^2 = (1 + 2\varepsilon_{00})dx_0^2 - (1 + 2\varepsilon_{11})(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \qquad (2)$$

Dans le cas d'un rayon lumineux, la condition ds = 0 [3] entraîne

$$\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dx_0^2} = \frac{1 + 2\varepsilon_{00}}{1 + 2\varepsilon_{11}} = \frac{1 - 2\frac{K}{r}}{1 + \frac{K}{r}}$$

$$\text{soit } \left(\frac{dr}{dx_0}\right)^2 = \frac{1 - 2\frac{K}{r}}{1 + 2\frac{K}{r}}$$

avec $c = \frac{dr}{dx_0}$

et puisque $\frac{K}{r}$ est assez petit devant l'unité, nous obtenons

$$c = 1 - 2\frac{K}{r} \qquad (3)$$

Cette valeur de la vitesse de la lumière à la distance r du soleil, en négligeant $\frac{K}{r}$ devant l'unité, est en accord avec l'hypothèse que nous avons faite au début de ce chapitre (vitesse de la lumière est prise égale à l'unité infiniment loin de la masse attractive)

II) **Déviations des rayons lumineux** [12]

Soit D_1 une surface d'onde.

Considérons des sphères S, S', S"...respectivement centrées aux points A, A', A"...de D_1 et ayant respectivement pour rayon c(A), c(A'), c(A")... où c(A) désigne la vitesse de la lumière en A, c(A') désigne la vitesse de la lumière en A' ...

L'enveloppe des sphères S, S', S" ... est une surface d'onde D_2 voisine de D_1.

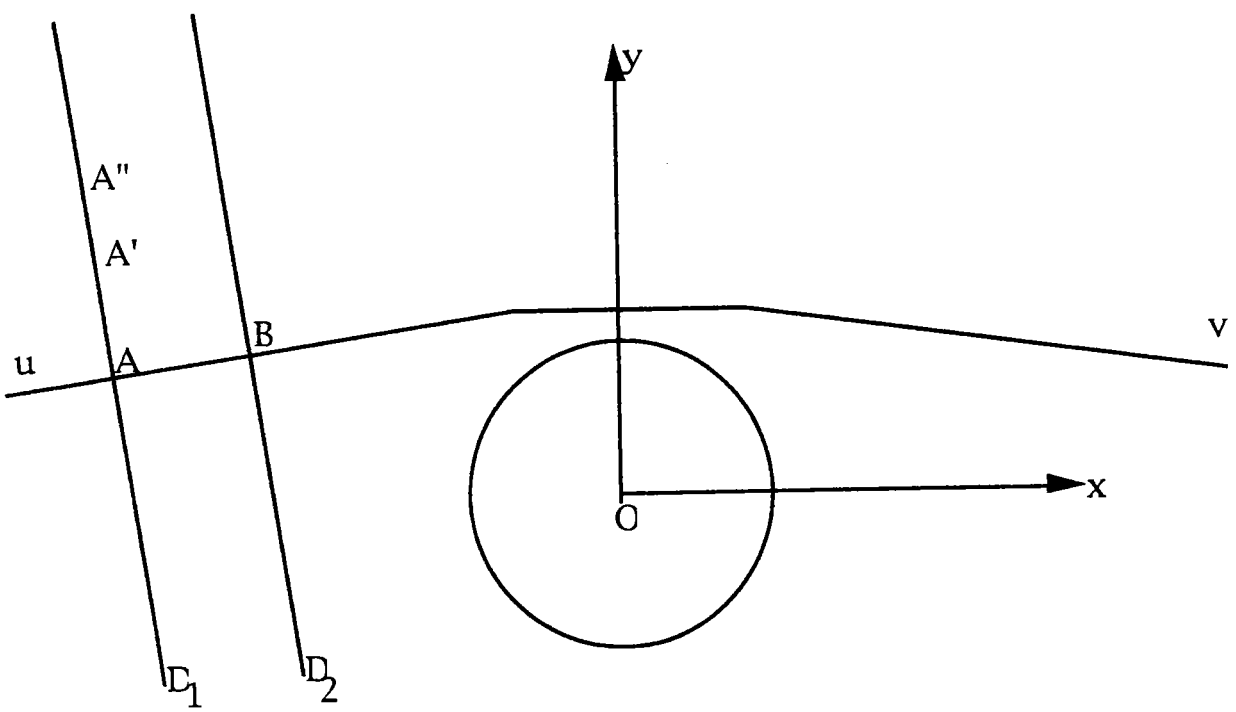
L'angle entre les deux surfaces d'onde D_1 et D_2 au voisinage de A est $\frac{\partial c}{\partial y}$

Le rayon uABv est perpendiculaire en A à D_1, en B à D_2. Donc entre A et B sa tangente a tourné d'un angle très petit

$$\Delta\alpha = -\frac{\partial c}{\partial y}$$

Soit un rayon lumineux venant de l'infini allant vers l'infini en passant près du soleil.

Nous calculons la déviation totale de l'infini à l'infini de ce rayon lumineux : c'est l'angle des asymptôtes.



Considérons dans l'espace euclidien un photon de masse nulle qui se déplace en passant à la distance R du corps de masse M qui crée le champ de gravitation.

On a :

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \Delta\alpha$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy'}{dx} = -\frac{\partial c}{\partial y}$$

Il vient d'après l'expression (3) de c :

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(1-2\frac{K}{r}\right)$$

$$= -2K\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,y$$

Pour des rayons passant au voisinage du soleil, nous avons y=R.

$$\frac{dy^2}{dx^2} = -2K\frac{R}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

Nous calculons le demi-angle de déviation $\frac{\alpha}{2}$ des rayons lumineux par rapport à la droite d'équation y = R.

$$\frac{\alpha}{2} = \int_0^{\infty}\left|\frac{dy^2}{dx^2}\right|dx$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{2KR}{(x^2+R^2)^{3/2}}\,dx$$

Soit $\frac{\alpha}{2} = \frac{2K}{R}$

L'angle des asymptôtes a donc pour valeur α.

$$\alpha = 4\frac{K}{R}$$

α vaut en secondes d'arc 1,76" , déviation conforme au calcul d'Einstein, et confirmé par l'expérience [5].

3) **Marche des horloges** [8]

3.1) Temps marqué par les horloges

On se limite à l'évaluation du temps propre marqué par une horloge fixe (HF) au point x_1 constante et x_2, x_3 nulles.

L'équation (1) se réduit à

$$ds = (1 - \frac{K}{r})dx_0 \qquad (4)$$

Soit en intégrant (7)

$$s_{HF} = (1 - \frac{K}{r})x_0 + A \qquad (5)$$

A étant une constante.

s_{HF} est le temps marqué par l'horloge fixe.

x_0 est le temps du repère de Copernic, c'est aussi le temps de l'infini, c'est-à-dire le temps marqué par des horloges (toutes identiques) placées à l'infini.

L'horloge placée dans le champ de gravitation retarde par rapport à l'horloge placée à l'infini.

La relation (5) montre aussi que le temps propre s'écoule d'autant plus lentement que le potentiel de gravitation est grand.

3.2) **Horloges placées à différentes altitudes** :

Un phénomène se produit en A de durée Δs_{HFA}, mesuré par l'horloge fixe en A et de durée : $\Delta x_{0A} = \Delta x_{0A2} - \Delta x_{0A1}$ dans le temps du repère de Copernic, où Δx_{0A1}, Δx_{0A2} sont les temps dans ce même repère du début et de fin du phénomène qui se produit en A.

Nous avons d'après (5)

$$\frac{\Delta s_{HFA}}{\Delta x_{0A}} = 1 - \frac{K}{r_A} \qquad (6)$$

Un autre phénomène se produit en B, nous avons de même :

$$\frac{\Delta s_{HFB}}{\Delta x_{0B}} = 1 - \frac{K}{r_B} \qquad (7)$$

Supposons qu'une onde électromagnétique (rayon lumineux) soit envoyée de A en B, le phénomène se produisant en A est par exemple, le passage d'une période de cette onde électromagnétique; soit de même le phénomène se produisant en B par le passage d'une période de cette onde électromagnétique en B, alors :

$$\Delta x_{0A} = \Delta x_{0B} \qquad (8)$$

En effet,
si nous suivons un photon se propageant sur ox_1 dans l'onde électromagnétique (nous devons admettre qu'il est alors toujours en phase avec l'onde), nous avons d'après (1)

$$\left(1 - 2\frac{K}{r}\right)dx_0^2 - \left(1 + 2\frac{K}{r}\right)dx_1^2 = 0$$

Posons $dx_1 = dr$ et approchons $\left(1 - 2\frac{K}{r}\right)^{-1}$ à $\left(1 + 2\frac{K}{r}\right)$

$$dx_0 = \left(1 + 2\frac{K}{r}\right)dr \qquad (9)$$

Par intégration de (9)

$$\Delta x_0 = \int_{r_A}^{r_B} \left(1 + 2\frac{K}{r}\right)dr$$

$$\Delta x_{0A} = \Delta x_{0A2} - \Delta x_{0A1}$$

$$\Delta x_{0B} = \Delta x_{0B2} - \Delta x_{0B1}$$

Or, d'après (8), nous avons $\Delta x_{0A} = \Delta x_{0B}$

Nous déduisons de (9) et (10)

$$\frac{\Delta s_{HFA}}{\Delta s_{HFB}} = 1 + K\frac{r_A - r_B}{r_A\ r_B} \qquad (10)$$

pour $r_B = r_A + u \quad u << r_A$
(10) s'écrit

$$\frac{\Delta s_{HFA}}{\Delta s_{HFB}} = 1 - K\frac{u}{r_A^2} \qquad (11)$$

La relation (11) nous permet de calculer la variation du temps propre marquée par l'horloge fixe en un point, à partir de celle marquée par une autre horloge fixe en un autre point.

Application :

Le point A est à la surface de la terre.
La force d'attraction est proportionnelle à $\frac{m_A m_T}{r_A^2}$ m_A étant la masse de la particule en A et m_T la masse de la terre.
Nous avons

$$m_A g = G\frac{m_A m_T}{r_A^2}$$

$$g = \frac{Gm_T}{r_A^2} = \frac{K}{r_A^2} \qquad \text{en sec}^{-1}$$

et d'après (14)

$$\frac{\Delta s_{HFA}}{\Delta s_{HFB}} = 1 - gu$$

g étant exprimé en sec^{-1}, u en sec.

où bien en prenant g en $msec^{-2}$, u en m et c en $m.sec^{-1}$

$$\frac{\Delta s_{HFA}}{\Delta s_{HFB}} = 1 - g\frac{u}{c^2}$$

ce qui pour u = 1m

$$\frac{\Delta s_{HFA}}{\Delta s_{HFB}} = 1 - 10^{-16}$$

Bien entendu, l'écart par rapport à 1 est infime. Il a cependant pu être mis en évidence expérimentalement..

4) **Décalage vers le rouge**

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que le champ de gravitation joue un rôle important dans l'écoulement du temps propre., En effet la relation (4) : $ds = (1 - \frac{K}{r})dx_0$ montre qu'une horloge placée dans un champ de gravitation retarde par rapport a une horloge horloge placée loin de ce champ. Ce phénomène permettra d'expliquer un autre phénomène, aussi important, connu sous le nom de décalage vers le rouge.

Considérons un atome dans un champs de gravitation. La fréquence ν de l'atome est le nombre de vibration par unité de temps-propre, c'est-à-dire : $\nu = \frac{dN}{ds}$, dN est la variation de vibration.

Cette fréquence peut s'écrire en fonction de la fréquence de ce même atome placé loin du corps créant le champs de gravitation. En effet

$$\nu = \frac{dN}{dx_0}\frac{dx_0}{ds} = \nu_0 (1 + \frac{K}{r}) \qquad (12)$$

Soit en posant $\Phi = -\frac{K}{r}$ Φ est le champ de gravitation

$$\nu = \nu_0 (1 + |\Phi|) \tag{13}$$

La fréquence propre augmente donc à l'approche des corps créant le champ de gravitation et diminue en s'éloignant de celui ci.

Supposons maintenant qu'un rayon lumineux soit émis d'un point A où le potentiel de gravitation est Φ_1, arrive en un point B où le potentiel de gravitation est Φ_2. Exprimons la fréquence de ce rayon lumineux en A en fonction de celle en B.

En A, nous avons

$$\nu_1 = \nu_0 (1 + |\Phi_1|) \text{ ou } \nu_0 = \nu_1 (1 - |\Phi_1|) \tag{14}$$

En B, nous avons

$$\nu_2 = \nu_0 (1 + |\Phi_2|)$$

$$= \nu_1 (1 + |\Phi_2|) (1 - |\Phi_1|)$$

$$= \nu_1 (1 + |\Phi_2| - |\Phi_1|) \tag{15}$$

Supposons par exemple qu'un spectre de raies soit émis par un atôme se trouvant sur le soleil (c'est le point A). Ce spectre, sur le soleil, a le même aspect qu'un spectre émis par un atôme identique sur la terre. Par contre si l'on observe, de la terre, le spectre émis par l'atôme se trouvant sur le soleil, ses raies seront décalées par rapport aux raies de même spectre sur terre.

En effet

$$\nu_2 = \nu_1 (1 + |\Phi_2| - |\Phi_1|) \tag{16}$$

avec $$\Phi_T = -\frac{K_T}{R_T} \text{ et } \Phi_S = -\frac{K_S}{R_S}$$

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 + \frac{K_T}{R_T} - \frac{K_S}{R_S}\right) = \nu_1 \left(1 - \frac{K_S}{R_S}\right) \tag{17}$$

La fréquence ν_2 enregistrée sur la terre est inférieure à la fréquence ν_1; inversement, la longueur d'onde λ_2 est plus grande que λ_1, c'est pour cette raison qu'on parle de "Décalage vers le rouge".

D'après la dernière formule nous trouvons :

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_2} = -2\ 10^{-6}$$

Cette valeur a été confirmée par l'expérience [16].

CHAPITRE IV

CALCUL DES PERTURBATIONS

1) Introduction.....44
2) Avance des périhélies des planètes 45
3) Equations des trajectoires.....46
4) Introduction des composantes perturbatrices.....51
5) Résultats Newtoniens.....52
6) Forme réduite des équations des perturbations.....55
7) Déplacements des périhélies des planètes en fonction des composantes perturbatrices..... 58

CALCUL DES PERTURBATIONS

1) Introduction

En relativité générale, l'avance du périhélie des planètes est déterminée en se servant de la solution de Schwarzchild, c'est-à-dire, en assimilant le champ de gravitation du soleil à celui d'une masse au repos possédant la symétrie sphérique.

Nous devons donc comparer la solution des trajectoires Einsteinniennes à celle que prévoit la théorie de Newton pour expliquer, et donner l'avance des périhélies des planètes.

L'expression de cette avance, que nous allons revoir dans le paragraphe I de ce chapitre, est [2]:

$$\Delta\varphi_0 = \frac{6K\pi}{r_m c^2(1+e)} \qquad \text{radians.}$$

Nous exposons ici une autre méthode, à notre avis tout aussi satisfaisante. Elle consiste à considérer que, dans un système d'axes centrés au soleil, le mouvement de chaque planète peut être décomposé en un mouvement non perturbé auquel on ajoute les perturbations dûes aux effets relativistes.
Les composantes du mouvement non perturbé obéissent au formalisme de Newton.

Dans ce chapitre, nous allons calculé les perturbations relativistes pour déterminer l'avance des périhélies des planètes.

L'action stationnaire appliquée à la variation du temps propre ds nous permettra de déterminer les équations des trajectoires elliptiques des planètes en fonction des composantes perturbatrices p_1 et p_2.

La résolution numérique de ces équations nous donne les composantes perturbatrices en fonction de l'angle polaire de rotation, le rayon de la trajectoire s'exprime en fonction des composantes non perturbées et des perturbations, au périhélie le rayon atteint son minimum, nous utilisons ensuite ces composantes pour déterminer l'avance du périhélie des planètes.

2) Avance des périhélies des planètes (méthode connue)

La solution des trajectoires Einsteinniennes est [2]

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi_0^2} + u_0 = \frac{Gm}{h^2} + 3\frac{Gm}{c^2}u_0^2 \qquad (1)$$

$$u_0 = \frac{1}{r_0}$$

Cette solution est à comparer à celle que prévoit la théorie de Newton :

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi_0^2} + u_0 = \frac{Gm}{h^2} \qquad (2)$$

C'est donc le terme $3\frac{Gm}{c^2}u_0^2$ qui peut conduire à un écart avec les prévisions Newtoniennes.

L'équation (2) admet la solution :

$$u_0 = \frac{1}{r_m(1+e)} (1 + e \cos\varphi_0)$$

Si le terme supplémentaire des équations (1) déduites de la relativité générale est tel que :

$$3\frac{G\,m}{c^2} u_0^2 \ll \frac{G\,m}{h^2}$$

nous pouvons chercher une solution de la forme :

$$u_0 = \frac{1}{r_m(1+e)} (1 + e \cos\chi) \qquad (3)$$

Avec $\chi = (1-\varepsilon)\varphi_0$

ε étant une constante très petite devant 1.

A partir de cette solution approchée, nous déduisons l'avance des périhélies des planètes donnée dans les livres de relativité générale :

$$\Delta\varphi_0 = \frac{6K\pi}{r_m c^2(1+e)} \text{ radians} \qquad (4)$$

3) Equations des trajectoires.

Le tenseur de déformation de l'espace-temps que nous avons introduit dans le chapitre II est un tenseur diagonal. Les seuls composantes non nulles sont :

$$\varepsilon_{00} = -\frac{K}{r}$$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{K}{r}$$

Les autres composantes sont nulles.

La métrique définie par la formule (1) du chapitre II devient :

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{K}{r}\right)dx_0^2 - \left(1 + 2\frac{K}{r}\right)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) \qquad (5)$$

Nous supposons que le mouvement des planètes s'effectue dans un plan. Soit ox_1x_2 ce plan .

$$ds^2 = \left(1 - 2\frac{K}{r}\right)dx_0^2 - \left(1 + 2\frac{K}{r}\right)\left(dx_1^2 + dx_2^2\right) \qquad (6)$$

En divisant (6) par dx_0, nous obtenons :

$$\frac{ds}{dx_0} = \left(1 - 2\frac{K}{r} - \left(1 + 2\frac{K}{r}\right)\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)\right)^{1/2} \qquad (7)$$

Tenant compte de la petitesse de $\frac{K}{r}$, nous faisons un développement limité à l'ordre 2 en $\frac{K}{r}$ de (7)

En fait, nous négligeons tous les termes en $\left(\frac{K}{r}\right)^n$ $n > 2$.

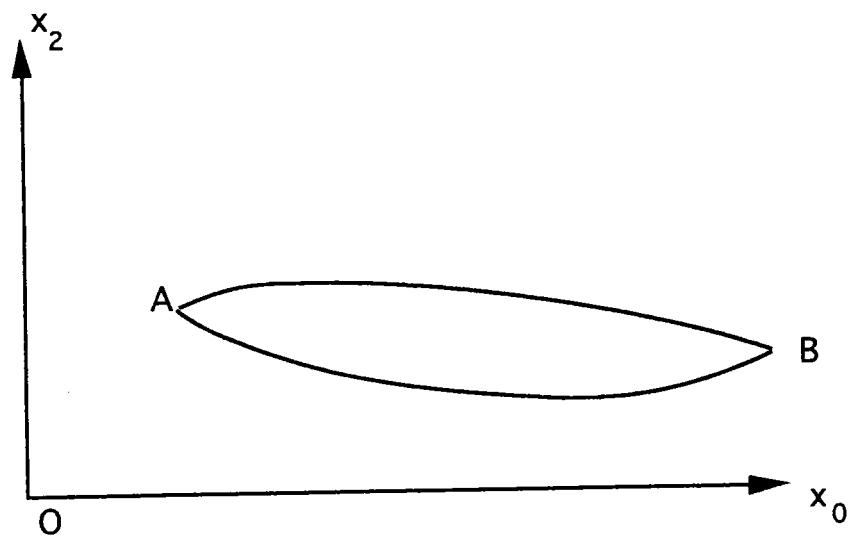
$$\frac{ds}{dx_0} = 1 - \frac{K}{r} - \frac{\dot{x}_1^2}{2} - \frac{\dot{x}_2^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{K}{r}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - \frac{1}{2}\frac{K^2}{r^2} - \frac{1}{8}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right)^2 \qquad (8)$$

La trajectoire de chaque planète s'obtient à partir de :

$$\delta \int_A^B ds = 0 \qquad (9)$$

appliqué à l'intervalle élémentaire ds (8)

En effet, les extrêmales passant par deux points A et B doivent être telles qu'elles rendent stationnaires l'intégrale $\int_A^B ds$.



$$\delta\left(\frac{d\,s}{dx_0}\right) = \frac{K}{r^2}\delta r - \dot{x}_1\delta\dot{x}_1 - \dot{x}_2\delta\dot{x}_2 - 3\frac{K}{r}(\dot{x}_1\delta\dot{x}_1 + \dot{x}_2\delta\dot{x}_2) +$$

$$\frac{3}{2}\frac{K}{r^2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\,\delta r + \frac{K^2}{r^2}\delta r - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)(\dot{x}_1\delta\dot{x}_1 + \dot{x}_2\delta\dot{x}_2) \qquad (10)$$

Or $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ soit $\delta r = \dfrac{x_1\delta x_1 + x_2\delta x_2}{r}$

Remplaçons δr par $\dfrac{x_1\delta x_1 + x_2\delta x_2}{r}$ dans (10)

$$\delta\left(\frac{ds}{dx_0}\right) = \frac{K}{r^3}x_1\delta x_1 - \dot{x}_1\delta\dot{x}_1 - 3\frac{K}{r}\dot{x}_1\delta\dot{x}_1 + \frac{3}{2}\frac{K}{r^3}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\,x_1\delta x_1 + \frac{K^2}{r^4}$$

$$x_1\delta x_1 - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\dot{x}_1\delta\dot{x}_1 + \frac{K}{r^3}x_2\delta x_2 - \dot{x}_2\delta\dot{x}_2 - 3\frac{K}{r}\dot{x}_2\delta\dot{x}_1 + \frac{3}{2}\frac{K}{r^3}(\dot{x}_1^2 +$$

$$\dot{x}_2^2)x_2\delta x_2 + \frac{K^2}{r^4}x_2\delta x_2 - \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\dot{x}_2\delta\dot{x}_2 \qquad (11)$$

Or

$$\delta \int_A^B ds = \delta \int_A^B \left(\frac{ds}{dx_0}\right) dx_0 = \int_A^B \delta\left(\frac{ds}{dx_0}\right) dx_0 \qquad (12)$$

Dans la suite, l'intégrale $\int_A^B f(x)\, dx$ est notée tout simplement $\int_A^B f(x)$

Appliquons (12) à (11)

$$\int \frac{K}{r^3} x_1 \delta x_1 - \dot{x}_1 \delta \dot{x}_1 - 3\frac{K}{r} \dot{x}_1 \delta \dot{x}_1 + \frac{3}{2} \frac{K}{r^3} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\, x_1 \delta x_1 + \frac{K^2}{r^4} x_1 \delta x_1$$

$$- \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\dot{x}_1 \delta \dot{x}_1 + \frac{K}{r^3} x_2 \delta x_2 - \dot{x}_2 \delta \dot{x}_2 - 3 \frac{K}{r} \dot{x}_2 \delta \dot{x}_1 + \frac{3}{2} \frac{K}{r^3} (\dot{x}_1^2 +$$

$$\dot{x}_2^2) x_2 \delta x_2 + \frac{K^2}{r^4} x_2 \delta x_2 - \frac{1}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\dot{x}_2 \delta \dot{x}_2 = 0 \qquad (13)$$

Conformément aux conditions, aux limites, nous avons :

$$\delta x_1(A) = \delta x_2(A) = 0$$

$$\delta x_1(B) = \delta x_2(B) = 0 \qquad (14)$$

Explicitons les intégrales :

$$-\int \dot{x}_m \delta \dot{x}_m = -\int \dot{x}_m \delta x_m = -[\dot{x}_m \delta x_m] + \int \ddot{x}_m \delta x_m = \int \ddot{x}_m \delta x_m$$

$$-\int 3\frac{K}{r} \dot{x}_m \delta \dot{x}_m = -\int 3\frac{K}{r} \dot{x}_m \frac{d}{dx_0} \delta x_m = \int \frac{d}{dx_0}\left(3\frac{K}{r} \dot{x}_m\right) \delta x_m$$

$$\int \frac{1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\dot{x}_m \delta\dot{x}_m = -\frac{1}{2}\int \frac{d}{dx_0}\left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\dot{x}_m\right]\delta x_m$$

avec m = 1 ou 2.

(13) s'écrit alors :

$$\int \left\{\frac{\dot{K}}{\dot{r}^3}x_1 + \ddot{x}_1 + \frac{d}{dx_0}\left(3\frac{\dot{K}}{\dot{r}}\dot{x}_1\right) + \frac{3}{2}\frac{\dot{K}}{\dot{r}^3}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)x_1 + \frac{\dot{K}^2}{\dot{r}^4}x_1 + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{d}{dx_0}\left[(\dot{x}_1^2\cdot + \dot{x}_2^2\cdot)\dot{x}_1\right]\right\}\delta x_1 + \left\{\frac{\dot{K}}{\dot{r}^3}x_2 + \ddot{x}_2 + 3K\frac{d}{dx_0}\left(\frac{\dot{x}_2\cdot}{\dot{r}}\right) + \right.$$

$$\left.\frac{3}{2}\frac{\dot{K}}{\dot{r}^3}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)x_2 + \frac{\dot{K}^2}{\dot{r}^4}x_2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_0}\left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\cdot)\dot{x}_2\right]\right\}\delta x_2 = 0 \qquad (15)$$

L'intégrale (15) est nulle quelques soient δx_1 et δx_2. Nous obtenons deux intégrales, l'une en δx_1 et l'autre en δx_2.

La première intégrale en δx_1 est :

$$\int \left\{\frac{\dot{K}}{\dot{r}^3}x_1 + \ddot{x}_1 + \frac{d}{dx_0}\left(3\frac{\dot{K}}{\dot{r}}\dot{x}_1\right) + \frac{3}{2}\frac{\dot{K}}{\dot{r}^3}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)x_1 + \frac{\dot{K}^2}{\dot{r}^4}x_1 + \right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\frac{d}{dx_0}\left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\cdot)\dot{x}_1\right]\right\}\delta x_1 = 0 \qquad (16)$$

L' intégrale (16) devant être nulle pour des variations arbitraires de la coordonné δx_1, nous en déduisons :

$$\frac{\dot{K}}{\dot{r}^3}x_1 + \ddot{x}_1 + 3K\frac{d}{dx_0}\left(\frac{\dot{x}_1\cdot}{\dot{r}}\right) + \frac{3}{2}\frac{\dot{K}}{\dot{r}^3}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)x_1 + \frac{\dot{K}^2}{\dot{r}^4}x_1 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_0}\left[(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\cdot)\dot{x}_1\right] = 0 \qquad (17)$$

La deuxième intégrale en δx_2 :

$$\int \left\{ \frac{\overset{\circ}{K}}{\overset{\circ}{r}^3} x_2 + \ddot{x}_2 + 3K \frac{d}{dx_0} \left(\frac{\overset{\circ}{\dot{x}_2}\overset{\circ}{\cdot}}{\overset{\circ}{r}} \right) + \frac{3}{2} \frac{\overset{\circ}{K}}{\overset{\circ}{r}^3} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) x_2 + \frac{\overset{\circ}{K}^2}{\overset{\circ}{r}^4} x_2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} \left[(\dot{x}_1^2 + \overset{\circ}{\dot{x}}_2^2 \overset{\circ}{\cdot}) \dot{x}_2 \right] \right\} \delta x_2 = 0 \qquad (18)$$

Or (18) est vraie quelque soit δx_2 , ce qui donne :

$$\frac{\overset{\circ}{K}}{\overset{\circ}{r}^3} x_2 + \ddot{x}_2 + 3K \frac{d}{dx_0} \left(\frac{\overset{\circ}{\dot{x}_2}\overset{\circ}{\cdot}}{\overset{\circ}{r}} \right) + \frac{3}{2} \frac{\overset{\circ}{K}}{\overset{\circ}{r}^3} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) x_2 + \frac{\overset{\circ}{K}^2}{\overset{\circ}{r}^4} x_2 +$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx_0} \left[(\dot{x}_1^2 + \overset{\circ}{\dot{x}}_2^2 \overset{\circ}{\cdot}) \dot{x}_2 \right] = 0 \qquad (19)$$

4) Introduction des composantes perturbatrices dûes aux effets relativistes :

Le mouvement de chaque planète est considéré perturbé (perturbations dûes aux effets relativistes) ; nous le décomposons en un mouvement non perturbé et en des composantes perturbatrices.

Ces composantes perturbatrices étant trop faibles, on peut négliger leur carré.

Nous posons :

$$x_1 = y_1 + p_1$$
$$x_2 = y_2 + p_2$$

x_1 x_2 coordonnées du mouvement perturbé des planètes

y_1 y_2 coordonnées du mouvement non perturbé
p_1 p_2 composantes perturbatrices

avec $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ $\quad r_0^2 = y_1^2 + y_2^2$

$$r^2 = (y_1 + p_1)^2 + (y_2 + p_2)^2$$

Comme nous l'avons précisé ci-dessus, nous avons négligé les carrés de p_1 et de p_2.

$$r^n = r_0^n \left(1 + n\frac{y_1 p_1}{r_0^2} + n\frac{y_2 p_2}{r_0^2} \right) \quad \text{avec } n = 2,3 \tag{20}$$

Portons dans les équations (17) et (19) (les expressions de r, r^2 et r^3)

(17) s'écrit :

$$\frac{K}{r_0^3}(y_1 + p_1) - 3\frac{K}{r_0^5}(y_1^2 p_1 + y_1 y_2 p_2) + \ddot{y}_1 + \ddot{p}_1 + 3K\frac{d}{dx_0}\left(\frac{\dot{y}_1}{r_0}\right) +$$
$$\frac{3}{2}\frac{K}{r_0^3}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)\, y_1 + \frac{K^2}{r_0^4} y_1 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_0}\left[(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)\dot{y}_1\right] = 0 \tag{21}$$

et (19) s'écrit :

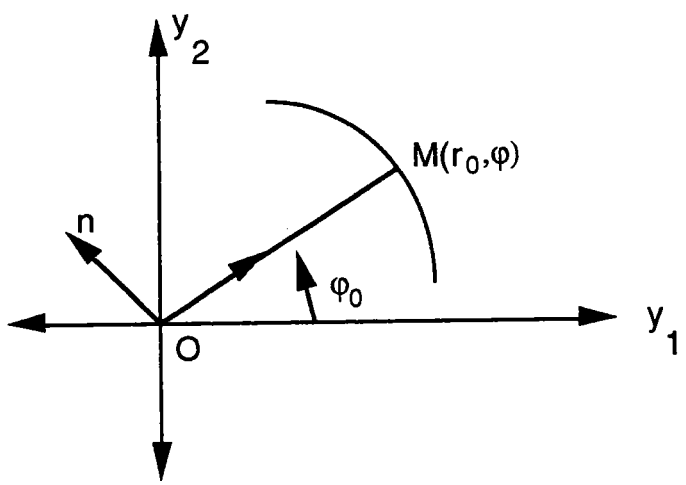
$$\frac{K}{r_0^3}(y_2 + p_2) - 3\frac{K}{r_0^5}(y_1 y_2 p_1 + y_2^2 p_2) + \ddot{y}_2 + \ddot{p}_2 + 3K\frac{d}{dx_0}\left(\frac{\dot{y}_2}{r_0}\right) +$$
$$\frac{3}{2}\frac{K}{r_0^3}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)\, y_2 + \frac{K^2}{r_0^4} y_2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dx_0}\left[(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2)\dot{y}_2\right] = 0 \tag{22}$$

Pour développer les équations différentielles (21) et (22) nous utilisons les résultats newtoniens.

5) Résultats Newtoniens :

Nous postulons dans la suite la validité de la loi de Kepler, c'est donc la planéité des trajectoires .

Dans le plan de la trajectoire, définissons un système de coordonnées polaire (r_0, φ_0) issues de l'origine o. Soit $\vec{e}$ un vecteur unité suivant la direction radiale et $\vec{n}$ un vecteur unité perpendiculaire à cette direction.



$OM = r_0$
$y_1 = r_0 \cos(\varphi_0)$
$y_2 = r_0 \sin(\varphi_0)$

Au point M de la trajectoire, s'exerce une accélération Γ dirigée suivant le rayon OM, et la force d'attraction est proportionnelle à $\frac{M\,m}{r_0^2}$ sur une direction radiale.

$$F = m\Gamma = -\frac{GMm}{r_0^2} \qquad (23)$$

Il en résulte :

$$\ddot{y}_1 = -\frac{K}{r_0^3 \cdot} y_1$$

$$\ddot{y}_2 = -\frac{K}{r_0^3 \cdot} y_2 \qquad (24)$$

Il est facile de démontrer que les équations qui déterminent les trajectoires d'une masse soumise aux forces de gravitations, déduites de la mécanique Newtonienne sont :

$$\frac{d^2 u_0}{d\varphi_0^2 \cdot} + u_0 = \frac{K}{h^2} \qquad (25)$$

$$r_0^2 \frac{d\varphi_0}{dx_0} = h \qquad (26)$$

$$u_0 = \frac{1}{r_0} \quad , \quad h^2 = K r_m (1+e)$$

L'équation (26) représente la loi de Kepler.
L'équation (25) admet la solution :

$$u_0(\varphi_0) = \frac{e}{r_m(1+e)} \cos(\varphi_0) + \frac{1}{r_m(1+e)} \qquad (27)$$

$$r_0 = \frac{r_m(1+e)}{e\cos(\varphi_0)}$$

e est l'excentricité de l'ellipse
Nous introduisons la constante Eg telle que

$$Eg = \frac{\dot{y}_1^2}{2} + \frac{\dot{y}_2^2}{2} - \frac{\cdot K}{\cdot r_0} \qquad (28)$$

Eg correspond à l'énergie totale de la masse en mouvement en absence des effets perturbateurs.

$$Eg = \frac{K}{r_m}\left(\frac{e-1}{2}\right) \tag{29}$$

calculée en $\varphi_0 = 0$ puisque Eg est une constante du mouvement.

Les dérivés dans les équations (21) et (22) sont des dérivées par rapport au temps, nous les transformons en dérivées par rapport à l'angle de rotation φ_0.

$$\dot{f} = \frac{df}{dx_0} = \frac{d\varphi_0}{dx_0}\frac{df}{d\varphi_0} = h\,u_0^2\frac{df}{d\varphi_0} \tag{30}$$

$$\ddot{f} = \frac{d^2f}{dx_0^2} = \left(\frac{d\varphi_0}{dx_0}\right)^2\frac{d^2f}{d\varphi_0^2} + 2hu_0\frac{du_0}{dx_0}\frac{df}{d\varphi_0} \tag{31}$$

$$= h^2\,u_0^4\,\frac{d^2f}{d\varphi_0^2} - 2h^2\,u_0^3\,\frac{e}{r_m(1+e)}\sin(\varphi_0)\frac{df}{d\varphi_0}$$

6) Formes réduites des équations de la trajectoire:

Les transformations (30) et (31) appliquées aux équations (21) et (22) donnent :

$$\frac{\dot{K}r_m\dot{(}1+e)}{r_0^{4\cdot}}\frac{d^2p_1}{d\varphi_0^2} - 2\frac{K}{r_0^{3\cdot}}\,e\sin(\varphi_0)\frac{dp_1}{d\varphi_0} + \frac{\dot{K}}{\ddot{r}_0^{3\cdot}}\left(1-3\cos^2(\varphi_0)\right)p_1$$

$$-3\frac{\dot{K}}{\ddot{r}_0^{3\cdot}}\sin(\varphi_0)\cos(\varphi_0)p_2 + 4\,\frac{\dot{K}^2}{\ddot{r}_0^{4\cdot}}r_m(1+e)\,\frac{e\dot{\sin}^2(\varphi_0)}{(1+\cos(\varphi_0))^2}$$

$$+\frac{\dot{K}^2}{\ddot{r}_0^{3\cdot}}\,\frac{e^{2\cdot}-\dot{1}}{1+\cos(\varphi_0)}\cos(\varphi_0) = 0 \tag{32}$$

$$\frac{Kr_m(1+e)}{r_0^4}\frac{d^2p_2}{d\varphi_0^2} - 2\frac{K}{r_0^3}e\sin(\varphi_0)\frac{dp_2}{d\varphi_0} + \frac{K}{r_0^3}\left(1-3\sin^2(\varphi_0)\right)p_2$$

$$-3\frac{K}{r_0^3}\sin(\varphi_0)\cos(\varphi_0)p_1 - 4\frac{K^2}{r_0^4}r_m(1+e)e\sin(\varphi_0)\frac{e+\cos(\varphi_0)}{(1+\cos(\varphi_0))^2}$$

$$+\frac{K^2}{r_0^3}\frac{e^2-1}{1+\cos(\varphi_0)}\sin(\varphi_0) = 0 \qquad (33)$$

Multiplions les équations (32) et (33) par $\frac{r_0^4}{K^2 r_m(1+e)}$.

et sans nuire à la généralité de la solution, nous posons

$$U = \frac{p_1}{K} \quad \text{et} \quad V = \frac{p_2}{K}$$

Les équations (32) et (33) deviennent après toute simplification

$$\frac{d^2U}{d\varphi_0^2} - 2\frac{e\sin(\varphi_0)}{1+e\cos(\varphi_0)}\frac{dU}{d\varphi_0} + \frac{1-3\cos^2(\varphi_0)}{1+e\cos(\varphi_0)}U - 3\frac{\sin(\varphi_0)\cos(\varphi_0)}{1+e\cos(\varphi_0)}V$$

$$+ 4e\frac{\sin^2(\varphi_0)}{(1+e\cos(\varphi_0))^2} + \frac{e^2-1}{(1+e\cos(\varphi_0))^2}\cos(\varphi_0) = 0 \qquad (34)$$

$$\frac{d^2V}{d\varphi_0^2} - 2\frac{e\sin(\varphi_0)}{1+e\cos(\varphi_0)}\frac{dV}{d\varphi_0} + \frac{1-3\sin^2(\varphi_0)}{1+e\cos(\varphi_0)}V - 3\frac{\sin(\varphi_0)\cos(\varphi_0)}{1+e\cos(\varphi_0)}U$$

$$- 4e\frac{\sin(\varphi_0)(e+\cos(\varphi_0))}{(1+e\cos(\varphi_0))^2} + \frac{e^2-1}{(1+e\cos(\varphi_0))^2}\sin(\varphi_0) = 0 \qquad (35)$$

Posons:

$$A_1 = 2\,\frac{e^{*}\sin(\varphi_0)}{1+e^{*}\cos(\varphi_0)}$$

$$B_1 = \frac{1-3\cos^2(\varphi_0)}{1+e^{*}\cos(\varphi_0)}$$

$$B_2 = \frac{1-3\sin^2(\varphi_0)}{1+e^{*}\cos(\varphi_0)}$$

$$C = 3\,\frac{\sin(\varphi_0)\cos(\varphi_0)}{1+e^{*}\cos(\varphi_0)},$$

$$D_1 = 4\ e\ \frac{{}^{*}\sin^2(\varphi_0)}{(1+e^{*}\cos(\varphi_0))^2} + \frac{e^2-1}{(1+e^{*}\cos(\varphi_0))^2}\ \cos(\varphi_0)$$

$$D_2 = -\,4\,e\frac{{}^{*}\sin(\varphi_0)\,(e+{}^{*}\cos(\varphi_0))}{(1+e^{*}\cos(\varphi_0))^2} + \frac{e^2-1}{(1+e^{*}\cos(\varphi_0))^2}\ \sin(\varphi_0)$$

Les équations (32) et (33) s'écrivent

$$\frac{d^2U}{d\varphi_0^2} - A_1\,\frac{dU}{d\varphi_0} + B_1U - CV + D_1 = 0 \qquad (34)$$

$$\frac{d^2V}{d\varphi_0^2} - A_1\,\frac{dV}{d\varphi_0} + B_2V - CU + D_2 = 0 \qquad (35)$$

Nous utilisons la méthode des différences finies pour résoudre les deux équations différentielles aux dérivées partielles (34) et (35)

$$\frac{d^2U}{d\varphi_0^2} = \frac{U(i-1)-2U(i)+U(i+1)}{\Delta\varphi_0^2}.$$

$$\frac{dU}{d\varphi_0} = \frac{U(i)-U(i-1)}{\Delta\varphi_0}$$

$$\frac{d^2V}{d\varphi_0^2} = \frac{V(i-1)-2V(i)+V(i+1)}{\Delta\varphi_0^2}$$

$$\frac{dV}{d\varphi_0} = \frac{V(i)-V(i-1)}{\Delta\varphi_0}$$

Portons ces expressions dans (34) et (35)

$$U(i+1)=2U(i)-U(i-1)+\Delta\varphi_0 A_1(i)\big(U(i)-U(i-1)\big)-\Delta\varphi_0^2\big(B_1(i)U(i)-C(i)V(i) + D_1(i)\big)$$

$$V(i+1)=2V(i)-V(i-1)+\Delta\varphi_0 A_1(i)\big(V(i)-V(i-1)\big)-\Delta\varphi_0^2\big(B_2(i)V(i)-C(i)U(i)+ D_2(i)\big)$$

Nous déterminons les solutions de ce système en utilisant la méthode itérative avec les conditions initiales suivantes

$$U(0) = U(1) = 0$$
$$V(0) = V(1) = 0$$

7) Déplacement du périhélie des planètes :

En chaque point de la trajectoire elliptique, le rayon s'écrit en fonction des perturbations:

$$r^2=r_0^2+2(y_1p_1+y_2p_2)+p_1^2+p_2^2 \qquad (36)$$

Au périhélie, le rayon atteint son minimum, la dérivé $\frac{dr}{d\varphi_0}$ s'annulle et l'équation (36) donne

$$r\frac{dr}{d\varphi_0} = r_0\frac{dr_0}{d\varphi_0} + \left(y_1\frac{dp_1}{d\varphi_0} + y_2\frac{dp_2}{d\varphi_0} + \frac{dy_1}{d\varphi_0}p_1 + \frac{dy_2}{d\varphi_0}p_2\right) + p_1\frac{dp_1}{d\varphi_0} + p_2\frac{dp_2}{d\varphi_0} \tag{37}$$

pour un mouvement non perturbé nous avons :

$$y_1 = r_0\cos\varphi_0$$
$$y_2 = r_0\sin\varphi_0$$

$$r_0 = \frac{r_m(1+e)}{1+e\cos\varphi_0}$$

et les dérivées par rapport à l'angle de rotation de y_1, y_2 et r_0 sont

$$\frac{dr_0}{d\varphi_0} = r_0\frac{e\sin\varphi_0}{1+e\cos\varphi_0}$$

$$\frac{dy_1}{d\varphi_0} = r_0\frac{e\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{1+e\cos\varphi_0} - r_0\sin\varphi_0$$

$$\frac{dy_2}{d\varphi_0} = r_0\frac{e\sin^2\varphi_0}{1+\cos\varphi_0} + r_0\cos\varphi_0$$

Au voisinage du périhélie nous avons :

$$\varphi_0 = 2\pi + \Delta\varphi_0 \qquad \Delta\varphi_0 \ll 2\pi$$

donc $\cos\varphi_0 = \cos(2\pi + \Delta\varphi_0) \approx 1$

et

$$\sin\varphi_0 = \sin(2\pi + \Delta\varphi_0) \approx \Delta\varphi_0$$

faisons l'approximation nécessaire au voisinage du périhélie

$$r_0 \approx r_m$$

$$\frac{dr_0}{d\varphi_0} \approx r_0 \frac{e}{1+e} \Delta\varphi_0 \approx r_m \frac{e}{1+e} \Delta\varphi_0$$

$$\frac{dy_1}{d\varphi_0} \approx r_0 \frac{e}{1+e} \Delta\varphi_0 - r_0 \Delta\varphi_0 \approx - \frac{r_m}{1+e} \Delta\varphi_0$$

$$\frac{dy_2}{d\varphi_0} \approx r_m \frac{e}{1+e} \Delta\varphi_0^2 + r_m \approx r_m$$

Dans la relation (37) ous négligeons $p_1 \frac{dp_1}{d\varphi_0}$ et $p_2 \frac{dp_2}{d\varphi_0}$.

De cette équation nous déduisons l'angle polaire $\Delta\varphi_0$ de la planète non perturbée, lorsque la planète perturbée atteint son périhélie.

$$\Delta\varphi_0 = -\left(\frac{dp_1}{d\varphi_0} + p_2\right) / \left(r_m \frac{e}{1+e} + \frac{dp_2}{d\varphi_0}\right) \text{ radians} \qquad (38)$$

En fonction de U et V

$$\Delta\varphi_0 = -\left(\frac{dU}{d\varphi_0} + V\right) / \left(\frac{r_m}{K} \frac{e}{1+e} + \frac{dV}{d\varphi_0}\right) \text{ radians} \qquad (39)$$

à chaque révolution de la planète s'ajoute donc une avance $\Delta\varphi$ de son périhélie.

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \frac{KV}{r_m}$$

En secondes d'arc, nous obtenons:

$$\Delta\varphi' = \frac{180*3600}{\pi} \Delta\varphi \qquad (40)$$

Ceci est l'avance du périhélie pour une révolution de la planète. Si T est la durée de cette révolution exprimée en jours sidéraux, l'avance séculaire exprimée en secondes d'arc sera représentée par:

$$\Delta\Omega = \Delta\varphi' \frac{100A}{T} \qquad (41)$$

A est, en jours sidéraux, la période de révolution de la terre autour du soleil A vaut 365 jours.

D'après l'équation (39) nous pouvons donc, en utilisant le résultat de la résolution des équations différentielles aux dérivés partielles (34) et (35), calculer l'avance du périhélie des planètes.

Nous avons fait les calculs pour les trois planètes Mercure, Mars et Vénus.

a) PLANETE MERCURE

Pour la planète Mercure nous avons

T = 88 jours
r_m = 153.33 sec
e = 0.206

Le calcul sur ordinateur nous a donné
$\Delta\varphi_0$ = 218.5 secondes d'arc par siècle.
V = -63
$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \frac{KV}{r_m}$. = 44.5 218.5 secondes d'arc par siècle.

b) PLANETE VENUS

Pour la planète Vénus nous avons

T = 224.7 jours

r_m = 356.666 sec
e = 0.0068

$\Delta\varphi_0$ =6.49 secondes d'arc par siècle.
V = - 14 .
$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \frac{KV}{r_m}$. = 13 secondes d'arc par siècle.

c) PLANETE MARS

Pour la planète Mars nous avons

T = 689.98 jours
r_m = 690 sec
e = 0.0934

Le calcul sur ordinateur nous a donné

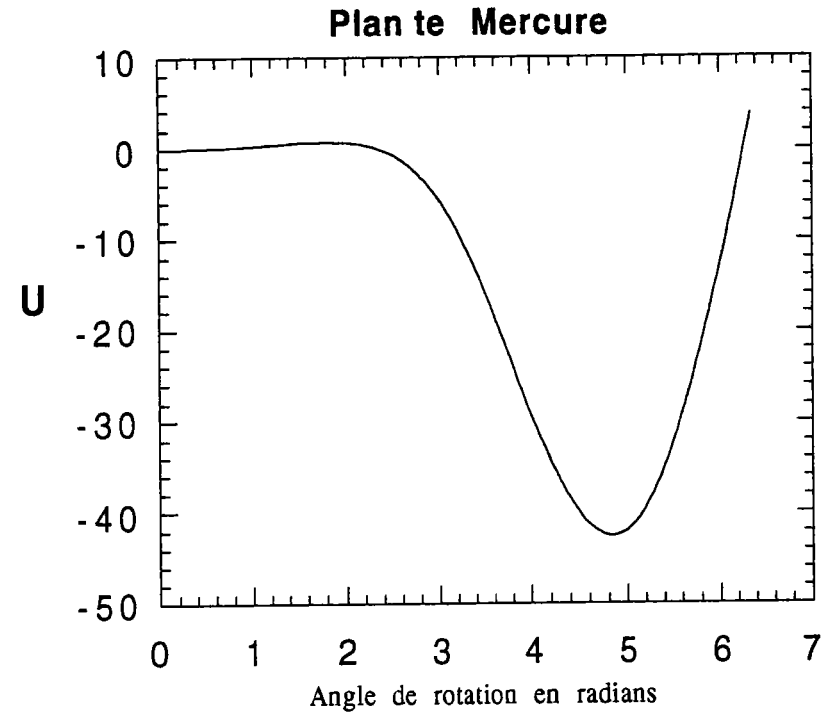
$\Delta\varphi_0$ = 3.97 secondes d'arc par siècle.
V = - 31.55
$\Delta\varphi = \Delta\varphi_0 + \frac{KV}{r_m}$. = 2 secondes d'arc par siècle.

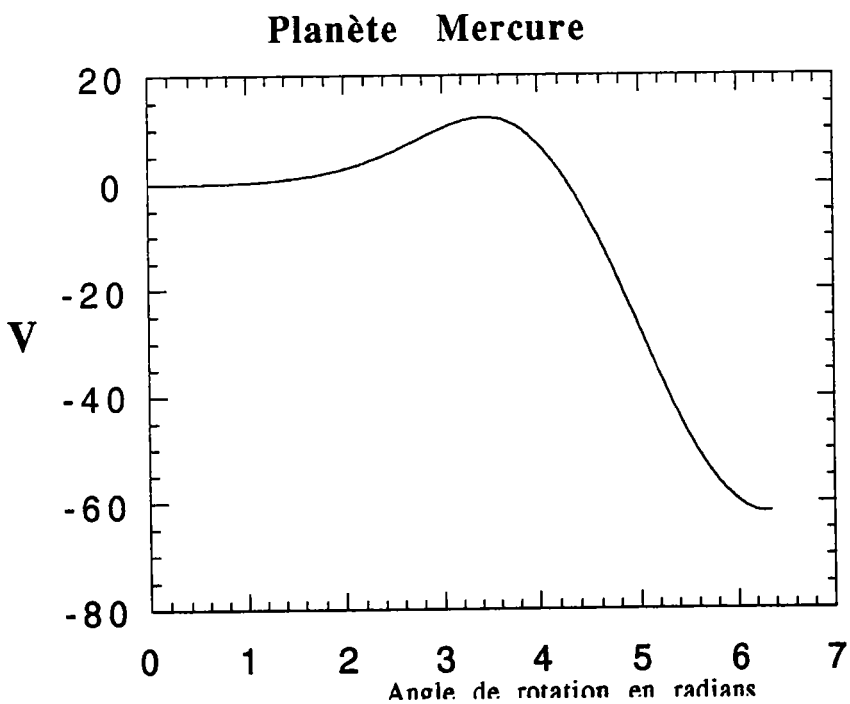
Nous résumons ces résultats dans le tableau suivant

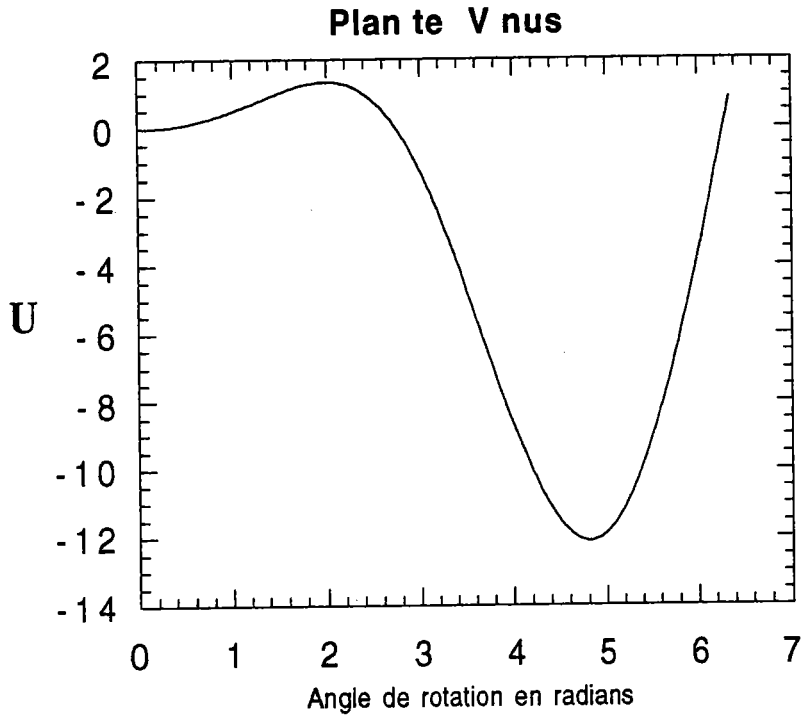
	e	$r_{m(sec)}$	T(jours)	φ_0	V	$\Delta\Omega$ Calculé	$\Delta\Omega$ Observé
Mercure	0.206	153.33	88	218.5	-63	44	43.05± 0.45
Vénus	0.0068	356.66	224.7	6.49	-14	13	8.4 ± 4.8
Mars	0.0934	690	689.98	3.97	-31.55	2	1" 34

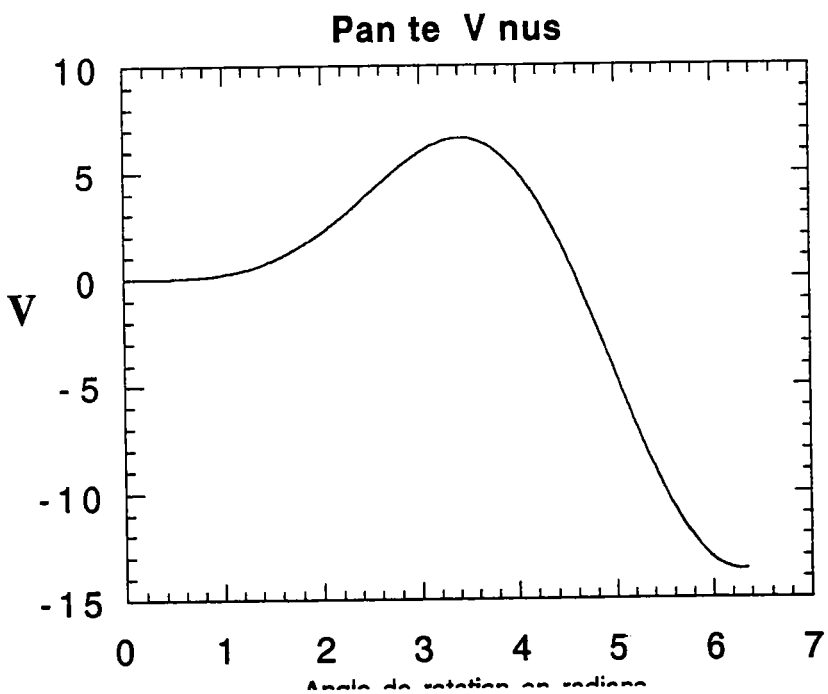
$\Delta\Omega$ est l'avance du périhélie en secondes d'arc par siècle.

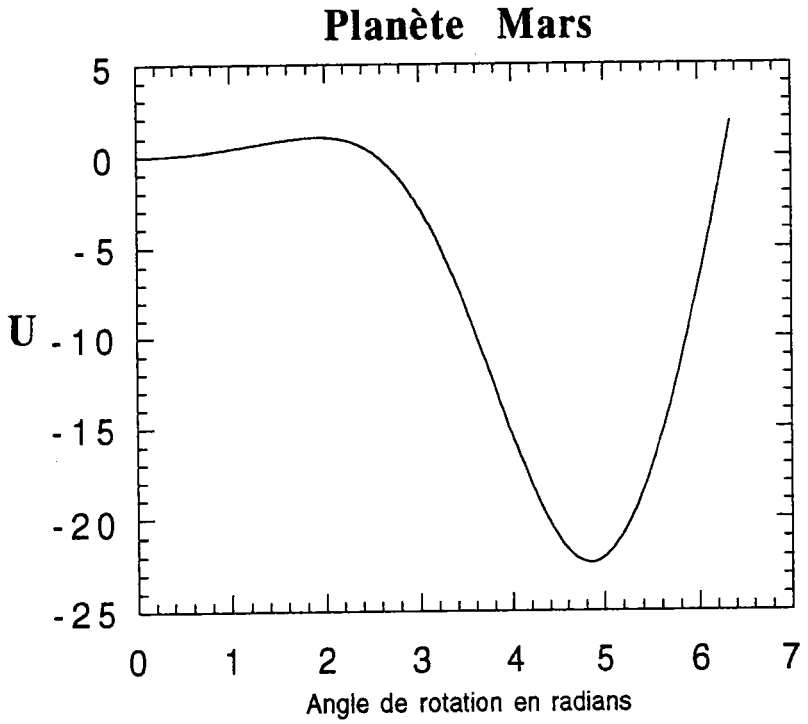
Dans la suite nous donnons les courbes représentants la variation des composantes U et V en fonction de l'angle de rotation φ_0.

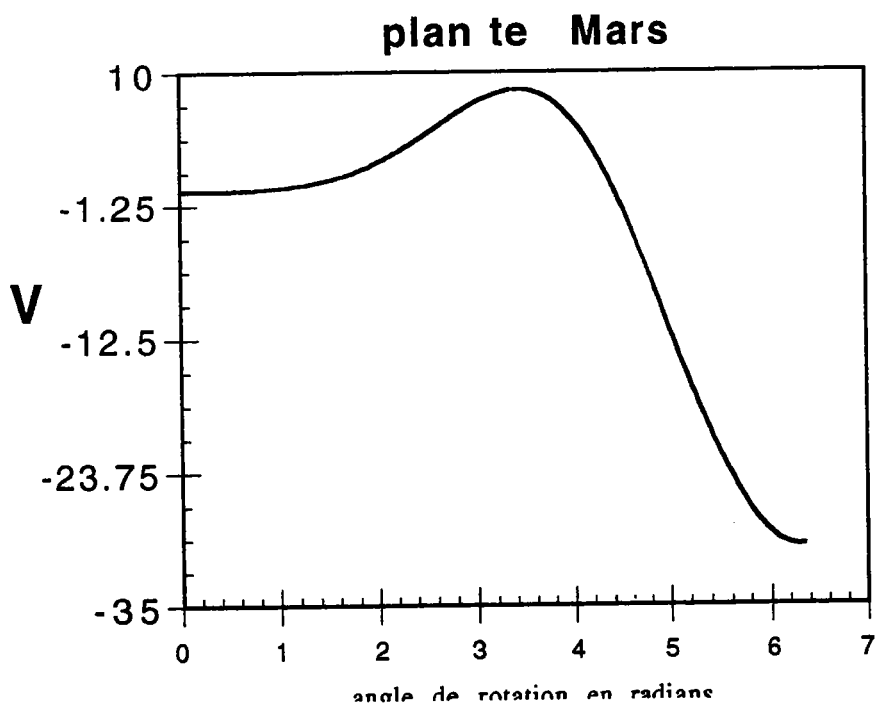

Plan te Mercure
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
U
0
1
2
3
4
5
6
7
Angle de rotation en radians


Planète Mercure
20
0
-20
-40
-60
-80
V
0
1
2
3
4
5
6
7
Angle de rotation en radians


Plan te V nus
U
2
0
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-14
0
1
2
3
4
5
6
7
Angle de rotation en radians


Pan te V nus
V
10
5
0
-5
-10
-15
0
1
2
3
4
5
6
7


Planète Mars
5
0
-5
U
-10
-15
-20
-25
0
1
2
3
4
5
6
7
Angle de rotation en radians


plan te Mars
10
-1.25
V
-12.5
-23.75
-35
0
1
2
3
4
5
6
7
angle de rotation en radians

V.CONCLUSION

Nous avons voulu simplifier l'approche traditionnelle de la relativité générale par l'introduction de coordonnées complexes de l'espace-temps.

Cette méthode nous a conduite à des résultats connus pour les effets du premier ordre. Pour l'avance des périhélies des planètes, le calcul des perturbations relativistes est necessaire pour retrouver les valeurs admises.

Les relations

$$ds^2 = (\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij})dX_i dX_j$$

$$\varepsilon_{ij,nn} + \varepsilon_{nn,ij} = \varepsilon_{in,jn} + \varepsilon_{jn,in}$$

$$\delta \int ds = 0$$

sont invariantes dans tout changement de repère de l'espace-temps complexe, et sont donc parfaitement valables du point de vue relativiste. Elles sont en accord avec l'expérience.

```
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
       PARAMETER (MH=203)
        DIMENSION   PHI(MH),T1(MH),T2(MH),T3(MH),T4(MH),T5(MH)
        DIMENSION   T6(MH),T7(MH),T8(MH),T9(MH),T10(MH),T11(MH)
        DIMENSION   T12(MH),T13(MH),T14(MH),T15(MH),T16(MH)
        DIMENSION   T17(MH),T18(MH),T19(MH)
       DIMENSION   U(MH),V(MH)
c       DIMENSION   A6(MH),PHI0(MH),APHI0(MH),A4(MH),A5(MH)
c
c
c
           Open(1,file='X1',status='unknown')
           Open(2,file='X2',status='unknown')
           Open(3,file='X3',status='unknown')
           Open(4,file='X4',status='unknown')
           Open(5,file='X5',status='unknown')
           Open(6,file='X6',status='unknown')
           Open(7,file='X7',status='unknown')
           Open(8,file='X8',status='unknown')
           Open(9,file='X9',status='unknown')
           Open(10,file='X10',status='unknown')
           Open(11,file='X11',status='unknown')
           Open(12,file='X12',status='unknown')
c
        RM=356.666
       XK=4.962E-6
        E=0.0068
        NEI=202
      NEN=NEI+1
         PI =4.d0*Datan(1.d0)
        PI2=2.d0*PI
       WRITE(*,*)PI2
         dph=(2.*PI)/200.
       A=-2.5
C  CON In
```

```
      U(1)=0.
      U(2)=0.
      V(1)=0.
      V(2)=0.
C
      DO 1 I=1,nen
        phi(I)=dph*float(I-1)
        write(2,'(2E25.15)')phi(I)

1       continue
C
      DO 2 I=1,NEN
        T3(I)=2.*E*SIN(PHI(I))
        T4(I)=1-3*(COS(PHI(I)))**2
       T2(I)=1.+E*COS(PHI(I))
        T1(I)=T3(I)/T2(I)
        T6(I)=1-3*(SIN(PHI(I)))**2
        T5(I)=T4(I)/T2(I)
        T7(I)=T6(I)/T2(I)
        T8(I)=3*(SIN(PHI(I)))*(COS(PHI(I)))
        T9(I)=T8(I)/T2(I)
       T10(I)=4*E*(SIN(PHI(I)))**2
        T12(I)=(E**2-1)/((T2(I))**2)
        T11(I)=T10(I)/((T2(I))**2)
       T13(I)=-A/T2(I)
       T14(I)=(T12(I)+T13(I))*COS(PHI(I))
       T15(I)=T11(I)+T14(I)
       T16(I)=-4*E*(SIN(PHI(I)))*(e+COS(PHI(I)))
        T17(I)=T16(I)/((T2(I))**2)
        T18(I)=(T12(I)+T13(I))*SIN(PHI(I))
       T19(I)=T17(I)+T18(I)
2     CONTINUE
c      DO 8 I=1,NEN
         write(2,'(2E25.15)')phi(I),A3(I)
         write(3,'(2E25.15)')phi(I),B3(I)
```

```
          write(4,'(2E25.15)')phi(I),B4(I)
          write(5,'(2E25.15)')phi(I),C1(I)
          write(6,'(2E25.15)')phi(I),D1(I)
          write(7,'(2E25.15)')phi(I),E3(I)
c          write(8,'(2E25.15)')phi(I),F3(I)

      CONTINUE

C
C
       DO 3 I=2,NEN-1
          U(I+1)=2*U(I)-U(I-1)+T1(I)*DPH*(U(I)-U(I-1))-
     &       ((DPH)**2)*((T5(I))*(U(I))-
     &        (T9(I))*(V(I))+T15(I))
          V(I+1)=2*V(I)-V(I-1)+T1(I)*DPH*(V(I)-V(I-1))-
     &     ((DPH)**2)*((T7(I))*(V(I))-
     &      (T9(I))*(U(I))+T19(I))
3      CONTINUE
c
       DO 4 I=1,NEN
          write(11,'(8X,I3,2X,2E25.15)')I,phi(I),U(I)
          write(12,'(8X,I3,2X,2E25.15)')I,phi(I),V(I)
4      CONTINUE
          A4=(RM/XK)*(E/(1.+E))+((V(202)-V(201))/DPH)-U(202)
         A5=-(U(202)-U(201))/DPH
        A6=-V(202)
         A7=-(XK/RM)*(U(202))*((U(202)-U(201))/DPH)
         A8=-(XK/RM)*(V(202))*((V(202)-V(201))/DPH)
        PHI0=(A5+A6+A7+A8)/(A4)
           APHI0=(180./PI)*(3600.)*(365./224.7)*(100)*(PHI0)
       WRITE(*,*)'APHI0=',APHI0
C
       STOP
       END
       .
```

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.MANDEL Mécaniques des milieux continus.GAUTHIER-VILLARS Paris 1966, tome 1 chap 1.

[2] M.A.TONNELAT Les vérifications expérimentales de la relativité générale. éd MASSON 1964

[3] Henri ARZELIES Relativité généralisée -Gravitation Fascicule I éd GAUTHIER-VILLARS Paris 1961

[4] Henri ARZELIES Relativité généralisée -Gravitation Fascicule II éd GAUTHIER-VILLARS Paris 1963

[5] Edgard ELBAZ Relativité générale et gravitation éd ellipses 1986

[6] JEAN CHARON Relativité générale éd de la grande BATELIERE Paris 1963

[7] P.LANGEVIN.Le principe de la relativité.Paris.Ed.Chiron, 1922.p 37.

[8] DARWIN C.G. The clock paradox in relativity, Nature, 1957,180.

[9] BUHL A. Sur le mouvement séculaire du périhélie de Mercure,C.R.Ac.Sc.(Paris), 1922, 175.

[10] MORTON B. The form of planetary orbits in the theory of relativity, Phil Mag, 1921, 42.

[11] TROUSSET J. Les lois de Kepler et les orbites relativistes, C.R.Ac.Sc., (Paris), 174.

[12] CHAZY J. La théorie de la mécanique céleste, (Paris), Gauthier-Villars, 1928, I,.

[13] ESCLANGON E. Sur la déviation Einsteinienne des rayons lumineux par le soleil, C.R.Ac.Sc., (Paris), 1914,178.

[14] AVEZ A. Ondes monochromatiques et Effets Doppler en relativité générale, séminaire Janet, 1961.

[15] CATTANEO.C. Formulation relative des lois physiques en relativité générale, cours professé au collège de France, 1962.

[16] TONNELAT M.A. Les fréquences en relativité générale. Définitions théoriques et vérifications expérimentales, Ann.Ins.H. Poincaré.

[17] BROUWER D. et CLEMENCE G.M. The accuracy of the coordinates of the five unier planets and the invariable plane, Astron.J.,1955,118.

[18] CLEMENCE G.M. The Motion of Mercury 1765-1937, Astron.Papers ,1943, 11.

[19] CHAZY J. La théorie de la relativité et la mécanique céleste I et II (Paris), Gauthier-Villars, 1928, I,.

[20] M.SOFFEL. Relativity in astronometry. Celestial Mechanics and Geodesy. Spriner Velag.1989.

[21] V.BRUMBERG. Essential Relativistic Celestiac Mechanics. Adam Hilger 1991.

[22] Ph.TOURENC. Relativité et gravitation.Armand Colin, Paris, 1992.

[23] MULLER.HOISSEN (F.).The cosmological principle and a generalization of Newton's theory of gravitation. Inst. theoretical physics. Göttingen 3400. DEU. - Gen. Relativ. Gravit., GBR. (1983), 15, n° 11, 1051-1066.

[24] KODAMA (H.) SASAKI (M.).Cosmological perturbation theory. Univ. Tokyo. dep. physics, Tokyo 113, JPN. - Prog. Theor. Phys. Suppl., JPN, (1984 publ. 1985) n° 78, 166 p.

[25] WILL (C.M.). Washington univ.,A new class of ideal clocks. dep. physics, St Louis MO 63130, USA. - Gen. Relativ. Gravit., GBR, (1985); 17, n° 2, 173-177.

[26] WÄCKERLE (E.). Determination of coordinates in general relativity by a variational principle. Hubertusstr. 33, Ottobrunn 8012, DEU. - Ann. Phys., DDR, (1984), 41, n° 4-5, 345-352, abs. eng.

[27] GAMBI (J.M.). SAN MIGUEL (A.).Relativistic orbital perturbations in a weak gravitational field. Univ. Valladolid. dep. theoretical physics. Valladolid. ESP. - Int. J. Theor. Phys., GBR, (1986), 25, n° 2, 175-193.

[28] CARMELI (M.).Cosmic Lorentz transformation. Univ. Maryland. dep. physics astronomy, College Park MD 20742, USA. - Int. J. Theor. Phys., GBR, (1986), 25, n° 2, 195-198.

[29] HERSH (J.), OVE (R.).Instability of the Kerr solution of fourth-order gravity. Yale univ., physics dep., New Haven CT 06511, USA. - Phys. Lett. B, NLD, (1985), 156, n° 5-6, 305-308.