



**HAL**  
open science

# Étude du mélange dans un écoulement de Stokes en géométrie de Couette excentré

Eric Français

► **To cite this version:**

Eric Français. Étude du mélange dans un écoulement de Stokes en géométrie de Couette excentré. Matière Condensée [cond-mat]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1992. Français. NNT : 1992INPL037N . tel-01776264

**HAL Id: tel-01776264**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776264>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

**E.N.S.I.C.**

(M) 1992 FRANCAIS, E.

**THESE**

présentée à

L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

pour obtenir le diplôme de

**DOCTORAT DE L'I.N.P.L.**

par

**E. FRANCAIS**

**Ingénieur E.N.S.I.C.**

**ETUDE DU MELANGE DANS UN ECOULEMENT  
DE STOKES EN GEOMETRIE DE COUETTE EXCENTRE**

*Soutenue publiquement le 13/05/1992*

Jury :	<b>N. MIDOUX</b> , Professeur, Nancy	<b>Président</b>
	<b>J.P. CARESSA</b> , Directeur de recherche, Strasbourg	
	<b>J.C. ANDRE</b> , Directeur de recherche, Nancy	
	<b>J.N. GENCE</b> , Professeur, Lyon	<b>Examineur</b>
	<b>E. SAATDJIAN</b> , Professeur, Nancy	<b>Examineur</b>



## RESUME

Les techniques de mélange en régime visqueux sont, encore aujourd'hui, très empiriques. Les phénomènes intervenant sont complexes.

La théorie des systèmes dynamiques fournit une approche des transitions possibles entre régimes stables et régimes chaotiques promoteurs d'un mélange efficace. Il apparaît que le nombre minimal de fréquences incommensurables entre elles susceptibles d'engendrer des situations chaotiques est de trois.

Partant de ce constat, un protocole efficace de mélange au sein du système bicylindrique excentré est recherché. L'alternance des conditions de vitesses aux parois, génératrice d'une fréquence supplémentaire à l'écoulement bidimensionnel, conduit effectivement à des situations complexes où le chaos prédomine.

Une étude mathématique basée sur une cartographie des écoulements par une technique dite des "sections de Poincaré" fournit une comparaison utile entre théorie et expérience.

## SUMMARY

The mixing of viscous fluids is a highly empirical science and still not well understood.

The theory of dynamical systems can help in determining the transitions between stable and chaotic regims. The latter promoting on efficient mixing, the minimum number of independent frequencies for chaos to develop has recently been established at three.

From this result, a mixing protocol in a flow between two eccentric rotating cylinders is searched. By varying the rotation of the inner and outer cylinder, an additional frequency to this two dimensional flow leads to complex cases where chaos is evident.

A mathematical analysis, based on Poincaré sections of the flow for a given geometry, allows us to compare theory to experiment.



## Remerciements

Ce travail de recherche s'est effectué au sein du Groupe de Recherche et Applications en Photophysique et Photochimie.

Je tiens à remercier tout particulièrement N. Midoux pour m'avoir proposé ce sujet de recherche et de m'avoir guidé tout au long de ce travail.

Je souhaite remercier J.P. Caressa qui m'a fait l'honneur de juger mon travail.

J'adresse mes plus vifs remerciements à J.N. Gence et E. Saatdjian pour m'avoir conseillé et aidé durant cette recherche.

Je tiens à exprimer toute ma sympathie à J.C. André pour m'avoir accueilli dans son laboratoire et pour m'avoir éclairé dans de nombreux domaines de la photophysique et de l'optique.

Je désire aussi exprimer toute ma reconnaissance à l'ensemble des membres du Groupe de Recherche et Applications en Photophysique et Photochimie et du Laboratoire des Sciences du Génie Chimique qui m'ont apporté à divers titres leur aimable collaboration.



# SOMMAIRE

## CHAPITRE 1 : THEORIE

### I : ELEMENTS DE THEORIE DES SYSTEMES DYNAMIQUES

I.A - UN EXEMPLE DE SYSTEME DYNAMIQUE CONSERVATIF : LE PENDULE SIMPLE SANS FROTTEMENT.....	1
I.B - SYSTEME DYNAMIQUE DISSIPATIF : LE PENDULE SIMPLE ARMORTI.....	4
I.C - SYSTEME DYNAMIQUE DISSIPATIF ENTRETENU: L'OSCILLATEUR DE VAN DER POL.....	5
I.D - SYSTEME DYNAMIQUE CONSERVATIF SOUMIS A UNE PERTURBATION EXTERNE : L'OSCILLATEUR PARAMETRIQUE.....	8
I.E - CONSEQUENCES PRATIQUES.....	16

### II : ROUTE VERS LE CHAOS : TRANSITION ENTRE REGIME PERIODIQUE ET REGIME CHAOTIQUE

II.A - QU'APPELLE-T-ON CHAOS EN PHYSIQUE ?.....	18
II.B - TRANSITION ENTRE REGIMES STABLES ET ALEATOIRES.....	18
II.C - APPLICATION AU SYSTEME BICYLINDRIQUE EXCENTRE.....	21

### III : CONCEPT D'ETIREMENT ET DE REPLIEMENT: CRITERE D'EFFICACITE DE MELANGE

III.A - ETIREMENT : PREMIERE CONDITION POUR UN MELANGE EFFICACE.....	23
III.B - REPLIEMENT : SECONDE CONDITION POUR UN MELANGE EFFICACE.....	30

## CHAPITRE 2 : ETUDES NUMERIQUES DU SYSTEME EN 2D

### I : RAPPELS CONCERNANT L'ECOULEMENT DE COUETTE.....

33

### II : ETUDE NUMERIQUE PRELIMINAIRE D'UN ECOULEMENT EN GEOMETRIE CARREE

II.A - MISE EN EQUATION DU SYSTEME.....	38
II.B - DISCRETISATION DU PROBLEME.....	41
II.C - RESULTATS.....	48

<b><u>III : SOLUTION ANALYTIQUE EN GEOMETRIE BIPOLAIRE.....</u></b>	<b>50</b>
---	-----------

**IV : RESOLUTION NUMERIQUE DE L'ECOULEMENT ENTRE DEUX CYLINDRES INFINIMENT LONGS EXCENTRES**

IV.A - HYPOTHESES DE TRAVAIL.....	58
IV.B - METHODE UTILISEE.....	58
IV.C - MAILLAGE DU SYSTEME.....	59
IV.D - EQUATIONS DE BASE.....	61
IV.E - CONDITIONS AUX LIMITES / CONDITIONS INITIALES.....	63
IV.F - RESOLUTION DU PROBLEME PAR LA METHODE ADI.....	64

**V : CONFRONTATION NUMERIQUE/ANALYTIQUE EN SITUATION 2D**

V.A - ROTATION DU CYLINDRE INTERIEUR SEUL.....	74
V.B - ROTATION DU CYLINDRE EXTERIEUR SEUL.....	79
V.C - ROTATIONS SIMULTANEEES DES DEUX CYLINDRES.....	83

**CHAPITRE 3 : CONFRONTATION NUMERIQUE/EXPERIMENTAL EN 2D - EXTRAPOLATION EN 3D**

**I : EXPERIMENTATION EN GEOMETRIE BIPOLAIRE**

I.A - DISPOSITIF EXPERIMENTAL.....	85
I.B - RAPPELS CONCERNANT LES INTERACTIONS ENTRE LUMIERE ET MATIERE.....	86
I.C - TECHNIQUES DE VISUALISATION.....	89
I.D - PROTOCOLES D'EXPERIENCES.....	96

**II : CONFRONTATION THEORIE/EXPERIENCE EN 2D : INFLUENCE DE L'EXCENTRICITE SUR LES DIVERS ELEMENTS OBSERVES.....**

II.A - ROTATION DU CYLINDRE INTERIEUR SEUL.....	101
II.B - ROTATION DU CYLINDRE EXTERIEUR SEUL.....	102
II.C - ROTATIONS SIMULTANEEES DES DEUX CYLINDRES (SENS OPPOSES)	106
II.D - ROTATIONS SIMULTANEEES DES DEUX CYLINDRES (MEME SENS).....	107

### **III : PASSAGE DU 2D AU 3D**

<b>III.A - INTRODUCTION.....</b>	<b>119</b>
<b>III.B - MOUVEMENT D'UN FLUIDE AU CONTACT D'UNE PAROI PLANE PERIODIQUEMENT MOBILE.....</b>	<b>120</b>
<b>III.C - CARACTERISTIQUE DE LA FONCTION DE COURANT RESULTANTE....</b>	<b>123</b>
<b>III.D - SUIVI DE PARTICULES : CONCEPT LAGRANGIEN.....</b>	<b>124</b>
<b>III.E - ETUDE DE L'ECOULEMENT TRIDIMENSIONNEL.....</b>	<b>130</b>

<b><u>CONCLUSION GENERALE.....</u></b>	<b>151</b>
--	------------

### **BIBLIOGRAPHIE**

### **ANNEXES**

**Annexe 1** : Coefficients de Lamé

**Annexe 2** : Equations de Navier-Stokes et de Poisson en géométrie bipolaire

**Annexe 3** : Coefficients a,b,c et r

**Annexe 4** :  $\psi$  à la paroi extérieure

**Annexe 5** : Listing du programme de résolution numérique du problème en 2D

**Annexe 6** : Sections de Poincaré

**Annexe 7** : Traitement de l'image



## Symboles utilisés

- $a_1, a_2$  : Rayons des cylindres en géométrie excentrée (m)  
 $d_1$  : Distance à l'origine du centre du cylindre intérieur (m)  
 $d_2$  : Distance à l'origine du centre du cylindre extérieur (m)  
 $D$  : Domaine total du maillage  
 $D$  : Coefficient de diffusion ( $m^2.s^{-1}$ )  
 $e$  : Excentricité (m)  
 $E$  : Energie du système (j)  
 $f$  : Répartition de population  
 $f_1, f_2, \dots, f_n$  : Fréquences ( $s^{-1}$ )  
 $g$  : Accélération de la pesanteur ( $m.s^{-2}$ )  
 $h$  : Rapport de l'amplitude des oscillations d'un pendule à l'accélération de la pesanteur  
 $h, h_1, h_2$  : Coefficients de Lamé du système (m)  
 $H$  : Hamiltonien du système (j)  
 $i$  : Variable d'espace liée à  $\alpha$  (ou  $x$  en cartésien)  
 $j$  : Variable d'espace liée à  $\beta$  (ou  $y$  en cartésien)  
 $I, L$  : Dimensions caractéristiques (m)  
 $L_0, L$  : Longueur d'un segment de traceur avant et après étirement (m)  
 $L$  : Dérivée de  $L$  par rapport au temps ( $m.s^{-1}$ )  
 $M$  : Nombre de mailles suivant l'axe  $\alpha$   
 $N$  : Nombre de mailles suivant l'axe  $\beta$   
 $p$  : Pression (Pa)  
 $r$  : Distance au centre du vortex (m)  
 $R_1, R_2$  : Rayons des cylindres de Couette  
 $Re$  : Nombre de Reynolds  
 $s$  : Paramètre géométrique du système bipolaire (m)  
 $t$  : Temps (s)  
 $T$  : Période des alternances (s)  
 $U$  : Vecteur vitesse ( $m.s^{-1}$ )  
 $u$  : Composante de la vitesse  $U$  selon  $\alpha$  ( $m.s^{-1}$ )  
 $v$  : Composante de la vitesse  $U$  selon  $\beta$  ( $m.s^{-1}$ )  
 $v_1$  : Vitesse linéaire de la paroi intérieure en géométrie excentrée ( $m.s^{-1}$ )  
 $v_2$  : Vitesse linéaire de la paroi extérieure en géométrie excentrée ( $m.s^{-1}$ )  
 $V_x$  : Composante de la vitesse selon l'axe des  $x$  ( $m.s^{-1}$ )  
 $V_y$  : Composante de la vitesse selon l'axe des  $y$  ( $m.s^{-1}$ )

.../...

$x, y$  : Coordonnées cartésiennes du système  
 $\alpha, \beta$  : Coordonnées bipolaires  
 $\gamma_0, \gamma$  : Coefficients d'amortissement ( $s^{-1}$ )  
 $\gamma$  : Taux de cisaillement ( $s^{-1}$ )  
 $\gamma$  : Produit du taux de cisaillement par la période d'une alternance  
 $\varepsilon$  : Amplitude normée du pendule  
 $\eta$  : Rapport des rayons  $R_1$  et  $R_2$  (Couette)  
 $\eta$  : Viscosité dynamique du fluide ( $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$ )  
 $\theta, \theta_0$  : Mesures d'angles (rd)  
 $\mu$  : Exposant de l'équation de Floquet ( $s^{-1}$ )  
 $\nu$  : Viscosité cinématique ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )  
 $\sigma$  : Exposant de Liapunov ( $s^{-1}$ )  
 $\Gamma$  : Rapport de la longueur des cylindres à leurs rayons (Couette)  
 $\psi$  : Fonction de courant ( $m^2 \cdot s^{-1}$ )  
 $\omega$  : Rotationnel du vecteur vitesse  $U$  ( $s^{-1}$ )  
 $\omega_1, \omega_2$  : Vitesses angulaires de rotation des cylindres en géométrie de Couette ( $s^{-1}$ )  
 $\omega_0, \omega, \omega_{alt}$  : Fréquences ( $s^{-1}$ )

**Chapitre 1**

**THEORIE**

the 1990s, the number of people with a mental health problem has increased in the UK (Mental Health Act 1983, 1990).

There is a growing awareness of the need to improve the lives of people with mental health problems. The Department of Health (1999) has set out a strategy for mental health care in the UK. The strategy is based on the following principles:

- People with mental health problems should be treated as individuals.
- People with mental health problems should be given the opportunity to participate in decisions about their care.
- People with mental health problems should be given the opportunity to live in their own homes.

The strategy also sets out a number of objectives for the mental health care system. These objectives are:

- To reduce the number of people with mental health problems who are admitted to hospital.
- To improve the quality of care for people with mental health problems.
- To improve the support available to people with mental health problems.

The strategy also sets out a number of actions that need to be taken to achieve these objectives. These actions are:

- To improve the training and skills of mental health professionals.
- To improve the availability of mental health services.
- To improve the support available to people with mental health problems.

The strategy also sets out a number of measures that need to be taken to ensure that the mental health care system is cost-effective. These measures are:

- To improve the efficiency of the mental health care system.
- To reduce the costs of mental health care.
- To improve the value for money of mental health care.

The strategy also sets out a number of measures that need to be taken to ensure that the mental health care system is accessible to all people who need it. These measures are:

- To improve the accessibility of mental health services.
- To reduce the barriers to mental health care.
- To improve the support available to people with mental health problems.

The strategy also sets out a number of measures that need to be taken to ensure that the mental health care system is sustainable. These measures are:

- To improve the sustainability of the mental health care system.
- To reduce the costs of mental health care.
- To improve the value for money of mental health care.

## I. ELEMENTS DE THEORIE DES SYSTEMES DYNAMIQUES.

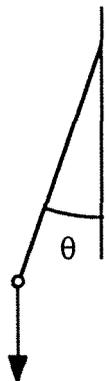
L'étude des systèmes dynamiques se développe aujourd'hui très rapidement dans de nombreux domaines de la physique. Ce chapitre dégager les concepts fondamentaux utiles pour l'étude du mélange des fluides. Il débute par la présentation du cas académique de l'oscillateur sans frottement: le pendule simple. Dans un second temps, les effets de divers paramètres sur le comportement de cet oscillateur sont étudiés: Influence des frottements, influence de l'apport d'énergie dans le cas du pendule amorti (oscillateur de Van Der Pol), influence d'une modulation externe (oscillateur paramétrique).

### **I.A - UN EXEMPLE DE SYSTEME DYNAMIQUE CONSERVATIF: LE PENDULE SIMPLE SANS FROTTEMENT**

De manière générale, cette théorie s'intéresse au comportement de systèmes soumis à des contraintes extérieures données. Le premier système dynamique à avoir été étudié est l'oscillateur sans frottement. En effet, bon nombre de systèmes possèdent des comportements complexes pouvant se décomposer en processus plus simples identiques à celui de l'oscillateur sans frottement.

#### I.A.1 Hamiltonien du système

L'oscillateur sans frottement qui va être étudié est le pendule pesant idéal. Il est soumis à la force de gravité, son mouvement est régi par la relation fondamentale de la dynamique. Si l'on appelle  $\theta$  l'angle entre la verticale et la direction prise par le fil du pendule de longueur  $l$ , on obtient:


$$\Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

Cette équation définit la dépendance entre l'angle  $\theta$  et le temps. Ce système, d'énergie totale constante, peut être décrit par la fonction de Hamilton  $H$ . Celle ci, correspondant à

l'énergie du pendule, est définie par le système d'équations suivant:

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} \quad (3)$$

avec  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$

L'intégration de ce système nous fournit l'expression de la fonction de Hamilton:

$$H(\dot{\theta}, \theta) = \frac{\dot{\theta}^2}{2} + \omega^2 (1 - \cos \theta) \quad (4)$$

avec  $\omega = \sqrt{g/l}$

### I.A.2 Portrait de phase du système

La théorie des systèmes dynamiques privilégie, non pas la description dans le plan  $(\theta, t)$  mais dans le plan  $(\theta, \dot{\theta})$  appelé plan de phase. L'emploi de ce type de représentation permet de décrire, dans le cas du pendule simple, des situations plus complexes que la simple oscillation pour de petits angles  $\theta$ .

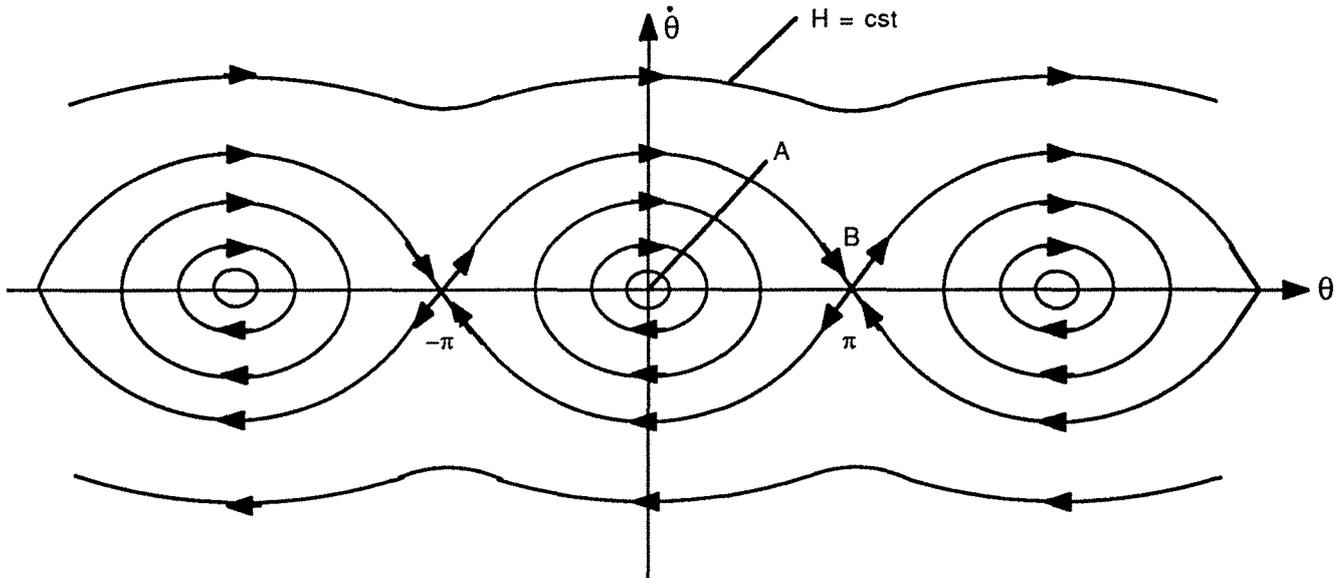


Figure 1.1 : Portrait de phase du pendule simple sans frottement

La fonction H fournit les "trajectoires" du point représentatif de l'état du système dans le plan de phase. La

situation linéaire ( $\sin \theta = \theta$ ) correspond aux ellipses de petites tailles proches de l'origine et des points  $(2k\pi, 0)$ , avec  $k$  entier relatif. Pour ces situations, l'Hamiltonien  $H$  prend la forme suivante, au second ordre en  $\theta$ :

$$H(\dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2 + \omega^2 \theta^2] \quad (5)$$

Cette équation définit une ellipse dans les coordonnées  $(\theta, \dot{\theta})$ . Les points  $(2k\pi, 0)$  où la fonction  $H$  passe par un minimum (zéro ici), sont appelés points elliptiques.

A proximité des points de coordonnées  $((2k+1)\pi, 0)$  la fonction  $H$  s'écrit :

$$H(\dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2} [\dot{\theta}^2 - \omega^2 \theta^2] \quad (6)$$

Il s'agit de l'équation d'une hyperbole dans le plan de phase. Les points correspondant sont appelés points hyperboliques. Pour le pendule, ces points définissent la position verticale du système. Ils ne peuvent être atteints par le mobile qu'au bout d'un temps infiniment long car, à mesure que celui-ci se rapproche sa vitesse angulaire diminue pour devenir nulle en ces points. De manière symétrique, le mobile, initialement situé en ces points, ne les quittera qu'après un temps infini.

### I.A.3 Propriétés des systèmes conservatifs

- L'invariance de la fonction de Hamilton entraîne une conservation des aires dans l'espace des phases.

L'écoulement d'un fluide révèle des structures identiques à celles observées dans un plan de phase (nous verrons par exemple qu'un vortex est caractérisé par un point elliptique).

Dans un écoulement où les conditions aux parois sont constantes dans le temps, l'observation d'une portion de fluide révèle une constance de l'aire de celle-ci.

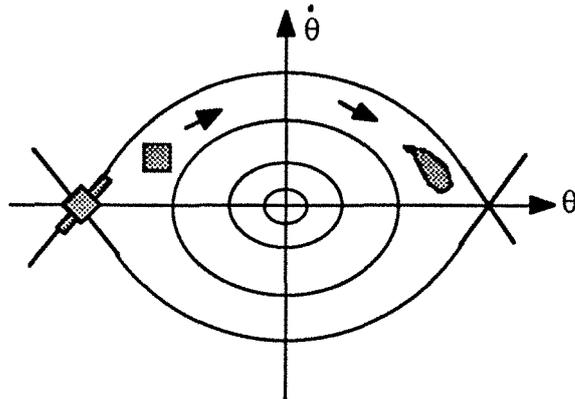


Figure 1.2: Conservation des aires dans l'espace des phases

La déformation de deux portions carrées de fluide initialement placées l'une proche du point elliptique et l'autre proche du point hyperbolique est représentée sur le schéma ci-dessus.

Autour du point elliptique, il y a rotation et déformation du carré avec conservation de sa surface. Autour du point hyperbolique, le carré se déforme. Il y a allongement selon une direction et écrasement selon la direction orthogonale, mais toujours avec conservation de la surface.

- Une autre conséquence est l'invariance des équations du mouvement et des solutions par inversion du temps.

### **I.B - SYSTEME DYNAMIQUE DISSIPATIF : LE PENDULE SIMPLE AMORTI**

Le cas précédent, purement fictif, se doit d'être complété par une étude des perturbations créées par l'amortissement dû aux frottements. Il s'agit donc de l'étude du pendule réel. L'équation différentielle est la suivante :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (7)$$

avec  $\gamma$ : coefficient d'amortissement.

La valeur  $E$  de l'énergie est une fonction du temps. On a :

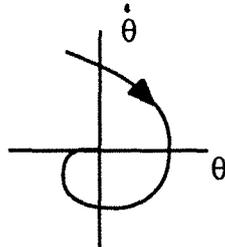
$$E(\dot{\theta}, \theta) = \frac{1}{2} \left[ \dot{\theta}^2 + \omega^2 \theta^2 \right] \quad (8)$$

avec  $\omega^2 = g/l$

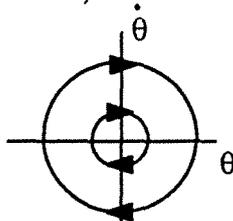
d'où :

$$\frac{dE}{dt} = \ddot{\theta} \dot{\theta} + \omega^2 \dot{\theta} \theta = \dot{\theta} (\ddot{\theta} + \omega^2 \theta) = -\gamma \dot{\theta}^2 \quad (9)$$

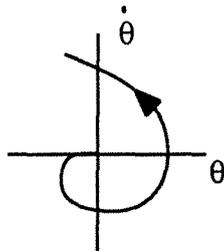
- si  $\gamma > 0$  : L'énergie du système diminue pour devenir nulle (le pendule s'immobilise). Dans le plan de phase le point représentatif décrit une spirale jusqu'à l'origine. Ce point est dit attracteur.



- si  $\gamma = 0$  : L'énergie du système est constante : (même situation qu'au paragraphe I.A)



- si  $\gamma < 0$  : L'énergie du système augmente (ce cas n'a pas de sens physique)



Enfin, contrairement au cas conservatif, il n'existe pas de fonction d'Hamilton permettant de décrire le système. Il n'y a plus de conservation des aires dans l'espace des phases. Il n'existe, dans les cas réels d'expérience, que la contraction des aires.

### I.C - SYSTEME DYNAMIQUE DISSIPATIF ENTRETENU : L'OSCILLATEUR DE VAN DER POL

Afin de se placer dans une situation pseudo conservative de l'oscillateur amorti, le mouvement est entretenu grâce à un apport continu d'énergie. La perte énergétique par frottement est exactement compensée par l'énergie fournie au système.

L'oscillateur de Van Der Pol (\*\*\*) possède cette propriété : le coefficient d'amortissement est variable en fonction de l'amplitude  $\theta$ .

$$\gamma = -\gamma_0 \left( 1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right) \quad (10)$$

avec  $\gamma < 0$  si  $\theta^2 < \theta_0^2$   
 et  $\gamma > 0$  si  $\theta^2 > \theta_0^2$

Ainsi, il y a croissance des petites amplitudes et décroissance des grandes. Il y a donc stabilisation du mouvement d'oscillation. L'équation du mouvement s'écrit donc:

$$\ddot{\theta} - \gamma_0 \left( 1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right) \dot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 \quad (11)$$

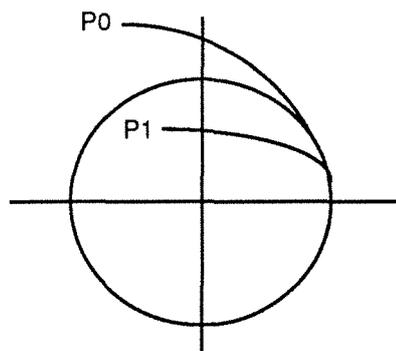
En prenant comme unité de temps  $1/\omega$  et comme unité d'amplitude  $\theta_0 \sqrt{\frac{\omega}{\gamma_0}}$  ;

On obtient : 
$$\ddot{\theta} - (\varepsilon - \theta^2) \dot{\theta} + \theta = 0 \quad (12)$$

avec  $\varepsilon = \gamma_0 / \omega$

### I.C.1 Influence de $\varepsilon$

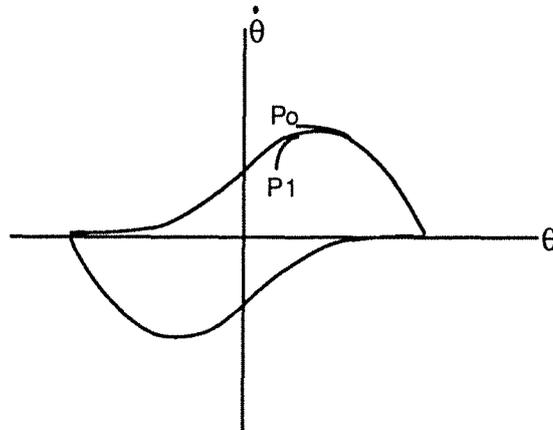
Pour des valeurs de  $\varepsilon$  faibles ( $< 0,01$ ) l'amortissement est évidemment faible et le portrait de phase du système est celui de l'oscillateur sans frottement. (cf figure ci-dessous):



Si le point représentatif du système se trouve initialement en  $P_0$ , la trajectoire de celui-ci va lentement tendre vers le cycle correspondant à la configuration stable du système. Ce

cycle est appelé cycle limite (ou cycle attracteur). La situation est identique si l'on "démarré" du point P1.

Pour des valeurs de  $\varepsilon$  importantes, il existe aussi un cycle limite mais très déformé. Sur la figure ci-dessous est représenté le cycle d'un oscillateur de Van Der Pol pour une valeur de  $\varepsilon = 4$ .



Le cycle limite pour une valeur de  $\varepsilon = 4$  est beaucoup plus attracteur que dans le cas précédent. Les trajectoires issues des points P0 et P1 tendent extrêmement rapidement vers le cycle limite.

### I.C.2 Equivalence entre l'oscillateur de Van Der Pol et l'écoulement visqueux dans un mélangeur bicylindrique excentré

Il existe un parallèle tout-à-fait direct entre l'oscillateur entretenu et le comportement d'un fluide placé entre deux cylindres excentrés (ou non). En effet, les rotations créées par les deux cylindres fournissent une énergie au fluide qui est intégralement perdue par frottements visqueux à l'intérieur du système. L'équivalence entre le pendule simple soumis à des frottements et le système bicylindrique existe mais est trop difficile à observer expérimentalement: les frottements visqueux freinent de manière quasiment instantanée toute oscillation.

Il est possible de faire une estimation de  $\varepsilon$  qui est le rapport de l'effet de l'amortissement sur la fréquence des oscillations forcées. La valeur du coefficient d'amortissement  $\gamma_0$  est donnée approximativement par  $\nu / L^2$  avec L dimension caractéristique du système ( $L = 0,05$  m) et  $\nu$  viscosité cinématique du fluide ( $\nu = 10^{-3}$  m<sup>2</sup>/s pour le glycérol).

La valeur de  $\gamma_0$  est donc, dans ces conditions, de  $0,4 \text{ s}^{-1}$ .

La fréquence d'oscillation est, elle, calculée à partir des vitesses de rotation des cylindres. Celles-ci sont de l'ordre de 1 tour par minute, ce qui nous donne  $2\pi/60 \text{ s}^{-1}$ .

On en déduit pour le rapport  $\epsilon$  la valeur 4.

Plusieurs corollaires peuvent être dégagés de ce calcul :

- Le comportement du système dynamique bicylindrique est gouverné dans une large mesure par l'action de l'amortissement visqueux. Les "trajectoires" des points dans l'espace des phases sont très rapidement attirées vers le cycle limite. En effet on remarque expérimentalement que la "mise en régime" de l'écoulement au démarrage des rotations des deux cylindres se fait de manière quasi instantanée. Il en est de même pour la phase d'arrêt des rotations.

- Le diagramme de phase de l'oscillateur correspondant (Van Der Pol) révèle une structure à deux échelles de temps distinctes. Ce résultat est tout à fait remarquable, car il permet de saisir pourquoi l'addition d'une fréquence supplémentaire (par l'alternance des rotations par exemple) au système bicylindrique peut engendrer une situation chaotique. (L'étude du passage de l'état stationnaire à l'état chaotique sera discuté dans la partie II).

Notons de plus que ce système est quasiment équivalent, au point de vue énergétique au pendule simple sans frottement (perte d'énergie = gain d'énergie). Nous pourrions donc utiliser, lors de l'étude du mélangeur bicylindrique, une fonction d'Hamilton classique.

#### **I.D - SYSTEME DYNAMIQUE CONSERVATIF SOUMIS A UNE PERTURBATION EXTERNE : L'OSCILLATEUR PARAMETRIQUE**

L'oscillateur paramétrique est un oscillateur soumis à une modulation externe forcée. De nombreux exemples existent naturellement. Ainsi, en mécanique céleste, le comportement d'un système à deux corps massifs est perturbé par un troisième (cet exemple sera discuté ultérieurement dans ce chapitre).

Imaginons un pendule, sans frottement, dont le point de fixation est mobile au cours du temps. Ceci revient à l'étude du

pendule simple soumis à une accélération de la pesanteur variable :  $g(t) = g_0 + g_1(t)$ ,  $g_0$  représentant l'accélération de la pesanteur et  $g_1(t)$  le terme perturbateur.

$$\text{L'équation de ce pendule est donc : } \ddot{\theta} + \frac{g(t)}{l} \cdot \sin \theta = 0$$

Même dans l'hypothèse de linéarité du problème ( $\sin \theta = \theta$ ) cette équation n'est pas intégrable pour une fonction  $g(t)$  quelconque. Dans le cas particulier d'une fonction circulaire ( $g(t) = g_0 + g_1 \cdot \cos 2\omega t$ ), elle est appelée équation de Mathieu :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{(g_0 + g_1 \cdot \cos 2\omega t)}{l} \cdot \theta = 0 \quad (13)$$

En posant  $\omega_0^2 = g_0/l$  et  $h = g_1/g_0$  on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 + h \cos 2\omega t) \cdot \theta = 0 \quad (14)$$

$\omega_0$  correspond à la fréquence de base de l'oscillateur simple (pour  $h=0$ ).

### I.D.1 Stabilité des solutions

Selon la théorie de Floquet (cf. BERGE et al. 1988) les solutions de l'équation différentielle (14) sont de la forme :

$$\theta(t) = e^{\mu t} P(t) \quad (15)$$

avec  $P(t)$  périodique (de période  $T=2\pi/\omega$ )

Par continuité, pour  $h$  petit, les solutions tendent vers la solution triviale  $\theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ . Ainsi, pour  $h$  petit et  $\omega$  proche de  $\omega_0$ , les solutions se trouvent sous la forme :

$$e^{\mu t} \cdot \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (16)$$

Plaçons la solution dans l'équation différentielle (14), il vient:

$$e^{\mu t} \cdot \left( (\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2) \cos(\omega t + \phi) - 2\mu\omega \cdot \sin(\omega t + \phi) + \frac{h}{2} \omega_0^2 \cdot \cos(\omega t + \phi) + \frac{h}{2} \omega_0^2 \cdot \cos(3\omega t + \phi) \right) = 0 \quad (17)$$

Nous négligeons le dernier terme de haute fréquence dont l'influence est faible (cf. BERGE et al. 1988). La solution doit être valable pour toute valeur de  $t$ . Pour cela les sommes des coefficients des termes en  $e^{\mu t} \cos \omega t$  et  $e^{\mu t} \sin \omega t$  doivent être nulles. Ceci conduit au système linéaire de deux équations en  $\cos(\phi)$  et  $\sin(\phi)$ .

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 + \frac{h}{2} \omega_0^2\right) \cos(\phi) - 2\mu\omega \sin(\phi) = 0 \quad (18)$$

$$2\mu\omega \cos(\phi) + \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \mu^2 + \frac{h}{2} \omega_0^2\right) \sin(\phi) = 0 \quad (19)$$

Le système des deux équations linéaires en  $\sin(\phi)$  et  $\cos(\phi)$  possède une solution si son déterminant est nul, soit:

$$\mu^4 + 2 \left(\omega_0^2 + \omega^2\right) \mu^2 + \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - \frac{h}{4} \omega_0^2 = 0 \quad (20)$$

Il s'agit d'une équation du second degré en  $\mu^2$ . Elle possède deux racines réelles car le discriminant est toujours positif ( $h^2 \omega_0^2 > 0$ ). Une des deux racines au moins est négative car leur

somme est négative :  $-2\left(\omega_0^2 + \omega^2\right)^2 < 0$ .

- Si la valeur de  $\mu^2$  est négative, l'exposant  $\mu$  est imaginaire pur, la fonction  $\exp(\mu t)$  est une fonction circulaire.

- Si la valeur de  $\mu^2$  est positive, l'exposant  $\mu$  est réel et le facteur  $\exp(\mu t)$  est une exponentielle réelle. Dans ce cas de figure, il y a création d'une instabilité car une amplification de l'amplitude existe. Ceci est vérifié quand le produit des racines est négatif soit :

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 - \frac{h}{4} \omega_0^2 < 0 \quad (21)$$

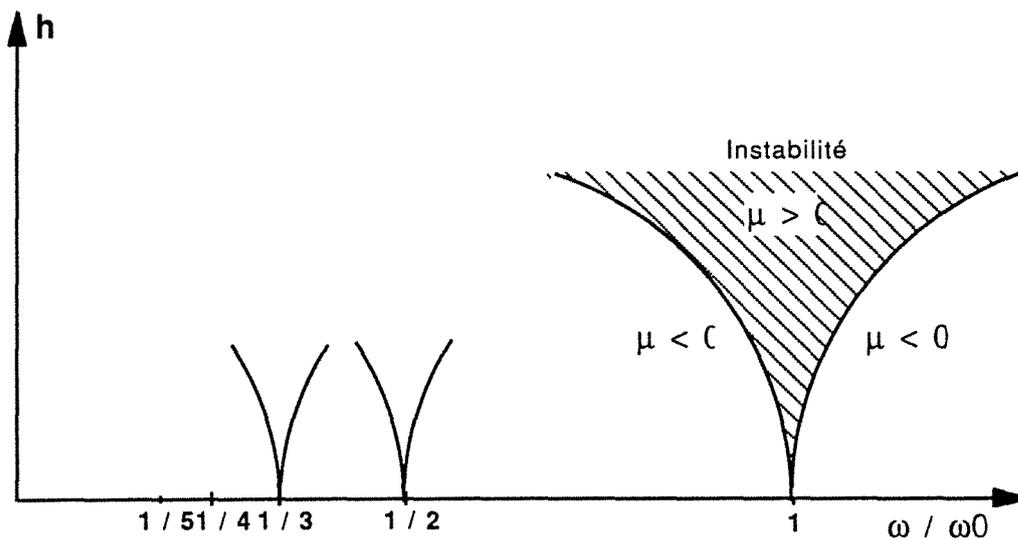
Ce qui conduit à l'inégalité suivante:

$$h > 2 \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right| \quad (22)$$

Il s'agit de la condition d'instabilité pour un oscillateur paramétrique. Si la fréquence  $\omega$  est relativement éloignée de la fréquence de base  $\omega_0$ , le rapport  $\omega_0/\omega$  s'écarte de la valeur 1 et le système restera stable pour des valeurs de  $h$  non nulles (néanmoins pas trop importantes).

Si la fréquence  $\omega$  est égale à  $\omega_0$  (résonance exacte), toute oscillation entraîne une instabilité profonde. Il faut noter que pour la résonance exacte, la fréquence  $\omega$  est alors égale à la moitié de la fréquence d'excitation  $2\omega$ . Cette instabilité est appelée sous-harmonique.

Il existe d'autres domaines pour lesquels une instabilité sous-harmonique est présente. Ils correspondent à des valeurs du rapport  $\omega/\omega_0$  égales à  $1/n$  (avec  $n$  entier positif). Ceci signifie donc que pour une période  $T$  de l'oscillation ( $T = 2\pi/\omega$ ) multiple de la période de base, nous sommes en présence d'une instabilité sous harmonique particulière.



**Figure 1.3 : Diagramme de stabilité d'un oscillateur paramétrique**

Beaucoup d'exemples peuvent illustrer ce rapport entre stabilité et fréquence des perturbations. Le problème des "Trois Corps" issu de la mécanique céleste peut être étudié grâce à la théorie des systèmes dynamiques.

Si nous considérons deux corps massifs gravitant l'un autour de l'autre, le problème est parfaitement intégrable. Les deux corps décrivent des ellipses dont les foyers coïncident avec le centre de masse du système. Le problème se complique énormément dès lors qu'un troisième corps est introduit dans ce système. L'équation différentielle résultante devient alors non intégrable.

L'étude précédemment faite sur la stabilité paramétrique peut nous aider à comprendre, dans le cas de trois corps en mouvement soumis à leur gravité respective, pourquoi une situation donnée est susceptible d'être stable ou non.

Sur la figure 1.4 est représentée l'orbite de Jupiter ainsi que celle d'un astéroïde autour du soleil.

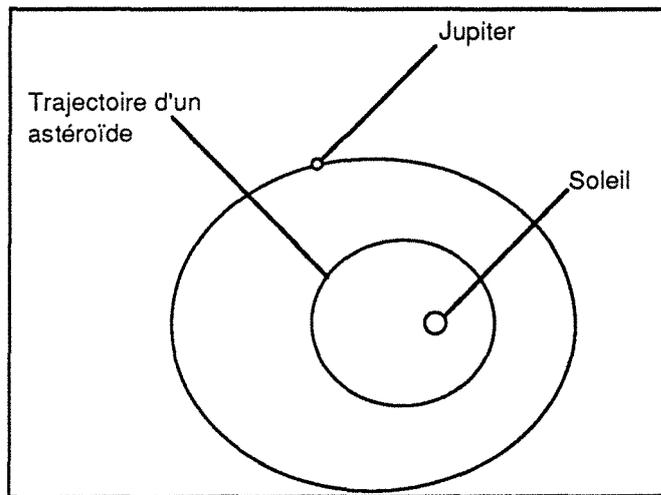


Figure 1.4 : Orbites de la planète Jupiter et d'un astéroïde autour du Soleil

La présence de la planète massive qu'est Jupiter, peut stabiliser ou non le déplacement de l'astéroïde (de masse beaucoup plus faible que Jupiter) sur sa trajectoire. Jupiter joue donc le rôle d'agent perturbateur pour l'oscillateur qu'est l'astéroïde. Celui-ci possède une fréquence propre  $\omega$  et Jupiter une fréquence de révolution égale à  $\omega_j$ .

Si le rapport  $\omega/\omega_j$  est égal à une valeur entière, la trajectoire de l'astéroïde n'est pas stable. Par contre, si ce rapport "s'éloigne" de ces valeurs entières la trajectoire peut devenir régulière.

Ce résultat est tout-à-fait visible si l'on observe la répartition des astéroïdes situés entre Mars et Jupiter.

L'influence de l'attraction de Mars est négligeable devant celle de Jupiter. De plus les attractions mutuelles entre les différents astéroïdes sont elles-mêmes d'amplitudes très faibles. La figure 1.5 présente la répartition  $f$  de la population de ces astéroïdes en fonction du rapport  $\omega/\omega_j$ .

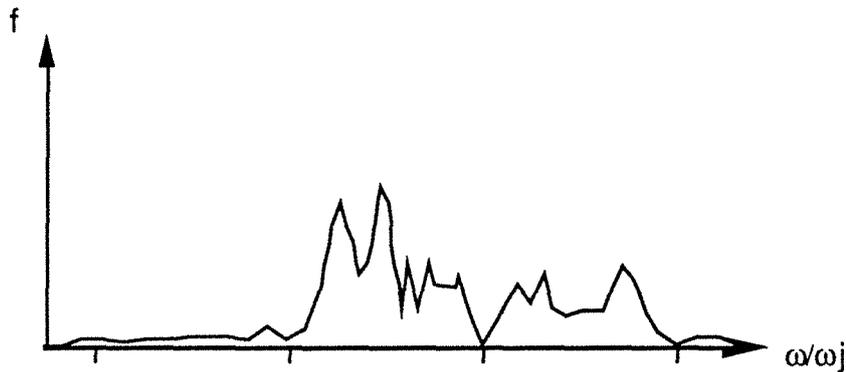


Figure 1.5 : Répartition  $f$  des astéroïdes en fonction du rapport  $\omega/\omega_j$

Des minima sont tout à fait visibles pour des valeurs entières du rapport  $\omega/\omega_j$ . Le même type de situation existe dans la répartition des particules dans l'anneau de la planète Saturne. En effet, certains satellites proches de la planète créent des zones où la stabilité, pour les petits fragments formant l'anneau, n'existe pas. Ainsi, une zone circulaire, appelée division de Cassini, ne renferme pratiquement pas de particules. Elle est parfaitement visible sur la figure 1.6.

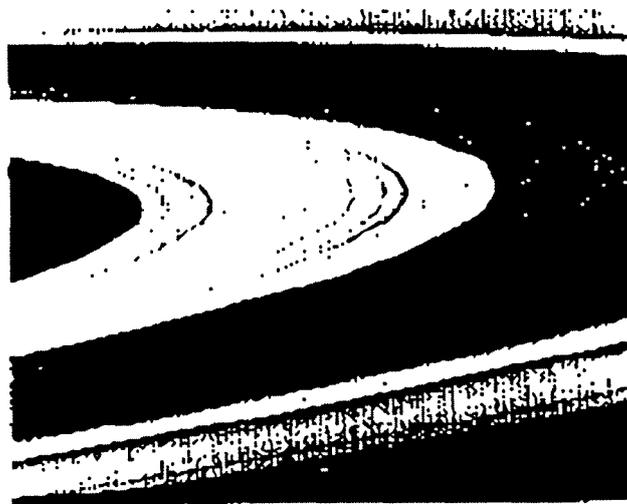


Figure 1.6 : Anneaux de Saturne et division de Cassini

Ce résultat très important est également vérifié si l'on considère les perturbations créées dans l'écoulement d'un fluide.

### I.D.2 Exemple d'oscillateur paramétrique : L'écoulement entre deux cylindres excentrés tournant en alternance

Du point de vue énergétique, l'écoulement entre deux cylindres excentrés tournants est équivalent à un oscillateur de type Van der Pol. Dans ce cas de figure l'énergie fournie au système est perdue intégralement par frottements visqueux.

C'est l'alternance des rotations des deux cylindres qui crée une perturbation à l'écoulement. Pour mieux comprendre l'effet de cette perturbation, nous allons présenter les modifications structurelles de l'écoulement au voisinage d'un point elliptique.

Un point elliptique est un point de l'espace autour duquel les trajectoires semblent "tourner". Il correspond à une valeur de la fonction de courant extrémale. La vitesse d'une particule varie en raison inverse de la distance la séparant du point elliptique. Nous pouvons donc définir pour chaque particule une fréquence  $\omega$  liée à sa propre "révolution".

La fréquence des perturbations (alternance des rotations des cylindres) est définie par  $\omega_{alt}$ . Ainsi, suivant les valeurs du rapport  $\omega/\omega_{alt}$ , c'est-à-dire suivant la distance au centre du vortex, les particules de fluide vont être soumises soit à des rotations très régulières ou soit à des trajectoires complexes. La figure 1.7 montre la perte partielle de stabilité du système dans le cas d'un point elliptique.

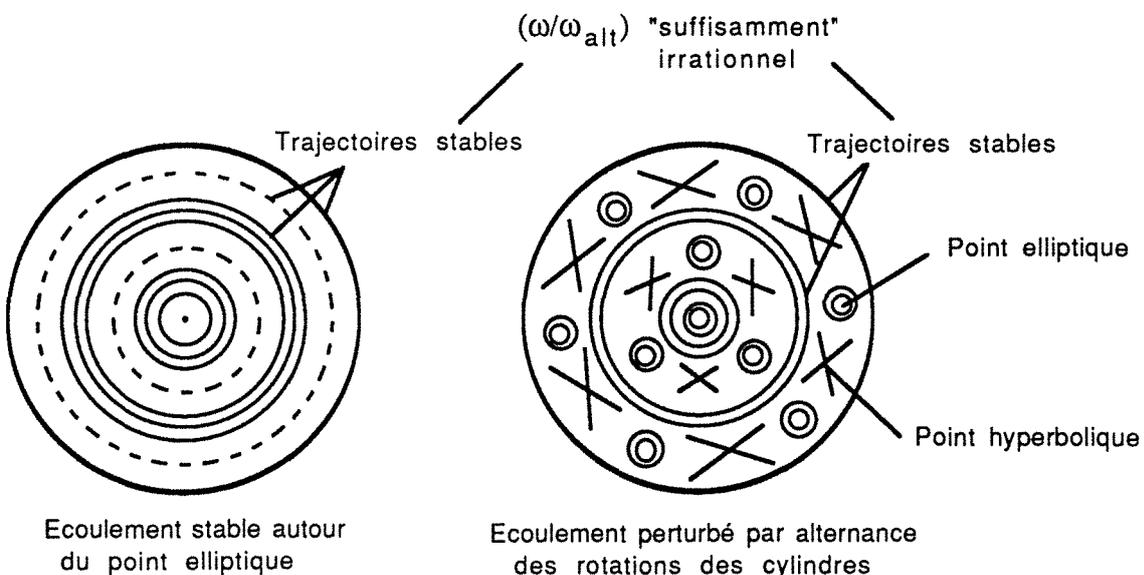


Figure 1.7 : Dégradation de stabilité de l'écoulement autour d'un point elliptique par une modulation externe de fréquence  $\omega_{alt}$ .

La perte de stabilité apparaît différemment en fonction de la distance des particules au centre du vortex selon que le rapport de la fréquence de rotation à la fréquence perturbatrice est rationnel ou non. Dans le cas où ce rapport est "suffisamment irrationnel" les trajectoires demeurent stables et donc de forme elliptique. Il faut noter que la sous structure de chaque "pseudo" point elliptique dessiné sur le schéma de droite, est identique à la structure globale de ce schéma. Seule l'échelle diffère. Chaque nouveau point elliptique de la sous structure possède des fréquences plus élevées que la structure de base et donc des rapports  $\omega/\omega_{alt}$  plus élevés. Cette situation se répète indéfiniment avec des échelles de plus en plus petites.

Pour des valeurs du rapport proches de valeurs entières, la situation est plus complexe. Les trajectoires initialement elliptiques semblent onduler telles des cordes vibrantes. Les nœuds définissent de nouveaux points elliptiques ainsi que de nouveaux points hyperboliques (voir figure 1.8).

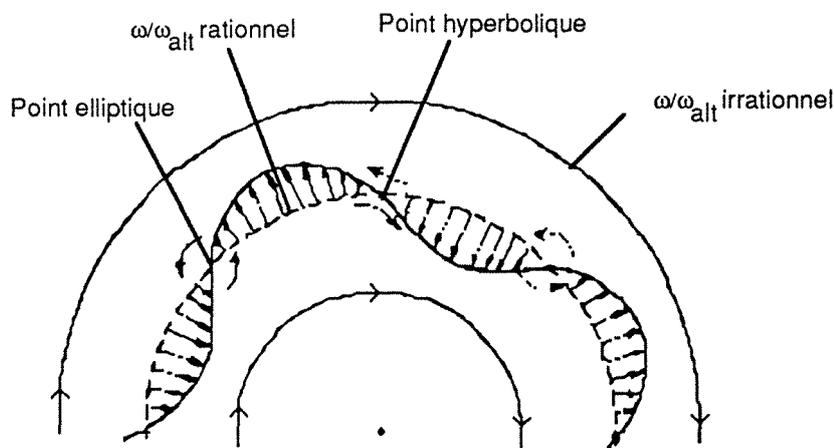


Figure 1.8 : Perte de stabilité de l'écoulement pour une valeur de  $\omega / \omega_{alt}$  rationnel.

Il est incontestable que cette perte de stabilité n'est que partielle puisque subsistent au sein de l'écoulement des zones stables caractérisées par des points elliptiques.

### I.D.3 Cas d'un point hyperbolique

Pour une telle singularité de l'écoulement, une modulation des vitesses de rotation peut créer des modifications des trajectoires pouvant accélérer le processus de mélange.

Un point hyperbolique peut se représenter de la manière suivante (voir figure 1.9):

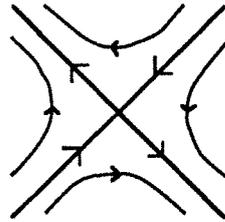


Figure 1.9 : Structure d'un point hyperbolique

En présence d'une modulation (par exemple alternance des rotations des cylindres dans le cas du mélangeur bicylindrique) de fréquence  $\omega_{alt}$ , les trajectoires des particules se replient sur elles-mêmes formant ainsi une série de stries parallèles entre elles. Si l'on place à proximité du point hyperbolique une zone définie de traceur, comme cela est présenté sur la figure 1.10, ce traceur va alternativement être étiré selon une direction et replié selon la direction orthogonale.

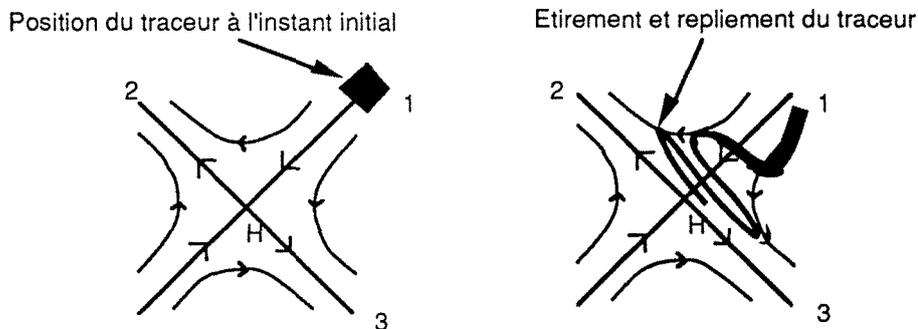


Figure 1.10 : Effet d'une perturbation sur les trajectoires au voisinage d'un point hyperbolique

Le traceur, initialement placé sur une aire carrée visible sur le schéma de gauche au point 1, subit une élongation selon les axes H2 et H3 ainsi qu'un écrasement selon la direction H1. La structure décrite est obtenue sur la figure de droite.

Dans la partie III, l'importance du processus dit d'étirement-repliement est mise en évidence (augmentation de l'efficacité du mélange).

## I.E - CONSEQUENCES PRATIQUES

Nous avons, dans cette partie, très sommairement décrit quelques systèmes dynamiques soumis à des perturbations périodiques. L'oscillateur dit de "Van der Pol" et l'écoulement

entre deux cylindres excentrés tournant (vitesses de rotation constantes dans le temps) se comportent de manière identique. Les forces de viscosité dissipent intégralement l'énergie apportée par la rotation des cylindres. Le comportement global du système est contrôlé presque exclusivement par ces contraintes visqueuses. Dans ce type d'écoulement, le point décrivant l'état du système dans l'espace des phases, se déplace constamment sur une courbe fermée (appelé cycle limite).

Il est donc possible, connaissant l'état du système à un instant donné de prévoir sans ambiguïté le devenir de celui-ci. L'écoulement est parfaitement calculable, les trajectoires des particules de fluide sont, nous le verrons, des courbes fermées. Le mélange est, dans ces conditions, très peu efficace !

Dans la partie I.E, le comportement d'un oscillateur paramétrique est rapproché de celui de l'écoulement d'un fluide placé entre deux cylindres excentrés alternativement en rotation. Certains comportements peuvent, en effet, être assez similaires. Nous avons abordé l'étude de perturbations périodiques sur des zones particulières de l'écoulement : Les régions proches de points elliptiques ainsi que celles proches de points hyperboliques.

Dans le cas des zones "elliptiques", une perturbation externe peut entraîner une perte de stabilité des trajectoires. Mais cette perte, pour une perturbation périodique, n'est que partielle. La stabilité est, en effet, fonction de la distance au centre du vortex. Il est donc préférable, dans le but de mélanger rapidement, de limiter au maximum le nombre de points elliptiques du système.

Par contre, l'existence de points hyperboliques engendre des situations d'étirement-repliement pour les filets de fluides au voisinage de ces points. Il faudra donc essayer de créer un nombre important de ces points, responsables d'un mélange efficace.

## II. "ROUTE VERS LE CHAOS" : TRANSITION ENTRE REGIME PERIODIQUE ET REGIME CHAOTIQUE

### **II.A - QU'APPELLE-T-ON CHAOS EN PHYSIQUE?**

Plusieurs définitions du mot chaos peuvent être données. Dans le langage courant ce mot possède une signification "négative": on parle de chaos dès lors que plus aucun ordre ne peut être dégagé du comportement d'un phénomène par exemple.

En physique, le terme chaos prend une signification plus rigoureuse. Un système dynamique quelconque est dit chaotique si, en analyse de Fourier, son signal possède dans son spectre de puissance une partie continue.

Une seconde définition peut être donnée: un système est dit chaotique si la fonction d'autocorrélation d'un signal définissant le système s'annule rapidement en un temps fini.

Ces deux définitions sont équivalentes. Elles associent au terme chaos l'imprédictibilité de l'état du système à un instant donné à partir de la connaissance de l'état de celui-ci à un temps antérieur (l'écart de temps étant choisi suffisamment long).

Le terme de chaos déterministe est apparu assez récemment dans le vocabulaire scientifique. Il apparaît naturellement lorsque l'on étudie les transitions entre régimes stables et régimes purement aléatoires. Sa définition est donnée dans le paragraphe suivant.

### **II.B - TRANSITION ENTRE REGIMES STABLES ET ALEATOIRES**

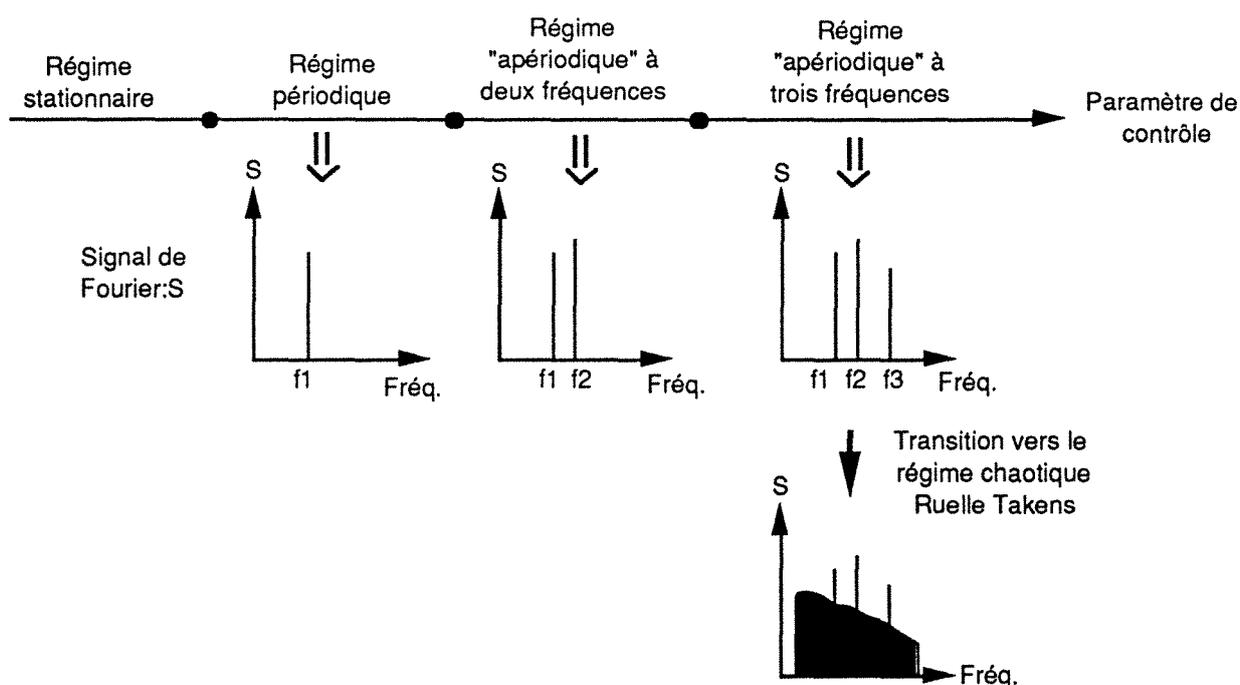
L'étude de ces diverses transitions de régime peut être réalisée sur de nombreux systèmes dynamiques. L'écoulement de Couette que nous reverrons au chapitre 2, permet de comprendre comment s'enchaînent les divers régimes avec la valeur du nombre de Reynolds (appelé paramètre de contrôle).

Pour un nombre de Reynolds petit, l'écoulement révèle une structure tubulaire caractérisée par une fréquence  $f_1$ . Lorsque l'on augmente le nombre de Reynolds, les "tubes" de fluide perdent leur régularité: leurs tailles sont variables avec le temps. Cette variation périodique possède une fréquence appelée  $f_2$  indépendante de  $f_1$ . En prolongeant cette expérience par la pensée, on peut supposer qu'une nouvelle augmentation de ce paramètre de contrôle qu'est le nombre de Reynolds va faire apparaître au sein du système

des fréquences supplémentaires  $f_3, f_4, \dots, f_n$ . Le régime chaotique pourrait donc être lié à l'existence d'un nombre suffisamment élevé de fréquences indépendantes (cf. LANDAU et al. 1971).

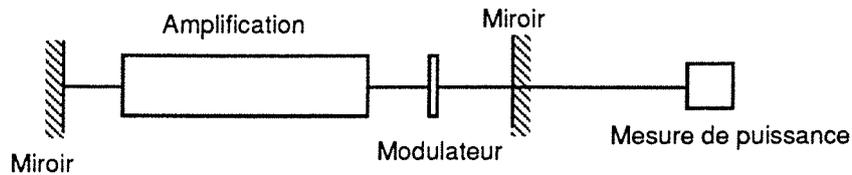
En fait ce raisonnement n'est pas tout à fait exact. Un système dynamique quelconque peut perdre toute régularité dès lors que trois fréquences indépendantes coexistent. Ruelle et Takens (1971) fournirent une première théorie concernant ces transitions de régime et notamment le passage du comportement apériodique à trois fréquences au régime chaotique.

Le comportement d'un système dynamique en fonction du paramètre de contrôle est résumé sur la figure 2.1:



**Figure 2.1:** Transitions entre régimes d'un système Dynamique

Nous illustrons ces concepts par l'étude d'un système particulier : il s'agit du comportement d'un laser soumis à une modulation externe donnée. Cette expérience a été réalisée par GLORIEUX et Al. (1989) à l'aide d'un laser CO<sub>2</sub>. A l'intérieur de la cavité résonnante, est placé un modulateur ayant une absorption variable dans le temps (cf figure 2.2). Cette absorption peut croître de zéro à des valeurs de densité optique très importantes. Le signal étudié est la puissance issue du Laser en fonction du temps.



**Figure 2.2 : Schéma du laser modulé**

Si l'amplitude de l'absorption  $A$  est faible, la puissance du Laser évolue de façon identique au modulateur, les fréquences sont identiques. Pour des valeurs d'absorption plus importantes, la période du signal de puissance ne "suit" plus celle du modulateur. Il y a doublement, quadruplement,... de fréquence. Le système perd toute stabilité après que trois fréquences soient apparues. La figure 2.3 montre l'évolution du système laser+modulateur en fonction de l'absorption appliquée. La puissance est relevée à chaque période du modulateur (ce qui correspond, nous le verrons au chapitre 3, à une section de Poincaré temporelle).



**Figure 2.3 : Puissance du système Laser+modulateur en fonction de l'amplitude de l'absorption créée par le modulateur (la puissance est mesurée à chaque période du modulateur)**

L'oscillogramme présenté ci-dessus, met très nettement en évidence l'influence du paramètre de contrôle  $A$ . Dans la partie la

plus à droite sur la figure, une seule valeur de la puissance existe. A partir d'une valeur critique, deux valeurs distinctes sont présentes simultanément. Ensuite ces deux valeurs semblent "bifurquer" pour laisser apparaître quatre puissances possibles distinctes. Cette situation, apparemment peu stable, disparaît rapidement pour laisser place à un régime où toute une gamme de puissances est possible. Il s'agit d'un régime purement chaotique. En augmentant le paramètre de contrôle, un régime, où trois valeurs de la puissance coexistent, réapparaît. Celui-ci disparaît ensuite pour laisser place à une zone franchement chaotique indépendante, à présent, du paramètre de contrôle.

Il apparaît alors que le nombre de paramètres indépendants minimal, pour obtenir un régime chaotique, est effectivement de trois. En effet, dans le système laser+modulateur, le régime à quatre paramètres indépendants est très rapidement détruit pour tout d'abord donner un régime pseudo-aléatoire, et ensuite un régime à trois paramètres. C'est à partir de ce régime que se crée le chaos (stable vis-à-vis de l'influence du paramètre de contrôle).

On appelle chaos déterministe le comportement irrégulier ou aléatoire issu d'un système dynamique (non linéaire) à faible nombre de degrés de liberté (3).

## **II.C - APPLICATION AU SYSTEME BICYLINDRIQUE EXCENTRE**

Dans la partie I.A, une correspondance entre le système bicylindrique excentré et l'oscillateur de Van der Pol a été mise en évidence. L'oscillateur de Van der Pol est caractérisé par deux échelles de temps distinctes. Le système bicylindrique possède lui aussi deux degrés de liberté distincts (bidimensionnel).

Afin de s'approcher des conditions à trois degrés de liberté, nous incorporerons une fréquence supplémentaire grâce à une alternance des rotations des cylindres.

Les conditions seront donc requises pour voir apparaître dans le système des écoulements chaotiques déterministes. Néanmoins, l'expérimentation est nécessaire, car la théorie prévoit à partir de quels nombres de degré de liberté un système est susceptible de posséder un comportement chaotique mais ne donne pas exactement les conditions requises pour qu'il y ait chaos ou non.

### III. CONCEPTS D'ETIREMENT ET DE REPLIEMENT : CRITERE D'EFFICACITE DE MELANGE

La mise en évidence d'un critère d'efficacité de mélange est une condition nécessaire pour quantifier l'état d'homogénéisation d'un système donné.

Deux notions sont couramment utilisées pour caractériser la mise en contact de fluides : il s'agit des macro et micromélanges (cf. VILLERMAUX 1985). Le macromélange correspond à une vision à l'échelle macroscopique, ce critère renseigne sur la morphologie des lignes de courant créées par le mobile d'agitation (structures de dimensions équivalentes à celles du mélangeur). Le terme de micromélange est réservé à des structures beaucoup plus fines: il informe sur le degré ultime de répartition des composants de ce mélange.

Dans le cas d'une agitation turbulente efficace, le macromélange intervient très rapidement. Le micromélange est, lui, souvent plus difficile à obtenir et il est essentiel de le caractériser correctement. Un critère fréquemment utilisé est l'indice de ségrégation.

Celui-ci ne renseigne que sur la distribution des composants du mélange à un instant donné mais ne tient pas compte des répartitions des vitesses au sein du fluide et plus généralement du processus global d'apparition du mélange.

Dans le cas des écoulements rampants, contrairement au cas précédent, le macromélange est beaucoup plus délicat à obtenir. Le transport par diffusion moléculaire étant très lent, il est donc primordial de rendre l'interpénétration des composants du "mélange" la plus intime possible par une action géométrique adaptée (alternance des rotations des cylindres dans le cas du réacteur bicylindrique excentré). Les processus d'apparition de mélange jusqu'au stade microscopique sont assez bien représentés sur la figure 3.1.

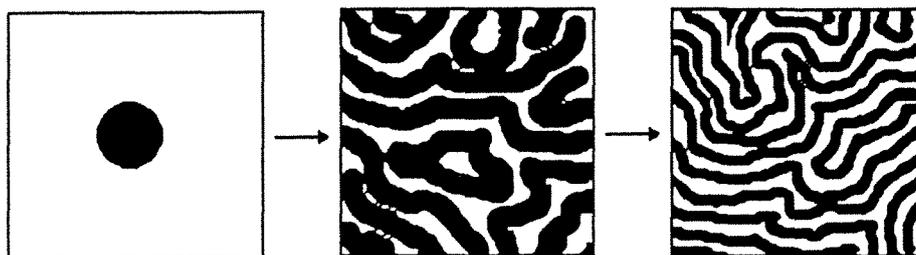


Figure 3.1 : Mélange en écoulement rampant

Pour une agitation turbulente, les figures, formées par les agrégats d'un fluide dans l'autre, possèdent globalement une symétrie sphérique. Cette symétrie se conserve tout au long de la décomposition de ces parcelles de fluide. Le micromélange est supposé atteint lorsque, à l'échelle microscopique (de l'ordre du  $\mu\text{m}$  qui est l'échelle ultime de turbulence), il n'existe plus de gradient de concentration.

Dans nos travaux, concernant le mélange en régime laminaire, le processus est fondamentalement différent. Plaçons-nous, dans le cas de la réalisation du mélange d'un traceur  $T$ , dans un fluide de forte viscosité dynamique. Le traceur possède les mêmes caractéristiques physiques que le fluide environnant. Les figures créées à présent sont totalement différentes. Le traceur s'étire en longs filets qui se déforment au cours du temps.

### III.A - ETIREMENT : PREMIERE CONDITION POUR UN MELANGE EFFICACE

La caractérisation de l'étirement en régime visqueux est étudiée dans quelques cas simples d'écoulements. Un critère d'efficacité de mélange sera alors défini.

#### III.A.1 Cas de l'écoulement plan

L'écoulement est réalisé entre deux plans infinis en mouvement rectiligne uniforme, l'un par rapport à l'autre. Le traceur est positionné selon le segment  $Os$  (cf figure 3.2).

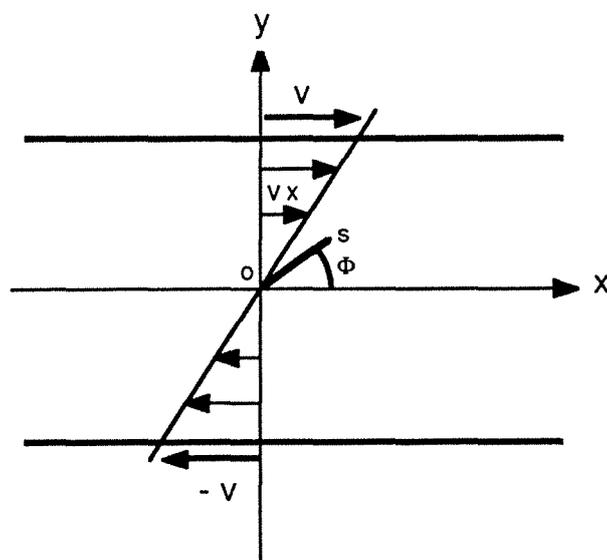


Figure 3.2 : Position initiale du segment de traceur (Os)

Le fluide étudié est supposé avoir un comportement newtonien, ce qui entraîne, pour les vitesses, les deux relations suivantes:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{\gamma} \cdot y \\ v_y &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

avec  $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$  le taux de cisaillement (constant par rapport à  $y$ ).

Le segment Os fait un angle  $\Phi$  avec l'axe des  $x$ . Ce segment s'étire au cours du temps, le point s se déplace pendant un temps  $t$  de la distance  $\lambda = V_x \cdot t$ . La longueur totale  $l$  de celui-ci devient alors:

$$l^2 = l_0^2 + \lambda^2 + 2l_0 \cdot \lambda \cdot \cos(\Phi) \quad (2)$$

L'ordonnée fixe  $y$  est égale à  $\lambda_0 \cdot \sin(\Phi)$ . La longueur du segment Os varie donc de la manière suivante:

$$\frac{l}{l_0} = \sqrt{(\dot{\gamma}t)^2 \cdot \sin^2 \Phi + \dot{\gamma}t \cdot \sin 2\Phi + 1} \quad (3)$$

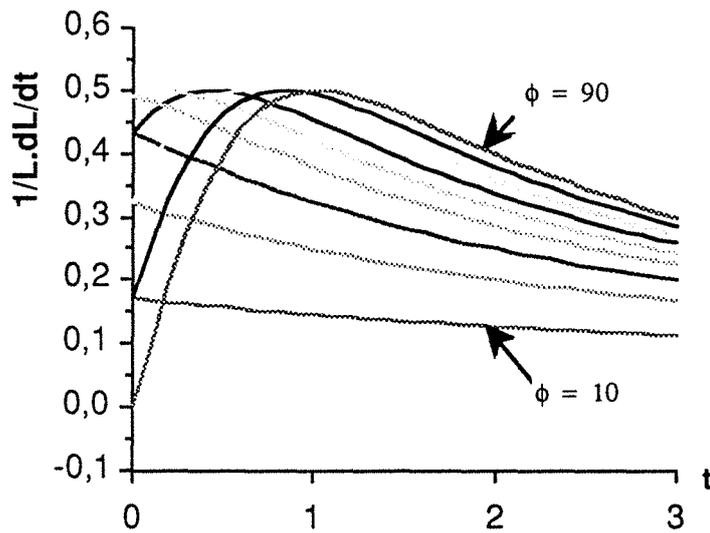
Calculons à présent la variation temporelle relative du rapport  $l/l_0 = L$ .

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} \quad (4)$$

Nous obtenons après calculs la relation suivante:

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma}t + \cotg \Phi)}{1 + (\dot{\gamma}t + \cotg \Phi)^2} \quad (5)$$

qui définit la variation temporelle relative de l'élongation d'un élément linéaire de fluide (Os).



**Figure 3.3 :** Variation relative de l'élongation en fonction du temps (pour des valeurs de  $\Phi$  comprises entre 10 et 90°)

A partir de ces informations il est possible de définir un premier critère d'efficacité pour le mélange. Dans la partie II, consacrée à l'étude de l'apparition des régimes chaotiques, nous avons remarqué que l'une des conditions nécessaires à cette création est la sensibilité aux conditions initiales. Ce qui se traduirait ici par une élongation très rapide (exponentielle) du segment de traceur. Dans ce cas, la longueur  $L$  varie comme  $e^{\sigma t}$  (cf. J.M. OTTINO et Al. 1988). Le coefficient  $\sigma$  appelé exposant de Liapunov permet d'estimer le taux d'étirement du fluide et donc la divergence des trajectoires prises par des particules de fluide initialement très voisines. Le critère  $\sigma$  est défini de la façon suivante:

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t} \ln ( L(t) ) \right] \quad (6)$$

ou en fonction du taux de déformation  $\dot{L}/L$ :

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\dot{L}}{L} dt \quad (7)$$

Ce critère permet de connaître le devenir du segment de fluide étudié. Si l'élongation est proportionnelle au temps, le logarithme tend vers zéro et l'expression de  $\sigma$  tend, elle-même, vers la valeur zéro. Par contre, si l'élongation est exponentielle, le critère  $\sigma$  peut prendre une valeur non nulle.

Il est donc possible, par le biais de la connaissance de ce critère, de déterminer si une région donnée de l'espace est susceptible d'engendrer des élongations exponentielles.

Dans le cas d'écoulements réels, le calcul de  $\sigma$  ne peut être réalisé que par l'estimation de la limite à un temps fini (on désire obtenir un mélange le plus rapide possible). En général, ce temps correspond à un temps caractéristique du protocole de mélange (par exemple la période des alternances dans le cas du Couette excentré). En prenant, comme temps caractéristique,  $T$ , l'expression de  $\sigma$  devient:

$$\sigma = \frac{1}{2T} \ln \left( (\dot{\gamma}T)^2 \cdot \sin^2 \Phi_0 + \dot{\gamma}T \cdot \sin 2\Phi_0 + 1 \right) \quad (8)$$

On obtient finalement après avoir intégré sur tous les angles  $\Phi$  de 0 à  $2\pi$ :

$$\sigma = \frac{1}{2T} \ln \left( 1 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \quad (9)$$

avec  $\gamma = \dot{\gamma}T$ .

La théorie du mélange définit un critère d'efficacité de mélange adimensionnel noté  $e_t$  qui va être défini. Le tenseur des déformations peut se décomposer en deux parties distinctes. La première, symétrique, correspond à l'élongation du fluide, la seconde, antisymétrique, à une rotation pure. (cf. chapitre 3, consacré à l'expérimentation en couette excentré et plus particulièrement à la biréfringence d'écoulement). Dans l'étude de l'élongation simple, seul le tenseur antisymétrique  $D$  défini par l'équation (11), intervient. La valeur de l'efficacité  $e_t$  s'exprime alors comme suit:

$$e_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{\dot{L}/L}{(D:D)^{1/2}} dt \quad (10)$$

L'expression  $D:D$  est le carré du module du tenseur des déformations, il a pour unité la  $s^{-1}$ . Pour un écoulement tel qu'il a été défini précédemment, le tenseur des déformations est donné par:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} & \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\dot{\gamma} \\ -\frac{1}{2}\dot{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Le premier terme de la somme est le tenseur D, sa norme peut être calculée simplement.

$$D:D = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 D_{ij} \cdot D_{ji} \quad (12)$$

avec  $D_{ij}$  définissant les termes de la matrice.

On obtient finalement:  $(D:D)^{0.5} = \dot{\gamma}/\sqrt{2}$  et donc pour  $e_t$ :

$$e_t = \frac{1}{\gamma \cdot \sqrt{2}} \ln \left( 1 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \quad (12)$$

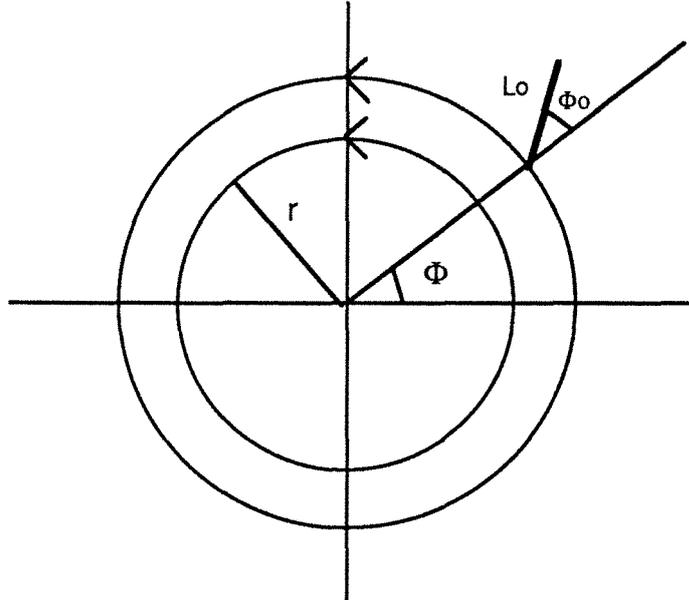
avec  $\gamma = \dot{\gamma}T$ .

### III.A.2 Cas de l'écoulement de type vortex

Plaçons nous, à présent, dans un cas d'écoulement de type vortex. Les lignes de courant sont circulaires et concentriques. La vitesse d'une particule placée à une distance  $r$  du centre est proportionnelle à  $1/r$ . Les vitesses radiale et tangentielle sont données par les deux expressions suivantes:

$$\begin{aligned} V_r &= 0 \\ V_\phi &= \omega / r \end{aligned} \quad (13)$$

L'écoulement est représenté sur la figure 3.4.



**Figure 3.4 : Position initiale d'un segment de traceur de longueur  $l_0$**

Le segment de traceur de longueur initiale  $L_0$  est étiré dans le vortex; en effet, l'extrémité proche du centre se déplace plus rapidement que l'autre extrémité. Un calcul simple permet, comme dans l'écoulement précédent, d'évaluer l'étirement relatif pendant un temps  $t$ :

$$\frac{l}{l_0} = \sqrt{(\dot{\gamma}t)^2 \cdot \cos^2 \Phi_0 - \dot{\gamma}t \cdot \sin 2\Phi_0 + 1} \quad (14)$$

avec  $\dot{\gamma} = \frac{\omega}{r^2}$

Le rapport  $\frac{\dot{L}}{L}$  s'exprime alors par :

$$\frac{\dot{L}}{L} = \frac{\dot{\gamma} \cdot (\dot{\gamma}t \cdot \cos^2 \Phi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\Phi_0)}{(\dot{\gamma}t)^2 \cdot \cos^2 \Phi_0 - \dot{\gamma}t \cdot \sin 2\Phi_0 + 1} \quad (15)$$

Le calcul des termes du tenseur des déformations  $D$  est réalisé en coordonnées polaires  $(r, \Phi)$  et correspond à:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \frac{\omega}{r^2} \\ -\frac{1}{2} \frac{\omega}{r^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Sa norme est identique à celle trouvée pour l'écoulement plan soit:

$$\dot{\gamma}/\sqrt{2} \quad (17)$$

La même expression est obtenue pour le critère  $e_r$  défini pour une période de temps  $T$ :

$$e_r = \frac{1}{\gamma \cdot \sqrt{2}} \ln \left( 1 + \frac{\gamma^2}{4} \right) \quad (18)$$

avec  $\gamma = \dot{\gamma}T$ .

### III.A.3 Conséquences pratiques

La figure 3.5 représente la variation de l'efficacité moyenne d'étirement en fonction de  $\gamma$ .

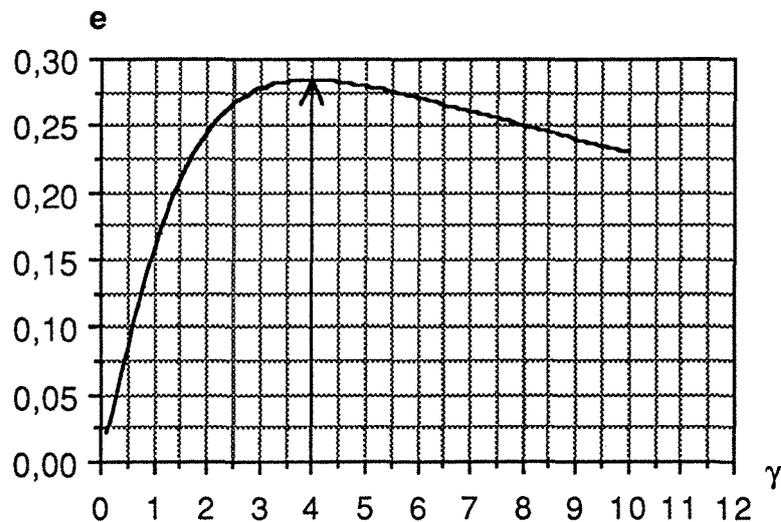


Figure 3.5 : Efficacité moyenne d'étirement en fonction du paramètre  $\gamma$ .

Les deux critères d'efficacité  $e_t$  et  $e_r$  sont "curieusement" identiques dans les deux écoulements étudiés. En réalité ce résultat peut, qualitativement, se comprendre si l'on compare localement les deux contraintes (plane et circulaire) auxquelles le fluide est soumis. L'appareil de Couette a été inventé dans le but de créer localement un écoulement plan !

La courbe  $e = f(\gamma)$  passe par un maximum pour  $\gamma = 4$ . En effet, pour une valeur de  $\gamma$  égale à zéro, l'efficacité est par définition nulle. Pour des valeurs de  $\gamma$  importantes, l'efficacité chute très

rapidement vers zéro ( $e \sim 1/\sqrt{2\dot{\gamma}}$ ). La fonction  $e$  étant strictement positive, il existe un maximum entre ces deux bornes. La décroissance de  $e$  pour des valeurs de  $\dot{\gamma}$  supérieures à 4 signifie que la rotation simple (ou l'étirement entre deux plans) est un protocole à proscrire. Par exemple, le mélange entre deux cylindres centrés en rotation constante est très peu efficace, le traceur s'étire de façon proportionnelle au nombre de tours effectués. Ainsi l'étirement devient très rapidement proportionnel au temps : l'efficacité devient nulle. Il convient donc d'arrêter, pour un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  donné, le processus d'étirement à un temps égal à  $4/\dot{\gamma}$ .

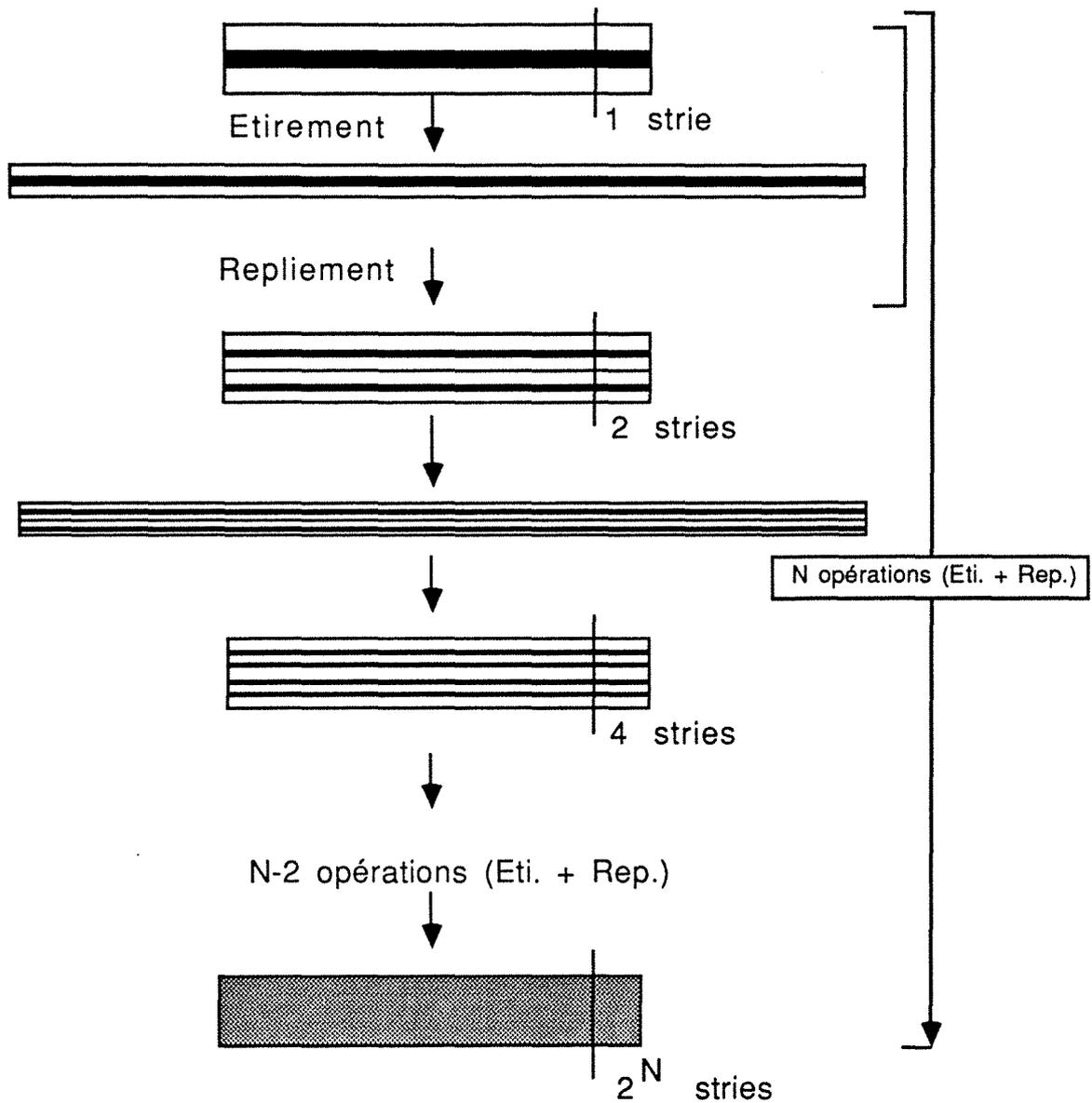
Nous remarquons donc que l'étirement seul ne conduit pas rapidement à une situation de mélange, il est nécessaire de modifier les lignes de courant par changement des conditions aux parois.

### III.B - REPLIEMENT : SECONDE CONDITION POUR UN MELANGE EFFICACE

Le fluide, après avoir été suffisamment étiré, doit voir sa géométrie modifiée. Ce changement doit être effectué pour permettre à l'étirement suivant d'allonger, non pas une ligne de fluide, mais deux (le double).

Cette technique, dite d'étirement-repliement, est utilisée depuis fort longtemps par les boulangers. En effet, pour incorporer au sein de la pâte à pain la farine, par exemple, le boulanger étire cette pâte au rouleau, puis la replie une ou deux fois. Il recommence alors le processus et ceci plusieurs fois de suite.

Le processus est résumé sur la figure 3.6. En considérant une section du fluide à l'intérieur de laquelle une bande de colorant est placée, il est possible de décrire la répartition du traceur à chaque itération. A la fin de la première séquence étirement/repliement le nombre de bandes de colorant est de deux. Ce nombre est de quatre à la seconde séquence. Il est évident, par récurrence, que ce nombre sera de  $2^N$  après  $N$  itérations (cf. SMALE 1980).



**Figure 3.6 : Mécanisme de mélange par séquences successives d'étirement et de repliement**

Cette croissance est exponentielle. Elle permet un mélange, en principe, très rapide, intéressant dans le cas de pâtes très visqueuses. Il faut remarquer que seulement 10 itérations créent plus de 1000 stries au sein du fluide.

Cette redistribution des lignes de fluide est donc à utiliser pour permettre un bon mélange. Elle permet, associée à un étirement simple, de générer des filets de fluide très étirés dont le nombre augmente exponentiellement.

Ce sont ces concepts simples qui seront appliqués plus loin au système bicylindrique.

Notons qu'il n'existe pas actuellement de critère réellement efficace pour quantifier un processus de création de mélange pour un protocole quelconque donné.

## Chapitre 2

### ETUDES NUMERIQUES DU SYSTEME EN 2D

the 1990s, the number of people in the population aged 65 and over has increased from 10.5 million to 15.5 million, and the number of people aged 75 and over has increased from 5.5 million to 8.5 million (Department of Health 2000). The number of people aged 65 and over is projected to increase to 20.5 million by 2020, and the number of people aged 75 and over to 12.5 million (Department of Health 2000).

There is a growing awareness of the need to address the health care needs of older people, and a number of initiatives have been launched to address this need. The Department of Health has established the Older People's Unit, which is responsible for the development of policies and programmes to improve the health care of older people. The Older People's Unit has established the Older People's Health Care Strategy, which sets out the Department's commitment to improve the health care of older people. The Older People's Health Care Strategy is based on the following principles:

### 3.1.1. The Older People's Health Care Strategy

The Older People's Health Care Strategy is based on the following principles:

- To ensure that older people have access to the same quality of health care as other people.
- To ensure that health care is tailored to the needs of older people.
- To ensure that health care is delivered in a way that is respectful of older people's dignity and autonomy.
- To ensure that health care is delivered in a way that is accessible to older people.
- To ensure that health care is delivered in a way that is affordable to older people.

### 3.1.2. The Older People's Health Care Strategy: Key Messages

The Older People's Health Care Strategy sets out the following key messages:

- Older people should be treated as individuals, not as a homogeneous group.
- Health care should be tailored to the needs of older people.
- Health care should be delivered in a way that is respectful of older people's dignity and autonomy.
- Health care should be delivered in a way that is accessible to older people.
- Health care should be delivered in a way that is affordable to older people.

The Older People's Health Care Strategy is a key document in the development of policies and programmes to improve the health care of older people. It sets out the Department's commitment to improve the health care of older people, and provides a framework for the development of policies and programmes to achieve this goal.

### 3.1.3. The Older People's Health Care Strategy: Key Messages (continued)

The Older People's Health Care Strategy sets out the following key messages:

- Older people should be treated as individuals, not as a homogeneous group.
- Health care should be tailored to the needs of older people.
- Health care should be delivered in a way that is respectful of older people's dignity and autonomy.
- Health care should be delivered in a way that is accessible to older people.
- Health care should be delivered in a way that is affordable to older people.

## I. RAPPELS CONCERNANT L'ÉCOULEMENT DE COUETTE

Le comportement dynamique de fluides, placés au contact de corps solides en mouvement est, encore aujourd'hui, imparfaitement compris. Un des sujets les plus intéressants, car un des plus fondamentaux, est sans nul doute l'écoulement d'un fluide placé entre deux plans parallèles infinis en mouvement l'un par rapport à l'autre. Les conditions aux limites sont ici particulièrement simples et conduisent aisément aux équations régissant l'écoulement de Couette (1890). Le problème fut étudié dès la fin du siècle dernier. Rayleigh (1916), Sommerfeld (1904) et Orr (1907) en fournirent les premières bases théoriques.

Si la théorie avançait à grand pas, il n'en était pas de même de l'expérimentation du fait de l'impossibilité matérielle de réalisation d'une telle géométrie. Ce problème fut alors partiellement contourné grâce à l'étude de l'écoulement imaginé par Lord Rayleigh, c'est-à-dire la circulation d'un fluide placé entre deux cylindres coaxiaux de longueur infinie. Expérimentalement, une telle géométrie pouvait être conçue, à condition de prendre pour longueur de ces cylindres une valeur très supérieure aux rayons de ceux-ci. Enfin, de manière à s'approcher des conditions présentes dans l'écoulement plan sur plan, la géométrie fut remodifiée afin de réduire l'espace annulaire situé entre les deux cylindres. Il s'agit de l'écoulement dit de "Couette" dans lequel, localement, les conditions aux parois sont sensiblement analogues aux conditions plan sur plan.

Un des problèmes majeurs, rencontrés en mécanique des fluides, est celui de la compréhension des transitions entre régimes d'écoulement ainsi que la formulation de critères efficaces caractérisant la stabilité de cet écoulement. Le critère, défini par Reynolds (1883) issu des expériences faites en conduites cylindriques, permet de quantifier pour la première fois l'état de régime d'un écoulement. Ce critère compare l'inertie de la masse de fluide en mouvement aux forces visqueuses engendrées par la nature même du fluide. Il fournit au physicien la possibilité de prévoir relativement correctement, pour une configuration donnée, le régime de l'écoulement.

Lord Rayleigh déduit de ses recherches sur l'écoulement entre deux cylindres de rayons  $R_1$  et  $R_2$  soumis aux vitesses angulaires  $\omega_1$  et  $\omega_2$  le critère de stabilité hydrodynamique suivant:  $\omega_1 \cdot (R_1)^2 < \omega_2 \cdot (R_2)^2$ . Ce critère ne permet pas dans tous les cas rencontrés de prédire avec précision le comportement du fluide.

Taylor (1923) publie une étude très détaillée concernant l'écoulement de Couette. Il décrit les différentes transitions intervenant dans la structure du fluide lors d'une augmentation progressive de la vitesse angulaire des cylindres, l'espace entre les deux cylindres étant supposé faible vis-à-vis des rayons  $R_1$  et  $R_2$ . Aux faibles vitesses l'écoulement est laminaire, toutes les vitesses se distribuent parallèlement aux génératrices des deux cylindres. Pour un fluide de viscosité cinématique  $\nu$ , à partir d'une vitesse critique reliée au paramètre critique de Taylor (sensiblement égal à  $\omega_1 \omega_2 R_1^4 / \nu^2$ ), la structure du film liquide se complique singulièrement. A l'écoulement purement laminaire vient se superposer une structure tourbillonnaire : il s'agit de l'écoulement dit des "Vortex de Taylor". A des vitesses plus élevées, la structure précédemment décrite perd sa régularité et l'écoulement peut alors devenir turbulent.

L'approche théorique du problème, vérifiée expérimentalement par Taylor et par Lewis (1927), fut complétée par Synge (1938), dans le cas où l'approximation de faible écart des rayons  $R_1$  et  $R_2$  n'est plus réalisée.

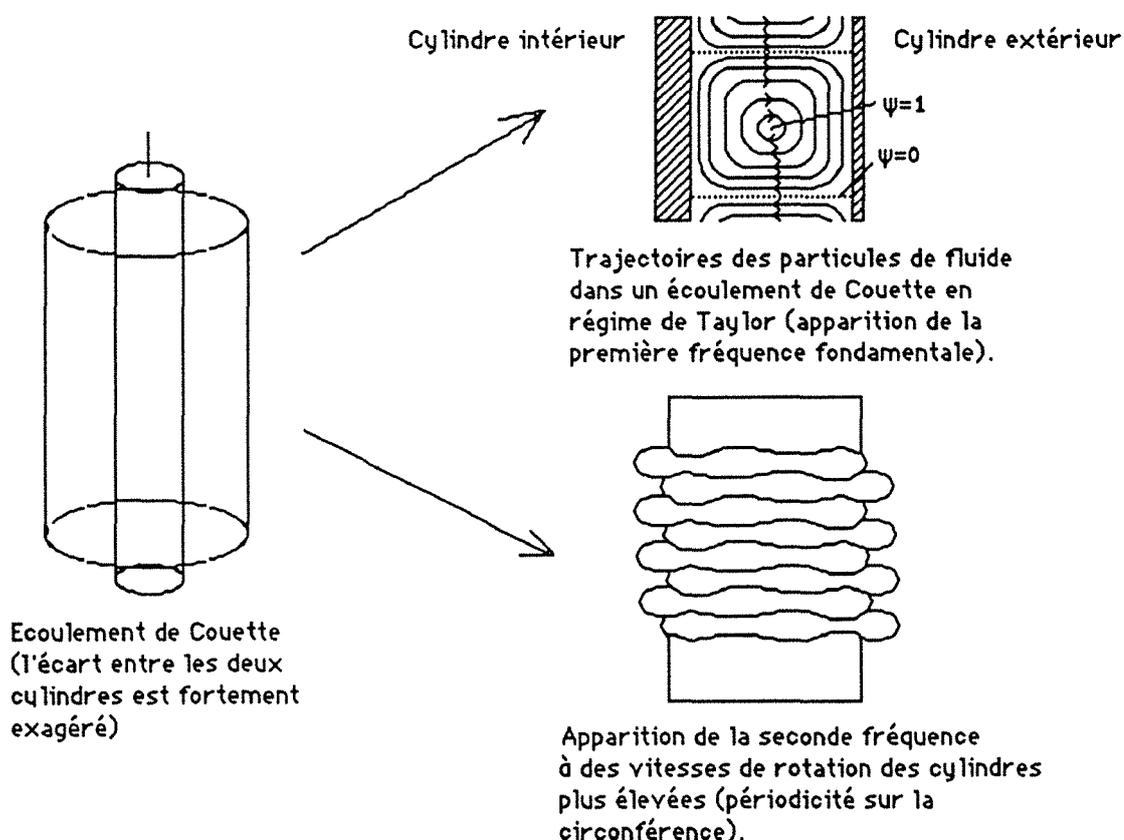
Des équipes comme celles de Diprima (1972) ou de Cole (1976) étudièrent le système mécanique des deux cylindres coaxiaux expérimentalement et théoriquement en utilisant les méthodes variationnelles.

Parallèlement aux travaux des physiciens s'élaborent des théories mathématiques traitant des fondements de la stabilité hydrodynamique. Citons, par exemple, le travail de Lin (1955) et surtout celui de Chandrasekhar (1961).

Les expériences réalisées par Donnelly sur l'écoulement de Couette, mirent en évidence une stabilisation grâce à la modulation sinusoïdale des vitesses de rotation des cylindres. Ce physicien fut l'un des premiers à étudier les effets hydrodynamiques par le biais de l'analyse en fréquences des différents paramètres décrivant le système. Le travail de Coles (1965) donne une représentation détaillée des transitions de régime apparaissant dans le cadre de la théorie spectrale. Il a identifié deux types de transitions particulières dans l'écoulement de Couette. La première, appelée "transition par évolution spectrale", est obtenue lorsque la vitesse de rotation du cylindre interne est très largement supérieure à celle du cylindre externe, c'est-à-dire loin de la condition définie par Rayleigh. Dans ce cas de figure, la première fréquence apparaît avec le régime de Taylor, elle est périodique dans la direction axiale, la seconde s'établit à des vitesses plus élevées ; elle

correspond à une propagation au sein du fluide d'ondes périodiques sur la circonférence. Les modes supplémentaires ne sont que des harmoniques des deux fréquences fondamentales. La seconde transition appelée "catastrophique" intervient dans le cas où la vitesse de rotation du grand cylindre est grande vis-à-vis de celle du petit cylindre. L'écoulement se scinde en deux régions distinctes, l'une proche du cylindre intérieur qui semble être laminaire et une seconde région dans laquelle l'écoulement est franchement turbulent, l'interface entre ces deux parties se déplace en fonction des conditions de vitesses des cylindres. Une des figures caractéristiques d'un tel écoulement est une spirale dite de turbulence .

De ces diverses constatations, il apparaît que le phénomène de transition du régime laminaire au régime turbulent, pour une géométrie aussi simple que celle des cylindres de Couette, fait intervenir une multitude de processus complexes (voir figure 4.1).

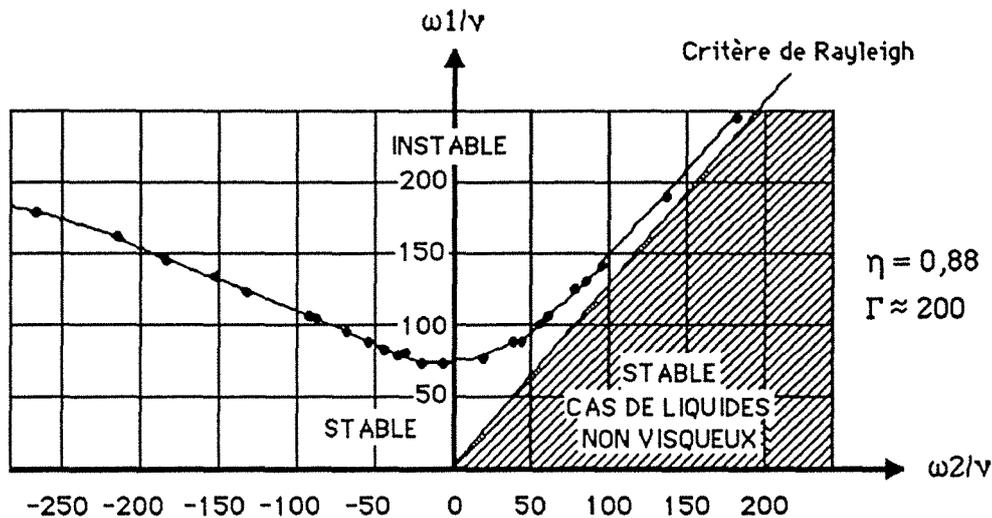


**Figure 4.1 : Deux cas typiques de régimes d'écoulement dans la géométrie de Couette**

Essayer de comprendre le mécanisme de formation de ces divers régimes n'est pas chose aisée. Nous savons que le facteur primordial, responsable de telles transitions, réside dans la non-

linéarité du problème. On peut donc raisonnablement interpréter le passage linéaire/turbulent comme une cascade de processus dans laquelle l'énergie est transférée par interactions non linéaires d'un spectre discret de fréquences à un spectre continu.

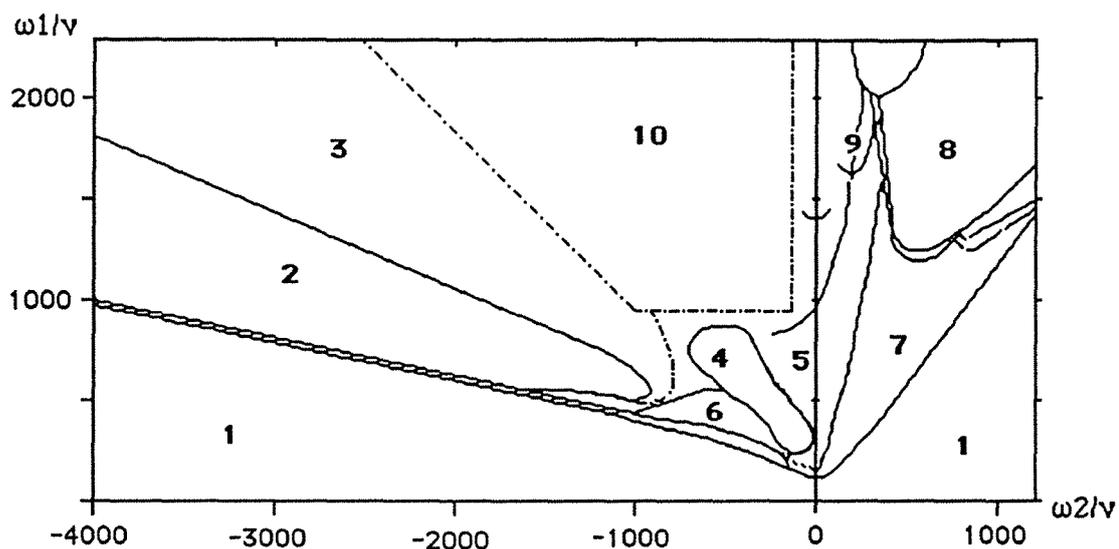
Le schéma 4.2, issu des expériences de Taylor (1923), donne une première représentation du comportement d'un fluide placé dans l'appareil de Couette.



**Figure 4.2 :** Diagramme de stabilité de l'écoulement en géométrie bicylindrique centrée (Taylor 1923)

- $\omega_1$  Vitesse de rotation angulaire du cylindre intérieur
- $\omega_2$  Vitesse de rotation angulaire du cylindre extérieur
- $\eta$  Rapport des rayons des cylindres ( $R_1/R_2$ )
- $\Gamma$  Rapport de la longueur des cylindres sur leur diamètre
- $\nu$  Viscosité cinématique du fluide ( $\text{cm}^2/\text{s}$ )

Les transitions de régime apparaissent assez simplement dans la figure 4.2. En réalité les diverses possibilités d'écoulement ne sont pas répertoriées ici. Une étude plus approfondie a été effectuée par l'équipe de Andereck (1986). Celle-ci prolonge le travail de Taylor à des vitesses de rotation beaucoup plus élevées. Il apparaît alors toute une série complexe de régimes caractérisant l'écoulement. Le schéma de la figure 4.3 présente la diversité des situations possibles dans un écoulement qui aurait pu, a priori, sembler très simple et facilement prédictible.



**Figure 4.3 : Diagramme de stabilité en géométrie de Couette**  
 (d'après les récents travaux de C.D. Andereck)  
 (mêmes paramètres que pour la figure 4.2)

A chaque région du diagramme correspond un type d'écoulement particulier. La partie n°10 est une région non explorée totalement.

Ainsi ces différentes études montrent que la simplicité des conditions aux limites dans un écoulement n'est pas associée à la simplicité des régimes hydrodynamiques. Aussi, dans l'étude qui sera menée avec la géométrie non centrée, nous limiterons-nous à des conditions de vitesses faibles aux parois pour maintenir, à tout instant, des conditions de régime laminaire.

## II. ETUDE NUMERIQUE PRELIMINAIRE D'UN ECOULEMENT EN GEOMETRIE CARREE (CAS SIMPLISSIME)

La lecture des études faites en géométrie cylindrique centrée a apporté plusieurs résultats importants concernant les transitions possibles lors du passage de l'état laminaire à l'état turbulent.

Notamment, des conclusions fondamentales ont pu être tirées en ce qui concerne l'existence et l'apparition de fréquences particulières intervenant lors des différentes transitions.

De façon similaire, le système bicylindrique excentré est étudié expérimentalement et numériquement avec pour toile de fond les relations entre les transitions de régimes et les fréquences.

Nous pensons, à l'instar de plusieurs scientifiques tels Aref (1984), Ottino (1989), Chaiken (1986) que la création de fréquences particulières au sein d'un écoulement peut entraîner la formation d'un état de mélange même en régime purement laminaire.

C'est la raison pour laquelle nous nous intéressons à l'effet de l'addition de fréquences adéquates à un régime bidimensionnel laminaire simple. Avant d'aborder le problème bicylindrique, celui, plus académique, de la mise en équation d'un écoulement en géométrie carrée est traité ci-après.

### **I.A - MISE EN EQUATION DU SYSTEME**

La première étude menée concerne une géométrie plus simple que celle du Couette excentré. Le but de cette pré-étude est d'analyser numériquement le comportement en deux dimensions d'un fluide visqueux newtonien dans une cuve à section carrée. Une des parois est mobile, ce qui est une condition nécessaire afin d'obtenir une vitesse aux limites non nulle. Le système de coordonnées cartésiennes est défini figure 5.1.

Le vecteur vitesse  $\mathbf{U}$  possède deux composantes  $u$  et  $v$ .  
Le domaine occupé par le fluide est appelé  $D$ .

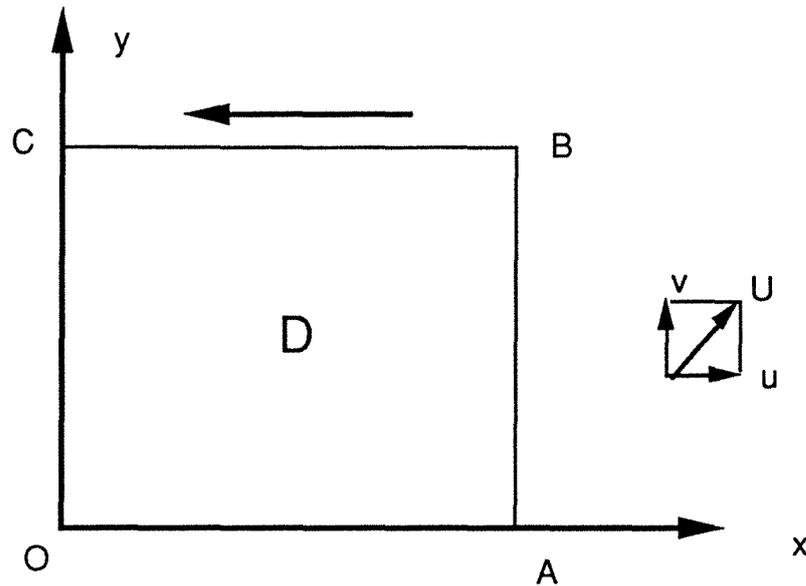


Figure 5.1 : Géométrie carrée

CB est le côté mobile; la flèche indique le sens et la direction des vitesses.

Les conditions aux limites choisies sont les suivantes :

- Sur le côté OA  $\Rightarrow u = v = 0$
- Sur le côté AB  $\Rightarrow u = v = 0$
- Sur le côté CB  $\Rightarrow v = 0$  et  $u=f(x)\neq 0$
- Sur le côté OC  $\Rightarrow u = v = 0$

La vitesse  $u$  sur le côté CB du carré est non nulle et variable en fonction de  $x$ , il ne s'agit donc pas de l'étude d'un déplacement en bloc du mur supérieur. En réalité, les vitesses sur ce mur sont variables en fonction de  $x$ , afin d'éliminer toute discontinuité des conditions de vitesses sur les deux sommets B et C. Elles sont fixées à zéro. La forme de  $u(x)$ , la plus simple, est alors la suivante :

$$u(x) = -16x^2(1-x)^2 \quad (1)$$

La représentation de cette fonction est faite sur la figure 5.2.

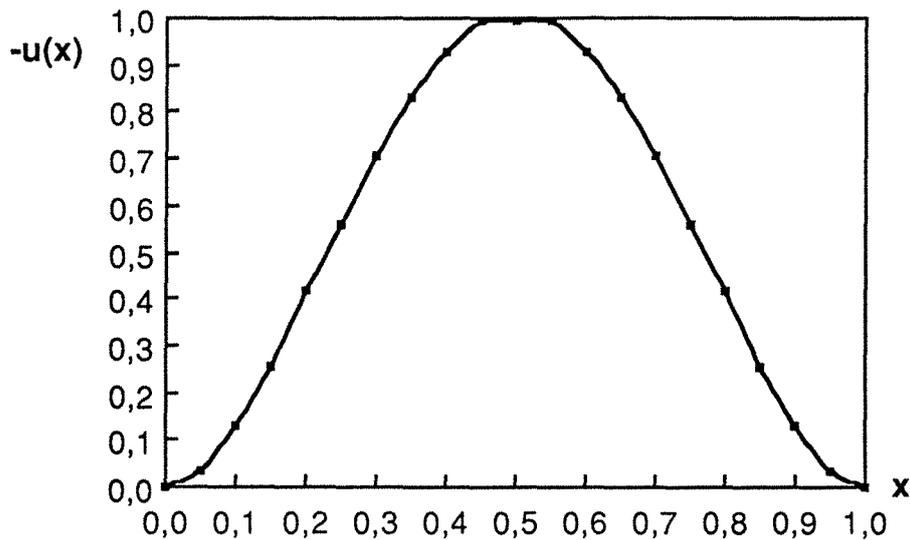


Figure 5.2 : Profil de vitesse u sur la paroi supérieure

Cette fonction vérifie les deux conditions citées précédemment, elle a de plus l'avantage d'être inférieure à 1 en valeur absolue.

Notre travail a pour but, à travers l'analyse numérique, de rendre compte du mouvement induit au sein du liquide par le mouvement de la paroi. Pour cela, une fonction dite de courant (notée  $\psi$ ) caractérisant, en tout point, le mouvement du fluide est recherchée. Cette fonction est définie à l'aide du système de coordonnées cartésiennes selon :

$$\psi = \psi(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \quad (2)$$

Cette fonction, définissant le mouvement, correspond à l'intégrale spatiale première de la vitesse. Nous pouvons, de manière symétrique, définir la dérivée première des vitesses. Le vecteur  $\omega$  dit de "tourbillon" se calcule en prenant le rotationnel de la vitesse.

$$\vec{\omega} = \text{rot}(\vec{U}) \quad (3)$$

Il est évident que, dans le système étudié (2D), le vecteur  $\omega$  est constamment perpendiculaire au plan des vitesses. Le champ du rotationnel est donc un champ scalaire. Les deux fonctions  $\psi$  et  $\omega$  peuvent être reliées :

$$\begin{aligned}\omega = \text{rot}(U) &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Delta\psi\end{aligned}$$

Soit  $\underline{\omega + \Delta\psi = 0}$  (4)

L'équation fondamentale régissant l'écoulement est l'équation de Navier-Stokes. Celle-ci, dans notre cas, prend la forme suivante (pour le rotationnel  $\omega$ ):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega \quad (5)$$

avec  $\nu$  coefficient de viscosité cinématique.

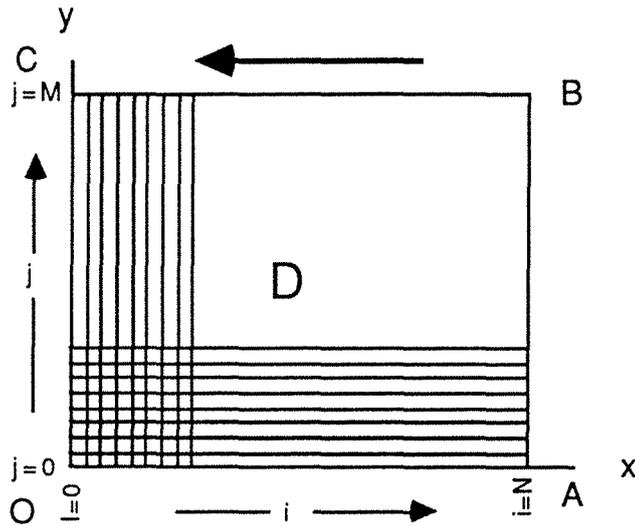
Parallèlement, l'équation (4) appelée équation de Poisson, fournit la possibilité de calculer les valeurs de la fonction potentielle  $\psi$  en tout point du domaine D.

Le calcul de l'écoulement est ici relativement simple. Une méthode aux différences finies itérative directe sous relaxée est utilisée.

## II.B - DISCRETISATION DU PROBLEME

### II.B.1 Maillage du domaine

Le domaine étudié est découpé en  $N \times M$  régions de l'espace suivant le schéma ci-dessous :



Le calcul des différents paramètres ( $u, v, \psi, \omega$ ) est réalisé aux sommets de chaque rectangle d'espace. Ces fonctions sont dépendantes de trois variables :

$i, j$  pour les variables d'espace  
 $n$  pour le temps

On notera la valeur de la fonction de courant pour le point de coordonnées  $(i, j)$  au pas de temps  $n$  par  $\psi^n_{i,j}$

### II.B.2 Discrétisation des équations

Pratiquement le système se résoud sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \Delta \omega \quad (6a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + C \cdot (\Delta \psi + \omega) = 0 \quad (6b)$$

avec  $C$ : constante arbitraire non nulle.

La première équation est l'équation de Navier-Stokes, le terme  $\partial \omega / \partial t$  s'interprétant comme un compteur d'itérations.

La seconde équation est fictive, en réalité on la résoud de manière itérative afin de converger vers une solution stationnaire.

C'est cette solution qui fournit les valeurs correspondantes du potentiel. Là encore le premier terme joue le rôle de compteur d'itérations.

Il faut à présent discrétiser chaque dérivée , c'est-à-dire linéariser au premier ou second ordre les expressions différentielles.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n}{k} + 0(\Delta t) \quad (7)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + 0(\Delta x^2) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + 0(\Delta y^2) \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = \frac{\omega_{i+1,j}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + 0(\Delta x^3) \quad (10)$$

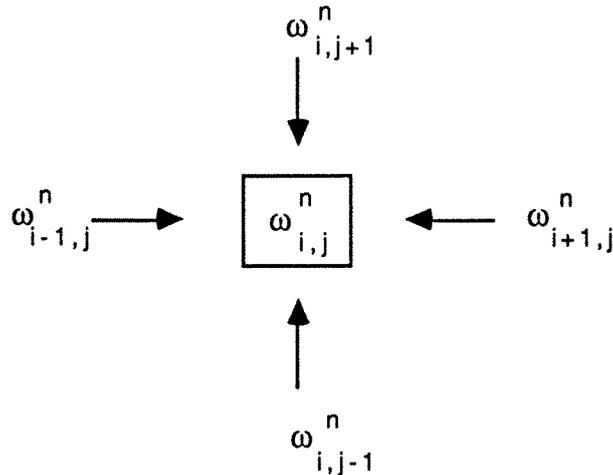
$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} + 0(\Delta y^3) \quad (11)$$

La "cuve" étant carrée nous prendrons pour  $\Delta x$  et  $\Delta y$  la même valeur égale à  $h$  ( $h=1/(N+1)$ ).

L'équation de Navier Stokes prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^{n+1} = & \omega_{i,j}^n - \frac{k}{2h} u_{i,j}^n (\omega_{i+1,j}^n - \omega_{i-1,j}^n) - \frac{k}{2h} v_{i,j}^n (\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n) \\ & + \frac{vk}{h^2} (\omega_{i+1,j}^n + \omega_{i-1,j}^n + \omega_{i,j+1}^n + \omega_{i,j-1}^n - 4\omega_{i,j}^n) \end{aligned} \quad (12)$$

Le calcul de  $\omega_{i,j}^n$  est explicite et centré en espace . Il est effectué à chaque pas de temps.



**Figure 5.3 :** Calcul de la valeur de  $\omega$  en  $i,j$  à partir des valeurs voisines

Parallèlement l'équation de Poisson fournit la valeur de la fonction de courant. La discrétisation conduit à l'expression suivante :

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^n + \frac{kC}{2} (\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n - 4\psi_{i,j}^n) + C\omega_{i,j}^n \quad (13)$$

Le calcul se fait rapidement en quelques itérations. Etant donnée la simplicité du cas étudié, la convergence est assurée pour environ dix itérations sur le calcul de  $\omega$ .

Pour le calcul de la vitesse  $U$  nous utilisons la définition même de la fonction de courant :

$$u_{i,j}^{n+1} \Rightarrow \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1}}{2h} \quad (14)$$

$$v_{i,j}^{n+1} \Rightarrow -\frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1}}{2h} \quad (15)$$

Les conditions aux limites sont obtenues par un développement au second ordre de la fonction de courant. On obtient:

$$\omega_{i,0}^{n+1} = \frac{1}{2h^2} (-8\psi_{i,1}^{n+1} + \psi_{i,2}^{n+1}) \quad (16)$$

$$\omega_{0,j}^{n+1} = \frac{1}{2h^2} (-8\psi_{1,j}^{n+1} + \psi_{2,j}^{n+1}) \quad (17)$$

$$\omega_{N,j}^{n+1} = \frac{1}{2h^2} (-8\psi_{N-1,j}^{n+1} + \psi_{N-2,j}^{n+1}) \quad (18)$$

$$\omega_{i,M}^{n+1} = \frac{1}{2h^2} (-8\psi_{i,M-1}^{n+1} + \psi_{i,M-2}^{n+1} - 6hf(ih)) \quad (19)$$

### II.B.3 Conditions initiales

Afin d'accélérer le calcul global, les conditions initiales sont prises non nulles. L'exemple donné par Euvrard (1988) a été retenu :

$$\psi_{i,j}^0 = -16y^2(y-1).x^2(1-x)^2 \quad (20)$$

$$u_{i,j}^0 = -16y(3y-2).x^2(1-x)^2 \quad (21)$$

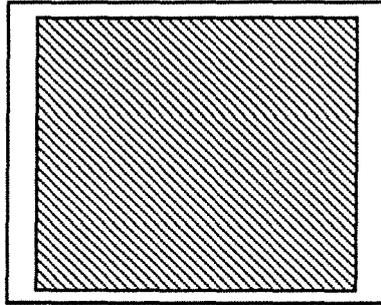
$$v_{i,j}^0 = -32y^2(y-1).x(1-x)(2x-1) \quad (22)$$

$$\omega_{i,j}^0 = 32y^2(y-1).(6x^2-6x+1)+32(3y-1)x^2(1-x)^2 \quad (23)$$

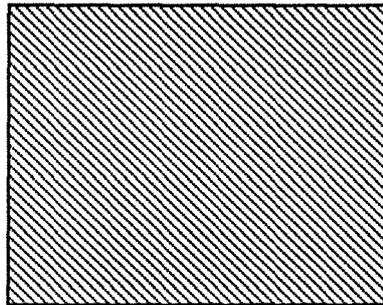
### II.B.4 Organigramme

L'organigramme utilisé s'inspire largement de celui décrit par Roache (1972). Afin de calculer les valeurs recherchées de  $u, v, \omega, \psi$  on procède par itérations successives. Dans le cas de la cuve à section carrée le problème se simplifie notablement ; en effet, une seule boucle dans le calcul de  $\omega$  suffit pour assurer la convergence du calcul global.

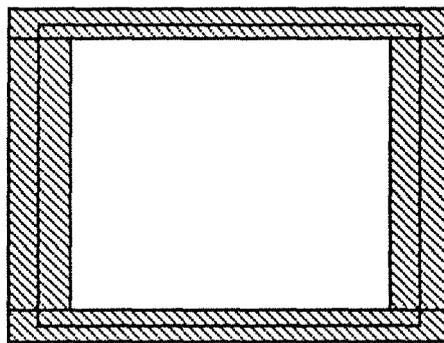
A partir des conditions initiales fixées, on calcule tout d'abord le rotationnel  $\omega$  grâce à l'équation (6a) à l'intérieur du domaine D (voir ci après):



Le calcul de  $\psi$  est réalisé en une seule fois grâce à l'équation de Poisson sur tout le domaine  $D$ . A l'aide des valeurs de  $\psi$  calculées on détermine les vitesses  $u$  et  $v$ .



Enfin, grâce aux valeurs de la fonction de courant ainsi que celles du rotationnel précédemment calculées, on résoud  $\omega$  aux parois.



Une fois toutes ces opérations effectuées, on reprend le calcul complet en prenant comme nouvelles valeurs initiales les valeurs précédemment calculées de  $\omega, \psi, u, v$ .

Les résultats sont conservés lorsque le critère de convergence est atteint. On se fixe comme objectif de réduire l'écart entre deux valeurs successives calculées de  $\omega$  en un point donné du domaine  $D$  à quelques pour-cent des valeurs de  $\omega$ .

La figure 5.4 résume l'organigramme utilisé pour le calcul global de l'écoulement. Cet organigramme sera conservé dans le cadre de l'écoulement bicylindrique.

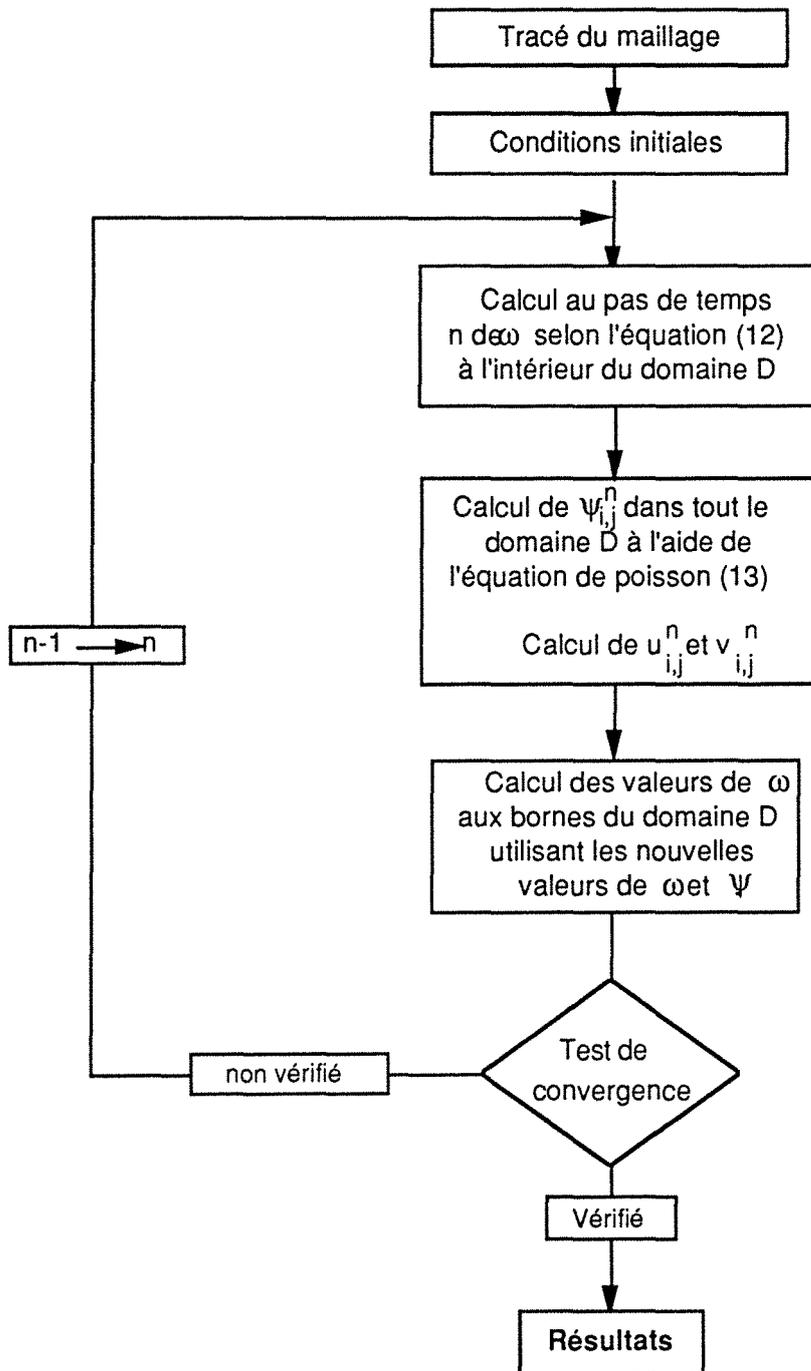


Figure 5.4 : Organigramme de calcul

## II.C - RESULTATS

La valeur du nombre de Reynolds est définie par la relation suivante:

$$Re = \frac{|U|.L}{\nu} \quad (24)$$

Re est fixé à 100. Les valeurs de  $|U|$  et  $|L|$  sont prises égales à 1 ce qui correspond pour U au maximum en valeur absolue. Le côté de la cuve a pour dimension L.

La valeur limite du pas de temps  $k$  à partir duquel, pour un maillage donné, il y a convergence du calcul, est déterminée. Dans le cas du maillage 20x20, une valeur de  $k$  égale à 1/50 assure une convergence rapide (un essai réalisé avec  $k=1/10$  montre cette fois une divergence rapide du calcul).

Nous obtenons finalement les valeurs des fonctions  $u, v, \psi, \omega$  à chaque noeud du maillage (pour un maillage 20x20 cela donne 441 points de calcul). Afin d'obtenir les lignes de courant du fluide en mouvement il reste à tracer les courbes d'iso-valeurs de la fonction  $\psi$  (cf. figure 5.7)

A titre d'information les valeurs de  $\psi$  sur la ligne ( $j=8$ ) et sur la colonne ( $i=8$ ) correspondant au maximum de  $\psi$  sont tracées sur la figure 5.5.

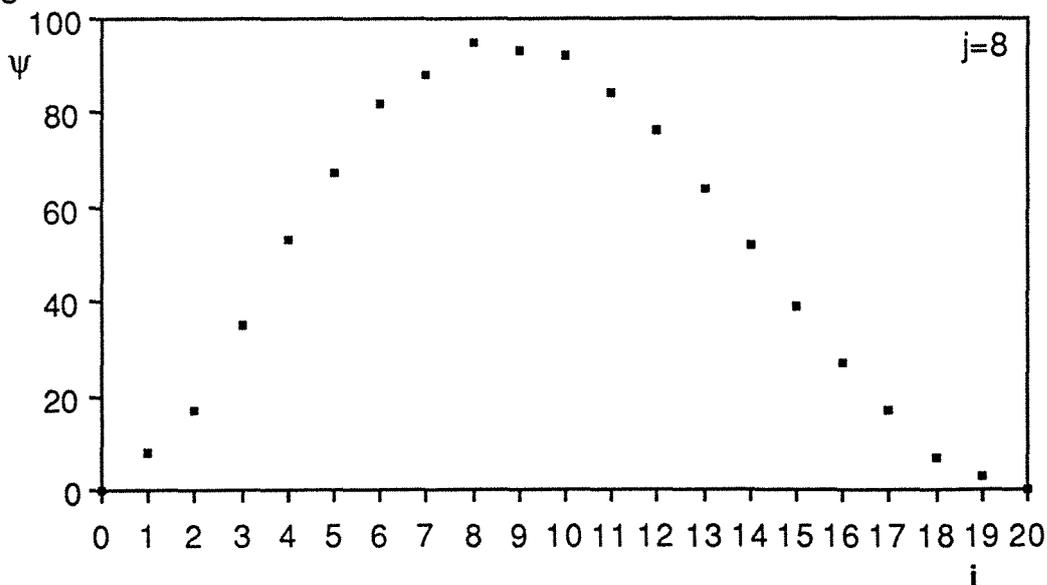


Figure 5.5 : profil de la fonction de courant en  $j=8$  en fonction de  $i$ .

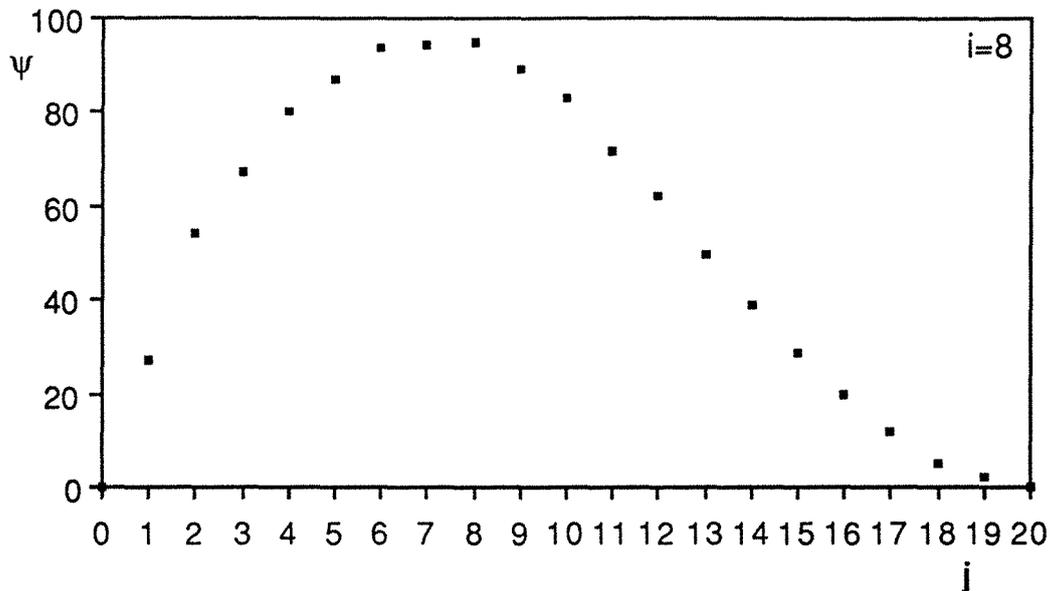


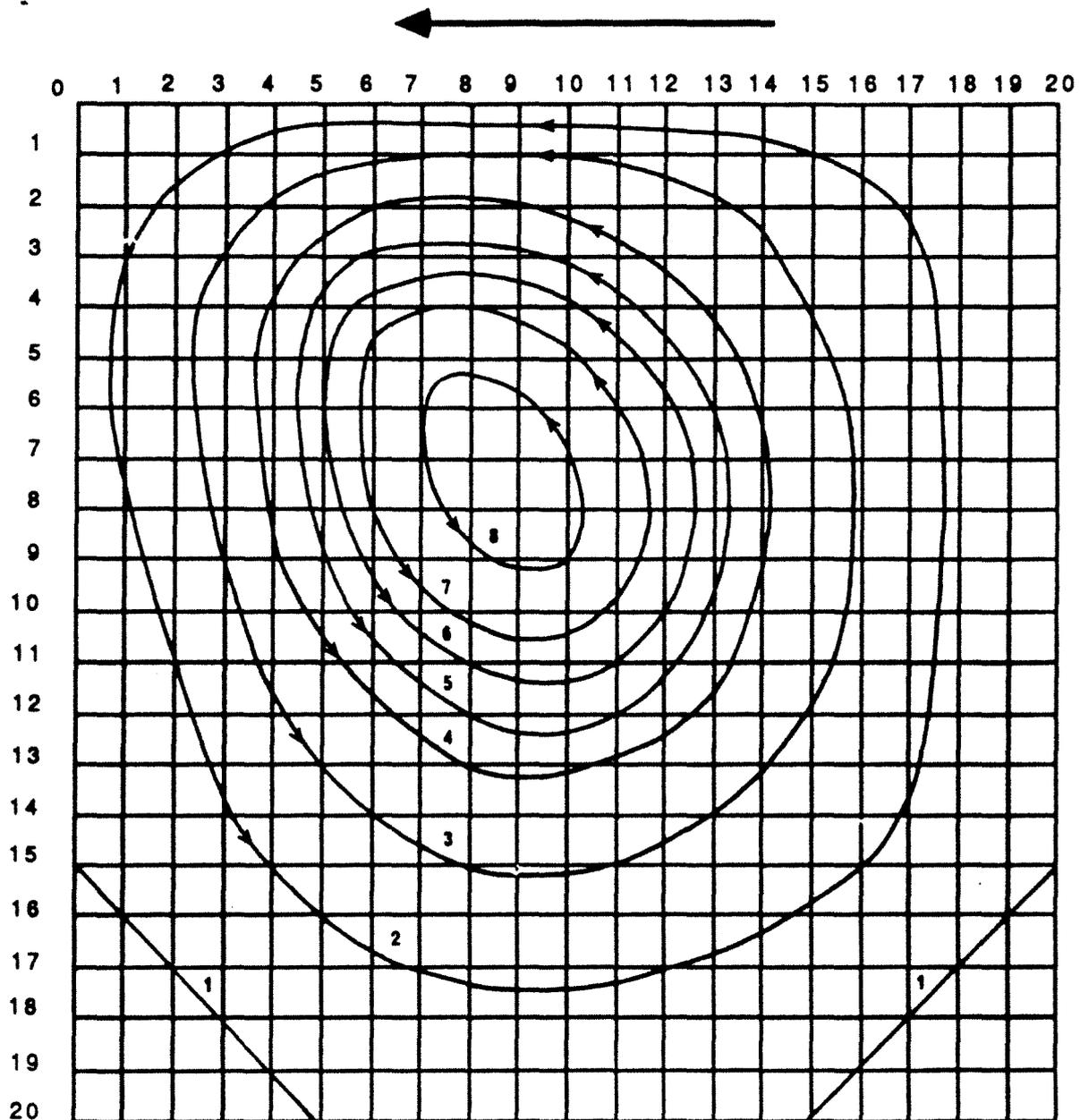
Figure 5.6 : profil de la fonction de courant en i=8 en fonction de j

Les lignes de courant, visibles sur la figure 5.7, tangentes à la paroi supérieure le long de celle-ci, bouclent sur elles-mêmes à l'intérieur de la cuve. Le centre du vortex ainsi créé, ne se situe pas au centre de la cuve, mais décalé vers le haut et la gauche de celle-ci. Ce décalage provient de la non-symétrie des conditions aux parois.

Grâce à cette pré-étude nous avons pu mettre en évidence plusieurs problèmes liés au traitement numérique de telles équations.

- Définition d'un maillage adapté à la géométrie. (système de coordonnées adapté),
- Discrétisation du problème (différences finies),
- Convergence et rapidité de calcul.

Ce type de calcul sera appliqué plus loin au système bicylindrique .



1	$\Psi = 0$	4	$\Psi = 0,050$	7	$\Psi = 0,080$
2	$\Psi = 0,010$	5	$\Psi = 0,060$	8	$\Psi = 0,090$
3	$\Psi = 0,030$	6	$\Psi = 0,070$		

Figure 5.7 : Courbes iso-psi pour la géométrie carrée  
 (Seul la paroi supérieure est mobile)  
 maillage 20x20

### III. SOLUTION ANALYTIQUE EN GEOMETRIE BIPOLAIRE

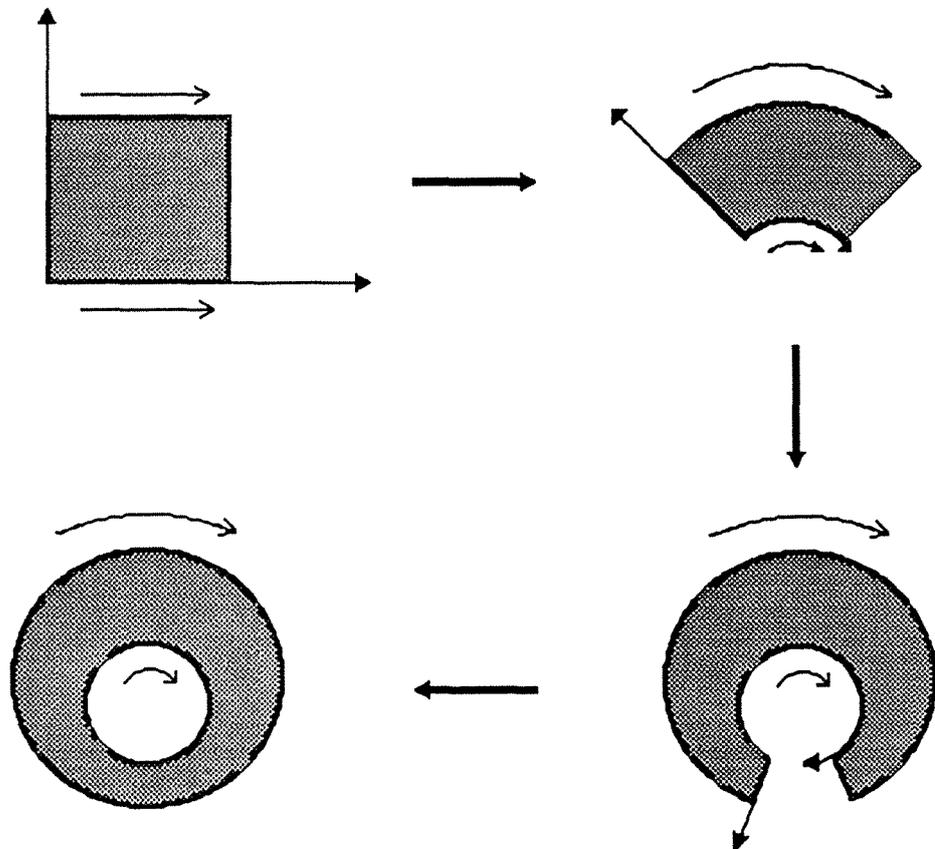
Le calcul effectué sur la "cuve" à section carrée, bien que très rudimentaire, est le point de départ du travail réalisé sur la géométrie de "Couette excentré".

L'écoulement a été simulé assez simplement, dans une configuration cartésienne, avec une condition non nulle de vitesse à la paroi.

Dans le cas de la géométrie bicylindrique excentrée, ce calcul s'effectue en coordonnées curvilignes avec cette fois deux conditions de vitesses distinctes et non nulles aux parois.

Fondamentalement le problème reste identique à celui posé en cuve carrée, seule la mise en équation est plus complexe.

Les conditions aux parois, représentées sur la figure 6.1, sont au nombre de deux.



**Figure 6.1 : Passage de la géométrie carrée à la géométrie bipolaire**  
(mise en évidence des deux conditions aux parois ainsi que de la disparition des conditions de vitesses nulles sur les deux autres parois ).

C'est la théorie hydrodynamique de la lubrification et notamment l'étude des paliers lisses qui amena pour la première fois des éléments de réponse concernant l'écoulement dans de telles géométries. Les toutes premières études mathématiques furent réalisées dès 1904 par Sommerfeld. Duffing et Reissner respectivement en 1924 et 1935 améliorèrent les résultats obtenus précédemment. Enfin Wannier (1950) fournit une solution analytique simple au problème dans le cas d'un écoulement bidimensionnel non inertiel.

Considérons le système suivant :

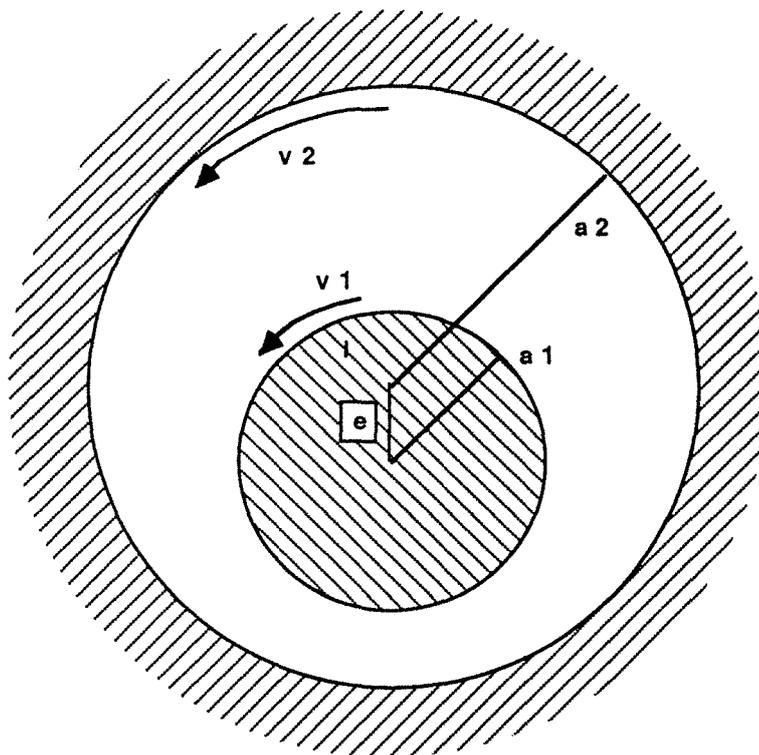


Figure 6.2 : Section du système bicylindrique

Le cylindre intérieur est plein, son rayon est donné par  $a_1$ , le cylindre extérieur est lui creux et définit l'espace cylindrique dans lequel le liquide est contenu. Son rayon est donné par  $a_2$ . Les vitesses  $v_1$  et  $v_2$  représentent les vitesses linéaires tangentielles sur les parois.

L'excentricité est caractérisée par le paramètre  $e$  qui représente la distance séparant les deux centres des cylindres.

Les conditions aux limites sont définies de la manière suivante :

- Les vitesses normales aux parois sont nulles
- Les vitesses tangentielles aux parois sont définies par les vitesses  $v_1$  et  $v_2$ .

Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cartésiennes sont définies par:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

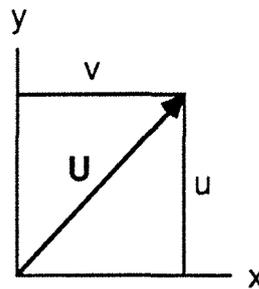
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

De même, l'équation de continuité est représentée par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

avec  $p$  la pression au point de coordonnées  $x$  et  $y$ ,  $\eta$  la viscosité dynamique du fluide,

$u$  et  $v$  les composantes de la vitesse  $U$  du fluide au point de coordonnées  $x$  et  $y$ .



**Figure 6.3 : Composantes u,v de la vitesse U**

La résolution est faite grâce à l'utilisation de la fonction de courant  $\psi$  définie par:

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5)$$

ce qui conduit à la résolution de l'équation biharmonique classique :

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (6)$$

Cette solution  $\psi$  doit être constante sur les deux parois circulaires, le gradient perpendiculaire à chaque paroi doit, lui, être égal à la vitesse linéaire  $v$  de celle-ci.

La solution au problème peut être déterminée selon Wannier (1950) en décomposant la fonction de courant en deux fonctions  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  de la manière suivante :

Soit

$$\psi = y\Phi_1 + \Phi_2 \quad (7)$$

ou

$$\psi = (x^2 + y^2)\Phi_1 + \Phi_2 \quad (8)$$

avec comme conditions pour  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$

$$\nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 \Phi_2 = 0 \quad (\text{équation de Laplace}) \quad (9)$$

Les coordonnées  $x$  et  $y$  sont cartésiennes et sont définies sur la figure 6.4. Nous définissons de la même manière les nouveaux paramètres géométriques issus du changement de système de coordonnées.

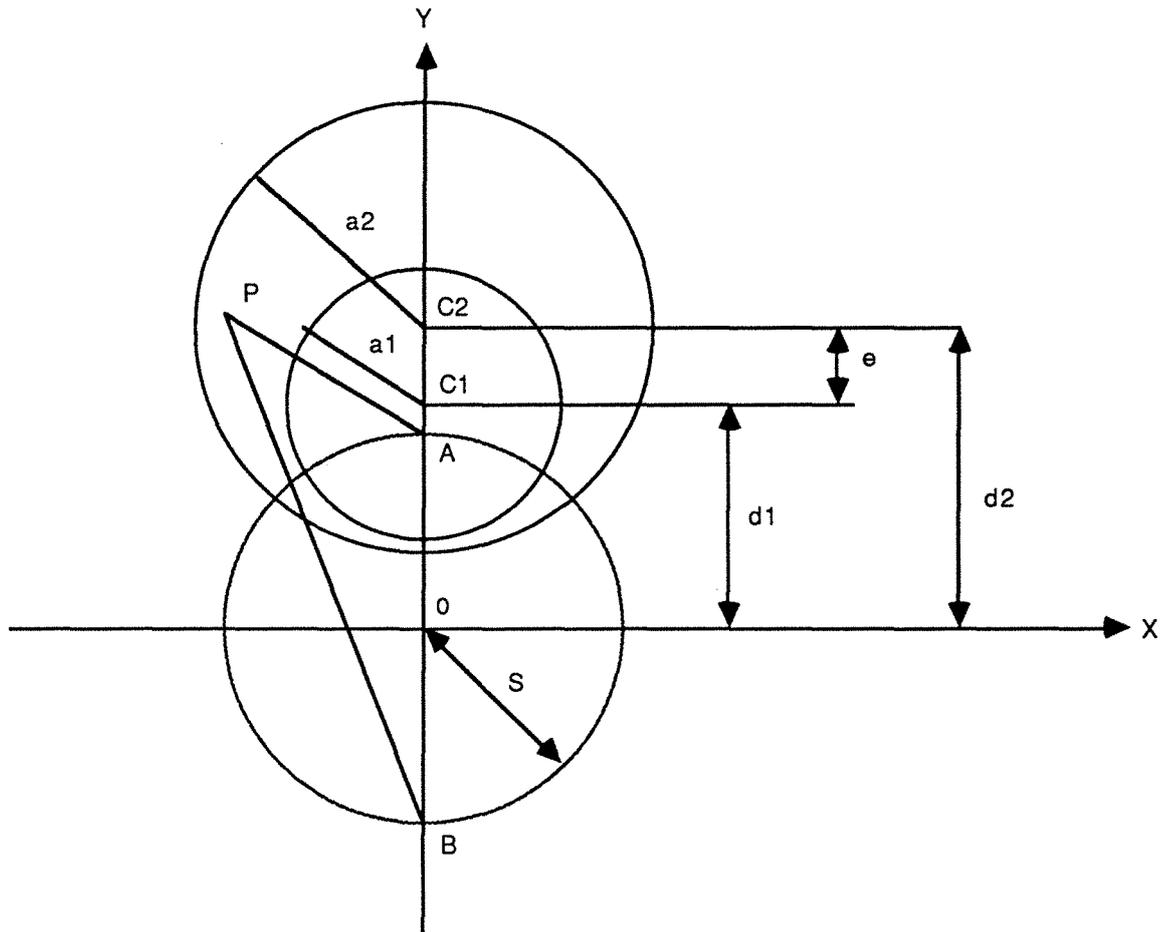


Figure 6.4 : Définition des différents paramètres géométriques

Les centres des deux cylindres sont représentés par C1 et C2. Dans ce système de coordonnées ils se trouvent à des distances respectives de l'origine d1 et d2. L'origine est située de telle manière que :

$$d_1^2 - a_1^2 = d_2^2 - a_2^2 = s^2 \quad (10)$$

Ceci permet alors de préciser les valeurs des distances d1, d2 et s :

$$d_1 = \frac{1}{2e} (a_2^2 - a_1^2) - \frac{1}{2} e \quad (11)$$

$$d_2 = \frac{1}{2e} (a_2^2 - a_1^2) + \frac{1}{2} e \quad (12)$$

$$s^2 = \frac{1}{4e^2} (a_2 - a_1 - e)(a_2 - a_1 + e)(a_2 + a_1 + e)(a_2 + a_1 - e) \quad (13)$$

Les points A et B sur l'axe des y, distants de s de l'origine servent d'origine pour le potentiel logarithmique  $\Phi$  adapté à notre géométrie :

$$\Phi = K \log \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} \quad (14)$$

Les courbes correspondant à  $\Phi$  constant sont des cercles inscrits entre les deux cercles de rayon  $a_1$  et  $a_2$  ; deux d'entre eux correspondent exactement à ces cercles de rayon  $a_1$  et  $a_2$ .

Le potentiel précédemment trouvé permet, grâce à la décomposition en  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  de la fonction  $\psi$ , de déterminer des solutions de l'équation biharmonique. La combinaison la plus appropriée est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \psi = A \log \frac{x^2 + (s+y)^2}{x^2 + (s-y)^2} + B \frac{y(s+y)}{x^2 + (s+y)^2} + C \frac{y(s-y)}{x^2 + (s-y)^2} \\ + Dy + E(x^2 + y^2 + s^2) + Fy \log \frac{x^2 + (s+y)^2}{x^2 + (s-y)^2} \quad (15) \end{aligned}$$

Les six constantes A,B,C,D,E,F sont déterminées à l'aide des conditions aux limites définies précédemment. Ces coefficients sont donnés par les relations suivantes :

$$A = - \frac{1}{2} (d_1 d_2 - s^2) \cdot \{S\} \quad (16)$$

$$B = (d_1 + s)(d_2 + s) \cdot \{S\} \quad (17)$$

$$C = (d_1 - s)(d_2 - s) \cdot \{S\} \quad (18)$$

$$D = \frac{d_1 \log \frac{d_2+s}{d_2-s} - d_2 \log \frac{d_1+s}{d_1-s}}{(a_1^2 + a_2^2) \log \frac{(d_1+s)(d_2-s)}{(d_1-s)(d_2+s)} - 4se} (a_1 v_1 + a_2 v_2) - \frac{a_1^2 a_2^2 \left( \frac{v_1}{a_1} - \frac{v_2}{a_2} \right)}{(a_1^2 + a_2^2)e}$$

$$- \frac{2s \frac{(a_2^2 - a_1^2)}{(a_1^2 + a_2^2)} (a_1 v_1 + a_2 v_2)}{(a_1^2 + a_2^2) \log \frac{(d_1 + s)(d_2 - s)}{(d_1 - s)(d_2 + s)} - 4se} \quad (19)$$

$$E = \frac{\frac{1}{2} \log \left\{ \frac{(d_1 + s)(d_2 - s)}{(d_1 - s)(d_2 + s)} \right\} \cdot (a_1 v_1 + a_2 v_2)}{(a_1^2 + a_2^2) \log \frac{(d_1 + s)(d_2 - s)}{(d_1 - s)(d_2 + s)} - 4se} \quad (20)$$

$$F = \frac{e \cdot (a_1 v_1 + a_2 v_2)}{(a_1^2 + a_2^2) \log \frac{(d_1 + s)(d_2 - s)}{(d_1 - s)(d_2 + s)} - 4se} \quad (21)$$

Avec { S } donné par la relation suivante :

$$\{S\} = \frac{2(d_2^2 - d_1^2) \cdot (a_1 v_1 + a_2 v_2)}{(a_1^2 + a_2^2) \left( (a_1^2 + a_2^2) \log \frac{(d_1 + s)(d_2 - s)}{(d_1 - s)(d_2 + s)} - 4se \right)} + \frac{a_1^2 a_2^2 \left( \frac{v_1}{a_1} - \frac{v_2}{a_2} \right)}{s (a_1^2 + a_2^2) (d_2 - d_1)} \quad (22)$$

Grâce à cette formulation directe, sont calculées très rapidement:

- Les diverses valeurs de la fonction de courant,
- Les vitesses tangentielles v et radiales u,
- Les valeurs du rotationnel de la vitesse en tout point du système,

et ceci quelle que soit la géométrie.

Il est également possible à l'aide des calculs de Wannier (1950) de connaître la pression en tout point du système pour un fluide de viscosité dynamique  $\eta$  grâce à l'expression suivante :

$$\frac{1}{\eta} \cdot p = -B \frac{x(s+y)}{y^2(\delta+s)^2} - C \frac{x(s-y)}{y^2(\delta-s)^2} - F \frac{4sx}{y^2(\delta-s)^2} \quad (23)$$

Les coefficients B,C et F sont ceux définis précédemment dans le calcul de  $\psi$ . Rappelons que ce calcul n'est valable que dans le cas d'un écoulement rampant pour un fluide "Newtonien". Les calculs de  $\psi, u, v$  et  $\omega$  sont réalisés par un programme (en langage

FORTRAN) présenté dans l'annexe 6 concernant la détermination des sections de Poincaré.

La validité des équations de Wannier sera discutée dans la partie V, à partir de la résolution numérique du problème.

#### IV. RESOLUTION NUMERIQUE DE L'ÉCOULEMENT ENTRE DEUX CYLINDRES INFINIMENT LONGS EXCENTRES

Nous avons présenté très succinctement dans la partie précédente (III), une méthode de calcul analytique simple et rapidement exploitable. Afin de vérifier la justesse des solutions fournies par Wannier (1950), il nous a semblé intéressant de pouvoir comparer ses résultats à ceux calculés par une méthode numérique directe du problème.

Explicitons donc plus en détail, la procédure de résolution des équations caractéristiques de l'écoulement ainsi que les hypothèses de travail.

##### **IV.A - HYPOTHESES DE TRAVAIL**

- Le fluide est considéré comme incompressible. La masse volumique  $\rho$  est donc supposée constante. Cette approximation permet la simplification de l'équation de Poisson.

- Le fluide utilisé est supposé "newtonien". Cette remarque est parfaitement légitime dans le cas du glycérol utilisé dans les expérimentations.

- Le système est considéré comme isotherme. Cette hypothèse est assez bien vérifiée dans nos expérimentations car une ventilation efficace permet d'évacuer la chaleur émise par les lampes U.V. d'excitation.

- Enfin, nous supposons l'écoulement bidimensionnel. Ceci est assez bien réalisé dans nos expériences. En effet, les cylindres ont une longueur suffisamment grande vis-à-vis des sections de ceux-ci, afin d'éliminer l'effet de fond qui, lui, peut entraîner des mouvements de fluide dans la direction verticale.

##### **IV.B - METHODE UTILISEE**

Il existe beaucoup de méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Nous avons choisi, pour la géométrie simple choisie, la méthode itérative implicite par différences finies, les variables de calcul étant le rotationnel  $\omega$  et la fonction de courant  $\psi$ . En effet, une méthode aux éléments finis ainsi qu'une méthode spectrale ne se justifient pas ici vu l'absence de singularité dans l'écoulement. Un autre argument de poids en faveur des techniques implicites est la stabilité du schéma de calculs. Dans ceux-ci, il faut décomposer le problème en deux parties distinctes : la résolution de l'équation de Navier-Stokes et

la résolution de l'équation de continuité. Pour ces deux équations, plusieurs méthodes peuvent être utilisées : nous avons choisi la technique dite ADI (Alternating Direction Implicit Method) ou appelée méthode des directions alternées dans les deux cas, dans le but de réduire considérablement les temps de résolutions. L'organigramme de calcul est identique à celui présenté en géométrie carrée.

#### IV.C - MAILLAGE DU SYSTEME

Le changement de variable bipolaire est tout-à-fait adapté à la géométrie. En effet, ces coordonnées curvilignes épousent parfaitement la forme du mélangeur (cf. figures 7.1 et 7.2). Elles ont de plus l'avantage d'être orthogonales ce qui simplifie singulièrement les calculs. La formulation est la suivante :

$$x = -s \frac{\text{sh}(\alpha)}{\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \quad (1)$$

$$y = s \frac{\sin(\beta)}{\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \quad (2)$$

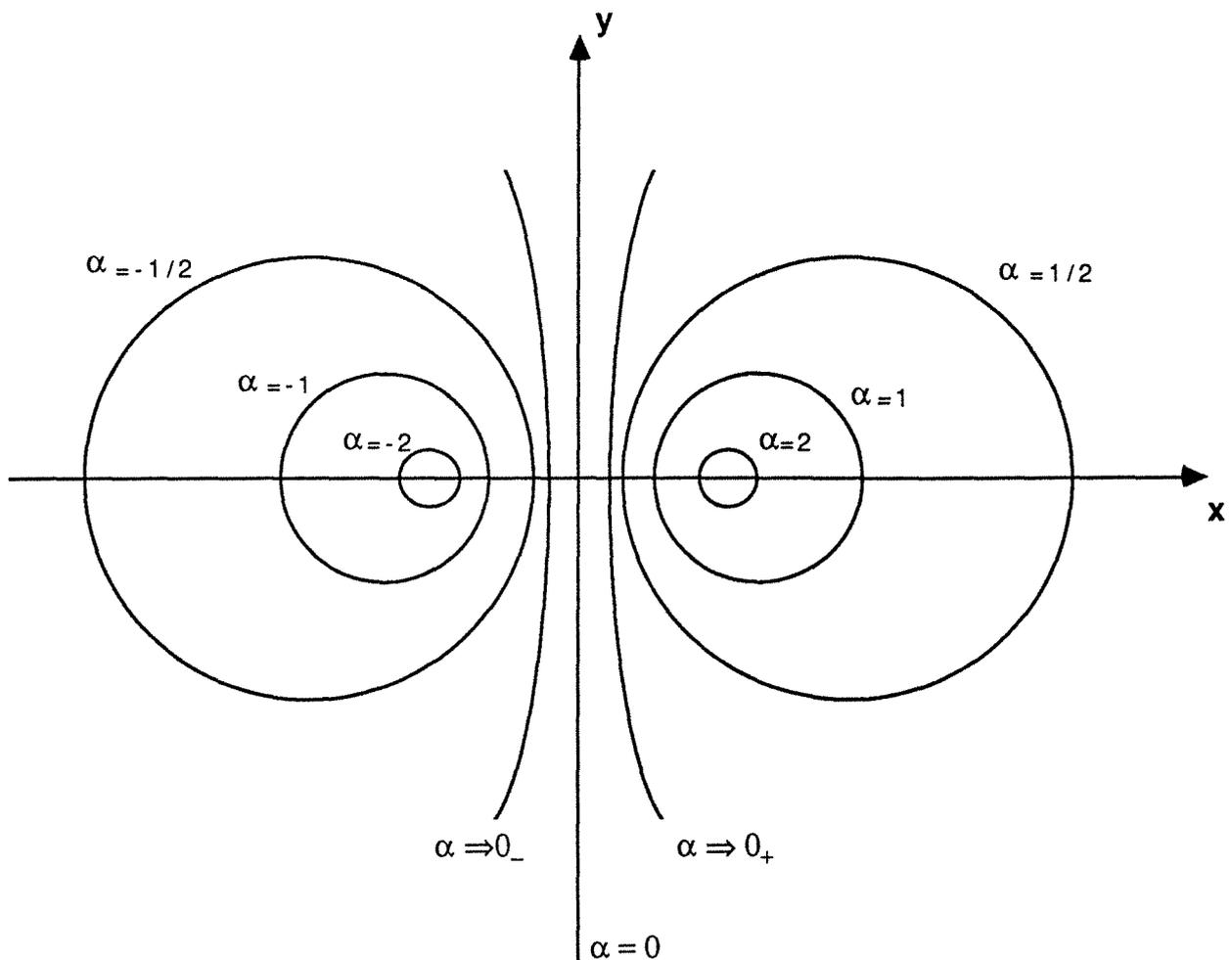
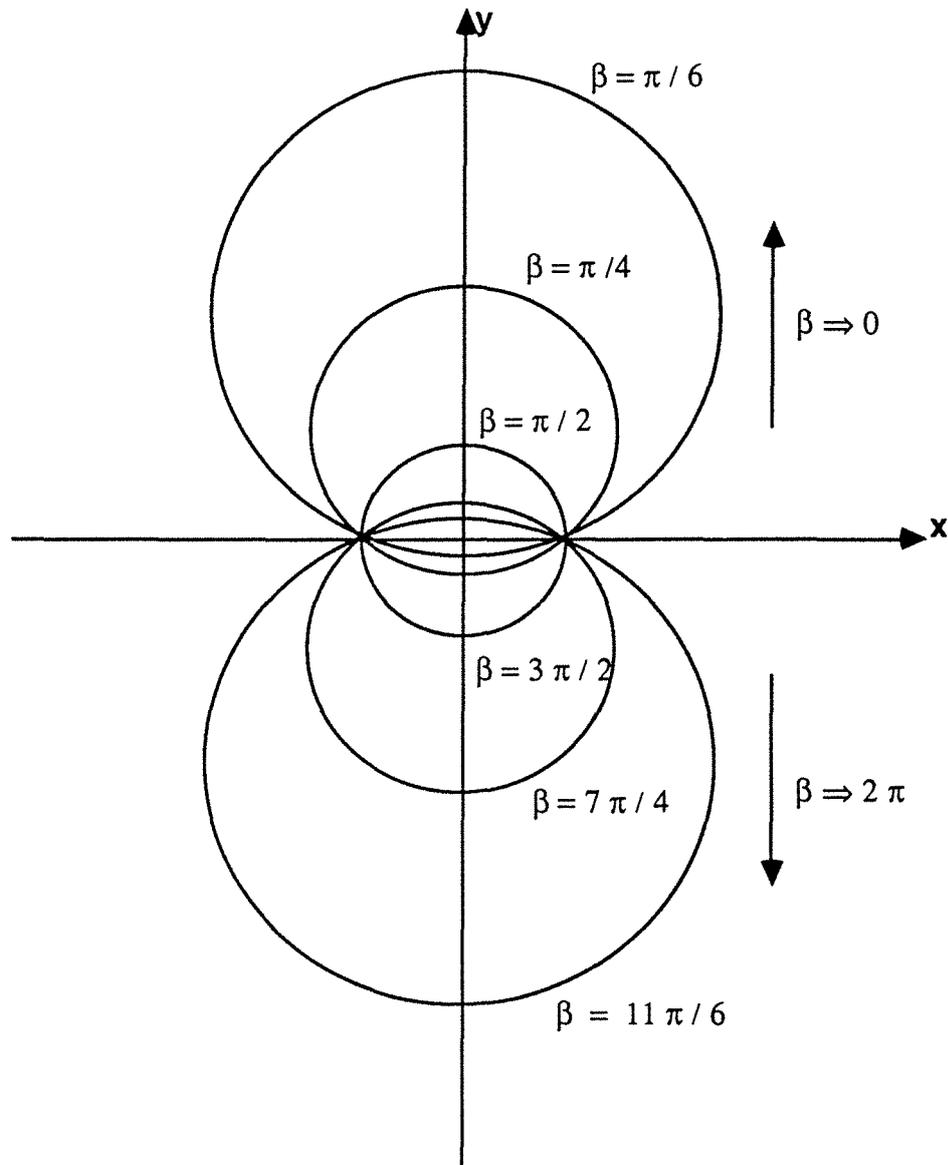


Figure 7.1 : Cercles iso-alpha en géométrie bipolaire



**Figure 7.2** : Cercles iso-béta en géométrie bipolaire

Nous explicitons à présent les coefficients dits de "Lamé" (métrique du système) nécessaires aux calculs des dérivées partielles des différentes fonctions utilisées ( $\psi, u, v$ ). Considérons le vecteur  $r$  de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère cartésien et  $(\alpha, \beta)$  dans le repère lié au maillage bipolaire. Les coefficients  $h_1$  et  $h_2$ , respectivement liés aux valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  sont ainsi définis :

$$h_1 = \left| \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right|, \quad h_2 = \left| \frac{\partial r}{\partial \beta} \right| \quad (3)$$

Le calcul complet de ces coefficients est consigné en annexe 1;  $h_1$  et  $h_2$  correspondent finalement à:

$$h_1 = h_2 = h(\alpha, \beta) = \frac{s}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \quad (4)$$

Ce coefficient  $h$ , caractérisant les "écarts" entre cartésien et bipolaire, est aussi appelé métrique du système de coordonnées.

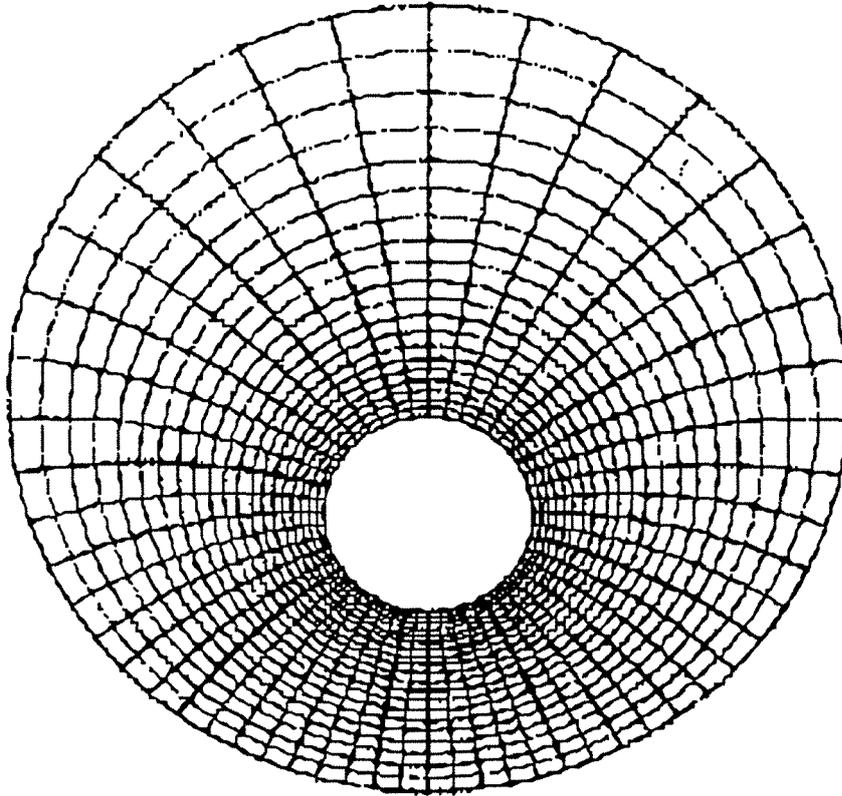


Figure 7.3 : Maillage bipolaire 21\*50  
(Facteur d'excentricité :  $\operatorname{exc}/r_2 = 0.4$ )

#### IV.D - EQUATIONS DE BASE

Le problème est traité sous la forme  $(\omega, \psi)$ , les deux équations fondamentales étant l'équation de Navier-Stokes et l'équation de Poisson.

##### IV.D.1 Formulation de l'équation de Navier-Stokes en coordonnées bipolaires

L'équation de Navier-Stokes est ici définie à l'aide du rotationnel de la vitesse  $\omega$  :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{U} - \nu \nabla^2 \vec{\omega} = \vec{0} \quad (5)$$

avec

$$\vec{U} = \vec{U}(u, v) \quad (6)$$

et

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times (\vec{U}) \quad (7)$$

La fonction de courant  $\psi$  est reliée à la vitesse  $\vec{U}$  par les expressions suivantes (conséquence directe de l'équation de continuité)

$$u = + \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \quad (8)$$

$$v = - \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \quad (9)$$

L'écoulement est bidimensionnel, le vecteur  $\vec{\omega}$  reste donc constamment perpendiculaire au plan des vitesses, le champ des  $\omega$  est donc un champ scalaire.

Le calcul des différents termes est présenté dans l'annexe 2, nous obtenons finalement l'expression suivante :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{u}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{v}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{\nu}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} \right] \quad (10)$$

#### IV.D.2 Formulation de l'équation de Poisson en coordonnées bipolaires

L'équation de Poisson est définie comme suit :

$$\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} \right) + \omega = 0 \quad (11)$$

#### IV.E - CONDITIONS AUX LIMITES / CONDITIONS INITIALES

Il existe deux conditions aux limites distinctes qui sont les deux vitesses  $v_1$  et  $v_2$  aux parois. Celles-ci déterminent les dérivées partielles de  $\psi$  par rapport à  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right]_{\text{Cyl.Int.}} = -h.v_1 \quad (12)$$

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right]_{\text{Cyl.Ext.}} = -h.v_2 \quad (13)$$

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right]_{\text{Cyl.Int.}} = 0 \quad (14)$$

$$\left[ \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \right]_{\text{Cyl.Ext.}} = 0 \quad (15)$$

Quant aux conditions initiales, elles peuvent être choisies de façon quelconque, aussi sont-elles prises nulles pour toutes les variables sauf pour les vitesses tangentielles  $v$  égales à  $v_1$  et  $v_2$  aux parois.

En résumé au départ de la résolution :

et M : - pour  $i$  compris entre 0 et N et pour  $j$  compris entre 0

$$\psi = u = \omega = 0$$

0 et M : - pour  $i$  compris entre 1 et N-1 et pour  $j$  compris entre

$$v = 0$$

- pour  $i = 0$  et pour  $j$  compris entre 0 et M :

$$v = v_1$$

- pour  $i = N$  et pour  $j$  compris entre 0 et M :

$$v = v_2$$

## VI.F - RESOLUTION DU PROBLEME PAR LA METHODE A.D.I.

### VI.F.1 Paramètres du problème

Les divers paramètres intervenant dans le calcul et dans le programme sont de trois types:

- (1) Géométriques :

<b>a1</b>	: rayon du petit cylindre
<b>a2</b>	: rayon du grand cylindre
<b>alp1</b>	: valeur de la coordonnée alp sur la paroi intérieure
<b>alp2</b>	: valeur de la coordonnée alp sur la paroi extérieure
<b>i et j</b>	: positions spatiales sur un nœud du maillage
<b>alp(i)</b>	: valeur de la coordonnée a à la position i
<b>be(j)</b>	: valeur de la coordonnée b à la position j
<b>DA</b>	: pas d'espace dans la direction i ( $(alp2-alp1)/N$ )
<b>DB</b>	: pas d'espace dans la direction j ( $2\pi / M$ )
<b>e</b>	: excentricité
<b>h(i,j)</b>	: métrique du système au point (i,j)

Le maillage (i,j) peut se représenter selon le schéma suivant (cf.figure 7.4):

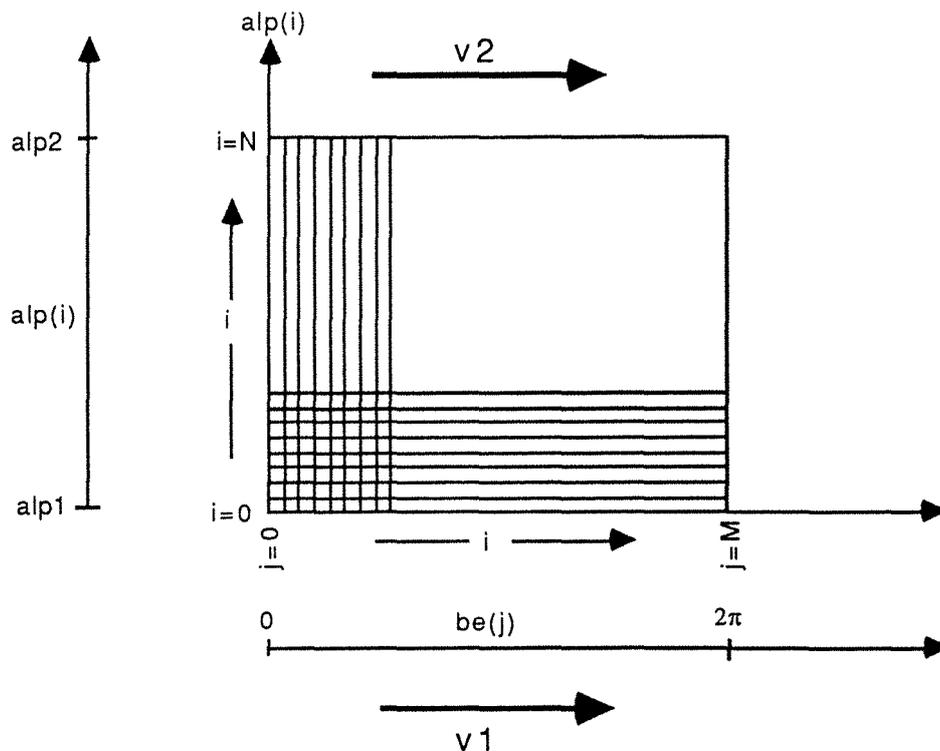


Figure 7.4 : Maillage du système

- (2) Cinématiques :

<b>v1</b>	: vitesse linéaire du petit cylindre
-----------	--------------------------------------

**v2** : vitesse linéaire du grand cylindre  
**Om1** : vitesse angulaire du petit cylindre (**v1/Om1**)  
**Om2** : vitesse angulaire du grand cylindre (**v2/Om2**)

- (3) Liés à la nature du fluide :

**nu** : viscosité cinématique du fluide.

### VI.F.2 Discrétisation des équations de base

L'équation de Navier-Stokes ainsi que celle de Poisson sont discrétisées selon un schéma centré en espace (mêmes calculs que ceux présentés en géométrie carrée).

La technique ADI est du type prédictor-correcteur. Les deux équations de base (10) et (11) sont décomposées en deux demi-pas de temps.

Le premier pas de temps permet de réaliser le calcul dans la direction j (suivant le paramètre  $\alpha_p(i)$ ), l'expression est définie comme suit:

Premier demi pas de temps :

$$a(i) \cdot \omega_{i-1,j}^{n+1/2} + b(i) \cdot \omega_{i,j}^{n+1/2} + c(i) \cdot \omega_{i+1,j}^{n+1/2} = r^n(i) \quad (16)$$

Le terme n correspond au numéro de l'itération. Les termes a,b,c et r correspondent à:

$$a(i) = - u_{i,j}^n \cdot h_{i,j} \cdot DA - 2 \cdot nu \quad (17)$$

$$b(i) = 4 \cdot \left( (DA \cdot h_{i,j})^2 / dt + nu \right) \quad (18)$$

$$c(i) = u_{i,j}^n \cdot h_{i,j} \cdot DA - 2 \cdot nu \quad (19)$$

$$r(i) = 4 \cdot \omega_{i,j}^n \cdot (h_{i,j} \cdot DA)^2 / dt - v_{i,j}^n \cdot h_{i,j} \cdot \frac{DA^2}{DB} \cdot (\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n)$$

$$+2.nu . \frac{DA^2}{DB^2} . \left( \omega_{i,j+1}^n - 2.\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j-1}^n \right) \quad (20)$$

Un système de N équations à N inconnues est ainsi obtenu pour chaque valeur de j. Ce système est implicite. La détermination des  $\omega$  est réalisée par inversion de la matrice tridiagonale A.

Le système est le suivant :  $A . W = R$  , correspondant à l'équation matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \backslash & \backslash & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \backslash & \backslash & \backslash & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_i & b_i & c_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \backslash & \backslash & \backslash & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \backslash & \backslash & c_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \omega_{i-1,j}^{n+1/2} \\ \cdot \\ \omega_{i,j}^{n+1/2} \\ \cdot \\ \omega_{i+1,j}^{n+1/2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{i-1,j}^n \\ \cdot \\ r_{i,j}^n \\ \cdot \\ r_{i+1,j}^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Soit :

$$W = A^{-1} . R \quad (21)$$

Notons à cet égard que l'inversion d'une telle matrice par une résolution itérative, ne se fait sans problème que si celle-ci est à dominante diagonale, ce qui signifie que quel que soit i, l'inégalité suivante est respectée :

$$|b(i)| > |a(i)| + |c(i)| \quad i=1, \dots, N-1 \quad (22)$$

Ceci est toujours vérifié dans nos calculs, le pas de temps dt étant pris suffisamment faible. L'inversion est réalisée dans le sous programme "tridiag". Le calcul des  $\omega$  est donc effectué pour les i compris entre 1 et N-1 et les j compris entre 0 et M (avec les mêmes valeurs pour j=0 et j=M car il s'agit des mêmes points de l'espace).

Second demi pas de temps :

Dans cette seconde partie du calcul, la direction des résolutions est celle des  $i$  (suivant les  $b_e(j)$  croissants ). L'équation de Navier prend alors la forme suivante :

$$a(j) \cdot \omega_{i,j-1}^{n+1} + b(j) \cdot \omega_{i,j}^{n+1} + c(j) \cdot \omega_{i,j+1}^{n+1} = r^{n+1/2}(j) \quad (23)$$

Les nouvelles valeurs des expressions  $a, b, c$  et  $r$  sont présentées en annexe 3. Le principe reste identique à celui fait au premier demi pas de temps. Les nouvelles valeurs de  $\omega$  sont déterminées pour des valeurs de  $j$  comprises entre 0 et  $M$  et des valeurs de  $i$  comprises entre 1 et  $N - 1$ .

Pour l'équation de Poisson (11), la discrétisation se fait de la même façon que pour (10). Il est néanmoins nécessaire d'ajouter à (11) un terme purement fictif  $\frac{\partial \omega}{\partial t}$  servant de compteur d'itérations. L'équation devient ainsi :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} + h^2 \omega = 0 \quad (24)$$

Le premier terme n'influence aucunement la solution  $\psi$  cherchée. En effet, cette solution est obtenue par itérations successives de (24) jusqu'à l'obtention de la stationnarité des valeurs de  $\psi$  calculées. Le premier terme atteint alors une valeur nulle.

Pour le premier demi pas de temps le prédicteur se formule de la façon suivante :

$$a(i) \cdot \psi_{i-1,j}^{n+1/2} + b(i) \cdot \psi_{i,j}^{n+1/2} + c(i) \cdot \psi_{i+1,j}^{n+1/2} = r^n(i) \quad (25)$$

avec

$$a(i) = -1 \quad (26)$$

$$b(i) = 2 + 2 \cdot \frac{DA^2}{dt} \quad (27)$$

$$c(i) = -1 \quad (28)$$

$$r(i) = DA^2 \left[ \frac{2}{dt} \cdot \psi_{i,j}^n + \left( \frac{\psi_{i,j+1}^n - 2 \cdot \psi_{i,j}^n + \psi_{i,j-1}^n}{DB^2} \right) + h_{i,j}^2 \cdot \omega_{i,j}^{n+1} \right] \quad (29)$$

La condition d'inversion de la nouvelle matrice définie par les coefficients a,b,c, et r est une matrice à dominante diagonale et ceci quelle que soit la valeur du pas de temps utilisé.

En effet, le pas de temps est pris positif. La valeur absolue de b(i) est donc strictement supérieure à la somme des valeurs absolues de a(i) et de c(i).

Les valeurs de  $\psi$  sont calculées de  $i = 1$  à  $i = N-1$  et de  $j = 0$  à  $j = M$ . Pour le second demi pas de temps le correcteur prend alors la forme suivante :

$$a(j) \cdot \psi_{i,j-1}^{n+1} + b(j) \cdot \psi_{i,j}^{n+1} + c(j) \cdot \psi_{i,j+1}^{n+1} = r^n(j) \quad (30)$$

Les différents coefficients a,b,c,r sont rassemblés en annexe 3. Les calculs sont réalisés pour des valeurs de j comprises entre 0 et M et pour des valeurs de i entre 1 et N-1.

La détermination des valeurs de  $\psi$  aux deux parois est à présent possible, grâce aux nouvelles valeurs de  $\psi$  calculées en  $i=1$ ,  $i=2$ ,  $i=N-2$  et  $i=N-1$ .

Compte tenu du fait que la fonction de courant est l'intégrale spatiale de la vitesse, sa détermination est obtenue "à une constante près". Ceci nous permet donc de choisir librement l'origine des valeurs de celle-ci. Nous savons déjà que cette fonction de courant doit être constante sur les deux parois du mélangeur, aussi nous nous fixerons la valeur 0 pour  $\psi$  sur le cylindre intérieur.

Pour la détermination de  $\psi$  à la paroi extérieure le problème est plus délicat. Il faut intégrer le flux des vitesses entre les deux cylindres. En effet, partant de l'équation (9) reliant la composante tangentielle v de la vitesse à la fonction de courant  $\psi$ , nous avons accès à la valeur de  $\psi$  sur la paroi extérieure par:

$$[\Psi]_{\alpha 1}^{\alpha 2} = \Psi_{\text{cyl. ext.}} - 0 = \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha \quad (31)$$

d'où

$$\Psi_{\text{cyl. ext.}} = - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [h v]_j \text{ fixé } d\alpha \quad (32)$$

La valeur de  $j$  a été choisie dans la région d'espace "la plus calme", c'est-à-dire sans vortex ou autre singularité d'écoulement. Cette région correspond à la ligne de distance minimale inter-cylindres, soit pour  $j$  la valeur  $M/2$ .

Ainsi l'expression de  $\psi$  à la paroi devient :

$$\Psi_{\text{cyl. ext.}} = - \sum_{i=0}^{i=N} v(i, M/2) \cdot h(i, M/2) \cdot DA \quad (33)$$

On obtient finalement (voir détails des calculs en annexe 4).

$$\Psi_{\text{cyl. ext.}}^{n+1} = \left( -v_1 \cdot h(0, M/2) - v_2 \cdot h(N, M/2) \right) DA + \Psi_{N-1, M/2}^{n+1} - \Psi_{1, M/2}^{n+1} \quad (34)$$

### VI.F.3 Détermination de la vitesse et du rotationnel :

Le calcul des valeurs de la fonction de courant est à présent terminé pour cette itération. Il est nécessaire d'estimer les vitesses  $u(i,j)$  et  $v(i,j)$  ainsi que la valeur du rotationnel  $\omega(i,j)$ . Les équations (8) et (9) fournissent immédiatement les deux vitesses :

$$u_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{h_{i,j}} \cdot \frac{\Psi_{i,j+1}^{n+1} - \Psi_{i,j-1}^{n+1}}{2 \cdot DB} \quad (35)$$

$$v_{i,j}^{n+1} = - \frac{1}{h_{i,j}} \cdot \frac{\Psi_{i+1,j}^{n+1} - \Psi_{i-1,j}^{n+1}}{2 \cdot DA} \quad (36)$$

avec les conditions aux parois :

$$u_{0,j}^{n+1} = u_{N,j}^{n+1} = 0 \quad (37)$$

$$v_{0,j}^{n+1} = v_1 \quad (38)$$

$$v_{N,j}^{n+1} = v_2 \quad (39)$$

Enfin, la boucle totale (sur  $\omega$ ) se termine par l'estimation du rotationnel  $\omega$  aux parois du système. Pour cela, la fonction  $\psi$  est définie par un développement de Taylor au second ordre:

Sur la paroi intérieure :

$$\psi_{1,j} = \psi_{0,j} + \Delta\alpha \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\alpha} + \frac{\Delta\alpha^2}{2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} \quad (40)$$

Compte tenu du fait que  $\nabla^2\psi + \omega = 0$ :

$$\omega_{0,j} = -\frac{1}{h^2} \cdot \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} \right) \quad (41)$$

La valeur de  $\psi$  est constante, d'où  $\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta^2} = 0$  (42)

ce qui conduit à l'expression pour  $\omega$  pour chaque valeur de  $j$  :

$$\omega_{0,j} = -\frac{2}{h_{0,j}^2} \cdot \left( \frac{\psi_{1,j}^{n+1} - \psi_{0,j}^{n+1}}{DA^2} + h_{0,j} \cdot \frac{v1}{DA} \right) \quad (43)$$

Sur la paroi intérieure :

$$\omega_{N,j} = \frac{2}{h_{N,j}^2} \cdot \left( \frac{\psi_{N,j}^{n+1} - \psi_{N-1,j}^{n+1}}{DA^2} + h_{N,j} \cdot \frac{v2}{DA} \right) \quad (44)$$

#### VI.F.4 Résumé de la technique

L'organigramme dans son principe de calcul est, nous l'avons déjà fait remarquer, identique à celui utilisé en coordonnées cartésiennes pour la géométrie carrée. Cependant, l'enchaînement des opérations va être résumé.

Tout d'abord, toutes les variables sont fixées à zéro au départ, sauf les vitesses tangentielles aux parois. Ensuite, le programme détermine les valeurs de  $\omega$  à l'intérieur du domaine en deux demi pas de temps grâce à l'équation de Navier-Stokes. La valeur du pas de temps  $dt$  est prise de telle manière à assurer la convergence sans trop perdre sur le temps de calcul. Une fois ce double balayage terminé le programme se poursuit par la détermination des valeurs de la fonction de courant  $\psi$  en deux demi pas de temps à l'aide de l'équation de Poisson. Ce calcul est itéré  $p$  fois afin de converger vers une solution stationnaire. Dans le but d'estimer cette convergence, un critère de stationnarité est défini, rendant compte de l'évolution des valeurs prises par  $\psi$  itération après itération. Il est défini selon :

$$\text{test}\psi = \sum_{i=1}^{i=N} \left( \psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n \right)^2 \quad \text{pour } j \text{ fixé} \quad (45)$$

Les tests sont réalisés pour deux valeurs de  $j$  différentes :

- Tout d'abord en  $j = M/2$ , c'est-à-dire sur la ligne correspondant à la distance minimale entre les deux cylindres.

- Ensuite pour  $j = 0$ , c'est-à-dire sur la ligne correspondant cette fois à la distance maximale entre les deux cylindres. Comme nous le verrons par la suite, c'est dans cette région de l'espace que se forment généralement des vortex. La convergence des calculs est ici plus lente. Le critère précédemment défini diminue au fur et à mesure des itérations plus lentement que dans le cas  $j = M/2$ .

L'estimateur calculé en  $j = 0$  sert donc à déterminer le nombre d'itérations minimal requis afin d'assurer une convergence convenable sur les  $\psi$ . L'estimateur en  $j = M/2$  n'est présent qu'à titre d'information.

Il s'est avéré que, dans tous les cas traités, le nombre d'itérations servant à rendre le critère "test $\psi$ " inférieur ou égal au centième de sa valeur calculée à la fin de la première itération, est toujours inférieur à 20. En fait, suivant la géométrie et les conditions aux parois, cette valeur varie entre 12 et 20. Cette détermination est faite au coup par coup selon le cas étudié.

Une fois ces itérations terminées, débute le calcul des vitesses  $u$  et  $v$  à l'intérieur du domaine. Les valeurs de celles-ci sur les deux cylindres sont fixées par les conditions aux limites.

Il reste enfin à déterminer les valeurs de  $\omega$  aux parois.

Comme dans le cas des itérations faites pour la fonction de courant  $\psi$  nous définissons un estimateur de convergence appelé "test $\omega$ ":

$$\text{test}\omega = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} (\omega_{i,j}^{n+1} - \omega_{i,j}^n)^2}{\sum_{i=1}^{i=N} (\omega_{i,j}^{n+1})^2} \quad \text{pour } j \text{ fixé} \quad (46)$$

De la même façon, les valeurs  $j = 0$  et  $j = M/2$  ont été choisies. Seule la valeur  $j = 0$  renseigne correctement sur "l'état de convergence" du calcul des  $\omega$ .

Toutes les variables du problème sont à présent déterminées. Si les valeurs du rotationnel conviennent (valeur de "test $\omega$ " inférieure à une valeur fixée à l'avance), le problème est alors résolu. Si la convergence n'est pas suffisante, alors le calcul est repris entièrement à partir de la détermination de  $\omega$  à l'intérieur du domaine.

De façon générale, pour atteindre une valeur de "test $\omega$ " inférieure à  $10^{-5}$ , ce qui correspond, pour les maillages utilisés, à une variation relative des valeurs de  $\omega$  inférieure à  $10^{-4}$ , le nombre d'itérations nécessaire est compris entre 1000 et 20000.

Nous consignons, sur la figure 7.5, l'évolution du critère non normé test $\omega'$  (correspondant au numérateur de test $\omega$ ), calculé le long de la ligne  $j=0$ , pour les conditions suivantes:

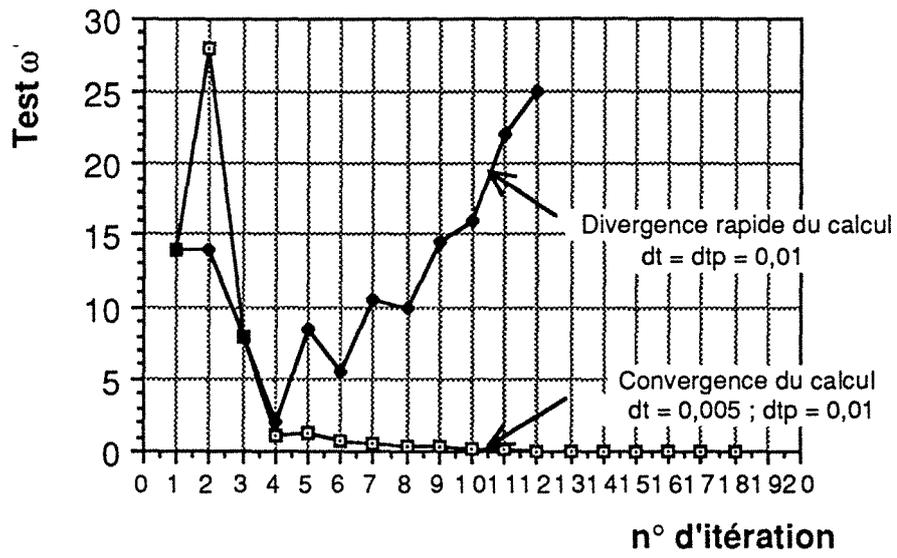
Les vitesses angulaires des cylindres sont égales à 1 tour/min.

Le rapport des rayons  $a_1/a_2$  est de 1/4.

Le fluide possède la viscosité du glycérol (1 Pa.s).

Le maillage est de 20x50.

Les valeurs  $dt$  et  $dtp$  représentent les pas de temps respectivement dans la résolution de l'équation en  $\omega$  et  $\psi$ .



**Figure 7.5 : Influence des pas de temps dans la convergence du calcul**

Le "listing" du programme fait l'objet de l'annexe 5.

## V. CONFRONTATION NUMERIQUE/ANALYTIQUE EN SITUATION 2D

Trois cas typiques d'écoulement en régime de Stokes pour un fluide newtonien sont présentés. Il s'agit des deux cas extrêmes (rotation d'un cylindre à la fois) et d'un cas intermédiaire (même vitesse de rotation pour les deux cylindres). Pour ces trois cas une excentricité assez forte a été choisie de manière à s'éloigner fortement de la situation "simple" de Couette (facteur d'excentricité  $e/a_2 = 0,4$ ).

Le nombre de Reynolds est défini ici de la manière suivante :

$$Re = \frac{\max(v_1, v_2) \cdot a_2}{\nu} \quad (1)$$

avec  $\nu$  viscosité cinématique ( $\approx 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  pour le glycérol)

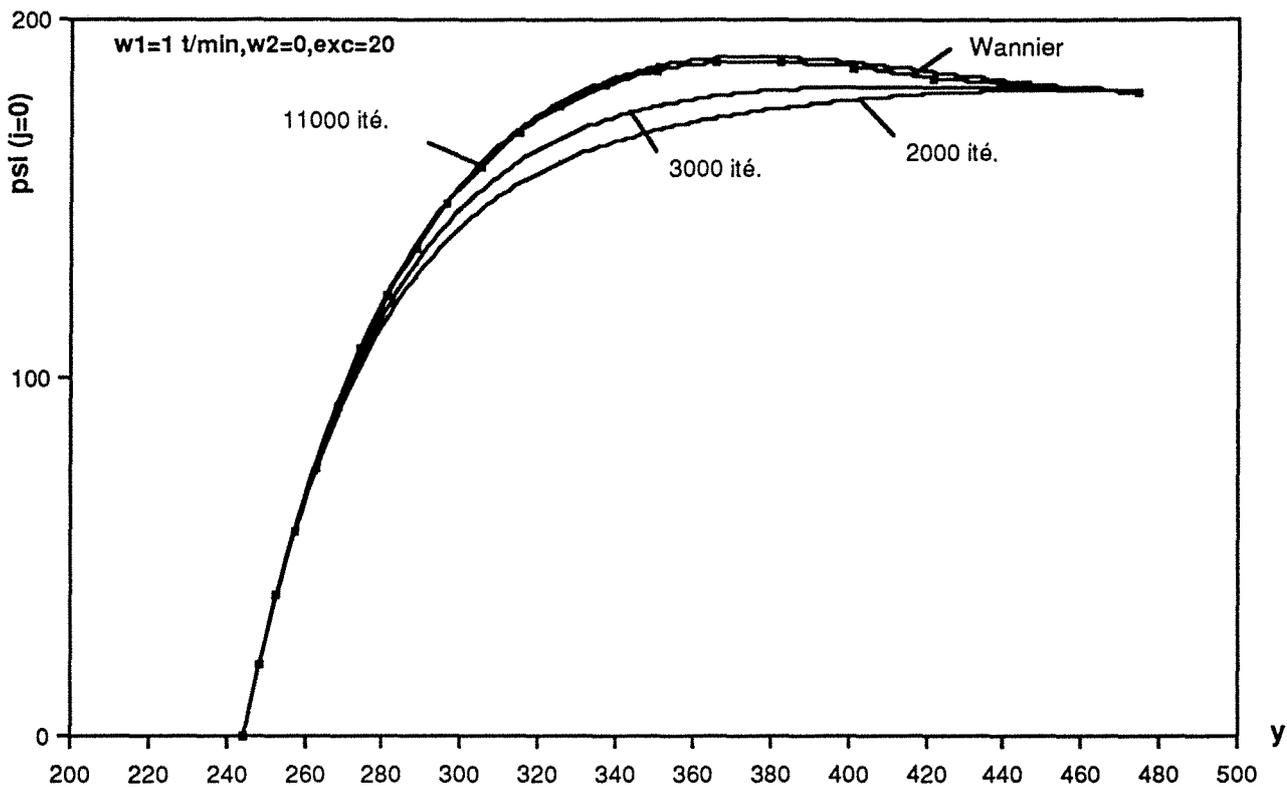
### **V.A - ROTATION DU CYLINDRE INTERIEUR SEUL**

#### V.A.1 Fonction de courant

Cette situation est, pour la suite des travaux (notamment en pseudo 3D), tout-à-fait fondamentale. La vitesse angulaire du cylindre intérieur est de un tour par minute, ce qui correspond à un nombre de Reynolds de 0,065.

La comparaison des deux types de solutions est réalisée grâce aux tracés des profils des valeurs de la fonction de courant  $\psi$  le long des courbes  $j=\text{constante}$ .

Les valeurs de la fonction de courant  $\psi$  sont tracées selon la coordonnée bipolaire  $i$ . La valeur de  $j$  est égale à zéro, ce qui correspond à la plus grande distance séparant les deux cylindres. Cette région de l'espace est préférée à d'autres car elle est le siège de vortex. La convergence  $y$  est plus lente. La répartition des  $\psi$  peut donc servir de test.

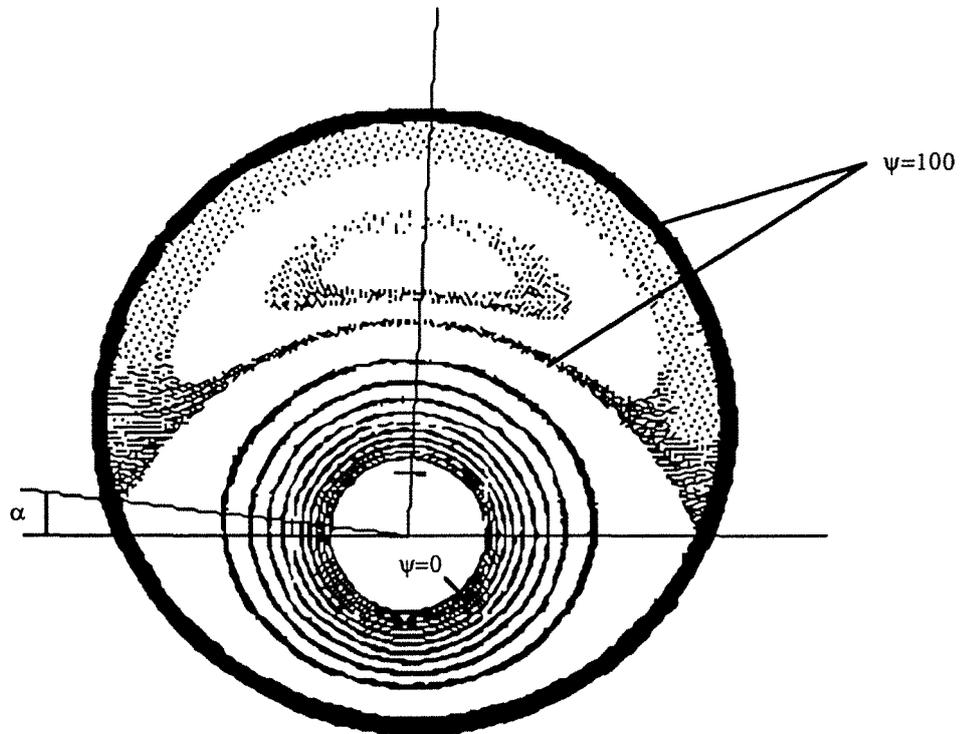


**Figure 8.1 : répartition des valeurs de la fonction de courant en fonction du taux de convergence du calcul suivant la coordonnée  $y$**   
 $(\omega_1 = 1 \text{ T/min}, \omega_2 = 0, r_2=50\text{mm}, r_1=12,5 \text{ mm}, e = 20 \text{ mm})$

Les valeurs de  $\psi$ , calculées par la résolution numérique, sont représentées en fonction de l'état d'avancement du calcul (cf. figure 8.1). Après 3000 itérations, le calcul n'est pas terminé. Il faut attendre, pour ces conditions d'écoulement, au moins 11.000 itérations.

La corrélation entre les deux solutions est ici particulièrement bonne. L'écart maximal  $\Delta\psi/\psi$  reste inférieur à 1/100.

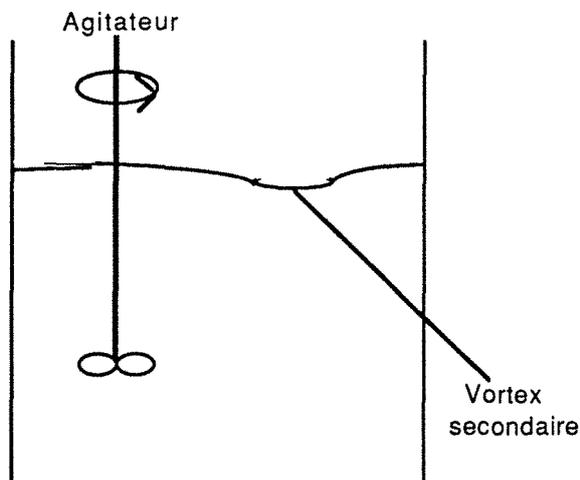
La figure 8.2 représente l'allure des trajectoires du fluide (Courbes iso- $\psi$ ). Nous rappelons que la valeur de  $\psi$  est fixée, sur la figure 8.2, à zéro sur le cylindre intérieur et à 100 sur le cylindre extérieur. A proximité du cylindre intérieur, c'est-à-dire à une distance à la paroi inférieure à environ  $2.R_1$  l'écoulement est du type vortex simple. Celui-ci possède une symétrie circulaire au contact du cylindre intérieur, cette symétrie devient plus "elliptique" au fur et à mesure de l'éloignement à la paroi intérieure.



**Figure 8.2 : Ecoulement en géométrie bipolaire**  
 ( $R2/R1=4$ , Fact. d'exc. =0.4,  $\omega1=1$  t/min,  $\omega2=0$ )  
 (maillage 101x400)

Cette région est bordée à la fois par le cylindre extérieur et par la ligne d'iso-densité de courant ( $\psi=100$ ). Cette ligne de séparation limite une seconde région de type "vortex" très allongée dont le centre est approximativement le symétrique du centre du cylindre intérieur par rapport au centre du cylindre extérieur.

Cette situation de vortex secondaire est analogue à celle présente lors d'une agitation traditionnelle d'un liquide placé dans un récipient cylindrique (cf figure ci dessous) :



**Figure 8.3 : Agitation à l'aide d'un mobile excentré**

Une étude de l'effet de l'excentricité a été réalisée et est présentée au chapitre 3, concernant la comparaison entre théorie et expérimentation en deux dimensions.

### V.A.2 Vitesses "tangentiellles"

La figure 8.4 explicite les deux composantes de la vitesse  $U$ .

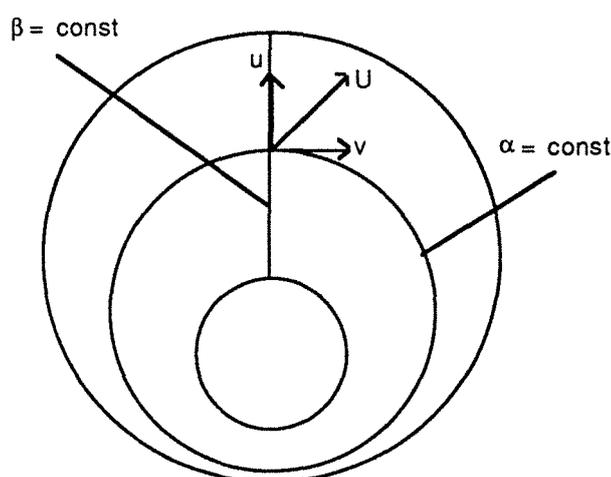
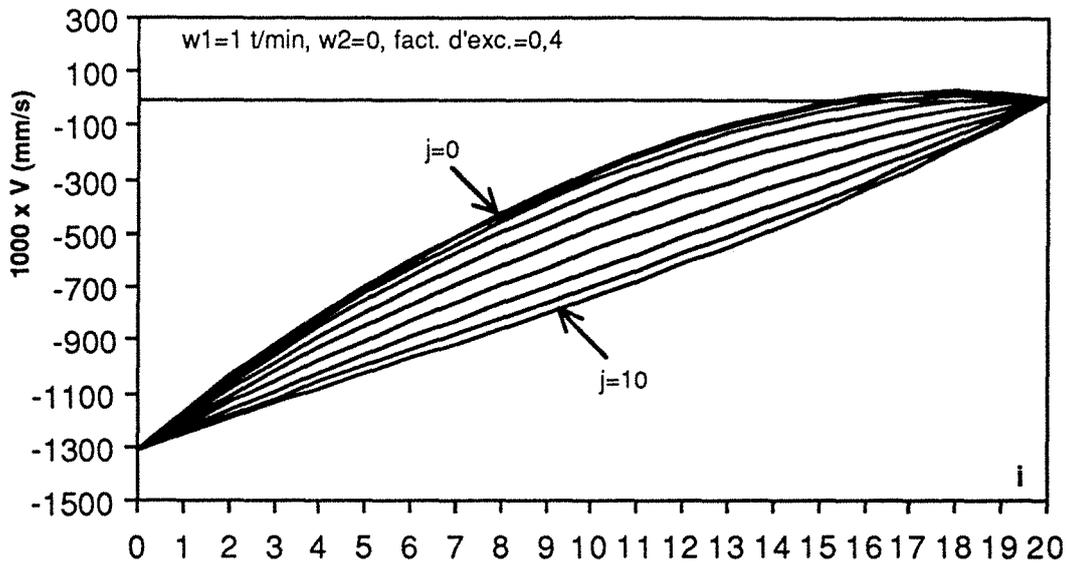


Figure 8.4 : Composantes tangentielle (v) et radiale (u)

Les profils des vitesses "tangentiellles" sont représentés sur la figure 8.5. La vitesse maximale est celle du cylindre intérieur  $v_1$  ( $= R_1 \cdot \omega = 1,3 \text{ mm/s}$ ). La composante tangentielle de la vitesse décroît fortement avec la distance au cylindre (décroissance en  $1/r$ ), cette composante possède des valeurs très faibles dans le vortex secondaire (au maximum de l'ordre de 4 % de la vitesse  $v_1$ )

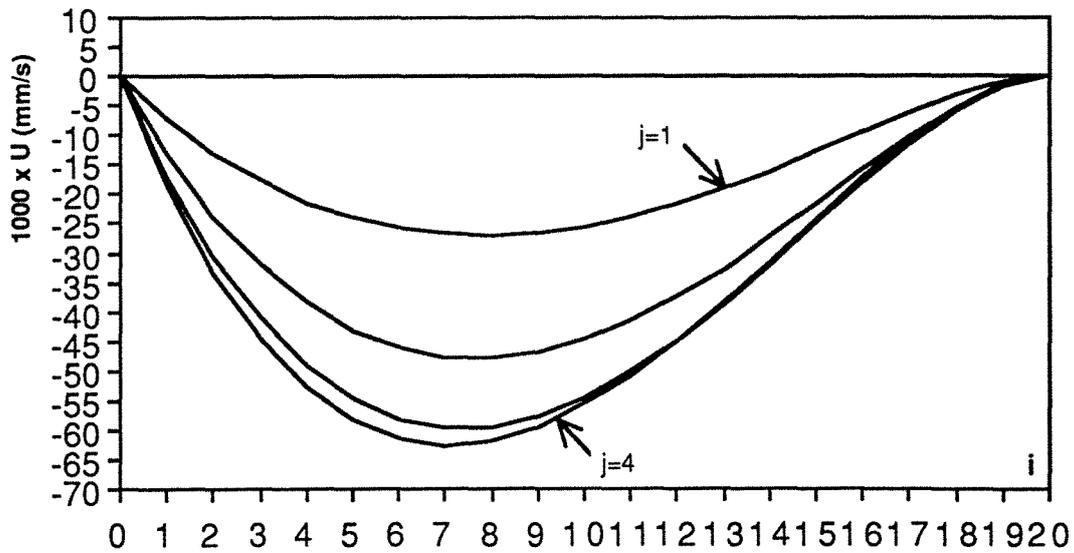
Cette dernière constatation indique que la zone dite secondaire peut être considérée comme une quasi "zone morte". En effet, il est nécessaire de réaliser au moins 25 rotations du cylindre intérieur pour voir s'effectuer une révolution complète du fluide autour du vortex secondaire.



**Figure 8.5 : Profil des vitesses "tangentiellles"**

### V.A.3 Vitesses "radiales"

La figure 8.6 nous donne la composante "radiale"  $u$  de la vitesse. Toutes ces valeurs sont beaucoup plus faibles que les valeurs tangentiellles. Dans un maillage  $21 \times 20$ , les valeurs maximales de  $|u|$  se trouvent en  $(i=14, j=3)$  et en  $(i=14, j=17)$  ce qui correspond à la "montée" et à la "descente" du fluide autour du vortex secondaire.



**Figure 8.6 : profil des vitesses radiales**  
( $\omega_1=1$  t/min,  $\omega_2=0$ , Fact. d'Exc.=0,4)

#### V.A.4 Rotationnel $\omega$ de la vitesse

La figure 8.7 nous renseigne sur l'amplitude du rotationnel de la vitesse pour un même maillage 21x20. Six profils sont représentés: de 2 en 2 de  $j=0$  à  $j=10$  en fonction de  $i$ .

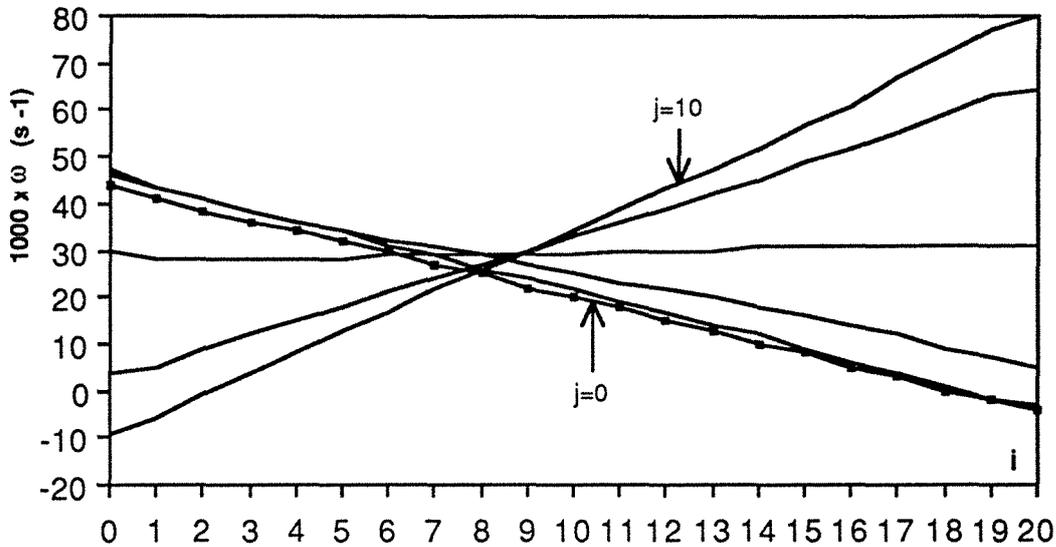


Figure 8.7 : Profil du rotationnel en fonction de  $i$

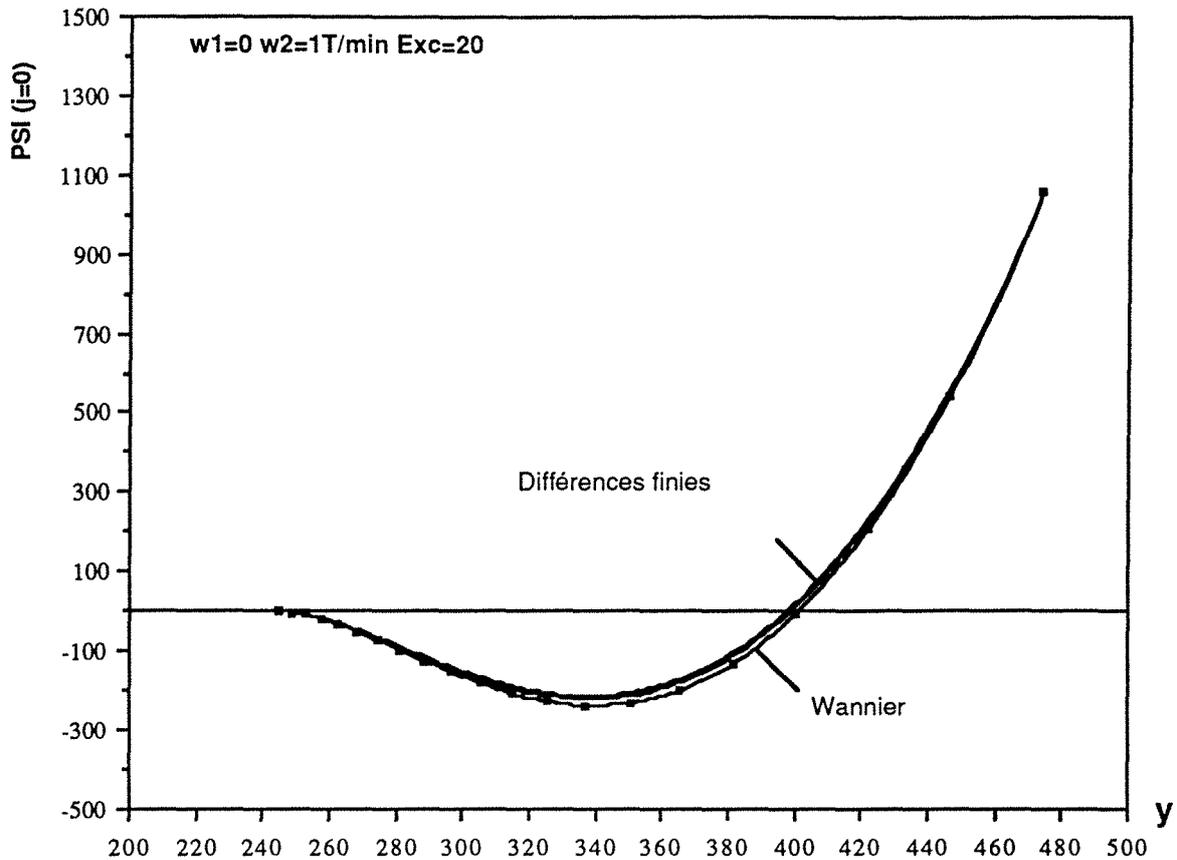
### **V.B - ROTATION DU CYLINDRE EXTERIEUR SEUL**

#### V.B.1 Fonction de courant

Cette situation est, comme dans le cas précédent, fondamentale pour la suite de l'étude (cf. chapitre 3).

Tous les paramètres géométriques sont identiques à ceux présentés dans le cas I, seule la rotation des cylindres est différente. Nous n'avons représenté ici que la solution numérique obtenue après convergence et la solution analytique.

La répartition des valeurs de  $\psi$  est représentée sur la figure 8.8.



**Figure 8.8 :** répartition des valeurs de la fonction de courant suivant la coordonnée  $y$   
 ( $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 1$  T/min,  $r_2=50$ mm,  $r_1=12,5$  mm,  $e = 20$  mm)

La vitesse de rotation angulaire du cylindre extérieur est égale à 1 tour par minute. Le régime est de Stokes, le nombre de Reynolds vaut, dans cette situation, 0,26.

Là encore, les deux profils sont quasiment identiques. Les deux méthodes fournissent des résultats équivalents.

La figure 8.9 représente l'écoulement simulé du fluide : courbes iso-densité de courant. La situation est assez différente du premier cas étudié : la courbe  $\psi=0$  enveloppe le cylindre intérieur sur environ une demi circonférence, puis se prolonge au sein du fluide selon un cercle quasiment concentrique au cylindre extérieur.

A l'intérieur de cette courbe fermée, un vortex "relativement circulaire" se développe. Entre ce cercle et le cylindre extérieur, les lignes de courant apparaissent sous la forme de cercles concentriques.

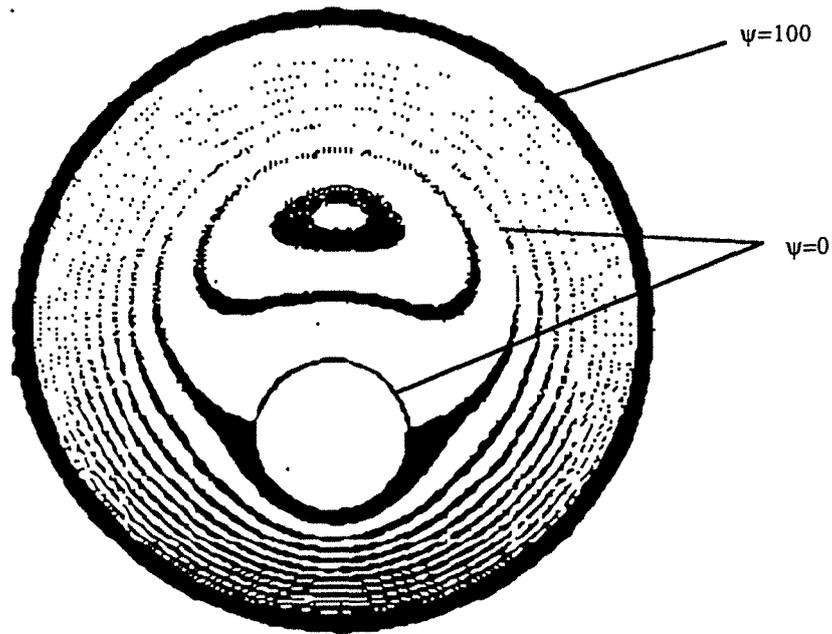


Figure 8.9 : Ecoulement en géométrie bipolaire  
 ( $R2/R1=4$ , Fact. d'Exc.=0.4,  $\omega1=0$ ,  $\omega2=1$  t/min)  
 (maillage 101x400)

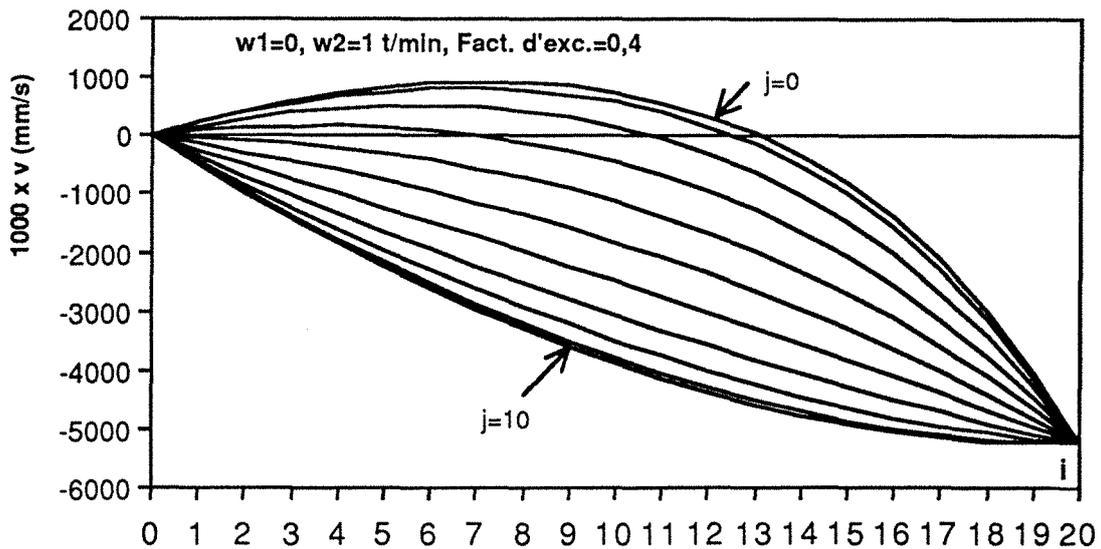
Cet écoulement se comprend assez aisément. Tout se passe en effet selon une rotation en "bloc" du fluide entraîné par le cylindre extérieur, le cylindre intérieur créant une traînée au sein de l'écoulement. Comme dans le cas précédemment étudié, les courbes iso- $\psi$  revêtent une symétrie par rapport à l'axe des y. Cette situation n'est possible que grâce au caractère laminaire et non inertiel de l'écoulement ( $Re \ll 1$ ).

Le sillage créé par le cylindre intérieur reste symétrique par rapport à l'axe  $j=0$ .

### V.B.2 Vitesses "tangentiellles"

Les profils des vitesses "tangentiellles" sont représentés sur la figure 8.10. La vitesse linéaire  $v_2$  est égale à 5,2 mm/s. Dans la partie comprise entre la courbe  $\psi=0$  et le cylindre extérieur, les vitesses "tangentiellles" possèdent des valeurs comparables à la vitesse  $v_2$  : Le fluide est bien entraîné par le cylindre extérieur. A l'intérieur de la courbe fermée  $\psi=0$ , les valeurs de la vitesse "tangentielle" ne sont pas négligeables par rapport à  $v_2$ . Le maximum de cette composante au sein de cette zone est approximativement égal au quart de la vitesse  $v_2$ . Le fluide se

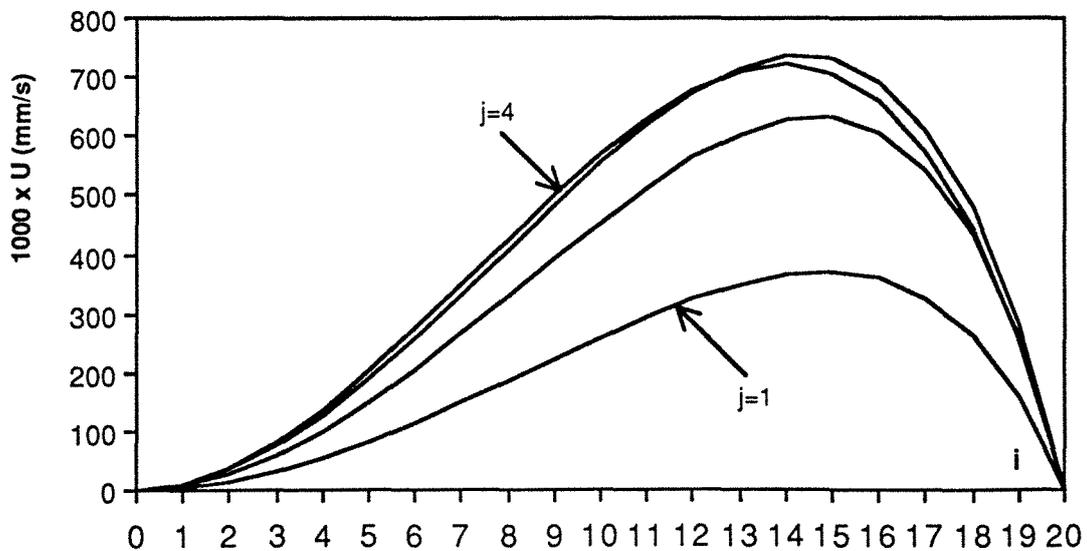
trouve donc ici en rotation assez rapide, contrairement à la situation dans le vortex "secondaire" étudié dans le premier cas.



**Figure 8.10** : Profil des vitesses "tangentielles"  
(mêmes conditions qu'à la figure 8.9)

### V.B.3 Vitesses "radiales"

Les vitesses "radiales", représentées sur la figure 8.11, ont des valeurs relativement faibles. Les maxima correspondent aux flux "radiaux" liés au vortex.



**Figure 8.11** : profil des vitesses "radiales" pour  $j=1, 2, 3, 4$   
(mêmes conditions qu'à la figure 8.9)

### V.B.4 Rotationnel de la vitesse

Le rotationnel de la vitesse est représenté sur la figure 8.12. Comme pour le premier cas étudié,  $\omega$  est tracé en fonction de  $i$  pour des valeurs de  $j$  prises de 2 en 2 entre 0 et 10.

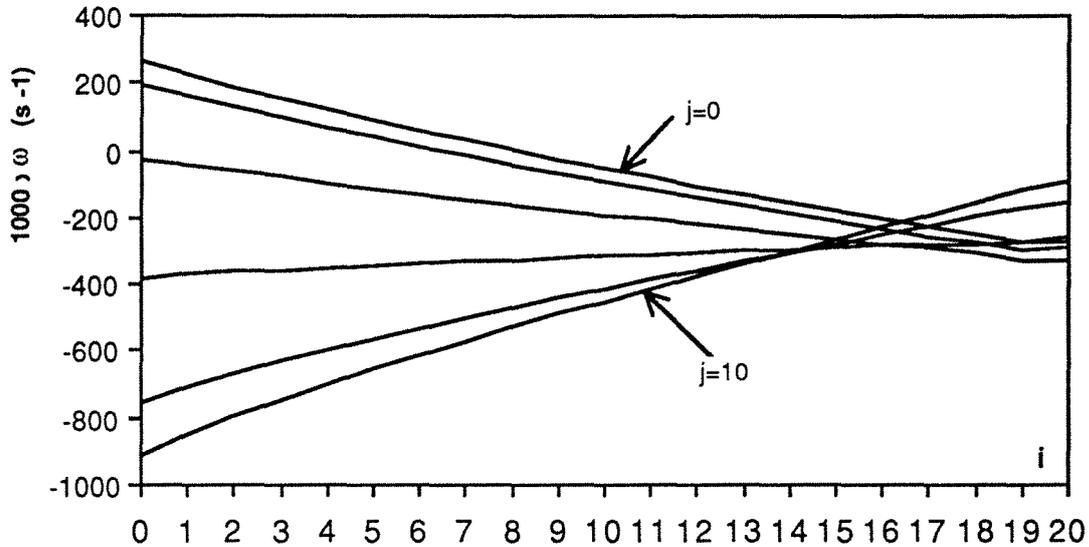


Figure 8.12 : profil du rotationnel  $\omega$   
(mêmes conditions qu'à la figure 8.9)

### **V.C - ROTATIONS SIMULTANÉES DES DEUX CYLINDRES**

A présent, les deux cylindres sont simultanément entraînés en rotation avec des vitesses angulaires égales.

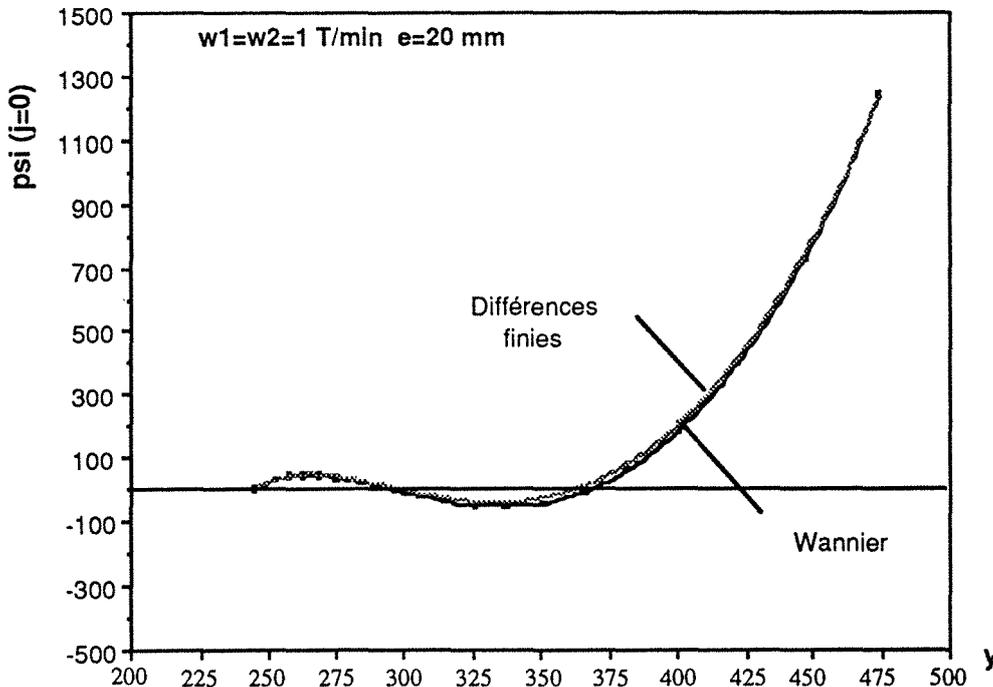


Figure 8.13 : Répartition de la fonction de courant  $\psi$  pour  $j=0$  en fonction de la coordonnée  $y$

Les résultats sont, pour les deux méthodes de calcul, une fois encore, très proches (cf figure 8.13). Les deux méthodes fournissent des valeurs de  $\psi$  très peu différentes. Cette situation d'écoulement est tout à fait fondamentale car c'est à partir de cette structure que nous allons, par le biais d'une perturbation supplémentaire, pouvoir créer un écoulement chaotique.

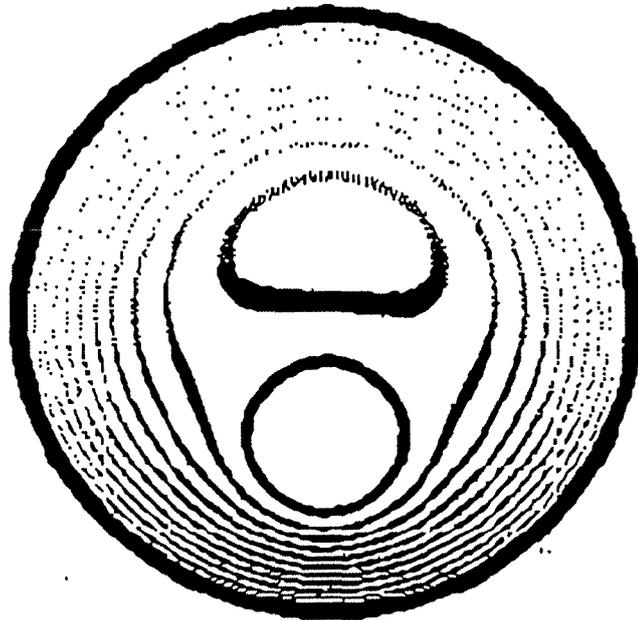


Figure 8.14 : Ecoulement en géométrie bipolaire  
( $R2/R1=4$ , fact. d'exc.=0.4,  $\omega1=\omega2=1$  t/min)



**Chapitre 3**

**CONFRONTATION NUMERIQUE/EXPERIMENTAL EN 2D**

**EXTRAPOLATION EN 3D**



## I. EXPERIMENTATION EN GEOMETRIE BIPOLAIRE

Cette partie décrit l'installation utilisée et présente les techniques expérimentales d'observation d'un écoulement bidimensionnel

### **I.A - DISPOSITIF EXPERIMENTAL**

Le dispositif expérimental est relativement simple à réaliser. Il a été conçu en plexiglas afin d'améliorer la visualisation optique de l'écoulement. Deux moteurs entraînent séparément les deux cylindres à des vitesses de rotation fixes égales à un tour par minute. Les sens de rotation peuvent être inversés. Le cylindre intérieur subit un entraînement direct de la part du moteur. Par contre, le second cylindre est entraîné par l'intermédiaire d'une courroie.

L'observation du phénomène est effectuée au-dessous du mélangeur, ce qui est un plus par rapport aux expérimentations faites par Chaiken et al. (1986). En effet ses observations n'étaient que partielles du fait de l'obstruction de l'image par le moteur entraînant le cylindre intérieur.

La fenêtre du fond initialement en plexiglas a été remplacée par un hublot optique à faces parallèles en verre de 7 mm d'épaisseur. Le gain résultant sur le parallélisme et la planéité de cette paroi permet alors une visualisation nette, il ne subsiste plus, à l'oeil, d'aberration significative de l'image.

Le dispositif expérimental est décrit à l'échelle sur les deux figures 9.1 et 9.2 :

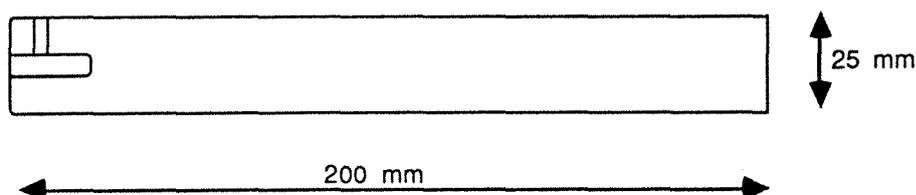


Figure 9.1 : Représentation et côtes du cylindre intérieur

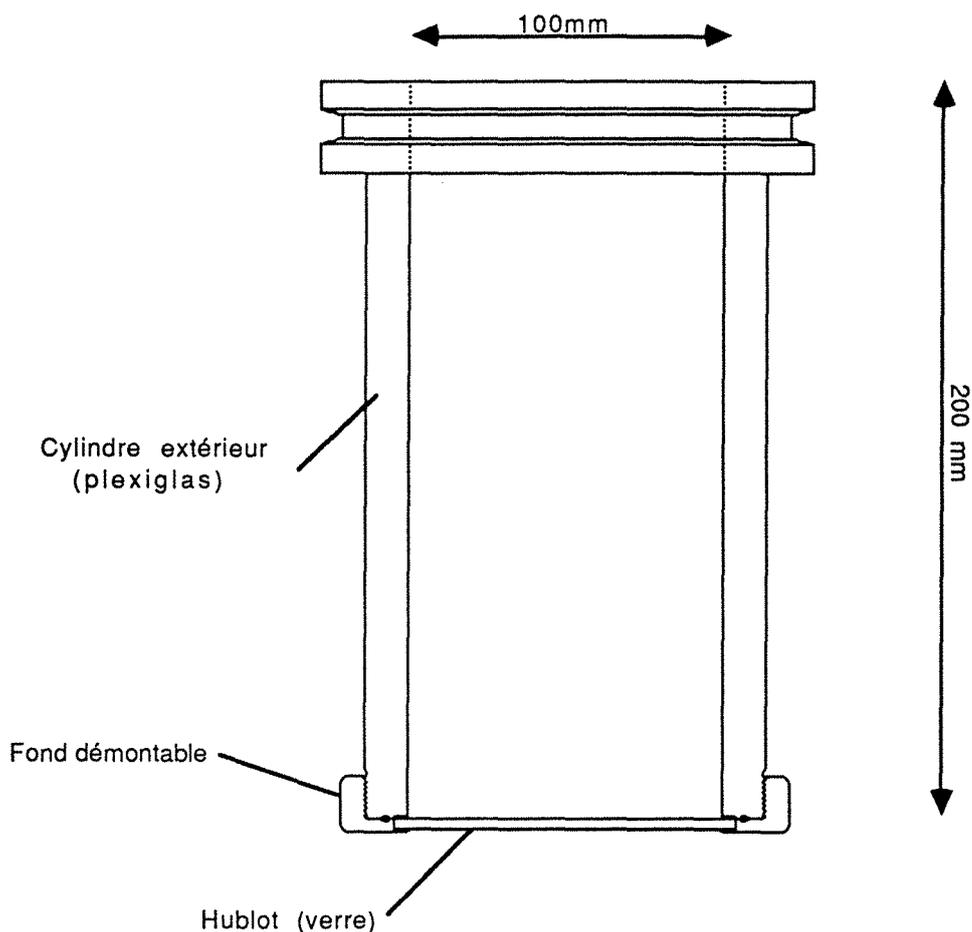


Figure 9.2 : Représentation cotée du cylindre extérieur

## **I.B - RAPPELS CONCERNANT LES INTERACTIONS ENTRE LUMIERE ET MATIERE**

Les interactions lumière/matière sont assez diverses. Dans notre travail, l'absorption de lumière, la fluorescence, la phosphorescence et la polarisation rotatoire peuvent être utilisées. Nous allons donc succinctement rappeler quelques résultats importants concernant ces phénomènes physiques .

Au repos, les molécules, atomes composant la matière, sont statistiquement à un état d'énergie minimal. Il s'agit de l'état fondamental singulet (que l'on appellera  $S_0$ ). Eclairée par de la lumière, de fréquence  $\nu$ , d'énergie  $E = h \nu$ , la matière voit alors son environnement électronique se modifier. L'état statistique  $S_1$ , d'énergie supérieure, en valeur absolue, à  $S_0$ , est alors plus peuplé qu'auparavant. C'est le phénomène d'absorption (cf figure 9.3).

Energie de liaison electron/molécule

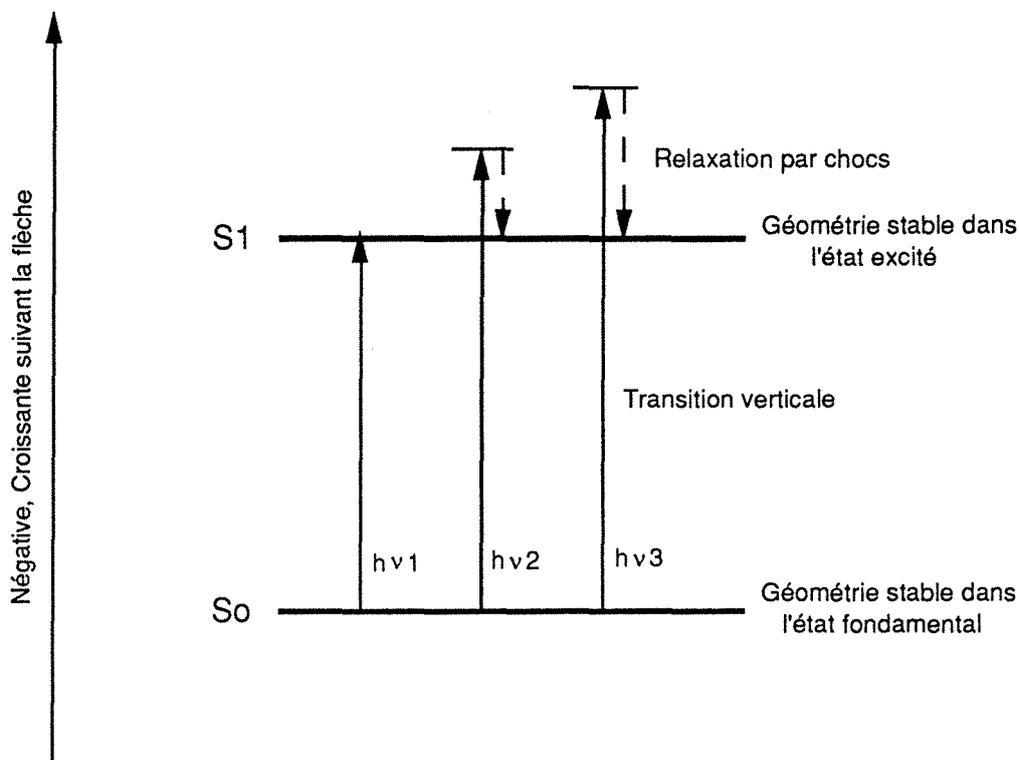
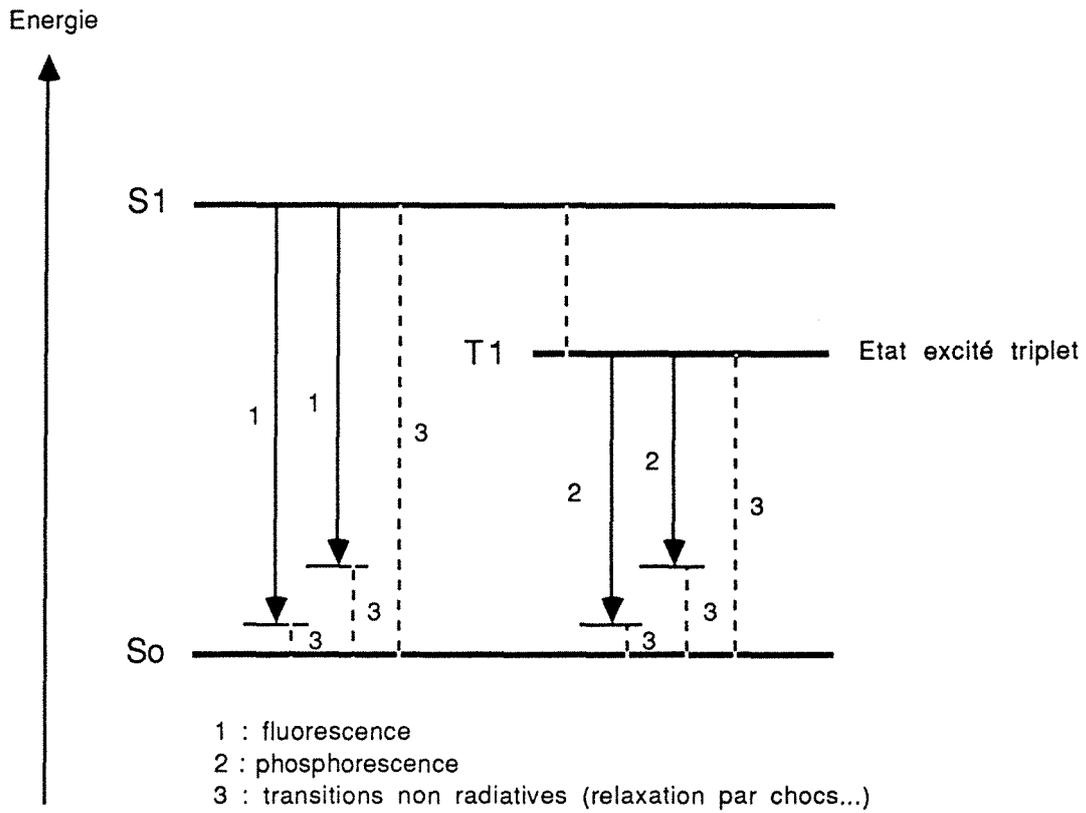


Figure 9.3 : diagramme simplifié d'absorption électronique

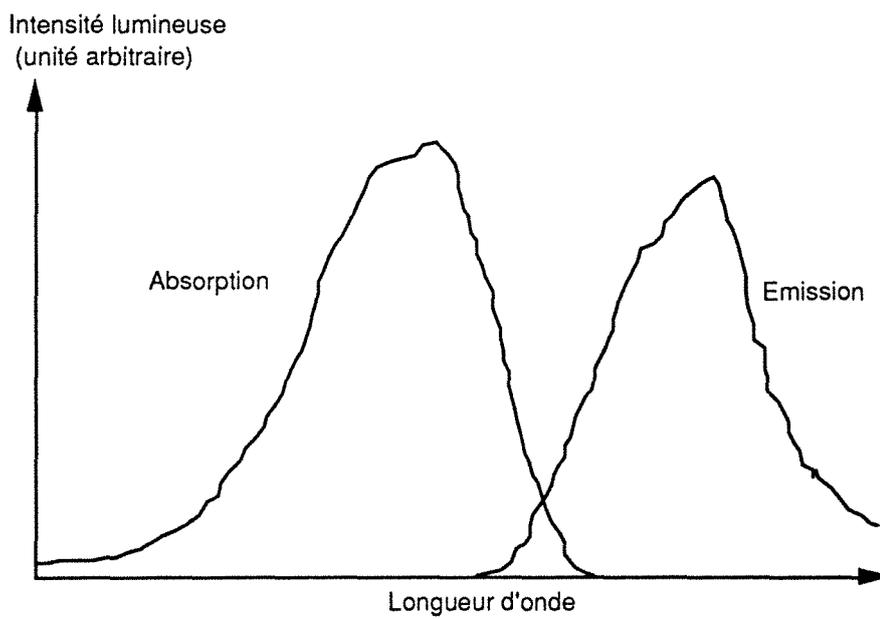
Les longueurs d'onde absorbées correspondent en moyenne à la différence d'énergie entre les états S0 et S1. Le spectre d'absorption est représenté sur la figure 9.5.

Le retour à l'état fondamental peut s'effectuer de différentes façons. Le processus de désactivation direct est la fluorescence. Cette transition est permise car elle a lieu entre deux états de même multiplicité (singulet). Le temps de déclin lié à la fluorescence et donc à la concentration de S1 est très court (quelques ns).

La phosphorescence provient de la désactivation énergétique entre deux états de multiplicité différente. Les différents processus sont résumés sur la figure 9.4.



**Figure 9.4 : Différents processus de désactivation énergétique**



**Figure 9.5 : Spectres typiques d'absorption et d'émission**

Quelques rappels concernant la polarisation rotatoire sont consignés au paragraphe I.C.3.

## I.C - TECHNIQUES DE VISUALISATION

### I.C.1 Traçage coloré : Utilisation de la Fluorescence

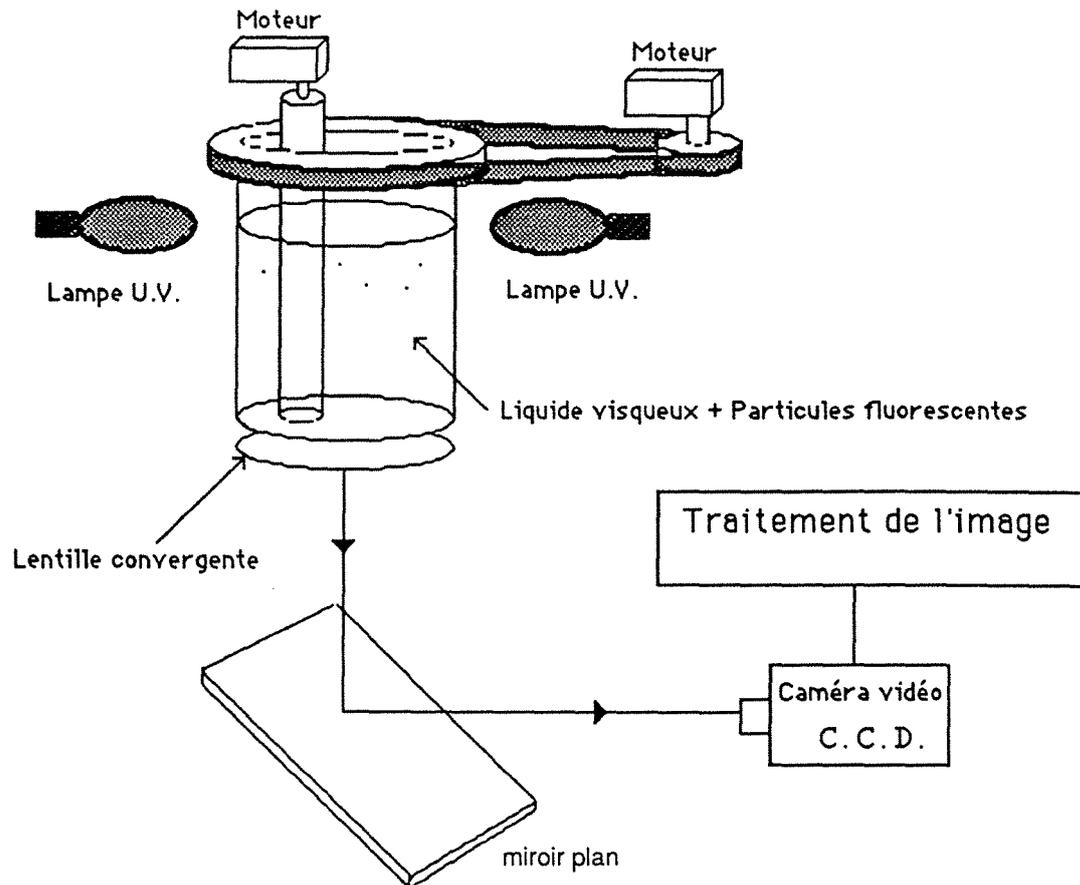
Le traçage coloré simple consiste à placer au sein de l'écoulement une substance de couleur différente du fluide mais de mêmes caractéristiques physiques et de suivre celle-ci au cours du temps. Cette méthode, très simple, fournit un excellent traçage des mouvements du fluide. Cependant, le contraste reste relativement faible. Le suivi peut être réalisé en lumière blanche, le colorant absorbant le complémentaire de sa couleur. Notons néanmoins que le contraste peut être légèrement amélioré grâce à l'interposition de filtres de couleur adaptés.

La fluorescence est elle, beaucoup plus performante à cet égard. Tout d'abord, ce sont des longueurs d'onde courtes (ultra-violet) qui créent l'excitation des particules émissives. Celles-ci réémettent une lumière, dans le domaine visible. Il n'y a donc pas de chevauchement ou de trop grande proximité entre les longueurs d'onde d'excitation et de d'émission.

Il faut rappeler que la fluorescence est réellement une émission de lumière et non pas simplement une absorption de la lumière complémentaire comme dans le cas des colorants usuels (mesure absolue alors que l'absorption correspond à des mesures différentielles).

Le contraste peut être très bon. En effet, par un choix judicieux des substances fluorescentes à grand rendement quantique, l'émission paraît très contrastée sur un fond quasiment noir. Il faut noter que pour le glycérol il existe une fluorescence bleue parasite non négligeable, ce qui nous a conduit à utiliser des filtres optiques séparateurs appropriés. Il faut noter que la concentration en produit fluorescent doit rester faible afin de garder une linéarité entre concentration et émission. La figure 9.6 montre l'augmentation du contraste par fluorescence et filtrage optique.

Le dispositif retenu est représenté, page suivante, sur la figure 9.7.



**Figure 9.7 : Montage expérimental**

L'utilisation simultanée de plusieurs colorants permet, par exemple, de singulariser telle ou telle région de l'écoulement, notamment si celui-ci est complexe ( zones étirées, vortex ... ).

Nous reviendrons plus en détail sur la prise d'information à l'aide d'une caméra vidéo ainsi que sur le traitement d'image dans l'annexe 7.

### I.C.2 Autre traçage coloré : Utilisation de la Phosphorescence

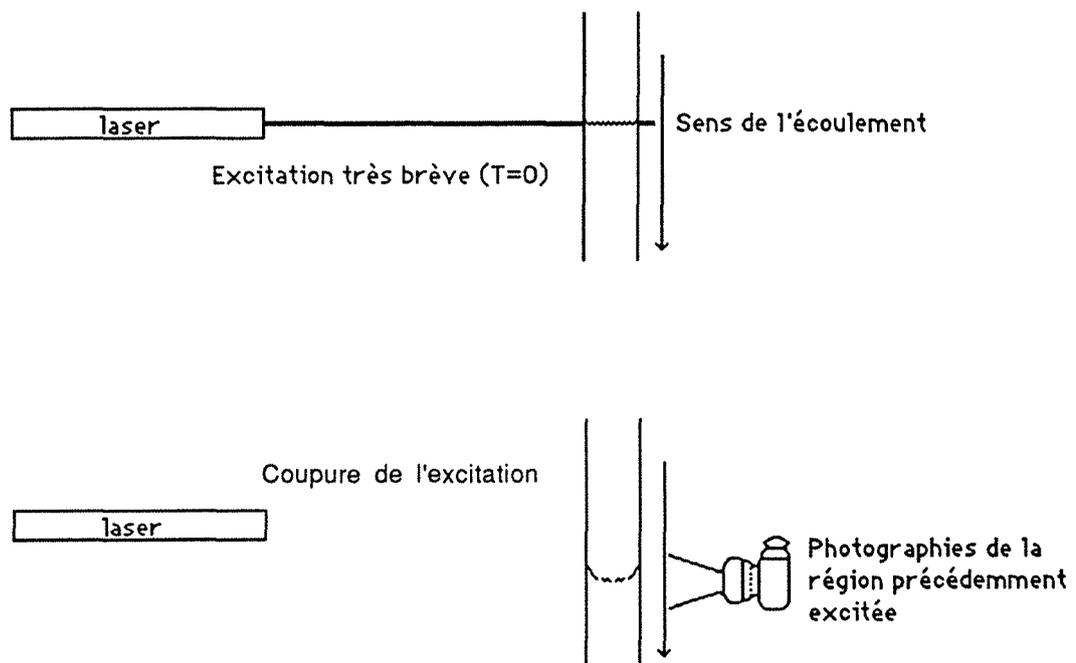
La différence majeure existant entre la fluorescence et la phosphorescence est le temps de décroissance du phénomène. Les deux processus sont gouvernés par des lois exponentielles dont les constantes de temps sont très différentes.

Typiquement la fluorescence possède un temps de relaxation caractéristique compris entre la picoseconde et la microseconde. Pour le mécanicien des fluides ces laps de temps sont inférieurs au

plus petits temps rencontrés dans la description des phénomènes physiques (par exemple les échelles de temps utilisées en turbulence). Les images obtenues peuvent être utilisées pour "figer" les mouvements du fluide (Les plus petits temps caractéristiques en turbulence classique sont environ de l'ordre de  $10^{-4}$  s).

Les temps de déclin dans le cas de la phosphorescence (de composés inorganiques) sont toujours supérieurs à la microseconde. Ils peuvent même être de l'ordre de plusieurs heures, voire de plusieurs jours. Ainsi, contrairement à la fluorescence, l'émission de lumière peut se poursuivre longtemps après l'excitation. Ceci est particulièrement intéressant car la visualisation n'est plus gênée par la lampe d'excitation (augmentation du contraste optique).

Enfin notons que l'utilisation de la phosphorescence couplée à une excitation pulsée localisée dans l'espace (pinceau lumineux, nappe laser) peut donner d'intéressants résultats notamment sur la déformation rapide au cours du temps de régions préalablement excitées.



**Figure 9.8 : Exemple de suivi des déformations d'un cylindre de fluide en conduite cylindrique par phosphorescence**

Nous n'avons pas effectivement travaillé en phosphorescence dans notre géométrie. Ceci provient du fait que le contraste obtenu en fluorescence est très bon. De plus la variété de colorants

fluorescents est particulièrement importante, ce qui n'est pas du tout le cas des colorants phosphorescents.

### I.C.3 Visualisation des contraintes de cisaillement du fluide en mouvement : Biréfringence d'écoulement

Une caractéristique fort intéressante de la lumière pouvant être utilisée en mécanique des fluides est sa polarisation.

Le lecteur pourra se référer à l'étude présentée dans l'ouvrage de Bruhat (1959). Rappelons, brièvement, que la lumière est constituée par l'association de deux vecteurs orthogonaux (le vecteur champ électrique et le vecteur champ magnétique). Pour une onde plane quelconque, le vecteur champ électrique (et par conséquent le vecteur champ magnétique) est aléatoirement réparti dans un plan orthogonal à la direction de propagation de la lumière.

Pour une onde polarisée, ce vecteur champ électrique reste parallèle à une direction fixe (orthogonale à la direction de propagation). Certains cristaux possèdent la faculté de transformer une lumière quelconque en une lumière polarisée. L'exemple le plus connu est celui du cristal appelé "Spath d'Islande". Ce solide n'est pas isotrope vis-à-vis de la lumière. Il existe un axe privilégié au sein du cristal.

La lumière subit une double réfraction. Les deux rayons sortants sont de natures très différentes. Un premier rayon dit ordinaire ne possède pas de particularité intéressante. Par contre le second rayon, appelé extraordinaire, est lui très fortement polarisé.

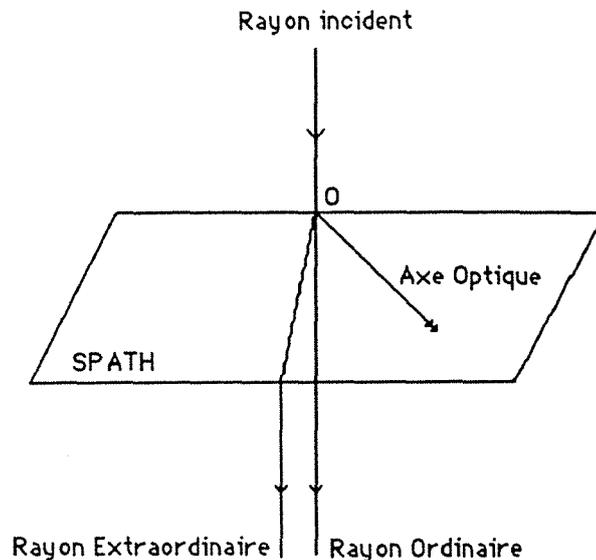


Figure 9.9 : Double réfraction dans un cristal de "Spath"

Cette situation peut également apparaître lors de l'écoulement de certains liquides. Il s'agit du phénomène de biréfringence d'écoulement (découvert en 1870 par Maxwell).

L'étude des liquides sous contraintes de cisaillement est usuellement réalisée dans un appareil de "Couette". L'espace entre les deux cylindres est petit vis à vis des rayons de ceux ci ce qui autorise des valeurs de gradients élevés et par conséquent des polarisations importantes.

De façon générale, la polarisation est proportionnelle au taux de cisaillement local du fluide (cf. Bruhat 1959) ; tandis que la direction de l'axe optique principal en un point fait un angle de  $45^\circ$  par rapport à la direction de la vitesse en ce même point. L'étude du champ local des vitesses permet de retrouver ce résultat.

En effet considérons localement l'écoulement de "Couette". Les vitesses sont localement parallèles entre elles et, pour un liquide newtonien, les gradients de vitesses se répartissent linéairement d'une paroi à l'autre (cf. figure 9.10)

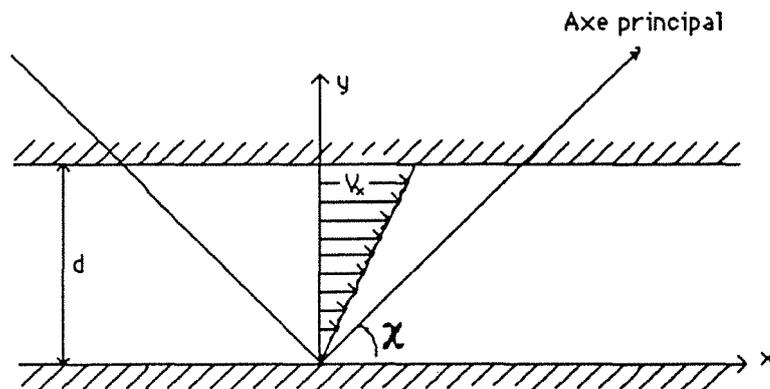


Figure 9.10 : Répartition des vitesses en écoulement de "Couette"  
Apparition d'un axe optique principal

Dans un tel système les vitesses prennent la forme suivante :

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \dot{\gamma} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

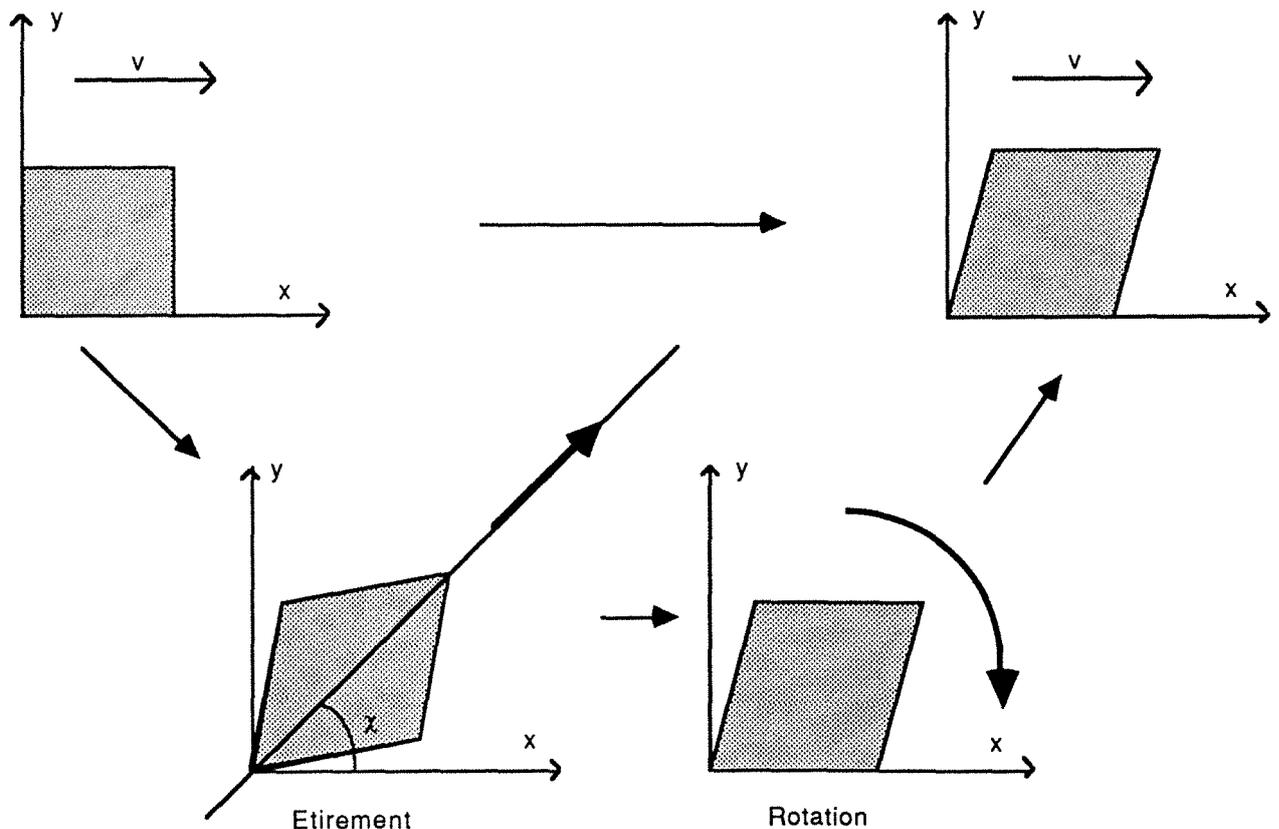
Le tenseur des contraintes est donc défini par la matrice G qui peut se décomposer en une partie symétrique et une partie antisymétrique :

$$\begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 \\ \dot{\gamma}/2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dot{\gamma}/2 \\ -\dot{\gamma}/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Eti.                      Rot.

On reconnaît aisément la matrice caractéristique d'un étirement (partie symétrique) et la matrice d'une rotation (partie antisymétrique). Ceci signifie, en pratique, que l'écoulement est la superposition de ces deux mouvements élémentaires.

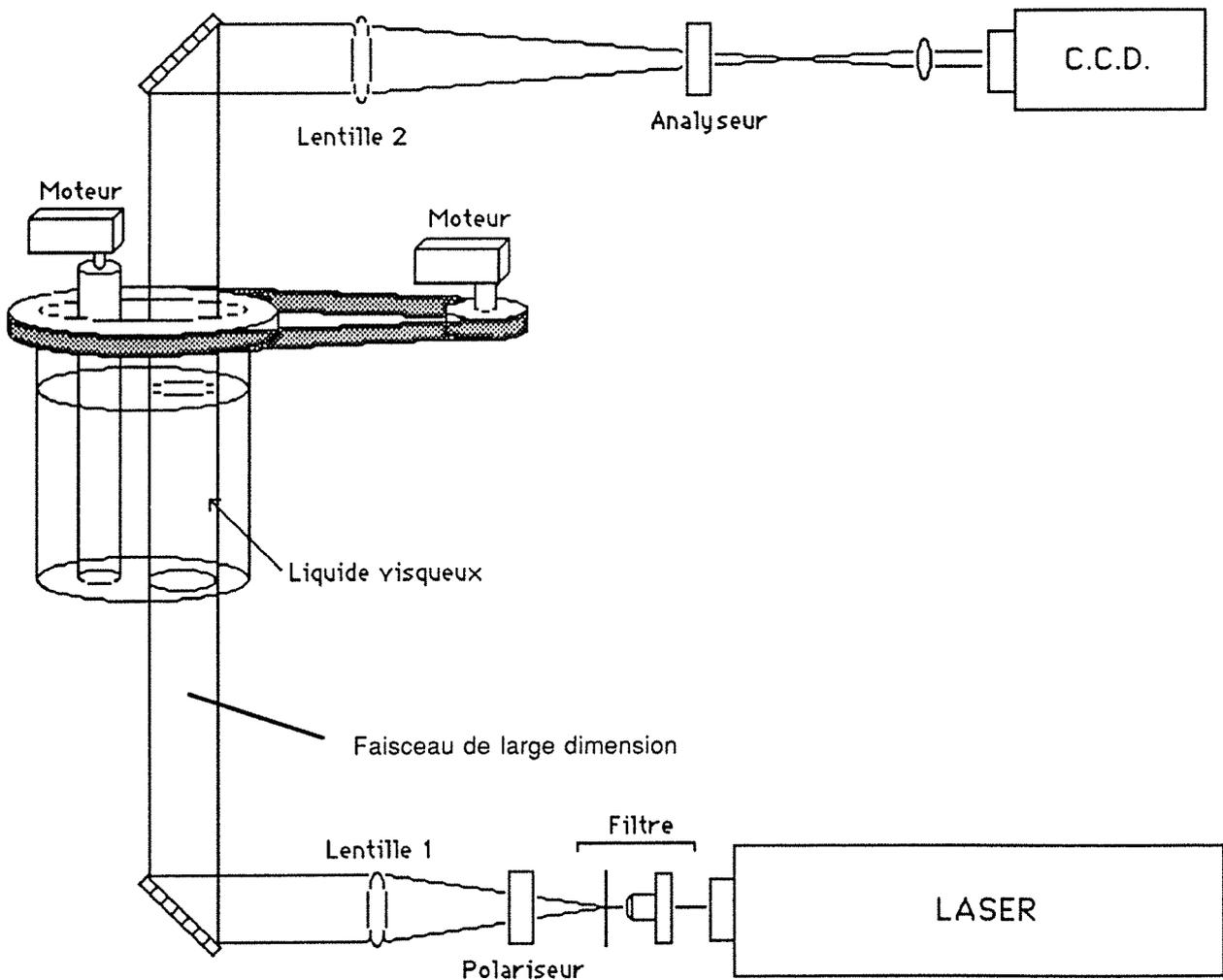
Le schéma de la page suivante montre la décomposition en deux mouvements élémentaires de la déformation d'une région de forme initialement carrée dans un écoulement idéalisé de "Couette". La direction d'étirement est la direction de l'axe optique principal. L'angle  $\chi$  séparant la direction de l'écoulement et l'axe optique principal est égal à  $45^\circ$ .



**Figure 9.11 : Décomposition en deux mouvements élémentaires de la déformation d'une portion carrée de fluide en régime de "Couette"**

Les études menées en géométrie bicylindrique centrée peuvent être appliquées à une situation excentrée. Il est nécessaire d'utiliser un doublet polariseur-analyseur afin de rendre compte de l'état de polarisation du milieu étudié. Le polariseur est placé entre la source lumineuse et le milieu à étudier, l'analyseur est lui placé entre le milieu et le système de prise de l'information. Par l'adjonction de deux lentilles, nous pouvons décrire sur une grande surface le "profil des cisaillements". L'étude détaillée de l'image peut renseigner semi quantitativement sur le profil des vitesses.

Un avantage important en faveur de cette technique par rapport aux deux précédemment citées (fluorescence et phosphorescence) est qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser de colorant. Le fluide fournit directement l'information.



**Figure 9.12 :** Visualisation du cisaillement en écoulement bicylindrique excentré (observation spatialement grande)

La figure 9.12 donne un aperçu du matériel nécessaire à une étude de cisaillement d'écoulement en deux dimensions. Il faut néanmoins préciser que l'information recueillie n'est représentative de l'écoulement bidimensionnel que si la longueur des cylindres est bien supérieure aux rayons de ceux-ci, i.e. l'effet de fond est négligeable devant le mouvement à 2 dimensions.

Quelques essais ont été réalisés. Toutefois, aucun résultat concluant n'a été obtenu à cause de vitesses aux parois et par conséquent de gradients de vitesses au sein du liquide trop faibles.

### I.D - PROTOCOLES D'EXPERIENCES

La plupart des expériences effectuées en géométrie bipolaire sont réalisées à l'aide de colorants fluorescents. Ceux-ci se présentent sous la forme de poudres de différentes couleurs (distribuées sous le nom "DAYGLO" par la société CARBONNEL-JACQUEMOT. PARIS).

Ces poudres se dissolvent assez mal dans l'eau et dans le glycérol. Il y a flottation du produit dans le liquide.

Des essais préliminaires ont montré que la diffusion pure du colorant est particulièrement faible dans le glycérol. L'équation de la diffusion montre que le déplacement  $\Delta x$  d'une particule placée dans un fluide de viscosité  $\nu$  est, en première approximation, proportionnel à la racine carrée du temps.

$$\Delta x = \sqrt{Dt} \quad (4)$$

Le coefficient D, appelé coefficient de diffusion, est proportionnel à la température, inversement proportionnel à la viscosité du fluide environnant et inversement proportionnel au rayon moyen de la particule. Dans les conditions d'expérience (température de l'ordre de 20°C, viscosité de l'ordre de 1 Pa.s, rayon supposé supérieur à 2 nm) le coefficient D a donc comme valeur maximale possible  $10^{-13} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ .

Nous pouvons à présent estimer le déplacement par diffusion moléculaire d'une particule dans le glycérol au cours du temps.

Au bout de 1 seconde la particule aura parcouru	0,32 $\mu\text{m}$
----- 10 secondes-----	1 $\mu\text{m}$
----- 1 minute-----	2,5 $\mu\text{m}$
----- 1 heure-----	19 $\mu\text{m}$

Ce simple calcul nous indique que ce processus ne peut nous gêner de manière importante même pour des tracés durant plusieurs heures.

Le traceur peut être initialement placé dans n'importe quelle zone du mélangeur. Néanmoins, afin de renseigner le plus complètement possible sur la façon avec laquelle le traceur est dispersé, il convient de choisir judicieusement la position initiale de celui-ci.

Dans la plupart des expériences, ne sachant pas, a priori, quel écoulement est susceptible de se produire, nous avons choisi de placer le traceur selon le schéma suivant:

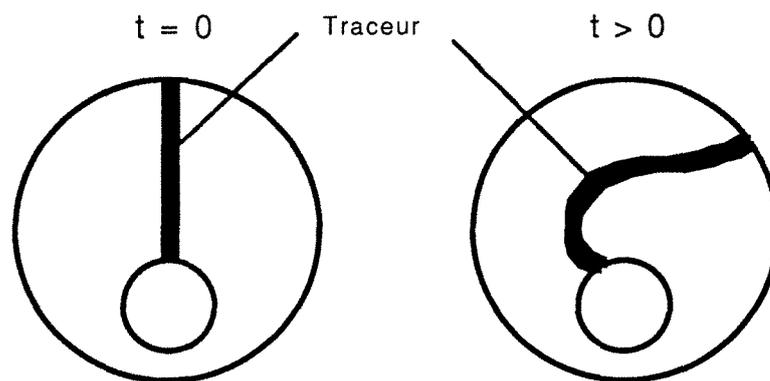


Figure 9.13 : disposition du colorant à l'instant initial

Cette configuration de départ se justifie par le fait que la zone dans laquelle le colorant est placé est une région où systématiquement un vortex se forme (ceci n'est plus vrai lorsque les vitesses aux parois sont variables dans le temps : voir partie III, concernant l'écoulement en  $(2+1)D$ ). Cette région ne peut donc être correctement décrite par le traceur que si celui-ci s'y trouve dès le départ. En effet, une particule externe à un vortex ne peut pénétrer rapidement dans celui-ci si la diffusion est très faible.

Les autres régions, essentiellement caractérisées par un écoulement de type cisaillement simple, sont décrites assez correctement par le traceur.

Nous avons placé le traceur légèrement sous la surface libre du liquide. En effet il faut se méfier de l'effet de l'élargissement du traceur en surface.

En effet, deux influences distinctes sont responsables de cet étalement, tout d'abord, la gravité qui peut conduire à un écoulement radial de la goutte de traceur préalablement placée au dessus de la surface du liquide.

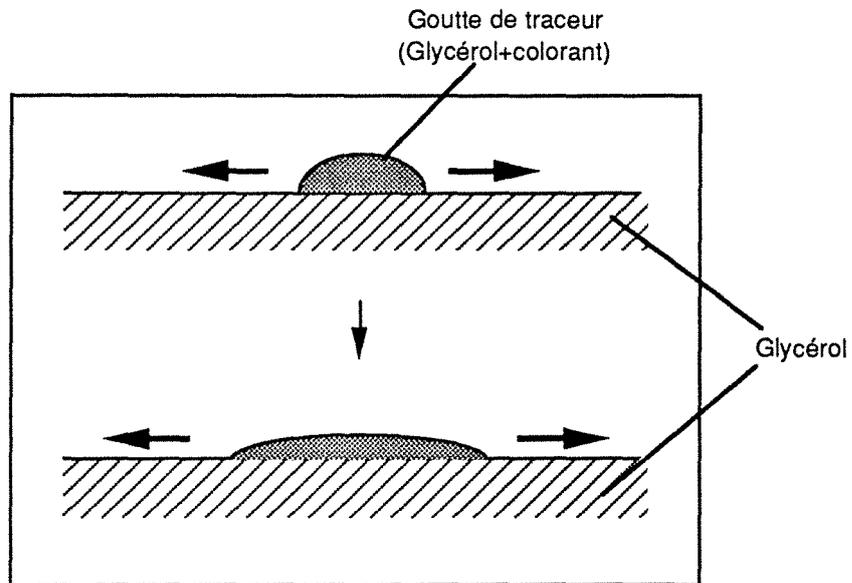
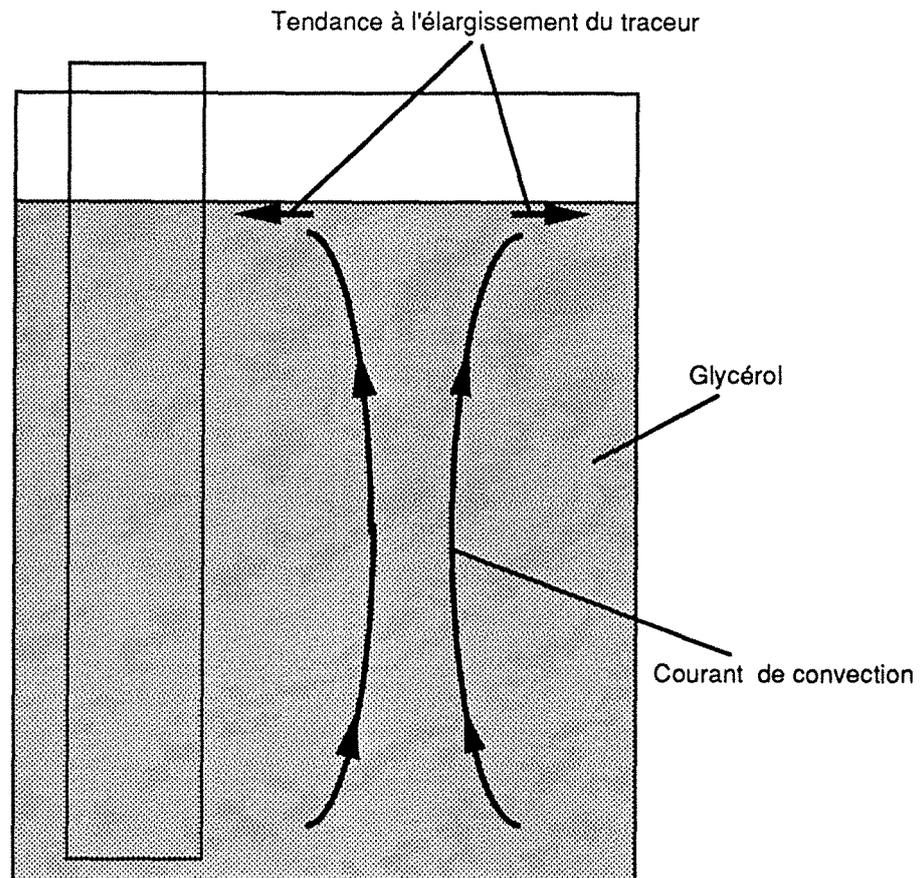


Figure 9.14 : Elargissement du traceur en surface

Ensuite, peut venir se superposer un effet convectif représenté sur la figure 9.15.



**Figure 9.15 : Mouvements de convection au sein du mélangeur**

Cette convection est due à l'apport de chaleur des lampes ultra-violettes utilisées pour l'excitation du traceur fluorescent.

Afin de s'affranchir des deux contraintes exposées précédemment, nous plaçons les gouttes de traceur, constituées par du colorant dissous dans du glycérol, très légèrement sous la surface libre du fluide, ce qui évite l'élargissement par gravité de la goutte. Les lampes sont elles, placées relativement loin (20 à 30 cm) du mélangeur. De plus, une ventilation importante permet une évacuation efficace de la chaleur.

Placé à cette hauteur, le traceur ne subit pas l'influence du fond du cylindre.

## II. CONFRONTATION THEORIE/EXPERIENCE EN 2D : INFLUENCE DE L'EXCENTRICITE SUR LES DIVERS ECOULEMENTS OBSERVES

Dans le chapitre 2, ont été comparés les résultats issus de la solution analytique proposée par Wannier (1950), et la solution numérique décrite à la partie IV de ce même chapitre. Les résultats sont en bon accord. Ceci nous a permis de poursuivre l'étude du système en trois dimensions (cf. partie III du chapitre 3) à l'aide de la solution analytique, plus simple et plus rapide à utiliser.

Dans cette partie, tous les types d'écoulement de Stokes possibles en 2D sont présentés pour un rapport des rayons des cylindres fixé et pour un rapport des vitesses  $\omega_1/\omega_2$ , en valeur absolue, égal à 1. En réalité, seuls quatre cas de figure sont à étudier:

- La rotation du cylindre intérieur seul
- La rotation du cylindre extérieur seul
- Les rotations simultanées des deux cylindres dans le même sens
- Les rotations simultanées des deux cylindres dans le sens opposé

Dans chacun des quatre cas précités, l'effet de l'excentricité a été mis en évidence. Le facteur d'excentricité  $e/a_2$  varie de 0 pour l'écoulement de Couette à 0,75 lorsque les deux cylindres sont en contact. Nous étudions l'influence de  $e/a_2$  pour des valeurs comprises entre 0,05 et 0,7 avec un pas de 0,05.

Le rapport des rayons des cylindres  $a_1/a_2$  est égal à 1/4. Le choix d'un tel rapport n'est pas entièrement arbitraire. En effet, pour des valeurs plus élevées (1/3, 1/2, ...) l'espace disponible pour le liquide est très étroit. Aussi, dans la perspective de fabrication d'un véritable mélangeur industriel, une telle obstruction par le cylindre intérieur, est certainement à éviter. Symétriquement, les rapports plus faibles de rayons limitent singulièrement l'influence de la rotation du cylindre intérieur sur l'écoulement observé.

Les vitesses de rotation des deux cylindres sont nulles ou égales en valeur absolue à 1 tour par minute. La viscosité du liquide est prise égale à  $10^{-3}$  m<sup>2</sup>/s, c'est-à-dire approximativement celle du glycérol.

L'écoulement réel obtenu par l'expérience est présenté, dans quelques cas typiques. Nous pourrions ainsi comparer, ce qui est le but de cette partie, théorie et expérience.

## II.A - ROTATION DU CYLINDRE INTERIEUR SEUL

Le nombre de Reynolds défini par  $Re = \frac{\max(v_1, v_2) \cdot a_2}{\nu}$   
est égal à:

$$\frac{(2 \cdot \pi / 60 \cdot 0,0125) \cdot 0,05}{0,001} = 0,06.$$

Le régime est donc laminaire. L'inertie créée y est très faible, ce qui entraîne une symétrie des lignes de courant par rapport à l'axe joignant les centres des deux cylindres ( $\beta=0$ ).

L'influence de l'excentricité du système est bien mise en évidence sur les figures 10.1.a et 10.1.b. Pour des valeurs de  $e/a_2$  proches de zéro, l'écoulement est identique à celui de Couette. Les lignes de courant sont quasiment concentriques, elles suivent en réalité les courbes iso- $\alpha$  (voir définition de ces courbes dans le chapitre 2).

Cette situation est présente pour des valeurs de  $e/a_2$  inférieures à 0,2. Pour des rapports supérieurs, il apparaît une zone de recirculation proche de la paroi supérieure. Le centre de ce vortex secondaire se situe sur l'axe défini par  $\beta=0$ . La taille de ce vortex augmente avec le rapport  $e/a_2$ . L'écoulement présent pour une valeur moyenne de  $e/a_2$  est représenté schématiquement sur la figure 10.2. La paroi intérieure est caractérisée par une valeur de la fonction de courant  $\psi$  égale à zéro (arbitraire). La valeur de  $\psi$  attribuée à la paroi supérieure est calculée par intégration du flux de liquide entre les deux cylindres. Cette valeur est atteinte, hormis sur la paroi extérieure, au sein même de l'écoulement sur la courbe comprise entre les points A et A'. Cette courbe sépare les régions définissant les deux vortex en présence.

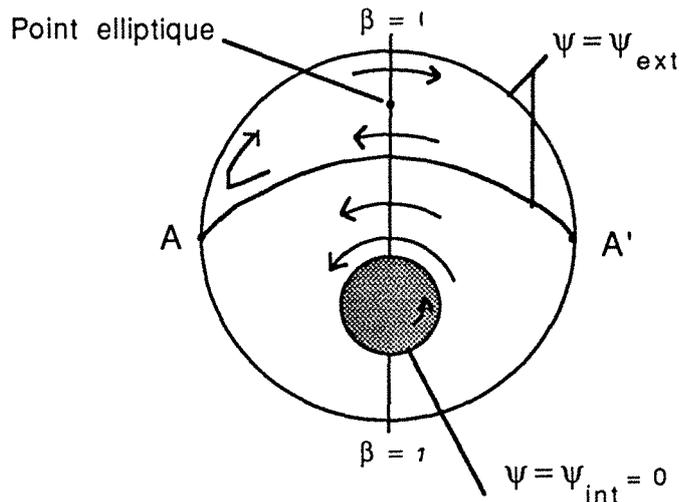


Figure 10.2 : Lignes de courant en régime de Stokes  
Cylindre intérieur seul tournant

Les points A et A' tendent à se rapprocher l'un de l'autre à mesure que l'on augmente le rapport  $e/a_2$ . Ils se rejoignent en  $\beta = \pi$  pour la valeur de  $e/a_2$  égale à 0,75, c'est-à-dire lorsque les deux cylindres sont en contact.

Il existe dans cette configuration un point elliptique mais pas de point hyperbolique. L'écoulement est parfaitement stable dans le temps. Ce protocole de mélange utilisé seul est évidemment à proscrire.

La figure 10.2.b est une photographie de l'écoulement 2D pour un facteur d'excentricité égal à 0,7. Cette figure est à comparer au dernier tracé de la figure 10.1.b. Les deux images sont superposables.

Le traceur reste confiné dans la région entourant le point elliptique. Le mélange est de mauvaise qualité.

## II.B - ROTATION DU CYLINDRE EXTERIEUR SEUL

Le nombre de Reynolds défini par  $Re = \frac{\max(v_1, v_2) \cdot a_2}{\nu}$   
est à présent égal à:

$$\frac{(2 \cdot \pi / 60 \cdot 0,05) \cdot 0,05}{0,001} = 0,25.$$

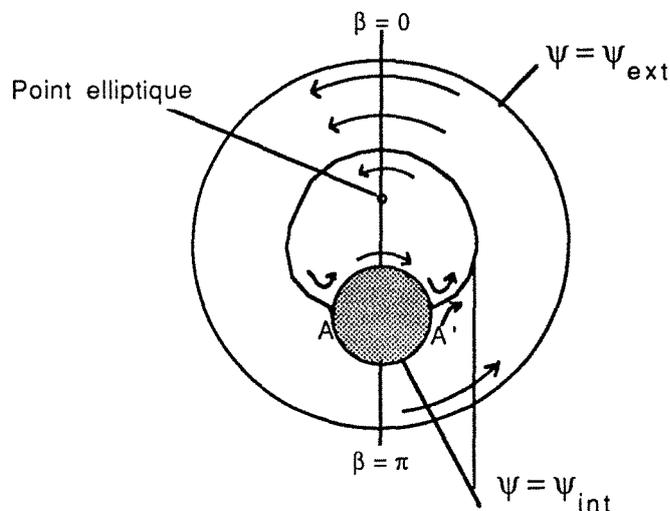
Cette valeur est, là encore, très faible. Les figures restent parfaitement symétriques par rapport à l'axe  $\beta = 0$  (défini sur la figure 10.2).



Figure 10.2.b : Ecoulement dans le cas où  
seul le cylindre interne est en rotation  
( $\omega_{int} = 1$  T/min,  $e/a_2=0,7$ )

Pour des rapports de  $e/a_2$  inférieurs à 0,1, les lignes de courant sont quasi concentriques. Pour des rapports plus élevés, il apparaît un vortex secondaire proche du cylindre intérieur. Le diamètre moyen de ce vortex augmente avec le rapport  $e/a_2$ . Il y a également déplacement de son centre vers le cylindre extérieur à mesure que  $e/a_2$  est important. Cet écoulement est représenté sur les figures 10.3 et 10.3.b.

La figure 10.4 représente l'aspect des lignes de courant pour une excentricité moyenne ( $e/a_2 \approx 0,4$ ). La courbe iso- $\psi = 0$ , ne correspond pas seulement à la paroi intérieure, mais aussi à la limite de séparation entre le vortex central et les régions proches du cylindre extérieur. Une augmentation du rapport  $e/a_2$  entraîne un élargissement du vortex central. Les points A et A', définis par l'intersection de la paroi intérieure et de la courbe iso- $\psi = 0$  au sein du fluide, tendent à se rapprocher l'un de l'autre en  $\beta = \pi$ . Ce contact a lieu pour le facteur d'excentricité maximal  $e/a_2 = 0,75$ .



**Figure 10.4 : Lignes de courant en régime de Stokes  
Cylindre extérieur seul tournant**

Cet écoulement possède un point elliptique représenté sur la figure ci-dessus. Les trajectoires sont, comme au paragraphe II.A, stables dans le temps. Une goutte de traceur placée dans le vortex central s'étire très lentement par "rotation" autour du point elliptique. La situation est identique si l'on place une goutte de traceur hors de cette zone centrale : il y a étirement continu de celle-ci le long de cercles concentriques au cylindre extérieur. Là encore, le mélange ne s'effectue pas correctement.

La figure 10.4.b est une photographie (en fausses couleurs) de l'écoulement 2D pour un facteur d'excentricité moyen égal à 0,4. Cette figure est à comparer au dernier tracé



Figure 10.4.b : Ecoulement dans le cas où  
seul le cylindre externe est en rotation  
( $\omega_{int} = 1$  T/min,  $e/a_2=0,4$ )

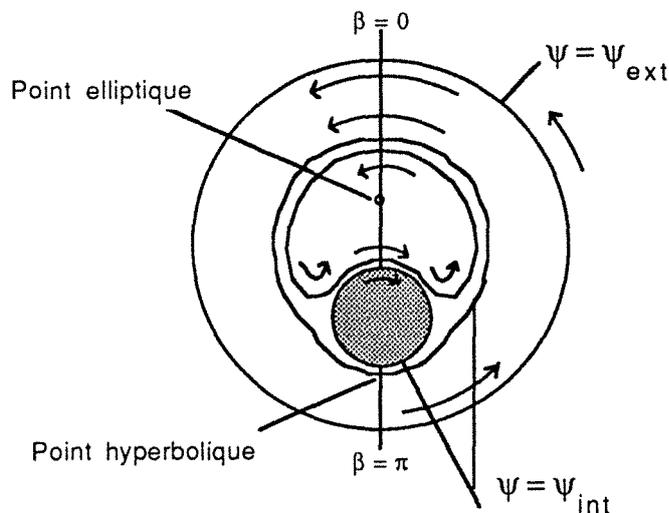
correspondant de la figure 10.3. Les deux images sont encore superposables.

Le traceur ne se répartit pas dans tout l'espace. Il reste, comme dans l'exemple précédent (voir paragraphe II.A), proche du vortex sur l'axe  $\beta=0$ .

### II.C - ROTATIONS SIMULTANÉES DES DEUX CYLINDRES (SENS OPPOSÉS)

Les vitesses de rotations sont de -1 tour/min pour le cylindre intérieur et 1 tour/min pour l'extérieur. Ceci définit un nombre de Reynolds de 0,25. Les figures 10.5 et 10.5.b illustrent l'effet de l'excentricité sur les courbes iso- $\psi$ .

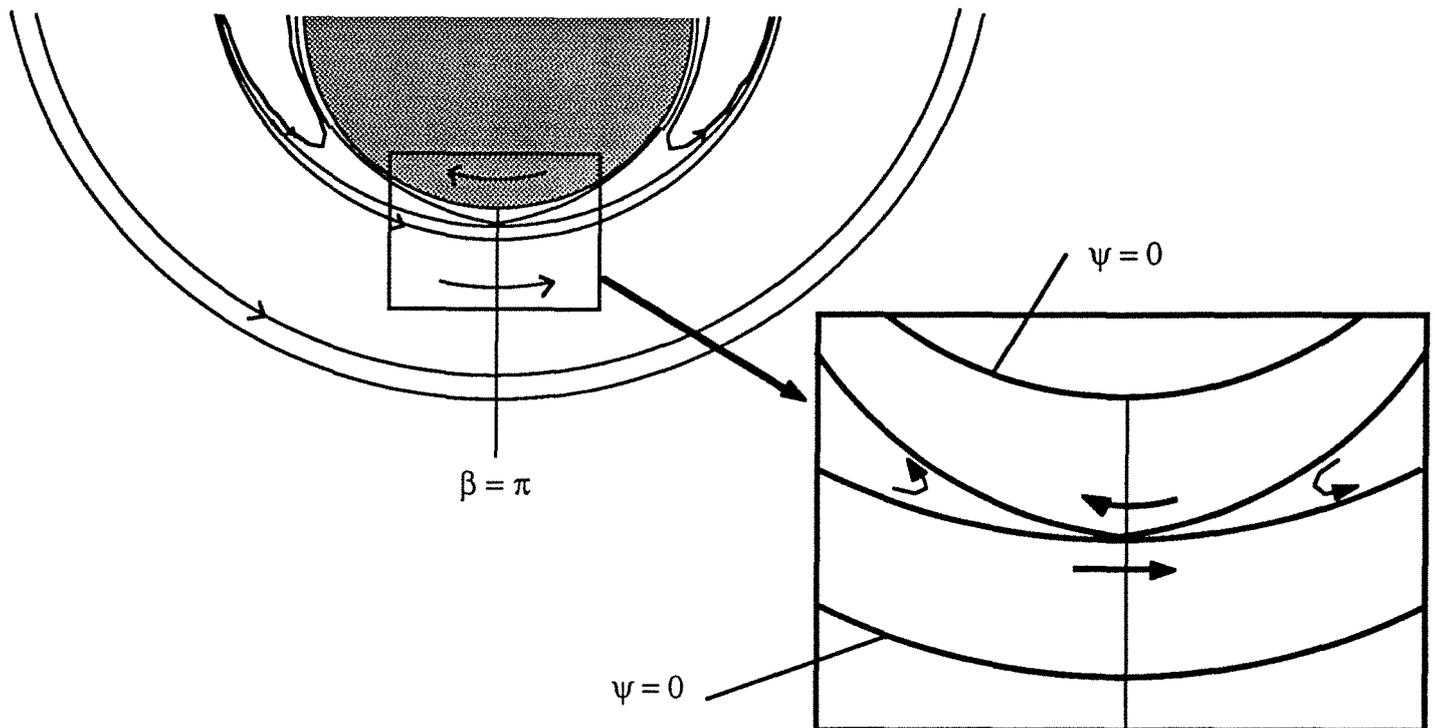
Pour la valeur de  $e/a_2$  égale à 0, l'écoulement est purement de Couette. A partir de la valeur  $e/a_2 = 0,1$  un vortex proche du cylindre intérieur se crée. La figure 10.6 donne l'allure des lignes de courant pour une valeur de  $e/a_2$  moyenne ( $\approx 0,4$ ). Les trajectoires sont ici plus complexes. Dans la région proche de  $\beta=0$ , un "gros" vortex est présent, créé par le couple formé par les deux vitesses (opposées) aux parois. Il y a donc existence d'un point elliptique sur la ligne  $\beta=0$ . Près de la ligne diamétralement opposée, c'est-à-dire en  $\beta=\pi$ , les vitesses tangentielles s'inversent sur la courbe iso- $\psi=0$ . Il existe donc un point hyperbolique sur la ligne  $\beta=0$  où  $\psi$  est minimale.



**Figure 10.6 : Lignes de courant en régime de Stokes**  
**Cylindres extérieur et intérieur tournant**

La figure 10.6.1 précise la forme de l'écoulement à proximité de la ligne  $\beta=\pi$ . Le point hyperbolique est déterminé par l'intersection des trajectoires limites du vortex en  $\beta = \pi$ . Quelle que soit la position initiale d'une goutte de colorant, celle-ci ne

peut atteindre ce point hyperbolique (en supposant la diffusion nulle).



**Figure 10.6.1.** : Détail de l'écoulement proche de la ligne  $\beta = \pi$

Cette situation est identique pour des valeurs de  $e/a_2$  supérieures. Pour des valeurs proches de 0,75 l'écoulement se résume par un "très gros" vortex remplissant quasiment tout l'espace disponible.

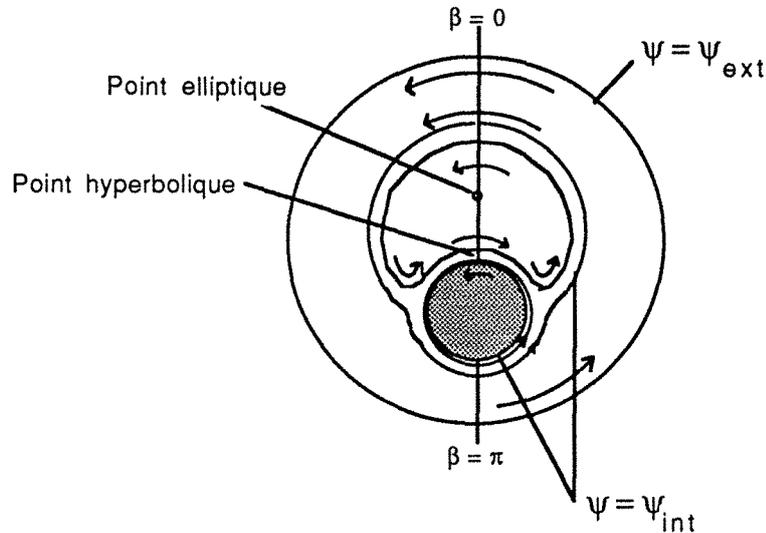
Tout comme aux paragraphes II.A et II.B, l'écoulement reste très stable. Le mélange ne peut s'effectuer efficacement par cette technique seule. Néanmoins, par rapport aux deux situations précédentes, il existe un point hyperbolique susceptible de générer, à l'aide d'une perturbation externe, une zone de mélange efficace.

#### **II.D. ROTATIONS SIMULTANÉES DES DEUX CYLINDRES (MEME SENS)**

L'écoulement est encore de Stokes ( $Re=0,25$ ), les lignes de courant sont également symétriques par rapport à l'axe  $\beta=0$ . Les figures 10.7 et 10.7.b illustrent l'effet de l'excentricité sur l'écoulement.

Proche de ligne  $\beta=0$ , le vortex n'apparaît que pour des valeurs de  $e/a_2$  de l'ordre de 0,25, car, contrairement au cas précédent il

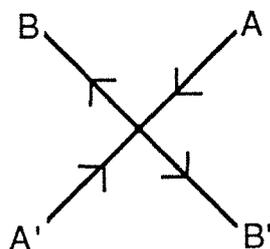
n'existe plus "d'effet de couple" créé par les deux vitesses aux parois. La taille de la zone de recirculation augmente avec le paramètre  $e/a_2$ . A proximité de la ligne  $\beta=\pi$ , les vitesses tangentielles sont régulièrement réparties de  $v_1$  à  $v_2$ , sans inversion du sens. La figure 10.8 explicite l'écoulement pour une valeur moyenne de  $e/a_2 \approx 0,4$ .



**Figure 10.8. :** Lignes de courant en régime de Stokes  
Cylindres extérieur et intérieur tournant  
(même sens de rotation)

Un point elliptique se trouve au centre de la zone de recirculation. Un point hyperbolique est présent sur l'axe  $\beta=0$  entre la paroi intérieure et le point elliptique. Par rapport à la situation rencontrée au paragraphe II.C, le point hyperbolique se situe de l'autre côté du cylindre intérieur, car c'est sur la ligne  $\beta=0$ , qu'il y a inversion des vitesses tangentielles.

La détermination de la position exacte d'un point hyperbolique se fait par la recherche de points du maillage possédant un voisinage de valeurs  $y$  ayant une structure de "col". En effet, un tel point est caractérisé par l'intersection de deux directions distinctes où les vitesses augmentent à partir de zéro (sur  $B B'$ ) ou diminuent jusqu'à cette même limite (sur  $A A'$ ).



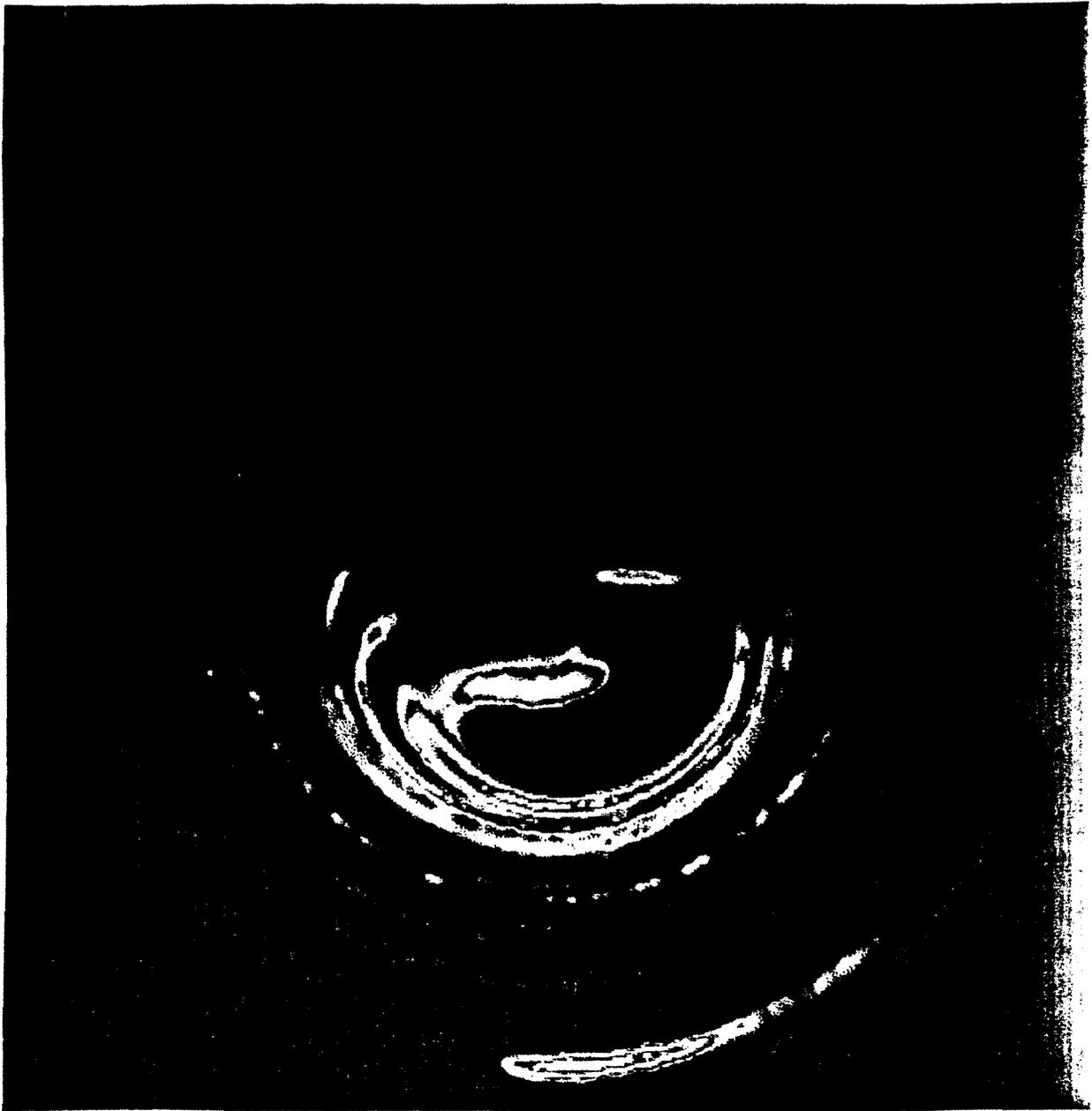


Figure 10.8.b : Ecoulement dans le cas où  
les deux cylindres sont en rotation  
( $\omega_{int} = \omega_{ext} = 1$  T/min,  $e/a_2=0,4$ )

Il en résulte donc pour la fonction de courant  $\psi$ , une diminution puis une augmentation le long de l'axe A A' et l'inverse pour la direction B B'. C'est la définition même d'un col.

La figure 10.8.b illustre l'écoulement 2D pour un facteur d'excentricité moyen égal à 0,4. Cette figure (en fausses couleurs) est à comparer au dernier tracé correspondant à la figure 10.7. Les deux images sont encore superposables.

Comme dans toute situation 2D, le traceur ne se répartit pas dans tout l'espace. Il reste proche du vortex sur l'axe  $\beta=0$ .

Tous les écoulements observés en deux dimensions peuvent être déterminés par calculs avec une très bonne précision. Nous avons constaté la similitude des tracés des lignes de courant et des écoulements réels. Nous verrons dans la partie III que cette prédictibilité n'est plus vérifiée dans tous les cas de figure.

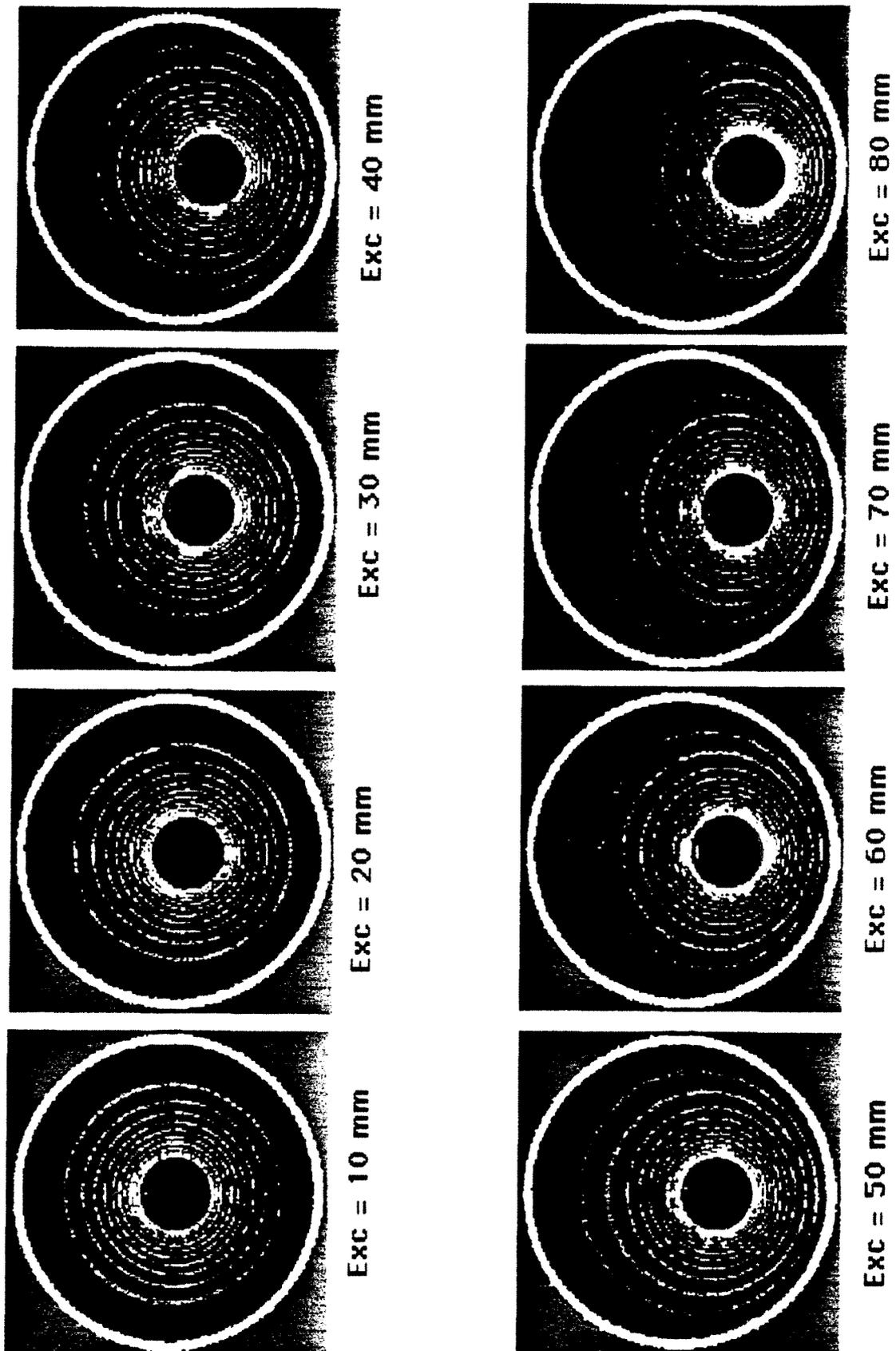


Figure 10.1 : Modification des lignes de courant en fonction de l'excentricité  
 ( $10 < exc(=e) < 80$  mm,  $\omega_{int} = 1$  T/min,  $\omega_{ext} = 0$ )

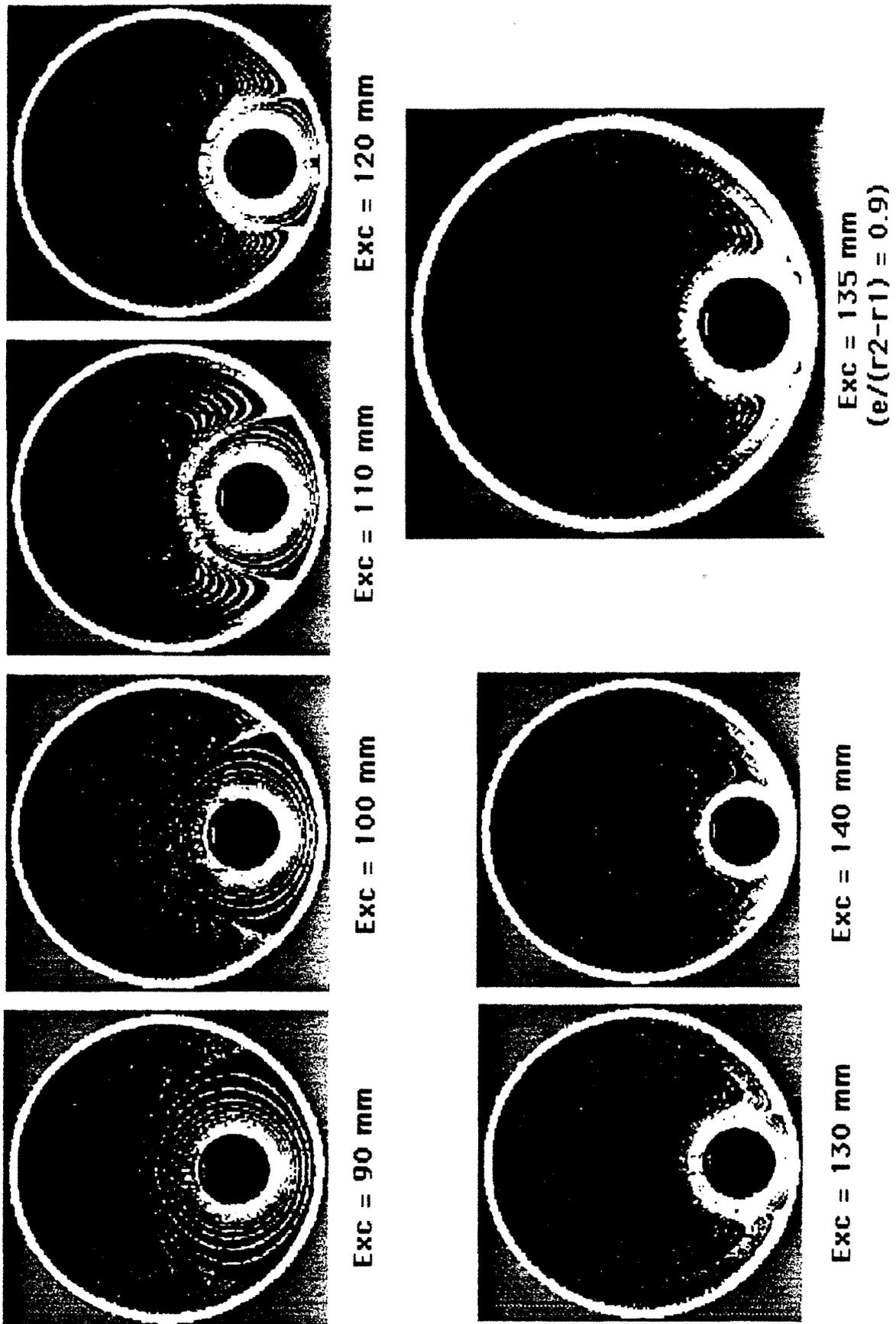
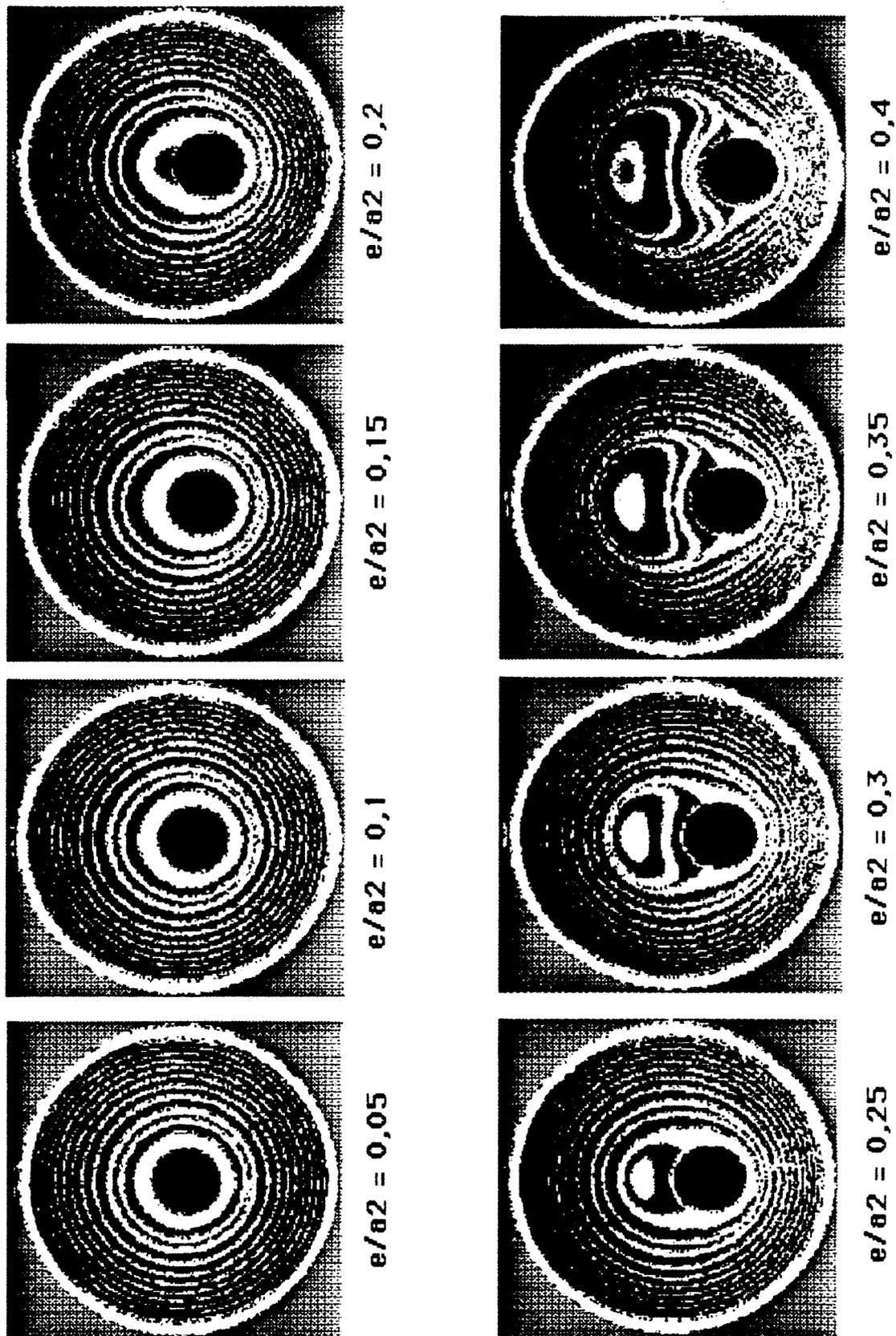
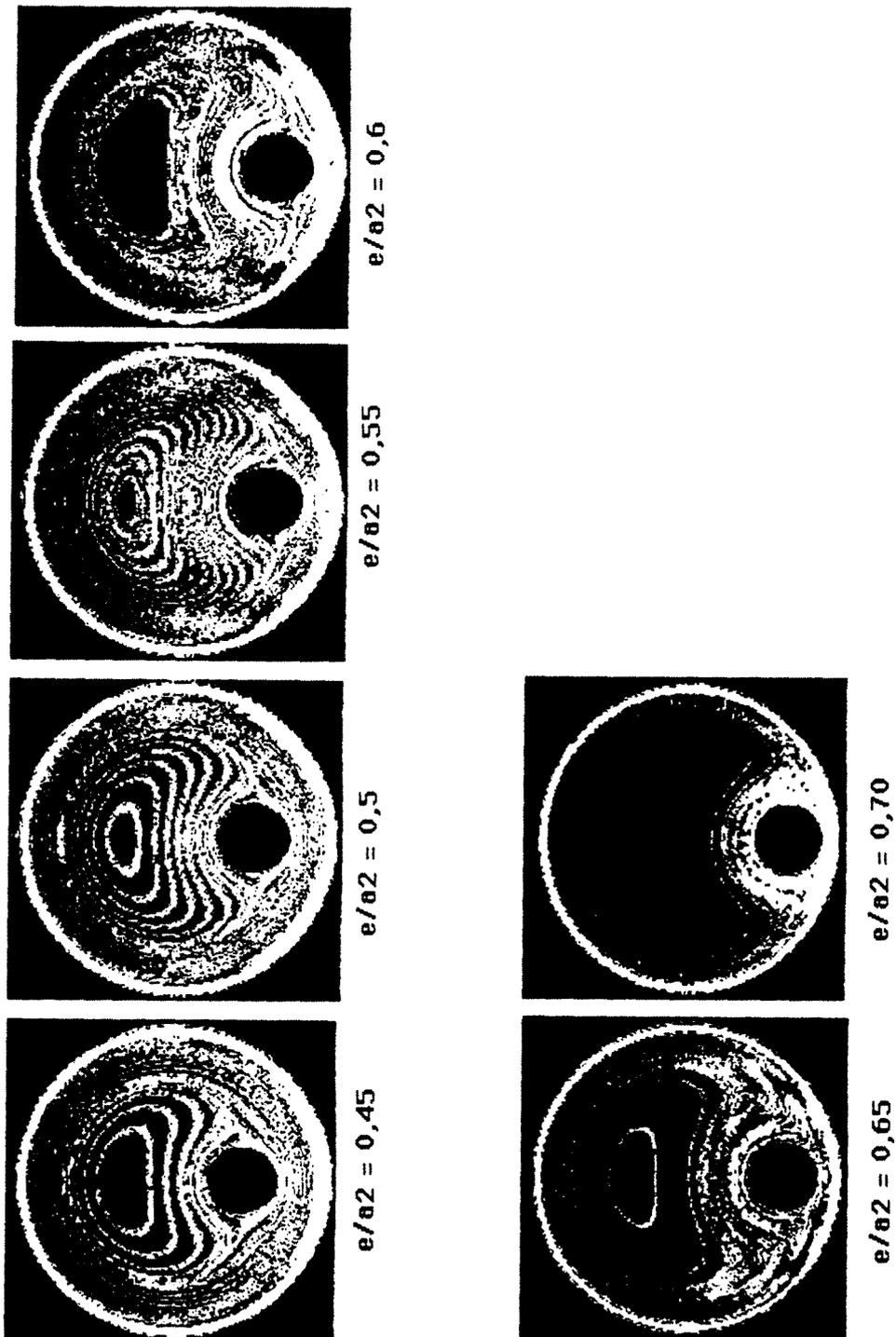


Figure 10.1.b : Modification des lignes de courant en fonction de l'excentricité  
 ( $90 < exc(=e) < 140$  mm,  $\omega_{int} = 1$  T/min,  $\omega_{ext} = 0$ )

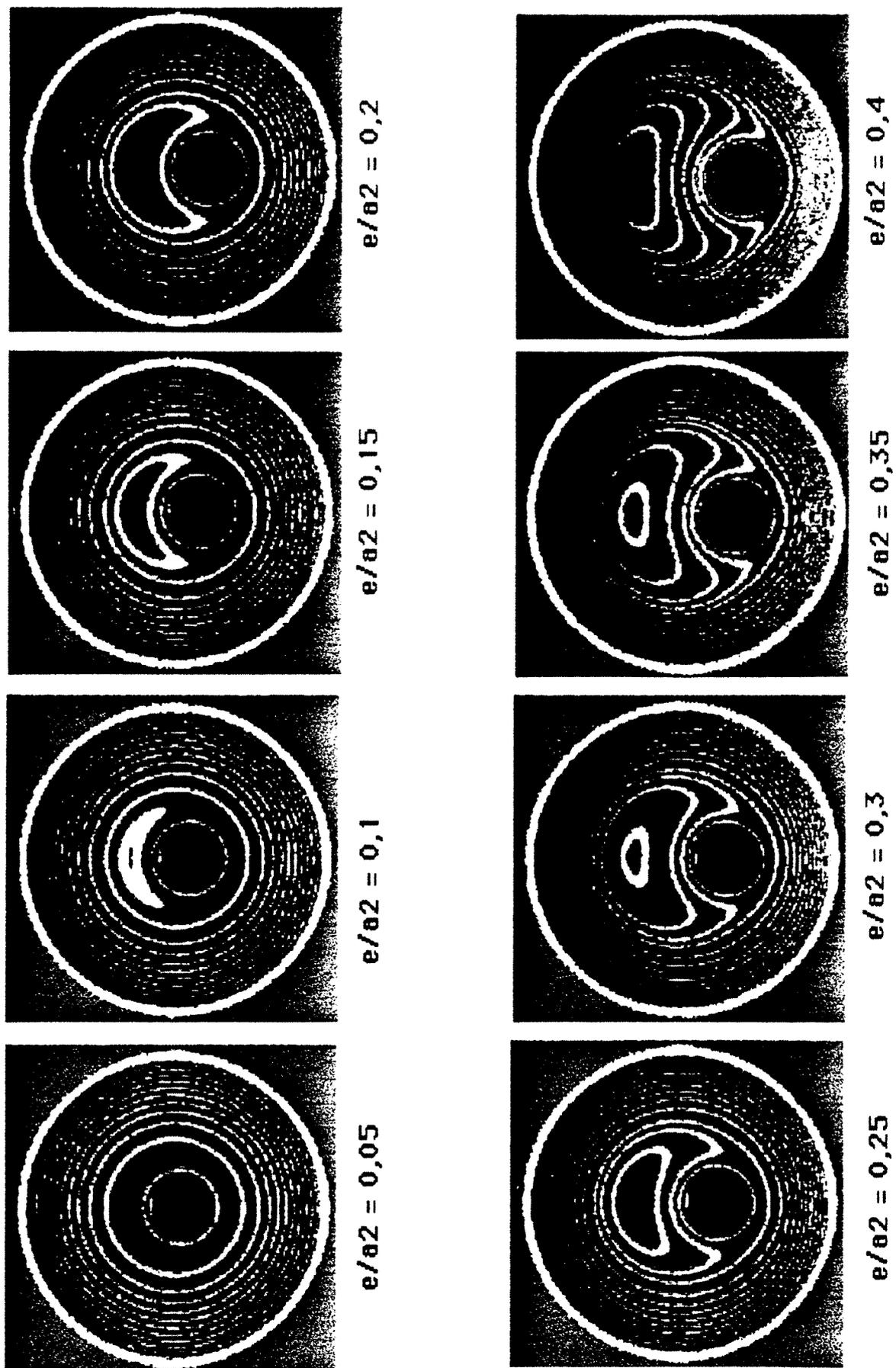


**Figure 10.3 : Modification des lignes de courant en fonction de l'excentricité**

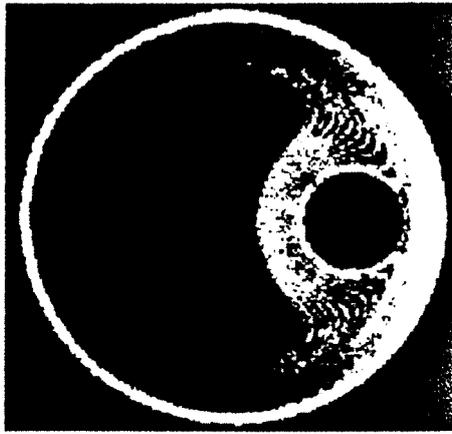
( $0,05 < e/a_2 < 0,4$  ,  $\omega_{int} = 0$  ,  $\omega_{ext} = 1$  T/min)



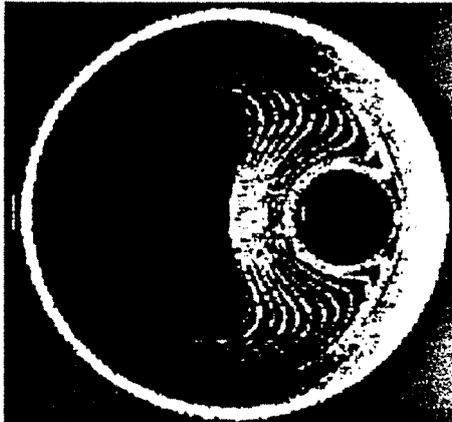
**Figure 10.3.b : Modification des lignes de courant  
 en fonction de l'excentricité**  
 ( $0,45 < e/a_2 < 0,7$  ,  $\omega_{int} = 0$  ,  $\omega_{ext} = 1$  T/min)



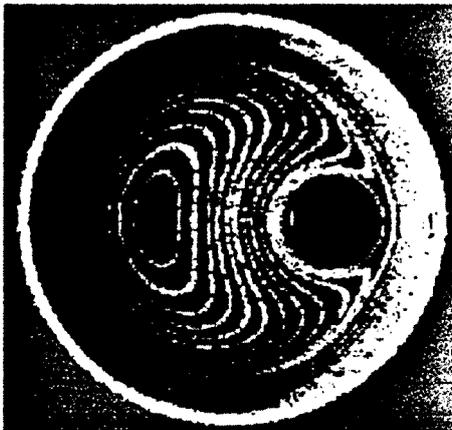
**Figure 10.5** : Modification des lignes de courant  
en fonction de l'excentricité  
 ( $0,05 < e/a_2 < 0,4$  ,  $\omega_{int} = -1$  T/min,  $\omega_{ext} = 1$  T/min)



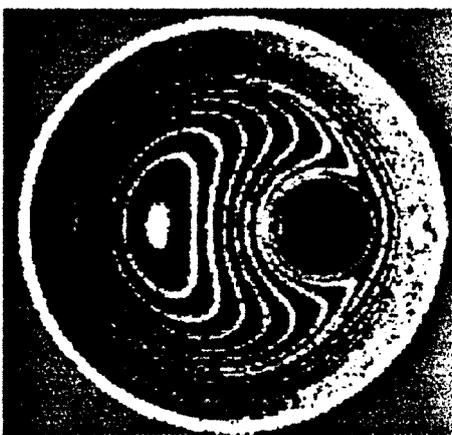
$e/a_2 = 0,6$



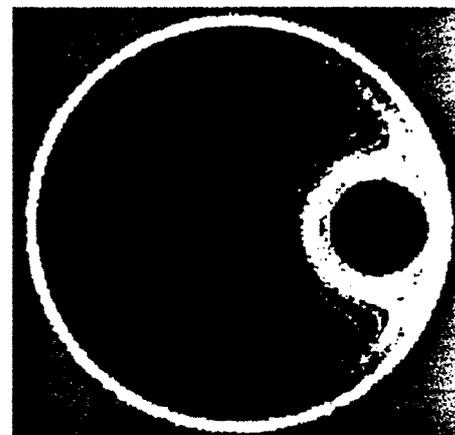
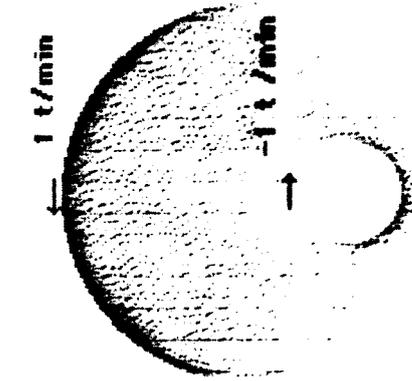
$e/a_2 = 0,55$



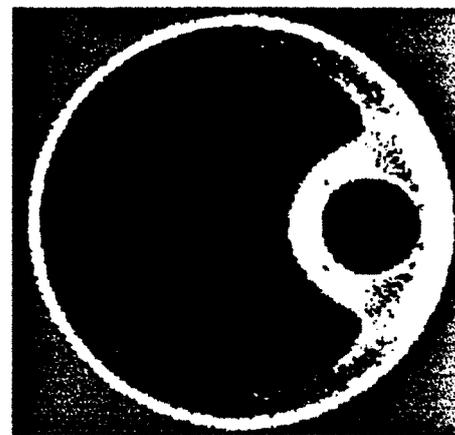
$e/a_2 = 0,5$



$e/a_2 = 0,45$

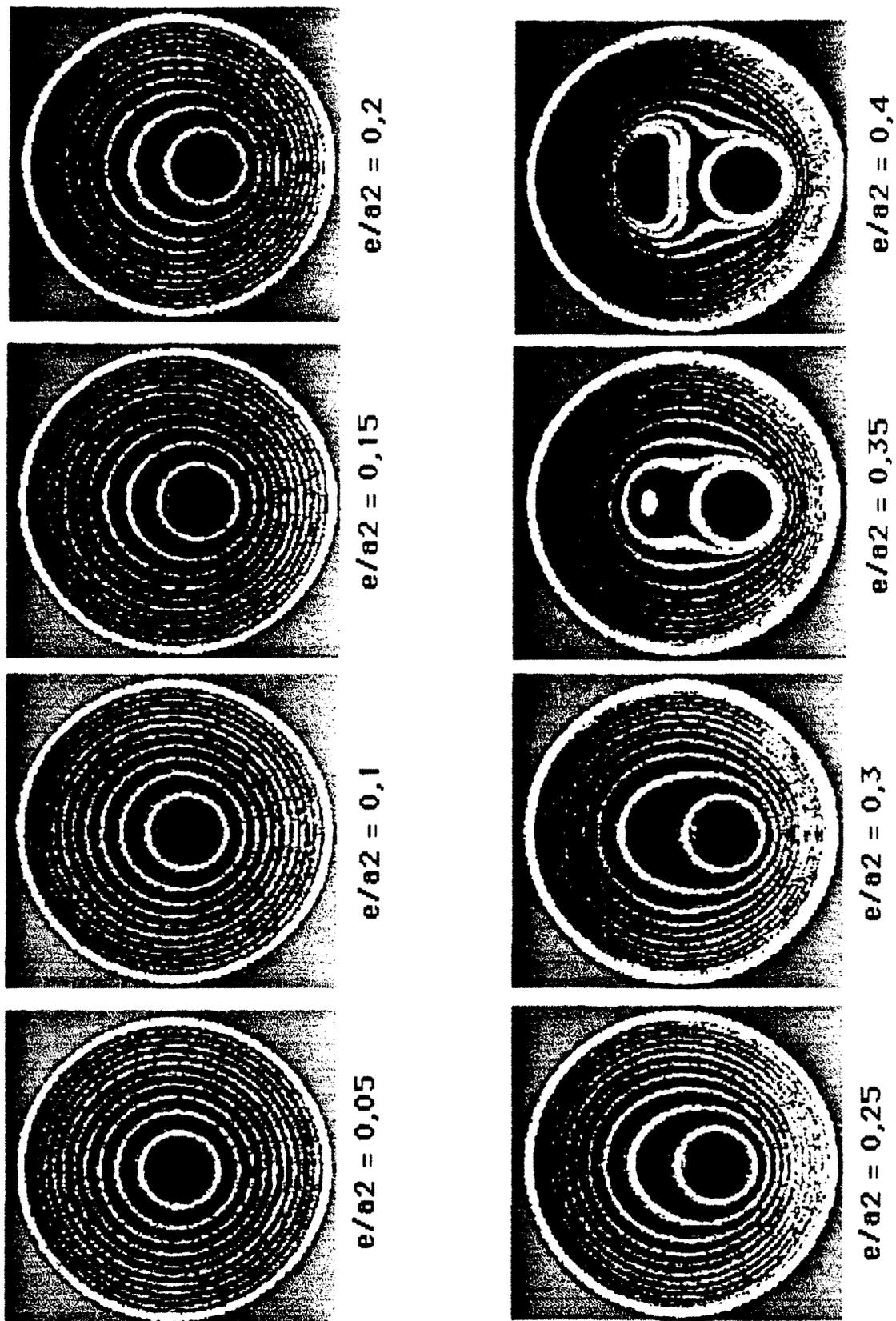


$e/a_2 = 0,7$



$e/a_2 = 0,65$

**Figure 10.5.b** : Modification des lignes de courant en fonction de l'excentricité  
 ( $0,45 < e/a_2 < 0,7$  ,  $\omega_{int} = -1$  T/min,  $\omega_{ext} = 1$  T/min)



**Figure 10.7 : Modification des lignes de courant en fonction de l'excentricité**  
 ( $0,05 < e/a_2 < 0,4$  ,  $\omega_{int} = 1$  T/min,  $\omega_{ext} = 1$  T/min)

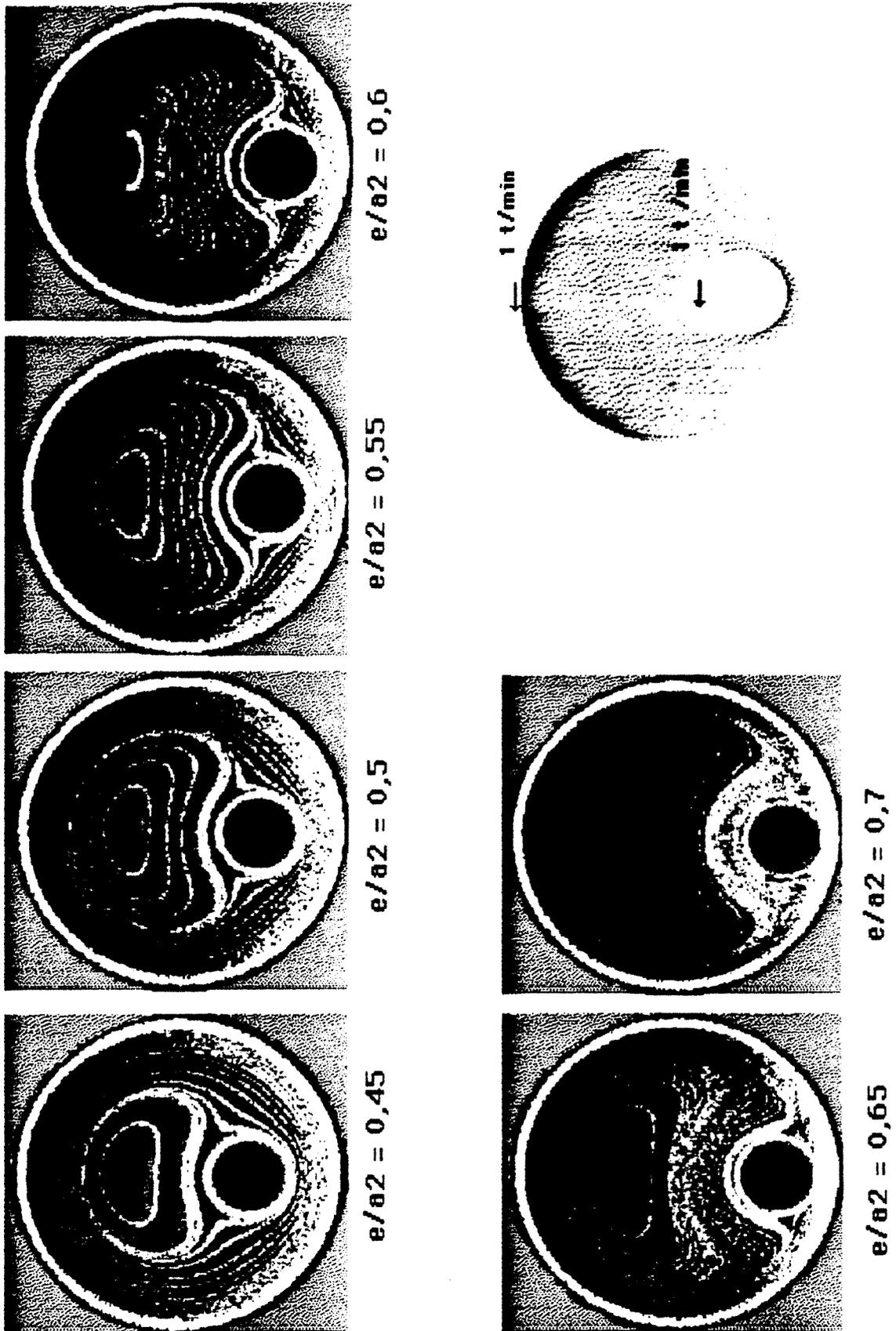


Figure 10.7.b : Modification des lignes de courant  
en fonction de l'excentricité  
 ( $0,45 < e/a_2 < 0,7$  ,  $\omega_{int} = 1$  T/min,  $\omega_{ext} = 1$  T/min)

### III. PASSAGE DU 2D A 3D

#### III.A INTRODUCTION

La situation typiquement bidimensionnelle, caractérisée par des vitesses aux parois fixes dans le temps, correspond, nous l'avons vu, à un cas d'écoulement stable. Dans tous les cas de figure, c'est-à-dire quel que soit le rapport des vitesses angulaires  $\omega_1/\omega_2$ , il y a création de vortex, donc de points elliptiques stables dans le temps.

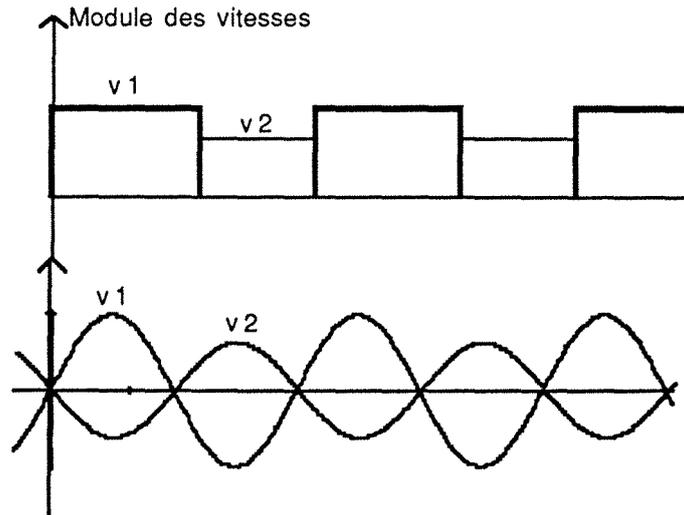
L'efficacité du mélange ,dans cette situation, est relativement faible. La matière suit des lignes de courant fermées. Seule la diffusion agit.

Une solution à ce problème a été imaginée dès 1984 par H. Aref qui a préconisé une alternance des vitesses aux parois. Cette situation nouvelle incorpore une fréquence supplémentaire au système. H. Aref imagina pouvoir désorganiser l'écoulement simple par ce biais. Le chapitre 1 décrit comment les situations de chaos peuvent apparaître : Un système tri-fréquentiel est fortement enclin à perdre sa stabilité.

La suite de ce chapitre montre que l'écoulement entre deux cylindres soumis alternativement à des rotations possède des structures très complexes caractéristiques de cette perte de stabilité.

Plusieurs possibilités peuvent être envisagées pour la modulation des vitesses aux parois. La plus simple consiste en une alternance créneau des vitesses. La période de la fréquence additionnelle étant égale à la somme des temps de rotation de chaque cylindre.

Plusieurs autres possibilités peuvent être utilisées dans ce cadre de modulation. Quelques cas particuliers sont représentés sur la figure 11.1.



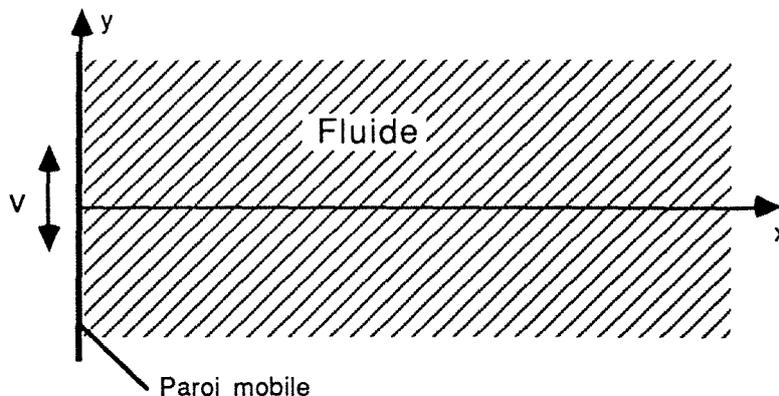
**Figure 11.1 : Divers types de modulation des vitesses (créneau et sinusoïdal)**

Le cas le plus simple, c'est-à-dire l'alternance créneau, est étudié.

Afin d'appréhender l'interaction de tels mouvements de parois sur le fluide ainsi que les conséquences sur l'écoulement global résultant, nous nous sommes penchés sur l'étude concernant les mouvements de fluide placés au contact de parois en mouvements périodiques.

### III.B MOUVEMENT D'UN FLUIDE AU CONTACT D'UNE PAROI PLANE PERIODIQUEMENT MOBILE.

Considérons le système suivant consistant en une paroi plane placée en  $x=0$  mobile selon la direction  $y$  en mouvement sinusoïdal :



La vitesse en  $x=0$  est donnée par la relation suivante :

$$U = u_1 \cos(\omega t) \quad (1)$$

ce qui peut s'exprimer en notation complexe :

$$U = \text{Reel} [ u_1 e^{i\omega t} ] \quad (2)$$

Réel désignant la partie réelle de l'expression.

L'étude faite sous la forme exponentielle complexe n'enlève rien à la généralité des résultats. En (x,y), l'équation de Navier-Stokes, pour un fluide de viscosité  $\nu$  s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \Delta) U + \frac{1}{\rho} \text{grad} (p) = \nu \Delta^2 U \quad (3)$$

Par raison de symétrie la vitesse et la pression ne sont fonction que de la coordonnée  $x$ . Il est évident de plus que la vitesse  $U$  est partout dirigée suivant l'axe des  $y$ , (conséquence directe de l'équation de continuité).

L'équation (3) s'écrit suivant l'abscisse  $x$  :

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} (p) = 0 \quad (4)$$

La pression est donc constante par rapport à la coordonnée  $x$ .

L'écriture de (3) suivant la coordonnée  $y$  conduit à une équation à une dimension du type de celle de la chaleur.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (5)$$

Une solution simple pour cette équation parabolique doit être cherchée sous la forme suivante :

$$U = u_1 \cdot e^{i(kx - \omega t)} \quad (6)$$

Remplaçons dans l'équation de la chaleur la solution trouvée. Il vient l'expression :

$$i \omega = \nu k^2 \quad (7)$$

La vitesse  $U(x,y)$  peut donc s'écrire :

$$U = u_1 \cdot e^{i \cdot \left( \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} \cdot x - \omega t \right)} \quad (8)$$

soit 
$$U = u_1 \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \cdot x} \cdot e^{i \cdot \left( \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} \cdot x - \omega t \right)} \quad (9)$$

La solution est le produit d'un terme périodique et d'un terme exponentiel décroissant caractérisant l'effet de l'amortissement du mouvement au sein du fluide perturbé. Il s'agit typiquement de l'équation d'une onde transversale amortie ayant une direction de propagation perpendiculaire à la vitesse U.

La distance  $\delta$  définie par  $\sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$  et correspondant à une décroissance d'un facteur e est appelée "profondeur de pénétration".

Deux conséquences immédiates peuvent être tirées de cette caractérisation de la "profondeur de pénétration".

- $\delta$  est d'autant plus petite que la fréquence est grande. Ainsi des perturbations de haute fréquence appliquées aux parois du mélangeur n'auront que peu d'influence sur le fluide à des distances importantes des parois. De trop grandes fréquences sont donc à proscrire.

- $\delta$  augmente avec la viscosité cinématique du fluide. Il est donc préférable, dans le but de perturber profondément l'écoulement, d'utiliser un liquide relativement visqueux (glycérol...). Ceci augmente le transfert de quantité de mouvement.

Dans le montage utilisé, nous avons voulu éviter au maximum les effets transitoires dûs aux variations brusques de vitesses créées par la fonction créneau. La période T est évidemment reliée à  $\omega$  par la relation :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (10)$$

Le temps caractéristique  $T_f$  lié à la nature même du fluide de viscosité  $\nu$  placé dans un système de dimension caractéristique  $\delta$  s'exprime par :

$$T_f \sim \frac{\delta^2}{\nu} \quad (11)$$

La dimension caractéristique du système bicylindrique est de 0,05 m. La période  $T_f$  correspondante est alors de :

$$T_f \sim \frac{0,05^2}{0,001} = 2,5 \text{ s} \quad (12)$$

Afin de minimiser les effets transitoires issus de cette alternance créneau, il est nécessaire de travailler avec des périodes très supérieures à ce temps de 2,5 s. Aussi, toutes les expériences seront réalisées avec des périodes supérieures ou égales à la minute.

Nous pouvons remarquer que pour cette période d'alternance de 60 secondes la profondeur de pénétration est de :

$$\delta \sim \sqrt{\frac{0,001}{\frac{2}{60}}} = 0,17 \text{ m}$$

Cette profondeur est donc supérieure à la dimension caractéristique du système. Il y aura donc un bon entraînement du fluide dans tout le domaine inter-cylindre.

### III.C - CARACTERISTIQUES DE LA FONCTION DE COURANT RESULTANTE

La périodicité des vitesses aux parois a été choisie, nous l'avons vu, de manière à minimiser les effets transitoires résultants. De cette remarque découle le fait qu'à tout moment le système peut être considéré comme étant identique au système bidimensionnel simple car l'écoulement reste purement laminaire et donc parfaitement calculable. La situation est donc, a priori, parfaitement déterministe car les conditions aux parois le sont.

Nous constaterons que l'addition de cette troisième dimension peut néanmoins conduire à des situations tout-à-fait inattendues !

Il est donc possible de postuler que la fonction de courant résultante, fonction des deux variables d'espace  $x, y$  et du temps  $t$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$\psi_{(x,y,t)} = a(t) \cdot \psi_{(x,y)}^{1,0} + b(t) \cdot \psi_{(x,y)}^{0,1} \quad (13)$$

Les deux termes  $\psi(1,0)$  et  $\psi(0,1)$  correspondent respectivement aux champs des valeurs de la fonction de courant selon les coordonnées  $x$  et  $y$  pour la situation de rotation seule du cylindre intérieur et celle due à la rotation seule du cylindre extérieur. Le terme  $a(t)$  peut prendre deux valeurs distinctes : 1 lorsque le cylindre intérieur est en rotation, 0 sinon. Le terme  $b(t)$  joue le rôle symétrique à  $a(t)$ .

### III.D - SUIVI DE PARTICULES : CONCEPT LAGRANGIEN

L'étude numérique purement bidimensionnelle réalisée dans les parties précédentes s'intéresse aux calculs des champs de vitesse, pression, fonction de courant dans tout le domaine 2D.

Cette approche est généralement désignée sous le nom "d'Eulérienne". Il existe une seconde manière de caractériser les écoulements : il s'agit de l'approche Lagrangienne.

Cette technique d'investigation privilégie le suivi de particules placées au sein de l'écoulement. La visualisation d'un nombre suffisant de particules distinctes permet en effet de caractériser assez correctement l'écoulement en question.

#### III.D.1 Suivi particulière dans un écoulement purement 2D.

Dans le chapitre 2, les différents champs de vitesse ont été déterminés, par l'équation fondamentale de Navier-Stokes. Nous avons comparé les solutions issues de cette méthode avec celles issues de la solution analytique de G.H. WANNIER (1950). Les profils de vitesse sont très similaires au sein du système.

L'étude en pseudo 3D a été poursuivie en utilisant la solution de WANNIER (1950) qui est plus simple à utiliser, et surtout, donne infiniment plus rapidement les solutions cherchées.

Grâce à cette solution, dans un maillage extrêmement fin, nous allons pouvoir par le biais de la connaissance de la vitesse en un point quelconque, estimer le déplacement élémentaire de la particule considérée. En un point quelconque de coordonnées  $i$  et  $j$  (cf figure 11.2)

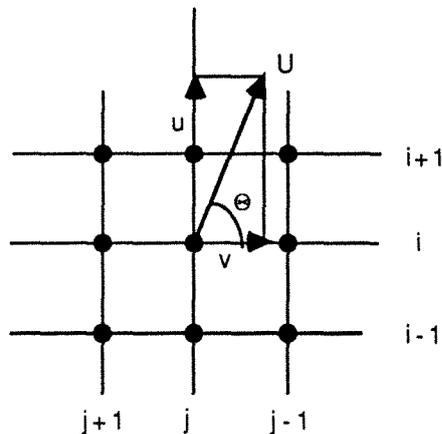


Figure 11.2 : composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse  $U$  au point de coordonnées  $(i,j)$

La solution décrite par WANNIER fournit les valeurs de la fonction de courant au point de coordonnées  $(i,j)$  ainsi qu'aux huit

points environnants. Grâce à ces données, nous pouvons estimer les deux composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse ; ce qui revient à la connaissance du module de la vitesse  $U$  et de l'angle entre ce vecteur  $U$  et la courbe d'équation  $i=\text{constante}$ .

A partir de ces données il est alors simple, de proche en proche, de tracer le déplacement de la particule. Selon l'angle  $\Theta$  précédemment défini, la direction et le sens du déplacement sont alors fixés. Par exemple, si  $\Theta$  est compris entre  $180 + 22,5$  et  $270 - 22,5$ , la particule initialement présente en  $(i,j)$  se déplace en  $(i-1, j+1)$ .

Il apparaît que, pour un déplacement simple d'un noeud du maillage à un noeud immédiatement voisin, le déplacement global après  $n$  itérations est trop grossier pour être réellement exploitable. Ceci provient du faible nombre de possibilités d'angles de déplacement de la particule à chaque pas (dans ce cas : 8 ).

L'ampleur des déplacements élémentaires a donc été augmentée . La particule peut "sauter" de la position  $i,j$  à toute une série de points placés sur les côtés d'un carré d'arête  $21 \times 21$  (points) centré sur le point  $i,j$ . (cf figure 11.3), permettant 80 possibilités d'angles différents. De façon à garder la précision sur le tracé, la résolution du maillage est multipliée par 10 dans les deux directions de l'espace (nombre total de points  $\times$  par 100).

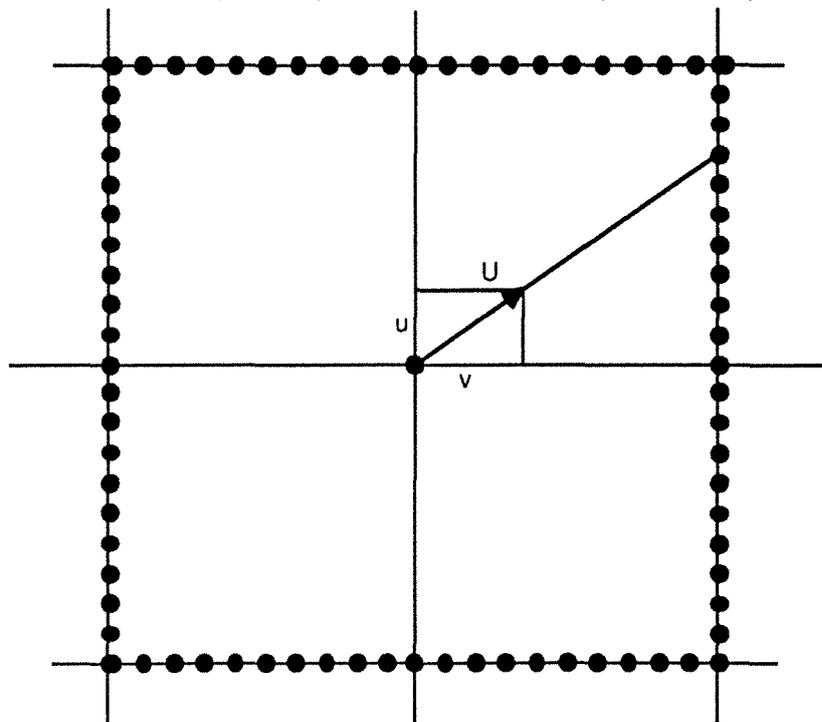


Figure 11.3 : Déplacement élémentaire d'une particule

### III.D.2 Suivi de particule en configuration d'alternance (3D) :

Fondamentalement, le problème reste identique à celui posé précédemment. Il faut cependant alterner le champ de la fonction de courant suivant la rotation de tel ou tel cylindre conformément à l'équation (13).

Nous déterminons pour chaque saut de particules, la distance parcourue et le temps nécessaire à ce déplacement. La particule est initialement aux coordonnées  $i$  et  $j$ . Après son déplacement, celle-ci se trouve aux positions  $i+\varepsilon$ ,  $j+\varepsilon'$  (avec  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  entiers compris en  $-10$  et  $+10$ ).

Pour un maillage  $N \times M$ , les accroissements élémentaires des coordonnées bipolaires  $(\alpha, \beta)$  correspondant à  $(i, j)$  sont donnés par :

$$\Delta\alpha = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{N} \quad (14)$$

$$\Delta\beta = \frac{2\pi}{M} \quad (15)$$

Le déplacement élémentaire  $\Delta\xi'$  de la particule par rapport aux coordonnées  $(\alpha, \beta)$  est donné par :

$$\Delta\xi' = \sqrt{\varepsilon^2 \cdot \Delta\alpha^2 + \varepsilon'^2 \cdot \Delta\beta^2} \quad (16)$$

La distance cartésienne correspondante est donc définie par :

$$\Delta\xi = h(i, j) \cdot \sqrt{\varepsilon^2 \cdot \Delta\alpha^2 + \varepsilon'^2 \cdot \Delta\beta^2} \quad (17)$$

La vitesse  $U$  de la particule (supposée constante au cours de ce déplacement élémentaire) est, elle, déterminée par la relation suivante :

$$|U| = \frac{\Delta\xi}{\Delta t} = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (18)$$

Le temps mis par ce déplacement élémentaire est donc de :

$$\Delta t = \frac{h(i, j) \cdot \sqrt{\varepsilon^2 \cdot \Delta\alpha^2 + \varepsilon'^2 \cdot \Delta\beta^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (19)$$

C'est par l'intermédiaire de ce temps  $dt$  que l'on détermine les instants de changements de champs  $\psi^{10}$  et  $\psi^{01}$ .

Un programme a été réalisé en langage "Fortran" permettant la détermination des positions successives d'une particule en configuration d'alternance. Pendant chaque alternance un "comptage" de temps élémentaires est effectué. Cette somme est comparée à la valeur  $T_k$  correspondante.

$$T = \sum \Delta t \quad (20)$$

Si  $T$  est strictement inférieur à  $T_k$  le déplacement se poursuit. Dès que la valeur  $T$  devient supérieure ou égale à  $T_k$ , le champ de  $\psi$  est modifié.

### III.D.3 Extrapolation à N particules-Section de Poincaré

Rappelons brièvement l'intérêt du tracé des sections dites de Poincaré. Considérons l'ensemble des points de l'espace occupé par le système en 3D (flot tri-dimensionnel). La représentation des trajectoires doit donc être réalisée en 3D. Pour plus de facilité d'appréciation des trajectoires dans ce flot 3D, nous devons le projeter sur les 3 plans  $(0,x,y)$   $(0,x,z)$   $(0,y,z)$ .

En réalité cette facilité n'est que très relative puisqu'il faut simultanément suivre les projections sur au moins deux des trois plans.

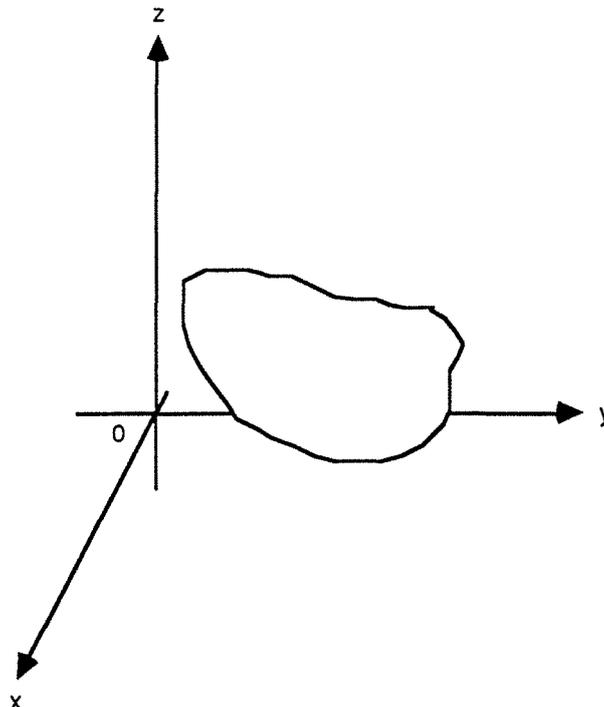
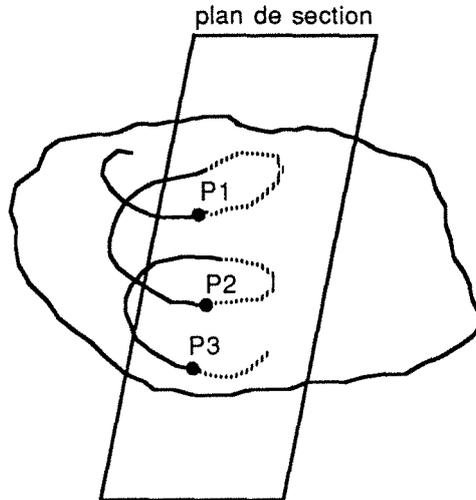


Figure 11.4 : Représentation d'un flot quelconque en trois dimensions

La méthode de Poincaré consiste à couper le flot 3D par un plan judicieusement choisi et de noter la position de la particule sur ce plan lors de son passage à travers celui-ci (les études faites par l'auteur peuvent s'appliquer à des flots de dimension quelconque). Seul le passage dans un sens est noté.



**Figure 11.5 :** Intersection d'une trajectoire d'une particule avec un plan de section donné

Une trajectoire va donc "rencontrer" en un nombre  $N$  de points ce plan. Ces points de rencontre sont appelés  $P_1, P_2, P_3, \dots$

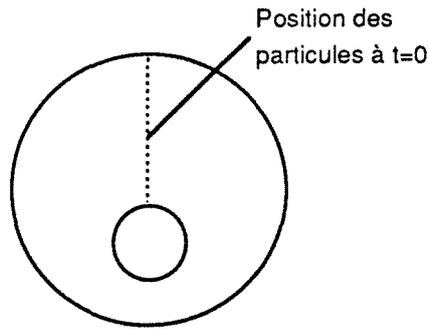
L'application qui a tout point  $P_i$  fait correspondre  $P_{i+1}$  s'appelle application de Poincaré. L'avantage décisif de cette méthode est que l'étude globale du flot 3D peut se ramener à l'étude d'une application plan sur plan.

Cette technique est tout-à-fait applicable à notre problème. En effet, bien que l'écoulement soit bidimensionnel, trois dimensions sont présentes : deux dimensions d'espace, une dimension de temps. La section est faite suivant un plan temporel. Le choix de ce plan est tout naturellement fixé par la périodicité de l'alternance créneau.

La section de Poincaré est donc définie par le tracé de la position de la particule à chaque période  $T = T_{int} + T_{ext}$ .

Afin d'obtenir rapidement la structure globale de l'écoulement, nous avons placé 50 particules régulièrement

espacées sur la ligne  $j=0$  (cf. schéma ci-après). L'écoulement ne révèle sa structure qu'à partir d'un nombre suffisant d'itérations.



Effectivement, un écoulement possédant une ou plusieurs structures bien établies de type vortex est caractérisé en relativement peu d'itérations (quelques centaines). Par contre, pour un écoulement plus complexe, où ne subsistent plus que quelques "îlots" de type vortex, la caractérisation claire de ces zones ne devient vraiment possible qu'après plusieurs milliers d'itérations.

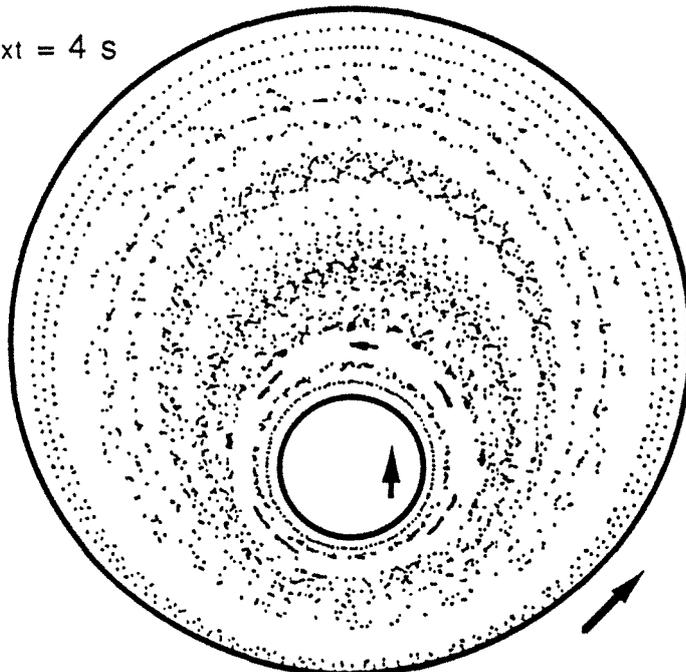
Il ne faut pas perdre de vue que seules les positions correspondant aux particules aux instants  $nT$  (avec  $n$  entier) sont représentées sur la section de Poincaré.

Plusieurs cas de figure ont été étudiés grâce à la technique de traçage numérique (cf annexe 6). La figure 11.6 correspond aux conditions suivantes:

$$\omega_{\text{int}} = \omega_{\text{ext}} = 1 \text{ T/min}$$

$$e = 18,75 \text{ mm}$$

$$T_{\text{int}} = 24 \text{ s}, T_{\text{ext}} = 4 \text{ s}$$



**Figure 11.6 :** Section de Poincaré de l'écoulement en configuration d'alternance

### III.E - ETUDE DE L'ÉCOULEMENT TRIDIMENSIONNEL

Nous rappelons que l'écoulement que nous qualifions ici de 3D est un écoulement se développant dans un plan mais pour lequel les conditions de vitesses aux parois sont variables dans le temps.

Au vu des résultats issus de la théorie des systèmes non linéaires, nous pouvons nous attendre, dans cette configuration, à obtenir un comportement du fluide beaucoup plus complexe qu'en 2 dimensions.

Pour un mélangeur excentré donné, c'est-à-dire où le rapport  $a_1/a_2$  est fixé, les paramètres indépendants sont :

- L'excentricité  $e$  (ou le facteur d'excentricité  $e/a_2$ )
- Le rapport des vitesses angulaires des deux cylindres  $\omega_1/\omega_2$
- Les deux temps d'alternance  $T_1$  et  $T_2$  (avec  $T$ : période totale de la perturbation égale à la somme des deux temps  $T_1$  et  $T_2$  définis sur figure 11.7).

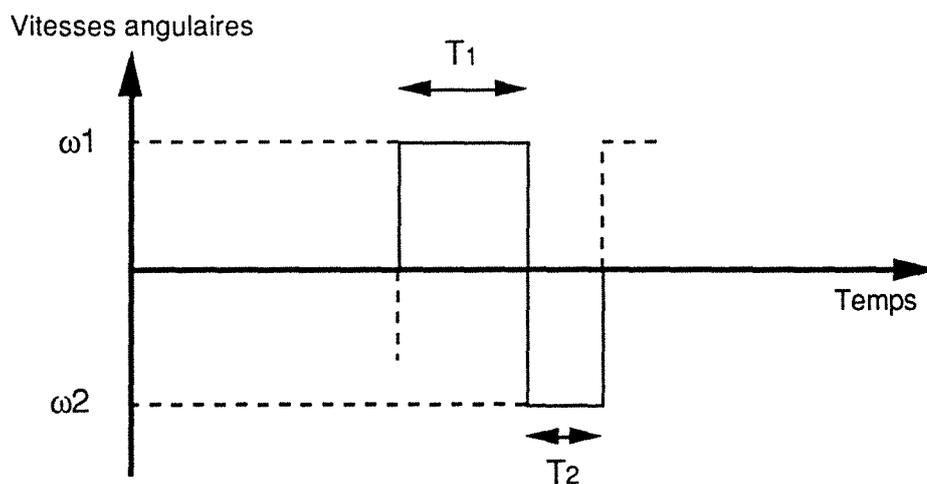


Figure 11.7 : protocole d'alternance

L'influence de l'excentricité et du rapport  $T_1/T_2$  sur l'écoulement observé (pour  $\omega_1/\omega_2 = +1$  et pour  $\omega_1/\omega_2 = -1$ ) a tout d'abord été étudiée.

Chaiken (1986) a étudié plusieurs cas de figures. Nous avons vérifié la validité des écoulements obtenus par son équipe grâce au tracé des sections de Poincaré. Nous avons, dans un second temps, approfondi dans certains cas "bien choisis" l'étude de l'apparition du chaos.

Ces sections de Poincaré ont été parallèlement comparées aux figures expérimentales réalisées.

### III.E.1 Influence du rapport $T_1/T_2$ et de $e$ sur l'écoulement 3D

Le tableau 11.8 rend compte de l'influence des 2 paramètres précités sur l'écoulement de Stokes 3D.

Le rapport  $\omega_1/\omega_2$  est fixé à -1. Les quatre facteurs d'excentricité  $e/a_2$  sont 0,15 ; 0,375 ; 0,55 ; 0,7. Le temps de rotation du cylindre intérieur est de 52,5 secondes, les temps de rotation du cylindre extérieur sont 0,18 s ; 6 s ; 30 s ; 60 s et 150 s.

#### III.E.1.a Influence de $T_2$

Plusieurs résultats peuvent être dégagés de l'étude des sections de Poincaré. Pour une faible valeur de  $T_2$ , l'écoulement est équivalent à celui 2D pour lequel seul le cylindre intérieur est en rotation (quelle que soit l'excentricité  $e$ ). En effet, l'influence du cylindre extérieur dans le cas de  $T_2=0,18$  s est parfaitement négligeable par rapport à celle du cylindre intérieur.

Pour des valeurs de  $T_2$  très importantes (ici le maximum est de 150 secondes), quelle que soit l'excentricité, l'écoulement semble perdre toute stabilité. Ce résultat n'est pas surprenant. Nous avons étudié dans la première partie l'influence d'une perturbation de grande période sur la stabilité d'un oscillateur paramétrique.

Pour des périodes multiples de la fréquence de base de l'oscillateur, il apparaît des zones d'instabilité en nombre croissant en fonction de la période d'excitation. En géométrie excentrée, les zones de recirculation, présentes pour des valeurs de  $T_2$  inférieures (30 s, 60 s), disparaissent progressivement lorsque  $T_2$  augmente.

Pour des valeurs intermédiaires de  $T_2$ , le comportement du fluide est particulièrement difficile à prévoir. Un vortex demeure quelle que soit l'excentricité  $e$ , créé par l'action du couple formé par l'action des deux cylindres.

#### III.E.1.b Influence de $e$ sur l'écoulement 3D

$a_1 = 12,5 \text{ mm}$   
 $a_2 = 50 \text{ mm}$   
 $T_1 = 52,5 = (\text{Text})$   
 $T_2$  variable  
 $e/a_2$  variables  
 $\omega_{\text{ext}}/\omega_{\text{int}} = -1$

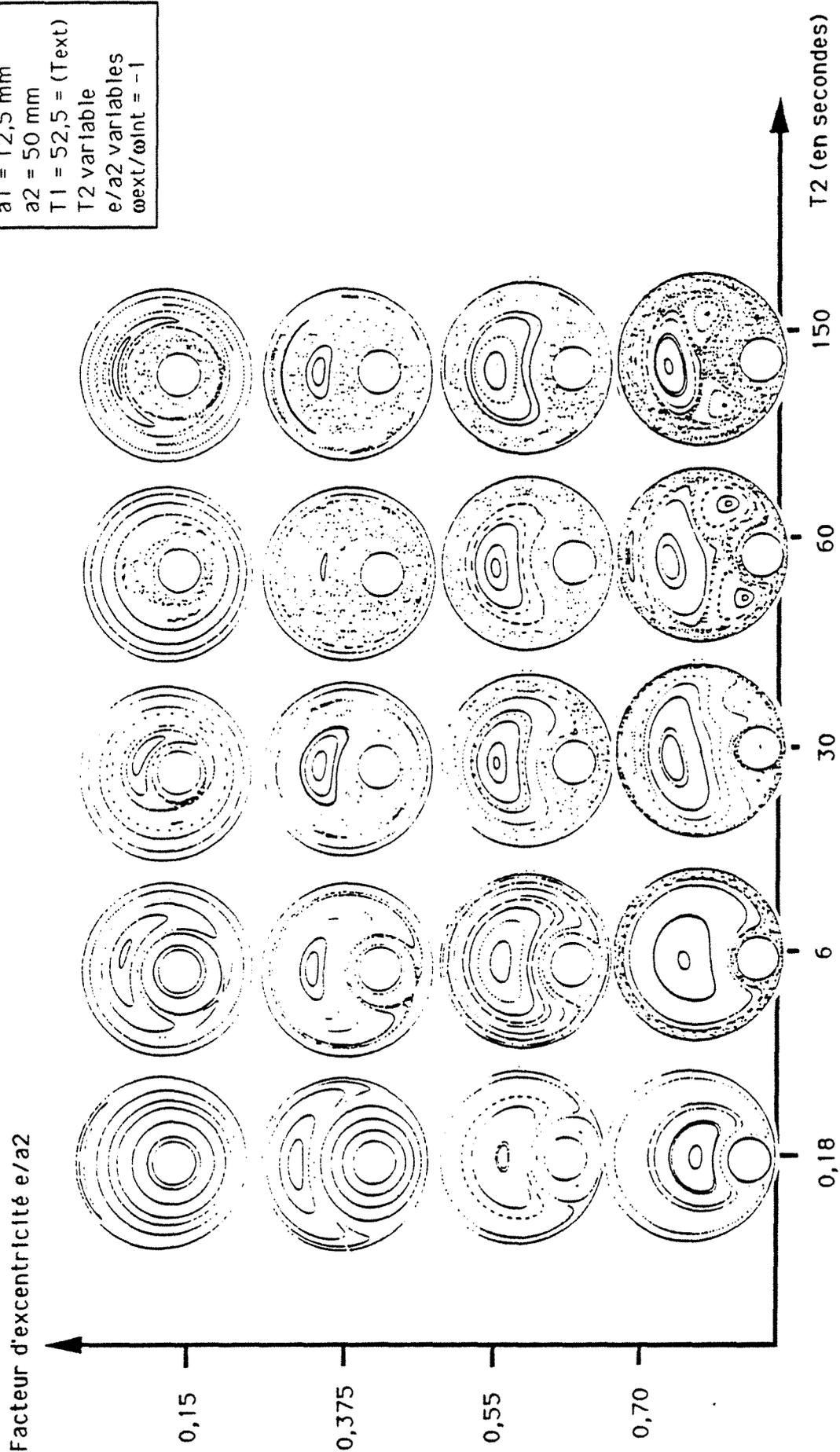


Figure 11.8 : Sections de Poincaré  
 d'écoulements obtenus par alternance des  
 rotations des deux cylindres

Pour des valeurs de  $e/a^2$  faibles, l'écoulement ressemble à l'écoulement de Couette. Celui-ci, caractérisé par un seul degré de liberté, ne peut, sous l'effet de l'alternance, créer des situations de repliement efficaces.

Si  $e = 0$ , le mélange ne peut s'opérer que sous l'effet d'étirement linéairement dépendant des vitesses aux parois et de la diffusion. Le chaos est impossible à obtenir.

Si  $e/a^2 < 0,15$ , pour une faible valeur de  $T_2$ , l'écoulement présente des trajectoires circulaires centrées sur le cylindre intérieur. Pour des valeurs plus élevées de  $T_2$ , des trajectoires circulaires demeurent mais concentriques cette fois au cylindre extérieur, l'influence du cylindre extérieur devenant plus importante.

Si  $e/a^2 \geq 0,7$ , il n'existe plus de zone non perturbée proche du cylindre extérieur. Le cylindre intérieur joue le rôle de racloir sur la paroi extérieure. Par contre, dans l'espace de grande dimension offert au liquide, un vortex est présent pour toute valeur de  $T_2$ .

Pour des valeurs de  $e/a^2$  intermédiaires, il est difficile, là encore, d'appréhender l'évolution des trajectoires en fonction de l'excentricité.

Quelques sections de Poincaré particulières sont traitées dans l'annexe 6. Les figures 1,2,3 (et 3bis) concernent des protocoles d'alternance dans lesquels le rapport des vitesses  $\omega_1/\omega_2$  est égal à  $-1$ . Le facteur d'excentricité est, dans les trois cas, de  $0,7$ . La figure 1 présente un "très gros" vortex, ainsi que trois plus petits, proches du cylindre intérieur.

Sur la figure 3, les périodes  $T_1$  et  $T_2$  sont 4 fois plus importantes que celles présentes sur la figure 1. La situation est totalement différente. Le vortex principal est plus petit qu'en 1, les trois autres vortex ont quasiment disparu.

La figure 2 est obtenue pour des valeurs de  $T_1$  et  $T_2$  interverties par rapport à celles de la figure 3. La situation se trouve être, là encore, radicalement différente.

Ces trois premières figures soulignent les rôles fondamentaux des deux périodes d'alternance. Elles mettent également en lumière la dissymétrie des influences des rotations des deux cylindres.

La figure 3bis est expérimentale. Elle sera comparée à la figure 3 dans le paragraphe III.E.3.

Les figures 4,5,6,7 et 8 sont obtenues pour des rapports de  $\omega_1/\omega_2 = +1$  et pour un facteur d'excentricité de 0,375 (sauf pour la figure 8 où  $e/a_2 = 0,70$ ).

Les figures 4,5,6 sont à comparer entre elles. La somme des temps  $T_1$  et  $T_2$  est fixe et égale à 28 secondes. Les valeurs de  $T_1$  sont pour 4,5,6 respectivement de 20,22,24 s. Ces trois sections de Poincaré montrent l'importance du rôle de la rotation du cylindre extérieur. Sur la figure 4, il y a nettement accumulation de points au voisinage du centre du cylindre extérieur. Sur les deux figures suivantes, le rapport  $T_2/T_1$  diminue, la concentration de points précédente n'existe plus. Le "traceur" a donc tendance à mieux se répartir.

La figure 7 illustre une fois de plus l'action négative d'une période  $T_2$  élevée ( $T_1 = 20$  s et  $T_2 = 15$  s). Un vortex est tout à fait visible. Le "traceur" est très concentré au voisinage du cylindre intérieur ainsi qu'à la périphérie du vortex secondaire.

La figure 8 est à comparer à la figure 3. Les paramètres sont identiques hormis les rapports des vitesses de rotation qui sont opposés. On montre ainsi l'influence des sens de rotation sur l'écoulement observé. Les vortex secondaires présents sur la figure 3 disparaissent totalement. Cette influence est discutée plus en détail dans le paragraphe suivant.

### III.E.2 Influence du sens de rotation

Pour cette étude, une valeur moyenne de l'excentricité a été choisie (cf. figure 11.9). Le rapport  $e/a_2$  est pris égal à 0,375. Les deux vitesses de rotation sont en valeur absolue égales à 1 t/min. L'influence du rapport  $T_1/T_2$  est étudiée ( $T_1 = 52,5$  s).

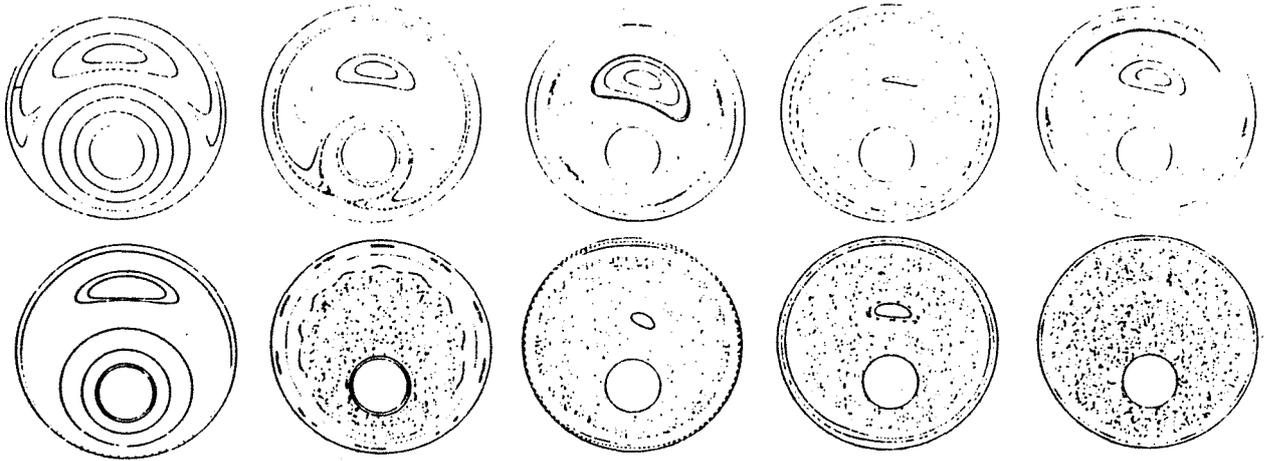


Figure 11.9 : Effet de l'inversion d'un des sens de rotation sur l'écoulement (3D)

Pour des valeurs de  $T_2$  faibles ( $< 1$  s), les trajectoires observées restent identiques si l'on inverse l'un des sens de rotation des cylindres. L'influence de la rotation du cylindre extérieur est, là encore, négligeable par rapport à celle de l'autre cylindre.

Pour des valeurs de  $T_2$  supérieures, l'écoulement se modifie considérablement par inversion d'un des sens de rotation. Pour un rapport  $\omega_1/\omega_2 = -1$ , un vortex est systématiquement présent dans la zone de grande dimension (à proximité de la ligne  $\beta=0$ ). Pour un rapport  $\omega_1/\omega_2 = +1$ , ce vortex n'est plus présent. Il apparaît dans cette zone une répartition souvent assez uniforme du traceur. Il se crée une déstabilisation profonde de l'écoulement. Celle-ci peut se comprendre car la perturbation créée par l'alternance des rotations des cylindres entraîne une modification des trajectoires du traceur au voisinage du point hyperbolique. Or celui-ci se situe dans la zone de grande dimension (sur l'axe  $\beta=0$ ) et non dans la zone de pincement de l'écoulement (cas  $\omega_1/\omega_2 = -1$ ). Le processus d'étirement-repliement se produit donc dans la région de grande surface, répartissant ainsi le traceur quasiment dans tout l'espace disponible. Seule une fine couche proche du cylindre extérieur demeure inaccessible au traceur. L'effet de paroi limite sa progression rapide.

Enfin pour des valeurs de  $T_2$  importantes ( $> 150$  s), la situation de mélange est pratiquement parfaite. Hormis une couche liée à la paroi externe, la répartition du traceur est uniforme dans

tout le domaine. Dans cette situation, deux processus tendent à déstabiliser l'écoulement : Tout d'abord, la perte de régularité due à l'alternance à proximité du point hyperbolique et, de plus, l'augmentation des temps de rotation  $T_1$  et  $T_2$  (ici  $T_2$  seul) qui entraîne une perte de stabilité par augmentation des périodes (cf. partie I du chapitre 1). Ce cas de figure est intéressant à étudier théoriquement, mais reste inadapté aux contraintes de temps fixées dans un cadre industriel.

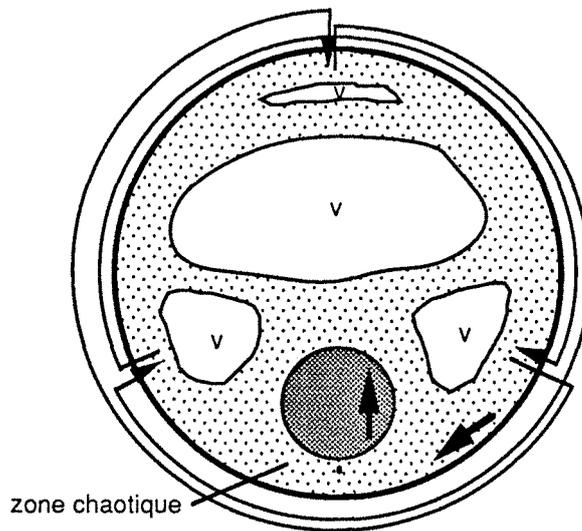
### III.E.3 Etude comparative entre simulations et expériences

Après avoir discuté les influences de l'excentricité et du rapport  $T_1/T_2$ , nous nous proposons de comparer les résultats théoriques par le tracé des sections de Poincaré aux écoulements réellement observés.

De nombreuses expériences ont été réalisées et comparées aux sections de Poincaré correspondantes. Dans tous les cas de figure, les sections de Poincaré fournissent grossièrement les structures de l'écoulement observé. Le caractère approximatif de ces tracés est d'autant plus marqué que l'écoulement est plus "chaotique", c'est-à-dire promoteur d'un mélange efficace. De manière symétrique, plus l'écoulement présente des zones de vortex stables, plus le tracé de la section est fidèle.

Deux cas typiques d'écoulement sont présentés, un présentant des îlots stables (vortex) et l'autre fortement chaotique.

Le premier écoulement est représenté sur les figures 3 et 3bis de l'annexe 6, respectivement pour la section de Poincaré et pour l'écoulement réel. Dans cet exemple prédominent quatre vortex, un de taille importante et les trois autres plus petits l'entourant. L'expérience montre qu'effectivement cette structure est stable dans le temps. Au cours d'une période, égale à la somme des deux temps  $T_1$  et  $T_2$  les trois vortex secondaires s'échangent deux à deux (cf figure 11.10)



**Figure 11.10 :** Structure de l'écoulement correspondant aux figures 3 et 3bis de l'annexe 6.

Cette situation est le résultat d'une perturbation d'un écoulement (2D) autour d'un point elliptique. La théorie montre qu'il n'y a pas perte de stabilité totale de l'écoulement. Ce résultat est visible sur la figure 11.10. En effet, les quatre vortex précités subsistent, englobés dans une zone de chaos dessinée en pointillés sur la figure.

La région avoisinant la zone de pincement ( $\beta = \pi$ ), (où se trouve le point hyperbolique en 2D), est le siège d'un mélange très efficace.

La prédominance des zones de vortex est telle que l'écoulement global reste stable dans le temps. Les figures 3 et 3bis sont superposables.

Le deuxième exemple est un écoulement fortement chaotique. Il est représenté sur la figure 11.11 pour la section de Poincaré et sur les figures 11.12 et 11.13 pour l'écoulement réel après 15 périodes ( $= T_1 + T_2$ ) et après un nombre élevé de périodes ( $> 50$ ). La section de Poincaré est à comparer à la figure 11.13 qui représente la disposition finale du traceur dans l'espace entre les cylindres. La section représente très grossièrement l'écoulement observé. L'écoulement périphérique plus stable présent sur la figure 11.11 est difficile à discerner sur la figure 11.13. Les vortex (théoriques) proches du cylindre extérieur ne sont pas observés dans la réalité.

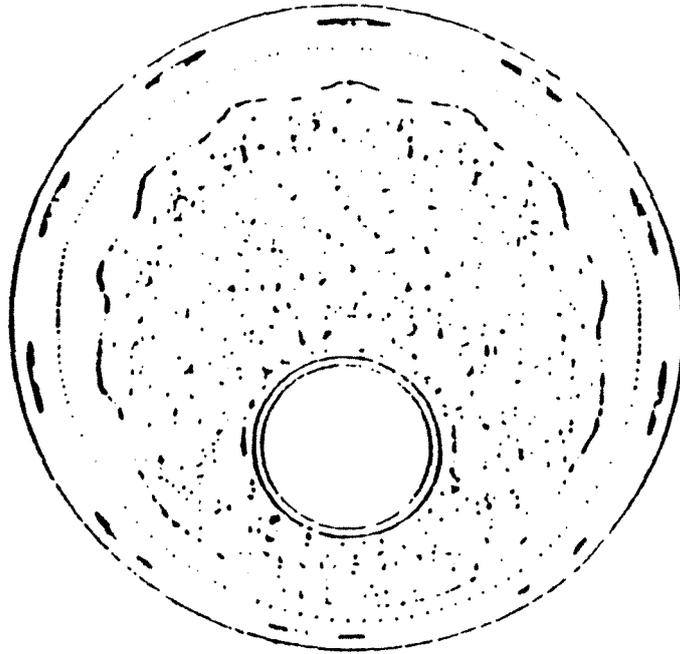
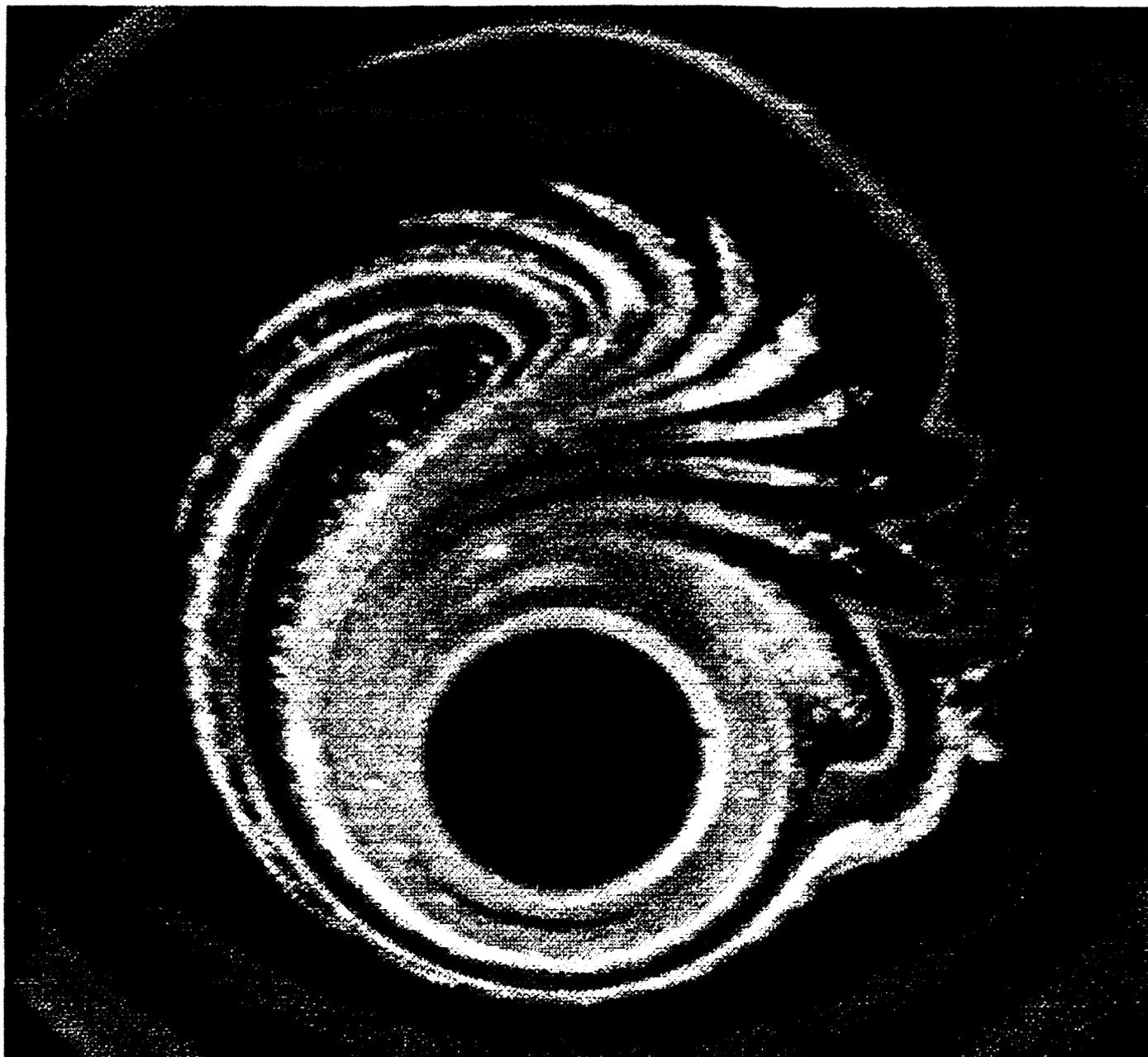


Figure 11.11 : Structure de l'écoulement 3D suivant:  
 $e/a_2 = 0,375$ ,  $T_2 = 6$  s,  $T_1 = 52,5$  s,  $\omega_1/\omega_2 = +1$

Cette difficulté à superposer les figures théoriques et celles réellement observées est due en partie, à des causes expérimentales. Toutefois, nous avons remarqué, que dans le cas où l'écoulement est relativement plus stable, les figures sont plus superposables, les conditions expérimentales restant identiques. L'écoulement étant fortement chaotique, il est normal que la prévision théorique reste partielle.

En deux dimensions, pour un rapport de  $\omega_1/\omega_2$  égal à +1, il existe un point elliptique sur l'axe  $\beta=0$  ainsi qu'un point hyperbolique sur ce même axe. Par l'alternance des vitesses aux parois, il apparaît une zone fortement mélangée autour de ce point hyperbolique. Celui-ci, situé dans la région d'écartement maximal entre les cylindres, engendre une répartition quasi uniforme du traceur sur tout l'espace 2D disponible.

La figure 11.12 montre la disposition du traceur après 15 périodes. Les structures étirées puis repliées y sont très visibles. Chaque "langue" de traceur est constituée par plusieurs stries parallèles. Ces structures emplissent l'espace disponible rapidement. Dans ces conditions expérimentales, le traceur initialement présent le long de l'axe  $\beta=0$ , se répartit en une trentaine de périodes sur tout l'espace 2D.



**Figure 11.12 : Répartition du traceur fluorescent après 15 périodes**  
( $\omega_{\text{int}} = \omega_{\text{ext}} = 1$  T/min,  $e/a^2=0,375$ ,  $T_1=52,5\text{s}$ ,  $T_2=6\text{s}$ )

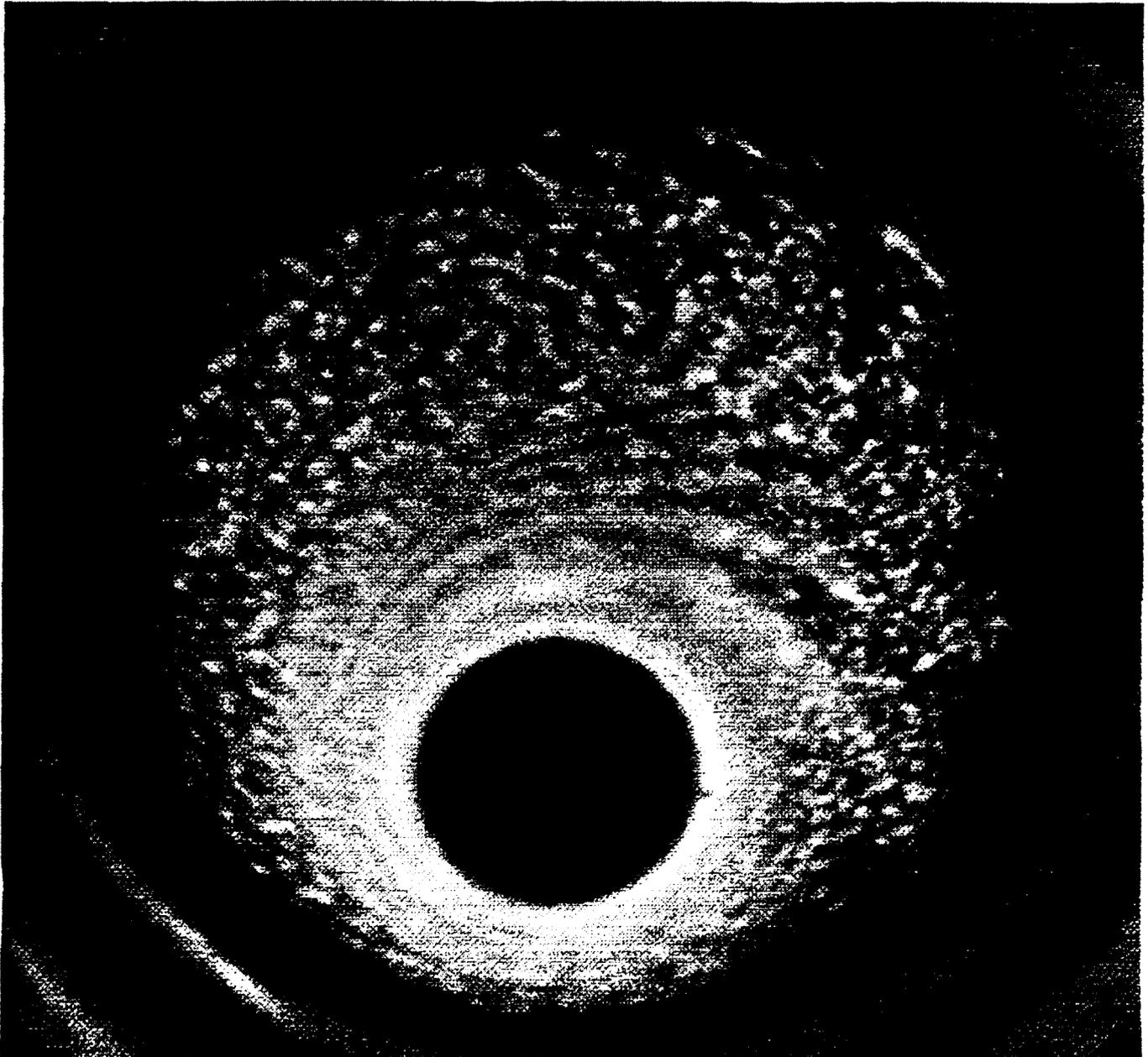
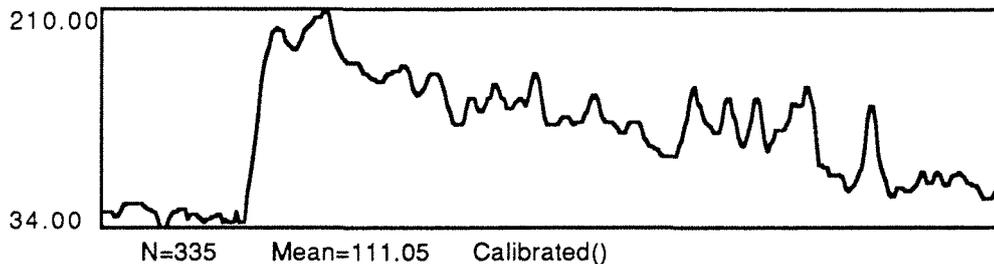


Figure 11.13 : Répartition du traceur fluorescent après 30 périodes  
( $\omega_{int} = \omega_{ext} = 1$  T/min,  $e/a^2=0,375$ ,  $T_1=52,5s$ ,  $T_2=6s$ )

La figure 11.14 rend compte de l'uniformité de répartition du traceur. Cette courbe représente les niveaux de lumière émise par le traceur fluorescent le long de l'axe  $\beta=0$ . L'émission lumineuse renseigne sur la concentration locale du traceur.



**Figure 11.14 :** Profil de concentration le long de l'axe  $b=0$   
(longueur du segment 335 pixels)

A gauche de la figure, le niveau de signal est faible. Il correspond au fond "noir" du cylindre intérieur. En se déplaçant vers la droite, la courbe s'élève rapidement (niv=210) puis s'abaisse linéairement jusqu'à une valeur non nulle (niv≈70) à la limite du cylindre extérieur.

La répartition de concentration varie de la même manière. Celle-ci ne possède pas un profil plat car le traceur est initialement placé le long de l'axe  $\beta=0$  avec une concentration identique du cylindre intérieur au cylindre extérieur. Le traceur initialement proche du cylindre intérieur doit remplir moins d'espace (au voisinage de ce cylindre) que la portion de traceur initialement proche du cylindre extérieur. Il est donc logique d'observer ce profil de lumière.

Il est donc certain que l'incorporation d'un produit donné  $b$  dans un fluide  $a$  (exemple  $b$ =colorant,  $a$ =fluide visqueux) ne doit pas se faire de manière quelconque. Il semble que l'addition de  $b$ , afin d'accélérer le processus de mélange ultérieur, doit être située au voisinage du point hyperbolique sur l'axe  $\beta=0$ .

#### III.E.4 Mise en évidence du chaos par inversion du temps

Ce paragraphe est consacré à l'étude expérimentale du renversement du temps sur les trajectoires décrites par un élément fluide donné.

Nous avons, tout au long de ce travail de recherche, souligné la différence de comportement des écoulements entre les situations 2D et 3D. L'étude du retour temporel va corroborer les résultats antérieurs.

#### III.E.4.a Inversion temporelle en 2D

Dans un premier exemple, nous montrons la réversibilité quasi parfaite de l'écoulement en 2D pour une série de cinq gouttes de traceur linéairement répartis le long de l'axe  $\beta=0$  (cf figure 11.15).

Seul le cylindre extérieur est en rotation (1T/min). Le facteur d'excentricité est de 0,4.

Sur la figure 11.15, sont représentées les positions initiales des gouttes traceur à gauche, puis après une minute (soit une rotation) au centre, et enfin après une minute en rotation inversée.

Sur la photographie centrale, trois des cinq gouttes sont très déformées. La goutte proche du cylindre intérieur semble s'enrouler autour de celui-ci. Les deux gouttes proches du cylindre extérieur sont, elles aussi, très allongées et "collées" sur ce cylindre. Les deux dernières gouttes ont subi une simple permutation par rotation autour du vortex central.

Sur la photographie de gauche, sont représentées les cinq gouttes après retour temporel de une minute (-1T/min). Les trois gouttes, antérieurement très allongées, se rassemblent comme sur la figure de gauche. Elles ne représentent pas exactement la même morphologie qu'initialement car la diffusion, très efficace pendant la période d'étirement maximal, tend à agrandir ces zones colorées.

Il faut rappeler qu'expérimentalement d'autres sources d'erreur viennent se greffer à l'écoulement (convection, légère perturbation due à l'inversion du sens de rotation, démarrage et arrêt du moteur...).

Les deux dernières gouttes reprennent exactement leur place d'origine.

Cet exemple montre la réversibilité de l'écoulement par inversion des conditions aux parois.

Un second exemple en 2D est réalisé avec, cette fois, deux vitesses continues aux parois non nulles, ( $\omega_1=\omega_2=1T/min$ ). Le



Figure 11.15 : Effet de l'inversion des conditions aux parois en 2D  
( $\omega_{int} = 0$ ,  $\omega_{ext} = 1$  T/min,  $e/a^2=0,4$ )

traceur fluorescent est disposé à mi-distance des deux cylindres sur l'axe  $\beta=0$ .

Les conditions aux parois sont maintenues constantes pendant quelques rotations (cf figure 11.16) puis inversées pendant exactement la même durée.

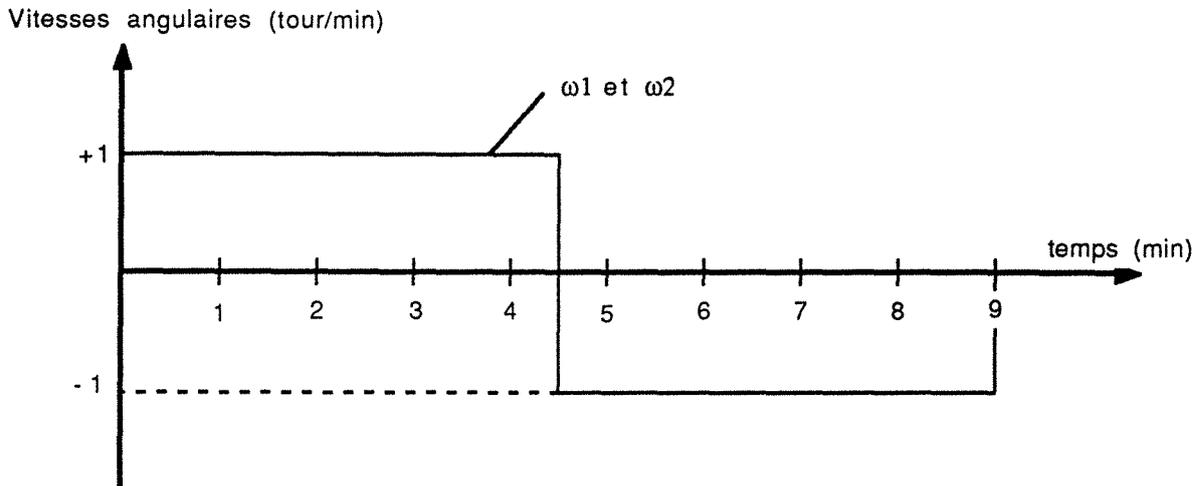


Figure 11.16 : Vitesses angulaires appliquées dans l'exemple 2.

Le traceur est photographié à chaque révolution complète des cylindres (cf figure 11.17). La trace initiale est circulaire. Elle est déformée pendant 4 min 30 (cf figure 11.17 a), puis "reformée" durant le même temps (avec  $\omega_1=\omega_2=-1T/\text{min}$ ), (cf figure 11.17 b).

Le traceur ne reprend pas exactement sa position initiale. Comme dans le premier exemple, la diffusion agit tout au long de l'expérience, c'est-à-dire, ici, pendant un temps neuf fois plus long.

Il est donc normal d'observer cet étalement du traceur. On peut, là encore, affirmer qu'il existe, compte tenu des imperfections expérimentales rencontrées, une nette réversibilité dans le comportement du fluide par inversion des conditions extérieures de vitesses.

### III.E.4.b Inversion temporelle en 3D

L'exemple pris pour illustrer l'influence des renversements des vitesses aux parois sur le comportement du fluide est semblable au second exemple pris en 2D.

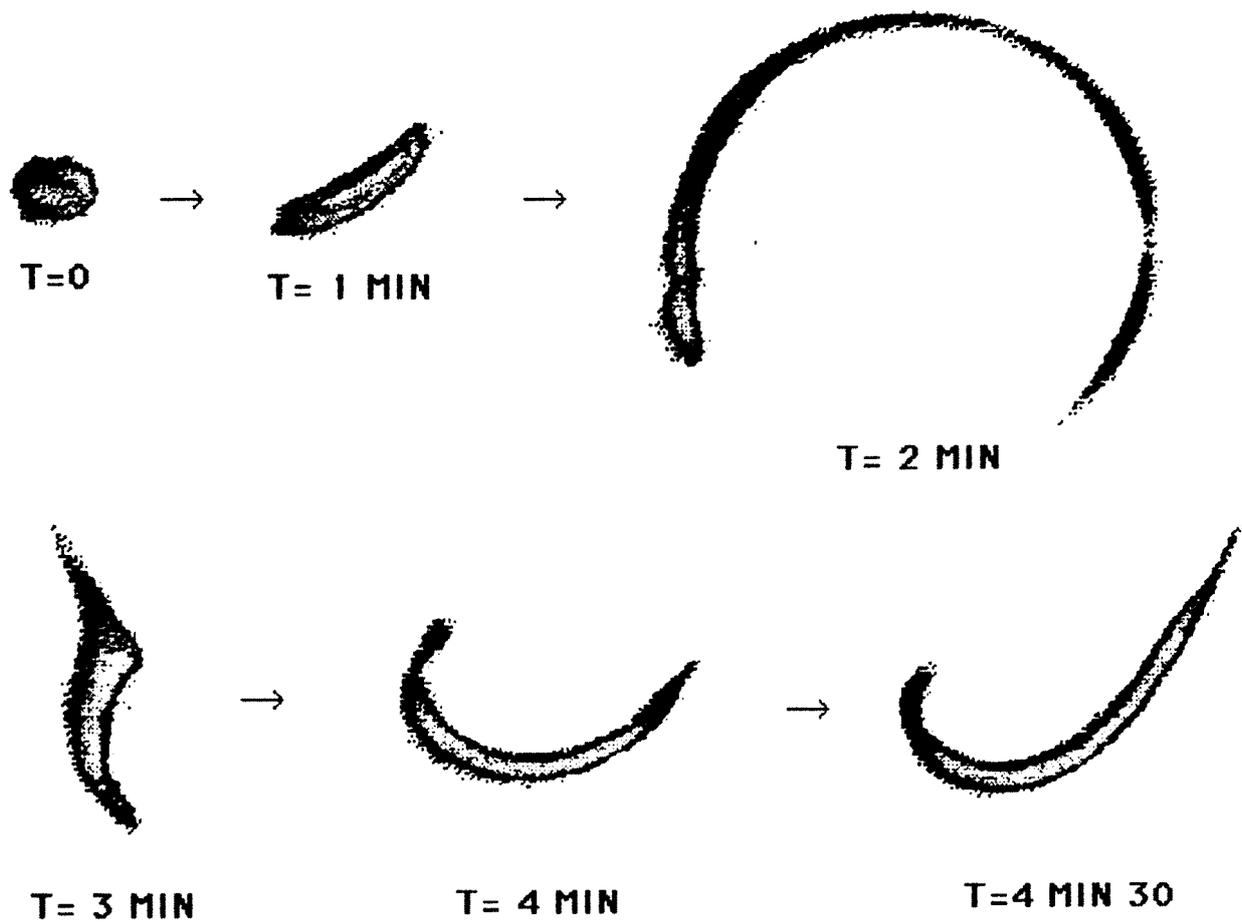
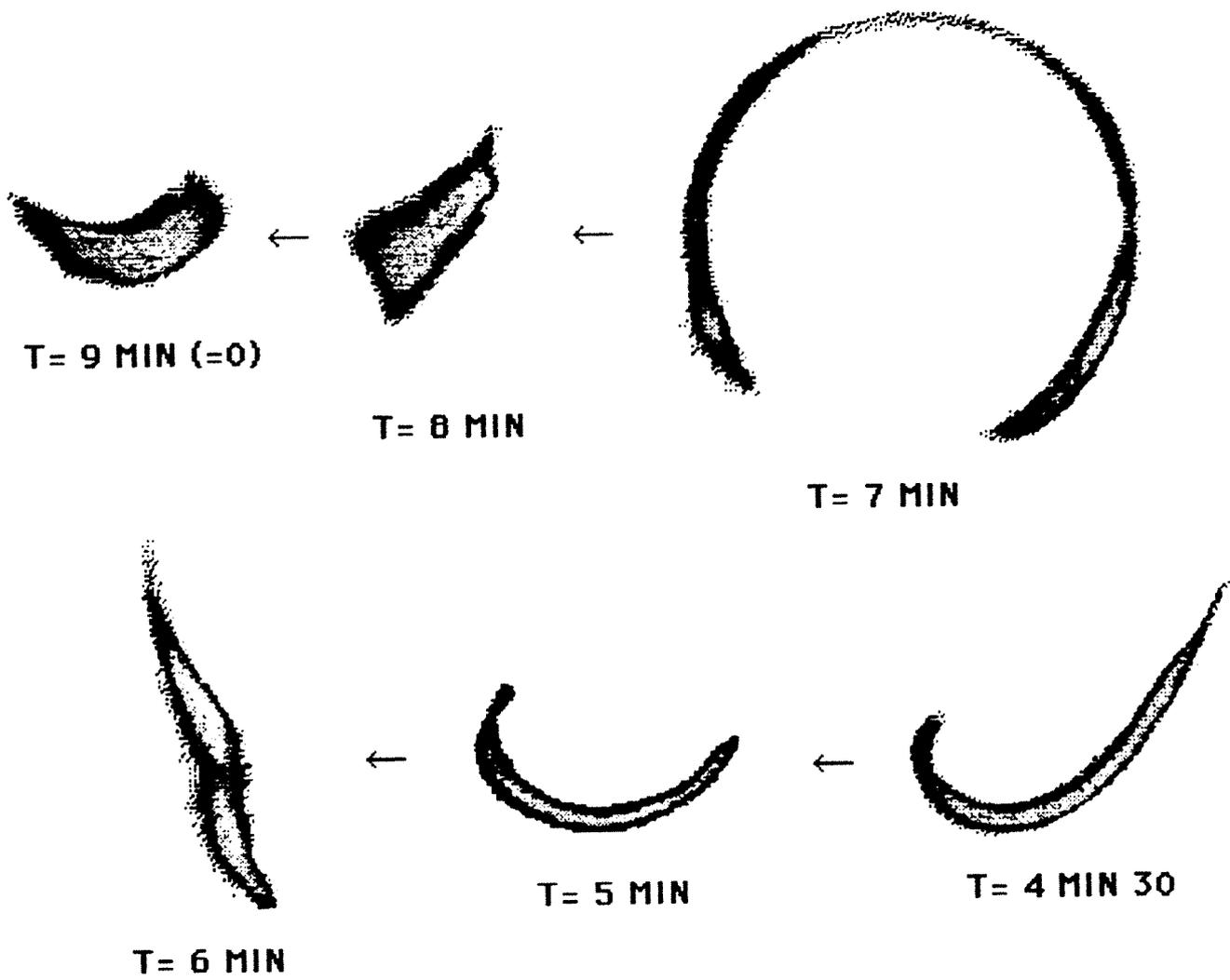


Figure 11.17.a : Déformation d'une goutte de fluide colorée  
durant 4.5 périodes  
 ( $\omega_{int} = \omega_{ext} = 1 \text{ T/min}$ ,  $e/a^2=0,4$ )



**Figure 11.17.b : "Reformation" d'une goutte de fluide colorée  
 durant 4,5 périodes  
 ( $\omega_{int} = \omega_{ext} = -1 \text{ T/min}$ ,  $e/a^2=0,4$ )**

Les vitesses sont, cette fois, alternées selon le schéma suivant:

Vitesses angulaires (tour/min)

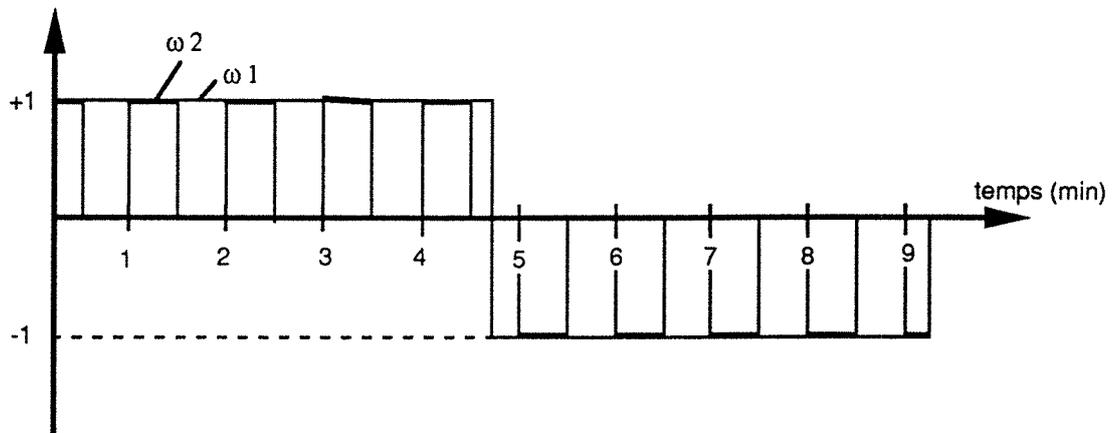


Figure 11.18 : Vitesses angulaires appliquées en situation 3D.

Des photographies de la goutte de traceur sont périodiquement prises (cf figures 11.19.a et 11.19.b)

La figure finale prise par le traceur est très différente de la figure initiale. Le temps global d'aller et de retour est équivalent à celui de l'exemple 2D (9 min 15 s au lieu de 9 min). La diffusion a donc agi de la même façon dans les deux cas. Elle ne peut donc, à elle seule, justifier de l'importance de la déformation du traceur.

La photographie prise à  $t = 9\text{min } 15\text{s}$  révèle une structure striée, caractéristique d'un écoulement étiré puis replié. Cette figure n'est plus comparable à celle obtenue en 2D après 9 min d'étirement simple.

Il est indéniable que le retour temporel est plus délicat à réaliser en 3D qu'en 2D. En effet, les conditions aux parois doivent être rigoureusement identiques dans les phases aller et retour (au signe des vitesses près). Expérimentalement, cette condition n'est évidemment jamais réalisée parfaitement, ce qui entraîne une dissymétrie entre les deux séquences et donc un retour incomplet à l'état initial.

Néanmoins, nous avons remarqué, que, malgré le soin apporté aux expérimentations en 3D, la figure finale ne correspond jamais à celle de départ. Il existe donc une sensibilité très importante de

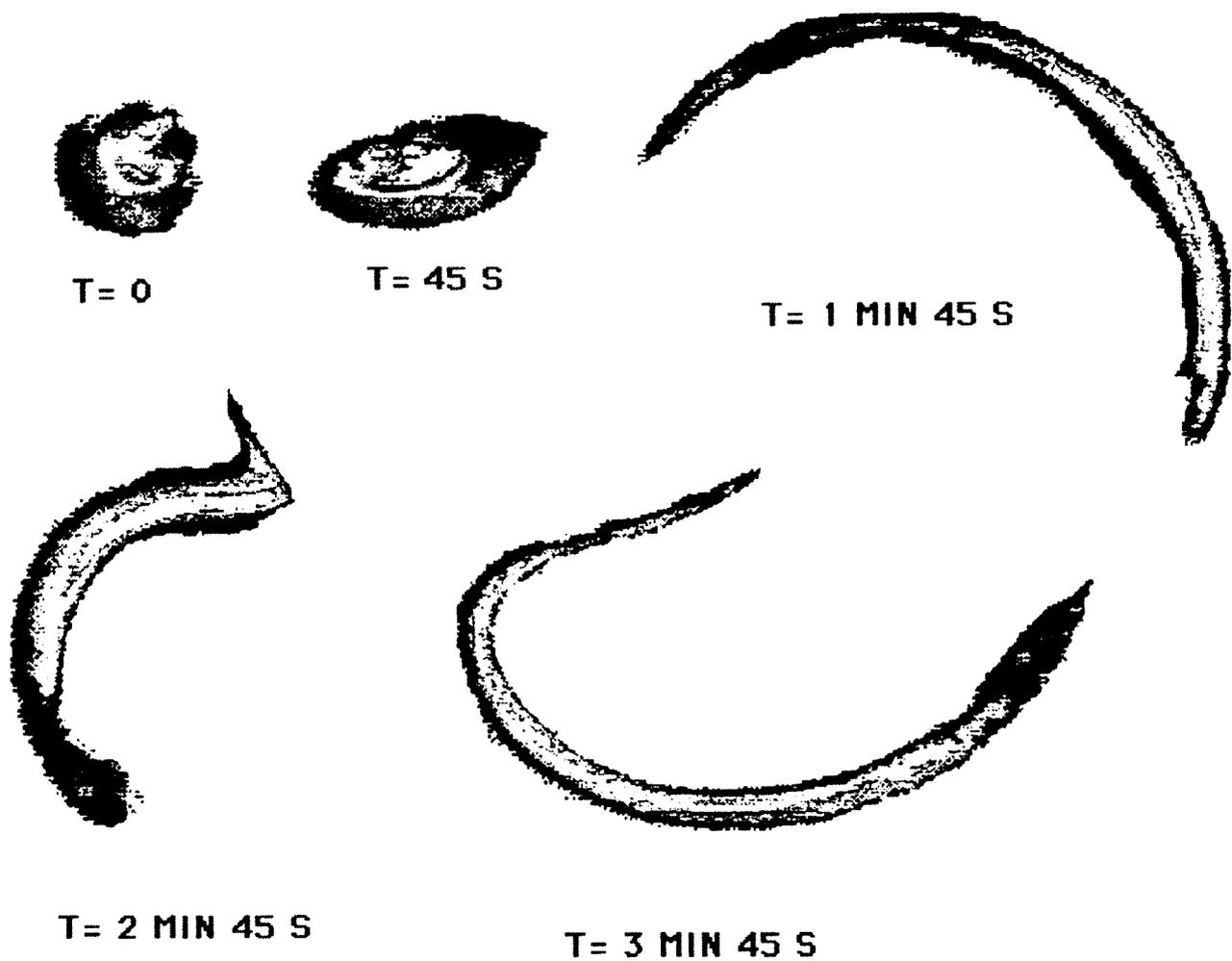


Figure 11.19.a : Déformation d'une goutte de fluide colorée durant 4.75 périodes avec alternance des vitesses de rotation des cylindres  
 ( $\omega_{int} = \omega_{ext} = 1 \text{ T/min}$ ,  $e/a^2=0,4$ ,  $T_1 = T_2 = 30\text{s}$ )

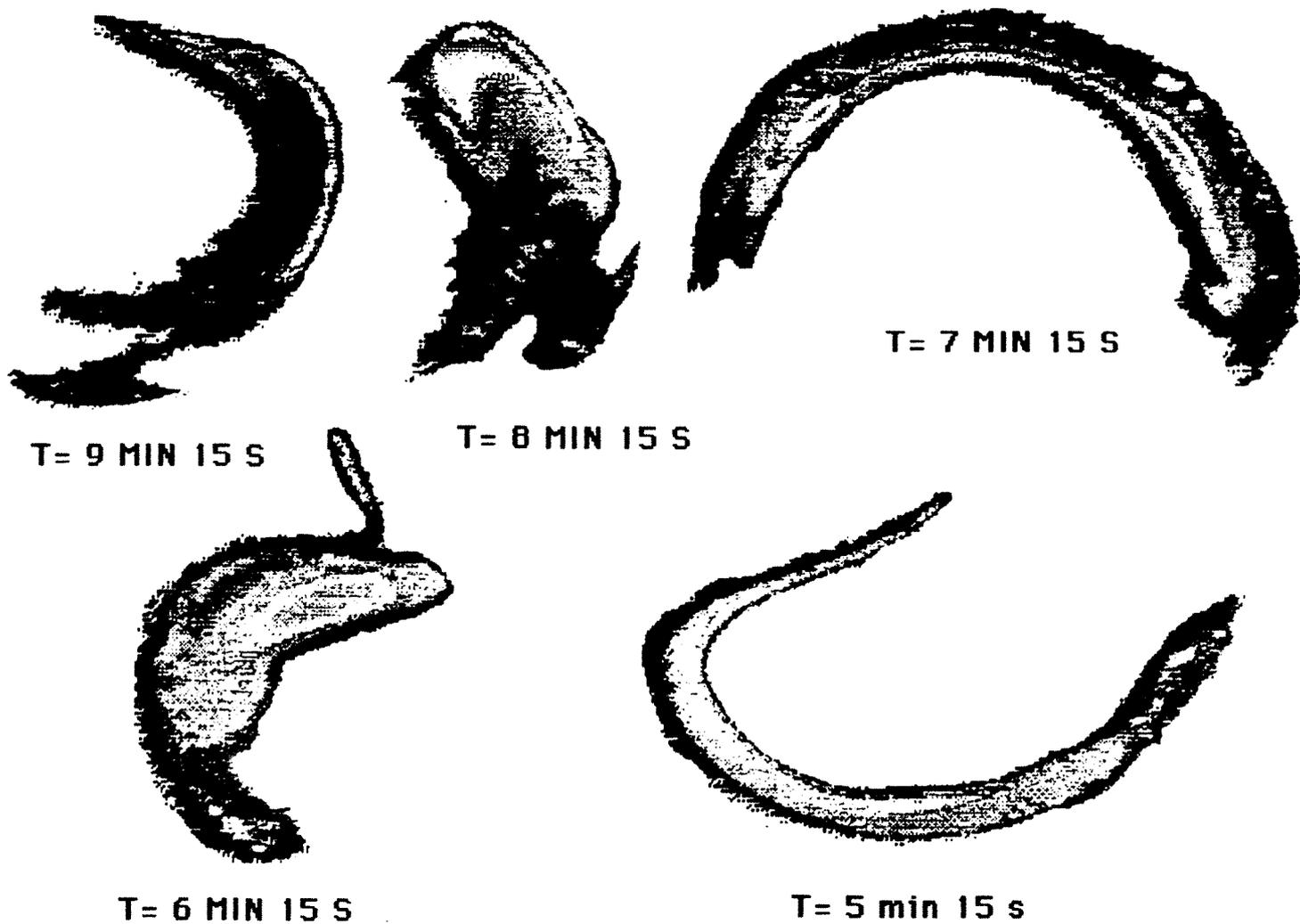


Figure 11.19.b : "Reformation??" de la goutte de fluide colorée  
durant le même temps (4.75 périodes)

( $\omega_{int} = \omega_{ext} = -1$  T/min,  $e/a^2=0,4$ ,  $T_1 = T_2 = 30s$ )

l'écoulement dans ce cas de figure. Cette sensibilité est une preuve de la nature chaotique de ce régime.

## CONCLUSION GENERALE

Après avoir vérifié la validité de la solution analytique de G.H. WANNIER (1950) grâce à des calculs numériques dans plusieurs situations non inertielles, une technique de tracé de sections de Poincaré a été mise en oeuvre pour la configuration d'alternance. A partir des cartographies issues de cette technique, la confrontation entre expérience et théorie est possible en "3D". Il apparaît dans beaucoup de cas, une similitude entre ces deux points de vue. La prédictibilité reste bonne dans des conditions où subsistent en majorité des îlots stables.

Selon l'excentricité et la période d'alternance des rotations des cylindres, les figures décrites par le traceur fluorescent sont multiples. Une dissymétrie importante entre les temps de rotation des deux cylindres détruit l'effet perturbateur de l'alternance : l'influence d'un des deux cylindres devenant primordiale, le système retrouve une configuration purement "2D".

En contre partie, une augmentation des périodes de rotations des parois entraîne une destruction des îlots stables (Vortex) et ce, quelle que soit l'excentricité du système. En effet, la durée importante de chaque rotation où le régime est purement "2D" permet au traceur de décrire uniformément des lignes de courant .

L'alternance d'un régime à l'autre entraîne une répartition homogène de traceurs.

Ce protocole efficace est néanmoins très pénalisant car très long.

Les sections de POINCARE nous ont montré que certaines situations intermédiaires présentaient des régions chaotiques de taille importante.

L'étude des sens de rotation des cylindres révèle une tendance à la destruction des zones stables si le rapport des vitesses angulaires est positif.

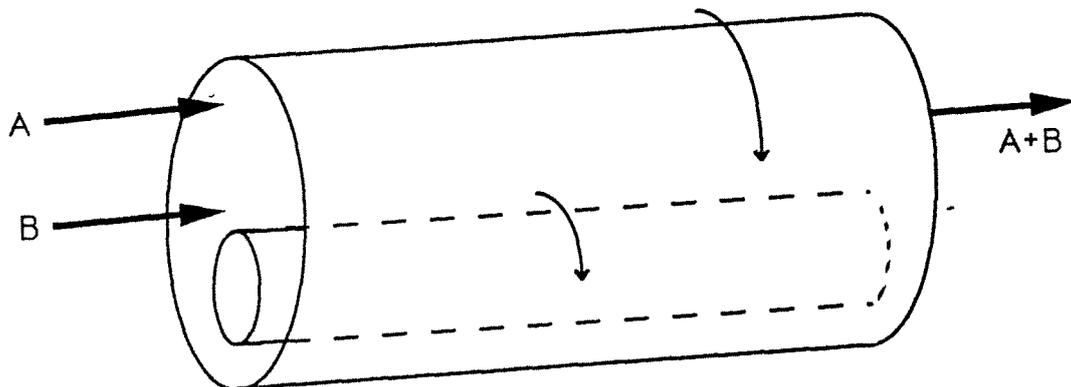
Enfin, l'influence de l'excentricité a été discutée : dans les situations extrêmes où le facteur d'excentricité  $e/a^2$  est proche de 0 ou de 0,75, l'écoulement présente de grosses zones stables, difficiles à détruire par une perturbation (alternance) externe.

Il apparaît finalement que le protocole optimal est le suivant:

- Rotation des cylindres lente (d'où perte d'énergie faible)
- Rotation dans le même sens
- Rapport des périodes  $T_{int}/T_{ext} \approx 1/4$  à  $1/5$
- Excentricité moyenne (voir définition au chapitre 2) :  $e/a^2 =$

0,4

L'incorporation doit être faite aux environs du point hyperbolique décelable en "2D". Un schéma de principe d'un mélangeur industriel pourrait donc être le suivant :



La compréhension des phénomènes n'est encore qu'imparfaite. La théorie des systèmes dynamiques fournit quelques éléments permettant d'appréhender l'apparition du chaos. Cette théorie nous a permis de "cibler" la manière avec laquelle un mélange peut être obtenu avec un maximum d'efficacité.

A partir de cette première ébauche, d'autres études plus poussées pourront être réalisées; notamment par la recherche et l'interprétation de points hyperboliques et elliptiques d'ordre supérieur à 1, ou le tracé de pseudo-sections de POINCARÉ à des périodes non multiples de la fréquence d'alternance.

Il reste effectivement de belles recherches à entreprendre dans ce domaine encore balbutiant de la mécanique des fluides.

## Liste des Travaux et Articles

(1) : "Mesure du coefficient de diffusion par photoblanchiment résolu dans l'espace " par E. FRANCAIS, M. BOUCHY, J.C. ANDRE, N. MIDOUX et

J.C. CHARPENTIER

Récents progrès en génie des procédés, Toulouse, 5-7 sept 1989  
Lavoisier Ed. ,7, 105-110 (1989)

(2) : "Etude d'un réacteur à jet par chimiluminescence résolue dans l'espace " par M.GRANDCLAUDON, S. PALLIER, E. FRANCAIS, J.C.ANDRE et N. MIDOUX

Récents progrès en génie des procédés, Toulouse, 5-7 sept 1989  
Lavoisier Ed. ,7, 50-55 (1989)

(3) : "Two-Dimensional Laminar Flow between Eccentric Rotating Cylinders " par E. FRANCAIS, E. SAATDJIAN, L. FALK, N. MIDOUX et J.C. ANDRE

Phoenics Journal, CHAM (1990)

(4) : "Capteurs Photophysiques pour l'Etude de Polymères" par S. GRONDIN, M.C. CARRE, F. BAROS, E. FRANCAIS, M.L. VIRIOT, M. BOUCHY et J.C. ANDRE

Communication au congrès du Cap d'Agde (Juin 1990)



## BIBLIOGRAPHIE

- H.AREF**, Ann. Rev. Fluid Mech., 15, 345-389, (1983).  
"Integrable, chaotic and turbulent vortex motion in two-dimensional flows."
- H.AREF**, J. Fluid Mech., 143, 1-21, (1984).  
"Stirring by chaotic advection."
- H.AREF**, J. Fluid Mech., 173, 15-41, (1986).  
"The Numerical Experiment in Fluid Mechanics."
- H.AREF, S. BALACHANDAR**, Physics of fluid, 29, 3515-3521, (1986).  
"Chaotic advection in a stokes flow."
- H.AREF, S.W. JONES, S. MOFINA, I. ZAWADZKI**, Physica D, 37, 423-440, (1989).  
"Vortices, kinematics and chaos."
- P. BERGE, Y. POMEAU, C. VIDAL**, Ed. Hermann, Paris, (1988).  
"L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence."
- A. BERIS, R.C. ARMSTRONG, R.A. BROWN**, J. Non-Newt. Fluid. Mech, 13, 109-148, (1983).  
"Perturbation theory for viscoelastic fluids between eccentric rotating cylinders."
- T.B. BENJAMIN**, Proc. Roy. Soc. Lond., 359, 27-43, (1978).  
"Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid."
- G. BRUHAT**, Ed. Masson et Cie., Paris, (1959).  
"Cours de Physique Générale. Optique"
- J. CHAIKEN, R. CHEVRAY, M. TABOR, Q.M. TAN**, Proc. Roy. Soc. Lond., 408, 165-174, (1986).  
"Experimental study of lagrangian turbulence in a stokes flow."
- J. CHAIKEN, C.K. CHU, M. TABOR, Q.M. TAN**, Physics of Fluid, 30, 687-694, (1987).  
"Lagrangian turbulence and spatial complexity in a stokes flow."
- W.L.-CHIEN, H.RISING, J.M.OTTINO**, J. Fluid Mech., 170, 355-377, (1986).  
"Laminar mixing and chaotic mixing in several cavity flows."

**I. CHRISTIE, K.R. RAJAGOPAL, A.Z. SZERI**, Int. J. Eng. Sci., 25, 1029-1047, (1987).

"Flow of a non-newtonian fluid between eccentric rotating cylinders."

**R. COMOLET**, Ed. Masson, Paris, (1982).

"Mécanique expérimentale des fluides." Tomes I, II et III

**D. EUVRARD**, Ed. Masson, Paris, (1988).

"Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur.

Différences finies, éléments finis."

**R.C. DIPRIMA, J.T. STUART**, J. Fluid Mech., 54, 393-415, (1972).

"Non-local effects in the stability of flow between eccentric rotating cylinders."

**R.C. DIPRIMA, J.T. STUART**, J. Fluid Mech., 67, 85-111, (1975).

"The nonlinear calculation of Taylor-vortex flow between eccentric rotating cylinders."

**G. DUFFING**, Z. Angew. Math. und Mech. , 296-314, (1922).

"Beitrag zur theorie der flüssigkeitsbewegung zwischen zapfen und lager."

**E. FRANCAIS, M. BOUCHY, J. C. ANDRE, N. MIDOUX, J.C. CHARPENTIER**

Lavoisier Ed. , Z, 105-110, (1989).

"Mesure du Coefficient de Diffusion par Photoblanchiment Résolu dans l'Espace."

**E. FRANCAIS, E. SAATDJIAN, L. FALK, N. MIDOUX, J.C. ANDRE**,  
Phoenics Journal, CHAM (1990)

"Two-Dimensional Laminar Flow between Eccentric Rotating Cylinders."

**J.G. FRANJIONE, J.M. OTTINO**, Physics of Fluid, 30, 3641-3643, (1987).

"Feasibility of numerical tracking of material lines and surfaces in chaotic flows."

**E. GUYON, J.P. NADAL, Y. POMEAU**, NATO ASI Series. Series E: Applied Sciences, 152, (1990).

"Disorder and mixing."

**M. GRANDCLAUDON, S. PALLIER, E. FRANCAIS, J. C. ANDRE, N. MIDOUX**, Lavoisier Ed. , Z, 50-55, (1989).

"Etude d'un Réacteur à jet par chimiluminescence résolue dans l'espace."

**S.W. JONES, O.M. THOMAS, H. AREF**, J. Fluid Mech., 209, 335-357, (1989).

"Chaotic advection by laminar flow in a twisted pipe."

**M.M. KAMAL**, J. Bas. Eng., Trans. ASME, 717-724, (1966).

"Separation in the flow between eccentric rotating cylinders."

**D.V. KHAKHAR, J.G. FRANJIONE, J.M. OTTINO**, Chem. Eng. Sci., 42, 2909-2926, (1987).

"A case study of chaotic mixing in deterministic flows: the partitioned-pipe mixer."

**D.V. KHAKHAR, J.M. OTTINO**, Physics of Fluid, 29, 3503-3505, (1986).

"Fluid mixing (stretching) by time periodic sequences for weak flows."

**E.S. KULINSKI, S. OSTRACH**, J. Appl. Mech., Trans. ASME, 16-22, (1967).

"Journal-bearing velocity profiles for small eccentricity and moderate modified reynolds numbers."

**L. LANDAU, E. LIFCHITZ**, Ed. Mir, Moscou, (1971).

"Mécanique des Fluides"

**N. MIDOUX**, Ed. Technique et Documentation, Masson, Paris, (1985).

"Mécanique et Rhéologie des Fluides en Génie Chimique"

**J.M. OTTINO, C.W. LEONG, H. RISING, P.D. SWANSON**, Nature, 333, 419-425, (1988).

"Morphological structures produced by mixing in chaotic flows."

**J.M. OTTINO, W.E. RANZ, C.W. MACOSKO**, Chem. Eng. Sci., 34, 877-890, (1979).

"A lamellar model for analysis of liquid-liquid mixing."

**J.M. OTTINO**, Cambridge texts in applied mathematics, Camb. Univ. press., Cambridge, (1989).

"The kinematics of mixing: stretching, chaos and transport."

**F. PAN, A. ACRIVOS**, J. Fluid Mech., 28, 643-655, (1967).

"Steady flows in rectangular cavities."

**R. PEYRET, T.D. TAYLOR**, Springer Series in Computational Physics. Springer Verlag.

"Computational Methods for Fluid Flow."

**N.A.V. PIERCY, M.S. HOOPER, H.F. WINNY**, Phil.Mag. S., 15, 647-676, (1933).

"Viscous flow through pipes with cores."

**W.E. RANZ**, AIChE, 25, 41-47, (1979).

"Applications of a stretch model to mixing, diffusion, and reaction in laminar and turbulent flows."

**H. REISSNER**, Z. Angew. Math. und Mech., 81-87, (1935).

"Ebene und räumliche strömung zäher, inkompressibler, trägheitsfreier flüssigkeiten zwischen exzentrischen, relativ zueinander rotierenden zylinderflächen."

**G.S. RITCHIE**, J. Fluid Mech., 32, 131-144, (1968).

"On the stability of viscous flow between eccentric rotating cylinders."

**P.J. ROACHE**, Hermosa, Albuquerque, USA, (1972).

"Computational Fluid Dynamics"

**L.A. SEGEL**, Quart. Appl. Mat., 18, 335-353, (1961).

"Application of Conformal Mappings to Viscous Flow between Moving Circular Cylinders."

**C.J. SHEARER**, Chem. Eng. Sci., 28, 1091-1098, (1973).

"Mixing of highly viscous liquids : Flow geometries for streamline subdivision and redistribution."

**S. SMALE**, Springer-Verlag, New-York, (1980).

"The Mathematics of Time : Essays on dynamical systems, economic processes and related topics"

**W.T. SNYDER, G.A. GOLDSTEIN**, AIChE, 11, 462-467, (1965).

"An analysis of fully developed laminar flow in an eccentric annulus."

**J.T. STUART.**, J. Fluid Mech., 4, 1-21, (1957).

"On the Non-linear Mechanics of Hydrodynamic Stability."

**P.D. SWANSON, J.M. OTTINO**, J. Fluid Mech., 213, 227-249, (1990).

"A comparative computational and experimental study of chaotic mixing of viscous fluids."

**Q.M. TAN**, Physics of Fluid, 30, 3, (1987)

"Regular and chaotic Particle Trajectories in flow."

**J. VILLERMAUX**, Technique et Documentation Lavoisier, Masson, Paris, (1985).

"Génie de la réaction chimique. Conception et fonctionnement des réacteurs"

**M.L. VIRIOT, J.C. ANDRE**, Analysis, 17, 97-111, (1989).

"Fluorescent dyes: a search for new tracers for hydrology."

**G.H. WANNIER**, Quart. Appl. Mat., 8, 1-32, (1950).

"A contribution to the hydrodynamics of lubrication."

**S.WIGGINS**, Nature, 333, 395-396, (1988).

"Stirred but not mixed."



## BIBLIOGRAPHIE ANNEXE

### I Cylindres concentriques

**C.D. ANDERECK, S.S. LIU, H.L. SWINNEY**, J. Fluid Mech., 164, 155, (1986).

**S. CHANDRASEKHAR, D.D. ELBERT**, Proc. Roy. Soc., 268, 145-152, (1962).

"The Stability of Viscous Flow between Rotating Cylinders."

**J.A. COLE**, J. Fluid Mech., 75, 1-15, (1976).

"Taylor-Vortex Instability and Annulus-Length Effects."

**D. COLES**, J. Fluid Mech., 21, 385-425, (1965).

"Transition in Circular Couette Flow."

**COUETTE**, Ann. de Chim. et de Phys., 6ème sér., 21, (1921).

**R.J. DONNELLY, F. REIF, H. SUHL**, Phys. Rev. Lett., 9, 363-365, (1962).

"Enhancement of Hydrodynamic Stability by Modulation."

**R.C. DIPRIMA**, J. Fluid Mech., 6, 462-468, (1959).

"The Stability of Viscous Flow between Rotating Concentric Cylinders with a Pressure Gradient Acting round the Cylinders."

**ORR**, Proc. Roy. Irish. Acad., 90, (1907).

"Stability or Instability of Motions of Viscous Fluid"

**RAYLEIGH**, Proc. Roy. Soc., A, 148-154, (1916).

"On the Dynamics of Revolving Fluids"

**H.A. SNYDER**, J. Fluid Mech., 35, 273-298, (1969).

"Wave-Number Selection at Finite Amplitude in Rotating Couette Flow."

**J.L. SYNGE**, Proc. Roy. Soc., 167, 250-256, (1938).

"On the Stability of a Viscous Liquid between Rotating Coaxial Cylinders."

**G.I. TAYLOR**, Philos. Trans., A.223, 289-343, (1923).

"Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders."

## II Théories sur les phénomènes non-linéaires

**B.S. BERGER, M. ROKNI**, Int. J. Eng. Sci., 25, 1251-1257, (1987).

"Lyapunov exponents and continuum kinematics."

**B.S. BERGER, M. ROKNI**, Int. J. Eng. Sci., 25, 1393-1396, (1987).

"Lyapunov exponents and the evolution of normals."

**M.V. BERRY, N.L. BALAZS, M. TABOR, A. VOROS**, Ann. Phys., 122, 26-63, (1979).

"Quantum maps."

**P. GLORIEUX, E. GIACOBINO**, La Recherche, 20, 1384-1389, (1989).

"Explorer le Chaos à la Lumière des Lasers"

**J.M. GREEN, R.S. MacKAY, F. VIVALDI, M.J. FEIGENBAUM**, Physica D3, 468-486, (1981).

"Universal behaviour in families of area-preserving maps."

**P.H. HOLMES, J.E. MARSDEN**, Commun. Math. Phys., 82, 523-544, (1982).

"Hoeseshoes in Perturbations of Hamiltonian Systems with two Degrees of Freedom."

**K. HUSEYIN, A.S. ATADAN**, Int. J. Eng. Sci., 21, 247-262, (1983).

"On the Analysis on Hopf Bifurcations."

**R.S. MacKAY, J.D. MEISS, I.C. PERCIVAL**, Physica D13, 55-81, (1984).

"Transport in Hamiltonian systems."

**M. YAMAGUTI, S. USHIKI**, Physica D3, 618-626, (1981).

"Chaos in Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations."

# ANNEXE 1

## Coefficients de Lamé



## COEFFICIENTS DE LAME

Cette annexe est consacrée au calcul explicite des coefficients de Lamé (ou métrique) du système de coordonnées pour la géométrie bipolaire. Tous ces calculs sont réalisés en deux dimensions.

La transformation bipolaire/cartésien est la suivante:

$$x = -s \cdot \frac{\text{sh}(\alpha)}{\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \quad (1)$$

$$y = s \cdot \frac{\sin(\beta)}{\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \quad (2)$$

Le point de coordonnées  $(x,y)$  peut se représenter par le vecteur  $r \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , le coefficient  $H_1$  est donné par:

$$H_1^2 = \left| \frac{\partial r}{\partial \alpha} \right|^2 \quad (3)$$

Celui-ci se calcule grâce aux dérivées partielles suivantes:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = s \cdot \frac{(\text{ch}(\alpha) \cdot \cos(\beta) - 1)}{(\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta))^2} \quad (4)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -s \cdot \frac{\text{sh}(\alpha) \cdot \sin(\beta)}{(\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta))^2} \quad (5)$$

par l'expression ci-dessous:

$$H_1^2 = \left( \frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 \quad (6)$$

On obtient alors:

$$H_1^2 = s^2 \cdot \left( \frac{1 - 2 \cdot \cos(\beta) \cdot \text{ch}(\alpha) + \cos^2(\beta) \cdot \text{ch}^2(\alpha) + \sin^2(\beta) \cdot \text{sh}^2(\alpha)}{(\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta))^4} \right) \quad (7)$$

$$\text{Soit: } H_1^2 = \frac{s^2}{(\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta))^2} \quad (8)$$

Le calcul de  $H_2$  est identique et l'on trouve  $H_2 = H_1$ .

$$H_1 = H_2 = H = \left| \frac{s}{\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \right| \quad (9)$$

## ANNEXE 2

Equations de Navier-Stokes  
et de Poisson en géométrie  
bipolaire

of the study. The first two authors (D.A.C. and J.S.) were involved in the design and data collection, and the last two authors (D.A.C. and J.S.) were involved in the analysis and interpretation of the data. The authors have read and approved the final version of the manuscript.

## References

- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2002). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 16, 1223-1230.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2003). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 17, 1243-1250.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2004). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 18, 1253-1260.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2005). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 19, 1263-1270.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2006). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 20, 1273-1280.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2007). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 21, 1283-1290.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2008). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 22, 1293-1300.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2009). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 23, 1303-1310.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2010). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 24, 1313-1320.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2011). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 25, 1323-1330.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2012). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 26, 1333-1340.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2013). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 27, 1343-1350.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2014). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 28, 1353-1360.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2015). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 29, 1363-1370.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2016). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 30, 1373-1380.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2017). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 31, 1383-1390.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2018). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 32, 1393-1400.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2019). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 33, 1403-1410.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2020). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 34, 1413-1420.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2021). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 35, 1423-1430.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2022). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 36, 1433-1440.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2023). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 37, 1443-1450.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2024). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 38, 1453-1460.
- Adams, R. J., & Clark, D. A. (2025). The effects of a 10-week training program on the strength and endurance of young men and women. *Journal of Strength and Conditioning Research*, 39, 1463-1470.

## EQUATIONS FONDAMENTALES DE NAVIER-STOKES ET DE POISSON EN GEOMETRIE BIPOLAIRE

Dans cette annexe, les expressions des équations de Navier-Stokes et de Poisson sont explicitées en coordonnées bipolaires. Les coordonnées sont définies comme suit :

$$x = -s \frac{\text{sh}(\alpha)}{\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \quad (1)$$

$$y = s \frac{\sin(\beta)}{\text{ch}(\alpha) - \cos(\beta)} \quad (2)$$

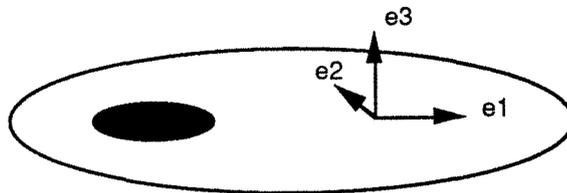
### I Equation de Navier-Stokes

Son écriture en  $\vec{\omega}$  est la suivante :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{U} - \nu \nabla^2 \vec{\omega} = \vec{0} \quad (3)$$

avec  $\vec{\omega}$  rotationnel du vecteur vitesse  $\vec{U} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$ .

L'écoulement est ici purement bidimensionnel, le champ des  $\omega$  est donc scalaire. Un trièdre direct est défini sur la figure ci-dessous, grâce aux trois vecteurs  $e_1, e_2$  et  $e_3$ . Les deux vecteurs  $e_1$  et  $e_2$  sont respectivement tangents aux courbes iso- $\beta$  et iso- $\alpha$ . Le vecteur  $e_3$  est orthogonal au plan de la figure.



L'équation (3) se résume alors à :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \omega = \nu \nabla^2 \omega \quad (4)$$

### Calcul du second terme de l'équation (3):

L'expression selon les trois vecteurs de base est la suivante :

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \cdot \omega = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \left( \frac{u}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{v}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \right) \cdot \mathbf{e}_3 \quad (5)$$

avec  $h$  coefficient de lamé du système de coordonnées bipolaires.

### Calcul du troisième terme de l'équation (3):

Il faut à présent donner l'expression du Laplacien en coordonnées bipolaires. On sait que :

$$\nabla^2 \omega = \nabla \cdot (\nabla \cdot \omega) - \nabla \times (\nabla \times \omega) \quad (6)$$

Le premier terme de (6) est nul car la divergence du rotationnel  $\omega$  est nulle. Le second terme de (6) se calcule en deux temps :

$$(\nabla \times \omega) = \frac{1}{h^2} \begin{vmatrix} h \cdot \mathbf{e}_1 & h \cdot \mathbf{e}_2 & 1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{vmatrix} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial \omega}{\partial \beta} \cdot \mathbf{e}_1 - \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} \cdot \mathbf{e}_2 \right) \quad (7)$$

et

$$\nabla \times (\nabla \times \omega) = \frac{1}{h^2} \begin{vmatrix} h \cdot \mathbf{e}_1 & h \cdot \mathbf{e}_2 & 1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} & \frac{\partial}{\partial \beta} & 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial \beta} & -\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} \right) \quad (8)$$

Ce qui nous fournit, pour le Laplacien de  $\omega$ , l'expression suivante:

$$\nabla^2 \omega = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} \right) \quad (9)$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{u}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{v}{h} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{v}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} \right)} \quad (10)$$

## II Equation de Poisson

La forme de l'équation de Poisson est la suivante :

$$\boxed{\frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} \right) + \omega = 0} \quad (11)$$



## ANNEXE 3

Coefficients  $a, b, c$  et  $r$

the 1990s, the number of people in the world who are illiterate has increased from 1.1 billion to 1.2 billion (UNESCO, 2003).

There are a number of reasons for this increase. One of the main reasons is that the population of the world has increased. In 1990, the world population was 5.3 billion. In 2003, it was 6.1 billion. This means that there are 800 million more people in the world today than in 1990. This increase in population has led to an increase in the number of people who are illiterate.

Another reason for the increase in illiteracy is that the quality of education has declined in many parts of the world. In the 1990s, many countries were struggling to provide basic education for all. In the 2000s, many of these countries have become even poorer, and the quality of education has declined further. This has led to an increase in the number of people who are illiterate.

There are also a number of other factors that contribute to the increase in illiteracy. For example, in many parts of the world, there is a high level of unemployment. This means that many people are unable to afford to go to school. In addition, in many parts of the world, there is a high level of poverty. This means that many people are unable to afford to buy books or other educational materials.

There are a number of ways in which we can reduce the number of people who are illiterate. One of the most important ways is to improve the quality of education. This can be done by increasing the number of teachers, improving the curriculum, and providing better facilities. Another important way is to provide basic education for all. This can be done by building more schools and providing free or low-cost education.

There are also a number of other ways in which we can reduce the number of people who are illiterate. For example, we can provide training for adults who are illiterate. This can be done through community-based programs or through government-funded programs. We can also provide books and other educational materials to people who are unable to afford them.

It is important to note that reducing the number of people who are illiterate is not just a matter of providing education. It is also a matter of providing a better quality of life. In many parts of the world, people are unable to afford to go to school because they are too busy working to support their families. In addition, in many parts of the world, there is a high level of poverty. This means that many people are unable to afford to buy books or other educational materials.

There are a number of ways in which we can improve the quality of life for people who are illiterate. One of the most important ways is to provide basic services such as clean water, electricity, and healthcare. This can be done through government-funded programs or through community-based programs. We can also provide training for people who are unable to find work. This can be done through government-funded programs or through community-based programs.

It is important to note that reducing the number of people who are illiterate is not just a matter of providing education and basic services. It is also a matter of providing a better quality of life. In many parts of the world, people are unable to afford to go to school because they are too busy working to support their families. In addition, in many parts of the world, there is a high level of poverty. This means that many people are unable to afford to buy books or other educational materials.

There are a number of ways in which we can improve the quality of life for people who are illiterate. One of the most important ways is to provide basic services such as clean water, electricity, and healthcare. This can be done through government-funded programs or through community-based programs. We can also provide training for people who are unable to find work. This can be done through government-funded programs or through community-based programs.

It is important to note that reducing the number of people who are illiterate is not just a matter of providing education and basic services. It is also a matter of providing a better quality of life. In many parts of the world, people are unable to afford to go to school because they are too busy working to support their families. In addition, in many parts of the world, there is a high level of poverty. This means that many people are unable to afford to buy books or other educational materials.

There are a number of ways in which we can improve the quality of life for people who are illiterate. One of the most important ways is to provide basic services such as clean water, electricity, and healthcare. This can be done through government-funded programs or through community-based programs. We can also provide training for people who are unable to find work. This can be done through government-funded programs or through community-based programs.

It is important to note that reducing the number of people who are illiterate is not just a matter of providing education and basic services. It is also a matter of providing a better quality of life. In many parts of the world, people are unable to afford to go to school because they are too busy working to support their families. In addition, in many parts of the world, there is a high level of poverty. This means that many people are unable to afford to buy books or other educational materials.

## COEFFICIENTS DES EQUATIONS IMPLICITES EN $\omega$ ET EN $\psi$

Les coefficients  $a(j)$ ,  $b(j)$ ,  $c(j)$  et  $r(j)$  sont explicités. Ils interviennent lors de la résolution numérique des équations de Navier-Stokes (équation en  $\omega$ ) et de Poisson (équation en  $\psi$ ).

Il s'agit des coefficients présents dans le second pas de temps du calcul.

**Pour l'équation en  $\omega$  :**

$$a(j) = -v_{i,j}^n \cdot h_{i,j} \cdot DB - 2 \cdot nu \quad (1)$$

$$b(j) = 4 \cdot \left( (DB \cdot h_{i,j})^2 / dt + nu \right) \quad (2)$$

$$c(j) = v_{i,j}^n \cdot h_{i,j} \cdot DB - 2 \cdot nu \quad (3)$$

$$r(j) = 4 \cdot \omega_{i,j}^{n+1/2} \cdot (h_{i,j} \cdot DB)^2 / dt - u_{i,j}^n \cdot h_{i,j} \cdot \frac{DB^2}{DA} \cdot (\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - \omega_{i-1,j}^{n+1/2}) \\ + 2 \cdot nu \cdot \frac{DB^2}{DA^2} \cdot (\omega_{i+1,j}^{n+1/2} - 2 \cdot \omega_{i,j}^{n+1/2} + \omega_{i-1,j}^{n+1/2}) \quad (4)$$

**Pour l'équation en  $\psi$  :**

$$a(j) = -1 \quad (5)$$

$$b(j) = 2 + 2 \cdot DB^2 / dt \quad (6)$$

$$c(j) = -1 \quad (7)$$

$$r(j) = DB^2 \left[ \frac{2}{dt} \cdot \psi_{i,j}^{n+1/2} + \left( \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1/2} - 2 \cdot \psi_{i,j}^{n+1/2} + \psi_{i,j-1}^{n+1/2}}{DA^2} \right) + h_{i,j}^2 \cdot \omega_{i,j}^{n+1} \right] \quad (8)$$



## ANNEXE 4

$\psi$  à la paroi extérieure

the 1990s, the number of people with a mental health problem has increased in the UK (Mental Health Act 1983, 1990). The increase in the number of people with mental health problems has led to a corresponding increase in the number of people who are admitted to hospital. The number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has increased from 1.5 million in 1990 to 2.5 million in 2000 (Mental Health Act 1983, 1990). The increase in the number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has led to a corresponding increase in the number of people who are admitted to hospital. The number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has increased from 1.5 million in 1990 to 2.5 million in 2000 (Mental Health Act 1983, 1990).

The increase in the number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has led to a corresponding increase in the number of people who are admitted to hospital. The number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has increased from 1.5 million in 1990 to 2.5 million in 2000 (Mental Health Act 1983, 1990). The increase in the number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has led to a corresponding increase in the number of people who are admitted to hospital. The number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has increased from 1.5 million in 1990 to 2.5 million in 2000 (Mental Health Act 1983, 1990).

The increase in the number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has led to a corresponding increase in the number of people who are admitted to hospital. The number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has increased from 1.5 million in 1990 to 2.5 million in 2000 (Mental Health Act 1983, 1990). The increase in the number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has led to a corresponding increase in the number of people who are admitted to hospital. The number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has increased from 1.5 million in 1990 to 2.5 million in 2000 (Mental Health Act 1983, 1990).

The increase in the number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has led to a corresponding increase in the number of people who are admitted to hospital. The number of people with a mental health problem who are admitted to hospital has increased from 1.5 million in 1990 to 2.5 million in 2000 (Mental Health Act 1983, 1990).

**CALCUL DE LA VALEUR DE LA FONCTION DE COURANT A LA PAROI EXTERIEURE**

Le calcul de la fonction de courant  $\psi$  est réalisé par intégration du flux de matière de la paroi intérieure à la paroi extérieure. En effet:

$$[\psi]_{\alpha 1}^{\alpha 2} = \psi_{\text{cyl. ext.}} - 0 = \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha \quad (1)$$

ou

$$\psi_{\text{cyl. ext.}} = - \int_{\alpha 1}^{\alpha 2} [h v]_{\text{fixé}} d\alpha \quad (2)$$

Les valeurs de  $\psi$  sont réparties de la paroi intérieure ( $i=0$ ) à la paroi extérieure ( $i=N$ ). Les  $N$  valeurs de  $\psi$  (de 0 à  $N-1$ ) permettent de calculer la valeur en  $N$ .



En effet, la valeur de  $\psi$  en  $i=N$  est égale à :

$$\psi_{\text{cyl. ext.}} = - \sum_{i=0}^{i=N} [h(i,j) \cdot v(i,j)]_{\text{j fixé}} \cdot DA \quad (3)$$

Soit :

$$2 \cdot \psi_N = - h(0,j) \cdot v_1 \cdot DA + \sum_{i=1}^{i=N-1} (\psi(i+1,j) + \psi(i-1,j)) - h(N,j) \cdot v_2 \cdot DA \quad (4)$$

De plus :

$$\sum_{i=1}^{i=N-1} (\psi(i+1,j) + \psi(i-1,j)) = \psi(N,j) + \psi(N-1,j) - \psi(0,j) - \psi(1,j) \quad (5)$$

On obtient finalement :

$$\psi_{\text{cyl. ext.}} = (- v_1 \cdot h(0,M/2) - v_2 \cdot h(N,M/2)) \cdot DA + \psi_{N-1,M/2} - \psi_{1,M/2}$$



## ANNEXE 5

Listing du programme de  
résolution numérique du  
problème en 2D







```

c(i)=U(i,j)*H(i,j)*DA-2*nu
r(i)=4*w(i,j)*(H(i,j)*DA)**2/dt-V(i,j)*H(i,j)*DA**2*(w(i,j
&+1)-w(i,j-1))/DB+2*nu*(DA/DB)**2*(w(i,j+1)-2*w(i,j)+w(i,j-1))

6  continue

i=N-1
a(N-1)=-U(N-1,j)*H(N-1,j)*DA-2*nu
b(N-1)=4*(H(N-1,j)**2*DA**2/dt+nu)
r(N-1)=4*w(N-1,j)*(H(N-1,j)*DA)**2/dt-V(N-1,j)*H(N-1,j)*DA**
&2*(w(N-1,j+1)-w(N-1,j-1))/DB+2*nu*(DA/DB)**2*(w(N-1,j+1)-2
&*w(N-1,j)+w(N-1,j-1))-(U(N-1,j)*H(N-1,j)*DA-2*nu)*w(N,j)

call tridiag(w2,a,b,c,r)

do 8 i=1,N-1
8  w1(i,j)=w2(i)

7  continue

c          CALCUL DE W EN J=0 ET J=M
c          .....,.....

j=M

i=1

b(1)=4*(H(1,M)**2*DA**2/dt+nu)
c(1)=U(1,M)*H(1,M)*DA-2*nu
r(1)=4*w(1,M)*(H(1,M)*DA)**2/dt-V(1,M)*H(1,M)*DA**2/DB*
&(w(1,1)-w(1,M-1))+2*nu*(DA/DB)**2*(w(1,1)-2*w(1,M)+w(1,M-1))
&-(-U(1,M)*H(1,M)*DA-2*nu)*w(0,M)

do 10 i=2,N-2

a(i)=-U(i,M)*H(i,M)*DA-2*nu
b(i)=4*(H(i,M)**2*DA**2/dt+nu)
c(i)=U(i,M)*H(i,M)*DA-2*nu
r(i)=4*w(i,M)*(H(i,M)*DA)**2/dt-V(i,M)*H(i,M)*DA**2/DB*
&(w(i,1)-w(i,M-1))+2*nu*(DA/DB)**2*(w(i,1)-2*w(i,M)+w(i,M-1))

10  continue

i=N-1

a(N-1)=-U(N-1,M)*H(N-1,M)*DA-2*nu
b(N-1)=4*(H(N-1,M)**2*DA**2/dt+nu)
r(N-1)=4*w(N-1,M)*(H(N-1,M)*DA)**2/dt-V(N-1,M)*H(N-1,M)*
&DA**2/DB*(w(N-1,1)-w(N-1,M-1))+2*nu*(DA/DB)**2*(w(N-1,1)-2*
&w(N-1,M)+w(N-1,M-1))-(U(N-1,M)*H(N-1,M)*DA-2*nu)*w(N,M)

call tridiag(w2,a,b,c,r)

do 11 i=1,N-1
11  w1(i,M)=w2(i)
11  w1(i,0)=w2(i)

c  do 111 i=0,N

```

```

c      print(100),(w1(i,j),j=0,M)
c100  format(11f7.3)
c111  continue

c ----- SECOND DEMI PAS DE TEMPS --- (DIRECTION j) -----

      kij=-1
      kijk=1

      do 12 i=1,N-1

      j=0

      w1(N,j)=w(N,j)
      w1(0,j)=w(0,j)

      b(j)=4*(H(i,j)**2*DB**2/dt+nu)
      c(j)=V(i,j)*H(i,j)*DB-2*nu
      r(j)=4*w1(i,j)*(H(i,j)*DB)**2/dt-U(i,j)*H(i,j)*DB**2/DA*
            &(w1(i+1,j)-w1(i-1,j))+2*nu*(DB/DA)**2*(w1(i+1,j)-2*w1(i,j)
            &+w1(i-1,j))-(-V(i,j)*H(i,j)*DB-2*nu)*w(i,M-1)

      do 13 j=1,M-1

      w1(0,j)=w(0,j)
      w1(N,j)=w(N,j)
      a(j)=-V(i,j)*H(i,j)*DB-2*nu
      b(j)=4*(H(i,j)**2*DB**2/dt+nu)
      c(j)=V(i,j)*H(i,j)*DB-2*nu
      r(j)=4*w1(i,j)*(H(i,j)*DB)**2/dt-U(i,j)*H(i,j)*DB**2/DA*
            &(w1(i+1,j)-w1(i-1,j))+2*nu*(DB/DA)**2*(w1(i+1,j)-2*w1(i,j)
            &+w1(i-1,j))

13      continue

      j=M
      w1(0,j)=w(0,j)
      w1(N,j)=w(N,j)
      a(j)=-V(i,j)*H(i,j)*DB-2*nu
      b(j)=4*(H(i,j)**2*DB**2/dt+nu)
      r(j)=4*w1(i,j)*(H(i,j)*DB)**2/dt-U(i,j)*H(i,j)*DB**2/DA*
            &(w1(i+1,j)-w1(i-1,j))+2*nu*(DB/DA)**2*(w1(i+1,j)-2*w1(i,j)
            &+w1(i-1,j))-(-V(i,j)*H(i,j)*DB-2*nu)*w(i,1)

      call tridiag(w2,a,b,c,r)

      do 14 j=0,M
14      w(i,j)=w2(j)
c      print*,w(i,0),w(i,1),w(i,M-1),w(i,M)
12      continue

c      do 3000 j=0,M
c3000 print*,w(0,j),w(N,j)
      kij=1
      kijk=0

```

```

c *****
c CALCUL DES VALEURS DE LA FONCTION DE COURANT (PSI)
c PAR LA METHODE (ADI) IMPLICITE
c *****

```

```
kk=0
```

```
c ----- CALCUL DE TESTPSI EN J=0 ET J=M/2 -----
```

```

1601 do 161 i=0,N
      testpsi1(i)=psi(i,0)
161  testpsi2(i)=psi(i,M/2)

```

```

c -----
      kk=kk+1

```

```
c --- PREMIER DEMI PAS DE TEMPS --- (DIRECTION I) -----
```

```
kij=1
```

```
do 17 j=1,M-1
```

```
i=1
```

```

b(i)=2+2*(DA)**2/dtp
c(i)=-1
      &psi(i,j-1))/(DB)**2+H(i,j)**2*w(i,j))-(-1)*psi(0,j)

```

```
do 18 i=2,N-2
```

```

a(i)=-1
b(i)=2+2*(DA)**2/dtp
c(i)=-1
r(i)=(DA)**2*(2*psi(i,j)/dtp+(psi(i,j+1)-2*psi(i,j)+
      &psi(i,j-1))/(DB)**2+H(i,j)**2*w(i,j))

```

```
18  continue
```

```
i=N-1
```

```

a(i)=-1
b(i)=2+2*(DA)**2/dtp
r(i)=(DA)**2*(2*psi(i,j)/dtp+(psi(i,j+1)-2*psi(i,j)+
      &psi(i,j-1))/(DB)**2+H(i,j)**2*w(i,j))-(-1)*psi(N,j)

```

```
call tridiag(w2,a,b,c,r)
```

```

do 19 i=1,N-1
19  psi1(i,j)=w2(i)

```

```
17  continue
```

```

c          CALCUL DE PSI EN J=0 ET J=M
c          *****

```

```
j=M
```

```
i=1
```

```

b(i)=2+2*(DA)**2/dtp
c(i)=-1
r(i)=(DA)**2*(2*psi(i,M)/dtp+(psi(i,1)-2*psi(i,M)+
  &psi(i,M-1))/(DB)**2+H(i,j)**2*w(i,M))-(-1)*psi(0,M)

do 20 i=2,N-2

a(i)=-1
b(i)=2+2*(DA)**2/dtp
c(i)=-1
r(i)=(DA)**2*(2*psi(i,M)/dtp+(psi(i,1)-2*psi(i,M)+
  &psi(i,M-1))/(DB)**2+H(i,j)**2*w(i,M))

20  continue

i=N-1

a(i)=-1
b(i)=2+2*(DA)**2/dtp
r(i)=(DA)**2*(2*psi(i,M)/dtp+(psi(i,1)-2*psi(i,M)+
  &psi(i,M-1))/(DB)**2+H(i,j)**2*w(i,M))-(-1)*psi(N,M)

call tridiag(w2,a,b,c,r)

do 21 i=1,N-1
psi1(i,M)=w2(i)
21  psi1(i,0)=w2(i)

c  ----- SECOND DEMI PAS DE TEMPS --- (DIRECTION j) -----

kij=-1
kijk=1

do 22 i=1,N-1

j=0

psi1(N,j)=psi(N,j)
psi1(0,j)=0.

b(j)=2+2*(DB)**2/dtp
c(j)=-1
r(j)=(DB)**2*(2*psi1(i,j)/dtp+(psi1(i+1,j)-2*psi1(i,j)
  &+psi1(i-1,j))/(DA)**2+H(i,j)**2*w(i,j))-(-1)*psi(i,M-1)
c  print*,  psi1(N,j),psi1(i,j),psi1(i+1,j),psi1(i,M-1)

do 23 j=1,M-1

psi1(N,j)=psi(N,j)
psi1(0,j)=0.

a(j)=-1
b(j)=2+2*(DB)**2/dtp
c(j)=-1
r(j)=(DB)**2*(2*psi1(i,j)/dtp+(psi1(i+1,j)-2*psi1(i,j)+

```

```

        &psi1(i-1,j))/(DA)**2+H(i,j)**2*w(i,j))
23  continue

      j=M

      psi1(N,j)=psi(N,j)
      psi1(0,j)=0.

      a(j)=-1
      b(j)=2+2*(DB)**2/dtp
      r(j)=(DB)**2*(2*psi1(i,j)/dtp+(psi1(i+1,j)-2*psi1(i,j)+
        &psi1(i-1,j))/(DA)**2+H(i,j)**2*w(i,j))-(-1)*psi(i,1)
c    print*, psi1(N,j),psi1(i,j),psi1(i+1,j),psi1(i,1)

      call tridiag(w2,a,b,c,r)

      do 24 j=0,M
24   psi(i,j)=w2(j)

22  continue

      kjk=0
      kij=1

c          CALCUL DE PSI EN I=0 ET I=N
c          *****

      if (kgk.gt.3000) goto 2633

      do 2603 j=0,M
      psi(0,j)=0.
2603  psi(N,j)=(-v1*H(0,M/2)-v2*H(N,M/2))*DA+psi(N-1,M/2)-psi(1,M/2)
      goto 2634

2633  do 2604 j=0,M
          psi(N,j)=-2*DA*H(N-1,j)*v(N-1,j)+psi(N-2,j)
2604  psi(0,j)=0.

2634  continue

c *****
c          * TEST SUR PSI *
c *****

      X21=0.
      X22=0.

      if (kk.lt.20) goto 1601

c *****
c          CALCUL DES VITESSES U ET V
c          *****

      aka=kgk/1000.-int(kgk/1000.)
      if (aka.ne.0.) goto 5006
      do 5004 j=0,M/2,5

```

```

5004 write(2,5005) (psi(i,j),i=0,N,3)
      write(2,*) 'iter. n°,kgk
      write(2,*) '-----'
5005 format(11f7.2)

5006 do 27 j=1,M-1
      do 27 i=1,N-1
      v(i,j)=-((psi(i+1,j)-psi(i-1,j))/H(i,j))/2/DA
      u(i,j)=(psi(i,j+1)-psi(i,j-1))/H(i,j)/2/DB
27  continue

      do 28 i=1,N-1
      u(i,M)=(psi(i,1)-psi(i,M-1))/H(i,M)/2/DB
      u(i,0)=u(i,M)
      v(i,M)=-((psi(i+1,M)-psi(i-1,M))/H(i,M))/2/DA
28  v(i,0)=v(i,M)

      do 29 j=0,N
      u(0,j)=0.
      u(N,j)=0.
      v(0,j)=v1
29  v(N,j)=v2

      aka=kgk/1000.-int(kgk/1000.)
      if (aka.ne.0.) goto 5026
c     do 5010 j=0,M
c5010 write(2,5011) (u(i,j),i=0,N)
c5011 format(11f7.2)
c     write(2,*) '-----'

      write(2,5021) (v(i,0),i=0,N,3)
5021 format(11f7.2)
      write(2,*) '-----'
5026 continue

c *****
c          CALCUL DE w AUX PAROIS
c *****

      do 30 j=0,M
      w(0,j)=-2/H(0,j)**2*((psi(1,j)-psi(0,j))/DA**2+v1*H(0,j)/DA)
30  w(N,j)=2/H(N,j)**2*((psi(N,j)-psi(N-1,j))/DA**2+v2*H(N,j)/DA)

c     aka=kgk/1000.-int(kgk/1000.)
c     if (aka.ne.0) goto 5036
c     do 5030 j=0,M
c5030 write(2,5031) (w(i,j),i=0,N)
c5031 format(11f7.2)
c     write(2,*) '-----'
c5036 continue

c *****
c          * TEST SUR W *
c *****

      W21=0.
      W22=0.

```

```

do 301 i=0,N
W21=W21+(testw1(i)-w(i,0))**2
301 W22=W22+(testw2(i)-w(i,M/2))**2
print*," W21 "," W22 "
print(3012),W21,W22
3012 format(2f15.8)
print(3011),w(0,0),w(4,0),w(8,0),w(12,0),w(16,0),w(20,0)
c3011 format(6f12.4)
c do 302 i=0,N,M/5
c print*,"1000v(",i,")= ",1000*v(i,l1l)
c302 continue

GOTO 51

END

```

```

c *****
c RESOLUTION DU SYSTEME TRIDIAGONAL
c *****

```

```

subroutine tridiag(w2p,ap,bp,cp,rp)

implicit double precision (a-h,o-z)
dimension gam(0:100)
dimension ap(0:100),bp(0:100),cp(0:100),rp(0:100),w2p(0:100)
common /s1/ N,M,kij,kijk

if (kij.eq.1) k=N
if (kij.eq.-1) k=M
if (kijk.eq.0) l=1
if (kijk.eq.1) l=0

ap(l)=0
cp(k-l)=0
bet=bp(l)
w2p(l)=rp(l)/bet

do 100 ii=1+l,k-l
gam(ii)=cp(ii-1)/bet
bet=bp(ii)-ap(ii)*gam(ii)
100 w2p(ii)=(rp(ii)-ap(ii)*w2p(ii-1))/bet

do 101 ii=k-(1+l),l,-1
w2p(ii)=w2p(ii)-gam(ii+1)*w2p(ii+1)
101 continue

END

```



## ANNEXE 6

### Sections de Poincaré



## Sections de POINCARE

Dans cette annexe sont consignées différentes sections de POINCARE ainsi que certains écoulements correspondants obtenus expérimentalement. Le programme de calcul des déplacements élémentaires et des positions des particules, itération par itération, ainsi que le programme graphique s'y rapportant sont consignés en fin de l'annexe.

Les conditions de calcul sont données ci-dessous : (avec  $\omega_{int}$  = vitesse de rotation du cylindre intérieur en tours/min,  $\omega_{ext}$  = vitesse de rotation du cylindre extérieur en tours/min,  $exc = e$  = excentricité du système en mm,  $T_{int}$  = temps de rotation du cylindre intérieur,  $T_{ext}$  = temps de rotation du cylindre extérieur)

Les dimensions du système sont toujours les suivantes:

- .  $R_{int} = 12,5$  mm
- .  $R_{ext} = 50,0$  mm



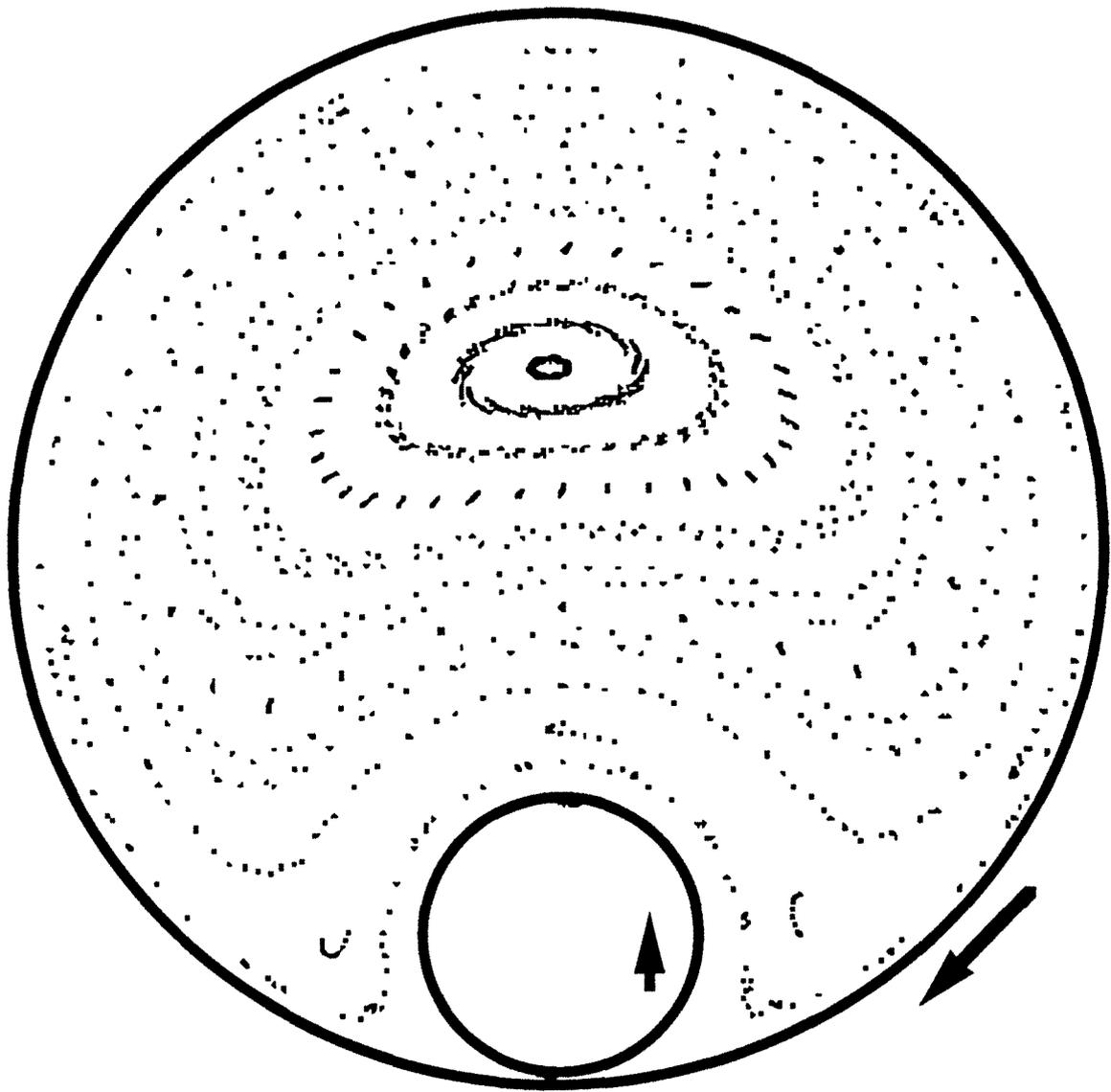


Figure 1

$\omega_{\text{int}} = 1 \text{ T/min}$   
 $\omega_{\text{ext}} = -1 \text{ T/min}$   
 $\text{exc} = 35 \text{ mm}$   
 $T_{\text{int}} = 13,13 \text{ s}$   
 $T_{\text{ext}} = 15 \text{ s}$

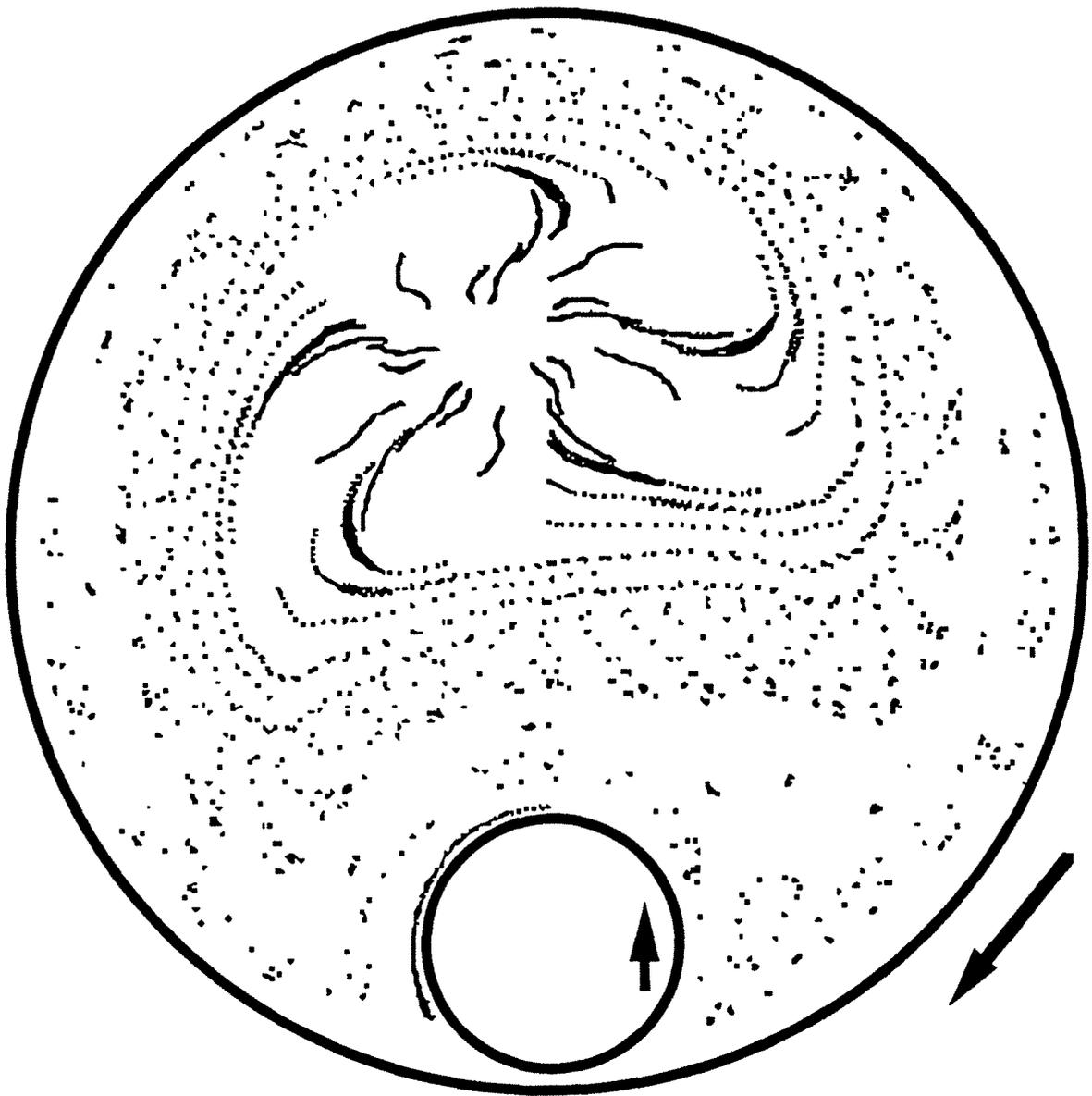


Figure 2

$\omega_{\text{int}} = 1 \text{ T/min}$   
 $\omega_{\text{ext}} = -1 \text{ T/min}$   
 $\text{exc} = 35 \text{ mm}$   
 $T_{\text{int}} = 60 \text{ s}$   
 $T_{\text{ext}} = 52,5 \text{ s}$

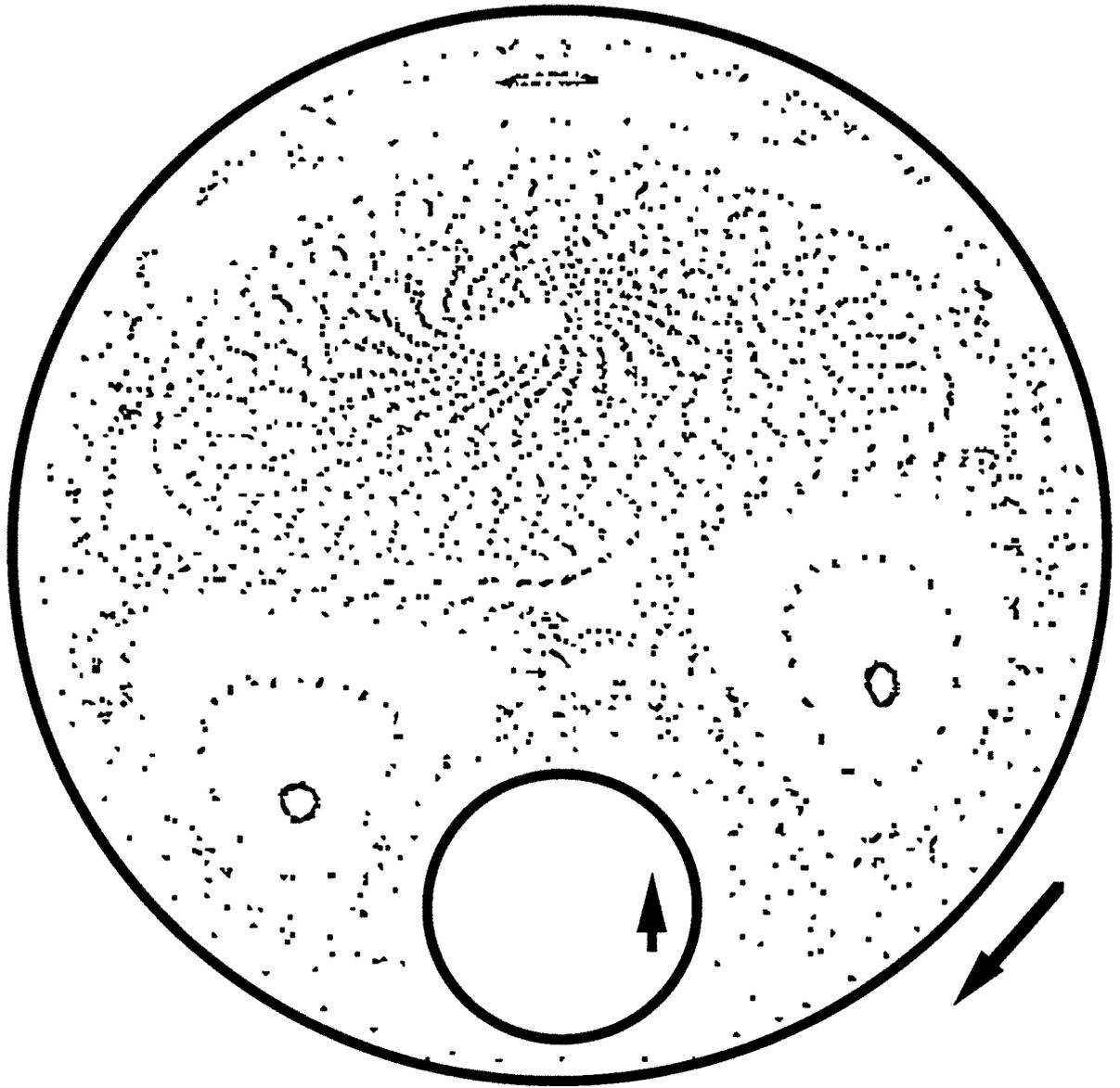


Figure 3

$\omega_{\text{int}} = 1 \text{ T/min}$   
 $\omega_{\text{ext}} = -1 \text{ T/min}$   
 $\text{exc} = 35 \text{ mm}$   
 $T_{\text{int}} = 52,5 \text{ s}$   
 $T_{\text{ext}} = 60 \text{ s}$



**Figure 3.bis**

Image de l'écoulement décrit numériquement à la figure 3

$\omega_{int} = 1 \text{ T/min}$   
 $\omega_{ext} = -1 \text{ T/min}$   
 $exc = 35 \text{ mm}$   
 $T_{int} = 52,5 \text{ s}$   
 $T_{ext} = 60 \text{ s}$

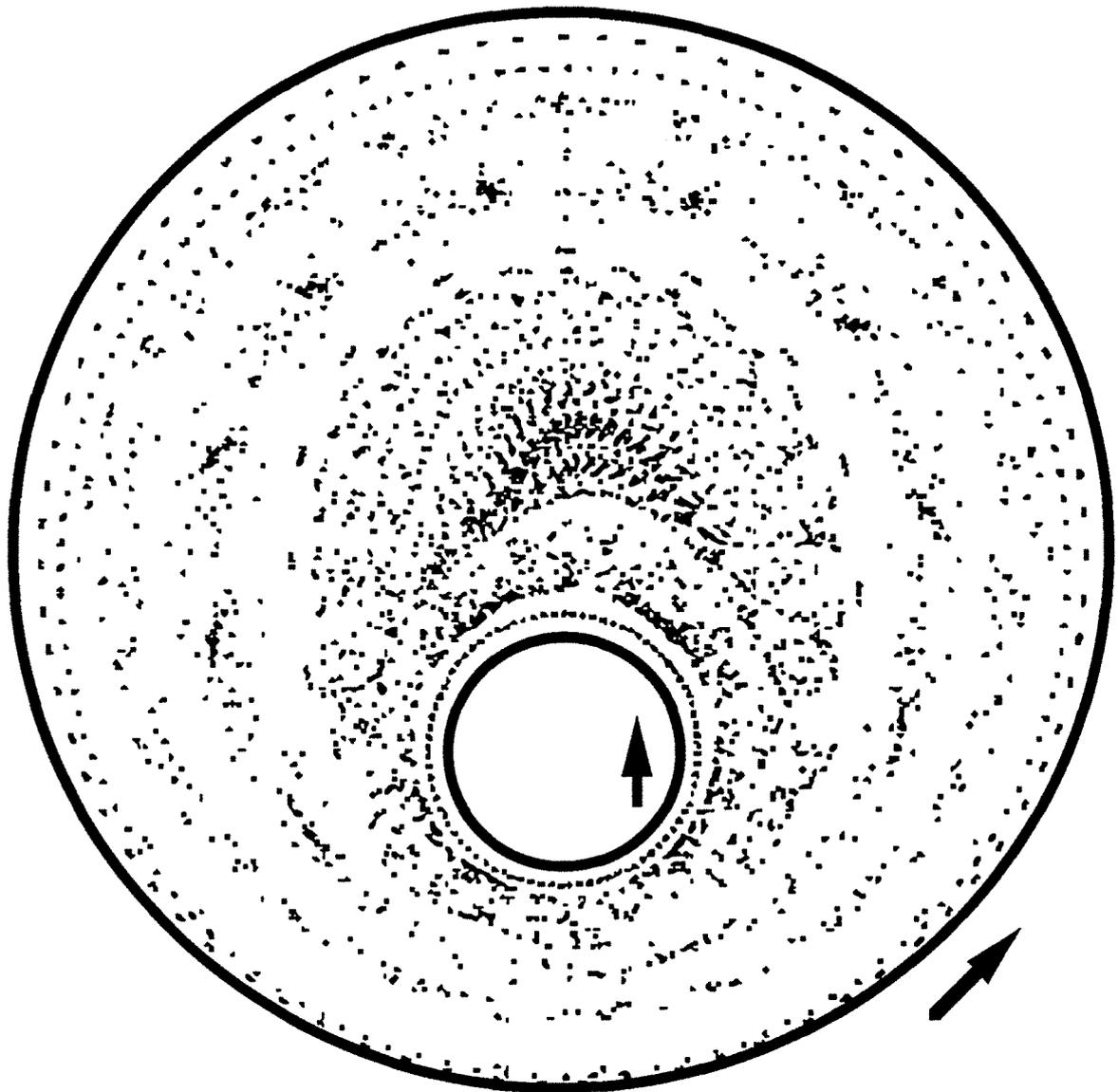
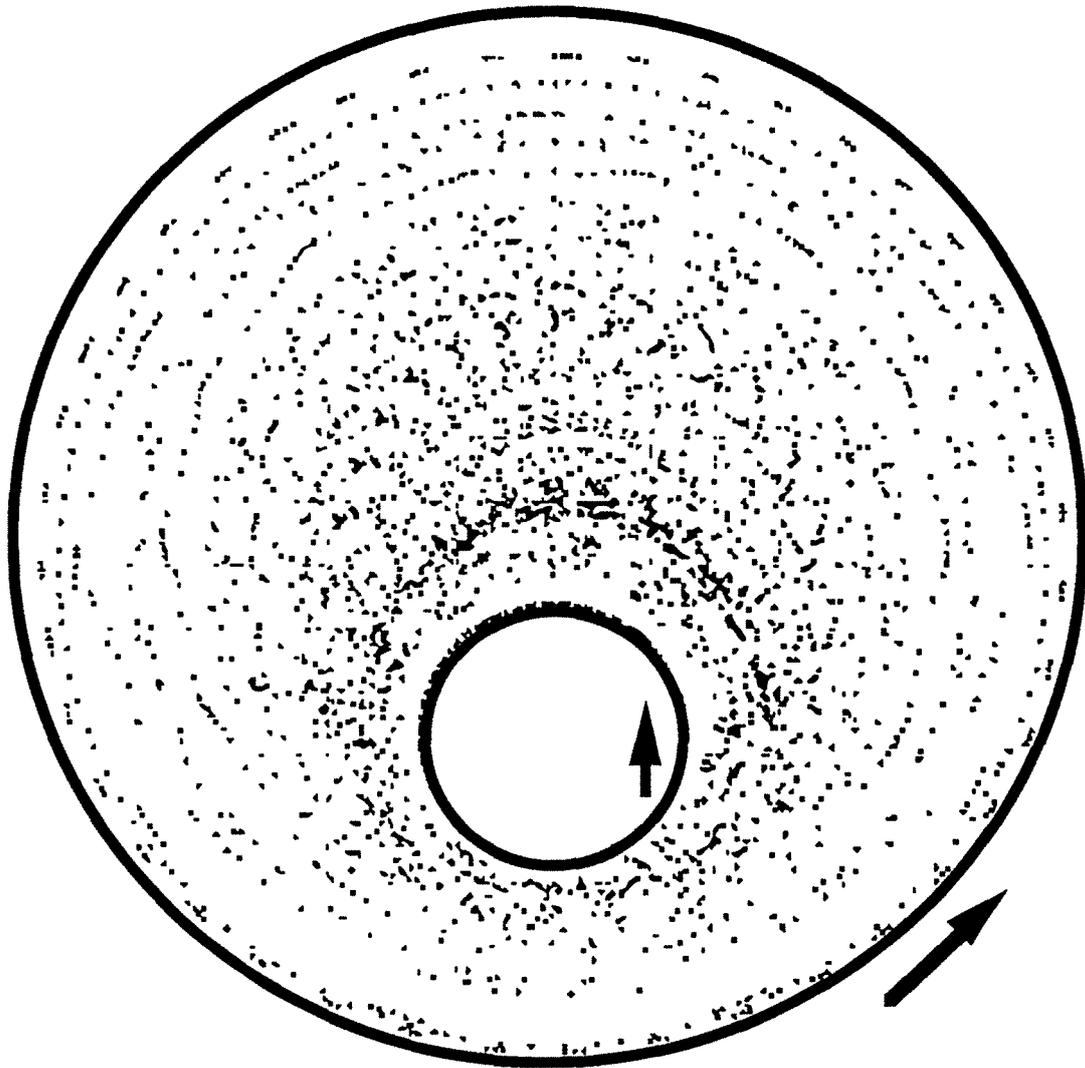


Figure 4

$\omega_{\text{int}} = 1 \text{ T/min}$   
 $\omega_{\text{ext}} = 1 \text{ T/min}$   
 $\text{exc} = 18,75 \text{ mm}$   
 $T_{\text{int}} = 20 \text{ s}$   
 $T_{\text{ext}} = 8 \text{ s}$



**Figure 5**

$\omega_{\text{int}} = 1 \text{ T/min}$   
 $\omega_{\text{ext}} = 1 \text{ T/min}$   
 $\text{exc} = 18,75 \text{ mm}$   
 $T_{\text{int}} = 22 \text{ s}$   
 $T_{\text{ext}} = 6 \text{ s}$

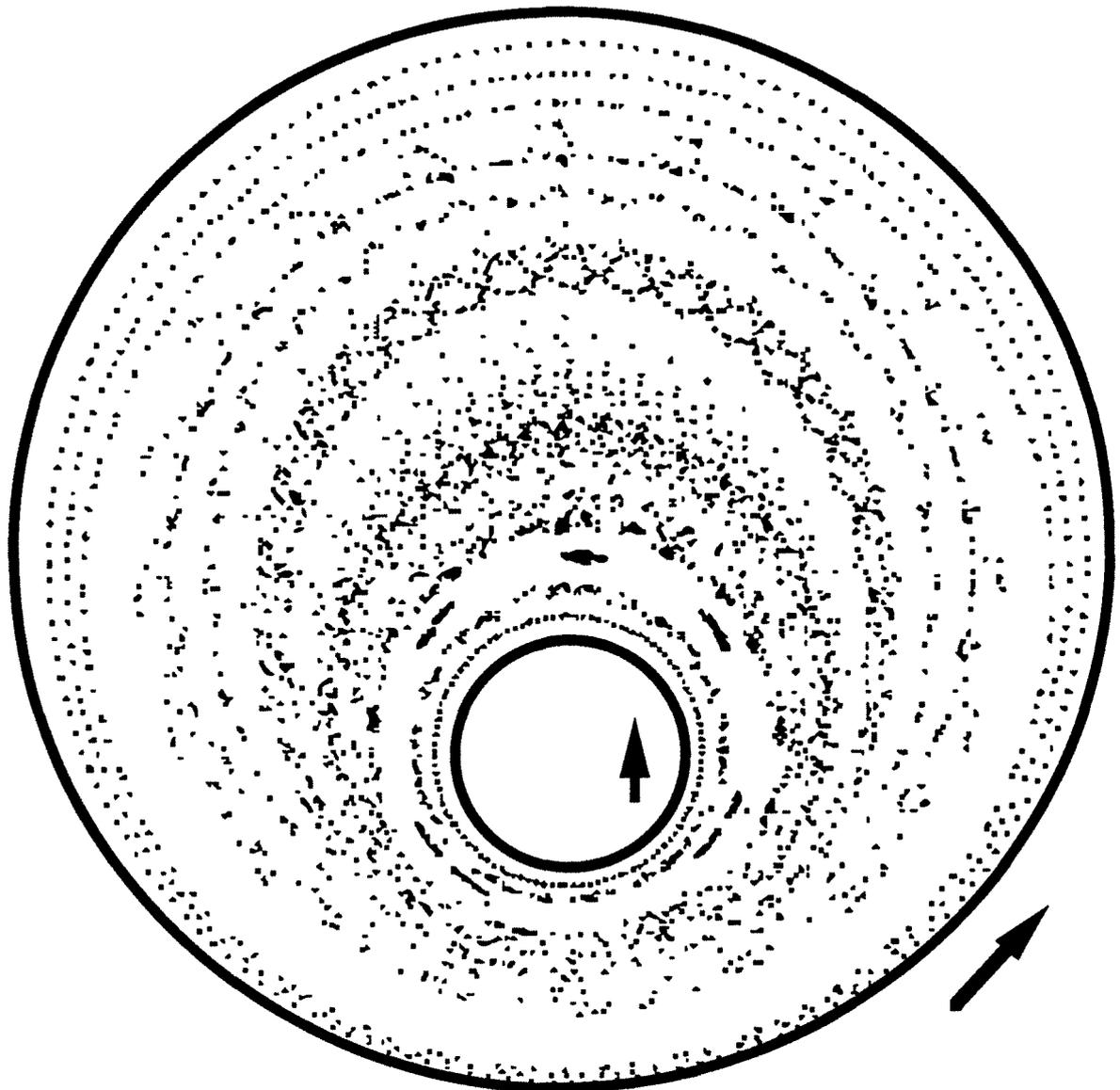


Figure 6

$\omega_{\text{int}} = 1 \text{ T/min}$   
 $\omega_{\text{ext}} = 1 \text{ T/min}$   
**exc** = 18,75 mm  
 $T_{\text{int}} = 24 \text{ s}$   
 $T_{\text{ext}} = 4 \text{ s}$

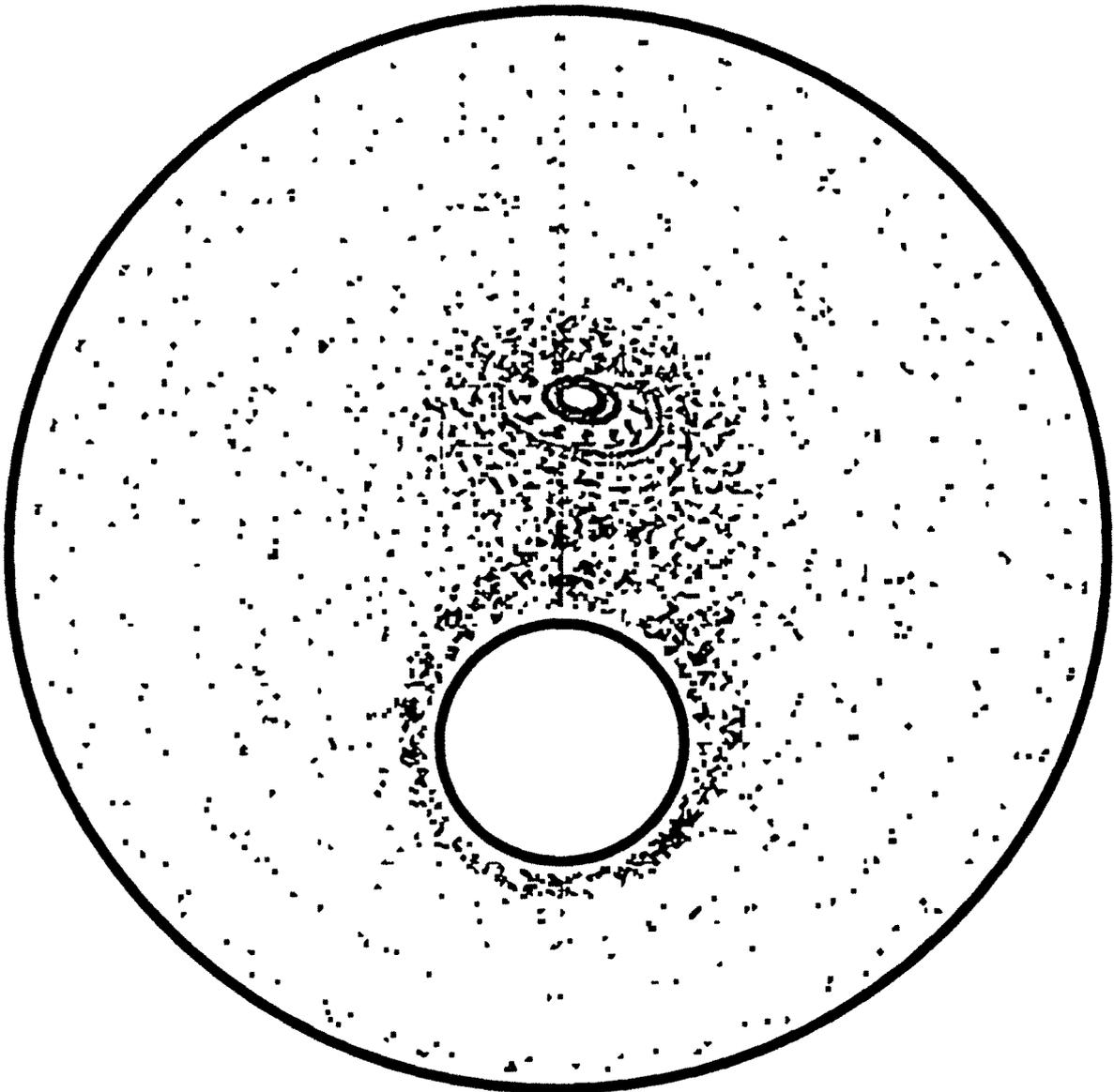


Figure 7

$\omega_{int} = 1 \text{ T/min}$   
 $\omega_{ext} = 1 \text{ T/min}$   
**exc** = 18,75 mm  
 $T_{int} = 20 \text{ s}$   
 $T_{ext} = 15 \text{ s}$

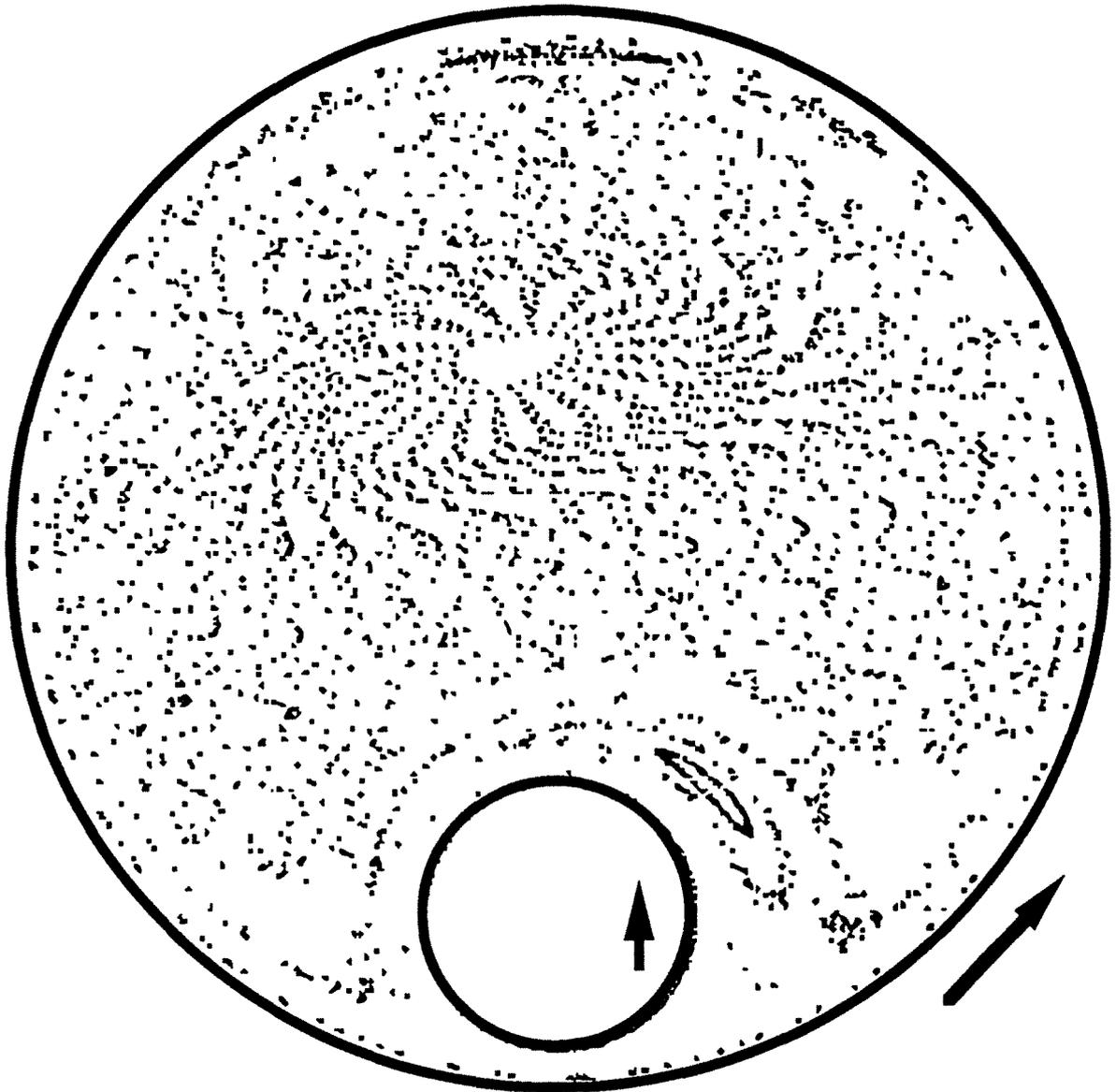


Figure 8

$\omega_{\text{int}} = 1 \text{ T/min}$

$\omega_{\text{ext}} = 1 \text{ T/min}$

$\text{exc} = 35 \text{ mm}$

$T_{\text{int}} = 52,5 \text{ s}$

$T_{\text{ext}} = 60 \text{ s}$



```

C *****
C *
C *   Programme de Calcul des sections de Poincaré   *
C *
C *****

```

```

C *****
C *                               Introduction des paramètres                               *
C *****

```

```

character*10,Nom
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension alp(0:50),be(0:3),x(0:3,0:3),y(0:3,0:3),psi(0:3,
&0:3),h(0:50,0:3),u(0:3,0:3),v(0:3,0:3),xi(0:50),yj(0:50)

```

```

Nom="ficc13"
open(2,file=Nom,status="new")

```

```

om1=1.
om2=0.
perio1=2.
perio2=0.
E=18.75

```

```

A1=12.5
A2=50.
PI=3.1415927
dt=.0
nnn=0

```

```

N=50000
M=400000

```

```

C COMPTEUR D'ITERATION: tttt
  tttt=0

```

```

C *****
C *                               Calculs préliminaires                               *
C *****

```

```

S=(dsqrt((A1**2+A2**2-E**2)**2-4*A1**2*A2**2))/2/E
ALP1=dlog(S/A1+dsqrt((S/A1)**2+1))
ALP2=dlog(S/A2+dsqrt((S/A2)**2+1))
D1=S*(dexp(ALP1)+dexp(-ALP1))/(dexp(ALP1)-dexp(-ALP1))
D2=S*(dexp(ALP2)+dexp(-ALP2))/(dexp(ALP2)-dexp(-ALP2))
O1=OM1*2*PI/60
O2=OM2*2*PI/60
VV1=A1*O1
VV2=A2*O2
DA=-(ALP2-ALP1)/N
DB=2*PI/M

```

```

C *****
C *                               déplacement d'une particule donnée                               *
C *****

```

```

xi(0)=s*dsinh(alp1)/(dcosh(alp1)-1)
xi(20)=s*dsinh(alp2)/(dcosh(alp2)-1)

do 1254 i=1,19
    xi(i)=xi(0)+i*(xi(20)-xi(0))/20.
1254 continue

do 111 k=1,19
    yj(k)=0
    xi(k)=(xi(k)**2+s*s)/(xi(k)**2-s*s)
    xi(k)=dlog(xi(k)+(xi(k)**2-1)**(.5))
111    xi(k)=int((xi(k)-alp1)/(alp2-alp1)*N)

    ki=0

1111    if (ki.gt.19) ki=0
        i=int(xi(ki))
        j=int(yj(ki))

C *****

1000    kik=(-1)**nnn
        if (kik.eq.1) v1=vv1
        if (kik.eq.1) v2=0
        if (kik.eq.-1) v2=vv2
        if (kik.eq.-1) v1=0
        tt=.0
        dtt=.0

        tttt=tttt+1
        write(6,2121) int(tttt)
2121    format(i4)

C *****
C *          calcul des coefficients A B C D EE F          *
C *****

BRACK=2*(D2**2-
D1**2)*(A1*V1+A2*V2)/((A2**2+A1**2)/((A2**2+A1**2))*
&dlog((D1+S)*(D2-S)/(D1-S)/(D2+S))-4*S*E)+A1**2*A2**2*
&(V1/A1-V2/A2)/S/(A1**2+A2**2)/(D2-D1)
A=-.5*(D1*D2-S*S)*BRACK
B=(D1+S)*(D2+S)*BRACK
C=(D1-S)*(D2-S)*BRACK
D=(D1*dlog((D2+S)/(D2-S))-D2*dlog((D1+S)/(D1-S)))*(A1*V1
&+A2*V2)/((A2**2+A1**2)*dlog((D1+S)*(D2-S)/(D1-S)/(D2+S))-
4*S*E)
D=D-2*S*(A2**2-A1**2)/(A2**2+A1**2)*(A1*V1+A2*V2)/((A2**2
&+A1**2)*dlog((D1+S)*(D2-S)/(D1-S)/(D2+S))-4*S*E)-A1**2*A2**2*
&(V1/A1-V2/A2)/(A1**2+A2**2)/E
EE=.5*dlog((D1+S)*(D2-S)/(D1-S)/(D2+S))*(A1*V1+A2*V2)/((A2**2
&+A1**2)*dlog((D1+S)*(D2-S)/(D1-S)/(D2+S))-4*S*E)
F=E*(A1*V1+A2*V2)/((A2**2+A1**2)*dlog((D1+S)*(D2-S)/(D1-S)/
&(D2+S))-4*S*E)

C *****
C *          calcul des paramètres de la matrice 9X9          *
C *****

```

```

490      tt=tt+dt
c      *****

      if (kik.eq.-1) goto 500
      if (tt.gt.perio1) nnn=nnn+1
      if (tt.gt.perio1) goto 1000
      goto 510
500     if (tt.gt.perio2) nnn=nnn+1
      if (tt.gt.perio2) xi(ki)=i
      if (tt.gt.perio2) yj(ki)=j
      if (tt.gt.perio2) ki=ki+1
      if (tt.gt.perio2) goto 1111

c      *****

510     IF (J.eq.0) GOTO 15
      IF (J.eq.M) GOTO 15

      IF (J.eq.-1) then J=M-1
      IF (J.eq.M+1) THEN J=1

do 10 ll=1,3
do 10 JJ=1,3
  ALP(II)=(ALP1*(N-(II+I-2))+ALP2*(II+I-2))/N
  BE(JJ)=(JJ+J-2)*2*PI/M
  X(II,JJ)=-S*SIN(BE(JJ))/((dexp(ALP(II))+dexp(-ALP(II)))/2-
&COS(BE(JJ)))
  Y(II,JJ)=S*((dexp(ALP(II))-dexp(-ALP(II)))/2)/((dexp(ALP(II))
&+dexp(-ALP(II)))/2-COS(BE(JJ)))
  PSI(II,JJ)=A*dlog((X(II,JJ)**2+(S+Y(II,JJ))**2)/(X(II,JJ)**2
&+(S-Y(II,JJ))**2))+B*Y(II,JJ)*(S+Y(II,JJ))/(X(II,JJ)**2
&+(S+Y(II,JJ))**2)+C*Y(II,JJ)*(S-Y(II,JJ))/(X(II,JJ)**2+(S-Y(II,
&JJ))**2)+D*Y(II,JJ)+EE*(X(II,JJ)**2+Y(II,JJ)**2+S**2)
  PSI(II,JJ)=PSI(II,JJ)+F*Y(II,JJ)*dlog((X(II,JJ)**2+(S+Y(II,
&JJ))**2)/(X(II,JJ)**2+(S-Y(II,JJ))**2))
  H(II,JJ)=S/((dexp(ALP(II))+dexp(-ALP(II)))/2-COS(BE(JJ)))
10    continue

      GOTO 770

15     do 20 JJ=1,3
      IF (JJ.eq.1) THEN
        NN=M
      ELSE
        NN=0
      end if

do 20 ll=1,3
  ALP(II)=(ALP1*(N-(II+I-2))+ALP2*(II+I-2))/N
  BE(JJ)=(JJ-2+NN)*2*PI/M
  X(II,JJ)=-S*SIN(BE(JJ))/((dexp(ALP(II))+dexp(-ALP(II)
&)))/2-COS(BE(JJ)))
  Y(II,JJ)=S*((dexp(ALP(II))-dexp(-ALP(II)))/2)/((dexp(ALP(II))
&+dexp(-ALP(II)))/2-COS(BE(JJ)))
  PSI(II,JJ)=A*dlog((X(II,JJ)**2+(S+Y(II,JJ))**2)/(X(II,JJ)**2
&+(S-Y(II,JJ))**2))+B*Y(II,JJ)*(S+Y(II,JJ))/(X(II,JJ)**2

```

```

&+(S+Y(II,JJ))**2)+C*Y(II,JJ)*(S-Y(II,JJ))/(X(II,JJ)**2
&+(S-Y(II,JJ))**2)+D*Y(II,JJ)+EE*(X(II,JJ)**2+Y(II,JJ)**2+S**2)
PSI(II,JJ)=PSI(II,JJ)+F*Y(II,JJ)*dlog((X(II,JJ)**2+(S+Y(II,
&JJ)**2)/(X(II,JJ)**2+(S-Y(II,JJ))**2))
H(II,JJ)=S/((dexp(ALP(II))+dexp(-ALP(II)))/2-COS(BE(JJ)))
20 continue

770 if ((kik.eq.1).and.(tt.eq.0.)) write (2,*) x(2,2),y(2,2)

c *****
c * calcul des vitesses *
c *****
IF (J.lt.0) j=j+M
IF (J.eq.0) THEN
U(2,2)=0
GOTO 840
END IF
IF (J.eq.M) THEN
U(2,2)=0
GOTO 840
END IF

840 U(2,2)=(1/H(2,2))*(PSI(2,3)-PSI(2,1))/2/DB
V(2,2)=-(1/H(2,2))*(PSI(3,2)-PSI(1,2))/2/DA
UV=((U(2,2)**2+V(2,2)**2)**(.5)/H(2,2))

c *****
c * test et mouvement *
c *****

if (V(2,2).gt.0.) then
l=1
else
l=-1
end if

IF (U(2,2).eq.0) J=J+10*l
IF (U(2,2).eq.0) dt=(10*db)/UV
IF (U(2,2).eq.0) GOTO 490
IF ((J.eq.0).or.(J.eq.M/2)) j=j+10*l
IF ((J.eq.0).or.(J.eq.M/2)) dt=(10*db)/UV
IF ((J.eq.0).or.(J.eq.M/2)) GOTO 490
IF (J.eq.M) J=J+10*l
IF (J.eq.M) dt=(10*db)/UV
IF (J.eq.M) GOTO 490

T=180*DATAN(V(2,2)*da/db/U(2,2))/PI

if (u(2,2).gt.0.) then
l=1
else
l=-1
end if

IF ((T.gt.87.14).AND.(T.le.90)) THEN
J=J+10*l
dt=(10*db)/UV
end if

```

```

IF ((T.gt.81.49).AND.(T.le.87.14)) THEN
  l=l+1*I
  J=J+10*I
  dtt=((1*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.76.).AND.(T.le.81.49)) THEN
  l=l+2*I
  J=J+10*I
  dtt=((4*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.70.75).AND.(T.le.76.)) THEN
  l=l+3*I
  J=J+10*I
  dtt=((9*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.65.82).AND.(T.le.70.75)) THEN
  l=l+4*I
  J=J+10*I
  dtt=((16*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.61.24).AND.(T.le.65.82)) THEN
  l=l+5*I
  J=J+10*I
  dtt=((25*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.57.02).AND.(T.le.61.24)) THEN
  l=l+6*I
  J=J+10*I
  dtt=((36*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.53.17).AND.(T.le.57.02)) THEN
  l=l+7*I
  J=J+10*I
  dtt=((49*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.49.67).AND.(T.le.53.17)) THEN
  l=l+8*I
  J=J+10*I
  dtt=((64*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.46.5).AND.(T.le.49.67)) THEN
  l=l+9*I
  J=J+10*I
  dtt=((81*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.43.5).AND.(T.le.46.5)) THEN
  l=l+10*I
  J=J+10*I
  dtt=((100*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.40.33).AND.(T.le.43.5)) THEN
  l=l+10*I
  J=J+9*I
  dtt=((100*da**2+81*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.gt.36.83).AND.(T.le.40.33)) THEN
  l=l+10*I
  J=J+8*I

```

```

        dtt=((100*da**2+64*db**2)**.5)/UV
        end if
IF ((T.gt.32.98).AND.(T.le.36.83)) THEN
    l=l+10*I
    J=J+7*I
    dtt=((100*da**2+49*db**2)**.5)/UV
    end if
IF ((T.gt.28.77).AND.(T.le.32.98)) THEN
    l=l+10*I
    J=J+6*I
    dtt=((100*da**2+36*db**2)**.5)/UV
    end if
IF ((T.gt.24.19).AND.(T.le.28.77)) THEN
    l=l+10*I
    J=J+5*I
    dtt=((100*da**2+25*db**2)**.5)/UV
    end if
IF ((T.gt.19.25).AND.(T.le.24.19)) THEN
    l=l+10*I
    J=J+4*I
    dtt=((100*da**2+16*db**2)**.5)/UV
    end if
IF ((T.gt.14.).AND.(T.le.19.25)) THEN
    l=l+10*I
    J=J+3*I
    dtt=((100*da**2+9*db**2)**.5)/UV
    end if
IF ((T.gt.8.51).AND.(T.le.14.)) THEN
    l=l+10*I
    J=J+2*I
    dtt=((100*da**2+4*db**2)**.5)/UV
    end if
IF ((T.gt.2.86).AND.(T.le.8.51)) THEN
    l=l+10*I
    J=J+1*I
    dtt=((100*da**2+1*db**2)**.5)/UV
    end if
IF ((T.gt.-2.86).AND.(T.le.2.86)) THEN
    l=l+10*I
    dtt=((100*da**2)**.5)/UV
    end if

IF ((T.le.-87.14).AND.(T.gt.-90)) THEN
    J=J-10*I
    dtt=(10*db)/UV
    end if
IF ((T.le.-81.49).AND.(T.gt.-87.14)) THEN
    l=l+1*I
    J=J-10*I
    dtt=((1*da**2+100*db**2)**.5)/UV
    end if
IF ((T.le.-76.).AND.(T.gt.-81.49)) THEN
    l=l+2*I
    J=J-10*I
    dtt=((4*da**2+100*db**2)**.5)/UV
    end if
IF ((T.le.-70.75).AND.(T.gt.-76.)) THEN
    l=l+3*I

```

```

J=J-10*I
  dtt=((9*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-65.82).AND.(T.gt.-70.75)) THEN
  l=l+4*I
  J=J-10*I
  dtt=((16*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-61.24).AND.(T.gt.-65.82)) THEN
  l=l+5*I
  J=J-10*I
  dtt=((25*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-57.02).AND.(T.gt.-61.24)) THEN
  l=l+6*I
  J=J-10*I
  dtt=((36*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-53.17).AND.(T.gt.-57.02)) THEN
  l=l+7*I
  J=J-10*I
  dtt=((49*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-49.67).AND.(T.gt.-53.17)) THEN
  l=l+8*I
  J=J-10*I
  dtt=((64*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-46.5).AND.(T.gt.-49.67)) THEN
  l=l+9*I
  J=J-10*I
  dtt=((81*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-43.5).AND.(T.gt.-46.5)) THEN
  l=l+10*I
  J=J-10*I
  dtt=((100*da**2+100*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-40.33).AND.(T.gt.-43.5)) THEN
  l=l+10*I
  J=J-9*I
  dtt=((100*da**2+81*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-36.83).AND.(T.gt.-40.33)) THEN
  l=l+10*I
  J=J-8*I
  dtt=((100*da**2+64*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-32.98).AND.(T.gt.-36.83)) THEN
  l=l+10*I
  J=J-7*I
  dtt=((100*da**2+49*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-28.77).AND.(T.gt.-32.98)) THEN
  l=l+10*I
  J=J-6*I
  dtt=((100*da**2+36*db**2)**.5)/UV
  end if

```

```
IF ((T.le.-24.19).AND.(T.gt.-28.77)) THEN
  I=I+10*I
  J=J-5*I
  dt=((100*da**2+25*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-19.25).AND.(T.gt.-24.19)) THEN
  I=I+10*I
  J=J-4*I
  dt=((100*da**2+16*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-14.).AND.(T.gt.-19.25)) THEN
  I=I+10*I
  J=J-3*I
  dt=((100*da**2+9*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-8.51).AND.(T.gt.-14.)) THEN
  I=I+10*I
  J=J-2*I
  dt=((100*da**2+4*db**2)**.5)/UV
  end if
IF ((T.le.-2.86).AND.(T.gt.-8.51)) THEN
  I=I+10*I
  J=J-1*I
  dt=((100*da**2+1*db**2)**.5)/UV
  end if
```

goto 490

END

```

C *****
C *                               Tracé des sections de Poincaré                               *
C *                               (graphique)                                             *
C *****

integer ibuf(256)
character*10,Nom
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension x(0:3,0:3),y(0:3,0:3)
dimension alph(1:9),dd(1:9),aa(1:9)
C data ibuf/256*-1/

print*,"nombre d'itérations ?"
read*,nnn2
print*,"Nom du fichier des données ?"
777 read (*,777) Nom
format (a10)
print*,"excncricité ?"
read*,E
print*,"temporisation"
read*,ntemp
open(2,file=Nom,status="old")
rewind 2

A1=12.5
A2=50.
PI=3.1415927
N=50000
M=400000
v1=1.
v2=1.

C *****
C *                               Calculs préliminaires                               *
C *****

S=(dsqrt((A1**2+A2**2-E**2)**2-4*A1**2*A2**2))/2/E
ALP1=dlog(S/A1+dsqrt((S/A1)**2+1))
ALP2=dlog(S/A2+dsqrt((S/A2)**2+1))
D1=S*(dexp(ALP1)+dexp(-ALP1))/(dexp(ALP1)-dexp(-ALP1))
D2=S*(dexp(ALP2)+dexp(-ALP2))/(dexp(ALP2)-dexp(-ALP2))
DA=-(ALP2-ALP1)/N
DB=2*PI/M

C *****
C *                               cercles de coordonnées                               *
C *****

do 1 k=1,9
alph(k)=(ALP1*(10-k)+ALP2*k)/10
dd(k)=S*(dexp(alph(k))+dexp(-alph(k)))/(dexp(alph(k))
&-dexp(-alph(k)))
1 aa(k)=s/dsinh(alph(k))

C ***** graphisme *****

call gsinit(ibuf,256,1,0,0,-1)
C call gsinit(ibuf,256,1,0,0,"GRAPHPLOT")

```

```

c      call gsline (320,250+int(a2),320,250-int(d2-d1-a1))
c      call gsline (320,250-int(d2-d1+a1),320,250-int(a2))

c      do 2 k=1,9
c2     call gscir (320,250+(int(dd(k))-int(d2)),int(aa(k)))

c      do 100 kj=1,9
c      beta=2*pi*kj/10
c      do 101 ki=0,N/10
c          alpha=(alp1*(N-10*ki)+alp2*10*ki)/N
c          yy=s*dsinh(alpha)/(dcosh(alpha)-dcos(beta))
c          xx=-s*dsin(beta)/(dcosh(alpha)-dcos(beta))
c          call gscir (320+int(xx),250-int(d2)+int(yy),0)
c101   print*,xx,yy
c100   continue

      do 12 k=0,10
      call gscir (320,250,int(A2)+k)
12     call gscir (320,250-(int(d2)-int(d1)),int(A1)-int(k/2))

      if (v2.eq.0.) goto 30
      call gsline (300,270+int(a2),340,270+int(a2))
      if (v2.gt.0) call gscir (340,270+int(a2),1)
      if (v2.lt.0) call gscir (300,270+int(a2),1)

30     if (v1.eq.0) goto 490

      call gsline (310,240-(int(d2)-int(d1))+int(a1),330,240-
      &(int(d2)-int(d1))+int(a1))
      if (v1.gt.0) call gscir (330,240-(int(d2)-int(d1))+int(a1),1)
      if (v1.lt.0) call gscir (310,240-(int(d2)-int(d1))+int(a1),1)

490    do 400 i=0,nnn2
      xx=x(2,2)
      yy=y(2,2)
      read (2,*) x(2,2),y(2,2)
      do 404 k=0,1000*ntemp
404    continue
c      f=i/49.-int(i/49.)
c      if (f.eq.0.) xx=x(2,2)
c      if (f.eq.0.) yy=y(2,2)
c      call gsline (320+int(xx),250-int(d2)+int(yy),320+int(x(2,2))
c      &,250-int(d2)+int(y(2,2)))
400    call gscir (320+int(x(2,2)),250+int(y(2,2))-int(d2),0)

      do 2001 k=0,100000
2001   continue

      close (2)
      call gsterm

```

END

## ANNEXE 7

Prise et analyse d'image



## PRISE ET TRAITEMENT DE L'IMAGE

Le suivi du traceur fluorescent peut être réalisé par des séries de clichés photographiques ou par enregistrement vidéo. Les deux techniques ont été utilisées. Les avantages décisifs de l'enregistrement par vidéo sont :

- le suivi en continu du phénomène,
- la disponibilité immédiate de l'enregistrement,
- la possibilité d'analyser et de traiter les images par informatique.

Le schéma 1 décrit le matériel nécessaire à la prise de l'information et le traitement de celle-ci.

L'image est recueillie grâce à un "comescope" dont les caractéristiques techniques sont les suivantes:

- Capteur à transfert de charges (CCD) de 495000 pixels : ce qui entraîne une très bonne résolution de l'image (Néanmoins plus faible que la résolution photographique. L'arête de chaque pixel est environ de  $15 \cdot 10^{-6}$  m alors que la taille ultime des grains d'argent est de l'ordre de  $10^{-6}$  m).

- La sensibilité du capteur est de 5 lux (ce qui correspond grossièrement à un éclairage artificiel de "mauvaise" qualité). Le traceur fluorescent éclairé par deux lampes ultraviolettes est tout à fait visible par la caméra.

- L'objectif est à focale variable de 8 mm à 88 mm. Celui-ci possède une position "macro" qui permet la mise au point sur des objets très proches de la caméra.

Cette image peut être stockée sur bandes magnétiques (au format allemand 8 mm PAL) ou/et transférée au micro-ordinateur. L'image issue du comescope est un signal synchro-mélangé qui doit être converti en quatre signaux de base avant d'entrer dans le micro ordinateur. Le convertisseur PAL/RVB transforme le signal mélangé en ses composantes : rouge, verte et bleue ainsi qu'un signal "synchro" permettant la synchronisation ultérieure des différents signaux de l'image.

Le micro ordinateur est un MacIntosh II Si (Apple) muni d'une carte d'acquisition vidéo 8 bits (Chromax). L'image est alors visible

à l'écran en 256 couleurs ou niveau de gris et peut être stockée sur disquette ou disque dur.

Cette image peut ensuite être analysée et traitée par les logiciels Optilab et Image afin d'extraire les informations intéressantes et/ou améliorer la qualité de celle-ci.

Enfin une imprimante à jet d'encre couleur (HP Paint Jet) fournit un document sur papier A4 ou A3.

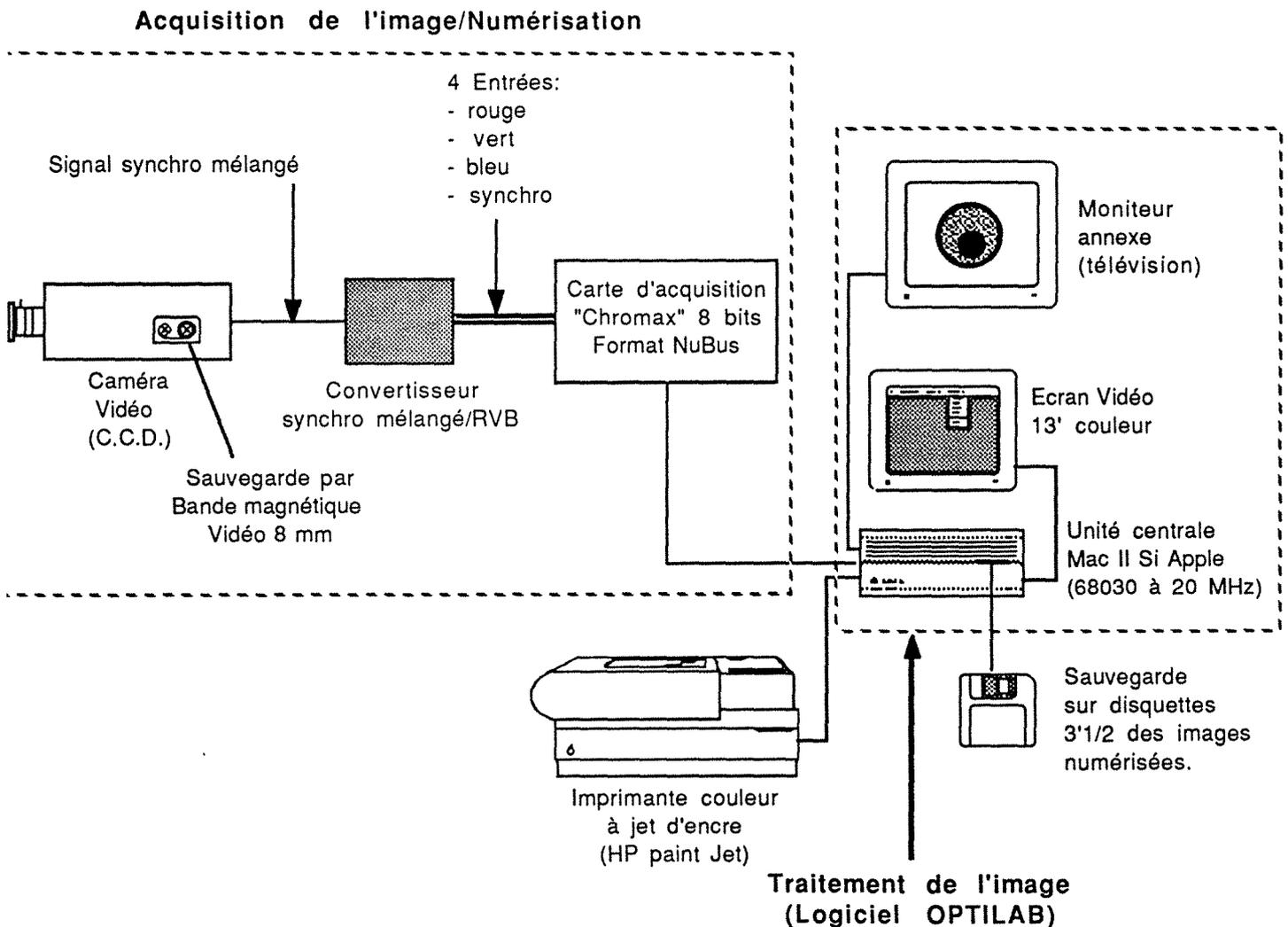


Figure 1 : Acquisition et traitement de l'image