

Méthode asymptotique numérique pour le calcul des bifurcations : application aux structures élastiques

El-Hassan Boutyour

▶ **To cite this version:**

El-Hassan Boutyour. Méthode asymptotique numérique pour le calcul des bifurcations : application aux structures élastiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ035S . tel-01776723

HAL Id: tel-01776723
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776723

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

B 81609

S/Mz 94/68

INSTITUT SUPÉRIEUR DE GÉNIE MÉCANIQUE ET PRODUCTIQUE
UNIVERSITÉ DE METZ

THÈSE

présentée à l'UNIVERSITÉ de METZ par

EL-HASSAN BOUTYOUR

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
METZ
N° inv. 19941055
Cote S/Mz 94/35
Loc Magasin

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR en MÉCANIQUE

MÉTHODE ASYMPTOTIQUE-NUMÉRIQUE POUR LE CALCUL DES BIFURCATIONS: APPLICATION AUX STRUCTURES ÉLASTIQUES

à soutenir le 20 Septembre 1994 devant le Jury composé de:

J. M. BERGHEAU	Examinateur
B. COCHELIN	Examinateur
F. CONRAD	Rapporteur
G. DHATT	Rapporteur
M. POTIER-FERRY	Directeur de Thèse

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux U. R. A. CNRS. 1215
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux de l'Université de METZ sous la direction de **Michel Potier-Ferry** et sous l'encadrement de **Bruno Cochelin**.

Je tiens à remercier **Michel Potier-Ferry** pour avoir accepté de diriger cette thèse avec un esprit ouvert et beaucoup de passions pour la recherche scientifique.

Je remercie **Bruno Cochelin** pour avoir accepté d'encadrer cette thèse avec rigueur, compétence et une organisation exemplaire ce qui a beaucoup optimisé le temps de ce travail.

Monsieur **Francis Conrad** et Monsieur **Gouri Dhatt** ont accepté la charge que présente l'examen de ce travail, qu'il me soit permis de leur témoigner mes plus sincères remerciements.

J'exprime mes remerciements à Monsieur **Jean Michel Bergheau** de Framasoft qui a accepté de participer à ce jury

Je remercie tous mes amis du LPMM qui m'ont aidé et soutenu durant ces trois années, je pense notamment à *A. Naddari, M. Hadda* et *V. Gueydan.*

Enfin je remercie, *ma mère, mes frères, toute ma famille, mes amis intimes et mes enseignants du lycée Ibn El Khatib (Salé) qui ont bien marqué ma personnalité.*

LISTE DES NOTATIONS UTILISÉES

L	Opérateur linéaire auto-adjoint
Q	Opérateur quadratique
λ	Paramètre de charge
λ_c	Charge critique
$\mathbf{F}$	Chargement appliqué
$\mathbf{f}$	Force de perturbation
$\Delta\mu$	Intensité de la perturbation
$\mathbf{S}$	Second tenseur de contraintes de Piola-kirchoff
$\mathbf{U} = (u_1, u_2, w, s_{11}, s_{12}, s_{22})$	Vecteur mixte (déplacements et contraintes)
$\mathbf{u} = (u_1, u_2, w)$	Vecteur déplacement
$(\mathbf{U}_r, \lambda_r)$	Point régulier
$(\mathbf{U}_c, \lambda_c)$	Point singulier
$\Delta\mathbf{U}$	Réponse à la perturbation (vecteur mixte)
$\Delta\mathbf{u}$	Réponse à la perturbation en déplacement
Φ	Mode de flambage (vecteur mixte)
ϕ	Mode de flambage (vecteur déplacement)
$\{\mathbf{v}\}$	Vecteur déplacement nodal
γ	Tenseur de déformation de Green-Lagrange
γ^l, γ^{nl}	Partie linéaire et partie non-linéaire de γ
HR	Fonctionnelle mixte d'Hellinger-Reissner
δHR	Variation de HR
P	Fonctionnelle énergie potentielle
δP	Variation de P
δ^2P	Seconde variation de P
$[K]$	Matrice de rigidité totale
$[K_g]$	Matrice de rigidité géométrique
$[K_t]$	Matrice de rigidité tangente
L_t°	Opérateur tangent en un point quelconque
L_t^c	Opérateur tangent en un point singulier
$\mathbf{U}_p$	Coefficient de la série vectorielle $\mathbf{U}$
$\mathbf{u}_p$	Coefficient de la série vectorielle $\mathbf{u}$
$\{\mathbf{v}_p\}$	Coefficients de la série vectorielle $\{\mathbf{v}\}$
$\Delta\mathbf{U}_p$	Coefficient de la série vectorielle $\Delta\mathbf{U}$
$\Delta\mathbf{u}_p$	Coefficient de la série vectorielle $\Delta\mathbf{u}$
λ_p	Coefficient de la série scalaire λ
$\Delta\mu_p$	Coefficient de la série scalaire $\Delta\mu$
$\{\mathbf{F}_p\}$	Vecteur linéaire du second membre à l'ordre p

$\{F_p^{nl}\}$	Vecteur non-linéaire du second membre à l'ordre p
τ	Paramètre qui mesure l'intensité du défaut
Ω_0	Domaine de référence
M.A.N	Méthode Asymptotique Numérique

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

I) GENERALITES SUR LA THEORIE DE LA BIFURCATION

I-1) Notion de stabilité élastique
I-2) Formulation des problèmes d'équilibre en non-linéaire géométrique
I-3) Points réguliers et points singuliers
I-4) Caractérisation des points limites et des points de bifurcation
I-5) Calcul des tangentes en un point singulier
  I-5-a) Point de bifurcation
  I-5-b) Point limite
I-6) Exemples élémentaires d'illustration de points singuliers
  I-6-a) Présentation de la notion de points limites sur un modèle simple

  I-6-b) Présentation d'un point de bifurcation sur un modèle à un degré de liberté

  I-6-c) Système à deux degrés de liberté
I-7) Méthodes incrémentales-itératives de résolution du problème de bifurcation
  I-7-a) Calcul de branches de solution
  I-7-b) Méthodes de calcul de points de bifurcation
  I-7-c) Branchement sur les solutions bifurquées
I-8) Bifurcation perturbée

II) MÉTHODE ASYMPTOTIQUE NUMÉRIQUE POUR LE CALCUL DES BRANCHES DE SOLUTIONS

II-1) Les concepts de base de la méthode asymptotique-numérique
II-2) Résolution numérique
II-3) Exemples de calcul d'une branche de solution non-linéaire
II-4) Méthode de continuation
II-5) Calcul du post-flambage par la méthode asymptotique-numérique
II-6) Amélioration des séries entières par des approximants de Padé
II-7) Méthode asymptotique-numérique pour les structures imparfaites

II-8) Conclusion

III) DÉTECTION D'UN POINT DE BIFURCATION SUR UNE BRANCHE LINÉAIRE

III-1) Modèles mécaniques simples

III-1-a) Modèle à un degré de liberté

III-1-b) Modèle à deux degrés de liberté

III-2) Extension de la méthode à des structures plus complexes présentant un pré-flambage linéaire

III-2-a) Cadre de l'étude

III-2-b) Introduction d'une perturbation

III–3) Calcul de la solution perturbée (ΔU, $\Delta\mu$) par une méthode asymptotique-numérique

III-3-a) Introduction des développements en série entière

III-3-b) Retour à une formulation en déplacement

III-3-c) Discrétisation par éléments finis

III-3-d) Analogie avec les problèmes aux valeurs propres

III-3-e) Solution exacte du problème d'équilibre perturbé

III-3-f) Application de la méthode au problème d'une plaque carrée

III-4) Amélioration des séries à l'aide des approximants de Padé

III-4-a) Approximants de Padé sur la série entière $\Delta\mu(\lambda)$

III-4-b) Approximants de Padé sur la série vectorielle $\Delta U(\lambda)$

III-4-c) Applications

III-4-c-1) Perturbation centrée

III-4-c-2) Perturbation quelconque

III-4-c-3) Perturbation orthogonale à un mode

III-5) Conclusion

III-6) Calcul de points de bifurcation avec deux perturbations

III-6-a) Formulation du problème avec deux perturbations et caractérisation du point de bifurcation

III-6-b) Calcul de la solution perturbée (ΔU, $\Delta\mu_1$, $\Delta\mu_2$) par la méthode asymptotique-numérique

III-6-b-1) Introduction des développements en série entière

III-6-b-2) Exemple d'application

III-6-c) Amélioration des séries à l'aide des approximants de Padé

III-6-d) Conclusion

IV) DETECTION D'UN POINT DE BIFURCATION SUR UNE BRANCHE NON-LINEAIRE ET CALCUL DE BRANCHES BIFURQUEES

IV-1) Calcul de points de bifurcation sur une branche non-linéaire
IV-1-a) Formulation du problème d'équilibre perturbé
IV-1-b) Calcul de la solution perturbée (ΔU, $\Delta\mu$) par la méthode asymptotique-numérique

IV-1-c) Retour à une formulation en déplacement et discrétisation par éléments finis

IV-1-d) Solution exacte du problème d'équilibre perturbé
IV-1-e) Exemple d'application
IV-1-f) Conclusion
IV-2) Calcul de branches bifurquées en présence de préflambage non-linéaire

IV-2-a) Développement de la méthode asymptotique pour le calcul du post-flambage et formulation du problème aux tangentes

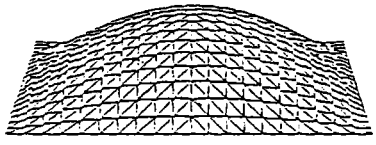
IV-2-b) Calcul des vecteurs $\mathbf{U}_p$ et des coefficients λ_p pour $\mathbf{p \geq 2}$
IV-2-c) Formulation en déplacement
IV-2-d) Résolution par éléments finis et relaxation
IV-2-e) Exemple d'application
IV-2-f) Conclusion

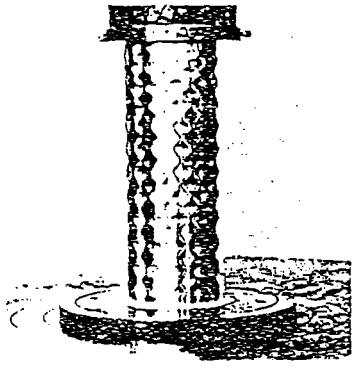
CONCLUSION

RÉFÉRENCES

INTRODUCTION

La bifurcation et le flambage sont des phénomènes d'instabilité très courants en mécanique des structures, qui apparaissent lorsque le chargement atteint une valeur critique. Ils peuvent être accompagnés soit de déformations importantes, soit de la ruine de la structure (voir Figure-a et b).





a: Flambage d'une plaque *b: Flambage d'une coque cylindrique*

Pour des raisons de sécurité il est nécessaire de disposer de moyens qui permettent de prévoir la charge au-delà de laquelle la structure peut flamber. L'un des premiers auteurs à ouvrir la voie de l'étude de la stabilité est Euler en 1744 sur le problème d'une poutre soumise à un effort de compression. Depuis, un certain nombre de travaux théoriques, expérimentaux et numériques ont été réalisés pour l'analyse du flambement et du post-flambement des structures minces, Koiter(1945), Yamaki(1984), Bushnell(1985), Potier-Ferry(1978; 1987), Batoz, Dhatt, Fafard(1985), Arbocz(1987), Dubas(1987). Cela est dû d'une part à la forte utilisation de ce type de structures dans les domaines nucléaires, aéronautiques, aérospatiaux et constructions civile, et d'autre part, au progrès accru des procédures numériques (algorithmes et matériel informatique sophistiqué).

Du point de vue pratique, on distingue plusieurs façons de calculer la charge maximum supportable par une structure. Dans certains cas on peut se contenter de déterminer le premier point de bifurcation sur la branche fondamentale. Si de plus cette branche est linéaire, on est ramené à résoudre un très classique problème aux valeurs propres (Figure-c). Dans d'autres cas on se doit de déterminer le point minimum sur une branche d'équilibre bifurquée (Figure-d). Il faut alors disposer d'algorithmes pour suivre les

branches d'équilibre, pour détecter les points de bifurcation et pour tourner sur les branches bifurquées

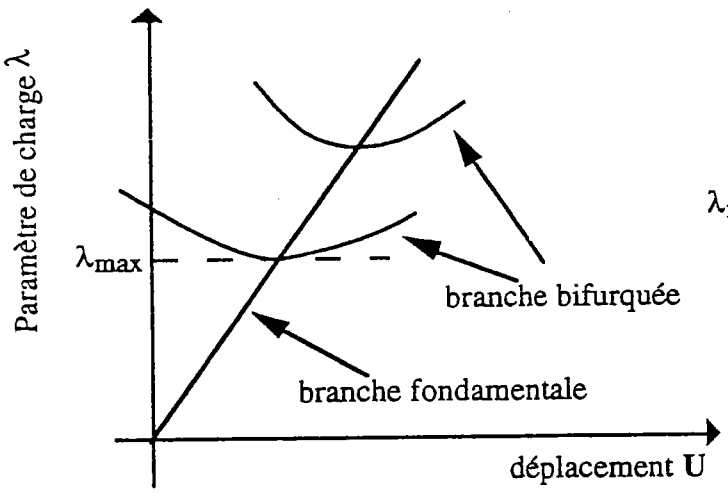


Figure-c

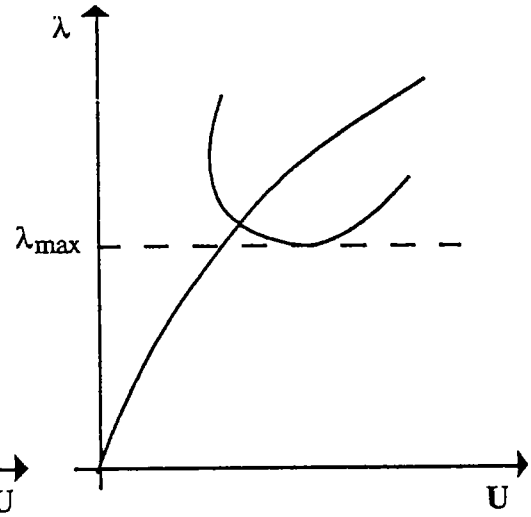


Figure-d

Toutes ces techniques ont été discutées dans le cadre des méthodes incrémentales itératives de type Newton-Raphson par Keller(1977), Riks(1979, 1984), Ramm(1981), Wagner et Wriggers(1988), Wriggers et Simo(1990), Wriggers et al (1988), Kouhia et Mikkola(1989). Il faut noter que les temps de calcul peuvent être très importants et que l'automatisation du suivi de courbe est un problème délicat.

Depuis 1990 (Damil et Potier-Ferry; 1990) une famille de méthodes asymptotiques-numériques a été développée au laboratoire pour le calcul des branches d'équilibre des structures élastiques. Le principe général consiste à déterminer des représentations analytiques sous forme de séries entières des branches de solutions. Il a été montré que ces méthodes sont plus rapides et plus robustes que les techniques incrémentales-itératives, tout en étant beaucoup plus faciles à utiliser.

L'objectif de ce travail de thèse est de développer des algorithmes de détection des bifurcations dans le cadre de ces méthodes asymptotiques-numériques.

Ce document est composé de quatre chapitres.

Le premier chapitre fait l'objet d'une étude bibliographique dans laquelle on rappelle brièvement les généralités de la théorie de bifurcation. On introduit les notions de branche fondamentale, de branche bifurquée et de points singuliers avec leurs différentes caractérisations (point limite et point de bifurcation). On rappelle aussi les travaux numériques les plus récents de calcul de point de bifurcation réalisés dans le cadre des méthodes incrémentale-itératives.

Au chapitre 2 on rappelle les concepts de base des méthodes asymptotiques-numériques et leurs applications au calcul des branches de solutions (fondamentales et bifurquées) pour des structures minces de type plaques, coques et poutres.

Au chapitre 3 on développe une variante de la méthode asymptotique-numérique pour le calcul de points de bifurcation sur une branche linéaire. On introduit un problème d'équilibre perturbé qui permettra de définir un indicateur de bifurcation bien adapté aux développements asymptotiques. Cet indicateur sera appelé "rigidité " car il mesure la rigidité de la structure par rapport à une certaine direction. Comme dans les travaux réalisés auparavant, on doit résoudre une série de problèmes linéaires admettant le même opérateur. On discute l'amélioration de la représentation polynomiale à l'aide des approximants de Padé. On applique la méthode à l'exemple d'une plaque carrée sous compression. Enfin, on définit un indicateur de bifurcation plus général relatif à plusieurs perturbations, qui cette fois mesurera la rigidité de la structure par rapport à plusieurs directions données.

Au chapitre 4, on étend la méthode de calcul de points de bifurcation développée au chapitre 3 au calcul de points de bifurcation sur une branche non-linéaire. On présente aussi une méthode de calcul de branches bifurqueés pour les structures présentant un préflambage non-linéaire. Le problème du calcul des différentes tangentes au point de bifurcation est discuté. Enfin on présente une application sur un arc circulaire.

I) GENERALITES SUR LA THEORIE DE BIFURCATION

Ce chapitre a pour objectif de rappeler quelques idées générales relatives à la théorie de la bifurcation. Pour les structures élastiques, l'étude de la bifurcation est étroitement liée au problème de la stabilité. On a tenu à préciser cette notion dès le début. Ensuite, on rappelle les équations qui régissent l'équilibre des structures élastiques et on précise les notions de branche d'équilibre, de point régulier, de point singulier avec une classification des divers points singuliers: points limites , points de bifurcation. Dans toute cette partie on s'appuiera sur des formulations mixtes de type Hellinger-Reissner qui sont mieux adaptées aux développements asymptotiques utilisés par la suite, que les formulations en déplacements. Des exemples de branches d'équilibre avec un point limite ou un point de bifurcation sont présentés à titre d'illustration sur des modèles élémentaires. On termine enfin ce chapitre par un rappel sur les méthodes numériques utilisées pour calculer les branches , pour détecter le point de bifurcation, et pour tourner sur les branches bifurquées.

I-1) Notion de la stabilité élastique

Pour la plupart des problèmes de l'ingénieur, la stabilité de l'équilibre d'une structure élastique soumise à un chargement conservatif est analysée par la méthode de l'énergie. L'avantage considérable de l'usage de cette méthode réside dans son caractère purement statique. Bien que la stabilité soit une notion dynamique, l'approche énergétique associée à une discrétisation numérique réduit généralement le problème à l'analyse spectrale de l'opérateur de l'élasticité linéarisée au voisinage de la configuration dont on étudie la stabilité. On ne considérera que les systèmes conservatifs, ce qui est suffisant pour la plupart des applications. Les états d'équilibre sont alors les points stationnaires de l'énergie potentielle P, supposée comme fonctionnelle dérivable autant de fois que l'on veut.

$$\delta P = P'(\mathbf{u}).\delta\mathbf{u} = 0 \qquad \forall\ \delta\mathbf{u} \text{ déplacement admissible} \qquad \text{(I-1)}$$

où P' est la dérivée de Frechet de P par rapport au déplacement **u** dans la direction de $\delta\mathbf{u}$. Le critère de stabilité le plus naturel d'un équilibre est le principe du minimum de l'énergie qui affirme qu'un état d'équilibre $\mathbf{u}_0$ est stable s'il réalise un minimum local de l'énergie potentielle:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tq} \quad 0 < \|\mathbf{u} - \mathbf{u_0}\| \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; P(\mathbf{u}) > P(\mathbf{u_0}) \qquad \text{(I-2)}$$

Mais ce critère de stabilité est d'un emploi peu commode, puisqu'il dépend de la topologie choisie et ne peut être défini que par rapport à une certaine norme. C'est pourquoi le critère pratique de la stabilité est le critère de la seconde variation de l'énergie potentielle. Selon ce critère, un équilibre $\mathbf{u_0}$ est dit stable si la seconde variation de l'énergie potentielle autour de l'équilibre est une forme quadratique définie positive:

$$\delta^2 P = \frac{1}{2} D_u^2 P(\mathbf{u_0})(\delta \mathbf{u})^2 > 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \neq 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{u_0} \text{ est stable} \qquad \text{(I-3)}$$

Si la seconde variation de l'énergie potentielle est positive, mais pas définie positive, on parle alors de l'équilibre indifférent dont la stabilité est définie par les premières dérivées non nulles d'ordre supérieur à 2.

I-2) Formulation des problèmes d'équilibre en non-linéaire géométrique.

L'objectif de ce paragraphe est de rappeler les équations qui régissent l'équilibre des structures élastiques minces avec des non-linéarités géométriques. Pour des questions de simplicité et de généralité, on adopte les équations de l'élasticité 3D non-linéaire. Pour les problèmes de poutres, de plaques et de coques, il suffit d'utiliser les équations correspondantes. Plusieurs formulations du problème d'équilibre peuvent être utilisées selon d'une part le choix des inconnues, d'autre part le choix entre une écriture locale du problème ou une forme variationnelle. On détaillera ici: une formulation classique en déplacement dans le cadre de laquelle la plupart des travaux théoriques et numériques ont été écrits, une formulation mixte d'intérêt majeur pour l'utilisation de développements asymptotiques et enfin une formulation discrète associée à la méthode d'éléments finis.

-Cadre de l'étude.

On considère une structure élastique linéaire occupant dans l'état naturel un volume de référence Ω_0(un ouvert borné de $\mathbf{R}_3$), de frontière $\partial\Omega_0$. Cette structure est attachée sur une partie $\partial\Omega_u$ de sa frontière, elle reçoit des forces de surfaces $\lambda \mathbf{t}$ sur une partie $\partial\Omega_f$, et éventuellement des forces volumiques

$\lambda\rho\mathbf{b}$ à l'intérieur du volume. Les quantités $\mathbf{u}_d$, $\mathbf{t}$ et $\rho\mathbf{b}$ sont des données définies sur Ω_0 et $\partial\Omega_0$, et λ est un paramètre de chargement supposé unique. Le vecteur déplacement d'un point du solide sera noté $\mathbf{u}$, le tenseur de déformation de Green-Lagrange γ, et le tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff de second espèce $\mathbf{S}$. Le tenseur γ est relié au déplacement $\mathbf{u}$ par la relation quadratique suivante

$$\gamma(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) + \frac{1}{2}({}^t\nabla\mathbf{u}\ \nabla\mathbf{u}) = \gamma^l(\mathbf{u}) + \gamma^{nl}(\mathbf{u},\mathbf{u}) \qquad \text{(I-4)}$$

où γ^l représente la partie linéaire de $\gamma(\mathbf{u})$ et γ^{nl} représente la partie non-linéaire

Hypothèse de régularité:

Les deux frontières $\partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_f$ sont complémentaires Figure-I-1

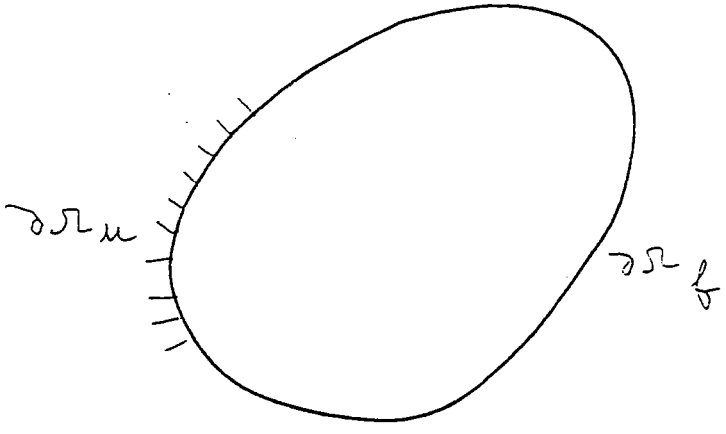


Figure-I-1

-Formulation en déplacement

L'énergie potentielle totale de la structure s'écrit

$$P(\mathbf{u},\lambda) = \int_{\Omega_0} \frac{1}{2}\gamma(\mathbf{u}):\mathbf{D}:\gamma(\mathbf{u})\ dv\ -\ \lambda P_e(\mathbf{u}) \qquad \text{(I-5)}$$

où **D** est le tenseur d'élasticité du matériau et P_e la puissance des efforts extérieurs donnée par

$$P_e(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \rho\, \mathbf{b}.\mathbf{u}\, dv + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t}.\mathbf{u}\, d\Gamma \qquad \text{(I-6)}$$

L'équation d'équilibre est donnée par la première variation de l'énergie potentielle

$$\delta P(\mathbf{u},\lambda,\delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} \gamma(\mathbf{u}):\mathbf{D}:\delta\gamma(\mathbf{u})\, dv - \lambda P_e(\delta\mathbf{u}) = 0 \qquad \forall \delta\mathbf{u} \text{ CA à "0"} \qquad \text{(I-7)}$$

où δP désigne la dérivée de Fréchet de la fonctionnelle $P(\mathbf{u},\lambda)$ dans la direction $\delta\mathbf{u}$, et $\delta\gamma$ la variation du tenseur γ. On a

$$\delta\gamma = \gamma^{l}(\delta\mathbf{u}) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}) \qquad \text{(I-8)}$$

Il est maintenant classique de définir un opérateur $r(\mathbf{u},\lambda)$ de **X**x**R** dans **X**, où **X** est un espace de déplacements cinématiquement admissibles et **R** est l'ensemble des réels, tel que

$$\delta P = \langle r(\mathbf{u},\lambda), \delta\mathbf{u} \rangle = 0 \qquad \forall \delta\mathbf{u} \text{ CA à "0"} \qquad \text{(I-9)}$$

$\langle\ .\ ,\ .\ \rangle$ est un produit scalaire défini par

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega_0} \mathbf{u}.\mathbf{v} dv \qquad \text{(I-10)}$$

Comme $P(\mathbf{u},\lambda)$ est une fonctionnelle dont la non-linéarité est d'ordre 4 en déplacement et δP est linéaire en $\delta\mathbf{u}$ on peut donc écrire l'équation (I-9) sous la forme

$$r(\mathbf{u},\lambda) = l(\mathbf{u}) + q(\mathbf{u},\mathbf{u}) + c(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u}) - \lambda\mathbf{F} = 0 \qquad \text{(I-11)}$$

où $l(.)$ est un opérateur linéaire, $q(.,.)$ est un opérateur bilinéaire et symétrique et $c(.\ ,\ .,\ .)$ est un opérateur trilinéaire. Pour l'analyse de stabilité on a besoin de la seconde variation de l'énergie potentielle qui s'écrit,

$$\delta^2 P(\mathbf{u},\delta\mathbf{u},\Delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} (\gamma^l(\Delta\mathbf{u}) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u},\Delta\mathbf{u})) : \mathbf{D} : (\gamma^l(\delta\mathbf{u}) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}))dv$$
$$+ \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : 2\gamma^{nl}(\Delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u})dv$$

(I-12)

Formulation mixte

Les équations d'équilibre en déplacement (I-11) admettent une non linéarité cubique, ce qui n'est pas commode dans la perspective d'utiliser des méthodes de développements asymptotiques. Pour surmonter cet handicap on préfère utiliser la formulation mixte d'Hellinger-Reissner HR qui est mieux adaptée aux développements asymptotiques. En effet dans ce cas la non-linéarité est seulement quadratique par rapport aux inconnues **u** et **S**. La réduction de cette non-linéarité est due à l'introduction de la contrainte comme variable.

$$HR(\mathbf{u},\mathbf{S},\lambda) = \int_{\Omega_0} (\mathbf{S}:\gamma - \frac{1}{2}\mathbf{S}:\mathbf{D}^{-1}:\mathbf{S})dv - \lambda P_e(\mathbf{u}) \qquad \text{(I-13)}$$

Une formulation variationnelle des équations d'équilibre et des relations de comportement s'obtient en invoquant la stationnarité de la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner.

$$\delta HR(\mathbf{u},\delta\mathbf{u},\mathbf{S},\delta\mathbf{S},\lambda) = \int_{\Omega_0} (\mathbf{S}:\delta\gamma(\mathbf{u}) + \delta\mathbf{S}:\gamma(\mathbf{u}) - \mathbf{S}:\mathbf{D}^{-1}:\delta\mathbf{S})dv - \lambda P_e(\delta\mathbf{u}) = 0$$

(I-14)

$\forall \delta\mathbf{u}$ C.A et $\forall\ \delta\mathbf{S}$

δHR désigne la dérivée Fréchet de la fonctionnelle HR en **u** et **S** dans les directions $\delta\mathbf{u}$ et $\delta\mathbf{S}$. On introduit le vecteur mixte **U** dont les composantes sont les déplacements et les contraintes

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{S} \end{pmatrix} \qquad \text{(I-15)}$$

Comme pour la formulation en déplacement, on définit un opérateur $R(U,\lambda)$ de $\mathbf{Y}\mathbf{x}\mathbf{R}$ dans $\mathbf{Y}$, où $\mathbf{Y}$ est un espace où les déplacements sont cinématiquement admissibles

$$\delta HR = \langle R(U,\lambda), \delta U \rangle = 0 \qquad \forall\ \delta U \text{ admissible} \qquad \text{(I-16)}$$

Puisque δHR est linéaire en δU, on peut donc écrire l'équation d'équilibre et la loi de comportement sous la forme

$$R(U,\lambda) = L(U) + Q(U,U) - \lambda.F = 0 \qquad \text{(I-17)}$$

où $L(.)$ est un opérateur linéaire et auto-adjoint et $Q(.,.)$ est un opérateur bilinéaire et symétrique. On a les relations suivantes

$$\langle \mathbf{L}(U), \delta U \rangle = \int_{\Omega_0} (\mathbf{S}:\gamma^{l}(\delta \mathbf{u}) + \delta \mathbf{S}:(\gamma^{l}(\mathbf{u}) - \mathbf{D}^{-1}:\mathbf{S}))dv \qquad \text{(I-18)}$$

$$\langle \mathbf{Q}(U,U), \delta U \rangle = \int_{\Omega_0} (\mathbf{S}:2\gamma^{nl}(\mathbf{u},\delta \mathbf{u}) + \delta \mathbf{S}:\gamma^{nl}(\mathbf{u},\mathbf{u}))dv \qquad \text{(I-19)}$$

$$\langle \mathbf{F}, \delta U \rangle = \int_{\Omega_0} \rho\, \mathbf{b}.\delta \mathbf{u}\, dv + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{t}.\delta \mathbf{u}\, d\Gamma \qquad \text{(I-20)}$$

Remarque

Si l'on résout (I-14) par rapport à $\delta \mathbf{S}$, on obtient la relation de comportement

$$\mathbf{S} = \mathbf{D}:\ \gamma \qquad \text{(I-21)}$$

En reportant cette équation dans (I-13) on retrouve l'énergie potentielle

-Formulation discrète

Toutes les formulations continues que l'on vient de voir admettent des équivalents discrets lorsqu'on applique une méthode d'éléments finis. Ici on se limitera uniquement à donner la forme discrète de la seconde variation de l'énergie potentielle. Après le découpage du domaine Ω_0 en éléments, on approche le champs de déplacement dans chaque élément sous la forme

$$\{\mathbf{u}\}^a = [N]\{\mathbf{v}\}^e \qquad \text{(I-22)}$$

où $\{\mathbf{v}\}^e$ est un vecteur dont les composantes sont en général les déplacements aux noeuds et $[N]$ est une matrice contenant des fonctions de forme classiques. L'approximation des champs de déformation réels $\{\gamma\}^a$ et virtuels $\{\delta\gamma\}^a$ sont alors donnés par

$$\begin{aligned} \{\gamma\}^a &= \left([B_l] + \frac{1}{2}\left[B_{nl}(\mathbf{v}^e)\right]\right)\{v\}^e \\ \{\delta\gamma\}^a &= \left([B_l] + \left[B_{nl}(\mathbf{v}^e)\right]\right)\{\delta v\}^e \end{aligned} \qquad \text{(I-23)}$$

où $[B_l]$ est une matrice qui ne contient que les dérivées des fonctions de forme et $\left[B_{nl}(\mathbf{v}^e)\right]$ est une matrice qui dépend d'une manière non-linéaire du déplacement. La seconde variation de l'énergie potentielle $\delta^2 P$ sous la forme discrète est donnée par

$$\Delta(\delta P) = \{\delta v\}^t [K_t(v)]\{\Delta v\} \qquad \text{(I-24)}$$

où $\{v\}$ est le vecteur déplacement nodal, $\{\delta v\}$ et $\{\Delta v\}$ sont deux variations arbitraires de $\{v\}$ et $[K_t(v)]$ représente la matrice de rigidité tangente qui est non-linéaire en $\{v\}$. Pour des états d'équilibre ($\{v\}$) stables, $[K_t(v)]$ est définie positive. Au contraire elle est non définie positive si l'état d'équilibre est insable.

I-3) Points réguliers et points singuliers

Le système (I-17) peut admettre une ou plusieurs solutions $U(\lambda)$. Compte tenu de la continuité de HR par rapport à λ, l'ensemble des solutions $U(\lambda)$ forme une ou plusieurs courbes dans l'espace (U, λ). Ce sont par définition des branches de solution. Il est habituel de supposer qu'un tel système admet une solution triviale $U_0(\lambda)$.
Pour l'étude des branches d'équilibre qui peuvent passer par un point solution de (I-17), on utilise une représentation paramétrique générale donnée par

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(a)$$
$$\lambda = \lambda(a) \qquad \text{(I-25)}$$

où le paramètre "a" désigne souvent l'abscisse curviligne. Comme chaque courbe donne lieu à une direction tangente $(\dot{\mathbf{U}}, \dot{\lambda})$, on peut remplacer la recherche des courbes d'équilibre par la recherche des directions tangentielles. Pour cela, on peut se placer en un point de la solution triviale $\mathbf{U}_0(\lambda)$ et dériver (I-17) par rapport au paramètre "a". Au point d'équilibre considéré, on obtient

$$R_{,U}\,\dot{\mathbf{U}} + R_{,\lambda}\dot{\lambda} = 0 \qquad \text{(I-26)}$$

où $\dot{\lambda}$, $\dot{\mathbf{U}}$ sont les dérivées de λ et de $\mathbf{U}$ par rapport à "a" et on a simplement $R_{,\lambda} = -\mathbf{F}$. On notera que $R_{,U} = \mathbf{L}(.) + 2\,\mathbf{Q}(\mathbf{U}, .) \overset{\text{déf}}{=} \mathbf{L}_t(\ )$ désigne l'opérateur tangent. Il s'agit d'un système linéaire reliant les inconnues $\dot{\mathbf{U}}$ et $\dot{\lambda}$ et qui permet de déterminer toutes les directions tangentes éventuelles. Cependant il est incomplet sans l'addition d'une condition supplémentaire, que l'on choisit habituellement comme une condition de normalisation de la forme

$$\left\langle \dot{\mathbf{U}}, \dot{\mathbf{U}} \right\rangle + \dot{\lambda}\dot{\lambda} = 1 \qquad \text{(I-27)}$$

Si en un point solution de (I-17), l'opérateur $R_{,U}$ est inversible, alors le théorème des fonctions implicites assure l'existence d'une solution unique locale paramétrisée par λ $(\mathbf{U}(\lambda),\lambda)$ et ce point est appelé point régulier (voir Figure-I-2).

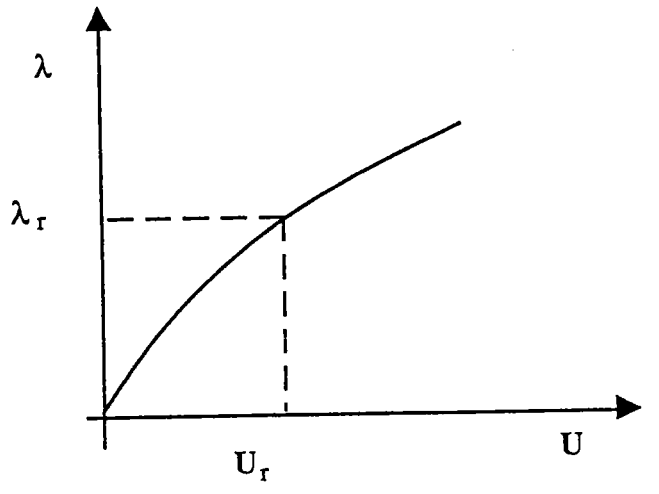
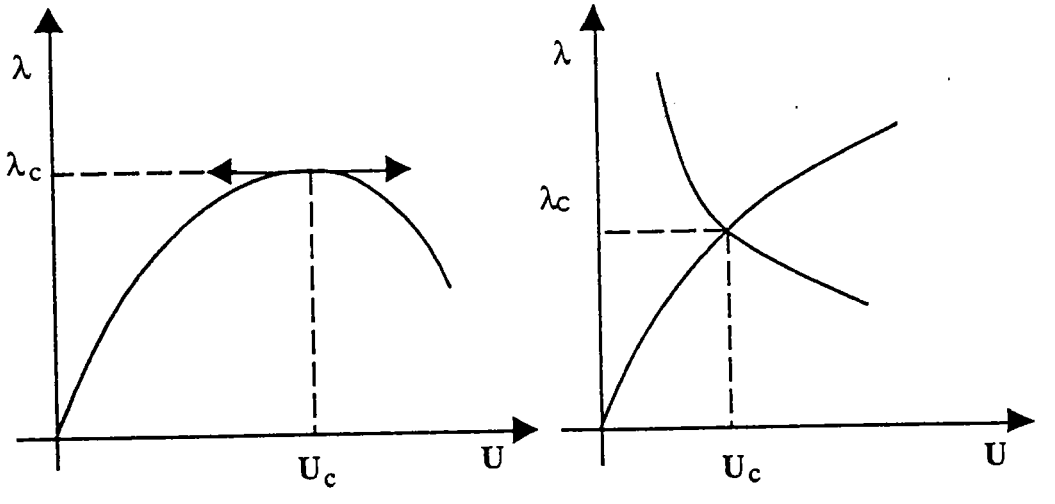


Figure-I-2: Point régulier

Par contre, si en un point l'opérateur $R_{,U}$ est non-inversible, alors ce point est appelé point singulier et peut correspondre soit à un point limite (Figure-I-3-a) soit à un point de bifurcation (Figure-I-3-b) (Koiter; 1963).



a: point limite

b: Point de bifurcation

Figure-I-3: Points singuliers

En réalité, il n'y a aucune raison de séparer complètement un point limite d'un point de bifurcation car ils peuvent parfois coïncider. De même, le nombre de branches bifurquées passant par un point singulier peut être supérieur à 2 (Figure-I-4). L'étude de telles situations devient très compliquée et relève du domaine de la théorie de la catastrophe.

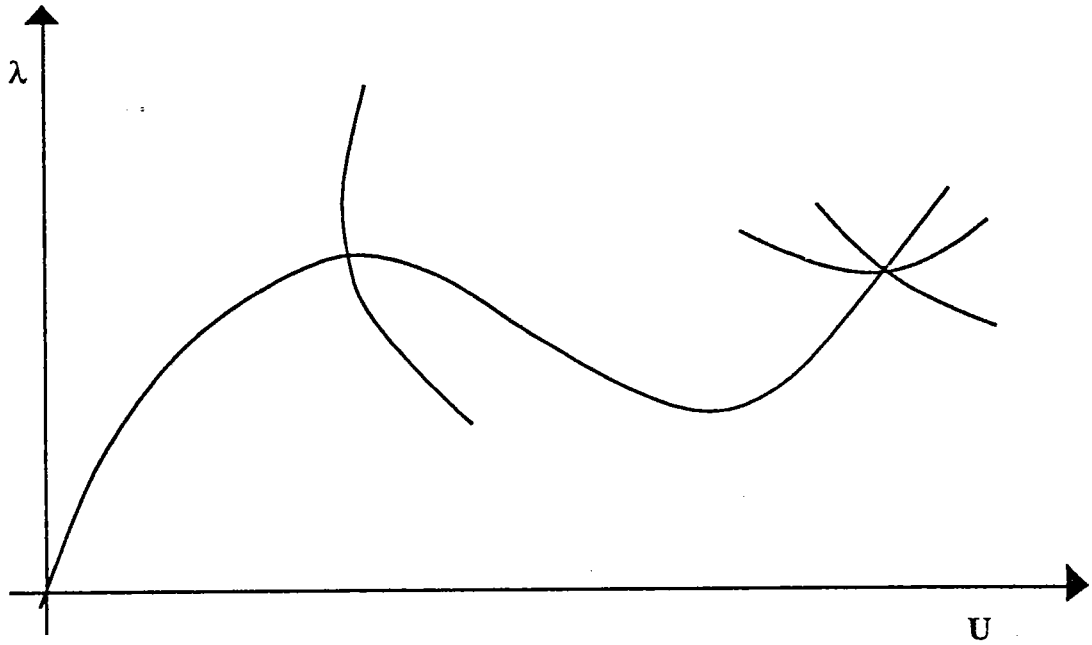


Figure-I-4: Exemple de bifurcation multiple et de cas où un point de bifurcation coïncide avec un point limite

Lorsque l'opérateur $R_{,U}$ d'ordre n est singulier alors son rang ρ est inférieur à n. Pour simplifier l'étude on supposera dans tout ce qui suit que $\rho(R_{,U})=n-1$, c'est à dire qu'on se limitera à des singularités simples. Cela équivaut à dire que $R_{,U}$ admet une seule valeur propre nulle. Le mode qui lui est associé sera noté Φ et il vérifie

$$R_{,U}\,\Phi = 0 \qquad \text{(I-28)}$$

avec Φ un vecteur non nul. En général l'opérateur $R_{,U}$ n'est pas forcément symétrique. Cela revient à dire qu'il existe un mode propre droit Φ_d et un mode propre gauche Φ_g qui sont différents. Dans notre analyse on omettra cette distinction en admettant que $R_{,U}$ est symétrique.

I-4) Caractérisation des points limites et des points de bifurcation

La projection de l'équation (I-26) sur le mode nous donne la condition de la compatibilité suivante

$$\dot{\lambda}\left\langle \Phi, R_{,\lambda} \right\rangle = 0 \qquad \text{(I-29)}$$

Selon Spence et Jepson(1985), la discussion de (I-29) permet d'aboutir aux caractéristiques classiques suivantes du point singulier

Si $\langle \Phi, R_{,\lambda} \rangle = 0$, alors le point singulier est un point de bifurcation (I-30)

Si $\langle \Phi, R_{,\lambda} \rangle \neq 0$, alors le point singulier est un point limite en charge (I-31)

On notera les relations d'équivalence suivantes

$$\rho\,(R_{,U}) = \rho(R_{,U} : R_{,\lambda}) \quad \Leftrightarrow \quad \langle \Phi, R_{,\lambda} \rangle = 0 \qquad \text{(I-32)}$$

$$\rho\,(R_{,U}) \neq \rho(R_{,U} : R_{,\lambda}) \quad \Leftrightarrow \quad \langle \Phi, R_{,\lambda} \rangle \neq 0 \qquad \text{(I-33)}$$

L'opérateur $(R_{,U} : R_{,\lambda})$ est défini par $(R_{,U} : R_{,\lambda}) \begin{Bmatrix} V \\ \beta \end{Bmatrix} = R_{,U}\, V + R_{,\lambda}\, \beta$, où V est un vecteur et β est un scalaire.

I. 5) Calcul des tangentes en un point singulier

La solution générale du problème aux tangentes (I-26), peut s'écrire comme la somme d'une solution particulière $\dot{\lambda} W$ et d'un multiple arbitraire du mode associé au point singulier

$$\dot{U} = \dot{\lambda}\, W + \alpha \Phi \qquad \text{(I-34)}$$

où α est un scalaire et W est un vecteur qui vérifie l'équation suivante

$$\langle W, \Phi \rangle = 0 \qquad R_{,U}(W) = -\, R_{,\lambda} \qquad \text{(I-35)}$$

On séparera dans la suite de ce paragraphe le cas où la singularité est un point limite du cas où celle ci est un point de bifurcation.

I-5-a) Point de bifurcation

Au point de bifurcation, la solution générale (I-34), n'est pas déterminée si on se limite à la première dérivation de l'équation (I-17). Il est donc nécessaire de passer à la dérivée seconde

$$\ddot{R} = R_{,UU}\,\dot{U}\dot{U} + 2R_{,U\lambda}\,\dot{\lambda}\dot{U} + R_{,U}\ddot{U} + R_{,\lambda\lambda}\,\dot{\lambda}^2 + R_{,\lambda}\ddot{\lambda} = 0 \qquad \text{(I-36)}$$

Si l'on projette l'équation (I-36) sur le mode Φ on obtient

$$\begin{aligned}\left\langle \Phi, \ddot{R} \right\rangle = \left\langle \Phi, R_{,UU}\,\dot{U}\dot{U} \right\rangle + 2\dot{\lambda}\left\langle \Phi, R_{,U\lambda}\,\dot{U} \right\rangle \\ + \left\langle \Phi, R_{,U}\,\ddot{U} \right\rangle + \dot{\lambda}^2 \left\langle \Phi, R_{\lambda\lambda} \right\rangle + \ddot{\lambda}\left\langle \Phi, R_{,\lambda} \right\rangle = 0\end{aligned} \qquad \text{(I-37)}$$

Comme dans notre cas R est linéaire en λ, alors $R_{,U\lambda} = R_{,\lambda\lambda} = 0$. Compte tenu de la condition de bifurcation (I-30) et de (I-34), l'équation (I-37) se réduit à ce que l'on appellera par la suite équation de la bifurcation et qui est donnée par

$$\left\langle \Phi, R_{,U}\,\dot{U}\dot{U} \right\rangle = 0 \qquad \text{(I-38-a)}$$

Compte tenu de (I-34) et de l'identité $R_{,U}UV = Q(U,V)$, cette équation se réécrit

$$b\alpha^2 + 2c\alpha\,\dot{\lambda} + d\,\dot{\lambda}^2 = 0 \qquad \text{(I-38-b)}$$

On notera les constantes suivantes

$$b = \langle \Phi, Q(\Phi,\Phi) \rangle,\ c = \langle \Phi, Q(W,\Phi) \rangle,\ d = \langle \Phi, Q(W,W) \rangle \qquad \text{(I-39)}$$

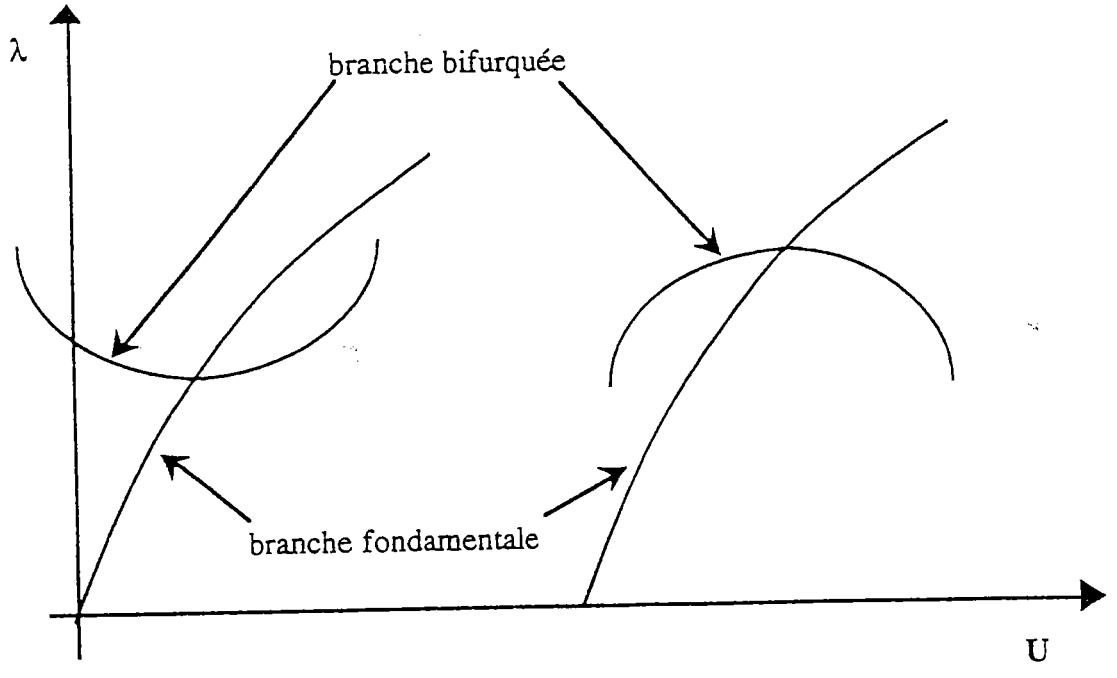
On pose $\Delta = (c^2 - bd)$. Si $\Delta > 0$ alors l'équation (I-38) admet deux racines différentes $\dot{\lambda}_1$ et $\dot{\lambda}_2$

$$\dot{\lambda}_{1,2} = -\frac{c\alpha}{d} \pm \frac{\alpha}{d}\sqrt{c^2 - bd} \qquad \text{(I-40)}$$

Le coefficient α est obtenu à partir de la condition de normalisation (I-27). Ainsi on obtient deux tangentes au point de bifurcation. Un cas important en calcul des structures est celui où b = 0 et c≠0, ce cas correspond à une bifurcation symétrique (Pitchfork bifurcation), stable si $\ddot{\lambda}>0$ (Figure-I-5-a) et instable dans le cas contraire (Figure-I-5-b).

$$\dot{\lambda}_1 = -2\frac{c}{d}\alpha \ , \ \dot{U}_1 = \alpha(\Phi - 2\frac{c}{d}W) \qquad \text{(I-41)}$$

$$\dot{\lambda}_2 = 0 \ , \ \dot{U}_2 = \alpha\Phi \qquad \text{(I–42)}$$



a: bifurcation symétrique stable *b: bifurcation symétrique instable*

Figure-I-5: bifurcation simple et symétrique

Si b ≠ 0 alors le point de bifurcation est asymétrique (Figure-I-6). Dans le cas où $\Delta < 0$, alors le point singulier est un point isolé.

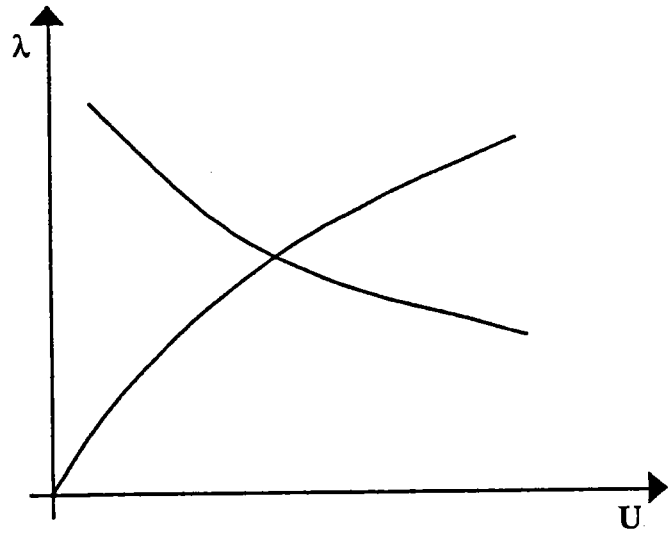


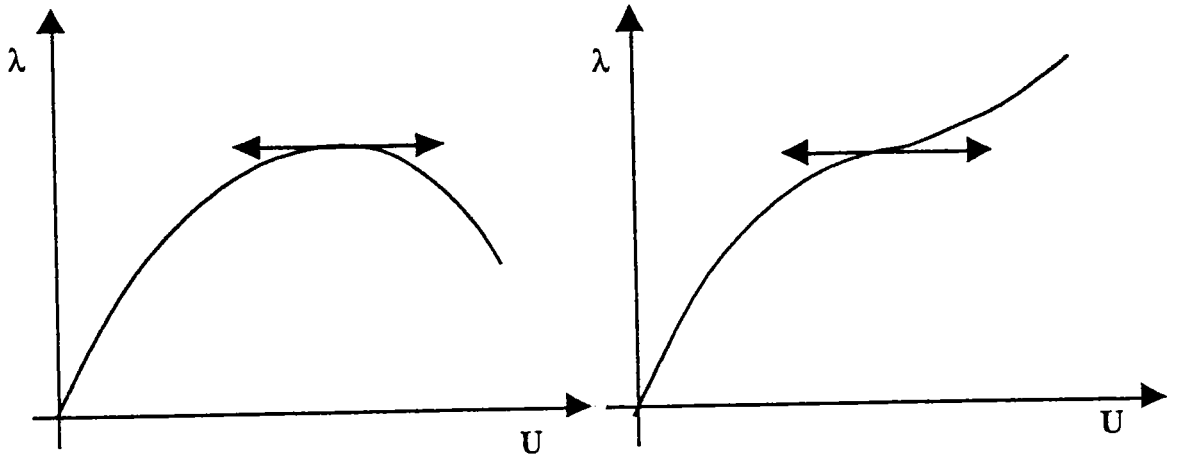
Figure-I-6: bifurcation simple asymétrique

I-5-b) Point limite

En un point limite la solution générale du problème aux tangentes (I-34) se réduit à

$$\dot{\lambda} = 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{U} = \alpha \Phi \qquad \text{(I-43)}$$

Si la constante b donnée par (I-39) est nulle alors $\ddot{\lambda}=0$, c'est à dire qu'au point limite il y a un changement de courbure et dans ce cas, il s'agit d'un point d'inflexion appelé point limite double (Figure-I-7-a). Si $b \neq 0$ alors, $\ddot{\lambda} \neq 0$, c'est à dire que la courbure reste inchangée. Le point limite est cette fois ci un point tournant (Figure-I-7-b).



a: point tournant *b: point d'inflexion (point limite double)*

Figue-I-7: Exemple de point limite

I-6) Exemples élémentaires d'illustration de points singuliers

I-6-a) Présentation de la notion de points limites sur un modèle simple

Pour l'étude du point limite, on introduit le modèle mécanique de la Figure-I-8. Il s'agit d'un système formé de deux barres élastiques, de même longueur l_0, qui subissent uniquement des déformations axiales, c'est à dire qu'elles restent rectilignes; le point A se déplace uniquement suivant l'axe vertical sous le chargement λ.

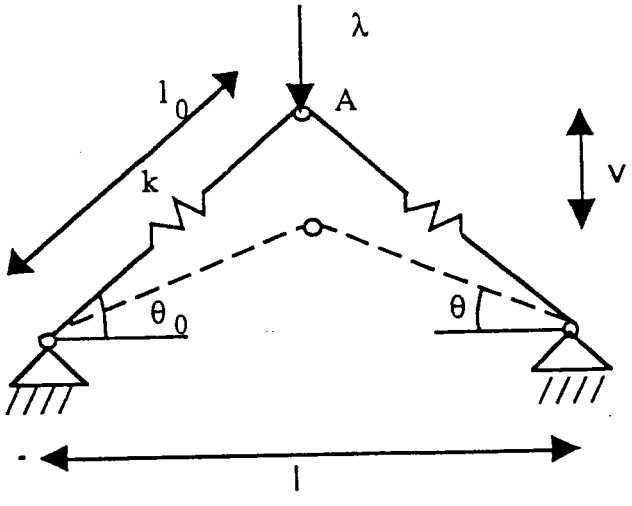


Figure-I-8: Modèle mécanique à un degré de liberté

L'énergie potentielle correspondant à ce système s'écrit

$$P(\theta,\lambda) = k[\Delta l(\theta)]^2 - \lambda v(\theta) \qquad \text{(I-44)}$$

$$\Delta l(\theta) = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{\cos(\theta_0)} - \frac{1}{\cos(\theta)}\right) \qquad \text{(I-45)}$$

$$v(\theta) = \frac{l}{2}(\tan(\theta_0) - \tan(\theta)) \qquad \text{(I-46)}$$

Les positions d'équilibre de ce système sont données par l'équation suivante

$$r(\theta,\lambda) = \frac{1}{\cos(\theta)^2}\left[\frac{kl^2}{4}\left(\frac{1}{\cos(\theta_0)} - \frac{1}{\cos(\theta)}\right)\sin(\theta) + \frac{l}{2}\lambda\right] = 0 \qquad \text{(I-47)}$$

(I-47) nous permet d'écrire $\lambda(\theta)$ sous la forme

$$\lambda(\theta) = \frac{kl}{2}\left(\frac{1}{\cos(\theta)} - \frac{1}{\cos(\theta_0)}\right)\sin(\theta) \qquad \text{(I-48)}$$

Sur la Figure-I-9 on présente l'allure générale de $\lambda(\theta)$. Dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, cette fonction admet deux asymptotes à $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$, un extremum pour la valeur de θ vérifiant $\cos^3(\theta_c) = \cos(\theta_0)$. On étudie la stabilité de cette solution en examinant le signe de la seconde variation de l'énergie potentielle $r_{,\theta}$

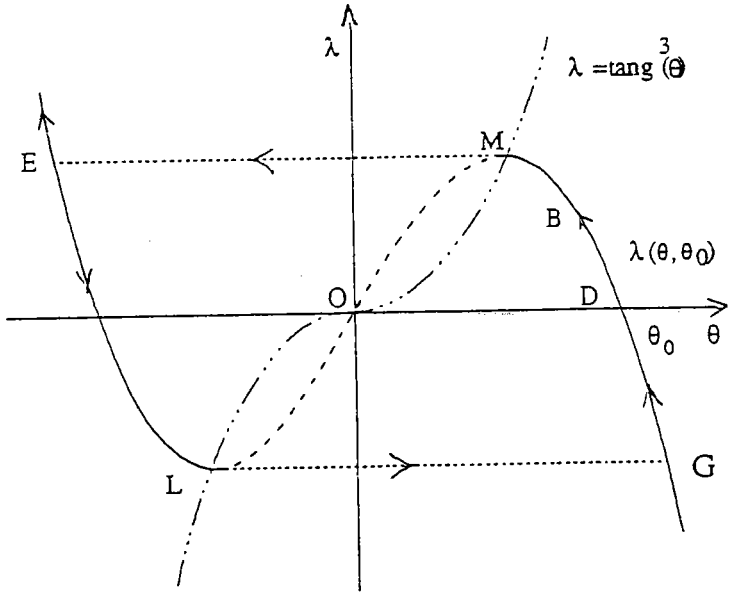
$$r_{,\theta} = kl^2\frac{1}{\sin(2\theta)}\left(\tan^3(\theta) - \lambda\right) \qquad \text{(I-49)}$$

Pour $\lambda < \tan^3(\theta)$, on a $r_{,\theta} > 0$ et l'équilibre est stable. Pour $\lambda > \tan^3(\theta)$, on a $r_{,\theta} < 0$ et l'équilibre est instable. Pour $\lambda = \tan^3(\theta)$ l'équilibre est critique et son analyse nécessite le calcul de la dérivée d'ordre 3 au moins. Dans le plan charge-déplacement, la courbe d'équation $\lambda = \tan^3(\theta)$ sépare la branche d'équilibre en une région stable et une région instable (Figure-I-9). Les fonctions ($\lambda = \tan^3(\theta)$) et ($\lambda = \lambda(\theta,\theta_0)$) se rencontrent à l'origine o, au point maximum M et au point minimum L. Si en un point B de l'équilibre initial

stable qui démarre à partir du point D on augmente la chargement λ, on pourra atteindre le point critique M. La position d'équilibre devient instable et le système passera sous le même chargement au point E. C'est ce qu'on appelle flambage par point limite ou phénomène de claquage "snap-through effect". Ce type de flambage est souvent accompagné d'un effet dynamique où la structure devient très difficile à contrôler et peut même se rompre.

Remarque

Aux points limites on a bien $r_{,\theta} = 0$ (singularité de $R_{,U}$ dans le cas d'un seul degré de liberté) et on a $r_{,\lambda}$ qui est non-nul (caractéristique d'un point limite dans le cas d'un degré de liberté).



—— *branche stable* ------ *branche instable*

Figure-I-9: Courbe de stabilité du système et phénomène de claquage

I-6-b) Présentation d'un point de bifurcation sur un modèle à un degré de liberté

Pour illuster le point de bifurcation, on utilise le système mécanique simple de la Figure-I-10. Il s'agit d'une barre rigide verticale de longueur l dont l'extrémité supérieure est soumise à un chargement λ dont la direction

reste verticale. A l'autre extrémité, un ressort élastique de raideur k exerce un moment de rappel. La configuration actuelle du système est décrite par l'angle θ que fait la barre avec l'axe vertical.

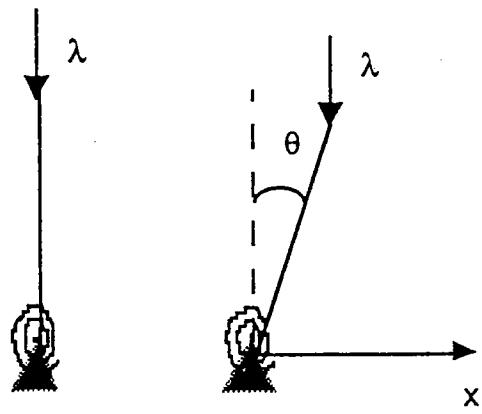


Figure-I-10: Modèle à un degré de liberté

L'énergie potentielle du système s'écrit

$$P(\theta,\lambda)=\frac{1}{2}k\theta^2-\lambda l(1-\cos(\theta)) \qquad \text{(I-50)}$$

La structure est symétrique par rapport à l'axe vertical, le système peut partir vers θ>0 où le contraire et l'énergie potentielle reste invariante c'est à dire que (P(θ, λ) = P(-θ, λ)). L'équation d'équilibre s'écrit sous la forme

$$r(\theta,\lambda)=k\theta-\lambda l\sin(\theta)=0 \qquad \text{(I-51)}$$

Une solution particulière de cette équation est θ = 0 pour toute valeur de λ, ce qui correspond à la solution fondamentale. Il existe une autre solution, non-triviale, donnée par $\lambda=\frac{k}{l}\frac{\theta}{\sin(\theta)}$ (Figure-I-11). Ces deux solutions se coupent au point (0, λ_c) qui est le point de bifurcation avec

$$\lambda_c=\lim_{\theta\to 0}\lambda(\theta)=\frac{k}{l} \qquad \text{(I-52)}$$

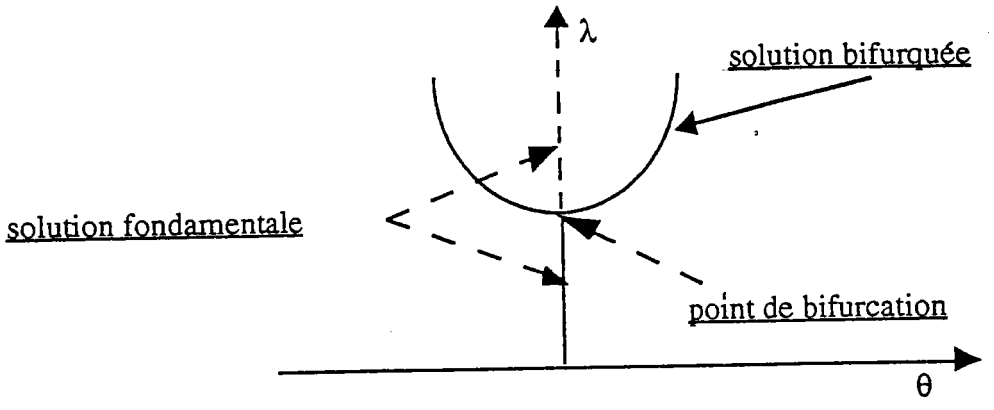


Figure-I-11: branche d'équilibre du système

Pour l'étude de la stabilité de ces deux branches de solutions, on calcule la seconde variation de l'énergie potentielle $r_{,\theta}$

$$r_{,\theta} = k - \lambda l\cos(\theta) \qquad \text{(I-53)}$$

Le long de la branche fondamentale ($\theta = 0$)

$$r_{,\theta} = (k - \lambda l) \qquad \text{(I-54)}$$

pour $\lambda < \frac{k}{l}$ on a $r_{,\theta} > 0$, ce qui revient à dire que l'équilibre $\theta = 0$ est stable. Pour $\lambda > \frac{k}{l}$ cet équilibre devient instable. Pour la branche bifurquée, $r_{,\theta}$ peut être approchée à l'ordre 2 par

$$r_{,\theta} = \frac{k}{2}\theta^2 \qquad \text{(I-55)}$$

donc le long de la branche bifurquée $r_{,\theta} > 0$, ce qui veut dire qu'elle est stable. On remarque que lorsque la première branche perd sa stabilité, il apparaît une nouvelle branche stable: c'est le principe d'échange de stabilité. Ce principe n'est valable qu'en élasticité car, en plasticité, il est actuellement connu que la bifurcation peut apparaître même si la branche fondamentale est stable.

Remarque

Au point de bifurcation on a $r_{,\theta} = 0$ (singularité de $R_{,U}$ dans le cas d'un seul degré de liberté) et $r_{,\lambda} = 0$ (caractéristique du point de bifurcation dans le cas d'un système à un seul degré de liberté).

I-6-c) Système à deux degrés de liberté

Pour illustrer la notion de points limites et de points de bifurcation des systèmes à plusieurs degrés de liberté, on présente l'exemple suivant issu de Seydel(1988). Il s'agit de deux équations scalaires à deux inconnues u_1 et u_2 et dépendant d'un paramètre λ.

$$R_1(u_1,u_2,\lambda) = 1 + \lambda (u_1^2 + u_2^2 - 1) = 0$$

$$R_2(u_1,u_2,\lambda) = u_2(10 - \lambda (1 + 2u_1^2 + u_2^2)) = 0$$

Si on se place dans le cas où $\lambda \geq 0$, ce système admet une solution triviale

$$U_1=(u_1,u_2) = (\pm\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}, 0, \lambda)$$

définie pour $\lambda \geq 1$ et une solution secondaire

$$U_2 = (u_1,u_2) = (\pm\sqrt{\frac{11-2\lambda}{\lambda}}, \pm\sqrt{\frac{3\lambda-12}{\lambda}})$$

définie dans l'intervalle $4. \leq \lambda \leq 5.5$. Les deux branches de solution sont symétriques par rapport aux plans $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$ (Figure-I-12). Sur la branche triviale il existe un point limite en charge (0, 0, 1) et deux points de bifurcation $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 4)$

-au point limite (0, 0, 1) on a

$$R_{,U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad R_{,\lambda} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \Phi = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \langle \Phi, R_{,\lambda} \rangle \neq 0$$

-au point de bifurcation ($\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, 4) on a

$$R_{,U}=\begin{bmatrix} 4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad R_{,\lambda}=\begin{Bmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \Phi=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \langle \Phi, R_{,\lambda} \rangle = 0$$

On voit bien que ces deux opérateurs sont singuliers ($\det(R_{,U}) = 0$) mais au point limite $\langle \Phi, R_{,\lambda} \rangle \neq 0$ et au point de bifurcation $\langle \Phi, R_{,\lambda} \rangle = 0$, cela illustre bien les propriétés mathématiques des points limites et des points de bifurcation vues précédemment et discutées par Spence et Jepson(1985).

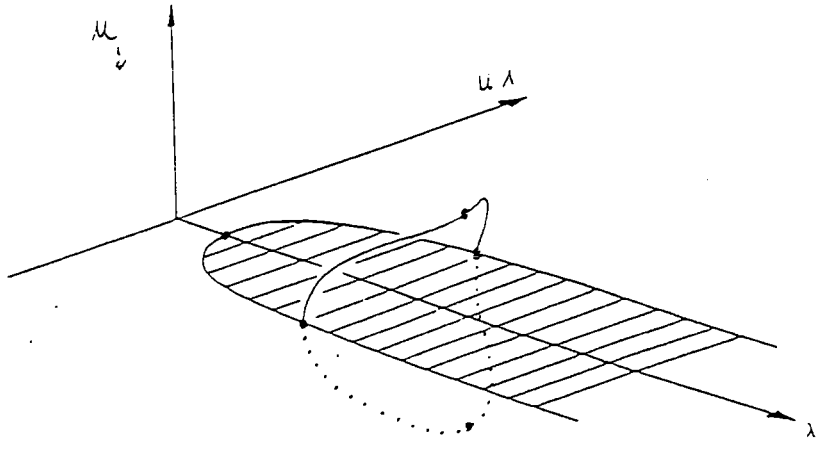


Figure-I-12: Exemple mathématique de point limite et de point de bifurcation

Remarque

Sur cet exemple on peut définir un opérateur S dit de symétrie qui vérifie

$$SU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$S \neq I \ , \ S^2 = I \quad R(SU,\lambda) = SR(U,\lambda) \qquad \text{(I-56)}$$

et pour lequel, la branche triviale U_1 est symétrique ($SU_1 = U_1$) et le mode de bifurcation est antisymétrique $S\Phi = -\Phi$. Ce type de bifurcation est connu sous le nom de (symmetry-breaking bifurcation).
En général, si un problème de bifurcation présente une branche fondamentale symétrique sur laquelle existe un point de bifurcation de mode antisymétrique, alors on peut montrer dans l'équation de la bifurcation (I-38) que b=0. Cependant cette condition n'est pas suffisante pour que la bifurcation soit symétrique (Pitchfork-bifurcation), il faut que la constante c de (I-38) soit non nulle (Weinitschke; 1985) (Werner and Spence; 1984).

I-7) Méthodes incrémentales-itératives de résolution du problème de bifurcation

Dans les paragraphes précédents, on a introduit la notion de branches de solutions et on a caractérisé les points singuliers. On se propose maintenant de faire un rappel sur les méthodes numériques généralement utilisées pour calculer les branches, pour détecter les bifurcations et pour tourner sur les branches bifiurquées.

I-7-a) Calcul de branches de solution

Pour la résolution d'équations d'équilibre non-linéaires écrites sous la forme de (I-11) ou (I-17), on utilise généralement des méthodes pas à pas dites méthodes de prédiction-correction. Parmi les méthodes les plus utilisées dans les codes de calcul de structure, on trouve la méthode de Newton-Raphson, la méthode de Newton-Raphson modifiée, la méthode dite Quasi-Newton.....Dans ces méthodes on part d'une solution connue (U_k, λ_k) et on détermine une nouvelle solution (U_{k+1}, λ_{k+1}) à une certaine distance du point de départ (U_k, λ_k). L'opération est faite en deux étapes: une étape de prédiction (incrément), généralement un pas tangent, où l'on s'écarte le moins possible de la branche, puis une étape de correction (itération) pour revenir à l'équilibre. Les corrections (ΔU_i et $\Delta\lambda_i$) sont obtenues en résolvant le système suivant.

$$R_{,U}(U_{i-1}, \lambda_{i-1}).\Delta U_i + R_{,\lambda}(U_{i-1}, \lambda_{i-1})\Delta\lambda_i = R(U_{i-1}, \lambda_{i-1})$$

$$z(\Delta U_i, \Delta\lambda_i) = 0$$

z est une relation qui indique une stratégie de pilotage. Après chaque itération on actualise le déplacement et le chargement

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{i-1} + \Delta\mathbf{U}_i \quad \text{et} \quad \lambda_i = \lambda_{i-1} + \Delta\lambda_i$$

jusqu'à ce que le résidu soit inférieur à une tolérance donné.
Les stratégies de pilotage les plus utilisées sont (Batoz, Dhatt, Fafard; 1985):

-Déplacement imposé

Partant d'une solution particulière($\mathbf{U}_k$,λ_k), on construit la solution suivante($\mathbf{U}_{k+1}$,λ_{k+1}) en se donnant une composante de $\mathbf{U}_{k+1}$ et en cherchant λ_{k+1}, ainsi que les autres composantes de $\mathbf{U}_{k+1}$. Cette méthode permet souvent de passer les points limites en charge, mais pas ceux en déplacement.

-Force imposée

De la même façon on part d'une solution particulière, on construit la solution suivante ($\mathbf{U}_{k+1}$,λ_{k+1}) en se fixant λ_{k+1}. Cette méthode ne marche pas lorsqu'il s'agit d'un point limite en charge.

-Longueur d'arc imposée

C'est une méthode qui permet de passer théoriquement tous les points limites. Partant d'une solution particulière ($\mathbf{U}_{k+1}$, λ_{k+1}), on se donne une longueur d'arc δs pour le pas tangent, puis on oblige toutes les corrections à être orthogonale à ce pas tangent.

Avec le choix d'une stratégie convenable, ces méthodes incrémentales peuvent parcourir une branche de solution même compliquée. L'exemple classique auquel se réfèrent les auteurs et qui montre la puissance de ces méthodes est celui d'une coque légèrement galbée (Figure-I-13).

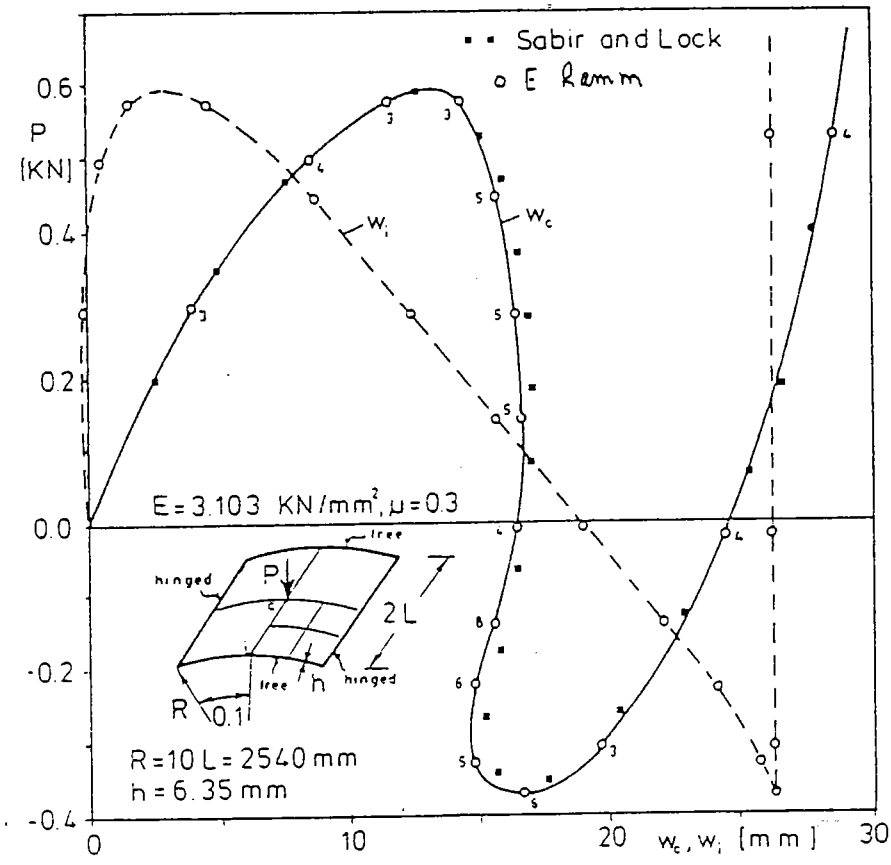


Figure-13: Calcul d'une branche de solution compliquée point par point par une méthode N-R

I-7-b) Méthodes de calcul de points de bifurcation

Dans la littérature de calcul d'instabilité (point limite ou points de bifurcation), on distingue d'une manière générale deux méthodes: l'une a été appelée directe et l'autre indirecte (Seydel; 1988)

-Méthode indirecte

Cette méthode consiste à calculer la solution du problème d'équilibre ($r(\mathbf{u},\lambda) = 0$) ou bien d'équilibre-comportement ($R(\mathbf{U},\lambda) = 0$), point par point à l'aide d'une méthode incrémentale de type Newton (N-Raphson, N-R-Modifié, Quasi-N) avec une stratégie de pilotage (déplacement imposé, chargement imposé, longueur d'arc imposée). En chaque point on évalue la valeur d'un indicateur de points singuliers qui est une fonction scalaire de $\mathbf{u}$ et de λ. Cet

indicateur $h(\mathbf{u},\lambda)$ s'annule en chaque point singulier. Généralement on prend comme test le produit

$$h(\mathbf{u}_{k-1}, \lambda_{k-1}) * h(\mathbf{u}_k, \lambda_k) \qquad \text{(I-57)}$$

qui change de signe lorsqu'une singularité est dépassée (Figure-I-14)

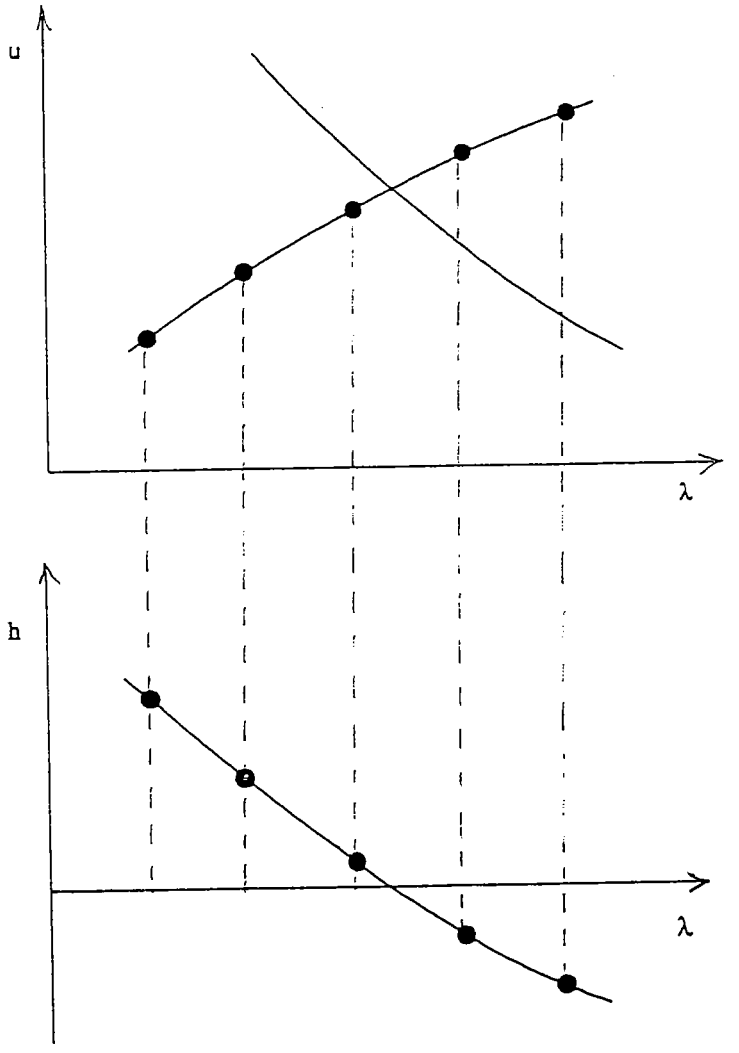


Figure-14: Principe de la méthode indirecte de calcul de points de bifurcation

Ainsi on a localisé la charge critique λ_c dans l'intervalle $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ qui peut être parfois grand. Le point critique peut etre approché par exemple par des interpolations linéaires successives de types

$$\lambda_c = \lambda_{k-1} + (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \frac{h(\mathbf{u}_{k-1}, \lambda_{k-1})}{h(\mathbf{u}_{k-1}, \lambda_{k-1}) - h(\mathbf{u}_k, \lambda_k)}$$

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{u}_{k-1} + (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}) \frac{h(\mathbf{u}_{k-1}, \lambda_{k-1})}{h(\mathbf{u}_{k-1}, \lambda_{k-1}) - h(\mathbf{u}_k, \lambda_k)}$$

Sur la Figure-I-15 on présente un exemple d'application sur une structure simple (deux barres articulées). La branche fondamentale présente deux points limites et deux points de bifurcation. L'indicateur de singularité utilisé est le déterminant de la matrice de rigidité tangente (indicateur usuel d'instabilité). Pour différencier un point limite d'un point de bifurcation on a évalué le "current stiffness parameter" noté S_p. C' est un paramètre initialement proposé par Bergan (1978) et qui ne s'annule que pour les points limites. L'un des handicaps de l'application de la méthode indirecte est qu'il existe des singularités où l'indicateur s'annule mais ne change pas de signe (Seydel, 1988).

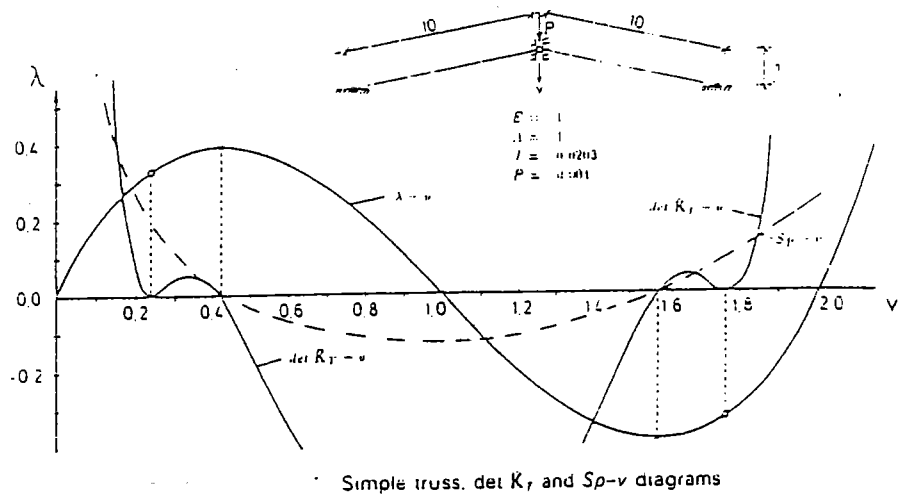


Figure-I-15: Exemple de calcul de points de bifurcation par la méthode indirecte.

-Méthode directe

La méthode directe consiste à résoudre un système qui contient l'équation d'équilibre et une équation dont les solutions correspondent exactement aux points singuliers. Parmi les auteurs ayant utilisé cette méthode pour la détection de points limite et de points de bifurcation non-trivial, on

trouve Abott(1978). Le déterminant de la matrice de rigidité tangente ($\det(K_t)$) est l'un des trois choix qu'il fait pour $h(\mathbf{u}, \lambda)$, c'est à dire qu'il a été amené à résoudre le système ci dessous

$$\begin{Bmatrix} r(\mathbf{u},\lambda) \\ \det\left[K_t(\mathbf{u},\lambda)\right] \end{Bmatrix} = \{0\} \qquad \text{(I-58)}$$

Sur la Figure-I-16, on présente un exemple de calcul de point tournant (λ^*, ξ^*) et de point de bifurcation (λ_b, ξ_b) sur une même branche de solution. La résolution de l'équation (I-58) par une méthode de Newton est restreinte à des systèmes avec un petit nombre de degrés de liberté, car le déterminant doit être calculé analytiquement, ce qui est difficile à obtenir (Seydel; 1988).

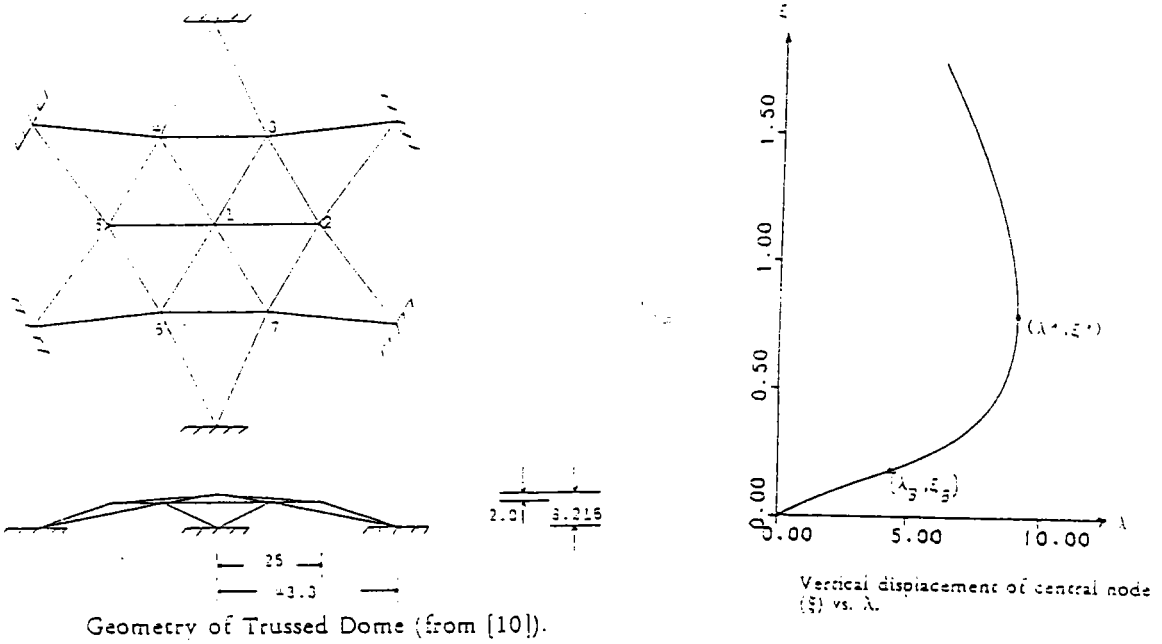


Figure-I-16: Exemple de calcul de point limite et de point de bifurcation par la méthode directe à l'aide du système (I-58) (Abott; 1978)

Pour le calcul de points limites et de points de bifurcation symétriques, Werner et Spence(1984), Weinitschke(1985) et Seydel(1979) ont proposé un système qui s'écrit

$$G(\mathbf{u}, \phi, \lambda) = \begin{Bmatrix} r(\mathbf{u},\lambda) \\ r_{,u}(\mathbf{u},\lambda)\phi \\ l(\phi) \end{Bmatrix} = \{0\} \qquad \text{(I-59)}$$

G est une fonction définie dans $\mathbf{X}\mathbf{x}\mathbf{X}\mathbf{x}\mathbf{R}$, l'équation $r_{,u}(\mathbf{u},\lambda)\phi = 0$ est obtenue en linéarisant (I-59-a) autour de $(\mathbf{u}, \lambda)$, et joue le même role que $\det[K_t] = 0$. $l(\phi) = 0$ est une condition supplémentaire qui impose $\phi \neq \{0\}$ le long du processus itératif. Parmi les choix de cette condition on trouve:

$$l(\phi) = \|\phi\| - 1 = 0$$
$$l(\phi) = \{e_i\}^t \{\phi\} - \phi_0 = 0$$

e_i est un vecteur de $\mathbf{R}_n$ ayant une seule composante non nulle. Il est important de ne pas imposer comme condition

$$l(\phi) = \{\phi\}^t \mathbf{F} - 1 = 0$$

car il implique la recherche uniquement des points limites.

Wriggers, Wagner et Miehe (1988) ont été les premiers à résoudre ce système par la méthode des éléments finis. Après discrétisation du problème variationnel (principe des puissances virtuel) et l'approximation du champs de déplacement (étape détaillée dans I-2), ils aboutissent à la forme algébrique suivante

$$\hat{G}(\mathbf{v},\phi,\lambda)\begin{Bmatrix} r(\mathbf{v},\lambda) \\ K_t(\mathbf{v},\lambda)\phi \\ l(\phi) \end{Bmatrix} = \{0\} \qquad \text{(I-60)}$$

Pour appliquer la méthode classique de Newton, on linéarise le système (I-60) ce qui mène au problème incrémental suivant

$$\begin{bmatrix} K_t & -\mathbf{F} & 0 \\ (K_t\phi)_{,v} & (K_t\phi)_{,\lambda} & K_t \\ \mathbf{0}^t & 0 & \dfrac{\phi^t}{\|\phi\|} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{v} \\ \Delta\lambda \\ \Delta\phi \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} r(\mathbf{v},\lambda) \\ K_t(\mathbf{v},\lambda)\phi \\ \|\phi\| - 1 \end{Bmatrix} \qquad \text{(I-61)}$$

$(K_t\phi)_{,v}$ et $(K_t\phi)_{,\lambda}$ sont les dérivées directionnelles de K_t respectivement par rapport à $\mathbf{v}$ et λ et dont les expressions sont déduites à partir de la troisième

variation de l'énergie potentielle ($\delta^3 P(\mathbf{u},\lambda)$) (souvent, K_t ne dépend pas de λ et $(K_t\phi)_{,\lambda}$ est nul). (I-61) est un système de 2n+1 équations à 2n+1 inconnues, pour sa résolution on utilise une technique d'élimination. On cherche les inconnues $\{\Delta\mathbf{v}\}$ et $\{\Delta\phi\}$ sous la forme

$$\{\Delta\mathbf{v}\} = \Delta\lambda\{\Delta\mathbf{v}_1\} + \{\Delta\mathbf{v}_2\}\ ,\ \{\Delta\phi\} = \Delta\lambda\{\Delta\phi_1\} + \{\Delta\phi_2\} \qquad \text{(I-62)}$$

où $\{\Delta\mathbf{v}_1\}$, $\{\Delta\mathbf{v}_2\}$, $\{\Delta\phi_1\}$ et $\{\Delta\phi_2\}$ vérifient les équations suivantes

$$[K_t]\{\Delta\mathbf{v}_1\} = \{\mathbf{F}\}$$

$$[K_t]\{\Delta\mathbf{v}_2\} = -\{r\}$$

$$[K_t]\{\Delta\phi_1\} = -[K_t(\phi)_{,v}]\{\Delta\mathbf{v}_1\} - [K_t(\phi)]_{,\lambda}$$

$$[K_t]\{\Delta\phi_2\} = -[K_t]\{\phi\} - [K_t(\phi)_{,v}]\{\Delta\mathbf{v}_2\}$$

Une fois que $\{\Delta\phi_1\}$ et $\{\Delta\phi_2\}$ sont connues on déduit l'incrément de charge $\Delta\lambda$ par

$$\Delta\lambda = \frac{-\{\phi\}^t\{\Delta\phi_2\} - \|\phi\|^2 + \|\phi\|}{\{\phi\}^t\{\Delta\phi_1\}} \qquad \text{(I-63)}$$

Ensuite on actualise ($\{\mathbf{u}\}$, $\{\phi\}$, λ)

$$\lambda = \lambda + \Delta\lambda\ ,\ \{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}\} + \{\Delta\mathbf{v}\}\ ,\ \{\phi\} = \{\phi\} + \{\Delta\phi\} \qquad \text{(I-64)}$$

Ce processus est répété jusqu'à ce que l'instabilité soit atteinte. Pour plus de détails sur ces calculs nous renvoyons à Wriggers, Wagner et Miehe(1988). Sur la Figure-I-17 on présente un exemple d'application du système (I-60) pour le calcul du point limite et du point de bifurcation dans le cas d'un arc. Pour différencier un point limite d'un point de bifurcation on calcule la quantité ($\{\phi\}^t\{\mathbf{F}\}$) ou bien le "current stiffness parameter" S_p.

Les problèmes fréquents lors de l'usage du système (I-60) sont:

- Le calcul des dérivées directionnelles de la matrice de rigidité tangente qui n'est pas facile d'une manière générale (Wrigers, Simo; 1990)

- La matrice de rigidité tangente est parfois mal conditionnée lorsque l'instabilité est atteinte (Wrigers, Wagner,.Simo; 1988). Ce problèmes a poussé certains auteurs (Wriggers et Simo; 1990) à utiliser d'autres fonctionnelles en introduisant les multiplicateurs de Lagrange (Penality functional). Néanmoins cette procédure a connu d'autres difficultés car il s'agit de résoudre un système dit modifié de taille plus grand que celui de (I-61).

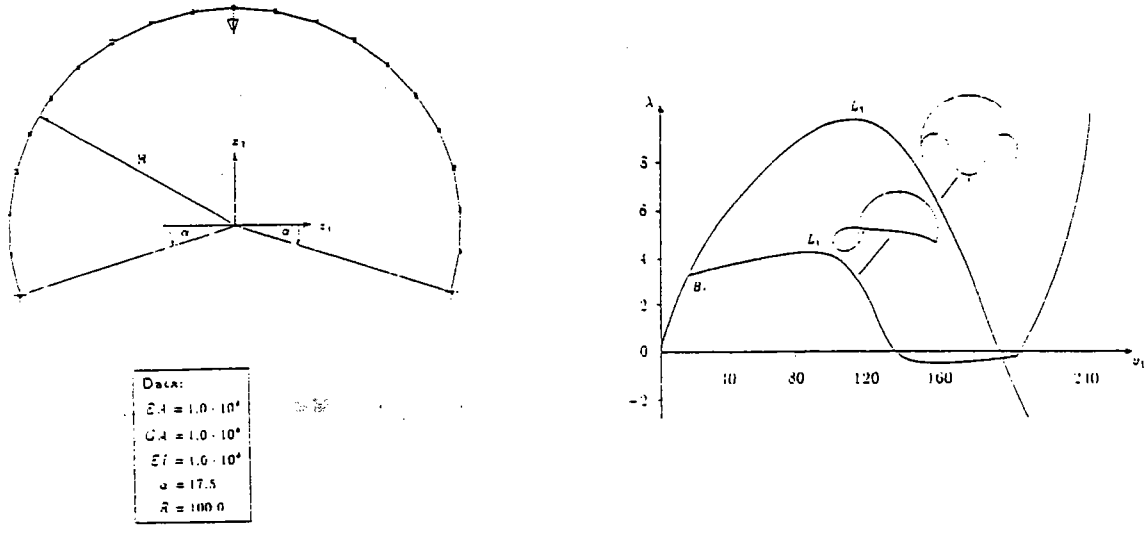


Figure-I-17: Exemple de calcul de point limite et de point de bifurcation par la méthode directe à l'aide du système (I-60) (Wagner ,Simo; 1990)

I-7-c) Branchement sur les solutions bifurquées

En général on utilise la méthode de Lyapounov Shmidt pour l'enchainement sur la branche bifurquée. Par exemple dans le cas d'un mode unique, la solution bifurquée **V** est cherchée sous la forme suivante

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}(\lambda_c) + a\Phi + \mathbf{W} \qquad \text{avec} \qquad \langle\langle \Phi, \mathbf{W} \rangle\rangle = 0 \qquad (65)$$

$\mathbf{U}(\lambda_c)$ est le déplacement au critique λ_c. On voit bien que pour suivre la branche bifurquée, il est nécessaire de connaître le mode de flambage et la charge correspondante. Les méthodes de résolution restent exactement celles

décrites au début de ce paragraphe. Dans le cas d'une bifurcation multiple (n modes Φ_i) la branche bifurquée est recherchée sous la forme.

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}(\lambda_c) + \sum_{i=1}^{n} a_i \Phi_i + \mathbf{W} \qquad \text{avec} \qquad \langle\langle \Phi_i, \mathbf{W} \rangle\rangle = 0$$

I-8) Bifurcation perturbée

L'effet des petites perturbations sur un problème de bifurcation a suscité plusieurs travaux, théoriques, numériques et expérimentaux. D'une part parce que c'est un moyen qui permet d'étudier les solutions singulières d'un problème et d'autre part parce que les structures réelles sont souvent imparfaites. La thèse de Koiter (1945) étant la première contribution sur ce thème. Pour les structures présentant une bifurcation symétrique stable (poutres et plaques), lorsqu'on introduit un petit défaut, on constate une seule branche continue qui tend vers les branches du problème parfait quand l'amplitude de l'imperfection tend vers 0. De telles structures sont dites insensibles aux défauts Figure-I-18-a. Pour les structures présentant des bifurcations asymétriques ou des bifurcation symétriques instables (telles que les cylindres), le point de bifurcation se transforme en un point limite. Ces structures sont dites sensibles aux défauts Figure-I-18-b.
Dans un cadre purement mathématique Keener et Keller(1973) ont analysé ce problème et ont abouti à un système du même type que (I-17) mais dépendant d'un paramètre τ mesurant le défaut

$$R(\mathbf{U}, \lambda, \tau) = 0 \qquad \text{(I-66)}$$

La résolution de ce système donne la branche d'équilibre perturbée, ce qui permet aussi d'approcher la branche bifurquée du système parfait. D'un point de vue numérique cette procédure a été adoptée par Wagner et Wriggers (1991) pour approcher les points de bifurcation. Ils ont résolu par la méthode de Newton un problème du même type que (I-59) donné par

$$\bar{R}(\mathbf{U}, \Phi, \lambda, \tau) = \begin{Bmatrix} R(\mathbf{U}, \lambda, \tau) \\ R_{,U}(\mathbf{U}, \lambda, \tau)\Phi \\ l(\Phi) \end{Bmatrix} = 0 \qquad \text{(I-67)}$$

La résolution de ce système donne évidement le point limite et le mode correspondant. Un exemple d'application a été réalisé en utilisant la méthode des éléments finis sur les deux barres de Roorda qui présentent une bifurcation asymétrique Figure-I-19-a. Pour différentes petites valeurs de τ (positives ou négatives) on a résolu le problème (I-67). On trouvera ces résultats sur la Figure-I-19-b.

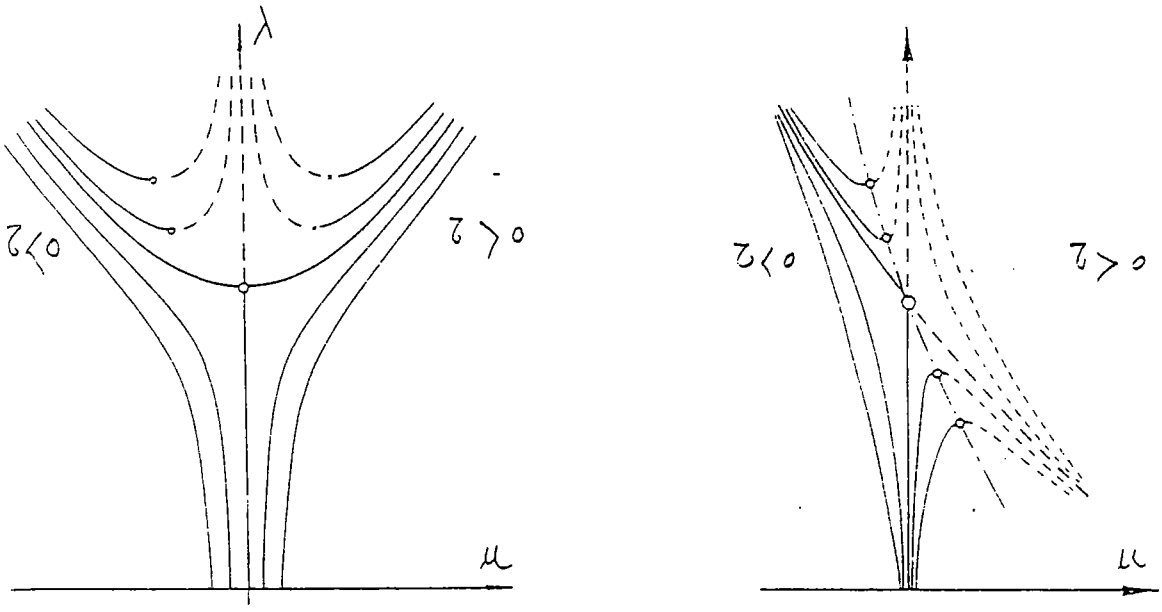


Figure-I-18: Influence des imperfections sur un problème de bifurcation

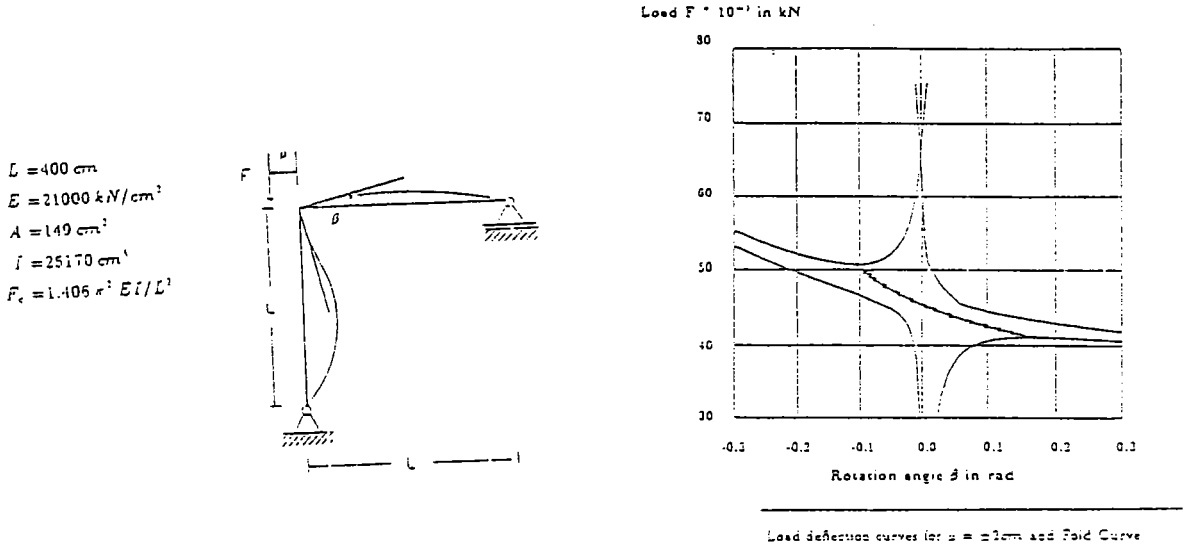


Figure-19: Calcul de point de bifurcation pour les deux barres par perturbation . En trait continu, on voit les courbes de réponse force-angle pour deux valeurs particulières de τ. L'ensemble des points limites est la ligne avec des points.

II) MÉTHODE ASYMPTOTIQUE NUMÉRIQUE POUR LE CALCUL DES BRANCHES DE SOLUTIONS

L'objectif de ce chapitre est de faire un rappel sur les méthodes asymptotiques-numériques développées au LPMM depuis 1990. Il s'agit de techniques de résolution non-linéaires qui s'appuient d'une part sur les méthodes de perturbation (asymptotiques) et d'autre part sur des résolutions par éléments finis (numériques). Le principe consiste à chercher des représentations des branches d'équilibre sous la forme de séries entières, ce qui conduit à résoudre une succession de problèmes linéaires bien posés admettant toujours le même opérateur. L'originalité est de pousser les développements à des ordres élevés en résolvant numériquement par éléments finis un grand nombre de ces problèmes linéaires. On construit ainsi des représentations analytiques continues des branches de solutions pour un coût de calcul qui reste de l'ordre de grandeur d'un calcul élastique linéaire.
Les fondements de ces méthodes asymptotiques-numériques (M.A.N) ont été proposés par Damil et Potier-Ferry(1990). Diverses variantes de M.A.N et de nombreuses applications ont été développées dans (Azrar, Cochelin, Damil et Potier-Ferry; 1993), (Cochelin, Damil et Potier-Ferry; 1994 a et b), (Boutyour, Cochelin, Damil et Potier-Ferry, 1993) et (Braikat, Damil et Potier-Ferry; 1994). Dans cette présentation on s'est largement inspiré de (Cochelin; 1994).

II-1) Les concepts de base de la méthode asymptotique-numérique

Le point de départ de la méthode asymptotique-numérique est la formulation mixte (I-17) pour les raisons décrites au chapitre-I(§-I-2). On rappelle que la formulation mixte (I-17) présente une non-linéarité quadratique et qu'elle se prête mieux aux développements asymptotiques que la formulation en déplacement (I-11) où la non-linéarité est cubique. Une branche de solution est cherchée sous la forme de développements asymptotiques dans le voisinage d'un point connu (U_0, λ_0) vérifiant (I-17)

$$U(a) = U_0 + a\,U_1 + a^2\,U_2 + \ldots$$
$$\lambda(a) = \lambda_0 + a\,\lambda_1 + a^2\,\lambda_2 + \ldots \qquad \text{(II-1)}$$

"a" est un paramètre de contrôle de la branche qui sera défini par la suite. Pour le calcul des termes des séries (II-1), on injecte ces développements dans

l'équation (I-17) et on identifie terme à terme suivant les puissances de "a". Cela permet d'avoir une série de problèmes linéaires mixtes.

ordre 1

$$\mathbf{u}_1 = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_u$$

$$L_t^{\circ}(\mathbf{U}_1) = \lambda_1 \mathbf{F} \tag{II-2}$$

ordre 2

$$\mathbf{u}_2 = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_u$$

$$L_t^{\circ}(\mathbf{U}_2) = \lambda_2 \mathbf{F} - Q(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_1) \tag{II-3}$$

.

.

.

ordre p

$$\mathbf{u}_p = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_u$$

$$L_t^{\circ}(\mathbf{U}_p) = \lambda_p \mathbf{F} - \sum_{r=1}^{p-1} Q(\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_{p-r}) \tag{II-4}$$

Tous ces problèmes admettent le même opérateur tangent L_t° défini par

$$L_t^{\circ}(.) = L(.) + Q(\mathbf{U}_0, .) \tag{II-5}$$

Le premier problème à l'ordre 1 correspond exactement au problème incrémental tangent qui sert de prédicteur dans l'algorithme classique de Newton-Raphson. Les problèmes suivants s'apparentent à des problèmes d'élasticité linéarisés avec un chargement qui dépend des solutions aux ordres précédents. A ce niveau, il reste encore une indétermination dans chacun de ces problèmes car le paramètre de développement "a" n'a toujours pas été défini précisément. Dans la littérature de cette méthode asymptotique-numérique, cette indétermination a été levée en faisant l'un des trois choix suivants du paramètre"a":

1°) "a" est identifié comme étant l'incrément du paramètre de chargement

$$a = \lambda - \lambda_0 \qquad \text{(II-6)}$$

2°) "a" est identifié à la projection de l'incrément de déplacement $\mathbf{u}$-$\mathbf{u}_0$ sur le vecteur $\mathbf{u}_1$ comme il est classique en théorie de la bifurcation (Potier-Ferry-1987)

$$a = \langle 1(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0), \mathbf{u}_1 \rangle \qquad \text{(II-7)}$$

3°) "a" est identifié à la projection des incréments $\mathbf{u}$-$\mathbf{u}_0$ et λ–λ_0 sur le vecteur tangent $\mathbf{u}_1$, λ_1 et la projection a été prise au sens du produit scalaire ordinaire

$$a = \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\, \lambda_1 \qquad \text{(II-8)}$$

On notera que ce dernier choix de "a" est inspiré des méthodes de continuation à longueur d'arc imposée.

En résumé, la procédure de développement asymptotique présentée ici conduit à une succession de problèmes linéaires mixtes bien posés dont les inconnues sont λ_p et $\mathbf{U}_p = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_p \\ \mathbf{S}_p \end{pmatrix}$. Par exemple avec le troisième choix de "a" et à l'ordre p (avec $p > 1$) on obtient le problème suivant.

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_p = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega_u \\ &L_t^{\circ}(\mathbf{U}_p) = \lambda_p \mathbf{F} - \sum_{r=1}^{p-1} \mathbf{Q}(\mathbf{U}_r, \mathbf{U}_{p-r}) \qquad \text{(II-9)} \\ &\langle \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{aligned}$$

II-2) Résolution numérique

La résolution des problèmes mixtes (II-9) a été faite par la méthode des éléments finis en deux étapes.

- La première étape consiste à éliminer les contraintes dans l'équation (II-9-b) et à les remplacer par une relation de pseudo-comportement que l'on obtient en faisant $\delta\mathbf{u} = 0$ à l'ordre p

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{D}:(\gamma^l(\mathbf{u}_p) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_p) + \sum_{r=1}^{p-1}\gamma^{nl}(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{p-r})) \qquad \text{(II-10)}$$

A ce niveau le problème (II-9), dont les inconnues sont les contraintes et les déplacements, est remplacé par un problème où les inconnues sont les déplacements $\mathbf{u}_p$. Les contraintes seront ensuite calculées par le biais de la relation (II-10). Au chapitre 3 et 4 on reviendra d'une manière plus explicite sur ce point.

- La deuxième étape c'est la discrétisation par éléments finis du nouveau problème en déplacement. Dans (I-2) on a présenté comment on approxime le champ de déplacement $\mathbf{u}$ et les champs de déformation réel $\gamma(\mathbf{u})$ et virtuel $\delta\gamma(\mathbf{u},\delta\mathbf{u})$.

Une fois que ces deux étapes sont achevées on a un problème d'algèbre linéaire bien posé qui s'écrit généralement de la façon suivante

$$\# \qquad \left[K_t^\circ\right]\left\{\mathbf{v}_p\right\} = \lambda_p\{\mathbf{F}\} + \left\{\mathbf{F}_p^{nl}\right\}. \qquad \text{(II-11)}$$

Une condition sur les $\left\{\mathbf{v}_p\right\}$ qui découle du choix du paramètre "a"

où $\left[K_t^\circ\right]$ est la matrice de rigidité tangente prise au point de départ ($\mathbf{U}_0$, λ_0), $\{\mathbf{F}\}$ le vecteur des chargements imposés et $\left\{\mathbf{F}_p^{nl}\right\}$ un vecteur de force qui ne dépend que des solutions $\left\{\mathbf{v}_r\right\}$ et $\left\{\mathbf{S}_r\right\}$ aux ordres précédents $r < p$.

En résumé la procédure asymptotique-numérique décrite plus haut permet de déterminer les séries suivantes jusqu'à un ordre élevé avec une seule inversion de la matrice de rigidité tangente.

$$\lambda(a) = \lambda_0 + a\,\lambda_1 + a^2\lambda_2 +$$

$$\{\mathbf{v}(a)\} = \{\mathbf{v}_0\} + a\{\mathbf{v}_1\} + a^2\{\mathbf{v}_2\} + \ldots \qquad \text{(II-12)}$$

$$\{\mathbf{S}(a)\} = \{\mathbf{S}_0\} + a\{\mathbf{S}_1\} + a^2\{\mathbf{S}_2\} + \ldots$$

II-3) Exemples de calcul d'une branche de solution non-linéaire

La méthode décrite plus haut a été appliquée avec un grand succès à plusieurs structures avec des non-linéarités géométriques (petites déformations et rotations modérées). Pour montrer la qualité des solutions asymptotiques polynomiales on présente ici l'exemple d'une coque cylindrique avec deux ouvertures soumise à une compression axiale. La Figure-II-1 présente les courbes de solutions obtenues avec une troncature des séries (II-1) aux ordres 10 et 20. On voit bien que ces solutions coïncident parfaitement avec la solution exacte sur un large domaine, c'est à dire jusqu'à une flèche de l'ordre de 2h, au delà de laquelle les courbes s'écartent d'une manière brutale.

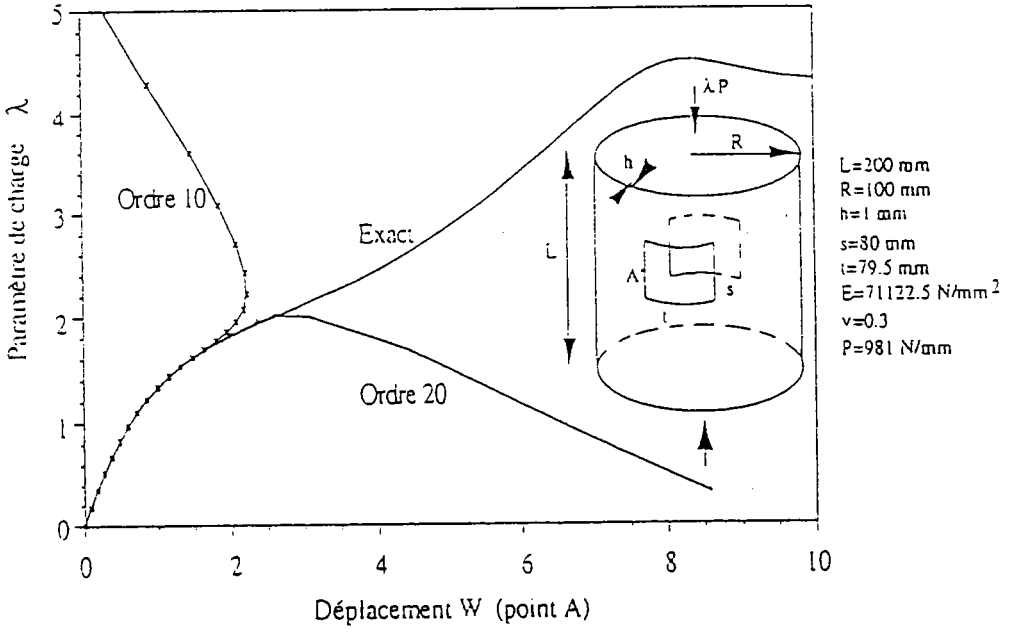


Figure-II-1: Solutions asymptotiques aux ordres 10 et 20 pour le cylindre troué (Cochelin, Damil, Potier-Ferry; 1994)

II-4) Méthode de continuation

Dans le paragraphre (II-3) on a vu sur un exemple que la méthode asymptotique-numérique permet de décrire une certaine partie d'une branche non-linéaire avec un seul développement. La représentation polynomiale est en

effet acceptable uniquement dans le voisinage du point de départ. Cela est dû au fait que les séries entières ont un rayon de convergence fini. Pour avoir complètement la branche de solutions, il suffit d'appliquer la même procédure d'une façon pas à pas (Cochelin; 1993) et (Cochelin, Damil et Potier-Ferry; 1994-b). Il s'agit d'une méthode de continuation mise au point sur la base des méthodes asymptotiques numériques. Le principe est simple: après avoir appliqué la méthode asymptotique-numérique, il suffit de définir un nouveau point de départ $\mathbf{U}_0$, λ_0 sur la branche déjà déterminée, puis de réappliquer la méthode asymptotique-numérique à partir de ce point. Concrètement parlant, pour une valeur du paramètre "a" notée a_m située à l'intérieur du rayon de convergence des séries (II-1), on calcule $\mathbf{U}(a_m)$ et $\lambda(a_m)$ qui servira de point de départ lors de la réapplication de la procédure asymptotique-numérique. On a appliqué cette procédure dans le cas d'une coque légèrement galbée chargée en flexion (Figure-II-2). La solution complète de la coque a été obtenue en 4 pas, c'est à dire avec 4 décompositions de la matrice de rigidité tangente. La branche est ainsi décrite par une succession de représentations analytiques et non par quelques points de solutions comme il est classique avec les méthodes de prédiction-correction. Avec cette technique, les pas de calcul sont relativement grands, et de plus la continuation est entièrement automatique (Cochelin; 1993).

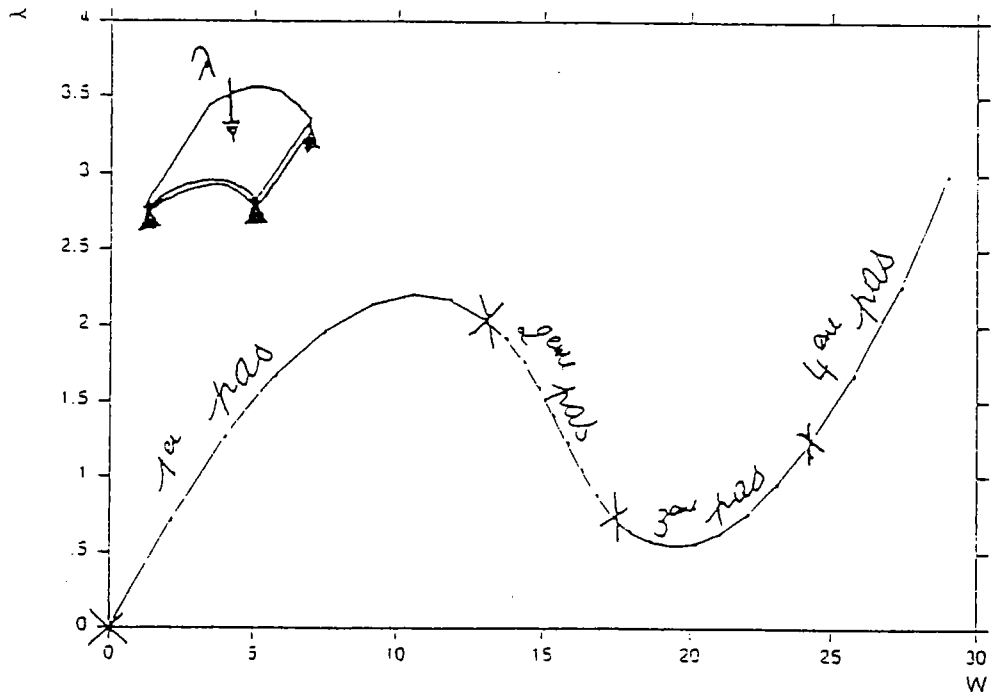


Figure-II-2: Continuation asymptotique-numérique de la coque légèrement galbée en flexion.

II-5) Calcul du post-flambage par la méthode asymptotique-numérique

La méthode asymptotique-numérique a été appliquée au calcul du post-flambage des structures minces en se restreignant à des singularités simples (Azrar, Cochelin, Damil et Potier-Ferry; 1993). Les développements asymptotiques sont faits cette fois à partir du point de bifurcation. Après discrétisation par éléments finis on obtient un problème semblable à (II-11) et qui s'écrit sous la forme .

$$\begin{aligned} &\left[K_t^c\right]\left\{v_p\right\} = \left\{F_p\right\} \\ &\left\langle v_1, v_p \right\rangle = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II-13)}$$

(II-13-b) est la condition supplémentaire que l'on a choisit sur les vecteurs $\left\{v_p\right\}$, elle exprime l'orthogonalité des $\left\{v_p\right\}$ avec le mode de flambage $\left\{v_1\right\}$. La difficulté cette fois est que l'opérateur tangent $\left[K_t^c\right]$ est singulier. Donc on ne peut pas résoudre le problème (II-13-a) directement sans tenir compte de (II-13-b). Pour cela on a utilisé une technique que l'on a appelée "relaxation", basée sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange et qui permet d'avoir un problème global inversible se formulant de la façon suivante

$$\begin{bmatrix} K_t^c & v_1 \\ v_1^t & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_p \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{pour } p>1 \qquad \text{(II-14)}$$

où "k" est le multiplicateur de Lagrange. Pour plus de détails nous renvoyons à (Azrar, Cochelin, damil et Potier-Ferry; 1993). L'un des premiers tests numériques a été réalisé sur l'exemple d'une coque cylindrique axisymétrique de Donnel soumise à une pression. Sur la Figure-II-3 on remarque que l'on a pu calculer une bonne partie de la branche bifurquée jusqu'à W/h=4. Le préflambage a été supposé linéaire ce qui est une approximation usuelle pour les coques cylindriques sous pression (Azrar; 1993)

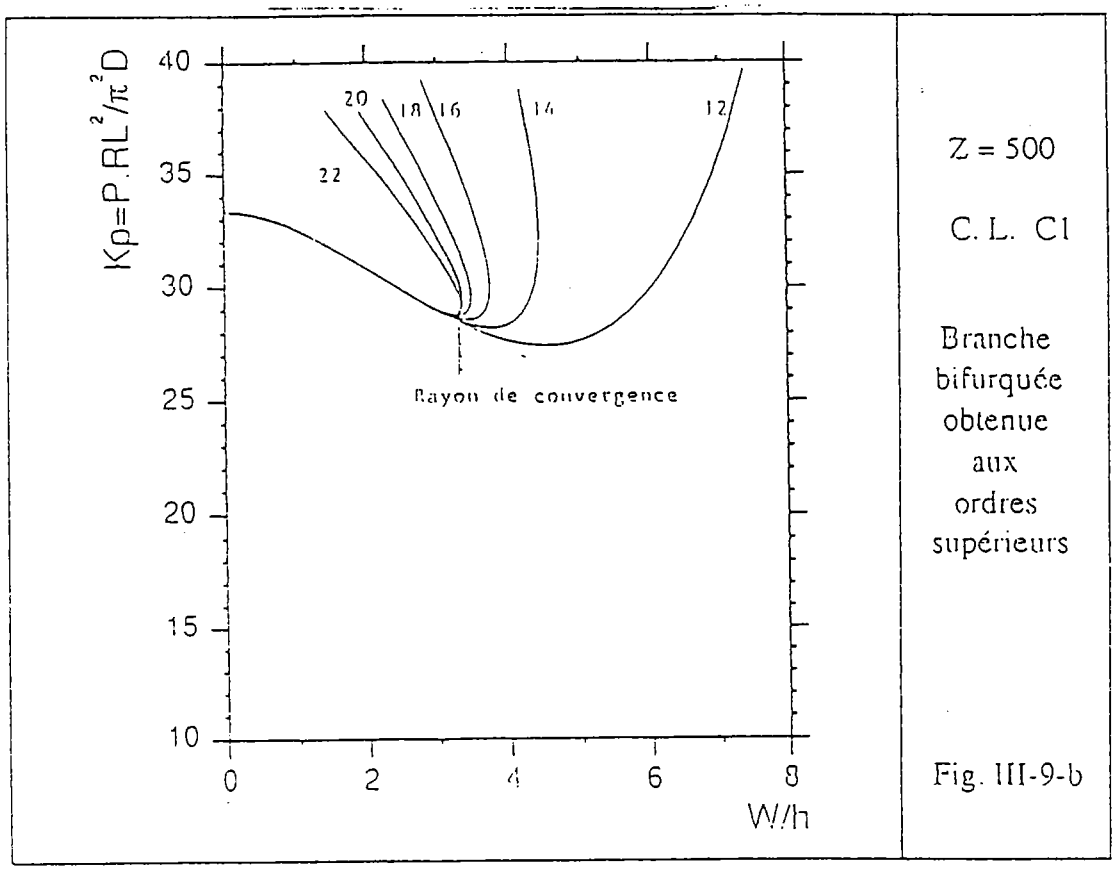


Figure-II-3: Post-flambage d'une coque cylindrique par MAN (Azrar, Cochelin, Damil et Potier-Ferry; 1993)

II-6) Améliorations des séries entières par des approximants de Padé.

A ce niveau toutes les solutions recherchées sont supposées être des fonctions analytiques ce qui a permis d'utiliser des développements en série entières. Une propriété remarquable des fonctions analytiques est que la connaissance de la fonction au voisinage d'un seul point, est équivalente à la connaissance de la fonction en tous les points. Aussi, lorsqu'on a déterminé un grand nombre de termes de la série de Taylor d'une fonction, on peut espérer reconstruire la fonction même au delà du rayon de convergence de la série. Cette propriété a été exploitée pour représenter la solution dans un domaine aussi large que possible en insérant dans les séries (II-1) des fractions rationnelles appelées approximants de Padé. Cette nouvelle représentation permet d'améliorer considérablement le rayon de convergence des séries entières. Ce résultat est connu depuis les travaux de H.Padé-1892. On notera

aussi qu'une présentation moderne a été donnée par (Baker et Graves-Moris-1981).

Définition:

Soit une fonction f(x) développable en série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad \text{(II-15)}$$

où les coefficients c_n sont connus. Un approximant de Padé $P[L,M]$ de cette fonction est le rapport de deux polynômes, de degré L au numérateur, de degré M au dénominateur et dont le développement de Taylor coïncide avec celui de la fonction jusqu'à l'ordre L+M.

$$P[L,M] = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_L x^L}{1 + b_1 x + \ldots + b_M x^M} \qquad \text{(II-16)}$$

Les coefficients a_i et b_i sont déterminés à partir des coefficients c_i en écrivant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n - P[L,M] = o(x^{L+M+1}) \qquad \text{(II-17)}$$

(II-17) mène à la résolution d'un système linéaire de taille M qui permet d'obtenir les coefficients b_i

$$\begin{bmatrix} c_{L+M+1} & c_{L+M+2} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_L & c_{L+1} & \cdots & c_{L+M-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ \vdots \\ b_1 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ \vdots \\ c_{L+M} \end{Bmatrix} \qquad \text{(II-18)}$$

Une fois que ce système est résolu, on peut obtenir facilement les coefficients a_i par les formules suivantes

$$
\begin{aligned}
a_0 &= c_0 \\
a_1 &= c_1 + b_1 c_0 \\
a_2 &= c_2 + b_1 a_1 + b_2 c_0 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
a_L &= c_L + \sum_{i=1}^{\min(L,M)} (b_i c_{L-i})
\end{aligned}
\qquad \text{(II-19)}
$$

A titre d'illustration, on considère la fonction suivante

$$f(x)=\sqrt{\frac{1+x/2}{1+2x}}$$

Le rayon de convergence de la série de Taylor de f(x) au voisinage de zéro vaut $\frac{1}{2}$. Il est imposé par la singularité en x=-0.5. Le développement de Taylor de f(x) au voisinage de 0 à l'ordre 2 s'écrit

$$f(x) = 1-\frac{3}{4}x+\frac{39}{32}x^2$$

A l'aide des coefficients c_i de la série associés à f(x), on détermine les approximants Padé. Par exemple

$$P[1,1]=\frac{1+7x/8}{1+13x/8} \qquad\qquad P[2,2]=\frac{1+17x/8+61x^2/64}{1+23x/8+121x^2/64}$$

Sur la Figure-II-4 on trace la fonction f(x), son développement de Taylor à différents ordres et sa représentation par différents approximants de Padé. On voit bien que ces derniers arrivent à représenter la fonction sur un domaine plus vaste que celui des séries entières.

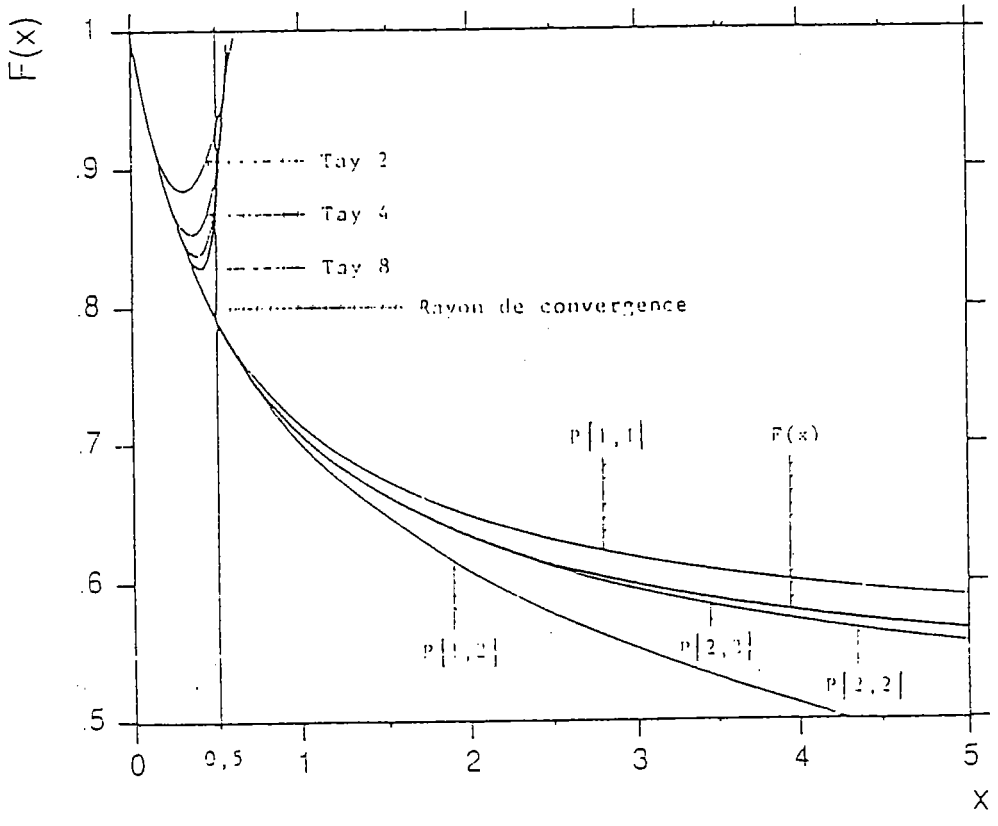


Figure-II-4: Amélioration de la convergence des développements de Taylor de f(x) par les approximants de Padé (Baker; 1981)

Pour améliorer les séries (II-1), on a utilisé la technique d'approximants de Padé que l'on reverra en détail au chapitre-3. Ici on va uniquement rappeler qu'il existe au moins deux façons d'introduire les approximants de Padé dans les séries (II-1) et on se contente d'illustrer les performances sur un exemple

a)-La première façon consiste à insérer les approximants de Padé dans la série (II-1-a) et (II-1-b). La série (II-1-a) n'est pas une série scalaire mais une série vectorielle. L'introduction d'approximants de Padé nécessite quelques aménagements préalables qui seront décrits au chapitre-III.

b)-La deuxième façon consiste à insérer les approximants de Padé dans la série (II-1-a) et à recalculer λ par une technique de projection.

Sur la Figure-II-5, on présente une application qui a été réalisée sur le problème d'une plaque en flexion. On voit bien que la deuxième façon d'introduire les approximants de Padé (b) approche mieux la solution exacte que la première (a) et qu'elles sont toutes les deux nettement meilleures que la représentation polynomiale qui diverge à une flèche W/h= 2.

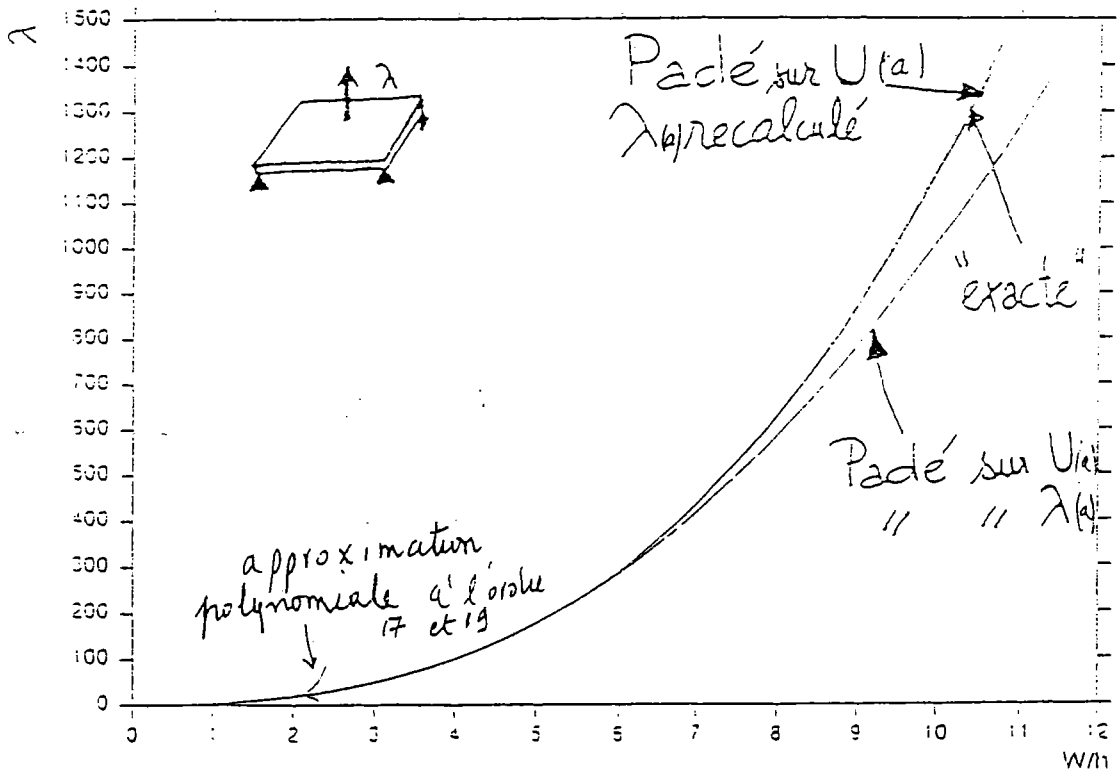


Figure-II-5: Amélioration des séries à l'aide des approximants de Padé. La représentation polynomiale diverge aux alentours de W/h = 2. et de λ = 15., alors que l'utilisation des approximants de Padé permet de suivre la courbe au delà même de W/h = 10 et λ = 1500 (Cochelin, Damil, Potier-Ferry; 1994-a)

II-7) Méthode asymptotique-numérique pour les structures imparfaites

L'influence des défauts notamment géométriques sur le flambage des structures élastiques a fait l'objet de plusieurs études asymptotiques, Koiter(1945) Budiansky(1974), Potier-Ferry(1987). Dans le cas d'un mode unique, d'une bifurcation symétrique instable et d'un défaut d'amplitude a_0, ces théories conduisent en général à une réduction de la charge critique proportionnelle à $(a_0)^{2/3}$ de la charge critique. Cette analyse asymptotique n'est valable que pour des amplitudes de défauts suffisamment petites. Ce problème a été étudié par une méthode asymptotique-numérique en poussant les développements à des ordres élevés. Historiquement, il s'agit de la première présentation d'une M.A.N (Damil, Potier-Ferry; 1990). Lorsqu'on tient compte du défaut les équations d'équilibre s'écrivent sous la forme

$$L(\mathbf{U}) + (\lambda-\lambda_c)\, L'(\mathbf{U}) + Q(\mathbf{U},\mathbf{U}) + \lambda a_0.\mathbf{d} = 0 \qquad \text{(II-20)}$$

où L' est un opérateur linéaire, a_0 est l'amplitude du défaut et **d** est un vecteur contenant la forme du défaut. Le fait d'avoir à chaque ordre des problèmes faciles à résoudre, permet de pousser les développements asymptotiques à des ordres élevés ce qui a permis de prendre en compte un spectre plus étendu d'imperfections initiales. Sur la Figure-II-6, on illustre ce résultat dans le cas d'une poutre sur une fondation élastique. Pour des valeurs croissantes de l'amplitude du défaut, on a comparé, la charge limite donnée par un calcul exact, la charge limite donnée par la théorie de Koiter (troncature à l'ordre 2) et celle donnée par la méthode asymptotique-numérique avec une troncature à l'ordre 6. On remarque que cette dernière coïncide mieux avec le calcul exact.

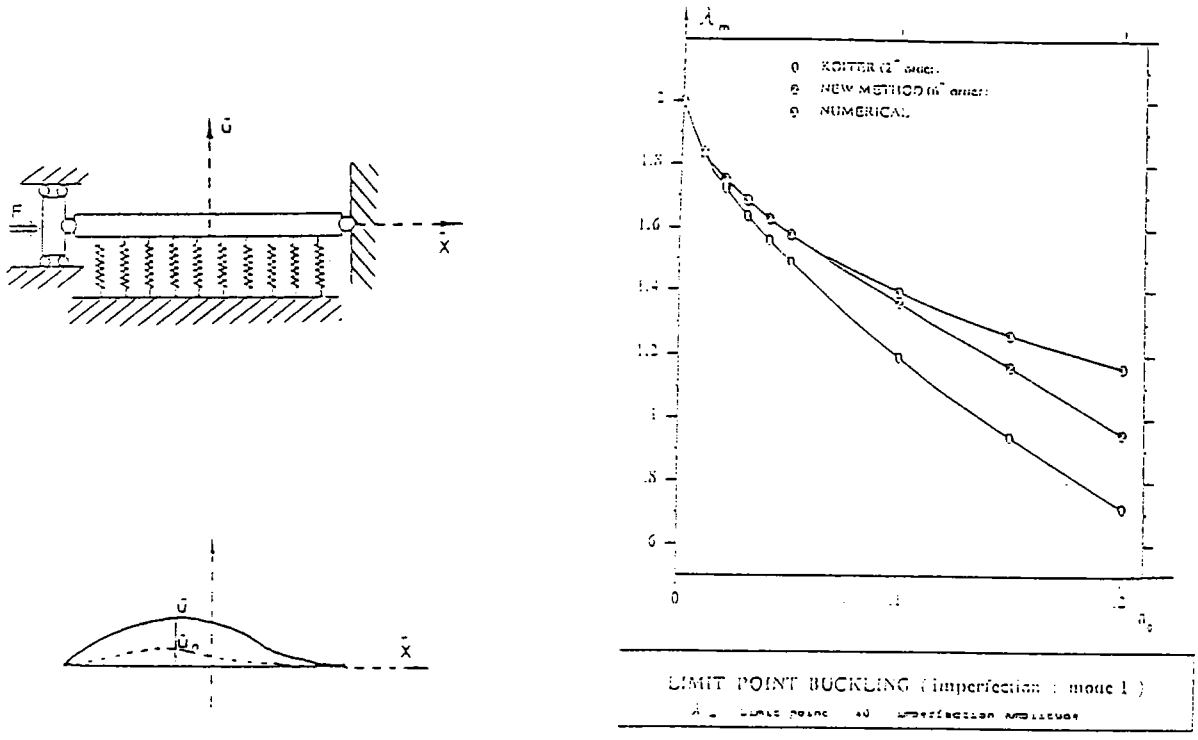


Figure-II-6: Calcul de charges critiques pour une poutre sur fondation élastique avec un défaut géométrique sur le mode de flambage (Damil et Potier-Ferry; 1990)

II-8) Conclusion

Les tests numériques qu'on a présentés dans ce chapitre montrent qu'une méthode de perturbation associée à une méthode d'éléments finis est un moyen efficace et fiable de calculer les branches de solutions fondamentales ou bifurquées des structures élastiques minces. Les coûts de calcul sont faibles par rapport à des méthodes incrémentales-itératives car la détermination d'une branche de solutions sous la forme d'une série asymptotique ne nécessite qu'une seule factorisation de la matrice de rigidité globale. Dans le cas où la procédure de continuation est utilisée, quelques factorisations seulement sont nécessaires pour avoir complètement une branche de solution. On a pu augmenter le domaine de validité des représentations polynomiales par les approximants de Padé. Dans la suite on va s'intéresser au problème de la détection de points de bifurcation sur des branches de solution calculées par des M.A.N.

III) DÉTECTION D'UN POINT DE BIFURCATION SUR UNE BRANCHE LINÉAIRE

Dans les deux chapitres précédents, on a fait essentiellement des rappels sur la théorie de la bifurcation et sur les méthodes asymptotiques-numériques. Dans ce chapitre et le suivant, on présente les parties originales de cette thèse consacrées au calcul des points de bifurcation par des méthodes asymptotiques-numériques.

Dans ce chapitre-III, on s'intéresse au calcul des premières charges de bifurcation sur une branche fondamentale linéaire. Ce type de calcul concerne les structures qui présentent un préflambage linéaire telles que les poutres droites et les plaques, mais aussi les coques cylindriques sous pression où le préflambage est quasi-linéaire.

Le principe de notre méthode consiste à caractériser les bifurcations au moyen d'un problème d'équilibre perturbé, que l'on va résoudre par une technique asymptotique-numérique. L'analogie avec les approches standards basées sur un calcul de valeurs propres sera discutée au paragraphe III-3-c.

Le chapitre est organisé de la façon suivante:
Dans la première partie, on présente sur deux exemples simples à un et à deux degrés de liberté un problème d'équilibre perturbé qui nous permet de définir notre indicateur de bifurcation. On montre comment avoir précisément les charges et les modes de bifurcation. Dans la deuxième partie, on donnera une extension du problème d'équilibre perturbé (indicateur de bifurcation) à des structures complexes. Ce problème sera résolu par des séries et un exemple d'application sur une plaque sera présenté dans la partie 3. Dans la quatrième partie, on utilise la technique d'approximants de Padé pour améliorer les séries entières. Enfin, on traite le problème avec deux perturbations(partie 6).

III-1) Modèles mécaniques simples

III-1-a) Modèle à un degré de liberté

On considère le modèle mécanique de la Figure-III-1 déjà vu au chapitre-I.

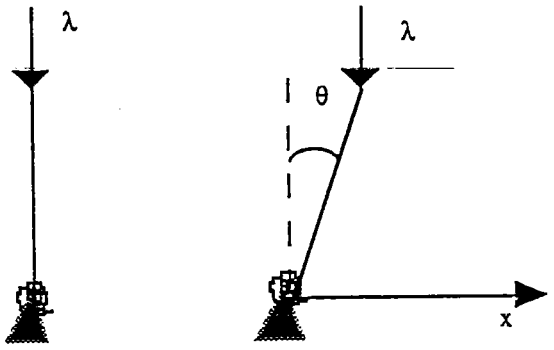


Figure-III-1: modèle élémentaire de flambage à 1 degré de liberté

On rappelle que l'équation d'équilibre correspondant à une compression pure λ s'écrit

$$k\theta - \lambda\, l \sin(\theta) = 0. \qquad \text{(III–1)}$$

elle admet une solution fondamentale $\theta = 0$, et une solution bifurquée $\lambda = \frac{k}{l}\frac{\theta}{\sin(\theta)}$, qui se coupent au point de bifurcation $(\lambda = \frac{k}{l}, \theta = 0)$.(Figure-III-2)

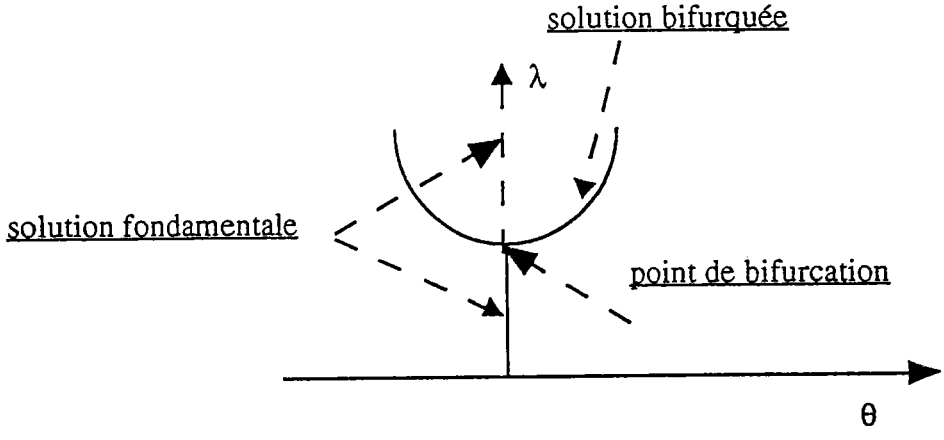


Figure-III-2: Courbe charge déplacement

Pour caractériser le point de bifurcation, nous introduisons une petite perturbation dans le système: soit $\Delta\mu$ une force perturbatrice appliquée à l'extrémité supérieure de la barre selon la direction x, et $\Delta\theta$ la réponse en déplacement pour une valeur donnée de λ (Figure-III-3)

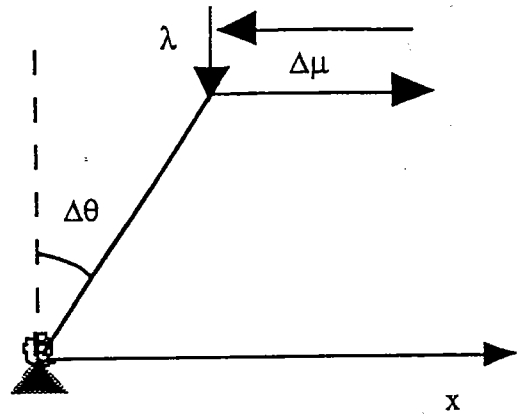


Figure-III-3: Perturbation du système

$\Delta\theta$ et $\Delta\mu$ sont solutions de l'équation d'équilibre perturbé suivante

$$(\frac{k}{l} - \lambda)\Delta\theta = \Delta\mu \qquad \text{(III-2)}$$

où le terme $(\frac{k}{l} - \lambda)$ représente la rigidité tangente du système dans la direction x.

Le point de bifurcation peut se caractériser de plusieurs façons:

a) C'est le point de la branche fondamentale où la rigidité tangente $(\frac{k}{l} - \lambda)$ s'annule.

b) Pour une force perturbatrice $\Delta\mu$ fixée, c'est le point où la réponse en déplacement $\Delta\theta$ tend vers l'infini.

c) Pour un déplacement perturbateur $\Delta\theta$ fixé, c'est le point où la réponse en force $\Delta\mu$ est nulle. En se fixant $\Delta\theta$, la force $\Delta\mu$ s'apparente à une mesure de rigidité.

La première caractérisation (a) est à la base des techniques de détection des points de bifurcation classiques en calcul de structures. Pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté, elle revient à chercher les points où la matrice de rigidité tangente est singulière. La deuxième caractérisation (b) n'est pas utilisable pratiquement à cause des valeurs infinies de $\Delta\theta$. Dans toute la suite, nous allons utiliser la troisième caractérisation : les points de bifurcation correspondent aux zéros de la fonction de "rigidité" $\Delta\mu(\lambda)$ définie par l'équation (III-2) et la condition supplémentaire $\Delta\theta = c^{ste}$. Pour le modèle de la barre on obtient le diagramme linéaire de la Figure-III-2. Dans le

paragraphe suivant on montrera que cette fonction devient plus compliquée dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté.

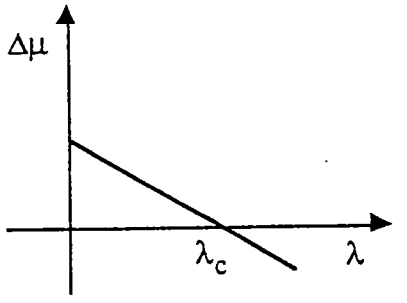


Figure-III-4: Allure de la fonction de rigidité Δμ pour le modèle à 1 degré de liberté.

III-1-b) Modèle à deux degrés de liberté

Il s'agit d'un système de trois barres rigides articulées, de longueur l, liées par deux ressorts spiraux de raideur k. Ce système est soumis à une force compressive λ suivant x_1, (Figure-III-5). On notera les déplacements des points B et C par u_1 et u_2.

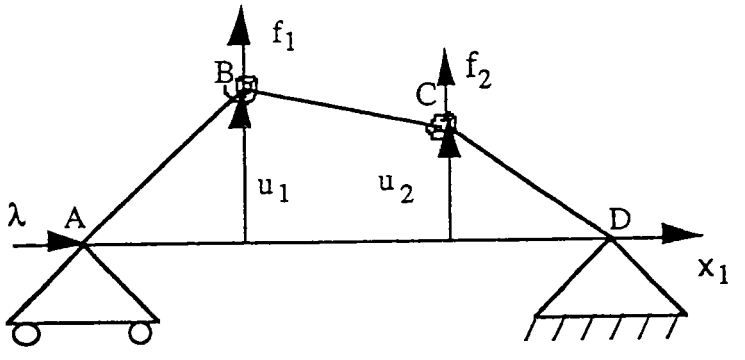


Figure-III-5: Système de trois barres articulées à deux degrés de liberté

Ce système admet une position d'équilibre fondamentale linéaire $\{\mathbf{u}\}=\{u_1,u_2\}^t=\{0,0\}^t$ pour toute valeur de λ. Les charges critiques de bifurcation et les modes correspondants sont solutions du problème aux valeurs propres suivant

$$\left[K_e - \lambda K_g\right]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}5 & 4\\4 & 5\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \qquad \text{(III-3)}$$

où $[K_e]$ et $[K_g]$ sont les matrices de rigidité élastique et géométrique, et $\bar{\lambda} = \frac{k}{l}\lambda$ un paramètre de charge adimensionnel. Sur la branche fondamentale $\{\mathbf{u}\}=\{0\}$, il y a deux points de bifurcation pour $\bar{\lambda}_1=1$ et $\bar{\lambda}_2=3$. Le premier mode associé à $\bar{\lambda}_1$ est symétrique ($u_1 = u_2$) et le second est antisymétrique($u_1 = -u_2$).

Nous allons retrouver ces résultats à partir de la fonction $\Delta\mu$ introduite précédemment. Comme dans le premier modèle, on introduit une perturbation en force $\Delta\mu\{\mathbf{f}\}$, où $\{\mathbf{f}\}$ est un vecteur force choisi et $\Delta\mu$ l'intensité de la perturbation. Le problème d'équilibre perturbé correspondant s'écrit sous la forme suivante

$$\left[K_e - \bar{\lambda} K_g\right]\{\Delta\mathbf{u}\} = \Delta\mu\{\mathbf{f}\} \qquad \text{(III-4)}$$

L'intensité de la perturbation $\Delta\mu$ n'étant pas fixée à priori, le système linéaire (III-4) comporte deux équations pour trois inconnues, Δu_1, Δu_2 et $\Delta\mu$. On va se donner une condition supplémentaire pour que le problème (III-4) admette une solution unique en chaque point régulier de la branche fondamentale. On pourrait par exemple imposer l'intensité de la perturbation $\Delta\mu$, mais comme il a été montré sur le premier exemple, cela conduit à des déplacements qui tendent vers l'infini au voisinage des points de bifurcation. On préférera s'imposer une condition sur le déplacement telle que : une composante de $\{\Delta\mathbf{u}\}$ imposée, la norme de $\{\Delta\mathbf{u}\}$ imposée, ou la projection de $\{\Delta\mathbf{u}\}$ sur une certaine direction imposée. C'est cette dernière condition que l'on va choisir ici. On définit tout d'abord le vecteur $\{\Delta\mathbf{u}_0\}$ comme la solution de (III-4) pour $\bar{\lambda} = 0.$ et $\Delta\mu=1$. C'est à dire que $\{\Delta\mathbf{u}_0\}$ vérifie l'équation

$$[K_e]\{\Delta\mathbf{u}_0\} = \{\mathbf{f}\} \qquad \text{(III-5)}$$

et on choisit la condition supplémentaire associée à (III-4) sous la forme

$$\langle\langle \Delta\mathbf{u} - \Delta\mathbf{u}_0, \Delta\mathbf{u}_0 \rangle\rangle = 0 \qquad \text{(III-6)}$$

où $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ est le produit scalaire défini par $\langle\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\rangle = \{\mathbf{u}\}^t[K_e]\{\mathbf{v}\}$

A titre d' exemple, nous considérons une perturbation de la forme $\{\mathbf{f}\}=\{1, 0\}^t$. On a alors $\{\Delta\mathbf{u}_0\} = \{5/9, 4/9\}^t$ et la solution de l'équation (III-4) compte tenu de (III-6), est

$$\Delta u_1 = \frac{5}{9}$$

$$\Delta u_2 = \frac{5}{9}\frac{4-\bar{\lambda}}{5-2\bar{\lambda}} \qquad \text{(III-7)}$$

$$\Delta\mu = \frac{5}{3}\frac{(1-\bar{\lambda})(3-\bar{\lambda})}{(5-2\bar{\lambda})}$$

La fonction $\Delta\mu$ est une fraction rationnelle en $\bar{\lambda}$ qui s'annule pour $\bar{\lambda}=1$ et $\bar{\lambda}=3$. Pour $\bar{\lambda}=1$, le déplacement $\{\Delta\mathbf{u}\}$ vaut le premier mode de flambage et pour $\bar{\lambda}=3$, le deuxième mode. Les Figures (III-6) et (III-7) montrent l'évolution de $\Delta\mu$ et $\{\Delta\mathbf{u}\}$ en fonction de $\bar{\lambda}$.

En résumé, les points de bifurcation correspondent aux valeurs de $\bar{\lambda}$ qui annulent la fonction $\Delta\mu$, et les modes de bifurcation sont obtenus à l'aide du vecteur $\{\Delta\mathbf{u}\}$ correspondant. Dans cette approche, on exploite l'effet de la singularité de la matrice de rigidité tangente sur la réponse à une perturbation.

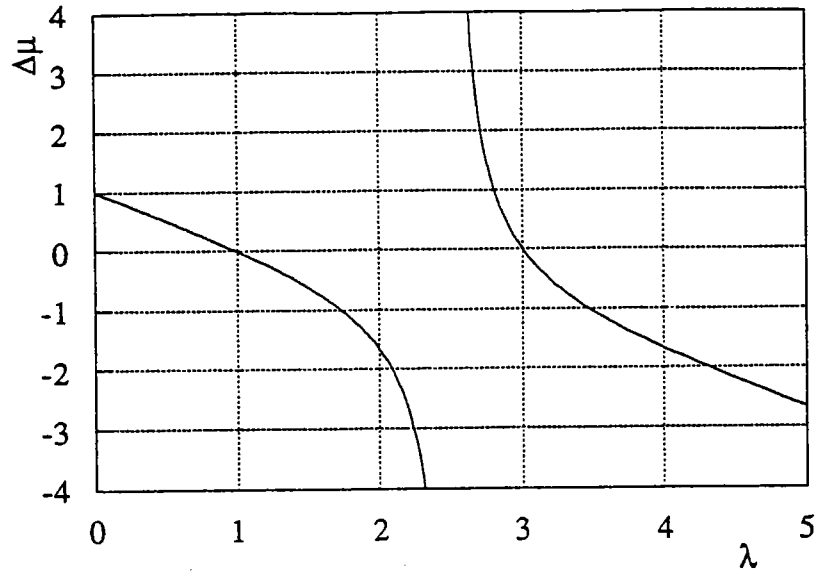


Figure-III-6: Evolution de la fonction $\Delta\mu$ en fonction du paramètre de charge $\bar{\lambda}$, pour une perturbation $\{f\}=\{1, 0\}^t$.

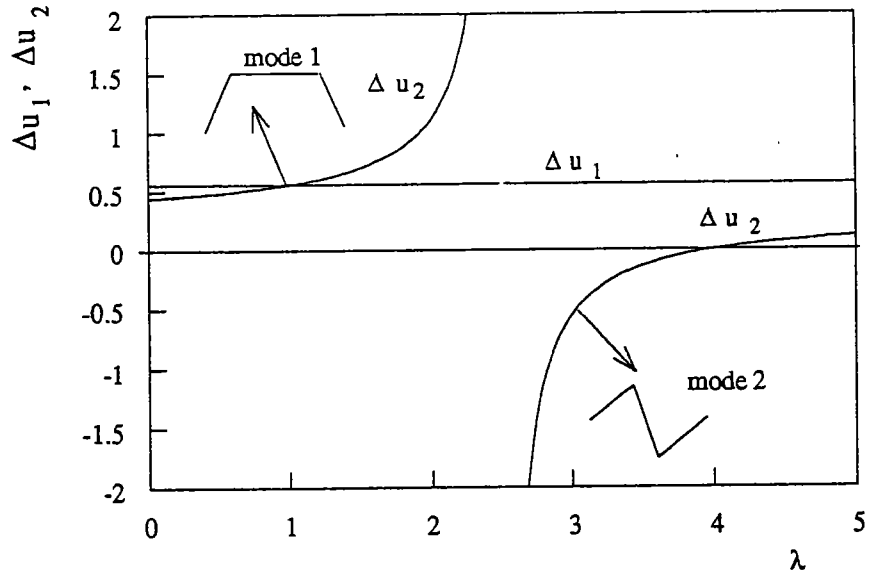


Figure-III-7: Évolution de Δu_1 et Δu_2 en fonction du paramètre de charge $\bar{\lambda}$ pour une perturbation $\{f\} =\{1, 0\}^t$

Remarque

- Les fonctions $\Delta\mu$, Δu_1 et Δu_2 sont des fractions rationnelles en $\bar{\lambda}$. Ce résultat se généralise facilement pour un système de type (4) et (6) à n degrés de liberté.

- Avec le produit scalaire choisi, la condition (III-6) peut se réécrire $\{\Delta u - \Delta u_0\}^t\{f\}=0$. Ainsi pour $\{f\} =\{1,0\}^t$,elle revient à imposer la première composante de $\{\Delta u\}$.

- Les fonctions $\Delta\mu$ et Δu_2 présentent un pôle entre les deux valeurs propres, dont la position dépend de la perturbation choisie. On pourrait le supprimer en remplaçant la condition (III-6) par une condition de norme imposée sur $\{\Delta u\}$. Dans ce cas, les fonctions $\Delta\mu$, Δu_1 et Δu_2 ne sont plus des fractions rationnelles.

- En choisissant une force $\{f\} =\{1,1\}^t$ (orthogonal au deuxième mode de flambage) la rigidité $\Delta\mu$ vaut $1-\bar{\lambda}$ simplement. Dans ce cas, la recherche des zéros de $\Delta\mu$ ne fournit pas le second point de bifurcation à cause du "mauvais" choix de la force de la perturbation. On notera l'analogie avec le choix du vecteur initial dans les méthodes d'itérations pour le calcul des valeurs propres.

-Dans le cas d'une perturbation quelconque $\{f\} =\{f_1,f_2\}^t$, la situation est résumée sur la Figure-III-8 où l'on présente l'évolution du vecteur Δu en fonction de λ. La direction des modes est donnée par la première et la deuxième bissectrice du plan Δu_1 , Δu_2. Le déplacement total Δu est la somme du déplacement imposé au départ Δu_0 et d'une partie orthogonale. Lorsqu'on augmente la compression $\bar{\lambda}$, le déplacement Δu passe par le premier mode pour lequel la rigidité $\Delta\mu$ s'annule. Pour $\lambda > 1$, le déplacement et la rigidité continuent à augmenter pour partir à l'infini quand $\bar{\lambda}$ s'approche de $\bar{\lambda}_{pôle} = \dfrac{5(f_1^2 + f_2^2) + 8f_1f_2}{2(f_1^2 + f_2^2 + f_1f_2)}$. Lorsque $\bar{\lambda}$ dépasse cette valeur, le déplacement diminue pour atteindre le second mode et $\Delta\mu$ s'annule une deuxième fois.

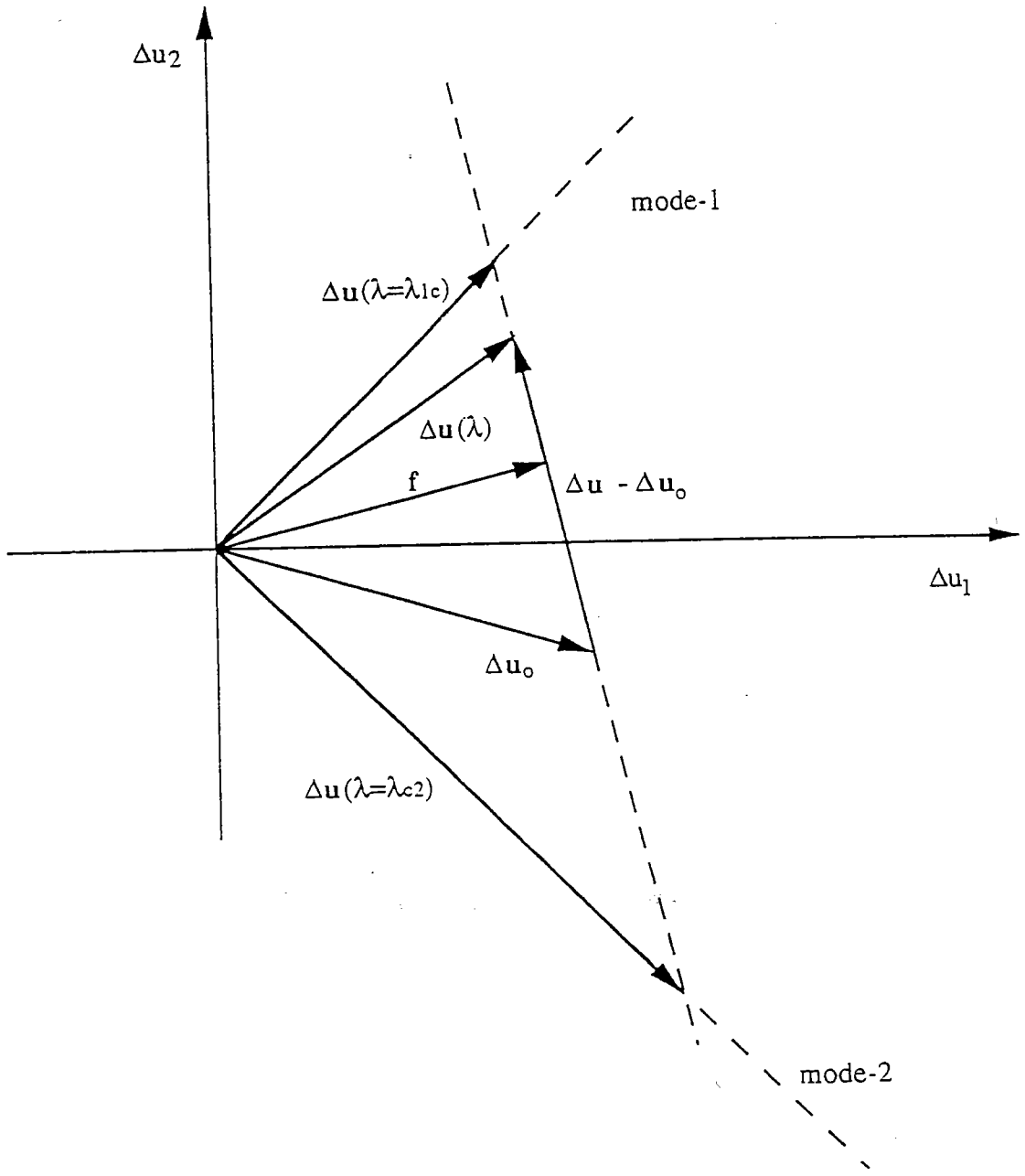


Figure-III-8: Cas d'une perturbation quelconque

III-2) Extension de la méthode à des structures plus complexes présentant un pré-flambage linéaire.

III-2-a) Cadre de l'étude

Considérons une structure complexe présentant un pré-flambage linéaire (par exemple une plaque chargée dans son plan Figure-III-9)

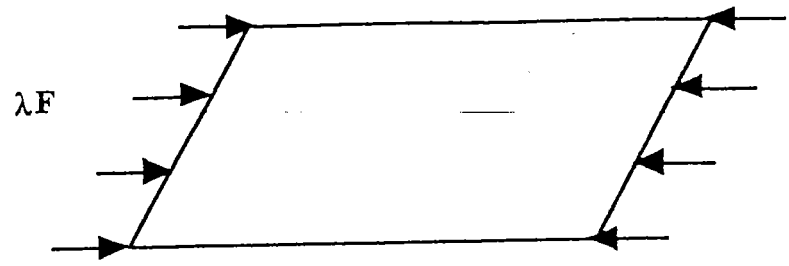


Figure-III-9: Plaque chargée dans son plan

Lorsqu'on augmente λ la plaque se raccourcit en restant horizontale, mais à partir d'une certaine valeur λ_c, cette position devient instable et la plaque passe à un état courbé. La position droite correspond à la branche fondamentale et la position courbée à la branche bifurquée. Ces deux branches se rencontrent au point de bifurcation (Figure-III-10)

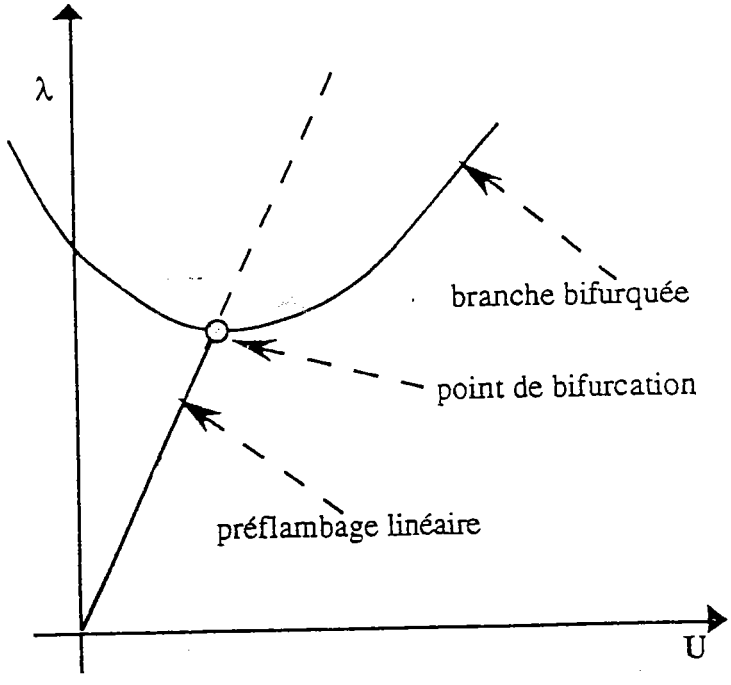


Figure-III-10: Branche fondamentale linéaire avec un point de bifurcation simple.

Comme la branche fondamentale est linéaire, on peut l'écrire sous la forme

$$U^f(\lambda) = \lambda U_1^f \qquad \text{(III-8)}$$

U_1^f est un déplacement de compression pure qui vérifie l'équation suivante

$$L(U_1^f) = F \qquad \text{(III-9)}$$

(III-9) provient de (I-17) après avoir supprimé la partie quadratique. Comme pour les deux modèles simples, on va introduire un indicateur de la bifurcation bien approprié au développement en série entière.

III-2-b) Introduction d'une perturbation

En un point de la branche fondamentale (U^f, λ^f), on introduit une perturbation **f**, d'intensité $\Delta\mu$ (Figure-III-11). ΔU est la réponse en déplacement à $\Delta\mu f$.

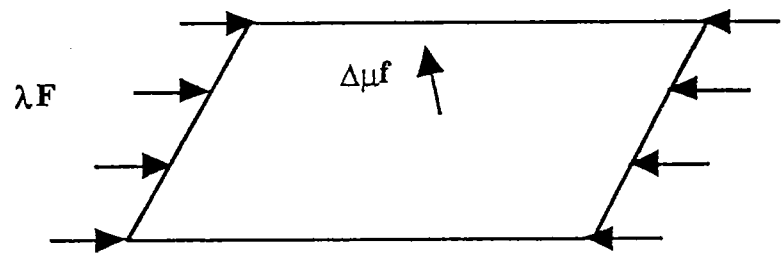


Figure-III-11: Plaque soumise à une compression λF et à une perturbation de flexion $\Delta\mu f$

L'équation d'équilibre résultant de la superposition des deux chargements s'écrit sous la forme

$$L(U^f + \Delta U) + Q(U^f + \Delta U, U^f + \Delta U) = \lambda F + \Delta\mu f \qquad \text{(III-10)}$$

En tenant compte de l'équilibre de la branche fondamentale on trouve

$$L(\Delta U) + 2Q(U^f, \Delta U) + Q(\Delta U, \Delta U) = \Delta\mu f \qquad \text{(III-11)}$$

Comme ΔU est une perturbation très petite, alors le terme $Q(\Delta U, \Delta U)$ peut être négligé. Cela mène a un problème incrémental analogue à (III-2)

$$L_t(\Delta U) = \Delta\mu\, f \qquad \text{(III-12)}$$

où L_t est l'opérateur tangent pris au point de la branche fondamentale où la perturbation est introduite $L_t(\,) = L(\,,\,) + 2Q(U^f,\,)$. En un point régulier où

L_t est inversible, le problème (III-12) admet une solution unique si l'on s'impose une condition supplémentaire équivalente à (III-6). Comme pour le modèle précédent, on choisit cette condition sous la forme

$$\langle\langle \Delta U - \Delta U_0, \Delta U_0 \rangle\rangle = 0 \qquad \text{(III-13)}$$

C'est à dire que l'incrément $\Delta U - \Delta U_0$ est cherché dans l'orthogonal à ΔU_0 , qui est la réponse à la perturbation **f** à l'origine. Les deux équations (III-12) et (III-13) forment un système linéaire en ΔU et $\Delta\mu$ équivalent à (III-4) et (III-6). On s'intéresse à l'évolution de la solution $(\Delta U, \Delta\mu)$ lorsqu'on parcourt la branche fondamentale, c'est à dire lorsque "λ" croit. Les points de bifurcation correspondent aux valeurs du paramètre "λ" qui annulent la fonction $\Delta\mu$. Le mode de bifurcation est donné par le vecteur $\Delta U(\lambda)$ correspondant.

III–3) Calcul de la solution perturbée $(\Delta U, \Delta\mu)$ par une méthode asymptotique-numérique

III-3-a) Introduction des développements en série entière

Pour déterminer la solution $(\Delta U, \Delta\mu)$ de (III-12) et (III-13), on utilise un développement asymptotique en fonction du paramètre "λ" à partir d'un point que l'on choisit comme étant $(\Delta U_0, 1.)$. On adopte la représentation suivante

$$\Delta U(\lambda) = \Delta U_0 + \lambda\, \Delta U_1 + \lambda^2 \Delta U_2 + \ldots$$
$$\Delta\mu(\lambda) = 1 + \lambda \Delta\mu_1 + \lambda^2\, \Delta\mu_2 + \ldots \qquad \text{(III-14)}$$

En injectant les développements (III-14) dans (III-12) et (III-13), en identifiant suivant les puissances de "λ", on obtient une série de problèmes linéaires mixtes en ΔU_p et $\Delta\mu_p$. semblables aux problèmes (II-2, 4). On notera que l'opérateur $L_t(\ ,\ )$ dépend lui aussi du paramètre "λ" au travers de U^f.

ordre-0

$$L(\Delta U_0) = \mathbf{f}$$

ordre 1

$$L(\Delta U_1) = \Delta\mu_1\, \mathbf{f} - 2Q(U_1^f, \Delta U_0)$$

$$\langle\langle \Delta U_1, \Delta U_0 \rangle\rangle = 0$$

ordre-2

$$L(\Delta U_2) = \Delta\mu_2\, f - 2Q(U_1^f, \Delta U_0)$$
$$\langle\langle \Delta U_2, \Delta U_0 \rangle\rangle$$

.
.
.

(III-15)

ordre-p

$$L(\Delta U_p) = \Delta\mu_p . f - 2.Q(U_1^f, \Delta U_{p-1})$$
$$\langle\langle \Delta U_p, \Delta U_0 \rangle\rangle = 0$$

III-3-b) Retour à une formulation en déplacement

On va réécrire le problème à l'ordre p sous une forme adaptée aux méthodes des éléments finis classiques en déplacement. En utilisant les définitions (I-18) et (I-19), l'équation (III-15) à l'ordre p peut être écrite explicitement sous la forme

$$\int_{\Omega_0} (\Delta \mathbf{S}_p : (\gamma^l(\delta \mathbf{u}) + \delta \mathbf{S} : (\gamma^l(\Delta \mathbf{u}_p) - \mathbf{D}^{-1} : \Delta \mathbf{S}_p)) dv$$

(III-16)

$$= \Delta\mu_p P_e(\delta \mathbf{u}) - \int_{\Omega_0} (\mathbf{S}_1^f : 2\gamma^{nl}(\Delta \mathbf{u}_p, \delta \mathbf{u})) dv$$

En résolvant cette équation mixte par rapport à ΔS, on trouve la relation de comportement suivante

$$\Delta \mathbf{S}_p = \mathbf{D} : \gamma^l(\Delta \mathbf{u}_p) \qquad \text{(III-17)}$$

En reportant ce résultat dans (III-16), on a une équation où les inconnues sont uniquement des déplacements

$$\int_{\Omega_0} (\gamma^l(\delta \mathbf{u}) : \mathbf{D} : (\gamma^l(\Delta \mathbf{u}_p)) dv = \Delta\mu_p P_e(\delta \mathbf{u}) - \int_{\Omega_0} (\mathbf{S}_1^f : 2\gamma^{nl}(\Delta \mathbf{u}_{p-1}, \delta \mathbf{u})) dv$$

(III-18)

III-3-c) Discrétisation par éléments finis

On adopte la démarche classique d'éléments finis introduite en (I-8-b-2), qui permet de transformer le problème à l'ordre p écrit avec des opérateurs variationnels en un problème d'algèbre linéaire facile à résoudre

$$\begin{aligned} &[K_e]\{\Delta u_p\} = \Delta\mu_p \{f\} + \{F_p\} \\ &\{\Delta u_0\}^t [K_e]\{\Delta u_p\} = 0 \qquad \text{pour } p>0 \end{aligned} \tag{III-19}$$

$[K_e]$ est la matrice de rigidité élastique obtenue par assemblage de matrices élémentaires ($[K_e]^e$) et donnée par

$$[K_e]^e = \int_{\Omega_{0e}} ([B^l]^t : [D] : [B^l]) dv \tag{III-20-a}$$

Le second membre $\{F_p\}$ est obtenu par assemblage des vecteurs élémentaires $\{F_p\}^e$ qui dépendent uniquement de la solution à l'ordre p-1

$$\{F_p\}^e = -[K_g(S_1^f)]^e \{\Delta u_{p-1}\} \tag{III-20-b}$$

Finalement le problème à l'ordre p s'écrit

$$\begin{aligned} &[K_e]\{\Delta u_p\} = \Delta\mu_p \{f\} - [K_g]\{\Delta u_{p-1}\} \\ &\{\Delta u_0\}^t [K_e]\{\Delta u_p\} = 0 \qquad \text{pour } p > 0 \end{aligned} \tag{III-21}$$

En résolvant les problèmes III-21 de façon successive on détermine les termes des séries III-14, même à des ordres élevés.

Remarque

On peut aboutir plus directement à (III-21) en considérant la forme discrète de III-12 et III-13, qui s'écrit

$$\begin{aligned} &\left[K_e + \lambda K_g\right]\{\Delta \mathbf{u}\} = \Delta\mu\{\mathbf{f}\} \\ &\{\Delta \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}_0\}\left[K_e\right]\{\Delta \mathbf{u}_0\} = 0 \end{aligned} \qquad \text{(III-22)}$$

et en y insérant les séries (III-14). Cependant cette procédure ne sera pas valable dans le cas d'une branche non-linéaire que l'on va développer dans le chapitre IV.

III-3-d) Analogie avec les problèmes aux valeurs propres

Pour le calcul d'un point de bifurcation sur une branche linéaire, le critère de la seconde variation mène à la résolution d'un problème aux valeurs propres écrit sous la forme

$$\left[K_e + \lambda K_g(\mathbf{U}^f)\right]\{\Delta \mathbf{u}\} = \{0\} \qquad \text{(III-23)}$$

Ce problème est souvent résolu par une méthode d'itération de type sous-espace. La charge de bifurcation correspond à la plus petite valeur de λ qui rend non inversible la matrice de rigidité tangente.
Dans notre méthode, on cherche les valeurs de λ qui annule la rigidité $\Delta\mu$ définie par III-12 et III-13 dont la forme discrète est donnée par (III-22). Lorsque $\Delta\mu = 0$, la première équation est analogue à III-22.

Remarque

Si la représentation de la branche fondamentale est prise sous la forme

$$\mathbf{U}^f(\lambda) = \mathbf{U}_0^f + (\lambda - \lambda_0^f)\mathbf{U}_1^f \qquad \text{(III-24)}$$

c'est à dire que l'on part d'un point $(\mathbf{U}_0^f, \lambda_0^f)$ autre que l'origine, le problème que l'on obtient avec notre analyse est équivalent à un problème aux valeurs propres avec un décalage spectral égal à λ_0^f.

III-3-e) Solution exacte du problème d'équilibre perturbé

En tout point donné de la branche fondamentale, il suffit d'évaluer la matrice de rigidité tangente $\left[K_e + \lambda K_g(U_1^f)\right]$ pour résoudre directement (III-22). On obtient

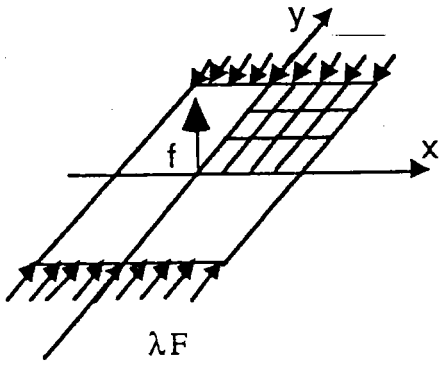
$$\Delta\mu(\lambda) = \frac{\left\{\Delta u_0\right\}^t \{f\}}{\{f\}^t \left[K_e + \lambda K_g(U_1^f)\right]^{-1} \{f\}} \qquad \text{(III-25)}$$

En utilisant la formule (III-25) on peut tracer la courbe exacte de la rigidité $\Delta\mu(\lambda)$ et par conséquence faire des comparaisons avec ses différentes représentations asymptotiques.

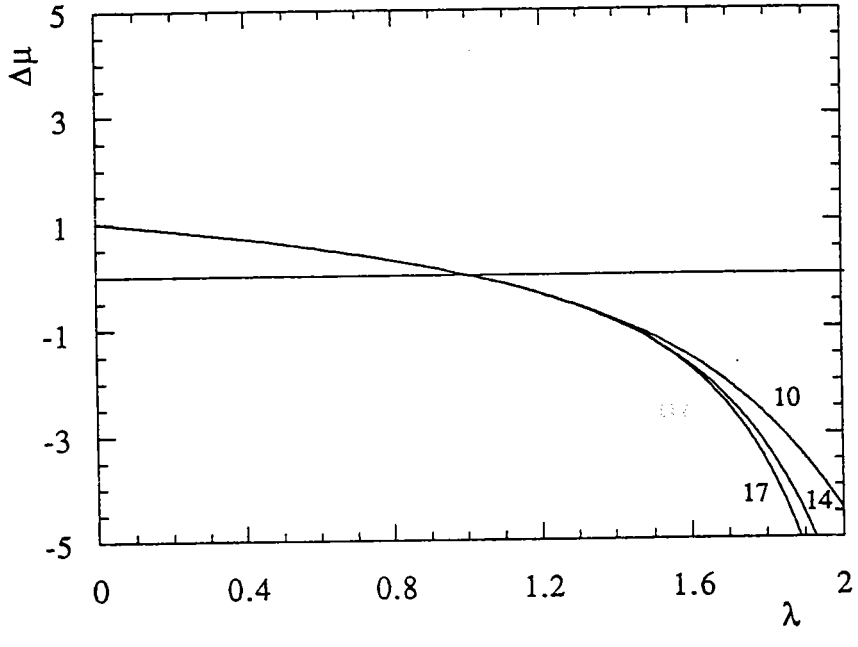
III-3-f) Application de la méthode au problème d'une plaque carrée

On considère une plaque élastique carrée soumise à un chargement de compression uniaxial $\lambda\mathbf{F}$ et en appui simple sur les quatres bords. Dans ce cas, la solution fondamentale est linéaire avec une déformation de membrane pure. Pour la discrétisation, on a utilisé 200 éléments triangulaires de type D.K.T et seul le quart de la plaque est pris en compte. On se limite ainsi aux modes de flambage symétriques par rapport aux axes x et y (Figure III-12). Les modes et les charges de bifurcation exacts ont été calculés par une méthode classique d'itérations sur sous espaces. Les premières charges critiques sont: $\lambda_1 = 0.9961$, $\lambda_2 = 2.7930$, $\lambda_3 = 6.8756$, $\lambda_4 = 8.9971$. . On a appliqué la méthode asymptotique-numérique avec une force de perturbation **f** ponctuelle appliquée au centre de la plaque et transversale à son plan moyen (Figure-III-12-a). Comme il a été déjà mentionné dans la remarque du paragraphe III-1-b, ce choix de **f** et la condition (III-13) reviènnent à dire que l'on impose la flèche au centre de la plaque. La rigidité $\Delta\mu(\lambda)$ obtenue en tronquant la série entière (III-14-b) aux ordres 10, 14 et 17, est présentée sur la Figure-III-12-b. Elle s'annule à l'intérieur du rayon de convergence de la série pour λ=0.9961, ce qui correspond bien à la première charge critique. $\Delta\mathbf{u}(\lambda = 0.9961)$ donne le premier mode de flambage avec l'écart relatif suivant

$$\varepsilon = \frac{\left\|\Delta\mathbf{u}(\lambda = 0.9961) - \phi_1\right\|}{\left\|\phi_1\right\|} = 0.4088\mathrm{E}-2$$



a: plaque carrée soumise à une compression λF. La perturbation f est centrée.



b: représentation en série entière de la fonction Δμ, on obtient la première charge critique.

Figure-III-12: Application à une plaque carrée.

III-4) Amélioration des séries à l'aide des approximants de Padé.

Dans cette partie on se propose d'améliorer les séries (III-14) au moyen des approximants de Padé. En effet par un calcul dans la base modale on peut montrer que la rigidité Δμ et une fraction rationnelle admettant des pôles qui limitent le rayon de convergence de sa représentation par des séries entières.

La technique des approximants de Padé peut donc mieux représenter la rigidité.

III-4-a) Approximants de Padé sur la série entière $\Delta\mu(\lambda)$

On approche la série (III-14-b) tronquée à l'ordre L+M+1 par un approximant de Padé $P[L/M](\lambda)$ en utilisant la méthode décrite au chapitre II(§-6). Cela revient tout simplement à résoudre un système linéaire de taille M. Par un calcul dans la base modale on peut montrer que $\Delta\mu(\lambda)$ est une fraction dont le numérateur est de degré N+1 et le dénominateur est de degré N. Pour le choix de L et de M, il est préférable que $P[L/M](\lambda)$ soit équivalent à λ pour les grandes valeurs de λ. Le procédé décrit ici est très simple mais il ne donne aucune idée sur les modes de flambage.

III-4-b) Approximants de Padé sur la série vectorielle $\Delta U(\lambda)$

Les approximants de Padé permettent d'approcher directement une série scalaire dont on connaît le développement en série entière. Dans le cas d'une série vectorielle telle que (III-14-a), il faut procéder à quelques aménagements avant de pouvoir introduire des approximants de Padé. On adopte la même démarche que celle proposée par Cochelin, Damil et Potier-Ferry (1994-a):

1°) A partir des vecteurs ΔU_i on construit une base orthogonale $\Delta U_i'$ par un procédé classique de Gram-Schmidt

$$\begin{aligned}
\Delta U_0 &= \alpha_{00}\,\Delta U_0' \\
\Delta U_1 &= \alpha_{10}\Delta U_0' + \alpha_{11}\Delta U_1' \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\Delta U_p &= \sum_{k=0}^{p} \alpha_{pk}\Delta U_k'
\end{aligned} \qquad \text{(III-26)}$$

avec $\left\langle \Delta U_p', \Delta U_k' \right\rangle = \delta_{pk}$, les coefficients α_{ij} sont donnés par

$$\alpha_{pk} = \frac{\left\langle \Delta U_p, \Delta U_k' \right\rangle}{\left\langle \Delta U_k', \Delta U_k' \right\rangle} \text{ pour } 0<k<p,\ \alpha_{pp} = 1. \text{ et } \alpha_{p0} = 0. \text{ pour } p > 0 \quad \text{(III-27)}$$

2°) On réécrit la série $\Delta U(\lambda)$ à l'aide de cette base orthogonale. Cela fait apparaître des séries scalaires associées à chaque vecteur $\Delta U_i'$

$$\begin{aligned}
\Delta U(\lambda) = {} & (\alpha_{00} + p\lambda\alpha_{10} + \lambda^2\alpha_{20} + \ldots + \lambda^p\alpha_{p0})\Delta U_0' \\
& + \lambda(\alpha_{11} + \lambda\alpha_{21} + \lambda^2\alpha_{31} + \ldots + \lambda^{p-1}\alpha_{p1})\Delta U_1' \\
& + \lambda^2(\alpha_{22} + \lambda\alpha_{32} + \lambda^2\alpha_{42} + \ldots \lambda^{p-2}\alpha_{p2})\Delta U_2' \\
& \cdot \\
& \cdot \qquad \text{(III-28)} \\
& \cdot \\
& + \lambda^p(\alpha_{pp})\Delta U_p' = \sum_{j=0}^{p} \lambda^j f_j(\lambda)\, \Delta U_j'
\end{aligned}$$

Les fonctions $f_j(\lambda)$ sont données par

$$f_j(\lambda) = \sum_{i=j}^{p} \alpha_{ij}\, \lambda^{i-j} \qquad \text{(III-29)}$$

3°) On améliore les séries scalaires $f_j(\lambda)$ par des approximants de Padé $P_j\left[L_j / M_j\right](\lambda)$. Ainsi on obtient la perturbation $\Delta U(\lambda)$ sous la forme suivante

$$\Delta U(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} \lambda^j P_j\left[L_j / M_j\right] \Delta U_j' \qquad \text{(III-30)}$$

4°) On calcule enfin la rigidité $\Delta\mu(\lambda)$ par projection de l'équation incrémentale (III-12) sur le vecteur $\Delta U_0'$

$$\Delta\mu(\lambda) = \frac{1}{\left\langle \mathbf{f}, \Delta\mathbf{U}_0' \right\rangle} \left(\sum_{j=0}^{p} \left(\lambda^j P_j\left[L_j / M_j\right] \left\langle L(\Delta\mathbf{U}_j', \Delta\mathbf{U}_0') \right\rangle \right) + \right.$$

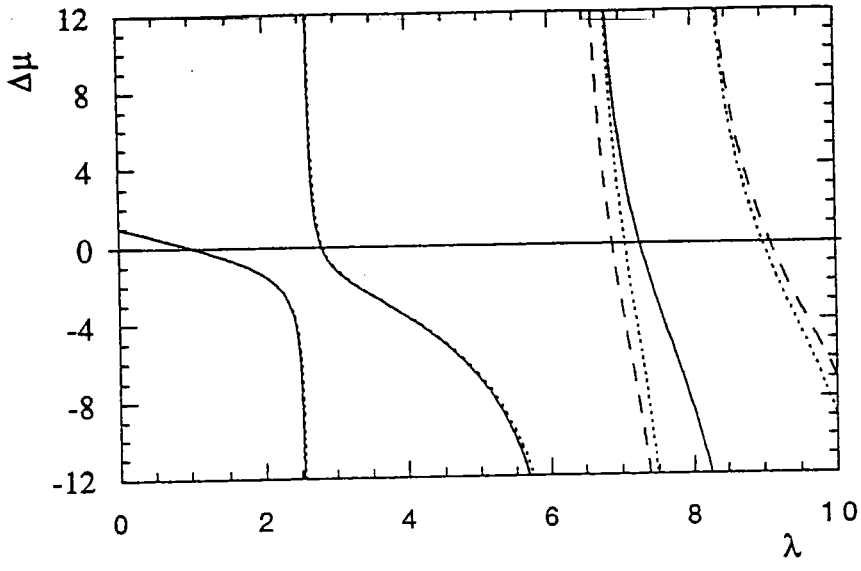
$$\left. 2 \sum_{j=0}^{p} \left(\lambda^{j+1} P_j\left[L_j / M_j\right] \left\langle Q(\mathbf{U}_1^f, \Delta\mathbf{U}_j'), \Delta\mathbf{U}_0' \right\rangle \right) \right)$$

(III-31)

III-4-c) Application

III-4-c-1) Perturbation centrée

Sur la Figure-III-13, on présente d'une part les nouvelles représentations de la rigidité $\Delta\mu(\lambda)$ obtenues en insérant des approximants de Padé selon les procédés décrits aux (III-4-a) et (III-4-b), d'autre part, la valeur exacte de $\Delta\mu(\lambda)$ obtenue par la formule (III-27). Les trois courbes coïncident parfaitement sur un large domaine ($0 < \lambda < 6$) puis un léger écart apparaît progressivement. Comme dans les études précédentes, la technique de projection est bien plus efficace que l'application directe des approximants de Padé sur la série $\Delta\mu(\lambda)$.



..... *Calcul exact de $\Delta\mu(\lambda)$ à l'aide du procédé [III-27]*

_____ *Padé* [6 / 6] *pour $\Delta\mu(\lambda)$: procédé (III-4-a)*

_ _ _ *Padé* $\left[{}^{M_j}\!/_{M_j} \right]$ *pour $\Delta U(\lambda)$ et recalcul de $\Delta\mu(\lambda)$ par projection : procédé (III-4-b) avec* $M_j = 6, 6, 5, 5, \ldots, 2, 2$, $j = 0, 1, \ldots, 9$ *et* $p = 14$.

Figure-13: Amélioration des séries à l'aide d'approximants de Padé et comparaison avec la solution exacte. On obtient jusqu' à quatre charges critiques à un pour cent près.

Résumé

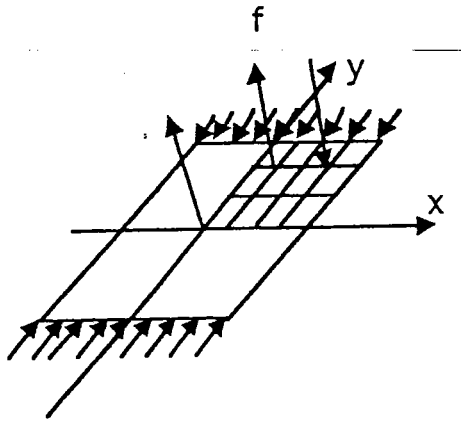
Sur le tableau-1, on récapitule les charges critiques calculées par la méthode asymptotique-numérique (trois manières) et par la méthode d'itérations sur sous espaces.

Numero de la charge critique	Solutions asymptotiques- numériques			Solutions exactes (itérations sur sous espaces)
	Série (12-b) ordre 14	Séries+Padé $[6/6]$ procédé III-4-a	Séries+Padé procédé III-4-b $M_j = 6, 6..., 2, 2$ $j = 0, 9$	
1	0.9961	0.9961	0.9961	0.9961
2		2.7930	2.7930	2.7930
3		7.2581	6.8810	6.8756
4		11.6128	9.0929	8.9971

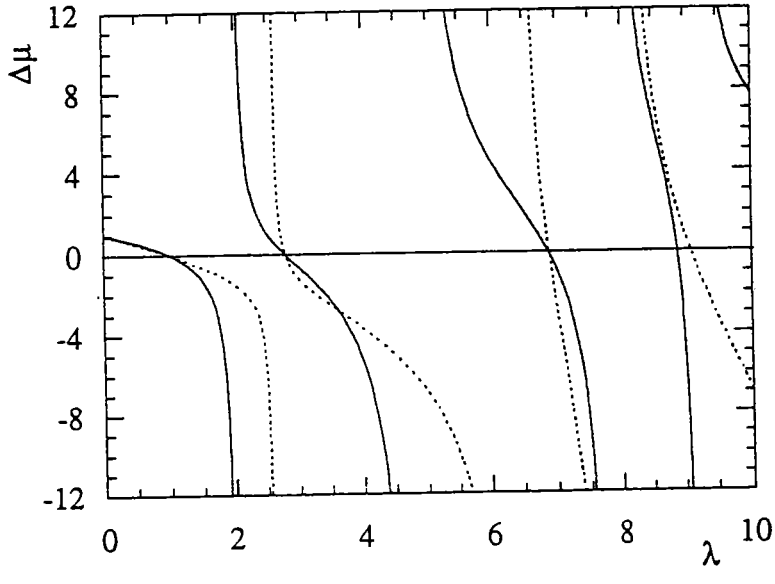
Tableau-1: Comparaison des résultats obtenus dans le cas d'une perturbation centrée

III-4-c-2) Perturbation quelconque

Cette fois la perturbation est constituée d'une densité de forces transversales réparties d'une manière aléatoire (Figure-III-14-a). Sur la Figure-III-14-b, on présente la nouvelle fonction $\Delta\mu(\lambda)$ obtenue en utilisant des approximants de Padé (procédé III-4-b) et on la compare avec la précédente. Les trois premiers zéros qui correspondent aux premières charges critiques sont identiques. Il y a une différence au niveau de la position des asymptotes et au niveau des quatrièmes zéros. Dans le cas d'une perturbation centrée le quatrième zéro vaut 8.8835 et dans le cas d'une perturbation quelconque.il vaut 9.0527.



a: Plaque carrée soumise à une compression λF et une perturbation f quelconque.



....Perturbation centrée —— *Perturbation quelconque*

Figure-III-14: Comparaison de la fonction $\Delta\mu(\lambda)$ pour les deux perturbations.

III-4-c-3) Perturbation orthogonale à un mode

Une perturbation $\{f\}$ orthogonale à un mode $\{\phi_i\}$ peut être, soit déduite à partir de la forme de $\{\phi_i\}$ (voir la remarque ci-dessous), soit construite de deux façons:

-partant d'une perturbation quelconque $\{g\}$, on construit $\{f\}$ en retranchant à $\{g\}$ sa composante suivant $\{\phi_i\}$

$$\{f\} = \{g\} - \langle g, \phi_i \rangle \{\phi_i\}$$

-comme les vecteurs propres $\{\phi_i\}$ forment une base orthogonale dans le sens de $[K_e](\{\phi_i\}^t[K_e]\{\phi_j\} = \delta_{ij})$, on peut prendre $\{f\}$ sous la forme

$$\{f\} = [K_e](\sum_{j=1}^{n} c_j \{\phi_j\}) \quad \text{avec } j \neq i$$

où c_j sont des constantes arbitraires.

Dans cette application, on a examiné le cas d'une perturbation orthogonale au premier mode de flambage. La rigidité $\Delta\mu$ calculée en utilisant les approximants de Padé (procédé III-4-b) s'annule pour la deuxième et la troisième charge critique mais ne s'annule pas pour la première (Figure-III-15)

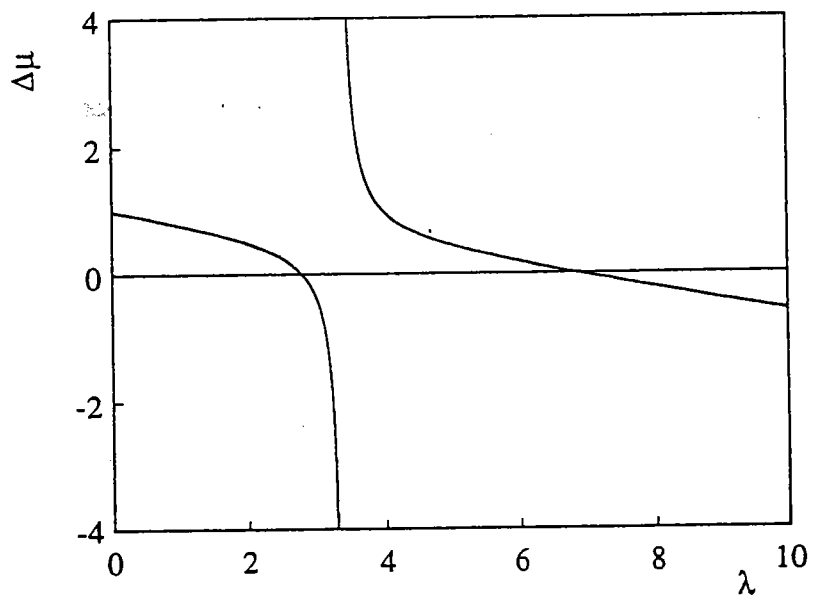


Figure-III-15: Cas d'une perturbation orthogonale au mode 1, la première charge critique n'apparait plus.

Remarque

Dans le cas où la perturbation $\{\mathbf{f}\}$ admet une seule composante non nulle(par exemple la $i^{ème}$), on a vu que notre méthode revient à imposer la $i^{ème}$ composante du déplacement et augmenter λ. Il est donc normal qu'une telle perturbation ne permettra de calculer la charge critique correspondant à tout mode dont la $i^{ème}$ composante est nulle. Par exemple pour une plaque rectangulaire, le premier mode est antisymétrique (la flèche au centre est nulle), si la perturbation $\{\mathbf{f}\}$ est appliquée au centre et transversale au plan moyen, alors notre procédure ne permettra pas d'avoir la première bifurcation.

III-5) Conclusion

Dans le cas d'une branche linéaire, l'indicateur de bifurcation $\Delta\mu(\lambda)$ est une fraction rationnelle en λ. Il s'annule en chaque point de bifurcation et présente un pôle entre deux valeurs critiques consécutives (voir la solution exacte sur la Figure-II-13. Avec la série entière (III-14-b), on ne peut déterminer que la première charge de bifurcation car le rayon de convergence est limité par le pôle situé entre la première et la deuxième charge critique. Les approximants de Padé sont très efficaces pour améliorer les séries car les fonctions recherchées sont des fractions. Le procédé le plus performant est celui donné au III-4-b.

Le choix de la perturbation joue un role important sur la fonction $\Delta\mu(\lambda)$: si la perturbation est orthogonale à un mode de bifurcation, alors elle ne s'annule pas pour cette bifurcation. Si la perturbation est presque orthogonale à un mode, alors $\Delta\mu(\lambda)$ admet un pôle tout près du zéro, voir la Figure-III-15 où le premier pôle est voisin du deuxième zéro. En fait, le pôle et le zéro s'annihilent lorsque la perturbation est parfaitement orthogonale à un mode.

Sur l'exemple d'une plaque carrée en compression, le meilleur résultat est obtenu avec la perturbation aléatoire, où les pôles et les zéros de $\Delta\mu(\lambda)$ sont relativement bien séparés. On arrive à calculer correctement les quatres premières charges critiques.

La procédure pourra remplacer avantageusement un calcul aux valeurs propres linéaire. Sur un exemple, on a montré que l'on peut accéder aux quelques premières charges de bifurcation avec une seule décomposition de la matrice de rigidité globale et quelques résolutions seulement. L'efficacité de la procédure asymptotique-numérique est liée au fait que l'on caractérise les

bifurcations à l'aide de fractions rationnelles, qu'il est facile d'approcher par des approximants de Padé.

III-6) Calcul de points de bifurcation avec deux perturbations

Pour l'instant, on a calculé un point de bifurcation à l'aide d'un indicateur qui évolue comme la rigidité de la structure par rapport à une direction donnée (espace de dimension 1). Dans le cas où cette direction est orthogonale à un certain mode, on a vu que la bifurcation lui correspondant ne peut pas être détectée en procédant ainsi. Pour cela on propose une modification de la méthode qui consiste à caractériser la bifurcation à l'aide d'un problème incrémental avec deux perturbations. Le nouvel indicateur de bifurcation sera le déterminant d'une matrice d'ordre 2 qui représentera la rigidité de la structure par rapport à deux directions données (espace de dimension 2). On notera que cette procédure est inspirée des méthodes itératives de calcul de valeurs propres où l'on augmente souvent l'espace d'itération. Le problème sera résolu par la technique asymptotique utilisant des séries entières et l'amélioration à l'aide des approximants de Padé sera discutée. Enfin, on présentera un exemple numérique réalisé sur l'exemple désormais classique d'une plaque carrée en compression.

III-6-a) Formulation du problème avec deux perturbations et caractérisation du point de bifurcation

On considère deux forces perturbatrices $\mathbf{f}_1$ est $\mathbf{f}_2$ d'intensités respectives $\Delta\mu_1$ et $\Delta\mu_2$ (par exemple pour une plaque Figure-III-16).

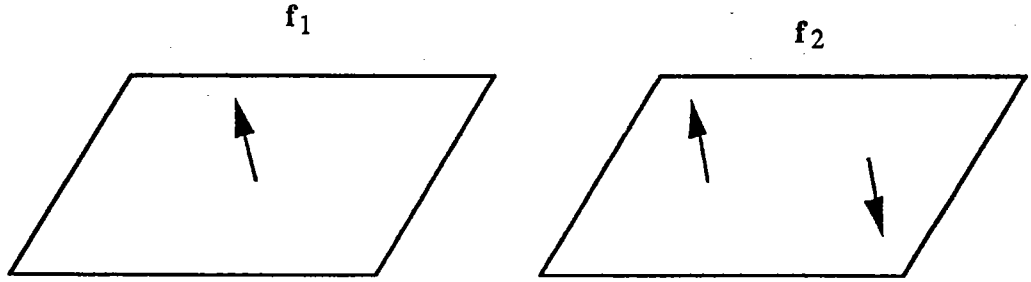


Figure-16: Plaque soumise à une compression et à deux forces perturbatrices

L'équation d'équilibre incrémentale modifiée s'écrit

$$L_t(\Delta U) = \Delta\mu_1 \mathbf{f}_1 + \Delta\mu_2 \mathbf{f}_2 \qquad \text{(III-32)}$$

En chaque point de la branche fondamentale où L_t est inversible, le déplacement ΔU peut s'écrire:

$$\Delta U = \Delta\mu_1 L_t^{-1}(f_1) + \Delta\mu_2 L_t^{-1}(f_2) \qquad \text{(III-33)}$$

Cette fois, le déplacement ΔU évolue dans un espace de dimension deux paramétrable par $\Delta\mu_1$ et $\Delta\mu_2$. On va maintenant reparamétriser cet espace par deux scalaires arbitraires A_1 et A_2, qui représentent les projections du déplacement ΔU sur des directions données.

$$\Delta U = A_1\Delta U_{10} + A_2\Delta U_{20} + \Delta U'(\lambda, A_1, A_2) \qquad \text{(III-34)}$$

où $\Delta U'$ est linéaire en A_1 et A_2, ΔU_{10} et ΔU_{20} sont choisis comme les réponses respectives de la structure aux forces f_1 et f_2 à l'origine($\lambda = 0$).

$$\begin{aligned} L(\Delta U_{10}) &= f_1 \\ L(\Delta U_{20}) &= f_2 \end{aligned} \qquad \text{(III-35)}$$

On va se donner les conditions d'orthogonalité suivantes

$$\begin{aligned} \langle\langle \Delta U', \Delta U_{10} \rangle\rangle &= 0 \\ \langle\langle \Delta U', \Delta U_{20} \rangle\rangle &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(III-36)}$$

Le lien entre $(\Delta\mu_1, \Delta\mu_2)$ et (A_1, A_2)s'obtient par projection de III-33 et III-34 sur les directions ΔU_{10} et ΔU_{20}. On trouve

$$\Delta\mu_1\langle\langle L_t^{-1}(f_1), \Delta U_{10}\rangle\rangle + \Delta\mu_2\langle\langle L_t^{-1}(f_2), \Delta U_{10}\rangle\rangle = A_1\langle\langle L_t^{-1}(\Delta U_{10}), \Delta U_{10}\rangle\rangle + A_2\langle\langle L_t^{-1}(\Delta U_{20}), \Delta U_{10}\rangle\rangle$$

$$\Delta\mu_1\langle\langle L_t^{-1}(f_1), \Delta U_{20}\rangle\rangle + \Delta\mu_2\langle\langle L_t^{-1}(f_2), \Delta U_{20}\rangle\rangle = A_1\langle\langle L_t^{-1}(\Delta U_{10}), \Delta U_{20}\rangle\rangle + A_2\langle\langle L_t^{-1}(\Delta U_{20}), \Delta U_{20}\rangle\rangle$$

Par simple inversion de ce système linéaire, on trouve $\Delta\mu_1$ et $\Delta\mu_2$ sous la forme

$$\Delta\mu_1 = A_1 d_{11}(\lambda) + A_2 d_{12}(\lambda)$$
$$\Delta\mu_2 = A_1 d_{21}(\lambda) + A_2 d_{22}(\lambda) \qquad \text{(III-37-a)}$$

En reportant (III-37-a) dans l'équation (III-32), on peut écrire le déplacement $\Delta U(\lambda)$ sous la forme

$$\Delta U(\lambda) = A_1\ \Delta U_1(\lambda) + A_2\ \Delta U_2(\lambda) \qquad \text{(III-37-b)}$$

En reportant (III-37-a, b, c) dans (III-32) et (III-36), et en réclamant que ces équations soient satisfaites quelque soient les valeurs de A_1 et A_2, on obtient les équations qui caractérisent les vecteurs $\Delta U_\alpha(\lambda)$ et les scalaires $d_{\alpha\beta}(\lambda)$, $\alpha, \beta = 1, 2$.

$$L_t(\Delta U_1) = d_{11}\mathbf{f}_1 + d_{21}\mathbf{f}_2$$
$$\langle\langle \Delta U_1(\lambda) - \Delta U_{10}, \Delta U_{10} \rangle\rangle = 0 \qquad \text{(III-38)}$$
$$\langle\langle \Delta U_1(\lambda) - \Delta U_{10}, \Delta U_{20} \rangle\rangle = 0$$

et

$$L_t(\Delta U_2) = d_{12}\mathbf{f}_1 + d_{22}\mathbf{f}_2$$
$$\langle\langle \Delta U_2(\lambda) - \Delta U_{20}, \Delta U_{10} \rangle\rangle = 0 \qquad \text{(III-39)}$$
$$\langle\langle \Delta U_2(\lambda) - \Delta U_{20}, \Delta U_{20} \rangle\rangle = 0$$

Les problèmes (III-38) et (III-39) admettent une solution unique si L_t est inversible. Sous forme discrète, il s'agit de systèmes de n + 2 équations pour n+2 inconnues où n est la dimension du vecteur $\Delta\mathbf{U}$.

En résumé, les solutions du problème incrémental (III-32) peuvent s'écrire soit sous la forme (III-33), soit sous la forme (III-37-a, b, c) où A_1 et A_2 sont deux scalaires arbitraires et où les quantités $\Delta U_\alpha(\lambda)$ et $d_{\alpha\beta}(\lambda)$ sont données par les problèmes bien posés (III-38) et (III-39).

Les points de bifurcation correspondent aux valeurs de λ telles qu'il existe des couples $(A_1, A_2) \neq (0, 0)$ et que $\Delta\mu_1 = \Delta\mu_2 = 0$. Ceci se traduit par la condition

$$\text{Determinant}\left(\begin{bmatrix} d_{11}(\lambda) & d_{12}(\lambda) \\ d_{21}(\lambda) & d_{22}(\lambda) \end{bmatrix}\right) = 0 \qquad \text{(III-40)}$$

Cette condition (III-40) est l'indicateur de bifurcation associé à une perturbation à deux paramètres.
Lorsque (III-40) est vérifiée, les couples (A_1, A_2) admissibles vérifient, par exemple, $A_2 = -\frac{d_{12}}{d_{11}} A_1$ et le mode de bifurcation est donné à une constante multiplicatrice près par

$$\Delta U = A_1(\Delta U_1 - \frac{d_{12}}{d_{11}}\Delta U_2) = C^{st}(d_{11}\Delta U_1 - d_{12}\Delta U_2) \qquad \text{(III-41)}$$

Exemple à deux degrés de liberté

Considèrons le système discret à deux degrés de liberté de la Figure-III-5 traité avec une seule perturbation. Si cette fois on lui applique deux forces perturbatrices $\Delta\mu_1\{f_1\}$ et $\Delta\mu_2\{f_2\}$, l'équation d'équilibre incrémentale correspondante s'écrit sous la forme

$$\left[K_e - \bar{\lambda} K_g\right]\{\Delta u\} = \Delta\mu_1\{f_1\} + \Delta\mu_2\{f_2\}$$

où $[K_e]$ et $[K_g]$ sont les mêmes matrices écrites en (III-4). Pour simplifier les calculs, on choisira

$$\{f_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \{f_2\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Les réponses respectives à ces deux chargements sont

$$\{\Delta \mathbf{u}_{10}\} = \begin{Bmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} \end{Bmatrix}, \{\Delta u_{20}\} = \begin{Bmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{5}{9} \end{Bmatrix}$$

Si on adopte la décomposition (III-34), on peut montrer que $\{\Delta \mathbf{u}\}$ se réduit simplement à

$$\{\Delta \mathbf{u}\} = A_1\{\Delta \mathbf{u}_{10}\} + A_2\{\Delta \mathbf{u}_{20}\}$$

La résolution des problèmes (III-38) et (III-39) donne

$$d_{11} = d_{22} = 1 - \frac{2}{3}\bar{\lambda} \quad \text{et} \quad d_{12} = d_{21} = -\frac{1}{3}\bar{\lambda}$$

Le déterminant indicateur de la bifurcation s'écrit

$$\text{Deter}\left(\begin{bmatrix} d_{11}(\bar{\lambda}) & d_{12}(\bar{\lambda}) \\ d_{21}(\bar{\lambda}) & d_{22}(\bar{\lambda}) \end{bmatrix}\right) = \text{Déter}\left(\begin{bmatrix} 1-\frac{2}{3}\bar{\lambda} & -\frac{1}{3}\bar{\lambda} \\ -\frac{1}{3}\bar{\lambda} & 1-\frac{2}{3}\bar{\lambda} \end{bmatrix}\right) = C^{ste}(1-\bar{\lambda})(3-\bar{\lambda})$$

C'est un polynôme qui s'annule bien en chaque valeur propre. $\{\Delta \mathbf{u}(\bar{\lambda}=1)\}$ vaut le premier mode et $\{\Delta \mathbf{u}(\bar{\lambda}=3)\}$ vaut le deuxième mode.

Remarques

-On peut facilement généraliser ces résultats à m paramètres. Dans ce cas, (III-39) est un déterminant d'une matrice de taille m

-Lorsque L_t dépend linéairement de λ, les vecteurs $\Delta U_\alpha(\lambda)$ et les scalaires $d_{\alpha\beta}(\lambda)$ sont des fractions rationnelles en λ.

-Si l'on applique m perturbations, le déterminant caractéristique de la bifurcation admet n-m pôles. Ce résultat a été démontré en faisant un calcul dans la base modale. L'emplacement de ces pôles est généralement imposé par

les perturbations $\{f_1\}$et$\{f_2\}$.Le bon choix de ces deux quantités est celui pour lequel le premier pôle est aussi loin que possible pour avoir le maximum de valeurs propres.

III-6-b) Calcul de la solution perturbée (ΔU, $\Delta\mu_1$, $\Delta\mu_2$) par la méthode asymptotique-numérique.

III-6-b-1) Introduction des développements en série entière

Pour résoudre les problèmes (III-38) et (III-39) qui permettent de connaître (ΔU_1, d_{11}, d_{21}, ΔU_2, d_{12}, d_{22}) et par la suite de déterminer la solution perturbée (ΔU, $\Delta\mu_1$, $\Delta\mu_2$), on utilise les développements asymptotiques suivants

$$\begin{aligned}
\Delta U_1(\lambda) &= \Delta U_{10} + \lambda\Delta U_{11} + \lambda^2\Delta U_{12} + \dots \\
\Delta U_2(\lambda) &= \Delta U_{20} + \lambda\Delta U_{21} + \lambda^2\Delta U_{22} + \dots \\
d_{11}(\lambda) &= 1. + \lambda d_{111} + \lambda^2 d_{112} + \dots \\
d_{12}(\lambda) &= \lambda d_{121} + \lambda^2 d_{122} + \dots \\
d_{21}(\lambda) &= \lambda d_{211} + \lambda^2 d_{212} + \dots \\
d_{22}(\lambda) &= 1. + \lambda d_{221} + \lambda^2 d_{222} + \dots
\end{aligned} \qquad \text{(III-42)}$$

avec $\langle\langle \Delta U_{\alpha i}, \Delta U_{10} \rangle\rangle = 0$, $\langle\langle \Delta U_{\alpha i}, \Delta U_{20} \rangle\rangle = 0$ pour $i \geq 1$ et $\alpha = 1$ ou 2 (III-43)

En injectant les développements asymptotiques (III-42-a), (III-42-c) et (III-42-e) dans le problème (III-38) et en identifiant suivant les puissances de λ, on obtient une série de problèmes linéaires qui s'écrit

ordre-1

$$\begin{aligned}
&L(\Delta U_{11}) = -2Q(U_1^f, \Delta U_{10}) + d_{111} f_1 + d_{211} f_2 \\
&\langle\langle \Delta U_{11}, \Delta U_{10} \rangle\rangle = 0 \\
&\langle\langle \Delta U_{11}, \Delta U_{20} \rangle\rangle = 0
\end{aligned}$$

ordre-2

$$L(\Delta U_{12}) = -2Q(U_1^f, \Delta U_{11}) + d_{112}f_1 + d_{212}\, f_2$$
$$\langle\langle \Delta U_{12}, \Delta U_{10} \rangle\rangle = 0$$
$$\langle\langle \Delta U_{12}, \Delta U_{20} \rangle\rangle = 0$$
$$\vdots \qquad \text{(III-44)}$$

ordre-p

$$L(\Delta U_{1p}) = -2Q(U_1^f, \Delta U_{1p-1}) + d_{11p}f_1 + d_{21p}\, f_2$$
$$\langle\langle \Delta U_{1p}, \Delta U_{10} \rangle\rangle = 0$$
$$\langle\langle \Delta U_{1p}, \Delta U_{20} \rangle\rangle = 0$$

La résolution de (III-44) permet d'avoir les vecteurs ΔU_{1p} et les coefficients d_{11p} et d_{21p}. De la même manière, on injecte les développements asymptotiques (III-43-b), (III-43-d) et (III-43-f) dans le problème (III-39), puis on identifie suivant les puissances de λ. On obtient une série de problèmes qui s 'écrit

ordre-1

$$L(\Delta U_{21}) = -2Q(U_1^f, \Delta U_{20}) + d_{211}f_1 + d_{221}\, f_2$$
$$\langle\langle \Delta U_{21}, \Delta U_{10} \rangle\rangle = 0$$
$$\langle\langle \Delta U_{21}, \Delta U_{20} \rangle\rangle = 0$$

ordre-2

$$L(\Delta U_{22}) = -2Q(U_1^f, \Delta U_{21}) + d_{212}f_1 + d_{222}\, f_2$$
$$\langle\langle \Delta U_{22}, \Delta U_{10} \rangle\rangle = 0$$
$$\langle\langle \Delta U_{22}, \Delta U_{20} \rangle\rangle = 0$$
$$\vdots \qquad \text{(III-45)}$$

ordre-p

$$L(\Delta U_{2p}) = -2Q(U_1^f, \Delta U_{2p-1}) + d_{21p}f_1 + d_{22p}\, f_2$$
$$\langle\langle \Delta U_{2p}, \Delta U_{10} \rangle\rangle = 0$$
$$\langle\langle \Delta U_{2p}, \Delta U_{20} \rangle\rangle = 0$$

La résolution de (III-45) permet d'avoir les vecteurs ΔU_{2p} et les coefficients d_{12p} et d_{22p}
Ainsi la solution perturbée (ΔU, $\Delta\mu_1$, $\Delta\mu_2$) est complétement définie.

III-6-b-2) Exemple d'application

On a appliqué la méthode asymptotique avec deux perturbations à l'exemple classique de la plaque carrée soumise à une compression (Figure III-14-a). Les deux perturbations sont choisies d'une manière aléatoire. Sur la Figure-II-17, on trace le déterminant indicateur de la bifurcation aux ordres 16 et 18. Il s'annule deux fois à l'intérieur de son rayon de convergence pour des valeurs de λ qui coïncident exactement avec les deux premières charges critiques.

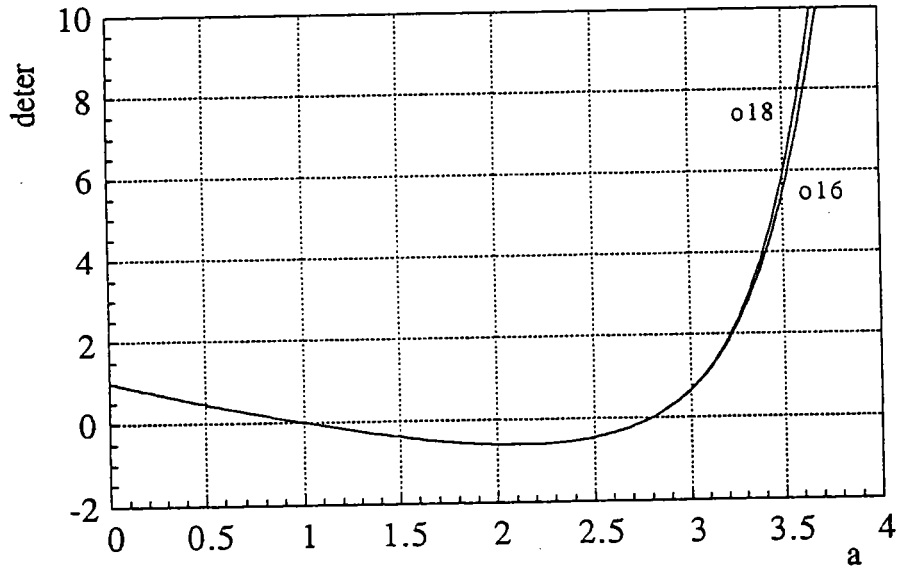


Figure-III-17: Représentation en série entière du déterminant indicateur de bifurcation avec deux perturbations: on obtient deux charges critiques.

III-6-c) Amélioration des séries à l'aide des approximants de Padé

Comme dans le cas d'une seule perturbation, on distingue deux façons d'introduire les approximants de Padé:
- on améliore les séries (III-42-b, c, d, e), puis on cherche les zéros du déterminant indicateur de bifurcation (III-41).
- on orthogonalise la base de la série de (III-42-a), on insère les approximants de Padé dans la séries $\Delta U_1(\lambda)$ et on fait la même chose pour la série (III-43-

b). Par projection des équations d'équilibre perturbé (III-38) et (III-39) sur ΔU_{10} et ΔU_{20}, on calcule le déterminant caractéristique de la bifurcation.
On a appliqué cette seconde technique à l'exemple d'une plaque carrée en compression (Figure-III-14-a). Les deux perturbations sont choisies d'une manière aléatoire. On a adopté la même stratégie pour le choix des approximants de Padé que dans le cas d'une seule perturbation. On montre sur la Figure-III-18, que le déterminant s'annule pour des valeurs de λ qui coïncident exactement avec les quatres premières charges critiques et qu'il admet toujours des pôles sauf entre les deux premières.

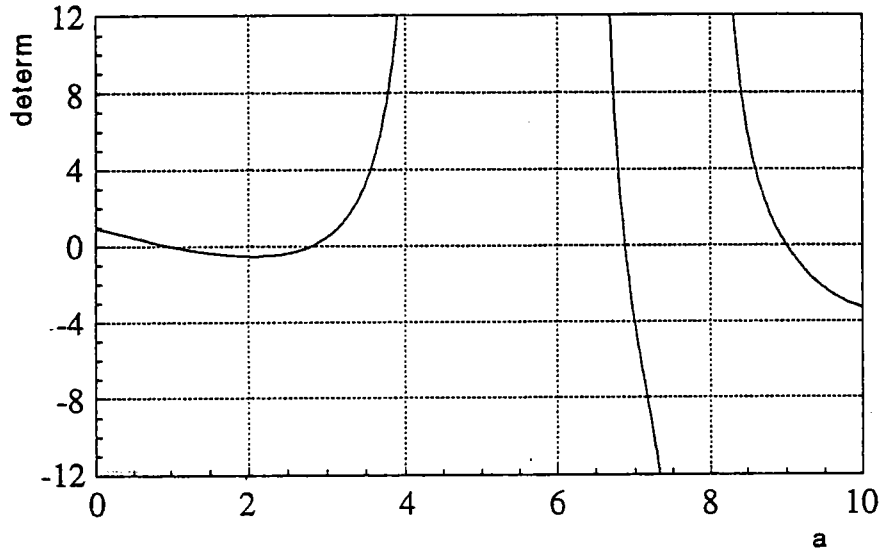


Figure-III-18: Amélioration des séries à l'aide des approximants de Padé. On obtient 4 charges critiques.

III-6-d) Conclusion

L'indicateur de bifurcation avec deux perturbations nous a permis d'avoir les deux premières charges critiques en utilisant uniquement les séries entières. En procédant ainsi on arrive à éliminer le pôle qui limitait le rayon de convergence de l'indicateur de bifurcation dans le cas d'une perturbation unique. On peut accéder à plus de valeurs propres en utilisant un indicateur avec plusieurs perturbations. Cependant le temps de calcul des coefficients $d_{\alpha\beta i}$ peut devenir important. Pour le calcul de flambage, l'intérêt d'introduire deux perturbations semble limité au fait que l'on évite le choix d'une perturbation orthogonale à un mode, notamment le premier. Pour le calcul de vibration on pense que l'on peut accéder à davantage de fréquences propres avec deux perturbations.

IV) DETECTION D'UN POINT DE BIFURCATION SUR UNE BRANCHE NON-LINEAIRE ET CALCUL DE BRANCHES BIFURQUEES

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la méthode de calcul de points de bifurcation sur une branche linéaire au calcul de point de bifurcation sur une branche non-linéaire. Les structures mécaniques auxquelles on se refère sont par exemple, les arcs et les coques sphériques. La branche fondamentale sera déterminée par la méthode asymptotique-numérique, éventuellement en plusieurs pas avec la procédure de continuation décrite au chapitre II. L'indicateur de bifurcation sera évalué le long de cette branche de la même façon que dans le cas d'une branche fondamentale linéaire. On présentera un algorithme de calcul exact de cet indicateur en chaque point de la branche fondamentale déterminée par une méthode incrémentale. Cela nous permettra de comparer les résultats asymptotiques et exacts. On développera aussi une méthode asymptotique-numérique pour le calcul de branches bifurquées dans le cas de structure avec un pré-flambage non-linéaire. Le calcul des différentes tangentes au point de bifurcation sera discuté. Enfin on présentera un exemple de calcul de point de bifurcation et branches bifurquées pour un arc circulaire.

IV-1) Calcul de points de bifurcation sur une branche non-linéaire

IV-1-a) Formulation du problème d'équilibre perturbé

Considérons une structure présentant un préflambage non-linéaire (par exemple un arc circulaire soumis à un chargement concentré Figure-IV-1)

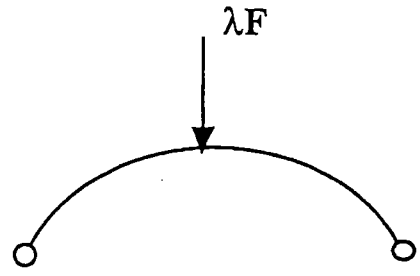
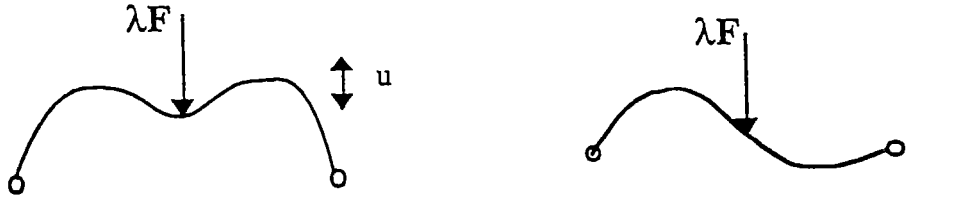


Figure-IV-1: Arc circulaire soumis à un chargement concentré

Lorsqu'on augmente le paramètre λ, l'arc se déforme en gardant une configuration symétrique (Figure-IV-2-a). Lorsque λ atteint une valeur critique l'arc peut basculer vers une position asymétrique (Figure-IV-2-b).



configuration symétrique *configuration asymétrique*

Figure-IV-2: Différentes positions d'un arc soumis à un chargement concentré

La position symétrique correspond à une branche non-linéaire qui représentera la branche fondamentale (Figure-IV-3). La position asymétrique correspondra à la branche bifurquée et on la supposera à priori non-linéaire (Figure-IV-3). La bifurcation dans ce cas correspond à une brisure de symétrie.

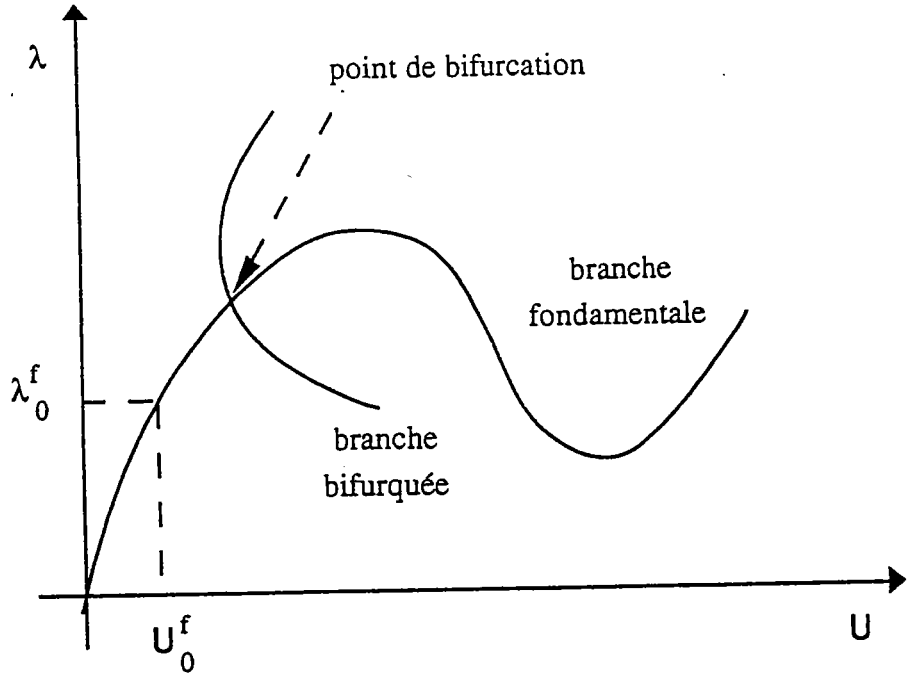


Figure-VI-3 : Branche non-linéaire avec une bifurcation simple

Les deux branches sont solutions de l'équation d'équilibre suivante

$$L(U) + Q(U, U) = \lambda F \qquad \text{(IV-1)}$$

Comme dans le cas d'une branche non-linéaire on va introduire une perturbation $\Delta\mu f$ pour caractériser le point de bifurcation (par exemple dans le cas de l'arc Figure-IV-4).

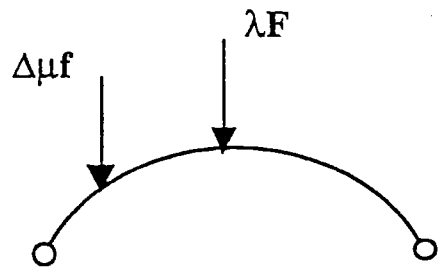


Figure-IV-4: Arc soumis à un chargement concentré λF et à une perturbation $\Delta\mu f$

L'équilibre perturbé sera décrit par le problème incrémental suivant

$$L_t(\Delta U) = \Delta\mu f \qquad \text{(IV-2)}$$

où $L_t(.) = L(.) + 2Q(U^f,.)$ est l'opérateur tangent pris au point de la branche fondamentale où la perturbation est appliquée. Cette fois L_t est non-linéaire en λ. Comme auparavant on va se donner la condition supplémentaire suivante

$$\left\langle\left\langle \Delta U - \Delta U_0 \, , \, \Delta U_0 \right\rangle\right\rangle = 0 \qquad \text{(IV-3)}$$

En augmentant le paramètre de charge λ, on s'intérresse à l'évolution des perturbations ΔU et $\Delta\mu$. Le point de bifurcation correspondra à la valeur de λ pour laquelle la rigidité $\Delta\mu$ est nulle.

Remarque

La procédure décrite ici permet de détecter en fait tous les points où la matrice de rigidité tangente est singulière, c'est à dire les points de bifurcation et les points limites en charge. Comme par la suite on va utiliser des représentations analytiques de la branche de solution fondamentale, il sera très facile de repérer les points limites et donc de les différencier par rapport aux points de bifurcation.

IV-1-b) Calcul de la solution perturbée (ΔU, $\Delta\mu$) par la méthode asymptotique-numérique

Pour résoudre le problème perturbé (IV-2) et (IV-3) on va utiliser des développements asymptotiques. On supposera qu'une représentation analytique de la branche fondamentale non-linéaire est connue sous la forme d'une série entière

$$U^f(a) = U_0^f + aU_1^f + a^2U_1^f + \ldots$$
$$\lambda^f(a) = \lambda_0^f + a\lambda_1^f + a^2\lambda_1^f + \ldots \qquad \text{(IV-4)}$$

(U_0^f, λ_0^f) est une solution triviale et les termes de la série (U_i^f, λ_i^f) sont connus à partir de la méthode décrite au chapitre-II, "a" est un paramètre de contrôle qui permet de décrire la branche fondamentale. On développera les perturbations ΔU et $\Delta\mu$ en fonction du même paramètre "a"

$$\Delta U(a) = \Delta U_0 + a\Delta U_1 + a^2\Delta U_2 + \ldots$$
$$\Delta\mu(a) = 1. + a\,\Delta\mu_1 + a^2\,\Delta\mu_2 + \ldots. \qquad \text{(IV-5)}$$

où ΔU_0 est la réponse de la structure à la perturbation au point (U_0^f, λ_0^f). En injectant les développements (IV-4) et (IV-5) dans (IV-2) et (IV-3) et en identifiant suivant les puissances de "a", on obtient une série de problèmes linéaires mixtes en ΔU_p et $\Delta\mu_p$.

ordre 0

$$L_t^\circ(\Delta U_0) = f$$

ordre 1

$$L_t^\circ(\Delta U_1) = \Delta\mu_1\, f - 2\, Q(U_1^f, \Delta U_0)$$
$$\langle\langle \Delta U_1, \Delta U_0 \rangle\rangle = 0 \qquad \text{(IV-6)}$$

.
.
.

ordre p

$$L_t^{\circ}(\Delta U_p) = \Delta\mu_p f - 2\sum_{r=1}^{p} Q(U_r^f\ ,\ \Delta U_{p-r})$$

$$\langle\langle \Delta U_p,\ \Delta U_0 \rangle\rangle = 0$$

où $L_t^{\circ}(.)$ est l'opérateur tangent au point (U_0^f, λ_0^f). On a $L_t^{\circ}(.) = L(.) + 2Q(U_f^0, .)$

IV-1-c) Retour à une formulation en déplacement et discrétisation par éléments finis.

Le problème variationnel à l'ordre p sous forme explicite s'écrit

$$\int_{\Omega_0} (\Delta \mathbf{S}_p : (\gamma^l(\delta\mathbf{u}) + 2\gamma^{nl}(\Delta\mathbf{u}, \mathbf{u}_0)) + \mathbf{S}_0 : 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) +$$

$$\delta\mathbf{S} : (\gamma^l(\Delta\mathbf{u}_p) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_0, \Delta\mathbf{u}_p) - \mathbf{D}^{-1} : \Delta\mathbf{S}_p))dv$$

$$= \Delta\mu_p P_e(\delta\mathbf{u}) - 2\int_{\Omega_0} \sum_{r=1}^{p-1} (\Delta\mathbf{S}_r : 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_{p-r}^f, \delta\mathbf{u}) + \mathbf{S}_r^f : 2\gamma^{nl}(\Delta\mathbf{u}_{p-r}, \delta\mathbf{u}) +$$

$$\delta\mathbf{S} : \gamma^{nl}(\Delta\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{p-r}^f))dv$$

(IV-7)

La résolution de ce problème variationnel suivant $\delta\mathbf{S}$ donne la loi de comportement suivante

$$\Delta\mathbf{S}_p = \mathbf{D} : (\gamma^l(\Delta\mathbf{u}_p) + 2\gamma^{nl}(\Delta\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_0^f) + \sum_{r=1}^{p-1} \gamma^{nl}(\Delta\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{p\text{-}r}^f)) \qquad \text{(IV-8)}$$

Si on reporte ce résultat dans l'équation (IV-7), on trouve l'équation d'équilibre

$$\int_{\Omega_0}((\gamma^1(\delta\mathbf{u})+2\gamma^{nl}(\delta\mathbf{u},\mathbf{u}_0)):\mathbf{D}:(\gamma^1(\Delta\mathbf{u}_p+2\gamma^{nl}(\Delta\mathbf{u},\mathbf{u}_0))+\mathbf{S}_0:2\gamma^{nl}(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}))dv$$

$$=\Delta\mu_p P_e(\delta\mathbf{u})-2\int_{\Omega_0}\sum_{r=1}^{p-1}(\Delta\mathbf{S}_r:2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_{p-r}^f,\delta\mathbf{u})+\mathbf{S}_r^f:2\gamma^{nl}(\Delta\mathbf{u}_{p-r},\delta\mathbf{u})+$$

$$\gamma^{nl}(\mathbf{u}_r^f,\Delta\mathbf{u}_{p-r}):\mathbf{D}:(\gamma^1(\delta\mathbf{u})+2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_0,\delta\mathbf{u}))dv$$

(IV-9)

La discrétisation par éléments finis de ce problème et la condition (IV-6-d) donnent à l'ordre p le problème d'algèbre linéaire que l'on pose sous la forme

$$\left[K_t^\circ\right]\left\{\Delta\mathbf{u}_p\right\}=\Delta\mu_p\{\mathbf{f}\}+\left\{\mathbf{F}^p\right\}$$

$$\left\{\Delta\mathbf{u}_p\right\}^t\left[K_t^\circ\right]\left\{\Delta\mathbf{u}_0\right\}=0 \qquad \text{(IV-10)}$$

$\left\{\mathbf{F}^p\right\}$ est un vecteur qui ne dépend que des vecteurs $\Delta\mathbf{U}_r$ et $\mathbf{U}_r^f$. La matrice $\left[K_t^\circ\right]$ qui intervient dans les problèmes (IV-10) est la même que celle utilisée dans le calcul des $\mathbf{U}_i^f$ et λ_i^f pour déterminer la branche fondamentale. Ainsi le surcoût de calcul associé à la détection d'un point de bifurcation est limité à l'assemblage de quelques seconds membres et à quelques résolutions.

En résumé, la procédure asymptotique-numérique présentée ici permet de déterminer un grand nombre de termes des séries (IV-5) pour un faible coût de calcul. En général, ces séries ont un rayon de convergence fini qui limite la validité de la représentation polynômiale à un certain voisinage du point de départ $\mathbf{U}_0^f$, λ_0^f. En pratique, il faut se limiter à la recherche des zéros de la fonction $\Delta\mu(a)$ à l'intérieur du domaine de convergence des séries.

IV-1-d) Solution exacte du problème d'équilibre perturbé

Afin d'évaluer les performances de la méthode, il est intéressant de comparer les solutions asymptotiques (IV-5) avec une solution exacte du problème (IV-2) et (IV-3). Pour ceci, on calcule la branche fondamentale ($\mathbf{U}^f$, λ^f) point par point en résolvant l'équation d'équilibre par la méthode de

Newton-Raphson, et en chaque point on calcule la rigidité $\Delta\mu$ par la relation suivante

$$\Delta\mu = \frac{\left\{\Delta u_0\right\}^t \{f\}}{\{f\}^t \left[K_t(U^f)\right]^{-1} \{f\}} \qquad \text{(IV-11)}$$

Il est évident que la détermination précise point par point de la solution exacte $\Delta\mu(a)$ est coûteuse en temps de calcul et n'a d'intérêt que pour la comparaison avec la solution analytique.

IV-1-e)-Exemple d'application

Dans ce cas, on a choisi un arc de poutre circulaire en appui simple, soumis à une charge concentrée λF au milieu (Figure-IV-5). Le point de bifurcation est à (u,λ) = (9.15, 4.08), u représente le déplacement au milieu de l'arc (Figure-IV-2).
La Figure-IV-6 présente le calcul de la branche fondamentale par une méthode asymptotique-numérique tronquée à l'ordre 9 et 12, à partir d'un point de départ qui est l'origine. On voit que le rayon de convergence des séries (IV-5) est aux alentours de u = 4 et de λ = 2.5, c'est à dire assez loin du point de bifurcation. Dans ce cas, la rigidité $\Delta\mu$ présentée sur la Figure-IV-7 décroît mais ne s'annule pas à l'intérieur du rayon de convergence des séries (IV-5). Si on recommence la même procédure à partir d'un point plus proche de la bifurcation (Figure-IV-8), on montre que la rigidité $\Delta\mu(a)$ s'annule pour a=2.61 (Figure-IV-9), et on obtient le point de bifurcation en (u, λ) = (9.12, 4.06).

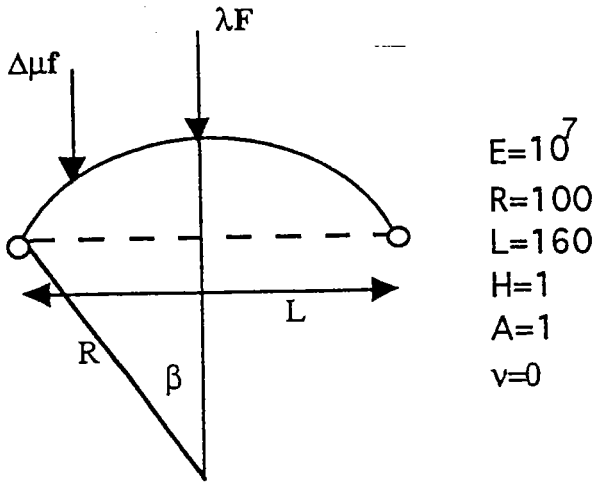
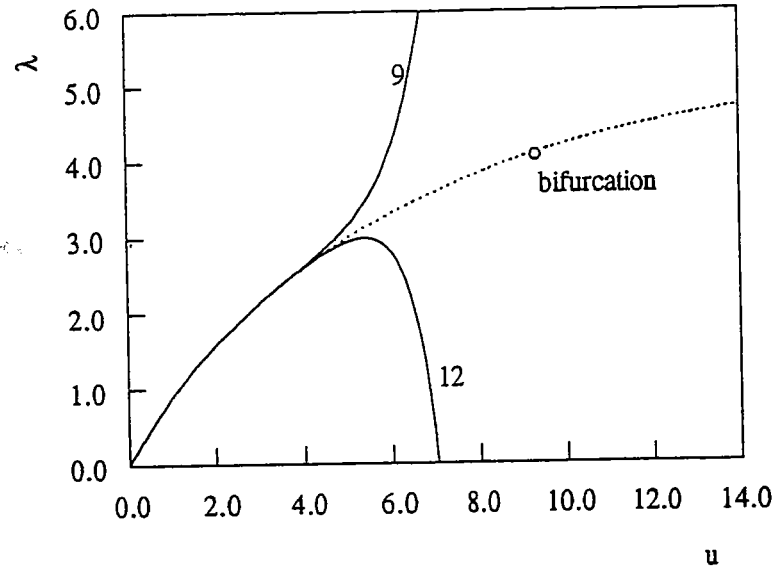


Figure-IV-5: Arc circulaire soumis à une force concentrée λF. $\Delta\mu f$ est la perturbation choisie.



.... *Solution exacte* ___ *Solution asymptotique*

Figure-IV-6: Développement asymptotique de la branche fondamentale à partir de l'origine et comparaison avec la solution exacte.

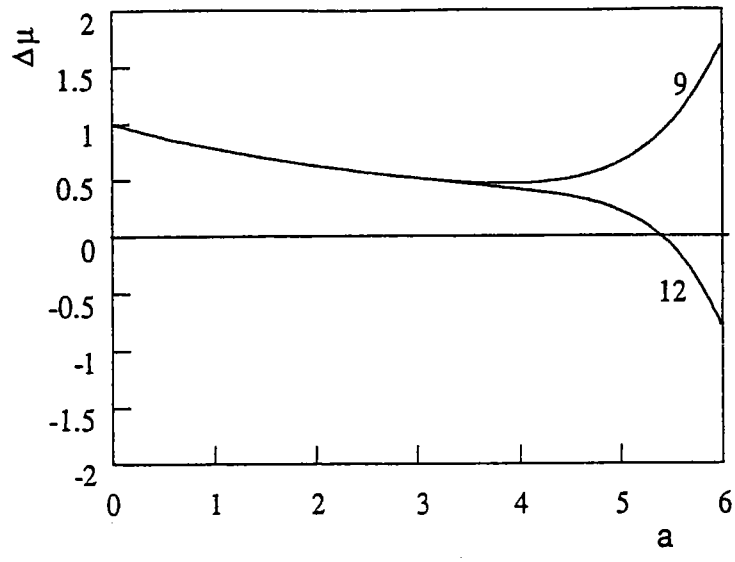
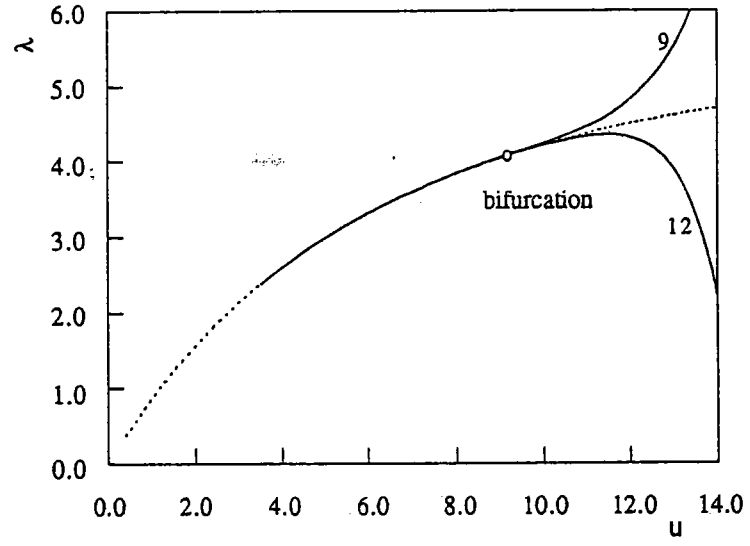


Figure-IV-7: Rayon de convergence de la série de Δμ, insuffisant pouratteindre le point de bifurcation.



.... *Solution exacte* —— *Solution asymptotique*

Figure-IV-8 : Calcul asymptotique de la branche fondamentale à partir de (u=3.5, λ=2.38)

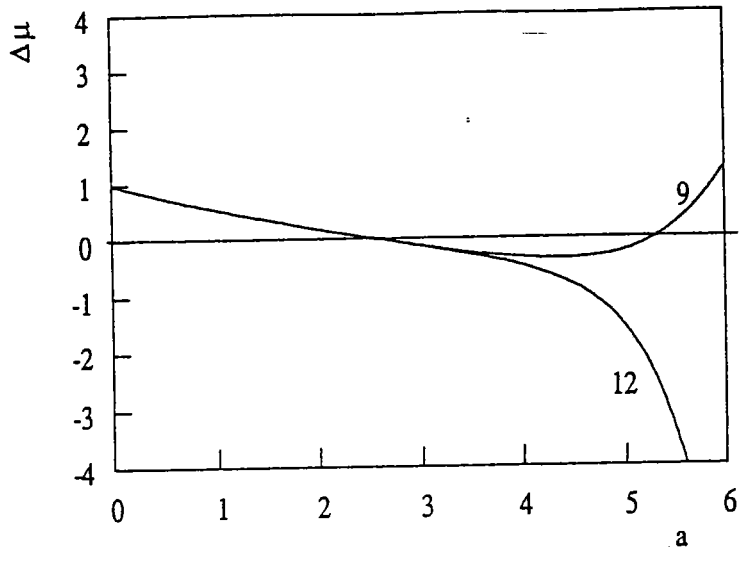


Figure-IV-9: Calcul de $\Delta\mu$ *au second pas, la bifurcation est obtenue.*

IV-1-f)-Conclusion

Pour les branches de solutions non-linéaires, la procédure asymptotique-numérique permet de détecter efficacement les points de bifurcation dès que le point de départ des séries est dans un certain voisinage du point singulier. Dans la mesure où la matrice de rigidité tangente a déjà été triangulée pour le calcul de la branche fondamentale, le coût en temps de calcul est cette fois limité à quelques résolutions seulement. Pour l'exemple de l'arc circulaire, deux inversions de la matrice de rigidité tangente étaient suffisantes pour la détection du point de bifurcation. A notre connaissance il n'existe pas d'algorithmes capable de résoudre ce problème à un coût aussi bas. Les approximants de Padé n'ont pas permis d'améliorer véritablement les séries IV-5-a et IV-5-b. Un effort reste à faire pour choisir convenablement les approximants de Padé dans le cas d'une branche non-linéaire.

IV-2) Calcul de branches bifurquées en présence de préflambage non-linéaire.

Dans cette partie on développe une variante de la méthode asymptotique-numérique qui permet de calculer le post-flambage des structures présentant un préflambage non-linéaire. La branche bifurquée sera recherchée par des développements en série entière à partir du point de bifurcation calculé par la méthode décrite au paragraphe (IV-1). On présentera le calcul des différentes tangentes au point de bifurcation. Enfin on présentera une application à l'exemple d'un arc circulaire.

IV-2-a) Développement de la méthode asymptotique pour le calcul du post-flambage et formulation du problème aux tangentes.

En un point de bifurcation simple, les deux branches d'équilibre admettent une représentation analytique en série entière sous forme

$$\begin{aligned} U(a) &= U_c + aU_1 + a^2U_2 + \dots \\ \lambda(a) &= \lambda_c + a\lambda_1 + a^2\lambda_2^2 + \dots \end{aligned} \qquad \text{(IV-12)}$$

où (U_c, λ_c) est le point de bifurcation, "a" est un paramètre de contrôle de la branche recherchée, (U_1, λ_1) est l'une des deux tangentes au point de bifurcation. Ces tangentes sont définies par les équations I-34 et I-34 du chapitre-I. En identifiant (U_1, λ_1) soit au vecteur t_1, soit au vecteur t_2 de la Figure-IV-10, on construit ainsi les représentations de la branche fondamentale ou bifurquée.

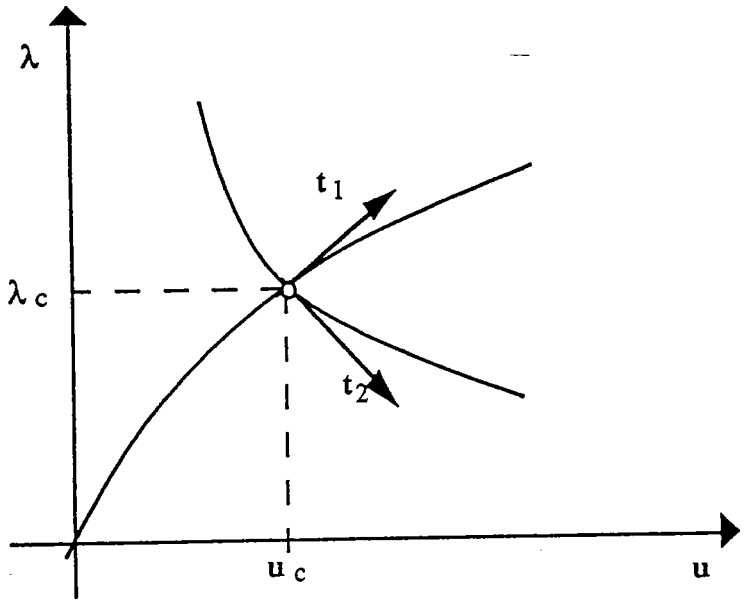


Figure-IV-10: Tangentes au point de bifurcation

On adopte toujours une condition d'orthogonalité qui identifie le paramètre "a" à la projection de U sur la tangente au point de bifurcation

$$\langle U - U_c, U_1 \rangle = a \qquad \text{(IV-13)}$$

Pour déterminer les termes de la série (IV-12), on injecte ces développements asymptotiques dans les équations d'équilibre. En tenant compte de l'équation (IV-13) on obtient la série de problèmes linéaires suivante

ordre-1

$$L_t^c(U_1) = \lambda_1 F$$
$$\langle U_1, U_1 \rangle = 1$$

ordre-2

$$L_t^c(U_2) = \lambda_2 F - Q(U_1, U_1)$$
$$\langle U_2, U_1 \rangle = 0$$

ordre-3

$$L_t^c(U_3) = \lambda_3 F - 2Q(U_1, U_2)$$
$$\langle U_3, U_1 \rangle = 0$$

. (IV-14)

.

.

ordre p

$$L_t^c(U_p) = \lambda_p F - \sum_{r=1}^{p-r} Q(U_{p-r}, U_r)$$
$$\langle U_p,\ U_1 \rangle = 0$$

L_t^c est l'opérateur tangent au point de bifurcation et il est donc non inversible. On surmontera cette difficulté en s'inspirant de ce qui a été fait précédemment (chapitre II).

Commentaire

(IV-14-a, b) et la projection de (IV-14-c) sur le mode Φ sont les équations qui définissent complètement la tangente (U_1, λ_1) (voir leurs analogues respectives (I-26), (I-27) et (I-38).
En résumé on résout l'équation de degré 2 suivante

$$b\alpha_1^2 + 2c\alpha_1\lambda_1 + d\lambda_1^2 = 0$$

On rappelle que les constantes b, c, d sont définies par (I-39) et enfin on trouve les deux tangentes au point de bifurcation sous la forme

$$t_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1(k_1 W + \Phi) \\ \alpha_1 k_1 \end{pmatrix},\ t_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1(k_2 W + \Phi) \\ \alpha_1 k_2 \end{pmatrix}$$

où $k_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - bd}}{b}$. Le mode de bifurcation Φ est calculé par la méthode décrite dans la partie 1 de ce chapitre et par la suite on montrera comment calculer le vecteur W.

IV-2-b) Calcul des vecteurs U_p et des coefficients λ_p pour $p \geq 2$

Le problème à l'ordre 2 (IV-14-c) admet une solution sous la forme

$$U_2 = \lambda_2 W + \alpha_2 \Phi + \hat{U}_2 \qquad \text{(IV-15)}$$

$\hat{U}_2$ est solution du problème

$$L_t^c(\hat{U}_2) = -Q(U_1, U_1)$$
$$\langle \Phi, \hat{U}_2 \rangle = 0 \qquad \text{(IV-16)}$$

et W est solution du problème

$$L_t^c(W) = F$$
$$\langle \Phi, W \rangle = 0 \qquad \text{(IV-17)}$$

Pour calculer les coefficients λ_2 et α_2 on a besoin de deux équations, la première provient de la condition de solvabilité à l'ordre 3 (projection sur le mode de (IV-14-e) et la deuxième provient de la condition d'orthogonalisation entre U_1 et U_2 (IV-14-d)

$$\langle \Phi, Q(U_1, U_2) \rangle = \lambda_2 \langle \Phi, Q(U_1, W) \rangle + \alpha_2 \langle \Phi, Q(U_1, W) \rangle + \langle \Phi, Q(U_1, \hat{U}_2) \rangle = 0 \qquad \text{(IV-18)}$$

$$\langle U_1, U_2 \rangle = \lambda_2 \langle U_1, W \rangle + \alpha_2 \langle U_1, \Phi \rangle + \langle U_1, \hat{U}_2 \rangle = 0$$

Ainsi on a défini complètement le vecteur U_2.

Les problèmes à différents ordres se résolvent d'une manière récurrente, par exemple à l'ordre p U_p est cherché sous la forme

$$U_p = \lambda_p W + \alpha_p \Phi + \hat{U}_p \qquad \text{(IV-19)}$$

$\hat{U}_p$ vérifie l'équation suivante

$$L_t^c(\hat{U}_p) = -\sum_{r=1}^{p-r} Q(U_{p-r}, U_r)$$
$$\langle \Phi, \hat{U}_p \rangle = 0 \qquad \text{(IV-20)}$$

La condition de solvabilité à l'ordre p+1 (la projection de l'équation à l'ordre p+1 sur le mode et le fait que $\langle \Phi, F \rangle = 0$) et la condition d'orthogonalisation entre U_p et U_1 (IV-14-h), nous permettent d'avoir λ_p et α_p.

$$\lambda_p\langle\Phi,Q(U_1,W)\rangle+\alpha_p\langle\Phi,Q(U_1,\Phi)\rangle+$$

$$\left\langle\Phi,Q(U_1,\hat{U}_p)\right\rangle+\frac{1}{2}\left\langle\Phi,\sum_{j=2}^{p-2}Q(U_j,U_{p-j})\right\rangle=0$$

(IV-21)

$$\lambda_p\langle U_1,W\rangle+\alpha_p\langle U_1,\Phi\rangle+\left\langle U_1,\hat{U}_p\right\rangle=0$$

Résumé

Pour résoudre le problème à chaque ordre, on utilise la condition de solvabilité à l'ordre suivant et la condition d'orthogonalisation. Cela mène tout simplement à l'inversion une fois pour toute d'une matrice d'ordre 2.

IV-2-c) Formulation en déplacement

Comme auparavant on va réécrire le problème variationnel à l'ordre p sous une forme adaptée aux méthodes d'éléments finis classiques en déplacement. Explicitement le problème (IV-20) s'écrit

$$\int_{\Omega_0}(\hat{S}_p:(\gamma^l(\delta u)+2\gamma^{nl}(u_c,\delta u))\ +\ S_c:2\gamma^{nl}(\hat{u},\delta u)+$$

$$\delta S:(\gamma^l(\hat{u}_p)\ +\ 2\gamma^{nl}(u_c,\hat{u}_p)\ -\ D^{-1}:\hat{S}_p))dv$$

$$=-\int_{\Omega_0}\sum_{r=1}^{p-1}(S_r:2\gamma^{nl}(u_{p-r},\delta u)\ +\delta S:\gamma^{nl}(u_r,u_{p-r}))dv$$

(IV-22)

$$\left\langle\Phi,\hat{U}_p\right\rangle=0$$

La résolution du problème variationnel (IV-22-a) par rapport à δS donne la loi de comportement suivante

$$\hat{\mathbf{S}}_p = \mathbf{D}:(\gamma^l(\hat{\mathbf{u}}_p) + 2\gamma^{nl}(\hat{\mathbf{u}}_p, \mathbf{u}_c) + \sum_{r=1}^{p-1}\gamma^{nl}(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{p-r})) \qquad \text{(IV-23)}$$

Si on reporte ce résultat dans l'équation (IV-22), on trouve un problème où les inconnues sont uniquement des déplacements

$$\int_{\Omega_0}((\gamma^l(\delta\mathbf{u}) + 2\gamma^{nl}(\delta\mathbf{u}, \mathbf{u}_c)):\mathbf{D}:(\gamma^l(\hat{\mathbf{u}}_p) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_c, \hat{\mathbf{u}}_p)) + \mathbf{S}_c:2\gamma^{nl}(\hat{\mathbf{u}}_p, \delta\mathbf{u}))dv$$

$$= \quad -\int_{\Omega_0}\sum_{r=1}^{p-1}(\hat{\mathbf{S}}_r:2\gamma^{nl}(\hat{\mathbf{u}}_{p-r}, \delta\mathbf{u}) + \gamma^{nl}(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_{p-r}):\mathbf{D}:(\gamma^l(\delta\mathbf{u}) + 2\gamma^{nl}(\mathbf{u}_c, \delta\mathbf{u}))dv$$

(IV-24)

$$\langle \phi, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle = 0$$

IV-2-d) Résolution par éléments finis et relaxation.

Après la discrétisation du problème (IV-24) par éléments finis on obtient le problème linéaire suivant

$$\begin{aligned} &\left[K_t^c\right]\left\{\hat{u}_p\right\} = \left\{\hat{F}_p^{nl}\right\} \\ &\langle \phi, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle = 0 \end{aligned} \qquad \text{(IV-25)}$$

où $\left\{\hat{\mathbf{F}}_p^{nl}\right\}$ est un vecteur qui ne dépend que du vecteur $\hat{\mathbf{U}}_{p-1}$ et des vecteurs $\mathbf{U}_i$ avec $i < p$.
Puisque $\left[K_t^c\right]$ n'est pas inversible le problème (IV-25-a) ne peut donc pas être résolu directement. La méthode des multiplicateurs de Lagrange nous permet de prendre en compte la condition (IV-25-b) et d'obtenir un problème global symétrique et inversible se formulant de la façon suivante

$$\begin{bmatrix} K_t^c & \phi \\ \phi^t & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \hat{u}_p \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{F}_p^{nl} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-26)}$$

où k est le multiplicateur de Lagrange. On notera que $\{w\}$ est calculé de la même façon en résolvant le système suivant

$$\begin{bmatrix} K_t^c & \phi \\ \phi^t & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

La discrétisation du problème (IV-21) donne le système d'ordre 2 suivant

$$\begin{bmatrix} \phi^t F^{WU_1} & \phi^t F^{\Phi U_1} \\ u_1^t w & u_1^t f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_p \\ \alpha_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\phi^t \hat{F}_{p+1}^{nl} \\ -u_1^t \hat{u}_p \end{Bmatrix} \qquad \text{(IV-27)}$$

qui permet de trouver les coefficients λ_p et α_p. $\{F^{WU_1}\}$dépend de **W** et de U_1. $\{F^{\Phi U_1}\}$ a la même expression que $\{F^{WU_1}\}$ à la différence qu'il dépend de Φ et U_1.

IV-2-e) Exemple d'application

On choisit toujours l'exemple de l'arc circulaire avec un effort au milieu (Figure-IV-5). La branche fondamentale est obtenue avec deux pas à l'aide de la méthode de continuation décrite au chapitre-II. On représente la branche bifurquée en tronquant la série (IV-12) aux ordres 9, 13 et 15 (Figure-IV-11). Le rayon de convergence est situé aux alentours de u = 110, on obtient une bonne partie de la branche bifurquée.

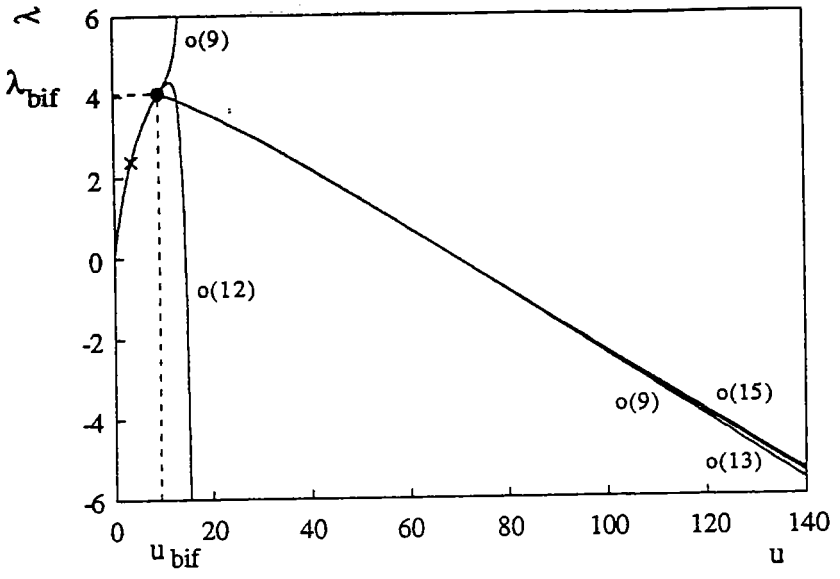


Figure-IV-11: Description du comportement de l'arc circulaire à l'aide de la méthode asymptotique-numérique: calcul de la branche fondamentale par continuation en deux pas , détection du point de bifurcation et calcul de la branche bifurquée.

IV-2-f) Conclusion

Dans cette partie on a présenté une méthode asymptotique-numérique pour le calcul du post-flambage initial des structures minces avec un préflambage non-linéaire. La branche bifurquée est représentée par un développement en série entière partant du point de bifurcation. Cela permet de transformer le problème non-linéaire initial en une série de problèmes linéaires faciles à manipuler. Le calcul des tangentes au point de bifurcation revient tout simplement à la résolution d'une équation du second ordre. Sur l'exemple d'un arc circulaire, on a montré que l'on peut calculer une bonne partie de la branche bifurquée avec un seul développement. Cependant il reste à tester notre méthode sur d'autres structures telles que les coques sphériques sous pression et à améliorer la qualité de la solution, notamment avec les approximants de Padé.

CONCLUSION

Dans ce travail, on a présenté une méthode asymptotique-numérique pour la détection de points de bifurcation sur une branche linéaire ou non-linéaire. Les bifurcations sont détectées au moyen d'un problème d'équilibre perturbé qui se prête bien aux techniques de développements en séries. Les coûts de calcul sont faibles car la détermination des termes d'une série revient à résoudre une succession de problèmes linéaires admettant la même matrice de rigidité. On ne procède ainsi qu'à une seule décomposition de la matrice de rigidité globale.

Dans le cas d'une branche linéaire, l'indicateur de bifurcation utilisé est exactement une fraction rationnelle qui s'annule en chaque point singulier et qui présente un pôle entre deux zéros consécutifs. La représentation en série entière ne permet d'avoir au mieux que la première charge critique et le mode correspondant, comme cela a été montré sur l'exemple de la plaque carrée en compression. L'amélioration des séries entières à l'aide d'approximants rationnels de type Padé est ici très spectaculaire: en poussant les séries à l'ordre 10 seulement on arrive à déterminer assez précisément les 4 premières charges critiques toujours sur l'exemple de la plaque en compression.

Le choix de la force de perturbation joue un rôle important dans le calcul des charges critiques. Dans le cas où cette perturbation est orthogonale à un certain mode, on a vu que l'on ne détecte plus la charge correspondante. Pour éviter cette situation, mais ausssi pour améliorer l'algorithme, on peut utiliser deux forces perturbatrices et définir l'indicateur de bifurcation comme le déterminant d'une matrice d'ordre 2. On pense que les procédures décrites ici peuvent à terme être des algorithmes efficaces de calcul de valeurs propres.

Dans le cas d'une branche non-linéaire, les diverses méthodes asymptotiques-numériques présentées dans ce mémoire constituent un ensemble d'outils efficaces pour effectuer le suivi des branches de solutions, pour détecter les points singuliers et pour tourner sur les branches bifurquées. Le gros avantage par rapport aux méthodes incrémentales-itératives est que l'on possède toujours une représentation analytique des solutions recherchées. Cela contribue à rendre les algorithmes plus fiables et plus faciles à utiliser.

REFERENCES

Abott J.P., 1978, "An efficient algorithm for determination of certain bifurcation points", J. Comp. Appl. Math., Vol. 4, p 19-27.

Azrar L., Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., 1992, "An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches", In *New Advances in computational Structural Mechanics*,, **P. Ladevèze et O. C Zienkiewicz**, Eds, Elsevier, p 117-131.

Azrar L., Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., 1993, "An asymptotic-numerical method to compute the post-buckling behaviour of elastic plates and shells", Inter. J. Numer. Methods. Engng., Vol. 36, pp 1251-1277

Azrar L., 1993, "Etude du comportement post-critique des coques cylindriques par une méthode Asymptotique-Numérique" Thèse de l'Université de Metz, Février 1993.

Baker G.A., Graves-Morris P., 1981, Padé Approximants, part I : Basic Theory. Encyclopedia of Mathematics and its applications, Volume 13, Addison-Wesley Publishing Company.

Bathe K.J., 1982, "Finite element procedures in engineering analysis", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

Batoz J. L., Dhatt G., 1979, "Incremental displacement algorithms for non-linear probems", Inter. J. Numer. Methods. Engng., Vol. 14, pp 1262-1267.

Batoz J. L., Dhatt G., Fafard M., 1985, "Algorithmes de calcul automatique des configurations pré et post-flambement des structures", Actes du trosième colloque tendances actuelles en calcul de structures, Bastia, 6-8 nov, p 129-143.

Bauer L., Reiss E. L., Keller H. B., 1970, "Axisymetric buckling of hollow spheres and hemispheres", Communication on pure and applied mathemtics, Vol. XXIII, John Wiley & Son, Inc., pp 529-568.

Bergan P. G., Horrigmoe G., Krakeland B., Soreide T. H., 1978, "Solution techniques for non-linear finite element problems", Inter. J. Numer. Methods. Engng., Vol. 12, p 1677-1696.

Bergan P.G., Holand I. and Soreide T.H., 1979, "Use of current stiffness parameter in solution of nonlinear problems", in *Energy method in finite element analysis*, **R. Gloewinski, E. Y. Rodin and O. C. Zienkiewicz**, John Wiley & Son Ltd, pp 256-282.

Boutyour E.H., Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., 1993, "Calculs non-linéaires par des méthodes asymptotiques-numériques: application aux structures élastiques", Colloque national en calcul des structures, Vol. 1, 11-14 mai, Giens, Hermes Editions.

Boutyour E.H, Cochelin B., Potier-Ferry M., 1993, "Calcul des points de bifurcation par une méthode asymptotique-numérique". Proc. 1° Congrès National de Mécanique au Maroc, 371-378, ENIM, Rabat.

Budiansky B., 1974, "Theory of buckling and post-buckling behaviour of elastic structures", Advances in Applied Mechanics, Vol. 14, p 1-65.

Brush D. O. and Almroth B. O., 1975, "*Buckling of bars, plates and shells*", MacGraw-Hill, New York.

Bushnell D., 1985, "*Computerized buckling analysis of shells*", Martinus Nijjhof Publishers.

Chroscielewski J., Schmidt R., 1986, "A solution control method for nonlinear finite element post-buckling analysis of structures", in *Post-buckling of elastic structures*, Szabo J. Eds, Elsevier, Amsterdam, 1986.

Cochelin B., 1993, " A path following technique via an Asymptotic-Numerical method", à paraitre dans Computers structures.

Cochelin B., 1994, "Méthode asymptotique-numérique pour le calcul non-linéaire géométrique des structures élastiques. Flambage et délaminage dans les composites stratifiés", Habilitation à diriger des recherches, Université de Metz, mars 1994.

Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., 1994-a, "Asymptotic-Numerical methods and Padé approximants for nonlinear elastic structures", Inter. J. Numer. Methods. Engng., Vol. 37, pp 1187-1213.

Cochelin B., Damil N., Potier-Ferry M., 1994-b, "The Asymptotic-Numerical Méthods: an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics", Revue européenne des éléments finis, Vol. 3 N° 2, p 281-297.

Crisfield M. A., 1981, "A fast incremental / iterative solution procedure that handles "Snap-Through"", Computers & Structures, Vol. 13, pp 55-62.

Crisfield M. A., 1983, "An arc-length method including line search acceleration", Int. J. Numer. Methods in Engng, Vol. 19, pp 1269-1289.

Crisfield M. A., Shi J., Peng X., 1992, "Some recent developpements with shell and stability analysis", in New advances in computational structures mechanics, **P. Ladevèze and O. C. Zienkiewicz** Eds., pp 249-258.

Crouzeix M. and Rappaz J., 1990, "*On numerical approximation in bifurcation theory*", Masson, Springer-Verlag, Paris.

Damil N., Potier-Ferry M., 1990, "A new method to compute perturbed bifurcations: Application to the buckling of imperfect elastic structures", Int. J. of Eng. and Sciences, Vol. 28 n°9, p 943-957.

Damil N., 1990, "De la théorie de la bifurcation au calcul des structures" Thèse D'état , Université Hassan II, Casablanca, juin 1990.

Damil N., Potier-Ferry M., Braikat B., 1994, "Une technique de perturbation pour le calcul des structures avec fortes non-linéarités", Comptes Rendus Académie des sciences Paris, t 318, série II, p 713-719.

Dhatt G. et Touzot G., 1984, "*Une présentation de la méthode des éléments finis*", Maloine S.A. éditeur.

Fitch J.R., 1968, "The buckling and post-buckling behavior of spherical caps under concentrated load", Int. J. Solids Structures, Vol. 4, pp 421-446.

Gallagher R. H., 1975, "Perturbation procedures in nonlinear finite element structural analysis", Computational Mechanics-Lecture Notes in Mathematics, Vol. 461, Springer-Verlag, Berlin, p 75-89.

Iooss G., Joseph D. D., 1990, "*Elementary stability and bifurcation theory*", Springer Verlag, Paris, 2ème édition.

Imbert J. F., 1984, "*Analyse des structures par éléments finis*", Cepadues Editions, 2ème édition, Toulouse.

Kearfott R. B., 1983, "Some general bifurcation techniques", Siam J. Sci. Stat. Comput, Vol. 4 N°. 1, pp 52-68.

Keener J. P., Keller H. B., 1973, "Perturbed bifurcation theory", Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 50, pp 159-179.

Keller H.B., 1977, "Numérical solutions of bifurcation and non-linear eigenvalue problems", in Application of bifurcation theory, **Rabinowitz P.** Eds, Academic Press, New York.

Koiter W. T., 1945, "On the stability of elastic equilibrium" Thesis, Delft 1945, English translation NASA Techn. Trans., F. 10, 883, 1967.

Koiter W. T., 1963, "Elastic stability and post-buckling behavior", Proc. Symp. nonlinear problems, **R. E. Langer** Eds, Univ. of Wisconsin Press, Madison.

Kouhia R., Mikkola M., 1989, "Tracing the equilibrium path beyond simple critical points", Int. J. Numer. Methods Engng, Vol. 28, p 2923-2941.

Kratzig W.B., 1990, "Fundamentals of Numerical Algorithms for static and dynamic instability phenomena of thin shells" in *Computational*

mechanics of nonlinear response of shells, **W. B. Kratzig and E. Onate** Eds, Springer-verlag, pp , Berlin Heidelberg.

Kroplin B., Dinkler D., Hillman J., 1985, "An energy perturbation applied to nonlinear analysis", Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng,Vol 52, p 885-897.

Potier-Ferry M., 1978, "Fondements mathématiques de la théorie de la stabilité élastique", Thèse de Doctorat d'état, Université Pierre et Marie Currie Paris VI.

Potier-Ferry M, 1978, "Bifurcation et stabilité pour des systèmes dérivant d'un potentiel", J. Mécanique, Vol. 17, N° 4, p 579-608.

Potier-Ferry M., 1987, "Foundations of elastic post-buckling theory", in Buckling and Post-buckling, Lecture notes in physics 288, Springer-Verlag, Berlin, p 1-82.

Ramm E., 1981, "Strategies for tracing the non-linear response near limit points", in *Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics.* **W.Wunderlish, E. Stein, K. J. Bathe** Eds, Springer-Verlag, Berlin, p 63-89.

Riks E., 1979, "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", Int. J. Solids Structures, Vol.15, p 529-551.

Riks E., 1984, "Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures", Comp. Meth. Appl. Mech. and Engng , Vol. 47, p 219-259.

Riks E., 1972, "The application of Newton's method to the problem of elastic stability", Journal of applied mechanics, Vol. 39, pp 1060-1065.

Riks E., 1992, "On formulations of path-following tecniques for structural stability analysis", in *New advances in computational structures mechanics*, **P. Ladevèze and O. C. Zienkiewicz** Eds., Elsevier, pp 65-79.

Roorda J., 1965, "Stability of structures with small imperfections", J. Engng. Mech Div. Am. Soc. civ. Engrs., February, pp 87.

Sabir A.B., Lock A.C., 1973, "Large deflexion, geometrically non-linear finite element analysis of circular arches", Int. J. Mech. Sci., Vol 15, p 37-47.

Seydel R., 1979, " Numerical computation of branch points in nonlinear equations", Numer. Math., Vol. 33, p 339-352.

Seydel R., 1983, "Branch switching in bifurcation problems for ordinary differential equations", Numer. Math., Vol. 41, p 93-116.

Seydel R., 1988, "*From equilibrium to chaos. Practical bifurcation theory and stability analysis*", Elsevier, New York.

Simpson R. B., 1975, "A method for the numerical determination of bifurcation states of nonlinear systems of equations", Siam J. Numer. Anal., Vol. 12, No. 3, june.

Stoll F., 1994, "An implementation of solution strategies for the analysis of complex non-linear equilibrium behavior", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 29 N°. 2, pp 109-122.

Thompson J. M. T. & Walker A. C., 1968, "The nonlinear perturbation analysis of discrete structural systems", Inter. J. Solids and Structures, Vol. 4, pp 757-768.

Thompson J. M. T., 1970, "Basic theorems of elastic stability", Int. J. Engng Sci. Vol. 8, pp 307-313.

Thompson J. M. T., Hunt G.W., 1984, "Elastic instability phenomena", John Wiley and Sons, Chichester.

Wagner W., Wriggers P., 1988, "A simple method for the calculation of postcritical branches", Engng Comput.,Vol. 5, p 103-109.

Wagner W., Wrrigers P., 1991, "Calculation of bifurcation points via fold curves", in *Nonlinear Computational Mechanics*, **P. Wriggers and W. Wagner** Eds, pp 69-84, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Werner B., Spence A., 1984, "The computation of symmetry-breaking bifurcation points", Siam J. Numer. Anal., Vol. 21, pp

Wrigers P., Simo J.C., 1990, "A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points", Int. J. Numer. Methods Engng, Vol. 30, p 155-176.

Wriggers P., Wagner W., Miehe C., 1988, "A quadratically convergent procedure for the calculation of stability point in finite element analysis", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. , Vol. 70, p 329-347.

Weinitschke H. J., 1985, " On the calculation of limit and bifurcation points in stability problems of elastic shells", Int. J. Solids Structures, Vol. 21 N°. 1, p 79-95.

Yamaki N., 1984, *Elastic stability of circular cylindrical shells.*, North-Holland, Amsterdam.

Zienkiewicz, Taylor, 1991, *The finite element method*, fourth edition, Mac Graw Hill 1991.