



**HAL**  
open science

# Étude expérimentale des actions hydrodynamiques sur une sphère en translation et rotation dans une gamme de nombres de Reynolds intermédiaires

Tri Bui Dinh

► **To cite this version:**

Tri Bui Dinh. Étude expérimentale des actions hydrodynamiques sur une sphère en translation et rotation dans une gamme de nombres de Reynolds intermédiaires. Physique [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1992. Français. NNT : 1992INPL075N . tel-01776274

**HAL Id: tel-01776274**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776274>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

1560001450

92 INPL 075N

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE  
ET  
UNIVERSITÉ DE NANCY I

LABORATOIRE UNIVERSITAIRE DE MECANIQUE ET  
D'ENERGETIQUE DE NANCY

L U M E N

THESE

[M] 1992 BUI DINH, T.

*Présentée pour l'obtention du grade de*

**DOCTEUR DE L'I.N.P.L**

*Spécialité : Mécanique Energétique*

Par

Tri BUI DINH



*Sujet :*

**ETUDE EXPERIMENTALE DES ACTIONS  
HYDRODYNAMIQUES SUR UNE SPHERE EN  
TRANSLATION ET ROTATION DANS UNE GAMME  
DE NOMBRES DE REYNOLDS INTERMEDIAIRES**

Directeur de Thèse : B. OESTERLE

*Soutenue publiquement le 24 Septembre 1992  
devant la Commission d'Examen :*

*Président* : J.C. BRAUN  
*Rapporteurs* : R. BOUARD  
M. LEBUCHE  
*Examineurs* : G. BONHOMME  
B. OESTERLE



*A mes parents, K. Quoc*

*A Minh Ly, Minh Hang*



## REMERCIEMENTS

*Ce mémoire de thèse présente le résultat d'une étude que j'ai menée au Laboratoire Universitaire de Mécanique et d'Energétique de Nancy (L.U.M.E.N), sous la direction de Monsieur Benoît OESTERLE, Directeur d'équipe LUMEN à l'E.S.S.T.I.N, Professeur à l'Université de Nancy I. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, pour son soutien moral et ses critiques constantes et judicieuses, qui ont grandement contribué à la réalisation de ce mémoire.*

*Je remercie Monsieur le Professeur Jean Claude BRAUN, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique (ENSEM), Professeur à l'I.N.P.L, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.*

*Mes très sincères remerciements vont à Monsieur Roger BOUARD, Directeur de l'Antenne de Recherche en Transport Pneumatique du C.E.A.T, Maître de conférence à l'Université de Poitiers, et à Monsieur le Professeur Michel LÉBOUCHE, de l'Université de Nancy I, qui ont bien voulu accepter d'être les Rapporteurs de cette thèse.*

*Je remercie vivement Monsieur le Professeur Gérard BONHOMME, de l'Université de Nancy I, d'avoir voulu participer à ce Jury.*

*Je tiens également à remercier Monsieur Jean Pierre SOUDIEUX, Technicien supérieur au LUMEN, qui m'a apporté une aide technique appréciable et accueilli dans des conditions amicales.*

*Je voudrais aussi remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont facilité ma tâche, me permettant de travailler dans une ambiance cordiale et sympathique, notamment : Mademoiselle P. KAYA, secrétaire du LUMEN, Monsieur H.HASSAD, chercheur au LARA et tous mes collègues de LUMEN.*

*Enfin, je tiens à exprimer toute ma gratitude aux Responsables du C.N.R.S du Vietnam et C.N.R.S. de France, qui m'ont apporté une aide financière pendant les premiers temps de cette thèse.*





# TABLE DES MATIERES

	Page
TABLE DES MATIERES	1
NOMENCLATURE	5
INTRODUCTION GENERALE	9
 <u>CHAPITRE I</u>  	
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES ACTIONS HYDRODYNAMIQUES SUR UNE PARTICULE SPHERIQUE	
I.1. INTRODUCTION	13
I.2. RESULTATS THEORIQUES ET NUMERIQUES	16
I.2.1. La sphère en translation, en écoulement uniforme.	16
I.2.2. Translation en écoulement non uniforme.	21
I.2.3. La sphère en rotation dans un fluide au repos à l'infini	27
I.2.4. La sphère en translation et rotation simultanées.	32
I.3. RESULTATS EXPERIMENTAUX	37
I.3.1. Translation en écoulement uniforme	38
I.3.2. Translation en écoulement non uniforme	40
I.3.3. La sphère en rotation dans un fluide au repos à l'infini	41
I.3.4. La sphère en translation et en rotation	42
CONCLUSION DU CHAPITRE I	49

## CHAPITRE II

### PROPOSITION ET ETUDE D'UNE TECHNIQUE EXPERIMENTALE

II.1. INTRODUCTION	51
II.2. IMPERATIFS LIES AUX NOMBRES DE REYNOLDS DESIRES	53
II.2.1. Dimension des sphères utilisées	53
II.2.2. Viscosité du fluide et vitesse relative	
II.2.3. Choix de la méthode	54
II.3. ETUDE DU MOUVEMENT DE LA SPHERE SUSPENDUE	57
II.3.1. Etude théorique élémentaire	57
II.3.2. Exemples de trajectoires calculées	66
II.4. CORRECTIONS DUES AUX AXES	70
CONCLUSION DU CHAPITRE II	75

## CHAPITRE III

### INSTALLATION EXPERIMENTALE ET EXPLOITATION

III.1. INTRODUCTION	77
III.2. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL	78
III.3. PROCEDURE D'ENREGISTREMENT D'UNE TRAJECTOIRE	85
III.4. DEPOUILLEMENT DES ESSAIS	88
III.4.1. Détermination de l'angle de la trajectoire rectiligne par rapport à la verticale	89

III.4.2. Détermination des vitesses	91
III.4.3. Calcul des coefficients - Différentes options	93
III.4.4. Exploitation informatique	95
III.5. PRECISION ATTENDUE - PRECAUTIONS NECESSAIRES	100
III.5.1. Précision attendue, estimation des erreurs	100
III.5.2. Précautions nécessaires	103
CONCLUSION DU CHAPITRE III	105

## CHAPITRE IV

### RESULTATS EXPERIMENTAUX

IV.1. INTRODUCTION	107
IV.2. DONNEES EXPERIMENTALES COMPLEMENTAIRES	108
IV.2.1. Description des différents équipages mobiles utilisés	108
IV.2.2. Caractéristiques de l'huile utilisée	110
IV.3. RESULTATS SUR LES COEFFICIENTS DE PORTANCE ET DE COUPLE	111
IV.3.1. Résultats sur le coefficient de portance $C_L$	112
IV.3.2. Résultats concernant les coefficients de couple	116
CONCLUSION DU CHAPITRE IV	123

## CHAPITRE V

### DISCUSSION DES RESULTATS

V.1. INTRODUCTION	125
V.2. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS CONNUS POUR D'AUTRES VALEURS DU NOMBRE DE REYNOLDS	126
V.3. PROPOSITION D'UNE CORRELATION EMPIRIQUE DANS LA GAMME $10 < Re < 100$	128
V.4. COMPARAISON AVEC DES RESULTATS NUMERIQUES RECENTS	130
CONCLUSION DU CHAPITRE V	133
CONCLUSION GENERALE	135
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	139
ANNEXE : Tableaux de résultats	143

## NOMENCLATURE

A.R.	Trajectoire avec rotation
a	Rayon de la sphère
$a_c$	Rayon de l'axe d'enroulement cylindrique
$a_e$	Rayon d'enroulement du fil, égal au rayon de l'axe d'enroulement augmenté du rayon du fil
a	Coefficient calculé (indiqué par tableau I.2) dans l'expression de Dennis <i>et al.</i> (I.33)
b	Idem
$C_D$ (ou $C_{Dsph}$ )	Coefficient de traînée de la sphère
$C_{Dcyl}$	Coefficient de traînée du cylindre (axes)
$C_{DMA}$	Coefficient de traînée calculé par la formule de Morsi & Alexander (I.51)
$C_{Dtot}$	Coefficient de traînée totale (sphère + axes)
$C_L$ (ou $C_{Lsph}$ )	Coefficient de portance de la sphère
$C_{Lcyl}$	Coefficient de portance du cylindre (axes)
$C_{LSa}$	Coefficient de portance de Saffman - défini par (I.21)
$C_{Ltot}$	Coefficient de portance totale (sphère + axes)
$C_{mcyl}$	Coefficient de couple du cylindre (axes), défini par (II.30)
$C_{mV}$ (ou $C_{mVsph}$ )	Coefficient de couple de la sphère, basé sur la vitesse relative ( $V_R$ ).
$C_{mVtot}$	Coefficient de couple total, basé sur la vitesse relative ( $V_R$ ).
$C_{m\omega}$ (ou $C_{m\omega sph}$ )	Coefficient de couple de la sphère, basé sur la vitesse de rotation ( $\Omega_p$ ).
$C_{m\omega tot}$	Coefficient de couple total, basé sur la vitesse de rotation
d	Diamètre de la sphère
d	Distance mesurée entre deux points - définie par (III.4)
$d_{AR}$	Distance séparant deux points dans la trajectoire A.R.
E	Echelle - définie par (III.5)
f	Fréquence de la lampe stroboscopique

$f_i$	Valeur de la fonction $f$ au point $(x_i, y_i)$ , dans les formules de différences finies (II.14a, II.14b)
$F$	Vecteur force exercée par le fluide sur la sphère
$F_D$	Vecteur force de traînée (de module $F_D$ )
$F_{D\text{sph}}$	Force de traînée (en module) sur la sphère
$F_{D\text{cyl}}$	Force de traînée sur les axes cylindriques (en module)
$F_{D\text{tot}}$	Force de traînée totale (sphère + axes, en module)
$F_L$	Vecteur force de portance (de module $F_L$ )
$F_{L\text{sph}}$	Force de portance (en module) sur la sphère
$F_{L\text{cyl}}$	Force de portance sur les axes cylindriques (en module)
$F_{L\text{tot}}$	Force de portance totale (sphère + axes)
$F_z$	Composante selon $z$ de la portance
$g$	Vecteur accélération de la pesanteur (de module $g$ )
$h$	Hauteur du contrepoids
$J$	Moment d'inertie du solide par rapport à son axe de révolution, somme du moment d'inertie de la sphère et des moments d'inertie des axes cylindriques.
$k$	Vecteur unitaire sur l'axe $z$ (II.3.1)
$k$	Coefficient dépendant du nombre de Reynolds - défini par (IV.5)
$\ell$	Longueur de l'axe d'enroulement
$m$	Masse du solide
$m_A$	Masse apparente - définie par (II.3)
$m_c$	Masse du contrepoids
$m_f$	Masse de fluide ajoutée (masse de fluide déplacée par la sphère)
$m_v$	Masse virtuelle - définie par (II.2a)
$M$	Vecteur couple hydrodynamique (de module $M$ )
$M_{\text{cyl}}$	Couple sur les axes cylindriques
$M_{\text{sph}}$	Couple sur la sphère
$M_{\text{tot}}$	Couple total (sphère + axes)
$n$	Nombre d'intervalles entre les deux points choisis (III.4.2)
$Re_p$	Nombre de Reynolds de la sphère (basé sur la vitesse relative)
$Re_\omega$	Nombre de Reynolds de la sphère (basé sur la vitesse de rotation), appelé aussi nombre de Reynolds de rotation.
$Re_\chi$	Nombre de Reynolds de la sphère (basé sur le gradient de vitesse $\chi$ ).

S.R.	Trajectoire sans rotation
$\Delta t$	Temps de passage du contrepoids devant le faisceau laser
T	Vecteur tension totale, somme des tensions de chaque fil (de module $T$ )
V	Vecteur vitesse de la sphère (égal à sa vitesse relative par rapport au fluide, de module $V_R$ ) - défini dans II.3.1.
$V_R$	Idem - défini par (I.6)
$V_c$	Vitesse du contrepoids
$V_P$	Vecteur vitesse de translation du centre de la sphère - défini par Faxen (I.15) et par Takagi (I.41, I.42), de module $V_P$ , et de composantes $V_{Px}, V_{Py}, V_{Pz}$
$[V_\infty]_o$	Vecteur vitesse du fluide à l'infini - l'indice $o$ dénote les caractéristiques de l'écoulement non perturbé au centre de la sphère (de module $V_{\infty o}$ )
$V_{\infty x}$	Composante selon x de la vitesse de l'écoulement non perturbé

#### Lettres grecques

$\alpha$	Gradient de vitesse de la sphère fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire - défini par Dandy dans I.2.2
$\alpha$	Angle de la trajectoire rectiligne par rapport à la verticale - défini par III.4.1.
$\gamma$	Vitesse de rotation adimensionnelle, ou taux de rotation réduit - défini par $\gamma = \omega d / V_R$ .
$\Gamma$	Vecteur accélération
$\epsilon$	Coefficient $\pm 1$ dépendant du sens d'enroulement initial du fil (II.3.1)
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide
$\rho$	Masse volumique du fluide
$\chi$	Gradient de vitesse de l'écoulement non perturbé du fluide - défini dans I.2.2.
$\Omega_P$	Vecteur vitesse de rotation de la sphère
$\omega$	Module du vecteur $\Omega_P$
$\theta$	Température en degrés Celsius (IV.2.2)
$\Delta Z$	Incertitude absolue sur la grandeur Z





## INTRODUCTION GENERALE

Le travail présenté ici s'inscrit dans le cadre du thème de recherche principal de l'équipe *ESSTIN* du laboratoire LUMEN, qui est celui des écoulements diphasiques gaz-solide. L'étude de ce type d'écoulements appartient au domaine de la *Mécanique des Suspensions*, qui trouve des applications dans de nombreux domaines industriels, dont le plus connu est le transport pneumatique. Parmi les méthodes utilisées pour l'approche des écoulements de suspensions, les simulations lagrangiennes occupent actuellement une place privilégiée. Cette technique de simulation consiste à calculer un grand nombre de trajectoires de particules, pour aboutir aux renseignements souhaités (profils de vitesses, de concentration, etc..). Ces calculs supposent une bonne connaissance des actions exercées par le fluide porteur sur les particules en suspension, qui sont généralement supposées sphériques.

Ceci explique que l'un des sujets de recherche en cours au LUMEN ait pour but de contribuer à une meilleure connaissance des actions hydrodynamiques exercées par le fluide sur une particule sphérique, celle-ci pouvant être en translation et rotation simultanées, comme cela se produit en particulier dans les écoulements gaz-solide confinés. Cette contribution fait l'objet d'une approche tant théorique et numérique qu'expérimentale.

C'est en tant que chercheur du CNRS du Vietnam, en stage au LUMEN (ex-LMFE), que j'ai commencé à travailler sur cette question. Après mon arrivée (novembre 1988), j'ai donc participé à ces recherches, avec l'objectif plus précis de la détermination expérimentale des actions hydrodynamiques exercées sur une sphère en rotation et translation simultanées, aux nombres de Reynolds intermédiaires, dans un fluide visqueux incompressible. Ce travail a été initié à partir de 1987 par B.Oesterlé, qui a conçu le principe de la technique expérimentale, et débuté la réalisation de l'installation. Des résultats préliminaires ont d'ailleurs été publiés suite aux premiers essais effectués (Oesterlé 1988, 1989).

Ma contribution personnelle à ce travail de recherche a donc commencé par une participation à la mise au point du dispositif expérimental, dont le principe repose sur l'étude photographique de trajectoires de sphères entraînées simultanément en translation et rotation. Différentes améliorations ont été apportées à l'installation initiale, notamment en ce qui concerne l'éclairage et la mesure de vitesses.

L'objectif principal de l'étude expérimentale entreprise consiste à obtenir de nouveaux résultats concernant les actions hydrodynamiques sur une sphère en translation et rotation, dans un fluide visqueux incompressible, dans la gamme des nombres de Reynolds compris approximativement entre 10 et 100. Cette gamme, jusqu'à présent inexplorée, correspond à la plupart des applications rencontrées dans les différents domaines industriels.

En régime permanent et en fluide incompressible, l'analyse dimensionnelle montre que, pour des obstacles géométriquement semblables, les coefficients hydrodynamiques (de traînée  $C_D$ , de portance  $C_L$ , et de moment  $C_m$ ) dépendent de deux nombres sans dimension qui sont, par exemple :

- Le nombre de Reynolds  $Re_p = \rho \frac{V_R d}{\mu}$  (basé sur la vitesse relative)

- Le coefficient adimensionnel  $\gamma = \omega d / V_R$  représentatif du rapport de la vitesse périphérique à la vitesse de déplacement relative.

Il s'agira donc d'étudier, en fonction de ces deux paramètres, la variation des différents coefficients hydrodynamiques. En fait, on verra que nos résultats essentiels concernent le coefficient de portance. Une revue bibliographique, qui doit bien évidemment précéder cette étude, est présentée au chapitre I. Nous y décrivons l'ensemble des connaissances actuelles concernant les actions hydrodynamiques sur une sphère rigide, en régime permanent (cas auquel nous nous limiterons). Nous constaterons en particulier que deux domaines de nombres de Reynolds sont relativement bien connus :

- le domaine des très petits nombres de Reynolds ( $Re_p \ll 1$ ), qui a été exploré par voie théorique par Stokes (1851), Rubinow & Keller (1961), Takagi (1974), parmi d'autres.
- le domaine des grands nombres de Reynolds ( $Re_p \gg 10^4$ ), qui est relativement bien connu expérimentalement, grâce aux travaux de Maccoll (1928), Davies (1949), Tani (1950), Taneda (1957), ou encore Sawatzki (1970) pour ce qui concerne le couple.

Il existe par contre une large gamme de nombres de Reynolds intermédiaires dans laquelle on ne dispose que de très peu de résultats : c'est la gamme des nombres de Reynolds compris approximativement entre 1 et  $10^4$ , dans laquelle les seuls travaux connus sont ceux de Barkla & Auchterlonie (1971) pour  $Re_p \cong 2000$  et de Tsuji *et al.* (1985) pour  $Re_p \cong 1000$ . On constate en particulier l'absence complète de résultats pour les nombres de Reynolds compris entre 1 et 500, valeurs qui correspondent par exemple au cas très fréquent de particules de diamètre de l'ordre de 0,1 à 1 mm en suspension dans un gaz ou un liquide. C'est afin d'obtenir des résultats originaux dans cette plage que nous nous sommes proposés d'explorer la zone des nombres de Reynolds compris approximativement entre 10 et 100.

Dans les chapitres II et III, nous présenterons une étude de la technique expérimentale envisagée, ainsi qu'une description de l'installation expérimentale. Nous détaillerons également la méthode d'exploitation des trajectoires enregistrées, en insistant sur les précautions nécessaires pour ces expériences très délicates. Une étude de la précision que l'on peut attendre de cette technique de

trajectographie montre en effet qu'il est extrêmement difficile, par exemple, de satisfaire des exigences de précision portant à la fois sur les vitesses de translation et de rotation.

Dans le chapitre IV, nous exposerons les résultats expérimentaux obtenus. Malgré une certaine dispersion, s'expliquant en partie par le point que l'on vient d'évoquer, on verra que les résultats concernant le coefficient de portance sont très significatifs, et apportent incontestablement une contribution nécessaire qui permettra par exemple, nous l'espérons, d'améliorer les calculs de trajectoires de particules solides en suspension dans un gaz ou un liquide. Nous mettrons d'ailleurs en évidence, dans le chapitre V, la manière dont se situent nos résultats par rapport à ceux de la littérature, obtenus dans d'autres gammes de nombres de Reynolds.

Nous proposerons enfin, dans ce même chapitre V, une corrélation empirique applicable dans la gamme  $10 < Re_p < 100$ , avant de terminer par une comparaison, qui s'avère très satisfaisante, de nos mesures avec des résultats numériques récents, fruits d'un travail en cours au LUMEN, qui fait l'objet d'une thèse devant être soutenue prochainement.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES ACTIONS HYDRODYNAMIQUES  
SUR UNE PARTICULE SPHERIQUE**I.1. INTRODUCTION**

Le problème des actions hydrodynamiques sur un corps (tel qu'une particule solide) en suspension dans un fluide visqueux a fait l'objet d'études théoriques et expérimentales depuis des années par de nombreux auteurs. On peut rapidement citer, parmi les exemples "historiques" (pour lesquels on pourra se référer à Lamb 1932) :

Newton (1671,1771); Robins (1742); Kirchhoff (1869, 1876); Lord Rayleigh (1877); Stokes (1851); Magnus (1853); Reynolds (1883); Oseen (1910,1913); Faxen (1924); etc....

De façon générale, un obstacle se déplaçant dans un fluide est soumis, de la part de celui-ci, à l'ensemble des forces de pression et de viscosité qui se réduisent à un couple  $\mathbf{M}$  (de module  $M$ ) et à une force résultante  $\mathbf{F}$ . Celle-ci se décompose, de façon classique, en une traînée  $F_D$ , dirigée par la vitesse relative, et en une portance  $F_L$ , perpendiculaire à la vitesse relative. Dans le cas d'un régime permanent, pour un obstacle en rotation, ceci suppose qu'il s'agisse d'un corps de révolution tournant autour de son axe, celui-ci étant perpendiculaire à la vitesse relative. En effet dans tous les autres cas les actions exercées par le fluide sur le corps subiraient une périodicité liée à la vitesse de rotation.

Les actions exercées par le fluide sur l'obstacle sont caractérisées par les coefficients adimensionnels de traînée  $C_D$ , de portance  $C_L$  et de couple  $C_m$ .

On peut d'abord écrire les expressions du coefficient de traînée et du coefficient de portance, qui sont définis par :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho V_R^2 A} \quad (I.1)$$

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho V_R^2 A} \quad (I.2)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $A$  est une surface de référence ( $A = \pi a^2$  dans le cas d'une sphère de rayon  $a$ ),  $F_D$  et  $F_L$  sont les composantes de la force, respectivement selon la direction de la vitesse relative  $V_R$  et dans un plan orthogonal à cette vitesse.

Quant au couple, sous forme adimensionnelle, on peut le représenter dans le cas d'une sphère de rayon  $a$  par un des coefficients de couple suivants :

$$C_{mv} = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho a V_R^2 A} \quad (I.3a)$$

$$C_{m\omega} = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho \omega^2 a^3 A} \quad (I.3b)$$

où  $C_{m\omega}$  est le coefficient de couple basé sur la vitesse de rotation  $\omega$ , et  $C_{mv}$  le coefficient de couple basé sur la vitesse relative de la sphère.

Ces deux coefficients sont toujours liés par la formule suivante :

$$C_{mv} = \frac{\gamma^2}{4} C_{m\omega} \quad (I.4)$$

où  $\gamma$  est la vitesse de rotation adimensionnelle  $\gamma = 2\omega a/V_R$ .

L'analyse dimensionnelle montre que, pour une géométrie donnée, et en régime permanent, ces coefficients de traînée, de portance et de couple ne dépendent que du nombre de Reynolds  $Re_p$  et de la rotation réduite  $\gamma$ .

On sait que le nombre de Reynolds  $Re_p$  (basé sur la vitesse relative de la particule) caractérise l'importance des forces d'inertie par rapport aux forces de viscosité. Pour une particule sphérique, nous l'écrivons sous la forme :

$$Re_p = \rho \frac{V_R d}{\mu} = \frac{2aV_R}{\nu} \quad (I.5)$$

où :  $V_R$  est la vitesse relative du fluide par rapport à la particule,  
a est le rayon de la particule ( $d=2a$ )  
 $\nu$  la viscosité cinématique du fluide,  
 $\mu$  sa viscosité dynamique,  
 $\rho$  sa masse volumique.

Pour limiter notre sujet, nous supposons que la particule est sphérique, solide et indéformable, sa surface est lisse. Il est bien entendu que l'on peut étudier d'autres types de particules, mais les sphères solides indéformables semblent physiquement un bon point de départ.

Jusqu'à présent, la plupart des résultats obtenus concernent les nombres de Reynolds ( $Re_p$ ) très faibles ( $Re_p \ll 1$ ), ou très grands ( $Re_p \gg 10^4$ ). En particulier, pour la gamme des nombres de Reynolds intermédiaires, les résultats sont assez limités.

Dans la suite, on étudiera les résultats connus pour différents types de mouvement de la sphère (translation, rotation, ou translation et rotation simultanées), dans des configurations d'écoulement différentes (uniforme ou non uniforme). Nous nous limiterons cependant au régime permanent. Parmi les auteurs ayant obtenu de tels résultats, on peut citer, par exemple : Rubinow & Keller (1961); Saffman (1964); Barkla & Auchterlonie (1970); Sawatzki (1970); Morsi & Alexander (1972); Takagi (1974); Dennis *et al.* (1980); Tsuji & al (1985); etc ...

## I.2. RESULTATS THEORIQUES ET NUMERIQUES

### I.2.1. La sphère en translation, en écoulement uniforme

Le problème que l'on étudiera tout d'abord est celui de la translation (sans rotation) d'une sphère dans un écoulement uniforme permanent. Dans ce cas, la force se réduit évidemment à la traînée. Les premières formules théoriques ont été obtenues par Stokes (1851) puis Oseen (1910,1913), et correspondent à la gamme des faibles nombres de Reynolds  $Re_p$ .

#### Formule de Stokes (1851)

Le premier résultat connu pour une sphère solide se déplaçant dans un fluide au repos à petit nombre de Reynolds relatif est celui obtenu par Stokes (1851), qui a montré, en négligeant les forces d'inertie, que la force s'exerçant sur la sphère s'écrit :

$$F = - 6\pi\mu V_R \quad (I.6)$$

Le signe négatif indique que la force exercée par le fluide sur la sphère s'oppose au mouvement de celle-ci. Ce résultat a eu une application pratique importante, qui est la mesure de la charge de l'électron par Millikan. A présent, on parle toujours de "Formule de Stokes".

Il faut cependant bien préciser les limites d'application de cette formule. On peut utiliser la formule de Stokes directement dans les équations décrivant l'écoulement d'une suspension de particules, à condition que la sphère ne se trouve pas dans une zone d'écoulement non uniforme, ou à proximité des parois ou d'autres sphères. Il faut aussi souligner qu'en toute rigueur l'approximation de Stokes n'est valable que lorsque le nombre de Reynolds est très petit devant 1.



La formule (I.6) découle d'une première approximation du champ des vitesses, et l'expérience a montré que cette approximation est suffisante pour les applications jusqu'à une valeur de nombre de Reynolds de l'ordre de 0,1. Pour des valeurs du nombre de Reynolds  $Re_p$  supérieures à quelques dixièmes, les forces d'inerties ne peuvent plus être négligées. Quant au couple, il est nul par raison de symétrie.

#### Formule d'Oseen (1910,1913)

La solution de Stokes n'étant plus valable lorsque  $Re_p$  dépasse l'unité, on doit alors envisager la solution établie par Oseen, qui a obtenu l'expression de la force de traînée  $F_D$ , avec une meilleure approximation du champ des vitesses.

Cette expression de  $F_D$  peut être mise sous la forme:

$$F_D = - 6\pi\mu V_R (1 + \alpha_1 Re_p) \quad (I.7a)$$

où la valeur de  $\alpha_1 = \frac{3}{16}$  a été trouvée par Oseen, (I.7a) devenant:

$$F_D = - 6\pi\mu V_R (1 + \frac{3}{16} Re_p) \quad (I.7b)$$

Cette formule est applicable avec une approximation de l'ordre de 1% jusqu'à  $Re_p=1$ . Pourtant, on ne peut pas dire que cette formule soit meilleure que celle de Stokes lorsque  $Re_p$  dépasse l'unité, puisque l'erreur sera par exemple d'environ 35% pour  $Re_p=5$ , contre 30% par la formule de Stokes.

#### Développements d'ordre supérieur

Lorsque le nombre de Reynolds croît ( $Re_p > 1$ ), les formules de Stokes et Oseen ne sont plus valables. Des développements d'ordre supérieur de la traînée (lorsque le nombre de Reynolds  $Re_p$  augmente) ont été obtenus théoriquement, d'abord par Proudman & Pearson (1957), qui ont montré que le terme qui suit le développement d'Oseen est en  $Re_p^2 \ln Re_p$ . L'expression correspondante de la force de traînée peut

s'écrire :

$$F_D = - 6\pi\mu V_R \left[ 1 + \frac{3}{16} Re_P + \frac{9}{160} Re_P^2 \ln Re_P + O(Re_P^2) \right] \quad (I.8)$$

On peut rappeler que Goldstein (1929, voir Feuillebois 1980), avant l'apparition de la méthode des développements asymptotiques raccordés, avait trouvé en utilisant simplement l'équation d'Oseen des termes successifs en  $Re_P^2$ ,  $Re_P^3$ ,  $Re_P^4$  et n'avait pas pu trouver de termes en  $\ln Re_P$ . Par la suite, Chester & Breach (1969) ont poussé plus loin le calcul de Proudman & Pearson; leur résultat aboutit à l'expression suivante :

$$F_D = - 6\pi\mu V_R \left[ 1 + \frac{3}{16} Re_P + \frac{9}{160} Re_P^2 (\ln Re_P + \frac{2}{3} \ln 2 + \gamma - \frac{323}{360}) + \frac{27}{640} Re_P^3 \ln \frac{Re_P}{2} + O(Re_P^3) \right] \quad (I.9)$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler ( $\gamma = 0,5772\dots$ ).

Les résultats concernant la traînée sur une sphère en translation aux faibles  $Re_P$  sont représentés sur la figure I.1 page suivante (proposée par Feuillebois 1980), et comparés avec ceux obtenus par la méthode expérimentale.

Le coefficient de traînée peut facilement se déduire des résultats de Stokes (I.6), d'Oseen (I.7a), de Proudman et Pearson (I.8), et de Chester et Breach (I.9). Les expressions des coefficients s'écrivent alors respectivement :

$$C_D = \frac{6\pi\mu V_R}{\frac{1}{2}\rho\pi a^2 V_R^2} = \frac{24}{Re_P} \quad (I.10)$$

$$C_D = \frac{24}{Re_P} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_P \right) \quad (I.11)$$

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left( 1 + \frac{3}{16} Re_p + \frac{9}{160} Re_p^2 \ln Re_p \right) \quad (I.12)$$

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left[ 1 + \frac{3}{16} Re_p + \frac{9}{160} Re_p^2 \left( \ln Re_p + \frac{2}{3} \ln 2 \right) + \gamma - \frac{323}{360} \right] + \frac{27}{640} Re_p^3 \ln \frac{Re_p}{2} + O(Re_p^3) \quad (I.13)$$

L'expression (I.10) du coefficient de traînée est acceptable tant que  $Re_p$  reste inférieur à 0,1 environ, où elle n'amène qu'une erreur inférieure à 1%. Mais lorsque  $Re_p$  approche ou dépasse l'unité, l'erreur devient plus importante : environ 10% pour  $Re_p = 1$ , et environ 7,5% pour  $Re_p = 1$  par la formule (I.11).

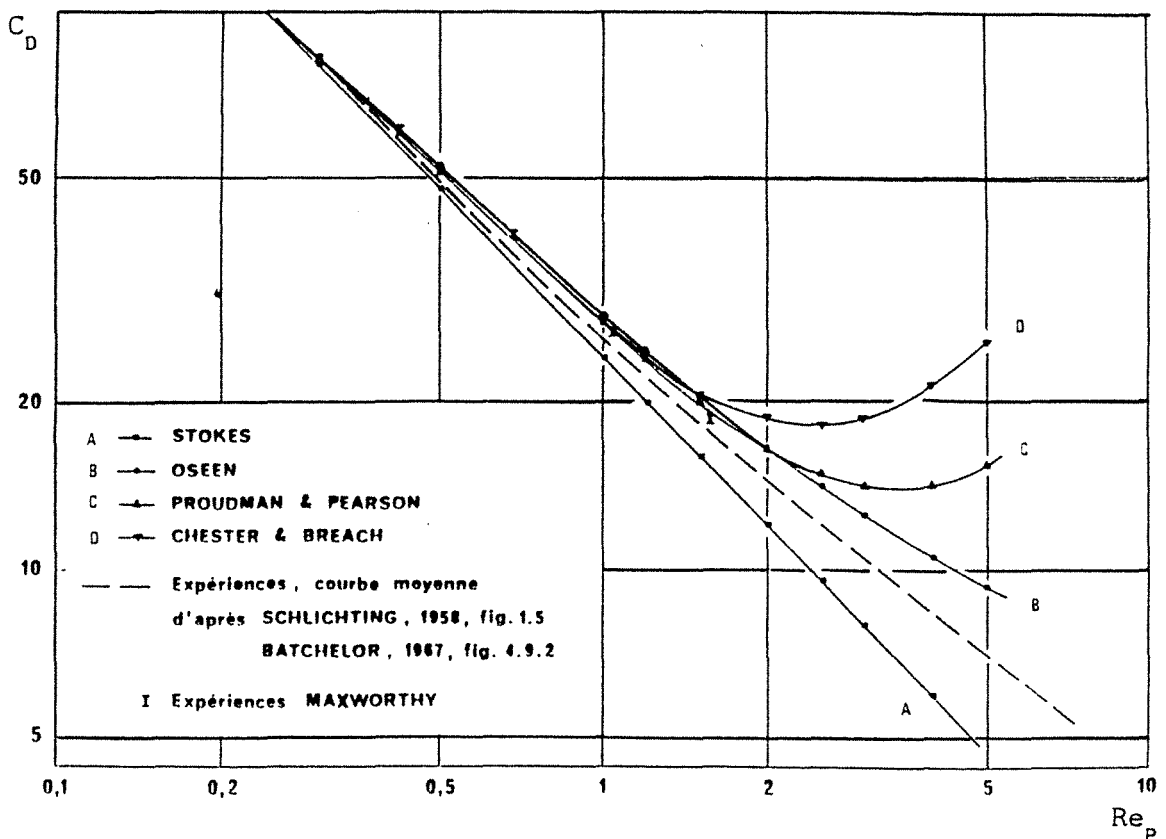
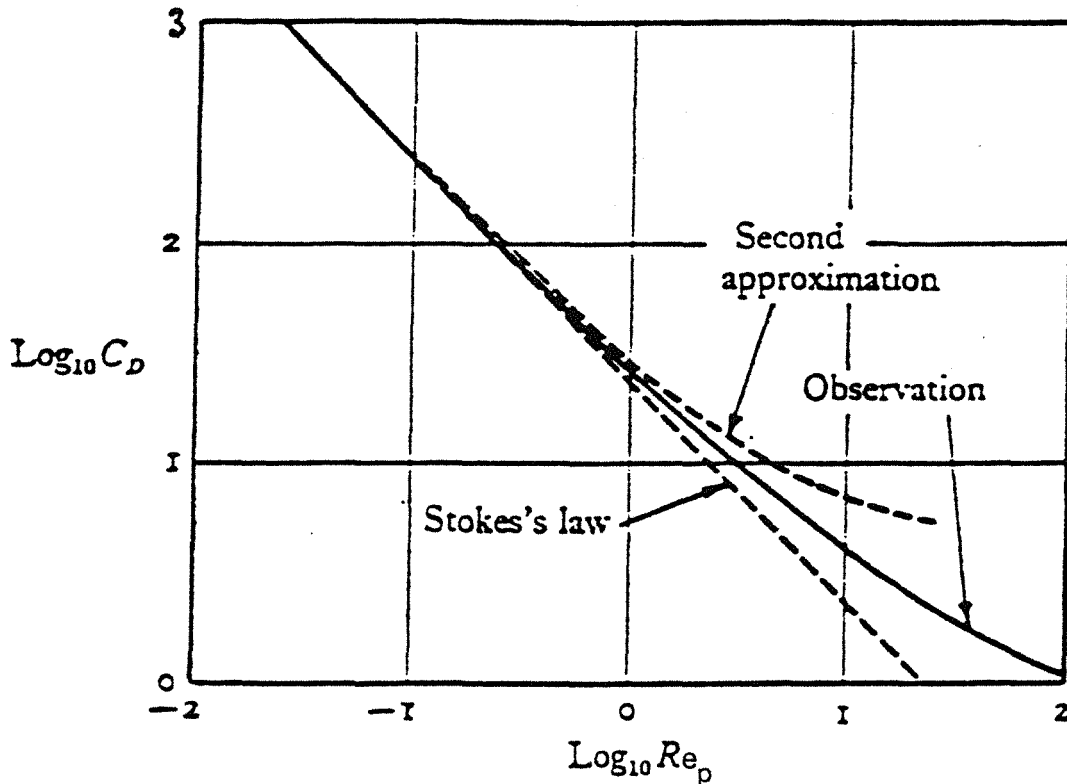


Figure I.1 : Coefficient de traînée de la sphère aux faibles  $Re_p$   
(Figure extraite de Feuillebois 1980)

On remarque sur la figure I.1 que les résultats théoriques (I.12) et (I.13) approchent correctement les résultats expérimentaux jusqu'à un nombre de Reynolds  $Re_p$  proche de l'unité (soit jusqu'à un nombre de Reynolds relatif basé sur le rayon de l'ordre de 0,5). A partir de  $Re_p > 1$ , les approximations de Stokes et d'Oseen restent encore les plus proches des résultats expérimentaux, mais les termes suivants des développements divergent rapidement dès que  $Re_p \approx 2$ .

Batchelor (1967) a également fait une comparaison, illustrée par la figure I.2, entre les valeurs mesurées de la traînée sur la sphère et celles du calcul théorique (basées sur la loi de Stokes  $C_D = 24.Re_p^{-1}$  et la deuxième approximation  $C_D = 24.Re_p^{-1}(1 + \frac{3}{16}.Re_p)$ ).



**Figure I.2** : Comparaison des valeurs expérimentales de  $C_D$  et des valeurs théoriques de Stokes et d'Oseen.  
(Figure tirée de Batchelor 1967).

Enfin, pour le cas des petits nombres de Reynolds correspondants à certaines applications aux écoulements de suspensions de très petites sphères, on peut dire avec Batchelor (1967) que : "la condition théorique  $Re_p \ll 1$  peut être remplacée, en ce qui concerne la force, par la relation pratique  $Re_p < 1$  ".

### I.2.2. Translation en écoulement non uniforme

Il s'agit dans cette partie de calculer les efforts sur une sphère en translation dans un écoulement qui n'est pas uniforme à l'infini. On abordera ici quelques cas d'écoulements autour de la sphère, toujours en régime permanent, par exemple : l'écoulement non uniforme à très petit nombre de Reynolds, l'écoulement de rotation, de cisaillement, dont les résultats ont été calculés par Faxen (1924, voir Lamb 1932), Chidress (1964), Saffman (1965), etc..pour la gamme des nombres de Reynolds modérés.

#### L'écoulement non uniforme stationnaire à très petits nombres de Reynolds - Formules de Faxen

Dans un écoulement non uniforme peuvent exister plusieurs vitesses caractéristiques, qui a priori peuvent être de différents ordres de grandeur. On peut alors définir plusieurs nombres de Reynolds correspondant à ces vitesses. Si on suppose ici que  $\chi$  est le gradient de vitesse de l'écoulement non perturbé du fluide (c'est-à-dire de l'écoulement non uniforme qui existerait en l'absence de la sphère), la différence de vitesse entre deux points de la sphère diamétralement opposé est  $\chi a$ .

Nous définissons alors le nombre de Reynolds basé sur le gradient de vitesse par :

$$Re_{\chi} = \frac{\chi a^2}{\nu} \quad (I.14)$$

On a indiqué plus haut que les équations de Stokes sont valables lorsque  $Re_p$  est nettement inférieur à l'unité (forces d'inertie négligeables). Pour que les forces d'inertie soient négligeables en écoulement non uniforme, il faut ajouter ici que  $Re_{\chi}$  doit aussi être très inférieur à l'unité.

### Formules de Faxen

Les expressions de la force et du couple s'exerçant sur une sphère solide dans un fluide illimité ont été établies par Faxen (voir par exemple Lamb 1932). En résumé, on peut donner deux formules principales, respectivement la résultante et le moment au centre de la sphère. Si on désigne la vitesse du fluide à l'infini par  $V_\infty$  et la vitesse de translation du centre de la sphère par  $V_p$ , alors l'expression de la force est :

$$F = 6\pi\mu a ([V_\infty]_o - V_p) + \mu\pi a^3 (\nabla^2 V_\infty)_o \quad (I.15)$$

et celle du couple :

$$M = 4\pi\mu a^3 [\nabla \times V_\infty]_o = 4\pi\mu a^3 [\text{rot } V_\infty]_o \quad (I.16)$$

où l'indice  $o$  dénote les caractéristiques de l'écoulement non perturbé au centre de la sphère.

### Écoulement de cisaillement :

Le problème d'une sphère se déplaçant dans un écoulement de cisaillement unidirectionnel, à gradient de vitesse constant, a été résolu par Saffman (1965, 1968), qui a considéré le cas d'une sphère en rotation et en translation avec une vitesse angulaire et une vitesse relative constante. La vitesse de translation de la sphère est supposée parallèle à celle du fluide à l'infini. Ses résultats sont valables pour des nombres de Reynolds obéissant à l'hypothèse suivante :

$$Re_p \ll Re_\chi^{1/2} \ll 1 \quad (I.17)$$

L'expression de la force de portance pour un écoulement de direction  $x$  et de vitesse non perturbée  $V_{\infty x} = V_{\infty o} + \chi z$  avec  $\chi > 0$  est :

$$F_Z = 6,46\mu a^2 \sqrt{\chi/\nu} (V_{\infty} - V_p) \quad (I.18)$$

où  $V_p$  est la vitesse de translation de la sphère (de direction  $x$ ).  
Pour  $\chi < 0$ , le terme du second membre de (I.18) change de signe.

On peut faire une comparaison avec la traînée de Stokes en écrivant cette portance sous la forme :

$$F_Z = 6\pi a\mu (V_{\infty} - V_p) (0,343 \text{Re}_{\chi}^{1/2}) \quad (I.19)$$

ce qui montre que le rapport portance/trainée est de l'ordre de  $\text{Re}_{\chi}^{1/2}$ .

La force  $F_Z$  est due au gradient de vitesse  $\chi$ . Une éventuelle rotation  $\omega$  de la sphère n'a pas d'influence lorsque  $\chi$  et  $\omega$  sont du même ordre de grandeur.

Le coefficient de portance correspondant au résultat de Saffman peut s'écrire :

$$C_L = 8,225 \frac{\text{Re}_{\chi}^{1/2}}{\text{Re}_p} \quad (I.20)$$

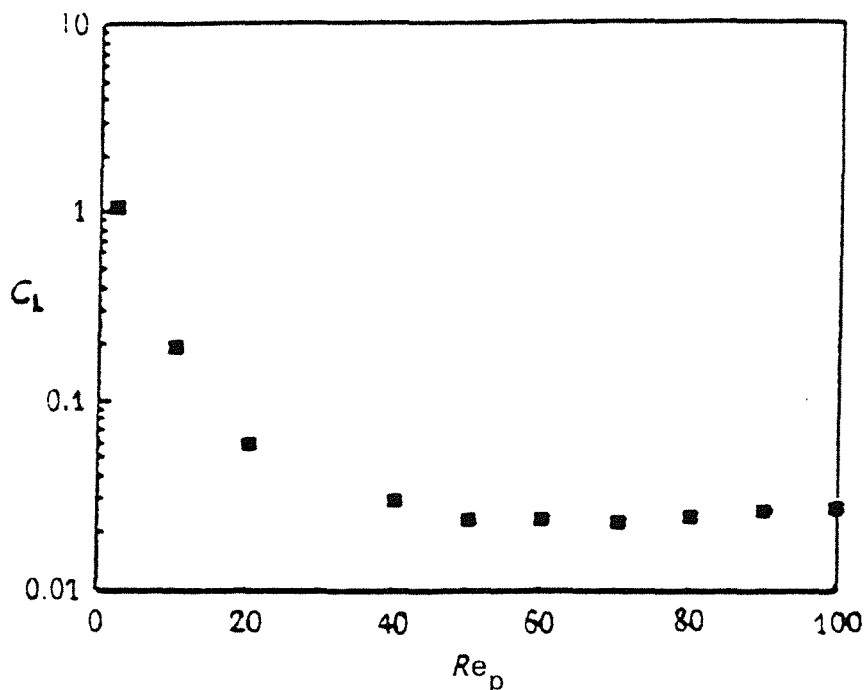
Afin de poursuivre l'étude de l'écoulement de Saffman, on va envisager les résultats obtenus numériquement par Dandy *et al.* (1990) pour la sphère fixe dans un écoulement de cisaillement linéaire ayant un gradient de vitesse tel que  $0,005 \leq \alpha \leq 0,4$ , aux nombres de Reynolds  $\text{Re}_p$  compris entre 0,1 et 100,  $\alpha$  étant défini par :

$$\alpha = \frac{\chi a}{V_R} \quad (I.21a)$$

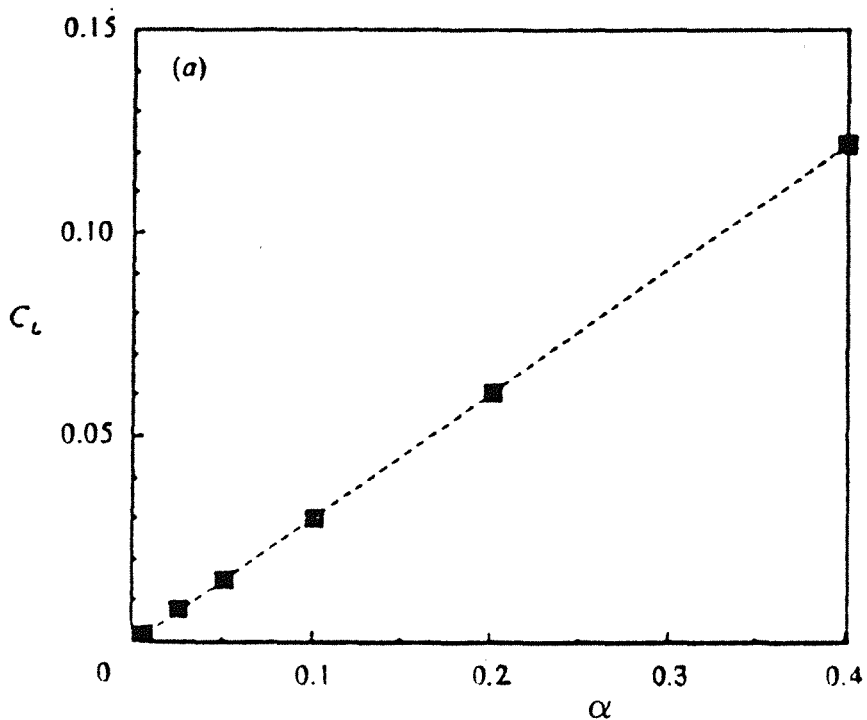
Leurs résultats montrent que le coefficient de portance  $C_L$ , à  $\alpha$  fixé, est approximativement constant pour la gamme des nombres de Reynolds intermédiaires  $40 \leq \text{Re}_p \leq 100$  (figure I.3), et ne suit donc pas la prédiction de Saffman.

Dans cette zone, le coefficient de portance est proportionnel à  $\alpha$ , comme le montre la figure I.4, obtenue à  $\text{Re}_p = 40$ .

Par contre, pour un nombre de Reynolds  $Re_p = 0,1$ , les valeurs du coefficient de portance calculées par Dandy *et al.* sont en très bon accord avec la solution de Saffman (I.20).



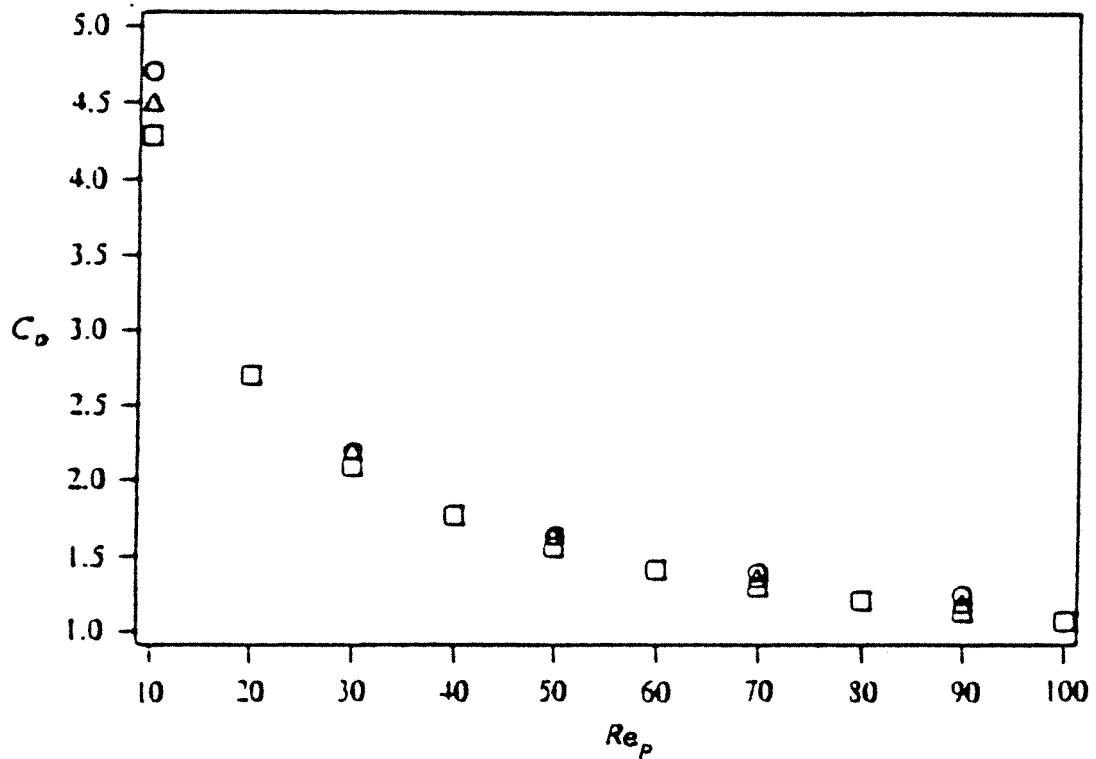
**Figure I.3** : Coefficients de portance calculés par Dandy *et al.* (1990)



**Figure I.4** : Evolution de  $C_L$  avec  $\alpha$  à  $Re_p$  fixé (= 40)

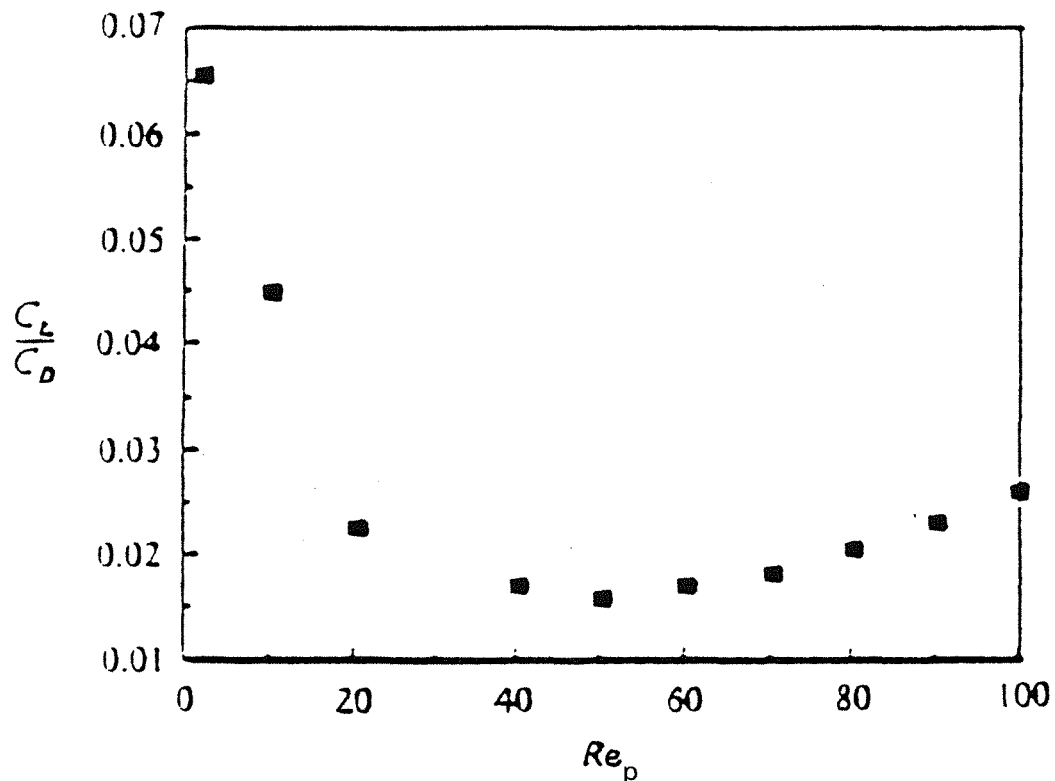


Le coefficient de trainée a également été calculé par les mêmes auteurs, pour trois valeurs de  $\alpha$  (0,1; 0,2; et 0,4), dans la gamme des nombres de Reynolds compris entre 1 et 100. Ils ont montré que la valeur du coefficient de trainée est très proche de celle de l'écoulement uniforme. Pour la valeur  $\alpha = 0,1$ , la solution numérique conduit à  $C_{D(\alpha=0,1)} \approx 0,98 C_{D(\alpha=0)}$  pour  $Re_p=20$ . Ce coefficient de proportionnalité est valable dans toute la gamme de  $Re_p$  considérée. Pour le cas  $\alpha=0,2$ , ce coefficient de proportionnalité vaut 0,99, et est pratiquement égal à l'unité pour  $\alpha=0,4$ . La figure I.5 donne les résultats obtenus pour  $C_D$  en fonction de  $Re_p$ .



**Figure I.5** : Coefficients de trainée calculés par Dandy *et al.* (1990)

Pour ce qui concerne le rapport  $C_L/C_D$  à  $\alpha$  fixé, Dandy *et al.* ont obtenu les résultats indiqués par la figure I.6, qui met en évidence un minimum à  $Re_p = 50$ .



**Figure I.6** : Rapports  $C_L/C_D$  calculés par Dandy *et al.* (1990)

Une expression approchée du coefficient de portance en présence d'un gradient de vitesse a été proposée par Mei (1991) sur la base des calculs numériques de Dandy *et al.* exposés ci-dessus. Cette approximation, qui compare le coefficient de portance  $C_L$  à celui qui serait obtenu par la formule de Saffman, soit  $C_{LSa}$ , est la suivante :

$$\frac{C_L}{C_{LSa}} = \frac{F_L}{F_{LSa}} = (1 - 0,3314\alpha^{1/2}) \exp\left(-\frac{Re_p}{10}\right) + 0,3314\alpha^{1/2} \quad \text{si } Re_p \leq 40$$

$$= 0,0524(\alpha Re_p)^{1/2} \quad \text{si } Re_p > 40 \quad (I.21b)$$

Pour le cas d'un déplacement de direction quelconque par rapport au cisaillement du fluide, on peut citer les résultats de Harper & Chang (1968), qui ont repris le calcul de Saffman et l'ont complété. Dans le cas de la sphère, les trois composantes de la force sur les trois axes  $x, y, z$  sont les suivantes (l'écoulement du fluide étant toujours dans la direction  $x$ , avec gradient de vitesse dans la direction  $z$ ) :

$$F_x = 6\pi a\mu \left[ (1 + 0.944\text{Re}_\chi^{1/2}) (V_\infty - V_{px}) - 0.62\text{Re}_\chi^{1/2} V_{pz} \right] \quad (\text{I.22})$$

$$F_y = - 6\pi a\mu (1 + 0.703\text{Re}_\chi^{1/2}) V_{py} \quad (\text{I.23})$$

$$F_z = 6\pi a\mu \left[ (1 + 0.326\text{Re}_\chi^{1/2}) V_{pz} + 0.343\text{Re}_\chi^{1/2} (V_{px} - V_\infty) \right] \quad (\text{I.24})$$

En conclusion, pour le cas de la sphère aux faibles nombres de Reynolds en écoulement non uniforme, on a résumé ici les résultats connus concernant la force exercée sur la sphère, et les variations des coefficients de traînée et de portance dans différents types d'écoulements. Cependant, de nombreux problèmes subsistent : en particulier les problèmes relatifs à la sphère en mouvement en présence d'une paroi, ou dans un écoulement turbulent, que nous n'aborderons pas ici.

### I.2.3. La sphère en rotation dans un fluide au repos à l'infini

Nous avons traité jusqu'à présent le cas d'une sphère en translation pure dans un fluide. Avant d'envisager un mouvement de translation et rotation simultanées, mouvement que l'on rencontre dans les écoulements de suspension, nous consacrons ce paragraphe au cas d'une sphère de centre fixe, en rotation à vitesse angulaire constante dans un fluide au repos.

Si la sphère a une vitesse de rotation  $\Omega_p$ , de module  $\omega$ ,

l'écoulement est caractérisé par le nombre de Reynolds de rotation  $Re_\omega$  (appelé aussi *nombre de Taylor*), défini par

$$Re_\omega = \frac{\omega a^2}{\nu} \quad (I.25)$$

Lorsque ce nombre de Reynolds est très petit, les forces d'inertie sont négligeables et les équations linéaires. Dans ce cas, le problème a été résolu par Stokes, qui a établi l'expression du couple s'exerçant sur la sphère :

$$M = - 8\pi\mu a^3 \Omega_p \quad (I.26)$$

et le coefficient de couple est :

$$C_{m\omega} = \frac{16}{Re_\omega} \quad (I.27)$$

Cette expression, théoriquement valable pour  $Re_\omega \ll 1$ , s'avère en fait suffisamment précise tant que  $Re_\omega$  reste inférieur à la dizaine.

Les forces d'inertie peuvent être prises en compte, toujours aux faibles nombres de Reynolds, en utilisant la méthode des développements asymptotiques. C'est ainsi que Takagi (1977) a obtenu le développement suivant, étendu à huit termes, qui complète des développements précédents dûs à Collins (1955), Ovseenko (1963) ou Thomas & Walters (1964) (voir Sawatzki 1970) :

$$\begin{aligned} \frac{Re_\omega}{16} C_{m\omega} \cong & 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{Re_\omega}{10} \right)^2 - 0.007542671 \left( \frac{Re_\omega}{10} \right)^4 - 0.005353489 \left( \frac{Re_\omega}{10} \right)^6 \\ & + 0.005824484 \left( \frac{Re_\omega}{10} \right)^8 - 0.00339821 \left( \frac{Re_\omega}{10} \right)^{10} + 0.000896 \left( \frac{Re_\omega}{10} \right)^{12} \\ & + 0.00074 \left( \frac{Re_\omega}{10} \right)^{14} \end{aligned} \quad (I.28)$$

Cette expression n'est valable que pour le domaine  $Re_{\omega} \leq 10$  (voir Dennis *et al.* 1980). Aux nombres de Reynolds tels que  $1 \leq Re_{\omega} \leq 10$ , le résultat obtenu numériquement par Dennis *et al.* (voir plus loin) est similaire au résultat de Takagi, comme le montre le tableau ci-dessous :

$Re_{\omega}$	1	2	10
Takagi(1977)	1.00083	1.0033	1.0745
Dennis(1980)	1.00087	1.0034	1.0736

Tableau I.1 : Comparaison des valeurs de  $Re_{\omega} C_{m\omega} / 16$

Pour les grands nombres de Reynolds, les résultats théoriques obtenus par Howarth (1951) puis Banks (1976) s'écrivent respectivement :

$$C_{m\omega} = \frac{5,95}{\pi} Re_{\omega}^{-1/2} \quad (I.29)$$

$$C_{m\omega} = \frac{6,48}{\pi} Re_{\omega}^{-1/2} \quad (I.30)$$

Ces résultats ne peuvent s'appliquer qu'à partir des nombres de Reynolds de l'ordre de  $10^3$  à  $10^4$ , et ceux-ci correspondent bien aux mesures de Sawatzki (1970) dont on parlera dans la partie expérimentale. Une amélioration notable aux  $Re_{\omega}$  plus faibles a été obtenue en apportant un terme correctif à ces formules, correspondant à une expression de la contrainte à la paroi plus exacte que celle utilisée dans les approximations de couche limite. C'est ainsi que Sawatzki (1970) a proposé les formules suivantes :

$$C_{m\omega} = \frac{5,95}{\pi} Re_{\omega}^{-1/2} + \frac{16}{3} Re_{\omega}^{-1} \quad (I.31)$$

$$C_{m\omega} = \frac{6,54}{\pi} Re_{\omega}^{-1/2} + \frac{16}{3} Re_{\omega}^{-1} \quad (I.32)$$

cette dernière expression permettant d'estimer le couple pour  $Re_{\omega} = 100$  à 13 % près, contre environ 30 % avant correction. Le couple est toujours sous-estimé, et l'erreur diminue quand  $Re_{\omega}$  augmente.

Un résultat plus récent et plus complet a été obtenu numériquement par Dennis *et al.* (1980) dans la gamme des nombres de Reynolds de 10 à 100. La comparaison avec les mesures de Sawatzki (1970) montre que l'expression proposée par Dennis peut s'appliquer en fait dans toute la gamme des nombres de Reynolds  $Re_{\omega}$  compris entre 10 et 1000. Cette expression, obtenue à partir des calculs effectués à  $Re_{\omega} = 10, 20, 50$  et 100, s'écrit :

$$C_{m\omega} = \frac{1}{\pi} (a Re_{\omega}^{-1/2} + b Re_{\omega}^{-1}) \quad (I.33)$$

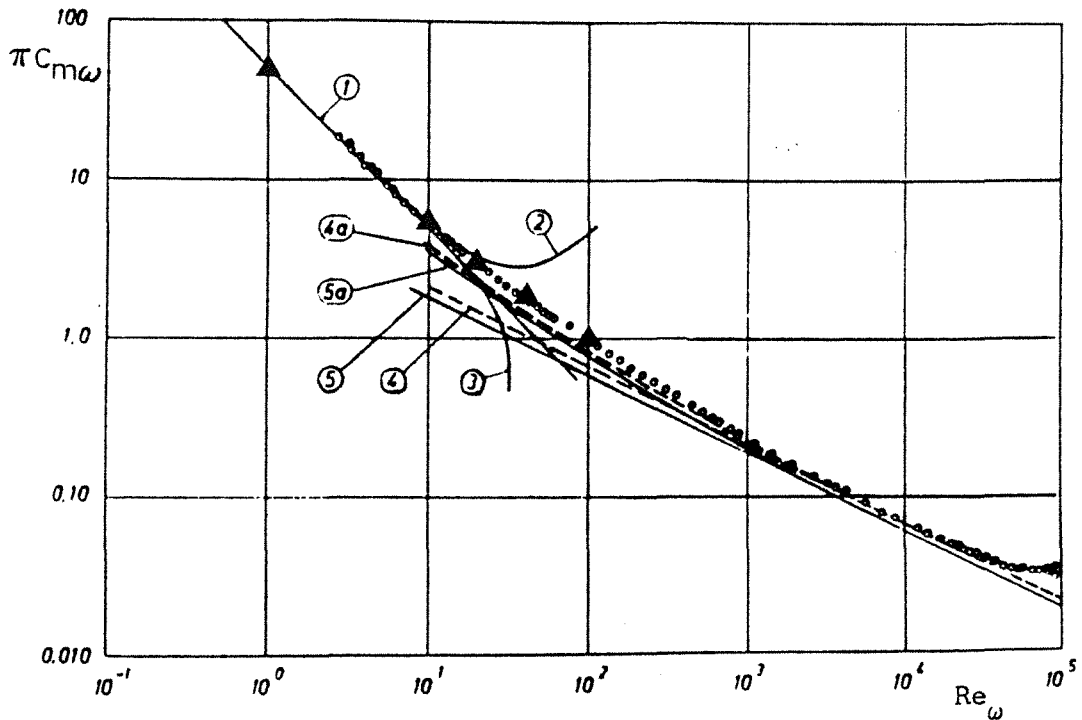
où les valeurs des deux paramètres  $a, b$ , correspondants aux trois zones de  $Re_{\omega}$  (établies par Dennis), sont données par le tableau suivant :

$Re_{\omega}$	10 → 20	20 → 50	50 → 100
$a$	5.32	6.44	6.45
$b$	37.2	32.2	32.1

**Tableau I.2** : Valeurs des constantes dans la formule de Dennis *et al.*

On constate que la formule de Dennis (I.33) s'assimile pratiquement, aux grands nombres de Reynolds, à la formule de Banks citée plus haut. La valeur de  $a = 6.45$  dans (I.33) correspond bien non seulement aux résultats de Banks ( $a = 6.48$ ), mais aussi aux résultats obtenus par Dennis & Ingham (1979) correspondant à  $a = 6.47$ .

La figure I.7 permet de comparer facilement les résultats calculés théoriquement et numériquement par Dennis (1980), Stokes (voir Lamb 1932), Thomas & Walters (1964), Collins (1955), Ovseenko (1963), Banks (1976), Howarth (1951), avec les résultats expérimentaux de Sawatzki (1970) sur la variation du coefficient de couple.



- o Résultats expérimentaux de Sawatzki
- ▲ Résultats calculés numériquement par Dennis

**Figure I.7** : Coefficient de couple d'une sphère en rotation  
(Figure extraite de Sawatzki 1970).

Sur cette figure, les courbes (1), (2), (3), représentent les résultats respectifs de Stokes (1), Thomas & Walters (2), Collins ou Ovseenko (3) pour les nombres de Reynolds modérés. Les courbes (4) et (5) représentent les résultats aux grands nombres de Reynolds, qui correspondent aux expressions (I.29) et (I.30) obtenues respectivement par Howarth et Banks. Les courbes (4a) et (5a) représentent les mêmes formules corrigées par Sawatzki, soit (I.31) et (I.32).

Revenons à la formule (I.33), pour préciser que celle-ci est également en bon accord avec les résultats obtenus graphiquement par Brison & Mathieu (1973) dans la gamme  $10^3 \leq Re_\omega \leq 4 \cdot 10^4$ . On peut donc dire que l'association de la formule de Stokes (I.27) et de la formule de Dennis *et al.* (I.33) permet le calcul du couple exercé par le fluide sur la sphère en rotation pour toute la gamme des nombres de Reynolds  $Re_\omega$ .

#### I.2.4. La sphère en translation et rotation simultanées

Le problème d'une sphère simultanément en translation et en rotation est celui qui nous intéresse en premier lieu pour l'application aux calculs de trajectoires en écoulement de suspension.

##### Très petits nombres de Reynolds :

En fluide incompressible, et à condition que les nombres de Reynolds caractéristiques soient très petits (équations linéaires), ce problème peut être résolu par superposition de deux problèmes : le premier est celui de la translation en écoulement uniforme ou non, le deuxième est celui de la rotation de la sphère dans un fluide au repos.

C'est ainsi qu'en écoulement uniforme, la force et le couple s'exerçant sur la sphère sont respectivement la traînée de Stokes (I.6) et le couple de Stokes (I.26), à condition que  $Re_p$  et  $Re_\omega$  soient tous deux suffisamment faibles.

En écoulement non uniforme, et avec l'hypothèse supplémentaire  $Re_\chi \ll 1$ , le même raisonnement conduit à utiliser les formules de Faxen pour aboutir, par superposition, à une traînée inchangée, donnée par (I.15), et à un couple donné par :

$$\mathbf{M} = 8\pi\mu a^3 \left( \frac{1}{2} [\nabla \times \mathbf{V}_\infty]_o - \Omega_p \right) \quad (\text{I.34})$$

Pour une sphère qui tourne librement, la vitesse de rotation est alors :

$$\Omega_p = \frac{1}{2} [\nabla \times \mathbf{V}_\infty]_o \quad (\text{I.35})$$



Lorsque les différents nombres de Reynolds sont suffisamment petits pour que les forces d'inertie soient négligeables, il n'apparaît donc pas de force transversale. En réalité, on sait qu'une telle force de portance existe aux nombres de Reynolds plus élevés : il s'agit de l'effet Magnus (mis en évidence à l'origine dans le cas d'un cylindre), fréquemment observé dans la nature : c'est la cause, par exemple, de la déviation de la trajectoire d'une balle de tennis, ou d'une balle de mousqueton, etc...).

Solutions d'ordre supérieur :

En résolvant les équations de Navier-Stokes par la méthode des développements asymptotiques raccordés, Rubinow & Keller (1961) ont obtenu la solution théorique à l'ordre  $Re_p$  du problème de la sphère en translation et rotation simultanées dans un fluide au repos (ou en écoulement uniforme). Leurs résultats peuvent s'appliquer au cas d'une particule solide en suspension ou, par exemple, à celui du mouvement d'un satellite dans un gaz de très faible densité.

En supposant  $Re_p$  et  $Re_\omega$  du même ordre de grandeur (et bien inférieurs à l'unité), l'expression de la résultante  $F$  s'écrit :

$$F = -6\pi a \mu V_R \left(1 + \frac{3}{16} Re_p\right) + Re_p \frac{\pi}{2} \frac{a^2 \mu}{V_R} \Omega_P \times V_R + o(\mu a V_R Re_p) \quad (I.36)$$

Outre la traînée, obéissant à la formule d'Oseen, il y a apparition d'une force perpendiculaire à la vitesse, qui est la portance trouvée par Rubinow & Keller (1961). Les expressions de  $F_D$  et  $F_L$  (cette dernière étant exprimée vectoriellement) sont donc :

$$F_D = 6\pi a \mu V_R \left[1 + \frac{3}{16} Re_p\right] \quad (I.37)$$

$$F_L = \pi a^3 \rho \Omega_P \times V_R \left[1 + O(Re_p)\right] \quad (I.38)$$

Il est intéressant de noter que la portance  $F_L$  est indépendante de la viscosité, et de forme analogue à la portance obtenue dans

l'écoulement potentiel à deux dimensions autour d'un profil, avec une circulation proportionnelle à  $a^2 \Omega_p$ .

Le coefficient de portance correspondant est :

$$C_L = \gamma \quad (I.39)$$

où  $\gamma$  est la vitesse de rotation adimensionnelle ( $\gamma = 2a\omega/V_R$ ).

Le couple exercé sur la sphère s'écrit :

$$\mathbf{M} = - 8\pi\mu a^3 \Omega_p \left[ 1 + o(\text{Re}_p) \right] \quad (I.40)$$

ce qui signifie que le couple n'est pas affecté par la translation de la sphère à l'ordre  $\text{Re}_p$ , puisqu'on retrouve le résultat obtenu par Stokes, Oseen, ou Kirchhoff (1876). Le résultat de Rubinow & Keller montre aussi que la rotation n'a pas d'influence sur la traînée à cet ordre-là.

Takagi (1974) a obtenu deux termes supplémentaires pour l'expression de la portance. En outre, il a montré que la combinaison de la translation et de la rotation induit une force supplémentaire dans la direction de  $\Omega_p \times (\Omega_p \times \mathbf{V}_p)$ , ainsi que pour celle du couple de direction  $\mathbf{V}_p \times (\Omega_p \times \mathbf{V}_p)$ . Les expressions de la force et du couple obtenues par Takagi sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & - 6\pi\mu\mathbf{V}_p \left[ 1 + \frac{3}{16}\text{Re}_p + \frac{9}{160}\text{Re}_p^2 (\ln\text{Re}_p + \gamma + \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{323}{360}) \right. \\ & + \frac{7771}{151200}\text{Re}_p^2 + \frac{27}{640}\text{Re}_p^3 \ln \frac{\text{Re}_p}{2} + O(\text{Re}_p^3) \left. \right] \\ & + \rho\pi a^3 \Omega_p \times \mathbf{V}_p \left[ 1 - \frac{27}{32}\text{Re}_p + \frac{129}{2560}\text{Re}_p^2 \ln\text{Re}_p + O(\text{Re}_p^2) \right] \\ & - \frac{457}{16800}\pi\rho \frac{a^5}{\nu} \Omega_p \times (\Omega_p \times \mathbf{V}_p) (1 + O(\text{Re}_p)) \end{aligned} \quad (I.41)$$

$$+ \frac{647}{8400} \pi \rho \frac{a^5}{\nu} \mathbf{V}_P \times (\boldsymbol{\Omega}_P \times \mathbf{V}_P) (1 + O(\text{Re}_P)) \quad (\text{I.42})$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler.

Écoulement de rotation :

Dans cette gamme des faibles nombres de Reynolds, d'autres types d'écoulement ont été étudiés théoriquement, en particulier le cas d'une sphère placée dans un écoulement de rotation pure à l'infini :

- ce problème d'une sphère dans un écoulement en rotation a été traité par Childress (1964) dans le cas particulier d'une translation le long de l'axe de rotation, la vitesse de rotation  $\boldsymbol{\Omega}_P$  de la sphère étant parallèle à la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}$  de rotation du fluide. Le résultat de Childress concernant la traînée, calculée à l'ordre  $\text{Re}_P$ , est :

$$\mathbf{F}_D = - 6\pi a \mu \mathbf{V}_P \left[ 1 + \frac{1}{2} \lambda(\alpha) \text{Re}_P + O(\text{Re}_P^2) \right] \quad (\text{I.43})$$

où  $\alpha$  est le rapport, supposé constant :

$$\alpha = \frac{2 \text{Re}_\omega}{\text{Re}_P^2}, \quad \text{avec} \quad \text{Re}_P = \frac{a |\mathbf{V}_P|}{\nu} \quad \text{et} \quad \text{Re}_\omega = \frac{a^2 |\boldsymbol{\Omega}_P|}{\nu} \quad (\text{I.44})$$

et où  $\lambda(\alpha)$  est une fonction valant  $\frac{3}{8}$  pour  $\alpha=0$  (on retrouve la formule d'Oseen), et passant par un minimum égal à 0,355 pour  $\alpha \cong 0,175$ . La théorie de Childress est valable à la condition que  $\text{Re}_\omega \ll 1$ .

- un autre problème concernant la sphère dans un écoulement de rotation a été traité par Drew (1978) : il s'agit du cas où la sphère se déplace perpendiculairement à l'axe de rotation du fluide, dans l'hypothèse où :

$$\text{Re}_P \ll \text{Re}_\omega^{1/2} \ll 1 \quad (\text{I.45})$$

où  $\text{Re}_\omega$  est basé sur le taux de rotation du fluide. L'expression de la

force de traînée obtenue par Drew est :

$$F_D = - 6\pi\mu V_p (1 + 0,976Re_\omega^{1/2}) \quad (I.46)$$

On constate l'apparition d'un terme complémentaire dans l'expression de la traînée (par rapport à celle de Stokes), terme dû à la rotation du fluide, la force transversale sur la sphère étant nulle à cet ordre-là.

Nombres de Reynolds plus élevés :

Aux nombres de Reynolds plus élevés, les résultats théoriques ou numériques sont encore inexistantes. On peut citer un travail numérique en cours au LUMEN, dont le but est le calcul des actions hydrodynamiques sur une sphère en translation et rotation dans la gamme  $1 \leq Re_p \leq 100$ , nous serons amenés à évoquer plus loin les premiers résultats obtenus par cette technique.

### I.3 RESULTATS EXPERIMENTAUX :

On a résumé, dans le paragraphe précédent, les résultats théoriques ou numériques portant sur la sphère en translation, en rotation, ou simultanément en translation et en rotation, dans différents types d'écoulement. En général, il s'agit de résultats obtenus à des nombres de Reynolds  $Re_p$  petits, ou très grands. Bien que de nombreux résultats aient été trouvés, la gamme entière de nombres de Reynolds n'a pas pu être explorée par cette voie jusqu'à présent. Les méthodes expérimentales, auxquelles est consacré le présent paragraphe, ont permis de compléter partiellement ces résultats.

Les résultats expérimentaux qu'on évoquera ici sont ceux de Macoll (1928), Davies (1949), Tani (1950), pour la gamme de nombres de Reynolds de  $4,6 \cdot 10^4$  à  $1,1 \cdot 10^5$ , Sawatzki (1970) pour les nombres de Reynolds de  $10^0$  à  $10^7$ , Barkla & Auchterlonie (1971) pour des nombres de Reynolds d'environ  $2 \cdot 10^3$ , Tsuji (1985) pour la gamme  $550 \leq Re_p \leq 1600$ . Morsi & Alexander (1972) ont établi une équation empirique très utile pour le coefficient de traînée dans toute la gamme des nombres de Reynolds inférieurs à  $5 \cdot 10^4$ . Nous citerons également quelques résultats de Willetts *et al.* (1986), Eichhorn & Small (1964) pour la sphère en translation dans un écoulement non-uniforme, etc...

Cet énoncé met en évidence la lacune existant aux nombres de Reynolds intermédiaires : c'est ce qui justifie le présent travail, consacré à la gamme  $10 \leq Re_p \leq 100$ , et dont quelques résultats ont déjà été publiés (Bui Dinh *et al.* 1990, Oesterlé *et al.* 1991).

### I.3.1 Translation en écoulement uniforme

Un grand nombre de formules empiriques a été proposé, sur la base de la multitude de résultats expérimentaux concernant la sphère en écoulement uniforme. Certaines d'entre elles, citées par Fortier (1967), ont été obtenues en recherchant des développements suivants les puissances de  $Re_p$  :

$$F_D = 6\pi a\mu V_R \left( 1 + \frac{3}{16}Re_p - \frac{11}{1000}Re_p^2 \right) \quad (I.47)$$

ou bien :

$$F_D = 6\pi a\mu V_R \left( 1 + \frac{3}{16}Re_p - \frac{11}{1000}Re_p^2 + 0,95 \cdot 10^{-4} Re_p^3 \right) \quad (I.48)$$

La formule (I.47) peut s'appliquer approximativement jusqu'à  $Re_p \cong 10$ , alors que la formule (I.48) permet d'estimer correctement la traînée jusqu'à  $Re_p \cong 100$ . Pour  $Re_p > 100$ , le sillage devient instationnaire, et il faut alors parler de traînée moyenne. Parmi les nombreuses autres corrélations utilisables, nous citerons celle de Schiller & Nauman (1933, voir Oesterlé 1991) :

$$C_D = \frac{24}{Re_p} \left( 1 + 0,15 Re_p^{0,687} \right) \quad (I.49)$$

(erreur inférieure à 5% pour  $Re_p < 700$ )

et celle de Gilbert *et al.* (1955, *ibid.*) :

$$C_D = 0,48 + 28 Re_p^{-0,85} \quad (I.50)$$

(erreur inférieure à 5% pour  $20 < Re_p < 300$ )

Morsi & Alexander(1972) ont proposé une relation empirique donnant

une très bonne précision pour toute la gamme des nombres de Reynolds inférieurs à  $5 \cdot 10^4$ . Cette formule s'écrit :

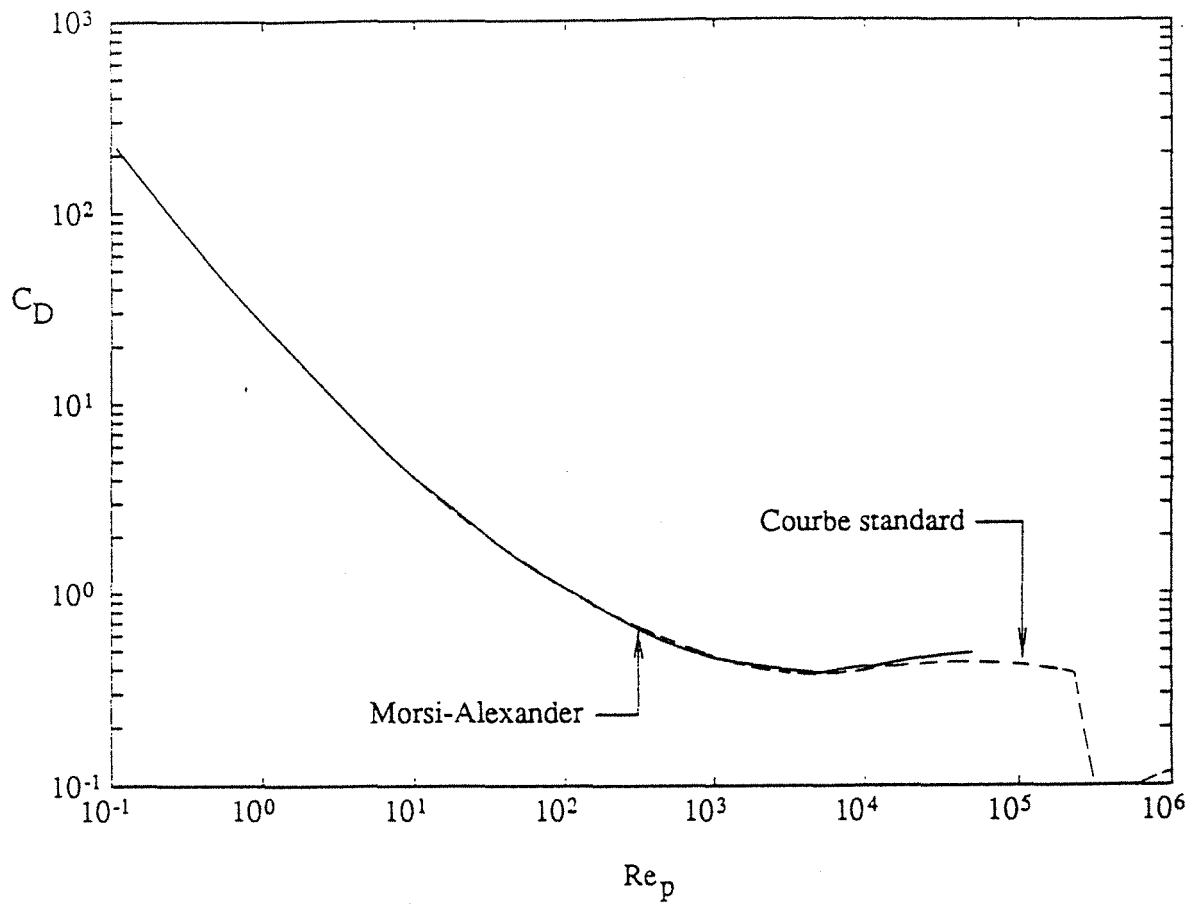
$$C_D = K_1 + \frac{K_2}{Re_P} + \frac{K_3}{Re_P^2} \quad (I.51)$$

où les valeurs des coefficients  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  sont indiquées dans le tableau ci-dessous :

$Re_P$	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$Re_P < 0.1$	0	24	0
$0.1 < Re_P < 1$	3,69	22,73	0,0903
$1 < Re_P < 10$	1,222	29,167	-3,889
$10 < Re_P < 10^2$	0,6167	46,5	-116,67
$10^2 < Re_P < 10^3$	0,3644	98,33	-2778,0
$10^3 < Re_P < 5 \times 10^3$	0,3571	148,62	-47500

Tableau I.3

La figure I.8, page suivante, représente la courbe "standard" de variation du coefficient de traînée de la sphère en fonction du nombre de Reynolds, établie à partir de tous les résultats expérimentaux connus. On y constate que  $C_D$  atteint une valeur sensiblement constante de 0,4 pour  $Re_P$  compris entre  $2 \cdot 10^3$  et  $10^4$ , puis augmente légèrement jusqu'à 0,45 pour  $Re_P \cong 3 \cdot 10^4$ , et rediminue jusqu'à 0,4 avant la brusque chute correspondant au nombre de Reynolds critique (passage du décollement laminaire au décollement turbulent de la couche limite). Rappelons qu'en mécanique des suspensions, les nombres de Reynolds  $Re_P$  sont généralement inférieurs à 1000, de sorte que la corrélation de Morsi & Alexander est tout à fait satisfaisante.



**Figure I.8** : Coefficient de traînée de la sphère (courbe "standard")

### I.3.2. Translation en écoulement non uniforme

Une mesure de la force de portance d'une sphère dans un écoulement non uniforme a été effectuée par Willetts & Naddeh (1986) dans le cas particulier d'une sphère fixée à une certaine distance de la paroi, dans un écoulement laminaire d'huile.

La variation de la portance en fonction de la distance à la paroi



et du nombre de Reynolds a été mesurée dans la gamme  $40 < Re_p < 250$ . Le coefficient de portance  $C_L$  obtenu est maximum lorsque la sphère est en contact avec la paroi, et diminue rapidement lorsque la distance à la paroi augmente. La portance est dirigée vers la paroi aux faibles distances, et s'inverse aux distances plus grandes : ceci montre que les expériences de Willetts & Naddeh sont difficiles à interpréter car les effets du gradient de vitesse et de la présence de la paroi jouent tous deux un rôle. Par ailleurs, le gradient de vitesse n'est pas constant, et la forme du profil de vitesse intervient certainement dans les résultats. On ne peut donc tirer de conclusion générale sur l'influence du gradient de vitesse sur la portance.

Eichhorn & Small (1964) ont aussi mesuré les coefficients de portance et de traînée d'une particule sphérique, celle-ci se trouvant en suspension dans un tube incliné siège d'un écoulement laminaire. Le nombre de Reynolds de la sphère était compris entre 80 et 250. Là encore, le dispositif expérimental utilisé ne permet pas de conclure sur l'influence du seul gradient de vitesse, ou sur l'effet de paroi.

Enfin, on peut faire référence au résultat expérimental de Cherukat *et al* (1990), qui ont mesuré la vitesse de migration latérale d'une sphère en sédimentation le long de la paroi dans un écoulement vertical, dans la gamme des petits nombres de Reynolds compris entre 0,1 et 10.

Pour conclure sur ce problème de la sphère en écoulement de cisaillement, on note donc une absence complète de résultats expérimentaux correspondant à une sphère placée dans un fluide illimité, indépendamment de toute influence d'une éventuelle paroi.

### I.3.3. La sphère en rotation dans un fluide au repos à l'infini

Nous rappelons ici les résultats expérimentaux obtenus par Sawatzki (1970), que nous avons évoqués plus haut. Ces résultats couvrent toute la gamme  $10^0 < Re_\omega < 10^7$ , et sont en bon accord avec ceux calculés théoriquement par Banks (1976) aux nombres de Reynolds de l'ordre de  $10^4$ , ou par Dennis (1980) aux nombres de Reynolds modérés.

Sawatzki (1970) a mesuré le coefficient de couple  $C_{m\omega}$  sur une sphère de diamètre 240 mm, en rotation à vitesse angulaire constante autour d'un diamètre fixe, dans un fluide visqueux au repos. Ses résultats, très complets, ont déjà été donnés au paragraphe précédent (figure I.7), où ils ont servi de base pour l'appréciation des différents résultats théoriques ou numériques présentés.

#### I.3.4. La sphère en translation et en rotation

On commencera par citer les expériences de Robins (1742), qui a eu l'idée de mettre en évidence la force aérodynamique sur la sphère en rotation en la suspendant comme un pendule. Dans une autre expérience, il a observé, le premier, la déviation d'une balle de mousqueton. Robins a donc découvert "l'effet Magnus" par la démonstration expérimentale avant le travail connu de Magnus (1853), qui a consisté en des expériences successives sur le cylindre en rotation.

##### Aux grands nombres de Reynolds :

Maccoll (1928) a montré, par des expériences sur la sphère lisse, que l'on pouvait obtenir une inversion de portance (par rapport au sens prédit par la formule de Rubinow & Keller I.38) aux faibles taux de rotation pour  $Re_p = 1,1 \cdot 10^5$  et pour  $Re_p = 0,9 \cdot 10^5$ . Davies (1949) a obtenu la même inversion de portance sur une balle de golf lisse. Dans ces deux expériences, l'inversion de signe de la portance se produit aux valeurs de la rotation réduite  $\gamma$  comprises entre 0 et 1 (ce résultat est opposé à celui de Robins aux mêmes valeurs de  $\gamma$ ), mais le coefficient de portance  $C_L$  est très faible (environ 0,01 à 0,08). En dehors de cette zone, le coefficient de portance  $C_L$  s'avère pratiquement indépendant du nombre de Reynolds  $Re_p$ , et proportionnel à  $\gamma$  avec un coefficient de proportionnalité de l'ordre de 0,15 à 0,25 lorsque  $\gamma$  est inférieur à 2. Si  $\gamma$  est supérieur à 2,  $C_L$  est approximativement constant, et vaut environ 0,4 à 0,5. Ceci est également conforme aux résultats expérimentaux de Tani (1950), qui cependant n'a pas mis en évidence l'inversion de portance signalée.

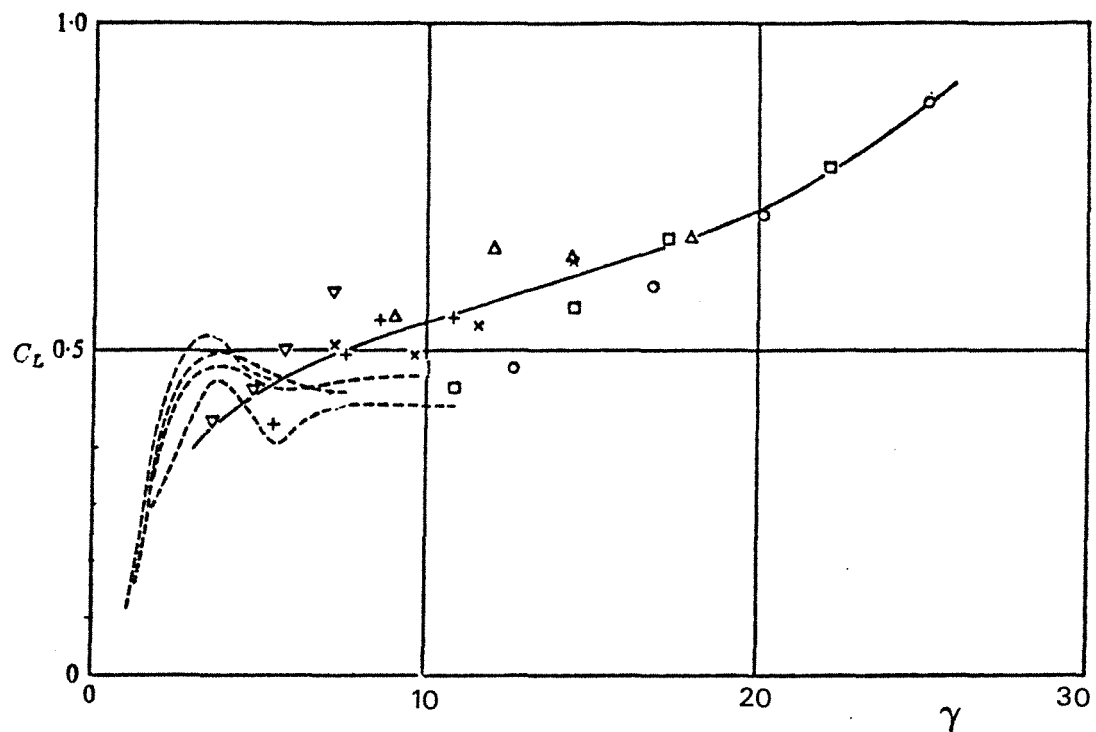
Aux nombres de Reynolds compris entre  $1,5 \cdot 10^3$  et  $3 \cdot 10^3$  :

La poursuite des expériences de Robins, Maccoll ou Davies vers les nombres de Reynolds plus faibles a été initiée par Barkla & Auchterlonie (1971), qui ont mesuré les coefficients de portance et de traînée de la sphère en rotation aux nombres de Reynolds compris entre 1500 et 3000, et pour  $4 < \gamma < 25$ . Le coefficient de portance  $C_L$  dans cette gamme est de 0,3 à 0,9, et le coefficient de la traînée  $C_D$  diminue de 0,65 à 0,45 lorsque la vitesse de rotation adimensionnelle  $\gamma$  augmente de 4 à 25.

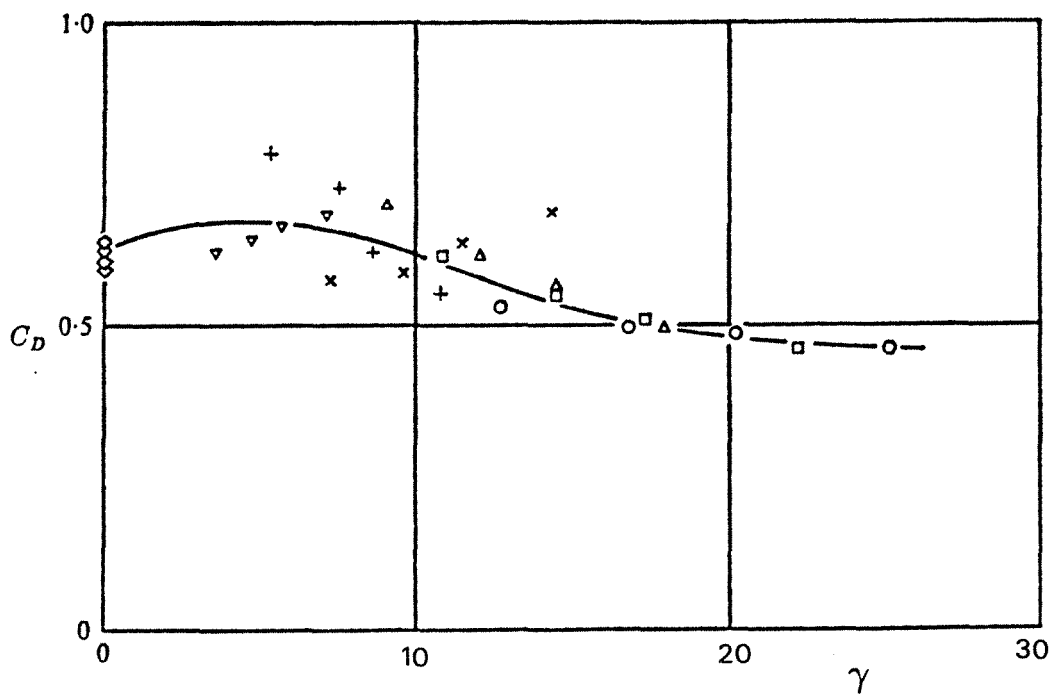
Il est intéressant de présenter rapidement la méthode expérimentale utilisée par Barkla & Auchterlonie. Il s'agit d'une technique pendulaire dans un fluide au repos (air ambiant) : la sphère (masse 100 g, rayon 3,2 cm), suspendue par un fil en nylon, constitue un pendule (longueur 190 à 840 cm) dont le comportement dépend de la vitesse de rotation de la sphère. Celle-ci est mise en rotation par un moteur électrique, autour d'un axe dont l'orientation peut être fixée. Lorsque cet axe est maintenu aligné avec le fil de suspension, on obtient un pendule conique, l'écoulement autour de la sphère étant alors permanent (sous réserve d'une très grande longueur du pendule).

La portance aérodynamique a été déterminée par la mesure du changement de période du pendule par rapport au cas où la sphère n'est pas en rotation. La précision moyenne estimée par les auteurs sur le coefficient de portance est de 5 %, les nombres de Reynolds du mouvement de translation de la sphère étant compris entre 1500 et 3000. Le coefficient de traînée a été déterminé d'après l'amortissement du pendule. Bien que peu influencé par la rotation,  $C_D$  diminue tout de même sensiblement lorsque  $\gamma$  dépasse 10, comme nous l'indiquons ci-dessus.

La figure I.9 permet la comparaison entre les résultats de Barkla & Auchterlonie et ceux de Maccoll (1928) sur le coefficient de portance, alors que la figure I.10 représente les valeurs du coefficient de traînée mesurées par Barkla & Auchterlonie.



**Figure I.9** : Coefficient de portance de la sphère en translation et rotation, mesurés par Maccoll (1928, trait discontinu) et Barkla & Auchterlonie (1971, trait plein)



**Figure I.10** : Coefficients de traînée de la sphère en translation et rotation, mesurés par Barkla & Auchterlonie (1971)

Ces premières expériences effectuées dans une gamme de nombres de Reynolds intermédiaires mettent en évidence la difficulté d'obtention de mesures précises des actions du fluide. La dispersion des résultats expérimentaux que l'on vient de présenter peut également être constatée dans les expériences de Tsuji *et al.* (1985), que nous allons décrire maintenant.

Aux nombres de Reynolds compris entre 550 et 1600 :

Les expériences menées par Tsuji *et al.* (1985) sur la sphère en translation et rotation portent sur la gamme des nombres de Reynolds  $Re_p$  compris entre 550 et 1600, et des vitesses de rotation adimensionnelles inférieures à 1,4. La portance a été obtenue par une méthode de trajectographie dans l'air.

Le dispositif expérimental de Tsuji *et al.*, basé sur l'étude de la trajectoire d'une sphère après rebond sur un plan incliné, est schématisé par les figures I.11 et I.12 :

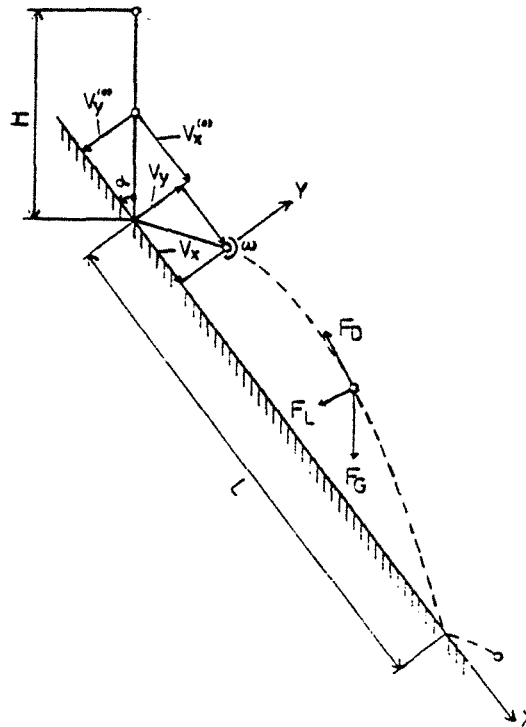


Figure I.11 : Principe de l'expérience de Tsuji *et al.* (1985)

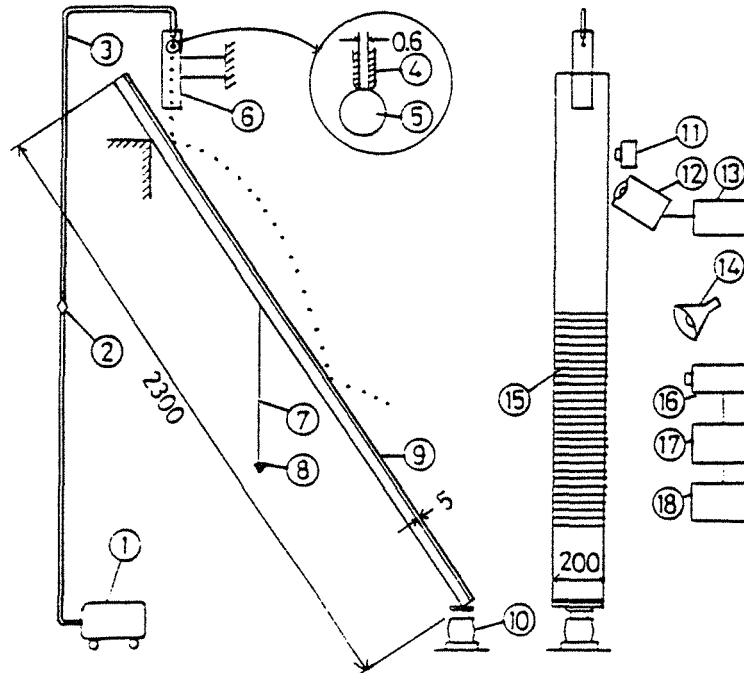


Fig. 4 Experimental equipment ①: Vacuum cleaner, ②: Glass valve, ③: Vinyl tube, ④: Metal tube, ⑤: Sphere, ⑥: Acrylic pipe, ⑦: Thread, ⑧: Weight, ⑨: Acrylic plate, ⑩: Jack, ⑪: Camera, ⑫: Stroboscope ⑬: Oscillator, ⑭: Light, ⑮: Marked line, ⑯: Video camera, ⑰: Video tape recorder, ⑱: Monitor TV

Figure I.12 : Schéma du dispositif expérimental de Tsuji *et al.* (1985)

Après une trajectoire verticale sans rotation, la sphère rebondit sur le plan incliné en acquérant une vitesse de rotation que l'enregistrement photographique permet de déterminer grâce à un marquage sur la surface de la sphère. Cette trajectoire après rebond est entièrement enregistrée et comparée aux trajectoires calculées numériquement pour différentes valeurs du rapport  $C_L/\gamma$ . Les paramètres pouvant être modifiés dans ces expériences sont l'inclinaison de la plaque et la hauteur de la position initiale de la sphère.

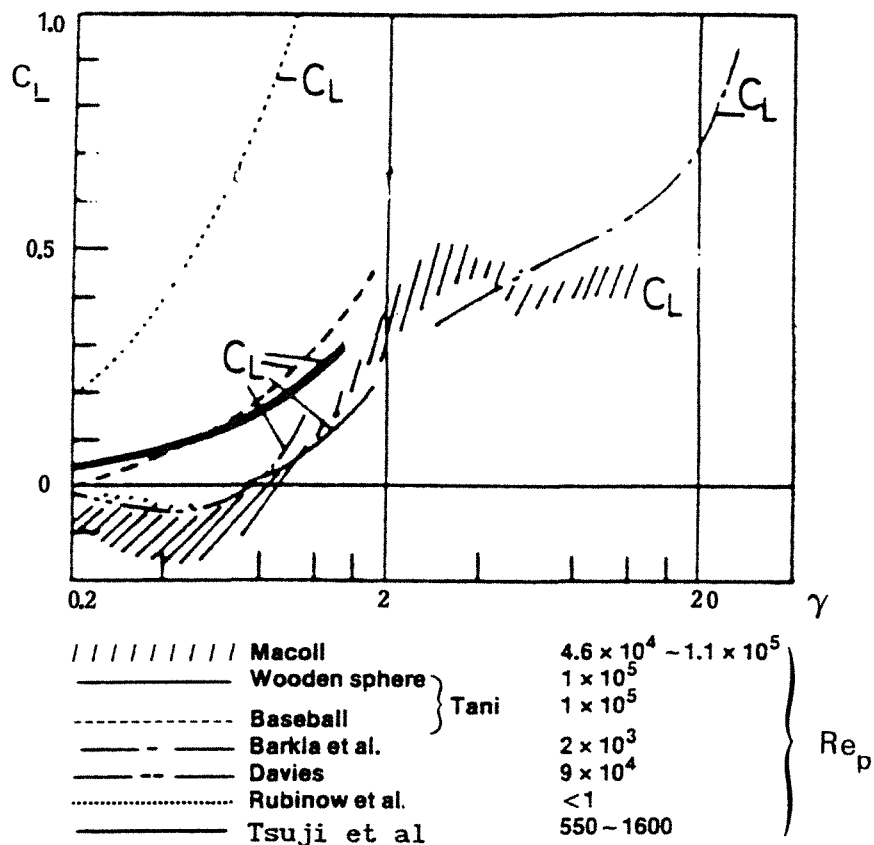
Les résultats de la comparaison entre trajectoires enregistrées et calculées ont permis à Tsuji *et al.* de proposer l'expression approchée suivante pour le coefficient de portance :

$$C_L = (0,20 \pm 0,05) \gamma \quad (I.52)$$

Rappelons les conditions d'obtention de ce résultat :

$$\begin{aligned} 550 < Re_p < 1600 \\ \gamma < 1,4 \end{aligned} \quad (I.53)$$

Comme le montre la figure I.13, la courbe correspondante prolonge, dans le domaine des faibles vitesses de rotation, les résultats de Barkla & Auchterlonie (1971), obtenus pour  $\gamma > 4$ .



**Figure I.13** : Coefficient de portance de la sphère en translation et rotation (synthèse des résultats connus, d'après Tsuji et al 1985).

On constate donc que le problème de la sphère en translation et en rotation simultanées dans un écoulement uniforme à l'infini a été traité expérimentalement, par plusieurs auteurs : Maccoll (1928), Davies (1949), Tani (1950), Barkla & Auchterlonie (1971), Tsuji *et al.* (1985), ceci dans la gamme des nombres de Reynolds d'environ 500 à  $10^5$ .

Leurs résultats montrent que le coefficient de traînée n'est que très peu influencé par la rotation, sauf aux grandes vitesses de rotation étudiées par Barkla *et al.* (1971), où une diminution a pu être observée. Pour toute la gamme des nombres de Reynolds, et aux taux de rotation modérés, ce coefficient obéit donc à la formule empirique de Morsi & Alexander (1972). Quant au coefficient de portance  $C_L$ , il semble indépendant du nombre de Reynolds  $Re_p$  aux grandes valeurs de celui-ci, et peut être approximativement estimé par :

$$C_L \cong 0,2 \gamma \quad (I.54)$$

tant que la rotation réduite  $\gamma$  reste inférieure à 2.

Il est intéressant de noter que ce résultat est semblable à celui qu'ont obtenu Tsuji *et al.* (1985) aux nombres de Reynolds d'environ 550 à 1600, mais que le coefficient de proportionnalité est nettement inférieur à la valeur 1, prédite par la formule théorique (I.39) de Rubinow & Keller (1961) aux très petites valeurs de  $Re_p$ .

Cette décroissance du coefficient de portance avec le nombre de Reynolds doit cependant être confirmée et précisée dans le vaste domaine  $1 < Re_p < 500$ , qui reste inexploré à ce jour. Ceci justifie le travail expérimental entrepris ici, destiné à contribuer en particulier à une meilleure connaissance du coefficient de portance dans la gamme  $10 < Re_p < 100$ .



## CONCLUSION DU CHAPITRE I

Nous avons résumé dans ce chapitre les connaissances actuelles concernant les actions exercées par un fluide sur une sphère en mouvement (soit en translation, en rotation, ou simultanément en translation et en rotation) dans différents types d'écoulement.

Dans le cas qui nous intéresse particulièrement ici, qui est celui de la translation et de la rotation simultanées, on peut faire les quelques remarques suivantes :

- les seuls résultats théoriques existants sont ceux de Stokes (termes d'inertie négligeables) et ceux de Rubinow & Keller (1961) ou Takagi (1974), valables aux faibles valeurs des nombres de Reynolds. La prise en compte des termes d'inertie entraîne un couplage translation-rotation, à l'origine d'une force de portance. A l'ordre  $Re_p$ , le couple est celui calculé par Stokes, alors que le coefficient de portance est égal au taux de rotation réduit de la sphère :

$$C_L = \gamma = \frac{2a\omega}{V_R} \quad (I.55)$$

- les seuls résultats expérimentaux disponibles concernent des nombres de Reynolds supérieurs à environ 500, qui dépassent donc les valeurs usuellement rencontrées en écoulements de suspension. Ces résultats indiquent une tendance à une décroissance du coefficient de portance lorsque  $Re_p$  augmente. Ce coefficient reste toutefois du même ordre que la rotation réduite  $\gamma$ . Il semble pouvoir être considéré comme proportionnel à  $\gamma$ , notamment aux grands nombres de Reynolds, avec un coefficient de proportionnalité d'environ 0,2 (équation I.54).

- le domaine des nombres de Reynolds de l'ordre de 1 à 1000 reste inexploré. Seul le couple exercé sur une sphère en rotation dans un fluide au repos a été étudié de façon très complète par Sawatzki (1970) et Dennis *et al.* (1980), mais on ne connaît rien sur la possibilité d'appliquer ces résultats à la sphère en translation.



## PROPOSITION ET ETUDE D'UNE TECHNIQUE EXPERIMENTALE

### II.1. INTRODUCTION

En faisant le point, dans le chapitre précédent, sur la question des actions exercées par un fluide sur une sphère, on est arrivé à la conclusion que les résultats aux nombres de Reynolds intermédiaires sont assez limités. En particulier, pour ce qui concerne la portance sur une sphère en rotation, on constate une absence totale d'informations dans la gamme  $1 < Re_p < 500$ .

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier la possibilité de mesurer les actions hydrodynamiques sur une sphère en translation et rotation, dans un fluide visqueux incompressible, dans la gamme des nombres de Reynolds compris approximativement entre 10 et 100. Cette gamme correspond à la plupart des applications industrielles, dont la plus connue est le transport pneumatique. On pourrait citer également des applications en génie chimique, ou en mécanique de l'environnement par exemple.

Le problème que nous désirons traiter étant celui d'une sphère placée dans un écoulement uniforme, en-dehors de toute influence éventuelle d'une paroi, les deux principes de base envisageables sont :

- 1 - La sphère, de centre fixe, est mise en rotation autour d'un diamètre (grâce à un moteur par exemple), et placée dans un

écoulement pouvant être considéré comme uniforme à une distance suffisamment grande de la sphère. Les composantes de force seraient mesurées par une balance intégrée au support de la sphère, celui-ci devant, si possible, ne pas perturber l'écoulement.

- 2 - La sphère, mobile, est mise en translation et en rotation, par un moyen approprié, dans un fluide se trouvant au repos loin de la sphère. Il s'agit alors d'une méthode de trajectographie, les composantes de force et de couple pouvant être déduites de l'étude de la trajectoire. Le problème, dans ce cas, est de concevoir un dispositif permettant d'approcher le mieux possible le régime permanent, qui correspond à une trajectoire rectiligne uniforme du centre de la sphère, celle-ci tournant à vitesse angulaire constante.

Outre les avantages et inconvénients de chacune de ces deux techniques, le choix de la méthode doit surtout prendre en compte les valeurs de nombres de Reynolds que l'on désire obtenir. Nous discutons ce point dans le paragraphe qui suit, ce qui nous permettra de choisir définitivement un principe expérimental. Ce choix étant fait, nous étudions, dans la suite de ce chapitre, les conditions dans lesquelles les mesures seront possibles, ainsi que les éventuelles corrections à prendre en compte.

## II.2. IMPERATIFS LIES AUX NOMBRES DE REYNOLDS DESIRES

Un nombre de Reynolds de 100 peut correspondre aussi bien à une particule de diamètre 1 mm se déplaçant dans l'air à environ 1,5 m/s, qu'à une sphère de diamètre 10 cm se déplaçant dans l'eau à une vitesse de 1 mm/s . Ces deux exemples sont pourtant irréalisables : dans le premier cas (qui suppose évidemment une technique de trajectographie), on ne pourrait ni contrôler ni mesurer la vitesse de rotation, alors que dans le deuxième cas on conçoit que la vitesse soit trop faible pour obtenir des efforts détectables. Le problème est de trouver un compromis acceptable par un choix judicieux du diamètre, de la vitesse et du fluide.

### II.2.1. Dimension des sphères utilisées :

Quelle que soit la technique choisie, la nécessité d'un dispositif de mise en rotation permettant le contrôle et la mesure de la vitesse de rotation implique l'utilisation de sphères ayant un diamètre minimal de l'ordre du centimètre. Dans le cas de la méthode n°1 évoquée ci-dessus, l'existence d'un support permettant la détermination des composantes de force suppose même un diamètre de l'ordre de la dizaine de centimètres. L'ordre de grandeur du diamètre étant donc imposé, l'obtention de nombres de Reynolds appartenant à la gamme souhaitée sera possible en jouant sur la vitesse relative et sur la viscosité cinématique du fluide.

### II.2.2. Viscosité du fluide et vitesse relative :

Basons-nous donc sur un diamètre compris entre  $10^{-2}$  et  $10^{-1}$  m. Pour que le nombre de Reynolds soit de l'ordre de 100, la vitesse relative  $V_R$  et la viscosité cinématique  $\nu$  doivent être telles que :

$$10^3 \text{ m}^{-1} < \frac{V_R}{\nu} < 10^4 \text{ m}^{-1} \quad (\text{II.1})$$

Ceci signifie que la vitesse relative doit être d'environ 1 à 10 mm/s si le fluide est de l'eau ( $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ), et de quelques centimètres par seconde si le fluide est de l'air ( $\nu \cong 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Ces vitesses sont beaucoup trop faibles pour que l'expérience ne soit pas perturbée par d'inévitables mouvements de convection naturelle. Par ailleurs, les forces recherchées seraient alors extrêmement faibles et difficilement mesurables.

On en conclut que les nombres de Reynolds recherchés ne pourront être obtenus qu'en utilisant un fluide de viscosité cinématique relativement forte. De plus, les efforts à mesurer étant proportionnels à la masse volumique du fluide, on s'orientera de préférence vers un liquide.

Il nous reste, compte tenu de ces observations, à opter pour l'une des deux techniques proposées. Nous nous plaçons, pour ce qui suit, dans l'hypothèse où l'on utilise un liquide de viscosité dynamique de l'ordre de 0,1 Pa·s, et de masse volumique de l'ordre de 1000 kg/m<sup>3</sup>, valeurs correspondant à de nombreuses huiles, ou encore à des solutions de glycérine par exemple. Il en résulte, d'après (II.1), que la vitesse relative devra se situer dans la gamme 0,1 à 1 m/s.

### II.2.3. Choix de la méthode :

La technique n°1, consistant à faire tourner une sphère autour d'un diamètre fixe dans un écoulement, suppose, compte tenu du diamètre de la sphère et du fluide choisi, l'utilisation d'un tunnel hydrodynamique de très grandes dimensions. Cela mettrait en jeu un volume de liquide de plusieurs mètres cubes, et une installation très encombrante et extrêmement onéreuse. De plus, il ne serait pas possible d'y obtenir des profils de vitesses suffisamment uniformes comme l'exigent les objectifs de nos expériences.

C'est pourquoi la technique n°2, c'est-à-dire une méthode de mesure

par trajectographie, nous semble s'imposer. Le problème de l'uniformité de l'écoulement loin de la sphère ne se pose alors plus, à condition que l'on travaille dans une cuve de grandes dimensions par rapport aux diamètres des sphères utilisées. Il nous reste donc à concevoir un dispositif permettant un mouvement simultané de translation et de rotation de la sphère : un guidage minimal peut être assuré par des fils de suspension s'enroulant autour d'axes très fins équipant la sphère. Les vitesses de translation et de rotation de la sphère sont alors directement liées, ce qui constitue un avantage de cette méthode simple, proposée par Oesterlé (1988, 1989), qui en a décrit les essais préliminaires.

Avant de voir dans quelles conditions une trajectographie ainsi réalisée peut aboutir à la connaissance de la force et du couple exercés par le fluide sur la sphère, on peut examiner le schéma de principe illustré par la figure II.1. La sphère est traversée par un axe diamétral sur lequel s'enroulent, de part et d'autre, deux fils de suspension. La présence de cet axe peut certes légèrement perturber l'écoulement, mais cette perturbation reste nettement inférieure à celle que provoquerait l'indispensable support dans une méthode de type tunnel hydrodynamique.

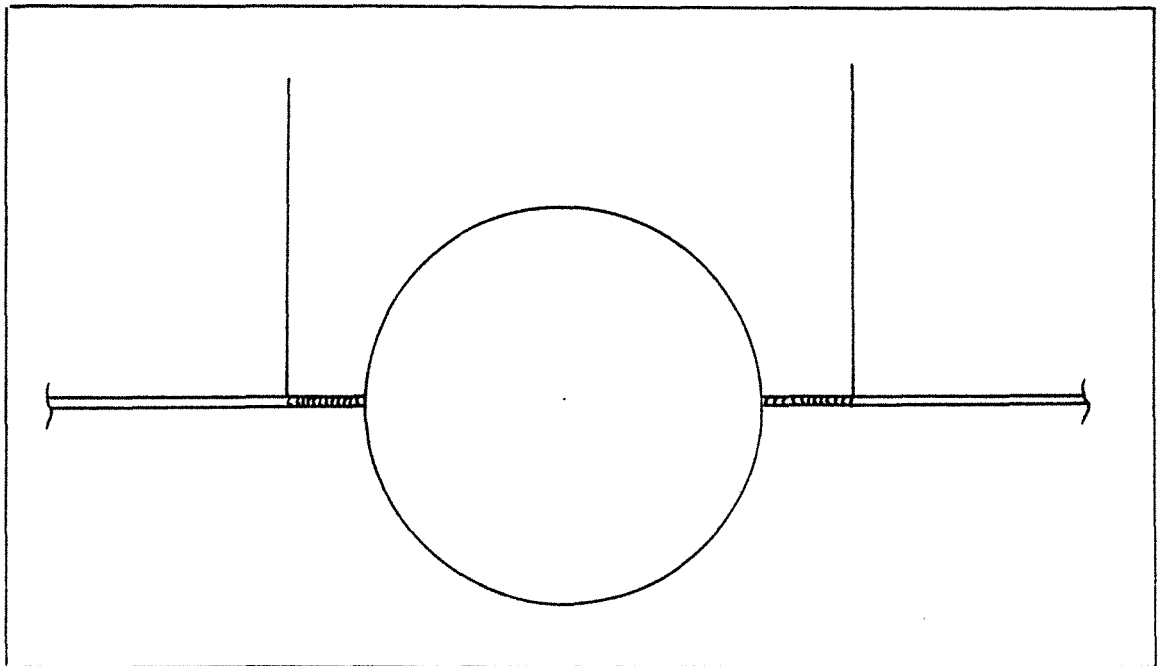


Figure II.1 : Schéma du dispositif de suspension envisagé

On peut constater que ce dispositif de suspension donne naissance à une vitesse de rotation perpendiculaire à la vitesse de translation : notre étude, comme les travaux expérimentaux antérieurs cités au chapitre précédent d'ailleurs, se limitera donc à ce cas fondamental.

Afin de ne pas se borner à une seule vitesse de translation pour une sphère donnée, un système de poulies, associé à un contrepoids, est prévu. On pourra donc, par variation de la masse du contrepoids, obtenir différentes trajectoires pour une même sphère. La force de portance subie par la sphère en rotation aura pour effet de provoquer une déviation de ces trajectoires par rapport à la verticale.

Ce système autorise l'examen de trajectoires ascendantes ou descendantes, selon que la masse du contrepoids est supérieure ou inférieure à la masse du mobile (sphère+axes). Nous verrons par la suite l'influence de cette option sur la sensibilité de l'expérience : on peut préciser dès maintenant que seule l'étude de trajectoires ascendantes a été entreprise ici.

Pour résumer, on peut donc dire que le principe de la méthode choisie consiste à examiner la trajectoire ascendante d'une sphère, entraînée simultanément en translation et en rotation grâce à l'enroulement de fils de suspension sur un axe diamétral de faible diamètre, dans une cuve contenant un liquide de forte viscosité.

Cette méthode présente un avantage principal, qui est que la vitesse de rotation est liée directement aux vitesses de translation de la sphère et du contrepoids, ceci par l'intermédiaire du diamètre de l'axe d'enroulement. On peut donc être maître, mais de façon non totalement indépendante, des vitesses de translation et de rotation, grâce à la possibilité de faire varier la masse du contrepoids et le diamètre de l'axe d'enroulement. Ceci permet de jouer à la fois sur le nombre de Reynolds  $Re_p$  et sur le taux de rotation adimensionnel  $\gamma$ .



### II.3. ETUDE DU MOUVEMENT DE LA SPHERE SUSPENDUE

Le but de l'étude expérimentale entreprise étant de déterminer les trois coefficients adimensionnels de trainée ( $C_D$ ), de portance ( $C_L$ ) et de couple ( $C_m$ ), on se propose dans un premier temps d'écrire les équations du mouvement de la sphère, et d'en déduire les expressions de ces coefficients en fonction des composantes de vitesse et d'accélération de la sphère.

#### II.3.1. Etude théorique élémentaire.

La figure II.2 ci-dessous illustre le système des forces qui s'exercent sur la sphère, incluant la pesanteur, la tension des fils de suspension et les actions hydrodynamiques. Ces dernières sont représentées sur la figure dans le cas d'une trajectoire ascendante.

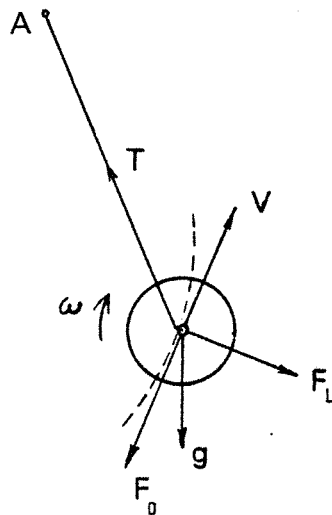


Figure II.2 : Système de forces s'exerçant sur la sphère en translation et rotation simultanées

On suppose que le système constitué par la sphère et l'axe cylindrique est un solide de révolution indéformable. On étudie son mouvement dans le repère cartésien centré au point de suspension A (projection, supposée fixe, sur le plan du mouvement, du point de tangence de chaque fil à la poulie correspondante), l'axe x étant horizontal, l'axe y vertical descendant. Lors de sa trajectoire, le solide est soumis aux actions suivantes :

- $m_A g$  : Poids apparent.
- $F_D$  : Traînée (coefficient de traînée  $C_D$ ).
- $F_L$  : Portance (coefficient de portance  $C_L$ ).
- $T$  : Tension totale, de module  $T$ , somme des tensions de chaque fil.
- $M$  : Couple hydrodynamique, de module  $M$ .

On utilisera dans la suite les notations suivantes :

$m_v$  : Masse virtuelle constituée par la masse du solide ( $m$ ) et la "masse de fluide ajoutée" (masse de fluide déplacée par la sphère :  $m_f$ )

soit : 
$$m_v = m + m_f = m + k \cdot \rho \frac{4}{3} \pi a^3 \quad (\text{II.2a})$$

où:  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  
 $a$  est le rayon de la sphère,  
 $k$  est le coefficient de masse ajoutée, qui dépend à la fois de la forme du corps et de la nature du mouvement. Dans le cas de la sphère, on admet  $k = 1/2$ .  
 Cette valeur est celle qu'on obtient dans le cas de l'écoulement à potentiel des vitesses (Brun *et al.* 1970). Dans les autres cas, on ne connaît pas la valeur théorique de  $k$ . Remarquons aussi que l'expression (II.2a) néglige la masse ajoutée due aux axes. Ce terme de masse ajoutée est donc susceptible d'introduire une erreur dans les équations. On verra cependant qu'il n'intervient heureusement pas dans nos résultats, obtenus en régime permanent, et ne faisant donc pas appel à la masse virtuelle.

L'expression de la masse virtuelle peut donc s'écrire :

$$m_v = m + \frac{2}{3}\rho\pi a^3 \quad (\text{II.2b})$$

$m_A$  : Masse apparente, tenant compte de la force d'Archimède, et dont l'expression (en présence des axes) est la suivante :

$$m_A = m - \rho \left( \frac{4}{3}\pi a^3 + 2\pi a_c^2 \ell \right) \quad (\text{II.3})$$

Où  $a_c$  est le rayon du cylindre (axe d'enroulement),  
 $\ell$  est la longueur de l'axe d'enroulement (de part et d'autre de la sphère)

$J$  : Moment d'inertie du solide par rapport à son axe de révolution, somme du moment d'inertie de la sphère (percée diamétralement pour le passage des axes) et des moments d'inertie des axes cylindriques.

$m_c$  : Masse du contrepoids.

$\Gamma$  : Vecteur accélération.

$V$  : Vecteur vitesse de la sphère (égal à sa vitesse relative par rapport au fluide, et de module  $V_R$ ).

$V_c$  : Vitesse du contrepoids (de module  $V_c$ ).

$\Omega_p = \omega_z \mathbf{k}$  : Vecteur vitesse de rotation de la sphère, dirigé selon  $z$ .

$\omega = |\omega_z|$  : Module du vecteur  $\Omega_p$ .

$a_e$  : Rayon d'enroulement du fil, égal au rayon de l'axe d'enroulement augmenté du rayon du fil.

Notons que les vecteurs  $F_D$  et  $V$  sont de sens opposés, ainsi que les vecteurs  $\Omega_p$  et  $M$ .

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué au système sphère + axes, s'écrit :

$$m_v \Gamma = m_A g + F_L + F_D + T \quad (\text{II.4})$$

et :

$$J \frac{d\Omega_P}{dt} = M + \varepsilon a_e T k \quad (II.5)$$

où  $\varepsilon = \pm 1 = \omega_z / \omega$  dépend du sens d'enroulement initial du fil.

Les coefficients adimensionnels peuvent être définis, à partir des expressions vectorielles des forces et des vitesses, par :

$$F_L = C_L \frac{1}{2} \rho \pi a^2 V_R^2 \frac{\Omega_P \times V}{\|\Omega_P \times V\|} \quad (II.6)$$

$$F_D = - C_D \frac{1}{2} \rho \pi a^2 V_R V \quad (II.7)$$

$$M = - C_{mv} \frac{1}{2} \rho \pi a^3 V_R^2 \frac{\Omega_P}{\omega} \quad (II.8)$$

alors que les différents vecteurs se décomposent selon x,y,z de la façon suivante :

V	de composantes	$\dot{x}$ , $\dot{y}$ , 0
$\Omega_P$	de composantes	0 , 0 , $\omega_z$
$\Gamma$	de composantes	$\ddot{x}$ , $\ddot{y}$ , 0
g	de composantes	0 , g , 0

#### Exploitation d'une trajectoire quelconque :

En projetant (II.4) sur les directions x et y, et en supposant la sphère située dans le premier quadrant comme indiqué sur la figure II.2, on obtient :

$$m_v \ddot{x} = \frac{1}{2} \rho \pi a^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (-\varepsilon C_L \dot{y} - C_D \dot{x}) - \frac{T x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (II.9)$$

$$m_v \ddot{y} = m_A g + \frac{1}{2} \rho \pi a^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\varepsilon C_L \dot{x} - C_D \dot{y}) - \frac{T y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (II.10)$$

tandis que la projection du théorème du moment cinétique (II.5) sur

l'axe z conduit à :

$$J \frac{d\omega}{dt} = - \epsilon \left( \frac{1}{2} \rho \pi a^3 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) C_{mv} - a_e T \right) \quad (\text{II.11})$$

De plus, l'équation du mouvement du contrepoids s'écrit :

$$m_c \frac{dV_c}{dt} = m_c g - T \quad (\text{II.12})$$

A ce système d'équations du mouvement, on peut rajouter, moyennant l'hypothèse d'un fil inextensible, la relation suivante entre les vitesses de translation et de rotation :

$$\omega = \left| \frac{V_c - V_R}{a_e} \right| \quad (\text{II.13})$$

Le système des cinq équations (II.9) à (II.13) nous montre dès à présent que les coefficients de traînée, de portance et de couple pourraient théoriquement être calculés en tout point de la trajectoire, à condition que l'enregistrement de cette trajectoire permette la détermination des composantes d'accélération et de vitesse  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$ ,  $\dot{x}$  et  $\dot{y}$ , de la vitesse angulaire et de l'accélération angulaire, ainsi que de l'accélération du contrepoids, nécessaire au calcul de la tension du fil d'après (II.12).

Ceci suppose d'utiliser l'enregistrement trajectographique pour approcher les dérivées temporelles par des formules de différences finies. On peut employer, par exemple, les formules suivantes, donnant les dérivées première et seconde d'une fonction  $f(t)$  en s'appuyant sur 5 points :

$$\frac{df}{dt} = \frac{f_{-2} - 8f_{-1} + 8f_{+1} - f_{+2}}{12 \Delta t} \quad (\text{II.14a})$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{-f_{-2} + 16f_{-1} - 30f_0 + 16f_{+1} - f_{+2}}{12 \Delta t^2} \quad (\text{II.14b})$$

où l'on a posé :  $f_i = f(t + i\Delta t)$

Ce procédé de mesure, en mouvement instationnaire, est cependant délicat à mettre en oeuvre pour deux raisons essentielles liées à la connaissance de la tension des fils et donc au mouvement du contrepoids :

- l'équation (II.12) suppose que la tension des fils soit la même de part et d'autre des poulies, ce qui correspondrait à une absence totale de frottement entre fil et poulie. On sait en effet que la différence de tension de part et d'autre d'une poulie est liée au coefficient de frottement fil/poulie, qui ne peut être connu précisément (*remarquons que ce problème devra être réglé quelle que soit la technique expérimentale finalement choisie*).

- s'il est relativement aisé de mesurer la vitesse instantanée du contrepoids, la connaissance précise de son accélération, ainsi que celle de l'accélération angulaire de la sphère, supposeraient l'application d'une formule du type (II.14b), et par conséquent un enregistrement stroboscopique de la trajectoire du contrepoids, effectué simultanément à celui de la trajectoire de la sphère. Compte tenu de la distance horizontale séparant ces deux trajectoires, il en résulterait plusieurs difficultés expérimentales, dont en particulier une perte de précision de l'image puisque le champ devrait être fortement élargi.

Ces différentes remarques nous conduisent à nous limiter à l'exploitation de portions de trajectoires rectilignes uniformes : on est alors en régime permanent, les vitesses de translation et de rotation ayant atteint leurs valeurs limites.

#### Exploitation d'une trajectoire rectiligne uniforme :

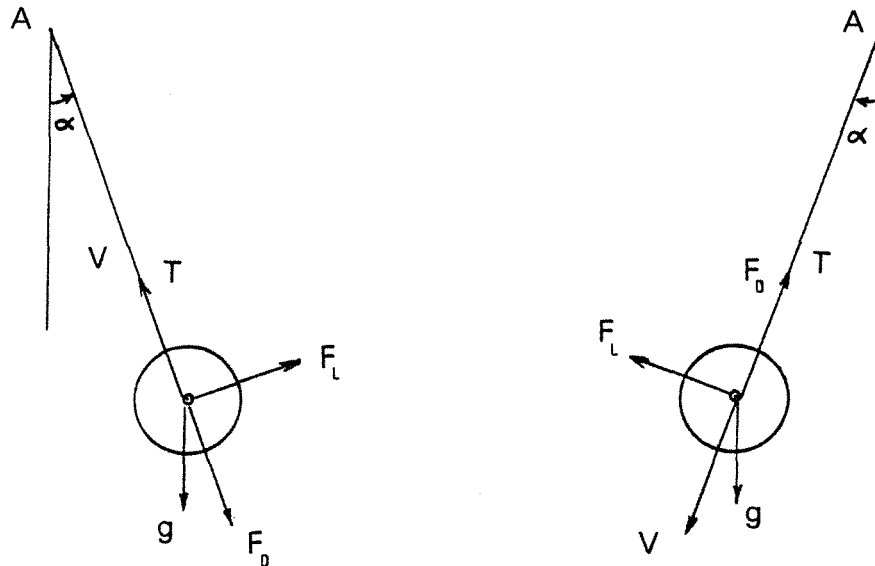
Si une telle portion de trajectoire existe, elle sera inclinée, sous l'effet de la force de portance, d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale, cet angle étant lié aux coordonnées  $x$  et  $y$  par :

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{II.15})$$

La direction d'inclinaison  $\alpha$  sera également celle des fils de suspension, ce qui signifie que dans ce cas la tension  $T$  est alignée avec le vecteur vitesse de la sphère, et par conséquent avec la traînée. La figure II.3 nous montre les deux configurations possibles, selon que la trajectoire est ascendante ou descendante.

*Trajectoire ascendante*

*Trajectoire descendante*



**Figure II.3** : Configurations possibles pour une trajectoire rectiligne uniforme

Dans ce cas, un bilan de forces élémentaire conduit aux égalités suivantes, qu'on pourrait aussi obtenir par simplification des équations (II.9) à (II.12) :

$$C_L = \frac{2 m g \sin \alpha}{\rho \pi V_R^2 a^2} \quad (\text{II.16})$$

$$C_{mv} = \frac{2 T a_e}{\rho \pi V_R^2 a^3} \quad (\text{II.17})$$

On constate donc que le coefficient de portance peut se déduire directement des mesures de l'angle  $\alpha$  et de la vitesse  $V_R$ , mais ne nécessite pas la connaissance de la tension.

Par contre, le coefficient de couple fait intervenir la tension  $T$ , qui, comme on l'a signalé plus haut, ne peut être connue avec une précision suffisante. Il en est de même du coefficient de traînée  $C_D$ , dont l'expression est la suivante quel que soit le sens de la trajectoire :

$$C_D = \frac{2 |T - m_A g \cos\alpha|}{\rho \pi V_R^2 a^2} \quad (\text{II.18})$$

avec :

$$T > m_A g \cos\alpha \quad \text{en trajectoire ascendante}$$

$$T < m_A g \cos\alpha \quad \text{en trajectoire descendante}$$

Pour résoudre le problème de la mauvaise connaissance de la tension, et pour éliminer toute incertitude liée au frottement fil/poulie ou au frottement des poulies sur leur axe, il est indispensable de procéder à l'enregistrement de deux trajectoires successives pour un même essai, l'une "sans rotation", l'autre "avec rotation" (toutes conditions égales par ailleurs). La trajectoire "sans rotation" est évidemment verticale, et l'on peut, après avoir mesuré la vitesse (égale dans ce cas à celle du contrepoids), calculer la traînée par l'une des corrélations proposées au chapitre précédent (celle de Morsi & Alexander par exemple). La tension s'en déduit immédiatement. On peut, à partir de là, envisager deux solutions pour approcher au mieux la tension existant dans la trajectoire "avec rotation" :

-admettre que la tension est la même que dans la trajectoire "sans rotation", et utiliser cette valeur pour le calcul des coefficients de traînée et de couple d'après (II.17) et (II.18). Ceci suppose que les frottements au niveau de la poulie soient strictement inchangés entre les deux enregistrements.

-on a montré, dans la revue bibliographique du chapitre précédent, que le coefficient de traînée est très peu influencé par la rotation : on peut donc admettre que ce coefficient obéit toujours à la formule de Morsi & Alexander (I.51), et en déduire la tension d'après (II.18), puis le coefficient de couple d'après (II.17).



Nous verrons plus loin les différences occasionnées par le choix de l'une ou l'autre de ces deux solutions. Rappelons cependant que ce choix n'influe en rien sur la valeur du coefficient de portance, qui reste notre objectif principal. On peut remarquer que dans la deuxième solution, l'enregistrement d'une trajectoire "sans rotation" reste nécessaire car il permet, lors du dépouillement, la détermination de l'échelle des photographies.

L'équation (II.13), permettant la détermination de la vitesse de rotation, reste bien entendu inchangée. Il est donc nécessaire, pour connaître  $\omega$ , de mesurer la vitesse du contrepoids, ce qui est relativement aisé en régime permanent. La connaissance de la vitesse de rotation est évidemment indispensable, ne serait-ce que pour faire correspondre chaque résultat obtenu à un taux de rotation adimensionnel  $\gamma$  ou à un nombre de Reynolds de rotation  $Re_{\omega}$ , dont nous rappelons ici les définitions :

$$\gamma = \frac{2\omega a}{V_R} \quad (II.19)$$

$$Re_{\omega} = \frac{\omega a^2}{\nu} = \frac{\gamma}{4} Re_P \quad (II.20)$$

Il peut être intéressant aussi de calculer le coefficient de couple  $C_{m\omega}$  basé sur la vitesse de rotation, défini par (I.3b), et lié à  $C_{mv}$  par :

$$C_{m\omega} = \frac{4}{\gamma^2} C_{mv} \quad (II.21)$$

Il nous reste, avant de clore ce paragraphe, à examiner les avantages ou inconvénients de chaque type de trajectoire, ascendante ou descendante. Un premier argument découle de l'examen de la relation (II.18), qui montre que pour une même sphère et à même vitesse (donc au même nombre de Reynolds), la tension nécessaire est plus grande pour un mouvement ascendant : il en résulte un couple supérieur, et donc une vitesse de rotation supérieure, entraînant une portance plus grande qu'en trajectoire descendante. Par conséquent, à même nombre de Reynolds, l'angle  $\alpha$  de la trajectoire avec la verticale est plus grand en mouvement ascendant qu'en mouvement descendant. Cette première conclusion milite en faveur de la trajectoire ascendante, puisqu'elle

se traduit par une meilleure précision relative sur les résultats. En contrepartie, on peut prévoir que ce choix ne nous permettra pas d'explorer la gamme des faibles vitesses de rotation.

A ce premier argument se rajoutent d'autres raisons qui nous ont fait finalement choisir de limiter notre étude à l'examen de trajectoires ascendantes, en particulier le fait que de telles trajectoires passent obligatoirement par un point fixe, qui est le point A de la figure II.2, ce qui constitue un avantage pour la détermination de l'angle  $\alpha$  comme nous le verrons dans le chapitre qui suit. Le problème qui subsiste est de savoir si, dans la gamme de nombres de Reynolds qui nous intéresse, les vitesses limites pourront être atteintes assez rapidement pour qu'une portion de trajectoire rectiligne ou quasi-rectiligne existe effectivement. C'est là le but des calculs préliminaires de trajectoires que nous présentons ci-dessous.

### II.3.2. Exemples de trajectoires calculées

Il est possible, en se donnant les coefficients hydrodynamiques  $C_D$ ,  $C_L$  et  $C_{mv}$  (ou  $C_{m\omega}$ ), de résoudre le système formé par les équations (II.9) à (II.12) pour obtenir une trajectoire "supposée" de la sphère. Le but de ce calcul, dont quelques exemples de résultats ont été présentés par Oesterlé (1988), est essentiellement de conduire à une prévision des ordres de grandeur de vitesses de translation et de rotation, ainsi que de l'existence possible d'une zone où le mouvement puisse être considéré comme rectiligne uniforme.

Le calcul est basé sur l'intégration numérique des équations du mouvement de la sphère par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, en se donnant, pour les coefficients de traînée, de portance et de couple, des expressions basées sur l'étude bibliographique du chapitre I : ainsi le coefficient de traînée  $C_D$ , dont on sait qu'il dépend peu de la rotation, est supposé obéir à la corrélation de Morsi & Alexander (I.51), alors que le coefficient de couple  $C_{m\omega}$  est supposé donné par la formule (I.27), correspondant au couple de Stokes, dont on sait qu'elle peut s'appliquer jusqu'aux valeurs de  $Re_\omega$  de l'ordre de la dizaine.

Pour la portance, dont la valeur est connue par les travaux de Rubinow & Keller (1961) aux très petits  $Re_p$ , et par ceux de Tsuji *et al.* (1985) aux nombres de Reynolds de l'ordre de 1000, nous avons utilisé pour cette étude préliminaire une relation de la forme suivante, analogue à (I.54) :

$$C_L = k \gamma \quad (II.22)$$

où  $k$  est un coefficient que nous avons fait varier dans nos essais de prédiction de trajectoires. Rappelons que la formule théorique de Rubinow & Keller correspond à  $k = 1$ , alors que nous avons indiqué, dans le chapitre précédent, que les résultats expérimentaux de Tsuji correspondent à  $k \cong 0,2$ .

Nous présentons, pages suivantes, des exemples de trajectoires calculées par cette méthode. Ces simulations de trajectoires correspondent aux données suivantes :

$$m = 40,72 \text{ g}, \quad a = 15,1 \text{ mm}, \quad a_e = 0,5 \text{ mm}, \quad \mu = 0,07 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

Intervalle de temps entre deux marques : 1 s

Les figures, qui indiquent également l'évolution de la vitesse de rotation, mettent clairement en évidence une stabilisation rapide de celle-ci. Cependant, on constate que cette valeur limite de  $\omega$  ne correspond pas obligatoirement à une trajectoire rectiligne uniforme, ce qui signifie que la vitesse limite de translation n'est pas atteinte aussi rapidement que la vitesse limite de rotation.

Les résultats montrent qu'on obtient des trajectoires rectilignes uniformes pour des masses du contrepoids assez faibles. Par contre, lorsque la masse du contrepoids est plus grande, on remarque que la trajectoire ne peut être assimilée à une droite que sur une portion beaucoup plus courte, la vitesse de rotation étant toutefois pratiquement constante sur la majeure partie du trajet.

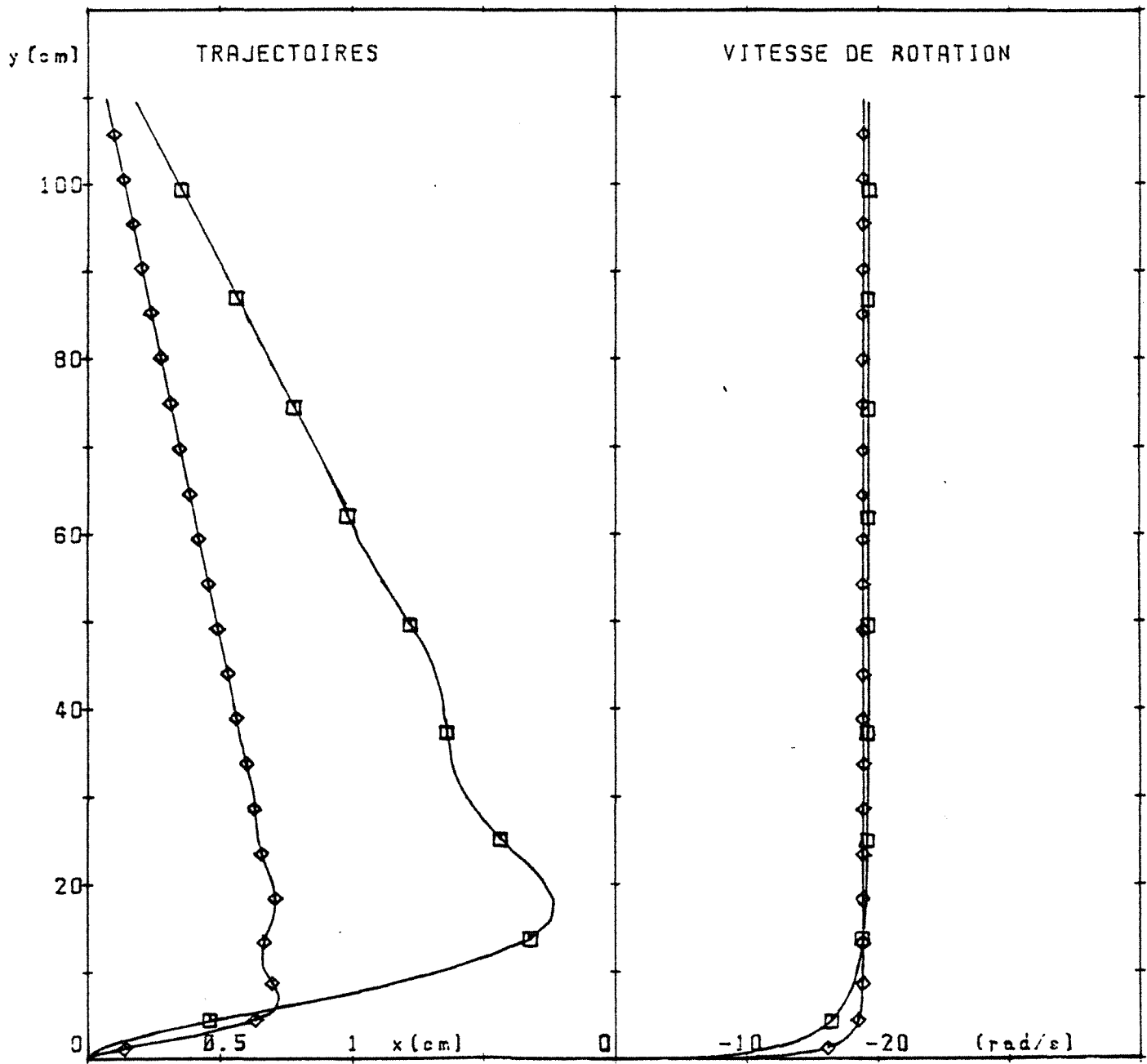
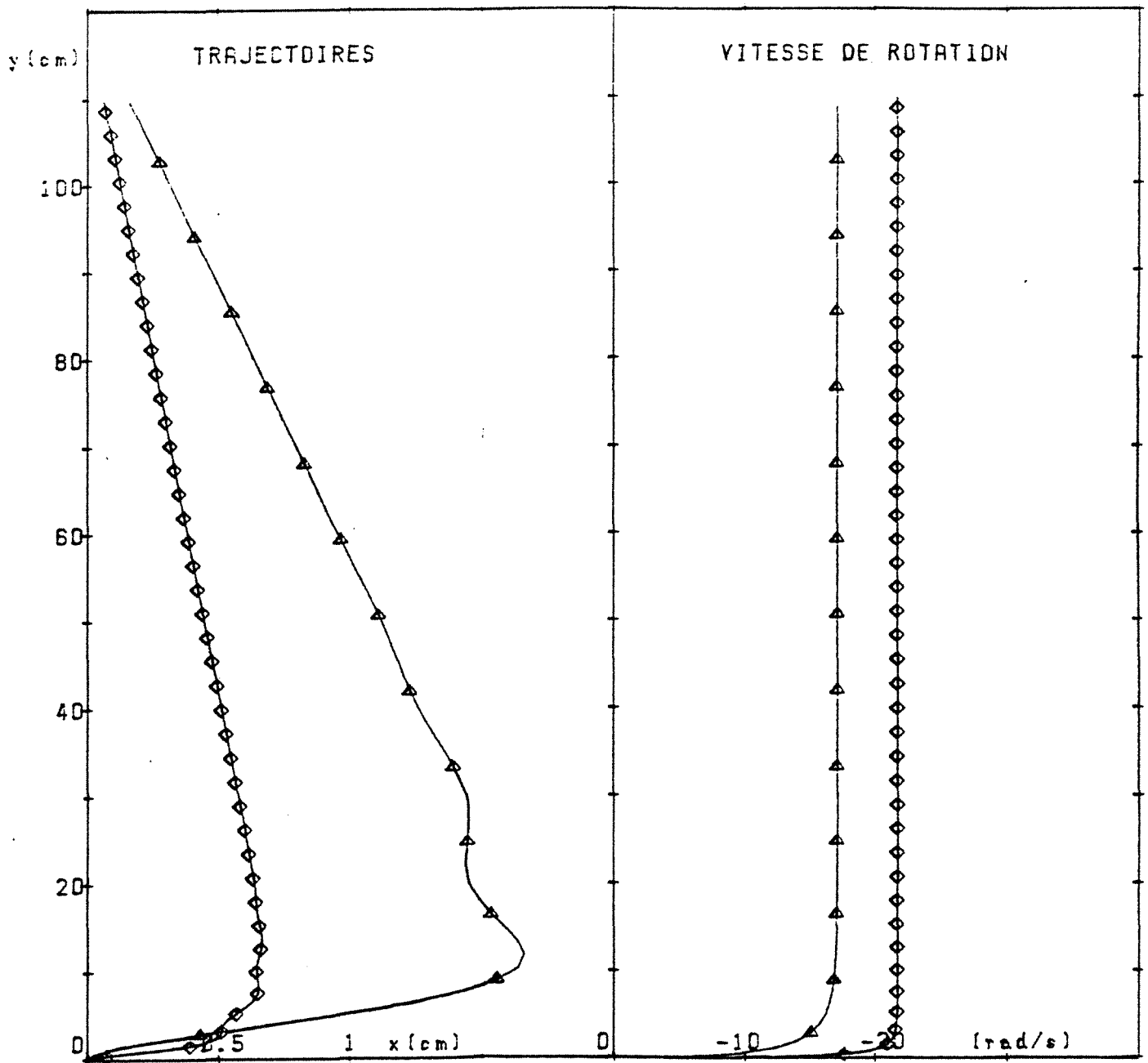


Figure II.4 : Exemples de trajectoires calculées ( $k = 0,2$ )

$m_c = 28$  g,

$m_c = 28,6$  g



**Figure II.5** : Exemples de trajectoires calculées ( $k = 0,3$ )

$m_c = 27,84$  g

$m_c = 28,3$  g

#### II.4. CORRECTIONS DUES AUX AXES

Dans la méthode expérimentale que nous proposons, la sphère est munie de deux axes de faible diamètre, ce qui rend nécessaire une correction qui peut néanmoins être importante. En effet, les composantes de force et le couple déduits de l'exploitation d'une trajectoire concernent le solide formé de la sphère et des deux axes cylindriques prolongeant un de ses diamètres. Pour évaluer les corrections à apporter aux résultats bruts pour obtenir les coefficients hydrodynamiques relatifs à la sphère seule, nous négligerons l'interaction sphère-cylindre au niveau de "l'emplanture" des axes, compte tenu du faible diamètre de ceux-ci par rapport à leur longueur. Nous considérerons donc que les actions hydrodynamiques sur le système sphère-cylindre sont égales aux sommes des actions sur la sphère et des actions sur les deux cylindres, soit :

$$F_{D \text{ tot}} = F_{D \text{ sph}} + F_{D \text{ cyl}} \quad (\text{II.23})$$

$$F_{L \text{ tot}} = F_{L \text{ sph}} + F_{L \text{ cyl}} \quad (\text{II.24})$$

$$M_{\text{tot}} = M_{\text{sph}} + M_{\text{cyl}} \quad (\text{II.25})$$

La traînée, la portance et le couple s'exerçant sur les axes cylindriques peuvent être estimés en se basant sur les résultats de la littérature. L'écoulement autour d'un cylindre à grand nombre de Reynolds a été étudié par Moore (1957). Aux faibles nombres de Reynolds, on peut se référer aux travaux de Ta Phuoc Loc (1975), d'Ingham (1983) et d'Ingham & Tang (1990), qui ont calculé numériquement, par différentes méthodes, l'écoulement autour d'un cylindre en translation et rotation simultanées pour deux valeurs du nombre de Reynolds du cylindre,  $Re_c = 5$  et  $Re_c = 20$ , et pour un taux de rotation adimensionnel  $\gamma_c$  compris entre 0 et 0,5 pour les deux premiers, entre 0 et 3 pour Ingham & Tang.

Ces deux nombres sans dimensions sont définis par :

$$Re_c = \frac{2 a_c V_R}{\nu} \quad (II.26)$$

$$\gamma_c = \frac{a_c \omega}{V_R} \quad (II.27)$$

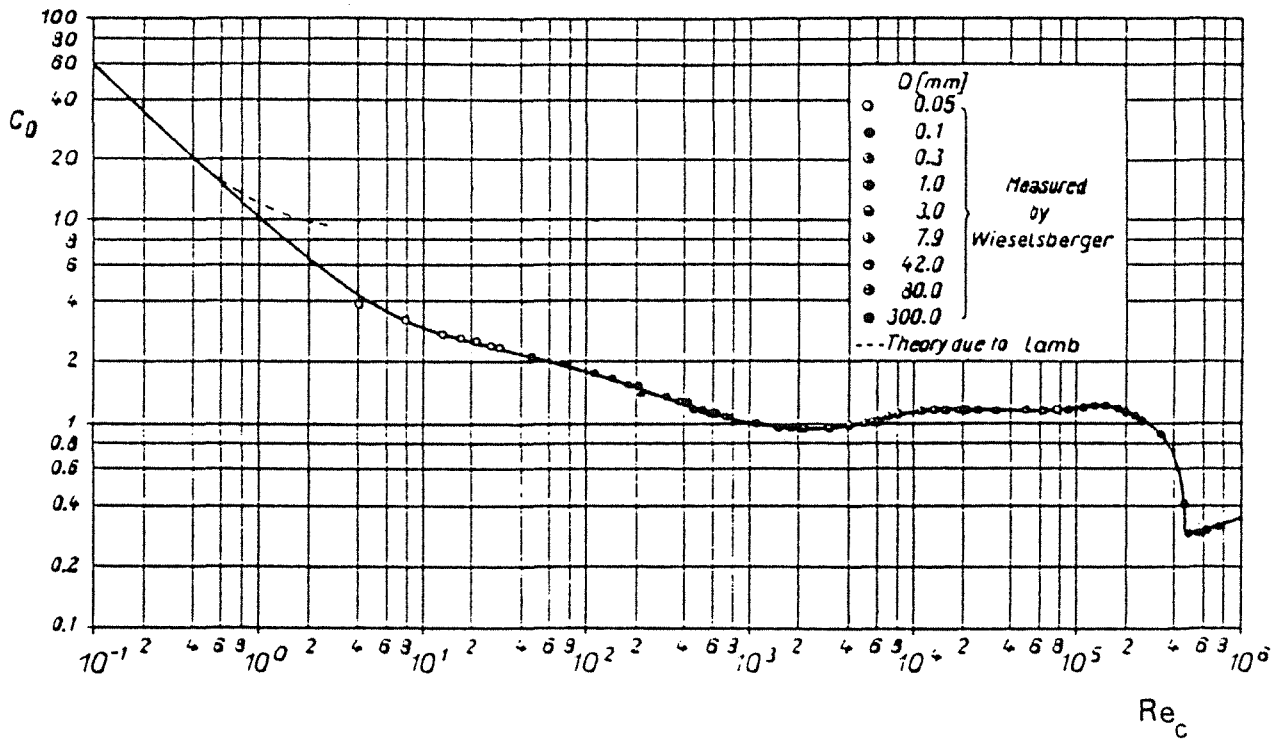
(le taux de rotation adimensionnel ainsi défini est donc basé sur le rayon et non pas sur le diamètre).

Dans notre cas, les vitesses de translation et de rotation du cylindre sont les mêmes que ceux de la sphère. Pour celle-ci, les nombres de Reynolds prévus appartiennent à la gamme 10 à 100, les taux de rotation adimensionnels  $\gamma$  devant se situer entre 1 et 10. En se basant sur un rapport des rayons  $a_c/a$  d'environ 1/20, on peut en déduire que le nombre de Reynolds  $Re_c$  sera de l'ordre de 0,5 à 5, et la rotation réduite  $\gamma_c$  de l'ordre de 0,1. Pour des valeurs aussi faibles de  $\gamma_c$ , les travaux cités ci-dessus montrent que le coefficient de traînée n'est pas influencé par la rotation : le calcul d'Ingham & Tang (1990) montre que l'erreur faite en adoptant la valeur de  $C_D$  du cylindre sans rotation est nettement inférieure à  $10^{-3}$ . En conséquence, nous effectuerons la correction sur la traînée en déduisant  $C_{D \text{ cyl}}$  de la courbe "standard" du cylindre, que l'on peut trouver par exemple dans Schlichting (1960), et que nous donnons ci-après (figure II.6).

Ce coefficient de traînée est défini par :

$$C_{D \text{ cyl}} = \frac{F_{D \text{ cyl}}}{\rho V_R^2 a_c \ell} \quad (II.28)$$

où  $\ell$  est la longueur du cylindre (longueur totale des deux demi-axes dans notre cas).



**Figure II.6** : Coefficient de traînée du cylindre  
(d'après Schlichting 1960)

La traînée totale à prendre en compte pour le calcul de la tension des fils, du moins dans le cas où l'on adopte la solution consistant à calculer la tension d'après (II.18), correspond alors au coefficient global suivant :

$$C_{D \text{ tot}} = C_{D \text{ sph}} + C_{D \text{ cyl}} \frac{2a \ell}{\pi a^2} \quad (\text{II.29})$$

le coefficient  $C_{D \text{ sph}}$  étant ici supposé connu (obtenu par la formule de Morsi & Alexander).

Quant au coefficient de couple, défini par

$$C_{m \text{ cyl}} = \frac{M_{\text{cyl}}}{4\pi\mu a^2 \ell \omega} \quad (\text{II.30})$$



il s'avère, selon Ingham (1983), pratiquement constant et égal à 1 quel que soit  $\gamma_c$  (ce qui revient à dire que le couple n'est pas influencé par la translation).

Les coefficients de couple de la sphère peuvent donc s'écrire après correction, compte tenu de (II.25) :

$$C_{mv \text{ sph}} = C_{mv \text{ tot}} - \frac{8\mu_c^2 \ell \omega}{\rho a^3 V_R^2} \quad (\text{II.31})$$

$$C_{m\omega \text{ sph}} = C_{m\omega \text{ tot}} - \frac{8\mu_c^2 \ell}{\rho a^5 \omega} \quad (\text{II.32})$$

Le coefficient de portance calculé par Ingham pour le cylindre est défini de la façon suivante :

$$C_{L \text{ cyl}} = \frac{F_{L \text{ cyl}}}{\rho V_R^2 a \ell} \quad (\text{II.33})$$

Cette définition, associée à la relation (II.24), conduit à l'expression du coefficient de portance de la sphère après correction :

$$C_{L \text{ sph}} = C_{L \text{ tot}} - C_{L \text{ cyl}} \frac{2a \ell}{\pi a^2} \quad (\text{II.34})$$

Dans son article de 1983, Ingham a examiné l'influence des conditions aux limites "à l'infini" sur les valeurs des coefficients obtenus par calcul numérique de l'écoulement autour du cylindre en rotation. Dans les trois problèmes, le coefficient de portance est approximativement proportionnel à  $\gamma_c$ , celui-ci étant compris entre 0 et 0,5. Un calcul plus précis, à l'aide d'une nouvelle technique numérique basée en particulier sur l'utilisation de conditions aux limites exactes à l'infini, a conduit Ingham & Tang (1990) à proposer l'expression suivante pour le coefficient de portance du cylindre, au nombre de Reynolds  $Re_c = 5$  :

$$C_{L \text{ cyl}} \approx 2,77 \gamma_c \quad (\text{II.35})$$

Pour  $Re_c = 20$ , le coefficient de proportionnalité calculé par Ingham & Tang est de 2,54 au lieu de 2,77. L'influence du nombre de Reynolds est donc relativement faible. En l'absence d'autres résultats connus, et compte tenu des valeurs de  $Re_c$  qu'on peut attendre dans nos expériences (de l'ordre de 0,5 à 5 comme indiqué plus haut), nous adopterons cette relation (II.35) afin d'obtenir la meilleure estimation possible du coefficient de portance de la sphère grâce à (II.34).

Une estimation de l'importance des différentes corrections est possible, en se basant sur les diamètres de sphères et d'axes utilisés dans nos expériences (voir chapitre III). On peut ainsi montrer que :

- le couple exercé par le fluide sur les axes cylindriques ne représente que 0,1 à 0,8 % du couple total.
- la traînée des axes est par contre relativement importante, puisqu'elle peut être du même ordre que la traînée de la sphère seule. La correction correspondante, donnée par (II.29), influe directement sur le calcul de la tension des fils, et donc sur l'estimation du couple.
- le rapport entre la portance des axes cylindriques et la portance totale est compris entre 6 % et 14 %. Si l'on estime à 10 % l'erreur que l'on peut faire en calculant la portance du cylindre par (II.35), il en résultera donc une incertitude sur la portance de la sphère de l'ordre de 1 %, due uniquement à cette correction indispensable, et qu'il faudra ajouter aux incertitudes dues aux mesures, que nous tenterons de chiffrer dans le prochain chapitre.

## CONCLUSION DU CHAPITRE II

Dans ce chapitre, on a proposé une technique expérimentale qui nous permet d'obtenir les conditions nécessaires pour exploiter la zone des nombres de Reynolds intermédiaires qui nous intéressent. Outre le fait qu'elle rend possible la détermination des actions hydrodynamiques en régime permanent, la solution envisagée présente les avantages suivants :

- d'une part, la vitesse de rotation est liée directement aux vitesses de translation de la sphère et du contrepoids, facilement mesurables.
- d'autre part, on peut maîtriser ces vitesses grâce à la modification de données simples telles que la masse de la sphère, celle du contrepoids, ou le diamètre de l'axe d'enroulement.

On peut ainsi faire varier dans les limites désirées les paramètres adimensionnels fondamentaux que sont le nombre de Reynolds  $Re_p$  et le taux de rotation réduit  $\gamma$ . De plus on peut constater que la technique proposée permet à la fois la mesure de la portance et du couple sur la sphère en mouvement de translation et rotation simultanées.

Les résultats concernant la relation existant entre le coefficient de portance et la rotation réduite  $\gamma$  pourront être comparés à la théorie de Rubinow & Keller (1961) d'une part, aux expériences de Barkla & Auchterlonie (1971) ou de Tsuji *et al.* (1985) d'autre part.

Quant au coefficient de couple, on pourra le comparer aux résultats de Dennis & al (1980), qui a calculé ce coefficient dans le cas d'une sphère en rotation dans un fluide au repos, dans une gamme de nombres de Reynolds  $Re_\omega$  du même ordre que les nôtres. Il serait intéressant d'observer l'influence de la translation sur ce coefficient de couple.

L'étude préliminaire exposée dans ce chapitre nous permet de prévoir une meilleure précision sur la portance que sur le couple, car la première s'obtient indépendamment de la tension des fils de suspension, qui n'est pas précisément connue. On a également décrit le moyen de tenir compte de la présence des axes par une correction à apporter aux résultats bruts portant sur le solide complet sphère/axes.

## INSTALLATION EXPERIMENTALE ET EXPLOITATION

### III.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons en détail l'installation expérimentale, ainsi que la technique d'enregistrement et d'exploitation de la trajectoire ascendante de la sphère.

Nous décrirons également la méthode utilisée pour la détermination la plus précise possible de l'angle de la trajectoire rectiligne par rapport à la verticale, cette mesure de l'angle conditionnant l'obtention des forces exercées par le fluide sur la sphère et des coefficients hydrodynamiques correspondants. Cette exploitation des trajectoires a été effectuée sur une table à digitaliser reliée à un micro-ordinateur.

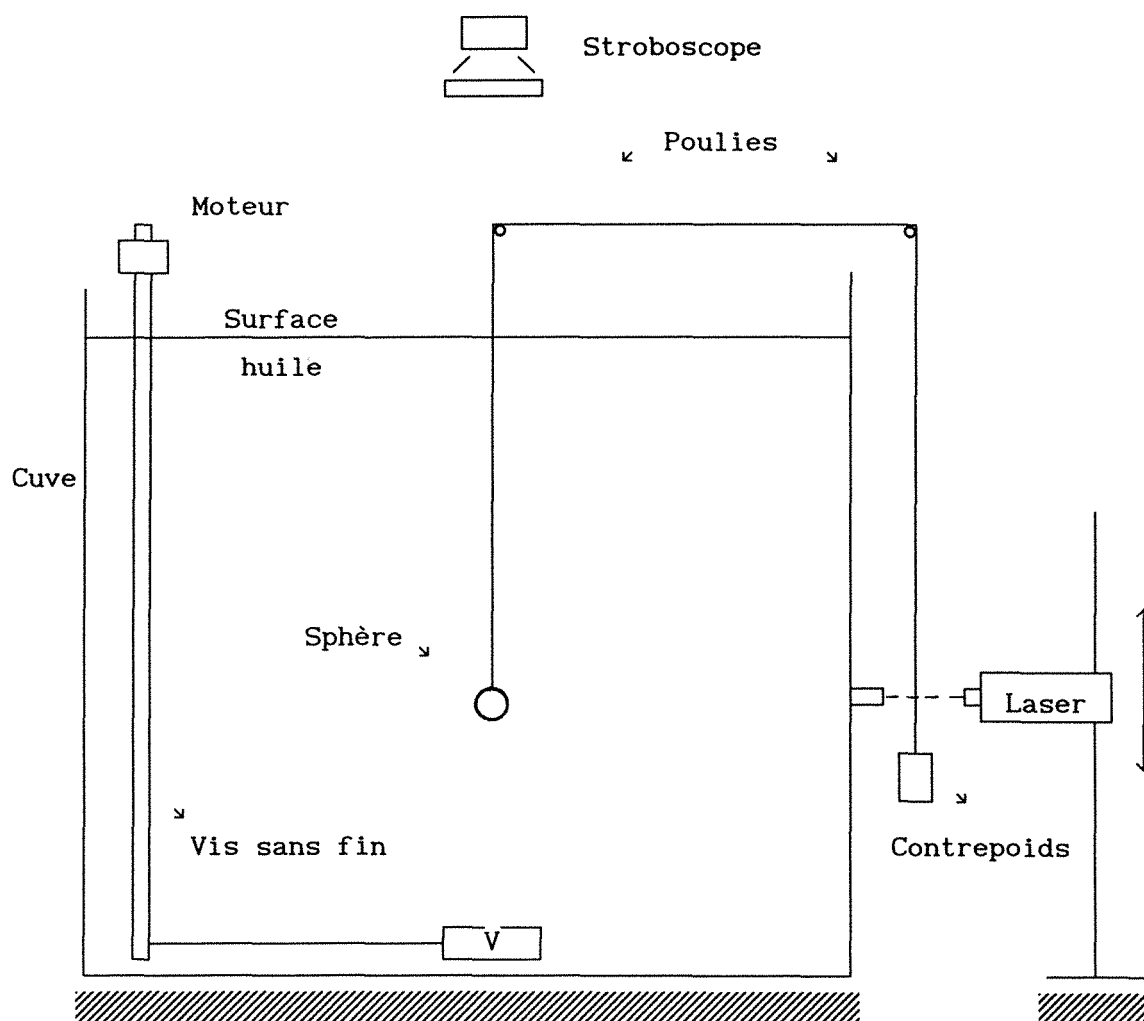
La vitesse de translation de la sphère a été obtenue par ce même moyen, à partir des trajectoires enregistrées sous éclairage stroboscopique. La détermination de la vitesse de rotation de la sphère nécessite une mesure simultanée de la vitesse du contrepoids.

On abordera aussi les différences existant entre les deux solutions proposées au chapitre précédent, concernant le calcul des coefficients. Les deux solutions diffèrent par le mode de calcul de la tension des fils  $T$  : rappelons que la solution consistant à supposer la tension identique lors de deux enregistrements successifs (sans

rotation et avec rotation) permet une mesure du coefficient de traînée  $C_D$ , mais avec une forte incertitude se répercutant sur le couple, alors que la solution consistant à supposer  $C_D$  connu doit conduire à une meilleure estimation de la tension et donc du couple.

### III.2. DESCRIPTION DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

L'installation expérimentale est schématisée par la figure III.1 ci-dessous.



**Figure III.1** : Schéma de l'installation expérimentale

L'installation expérimentale se compose :

- D'une cuve parallélépipédique, dont une paroi est transparente (pour la prise des photographies), à base carrée (1 m de côté) et de 1,2 m de profondeur. Cette cuve est remplie d'un liquide visqueux (en l'occurrence une huile d'arachide dont les caractéristiques seront indiquées dans le chapitre IV). La figure III.4 donne les détails de cette cuve, dont les caractéristiques seront décrites plus loin.
- D'un support destiné à recevoir la sphère munie de ses axes, et à positionner correctement l'ensemble avant sa libération. Ce support est représenté par la figure III.2. Il comprend un mécanisme de blocage de la sphère en position, permettant, par traction sur un fil, une libération la plus douce possible du mobile.
- D'un dispositif motorisé, à vis sans fin, permettant d'amener la sphère au fond de la cuve, de l'y maintenir et de ne la libérer qu'au moment de la mesure.
- D'un système de deux paires de poulies, montées sur pivots de façon à minimiser les frottements, et recevant les fils en nylon (diamètre de 0,08 à 0,18 mm) reliant l'équipage mobile et le contrepoids.
- D'un contrepoids constitué d'un godet de hauteur 49,6 mm, contenant les masselottes préalablement étalonnées.
- D'un laser de faible puissance (5 mW), dont le faisceau est coupé par le contrepoids au moment de son passage. La durée de cette coupure est mesurée grâce à une photodiode associée à un ensemble électronique permettant l'affichage du temps de passage du godet, et par conséquent la détermination de la vitesse du contrepoids  $V_c$ . Ce laser peut être déplacé verticalement en fonction de la mesure à effectuer : "Sans Rotation" ou "Avec Rotation" de la sphère. Ceci permet d'assurer une mesure de  $V_c$  dans la zone où le mouvement de la sphère est effectivement rectiligne uniforme, et où la vitesse du contrepoids est donc constante. La distance entre les deux

positions verticales du laser est d'environ 25 cm, ce qui correspond à la longueur du fil enroulé sur les axes pour l'essai "Avec Rotation".

- D'une lampe stroboscopique, éclairant la sphère par des flashes à fréquence réglable (qui a été fixée à environ 10 flashes par seconde dans nos essais). Cette lampe est placée au-dessus de la cuve, son éclairage étant dirigé vers le bas. Chaque trajectoire se matérialisera donc par une succession de points lumineux dus à la réflexion de la lumière sur la surface de la sphère, soigneusement polie.
- D'un appareil photographique Asahi Pentax, format 6x7 (réglé sur pause), destiné à enregistrer la trajectoire ascensionnelle de la sphère. La distance entre l'appareil photographique et la sphère est d'environ 3m.
- D'un ensemble de sphères de dimensions et masses volumiques variées, munies d'un axe d'enroulement se prolongeant de part et d'autre. La figure III.3 montre les différentes sphères utilisées, ainsi que les masselottes étalonnées permettant de constituer le contrepoids.

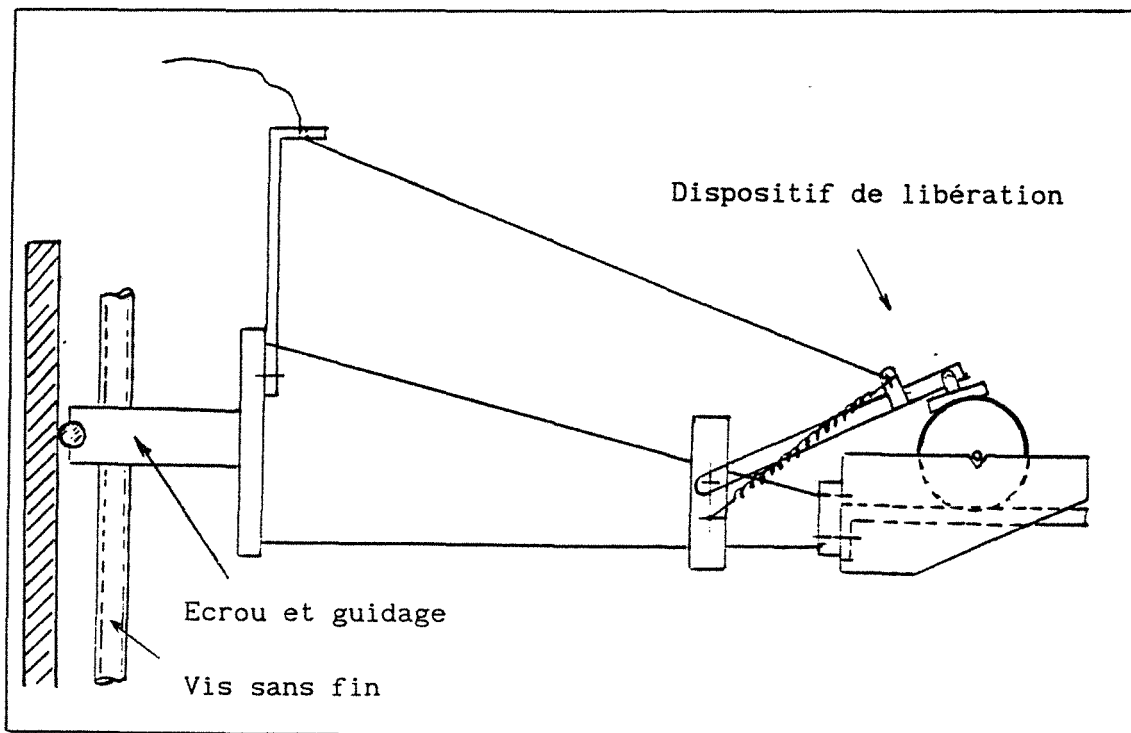


Figure III.2 : Schéma du support recevant la sphère munie de ses axes



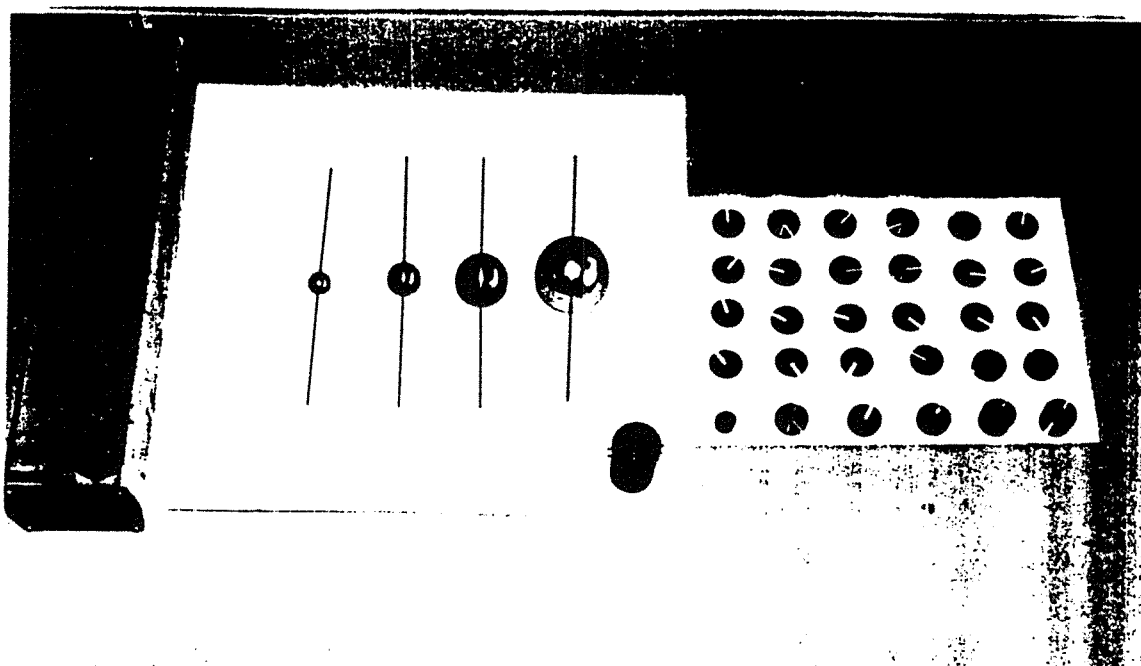


Figure III.3 : Ensemble des sphères et masselottes utilisées

On peut compléter cette description en donnant les caractéristiques principales de la cuve :

- les trois façades latérales et le fond sont en PVC gris, d'épaisseur 15 mm, assemblés par soudage.
- la façade avant est en méthacrylate transparent, d'épaisseur 20mm, l'étanchéité étant assurée par vis de serrage et joint en silicone.
- le tout est supporté par un châssis en acier en U de 80mm de largeur.
- enfin, la cuve est ceinturée par de la cornière d'acier de 30mm.

La figure III.4, page suivante, illustre les détails de réalisation de cette cuve, dont une vue photographique est donnée par la figure III.5. Précisons enfin que l'espace de travail (soit une surface au sol approximative de  $2 \times 5$  m) est entouré de rideaux occultants permettant la prise de photographies en l'absence de lumière parasite.

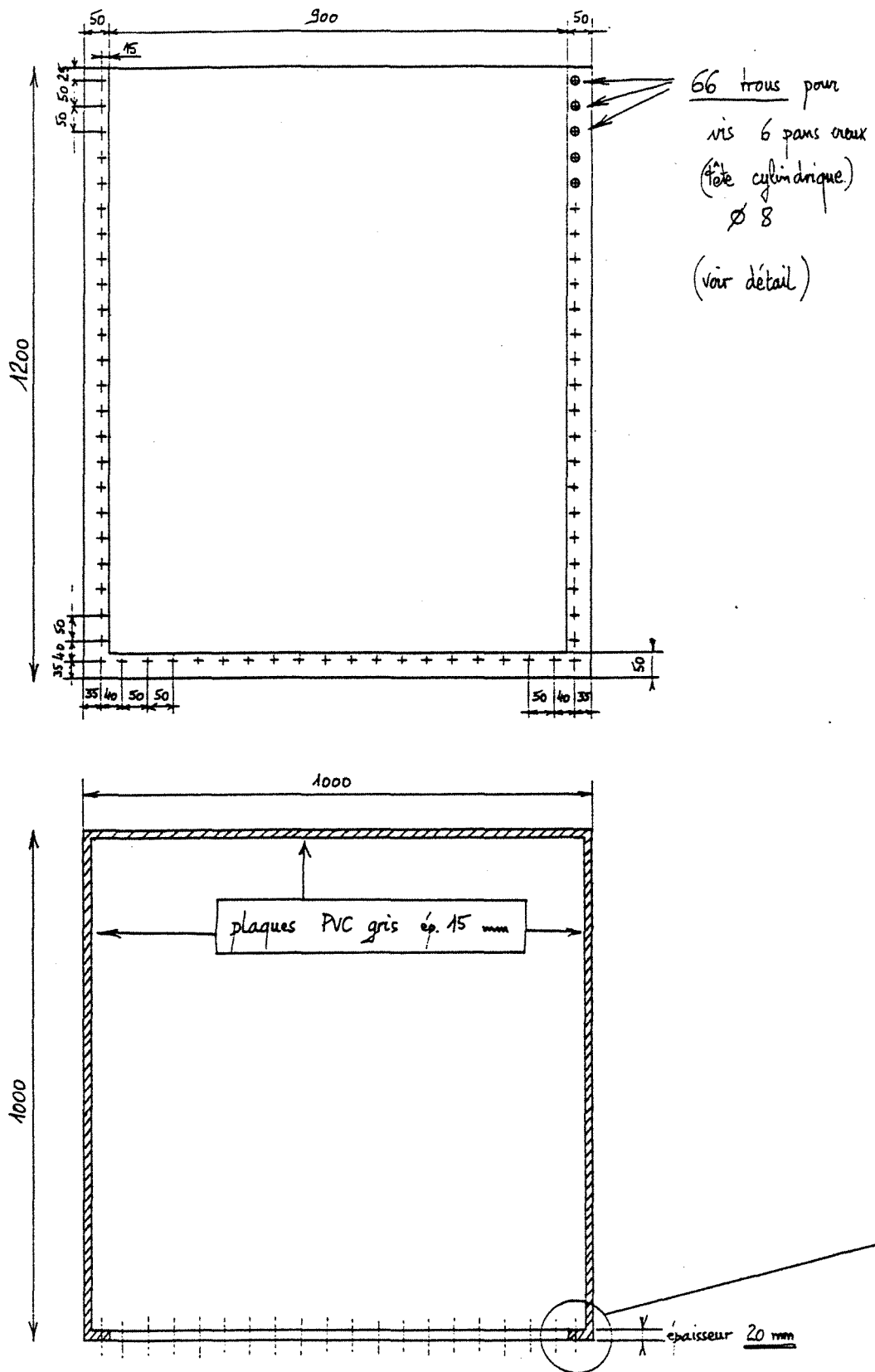


Figure III.4a : Plans de la cuve.

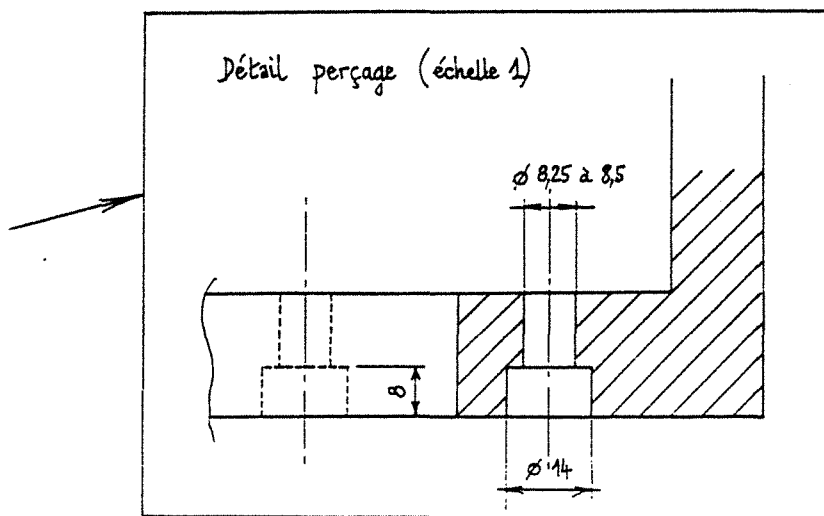
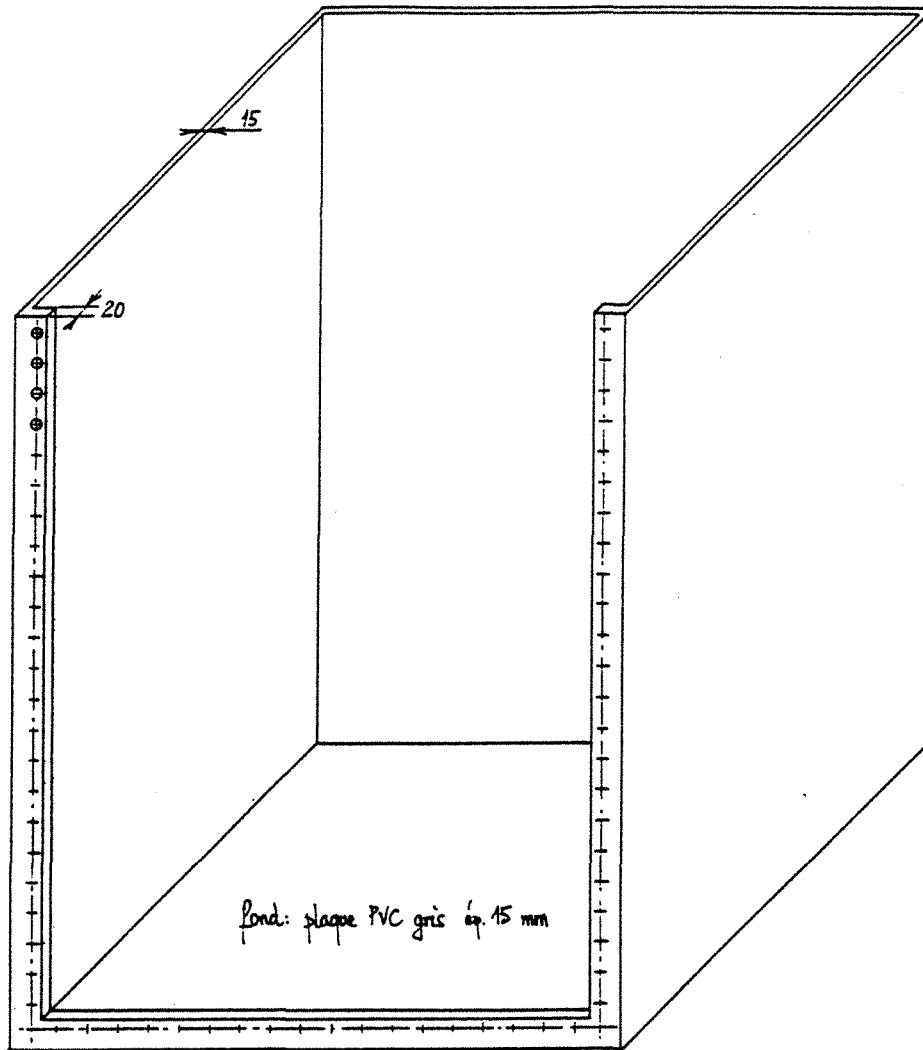


Figure III.4b : Plans de la cuve.

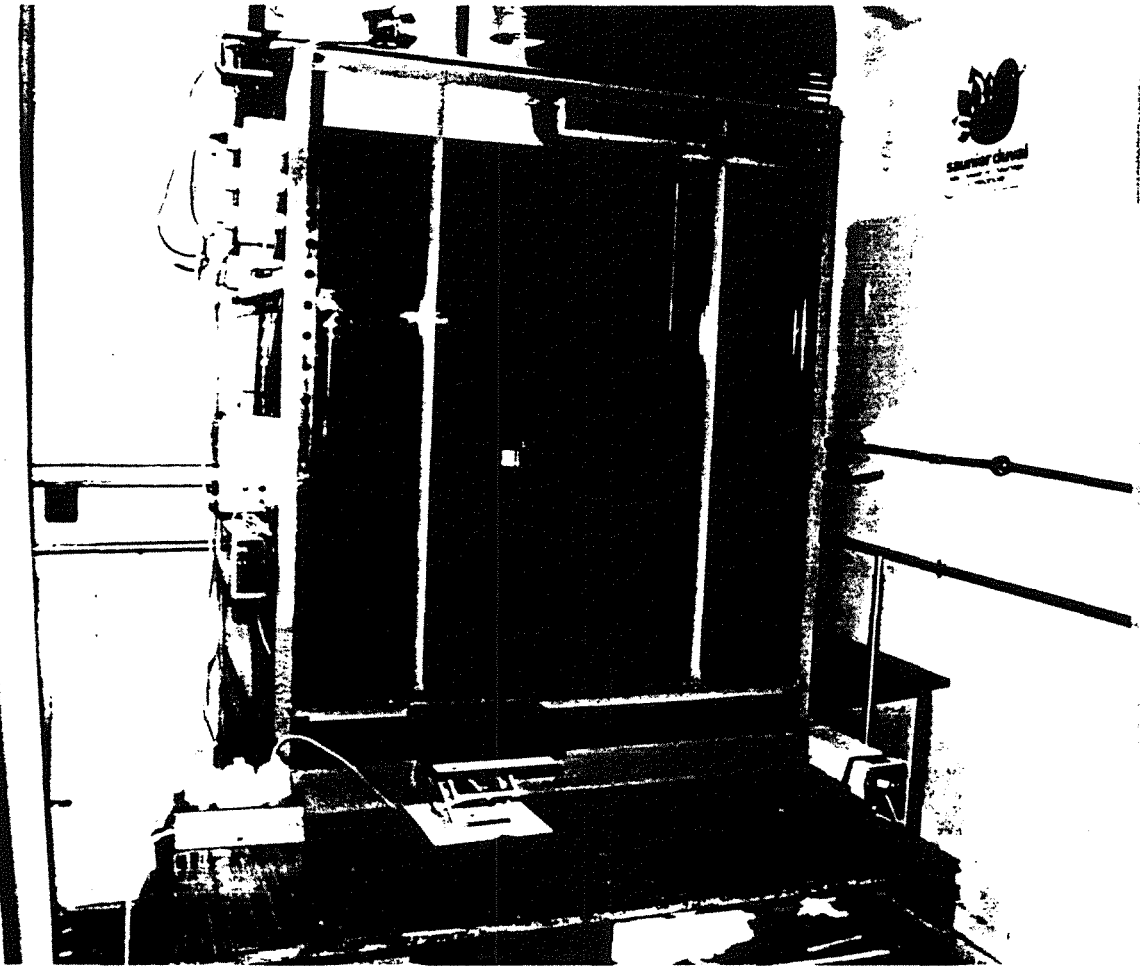


Figure III.5 : Vue d'ensemble de l'installation expérimentale

### III.3. PROCEDURE D'ENREGISTREMENT D'UNE TRAJECTOIRE

L'étude préliminaire du chapitre précédent nous a montré que la technique expérimentale choisie rend nécessaire l'enregistrement successif des trajectoires ascendantes de la sphère dans deux cas, avec les mêmes paramètres de la sphère et du contrepoids (que nous détaillerons dans la partie suivante) :

- + une trajectoire "Sans Rotation", désignée dans la suite par S.R.
- + une trajectoire "Avec Rotation", désignée dans la suite par A.R.

La trajectoire A.R. s'obtient en créant un enroulement préalable des fils de suspension sur les axes, en veillant à ce que les spires ainsi créées soient bien jointives et ne se chevauchent pas, afin d'éviter d'éventuelles irrégularités dans la trajectoire.

Après toutes les préparations, l'enregistrement d'une trajectoire a été réalisé en respectant la procédure suivante :

- Allumage du stroboscope (quelques instants avant de procéder à l'enregistrement photographique afin que sa fréquence soit stabilisée).
- Mesure de la température de l'huile dans la cuve (afin de connaître la viscosité, nécessaire au calcul du nombre de Reynolds).
- Descente de la sphère au fond de la cuve (grâce au dispositif de translation verticale du support).
- Attente jusqu'à stabilisation de l'huile, afin de limiter au maximum l'effet des courants de convection résiduels.
- Mise en position du laser : position basse pour le cas S.R., position plus haute pour le cas A.R., l'objectif étant de mesurer la vitesse du contrepoids au moment correspondant à la prise de photographie de la zone rectiligne de la trajectoire.

- Déclenchement de l'obturateur et libération de la sphère : il faut veiller à ne pas déclencher le mécanisme de libération avant le début de l'enregistrement, car il est indispensable que le point de départ soit bien enregistré sur la pellicule. On verra en effet que ce point est indispensable pour le dépouillement ultérieur des essais.

- Lecture du temps de passage du contrepoids devant le faisceau laser (l'affichage est visible par l'opérateur placé à proximité de l'appareil photographique).

La procédure d'enregistrement d'une trajectoire de la sphère est identique dans les deux cas S.R. et A.R., mais il faut noter une précaution nécessaire lors de l'essai avec rotation :

- pour éviter que la rotation ne s'arrête brusquement avant la fin de la remontée, il faut prévoir un enroulement suffisant des fils sur les axes de la sphère.

Chaque essai se compose donc d'un enregistrement de la trajectoire S.R. suivi d'un enregistrement de la trajectoire A.R. correspondante (même équipement sphère/axes et même contrepoids). Compte tenu des précautions énoncées ci-dessus, il faut compter environ 45 mn pour procéder à un essai complet. Cette estimation ne tient pas compte du temps nécessaire au traitement ultérieur de la pellicule photographique. Ce traitement comprend le développement du film, le tirage et l'agrandissement des photographies. Celles-ci doivent être très nettes et très contrastées, de façon à obtenir la meilleure précision possible lors du dépouillement.

Les pellicules utilisées sont de marque "ILFORD HP5.120" et de sensibilité 400 ASA. La qualité du papier utilisé est "ILFORD MULTIGRADE III (MGX.1M)".

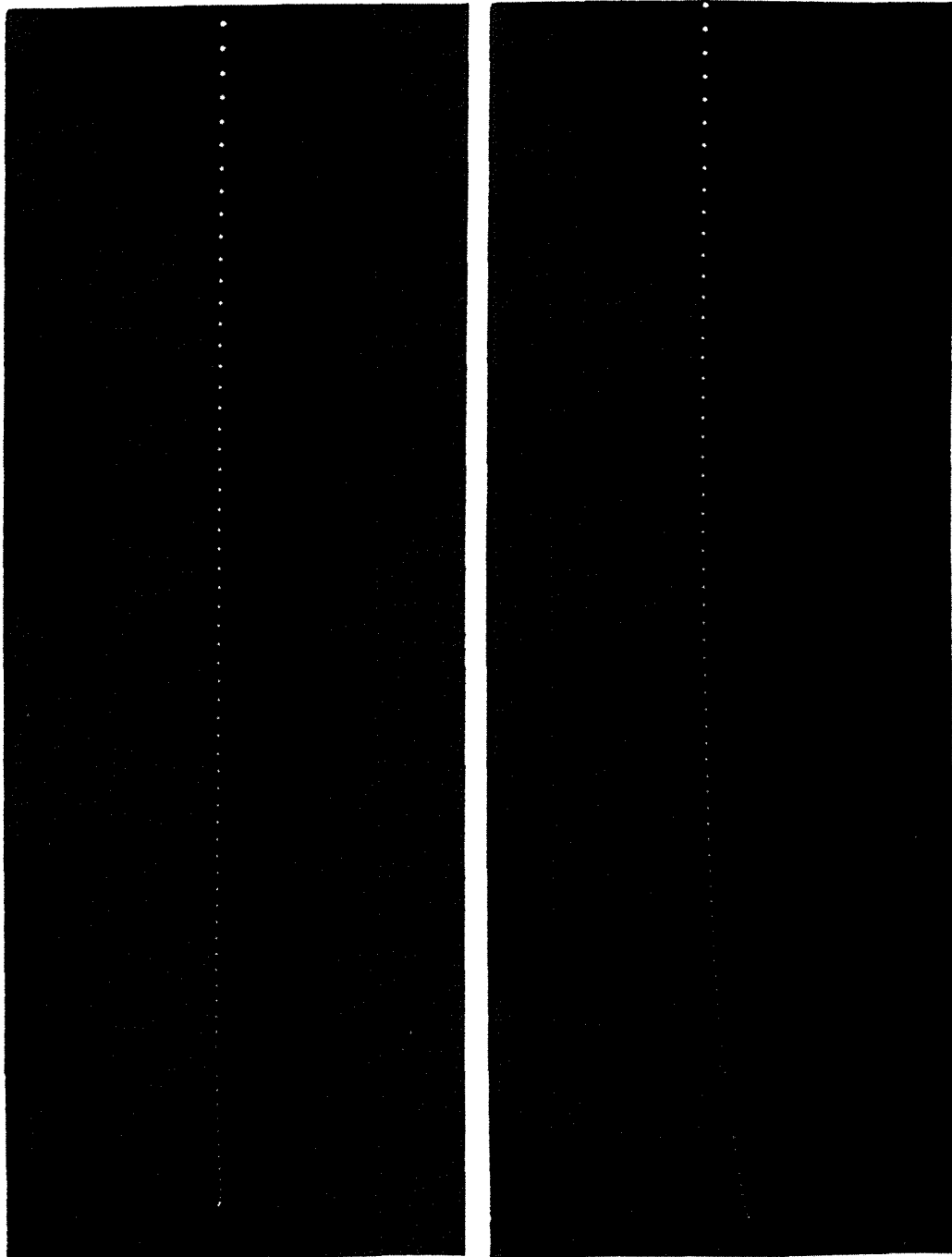
Les produits utilisés pour développer le film sont :

- Révélateur Ilford Microphen.
- Bain d'arrêt.
- Fixateur Ilford Hypam.

Les produits utilisés pour les tirages sur papier sont :

- Révélateur Ilford multigrade.
- Bain d'arrêt.
- Fixateur Ilford Ilfospeed.

La figure III.6 illustre un exemple de trajectoires enregistrées.  
Les conditions correspondant à cet essai sont les suivantes :  
 $a_s = 15,1 \text{ mm}$ ;  $m = 42,192 \text{ g}$  ;  $V_R = 0,123 \text{ m/s}$  ;  $\omega = 15,68 \text{ rad/s}$  ;  
 $\mu = 95,3 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$  ;  $\rho = 901 \text{ kg/m}^3$  .



(a)

(b)

**Figure III.6** : Exemple de trajectoires enregistrées

6a : trajectoire sans rotation

6b : trajectoire avec rotation

### III.4. DEPOUILLEMENT DES ESSAIS

La méthode de dépouillement consiste à relever différentes positions de la sphère au cours de sa trajectoire. Ce dépouillement est effectué à l'aide d'une table à digitaliser de format A3, reliée à un micro-ordinateur IBM PC-AT3 (ceci nous permet de connaître les coordonnées de chaque point de référence de la trajectoire). Un logiciel d'exploitation assure la réception et le traitement des informations en provenance de la table à digitaliser. Outre le calcul des coefficients hydrodynamiques, ce logiciel permet une visualisation des trajectoires et des résultats, éventuellement suivie d'un tracé sur table traçante.

L'ensemble du matériel utilisé pour l'exploitation des enregistrements photographiques est représenté sur la figure III.7.

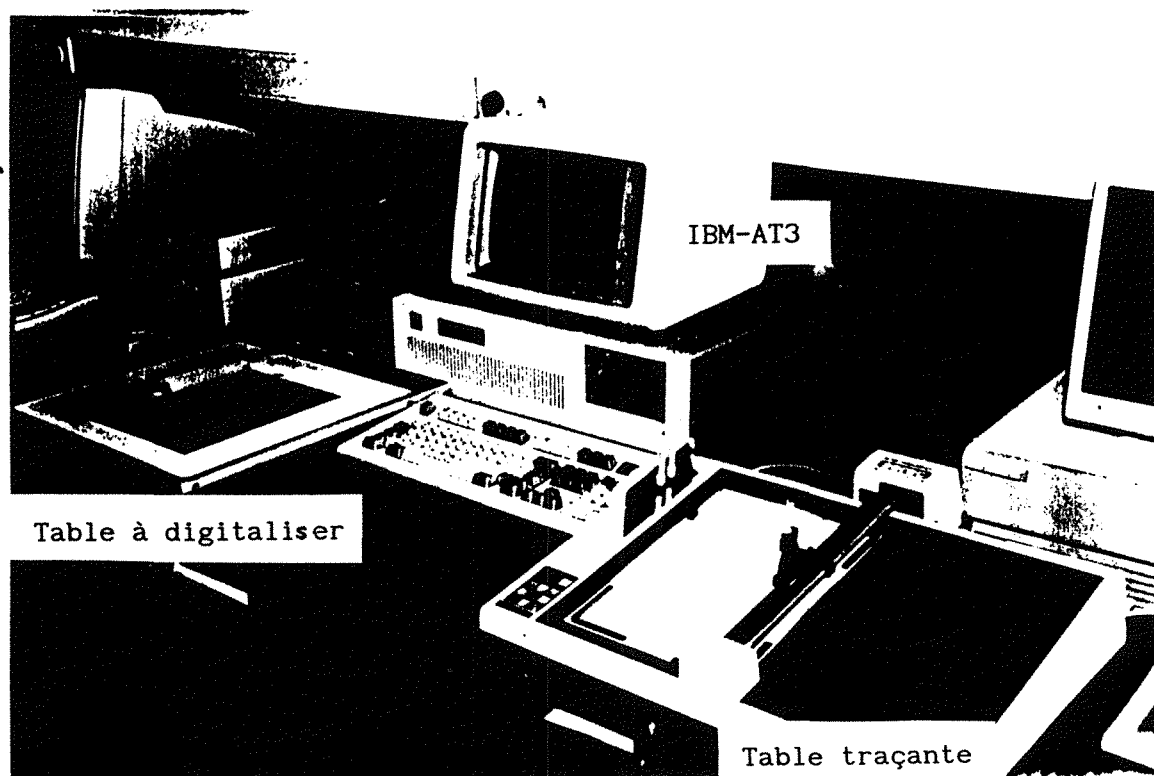


Figure III.7 : Dispositif de dépouillement des trajectographies



Comme indiqué plus haut, nous nous limiterons au dépouillement des portions de trajectoires rectilignes uniformes ou pouvant être considérées comme telles. L'étude du chapitre précédent nous a montré que dans ce cas, le paramètre essentiel permettant d'accéder aux coefficients cherchés est l'angle de cette trajectoire par rapport à la verticale. Nous commencerons par décrire le procédé utilisé pour cette mesure, avant de parler de la détermination des vitesses.

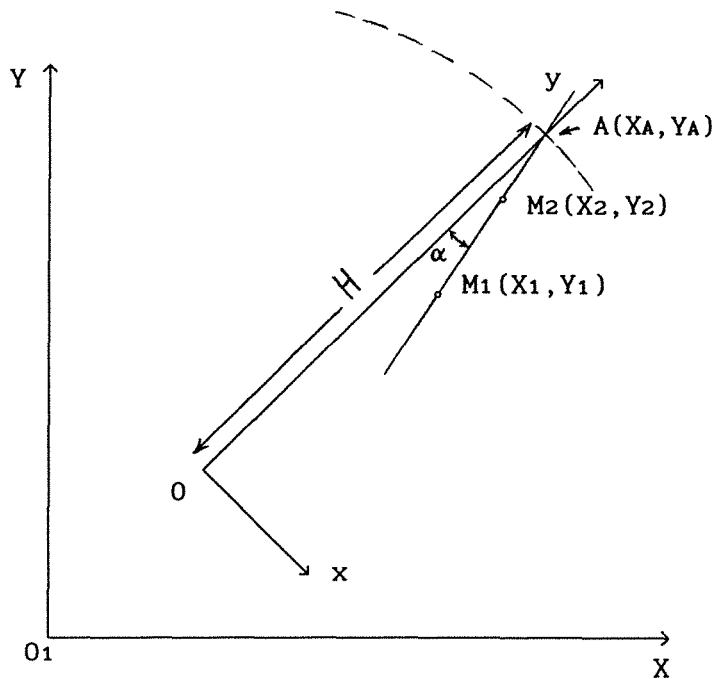
#### III.4.1. Détermination de l'angle de la trajectoire rectiligne par rapport à la verticale.

Nous nous plaçons donc dans le cas où la photographie de la trajectoire A.R. met en évidence une zone où cette trajectoire est rectiligne. On peut vérifier, par le dépouillement, que cette portion de trajectoire se caractérise bien par des vitesses de translation et de rotation constantes.

Il est nécessaire, pour la méthode que nous allons exposer, de connaître les coordonnées de trois points essentiels appartenant à la trajectoire : le point de départ de la sphère  $O(X_0, Y_0)$ , et deux points de la partie rectiligne uniforme, soient  $M_1(X_1, Y_1)$  et  $M_2(X_2, Y_2)$  (voir figure III.8). Les coordonnées  $X, Y$  de ces trois points sont supposées avoir été déterminées sur la table à digitaliser : il s'agit de coordonnées mesurées dans un repère lié à cette table.

La difficulté réside dans le fait qu'on ne dispose pas de référence verticale sur la photographie. En effet, la seule référence, dans l'installation, est fournie par la droite qui joint le point A (point de tangence fil-poulie) au point O (point de départ) : la position de la poulie est ajustée de façon à ce que cette direction soit verticale. Or le champ des photographies ne peut être tel que ces deux points apparaissent sur l'enregistrement, car cela entraînerait un manque de précision. Nous avons choisi de faire figurer, sur chaque photographie, le point de départ O, facile à visualiser. Il s'agit donc de calculer les coordonnées  $X_A, Y_A$  du point A dans le repère lié à la table, connaissant celles des points O,  $M_1$ ,  $M_2$ , et sachant que ce point A appartient à la trajectoire  $M_1M_2$ .

Le repère  $Oxy$  est lié à la terre, l'axe  $Oy$  étant vertical ascendant. La distance  $H$  entre les points  $O$  et  $A$  étant connue, il suffit donc de rechercher l'intersection du cercle de centre  $O$  et de rayon  $H$  avec la droite  $M_1M_2$  pour obtenir la position du point  $A$ .



**Figure III.8** : Détermination de l'angle  $\alpha$  de la trajectoire  $M_1M_2$  par rapport à la verticale  $OA$ .

Après la détermination des coordonnées du point  $A$ , l'angle  $\alpha$  de la trajectoire rectiligne par rapport à la verticale s'obtient par :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{M_2M_1}}{H \|\vec{M_2M_1}\|} \quad (\text{III.1})$$

où :

$$\vec{AO} = \begin{cases} X_0 - X_A \\ Y_0 - Y_A \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{M_2M_1} = \begin{cases} X_1 - X_2 \\ Y_1 - Y_2 \end{cases}$$

soit, en fonction des coordonnées :

$$\cos \alpha = \frac{(X_0 - X_A)(X_1 - X_2) + (Y_0 - Y_A)(Y_1 - Y_2)}{H \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}} \quad (\text{III.2})$$

#### III.4.2. Détermination des vitesses

Le dépouillement des photographies de trajectoires S.R. et A.R. suppose la détermination préalable de la vitesse du contrepois  $V_c$  dans les deux cas. Comme nous l'avons signalé plus haut, cette vitesse est déterminée facilement par la mesure du temps de passage  $\Delta t$  du contrepois devant le faisceau laser. Si l'on désigne par  $h$  la hauteur du contrepois (hauteur du godet contenant les masselottes), on a donc :

$$V_c = \frac{h}{\Delta t} \quad (\text{III.3})$$

Après avoir obtenu la vitesse du contrepois pour les deux essais (S.R. et A.R.), on peut envisager l'exploitation des photographies sur la table à digitaliser pour déterminer les paramètres qui suivent : les vitesses de translation et de rotation de la sphère, le coefficient adimensionnel  $\gamma$  (rotation réduite), les nombres de Reynolds  $Re_p$  et  $Re_\omega$ , ainsi que les coefficients de force et de couple traduisant les actions exercées par le fluide sur la sphère.

#### Procédures de calcul des vitesses

Cette procédure se décompose en deux parties :

##### *a/ Exploitation de la trajectoire sans rotation :*

L'exploitation de la trajectoire verticale de la sphère en translation pure a pour objectif premier de permettre une détermination précise de l'échelle de l'agrandissement, puisque dans ce cas la vitesse de la sphère est connue, et égale à celle du contrepois.

On enregistre les coordonnées de deux points  $M_1$  et  $M_2$  situés dans

la portion de trajectoire de la sphère correspondant à la mesure de  $V_c$ . Le nombre d'intervalles (période des éclairs de la lampe stroboscopique) entre les deux points choisis ne dépasse généralement pas 10, car sinon la portion étudiée risque que de ne pas correspondre à une vitesse constante, c'est-à-dire dans la zone supposée rectiligne uniforme, ce qui n'est jamais strictement le cas. Pour obtenir la meilleure précision, confirmée par des essais de reproductibilité, on utilise le plus souvent deux points séparés par 4 à 5 intervalles, soit un intervalle de temps de l'ordre d'une demie seconde pour une fréquence du stroboscope de 600 éclairs par minute.

Désignons par  $f$  cette fréquence de la lampe stroboscopique (en Hz), par  $n$  le nombre d'intervalles entre les deux points choisis, et par  $d$  la distance mesurée entre ces deux points (exprimée dans l'unité arbitraire de la table à digitaliser), soit :

$$d = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2} \quad (\text{III.4})$$

L'échelle  $E$  qui nous permettra de déterminer la vitesse réelle de la sphère dans sa trajectoire avec rotation, par une mesure de distance analogue, est calculée par :

$$E = \frac{1}{V_{\text{réelle}}} \frac{f d}{n} = \frac{f d}{n V_c} \quad (\text{III.5})$$

*b/ Exploitation de la trajectoire avec rotation :*

Dans ce cas la sphère est entraînée simultanément en translation et en rotation. Outre la vitesse de translation, il apparaît une vitesse de rotation  $\Omega_p$  (de module  $\omega$ ) dont la direction est perpendiculaire au plan de la trajectoire de la sphère, et qu'il s'agit également de pouvoir obtenir par le dépouillement des trajectoires enregistrées.

L'échelle  $E$  étant à présent connue, la vitesse de translation de la sphère dans cette nouvelle trajectoire (c'est-à-dire sa vitesse relative par rapport au fluide, que nous continuerons à désigner par  $V_R$ ) est déterminée par pointage de deux points situés en zone

rectiligne uniforme, et calcul, par (III.4), de la distance  $d_{AR}$  les séparant. On en déduit  $V_R$  :

$$V_R = \frac{f d_{AR}}{n E} \quad (\text{III.6})$$

Lors de cet essai avec rotation, la vitesse du contrepois est également mesurée, et sa valeur, qui diffère de  $V_c$ , sera désignée par  $V_{cAR}$ . La différence entre la vitesse du contrepois et la vitesse de la sphère nous permet d'accéder à la vitesse de rotation, grâce à la formule (II.13), qui s'écrit ici :

$$\omega = \frac{V_{cAR} - V_R}{a_e} \quad (\text{III.7})$$

Les paramètres adimensionnels  $\gamma$ ,  $Re_p$  et  $Re_\omega$  peuvent ensuite être calculés aisément, pourvu que la viscosité de l'huile soit bien connue (voir chapitre suivant).

### III.4.3. Calcul des coefficients - Différentes options

Tous les paramètres étant connus, il ne reste plus qu'à appliquer les résultats du chapitre précédent pour obtenir les différents coefficients hydrodynamiques par les relations (II.16) à (II.18).

Rappelons que notre valeur expérimentale du coefficient de portance n'est liée qu'à l'inclinaison  $\alpha$  de la trajectoire rectiligne par rapport à la verticale, et qu'elle ne fait pas intervenir la tension des fils. Sa valeur s'obtient par application de (II.16) et (II.34), qui conduisent à :

$$C_L = \frac{2m_A g \sin\alpha}{\rho\pi V_R^2 a^2} - C_{L \text{ cyl}} \frac{2a_c \ell}{\pi a^2} \quad (\text{III.8})$$

où :

$$C_{L \text{ cyl}} = 2,77 \frac{a_c \omega}{V_R} \quad (\text{III.9})$$

d'après (II.35) et (II.27).

Il n'en est pas de même pour les coefficients de traînée et de couple, pour la détermination desquels nous proposons deux solutions :

-Première solution :

On suppose que la tension  $T$  des fils garde la même valeur dans les deux essais successifs S.R. et A.R., puisque la masse du contrepois n'a pas été changée. Cette hypothèse revient à considérer que les différents frottements sont restés strictement identiques, ce qui est difficile à vérifier et ne semble pas toujours être le cas.

Dans cette option, les coefficients de traînée et de couple sont calculés directement par les relations (II.17) et (II.18), conduisant aux coefficients "totaux", puis corrigés par (II.29), (II.31) et (II.32) pour obtenir les coefficients  $C_D$  et  $C_{mv}$  de la sphère seule par les expressions finales suivantes :

$$C_D = \frac{2 (T - m_A g \cos \alpha)}{\rho \pi V_R^2 a^2} - C_{D \text{ cyl}} \frac{2a \ell}{\pi a^2} \quad (\text{III.10})$$

( $C_{D \text{ cyl}}$  étant lu sur la courbe de la figure II.6)

$$C_{mv} = \frac{2}{\rho \pi V_R^2 a^3} \left( T a_e - 4\pi \mu a_c^2 \ell \omega \right) \quad (\text{III.11})$$

$C_{m\omega}$  se déduit de  $C_{mv}$  dans tous les cas par l'égalité (II.21).

-Deuxième solution : (option finalement choisie et à laquelle correspondent les résultats donnés dans le chapitre IV)

La deuxième solution envisagée consiste à éliminer l'incertitude occasionnée par la mauvaise connaissance de la tension, en faisant l'hypothèse que le coefficient de traînée de la sphère n'est pas

modifié par la rotation, et peut donc se calculer par la formule (I.51) proposée par Morsi & Alexander (1972). Cette hypothèse est fondée sur les résultats de la revue bibliographique que nous avons présentée au chapitre I. Nous désignerons par  $C_{DMA}$  le coefficient de traînée de la sphère obtenu par la corrélation de Morsi & Alexander.

La tension  $T$  peut alors se calculer par la relation analogue à (III.10) :

$$T = m_A g \cos\alpha + \rho V_R^2 \left( \frac{1}{2} \pi a^2 C_{DMA} + a_c \ell C_{D \text{ cyl}} \right) \quad (\text{III.12})$$

Les coefficients de couple s'en déduisent comme ci-dessus, par (III.11) et (II.21). Cette deuxième méthode, basée sur une hypothèse dont on espère qu'elle entraînera moins d'erreur que l'incertitude sur la tension, conduit donc à la détermination expérimentale des seuls coefficients de portance et de couple. Comme nous l'indiquons plus haut, cette option a finalement été choisie, mais il faut insister sur le fait que ce choix n'a aucune incidence sur les résultats concernant la portance.

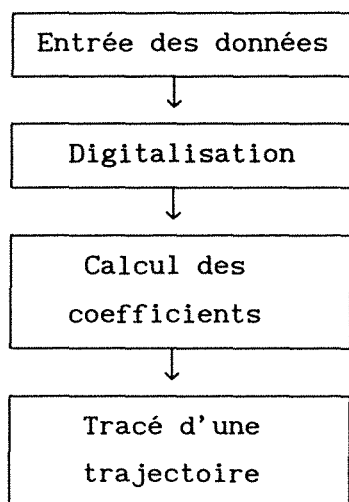
Les tests effectués pour comparer les deux méthodes de dépouillement exposées ci-dessus ont mis en évidence des différences de l'ordre de quelques pour-cent sur les valeurs des coefficients de couple.

#### III.4.4. Exploitation informatique

Le dispositif d'exploitation des trajectoires enregistrées se compose d'une table à digitaliser reliée à un micro-ordinateur IBM PC-AT3 et à une table traçante. Le traitement des données est effectué grâce à un logiciel d'exploitation dont nous allons décrire ici les principales caractéristiques.

Le programme est structuré en quatre fonctions distinctes qui doivent être utilisées dans l'ordre indiqué, mais sans qu'il soit nécessaire que les quatre fonctions soient appelées à la

suite l'une de l'autre. Grâce aux fichiers créés dans chacune des parties, chaque fonction peut être abordée à tout moment, pourvu que les fichiers relatifs à l'essai considéré existent déjà. On peut, par exemple, effectuer plusieurs digitalisations à partir d'une seule entrée des données : c'est ce qui est fait lors du dépouillement d'une série d'essais réalisés le même jour et correspondant à une même pellicule photographique.



Les différentes opérations sont données en détail ci-dessous :

### I- Entrée des données

Lorsqu'on choisit cette première option dans le menu d'introduction, la liste suivante s'affiche. Elle correspond aux paramètres qui doivent être connus pour pouvoir exploiter les trajectographies et aboutir au calcul des coefficients :

- [ 0 ] Matière de la sphère.
- [ 1 ] Fréquence du stroboscope ( $f$ ) en éclairs/mn
- [ 2 ] Masse du contrepoids ( $m_c$ ) en g
- [ 3 ] Rayon de la sphère ( $a$ ) en mm
- [ 4 ] Masse de la sphère ( $m$ ) en g
- [ 5 ] Rayon d'enroulement ( $a_e$ ) en mm
- [ 6 ] Masse volumique du fluide ( $\rho$ ) en  $\text{kg/m}^3$
- [ 7 ] Température de l'huile ( $\theta$ ) en °C
- [ 8 ] Viscosité dynamique de l'huile ( $\mu$ ) en  $10^{-3}$  Pa.s



Il peut être utile de donner les quelques précisions suivantes :

- par "masse de la sphère" au point [4], il faut entendre masse totale de la sphère équipée de ses axes. Pour chaque combinaison sphère-axes, cette masse totale a été mesurée sur une balance de précision.
- le rayon d'enroulement  $a_e$  est celui qui permet le calcul du couple : il s'obtient en additionnant le rayon de l'axe cylindrique  $a_c$  (mesuré au micromètre pour chaque axe) et le rayon du fil de suspension.
- la viscosité dynamique du liquide est calculée automatiquement après indication de la température au point [7]. Ce calcul utilise une formule empirique établie après une série de mesures précises de la viscosité en fonction de la température (voir chapitre IV). Remarquons que la valeur de la viscosité n'intervient que dans le calcul des nombres de Reynolds  $Re_p$  et  $Re_\omega$ .

Chaque ligne du tableau fait apparaître les valeurs des paramètres correspondant à la dernière utilisation du programme. Chaque valeur figurant dans ce tableau peut être modifiée par l'utilisateur avant le dépouillement proprement dit (il suffit de suivre les indications qui s'affichent en bas de l'écran). La modification de la valeur de la température entraîne le calcul et la modification de la viscosité dynamique. Enfin, la touche ESC permet de revenir au menu. A la sortie de cette fonction "entrée des données", la sauvegarde des valeurs dans le fichier DONNEES.FIC est effectuée automatiquement.

## II- Digitalisation

Le but de cette partie est l'enregistrement des points de références de la trajectoire, se traduisant par la détermination de leurs coordonnées (X,Y). Par exemple : les coordonnées du point de départ et de deux points situés en zone rectiligne uniforme (pour un tracé de trajectoire, on enregistrera tous les points de la photographie). La première précaution consiste évidemment à fixer correctement les photographies de trajectoires sur la table à

digitaliser. Pour chaque essai, on fixe, côte à côte, la photographie de la trajectoire S.R. et la photographie de la trajectoire A.R. associée.

Le logiciel demande en premier lieu d'enregistrer les coordonnées du point de départ de la sphère (c'est-à-dire "cliquer" le point extrême bas), puis de deux points dans la zone rectiligne. L'ensemble des opérations ne nécessite l'usage que de la souris de la table à digitaliser, qui est munie de quatre boutons assurant l'ensemble des fonctions. Dans le cas où l'on enregistre un nombre de points plus élevé, chaque point est numéroté selon l'ordre d'enregistrement. Ceci permet, lors de la phase ultérieure, de choisir les points qui serviront de base au calcul des vitesses. Il est donc possible de comparer, pour une même trajectoire, les résultats obtenus pour différents couples de points ( $M_1, M_2$ ).

En quittant la fonction digitalisation, une sauvegarde des enregistrements effectués est proposée. Dans le cas d'une réponse affirmative, il faudra indiquer le type de trajectoire (S.R. ou A.R.), ainsi que le numéro de l'essai. Les données nécessaires au calcul des coefficients sont sauvegardées dans un fichier.

### III- Calcul des coefficients

Les procédures de cette partie, consistant en l'exploitation numérique des informations contenues dans les fichiers créés par digitalisation, sont effectuées de la manière suivante :

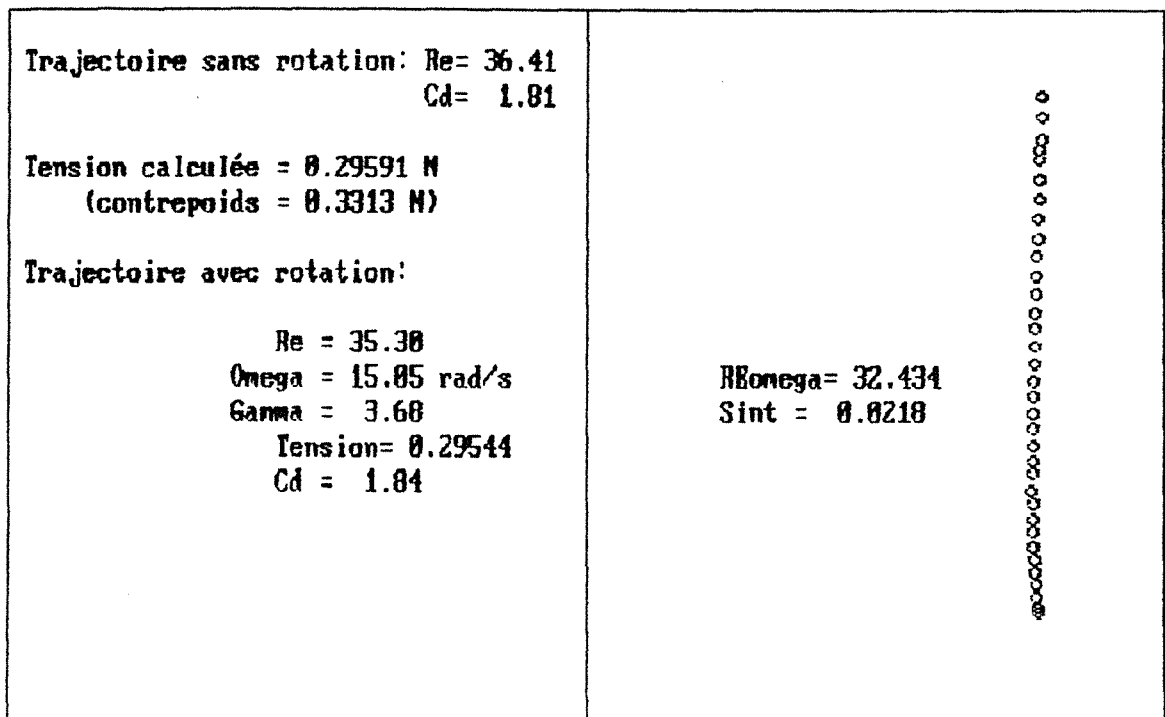
- indication, par l'utilisateur, du numéro de l'essai à traiter, ce qui permet au programme de récupérer les données dans le fichier préalablement constitué, ainsi que des vitesses de contrepoids  $V_c$  mesurées dans les deux cas S.R. et A.R.
- *Exploitation de la trajectoire sans rotation* : calcul de l'échelle, du nombre de Reynolds  $Re_p$ , du coefficient de trainée sans rotation  $C_D$  (en appliquant la formule de Morsi & Alexander).
- *Exploitation de la trajectoire avec rotation* : calcul de la vitesse de translation  $V_R$ , du nombre de Reynolds  $Re_p$ , du coefficient de

traînée avec rotation (toujours par la formule de Morsi & Alexander). Après correction comme indiqué plus haut, calcul de la tension  $T$ . Calcul de la vitesse de rotation  $\omega$ , du coefficient adimensionnel  $\gamma$ , du nombre de Reynolds de rotation  $Re_{\omega}$ , de l'angle  $\alpha$  et enfin des coefficients  $C_L$ ,  $C_{mv}$ ,  $C_{m\omega}$ ,  $Re_{\omega}$ .

- *Affichage* : les valeurs calculées des différents paramètres et des coefficients hydrodynamiques sont affichées à l'écran, parallèlement à une reconstitution graphique de la trajectoires à partir des points dont les coordonnées ont été enregistrées.

Notons qu'il est possible, si on le souhaite, de recommencer les calculs sur la trajectoire *Avec Rotation* en utilisant d'autres points de référence sans avoir à recommencer toute la procédure.

La figure III.9 donne un exemple de l'écran obtenu après une telle exploitation de trajectoires.



**TRAJECTOIRE AVEC ROTATION**

Figure III.9 : Visualisation des résultats sur l'écran

#### IV- Tracé d'une trajectoire

Outre la possibilité d'impression directe d'un écran tel celui de la figure III.9, l'utilisation de la table traçante permet le tracé plus précis d'une trajectoire dont un grand nombre de points ont été enregistrés. Nous donnerons, dans le chapitre prochain consacré aux résultats obtenus, des exemples de tracés de trajectoires obtenus par cette solution.

### III.5. PRECISION ATTENDUE - PRECAUTIONS NECESSAIRES

#### III.5.1. Précision attendue, estimation des erreurs

L'estimation de la précision que l'on peut attendre sur les résultats de nos expériences doit prendre en compte non seulement l'incertitude apparaissant dans le calcul des vitesses et des coefficients hydrodynamiques, mais également les erreurs expérimentales inévitables liées au procédé d'obtention des trajectoires : ces dernières, qui sont les plus difficiles à évaluer, englobent par exemple la mesure de la vitesse du contrepoids, ou l'existence d'irrégularités dans les trajectoires, pouvant être dues à un défaut d'enroulement des fils, à une mauvaise mise en mouvement de la sphère, ou encore à des frottements occasionnels intempestifs au niveau des poulies. De tels phénomènes ont été constatés au cours de nos essais, et ne sont pas toujours décelables par simple examen visuel de la trajectoire.

En particulier, la mesure de la vitesse du contrepoids nécessite la meilleure précision possible, car elle a une grande influence pour le calcul des paramètres ultérieurs fondamentaux que sont la vitesse de translation et la vitesse de rotation de la sphère. En effet, cette vitesse  $V_c$  conditionne la détermination de l'échelle par exploitation de la trajectoire sans rotation; par ailleurs, c'est par différence entre les vitesses  $V_c$  et  $V_R$  qu'est obtenue la vitesse de rotation  $\omega$ ,



et donc le taux de rotation réduit  $\gamma$  en fonction duquel on se propose justement d'étudier la variation du coefficient de portance.

Désignons par  $\Delta Z$  l'incertitude absolue sur une grandeur quelconque Z. La formule (II.13) de calcul de  $\omega$  nous montre que :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta V_c + \Delta V_R}{V_c - V_R} + \frac{\Delta a_e}{a_e} \quad (\text{III.13})$$

d'où, d'après (II.19), une incertitude relative sur  $\gamma$  valant :

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\Delta V_R}{V_R} + \frac{\Delta V_c + \Delta V_R}{V_c - V_R} + \frac{\Delta a_e}{a_e} \quad (\text{III.14})$$

en négligeant l'incertitude sur le rayon de la sphère, très inférieure aux autres.

Les incertitudes relatives sur le rayon d'enroulement  $a_e$  et sur la vitesse du contrepoids  $V_c$  peuvent toutes deux être estimées à 2%. L'incertitude sur la vitesse de la sphère  $V_R$  est donc au moins égale à 2%, ceci sans tenir compte des erreurs introduites par la digitalisation des photographies. Dans la relation ci-dessus, le terme central du second membre est prépondérant car son dénominateur peut être relativement faible (il est d'ailleurs d'autant plus faible que la vitesse de rotation est faible puisque la différence  $V_c - V_R$  est proportionnelle à  $\omega$ ). Une évaluation effectuée d'après les valeurs numériques des vitesses, pour différents essais, nous a montré que ce seul terme pouvait introduire une erreur de l'ordre de 15%. Par conséquent, on peut donc estimer globalement à 20% l'incertitude relative sur la vitesse de rotation adimensionnelle  $\gamma$ .

Il s'agit là d'une imprécision malheureusement assez importante, dont il faudra se souvenir lors de la discussion de nos résultats, et qui pourra expliquer une certaine dispersion de nos points expérimentaux.

Il nous reste à chiffrer l'incertitude sur les coefficients

hydrodynamiques : nous nous limiterons ici au coefficient de portance, dont l'étude de la variation en fonction de  $\gamma$  constitue l'essentiel de ce travail expérimental. En négligeant les incertitudes relatives sur  $m_A$ ,  $g$ ,  $\rho$  et  $a$ , très faibles par rapport aux autres, on obtient, d'après la relation (II.16) :

$$\frac{\Delta C_L}{C_L} \cong \frac{\Delta \alpha}{\alpha} + 2 \frac{\Delta V_R}{V_R} \quad (\text{III.15})$$

L'incertitude sur l'angle  $\alpha$  est liée d'une part à la précision de la digitalisation, d'autre part à l'approximation que l'on fait en admettant que la portion de trajectoire étudiée correspond bien à un régime rectiligne uniforme. Des essais successifs de mesure de l'angle, réalisés par simulation sur papier millimétré (et digitalisation des points tracés), nous ont montré que l'erreur due à la digitalisation est relativement faible, de l'ordre de 2%. L'approximation concernant l'uniformité de la trajectoire peut être appréciée en effectuant plusieurs exploitations de la même trajectoire, en choisissant différents points de référence. On arrive ainsi à une erreur globale sur  $\alpha$  d'environ 5%. En y ajoutant le deuxième terme du second membre de (III.15), on peut ainsi estimer à 10% l'erreur relative commise sur la détermination du coefficient de portance  $C_L$ .

Le procédé expérimental proposé, s'il se distingue par son originalité et sa capacité à fournir des résultats dans une zone de nombres de Reynolds inexplorée jusqu'à présent, ne permet donc pas, pour le moment, l'obtention d'une grande précision. Néanmoins, nous verrons que l'ensemble des résultats présentés est tout à fait cohérent, et permet de dégager une tendance qui s'inscrit bien dans les connaissances que l'on avait sur le coefficient de portance dans les gammes de  $Re_p$  qui avaient déjà été explorées.

Cet exposé sur la précision de nos expériences démontre qu'il est indispensable de prendre, dans l'ensemble des opérations à effectuer, un certain nombre de précautions que nous allons décrire maintenant.

### III.5.2. Précautions nécessaires

*Au cours de la manipulation :*

- Il s'avère indispensable de procéder, avant chaque enregistrement de trajectoire, à un nettoyage du dispositif de suspension (fils et poulies), car après chaque essai ils sont enduits d'huile, ce qui peut amener une modification des frottements sur les poulies.

- L'huile doit être au repos avant la mesure, sinon les perturbations fausseraient la trajectoire de la sphère.

- Il faut prévoir un enroulement suffisant des fils sur les axes de la sphère (pour le cas des essais "Avec Rotation"), pour éviter que la rotation ne s'arrête brusquement avant la fin de la remontée.

- Le système de libération de la sphère doit être actionné de la façon la plus douce possible, car dans certains cas on a remarqué que la phase initiale de la trajectoire peut être perturbée par une accélération initiale.

- Pour rendre la mesure de la vitesse du contrepoids suffisamment précise, il faut veiller à ce que celui-ci descende sans balancement.

*Au cours du dépouillement :*

- Les deux points servant à la détermination de la vitesse et de l'angle d'inclinaison  $\alpha$  doivent être choisis dans la partie supérieure de la photographie, afin qu'ils correspondent à une portion de trajectoire la plus uniforme possible.

- Le plus grand soin doit être apporté à la digitalisation proprement dite, c'est-à-dire à l'enregistrement des coordonnées à l'aide de la souris : des essais ont montré qu'une digitalisation précise permet de réduire l'erreur sur les coordonnées X,Y à moins de deux dixièmes de millimètre. C'est à cette condition que l'angle  $\alpha$  sera déterminé avec la précision indiquée plus haut.





### CONCLUSION DU CHAPITRE III

Nous avons décrit, dans ce chapitre, l'installation expérimentale qui a été réalisée selon le principe exposé au chapitre II, et détaillé les procédures à mettre en oeuvre pour l'enregistrement des trajectoires et leur exploitation.

Le dispositif présenté permet d'atteindre l'objectif principal que l'on s'était fixé, à savoir la détermination des coefficients hydrodynamiques (en particulier le coefficient de portance) d'une sphère en fonction des deux paramètres adimensionnels que sont la rotation réduite  $\gamma$  et le nombre de Reynolds  $Re_p$ .

Les enregistrements de trajectoires sont obtenus par voie photographique, sous éclairage stroboscopique. Leur dépouillement, ainsi que l'exploitation informatique correspondante, sont traités par un ensemble comprenant table à digitaliser, micro-ordinateur et table traçante.

Dans l'état actuel du processus expérimental, la précision attendue sur le coefficient de portance et sur la mesure de la vitesse de rotation ne s'avère pas excellente. Toutefois, par comparaison avec les séries d'expériences antérieures menées par Tsuji *et al.* (1985) ou par Barkla & Auchterlonie (1971), que nous avons présentées dans notre revue bibliographique du premier chapitre, on peut estimer cette précision comme satisfaisante. En effet, la dispersion constatée dans nos résultats, décrits plus loin, n'est pas supérieure à celle que présentent les mesures de ces auteurs. Il faut en conclure que la détermination des actions hydrodynamiques sur un corps en translation et rotation est expérimentalement très difficile dans la gamme des nombres de Reynolds intermédiaires qui nous intéresse.



## CHAPITRE IV

### RESULTATS EXPERIMENTAUX

#### IV.1. INTRODUCTION

Le but de nos expériences, dont le principe a été exposé dans les deux chapitres précédents, consiste en la détermination des actions que le fluide exerce sur la sphère en translation et rotation simultanée, dans la gamme des nombres de Reynolds  $Re_p$ , compris approximativement entre 10 et 100. On a vu que c'est par l'examen d'une trajectoire ascendante rectiligne uniforme (et donc en régime permanent) que les composantes de force et de couple seront obtenues.

Ces expériences sont menées dans l'objectif final d'étudier l'influence des paramètres adimensionnels que sont le nombre de Reynolds  $Re_p$  et le taux de rotation adimensionnel  $\gamma$  sur les coefficients de portance et de couple. L'étude bibliographique exposée au chapitre I met en évidence la forte influence du paramètre de rotation  $\gamma$  sur le coefficient de portance dans les gammes de nombres de Reynolds ayant été explorées à ce jour. Il s'agit ici essentiellement de compléter les connaissances actuelles par l'étude de la fonction  $C_L(\gamma)$  dans notre plage de nombres de Reynolds intermédiaires, et de situer les résultats obtenus par rapport aux données théoriques et expérimentales antérieures.

Quant au coefficient de couple, sous la forme  $C_{m\omega}$ , il peut être instructif d'examiner l'effet de la translation sur sa valeur, qui est

bien connue pour une sphère en rotation dans un fluide au repos. On comparera donc nos résultats à ceux donnés par la formule de Dennis *et al.* (1980), qui constitue, comme on l'a vu, la référence en la matière dans le domaine des nombres de Reynolds de rotation  $Re_\omega$  de l'ordre de la centaine. L'étude du coefficient de couple  $C_{mv}$  sera également effectuée : bien que celui-ci ne puisse être défini dans le cas étudié par Dennis *et al.*, où  $V_R = 0$ , la comparaison peut malgré tout être faite puisque  $C_{mv}$  et  $C_{m\omega}$  sont toujours liés par  $C_{mv} = \gamma^2 C_{m\omega} / 4$  d'après (II.21).

On peut préciser ici que le coefficient de traînée n'a pas été déduit de nos expériences, puisque c'est grâce à une corrélation classique, valable pour une sphère sans rotation, qu'une valeur approchée de  $C_D$  nous a permis de résoudre le problème lié à la connaissance de la tension des fils de suspension. Insistons à nouveau ici sur le fait que cette hypothèse n'influe en rien sur la détermination expérimentale de la portance.

Les résultats présentés ici feront l'objet d'une discussion complémentaire dans le prochain chapitre, où nous essaierons, en particulier, de proposer une corrélation empirique valable dans notre gamme de nombres de Reynolds.

## **IV.2. DONNEES EXPERIMENTALES COMPLEMENTAIRES**

Nous allons détailler ici les caractéristiques des sphères, des axes, ainsi que de l'huile qui a finalement été choisie. Les dimensions et masses des sphères utilisées ont été sélectionnées pour satisfaire, compte tenu de la viscosité du liquide, aux critères énoncés au chapitre II afin que les nombres de Reynolds obtenus appartiennent à la gamme désirée.

### **IV.2.1. Description des différents équipages mobiles utilisés**

L'utilisation d'un ensemble de sphères de dimensions et de masses volumiques variées est nécessaire pour nous permettre d'explorer une

gamme de nombres de Reynolds et de vitesses de rotation adimensionnelles suffisamment large. Cependant, le choix des matériaux doit être fait en tenant compte de l'impératif d'une bonne réflexion de la lumière. Les sphères réalisées doivent donc pouvoir être polies afin d'obtenir l'état de surface requis. C'est ainsi, par exemple, qu'une sphère en PVC, dont la réalisation avait été menée à bien, a dû être éliminée car ne donnant pas de photographie exploitable malgré un polissage poussé.

Les matériaux finalement utilisés pour nos expériences sont le Dural, le titane et le laiton, dont les masses volumiques respectives approximatives sont :

$$\rho_{\text{Dural}} = 2700 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{titane}} = 4500 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{laiton}} = 8600 \text{ kg/m}^3$$

(il n'est pas nécessaire de connaître les masses volumiques précises puisque seule importe la masse totale de l'équipage sphère/axes, qui a été soigneusement mesurée dans chaque cas).

Les diamètres des sphères fabriquées sont les suivants :

Laiton : 17 mm

Dural : 30,2 mm

Titane : 25 mm et 38,8 mm

#### Technique de fabrication :

Ces sphères ont été réalisées par tournage avec l'aide d'un appareil à tourner "sphérique" (de marque "VICTORIA"). Le polissage a été effectué manuellement avec abrasif et pâte à polir. Pour la fixation des axes, constitués de deux poinçons d'acier calibrés de longueur 100 mm, chaque sphère a été percée diamétralement de part en part, de manière à ce que les poinçons d'acier puissent être introduits, en ajustage serré, jusqu'au centre de la sphère. On obtient ainsi une sphère munie d'axes fixes, débordant symétriquement suivant un diamètre d'une longueur de 85 à 92 mm, dépendant du diamètre de la sphère. Les diamètres nominaux des axes sont de 1 mm, 1,5 mm et 2 mm (ce dernier n'ayant été utilisé que pour la sphère en Dural).

Les caractéristiques précises des différents ensembles sphère/axes ainsi réalisés sont résumées par le tableau IV.1 :

MATIERE	DIAMETRE SPHERE	DIAMETRE AXES	MASSE
Laiton	17,0 mm	1,00 mm	24,302 g
		1,00 mm	24,150 g
		1,50 mm	27,020 g
Dural	30,2 mm	1,50 mm	42,192 g
		2,00 mm	49,374 g
Titane	25,0 mm	1,50 mm	39,170 g
	38,8 mm	1,50 mm	138,544 g

Tableau IV.1 : Caractéristiques des ensembles sphères/axes utilisés

#### IV.2.2. Caractéristiques de l'huile utilisée

Des liquides tels que la glycérine ou certaines huiles synthétiques (valant environ 50 F le litre) auraient certainement convenu à nos expériences, mais des raisons financières nous ont fait opter pour une huile de plus faible prix, quoique de viscosité suffisante pour nos essais. Notre choix s'est finalement porté sur l'huile d'arachide.

La masse volumique de cette huile est de  $901 \text{ kg/m}^3$ . La viscosité dynamique, dépendant bien entendu fortement de la température, a été mesurée à l'aide d'un viscosimètre du type Couette (de marque Contraves). Les mesures ayant été effectuées en bain thermostaté, la variation de la viscosité avec la température a pu être précisément étudiée. Ces mesures nous ont conduit à adopter la formule empirique suivante, donnant la valeur de  $\mu$  en fonction de la température  $\theta$  (en degrés Celsius) :

$$\mu = 4,223 \cdot 10^{-8} \exp \left[ \frac{4222,97}{\theta + 273,16} \right] \text{ Pa} \cdot \text{s} \quad (\text{IV.1})$$

Cette relation nous permet de connaître la viscosité, lors de chaque essai, par mesure de la température du bain d'huile. Afin de contrôler la stabilité dans le temps des propriétés de cette huile, des mesures de viscosité ont été effectuées à un an d'intervalle : les différences constatées sont inférieures à 2%. Si l'on se souvient que cette viscosité n'intervient que dans la valeur du nombre de Reynolds, un tel écart est parfaitement acceptable.

#### IV.3. RESULTATS SUR LES COEFFICIENTS DE PORTANCE ET DE COUPLE

Dans cette partie, nous présentons les résultats obtenus concernant le coefficient de portance  $C_L$  et les coefficients de couple  $C_{mv}$  et  $C_{m\omega}$ . Pour mettre en évidence l'influence du nombre de Reynolds, dont on peut prévoir qu'elle sera beaucoup plus faible que celle du taux de rotation réduit  $\gamma$ , nous avons classé ces résultats en cinq "zones", chaque zone correspondant à une gamme de nombres de Reynolds  $Re_p$ , comme l'indique le tableau IV.2 ci-dessous :

Nombres de Reynolds	Zone
$10 < Re_p < 25$	1
$25 < Re_p < 40$	2
$40 < Re_p < 55$	3
$55 < Re_p < 70$	4
$70 < Re_p < 130$	5

Tableau IV.2

On trouvera en annexe les tableaux de résultats complets, regroupant les conditions expérimentales relatives à chaque essai s'étant traduit par des trajectoires exploitables.

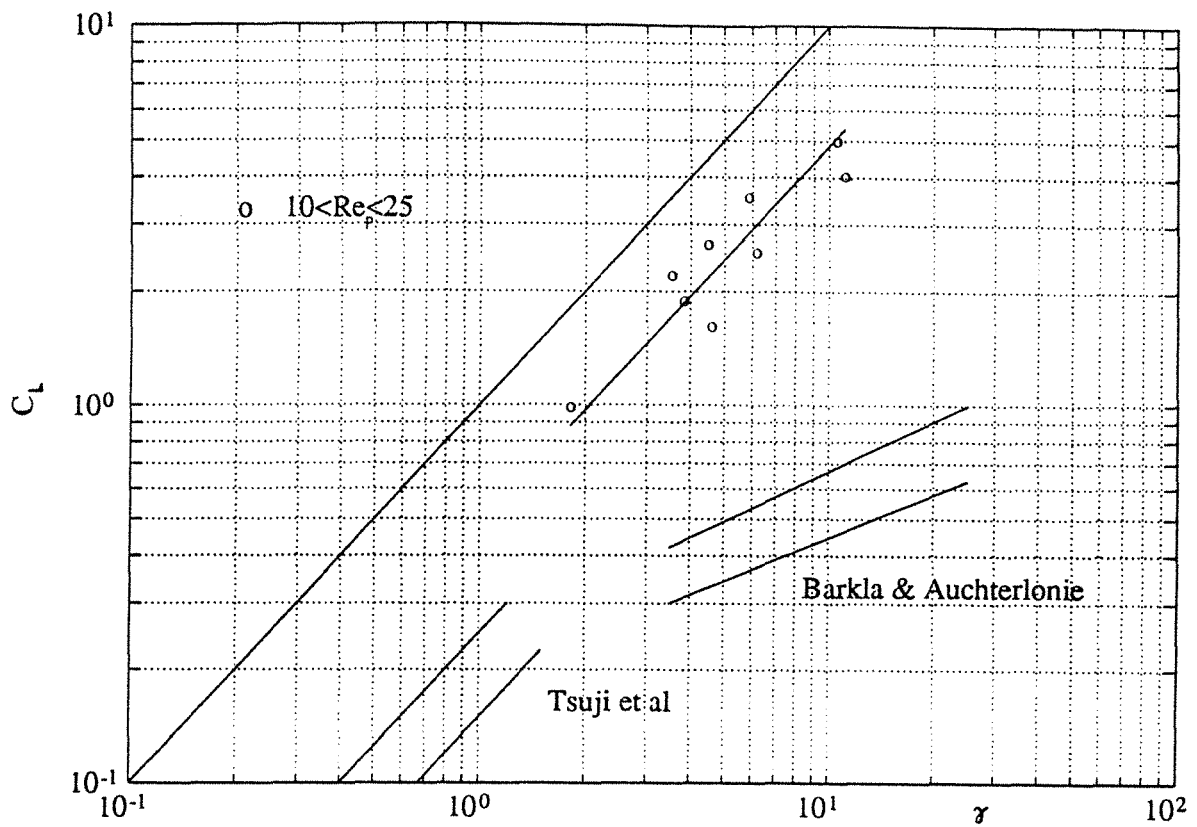
#### IV.3.1. Résultats sur le coefficient de portance $C_L$

Nous avons choisi de représenter ces résultats, regroupés par zone de  $Re_p$  comme indiqué ci-dessus, en portant les points expérimentaux obtenus sur un graphique donnant  $C_L$  en fonction de  $\gamma$  en coordonnées logarithmiques. Sur chacun de ces graphiques (figures IV.1 à IV.5), nous avons fait figurer la droite  $C_L = \gamma$ , qui traduit le résultat théorique de Rubinow & Keller (1961) aux très petits nombres de Reynolds, ainsi que les deux zones qui correspondent aux résultats expérimentaux obtenus par Tsuji *et al* (1985), dont une expression approchée est donnée par la formule (I.52), et par Barkla & Auchterlonie (1971). Rappelons que dans les expériences de ces deux auteurs, les nombres de Reynolds appartenaient respectivement aux gammes 500-1600 et 2000-3000. Cette représentation graphique présente l'avantage de bien situer nos résultats par rapport aux acquis antérieurs.

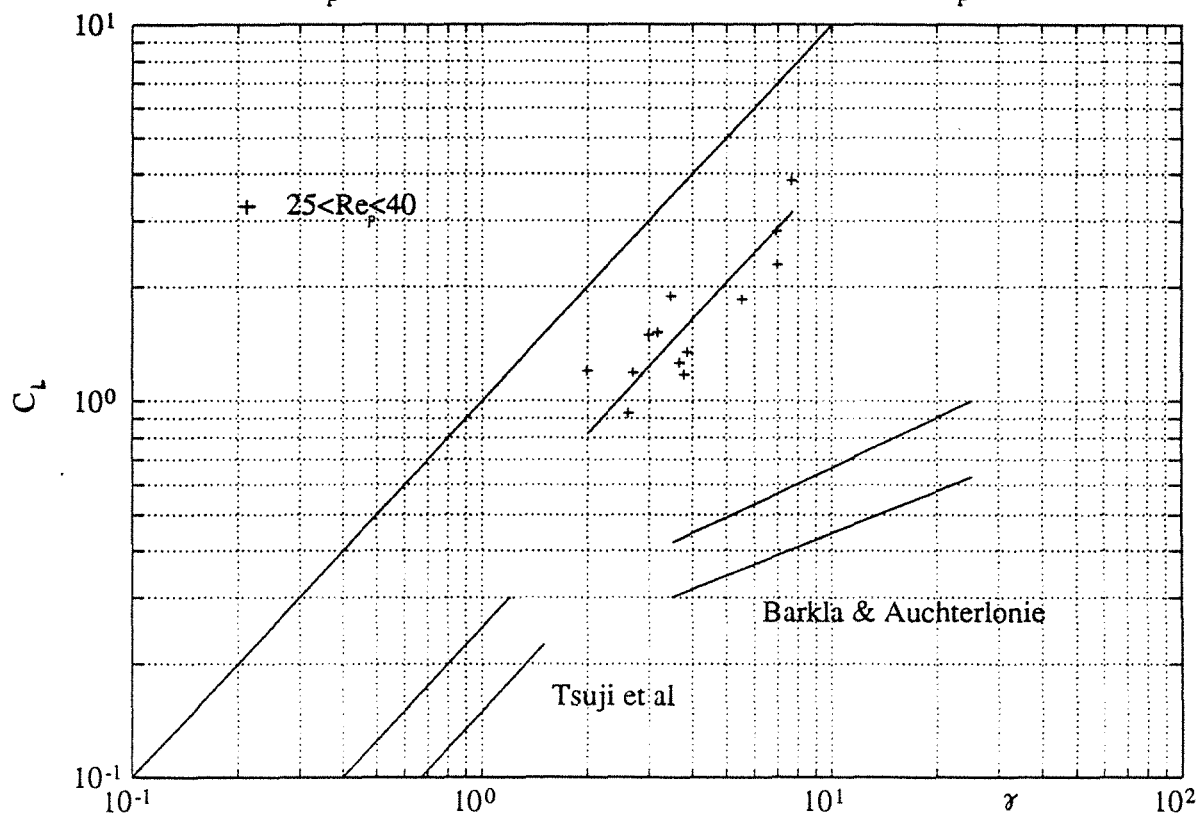
On trouvera en outre, sur chacune des figures IV.1 à IV.5, une droite obtenue par régression et destinée à approcher linéairement la relation existant entre  $C_L$  et  $\gamma$ . Malgré la dispersion relativement grande que l'on observe, nous avons choisi cette option de recherche d'un coefficient de proportionnalité entre coefficient de portance et rotation réduite, puisqu'on sait qu'une telle relation existe dans des gammes de nombres de Reynolds encadrant les nôtres, à savoir  $Re_p \ll 1$  avec un coefficient de proportionnalité égal à 1 (Rubinow & Keller), et  $Re_p \approx 1000$  avec un coefficient de proportionnalité d'environ 0,2 (Tsuji *et al.*).

L'examen des figures met effectivement en lumière une dispersion importante des points expérimentaux, en particulier dans les zones centrales de nombres de Reynolds ( $25 < Re_p < 70$ ). Cette dispersion peut s'expliquer en grande partie par les marges d'erreur, qui avaient été estimées au chapitre précédent : nous avons montré que l'on pouvait s'attendre à une précision de l'ordre de 10% sur  $C_L$ , et de l'ordre de 20% sur la rotation réduite  $\gamma$ . Bien que, par souci de clarté, ces marges d'erreur n'aient pas été reproduites sur les graphiques, on peut vérifier que les "rectangles d'erreur" correspondant se chevaucheraient bien pour la majorité de nos points de mesure.

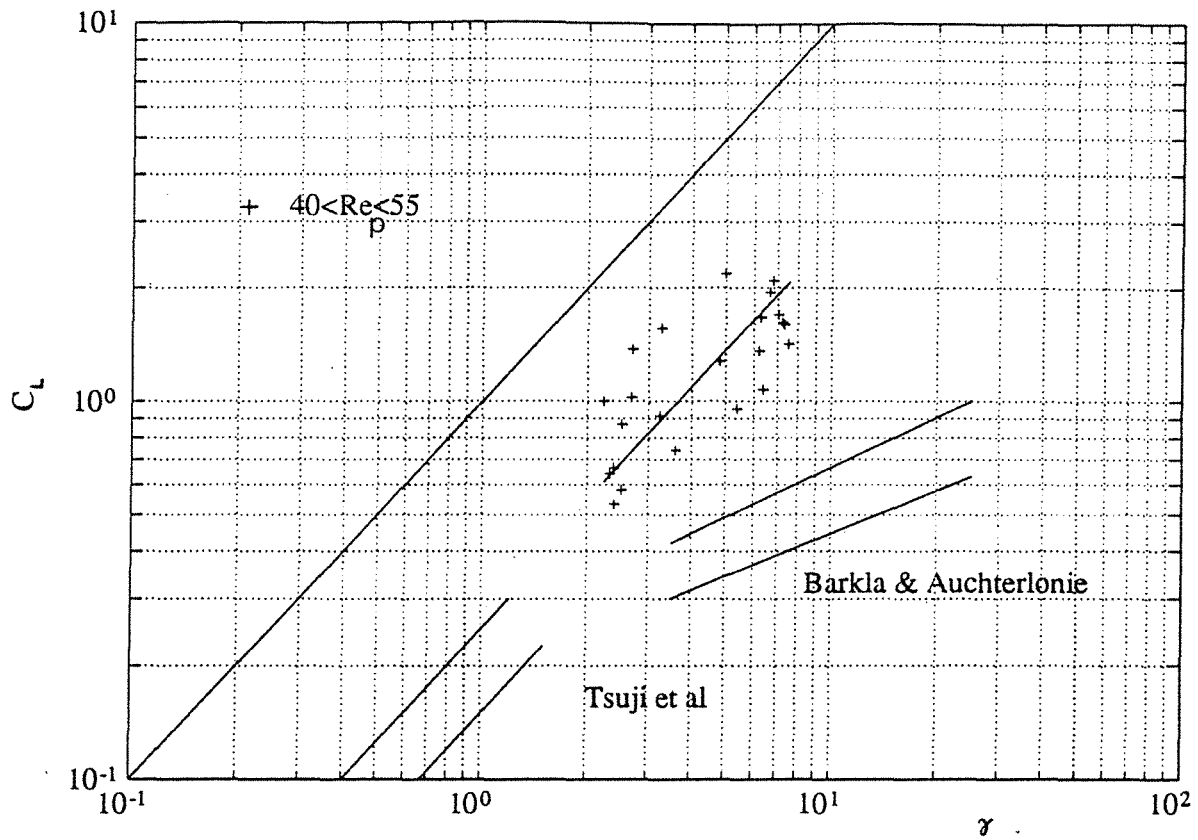




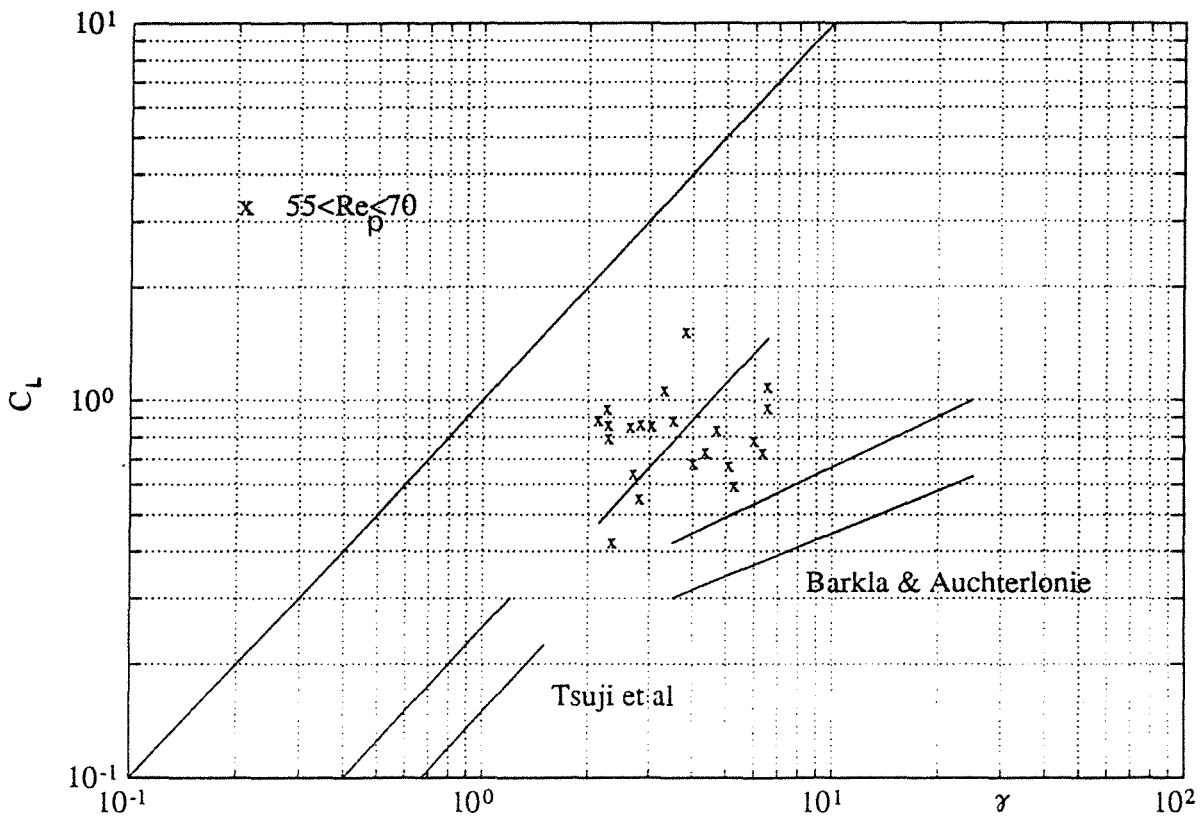
**Figure IV.1** : Coefficients  $C_L$  mesurés dans la gamme  $10 < Re_p < 25$ , comparés aux résultats de Rubinow & Keller ( $Re_p \ll 1$ ), de Tsuji *et al.* ( $500 < Re_p < 1600$ ) et de Barkla & Auchterlonie ( $Re_p \approx 2000$ ).



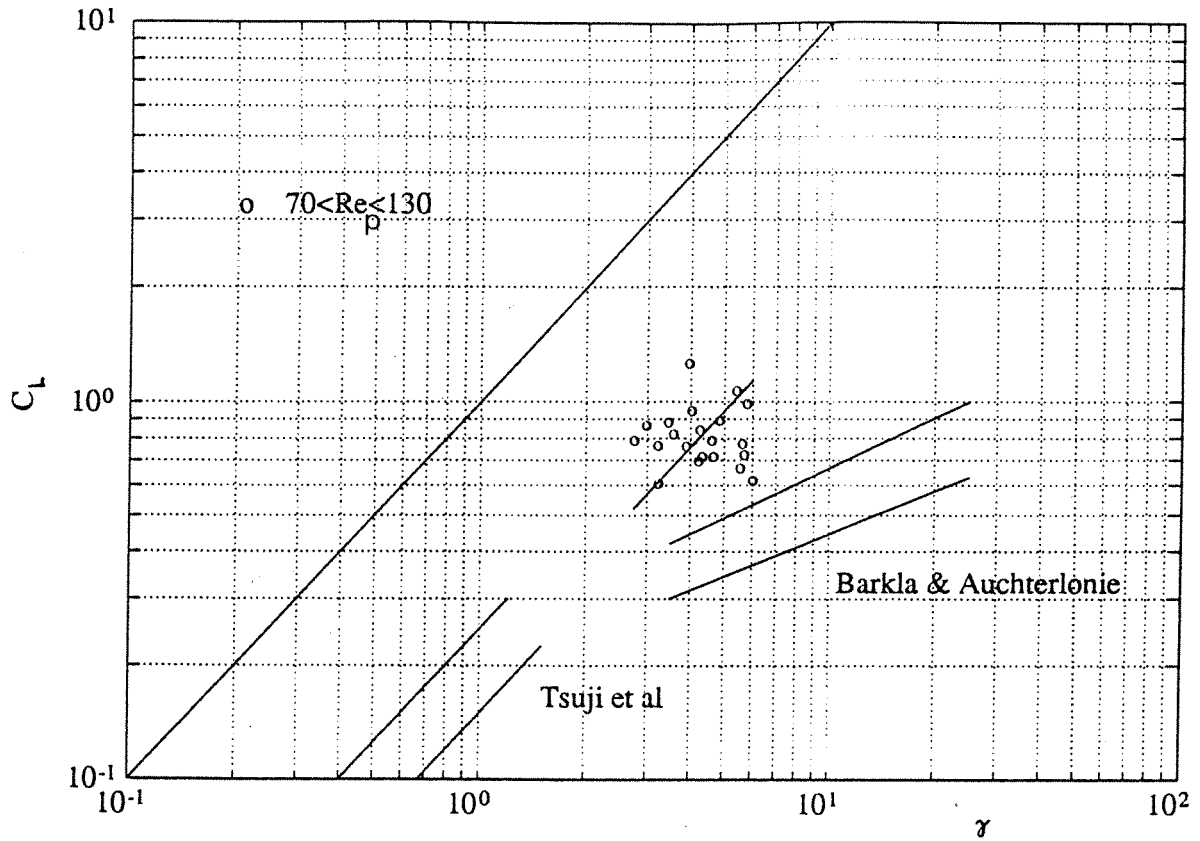
**Figure IV.2** : Coefficients  $C_L$  mesurés dans la gamme  $25 < Re_p < 40$ , comparés aux résultats de Rubinow & Keller ( $Re_p \ll 1$ ), de Tsuji *et al.* ( $500 < Re_p < 1600$ ) et de Barkla & Auchterlonie ( $Re_p \approx 2000$ ).



**Figure IV.3** : Coefficients  $C_L$  mesurés dans la gamme  $40 < Re_p < 55$ , comparés aux résultats de Rubirow & Keller ( $Re_p \ll 1$ ), de Tsuji et al. ( $500 < Re_p < 1600$ ) et de Barkla & Auchterlonie ( $Re_p \approx 2000$ ).



**Figure IV.4** : Coefficients  $C_L$  mesurés dans la gamme  $55 < Re_p < 70$ , comparés aux résultats de Rubirow & Keller ( $Re_p \ll 1$ ), de Tsuji et al. ( $500 < Re_p < 1600$ ) et de Barkla & Auchterlonie ( $Re_p \approx 2000$ ).



**Figure IV.5** : Coefficients  $C_L$  mesurés dans la gamme  $70 < Re_p < 130$ , comparés aux résultats de Rubinow & Keller ( $Re_p \ll 1$ ), de Tsuji *et al.* ( $500 < Re_p < 1600$ ) et de Barkla & Auchterlonie ( $Re_p \cong 2000$ ).

La tendance générale constatée sur les figures IV.1 à IV.5, qui est celle d'une décroissance du coefficient de portance lorsque  $Re_p$  augmente, ne peut être mise en doute par cette relative imprécision des résultats. Rappelons qu'il s'agit ici de l'obtention d'informations expérimentales tout à fait nouvelles, obtenues par un procédé original, dans une gamme de nombres de Reynolds très difficile à reproduire et inexplorée jusqu'à présent. Cette relative imprécision est cause d'une dispersion qui n'est pas supérieure à celle des expériences de Tsuji *et al.* (1985).

Cette décroissance de  $C_L$  avec  $Re_p$  (à  $\gamma$  fixé) s'inscrit bien dans la tendance que laissaient présager les résultats théoriques et expérimentaux précédents, comme nous le signalions en conclusion de notre étude bibliographique du chapitre I. Ce point sera discuté plus en détail dans le chapitre V.

### IV.3.2. Résultats concernant les coefficients de couple

Les résultats concernant le couple peuvent être présentés sous forme adimensionnelle par l'un des coefficients  $C_{mv}$  ou  $C_{m\omega}$  définis par les relations (I.3a) et (I.3b). Comme nous l'avons vu au chapitre I, les résultats connus à l'heure actuelle sont de deux types :

- le résultat théorique de Rubinow & Keller (1961) aux très petits nombres de Reynolds, montrant que le couple de Stokes reste valable malgré la translation, ce qui se traduit par l'expression (I.27) de  $C_{m\omega}$ , à savoir :

$$C_{m\omega} = \frac{16}{Re_{\omega}} \quad , \quad (IV.2)$$

et dont l'expression équivalente donnant  $C_{mv}$  est :

$$C_{mv} = \frac{\gamma^2}{4} C_{m\omega} = \frac{4\gamma^2}{Re_{\omega}} = 16 \frac{\gamma}{Re_p} \quad (IV.3)$$

- les résultats expérimentaux de Sawatzki (1970), en accord avec les calculs et la formule proposée par Dennis *et al.* (1980), dans le cas d'une sphère en rotation dans un fluide au repos ( $V_R = 0$ ) :

$$C_{m\omega} = \frac{1}{\pi} \left( a Re_{\omega}^{-1/2} + b Re_{\omega}^{-1} \right) \quad , \quad (IV.4)$$

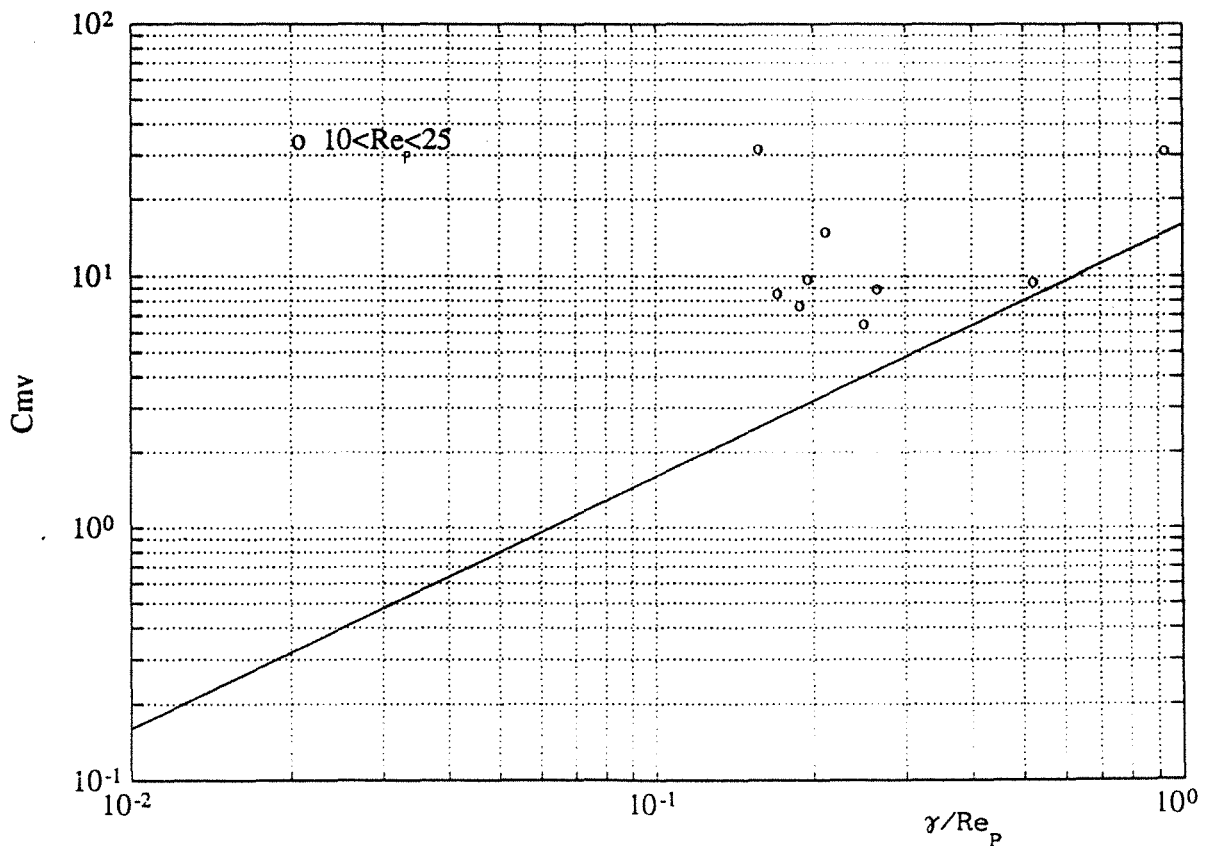
expression applicable dans une large gamme de nombres de Reynolds de rotation  $Re_{\omega}$ , avec les valeurs des paramètres  $a$  et  $b$  données par le tableau I.2.

En conséquence, nous avons choisi de présenter nos résultats expérimentaux sous les deux formes graphiques suivantes :

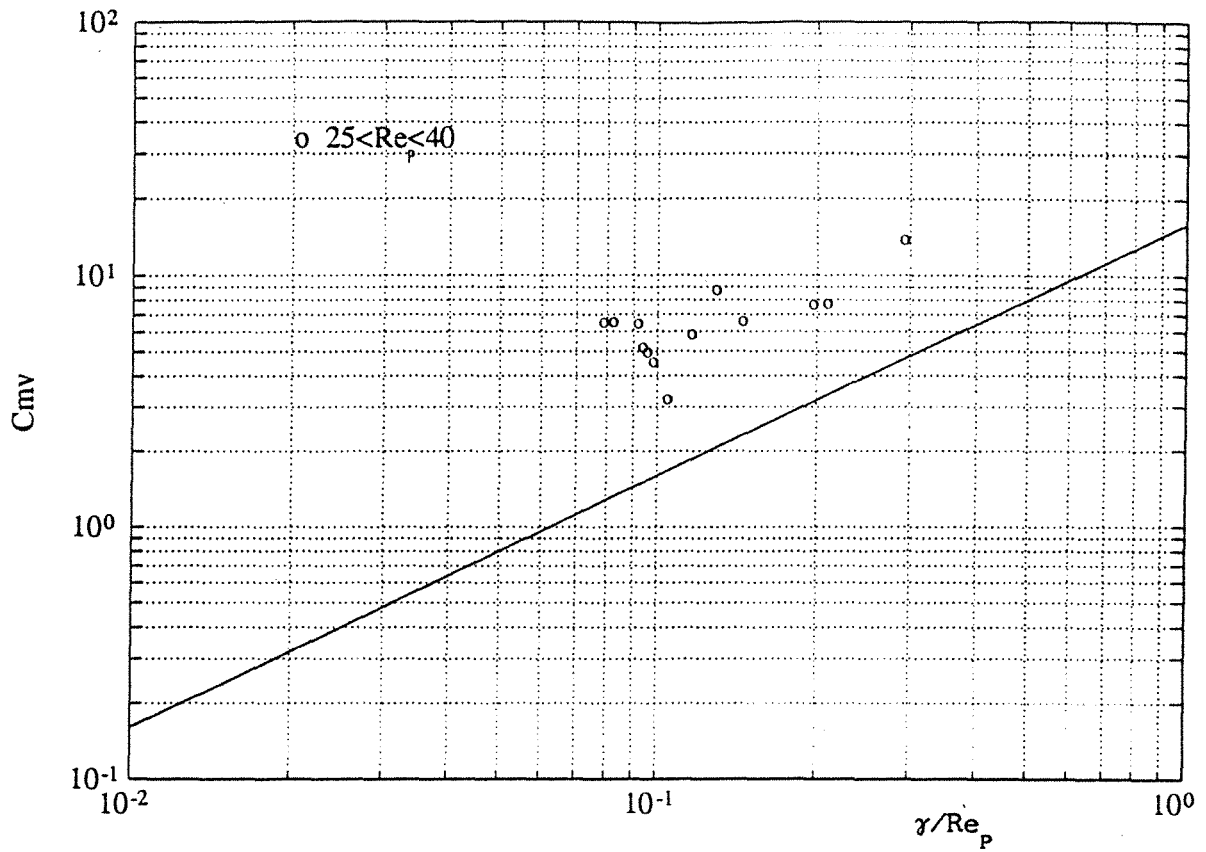
- représentation du coefficient  $C_{mv}$  en fonction du rapport  $\gamma/Re_p$ , afin de situer nos points expérimentaux par rapport à la relation théorique (IV.3) valable aux très petits nombres de Reynolds  $Re_p$ . Les figures correspondantes, établies pour les cinq plages de nombres de Reynolds considérées, sont les figures IV.6 à IV.10.
- représentation du coefficient  $C_{m\omega}$  en fonction du nombre de Reynolds de rotation  $Re_{\omega}$ , en vue de comparer nos résultats avec

la formule (IV.4), valable en l'absence de translation. Les figures correspondantes sont les figures IV.11 à IV.15.

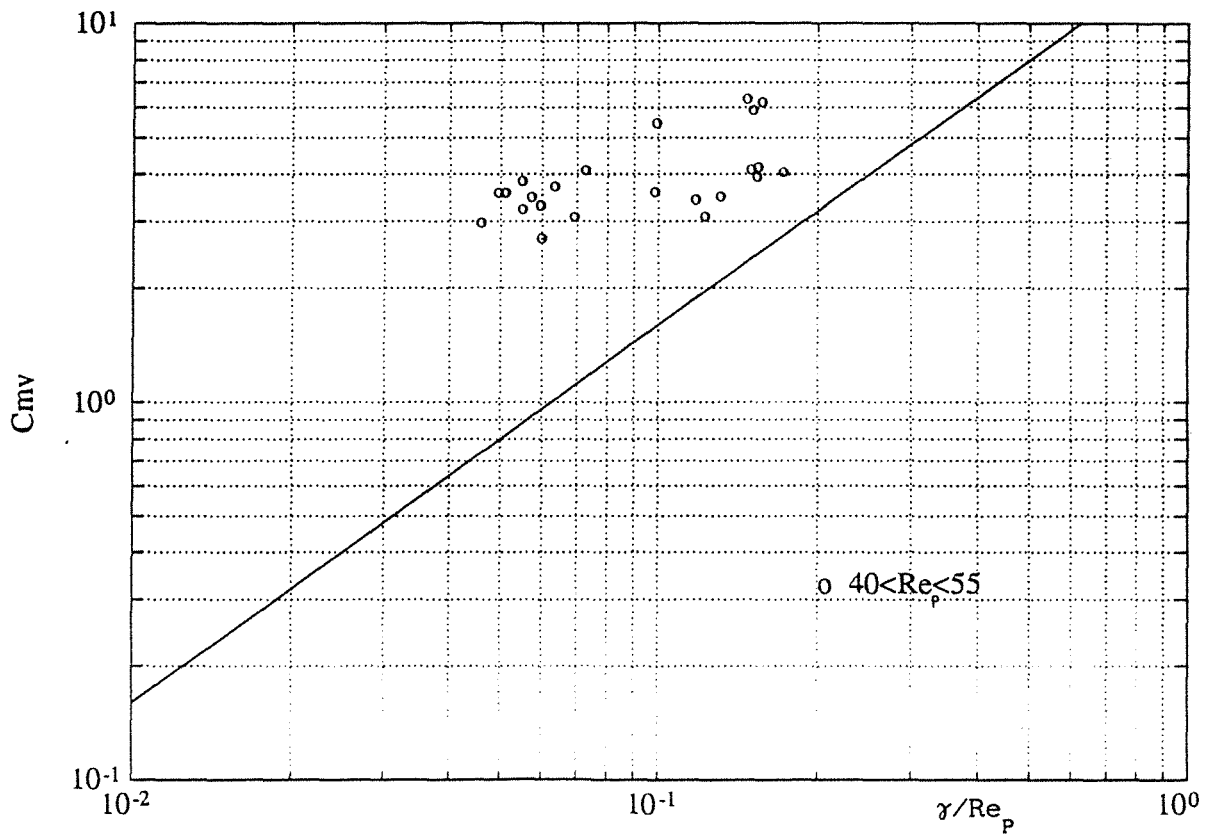
L'examen de ces différentes figures montre que le couple mesuré dans nos expériences est toujours nettement supérieur au couple théorique de Stokes, et ceci quelle que soit la plage de nombres de Reynolds. L'étude de la variation de  $C_{m\omega}$  en fonction de  $Re_\omega$  aboutit à une dispersion moins grande des résultats, qui semblent se regrouper sur une droite de pente -2 sur le diagramme logarithmique. En revenant à la définition de  $C_{m\omega}$ , on constate que ceci indiquerait un couple quasiment indépendant de la vitesse de rotation, ce qui ne paraît pas réaliste. Il nous semble qu'il faille expliquer ces résultats par la très mauvaise précision avec laquelle est connue la tension des fils, qui joue ici un rôle essentiel. Nous nous abstiendrons donc de tirer des conclusions quant à l'influence de la translation de la sphère sur le couple.



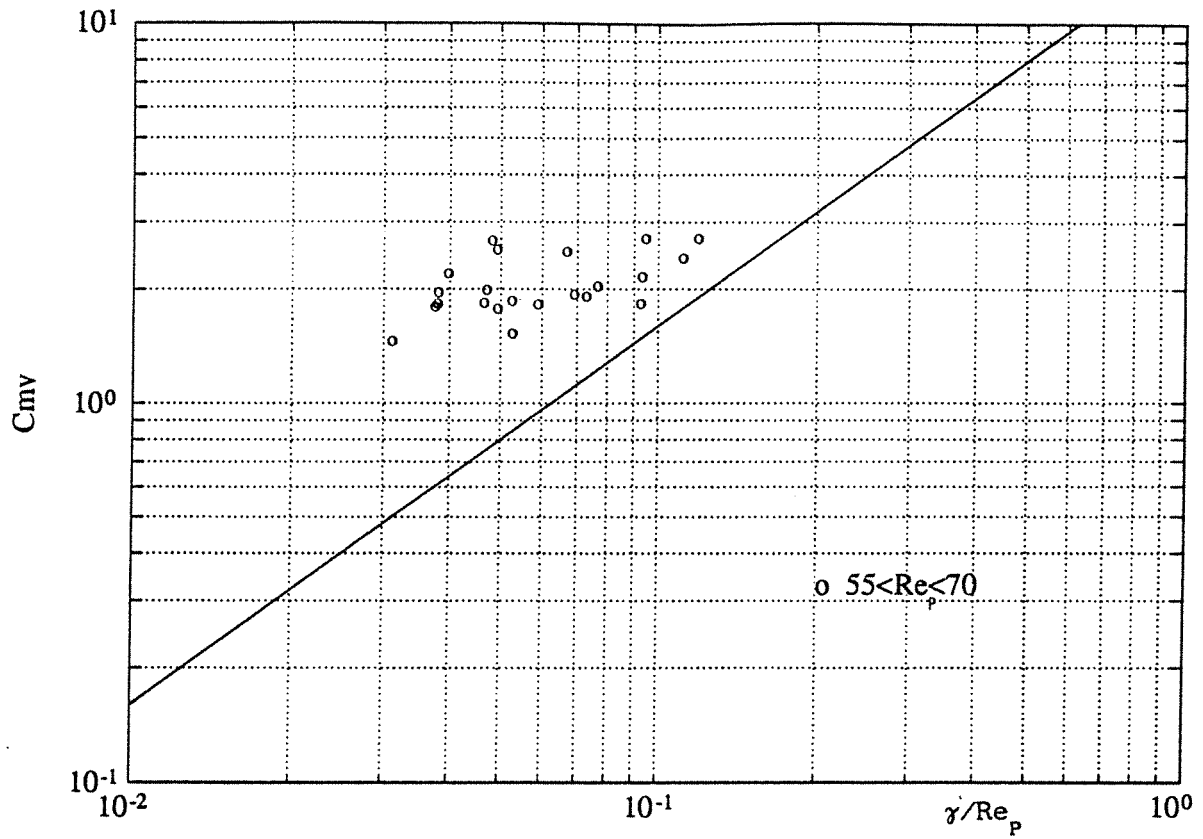
**Figure IV.6** : Coefficients  $C_{mv}$  mesurés dans la gamme  $10 < Re_p < 25$  comparés au résultat théorique de Rubinow & Keller ( $Re_p \ll 1$ )



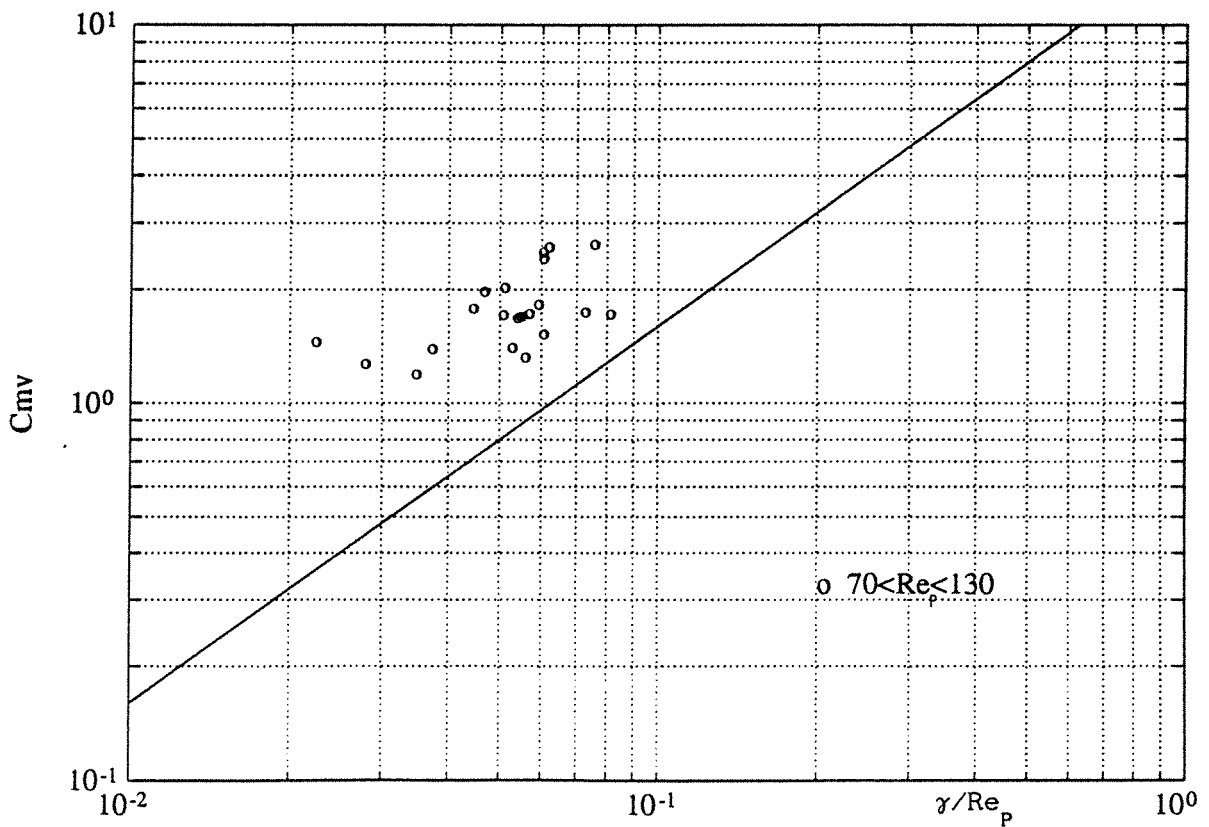
**Figure IV.7 :** Coefficients  $C_{mv}$  mesurés dans la gamme  $25 < Re_p < 40$  comparés au résultat théorique de Rubinow & Keller ( $Re_p \ll 1$ )



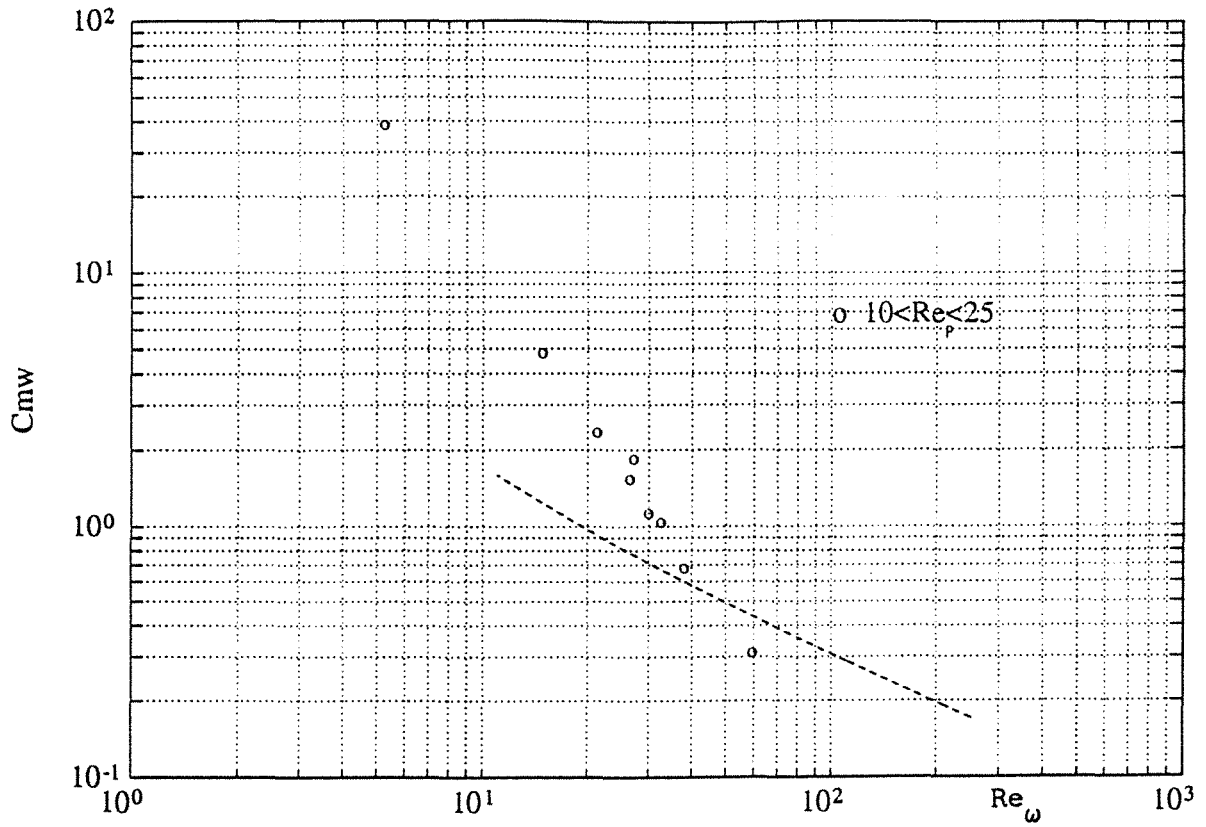
**Figure IV.8 :** Coefficients  $C_{mv}$  mesurés dans la gamme  $40 < Re_p < 55$  comparés au résultat théorique de Rubinow & Keller ( $Re_p \ll 1$ )



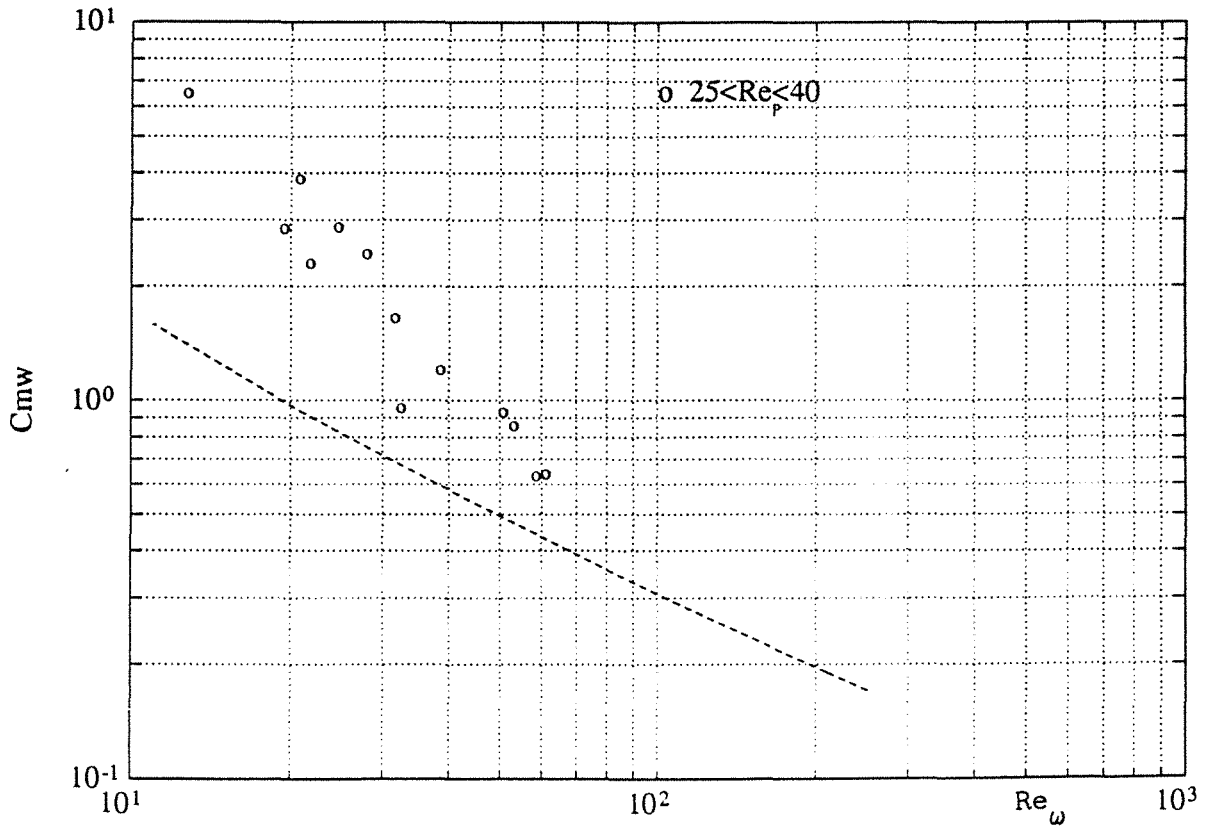
**Figure IV.9** : Coefficients  $C_{mv}$  mesurés dans la gamme  $55 < Re_p < 70$  comparés au résultat théorique de Rubinow & Keller ( $Re_p \ll 1$ )



**Figure IV.10** : Coefficients  $C_{mv}$  mesurés dans la gamme  $70 < Re_p < 130$  comparés au résultat théorique de Rubinow & Keller ( $Re_p \ll 1$ )

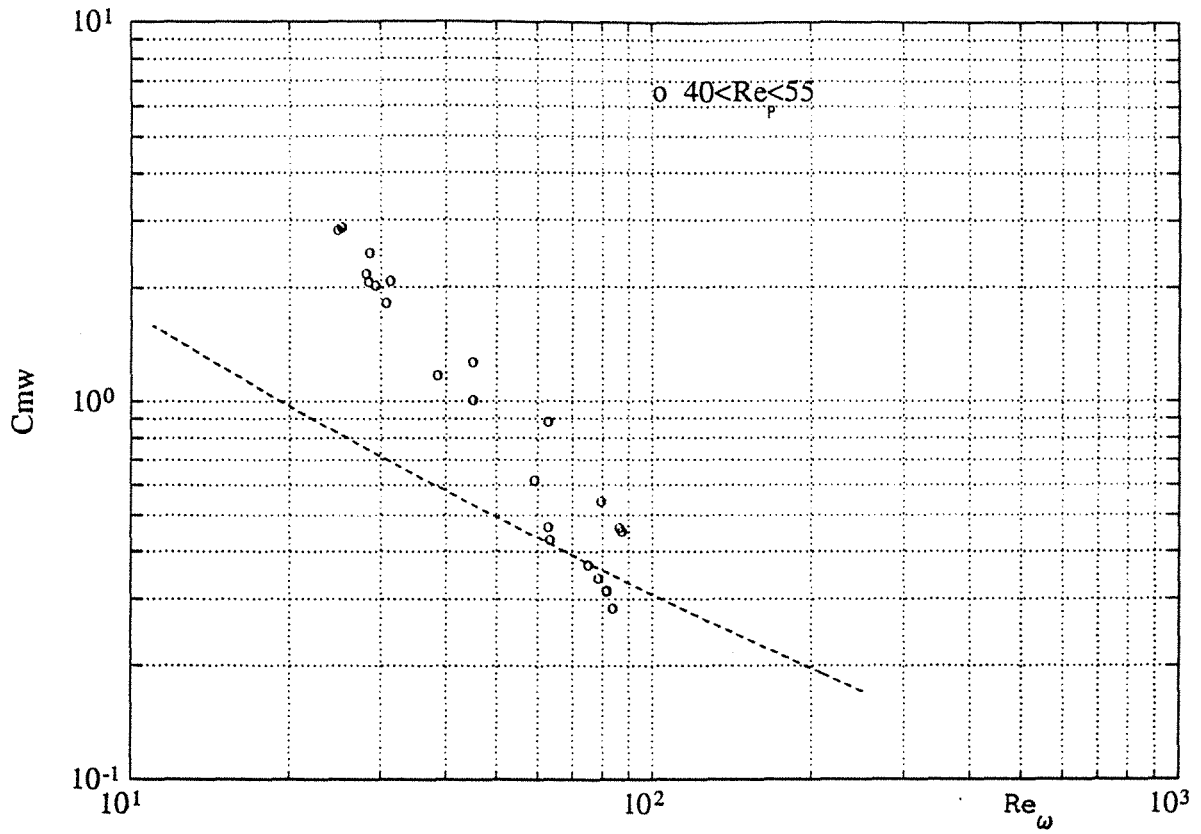


**Figure IV.11** : Coefficients  $C_{m\omega}$  mesurés dans la gamme  $10 < Re_p < 25$  comparés aux prédictions de Dennis *et al.* valables pour  $V_R = 0$

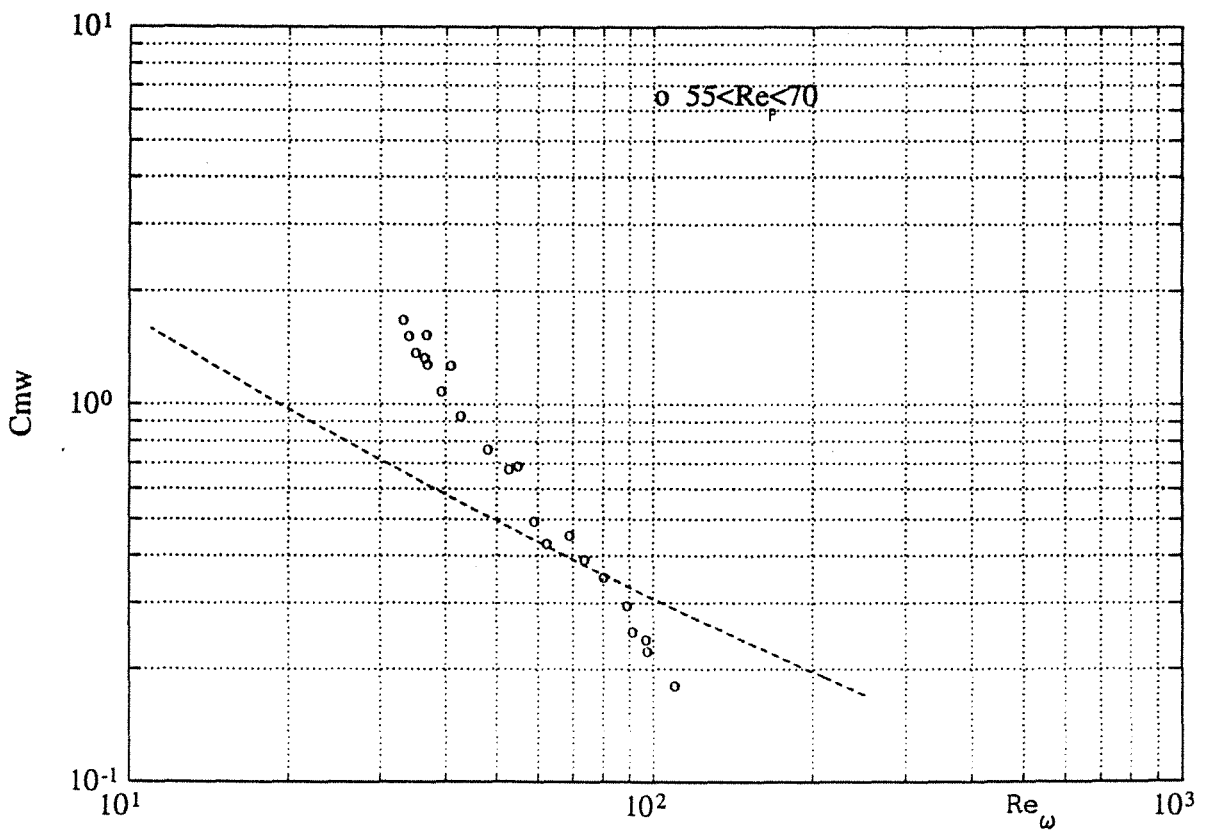


**Figure IV.12** : Coefficients  $C_{m\omega}$  mesurés dans la gamme  $25 < Re_p < 40$  comparés aux prédictions de Dennis *et al.* valables pour  $V_R = 0$

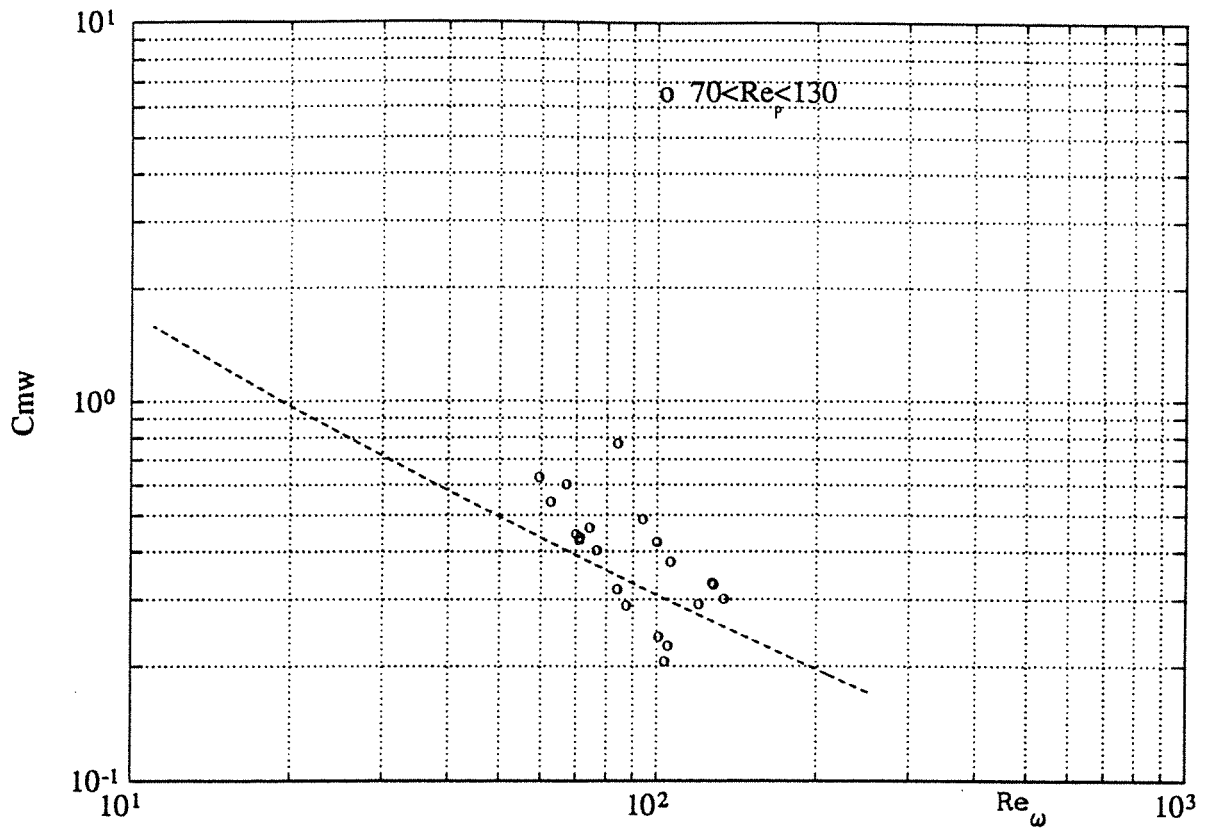




**Figure IV.13** : Coefficients  $C_{m\omega}$  mesurés dans la gamme  $40 < Re_p < 55$  comparés aux prédictions de Dennis *et al.* valables pour  $V_R = 0$



**Figure IV.14** : Coefficients  $C_{m\omega}$  mesurés dans la gamme  $55 < Re_p < 70$  comparés aux prédictions de Dennis *et al.* valables pour  $V_R = 0$



**Figure IV.15** : Coefficients  $C_{m\omega}$  mesurés dans la gamme  $70 < Re_p < 130$  comparés aux prédictions de Dennis *et al.* valables pour  $V_R = 0$

## CONCLUSION DU CHAPITRE IV

L'exposé des résultats expérimentaux obtenus grâce à notre technique de trajectographie, dans la gamme  $10 < Re_p < 130$ , appelle les commentaires immédiats suivants :

- dans l'état actuel du procédé expérimental, qui, en particulier, ne permet pas une détermination suffisamment précise de la tension des fils, il n'est pas possible de tirer de conclusion sur l'influence de la translation de la sphère sur la valeur du couple hydrodynamique.
- par contre, les résultats concernant l'étude du coefficient de portance sont très prometteurs : malgré une certaine dispersion due aux difficultés expérimentales, une tendance très nette se dessine quant à la variation de ce coefficient  $C_L$  avec le taux de rotation réduit  $\gamma = 2a\omega/V_R$ . Cette tendance pourrait se traduire par une relation du type :

$$C_L = k \gamma \quad (IV.5)$$

où  $k$  est un coefficient dépendant du nombre de Reynolds. Ce coefficient est une fonction décroissante de  $Re_p$ , qui sera étudiée plus précisément dans le prochain chapitre, consacré à une discussion complémentaire de nos résultats expérimentaux. Une relation de la forme (IV.5) présente l'avantage de permettre une comparaison aisée de nos mesures avec les résultats de la littérature, qui correspondent soit aux très petits nombres de Reynolds, soit à des nombres de Reynolds de l'ordre de 1000 ou plus.



## CHAPITRE V

### DISCUSSION DES RESULTATS

#### V.1. INTRODUCTION

L'objectif auquel nous voulons nous consacrer dans ce chapitre est celui d'une discussion complémentaire sur les résultats obtenus, notamment sur le coefficient de portance  $C_L$ , et sur l'influence sur celui-ci du taux de rotation réduit  $\gamma$ , et du nombre de Reynolds  $Re_p$  dans la gamme  $10 \leq Re_p \leq 100$ . Il est important en effet de situer les nouveaux résultats, issus de cette étude, dans l'ensemble des connaissances actuelles, qui, comme on l'a vu, n'existent que pour les nombres de Reynolds inférieurs à 1 ou supérieurs à environ 1000.

Aucune corrélation ne traduit actuellement la relation liant ce coefficient de portance aux deux paramètres  $\gamma$  et  $Re_p$  dans la gamme de nombres de Reynolds considérée. C'est pourquoi nous essaierons de mettre à profit nos résultats expérimentaux pour proposer une telle corrélation empirique.

Enfin, une comparaison très intéressante sera faite avec les premiers résultats numériques récents d'un travail en cours au LUMEN, objet d'une thèse devant être soutenue prochainement. Ces résultats ont été obtenus par résolution numérique des équations de Navier-Stokes à trois dimensions, en coordonnées sphériques.

## V.2. COMPARAISON AVEC LES RESULTATS CONNUS POUR D'AUTRES VALEURS DE $Re_p$

L'étude théorique de Rubinow & Keller (1961), dont nous avons décrit les résultats au chapitre I, montre qu'aux très faibles nombres de Reynolds, le coefficient de portance ne dépend que du taux de rotation réduit  $\gamma$ , auquel il est lié par la relation (I.39) :

$$C_L = \gamma \quad , \quad (V.1)$$

alors que Tsuji *et al.* (1985) ont été amené à proposer, après leurs expériences décrites en I.3.4, la relation suivante :

$$C_L \cong (0,20 \pm 0,05) \gamma \quad (V.2)$$

pour des nombres de Reynolds appartenant à la gamme 500-1600. Ici encore, il y a donc proportionnalité entre le coefficient de portance et le taux de rotation réduit  $\gamma$ , l'influence du nombre de Reynolds n'étant pas significative dans la gamme explorée.

Ces deux résultats, qui correspondent à une gamme de nombres de Reynolds qui encadre la nôtre, semblent donc indiquer une faible influence de celui-ci dans les gammes étudiées. On peut ainsi être amené à étudier l'existence d'une relation analogue aux précédentes, avec un coefficient de proportionnalité dépendant du nombre de Reynolds, soit :

$$C_L = k(Re_p) \gamma \quad , \quad (V.3)$$

la fonction  $k(Re_p)$  possédant les propriétés suivantes :

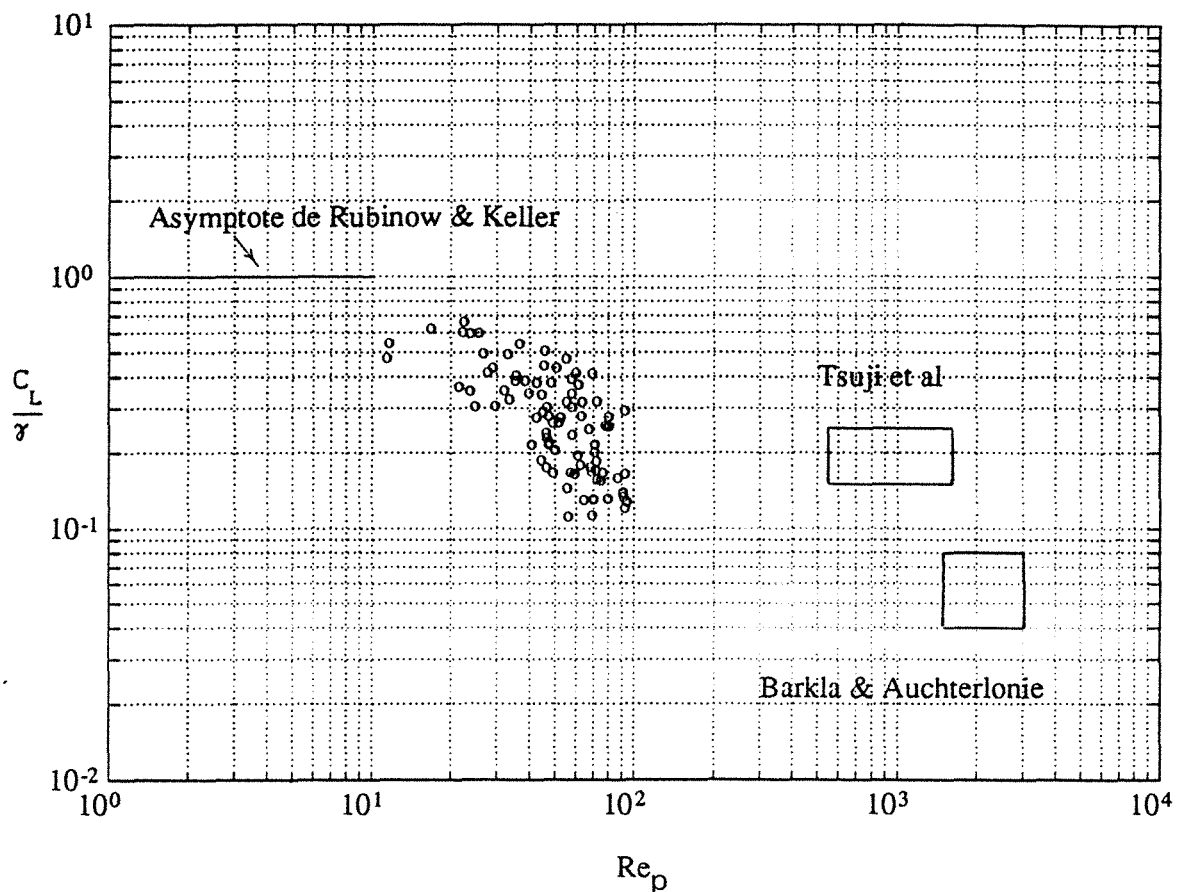
$$\begin{aligned} k(Re_p) &\longrightarrow 1 \quad \text{lorsque} \quad Re_p \longrightarrow 0 \\ k(Re_p) &\cong 0,20 \pm 0,05 \quad \text{pour} \quad 550 < Re_p < 1600 \quad (\gamma < 1,4) \end{aligned}$$

On pourrait ajouter, au vu des résultats expérimentaux de Barkla & Auchterlonie (1971) :

$$k(Re_p) \cong 0,06 \pm 0,02 \quad \text{pour} \quad 1500 < Re_p < 3000 \quad (4 < \gamma < 25)$$

Enfin, pour les grands nombres de Reynolds ( $Re_p > 10^4$ ), le coefficient de portance est donné par (I.54), ce qui correspond à  $k \cong 0.2$  (pour  $\gamma < 2$ ).

On peut donc illustrer la comparaison entre nos résultats et les résultats antérieurs en portant les valeurs du rapport  $C_L/\gamma = k$  en fonction du nombre de Reynolds. C'est ce que nous avons fait sur la figure V.1, où l'on constate que nos points expérimentaux, malgré la dispersion déjà observée, se regroupent sur une zone qui fait effectivement la transition entre la valeur théorique de Rubinow & Keller (indiquée par l'asymptote  $k = 1$ ), et les zones (rectangles) correspondant aux mesures de Tsuji *et al.* (1985) et de Barkla & Auchterlonie (1971).



**Figure V.1** : Relation entre  $C_L/\gamma$  et  $Re_p$ .

Comparaison de nos résultats (o) avec les résultats de Tsuji *et al.* ( $550 < Re_p < 1600$ ), de Barkla & Auchterlonie ( $Re_p \cong 2000$ ), et la valeur théorique pour  $Re_p \ll 1$ .

Il ressort de cette comparaison que le coefficient de proportionnalité entre  $C_L$  et  $\gamma$  subit une variation relativement forte dans la gamme des nombres de Reynolds intermédiaires qui nous préoccupent. Nous proposons, ci-dessous, une corrélation empirique permettant de traduire cette décroissance du rapport  $C_L/\gamma$  dans le domaine  $10 < Re_p < 100$ .

### V.3. PROPOSITION D'UNE CORRELATION EMPIRIQUE DANS LA GAMME $10 < Re_p < 100$

Dans un premier temps, nous avons recherché les valeurs moyennes du coefficient  $k$  dans chacune des zones de nombres de Reynolds définies au chapitre IV. Nous avons représenté, sur les figures IV.1 à IV.5, les droites de régression correspondant à une relation du type  $C_L = k \gamma$  : il est donc facile d'en déduire la valeur de  $k$  pour chaque zone. On a ainsi obtenu :

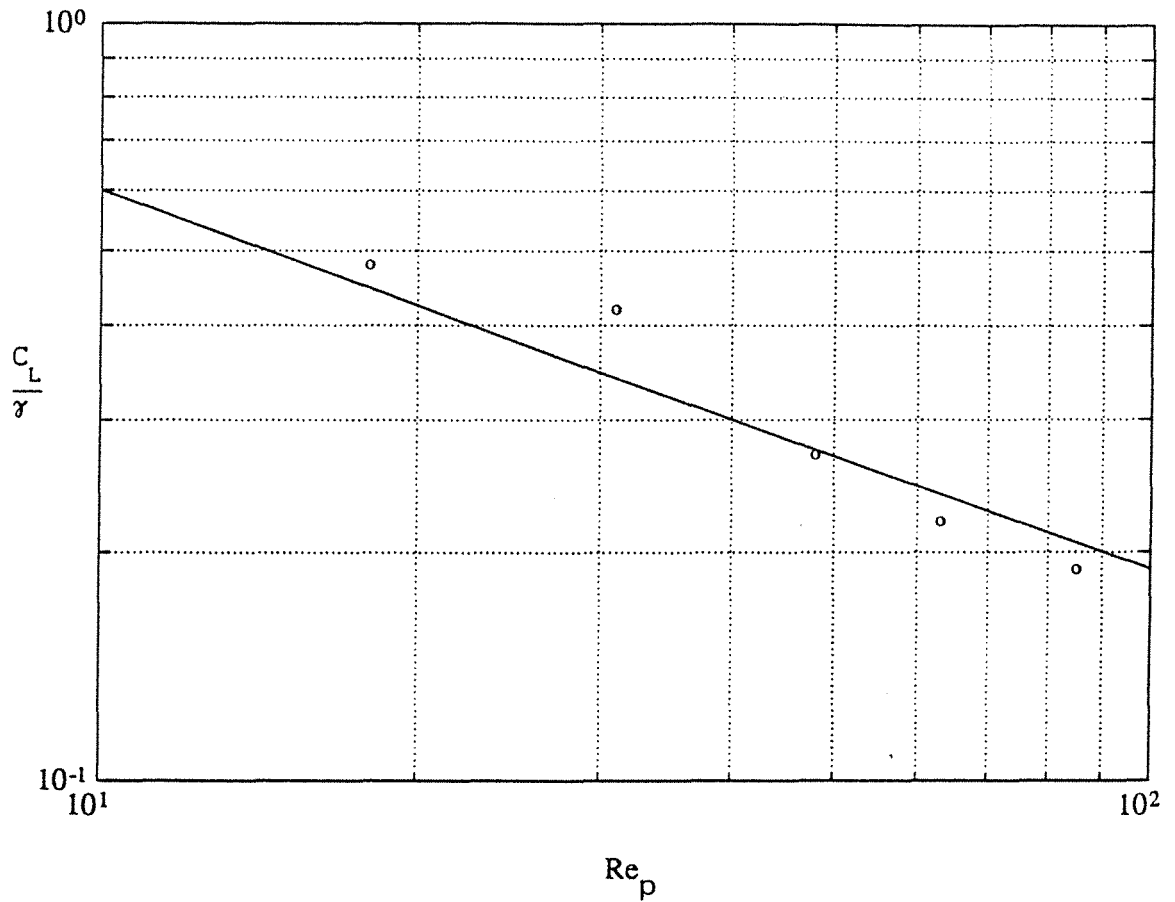
$k \cong 0,48$	pour	$10 < Re_p < 25$	(Zone 1)	} $2 \leq \gamma \leq 10,5$ $10 < Re_p < 130$
$k \cong 0,42$	pour	$25 < Re_p < 40$	(Zone 2)	
$k \cong 0,27$	pour	$40 < Re_p < 55$	(Zone 3)	
$k \cong 0,22$	pour	$55 < Re_p < 70$	(Zone 4)	
$k \cong 0,19$	pour	$70 < Re_p < 130$	(Zone 5)	

Pour chacune des zones indiquées ci-dessus, on reporte le point correspondant en lui affectant comme abscisse le nombre de Reynolds moyen de la zone.

On obtient ainsi le graphique illustré par la figure V.2, sur lequel on constate que les différents points se situent approximativement sur une droite (en coordonnées logarithmiques). On peut donc proposer, pour la fonction  $k(Re_p)$ , la forme suivante :

$$k \cong a \cdot Re_p^{-b} \quad (V.4)$$





**Figure V.2** : Relation entre les valeurs expérimentales moyennes de  $C_L/\gamma$  et le nombre de Reynolds

Les valeurs des coefficients  $a$  et  $b$  correspondant à la droite tracée sur la figure V.2. sont :  $a \cong 1,9$  et  $b \cong 0,5$ . Ceci signifie que, dans la plage de nombres de Reynolds étudiée, le coefficient de portance peut être considéré comme inversement proportionnel à  $\sqrt{Re_p}$ .

Plus précisément, les relations (V.3) et (V.4) montrent que le coefficient de portance peut être estimé, dans la gamme  $10 < Re_p < 130$ , par la corrélation empirique suivante :

$$C_L \cong 1,9 \gamma Re_p^{-1/2} \quad (V.5)$$

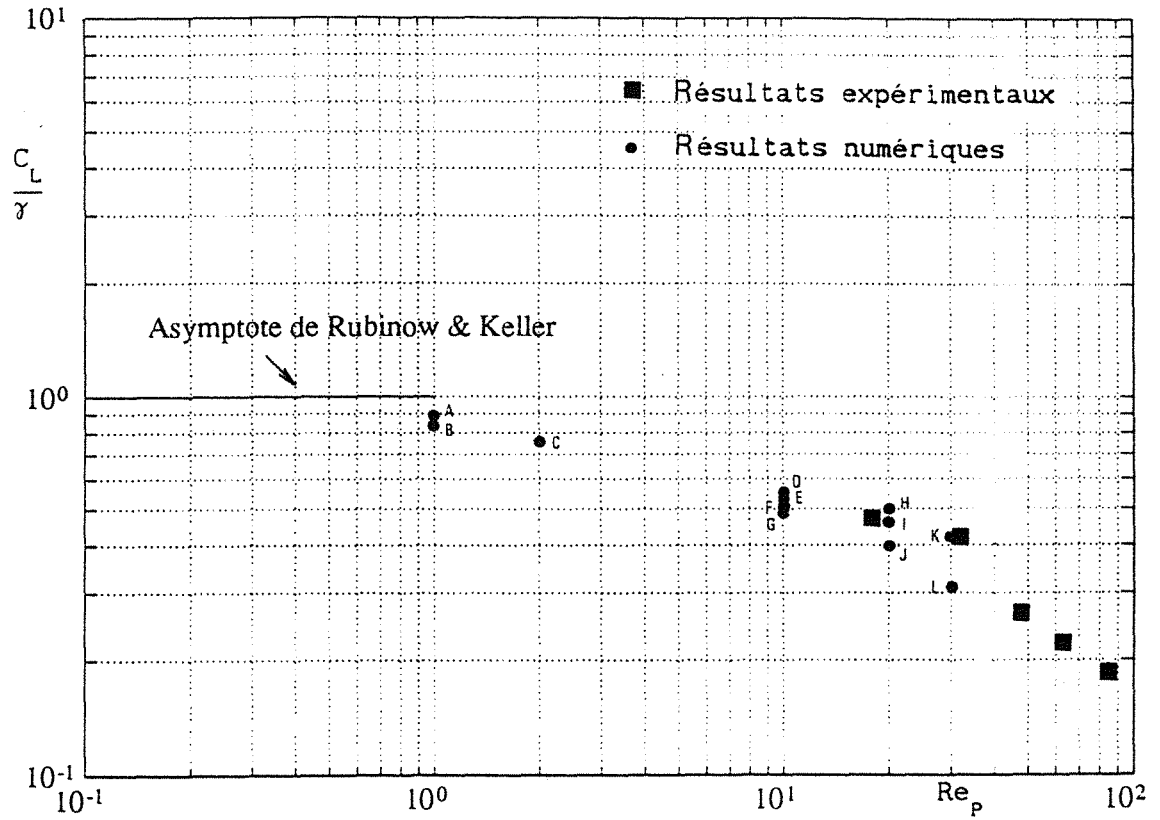
#### V.4. COMPARAISON AVEC DES RESULTATS NUMERIQUES RECENTS

Un travail théorique et numérique, objet d'une thèse actuellement en cours au LUMEN, a pour but de résoudre les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles dans le cas de l'écoulement autour d'une sphère en translation et rotation. Il s'agit donc d'obtenir, par un moyen totalement différent, les mêmes coefficients que nous nous sommes efforcés d'approcher expérimentalement durant notre travail de thèse.

La résolution numérique entreprise, basée sur une procédure de correction de pression appliquée à un maillage non uniforme, construit sur des coordonnées sphériques, a récemment abouti à de premiers résultats. Ceux-ci correspondent aux nombres de Reynolds  $Re_p = 1, 2, 10, 20,$  et  $30,$  et peuvent donc être comparés à nos résultats expérimentaux, et être situés également par rapport au coefficient de portance théorique de Rubinow & Keller.

Cette comparaison est illustrée par la figure V.3 qui suit, où les points obtenus par le calcul numérique correspondent aux données indiquées par le tableau V.1. Les points expérimentaux représentent, comme dans la figure précédente, les valeurs moyennes des rapports  $k = C_L / \gamma$  par zone de nombres de Reynolds.

On constate que la comparaison entre résultats expérimentaux et théoriques est très satisfaisante. Le calcul numérique confirme la tendance que nous avons dégagée expérimentalement, à savoir une décroissance du coefficient de portance lorsque le nombre de Reynolds augmente, à  $\gamma$  fixé. En outre, on peut observer que cette décroissance s'amorce déjà aux nombres de Reynolds inférieurs à 1. Aux valeurs de  $Re_p$  de 10, 20 et 30, les valeurs numériques et expérimentales moyennes du rapport  $k$  sont très proches.



**Figure V.3** : Comparaison de nos résultats expérimentaux avec des résultats numériques récents obtenus au LUMEN (voir tableau V.1)

$Re_p$	Points	$k = \frac{C_L}{\gamma}$	$\gamma$
1	A	0.842	1
	B	0.886	10
2	C	0.765	0.2
		0.765	0.4
10	D	0.55	0.2
	E	0.537	2
	F	0.506	4
	G	0.492	10
20	H	0.5	0.2
	I	0.469	2
30	J	0.399	4
	K	0.425	2
	L	0.312	10

**Tableau V.1** : Données correspondant aux résultats numériques présentés



## CONCLUSION DU CHAPITRE V

Les comparaisons présentées dans ce chapitre montrent que les résultats expérimentaux obtenus par notre technique originale s'inscrivent parfaitement dans la tendance que laissaient entrevoir l'association des résultats théoriques à très faibles nombres de Reynolds (Rubinow & Keller 1961) et des mesures de portance effectuées par Tsuji *et al.* (1985) au voisinage de  $Re_p \cong 1000$ .

Une corrélation empirique a été proposée : elle permet une estimation du coefficient de portance dans cette gamme de nombres de Reynolds. Néanmoins, les domaines correspondant aux nombres de Reynolds inférieurs à 10 ou compris entre 100 et environ 500 restent inexplorés, et notre corrélation ne peut y être appliquée. Par contre, des résultats numériques récents obtenus au LUMEN, que nous avons présentés ici afin de les comparer à nos mesures, montrent que le calcul numérique peut permettre de combler les lacunes existant dans le domaine des nombres de Reynolds inférieurs à quelques dizaines, et ceci jusqu'au domaine de validité de la relation théorique de Rubinow & Keller.

La comparaison entre ces résultats numériques et nos résultats expérimentaux est très encourageante, dans la mesure où un bon accord peut être observé dans la zone commune  $10 < Re_p < 30$ .



## CONCLUSION GENERALE

Nous avons exposé ici une méthode de détermination expérimentale des actions hydrodynamiques sur une sphère en translation et rotation simultanées, ainsi que les résultats obtenus, dans la gamme des nombres de Reynolds  $Re_p$  compris approximativement entre 10 et 100. Nous avons montré qu'une technique de trajectographie stroboscopique, dont le principe consiste à examiner la trajectoire ascendante de la sphère dans une zone pouvant être considérée comme rectiligne uniforme (et donc en régime permanent), permet de déterminer la force de portance et le couple exercés par le fluide sur la sphère.

Cette technique expérimentale a été étudiée afin d'obtenir les conditions nécessaires à l'exploitation de la zone des nombres de Reynolds intermédiaires qui nous intéressent. On a vu qu'un des avantages principaux de la solution retenue est que la vitesse de rotation est liée directement aux vitesses de translation de la sphère et du contrepoids. Par ailleurs, on peut maîtriser ces vitesses grâce à la modification de données simples telles que la masse de la sphère, celle du contrepoids ainsi que le diamètre de l'axe d'enroulement.

L'objectif visé était de compléter les connaissances actuelles concernant l'influence sur les coefficients hydrodynamiques des paramètres adimensionnels  $Re_p$  et  $\gamma$  (taux de rotation réduit) dans la gamme  $10 < Re_p < 100$ . Nous pouvons considérer que cet objectif est atteint pour ce qui concerne le coefficient de portance, bien que certaines améliorations de la méthode utilisée paraissent souhaitables dans le but d'en augmenter la précision. De telles améliorations devraient permettre, en outre, une meilleure détermination de la tension des fils de suspension, dont l'intervention dans l'expression

du couple ne nous a pas permis d'obtenir des résultats significatifs concernant l'influence de la translation sur le coefficient de couple.

Une tendance très nette a été mise en évidence quant à la variation du coefficient de portance  $C_L$  avec le taux de rotation réduit  $\gamma$  et avec le nombre de Reynolds  $Re_p$ . Cette tendance, qui est conforme à ce qu'indiquaient les résultats connus dans d'autres gammes de nombres de Reynolds, peut se résumer par :

- une décroissance de  $C_L$  lorsque  $Re_p$  augmente, à  $\gamma$  fixé.
- une quasi-proportionnalité de  $C_L$  avec  $\gamma$ , à  $Re_p$  constant.

L'examen de l'influence du nombre de Reynolds sur les valeurs expérimentales du rapport  $C_L/\gamma$  nous a permis de proposer une expression empirique du coefficient de portance de la sphère. Cette expression, applicable dans la gamme étudiée  $10 < Re_p < 130$ , est la suivante :

$$C_L \cong 1,9 \gamma Re_p^{-1/2}$$

Enfin, nos mesures ont été confrontées aux premiers résultats d'une étude numérique, objet d'une thèse en cours au LUMEN, concernant le même problème d'une sphère en translation et rotation. Ces résultats numériques couvrent actuellement la gamme des nombres de Reynolds inférieurs à 30. Dans la zone  $10 < Re_p < 30$ , couverte par les deux types d'approche, on constate un accord très satisfaisant entre les résultats numériques et expérimentaux, ce qui constitue un point encourageant quant à la validité de nos expériences et de l'expression empirique ci-dessus.

Grâce à cette corrélation empirique, il est donc possible d'estimer le coefficient de portance d'une sphère en translation et rotation connaissant ses vitesses de translation et de rotation, à condition que les paramètres  $Re_p$  et  $\gamma$  appartiennent aux gammes indiquées ci-dessus. Par suite, l'introduction de cette corrélation dans les codes de calcul d'écoulement gaz-solide par simulation lagrangienne (c'est-à-dire par calculs de trajectoires de particules) doit permettre d'améliorer la prédiction du comportement des particules en



suspension, en particulier au voisinage d'une paroi où l'on sait que l'influence de la rotation induite par les collisions est importante.

Nous avons montré, dans notre revue bibliographique, l'absence complète de résultats concernant le coefficient de portance dans la zone des nombres de Reynolds compris approximativement entre 1 et 500. L'association de nos mesures et de celles de Tsuji *et al.* (1985) indique que le coefficient de portance semble pouvoir être estimé par  $C_L \cong 0,2 \gamma$  dans la zone  $100 < Re_p < 1000$ . Notre travail contribuant à un apport dans la gamme 10 - 100, il resterait donc à combler, pour disposer d'informations complètes, le domaine des nombres de Reynolds inférieurs à 10 : de nouvelles expériences peuvent être envisagées, mais il s'agit là d'une gamme très difficile à explorer par ce moyen. Nous pensons, au vu des premiers résultats numériques encourageants obtenus par ailleurs et évoqués plus haut, que c'est par le calcul numérique que cette gamme des faibles nombres de Reynolds pourra être couverte de façon complète et plus précise.



## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

**BANKS W.H.H., (1976)**

"The laminar boundary layer on a rotating sphere", *Acta Mechanica*, 24, p.273.

**BARKLA H.M. & AUCHTERLONIE L.J., (1971)**

"The Magnus or Robins effect on rotating spheres", *J. Fluid Mech.* 47, 3, pp.437-488.

**BATCHELOR G.K., (1967)**

"An introduction to fluid dynamics", Cambridge University Press.

**BRISON J.F. & MATHIEU J., (1973)**

"Couche limite due à une sphère en rotation dans un milieu au repos", *C.R. Acad. Sci. Paris, A 276*, 12, pp.871-874.

**BRUN A.E., MARTINOT-LAGARDE A. & MATHIEU J., (1970)**

"*Mécanique des fluides*", Tome III, Dunod, Paris.

**BUI DINH T., OESTERLE B. & DENEU F., (1990)**

"Premiers résultats sur la portance d'une sphère en rotation aux nombres de Reynolds intermédiaires", *C.R. Acad. Sci. Paris*, 311, pp.27-31.

**CHERUKAT P. & McLAUGHLIN J.B., (1990)**

"Wall-induced lift on a sphere", *Int. J. Multiphase Flow*, 16, 5, pp.899-907.

**CHESTER W. & BREACH D.R., (1969)**

"On the flow past a sphere at low Reynolds number", *J. Fluid Mech.* 37, 4, pp.751-760.

**CHILDRESS S., (1964)**

"The slow motion of a sphere in a rotating, viscous fluid", *J. Fluid Mech.*, 20, 2, pp.305-314.

**DANDY D.S. & DWYER H.A., (1990)**

"A sphere in shear flow at finite Reynolds number : effect of shear on particle lift, drag and heat transfer", *J. Fluid Mech.*, 216, pp.381-410.

**DAVIES J.M., (1949)**

"The aerodynamics of golf balls", *J. Appl. Phys.*, 20, pp.821-828.

**DENNIS S.C.R. & INGHAM D.B., (1979)**

"Laminar boundary layer on an impulsively started rotating sphere", *Phys. of Fluids*, 22, 1, pp.1-9.

**DENNIS S.C.R., SINGH S.N. & INGHAM D.B., (1980)**

"The steady flow due to a rotating sphere at low and moderate Reynolds numbers", *J. Fluid Mech.*, 102, 2, pp.257-279.

**DREW D.A., (1978)**

"The force on a small sphere in a slow viscous flow", *J. Fluid Mech.*, 88, 2, pp.393-400.

**EICHHORN R. & SMALL S., (1964)**

"Experiments on the lift and drag of spheres suspended in a Poiseuille flow", *J. Fluid Mech.*, 20, 3, pp.513-527.

**FEUILLEBOIS F., (1980)**

"Certains problèmes d'écoulement mixtes fluide-particules solides", *Thèse de Doctorat d'Etat, Université P & M. Curie, (Paris VI)*.

**HAPPEL J. & BRENNER H., (1965)**

"*Low Reynolds number hydrodynamics*", Noordhoff, Groningen, Pays-Bas.

**HARPER E.Y. & CHANG I.D., (1968)**

"Maximum dissipation resulting from lift in a slow viscous shear flow", *J. Fluid Mech.*, 33, 2, pp.209-225.

**HOWARTH L., (1951)**

"Note on the boundary layer on a rotating sphere", *Phil. Mag.*, VII, 42, pp.1308-1315.

**INGHAM D.B., (1983)**

"Steady flow past a rotating cylinder", *Computers & Fluids*, 11, 4, pp.351-366.

**INGHAM D.B. & TANG T., (1990)**

"A numerical investigation into the steady flow past a rotating circular cylinder at low and intermediate Reynolds numbers", *J. Computational Physics*, 87, pp.91-107.

**LAMB H., (1932)**

"*Hydrodynamics*", 6<sup>ème</sup> édition, Cambridge University Press.

**MACCOLL J.H., (1928)**

"Aerodynamics of a spinning sphere", *J. Roy. Aero. Soc.*, 32, pp.777-798.

**MEI R., (1992)**

"An approximate expression for the shear lift force on a spherical particle at finite Reynolds number", *Int. J. Multiphase Flow*, **18**, 1, pp.145-147.

**MOORE D.W., (1957)**

"The flow past a rapidly rotating circular cylinder in a infinite stream", *J. Fluid Mech.*, **2**, pp.541-550.

**MORSI S.A. & ALEXANDER A.J., (1972)**

"An investigation of particle trajectories in two-phase flow system", *J. Fluid Mech.*, **55**, 2, pp.193-208.

**OESTERLE B., (1988)**

"Une méthode de détermination expérimentale des actions hydrodynamiques sur un corps aux nombres de Reynolds intermédiaires", *Proc. 9<sup>th</sup> Symp. on Engineering Applications of Mechanics, London, Ontario, Canada.*

**OESTERLE B., (1989)**

"Etude expérimentale des actions hydrodynamiques sur une sphère en rotation aux nombres de Reynolds intermédiaires", *Actes 9<sup>ème</sup> Congr. Français de Mécanique, Metz, France.*

**OESTERLE B., (1991)**

"Actions hydrodynamiques sur les particules en suspension : cas des écoulements gaz-solide ou gaz-gouttelettes", *Séminaire L.E.A. Poitiers, déc.1991.*

**OESTERLE B., BUI DINH T. & VIAL J.L., (1991)**

"Measurement of lift and torque on a rotating sphere at intermediate Reynolds number", *Mech. Res. Comm.*, **18**, 2/3 pp.145-pp.145-155.

**PROUDMAN I. & PEARSON J.R.A., (1957)**

"Expansion at small Reynolds number for the flow past a sphere and a circular cylinder", *J. Fluid Mech.*, **2**, 3, pp.237-262.

**RUBINOW S.I. & KELLER J.B., (1961)**

"The transverse force on a spinning sphere moving in a viscous fluid", *J. Fluid Mech.*, **11**, pp.447-459.

**SAFFMAN P.G. (1965)**

"The lift on a small sphere in a slow shear flow", *J. Fluid Mech.* **22**, 2, pp. 385-400.

**SAFFMAN P.G. (1968)**

"Corrigendum", *J. Fluid Mech.*, **31**, 3, pp.624.

**SAWATZKI O., (1970)**

"Das Strömungsfeld um eine rotierende Kugel", *Acta Mechnica*, 9, pp.159-214.

**SCHLICHTING H., (1960)**

"Boundary layer theory", 4<sup>ème</sup> édition, McGraw-Hill.

**TAKAGI H., (1974)**

"On the slow motion of a sphere in a viscous fluid", *J. Physical Soc. Japan*, 42, 1, pp.505-510.

**TAKAGI H., (1977)**

"Viscous flow induced by slow rotation of a sphere", *J. Physical Soc. Japan*, 42, 1, pp.319-325.

**TANI I., (1950)**

"Baseball's curved balls", *Kagaku*, 20, pp.405-409.

**TA PHUOC L. (1975)**

"Etude numérique de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible autour d'un cylindre fixe ou en rotation - Effet Magnus", *J. Mécanique*, 14, 1, pp.109-134.

**TSUJI Y., MORIKAWA Y. & MIZUNO O., (1985)**

"Experimental measurement of the Magnus force on a rotating sphere at low Reynolds numbers, *J. Fluids Engng., Trans. ASME*, 107, pp.484-488.

**WILLETTS B.B. & MURRAY C.G., (1981)**

"Lift exerted on stationary spheres in turbulent flow", *J. Fluid Mech.*, 105, pp.487-505.

**WILLETTS B.B. & NADDEH K.F., (1986)**

"Measurement of lift on spheres fixed in low Reynolds number flows", *J. Hydraulic Research*, 24, 5, pp.425-435.

ANNEXE

**TABLEAUX DE RESULTATS**





TABLEAU DES RESULTATS

$$10 < Re_p < 25$$

N° Essais	Re <sub>p</sub>	γ	Re <sub>ω</sub>	Calculées		Mesurées			Sphère
				C <sub>D MA</sub>	C <sub>mω Den</sub>	C <sub>mω</sub>	C <sub>mv</sub>	C <sub>L</sub>	
717	16.73	3.53	14.741	2.98	1.2443	4.805	14.97	2.197	Matière : LAITON  Masse : 24.15 g  a <sub>s</sub> : 8.5 mm  a <sub>c</sub> : 0.5 mm  a <sub>f</sub> : 0.04 mm
01	23.6	4.59	27.09	2.38	0.7722	1.842	9.71	1.615	
691	11.36	10.5	29.817	3.81	0.7072	1.13	31.1	4.986	
668	22.42	3.82	21.394	2.46	0.9223	2.344	8.55	1.886	
910	21.4	11.06	59.198	2.53	0.4396	0.312	9.47	4.04	
911	22.12	5.85	32.334	2.48	0.6775	1.041	8.9	3.53	
912	23.69	4.46	26.395	2.37	0.7873	1.538	7.64	2.65	
04	11.55	1.81	5.238	3.77	3.0004	38.562	31.67	0.985	
716	24.69	6.16	38.027	2.31	0.667	0.679	6.44	2.529	Matière : DURAL Masse : 42.192 g  a <sub>s</sub> : 15.1 mm a <sub>c</sub> : 0.75 mm a <sub>f</sub> : 0.06 mm

Note : C<sub>D MA</sub> est le coefficient de trainée de Morsi & Alexandre

C<sub>mω Den</sub> est le coefficient du couple de Dennis & al.

TABLEAU DES RESULTATS

$$25 < Re_P < 40$$

N° Essais	Re <sub>P</sub>	γ	Re <sub>ω</sub>	Calculées		Mesurées			Sphère
				C <sub>D MA</sub>	C <sub>mω Den</sub>	C <sub>mω</sub>	C <sub>mv</sub>	C <sub>L</sub>	
744	36.38	3.47	31.564	1.81	0.6896	1.648	4.96	1.881	Matière : TITANE Masse : 39.17 g
590	33.43	6.99	58.4	1.9	0.4437	0.632	7.71	2.278	a <sub>s</sub> : 12.5 mm a <sub>c</sub> : 0.75 mm a <sub>f</sub> : 0.09 mm
674	35.27	6.92	60.971	1.84	0.4306	0.64	7.66	2.808	Matière : LAITON Masse : 27.02 g
676	38.34	5.53	53.018	1.75	0.4749	0.86	6.57	1.84	a <sub>s</sub> : 8.5 mm a <sub>c</sub> : 0.75 mm
677	26.36	7.7	50.729	2.21	0.4899	0.934	13.85	3.819	a <sub>f</sub> : 0.06 mm
608	29.4	3.79	27.872	2.06	0.756	2.437	8.75	1.166	Matière : LAITON Masse : 24.302 g
620	31.82	2.61	20.734	1.96	0.9445	3.851	6.56	0.925	a <sub>s</sub> : 8.5 mm
621	32.78	3.0	24.599	1.93	0.83	2.875	6.47	1.483	a <sub>c</sub> : 0.5 mm
623	39.62	3.88	38.445	1.72	0.5972	1.205	4.54	1.341	a <sub>f</sub> : 0.06 mm
709	25.45	2.0	12.722	2.26	1.3804	6.508	6.51	1.196	Matière : LAITON Masse : 24.15 g
8	28.84	2.7	19.44	2.09	0.9922	2.851	5.2	1.179	a <sub>s</sub> : 8.5 mm a <sub>c</sub> : 0.5 mm
54	27.41	3.18	21.805	2.16	0.909	2.303	5.82	1.33	a <sub>f</sub> : 0.04 mm

TABLEAU DES RESULTATS

$$25 < Re_p < 40$$

N° Essais	Re <sub>p</sub>	γ	Re <sub>ω</sub>	Calculées		Mesurées		C <sub>L</sub>	Sphère
				C <sub>D MA</sub>	C <sub>mω Den</sub>	C <sub>mω</sub>	C <sub>mv</sub>		
922	35.3	3.675	32.434	1.84	0.676	0.955	3.23	1.25	Matière : DURAL Masse : 42.192 g a <sub>s</sub> : 15.1 mm a <sub>c</sub> : 0.75 mm a <sub>f</sub> : 0.04 mm

TABLEAU DES RESULTATS

$$40 < Re_p < 55$$

N° Essais	Re <sub>p</sub>	γ	Re <sub>ω</sub>	Calculées		Mesurées		C <sub>L</sub>	Sphère
				C <sub>D MA</sub>	C <sub>mω Den</sub>	C <sub>mω</sub>	C <sub>mv</sub>		
746	42.31	2.68	28.333	1.65	0.7469	2.073	3.72	1.02	Matière : <b>TITANE</b>
747	45.46	2.7	30.684	1.58	0.7041	1.82	3.32	1.372	Masse : 39.17 g
748	44.29	2.53	27.998	1.61	0.7535	2.172	3.48	0.865	a <sub>s</sub> : 12.5 mm
750	46.08	2.53	29.202	1.57	0.7303	2.022	3.24	0.581	a <sub>c</sub> : 0.75 mm
751	47.18	3.25	38.394	1.55	0.5978	1.172	3.09	0.912	a <sub>f</sub> : 0.09 mm
545	51.61	6.29	81.115	1.47	0.3539	0.314	3.1	1.66	Idem a <sub>f</sub> : 0.06 mm
682	50.39	4.98	62.708	1.49	0.4222	0.881	5.47	2.17	Matière : <b>LAITON</b>
683	46.56	6.82	79.36	1.56	0.3593	0.544	6.33	2.08	Masse : 24.15 g
684	46.95	7.34	86.104	1.55	0.34	0.463	6.23	1.59	a <sub>s</sub> : 8.5 mm
685	48.16	7.24	87.127	1.53	0.3373	0.453	5.94	1.61	a <sub>c</sub> : 0.75 mm a <sub>f</sub> : 0.06 mm

N° Essais	Re <sub>p</sub>	γ	Re <sub>ω</sub>	Calculées		Mesurées		C <sub>L</sub>	Sphère
				C <sub>D MA</sub>	C <sub>mω Den</sub>	C <sub>mω</sub>	C <sub>mv</sub>		
559	49.81	3.6	44.882	1.5	0.5344	1.265	4.1	0.737	Matière : <b>DURAL</b> Masse : 49.374 g a <sub>s</sub> : 15.1 mm a <sub>c</sub> : 1 mm a <sub>f</sub> : 0.06 mm
757	46.01	7.04	81.019	1.57	0.3542	0.316	3.92	1.69	
758	48.94	6.4	78.36	1.52	0.3624	0.341	3.49	1.07	
759	44.84	6.68	74.835	1.6	0.3739	0.369	4.13	1.94	
588	48.99	4.81	58.848	1.52	0.4414	0.62	3.59	1.27	Matière : <b>TITANE</b> Masse : 39.17 g a <sub>s</sub> : 12.5 mm a <sub>c</sub> : 0.75 mm a <sub>f</sub> : 0.09 mm
603	47.3	2.41	28.487	1.55	0.7439	2.463	3.58	0.53	Matière : <b>LAITON</b> Masse : 24.302 g a <sub>s</sub> : 8.5 mm a <sub>c</sub> : 0.5 mm a <sub>f</sub> : 0.06 mm
607	54.93	3.28	44.995	1.42	0.5332	1.009	2.72	1.55	
610	44.14	7.57	83.497	1.61	0.3471	0.283	4.06	1.41	
611	52.25	2.39	31.189	1.46	0.6952	2.083	2.98	0.66	
618	40.58	6.23	63.193	1.69	0.4201	0.429	4.17	1.35	
619	42.47	2.33	24.697	1.65	0.8275	2.822	3.83	0.64	
622	45.17	2.23	25.148	1.59	0.8163	2.872	3.57	0.99	
624	46.25	5.42	62.667	1.75	0.4225	0.466	3.42	0.95	

TABLEAU DES RESULTATS

$$55 < Re_p < 70$$

N° Essais	Re <sub>p</sub>	γ	Re <sub>ω</sub>	Calculées		Mesurées			Sphère
				C <sub>D</sub> MA	C <sub>mω</sub> Den	C <sub>mω</sub>	C <sub>mv</sub>	C <sub>L</sub>	
730	57.08	4.36	62.266	1.4	0.4243	0.429	2.04	0.726	Matière : TITANE Masse : 39.17 g a <sub>s</sub> : 12.5 mm a <sub>c</sub> : 0.75 mm a <sub>f</sub> : 0.09 mm
731	66.92	3.52	58.842	1.29	0.4413	0.494	1.53	0.878	
732	57.84	2.71	39.145	1.39	0.5892	1.084	1.99	0.638	
735	68.81	2.14	36.783	1.27	0.6163	1.275	1.46	0.883	
739	60.58	2.81	42.539	1.35	0.855	0.931	1.84	0.548	
740	61.24	2.29	35.008	1.34	0.6389	1.371	1.8	0.855	
741	62.05	2.35	36.399	1.34	0.621	1.33	1.83	0.42	
742	63.03	3.05	47.998	1.33	0.5092	0.764	1.78	0.852	
745	59.81	2.27	33.996	1.36	0.6527	1.52	1.96	0.945	
543	55.4	6.57	90.985	1.42	0.3275	0.251	2.71	0.949	
544	59.12	6.57	97.079	1.37	0.3136	0.223	2.41	1.08	Idem a <sub>f</sub> : 0.06 mm
753	57.71	2.83	40.807	1.39	0.5718	1.268	2.54	0.86	Matière : DURAL Masse : 49.374 g
756	68.83	6.37	109.527	1.27	0.2895	0.181	1.83	0.72	a <sub>s</sub> : 15.1 mm
761	55.89	5.27	73.58	1.41	0.3782	0.391	2.72	0.59	a <sub>c</sub> : 1mm a <sub>f</sub> : 0.06mm
584	68.38	4.02	68.675	1.27	0.3965	0.452	1.83	0.678	Matière : TITANE Masse : 39.17 g
586	68.17	4.7	80.041	1.27	0.3571	0.35	1.94	0.828	a <sub>s</sub> : 12.5 mm
587	64.41	5.99	96.392	1.31	0.3151	0.24	2.15	0.78	a <sub>c</sub> : 0.75 mm
591	69.85	5.09	88.949	1.26	0.3326	0.295	1.92	0.667	a <sub>f</sub> : 0.09 mm

TABLEAU DES RESULTATS
-----------------------

$$55 < Re_p < 70$$

602	57.34	3.82	54.782	1.39	0.4639	0.688	2.51	1.506	Matière : LAITON Masse : 24.302 g $a_s$ : 8.5 mm $a_c$ : 0.5 mm $a_f$ : 0.06 mm
606	55.28	2.65	36.687	1.42	0.6175	1.529	2.68	0.847	
616	57.69	2.29	33.084	1.39	0.6658	1.673	2.19	0.79	
617	63.35	3.32	52.63	1.32	0.4771	0.675	1.86	1.057	

TABLEAU DES RESULTATS

$$70 < Re_p < 130$$

N° Essais	Re <sub>p</sub>	γ	Re <sub>ω</sub>	Calculées		Mesurées			Sphère
				C <sub>D MA</sub>	C <sub>mω Den</sub>	C <sub>mω</sub>	C <sub>mv</sub>	C <sub>L</sub>	
754	72	3.94	70.884	1.24	0.388	0.436	1.69	1.262	Matière : DURAL Masse : 49.374 g
755	71.33	5.78	103.163	1.25	0.3012	0.206	1.72	0.988	a <sub>s</sub> : 15.1 mm a <sub>c</sub> : 1 mm
558	77.53	3.44	66.76	1.2	0.4043	0.604	1.79	0.88	a <sub>f</sub> : 0.06 mm
568	90.45	5.59	126.413	1.12	0.2634	0.332	2.6	0.777	Matière : TITANE Masse : 138.544 g a <sub>s</sub> : 19.4 mm a <sub>c</sub> : 0.75 mm a <sub>f</sub> : 0.09 mm
569	93.88	5.67	133.192	1.1	0.2546	0.3	2.41	0.726	
570	91.94	5.54	127.327	1.11	0.2622	0.327	2.52	0.667	
572	122.18	2.74	83.798	0.98	0.3462	0.773	1.45	0.791	
574	79.64	6.01	119.609	1.18	0.2732	0.291	2.63	0.619	
575	91.04	4.64	105.64	1.11	0.2965	0.376	2.03	0.716	
576	92.28	4.31	99.548	1.11	0.3084	0.425	1.98	0.718	
577	116.15	3.23	93.656	1.01	0.3212	0.488	1.27	0.607	
580	70.28	3.56	62.477	1.25	0.4253	0.542	1.72	0.823	
581	71.94	3.88	69.748	1.24	0.3923	0.446	1.68	0.765	Matière : TITANE Masse : 39.17g
582	79.73	2.95	58.80	1.18	0.4391	0.639	1.39	0.865	a <sub>s</sub> : 12.5 <sup>mm</sup> a <sub>c</sub> : 0.75 <sup>mm</sup>
583	75.83	4.59	86.997	1.21	0.3376	0.289	1.53	0.79	a <sub>f</sub> : 0.09 <sup>mm</sup>



TABLEAU DES RESULTATS

$$70 < Re_P < 130$$

N° Essais	Re <sub>P</sub>	γ	Re <sub>ω</sub>	Calculées		Mesurées		C <sub>L</sub>	Sphère
				C <sub>D MA</sub>	C <sub>mω Den</sub>	C <sub>mω</sub>	C <sub>mv</sub>		
585	70.58	4.01	70.813	1.25	0.3883	0.429	1.73	0.948	Matière : TITANE Masse : 39.17 g a <sub>s</sub> : 12.5 mm a <sub>c</sub> : 0.75 mm a <sub>f</sub> : 0.09 mm Idem a <sub>f</sub> : 0.06 mm
593	71.86	4.25	76.393	1.24	0.3687	0.404	1.83	0.841	
595	92.33	3.21	74.054	1.11	0.3766	0.464	1.2	0.767	
596	74.45	5.4	100.452	1.22	0.3066	0.239	1.74	1.072	
597	86.63	4.83	104.571	1.14	0.2985	0.227	1.33	0.895	
546	79.67	4.2	83.632	1.18	0.3467	0.318	1.41	0.697	



**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE  
LORRAINE**

**o0o**

**VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :**

**Monsieur BOUARD Roger, Maitre de Conférence, ARTP/CEAT Poitiers,  
Monsieur LEBOUCHE Michel, Professeur, Université de Nancy I.**

**Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :**

**Monsieur BUI DINH Tri**

**à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE, une thèse  
intitulée :**

**"Etude expérimentale des actions hydrodynamiques sur une sphère en translation  
et rotation dans une gamme de nombres de Reynolds intermédiaires"**

**en vue de l'obtention du titre de :**

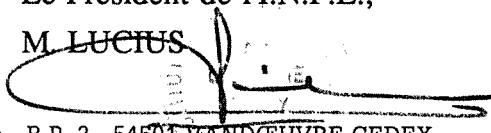
**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

**Spécialité : "MECANIQUE & ENERGETIQUE"**

**Fait à Vandoeuvre le, 10 Septembre 1992**

**Le Président de l'I.N.P.L.,**

**M. LUCIUS**



**2, avenue de la Forêt de Haye - B.P. 3 - 54501 VANDOEUVRE CEDEX**

**Téléphone : 83. 59. 59. 59 - Télex : 961 715 F - Télécopie : 83. 59. 59. 55**





## RESUME

On étudie expérimentalement, par une méthode de trajectographie stroboscopique, les actions exercées par un fluide visqueux incompressible sur une sphère en mouvement de translation et rotation simultanées. Le domaine exploré est celui des nombres de Reynolds compris approximativement entre 10 et 100, qui sont ceux que l'on rencontre fréquemment dans le calcul de trajectoires de particules solides en suspension dans un fluide.

Les résultats, qui portent essentiellement sur le coefficient de portance, sont tout à fait originaux et contribuent aux connaissances existantes en les complétant par un apport dans une gamme de nombres de Reynolds jusqu'à présent inexplorée.

Une corrélation empirique pour le coefficient de portance est finalement proposée.

### MOTS CLES

Sphère

Effet Magnus

Ecoulement

Etude expérimentale

Portance