



**HAL**  
open science

# Propagation d'une onde viscoélastique le long d'une barre en PMMA et réalisation d'essais dynamiques sur le polyuréthane

Kamel Labibes

► **To cite this version:**

Kamel Labibes. Propagation d'une onde viscoélastique le long d'une barre en PMMA et réalisation d'essais dynamiques sur le polyuréthane. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ033S . tel-01776117

**HAL Id: tel-01776117**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776117v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



# THESE

142996

Présentée à

## L'UNIVERSITE DE METZ

Par

Kamel LABIBES

En vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE SCIENCES ET TECHNIQUES - METZ -	
N° inv.	19940995
Cote	S/M3 94/33
Loc.	Magasin
Zon	

OK

Mention : Sciences pour l'Ingénieur n° 7642  
Intitulé : Génie Mécanique

### PROPAGATION D'UNE ONDE VISCOELASTIQUE LE LONG D'UNE BARRE EN PMMA ET REALISATION D'ESSAIS DYNAMIQUES SUR LE POLYURETHANNE

Soutenue en septembre 1994, devant la Commission d'Examen :

<b>G. PLUVINAGE</b>	Professeur (Université de Metz)
<b>L.WANG</b>	Professeur (Université de Ningbo. Chine)
<b>D. D. CIOCLOV</b>	Professeur (Université Tech. de Timisoara. Roumanie)
<b>Z. AZARI</b>	Maître de Conférence (INSSET de St Quentin)
<b>M. NAIT ABDELAZIZ</b>	Maître de conférence (IUT de Lille)
<b>M. GUIGON</b>	Professeur (Université de Compiègne)

## **REMERCIEMENTS**

Cette étude a été réalisée au sein du Laboratoire de Fiabilité Mécanique sous la direction du Professeur PLUVINAGE que je remercie pour ses conseils et son soutien tout le long de ce travail.

Ce travail est le fruit d'une collaboration avec l'Université de Ningbo (Chine) représentée par le Professeur Lili WANG à qui j'exprime ma gratitude pour m'avoir transmis son savoir faire lors de son séjour en France.

Je remercie M. AZARI pour l'aide apportée tout le long de ce travail, pour son soutien ainsi que pour avoir accepté de lire et donner son avis sur ce mémoire.

Je ne saurais oublier de remercier M. JODIN pour sa présence lors des problèmes qui ont pu apparaître au niveau expérimental mais aussi pour ses conseils judicieux.

Je remercie également M. BAKOWSKI pour son aide lors de la réalisation des divers montages mécaniques.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont participé à l'aboutissement de ce travail et en particulier les étudiants du Laboratoire de Fiabilité Mécanique.

# SOMMAIRE

<b>I. INTRODUCTION GENERALE</b>	<b>5</b>
<b>PARTIE BIBLIOGRAPHIQUE</b>	
<b>II. LES POLYMERES</b>	<b>8</b>
<b>II.1. Définition d'un polymère</b>	<b>8</b>
<b>II.2 Les polyuréthannes</b>	<b>9</b>
<b>II.3. Analyse thermodynamique</b>	<b>10</b>
<b>II.4. La viscoélasticité</b>	<b>14</b>
<b>II.4.1. Lois de comportement</b>	<b>14</b>
<b>II.4.2. Fonction de relaxation</b>	<b>15</b>
<b>II.4.3. Fonction de fluage</b>	<b>16</b>
<b>II.4.4 les modèles viscoélastiques</b>	<b>16</b>
<b>III. GENERALITES SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE</b>	<b>20</b>
<b>III.1. Les Critères locaux</b>	<b>20</b>
<b>III.2. Critères globaux</b>	<b>22</b>
<b>III.2.1. Bilan énergétique d'un système mécanique</b>	<b>22</b>
<b>III.2.2. Le taux de restitution d'énergie</b>	<b>23</b>
<b>III.2.3. Intégrale de contour J</b>	<b>24</b>
<b>III.2.4. Le Critère d'Andrews</b>	<b>25</b>
<b>III.2.4.1 Bases théoriques</b>	<b>26</b>
<b>III.2.4.2. Détermination expérimentale de I</b>	<b>28</b>
<b>III.2.4.3. Correction du critère d'Andrews</b>	<b>31</b>

<b>IV. ETUDE STATISTIQUE ET APPLICATION DANS LA MECANIQUE DE LA RUPTURE</b>	<b>33</b>
<b>IV.1. Introduction</b>	<b>33</b>
<b>IV.2 Loi de Weibull</b>	<b>33</b>
<b>IV.2. Loi des Valeurs Extrêmes (ou loi de Fisher-Tipett)</b>	<b>35</b>
<b>IV.3.1. Caractéristiques de la distribution des valeurs extrêmes</b>	<b>37</b>
<b>IV.3.2. Le test de Kolmogorov-Smirnov</b>	<b>37</b>
<b>V. LES BARRES D'HOPKINSON</b>	<b>39</b>
<b>V.1. Historique</b>	<b>39</b>
<b>V.1.1. Méthode de Harding</b>	<b>39</b>
<b>V.1.2. Méthode de Chase</b>	<b>40</b>
<b>VI. ETUDE DE LA PROPAGATION DES ONDES LE LONG D'UNE BARRE MINCE</b>	<b>41</b>
<b>VI.1. Rappels sur la théorie de la propagation d'ondes élastiques</b>	<b>41</b>

## **PARTIE EXPERIMENTALE**

### **1. Propagation des ondes**

<b>INTRODUCTION</b>	<b>46</b>
<b>VII. Etude de la Propagation d'une onde viscoélastique par la méthode des caractéristiques</b>	<b>47</b>
<b>VII.1. Equation de Zhu.Wang.Tang</b>	<b>47</b>
<b>VII.2. Méthode des caractéristiques</b>	<b>54</b>

<b>VIII. Recherche de la solution dans le cas des barres d'Hopkinson</b>	<b>60</b>
<b>IX. Montage expérimentale et Méthodes de mesure</b>	<b>65</b>
<b>IX.1. Les appareils de mesure</b>	<b>66</b>
<b>IX.2. Calibration des jauges de déformation</b>	<b>66</b>
<b>X. Essais d'impact</b>	<b>69</b>
<b>X.1. Illustration de la propagation des ondes élastiques et viscoélastiques</b>	<b>69</b>
<b>X.1.1. Détermination des paramètres viscoélastiques du PMMA</b>	<b>71</b>
<b>X.1.1.1. Détermination de la valeur du coefficient d'amortissement "<math>\alpha_a</math>"</b>	<b>71</b>
<b>X.1.1.2. Détermination des valeurs du temps de relaxation <math>\theta_2</math> et de la constante élastique <math>E_2</math></b>	<b>71</b>
<b>X.2. Comparaison des valeurs expérimentales et théoriques de la déformation, la contrainte et la vitesse particulaire le long d'une barre en PMMA soumise à une onde mécanique</b>	<b>72</b>
<b>XI. Simulation de la propagation d'ondes viscoélastiques</b>	<b>75</b>
<b>XI.1. Le PMMA</b>	<b>75</b>
<b>XI.1.1 Influence de <math>\theta_2</math> sur la propagation des ondes viscoélastiques</b>	<b>77</b>
<b>XI.1.2. Influence de la distance sur la propagation des ondes viscoélastiques</b>	<b>78</b>
<b>XI.2. Le polycarbonate (PC)</b>	<b>79</b>
<b>XI.3. L'epoxyde</b>	<b>82</b>
<b>XII. Conclusion</b>	<b>84</b>

## 2. Rupture

<b>Introduction</b>	<b>86</b>
<b>XIII. Essais dynamiques</b>	<b>87</b>
<b>XIII.1. Géométrie des échantillons</b>	<b>87</b>
<b>XIII.2. Dispositif expérimental</b>	<b>87</b>
<b>XIII.3. Modifications apportées</b>	<b>89</b>
<b>XIII.3.1. Réalisation du montage</b>	<b>89</b>
<b>XIII.4. Résultats expérimentaux</b>	<b>93</b>
<b>XIII.4.1. Théorie généralisée</b>	<b>93</b>
<b>XIV. Essais sous sollicitation quasi-statique</b>	<b>98</b>
<b>XIV.1. Géométrie des échantillons</b>	<b>98</b>
<b>XIV.2. Machine d'essai</b>	<b>98</b>
<b>XIV.3. Protocole d'essais</b>	<b>100</b>
<b>Conclusion</b>	<b>104</b>
<b>XIV.4 Exploitation des résultats</b>	<b>104</b>
<b>Conclusion</b>	<b>106</b>
<b>CONCLUSION GENERALE</b>	<b>108</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>110</b>



## I. INTRODUCTION GENERALE

Les polymères, se sont aujourd'hui substitués aux métaux, au bois et à d'autres matériaux traditionnels dans de nombreux domaines et jouent un rôle déterminant dans toutes les mutations technologiques. On assiste actuellement à un accroissement de l'utilisation des polymères dans les domaines techniques tels l'aviation, l'automobile, les trains à grande vitesse, l'électronique, etc.

L'application de la mécanique de la rupture à ces matériaux s'est évidemment développée en parallèle. Dans le cadre de cette thèse il nous a été proposé d'étudier le comportement mécanique à grandes vitesses de déformation du polyuréthane en utilisant la technique des barres d'Hopkinson. Ce travail a été réalisé en coopération avec le professeur Wang Lili de l'Université de Ningbo (Chine). Notre but est de caractériser ce matériau en substituant les barres en aluminium utilisées dans la technique expérimentale par des barres en Poly Méthyl Méth Acrylate (PMMA), ce qui permet d'obtenir une plus grande précision des mesures. Pour réaliser cela, il est indispensable d'étudier la propagation des ondes viscoélastiques le long des barres minces.

Dans la partie bibliographique, nous définirons brièvement les polymères et leurs caractéristiques telle que la viscoélasticité. Nous citerons les principaux critères de rupture utilisés en mécanique, en particulier le critère d'Andrews généralement utilisé pour caractériser les polymères.

La dispersion des résultats expérimentaux obtenus lors des travaux réalisés au Laboratoire de Fiabilité Mécanique [1.1 et 3.16] sur les polymères nous a conduits à proposer une approche statistique dans l'interprétation des résultats. Un rappel des lois statistiques telle celle de Weibull et les valeurs extrêmes nous a paru nécessaire.

Nous citerons enfin les principaux dispositifs de barres d'Hopkinson réalisés en traction et entamerons un rappel de la propagation des ondes le long d'une barre mince.

La partie expérimentale est divisée en deux sous partie :

### 1- propagation

Notre but est la prédiction de l'amortissement d'une onde viscoélastique lors de sa propagation le long d'une barre en PMMA.

Cette partie sera abordée par l'énoncé de la loi de comportement viscoélastique non linéaire utilisée dans cette étude [6.9]. Nous montrerons les modifications apportées à cette équation pour l'adapter à notre cas : l'étude d'une onde viscoélastique linéaire dans une gamme donnée de vitesse de propagation.

Nous utiliserons dans cette étude la méthode des caractéristiques qui permet d'obtenir les solutions de l'équation rhéologique sans passer par la transformée de Fourier.

Une comparaison des résultats obtenus par cette méthode seront comparés aux résultats expérimentaux. Enfin, dans le but de montrer l'influence des paramètres viscoélastiques, une simulation de la propagation d'ondes viscoélastique sera réalisée pour différents types de polymères.

## 2- rupture

Nous proposons dans cette partie une modification du dispositif des barres d'Hopkinson en traction qui nous permettrait d'utiliser des barres en PMMA et la réalisation d'essais sur des matériaux relativement plus résistants que ceux réalisés sur le montage qui existait déjà au laboratoire. Nous réalisons par la suite des essais sur des échantillons en polyuréthane dont nous déterminerons la ténacité dynamique et statique. L'exploitation des résultats sera réalisée par une approche statistique vu la dispersion des résultats expérimentaux, phénomène déjà observé lors des travaux précédents sur les polymères [1.1 et 3.16].

# **PARTIE BIBLIOGRAPHIQUE**

## II. LES POLYMERES

### II.1. Définition d'un polymère

Le mot polymère nous vient du grec. les racines "poly" et "Meras" signifient plusieurs parties. Un polymère est une macromolécule constituée par l'enchaînement d'un certain nombre de motifs identiques, les monomères. La formule du polymère est symbolisée par celle de l'unité répétitive, mise entre parenthèses et accompagnée d'un indice  $n$  qui indique le nombre de monomères constituant chaque chaîne de polymères. Lorsque ce nombre  $n$  est inférieur à une dizaine, le polymère reçoit le nom d'oligomère. Les propriétés du polymère dépendent de la nature des monomères, de la masse moléculaire et de leurs liaisons chimiques dans la macromolécule.

Dans un polymère linéaire les macromolécules sont indépendantes les unes des autres (sans liaison chimique), la cohésion est assurée par des interactions physiques qui diminuent quand la température s'élève. Ce sont des **thermoplastiques**.

Dans un polymère réticulé, les chaînes macromoléculaires sont reliées par des liaisons chimiques qui se forment par chauffage, en présence d'un catalyseur, ou par irradiation. Les polymères qui sont réticulables par chauffage sont dits **thermodurcissables**.

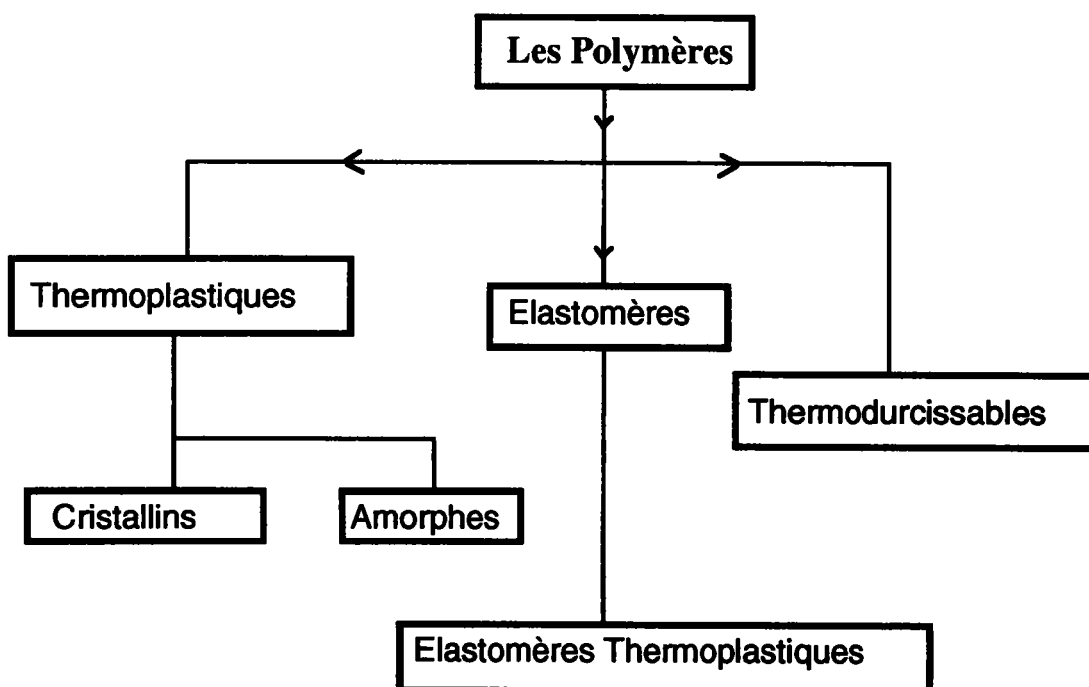


Figure 2.1. Classification des polymères

D'un point de vue physique, un polymère à l'état solide peut présenter une morphologie vitreuse (on parle alors de polymère amorphe) ou partiellement cristalline (figure 2.2).

Dans le premier cas, les propriétés mécaniques du polymère sont gouvernées par sa température de transition vitreuse "Tg", température à laquelle il passe de l'état solide vitreux à un état viscoélastique.

Dans le cas des polymères partiellement cristallins, c'est le degré de cristallinité " $x_c$ " qui contrôle les propriétés à l'état solide (signalons en effet que la structure d'un polymère présente toujours un certain nombre de défauts qui l'empêche d'être totalement cristallin ( $x_c=1$ ) : le polymère présente alors une température de zone vitreuse "Tg" correspondant aux zones amorphes et une température de fusion cristalline "Tc" correspondant aux zones cristallines).

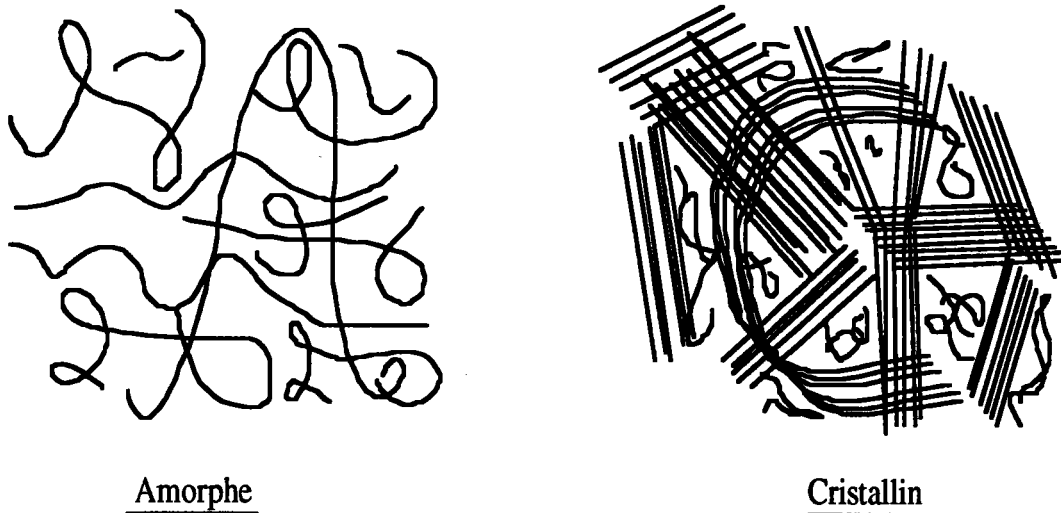


Figure 2.2 : schéma d'arrangements amorphes et semi-cristallins

## II.2 Les polyuréthannes

Les uréthannes ont été synthétisés en 1879 par C.A. Wurtz. Ce n'est qu'en 1937 qu'O. Bayer obtient des polyuréthannes par la réaction de diisocyanates  $[R(CNO)_2]$  et de diols  $[R(OH)_2]$ . Les recherches furent menées parallèlement en Allemagne et aux Etats-Unis pendant la seconde guerre mondiale.

Les Allemands comprirent en premier l'avantage pratique du dégagement gazeux provoqué

par la réaction des isocyanates sur l'eau et fabriquèrent les premières mousses rigides de polyuréthane, destinées aux structures des avions et des sous-marins.

Les premières études industrielles avaient été menées sur des isocyanates aliphatiques, mais le toluène diisocyanate (TDI) issu des travaux menés chez DU PONT DE NEMOURS et chez MONSANTO, d'emploi plus aisé, devait, au début des années 1950, susciter une quantité considérable de recherches en Europe et aux Etats-Unis [2.1], [2,2]. Aujourd'hui ces polymères sont utilisés sous forme de mousses flexibles ou rigides, de fibres et d'élastomères.

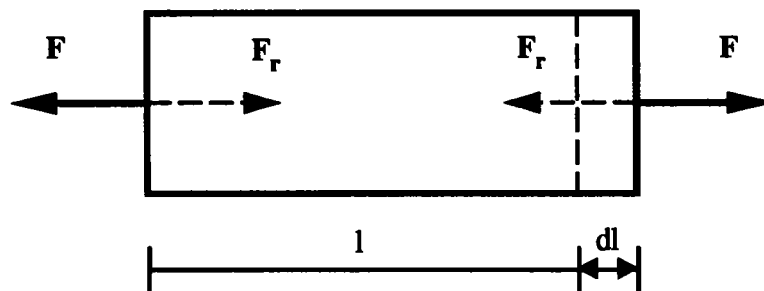
Il faut noter que le terme polyuréthane recouvre en fait une très grande variété de produits avec des propriétés différentes :

- fibres textiles
- mousses (rigides ou souples)
- élastomères
- peintures et vernis
- colles et liant

Dans le cadre de cette étude ce sont les élastomères qui retiendront notre intérêt. Ces élastomères se caractérisent par une déformabilité relativement grande dont l'origine sera explicitée plus loin.

### II.3. Analyse thermodynamique

Considérons un barreau élastique de longueur au repos égale à  $l_0$  et maintenu à une longueur  $l > l_0$  par une force  $F$  (Figure 2.3 ).



*Figure 2.3 : extension uni axiale d'un barreau élastique, maintenu à la longueur  $l$  par une force  $F$ .  $F_r$  est la force de rétraction élastique.*

Le changement d'énergie interne  $dU$  résultant de cette force appliquée s'écrit d'après le premier principe de la thermodynamique :

$$dU = dQ - dW \quad (2.1)$$

$dQ$  est la quantité de chaleur absorbée par le système durant la déformation et  $dW$  représente le travail effectué par celui-ci.

En se limitant au cas des processus réversibles, l'effet thermique  $dQ$  est relié à la variation d'entropie  $dS$  par le deuxième principe de la thermodynamique :

$$dQ = TdS \quad (2.2)$$

Le travail effectué par le système  $dW$  se décompose en deux termes liés au travail effectué par la force de rétraction élastique  $F_r$  et au travail de la pression  $P$  :

$$dW = - F_r dl + PdV \quad (2.3)$$

Introduisons l'énergie libre  $A$  défini par :

$$A = U - TS \quad (2.4)$$

d'où :

$$dA = - SdT - PdV + F_r dl \quad (2.5)$$

Si la déformation élastique se déroule à  $T$  et  $V$  constants, l'expression (2.5) se réduit à :

$$dA = F_r dl \quad \text{ou} \quad \left( \frac{\partial A}{\partial l} \right)_{T, V} = F_r$$

D'après l'équation (2.4) nous obtenons :

$$F_r = \left( \frac{\partial A}{\partial l} \right)_{T, V} = \left( \frac{\partial U}{\partial l} \right)_{T, V} - T \left( \frac{\partial S}{\partial l} \right)_{T, V} = F_{r,i} + F_{r,e} \quad (2.6)$$

La force de rétraction élastique, à  $V$  et  $T$  constants, est égale à l'augmentation de l'énergie libre du système par unité de longueur de l'extension. Cette force peut être scindée en deux contributions, d'une part la force de rétraction interne ou enthalpique :

$$F_{r,i} = \left( \frac{\partial U}{\partial l} \right)_{T, V}$$

et d'autre part la force de rétraction dite entropique :

$$F_{r,e} = - T \left( \frac{\partial S}{\partial l} \right)_{T, V}$$

Dans les solides à élasticité enthalpique (métaux, céramiques cristallines, verres minéraux ou organiques, polymères thermodurcis, etc.), la force de rétraction élastique (figure 2.3) résulte d'un déplacement minime des atomes du solide de leur position d'équilibre. L'énergie de cohésion de ces solides est très élevée. La déformation entraîne une augmentation importante de l'énergie interne (ou de l'enthalpie) du système (figure 2.4 (a et b)), tandis que l'entropie n'est pratiquement pas modifiée puisque les atomes s'écartent très peu de leur position d'équilibre.

Les solides à élasticité entropique (élastomères) sont constitués de longues chaînes macromoléculaires (figure 2.4 (c et d)). La cohésion entre les chaînes est très faible. Dans ces solides, les forces de rétraction sont induites par des mouvements Brownien et augmentent avec la température. Ceci explique pourquoi les élastomères sont caractérisés par un module d'élasticité extrêmement bas ( $E \approx 1$  à  $10$  MPa) et pourquoi leur déformabilité est très grande [2.3].



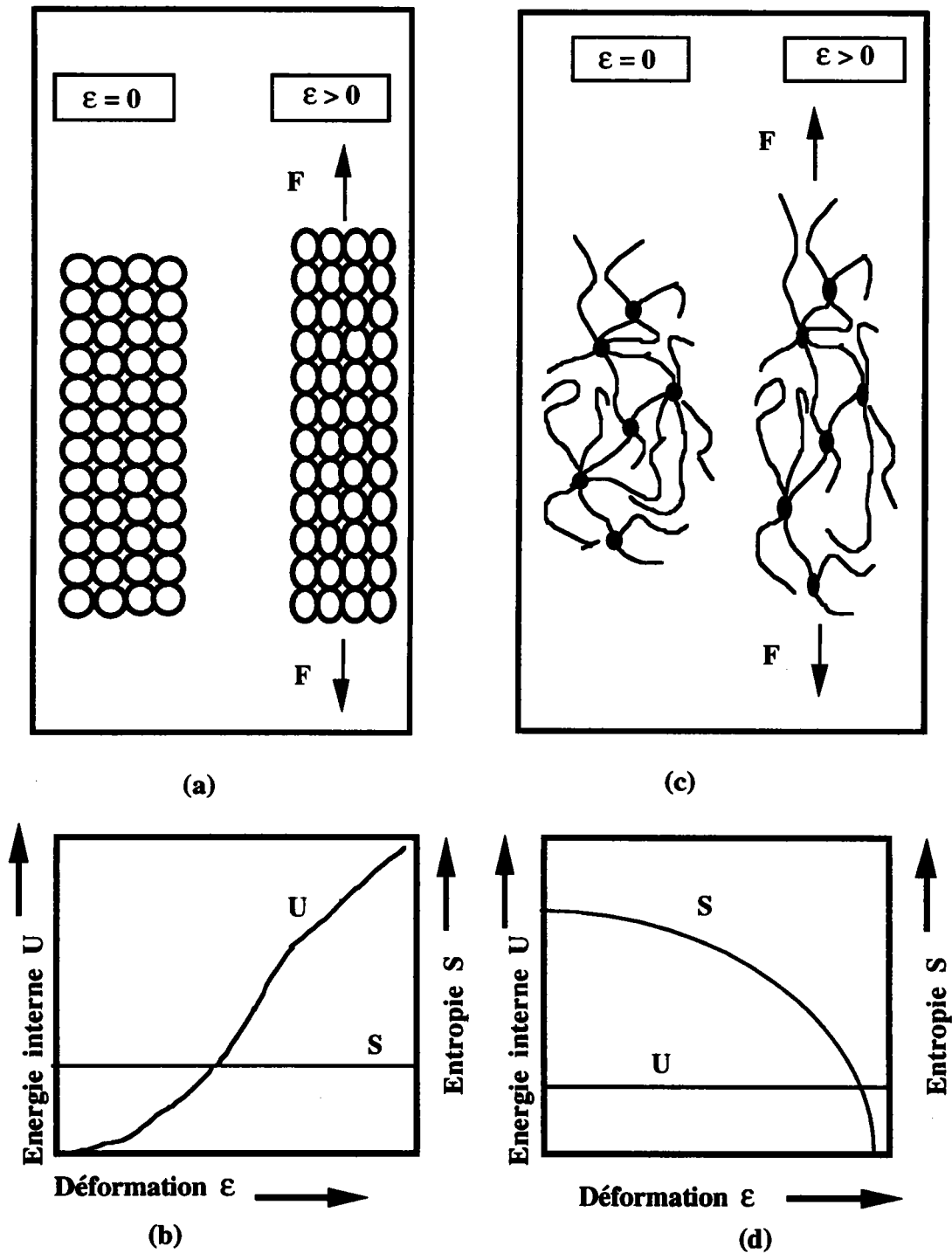


Figure 2.4 : Mécanismes intervenant à l'échelle atomique dans l'élasticité des solides en relation avec l'énergie interne  $U$  et l'entropie  $S$ .

(a) et (b) mécanismes de déformation et variation de l'énergie interne dans les solides à élasticité enthalpique. (c) et (d) mécanismes de déformation et variation d'entropie dans les solides à élasticité entropique (élastomères)

## II.4. La viscoélasticité

Les polymères sont en général des matériaux dits viscoélastiques. Des lois de comportement se situant entre celles du solide élastique et celle du fluide Newtonien permettent la caractérisation et la représentation de ces matériaux. La durée du chargement et la température constituent les principaux facteurs expérimentaux influant sur leurs comportements à la rupture [2.4].

### II.4.1. Lois de comportement

Signalons auparavant que pour un matériau viscoélastique soumis à une contrainte oscillant sinusoïdalement, la déformation n'est ni exactement en phase avec la contrainte (ce qui est le cas pour un solide parfaitement élastique) ni déphasée de  $90^\circ$  (ce qui est le cas pour un liquide parfaitement visqueux) mais déphasée entre les deux valeurs. D'autre part une partie de l'énergie fournie est emmagasinée et retrouvée dans chaque cycle. Le reste est dissipée sous forme de chaleur. Si les valeurs de la déformation et de la vitesse de déformation sont infinitésimales et si les relations contrainte-déformation peuvent être décrites par des équations différentielles avec des coefficients constants nous obtenons un comportement viscoélastique linéaire [2.5].

L'équation rhéologique d'Etat pour une viscoélasticité linéaire en traction simple est basée sur le principe que les effets de chargement séquentiels sont additifs :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \cdot \dot{\varepsilon}(t-\tau) d\tau \quad (2.7)$$

$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$  est la vitesse de déformation,  $E(t-\tau)$  est la fonction de relaxation et "t" un temps de référence.

On peut aussi exprimer la déformation sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \cdot \dot{\sigma}(t-\tau) d\tau \quad (2.8)$$

$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ ;  $J(t-\tau)$  est la fonction de fluage dont le sens physique est expliqué plus loin.

## II.4.2. Fonction de relaxation

Supposons une déformation imposée en un bref instant  $\xi$  avec une vitesse de déformation constante  $\dot{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\xi}$  (figure 2.5). L'équation (2.7) est exprimée alors sous la forme :

$$\sigma(t) = \int_{t_0 - \xi}^{t_0} E(t - \tau) \cdot \frac{\epsilon}{\xi} d\tau \quad (2.9)$$

Où  $t_0$  est le temps correspondant à l'instant où la déformation atteint sa valeur maximale sachant que la vitesse de déformation est nulle avant et après l'intervalle d'intégration. En utilisant le théorème de la moyenne, pour  $t_0 = 0$  nous obtenons :

$$\sigma(t) = \epsilon \cdot E(t + \alpha \cdot \xi) \quad \text{avec} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

et pour un temps de chargement long comparé à  $\xi$ , l'intervalle de chargement :

$$\sigma(t) = \epsilon \cdot E(t) \quad (2.10)$$

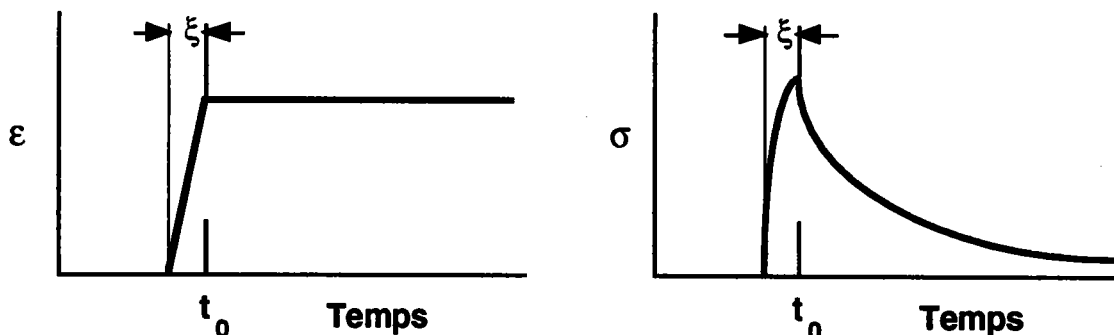


Figure 2.5 expérience de relaxation

La fonction relaxation est la contrainte résultant de l'application d'une déformation d'amplitude unité à l'instant initial  $t_0 = 0$ , déformation qui est maintenue constante au cours du temps.

Le rapport entre la contrainte et la déformation prend le nom de "module " dans le cas d'un

matériau élastique  $E = \frac{1}{J}$  avec  $J$  la complaisance élastique. Pour un matériau viscoélastique  $E(t) \neq \frac{1}{J(t)}$  mais il est analogue au module d'élasticité pour chaque instant  $t$ .

### II.4.3. Fonction de fluage

Une contrainte  $\sigma$  est appliquée en un bref instant avant le temps  $t_0 = 0$  et est maintenue constante (figure 2.6). Pour la déformation, la dépendance du temps peut être obtenue de l'équation (2.8) comme dans le cas de la relaxation avec comme résultat :

$$\varepsilon(t) = \sigma \cdot J(t)$$

La fonction fluage  $J(t)$  est la déformation subie par le matériau, lorsqu'on impose à ce dernier une contrainte d'amplitude unité à l'instant initial  $t_0 = 0$ , contrainte qui est maintenue constante au cours du temps.

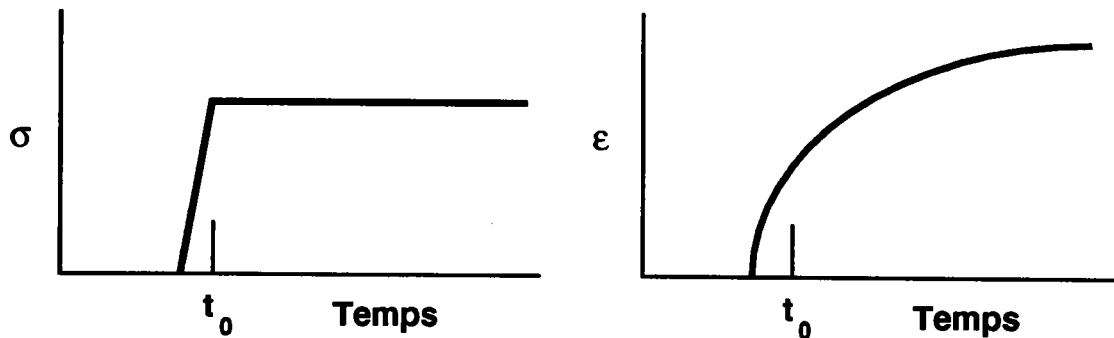


Figure 2.6 : expérience de fluage

### II.4.4 les modèles viscoélastiques

Les fonctions de fluage et de relaxation peuvent être décrites par le comportement mécanique de modèles constitués d'un nombre suffisant d'éléments élastiques (ressorts) et d'éléments visqueux (amortisseurs imaginés comme étant des pistons en translation dans de l'huile) [2.6], [2.7].

La force appliquée sur le modèle correspond à la contrainte  $\sigma$ , le déplacement qui en découle correspond à la déformation  $\varepsilon$  et la vitesse de déplacement correspond à la vitesse de

déformation  $\dot{\epsilon}$ . Chaque ressort a un module de rigidité " force / déplacement " qui est analogue au module d'élasticité  $E_i$ . Pour l'amortisseur, le rapport " force / vitesse de déplacement " est analogue à la viscosité  $\eta_i$ . Les figures (2.7) et (2.8) montrent respectivement le modèle de Maxwell et celui de Voigt.

Prenons une branche du modèle de Maxwell (un amortisseur et un ressort en série) sollicité par une contrainte  $\sigma$ . soient  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  les déformations, et  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  les contraintes, respectivement dans le ressort et dans l'amortisseur.

Ecrivons pour le ressort la loi de Hooke :

$$\sigma_1 = E \epsilon_1 = \frac{1}{J} \epsilon_1 \quad (2.11)$$

et l'équation rhéologique d'un corps Newtonien pour l'amortisseur :

$$\sigma_2 = \eta \frac{d\epsilon_2}{dt} \quad (2.12)$$

$\eta$  est le coefficient de viscosité dynamique [Pa.s]

D'après les lois d'association en série, la déformation et la contrainte totales,  $\epsilon$  et  $\sigma$  s'écrivent :

$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (2.13)$$

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 \quad (2.14)$$

d'où :

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{d\epsilon_1}{dt} + \frac{d\epsilon_2}{dt} = J \frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma_2 \quad (2.15)$$

$$\frac{d\epsilon}{dt} = J \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma \quad (2.16)$$

La relation (2.16) est l'équation rhéologique du modèle de Maxwell. Sa résolution est simple

d'après les conditions initiales ( $t < 0 : \eta = 0, \varepsilon = 0$ ) :

$$\int_0^\varepsilon d\varepsilon = J \int_0^\sigma d\sigma + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

ou

$$\varepsilon(t) = J\sigma(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

Pour  $\sigma = 1$  nous obtenons la fonction fluage :

$$J(t) = J + \frac{t}{\eta} \quad (2.19)$$

Supposons que le modèle de Maxwell généralisé soit sujet à une expérience de relaxation, la force exercée sur chaque paire ressort-amortisseur se relâche exponentiellement, pour la  $i^{\text{ème}}$  paire le module  $E_i(t)$  est donné par la relation :

$$E_i(t) = E_i \exp\left(-\frac{tE_i}{\eta}\right) = E_i \exp\left(-\frac{t}{\theta_i}\right) \quad (2.20)$$

Les coefficient  $\theta_i = \frac{\eta}{E_i}$  sont les temps de relaxation.

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon} = \sum_i E_i \exp\left(-\frac{t}{\theta_i}\right) \quad (2.21)$$

Nous obtenons finalement l'équation d'Etat :

$$\sigma(t) = - \int_{-\infty}^t \left( \sum_i \frac{E_i}{\theta_i} \exp\left(-\frac{(t-\tau)}{\theta_i}\right) \right) \varepsilon(t, \tau) d\tau \quad (2.22)$$

La même procédure peut être effectuée pour obtenir l'équation rhéologique du modèle de Kelvin-Voigt.

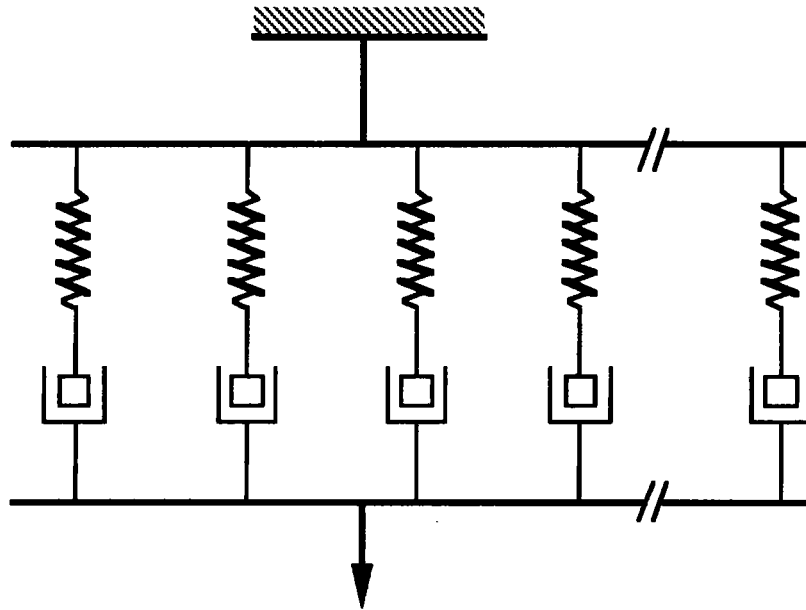


Figure 2.7 : modèle de Maxwell généralisé

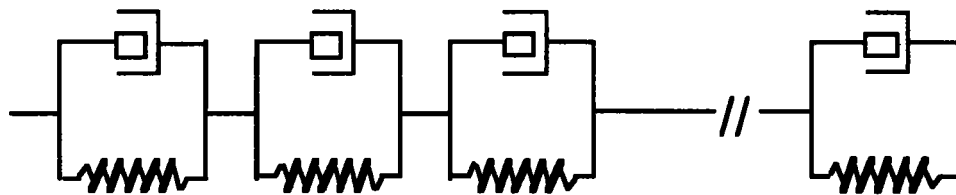


Figure 2.8 : modèle de Voigt généralisé

Il faut retenir comme souligné par Poincaré [2.8] que "si un phénomène physique peut être représenté par un modèle mécanique il peut alors être représenté par différents autres modèles". Les travaux de Kuhn [2.9] montrent bien qu'un matériau peut être représenté par des modèles rhéologiques équivalents, de structure différente, mais conduisant à la même équation rhéologique.

### III. GENERALITES SUR LA MECANIQUE DE LA RUPTURE :

La rupture est la séparation d'un matériau en deux ou plusieurs parties, sous l'action d'une contrainte. Cette séparation se produit à plus ou moins grande vitesse par propagation de fissures existant dans le matériau. La rupture est donc fortement influencée par la présence de micro fissures, de pores, d'inclusions de particules fragiles (défauts internes) et par la présence d'entailles (macrofissures) résultant de défauts de fabrication ou de conception.

La propagation de ces défauts dans un matériau peut être prédite par deux types de critères. les critères locaux et les critères globaux. Ces critères sont largement décrits dans le livre de G. Pluinage [3.1] dont nous nous sommes inspirés.

#### III.1. Les Critères locaux

Ces critères sont développés pour des matériaux élastiques fragiles à partir de la distribution de champs de contraintes en fond de fissure. Les critères locaux n'étant pas utilisés dans le cadre de ce travail, nous ne ferons que citer les travaux les plus importants.

Le facteur d'intensité de contrainte développé par Irwin [3.2] montre que le champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure est décrit par un paramètre appelé *facteur d'intensité de contrainte*. La rupture survient lorsque ce facteur est supérieur à une valeur critique appelée ténacité et qui est une caractéristique de la pièce et du chargement :

$$K_{Ic} = \sigma_g^c \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot F_{\sigma} \left( \frac{a}{W} \right) \quad (3.1)$$

où :

a : la longueur de fissure

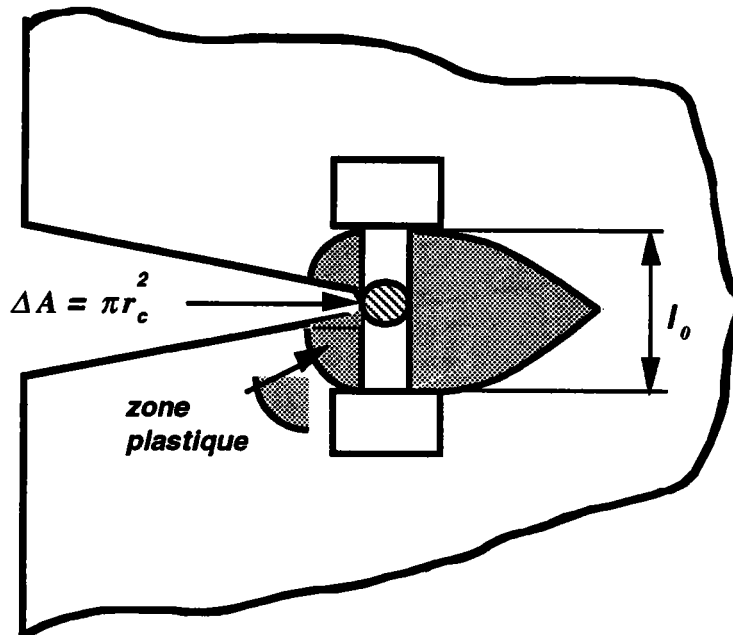
$\sigma_g^c$  : la contrainte globale critique

$F_{\sigma} \left( \frac{a}{W} \right)$  : facteur de calibration dépendant de la géométrie du matériau.

L'idée de certains auteurs tels que Guillemot [3.3] ou Sih [3.4] est de considérer que le processus de rupture est associé à la valeur de la densité d'énergie de déformation localisée à la pointe de la fissure où se produit l'amorçage, avec l'hypothèse que la distribution de cette densité d'énergie près de la pointe de fissure est uniforme et indépendante des coordonnées polaires r et  $\theta$ .



En 1958, Guillemot [3.5] constate que le mécanisme microscopique de rupture en tête de fissure est similaire, dans le cas de la rupture ductile, à celui d'une éprouvette de traction. Il suggère que l'énergie totale de rupture d'un corps fissuré est identique à l'énergie de rupture d'une petite éprouvette de traction cylindrique dont les dimensions (longueur  $l_0$  et rayon  $r_c$ ) sont obtenues à partir de considérations énergétiques (figure 3.1) Au moment de la rupture, la densité d'énergie atteint sa valeur critique et est appelée densité d'énergie spécifique pour la rupture.



*Figure 3.1 : Modèle de la micro-éprouvette en fond de fissure utilisé dans le critère de la densité d'énergie spécifique absorbée par la rupture.*

Le critère de "Sih II" proposé en 1974 [3.6] est une théorie de la rupture basée sur le concept de densité locale d'énergie de déformation à une distance  $r_c$  de la pointe de fissure (figure 3.2).

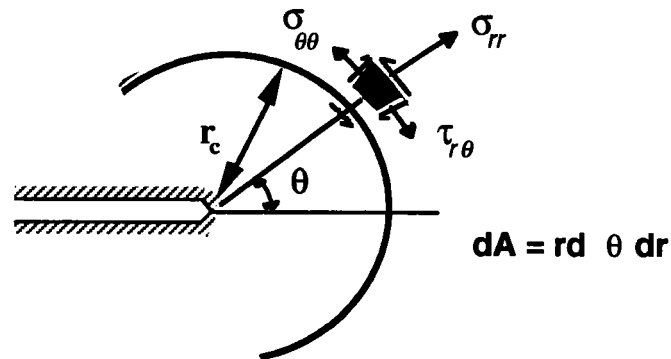


Figure 3.2 : Etat des contraintes en fond de fissure à l'extérieur de la région coeur de rayon  $r_c$ , en coordonnées polaires.

### III.2. Critères globaux

Les critères globaux, contrairement aux critères locaux permettent de s'affranchir de la connaissance du champ des contraintes et des déformations à la pointe de la fissure en faisant le bilan énergétique nécessaire pour propager la fissure.

#### III.2.1. Bilan énergétique d'un système mécanique

Considérons le cas d'un corps fissuré isolé élastique auquel on fournit un incrément d'énergie  $d\mathcal{T}_{EXT}$  sous forme de travail de forces extérieures [3.7]. De cette opération résulte :

- i) Une variation de l'énergie dissipée de façon irréversible que l'on notera  $dU_2$ .
- ii) Une variation de l'énergie élastique stockée dans le système qui est une énergie potentielle que l'on notera  $dU_{EL}$ .
- iii) Une variation de l'énergie cinétique du système  $dU_c$ .

Ces différents termes rapportés à la propagation du défaut sur une surface unitaire  $dA$  s'écrivent sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{T}_{EXT}}{dA} - \frac{dU_{EL}}{dA} = \frac{dU_2}{dA} + \frac{dU_c}{dA} \quad (3.3)$$

Le terme  $\frac{dU_2}{dA}$  a une signification spécifique. Il représente l'énergie dissipée pendant la propagation d'un défaut par rapport à l'augmentation de surface  $dA$  et définit la résistance à la rupture  $R$

$$R = \frac{dU_2}{dA} \quad (3.4)$$

### III.2.2. Le taux de restitution d'énergie

Irwin et Kies [3.8] introduisent le taux de restitution d'énergie :

$$G = \frac{d\tau_{EXT}}{dA} - \frac{dU_{EL}}{dA} \quad (3.5)$$

Si l'on néglige le terme d'énergie cinétique, on obtient à l'écriture du bilan; le critère de Griffith [3.9].

$$G = R \quad (3.6)$$

Le taux de restitution d'énergie  $G$  est mesuré expérimentalement à partir des courbes charge-déplacement pour deux longueurs de fissure " $a$ " et " $a + \delta a$ ".

La figure 3.3 représente ces courbes pour une éprouvette de largeur  $B$  où :

$$A = B \cdot a$$

$$A + \Delta A = B \cdot (a + \delta a)$$

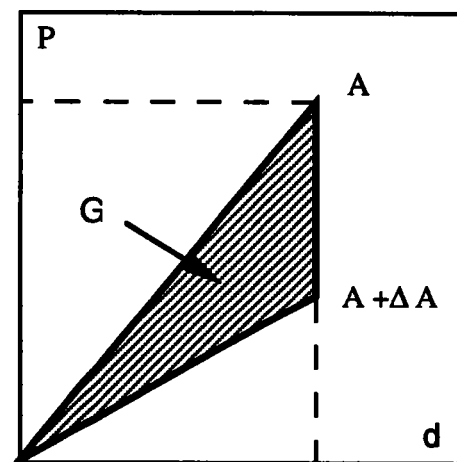


Figure 3.3 : Schéma illustrant la détermination expérimentale de  $G$ .

### III.2.3. Intégrale de contour J

L'intégrale J fut énoncée par RICE en 1968 [3.10]. Elle est utilisée pour étudier les problèmes de rupture dans le domaine élasto-plastique.

Considérons un système plan contenant une fissure de longueur a (figure 3.4). L'énergie potentielle de ce système est définie par :

$$\Pi = \int_{V^*} W^* dV^* - \int_{\underline{S}} T_i \cdot u_i d\underline{S} \quad (3.7)$$

$W^*$  est la densité d'énergie de déformation contenue dans le volume  $V^*$  du système délimité par la surface que nous noterons ici  $\underline{S}$  (rappelons que la surface notée "A" correspond à l'aire de fissuration) et l'épaisseur B.

$T_i$  correspond aux efforts exercés par unité de surface.

$u_i$  est le déplacement résultant de l'effet des efforts extérieurs.

Nous considérons dans ce qui suit, que le comportement mécanique du matériau est élastique et que par conséquent la densité d'énergie de déformation est réversible. RICE [3.10] a montré par la suite que l'intégrale J était égale à la différence d'énergie potentielle entre deux corps fissurés de longueurs de fissure voisines soumis au même chargement :

$$-\frac{d\Pi}{da} = \int_{\underline{S}} W^* dy - T_i \frac{du_i}{dx} d\underline{S} = J = \text{cste} \quad (3.8)$$

ou

$$J = -\frac{1}{dA} \int P \cdot du \quad (3.9)$$

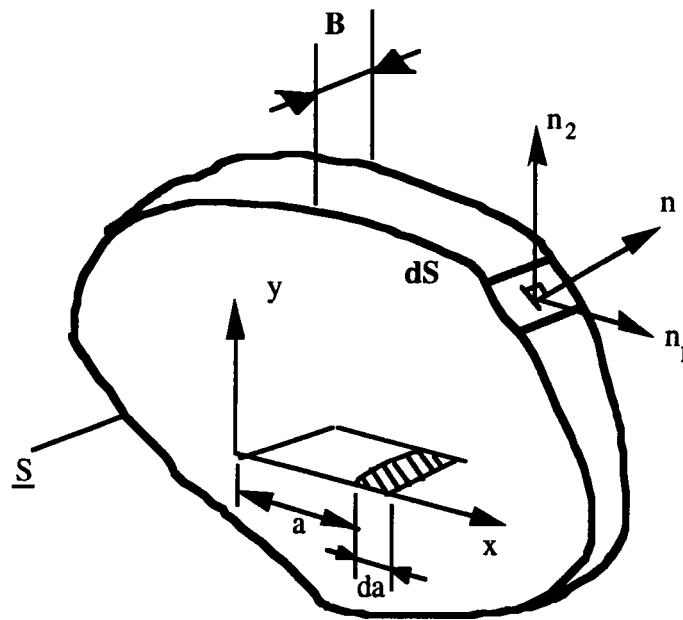


Figure 3.4 : système plan contenant une fissure contenue dans un contour fermé

L'intégrale  $J$  repose sur trois propriétés essentielles :

- elle est indépendante du contour d'intégration
- l'intégrale est liée à la variation d'énergie potentielle du corps fissuré lorsque la fissure se déplace,
- et elle permet de décrire le champ de contraintes et de déformations.

Dans le cas d'un corps élastique,  $J$  est équivalent au taux de restitution d'énergie  $G$

$$J = G \quad (3.10)$$

Plusieurs méthodes permettent la détermination expérimentale de l'intégrale  $J$ , principalement la méthode de Begley et Landes [3.11] et celle dite des fissures profondes réalisée par Rice, Paris et Merkle [3.12] pour des géométries particulières.

### III.2.4. Le Critère d'Andrews

Les premiers éléments de ce critère furent introduits en 1968 [3.13] à partir de résultats expérimentaux sur des polymères. Andrews exposa les éléments de sa théorie généralisée sur la rupture en 1974 [3.14], [3.15] en faisant l'hypothèse que le taux d'énergie disponible est

proportionnel à la densité d'énergie de déformation du corps non fissuré et à la longueur de fissure. Cette théorie est une extension du concept de Griffith à des matériaux ayant un comportement non linéaire ou anélastique.

### III.2.4.1 Bases théoriques

Considérons une plaque infinie contenant une fissure de longueur  $2a$  soumise à un champ de contraintes uniformes  $\sigma_0$  (figure 3.5).

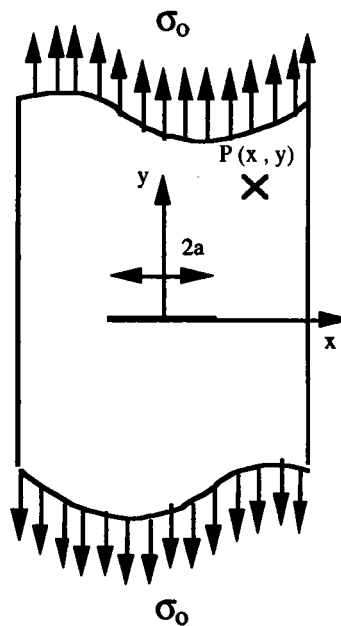


Figure 3.5 : Plaque infinie fissurée

Le tenseur des contraintes en un point  $P$  de coordonnées  $(X, Y)$  peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{ij}(P) = \sigma_0 \cdot f_{ij}(X, Y, \epsilon_0) \quad (3.11)$$

où  $\epsilon_0$  représente le champ de déformation loin du défaut et est égal à la déformation globale  $\epsilon_g$ .

La densité de déformation locale est exprimée par la relation :

$$W^*(P) = W_0^* \cdot f(X, Y, \epsilon_0) \quad (3.12)$$

avec :

$W_0^*$  : densité d'énergie de déformation uniforme

En introduisant des coordonnées réduites :

$$x = \frac{X}{a} \quad \text{et} \quad y = \frac{Y}{a}$$

La variation de la densité de déformation locale due à un accroissement de la longueur de fissure à  $W_0, \epsilon_0$  constant, on a donc :

$$\frac{dW^*(P)}{da} = -\frac{W_0^*}{a} \cdot \left( x \cdot \frac{df}{dx} + y \cdot \frac{df}{dy} \right) \quad (3.13)$$

La variation totale d'énergie dans le système due à la propagation de la fissure est donnée par la relation :

$$\frac{dU}{da} = \sum_P \frac{dW^*(P)}{da} \delta v \quad (3.14)$$

avec :

$\delta v$  : élément de volume en P

$\delta v = B \cdot a^2 \cdot \delta x \cdot \delta y$  (plaque d'épaisseur B)

La relation (3.14) s'écrit alors :

$$\frac{dU}{da} = -B \cdot W_0^* \cdot a \cdot \int_s \left( x \cdot \frac{df}{dx} + y \cdot \frac{df}{dy} \right) dx \cdot dy \quad (3.15)$$

ou encore :

$$-\frac{dU}{dA} = k_I(\epsilon_0) \cdot a \cdot W_c \quad (3.16)$$

avec  $-\frac{dU}{dA}$  : l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une unité d'aire dA.

$k_I(\epsilon_0)$  est une fonction explicite de  $\epsilon_0$  et de  $W_0^*$ .

La relation (3.20) est la première équation du critère d'Andrews. Lorsque la fissure se propage, la quantité  $-\frac{dU}{dA}$  atteint une valeur critique I :

$$I = - \left( \frac{dU}{dA} \right)_{\text{crit}} = k_I(\epsilon_0) a \cdot W_0^* \quad (3.17)$$

Cette valeur est une énergie surfacique de rupture. Elle représente aussi le taux de restitution d'énergie apparent, puisqu'elle prend en compte les effets de non-linéarité par l'intermédiaire de la fonction  $k_I(\epsilon_0)$ .

### III.2.4.2. Détermination expérimentale de I

Nous avons vu précédemment d'après la relation (3.17) que le taux de restitution d'énergie "I" est une fonction de :

- $W_0^*$  : (densité d'énergie de déformation)
- $k_I$  : (fonction explicite de  $\epsilon_0$ )
- $a$  : longueur de fissure

$\epsilon_0$  et  $W_0^*$  étant liés par une fonction unique, cette relation peut s'écrire sous une autre forme :

$$-\frac{dU}{dA} = k_I(W_0^*) a \cdot W_0^* \quad (3.18)$$

La procédure expérimentale nécessite plusieurs essais sur des éprouvettes identiques contenant des fissures de longueurs croissantes, en outre il est nécessaire d'effectuer un essai sur un échantillon non-fissuré.

Considérons maintenant une série d'enregistrement force-déplacement sur des plaques fissurées.



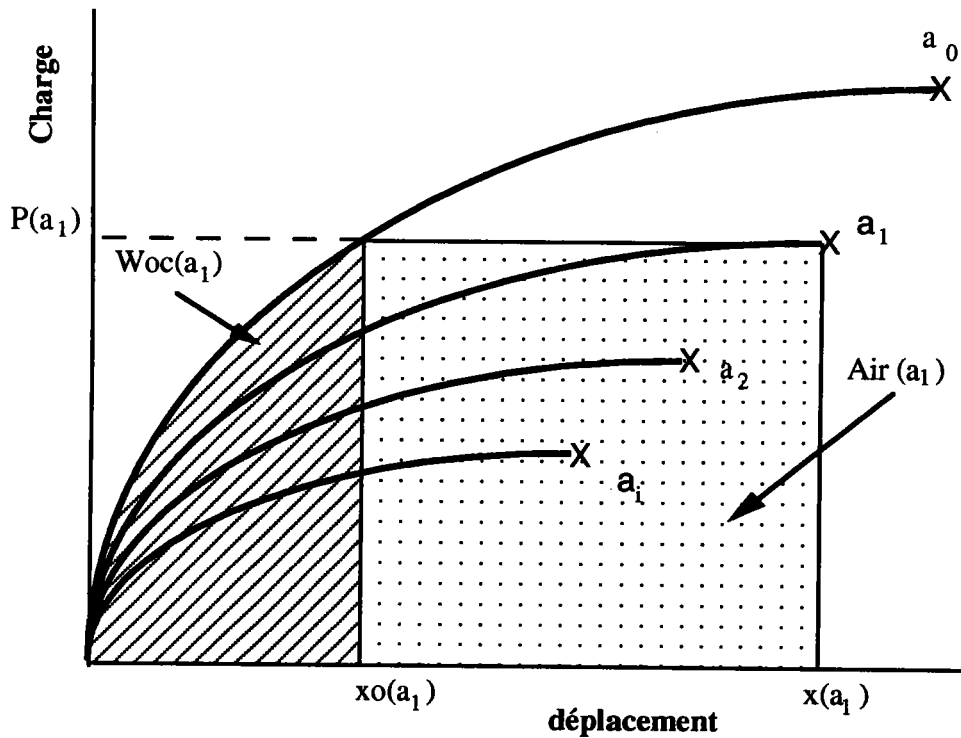


Figure 3.6 : enregistrement charge-déplacement pour 4 éprouvettes axisymétriques.

Dans la relation (3.17),  $W_{0 \text{ crit}}^*(a_i)$  est calculé pour chaque longueur de fissure par rapport à la courbe sans fissure (figure 3.6). Pour chaque charge  $P_i$  correspondant à une longueur de fissure  $a_i$  on peut calculer la densité d'énergie de déformation correspondante  $W_0^*(a_i)$ .

On quantifie par la suite le terme  $\Delta U(a_i, W_0^*(a_i))$  comme suit :

$$\Delta U_i(a_i) = W_{0 \text{ crit}}^*(a_i) + (x(a_i) - x_0(a_i)) \cdot P(a_i) - \text{Aire}(a_i)$$

$\text{Aire}(a_i)$  correspond à l'aire sous la courbe charge-déplacement pour une longueur de fissure " $a_i$ "

Pour une valeur  $W_0^*(i)$  donnée (constante), on reporte les valeurs de  $-\Delta U$  en fonction de  $a_i$  (figure 3.7).

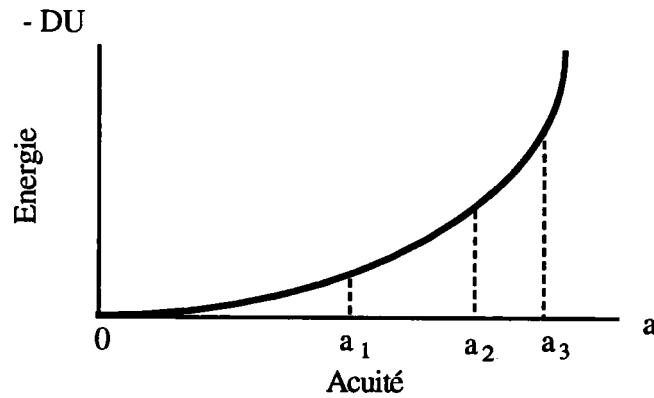


Figure 3.7 : Courbe  $-\Delta U=f(a)|w_0$

La différenciation de la fonction  $\Delta U$  par rapport à la longueur de fissure "a" permet d'accéder à la valeur de  $k_I$ . On peut calculer  $k_I(W_0^*)$  grâce à la relation (3.17) dans le cas d'une éprouvette axisymétrique de rayon R et de fissure a :

$$-\frac{dU}{dA} = k_I(W_0^*) \cdot a \cdot W_0^* \quad (3.19)$$

avec  $dA = 2\pi(R-a)da$  :

$$-\frac{1}{2\pi(R-a)} \cdot \frac{dU}{da} = k_I(W_0^*) \cdot W_0^* \cdot a \quad (3.20)$$

Pour calculer I, il faut connaître les valeurs de  $W_{0 \text{ crit}}^*(a_i) \Big|_v$  qui sont données en divisant les densités d'énergie de déformation  $W_{0 \text{ crit}}^*(a_i)$  calculées d'après les charges critiques pour chaque longueur de fissure par le volume de l'éprouvette.

Chaque courbe conduit finalement à une valeur de la ténacité pour les conditions critiques de  $W_{0 \text{ crit}}^*(a_i) \Big|_v$

$$I = k(W_{0 \text{ crit}}^*) \cdot W_{0 \text{ crit}}^*(a_i) \Big|_v \cdot a_i \quad (3.21)$$

Andrews propose, pour présenter ces résultats et pour montrer que I est bien la caractéristique recherchée, de placer les valeurs du produit  $k(W_{0c}) \cdot W_{0c}$  en fonction de  $1/a$  dans un graphe (figure 3.8).

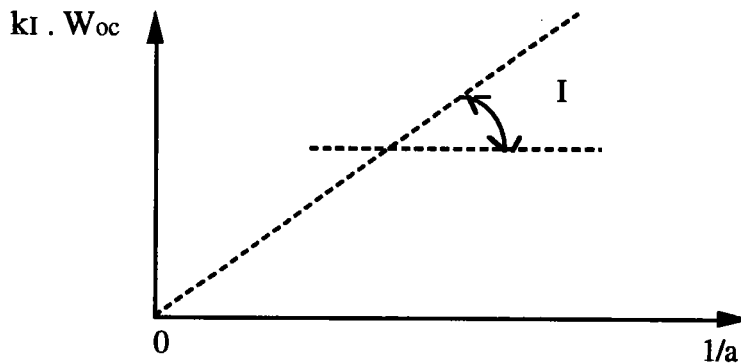


Figure 3.8 : Détermination du paramètre I

NB : Le critère d'Andrews a été modifié par Nait-abdelaziz [3.16] en utilisant un facteur de correction qui est fonction de la géométrie de l'éprouvette. Cette correction sera utilisée dans nos calculs.

### III.2.4.3. Correction du critère d'Andrews

Afin de confirmer l'influence de la géométrie dans la théorie développée par Andrews, à partir de l'équation (3.17), un facteur de correction est introduit sous la forme suivante :

$$-\frac{dU}{dA} = k_I (W_0^*) \cdot a \cdot W_0 \cdot F(a) \quad (3.22)$$

$F(a)$  est une fonction dépendant des dimensions de l'éprouvette et plus particulièrement de la longueur de fissure  $a$ . Cette fonction est introduite en faisant l'analogie avec la mécanique linéaire de la rupture dans le cas de géométries finies et est égale à :

$$F(a) = Y^2$$

Où  $Y$  est une fonction de calibration introduite par Harris [3.17] pour une éprouvette axisymétrique :

$$Y = \frac{1}{(1-X)^2} \cdot \left( \left( 0.8 + \frac{X}{1-X} \right) \cdot 4 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.23)$$

avec  $X = \frac{a}{R}$

la relation (3.17) s'écrit alors :

$$-\frac{dU}{dA} = k_I(W_0^*) a \cdot W_0^* \cdot \left( \frac{1}{(1-X)^2} \cdot \left( (0.8 + \frac{X}{1-X}) \cdot 4 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \quad (3.24)$$

d'où :

$$-\Delta U|_{W_0} = 2 \pi k_I \cdot W_0^* \int_0^a a \cdot (R - a) \cdot Y^2 da \quad (3.25)$$

en remplaçant Y par sa formule nous obtenons :

$$-\Delta U|_{W_0} = 2 \pi k_I(W_0^*) \cdot W_0^* \cdot R^3 \int_0^a \frac{X}{(1-X)^3} \left( (0.8 + \frac{X}{1-X}) \cdot 4 \right)^{-1} dX \quad (3.26)$$

Le calcul de  $k_I(W_0^*)$  se fait de la même manière que précédemment à partir de la relation (3.31) :

$$k_I(W_0^*) = \frac{-\Delta U|_{W_0^*}}{2 \pi \cdot W_0^* \cdot R^3 \int_0^a \frac{X}{(1-X)^3} \left( (0.8 + \frac{X}{1-X}) \cdot 4 \right)^{-1} dX} \quad (3.27)$$

## IV. ETUDE STATISTIQUE ET APPLICATION DANS LA MECANIQUE DE LA RUPTURE

### IV.1. Introduction

Dans un matériau ductile, la variation de la contrainte critique à la rupture d'éprouvettes identiques ne dépasse pas, en général, 4 à 8 % de la contrainte critique moyenne. En conséquence, elle peut être utilisée comme mesure de la résistance à la rupture pour la conception d'un ouvrage [4.1].

Par contre la contrainte critique moyenne d'un matériau fragile ne peut pas être utilisée aussi facilement car la variation de la contrainte critique d'éprouvettes identiques peut dépasser de 100 % la valeur moyenne[4.2].

Il est évident que pour des matériaux complexes tels que les polymères où la variation des caractéristiques mécaniques peut provenir aussi bien de la fabrication des échantillons que de l'environnement immédiat (humidité, température ...) et du vieillissement du matériau, il est indispensable d'effectuer une analyse statistique des résultats expérimentaux.

La théorie la plus communément utilisée pour traiter les aspects probabilistes en mécanique de la rupture est due à Weibull [4.3]. Cet auteur propose pour la première fois une application du "concept du maillon le plus faible" qui aboutit à une fonction de distribution de manière purement heuristique.

### IV.2 Loi de Weibull

Soit  $P_S(x)$  la probabilité pour qu'une chaîne de  $m$  maillons et de longueur  $x$  résiste à une contrainte appliquée  $\sigma$  (en d'autres termes, pour qu'elle ne contienne aucun maillon de résistance inférieure à la contrainte  $\sigma$ ) et  $P_S(x')$  la même probabilité pour une chaîne de longueur  $x'$ .

Si les deux chaînes sont en série, la probabilité de survie est :

$$P_S(x + x') = P_S(x) \cdot P_S(x') \quad (4.1)$$

Si on a  $n$  chaînes de longueur  $x$  :

$$P_S (x + x + x + \dots + x) = P_S (x) \cdot P_S (x) \cdot P_S (x) \dots \cdot P_S (x) = P_S (x)^n \quad (4.2)$$

On associe alors chaque chaîne à une éprouvette et chaque maillon à un élément volumique. Le maillon le plus faible correspond à l'élément volumique contenant le plus grand défaut.

$$V = n \cdot V_0$$

avec :  $V$  : le volume total  $V_0$  : le volume élémentaire

$$P_S (V) = [ P_S (V_0) ]^n \quad (4.3)$$

$$\text{Ln} [ P_S (V) ] = n \text{Ln} [ P_S (V_0) ]$$

$$P_S (V) = \exp [ n \text{Ln} (P_S (V_0)) ] \quad (4.4)$$

Le risque de rupture défini par Weibull est :

$$R = - n \text{Ln} [ P_S (V_0) ] \quad (4.5)$$

En faisant l'hypothèse que dans un élément infinitésimal de volume, le risque de rupture ne dépend que des contraintes et que la géométrie n'intervient plus :

$$\frac{dR}{dV} = f(\sigma) \quad (4.6)$$

avec :

$$f(\sigma) = \left( \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^{m_1} \quad (4.7)$$

Où  $\sigma$  est la contrainte appliquée,

$\sigma_u$  est la contrainte au dessous de laquelle il n'y a aucun risque de rupture,

$\sigma_0$  est un terme de normalisation qui permet de faire en sorte que R soit un scalaire,

$m_1$  est une grandeur qui caractérise le matériau et qui est appelé le module de Weibull.

par la suite nous avons

$$dR = \left( \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^{m_1} dV \quad (4.8)$$

ce qui permet d'écrire la probabilité de survie sous la forme suivante :

$$P_S(V) = \exp \left( - \int_V \left( \frac{\sigma - \sigma_u}{\sigma_0} \right)^{m_1} dV \right) \quad (4.9)$$

et la probabilité de ruine :

$$P_f(V) = 1 - P_S(V) \quad (4.10)$$

Nous soulignerons finalement quelques points importants relatifs au modèle de Weibull :

- le modèle présenté s'intéresse à des défauts volumiques. Dans le cas de défauts de surface, il suffit d'intégrer sur la surface,
- la contrainte  $\sigma_u$  peut être négligée sans que l'erreur soit pénalisante,
- $m_1$  caractérise la dispersion des résultats expérimentaux. Plus les résultats sont dispersés, plus  $m_1$  est faible,

### IV.3. Loi des Valeurs Extrêmes (ou loi de Fisher-Tipett)

La loi des valeurs extrêmes se rencontre fréquemment lorsque la variable aléatoire est soumise à de nombreux facteurs indépendants, dont aucun n'est prépondérant, mais dont les effets sont multiplicatifs (alors que pour la distribution normale, les effets sont algébriquement additifs).

Par ailleurs, beaucoup de grandeurs utilisées par l'expérimentateur au cours de ses travaux

se trouvent être aléatoires et leurs mesures se distribuent suivant des lois de probabilité qui ne sont pas toutes des lois de Gauss ou de Weibull.

Cette densité de probabilité (voir figure 4.1) est donnée par la formule :

$$f(x) = \frac{1}{b} \exp \left( - \exp \left[ \frac{a-x}{b} \right] + \frac{a-x}{b} \right) \quad (4.11)$$

avec :

a et b : paramètres de la loi.

$x > 0$ .



Figure 4.1 : Représentation de la fonction de densité de probabilité.

La fonction de répartition cumulée (figure 2) est de la forme :

$$F(x) = \exp \left( - \exp \left[ \frac{a-x}{b} \right] \right) \quad (4.12)$$

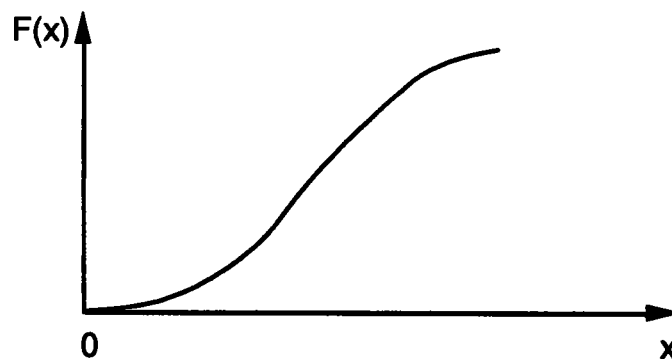


Figure 4.2 : Représentation de la fonction de répartition.



### IV.3.1. Caractéristiques de la distribution des valeurs extrêmes

La Moyenne :

$$M = a + \text{Euler Gamma} \cdot b \quad (4.13)$$

La Variance :

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2 b^2}{6} \quad (4.14)$$

L'écart type :

$$\sigma = \frac{\pi b}{\sqrt{6}} \quad (4.15)$$

### IV.3.2. Le test de Kolmogorov-Smirnov

Pour vérifier que la distribution utilisée est satisfaisante, Il est d'usage en statistique d'utiliser des tests de conformité. Il existe divers types de tests. Nous nous intéresserons particulièrement à celui de Kolmogorov Smirnov que nous utilisons dans ce travail.

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test non paramétrique de conformité qui s'applique aux distributions de fréquences à variables quantitatives continues. Il possède l'avantage, par rapport aux autres tests, de ne pas nécessiter de regroupements de classes quand l'effectif de l'échantillon est relativement faible.

Le principe de ce test est de calculer les différences entre une distribution observée et une distribution théorique. Il repose sur le calcul de la plus grande différence des fréquences relatives cumulées, calculée sur des données qui ne sont pas regroupées en classe :

$$D = \text{Max} ( |F_{\text{cal}} (x_i) - F_{\text{th}} (x_i)| ) \text{ quelque soit } x_i \quad (4.16)$$

avec :

$F_{\text{cal}}$  : la fréquence cumulée calculée,

$F_{\text{th}}$  : la fréquence cumulée théorique.

On compare ensuite  $D$  par rapport à la valeur critique  $D_\alpha$  qui est donnée dans les tables statistiques.  $\alpha$  représente l'intervalle de confiance qui est choisi par l'utilisateur selon l'exploitation des résultats.

Si  $D > D_\alpha$  La distribution utilisée n'est pas acceptée

Si  $D < D_\alpha$  Il y a corrélation entre la distribution théorique et calculée

Une méthode graphique permet d'apercevoir directement la corrélation de la distribution expérimentale avec la loi utilisée (dans notre cas celle des valeurs extrêmes). La méthode consiste à tracer la fonction théorique  $F_{th}$  et  $F_{cal}$  en fonction des valeurs de notre échantillon. La distribution est rejetée si la courbe  $F_{cal}$  chevauche les bornes obtenues par les courbes  $(F_{th} - D_\alpha)$  et  $(F_{th} + D_\alpha)$  (figure 4.3).

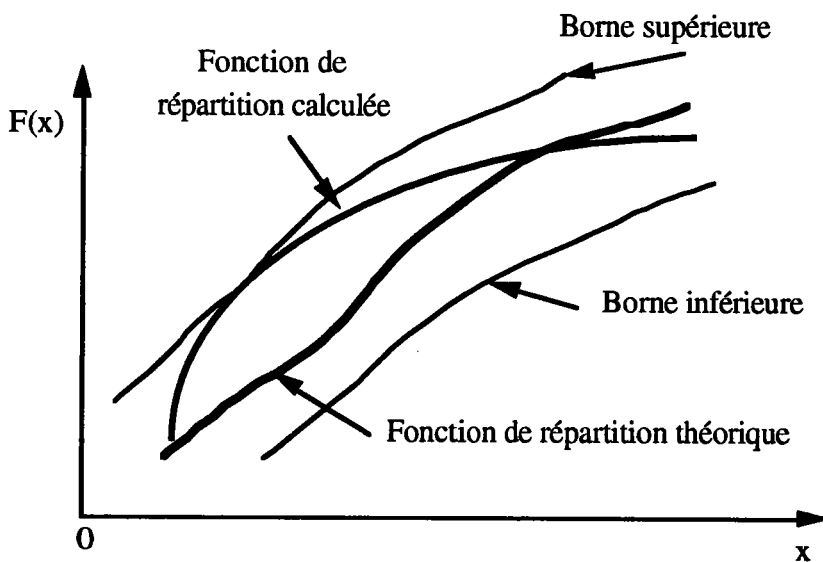


Figure 4.3 : test de Kolmogorov-Smirnov. Méthode graphique

## V. LES BARRES D'HOPKINSON

Une des méthodes les plus utilisées dans l'étude de la rupture des matériaux à grandes vitesses de déformation est la technique des barres d'Hopkinson. Nous présentons ici un bref historique de cette technique que nous reverrons en détails dans la partie expérimentale.

### V.1. Historique

En 1914, B. Hopkinson [5.1], emploie une barre de 1 m de long et 25 mm de diamètre suspendue horizontalement pour étudier la propagation d'une onde élastique longitudinale. Cet appareil est nommé (Barre de Pression d'Hopkinson) et est une application de la théorie élémentaire de la propagation des ondes longitudinales élastiques de contrainte.

La première amélioration significative fut apportée par R.M. DAVIES [5.2] en 1948 par l'apport de condensateurs microphoniques, permettant ainsi la mesure du déplacement axial en bout de barre et de la dilatation radiale. Il pouvait ainsi remonter à l'histoire des contraintes dans celle-ci.

Kolsky [5.3] perfectionne ce système, en utilisant deux barres (dites incidente et transmettrice) entre lesquelles est inséré un échantillon cylindrique de faible épaisseur. Ce système forme actuellement la base des études expérimentales dans le domaine des sollicitations dynamiques.

D'autres dispositifs inspirés des barres d'Hopkinson ont été réalisés permettant des sollicitations en traction, et en torsion. Nous citerons les principaux travaux réalisés dans la modification des barres pour obtenir une sollicitation en traction.

#### V.1.1. Méthode de Harding [5.4]

Le dispositif est constitué par deux barres introduites à l'intérieur d'un tube qui est soumis à l'impact d'un projectile (figure 5.1). L'onde de compression se réfléchit sur la surface libre d'un talon solidaire à la barre incidente et se transmet en une onde de traction le long de la barre incidente.

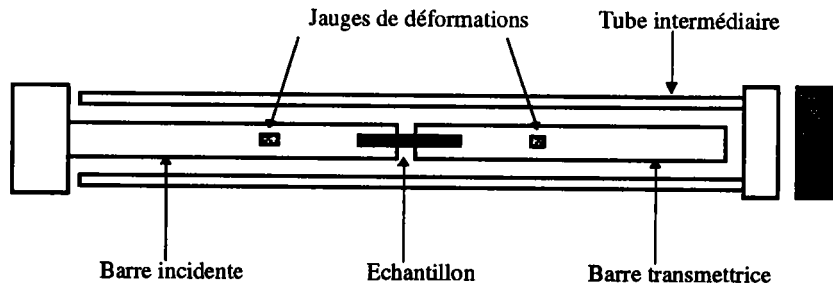


Figure 5.1: Dispositif d'Hopkinson modifié en traction d'après Harding

Il est évident que pour éviter des problèmes de coaxialité et de flexion ce dispositif est limité en longueur.

### V.1.2. Méthode de Chase [5.5]

Appelée aussi méthode des trois barres parallèles (figure 5.2). Dans ce cas une barre est sollicitée par l'impact d'un projectile. L'onde ainsi induite se propage le long de la barre du milieu et est inversée à l'extrémité libre. Cette onde se propage ensuite le long de deux autres barres situées de part et d'autre de la première. Il en dérive ainsi deux dispositifs d'Hopkinson en traction, symétriques et parallèles. Deux éprouvettes peuvent donc être utilisées pour chaque essai. Le problème de longueur du dispositif ne se pose plus dans ce cas.

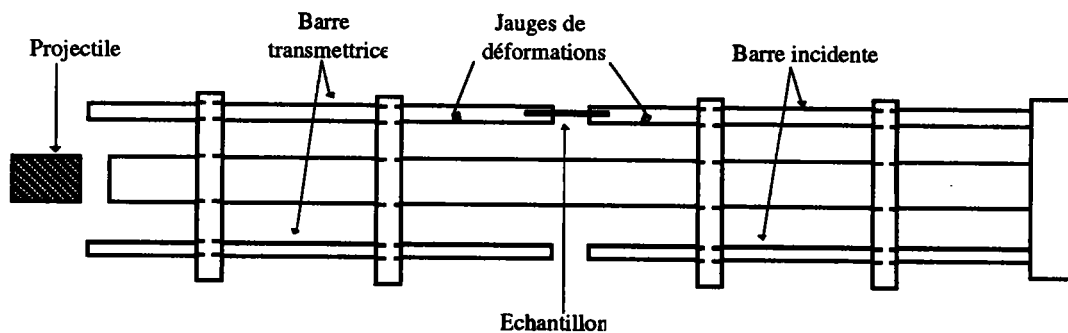


Figure 5.2 : Dispositif des barres d'Hopkinson en traction d'après Chase

## VI. ETUDE DE LA PROPAGATION DES ONDES LE LONG D'UNE BARRE MINCE

### VI.1. Rappels sur la théorie de la propagation d'ondes élastiques

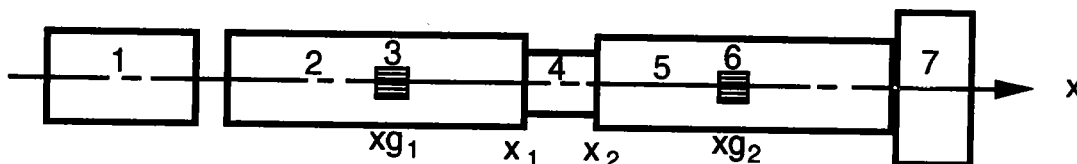


Figure 6.1. Schéma général des barres d'Hopkinson.

1. Projectile, 2. barre incidente, 3. jauge de déformation  $G_1$ , 4. échantillon,
5. barre transmettrice, 6. jauge de déformation  $G_2$ , 7. amortisseur.

Supposons le cas d'un système de barres d'Hopkinson (figure 6.1) travaillant en compression (pour la traction il suffit d'inverser les signes). Une impulsion rectangulaire est initiée dans la barre incidente par l'impact longitudinal du projectile. Cette onde incidente charge dynamiquement l'échantillon, il en résulte une onde réfléchie dans la barre incidente et une onde transmise dans la barre transmettrice.

La contrainte dynamique  $\sigma_s(t)$ , la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}(t)$ , et la déformation de l'échantillon  $\epsilon(t)$  sont déterminées en fonction des contraintes  $\sigma(x_1,t)$ ,  $\sigma(x_2,t)$  et des vitesses particulières  $v(x_1,t)$ ,  $v(x_2,t)$  aux interfaces gauche et droite de l'échantillon comme suit :

$$\sigma_s(t) = \frac{A}{2A_s} [\sigma(x_1,t) + \sigma(x_2,t)] = \frac{A}{2A_s} [\sigma_i(x_1,t) + \sigma_r(x_1,t) + \sigma_t(x_2,t)], \quad (6.1a)$$

$$\dot{\epsilon}_s(t) = \frac{v(x_2,t) - v(x_1,t)}{l_s} = \frac{v_t(x_2,t) - v_i(x_1,t) - v_r(x_1,t)}{l_s}, \quad (6.1b)$$

$$\epsilon_s(t) = \int_0^t \dot{\epsilon}_s(t) dt = \frac{1}{l_s} \int_0^t [v_t(x_2,t) - v_i(x_1,t) - v_r(x_1,t)] dt, \quad (6.1c)$$

Où  $A$  est la section transversale de la barre,  $A_s$  la section transversale de l'échantillon,  $l_s$  la longueur de l'échantillon et les indices  $i$ ,  $r$  et  $t$  correspondent respectivement aux ondes incidentes, réfléchies et transmises.

Pour des barres élastiques, les vitesses particulières aux interfaces gauche et droite de l'échantillon  $v(x_1, t)$  et  $v(x_2, t)$  peuvent être exprimées respectivement en fonction des déformations dynamique incidente  $\varepsilon_i(x_1, t)$  et réfléchi  $\varepsilon_r(x_1, t)$  à l'interface gauche et de la déformation dynamique transmise  $\varepsilon_t(x_2, t)$  à l'interface droite :

$$v_1 = v(x_1, t) = v_i(x_1, t) + v_r(x_1, t) = C_0 [\varepsilon_i(x_1, t) - \varepsilon_r(x_1, t)], \quad (6.2a)$$

$$v_2 = v(x_2, t) = v_t(x_2, t) = C_0 \varepsilon_t(x_2, t), \quad (6.2b)$$

$$C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (6.3)$$

Où  $C_0$  est la vitesse longitudinale de l'onde élastique (célérité de l'onde).

$E$  est le module d'Young et  $\rho_0$  la densité du matériau des barres.

De la même manière les contraintes dynamiques aux interfaces sont données par :

$$\sigma_1 = \sigma(x_1, t) = \sigma_i(x_1, t) + \sigma_r(x_1, t) = E [\varepsilon_i(x_1, t) + \varepsilon_r(x_2, t)], \quad (6.4a)$$

$$\sigma_2 = \sigma(x_2, t) = \sigma_t(x_2, t) = E \varepsilon_t(x_2, t). \quad (6.4b)$$

Nous pouvons donc exprimer les moyennes de la contrainte dynamique  $\sigma_s$  et de la déformation dynamique  $\varepsilon_s$  de l'échantillon uniquement en fonctions des signaux de l'onde de déformation  $\varepsilon_i(x_1, t)$ ,  $\varepsilon_r(x_1, t)$  et  $\varepsilon_t(x_2, t)$  :

$$\sigma_s(t) = \frac{EA}{2A_s} [\varepsilon_i(x_1, t) + \varepsilon_r(x_1, t) + \varepsilon_t(x_2, t)], \quad (6.5)$$

$$\varepsilon_s(t) = -\frac{C_0}{l_s} \int_0^t [\varepsilon_i(x_1, t) - \varepsilon_r(x_1, t) - \varepsilon_t(x_2, t)] dt \quad (6.6)$$

En éliminant le temps dans les équations (6.5) et (6.6), nous pouvons donc avoir la relation contrainte-déformation dynamique.

Pour un échantillon relativement court il est convenu que les effets de propagation de l'onde à l'intérieur de cet échantillon sont négligeables d'où :

$$\sigma_1 = \sigma_2 \quad \text{donc} \quad \sigma_i + \sigma_r = \sigma_t \quad \text{et} \quad \varepsilon_i + \varepsilon_r = \varepsilon_t \quad (6.7)$$

par conséquent les équations (6.5) et (6.6) se réduisent à :

$$\sigma_s(t) = \frac{EA}{A_s} \epsilon_t(x_2, t) = \frac{EA}{A_s} [\epsilon_i(x_1, t) + \epsilon_r(x_1, t)], \quad (6.8)$$

$$\epsilon_s(t) = + \frac{2C_0}{l_s} \int_0^t \epsilon_r(x_1, t) dt - \frac{2C_0}{l_s} \int_0^t [\epsilon_i(x_1, t) - \epsilon_t(x_2, t)] dt. \quad (6.9)$$

Les jauges de déformation  $G_1$  et  $G_2$  ne sont pas collées directement aux interfaces de l'échantillon (figure 6.1) mais à une distance  $x_{g1} = x_{g2}$  des interfaces. Cette distance est deux fois supérieure à la longueur du projectile (i.e. la longueur d'onde de la pulsation) ceci pour que les ondes incidente et réfléchie puissent être mesurées par la même jauge sans qu'elles ne se superposent.

Dans les équations (6.5), (6.6), ou (6.8), (6.9) les termes  $\epsilon_i(x_{g1}, t)$ ,  $\epsilon_r(x_{g1}, t)$  et  $\epsilon_t(x_{g2}, t)$  sont respectivement utilisés à la place de  $\epsilon_i(x_1, t)$ ,  $\epsilon_r(x_1, t)$  et  $\epsilon_t(x_2, t)$ . Une telle substitution est dans la pratique toujours acceptée, à condition que les barres restent dans l'état d'une déformation linéaire élastique.

Les barres utilisées sont en général des alliages avec une limite élastique  $\sigma_s > 1$  GPa et une impédance mécanique " $\rho_0 C$ " de l'ordre de 40 MPa.s/m. L'échantillon à tester qui a généralement une impédance plus faible peut avoir une déformation non élastique mais les barres doivent rester dans un état de déformation élastique. Cependant lorsque l'impédance mécanique de l'échantillon est trop faible le signal obtenu sur la barre transmettrice ne peut pas être capté avec assez de précision.

Dans un tel cas, il est impératif d'utiliser un matériau pour les barres ayant une impédance mécanique plus faible.

L'aluminium est le matériau le plus utilisé dans l'étude du comportement viscoélastique non linéaire à grandes vitesses de déformation pour des matériaux plastiques ayant une impédance mécanique de l'ordre de 1 MPa.s/m, celle de l'aluminium étant de 14 MPa.s/m. Mais pour des matériaux ayant une valeur de " $\rho_0 C$ " de l'ordre de 0.1 MPa.s/m ou de plus faible valeur il est préférable d'utiliser des barres en polymère. Il faut cependant tenir compte de la dispersion et de la dissipation de l'onde viscoélastique, dans la barre.

Il en résulte que les signaux des ondes incidente, réfléchi et transmise mesurés à partir des jauges de déformation  $G_1$  et  $G_2$  ne peuvent pas être utilisés dans les équations (6.5) à (6.8), mais aussi que les relations (6.2) et (6.4), ne sont plus valables. Seules les équations (6.1a, 6.1b et 6.1c) peuvent être utilisées pour des barres en polymère.

Donc, l'utilisation de barres viscoélastiques ne peut se faire que si les contraintes et les vitesses particulière aux interfaces de l'échantillon, i.e.  $\sigma(x_1, t)$ ,  $\sigma(x_2, t)$ ,  $v(x_1, t)$  et  $v(x_2, t)$ , peuvent être déterminées à partir des valeurs des déformations aux distances  $x_{g1}$  et  $x_{g2}$ , i.e.  $\epsilon_i(x_{g1}, t)$ ,  $\epsilon_r(x_{g1}, t)$  et  $\epsilon_t(x_{g2}, t)$ . Nous montrons dans la partie expérimentale la méthode utilisée pour la détermination de ces valeurs.



# **PARTIE EXPERIMENTALE**

## **1. Propagation des ondes**

## **Introduction.**

Notre objectif est de réaliser un logiciel de calcul permettant de prédire l'amortissement des ondes de déformation et de contrainte lors de leur propagation le long d'une barre en PMMA.

Une analyse de la propagation d'une onde viscoélastique dans une barre mince est proposée en premier lieu. Cette étude basée sur une nouvelle équation rhéologique et sur la méthode des caractéristiques est explicitée dans un cas général. Nous donnerons par la suite une application à la méthode des barres d'Hopkinson.

Nous aborderons, en deuxième partie, les méthodes expérimentales utilisées avec une description du nouveau dispositif d'essai sur les barres d'Hopkinson en traction.

Les résultats obtenus à partir du logiciel seront ensuite comparés avec des valeurs expérimentales afin de valider cette étude.

Une simulation de la propagation d'ondes viscoélastiques est donnée en dernier lieu afin de connaître l'influence des différents paramètres rhéologiques sur l'amortissement de l'onde lors de sa propagation.

## VII. Etude de la Propagation d'une onde viscoélastique par la méthode des caractéristiques

Un aperçu sur la théorie thermodynamique des matériaux viscoélastiques ainsi que sur la viscoélasticité est donné dans la partie bibliographique (cf. § II.3 et II.4). Nous avons compris qu'il est indispensable d'utiliser une loi de comportement et un modèle rhéologique adéquat pour le matériau étudié.

Il existe une importante littérature concernant la détermination des lois de comportement de matériaux viscoélastique [7.1 à 7.4]. Les méthodes utilisées sont diverses. Matsumoto et al [7.5] attribuent au PMMA un modèle viscoélastique à trois éléments, ils caractérisent ensuite ce matériau à partir d'une méthode d'analyse de la propagation des ondes. Sasaki et al [7.6] utilisent un modèle à quatre éléments pour le même matériau. La caractérisation est faite alors à partir de la réflexion d'une onde entre une barre élastique et une autre viscoélastique. Sogabe [7.7] utilise la technique de la transformée de Fourier.

Dans ce travail nous utiliserons une loi de comportement proposée par le professeur Wang [7.14]. Cette équation est inspirée de la théorie de Coleman -Noll et de l'intégrale multiple de Green-Rivlin [7.1 et 7.2]. Elle est applicable aux matériaux viscoélastiques non-linéaires pour une très large gamme de vitesse de déformation comme nous le verrons plus loin.

### VII.1. Equation de Zhu.Wang.Tang.

Les investigations expérimentales réalisées sur certains polymères à des vitesses dont la valeur est comprise entre  $10^{-4}$  et  $10^3 \text{ s}^{-1}$  ont montré que leur comportement viscoélastique non linéaire peut être décrit par l'équation ZWT (Zhu-Wang-Tang) du nom de ses auteurs [7.8 - 7.14] :

$$\sigma = E_0 \varepsilon + \alpha \varepsilon^2 + \beta \varepsilon^3 + E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_1}\right) d\tau + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau, \quad (7.1)$$

Où les trois premiers termes décrivent la réponse élastique non linéaire,  $E_0$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont les constantes élastiques correspondantes, le second terme décrit la réponse viscoélastique pour de faibles vitesses de déformation,  $E_1$  et  $\theta_1$  étant respectivement la constante élastique et le temps de

relaxation de l'élément de Maxwell correspondant. Le modèle rhéologique correspondant est montré dans la figure (7.2).

Quelques points concernant l'équation (7.1) en relation avec la propagation d'une onde viscoélastique doivent être précisés.

- La non linéarité provient uniquement du premier élément élastique ( $E_0\varepsilon + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^3$ ). La réponse viscoélastique et par conséquent toutes les réponses dépendant de la vitesse (donc du temps) sont linéaires.
- Il a été trouvé expérimentalement [7.8] - [7.14] que la valeur du rapport  $\alpha/E_0$  est de l'ordre de 1 à 10, et celle de  $\beta/E_0$  de l'ordre de 1 à  $10^2$ . Ce qui signifie que la non linéarité doit être prise en compte si  $\varepsilon > 0,01$  et négligée si  $\varepsilon < 0,01$ .
- La valeur de  $\theta_1$  est généralement de l'ordre de  $10^{-1}$  à 1 seconde, alors que  $\theta_2$  est de l'ordre de  $10^{-4}$  à  $10^{-6}$  seconde. Ce qui implique que chaque paramètre a une influence dominante suivant l'échelle de temps où l'on se trouve [7.10].
- Par conséquent, dans les conditions d'un chargement statique, où l'échelle de temps est de l'ordre de 1 à  $10^2$  secondes, l'élément de Maxwell correspondant aux grandes fréquences est déjà relaxé au début du chargement (temps de relaxation  $\theta_2$  de 1 à  $10^2$   $\mu$ s). L'équation (7.1) devient alors :

$$\sigma = E_0\varepsilon + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^3 + E_1 \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_1}\right) d\tau \quad (7.2)$$

- Au contraire, dans les conditions d'un chargement sous impact, où l'échelle de temps est de l'ordre de 1 à  $10^2$  microsecondes, l'élément de Maxwell correspondant aux faibles fréquences (avec un temps de relaxation  $\theta_1$  de  $10^{-1}$  à 1 seconde) ne peut se relaxer avant la fin du chargement. Cet élément se réduit donc à un ressort ayant une constante élastique  $E_1$  et L'équation (7.1) se réduit à :

$$\sigma = (E_1+E_0)\varepsilon + \alpha\varepsilon^2 + \beta\varepsilon^3 + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau \quad (7.3)$$

Ou, si  $\varepsilon < 0,01$  ce qui correspond aux conditions des barres d'Hopkinson :

$$\sigma = E_a \varepsilon + E_2 \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\theta_2}\right) d\tau$$

$$E_a = E_0 + E_1$$
(7.4)

qui peut être écrite sous la forme différentielle :

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\theta_2} = (E_a + E_2) \frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_a}{\theta_2} \varepsilon$$
(7.5)

Le modèle viscoélastique se réduit à un modèle plus simple (Figure 7.3).

Rappelons les équation du mouvement pour des barres minces :

$$\rho_0 \frac{dv}{dt} = \frac{d\sigma}{dx},$$
(7.6)

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d\varepsilon}{dt}.$$
(7.7)

Les équations (7.5), (7.6) et (7.7) constituent ainsi les équations d'Etat de la propagation d'une onde viscoélastique le long d'une barre mince en polymère.

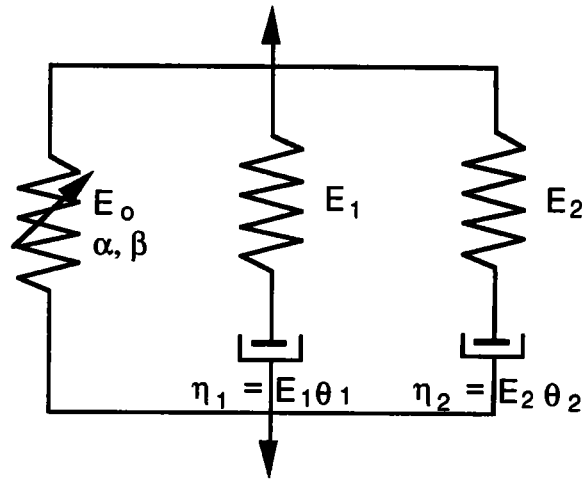


Figure 7.2 : modèle viscoélastique correspondant à l'équation ZWT.

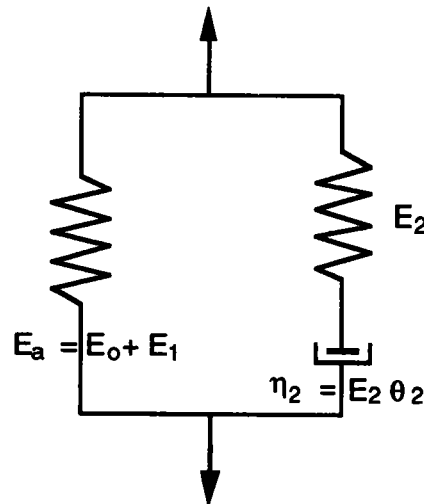


Figure 7.3 : modèle rhéologique correspondant à l'équation 6.

En les exprimant de manière équivalente sous la forme de déplacement particulière  $u(x,t)$ , nous obtenons :

$$\rho_0 \frac{d^3 u}{dt^3} + \frac{\rho_0}{\theta_2} \frac{d^2 u}{dt^2} = (E_a + E_2) \frac{d^3 u}{dt dx^2} + \frac{E_a}{\theta_2} \frac{d^2 u}{dx^2} . \quad (7.8)$$

La solution de cette nouvelle équation est :

$$u(x,t) = A \exp(\pm \alpha_a x) \exp[i(\omega t \pm kx)] \quad (7.9)$$

Où le signe plus correspond à la propagation des ondes dans la direction des  $x$  positifs et le signe moins correspond à la propagation des ondes dans la direction des  $x$  négatifs,  $\omega$  est la fréquence radiale,  $k$  le nombre d'onde et  $\alpha_a$  le facteur d'atténuation.  $k$  et  $\alpha_a$  dépendent aussi bien de  $\omega$  que des constantes mécaniques du matériau.

$$k^2 = \frac{\rho_o \omega^2}{2E_a} \left\{ \left[ \frac{1 + \omega^2 \theta_2^2}{1 + (1 + \frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \frac{1 + (1 + \frac{E_2}{E_a}) \omega^2 \theta_2^2}{1 + (1 + \frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2} \right\}, \quad (7.10)$$

$$\alpha_a^2 = \frac{\rho_o \omega^2}{2E_a} \left\{ \left[ \frac{1 + \omega^2 \theta_2^2}{1 + (1 + \frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1 + (1 + \frac{E_2}{E_a}) \omega^2 \theta_2^2}{1 + (1 + \frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2} \right\}. \quad (7.11)$$

La dépendance de  $k(\omega)$  (ou de la vitesse de phase  $c(\omega) = \frac{\omega}{k(\omega)}$ ) de  $\omega$  décrit la dispersion des ondes. La dépendance du facteur d'atténuation  $\alpha_a(\omega)$  de  $\omega$  décrit l'atténuation et la dissipation des ondes.

Dans le cas des ondes à grandes fréquences ( i.e. pour  $\omega \gg 1/\theta^2$ ), et à partir de l'équation (7.10) nous voyons que :

$$k^2 \approx \frac{\rho_o \omega^2}{E_a + E_2} \quad (7.12)$$

Par conséquent, la vitesse de phase correspondante est indépendante de  $\omega$ . En fait, d'après l'équation (7.12), la vitesse de phase pour de grandes fréquences est égale à la célérité de l'onde élastique  $C_v$  du modèle avec deux ressorts en parallèle :

$$C^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E_a + E_2}{\rho_o} = C_v^2 \quad (7.13)$$

Réécrivons l'équation (7.11) comme suit :

$$\alpha_a^2 = \frac{\rho_o \omega^2}{2E_a(1+\frac{E_2}{E_a})} \left\{ \left[ \frac{1 + \frac{1}{\omega^2 \theta_2^2}}{1 + \frac{1}{(1+\frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2}} \right]^{\frac{1}{2}} - \frac{1 + \frac{1}{(1+\frac{E_2}{E_a}) \omega^2 \theta_2^2}}{1 + \frac{1}{(1+\frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2}} \right\} \quad (7.14)$$

pour les grandes fréquences  $\frac{1}{\omega^2 \theta_2^2} \ll 1$  nous avons :

$$\left(1 + \frac{1}{\omega^2 \theta_2^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega^2 \theta_2^2}\right),$$

$$\left[1 + \frac{1}{(1+\frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2}\right]^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+\frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2}\right],$$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{(1+\frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2}} \approx 1 - \frac{1}{(1+\frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2}.$$

En substituant ces termes dans l'équation (7.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha_a^2 &= \frac{\rho_o \omega^2}{2(E_a+E_2)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega^2 \theta_2^2}\right) - \frac{1}{(1+\frac{E_2}{E_a}) \omega^2 \theta_2^2} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+\frac{E_2}{E_a})^2 \omega^2 \theta_2^2}\right] \right\} \\ &= \frac{\rho_o}{4\theta_2^2(E_a+E_2)} \left[1 - \frac{1}{(1+\frac{E_2}{E_a})}\right]^2 = \frac{\rho_o E_2^2}{4\theta_2^2(E_a+E_2)^3} \end{aligned} \quad (7.15a)$$



NB : le facteur d'atténuation pour les grandes fréquences n'est ni dépendant de  $\omega$ , ni nul [7.15]. En utilisant l'équation (7.13) et sachant que  $\theta_2 = \eta_2/E_2$ , l'équation (7.15a) peut être exprimée autrement :

$$\alpha_a = \frac{E_2}{2\theta_2 C_v (E_a + E_2)} = \frac{\rho_o C_v}{2\eta_2 \left(1 + \frac{E_a}{E_2}\right)^2} \quad (7.16b)$$

D'autre part, le facteur d'atténuation de contrainte  $\alpha_M$  pour un matériau de Maxwell est :

$$\alpha_M = \frac{\rho_o C_M}{2\eta_2} \quad \text{avec} \quad C_M = \sqrt{\frac{E_2}{\rho_o}}$$

Où  $C_M$  est la célérité de l'onde du matériau de Maxwell.

Réécrivons l'équation (6.24b) :

$$\alpha_a = \frac{\rho_o C_M}{2\eta_2 \left(1 + \frac{E_a}{E_2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\alpha_M}{\left(1 + \frac{E_a}{E_2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (7.16c)$$

**Remarque :**

d'après l'équation (7.16c)  $\alpha_a < \alpha_m$ , l'atténuation de l'onde dans le modèle viscoélastique présenté dans la figure (7.2) est donc plus faible que celle de l'élément de Maxwell étant donné que le rapport  $E_a/E_2$  est toujours positif.

A titre d'illustration les constantes viscoélastiques de trois types de polymères [7.14] sont donnés dans le tableau 7.1.

	Epoxyde	PMMA			Poly-carbonate (PC)
		1	2	3	
$E_a$ (GPa)	3.43	2.94	3.14	3.78	2.3
$E_2$ (GPa)	3.43	3.07	3.98	5.24	0.73
$E_a/E_2$	1.0	0.958	0.789	0.721	3.15
$\theta_2$ ( $\mu$ s)	8.57	95.4	67.4	40.5	140
$\eta_2$ (KPa.s)	29.4	293	268	212	102
$\rho_0$ (g/cm <sup>3</sup> )	1.2	1.19	1.19	1.19	1.2
$C_v$ ( m/s)	2391	2247	2446	2753	1589
$\rho_0 C_v$ (MPa.s/m)	2.87	2.67	2.91	3.28	1.91
$\alpha_a$ (1/m)	12.2	1.19	1.70	2.61	0.541

Tableau 7.1 : paramètres viscoélastiques mesurés pour trois types de polymères.

## VII.2. Méthode des caractéristiques

Rappelons notre objectif : la détermination des ondes incidentes, réfléchies et transmises aux interfaces de l'échantillon à partir des signaux mesurés par les jauges de déformation (figure 6.1).

En principe, un signal de mesure d'une onde peut toujours être considéré comme une superposition d'ondes continues harmoniques de Fourier. En déterminant le spectre de Fourier de cette onde qui serait par exemple  $\epsilon_i(x_{g1}, t)$ , l'onde incidente à l'interface " $\epsilon_i(x_1, t)$ " peut être déterminée par les équations (7.9) ~ (7.11). Mais dans une telle approche, plusieurs termes interviennent et il est difficile d'obtenir une prédiction assez précise [7.16].

L'utilisation de la méthode des caractéristiques est plus efficace et plus commode à utiliser pour les petites distances ce qui est le cas pour la technique des barres d'Hopkinson.

Réécrivons les équations fondamentales (7.5)~(7.7) :

$$\frac{d\epsilon}{dt} - \frac{1}{E_a + E_2} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_a \epsilon}{(E_a + E_2)\theta_2} - \frac{\sigma}{(E_a + E_2)\theta_2} = 0, \quad (7.17a)$$

$$\rho_0 \frac{dv}{dt} - \frac{d\sigma}{dx} = 0, \quad (7.17b)$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{dv}{dx} = 0 \quad . \quad (7.17c)$$

En multipliant respectivement chacune de ces équations par des coefficients indéterminés N, M et L et en les additionnant l'une à l'autre, nous obtenons :

$$(L+N) \frac{d\varepsilon}{dt} + (M\rho_0 \frac{d}{dt} - L \frac{d}{dx})v - (\frac{N}{E_a+E_2} \frac{d}{dt} + M \frac{d}{dx})\sigma + \frac{N}{(E_a+E_2)\theta_2} (E_a\varepsilon - \sigma) = 0 \quad (7.18)$$

Pour que l'équation (7.18) soit une différentielle selon la caractéristique C(x, t), les coefficients N, M et L doivent satisfaire les relations suivantes :

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_C = (L+N) = -\frac{L(L+N)}{M\rho_0} = \frac{M(E_a+E_2)(L+N)}{N} = 0. \quad (7.19)$$

Il existe deux solutions pour L, M et N . La première est déterminée par les équations suivantes :

$$L + N = 0, \quad (7.20)$$

$$\rho_0 (E_a+E_2) M^2 = -LN .$$

A partir des équations (7.19), (7.18) et (7.13), nous obtenons deux caractéristiques:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{E_a+E_2}{\rho_0}} = C_v; \quad (7.21)$$

avec comme conditions de compatibilité le long des droites obtenues à partir des caractéristiques.

$$dv = \pm \frac{1}{\rho_0 C_v} d\sigma \pm \frac{\sigma - E_a\varepsilon}{\rho_0 C_v \theta_2} dt = \pm \frac{1}{\rho_0 C_v} d\sigma + \left[ \frac{\sigma - E_a\varepsilon}{(E_a+E_2)\theta_2} \right] dx, \quad (7.22)$$

Une valeur positive correspond à la propagation des ondes vers le côté droit, Une valeur négative correspond à la propagation vers le côté gauche

Le deuxième groupe de solutions pour l'équation (7.19) est :

$$\begin{aligned} L = M = 0, \\ N \neq 0. \end{aligned} \tag{7.23}$$

La caractéristique et la condition de compatibilité le long de cette dernière sont :

$$dx = 0, \tag{7.24a}$$

$$d\varepsilon - \frac{d\sigma}{E_a + E_2} - \frac{\sigma - E_a \varepsilon}{(E_a + E_2)\theta_2} dt = 0. \tag{7.24b}$$

L'équation (7.24b) est en fait une forme spéciale de l'équation fondamentale (7.17c). Les termes ayant "dt" ou "dx" dans les conditions de compatibilité (7.22) et (7.24b) sont des termes qui décrivent le caractère de dispersion et de dissipation des ondes viscoélastiques.

Le calcul des relations de compatibilité le long des caractéristiques est très compliqué compte tenu de l'existence de ces termes. Le calcul peut, par contre, se faire à partir des trois groupes de caractéristiques correspondantes (Eqs. 7.21 et 7.24b) qui sont sous la forme de lignes droites.

Afin d'illustrer l'obtention de la solution par un calcul numérique selon la méthode des caractéristiques, considérons une barre en polymère qui subit un impact de contrainte  $\sigma^*$  à une de ses extrémités  $x = 0$ . Prenons alors comme conditions initiales à  $t = 0$  :

$$\sigma(x,0) = \varepsilon(x,0) = v(x,0) = 0 \tag{7.25}$$

Nous obtenons ainsi une onde de choc qui se propage avec une vitesse  $D$  le long de la ligne OA (figure 7.4) représentée à la discontinuité d'après les relations suivantes :

$$[\sigma] = \sigma^- - \sigma^+,$$

$$[\varepsilon] = \varepsilon^- - \varepsilon^+,$$

$$[v] = v^- - v^+,$$

qui doivent satisfaire les relations d'Hugoniot [7.15, 7.16] :

$$\begin{aligned} [\sigma] &= -\rho_0 D [v], \\ [v] &= -D [\epsilon], \end{aligned} \tag{7.26}$$

Où  $\sigma^+$ ,  $\epsilon^+$ ,  $v^+$  sont respectivement les valeurs de la contraintes, de la déformation et de la vitesse avant le front d'onde, alors que  $\sigma^-$ ,  $\epsilon^-$ ,  $v^-$  sont les valeurs juste après le front d'onde. D'après l'équation (7.26), Nous obtenons :

$$D = \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{[\sigma]}{[\epsilon]}}. \tag{7.27}$$

Ce qui veut dire que la vitesse de propagation de l'onde ne dépend pas de la réponse viscoélastique mais de la réponse instantanée du matériau. A faible déformation ( $\epsilon < 1\%$ ), nous avons :

$$\frac{[\sigma]}{[\epsilon]} = E_a + E_2. \tag{7.28}$$

Substituons cette égalité dans l'équation (7.27), nous obtenons la célérité du présent matériau qui est justement la même que la célérité le long de la caractéristique (équation 7.21). L'équation (7.26) se réduit donc à :

$$\sigma = -\rho_0 C_v v = (E_a + E_2) \epsilon. \tag{7.29}$$

D'après cette dernière relation nous pouvons réécrire l'équation (7.22) sous la forme d'une équation différentielle de la fonction  $\sigma$  :

$$\frac{d\sigma}{dx} + \left[ \frac{\rho_0 C_v}{2\eta_2 \left(1 + \frac{E_a}{E_2}\right)^2} \right] \sigma = 0.$$

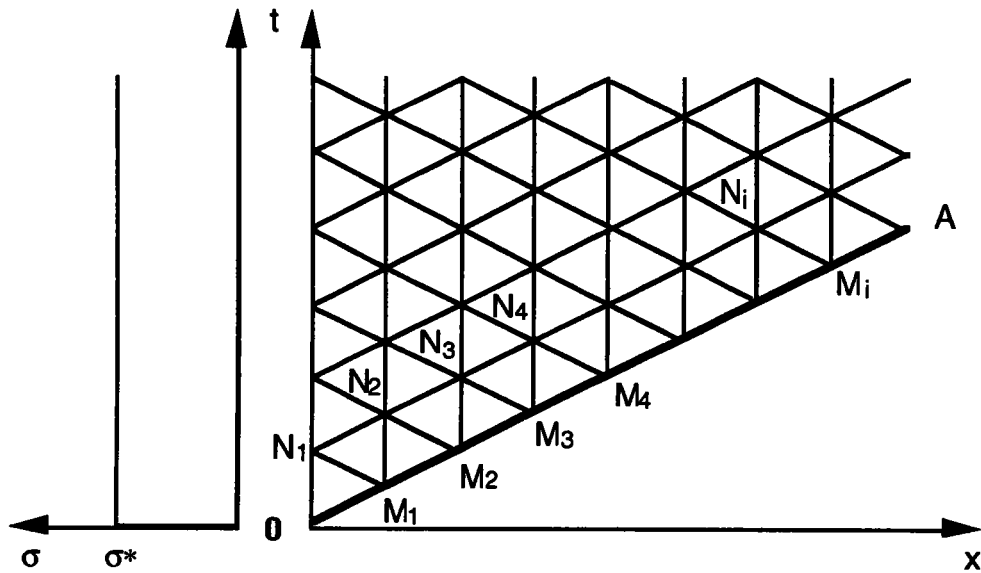


Figure 7.4. Calcul numérique de la propagation d'une onde viscoélastique par la méthode des caractéristiques.

Utilisant comme condition limite le fait que la contrainte est constante à l'impact, nous obtenons la solution de l'onde de choc sur OA (figure 7.4) pour la contrainte ainsi que la déformation :

$$\sigma = \sigma^* \exp \left[ - \frac{\rho_0 c_v}{2\eta_2 \left(1 + \frac{E_a}{E_2}\right)^2} x \right] = \sigma^* \exp (-\alpha_a x). \quad (7.30a)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^* \exp \left[ - \frac{\rho_0 c_v}{2\eta_2 \left(1 + \frac{E_a}{E_2}\right)^2} x \right] = \varepsilon^* \exp (-\alpha_a x). \quad (7.30b)$$

Il faut noter que le facteur d'atténuation dans l'équation (7.30) de l'onde de choc est exactement le même que le facteur  $\alpha_a$  dans l'équation (7.16b) pour des ondes harmoniques à grandes fréquences.

La solution selon OA étant obtenue, il reste à trouver les solutions dans le domaine temps-espace limité par "tOA" (figure 7.4) ce qui revient à résoudre ce qu'on appelle le problème des valeurs caractéristiques [7.14] -[7.17]. Cette opération consiste en deux phases :

a) la détermination des solutions aux points limites,

b) la détermination des solutions aux points intérieurs.

En premier lieu, discutons la solution d'un point arbitraire le long de Ot qui serait par exemple le point  $N_1$  de la figure 4. Les valeurs de la déformation  $\epsilon$ , et de la vitesse particulière  $v$  sont inconnus, alors que celle de la contrainte est donnée par les conditions limites. A partir des équation (7.21) et (7.24a), il est possible de trouver deux caractéristiques  $ON_1$  et  $M_1N_1$  qui relient le point limite  $N_1$  aux deux points connus O et  $N_1$ . Nous avons alors deux conditions de compatibilité (équations 7.22 et 7.24b) le long de  $ON_1$  et  $M_1N_1$ , qui sous la forme de différences finies s'écrivent comme suit :

$$v(N_1)-v(M_1) = -\frac{1}{\rho_o C_v} [\sigma(N_1)-\sigma(M_1)] + \frac{E_a \epsilon(M_1)-\sigma(M_1)}{\rho_o C_v \theta} [t(N_1)-t(M_1)] \quad (7.31a)$$

$$\epsilon(N_1)-\epsilon(0) - \frac{1}{E_a+E_2} [\sigma(N_1)-\sigma(0)] + \frac{E_a \epsilon(0)-\sigma(0)}{(E_a+E_2)\theta_2} [t(N_1)-t(0)] = 0 \quad (7.31b)$$

Ainsi les valeurs de  $V(N_1)$  et  $\epsilon(N_1)$  peuvent être obtenus par la résolution des équations (7.31a et 7.31b), à partir des valeurs connues aux points O et  $M_1$ .

Pour trouver la solution d'un point arbitraire intérieur au domaine tOA, prenons comme exemple le point  $N_2$  de la figure (7.4). A partir des équations (7.21) et (7.24a) nous trouvons trois caractéristiques qui peuvent relier le point  $N_2$  aux trois points connus  $N_1$ ,  $M_1$  et  $M_2$ . de manière similaire, nous obtenons trois conditions de compatibilité le long de  $N_1N_2$ ,  $M_1N_2$  et  $M_2N_2$ , respectivement, qui peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$v(N_2)-v(N_1) = \frac{1}{\rho_o C_v} [\sigma(N_2)-\sigma(N_1)] - \frac{E_a \epsilon(N_1)-\sigma(N_1)}{\rho_o C_v \theta_2} [t(N_2)-t(N_1)] ,$$

$$v(N_2)-v(M_2) = -\frac{1}{\rho_o C_v} [\sigma(N_2)-\sigma(M_2)] + \frac{E_a \epsilon(M_2)-\sigma(M_2)}{\rho_o C_v \theta_2} [t(N_2)-t(M_2)] ,$$

(7.32)

$$\epsilon(N_2)-\epsilon(M_1) = \frac{1}{E_a+E_2} [\sigma(N_2)-\sigma(M_1)] - \frac{E_a \epsilon(M_1)-\sigma(M_1)}{(E_a+E_2)\theta_2} [t(N_2)-t(M_1)] .$$

Ainsi, les valeurs des trois inconnues  $v(N_2)$ ,  $\varepsilon(N_2)$  et  $s(N_2)$  peuvent être obtenus par le système d'équations (7.32) à partir des valeurs connues de  $N_1$ ,  $M_1$  et  $M_2$ .

L'exemple ci-dessus montre comment obtenir les solutions d'un problème dit *direct* qui revient à trouver les solutions de l'onde de propagation à partir des conditions limites. Le problème *inverse* peut être résolu d'une manière similaire sans difficultés. Ce qui revient à trouver les conditions limites à partir de résultats connus.

Si par exemple, dans la figure (7.4), les valeurs de la contrainte, de la déformation et de la vitesse particulière aux points  $M_3$  et  $N_4$  sont connues et si ces valeurs au point  $M_2$  sont données par les conditions initiales, alors nous trouvons les valeurs inconnues de la contrainte, de la déformation et de la vitesse particulière au point  $N_3$  respectivement à partir des trois conditions de compatibilité le long des caractéristiques  $M_3N_3$ ,  $N_4N_3$  et  $M_2N_3$  :

$$v(N_3) - v(N_4) = \frac{1}{\rho_0 C_v} [\sigma(N_3) - \sigma(N_4)] + \frac{E_a \varepsilon(N_4) - \sigma(N_4)}{\rho_0 C_v \theta_2} [t(N_4) - t(N_3)],$$

$$v(N_3) - v(M_3) = - \frac{1}{\rho_0 C_v} [\sigma(N_3) - \sigma(M_3)] + \frac{E_a \varepsilon(M_3) - \sigma(M_3)}{\rho_0 C_v \theta_2} [t(N_3) - t(M_3)],$$

(7.33)

$$\varepsilon(N_3) - \varepsilon(M_2) = \frac{1}{E_a + E_2} [\sigma(N_3) - \sigma(M_2)] - \frac{E_a \varepsilon(M_2) - \sigma(M_2)}{(E_a + E_2) \theta_2} [t(N_3) - t(M_2)].$$

Le reste peut être déduit par analogie. La différence de temps dans les équation (7.31 à 7.33) doit être bien entendu très faible pour satisfaire une précision satisfaisante dans le calcul numérique. Pour avoir plus de détails sur les différents aspects de la méthode caractéristique nous suggérons les références [7.17] et [7.19].

### VIII. Recherche de la solution dans le cas des barres d'Hopkinson

Dans le cas de barres viscoélastiques, il est difficile de séparer l'onde réfléchie de la partie dispersive de l'onde incidente (queue de l'onde). Il est préférable, dans les calculs qui permettent de déterminer la relation dynamique contrainte-déformation, d'utiliser l'onde incidente  $\varepsilon_i(x_{g1}, t)$  et l'onde transmise et  $(x_{g2}, t)$ . Un logiciel de calcul nous permet d'aboutir à cette relation. Les phase de calcul sur lesquelles nous nous sommes basés sont décrites ci dessous.



A. Détermination de la contrainte incidente  $\sigma_i(x_1,t)$  et la vitesse particulaire incidente  $v_i(x_1,t)$  à l'interface  $x_1$  (à gauche de l'échantillon, figure 6.1), à partir du signal  $\varepsilon_i(x_{g_i},t)$  mesuré sur la jauge de déformation  $G_1$ .

Nous avons ici un problème *direct* à résoudre avec la valeur de la déformation connue sous forme de condition initiale. La contrainte et la vitesse initiale sont inconnues. Elles peuvent être déterminées en prenant le point  $(x_i,t_j)$  de la figure (8.1a) par le système d'équations (7.31). D'une façon explicite nous avons :

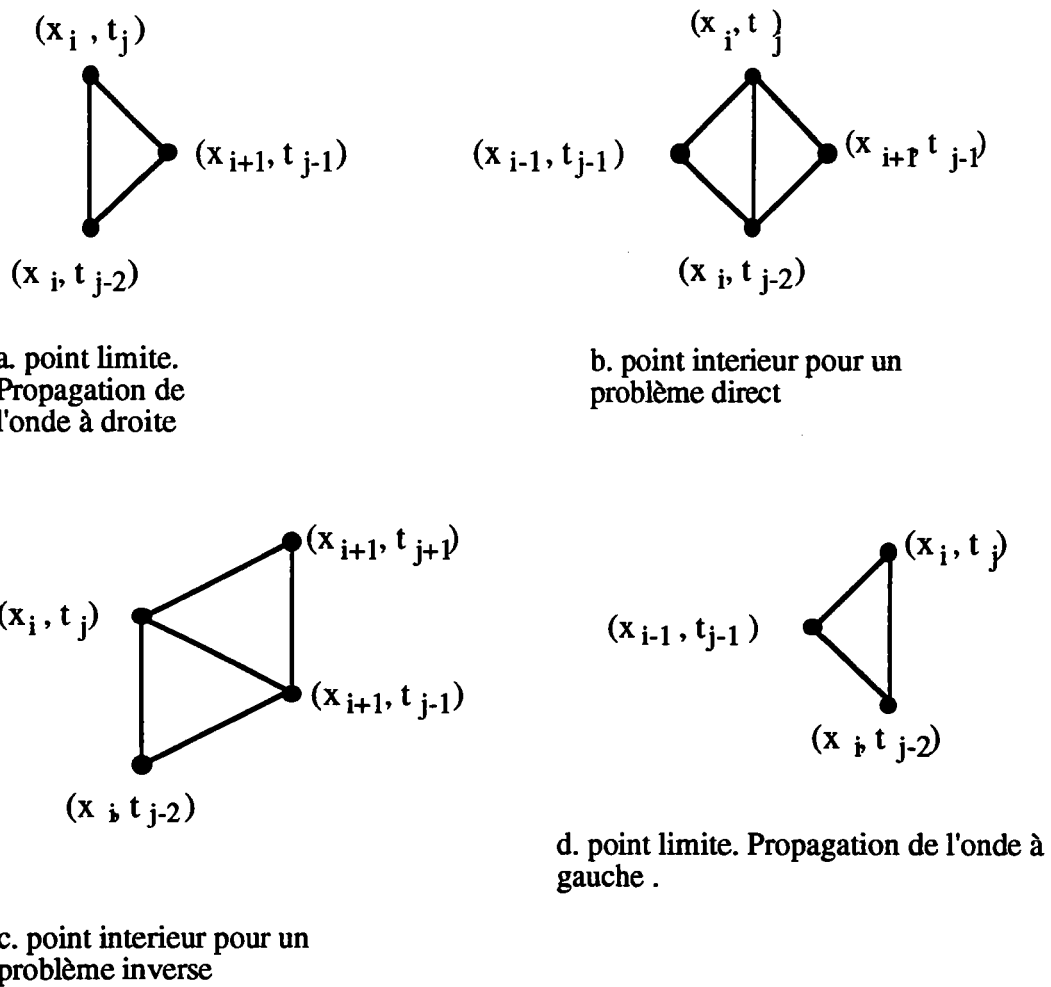
$$\sigma(x_i,t_j) = \sigma(x_i,t_{j-2}) + (E_a + E_2)[\varepsilon(x_i,t_j) - \varepsilon(x_i,t_{j-2})] + [E_a \varepsilon(x_i,t_{j-2}) - \sigma(x_i,t_{j-2})] \frac{2\Delta t}{\theta_2}, \quad (8.1)$$

$$v(x_i,t_j) = v(x_{i+1},t_{j-1}) + \frac{[\sigma(x_{i+1},t_{j-1}) - \sigma(x_i,t_j)]}{\rho_o C_v} + \frac{[E_a \varepsilon(x_{i+1},t_{j-1}) - \sigma(x_{i+1},t_{j-1})] \Delta t}{\rho_o C_v \theta_2}$$

Où  $\Delta t = t_j - t_{j-1}$  est la différence de temps "le pas" dans le calcul numérique. La contrainte, la déformation et la vitesse particulaire pour un point intérieur sont déterminés selon la figure 8.1b pour le point  $(x_i,t_j)$  et selon le système d'équation (7.32) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sigma(x_i,t_j) = \frac{1}{2} \left\{ \sigma(x_{i+1},t_{j-1}) + \sigma(x_{i-1},t_{j-1}) + \rho_o C_v [v(x_{i+1},t_{j-1}) - v(x_{i-1},t_{j-1})] \right. \\ \left. + [E_a \varepsilon(x_{i+1},t_{j-1}) - \sigma(x_{i+1},t_{j-1}) + E_a \varepsilon(x_{i-1},t_{j-1}) - \sigma(x_{i-1},t_{j-1})] \frac{\Delta t}{\theta_2} \right\}, \\ v(x_i,t_j) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma(x_{i+1},t_{j-1}) - \sigma(x_{i-1},t_{j-1})}{\rho_o C_v} + v(x_{i+1},t_{j-1}) + v(x_{i-1},t_{j-1}) \right. \\ \left. + \frac{[E_a \varepsilon(x_{i+1},t_{j-1}) - \sigma(x_{i+1},t_{j-1})] - [E_a \varepsilon(x_{i-1},t_{j-1}) - \sigma(x_{i-1},t_{j-1})]}{\rho_o C_v} \frac{\Delta t}{\theta_2} \right\}, \quad (8.2) \end{aligned}$$

$$\varepsilon(x_i,t_j) = \varepsilon(x_i,t_{j-2}) + \frac{\sigma(x_i,t_j) - \sigma(x_i,t_{j-2})}{E_a + E_2} - \frac{E_a \varepsilon(x_i,t_{j-2}) - \sigma(x_i,t_{j-2})}{E_a + E_2} \frac{2\Delta t}{\theta_2}.$$



*Figure 8.1 : Solutions des caractéristiques pour différents cas dans la technique des barres d'Hopkinson en polymère*

**B. Détermination de la contrainte incidente  $\sigma_f(xg_2,t)$  et la vitesse particulière  $v_f(xg_2,t)$  à la jauge de déformation  $G_2$  à partir de l'onde de déformation mesurée  $\epsilon_f(xg_2,t)$ .**

Il revient ici à résoudre un problème direct pour une valeur de déformation limite donnée. Ce qui est similaire au cas utilisé dans la figure 8.1b. Les équations (7.32) et (7.33) peuvent donc être encore utilisées dans ce cas.

**C. Détermination de la contrainte transmise  $\sigma_t(x_2,t)$ , la déformation  $\epsilon_t(x_2,t)$  et la vitesse particulière  $v_t(x_2,t)$  à l'interface droite de l'échantillon (figure 4) à partir des valeurs connues de  $\epsilon_f(xg_2,t)$ ,  $\sigma_f(xg_2,t)$  et  $v_f(xg_2,t)$  à  $G_2$ .**

Ce cas consiste à résoudre un problème inverse, donc à trouver les conditions limites qui sont inconnues à partir des conditions initiales. Nous savons que l'équation (7.32) permet de déterminer les valeurs de la contrainte, de la déformation et de la vitesse particulière pour un point intérieur  $(x_i,t_j)$  montré sur la figure 8.1c. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \sigma(x_i,t_j) &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma(x_{i+1},t_{j-1}) + \sigma(x_{i+1},t_{j+1}) + \rho_o C_v [v(x_{i+1},t_{j-1}) - v(x_{i+1},t_{j+1})] \right. \\ &\quad \left. + [E_a \epsilon(x_{i+1},t_{j-1}) - \sigma(x_{i+1},t_{j-1}) - E_a \epsilon(x_{i+1},t_{j+1}) + \sigma(x_{i+1},t_{j+1})] \frac{\Delta t}{\theta_2} \right\}, \\ v(x_i,t_j) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma(x_{i+1},t_{j-1}) - \sigma(x_{i+1},t_{j+1})}{\rho_o C_v} + v(x_{i+1},t_{j-1}) + v(x_{i+1},t_{j+1}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{[E_a \epsilon(x_{i+1},t_{j-1}) - \sigma(x_{i+1},t_{j-1})] + [E_a \epsilon(x_{i+1},t_{j+1}) - \sigma(x_{i+1},t_{j+1})]}{\rho_o C_v} \frac{\Delta t}{\theta_2} \right\}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

$$\epsilon(x_i,t_j) = \epsilon(x_i,t_{j-2}) + \frac{\sigma(x_i,t_j) - \sigma(x_i,t_{j-2})}{E_a + E_2} - \frac{E_a \epsilon(x_i,t_{j-2}) - \sigma(x_i,t_{j-2})}{E_a + E_2} \frac{2\Delta t}{\theta_2}.$$

A noter la différence de signes qu'il existe entre les termes correspondant dans les équations (8.2) et (8.3).

Jusqu'ici les termes aux interfaces,  $\sigma_i(x_1, t)$ ,  $v_i(x_1, t)$  et  $\epsilon_i(x_1, t)$  sur la barre incidente et  $\sigma_t(x_2, t)$ ,  $v_t(x_2, t)$  et  $\epsilon_t(x_2, t)$  sur la barre transmettrice ont été déterminés. Sachant que

$$\sigma_r(x_1, t) = \sigma_t(x_2, t) - \sigma_i(x_1, t) . \quad (8.4a)$$

Ou, Si l'on doit tenir compte de la faible différence qui existe entre le temps d'arrivée de l'onde incidente à l'interface  $x_1$  et le début de l'onde transmise à l'interface  $x_2$ , une autre forme de l'équation (8.4a) est suggérée comme suit :

$$\sigma_r(x_1, t) = \sigma_t[ x_2, (t - \frac{x_2-x_1}{C_v})] - \sigma_i(x_1, t) . \quad (8.4b)$$

Les valeurs de l'onde réfléchie qui restent inconnues à l'interface  $x_1$  sont déterminées de la manière suivante :

**D. Détermination de la vitesse particulière réfléchie  $v_r(x_1, t)$  et la déformation  $\epsilon_r(x_1, t)$  à l'interface gauche de l'échantillon " $x_1$ " à partir de  $\sigma_r(x_1, t)$**

Nous avons ici à résoudre un problème *direct* de la propagation d'une onde viscoélastique dans la direction des  $x$  négatifs ayant comme données la contrainte en conditions limites. Les équations utilisées sont les mêmes que celles du système (8.1) excepté le fait qu'il faut tenir compte du signe dans les conditions de compatibilité vu le nouveau sens de l'onde de propagation. A partir d'un point arbitraire  $(x_i, t_j)$  (montré dans la figure 8.1d) nous avons :

$$\epsilon(x_i, t_j) = \epsilon(x_i, t_{j-2}) + \frac{\sigma(x_i, t_j) - \sigma(x_i, t_{j-2})}{E_a + E_2} - \frac{E_a \epsilon(x_i, t_{j-2}) - \sigma(x_i, t_{j-2})}{E_a + E_2} \frac{2\Delta\tau}{\theta_2} , \quad (8.5)$$

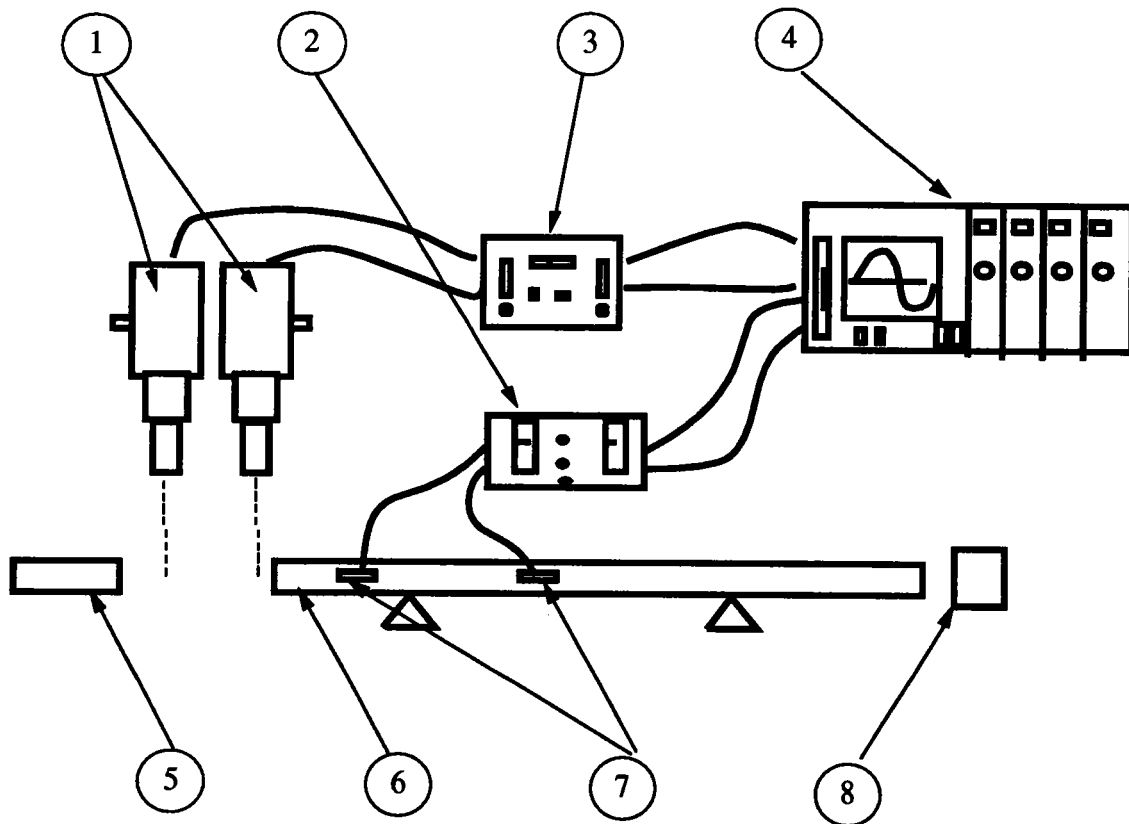
$$v(x_i, t_j) = v(x_{i-1}, t_{j-1}) + \frac{[\sigma(x_{i-1}, t_{j-1}) - \sigma(x_i, t_j)]}{\rho_o C_v} + \frac{[E_a \epsilon(x_{i-1}, t_{j-1}) - \sigma(x_{i-1}, t_{j-1})] \Delta t}{\rho_o C_v \theta_2} .$$

Pour un point intérieur  $(x_i, t_j)$  (figure 8.1b), le système d'équations (8.2) peut toujours être utilisé du moment que ces équations proviennent aussi bien des conditions de compatibilité le long des caractéristiques de droite que de gauche. Par conséquent sont indépendantes du sens de propagation de l'onde.

Nous déterminons ainsi la contrainte, la déformation et la vitesse particulière transmise, réfléchi et incidente. En utilisant les équations (6.8 et 6.9) nous pouvons arriver finalement jusqu'à la relation dynamique contrainte-déformation de l'échantillon.

## IX. Montage expérimentale et Méthodes de mesure

Les essais sont réalisés sur un banc de barres d'Hopkinson en compression



*Figure 9.1 : Schéma du montage réalisé dans le cadre de l'étude de la propagation d'une onde le long d'une barre en PMMA.*

*1 : lunettes de visée de l'extensomètre optique ; 2 : amplificateur ; 3 : extensomètre optique ; 4 : oscilloscope à mémoire et délai d'enregistrement ; 5 : projectile ; 6 : barre en PMMA ; 7 : jauges de déformation ; 8 : amortisseur*

### IX.1. Les appareils de mesure.

#### Un pont d'extensométrie :

Cet appareil amplifie le signal obtenu par les jauges de déformation collées sur les deux barres. Les mesures sont effectués à partir d'un montage en pont complet de Wheastone ce qui permet d'avoir une bonne précision des mesures et d'annuler les effets parasites (flexion ...).

Caractéristiques :

pont "VISHAY 2210" à deux voies

Fréquence maximale : 100 KHz

Balance automatique du pont de Weahstone

#### Un oscilloscope numérique à mémoire :

La sortie du pont d'extensométrie est reliée à un oscilloscope (NICOLET 440) à quatre voies ce qui permet d'enregistrer les signaux obtenus à partir des jauges de déformation.

Caractéristiques :

- base de temps : de 100 ns à 10s

- échelle de mesure : de 30 mV à 120 V

- possibilité d'enregistrement automatique avec un délai de temps entre deux acquisitions.

#### Un extensomètre optique :

Son utilisation se limite dans le cadre de notre travail à la mesure de la vitesse du projectile.

#### Un support informatique :

L'acquisition et l'exploitation des données est réalisée à l'aide d'un ordinateur de type "Hewlett Packard"

### IX.2. Calibration des jauges de déformation

Les jauges de déformation sont montées en pont complet afin d'éviter la mesure de déformations dues à d'éventuels effets parasites (flexion des barres ...). Malgré cette précaution, les erreurs expérimentales introduites dans le cas des barres d'Hopkinson sont fréquentes (ces erreurs peuvent être dues au positionnement imparfait des jauges de déformation, coaxialité des barres insuffisante etc....). Il est donc important de vérifier la précision des valeurs de la déformation mesurées " $\epsilon_{exp}$ ". Nous avons fixé dans notre cas une erreur de 0,1 % à ne pas dépasser que nous vérifions de la manière suivante.

Considérons la relation provenant de la théorie de la propagation des ondes lors de l'impact de deux barres :

$$V^* = \frac{(\rho_o C_v)_1 V_p}{(\rho_o C_v)_1 + (\rho_o C_v)_2}, \quad (9.1)$$

Où " $V^*$ " est la vitesse particulière de la barre à l'impact, " $\rho_o$ " la masse volumique de la barre, " $C_v$ " la célérité de l'onde le long de la barre et " $V_p$ " la vitesse du projectile.

L'équation de propagation des ondes s'écrit:

$$\frac{du}{dt} = C_v \frac{du}{dx}$$

avec :

$$V^* = \frac{du}{dt} \quad \text{et} \quad \epsilon_{th} = \frac{du}{dx}$$

d'où :

$$V^* = C_v \epsilon_{th} \quad (9.2)$$

Si le projectile et la barre sont du même matériau alors la relation (9.1) s'écrit :

$$V^* = \frac{V_p}{2}$$

par conséquent :

$$\epsilon_{th} = \frac{V_p}{2.C_v} \quad (9.3)$$

Cette dernière relation permet de relier la déformation à la célérité ainsi qu'à la vitesse du projectile.

$V_p$  : la vitesse du projectile à l'impact est mesurée par l'extensomètre optique. Cet extensomètre composé de deux lunettes permet d'obtenir la courbe correspondant au déplacement du projectile en fonction du temps.

$C_v$  La célérité de l'onde est une constante du matériau dont la valeur peut être vérifiée en connaissant le temps de déplacement de l'onde d'un point  $x_1$  à un autre  $x_2$

$$C_v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (9.2)$$

Nous traçons ensuite sur un même graphique les droites  $\epsilon_{th} = f(V)$  et  $\epsilon_{exp} = f(V)$  qui montrent l'erreur obtenue. La (figure 9.2) représente une courbe de calibration de la déformation lors d'un impact d'une barre en aluminium par un projectile du même matériau.

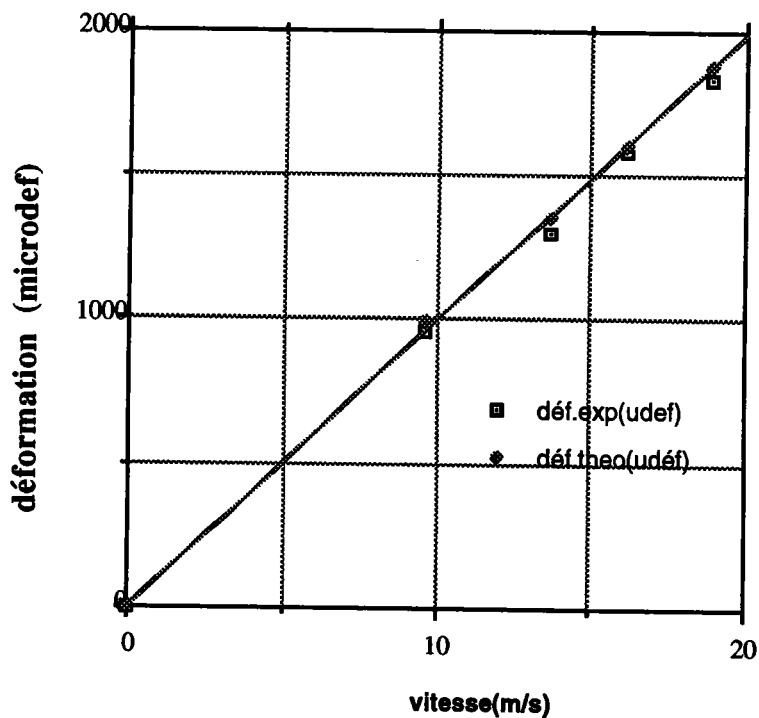


Figure 9.2 : calibration de la déformation mesurée sur une barre en aluminium



## X. Essais d'impact

Les impacts sont réalisés sur des barres en aluminium et en PMMA afin de :

- i) montrer la différence qui existe entre la propagation d'une onde élastique et celle d'une onde viscoélastique et par conséquent, montrer l'utilité de l'analyse des ondes viscoélastiques,
- ii) comparer les mesures expérimentales avec les prédictions théoriques données par la méthode des caractéristiques.

### X.1. Illustration de la propagation des ondes élastiques et viscoélastiques

#### i) Ondes élastiques

Des jauges de déformation sont montées en pont complet à une distance  $X_{g1}$  de l'extrémité d'une barre en aluminium qui est percutée par un projectile du même matériau. Les ondes de déformation obtenues au niveau des jauges de déformation après plusieurs réflexions aux extrémités sont montrées sur la figure 10.1.

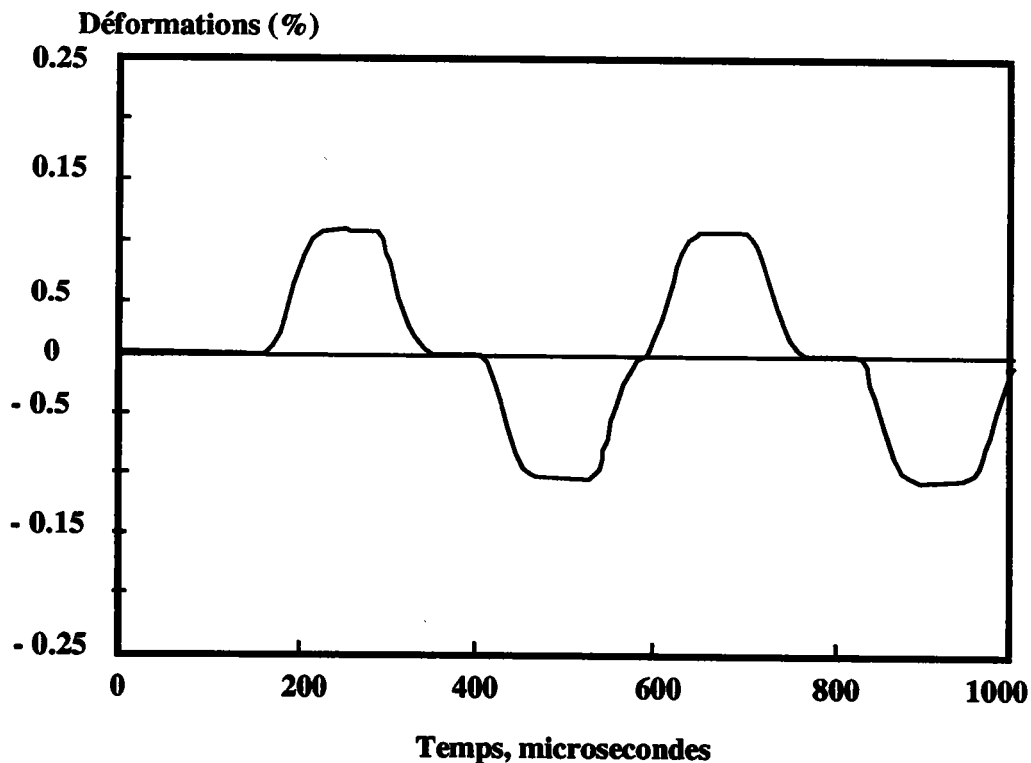


Figure 10.1 : Propagation d'une onde le long d'une barre en aluminium à l'impact d'un projectile du même matériau.

En comparant les ondes consécutives, nous constatons comme prévu qu'il n'apparaît aucun phénomène d'atténuation ou de dispersion de ces ondes.

## ii) Ondes viscoélastiques

Des jauges de déformation sont collées à une distance  $x_{g1}$  et  $x_{g2}$  de l'extrémité d'une barre en PMMA (figure 10.2). Nous obtenons après l'impact du projectile deux signaux  $\epsilon(x_{g1},t)$  et  $\epsilon(x_{g2},t)$  (figure 10.3). A noter l'atténuation de l'onde et sa distorsion.

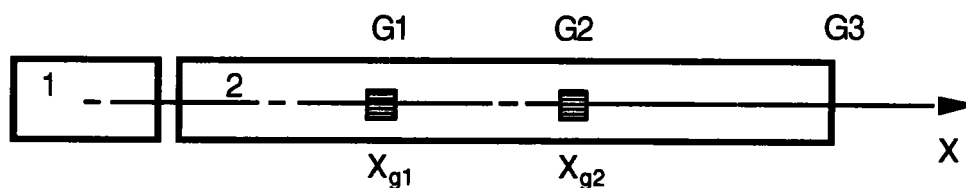


Figure 10.2 : schéma du montage de la barre en PMMA.

1. Projectile en aluminium, 2. Barre en PMMA, G1 et G2. jauges de déformation

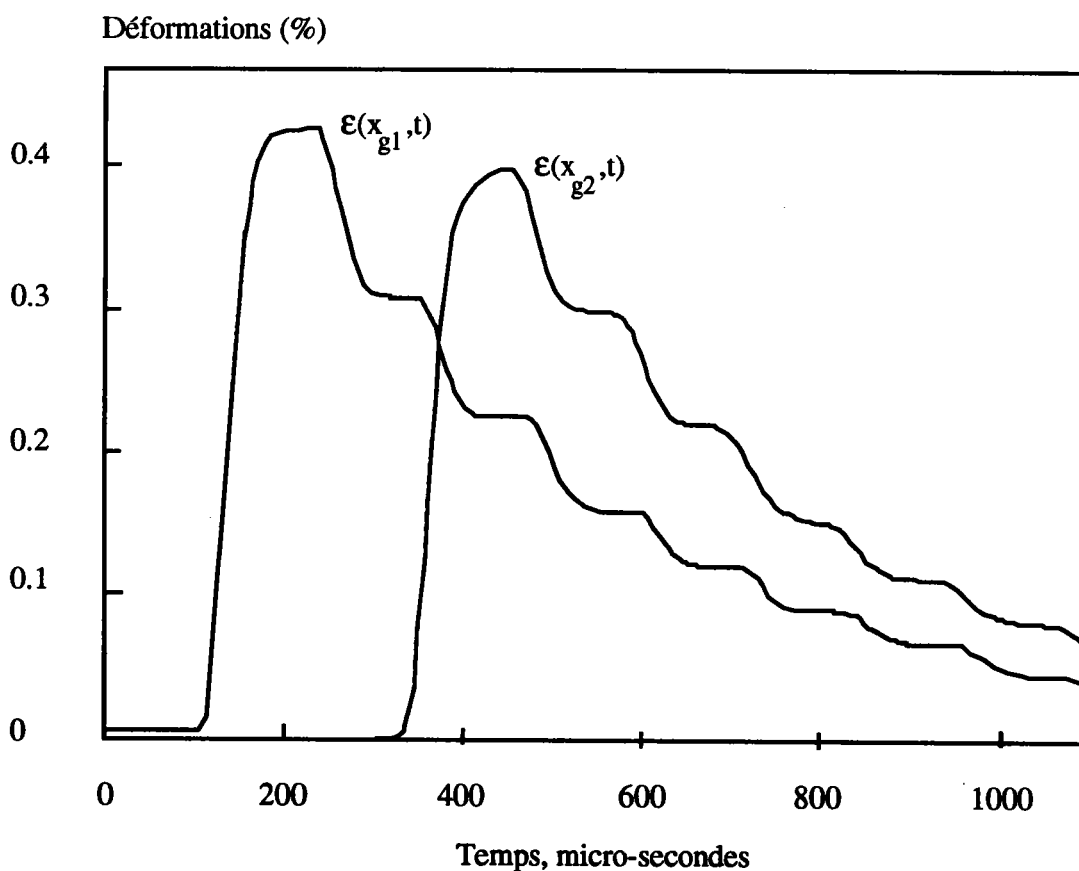


Figure 10.3 : Propagation de l'onde viscoélastique le long d'une barre en PMMA à l'impact d'un projectile en aluminium.

### X.1.1. Détermination des paramètres viscoélastiques du PMMA

Nous savons que pour utiliser la méthode des caractéristiques il est indispensable de connaître les paramètres du matériau qui subit l'impact. Ces paramètres peuvent être déterminés par viscoélasticimétrie à condition d'avoir le matériel nécessaire. Nous proposons ici une méthode originale et relativement simple qui nous permet d'accéder à ces valeurs [10.1].

Les paramètres dont les valeurs sont inconnues sont  $\alpha_a, \theta_2, E_2$ . La célérité  $C_v$ , la masse volumique  $\rho_0$  et le module d'élasticité  $E_a$  sont déterminés expérimentalement.

#### X.1.1.1. Détermination de la valeur du coefficient d'amortissement " $\alpha_a$ "

A partir des valeurs de déformation obtenues au niveau des jauges de déformation (figure 10.1) et en utilisant la relation (7.30b) nous déterminons  $\alpha_a$  de la manière suivante :

$$\alpha_a = \frac{\text{Ln}[\epsilon_t(x_{g2})] - \text{Ln}[\epsilon_t(x_{g1})]}{x_{g2} - x_{g1}}$$

A noter que les valeurs de la déformations correspondent à la valeur maximale du front d'onde.

#### X.1.1.2. Détermination des valeurs du temps de relaxation $\theta_2$ et de la constante élastique $E_2$

Reprenons l'équation (7.21) :

$$C_v = \sqrt{\frac{E_a + E_2}{\rho_0}}$$

La constante élastique s'écrit alors :

$$E_2 = \rho_0 C_v^2 - E_a;$$

et d'après l'équation (7.16b) nous avons :

$$\theta_2 = \frac{E_2}{2\alpha_a C_v (E_a + E_2)}$$

## X.2. Comparaison des valeurs expérimentales et théoriques de la déformation, la contrainte et la vitesse particulière le long d'une barre en PMMA soumise à une onde mécanique

Afin de déterminer la valeur expérimentale de la déformation et de la contrainte, une barre en aluminium est juxtaposée à la barre en PMMA (figure 10.4). Nous expliquerons plus loin l'intérêt de la disposition de la barre en aluminium dans ce montage.

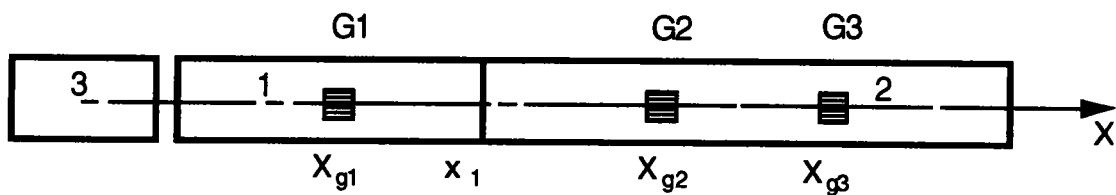


Figure 10.4. Schéma du montage des barres Alu-PMMA

1. barre incidente en aluminium, 2. barre transmettrice en PMMA, 3. projectile en aluminium,  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$ . jauges de déformation,

Nous comparerons ici les valeurs de l'onde de déformation obtenues sur la barre en PMMA (figure 10.4). Nous introduisons comme données les valeurs de l'onde de déformation obtenues à la distance  $x_{g2}$  dans le logiciel de calcul avec les valeurs des paramètres rhéologique et de la distance " $x_{g3} - x_{g2}$ ".

### Paramètres rhéologiques de la barre en PMMA:

$$x_1 = 0$$

$$E_a = 2.82 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 3.04 \text{ GPa}$$

$$\theta_2 = 1135 \text{ } \mu\text{s}$$

$$x_{g2} = 270 \text{ mm}$$

$$x_{g3} = 540 \text{ mm}$$

$$C_v = 2247 \text{ m/s}$$

$$\alpha_a = 1.19 \text{ m}^{-1}$$

$$\rho_0 = 11.9 \text{ kg/m}^3$$

Les résultats sont montrés sur la figure (10.5). Nous obtenons une concordance entre l'onde de déformation théorique  $\epsilon(x_{g2th})$  et l'onde de déformation expérimentale  $\epsilon(x_{g2})$ . L'erreur obtenue est inférieure à 0,5 %.

Remarque : Le prolongement des ondes n'apparaît plus dans ce cas comme pour la figure (10.3). La juxtaposition de la barre en aluminium permet l'élimination de cet effet dû aux réflexions

successives de l'onde sur le projectile (ces réflexions sont elles mêmes dues à la différence d'impédance des matériaux projectile-barre).

Sur la barre en aluminium nous obtenons les valeurs des ondes de déformation incidente et réfléchi. Les contraintes incidentes et transmises sont obtenues en multipliant les valeurs de ces déformations par le module d'Young du matériau. Pour retrouver la valeur de la contrainte transmise à l'interface, nous utilisons la relation suivante :

$$\sigma_i + \sigma_r = \sigma_t$$

Nous introduisons par la suite dans le logiciel, les valeurs de l'onde de déformation transmise sur la barre en PMMA  $\epsilon(xg2,t)$  et nous remontons à la valeur de la déformation et de la contrainte à l'interface. Nous remarquons que la contrainte théorique s'ajuste bien à la contrainte expérimentale à l'interface (figure 10.6).

La distorsion de l'onde de contrainte n'est pas la même celle de l'onde de déformation. L'onde de déformation ( $\epsilon = f(t)$ ) à un palier (après le front d'onde) croissant avec le temps alors que l'onde de contrainte décroît avec le temps (phénomène de relaxation).

Il est donc incorrect de multiplier la valeur de la déformation obtenue par un coefficient quelconque pour obtenir la contrainte. Pour illustrer cela nous montrons sur la figure (10.6) l'onde de contrainte obtenue  $\sigma_{app}$  (que nous appellerons contrainte apparente) en multipliant la déformation par le module d'élasticité du PMMA. Dans notre cas l'erreur obtenue est de 52% ce qui montre la nécessité de l'analyse des ondes viscoélastique lors de l'utilisation des barres en polymère. Ceci reste valable dans le cas où l'atténuation de l'onde de déformation paraît négligeable [10.2].

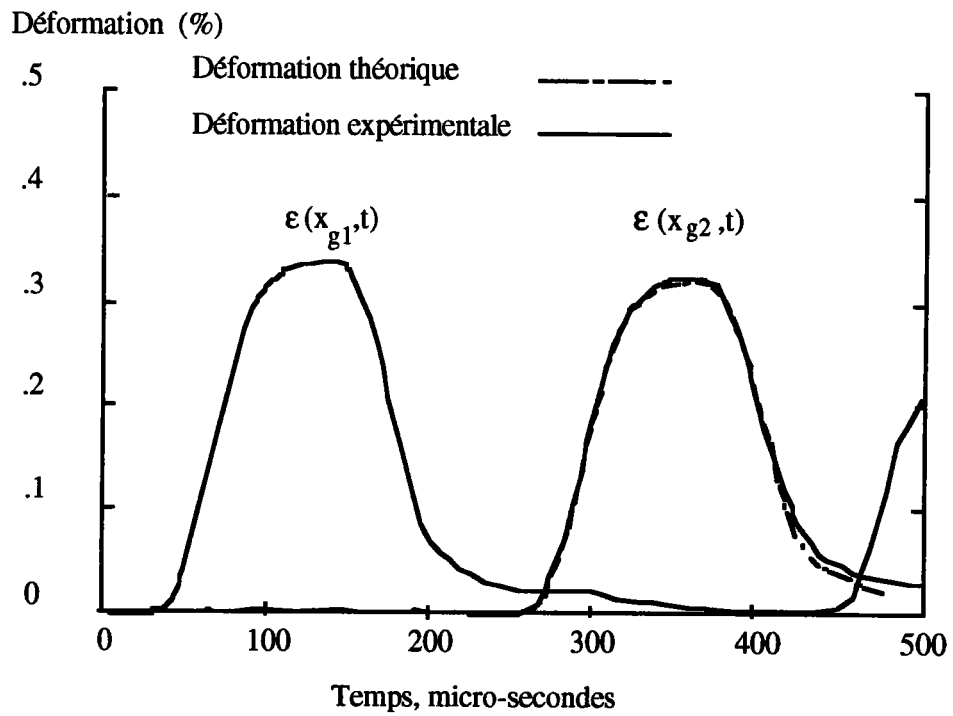


Figure 10.5 : comparaison entre l'onde de déformation mesurée et celle trouvée par calcul.

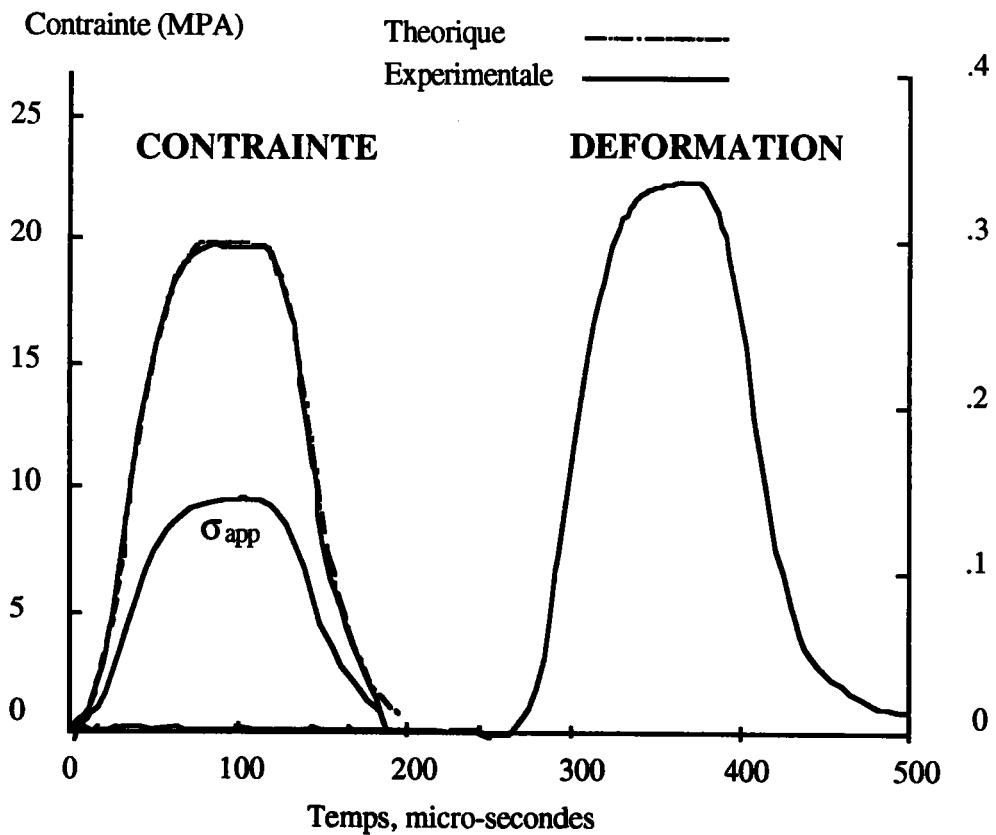


Figure 10.6 : comparaison entre l'onde de contrainte mesurée et celle obtenue par calcul.

## XI. Simulation de la propagation d'ondes viscoélastiques

Nous simulons ici la propagation d'une onde trapézoïdale viscoélastique sous différentes conditions limites d'impact. Cette analyse sera réalisée sur trois types de polymères, deux thermoplastiques (le PMMA et le polycarbonate) et un thermodurcissable (l'époxyde).

### XI.1. Le PMMA

#### Paramètres viscoélastiques

$E_a=2,94$ GPa	$E_2=3,07$ GPa	$\theta_2=95,4$ $\mu$ s
$\rho_0=1,19$ g/cm <sup>3</sup>	$C_v=2247$ m/s	$\alpha_a=1,19$ m <sup>-1</sup> .

La figure (11.1) montre les résultats obtenus avec une condition limite de vitesse d'impact constante pour deux distances ( $x = 0$  et  $x = 270$  mm). Les résultats confirment ce que l'on avait déjà obtenu auparavant. La contrainte décroît en fonction du temps (relaxation), la déformation est croissante et la vitesse particulière est aussi une fonction croissante du temps.

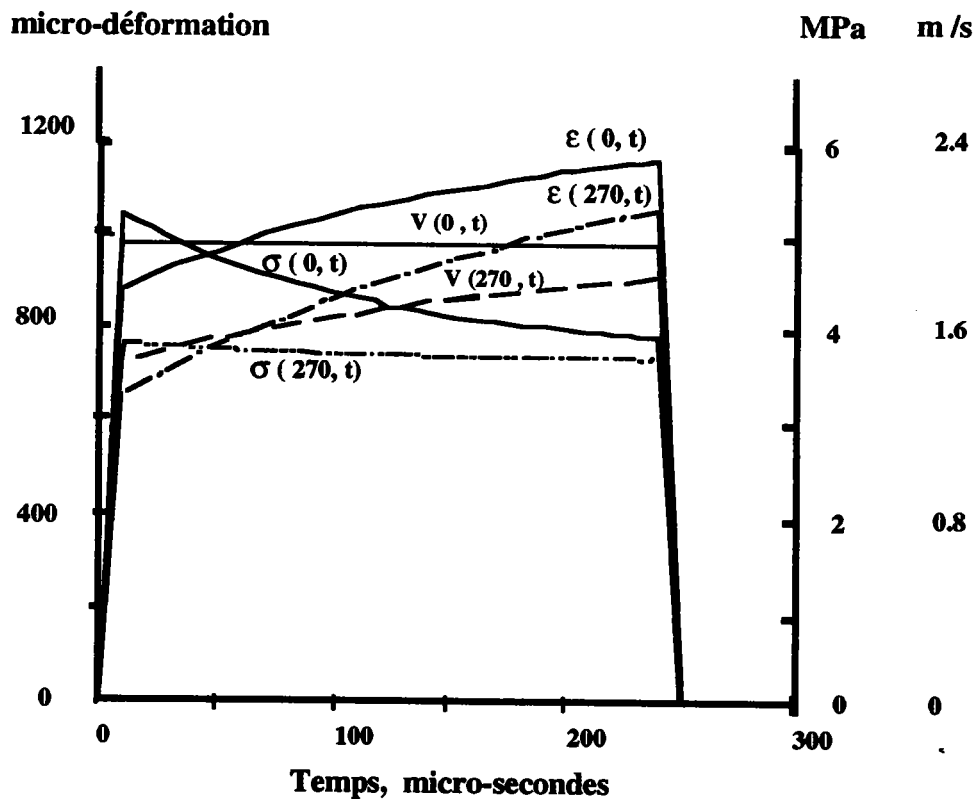


Figure 11.1 : PMMA-1, conditions limites : vitesse constante donnée

Si nous prenons comme conditions initiales une déformation constante nous remarquons sur la figure (11.2) que les ondes  $V(0,t)$  et  $\sigma(0,t)$  sont décroissantes. En augmentant la distance de propagation nous obtenons pour  $x = 270$  mm une relaxation de la vitesse et de la contrainte  $V(270,t)$  et  $\sigma(270,t)$  alors que la déformation  $\epsilon(270,t)$  augmente en fonction du temps.

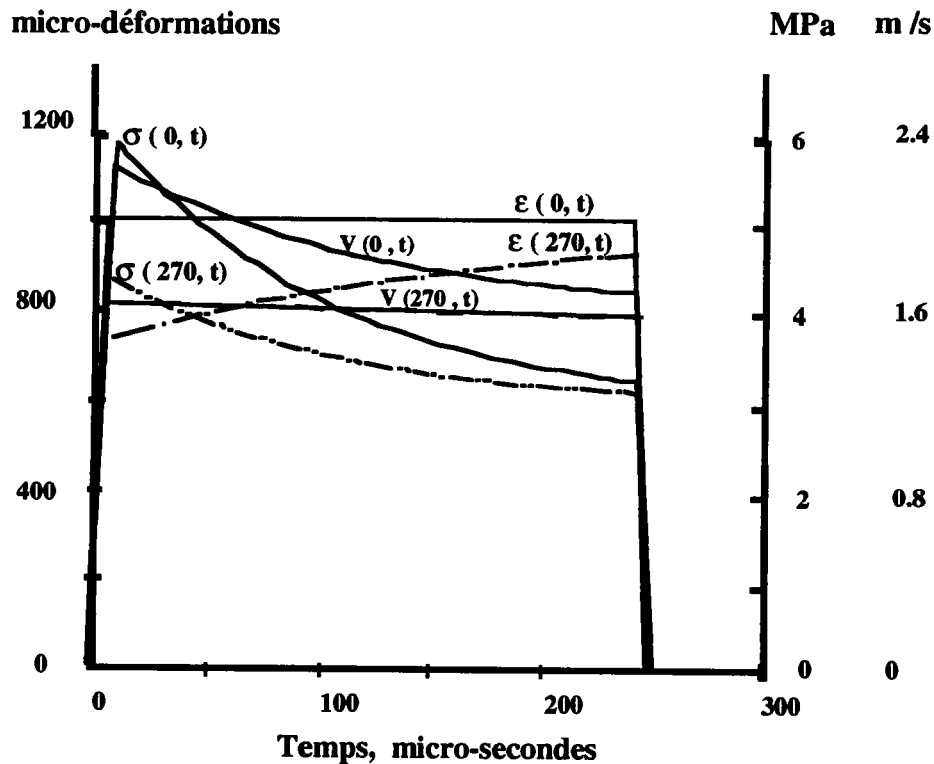


Figure 11.2 : PMMA-1, déformation constante donnée aux conditions limites

Pour une contrainte constante aux conditions limites (figure 11.3), la vitesse et la déformation augmentent en fonction du temps. Une différence par rapport aux deux cas précédents est observée ici pour une distance de propagation de 270 mm. La vitesse  $V(270,t)$ , la contrainte  $\sigma(270,t)$  et aussi la déformation sont croissantes.



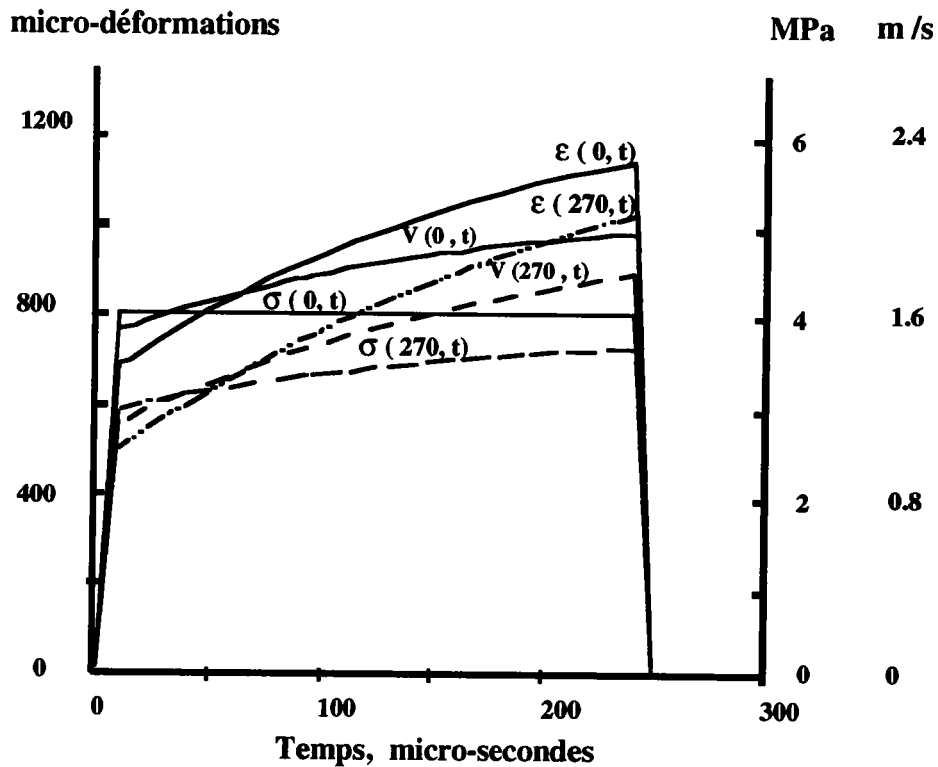


Figure 11.3 : PMMA-1 : contrainte constante donnée aux conditions limites

### Conclusion

Nous remarquons qu'il n'y a pas d'équivalence de comportement des ondes viscoélastiques si nous modifions les conditions limites d'impact contrairement aux ondes élastiques. Le seul point commun qui existe entre les trois figures est l'atténuation de toutes les ondes en fonction de la distance de propagation.

#### XI.1.1 Influence de $\theta_2$ sur la propagation des ondes viscoélastiques

D'après l'équation (7.16b) nous voyons que  $\alpha_a$  est inversement proportionnel à  $\theta_2$ . Si les autres paramètres restent constants il est clair que plus  $\theta_2$  augmente et moins l'atténuation des ondes sera évidente. Quand la valeur de  $\theta_2$  approche l'infini nous retrouvons le cas des barres élastiques (c'est à dire pas d'atténuation des ondes).

Pour montrer l'influence de  $\theta_2$  sur l'atténuation des ondes viscoélastiques, une simulation de la propagation des ondes de contrainte et de déformation est donnée dans la figure (11.4). Ces résultats correspondent à un temps de relaxation 10 fois plus grand que pour la figure (11.1)  $\theta_2 =$

954  $\mu\text{s}$ . Nous constatons, bien entendu que l'atténuation de l'onde est plus faible en augmentant le temps de relaxation  $\theta_2$ . Il faut noter cependant que malgré la faible atténuation le caractère de relaxation de la contrainte et celui croissant en fonction du temps de la déformation existe toujours tant que la distance de propagation est relativement faible.

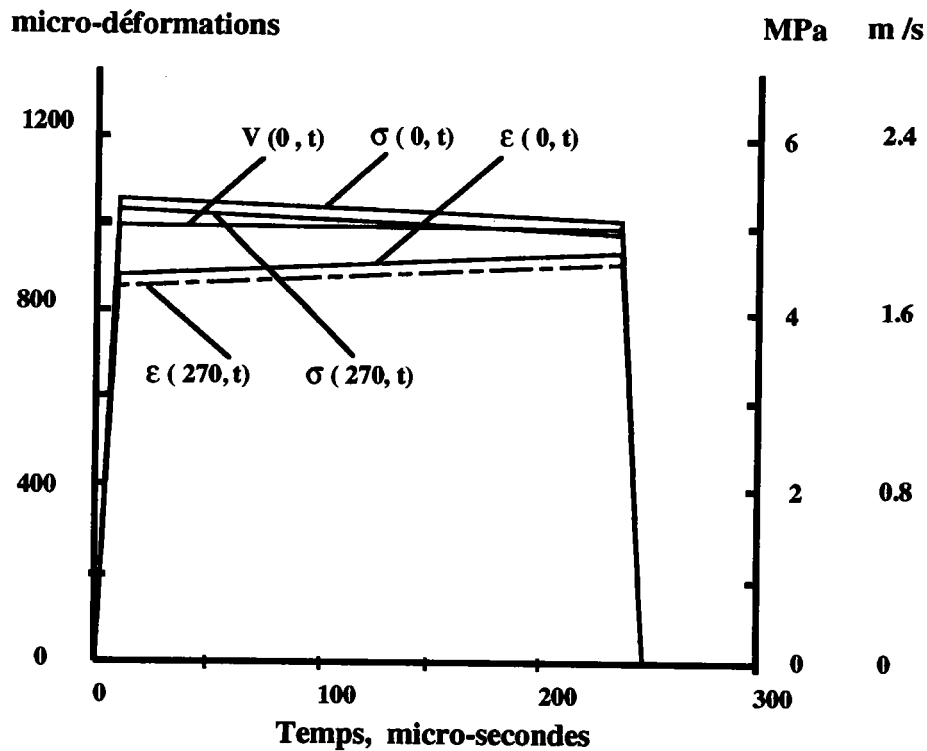


Figure 11.4 : PMMA-1, Vitesse constante donnée aux limites avec  $\theta_2 = 954 \mu\text{s}$

### XI.1.2. Influence de la distance sur la propagation des ondes viscoélastiques

La figure (11.5) montre la simulation de la propagation d'une onde le long d'une barre viscoélastique (PMMA-1).

Nous constatons que :

l'amortissement de l'onde de déformation diminue en fonction de la distance de propagation. L'onde reste toujours croissante en fonction du temps avec une pente de plus en plus prononcée.

l'amortissement de l'onde de contrainte diminue aussi avec la distance de propagation. Cette onde qui est décroissante en fonction du temps pour de faibles distances devient croissante pour de plus grandes distances.

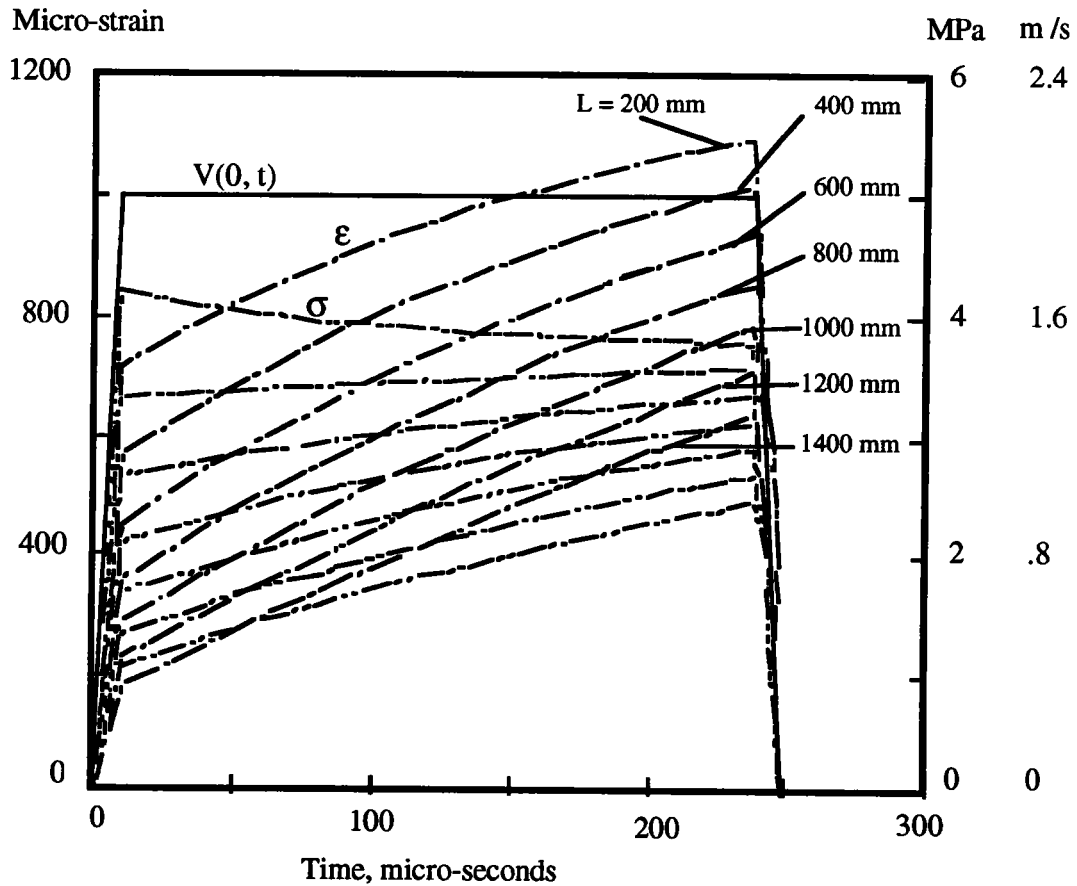


Figure 11.5 : Influence de la distance sur la propagation des ondes viscoélastiques

Dans ce qui suit, une simulation d'ondes viscoélastiques sous les mêmes conditions limites d'impact que pour le PMMA-1 est donnée pour deux matériaux différents (le polycarbonate et l'époxyde) dans le but d'illustrer l'influence des paramètres  $E_a$ ,  $E_2$  et  $\theta_2$  sur la propagation des ondes.

## XI.2. Le polycarbonate (PC).

### Paramètres rhéologiques

$$E_a = 2,30 \text{ GPa}$$

$$E_2 = 0,73 \text{ GPa}$$

$$\theta_2 = 140 \text{ } \mu\text{s}$$

$$\rho_0 = 1,20 \text{ g/cm}^3$$

$$C_v = 1589 \text{ m/s}$$

$$\alpha_a = 0,541 \text{ m}^{-1}$$

Les figures (11.6) à (11.8) montrent les résultats obtenus. Comparés aux figures (11.1) à (11.3) obtenues pour le PMMA-1, nous constatons que l'atténuation des ondes en fonction de la distance et la relaxation de la contrainte en fonction du temps sont moins évidentes pour le polycarbonate. Ce qui était prévisible vu que la valeur de  $\alpha_a$  est plus faible et celle  $\theta_2$  plus élevée que pour le PMMA-1.

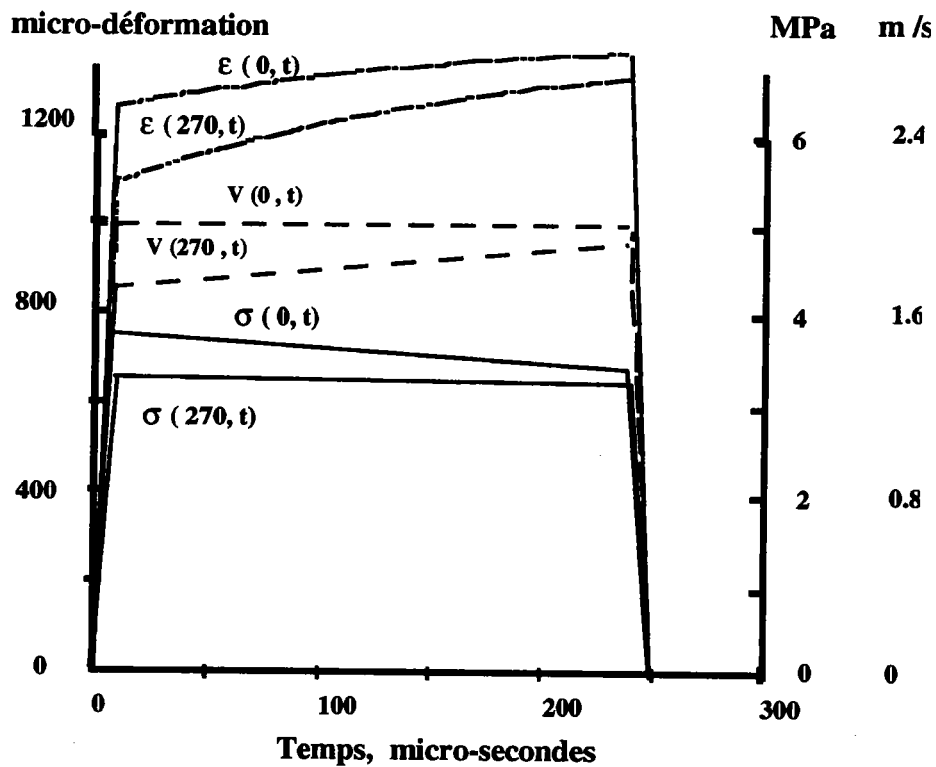


Figure 11.6 : PC, vitesse constante donnée aux conditions limites

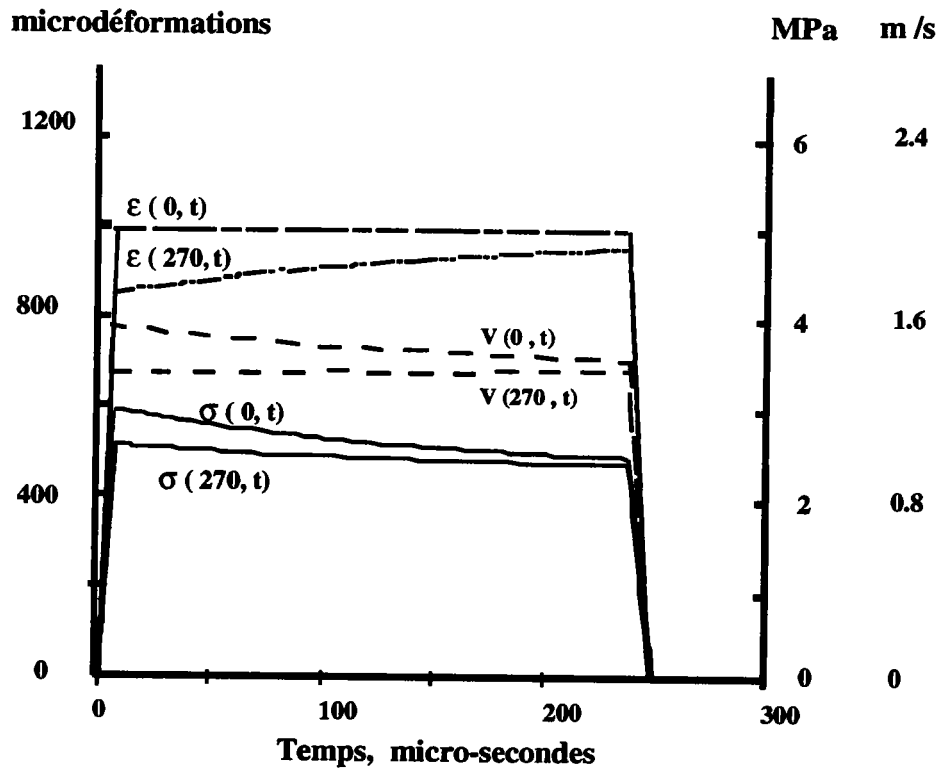


Figure 11.7 : PC déformation constante donnée aux conditions limites

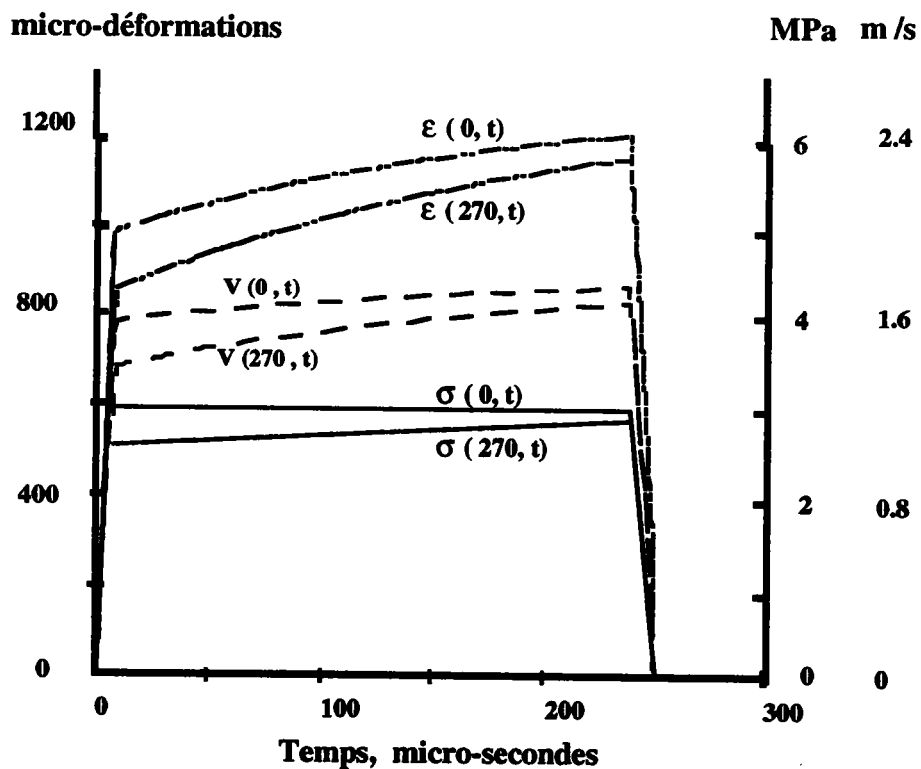


Figure 11.8 : PC, contrainte constante donnée aux conditions limites.

### XI.3. L'epoxyde

#### Paramètres rhéologiques

$E_a=3,43$ GPa	$E_2=3,43$ GPa	$\theta_2=8,57$ ms
$\rho_0=1,20$ g/cm <sup>3</sup>	$C_v=2391$ m/s	$\alpha_a=12,2$ m <sup>-1</sup> .

Les résultats sont montrés sur les figures (11.9) (11.10) et (11.11) respectivement pour des conditions limites à l'impact de vitesse, de déformation et de contrainte constantes. Dans ce cas inversement au cas précédent, si nous comparons les résultats obtenus à ceux du PMMA-1, nous remarquons une atténuation plus marquée ainsi qu'une plus grande relaxation de la contrainte étant donné que le coefficient d'amortissement  $\alpha_a$  de l'epoxyde est plus élevé que celui du PMMA-1 et que le temps de relaxation  $\theta_2$  est plus faible.

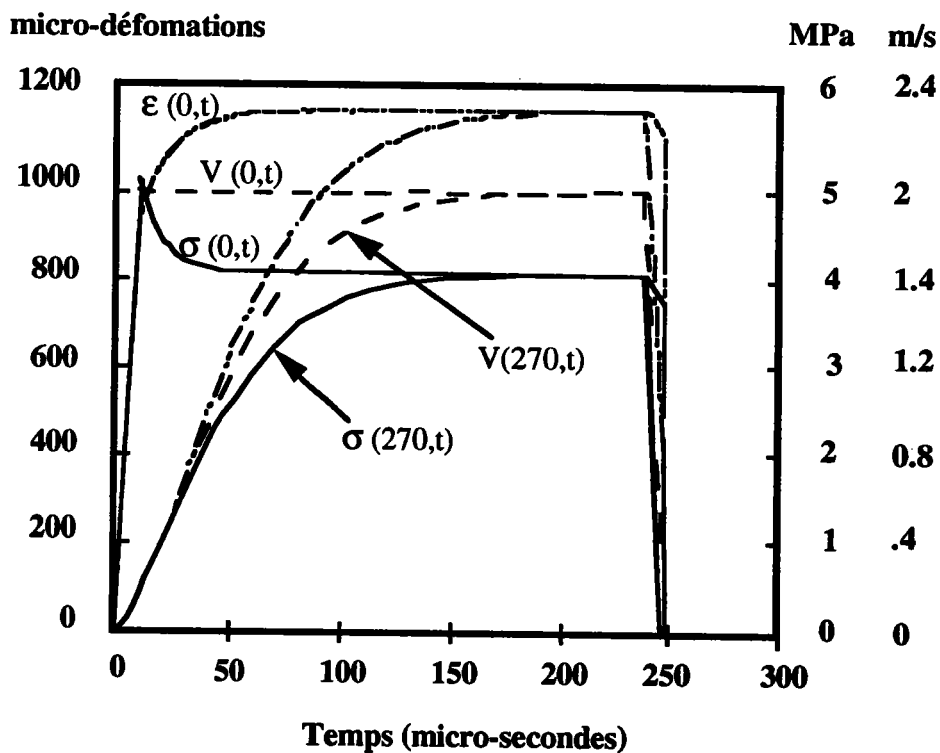


Figure 11.9: epoxyde, vitesse constante donnée aux conditions limites.

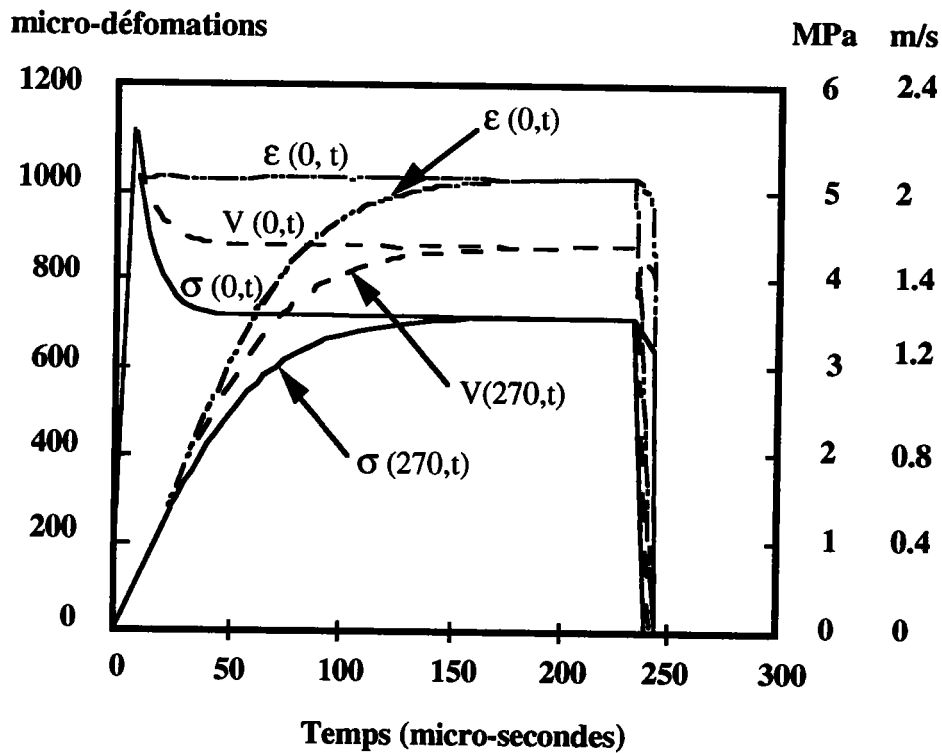


Figure 11.10: epoxyde, déformation donnée constant aux conditions limites.

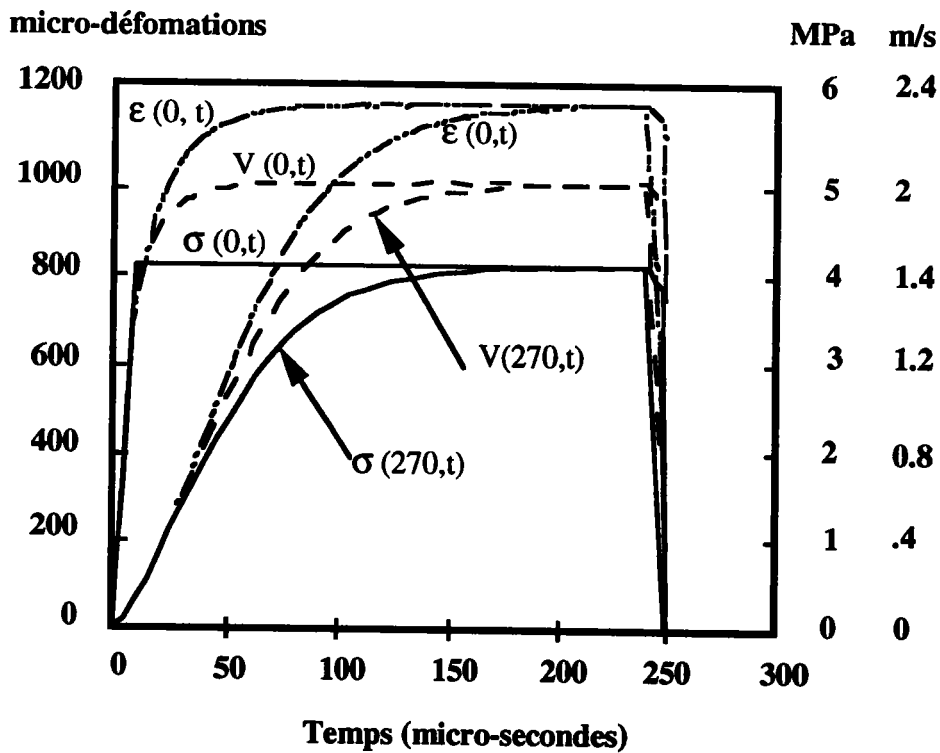


Figure 11.11. EPOXYDE, contrainte constante donnée aux conditions limites.

## **XII. Conclusion.**

La méthode que nous avons proposé donne des résultats très satisfaisants à l'instar de la comparaison effectuée entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus théoriquement. Nous avons constaté que l'onde de contrainte présente un caractère de relaxation inversement à l'onde de déformation qui est croissante en fonction du temps. Ce phénomène de relaxation a été vérifié expérimentalement par une méthode indirecte. La simulation de propagation d'ondes planes viscoélastiques pour différents polymères, nous a permis de mettre en évidence la différence de comportement des ondes viscoélastiques pour des conditions limites à l'impact différentes. Nous avons, par la suite, mis en évidence l'influence des paramètres viscoélastiques sur le comportement de ces ondes.



## 2. Rupture

## Introduction

Le but de cette dernière partie est la modification du dispositif de barres d'Hopkinson en traction qui nous permettrait d'utiliser des barres en PMMA. Nous montrons en premier lieu les raisons qui nous ont amenés à cette modification. Nous utilisons, bien entendu, le logiciel de calcul de l'amortissement d'une onde viscoélastique (voir la partie propagation) pour aboutir aux courbes charge-déplacement.

Les essais sont réalisés sur des échantillons en polyuréthane dont nous déterminerons la ténacité dynamique et statique exprimée par la théorie généralisée d'Andrews. L'exploitation des résultats sera réalisée par une approche statistique vu la dispersion des résultats expérimentaux, phénomène déjà observé lors des travaux précédents sur les polymères [1.1 et 3.16].

### XIII. Essais dynamiques :

#### XIII.1. Géométrie des échantillons :

Les essais sont réalisés sur des échantillons en polyuréthane. La géométrie des échantillons est présentée sur la figure 13.1. La fissuration est réalisée de façon mécanique par tournage à l'aide d'un outil effilé et convenablement affûté.

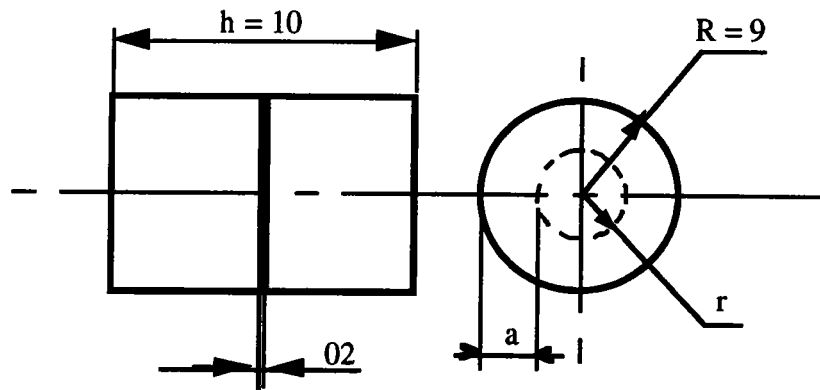


Figure 13.1 : essais dynamiques, géométrie des échantillons.

Fissures réalisées

$a = 5 \text{ mm}$

$a = 6 \text{ mm}$

$a = 6,5 \text{ mm}$

nombre d'échantillons par longueur de fissure : 10

#### XIII.2. Dispositif expérimental.

Un dispositif de traction dynamique (Figure 13.2) existait déjà au laboratoire, conçu par NAIT ABDELAZIZ [3.16]. L'appareillage est constitué par deux barres (incidente{2} et transmettrice{10}) disposées verticalement entre lesquelles est fixé l'éprouvette à tester{8}. L'ensemble du dispositif est maintenu en position verticale par un matelas d'air comprimé dans une chambre {1}. Un projectile tubulaire est propulsé vers le bas par un ressort tarable{6}. Le talon subit l'impact, une onde de compression est réfléchiée sur la surface libre et se transforme en onde de traction. Cette onde traverse la première barre (barre incidente), arrivée au niveau de l'échantillon elle se décompose en une onde réfléchiée qui revient sur la barre incidente et une onde transmise qui charge l'échantillon puis traverse la barre transmettrice

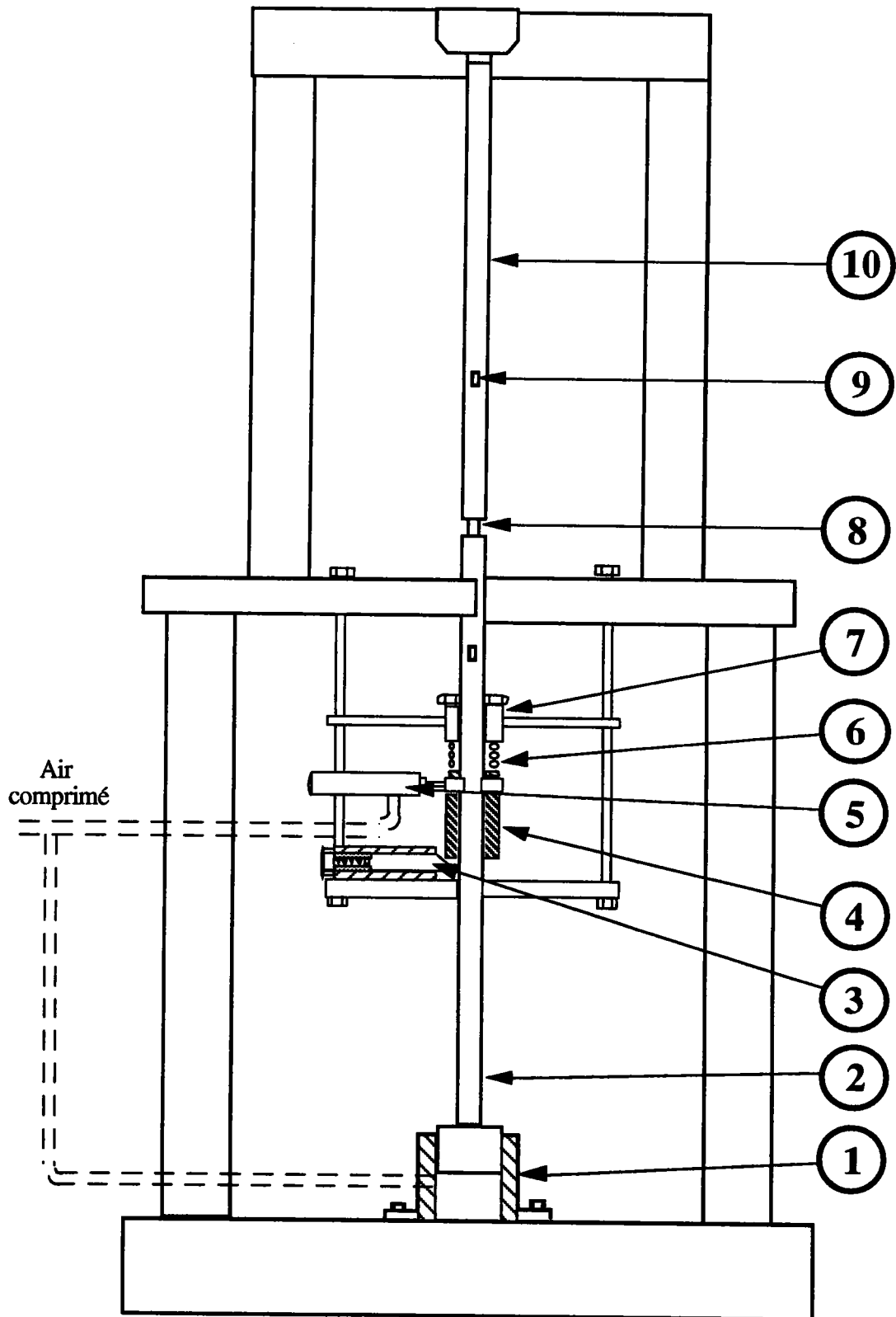


Figure 13.2 : Dispositif de traction dynamique disposé verticalement

### XIII.3. Modifications apportées

La modification du dispositif précédemment décrit était indispensable pour les raisons suivantes :

difficultés de contrôle et de mesure de la vitesse du projectile :

Nous avons vu dans la partie propagation qu'il nous est indispensable de connaître avec précision la vitesse du projectile à l'impact. Pour des raisons d'encombrement ceci est très difficile sur ce montage.

Les effets parasites :

en remplaçant les barres en aluminium par des barres en PMMA, des effets parasites sont apparus sur le système (effets de flexion et vibration des barres à l'impact). Ce phénomène est principalement dû à la grande flexibilité du PMMA.

force d'impact du projectile insuffisante :

les essais étaient réalisés jusqu'ici sur du propergol dont la dureté est beaucoup plus faible que le matériau que nous utilisons (100 Shores). La force d'impact du dispositif n'est pas suffisante pour rompre les échantillons. La force limite d'impact dépendant de la raideur du ressort, il a fallu trouver un autre moyen pour lancer le projectile.

#### XIII.3.1. Réalisation du montage.

Le nouveau dispositif a été réalisé (figure 13.3) sur un banc de barres d'Hopkinson en compression existant au laboratoire. Le lancement du projectile étant assuré par une chambre de compression à gaz nous permettait d'augmenter la force d'impact considérablement. Il nous restait à trouver un moyen pour inverser l'onde de compression en onde de traction.

La solution proposée consiste à la réalisation d'un système mécanique que nous appellerons "inverseur" (figure 13.4). Ce dispositif est constitué par deux disques reliés l'un à l'autre par trois barres cylindriques situées à 120° l'une par rapport à l'autre. Chaque disque à un prolongement cylindrique (creux du côté de la barre incidente pour que cette dernière puisse coulisser à l'intérieur).

L'inverseur est sollicité par l'impact du premier projectile (figure 13.3). Une onde de compression se propage le long des trois barres de l'inverseur puis sur le deuxième projectile tubulaire qui est ainsi projeté sur le talon de la barre incidente et génère une onde de traction.

Nous avons gardé l'idée d'utiliser un projectile tubulaire se projetant sur le talon de la barre incidente afin d'obtenir une onde rectangulaire dont la durée dépend de la longueur de ce projectile.

Les barres d'Hopkinson en compression sont utilisés par d'autres chercheurs du laboratoire. La facilité du montage et du démontage de l'inverseur est un des avantages de la solution proposée. Cela permet de passer rapidement des essais de traction aux essais de compression dynamique.

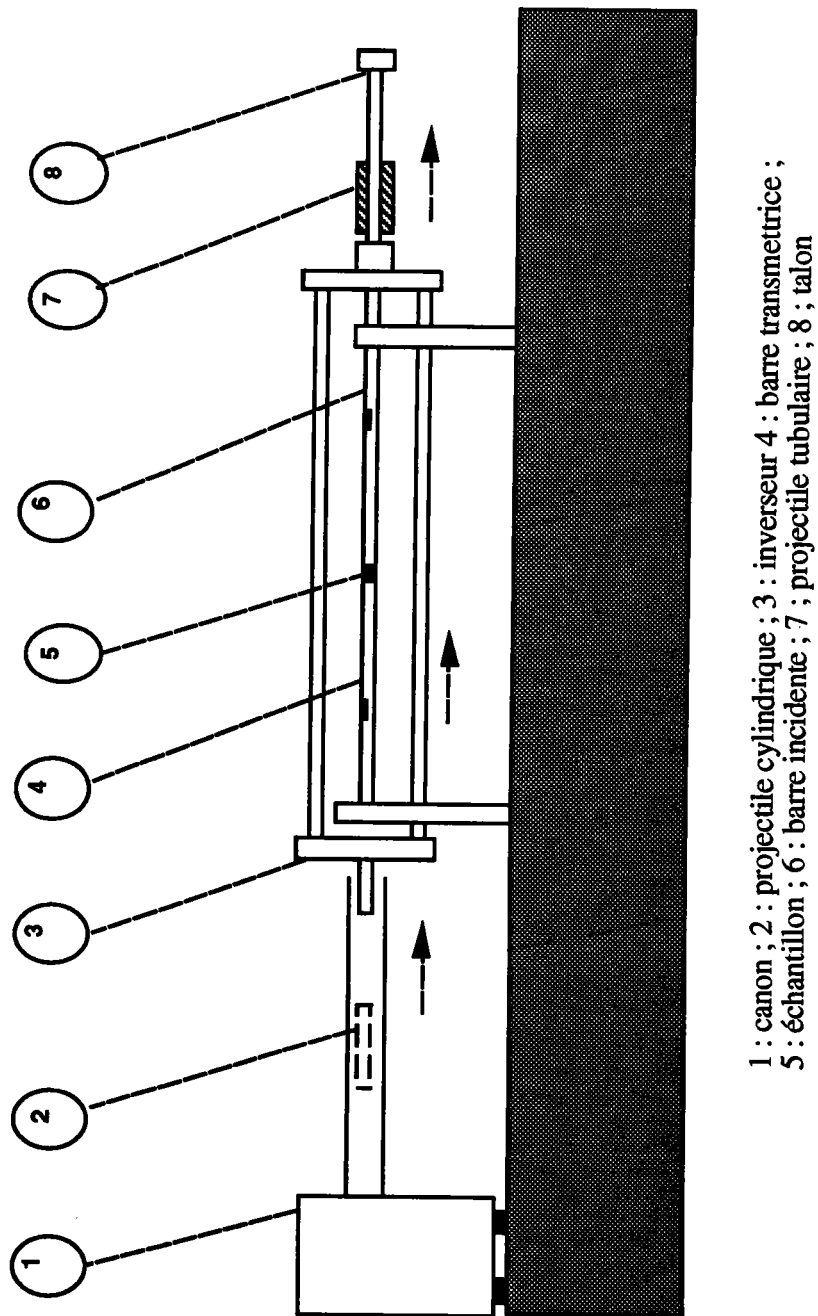


Figure 13.3 : schéma du dispositif de traction dynamique modifié

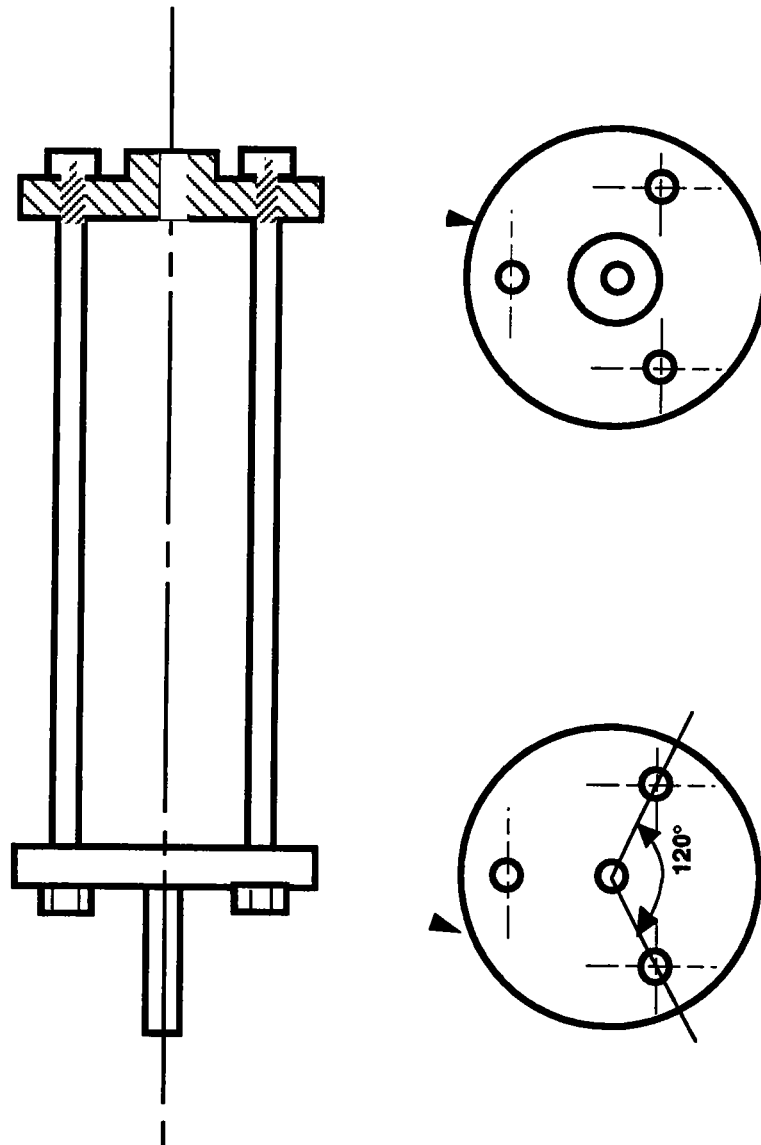


Figure 13.4 : schéma de l'inverseur

Etant donné la grande flexibilité du polyuréthane, la fixation de l'échantillon aux barres par vissage est à exclure. Nous avons donc opté pour une liaison par collage.

Le choix des adhésifs doit répondre aux critères suivants :

- la compatibilité avec les supports (polyuréthane-aluminium)



- caractéristiques mécaniques suffisantes
- rapidité de polymérisation.

Il existe deux grandes familles d'adhésifs pouvant être utilisées dans notre cas :

- les colles époxydes

Les colles époxydes sont des résines thermodurcissables offrant de hautes résistances mécaniques et pouvant être utilisées à des températures de service pouvant atteindre 300°C. L'inconvénient est que le temps de polymérisation peut aller jusqu'à 48 heures.

- les cyanoacrilates.

Les cyanoacrilates sont des colles monocomposant qui durcissent très rapidement à température ambiante ( $t < 60$  s). Ces colles ont de bonnes caractéristiques mécaniques en traction mais une faible résistance aux chocs. Dans notre cas cette résistance est cependant suffisante.

L'analyse statistique des résultats demande un nombre considérable d'échantillons à tester. Notre choix s'est donc porté sur une colle de type cyanoacrylate qui nous permet un gain considérable de temps. Des essais préliminaires sur des échantillons collés ont montré par ailleurs que la colle utilisée résiste aux contraintes appliquées lors des expériences de traction.

Pour éviter les difficultés de centrage, les échantillons sont collées par l'intermédiaire d'un dispositif de fixation [3.16]. A noter que l'efficacité du collage dépend en grande partie de la préparation des surfaces qui doit être minutieuse.

### **XIII.4. Résultats expérimentaux.**

#### **XIII.4.1. Théorie généralisée**

Le support théorique associé à cette méthode ainsi que la méthode de détermination expérimentale a été vue dans la partie bibliographique.

Réécrivons l'équation représentant la variation d'énergie nécessaire pour propager la fissure sur une surface  $dA$  :

$$-\frac{dU}{dA} = k_I (W_0^*) \cdot a \cdot W_0 \cdot F(a) \quad (3.27)$$

Nous disposons pour cela de courbes charge-déplacement obtenues après expérimentation d'échantillons contenant des fissures de longueur croissante. Partant de ces résultats on détermine suivant un paramétrage de  $W_0^*$  donné la différence d'énergie potentielle -  $\Delta U|_{W_0^*}$  existant entre les courbes correspondant à chaque longueur de fissure  $a_i$  et la courbe relevée pour l'échantillon sans fissure prise comme référence.

Nous obtenons alors la valeur de  $k_I(W_{0c}^*)$  pour chaque longueur de fissure. Les valeurs du produit  $k_I(W_{0c}^*) \cdot W_{0c}^*$  en fonction de  $1/a \cdot Y^2$  nous permettent d'accéder à la valeur du paramètre  $2I$  qui est la pente de la droite obtenue.

La figure (13.5) représente une courbe  $-\Delta U = f(a)$  correspondant à la valeur critique  $W_{0c}^*$  pour l'éprouvette dont la longueur de fissure est la plus grande. Le lissage est réalisé par la méthode des moindres carrés et donne des résultats satisfaisants.

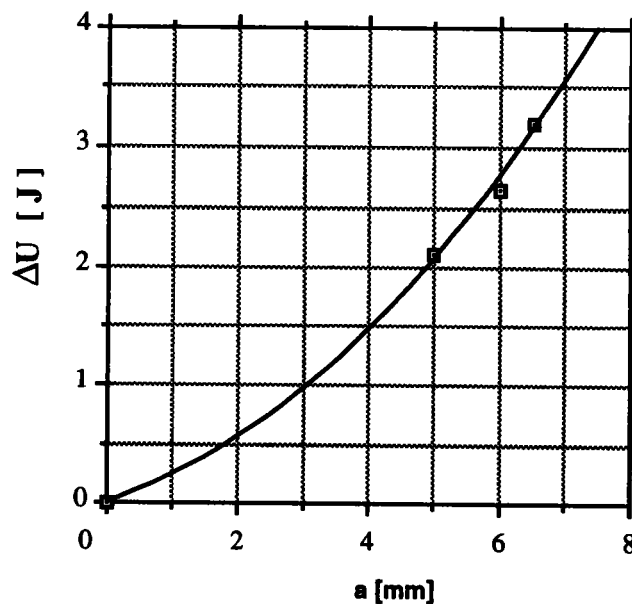


Figure 13.5 : graphe  $\Delta U = f(a)$

La figure (13.6) montre la droite obtenue en traçant  $k(W_{0c}^*) \cdot W_{0c}^*$  en fonction de  $1/a \cdot Y^2$ . Nous pouvons remarquer que la droite obtenue passe bien par le point (0,0) avec une bonne corrélation.

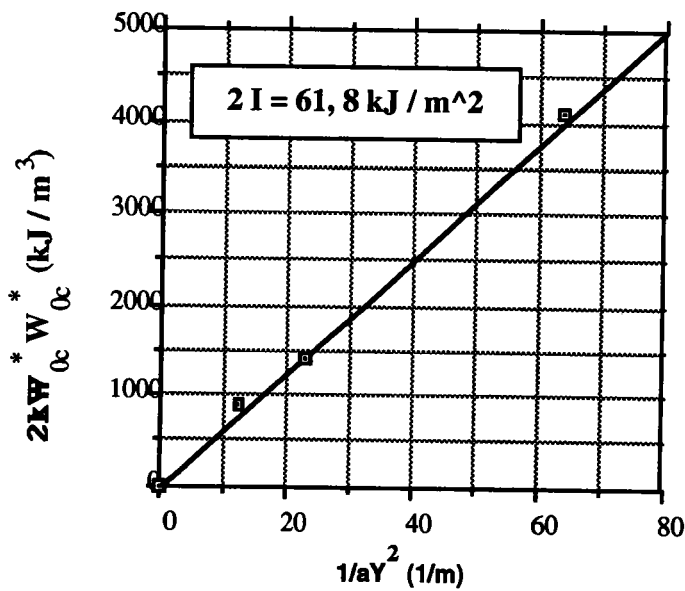


Figure 13.6 : Calcul du critère d'Andrews

Nous avons déterminé le critère d'Andrews pour chaque série d'échantillons. Le paramètre  $2I_c$  est calculé par rapport à la courbe charge-déplacement moyenne des 10 éprouvettes non fissurées ceci afin d'éviter la une trop lourde manipulation des calculs. La distribution en fréquences des valeurs de la ténacité " $2I_c$ " obtenues est montrée sur la figure (13.7).

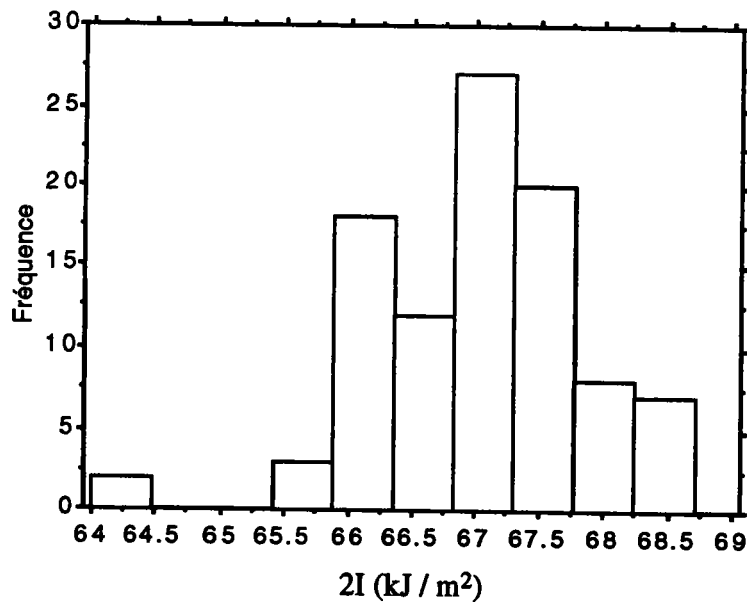


figure 13.7 : histogramme de fréquence des valeurs de la ténacité

La loi statistique de Weibull décrit généralement d'une manière satisfaisante les phénomènes aléatoires de ruine des matériaux. La loi de Fisher-Tipett (appelée à juste titre " loi des valeurs extrêmes ") est cependant plus adaptée à notre problème car elle permet de tenir compte des valeurs extrêmes aléatoires à faible probabilité d'apparition (dans notre cas ce sont les valeurs situées à gauche de l'histogramme de fréquences).

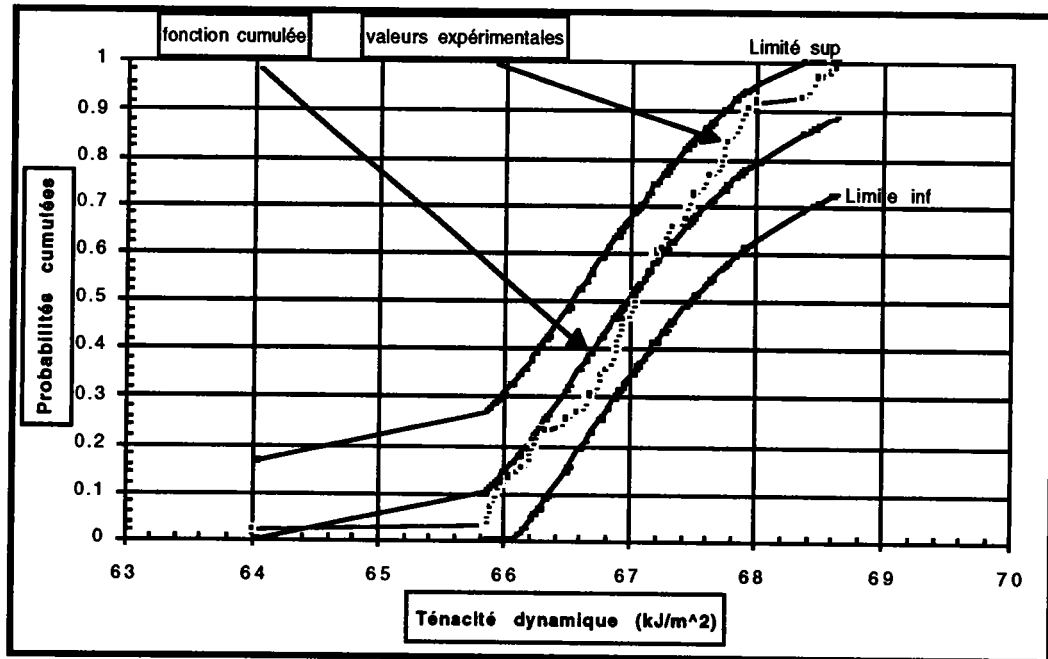


Figure 13.8 : test de Kolmogorov Smirnov pour la loi des valeurs extrêmes.

Le test de Kolmogorov-Smirnov (explicité dans la partie bibliographique) permet de vérifier la corrélation entre la distribution obtenue à partir des valeurs expérimentales et celle de la loi des valeurs extrêmes.

En effet, les valeurs expérimentales des probabilités cumulées se trouvent à l'intérieur des limites obtenues par l'équation (4.16) que nous réécrivons.

$$D = \text{Max} \left( \left| F_{\text{cal}}(x_i) - F_{\text{th}}(x_i) \right| \right) \text{ quelque soit } x_i \quad (4.16)$$

avec :

$F_{\text{cal}}$  : la fréquence cumulée calculée,  
 $F_{\text{th}}$  : la fréquence cumulée théorique.

Sur la figure 13.8 nous obtenons deux fonctions cumulées. La première est expérimentale et la seconde théorique obtenue d'après la relation 4.12 que nous réécrivons ici :

$$F(x) = \exp \left( - \exp \left[ \frac{a-x}{b} \right] \right) \quad (4.12)$$

avec dans notre cas :

$$a = 66.61798$$

$$b = 0.9418$$

Les deux bornes qui apparaissent sur la figure correspondent au test de Kolmogorov Smirnov pour un risque  $\alpha = 0.01$ . La fonction cumulée expérimentale ne chevauche à aucun moment ces bornes ce qui valide le choix de la loi de Fisher Tipett pour l'exploitation des résultats. Nous pouvons alors déterminer la valeur moyenne de la ténacité du polyuréthane testé ainsi que celle de l'écart type avec un risque  $\alpha = 0,01$ .

#### La Moyenne :

$$M = a + \text{Euler Gamma} \cdot b$$

$$\text{Euler Gamma} = 0.577216$$

$2I_{c \text{ moy}} = 67,16 \text{ kJ /m}^2$
--

#### La Variance :

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2 b^2}{6} = 1.46$$

#### L'écart type :

$$\sigma = \frac{\pi b}{\sqrt{6}} = 1.21$$

ou écrit sur une autre forme :

$$2I_{c \text{ moy}} = 67,16 \pm 1,21 \text{ kJ /m}^2$$

Le coefficient de dispersion obtenu est égal à 1.8 %.

#### XIV. Essais sous sollicitation quasi-statique.

##### XIV.1. Géométrie des échantillons :

La géométrie utilisée est axisymétrique (voir figure 13.1). A signaler que la nature caoutchoutique du matériau pose des problèmes de fixation sur le dispositif de traction, qui nécessite un montage intermédiaire au niveau des haltères cylindriques de l'éprouvette.

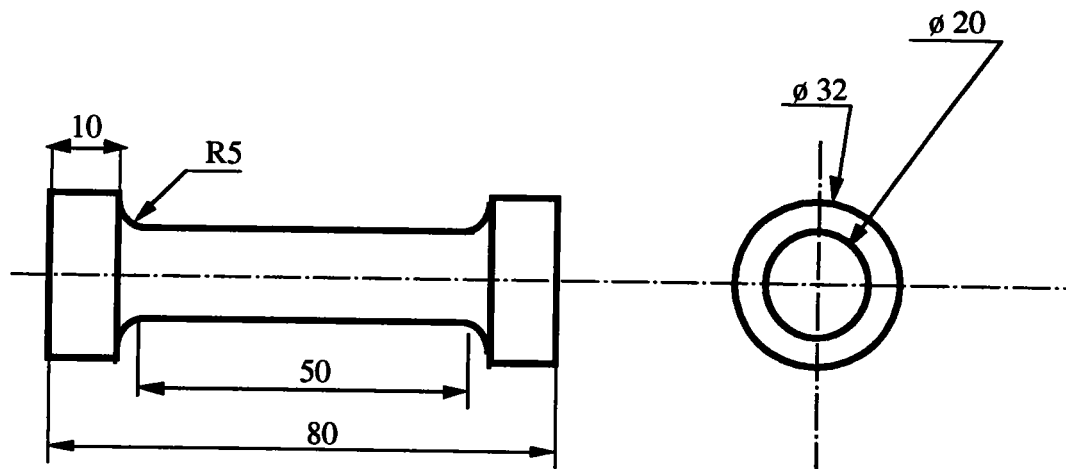
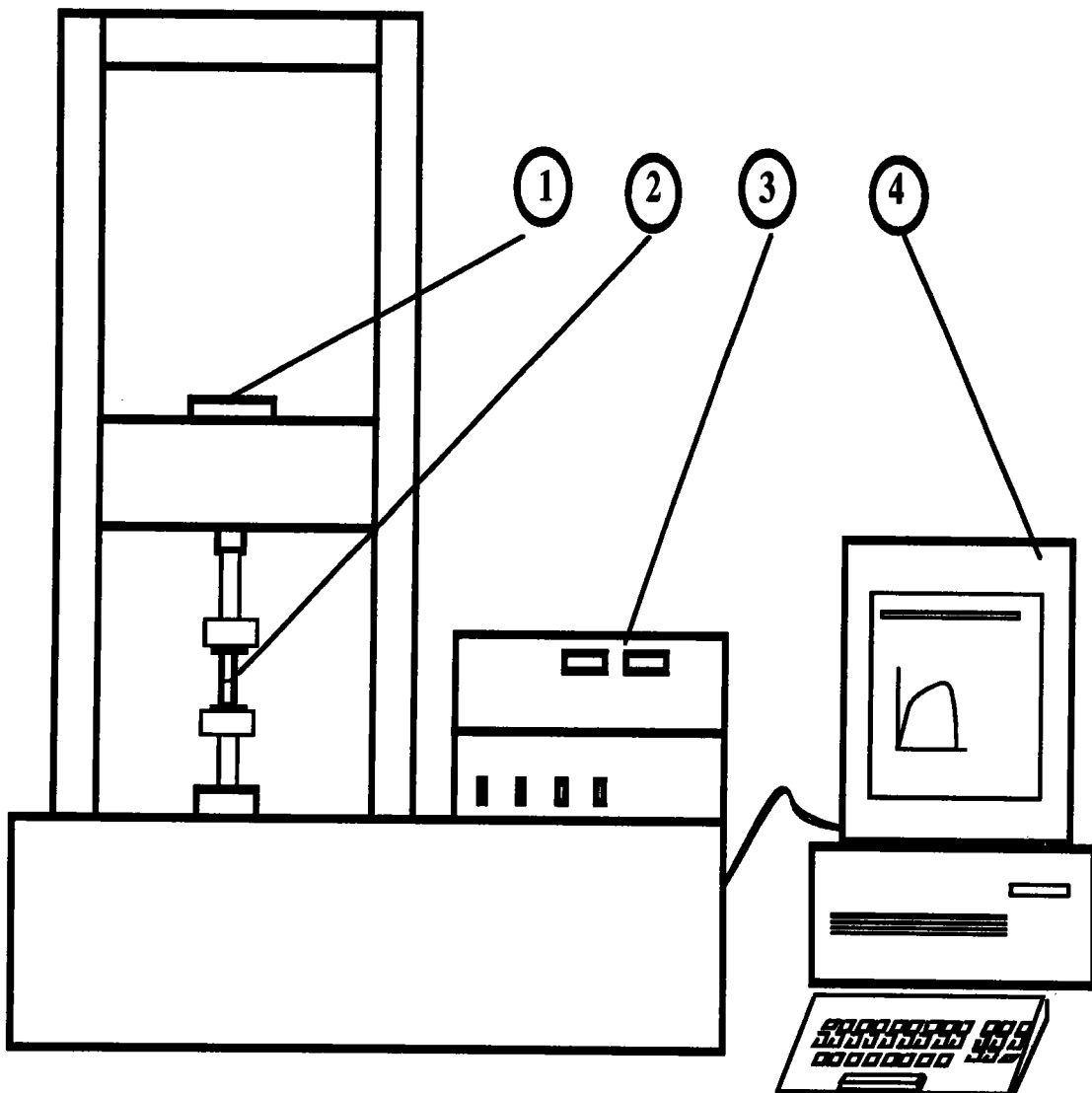


Figure 14.1 : essais quasi-statique, géométrie des échantillons.

##### XIV.2. Machine d'essai :

Une machine de traction de type "INSTRON" (figure.14.2) est utilisée dont :

- la capacité maximale est de 100 KN,
- la vitesse de la traverse peut être contrôlée de 0.01 à 500mm/minute,
- l'acquisition se fait par l'intermédiaire d'un micro-ordinateur de type Macintosh.



*Figure 14.2 : schéma de la machine de traction*

*1. Cellule de charge, 2. Echantillon, 3. dispositif de réglage manuel. 4. Ordinateur pour l'acquisition et le traitement des données*

### XIV.3. Protocole d'essais

Une série d'essais de traction quasi statique est réalisée sur les échantillons en polyuréthane avec les paramètres suivants:

longueurs de fissure :

$$\begin{array}{ll} a_1 = 0 \text{ mm} & a_2 = 3 \text{ mm} \\ a_3 = 5 \text{ mm} & a_4 = 7 \text{ mm} \end{array}$$

vitesse de traverse :  $V_t = 5 \text{ mm/minute}$ .

nombre d'échantillons : treize (13) échantillons par longueur de fissure.

Nous montrons dans la figure (14.3) les courbes charge-déplacement obtenues pour des éprouvettes à différentes longueurs de fissure. Nous avons alterné la moyenne des courbes charge-déplacement pour les échantillons non fissurés puis l'ensemble des courbes pour la première fissure ( $a = 3 \text{ mm}$ ) et ainsi de suite pour des raisons évidentes de clarté de la figure.

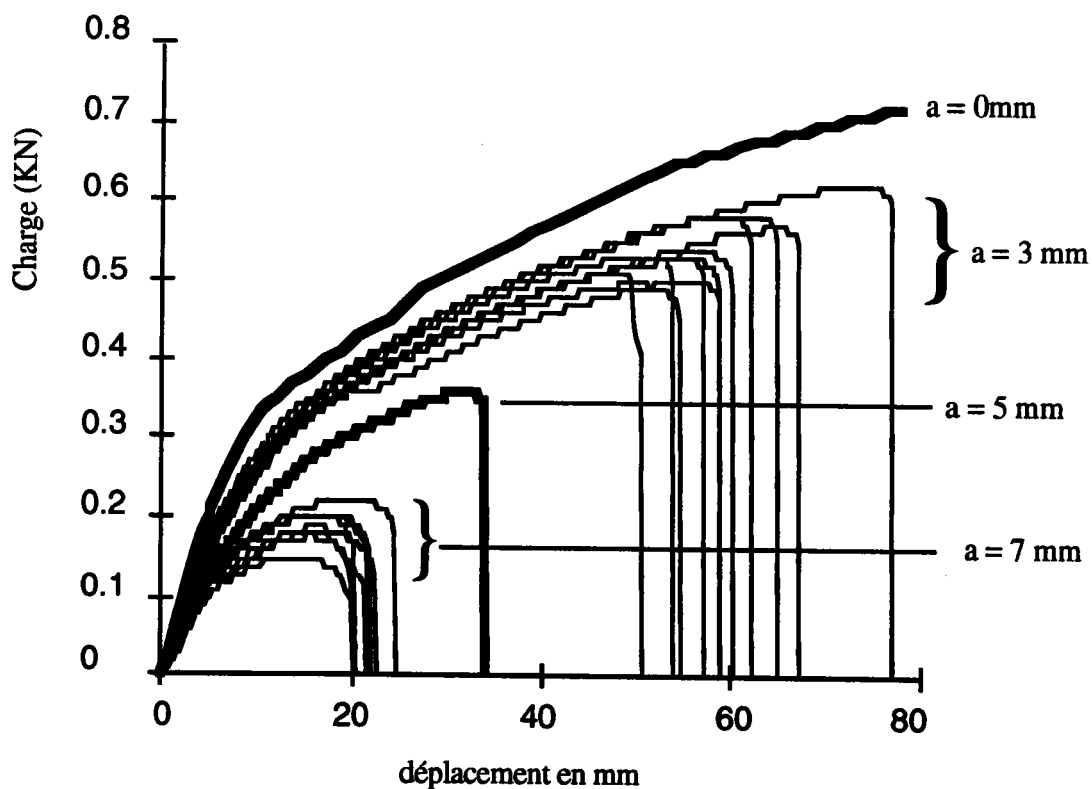


Figure 14.3 : courbes charge- déplacement (essais statique)



Nous remarquons que la dispersion de la partie élastique des courbes charge déplacement est pratiquement négligeable. Elle devient plus importante dès que l'effet viscoélastique apparaît. Ceci pourrait être dû à la nature même de l'échantillon. Rappelons que les élastomères sont constitués de longues chaînes macromoléculaires avec une très faible cohésion entre les chaînes [2.3]. La déformation du matériau dépend de cette cohésion qui ne peut être identique pour chaque échantillon étant donné que l'enchevêtrement des chaînes entre elles est aléatoire.

Prenons comme exemple la série de courbes charge déplacement pour une longueur de fissure  $a = 3\text{mm}$  (figure 14.4) ainsi que les valeurs des charges et des déplacements à la rupture de chaque courbe (tableau 14.5).

Présentons par la suite les histogrammes de fréquence pour le déplacement (figure 14.6) et la charge (figure 14.7).

Une première approche statistique nous permet d'obtenir les coefficients de dispersion (ou coefficient de variation sur les tableaux 14.8 et 14.9) observés par rapport à la valeur moyenne du déplacement et de la charge à la rupture. Pour le déplacement ce coefficient est égal à 15.516 %. Celui de la charge à la rupture est égal à 8.714 %.

Le coefficient de dispersion est calculé comme suit :

$$\text{Coeff de dispersion} = \frac{\text{écart type}}{\text{moyenne}}$$

La dispersion au niveau du déplacement est plus élevée que celle observée au niveau de la charge. A noter que ce phénomène est retrouvé sur les courbes charge-déplacement correspondant aux autres longueurs de fissure.

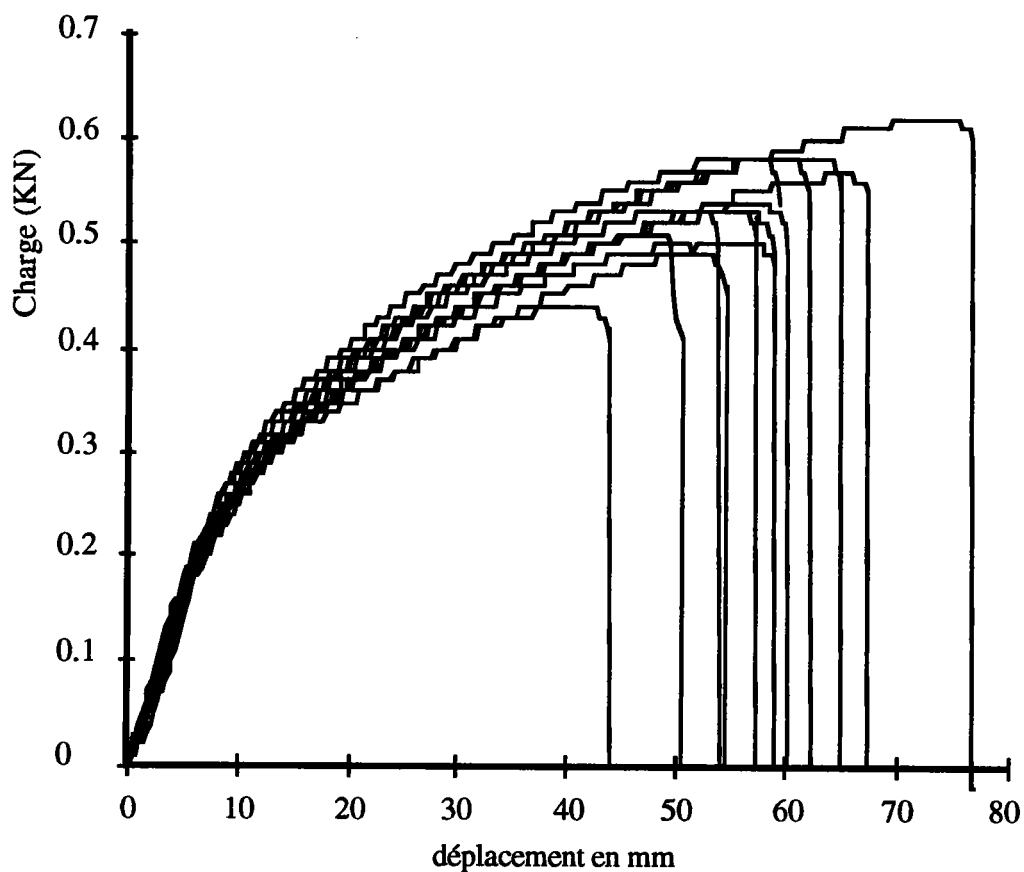


Figure 14.4 : Courbes charge-déplacement pour une longueur de fissure  $a = 3 \text{ mm}$

N° de la courbe	déplacement mm	charge kN
1	36.94	0.44
2	51.54	0.58
3	55.06	0.58
4	50.26	0.53
5	47.87	0.5
6	51.78	0.53
7	51.54	0.5
8	46.19	0.53
9	55.48	0.58
10	69.22	0.62
11	63.32	0.57
12	54.42	0.54
13	44.67	0.51

Tableau 14.5 : charges et déplacement à la rupture.  $a = 3 \text{ mm}$

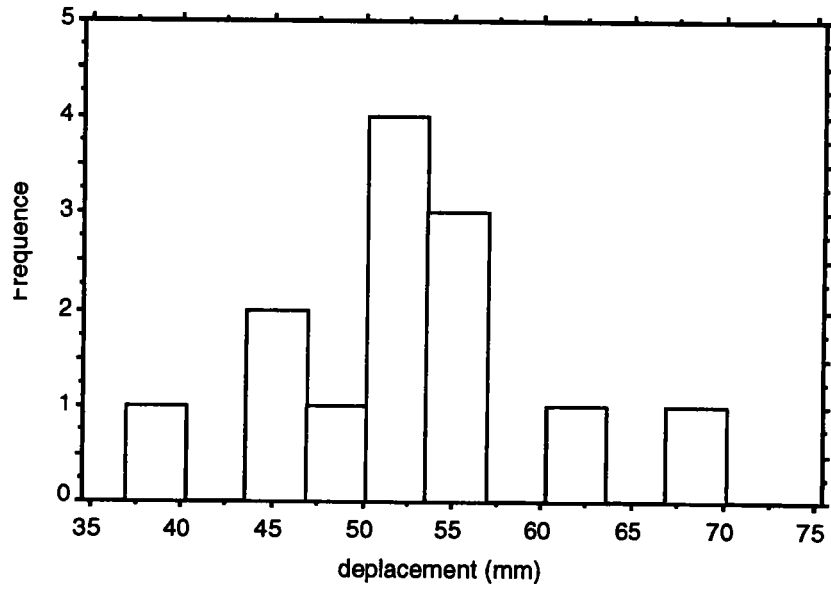


Figure 14.6 : Histogramme de fréquences des valeurs du déplacement à la rupture

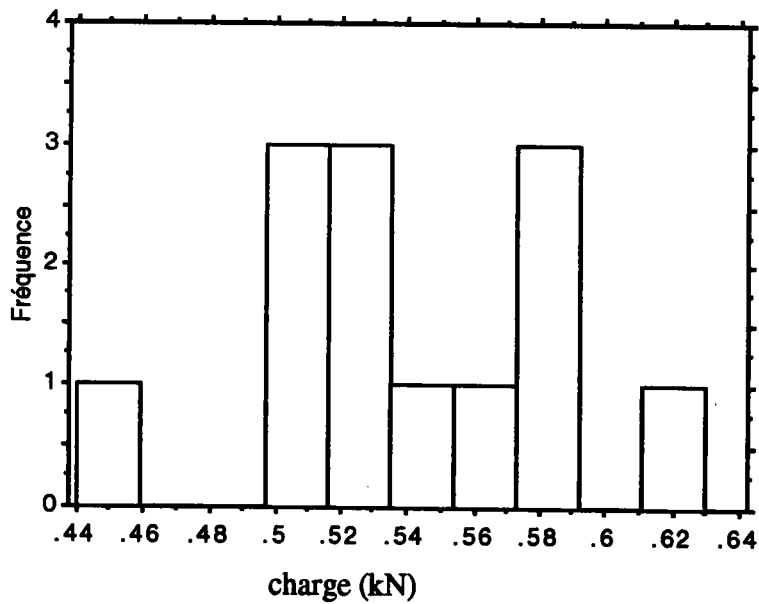


Figure 14.7 : Histogramme de fréquences des valeurs de la charge à la rupture

$X_1$ : déplacement (mm)					
Moy. :	Dév. Std. :	Erreur Std. :	Variance :	Coef. variat. :	Fréquence :
52.176	8.095	2.245	65.537	15.516	13
Minimum :	Maximum :	Etendue :	Somme :	S. des carrés :	Manquants :
36.94	69.22	32.28	678.29	36177.006	0

Tableau 14.8 : paramètres statistiques des valeurs du déplacement à la rupture

$X_1$ : charge (kN)					
Moy. :	Dév. Std. :	Erreur Std. :	Variance :	Coef. variat. :	Fréquence :
.539	.047	.013	.002	8.714	13
Minimum :	Maximum :	Etendue :	Somme :	S. des carrés :	Manquants :
.44	.62	.18	7.01	3.807	0

Tableau 14.9 : paramètres statistiques des valeurs de la charge à la rupture

## Conclusion.

Cette première approche du problème nous a permis de mettre en évidence le caractère dispersif de la rupture du polyuréthane. Les valeurs de la ténacité que nous obtiendrons devront être traités par une approche statistique.

En considérant les courbes charge déplacement pour les différentes fissures nous avons remarqué que la dispersion obtenue est surtout due à deux ou trois courbes relativement éloignées des autres qui font apparaître des valeurs aberrantes dans les histogrammes de fréquence. Nous pouvons donc utiliser la loi des valeurs extrêmes pour l'exploitation statistique des résultats.

### XIV.3 Exploitation des résultats

Le paramètre  $I_c$  est calculé par rapport à la courbe charge-déplacement moyenne des éprouvettes non fissurées ceci afin d'éviter la une trop lourde manipulation des calculs. La distribution en fréquences des valeurs de la ténacité " $I_c$ " obtenues est montrée sur la figure (14.10).

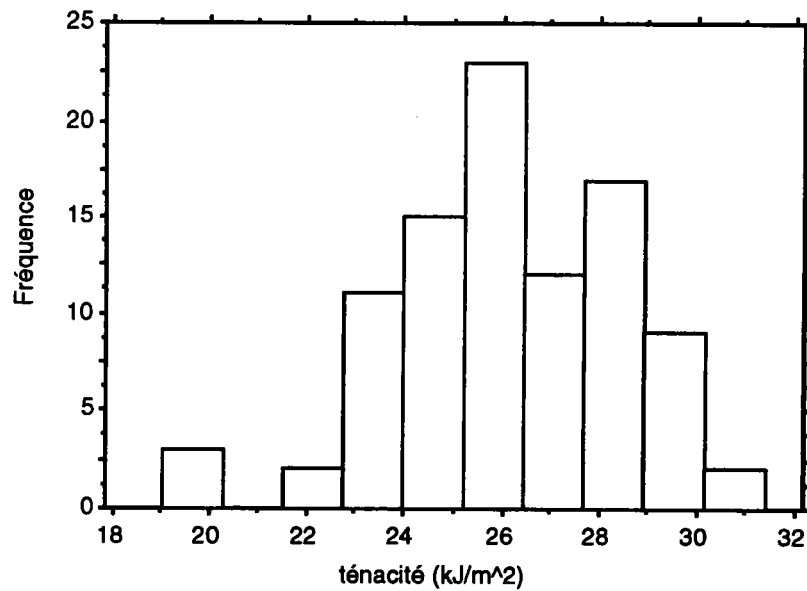


Figure 14.10 : distribution en fréquences de la ténacité

Nous montrons sur la figure 14.11 Le test de Kolmogorov-Smirnov qui permet de vérifier la corrélation entre la distribution obtenue à partir des valeurs expérimentales et celle de la loi des valeurs extrêmes.

Caractéristiques statistiques

$$a = 24.965$$

$$b = 2.123$$

La Moyenne :

$$M = a + \text{Euler Gamma} \cdot b$$

$$\text{Euler Gamma} = 0.577216$$

$$2I_{c \text{ moy}} = 26.19 \text{ kJ /m}^2$$

La Variance :

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2 b^2}{6} = 7.4$$

L'écart type :

$$\sigma = \frac{\pi b}{\sqrt{6}} = 2.72 \text{ kJ/m}^2$$

La valeur de la ténacité exprimée selon le critère d'Andrews est donc égale à :

$$2I_{c \text{ moy}} = 26.19 \pm 2.72 \text{ kJ/m}^2$$

Le coefficient de dispersion obtenu est égal à 10.4 %. A noter que cette valeur est supérieure à celle obtenue sous sollicitation dynamique.

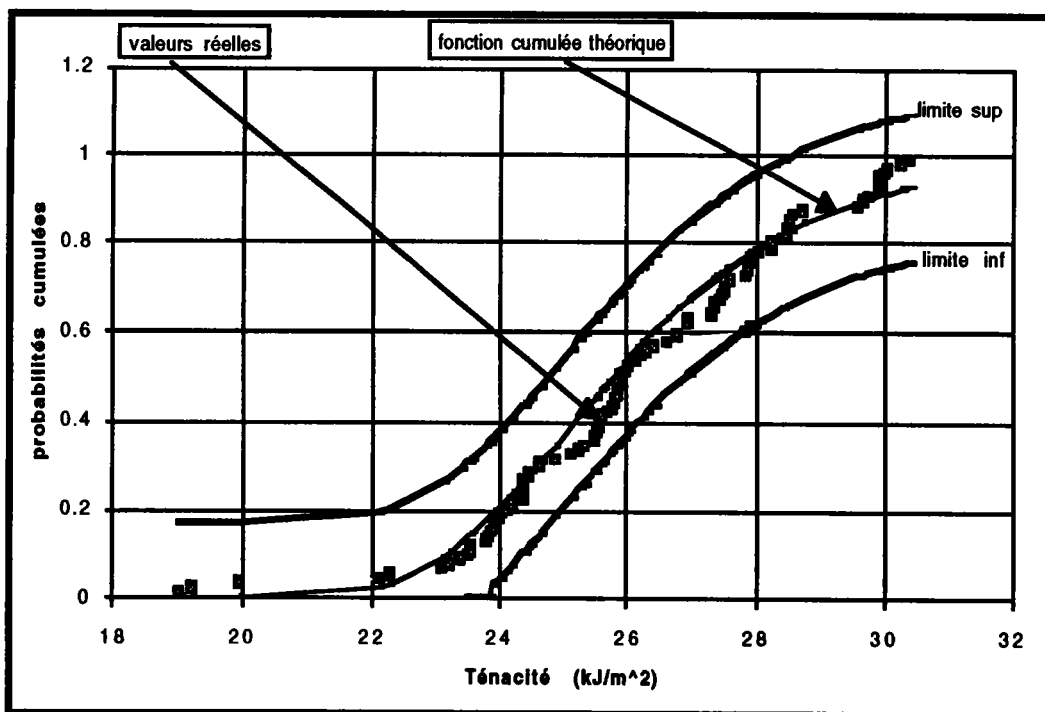


Figure 14.11 : fonctions cumulées et vérification graphique du test de Kolmogorov-Smirnov

## Conclusion

Le montage réalisé nous a permis de réaliser des essais dynamiques en traction avec une force d'impact relativement plus grande que celle obtenue avec le montage qui existait auparavant. Le logiciel réalisé dans la partie propagation nous a permis de déterminer la ténacité dynamique du

polyuréthane avec l'utilisation de barres en PMMA. L'histogramme de fréquence montre que certaines valeurs sont relativement éloignées des autres ce qui nous a amené à utiliser la loi des valeurs extrêmes qui permet de tenir compte des phénomènes dont la probabilité d'apparition est faible. Cette loi a été validée, dans notre cas par le test de Kolmogorov-Smirnov. Nous remarquons enfin, d'après les valeurs obtenues du critère d'Andrews, que la dispersion obtenue est relativement faible.

Pour les essais réalisés en sollicitation quasi-statique. Nous avons constaté que la dispersion apparaît au niveau de la partie viscoélastique des courbes charge-déplacement. L'exploitation des résultats a été réalisé par la loi des valeurs extrêmes et a montré une dispersion plus importante que pour le cas de la sollicitation dynamique des échantillons. Ce phénomène a déjà été constaté par Nevière [1.1].

Il est à signaler que pour les deux types de sollicitation, il y a apparition de valeurs que nous appellerons aberrantes. ces valeurs sont cependant peu fréquente pour une série d'essai.

## CONCLUSION GENERALE

Il nous a été demandé dans le cadre de ce travail d'utiliser des barres en PMMA pour l'étude du comportement mécanique des polymères à grande vitesse de déformation par l'intermédiaire des barres d'Hopkinson. Le caractère viscoélastique de ce matériau nous a incité à tenir compte de l'amortissement et de la distorsion de l'onde lors de sa propagation.

La collaboration avec le professeur Wang Lili de l'université de Ningbo, nous a permis d'introduire une nouvelle équation rhéologique décrivant le comportement mécanique des polymères. Nous avons associé à cette équation la méthode des caractéristiques pour la réalisation d'une méthode de calcul permettant la prédiction de l'amortissement de l'onde lors de sa propagation le long de la barre en PMMA.

Les valeurs des paramètres viscoélastiques des barres en PMMA ont été déterminés d'une manière originale à partir de l'équation rhéologique et certaines valeurs mesurées expérimentalement (valeurs de la vitesse de propagation de l'onde  $C_v$ , du coefficient d'amortissement  $\alpha_a$ , de la masse volumique du matériau  $\rho_0$  et du module d'élasticité  $E_a$ ).

La comparaison des résultats obtenus à partir du logiciel de calcul et ceux obtenus expérimentalement nous a donné satisfaction. Signalons qu'un soin et une rigueur particulière lors de la manipulation expérimentale sont obligatoires sans lesquelles aucune comparaison n'est possible.

Les résultats obtenus à partir du logiciel de calcul ont montré que l'onde de contrainte présente un caractère de relaxation inversement à l'onde de déformation qui est croissante en fonction du temps. Il est donc incorrect de multiplier la valeur de l'onde de déformation par un coefficient d'élasticité, ce qui est généralement utilisé lors de l'utilisation de barres en polymère. Ce phénomène de relaxation a été vérifié expérimentalement en juxtaposant une barre élastique (aluminium) à la barre en PMMA.

La simulation de propagation d'ondes planes viscoélastiques pour différents types de polymères, nous a permis de mettre en évidence l'influence des paramètres viscoélastiques sur le



comportement de ces ondes. Nous avons, par la suite, mis en évidence la différence de comportement des ondes viscoélastiques pour des conditions limites à l'impact différentes.

Cette étude nous a permis l'utilisation de barres en PMMA pour des essais dynamiques sur un polymère (le polyuréthane). L'utilisation de ce type de barres ainsi qu'une dureté relativement grande du matériau à tester nous a incité à la modification du montage expérimental de traction qui existait au laboratoire.

Les essais statiques et dynamique sur le polyuréthane ont montré l'apparition de valeurs relativement éloignées de la valeur moyenne mais dont la probabilité d'apparition est faible. Ceci nous a amené à l'exploitation des résultats par la loi statistique des valeurs extrêmes. Cette loi donne une bonne corrélation avec la distribution des valeurs expérimentales et permet de déterminer la valeur moyenne réelle de la ténacité pour un risque donné  $\alpha=0,01$ .

Nous avons constaté que les valeurs obtenues en sollicitation quasi statique sont plus dispersées que celles obtenues en sollicitation dynamique. Nous apportons l'explication suivante pour ce phénomène : la dispersion apparaît sur la partie viscoélastique des courbes charge-déplacement, il est logique que la dispersion diminue si ce caractère viscoélastique est moins évident. Ce qui est le cas lors de l'augmentation de la vitesse de propagation (fragilisation du matériau).

Nous pensons que pour les travaux futurs il serait important d'avoir une approche microstructurale du matériau à étudier. Il serait intéressant d'associer le point de vue du mécanicien et du chimiste pour la compréhension du comportement des polymères et avoir ainsi un suivi dès la conception du matériau.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1.2] R. Nevière. *"De l'Application des Critères Energétiques Globaux de la Mécanique de la Rupture à l'Etude des Explosifs et Propergols Solides Composites"* Thèse. Doctorat I.N.P.L, (1989)
- [2.1] O. Bayer. *Angew. Chem.*, 59 (a), 257, (1947).
- [2.2] Raymond B. Seymour. *Engineering Polymer SourceBook* ed.McGraw-HillPublishing Company.p.15, (1990)
- [2.3] W. Kurz, J.P. Mercier, G. Zambelli *"Traité des Matériaux.1"* Presses polytechniques et Universitaires romandes (1991).
- [2.4] H.H. Kaush. *Polymer Fracture*. Springer Verlag, (1978).
- [2.5] J.D. Ferry *"Viscoelastic Properties of Polymers"* Ed. J. Wiley, (1980)
- [2.6] T. Alfrey, Jr. *"Mechanical Behavior of High Polymers"* Interscience, New York, (1948).
- [2.7] N. W. Tschoegl, *"The Theory of Linear Viscoelastic Behavior"* Academic Press, (1980)
- [2.8] H. Poincaré. *"The Foundations of Science"* Science, New York, p.181, (1964)
- [2.9] W. Kuhn, *Helv. Chim. Acta.*, 30,487, (1947).
- [3.1] G.Pluinage. *"Mécanique Elastoplastique de la Rupture. Critères d'amorçage"* CEPAD, (1989)
- [3.2] *Appl. Mats.Res.* 3,pp 65, (1964).

- [3.3] Guillemot L.F. "*Brittle Fracture on Welded Materials*". Second Commonwealth Welding Conference London C.7, p353-382 (1965).
- [3.4] Sih G.C. "*Strain Energy Density Factor Applied to Mixed Mode Crack Problems*" International Journal of Fracture, Vol.10, N°3(1974).
- [3.5] Guillemot L., Sinay G. Academy of Sciences Hungary XXII, p. 221-234 (1958).
- [3.6] Sih G.C. "*Application of the strain Energy Theory to Fundamental Fracture Problems*". Proc. of 10th SES Annual Meeting Boston, p.221-234 (1975).
- [3.7] J.G. Williams "*Fracture Mechanics of polymers*" ed. Ellis Horwood Limited, (1984).
- [3.8] G.R. Irwin, J.A. Kies. Journal of Welding 33, p. 1935-1985 (1954).
- [3.9] A.A. Griffith. Phil. trans. Roy. Soc. A221, p 163 (1920).
- [3.10] J.R. Rice "*A path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks*" Journal of Applied Mechanics, 35, p. 379-386 (1968).
- [3.11] J.A Begley, J.D. Landes "*The J Integral as a Fracture Criterion*" ASTM STP 514, p. 01-20 (1972)
- [3.12] J.R. Rice, P.C. Paris, J.G. Merkle "*Some Further Results on J Integral Analysis and Estimates Progress in Flaw Growth and Fracture Toughness Testing*" ASTM STP 536, American Society for Testing and Materials, p-231-245, (1973)
- [3.13] E.H. Andrews. "*Fracture in Polymers*" Ed. Oliver and Boyd Edinburgh, p.138 (1968).
- [3.14] E.H. Andrews, H.E. Pingsheng, C. Vlachos "*Adhesion of Epoxy Resin to Glass*" Proc Roy Society London A381, p.345-360 (1982).

- [3.15] E.H. Andrews, A. Stevenson "Adhesive Failure of Epoxy-Titanium Bonds in Aqueous Environments ". Journa of Adhesion. Vol. 11, p.17-40 (1980).
- [3.16] M. Nait-Abdelaziz. "Ténacité Dynamique d'un Propergol Solide composite " Thèse doctorat I.N.P.L. (1985).
- [3.17] D.P. rooke, D.J. Cartwright "Compendium of Stress Intensity Factors " Hellington Press (1976).
- [4.1] A.S. Jayatilaka. "Fracture of Engineering Brittle Materials ". Applied Science Publishers LTD (1979).
- [4.2] J.D. Landes and D.H. Shaffer "Statistical Characterization of Fracture in the Transition Region ". Fracture Mechanics : Twelfth Conference, ASTM, STP 700, pp. 368-382 (1980).
- [4.3] W. Weibull. " A statistical Distribution Function of Wide Applicability " Journal Appl. Mech., 18, pp. 293-297 (1951).
- [5.1] B. Hopkinson. Philosophical Transactions A, vol. 213, p. 47, (1914)
- [5.2] R.M Davies. " A critical study of the Hopkinson pressure bar " Philosophical Transactions A vol 240 p. 375-457, 1948
- [5.3] H. Kolsky. "An investigation of the mechanical properties of materials at very high rate of loading " Proceeding of the Phisical Society B, vol 62, p. 676-701, 1949.
- [5.4] J. Harding, and L. Welsh, "A Tensile Testing Technique for Fibre-Reinforced Composites at Impact Rates of Strain". Jour. of Mater. Scien., Vol.18, p. 1810 (1983).
- [5.5] K. W. Chase and W. Goldsmith, "Mechanical and Optical Characterization of an Anelastic Polymer at Large Strain Rate and Large Strains". Exper. Mech., Janvier, p. 10 (1984).
- [7.1] Green, A. E. & Rivlin, R. S. , Arch. Rat. Mech. Anal. ,V.1, (1957).

- [7.2] Coleman, B.D. & Noll, W. , Arch. Rat. Mech. Anal. , V. 6, p 355, (1960).
- [7.3] F.J. Lockett "nonlinear viscoelastic solids" p. 158-159. Academic Press. London. (1972).
- [7.4] Pipkin, A.C et T.K. Rogers " A non linear integral representation for viscoelastic behaviour" J. Mech. Phys. Solids. Vol 16. p. 59-72. (1978)
- [7.5] Matsumoto, H., Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., Vol. 48, N°. 436. p.1475, (1982)
- [7.6] Sasaki, R. et al. trans. Japan Soc. Mech. Engrs., Vol. 47, N° 784-2, p. 748., (1978)
- [7.7] Sogabe Y. and Tsuzuki M., Identification of the dynamic properties of linear viscoelastic materials by the wave propagation testing, Bulletin of JSME, V.29 (254), p. 2410-2417.(1986).
- [7.8] Tang Zhiping, Tian Lanqiao, Chu Chao-Hsiang, Wang Lili. "*Mechanical Behavior of Epoxy Resin under High Strain Rates* ". Proc. 2nd Nat. Conf. Explosive Mechanics, p.4-1-2. Chinese Soc. Theo. Appl. Mech. (1981).
- [7.9] Chu Chao-Hsiang, Wang Lili, Xu Daben. "*A Non-linear Thermo-Viscoelastic Constitutive Equation for Thermoset Plastics at High Strain Rates.*" Proc. Int. Conf. Nonlinear Mechanics, p.92, Oct. 28-31, Shanghai, China. Ed. Qian Wei-Chang, Science Press, Beijing (1985).
- [7.10] Yang Liming, Chu Chao-Hsiang, Wang Lili. "*Effects of Short-Glass-Fiber Reinforcement on Nonlinear Viscoelastic Behavior of Polycarbonate.*" Explosion and Shock Waves, V.6, N°1, p.1 (1986).
- [7.11] Zhu Zhaoxiang, Xu Daben, Wang Lili. "*Thermo-Viscoelastic Constitutive Equation and Time-Temperature Equivalence of Epoxy Resin at High Strain Rates.*" Jour. of Ningbo Univ. (Natural Sci. Eng. Edition), V.1, N°1, p.58 (1988).

- [7.12] Wang Lili, Zhu Xixiong, Shi Shaochin, Can Su, Bao Hesheng. "*An Impact Dynamics Investigation on Some Problems of Birds Striking the Windshields of High Speed Aircraft* ." Chinese Jour. Aeronautics, V.5, N°3, p.205 (1992).
- [7.13] Zhou Fenghua, Wang Lili, Hu Shisheng  
"*A Damage Modified Nonlinear Viscoelastic Constitutive Relation and Failure Criterion of PMMA at High Strain Rates* " Explosion and Shock Waves, V.12, N°4, p.333 (1992).
- [7.14] Wang Lili, Yang Liming. "*A Class of Nonlinear Viscoelastic Constitutive Relation of Solid Polymeric Materials* ". in *Progress in Impact Dynamics* , p.88. Eds. Wang Lili, Yu Tongxi, Li Yongchi, The Press of China University of Science and Technology, Hefei (1992).
- [7.15] Kolsky, H. "*Stress Wave in Solids* ." Clarendon Press, Oxford (1953).
- [7.16] Graff. K.F. "*Wave Motion in Solids*" Clarendon Press, Oxford (1975).
- [7.17] Wang Lili "*Foundations of Stress Waves*" National Defense Industry Press, Beijing (1985).
- [7.18] Graff. K.F "*Wave motion in Elastic Solids* " Clarendon Press, Oxford, (1975).
- [7.19] Chou. P. C., Hopkins, A. K. ed. "*Dynamic Response of Materials to Intense implosive Loading*". U.S. Air Materials Lab., Wright Patterson AFB, Ohio (1972).
- [10.1] K. Labibes, L. Wang. G. Pluvinage. " on determination of the viscoelastic parameters of PMMA" *Dymat Jour.* Vol. 1, N°2, p. 135-151.(1994)
- [10.2] L.Wang, K. Labibes, Z. Azari, G. Pluvinage. " *Generalization of Split Hopkinson Bar Technique to Using Viscoelastic Bars* " *Int. Jour. of Impact.* Vol.15, N°5 (1994)