



HAL
open science

Optimisation de l'alimentation des convertisseurs électromécaniques linéaires à induction

Noureddine Takorabet

► **To cite this version:**

Noureddine Takorabet. Optimisation de l'alimentation des convertisseurs électromécaniques linéaires à induction. Sciences de l'ingénieur [physics]. Institut National Polytechnique de Lorraine, 1996. Français. NNT : 1996INPL158N . tel-01776383

HAL Id: tel-01776383

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776383v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

[M] 1996 TAKORABET, N.

Institut National Polytechnique de Lorraine

ECOLE DOCTORALE "Informatique-Automatique-Electrotechnique-Electronique-Mathématiques"

Département de Formation Doctorale "Electrotechnique-Electronique"

T H E S E

présentée à

l'Institut National Polytechnique de Lorraine

en vue de l'obtention du titre de

DOCTORAT de l'I.N.P.L.

spécialité : Génie Electrique

par

TAKORABET Noureddine

Ingénieur Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois



**OPTIMISATION DE L'ALIMENTATION DES
CONVERTISSEURS ELECTROMECHANQUES LINEAIRES
A INDUCTION**



Soutenue publiquement le 19 Décembre 1996 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury :

- | | |
|---------------------------|----------------|
| Président et rapporteur : | M. KANT |
| Rapporteur : | J. F. RIALLAND |
| Examineurs : | A. RAZEK |
| | B. LAPORTE |
| | J. P. BRANCHER |
| | G. VINSARD |

Avant Propos

Je tiens à remercier de tout coeur M. Bernard LAPORTE, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, pour l'encadrement fructueux qu'il m'a réservé tout le long de ma thèse ; il m'a soutenu tant sur le plan scientifique que moral afin de mener à bien ce travail.

Merci aussi à M. Gérard VINSARD, Maître de conférences à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, qui a suivi mon travail et a su me guider avec ses précieux conseils.

Je remercie vivement M. Michel KANT, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail, pour avoir présider le jury et accepter d'être rapporteur.

Mes remerciements s'adressent aussi à M. Jean François RIALLAND, Professeur au CNAM, pour avoir gentiment accepté d'être rapporteur de cette thèse.

J'exprime ma profonde gratitude pour M. Adel RAZEK, Directeur de recherche au Laboratoire de Génie Electrique de Paris (LGEF), qui m'a fait l'honneur de sa présence dans le jury.

Je suis particulièrement reconnaissant à M. Jean Pierre BRANCHER, Professeur à l'INPL et directeur du LEMTA, pour l'intérêt qu'il porte à mon travail.

Je remercie également le personnel du service de documentation pour leur amabilité, leur compétence et leur gentillesse.

Enfin, j'exprime ma sympathie pour tout le personnel permanent et les chercheurs du GREEN.

*A ma femme,
A ma famille et belle famille,
je dédie ce mémoire.*

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	9
--------------------------	----------

CHAPITRE 1 : POSITION DU PROBLEME

I. Généralités.....	15
I.1. Présentation.....	15
I.2. Comparaison entre le moteur linéaire et le moteur asynchrone.....	16
I.3. Nécessité de l'optimisation de l'alimentation des convertisseurs linéaires à induction.....	18
II. Modélisation électromagnétique.....	18
II.1. L'approximation.....	18
II.1.1. L'inducteur.....	19
II.1.2. L'induit.....	23
II.1.3. Justification de l'approximation <i>a priori</i>	25
II.1.3.1. La géométrie bidimensionnelle.....	25
II.1.3.2. La linéarité.....	26
II.1.3.3. La fréquence d'alimentation.....	27
II.2. L'effet du mouvement de l'induit.....	27
II.2.1. Etude simplifiée.....	27
II.2.2. Analyse et critique de l'étude simplifiée.....	31
III. Les méthodes numériques de résolution.....	33
III.1. Le modèle complet.....	33
III.1.1. Formulation.....	33
III.1.2. Critique de la formulation.....	35
III.1.3. Les éléments finis décentrés.....	36
III.2. Les modèles approchés.....	37
III.2.1. Traitement par la transformée de Fourier.....	37
III.2.2. Traitement par périodisation.....	38
III.2.3. Traitement par subdivision.....	39
III.2.4. Le modèle choisi.....	40
Conclusion.....	41

CHAPITRE 2 : LES MODELES

Introduction.....	45
I. Modèle infini.....	45
I.1. Présentation du modèle.....	45
I.2. Equations générales.....	47
I.3. Forme de la solution.....	48
I.4. Calcul des performances.....	49
I.4.1. Poussée et puissance mécanique.....	49
I.4.2. Puissance électrique.....	51
I.5. Généralisation à un modèle multicouches.....	52
I.5.1. Présentation du modèle.....	53
I.5.2. Equations générales.....	53

I.5.3. Résolution	54
I.6. Remarques générales sur les fonctions $\mathcal{Z}_i(k)$	56
Conclusion I	57
II. Modèle fini	58
II.1. Position du problème.....	59
II.2. Méthode de calcul	60
II.2.1. Etude par transformation de Fourier dans l'induit.....	60
II.2.2. Décomposition dans la base de Hermite.....	62
II.2.3. Résolution numérique dans D_2	63
II.3. Calcul des performances.....	67
II.3.1. Puissance électrique.....	67
II.3.2. Force et puissance mécaniques	70
II.4. Modélisation par un induit infiniment mince équivalent.....	71
Conclusion II.....	74

CHAPITRE 3 : OPTIMISATION ET RESULTATS

Introduction	77
I. Procédé d'optimisation	77
I.1. Les critères.....	77
I.2. Contraintes.....	78
I.2.1. Contrainte thermique.....	78
I.2.2. Condition de liaison sur les courants en symétrie cylindrique.....	78
I.2.3. Contrainte de bobinage.....	80
I.3. Technique d'optimisation.....	81
Conclusion I	83
II. Exploitation du modèle infini	84
II.1. Rendement limite de la conversion linéaire à induction.....	84
II.2. Examen de l'alimentation optimale.....	85
II.3. Influence de l'optimisation sur le facteur de puissance	87
Conclusion II.....	89
III. Exploitation du modèle fini.....	89
III.1. Optimisation du rendement.....	89
III.1.1. Rendement limite.....	89
III.1.2. Rendement en bobines égales	90
III.1.3. Optimisation d'enroulements à simple couche.....	92
III.1.4. Optimisation d'enroulements à double couche.....	94
III.2. Optimisation de la poussée	97
III.2.1. Optimisation en bobines indépendantes.....	97
III.2.2. Optimisation d'enroulements triphasés.....	98
III.2.3. Cas d'une armature à 18 encoches.....	100
III.3. Optimisation de la force de freinage.....	102
III.3.1. Optimisation en bobines indépendantes.....	102
III.3.2. Optimisation d'enroulements triphasés.....	103
Conclusion III	106

CHAPITRE 4 : LES CHAMPS DANS L'INDUIT

Introduction	111
I. Examen des lignes d'induction	112
I.1. Calcul du champ dans l'induit	112
I.2. Adaptation au programme d'éléments finis.....	114
I.3. Influence de l'optimisation sur l'allure du champ	116
I.3.1. $v_r=0.25$	116
I.3.2. $v_r=0.5$	117
I.4. Influence de la vitesse sur l'allure du champ.....	118
Conclusion I	119
II. Examen des forces locales	120
II.1. Calcul du champ de forces.....	120
II.2. Calcul de la pression dans l'induit	123
II.3. Présentation des champs de forces	125
II.3.1. Influence de l'optimisation à vitesse nulle.....	126
II.3.2. Influence de l'optimisation à $v_r =0.5$	128
II.3.3. Influence de la vitesse sur la composante de la force suivant Ox	128
Conclusion II	131
III. Examen des courants induits	131
III.1. Technique de calcul	132
III.2. Influence de l'optimisation.....	132
III.3. Influence de la vitesse	133
Conclusion III	133
CONCLUSION GENERALE	135
ANNEXES	
Annexe A : Polynômes et fonctions de Hermite	141
Annexe B : Calcul des coefficients $\alpha^{(1)}$ et $\alpha^{(2)}$	143
Annexe C : Remarques générales sur l'utilisation des fonctions de Hermite dans le cas du modèle fini	145
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	147

INTRODUCTION

Le convertisseur électromécanique linéaire est un dispositif qui permet de générer un mouvement rectiligne à partir d'une interaction électromagnétique. Comme pour les machines à courant alternatif tournantes, il existe deux modes de conversion : la conversion synchrone et la conversion asynchrone. Le moteur linéaire synchrone peut présenter un induit réluctant (non excité) ou bien un induit actif (excité). Les convertisseurs asynchrones fonctionnent par induction. On s'intéresse exclusivement ici à la structure à induction et donc au moteur linéaire à induction.

Le moteur linéaire à induction a soulevé un intérêt particulier par la simplicité de sa construction et par les applications spécifiques qu'il peut assurer [1][2][3]. Le pompage électromagnétique des métaux liquides est une application où ce type de convertisseurs peut être d'une grande utilité [6][7][8]. Cependant, sa géométrie particulière le pénalise fortement par rapport aux moteurs asynchrones tournants et le rend moins compétitif ; on parle à son propos d'« effets d'extrémités » que plusieurs travaux ont traités et où des idées ont été apportées afin de les réduire [6][7][8][23]. L'alimentation des convertisseurs linéaires à induction doit être optimisée car les enroulements classiquement utilisés pour les machines asynchrones tournantes ne sont pas nécessairement adéquats. Notre travail se situe dans cette idée et consiste essentiellement à trouver l'alimentation qui optimise un critère donné pour une géométrie fixée.

Des généralités sur les convertisseurs linéaires, leurs applications et leurs problèmes spécifiques sont brièvement exposées en premier lieu. Nous abordons ensuite le cadre dans lequel se situe la modélisation et les différentes approximations adoptées. Quelques méthodes de résolution déjà utilisées sont ensuite exposées tout en précisant leurs avantages et leurs inconvénients par rapport à notre objectif.

Le chapitre II est consacré à l'exposé des modèles choisis ; un premier modèle dit « infini » qui a l'avantage d'être rapide, est utilisé. Le modèle d'étude définitif nécessite des calculs par la méthode des éléments finis. Les problèmes numériques engendrés par les milieux en mouvement sont évités grâce à une technique particulière. Ces deux modèles permettent

d'exprimer les performances comme des formes hermitiennes des représentations complexes des courants d'alimentation.

Le problème de l'optimisation est ensuite abordé dans le chapitre III ; on se propose de chercher l'alimentation qui maximise le rendement, la poussée ou encore la force de freinage à géométrie fixée. Une brève exploitation du modèle infini permet d'avoir une première approche des solutions optimales ; elle est suivie d'une exploitation plus détaillée du modèle fini sur des géométrie plus proches de la réalité.

Lorsque le convertisseur linéaire est utilisé comme pompe électromagnétique, il est intéressant d'examiner le champ de forces dans l'induit. Ces forces pouvant être de type gradient, auquel cas elles pompent le liquide, ou bien de type rotationnel, auquel cas elle provoquent le brassage du fluide. Nous nous limitons dans notre étude à l'examen de ces champs de force avant et après optimisation de la poussée totale pour différentes vitesses d'écoulement.

Chapitre I

POSITION DU PROBLEME

I. Généralités

I.1. Présentation

Le principe de la conversion linéaire à induction est connu depuis bien longtemps ; l'idée de créer un « champ glissant » a suivi de près celle du champ tournant qui a donné naissance aux machines à courant alternatif. Néanmoins, les convertisseurs linéaires à induction n'ont pas connu un développement aussi important que les machines asynchrones à cause de leurs mauvaises performances. Toutefois, et comme peut le montrer la parution d'un livre récent [3], les convertisseurs linéaires à induction sont utilisés depuis des dizaines d'années et il n'est pas exclu qu'ils le soient encore plus dans le futur. Sans vouloir prétendre à l'exhaustivité, nous recensons trois classes d'application des convertisseurs linéaires à induction :

Le transport des métaux liquides [6] [7] [8]

C'est probablement l'application des convertisseurs linéaires la plus répandue actuellement. Les pompes électromagnétiques utilisent le principe de la conversion linéaire à induction pour le transport des métaux liquides. Ces convertisseurs, initialement conçus pour la réfrigération des réacteurs nucléaires, rentrent à présent dans les diverses applications industrielles qui nécessitent le transport des métaux liquides. Diverses formes peuvent être données à ce type de convertisseurs ; elles sont regroupées principalement dans deux géométries : la géométrie plane et la géométrie annulaire [8].

Le freinage des métaux liquides peut être aussi assuré par des convertisseurs linéaires à induction appelés vannes électromagnétiques ou « robinets électromagnétiques ». Il en est de même pour la mesure des vitesses d'écoulement qui peut être effectuée à l'aide de débitmètres électromagnétiques [12] [13].

Le transport ferroviaire

C'est une application que l'on peut qualifier de « futuriste » car jusqu'à présent, il n'existe que des prototypes ou des lignes d'essai. La production directe d'un mouvement rectiligne a incité à utiliser le moteur linéaire dans la traction ferroviaire [9] [10] [11], l'absence de chaînes de transmission de mouvement pourrait compenser son mauvais rendement par

rapport aux machines tournantes. L'adjonction de la lévitation magnétique permet d'atteindre des vitesses considérables grâce à l'absence totale de contact. Ces moyens sont cependant très coûteux et exigent une maîtrise de la technologie des supraconducteurs qui assurent la lévitation [9].

La manutention

Dans le domaine de la manutention le moteur linéaire offre des avantages intéressants grâce à l'action directe sur l'objet à mouvoir et l'absence de chaîne de transformation de mouvement.

Des dispositifs de propulsion ou de freinage de plateaux métalliques par le principe de la conversion linéaire à induction, sont utilisés industriellement. Par ailleurs, des applications domestiques peuvent être assurées par des moteurs linéaires, comme par exemple : les portes coulissantes et les ascenseurs. On peut imaginer divers autres dispositifs (domestiques ou industriels) qui fonctionnent par le principe de la conversion linéaire à induction [3] [10].

1.2. Comparaison entre le moteur linéaire et le moteur asynchrone

Le moteur à induction rotatif

Les machines asynchrones tournantes sont constituées de deux armatures (le stator et le rotor). L'armature statorique est munie d'encoches où logent les courants inducteurs créant dans le cas idéal un champ ayant un seul harmonique d'espace. Le rotor est le siège de courants induits qui peuvent être localisés dans des barres conductrices (rotor à cage), dans des enroulements (rotor bobiné) ou encore dans la masse du rotor (rotor massif). Dans les trois cas, les courants au rotor sont induits ; d'où l'appellation de moteur à induction [26].

Le moteur linéaire à induction

Si l'on découpe une portion de l'armature statorique tout en gardant suffisamment d'encoches pour pouvoir conserver un couple électromagnétique suffisant, on obtient un moteur en arc (Fig. I.1.-(b)). En dépliant la structure en arc, on obtient un moteur linéaire à induction ayant un seul inducteur. Celui-ci fonctionne sous le même principe d'induction électromagnétique ; il peut être doté d'un deuxième inducteur placé de l'autre côté du rotor déplié qu'on appelle maintenant induit.

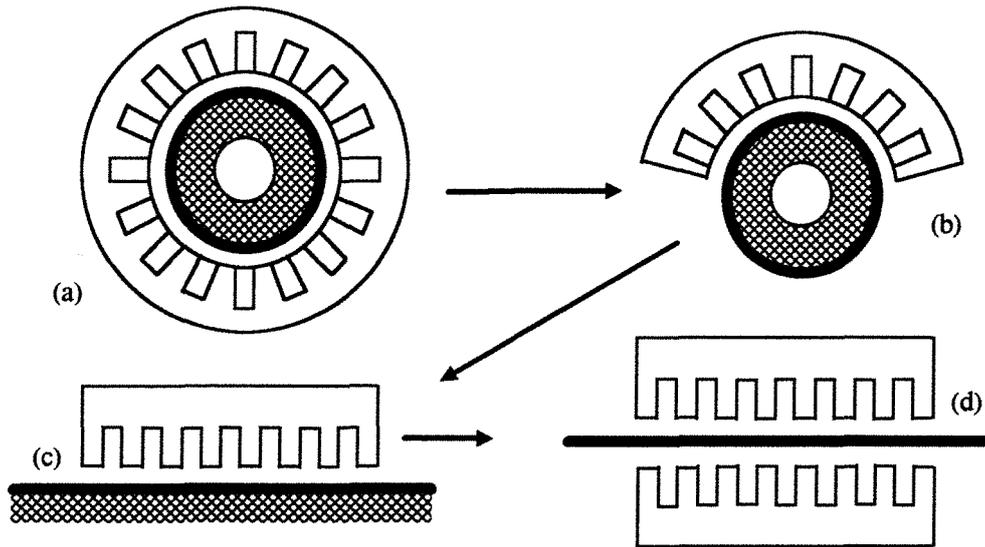


Fig. I. 1. : Passage d'un moteur asynchrone à un moteur linéaire à induction

- (a) : Moteur asynchrone tournante.
- (b) : Moteur en arc.
- (c) : Moteur linéaire à un inducteur.
- (d) : Moteur linéaire à deux inducteurs.

Plusieurs structures se déduisent de ce principe et diverses nomenclatures sont utilisées [2] [3] [4]. On retiendra principalement la structure à deux inducteurs.

La différence entre les deux structures

Dès que l'on découpe une portion du stator de la machine asynchrone tournante, on crée de nombreux harmoniques supplémentaires. Si la partie découpée est suffisamment importante, la structure en arc s'approche sensiblement du moteur linéaire malgré son mouvement rotatif. D'ailleurs, plusieurs études expérimentales ont été menées sur des moteurs en arc afin de simuler des moteurs linéaires. Cette structure présente un champ riche en harmoniques d'espaces qui participent (favorablement ou défavorablement) à la conversion d'énergie.

La structure développée est une limite de la structure en arc lorsque le diamètre de la « roue » est très grand devant la longueur de l'armature (l'arc). Lorsque ce rapport est infini, le champ a un spectre continu d'harmoniques d'espace qui contribuent (favorablement ou défavorablement) à la conversion d'énergie. La longueur finie des armatures inductrices constitue un support borné pour les courants inducteurs, alors que les courants induits peuvent se développer librement sur un support non borné.

I.3. Nécessité de l'optimisation de l'alimentation des convertisseurs linéaires à induction

Un moteur asynchrone « idéal » a un champ d'entrefer présentant un seul harmonique d'espace, alors que le champ du convertisseur linéaire présente un spectre continu d'harmoniques d'espaces. Dans le cas d'une machine asynchrone, le spectre est peu riche et un seul harmonique est favorisé avec les enroulements utilisés. Toutefois, ces enroulements n'ont aucune raison d'être optimaux pour un moteur linéaire à induction.

Depuis des dizaines d'années, plusieurs idées ont été avancées pour améliorer les performances des convertisseurs linéaires [14] [15] [21] [23].

L'idée d'arrêter le champ aux extrémités de l'inducteur par l'intermédiaire d'une densité qui assure le saut du champ tangentiel est avancée pour tenter de se rapprocher du moteur asynchrone « fermé » [14]. L'introduction de spires d'extrémités approche cette idée et constitue une technique permettant de réduire les effets d'extrémités de la machine [15] [17]. Une recherche systématique des courants permettant d'optimiser le rendement a déjà été menée, en utilisant une modélisation simplifiée de l'induit [23] [24].

Nous recherchons ici, les courants qui optimisent un critère donné ; une nouvelle méthode de calcul est présentée à cet effet. Le critère peut être le rendement, la poussée ou la force de freinage.

II. Modélisation électromagnétique

II.1. L'approximation

Pour des raisons qui seront justifiées au paragraphe §II.1.3, la modélisation électromagnétique se place *a priori* dans le cadre des hypothèses suivantes :

- a) La géométrie est bidimensionnelle ;
- b) La relation magnétique dans les matériaux ferromagnétiques est linéaire ;
- c) L'alimentation du convertisseur délivre des courants à une seule fréquence qui est suffisamment faible pour que les charges d'espace et les courants de déplacement puissent être négligés.

Il reste à examiner les conséquences de ces hypothèses pour l'inducteur puis pour l'induit.

II.1.1. L'inducteur

En adjoignant tout l'air environnant à l'inducteur proprement dit, on obtient le domaine D_2 de \mathbb{R}^2 situé au dessus de la droite Γ_1 qui représente la frontière entre l'inducteur et l'induit.

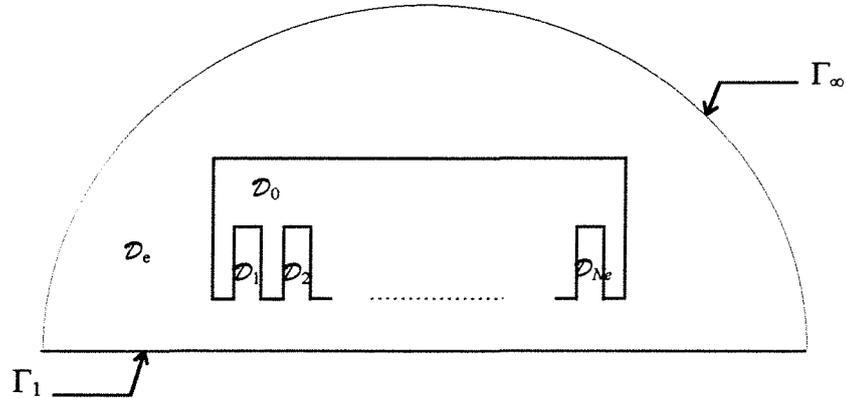


Fig. I.2. : Le domaine fixe : Γ_∞ est supposée reculée à l'infini.

Le domaine D_2 est appelé « domaine fixe » tout le long de ce travail. Il résulte de la réunion des différents domaines qui le composent :

$$D_2 = \mathcal{D}_e \cup \mathcal{D}_0 \cup \bigcup_{k=1}^{N_e} \mathcal{D}_k$$

où :

\mathcal{D}_e est le domaine qui représente l'air environnant.

\mathcal{D}_0 est le domaine qui représente la culasse magnétique.

et les \mathcal{D}_k ($k=1..N_e$) sont les sections où sont localisés les courants source (les encoches)

L'hypothèse a) permet d'introduire directement la composante $a(x,y,t)$ du potentiel vecteur qui, en tenant compte des hypothèses b) et c), vérifie l'équation :

$$\operatorname{div} \frac{1}{\mu(x,y)} \operatorname{grad} a(x,y,t) + j_s(x,y,t) = 0 \quad (\text{I.1})$$

où :

• $\mu(x,y)$ est la perméabilité magnétique au point (x,y) qui dépend de la position comme :

$$\mu(x,y) = \begin{cases} \mu_0 & \text{dans } \mathcal{D}_e \cup \bigcup_{k=1}^{N_e} \mathcal{D}_k \\ \mu_0 \mu_r & \text{dans } \mathcal{D}_0 \end{cases}$$

μ_0 est la perméabilité magnétique du vide (ou de l'air) ainsi que des conducteurs électriques dans les \mathcal{D}_k ($k=1..N_e$).

μ_r est la perméabilité relative du matériaux magnétique dans \mathcal{D}_0 .

• $j_s(x,y,t)$ est la densité de courant ; elle est imposée par des sources externes et est localisée dans les encoches où logent des conducteurs fins de sorte que l'effet de peau dans le cuivre est négligeable ; son expression est :

$$j_s(x,y,t) = \sum_{m=1}^q \mathcal{S}_m(x,y) i_m(t) \quad (\text{I.2})$$

où :

1- Les $i_m(t)$ sont les courants délivrés par une source q -phasée extérieure ; ils sont liés aux courants totaux $j_k(t)$ dans les encoches par la relation :

$$j_k(t) = \sum_{m=1}^q C_{km} i_m(t) \quad (\text{I.3})$$

où C_{km} est le terme général d'une matrice $[C]$ dite de connexion (des courants d'encoches par rapport aux courants de phase).

2- $\mathcal{S}_m(x,y)$ est la fonction « support » du courant $i_m(t)$; elle vaut :

$$\mathcal{S}_m(x,y) = \sum_{k=1}^{N_e} C_{km} K_k(x,y) \quad (\text{I.4})$$

où $K_k(x,y)$ est la fonction indicatrice :

$$K_k(x,y) = \begin{cases} \frac{l}{S_k} & \text{dans } \mathcal{D}_k \ (k = 1..N_e) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

S_k étant la surface de l'encoche k .

En utilisant l'hypothèse c), on peut poser :

$$i_m(t) = \sqrt{2} \Re[\bar{I}_m e^{j\omega t}] \quad (\text{I.5})$$

où \Re signifie : « partie réelle de », ω est la pulsation source et \bar{I}_m la représentation complexe des $i_m(t)$.

La densité de courant $j_s(x,y,t)$ peut alors s'écrire sous la forme :

$$j_s(x,y,t) = \sqrt{2} \Re[\bar{J}(x,y) e^{j\omega t}] \quad (\text{I.6})$$

où

$$\bar{J}_s(x,y) = \sum_{m=1}^q \mathcal{S}_m(x,y) \bar{I}_m$$

Dans le cas où l'induit est invariant suivant la direction du mouvement, il n'existe pas d'effet de réluctance. Dans un référentiel lié aux inducteurs, le potentiel vecteur présente une seule fréquence, imposée par les sources. Dans le cas où l'on a affaire à un induit en échelle, on admet que la période géométrique de répétition pour l'induit est suffisamment faible pour ne pas introduire de diffraction suivant Ox . On peut donc introduire la représentation complexe du potentiel vecteur qui s'écrit, lui aussi, sous la forme :

$$a(x,y,t) = \sqrt{2} \Re[\bar{A}(x,y) e^{j\omega t}] \quad (\text{I.7})$$

Dans ces conditions, la représentation complexe $\bar{A}(x,y)$ du potentiel vecteur vérifie :

$$\text{div} \frac{l}{\mu(x,y)} \text{grad } \bar{A}(x,y) + \bar{J}_s(x,y) = 0 \quad \text{dans } D_2 \quad (\text{I.8})$$

équation à laquelle il s'agit d'adjoindre des conditions aux limites.

Le bord de D_2 est composé de :

- Γ_∞ : frontière située à l'infini. En pratique, si on utilise les éléments finis, on ne peut pas la mettre effectivement à l'infini. On convient de poser :

$$\bar{A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\infty \quad (\text{I.9})$$

en faisant l'hypothèse que si Γ_∞ est suffisamment reculée (par expérimentation numérique), le champ \bar{A} au voisinage de \mathcal{D}_0 ne sera pas perturbé par cette approximation.

- Γ_1 : frontière entre le domaine fixe et l'induit. La condition aux limites relative à cette frontière dépend du problème de l'induit qui n'est pas encore spécifié. Cependant, l'hypothèse b) de la linéarité permet de l'écrire *a priori* sous forme d'une équation de convolution :

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial y} \bar{A}(x, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(u) \bar{A}(x - u, \alpha) du \quad (\text{I.10})$$

où α est la cote de Γ_1 et $\lambda(u)$ est un noyau qui dépend du problème de l'induit.

Si on connaît : les \bar{J}_k , la géométrie, μ_r et le noyau $\lambda(u)$, alors \bar{A} est solution unique d'un problème parfaitement régulier. Il reste maintenant, en supposant que \bar{A} est connu, à associer aux \bar{J}_k les forces électromotrices \bar{E}_k qui leurs correspondent.

Le champ électromoteur moyen sur la surface de l'encoche a un sens, dans la mesure où les transpositions nécessaires ont été effectuées sur la largeur utile de l'inducteur. Sinon cette notion de moyenne peut être récupérée après transposition des conducteurs dans les têtes de bobines. On introduit donc le champ électromoteur moyen sur la surface de l'encoche par :

$$e_k(t) = \frac{1}{S_k} \int_{\mathcal{D}_k} \frac{\partial a}{\partial t}(x, y, t) dx dy \quad (\text{I.11})$$

On peut aussi introduire le flux par encoche, défini par :

$$\varphi_k(t) = \frac{I}{S_k} \int_{\mathcal{D}_k} a(x,y,t) \, dx dy \quad (\text{I.12})$$

et on en déduit e_k par $e_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial t}$. On peut considérer que e_k est une force électromotrice (f.é.m) d'encoche ; les f.é.m par phase s'obtiennent par :

$$\mathbf{E}_m(t) = \sum_{k=1}^{N_e} C_{km} e_k(t) \quad (\text{I.13})$$

Par ailleurs, (I.11) conduit à définir la représentation complexe \bar{E}_k de la f.é.m d'encoche par :

$$\bar{E}_k = \frac{j\omega}{S_k} \int_{\mathcal{D}_k} \bar{A}(x,y) \, dx dy \quad (\text{I.14})$$

Ceci complète la définition du problème dans l'inducteur :

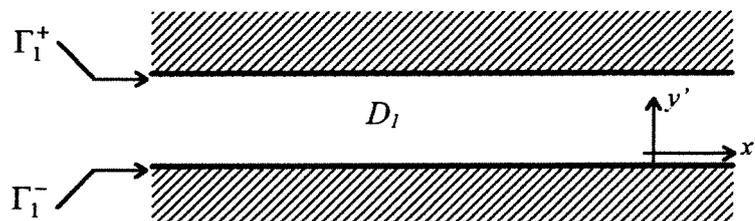
A partir des \bar{J}_k , $k = 1..N_e$ on calcule \bar{A} par les équations (I.8) (I.9) et (I.10).

puis à partir de \bar{A} on calcule les \bar{E}_k par (I.14)

Mais il manque bien sûr, pour le faire effectivement, l'expression de $\lambda(u)$ qui dépend du problème dans l'induit.

II.1.2. L'induit

La géométrie est une bande infinie limitée par les frontières Γ_1^+ et Γ_1^- qui correspondent toutes les deux à Γ_1 du problème de l'inducteur.



On se place dans le cas où l'on a un inducteur de chaque côté de l'induit (structure à double inducteurs § I.2). La difficulté principale de la modélisation électromagnétique de l'induit vient du mouvement de celui-ci. Si on le suppose rectiligne (dirigé suivant x') et uniforme, il est possible de se placer dans le référentiel mobile par rapport aux inducteurs, et donc fixe par rapport au milieu dont est fait l'induit, pour écrire que le potentiel vecteur $a'(x', y', t')$ est solution de :

$$\operatorname{div} \frac{1}{\mu(x', y')} \operatorname{grad} a'(x', y', t') - \sigma(x', y') \frac{\partial a'(x', y', t')}{\partial t'} = 0 \quad (\text{I.15})$$

On suppose que le matériau dont est composé l'induit est non magnétique et homogène de conductivité électrique constante ($\mu(x', y') = \mu_0$ et $\sigma(x', y') = \sigma$). Le lien entre les coordonnées dans le repère de l'inducteur et celle du repère de l'induit est :

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ t' &= t \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

Le potentiel vecteur a dans le référentiel de l'inducteur coïncide avec a' (il est invariant par transformation galiléenne) :

$$a'(x', y', t') = a(x, y, t) \quad (\text{I.17})$$

ce qui permet de transformer (I.15) en :

$$\operatorname{div} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} a(x, y, t) - \sigma \left[\frac{\partial a(x, y, t)}{\partial t} + v \frac{\partial a(x, y, t)}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{I.18})$$

L'induit étant homogène suivant la direction du mouvement et la vitesse étant uniforme, il n'existe pas d'effet de réluctance. Dans le repère de l'inducteur, les grandeurs électromagnétiques de l'induit ont la même fréquence imposée par les sources situées sur les inducteurs. On peut donc écrire :

$$a(x, y, t) = \sqrt{2} \Re \left[\bar{A}(x, y) e^{j\omega t} \right] \quad (\text{I.19})$$

On obtient finalement :

$$\operatorname{div} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \bar{A} - \sigma \left[j\omega \bar{A} + v \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{I.20})$$

L'objectif principal de ce travail est de transformer (I.20) pour obtenir la relation (I.10) ; ce qui sera développé au chapitre II.

II.1.3. Justification de l'approximation a priori

Avant de passer à la suite du problème, il est utile de justifier les hypothèses qui ont été introduites jusqu'à présent. C'est l'objectif de ce paragraphe.

II.1.3.1. La géométrie bidimensionnelle

Cette hypothèse a permis d'obtenir une formulation du problème relativement facile à écrire et qui aura l'avantage ultérieur d'être calculable avec des moyens de calculs raisonnables en un temps raisonnable. Cependant, les objets réels sont tridimensionnels et il n'est pas inutile de faire le lien avec leur version bidimensionnelle.

Pour l'inducteur, la correction à apporter est essentiellement celle des têtes de bobines. La liaison entre les forces électromotrices \bar{E}_k des encoches et les tensions \bar{V}_m de phases s'écrit sous la forme :

$$\bar{V}_m = R_m \bar{I}_m + j\omega L_m \bar{J}_m + \sum_{k=1}^{N_e} C_{km} \bar{E}_k \quad (\text{I.21})$$

R_m est la résistance de la phase m ; elle englobe la résistance des conducteurs actifs et celle des têtes de bobines.

L_m est l'inductance de la phase m due aux têtes de bobines. Pour des cas simples, sa détermination est relativement aisée ; cependant pour les enroulements compliqués que l'on est amené à concevoir, il est difficile de l'évaluer. On peut aussi remarquer que leur introduction ne modifie pas la puissance active mise en jeu, de sorte que l'on n'en tient pas compte dans la suite de notre travail.

Pour l'induit, le problème est plus délicat. En effet, la largeur finie fait que les courants induits ne sont pas dirigés suivant Oz (Fig. I.3.) et qu'il est normalement nécessaire d'en

déterminer la répartition [30] [31]. Toutefois, cet effet est néfaste et on doit plutôt chercher à le corriger ; on retrouve d'ailleurs le même problème dans les rotors massifs des machines asynchrones tournantes. Dans le cas où l'induit est un métal liquide, des parois latérales de très grande conductivité électrique sont placées de part et d'autre du métal en fusion afin de mieux canaliser les courants induits tandis que dans le cas des induits solides, l'adjonction de barres de cuivre sur les cotés joueraient le même rôle.

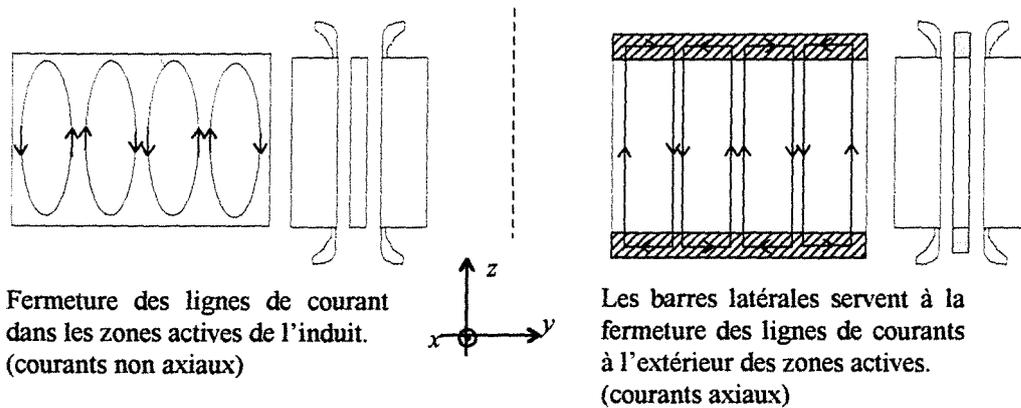


Fig. I.3. : Lignes de courants induits avant et après la mise des barres latérales.

Cette configuration rend les courants axiaux dans les zones active de l'induit, justifiant ainsi l'approximation bidimensionnelle du problème dans l'induit.

II.1.3.2. La linéarité

L'hypothèse de la linéarité de la relation magnétique est vérifiée en pratique. Il en est ainsi dans les parties fixes du convertisseur car les valeurs des inductions maximales sont toujours faibles. En effet, l'épaisseur de l'entrefer est généralement plus importante que celles que l'on rencontre dans les machines tournantes car elle est imposée par l'application pratique :

- dans le cas des pompes électromagnétiques pour métal liquide, il faut un entrefer large pour pouvoir assurer un gradient de température depuis l'induit en fusion vers l'inducteur.
- dans le cas de la traction ferroviaire l'entrefer est large pour prévoir une courbure des rails.

Dans l'induit le problème de la saturation ne se pose pas étant donné que les inductions sont encore plus faibles ; par ailleurs, les matériaux utilisés sont souvent non magnétiques (aluminium, sodium, potassium, ...).

II.1.3.3. La fréquence d'alimentation

L'alimentation à fréquence fixe suppose qu'il est possible de réaliser un onduleur adéquat, on verra dans le chapitre III, qu'il est commode d'avoir une alimentation à $\frac{v}{f}$ constante où v est la vitesse et f la fréquence ; mais cette fréquence reste faible. L'hypothèse c) est classiquement introduite en électrotechnique ; dans les exemples choisis, la fréquence considérée est la fréquence industrielle ($f=50\text{Hz}$)

II.2. L'effet du mouvement de l'induit

Le mouvement de l'induit est traduit par la modification de l'équation que vérifie le potentiel vecteur :

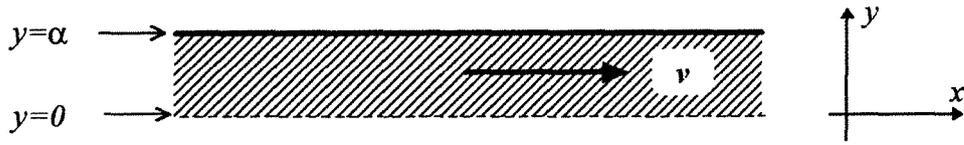
$$\text{div} \frac{1}{\mu} \text{grad } \bar{A} - \sigma \left[j\omega \bar{A} + v \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right] = 0 \quad (I.22)$$

Cette équation comporte un terme de « diffusion » $j\omega \bar{A}$ et un terme de « déplacement » $v \frac{\partial \bar{A}}{\partial x}$ qu'il est intéressant de comparer par l'étude simplifiée qui est l'objet de ce paragraphe :

II.2.1. Etude simplifiée

Dans le cas où μ et σ ne dépendent pas de la position ; l'équation (I.22) devient :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \bar{A} - \mu\nu\sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} - j\omega\mu\sigma \bar{A} = 0 \quad (I.23)$$



L'analyse de cette équation doit se faire dans le domaine bande (la moitié de l'induit) de largeur α et de longueur infinie dans la direction du mouvement. Les conditions aux limites qui lui sont associées sont :

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial y}(x,0) = 0 \tag{I.24}$$

car le modèle complet est symétrique par rapport à l'axe des x .

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial y}(x,\alpha) = \mu \bar{J}_s(x) \tag{I.25}$$

où $\bar{J}_s(x)$ est une densité superficielle due à la présence de l'inducteur. On néglige l'effet de l'entrefer et on suppose que la densité de courant inductrice est directement appliquée sur la surface de l'induit ; elle peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{J}_s(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{J}_s(k) e^{2j\pi kx} dk \tag{I.26}$$

où $\hat{J}_s(k)$ est la transformée de Fourier de $\bar{J}_s(x)$. L'équation (I.23) étant homogène, la solution $\bar{A}(x,y)$ peut aussi se mettre sous la forme :

$$\bar{A}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{A}(k,y) e^{2j\pi kx} dk \tag{I.27}$$

La densité de courant instantanée est :

$$j_s(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2} \Re[\hat{J}_s(k) e^{j(2\pi kx + \omega t)}] dk \tag{I.28}$$

Elle est composée d'une infinité d'ondes qui se propagent suivant Ox dans les deux sens. Pour une valeur k_0 donnée, la longueur de l'onde correspondante est $\lambda_0 = \frac{1}{|k_0|}$ et sa vitesse est

$v_0 = -\frac{\omega}{2\pi k_0}$; pour k_0 positif, l'onde se déplace dans le sens négatif. Si l'on veut mettre en

évidence la contribution particulière de l'onde associée à la valeur k_0 , nous ne considérons que cette onde dans la densité $j_s(x, t)$. Par exemple, pour k_0 positif et v_0 négatif, nous avons :

$$j_{0_s}(x, t) = \sqrt{2} \Re \left[\bar{J}_0 e^{j \frac{2\pi}{\lambda_0} (x - v_0 t)} \right] \quad (\text{I.29})$$

dont la représentation complexe est :

$$\bar{J}_s(x) = \bar{J}_0 e^{j \frac{2\pi x}{\lambda_0}} \quad (\text{I.30})$$

On peut introduire une longueur caractéristique L de sorte que $X = \frac{x}{L}$ et $Y = \frac{y}{L}$; l'équation (I.23) devient donc :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right] \bar{A} - R_m \frac{\partial \bar{A}}{\partial X} - \frac{2j}{(\delta/L)} \bar{A} = 0 \quad (\text{I.31})$$

où $R_m = \sigma \mu \nu L$ est le nombre de Reynolds magnétique.

$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \omega \mu}}$ est la profondeur de pénétration.

On se ramène à un problème monodimensionnel en introduisant la moyenne suivant Y du potentiel vecteur :

$$\bar{A}(X) = \frac{L}{\alpha} \int_0^{\frac{\alpha}{L}} \bar{A}(X, Y) dY \quad (\text{I.32})$$

L'intégration de l'équation (I.31) liée aux conditions (I.24) et (I.25) donne alors :

$$\frac{d^2 \tilde{A}}{dX^2} - R_m \frac{d\tilde{A}}{dX} - \frac{2j}{(\delta/L)^2} \tilde{A} - \frac{L^2}{\alpha} \bar{J}_0 e^{j \frac{2\pi XL}{\lambda_0}} = 0 \quad (\text{I.33})$$

dont la solution est :

$$\tilde{A}(X) = \frac{-L^2 \bar{J}_0 e^{j \frac{2\pi XL}{\lambda_0}}}{\alpha Z_{op}} \quad (\text{I.34})$$

avec :

$$Z_{op} = \frac{4\pi^2 L^2}{\lambda_0^2} + j \left[\frac{2}{(\delta/L)^2} + \frac{2\pi LR_m}{\lambda_0} \right]$$

Examinons les efforts appliqués sur l'induit. La densité de force volumique $\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{b}$ présente une composante suivant la direction du mouvement dont l'expression est :

$$f_x(X, Y, t) = -\sigma \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t}(X, Y, t) + \frac{v}{L} \frac{\partial \alpha}{\partial X}(X, Y, t) \right] \frac{1}{L} \frac{\partial \alpha}{\partial X}(X, Y, t) \quad (\text{I.35})$$

On admet que la solution diffère peu de sa moyenne suivant Y car le champ est transverse. En introduisant la représentation complexe, la valeur moyenne dans le temps de cette force s'écrit :

$$F_x(X) \approx -\sigma \Re \left\{ \left[j\omega \tilde{A} + \frac{v}{L} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial X} \right] \frac{1}{L} \frac{\partial \tilde{A}^*}{\partial X} \right\} \quad (\text{I.36})$$

Utilisant (I.34), il vient :

$$F_x(X) = -\frac{\sigma L^5 2\pi |\bar{J}_0|^2}{\alpha^2 \lambda_0 |Z_{op}|^2} \left[\omega + \frac{2\pi v}{\lambda_0} \right] = -\frac{\sigma L^5 4\pi^2 |\bar{J}_0|^2}{\alpha^2 \lambda_0 |Z_{op}|^2} \left[\frac{v - v_0}{\lambda_0} \right] \quad (\text{I.37})$$

Le rapport : $\mathbf{R} = \frac{\frac{2\pi LR_m}{\lambda_0}}{\frac{2}{(\delta/L)^2}} = \frac{2\pi v}{\lambda_0 \omega}$ représente le rapport entre la contribution du terme de

« déplacement » $v \bullet \text{grad } \bar{A}$ et la contribution du terme de « diffusion » $j\omega \bar{A}$. Le signe de la

force dépend du rapport \mathbf{R} qui permet de comparer la vitesse de l'induit à celle de l'onde inductrice.

II.2.2. Analyse et critique de l'étude simplifiée

Pour un induit qui se déplace dans le même sens que l'onde (v et v_0 de même signe), trois cas se présentent :

- 1) $|\mathbf{R}| < 1$: l'onde inductrice va plus vite que le fluide et la force est positive ; ceci correspond à un fonctionnement moteur. A la limite si $|\mathbf{R}| \rightarrow 0$, le courant induit est uniquement dû à la pulsation de la densité de courant inductrice sur un domaine fixe.
- 2) $|\mathbf{R}| = 1$: correspond au cas où l'induit se déplace à la même vitesse que l'onde inductrice. Il n'y a donc aucun effet d'induction ; le potentiel vecteur est en phase avec la densité de courant inductrice et la force est nulle :

$$\tilde{A}(X) = -\frac{\lambda_0^2}{\alpha 4\pi^2} \bar{J}_0 e^{-\frac{j2\pi XL}{\lambda_0}}, \quad \tilde{J}(X) = -\sigma \left[j\omega \tilde{A} + \frac{v}{L} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial X} \right] = 0 \text{ et } F_x = 0.$$

- 3) $|\mathbf{R}| \gg 1$: l'induit se déplace beaucoup plus vite que l'onde inductrice et la force est négative ; ceci correspond à un fonctionnement générateur. A la limite, si $|\mathbf{R}| \rightarrow \infty$, le courant induit est uniquement le fait du déplacement devant une onde sinusoïdale en espace fixe.

Pour un induit qui se déplace dans le sens contraire que l'onde (v et v_0 de signes contraires) la force est toujours de signe opposé à v . L'analyse des cas $|\mathbf{R}| \gg 1$ et $|\mathbf{R}| < 1$ restent la même quant à l'origine des courants induits mais le raisonnement n'est pas le même pour la force qui est toujours opposée au mouvement. $|\mathbf{R}| = 1$ correspond au cas où les contributions des deux termes $v \bullet \text{grad } \bar{A}$ et $j\omega \bar{A}$ sont égales.

Cette étude simplifiée a permis de mettre en évidence la contribution d'un harmonique d'espace à la conversion d'énergie dans le cadre du moteur linéaire à induction. Les

phénomènes sont nécessairement « brouillés » par le fait que la densité de courant inductrice dans un moteur linéaire présente une infinité d'ondes comme celle-ci. Pour une vitesse donnée de l'induit les différentes ondes peuvent se trouver dans l'un des trois cas cités (1,2 ou 3) ou bien dans les cas opposés, et leurs contributions à la forces diffèrent suivant le cas. Il est donc nécessaire de sommer (algébriquement) leurs contributions respectives par une étude plus complète sur tout le spectre. La transformation de Fourier spatiale est l'outil privilégié pour cette étude.

Conclusion

Dans ce paragraphe, nous avons établi les équations qui régissent le comportement électromagnétique des convertisseurs linéaires à induction. Des hypothèses simplificatrices relatives à l'électrotechnique ont été admises. Le problème peut être entièrement traité dans un référentiel lié aux inducteurs ; cette opération est rendue possible par l'invariance (géométrique et des propriétés) de l'induit dans la direction du mouvement. L'introduction de la représentation complexe du potentiel vecteur conduit au problème suivant :

$$\operatorname{div} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \bar{A} + \bar{J}_s = 0 \quad \text{dans le domaine fixe} \quad (\text{I.38})$$

$$\operatorname{div} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \bar{A} - \sigma \left[j\omega \bar{A} + v \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \right] = 0 \quad \text{dans l'induit} \quad (\text{I.39})$$

où \bar{A} et $\frac{\partial \bar{A}}{\partial y}$ sont continus à l'interface domaine fixe-induit.

L'examen complet du comportement de l'induit en présence d'une seule onde de densité de courant, a permis de mettre en évidence les paramètres adimensionnels qui conditionnent le problème ainsi que les différents modes de fonctionnement qui en dépendent. Toutefois, la situation est plus complexe dans la réalité, puisqu'une infinité d'ondes se superposent.

III. Les méthodes numériques de résolution

III.1. Le modèle complet

C'est le modèle qui peut être obtenu par le traitement direct classique (I.38) et(I.39).

III.1.1. Formulation

Le problème à résoudre qui correspond à (I.38) et(I.39) peut être écrit sous forme compacte comme la recherche de \bar{A} tel que :

$$\operatorname{div} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \bar{A} + \bar{J}_s - j\omega\sigma\bar{A} - \sigma v \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D} = D_1 \cup D_2 \quad (\text{I.40})$$

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial y} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (\text{I.41})$$

$$\bar{A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\infty \quad (\text{I.42})$$

où :

$$\mu = \begin{cases} \mu_0 \mu_r & \text{dans } \mathcal{D}_0 \\ \mu_0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad \bar{J}_s = \begin{cases} \bar{J}_k & \text{dans } \mathcal{D}_k \\ S_k & \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma & \text{dans } D_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad v = \begin{cases} v & \text{dans } D_1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

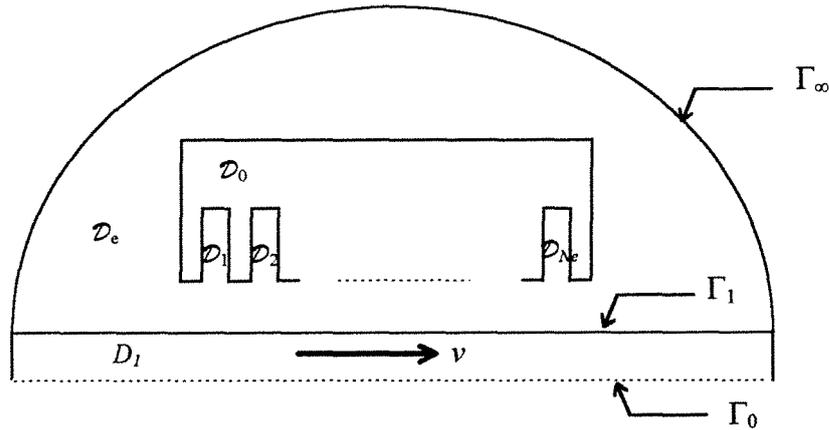


Fig. I.4. :Le domaine complet $\mathcal{D} = D_l \cup \mathcal{D}_e \cup \mathcal{D}_0 \cup \bigcup_{k=1}^{N_e} \mathcal{D}_k$.

Ce problème admet comme forme faible le problème :

Trouver \bar{A} tel que :

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{grad} \bar{A} \cdot \mathbf{grad} \bar{A}' + j\omega\sigma \bar{A} \bar{A}' - \sigma v \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \bar{A}' dxdy = \int_{\mathcal{D}} \bar{J}_s \bar{A}' dxdy \quad \forall \bar{A}' \quad (I.43)$$

et $\bar{A} = \bar{A}' = 0$ sur Γ_∞

A priori, il suffit dans la logique de la méthode des éléments finis [35], pour résoudre (I.43) de :

1. Triangulariser \mathcal{D} ; c'est à dire le recouvrir d'un pavage triangulaire appelé maillage.
2. Approximer l'espace de recherche \bar{A} (et l'espace dans lequel est choisi \bar{A}') par les fonctions affines par morceau en x et y sur les triangles et reliées aux valeurs de \bar{A} et de \bar{A}' aux sommets des triangles.
3. Appliquer cette approximation à (I.43) qui se transforme alors en un système discret :

$${}^t[\bar{A}'] \{ \mathbf{K} + j\omega \mathbf{M} + v \mathbf{T} - [\mathbf{S}] \} [\bar{A}] = 0 \quad (I.44)$$

où :

$[\bar{A}']$ et $[\bar{A}]$ sont les vecteurs des valeurs aux noeuds (les sommets des triangles).

K et **M** sont les matrices symétriques associées aux formes quadratiques symétriques définies par l'approximation 2 des termes : $\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\mu} \mathbf{grad} \bar{A} \bullet \mathbf{grad} \bar{A}' dx dy$ et $\int_{\mathcal{D}} j\omega\sigma \bar{A} \bar{A}' dx dy$.

T est la matrice antisymétrique associée à la forme quadratique antisymétrique définie par l'approximation 2 du terme : $\int_{\mathcal{D}} \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \bar{A}' dx dy$.

$$\left(\int_{\mathcal{D}} \sigma \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} \bar{A}' dx dy = - \int_{\mathcal{D}} \sigma \bar{A} \frac{\partial \bar{A}'}{\partial x} dx dy + \int_{\mathcal{D}} \sigma \frac{\partial}{\partial x} [\bar{A}' \bar{A}] dx dy \text{ et } \int_{\mathcal{D}} \sigma \frac{\partial}{\partial x} [\bar{A}' \bar{A}] dx dy = 0 \right)$$

et **[S]** est le vecteur de la forme linéaire définie par l'approximation 2 du terme : $\int_{\mathcal{D}} \bar{J}_s \bar{A}' dx dy$.

Les valeurs de \bar{A} et \bar{A}' sur les sommets aux triangles contigus à Γ_{∞} sont forcées à 0 pour respecter (I.42).

En exprimant que (I.44) doit être vrai pour tout \bar{A}' on obtient le système linéaire suivant :

$$\{\mathbf{K} + j\omega\mathbf{M} + \nu\mathbf{T}\}[\bar{A}] = [\mathbf{S}] \quad (\text{I.45})$$

qui doit *a priori* être résolu par une méthode de décomposition de Gauss puisque la matrice n 'est pas symétrique lorsque ν n'est pas nulle.

III.1.2. Critique de la formulation

Le champ est transverse ; la profondeur de pénétration δ est toujours grande devant l'épaisseur de l'induit et donc grande devant les dimensions des éléments du maillage de celui-ci. Il n'y a donc aucun problème relatif à cet aspect.

Par contre, la vitesse joue un rôle néfaste puisqu'elle dissymétrise le système (I.45) et entraîne une difficulté de résolution dont les manifestations sont l'apparition d'instabilités numériques. Si on veut quantifier ces difficultés, on introduit la dimension moyenne L_e des

triangles (éléments) qui détermine la finesse du maillage. L'équation (I.45) peut être réécrite comme :

$$\{\mathbf{K} + j\omega L_e^2 \mathbf{M} + v L_e \mathbf{T}\}[\bar{A}] = [\mathbf{S}] \quad (\text{I.46})$$

Si la solution pour une vitesse v_0 est acceptable (c'est à dire ne comporte aucune instabilité numérique) avec une dimension moyenne L_0 des mailles, alors la solution pour une vitesse v_1 sera acceptable avec une dimension moyenne des mailles .

$$L_1 = \frac{v_0 L_0}{v_1} \quad (\text{I.47})$$

Ainsi, le nombre de mailles \mathcal{N} nécessaires augmente avec la vitesse ; celui-ci peut être estimé en considérant une densité de mailles constante :

$$\mathcal{N} \sim \frac{l}{L_1^2} = \left(\frac{v_1}{v_0 L_0} \right)^2 \quad (\text{I.48})$$

Notre étude doit tenir compte de l'effet de la vitesse même si elle est grande. La croissance en carré de la vitesse de la densité de maille engendre un temps de calcul important.

III.1.3. Les éléments finis décentrés

Le paragraphe précédent a décrit sous forme naïve les inconvénients inhérents à une équation (I.40) contenant simultanément des termes de dérivées d'ordre 2 et d'ordre 1 ; ce problème a été étudié depuis longtemps en mécanique des fluides [36] [37] et introduit aussi en électrotechnique [39]. Une façon de lever les difficultés consiste à introduire des fonctions de forme (Upwind, décentrement) dans les éléments finis eux-mêmes qui permettent à la dépendance en espace d'approcher plus finement la solution en dimension infinie (une décroissance en exponentielle en x) ce qui élimine du même coup les instabilités de calcul.

Dans le cas d'un problème monodimensionnel les fonctions de forme ont été exactement étudiées [37]. Il est possible de reporter cette technique au cas bidimensionnel [36] si on utilise des éléments finis quadrangulaires en utilisant la séparation des variables sur chaque élément. C'est possible ici puisque l'induit est quadrangulaire [39] [41].

Mais l'extrapolation à une géométrie quelconque, qui nécessite l'utilisation des éléments triangulaires sur lesquels l'application de la technique de décentrement, semble ne pas donner de bons résultats [38].

Aussi, même avec la connaissance de la technique de décentrement, on renonce à l'utilisation de la méthode directe qui de plus nécessiterait une formulation compliquée et coûteuse en temps de calcul. Notre objectif premier est en effet d'obtenir des solutions rapides en vue de l'optimisation.

III.2. Les modèles approchés

Puisque l'introduction des éléments finis dans l'induit pose des problèmes, il ne reste plus qu'à exprimer la relation de convolution (I.10) sur la frontière avec le domaine fixe.

La méthode des intégrales de frontière est une technique qui a été utilisée par F. Huang [42] pour plusieurs problèmes en électrotechnique, notamment la modélisation d'un moteur linéaire. La technique utilisée consiste à imaginer un induit infiniment mince équivalent placé au niveau $y=0$; cette technique est initialement introduite par B. Laporte [23].

Plusieurs autres techniques de résolution ont été développées pour divers modèles qui reposent essentiellement sur la transformée de Fourier avec éventuellement une approximation discrète. Le traitement par la transformation de Fourier n'est possible que si l'induit présente une invariance ou une périodicité des propriétés dans une direction donnée.

III.2.1. Traitement par la transformée de Fourier

Ce type de modèle suppose des armatures inductrices de perméabilité infinie et d'extension infinie dans la direction du mouvement. L'enroulement inducteur s'étend sur une longueur ℓ qui correspond à la longueur réelle des armatures. Les courants dans les encoches sont ramenés à leur densité superficielle équivalent sur les isthmes des encoches¹ créant ainsi une nappe de courant ayant un support fini de longueur ℓ (Fig. I.5.) ; le modèle peut être traité par transformation de Fourier spatiale.

¹ La justification de cette approche sera donnée dans le chapitre II.

Les transformées de Fourier de \bar{J}_s et \bar{A} définies comme suit :

A la fonction f ($f = \bar{J}_s$ ou \bar{A}) on associe sa transformée de Fourier (TF) \hat{f} :

$$\hat{f}(k) = \int_R f(x) e^{-2j\pi kx} dx \quad (\text{I.49})$$

réciroquement, si f appartient à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré sommable sur la droite réelle, la TF inverse peut être introduite par :

$$f(x) = \int_R \hat{f}(k) e^{2j\pi kx} dk \quad (\text{I.50})$$

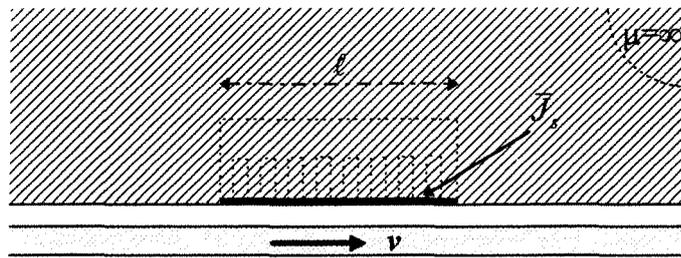


Fig. I.5. : Modèle apériodique.

Le problème décrit par les équations (I.38) et (I.39), est entièrement transcrit dans l'espace de Fourier par la transformation (I.49) et la résolution y est alors plus aisée puisqu'il n'y a plus qu'une équation différentielle ordinaire et linéaire. Le calcul des TF inverses est possible via l'équation (I.50). Cette technique est une analyse *spectrale* du moteur linéaire à induction ; elle est utilisée par plusieurs auteurs [23] [32] [34].

III.2.2. Traitement par périodisation

Dans la structure décrite par la figure (Fig. I.5.), le champ électromagnétique décroît lorsque l'on s'éloigne des sources pour s'annuler à une distance suffisamment grande. Sans se préoccuper des techniques de calcul, on définit un intervalle de longueur L qui contient la portion de l'espace où le champ n'est pas nul de sorte qu'en dehors de cet intervalle, il n'existe aucun champ. En plaçant les uns après les autres, une infinité d'inducteurs identiques à

l'inducteur initial, et à des intervalles L , la carte de champ dans un intervalle n'est pas perturbée par l'inducteur voisin. On crée ainsi un convertisseur périodique de période L qui coïncide en des intervalles avec le moteur initial ; on discrétise le spectre de Fourier. Cette structure est traitée par la technique des séries de Fourier ; elle constitue une analyse *harmonique* du moteur linéaire ou bien une approximation discrète du spectre de Fourier.

La difficulté principale de cette démarche réside dans le choix du rapport $r = \frac{L}{\ell}$ de la période de conversion à la longueur bobinée. Si r est trop grand, le support effectif de la densité de courant est trop petit devant la période de conversion ; il est nécessaire de traiter un nombre important d'harmoniques pour pouvoir obtenir des résultats significatifs. D'un autre côté, si r est trop petit, les inducteurs sont rapprochés et interagissent entre eux [23].

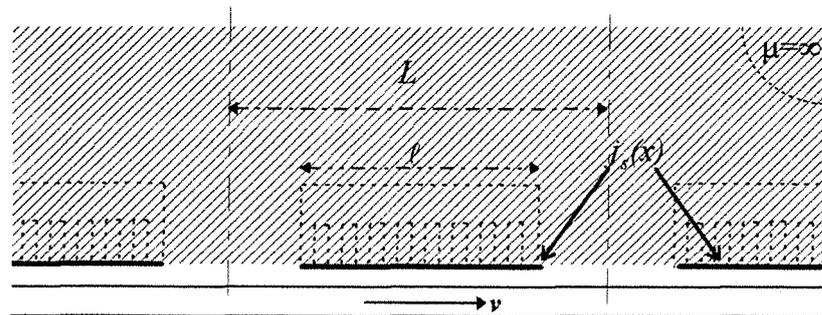


Fig. I.6. : Modèle périodique.

III.2.3. Traitement par subdivision

Ce modèle se déduit du traitement par périodisation en arrêtant les armatures du stator au delà des zones des courants inducteurs ; on le qualifie alors de « fini » [23]. Au dessus de la frontière Γ_f (Fig. I.7.), la période de conversion, de longueur L est subdivisée en trois domaines. Le domaine (I) présente une perméabilité magnétique infinie; il représente une armature inductrice d'extension infinie suivant la direction perpendiculaire au mouvement (Oy). Il est muni d'une densité de courant inductrice à sa frontière avec l'entrefer. Les deux autres domaines (II) et (III) sont caractérisés par une conductivité électrique nulle et la perméabilité du vide. Le traitement des équations du champ dans ces domaines nécessite une condition de Neumann homogène ($\frac{\partial \bar{A}}{\partial n} = 0$) sur la frontière avec le domaine (I). L'entrefer et

l'induit restent complet sur la période de conversion (domaine au dessous de Γ_f (Fig. I.7.)). La périodisation permet le traitement par les séries de Fourier.

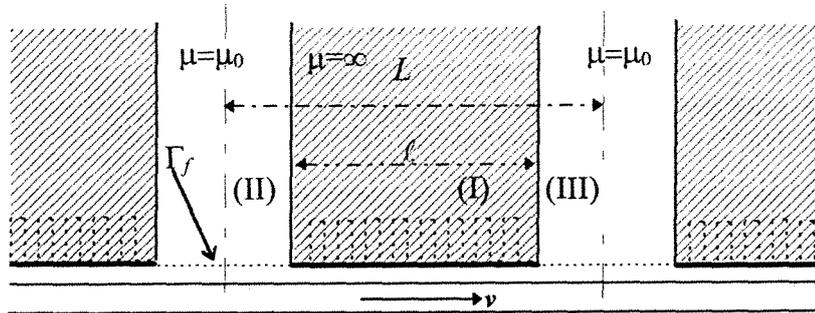


Fig. I.7. : Modèle fini périodique.

Ces modes de traitement des convertisseurs linéaires à induction ont l'avantage d'être rapides et de tenir compte d'un effet principal des moteurs linéaires qui réside dans le support borné de la densité de courant d'alimentation. Cependant, ils supposent des armatures inductrices de perméabilité infinie et ramènent les courants d'encoches à leur densité superficielle équivalente au niveau des isthmes des encoches.

III.2.4. Le modèle choisi

Comme nous l'avons constaté au paragraphe §III.1.3, les problèmes dans la méthode des éléments finis viennent du mouvement ; et au paragraphe §III.2 nous avons vu que les techniques de résolution par Fourier nécessitent des géométries simplifiées. Si on imagine un modèle où l'on restreint l'étude par la méthode des éléments finis au domaine fixe par introduction d'une condition aux limites particulière à sa frontière avec le domaine mobile (Eq.(I.10)), le traitement par la méthode des éléments finis ne pose plus aucun problème. Ce modèle est développé dans le chapitre II et exploité dans le chapitre III en vue de l'optimisation de l'alimentation.

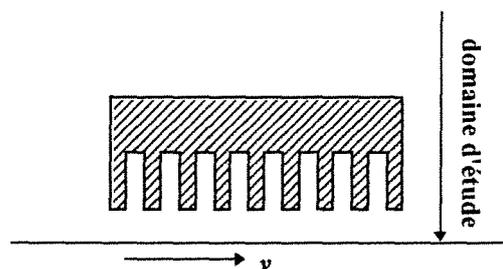


Fig. I.8. : Modèle choisi.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques aspects généraux sur les convertisseurs linéaires, leur utilité et leurs problèmes spécifiques. Ces problèmes sont à l'origine de la dégradation des performances des moteurs linéaires en comparaison avec les machines asynchrones tournantes ; une optimisation de l'alimentation s'avère donc nécessaire.

Une modélisation de la conversion électromagnétique dans le cadre des hypothèses admises au début du chapitre est abordée ; elle est suivie d'un exposé des différentes méthodes de résolution déjà imaginées ainsi que d'un aperçu de la méthode adoptée dans la suite de notre travail.

Dans le cas où l'induit est un métal liquide, l'écoulement est turbulent même à faible vitesse [27]. Dans cette situation, on considère un profil de vitesse plat et on néglige l'effet des couches limites ; ceci revient à considérer que l'induit liquide se comporte globalement comme un induit solide. Toutefois, les modèles que nous développerons peuvent également s'étendre aux cas des écoulements où la vitesse présente un profil quelconque.

Chapitre II

LES MODELES

Introduction

Ce chapitre est consacré à l'exposé des modèles d'études des convertisseurs linéaires à induction qui sont utilisés par la suite : le modèle dit « infini » et le modèle dit « fini ».

Le premier modèle suppose une extension infinie des armatures inductrices et de l'induit dans la direction du mouvement ; la longueur bobinée étant finie. L'avantage de ce modèle réside dans la rapidité de mise en œuvre ; en effet, l'invariance de ce modèle dans la direction du mouvement permet de le traiter entièrement par l'introduction de la transformation de Fourier. On y tient compte d'un effet principal des moteurs linéaires, à savoir l'extension limitée des sources.

Le deuxième modèle n'exige que l'invariance de l'induit dans la direction du mouvement, ce qui est souvent le cas dans la pratique ; la géométrie exacte des inducteurs est prise en compte (sous réserve de la modélisation 2D). L'hypothèse de la linéarité de la relation magnétique est nécessaire dans la suite de ce travail ; elle est justifiée dans le chapitre I.

On est conduit dans les deux modèles, à exprimer les performances comme formes hermitiennes des représentations complexes des courants d'alimentation.

I. Modèle infini

I.1. Présentation du modèle

Le modèle, invariant par rapport à z , présente deux armatures infiniment longues dans la direction Ox , distantes de $2b$. Chacune d'entre elles est munie de N_e encoches, d'ouverture ε , réparties de manière équidistante sur la longueur L . L'induit, d'épaisseur $2a$, est une plaque métallique de conductivité σ et de perméabilité relative μ_r ; il se déplace à la vitesse v dans la direction Ox (Fig. II.1). On considère le cas où les sources sont à variation sinusoïdale par rapport au temps ; la représentation complexe de toutes les grandeurs électromagnétiques est donc introduite.

L'entrefer des convertisseurs linéaires étant souvent important, la réaction de l'induit perturbe peu le champ dans les encoches. En considérant que la perméabilité magnétique des armatures est infinie, on peut aussi remplir l'encoche d'un matériau de perméabilité infini et ramener les courants à leur densité superficielle équivalente au niveau des isthmes d'encoches. Le champ extérieur n'est pas trop perturbé par cette modification [45]. Ainsi, une encoche d'épaisseur ε , centrée en $x = x_i$, parcourue par un courant total \bar{J}_i est remplacée par sa densité équivalente notée $\bar{g}_i(x)$ définie par :

$$\bar{g}_i(x) = \frac{\bar{J}_i}{\varepsilon} S_i(x) \quad (\text{II.1})$$

où $S_i(x)$ est la fonction support du courant \bar{J}_i dans l'encoche i ; elle est définie par :

$$S_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[x_i - \frac{\varepsilon}{2}, x_i + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette formulation permet d'évaluer l'effet global correspondant à une encoche mais ne permet pas de déterminer les effets locaux dans celle-ci, comme par exemple : le flux de fuite de l'encoche.

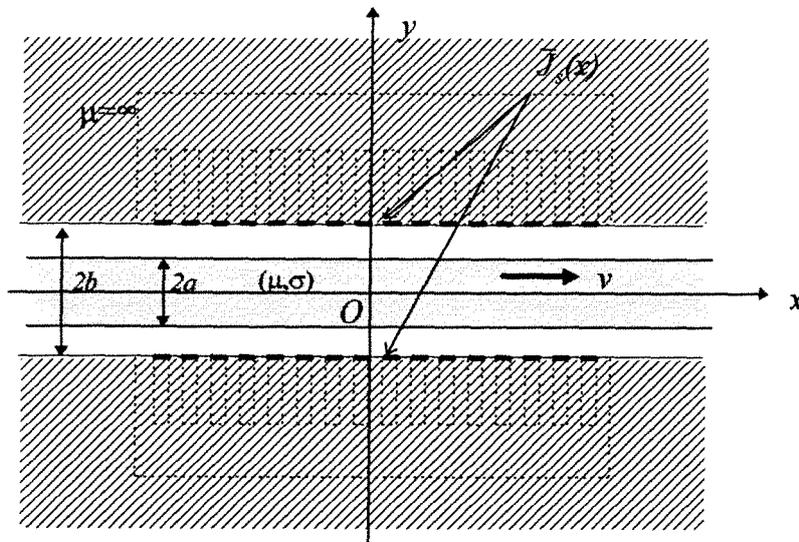


Fig. II.1 : Modèle infini -schéma-

La symétrie du modèle par rapport au plan $y = 0$ permet de restreindre l'étude au demi plan $y > 0$; les performances sont ensuite multipliées par un facteur 2. Dans ce demi plan, on distingue deux domaines :

Domaine D_1 : $0 \leq y < a$ qui représente l'induit

Domaine D_2 : $a < y < b$ qui représente l'entrefer

Les grandeurs électromagnétiques dans le domaine D_1 (respectivement D_2) sont munies de l'indice 1 (respectivement 2).

1.2. Equations générales

La représentation complexe du potentiel vecteur vérifie les équations suivantes exprimées dans le repère xOy lié aux armatures inductrices :

$$\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y}(x,0) = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad (\text{II.2})$$

$$\text{div} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \text{grad} \bar{A}_1 = \sigma \left[j\omega \bar{A}_1 + v \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x} \right] \quad \text{pour } y \in [0, a[\quad (\text{II.3})$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_1(x,a) &= \bar{A}_2(x,a) \\ \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y}(x,a) &= \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y}(x,a) \end{aligned} \quad \text{pour } y = a \quad (\text{II.4})$$

$$\text{div} \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \text{grad} \bar{A}_2(x,y) = 0 \quad \text{pour } y \in]a, b[\quad (\text{II.5})$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y}(x,b) = \bar{J}_s(x) \quad \text{pour } y = b \quad (\text{II.6})$$

où $\bar{J}_s(x)$ est la densité superficielle équivalente des courants totaux dans les encoches :

$$\bar{J}_s(x) = \sum_{m=1}^{N_e} \bar{J}_m(x) \quad (\text{II.7})$$

Le domaine d'étude présente une invariance dans la direction Ox , ce problème peut donc être traité par la technique de la transformée de Fourier (TF) par rapport à la variable x . L'égalité de Parseval permettant le calcul des performances dans l'espace des TF, le retour aux fonctions originales ne sera pas nécessaire. Après TF, les équations précédentes (II.2) à (II.7) deviennent :

$$\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial y}(k,0) = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{A}_1}{\partial y^2}(k,y) + \varphi^2(k) \hat{A}_1(k,y) = 0 \quad \text{pour } y \in [0,a[\quad (\text{II.9})$$

où $\varphi^2(k) = 4\pi^2 k^2 + j\omega\mu_0\mu_r\sigma \left[1 + \frac{kv}{f} \right]$

$$\hat{A}_1(k,a) = \hat{A}_2(k,a) \quad \text{pour } y = a \quad (\text{II.10})$$

$$\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \hat{A}_1}{\partial y}(k,a) = \frac{\partial \hat{A}_2}{\partial y}(k,a)$$

$$\frac{\partial^2 \hat{A}_2}{\partial y^2}(k,y) + 4\pi^2 k^2 \hat{A}_2(k,y) = 0 \quad \text{pour } y \in]a,b[\quad (\text{II.11})$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \hat{A}_2}{\partial y}(k,b) = \hat{J}_s(k) \quad \text{pour } y = b \quad (\text{II.12})$$

$$\text{où } \hat{J}_s(k) = \sum_{m=1}^{N_e} \bar{J}_m e^{-2j\pi m c x_k} \frac{\sin(k\pi \epsilon)}{k\pi \epsilon} \quad (\text{II.13})$$

1.3. Forme de la solution

La résolution du groupe d'équations ci-dessus donne la solution au problème posé. Nous nous intéressons plus particulièrement à la solution au niveau $y = b$ qui permet de déterminer les différentes performances ; elle s'écrit :

$$\hat{A}_2(k, b) = \mu_0 \mathfrak{Z}(k) \hat{J}_s(k)$$

avec: (II.14)

$$\mathfrak{Z}(k) = \frac{\tanh[2\pi k(b-a)]}{2\pi k} + \frac{I}{\cosh^2[2\pi k(b-a)] \left\{ 2\pi k \tanh[2\pi k(b-a)] + \frac{\varphi(k) \tanh[\varphi(k)a]}{\mu_r} \right\}}$$

En utilisant (II.7), la transformée de Fourier du potentiel vecteur au niveau $y = b$ est exprimée comme une forme linéaire des représentations complexes des courants d'alimentation :

$$\hat{A}_2(k, b) = \mu_0 \mathfrak{Z}(k) \sum_{i=1}^{N_e} \bar{J}_i e^{-2j\pi k x_i} \frac{\sin(k\pi x_i)}{k\pi x_i}$$
(II.15)

On va vérifier que seule l'expression de la transformée de Fourier du potentiel vecteur au niveau $y=b$ suffit pour déterminer les différentes performances.

I.4. Calcul des performances

I.4.1. Poussée et puissance mécanique

La force totale appliquée sur l'induit peut être calculée de plusieurs manières. Le calcul direct des forces de Laplace à l'intérieur de l'induit nécessite l'intégration de cette force volumique sur tout le domaine D_I . Le calcul par le tenseur des contraintes de Maxwell sur la surface de l'induit est un moyen plus simple ; il nécessite néanmoins la connaissance de la solution sur l'interface entre l'induit et l'entrefer ($y = a$). Dans le cas du modèle infini, nous préférons calculer la force sur les inducteurs puis utiliser le principe de l'égalité de l'action et de la réaction pour évaluer la poussée totale exercée sur l'induit. L'utilisation du tenseur de contraintes de Maxwell sur la surface interne des inducteurs ($y = b$) donne :

$$f_x(t) = 2L_u \int_R h_t(x, b, t) b_n(x, b, t) dx$$
(II.16)

où $h_t(x, b, t)$ et $b_n(x, b, t)$ sont le champ tangentiel et l'induction normale au niveau $y = b$ à x donné, et à un instant t . L_u est la largeur utile dans la direction Oz .

Dans le cas où les sources sont à variation sinusoïdale dans le temps, cette force présente une composante continue et une composante alternative. Cette dernière n'introduit pas de variation de vitesse dès lors que la période de pulsation est faible devant les constantes de temps mécaniques. En effet, les applications visées sont la traction, où les masses mises en jeu et les constantes de temps mécaniques sont importantes, ou bien le pompage des métaux liquides où le nombre de Reynolds est suffisamment élevé pour que l'on ne considère pas les pulsations locales de la vitesse.

D'un autre côté et dans le cadre du modèle infini, le champ tangentiel $h_i(x, b, t)$ est localisé aux isthmes des encoches. En introduisant la représentation complexe, la force moyenne agissant sur l'encoche i est alors :

$$F_i = L_u \Re \left[\frac{\bar{J}_i^*}{\epsilon} \int_{x_i - \frac{\epsilon}{2}}^{x_i + \frac{\epsilon}{2}} \bar{B}_n(x, b) S_i(x) dx \right] \quad (\text{II.17})$$

où $\bar{B}_n(x, b)$ est la représentation complexe de $b_n(x, b, t)$. L'égalité de Parseval fournit alors :

$$F_i = L_u \Re \left[\bar{J}_i^* \int_R \hat{B}_n(k, b) e^{2j\pi k x_i} \frac{\sin(k\pi\epsilon)}{k\pi\epsilon} dk \right] \quad (\text{II.18})$$

où $\hat{B}_n(k, b)$ est la TF de $\bar{B}_n(x, b)$:

$$\hat{B}_n(k, b) = -2j\pi k \hat{A}(k, b) \quad (\text{II.19})$$

En introduisant l'expression (II.15) de $\hat{A}(k, b)$ en fonction des ampères-tours totaux dans les encoches, la force moyenne exercée sur l'encoche i devient :

$$F_i = \mu_0 L_u \Im \left[\bar{J}_i^* \int_R 2\pi k \mathfrak{Z}(k) \sum_{j=1}^{N_e} \bar{J}_j e^{2j\pi k(x_i - x_j)} \left(\frac{\sin(k\pi\epsilon)}{k\pi\epsilon} \right)^2 dk \right] \quad (\text{II.20})$$

Après sommation sur i , on obtient la force totale appliquée sur les deux armatures inductrices. La poussée exercée sur l'induit lui est égale et opposée ; on l'obtient sous la forme :

$$F_x = -2L_u \mu_0 \Im \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \bar{\theta}_{ij} \bar{J}_i \bar{J}_j^* \quad (\text{II.21})$$

$$\text{où} \quad \bar{\theta}_{ij} = \int_R -2\pi k \mathfrak{Z}(k) e^{2j\pi k(x_i - x_j)} \left[\frac{\sin(k\pi\varepsilon)}{k\pi\varepsilon} \right]^2 dk$$

La poussée est donc une forme hermitienne des représentations complexes des courants d'encoche ; il en est de même de la puissance mécanique développée : $\pi_m = v.F_x$.

I.4.2. Puissance électrique

On définit le flux par encoche par la moyenne du potentiel vecteur sur la surface de l'encoche ; dans le cas du modèle infini, cette moyenne est effectuée sur l'ouverture de l'encoche (cf. Chapitre I § II.1.1) :

$$\bar{\Phi}_i = \frac{I}{\varepsilon} L_u \int_{x_i - \frac{\varepsilon}{2}}^{x_i + \frac{\varepsilon}{2}} \bar{A}(x, b) dx = L_u \int_R \hat{A}(k, b) \frac{\sin(k\pi\varepsilon)}{k\pi\varepsilon} dk \quad (\text{II.22})$$

Utilisant (II.15), on obtient le flux par encoche sous la forme :

$$\bar{\Phi}_i = \mu_0 L_u \sum_{j=1}^{N_e} \bar{\lambda}_{ij} \bar{J}_j \quad (\text{II.23})$$

avec

$$\bar{\lambda}_{ij} = \int_R \mathfrak{Z}(k) e^{-2j\pi k(x_i - x_j)} \left[\frac{\sin(k\pi\varepsilon)}{k\pi\varepsilon} \right]^2 dk$$

La force électromotrice (f.é.m) d'encoche s'en déduit par $\bar{E}_i = j\omega \bar{\Phi}_i$; C'est le produit par L_u de la moyenne du champ électromoteur sur l'encoche. La puissance électrique complexe est :

$$S = 2j\omega L_u \sum_{i=1}^{N_e} \bar{\Phi}_i \bar{I}_i^* = \pi_a + j\pi_r \quad (\text{II.24})$$

avec :

$$\pi_a = -2\omega\mu_0 L_u \Im \left\{ \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \bar{\lambda}_{ij} \bar{J}_i \bar{J}_j^* \right\}$$

$$\pi_r = 2\omega\mu_0 L_u \Re \left\{ \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \bar{\lambda}_{ij} \bar{J}_i \bar{J}_j^* \right\}$$

Les puissances active et réactive sont ainsi exprimées comme des formes hermitiennes des représentations complexes des courants d'encoches.

La puissance réactive correspondant aux flux de fuites dans les encoches ainsi que dans les têtes de bobines est exclue de l'expression de π_r ; c'est l'hypothèse de la géométrie bidimensionnelle non corrigée (cf. *Chapitre I* § II.1.3.1). La puissance π_j dissipée par effet Joule dans les enroulements inducteurs est évaluée séparément lorsqu'on connaît les résistances des enroulements ; on peut aisément évaluer la résistance des tête de bobines dans le cas des enroulements qui seront envisagés par la suite.

1.5. Généralisation à un modèle multicouches

Dans des applications particulières, on rencontre des dispositifs linéaires à induction présentant plusieurs couches entre les deux inducteurs ; les pompes électromagnétiques ayant un noyau ferromagnétique en sont un exemple comprenant trois couches : l'isolant, le métal liquide et le noyau. Dans le cas où l'écoulement du métal liquide dans une pompe électromagnétique est laminaire, la vitesse du fluide est en tout point de la veine dans le sens de Ox ; c'est une fonction de y : $v(y)$. Ceci ne correspond pas à la réalité des choses dans les pompes électromagnétiques où le métal liquide est souvent caractérisé par un profil de vitesse plat [27] à cause des nombres de Reynolds élevés. On présente cependant, une généralisation à un système multicouches dans un but théorique, qui peut servir pour l'étude de dispositifs particuliers présentant plusieurs couches de caractéristiques physiques différentes.

1.5.1. Présentation du modèle

Le modèle présente une symétrie par rapport à l'axe Ox ; la figure ci-dessous montre le demi-plan $y > 0$ auquel l'étude est restreinte.

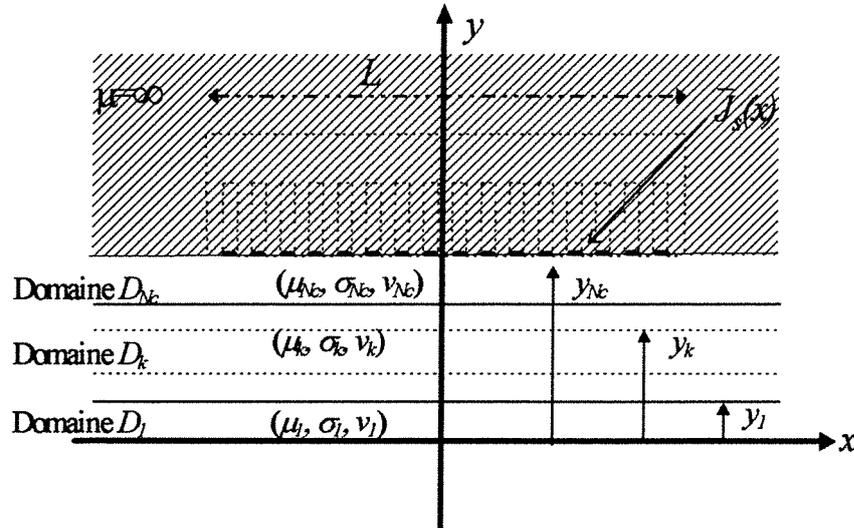


Fig. II.2 : Modèle infini multicouches -schéma-

Dans ce demi plan, on trouve une armature inductrice infiniment longue suivant Ox et présentant N_e encoches équidistantes sur une longueur L appelée longueur bobinée. Comme précédemment, on admet que les sources sont ramenées à une densité superficielle équivalente $\bar{J}_s(x)$ (§ I.1) distribuée sur une armature de perméabilité infinie. La moitié supérieure de l'entrefer comprend N_c couches homogènes suivant la direction Ox , représentées par N_c domaines notés D_i . Chaque domaine D_i est délimité par les deux droites $y = y_{i-1}$ et $y = y_i$; il est caractérisé par une conductivité électrique σ_i , une perméabilité relative μ_i et une vitesse v_i . L'homogénéité suivant la direction du mouvement de l'ensemble permet le traitement par la transformée de Fourier dans le référentiel lié aux inducteurs. On traite ici, le cas général où chaque couche se déplace dans la direction Ox indépendamment des couches voisines.

1.5.2. Equations générales

Dans un domaine D_i , la transformée de Fourier de la représentation complexe du potentiel vecteur est notée : $\hat{A}_i(k, y_i)$; elle vérifie l'équation :

$$\frac{\partial^2 \hat{A}_i(k,y)}{\partial y^2} = \varphi_i^2(k) \hat{A}_i(k,y)$$

où : (II.25)

$$\varphi_i^2(k) = 4\pi^2 k^2 + j\omega\mu_0\mu_i\sigma_i \left(I + \frac{kv_i}{f} \right)$$

Les conditions aux limites sont :

$$\frac{\partial \hat{A}_i}{\partial y}(k,0) = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad (II.26)$$

$$\frac{1}{\mu_{Nc}} \frac{\partial \hat{A}_{Nc}}{\partial y}(k,y_{Nc}) = \hat{J}_s(k) \quad \text{pour } y = y_{Nc} \quad (II.27)$$

I.5.3. Résolution

Soit $\bar{a}_i(k)$ la solution sur la frontière ($y = y_i$) supérieure du domaine D_i . La continuité du potentiel vecteur au passage d'un domaine D_i à un domaine D_{i+1} permet d'exprimer celui-ci en fonction des solutions aux deux frontières du domaine. Dans un domaine D_i , on écrit alors la solution sous la forme :

$$\hat{A}_i(k,y) = \frac{\bar{a}_i(k) \sinh[(y - y_i)\varphi_i(k)] - \bar{a}_{i-1}(k) \sinh[(y - y_{i-1})\varphi_i(k)]}{\sinh[(y_i - y_{i-1})\varphi_i(k)]} \quad (II.28)$$

La dérivée par rapport à la variable y de la TF du potentiel vecteur s'écrit alors pour un domaine D_i :

$$\frac{\partial \hat{A}_i(k,y)}{\partial y_i} = \frac{\varphi_i(k) \left\{ \bar{a}_i(k) \cosh[(y - y_{i-1})\varphi_i(k)] - \bar{a}_{i-1}(k) \cosh[(y - y_i)\varphi_i(k)] \right\}}{\sinh[(y_i - y_{i-1})\varphi_i(k)]} \quad (II.29)$$

La condition de continuité de la dérivée normale de $\hat{A}(k,y)$ en traversant la frontière $y = y_i$ s'exprime par l'équation :

$$\frac{1}{\mu_i} \frac{\partial \hat{A}_i(k,y_i)}{\partial y_i} = \frac{1}{\mu_{i+1}} \frac{\partial \hat{A}_{i+1}(k,y_i)}{\partial y} \quad i = 1 \dots Nc - 1 \quad (II.30)$$

Les deux frontières $y = 0$ et $y = y_{Nc}$ ne sont pas concernées par cette équation ; les conditions de passage y sont décrites par les deux relations (II.26) et (II.27). Dans le domaine D_i , la condition de symétrie, représentée par l'équation (II.26), implique que la solution ne contient que la fonction hyperbolique paire ; la solution s'écrit alors

$$\hat{A}_i(k,y) = \frac{\bar{a}_i(k) \cosh[\varphi_i(k)y]}{\cosh[\varphi_i(k)y_i]} \tag{II.31}$$

L'exploitation des $Nc-1$ équations de passage ainsi que l'équation équivalente pour la frontière $y = y_{Nc}$ (II.27) conduit à un système de Nc équations à Nc inconnues qui sont les fonctions $\bar{a}_i(k)$. Ce système se présente sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & 0 & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_1(k) \\ \vdots \\ \bar{a}_{Nc}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hat{J}_s(k) \end{bmatrix} \tag{II.32}$$

C'est un système à matrice bande (de largeur 3) ; en effet, chaque équation représente une condition de passage sur l'interface y_i séparant les deux domaines D_i et D_{i+1} où les solutions sont des formes linéaires des fonctions $\bar{a}_i(k)$, $\bar{a}_{i-1}(k)$ et $\bar{a}_i(k)$, $\bar{a}_{i+1}(k)$ respectivement. Une méthode numérique quelconque permet de résoudre ce système ; de plus, si la taille n'est pas grande, une résolution analytique est possible. L'examen de ce système montre que les fonctions $\bar{a}_i(k)$ sont toutes liées linéairement à la transformée de Fourier $\hat{J}_s(k)$ de la densité de courant source. Ceci permet d'exprimer le potentiel vecteur sur chaque interface en fonction de cette densité.

$$\hat{A}(k, y_i) = \mu_0 \mathcal{F}_i(k) \hat{J}_s(k) \tag{II.33}$$

$\mathcal{Z}_i(k)$ est une fonction relativement simple à expliciter lorsque le système n'est pas très grand. Dans le cas contraire, une résolution numérique du système (II.32) où la densité $\hat{J}_s(k)$ vaut 1 au second membre, permet de retrouver numériquement cette fonction. L'injection de l'équation (II.7) donnant l'expression de la TF de la densité de courant, permet d'explicitier la relation entre le potentiel vecteur et les courants totaux dans les encoches. Une analyse analogue à celle présentée en § I.4.1 et § I.4.2 permet alors d'évaluer les différentes performances d'un tel modèle comme formes hermitiennes des courants d'alimentation.

I.6. Remarques générales sur les fonctions $\mathcal{Z}_i(k)$

La relation entre le champ et le courant qui lui a donné naissance s'exprime, dans le cas du modèle exposé, à travers une fonction de transfert notée $\mathcal{Z}(k)$. Celle-ci, dont la valeur absolue décroît lorsque $|k|$ croît et s'annule à l'infini, permet de tronquer l'espace où sont définies les TF de toutes les grandeurs électromagnétiques utilisées.

D'un point de vue purement numérique, le calcul des performances précédemment exposé nécessite une intégration numérique de différentes expressions contenant toutes la fonction de transfert $\mathcal{Z}(k)$; la troncature est justifiée par l'allure de cette fonction.

La figure (II.3) montre l'évolution des parties réelle et imaginaire de cette fonction pour quelques valeurs du paramètre $v_r = \frac{v}{Lf}$, appelé vitesse relative. Lf serait en quelque sorte la vitesse de synchronisme d'un moteur périodique de période L . La partie imaginaire de $\mathcal{Z}(k)$ intervient dans le calcul de la puissance active convertie; elle change de signe pour $k = \frac{1}{v_r}$; ce qui correspond à un changement du sens de circulation de la puissance active (moteur-générateur) pour une valeur de k donnée. Par contre, la partie réelle intervenant dans le calcul de la puissance réactive, est toujours positive ; les convertisseurs à induction absorbent toujours de la puissance réactive.

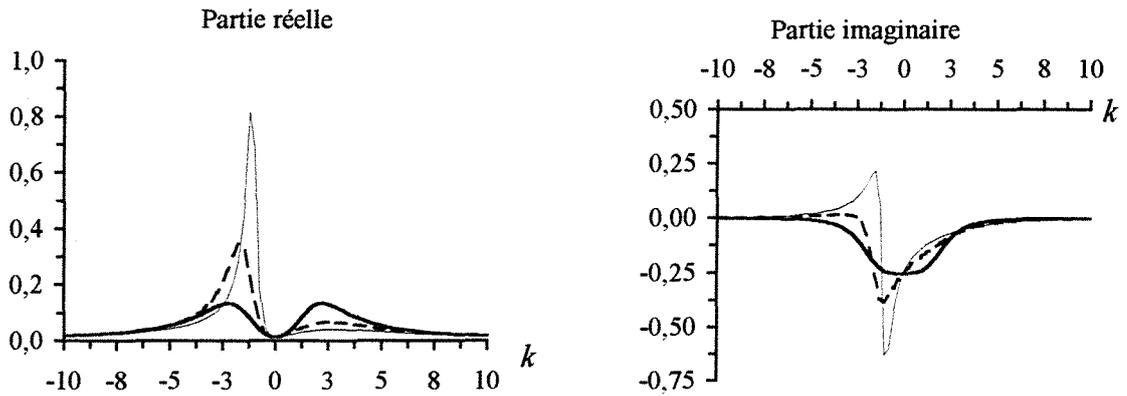


Fig. II.3 : Graphes de la fonction $g(k)$ pour différentes valeurs de ν_r .

——— $\nu_r=0$
 - - - - $\nu_r=0.5$
 — — — $\nu_r=1$

Conclusion I

Le modèle infini tel qu'il est développé dans ce paragraphe, présente l'intérêt d'être rapide à mettre en œuvre. Il suppose des armatures inductrices d'extension infinie et de perméabilité infinie, mais il garde l'aspect apériodique des sources. La technique de la transformation de Fourier est commode dans ce type de configuration et le calcul des performances peut se faire dans l'espace des TF. Par ailleurs, nous avons montré que la connaissance de la solution sur la surface intérieure des inducteurs suffit pour déterminer les performances du modèle.

La généralisation à un système multicouches sous les mêmes hypothèses peut être aisément effectuée en prenant la précaution de bien expliciter les conditions aux limites de chaque couche.

Nous vérifierons dans le chapitre III que ce modèle conduit à des précisions acceptables en première analyse.

II. Modèle fini

Dans ce modèle, on considère deux armatures inductrices finies de longueur L , présentant N_e encoches chacune, réalisées dans un matériau ferromagnétique de perméabilité relative μ_c . L'espace entre les deux armatures, ou « entrefer magnétique », est d'épaisseur $2b$; il contient un induit homogène d'épaisseur $2a$, présentant une conductivité électrique σ et une perméabilité relative μ_r . Cet induit présente une extension infinie dans la direction Ox suivant laquelle il se déplace à la vitesse v . L'espace entre l'induit et les armatures est appelé « entrefer mécanique ». La symétrie de ce modèle par rapport au plan médian de l'induit permet le traitement du problème dans le demi plan $y > 0$; on aboutit à la représentation schématique suivante :

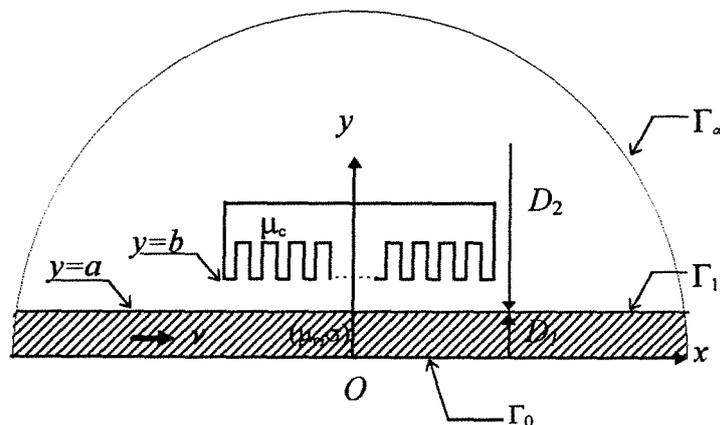


Fig. II.4 : Modèle fini -schéma-.

Etant donné que nous ne traitons que le cas où toutes les sources sont à variation sinusoïdale dans le temps, la représentation complexe est introduite dans la suite de ce chapitre. Les encoches sont alimentées par une source q -phasée délivrant les courants \bar{I}_m , $m = 1..q$, liés aux courants totaux d'encoches \bar{J}_k par l'intermédiaire de la matrice de connexion (cf. *Chapitre I § II.1.2*)

Ce modèle est subdivisé en deux domaines :

Domaine D_1 :

C'est la moitié supérieure de l'induit ; il est limité par sa frontière Γ_1 avec l'entrefer. La frontière Γ_0 représente la trace du plan de symétrie sur le plan de la figure. Les grandeurs électromagnétiques dans ce domaine sont munies de l'indice 1.

Domaine D_2 :

Il comprend l'inducteur supérieur et l'espace sans mouvement qui l'entoure ; il s'étend théoriquement à l'infini. La nécessité du calcul numérique nous amène à le fermer par une frontière Γ_∞ suffisamment éloignée (cf. *Chapitre I* § II.1). Les grandeurs électromagnétiques sont munies de l'indice 2 à l'intérieur de ce domaine, qui admet la frontière Γ_1 avec le domaine D_1 .

II.1. Position du problème

On sait que le problème peut être traité dans un référentiel lié aux inducteurs. La représentation complexe du potentiel vecteur vérifie alors les équations suivantes :

$$\operatorname{div} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \bar{A}_1 - j\omega\mu\sigma\bar{A}_1 - \mu\sigma\nu \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } D_1 \quad (\text{II.34})$$

$$\operatorname{div} \frac{1}{\mu} \operatorname{grad} \bar{A}_2 + \bar{J}_s = 0 \quad \text{dans } D_2 \quad (\text{II.35})$$

où \bar{J}_s représente la densité de courant dans D_2 ; elle résulte des courants de phases.

$$\bar{J}_s = \sum_{m=1}^q \bar{I}_m \mathcal{S}_m(x,y) \quad (\text{II.36})$$

où $\mathcal{S}_m(x,y)$ est la fonction « support » du courant de phase \bar{I}_m (cf. *Chapitre I* § II.1.2).

A ces deux équations s'ajoutent les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{A}_1(x,a) &= \bar{A}_2(x,a) \\ \frac{1}{\mu_r} \frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y}(x,a) &= \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y}(x,a) \end{aligned} \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (\text{II.37})$$

$$\frac{\partial \bar{A}_1}{\partial y}(x,0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (\text{II.38})$$

$$\bar{A}_2(x,y) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\infty \quad (\text{II.39})$$

La condition sur la frontière Γ_∞ est justifiée par l'éloignement suffisant de cette frontière de toute source de champ. Cette distance est jugée suffisante à partir du moment où le remplacement de la condition $\bar{A} = 0$ par la condition $\frac{\partial \bar{A}}{\partial n} = 0$ perturbe peu la solution.

II.2. Méthode de calcul

Dans ce qui suit, on s'attache à exprimer la relation de convolution (I. 10) introduite au chapitre I.

II.2.1. Etude par transformation de Fourier dans l'induit

L'induit présente une extension infinie suivant la direction Ox ; l'introduction de la transformation de Fourier par rapport à la variable x permet d'écrire l'équation dans l'induit sous la forme (§ I.2) :

$$\frac{\partial^2 \hat{A}_1}{\partial y^2}(k,y) + \varphi^2(k) \hat{A}_1(k,y) = 0 \quad (\text{II.40})$$

où :

$$\varphi^2(k) = 4\pi^2 k^2 + j\omega\mu_0\mu_r\sigma \left[1 + \frac{kv}{f} \right]$$

La condition de symétrie s'exprime par :

$$\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial y}(k,0) = 0 \quad (\text{II.41})$$

Soit $\hat{A}_1(k,a)$ la solution à l'interface Γ_1 ; l'équation (II.40) admet comme solution :

$$\hat{A}_1(k,y) = \frac{\cosh[\varphi(k)y]}{\cosh[\varphi(k)a]} \hat{A}_1(k,a) \quad (\text{II.42})$$

$\frac{\partial \hat{A}}{\partial y}$ est discontinu pour $y = a$. On désigne par $\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial y}(k, a_-)$ la valeur obtenue par passage à la limite par valeurs inférieures ($y < a$) et par $\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial y}(k, a_+)$ la valeur obtenue par passage à la limite par valeurs supérieures ($y > a$). La dérivée normale sur Γ_1 par valeurs inférieures s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial y}(k, a_-) = \varphi(k) \tanh[\varphi(k)a] \hat{A}_1(k, a) \quad (\text{II.43})$$

Nous avons ici une dépendance linéaire entre les transformées de Fourier du potentiel vecteur et sa dérivée normale à la frontière Γ_1 du côté de l'induit. Les conditions de continuité du champ tangentiel et du potentiel vecteur sur cette frontière permettent d'introduire une relation analogue du côté de l'entrefer (c'est à dire dans D_2) ; nous obtenons donc :

$$\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial y}(k, a_+) = \hat{g}(k) \hat{A}_2(k, a) \quad (\text{II.44})$$

avec :

$$\hat{g}(k) = \frac{\varphi(k)}{\mu_r} \tanh[\varphi(k)a]$$

Dans le domaine D_2 , les représentations complexes du potentiel vecteur et de sa dérivée normale sur Γ_1 sont donc liées par la relation de convolution :

$$-\frac{\partial \bar{A}_2}{\partial n}(x, a_+) = \int_{\mathbb{R}} g(u) \bar{A}_2(x - u, a) du \quad (\text{II.45})$$

où la fonction g est la transformée de Fourier inverse de \hat{g} ; c'est le noyau $\lambda(u)$ introduit au chapitre I (§ II.1.1) à $\frac{-1}{\mu_0}$ près.

La normale à la frontière Γ_1 de D_2 est dirigée dans le sens sortant donc contraire à Oy , ce qui justifie l'apparition du signe (-) dans l'expression ci-dessus. Le rôle de cette convolution est d'une importance majeure dans la suite de notre travail ; en effet, son exploitation dans le traitement des équations du domaine D_2 sans mouvement permet d'éviter le calcul numérique dans l'induit.

Le problème est ainsi ramené au domaine fixe D_2 avec la condition (II.45) sur le bord Γ_1 ; il reste à trouver une technique pour exploiter cette convolution.

II.2.2. Décomposition dans la base de Hermite

Les fonctions utilisées, représentant des grandeurs énergétiques, appartiennent à l'espace $L^2(\mathcal{R})$. Dans cet espace, il existe des fonctions intéressantes pour notre problème, ce sont les fonctions de Hermite qui ont la propriété d'être leur propre transformée de Fourier et constituent une base orthonormée dans $L^2(\mathcal{R})$:

$$\psi_n(x) \xleftrightarrow{\text{TF}} \hat{\psi}_n(k) = (-j)^n \psi_n(k) \quad (\text{II.46})$$

Le passage d'une fonction à sa transformée de Fourier et le passage réciproque sont facilement effectués par projection sur cette base (cf. *Annexe A*).

Les représentations complexes du potentiel vecteur et sa transformée de Fourier au niveau $y = a$ peuvent être approchées par un développement limité de ces fonctions :

$$\begin{aligned} \bar{A}_2(x, a) &= \sum_{n=0}^N \bar{\alpha}_n \psi_n(x) \\ \hat{A}_2(k, a) &= \sum_{n=0}^N \bar{\alpha}_n \hat{\psi}_n(k) \end{aligned} \quad (\text{II.47})$$

La dérivée normale de \bar{A}_2 sur la frontière Γ_1 est aussi une fonction de $L^2(\mathcal{R})$; qui peut être approchée par le développement suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y}(x, a_+) &= \sum_{m=0}^N \bar{\beta}_m \psi_m(x) \\ \frac{\partial \hat{A}_2}{\partial y}(k, a_+) &= \sum_{m=0}^N \bar{\beta}_m \hat{\psi}_m(k) \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

Utilisant (II.44) et (II.47), il vient :

$$\frac{\partial \hat{A}_2}{\partial y}(k, a_+) = \sum_{n=0}^N \bar{\alpha}_n \hat{g}(k) \hat{\psi}_n(k) \quad (\text{II.49})$$

Utilisant l'orthogonalité des $\hat{\psi}_n$ (cf. annexe A), on obtient les coefficients $\bar{\beta}_m$ par :

$$\bar{\beta}_m = \sum_{n=0}^N \bar{\alpha}_n \int_R \hat{g}(k) \hat{\psi}_n(k) \hat{\psi}_m^*(k) dk \quad (\text{II.50})$$

Les deux vecteurs $[X]$ et $[Y]$ sont introduits qui contiennent respectivement, en colonne, les coefficients $\bar{\alpha}_n$ et $\bar{\beta}_n$; l'équation (II.44) (ou (II.45)) devient alors une relation linéaire entre ces deux vecteurs :

$$[Y] = [Z][X]$$

avec :

$$\begin{aligned} {}^t[X] &= \{X_{i+1} = \bar{\alpha}_i, \quad i = 0..N\} \\ {}^t[Y] &= \{Y_{i+1} = \bar{\beta}_i, \quad i = 0..N\} \end{aligned} \quad (\text{II.51})$$

et :

$$Z_{mn} = \int_R \hat{g}(k) \hat{\psi}_n(k) \hat{\psi}_m^*(k) dk$$

La relation de convolution entre les représentations complexes du potentiel vecteur et de sa dérivée normale sur Γ_1 se traduit donc par une relation linéaire entre les coefficients de leurs approximations dans la base de Hermite.

II.2.3. Résolution numérique dans D_2

La solution dans le domaine D_2 dépend linéairement des sources qui sont de deux types :

- 1- les courants de phases.
- 2- la dérivée normale du potentiel vecteur sur la frontière Γ_1 que l'on approxime sous la forme (II.48).

Le problème se présente sous la forme suivante:

$$\text{div} \frac{1}{\mu} \text{grad} \bar{A}_2(x,y) + \sum_{n=1}^q \bar{I}_n \mathcal{S}_n(x,y) = 0 \quad \text{dans } D_1 \quad (\text{II.52})$$

$$\frac{\partial \bar{A}_2}{\partial y}(x,a) = \sum_{m=0}^N \bar{\beta}_m \psi_m(x) \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (\text{II.53})$$

Il est résolu par superposition, de sorte que le potentiel vecteur dans D_2 est obtenu sous la forme :

$$\bar{A}_2(x,y) = \sum_{m=1}^q \bar{I}_m X_m^{(1)}(x,y) + \sum_{i=0}^N \bar{\beta}_i X_i^{(2)}(x,y) \quad (\text{II.54})$$

où $X_m^{(1)}(x,y)$ et $X_i^{(2)}(x,y)$ sont des champs de base déterminés après résolution de $q+N+1$ problèmes élémentaires groupés en deux types :

Type 1 : il comprend q problèmes définis par :

$$\begin{cases} \Delta X_i^{(1)}(x,y) + \mathcal{S}_i(x,y) = 0 & \text{dans } D_2 \\ \frac{\partial X_i^{(1)}}{\partial y}(x,a) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Les q champs $X_i^{(1)}(x,a)$ $i = 1..q$, obtenus sur la frontière Γ_1 , sont projetés dans la base de Hermite :

$$X_i^{(1)}(x,a) = \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}^{(1)} \psi_j(x) \quad (\text{II.55})$$

avec
$$\alpha_{ij}^{(1)} = \int_R X_i^{(1)}(x,a) \psi_j(x) dx$$

Type 2 : il comprend $N+1$ problèmes définis par :

$$\begin{cases} \Delta X_j^{(2)}(x,y) = 0 & \text{dans } D_2 \\ \frac{\partial X_j^{(2)}}{\partial y}(x,a) = \psi_j(x) & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Les $N+1$ champs $X_j^{(2)}(x,a)$ $j = 0..N$, obtenus sur la frontière Γ_1 , sont également projetés dans la base de Hermite:

$$X_i^{(2)}(x, a) = \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}^{(2)} \psi_j(x) \quad (\text{II.56})$$

avec
$$\alpha_{ij}^{(2)} = \int_R X_i^{(2)}(x, a) \psi_j(x) dx$$

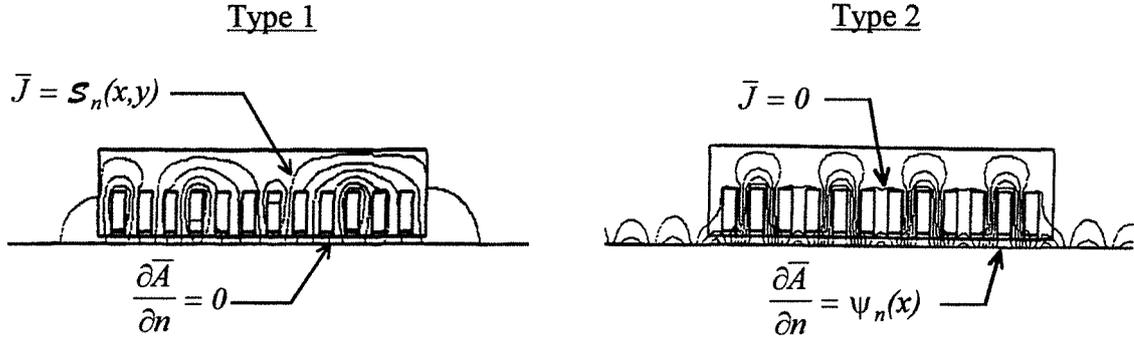


Fig. II.5 : Les deux types de résolutions

Les champs $X_i^{(1)}(x, a)$ et $X_i^{(2)}(x, a)$ obtenus par la méthode des éléments finis varient linéairement sur le bord de chaque élément contigu à Γ_1 . Pour le calcul des coefficients $\alpha_{ij}^{(1)}$ $\alpha_{ij}^{(2)}$, on admet pour les fonctions ψ_n une approximation linéaire dans les mêmes conditions. Le détail de cette procédure est donné dans l'annexe B.

Pour $y = a$, l'équation (II.54) devient :

$$\bar{A}_2(x, a) = \sum_{m=1}^q \bar{I}_m \sum_{n=0}^N \alpha_{mn}^{(1)} \psi_n(x) + \sum_{i=0}^N \bar{\beta}_i \sum_{j=0}^N \alpha_{ij}^{(2)} \psi_j(x) \quad (\text{II.57})$$

qui, projetée sur la base des ψ_n , conduit à la relation matricielle suivante :

$$[X] = [A][I] + [B][Y] \quad (\text{II.58})$$

où :
$$[A] = \{A_{m+1, n} = \alpha_{mn}^{(1)}, n = 1..q, m = 0..N\}$$

$$[B] = \{B_{i+1, j+1} = \alpha_{ji}^{(2)}, i = 0..N, j = 0..N\}$$

$$[I] = \{\bar{I}_i, i = 1..q\}$$

Les éléments des matrices $[A]$ et $[B]$ sont déterminés en colonne ; chaque colonne contient les coefficients de l'approximation du champ sur Γ_1 pour un des $q+N+1$ problèmes élémentaires. Les q colonnes relatives aux q problèmes du type 1 constituent la matrice $[A]$ alors que les $N+1$ colonnes relatives aux problèmes du type 2 constituent la matrice $[B]$. La figure ci-dessous schématise le remplissage de ces matrices.

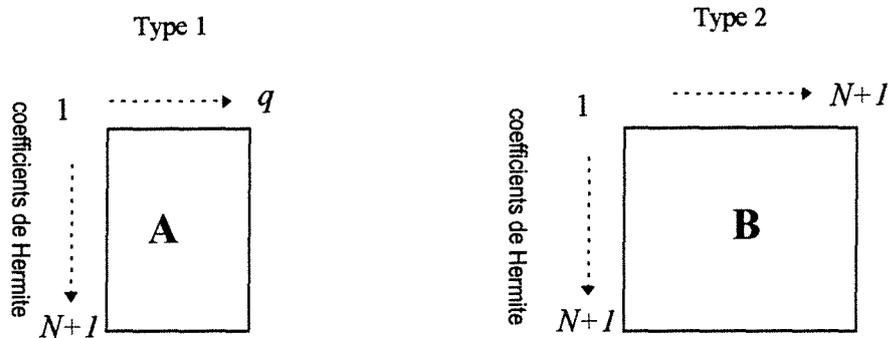


Fig. II.6 : Stockage des champs de base.

La résolution du système des deux équations (II.51) et (II.58) donne :

$$[X] = \{U_q - [B][Z]\}^{-1} [A][I] \tag{II.59}$$

où U_q est la matrice unité de rang q .

Dans l'équation (II.59), le terme $[A][I]$ correspond au champ créé par les courants d'alimentation alors que le terme $[B][Z]^{-1}[A][I]$ correspond au champ dû à la réaction de l'induit. Le champ sur Γ_1 est alors exprimé uniquement en fonction des courants d'alimentation ; le problème est donc entièrement résolu.

Après résolution, le potentiel vecteur est connu partout dans D_2 par l'équation (II.54). Le stockage des champs de base $X_m^{(1)}(x,y)$ et $X_i^{(2)}(x,y)$ n'est pas nécessaire pour retrouver la solution finale via l'équation (II.54). Du point de vue pratique, il est intéressant d'utiliser les coefficients $\bar{\beta}_n$ et de résoudre à nouveau le problème initial (l'équation (II.52) avec la condition (II.53)) ; un temps de calcul supplémentaire est nécessaire mais cette façon de procéder économise un espace mémoire important.

L'exploitation de la convolution dans D_1 entre \bar{A} et $\frac{\partial \bar{A}}{\partial n}$ à l'interface de l'induit est ainsi effectuée par projection dans la base Hermite, en utilisant la propriété fondamentale des

fonctions de Hermite vis-à-vis de la transformation de Fourier. On a ainsi contourné les difficultés numériques introduites par le mouvement en évitant le calcul par la méthode des éléments finis dans l'induit.

II.3. Calcul des performances

Nous nous intéressons au calcul des puissances (fournies ou absorbées) en régime permanent dans un but d'optimisation qui sera développé dans le chapitre III.

II.3.1. Puissance électrique

La démarche consiste à calculer les flux des q phases et d'en déduire la puissance électrique fournie par les sources, diminuée des pertes joule dans les inducteurs par le produit hermitien des f.é.m par les courants. Pour ce faire, nous adoptons une démarche qui utilise les deux types de résolution précédemment cités en appliquant les mêmes superpositions.

On attribue tout d'abord le flux $\bar{\phi}_i$ à l'encoche i (domaine \mathcal{D}_i , cf. Chapitre I § II.1.1), par la moyenne du potentiel vecteur sur sa surface S_i :

$$\bar{\phi}_i = \frac{L_u}{S_i} \iint_{\mathcal{D}_i} \bar{A}_2 \, dx dy \quad (\text{II.60})$$

La matrice de connexion permet le passage aux flux par phase.

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \vdots \\ \bar{\phi}_q \end{bmatrix} = [C] \begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \vdots \\ \bar{\phi}_{Ne} \end{bmatrix} \quad (\text{II.61})$$

Soit $\lambda_{mn}^{(1)}$ le flux de la phase n dans le m -ième problème du type 1. Soit encore $\lambda_{mn}^{(2)}$ le flux de la phase n dans le m -ième problème du type 2. Le stockage des flux de base suit une procédure analogue à celle utilisée pour les champs de base ; la figure (II.7) montre le remplissage de ces matrices.

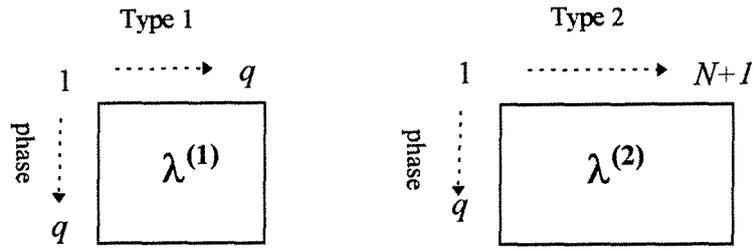


Fig. II.7 : Stockage des flux de base.

Le flux total d'une phase i est alors :

$$\bar{\Phi}_i = \sum_{m=1}^q \bar{I}_m \lambda_{i,m}^{(1)} + \sum_{m=0}^N \bar{\beta}_m \lambda_{i,m+1}^{(2)} \quad (\text{II.62})$$

Notons ici, le flux propre de l'inducteur caractérisé par la première somme et la réaction d'induit caractérisée par le second terme. Notons, de plus, que la matrice $[\lambda^{(1)}]$ est symétrique. On regroupe les flux des q phases dans le vecteur $[\Phi]$, l'équation ci-dessus devient alors :

$$[\Phi] = [\lambda^{(1)}] [\bar{I}] + [\lambda^{(2)}] [Y] \quad (\text{II.63})$$

où

$$[\Phi] = \{\bar{\Phi}_i, i = 1..q\}$$

La substitution de l'équation (II.66) donnant une relation entre $[Y]$ et $[I]$, permet d'obtenir les flux totaux sous forme linéaire des courants \bar{I}_m :

$$[\Phi] = [\lambda] [I] \quad (\text{II.64})$$

où

$$[\lambda] = [\lambda^{(1)}] + [\lambda^{(2)}] [Z] (U_q - [B] [Z])^{-1} [A]$$

La matrice $[\lambda]$ peut être appelée « matrice opérationnelle » ; la puissance transmise par un inducteur écrit alors :

$$S = \pi_a + j \pi_r = j\omega [I]^* [\lambda] [I] \quad (\text{II.65})$$

Nous retrouvons une fois de plus que les puissances active et réactive sont des formes hermitiennes des représentations complexes des courants d'alimentation.

Validation

Afin de pouvoir vérifier la validité du calcul de la puissance électrique en utilisant une formulation du type « circuit », nous nous proposons de calculer la puissance active par une formulation intégrale. En effet, le domaine D_2 ne présentant pas de courants induits, toute la puissance active convertible est transmise à l'induit D_1 à travers la frontière Γ_1 .

$$\pi_a = \Re \sum_{i=1}^{N_e} \bar{E}_i \bar{J}_i^* = \Re \int_{\Gamma_1} \bar{E} \wedge \bar{H}^* dl \quad (\text{II.66})$$

Le second membre de (II.66) est exploité ci-haut ; il constitue une formulation de type « circuit », et exprime le produit scalaire du champ électrique avec la densité de courant. Le troisième membre représente le flux du vecteur de Poynting à travers la surface de l'induit ; il constitue une formulation du type « champ » que nous utilisons comme vérification du calcul de la puissance électrique.

Utilisant la représentation complexe du potentiel vecteur, le troisième membre de l'équation (II.66) devient :

$$\pi_a = \frac{2L_u}{\mu_0} \Re \int_R j\omega \bar{A}_2(x,a) \frac{\partial \bar{A}_2^*}{\partial y}(x,a) dx \quad (\text{II.67})$$

L'écriture de cette équation dans l'espace de Fourier, et la prise en compte de la relation de convolution (II.44) nous amènent à écrire :

$$\pi_a = \frac{-2\omega L_u}{\mu_0} \int_R \Im [g(k)] |\hat{A}_2(k,a)|^2 dk \quad (\text{II.68})$$

D'après l'équation (II.47), nous avons :

$$|\hat{A}_2(k,a)|^2 = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N \bar{\alpha}_n \bar{\alpha}_m^* \hat{\psi}_n(k) \hat{\psi}_m^*(k) \quad (\text{II.69})$$

La puissance active transmise à l'induit est alors exprimée comme une forme hermitienne du vecteur $[X]$ contenant les coefficients $\bar{\alpha}_n$:

$$\pi_a = [X]^* [\mathcal{E}] [X]$$

avec :

(II.70)

$$\mathcal{E}_{mn} = \frac{-2\omega L_u}{\mu_0} \int_R \Im [\hat{g}(k)] \hat{\psi}_n(k) \hat{\psi}_n^*(k) dk$$

La formulation du type « champ » permet de vérifier le calcul de la puissance active transmise, et par là, on peut affirmer que la puissance réactive est calculée d'une manière correcte. On peut aussi utiliser une formulation intégrale analogue pour évaluer la puissance réactive [23] [44] mais nous considérons que la vérification du calcul de π_a suffit pour affirmer que le calcul de π_r est correct.

II.3.2. Force et puissance mécaniques

Dans le cas classique, il est possible de calculer la force qui s'exerce sur l'induit par un calcul direct de la force de Laplace dans le volume considéré. Le calcul par éléments finis se fait dans le domaine D_2 qui ne contient pas l'induit ; l'introduction du tenseur des contraintes de Maxwell sur la frontière Γ_1 , permet d'évaluer la valeur de la force totale. Sa valeur moyenne dans le temps s'écrit :

$$F_x = -\frac{2L_u}{\mu_0} \int_R \Re \left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial y}(x, a_+) \frac{\partial \bar{A}^*}{\partial x}(x, a) \right] dx \quad (\text{II.71})$$

La transcription de cette équation aux grandeurs de Fourier garde la même forme grâce à l'égalité de Parseval. On sait que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{A}}{\partial x}(x, a) &\xleftrightarrow{TF} 2j\pi k \hat{A}(k, a) \\ \frac{\partial \bar{A}}{\partial y}(x, a_+) &\xleftrightarrow{TF} \hat{g}(k) \hat{A}(k, a) \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

Ce qui nous amène à exprimer la force moyenne sous la forme :

$$F_x = -\frac{4\pi L_u}{\mu_0} \int_R k \Im [\hat{g}(k)] |\hat{A}(k, \alpha)|^2 dk \quad (\text{II.73})$$

L'utilisation de l'équation (II.57) permet d'exprimer la force moyenne exercée sur l'induit comme une forme hermitienne du vecteur $[X]$:

$$F_x = {}^t[X]^* [\mathbf{F}] [X] \quad (\text{II.74})$$

où

$$\mathbf{F}_{nm} = -\frac{4\pi L_u}{\mu_0} \int_R k \Im [\hat{g}(k)] \psi_n(k) \psi_m^*(k) dk$$

La puissance mécanique développée par le modèle est donc une forme hermitienne du même vecteur et des courants d'alimentation.

II.4. Modélisation par un induit infiniment mince équivalent

Dans le présent chapitre, nous avons introduit une convolution entre le potentiel vecteur et sa dérivée normale à la surface de l'induit afin d'éviter le calcul numérique (par la méthode des éléments finis) dans l'induit en mouvement. Cette idée rejoint la technique utilisée par B. Laporte [23] qui consiste à imaginer un induit infiniment mince équivalent placé au niveau $y=0$ qui permet d'assurer le saut du champ tangentiel (Fig. II.8).

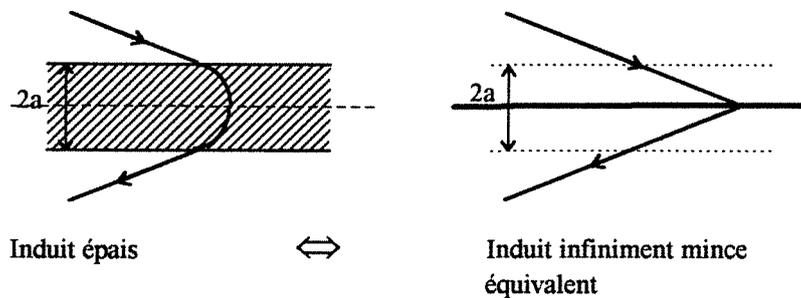


Fig. II.8 : Principe de l'équivalence entre un induit épais et un induit infiniment mince.

Nous allons essayer de faire coïncider les deux approches par le raisonnement suivant :
La relation de convolution introduite précédemment est (rappelons le) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{A}_2}{\partial y}(k, a_+) &= \hat{g}(k) \hat{A}_2(k, a) \\ \text{avec} \quad \hat{g}(k) &= \frac{\varphi(k)}{\mu_r} \tanh[\varphi(k)a] \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

Lorsque la demi épaisseur a de l'induit tend vers zéro la fonction $\hat{g}(k)$ tend vers $\frac{\varphi^2(k) a}{\mu_r}$.

Soit donc :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \hat{g}(k) = \frac{a\varphi^2(k)}{\mu_r} = \frac{4\pi^2 k^2 a}{\mu_r} + j\omega\mu_0\sigma a (1 + kv_r) \quad (\text{II.76})$$

Ce passage à la limite doit respecter la condition que $\sigma' = a\sigma$ reste fini alors que $a \rightarrow 0$ et $\sigma \rightarrow \infty$ [23] de façon à conserver les pertes Joule dans l'induit. D'un autre coté, le domaine des TF est tronqué car les fonctions $\mathfrak{Z}(k)$ s'annulent lorsque $|k|$ dépasse une certaine limite (§ I.6.). Dans ces conditions, le terme $\frac{4\pi^2 k^2 a}{\mu_r}$ reste toujours négligeable devant le terme $j\omega\mu_0 a$ pour toute valeur de k considérée. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial y}(k, 0) \approx j\omega\mu_0\sigma a (1 + kv_r) \hat{A}(k, 0) \quad (\text{II.77})$$

Le retour aux fonctions originales donne :

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial y}(x, 0) = j\omega\mu_0\sigma a \bar{A}(x, 0) + \mu_0\sigma a v \frac{\partial \bar{A}}{\partial x}(x, 0) \quad (\text{II.78})$$

Le retour aux grandeurs instantanées donne donc :

$$\frac{\partial A}{\partial y}(x, 0, t) = \mu_0\sigma a \frac{\partial A}{\partial t}(x, 0, t) + \mu_0\sigma a v \frac{\partial A}{\partial x}(x, 0, t) \quad (\text{II.79})$$

Cette équation coïncide avec l'expression qui traduit la présence d'un induit infiniment mince équivalent placé au niveau $y=0$, utilisée dans la thèse de B. Laporte. On peut d'ailleurs préciser quelle est la convolution introduite par cette méthode au niveau $y=a$, puis la comparer à celle que nous avons introduite. Pour cela, on exprime la relation qui lie \hat{A} et $\frac{\partial \hat{A}}{\partial y}$ au niveau

$y=a$ dans le cas du modèle ayant un induit infiniment mince équivalent (équation (II.79) au niveau $y=0$).

$$\frac{\partial \hat{A}}{\partial y}(k,a) = \hat{g}_{bis}(k) \hat{A}(k,a)$$

avec

$$\hat{g}_{bis}(k) = 2\pi k \frac{\sinh[2\pi ka] + j\omega\mu_0\sigma a(1 + kv_r) \cosh[2\pi ka]}{\cosh[2\pi ka] + j\omega\mu_0\sigma a(1 + kv_r) \sinh[2\pi ka]} \quad (\text{II.80})$$

Pour une vitesse relative $v_r=0.2$, on compare l'allure des deux fonctions $\hat{g}_{bis}(k)$ et $\hat{g}(k)$ pour quelques valeurs de l'épaisseur a , tous les autres paramètres restant identiques. En examinant ces courbes, on s'aperçoit que l'approximation par un induit infiniment mince équivalent coïncide effectivement avec le traitement que nous avons développé tout au long de ce chapitre, pour les faibles valeurs de a . Pour qu'il y ait équivalence, le produit ka doit être comparable lorsqu'on passe d'un modèle à un autre.

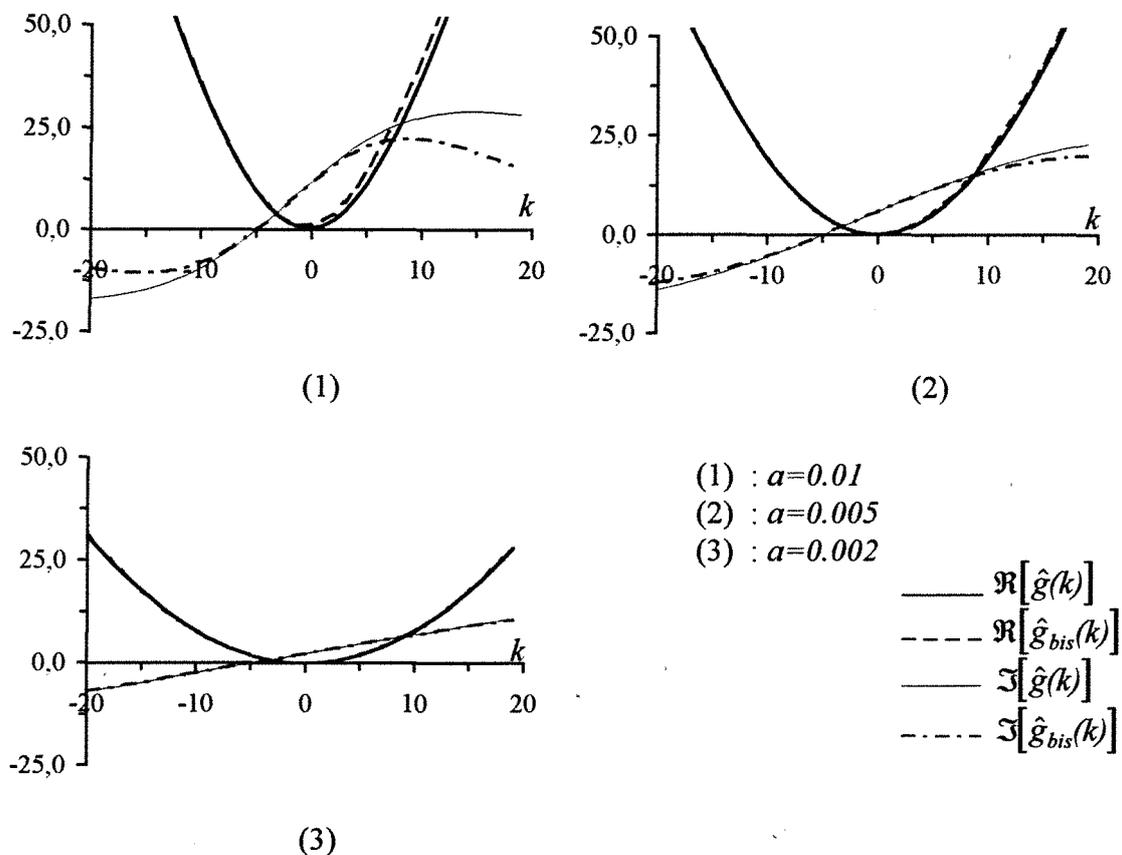


Fig. II.9 : Graphes des parties réelles et imaginaires des deux fonctions $\hat{g}_{bis}(k)$ et $\hat{g}(k)$.

Conclusion II

Le modèle fini repose sur l'idée principale de restreindre l'étude au domaine fixe. Il permet d'éviter les difficultés numériques qui apparaissent lors du traitement par la méthode des éléments finis de l'équation dans l'induit contenant le terme de déplacement $v \frac{\partial \bar{A}}{\partial x}$.

L'invariance des parties mobiles dans la direction du mouvement a permis de mettre en évidence une convolution entre le potentiel vecteur et sa dérivée normale à la surface de l'induit. L'exploitation de cette convolution permet d'effectuer cette restriction de l'étude au domaine fixe par une projection sur la base des fonctions de Hermite.

Le modèle suppose un profil de vitesse plat ; ce qui est le cas des induits solide et l'approximation des induits liquide en mouvement turbulent. L'extension à un profil de vitesse quelconque est possible.

Le modèle fini, tient compte de la géométrie effective des inducteurs en deux dimensions mais il suppose la linéarité des milieux magnétiques. Le modèle utilise la résolution de plusieurs problèmes élémentaires ; il nécessite donc un temps de calcul important. Néanmoins, le stockage des matrices [A] et [B] permet le calcul de plusieurs modes de fonctionnement à la fois ; en particulier, lorsque l'on cherche à optimiser l'alimentation, ce qui est l'objet du chapitre III.

Chapitre III

OPTIMISATION
ET
RESULTATS

Introduction

Ce chapitre est consacré à la recherche de l'alimentation optimale des convertisseurs linéaires en utilisant les modèles décrits dans le chapitre précédent. Ces modèles aboutissent à une écriture des performances comme des formes hermitiennes des représentations complexes des courants d'alimentation et par conséquent, on peut exprimer le rendement ou d'autres critères sous la forme d'un quotient de Rayleigh. Des applications exigent une poussée maximale comme dans le cas des pompes électromagnétiques pour métaux liquides, alors que dans les gros moteurs linéaires destinés à la traction, il est intéressant d'améliorer le rendement puisque les puissances mises en jeu sont importantes. Par ailleurs, dans certaines applications particulières, on tente d'utiliser les convertisseurs linéaires à induction comme des freins électromagnétiques.

Dans ce chapitre, on expose la technique d'optimisation utilisée et quelques résultats obtenus en utilisant les différents modèles établis dans le chapitre II, tout en gardant à l'esprit que chaque mode de fonctionnement et chaque dispositif nécessite une étude particulière.

I. Procédé d'optimisation

I.1. Les critères

A ce stade de l'étude, on se propose d'agir sur l'alimentation à géométrie fixée pour optimiser les trois critères suivants :

- Le rendement $\eta = \frac{\pi_m}{\pi_a + \pi_j}$
- Le rapport de la poussée aux pertes Joule dans l'inducteur $\gamma_m = \frac{F_x}{\pi_j}$
- Le rapport de la force de freinage aux pertes Joule dans l'inducteur $\gamma_f = -\frac{F_x}{\pi_j}$

I.2. Contraintes

L'optimum doit être obtenu en respectant certaines contraintes ; on en rencontre principalement trois types :

I.2.1. Contrainte thermique

La capacité de l'échange thermique du convertisseur avec l'extérieur étant limitée, les pertes Joule dans l'inducteur sont imposées. La contrainte suivante est exigée :

$$\sum_{i=1}^q R_i |\bar{I}_i|^2 = \pi_0 \quad (\text{III.1})$$

où les R_i sont les résistances des phases, π_0 est la valeur limite des pertes Joule dans l'inducteur dépendant du mode de refroidissement.

On considère que l'échauffement de l'induit, fugace, ne limite pas les différentes performances. La valeur limite π_0 est évaluée par un calcul simplifié des échanges thermiques. Soient L et L_u la longueur et la largeur de l'armature inductrice ; on estime que la surface d'échange est proportionnelle au produit $L \times L_u$; on peut écrire :

$$\pi_0 = \hbar \times L \times L_u$$

où \hbar est le coefficient d'échange de la structure (à un coefficient adimensionnel près).

I.2.2. Condition de liaison sur les courants en symétrie cylindrique

Dans un domaine D présentant une symétrie cylindrique (modèle bidimensionnel), la condition $\text{div } \bar{J} = 0$ est exigée ; celle-ci impose que la somme de tous les courants traversant le plan doit toujours être nulle. Ici, le convertisseur présente deux parties galvaniquement séparées (l'induit et l'inducteur), l'induit étant isolé dans l'espace, nous avons :

$$\int_{\text{induit}} \bar{J}(x,y) \, dx dy = 0 \quad (\text{III.2})$$

et par conséquent :

$$\int_{\text{inducteur}} \bar{J}(x,y) \, dx dy = 0 \tag{III.3}$$

Cette situation est celle que l'on retrouve dans toutes les machines conventionnelles ; elle peut être modélisée par une contrainte sur les courants d'alimentation, du type :

$$\sum_{i=1}^{Ne} \bar{J}_i = 0 \tag{III.4}$$

N.B. : On pourrait toutefois, imaginer le cas où la condition (III.4) n'est pas vérifiée alors que la condition $\text{div } \bar{J} = 0$ l'est sur tout le domaine D . Nous nous trouverions face à une situation

où l'on aurait : $\int_D \bar{J}(x,y) \, dx dy = 0$ avec $\sum_{i=1}^{Ne} \bar{J}_i \neq 0$. Cette situation correspondrait à un

modèle antipériodique présentant une infinité d'inducteurs distants de \mathcal{L} . Les répartitions des courants dans deux inducteurs voisins sont antipériodiques ainsi que le potentiel vecteur :

$$\begin{aligned} \bar{J}(x + \mathcal{L}, y) &= -\bar{J}(x, y) \\ \bar{A}(x + \mathcal{L}, y) &= -\bar{A}(x, y) \end{aligned}$$

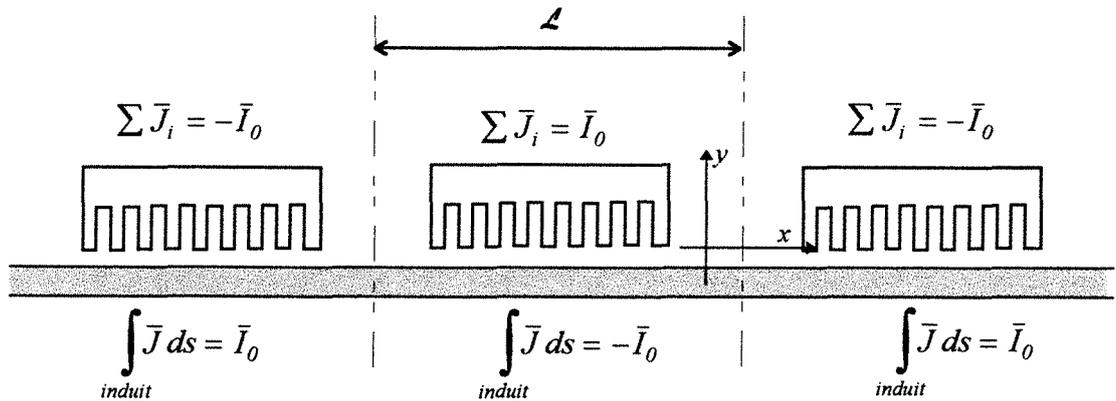


Fig. III.1 : Modèle antipériodique

Mais, dans ces conditions, l'inducteur de chaque moteur n'est plus isolé effectivement dans l'espace, les courants se referment à l'infini sur l'inducteur voisin ; le même problème se pose pour la fermeture des courants d'induit. Dans ce cas, la symétrie cylindrique disparaît et le problème ne peut plus être traité en deux dimensions.

1.2.3. Contrainte de bobinage

Dans le cas des enroulements q -phasés, on introduit la matrice de connexion $[C]$ pour exprimer la dépendance des courants d'encoches \bar{J}_k par rapport aux courants de phases \bar{I}_m .

$$\bar{J}_k = \sum_{m=1}^q C_{km} \bar{I}_m \quad (\text{III.5})$$

La taille du problème est ainsi réduite de N_e à q .

Notons que la condition de liaison (III.4) est vérifiée si et seulement si : $\sum_{k=1}^{N_e} C_{km} = 0 \quad \forall m$.

Dans le cas général, les petits moteurs électriques sont munis d'enroulements où l'on rencontre un seul faisceau par encoche. Dès lors que la puissance devient plus importante, on utilise des enroulements à double couche, comprenant des bobines identiques. Soit n_d , le nombre de dents entourées par une bobine ; il est appelé ouverture de la bobine ; on dispose de $q = N_e - n_d$ bobines pour réaliser le bobinage désiré. La figure ci-dessous montre le cas d'un inducteur à $N_e = 12$ encoches muni de $q = 9$ bobines ayant une ouverture $n_d = 3$.

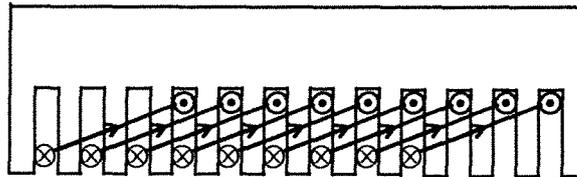


Fig. III.2 : Enroulement à double couches sur un moteur linéaire

La résistance d'une bobine est évaluée en fonction de n_d ; on peut considérer que la résistance des têtes de bobines est proportionnelle à l'ouverture. La dissipation par effet Joule dans les q bobines est aussi exprimée comme forme hermitienne des courants de phases.

$$\pi_j = \sum_{m=1}^q \bar{I}_m^* R_m \bar{I}_m \quad (\text{III.6})$$

où R_m est la résistance de la phase m qui est un multiple « entier » de la résistance d'une bobine.

1.3. Technique d'optimisation

Les puissances mises en jeu dans la conversion électromagnétique linéaire sont exprimées sous forme hermitienne des courants totaux dans les encoches ; on obtient des expressions de la forme :

$$P = \Re \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \mathcal{P}_{\alpha\beta} \bar{I}_{\alpha} \bar{I}_{\beta}^* \quad (\text{III.7})$$

Ce produit peut être exprimé dans le corps des réels :

$$P = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N a_{\alpha\beta} [X_{\alpha} X_{\beta} + Y_{\alpha} Y_{\beta}] - b_{\alpha\beta} [X_{\beta} Y_{\alpha} - Y_{\beta} X_{\alpha}] \quad (\text{III.8})$$

où :

$$\bar{I}_{\alpha} = X_{\alpha} + j Y_{\alpha}$$

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} + j b_{\alpha\beta}$$

On introduit les grandeurs matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} X &= \{X_{\alpha}, \quad \alpha = 1 \dots N\} \\ Y &= \{Y_{\alpha}, \quad \alpha = 1 \dots N\} \\ A &= \{a_{\alpha\beta}, \quad \alpha = 1 \dots N ; \beta = 1 \dots N\} \\ B &= \{b_{\alpha\beta}, \quad \alpha = 1 \dots N ; \beta = 1 \dots N\} \end{aligned} \quad (\text{III.9})$$

Avec ces définitions, P est une forme quadratique :

$$P = {}^t \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

On a ainsi effectué une « réalification » d'un problème « complexe ».

On appelle \mathcal{X} le vecteur réel, contenant en colonne les parties réelles X puis les parties imaginaires Y des courants d'alimentation ; les puissances mécanique, active et réactive sont exprimées comme formes quadratiques de ce vecteur. On aboutit à une écriture de la forme :

$$\begin{aligned}\pi_m &= \mathcal{X}' \mathcal{A} \mathcal{X} \\ \pi_a &= \mathcal{X}' \mathcal{B} \mathcal{X} \\ \pi_r &= \mathcal{X}' \mathcal{C} \mathcal{X}\end{aligned}\tag{III.11}$$

où \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} sont des matrices réelles et symétriques.

Les modèles établis dans le chapitre II, aboutissent à une écriture hermitienne des performances en fonction des courants d'alimentation. La décomposition que l'on vient de présenter s'applique donc à tous les modèles envisagés. Les pertes Joule dans les enroulements inducteurs sont aussi exprimées comme une forme quadratique du même vecteur \mathcal{X} :

$$\pi_j = \mathcal{X}' \mathcal{R} \mathcal{X}\tag{III.12}$$

La matrice \mathcal{R} est diagonale ; elle est construite à partir des résistances des phases.

Les trois critères posés en (§ I.1) s'expriment alors comme un rapport de deux formes quadratiques. On aboutit à :

$$\eta = \frac{\mathcal{X}' \mathcal{A} \mathcal{X}}{\mathcal{X}' \mathcal{B} \mathcal{X}}\tag{III.13}$$

$$\gamma_m = \frac{1 \mathcal{X}' \mathcal{A} \mathcal{X}}{v \mathcal{X}' \mathcal{R} \mathcal{X}}\tag{III.14}$$

$$\gamma_f = -\frac{1 \mathcal{X}' \mathcal{A} \mathcal{X}}{v \mathcal{X}' \mathcal{R} \mathcal{X}}\tag{III.15}$$

Dans les trois cas, on est amené à optimiser un rapport de deux formes quadratiques que l'on écrit d'une manière générale sous la forme :

$$\kappa = \frac{\mathbf{x}' S_1 \mathbf{x}}{\mathbf{x}' S_2 \mathbf{x}} \quad (\text{III.16})$$

où S_1 et S_2 sont des matrices réelles symétriques. L'optimisation consiste à rechercher les extrema de la fonction κ par :

$$\mathbf{grad} \kappa = 0$$

ou
$$(\mathbf{x}' S_2 \mathbf{x}) S_1 \mathbf{x} - (\mathbf{x}' S_1 \mathbf{x}) S_2 \mathbf{x} = 0$$

$\mathbf{x}' S_1 \mathbf{x}$ et $\mathbf{x}' S_2 \mathbf{x}$ étant des scalaires, la multiplication par S_2^{-1} donne :

$$\mathbf{x}' S_2 \mathbf{x} S_2^{-1} S_1 \mathbf{x} = (\mathbf{x}' S_1 \mathbf{x}) \mathbf{x}$$

de sorte que l'on a, à l'optimum :

$$S_2^{-1} S_1 \mathbf{x} = \kappa \mathbf{x} \quad (\text{III.17})$$

Les extrema de la fonction κ sont donc les valeurs propres de la matrice $S_2^{-1} S_1$. L'optimum du critère κ est donc la plus grande valeur propre de cette matrice, et il est obtenu lorsque \mathbf{x} est le vecteur associé à cette plus grande valeur propre [23].

Conclusion I

Nous avons présenté la technique utilisée pour la recherche de l'alimentation qui optimise un critère donné. L'optimisation étant toujours liée à des contraintes, nous avons présenté ici les 3 contraintes de base qui ont été introduites. La technique d'optimisation adoptée revient à résoudre un problème aux valeurs propres.

II. Exploitation du modèle infini

Le modèle infini est un outil rapide de recherche des solutions aux problèmes de l'optimisation ; il sert à explorer rapidement un large « champ » de solutions envisageables. On présente ici quelques résultats généraux obtenus par ce modèle, qui seront affinés plus loin avec le modèle fini.

II.1. Rendement limite de la conversion linéaire à induction

Pour une longueur fixée de l'armature inductrice, il est possible de réaliser un certain nombre d'encoches N_e . On s'intéresse ici, au rendement que l'on pourrait obtenir en ayant une source N_e -phasée quelconque qui alimenterait les N_e encoches. On ne tient pas compte des pertes Joule dans l'inducteur ; on s'intéresse simplement à trouver les limites de la conversion linéaire à induction dans le cas du modèle infini. Par contre, on tient compte de la condition de

liaison $\sum_{i=1}^{N_e} \bar{J}_i = 0$ par introduction d'une matrice de connexion particulière :

$$C_{ij} = \begin{cases} N_e - 1 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Les rendements obtenus après optimisation des N_e courants d'encoches sont représentés par les courbes de la figure (III.3) en fonction de la vitesse relative ($v_r = \frac{v}{Lf}$) et pour différentes valeurs de N_e allant de 6 encoches à 36 encoches.

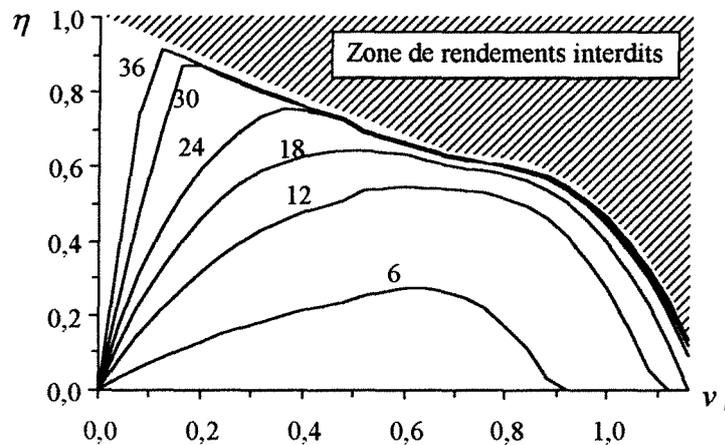


Fig. III.3 : Rendement optimal en fonction de v_r pour différentes valeurs de N_e .
(modèle infini)

D'une manière générale, ce rendement croît avec le nombre d'encoches envisagées, ce qui laisse prévoir l'existence d'un rendement limite dont la courbe représentative est l'enveloppe de toutes les courbes de rendement à N_e fixé. On est alors amené à définir une « zone de rendements interdits » dans le plan $(\eta-v_r)$ où le convertisseur linéaire ne peut fonctionner quel que soit le mode d'alimentation. Le rendement limite serait obtenu en considérant un nombre « infini » d'encoches conduisant à une approximation discrète de ce que serait la densité de courant optimale. Cependant, on voit d'après la figure (III.3) que l'on approche sensiblement cette limite avec 36 encoches, dès que $v_r > 0.05$. Il est donc inutile d'envisager, à ces vitesses, un nombre d'encoches plus important.

Par ailleurs, on constate que pour les grandes valeurs de la vitesse relative, l'augmentation du nombre d'encoches n'apporte pas une amélioration considérable au rendement dès que N_e dépasse 24 encoches alors que pour les petites valeurs de v_r , l'augmentation de N_e conduit à une augmentation sensible de η .

II.2. Examen de l'alimentation optimale

On se contente dans ce paragraphe de faire une analyse qualitative de l'alimentation optimale pour un point de fonctionnement donné ; il est commode de normaliser la solution par la relation :

$$\sum_{k=1}^{N_e} |\bar{J}_k|^2 = I$$

qui caractérise les pertes Joule dans les enroulements inducteurs à un coefficient « résistif » près.

Les courants optimaux obtenus pour une vitesse relative donnée présentent une propriété que l'on se propose d'appeler : « parité hermitienne ». La densité équivalente sur les surfaces des inducteurs vérifie : $\bar{J}_s(x) = \bar{J}_s^*(-x)$; ce résultat a été mis en évidence dans [23]. La transformée de Fourier d'une telle densité est réelle et l'analyse du spectre harmonique est plus simple. La figure (III.4) montre la distribution du courant optimal dans les encoches du modèle

infini à 36 encoches pour trois valeurs de la vitesse relative. Le module des courants \bar{J}_k fait apparaître une symétrie par rapport au plan médian de l'armature inductrice.

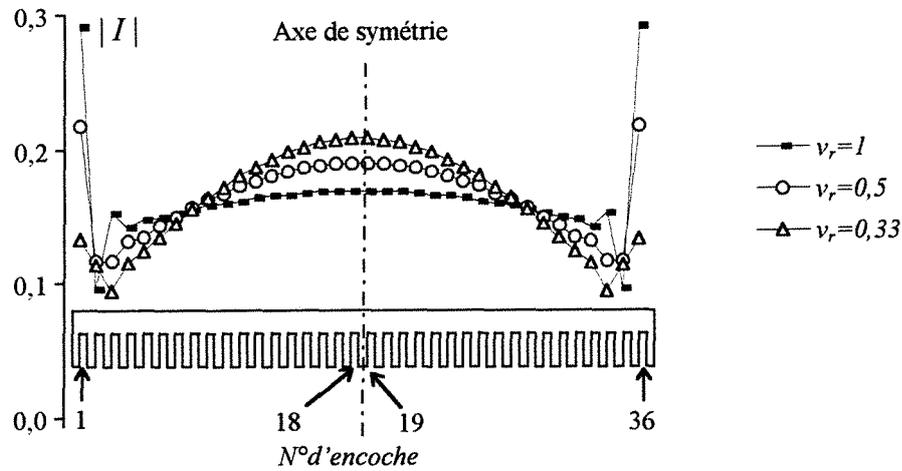


Fig. III.4 : Courants d'encoches optimaux pour différentes valeurs de v_r (modules).

Pour les grandes vitesses relatives, les courants dans les encoches d'extrémités sont relativement importants pour faire face aux effets d'extrémités dus à la discontinuité de la source, ce qui coïncide avec l'idée de l'alimentation par des spires d'extrémités déjà préconisées par M. Kant [15] ; ce principe est efficace dans le cas des vitesses élevées.

Sur la figure (III.5), on montre le spectre de la densité optimale pour $v_r = 0,3$ obtenu pour un modèle à 36 encoches, comparé au spectre analogue obtenu avec un enroulement triphasé classique à 3 paires de pôles. Cet enroulement est l'enroulement classique le plus performant pour cette vitesse relative. Le spectre de la densité optimale est centré en

$k = -\frac{1}{0,333} \approx -3$, les valeurs de k inférieurs à -3 correspondent en quelque sorte aux

harmoniques favorables à la conversion de l'énergie alors que les autres harmoniques sont défavorables (Fig. III.5). Comme cela a été noté [23], l'optimisation a pour effet d'atténuer les harmoniques défavorables tout en conservant les harmoniques favorables à la conversion de l'énergie. La partie réelle de $\hat{A}(x,b)$ représentée sur la figure (III.6), montre que l'optimisation élimine presque totalement les harmoniques défavorables.

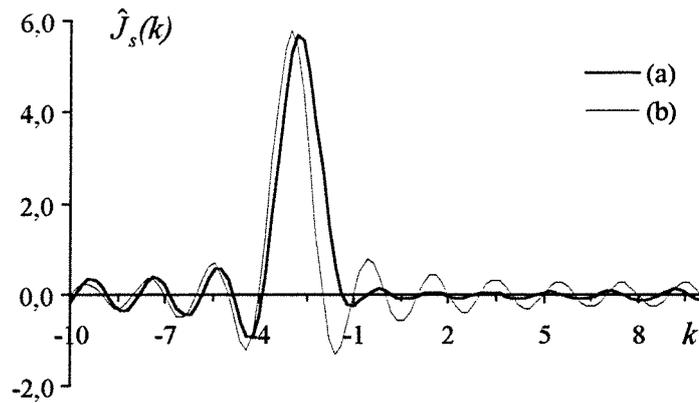
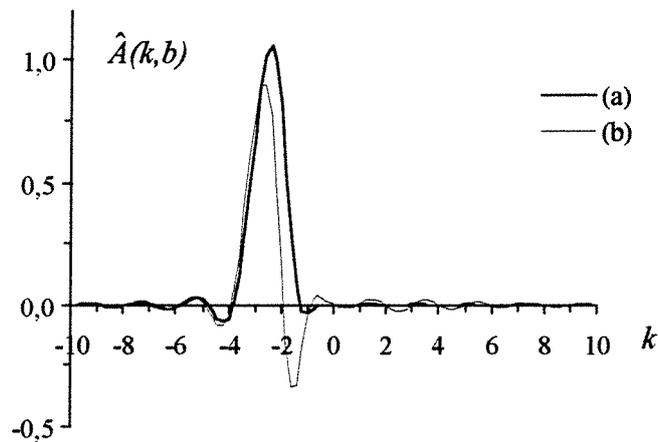


Fig. III.5 : Spectre de la densité de courant

(a) : optimisation des 36 courants
 (b) : enroulement 6 pôles classique

Fig. III.6 : Spectre du potentiel vecteur en $y = b$

(a) : optimisation des 36 courants
 (b) : enroulement 6 pôles classique

II.3. Influence de l'optimisation sur le facteur de puissance

Le facteur de puissance d'une machine est d'une importance capitale dès lors que la puissance mise en jeu est importante. Il est donc intéressant d'examiner le facteur de puissance du moteur linéaire ayant une alimentation optimisée en rendement. Dans le cas du modèle infini, on ne tiendra pas compte des pertes Joule dans l'inducteur ainsi que de la puissance réactive due aux flux de fuites dans les têtes de bobines et dans les encoches ; l'analyse qui suit concerne le facteur de puissance de la conversion électromécanique.

La figure (III.7) montre l'évolution du facteur de puissance en fonction de la vitesse relative pour les différents nombres d'encoches envisagés après optimisation des N_e courants. D'une manière générale, le facteur de puissance est bas pour les faibles vitesses alors qu'il croît lorsque celle-ci augmente.

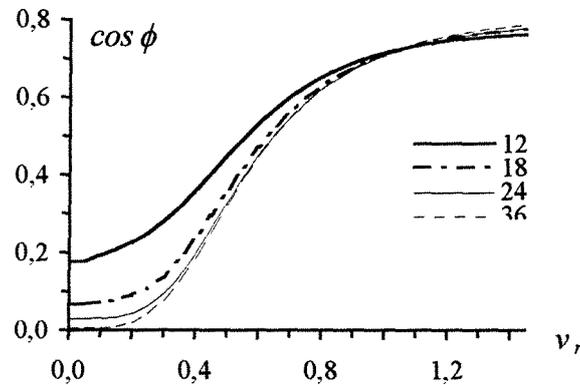


Fig. III.7 : Facteur de puissance pour différentes valeurs de N_e
(modèle infini, optimisation du rendement)

La situation est inverse pour le rendement qui se trouve être important pour les faibles valeurs de la vitesse relative. Il est donc intéressant de trouver un compromis entre le rendement et le facteur de puissance : le produit $\eta \cos \phi$ constitue un critère commode à cet effet. L'analyse des courbes de la figure (III.8) montre que pour les différents cas envisagés, il existe un optimum (pour cet exemple) au voisinage de $v_r = 0,8$ qui donnerait un rendement appréciable tout en conservant un facteur de puissance raisonnable.

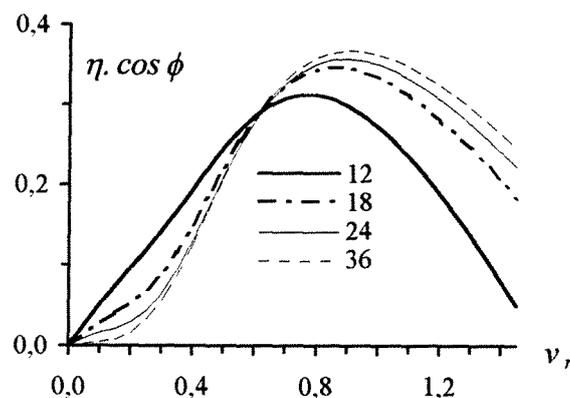


Fig. III.8 : Produit $\eta \cos \phi$ pour différentes valeurs de N_e
(modèle infini optimisation du rendement)

Conclusion II.

L'exploitation du modèle infini montre que les convertisseurs linéaires à induction nécessitent une étude particulière très différente de la théorie classique des convertisseurs rotatifs. La rapidité du modèle nous a permis de montrer quelques propriétés générales de l'alimentation optimale qui maximise le rendement. Des résultats déjà mis en évidence [14][15][23] sont à nouveau retrouvés ; l'intérêt de ce modèle réside dans la recherche rapide des « ébauches » de la solution optimale. Le raffinement des résultats est effectué grâce au modèle fini qui sera exploité d'une manière plus complète.

III. Exploitation du modèle fini

Le modèle infini a permis d'avoir un premier aperçu de l'influence de l'optimisation sur la forme des courants d'alimentation et sur le spectre du champ ; nous nous sommes limités au cas de l'optimisation du rendement dans le cas d'une alimentation en encoches indépendantes. Ce modèle sert de première analyse à une optimisation plus concrète utilisant le modèle fini. Les trois critères introduits en §I.1 sont examinés successivement.

III.1. Optimisation du rendement

III.1.1. Rendement limite

La notion de rendement limite précédemment introduite peut être examinée à nouveau, avec le modèle fini ; celui-ci tient compte de la géométrie des encoches et des inducteurs. Le modèle nous permet de considérer différents nombres d'encoches, pour une longueur donnée des armatures. Les caractéristiques physiques et les dimensions de l'armature inductrice étant fixées, on fait varier le nombre d'encoches sur l'armature inductrice.

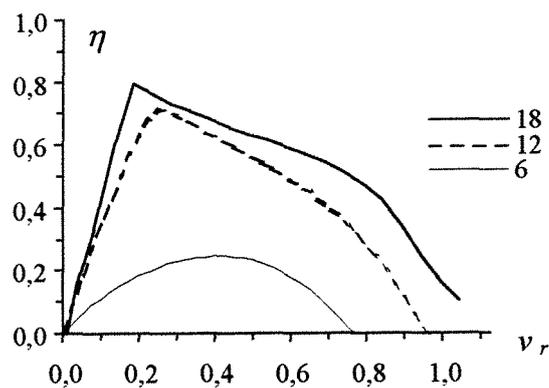


Fig. III.9 : Rendement optimal en fonction de v_r pour différentes valeurs de N_e (modèle fini)

Le rendement obtenu par optimisation des N_e courants varie avec v_r de la même manière pour les deux modèles. Pour préciser ce point, nous présentons les courbes de rendement optimal obtenues par les deux modèles pour 18 encoches ; toutes les caractéristiques physiques et géométriques (dans les limites des deux modèles) sont identiques. Ce résultat montre l'intérêt du modèle infini qui permet de trouver assez rapidement des solutions acceptables malgré les nombreuses hypothèses introduites.

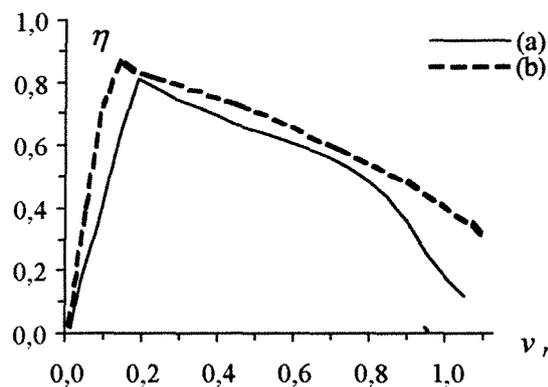


Fig. III.10 : Rendement optimal en fonction de v_r pour $N_e=18$.
 (a) : modèle fini
 (b) : modèle infini

III.1.2. Rendement en bobines égales

L'intérêt des enroulements à bobines égales réside dans la simplicité de leur construction et de leur installation sur les armatures inductrices. Du point de vue de la modélisation, le calcul des résistances des enroulements conçus avec ces bobines est facilité par le fait que

toutes les bobines sont identiques. A l'inverse des enroulements à simple couche où les têtes de bobines diffèrent d'une bobine à une autre, les enroulements à double couche présentent tous des résistances de têtes de bobines égales ; on tient compte dans ce qui suit, des pertes Joule dans les enroulements inducteurs.

Pour une armature à 24 encoches, on présente les rendements obtenus après optimisation des q courants alimentant les q bobines indépendantes ($q=24-n_d$).

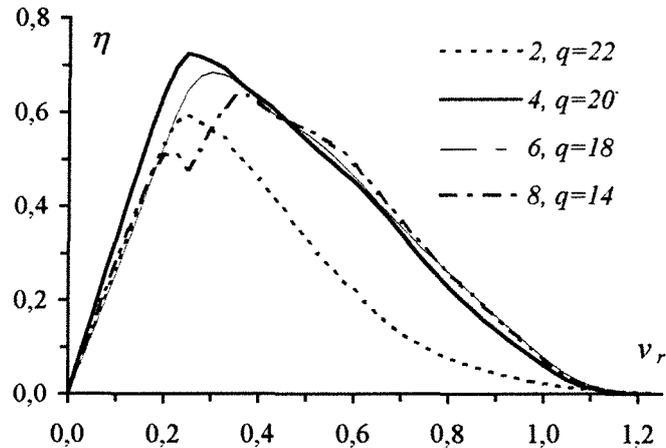


Fig. III.11 : Rendement optimal pour différents n_d

Pour n_d fixé, les courbes de la figure (III.11) représentent le rendement maximal que l'on peut obtenir avec un enroulement utilisant les $q=N_e-n_d$ bobines alimentées par q courants indépendants. L'ouverture optimale des bobines est $n_d=4$ ($q=20$) dans ce cas de figure ; elle permet d'obtenir un meilleur rendement dans une large gamme de vitesse.

Le pas polaire restant voisin de l'ouverture des bobines, les faibles valeurs de n_d imposent une grande polarité du champ d'entrefer. Dans ce cas, l'épaisseur de l'entrefer magnétique² est comparable au pas polaire et les flux de fuites dans les deux entrefers mécaniques³ deviennent importants ; la conversion n'est donc pas efficace.

Au contraire, pour des bobines d'ouverture importantes, la résistance des bobines augmente ; ce qui explique l'existence d'une ouverture optimale des bobines à N_e fixé.

² Distance entre les deux armatures inductrices.

³ Distance entre l'induit et une armature inductrice.

III.1.3. Optimisation d'enroulements à simple couche

Bien que les enroulements à double couche soient les plus utilisés dans la construction des machines électriques, il est tout de même intéressant d'examiner la possibilité d'apporter une amélioration à la conception des enroulements à simple couche qui peuvent être utilisés dans les petits moteurs linéaires, souvent utilisés comme actionneurs.

On considère sur une armature à 18 encoches deux enroulements triphasés classiques :

- Enroulement tétrapolaire SC4 à 3/2 encoches par pôle et par phase
- Enroulement hexapolaire SC6 à 1 encoche par pôle et par phase

En premier lieu, une optimisation du rendement par rapport aux 18 courants d'encoches est effectuée pour trouver les limites du rendement que l'on peut atteindre avec cette armature. Sur la figure (III.12) sont représentés les rendements en fonction de la vitesse relative pour les deux enroulements SC4 et SC6 alimentés par un système de courants équilibrés d'une part et par des courants optimisés d'autre part. On constate que l'optimisation des 3 courants apporte une amélioration au rendement (Fig. III.12).

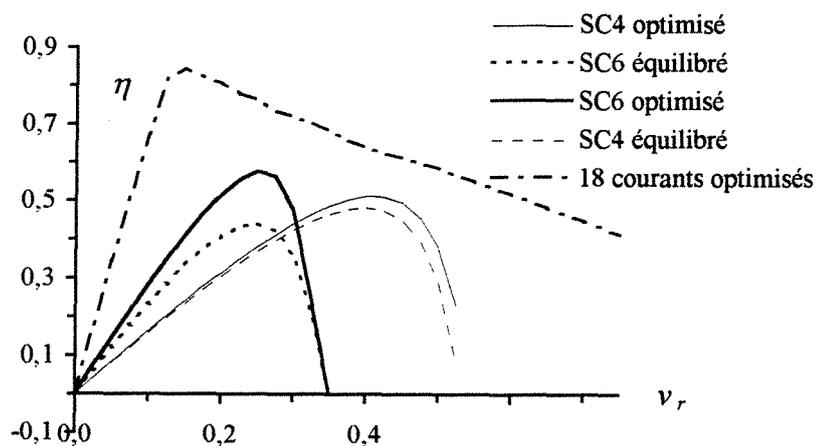


Fig. III.12 : Rendement optimal d'enroulements classiques

Dans cette partie, les résistances des têtes de bobines ne sont pas prises en compte ; les pertes Joule dans l'inducteur sont évaluées uniquement sur la longueur active des conducteurs.

Sur la même armature à 18 encoches, il est possible de superposer les deux enroulements et de les alimenter par une source hexaphasée. L'optimisation des 6 courants alimentant ces deux enroulements donne le rendement représenté sur la courbe de la figure (III.13). Celle-ci enveloppe les deux courbes correspondant aux enroulements SC4 et SC6 séparés. L'examen de l'étoile des 6 courants optimaux pour une vitesse relative $v_r=0.3$ montre l'existence d'une proportionnalité entre les représentations complexes \bar{I}_4 des courants alimentant l'enroulement SC4 et celles, \bar{I}_6 , des courants alimentant l'enroulement SC6 : $\bar{I}_4 \approx -\frac{1}{2}\bar{I}_6$

Utilisant cette relation ainsi que les connexions des deux enroulements, on peut concevoir un enroulement triphasé qui puisse reproduire les mêmes ampère-tours dans les 18 encoches. L'optimisation des trois courants alimentant cet enroulement, dit « spécifique », améliore considérablement le rendement au voisinage de $v_r = 0.33$ tout en gardant une alimentation triphasée. Ce résultat a été mis en évidence par B. Laporte [23][33][44]. L'allure générale de ces courbes, qui présentent un optimum très marqué, incite à prévoir une alimentation à v_r constant, donc à $\frac{v}{Lf} = Cte$. Les 6 pôles + 4 pôles présentent alors un réel intérêt pour optimiser le rendement vers $v_r=0.3$.

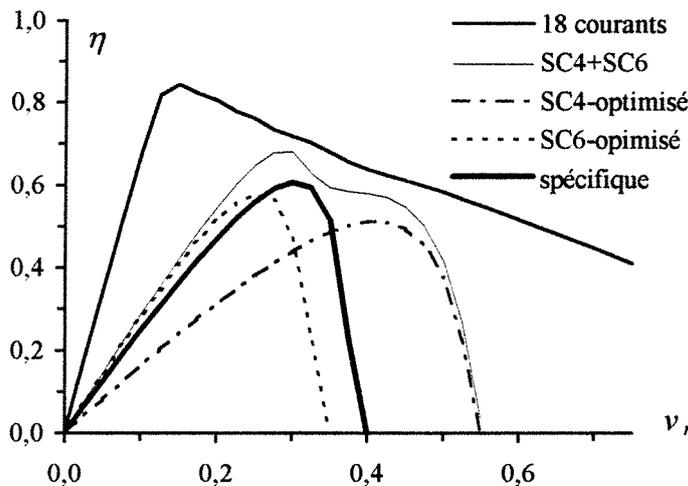


Fig. III.13 : Rendement optimal pour différents enroulements.

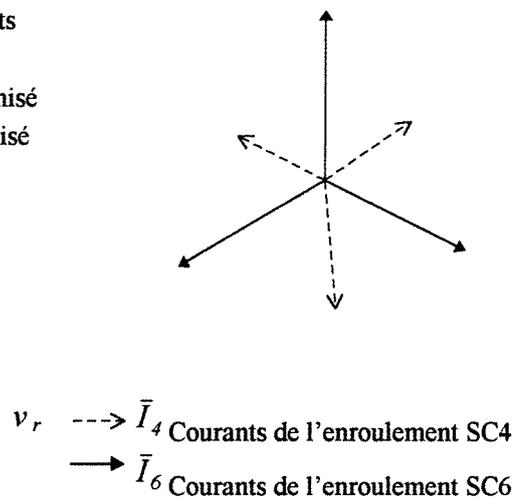


Fig. III.14 : Etoiles des 6 courants optimaux à $v_r=0.3$.

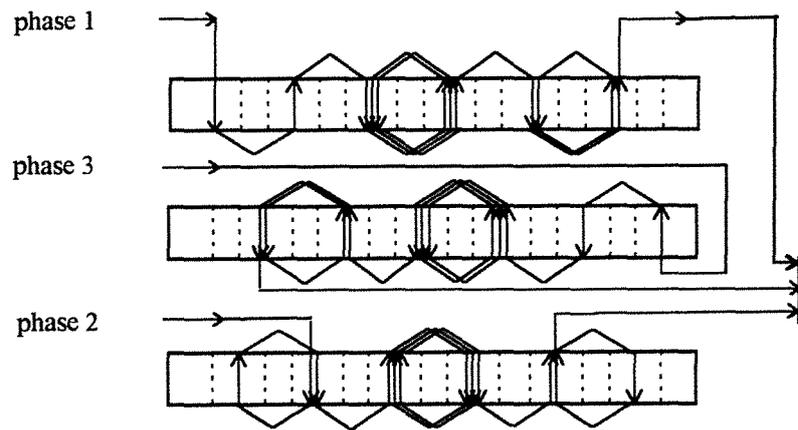


Fig. III.15 : Schéma de l'enroulement spécifique obtenu

Du point de vue de la construction, l'enroulement spécifique obtenu (Fig. III.15) est intéressant dans la mesure où l'on peut le réaliser avec des bobines égales.

III.1.4. Optimisation d'enroulements à double couche

L'optimisation en bobines indépendantes (§ III.1.2) a permis de trouver l'ouverture optimale des bobines qui est ($n_d=4$) dans le cas $N_e = 24$ encoches. La stratégie adoptée dans ce paragraphe consiste à concevoir des enroulements triphasés avec les 20 bobines disponibles. Il est possible d'ailleurs, de réaliser des enroulements à nombre *impair* de pôles.

La notion de nombre de pôles est ambiguë dans le cas du moteur linéaire à cause de la géométrie « ouverte » des inducteurs. Dans le cas où l'enroulement crée un nombre impair de pôles dans l'entrefer, un pôle supplémentaire doit nécessairement apparaître à l'extérieur de la machine pour compenser le flux. Nous désignons par : « nombre de pôles » dans un convertisseur linéaire, le nombre de pôles « actifs » réalisés dans l'entrefer. Les enroulements envisagés sont :

DC4 : enroulement 4 pôles.

DC5 : enroulement 5 pôles.

DC6 : enroulement 6 pôles.

Un « raccourcissement » est nécessaire pour réaliser un enroulement 4 pôles avec des bobines dont l'ouverture est inférieure au pas polaire ($n_d=4$) ; on risque d'ailleurs, de réaliser un pôle supplémentaire. Une bobine couvre un cinquième de la longueur de l'armature inductrice alors que le pas polaire doit être égale au quart de la longueur de la même armature. L'allure du champ confirmera la polarité de l'enroulement.

La figure (III.16) montre le rendement obtenu après optimisation des courants triphasés alimentant les trois enroulements envisagés, comparés au rendement obtenu après optimisation des 20 courants alimentant les bobines de base. Ces enroulements triphasés donnent des rendements qui approchent la limite obtenue par les 20 courants indépendants.

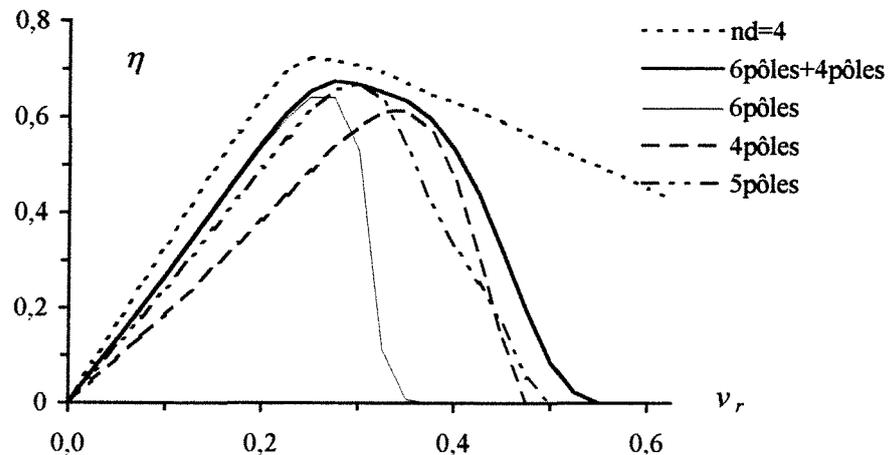


Fig. III.16 : Rendement optimal pour enroulements à double couche

On remarque tout d'abord que les enroulements à double couche sont mieux adaptés aux convertisseurs linéaires que les enroulements à simple couche pour les faibles vitesses relatives. Les encoches d'extrémités contenant un seul faisceau, les ampère-tours sont concentrés au centre de la machine ; cette situation favorise la conversion pour les faibles valeurs de la vitesse.

La superposition des deux enroulements triphasés (DC4 et DC6) améliore (mais de peu) le rendement. Il n'est donc pas nécessaire de chercher à concevoir un enroulement spécifique à partir de l'étoile des 6 courants optimaux à une vitesse donnée.

Nous présentons dans les figures suivantes les schémas des trois enroulements envisagés ainsi que les cartes de champs obtenue dans le domaine D_2 pour une vitesse relative $v_r=0,25$.

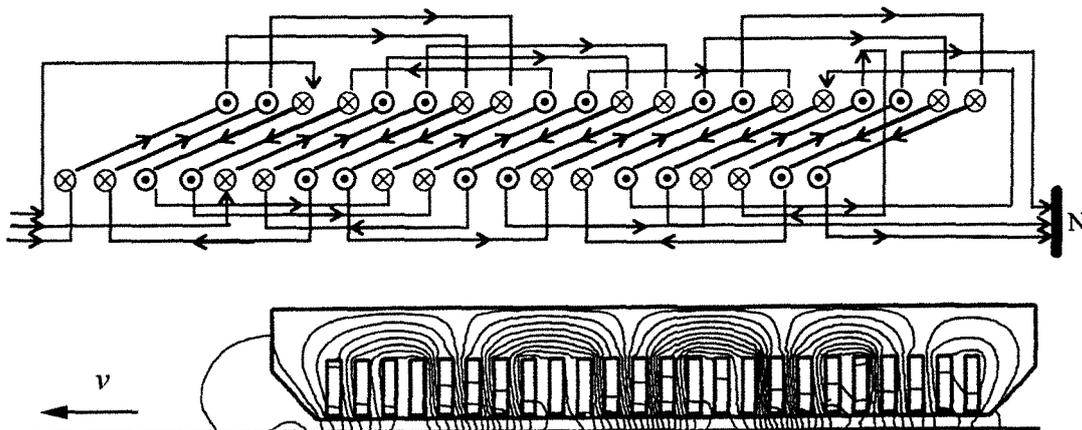


Fig. III.17 : DC4 : Enroulement 4 pôles et le champ qu'il crée dans le domaine D_2

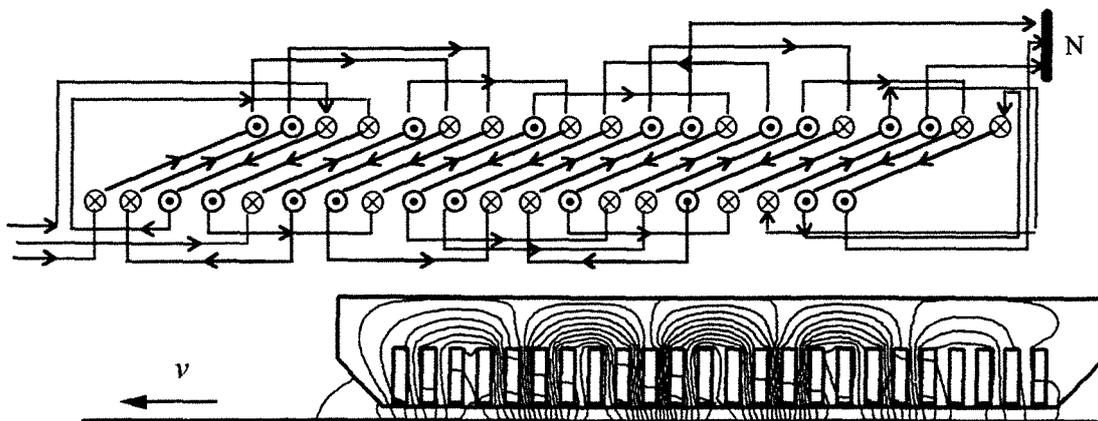


Fig. III.18 : DC5 : Enroulement 5 pôles et le champ qu'il crée dans le domaine D_2

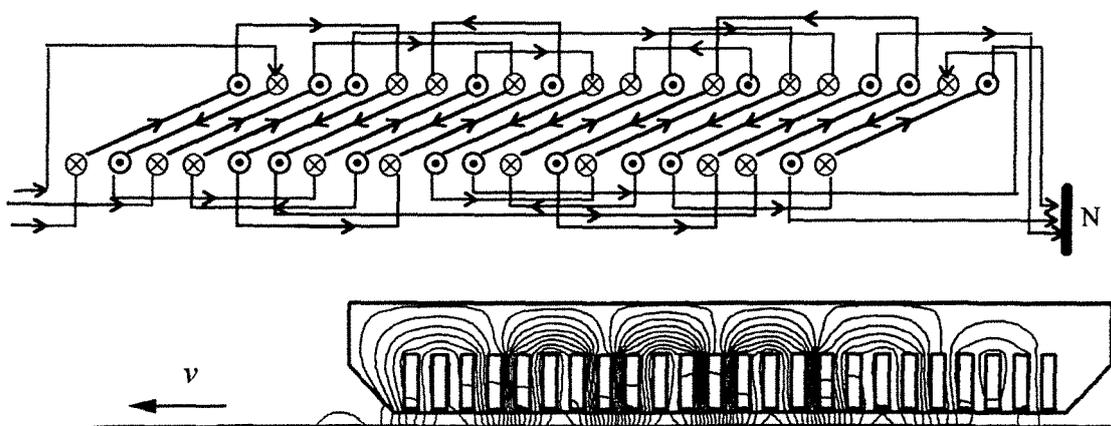


Fig. III.19 : DC6 : Enroulement 6 pôles et le champ qu'il crée dans le domaine D_2

III.2. Optimisation de la poussée

Le critère que l'on examine dans cette partie, est le rapport de la force aux pertes Joule dans l'enroulement inducteur. L'optimisation de ce rapport conduit à trouver les courants qui donnent la plus grande force à pertes Joule fixées ; pour cela, ces courants sont normés par la relation (III.1) où la valeur de π_0 est fixée à $1kW$ par inducteur. On a vérifié que cette normalisation des pertes Joule ramène la densité de courant dans les encoches dans l'ensemble des cas envisagés à une valeur moyenne de l'ordre de : $4 A.mm^{-2}$.

Chaque armature présente une longueur $L=50 cm$ et une largeur utile $L_u =20 cm$. L'induit présente une épaisseur $2a=1cm$ et l'entrefer mécanique est $b-a=0.5 cm$.

III.2.1. Optimisation en bobines indépendantes

Le principe de la recherche de l'ouverture optimale des bobines est utilisé sur la même armature. La figure ci-dessous montre les forces obtenues pour différentes ouvertures de bobines. Les grandes valeurs de n_d provoquent un accroissement des pertes Joule dans l'inducteur à cause de l'accroissement des résistances des têtes de bobines. Les petites valeurs de n_d accroissent les flux de fuites. Il existe nécessairement une valeur optimale de l'ouverture n_d que l'on trouve égale, une fois de plus, à 4 dans cet exemple (Fig. III.20). D'autre part, la polarité est en quelque sorte fixée par l'ouverture des bobines ; le rapport $\frac{n_d}{N_e}$ variant comme

$\frac{I}{2p}$, la force maximale est obtenue pour une vitesse relative proportionnelle à n_d .

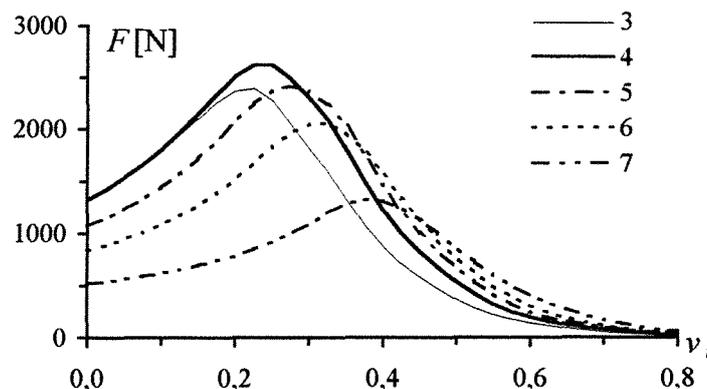


Fig. III.20 : Poussée optimale pour différentes valeurs de n_d

III.2.2. Optimisation d'enroulements triphasés

A l'aide des 20 bobines correspondant à la valeur optimale de l'ouverture, on envisage d'optimiser les courants alimentant les 3 enroulements (DC4, DC5 et DC6) précédemment introduits. La figure (III.21) montre que la valeur maximale de la force est obtenue pour une vitesse relative dépendant de la polarité de l'enroulement. En alimentant par un onduleur dont la fréquence est asservie à la vitesse, il est possible de fonctionner à v_r constant correspondant à l'extremum.

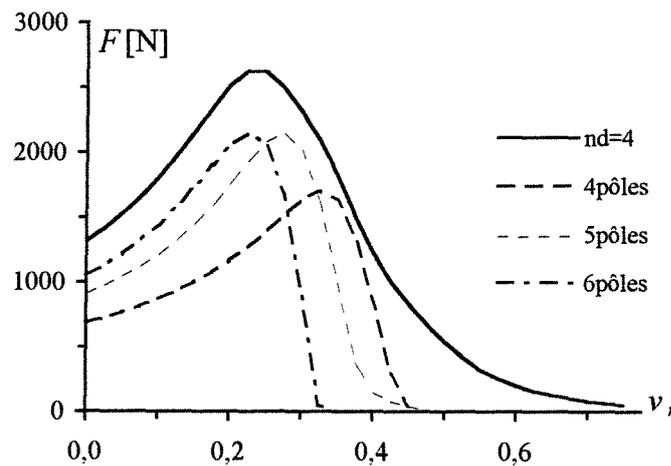


Fig. III.21 : Poussée optimale pour différents enroulements

L'examen de l'étoile des 20 courants optimaux à $v_r = 0,25$ permet de rassembler les bobines dans un certain ordre afin de concevoir un enroulement triphasé qui reproduit sensiblement les ampère-tours produits par les 20 courants optimaux. La figure (III.22) montre l'étoile des courants optimaux et la technique de rassemblement utilisée pour arriver à la conception de cet enroulement spécifique que l'on représente à la figure (III.23). Le principe consiste à rassembler les courants optimaux dans trois directions déphasées d'un angle $\frac{2\pi}{3}$.

La force obtenue après optimisation des trois courants alimentant l'enroulement spécifique présente une légère amélioration par rapport à l'enroulement DC6 qui présente déjà des bonnes performances (Fig. III.24).

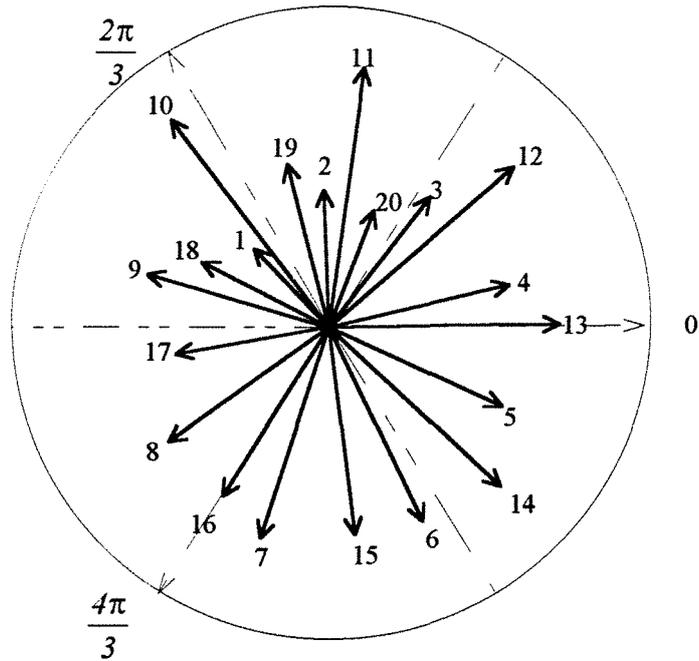


Fig. III.22 : Etoile des 20 courants optimaux à $v_r=0.25$ (24 encoches).

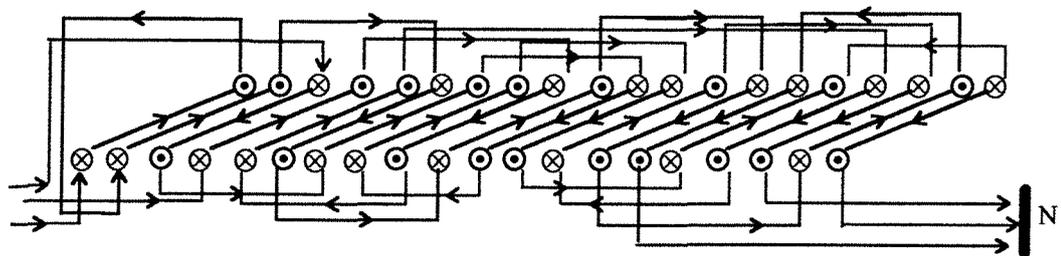


Fig. III.23 : Enroulement spécifique (24 encoches)

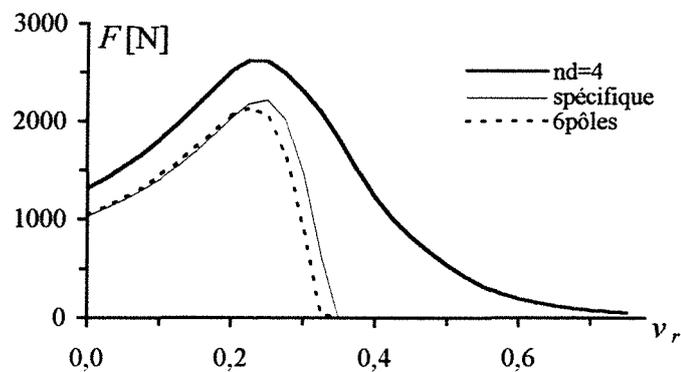


Fig. III.24 : Poussée optimale obtenue avec l'enroulement spécifique.

III.2.3. Cas d'une armature à 18 encoches

Le cas d'un petit moteur à 18 encoches est traité afin de montrer une situation où la technique de conception d'enroulements spécifiques aboutit à des possibilités facilement réalisables. Chaque armature inductrice a une longueur $L = 25 \text{ cm}$, un entrefer mécanique de $b - a = 0.5 \text{ cm}$ et une largeur utile $L_u = 20 \text{ cm}$. Les pertes Joule dans les deux inducteurs π_0 sont fixées à 1 kW [43].

Une première étape consiste à trouver l'ouverture optimale qui est égale à 5 dans ce cas. L'examen des 13 courants⁴ optimaux alimentant les 13 bobines indépendantes révèle une régularité dans le plan complexe pour $v_r = 0.3$. On est amené à considérer 6 directions déphasées de $\frac{\pi}{3}$ pour la conception d'un enroulement spécifique. Cette opération conduit à un bobinage hexaphasé. La figure (III.26) montre les deux enroulements triphasés résultants de cette opération ; l'alimentation de cet enroulement peut se faire de deux manières :

- Alimentation en simple étoile : les deux enroulements sont mis en série et alimentés par une source triphasée.
- Alimentation en double étoile : on dispose d'un convertisseur statique délivrant deux étoiles de courants déphasés de $\frac{\pi}{6}$.

Les courbes de la figure (III.27) montrent que l'on approche la limite, donnée par les 13 courants optimaux, avec un système d'alimentation, bien connu par les constructeurs de convertisseurs statiques. On approche mieux cette limite, parce que l'écart relatif en nombre de degrés de liberté (13 bobines par rapport à 6 phases) est petit par rapport au cas de la machine à 24 encoches (20 bobines par rapport à 3 phases).

⁴ $n_d = 18 - 5 = 13$ bobines

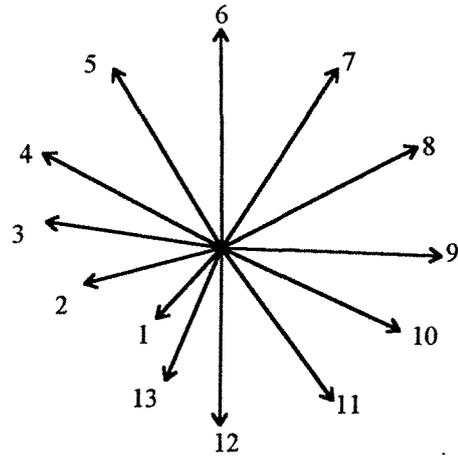


Fig. III.25 : Etoile des 13 courants optimaux (18 encoches, $v_r = 0.3$)

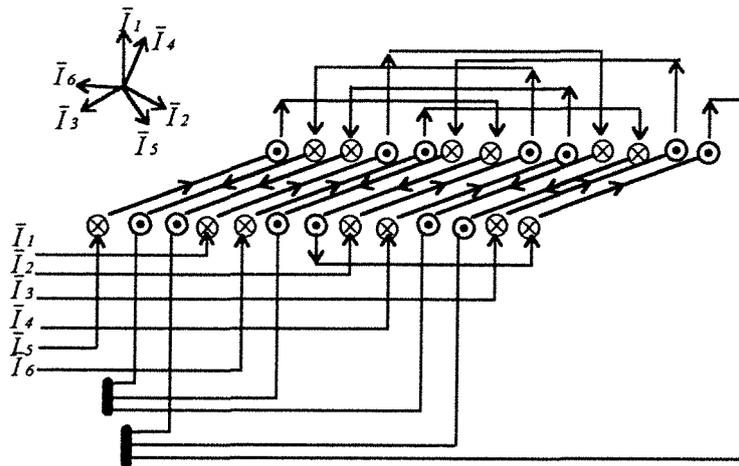


Fig. III.26 : Enroulement spécifique (18 encoches, $v_r = 0.3$)

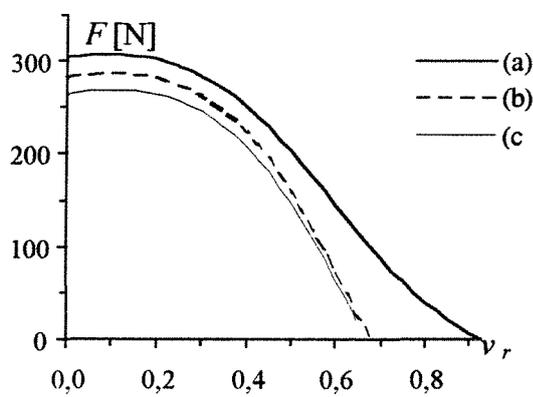


Fig. III.27 : Poussée optimale pour différents enroulements (18 encoches)

- (a) : alimentation en 13 bobines indépendantes
- (b) : alimentation en double étoiles
- (c) : alimentation en simple étoile

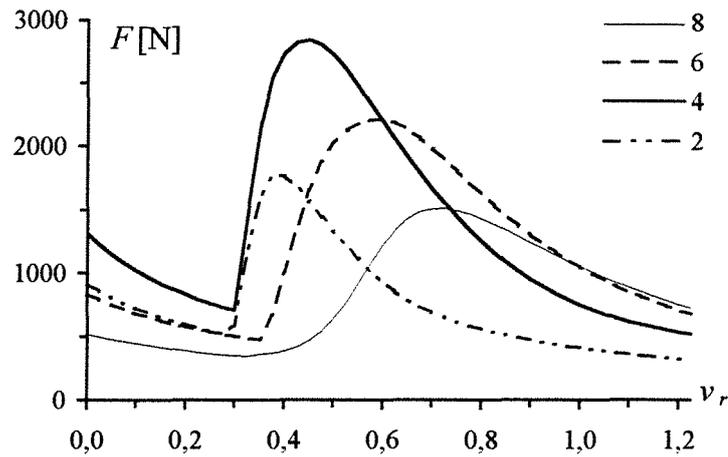
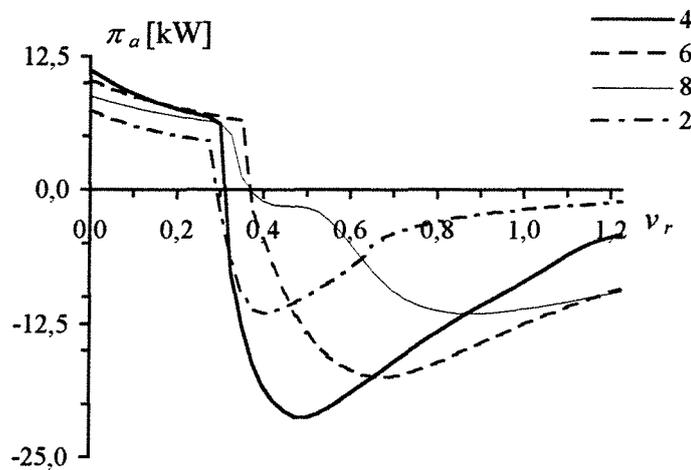
III.3. Optimisation de la force de freinage

Lorsque le rôle de l'inducteur est de freiner l'induit, on cherche à optimiser le critère γ_f défini au début du chapitre (§ I.1) avec les contraintes déjà citées : à savoir la contrainte thermique et la condition de liaison imposée par le bobinage. Les caractéristiques géométriques utilisées en §III.2 sont à nouveau utilisées dans ce paragraphe.

III.3.1. Optimisation en bobines indépendantes

La première étape consiste à chercher l'ouverture optimale des bobines comme nous l'avons fait pour l'optimisation de la poussée. La figure (III.28) montre les courbes représentant la force de freinage optimale en fonction de v_r pour les différentes ouvertures n_d . Ces courbes montrent une fois de plus, que la valeur optimale de cette ouverture est $n_d = 4$: l'explication physique est analogue à celle donnée dans le paragraphe (§ III.2.1) concernant l'optimisation de la poussée.

De plus, pour toutes les ouvertures, ces courbes mettent en évidence deux zones de fonctionnement distinctes. La première zone est caractérisée par une décroissance de la force de freinage de $v_r = 0$ à $v_r \approx 0.3$; le convertisseur absorbe à la fois de la puissance électrique et de la puissance mécanique, cette zone correspond à un fonctionnement « frein » analogue à celui d'une machine asynchrone ($g > 1$). La deuxième zone ($v_r > 0.4$) est caractérisée par l'existence d'un optimum ; elle correspond à un fonctionnement « générateur » où le convertisseur fournit de la puissance active au réseau en absorbant de la puissance mécanique de l'induit. La figure (III.29) montre la puissance active en fonction de v_r pour les différents cas envisagés.

Fig. III.28 : Force de freinage optimale pour différentes valeurs de n_d Fig. III.29 : Puissance active pour différentes valeurs de n_d

III.3.2. Optimisation d'enroulements triphasés

Les deux enroulements 4 pôles et 6 pôles précédemment conçus sont à nouveau considérés ; on envisage de plus un enroulement bipolaire triphasé, utilisant des bobines d'ouverture ($n_d = 10$). Les forces de freinage maximales obtenues par optimisation des courants alimentant ces trois enroulements sont représentées par les courbes de la figure (III.30) comparées à celles obtenues en optimisant les 20 courants alimentant les 20 bobines indépendantes. Ces courbes présentent aussi deux zones distinctes correspondant aux deux modes de fonctionnement (moteur et générateur) précédemment mis en évidence. La figure (III.31) montre le changement du sens de circulation de la puissance active confirmant l'existence de deux modes de fonctionnement.

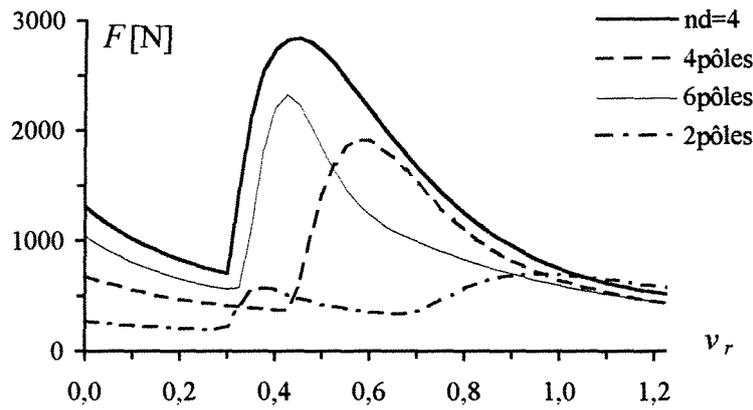


Fig. III.30 : Force de freinage optimale pour différents enroulements
(L'enroulement 2 pôles est conçu avec des bobines différentes : $n_d=10$)

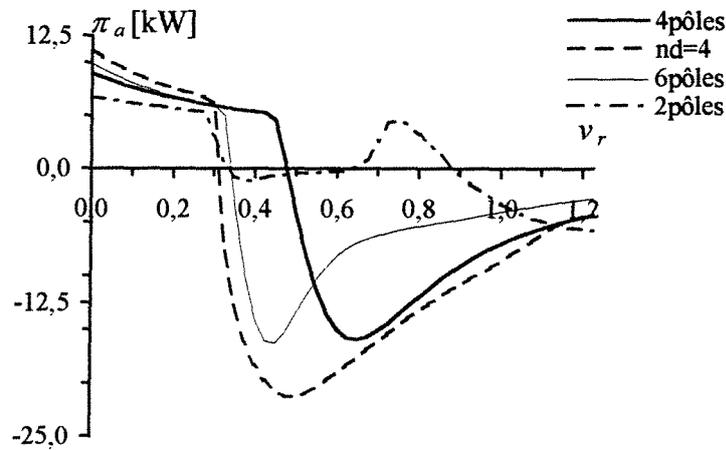


Fig. III.31 : Puissance active pour différents enroulements

Pour les enroulements triphasés, il est intéressant d'examiner les composantes symétriques des courants optimaux, sous une forme réduite :

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_o \\ \bar{I}_d \\ \bar{I}_i \end{bmatrix} = \frac{I}{3 \sum_{k=1}^3 |\bar{I}_k|^2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{bmatrix} \tag{III.18}$$

où $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ est la première racine cubique de l'unité de sorte que $|\bar{I}_o|^2 + |\bar{I}_d|^2 + |\bar{I}_i|^2 = I$.

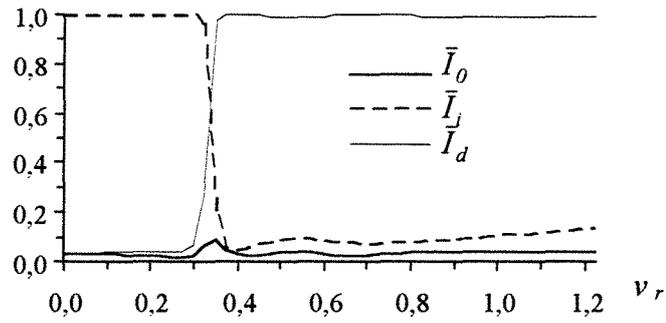


Fig. III.32 : Composantes symétriques des courants optimaux (6-pôles)

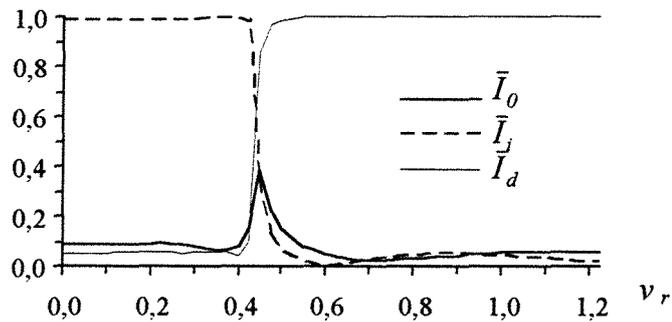


Fig. III.33 : Composantes symétriques des courants optimaux (4-pôles)

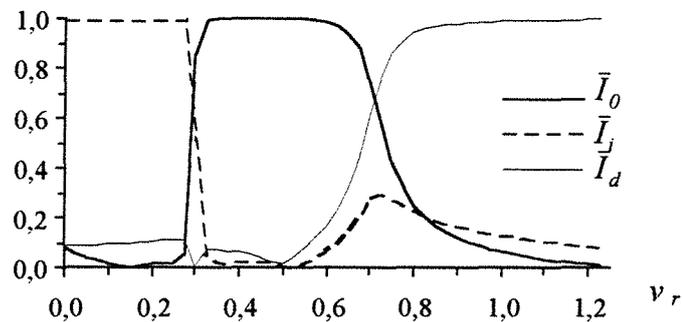


Fig. III.34 : Composantes symétriques des courants optimaux (2-pôles)

On voit que les figures (III.32) et (III.33) correspondant aux enroulements 4-pôles et 6-pôles présentent des zones distinctes. La première est caractérisée par une domination de la composante inverse (\bar{I}_i) ; le champ d'entrefer glisse dans le sens opposé au mouvement de

l'induit ; c'est le fonctionnement frein. La deuxième zone est caractérisée par une domination de la composante directe (\bar{I}_d) ; le champ d'entrefer glisse dans le même sens que l'induit ; c'est le fonctionnement générateur. Dans ces deux zones, on parle de freinage par champ glissant. Ces deux modes de fonctionnement peuvent être comparés aux fonctionnements frein et générateur d'une machine asynchrone tournante.

Ces deux zones sont aussi observées dans le cas de l'enroulement bipolaire ($v_r < 0.3$ et $v_r > 0.8$) mais elles sont séparées par une large zone où le courant homopolaire est dominant (Fig. III.34). Le champ d'entrefer est pulsant ; on parle alors de freinage par champ pulsant ou freinage par courants de Foucault [46] [48].

Le mode de freinage par courants de Foucault est intéressant dans la mesure où il nécessite simplement une source monophasée ; les équipements auxiliaires tels que les convertisseurs statiques, les câblages et les capteurs sont alors moins coûteux. C'est un mode de freinage adapté pour améliorer le freinage des TGV [49] qui se fait essentiellement par les systèmes mécaniques à disques. Ceux-ci présentent néanmoins des problèmes d'usure très prononcés et sont à l'origine de bruits désagréables dus aux frottements sec [53]. L'intérêt du freinage électromagnétique réside dans l'absence de ce type de problèmes mais sa mise en pratique est relativement délicate et sa modélisation pour les réalisations pratiques est encore plus compliquée à cause de l'effet 3D important [47].

Conclusion III

L'exploitation du modèle fini associé à la technique d'optimisation adoptée, permet de trouver l'alimentation qui optimise un critère donné. La technique utilisée est intéressante dans la mesure où les matrices représentant les formes quadratiques associées à la conversion sont stockées d'une manière définitive ; on fait appel à ces matrices pour simuler les divers modes de fonctionnements envisagés. Quelques résultats déjà mis en évidence [18][23][33] ont été retrouvés avec les modèles développés.

La méthode développée consiste à trouver l'alimentation qui maximise un critère donné sous des contraintes fixées. Nous avons présenté quelques résultats généraux à titre d'illustration. La diversité des paramètres des convertisseurs linéaires fait que chaque dispositif destiné à fonctionner dans des conditions données, nécessite une étude particulière de son mode d'alimentation. Les résultats présentés dans cette partie ne peuvent en aucun cas fournir la solution définitive à l'alimentation des moteurs linéaires ; mais ils donnent toutefois un certain nombre d'indications, notamment la nécessité d'une alimentation à fréquence variable

avec la loi $\frac{v}{f} = Cte$ (v est la vitesse et f la fréquence).

Chapitre IV

LES CHAMPS DANS L'INDUIT

Introduction

Dans le chapitre II, nous avons développé le modèle fini où l'on évite le calcul numérique dans l'induit. Cette approche est satisfaisante pour déterminer les performances du modèle, puis pour optimiser l'alimentation comme nous l'avons fait au chapitre III. Cependant, la connaissance de la répartition des champs dans l'induit est importante tout particulièrement lorsque l'induit est un métal liquide. La connaissance exacte des courants induits et des forces volumiques rentre alors dans des modèles plus complets, faisant appel à la thermique et à la mécanique des fluides.

La résolution analytique des équations de Maxwell dans l'induit permet d'exprimer la TF de la représentation complexe du potentiel vecteur en fonction de sa valeur à l'interface avec le domaine fixe. L'approximation par les fonctions de Hermite permet d'évaluer les champs réels grâce à la propriété fondamentale de ces fonctions vis-à-vis de la TF. Ce principe est utilisé tout au long de ce chapitre pour déterminer les différents champs qui se manifestent dans l'induit. On s'intéressera plus particulièrement à l'induction magnétique, au champ de forces locales et à la densité de courants induits.

L'examen du champ dans l'induit permet notamment d'obtenir un tracé complet des lignes de champ dans les parties fixes et les parties mobiles du modèle (pour un observateur fixe). On a ainsi une appréciation qualitative de l'effet de l'optimisation sur la distribution du champ.

On examine aussi l'effet de l'optimisation de la poussée sur l'allure générale du champ de forces dans l'induit ; le calcul détaillé des forces volumiques dans l'induit est nécessaire lorsque l'on s'intéresse aux pompes électromagnétiques.

Enfin, on précise aussi dans ce chapitre, quelle est la répartition des courants induits.

I. Examen des lignes d'induction

I.1. Calcul du champ dans l'induit.

Le modèle fini permet de retrouver la répartition du champ partout dans le domaine D_2 « sans mouvement » et plus particulièrement sur sa frontière Γ_1 avec l'induit ; il y est exprimé par son développement limité dans la base de Hermite.

$$\bar{A}(x,a) = \sum_{n=0}^N \bar{\alpha}_n \psi_n(x) \quad (\text{IV.1})$$

dont la TF est :

$$\hat{A}(k,a) = \sum_{n=0}^N \bar{\alpha}_n \hat{\psi}_n(k) \quad (\text{IV.2})$$

On en déduit la TF de $\bar{A}(x,y)$ à tous les niveaux de l'induit :

$$\hat{A}(k,y) = \hat{A}(k,a) \frac{\cosh[\varphi(k) y]}{\cosh[\varphi(k) a]} \quad (\text{IV.3})$$

l'expression de $\varphi(k)$ étant donnée au paragraphe § II.2.1 du chapitre II.

Il est intéressant d'exploiter cette équation pour retrouver la répartition du potentiel vecteur partout dans l'induit ; une projection sur la base des fonctions de Hermite est nécessaire.

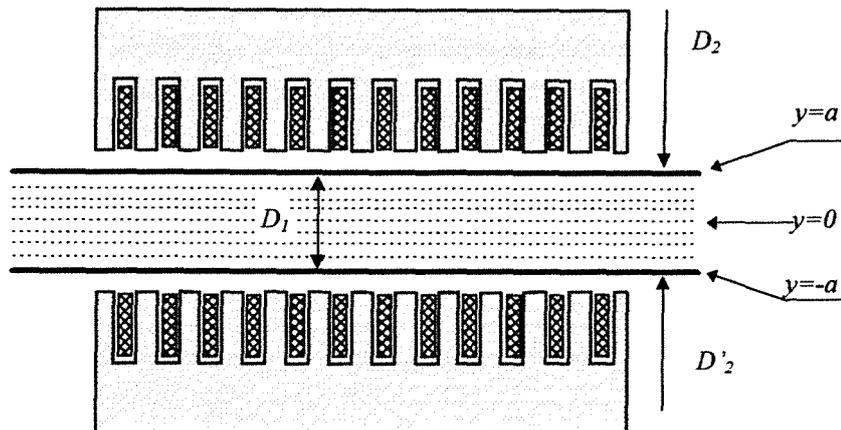


Fig. IV.1 : Découpage régulier de l'induit et définition du modèle complet.

Le modèle complet comprend trois sous-domaines :

- L'induit complet noté D_1
- L'inducteur supérieur et l'espace fixe qui l'entoure, tel qu'il est défini dans le chapitre II ; il est noté D_2 .
- D'_2 : le symétrique de D_2 par rapport à l'axe de symétrie ($y=0$)

L'approximation du champ $\bar{A}(x,y)$ doit être effectuée sur une droite parallèle à l'axe des x . On définit dans l'induit un ensemble de droites ($y=y_i$) correspondant à un découpage régulier de l'induit (Fig. IV.1). La TF du potentiel vecteur sur la droite ($y=y_i$) est :

$$\hat{A}(k,y_i) = \sum_{n=0}^N \bar{\alpha}_n \hat{\psi}_n(k) \frac{\cosh[\varphi(k) y_i]}{\cosh[\varphi(k) a]} \quad (\text{IV.4})$$

Cette fonction peut être approchée par le développement :

$$\hat{A}(k,y_i) = \sum_{m=0}^N \bar{\alpha}_m(y_i) \hat{\psi}_m(k) \quad (\text{IV.5})$$

où les coefficients $\bar{\alpha}_m(y_i)$ sont liés aux coefficients $\bar{\alpha}_n$ par la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_0 \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_0(y_i) \\ \vdots \\ \bar{\alpha}_N(y_i) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

avec :

$$C_{nm}^{(i)} = \int_R \frac{\cosh[\varphi(k) y_i]}{\cosh[\varphi(k) a]} \hat{\psi}_n(k) \hat{\psi}_m^*(k) dk$$

Pour $y_i = a$ les coefficients $\bar{\alpha}_m(y_i)$ coïncideraient avec les $\bar{\alpha}_n$ et la matrice $C^{(i)}$ serait unitaire.

On obtient ainsi le champ $\bar{A}(x,y_i)$ par :

$$\bar{A}(x,y_i) = \sum_{m=0}^N \bar{\alpha}_m(y_i) \psi_m(x) \quad (\text{IV.7})$$

I.2. Adaptation au programme d'éléments finis

Pour effectuer le tracé complet des isovaleurs du potentiel vecteur dans tout le domaine $D_1 \cup D_2 \cup D'_2$ (Fig. IV.1), il est commode d'adapter le calcul analytique que nous venons d'exposer au programme d'éléments finis. Pour cela, une discrétisation régulière de l'induit est générée, où tous les noeuds sont alignés sur les droites ($y = y_i$) utilisées dans le calcul précédent. La relation (IV.7) est alors utilisée pour affecter à chaque noeud du maillage la valeur de la solution lui correspondant. On obtient ainsi une discrétisation de l'induit, et la solution qui lui correspond sous une forme adaptée au sous-programme permettant le tracé complet des lignes de champ. La figure (IV.2) montre l'organigramme des différentes opérations nécessaires à cette méthode.

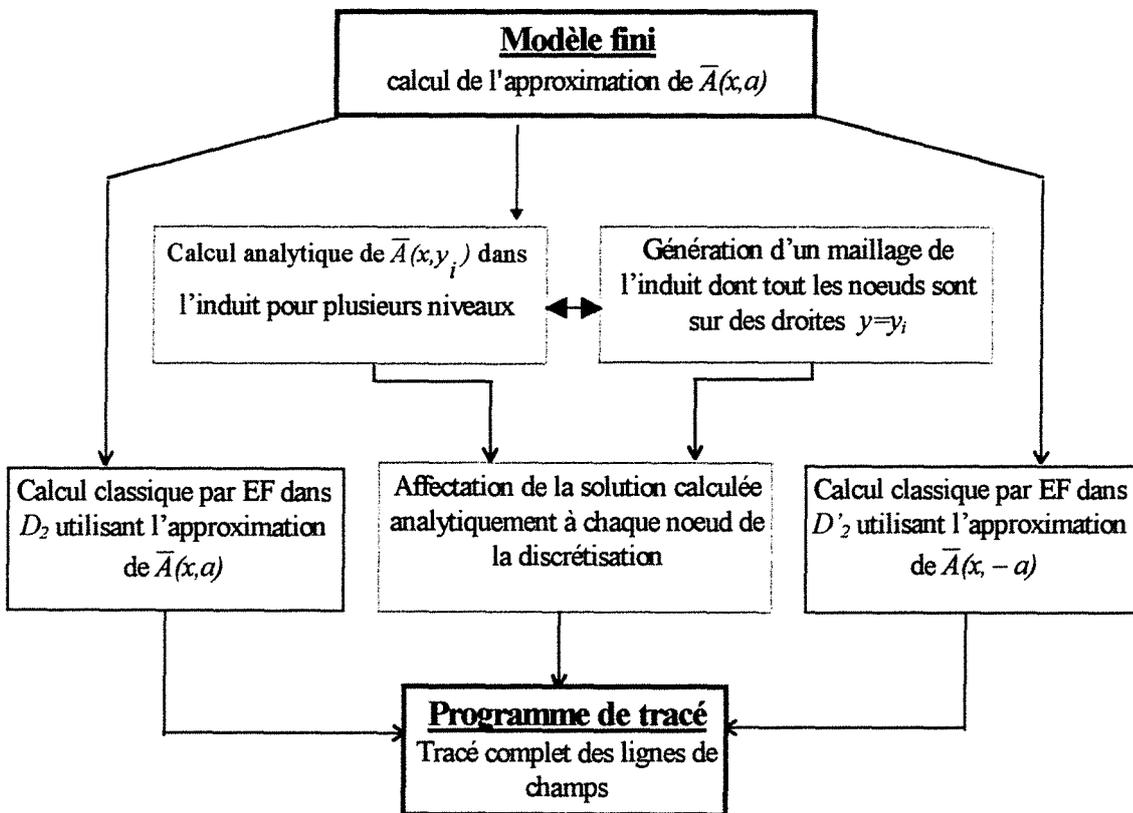


Fig. IV.2 : Organigramme des différentes étapes du tracé complet

Le calcul dans les deux domaines D_2 et D'_2 est effectué d'une manière classique par introduction de l'approximation de $\frac{\partial \bar{A}}{\partial n}$ sur la frontière avec l'induit ; un maillage relativement

fin est nécessaire. Par contre, puisque le calcul dans l'induit est effectué analytiquement, le raffinement du maillage n'a pas d'influence sur la précision du résultat. Il sert simplement à obtenir un tracé fin des isovaleurs du potentiel vecteur. La figure (IV.3) montre le cas où la taille moyenne des éléments de l'induit est égale au double de celle des éléments de l'entrefer. Cette configuration permet d'obtenir un tracé *correct* dans l'induit que l'on observe sur la figure (IV.4) ; les tracés dans les trois domaines coïncident parfaitement au passage d'un domaine à un autre.

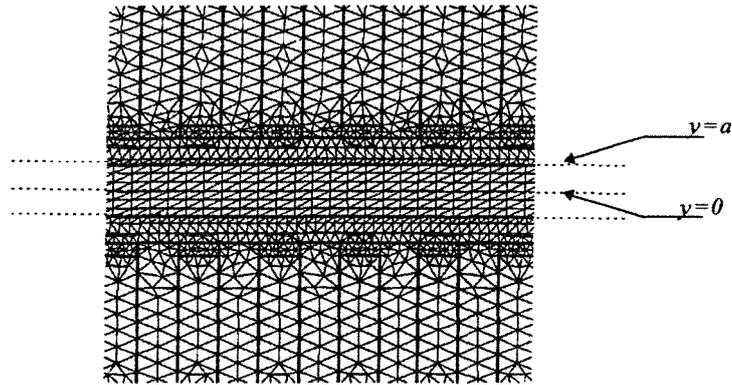


Fig. IV.3 : Assemblage des trois discrétisations.

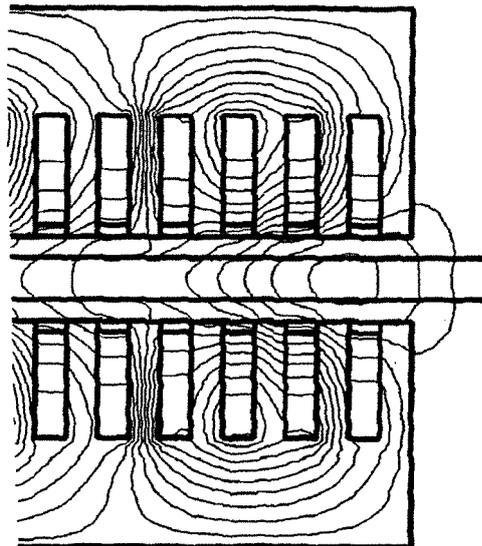


Fig. IV.4 : Raccordement des lignes de champs dans les trois sous-domaines.

I.3. Influence de l'optimisation sur l'allure du champ

Nous avons montré dans le chapitre III (§ II.2) que l'optimisation de l'alimentation a pour effet d'atténuer les harmoniques défavorables à la conversion tout en gardant les harmoniques favorables [23]. Dès lors que l'on dispose d'un outil permettant le tracé complet des lignes d'induction, il est intéressant d'examiner l'effet de l'optimisation sur l'allure générale du champ dans le convertisseur. A titre d'exemple, nous traitons le cas d'un modèle à 18 encoches dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes :

Longueur des armatures inductrices	$L=50 \text{ cm}$
Entrefer magnétique	$2b=2 \text{ cm}$
Epaisseur de l'induit	$2a=1 \text{ cm}$

On a examiné les cartes de champ avant et après optimisation pour différentes vitesses relatives :

I.3.1. $v_r=0.25$

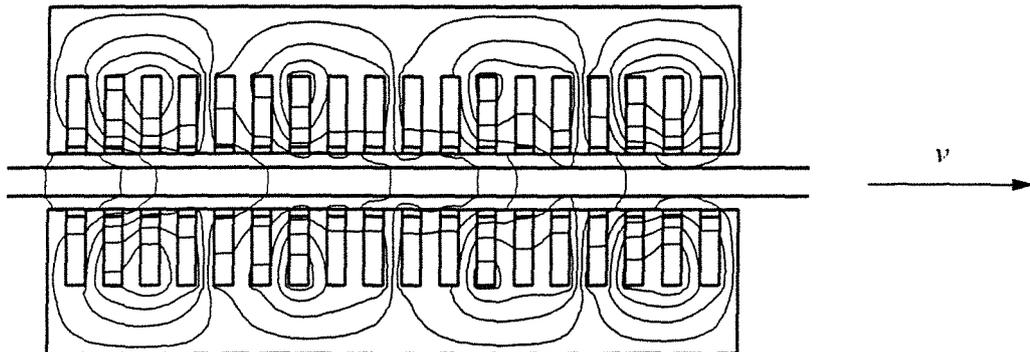


Fig. IV.5 : Tracé complet des lignes d'induction

(alimentation triphasée équilibrée 4 pôles, $v_r=0.25$).

On présente en premier lieu la carte de champ dans le convertisseur lorsqu'il est muni d'un enroulement tétrapolaire classique à simple couche à 1.5 encoches par pôle et par phase, l'induit se déplaçant à la vitesse relative $v_r=0.25$ (Fig. IV.5). Pour la même vitesse relative, l'optimisation du rendement en utilisant 18 courants indépendants conduit à un champ

présentant approximativement 8 pôles ; ce qui rejoint les conclusions du paragraphe § II.2 du chapitre III. La vitesse relative étant de 0.25 on s'attend à une « polarité optimale » du champ

$$2p \approx 2 \times \frac{1}{0.25} = 8 \text{ pôles (Fig. IV.6).}$$

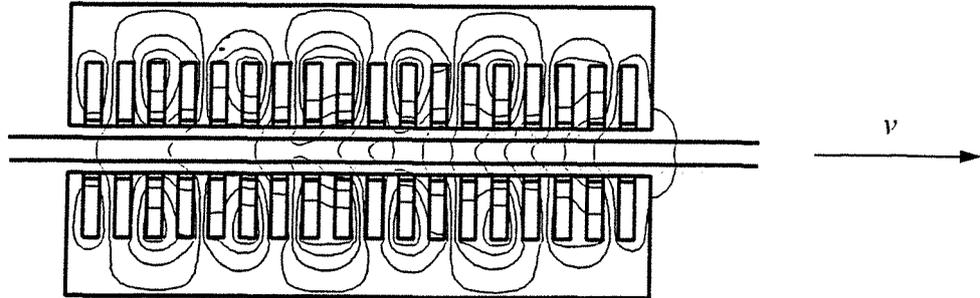


Fig. IV.6 : Alimentation en 18 courants optimisés, $v_r=0.25$.

Au voisinage de $v_r=0.25$; il est préférable de disposer d'un nombre d'encoches plus important afin de concevoir un enroulement triphasé ayant un grand nombre de pôles (par exemple : 8 pôles).

I.3.2. $v_r=0.5$

L'optimisation en 18 courants indépendants pour $v_r=0.5$ conduit à un champ présentant approximativement 4 pôles (Fig. IV.8). Pour la même vitesse, la carte de champ pour l'enroulement tétrapolaire est représentée sur la figure (IV.7).

Pour cette zone de vitesse, un enroulement tétrapolaire bien conçu pourrait présenter des performances comparables à celle que présente l'alimentation en 18 courants indépendants optimisés. Notons que pour cette vitesses ($v_r=0.5$), le champ commence à être perturbé par le mouvement de l'induit ; ce que l'on examine au paragraphe suivant.

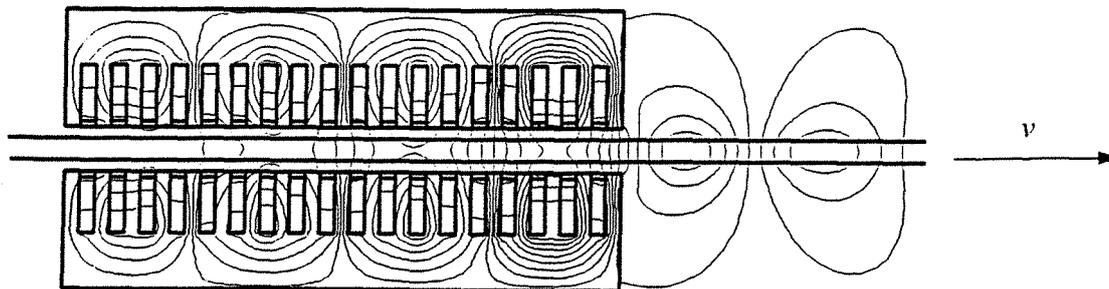


Fig. IV.7 : Alimentation triphasée équilibrée 4 pôles, $v_r=0.5$.

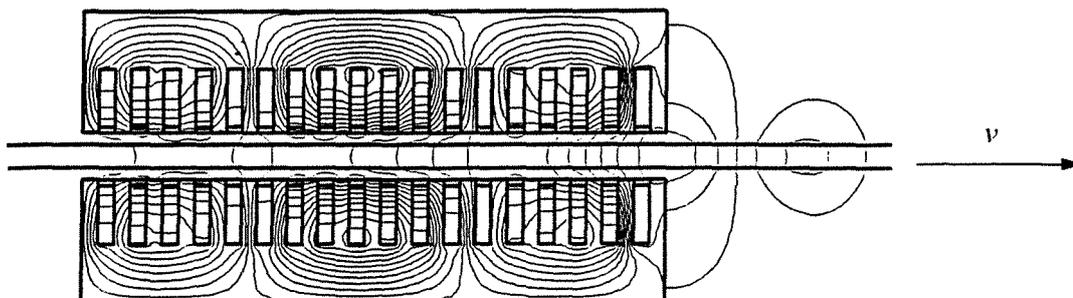


Fig. IV.8 : Alimentation en 18 courants optimisés, $v_r=0.5$.

1.4. Influence de la vitesse sur l'allure du champ

Pour illustrer l'influence de la vitesse sur l'allure du champ dans le convertisseur, on examine le champ obtenu avec un enroulement tétrapolaire à $v_r = 0.75$. Les champs créés par le même enroulement à $v_r=0.25$ et à $v_r=0.5$ sont représentés respectivement dans les figures (IV.5) et (IV.7). L'entraînement des lignes de champ par le mouvement de l'induit commence à être visible pour $v_r=0.5$ (Fig. IV.7) ; il l'est encore plus pour $v_r=0.75$ (Fig. IV.9). On voit

que le champ est « entraîné » par le mouvement de l'induit tout en conservant sa « polarité ». L'entraînement est renforcé par la conductivité électrique du matériau dont est fabriqué l'induit (ici on a considéré l'aluminium $\sigma \approx 3.4 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$) [50].

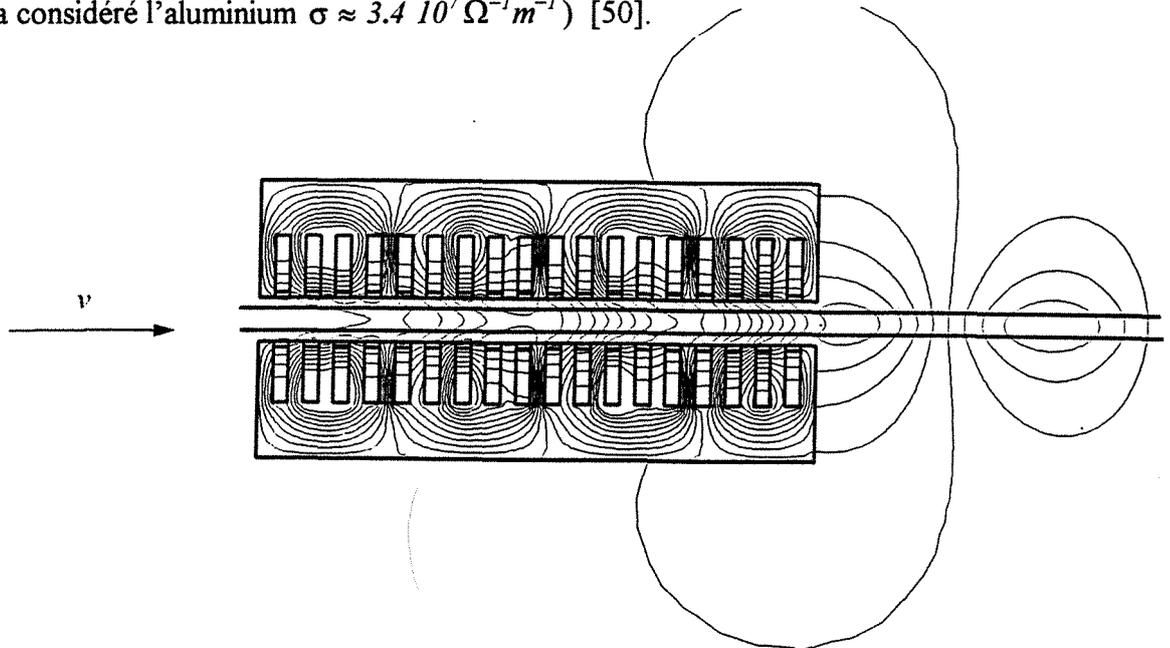


Fig. IV 9 : Tracé complet des lignes de champ (enroulement 4pôles, $v_r=0.75$).

Conclusion I

Nous avons présenté une technique permettant le tracé complet des lignes d'induction dans les parties fixes et surtout dans les parties mobiles du modèle. Le champ dans l'induit est calculé d'une manière quasi analytique en utilisant une approximation par les fonctions de Hermite ; une affectation de la solution à un maillage de l'induit permet le raccordement des trois champs partiels.

Cette technique permet de visualiser l'effet de la vitesse qui se manifeste par un entraînement des lignes de champ par le mouvement de l'induit. Elle permet aussi de confirmer les explications données au chapitre III à propos de la « polarité » du champ créé après optimisation des N_e courants d'encoches pour une vitesse relative donnée.

II. Examen des forces locales

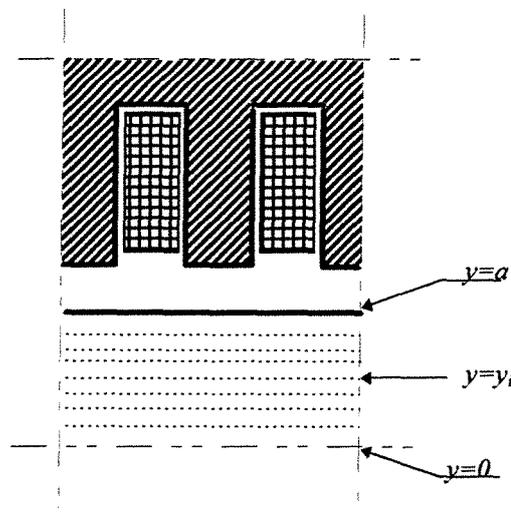
Dans certaines applications industrielles, on rencontre des dispositifs linéaires à induction où l'induit est un métal liquide ; les pompes électromagnétiques en sont un exemple. Dans ce type de convertisseurs, il est intéressant d'examiner le champ des forces locales dans l'induit afin de « prévoir » la nature de l'écoulement. Les forces de type gradient pompent le liquide alors que les forces rotationnelles provoquent le brassage.

Nous fournissons dans ce qui suit une approximation de la force volumique ; nous nous limitons au cas où les liquides présentent un profil de vitesse plat ce qui est généralement le cas dès lors que le nombre de Reynolds est important [27].

II.1. Calcul du champ de forces

La TF dans l'induit, approximée par les fonctions de Hermite, est un outil commode pour évaluer les forces locales dans un convertisseur linéaire à induction.

Comme nous l'avons précédemment remarqué, l'approximation par les fonctions de Hermite nécessite de connaître les fonctions à approcher, sur une droite ($y = C^{te}$). Le potentiel vecteur, l'induction et les forces doivent être connus sur une droite de ce type.



Les TF du potentiel vecteur et de ses dérivées spatiales dans l'induit sont exprimées en fonction de l'expression de la TF du potentiel vecteur sur la frontière Γ_1 ($y = a$) avec le domaine fixe :

$$\begin{aligned}
\bar{A}(x,y) &\xleftrightarrow{TF} \hat{A}(k,a) \frac{\cosh[\varphi(k) y]}{\cosh[\varphi(k) a]} \\
\frac{\partial \bar{A}}{\partial y}(x,y) &\xleftrightarrow{TF} \hat{A}(k,a) \varphi(k) \frac{\sinh[\varphi(k) y]}{\cosh[\varphi(k) a]} \\
\frac{\partial \bar{A}}{\partial x}(x,y) &\xleftrightarrow{TF} 2j\pi k \hat{A}(k,a) \frac{\cosh[\varphi(k) y]}{\cosh[\varphi(k) a]}
\end{aligned} \tag{IV.8}$$

Les approximations dans la base de Hermite des TF inverses de ces fonctions sur une droite ($y = y_i$), sont alors

$$\begin{aligned}
\bar{A}(x,y_i) &= \sum_{n=0}^N \bar{\alpha}_n(y_i) \psi_n(x) \\
\frac{\partial \bar{A}}{\partial y}(x,y_i) &= \sum_{n=0}^N \bar{\beta}_n(y_i) \psi_n(x) \\
\frac{\partial \bar{A}}{\partial x}(x,y_i) &= \sum_{n=0}^N \bar{\gamma}_n(y_i) \psi_n(x)
\end{aligned} \tag{IV.9}$$

où les coefficients $\bar{\alpha}_n(y_i)$, $\bar{\beta}_n(y_i)$ et $\bar{\gamma}_n(y_i)$ dépendent des coefficients $\bar{\alpha}_n$ de l'approximation du potentiel vecteur sur la frontière Γ_1 . Cette approximation est évaluée à l'aide de la technique développée dans le modèle fini (cf. *chapitre II*, équation II.59).

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}_n(y_i) &= \sum_{m=0}^N \bar{\alpha}_m \int_R \frac{\cosh[\varphi(k) y_i]}{\cosh[\varphi(k) a]} \hat{\psi}_n(k) \psi_m^*(k) dk \\
\bar{\beta}_n(y_i) &= \sum_{m=0}^N \bar{\alpha}_m \int_R \varphi(k) \frac{\sinh[\varphi(k) y_i]}{\cosh[\varphi(k) a]} \hat{\psi}_n(k) \psi_m^*(k) dk \\
\bar{\gamma}_n(y_i) &= \sum_{m=0}^N \bar{\alpha}_m \int_R 2j\pi k \frac{\cosh[\varphi(k) y_i]}{\cosh[\varphi(k) a]} \hat{\psi}_n(k) \psi_m^*(k) dk
\end{aligned} \tag{IV.10}$$

Les représentations complexes du potentiel vecteur et de ses dérivées spatiales en plusieurs niveaux ($y = y_i$) sont donc connues par leurs approximations dans la base de Hermite, ce qui permet d'obtenir une évaluation quantitative du champ magnétique dans l'induit.

Les expressions de l'induction et du potentiel vecteur sont exploitées pour déterminer le champ de forces dans l'induit par la définition classique de la force locale de Lorentz : $\vec{f} = j \wedge \vec{b}$. Dans le cas de la symétrie cylindrique, nous avons :

$$\vec{j} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ j \end{vmatrix} ; \quad \vec{b} \begin{vmatrix} b_x = \frac{\partial a}{\partial y} \\ b_y = -\frac{\partial a}{\partial x} \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{f} \begin{vmatrix} f_x = j \frac{\partial a}{\partial x} \\ f_y = j \frac{\partial a}{\partial y} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{IV.11})$$

La densité de courant est :

$$\vec{j} = \sigma \left[\vec{e} + \vec{v} \wedge \vec{b} \right] \quad (\text{IV.12})$$

où \vec{e} est le champ électrique. Le champ de vitesse \vec{v} étant suivant Ox , cette densité de courant présente une seule composante suivant l'axe Oz qui peut s'écrire :

$$j = -\sigma \left[\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} \right] \quad (\text{IV.13})$$

L'expression des deux composantes de la force locale est alors :

$$\begin{aligned} f_x(x,y,t) &= -\sigma \left[\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} \right] \frac{\partial a}{\partial x} \\ f_y(x,y,t) &= -\sigma \left[\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} \right] \frac{\partial a}{\partial y} \end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

Cette force présente une composante continue et une composante pulsatoire qui a une influence négligeable sur le comportement de l'induit dès lors que la pulsation est suffisante pour pouvoir négliger les constantes de temps électriques devant les constantes de temps mécaniques. On s'intéresse donc ici à la valeur moyenne dans le temps de la force locale. Après introduction des représentations complexes, les valeurs moyennes des deux composantes de la densité de force s'expriment au niveau de chaque droite ($y = y_i$) sous la forme :

$$\begin{aligned}
F_x(x, y_i) &= \sigma \omega \Im \left[\bar{A}(x, y_i) \frac{\partial \bar{A}^*}{\partial x}(x, y_i) \right] - \sigma v \left| \frac{\partial \bar{A}}{\partial x}(x, y_i) \right|^2 \\
F_y(x, y_i) &= \sigma \omega \Im \left[\bar{A}(x, y_i) \frac{\partial \bar{A}^*}{\partial y}(x, y_i) \right] - \sigma v \Re \left[\frac{\partial \bar{A}}{\partial x}(x, y_i) \frac{\partial \bar{A}^*}{\partial y}(x, y_i) \right]
\end{aligned} \tag{IV.15}$$

En utilisant les approximations du potentiel vecteur et des deux composantes de son gradient données par l'équation (IV.9), les deux composantes de la force s'écrivent :

$$\begin{aligned}
F_x(x, y_i) &= \sigma \sum_{n=0, m=0}^N \psi_n(x) \psi_m(x) \left[\omega \Im(\bar{\alpha}_n(y_i) \bar{\gamma}_m^*(y_i)) - \sigma (\bar{\gamma}_n(y_i) \bar{\gamma}_m^*(y_i)) \right] \\
F_y(x, y_i) &= \sigma \sum_{n=0, m=0}^N \psi_n(x) \psi_m(x) \left[\omega \Im(\bar{\alpha}_n(y_i) \bar{\beta}_m^*(y_i)) - \sigma \Re(\bar{\gamma}_n(y_i) \bar{\beta}_m^*(y_i)) \right]
\end{aligned} \tag{IV.16}$$

La force est ainsi connue de manière continue par rapport à l'abscisse x , et pour des valeurs discrètes ($y = y_i$) de l'ordonnée. La connaissance des coefficients $\bar{\alpha}_n(y_i)$, $\bar{\beta}_n(y_i)$ et $\bar{\gamma}_n(y_i)$ donne alors une approximation de la densité de force en tout point d'une droite ($y = y_i$).

II.2. Calcul de la pression dans l'induit

Lors de l'étude des pompes pour liquide conducteur, il est intéressant de quantifier les performances externes en terme de pression. Dans cet objectif, nous allons examiner les pressions qui se manifestent dans l'induit d'une pompe électromagnétique. Soit $\tilde{F}_x(x)$ la moyenne suivant y , de la composante F_x de la densité de force volumique :

$$\tilde{F}_x(x) = \frac{l}{2a} \int_{-a}^a F_x(x, y) dy \tag{IV.17}$$

La force totale dans la direction Ox exercée sur une tranche d'épaisseur dx du liquide est :

$$dF(x) = \tilde{F}_x(x) \times 2a \times L_u \times dx \tag{IV.18}$$

où L_u est la largeur utile dans la direction Oz .

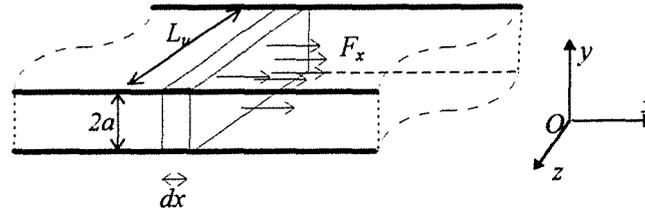


Fig. IV.10 : Tranche de l'induit (perspective cavalière).

Soit encore $\tilde{p}(x)$ la valeur moyenne de la pression sur le plan de cote x . Le modèle étant bidimensionnel et donc invariant suivant Oz , nous avons :

$$\tilde{p}(x) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a p(x,y) dy \quad (\text{IV.19})$$

où $p(x,y)$ est le champ scalaire de pression dans la veine.

La force totale dans la direction Ox , exercée sur une tranche fine d'épaisseur dx est donc :

$$dF(x) = [\tilde{p}(x) - \tilde{p}(x + dx)] \times L_x \times 2a \quad (\text{IV.20})$$

Cette équation, associée aux deux équations (IV.17) et (IV.18) conduit à :

$$-\frac{d\tilde{p}}{dx}(x) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a F_x(x,y) dy \quad (\text{IV.21})$$

La projection dans la base de Hermite permet d'écrire :

$$-\frac{d\tilde{p}}{dx}(x) = \sum_{m=0, n=0}^N \psi_n(x) \psi_m(x) \varphi_{nm} \quad (\text{IV.22})$$

avec :

$$\varphi_{nm} = \frac{\sigma}{2a} \int_{-a}^a \omega \Im [\bar{\alpha}_n(y) \gamma_m^*(y)] - \nu \Re [\bar{\gamma}_n(y) \gamma_m^*(y)] dy$$

Les coefficients φ_{mn} sont calculés par une méthode d'intégration numérique quelconque² car les coefficients $\bar{\alpha}_n(y)$ et les $\bar{\gamma}_n(y)$ ne sont connus que pour des valeurs discrètes de y .

² La méthode de Simpson est utilisée dans les calculs numériques

Pour pouvoir examiner l'évolution de la pression depuis l'entrée de la pompe jusqu'à la sortie, il est intéressant d'intégrer la fonction $\tilde{p}(x)$ depuis l'entrée de la pompe. On définit alors la fonction :

$$P(X) = \int_{-\infty}^X \frac{d\tilde{p}}{dx}(x) dx \quad (\text{IV.23})$$

Cette fonction traduit la montée en pression à l'intérieur de la veine liquide. Elle détermine la différence de pression entre un point situé à l'entrée de la pompe et un point d'abscisse X . Son graphe donne une idée sur l'uniformité de la montée en pression le long du canal où circule le fluide (l'induit). La différence de pression totale ΔP est :

$$\Delta P = \lim_{X \rightarrow \infty} P(X) = \int_R -\frac{d\tilde{p}}{dx}(x) dx \quad (\text{IV.24})$$

En utilisant (IV.22), il vient :

$$\Delta P = \sum_{n=0}^N \varphi_{nn} \quad (\text{IV.25})$$

La connaissance de la valeur ΔP correspondant à un fonctionnement donné est importante pour l'évaluation de la caractéristique externe de la pompe (débit-pression).

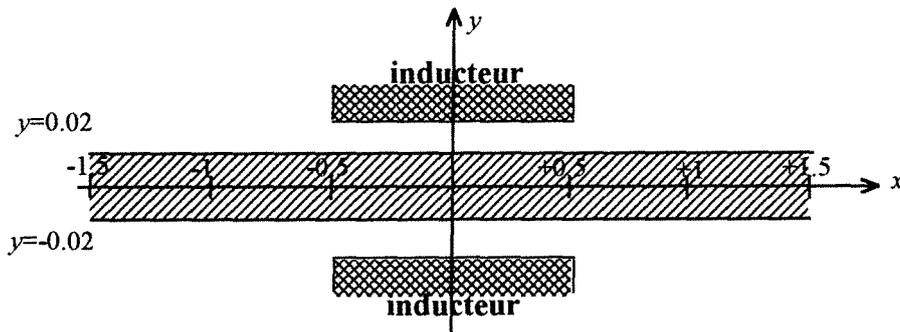
II.3. Présentation des champs de forces :

Pour illustrer le calcul que nous venons de développer, on prend l'exemple de la machine à 18 encoches et à double couche précédemment décrite (§ I.3). On présente les résultats en grandeurs réduites : les dimensions sont définies par rapport à une longueur caractéristique que l'on prend égale à la longueur de l'armature inductrice. L'induit, d'épaisseur relative

$2a' = \frac{2a}{L} = 0.04$ s'étend dans la direction y de $y = -0.02$ à $y = 0.02$; on représente la partie de

l'induit délimitée par les droites $y = \pm 0.02$ et $x = \pm 1.5$.

La figure suivante montre l'espace dans lequel les calculs sont effectués.



Les calculs sont menés sur une machine à 18 encoches, présentant deux armatures inductrices de longueur $L = 50 \text{ cm}$ (dans la direction du mouvement) et de largeur utile de $L_u = 10 \text{ cm}$. Les pertes Joule dans les enroulements inducteurs sont normées à $\pi_0 = 0.5 \text{ kW}$. La fréquence étant de 50 Hz , la vitesse de référence est donc : $Lf = 25 \text{ ms}^{-1}$. Cette vitesse de référence est trop grande pour le transport des métaux liquide ; il faudra fonctionner à très faible vitesse relatives. Dans la pratique, il est plus commode de réduire la longueur des armatures inductrices afin de réduire la vitesse de « synchronisme » Lf .

On considère sur chaque armature inductrice 13 bobines identiques d'ouverture $n_d = 5$ et on examine l'allure des champs de forces pour une alimentation par les 13 courants correspondant qui optimisent la poussée totale. Par ailleurs, on conçoit un enroulement 4 pôles utilisant les 13 bobines ($n_d = 5$) et on examine l'allure des champs de forces obtenu avec cet enroulement.

II.3.1. Influence de l'optimisation à vitesse nulle

L'enroulement tétrapolaire alimenté par un système de courant équilibré, crée un champ de forces non uniforme. La composante F_x présente deux extrema dans la direction Ox tout en restant relativement constante dans la direction Oy (Fig. IV.11 (a)). La composante F_y présente plusieurs extrema dans le sens Ox et décroît lorsque $y \rightarrow 0$ pour s'annuler en $y=0$; la symétrie du modèle par rapport à l'axe Ox fait que la composante F_y de la force est nulle pour $y=0$ (Fig. IV.11 - (c)).

L'optimisation de la poussée, en utilisant les 13 courants alimentant les 13 bobines indépendantes, provoque une régularisation des deux champs de forces F_x et F_y ; Il n'existe qu'un seul extrema pour chacun de ces deux champs. Par ailleurs, on voit bien sur la figure (Fig. IV.11 (b)-(d)). que la valeur maximale de la densité de force est supérieur dans le cas d'une alimentation en 13 courants optimisés. Malheureusement, l'optimisation de la force totale suivant Ox entraîne aussi une augmentation de la force suivant Oy .

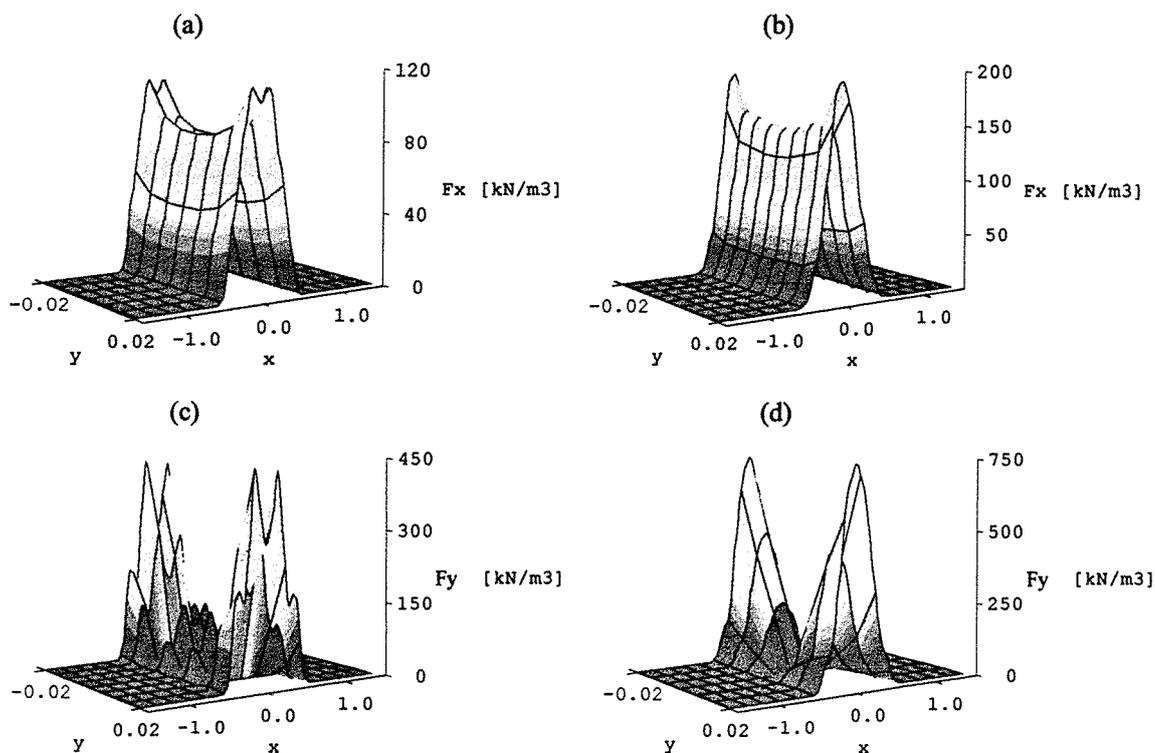


Fig. IV.11 : Champs de forces dans l'induit à $v_r = 0$.

- (a) : Composante F_x obtenue avec l'enroulement tétrapolaire.
- (b) : Composante F_x obtenue avec l'alimentation optimisée en 13 bobines.
- (c) : Composante F_y obtenue avec l'enroulement tétrapolaire
- (d) : Composante F_y obtenue avec l'alimentation optimisée en 13 bobines.

Notons que les forces F_y représentées dans les figures ci-dessus, sont dirigées de l'inducteur vers l'induit ; elles provoquent une compression de l'induit. Remarquons aussi que ces champs de forces présentent une certaine symétrie par rapport au plan $x=0$ qui s'explique par l'absence du mouvement d'une part, et par la « symétrie³ » de la densité de courant par rapport à l'axe de la machine d'autre part.

³ L'alimentation vérifie la « parité hermitienne » (Chapitre III, § II.2) dans le cas des enroulements envisagés.

II.3.2. Influence de l'optimisation à $v_r = 0.5$

A $v_r = 0.5$, nous examinons à nouveau l'influence de l'optimisation de la poussée sur le champ de force dans l'induit (pour la même machine à 18 encoches). Alors que le but initial était d'optimiser la poussée totale sur l'induit, on voit que cette optimisation régularise le champ de force. Sur la figure (IV.12), on voit que la densité de force est nettement supérieure après optimisation. L'enroulement 4 pôles présente un champ de force très perturbé (Fig. IV.12 (a)) ; la force totale dans la direction du mouvement est toutefois non nulle même si la vitesse correspond *a priori* à la vitesse de synchronisme de cet enroulement. A l'inverse des machines asynchrones tournantes, le moteur linéaire peut fonctionner à la vitesse de *synchronisme*. En comparant au cas de la vitesse nulle, nous observons que le champ de force obtenu avec l'enroulement 4 pôles présente une nette déformation due à la vitesse ; ce point sera examiné dans le paragraphe suivant. La force totale obtenue avec l'enroulement 4 pôles est de 17.05 N alors que celle obtenue avec les 13 courants optimisés est de 144.8 N (pour les mêmes pertes Joule dans l'inducteur).

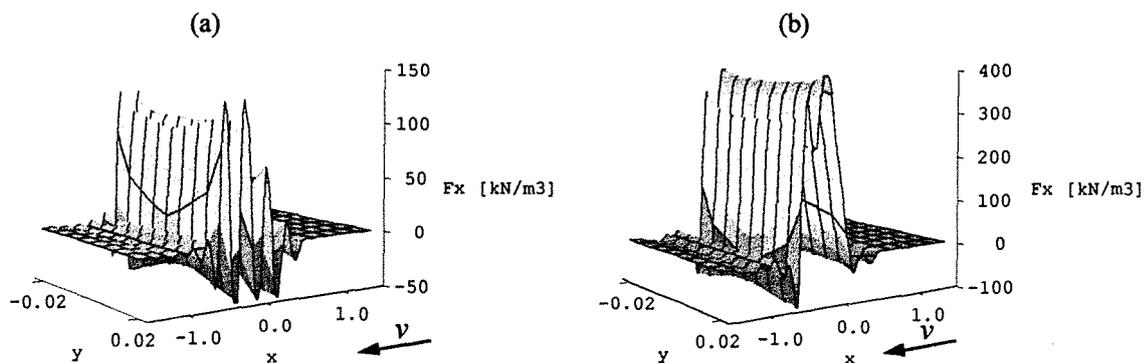


Fig. IV.12 : Champs de forces dans l'induit à $v_r = 0.5$ ($v = 12.5 \text{ ms}^{-1}$).

(a) : Composante F_x obtenue avec un enroulement tétrapolaire.

(b) : Composante F_x obtenue avec une alimentation optimisée en 13 bobines.

II.3.3. Influence de la vitesse sur la composante de la force suivant Ox

Lors du mouvement d'un fluide conducteur, de conductivité suffisamment grande, en présence d'un champ magnétique, il existe un entraînement des lignes de champ « par » le fluide [50]. Cet entraînement a été visualisé au paragraphe § I.4 , on examine ici le champ de forces F_x pour différents points de fonctionnement. Pour quelques valeurs de la vitesse relative, on présente le champ de force dans l'induit obtenu avec une alimentation utilisant les 13 courants (alimentant les 13 bobines indépendantes) qui optimisent la poussée totale. On

présente à nouveau les champs de forces correspondant aux cas de ($v_r=0.0$ et $v_r=0.5$) pour observer l'évolution de la déformation du champ. Au fur et à mesure que la vitesse croît, le champ de force est « entraîné » dans la direction du mouvement. Des perturbations, provoquant un changement local du sens de la force, apparaissent aux extrémités. Lorsque l'induit est un fluide conducteur, ces perturbations ont des effets importants sur la nature de l'écoulement ; elles pourraient être l'origine de tourbillons.

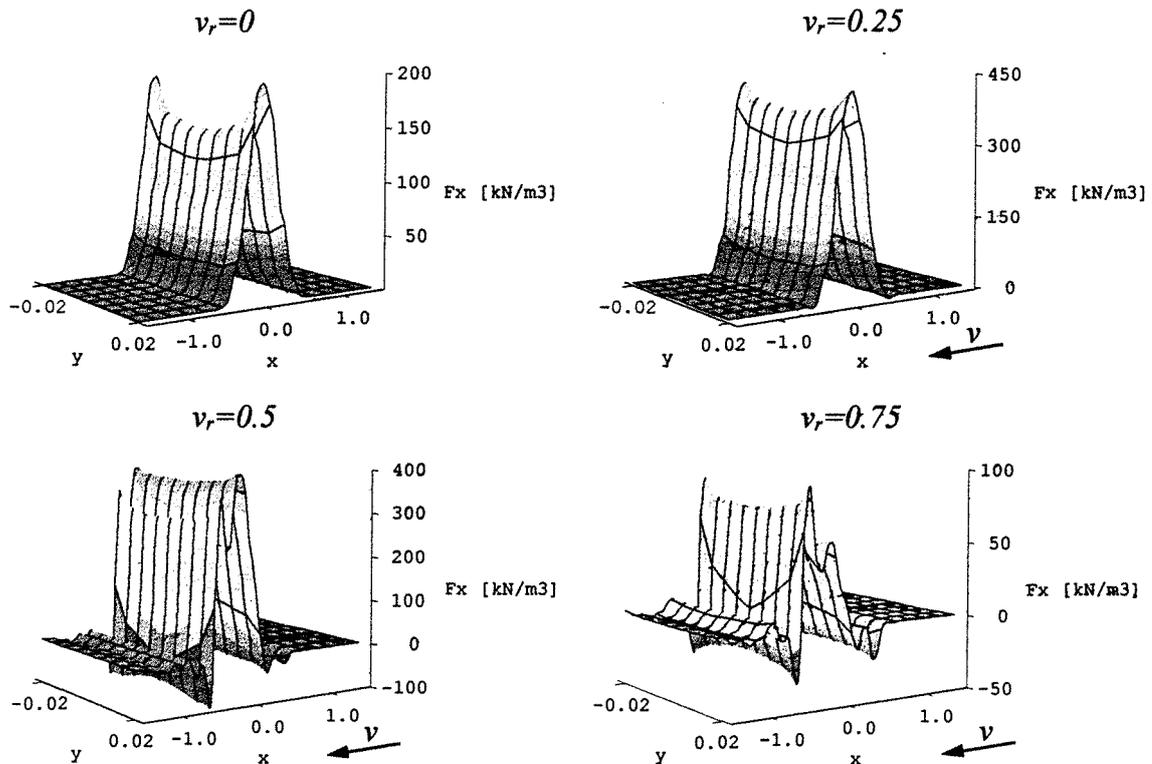


Fig. IV.13 : Champs de forces dans l'induit pour différentes valeurs de la vitesse relative.

On s'intéresse en fait au comportement global de la pompe sans rentrer dans les effets locaux des écoulements qui font l'objet d'études particulières en mécanique des fluides. On présente sur la figure (IV.14), l'évolution de la montée en pression $P(X)$ le long du canal pour quelques valeurs de la vitesse relative.

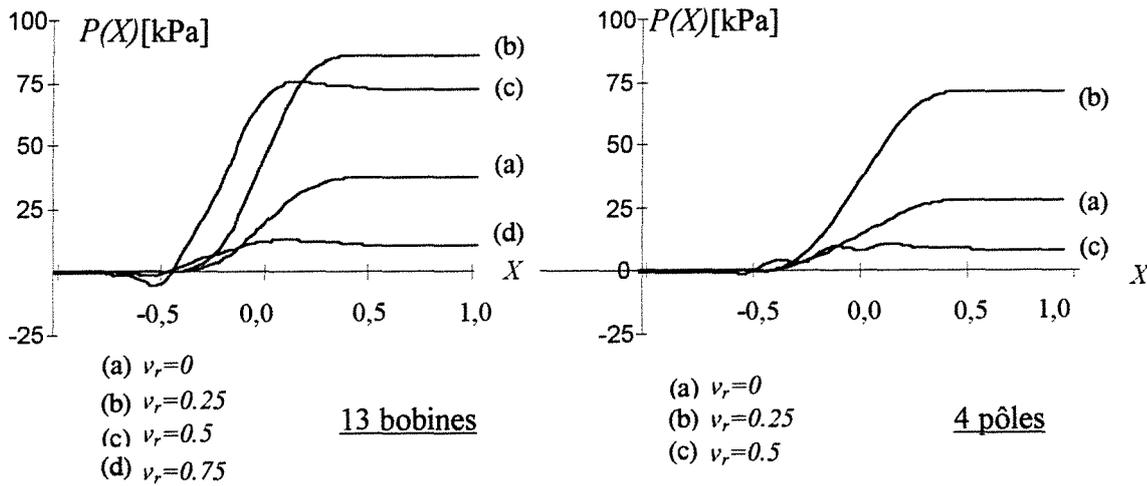


Fig. 14 : Graphe de $P(X)$ pour différentes valeurs de v_r (avant et après optimisation)

Remarquons simplement que pour $v_r=0.5$ et $v_r=0.75$, $P(X)$ n'est pas aussi régulier que dans le cas d'une vitesse nulle à cause de la présence de régions où la force F_x est négative. La montée en pression dans le cas de l'enroulement 4 pôles est représenté pour les mêmes vitesses à titre de comparaison. Pour $v_r=0.5$, on obtient un $P(X)$ relativement faible mais surtout non monotone à cause des fluctuations locales de la densité de forces $F_x(x,y)$.

Remarque

Pour s'assurer de la bonne coïncidence des calculs menés dans le domaine D_2 sans mouvement (chapitre II) et les présents calculs (dans l'induit en mouvement), nous comparons la valeur de la force, suivant la direction Ox , exercée sur l'induit. Dans le domaine D_2 , la force totale est évaluée en intégrant le tenseur de contraintes de Maxwell le long de la frontière du domaine (c'est à dire Γ_1) :

$$f_x = \int_{\Gamma_1} h_t b_n dx$$

Alors que dans l'induit, cette force est évaluée par intégration de la force volumique dans tout le domaine (c'est à dire D_1)

$$f_x = \iint_{induit} j_z b_y dx dy$$

Les résultats rassemblés dans le tableau suivant, montrent la concordance, aux erreurs numériques près, des deux modes de calcul.

v_r	$f_x = 2 \int_{\Gamma_l} h_t b_n \quad [\text{N}]$	$f_x = \iint_{\text{induit}} j_z b_y \quad [\text{N}]$	Erreur (en %)
0	74.6	75.3	0.94
0.25	171.3	171.2	0.06
0.50	144.8	144.9	0.07
0.75	21.4	21.3	0.47

Conclusion II

Nous avons développé une technique permettant de visualiser le champ de force par ses deux composantes F_x et F_y dans l'induit en mouvement en utilisant une projection sur la base de Hermite.

L'optimisation de la force totale agissant sur l'induit influe non seulement sur la valeur de la force mais aussi sur sa distribution. Par ailleurs, le mouvement de l'induit provoque un entraînement des lignes de force dans le sens du mouvement.

Les effets de la vitesse sont très prononcés lorsque celle-ci est grande et le fluide suffisamment conducteur. Néanmoins, les vitesses d'écoulement rencontrées dans les pompes électromagnétiques sont relativement faibles par rapport aux valeurs données dans l'exemple qui a servi simplement d'illustration.

III. Examen des courants induits

L'induit se déplace entre les deux inducteurs à une vitesse que l'on peut juger suffisante pour considérer que les constantes de temps thermiques sont grandes devant le temps de passage d'une couche du fluide entre les inducteurs. L'examen des courants induits sert

simplement d'observation qualitative des différents effets ; nous serons bref dans l'exposé de cette partie.

III.1. Technique de calcul

La technique de calcul de la distribution du potentiel vecteur et du champ dans l'induit permet la visualisation de la répartition des courants induits. En effet, la représentation complexe de la densité de courants induits est exprimée par :

$$\bar{J}(x,y) = \sigma [j\omega \bar{A}(x,y) + v \text{ grad } \bar{A}(x,y)] \quad (\text{IV.26})$$

L'utilisation de l'approximation des représentations complexes du potentiel vecteur et de l'induction (IV.9) conduit à une approximation analogue de la densité de courants induits sur des droites parallèles ($y = y_i$) :

$$\bar{J}(x,y_i) = \sigma \sum_{n=0}^N [j\omega \bar{\alpha}_n(y_i) + v \times \bar{\gamma}_m(y_i)] \psi_n(x) \quad (\text{IV.27})$$

Le tracé des isovaleurs de $|\bar{J}(x,y)|$ donnant la distribution des courants induits, peut être obtenu à partir de (IV.27).

L'exemple à 18 encoches précédemment décrit est à nouveau utilisé pour illustrer l'effet de l'optimisation sur la distribution des courants induits. On présente, ici, la portion de l'induit se trouvant dans le domaine $x \in [-1.5, 1.5]$ et $y \in [-0.02, 0.02]$ (§ II.3).

III.2. Influence de l'optimisation

Pour $v_r=0$, on représente sur la figure (IV.15) les isovaleurs de $|\bar{J}(x,y)|$ dans l'induit, dans le cas d'une alimentation classique à quatre pôles et le cas d'une alimentation en 18 courants optimisés. L'alimentation classique crée une densité de courants induits non régulière alors que l'alimentation optimale provoque une concentration des courants induits au centre de la machine ($x=0$) et rend plus régulière l'allure globale.

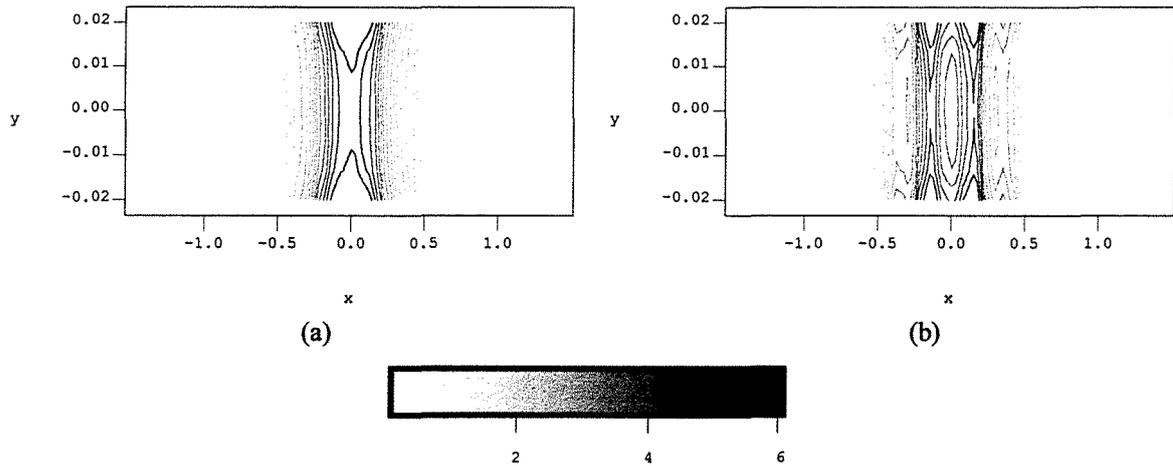


Fig. IV.1 : Isovaleurs de $|\bar{J}(x,y)|$ en $A.mm^{-2}$ dans l'induit (effet de l'optimisation).

(a) : Enroulement tétrapolaire $v_r=0$

(b) : Alimentation optimisée en 13 bobines $v_r=0$.

Influence de la vitesse

Comme nous l'avons vu lors de la présentation du champ de force, on voit sur la figure (IV.2) que les courants induits sont « entraînés » par le mouvement.

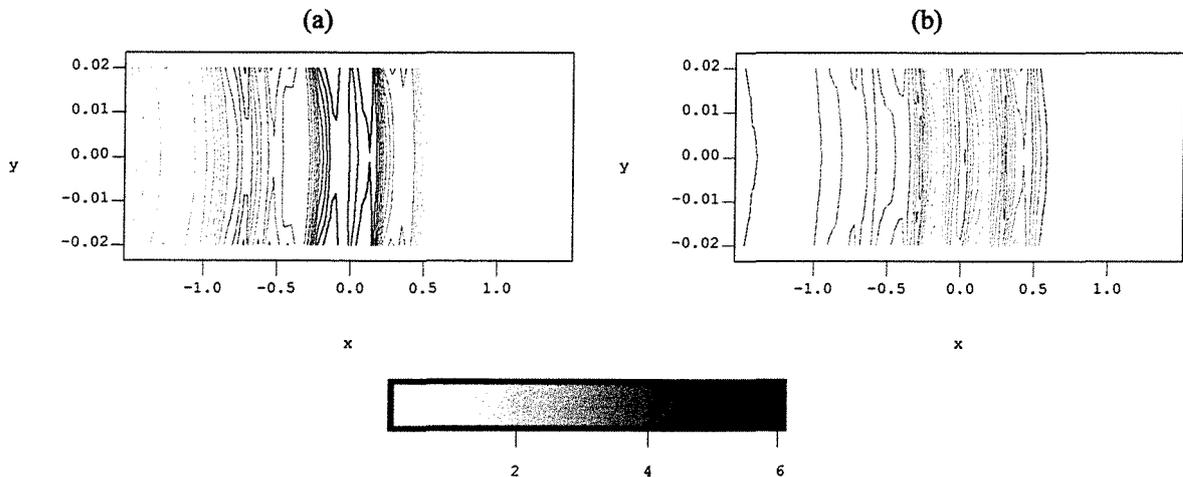


Fig. IV.2 : Isovaleurs de $|\bar{J}(x,y)|$ en $A.mm^{-2}$ dans l'induit (effet de la vitesse).

(a) : Enroulement 4 pôles optimisés $v_r=0.50$

(b) : Alimentation optimisée en 13 bobines $v_r=0.50$

Conclusion III

Le calcul des courants induits est intéressant parce qu'il permet de détecter les points chauds de l'induits lorsque la vitesse est très faible. Comme dans le cas de l'examen des champs de forces, l'optimisation de la poussée totale a régularisé la distribution des courants dans l'induit, avec des effets analogues, notamment l'entraînement par le mouvement de l'induit.

CONCLUSION GENERALE

La méthode de calcul établie dans ce travail permet de contourner les difficultés numériques engendrées lors du traitement par la méthode des éléments finis d'un induit en mouvement. Elle constitue ainsi, une nouvelle technique de prise en compte du mouvement qui conserve la totalité du spectre harmonique. Celui-ci étant continu et riche dans le cas des convertisseurs linéaires, il représente la différence principale avec le moteur asynchrone tournant où un seul harmonique est favorisé sur le spectre discret.

Le modèle infini apporte des solutions rapides aux problèmes de l'optimisation malgré les nombreuses hypothèses qu'il nécessite. Il donne une première idée sur le mode d'alimentation adéquat pour un fonctionnement donné.

Les enroulements à double couche semblent plus adaptés que les enroulements à simple couche pour les faibles vitesses. Néanmoins, la vitesse relative est imposée par l'ouverture des bobines qui imposent aussi la polarité du champ. L'alimentation à fréquence variable tout en imposant le rapport de la vitesse à la fréquence v/f constant permet d'obtenir des vitesses importantes à faible polarité. Par ailleurs, l'optimisation de la force de freinage a permis de mettre en évidence l'importance du freinage par courants de Foucault qui peut être exploité à l'avenir pour le freinage de trains à grandes vitesses.

De nombreux résultats ont été présentés dans ce travail ; toutefois, la diversité des paramètres intervenant dans le modèle, tant géométriques qu'électriques ($R_m, \delta / L, v_r$) conduit à une optimisation spécifique à chaque problème et à chaque critère.

Le tracé complet des lignes de champs confirme les conclusions prédites par le modèle infini ; elle montre que le nombre de pôles optimal dépend de la vitesse à laquelle doit fonctionner le convertisseur. L'examen des champs de forces montre que l'optimisation de la poussée régularise le champ de force. Les fluctuations locales de la densité de force sont affaiblies voire éliminées, ce qui peut éviter les tourbillons qui se produiraient si l'induit était un métal liquide. Néanmoins, beaucoup de travail reste à faire dans cette voie pour pouvoir coupler les effets électromagnétiques et hydrauliques qui se manifestent dans le métal liquide.

ANNEXES

Annexe A :**Polynômes et fonctions de Hermite****Définitions**

On définit les polynômes de Hermite comme une suite de polynômes de degrés successifs $0, 1, \dots, n$, orthogonaux par rapport la fonction « poids » e^{-x^2} ; c'est à dire :

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \delta_{n,m} \quad (\text{A.1})$$

où $\delta_{n,m}$ est le symbole de kronecker.

La formule de Rodrigues relative à cette suite de polynôme s'écrit :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}] \quad (\text{A.2})$$

Les polynômes de Hermite peuvent être aisément calculés grâce à la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= 2[x H_n(x) - n H_{n-1}(x)] \\ H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A partir de cette suite de polynômes, on construit, la suite de fonctions de Hermite $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots$ de la manière suivante :

$$\psi_n(x) = \frac{2^{1/4}}{2^{n/2} \sqrt{n!}} e^{-\pi x^2} H_n(x \sqrt{2\pi}) \quad (\text{A.4})$$

Propriétés :

Ces fonctions constituent une base orthonormée dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{n,m} \quad (\text{A.5})$$

Elles présentent aussi la propriété fondamentale d'être leurs propres transformées de Fourier (TF) [51].

$$\psi_n(x) \xrightarrow{TF} (-j)^n \psi_n(k) = \hat{\psi}_n(k) \quad (\text{A.6})$$

Nous avons par conséquent :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}_n(k) \hat{\psi}_m^*(k) dk = \delta_{n,m} \quad (\text{A.7})$$

Conséquences :

1) Toute fonction f appartenant à l'espace $L^2(\mathbb{R})$ peut être approchée par une suite de fonctions de Hermite :

$$f(x) = \sum_n \alpha_n \psi_n(x) \quad (\text{A.8})$$

$$\text{où : } \alpha_n = \int_{\mathbb{R}} f(x) \psi_n(x) dx$$

2) La TF de la fonction f admet comme approximation :

$$\hat{f}(k) = \sum_n \alpha_n \hat{\psi}_n(k) = \sum_n (-j)^n \alpha_n \psi_n(k) \quad (\text{A.9})$$

Cette propriété fait des fonctions de Hermite un outil convenable pour le traitement des problèmes physiques par la technique de la transformée de Fourier.

3) Soit g et f' deux autres fonction de $L^2(\mathbb{R})$ tel que :

$$f'(x) = g(x) f(x) \quad (\text{A.10})$$

$$\text{si : } f'(x) = \sum_n \beta_n \psi_n(x) \quad (\text{A.11})$$

l'équation (A.10) est projetée dans la base des fonction de Hermite :

$$\sum_k \beta_k \psi_k(x) = \sum_n g(x) \alpha_n \psi_n(x) \quad (\text{A.12})$$

En multipliant (A.12) par $\psi_m(x)$ et en l'intégrant sur \mathbb{R} ; on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_k \beta_k \psi_k(x) \psi_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \sum_n g(x) \alpha_n \psi_n(x) \psi_m(x) dx \quad (\text{A.13})$$

L'orthogonalité des fonctions de Hermite conduit à :

$$\beta_k = \sum_n \alpha_n \int_{\mathbb{R}} g(x) \psi_n(x) \psi_m(x) dx \quad (\text{A.14})$$

La relation entre f et f' devient donc une relation linéaire entre les coefficients de leurs approximations respectives dans la base des fonctions de Hermite.

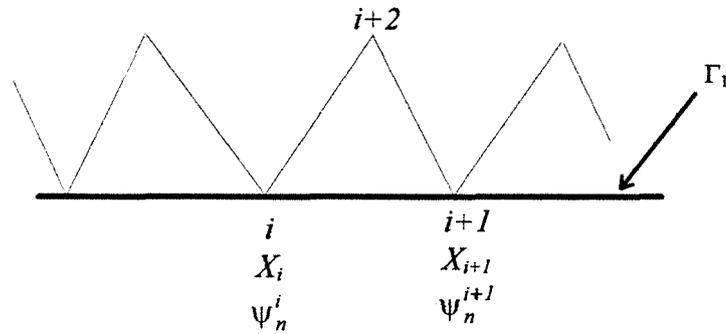
Annexe B :

Calcul des coefficients $\alpha(1)$ et $\alpha(2)$

Dans le chapitre II, nous sommes amenés à calculer le produit scalaire d'un champ $X(x, \alpha)$ connu d'une manière discrète avec les fonctions de Hermite sur le contour Γ . Nous avons donc à calculer :

$$\alpha_n = \int_{\Gamma_1} X(x, \alpha) \psi_n(x) dx \quad (\text{A.15})$$

Soit e un élément défini par les noeuds $i, i+1, i+2$; l'arête $i, i+1$ appartenant à la frontière Γ_1 . X_i, X_{i+1} , sont les valeurs du champ aux deux noeuds d'abscisse x_i, x_{i+1} . La fonction $\psi_n(x)$ vaut respectivement ψ_n^i et ψ_n^{i+1} pour ces deux valeurs de x .



Le champ $X(x, y)$ est linéaire sur chaque élément du maillage ; il s'écrit sous la forme :

$$X(x, y) = \chi_e x + \kappa_e y + \rho$$

Le champ X varie linéairement sur l'arête $i, i+1$; il s'écrit :

$$X_e(x, \alpha) = \chi_e (x - x_i) + \kappa_e y_i + X_i \quad (\text{A.16})$$

avec
$$\chi_e = \frac{X_{i+1} - X_i}{x_{i+1} - x_i}$$

On admet également que la fonction $\psi_n(x)$ varie linéairement sur chaque arête de la frontière Γ ; elle est approchée par :

$$\psi_n^e(x) = \lambda_e (x - x_i) + \psi_n^i \quad (\text{A.17})$$

avec
$$\lambda_e = \frac{\psi_n^{i+1} - \psi_n^i}{x_{i+1} - x_i}$$

Dans ces conditions l'intégrale sur l'arête concernée est évaluée en fonction des valeurs aux noeuds :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} X(x, a) \psi_n(x) dx \approx \frac{\lambda_e \chi_e}{3} \Delta x_e^3 + \frac{\chi_e \psi_n' + \lambda_e U_i}{2} \Delta x_e^2 + (U_i + \kappa_e y_i) \psi_n' \Delta x_e \quad (\text{A.18})$$

avec $\Delta x_e = x_{i+1} - x_i$

l'intégrale complète est alors :

$$\alpha_n = \sum_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} X(x, a) \psi_n(x) dx \quad (\text{A.19})$$

Cette intégrale aurait pu être calculée en utilisant les relations de récurrence des fonctions de Hermite mais les maillage utilisés sont suffisamment fins pour que l'approximation linéaire admise donne une valeurs acceptable de l'intégrale.

Annexe C :**Remarques générales sur l'utilisation des fonctions de Hermite dans le cas du modèle fini****Adaptation des échelles :**

Pour des commodités informatiques, les calculs numériques sont effectués d'une manière adimensionnelle. On définit une longueur L caractéristique que l'on prend égale à la longueur de l'armature inductrice ; toutes les autres variables (x,y) sont définies par rapport à cette longueur caractéristique.

$$x = \frac{x'}{L} ; y = \frac{y'}{L}$$

x et y sont les variables adimensionnelles « réduites » et x' et y' sont les grandeurs réelles. L'armature inductrice aura donc une longueur réduite $l=1$ et s'étendra de $[x=-0.5$ à $x=0.5]$. Cette démarche nécessite une reformulation de toutes les équations présentées aux chapitres II et IV avec les grandeurs réduites.

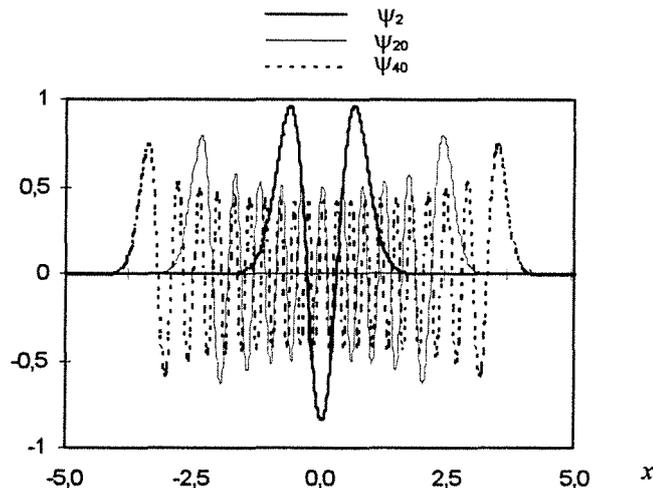


Fig. 2 : Allure des fonctions de Hermite

Les fonctions de Hermite sont définies sur le corps des réels ; elle s'atténuent rapidement en fonction de x en formant une bande (en accordéon) dont la largeur est croissante lorsque le rang n croît (Fig. 2). La dernière fonction utilisée ($n=60$) forme une bande qui s'étend de $x \approx -5$ à $x \approx 5$. Le spectre du potentiel vecteur et de sa dérivée normale allant au delà de ces limites, une dilatation de l'espace des fonctions de Hermite est nécessaire pour englober la totalité de ces spectres. La dilatation ne doit pas être trop importante, auquel cas, les fluctuations locales du champ ne seraient pas prises en compte. Elle ne doit pas être non plus trop petite car que le domaine couvert par la base de Hermite serait trop étroit.

Choix du rang de l'approximation

La méthode développée dans le chapitre II et qui utilise une projection sur la base de Hermite du problème complet, nécessite un traitement spécifique relatif aux fonctions de Hermite. La précision de calcul numérique nous permet d'atteindre le rang $n=60$ des fonctions de Hermite qui est suffisant pour approcher les différentes grandeurs électromagnétiques utilisées dans la modélisation du moteur linéaire. En effet, une fonction *lentement* variable présente une transformée de Fourier qui s'atténue rapidement. Son approximation peut être effectuée en considérant un rang n peu élevé des fonctions de Hermite. Au contraire, une fonction qui varie *rapidement* présente un large spectre de Fourier, nécessitant ainsi un rang d'approximation élevé. Les fonctions qui décrivent le potentiel vecteur et sa dérivée normale sur la frontière Γ_1 étant lentement variables, les approximations qui sont effectuées avec les 60 premières fonctions de Hermite sont satisfaisantes.

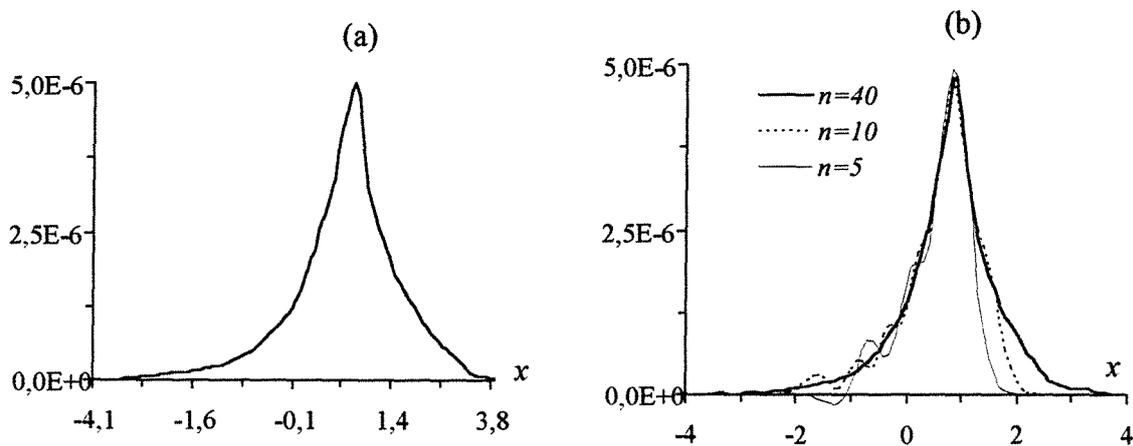


Fig. 1 : Potentiel vecteur sur la frontière Γ_1 avec $\bar{J}_1 = 1$ et $\Delta\bar{A} = 0$ dans D_2 .

a- solution du calcul par éléments finis

b- approximation dans la base de Hermite pour 3 valeurs du rang n

Pour illustrer cette remarque, nous prenons une situation très défavorable qui correspond à une seule encoche alimentée se trouvant à l'extrémité. La figure (1-a) montre l'allure du potentiel vecteur réel obtenu sur la frontière Γ_1 par un calcul en éléments finis dans cette condition. Son approximation est représentée dans la figure (1-b) pour trois valeurs du rang n . On voit bien que l'on atteint une bonne précision avec un rang $n=40$. Les courbes donnant la solution réelle et son approximation ne sont pas représentées sur la même figure parce que l'approximation avec $n=40$ coïncide avec la solution réelle.

REFERENCES
BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] - G. W. McLean
Review of recent progress in linear induction motors
IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. B, No. 6, November 1988.
- [2] - M. Kant, R. Bonnefille
Moteur linéaire à induction
Techniques de l'ingénieur D551
- [3] - J. F. Gieras
linear induction drives
Clarendon Press-Oxford 1994
- [4] - J. F. Eastham, E. R. Laithwaite
Linear motor topology
IEE Proceedings, Power, Vol. 120, No. 3, pp. 337-343, March 1973.
- [5] - J. Ancel, A. Faure
Variantes d'exécution du moteur linéaire à induction suivant les applications
R.G.E., tome 80, No. 2, pp. 135-137, Février 1971.
- [6] - D. A. Watt
Electromagnetic pump for liquid metal
ENGINEERING, pp. 264-268, April 27, 1956.
- [7] - A. Einstein, L. Szilard
Pump, especially for refrigerating machines
U. K. Patent. Spec. 344,881 1931.
- [8] - B. M. Childs
Electromagnetic pump and flowmeters for fast-reactor development
GEC journal of science and technology, Vol. 40, No. 1, pp.10-16,1973.
- [9] - Y. Machefert-Tassin
Propulsion électrique à grande vitesse
Sur quelques mythes liés à l'utilisation des moteurs linéaires en traction
à grande vitesse
R.G.E., tome 84, No. 2, pp. 91-101, Février 1975.
- [10] - Y. Pelenc, E. Rémy
Les aspects prospectifs du moteur linéaire
R.G.E., tome 80, No. 2, pp. 138-142, Février 1971.
- [11] - A. Panaitescu
Linear induction motor for high speed trains
International Journal of Electromagnetics in Materials 2, pp. 345-352, 1992.

- [34] - K. V. Namjoshi, P. P. Biringer
Fourier analysis of linear induction pumps with concentric windings and infinite arrays
Proceedings of the ICEM Pt. 1, pp. 109-116, Greece September 1980.
- [35] - G. Touzot, G. Dhatt. Durand
Une présentation matricielle de la méthode des éléments finis
2^{ème} édition. Maloine éditeur 1984
- [36] - K. Baba, M. Tabata
On a conservative upwind finite element scheme for convective diffusion equations
R.A.I.R.O., Vol. 15, No. 1, pp. 3-25, 1981.
- [37] - J. J. Westerink, D. Shea
Consistent higher degree Petrov-Galerkin methods for the solution of the transient convection-diffusion
International Journal for Numerical Methods in Engineering,
Vol. 28, pp. 1077-1101, 1989.
- [38] G. Vinsard
Modélisation de l'électromagnétisme et des transferts thermiques couplés dans le cadre du chauffage par induction - Application à la simulation d'un procédé industriel.
Thèse Doctorat de l'INPL 1990
- [39] - S. Y. Hahn, J. Bigeon, J. C. Sabonnadière
An 'UpWind' finite element method for electromagnetic field problems in moving media
International Journal for Numerical Methods in Engineering,
Vol. 24, pp. 2071-2085, 1987.
- [40] - C., C. Yu, J. C. Heinrich
Petrov-Galerkin method for multidimensional, time-dependent, convective-diffusion equations
International journal for numerical method in engineering, Vol. 24,
pp. 2201-2215, 1987.
- [41] - J. R. Cardoso, P. A. Benites
Finite element method with BiCG solver applied to moving linear induction motor
IEEE Transaction on magnetics, Vol. 31, No. 3, pp. 1888-1891, May 1995
- [42] F. Huang
Etude des problèmes d'électrotechnique par la méthode des intégrales de frontières.
Thèse de Doctorat de l'INPL 1988
- [43] - B. Laporte, N. Takorabet, G. Vinsard
The optimal supply of linear induction motors
The seventh biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation
CEFC'96, Okayama-Japan, March 18-20 1996.

- [44] - B. Laporte
Flux du Lagrangien du champ électromagnétique et son utilisation pour
un bilan local de l'énergie réactive
Cr. Acad. Sciences t.276, pp. 929
- [45] - B. Laporte
Cours d'électrotechnique 3^{ème} année ENSEM (non publié)
- [46] - B. Laporte, N. Takorabet, G. Vinsard
Optimisation d'un frein électromagnétique linéaire à induction
Journées Européennes du freinage JEF'95.
Lille - France, pp.69-78, 12-13 décembre 1995.
- [47] - M. Fujita, T. Tokumasu, T. Yamada, T. Ooyama
3D Electromagnetic Analysis of an Eddy-Current Rail Brake System
The seventh biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation
CEFC'96, Okayama - Japan, March 18-20 1996.
- [48] - N. Takorabet, B. Laporte, G. Vinsard
About the optimal design of linear induction devices
Proceedings on the ICEM Pt. 3, pp. 57-62, Vigo - Spain, September 1996.
- [49] - J. Raison
Le freinage du TGV nouvelle génération
Journées Européennes du freinage JEF'95.
Lille - France, 12-13 décembre 1995.
- [50] - L. Landau, E. Lifchitz
Electrodynamique des milieux continus
Physique théorique Tome VIII
Edition mir. Moscou 1969
- [51] - Arzac
Transformation de Fourier et théorie des distributions
Dunod Paris 1961
- [52] - G. Vinsard, B. Laporte, N. Takorabet, J. P. Brancher
Computation of the magnetic braking of liquid metal in the air gap
of a linear motor.
Séminaire France - Japon Procédés électromagnétiques d'élaboration
des matériaux.
Grenoble - France, 25-28 juin 1996.
- [53] - Y. Gallo, L. Umbert, Y. Ravalard
Une approche numérique et expérimentale du crissement des systèmes de freinage
Journées Européennes du freinage JEF'95.
Lille - France, pp.201-212, 12-13 décembre 1995.

**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

**Monsieur KANT Michel, Professeur, Université de Technologie de Compiègne,
Monsieur RIALLAND Jean-François, CNAM Paris.**

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur TAKORABET Noureddine

à soutenir devant l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

**"Optimisation de l'alimentation des convertisseurs électromécaniques
linéaires à induction."**

en vue de l'obtention du titre de :

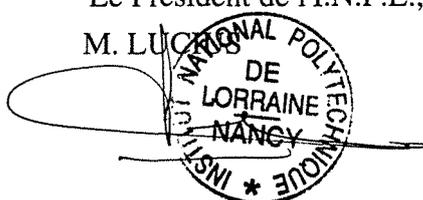
**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE
LORRAINE**

Spécialité : **"GENIE ELECTRIQUE"**

Fait à Vandoeuvre le, **5 Décembre 1996**

Le Président de l'I.N.P.L.,

M. LUCIANO



Service Commun de la Documentation
INPL
Nancy-Brabois

NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 5 4 5 0 1
VANDOEUVRE CEDEX

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude des convertisseurs électromécaniques linéaires à induction que l'on peut rencontrer dans la traction ou dans le pompage électromagnétique des métaux liquides. L'adéquation de l'alimentation électrique des convertisseurs linéaires à un effet recherché (pompage, traction ou freinage) est essentielle. Un modèle suffisamment rapide pour se prêter à l'optimisation vis-à-vis de différents critères est développé. La difficulté principale de la modélisation par la méthode des éléments finis réside dans le mouvement de l'induit. Cette difficulté est contournée en introduisant une condition aux limites particulière sur la surface de l'induit (convolution entre le potentiel vecteur et sa dérivée normale), ce qui permet de restreindre les parties numériques de la résolution au domaine fixe. Le modèle est utilisé pour la recherche de des alimentations qui optimisent le rendement, la poussée ou bien la force de freinage. On a pu ainsi concevoir des enroulements spécifiques, pour différents modes de fonctionnement et à différentes vitesses, qui autorisent un gain appréciable sur le rendement ou sur la poussée ramenée aux pertes Joule dans l'inducteur. On a aussi analysé les différents champs de force dans l'induit avant et après optimisation.

Mots-clés

Moteur linéaire ; Pompe électromagnétique
Optimisation ; Enroulements
Eléments finis, méthode des