



HAL
open science

Etude de problèmes d'homogénéisation définis sur des plaques minces perforées périodiquement

Jean-Marc Sac-Epée

► **To cite this version:**

Jean-Marc Sac-Epée. Etude de problèmes d'homogénéisation définis sur des plaques minces perforées périodiquement. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ038S . tel-01776730

HAL Id: tel-01776730

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776730v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UB 8/1625

THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITÉ DE METZ

Pour l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

Spécialité : Mathématiques

par

Jean-Marc SAC-ÉPÉE

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19941145
Cote	S/M3 94/38
Loc	Mafaiou

**Titre : ETUDE DE PROBLÈMES D'HOMOGENÉISATION
DÉFINIS SUR DES PLAQUES MINCES PERFORÉES
PÉRIODIQUEMENT.**

Soutenue le 23-11-1994 à l'université de Metz (Amphi Pascal) devant la commission d'examen :

Alain BOURGEAT

Professeur à l'université de Saint-Etienne
Rapporteur

Michèle CHAMBAT

Professeur à l'université de Lyon I
Examineur

Olivier COULAUD

C. R. à l'I.N.R.I.A. Lorraine
Examineur

Colette PICARD

Professeur à l'université de Paris sud
Rapporteur

Jeannine SAINT JEAN PAULIN

Professeur à l'université de Metz
Directeur de thèse

Avant-Propos

C'est avant tout à Madame Jeannine SAINT JEAN PAULIN que je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance pour l'aide qu'elle m'a apporté durant ces années de travail. A ses côtés, j'ai appris comment mener une activité de recherche, n'hésitant jamais à faire appel à son expérience à chaque fois que j'en ai ressenti le besoin.

Je tiens aussi à remercier Madame Colette Picard et Monsieur Alain Bourgeat d'avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse, et de faire partie du jury. Leurs remarques et suggestions m'ont été très utiles pour préparer la version définitive de mon manuscrit.

Enfin, que Madame Michèle Chambat et Monsieur Olivier Coulaud trouve ici l'expression de ma gratitude pour avoir bien voulu être examinateurs de cette thèse, et pour avoir également accepté de faire partie du jury.

RÉSUMÉ

Dans la première partie de ce travail, nous nous intéressons à un problème d'évolution défini sur une plaque mince perforée périodiquement. Nous faisons tendre l'épaisseur de la plaque, la période des trous et le rapport entre cette période et l'épaisseur des barres qui constituent le matériau vers zéro, et nous donnons les coefficients du matériau limite obtenu. Plusieurs géométries sont envisagées, dont l'une donne l'exemple d'un matériau limite à coefficient de Poisson négatif.

Nous étudions ensuite un problème avec conditions aux bords de type Fourier défini sur une plaque mince de même type, et nous faisons tendre, dans un premier temps, l'épaisseur de la plaque, puis la taille de la période, vers zéro (dans cet ordre). Dans un second temps, nous effectuons ces deux passages à la limite dans l'ordre inverse. Nous donnons les deux types de problèmes limites obtenus.

Dans la troisième partie, nous construisons un outil informatique permettant de calculer explicitement les coefficients homogénéisés correspondant à des problèmes de thermique ou d'élasticité. Des résultats numériques correspondant aux géométries précédemment étudiées sont donnés dans cette partie.

MOTS CLÉS

Coefficients homogénéisés

Homogénéisation

Méthode de l'énergie

Méthodes variationnelles

Opérateurs de prolongements

Plaques minces

Plaques perforées

Résultats numériques

PREMIERE PARTIE :

ETUDE DE PROBLEMES DE THERMIQUE ET

D'ELASTICITE DEFINIS SUR DES

STRUCTURES RETICULEES, AVEC CONDITIONS

AUX BORDS DE NEUMANN.

SOMMAIRE I.

INTRODUCTION I.	P.4
1. PROBLEME D'ELASTICITE – CAS TRIDIMENSIONNEL.	P.6
PRESENTATION DU PROBLEME.	P.6
A) Etude du cas $r=2$.	P.10
AI.Dépendance relative à l'épaisseur (le paramètre e tend vers zéro).	P.10
AI.1. Dilatation du domaine.	P.10
AI.2. Théorème 1.	P.12
AI.3. Démonstration du théorème 1.	P.14
AI.3.1 Estimation a priori et résultats de convergence.	P.14
AI.3.2 Caractérisation de $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ et $\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}$.	P.20
AII.Dépendance relative à la période (le paramètre ε tend vers zéro).	P.30
AII.1. Théorème 2.	P.30
AII.2. Corollaire.	P.31
AII.3. Démonstration du théorème 2.	P.32
AII.3.1 Estimation a priori sur $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ et résultats de convergence.	P.32
AII.3.2 Caractérisation de $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$.	P.35
AIII.Dépendance relative à delta (le paramètre δ tend vers zéro).	P.40
AIII.1. Théorème 3.	P.40
(Commentaire)	

AIII.2. Démonstration du théorème 3.	P.44
AIII.2.1 Estimation a priori.	P.44
AIII.2.2 Dilatation des barres.	P.46
AIII.2.3 Calcul des expressions des $q_{\alpha\beta\theta\rho}^*$.	P.55
AIII.3. Etude d'une structure dérivée.	P.70
AIII.3.1 Résultats de convergence pour $q_{\alpha\beta\theta\rho}^\delta$ - calcul des $q_{\alpha\beta\theta\rho}^*$.	P.71
AIII.4. Généralisation à un angle α quelconque (pour les deux structures).	P.73
AIII.4.1 Résultats de convergence pour $q_{\alpha\beta\theta\rho}^\delta$ - calcul des $q_{\alpha\beta\theta\rho}^*$.	P.74
 B) Etude du cas $r > 2$.	P.77
BI. Dépendance relative à l'épaisseur (le paramètre e tend vers zéro).	P.77
BI.1. Dilatation du domaine.	P.77
BI.2. Théorème 4.	P.78
BI.3. Démonstration du théorème 4.	P.79
BI.3.1 Estimation a priori et résultats de convergence.	P.79
BI.3.2 Caractérisation de $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ et $\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}$	P.83
BI.3.3 Commentaire.	P.87
 C) Etude du cas $0 < r < 2$.	P.88
CI. Dépendance relative à l'épaisseur (le paramètre e tend vers zéro).	P.88
CI.1. Théorème 5.	P.89
CI.2. Démonstration du théorème 5.	P.90

2. PROBLEME DE THERMIQUE – CAS BIDIMENSIONNEL.	P.92
2.1. Rappel de résultats d'homogénéisation.	P.92
2.2. Estimation a priori sur χ_δ^j , résultats de convergence sur q_{ij}^δ . et calcul explicite des coefficients q_{ij}^* .	P.93
BIBLIOGRAPHIE II	P.96

INTRODUCTION I

Nous étudions ici des plaques minces perforées, caractérisées par trois petits paramètres:

- . l'épaisseur de la plaque (paramètre e),
- . la période des perforations (paramètre ε),
- . le rapport entre la largeur des barres et la période des perforations (paramètre δ).

Les deux plaques étudiées diffèrent par la géométrie de leurs sections horizontales.

Sur chaque plaque, on définit un problème d'élasticité tridimensionnelle, dont la solution $\phi^{e\varepsilon\delta}$ représente le déplacement de chaque point de la plaque dans les trois directions.

Notre but est de faire tendre les paramètres e , ε et δ vers zéro (dans cet ordre), et d'étudier les problèmes limites obtenus et les fonctions limites qui en sont solutions.

La dépendance par rapport au premier paramètre est étudiée par des techniques de plaques mince.

Au deuxième paramètre, qui caractérise la période du réseau, on applique une méthode d'homogénéisation.

Dans la troisième étape, on s'intéresse au paramètre δ , en appliquant une méthode variationnelle.

On étudie d'abord une plaque comportant trois barres horizontales et deux barres obliques.

Les barres obliques font, avec la verticale, des angles de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ (voir figure 1).

Après les trois passages à la limite, on obtient un matériau isotrope, dont on précise le module de Young et le coefficient de Poisson. Le coefficient de Poisson est une grandeur mathématique théoriquement comprise entre -1 et $\frac{1}{2}$. Si l'on comprime un matériau dans une direction, ce coefficient caractérise l'augmentation des dimensions du matériau dans les autres directions s'il est positif, et leur diminution s'il est négatif.

Le premier cas est naturel, et c'est celui que l'on rencontre presque toujours dans la pratique.

Ici, nous donnons l'exemple d'un matériau limite dont le coefficient de Poisson est négatif.

Nous reprenons l'ensemble de cette étude pour une structure dérivée de la précédente, et obtenue en supprimant les trois barres horizontales de la cellule de base (voir figure 3).

Nous généralisons les résultats obtenus à des angles quelconques (α et $\pi - \alpha$) pour les deux structures, et nous faisons des commentaires relatifs aux types de valeurs obtenues suivant l'angle α choisi.

En particulier, en prenant $\alpha = \frac{\pi}{4}$, on retrouve des coefficients limites déjà connus car les trous sont alors des carrés (voir Cioranescu-Saint Jean Paulin [9]).

D'autre part, dans notre problème d'élasticité, nous avons d'abord étudié le cas critique $r = 2$, r étant la puissance de e dans le terme en temps.

Nous étudions ensuite les cas $0 < r < 2$ et $r > 2$, et nous donnons les problèmes limites auxquels on aboutit alors.

Enfin, nous appliquons les techniques précédentes à un problème de thermique bidimensionnel, la géométrie de la structure étant celle de la coupe horizontale de la figure 1.

1. PROBLEME D'ELASTICITE : CAS TRIDIMENSIONNEL.

PRESENTATION DU PROBLEME.

On considère la structure tridimensionnelle constituée par une plaque perforée, dont les quatre bords latéraux sont perpendiculaires aux faces supérieure et inférieure, et dont une coupe horizontale est donnée sur la figure 1.

La cellule de base Y choisie dans le plan de la plaque est précisée sur la figure 2.

On introduit les notations suivantes:

La structure bidimensionnelle perforée, représentée sur la figure 1, est notée $\omega_{\varepsilon\delta}$. Son bord extérieur, qui est un parallélogramme, est noté $\partial\omega$.

La réunion de $\omega_{\varepsilon\delta}$ et des trous, notés $t_{\varepsilon\delta}$ est notée ω .

La structure tridimensionnelle précitée, notée $\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta}$, est alors définie par

$$\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta} = \omega_{\varepsilon\delta} \times]-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}[.$$

De même, on note $\Omega_e = \omega \times]-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}[$, $T_{\varepsilon\varepsilon\delta} = t_{\varepsilon\delta} \times]-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}[$, $\partial T_{\varepsilon\varepsilon\delta} = \partial t_{\varepsilon\delta} \times]-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}[$.

Le bord latéral de Ω , noté Γ_0^e , est donné par $\Gamma_0^e = \partial\omega \times]-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}[$.

La face supérieure (respectivement inférieure) de la plaque est notée $\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta}^+$ (respectivement $\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta}^-$).

Sur cette structure, on définit le problème suivant:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e^r \frac{\partial^2 \phi_i^{\varepsilon\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \frac{\partial \phi_k^{\varepsilon\varepsilon\delta}}{\partial x_h}) = & F_i^e \text{ dans } \Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta} \times (0, T), \\ \phi^{\varepsilon\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \Gamma_0^e \times (0, T), \\ a_{i3kh} \frac{\partial \phi_k^{\varepsilon\varepsilon\delta}}{\partial x_h} n_3 = G_i^{e\pm} & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\varepsilon\delta}^{\pm} \times (0, T), \\ a_{i\alpha kh} \frac{\partial \phi_k^{\varepsilon\varepsilon\delta}}{\partial x_h} n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial T_{\varepsilon\varepsilon\delta} \times (0, T), \\ \phi^{\varepsilon\varepsilon\delta}(0) = \phi^{\varepsilon\delta 0} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta}, \\ \frac{\partial \phi^{\varepsilon\varepsilon\delta}}{\partial t}(0) = \phi^{\varepsilon\delta 1} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta}, \end{array} \right.$$

où les a_{ijkh} sont constants et satisfont les conditions usuelles de symétrie en élasticité.

Posons

$$V(\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta}) = \{v \in [H^1(\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta})]^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0^e\}.$$

D'autre part, on fait les hypothèses suivantes:

$$\begin{cases} \phi^{\varepsilon\delta 0} \in V(\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta}), \\ \phi^{\varepsilon\delta 1} \in \left(L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta})\right)^3, \\ F^e, \frac{\partial F^e}{\partial t} \in L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_e))^3) \\ G^{e\pm}, \frac{\partial G^{e\pm}}{\partial t} \in L^\infty(0, T, (L^2(\omega_\times \{\pm \frac{e}{2}\}))^3). \end{cases}$$

Les a_{ijkh} sont coercifs, c'est à dire qu'il existe une constante C_0 strictement positive telle que

$$C_0 v_{ij} v_{ij} \leq a_{ijkh} v_{ij} v_{kh} \quad \text{pour tout } v = (v_{ij}) \text{ tel que } v_{ij} = v_{ji}.$$

Des théorèmes classiques assurent l'existence et l'unicité de la fonction $\phi^{e\varepsilon\delta}$ solution du problème (1), avec

$$\phi^{e\varepsilon\delta} \in L^\infty(0, T, V(\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta})), \frac{\partial \phi^{e\varepsilon\delta}}{\partial t} \in L^\infty(0, T, (L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta}))^3), \frac{\partial^2 \phi^{e\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \in L^\infty(0, T, (V(\Omega_{\varepsilon\varepsilon\delta}))').$$

Nous allons étudier la dépendance de $\phi^{e\varepsilon\delta}$ en e , ε et δ lorsque ces paramètres sont petits. Dans tout ce travail, les indices grecs (respectivement les indices latins) pourront prendre les valeurs 1 et 2 (respectivement les valeurs 1, 2 et 3).

D'autre part, et sauf mention explicite du contraire, on utilisera la convention de sommation sur les indices répétés.

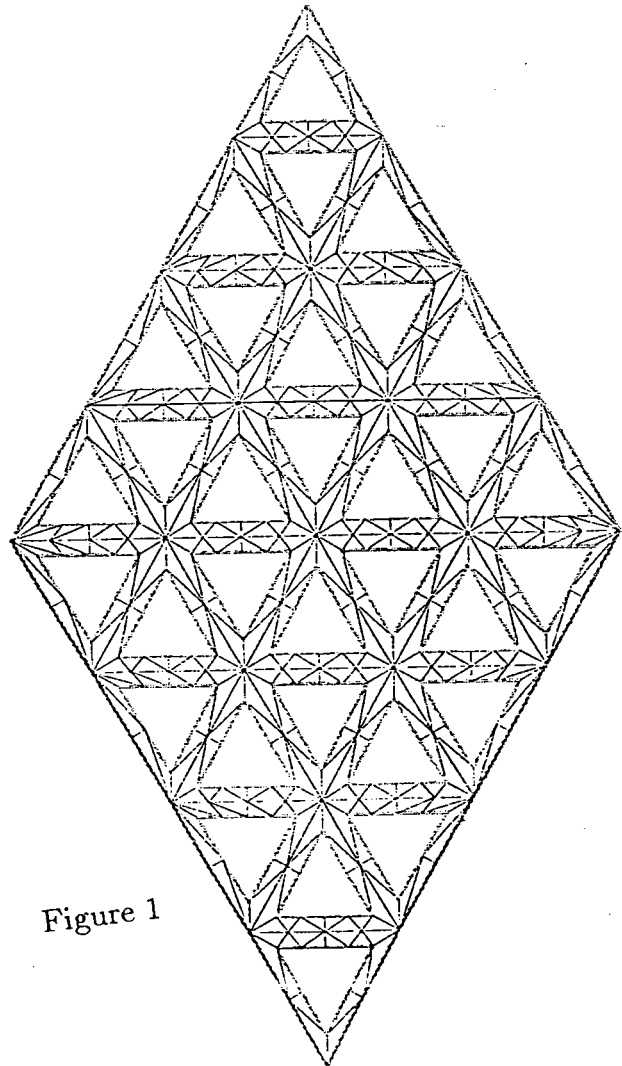
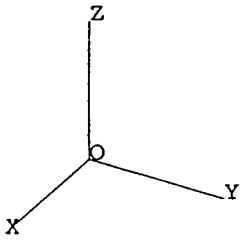
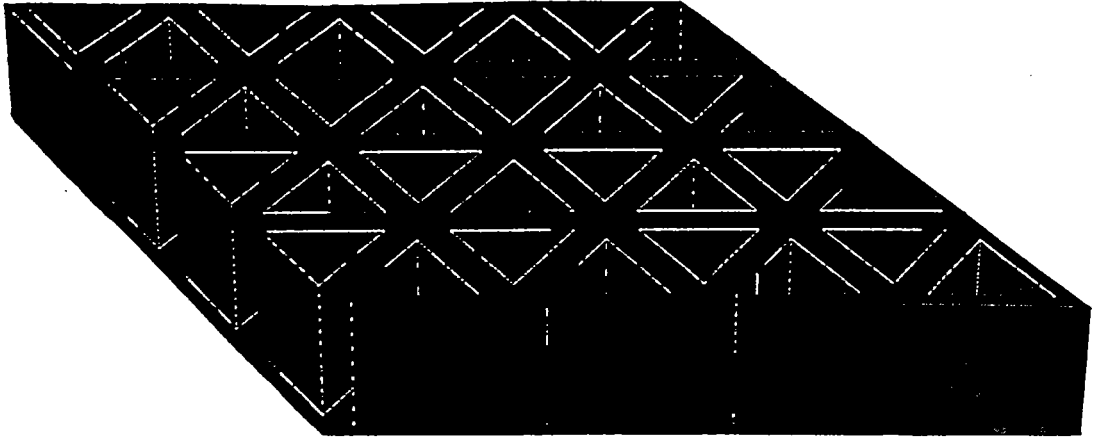


Figure 1

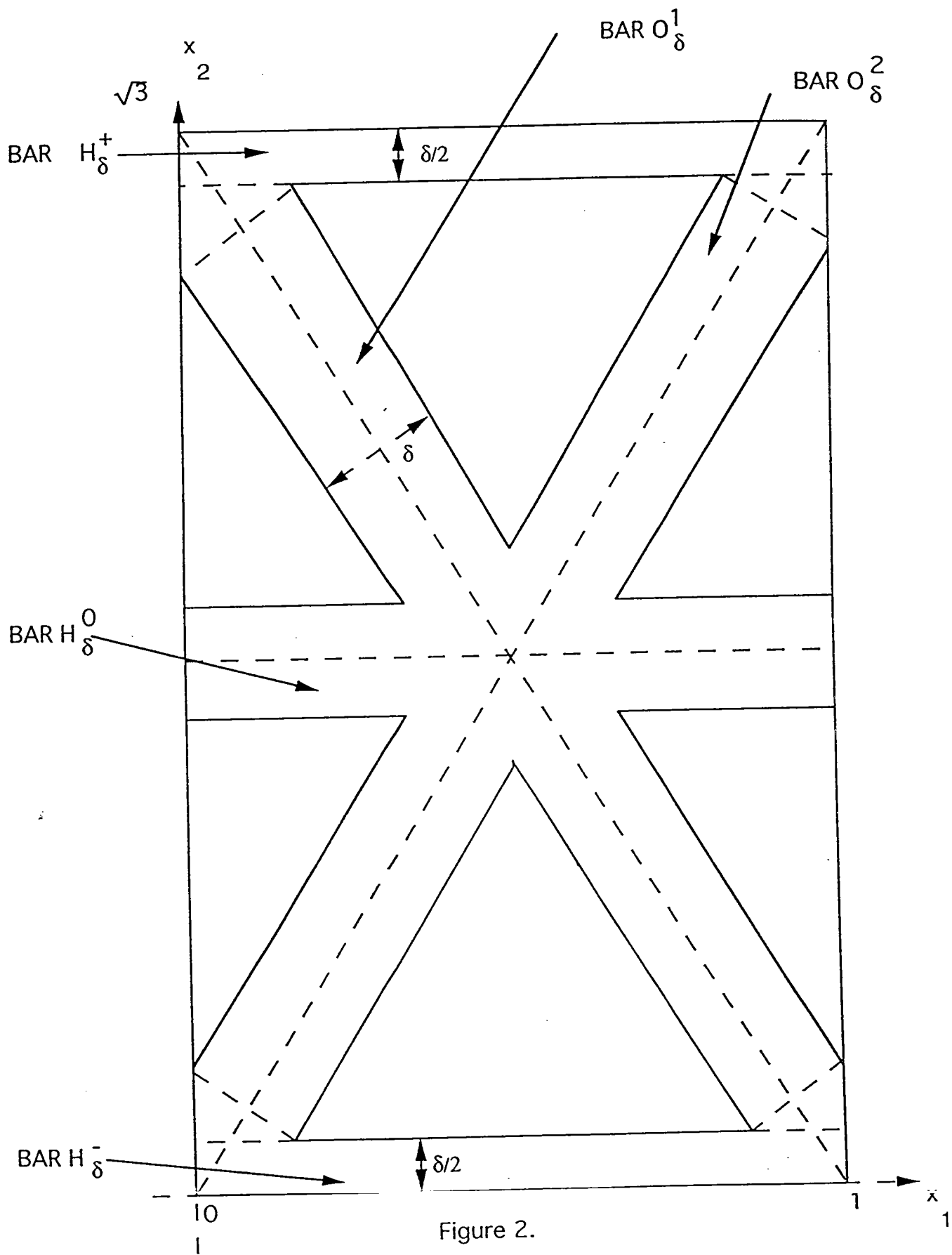


Figure 2.

DEPENDANCE RELATIVE A L'EPAISSEUR.

(Le parametre e tend vers zero.)

A) ETUDE DU CAS $r=2$.

AI. DEPENDANCE RELATIVE A L'ÉPAISSEUR.

Dans ce paragraphe, nous fixons ε et δ , et nous faisons tendre e vers zéro.

AI.1. DILATATION DU DOMAINE.

Nous allons transformer le domaine $\Omega_{e\varepsilon\delta}$ en le domaine $\Omega_{\varepsilon\delta} = \omega_{\varepsilon\delta} \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ indépendant de e par une dilatation dans la direction de x_3 , de la manière suivante:

Faisons le changement de variables

$$\begin{cases} z_\alpha = x_\alpha \text{ pour } \alpha = 1, 2. \\ z_3 = e^{-1}x_3. \end{cases}$$

Posons également

$$\begin{cases} \phi_\alpha^{\varepsilon\delta}(z_1, z_2, z_3) = e^{-1}\phi_\alpha^{e\varepsilon\delta}(x_1, x_2, x_3) \\ \phi_3^{\varepsilon\delta}(z_1, z_2, z_3) = \phi_3^{e\varepsilon\delta}(x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Ceci est valable aussi pour F_i^e et G_i^e .

Avec ces notations, le système qui définit $\phi^{\varepsilon\delta}$ devient

$$(AI.1) \left\{ \begin{array}{llll} e^3 \frac{\partial^2 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta} - \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta} & = & f_\tau & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T) (AI.1.1), \\ e^2 \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta} - \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{33}^{\varepsilon\delta} & = & f_3 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T) (AI.1.2), \\ \phi^{\varepsilon\delta} & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \sigma_{i\alpha}^{\varepsilon\delta} n_\alpha & = & 0 & \text{sur } \partial T_{\varepsilon\delta} \times (0, T), \\ \sigma_{i3}^{\varepsilon\delta} n_3 & = & g_i^\pm & \text{sur } \Gamma_{\varepsilon\delta\pm} \times (0, T). \\ \phi_\alpha^{\varepsilon\delta}(0) & = & e^{-1}\phi_\alpha^{\varepsilon\delta 0} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}, \\ \frac{\partial \phi_\alpha^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(0) & = & e^{-1}\phi_\alpha^{\varepsilon\delta 1} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}, \\ \phi_3^{\varepsilon\delta}(0) & = & \phi_3^{\varepsilon\delta 0} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}, \\ \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(0) & = & \phi_3^{\varepsilon\delta 1} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}, \end{array} \right.$$

avec les notations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^{\varepsilon\delta} = a_{ij\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\varepsilon\delta}) + 2e^{-1}a_{ij\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta}) + e^{-2}a_{ij 33}\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta}), \\ f_3 = F_3, \\ f_\alpha = eF_\alpha, \\ g_\alpha = G_\alpha, \\ g_3 = e^{-1}G_3. \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_0 = \partial\omega \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ T_{\varepsilon\delta} = t_{\varepsilon\delta} \times \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm = \omega_{\varepsilon\delta} \times \left\{\pm\frac{1}{2}\right\}. \end{array} \right.$$

On pose $V(\Omega_{\varepsilon\delta}) = \{v \in (H^1(\Omega_{\varepsilon\delta}))^3, v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$.

On établit le résultat suivant:

AI.2. THEOREME 1

On suppose que

$e^2 \|\phi_i^{\varepsilon\delta 1}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}$, $e \|\frac{\partial \phi_i^{\varepsilon\delta 0}}{\partial z_\beta}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}$, et $\|\frac{\partial \phi_i^{\varepsilon\delta 0}}{\partial z_3}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}$ sont bornés indépendamment de e .

Alors,

$$e^2 \phi^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \phi^{*\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty((0, T), V(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible*},$$

où

$$\begin{cases} \phi_3^{*\varepsilon\delta} = \Phi_3^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t) \\ \phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = -z_3 \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}(z_1, z_2, t) + \Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t) \end{cases}$$

La fonction $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ est caractérisée par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_\tau \partial z_\eta} \left(\frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \Phi_3^{*\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \frac{\partial}{\partial z_\eta} \left(\frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \right) n_\tau = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \Phi_3^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, 0) = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{0\} \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t}(z_1, z_2, 0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_3^{*\varepsilon\delta 1} dz_3 = \Lambda_3^{\varepsilon\delta 1} & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{0\} \end{cases}$$

où $\Phi_3^{*\varepsilon\delta 1}$ est définie par

$$e^2 \Phi_3^{\varepsilon\delta 1} \rightharpoonup \Phi_3^{*\varepsilon\delta 1} \text{ dans } L^2(\omega_{\varepsilon\delta}) \text{ faible},$$

et où

$$\begin{cases} b_{\tau\eta\theta\rho} = a_{\tau\eta\theta\rho} - a_{\tau\eta j 3} d_{ij} a_{i 3 \theta \rho}, \\ (d_{ij})_{ij} = (a_{i 3 j 3})_{ij}^{-1}. \end{cases}$$

la fonction $\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}$ est nulle.

COMMENTAIRE

Le problème qui définit la déflexion $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ est un problème du deuxième ordre en temps et du quatrième ordre en espace.

AI.3. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

AI.3.1. ESTIMATIONS A PRIORI ET RESULTATS DE CONVERGENCE.

Multiplions l'équation (AI.1.1) par $e \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t}$, et l'équation (AI.1.2) par $\frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}$. En ajoutant les deux égalités obtenues, et en additionnant les termes similaires, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(e^4 \sum_\tau \left| \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right|^2 + e^2 \left| \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right|^2 + \right. \\ & + e^2 a_{\tau\eta\alpha\beta} \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta}) \gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\varepsilon\delta}) + 4e a_{\tau\eta\alpha 3} \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta}) \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta}) + 2a_{\tau\eta 33} \gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta}) \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta}) + \\ & \left. + 4a_{\tau 3\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta}) \gamma_{\tau 3}(\phi^{\varepsilon\delta}) + 4e^{-1} a_{\tau 333} \gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta}) \gamma_{\tau 3}(\phi^{\varepsilon\delta}) + e^{-2} a_{3333} \left| \gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta}) \right|^2 \right) dz \\ & = \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(e f_\tau \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + f_3 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) dz + \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \left(e g_\tau^\pm \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + g_3^\pm \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) ds. \end{aligned}$$

En intégrant ceci de 0 à t, et en multipliant les deux membres par e^2 , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left[\sum_\tau \left| e^3 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right|^2 + \left| e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right|^2 + \right. \\ & + a_{\tau\eta\alpha\beta} \left(e^2 \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e^2 \gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & + 4a_{\tau\eta\alpha 3} \left(e^2 \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & + 2a_{\tau\eta 33} \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e^2 \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & + 4a_{\tau 3\alpha 3} \left(e \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e \gamma_{\tau 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & + 4a_{\tau 333} \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e \gamma_{\tau 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & \left. + a_{3333} \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \right] dz \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(f_\tau e^3 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + f_3 e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \left(g_\tau^\pm e^3 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + g_3^\pm e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) dz d\tau + e^2 \frac{E(0)}{2}, \end{aligned} \tag{AI.2}$$

où $E(t)$ est défini par

$$\begin{aligned} E(t) = & \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(\sum_\tau \left| e^2 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right|^2 + \left| e \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right|^2 + \right. \\ & + a_{\tau\eta\alpha\beta} \left(e^2 \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + 4a_{\tau\eta\alpha 3} \left(\gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & + 2a_{\tau\eta 33} \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + 4a_{\tau 3\alpha 3} \left(\gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{\tau 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & \left. + 4e^{-1} a_{\tau 333} \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{\tau 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + e^{-2} a_{3333} \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \right] dz \end{aligned}$$

Appelons A (respectivement B) le premier membre (respectivement le second membre) de l'inégalité (AI.2).

En posant

$$\begin{cases} \theta_{\alpha\beta}(\phi^{\varepsilon\delta}) = e^2 \gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\varepsilon\delta}), \\ \theta_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta}) = e \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta}), \\ \theta_{33}(\phi^{\varepsilon\delta}) = \gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta}), \end{cases}$$

le membre A s'écrit

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(\sum_{\tau} |e^3 \frac{\partial \phi_{\tau}^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t)|^2 + |e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t)|^2 + a_{ijkh} \theta_{kh}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) dz.$$

Posons

$$\begin{cases} \psi_{\alpha}^{\varepsilon\delta} = e^3 \phi_{\alpha}^{\varepsilon\delta}, \\ \psi_3^{\varepsilon\delta} = e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}. \end{cases}$$

Le membre A s'écrit alors :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(\sum_i \left| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right|^2 + a_{ijkh} \theta_{kh}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) dz.$$

Or, d'après la coercivité des a_{ijkh} , on a

$$(AI.3) \quad A \geq \frac{1}{2} \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + C_0 \sum_{i,j} \left\| \theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} B &= \int_0^t \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(f_{\tau} e^3 \frac{\partial \phi_{\tau}^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + f_3 e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) dz d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^{\pm}} \left(g_{\tau}^{\pm} e^3 \frac{\partial \phi_{\tau}^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + g_3^{\pm} e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) d\sigma d\tau + e^2 \frac{E(0)}{2} \\ &= \int_0^t \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(f_{\tau} \frac{\partial \psi_{\tau}^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + f_3 \frac{\partial \psi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) dz d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^{\pm}} \left(g_{\tau}^{\pm} \frac{\partial \psi_{\tau}^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + g_3^{\pm} \frac{\partial \psi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) d\sigma d\tau + e^2 \frac{E(0)}{2} \\ &= \int_0^t \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_i \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} dz d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^{\pm}} g_i^{\pm} \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} d\sigma d\tau + e^2 \frac{E(0)}{2}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_i \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} dz d\tau &\leq \int_0^t \|f_i\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} d\tau \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|f_i\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau \\ &\leq C \|f_i\|_{L^{\infty}(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} g_i^\pm \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} d\sigma d\tau \\
&= \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} g_i^\pm(t) \psi_i^{\varepsilon\delta}(t) d\sigma - \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} g_i^\pm(0) \psi_i^{\varepsilon\delta}(0) d\sigma - \int_0^t \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \frac{\partial g_i^\pm}{\partial t} \psi_i^{\varepsilon\delta} d\sigma d\tau \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|g_i^\pm(t)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|\psi_i^{\varepsilon\delta}(t)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 + \frac{1}{2} \|g_i^\pm(0)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 + \\
&+ \frac{1}{2} \|\psi_i^{\varepsilon\delta}(0)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial g_i^\pm}{\partial t} \right\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|\psi_i^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha}{2} \|\psi_i^{\varepsilon\delta}(t)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 &\leq \frac{\alpha}{2} \|e^2 \phi_i^{\varepsilon\delta}(t)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 \\
&\leq c\alpha \|e^2 \phi_i^{\varepsilon\delta}(t)\|_{V(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \\
&\leq c'\alpha \|e^2 \gamma_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \\
&\leq c'\alpha \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2.
\end{aligned}$$

De même, on a

$$\|\psi_i^{\varepsilon\delta}(0)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)} \leq c,$$

car

$$\begin{aligned}
\psi_i^{\varepsilon\delta}(0) &= (\psi_\alpha^{\varepsilon\delta}(0), \psi_3^{\varepsilon\delta}(0)) \\
&= (e^3 \phi_\alpha^{\varepsilon\delta}(0), e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}(0)) \\
&= (e^2 \phi_\alpha^{\varepsilon\delta 0}, e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta 0}) \\
&= e^2 \phi_i^{\varepsilon\delta 0}.
\end{aligned}$$

En conséquence, on a

$$\begin{aligned}
\|\psi_i^{\varepsilon\delta}(0)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 &= \|e^2 \phi_i^{\varepsilon\delta 0}\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 \\
&\leq \|e^2 \phi_i^{\varepsilon\delta 0}\|_{V(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \\
&\leq c.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} g_i^\pm \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} d\sigma d\tau \\
&\leq C \left(\|g_i^\pm\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm))}^2 + \left\| \frac{\partial g_i^\pm}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm))}^2 \right) + c'\alpha \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \\
&+ \frac{c'\alpha}{2} \int_0^t \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau + c.
\end{aligned}$$

On a aussi d'après les conditions initiales :

$$\frac{e^2 E(0)}{2} \leq c.$$

On obtient finalement

$$B \leq c_1 \left[\|f_i\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 + \|g_i^\pm\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm))}^2 + \left\| \frac{\partial g_i^\pm}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm))}^2 \right] + \\ + c' \alpha \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + c_2 \int_0^t \left(\|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(\tau) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \right) d\tau + c_3,$$

soit

$$B \leq c_4 + c' \alpha \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + c_2 \int_0^t \left(\|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(\tau) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \right) d\tau.$$

D'après (AI.3), on a

$$\frac{1}{2} \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + c_0 \sum_{ij} \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \\ \leq c_4 + c' \alpha \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + c_2 \int_0^t \left(\|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(\tau) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \right) d\tau.$$

Choisissons α de sorte que $c_0 \geq c' \alpha$.

Alors, on a

$$\sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \sum_{ij} \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \\ \leq K + K' \int_0^t \left(\|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(\tau) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \right) d\tau.$$

D'après le lemme de Gronwall, on a

$$\sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \sum_{ij} \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \leq K e^{K'T},$$

donc

$$\sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 + \sum_{ij} \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq c.$$

Alors, on a

$$\sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq c,$$

soit

$$(AI.4) \quad \begin{cases} \left\| e^2 \frac{\partial \phi_{\hat{\alpha}}^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C, & (AI.4.1) \\ \left\| e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C. & (AI.4.2) \end{cases}$$

De même, on a

$$\sum_{ij} \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C,$$

soit

$$(AI.5) \quad \begin{cases} \|e^2 \gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\varepsilon\delta})\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq C, & (AI.5.1) \\ \|e \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta})\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq C, & (AI.5.2) \\ \|\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq C. & (AI.5.3) \end{cases}$$

D'après (AI.5) et l'inégalité de Korn, on a

$$e^2 \phi^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \phi^{*\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty((0,T),V(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible.}$$

De même, d'après(AI.5), on a

$$(AI.6) \quad \|e^2 \sigma_{ij}^{\varepsilon\delta}\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C.$$

Par conséquent, on a

$$e^2 \sigma_{ij}^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \sigma_{ij}^{*\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible.}$$

On a encore

$$e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t}(z_1, z_2, t) \in L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})),$$

et

$$e^2 \frac{\partial \phi_\alpha^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \rightharpoonup \tilde{\phi}_\alpha \in H^{-1}((0,T),V(\Omega_{\varepsilon\delta})').$$

Comme

$$\|e^3 \frac{\partial \phi_\alpha^{\varepsilon\delta}}{\partial t}\|_{L^\infty((0,T),L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C,$$

on a

$$e^3 \frac{\partial \phi_\alpha^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \rightharpoonup 0 \text{ dans } H^{-1}((0,T),V(\Omega_{\varepsilon\delta})').$$

D'après (AI.5.3), on a

$$\left\| \frac{\partial e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} \leq e^2 C,$$

d'où à la limite

$$\left\| \frac{\partial \phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} = 0.$$

En conséquence, on a

$$(AI.7) \quad \phi_3^{*\varepsilon\delta} = \Phi_3^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t), \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \in L^\infty((0,T),H^1(\omega_{\varepsilon\delta})) \text{ et } \Phi_3^{*\varepsilon\delta} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times (0,T).$$

D'après (AI.5.2), on a

$$\left\| \frac{\partial e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial e^2 \phi_\alpha^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} \leq eC,$$

d'où à la limite

$$\left\| \frac{\partial \phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + \frac{\partial \phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial \phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = -\frac{\partial \phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha},$$

et donc

$$(AI.8) \quad \phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = -z_3 \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + \Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t),$$

Avec

$$(AI.9) \quad \Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} \in L^\infty((0, T), H^1(\omega_{\varepsilon\delta})) \text{ et } \Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times (0, T).$$

(AI.7) et (AI.9) impliquent, comme dans Ciarlet-Destuynder[5], que :

$$(AI.10) \quad \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \in L^\infty((0, T), H^2(\omega_{\varepsilon\delta})), \Phi_3^{*\varepsilon\delta} = 0 \text{ et } \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times (0, T).$$

Enfin on a

$$\begin{cases} \phi_3^{*\varepsilon\delta} = \Phi_3^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t), \\ \phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = -z_3 \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + \Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t). \end{cases}$$

AI.3.2 CARACTERISATION DE $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ ET $\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}$.

Pour obtenir les équations limites qui caractérisent $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ et $\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}$, nous allons utiliser une méthode analogue à celle de Caillerie.

On multiplie l'équation

$$e^3 \frac{\partial^2 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = f_\tau$$

par

$$ez_3 \theta_\tau(z_1, z_2, t),$$

avec $\theta_\tau \in D([0, T[, V(\omega_{\varepsilon\delta}))$, indépendante de z_3 ,

où

$$V(\omega_{\varepsilon\delta}) = \{v \in H^1(\omega_{\varepsilon\delta}), v = 0 \text{ sur } \partial\omega\}.$$

On obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(e^4 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} z_3 \theta_\tau - e^2 \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta} z_3 \theta_\tau - e \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta} z_3 \theta_\tau \right) dz d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_\tau e z_3 \theta_\tau dz d\tau,$$

soit après une intégration par partie :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^4 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(0) z_3 \theta_\tau(0) dz - \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^4 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} z_3 \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta} z_3 \frac{\partial}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz d\tau + \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon\delta}} e^2 \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta} z_3 \theta_\tau n_\eta dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta} \theta_\tau dz d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} e \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta} z_3 \theta_\tau n_3 ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_\tau e z_3 \theta_\tau dz d\tau, \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta 1} z_3 \theta_\tau(0) dz - \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^4 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} z_3 \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta} z_3 \frac{\partial}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz d\tau + 0 + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta} \theta_\tau dz d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} e g_\tau^\pm z_3 \theta_\tau ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_\tau e z_3 \theta_\tau dz d\tau. \end{aligned}$$

Introduisons les moments

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta} = e^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z_3 \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta} dz_3, \\ N_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta} = e^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta} dz_3, \\ Q_{\alpha}^{\varepsilon\delta} = e \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\alpha 3}^{\varepsilon\delta} dz_3. \end{array} \right.$$

L'égalité précédente, devient

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^3 \phi_{\tau}^{\varepsilon\delta 1} z_3 \theta_{\tau}(0) dz - \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^4 \frac{\partial \phi_{\tau}^{\varepsilon\delta}}{\partial t} z_3 \frac{\partial \theta_{\tau}}{\partial t} dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} M_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta} z_3 \frac{\partial}{\partial z_{\eta}} \theta_{\tau} dz d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} Q_{\tau}^{\varepsilon\delta} \theta_{\tau} dz d\tau - \\ (AI.11) \quad & - \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^{\pm}} e g_{\tau}^{\pm} z_3 \theta_{\tau} ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_{\tau} e z_3 \theta_{\tau} dz d\tau. \end{aligned}$$

Compte-tenu de la relation (AI.6), les moments $M_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta}$ et $N_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta}$ sont bornés dans $L^{\infty}((0, T), L^2(\omega_{\varepsilon\delta}))$ et convergent respectivement vers $M_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta}$ et $N_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta}$.

De même compte-tenu de la relation (AI.11), $Q_{\alpha}^{\varepsilon\delta}$ converge dans $L^{\infty}((0, T), V(\omega_{\varepsilon\delta})')$ faible vers $Q_{\alpha}^{*\varepsilon\delta}$.

En faisant tendre ε vers zéro dans (AI.11), on obtient l'équation

$$(AI.12) \quad -0 - 0 + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} (M_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_{\tau}}{\partial z_{\eta}} + Q_{\tau}^{*\varepsilon\delta} \theta_{\tau}) dz_1 dz_2 d\tau = 0,$$

soit

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial M_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_{\eta}} \theta_{\tau} dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\partial t_{\varepsilon\delta}} M_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} n_{\eta} \theta_{\tau} ds_1 ds_2 d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} Q_{\tau}^{*\varepsilon\delta} \theta_{\tau} dz_1 dz_2 d\tau = 0. \end{aligned}$$

Si on choisit $\theta_{\tau} \in \mathcal{D}([0, T[, \mathcal{D}(\omega_{\varepsilon\delta}))$, on obtient

$$(AI.13) \quad - \frac{\partial M_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_{\eta}} + Q_{\tau}^{*\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T).$$

Pour avoir des renseignements concernant le comportement au bord des trous dans le problème limite, nous allons multiplier l'équation (AI.13) par une fonction test

$\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, V(\omega_{\varepsilon\delta}))$.

Il vient

$$-\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial M_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} Q_\tau^{*\varepsilon\delta} \theta_\tau dz_1 dz_2 d\tau = 0,$$

soit

$$(AI.14) \quad \begin{aligned} & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} M_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\partial t_{\varepsilon\delta}} M_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} n_\eta \theta_\tau ds_1 ds_2 d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} Q_\tau^{*\varepsilon\delta} \theta_\tau dz_1 dz_2 d\tau = 0. \end{aligned}$$

En comparant les relations (AI.12) et (AI.14), on obtient

$$M_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} n_\eta = 0 \quad \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T).$$

Multiplions maintenant par

$$\theta_3(z_1, z_2, t) \in D([0, T[, H_0^1(\omega)), (\theta_3 \text{ est independante de } z_3)$$

l'équation

$$e^2 \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{33}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = f_3.$$

Il vient

$$\begin{aligned} & -e^2 \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \phi_3^{\varepsilon\delta 1} \theta_3(z_1, z_2, 0) dz d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \frac{\partial \theta_3}{\partial t} dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} (e \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} + \sigma_{33}^{\varepsilon\delta} 0) dz d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \sigma_{33}^{\varepsilon\delta} \theta_3 n_3 ds d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta} \theta_3 n_3 ds d\tau \\ & = -e^2 \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \phi_3^{\varepsilon\delta 1} \theta_3(z_1, z_2, 0) dz d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \frac{\partial \theta_3}{\partial t} dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} g_3^\pm \theta_3 ds d\tau - 0 = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_3 \theta_3 dz d\tau. \end{aligned}$$

On intègre une deuxième fois par partie. On obtient

$$(AI.15) \quad \begin{aligned} & -e^2 \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \phi_3^{\varepsilon\delta 1} \theta_3(z_1, z_2, 0) dz d\tau + \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta 0} \frac{\partial \theta_3}{\partial t}(0) dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2} dz d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} Q_\eta^{\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} g_3^\pm \theta_3 ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_3 \theta_3 dz d\tau. \end{aligned}$$

Or, d'après les conditions initiales, on a

$$e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta 0} \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \quad \text{faible.}$$

Soit d'autre part $\phi_3^{*\varepsilon\delta 1}$ définie par :

$$e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta 1} \rightharpoonup \Phi_3^{*\varepsilon\delta 1} \quad \text{dans } L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \quad \text{faible.}$$

Faisons tendre ε vers zéro dans (AI.15).

Il vient

$$\begin{aligned} & - \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_3^{*\varepsilon\delta 1} \theta_3 dz_3 \right) (z_1, z_2, 0) dz_1 dz_2 + \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} 0 \frac{\partial \theta_3}{\partial t} (0) dz_1 dz_2 + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2} dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} Q_\eta^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} (g_3^{+*} + g_3^{-*}) \theta_3 ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

On réintègre deux fois par parties.

On obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_3^{*\varepsilon\delta 1} \theta_3 dz_3 \right) (z_1, z_2, 0) dz_1 dz_2 - \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \Phi_3^{*\varepsilon\delta} (0) \frac{\partial \theta_3}{\partial t} (0) dz_1 dz_2 + \\ & + \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} (0) \theta_3 (0) dz_1 dz_2 + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} Q_\eta^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}^\pm} (g_3^{+*} + g_3^{-*}) \theta_3 ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

En prenant $\varphi \in \mathcal{D}(\]0, T[, \mathcal{D}(\omega_{\varepsilon\delta}))$, on obtient l'équation suivante

$$(AI.16) \quad \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_\eta^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{+*} + g_3^{-*}) \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T).$$

En choisissant judicieusement des fonction tests, on établit les conditions initiales et les conditions au bord des trous suivantes

$$(AI.17) \quad \begin{cases} Q_\eta^{*\varepsilon\delta} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \Phi_3^{*\varepsilon\delta} (0) = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{0\} \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} (0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_3^{*\varepsilon\delta 1} dz_3 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{0\}. \end{cases}$$

Dans (AI.16), on remplace $Q_\eta^{*\varepsilon\delta}$ par sa valeur calculée en (AI.13).

Il vient

$$(AI.18) \quad \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta \partial z_\tau} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}).$$

Pour avoir des renseignements concernant le comportement au bord des trous, on multiplie l'équation (AI.18) par $\theta \in \mathcal{D}(]0, T[, V(\omega_{\varepsilon\delta}))$.

On obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \theta dz d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\tau} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\partial t_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\tau} \theta n_\eta ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \theta ds d\tau, \end{aligned}$$

soit

$$(AI.19) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \theta dz d\tau - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_\eta^2} dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\partial t_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\tau} \theta n_\eta ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \theta ds d\tau. \end{aligned}$$

On multiplie par $e z_3 \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta}$ l'équation

$$e^3 \frac{\partial^2 \phi_\eta^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{\eta\tau}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\tau} - \frac{\partial \sigma_{\eta 3}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = f_\eta,$$

et par θ l'équation

$$e^2 \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{33}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = f_3.$$

D'une part on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^4 \frac{\partial^2 \phi_\eta^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} z_3 \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \sigma_{\eta\tau}^{\varepsilon\delta} z_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon\delta}} e^2 \sigma_{\eta\tau}^{\varepsilon\delta} z_3 \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} n_\tau ds d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e \sigma_{\eta 3}^{\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} e \sigma_{\eta 3}^{\varepsilon\delta} z_3 \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} n_\tau ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e f_\eta z_3 \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau. \end{aligned}$$

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \theta dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau - \\
& - \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon\delta}} e \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta} \theta n_\eta ds d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \sigma_{33}^{\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta}{\partial z_3} dz d\tau - \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \sigma_{33}^{\varepsilon\delta} \theta n_3 ds d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_3 \theta dz d\tau.
\end{aligned}$$

Après intégration par parties, passage à la limite en ε , puis une nouvelle intégration par parties en sens inverse, on obtient

d'une part

$$\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} Q_\eta^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau = 0,$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \theta dz d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} Q_\eta^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} (g_3^{+*} + g_3^{-*}) \theta dz d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta dz_1 dz_2 d\tau.
\end{aligned}$$

La différence des deux égalités précédentes donne

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \theta dz d\tau - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz d\tau = \\
& (AI.20) \quad = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} (g_3^{+*} + g_3^{-*}) \theta dz d\tau
\end{aligned}$$

Comparons (AI.19) et (AI.20).

Il vient

$$\frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\tau} n_\eta = 0 \quad \text{sur} \quad \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T).$$

on a donc

$$(AI.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta \partial z_\tau} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{+*} + g_3^{-*}) & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta} n_\tau = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\tau} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \Phi_3^{*\varepsilon\delta}(0) = 0 & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{0\} \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_3^{*\varepsilon\delta 1} & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{0\} \\ \Phi_3^{*\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times \{0\} \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times \{0\}. \end{array} \right.$$

Multiplions maintenant par $e\theta_\tau(z_1, z_2, t)$, avec $\theta_\tau \in D([0, T[, V(\omega_{\varepsilon\delta}))$ l'équation

$$e^3 \frac{\partial^2 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = f_\tau.$$

On obtient

$$\begin{aligned} & e^4 \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \phi_\tau^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \theta_\tau dz d\tau - e^2 \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz d\tau - e \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \theta_\tau dz d\tau \\ & = -e^4 \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^{-1} \phi_\tau^{\varepsilon\delta 1} \theta_\tau(z_1, z_2, 0) dz - e^4 \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \Phi_\tau^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon\delta}} e^2 \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta} n_\eta \theta_\tau ds d\tau + 0 - e \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta} \theta_\tau n_3 ds d\tau \\ & = -e^3 \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \phi_\tau^{\varepsilon\delta 1} \theta_\tau(z_1, z_2, 0) dz - e^4 \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \Phi_\tau^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} N_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz d\tau - e \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} g_\tau^\pm \theta_\tau ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e f_\tau \theta_\tau dz d\tau. \end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers zéro.

Il vient

$$(AI.22) \quad -0 - 0 + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} N_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - 0 = 0,$$

soit

$$- \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial N_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\partial t_{\varepsilon\delta}} N_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} \theta_\tau n_\eta ds d\tau = 0.$$

En particulier, avec $\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, \mathcal{D}(\omega_{\varepsilon\delta}))$, on obtient

$$(AI.23) \quad -\frac{\partial N_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} = 0 \quad \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T).$$

Pour déterminer les conditions au bord des trous, on multiplie l'équation (AI.23) par $\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, V(\omega_{\varepsilon\delta}))$.

On obtient

$$-\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial N_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz_1 dz_2 d\tau = 0,$$

soit

$$(AI.24) \quad \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} N_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\partial t_{\varepsilon\delta}} N_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} \theta_\tau n_\eta ds d\tau = 0.$$

En comparant les deux équations (AI.22) et (AI.24), il vient

$$N_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} n_\eta = 0 \quad \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T).$$

Finalement on a le système suivant :

$$(AI.25) \quad \begin{cases} -\frac{\partial N_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta}, \\ N_{\tau\eta}^{*\varepsilon\delta} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T). \end{cases}$$

Soit maintenant $\theta_i \in D([0, T[, \mathcal{D}(\omega))$, indépendante de z_3 .

Posons $v_i = z_3 \theta_i(z_1, z_2, t)$.

On multiplie par $e^2 v_\tau$ l'équation

$$e^3 \frac{\partial^2 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = f_\tau,$$

et par $e^2 v_3$ l'équation

$$e^2 \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{33}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = f_3.$$

Il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^5 \frac{\partial^2 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} v_\tau dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^4 \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} v_3 dz d\tau - \\ & e^3 \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \sigma_{i\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} v_i dz d\tau - e^2 \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \sigma_{i3}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} v_i dz d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 f_3 v_3 dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 f_\tau v_\tau dz d\tau, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} e^4 \phi_{\tau}^{\epsilon\delta 1} z_3 \theta_{\tau}(z_1, z_2, 0) dz - \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} e^4 \phi_3^{\epsilon\delta 1} z_3 \theta_3(z_1, z_2, 0) dz \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} e^5 \frac{\partial \phi_{\tau}^{\epsilon\delta}}{\partial t} z_3 \frac{\partial \theta_{\tau}}{\partial t} dz d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} e^4 \frac{\partial^2 \phi_3^{\epsilon\delta}}{\partial t^2} z_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial t} dz d\tau + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} \left(e^3 \sigma_{i\eta}^{\epsilon\delta} z_3 \frac{\partial \theta_i}{\partial z_{\eta}} + e^2 \sigma_{i3}^{\epsilon\delta} \frac{\partial z_3}{\partial z_3} \theta_i \right) dz d\tau - \\
& - e^2 \int_0^T \int_{\Gamma_{\epsilon\delta}^{\pm}} \sigma_{i3}^{\epsilon\delta} z_3 \theta_i n_3 ds d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} e^2 f_i v_i dz d\tau.
\end{aligned}$$

Faisons tendre ϵ vers zéro. Il vient

$$0 = -0 - 0 - 0 - 0 - 0 + \int_0^T \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} (0 + \sigma_{i3}^{*\epsilon\delta} \theta_i) dz d\tau - 0,$$

soit

$$(AI.26) \quad \sigma_{i3}^{*\epsilon\delta} = 0.$$

En utilisant les techniques, désormais standard, introduites dans Caillerie[3] (voir aussi Cioranescu-Saint Jean Paulin [9]), on donne les expressions explicites de $\sigma_{\alpha\beta}^{*\epsilon\delta}$, $N_{\alpha\beta}^{*\epsilon\delta}$ et $M_{\tau\eta}^{*\epsilon\delta}$:

$$(AI.27) \quad \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^{*\epsilon\delta} = b_{\alpha\beta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho} (\phi^{*\epsilon\delta}) \\ N_{\alpha\beta}^{*\epsilon\delta} = b_{\alpha\beta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho} (\Phi^{*\epsilon\delta}) \\ M_{\tau\eta}^{*\epsilon\delta} = -\frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\epsilon\delta}}{\partial z_{\theta} \partial z_{\rho}}, \end{cases}$$

où

$$(AI.28) \quad \begin{cases} \Phi^{*\epsilon\delta} = (\Phi_1^{*\epsilon\delta}, \Phi_2^{*\epsilon\delta}), \\ b_{\alpha\beta\theta\rho} = a_{\alpha\beta\theta\rho} - a_{\alpha\beta j3} d_{ij} a_{i3\theta\rho}, \\ (d_{ij}) = (a_{i3j3})^{-1}. \end{cases}$$

En remplaçant $N_{\tau\eta}^{*\epsilon\delta}$ par sa valeur dans (AI.25), il vient :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_{\eta}} (b_{\tau\eta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho} (\Phi^{*\epsilon\delta})) = 0 & \text{sur } \omega_{\epsilon\delta} \times (0, T) \\ \Phi_{\alpha}^{*\epsilon\delta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ b_{\tau\eta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho} (\Phi^{*\epsilon\delta}) n_{\eta} = 0 & \text{sur } \partial t_{\epsilon\delta} \times (0, T), \end{cases}$$

d'où

$$(AI.29) \quad \Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T).$$

D'autre part, en remplaçant $M_{r\eta}^{*\varepsilon\delta}$ par sa valeur dans (AI.21), on a aussi :

$$(AI.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} + \frac{1}{12} b_{r\eta\theta\rho} \frac{\partial^4 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \text{ sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \Phi_3^{*\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{1}{12} b_{r\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} n_\eta = 0 \quad \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \frac{\partial}{\partial z_\eta} \left(\frac{1}{12} b_{r\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial \rho} \right) n_r = 0 \quad \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \Phi_3^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, 0) = 0 \quad \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{0\} \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t}(z_1, z_2, 0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_3^{*\varepsilon\delta 1} dz_3 = \Lambda_3^{\varepsilon\delta 1} \quad \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{0\}, \end{array} \right.$$

où $\Phi_3^{*\varepsilon 1}$ est définie par

$$\varepsilon^2 \Phi_3^{\varepsilon\delta 1} \rightharpoonup \Phi_3^{*\varepsilon\delta 1} \quad \text{dans } L^2(\omega_{\varepsilon\delta}) \text{ faible.}$$

La matrice $(b_{r\eta\theta\rho})$ étant définie positive, il y a bien existence et unicité de la solution $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ telle que $\Phi_3^{*\varepsilon\delta} \in L^\infty(0, T, \mathcal{V}(\omega_{\varepsilon\delta}))$ et $\frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\omega_{\varepsilon\delta}))$,

où

$$\mathcal{V}(\omega_{\varepsilon\delta}) = \{v \in H^2(\omega_{\varepsilon\delta}), v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega\}.$$

DEPENDANCE RELATIVE A LA PERIODE.

(Le parametre ε tend vers zero.)

AII. DEPENDANCE RELATIVE A LA PERIODE.

Pour δ fixé, nous faisons tendre ε vers zéro.

Nous prouvons le résultat suivant :

AII.1. THEOREME 2.

D'après Duvaut [10], il existe un opérateur de prolongement Q_ε tel que

$$Q_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^k(\omega_{\varepsilon\delta}), H^k(\omega)) \text{ pour } k = 1, 2.$$

Pour $v \in L^2(0, T, H^1(\omega_{\varepsilon\delta}))$, on définit comme dans Brizzi - Chalot [2] $P_\varepsilon v$ par

$$(P_\varepsilon v)(t, x) = [Q_\varepsilon v(t, \cdot)](x).$$

Alors, on a

$$P^\varepsilon \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \rightharpoonup \Phi_3^{*\delta} \text{ faiblement dans } L^\infty(0, T, H_0^2(\omega)),$$

où, si l'on suppose que

$$P^\varepsilon \Lambda_3^{\varepsilon\delta 1} \rightharpoonup \Lambda_3^{\delta 1} \text{ dans } L^2(\omega) \text{ fort,}$$

$\Phi_3^{*\delta}$ satisfait le système homogénéisé

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|Y_\delta^*|}{|Y|} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\delta}}{\partial t^2} + q_{\tau\eta\theta\rho}^\delta \frac{\partial^4 \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} = \frac{|Y_\delta^*|}{|Y|} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) \text{ sur } \omega \times (0, T) \\ \Phi_3^{*\delta}(z_1, z_2, 0) = 0 \text{ sur } \omega \times \{0\} \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial t}(z_1, z_2, 0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_3^{*\delta 1} dz_3 = \Lambda_3^{\delta 1} \text{ sur } \omega \times \{0\} \\ \Phi_3^{*\delta} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times (0, T). \end{array} \right.$$

Ce système admet une solution unique $\Phi_3^{*\delta} \in L^\infty(0, T, H_0^2(\omega))$ et $\frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\omega))$.

Les coefficients homogénéisés sont donnés par :

$$q_{\alpha\beta\theta\rho}^\delta = \frac{1}{12} \left(\frac{|Y_\delta^*|}{|Y|} b_{\alpha\beta\theta\rho} - \frac{1}{|Y|} \int_{Y_\delta^*} b_{\alpha\beta\tau\eta} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\eta} dy_1 dy_2 \right)$$

où la fonction $\chi_\delta^{\alpha\beta}$ est solution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12} \int_{Y_\delta^*} b_{\tau\nu\theta\rho} \frac{\partial^2 (\chi_\delta^{\alpha\beta} - n^{\alpha\beta})}{\partial y_\theta \partial y_\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 = 0 \text{ sur } Y_\delta^* \\ \chi_\delta^{\alpha\beta} \text{ } Y \text{ - périodique,} \end{array} \right.$$

avec

$$\pi^{\tau\eta} = \frac{1}{2}y_\tau y_\eta.$$

AII.2. COROLLAIRE

On a

$P^\varepsilon \phi^{*\varepsilon\delta} \rightharpoonup \phi^{*\delta}$ dans $L^\infty(0, T, (H_0^1(\omega))^2) \times L^\infty(0, T, H_0^2(\omega))$ faible *,

où

$$\begin{cases} \phi_3^{\delta*} = \Phi_3^{\delta*}(z_1, z_2, t) \\ \phi_\alpha^{\delta*} = -z_3 \frac{\partial \Phi_3^{\delta*}}{\partial z_\alpha}(z_1, z_2, t). \end{cases}$$

AII.3.PREUVE DU THEOREME 2

AII.3.1 ESTIMATION A PRIORI SUR $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ ET RESULTATS DE CONVERGENCE.

Donnons des estimations a priori sur $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$.

Multiplions le système (I.30) par $\frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t}$,

Il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} dz_1 dz_2 + \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \left(\frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) dz_1 dz_2 = \\ & = \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} dz_1 dz_2 + \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} dz_1 dz_2. \end{aligned}$$

Soit E (resp.F) le premier membre (resp.le second membre) de cette égalité.

On a :

$$\begin{aligned} E &= \left\langle \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2}, \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{12} \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right) dz_1 dz_2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \frac{1}{24} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} dz_1 dz_2. \end{aligned}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} (AII.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right) &= b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \right) \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \\ &+ b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right). \end{aligned}$$

Le second terme du second membre vaut

$$b_{\theta\rho\alpha\beta} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right).$$

Alors, ce second membre vaut

$$b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \right),$$

de sorte que le premier terme de (AII.1) est égal à

$$2b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \right) \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}.$$

En intégrant en t, et d'après la coercivité des $b_{\alpha\beta\theta\rho}$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^t E d\tau \\
& \geq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 - \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 + c \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right)^2 dz_1 dz_2 d\tau \\
(AII.2) \quad & \geq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 - \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 + c \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau \\
& \geq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 - \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 + c \left\| \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \\
& - c \left\| \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}(0) \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 \\
& \geq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 + c \|\Phi_3^{*\varepsilon\delta}\|_{V(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 - c_1,
\end{aligned}$$

et

$$\int_0^t F d\tau = \int_0^t \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^t \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} dz_1 dz_2 d\tau.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} dz d\tau \\
& \leq \int_0^t \left\| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})} d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau \\
& \leq C \left\| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_{\varepsilon\delta}))}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} dz d\tau \\
& \leq \int_0^t \|g_3^{*+} + g_3^{*-}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})} d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|g_3^{*+} + g_3^{*-}\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau \\
& \leq C \|g_3^{*+} + g_3^{*-}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_{\varepsilon\delta}))}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^t F d\tau \\ & \leq C_1 \left(\left\| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_{\varepsilon\delta}))}^2 + \|g_3^{*+} + g_3^{*-}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \right) + \\ & + \int_0^t \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau, \end{aligned}$$

donc

$$(AII.3) \quad \int_0^t F d\tau \leq K + \int_0^t \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau.$$

D'après (AII.2) et (AII.3) on a :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} (t) \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 + c \left\| \Phi_3^{*\varepsilon\delta} (t) \right\|_{\mathcal{V}(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \\ & \leq K + \int_0^t \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} (t) \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau, \end{aligned}$$

soit

$$\left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} (t) \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 \leq K' + K'' \int_0^t \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} (t) \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau.$$

D'après le lemme de Gronwall on a

$$\left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} (t) \right\|_{L^2(\omega_{\varepsilon\delta})}^2 \leq K' e^{K'' T}.$$

On obtient donc

$$(AII.4) \quad \left\| \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C,$$

soit

$$(AII.5) \quad \left\| \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \right\|_{L^\infty(0,T,\mathcal{V}(\omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C.$$

D'après Duvaut [10], il existe un opérateur de prolongement Q_ε tel que

$$Q_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^k(\omega_{\varepsilon\delta}), H^k(\omega_{\varepsilon\delta})) \text{ pour } k = 1, 2.$$

Pour $v \in L^2(0, T, H^k(\omega_{\varepsilon\delta}))$, on définit comme dans Brizzi-Chalot [2] $P_\varepsilon v$ par

$$(P_\varepsilon v)(t, x) = [Q_\varepsilon v(t, \cdot)](x).$$

Il vient

$$P^\varepsilon \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \rightharpoonup \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty(0, T, H_0^2(\omega)) \text{ faible } *.$$

AII.3.2 CARACTERISATION DE $\Phi_3^{*\delta}$.

Nous allons utiliser la méthode de l'énergie de Tartar.

Posons

$$(AII.6) \quad \xi_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta} = \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho},$$

et

$$\tilde{\xi}_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta} = \begin{cases} \xi_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta} & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \end{cases}$$

Multiplions par $v \in L^2(0, T, H^2(\omega_{\varepsilon\delta}))$ le système (AI.30). Compte-tenu de la notation (AII.6), on obtient

$$(AII.7) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} v dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \xi_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} dz_1 dz_2 d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) v dz_1 dz_2 d\tau, \end{aligned}$$

soit, après prolongement :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega} P^\varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \right) \chi_{\omega_{\varepsilon\delta}} v dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\xi}_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} dz_1 dz_2 d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) v \chi_{\omega_{\varepsilon\delta}} dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

Puisqu'on a

$$\|\tilde{\xi}_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta}\|_{L^\infty(0, T, L^2(\omega))} \leq C,$$

Il vient, quand ε tend vers zéro :

$$(AII.8) \quad \begin{aligned} & \frac{|Y_\delta^*|}{|Y|} \int_0^T \int_{\omega} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\delta}}{\partial t^2} v dz_1 dz_2 d\tau + \frac{1}{12} \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\alpha\beta}^{*\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} dz_1 dz_2 d\tau = \\ & = \frac{|Y_\delta^*|}{|Y|} \int_0^T \int_{\omega} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) v dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant caractériser la limite $\xi_{\alpha\beta}^{*\delta}$. Pour cela, on introduit des fonctions $W_\delta^{\tau\eta} \in H^2(Y_\delta^*)$ solution de

$$(AII.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{Y_\delta^*} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial y_\theta \partial y_\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 = 0 \text{ sur } Y_\delta^* \\ W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} - \pi^{\tau\eta} \quad \quad \quad Y - \text{périodique,} \end{array} \right.$$

avec

$$\pi^{\tau\eta} = \frac{1}{2} y_\tau y_\eta.$$

Posons

$$W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}(x) = \varepsilon^2 W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Comme d'habitude, il existe un prolongement $P^\varepsilon W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}$ de $W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}$ qui converge faiblement dans $H_0^2(\omega)$.

Maintenant, on multiplie (AII.7) par $\varphi W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}$, et le système vérifié par $W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}$ par $\varphi \Phi_3^{*\varepsilon\delta}$, avec $\varphi \in \mathcal{D}([0, T[, \mathcal{D}(\omega))$, puis on soustrait les deux égalités obtenues.

Il vient

$$(AII.10) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \varphi W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \xi_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta} \frac{\partial^2 (\varphi W_\delta^{\varepsilon\tau\eta})}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} dz_1 dz_2 d\tau \\ & - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \eta_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta\tau\eta} \frac{\partial^2 (\varphi \Phi_3^{*\varepsilon\delta})}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} dz_1 dz_2 d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) \varphi W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} dz_1 dz_2, \end{aligned}$$

où

$$\eta_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta\tau\eta} = \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 (\varphi W_\delta^{\varepsilon\tau\eta})}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \\ & = \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \left[\varphi \frac{\partial^2 W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \frac{\partial W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_\beta} \frac{\partial W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\alpha} \right], \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 (\varphi \Phi_3^{*\varepsilon\delta})}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \\ & = \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \left[\varphi \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \Phi_3^{*\varepsilon\delta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_\beta} \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} \right]. \end{aligned}$$

La différence des premiers membres des deux égalités précédentes s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \frac{\partial W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} \right) + \\ & - \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \right). \end{aligned}$$

Et donc (AII.10) s'écrit

$$\begin{aligned} (AII.11) \quad & \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \varphi W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} dz_1 dz_2 d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \xi_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \frac{\partial W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} \right) dz_1 dz_2 d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \eta_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta\tau\eta} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \right) dz_1 dz_2 d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) \varphi W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

Faisons une première intégration par parties.

Il vient

$$\begin{aligned} & - \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} (0) \varphi(0) W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} dz_1 dz_2 - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} dz_1 dz_2 d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \xi_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \frac{\partial W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} \right) dz_1 dz_2 d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \eta_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta\tau\eta} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \right) dz_1 dz_2 d\tau \\ & = \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) \varphi W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

On a noté

$$\frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} (0) = \Lambda^{\varepsilon\delta 1}.$$

Après prolongement, on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_{\omega} P^\varepsilon \Lambda^{\varepsilon\delta 1} \varphi(0) \chi_{\omega_{\varepsilon\delta}} P^\varepsilon W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} dz_1 dz_2 - \int_0^T \int_{\omega} \frac{\partial P^\varepsilon \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} P^\varepsilon W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} \chi_{\omega_{\varepsilon\delta}} dz_1 dz_2 d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\xi}_{\alpha\beta}^{*\varepsilon\delta} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \frac{\partial P^\varepsilon W_\delta^{\varepsilon\tau\eta}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} P^\varepsilon W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} \right) dz_1 dz_2 d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\omega} \tilde{\eta}_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta\tau\eta} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} \frac{\partial P^\varepsilon \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} P^\varepsilon \Phi_3^{*\varepsilon\delta} \right) dz_1 dz_2 d\tau \\ & = \int_0^T \int_{\omega} \chi_{\omega} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) \varphi P^\varepsilon W_\delta^{\varepsilon\tau\eta} dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers zéro.

Il vient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} \Lambda^{\delta 1} \varphi(0) \frac{|Y_{\delta}^*|}{|Y|} \Pi^{\tau \eta} dz_1 dz_2 - \int_0^T \int_{\omega} \frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Pi^{\tau \eta} \frac{|Y_{\delta}^*|}{|Y|} dz_1 dz_2 d\tau + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\alpha\beta}^{*\delta} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\alpha}} \frac{\partial \Pi^{\tau \eta}}{\partial z_{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \Pi^{\tau \eta} \right) dz_1 dz_2 d\tau - \\
& - \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^{\delta \tau \eta}) \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\alpha}} \frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \Phi_3^{*\delta} \right) dz_1 dz_2 d\tau \\
& = \int_0^T \int_{\omega} \frac{|Y_{\delta}^*|}{|Y|} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) \varphi \Pi^{\tau \eta} dz_1 dz_2 d\tau.
\end{aligned}$$

Intégrons une seconde fois par parties.

Il vient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} \Lambda^{\delta 1} \varphi(0) \frac{|Y_{\delta}^*|}{|Y|} \Pi^{\tau \eta} dz + \int_{\omega} \frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial t} (0) \varphi(0) \Pi^{\tau \eta} \frac{|Y_{\delta}^*|}{|Y|} dz d\tau + \int_0^T \int_{\omega} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\delta}}{\partial t^2} \varphi \Pi^{\tau \eta} \frac{|Y_{\delta}^*|}{|Y|} dz d\tau + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\alpha\beta}^{*\delta} \frac{\partial^2 (\varphi \Pi^{\tau \eta})}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\alpha\beta}^{*\delta} \frac{\partial^2 \Pi^{\tau \eta}}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \varphi dz_1 dz_2 d\tau - \\
& - \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^{\delta \tau \eta}) \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\alpha}} \frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \Phi_3^{*\delta} \right) dz_1 dz_2 d\tau \\
& = \int_0^T \int_{\omega} \frac{|Y_{\delta}^*|}{|Y|} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) \varphi \Pi^{\tau \eta} dz_1 dz_2 d\tau.
\end{aligned}$$

En utilisant (AII.8), on obtient

$$- \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\alpha\beta}^{*\delta} \varphi \delta_{\tau\alpha} \delta_{\eta\beta} dz d\tau = \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^{\delta \tau \eta}) \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\alpha}} \frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_{\beta}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \Phi_3^{*\delta} \right) dz d\tau,$$

soit

$$- \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^{*\delta} \varphi dz d\tau = \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^{\delta \tau \eta}) \left(-2 \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \varphi + \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \varphi \right) dz d\tau,$$

soit encore

$$\int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^{*\delta} \varphi dz d\tau = \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^{\delta \tau \eta}) \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}} \varphi dz d\tau.$$

Par conséquent, on a

$$\xi_{\tau\eta}^{*\delta} = \mathfrak{M}(\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^{\delta \tau \eta}) \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}},$$

et

$$\frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial t} (0) = \Lambda^{\delta 1}.$$

Posons

$$q_{\tau\eta\alpha\beta}^{\delta} = \mathfrak{M}(\tilde{\eta}_{\alpha\beta}^{\delta \tau \eta}).$$

On a

$$\xi_{\tau\eta}^{*\delta} = q_{\tau\eta\alpha\beta}^{\delta} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_{\alpha} \partial z_{\beta}}.$$

On obtient finalement le système homogénéisé suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|Y_{\delta}^*|}{|Y|} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\delta}}{\partial t^2} + q_{\tau\eta\theta\rho}^{\delta} \frac{\partial^4 \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta} \partial z_{\theta} \partial z_{\rho}} = \frac{|Y_{\delta}^*|}{|Y|} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) \text{ sur } \omega \times (0, T) \\ \Phi_3^{*\delta}(z_1, z_2, 0) = 0 \quad \text{sur } \omega \times \{0\} \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial t}(z_1, z_2, 0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Phi_3^{*\delta 1} dz_3 = \Lambda_3^{\delta 1} \quad \text{sur } \omega \times \{0\} \\ \Phi_3^{*\delta} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \times (0, T), \end{array} \right.$$

où $\Lambda_3^{\delta 1}$ est défini par :

$$P^{\varepsilon} \Lambda_3^{\varepsilon \delta 1} \rightarrow \Lambda_3^{\delta 1} \quad \text{dans } L^2(\omega) \text{ fort.}$$

La matrice $(q_{\tau\eta\theta\rho}^{\delta})$ étant définie positive, ce système admet une solution unique telle que

$$\Phi_3^{*\delta} \in L^{\infty}(0, T, H_0^2(\omega)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi_3^{*\delta}}{\partial t} \in L^{\infty}(0, T, L^2(\omega)).$$

Explicitons les coefficients homogénéisés :

On a

$$\begin{aligned} 12q_{\alpha\beta\theta\rho}^{\delta} &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y_{\delta}^*} b_{\alpha\beta\tau\eta} \frac{\partial^2 W_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_{\tau} \partial y_{\eta}} dy_1 dy_2 \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y_{\delta}^*} b_{\alpha\beta\tau\eta} \frac{\partial^2 (\pi^{\theta\rho} - \chi_{\delta}^{\theta\rho})}{\partial y_{\tau} \partial y_{\eta}} dy_1 dy_2 \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_{Y_{\delta}^*} \left(b_{\alpha\beta\tau\eta} \frac{\partial^2 \pi^{\theta\rho}}{\partial y_{\tau} \partial y_{\eta}} - b_{\alpha\beta\tau\eta} \frac{\partial^2 \chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_{\tau} \partial y_{\eta}} \right) dy_1 dy_2 \\ &= b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{|Y_{\delta}^*|}{|Y|} - \frac{1}{|Y|} \int_{Y_{\delta}^*} b_{\alpha\beta\tau\eta} \frac{\partial^2 \chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_{\tau} \partial y_{\eta}} dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

DEPENDANCE RELATIVE A DELTA.

(Le parametre δ tend vers zero.)

III. DEPENDANCE RELATIVE A DELTA

Pour des raisons de simplicité, nous considérons ici le cas particulier où les constantes d'élasticité sont des coefficients de Lamé. Prenons donc

$$\begin{cases} a_{1111} = a_{2222} = a_{3333} = \lambda + 2\mu \\ a_{1122} = a_{1133} = a_{2233} = \lambda \\ a_{1212} = a_{1313} = a_{2323} = \mu. \end{cases}$$

Les coefficients a_{ijkl} qui ne peuvent être obtenus d'après les égalités précédentes par les propriétés de symétrie usuelles en élasticité sont nuls.

Le module de Young est donné par :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}.$$

Comme les a_{ijkl} sont des constantes de Lamé, les $b_{\alpha\beta\theta\rho}$ sont également des constantes de Lamé, et un calcul simple donne leurs expressions :

$$\begin{cases} b_{1111} = b_{2222} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} = \lambda' + 2\mu' \\ b_{1212} = b_{2112} = b_{2121} = b_{1221} = \mu = \mu' \\ b_{1122} = b_{2211} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \lambda'. \\ \text{tous les autres sont nuls.} \end{cases}$$

AIII.1. THEOREME 3

Avec les coefficients de Lamé précédemment rappelés, on obtient, en faisant tendre δ vers zéro :

$$\delta^{-1} q_{\alpha\beta\theta\rho}^{\delta} \rightarrow q_{\alpha\beta\theta\rho}^*,$$

avec

$$\begin{cases} q_{1111}^* = q_{2222}^* = \frac{\sqrt{3}\mu(13\lambda + 10\mu)}{48(\lambda + \mu)} \\ q_{1212}^* = q_{2112}^* = q_{2121}^* = q_{1221}^* = \frac{\sqrt{3}\mu(7\lambda + 6\mu)}{48(\lambda + \mu)} \\ q_{1122}^* = q_{2211}^* = -\frac{\sqrt{3}\mu(\lambda + 2\mu)}{48(\lambda + \mu)} \\ \text{tous les autres sont nuls.} \end{cases}$$

COROLLAIRE

Soit $\Phi_3^{*\delta}$ satisfaisant l'équation homogénéisée du théorème 2.

Alors, on a

$$\Phi_3^{*\delta} \rightharpoonup \Phi_3^* \text{ dans } L^\infty(0, T, H_0^2(\omega)) \text{ faible } * \text{ lorsque } \delta \text{ tend vers zéro,}$$

où Φ_3^* est solution de

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \Phi_3^*}{\partial t^2} + q_{r\eta\theta\rho}^* \frac{\partial^4 \Phi_3^*}{\partial z_r \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} = 2\sqrt{3} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right) & \text{sur } \omega \times (0, T) \\ \Phi_3^*(z_1, z_2, 0) = 0 & \text{sur } \omega \times \{0\} \\ \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial t}(z_1, z_2, 0) = \Lambda_3^1 & \text{sur } \omega \times \{0\} \\ \Phi_3^* = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi_3^*}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \end{cases}$$

la fonction Λ_3^1 étant définie par :

$$\Lambda_3^{\delta 1} \rightharpoonup \Lambda_3^1 \text{ dans } L^2(\omega) \text{ faible.}$$

COMMENTAIRE

Soient

$$\begin{cases} \mu' = q_{1212}^* = q_{2112}^* = q_{2121}^* = q_{1221}^* = \frac{\sqrt{3}\mu(7\lambda + 6\mu)}{48(\lambda + \mu)} \\ \lambda' = q_{1122}^* = q_{2211}^* = -\frac{\sqrt{3}\mu(\lambda + 2\mu)}{48(\lambda + \mu)}. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que

$$\lambda' + 2\mu' = q_{1111}^* = q_{2222}^* = \frac{\sqrt{3}\mu(13\lambda + 10\mu)}{48(\lambda + \mu)}.$$

Soit ν' le coefficient de Poisson.

On a

$$\nu' = \frac{\lambda'}{2(\lambda' + \mu')}.$$

En remplaçant λ' et μ' par les valeurs précédentes, on obtient

$$\nu' = -\frac{\lambda + 2\mu}{48(2\mu + 3\lambda)}.$$

On constate que ν' est strictement négatif.

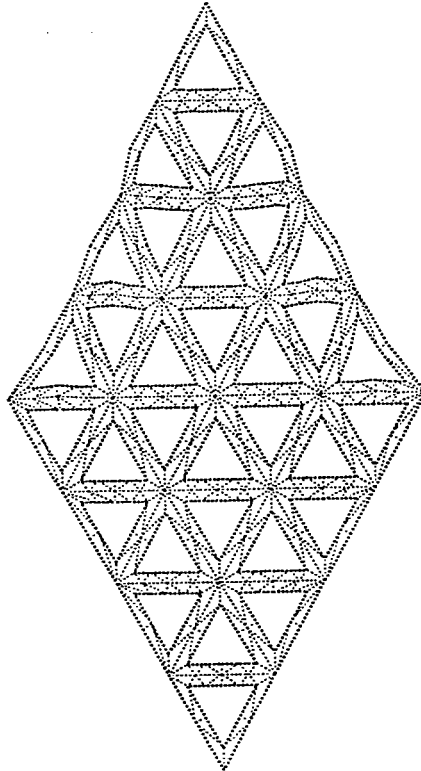
$$-\frac{1}{2} < \nu' < \frac{1}{2}$$

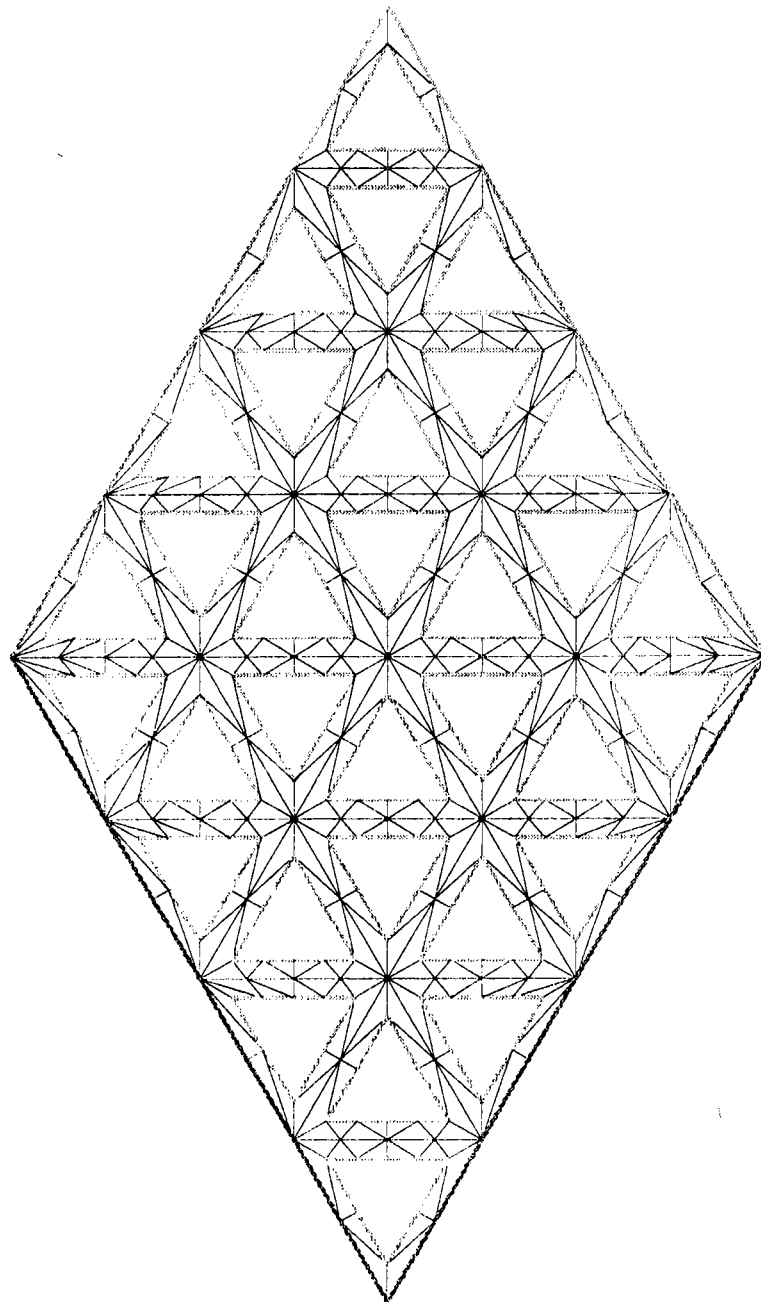
Le coefficient de Poisson est une grandeur théoriquement comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Si l'on fait subir à un matériau une traction dans une direction, un coefficient de Poisson positif caractérise la diminution des dimensions de ce matériau dans les autres directions, alors qu'un coefficient de Poisson négatif caractérise l'augmentation de ses dimensions dans les autres directions. Naturellement, le premier cas est celui que l'on rencontre presque toujours dans la pratique.

Ici, nous donnons un exemple de matériau limite dont le coefficient de Poisson est négatif.

Sur la figure ci-dessous, on soumet un matériau bidimensionnel présentant la géométrie étudiée à une traction verticale vers le haut, et appliquée de manière linéique sur la pointe représentée en rouge. Les deux bords verticaux (en violet) du bas sont encastrés. Les bords restant (en vert) sont libres.

Il est intéressant de constater la tendance du matériau réel à présenter des déformations vers l'extérieur, que nous le montre la figure suivante représentant les déformations.





43

MODULEF : jmse

PLAQUE

27/04/94

PLAQUE.NOPO

369 POINTS

369 NOEUDS

512 ELEMENTS

512 TRIANGLES

32 TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

-19.44 -19.05

COIN HAUT DROIT :

19.44 19.05

AIII.2 DEMONSTRATION DU THEOREME 3

AIII.2.1. ESTIMATIONS A PRIORI.

On étudie donc l'équation

$$\frac{|Y_\delta^*|}{|Y|} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} (q_{\alpha\beta\tau\nu}^\delta \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\delta}}{\partial z_\tau \partial z_\nu}) = \frac{|Y_\delta^*|}{|Y|} \left(\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3 dz_3 \right) + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) \right).$$

Puisque

$$12|Y|q_{\alpha\beta\theta\rho}^\delta = b_{\alpha\beta\theta\rho} |Y_\delta^*| - \int_{Y_\delta^*} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2,$$

il faut étudier les limites des $\chi_\delta^{\theta\rho}$.

Les fonctions $\chi_\delta^{\tau\nu}$ sont définies par le système

$$(AIII.1) \quad \begin{cases} \int_{Y_\delta^*} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 (\chi_\delta^{\tau\nu} - \pi^{\tau\nu})}{\partial y_\theta \partial y_\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 = 0, \\ \chi_\delta^{\tau\nu} \text{ est } Y\text{-périodique,} \\ \pi^{\tau\nu} = \frac{1}{2} y_\tau y_\nu \end{cases}$$

pour toute fonction v dans $H^2(Y_\delta^*)$, périodique dans Y .

Utilisons $\chi_\delta^{\tau\nu}$ comme fonction test dans ce système.

Il vient

$$\int_{Y_\delta^*} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 (\chi_\delta^{\tau\nu} - \pi^{\tau\nu})}{\partial y_\theta \partial y_\rho} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 = 0,$$

ou

$$\int_{Y_\delta^*} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \pi^{\tau\nu}}{\partial y_\theta \partial y_\rho} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 = \int_{Y_\delta^*} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_\theta \partial y_\rho} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2,$$

ou encore

$$\int_{Y_\delta^*} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_\theta \partial y_\rho} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 = \int_{Y_\delta^*} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2.$$

Appelons A le premier membre de cette égalité, et B son second membre.

D'après l'ellipticité des $b_{\alpha\beta\theta\rho}$, on a

$$A \geq \alpha \int_{Y_\delta^*} \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right)^2 dy_1 dy_2.$$

D'après l'inégalité de Hölder, on a de même

$$B \leq C \left(\int_{Y_\delta^*} (b_{\alpha\beta\tau\nu})^2 dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Y_\delta^*} \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right)^2 dy_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

d'où, après simplification, l'estimation a priori suivante

$\forall \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 2$, on a

$$\left| \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial^{\lambda_1} y_1 \partial^{\lambda_2} y_2} \right|_{L^2(Y_\delta^*)} \leq C |Y_\delta^*|^{\frac{1}{2}}.$$

Or, on a

$$|Y_\delta^*| = 3\delta(2 - \sqrt{3}\delta) + \delta^2 O(1),$$

de sorte que

$$(AIII.2) \quad \left| \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial^{\lambda_1} y_1 \partial^{\lambda_2} y_2} \right|_{L^2(Y_\delta^*)}^2 \leq C\delta.$$

En conséquence, on a

$$\delta^{-1} q_{\alpha\beta\theta\rho}^\delta \rightarrow q_{\alpha\beta\theta\rho}^*.$$

Décomposons maintenant Y_δ^* .

On peut écrire

$$Y_\delta^* = H_\delta^- \cup H_\delta^0 \cup H_\delta^+ \cup \theta_\delta^1 \cup \theta_\delta^2 \cup N_\delta \cup R_\delta.$$

Les barres horizontales H_δ^- , H_δ^+ , et H_δ^0 sont clairement représentées sur la figure 2, ainsi que les barres obliques θ_δ^1 et θ_δ^2 .

R_δ désigne les parties du domaine recouvertes plusieurs fois.

il comprend

.six triangles équilatéraux, d'aire $\frac{\delta^2}{4\sqrt{3}}$, recouverts deux fois par θ_δ^1 et θ_δ^2 .

.un hexagone central, tracé en pointillés, et recouvert trois fois, par θ_δ^1 , θ_δ^2 et H_δ^0 .

Son aire vaut $6 \frac{\delta^2}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \delta^2$. N_δ désigne les parties restantes (encore non recouvertes) du domaine. Il comprend quatre triangles rectangles placés à l'extrémité des diagonales θ_δ^1 et θ_δ^2 , et d'aires $\delta^2 \frac{\sqrt{3}}{8}$.

Autrement dit, on a mes $R_\delta \leq C\delta^2$ et mes $N_\delta \leq C\delta^2$, de sorte que les intégrales sur R_δ et N_δ sont du type $\delta\theta(1)$.

On écrit donc

$$(AIII.3) \quad \sqrt{3}\delta^{-1} q_{\alpha\beta\theta\rho}^\delta = 3(2 - \sqrt{3}\delta) b_{\alpha\beta\theta\rho} - \delta^{-1} \left(\int_{H_\delta^-} + \int_{H_\delta^0} + \int_{H_\delta^+} + \int_{\theta_\delta^1} + \int_{\theta_\delta^2} + \int_{N_\delta} - C \int_{R_\delta} \right) b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2.$$

Les deux dernières intégrales disparaîtront lors du passage à la limite en δ . Nous allons maintenant voir ce qu'il advient des cinq autres intégrales par le même passage à la limite.

AIII.2.2.DILATATION DES BARRES.

Rappelons que $Y = [0, 1] \times [0, \sqrt{3}]$.

Barre H_δ^- :

Introduisons le changement de variable

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \frac{y_2}{\frac{\delta}{2\sqrt{3}}} \end{cases}$$

et définissons la fonction ϕ_{H^-} par

$$\begin{aligned} \phi(y_1, y_2) &= \phi_{H^-}(y_1, \frac{2\sqrt{3}}{\delta}y_2) \\ &= \phi_{H^-}(z_1, z_2). \end{aligned}$$

Or, d'après (AIII.2), on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_1^{\lambda_1} \partial y_2^{\lambda_2}} \right|_{L^2(H_\delta^-)} &\leq \left| \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_1^{\lambda_1} \partial y_2^{\lambda_2}} \right|_{L^2(Y_\delta^*)} \\ &\leq C\delta, \end{aligned}$$

donc

$$\int_{H_\delta^-} \left(\frac{\partial^2 \chi_\delta^{\tau\nu}}{\partial y_1^2} \right)^2 dy_1 dy_2 \leq C\delta,$$

ou

$$\int_Y \left(\frac{\partial^2 \chi_{\delta H^-}^{\tau\nu}}{\partial z_1^2} \right)^2 \frac{\delta}{2\sqrt{3}} dz_1 dz_2 \leq C\delta,$$

d'où

$$\frac{\partial^2 \chi_{\delta H^-}^{\tau\nu}}{\partial z_1^2} \rightharpoonup 2\sqrt{3}h_{11}^{\tau\nu-} \text{ dans } L^2(Y) \text{ faible.}$$

De même, on a

$$\left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}} \right)^{-1} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^-}^{\tau\nu}}{\partial z_1 \partial z_2} \rightharpoonup 2\sqrt{3}h_{12}^{\tau\nu-} \text{ dans } L^2(Y) \text{ faible,}$$

et

$$\left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-2} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^-}^{\tau\nu}}{\partial z_2^2} \rightarrow 2\sqrt{3} h_{22}^{\tau\nu-} \text{ dans } L^2(Y) \text{ faible ,}$$

la constante $2\sqrt{3}$ n'étant destinée qu'à simplifier l'écriture des résultats .

On a

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^-} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\ &= \\ & \delta^{-1} \int_{H_\delta^-} \left(b_{\alpha\beta 11} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1^2} + 2b_{\alpha\beta 12} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1 \partial y_2} + b_{\alpha\beta 22} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_2^2} \right) dy_1 dy_2, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^-} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\ &= \\ & \delta^{-1} \int_Y \left(b_{\alpha\beta 11} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^-}^{\theta\rho}}{\partial z_1^2} + 2b_{\alpha\beta 12} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^-}^{\theta\rho}}{\partial z_1 \partial z_2} + b_{\alpha\beta 22} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-2} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^-}^{\theta\rho}}{\partial z_2^2} \right) \frac{\delta}{2\sqrt{3}} dz_1 dz_2, \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^-} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\ &= \\ & \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_Y \left(b_{\alpha\beta 11} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^-}^{\theta\rho}}{\partial z_1^2} + 2b_{\alpha\beta 12} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^-}^{\theta\rho}}{\partial z_1 \partial z_2} + b_{\alpha\beta 22} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-2} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^-}^{\theta\rho}}{\partial z_2^2} \right) dz_1 dz_2, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^-} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\ & \rightarrow \\ & \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_Y \left(b_{\alpha\beta 11} 2\sqrt{3} h_{11}^{\theta\rho-}(z) + 2b_{\alpha\beta 12} 2\sqrt{3} h_{12}^{\theta\rho-}(z) + b_{\alpha\beta 22} 2\sqrt{3} h_{22}^{\theta\rho-}(z) \right) dz_1 dz_2 \\ &= \int_Y b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho-}(y) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

barre H_δ^0 .

Introduisons le changement de variables

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \frac{y_2}{\left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right)} - \frac{3}{2\delta} + \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

On l'utilise pour écrire

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^0} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\ &= \\ & \delta^{-1} \int_Y \left(b_{\alpha\beta 11} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^0}^{\theta\rho}}{\partial z_1^2} + 2b_{\alpha\beta 12} \left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^0}^{\theta\rho}}{\partial z_1 \partial z_2} + b_{\alpha\beta 22} \left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right)^{-2} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^0}^{\theta\rho}}{\partial z_2^2} \right) \frac{\delta}{\sqrt{3}} dz_1 dz_2, \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^0} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\ &= \\ & \frac{1}{\sqrt{3}} \delta^{-1} \int_Y \left(b_{\alpha\beta 11} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^0}^{\theta\rho}}{\partial z_1^2} + 2b_{\alpha\beta 12} \left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^0}^{\theta\rho}}{\partial z_1 \partial z_2} + b_{\alpha\beta 22} \left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right)^{-2} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^0}^{\theta\rho}}{\partial z_2^2} \right) dz_1 dz_2. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on a d'après les estimations a priori (AIII.2) :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^0}^{\tau\nu}}{\partial z_1^2} \rightharpoonup \sqrt{3} h_{11}^{\tau\nu 0} \text{ dans } L^2(Y) \text{ faible}, \\ & \left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^0}^{\tau\nu}}{\partial z_1 \partial z_2} \rightharpoonup \sqrt{3} h_{12}^{\tau\nu 0} \text{ dans } L^2(Y) \text{ faible}, \\ & \left(\frac{\delta}{\sqrt{3}}\right)^{-2} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^0}^{\tau\nu}}{\partial z_2^2} \rightharpoonup \sqrt{3} h_{22}^{\tau\nu 0} \text{ dans } L^2(Y) \text{ faible}, \end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^0} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\ & \rightarrow \\ & \frac{1}{\sqrt{3}} \int_Y (b_{\alpha\beta 11} \sqrt{3} h_{11}^{\theta\rho 0}(z) + 2b_{\alpha\beta 12} \sqrt{3} h_{12}^{\theta\rho 0}(z) + b_{\alpha\beta 22} \sqrt{3} h_{22}^{\theta\rho 0}(z)) dz_1 dz_2 \\ &= \int_Y b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0}(y) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Barre H_δ^+ :

Introduisons le changement de variables

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \frac{y_2}{\left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)} - \frac{6}{\delta} + \sqrt{3}. \end{cases}$$

On l'utilise pour écrire

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^+} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\ &= \\ & \delta^{-1} \int_Y \left(b_{\alpha\beta 11} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^+}^{\theta\rho}}{\partial z_1^2} + 2b_{\alpha\beta 12} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^+}^{\theta\rho}}{\partial z_1 \partial z_2} + b_{\alpha\beta 22} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-2} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^+}^{\theta\rho}}{\partial z_2^2} \right) \frac{\delta}{2\sqrt{3}} dz_1 dz_2, \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^+} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\ &= \\ & \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_Y \left(b_{\alpha\beta 11} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^+}^{\theta\rho}}{\partial z_1^2} + 2b_{\alpha\beta 12} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^+}^{\theta\rho}}{\partial z_1 \partial z_2} + b_{\alpha\beta 22} \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-2} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^+}^{\theta\rho}}{\partial z_2^2} \right) dz_1 dz_2. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on a d'après (AIII.2)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^+}^{\tau\nu}}{\partial z_1^2} \rightarrow 2\sqrt{3}h_{11}^{\tau\nu+} \text{ dans } L^2(Y) \text{ faible,} \\ & \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-1} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^+}^{\tau\nu}}{\partial z_1 \partial z_2} \rightarrow 2\sqrt{3}h_{12}^{\tau\nu+} \text{ dans } L^2(Y) \text{ faible,} \\ & \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}}\right)^{-2} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H^+}^{\tau\nu}}{\partial z_2^2} \rightarrow 2\sqrt{3}h_{22}^{\tau\nu+} \text{ dans } L^2(Y) \text{ faible,} \end{aligned}$$

donc on a

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^+} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dz_1 dz_2 \\ & \rightarrow \\ & \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_Y (b_{\alpha\beta 11} 2\sqrt{3}h_{11}^{\theta\rho+}(z) + 2b_{\alpha\beta 12} 2\sqrt{3}h_{12}^{\theta\rho+}(z) + b_{\alpha\beta 22} 2\sqrt{3}h_{22}^{\theta\rho+}(z)) dz_1 dz_2 \\ &= \int_Y b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho+}(y) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Barre θ_δ^2 :

Posons $Y_0 = [0, 2] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Introduisons le changement de variables

$$\begin{cases} s_1 = \frac{y_1 + \sqrt{3}y_2}{2}, \\ s_2 = \frac{-\sqrt{3}y_1 + y_2}{2}, \end{cases}$$

qui correspond à une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$,

puis le changement de variables

$$\begin{cases} t_1 = \frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}}s_1, \\ t_2 = \frac{s_2}{\delta}, \end{cases}$$

correspondant à une dilatation suivant les deux axes .

On a

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\ &= \\ & \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} \left(b_{\alpha\beta 11} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1^2} + 2b_{\alpha\beta 12} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1 \partial y_2} + b_{\alpha\beta 22} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_2^2} \right) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(s_1, s_2) = \phi(y_1, y_2), \\ \tilde{\phi}_{\theta_\delta^2}(t_1, t_2) = \tilde{\phi}(s_1, s_2). \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
& \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\
& = \\
& \frac{1}{4\tau_0} \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} \left(b_{\alpha\beta 11} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} - 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + 3 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) + \right. \\
& \quad + 2b_{\alpha\beta 12} \left(\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} - \sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) + \\
& \quad \left. + b_{\alpha\beta 22} \left(3 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} + 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) \right) ds_1 ds_2 \\
& = \\
& \frac{1}{4} \delta^{-1} \int_{Y_0} \left[b_{\alpha\beta 11} \left(\left(\frac{2}{2-\delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} - \frac{4\sqrt{3}}{\delta(2-\delta\sqrt{3})} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{3}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \right) \right. \\
& \quad + 2b_{\alpha\beta 12} \left(\sqrt{3} \left(\frac{2}{2-\delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} - \frac{4}{\delta(2-\delta\sqrt{3})} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\sqrt{3}}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \right) + \\
& \quad \left. + b_{\alpha\beta 22} \left(3 \left(\frac{2}{2-\delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} + \frac{4\sqrt{3}}{\delta(2-\delta\sqrt{3})} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \right) \right] \left(\frac{2-\delta\sqrt{3}}{2} \right) \delta dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a d'après (AIII.2) :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2}{2-\delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} \rightarrow \theta_{11}^{2\theta\rho} \text{ dans } L^2(Y_0) \text{ faible,} \\
& \frac{2}{2-\delta\sqrt{3}} \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} \rightarrow \theta_{12}^{2\theta\rho} \text{ dans } L^2(Y_0) \text{ faible,} \\
& \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_\delta^2}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \rightarrow \theta_{22}^{2\theta\rho} \text{ dans } L^2(Y_0) \text{ faible,}
\end{aligned}$$

En conséquence, en faisant tendre δ vers zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
& \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\
& \quad \rightarrow \\
& \frac{1}{4} \int_{Y_0} \left[b_{\alpha\beta 11} (\theta_{11}^{2\theta\rho} - 2\sqrt{3}\theta_{12}^{2\theta\rho} + 3\theta_{22}^{2\theta\rho}) + \right. \\
& \quad \quad + b_{\alpha\beta 12} (2\sqrt{3}\theta_{11}^{2\theta\rho} - 4\theta_{12}^{2\theta\rho} - 2\sqrt{3}\theta_{22}^{2\theta\rho}) + \\
& \quad \quad \left. + b_{\alpha\beta 22} (3\theta_{11}^{2\theta\rho} + 2\sqrt{3}\theta_{12}^{2\theta\rho} + \theta_{22}^{2\theta\rho}) \right] dy_1 dy_2 \\
& \quad = \\
& \frac{1}{4} \int_{Y_0} \left((b_{\alpha\beta 11} + 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 12} + 3b_{\alpha\beta 22})\theta_{11}^{2\theta\rho} + (-2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 11} - 4b_{\alpha\beta 12} + 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 22})\theta_{12}^{2\theta\rho} + \right. \\
& \quad \quad \left. + (3b_{\alpha\beta 11} - 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 12} + b_{\alpha\beta 22})\theta_{22}^{2\theta\rho} \right) dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Barre θ_δ^1 :

Introduisons le changement de variables

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-y_1 + \sqrt{3}y_2 + 1}{2} \\ s_2 = \frac{-\sqrt{3}y_1 - y_2 + \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

qui correspond à une translation de vecteur $-\vec{i}$ suivie d'une rotation d'angle $\frac{-2\pi}{3}$, puis le changement de variables

$$\begin{cases} t_1 = \frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} s_1 \\ t_2 = \frac{s_2}{\delta}, \end{cases}$$

correspondant à une dilatation suivant les deux axes.

On a

$$\begin{aligned}
& \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^1} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\
& \quad = \\
& \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^1} \left(b_{\alpha\beta 11} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1^2} + 2b_{\alpha\beta 12} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1 \partial y_2} + b_{\alpha\beta 22} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_2^2} \right) dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}
& \delta^{-1} \int_{\theta_6^1} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\
& = \\
& \frac{1}{4} \delta^{-1} \int_{\theta_6^1} \left[b_{\alpha\beta 11} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} + 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + 3 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) \right. \\
& \quad + 2b_{\alpha\beta 12} \left(-\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + \sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) \\
& \quad \left. + b_{\alpha\beta 22} \left(3 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} - 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) \right] ds_1 ds_2 \\
& = \\
& \frac{1}{4} \delta^{-1} \int_{Y_0} \left[b_{\alpha\beta 11} \left(\left(\frac{2}{2-\delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} + \frac{4\sqrt{3}}{\delta(2-\delta\sqrt{3})} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{3}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \right) \right. \\
& \quad + 2b_{\alpha\beta 12} \left(-\sqrt{3} \left(\frac{2}{2-\delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} - \frac{4}{\delta(2-\delta\sqrt{3})} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{\sqrt{3}}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \right) \\
& \quad \left. + b_{\alpha\beta 22} \left(3 \left(\frac{2}{2-\delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} - \frac{4\sqrt{3}}{\delta(2-\delta\sqrt{3})} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \right) \right] \left(\frac{2-\delta\sqrt{3}}{2} \right) \delta dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on a

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2}{2-\delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} \rightharpoonup \theta_{11}^{1\theta\rho} \text{ dans } L^2(Y_0) \text{ faible,} \\
& \left(\frac{2}{2-\delta\sqrt{3}} \right) \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} \rightharpoonup \theta_{12}^{1\theta\rho} \text{ dans } L^2(Y_0) \text{ faible,} \\
& \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_6^1}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \rightharpoonup \theta_{22}^{1\theta\rho} \text{ dans } L^2(Y_0) \text{ faible.}
\end{aligned}$$

En conséquence, en faisant tendre δ vers zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
& \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^1} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_\tau \partial y_\nu} dy_1 dy_2 \\
& \rightarrow \\
& \frac{1}{4} \int_{Y_0} b_{\alpha\beta 11} (\theta_{11}^{1\theta\rho} + 2\sqrt{3}\theta_{12}^{1\theta\rho} + 3\theta_{22}^{1\theta\rho}) + \\
& \quad + b_{\alpha\beta 12} (-2\sqrt{3}\theta_{11}^{1\theta\rho} - 4\theta_{12}^{1\theta\rho} + 2\sqrt{3}\theta_{22}^{1\theta\rho}) + \\
& \quad + b_{\alpha\beta 22} (3\theta_{11}^{1\theta\rho} - 2\sqrt{3}\theta_{12}^{1\theta\rho} + \theta_{22}^{1\theta\rho}) \Big] dy_1 dy_2 \\
& = \\
& \frac{1}{4} \int_{Y_0} ((b_{\alpha\beta 11} - 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 12} + 3b_{\alpha\beta 22})\theta_{11}^{1\theta\rho} + (2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 11} - 4b_{\alpha\beta 12} - 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 22})\theta_{12}^{1\theta\rho} + \\
& \quad + (3b_{\alpha\beta 11} + 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 12} + b_{\alpha\beta 22})\theta_{22}^{1\theta\rho}) dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned}
12\sqrt{3}q_{\alpha\beta\theta\rho}^* &= 6b_{\alpha\beta\theta\rho} - \int_Y b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} dy_1 dy_2 \\
& - \int_Y b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} dy_1 dy_2 - \int_Y b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho+} dy_1 dy_2 \\
& - \frac{1}{4} \int_{Y_0} ((b_{\alpha\beta 11} + 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 12} + 3b_{\alpha\beta 22})\theta_{11}^{2\theta\rho} + \\
& + (-2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 11} - 4b_{\alpha\beta 12} + 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 22})\theta_{12}^{2\theta\rho} + (3b_{\alpha\beta 11} - 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 12} + b_{\alpha\beta 22})\theta_{22}^{2\theta\rho}) dy_1 dy_2 \\
& - \frac{1}{4} \int_{Y_0} ((b_{\alpha\beta 11} - 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 12} + 3b_{\alpha\beta 22})\theta_{11}^{1\theta\rho} + (2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 11} - 4b_{\alpha\beta 12} - 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 22})\theta_{12}^{1\theta\rho} \\
& \quad + (3b_{\alpha\beta 11} + 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 12} + b_{\alpha\beta 22})\theta_{22}^{1\theta\rho}) dy_1 dy_2
\end{aligned}$$

Appelons (AIII.4) cette égalité.

AII.2.3.CALCUL EXPLICITE DES $q_{\alpha\beta\theta\rho}^*$.

Nous allons chercher à préciser les valeurs des intégrales apparaissant dans l'expression de $q_{\alpha\beta\theta\rho}^*$.

Multiplions par la fonction test φ Y -périodique et très régulière le problème (AIII.1).

Il vient

$$\int_{Y_{\delta^*}} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2(\chi_{\delta}^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_{\tau}\partial y_{\nu}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_{\alpha}\partial y_{\beta}} dy_1 dy_2 = 0.$$

Après multiplication par δ^{-1} , cette expression s'écrit

$$\delta^{-1} \int_{Y_{\delta^*}} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2(\chi_{\delta}^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_{\tau}\partial y_{\nu}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_{\alpha}\partial y_{\beta}} dy_1 dy_2 = 0.$$

Nous allons partager Y_{δ^*} en les différentes barres précédentes, puis développer les sommes placées sous le signe d'intégration .

Barre H_{δ}^- :

On a

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_{\delta}^-} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2(\chi_{\delta}^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_{\tau}\partial y_{\nu}} \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_{\alpha}\partial y_{\beta}} dy_1 dy_2 \\ & = \\ & \delta^{-1} \int_{H_{\delta}^-} (b_{1111} \frac{\partial^2\chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_1^2} + 2b_{1112} \frac{\partial^2\chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_1\partial y_2} + b_{1122} \frac{\partial^2\chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_2^2} - b_{11\theta\rho}) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} + \\ & + 2\delta^{-1} \int_{H_{\delta}^-} (b_{1211} \frac{\partial^2\chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_1^2} + 2b_{1212} \frac{\partial^2\chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_1\partial y_2} + b_{1222} \frac{\partial^2\chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_2^2} - b_{12\theta\rho}) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1\partial y_2} dy_1 dy_2 + \\ & + \delta^{-1} \int_{H_{\delta}^-} (b_{2211} \frac{\partial^2\chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_1^2} + 2b_{2212} \frac{\partial^2\chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_1\partial y_2} + b_{2222} \frac{\partial^2\chi_{\delta}^{\theta\rho}}{\partial y_2^2} - b_{22\theta\rho}) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_2^2} dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \\
&\delta^{-1} \int_Y \left[b_{1111} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial z_1^2} + 2 \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}} \right)^{-1} b_{1112} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H_\delta}^{\theta\rho}}{\partial z_1 \partial z_2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}} \right)^{-2} b_{1122} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H_\delta}^{\theta\rho}}{\partial z_2^2} - b_{11\theta\rho} \right] \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \right) \left(z_1, \frac{\delta}{2\sqrt{3}} z_2 \right) \frac{\delta}{2\sqrt{3}} dz_1 dz_2 + \\
&+ 2\delta^{-1} \int_Y \left[b_{1211} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H_\delta}^{\theta\rho}}{\partial z_1^2} + 2 \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}} \right)^{-1} b_{1212} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H_\delta}^{\theta\rho}}{\partial z_1 \partial z_2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}} \right)^{-2} b_{1222} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H_\delta}^{\theta\rho}}{\partial z_2^2} - b_{12\theta\rho} \right] \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} \right) \left(z_1, \frac{\delta}{2\sqrt{3}} z_2 \right) \frac{\delta}{2\sqrt{3}} dz_1 dz_2 + \\
&+ \delta^{-1} \int_Y \left[b_{2211} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H_\delta}^{\theta\rho}}{\partial z_1^2} + 2 \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}} \right)^{-1} b_{2212} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H_\delta}^{\theta\rho}}{\partial z_1 \partial z_2} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\delta}{2\sqrt{3}} \right)^{-2} b_{2222} \frac{\partial^2 \chi_{\delta H_\delta}^{\theta\rho}}{\partial z_2^2} - b_{22\theta\rho} \right] \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \right) \left(z_1, \frac{\delta}{2\sqrt{3}} z_2 \right) \frac{\delta}{2\sqrt{3}} dz_1 dz_2.
\end{aligned}$$

Quand δ tend vers zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
&\delta^{-1} \int_{H_\delta^-} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 (\chi_\delta^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_\tau \partial y_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 \\
&\rightarrow \\
&\int_Y (b_{1111} 2\sqrt{3} h_{11}^{\theta\rho-} + 2b_{1112} 2\sqrt{3} h_{12}^{\theta\rho-} + b_{1122} 2\sqrt{3} h_{22}^{\theta\rho-} - b_{11\theta\rho}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} \right) (y_1, 0) \frac{1}{2\sqrt{3}} dy_1 dy_2 + \\
&+ 2 \int_Y (b_{1211} 2\sqrt{3} h_{11}^{\theta\rho-} + 2b_{1212} 2\sqrt{3} h_{12}^{\theta\rho-} + \\
&\quad + b_{1222} 2\sqrt{3} h_{22}^{\theta\rho-} - b_{12\theta\rho}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} \right) (y_1, 0) \frac{1}{2\sqrt{3}} dy_1 dy_2 + \\
&+ \int_Y (b_{2211} 2\sqrt{3} h_{11}^{\theta\rho-} + 2b_{2212} 2\sqrt{3} h_{12}^{\theta\rho-} + b_{2222} 2\sqrt{3} h_{22}^{\theta\rho-} - b_{22\theta\rho}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} \right) (y_1, 0) \frac{1}{2\sqrt{3}} dy_1 dy_2 \\
&= \\
&\int_Y (b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} - \frac{1}{2\sqrt{3}} b_{\alpha\beta\theta\rho}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right) (y_1, 0) dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Autrement dit, on a

$$\begin{aligned}
&\delta^{-1} \int_{H_\delta^-} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 (\chi_\delta^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_\tau \partial y_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 \\
&\rightarrow \\
&\int_Y (b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} - \frac{1}{2\sqrt{3}} b_{\alpha\beta\theta\rho}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} (y_1, 0) dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Barre H_δ^+ .

Par des calculs similaires, on obtient

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^+} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2(\chi_\delta^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_\tau \partial y_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 \\ & \rightarrow \\ & \int_Y (b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho+} - \frac{1}{2\sqrt{3}} b_{\alpha\beta\theta\rho}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right) (y_1, 0) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Barre H_δ^0 .

Par des calculs similaires, on obtient

$$\begin{aligned} & \delta^{-1} \int_{H_\delta^0} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2(\chi_\delta^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_\tau \partial y_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 \\ & \rightarrow \\ & \int_Y (b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}} b_{\alpha\beta\theta\rho}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \left(y_1, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Barre θ_δ^2 :

Posons

$$\begin{aligned} K_2 &= \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2} - 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2} + 3 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2} \right) \\ K_2' &= \left(\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2} - \sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2} \right) \\ K_2'' &= \left(3 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2} + 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_{3\theta_\delta^2} &= \left(\frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} - \frac{4\sqrt{3}}{(2 - \delta\sqrt{3})\delta} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{3}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \\ B_{3\theta_\delta^2} &= \sqrt{3} \left(\frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} - \frac{4}{(2 - \delta\sqrt{3})\delta} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\sqrt{3}}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \\ C_{3\theta_\delta^2} &= 3 \left(\frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} + \frac{4\sqrt{3}}{(2 - \delta\sqrt{3})\delta} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2}. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
& \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2(\chi_\delta^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_\tau \partial y_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 \\
& = \\
& \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} (b_{11111} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1^2} + 2b_{11112} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1 \partial y_2} + b_{11222} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_2^2} - b_{111\theta\rho}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} dy_1 dy_2 + \\
& + 2\delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} (b_{12111} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1^2} + 2b_{12112} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1 \partial y_2} + b_{12222} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_2^2} - b_{121\theta\rho}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1 \partial y_2} dy_1 dy_2 + \\
& + \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} (b_{22111} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1^2} + 2b_{22112} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_1 \partial y_2} + b_{22222} \frac{\partial^2 \chi_\delta^{\theta\rho}}{\partial y_2^2} - b_{222\theta\rho}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_2^2} dy_1 dy_2 = \\
& = \frac{1}{16} \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} \left[b_{11111} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} - 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + 3 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) + \right. \\
& \quad + 2b_{11112} \left(\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} - \sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) + \\
& \quad \left. + b_{11222} \left(3 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} + 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) - 4b_{111\theta\rho} \right] K_2 ds_1 ds_2 + \\
& + \frac{2}{16} \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} \left[b_{12111} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} - 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + 3 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) + \right. \\
& \quad + 2b_{12112} \left(\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} - \sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) + \\
& \quad \left. + b_{12222} \left(3 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} + 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) - 4b_{121\theta\rho} \right] K_2' ds_1 ds_2 + \\
& + \frac{1}{16} \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} \left[b_{22111} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} - 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + 3 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) + \right. \\
& \quad + 2b_{22112} \left(\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} - \sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) + \\
& \quad \left. + b_{22222} \left(3 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1^2} + 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_\delta^{\theta\rho}}{\partial s_2^2} \right) - 4b_{222\theta\rho} \right] K_2'' ds_1 ds_2 \\
& = \\
& \frac{1}{16} \delta^{-1} \int_{Y_0} \left[b_{11111} \left(\left(\frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} - \frac{4\sqrt{3}}{(2 - \delta\sqrt{3})\delta} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{3}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + 2b_{11112} \left(\sqrt{3} \left(\frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} - \frac{4}{(2 - \delta\sqrt{3})\delta} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\sqrt{3}}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_{1122} \left(3 \left(\frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1^2} + \frac{4\sqrt{3}}{(2 - \delta\sqrt{3})\delta} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\chi}_{\delta\theta_2}^{\theta\rho}}{\partial t_2^2} \right) - b_{11\theta\rho} \Big] \\
& \left(\left(\frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_1^2} - \frac{2\sqrt{3}}{\delta} \cdot \frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{3}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_2^2} \right) \frac{2 - \delta\sqrt{3}}{2} \delta dt_1 dt_2 \\
& + \frac{2}{16} \delta^{-1} \int_{Y_0} [b_{1211} A_{3\theta_2^2} + 2b_{1212} B_{3\theta_2^2} + b_{1222} C_{3\theta_2^2} - 4b_{12\theta\rho}] \\
& \left(\sqrt{3} \left(\frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_1^2} - \frac{4}{\delta(2 - \delta)} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_1 \partial t_2} - \frac{\sqrt{3}}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_2^2} \right) \frac{2 - \delta\sqrt{3}}{2} \delta dt_1 dt_2 \\
& + \frac{1}{16} \delta^{-1} \int_{Y_0} [b_{2211} A_{3\theta_2^2} + 2b_{2212} B_{3\theta_2^2} + b_{2222} C_{3\theta_2^2} - 4b_{22\theta\rho}] \\
& \left(3 \left(\frac{2}{2 - \delta\sqrt{3}} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_1^2} + \frac{4\sqrt{3}}{\delta(2 - \delta)} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_1 \partial t_2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_2^2} \right) \frac{2 - \delta\sqrt{3}}{2} \delta dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

. Faisons tendre δ vers zéro.

$$\text{Puisque } \left(\frac{2 - \delta\sqrt{3}}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_1^2}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2} \left(\frac{2 - \delta\sqrt{3}}{2} t_1, \delta t_2 \right), \text{ on a}$$

$$\left(\frac{2 - \delta\sqrt{3}}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_1^2}(t_1, t_2) \rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2}(t_1, 0).$$

$$\text{Puisque } \delta^{-2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_2^2}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2} \left(\frac{2 - \delta\sqrt{3}}{2} t_1, \delta t_2 \right), \text{ on a}$$

$$\delta^{-2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_2^2}(t_1, t_2) \rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2}(t_1, 0).$$

$$\text{Puisque } \left(\frac{2 - \delta\sqrt{3}}{2} \right) \delta^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2} \left(\frac{2 - \delta\sqrt{3}}{2} t_1, \delta t_2 \right), \text{ on a}$$

$$\left(\frac{2 - \delta\sqrt{3}}{2} \right) \delta^{-1} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}_{\theta_2}}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1, t_2) \rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2}(t_1, 0).$$

En conséquence, il vient

$$\begin{aligned}
& \delta^{-1} \int_{\theta_2^2} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2 (\chi_\delta^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_\tau \partial y_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 \\
& \rightarrow \\
& \frac{1}{16} \int_{Y_0} [b_{1111} (\theta_{11}^{2\theta\rho} - 2\sqrt{3}\theta_{12}^{2\theta\rho} + 3\theta_{22}^{2\theta\rho}) \\
& + 2b_{1112} (\sqrt{3}\theta_{11}^{2\theta\rho} - 2\theta_{12}^{2\theta\rho} - \sqrt{3}\theta_{22}^{2\theta\rho}) \\
& + b_{1122} (3\theta_{11}^{2\theta\rho} + 2\sqrt{3}\theta_{12}^{2\theta\rho} + \theta_{22}^{2\theta\rho}) \\
& - 4b_{11\theta\rho}] \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2}(t_1, 0) - 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2}(t_1, 0) + 3 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2}(t_1, 0) \right) dt_1 dt_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{16} \int_{Y_0} [b_{1211}(\theta_{11}^{2\theta\rho} - 2\sqrt{3}\theta_{12}^{2\theta\rho} + 3\theta_{22}^{2\theta\rho}) \\
& + 2b_{1212}(\sqrt{3}\theta_{11}^{2\theta\rho} - 2\theta_{12}^{2\theta\rho} - \sqrt{3}\theta_{22}^{2\theta\rho}) \\
& + b_{1222}(3\theta_{11}^{2\theta\rho} + 2\sqrt{3}\theta_{12}^{2\theta\rho} + \theta_{22}^{2\theta\rho}) \\
& - 4b_{12\theta\rho}] \left(+ \sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2}(t_1, 0) - 2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2}(t_1, 0) - \sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2}(t_1, 0) \right) dt_1 dt_2 + \\
& + \frac{1}{16} \int_{Y_0} [b_{2211}(\theta_{11}^{2\theta\rho} - 2\sqrt{3}\theta_{12}^{2\theta\rho} + 3\theta_{22}^{2\theta\rho}) \\
& + 2b_{2212}(\sqrt{3}\theta_{11}^{2\theta\rho} - 2\theta_{12}^{2\theta\rho} - \sqrt{3}\theta_{22}^{2\theta\rho}) \\
& + b_{2222}(3\theta_{11}^{2\theta\rho} + 2\sqrt{3}\theta_{12}^{2\theta\rho} + \theta_{22}^{2\theta\rho}) \\
& - 4b_{22\theta\rho}] \left(3 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2}(t_1, 0) + 2\sqrt{3} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2}(t_1, 0) + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2}(t_1, 0) \right) dt_1 dt_2,
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
& \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^2} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2(\chi_\delta^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_\tau \partial y_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 \\
& \rightarrow \\
& \frac{1}{16} \int_{Y_0} [(b_{1111} + 2\sqrt{3}b_{1112} + 3b_{1122} + 2\sqrt{3}b_{1211} + 12b_{1212} \\
& \quad + 6\sqrt{3}b_{1222} + 3b_{2211} + 6\sqrt{3}b_{2212} + 9b_{2222})\theta_{11}^{2\theta\rho} + \\
& \quad + (-2\sqrt{3}b_{1111} - 4b_{1112} + 2\sqrt{3}b_{1122} - 12b_{1211} - 8\sqrt{3}b_{1212} \\
& \quad + 12b_{1222} - 6\sqrt{3}b_{2211} - 12b_{2212} + 6\sqrt{3}b_{2222})\theta_{12}^{2\theta\rho} + \\
& \quad + (3b_{1111} - 2\sqrt{3}b_{1112} + b_{1122} + 6\sqrt{3}b_{1211} - 12b_{1212} \\
& \quad + 2\sqrt{3}b_{1222} + 9b_{2211} - 6\sqrt{3}b_{2212} + 3b_{2222})\theta_{22}^{2\theta\rho} - \\
& \quad - 4(b_{11\theta\rho} + 2\sqrt{3}b_{12\theta\rho} + 3b_{22\theta\rho})] \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2}(t_1, 0) dt_1 dt_2 + \\
& \quad (\text{le terme entre crochets est noté } A_4^2) \\
& + \frac{1}{16} \int_{Y_0} [(-2\sqrt{3}b_{1111} - 12b_{1112} - 6\sqrt{3}b_{1122} - 4b_{1211} - 8\sqrt{3}b_{1212} \\
& \quad - 12b_{1222} + 2\sqrt{3}b_{2211} + 12b_{2212} + 6\sqrt{3}b_{2222})\theta_{11}^{2\theta\rho} + \\
& \quad + (12b_{1111} + 8\sqrt{3}b_{1112} - 12b_{1122} + 8\sqrt{3}b_{1211} + 16b_{1212} \\
& \quad - 8\sqrt{3}b_{1222} - 12b_{2211} - 8\sqrt{3}b_{2212} + 12b_{2222})\theta_{12}^{2\theta\rho} + \\
& \quad + (-6\sqrt{3}b_{1111} + 12b_{1112} - 2\sqrt{3}b_{1122} - 12b_{1211} + 8\sqrt{3}b_{1212} \\
& \quad - 4b_{1222} + 6\sqrt{3}b_{2211} - 12b_{2212} + 2\sqrt{3}b_{2222})\theta_{22}^{2\theta\rho} - \\
& \quad - 4(-2\sqrt{3}b_{11\theta\rho} - 4b_{12\theta\rho} + 2\sqrt{3}b_{22\theta\rho})] \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2}(t_1, 0) dt_1 dt_2 + \\
& \quad (\text{le terme entre crochets est noté } B_4^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16} \int_{Y_0} [(3b_{1111} + 6\sqrt{3}b_{1112} + 9b_{1122} - 2\sqrt{3}b_{1211} - 12b_{1212} \\
& \quad - 6\sqrt{3}b_{1222} + b_{2211} + 2\sqrt{3}b_{2212} + 3b_{2222})\theta_{11}^{2\theta\rho} + \\
& + (-6\sqrt{3}b_{1111} - 12b_{1112} + 6\sqrt{3}b_{1122} + 12b_{1211} + 8\sqrt{3}b_{1212} \\
& \quad - 12b_{1222} - 2\sqrt{3}b_{2211} - 4b_{2212} + 2\sqrt{3}b_{2222})\theta_{12}^{2\theta\rho} + \\
& + (9b_{1111} - 6\sqrt{3}b_{1112} + 3b_{1122} - 6\sqrt{3}b_{1211} + 12b_{1212} \\
& \quad - 2\sqrt{3}b_{1222} + 3b_{2211} - 2\sqrt{3}b_{2212} + b_{2222})\theta_{22}^{2\theta\rho} - \\
& - 4(3b_{11\theta\rho} - 2\sqrt{3}b_{12\theta\rho} + b_{22\theta\rho})] \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2}(t_1, 0) dt_1 dt_2 \\
& \text{(le terme entre crochets est noté } C_4^2 \text{).}
\end{aligned}$$

Barre θ_δ^1

Par des calculs analogues, on obtient

$$\begin{aligned}
& \delta^{-1} \int_{\theta_\delta^1} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2(\chi_\delta^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_\tau \partial y_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 \\
& \rightarrow \\
& \frac{1}{16} \int_{Y_0} [(b_{1111} - 2\sqrt{3}b_{1112} + 3b_{1122} - 2\sqrt{3}b_{1211} + 12b_{1212} \\
& \quad - 6\sqrt{3}b_{1222} + 3b_{2211} - 6\sqrt{3}b_{2212} + 9b_{2222})\theta_{11}^{2\theta\rho} + \\
& + (2\sqrt{3}b_{1111} - 4b_{1112} - 2\sqrt{3}b_{1122} - 12b_{1211} + 8\sqrt{3}b_{1212} \\
& \quad + 12b_{1222} + 6\sqrt{3}b_{2211} - 12b_{2212} - 6\sqrt{3}b_{2222})\theta_{12}^{2\theta\rho} + \\
& + (3b_{1111} + 2\sqrt{3}b_{1112} + b_{1122} - 6\sqrt{3}b_{1211} - 12b_{1212} \\
& \quad - 2\sqrt{3}b_{1222} + 9b_{2211} + 6\sqrt{3}b_{2212} + 3b_{2222})\theta_{22}^{2\theta\rho} - \\
& - 4(b_{11\theta\rho} - 2\sqrt{3}b_{12\theta\rho} + 3b_{22\theta\rho})] \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2}(t_1, 0) dt_1 dt_2 + \\
& \text{(le terme entre crochets est noté } A_4^1 \text{)} \\
& + \frac{1}{16} \int_{Y_0} [(2\sqrt{3}b_{1111} - 12b_{1112} + 6\sqrt{3}b_{1122} - 4b_{1211} + 8\sqrt{3}b_{1212} \\
& \quad - 12b_{1222} - 2\sqrt{3}b_{2211} + 12b_{2212} - 6\sqrt{3}b_{2222})\theta_{11}^{2\theta\rho} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (12b_{1111} - 8\sqrt{3}b_{1112} - 12b_{1122} - 8\sqrt{3}b_{1211} + 16b_{1212} \\
& \quad + 8\sqrt{3}b_{1222} - 12b_{2211} + 8\sqrt{3}b_{2212} + 12b_{2222})\theta_{12}^{2\theta\rho} + \\
& + (6\sqrt{3}b_{1111} + 12b_{1112} + 2\sqrt{3}b_{1122} - 12b_{1211} - 8\sqrt{3}b_{1212} \\
& \quad - 4b_{1222} - 6\sqrt{3}b_{2211} - 12b_{2212} - 2\sqrt{3}b_{2222})\theta_{22}^{2\theta\rho} - \\
& - 4(2\sqrt{3}b_{11\theta\rho} - 4b_{12\theta\rho} - 2\sqrt{3}b_{22\theta\rho})\left]\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial s_1\partial s_2}(t_1, 0)dt_1dt_2 + \right. \\
& \text{(le terme entre crochets est noté } B_4^1) \\
& + \frac{1}{16} \int_{Y_0} [(3b_{1111} - 6\sqrt{3}b_{1112} + 9b_{1122} + 2\sqrt{3}b_{1211} - 12b_{1212} \\
& \quad + 6\sqrt{3}b_{1222} + b_{2211} - 2\sqrt{3}b_{2212} + 3b_{2222})\theta_{11}^{2\theta\rho} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (6\sqrt{3}b_{1111} - 12b_{1112} - 6\sqrt{3}b_{1122} + 12b_{1211} - 8\sqrt{3}b_{1212} \\
& \quad - 12b_{1222} + 2\sqrt{3}b_{2211} - 4b_{2212} - 2\sqrt{3}b_{2222})\theta_{12}^{2\theta\rho} + \\
& + (9b_{1111} + 6\sqrt{3}b_{1112} + 3b_{1122} + 6\sqrt{3}b_{1211} + 12b_{1212} \\
& \quad + 2\sqrt{3}b_{1222} + 3b_{2211} + 2\sqrt{3}b_{2212} + b_{2222})\theta_{22}^{2\theta\rho} - \\
& - 4(3b_{11\theta\rho} + 2\sqrt{3}b_{12\theta\rho} + b_{22\theta\rho})\left]\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial s_2^2}(t_1, 0)dt_1dt_2 \right. \\
& \text{(le terme entre crochets est noté } C_4^1).
\end{aligned}$$

En rassemblant les intégrales sur chaque barre, l'expression

$$\delta^{-1} \int_{Y_6^*} b_{\alpha\beta\tau\nu} \frac{\partial^2(\chi_\delta^{\theta\rho} - \pi^{\theta\rho})}{\partial y_\tau \partial y_\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} dy_1 dy_2 = 0$$

donne à la limite

$$\int_Y (b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} - \frac{1}{2\sqrt{3}} b_{\alpha\beta\theta\rho}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right) (y_1, 0) dy_1 dy_2 + \quad (AIII.5)$$

$$+ \int_Y (b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho+} - \frac{1}{2\sqrt{3}} b_{\alpha\beta\tau\nu}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right) (y_1, 0) dy_1 dy_2 + \quad (AIII.6)$$

$$+ \int_Y (b_{\alpha\beta\tau\nu} h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}} b_{\alpha\beta\theta\rho}) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_\alpha \partial y_\beta} \right) (y_1, \frac{\sqrt{3}}{2}) dy_1 dy_2 + \quad (AIII.7)$$

$$+ \frac{1}{16} \int_{Y_0} A_4^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2} (t_1, 0) \right) dt_1 dt_2 + \quad (AIII.8)$$

$$+ \frac{1}{16} \int_{Y_0} B_4^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2} \right) (t_1, 0) dt_1 dt_2 + \quad (AIII.9)$$

$$+ \frac{1}{16} \int_{Y_0} C_4^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2} (t_1, 0) \right) dt_1 dt_2 + \quad (AIII.10)$$

$$+ \frac{1}{16} \int_{Y_0} A_4^1 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2} \right) (t_1, 0) dt_1 dt_2 + \quad (AIII.11)$$

$$+ \frac{1}{16} \int_{Y_0} B_4^1 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2} \right) (t_1, 0) dt_1 dt_2 + \quad (AIII.12)$$

$$+ \frac{1}{16} \int_{Y_0} C_4^1 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2} \right) (t_1, 0) dt_1 dt_2 + \quad (AIII.13)$$

= 0.

En nous inspirant des choix effectués dans (Cioranescu-Saint Jean Paulin [1]) pour d'autres types de structures réticulées, nous allons, dans l'expression limite précédente, choisir une fonction test φ de la forme

$$\varphi(y_1, y_2) = \varphi_1(y_1) \varphi_2(y_2) \varphi_3\left(\frac{-\sqrt{3}y_1 + y_2}{2}\right) \varphi_4\left(\frac{-\sqrt{3}y_1 - y_2 + \sqrt{3}}{2}\right),$$

où les φ_i sont des fonctions régulières, φ_1 et φ_2 étant périodiques de période 1 en y_1 et en y_2 , et φ_3 et φ_4 étant périodiques de période $\sqrt{3}$ en y_1 et en y_2 .

Posons

$$\psi(y_1, y_2) = \varphi_3\left(\frac{-\sqrt{3}y_1 + y_2}{2}\right) \varphi_4\left(\frac{-\sqrt{3}y_1 - y_2 + \sqrt{3}}{2}\right).$$

La fonction φ s'écrit

$$\varphi(y_1, y_2) = \varphi_1(y_1) \varphi_2(y_2) \psi(y_1, y_2).$$

Etudions en détail les différents termes obtenus.

Pour les expressions (AIII.5) et (AIII.6), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_Y (b_{\alpha\beta\tau\nu}(h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} + h_{\tau\nu}^{\theta\rho+}) - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{\alpha\beta\theta\rho}) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_\alpha y_\beta}(y_1, 0) dy_1 dy_2 \\
&= \varphi_2(0) \int_Y (b_{11\tau\nu}(h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} + h_{\tau\nu}^{\theta\rho+}) - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{11\theta\rho}) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}(\varphi_1(y_1)\psi(y_1, y_2))(y_1, 0) dy_1 dy_2 + \\
&+ 2\varphi_2(0) \int_Y (b_{12\tau\nu}(h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} + h_{\tau\nu}^{\theta\rho+}) - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{12\theta\rho}) \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}(\varphi_1(y_1)\psi(y_1, y_2))(y_1, 0) dy_1 dy_2 + \\
&+ 2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}(0) \int_Y (b_{12\tau\nu}(h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} + h_{\tau\nu}^{\theta\rho+}) - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{12\theta\rho}) \frac{\partial}{\partial y_1}(\varphi_1(y_1)\psi(y_1, y_2))(y_1, 0) dy_1 dy_2 + \\
&+ \varphi_2(0) \int_Y (b_{22\tau\nu}(h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} + h_{\tau\nu}^{\theta\rho+}) - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{22\theta\rho}) \varphi_1(y_1) \frac{\partial^2\psi}{\partial y_2^2}(y_1, 0) dy_1 dy_2 + \\
&+ 2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}(0) \int_Y (b_{22\tau\nu}(h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} + h_{\tau\nu}^{\theta\rho+}) - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{22\theta\rho}) \varphi_1(y_1) \frac{\partial\psi}{\partial y_2}(y_1, 0) dy_1 dy_2 + \\
&+ \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial^2 y_2}(0) \int_Y (b_{22\tau\nu}(h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} + h_{\tau\nu}^{\theta\rho+}) - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{22\theta\rho}) \varphi_1(y_1) \psi(y_1, 0) dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Pour l'expression (AIII.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_Y (b_{\alpha\beta\tau\nu}h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{\alpha\beta\theta\rho}) \frac{\partial^2\varphi}{\partial y_\alpha y_\beta}(y_1, \frac{\sqrt{3}}{2}) dy_1 dy_2 \\
&= \varphi_2(\frac{\sqrt{3}}{2}) \int_Y (b_{11\tau\nu}h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{11\theta\rho}) \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}(\varphi_1(y_1)\psi(y_1, y_2))(y_1, \frac{\sqrt{3}}{2}) dy_1 dy_2 + \\
&+ 2\varphi_2(\frac{\sqrt{3}}{2}) \int_Y (b_{12\tau\nu}h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{12\theta\rho}) \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2}(\varphi_1(y_1)\psi(y_1, y_2))(y_1, \frac{\sqrt{3}}{2}) dy_1 dy_2 + \\
&+ 2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}(\frac{\sqrt{3}}{2}) \int_Y (b_{12\tau\nu}h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{12\theta\rho}) \frac{\partial}{\partial y_1}(\varphi_1(y_1)\psi(y_1, y_2))(y_1, \frac{\sqrt{3}}{2}) dy_1 dy_2 + \\
&+ \varphi_2(\frac{\sqrt{3}}{2}) \int_Y (b_{22\tau\nu}h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{22\theta\rho}) \varphi_1(y_1) \frac{\partial^2\psi}{\partial y_2^2}(y_1, \frac{\sqrt{3}}{2}) dy_1 dy_2 + \\
&+ 2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}(\frac{\sqrt{3}}{2}) \int_Y (b_{22\tau\nu}h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{22\theta\rho}) \varphi_1(y_1) \frac{\partial\psi}{\partial y_2}(y_1, \frac{\sqrt{3}}{2}) dy_1 dy_2 + \\
&+ \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial^2 y_2}(\frac{\sqrt{3}}{2}) \int_Y (b_{22\tau\nu}h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{22\theta\rho}) \varphi_1(y_1) \psi(y_1, \frac{\sqrt{3}}{2}) dy_1 dy_2.
\end{aligned}$$

Pour les expressions (AIII.8), (AIII.9) et (AIII.10), on a

$$\check{\varphi}(s_1, s_2) = \varphi(y_1, y_2) = \varphi_1(y_1)\varphi_2(y_2)\varphi_3(\frac{y_2 - \sqrt{3}y_1}{2})\varphi_4(\frac{-\sqrt{3}y_1 - y_2 + \sqrt{3}}{2}),$$

soit

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(s_1, s_2) &= \varphi\left(\frac{s_1 - \sqrt{3}s_2}{2}, \frac{\sqrt{3}s_1 + s_2}{2}\right) \\ &= \varphi_1\left(\frac{s_1 - \sqrt{3}s_2}{2}\right)\varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1 + s_2}{2}\right)\varphi_3(s_2)\varphi_4\left(\frac{-\sqrt{3}s_1 - s_2 + \sqrt{3}}{2}\right).\end{aligned}$$

En conséquence, on a

$$\begin{aligned}& \frac{1}{16} \int_{Y_0} A_4^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2}(t_1, 0) dt_1 dt_2 + \\ & + \frac{1}{16} \int_{Y_0} B_4^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2}(t_1, 0) dt_1 dt_2 + \\ & + \frac{1}{16} \int_{Y_0} C_4^2 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2}(t_1, 0) dt_1 dt_2 \\ & = \\ & \frac{1}{16} \varphi_3(0) \int_{Y_0} A_4^2 \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \left(\varphi_1\left(\frac{s_1}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1}{2}\right) \varphi_4\left(\frac{-\sqrt{3}s_1 + \sqrt{3}}{2}\right) \right) ds_1 ds_2 + \\ & + \frac{1}{16} \varphi_3(0) \int_{Y_0} B_4^2 \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \left(\varphi_1\left(\frac{s_1 - \sqrt{3}s_2}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1 + s_2}{2}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \varphi_4\left(\frac{-\sqrt{3}s_1 - s_2 + \sqrt{3}}{2}\right) \right) (s_1, 0) ds_1 ds_2 + \\ & + \frac{1}{16} \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_2}(0) \int_{Y_0} B_4^2 \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\varphi_1\left(\frac{s_1 - \sqrt{3}s_2}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1 + s_2}{2}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \varphi_4\left(\frac{-\sqrt{3}s_1 - s_2 + \sqrt{3}}{2}\right) \right) (s_1, 0) ds_1 ds_2 + \\ & + \frac{1}{16} \varphi_3(0) \int_{Y_0} C_4^2 \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \left(\varphi_1\left(\frac{s_1 - \sqrt{3}s_2}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1 + s_2}{2}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \varphi_4\left(\frac{-\sqrt{3}s_1 - s_2 + \sqrt{3}}{2}\right) \right) (s_1, 0) ds_1 ds_2 + \\ & + \frac{2}{16} \frac{\partial \varphi_3}{\partial s_2}(0) \int_{Y_0} C_4^2 \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\varphi_1\left(\frac{s_1 - \sqrt{3}s_2}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1 + s_2}{2}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \varphi_4\left(\frac{-\sqrt{3}s_1 - s_2 + \sqrt{3}}{2}\right) \right) (s_1, 0) ds_1 ds_2 + \\ & + \frac{1}{16} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial s_2^2}(0) \int_{Y_0} C_4^2 \varphi_1\left(\frac{s_1}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1}{2}\right) \varphi_4\left(\frac{-\sqrt{3} + \sqrt{3}s_1}{2}\right) ds_1 ds_2.\end{aligned}$$

Pour les expressions (AIII.11), (AIII.12) et (AIII.13), on a

$$\tilde{\varphi}(s_1, s_2) = \varphi(y_1, y_2) = \varphi_1(y_1)\varphi_2(y_2)\varphi_3\left(\frac{y_2 - \sqrt{3}y_1}{2}\right)\varphi_4\left(\frac{-\sqrt{3}y_1 - y_2 + \sqrt{3}}{2}\right),$$

soit

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(s_1, s_2) &= \varphi\left(\frac{-s_1 - \sqrt{3}s_2 + 2}{2}, \frac{\sqrt{3}s_1 - s_2}{2}\right) \\ &= \varphi_1\left(\frac{-s_1 - \sqrt{3}s_2 + 2}{2}\right)\varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1 - s_2}{2}\right)\varphi_3\left(\frac{\sqrt{3}s_1 + s_2 - \sqrt{3}}{2}\right)\varphi_4(s_2).\end{aligned}$$

En conséquence, on a

$$\begin{aligned}& \frac{1}{16} \int_{Y_0} A_4^1 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1^2}(t_1, 0) dt_1 dt_2 + \\ & + \frac{1}{16} \int_{Y_0} B_4^1 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_1 \partial s_2}(t_1, 0) dt_1 dt_2 + \\ & + \frac{1}{16} \int_{Y_0} C_4^1 \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial s_2^2}(t_1, 0) dt_1 dt_2 \\ & = \\ & \frac{1}{16} \varphi_4(0) \int_{Y_0} A_4^1 \frac{\partial^2}{\partial s_1^2} \left(\varphi_1\left(\frac{-s_1 + 2}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{\sqrt{3}s_1 - \sqrt{3}}{2}\right) \right) ds_1 ds_2 + \\ & + \frac{1}{16} \varphi_4(0) \int_{Y_0} B_4^1 \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \left(\varphi_1\left(\frac{-s_1 - \sqrt{3}s_2 + 2}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1 - s_2}{2}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \varphi_3\left(\frac{\sqrt{3}s_1 + s_2 - \sqrt{3}}{2}\right) \right) (s_1, 0) ds_1 ds_2 + \\ & + \frac{1}{16} \frac{\partial \varphi_4}{\partial s_2}(0) \int_{Y_0} B_4^1 \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\varphi_1\left(\frac{-s_1 - \sqrt{3}s_2 + 2}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1 - s_2}{2}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \varphi_3\left(\frac{\sqrt{3}s_1 + s_2 - \sqrt{3}}{2}\right) \right) (s_1, 0) ds_1 ds_2 + \\ & + \frac{1}{16} \varphi_4(0) \int_{Y_0} C_4^1 \frac{\partial^2}{\partial s_2^2} \left(\varphi_1\left(\frac{-s_1 - \sqrt{3}s_2 + 2}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1 - s_2}{2}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \varphi_3\left(\frac{\sqrt{3}s_1 + s_2 - \sqrt{3}}{2}\right) \right) (s_1, 0) ds_1 ds_2 + \\ & + \frac{2}{16} \frac{\partial \varphi_4}{\partial s_2}(0) \int_{Y_0} C_4^1 \frac{\partial}{\partial s_2} \left(\varphi_1\left(\frac{-s_1 - \sqrt{3}s_2 + 2}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1 - s_2}{2}\right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \varphi_3\left(\frac{\sqrt{3}s_1 + s_2 - \sqrt{3}}{2}\right) \right) (s_1, 0) ds_1 ds_2 + \\ & + \frac{1}{16} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial s_2^2}(0) \int_{Y_0} C_4^1 \varphi_1\left(\frac{-s_1 + 2}{2}\right) \varphi_2\left(\frac{\sqrt{3}s_1}{2}\right) \varphi_3\left(\frac{\sqrt{3}s_1 - \sqrt{3}}{2}\right) ds_1 ds_2.\end{aligned}$$

En additionnant tous les termes obtenus, on obtient une expression dans laquelle on choisit comme fonctions test des fonctions telles que tous les termes en facteur devant les intégrales soient nuls, sauf un.

Avec $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y_2^2}(0) \neq 0$, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} (b_{22\tau\nu}(h_{\tau\nu}^{\theta\rho-} + h_{\tau\nu}^{\theta\rho+}) - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{22\theta\rho})dy_2 = 0 \quad (AIII.14)$$

Avec $\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y_2^2}(\frac{\sqrt{3}}{2}) \neq 0$, on obtient

$$\int_0^{\sqrt{3}} (b_{22\tau\nu}h_{\tau\nu}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{22\theta\rho})dy_2 = 0. \quad (AIII.15)$$

Avec $\frac{\partial^2\varphi_3}{\partial s_2^2}(0) \neq 0$, on obtient

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_4^2 dy_2 = 0. \quad (AIII.16)$$

Avec $\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial s_2^2}(0) \neq 0$, on obtient

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} C_4^1 dy_2 = 0. \quad (AIII.17)$$

Grâce aux périodicités en y_1 et y_2 des fonctions $\chi^{\theta\rho}$, on a

$$\int_Y h_{11}^{\theta\rho-} dy_1 dy_2 = \int_Y h_{12}^{\theta\rho-} dy_1 dy_2 = 0,$$

$$\int_Y h_{11}^{\theta\rho 0} dy_1 dy_2 = \int_Y h_{12}^{\theta\rho 0} dy_1 dy_2 = 0,$$

$$\int_Y h_{11}^{\theta\rho+} dy_1 dy_2 = \int_Y h_{12}^{\theta\rho+} dy_1 dy_2 = 0,$$

$$\int_{Y_0} O_{11}^{1\theta\rho} ds = \int_{Y_0} O_{12}^{1\theta\rho} ds = 0,$$

$$\int_{Y_0} O_{11}^{2\theta\rho} ds = \int_{Y_0} O_{12}^{2\theta\rho} ds = 0.$$

D'après (AIII.14), on a

$$\int_0^{\sqrt{3}} (b_{2222}(h_{22}^{\theta\rho-} + h_{22}^{\theta\rho+}) - \frac{1}{2\sqrt{3}}b_{22\theta\rho})dy_2 = 0,$$

d'où

$$\int_0^{\sqrt{3}} (h_{22}^{\theta\rho-} + h_{22}^{\theta\rho+})dy_2 = \frac{b_{22\theta\rho}}{2b_{2222}}.$$

D'après (4.13) :

$$\int_0^{\sqrt{3}} (b_{2222}h_{22}^{\theta\rho 0} - \frac{1}{\sqrt{3}}b_{22\theta\rho})dy_2 = 0,$$

d'où

$$\int_0^{\sqrt{3}} h_{22}^{\theta\rho} dy_2 = \frac{b_{22\theta\rho}}{b_{2222}}.$$

D'après (AIII.16), on a

$$\int_{Y_0} (9b_{1111} - 6\sqrt{3}b_{1112} + 3b_{1122} - 6\sqrt{3}b_{1211} + 12b_{1212} - 2\sqrt{3}b_{1222} + 3b_{2211} - 2\sqrt{3}b_{2212} + b_{2222})O_{22}^{2\theta\rho} - 4(3b_{11\theta\rho} - 2\sqrt{3}b_{12\theta\rho} + b_{22\theta\rho})dy_1dy_2 = 0,$$

d'où

$$\int_{Y_0} O_{22}^{2\theta\rho} dy_1 dy_2 = \frac{8(3b_{11\theta\rho} - 2\sqrt{3}b_{12\theta\rho} + b_{22\theta\rho})}{(9b_{1111} - 12\sqrt{3}b_{1112} + 6b_{1122} + 12b_{1212} - 4\sqrt{3}b_{1222} + b_{2222})}.$$

D'après (AIII.17), on a

$$\int_{Y_0} (9b_{1111} + 6\sqrt{3}b_{1112} + 3b_{1122} + 6\sqrt{3}b_{1211} + 12b_{1212} + 2\sqrt{3}b_{1222} + 3b_{2211} + 2\sqrt{3}b_{2212} + b_{2222})O_{22}^{2\theta\rho} - 4(3b_{11\theta\rho} - 2\sqrt{3}b_{12\theta\rho} + b_{22\theta\rho})dy_1dy_2 = 0,$$

d'où

$$\int_{Y_0} O_{22}^{1\theta\rho} dy_1 dy_2 = \frac{8(3b_{11\theta\rho} + 2\sqrt{3}b_{12\theta\rho} + b_{22\theta\rho})}{(9b_{1111} + 12\sqrt{3}b_{1112} + 6b_{1122} + 12b_{1212} + 4\sqrt{3}b_{1222} + b_{2222})}.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} 12\sqrt{3}q_{\alpha\beta\theta\rho}^* &= 6b_{\alpha\beta\theta\rho} - \frac{2b_{\alpha\beta 22}b_{22\theta\rho}}{b_{2222}} \\ &- \frac{2(3b_{11\theta\rho} - 2\sqrt{3}b_{12\theta\rho} + b_{22\theta\rho})(3b_{\alpha\beta 11} - 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 12} + b_{\alpha\beta 22})}{9b_{1111} - 12\sqrt{3}b_{1112} + 6b_{1122} + 12b_{1212} - 4\sqrt{3}b_{1222} + b_{2222}} \\ &- \frac{2(3b_{11\theta\rho} + 2\sqrt{3}b_{12\theta\rho} + b_{22\theta\rho})(3b_{\alpha\beta 11} + 2\sqrt{3}b_{\alpha\beta 12} + b_{\alpha\beta 22})}{9b_{1111} + 12\sqrt{3}b_{1112} + 6b_{1122} + 12b_{1212} + 4\sqrt{3}b_{1222} + b_{2222}}. \end{aligned}$$

Rappelons maintenant que, pour des raisons de simplicité, nous avons choisi de prendre pour les a_{ijkh} des constantes de Lamé.

Les coefficients $b_{\alpha\beta\theta\rho}$ sont alors également des constantes de Lamé.

Leurs expressions sont données par

$$\begin{cases} b_{1111} = b_{2222} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \\ b_{1212} = b_{2112} = b_{2121} = b_{1221} = \mu \\ b_{1122} = b_{2211} = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}. \end{cases}$$

En remplaçant les $b_{\alpha\beta\theta\rho}$ par ces valeurs dans l'expression de $q_{\alpha\beta\theta\rho}^*$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{1111}^* = q_{2222}^* = \frac{\sqrt{3}\mu(13\lambda + 10\mu)}{48(\lambda + \mu)} \\ q_{1212}^* = q_{2112}^* = q_{2121}^* = q_{1221}^* = \frac{\sqrt{3}\mu(7\lambda + 6\mu)}{48(\lambda + \mu)} \\ q_{1122}^* = q_{2211}^* = -\frac{\sqrt{3}\mu(\lambda + 2\mu)}{48(\lambda + \mu)} \\ \text{tous les autres sont nuls.} \end{array} \right.$$

AIII.3) ETUDE D'UNE STRUCTURE DERIVEE (EN LOSANGE).

On étudie à présent une plaque dont une coupe horizontale est déduite de celle de la structure en triangle (figure 1) en supprimant toutes les barres horizontales (voir figure 3). Il s'agit donc d'une plaque perforée dont les trous sont des cylindres ayant pour base un losange. L'étude de cette nouvelle structure ne diffère pas de la précédente en ce qui concerne les passages à la limite en e et en ϵ . Les calculs concernant le passage à la limite en δ sont différents du fait de l'absence des trois barres horizontales dans la cellule de base.

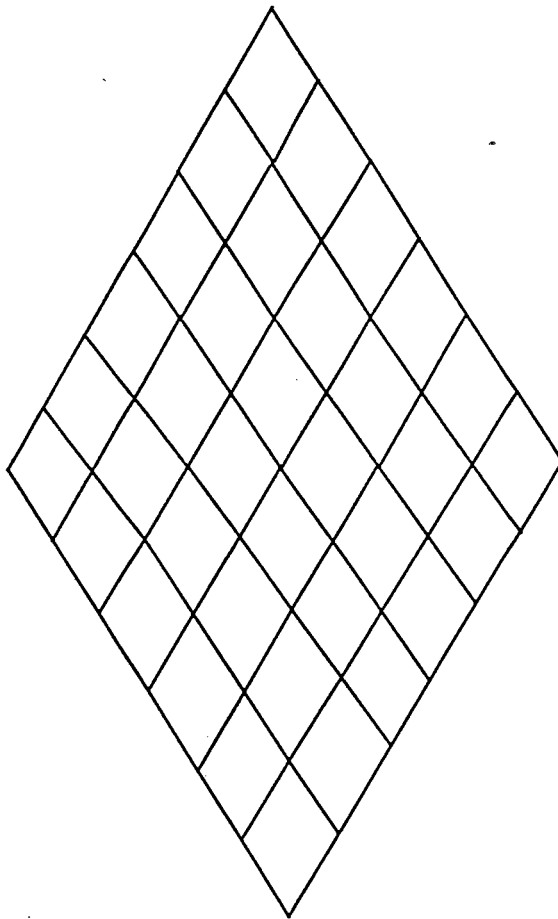


FIGURE 3

Nous ne donnons dans ce paragraphe que la valeur des coefficients limites obtenus. Comme pour la structure précédente, nous considérons le cas particulier où les coefficients d'élasticité sont des constantes de Lamé. Comme nous l'avons vu, les $b_{\alpha\beta\theta\rho}$ le sont alors également. Nous établissons le résultat suivant :

AIII.3.1) Résultats de convergence pour $q_{\alpha\beta\theta\rho}^\delta$.

Avec les coefficients de Lamé précédemment rappelés, on obtient, en faisant tendre δ vers zéro :

$$\delta^{-1} q_{\alpha\beta\theta\rho}^\delta \rightarrow q_{\alpha\beta\theta\rho}^*,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{1111}^* = \frac{\mu(15\lambda + 14\mu)}{48\sqrt{3}(\lambda + \mu)}, \\ q_{2222}^* = \frac{\sqrt{3}\mu(13\lambda + 10\mu)}{48(\lambda + \mu)}, \\ q_{1122}^* = q_{2211}^* = -\frac{\sqrt{3}\mu(\lambda + 2\mu)}{48(\lambda + \mu)}, \\ q_{1212}^* = q_{2112}^* = q_{1221}^* = q_{2121}^* = \frac{\mu(13\lambda + 10\mu)}{48\sqrt{3}(\lambda + \mu)}, \\ \text{les autres sont nuls.} \end{array} \right.$$

Coercivité des coefficients $q_{\alpha\beta\theta\rho}^*$

Montrons qu'il existe $\alpha \geq 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^2, q_{ijkh} \xi_{ij} \xi_{kh} \geq \alpha \xi_{ij} \xi_{ij}.$$

On a

$$\begin{aligned} q_{ijkh} \xi_{ij} \xi_{kh} &= q_{1111} \xi_{11}^2 + q_{2222} \xi_{22}^2 + 2q_{1122} \xi_{11} \xi_{22} + 4q_{1212} \xi_{12}^2 = \\ &= \frac{\mu(15\lambda + 14\mu)}{48\sqrt{3}(\lambda + \mu)} \xi_{11}^2 + \frac{3\mu(13\lambda + 10\mu)}{48\sqrt{3}(\lambda + \mu)} \xi_{22}^2 - \frac{6\mu(\lambda + 2\mu)}{48\sqrt{3}(\lambda + \mu)} \xi_{11} \xi_{22} + \frac{4\mu(13\lambda + 10\mu)}{48\sqrt{3}(\lambda + \mu)}. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} &\mu[(15\lambda + 14\mu)\xi_{11}^2 + 3(13\lambda + 10\mu)\xi_{22}^2 - 6(\lambda + 2\mu)\xi_{11}\xi_{22} + 4(13\lambda + 10\mu)\xi_{12}^2] = \\ &= \mu[8\lambda\xi_{11}^2 + 24\lambda\xi_{22}^2 + 32\lambda\xi_{12}^2 + 7(\lambda + 2\mu)\xi_{11}^2 + 15(\lambda + 2\mu)\xi_{22}^2 - 6(\lambda + 2\mu)\xi_{11}\xi_{22} + 20(\lambda + 2\mu)\xi_{12}^2] \\ &= \mu[8\lambda(\xi_{11}^2 + 3\xi_{22}^2 + 4\xi_{12}^2) + (\lambda + 2\mu)(7\xi_{11}^2 + 15\xi_{22}^2 - 6\xi_{11}\xi_{22} + \xi_{12}^2)] \\ &\geq \mu(\lambda + 2\mu)((\xi_{11} - \xi_{22})^2 + 6\xi_{11}^2 + 6\xi_{22}^2 + 20\xi_{12}^2) \\ &\geq \mu(\lambda + 2\mu)(6\xi_{11}^2 + 6\xi_{22}^2 + 20\xi_{12}^2) \\ &\geq \underbrace{6\mu(\lambda + 2\mu)}_{\beta} (\xi_{11}^2 + \xi_{22}^2 + 2\xi_{12}^2), \end{aligned}$$

d'où la coercivité des $q_{\alpha\beta\theta\rho}^*$.

AIII.4 GENERALISATION A UN ANGLE α QUELCONQUE. (POUR LES DEUX STRUCTURES).

CAS DE LA FIGURE 1 : STRUCTURE EN TRIANGLES.

Dans le cadre de cette généralisation, les deux barres obliques ne font plus avec l'horizontale des angles de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$, mais des angles α et $\pi - \alpha$ (avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.)

Ici, la mesure de Y_δ^* est égale à $\delta(2 + \frac{2}{\cos \alpha}) - 2\delta(\frac{\delta}{\sin \alpha} + \delta \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)) + \delta^2 \theta(1)$.

D'autre part, les dilatations correspondant aux différents barres sont données par :

Transformation de la barre H_δ^- en Y :

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \frac{y_2}{(\frac{\delta}{2\operatorname{tg}\alpha})} \end{cases}$$

Transformation de la barre H_δ^0 en Y :

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \frac{y_2}{(\frac{\delta}{\operatorname{tg}\alpha})} - \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{2\delta} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2} \end{cases}$$

Transformation de la barre H_δ^+ en Y :

$$\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \frac{y_2}{(\frac{\delta}{2\operatorname{tg}\alpha})} - \frac{2\operatorname{tg}^2 \alpha}{\delta} + \operatorname{tg}\alpha \end{cases}$$

Transformation de la barre O_2^δ en Y

$$\begin{cases} s_1 = \cos \alpha y_1 + \sin \alpha y_2 \\ s_2 = -\sin \alpha y_1 + \cos \alpha y_2, \end{cases}$$

suivi de

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{1 - \delta \sin \alpha} s_1 \\ t_2 = \frac{s_2}{\delta} \end{cases}$$

Transformation de la barre O_1^δ en Y

$$\begin{cases} s_1 = -\cos \alpha y_1 + \sin \alpha y_2 + \cos \alpha \\ s_2 = -\sin \alpha y_1 - \cos \alpha y_2 + \sin \alpha, \end{cases}$$

suivi de

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{1 - \delta \sin \alpha} s_1 \\ t_2 = \frac{s_2}{\delta}. \end{cases}$$

Par des techniques du type de celles que nous avons déjà employées, nous établissons le résultat suivant :

A III.4.1 RESULTAT DE CONVERGENCE SUR $q_{\alpha\beta\theta\rho}^\delta$ - CALCUL DES $q_{\alpha\beta\theta\rho}^*$.

THEOREME : *En faisant tendre δ vers zéro, on montre que*

$$\delta^{-1} q_{\alpha\beta\theta\rho}^\delta \rightarrow q_{\alpha\beta\theta\rho}^*.$$

De plus, le coefficient limite $q_{\alpha\beta\theta\rho}^$ est défini de la manière suivante :*

On a

$$12tg\alpha q_{\alpha\beta\theta\rho}^* = \left(2 + \frac{2}{\cos \alpha}\right) b_{\alpha\beta\theta\rho} - 2 \frac{b_{\alpha\beta 22} b_{22\theta\rho}}{b_{2222}} - \frac{(\sin^2 \alpha b_{\alpha\beta 11} - 2 \cos \alpha \sin \alpha b_{\alpha\beta 12} + \cos^2 \alpha b_{\alpha\beta 22})(\sin^2 \alpha b_{11\theta\rho} - 2 \cos \alpha \sin \alpha b_{12\theta\rho} + \cos^2 \alpha b_{22\theta\rho})}{\cos \alpha (\sin^4 \alpha b_{1111} + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha b_{1122} + 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha b_{1212} + \cos^4 \alpha b_{2222})} - \frac{(\sin^2 \alpha b_{\alpha\beta 11} + 2 \cos \alpha \sin \alpha b_{\alpha\beta 12} + \cos^2 \alpha b_{\alpha\beta 22})(\sin^2 \alpha b_{11\theta\rho} + 2 \cos \alpha \sin \alpha b_{12\theta\rho} + \cos^2 \alpha b_{22\theta\rho})}{\cos \alpha (\sin^4 \alpha b_{1111} + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha b_{1122} + 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha b_{1212} + \cos^4 \alpha b_{2222})}.$$

En prenant pour les $b_{\alpha\beta\theta\rho}$ des constantes de Lamé, on montre, tous calculs faits, que :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{1111}^* = \frac{\mu}{6(\lambda + \mu)} \left(\left(3 \frac{1 + \cos \alpha}{tg \alpha} + \cos^2 \alpha \sin \alpha \right) \lambda + 2 \left(\frac{1 + \cos \alpha}{tg \alpha} + \cos^2 \alpha \sin \alpha \right) \mu \right) \\ q_{2222}^* = \frac{2\mu \sin \alpha \left((3 + \cos^2 \alpha) \lambda + 2(1 + \cos^2 \alpha) \mu \right)}{6(\lambda + \mu)} \\ q_{1122}^* = q_{2211}^* = -\frac{\mu(\lambda + 2\mu) \cos^2 \alpha \sin \alpha}{6(\lambda + \mu)} \\ q_{1212}^* = q_{2112}^* = q_{2121}^* = q_{1221}^* = \frac{\mu \left((1 + \cos \alpha - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) \lambda + (1 + \cos \alpha - 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha) \mu \right)}{6 \sin \alpha (\lambda + \mu)} \\ \text{Les autres sont nuls.} \end{array} \right.$$

CAS DE LA FIGURE 3 : STRUCTURE EN LOSANGES.

On a le théorème suivant :

THEOREME :

En faisant tendre δ vers zéro, on montre que

$$\delta^{-1} q_{\alpha\beta\theta\rho}^{\delta} \rightarrow q_{\alpha\beta\theta\rho}^*.$$

De plus, le coefficient limite $q_{\alpha\beta\theta\rho}^*$ est défini de la manière suivante :

On a

$$12tg\alpha q_{\alpha\beta\theta\rho}^* = \frac{2}{\cos\alpha} b_{\alpha\beta\theta\rho} - \frac{(\sin^2\alpha b_{\alpha\beta11} - 2\cos\alpha \sin\alpha b_{\alpha\beta12} + \cos^2\alpha b_{\alpha\beta22})(\sin^2\alpha b_{11\theta\rho} - 2\cos\alpha \sin\alpha b_{12\theta\rho} + \cos^2\alpha b_{22\theta\rho})}{\cos\alpha(\sin^4\alpha b_{1111} + 2\cos^2\alpha \sin^2\alpha b_{1122} + 4\cos^2\alpha \sin^2\alpha b_{1212} + \cos^4\alpha b_{2222})} - \frac{(\sin^2\alpha b_{\alpha\beta11} + 2\cos\alpha \sin\alpha b_{\alpha\beta12} + \cos^2\alpha b_{\alpha\beta22})(\sin^2\alpha b_{11\theta\rho} + 2\cos\alpha \sin\alpha b_{12\theta\rho} + \cos^2\alpha b_{22\theta\rho})}{\cos\alpha(\sin^4\alpha b_{1111} + 2\cos^2\alpha \sin^2\alpha b_{1122} + 4\cos^2\alpha \sin^2\alpha b_{1212} + \cos^4\alpha b_{2222})}.$$

En prenant pour les $b_{\alpha\beta\theta\rho}$ des constantes de Lamé, on montre, tous calculs faits, que :

$$\left\{ \begin{array}{l} 6tg\alpha q_{1111}^* = \frac{\mu\cos\alpha(2\lambda + (\lambda + 2\mu)(1 + \sin^2\alpha))}{(\lambda + \mu)}, \\ 6tg\alpha q_{2222}^* = \frac{2\mu\sin^2\alpha(\lambda(2 + \cos^2\alpha) + 2\mu\cos^2\alpha)}{\lambda + \mu}, \\ 6tg\alpha q_{1122}^* = q_{2211}^* = -\frac{\mu\sin^2\alpha\cos\alpha(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)}, \\ 6tg\alpha q_{1212}^* = 6tg\alpha q_{2112}^* = 6tg\alpha q_{2121}^* = 6tg\alpha q_{1221}^* = \frac{\mu(\lambda + \mu) - \mu(\lambda + 2\mu)\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{\cos\alpha(\lambda + \mu)}, \\ \text{Les autres sont nuls.} \end{array} \right.$$

Si l'on prend en particulier $\alpha = \frac{\pi}{4}$, les trous en forme de losange sont des carrés, donc on retrouve la structure étudiée dans Cioranescu-Saint Jean Paulin [1].

Il est alors intéressant de comparer les résultats que nous avons obtenus à ceux de l'article précité, en prenant soin de ramener les dimensions caractéristiques de la plaque considérée dans celui-ci à celles de notre plaque.

Le repère utilisé dans cet article est parallèle aux barres, alors que le nôtre fait avec les barres un angle de $\frac{\pi}{4}$. Aussi, pour comparer les résultats obtenus par les deux calculs, nous reprenons l'équation homogénéisée obtenue par D. Cioranescu et J. Saint Jean

Paulin (écrite pour les bonnes longueurs), et nous la réécrivons dans notre système d'axes. Certes, il s'agit d'une équation stationnaire, mais elle se prête néanmoins très bien à notre vérification.

L'équation homogénéisée obtenue dans Cioranescu-Saint Jean Paulin [1] est donc ici du type

$$q_{\alpha\beta\theta\rho}^* \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_\alpha \partial z_\beta \partial z_\theta \partial z_\rho} = 2F,$$

avec

$$\begin{cases} q_{1111}^* = q_{2222}^* = \frac{\sqrt{2}E}{12}, \\ q_{1212}^* = q_{2112}^* = q_{2121}^* = q_{1221}^* = \frac{\sqrt{2}\mu}{6}, \\ \text{les autres sont nuls.} \end{cases}$$

Cette équation s'écrit

$$\begin{aligned} & q_{1111}^* \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_1^4} + q_{2222}^* \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_2^4} + q_{1212}^* \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_1 \partial z_1 \partial z_1 \partial z_2} + q_{1221}^* \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_1 \partial z_2 \partial z_2 \partial z_1} + \\ & + q_{2112}^* \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_2 \partial z_1 \partial z_1 \partial z_2} + q_{2121}^* \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_2 \partial z_1 \partial z_2 \partial z_1} = 2F. \end{aligned}$$

Nous avons détaillé l'écriture des dérivées partielles pour faciliter l'identification des coefficients homogénéisés.

On fait le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} z_1' = \frac{z_1 + z_2}{\sqrt{(2)}}, \\ z_2' = \frac{-z_1 + z_2}{\sqrt{(2)}}. \end{cases}$$

Avec les nouvelles variables, le membre de gauche de l'équation homogénéisée s'écrit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_1' \partial z_1' \partial z_1' \partial z_1'} Q_{1111}^* + \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_1' \partial z_1' \partial z_2' \partial z_2'} Q_{1122}^* + \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_1' \partial z_2' \partial z_1' \partial z_2'} Q_{1212}^* + \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_1' \partial z_2' \partial z_2' \partial z_1'} Q_{1221}^* + \\ & \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_2' \partial z_1' \partial z_1' \partial z_2'} Q_{2112}^* + \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_2' \partial z_1' \partial z_2' \partial z_1'} Q_{2121}^* + \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_2' \partial z_2' \partial z_1' \partial z_1'} Q_{2211}^* + \frac{\partial^4 U_3}{\partial z_2' \partial z_2' \partial z_2' \partial z_2'} Q_{2211}^*, \end{aligned}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{1111}^* = \frac{1}{2}q_{1111}^* + q_{1212}^*, \\ Q_{1122}^* = \frac{1}{2}q_{1111}^* - q_{1212}^*, \\ Q_{1212}^* = Q_{1221}^* = Q_{2112}^* = Q_{2121}^* = \frac{1}{2}q_{1111}^*, \\ Q_{2211}^* = \frac{1}{2}q_{1111}^* - q_{1212}^*, \\ Q_{2222}^* = \frac{1}{2}q_{1111}^* + q_{1212}^*, \end{array} \right.$$

d'où, en remplaçant les coefficients q_{1111}^* et q_{1212}^* par leurs valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{1111}^* = Q_{1111}^* = \sqrt{2} \frac{\mu(7\lambda + 6\mu)}{24(\lambda + \mu)}, \\ Q_{1212}^* = Q_{1221}^* = Q_{2112}^* = Q_{2121}^* = \sqrt{2} \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{24(\lambda + \mu)}, \\ Q_{1122}^* = Q_{2211}^* = \sqrt{2} \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{24(\lambda + \mu)}. \end{array} \right.$$

On retrouve les valeurs issues de la formule générale.

B) ETUDE DU CAS $r > 2$.

BI) DEPENDANCE RELATIVE A L'ÉPAISSEUR.

BI.1) Dilatation du domaine.

Pour les mêmes raisons que dans le cas $r = 2$, on dilate le domaine $\Omega_{e\epsilon\delta}$ en un domaine $\Omega_{\epsilon\delta}$ indépendant de e .

Les changements de variables et de fonctions sont analogues.

On obtient

$$(B.2) \left\{ \begin{array}{ll} e^{r+1} \frac{\partial^2 \phi_r^{\epsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial}{\partial z_\eta} c_{r\eta}^{\epsilon\delta} - \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{r3}^{\epsilon\delta} = f_r & \text{dans } \Omega_{\epsilon\delta} \times (0, T) (I.1.1), \\ e^r \frac{\partial^2 \phi_3^{\epsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{3\eta}^{\epsilon\delta} - \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{33}^{\epsilon\delta} = f_3 & \text{dans } \Omega_{\epsilon\delta} \times (0, T) (I.1.2), \\ \phi^{\epsilon\delta} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \sigma_{i\alpha}^{\epsilon\delta} n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial T_{\epsilon\delta} \times (0, T), \\ \sigma_{i3}^{\epsilon\delta} n_3 = g_i^\pm & \text{sur } \Gamma_{\epsilon\delta\pm} \times (0, T). \\ \phi_\alpha^{\epsilon\delta}(0) = e^{-1} \phi_\alpha^{\epsilon\delta 0} & \text{dans } \Omega_{\epsilon\delta}, \\ \frac{\partial \phi_\alpha^{\epsilon\delta}}{\partial t}(0) = e^{-1} \phi_\alpha^{\epsilon\delta 1} & \text{dans } \Omega_{\epsilon\delta}, \\ \phi_3^{\epsilon\delta}(0) = \phi_3^{\epsilon\delta 0} & \text{dans } \Omega_{\epsilon\delta}, \\ \frac{\partial \phi_3^{\epsilon\delta}}{\partial t}(0) = \phi_3^{\epsilon\delta 1} & \text{dans } \Omega_{\epsilon\delta}, \end{array} \right.$$

où les fonctions f_i et g_i^\pm sont définies comme dans le cas $r = 2$ (voir AI.2).

On va prouver le résultat suivant :

Bl.2) THEOREME 4.

Théorème 4

On suppose que $e^{\frac{r}{2}+1} |\phi_i^{\varepsilon\delta 1}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}$, $e |\frac{\partial\phi_i^{\varepsilon\delta 0}}{\partial z_\beta}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}$, et $|\frac{\partial\phi_i^{\varepsilon\delta 0}}{\partial z_3}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}$ sont bornés indépendamment de e , et que les fonctions f_i , $\frac{\partial f_i}{\partial t}$, g_i^\pm et $\frac{\partial g_i^\pm}{\partial t}$ le sont également.

Alors, on a

$$e^2 \phi^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \phi^{*\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty((0, T), V_{\varepsilon\delta}) \text{ faible*},$$

où

$$\begin{cases} \phi_3^{*\varepsilon\delta} = \Phi_3^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t) \\ \phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = -z_3 \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}(z_1, z_2, t) + \Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t). \end{cases}$$

De plus, $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ est caractérisée par

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^4 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}) & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \Phi_3^{*\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \gamma \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \gamma \times (0, T) \\ \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial \rho} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^3 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} n_\tau = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \end{array} \right.$$

et

$$\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = 0.$$

BI.3) DEMONSTRATION DU THEOREME 4.

BI.3.1) Estimations a priori et résultats de convergence.

Multiplicons l'équation en ϕ_τ par $e \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t}$, et l'équation en ϕ_3 par $\frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}$. En ajoutant les deux égalités obtenues, et en additionnant les termes similaires, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(e^{r+2} \sum_{\tau} \left| \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right|^2 + e^r \left| \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right|^2 + \right. \\ & + e^2 a_{\tau\eta\alpha\beta} \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta}) \gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\varepsilon\delta}) + 4e a_{\tau\eta\alpha 3} \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta}) \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta}) + 2a_{\tau\eta 33} \gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta}) \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta}) + \\ & + 4a_{\tau 3\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta}) \gamma_{\tau 3}(\phi^{\varepsilon\delta}) + 4e^{-1} a_{\tau 333} \gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta}) \gamma_{\tau 3}(\phi^{\varepsilon\delta}) + e^{-2} a_{3333} \left| \gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta}) \right|^2 \left. \right) dz \\ & = \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(e f_\tau \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + f_3 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) dz + \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \left(e g_\tau^\pm \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + g_3^\pm \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) ds. \end{aligned}$$

En intégrant ceci de 0 à t, et en multipliant les deux membres par e^2 , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left[\sum_{\tau} \left| e^{\frac{r}{2}+2} \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right|^2 + \left| e^{\frac{r}{2}+1} \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right|^2 + \right. \\ & + a_{\tau\eta\alpha\beta} \left(e^2 \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e^2 \gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & + 4a_{\tau\eta\alpha 3} \left(e^2 \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & + 2a_{\tau\eta 33} \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e^2 \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & + 4a_{\tau 3\alpha 3} \left(e \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e \gamma_{\tau 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & + 4a_{\tau 333} \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(e \gamma_{\tau 3}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) + \\ & + a_{3333} \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})(t) \right) \left. \right] dz \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(f_\tau e^3 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + f_3 e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) dz d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \left(g_\tau^\pm e^3 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + g_3^\pm e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right) dz d\tau + e^2 \frac{E(0)}{2}, \end{aligned}$$

où $E(t)$ est défini par

$$\begin{aligned}
E(t) = & \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} \left(\sum_{\tau} |e^{\frac{\tau}{2}+1} \frac{\partial \phi_{\tau}^{\epsilon\delta}}{\partial t}(t)|^2 + |e^{\frac{\tau}{2}} \frac{\partial \phi_3^{\epsilon\delta}}{\partial t}(t)|^2 + \right. \\
& + a_{\tau\eta\alpha\beta} \left(e^2 \gamma_{\tau\eta}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) + 4a_{\tau\eta\alpha 3} \left(\gamma_{\tau\eta}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) \left(e\gamma_{\alpha 3}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) + \\
& + 2a_{\tau\eta 33} \left(\gamma_{33}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{\tau\eta}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) + 4a_{\tau 3\alpha 3} \left(\gamma_{\alpha 3}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{\tau 3}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) + \\
& \left. + 4e^{-1} a_{\tau 333} \left(\gamma_{33}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{\tau 3}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) + e^{-2} a_{3333} \left(\gamma_{33}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) \left(\gamma_{33}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) \right] dz.
\end{aligned}$$

Appelons A (respectivement B) le premier membre (respectivement le second membre) de l'inégalité précédente.

En posant

$$(B.3) \quad \begin{cases} \theta_{\alpha\beta}(\phi^{\epsilon\delta}) = e^2 \gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\epsilon\delta}), \\ \theta_{\alpha 3}(\phi^{\epsilon\delta}) = e\gamma_{\alpha 3}(\phi^{\epsilon\delta}), \\ \theta_{33}(\phi^{\epsilon\delta}) = \gamma_{33}(\phi^{\epsilon\delta}), \end{cases}$$

le membre A s'écrit

$$(B.4) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} \left(\sum_{\tau} |e^{\frac{\tau}{2}+2} \frac{\partial \phi_{\tau}^{\epsilon\delta}}{\partial t}(t)|^2 + |e^{\frac{\tau}{2}+1} \frac{\partial \phi_3^{\epsilon\delta}}{\partial t}(t)|^2 + a_{ijkh} \theta_{kh}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \theta_{ij}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) dz.$$

Posons

$$\begin{cases} \psi_{\alpha}^{\epsilon\delta} = e^{\frac{\tau}{2}+2} \phi_{\alpha}^{\epsilon\delta}, \\ \psi_3^{\epsilon\delta} = e^{\frac{\tau}{2}+1} \phi_3^{\epsilon\delta}. \end{cases}$$

Le membre A s'écrit alors :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} \left(\sum_i \left| \frac{\partial \psi_i^{\epsilon\delta}}{\partial t} \right|^2 + a_{ijkh} \theta_{kh}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \theta_{ij}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right) dz.$$

Or, d'après la coercivité des a_{ijkh} , on a

$$(B.6) \quad A \geq \frac{1}{2} \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i^{\epsilon\delta}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{\epsilon\delta})}^2 + C_0 \sum_{i,j} \left\| \theta_{ij}(\phi^{\epsilon\delta})(t) \right\|_{L^2(\Omega_{\epsilon\delta})}^2.$$

D'autre part, on a

$$B = \int_0^t \int_{\Omega_{\epsilon\delta}} \left(f_{\tau} e^3 \frac{\partial \phi_{\tau}^{\epsilon\delta}}{\partial t} + f_3 e^2 \frac{\partial \phi_3^{\epsilon\delta}}{\partial t} \right) dz d\tau + \int_0^t \int_{\Gamma_{\epsilon\delta}^{\pm}} \left(g_{\tau}^{\pm} e^3 \frac{\partial \phi_{\tau}^{\epsilon\delta}}{\partial t} + g_3^{\pm} e^2 \frac{\partial \phi_3^{\epsilon\delta}}{\partial t} \right) d\sigma d\tau + e^2 \frac{E(0)}{2}.$$

Or, on a

$$\int_0^t \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} (f_\tau e^3 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + f_3 e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}) dz d\tau = \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} (f_\tau(t)(e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}(t)) + f_3(t)(e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}(t))) dz -$$

$$- \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} (f_\tau(0)(e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}(0)) + f_3(0)(e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}(0))) dz - \int_0^t \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} (\frac{\partial f_\tau}{\partial t} e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta} + \frac{\partial f_3}{\partial t} e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}) dz d\tau,$$

d'où

$$\int_0^t \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} (f_\tau e^3 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + f_3 e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}) dz d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha} \|f_\tau(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \frac{\alpha}{2} \|e^3 \phi_\tau(t)^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|f_3(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \frac{\alpha}{2} \|e^2 \phi_3(t)^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \|f_\tau(0)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \frac{1}{2} \|e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}(0)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \frac{1}{2} \|f_3(0)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \frac{1}{2} \|e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}(0)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \|\frac{\partial f_\tau(t)}{\partial t}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|\frac{\partial f_3}{\partial t}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \|e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau$$

$$\leq C_1 \left(\|f_i\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 + \|\frac{\partial f_i}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \right) + C_1' \alpha \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 +$$

$$+ C_1'' \int_0^t \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau + C_1'''.$$

De plus, on a

$$\int_0^t \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} (g_\tau^\pm e^3 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + g_3^\pm e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}) ds d\tau = \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} (g_\tau^\pm(t) e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}(t) + g_3^\pm(t) e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}(t)) ds -$$

$$- \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} (g_\tau^\pm(0) e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}(0) + g_3^\pm(0) e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}(0)) ds - \int_0^t \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} (\frac{\partial g_\tau^\pm}{\partial t} e^3 \frac{\partial \phi_\tau}{\partial t} + \frac{\partial g_3^\pm}{\partial t} e^2 \frac{\partial \phi_3}{\partial t}) ds d\tau.$$

Par conséquent, on a

$$\int_0^t \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} (g_\tau^\pm e^3 \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} + g_3^\pm e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}) ds d\tau \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\alpha} \|g_\tau^\pm(t)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}(t)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|g_3^\pm(t)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}(t)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \|g_\tau^\pm(0)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 + \frac{1}{2} \|e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}(0)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 + \frac{1}{2} \|g_3^\pm(0)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 + \frac{1}{2} \|e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}(0)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \|\frac{\partial g_\tau^\pm(t)}{\partial t}\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|e^3 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}(t)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|\frac{\partial g_3^\pm}{\partial t}\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^t \|e^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 d\tau$$

$$\leq C_2 \left(\|g_i^\pm\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm))}^2 + \|\frac{\partial g_i^\pm}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm))}^2 \right) + C_2' \alpha \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 +$$

$$+ C_2'' \int_0^t \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(\tau)\|_{L^2(\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm)}^2 d\tau + C_2'''.$$

D'après les conditions initiales, on a aussi

$$e^2 E(0) \leq 0.$$

On obtient donc finalement

$$(B.7) \quad B \leq C_3 + C'_3 \alpha \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + C''_3 \int_0^t \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau.$$

D'après (B.6) et (B.7), on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + C_0 \sum_{i,j} \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \leq \\ & C_3 + C'_3 \alpha \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + C''_3 \int_0^t \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Choisissons α tel que $C_0 \geq C'_3 \alpha$.

Alors, on a

$$\begin{aligned} & \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 + \sum_{i,j} \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \leq \\ & \leq K + K' \int_0^t \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i,j} \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \leq K + K' \int_0^t \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 d\tau,$$

D'après le lemme de Gronwall, on a

$$\sum_{i,j} \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})(t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}^2 \leq K e^{K'T},$$

d'où

$$(B.8) \quad \sum_{i,j} \|\theta_{ij}(\phi^{\varepsilon\delta})\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C,$$

soit encore

$$(B.9) \quad \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial \psi_i^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C,$$

soit enfin

$$(B10) \quad |e^{\frac{T}{2}+2} \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t}|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C, \quad (B10.1)$$

$$|e^{\frac{T}{2}+1} \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq C, \quad (B10.2)$$

et d'après (B.8), on a

$$(B.11) \quad \begin{cases} |e^2 \gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\varepsilon\delta})|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq C, & (B.11.1) \\ |e\gamma_{\alpha 3}(\phi^{\varepsilon\delta})|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq C, & (B.11.2) \\ |e\gamma_{33}(\phi^{\varepsilon\delta})|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq C. & (B.11.3) \end{cases}$$

D'après (B.11.1), (B.11.2) et (B.11.3), et d'après l'inégalité de Korn, on a

$$e^2 \phi^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \phi^{*\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty(0, T, V_{\varepsilon\delta}) \text{ faible.}$$

De même, d'après (B.11), on a

$$(B.12) \quad |e^2 \sigma_{ij}^{\varepsilon\delta}|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}^2 \leq 0.$$

Par conséquent, on a

$$(B.13) \quad e^2 \sigma_{ij}^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \sigma_{ij}^{*\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible.}$$

Par un raisonnement analogue à celui utilisé dans le cas $r = 2$, on montre que

$$\begin{cases} \phi_3^{*\varepsilon\delta} = \Phi_3^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t), \\ \phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = -z_3 \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha} + \Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t). \end{cases}$$

BI.3.2) Caractérisation des fonctions $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ et $\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}$.

Pour obtenir les équations limites qui caractérisent $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ et $\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}$, nous allons utiliser une méthode analogue à celle de Caillerie.

On multiplie l'équation

$$e^{r+1} \frac{\partial^2 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{r\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{r3}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = f_\tau$$

par

$$e z_3 \theta_\tau(z_1, z_2, t),$$

avec $\theta_\tau \in D([0, T[, V(\omega_{\varepsilon\delta}))$, indépendante de z_3 ,

où

$$V(\omega_{\varepsilon\delta}) = \{v \in H^1(\omega_{\varepsilon\delta}), v = 0 \text{ sur } \partial\omega\}.$$

On obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(e^{r+2} \frac{\partial^2 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} z_3 \theta_\tau - e^2 \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{\tau\eta}^{\varepsilon\delta} z_3 \theta_\tau - e \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{\tau 3}^{\varepsilon\delta} z_3 \theta_\tau \right) dz d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_\tau e z_3 \theta_\tau dz d\tau,$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(e^{r+2} \frac{\partial^2 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} z_3 \theta_\tau dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \sigma_{\tau\eta} z_3 \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \sigma_{\tau\eta} z_3 \theta_\tau dz d\tau + \right. \\ & \left. + \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \sigma_{\tau 3} e z_3 \theta_\tau n_3 ds d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_\tau e z_3 \theta_\tau dz d\tau. \right. \end{aligned}$$

L'équation (B.14) s'écrit

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^{r+2} e^{-1} \phi_\tau^{1\varepsilon\delta} z_3 \theta_\tau(z_1, z_2, 0) dz + e^{r+2} \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} z_3 \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz d\tau + \\ (B.15) \quad & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 \sigma_{\tau\eta} z_3 \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e \sigma_{\tau 3} \theta_\tau dz d\tau + \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} g_\tau^\pm e z_3 \theta_\tau ds dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_\tau e z_3 \theta_\tau dz d\tau. \end{aligned}$$

Or, d'après les conditions initiales, on a

$$e^{\frac{r}{2}+1} |\phi_\tau^{1\varepsilon\delta}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} \leq C.$$

Puisque

$$|e^{r+1} \phi_\tau^{1\varepsilon\delta}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} = |e^{\frac{r}{2}+1} \phi_\tau^{1\varepsilon\delta}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} e^{\frac{r}{2}},$$

et

$$|e^{r+1} \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} = |e^{\frac{r}{2}+1} \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} e^{\frac{r}{2}},$$

il vient

$$-0 + 0 + \int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \left(M_{\tau\eta}^* \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} + Q_\tau^* \theta_\tau \right) dz_1 dz_2 d\tau = 0,$$

soit

$$(B.16) \quad -\frac{\partial M_{\tau\eta}^*}{\partial z_\eta} + Q_\tau^* = 0.$$

Multiplions maintenant par $\theta_3(z_1, z_2, t)$ l'équation

$$e^r \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{3\eta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z_3} = f_3,$$

où $\theta_3(z_1, z_2, t) \in \mathcal{D}([0, T[, H_0^1(\omega))$. Il vient

$$\begin{aligned} & -e^r \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \phi_3^{1\varepsilon\delta} \theta_3(z_1, z_2, 0) dz - \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^r \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \frac{\partial \theta_3}{\partial t} dz + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(e \sigma_{3\eta} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_3} + \sigma_{33} \cdot 0 \right) dz d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} g_3^\pm \theta_3 ds d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}^\pm} f_3 \theta_3 dz d\tau. \end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers zéro.

On a d'une part

$$e^r |\phi_3^{1\varepsilon\delta}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} = e^{\frac{r}{2}-1} e^{\frac{r}{2}+1} |\phi_3^{1\varepsilon\delta}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})},$$

et d'autre part

$$e^r \left| \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} = e^{\frac{r}{2}-1} e^{\frac{r}{2}+1} \left| \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})},$$

d'où l'on obtient

$$(B.17) \quad -\frac{\partial Q_\eta^*}{\partial z_\eta} = (g_3^{*+} + g_3^{*-}) + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3.$$

Dans (B.17), remplaçons Q_τ^* par sa valeur tirée de (B.16).

Il vient

$$\frac{\partial^2 M_{\eta\tau}^*}{\partial z_\eta \partial z_\tau} \doteq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*-}).$$

Multiplions maintenant par $e\theta_t(z_1, z_2, t)$ l'équation

$$e^{r+1} \frac{\partial^2 \phi_\tau}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{\tau 3}}{\partial z_3} = f_\tau,$$

avec $\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, V(\omega_{\varepsilon\delta}))$.

On obtient

$$\begin{aligned} & e^{r+2} \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial^2 \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} dz d\tau - e^2 \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz d\tau - e \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}}{\partial z_3} \theta_\tau dz d\tau = \\ & = -e^{r+2} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^{-1} \phi_\tau^{1\varepsilon\delta} \theta_\tau(z_1, z_2, 0) dz - e^{r+2} \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \phi_\tau^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz d\tau + \\ & \quad + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} (e^2 \sigma_{\tau\eta} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} + 0) dz dt - e \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \sigma_{\tau 3} \theta_\tau n_3 ds d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} f_\tau \theta_\tau dz d\tau. \end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers zéro.

Il vient

$$\int_0^T \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} N_{\tau\eta}^* \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt = 0,$$

soit

$$(B.19) \quad -\frac{\partial N_{\tau\eta}^*}{\partial z_\eta} = 0.$$

Soit maintenant $\theta_i \in \mathcal{D}([0, T[, \mathcal{D}(\omega))$, indépendante de z_3 .

posons $v_i = z_3 \theta_i(z_1, z_2, t)$.

On multiplie par $e^2 v_r$ l'équation

$$e^{r+1} \frac{\partial^2 \phi_r^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{r\eta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{r3}}{\partial z_3} = f_r,$$

et par $e^2 v_3$ l'équation

$$e^r \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{3\eta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z_3} = f_3.$$

Il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^{r+3} \frac{\partial^2 \phi_r^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} v_r dz dt + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^{r+2} \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} v_3 dz dt - \\ & - e^3 \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \sigma_{i\eta}}{\partial z_\eta} v_i dz dt - e^2 \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial z_3} v_i dz dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 f_3 v_3 dz dt + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 f_r v_r dz dt \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^2 f_i v_i dz dt = - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^{r+3} e^{-1} \phi_r^{1\varepsilon\delta} z_3 \theta_r(z_1, z_2, 0) dz - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} e^{r+2} e^{-1} \phi_3^{1\varepsilon\delta} z_3 \theta_3(z_1, z_2, 0) dz - \\ & - e^{r+2} \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} z_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial t} dz dt - e^{r+3} \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \phi_r^{\varepsilon\delta}}{\partial t} z_3 \theta_r dz dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(e^3 \sigma_{i\eta} z_3 \frac{\partial \theta_i}{\partial z_\eta} + e^2 \sigma_{i3} \frac{\partial z_3}{\partial z_3} \theta_i \right) dz dt - e^2 \int_0^T \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \sigma_{i3} z_3 \theta_i n_3 ds dt. \end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers zéro.

Il vient

$$0 = -0 - 0 - 0 - 0 + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left(0 + \sigma_{i3}^* \theta_i \right) dz dt - 0,$$

soit

$$\sigma_{i3}^* = 0.$$

Comme dans le cas $r = 2$, on remplace $M_{\alpha\beta}^*$ (resp. $N_{\alpha\beta}^*$) dans (B.18) (resp. dans (B.19)).

On trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^4 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 + (g_3^{*+} + g_3^{*+}) \text{ sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \Phi_3^{*\varepsilon\delta} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{\partial \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} n_\eta = 0 \text{ sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \frac{\partial}{\partial z_\eta} \left(\frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 \Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \right) n_\tau = 0 \text{ sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T), \end{array} \right.$$

et

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_\eta} (b_{\tau\eta\theta\rho}\gamma_{\theta\rho}(\Phi^{*\varepsilon\delta})) = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T) \\ \Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ b_{\tau\eta\theta\rho}\gamma_{\theta\rho}(\Phi^{*\varepsilon\delta})n_\eta = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \times (0, T), \end{cases}$$

d'où

$$\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T).$$

BI.3.3) COMMENTAIRE.

Bien que le problème de départ soit un problème d'évolution, le problème limite qui caractérise $\Phi_3^{*\varepsilon\delta}$ est donc un problème stationnaire du quatrième ordre. Les passages à la limite en ε et en δ sont traités dans (Cioranescu-Saint Jean Paulin [9]), article qui traite de ce type de problèmes pour d'autres structures réticulées.

C) ETUDE DU CAS $0 < r \leq 2$.

CI) DEPENDANCE RELATIVE A L'ÉPAISSEUR.

Nous reprenons l'étude du problème (A1). Comme pour les deux cas précédents, il faut dilater le domaine $\Omega_{e\epsilon\delta}$ en un domaine $\Omega_{\epsilon\delta}$ indépendant de e .

Des changements de variables et de fonctions identiques à ceux qui ont été utilisés dans les cas précédents nous donnent le système

$$(C.1) \left\{ \begin{array}{ll} e^{r+1} \frac{\partial^2 \phi_\tau^{\epsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{\tau\eta}^{\epsilon\delta} - \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{\tau 3}^{\epsilon\delta} & = e^{\frac{r}{2}-1} f_\tau \quad \text{dans} \quad \Omega_{\epsilon\delta} \times (0, T)(C.1.1), \\ e^r \frac{\partial^2 \phi_3^{\epsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{3\eta}^{\epsilon\delta} - \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{33}^{\epsilon\delta} & = e^{\frac{r}{2}-1} f_3 \quad \text{dans} \quad \Omega_{\epsilon\delta} \times (0, T)(C.1.2), \\ \phi^{\epsilon\delta} & = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0, T), \\ \sigma_{i\alpha}^{\epsilon\delta} n_\alpha & = 0 \quad \text{sur} \quad \partial T_{\epsilon\delta} \times (0, T), \\ \sigma_{i3}^{\epsilon\delta} n_3 & = g_i^\pm \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\epsilon\delta}^\pm \times (0, T). \\ \phi_\alpha^{\epsilon\delta}(0) & = e^{-1} \phi_\alpha^{\epsilon\delta 0} \quad \text{dans} \quad \Omega_{\epsilon\delta}, \\ \frac{\partial \phi_\alpha^{\epsilon\delta}}{\partial t}(0) & = e^{-1} \phi_\alpha^{\epsilon\delta 1} \quad \text{dans} \quad \Omega_{\epsilon\delta}, \\ \phi_3^{\epsilon\delta}(0) & = \phi_3^{\epsilon\delta 0} \quad \text{dans} \quad \Omega_{\epsilon\delta}, \\ \frac{\partial \phi_3^{\epsilon\delta}}{\partial t}(0) & = \phi_3^{\epsilon\delta 1} \quad \text{dans} \quad \Omega_{\epsilon\delta}, \end{array} \right.$$

avec les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}^{\epsilon\delta} = a_{ij\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(\phi^{\epsilon\delta}) + 2e^{-1} a_{ij\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}(\phi^{\epsilon\delta}) + e^{-2} a_{ij 33} \gamma_{33}(\phi^{\epsilon\delta}), \\ e^{\frac{r}{2}-1} f_3 = F_3, \\ e^{\frac{r}{2}-1} f_\alpha = e F_\alpha, \\ g_\alpha = G_\alpha, \\ g_3 = e^{-1} G_3. \end{array} \right.$$

CI.1) THEOREME 5.

Théorème 5 :

On suppose que

$e^{\frac{7}{2}+1} \|\phi_i^{\varepsilon\delta 1}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}$, $e \|\frac{\partial\phi_i^{\varepsilon\delta 0}}{\partial z_\beta}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}$, et $\|\frac{\partial\phi_i^{\varepsilon\delta 0}}{\partial z_3}\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})}$ sont bornés indépendamment de ε .

Alors,

$$e^2 \phi^{\varepsilon\delta} \rightharpoonup \phi^{*\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty((0, T), V(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible*},$$

où

$$\begin{cases} \phi_3^{*\varepsilon\delta} = \Phi_3^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t) \\ \phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = -z_3 \frac{\partial\Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha}(z_1, z_2, t) + \Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}(z_1, z_2, t). \end{cases}$$

De plus, on a

$$\frac{\partial\Phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} = 0.$$

Soit la fonction $\widetilde{\phi_3^{*\varepsilon\delta}}$ définie par

$$e^{\frac{7}{2}+1} \frac{\partial\phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \rightharpoonup \widetilde{\phi_3^{*\varepsilon\delta}}.$$

Alors, la fonction $\widetilde{\phi_3^{*\varepsilon\delta}}$ est caractérisée par

$$\begin{cases} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial\widetilde{\phi_3^{*\varepsilon\delta}}}{\partial t} dz_3 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T), \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\phi_3^{*\varepsilon\delta}}(0) dz_3 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi_3^{1*\varepsilon\delta} dz_3 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{0\}, \end{cases}$$

la fonction $\phi_3^{1*\varepsilon\delta}$ étant définie par $e^{\frac{7}{2}+1} \phi_3^{1\varepsilon\delta} \rightharpoonup \phi_3^{1*\varepsilon\delta}$ dans $L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})$,

et

$$\phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = 0.$$

CI.2) DEMONSTRATION DU THEOREME 5.

Par des techniques du type de celles employées pour les cas $r = 2$ et $r > 2$, on établit des estimations a priori identiques à celles du cas $r > 2$ (voir (B.10) et (B.11)).

Or, on peut écrire

$$e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} = e^{\frac{r}{2}+1} \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} e^{1-\frac{r}{2}}.$$

De plus, on a

$$(C.2) \quad \left\| e^{\frac{r}{2}+1} \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq C \quad (\text{indépendant de } \varepsilon.)$$

Or, on a $1 - \frac{r}{2} > 0$, donc

$$e^2 \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \phi_3^{*\varepsilon\delta}}{\partial t} = 0.$$

L'estimation (C.2) prouve l'existence d'une fonction $\tilde{\phi}_3$ telle que

$$e^{\frac{r}{2}+1} \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \rightharpoonup \tilde{\phi}_3^{*\varepsilon\delta} \quad \text{dans } L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } *.$$

Caractérisons la fonction $\tilde{\phi}_3^{*\varepsilon\delta}$.

On multiplie l'équation

$$e^r \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} - e \frac{\partial \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} - \frac{\partial \sigma_{33}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} = e^{\frac{r}{2}-1} f_3 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \times (0,T)$$

par la fonction $\theta_3(z_1, z_2, t) \in \mathcal{D}([0, T[, H_0^1(\omega))$.

Il vient

$$\int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \int_0^T e^r \frac{\partial^2 \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t^2} \theta_3 dz d\tau - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \int_0^T e \frac{\partial \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_\eta} \theta_3 dz d\tau - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \int_0^T e \frac{\partial \sigma_{33}^{\varepsilon\delta}}{\partial z_3} \theta_3 dz d\tau = e^{\frac{r}{2}-1} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \int_0^T f_3 \theta_3,$$

soit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} -e^r \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} (0) \theta_3(0) dz - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \int_0^T e^r \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \frac{\partial \theta_3}{\partial t} dz d\tau + \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \int_0^T e \sigma_{3\eta}^{\varepsilon\delta} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz d\tau = \\ = \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \int_0^T e^{\frac{r}{2}-1} f_3 \theta_3 dz d\tau + \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm} \int_0^T g_3^\pm \theta_3 ds d\tau. \end{aligned}$$

Multiplions par $e^{1-\frac{r}{2}}$ les deux membres de l'égalité.

Il vient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} -e^{1+\frac{\tau}{2}} \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(0) \theta_3(0) dz - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T)} e^{1+\frac{\tau}{2}} \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t} \frac{\partial \theta_3}{\partial t} dz d\tau + \int_{\Omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T)} e \sigma_{3\eta} e^{1-\frac{\tau}{2}} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz d\tau = \\
(C.3) \quad & = \int_{\Omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T)} f_3 \theta_3 dz d\tau + \int_{\Gamma_{\varepsilon\delta}^\pm \times (0, T)} e^{1-\frac{\tau}{2}} g_3^\pm \theta_3 ds d\tau.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$e^{1+\frac{\tau}{2}} \frac{\partial \phi_3^{\varepsilon\delta}}{\partial t}(0) = e^{1+\frac{\tau}{2}} \phi_3^{1\varepsilon\delta*} \quad (\text{borné indépendamment de } \varepsilon \text{ d'après les conditions initiales}).$$

Soit donc $\phi_3^{1\varepsilon\delta*}$ définie par

$$e^{1+\frac{\tau}{2}} \phi_3^{1\varepsilon\delta} \rightharpoonup \phi_3^{1\varepsilon\delta*} \quad \text{dans } L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \text{ faible.}$$

Faisons tendre ε vers zéro dans l'égalité (C.3).

Il vient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \phi_3^{1*\varepsilon\delta} \theta_3(0) dz - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T)} \widetilde{\phi_3^{\varepsilon\delta}} \frac{\partial \theta_3}{\partial t} dz d\tau + 0 = \\
& = \int_{\Omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T)} f_3^* \theta_3 dz d\tau,
\end{aligned}$$

soit, pour toute fonction $\theta_3(z_1, z_2, t)$:

$$- \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \phi_3^{1*\varepsilon\delta} \theta_3(0) dz + \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \widetilde{\phi_3^{\varepsilon\delta}}(0) \theta_3(0) dz + \int_{\Omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T)} \frac{\partial \widetilde{\phi_3^{\varepsilon\delta}}}{\partial t} \theta_3 dz d\tau = \int_{\Omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T)} f_3^* \theta_3 dz d\tau.$$

Il vient donc

$$\begin{cases} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \widetilde{\phi_3^{\varepsilon\delta}}}{\partial t} dz_3 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T), \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{\phi_3^{\varepsilon\delta}}(0) dz_3 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi_3^{1*\varepsilon\delta} dz_3 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times (0, T). \end{cases}$$

La caractérisation de $\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta}$ est effectuée par des méthodes analogues à celles employées dans les autres cas. On montre que $\Phi_\alpha^{*\varepsilon\delta} = 0$.

2. PROBLEME DE THERMIQUE- CAS BIDIMENTIONNEL.

Nous étudions maintenant une structure bidimensionnelle, dont la géométrie est identique à celle de la coupe horizontales de la figure (1).

Sur cette structure, nous définissons le problème thermique suivant :

$$(1) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} \right) = f & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \\ a_{ij} \frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} n_i = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta} \\ u^{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

Nous supposons f dans $L^2(\Omega)$.

D'autre part, nous supposons les a_{ij} constants, indépendants de ε et de δ , et tels que

$$\exists A > 0, \forall \xi \in \mathcal{R}^2, \quad a_{ij} \xi_i \xi_j \geq A \xi_i \xi_i$$

Sous ces hypothèses, le problème (1) a une solution unique $u^{\varepsilon\delta}$.

2.1. RAPPEL DE RESULTATS D'HOMOGENEISATION

D'après des résultats classiques d'homogénéisation, nous savons qu'il existe un prolongement $P^\varepsilon u^{\varepsilon\delta}$ de $u^{\varepsilon\delta}$, qui converge faiblement dans $H_0^1(\omega)$ vers la solution du problème homogénéisé

$$(2) \quad \begin{cases} -q_{ij}^\delta \frac{\partial^2 u^\delta}{\partial x_i \partial x_j} = \text{mes}(Y_\delta^*) f & \text{dans } \omega \\ u^\delta = 0 & \text{sur } \omega, \end{cases}$$

où les coefficients homogénéisés q_{ij}^δ sont donnés par

$$(3) \quad q_{ij}^\delta = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_\delta^*} \left(a_{ij} - a_{ik} \frac{\partial \chi_\delta^j}{\partial y_k} \right) dy,$$

les fonctions χ_δ^j étant solutions du système

$$(4) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_k} \left(a_{kl} \frac{\partial (\chi_\delta^j - y_j)}{\partial y_l} \right) = 0 & \text{dans } Y_\delta^* \\ a_{kl} \frac{\partial (\chi_\delta^j - y_j)}{\partial y_l} n_k = 0 & \text{sur } \partial t_\delta \\ \chi_\delta^j \text{ est périodique dans } Y_\delta. \end{cases}$$

Nous nous proposons à présent de faire tendre δ vers zéro dans le problème homogénéisé (2).

2.2 ESTIMATION A PRIORI SUR χ_δ^j ET RESULTAT DE CONVERGENCES SUR q_{ij}^δ ET CALCUL EXPLICITE DES COEFFICIENTS q_{ij}^* .

Multiplions par χ_δ^j le problème (4), et utilisons la formule de Green .

Puisque $mes(Y_\delta^*) = 3\delta(2 - \sqrt{3}\delta)$, on obtient

$$(5) \quad |\nabla \chi_\delta^j|_{L^2(Y_\delta^*)} \leq c\delta^{\frac{1}{2}}$$

En conséquence, on a

$$(6) \quad \delta q_{ij}^\delta \rightarrow q_{ij}^*, \text{ lorsque } \delta \text{ tend vers zéro.}$$

Décomposons maintenant Y_δ^j de la même manière que pour le problème d'élasticité. Alors on a

$$(7) \quad \begin{aligned} \delta^{-1} q_{ij}^\delta &= 3(2 - \sqrt{3}\delta) - \\ &- \delta^{-1} \left(\int_{H_\delta^-} + \int_{H_\delta^0} + \int_{H_\delta^+} + \int_{\theta_\delta^1} + \int_{\theta_\delta^2} + \int_{N_\delta} - C \int_{R_\delta} \right) a_{ik} \frac{\partial \chi_\delta^j}{\partial y_k} dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

Les deux dernières intégrales disparaîtront lors du passage à la limite en δ . Par des techniques déjà employées, on montre

$$\begin{aligned} q_{ij}^* &= 6a_{ij} - 2 \frac{a_{i2}a_{2j}}{a_{22}} - \\ &- 2 \frac{(a_{i2} - \sqrt{3}a_{i1})(a_{2j} - \sqrt{3}a_{1j})}{3a_{11} - \sqrt{3}a_{12} - \sqrt{3}a_{21} + a_{22}} - 2 \frac{(\sqrt{3}a_{i1} - a_{i2})(\sqrt{3}a_{1j} - a_{2j})}{3a_{11} + \sqrt{3}a_{12} + \sqrt{3}a_{21} + a_{22}}. \end{aligned}$$

Remarque : Les dénominateurs $3a_{11} - \sqrt{3}a_{12} - \sqrt{3}a_{21} + a_{22}$ et $3a_{11} + \sqrt{3}a_{12} + \sqrt{3}a_{21} + a_{22}$ sont non nuls.

En effet les coefficients a_{ij} étant coercifs, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \xi \in \mathcal{R}^2, \quad a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \alpha\xi_i\xi_i.$$

Pour $\xi \neq 0$, on a donc $a_{ij}\xi_i\xi_j \geq 0$.

Prenons $\xi_1 = \sqrt{3}$ et $\xi_2 = -1$.

Alors, on a

$$\begin{aligned} a_{ij}\xi_i\xi_j &= a_{11}\xi_1^2 + a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{21}\xi_2\xi_1 + a_{22}\xi_2^2 \\ &= 3a_{11} - \sqrt{3}a_{12} - \sqrt{3}a_{21} + a_{22} \geq 4\alpha. \end{aligned}$$

Pour $3a_{11} + \sqrt{3}a_{12} + \sqrt{3}a_{21} + a_{22}$, on prend $\xi_1 = \sqrt{3}$ et $\xi_2 = 1$.

Alors, on a

$$\begin{aligned} a_{ij}\xi_i\xi_j &= a_{11}\xi_1^2 + a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{21}\xi_2\xi_1 + a_{22}\xi_2^2 \\ &= 3a_{11} + \sqrt{3}a_{12} + \sqrt{3}a_{21} + a_{22} \geq 4\alpha. \end{aligned}$$

Etudions la coercivité des coefficients q_{ij}^* .

Posons

$$\begin{cases} D_1 = 3a_{11} - \sqrt{3}a_{12} - \sqrt{3}a_{21} + a_{22} \\ D_2 = 3a_{11} + \sqrt{3}a_{12} + \sqrt{3}a_{21} + a_{22} \end{cases}$$

Tout calcul fait, on a

$$\begin{cases} q_{11}^* = (2a_{11} - 2\frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}} + 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}))(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2}) \\ q_{12}^* = q_{21}^* = 2\sqrt{3}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2}) \\ q_{22}^* = 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(\frac{3}{D_1} + \frac{3}{D_2}), \end{cases}$$

on a donc

$$\begin{aligned} q_{11}^*\xi_1^2 + q_{12}^*\xi_1\xi_2 + q_{21}^*\xi_2\xi_1 + q_{22}^*\xi_2^2 &= \\ &= 2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \left[\frac{\xi_1^2}{a_{22}} + (\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2})\xi_1^2 + 2\sqrt{3}(\frac{1}{D_1} - \frac{1}{D_2})\xi_1\xi_2 + (\frac{3}{D_1} + \frac{3}{D_2})\xi_2^2 \right]. \end{aligned}$$

Le facteur $2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ étant strictement positif, il suffit d'étudier le terme entre crochets.

On a déjà montré que D_1 et D_2 sont strictement positifs.

En conséquence, on peut écrire, en supposant $D_2 - D_1 < 0$

$$\begin{aligned} &\frac{\xi_1^2 D_1 D_2}{a_{22}} + (D_1 + D_2)\xi_1^2 + 2\sqrt{3}(D_2 - D_1)\xi_1\xi_2 + 3(D_1 + D_2)\xi_2^2 \\ &\geq \frac{\xi_1^2 D_1 D_2}{a_{22}} + (D_1 + D_2)\xi_1^2 + \sqrt{3}(D_2 - D_1)(\frac{1}{\sqrt{3}}\xi_1^2 + \sqrt{3}\xi_2^2) + 3(D_1 + D_2)\xi_1^2 \\ &\geq \xi_1^2(\frac{D_1 D_2}{a_{22}} + 2D_2) + 6D_2\xi_2^2 \\ &\geq \inf(\frac{D_1 D_2}{a_{22}} + 2D_2, 6D_2)(\xi_1^2 + \xi_2^2) \\ &\geq \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2) \end{aligned}$$

Si $D_2 - D_1 > 0$, posons $\xi_1' = -\xi_1$ et $\xi_2' = -\xi_2$

Alors

$$\begin{aligned} & \frac{\xi_1^2 D_1 D_2}{a_{22}} + (D_1 + D_2)\xi_1^2 + 2\sqrt{3}(D_2 - D_1)\xi_1 \xi_2 + 3(D_1 + D_2)\xi_2^2 \\ &= \frac{\xi_1^{2'} D_1 D_2}{a_{22}} + (D_1 + D_2)\xi_1^{2'} + 2\sqrt{3}\underbrace{(D_1 - D_2)}_{<0} \xi_1' \xi_2' + 3(D_1 + D_2)\xi_2^{2'} \\ &\geq \alpha(\xi_1^{2'} + \xi_2^{2'}) \quad \text{d'après le cas précédent} \\ &\geq \alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2) \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE II :

- [1] BENSOUSSAN A., LIONS J.-L., PAPANICOLAOU G., Asymptotic Analysis for periodic structures, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [2] BRIZZI R., CHALOT J.-P., Homogénéisation dans des ouverts à frontière fortement oscillante, Thèse, 1978.
- [3] CAILLERIE D., Étude de quelques problèmes de perturbations en théorie de l'élasticité et en conduction thermique, Thèse d'état, Paris, 1982.
- [4] CIARLET P., A justification of the Von Karman equations, Arch. Rat. Mech. Anal. 73 (1980), 349-389.
- [5] CIARLET P., DESTUYNDER P., A justification of the two-dimensionnal linear plate model, J. Mécanique, 18 (1979), 315-344.
- [6] CIORANESCU D., SAINT JEAN PAULIN J., Homogenization in open sets with holes, J. Math. Pures et Appl. 65 (1986), 403-422.
- [7] CIORANESCU D., SAINT JEAN PAULIN J., Reinforced and honeycomb structures. J. Math. Pures et Appl. 65 (1986), 403-422.
- [8] CIORANESCU D., SAINT JEAN PAULIN J., Elastic Behaviour of very thin cellular structures, in Material Instabilities in Continuum Mechanics. Ed. J.M. Ball, Clarendon Press, Oxford, 1988, p. 64-75.
- [9] CIORANESCU D., SAINT JEAN PAULIN J., Asymptotic analysis of elastic wireworks, Publications du laboratoire d'analyse numérique, Univ. P. et M. Curie, n. R 89008 (1989).
- [10] DUVAUT G., Comportement macroscopique d'une plaque perforée périodiquement, (Compte-rendu du colloque sur les perturbations singulières), Lyon Déc-1976, Lectures Notes in Math, n. 594, Springer-Verlag(1977).
- [11] RAOULT A., Contributions à l'étude des modèles d'évolution de plaques et à l'approximation d'équations d'évolution linéaires du second ordre par méthodes multiplas, Thèse de troisième cycle, 1980.
- [12] SAC-ÉPÉE S., thèse en cours de rédaction, Université de Metz.

- [13] TARTAR L., Quelques remarques sur l'homogénéisation. *Functionnal Anal. and Num. Anal., Proc. Japan -France Seminar.*469-482. Ed. Fujita. Soc. for the Promotion of science, Japan 1978.

DEUXIEME PARTIE :
ETUDE DE PROBLEMES D'ELASTICITE
DEFINIS SUR DES
STRUCTURES RETICULEES, AVEC CONDITIONS
AUX BORDS DE FOURIER.

SOMMAIRE II

INTRODUCTION II.	P.100
PRESENTATION DU PROBLEME.	P.101
LEMME DE BASE- DEFINITIONS..	P.103
I PASSAGE A LA LIMITE EN ε, PUIS EN e.	P.106
I.1 Dépendance relative à la période (le paramètre ε tend vers zéro).	P.106
I.1.1 Théorème 1.	P.106
I.1.2 Démonstration du théorème 1.	P.108
I.1.2.1 Estimations a priori.	P.108
I.1.2.2 Passage à la limite en ε dans le premier cas.	P.114
I.1.2.3 Passage à la limite en ε dans le deuxième cas.	P.126
I.2 Dépendance relative à l'épaisseur (le paramètre e tend vers zéro).	P.132
I.2.1 Dilatation du domaine.	P.132
I.2.2 Théorème 2.	P.133
I.2.3 Démonstration du théorème 2.	P.134
I.2.3.1 Estimations a priori.	P.134
I.2.3.2 Passage à la limite.	P.139

II PASSAGE A LA LIMITE EN e, PUIS EN ε.	P.144
II.1 Dépendance relative à l'épaisseur (le paramètre e tend vers zéro).	P.144
II.1.1 Théorème 3.	P.145
II.1.2 Démonstration du théorème 3.	P.146
II.1.2.1 Estimations a priori.	P.146
II.1.2.2 Passage à la limite en e .	P.151
II.2 Dépendance relative à la période (le paramètre ε tend vers zéro).	P.161
II.2.1 Théorème 4.	P.161
II.2.2 Démonstration du théorème 4.	P.162
II.2.2.1 Estimations a priori.	P.162
II.2.2.2 Passage à la limite en ε .	P.168
BIBLIOGRAPHIE II.	P.177

INTRODUCTION II

Dans cette deuxième partie, on s'intéresse à un problème d'élasticité défini sur la plaque de la première partie (voir figure 1). Cette fois, la condition donnée au bord des trous est une condition de Fourier.

Dans le premier chapitre, nous allons faire tendre la période ε vers zéro. Les estimations a priori nous conduisent à distinguer deux cas, qui mèneront à deux problèmes homogénéisés différents. Ces deux problèmes sont néanmoins de même type, de sorte que nous nous contenterons de passer à la limite en e (l'épaisseur e tend vers zéro) seulement dans l'un des cas.

Dans le second chapitre, on change l'ordre des passages à la limite. On fait d'abord tendre e vers zéro, ce qui mène à un problème limite d'évolution d'ordre deux en temps, et d'ordre quatre en espace avec des conditions de Fourier au bord des trous.

Dans ce problème limite, on se propose de faire tendre la période ε vers zéro. Comme dans le premier chapitre, les estimations a priori nous conduisent à distinguer deux cas. Là encore, les deux problèmes limites obtenus sont de même type.

PRESENTATION DU PROBLEME.

On considère la plaque décrite dans la première partie (voir figure 1).

Dans toute cette deuxième partie, nous allons donc reprendre des notations analogues, mais nous omettrons d'écrire le paramètre δ qui restera toujours fixé.

Sur ce domaine, on définit le problème

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{e\varepsilon}}{\partial x_h}) = F_i^{e\varepsilon} & \text{sur } \Omega_{e\varepsilon} \times (0, T), \\ u_i^{e\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_e^0 \times (0, T), \\ a_{i3kh} \frac{\partial u_k^{e\varepsilon}}{\partial x_h} n_3 = 0 & \text{sur } \Gamma_{e\varepsilon}^\pm \times (0, T), \\ a_{i\alpha kh} \frac{\partial u_k^{e\varepsilon}}{\partial x_h} n_\alpha + \lambda e^2 \varepsilon u_i^{e\varepsilon} + \gamma e^2 \varepsilon \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t} = G_i^{e\varepsilon}(t) & \text{sur } \partial S_{e\varepsilon} \times (0, T), \\ u_i^{e\varepsilon}(0) = u^{e0}, & \\ \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}(0) = u^{e1}. & \end{array} \right.$$

Les deux paramètres λ et γ sont des réels positifs ou nuls.

D'autre part, la fonction $G^{e\varepsilon}$ est définie de la manière suivante:

Soit $G_i^e : \mathbb{R}^2 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \times$ une fonction \mathcal{Y} -périodique,

$$(y_1, y_2, t) \mapsto G^e(y_1, y_2, t)$$

où $\mathcal{Y} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Alors, on pose

$$G_i^{e\varepsilon}(x_1, x_2, x_3, t) = G_i^e\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right).$$

Dans la suite, on écrira donc seulement

$$G^{e\varepsilon}(x_1, x_2, x_3, t) = G^{e\varepsilon}(x_1, x_2, t).$$

Nous introduisons les ensembles suivants:

$$V(\Omega_{e\varepsilon}) = \{v \in H^1(\Omega_{e\varepsilon}), v|_{\Gamma_e^0} = 0\},$$

$$V(\Omega_e) = \{v \in H^1(\Omega_e), v|_{\Gamma_e^0} = 0\}.$$

Nous supposons de plus que

$$\begin{cases} G_i^{\varepsilon\varepsilon} \in L^\infty((0, T), L^2(\partial S_{\varepsilon\varepsilon})) \\ \frac{\partial G_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \in L^\infty((0, T), L^2(\partial S_{\varepsilon\varepsilon})) \\ F_i^{\varepsilon\varepsilon} \in L^\infty((0, T), L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon})) \\ u_i^{\varepsilon 0} \in V(\Omega_{\varepsilon\varepsilon}) \\ u_i^{\varepsilon 1} \in L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon}). \end{cases}$$

Nous supposons enfin que $e|\frac{\partial u_i^{\varepsilon 0}}{\partial x_j}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon})}$ et $e^2|u_i^{\varepsilon 1}|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon})}$ sont bornés indépendamment de ε et ε .

Le problème (1) admet une solution unique $u^{\varepsilon\varepsilon}$ telle que $u_i^{\varepsilon\varepsilon} \in L^\infty(0, T, V(\Omega_{\varepsilon\varepsilon}))$, $\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon}))$ et $\frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t^2} \in L^\infty(0, T, V(\Omega_{\varepsilon\varepsilon})')$

LEMMES DE BASE - DEFINITIONS.

Nous donnons certains lemmes et définitions analogues à ceux de l'article (Cioranescu-Donato [2]), et que nous allons utiliser tout au long de la deuxième partie.

Posons $Y = \mathcal{Y} \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

On appelle s le trou (bidimensionnel) pratiqué dans la cellule \mathcal{Y} .

On pose $Y^* = \mathcal{Y}^* \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ et $S_\varepsilon = s \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Pour une fonction $\hat{h}(y_1, y_2, t) \in L^\infty(0, T, L^2(\partial s))$, définissons la fonction h par $h(y_1, y_2, y_3, t) = \hat{h}(y_1, y_2, t)$.

Naturellement, on a $h \in L^\infty(0, T, L^2(\partial S_\varepsilon))$.

On définit

$$(2) \quad C_h(t) = \frac{1}{|\mathcal{Y}^*|} \int_{\partial s} h(s, t) ds = \frac{1}{|Y^*|} \int_{\partial S_\varepsilon} h(\sigma, t) d\sigma.$$

Pour t fixé, soit $\psi_h(y_1, y_2, t)$ solution de

$$(3) \quad \begin{cases} -\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\psi_h = C_h & \text{dans } \mathcal{Y}^*, \\ -\left(\frac{\partial}{\partial y_1}n_1 + \frac{\partial}{\partial y_2}n_2\right)\psi_h = h(y_1, y_2, t) & \text{sur } \partial s, \\ \psi_h \text{ est } y_1, y_2 \text{ périodique de moyenne nulle.} \end{cases}$$

La fonction ψ_h est également solution de

$$(4) \quad \begin{cases} -\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\right)\psi_h = C_h & \text{dans } Y^*, \\ -\frac{\partial \psi_h}{\partial n} = h(y_1, y_2, t) & \text{sur } \partial S_\varepsilon, \\ \frac{\partial \psi_h}{\partial n} = 0 & \text{sur } \mathcal{Y}^* \times \left\{\pm \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \\ \psi_h \text{ est } y_1, y_2 \text{ périodique de moyenne nulle.} \end{cases}$$

Posons

$$(5) \quad \psi_h^\varepsilon(x_1, x_2, t) = \psi_h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right).$$

On a

$$(6) \quad \begin{cases} -\Delta_x \psi_h^\varepsilon = -\varepsilon^{-2} C_h & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times \left(-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) - S_{e\varepsilon} \\ \frac{\partial \psi_h^\varepsilon}{\partial n} = \varepsilon^{-1} h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) & \text{sur } \partial S_{e\varepsilon} \\ \frac{\partial \psi_h^\varepsilon}{\partial n} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^2 \times \left\{\pm \frac{\varepsilon}{2}\right\}. \end{cases}$$

LEMME :

Pour t fixé, soit $h(y_1, y_2, t) \in L^2(\partial S_e)$, et supposons que la solution ψ_h^ε de (6) appartienne à $H^1(\Omega_{e\varepsilon})$.

Alors

$$(7) \quad \begin{aligned} & \varepsilon \int_{\partial S_{e\varepsilon}} h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) v(x_1, x_2, x_3) d\sigma = \\ & = \varepsilon \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial y_i}\right)\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + C_h(t) \int_{\Omega_{e\varepsilon}} v(x_1, x_2, x_3) dx \end{aligned}$$

$$\forall v \in H^1(\Omega_{e\varepsilon}), v/\Gamma_0 = 0.$$

DEFINITION :

Pour t fixé, soit $h(y_1, y_2, t) \in L^2(\partial S_e)$, on note μ_h^ε la forme linéaire sur $V(\Omega_{e\varepsilon})$ définie par

$$(8) \quad \langle \mu_h^\varepsilon(t), \varphi \rangle = \varepsilon \int_{\partial S_{e\varepsilon}} h\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t\right) \varphi(x_1, x_2, x_3) d\sigma$$

$$\forall \varphi \in H^1(\Omega_{e\varepsilon}), \varphi/\Gamma_0 = 0.$$

LEMME :

Sous les hypothèses de (7) on a la convergence

$$(9) \quad \mu_h^\varepsilon(t) \rightarrow \mu_h(t) \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort,}$$

où

$$\langle \mu_h(t), \varphi \rangle = \mu_h(t) \int_{\Omega} \varphi dx \text{ et } \mu_h(t) = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial S_e} h(y, t) d\sigma.$$

On définit maintenant :

$$(10) \quad \nu_h^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \mu_h^\varepsilon(t), \langle \nu_h^\varepsilon(t), \varphi \rangle = \int_{\partial S_e} h\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega_{e\varepsilon})$$

LEMME :

On suppose $\frac{1}{|\partial S_\varepsilon|} \int_{\partial S_\varepsilon} h(\sigma, t) d\sigma = 0$ et soit ν_h^ε définie en(10).

Alors

$$(11) \quad \nu_h^\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ faible.}$$

PASSAGE A LA LIMITE EN ε , PUIS EN e .

I. PASSAGE A LA LIMITE EN ε , PUIS e .

I.1 DEPENDANCE RELATIVE A LA PERIODE. (LE PARAMETRE ε TEND VERS ZERO).

Faisons tendre ε vers zéro dans le problème (I1.1).

On établit le résultat suivant:

I1.1 THEOREME 1:

Supposons que $F_i^{e\varepsilon} \rightarrow F_i^{e*}$ dans $L^2(0, T, L^2(\Omega_e))$ fort.

Premier cas : $\|C_{G_i^e}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}}\|_\infty^2 = 0$.

Alors il existe un prolongement $P^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^\infty(0, T, V(\Omega_{e\varepsilon})), L^\infty(0, T, V(\Omega_e)))$ tel que

$$P^\varepsilon u_i^{e\varepsilon} \rightarrow u_i^{e*} \text{ dans } L^p(0, T, V(\Omega_e)) \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

où u^{e*} est solution de

$$(I1.1) \quad \begin{cases} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} \frac{\partial^2 u_i^{e*}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_{ijkh} \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_h} \right) = \frac{|Y_*|}{|Y|} F_i^{e*} - \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^2 u_i^{e*} - \\ \quad - \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^2 \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \text{ sur } \Omega_e \times (0, T), \\ q_{i3kh} \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_h} n_3 = 0 \text{ sur } \Gamma_e^\pm \times (0, T), \\ u_i^{e*} = 0 \text{ sur } \Gamma_e^0 \times (0, T), \\ u_i^{e*}(0) = u_i^{*0}, \\ \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t}(0) = u_i^{*1}. \end{cases}$$

et où les fonctions u_i^{*0} et u_i^{*1} sont définies par

$$P^\varepsilon u_i^{e0} \rightarrow u_i^{*0} \text{ dans } V(\Omega_e),$$

$$P^\varepsilon u_i^{e1} \rightarrow u_i^{*1} \text{ dans } L^2(\Omega_e).$$

Deuxième cas : $\|C_{G_i^e}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}}\|_\infty^2 \neq 0$.

Alors il existe un prolongement $P^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^\infty(0, T, V(\Omega_{e\varepsilon})), L^\infty(0, T, V(\Omega_e)))$ tel que

$$P^\varepsilon u_i^{e\varepsilon} \rightarrow u_i^{e*} \text{ dans } L^p(0, T, V(\Omega_e)) \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

où u^{e*} est solution de

$$(I1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|Y_*|}{|Y|} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e*}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_{ijkh} \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_h} \right) = \mu_{G_i^e} - e^2 \lambda \frac{|\partial S|}{|Y|} u_i^{e*} - \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - e^2 \gamma \frac{|\partial S|}{|Y|} \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \quad \text{dans } \Omega_e \times (0, T), \\ u_i^{e*} = 0 \quad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{sur } \Gamma_e^0 \times (0, T), \\ q_{i3kh} \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_h} n_3 = 0 \quad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{sur } \Gamma_e^\pm \times (0, T), \\ u_i^{e*}(0) = u_i^{*0}, \\ \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t}(0) = u_i^{*1}, \end{array} \right.$$

et où les fonctions u_i^{*0} et u_i^{*1} sont définies par

$$\begin{cases} P^e(\varepsilon u_i^{e0}) \rightarrow u_i^{*0} \text{ dans } V(\Omega_e), \\ P^e(\varepsilon u_i^{e1}) \rightarrow u_i^{*1} \text{ dans } L^2(\Omega_e). \end{cases}$$

Dans les deux cas, q_{ijkh} est définie par

$$(I1.3) \quad q_{ijkh} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \left(a_{ijkh} - a_{l\beta kh} \frac{\partial \chi_l^{ij}}{\partial y_\beta} \right) dy,.$$

les fonctions χ^{ij} étant solutions de

$$(I1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_\beta} \left(a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial \chi_i^{lm}}{\partial y_\alpha} - a_{lmk\beta} \right) = 0 \quad \text{dans } Y^*, \\ (a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial \chi_i^{lm}}{\partial y_\alpha} - a_{lmk\beta}) n_\beta = 0 \quad \text{sur } \partial s, \\ \chi^{lm} \quad Y^* \text{ - périodique, de moyenne nulle.} \end{array} \right.$$

I.1.2 DEMONSTRATION DU THEOREME 1

I.1.2.1 ESTIMATIONS A PRIORI.

On multiplie l'équation (1) par la fonction $\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t}$.

Il vient

$$\int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t^2} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} dx - \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h}) \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} dx = \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} F_i^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} dx,$$

soit

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} \frac{1}{2} e^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 \right) dx + \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \right) dx - \\ - \int_{\partial S_{\varepsilon\varepsilon}} a_{i\alpha kh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} n_\alpha \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} d\sigma = \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} F_i^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} dx, \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} \frac{1}{2} e^2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 \right) dx + \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \right) dx + \\ + \int_{\partial S_{\varepsilon\varepsilon}} (\lambda e^2 \varepsilon u_i^{\varepsilon\varepsilon} + \gamma e^2 \varepsilon \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t}) \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} d\sigma - \int_{\partial S_{\varepsilon\varepsilon}} G_i^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} d\sigma = \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} F_i^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} dx. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j}) &= a_{ijkh} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \right) \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j} + a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j} \right), \\ &= a_{khij} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} + a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j} \right), \\ &= a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j} \right) + a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j} \right), \\ &= 2a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} e^2 \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} (a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j}) dx = \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} F_i^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} dx + \\ + \int_{\partial S_{\varepsilon\varepsilon}} G_i^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} d\sigma - \int_{\partial S_{\varepsilon\varepsilon}} \lambda e^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} dx - \int_{\partial S_{\varepsilon\varepsilon}} \gamma e^2 \varepsilon \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Intégrons entre 0 et t les deux membres de l'égalité précédente.

Il vient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ee}} e^2 \left(\frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} \right)^2 dx \right) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_{ee}} (a_{ijkh} \frac{\partial u_k^{ee}}{\partial x_h} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial x_j}) dx \right) d\tau = \\ & \int_0^t \int_{\Omega_{ee}} F_i^{ee} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} dx d\tau + \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} G_i^{ee} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} d\sigma d\tau - \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} \lambda e^2 \varepsilon u_i^{ee} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} d\sigma d\tau - \\ & \qquad \qquad \qquad - \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} \gamma e^2 \varepsilon \left(\frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} \right)^2 d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} e^2 \left\| \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{ee}} a_{khij} \frac{\partial u_k^{ee}}{\partial x_h}(t) \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial x_j}(t) dx = \int_0^t \int_{\Omega_{ee}} F_i^{ee} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} dx d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} G_i^{ee} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} d\sigma d\tau - \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} \lambda e^2 \varepsilon u_i^{ee} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} d\sigma d\tau - \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} \gamma e^2 \varepsilon \left(\frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} \right)^2 d\sigma d\tau + \\ & + \frac{1}{2} e^2 \left\| \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t}(0) \right\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{ee}} a_{khij} \frac{\partial u_k^{ee}}{\partial x_h}(0) \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial x_j}(0) dx. \end{aligned}$$

Appelons A le premier membre de l'égalité précédente, et B le second.

D'après la coercivité des a_{ijkh} , on a

$$A \geq \frac{1}{2} e^2 \left\| \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \alpha \left\| \gamma_{ij}(u^{ee})(t) \right\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} B &= \int_0^t \int_{\Omega_{ee}} F_i^{ee} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} dx d\tau + \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} G_i^{ee} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} d\sigma d\tau - \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} \lambda e^2 \varepsilon u_i^{ee} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} d\sigma d\tau - \\ & - \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} \gamma e^2 \varepsilon \left(\frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} \right)^2 d\sigma d\tau + \frac{1}{2} e^2 \left\| u_i^{ee} \right\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{ee}} a_{khij} \frac{\partial u_k^{ee}}{\partial x_h} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial x_j} dx. \end{aligned}$$

Le quatrième terme de B est négatif car γ est positif. Il est donc majoré par zéro.

Les cinquième et sixième terme de B sont majorés par des constantes d'après les conditions initiales.

Nous allons majorer séparément les trois premiers termes de B.

On a

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega_{ee}} F_i^{ee} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} dx d\tau &\leq \int_0^t \left\| F_i^{ee}(\tau) \right\|_{L^2(\Omega_{ee})} \left\| \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t}(\tau) \right\|_{L^2(\Omega_{ee})} d\tau, \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \left\| F_i^{ee}(\tau) \right\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t}(\tau) \right\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \|F_i^{e\varepsilon}(\tau)\|_{L^2(\Omega_{e\varepsilon})}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}(\tau) \right\|_{L^2(\Omega_{e\varepsilon})}^2 d\tau, \\ &\leq C \|F_i^{e\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{e\varepsilon}))}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}(\tau) \right\|_{L^2(\Omega_{e\varepsilon})}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Étudions le terme $\int_0^t \int_{\partial S_{e\varepsilon}} G_i^{e\varepsilon} \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t} d\sigma d\tau$.

En utilisant la méthode de Cioranescu-Donato [2], on peut transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume (voir (7)), de sorte que

$$\int_0^t \int_{\partial S_{e\varepsilon}} G_i^{e\varepsilon} \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t} d\sigma d\tau = \int_0^t \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \left(\frac{\partial \psi_{G_i^e}}{\partial y_j} \right) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial x_j} \right) dx d\tau + \int_0^t \frac{C_{G_i^e}}{\varepsilon} \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t} dx d\tau.$$

Le terme $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial x_j} \right)$ ne peut être traité par application du lemme de Gronwall.

On va donc d'abord procéder à une intégration par parties pour faire disparaître la dérivée en temps de $u_i^{e\varepsilon}$.

Il vient

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{\partial S_{e\varepsilon}} G_i^{e\varepsilon} \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t} d\sigma d\tau = \\ &= \int_{\partial S_{e\varepsilon}} G_i^{e\varepsilon}(t) u_i^{e\varepsilon}(t) d\sigma - \int_{\partial S_{e\varepsilon}} G_i^{e\varepsilon}(0) u_i^{e\varepsilon}(0) d\sigma - \int_{\partial S_{e\varepsilon}} \int_0^t \frac{\partial G_i^{e\varepsilon}}{\partial t} u_i^{e\varepsilon} d\tau d\sigma, \\ &= \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \nabla_y \psi_{G_i^e} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (t) \nabla u_i^{e\varepsilon}(t) dx + \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \frac{C_{G_i^e}}{\varepsilon} u_i^{e\varepsilon}(t) dx - \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \nabla_y \psi_{G_i^e} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (0) \nabla u_i^{e\varepsilon}(0) dx - \\ &- \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \frac{C_{G_i^e}}{\varepsilon} u_i^{e\varepsilon}(0) dx - \int_0^t \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \nabla_y \psi_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (\tau) \nabla u_i^{e\varepsilon}(\tau) dx d\tau - \int_0^t \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \frac{C \left(\frac{\partial G_i^e}{\partial t} \right)}{\varepsilon} u_i^{e\varepsilon} dx d\tau, \\ &\leq \beta_1 \|\nabla_y \psi_{G_i^e} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (t)\|_{L^2(Y^*)}^2 + \beta_1' \|\nabla u_i^{e\varepsilon}(t)\|_{L^2(\Omega_{e\varepsilon})}^2 + \beta_2 \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \left(\frac{C_{G_i^e}(t)}{\varepsilon} \right)^2 dx + \\ &+ \beta_2' \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (u_i^{e\varepsilon}(t))^2 dx + \beta_3 \|\nabla \psi_{G_i^e} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (0)\|_{L^2(Y^*)}^2 + \beta_3' \|\nabla u_i^{e\varepsilon}(0)\|_{L^2(\Omega_{e\varepsilon})}^2 + \\ &+ \beta_4 \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \left(\frac{C_{G_i^e}(0)}{\varepsilon} \right)^2 dx + \beta_4' \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (u_i^{e\varepsilon}(0))^2 dx + \beta_5 \int_0^t \|\nabla_y \psi_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (\tau)\|_{L^2(Y^*)}^2 d\tau + \\ &+ \beta_5' \int_0^t \|\nabla u_i^{e\varepsilon}(\tau)\|_{L^2(\Omega_{e\varepsilon})}^2 d\tau + \beta_6 \int_0^t \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \frac{(C_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}})^2}{\varepsilon^2} dx d\tau + \beta_6' \int_0^t \|u_i^{e\varepsilon}(\tau)\|_{L^2(Y^*)}^2 d\tau, \\ &\leq C \beta_1 \|\psi_{G_i^e} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (t)\|_{H^1(Y^*)}^2 + C \beta_1' \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(t)\|_{L^2(\Omega_{e\varepsilon})}^2 + C \beta_2 \frac{C_{G_i^e}^2(t)}{\varepsilon^2} + \\ &+ C \beta_2' \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(t)\|_{L^2(\Omega_{e\varepsilon})}^2 + C \beta_3 \|\psi_{G_i^e} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (0)\|_{H^1(Y^*)}^2 + C \beta_3' \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(0)\|_{L^2(\Omega_{e\varepsilon})}^2 + \\ &+ C \beta_4 \frac{C_{G_i^e}^2(0)}{\varepsilon^2} + C \beta_4' \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(0)\|_{L^2(\Omega_{e\varepsilon})}^2 + C \beta_5 \int_0^t \|\psi_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (\tau)\|_{H^1(Y^*)}^2 d\tau + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C\beta_5' \int_0^t \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon}(\tau))\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 d\tau + C\beta_6 \int_0^t \frac{(C_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}})^2}{\varepsilon^2} d\tau + C\beta_6' \int_0^t \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(\tau)\|_{L^2(Y^*)}^2 d\tau, \\
& \leq K \left[\|\psi_{G_i^e}\|_{L^\infty(0,T,H^1(Y^*))}^2 + \|\psi_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}}\|_{L^\infty(0,T,H^1(Y^*))}^2 + \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(0)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\|C_{G_i^e}\|_\infty^2}{\varepsilon^2} + \frac{\|C_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}}\|_\infty^2}{\varepsilon^2} \right] + C\beta' \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + K' \int_0^t \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2,
\end{aligned}$$

$$\text{où } \|C_{G_i^e}\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} |C_{G_i^e}(t)|.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
- \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} e^2 \lambda \varepsilon u_i^{e\varepsilon} \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t} d\sigma d\tau &= -e^2 \lambda \varepsilon \int_0^t \int_{\partial S_{ee}} \frac{1}{2} \frac{\partial (u_i^{e\varepsilon})^2}{\partial t} d\sigma d\tau, \\
&= -\frac{e^2 \lambda \varepsilon}{2} \int_{\partial S_{ee}} [u_i^{e\varepsilon 2}]_0^t d\sigma, \\
&= -\frac{e^2 \lambda \varepsilon}{2} \int_{\partial S_{ee}} u_i^{e\varepsilon 2}(t) d\sigma + \frac{e^2 \lambda \varepsilon}{2} \int_{\partial S_{ee}} u_i^{e\varepsilon 2}(0) d\sigma.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\frac{e^2 \lambda \varepsilon}{2} \int_{\partial S_{ee}} (u_i^{e\varepsilon})^2(0) d\sigma &= \frac{e^2 \lambda \varepsilon}{2} \int_{\Omega_{ee}} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial y_j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial (u_i^{e\varepsilon 0})^2}{\partial x_j} dx + C_\lambda \int_{\Omega_{ee}} u_i^{e\varepsilon 2}(0) dx, \\
&\leq C \frac{e^2 \varepsilon}{2} \|\nabla \psi_\lambda\|_{L^2(Y^*)} \|\nabla (u_i^{e\varepsilon 0})^2\|_{L^2(\Omega_{ee})} + C_\lambda \|(u_i^{e\varepsilon 0})^2\|_{L^2(\Omega_{ee})}, \\
&\leq K,
\end{aligned}$$

d'après les conditions initiales.

En conséquence, on a

$$\begin{aligned}
B &\leq K_1 [\|F_i^{e\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{ee}))}^2 + \|\psi_{G_i^e}\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega_{ee}))}^2 + \|\psi_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}}\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega_{ee}))}^2 + \\
&\quad + \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(0)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \frac{\|C_{G_i^e}\|_\infty^2}{\varepsilon^2} + \frac{\|C_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}}\|_\infty^2}{\varepsilon^2}] + C\beta' \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \\
&\quad + K_2 \int_0^t \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 d\tau + K_3 \int_0^t \|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 d\tau + K_4.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{cases} \|\psi_{G_i^e}\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega_{ee}))} \leq C, \\ \|\psi_{\frac{\partial G_i^e}{\partial t}}\|_{L^\infty(0,T,H^1(\Omega_{ee}))} \leq C. \end{cases}$$

On obtient

$$B \leq \frac{K_1}{\varepsilon^2} [C\varepsilon^2 + \|C_{G_i^\varepsilon}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^\varepsilon}{\partial t}}\|_\infty^2] + K_2 \int_0^t (\|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(\tau)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2) d\tau + C\beta' \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2.$$

Les calculs précédents permettent maintenant d'écrire que

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 \|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \alpha \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 \leq \frac{K_1}{\varepsilon^2} [C\varepsilon^2 + \|C_{G_i^\varepsilon}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^\varepsilon}{\partial t}}\|_\infty^2] + K_2 \int_0^t (\|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2) d\tau + C\beta' \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2.$$

Choisissons β' tel que $C\beta' < \alpha$.

Il vient

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 \|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \alpha' \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 \leq \frac{K_1}{\varepsilon^2} [C\varepsilon^2 + \|C_{G_i^\varepsilon}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^\varepsilon}{\partial t}}\|_\infty^2] + K_2 \int_0^t (\|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2) d\tau,$$

soit

$$\|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 \leq \frac{C_1}{\varepsilon^2} [C\varepsilon^2 + \|C_{G_i^\varepsilon}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^\varepsilon}{\partial t}}\|_\infty^2] + C_2 \int_0^t (\|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2) d\tau.$$

D'après le lemme de Gronwall, il vient

$$\|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 + \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})(t)\|_{L^2(\Omega_{ee})}^2 \leq \frac{C_1}{\varepsilon^2} [C\varepsilon^2 + \|C_{G_i^\varepsilon}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^\varepsilon}{\partial t}}\|_\infty^2] e^{C_2 t},$$

d'où

$$\|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{ee}))}^2 + \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{ee}))}^2 \leq \frac{C_1}{\varepsilon^2} [C\varepsilon^2 + \|C_{G_i^\varepsilon}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^\varepsilon}{\partial t}}\|_\infty^2].$$

Si $\|C_{G_i^\varepsilon}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^\varepsilon}{\partial t}}\|_\infty^2 = 0$, alors on a

$$(I1.5) \quad \begin{cases} \|\frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{ee}))}^2 \leq K, \\ \|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{ee}))}^2 \leq K. \end{cases}$$

Si $\|C_{G_i^\varepsilon}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^\varepsilon}{\partial t}}\|_\infty^2 \neq 0$, alors on a

$$(I1.6) \quad \begin{cases} \left\| \frac{\varepsilon \partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon}))}^2 \leq K, \\ \|\varepsilon \gamma_{ij}(u^{\varepsilon\varepsilon})\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon}))}^2 \leq K. \end{cases}$$

11.2.2 PASSAGE À LA LIMITE EN ε DANS LE PREMIER CAS.

On s'intéresse donc au cas $\|C_{G_i^\varepsilon}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial G_i^\varepsilon}{\partial t}}\|_\infty^2 = 0$.

D'après (I1.5), on a

$$\|\gamma_{ij}(u^{e\varepsilon})\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{e\varepsilon}))}^2 \leq K.$$

D'après Duvaut [8], il existe un opérateur de prolongement $Q^\varepsilon \in \mathcal{L}(V(\Omega_{e\varepsilon}), V(\Omega_e))$.

Pour $v \in L^2(0, T, H^1(\Omega_{e\varepsilon}))$, on définit dans Brizzi-Chalot [1] $P^\varepsilon v$ par

$$(P^\varepsilon v)(t, x) = [Q^\varepsilon(v(t, \cdot))](x).$$

Alors, on a

$$P^\varepsilon u_i^{e\varepsilon} \rightharpoonup u_i^{e*} \text{ dans } L^p(0, T, V(\Omega_e)), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Nous allons utiliser la méthode de l'énergie pour définir le problème qui caractérise u^{e*} .

Posons

$$\xi_{ij}^{e\varepsilon} = a_{ijkh} \gamma_{kh}(u^{e\varepsilon}).$$

Alors, le système (1) s'écrit

$$(I1.7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\partial \xi_{ij}^{e\varepsilon}}{\partial x_j} = F_i^{e\varepsilon} & \text{dans } \Omega_{e\varepsilon} \times (0, T) \\ \xi_{i3}^{e\varepsilon} n_3 = 0 & \text{sur } \Gamma_{e\varepsilon}^\pm \times (0, T), \\ \xi_{i\alpha}^{e\varepsilon} n_\alpha = G_i^{e\varepsilon} - \lambda e^2 \varepsilon u_i^{e\varepsilon} - \gamma e^2 \varepsilon \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t} & \text{sur } \partial S_{e\varepsilon} \times (0, T), \\ u_i^{e\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_e^0 \times (0, T), \\ u_i^{e\varepsilon}(0) = u_i^{\varepsilon 0}, & \\ \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t}(0) = u_i^{\varepsilon 1}. & \end{array} \right. \quad (I1.7.1),$$

D'après (I1.5), on a

$$\|\xi_{ij}^{\varepsilon\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon}))} \leq C.$$

Notons

$$\tilde{\xi}_{ij}^{\varepsilon\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{sur } S^{\varepsilon\varepsilon}, \\ \xi_{ij}^{\varepsilon\varepsilon} & \text{sur } \Omega_{\varepsilon\varepsilon}. \end{cases}$$

On a $\|\tilde{\xi}_{ij}^{\varepsilon\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{\varepsilon\varepsilon}))} \leq C$, donc $\tilde{\xi}_{ij}^{\varepsilon\varepsilon} \rightarrow \xi_{ij}^{\varepsilon*}$ dans $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ faible*.

Caractérisons $\xi_{ij}^{\varepsilon*}$.

Multiplions l'équation (II.7.1) par une fonction test $\varphi \in (\mathcal{D}[0,T], \mathcal{D}(\Omega_e))$.

Il vient

$$\int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t^2} \varphi dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} \frac{\partial \xi_{ij}^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j} \varphi dx d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} F_i^{\varepsilon\varepsilon} \varphi dx d\tau,$$

soit

$$\int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t^2} \varphi dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} \xi_{ij}^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx d\tau - \int_0^T \int_{\partial S_{\varepsilon\varepsilon}} \xi_{i\alpha}^{\varepsilon\varepsilon} \varphi n_\alpha d\sigma d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} F_i^{\varepsilon\varepsilon} \varphi dx d\tau,$$

soit encore

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t^2} \varphi dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} \xi_{ij}^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \varphi dx d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} F_i^{\varepsilon\varepsilon} \varphi dx d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\partial S_{\varepsilon\varepsilon}} G_i^{\varepsilon\varepsilon} \varphi d\sigma d\tau - e^2 \lambda \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} u_i^{\varepsilon\varepsilon} \varphi d\sigma d\tau - e^2 \gamma \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \varphi d\sigma d\tau. \end{aligned}$$

Compte-tenu des notations données en début de deuxième partie, l'expression précédente s'écrit

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} e^2 \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t}(0) \varphi(0) dx + \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} e^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon}(0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) dx + \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} \int_0^T e^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} d\tau dx + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} \xi_{ij}^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx d\tau = \int_0^T F_i^{\varepsilon\varepsilon} \varphi dx d\tau + \int_0^T \langle \nu_{G_i^\varepsilon}^\varepsilon, \varphi \rangle d\tau - \int_0^T \langle \mu_{\varepsilon^2 \lambda}^\varepsilon, \varphi u_i^{\varepsilon\varepsilon} \rangle d\tau - \\ & - \int_0^T \langle \mu_{\varepsilon^2 \gamma}^\varepsilon, \varphi \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \rangle d\tau, \end{aligned}$$

soit encore

$$- \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} e^2 u_i^{\varepsilon^1} \varphi(0) dx + \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} e^2 u_i^{\varepsilon^0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) dx + \int_{\Omega_{\varepsilon\varepsilon}} \int_0^T e^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} d\tau dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \int_{\Omega_{e\epsilon}} \xi_{ij}^{e\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_{e\epsilon}} F_i^{e\epsilon} \varphi dx d\tau + \int_0^T \langle \nu_{G_i^e}^e, \varphi \rangle d\tau - \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}^e, \varphi u_i^{e\epsilon} \rangle d\tau - \\
& + \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}^e, \varphi \frac{\partial u_i^{e\epsilon}}{\partial t} \rangle d\tau.
\end{aligned}$$

Après prolongement, il vient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_e} -e^2 P^\epsilon \tilde{u}_i^{\epsilon 1} \chi_{\Omega_{e\epsilon}} \varphi(0) dx + \int_{\Omega_e} e^2 P^\epsilon \tilde{u}_i^{\epsilon 0} \chi_{\Omega_{e\epsilon}} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) dx + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_e} e^2 (P^\epsilon u_i^{e\epsilon}) \chi_{\Omega_{e\epsilon}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \tilde{\xi}_{ij}^{e\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx d\tau = \\
(I1.8) \quad & = \int_0^T \int_{\Omega_e} F_i^{e\epsilon} \chi_{\Omega_{e\epsilon}} \varphi dx d\tau + \int_0^T \langle \nu_{G_i^e}^e, \varphi \rangle d\tau - \\
& - \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}^e, \varphi (P^\epsilon u_i^{e\epsilon}) \rangle d\tau - \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}^e, \varphi (P^\epsilon u_i^{e\epsilon}) \rangle d\tau,
\end{aligned}$$

On suppose que

$$\begin{cases} P^\epsilon u_i^{\epsilon 1} \rightarrow u_i^{*1} & \text{fortement dans } L^2(\Omega_e), \\ P^\epsilon u_i^{\epsilon 0} \rightarrow u_i^{*0} & \text{fortement dans } L^2(\Omega_e). \end{cases}$$

D'après (9) et (11), on déduit de (I1.8) que

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_e} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} u_i^{*1} \varphi(0) dx + \int_{\Omega_e} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} u_i^{*0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) dx + \int_0^T \int_{\Omega_e} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} u_i^{*e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx d\tau + \\
(I1.9) \quad & + \int_0^T \int_{\Omega_e} \xi_{ij}^{e*} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx d\tau = \frac{|Y_*|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega_e} F_i^{e*} \varphi dx d\tau - \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}^e, \varphi u_i^{e*} \rangle d\tau - \\
& - \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}^e, \varphi \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \rangle d\tau,
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_e} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} u_i^{*1} \varphi(0) dx + \int_{\Omega_e} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} u_i^{*0} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) dx - \int_{\Omega_e} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} u_i^{*e}(0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) dx + \\
& + \int_{\Omega_e} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} \frac{\partial u_i^{*e}}{\partial t}(0) \varphi(0) dx + \int_0^T \int_{\Omega_e} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} \frac{\partial^2 u_i^{*e}}{\partial t^2} \varphi dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \xi_{ij}^{e*} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx d\tau = \\
& \frac{|Y_*|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega_e} F_i^{e*} \varphi dx d\tau - \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}^e, \varphi u_i^{e*} \rangle d\tau - \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}^e, \varphi \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \rangle d\tau.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(I1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|Y_*|}{|Y|} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e*}}{\partial t^2} - \frac{\partial \xi_{ij}^{e*}}{\partial x_j} = \frac{|Y_*|}{|Y|} F_i^{e*} - \frac{|\partial S|}{|Y|} e^2 \lambda u_i^{e*} - \\ \hspace{15em} - \frac{|\partial S|}{|Y|} e^2 \gamma \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \text{ dans } \Omega_\varepsilon \times (0, T), \\ u_i^{e*}(0) = u_i^{*0}, \\ \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t}(0) = u_i^{*1}. \end{array} \right.$$

D'après une idée de Cioranescu-Donato, on introduit la fonction ζ solution du problème suivant (c'est un problème en y_1, y_2 , où la variable t joue le rôle d'un paramètre) :

$$(I1.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left(a_{i\alpha k \beta} \frac{\partial \zeta_k}{\partial y_\beta} \right) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{Y}^*, \\ a_{i\alpha k \beta} \frac{\partial \zeta_k}{\partial y_\beta} n_\alpha = G_i^e \quad \text{sur } \partial s \\ \zeta \quad \mathcal{Y}^* \text{ - périodique de moyenne nulle .} \end{array} \right.$$

D'après le théorème de Lax-Milgram, on a existence et unicité de la solution du problème (I1.11).

Posons

$$\gamma_{i\alpha} = \begin{cases} a_{i\alpha k \beta} \frac{\partial \zeta_k}{\partial y_\beta} & \text{dans } \mathcal{Y}^*, \\ 0 & \text{sur } \partial s. \end{cases}$$

et

$$\gamma_{i\alpha}^\varepsilon(x_1, x_2, x_3, t) = \gamma_{i\alpha} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, t \right).$$

La fonction $\gamma_{i\alpha}^\varepsilon$ vérifie

$$(I1.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\gamma_{i\alpha}^\varepsilon) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{e\varepsilon} \times (0, T), \\ \gamma_{i\alpha}^\varepsilon n_\alpha = G_i^{e\varepsilon} \quad \text{sur } \partial S^{e\varepsilon} \times (0, T). \end{array} \right.$$

On a

$$\|\gamma_{i\alpha}^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{e\varepsilon}))} \leq C.$$

D'après la périodicité de $\gamma_{i\alpha}^\varepsilon$ en x_1 et en x_2 , on a

$$\gamma_{i\alpha}^\varepsilon \rightharpoonup \frac{1}{|\mathcal{Y}^*|} \int_{\mathcal{Y}^*} \gamma_{i\alpha} dy \quad \text{dans } L^\infty(0,T,L^2(\Omega_{e\varepsilon})) \quad \text{faible}^* .$$

Posons

$$\zeta^\varepsilon(x) = \varepsilon(P^\varepsilon \zeta)\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}\right).$$

Alors

$$\zeta^\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L^\infty\left(0,T,(H^1(\Omega_{e\varepsilon}))^3\right) \quad \text{faible}^* .$$

Soit W solution du problème adjoint défini par

$$(I1.14) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_\beta} (a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial W_i^{lm}}{\partial y_\alpha} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) = 0 & \text{dans } \mathcal{Y}^*, \\ (a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial W_i^{lm}}{\partial y_\alpha} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) n_\beta = 0 & \text{sur } \partial s, \\ W_i^{lm} - \delta_{m\lambda} \delta_{il} y_\lambda & \mathcal{Y}^* \text{ - périodique, de moyenne nulle.} \end{cases}$$

On pose

$$(I1.15) \quad \begin{cases} W_i^{l\lambda} = -\chi_i^{l\lambda} + y_\lambda \delta_{il}, \\ W_i^{l3} = -\chi_i^{l3}, \end{cases}$$

Alors, (I1.14) devient

$$(I1.16) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_\beta} (a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial \chi_i^{lm}}{\partial y_\alpha} - a_{lmk\beta}) = 0 & \text{dans } \mathcal{Y}^*, \\ (a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial \chi_i^{lm}}{\partial y_\alpha} - a_{lmk\beta}) n_\beta = 0 & \text{sur } \partial s, \\ \chi^{lm} & \mathcal{Y}^* \text{ - périodique, de moyenne nulle.} \end{cases}$$

Introduisons

$$W_i^{lm\varepsilon} = P^\varepsilon \left(\varepsilon W_i^{lm} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon} \right) \right).$$

On a

$$(I1.17) \quad \begin{cases} W_i^{l\lambda\varepsilon} \rightharpoonup \omega_i^{l\lambda*} & \text{dans } H^1(\Omega_e) \text{ faible,} \\ W_i^{l3\varepsilon} \rightharpoonup 0 & \text{dans } H^1(\Omega_e) \text{ faible,} \end{cases}$$

et

$$(I1.18) \quad \frac{\partial W_i^{l\lambda\varepsilon}}{\partial x_\alpha} \rightharpoonup \delta_{\lambda\alpha} \delta_{il} = \frac{\partial W_i^{l\lambda*}}{\partial x_\alpha} \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

On introduit

$$w_{k\beta}^{\tilde{l}m\varepsilon} = \begin{cases} a_{i\alpha k\beta}^\varepsilon \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} & \text{dans } \Omega_{e\varepsilon}, \\ 0 & \text{dans } S_{e\varepsilon}, \end{cases}$$

qui vérifie

$$(I1.19) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_\beta} (w_{k\beta}^{\tilde{l}m\varepsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) = 0 & \text{dans } \Omega_{e\varepsilon}, \\ (w_{k\beta}^{\tilde{l}m\varepsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) n_\beta = 0 & \text{sur } \partial S_{e\varepsilon}. \end{cases}$$

On a

$$(I1.20) \quad w_{k\beta}^{\tilde{l}m\varepsilon} \rightharpoonup \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial W_i^{lm}}{\partial y_\alpha} dy \quad L^2(\Omega_e) \text{ faible } *.$$

D'après (I1.7) et (I1.13), on a

$$(I1.21) \quad \begin{cases} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\xi_{i\alpha}^{e\varepsilon} - \gamma_{i\alpha}^{e\varepsilon}) - \frac{\partial \xi_{i3}^{e\varepsilon}}{\partial x_3} = F_i^{e\varepsilon} & \text{sur } \Omega_{e\varepsilon} \times (0, T), \\ (\xi_{i\alpha}^{e\varepsilon} - \gamma_{i\alpha}^{e\varepsilon}) n_\alpha = -\lambda e^2 \varepsilon u_i^{e\varepsilon} - \gamma e^2 \varepsilon \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t} & \text{sur } \partial S_{e\varepsilon} \times (0, T). \end{cases}$$

On multiplie le problème (I1.19) par la fonction test $\varphi(P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^\varepsilon)$, et le problème (I1.21) par la fonction test $\varphi W_i^{lm\varepsilon}$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[, \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon))$.

On obtient

$$(I1.22) = \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e\varepsilon}}{\partial t^2} \varphi W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (\xi_{i\alpha}^{e\varepsilon} - \gamma_{i\alpha}^{e\varepsilon}) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} W_i^{lm\varepsilon} + \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} \right) dx d\tau - \int_0^T \int_{\partial S_{e\varepsilon}} (\xi_{i\alpha}^{e\varepsilon} - \gamma_{i\alpha}^{e\varepsilon}) n_\alpha \varphi W_i^{lm\varepsilon} d\sigma d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \xi_{i3}^{e\varepsilon} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} W_i^{lm\varepsilon} + \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_3} \right) dx d\tau =$$

et

$$(I1.23) \quad \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (\omega_{k\beta}^{\tilde{m}\varepsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (\omega_{k\beta}^{\tilde{m}\varepsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) dx d\tau = 0.$$

La différence (I1.22) - (I1.23) donne

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e\varepsilon}}{\partial t^2} \varphi W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (\xi_{i\alpha}^{e\varepsilon} - \gamma_{i\alpha}^{e\varepsilon}) \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (\xi_{i\alpha}^{e\varepsilon} - \gamma_{i\alpha}^{e\varepsilon}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau + \int_0^T \int_{\partial T^{e\varepsilon}} e^2 \lambda \varepsilon u_i^{e\varepsilon} \varphi W_i^{lm\varepsilon} d\sigma d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\partial T^{e\varepsilon}} e^2 \gamma \varepsilon \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial t} \varphi W_i^{lm\varepsilon} d\sigma d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \xi_{i3}^{e\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau + \\ & \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} \xi_{i3}^{e\varepsilon} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_3} dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (\omega_{k\beta}^{\tilde{m}\varepsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) dx d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (\omega_{k\beta}^{\tilde{m}\varepsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) dx d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} F_i^{e\varepsilon} \varphi W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau. \end{aligned}$$

La différence des deuxième et neuvième intégrales vaut

$$\int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} a_{i\alpha k3} \frac{\partial u_k^{e\varepsilon}}{\partial x_3} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} a_{l3k\beta} \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) dx d\tau.$$

En effet, on a

$$\int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (\xi_{i\alpha}^{e\varepsilon} - \gamma_{i\alpha}^{e\varepsilon}) \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{e\varepsilon}} (\omega_{k\beta}^{\tilde{m}\varepsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) dx d\tau =$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \xi_{i\alpha}^{\varepsilon\varepsilon} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \gamma_{i\alpha}^{\varepsilon\varepsilon} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \omega_{k\beta}^{lm\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{\varepsilon\varepsilon}) dx d\tau + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \omega_{k\beta}^{lm\varepsilon} \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\zeta_k^{\varepsilon\varepsilon}) dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \delta_{m3} a_{l3k\beta} \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{\varepsilon\varepsilon} - \zeta_k^{\varepsilon\varepsilon}) dx d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{i\alpha kh} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_h} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial \zeta_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_\beta} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} \varphi \frac{\partial (P^\varepsilon u_k^{\varepsilon\varepsilon})}{\partial x_\beta} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} \varphi \frac{\partial \zeta_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_\beta} dx d\tau - \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \delta_{m3} a_{l3k\beta} \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{\varepsilon\varepsilon} - \zeta_k^{\varepsilon\varepsilon}) dx d\tau \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_\beta} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{i\alpha k3} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_3} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \delta_{m3} a_{l3k\beta} \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{\varepsilon\varepsilon} - \zeta_k^{\varepsilon\varepsilon}) dx d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{i\alpha k3} \frac{\partial u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_3} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{l3k\beta} \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{\varepsilon\varepsilon} - \zeta_k^{\varepsilon\varepsilon}) dx d\tau.
\end{aligned}$$

Après une double intégration par parties dans la première intégrale de (II.24), et après prolongement, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} e^2 P^\varepsilon (u_i^{\varepsilon\varepsilon}) \chi_{\Omega_{ee}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} (\xi_{i\alpha}^{\varepsilon\varepsilon} - \gamma_{i\alpha}^{\varepsilon\varepsilon}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau + \\
& + \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}^\varepsilon, P^\varepsilon u_i^{\varepsilon\varepsilon} \varphi W_i^{lm\varepsilon} \rangle d\tau + \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}^\varepsilon, P^\varepsilon \left(\frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} \right) \varphi W_i^{lm\varepsilon} \rangle d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \xi_{i3}^{\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_e} \xi_{i3}^{\varepsilon\varepsilon} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_3} dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_e} (\omega_{k\beta}^{lm\varepsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} (P^\varepsilon u_k^{\varepsilon\varepsilon} - \zeta_k^{\varepsilon\varepsilon}) dx d\tau + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_e} a_{i\alpha k3} \frac{\partial P^\varepsilon u_k^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_3} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_e} a_{l3k\beta} \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{\varepsilon\varepsilon} - \zeta_k^{\varepsilon\varepsilon}) dx d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_e} \chi_{\Omega_{ee}} F_i^{\varepsilon\varepsilon} \varphi W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers zéro dans l'égalité précédente.

On obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega_e} e^2 u_i^{\varepsilon*} \frac{|Y_*|}{|Y|} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} W_i^{lm*} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \left(\xi_{i\alpha}^{\varepsilon*} - \left(\frac{1}{|Y|} \int_{Y_*} \gamma_{i\alpha}^\varepsilon dy \right) \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} W_i^{lm*} dx d\tau + \\
& + \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}^\varepsilon, u_i^{\varepsilon*} \varphi W_i^{lm*} \rangle d\tau + \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}^\varepsilon, \frac{\partial u_i^{\varepsilon*}}{\partial t} \varphi W_i^{lm*} \rangle d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \xi_{i3}^{\varepsilon*} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} W_i^{lm*} dx d\tau - \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_e} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{Y_*} (a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial \omega_{i\alpha}^{lm}}{\partial y_\alpha} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) dy \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} u_k^{\varepsilon*} dx d\tau +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_*} a_{i\alpha k3} \frac{\partial \omega_i^{lm}}{\partial y_\alpha} dy \right] \varphi \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_3} dx d\tau - \\
& - \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\xi_{i3}^{e*} - \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_*} \gamma_{i3}^e dy \right) \varphi dx d\tau + \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_*} a_{i3k3} dy \right) \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_3} \varphi dx d\tau = \\
& = \frac{|Y_*|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} F_i^{e*} \varphi W_i^{lm*} dx d\tau.
\end{aligned}$$

Donnons quelques explications concernant ce passage à la limite.

Pour la septième intégrale, nous avons utilisé le lemme de Brizzi-Chalot [1], d'après lequel on peut écrire que

$\forall f_i^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ y_α périodique, on a

$$f_i^\varepsilon(y_1, y_2) \frac{\partial u_i^{e\varepsilon}}{\partial x_3} \rightharpoonup \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_*} f_i^\varepsilon dy \right) \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial x_3} \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Pour les huitième et neuvième intégrales, on fait le calcul suivant :

On a

$$\begin{aligned}
& -\delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} a_{i3k\beta} \varphi \frac{\partial}{\partial x_\beta} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) dx d\tau = \\
& = -\delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(a_{i3kh} \varphi \frac{\partial}{\partial x_h} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) - a_{i3k3} \varphi \frac{\partial}{\partial x_3} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) \right) dx d\tau = \\
& = -\delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(a_{i3kh} \varphi \frac{\partial P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon}}{\partial x_h} - a_{i3kh} \frac{\partial \zeta_k^{e\varepsilon}}{\partial x_h} \varphi \right) dx d\tau + \\
& + \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(a_{i3k3} \varphi \frac{\partial}{\partial x_3} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) \right) dx d\tau = \\
& = -\delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\xi_{i3}^{e*} \varphi - \gamma_{i3}^e \varphi \right) dx d\tau + \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} a_{i3k3} \varphi \frac{\partial}{\partial x_3} (P^\varepsilon u_k^{e\varepsilon} - \zeta_k^{e\varepsilon}) dx d\tau.
\end{aligned}$$

A la limite, on obtient

$$-\delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\xi_{i3}^{e*} - \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_*} \gamma_{i3}^e dy \right) \varphi dx d\tau + \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_*} a_{i3k3} dy \right) \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_3} \varphi dx d\tau.$$

Ces explications étant données, on a également

$$W_i^{lm*} = \delta_{m\lambda} W_i^{l\lambda*}.$$

En effet, on a

$$W_i^{l3\varepsilon} = P^\varepsilon(\varepsilon(-\chi_i^{l3})), \text{ donc } W_i^{l3*} = 0.$$

En conséquence, on a

$$\delta_{m\lambda} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e*}}{\partial t^2} \frac{|Y_*|}{|Y|} \varphi W_i^{l\lambda*} dx d\tau - \delta_{m\lambda} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\xi_{i\alpha}^{e*} - \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}_*} \gamma_{i\alpha}^e dy \right] \varphi \delta_{\alpha\lambda} \delta_{li} dx d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_{m\lambda} \int_0^T \int_{\Omega_e} \frac{\partial \xi_{i\alpha}^{e*}}{\partial x_\alpha} W_i^{l\lambda*} \varphi dx d\tau + \int_0^T \delta_{m\lambda} \langle \mu_{e^2\lambda}, u_i^{e*} \varphi W_i^{l\lambda*} \rangle d\tau + \\
& + \int_0^T \delta_{m\lambda} \langle \mu_{e^2\gamma}, \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \varphi W_i^{l\lambda*} \rangle d\tau - \delta_{m\lambda} \int_0^T \int_{\Omega_e} \frac{\partial \xi_{i3}^{e*}}{\partial x_3} W_i^{l\lambda*} \varphi dx d\tau + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_e} \left[\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \left(a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial W_i^{lm}}{\partial y_\alpha} + \delta_{m3} a_{l3k\beta} \right) dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_\beta} \varphi dx d\tau + \\
& + \int_0^T \int_{\Omega_e} \left[\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} a_{i\alpha k3} \frac{\partial W_i^{lm}}{\partial y_\alpha} dy \right] \varphi \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_3} dx d\tau - \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_e} \left(\xi_{l3} - \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \gamma_{l3}^e dy \right) \varphi dx d\tau + \\
& + \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} a_{l3k3} dy \right) \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_3} \varphi dx d\tau = \\
& = \frac{|Y_*|}{|Y|} \delta_{m\lambda} \int_0^T \int_{\Omega_e} F_i^{e*} \varphi W_i^{l\lambda*}.
\end{aligned}$$

Pour $m = \lambda$, on a donc

$$\begin{aligned}
& \frac{|Y_*|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega_e} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e*}}{\partial t^2} \varphi W_i^{l\lambda*} dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_e} \left(\xi_{l\lambda}^{e*} - \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \gamma_{l\lambda} dy \right) \varphi dx d\tau - \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_e} \frac{\partial \xi_{ij}^{e*}}{\partial x_j} W_i^{l\lambda*} \varphi dx d\tau + \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}, u_i^{e*} \varphi W_i^{l\lambda*} \rangle d\tau + \\
& + \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}, \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \varphi W_i^{l\lambda*} \rangle d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \left[\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} a_{i\alpha k j} \frac{\partial W_i^{l\lambda}}{\partial y_\alpha} dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_j} \varphi dx d\tau = \\
& = \frac{|Y_*|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega_e} F_i^{e*} \varphi W_i^{l\lambda*} dx d\tau.
\end{aligned}$$

les première, troisième, quatrième, cinquième et septième intégrales disparaissent en vertu de (I1.10).

On a donc

$$\int_0^T \int_{\Omega_e} \left(\xi_{l\lambda}^{e*} - \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \gamma_{l\lambda} dy \right) \varphi dx d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} a_{i\alpha k j} \frac{\partial \omega_i^{l\lambda}}{\partial y_\alpha} dy \right) \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_j} \varphi dx d\tau,$$

de sorte que

$$\xi_{l\lambda}^{e*} = \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \gamma_{l\lambda} dy \right) + \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} a_{i\alpha k j} \frac{\partial \omega_i^{l\lambda}}{\partial y_\alpha} dy \right) \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_j}$$

Rappelons encore que

$$\begin{cases} W_i^{l\lambda} = -\chi_i^{l\lambda} + y_\alpha \delta_{il}, \\ W_i^{l3} = -\chi_i^{l3}. \end{cases}$$

En conséquence, on a

$$(I1.25) \quad \xi_{l\lambda}^{e*} = \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \gamma_{l\lambda}^e dy \right) + \left[\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \left(a_{l\lambda k j} - a_{i\alpha k j} \frac{\partial \chi_i^{l\lambda}}{\partial y_\alpha} \right) dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_j}.$$

Pour $m = 3$, on a, par un raisonnement analogue au précédent :

$$\begin{aligned} \xi_{l3}^{e*} &= \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \gamma_{l3}^e dy \right) + \left[\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \left(a_{i\alpha k \beta} \frac{\partial W_i^{l3}}{\partial y_\alpha} + a_{l3 k \beta} \right) dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_\beta} + \\ &\quad + \left[\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \left(a_{i\alpha k 3} \frac{\partial W_i^{l3}}{\partial y_\alpha} + a_{l3 k 3} \right) dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_3}, \end{aligned}$$

soit

$$\xi_{l3}^{e*} = \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \gamma_{l3}^e dy \right) + \left[\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \left(a_{i\alpha k j} \frac{\partial W_i^{l3}}{\partial y_\alpha} + a_{l3 k j} \right) dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_j},$$

soit encore

$$(I1.26) \quad \xi_{l3}^{e*} = \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \gamma_{l3}^e dy \right) + \left[\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \left(a_{l3 k j} - a_{i\alpha k j} \frac{\partial \chi_i^{l3}}{\partial y_\alpha} \right) dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_j}.$$

Compte-tenu des relations (I1.25) et (I1.26), on obtient donc

$$\xi_{ij}^{e*} = \left(\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} a_{ijk\beta} \frac{\partial \zeta_k}{\partial y_\beta} dy \right) + \left[\frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \left(a_{ijkh} - a_{l\beta kh} \frac{\partial \chi_l^{ij}}{\partial y_\beta} \right) dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_h}.$$

Posons

$$q_{ijkh} = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \left(a_{ijkh} - a_{l\beta kh} \frac{\partial \chi_l^{ij}}{\partial y_\beta} \right) dy.$$

Alors, le système homogénéisé est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} \frac{\partial^2 u_i^{e*}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_{ijkh} \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_h} \right) = \frac{|Y_*|}{|Y|} F_i^{e*} - \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^2 u_i^{e*} - \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^2 \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \quad \text{sur } \Omega_e \times (0, T), \\ q_{i3kh} \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_h} n_3 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e^\pm \times (0, T), \\ u_i^{e*} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_e^0 \times (0, T), \\ u_i^{e*}(0) = u_i^{*0}, \\ \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t}(0) = u_i^{*1}. \end{array} \right.$$

Les fonctions u_i^{*0} et u_i^{*1} sont définies par

$$\begin{cases} P^\varepsilon u_i^{\varepsilon 0} \rightarrow u_i^{*0} & \text{dans } V(\Omega_e) \\ P^\varepsilon u_i^{\varepsilon 1} \rightarrow u_i^{*1} & \text{dans } L^2(\Omega_e). \end{cases}$$

Les fonctions u_i^{*0} et u_i^{*1} appartenant respectivement à $V(\Omega_e)$ et $L^2(\Omega_e)$, il y a existence et unicité de la solution de ce système homogénéisé, avec de plus

$$u_i^{e*} \in L^\infty(0, T, V(\Omega_e)), \quad \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega_e)), \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u_i^{e*}}{\partial t^2} \in L^\infty(0, T, V(\Omega_e)').$$

II.2.3 PASSAGE A LA LIMITE EN ε DANS LE DEUXIEME CAS :

On s'intéresse donc au cas $\|C_{G_i^\varepsilon}\|_\infty^2 + \|C \frac{\partial G_i^\varepsilon}{\partial t}\|_\infty^2 \neq 0$.

Comme dans le premier cas, il existe un prolongement P^ε

$$P^\varepsilon(\varepsilon u_i^{\varepsilon\varepsilon}) \rightarrow u_i^{\varepsilon*} \text{ dans } L^\infty(0, T, V(\Omega_e)).$$

Nous allons utiliser la méthode de l'énergie pour définir le problème qui caractérise $u^{\varepsilon*}$.

Posons

$$\xi_{ij}^{\varepsilon\varepsilon} = a_{ijkh} \gamma_{kh}(\varepsilon u^{\varepsilon\varepsilon}).$$

Notons

$$\tilde{\xi}_{ij}^{\varepsilon\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{sur } S_{e\varepsilon}, \\ \xi_{ij}^{\varepsilon\varepsilon} & \text{sur } \Omega_{e\varepsilon}. \end{cases}$$

On a

$$\|\tilde{\xi}_{ij}^{\varepsilon\varepsilon}\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega_e))} \leq C,$$

donc

$$\tilde{\xi}_{ij}^{\varepsilon\varepsilon} \rightharpoonup \xi_{ij}^{\varepsilon*} \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega_e)).$$

Le système (II.1) s'écrit

$$(II.27) \quad \begin{cases} \varepsilon e^2 \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\partial \xi_{ij}^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial x_j} = \varepsilon F_i^{\varepsilon\varepsilon} & \text{dans } \Omega_{e\varepsilon} \times (0, T) \\ \xi_{i3}^{\varepsilon\varepsilon} n_3 = 0 & \text{sur } \Gamma_{e\varepsilon}^\pm \times (0, T), \\ \xi_{i\alpha}^{\varepsilon\varepsilon} n_\alpha = \varepsilon G_i^{\varepsilon\varepsilon} - \varepsilon^2 \lambda e^2 u_i^{\varepsilon\varepsilon} - \gamma \varepsilon^2 e^2 \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t} & \text{sur } \partial S_{e\varepsilon} \times (0, T), \\ u_i^{\varepsilon\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_e^0 \times (0, T), \\ u_i^{\varepsilon\varepsilon}(0) = u_i^{\varepsilon 0}, \\ \frac{\partial u_i^{\varepsilon\varepsilon}}{\partial t}(0) = u_i^{\varepsilon 1}. \end{cases} \quad (II.27.1),$$

Caractérisons $\xi_{ij}^{\varepsilon*}$.

Multiplions l'équation (II.27.1) par une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[, \mathcal{D}(\Omega))$.

Il vient

$$\int_0^T \int_{\Omega_{ee}} e^2 \varepsilon \frac{\partial^2 u_i^{ee}}{\partial t^2} \varphi dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \xi_{ij}^{ee} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx d\tau - \int_0^T \int_{\partial S_{ee}} \xi_{i\alpha}^{ee} \varphi n_\alpha d\sigma d\tau =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \varepsilon F_i^{ee} \varphi dx d\tau,$$

ou

$$\int_0^T \int_{\Omega_{ee}} e^2 \varepsilon \frac{\partial^2 u_i^{ee}}{\partial t^2} \varphi dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \xi_{ij}^{ee} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx d\tau =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \varepsilon F_i^{ee} \varphi dx d\tau + \int_0^T \int_{\partial S_{ee}} \varepsilon G_i^{ee} \varphi d\sigma d\tau - e^2 \lambda \varepsilon^2 \int_0^T \int_{\partial S_{ee}} u_i^{ee} \varphi d\sigma d\tau -$$

$$- e^2 \gamma \varepsilon^2 \int_0^T \int_{\partial S_{ee}} \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t} \varphi d\sigma d\tau.$$

Après une double intégration par parties (en temps) de la première intégrale, et après prolongement, il vient

$$\int_0^T \int_{\Omega_e} \varepsilon^2 P^\varepsilon (\varepsilon u_i^{ee}) \chi_{\Omega_{ee}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \xi_{ij}^{ee} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_e} \varepsilon F_i^{ee} \chi_{\Omega_{ee}} \varphi dx d\tau +$$

$$+ \int_0^T \langle \mu_{G_i^\varepsilon}^\varepsilon, \varphi \rangle d\tau - \int_0^T \langle \mu_{e^2 \lambda}^\varepsilon, P^\varepsilon (\varepsilon u_i^{ee}) \varphi \rangle d\tau - \int_0^T \langle \mu_{e^2 \gamma}^\varepsilon, P^\varepsilon (\varepsilon \frac{\partial u_i^{ee}}{\partial t}) \varphi \rangle d\tau.$$

Faisons tendre ε vers zéro.

On obtient

$$(I1.28) \quad \frac{|Y_*|}{|Y|} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e*}}{\partial t^2} - \frac{\partial \xi_{ij}^{e*}}{\partial x_j} = \mu_{G_i^\varepsilon} - \mu_{e^2 \lambda} \mu_i^{e*} - \mu_{e^2 \gamma} \frac{\partial \mu_i^{e*}}{\partial t} \text{ dans } \Omega_e \times (0, T).$$

Multiplions le problème (I1.27) par $\varphi W_i^{lm\varepsilon}$, et le problème (I1.19) par $\varphi P^\varepsilon (\varepsilon u_k^{ee})$, où l'on choisit pour fonction test une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[, \mathcal{D}(\Omega))$.

On obtient

$$(I1.29) \quad \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} e^2 \varepsilon \frac{\partial^2 u_i^{ee}}{\partial t^2} \varphi W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \xi_{i\alpha}^{ee} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} W_i^{lm\varepsilon} + \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} \right) dx d\tau -$$

$$- \int_0^T \int_{\partial S_{ee}} \xi_{i\alpha}^{ee} n_\alpha \varphi W_i^{lm\varepsilon} d\sigma d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \xi_{i3}^{ee} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} W_i^{lm\varepsilon} + \varphi \frac{\partial W_i^{lm\varepsilon}}{\partial x_\alpha} \right) dx d\tau =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \varepsilon F_i^{ee} \varphi W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau,$$

et

$$(I1.30) \quad \begin{aligned} & + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} (\omega_{k\beta}^{lm\epsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon}) dx d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} (\omega_{k\beta}^{lm\epsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \varphi \frac{\partial P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon})}{\partial x_\beta} dx d\tau = 0. \end{aligned}$$

La différence (I1.29) - (I1.30) donne

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} e^2 \epsilon \frac{\partial^2 u_i^{\epsilon\epsilon}}{\partial t^2} \varphi W_i^{lm\epsilon} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \xi_{i\alpha}^{\epsilon\epsilon\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} W_i^{lm\epsilon} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \xi_{i\alpha}^{\epsilon\epsilon\epsilon} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\epsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \\ & - \int_0^T \langle \mu_{G_i}^\epsilon, \varphi W_i^{lm\epsilon} \rangle d\tau + \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}^\epsilon, \epsilon u_i^{\epsilon\epsilon} \varphi W_i^{lm\epsilon} \rangle d\tau + \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}^\epsilon, \epsilon \frac{\partial u_i^{\epsilon\epsilon}}{\partial t} \varphi W_i^{lm\epsilon} \rangle d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \xi_{i3}^\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} W_i^{lm\epsilon} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \xi_{i3}^\epsilon \frac{\partial W_i^{lm\epsilon}}{\partial x_3} \varphi dx d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} (\omega_{k\beta}^{lm\epsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon}) - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} (\omega_{k\beta}^{lm\epsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \varphi \frac{\partial P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon})}{\partial x_\beta} dx d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} \epsilon F_i^{\epsilon\epsilon} \varphi W_i^{lm\epsilon} dx d\tau. \end{aligned}$$

La différence des troisième et dixième intégrales donne

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{i\alpha kh} \frac{\partial P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon})}{\partial x_h} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\epsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial W_i^{lm\epsilon}}{\partial x_\alpha} \varphi \frac{\partial P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon})}{\partial x_\beta} dx d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{l3k\beta} \varphi \frac{\partial P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon})}{\partial x_\beta} dx d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{i\alpha k3} \frac{\partial P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon})}{\partial x_3} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\epsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_{ee}} a_{l3k\beta} \varphi \frac{\partial P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon})}{\partial x_\beta} dx d\tau \end{aligned}$$

On obtient donc, après une double intégration par parties (en temps) de la première intégrale, et après prolongement :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_e} e^2 P^\epsilon(\epsilon u_i^{\epsilon\epsilon}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \chi_{\Omega_{ee}} W_i^{lm\epsilon} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \xi_{i\alpha}^{\tilde{\epsilon}\epsilon\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} W_i^{lm\epsilon} dx d\tau - \\ & - \int_0^T \langle \mu_{G_i}^\epsilon, \varphi W_i^{lm\epsilon} \rangle d\tau + \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}^\epsilon, P^\epsilon(\epsilon u_i^{\epsilon\epsilon}) \varphi W_i^{lm\epsilon} \rangle d\tau + \\ & + \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}^\epsilon, P^\epsilon(\epsilon \frac{\partial u_i^{\epsilon\epsilon}}{\partial t}) \varphi W_i^{lm\epsilon} \rangle d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \xi_{i3}^{\tilde{\epsilon}\epsilon\epsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} W_i^{lm\epsilon} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \xi_{i3}^{\tilde{\epsilon}\epsilon\epsilon} \frac{\partial W_i^{lm\epsilon}}{\partial x_3} \varphi dx d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_e} (\omega_{k\beta}^{lm\epsilon} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon}) dx d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_e} a_{i\alpha k3} \frac{\partial P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon})}{\partial x_3} \varphi \frac{\partial W_i^{lm\epsilon}}{\partial x_\alpha} dx d\tau - \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_e} a_{l3k\beta} \varphi \frac{\partial P^\epsilon(\epsilon u_k^{\epsilon\epsilon})}{\partial x_\beta} dx d\tau = \end{aligned}$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \chi_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon F_i^{\varepsilon\varepsilon} \varphi W_i^{lm\varepsilon} dx d\tau.$$

Faisons tendre ε vers zéro.

Il vient

$$\begin{aligned} & \frac{|Y_*|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 u_i^{\varepsilon*} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} W_i^{lm*} dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \xi_{i\alpha}^{\varepsilon*} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} W_i^{lm*} dx d\tau - \int_0^T \langle \mu_{G_i^\varepsilon}, \varphi W_i^{lm*} \rangle d\tau + \\ & + \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}, u_i^{\varepsilon*} \varphi W_i^{lm*} \rangle d\tau + \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}, \frac{\partial u_i^{\varepsilon*}}{\partial t} \varphi W_i^{lm*} \rangle d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \xi_{i3}^{\varepsilon*} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} W_i^{lm*} d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} (a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial W_i^{lm}}{\partial y_\alpha} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) dy \right] \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} u_k^{\varepsilon*} dx d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} (a_{i\alpha k3} \frac{\partial W_i^{lm}}{\partial y_\alpha} dy) \frac{\partial u_k^{\varepsilon*}}{\partial x_3} \varphi dx d\tau - \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \xi_{i3}^{\varepsilon*} \varphi dx d\tau + \right. \\ & \left. + \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} a_{l3k\beta} dy \right) \frac{\partial u_k^{\varepsilon*}}{\partial x_\beta} \varphi dx d\tau = \right. \\ & = 0. \end{aligned}$$

Or, on a

$$W_i^{lm*} = \delta_{m\lambda} W_i^{l\lambda*} \text{ car } W_i^{l3*} = 0,$$

donc, après une double intégration par parties (en temps) de la première intégrale, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{|Y_*|}{|Y|} \delta_{m\lambda} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \varphi \frac{\partial^2 u_i^{\varepsilon*}}{\partial t^2} \omega_i^{l\lambda*} dx d\tau - \delta_{m\lambda} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \xi_{i\alpha}^{\varepsilon*} \varphi \delta_{\alpha\lambda} \delta_{li} dx d\tau - \\ & - \delta_{m\lambda} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \xi_{i\alpha}^{\varepsilon*}}{\partial x_\alpha} W_i^{l\lambda*} \varphi dx d\tau - \delta_{m\lambda} \int_0^T \langle \mu_{G_i^\varepsilon}, \varphi W_i^{l\lambda*} \rangle d\tau + \\ & + \delta_{m\lambda} \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}, u_i^{\varepsilon*} \varphi W_i^{l\lambda*} \rangle d\tau + \delta_{m\lambda} \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}, \frac{\partial u_i^{\varepsilon*}}{\partial t} \varphi W_i^{l\lambda*} \rangle d\tau - \\ & - \delta_{m\lambda} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial \xi_{i3}^{\varepsilon*}}{\partial x_3} W_i^{l\lambda*} \varphi dx d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} (a_{i\alpha k\beta} \frac{\partial W_i^{l\lambda}}{\partial y_\alpha} + \delta_{m3} a_{l3k\beta}) dy \right] \frac{\partial u_k^{\varepsilon*}}{\partial x_\beta} \varphi dx d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} a_{i\alpha k3} \frac{\partial W_i^{l\lambda}}{\partial y_\alpha} dy \right) \frac{\partial u_k^{\varepsilon*}}{\partial x_3} \varphi dx d\tau - \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \xi_{i3}^{\varepsilon*} dx d\tau + \\ & + \delta_{m3} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} a_{l3k\beta} dy \right) \frac{\partial u_k^{\varepsilon*}}{\partial x_\beta} dx d\tau = \\ & = 0. \end{aligned}$$

Pour $m = \lambda$, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{|Y_*|}{|Y|} \int_0^T \int_{\Omega_e} e^2 \varphi \frac{\partial^2 u_i^{e*}}{\partial t^2} W_i^{l\lambda*} dx d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_e} \xi_{l\lambda}^{e*} \varphi dx d\tau - \\
& \int_0^T \int_{\Omega_e} \frac{\partial \xi_{ij}^{e*}}{\partial x_j} W_i^{l\lambda*} \varphi dx d\tau + \int_0^T \langle \mu_{G_i^e}, \varphi W_i^{l\lambda*} \rangle d\tau + \int_0^T \langle \mu_{e^2\lambda}, u_i^{e*} \varphi W_i^{l\lambda*} \rangle d\tau \\
& + \int_0^T \langle \mu_{e^2\gamma}, \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \varphi W_i^{l\lambda*} \rangle d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_e} \left[\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} (a_{i\alpha k j} \frac{\partial W_i^{l\lambda}}{\partial y_\alpha}) \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_j} \varphi dx d\tau = 0 \right. \\
& \left. = 0. \right.
\end{aligned}$$

Les première, troisième, quatrième, cinquième et sixième intégrale disparaissent en vertu de (I1.28).

On en déduit que

$$\xi_{l\lambda}^{e*} = \left[\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} a_{i\alpha k j} \frac{\partial W_i^{l\lambda}}{\partial x_\alpha} dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_\alpha}, \text{ soit}$$

$$(I1.31) \quad \xi_{l\lambda}^{e*} = \left[\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \left(a_{l\lambda k j} - a_{i\alpha k j} \frac{\partial \chi_i^{l\lambda}}{\partial y_\alpha} \right) dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_j}.$$

De même, pour $\lambda = 3$, on trouve par un raisonnement analogue

$$(I1.32) \quad \xi_{l3}^{e*} = \left[\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \left(a_{l3 k j} - a_{i\alpha k j} \frac{\partial \chi_i^{l3}}{\partial y_\alpha} \right) dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_j}.$$

On regroupe (I1.31) et (I1.32) sous la forme

$$\xi_{ij}^{e*} = \left[\frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \left(a_{ijkh} - a_{l\beta kh} \frac{\partial \chi_l^{ij}}{\partial y_\beta} \right) dy \right] \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_h}.$$

Posons

$$q_{ijkh} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} \left(a_{ijkh} - a_{l\beta kh} \frac{\partial \chi_l^{ij}}{\partial y_\beta} \right) dy.$$

Le système homogénéisé est donné par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|Y_*|}{|Y|} e^2 \frac{\partial^2 u_i^{e*}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(q_{ijkh} \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_h} \right) = \mu_{G_i^e} - e^2 \lambda \frac{|\partial S|}{|Y|} u_i^{e*} - e^2 \gamma \frac{|\partial S|}{|Y|} \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t} \\ u_i^{e*} = 0 \\ q_{i3kh} \frac{\partial u_k^{e*}}{\partial x_h} n_3 = 0 \\ u_i^{e*}(0) = u_i^{*0}, \\ \frac{\partial u_i^{e*}}{\partial t}(0) = u_i^{*1}. \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{dans } \Omega_e \times (0, T), \\ \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \text{sur } \Gamma_e^\pm \times (0, T), \end{array}$$

où les fonctions u_i^{*0} et u_i^{*1} sont définies respectivement par

$$P^\varepsilon(\varepsilon u_i^{\varepsilon 0}) \rightarrow u_i^{*0} \text{ dans } V(\Omega_\varepsilon),$$

et

$$P^\varepsilon(\varepsilon u_i^{\varepsilon 1}) \rightarrow u_i^{*1} \text{ dans } L^2(\Omega_\varepsilon).$$

Puisque $u_i^{*0} \in V(\Omega_\varepsilon)$ et $u_i^{*1} \in L^2(\Omega_\varepsilon)$, il y a existence et unicité de la solution de ce système homogénéisé.

I.2 DÉPENDANCE RELATIVE À L'ÉPAISSEUR. (LE PARAMÈTRE ϵ TEND VERS ZERO).

Les deux problèmes homogénéisés obtenus au paragraphe I.1 étant de même types, on va passer à la limite en ϵ seulement dans le cas où $\|C_{G_i^\epsilon}\|_\infty^2 + \|C \frac{\partial G_i^\epsilon}{\partial t}\|_\infty^2 = 0$.

I2.1 DILATATION DU DOMAINE.

Nous allons commencer par faire un changement de variables qui transforme le domaine Ω_ϵ en un domaine Ω indépendant de ϵ .

Posons

$$\begin{cases} z_\alpha = x_\alpha & (\alpha = 1, 2), \\ z_3 = \frac{x_3}{\epsilon}, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \phi_\alpha^\epsilon(z_1, z_2, \epsilon z_3) = \epsilon \phi_\alpha(z_1, z_2, z_3), \\ \phi_3^\epsilon(z_1, z_2, \epsilon z_3) = \phi_3(z_1, z_2, z_3). \end{cases}$$

Posons aussi

$$V(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma^0} = 0\} \text{ et } W(\Omega) = [V(\Omega)]^3.$$

Le système (I1.1) devient

$$(I2.1) \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} e^3 \frac{\partial^2 u_\tau^*}{\partial t^2} - \epsilon \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{\tau\eta}^* - \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{\tau 3}^* = \frac{|Y_*|}{|Y|} f_\tau^* - \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^3 u_\tau^{e*} - \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^2 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} & (I2.1.1) \\ \text{sur } \Omega \times (0, T), \end{cases} \\ \begin{cases} e^2 \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial t^2} - \epsilon \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{3\eta}^* - \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{33}^* = \frac{|Y_*|}{|Y|} f_3^* - \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^2 u_3^{e*} - \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} & (I2.1.2) \\ \text{sur } \Omega \times (0, T), \end{cases} \\ \begin{cases} \sigma_{ij}^* = q_{ij\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(u^*) + 2e^{-1} q_{ij\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}(u^*) + e^{-2} q_{ij 33} \gamma_{33}(u^*), \\ u_\tau^*(0) = \epsilon^{-1} u_\tau^{*0}, \\ \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t}(0) = \epsilon^{-1} u_\tau^{*1}, \\ u_3^*(0) = u_3^{*0}, \\ \frac{\partial u_3^*}{\partial t}(0) = u_3^{*1}, \\ \sigma_{i3}^* n_3 = 0 & \text{sur } \Gamma^\pm \times (0, T), \\ u_i^* = 0 & \text{sur } \Gamma^0 \times (0, T), \end{cases} \end{array} \right.$$

où

$$f_\tau^* = eF_\tau^* \text{ et } f_3^* = F_3^*.$$

Faisons tendre e vers zéro dans le système (I2.1).

On établit le résultat suivant :

I2.2 THEOREME 2.

Supposons que : $f_3^* \rightharpoonup f_3^{**}$ dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ faible.

Alors, on a

$$(I2.2) \quad e^2 u_i^* \rightharpoonup u_i^{**} \text{ dans } L^\infty(0, T, V(\Omega)) \text{ faible } *,$$

où

$$(I2.3) \quad \begin{cases} u_3^{**} = U_3^{**}(z_1, z_2, t) \\ u_\alpha^{**} = -z_3 \frac{\partial U_3^{**}}{\partial z_\alpha} + U_\alpha^{**}(z_1, z_2, t) \end{cases}$$

De plus, U_3^{**} est caractérisée par le problème d'évolution suivant :

$$(I2.4) \quad \begin{cases} \frac{|Y_*|}{|Y|} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} + \frac{1}{12} P_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^4 U_3^{**}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} = \frac{|Y_*|}{|Y|} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{**} dz_3 - \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda U_3^{**} - \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \text{ sur } \omega \times (0, T), \\ U_3^{**}(z_1, z_2, 0) = 0 \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(z_1, z_2, 0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_3^{**1} dz_3 \\ U_3^{**} = 0 \qquad \qquad \qquad \text{sur } \partial\omega \times (0, T), \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial n} = 0 \qquad \qquad \qquad \text{sur } \partial\omega \times (0, T). \end{cases}$$

avec :

$$(I2.5) \quad \begin{cases} P_{\alpha\beta\theta\rho} = q_{\alpha\beta\theta\rho} - q_{\alpha\beta j3} d_{ij} q_{i3\theta\rho} \\ (d_{ij})_{ij} = (q_{i3j3})_{ij}^{-1}, \end{cases}$$

la fonction U_3^{**1} étant définie par

$$e^2 u_3^{*1} \rightharpoonup U_3^{**1} \text{ dans } L^2(\omega),$$

et U_α^{**} est nulle.

I2.3 DEMONSTRATION DU THEOREME 2.

I2.3.1 ESTIMATION A PRIORI.

Multiplions l'équation (I2.1.1) par $e \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t}$, et l'équation (I2.1.2) en u_3^* par $\frac{\partial u_3^*}{\partial t}$.

En ajoutant les deux égalités obtenues, et en additionnant les termes similaires, on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \left(e^4 \sum_{\tau} \left| \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} \right|^2 + e^2 \left| \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \right|^2 + e^2 q_{\tau\eta\alpha\beta} \gamma_{\tau\eta} \gamma_{\alpha\beta} + 4e q_{\tau\eta\alpha 3} \gamma_{\tau\eta} \gamma_{\alpha 3} + 2q_{\tau\eta 33} \gamma_{33} \gamma_{\tau\eta} + \right. \\ & \left. + 4q_{\tau 3\alpha 3} \gamma_{\alpha 3} \gamma_{\tau 3} + 4e^{-1} q_{\tau 333} \gamma_{33} \gamma_{\tau 3} + e^{-2} q_{3333} |\gamma_{33}|^2 \right) dz = \\ & = \int_{\Omega} \left(e \frac{|Y_*|}{|Y|} f_\tau^* \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} + \frac{|Y_*|}{|Y|} f_3^* \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \right) dz - \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^4 u_\tau^* \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} dz - \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^2 u_3^* \frac{\partial u_3^*}{\partial t} dz - \\ & - \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^4 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} dz - \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \frac{\partial u_3^*}{\partial t} dz. \end{aligned}$$

En intégrant ceci de 0 à t, et en multipliant les deux membres de l'égalité par e^2 , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_{\tau} \left| e^3 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} \right|^2 + \left| e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \right|^2 + q_{\tau\eta\alpha\beta} (e^2 \gamma_{\tau\eta}) (e^2 \gamma_{\alpha\beta}) + 4q_{\tau\eta\alpha 3} (e^2 \gamma_{\tau\eta}) (e \gamma_{\alpha 3}) + \right. \\ & \left. + 2q_{\tau\eta 33} (\gamma_{33}) (e^2 \gamma_{\tau\eta}) + 4q_{\tau 3\alpha 3} (e \gamma_{\alpha 3}) (e \gamma_{\tau 3}) + 4q_{\tau 3333} (\gamma_{33}) (e \gamma_{\tau 3}) + q_{3333} (\gamma_{33}) (\gamma_{33}) \right) dz = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{|Y_*|}{|Y|} f_\tau^* (e^3 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t}) + \frac{|Y_*|}{|Y|} f_3^* (e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t}) \right) dz - \\ & - \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda (e^3 u_\tau^*) (e^3 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t}) dz - \int_0^t \int_{\Omega} \left(\frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda (e^2 u_3^*) (e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t}) dz - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_0^t \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma (e^3 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t}) (e^3 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t}) dz - \int_0^t \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma (e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t}) (e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t}) dz + \frac{e^2}{2} E(0), \right. \end{aligned}$$

où $E(t)$ est défini par

$$E(t) =$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\sum_{\tau} \left| e^3 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} \right|^2(t) + \left| e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \right|^2(t) + q_{\tau\eta\alpha\beta} (e^2 \gamma_{\tau\eta}) (e^2 \gamma_{\alpha\beta})(t) + 4q_{\tau\eta\alpha 3} (e^2 \gamma_{\tau\eta}) (e \gamma_{\alpha 3})(t) + \right. \\ & 2q_{\tau\eta 33} (\gamma_{33}) (e^2 \gamma_{\tau\eta})(t) + 4q_{\tau 3\alpha 3} (e \gamma_{\alpha 3}) (e \gamma_{\tau 3})(t) + 4q_{\tau 3333} (\gamma_{33}) (e \gamma_{\tau 3})(t) + \\ & \left. + q_{3333} (\gamma_{33}) (\gamma_{33})(t) \right) dz. \end{aligned}$$

Appelons A (respectivement B) le premier membre de l'égalité précédente.

En posant

$$\begin{cases} \theta_{\alpha\beta} = e^2 \gamma_{\alpha\beta}, \\ \theta_{\alpha 3} = e \gamma_{\alpha 3}, \\ \theta_{33} = \gamma_{33}, \end{cases}$$

le membre A s'écrit

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{\tau} |e^3 \frac{\partial u_{\tau}^*}{\partial t}|^2 + |e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t}|^2 + q_{ijkh} \theta_{kh} \theta_{ij} \right) dz.$$

Posons

$$\begin{cases} \psi_{\alpha} = e^3 u_{\alpha}^*, \\ \psi_3 = e^2 u_3^*. \end{cases}$$

Le membre A s'écrit alors

$$\int_{\Omega} \left(\sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|^2 + q_{ijkh} \theta_{kh} \theta_{ij} \right) dz.$$

Or, d'après la coercivité des q_{ijkh} , on a

$$(I2.6) \quad A \geq \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \sum_{i,j} |\theta_{ij}|_{L^2(\Omega)}^2.$$

D'autre part, les deux dernières égalités de B étant majorées par zéro, on a

$$\begin{aligned} B &\leq \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{\tau} |f_{\tau}^*|^2 dz dt + \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \int_{\Omega} |e^3 \frac{\partial u_{\tau}^*}{\partial t}|^2 dz dt + \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \int_{\Omega} \sum_{\tau} |f_3^*|^2 dz dt + \\ &+ \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \int_{\Omega} |e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t}|^2 dz dt + \int_{\Omega} \int_0^t \frac{|\partial S|}{2|Y|} \lambda \frac{\partial}{\partial t} \left((e^3 u_{\tau}^*)^2 \right) dt dz + \\ &+ \int_{\Omega} \int_0^t \frac{|\partial S|}{2|Y|} \lambda \frac{\partial}{\partial t} \left((e^2 u_3^*)^2 \right) dt dz + \frac{e^2}{2} E(0), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} B &\leq \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i |f_i^*|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{2|Y|} \lambda (e^3 u_{\tau}^*(t))^2 dz - \\ &- \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{2|Y|} \lambda (e^3 u_{\tau}^*(0))^2 dz + \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{2|Y|} \lambda (e^2 u_3^*(t))^2 dz - \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{2|Y|} \lambda (e^2 u_3^*(0))^2 dz + \frac{e^2}{2} E(0). \end{aligned}$$

On sait par hypothèse que

$$\begin{cases} e^2 |u_i^{*1}|_{L^2(\Omega)} \leq C, \\ e \left| \frac{\partial u_i^{*0}}{\partial z_\alpha} \right|_{L^2(\Omega)} \leq C, \\ \left| \frac{\partial u_i^{*0}}{\partial z_3} \right|_{L^2(\Omega)} \leq C, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} B &\leq \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i |f_i^*|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_\Omega \frac{|\partial S|}{2|Y|} \lambda (e^3 u_r^*(t))^2 dz + \\ &+ \int_\Omega \frac{|\partial S|}{2|Y|} \lambda (e^2 u_3^*(t))^2 dz + C, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} B &\leq \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i |f_i^*|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_\Omega \frac{|\partial S|}{2|Y|} e^2 \lambda (e^2 u_r^*(t))^2 dz + \\ &+ \int_\Omega \frac{|\partial S|}{2|Y|} e^2 \lambda (u_3^*(t))^2 dz + C. \end{aligned}$$

A l'aide de l'inégalité de Korn, et compte-tenu du fait que $e \leq 1$, il vient

$$\begin{aligned} B &\leq \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i |f_i^*|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \\ (I2.7) \quad &+ C_K \frac{|\partial S|}{2|Y|} e^2 \lambda \sum_{i,j} \|\theta_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C. \end{aligned}$$

Compte-tenu de (I2.6) et (I2.7), on a

$$\begin{aligned} \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 + C_0 \sum_{i,j} \|\theta_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \\ &+ \frac{C_K |\partial S|}{2|Y|} e^2 \lambda \sum_{i,j} \|\theta_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C, \end{aligned}$$

soit

$$\sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(C_0 - \frac{C_K |\partial S| e^2 \lambda}{2|Y|} \right) \|\theta_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 dt + C.$$

Le réel e étant destiné à tendre vers zéro, on peut le choisir suffisamment petit pour que l'expression $\left(C_0 - \frac{C_K |\partial S| e^{2\lambda}}{2|Y|}\right)$ soit une constante positive Λ .

On a donc

$$(I2.8) \quad \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 + \Lambda \|\theta_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 dt + C,$$

de sorte que

$$\sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 + C.$$

D'après le lemme de Gronwall, il vient

$$\sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C e^{\frac{|Y_*|}{2|Y|} t},$$

d'où

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C,$$

soit

$$(I2.9) \quad \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 \leq C.$$

On a donc

$$(I2.10) \quad \begin{cases} \left| e^3 \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial t} \right|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 \leq C, \\ \left| e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \right|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 \leq C. \end{cases}$$

D'après (I2.8), on a

$$\Lambda \|\theta_{ij}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{|Y_*|}{2|Y|} \int_0^t \sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|_{L^2(\Omega)}^2 dt + C,$$

donc, compte-tenu de (I2.9), on a

$$\|\theta_{ij}\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))}^2 \leq C,$$

d'où

$$(I2.11) \quad \begin{cases} |e^2 \gamma_{\alpha\beta}|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C & (I2.11.1), \\ |e \gamma_{\alpha 3}|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C & (I2.11.2), \\ |\gamma_{33}|^2_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega))} \leq C & (I2.11.3), \end{cases}$$

D'après (I2.11) et l'inégalité de Korn, on a

$$e^2 u_i^* \rightharpoonup u_i^{**} \text{ dans } L^\infty(0, T, V(\Omega)) \text{ faible.}$$

De même, on a

$$(I2.12) \quad \begin{cases} u_3^{**} = U_3^{**}(z_1, z_2, t) \in L^\infty(0, T, H_0^2(\omega)), \\ u_\alpha^{**} = -z_3 \frac{\partial U_3^{**}}{\partial z_\alpha}(z_1, z_2, t) + U_\alpha^{**}(z_1, z_2, t) \in L^\infty(0, T, H_0^1(\omega)). \end{cases}$$

On a encore

$$e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(z_1, z_2, t) \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \text{ faible.}$$

Enfin, on a

$$\begin{cases} e^3 \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial t} \text{ borné.} \\ e^2 \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial t} \rightharpoonup \tilde{u}_\alpha \text{ faible }^*, \end{cases}$$

donc

$$e^3 \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial t} \rightharpoonup 0 \text{ dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)) \text{ faible.}$$

I2.3.2 PASSAGE A LA LIMITE.

Multiplions l'équation (I2.1.1) par la fonction test $e z_3 \theta_\tau(z_1, z_2, t)$, avec $\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, H_0^1(\omega))$.

On obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega e^4 \frac{\partial^2 u_\tau^*}{\partial t^2} z_3 \theta_\tau dz dt + \int_0^T \int_\Omega e^2 \sigma_{\tau\eta}^* z_3 \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz dt + \int_0^T \int_\Omega e \sigma_{\tau 3}^* \theta_\tau dz dt = \\ & - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^4 u_\tau^* z_3 \theta_\tau dz dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^4 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} z_3 \theta_\tau dz dt. \end{aligned}$$

Intégrons une fois par parties la première intégrale. Il vient

$$\begin{aligned} & - \int_\Omega e^4 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t}(0) z_3 \theta_\tau(0) dz - \int_0^T \int_\Omega e^4 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} z_3 \frac{\partial \theta_\tau^*}{\partial t} dz dt + \int_0^T \int_\Omega e^2 \sigma_{\tau 3}^* \theta_\tau dz dt = \\ & = - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^4 u_\tau^* z_3 \theta_\tau dz dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^4 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} z_3 \theta_\tau dz dt. \end{aligned}$$

Pour obtenir les équations limites, nous allons utiliser une méthode analogue à celle de D. Caillerie.

Introduisons donc les moments

$$\begin{cases} M_{\alpha\beta} = e^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} z_3 \sigma_{\alpha\beta}^* dz_3, \\ N_{\alpha\beta} = e^2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\alpha\beta}^* dz_3, \\ Q_\alpha = e \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\alpha 3}^* dz_3. \end{cases}$$

Or, on a

$$e^2 \sigma_{ij}^* = q_{ij\alpha\beta} e^2 \gamma_{\alpha\beta}(u^*) + 2q_{ij\alpha 3} e \gamma_{\alpha 3} + q_{ij 33} \gamma_{33}.$$

D'après (I1.2.11), on a $\|e^2 \sigma_{ij}^*\|_{L^\infty(0, T, L^2(\Omega))} \leq C$

On a donc $\|M_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(0, T, L^2(\omega))} \leq C$ et $\|N_{\alpha\beta}\|_{L^\infty(0, T, L^2(\omega))} \leq C$.

L'estimation a priori sur $Q_{\alpha\beta}$ est déduite des estimations relatives à $M_{\alpha\beta}$ et $N_{\alpha\beta}$.

En faisant tendre e vers zéro dans (I2.13), on obtient

$$0 + \int_0^T \int_\omega \left(M_{\tau\eta}^* \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} + Q_\tau^* \theta_\tau \right) dz_1 dz_2 dt = 0,$$

d'où

$$(I2.14) \quad -\frac{\partial M_{\tau\eta}^*}{\partial z_\eta} + Q_\tau^* = 0 \quad \text{dans } \omega \times (0, T).$$

Multiplions maintenant par $\theta_3(z_1, z_2, t) \in \mathcal{D}([0, T[, H_0^1(\omega))$ l'équation (I2.1.2).

Il vient

$$\begin{aligned} & -e^2 \int_{\Omega} u_3^{*1} \theta_3(z_1, z_2, 0) dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \frac{\partial \theta_3}{\partial t} dz dt + \int_0^T \int_{\Omega} e \sigma_{3\eta}^* \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|Y_*|}{|Y|} f_3^* \theta_3 dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^2 u_3^* \theta_3 dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^2 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} \theta dz dt. \end{aligned}$$

Faisons tendre e vers zéro.

Il vient

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} U_3^{**1} \theta(z_1, z_2, 0) dz - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t} dz dt + \int_0^T \int_{\omega} Q_\eta^* \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt = \\ & = \int_0^T \int_{\omega} \frac{|Y_*|}{|Y|} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{**} dz_3 \right) \theta_3 dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda U_3^{**} \theta dz dt - \\ & - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \theta_3 dz dt, \end{aligned}$$

soit

$$(I2.15) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_\eta^*}{\partial z_\eta} = \frac{|Y_*|}{|Y|} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{**} dz_3 \right) - \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda U_3^{**} - \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} & \text{sur } \omega \times (0, T), \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_3^{**1} dz_3 & \text{sur } \omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Dans (I2.15), on remplace Q_η^* par sa valeur calculée en (I2.14).

Il vient

$$(I2.16) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_{\eta\tau}^*}{\partial z_\eta \partial \tau} = \frac{|Y_*|}{|Y|} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{**} dz_3 \right) - \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda U_3^{**} - \\ - \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} & \text{sur } \omega \times (0, T), \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_3^{**1} dz_3 & \text{sur } \omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Multiplions maintenant par $e\theta_\tau(z_1, z_2, t)$, avec $\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, H_0^1(\omega))$, l'équation (I2.1.1).

On obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega e^4 \frac{\partial^2 u_\tau^*}{\partial t^2} \theta_\tau dz dt + \int_0^T \int_\Omega e^2 \sigma_{\tau\eta}^* \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz dt = \\ & = \int_0^T \int_\Omega \frac{|Y_*|}{|Y|} e f_\tau^* \theta_\tau dz dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^4 u_\tau^* \theta_\tau dz dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^4 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} \theta_\tau dz dt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & -e^3 \int_\Omega u_\tau^* \theta_\tau(z_1, z_2, 0) dz - e^4 \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz dt + \int_0^T \int_\Omega e^2 \sigma_{\tau\eta}^* \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz dt = \\ & = \int_0^T \int_\Omega \frac{|Y_*|}{|Y|} e f_\tau^* \theta_\tau dz dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^4 u_\tau^* \theta_\tau dz dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^4 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} \theta_\tau dz dt. \end{aligned}$$

Faisons tendre e vers zéro.

Il vient

$$0 - 0 - \int_0^T \int_\omega N_{\tau\eta}^* \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt = 0,$$

soit

$$-\frac{\partial N_{\tau\eta}^*}{\partial z_\eta} = 0 \quad \text{sur } \omega \times (0, T).$$

Posons maintenant

$$v_i = z_3 \theta_i(z_1, z_2, t), \text{ avec } \theta_i \in \mathcal{D}([0, T[, H_0^1(\omega)).$$

On multiplie par $e^2 v_\tau$ l'équation (I2.1.1), et par $e^2 v_3$ l'équation (I2.1.2).

Il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega e^5 \frac{\partial^2 u_\tau^*}{\partial t^2} v_\tau dz dt + \int_0^T \int_\Omega e^4 \frac{\partial^2 u_3^*}{\partial t^2} v_3 dz dt + \int_0^T \int_\Omega \left(e^3 \sigma_{i\eta}^* z_3 \frac{\partial \theta_i}{\partial z_\eta} + e^2 \sigma_{i3}^* \theta_i \right) dz dt = \\ & = \int_0^T \int_\Omega e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} f_\tau^* v_\tau dz dt + \int_0^T \int_\Omega e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} f_3^* v_3 dz dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^5 u_\tau^* v_\tau dz dt - \\ & - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^5 \frac{\partial u_\tau^*}{\partial t} v_\tau dz dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^4 u_3^* v_3 dz dt - \int_0^T \int_\Omega \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^4 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} v_3 dz dt, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} e^4 u_{\tau}^{*1} z_3 \theta_{\tau}(z_1, z_2, 0) dz - \int_{\Omega} e^4 u_3^{*1} z_3 \theta_3(z_1, z_2, 0) dz - \int_0^T \int_{\Omega} e^4 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} z_3 \frac{\partial \theta_3^*}{\partial t} dz dt - \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} e^5 \frac{\partial u_{\tau}^*}{\partial t} z_3 \theta_{\tau} dz dt + \int_0^T \int_{\Omega} \left(e^3 \sigma_{i3}^* z_3 \frac{\partial \theta_i}{\partial z_{\eta}} + e^2 \sigma_{i3}^* \theta_{i3} \right) dz dt = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} f_{\tau}^* v_{\tau} dz dt + \int_0^T \int_{\Omega} e^2 \frac{|Y_*|}{|Y|} f_3^* v_3 dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^5 u_{\tau}^* v_{\tau} dz dt - \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^5 \frac{\partial u_{\tau}^*}{\partial t} v_{\tau} dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda e^4 u_3^* v_3 dz dt - \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma e^4 \frac{\partial u_3^*}{\partial t} v_3 dz dt.
\end{aligned}$$

Faisons tendre ϵ vers zéro.

Il vient

$$\int_0^T \int_{\Omega} (0 + \sigma_{i3}^*) dz dt = 0,$$

soit

$$\sigma_{i3}^* = 0.$$

En utilisant les techniques, désormais standard, introduites dans Caillerie[3] (voir aussi Cioranescu- Saint Jean Paulin [7]), on donne les expressions explicites de $\sigma_{\alpha\beta}^*$, $N_{\alpha\beta}^*$ et $M_{\alpha\beta}^*$:

$$(I2.18) \quad \begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^* = P_{\alpha\beta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho}(u^{**}), \\ N_{\alpha\beta}^* = P_{\alpha\beta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho}(U^{**}), \\ M_{\alpha\beta}^* = -\frac{1}{12} P_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_{\theta} \partial z_{\rho}}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} P_{\alpha\beta\theta\rho} = q_{\alpha\beta\theta\rho} - q_{\alpha\beta j3} d_{ij} q_{i3\theta\rho}, \\ (d_{ij})_{ij} (q_{i3j3})_{ij}^{-1}. \end{cases}$$

En remplaçant $N_{\tau\eta}^*$ par sa valeur dans (I2.17), il vient

$$(I2.19) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_{\eta}} \left(P_{\alpha\beta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho}(U^{**}) \right) = 0 & \text{sur } \omega \times (0, T), \\ U_{\alpha}^{**} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, T), \end{cases}$$

d'où

$$U^{**} = 0.$$

D'autre part, en remplaçant $M_{\alpha\beta}^*$ par sa valeur dans (I2.16), on obtient

$$(I2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{|Y_*|}{|Y|} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} + \frac{1}{12} P_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^4 U_3^{**}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} = \frac{|Y_*|}{|Y|} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{**} dz_3 - \frac{|\partial S|}{|Y|} \lambda U_3^{**} - \\ \hspace{20em} - \frac{|\partial S|}{|Y|} \gamma \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \text{ sur } \omega \times (0, Y), \\ U_3^{**}(z_1, z_2, 0) = 0 \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(z_1, z_2, 0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_3^{**1} dz_3 \\ U_3^{**} = 0 \hspace{15em} \text{sur } \partial\omega \times (0, T), \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial n} = 0 \hspace{15em} \text{sur } \partial\omega \times (0, T). \end{array} \right.$$

Il y a existence et unicité de la solution du problème (I1.20).

PASSAGE A LA LIMITE EN e , PUIS EN ε .

II PASSAGE A LA LIMITE EN e , PUIS EN ε .

On considère à nouveau le système (1).

Contrairement à ce que nous avons fait au paragraphe I, nous commençons par passer à la limite en e .

III.1 DEPENDANCE RELATIVE A L'EPAISSEUR. (L'EPAISSEUR e TEND VERS ZERO).

Comme nous l'avons déjà fait, nous dilaton le domaine $\Omega_{e\varepsilon}$, et nous faisons les mêmes changements de variables et de fonctions que précédemment.

On obtient le nouveau système suivant :

$$(III.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e^3 \frac{\partial^2 u_\tau^\varepsilon}{\partial t^2} - e \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{\tau 3}^\varepsilon = f_\tau^\varepsilon & \text{sur } \Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad (III.1.1.1) \\ e^2 \frac{\partial^2 u_3^\varepsilon}{\partial t^2} - e \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{3\eta}^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{33}^\varepsilon = f_3^\varepsilon & \text{sur } \Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad (III.1.1.2) \\ \sigma_{i3}^\varepsilon n_3 = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^\pm \times (0, T), \\ \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon n_\eta = g_\tau^\varepsilon - \lambda \varepsilon e^2 u_\tau^\varepsilon - \gamma \varepsilon e^2 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} & \text{sur } \partial S_\varepsilon \times (0, T), \\ \sigma_{3\eta}^\varepsilon n_\eta = g_3^\varepsilon - \lambda \varepsilon e u_3^\varepsilon - \gamma \varepsilon e \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} & \text{sur } \partial S_\varepsilon \times (0, T), \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon^0 \times (0, T), \\ u_\alpha^\varepsilon(0) = e^{-1} u_\alpha^{\varepsilon 0}, \\ u_3^\varepsilon(0) = u_3^{\varepsilon 0}, \\ \frac{\partial u_\alpha^\varepsilon}{\partial t}(0) = e^{-1} u_\alpha^{\varepsilon 1}, \\ \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t}(0) = u_3^{\varepsilon 1}, \\ \sigma_{ij}^\varepsilon = a_{ij\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(u^\varepsilon) + 2e^{-1} a_{ij\alpha 3}(u^\varepsilon) + e^{-2} a_{ij33} \gamma_{33}(u^\varepsilon), \end{array} \right.$$

avec

$$(III.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_\tau^\varepsilon = e F_\tau^\varepsilon, \\ f_3^\varepsilon = F_3^\varepsilon, \\ g_\tau^\varepsilon = G_\tau^\varepsilon, \\ g_3^\varepsilon = e^{-1} G_3^\varepsilon. \end{array} \right.$$

Posons

$$V(\Omega_\varepsilon) = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon), v/\Gamma_0 = 0\}.$$

Faisons tendre ϵ vers zéro dans le système (II.1).
On établit le résultat suivant :

II.1.1 THEOREME 3.

Supposons que

$$\begin{cases} f_3^\epsilon \rightharpoonup f_3^{*\epsilon} \text{ dans } L^2((0, T), L^2(\Omega_\epsilon)) \text{ faible} \\ \epsilon g_3^\epsilon \rightharpoonup g_3^{*\epsilon} \text{ dans } L^2((0, T), L^2(\partial S_\epsilon)) \text{ faible} \end{cases}$$

Alors on a

$$\epsilon^2 u_i^\epsilon \rightharpoonup u_i^{*\epsilon} \text{ dans } L^\infty((0, T), V(\Omega_\epsilon)) \text{ faible,}$$

où

$$\begin{cases} u_3^{*\epsilon} = U_3^{*\epsilon}(z_1, z_2, t) \\ u_\alpha^{*\epsilon} = -z_3 \frac{\partial U_3^{*\epsilon}}{\partial z_\alpha}(z_1, z_2, t) + U_\alpha^{*\epsilon}(z_1, z_2, t) \end{cases}$$

De plus, $U_3^{*\epsilon}$ est caractérisée par le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_3^{*\epsilon}}{\partial t^2} + \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^4 U_3^{*\epsilon}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\epsilon} dz_3 & \text{sur } \omega_\epsilon \times (0, T) \\ -\frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial z_\tau} (b_{\eta\tau\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\epsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho}) n_\eta + \lambda \epsilon U_3^{*\epsilon} + \gamma \epsilon \frac{\partial U_3^{*\epsilon}}{\partial t} = g_3^{*\epsilon} & \text{sur } \partial s_\epsilon \times (0, T) \\ \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\epsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial s_\epsilon \times (0, T) \\ U_3^{*\epsilon} = 0 & \text{sur } \partial \omega \times (0, T) \\ \frac{\partial U_3^{*\epsilon}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \omega \times (0, T) \\ U_3^{*\epsilon}(z_1, z_2, 0) = 0 & \text{sur } \omega \times \{0\} \\ \frac{\partial U_3^{*\epsilon}}{\partial t}(z_1, z_2, 0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_3^{*\epsilon 1} dz_3 = V_3^{*\epsilon 1} & \text{sur } \omega \times \{0\} \end{cases}$$

où $U_3^{*\epsilon 1}$ est définie par

$$\epsilon^2 u_3^{\epsilon 1} \rightharpoonup U_3^{*\epsilon 1} \text{ dans } L^2(\omega) \text{ faible,}$$

et où

$$\begin{cases} b_{\alpha\beta\theta\rho} = a_{\alpha\beta\theta\rho} - a_{\alpha\beta j 3} d_{ij} a_{i 3 \theta\rho} \\ (d_{ij})_{ij} = (a_{i 3 j 3})_{ij}^{-1} \end{cases}$$

et $U_\alpha^{*\epsilon}$ est nulle.

III.2 DEMONSTRATION DU THEOREME 3.

III.2.1 ESTIMATION A PRIORI :

Multiplions (III.1.1) par la fonction $e \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}$, et (III.1.2) par la fonction test $\frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t}$, puis sommions les deux égalités obtenues.

Il vient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(e^4 \sum_\tau \left| \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + e^2 \left| \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \right) + e^2 a_{\tau\eta\alpha\beta} \gamma_{\tau\eta} \gamma_{\alpha\beta} + 4e a_{\tau\eta\alpha 3} \gamma_{\tau\eta} \gamma_{\alpha 3} + 2a_{\tau\eta 33} \gamma_{33} \gamma_{\tau\eta} + \\
 & + 4a_{\tau 3\alpha 3} \gamma_{\alpha 3} \gamma_{\tau 3} + 4e^{-1} a_{\tau 333} \gamma_{33} \gamma_{\tau 3} + e^2 a_{3333} |\gamma_{33}|^2 = \\
 & = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(e f_\tau^\varepsilon \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} + f_3^\varepsilon \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) dz + \int_{\partial S_\varepsilon} e \sigma_{\tau\eta} n_\eta \left(e \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma + \int_{\partial S_\varepsilon} e \sigma_{3\eta} n_\eta \left(e \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma = \\
 & = \int_{\Omega_\varepsilon} \left(e f_\tau^\varepsilon \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} + f_3^\varepsilon \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) dz + \int_{\partial S_\varepsilon} e \left(g_\tau^\varepsilon - \lambda \varepsilon e^2 u_\tau^\varepsilon - \gamma \varepsilon e^2 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right) e \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} d\sigma + \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_{\partial S_\varepsilon} e \left(g_3^\varepsilon - \lambda \varepsilon e u_3^\varepsilon - \gamma \varepsilon e \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} d\sigma = \\
 & = \int_{\Omega_\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(e f_\tau^\varepsilon \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} + f_3^\varepsilon \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) dz + \int_{\partial S_\varepsilon} g_\tau^\varepsilon e^2 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} d\sigma - \int_{\partial S_\varepsilon} \lambda \varepsilon (e^2 u_\tau^\varepsilon) \left(e^2 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma - \\
 & - \int_{\partial S_\varepsilon} \gamma \varepsilon \left(e^2 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right) \left(e^2 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma + \int_{\partial S_\varepsilon} g_3^\varepsilon \left(e \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma - \int_{\partial S_\varepsilon} \lambda \varepsilon (e u_3^\varepsilon) \left(e \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma - \\
 & - \int_{\partial S_\varepsilon} \gamma \varepsilon \left(e \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \left(e \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma.
 \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et t, et en multipliant les deux membres par e^2 , on obtient l'égalité (III.3)

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\sum_\tau \left| e^3 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 + \left| e^2 \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right|^2 \right) + a_{\tau\eta\alpha\beta} (e^2 \gamma_{\tau\eta}) (e^2 \gamma_{\alpha\beta}) + 4a_{\tau\eta\alpha 3} (e^2 \gamma_{\tau\eta}) (e \gamma_{\alpha 3}) + \\
 & + 2a_{\tau\eta 33} (\gamma_{33}) (e^2 \gamma_{\tau\eta}) + 4a_{\tau 3\alpha 3} (e \gamma_{\alpha 3}) (e \gamma_{\tau 3}) + 4a_{\tau 333} (e \gamma_{33}) (\gamma_{\tau 3}) + a_{3333} (\gamma_{33}) (\gamma_{33}) dz = \\
 & = \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \left(f_\tau^\varepsilon \left(e^3 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right) + f_3^\varepsilon \left(e^2 \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \right) dz d\tau + \int_0^t \int_{\partial S_\varepsilon} \left(e g_\tau^\varepsilon \right) \left(e^3 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma d\tau - \\
 & - \int_0^t \int_{\partial S_\varepsilon} \gamma \varepsilon \left(e^3 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right)^2 d\sigma d\tau + \int_0^t \int_{\partial S_\varepsilon} \left(e g_3^\varepsilon \right) \left(e^2 \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma d\tau - \int_0^t \int_{\partial S_\varepsilon} \lambda \varepsilon \left(e^3 u_\tau^\varepsilon \right) \left(e^3 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma d\tau -
 \end{aligned}$$

$$(III.3) \quad - \int_0^t \int_{\partial S_\epsilon} \lambda \epsilon (e^2 u_3^\epsilon) \left(e^2 \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial t} \right) d\sigma d\tau - \int_0^t \int_{\partial S_\epsilon} (\gamma \epsilon) \left(e^2 \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial t} \right)^2 d\sigma d\tau + \frac{e^2}{2} E(0),$$

Appelons A (respectivement B) le premier membre (respectivement le second membre) de l'égalité (III.3).

Posons

$$\begin{cases} \theta_{\alpha\beta} = e^2 \gamma_{\alpha\beta}, \\ \theta_{\alpha 3} = e \gamma_{\alpha 3}, \\ \theta_{33} = \gamma_{33}. \end{cases}$$

ETUDE DE A :

Le membre A s'écrit

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left(\sum_\tau |e^3 \frac{\partial u_\tau^\epsilon}{\partial t}|^2 + |e^2 \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial t}|^2 + a_{ijkh} \theta_{kh} \theta_{ij} \right) dz.$$

Posons

$$\begin{cases} \psi_\alpha = e^3 u_\alpha^\epsilon, \\ \psi_3 = e^2 u_3^\epsilon. \end{cases}$$

Le membre A s'écrit alors

$$\int_{\Omega_\epsilon} \left(\sum_i \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right|^2 + a_{ijkh} \theta_{kh} \theta_{ij} \right) dz.$$

Or, d'après la coercivité des a_{ijkh} , on a

$$(III.4) \quad A \geq \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + \alpha \sum_{i,j} \|\theta_{ij}(t)\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2.$$

ETUDE DE B :

Les troisième et septième intégrales du membre de droite de l'égalité (III.3) sont négatives, donc majorées par zéro.

Le terme $\frac{e^2}{2} E(0)$ est majoré par une constante d'après les hypothèses de départ.

Nous allons majorer séparément chacune des intégrales restantes.

On a

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\Omega_\epsilon} \left(f_\tau^\epsilon e^3 \frac{\partial u_\tau^\epsilon}{\partial t} + f_3^\epsilon e^2 \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial t} \right) dz dt \leq \\
& \leq \int_0^t \|f_\tau^\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \|e^3 \frac{\partial u_\tau^\epsilon}{\partial t}\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} d\tau + \int_0^t \|f_3^\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} \|e^2 \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial t}\|_{L^2(\Omega_\epsilon)} d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|f_\tau^\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|e^3 u_\tau^\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|f_3^\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|e^2 u_\tau^\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \int_0^t \sum_i \|f_i^\epsilon\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau \\
& \leq \frac{1}{2} \sum_i \|f_i^\epsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_\epsilon))}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\partial S^\epsilon} \left[(eg_\tau^\epsilon) \left(e^3 \frac{\partial u_\tau^\epsilon}{\partial t} \right) + (eg_3^\epsilon) \left(e^2 \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial t} \right) \right] d\sigma d\tau = \\
& = \int_{\partial S^\epsilon} [(eg_\tau^\epsilon)(e^3 u_\tau^\epsilon)]_0^t d\sigma - \int_{\partial S^\epsilon} \int_0^t \left(\frac{\partial eg_\tau^\epsilon}{\partial t} \right) (e^3 u_\tau^\epsilon) d\tau d\sigma + \int_{\partial S^\epsilon} [(eg_3^\epsilon)(e^2 u_3^\epsilon)]_0^t d\sigma - \\
& - \int_{\partial S^\epsilon} \int_0^t \left(\frac{\partial eg_3^\epsilon}{\partial t} \right) (e^2 u_3^\epsilon) d\tau d\sigma = \\
& = \int_{\partial S^\epsilon} (eg_\tau^\epsilon)(t)(e^3 u_\tau^\epsilon)(t) d\sigma - \int_{\partial S^\epsilon} (eg_\tau^\epsilon)(0)(e^3 u_\tau^\epsilon)(0) d\sigma - \int_{\partial S^\epsilon} \int_0^t \left(\frac{\partial eg_\tau^\epsilon}{\partial t} \right) (e^3 u_\tau^\epsilon) d\sigma d\tau + \\
& + \int_{\partial S^\epsilon} (eg_3^\epsilon)(t)(e^2 u_3^\epsilon)(t) d\sigma - \int_{\partial S^\epsilon} (eg_3^\epsilon)(0)(e^2 u_3^\epsilon)(0) d\sigma - \int_{\partial S^\epsilon} \int_0^t \left(\frac{\partial eg_3^\epsilon}{\partial t} \right) (e^2 u_3^\epsilon) d\sigma d\tau \leq \\
& \leq \| (eg_\tau^\epsilon)(t) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} \| (e^3 u_\tau^\epsilon)(t) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} + \| (eg_3^\epsilon)(0) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} \| (e^3 u_\tau^\epsilon)(0) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} + \\
& + \int_0^t \| (e \frac{\partial g_\tau^\epsilon}{\partial t})(t) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} \| (e^3 u_\tau^\epsilon)(t) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} d\tau + \| (eg_3^\epsilon)(t) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} \| (e^2 u_3^\epsilon)(t) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} + \\
& + \| (eg_3^\epsilon)(0) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} \| (e^2 u_3^\epsilon)(0) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} + \int_0^t \| (e \frac{\partial g_3^\epsilon}{\partial t})(\tau) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} \| (e^2 u_3^\epsilon)(\tau) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)} d\tau \leq \\
& \leq \frac{1}{2\alpha'} \| eg_\tau^\epsilon(t) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 + \frac{\alpha'}{2} \| e^3 u_\tau^\epsilon(t) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 + \frac{1}{2} \| eg_\tau^\epsilon(0) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 + \frac{1}{2} \| e^3 u_\tau^\epsilon(0) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 + \\
& + \int_0^t \frac{1}{2} \| e \frac{\partial g_\tau^\epsilon}{\partial t} \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 d\tau + \int_0^t \frac{1}{2} \| e^3 u_\tau^\epsilon \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 d\tau + \frac{1}{2\alpha'} \| eg_3^\epsilon(t) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 + \frac{\alpha'}{2} \| e^3 u_3^\epsilon(t) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 + \\
& + \frac{1}{2} \| eg_3^\epsilon(0) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 + \frac{1}{2} \| e^2 u_3^\epsilon(0) \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 + \int_0^t \frac{1}{2} \| e \frac{\partial g_3^\epsilon}{\partial t} \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 d\tau + \int_0^t \frac{1}{2} \| e^2 u_3^\epsilon \|_{L^2(\partial S^\epsilon)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Compte-tenu du théorème de trace, l'expression précédente est inférieure à

$$K_1 \left[\sum_i \| eg_i^\epsilon \|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial S^\epsilon))}^2 + \sum_i \| e \frac{\partial g_i^\epsilon}{\partial t} \|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial S^\epsilon))}^2 \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha'}{2} C_\varepsilon \|e^3 u_\tau^\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{2} C_\varepsilon \|e^3 u_\tau^\varepsilon(0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{2} C_\varepsilon \int_0^t \|e^3 u_\tau^\varepsilon(0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 d\tau + \\
& + \frac{\alpha'}{2} C_\varepsilon \|e^2 u_3^\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{2} C_\varepsilon \|e^2 u_3^\varepsilon(0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{2} C_\varepsilon \int_0^t \|e^2 u_3^\varepsilon(0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Korn, l'expression précédente est inférieure à

$$\begin{aligned}
& K_1 \left[\sum_i \|eg_i^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial S^\varepsilon))}^2 + \sum_i \|e \frac{\partial g_i^\varepsilon}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial S^\varepsilon))}^2 \right] + \\
& c\alpha' \|\theta_{ij}(u^\varepsilon)(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{C_\varepsilon C_0}{2} \|\theta_{ij}(u^\varepsilon)(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{C_\varepsilon C_0}{2} \int_0^t \|\theta_{ij}(u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 d\tau.
\end{aligned}$$

Le terme $\|\theta_{ij}(u^\varepsilon)(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2$ est borné d'après les conditions initiales.

La somme des cinquième et sixième intégrales de l'égalité (III.3) est égale à

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{L^2(\partial S^\varepsilon)} \lambda_\varepsilon(e^3 u_\tau^\varepsilon) \left(e^3 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right) d\sigma d\tau - \int_0^t \int_{L^2(\partial S^\varepsilon)} \lambda_\varepsilon(e^2 u_3^\varepsilon) \left(e^2 \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial \tau} \right) d\sigma d\tau = \\
& = - \int_{L^2(\partial S^\varepsilon)} \int_0^t \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda_\varepsilon(e^3 u_\tau^\varepsilon)^2 \right] d\tau d\sigma - \int_{L^2(\partial S^\varepsilon)} \int_0^t \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \lambda_\varepsilon(e^2 u_3^\varepsilon)^2 \right] d\tau d\sigma = \\
& = - \int_{L^2(\partial S^\varepsilon)} \frac{\lambda_\varepsilon}{2} (e^3 u_\tau^\varepsilon)^2(t) d\sigma + \int_{L^2(\partial S^\varepsilon)} \frac{\lambda_\varepsilon}{2} (e^3 u_\tau^\varepsilon)^2(0) d\sigma - \int_{L^2(\partial S^\varepsilon)} \frac{\lambda_\varepsilon}{2} (e^2 u_3^\varepsilon)^2(t) d\sigma + \\
& + \int_{L^2(\partial S^\varepsilon)} \frac{\lambda_\varepsilon}{2} (e^2 u_3^\varepsilon)^2(0) d\sigma.
\end{aligned}$$

Les première et troisième intégrales étant négatives, ces termes sont majorés par zéro.

L'expression précédente est donc majorée par

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda_\varepsilon}{2} \|e^3 u_\tau^\varepsilon(0)\|_{L^2(\partial S^\varepsilon)}^2 + \frac{\lambda_\varepsilon}{2} \|e^2 u_3^\varepsilon(0)\|_{L^2(\partial S^\varepsilon)}^2 \leq \\
& \leq \frac{\lambda_\varepsilon}{2} C_\varepsilon \|e^3 u_\tau^\varepsilon(0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{\lambda_\varepsilon}{2} C_\varepsilon \|e^2 u_3^\varepsilon(0)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \\
& \leq \frac{\lambda_\varepsilon}{2} C_\varepsilon C_0 \|\theta_{ij}(u^\varepsilon)(0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq \\
& \leq C \text{ d'après les conditions initiales.}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
B \leq & \frac{1}{2} \sum_i \|f_i^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_\varepsilon))}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + K_1 \left[\sum_i \|eg_i^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial S^\varepsilon))}^2 + \right. \\
& \left. + \sum_i \left\| e \frac{\partial g_i^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial S^\varepsilon))}^2 \right] + C\alpha' \|\theta_{ij}(u^\varepsilon)(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + K_2 + \frac{C_\varepsilon C_0}{2} \int_0^t \|\theta_{ij}(u^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 d\tau + C
\end{aligned}$$

Choisissons α' tel que $C\alpha' \leq \alpha$.

Il vient

$$\begin{aligned} & \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + \beta \sum_{i,j} \left\| \theta_{ij}(u^\epsilon)(t) \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 \leq \\ & \leq K \left[\sum_i \left\| f_i^\epsilon \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_\epsilon))}^2 + \sum_i \left\| e g_i^\epsilon \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial S_\epsilon))}^2 + \sum_i \left\| e \frac{\partial g_i^\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\partial S_\epsilon))}^2 \right] + \\ & \quad + K' + K'' \left[\int_0^t \sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau + \int_0^t \sum_{i,j} \left\| \theta_{ij}(u^\epsilon) \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau \right], \end{aligned}$$

de sorte que, compte-tenu des hypothèses sur f , g et $\frac{\partial g}{\partial t}$, on a

$$\begin{aligned} & \sum_i \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau + \sum_{i,j} \int_0^t \left\| \theta_{ij}(u^\epsilon)(t) \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau \leq \\ & \leq C_1 + C_2 \int_0^t \left(\sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 + \sum_{i,j} \left\| \theta_{ij}(u^\epsilon) \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 \right) d\tau. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\sum_i \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau + \sum_{i,j} \int_0^t \left\| \theta_{ij}(u^\epsilon)(t) \right\|_{L^2(\Omega_\epsilon)}^2 d\tau \leq C_1 e^{C_2 t},$$

d'où

$$\sum_i \left\| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_\epsilon))}^2 + \sum_{i,j} \left\| \theta_{ij}(u^\epsilon) \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_\epsilon))}^2 \leq C.$$

On en conclut alors que

$$(III.5) \quad \begin{cases} \left\| e^3 \frac{\partial u_\tau^\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_\epsilon))} \leq C, \\ \left\| e^2 \frac{\partial u_3^\epsilon}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_\epsilon))} \leq C, \end{cases}$$

et que

$$(III.6) \quad \begin{cases} \left\| e^2 \gamma_{\alpha\beta}(u^\epsilon) \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_\epsilon))} \leq C, \\ \left\| e \gamma_{\alpha 3}(u^\epsilon) \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_\epsilon))} \leq C, \\ \left\| \gamma_{33}(u^\epsilon) \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\Omega_\epsilon))} \leq C, \end{cases}$$

de sorte que, par un raisonnement classique en théorie des plaques (cf Cioranescu- Saint Jean Paulin [7]), on a

$$(III.7) \quad e^2 u_i^\varepsilon \rightharpoonup u_i^{*\varepsilon} \quad \text{dans } L^\infty(0, T, V(\Omega_\varepsilon))$$

lorsque ε tend vers zéro.

De même, on a

$$\begin{cases} u_3^{*\varepsilon} = U_3^{*\varepsilon}(z_1, z_2, t), \\ u_\alpha^{*\varepsilon} = -z_3 \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\alpha} + U_\alpha^{*\varepsilon}(z_1, z_2, t), \end{cases}$$

où

$$U_3^{*\varepsilon}(z_1, z_2, t) \in L^\infty(0, T, H^2(\omega_\varepsilon)), \quad U_3^{*\varepsilon}|_{\partial\omega} = 0,$$

et

$$U_\alpha^{*\varepsilon} \in L^\infty(0, T, (H^1(\omega_\varepsilon))^2), \quad U_\alpha^{*\varepsilon}|_{\partial\omega} = 0.$$

On a encore

$$e^2 \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(z_1, z_2, t) \quad \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\omega_\varepsilon)).$$

III.2.2 PASSAGE A LA LIMITE EN ε .

Multiplions l'équation (III.1.1) par la fonction test $\varepsilon z_3 \theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, H_0^1(\omega_\varepsilon))$ (indépendante de ε) z_3 .

On obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(e^4 \frac{\partial^2 u_\tau^\varepsilon}{\partial t^2} z_3 \theta_\tau - e^2 \frac{\partial}{\partial z_\eta} \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon z_3 \theta_\tau - e \frac{\partial}{\partial z_3} \sigma_{\tau 3}^\varepsilon z_3 \theta_\tau \right) dz dt = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_\tau^\varepsilon \varepsilon z_3 \theta_\tau dz dt,$$

soit

$$(III.8) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^4 \frac{\partial^2 u_\tau^\varepsilon}{\partial t^2} z_3 \theta_\tau dz dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon z_3 \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e \sigma_{\tau 3}^\varepsilon \theta_\tau dz dt = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_\tau^\varepsilon \varepsilon z_3 \theta_\tau dz dt. \end{aligned}$$

Pour obtenir les équations limites, nous allons utiliser la méthode de Caillerie [3] déjà employée, avec les notations usuelles que nous avons rappelée plusieurs fois dans ce travail.

Après intégration par parties, passage à la limite en ε , puis une nouvelle intégration par parties en sens inverse, on obtient :

$$(III.9) \quad -0 + 0 + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(M_{\tau\eta}^{*\varepsilon} \frac{\partial Q_\tau^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} + Q_\tau^{*\varepsilon} \theta_\tau \right) dz_1 dz_2 dt = 0,$$

On obtient donc

$$(III.10) \quad -\frac{\partial M_{\tau\eta}^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} + Q_\tau^{*\varepsilon} = 0 \quad \text{dans } \omega_\varepsilon \times (0, T).$$

Pour avoir des renseignements concernant le comportement au bord des trous dans le problème limite, nous allons multiplier l'équation (III.10) par une fonction test

$$\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, V(\omega_\varepsilon)).$$

On obtient

$$\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} -\frac{\partial M_{\tau\eta}^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz d\tau + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} Q_\tau^{*\varepsilon} \theta_\tau dz d\tau = 0,$$

soit

$$(III.11) \quad \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} M_{\tau\eta}^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\partial S_\varepsilon} M_{\tau\eta}^{*\varepsilon} \theta_\tau n_\eta d\sigma d\tau + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} Q_\tau^{*\varepsilon} \theta_\tau dz d\tau = 0.$$

Multiplions maintenant l'équation (III.1.1) par la fonction test $ez_3\theta_\tau$, avec $\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, V(\omega_\varepsilon))$.

Il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^4 \frac{\partial^2 u_\tau^\varepsilon}{\partial t^2} z_3 \theta_\tau dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon z_3 \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\partial S^\varepsilon} e^2 \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon n_\eta z_3 \theta_\tau d\sigma d\tau + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e \sigma_{\tau 3}^\varepsilon \theta_\tau dz d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e f_\tau^\varepsilon z_3 \theta_\tau dz d\tau, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^4 \frac{\partial^2 u_\tau^\varepsilon}{\partial t^2} z_3 \theta_\tau dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon z_3 \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\partial S^\varepsilon} \left(e^2 g_\tau^\varepsilon - \lambda \varepsilon e^4 u_\tau^\varepsilon - \gamma \varepsilon e^4 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} \right) \theta_\tau d\sigma d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e \sigma_{\tau 3}^\varepsilon \theta_\tau dz d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e f_\tau^\varepsilon z_3 \theta_\tau dz d\tau. \end{aligned}$$

Après intégration par parties, on passe à la limite en ε . Puis, on intègre à nouveau par parties en sens inverse.

On obtient

$$-0 + 0 + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} M_{\tau\eta}^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz d\tau - 0 + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} Q_\tau^{*\varepsilon} \theta_\tau dz d\tau = 0. \quad (III.12)$$

La comparaison des résultats (III.11) et (III.12) montre que

$$\int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} M_{\tau\eta}^{*\varepsilon} \theta_\tau n_\eta d\sigma d\tau = 0,$$

c'est-à-dire que

$$M_{\tau\eta}^{*\varepsilon} n_\eta = 0 \quad \text{sur } \partial s_\varepsilon \times (0, T).$$

On obtient donc le système suivant

$$(III.12) \quad \begin{cases} -\frac{\partial M_{\tau\eta}^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} + Q_\tau^{*\varepsilon} = 0 & \text{dans } \omega_\varepsilon \times (0, T), \\ M_{\tau\eta}^{*\varepsilon} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial s_\varepsilon \times (0, T). \end{cases}$$

Nous allons maintenant multiplier l'équation (III.2.2) par la fonction test $\theta_3 \in \mathcal{D}([0, T[, H_0^1(\omega_\varepsilon))$.

Il vient

$$\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \frac{\partial^2 u_3^\varepsilon}{\partial t^2} \theta_3 dz d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e \frac{\partial \sigma_{3\eta}^\varepsilon}{\partial z_\eta} \theta_3 dz d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e \frac{\partial \sigma_{33}^\varepsilon}{\partial z_3} \theta_3 dz d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_3^\varepsilon \theta_3 dz d\tau,$$

soit

$$\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \frac{\partial^2 u_3^\varepsilon}{\partial t^2} \theta_3 dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{3\eta}^\varepsilon e \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_3^\varepsilon \theta_3 dz d\tau.$$

Après intégration par parties, on obtient

$$- \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 u_3^{\varepsilon 1} \theta_3(0) dz - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \theta_3 dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{3\eta}^\varepsilon e \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_3^\varepsilon \theta_3 dz d\tau.$$

Passons à la limite en ε .

On obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon} U_3^{*\varepsilon 1} \theta_3(0) dz - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \theta_3 dz d\tau + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

Intégrons par parties en sens inverse.

Il vient

$$\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau,$$

soit

$$\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \theta_3 \frac{\partial Q_\eta^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau,$$

soit enfin

$$(III.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_\eta^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 & \text{dans } \omega_\varepsilon \times (0, T), \\ U_3^{*\varepsilon}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_3^{*\varepsilon 1} & \text{dans } \omega_\varepsilon \times \{0\}. \end{cases}$$

Pour avoir des renseignements concernant le comportement au bord des trous dans le problème limite, nous allons multiplier l'équation (III.12) par une fonction test

$$\theta_3 \in \mathcal{D}([0, T[, V(\omega_\varepsilon)).$$

Il vient

$$\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \theta_3 \frac{\partial Q_\eta^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau,$$

soit

$$(III.15) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} n_\eta \theta_3 d\sigma d\tau = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right) \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

Multiplions maintenant l'équation (III.1.2) par la fonction test $\theta_3 \in \mathcal{D}([0, T[, V(\omega_\varepsilon))$.

Il vient

$$\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \frac{\partial^2 u_3^\varepsilon}{\partial t^2} \theta_3 dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{3\eta} e \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\partial S^\varepsilon} e \sigma_{3\eta} n_\eta dz d\tau = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_3^\varepsilon \theta_3 dz d\tau,$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \frac{\partial^2 u_3^\varepsilon}{\partial t^2} \theta_3 dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e \sigma_{3\eta} \frac{\partial \theta_3}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\partial S^\varepsilon} \left(e g_3 - \lambda \varepsilon e^2 u_3^\varepsilon - \gamma \varepsilon e^2 \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} \right) \theta_3 d\sigma d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_3^\varepsilon \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

Après intégration par parties, on passe à la limite en ε . puis on intègre à nouveau par parties en sens inverse.

Il vient

$$\begin{aligned}
 (III.16) \quad & \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \partial \theta_3 \partial z_\eta dz_1 dz_2 d\tau - \\
 & - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \left(g_3^* - \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} - \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right) \theta_3 d\sigma d\tau = \\
 & = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \theta_3 dz_1 dz_2 d\tau.
 \end{aligned}$$

En comparant les résultats (III.15) et (III.16), on obtient

$$Q_\eta^{*\varepsilon} n_\eta = g_3^* - \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} - \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \quad \text{sur } \partial s_\varepsilon \times (0, T).$$

On a donc obtenu le système

$$(III.17) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_\eta^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 & \text{dans } \omega_\varepsilon \times (0, T), \\ Q_\eta^{*\varepsilon} n_\eta = g_3^* - \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} - \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} & \text{sur } \partial s_\varepsilon \times (0, T). \\ \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_3^{*\varepsilon 1} & \text{dans } \omega_\varepsilon \times \{0\}. \end{cases}$$

Remplaçons dans (III.17) le terme $Q_\eta^{*\varepsilon}$ par sa valeur calculée à partir du système (III.13).

On obtient

$$\frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial z_\eta} \left(\frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau} \right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \quad \text{sur } \omega_\varepsilon \times (0, T),$$

soit

$$(III.18) \quad \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta \partial z_\tau} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \quad \text{sur } \omega_\varepsilon \times (0, T).$$

Pour avoir des renseignements concernant le comportement au bord, on multiplie l'équation (III.18) par une fonction test $\theta \in \mathcal{D}([0, T], V(\omega_\varepsilon))$.

On obtient

$$\begin{aligned}
 (III.19) \quad & \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \theta dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \\
 & - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau} \theta n_\eta d\sigma d\tau = \\
 & = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \theta dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_\eta^{*\varepsilon} z_3 dz_3 \right) \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau + \\
 & + \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_\eta^{*\varepsilon} z_3 dz_3 \right) \theta n_\eta d\sigma d\tau
 \end{aligned}$$

Multiplions l'équation (III.1.2) par $\theta \in \mathcal{D}([0, T[, V(\omega_\varepsilon))$ et l'équation (III.1.1)

par $e z_3 \frac{\partial \theta}{z_\eta}$.

D'une part, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \frac{\partial^2 u_3^\varepsilon}{\partial t^2} \theta dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e \sigma_{3\eta}^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\partial S_\varepsilon} e \sigma_{3\eta}^\varepsilon \theta n_\eta d\sigma d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_3^\varepsilon \theta dz d\tau. \end{aligned}$$

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon^4 \frac{\partial^2 u_\eta^\varepsilon}{\partial t^2} z_3 \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \sigma_{\eta\tau}^\varepsilon z_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz d\tau - \\ & - \int_0^T \int_{\partial S_\varepsilon} e^2 \sigma_{\eta\tau}^\varepsilon z_3 \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} n_\tau d\sigma d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e \sigma_{\eta 3}^\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_\eta^\varepsilon e z_3 \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz d\tau. \end{aligned}$$

Après intégration par parties, passage à la limite en ε , puis une nouvelle intégration par parties en sens inverse, on obtient :

D'une part :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \theta dz_1 dz_2 d\tau + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \\ (III.20) \quad & - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \theta n_\eta d\sigma d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \theta dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} & -0 + 0 + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} M_{\eta\tau}^{*\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} M_{\eta\tau}^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} n_\tau d\sigma d\tau + \\ (III.21) \quad & + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau = 0. \end{aligned}$$

La différence de (III.20) et (III.21) donne

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \theta dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \theta n_\eta d\sigma d\tau - \\ (III.22) \quad & - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} M_{\eta\tau}^{*\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau + 0 = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \theta dz_1 dz_2 d\tau. \end{aligned}$$

En comparant les résultats (III.1.19) et (III.2.2), on obtient

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \theta n_\eta d\sigma d\tau - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} M_{\eta\tau}^{*\varepsilon} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau} \theta n_\eta d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \theta n_\eta d\sigma d\tau + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - 0 = \\ & = \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau} \frac{\partial \theta}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} \theta n_\eta d\sigma d\tau, \end{aligned}$$

soit encore

$$\int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau} \theta n_\eta d\sigma d\tau = \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} Q_\eta^{*\varepsilon} \theta n_\eta d\sigma d\tau,$$

de sorte que

$$(II.1.23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau} n_\eta &= Q_\eta^{*\varepsilon} n_\eta \\ &= g_3^* - \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} - \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \quad \text{sur } \partial s_\varepsilon \times (0, T). \end{aligned}$$

On aboutit donc au système suivant :

$$(III.1.24) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta \partial z_\tau} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 & \text{sur } \omega_\varepsilon \times (0, T) \\ \frac{\partial M_{\eta\tau}^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau} n_\eta = g_3^* - \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} - \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} & \text{sur } \partial s_\varepsilon \times (0, T) \\ \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_3^{*\varepsilon 1} dz_3 & \text{sur } \omega_\varepsilon \times \{0\}. \end{cases}$$

Multiplions maintenant l'équation (III.1.1) par $e\theta_\tau(z_1, z_2, t)$, avec $\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, H_0^1(\omega_\varepsilon))$.

Il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^4 \frac{\partial^2 u_\tau^\varepsilon}{\partial t^2} \theta_\tau dz d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e \frac{\partial \sigma_{\tau 3}^\varepsilon}{\partial z_3} \theta_\tau dz d\tau = \\ & = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_\tau^\varepsilon e \theta_\tau dz d\tau, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
& -e^4 \int_{\Omega_\varepsilon} e^{-1} u_\tau^{\varepsilon 1} \theta_\tau(z_1, z_2, 0) dz - e^4 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\tau^{\varepsilon 1}}{\partial t} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz d\tau + \\
& + e^2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (\sigma_{\tau\eta}^\varepsilon \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} + e \sigma_{\tau 3}^\varepsilon \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_3}) dz d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_\tau^\varepsilon e \theta_\tau dz d\tau.
\end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers zéro.

On obtient

$$-0 - 0 + \int_{\omega_\varepsilon} N_{\tau\eta}^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau = 0,$$

soit

$$(III.25) \quad -\frac{\partial N_{\tau\eta}^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} = 0 \quad \text{sur } \omega_\varepsilon \times (0, T).$$

Multiplions (II 1.25) par $\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, V(\omega_\varepsilon))$.

Il vient

$$\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} -\frac{\partial N_{\tau\eta}^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz_1 dz_2 d\tau = 0,$$

soit

$$(III.26) \quad \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} N_{\tau\eta}^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} N_{\tau\eta}^{*\varepsilon} \theta_\tau n_\eta d\sigma d\tau = 0.$$

Multiplions l'équation (III.1.1) par $e\theta_\tau(z_1, z_2, t)$, avec $\theta_\tau \in \mathcal{D}([0, T[, V(\omega_\varepsilon))$.

Il vient

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^4 \frac{\partial^2 u_\tau^\varepsilon}{\partial t^2} \theta_\tau dz d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \frac{\partial \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon}{\partial z_\eta} \theta_\tau dz d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e \frac{\partial \sigma_{\tau 3}^\varepsilon}{\partial z_3} \theta_\tau dz d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_\tau^\varepsilon e \theta_\tau dz d\tau,
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
& -e^4 \int_{\Omega_\varepsilon} e^{-1} u_\tau^{\varepsilon 1} \theta_\tau(z_1, z_2, 0) dz - e^4 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\tau^{\varepsilon 1}}{\partial t} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz d\tau + \\
& + e^2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz d\tau - e^2 \int_0^T \int_{\partial S_\varepsilon} \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon \theta_\tau n_\eta d\sigma d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_\tau^\varepsilon e \theta_\tau dz d\tau,
\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
& -e^4 \int_{\Omega_\varepsilon} e^{-1} u_\tau^{\varepsilon 1} \theta_\tau(z_1, z_2, 0) dz - e^4 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u_\tau^{\varepsilon 1}}{\partial t} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz d\tau + \\
& + e^2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{\tau\eta}^\varepsilon \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz d\tau - \int_0^T \int_{\partial S_\varepsilon} (e^2 g_\tau - \lambda \varepsilon e^4 u_\tau^\varepsilon - \gamma \varepsilon e^4 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t}) d\sigma d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f_\tau^\varepsilon e \theta_\tau dz d\tau.
\end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers zéro.

Il vient

$$(III.27) \quad -0 + 0 + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} N_{\tau\eta}^{*\varepsilon} \frac{\partial \theta_\tau}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 d\tau - 0 = 0.$$

En comparant (III.27) à (II 1.26), on constate que

$$N_{\tau\eta}^{*\varepsilon} n_\eta = 0 \quad \text{sur } \partial S_\varepsilon \times (0, T).$$

On a donc obtenu le système suivant

$$(III.28) \quad \begin{cases} -\frac{\partial N_{\tau\eta}^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta} = 0 & \text{sur } \omega_\varepsilon \times (0, T) \\ N_{\tau\eta}^{*\varepsilon} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial S_\varepsilon \times (0, T). \end{cases}$$

Prenons $\theta_i \in \mathcal{D}([0, T], H_0^1(\omega_\varepsilon))$, et posons $v_i = z_3 \theta_i(z_1, z_2, t)$.

Multiplions l'équation (III.2.1) par $e^2 v_\tau$ et l'équation (III.2.2) par $e^2 v_3$.

En les additionnant, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^5 \frac{\partial^2 u_\tau^\varepsilon}{\partial t^2} v_\tau dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^4 \frac{\partial^2 u_3^\varepsilon}{\partial t^2} v_3 dz d\tau - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^3 \frac{\partial \sigma_{i\eta}^\varepsilon}{\partial z_\eta} v_i dz d\tau - \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 \frac{\partial \sigma_{i3}^\varepsilon}{\partial z_3} v_i dz d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 f_3^\varepsilon v_3 dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 f_\tau^\varepsilon v_\tau dz d\tau,
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_\varepsilon} e^4 u_\tau^{\varepsilon 1} z_3 \theta_\tau(z_1, z_2, 0) dz - \int_{\Omega_\varepsilon} e^4 u_3^{\varepsilon 1} z_3 \theta_3(z_1, z_2, 0) dz - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^4 \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial t} z_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial t} dz d\tau - \\
& - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^5 \frac{\partial u_\tau^\varepsilon}{\partial t} z_3 \frac{\partial \theta_\tau}{\partial t} dz d\tau + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (e^3 \sigma_{i\eta}^\varepsilon z_3 \frac{\partial \theta_i}{\partial z_\eta} + e^2 \sigma_{i3}^\varepsilon \frac{\partial z_3}{\partial z_3} \theta_i) dz d\tau = \\
& = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} e^2 f_i^\varepsilon v_i dz d\tau.
\end{aligned}$$

Faisons tendre ϵ vers zéro.

Il vient

$$-0 - 0 - 0 - 0 + \int_0^T \int_{\Omega_\epsilon} (0 + \sigma_{i3}^{*\epsilon}) dz d\tau = 0,$$

soit

$$\sigma_{i3}^{*\epsilon} = 0 \quad \text{sur } \Omega_\epsilon \times (0, T),$$

En utilisant les techniques, introduites dans Caillerie [3] on donne les expressions explicites de $\sigma_{\alpha\beta}^{*\epsilon}$, $N_{\alpha\beta}^{*\epsilon}$ et $M_{\tau\eta}^{*\epsilon}$: on a

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta}^{*\epsilon} = b_{\alpha\beta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho}(u^{*\epsilon}) \\ N_{\alpha\beta}^{*\epsilon} = b_{\alpha\beta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho}(U^{*\epsilon}) \\ M_{\tau\eta}^{*\epsilon} = -\frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\epsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} b_{\alpha\beta\theta\rho} = a_{\alpha\beta\theta\rho} - a_{\alpha\beta j3} d_{ij} a_{i3\theta\rho} \\ (d_{ij})_{ij} = (a_{i3j3})_{ij}^{-1}. \end{cases}$$

En remplaçant $N_{\alpha\beta}^{*\epsilon}$ par sa valeur dans (II 1.28), on obtient

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z_\eta} (b_{\tau\eta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho}(U^{*\epsilon})) = 0 & \text{sur } \Omega_\epsilon \times (0, T) \\ b_{\tau\eta\theta\rho} \gamma_{\theta\rho}(U^{*\epsilon}) n_\eta = 0 & \text{sur } \partial s_\epsilon \times (0, T), \end{cases}$$

d'où

$$(III.29) \quad (U_1^{*\epsilon}, U_2^{*\epsilon}) = (0, 0).$$

En remplaçant d'autre part $M_{\tau\eta}^{*\epsilon}$ par sa valeur dans (II 1.24), on obtient

$$(III.30) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 U_3^{*\epsilon}}{\partial t^2} + \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^4 U_3^{*\epsilon}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\epsilon} dz_3 & \text{sur } \omega_\epsilon \times (0, T) \\ -\frac{1}{12} \frac{\partial}{\partial z_\tau} \left(b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\epsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \right) n_\eta + \lambda_\epsilon U_3^{*\epsilon} + \gamma_\epsilon \frac{\partial U_3^{*\epsilon}}{\partial t} = g_3^* & \text{sur } s_\epsilon \times (0, T) \\ b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\epsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial s_\epsilon \times (0, T) \\ U_3^{*\epsilon}(z_1, z_2, 0) = 0 & \text{sur } \omega_\epsilon \times \{0\} \\ \frac{\partial U_3^{*\epsilon}}{\partial t}(z_1, z_2, 0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_3^{*\epsilon 1} dz_3 = V_3^{*\epsilon 1} & \text{sur } \omega_\epsilon \times \{0\} \\ U_3^{*\epsilon} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{\partial U_3^{*\epsilon}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times (0, T). \end{cases}$$

II.2 DEPENDANCE RELATIVE A LA PERIODE.
(LE PARAMETRE ε TEND VERS ZERO).

Nous nous proposons de faire tendre ε vers zéro dans le problème limite(II.1.30). on établit le résultat suivant.

II.2.4 THEOREME 4

Supposons que $f_3^{*\varepsilon} \rightarrow f_3^{**}$ dans $L^\infty(0, T, L^2(\Omega))$ fort.

Premier cas : $\|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \|C \frac{\partial g_3^*}{\partial t}\|_\infty^2 = 0$.

Alors, il existe un prolongement $P^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^\infty(0, T, H^k(\Omega_\varepsilon)), L^\infty(0, T, H^k(\Omega)))$ tel que

$$P^\varepsilon(U_3^{*\varepsilon}) \rightarrow U_3^{**} \quad \text{dans } L^\infty(0, T, H_0^2(\Omega)) \text{ faible*},$$

où U_3^{**} est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_\tau \partial z_\eta} (q_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_\theta \partial z_\rho}) = \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{**} dz_3 - \frac{|\partial s|}{|\mathcal{Y}|} \lambda U_3^{**} - \\ \hspace{15em} - \frac{|\partial s|}{|\mathcal{Y}|} \gamma \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \\ U_3^{**} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ U_3^{**}(0) = 0 \quad \text{sur } \omega \times \{0\} \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(0) = V_3^{**1} \quad \text{sur } \omega \times \{0\} \end{array} \right.$$

Deuxième cas : $\|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \|C \frac{\partial g_3^*}{\partial t}\|_\infty^2 \neq 0$.

Alors, il existe un prolongement $P^\varepsilon \in \mathcal{L}(L^\infty(0, T, H^k(\Omega_\varepsilon)), L^\infty(0, T, H^k(\Omega)))$ tel que

$$P^\varepsilon(\varepsilon U_3^{*\varepsilon}) \rightarrow U_3^{**} \quad \text{dans } L^\infty(0, T, H_0^2(\Omega)) \text{ faible*},$$

où U_3^{**} est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_\tau \partial z_\eta} (q_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_\theta \partial z_\rho}) = \mu_{g_3^*} - \frac{|\partial s|}{|\mathcal{Y}|} \lambda U_3^{**} - \frac{|\partial s|}{|\mathcal{Y}|} \gamma \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \quad \text{dans } \omega \times (0, T) \\ U_3^{**} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \times (0, T) \\ U_3^{**}(0) = 0 \quad \text{sur } \omega \times \{0\} \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(0) = V_3^{**1} \quad \text{sur } \omega \times \{0\} \end{array} \right.$$

Dans les deux cas, les coefficients $q_{\tau\eta\theta\rho}$ sont donnés par

$$q_{\tau\eta\theta\rho} = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}} \frac{1}{12} (b_{\tau\eta\theta\rho} - b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \chi^{\tau\eta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}) dy$$

Les fonctions $\chi^{\tau\eta}$ sont solutions de

$$\begin{cases} -\frac{1}{12} b_{\theta\rho\alpha\beta} \frac{\partial^4 (-\chi^{\tau\eta} + y^{\tau\eta})}{\partial y_\alpha \partial y_\beta \partial y_\theta \partial y_\rho} = 0 & \text{dans } Y^* \\ \frac{1}{12} b_{\theta\rho\alpha\beta} \frac{\partial^3 (-\chi^{\tau\eta} + y^{\tau\eta})}{\partial y_\alpha \partial y_\theta \partial y_\rho} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial s \\ \frac{1}{12} b_{\theta\rho\alpha\beta} \frac{\partial^2 (-\chi^{\tau\eta} + y^{\tau\eta})}{\partial y_\theta \partial y_\rho} n_\tau = 0 & \text{sur } \partial s \\ \chi^{\tau\eta} \text{ est } \mathcal{Y} \text{ périodique de moyenne nulle} \end{cases}$$

où $y^{\tau\eta}$ est défini par

$$y^{11} = \frac{1}{2} y_1^2, y^{12} = y^{21} = \frac{1}{2} y_1 y_2 \quad \text{et} \quad y^{22} = \frac{1}{2} y_2^2.$$

II.2 DEMONSTRATION DU THEOREME 4.

II.2.1 ESTIMATION A PRIORI.

Multiplions l'équation (II.1.30) par $\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}$.

Il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} dz_1 dz_2 + \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^4 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} dz_1 dz_2 = \\ & = \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} dz_1 dz_2, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 \right) dz_1 dz_2 - \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^3 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial}{\partial z_\eta} \left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right) dz_1 dz_2 + \\ & + \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^3 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} n_\eta dz_1 dz_2 = \\ & = \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} dz_1 dz_2, \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 \right) dz_1 dz_2 - \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^3 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial}{\partial z_\eta} \left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right) dz_1 dz_2 = \\ & = \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} dz_1 dz_2 + \int_{\partial s_\varepsilon} (g_3^{*\varepsilon} - \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} - \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 \right) dz_1 dz_2 + \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2}{\partial z_\eta \partial z_\tau} \left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right) dz_1 dz_2 - \\ & - \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2}{\partial z_\eta} \left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right) n_\tau ds = \\ & = \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} dz_1 dz_2 + \int_{\partial s_\varepsilon} (g_3^{*\varepsilon} - \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} - \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (II2.1) \quad & \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right)^2 \right) dz_1 dz_2 + \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{24} \frac{\partial}{\partial t} \left(b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta \partial z_\tau} \right) dz_1 dz_2 = \\ & = \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} dz_1 dz_2 + \int_{\partial s_\varepsilon} (g_3^{*\varepsilon} - \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} - \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} ds. \end{aligned}$$

Intégrons entre 0 et t les deux membres de l'égalité(II2.1).

Il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right)^2(t) dz_1 dz_2 - \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right)^2(0) dz_1 dz_2 + \\ & + \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{24} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta \partial z_\tau}(t) dz_1 dz_2 - \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{24} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta \partial z_\tau}(0) dz_1 dz_2 = \\ & = \int_0^t \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} dz_1 dz_2 dt + \int_0^t \int_{\partial s_\varepsilon} (g_3^{*\varepsilon} - \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} - \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} ds dt, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right)^2(t) dz_1 dz_2 + \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{24} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta \partial z_\tau}(t) dz_1 dz_2 = \\ & = \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right)^2(0) dz_1 dz_2 + \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{24} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\eta \partial z_\tau}(0) dz_1 dz_2 + \\ & + \int_0^t \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} dz_1 dz_2 dt + \int_0^t \int_{\partial s_\varepsilon} (g_3^{*\varepsilon} - \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} - \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} ds dt. \end{aligned}$$

Soit A le premier membre de cette égalité, et B son second membre.

Minorons A.

On a

$$A \geq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + c \left\| \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\theta \partial z_\rho}(t) \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2,$$

soit

$$A \geq \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \alpha \|U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2,$$

avec

$$\mathcal{V}(\omega_\varepsilon) = \{v \in H^2(\omega_\varepsilon), v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\omega\}$$

Etude de B :

Nous allons maintenant majorer chaque terme de B.

D'après les conditions initiales, les deux premiers termes de B sont majorés par des constantes.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} dz_1 dz_2 dt \\ & \leq \int_0^t \left\| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} \left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 dt \\ & \leq C \left\| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_\varepsilon))}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 dt. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\partial s_\varepsilon} g_3^{*\varepsilon} \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} ds d\tau = \\ & = \int_{\partial s_\varepsilon} \left[g_3^{*\varepsilon} U_3^{*\varepsilon} \right]_0^t ds - \int_0^t \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{\partial g_3^{*\varepsilon}}{\partial t} U_3^{*\varepsilon} ds d\tau = \\ & = \int_{\partial s_\varepsilon} g_3^{*\varepsilon}(t) U_3^{*\varepsilon}(t) ds - \int_{\partial s_\varepsilon} g_3^{*\varepsilon}(0) U_3^{*\varepsilon}(0) ds - \int_{\partial s_\varepsilon} \int_0^t \frac{\partial g_3^{*\varepsilon}}{\partial t} U_3^{*\varepsilon} ds d\tau = \\ & = \int_{\omega_\varepsilon} \nabla_y \psi g_3^* \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (t) \nabla U_3^{*\varepsilon}(t) dx + \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^{-1} C g_3^*(t) U_3^{*\varepsilon}(t) dx - \\ & - \int_{\omega_\varepsilon} \nabla_y \psi g_3^* \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (0) \nabla U_3^{*\varepsilon}(0) dx - \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^{-1} C g_3^*(0) U_3^{*\varepsilon}(0) dx - \\ & - \int_0^t \int_{\omega_\varepsilon} \nabla_y \psi \frac{\partial g_3^*}{\partial t} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) (\tau) \nabla U_3^{*\varepsilon}(\tau) dx d\tau - \int_0^t \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon^{-1} C \frac{\partial g_3^*}{\partial t}(\tau) U_3^{*\varepsilon}(\tau) dx d\tau, \end{aligned}$$

donc, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\partial s_\varepsilon} g_3^{*\varepsilon} \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} ds d\tau \\
& \leq \beta \|\nabla_y \psi g_3^* \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(t)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \beta' \|\nabla U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \beta \int_{\omega_\varepsilon} \left(\varepsilon^{-1} C g_3^*(t)\right)^2 dx + \\
& + \beta' \int_{\omega_\varepsilon} (U_3^{*\varepsilon}(t))^2 dx + \beta \|\nabla_y \psi g_3^* \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(0)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \beta' \|\nabla U_3^{*\varepsilon}(0)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \\
& + \beta \int_{\omega_\varepsilon} \left(\varepsilon^{-1} C g_3^*(0)\right)^2 dx + \beta' \int_{\omega_\varepsilon} (U_3^{*\varepsilon}(0))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla_y \psi \frac{\partial g_3^*}{\partial t} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\tau)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 d\tau + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla U_3^{*\varepsilon}(\tau)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\omega_\varepsilon} \left(\varepsilon^{-1} C \frac{\partial g_3^*}{\partial t}(\tau)\right)^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \|U_3^{*\varepsilon}(\tau)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 d\tau,
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\partial s_\varepsilon} g_3^{*\varepsilon} \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} ds d\tau \\
& \leq c\beta \|\psi g_3^* \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(t)\|_{H^1(\mathcal{Y}^*)}^2 + c\beta' \|U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{V(\omega_\varepsilon)}^2 + c\beta \left(\varepsilon^{-1} C g_3^*(t)\right)^2 + c\beta' \|U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{V(\omega_\varepsilon)}^2 + \\
& + c\beta \|\psi g_3^* \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(0)\|_{H^1(\mathcal{Y}^*)}^2 + \beta' \|\nabla U_3^{*\varepsilon}(0)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + c\beta \left(\varepsilon^{-1} C g_3^*(0)\right)^2 + \beta' \|U_3^{*\varepsilon}(0)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \\
& + c \int_0^t \|\psi \frac{\partial g_3^*}{\partial t} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\tau)\|_{H^1(\mathcal{Y}^*)}^2 d\tau + c \int_0^t \|U_3^{*\varepsilon}(\tau)\|_{V(\omega_\varepsilon)}^2 d\tau + c \int_0^t \left(\varepsilon^{-1} C \frac{\partial g_3^*}{\partial t}(\tau)\right)^2 d\tau + \\
& + c \int_0^t \|U_3^{*\varepsilon}(\tau)\|_{V(\omega_\varepsilon)}^2 d\tau,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \int_{\partial s_\varepsilon} g_3^{*\varepsilon} \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} ds d\tau \\
& \leq K \left[\|\psi g_3^*\|_{L^\infty(0,T,H^1(\mathcal{Y}^*))}^2 + \|\psi \frac{\partial g_3^*}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T,H^1(\mathcal{Y}^*))}^2 + \|\nabla U_3^{*\varepsilon}(0)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 \right. \\
& \left. + \varepsilon^{-2} \|C g_3^*\|_\infty^2 + \varepsilon^{-2} \|C \frac{\partial g_3^*}{\partial t}\|_\infty^2 \right] + c\beta' \|U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{V(\omega_\varepsilon)}^2 + K' \int_0^t \|U_3^{*\varepsilon}(\tau)\|_{V(\omega_\varepsilon)}^2 d\tau,
\end{aligned}$$

où

$$\|C g_3^*\|_\infty = \sup_{0 \leq t \leq T} |C g_3^*(t)|.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \int_{\partial s_\varepsilon} \lambda \varepsilon U_3^{*\varepsilon} \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} ds d\tau \\
& = -\lambda \varepsilon \int_0^t \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (U_3^{*\varepsilon 2}) ds d\tau \\
& = -\frac{\lambda \varepsilon}{2} \int_{\partial s_\varepsilon} \left[U_3^{*\varepsilon 2} \right]_0^t ds \\
& = -\frac{\lambda \varepsilon}{2} \int_{\partial s_\varepsilon} U_3^{*\varepsilon 2}(t) ds + \frac{\lambda \varepsilon}{2} \int_{\partial s_\varepsilon} U_3^{*\varepsilon 2}(0) ds.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$-\frac{\lambda \varepsilon}{2} \int_{\partial s_\varepsilon} U_3^{*\varepsilon 2}(t) ds \leq 0$$

et

$$\begin{aligned}
& \frac{\lambda \varepsilon}{2} \int_{\partial s_\varepsilon} U_3^{*\varepsilon 2}(0) ds \\
& = \frac{\varepsilon}{2} \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial \psi_\lambda}{\partial y_j} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (U_3^{*\varepsilon 0 2}) dx + \frac{C_\lambda}{2} \int_{\omega_\varepsilon} (U_3^{*\varepsilon 0})^2 dx \\
& \leq c \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla \psi_\lambda\|_{L^2(\mathcal{Y}^*)} \|\nabla U_3^{*\varepsilon 0 2}\|_{L^2(\omega_\varepsilon)} + \frac{C_\lambda}{2} \|U_3^{*\varepsilon 0}\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 \\
& \leq c.
\end{aligned}$$

Enfin, on a

$$- \int_0^t \int_{\partial s_\varepsilon} \gamma \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon 2}}{\partial t} ds d\tau \leq 0.$$

En conséquence, on a

$$\begin{aligned}
B & \leq K_1 \left[\|\psi_{g_3^*}\|_{L^\infty(0,T,H^1(\mathcal{Y}^*))}^2 + \|\psi \frac{\partial g_3^*}{\partial t}\|_{L^\infty(0,T,H^1(\mathcal{Y}^*))}^2 + \|\nabla U_3^{*\varepsilon}(0)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon^{-2} \|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \varepsilon^{-2} \|C \frac{\partial g_3^*}{\partial t}\|_\infty^2 + \left\| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^* dz_3 \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_\varepsilon))}^2 \right] + \\
& \quad + c\beta' \|U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2 + K_2 \int_0^t (\|U_3^{*\varepsilon}(\tau)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2 + \|\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2) d\tau + K_3,
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
B & \leq \frac{K_1'}{\varepsilon^2} (\varepsilon^2 + \|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \|C \frac{\partial g_3^*}{\partial t}\|_\infty^2) + K_2' \int_0^t (\|U_3^{*\varepsilon}(\tau)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2 + \|\frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(\tau)\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2) d\tau + \\
& \quad + c\beta' \|U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2
\end{aligned}$$

Les calculs précédents permettent maintenant d'écrire

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \alpha \|U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2 \\
& \leq \frac{K_1'}{\varepsilon^2} (\varepsilon^2 + \|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial g_3^*}{\partial t}}\|_\infty^2) + K_2' \int_0^t (\|U_3^{*\varepsilon}(\tau)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2 + \left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(\tau) \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2) d\tau + \\
& \quad + c\beta' \|U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2.
\end{aligned}$$

Choisissons β' tel que $c\beta' \leq \alpha$.

On obtient

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \|U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2 \\
& \leq \frac{K_1''}{\varepsilon^2} (\varepsilon^2 + \|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial g_3^*}{\partial t}}\|_\infty^2) + K_2'' \int_0^t (\|U_3^{*\varepsilon}(\tau)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2 + \left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(\tau) \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2) d\tau.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, il vient

$$\left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(t) \right\|_{L^2(\omega_\varepsilon)}^2 + \|U_3^{*\varepsilon}(t)\|_{\mathcal{V}(\omega_\varepsilon)}^2 \leq \frac{K_1''}{\varepsilon^2} (\varepsilon^2 + \|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial g_3^*}{\partial t}}\|_\infty^2) e^{K_2'' t},$$

d'où

$$\left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_\varepsilon))}^2 + \|U_3^{*\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T,\mathcal{V}(\omega_\varepsilon))}^2 \leq \frac{C}{\varepsilon^2} (\varepsilon^2 + \|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial g_3^*}{\partial t}}\|_\infty^2).$$

Si $\|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial g_3^*}{\partial t}}\|_\infty^2 = 0$, on a donc

$$(II.2.2) \quad \begin{cases} \left\| \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_\varepsilon))}^2 \leq K \\ \|U_3^{*\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T,\mathcal{V}(\omega_\varepsilon))}^2 \leq K, \end{cases}$$

et si $\|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial g_3^*}{\partial t}}\|_\infty^2 \neq 0$, on a

$$(II.2.3) \quad \begin{cases} \left\| \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_\varepsilon))}^2 \leq K \\ \|\varepsilon U_3^{*\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T,\mathcal{V}(\omega_\varepsilon))}^2 \leq K. \end{cases}$$

Nous choisissons de détailler le passage à la limite relatif au cas $\|C_{g_3^*}\|_\infty^2 + \|C_{\frac{\partial g_3^*}{\partial t}}\|_\infty^2 \neq 0$.

II.2.2 PASSAGE A LA LIMITE.

D'après (II.2.3), on a

$$\|\varepsilon U_3^{*\varepsilon}\|_{L^\infty(0,T,\mathcal{V}(\omega_\varepsilon))}^2 \leq K.$$

D'après Duvaut [8], il existe un opérateur de prolongement Q_ε tel que

$$Q_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^k(\omega_{\varepsilon\delta}), H^k(\omega_{\varepsilon\delta})) \text{ pour } k = 1, 2.$$

Pour $v \in L^2(0, T, \mathcal{V}(\omega_\varepsilon))$, on définit, comme dans Brizzi-Chalot [1] $P_\varepsilon v$ par

$$(P_\varepsilon v)(t, x) = [Q_\varepsilon v(t, \cdot)](x).$$

Il vient

$$P^\varepsilon(\varepsilon U_3^{*\varepsilon}) \rightharpoonup U_3^{**} \text{ dans } L^\infty(0, T, H_0^2(\omega)) \text{ faible } *.$$

Nous allons utiliser la méthode de l'énergie de Tartar.

Posons

$$\xi_{\tau\eta}^\varepsilon = \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\theta \partial z_\rho}.$$

Alors, $U_3^{*\varepsilon}$ est solution du système

$$(II.2.4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi_{\tau\eta}^\varepsilon}{\partial z_\tau \partial z_\eta} = \varepsilon \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 & \text{sur } \omega_\varepsilon \times (0, T) \\ - \frac{\partial \xi_{\tau\eta}^\varepsilon}{\partial z_\tau} n_\eta + \lambda \varepsilon^2 U_3^{*\varepsilon} + \gamma \varepsilon^2 \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} = \varepsilon g_3^* & \text{sur } \omega_\varepsilon \times (0, T) \\ \xi_{\tau\eta}^\varepsilon n_\eta = 0 & \text{sur } \partial s_\varepsilon \times (0, T) \\ U_3^{*\varepsilon}(z_1, z_2, 0) = 0 & \text{sur } \omega_\varepsilon \times \{0\} \\ \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}(z_1, z_2, 0) = \varepsilon \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} U_3^{*\varepsilon 1} dz_3 = V_3^{*\varepsilon 1} & \text{sur } \omega_\varepsilon \times \{0\} \\ U_3^{*\varepsilon} = 0 & \text{sur } \partial \omega \times (0, T) \\ \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial \omega \times (0, T). \end{array} \right.$$

D'après (II.2.3), on a

$$\|\xi_{\tau\eta}^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_\varepsilon))} \leq K.$$

Notons

$$\tilde{\xi}_{\tau\eta}^\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{sur } s_\varepsilon \\ \xi_{\tau\eta}^\varepsilon & \text{dans } \omega_\varepsilon \end{cases}$$

on a

$$\|\xi_{\tau\eta}^\varepsilon\|_{L^\infty(0,T,L^2(\omega_\varepsilon))} \leq K$$

donc

$$\xi_{\tau\eta}^\varepsilon \rightharpoonup \xi_{\tau\eta}^* \text{ dans } L^\infty(0,T,L^2(\omega)) \text{ faible } *$$

Caractérisons $\xi_{\tau\eta}^*$

Multiplions (II.2.4) par $\varphi \in \mathcal{D}([0,T], \mathcal{D}(\omega))$.

Il vient

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \varphi dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 \xi_{\tau\eta}^\varepsilon}{\partial z_\tau \partial z_\eta} \varphi dz_1 dz_2 dt \\ &= \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \varphi dz_1 dz_2 dt. \end{aligned}$$

Après une intégration par partie, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_\varepsilon} \left[\varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \varphi \right]_0^T dz_1 dz_2 - \int_{\omega_\varepsilon} \int_0^T \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial \xi_{\tau\eta}^\varepsilon}{\partial z_\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt + \\ & + \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{\partial \xi_{\tau\eta}^\varepsilon}{\partial z_\tau} \varphi n_\eta ds dt \\ &= \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \varphi dz_1 dz_2 dt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & - \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} (0) \varphi(0) dz_1 dz_2 - \int_{\omega_\varepsilon} \left[\varepsilon U_3^{*\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_0^T dz_1 dz_2 + \int_{\omega_\varepsilon} \int_0^T \varepsilon U_3^{*\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz_1 dz_2 dt - \\ & - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial \xi_{\tau\eta}^\varepsilon}{\partial z_\tau} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt = \\ &= \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \varphi dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \varepsilon g_3^{*\varepsilon} \varphi dz_1 dz_2 dt - \\ & - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} (\lambda \varepsilon^2 U_3^{*\varepsilon} + \gamma \varepsilon^2 \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}) \varphi dz_1 dz_2 dt, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & - \int_{\omega_\varepsilon} V_3^{*\varepsilon 1} \varphi(0) dz_1 dz_2 + \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon U_3^{*\varepsilon} (0) \frac{\partial \varphi}{\partial t} (0) dz_1 dz_2 + \int_{\omega_\varepsilon} \int_0^T \varepsilon U_3^{*\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz_1 dz_2 dt + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \xi_{\tau\eta}^\varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \xi_{\tau\eta}^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} n_\tau ds dt \\ &= \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \varphi dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \langle \mu_{g_3}^\varepsilon, \varphi \rangle dt - \\ & - \int_0^T \langle \mu_\lambda^\varepsilon, \varepsilon U_3^{*\varepsilon} \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\gamma^\varepsilon, \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \varphi \rangle dt. \end{aligned}$$

Après prolongement, on obtient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} V_3^{**\varepsilon 1} \chi_{\omega_\varepsilon} \varphi(0) dz_1 dz_2 + \int_{\omega} \int_0^T P^\varepsilon(\varepsilon U_3^{*\varepsilon}) \chi_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^{\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt \\
& = \int_0^T \int_{\omega} \varepsilon \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \chi_{\omega_\varepsilon} \varphi dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \langle \mu_{g_3^*}^\varepsilon, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\lambda^\varepsilon, P^\varepsilon(\varepsilon U_3^{*\varepsilon}) \varphi \rangle dt - \\
& - \int_0^T \langle \mu_\gamma^\varepsilon, P^\varepsilon(\varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t}) \varphi \rangle dt.
\end{aligned}$$

Faisons tendre ε vers zéro.

On obtient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} V_3^{**1} \varphi(0) dz_1 dz_2 + \int_{\omega} \int_0^T \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} U_3^{**} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt. \\
& = 0 - 0 + \int_0^T \langle \mu_{g_3^*}, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\lambda, U_3^{**} \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\gamma, \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \varphi \rangle dt
\end{aligned}$$

On réintègre par partie. On obtient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} V_3^{**1} \varphi(0) dz_1 dz_2 + \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} [U_3^{**} \frac{\partial \varphi}{\partial t}]_0^T dz_1 dz_2 - \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} [\frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \varphi]_0^T dz_1 dz_2 + \\
& + \int_{\omega} \int_0^T \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} \varphi dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt \\
& = \int_0^T \langle \mu_{g_3^*}, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\lambda, U_3^{**} \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\gamma, \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \varphi \rangle dt,
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} V_3^{**1} \varphi(0) dz_1 dz_2 - \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} U_3^{**}(0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) dz_1 dz_2 + \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(0) \varphi(0) dz_1 dz_2 + \\
& + \int_{\omega} \int_0^T \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} \varphi dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \int_{\omega} \frac{\partial^2 \xi_{\tau\eta}^*}{\partial z_\tau \partial z_\eta} \varphi dz_1 dz_2 dt \\
& = \int_0^T \langle \mu_{g_3^*}, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\lambda, U_3^{**} \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\gamma, \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \varphi \rangle dt.
\end{aligned}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}([0, T[, \mathcal{D}(\omega)))$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega} \int_0^T \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} \varphi dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \int_{\omega} \frac{\partial^2 \xi_{\tau\eta}^*}{\partial z_\tau \partial z_\eta} \varphi dz_1 dz_2 dt \\
& = \int_0^T \langle \mu_{g_3^*}, \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\lambda, U_3^{**} \varphi \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\gamma, \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \varphi \rangle dt,
\end{aligned}$$

d'où

$$(II.2.5) \quad \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \xi_{\tau\eta}^*}{\partial z_\tau \partial z_\eta} = \mu g_3^* - \mu_\lambda U_3^{**} - \mu_\gamma \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \quad \text{sur } \omega \times (0, T).$$

Si on choisit maintenant $\varphi \in \mathcal{D}([0, T[, \mathcal{D}(\omega)))$, et d'après (II.2.5), on obtient

$$\begin{cases} U_3^{**}(0) = 0 \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(0) = V_3^{**1}, \end{cases}$$

la fonction V_3^{**1} étant définie par

$$P^\varepsilon V_3^{**1} \rightarrow V_3^{**1} \quad \text{fort dans } L^2(\omega).$$

Soit

$$H_{per}^2(\mathcal{Y}) = \{\varphi \in H^2(\mathcal{Y}), \varphi \text{ et } \nabla\varphi \text{ sont } \mathcal{Y} \text{ périodiques}\}.$$

Soit le problème adjoint défini par

$$\begin{cases} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^4 W^{\alpha\beta}}{\partial y_\tau \partial y_\eta \partial y_\theta \partial y_\rho} = 0 & \text{dans } \mathcal{Y}^* \\ \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^3 W^{\alpha\beta}}{\partial y_\tau \partial y_\theta \partial y_\rho} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial s \\ \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^2 W^{\alpha\beta}}{\partial y_\theta \partial y_\rho} n_\tau = 0 & \text{sur } \partial s \\ W^{\alpha\beta} - y^{\alpha\beta} \quad \text{est } \mathcal{Y} \text{ périodique de moyenne nulle} \end{cases}$$

où $y^{\alpha\beta}$ est défini par

$$y^{11} = \frac{1}{2} y_1^2, y^{12} = y^{21} = y_1 y_2 \quad \text{et} \quad y^{22} = \frac{1}{2} y_2^2.$$

On définit la fonction $W^{\varepsilon, \alpha\beta}$ par

$$W^{\varepsilon, \alpha\beta}(z) = P^\varepsilon(\varepsilon^2 W^{\alpha\beta}(\frac{z}{\varepsilon})).$$

Cette fonction vérifie le système suivant

$$(II.2.6) \quad \begin{cases} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^4 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} = 0 & \text{dans } \omega_\varepsilon \\ \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^3 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} n_\eta = 0 & \text{sur } \partial s_\varepsilon \\ \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^2 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} n_\tau = 0 & \text{sur } \partial s_\varepsilon \\ W^{\varepsilon\alpha\beta} - z^{\alpha\beta} \quad \text{est } \mathcal{Y} \text{ périodique de moyenne nulle.} \end{cases}$$

On définit également la fonction $\chi^{\alpha\beta}$ par

$$W^{\alpha\beta} = -\chi^{\alpha\beta} + y^{\alpha\beta}.$$

Multiplions maintenant le système (II.2.4) par $\varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta}$, où $\varphi \in \mathcal{D}([0, T[, \mathcal{D}(\omega))$ et le système (II.2.6) par $\varphi \varepsilon U_3^{*\varepsilon}$. Faisons la différence des deux expressions. On obtient

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{\partial^2 U_3^{*\varepsilon}}{\partial t^2} \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho\varepsilon} \frac{\partial^4 U_3^{*\varepsilon}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt - \\ & - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^4 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\tau \partial z_\eta \partial z_\theta \partial z_\rho} \varphi \varepsilon U_3^{*\varepsilon} dz_1 dz_2 dt = \\ & = \varepsilon \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt. \end{aligned}$$

Intégrons deux fois en temps.

On obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\omega_\varepsilon} \left[\varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \varphi \right]_0^T W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 - \int_{\omega_\varepsilon} \left[\varepsilon U_3^{*\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_0^T W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon U_3^{*\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^3 (\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial (\varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta})}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt + \\ & + \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^3 (\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} n_\eta ds dt + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^3 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial (\varphi \varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt - \\ & - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^3 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \varphi \varepsilon U_3^{*\varepsilon} n_\eta ds dt = \\ & = \varepsilon \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_1 dz_2 \right) \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & - \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} (0) \varphi(0) W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 + \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon U_3^{*\varepsilon} (0) \frac{\partial \varphi}{\partial t} (0) W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 + \\ & + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon U_3^{*\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt - \\ & - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^3 (\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt - \\ & - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^3 (\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial W^{\varepsilon,\alpha\beta}}{\partial z_\eta} \varphi dz_1 dz_2 dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^3 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} \varepsilon U_3^{*\varepsilon} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^3 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\tau \partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\eta} \varphi dz_1 dz_2 dt \\
& = \varepsilon \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_1 dz_2 \right) \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \lambda \varepsilon^2 U_3^{*\varepsilon} \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} ds dt - \\
& - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \gamma \varepsilon^2 \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} ds dt + \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \varepsilon g_3^* \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} ds dt.
\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega_\varepsilon} V_3^{*\varepsilon 1} \varphi(0) W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \varepsilon U_3^{*\varepsilon} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\eta \partial z_\tau} W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} \frac{\partial W^{\varepsilon,\alpha\beta}}{\partial z_\tau} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\tau} \frac{\partial W^{\varepsilon,\alpha\beta}}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \varphi \frac{\partial^2 W^{\varepsilon,\alpha\beta}}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt - \\
& - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^2 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\tau \partial z_\eta} \varepsilon U_3^{*\varepsilon} dz_1 dz_2 dt - \\
& - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^2 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} \frac{\partial(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\tau} dz_1 dz_2 dt - \\
& - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^2 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\tau} \frac{\partial(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt - \\
& - \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^2 W^{\varepsilon\alpha\beta}}{\partial z_\theta \partial z_\rho} \varphi \frac{\partial^2(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\tau \partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt = \\
& = \varepsilon \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_1 dz_2 \right) \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \lambda \varepsilon^2 U_3^{*\varepsilon} \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} ds dt - \\
& - \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \gamma \varepsilon^2 \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} ds dt + \int_0^T \int_{\partial s_\varepsilon} \varepsilon g_3^* \varphi W^{\varepsilon,\alpha\beta} ds dt.
\end{aligned}$$

Après simplification et prolongement, on obtient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} V_3^{*\varepsilon 1} \varphi(0) \chi_{\omega_\varepsilon} W^{\varepsilon, \alpha\beta} dz_1 dz_2 + \int_0^T \int_{\omega} P^\varepsilon(\varepsilon U_3^{*\varepsilon}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \chi_{\omega_\varepsilon} W^{\varepsilon, \alpha\beta} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\eta \partial z_\tau} W^{\varepsilon, \alpha\beta} dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} \frac{\partial W^{\varepsilon, \alpha\beta}}{\partial z_\tau} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^{\tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\tau} \frac{\partial W^{\varepsilon, \alpha\beta}}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\omega} \eta_{\tau\eta}^{\tilde{\varepsilon}, \alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\tau \partial z_\eta} P^\varepsilon(\varepsilon U_3^{*\varepsilon}) dz_1 dz_2 dt - \\
& - \int_0^T \int_{\omega} \eta_{\tau\eta}^{\tilde{\varepsilon}, \alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} \frac{\partial P^\varepsilon(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\tau} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\omega} \eta_{\tau\eta}^{\tilde{\varepsilon}, \alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\tau} \frac{\partial P^\varepsilon(\varepsilon U_3^{*\varepsilon})}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt = \\
& = \varepsilon \int_0^T \int_{\omega} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_3^{*\varepsilon} dz_3 \right) \varphi \chi_{\omega_\varepsilon} W^{\varepsilon, \alpha\beta} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \langle \mu_\lambda^\varepsilon, P^\varepsilon(\varepsilon U_3^{*\varepsilon}) \varphi W^{\varepsilon, \alpha\beta} \rangle dt - \\
& - \int_0^T \langle \mu_\gamma^\varepsilon, P^\varepsilon(\varepsilon \frac{\partial U_3^{*\varepsilon}}{\partial t} \varphi W^{\varepsilon, \alpha\beta}) \rangle dt + \int_0^T \langle \mu_{g_3^*}^\varepsilon, \varphi W^{\varepsilon, \alpha\beta} \rangle dt.
\end{aligned}$$

A la limite, il vient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} V_3^{**1} \varphi(0) z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 + \int_0^T \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} U_3^{**} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\eta \partial z_\tau} z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^* \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} \frac{\partial z^{\alpha\beta}}{\partial z_\tau} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^* \frac{\partial \varphi}{\partial z_\tau} \frac{\partial z^{\alpha\beta}}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\tau \partial z_\eta} U_3^{**} dz_1 dz_2 dt - \\
& - \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} \frac{\partial U_3^{**}}{\partial z_\tau} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial \varphi}{\partial z_\tau} \frac{\partial U_3^{**}}{\partial z_\eta} dz_1 dz_2 dt = \\
& = - \int_0^T \langle \mu_\lambda, U_3^{**} \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\gamma, \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt + \int_0^T \langle \mu_{g_3^*}, \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt,
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} V_3^{**1} \varphi(0) z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 + \int_0^T \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} U_3^{**} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^* \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\eta \partial z_\tau} z^{\alpha\beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_\eta} \frac{\partial z^{\alpha\beta}}{\partial z_\tau} + \frac{\partial \varphi}{\partial z_\tau} \frac{\partial z^{\alpha\beta}}{\partial z_\eta} \right) dz_1 dz_2 dt - \\
& - \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_\tau \partial z_\eta} \varphi dz_1 dz_2 dt + \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_\tau \partial z_\eta} \varphi dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_\tau \partial z_\eta} \varphi dz_1 dz_2 dt = \\
& = - \int_0^T \langle \mu_\lambda, U_3^{**} \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_\gamma, \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt + \int_0^T \langle \mu_{g_3^*}, \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt,
\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} V_3^{**1} \varphi(0) z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 + \int_0^T \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} U_3^{**} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^* \frac{\partial^2 (\varphi z^{\alpha\beta})}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^* \frac{\partial^2 (z^{\alpha\beta})}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}} \varphi dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}} \varphi dz_1 dz_2 dt = \\
& = - \int_0^T \langle \mu_{\lambda}, U_3^{**} \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_{\gamma}, \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt + \int_0^T \langle \mu_{g_3^*}, \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt.
\end{aligned}$$

Réintégrons par parties.

Il vient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} V_3^{**1} \varphi(0) z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 - \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} U_3^{**}(0) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0) z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 + \\
& + \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(0) \varphi(0) z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 + \int_0^T \int_{\omega} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} \varphi z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \frac{\partial^2 \xi_{\tau\eta}^*}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}} \varphi z^{\alpha\beta} dz_1 dz_2 dt - \int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^* \frac{\partial^2 (z^{\alpha\beta})}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}} \varphi dz_1 dz_2 dt + \\
& + \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}} \varphi dz_1 dz_2 dt = \\
& = - \int_0^T \langle \mu_{\lambda}, U_3^{**} \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt - \int_0^T \langle \mu_{\gamma}, \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt + \int_0^T \langle \mu_{g_3^*}, \varphi z^{\alpha\beta} \rangle dt.
\end{aligned}$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[, \mathcal{D}(\omega))$, on obtient, en utilisant (II.2.5) :

$$\int_0^T \int_{\omega} \xi_{\tau\eta}^* \frac{\partial^2 (z^{\alpha\beta})}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}} \varphi dz_1 dz_2 dt = \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}} \varphi dz_1 dz_2 dt.$$

Or, on a

$$\frac{\partial^2 (z^{\alpha\beta})}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}} = \delta_{\alpha\tau} \delta_{\beta\eta},$$

donc

$$\int_0^T \int_{\omega} \xi_{\alpha\beta}^* dz_1 dz_2 dt = \int_0^T \int_{\omega} \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}} \varphi dz_1 dz_2 dt,$$

d'où

$$(II.2.7) \quad \xi_{\alpha\beta}^* = \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_{\tau} \partial z_{\eta}}.$$

Posons

$$q_{\alpha\beta\tau\eta} = \mathfrak{M}(\eta_{\tau\eta}^{\tilde{\alpha}\beta}) = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \frac{1}{12} b_{\theta\rho\tau\eta} \frac{\partial^2 W^{\alpha\beta}}{\partial z_{\theta} \partial z_{\rho}} dy.$$

D'après (II.2.7) et (II.2.5), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{|\mathcal{Y}^*|}{|\mathcal{Y}|} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_\tau \partial z_\eta} (q_{\tau\eta\theta\rho} \frac{\partial^2 U_3^{**}}{\partial z_\theta \partial z_\rho}) = \mu g_3^* - \frac{|\partial s|}{|\mathcal{Y}|} \lambda U_3^{**} - \frac{|\partial s|}{|\mathcal{Y}|} \gamma \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t} \text{ dans } \omega \times (0, T) \\ U_3^{**} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times (0, T) \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times (0, T) \\ U_3^{**}(0) = 0 \text{ sur } \omega \times \{0\} \\ \frac{\partial U_3^{**}}{\partial t}(0) = V_3^{**1} \text{ sur } \omega \times \{0\}. \end{array} \right.$$

Les coefficients $q_{\tau\eta\theta\rho}$ sont donnés par

$$\begin{aligned} q_{\tau\eta\theta\rho} &= \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 W^{\tau\eta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} dy \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 (-\chi^{\tau\eta} + y^{\tau\eta})}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} dy \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \left(\frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 y^{\tau\eta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} - \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \chi^{\tau\eta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right) dy \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \left(\frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \delta_{\tau\alpha} \delta_{\eta\beta} - \frac{1}{12} b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \chi^{\tau\eta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \right) dy \end{aligned}$$

d'où

$$q_{\tau\eta\theta\rho} = \frac{1}{|\mathcal{Y}|} \int_{\mathcal{Y}^*} \frac{1}{12} (b_{\tau\eta\theta\rho} - b_{\alpha\beta\theta\rho} \frac{\partial^2 \chi^{\tau\eta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}) dy.$$

REMARQUE

Que l'on choisisse de faire tendre ε , puis ε vers zéro, ou bien l'inverse, on constate que l'on aboutit à des problèmes finaux de même nature.

BIBLIOGRAPHIE II

- [1]BRIZZI-CHALOT, Homogénéisation dans des ouverts à frontière fortement oscillante, Thèse, 1978.
- [2]CIORANESCU-DONATO, Homogénéisation du problème de Neumann non homogène dans des ouverts perforés.
- [3]CAILLERIE, Etude de quelques problèmes de perturbations en théorie de l'élasticité et de la conduction thermique, Thèse d'état, 1982
- [4]CIARLET, A justification of the Von Karman equations, Arch. Rat. Mech. Anal. 73 (1980), 349-389
- [5]CIARLET-DESTUYNDER, A justification of the two-dimensional linear plate model, J. Mécanique, 18 (1979), 315-344.
- [6]CIORANESCU-SAINT JEAN PAULIN, Homogenization in open sets with holes, J. Math. Pures et Appl. 65 (1986), 403-422.
- [7]CIORANESCU D., SAINT JEAN PAULIN J., Asymptotic analysis of elastic wireworks, Publications du laboratoire d'analyse numérique, Univ. P. et M. Curie, n. R 89008 (1989).
- [8]DUVAUT, Comportement macroscopique d'une plaque perforée périodiquement, (Compte-rendu du colloque sur les perturbations singulières), Lyon Dec-1976, Lecture Notes in Math, n ° 594, Springer-Verlog(1977)
- [9]RAOULT, Analyse Mathématique de Quelques Modèles de Plaques et de Poutres Elastiques ou Elasto-Plastiques. Thèse d'état, 1988

TROISIEME PARTIE :
CALCULS NUMERIQUES.

Nous nous proposons ici de construire un outil informatique permettant des calculs de coefficients homogénéisés dans le cas de problèmes de thermique et d'élasticité, définis sur des domaines bidimensionnels.

Rappelons d'abord les expressions et systèmes que nous allons utiliser dans cette partie numérique.

RAPPELS D'HOMOGENEISATION.

Nous rappelons que dans le cas d'un problème de thermique du type

$$(1) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} \right) = f & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}, \\ a_{ij} \frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} n_i = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta}, \\ u^{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \partial_{ext} \Omega_{\varepsilon\delta}, \end{cases}$$

les coefficients homogénéisés sont donnés par

$$(2) \quad q_{ij}^\delta = \int_{Y_\delta^*} \left(a_{ij} - a_{ik} \frac{\partial \chi_\delta^j}{\partial y_k} \right) dy,$$

où les fonctions χ_δ^j sont solutions de

$$(3) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_k} \left(a_{kl} \frac{\partial (\chi_\delta^j - y_j)}{\partial y_l} \right) = 0 & \text{dans } Y_\delta^*, \\ a_{kl} \frac{\partial (\chi_\delta^j - y_j)}{\partial y_l} = 0 & \text{sur } \partial t_\delta, \\ \chi_\delta^j & \text{est } Y\text{-périodique.} \end{cases}$$

De même, dans le cas d'un problème d'élasticité du type

$$(4) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ijpr} \frac{\partial u_p^{\varepsilon\delta}}{\partial x_r}) = f_i & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}, \\ a_{ijpr} \frac{\partial u_p^{\varepsilon\delta}}{\partial x_r} n_j = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta}, \\ u^{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \partial_{ext} \Omega_{\varepsilon\delta}, \end{cases}$$

les coefficients homogénéisés sont donnés par

$$(5) \quad q_{ijlm}^{\delta} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_{\delta}^*} (a_{ijlm} - a_{ijpr} \frac{\partial \chi_{\delta,p}^{lm}}{\partial y_r}) dy,$$

où les fonctions χ^{lm} sont solutions de

$$(6) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} (a_{ijpr} \frac{\partial \chi_{\delta,p}^{lm}}{\partial y_r}) = 0 & \text{dans } Y_{\delta}^*, \\ a_{ijpr} \frac{\partial (\chi_{\delta,p}^{lm} - \pi_p^{lm})}{\partial y_r} n_j = 0 & \text{sur } \partial t_{\delta}, \\ \chi^{kh} & \text{est Y-périodique.} \end{cases}$$

Pour donner explicitement les valeurs numériques des q_{ij} (resp. des q_{ijkh}), il faut être capable de résoudre numériquement le problème (2) (resp. le problème (4)), puis d'évaluer l'expression (3) (resp. l'expression (6)) utilisant les fonctions solutions χ^i (resp. χ^{ij}).

Pour résoudre ces problèmes, nous utilisons le code de calcul Modulef. Nous ne donnons ici qu'un descriptif très bref des modules correspondant à chaque étape de la résolution, des renseignements complets étant disponibles dans les brochures et fiches techniques de Modulef.

QUELQUES PRECISIONS CONCERNANT MODULEF.

Pour le maillage du domaine, nous utilisons le module APNOPO. Le résultat est stocké dans une structure de données NOPO, contenant la description du maillage.

Pour le choix des éléments finis, nous avons choisi l'élément fini TRIA 2P1D, qui existe dans les bibliothèques THER (utilisée en thermique) et ELAS (utilisée en élasticité linéaire). Comme il l'est indiqué, entre autres, dans le Guide Modulef-1, les résultats de ce calcul se trouvent dans les structures de données MAIL (contenant une description du maillage et de l'interpolation) et COOR (contenant les coordonnées des points).

L'entrée des données physiques et le calcul des tableaux élémentaires sont effectués via les modules THERCT en thermique, et ELASCT en élasticité, les résultats étant stockés dans la structure de données TAE, qui contient les matrices et les seconds membres associés à tous les éléments du maillage.

Le traitement des conditions aux limites est réalisé à l'aide du module COBDCL, qui permet en particulier d'entrer les conditions de Dirichlet. Les conditions aux bords de périodicité, dont la prise en compte n'est pas prévue dans nombre de codes de calculs, peuvent également être entrées au moyen de COBDCL, ce module offrant deux alternatives:

-On utilise la possibilité d'entrer les conditions de périodicité à la main, sous forme de relations linéaires. Cette méthode est très fastidieuse, car elle oblige l'utilisateur, pour chaque couple de points concernés, à entrer les deux numéros de points, les deux degrés de libertés correspondant, les deux coefficients du membre de gauche de la relation linéaire, et les deux membres de droite de cette relation. De plus, le nombre de relations linéaires autorisées par ce moyen doit être inférieur à 19.

-Une seconde possibilité est d'écrire un sous-programme SPCLRL décrivant les conditions de périodicité. L'utilisateur doit ensuite compiler ce sous-programme, et effectuer une édition de lien. Cette méthode oblige l'utilisateur à reprogrammer SPCLRL pour chaque nouvelle structure, mais ne limite en revanche pas le nombre de relations linéaires, une telle limitation constituant un handicap sérieux si le maillage est fin, surtout dans le cas de l'élasticité (deux composantes pour les fonctions au lieu d'une seule en thermique).

Pour la résolution du système linéaire, nous utilisons en général la méthode de Crout.

CALCUL DES COEFFICIENTS HOMOGENEISES.

Comme nous l'avons souligné dans les lignes qui précèdent, les possibilités offertes par Modulef pour la saisie des conditions de périodicité sont peu pratiques. Nous avons donc écrit une version du sous-programme SPCLRL spécialement prévue à cet effet, ainsi qu'un exécutable cobdxx2 qui appelle SPCLRL.

L'utilisateur désirant entrer de telles conditions de manière conversationnelle tape alors cobdxx2 (au lieu du cobdxx habituel), et n'entre, à la demande du programme, que les numéros des couples de points concernés. Ce procédé est d'utilisation facile et rapide.

Nous avons été en mesure de juger les fonctions χ^i obtenues, car, du fait des symétries en y_1 et en y_2 de la cellule de base, il est facile de montrer que χ^1 est impaire en y_1 et paire en y_2 , et que χ^2 est impaire en y_2 et paire en y_1 , et de vérifier alors si les fonctions solutions ont effectivement ces propriétés.

Dans le premier cas que nous avons traité dans les pages qui suivent, où les barres de l'ouvert considéré sont très fines, les résultats obtenus sont satisfaisants. En revanche, lorsque la taille des trous diminue, les résultats obtenus sont clairement erronés.

Ces erreurs sont dues à la présence des conditions aux bords de périodicité, qui perturbent fortement la nature bande de la matrice de rigidité.

En conséquence, nous choisissons d'exploiter les symétries déjà évoquées, les fonctions χ^i étant alors solutions des problèmes suivants (voir Lené [1]):

La fonction χ^1 est solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\chi^1 = 0 & \text{dans } Y'_*, \\ \frac{\partial\chi^1}{\partial n} = 0 & \text{sur (1),} \\ \frac{\partial\chi^1}{\partial n} = -1 & \text{sur (2),} \\ \frac{\partial\chi^1}{\partial n} = 0 & \text{sur (3),} \\ \chi^1 = 0 & \text{sur (4).} \end{array} \right.$$

et la fonction χ^2 est solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\chi^2 = 0 & \text{dans } Y'_*, \\ \frac{\partial\chi^2}{\partial n} = -1 & \text{sur (1),} \\ \frac{\partial\chi^2}{\partial n} = 0 & \text{sur (2),} \\ \frac{\partial\chi^2}{\partial n} = 0 & \text{sur (4),} \\ \chi^2 = 0 & \text{sur (3).} \end{array} \right.$$

où Y'_* désigne le quart de la cellule de base (figure 16).

Pour les calculs d'intégrales relatifs aux expressions des coefficients homogénéisés, par exemple dans le cas thermique, on utilise l'approximation suivante:

$$\int_{Y'_*} \frac{\partial\chi^i}{\partial y_r} dy = \sum_{T \in T_h} \int_T \frac{\partial\chi^i}{\partial y_r} dy,$$

où T est un élément de la discrétisation T_h de Y'_* .

Sur chaque élément triangulaire, ces intégrales s'écrivent

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_T \frac{\partial\chi^i}{\partial y_1} dy = \frac{1}{2} [\chi^i(s_1).(b_2 - b_3) + \chi^i(s_2).(b_3 - b_1) + \chi^i(s_3).(b_1 - b_2)], \\ \int_T \frac{\partial\chi^i}{\partial y_2} dy = \frac{1}{2} [\chi^i(s_1).(a_3 - a_2) + \chi^i(s_2).(a_1 - a_3) + \chi^i(s_3).(a_2 - a_1)], \end{array} \right.$$

où les s_i sont les sommets du triangle T , et ont pour coordonnées (a_i, b_i) .

Pour nos calculs explicites de coefficients homogénéisés, nous avons d'abord résolu numériquement les problèmes adjoints définissant les fonctions χ^{lm} en élasticité (resp. les fonctions χ^i en thermique). Ces problèmes sont définis sur la cellule de base du matériau.

Comme indiqué plus haut, nous avons toujours résolu ces problèmes d'une part en tenant compte des conditions de périodicité, et d'autre part en remplaçant ces dernières par des conditions aux bords plus classiques (Dirichlet, Neumann ou mixtes) à l'aide des symétries de la cellule de base.

Nous avons donc écrit des sous-programmes destinés à l'ouverture des fichiers contenant les structures de données issues des résolutions de ces problèmes adjoints, et à l'écriture de ces structures de données dans des tableaux simples directement utilisables (sous-programmes lire_coor, lire_mail, lire_b, ecrire_coor, ecrire_mail, ecrire_b).

Ces sous-programmes permettent de récupérer les renseignements suivants:

-Les déplacements dans les deux directions (ou les températures) en tout point du maillage.

-Les coordonnées de chacun de ces points.

-Les trois sommets correspondant à chaque élément triangulaire.

Les sous-programmes proposés permettent des calculs de coefficients homogénéisés pour n'importe quelle structure bidimensionnelle, en thermique et en élasticité.

A titre d'illustration, nous nous proposons de traiter un problème de thermique défini sur un ouvert perforé périodiquement par des trous carrés.

Nous étudions donc le problème

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} \right) = f & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}, \\ a_{ij} \frac{\partial u^{\varepsilon\delta}}{\partial x_j} n_i = 0 & \text{sur } \partial t_{\varepsilon\delta}, \\ u^{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \partial_{ext} \Omega_{\varepsilon\delta}, \end{cases}$$

avec $a_{ij} = \delta_{ij}$, et $f=10$.

Nous avons calculé les coefficients homogénéisés correspondant à trois épaisseurs de barres.

L'intérêt de tester les résultats obtenus en entrant directement les conditions de périodicité est de se faire une idée de la validité des valeurs numériques que l'on peut espérer pour des domaines de géométries voisines, mais dont la cellule de base ne présente pas de symétries par rapport à $x'ox$ et $y'oy$.

Des comparaisons de valeurs montrent que les résultats sont très bons pour des barres fines, beaucoup moins pour des barres plus épaisses.

La figure 1 représente le premier ouvert étudié. Pour une cellule de taille 1, l'épaisseur des barres est de 0.1. La figure 2 représente le maillage du matériau homogénéisé. C'est un maillage classique, en triangles.

Les coefficients homogénéisés ont les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} q_{11} = q_{22} = 0.103, \\ q_{12} = q_{21} = 0. \end{cases}$$

Les valeurs effectivement trouvées pour q_{12} et q_{21} sont de l'ordre de 10^{-5} .

On effectue les tests suivants:

On trace une horizontale traversant le matériau troué, et passant à mi-hauteur de la deuxième - en partant du bas - couche de cellules perforées. Cette horizontale passe donc à la fois par le matériau et les trous.

En chaque point de cette horizontale, on demande la température correspondante. La courbe obtenue est représentée sur la figure 3.

Un test identique est appliqué au matériau homogénéisé, une horizontale le traversant exactement à la même hauteur que le matériau réel. On obtient une seconde courbe, que l'on superpose à la première.

On constate que le comportement du matériau homogénéisé rend effectivement bien compte de celui du matériau réel.

Un second test, de même nature, est appliqué aux deux matériaux, en faisant passer l'horizontale exactement au milieu du carré. Cette fois, la droite ne coupe donc pas les trous, donc les deux courbes sont continues (voir les figures 5 et 6).

Enfin, on traverse les deux matériaux par une diagonale, les deux courbes obtenues étant données sur les figures 7 et 8.

Les figures 9 et 10 sont des représentations d'isovaleurs correspondant aux matériaux réel (figure 9) et homogénéisé (figure 10). Leur reproduction sur transparents est destinée à faciliter la comparaison des deux résultats par superposition.

La figure 11, enfin, représente la cellule de base sur laquelle est défini le problème adjoint.

La figure 12 représente le second ouvert perforé sur lequel nous résolvons notre problème de thermique. Les barres sont plus épaisses (d'épaisseur 0.3), et donc les trous plus petits.

Les coefficients homogénéisés ont les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} q_{11} = q_{22} = 0.326, \\ q_{12} = q_{21} = 0. \end{cases}$$

Ici, nous donnons directement des représentations d'isovaleurs (voir figure 13 et 14).

La figure 15 représente le troisième ouvert auquel nous appliquons nos tests. Les barres sont encore plus épaisses (d'épaisseur 0.5). On résout cette fois le problème adjoint sur un quart de cellule, dont le maillage est représenté sur la figure 16. Les tests correspondant aux

coupes horizontales passant par les milieux des matériaux (resp. aux coupes diagonales) sont représentés sur les figures 17 et 18 (resp. 19 et 20).

MODULEF : jmse

PER3

21/09/94

r.nopo

1233 POINTS

1233 NOEUDS

1536 ELEMENTS

1536 TRIANGLES

16 TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

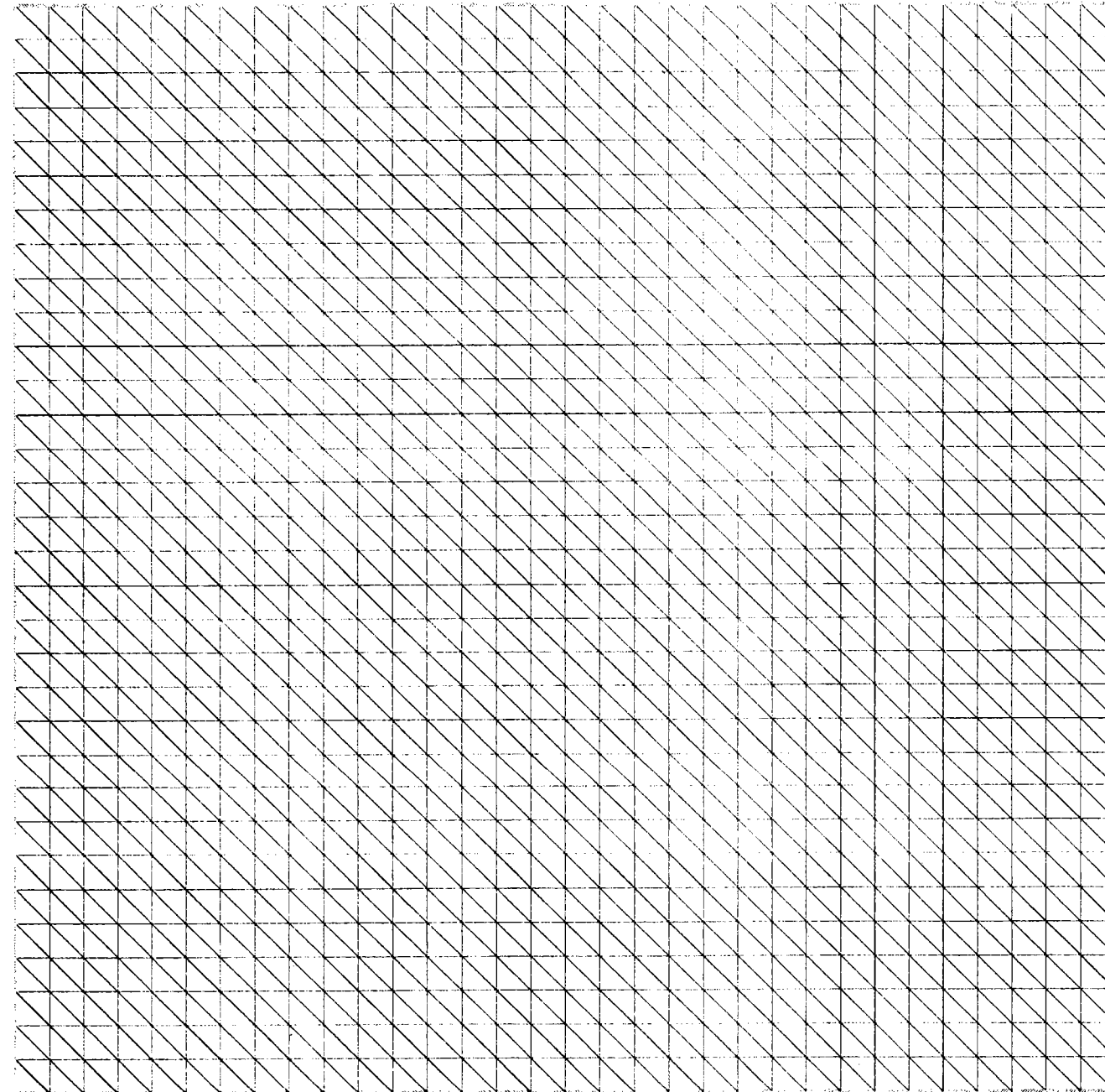
-2.745 -2.700

COIN HAUT DROIT :

1.745 1.700

NUMERO SOUS DOMAINE

Figure 1
structure réelle : bords très fins



MODULEF : jmse

MATERIAU HOMOGENEISE

20/09/94

h.nopo

1089 POINTS

1089 NOEUDS

2048 ELEMENTS

2048 TRIANGLES

0 TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

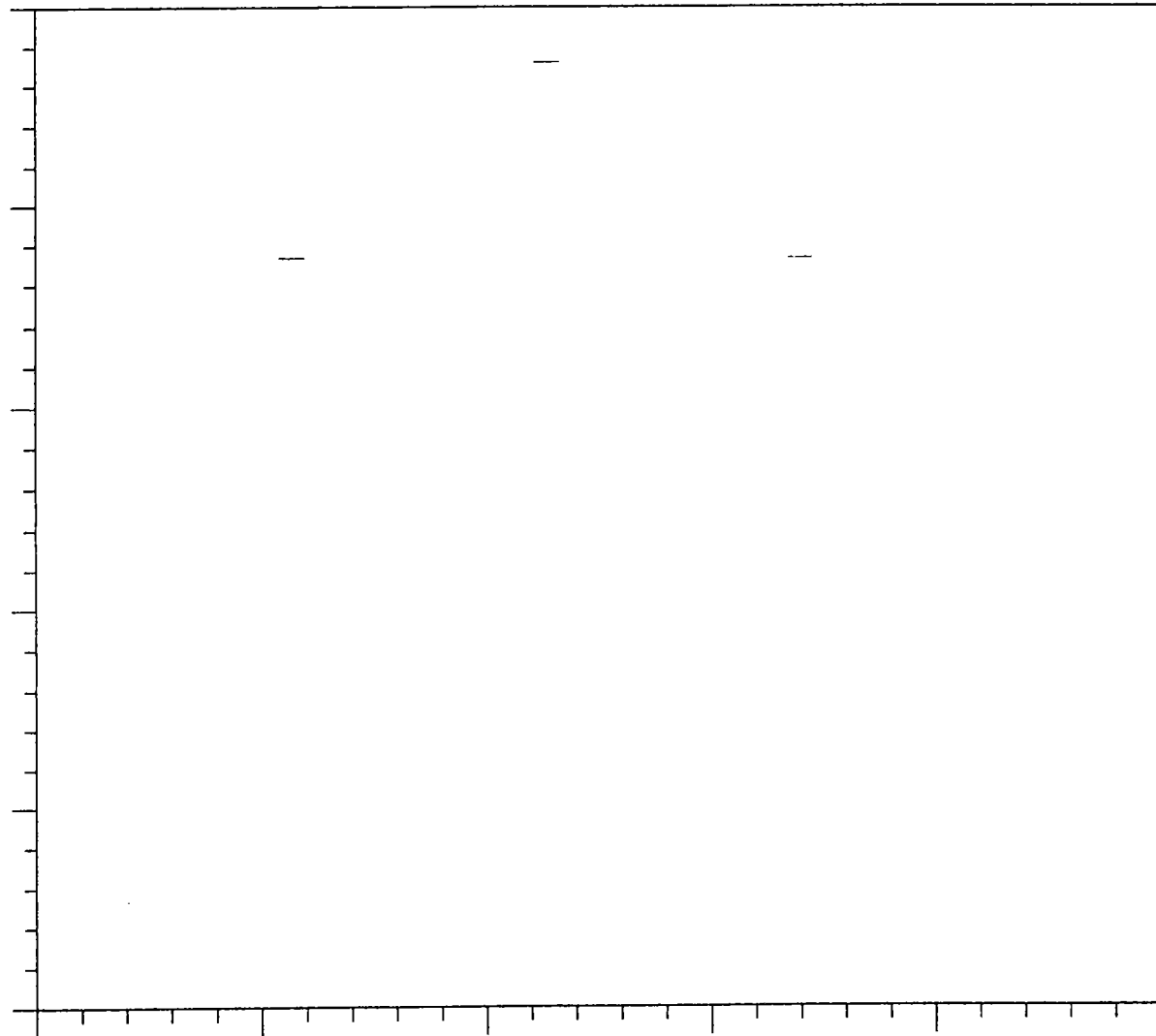
- .2452 - .2000

COIN HAUT DROIT :

4.245 4.200

Figure 2

Structure homogénéisée.
Correspond à la figure 1.



MODULEF : jmse

20/09/94

r.mail

r.coor

r.b

NOMBRE DE COUPES : 1

EXTREMA DE LA FONCTION :

NUMERO : MAXIMUM : MINIMUM

1 | 20.453 | .00000E+00

EXTREMA DE LA COUPE :

NUMERO : MAXIMUM : MINIMUM

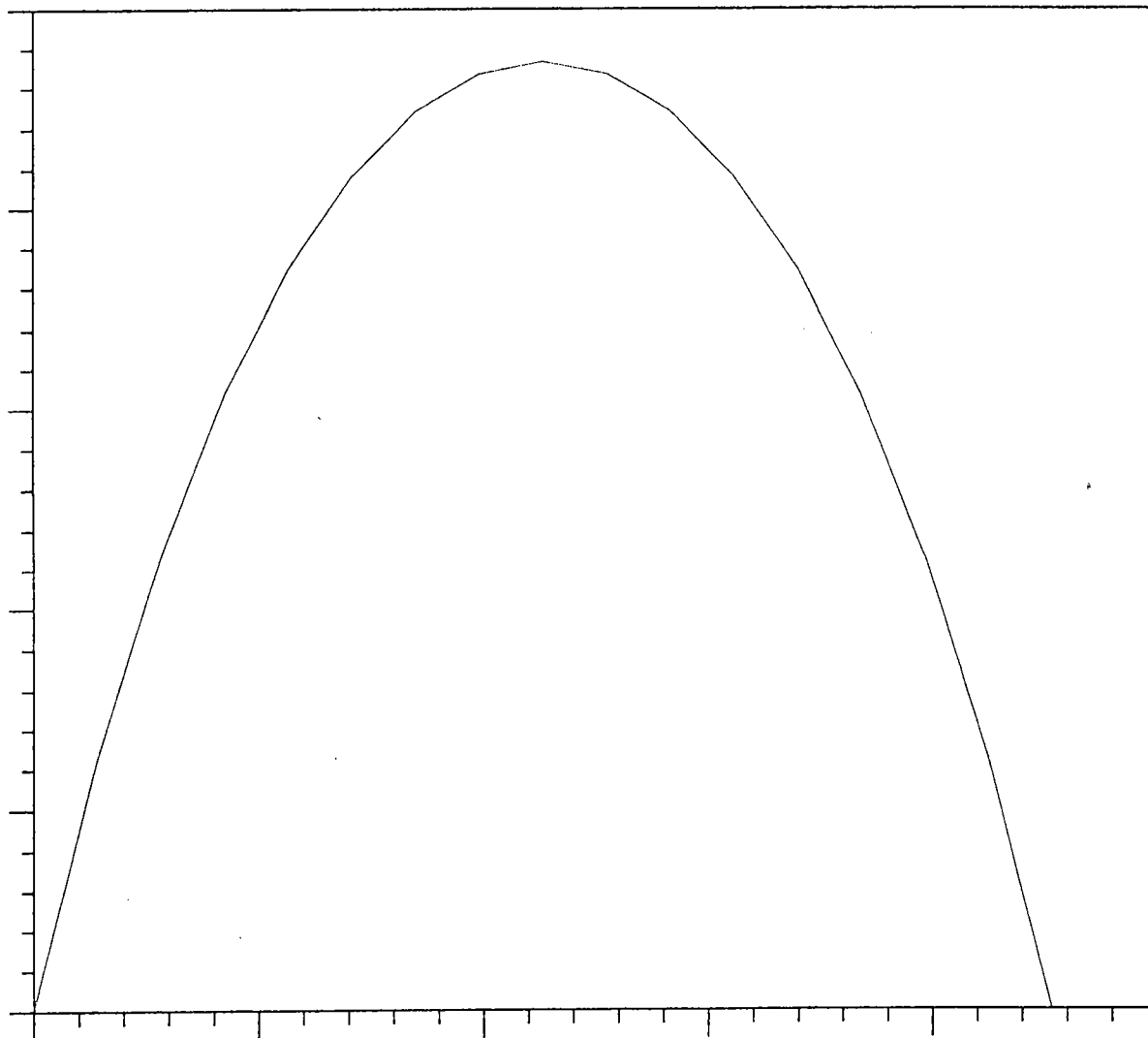
1 | 19.302 | .00000E+00

— : VC INC : 1 MNEMO : VN

TRACE DE COUPES

Figure 3

structure réelle
 coupe horizontale passant par les trous



MODULEF : jmse

20/09/94

h.mail

h.coor

h.b

NOMBRE DE COUPES : 1

EXTREMA DE LA FONCTION :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	20.454	.00000E+00

EXTREMA DE LA COUPE :

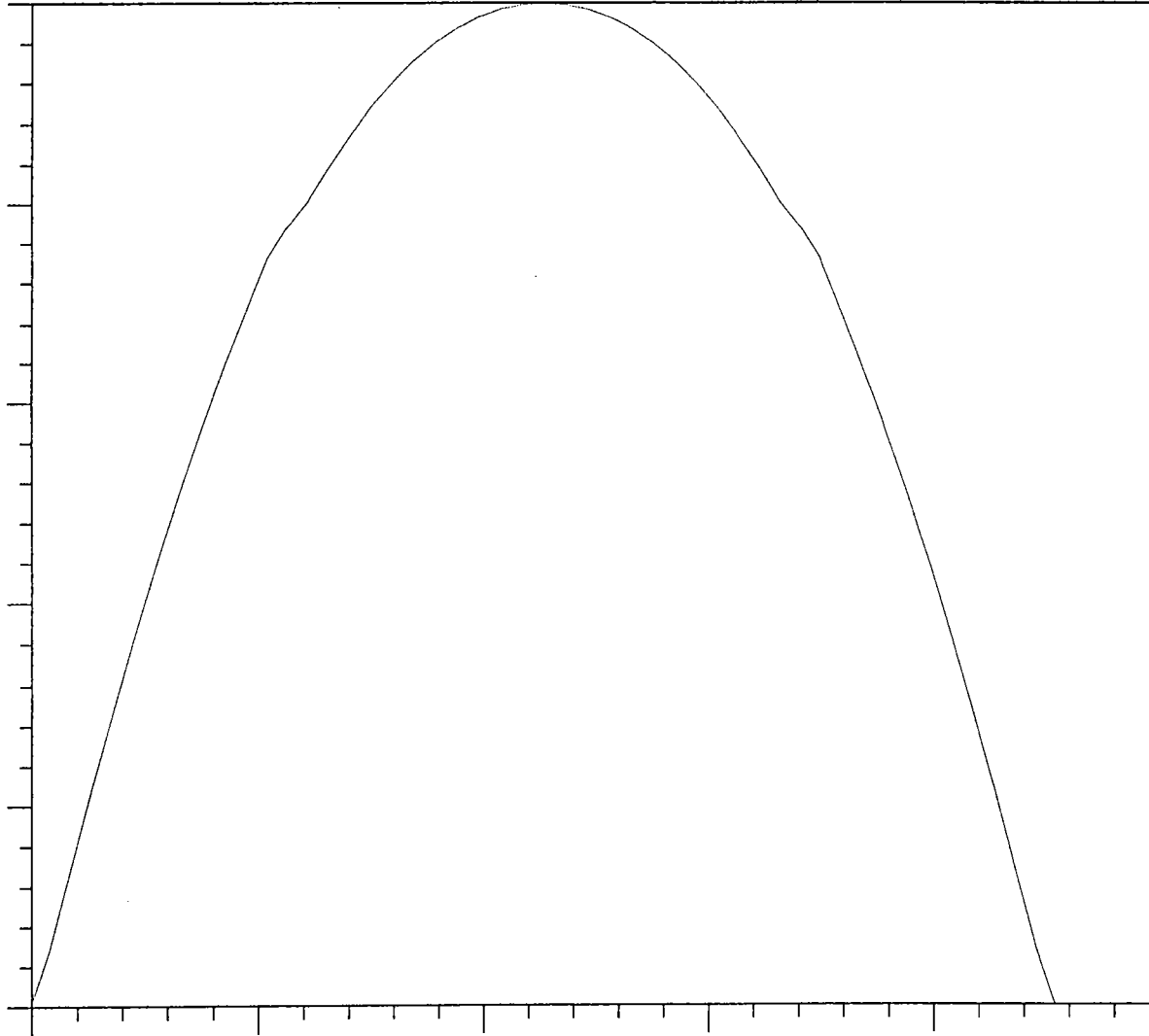
NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	19.356	.00000E+00

— : VC INC : 1 MNEMO : VN

TRACE DE COUPES

Figure 4

structure homogénéisée - coupe horizontale
correspondant à celle de la figure 3.



MODULEF : jmse

19/09/94

r.mail

r.coor

r.b

NOMBRE DE COUPES : 1

EXTREMA DE LA FONCTION :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	20.453	.00000E+00

EXTREMA DE LA COUPE :

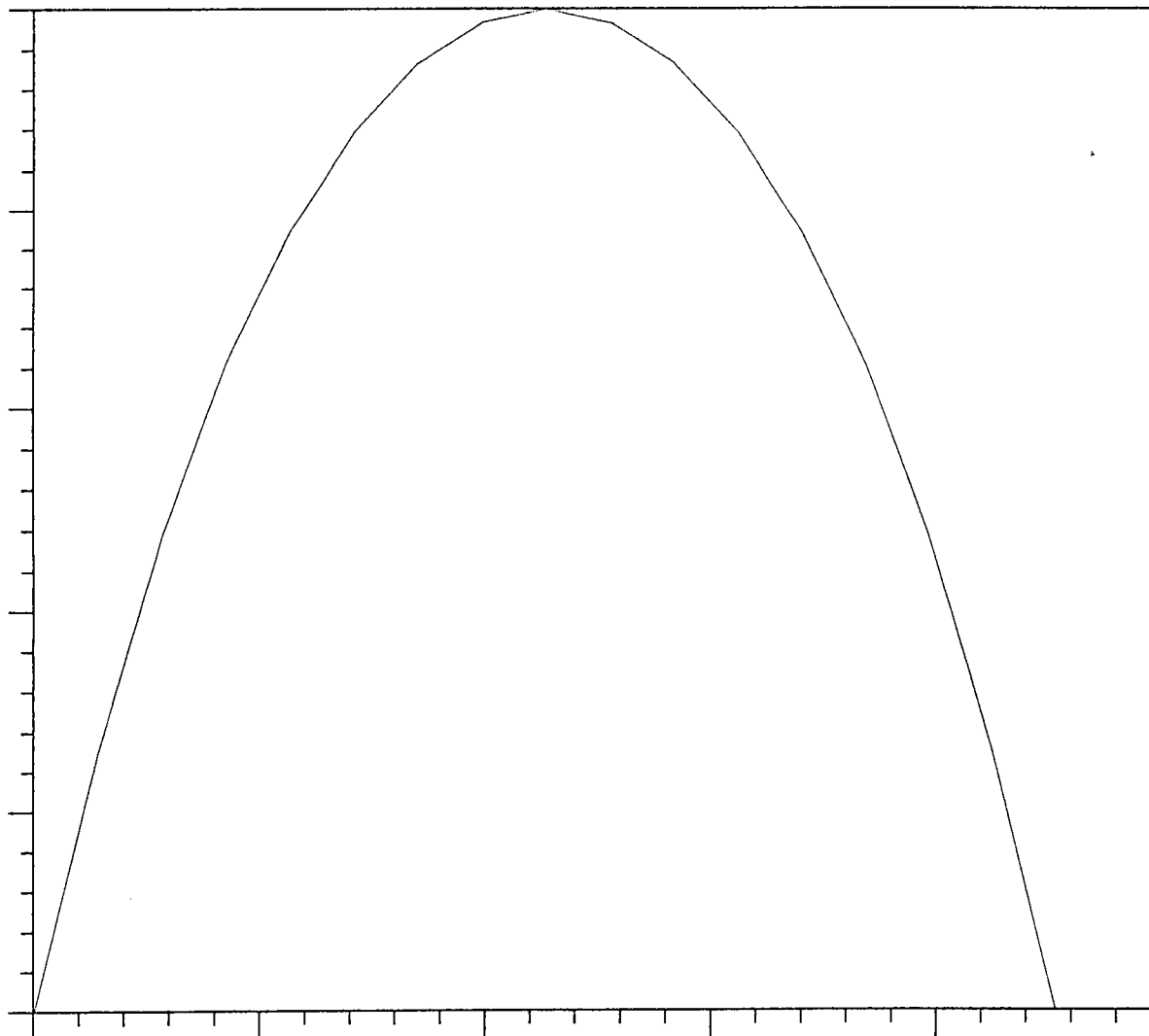
NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	20.451	.00000E+00

— : VC INC : 1 MNEMO : VN

TRACE DE COUPES

Figure 5

Profil d'un réservoir - Coupe horizontale au
niveau des 20m



MODULEF : jmse

20/09/94

h.mail

h.coor

h.b

NOMBRE DE COUPES : 1

EXTREMA DE LA FONCTION :

NUMERO : MAXIMUM : MINIMUM

1 | 20.454 | .00000E+00

EXTREMA DE LA COUPE :

NUMERO : MAXIMUM : MINIMUM

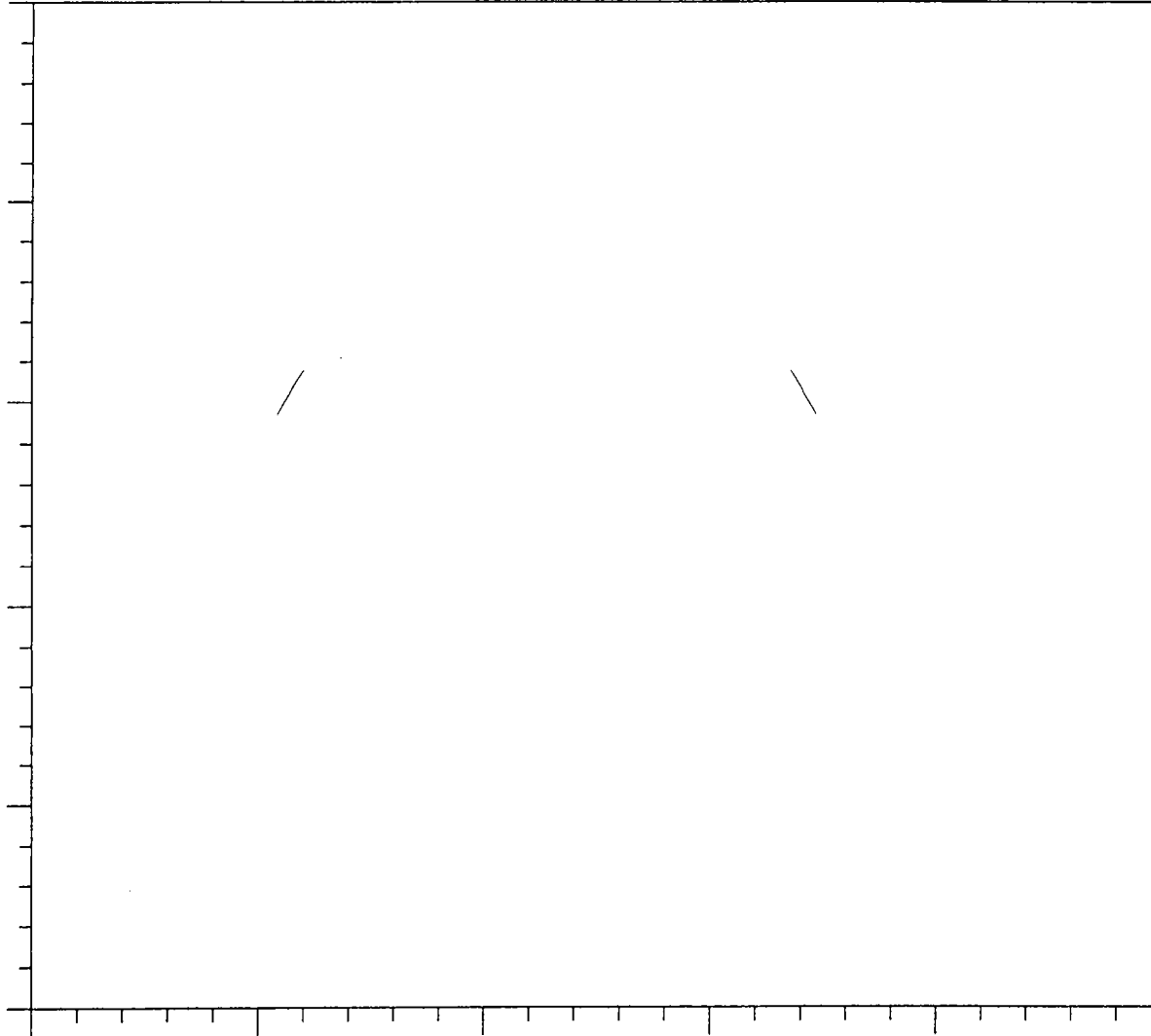
1 | 20.451 | .00000E+00

— : VC INC : 1 MNEMO : VN

TRACE DE COUPES

Figure 6

Matériau homogénéisé - coupe horizontale
correspondant à celle de la figure 5.



MODULEF : jmse

20/09/94

r.mail

r.coor

r.b

NOMBRE DE COUPES : 1

EXTREMA DE LA FONCTION :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	20.453	.00000E+00

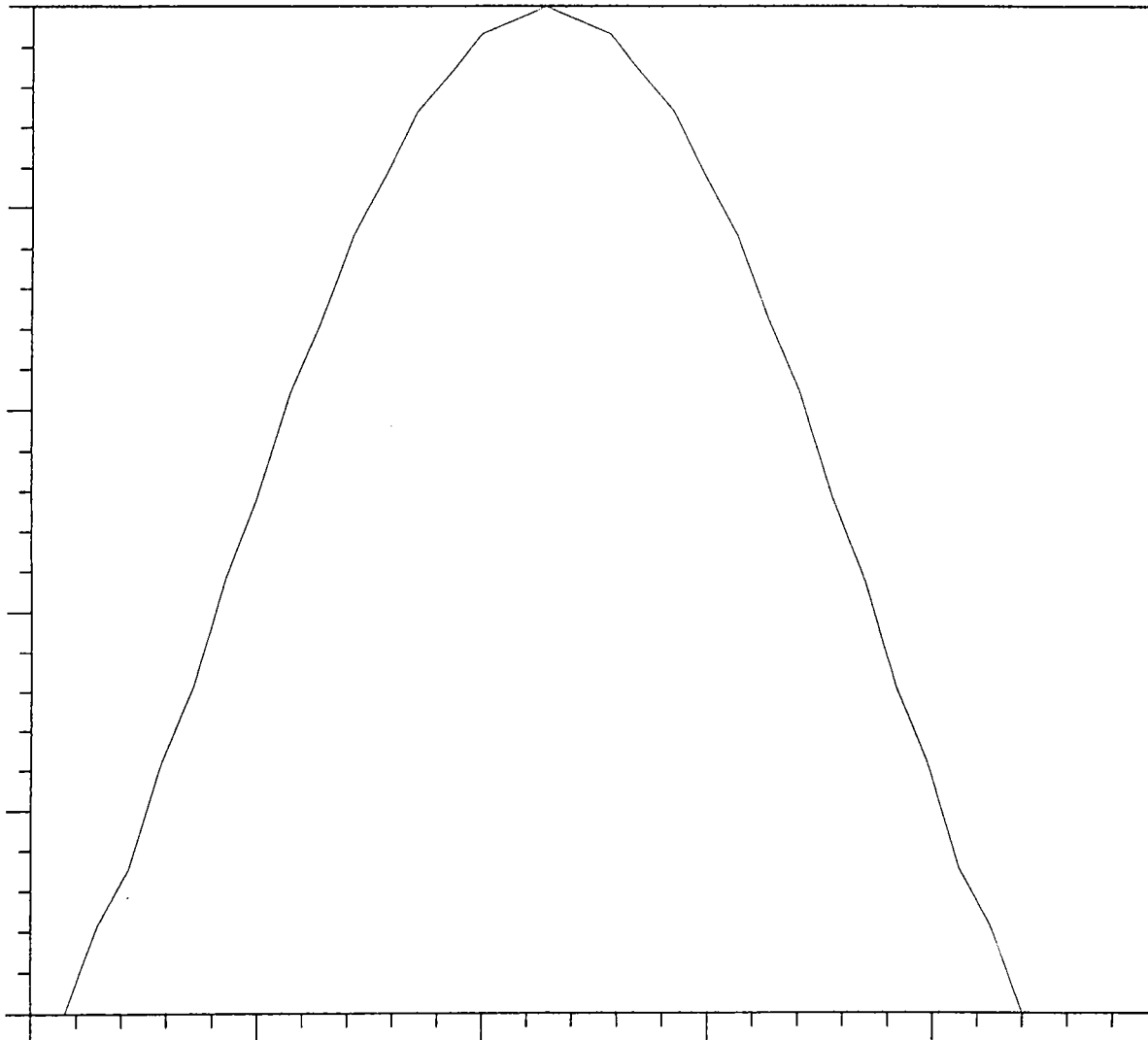
EXTREMA DE LA COUPE :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	20.453	.00000E+00

— : VC INC : 1 MNEMO : VN

TRACE DE COUPES

Figure 7
Structure aiele - coupe diagonale



MODULEF : jmse

20/09/94

h.mail

h.coor

h.b

NOMBRE DE COUPES : 1

EXTREMA DE LA FONCTION :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	20.454	.00000E+00

EXTREMA DE LA COUPE :

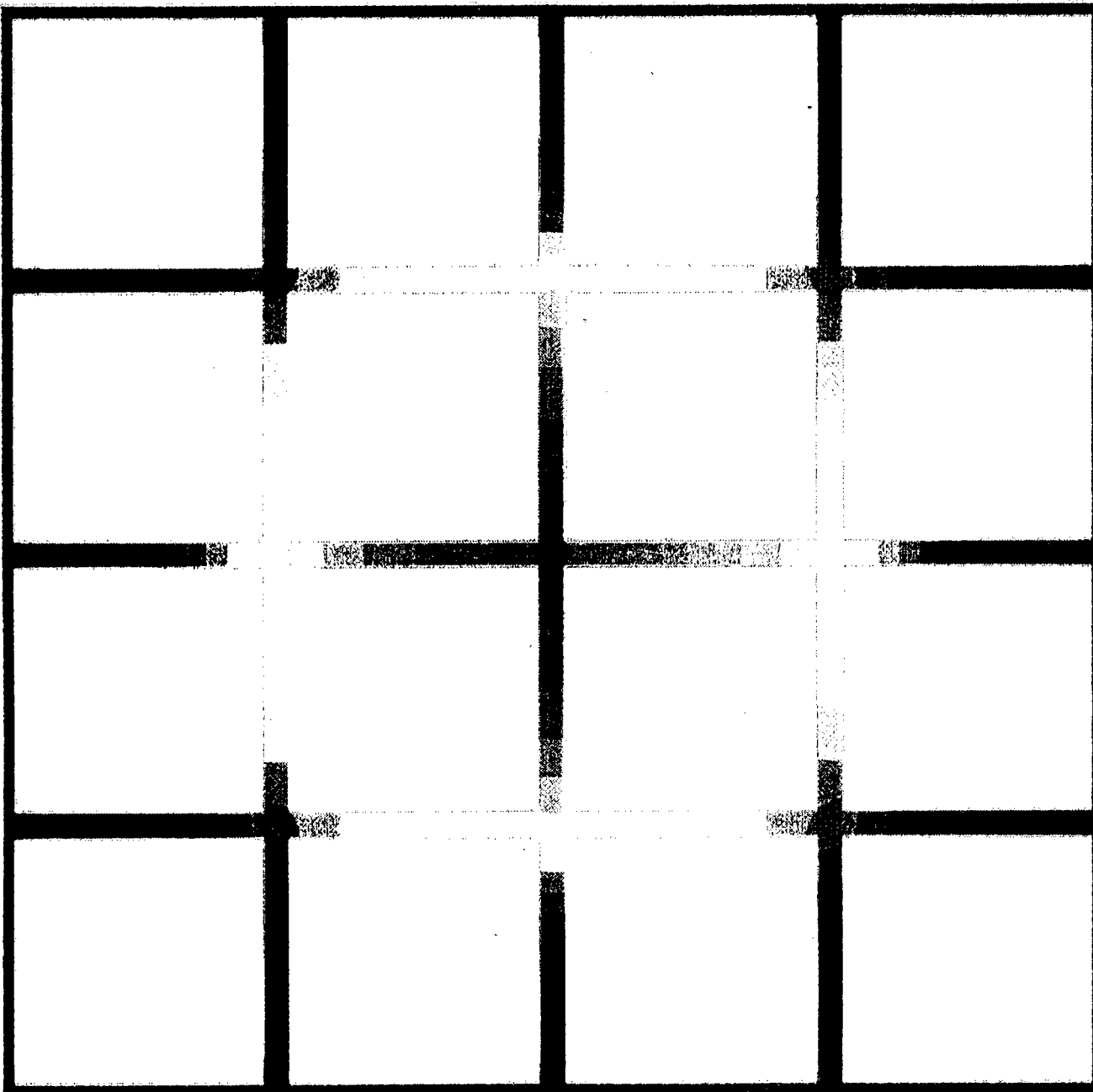
NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	20.447	.00000E+00

— : VC INC : 1 MNEMO : VN

TRACE DE COUPES

Figure 8

Structure homogénéisée - Coupe
 oblique correspondante à celle de la
 figure 7.



MODULEF : jmse

20/09/94

r.mail

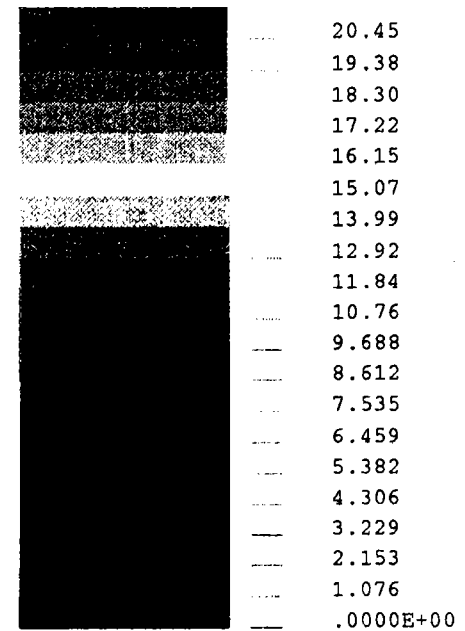
r.coor

r.b

1233 POINTS
 1233 NOEUDS
 1536 ELEMENTS
 1536 TRIANGLES

INCONNUE : 1 MNEMO :VN

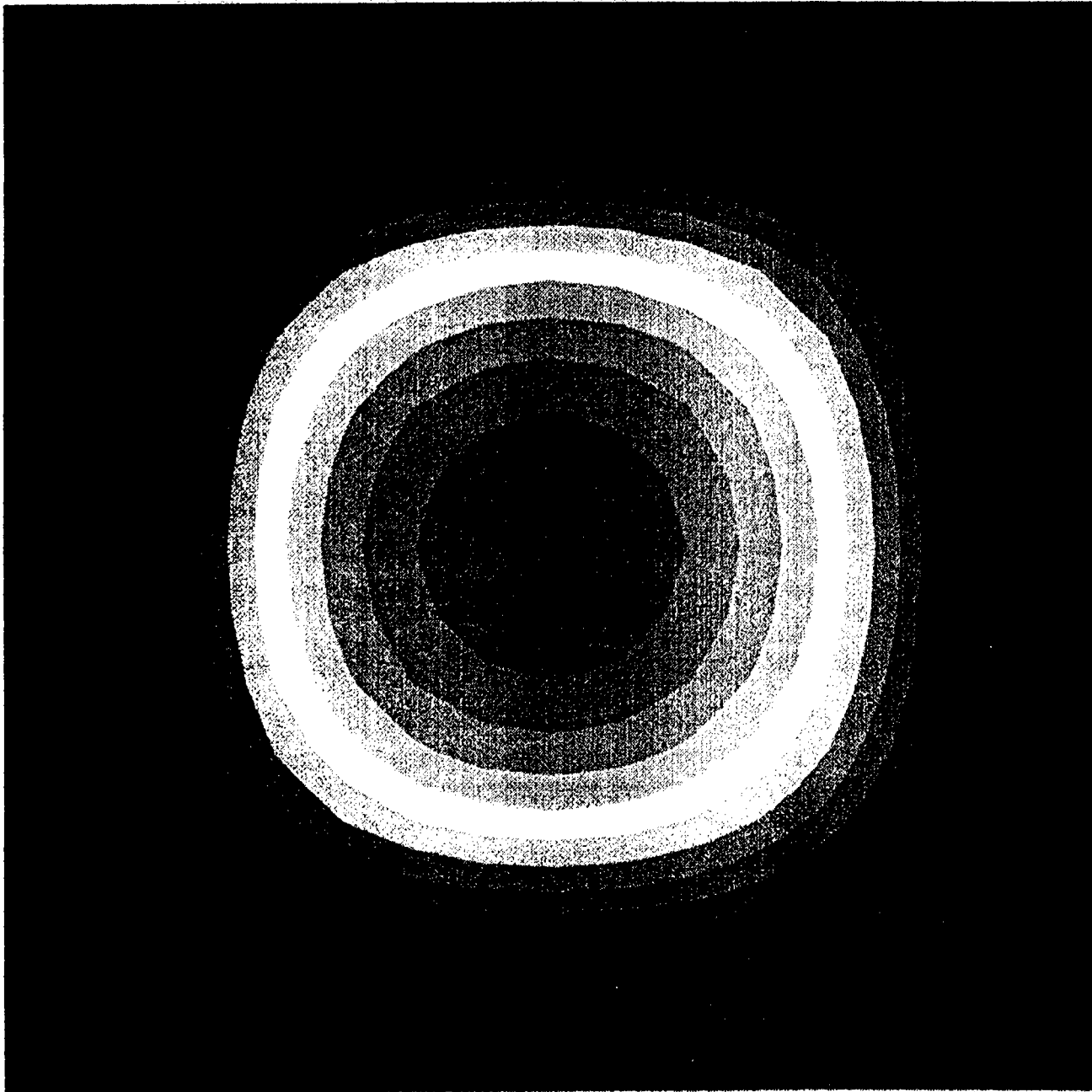
20.45



20 ISOVALEURS

Figure 9

structure réelle à bords très fins.
 Trace d'isovaleurs.



MODULEF : jmse

20/09/94

h.mail

h.coor

h.b

289 POINTS

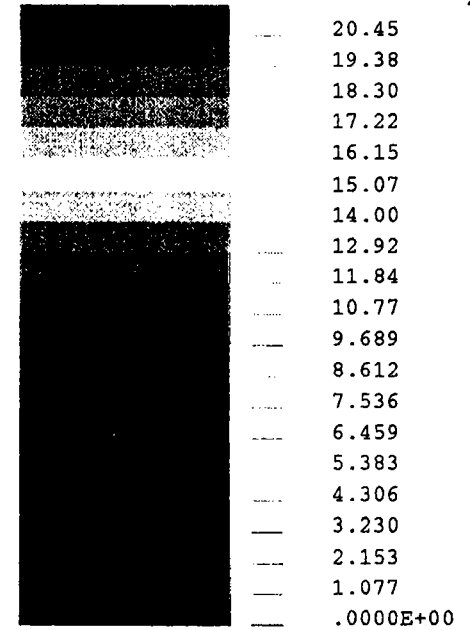
289 NOEUDS

512 ELEMENTS

512 TRIANGLES

INCONNUE : 1 MNEMO :VN

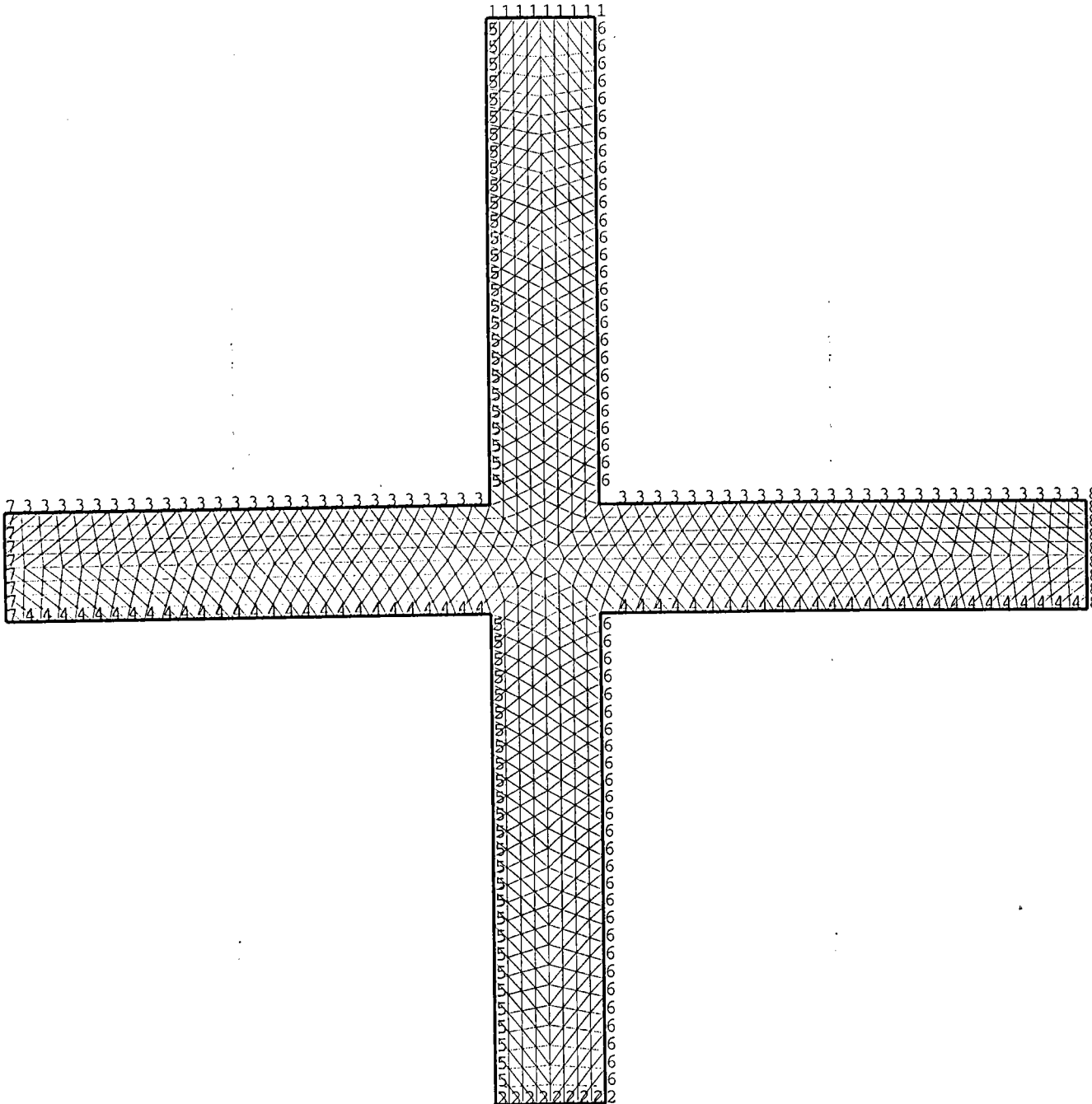
20.45



20 ISOVALEURS

Figure 10

Structure homogénéisée - correspondant
à la structure à fibres K103 fibres.
Tracé d'isovaleurs.



MODULEF : jmse

GRILLAGE_ELASTICITE

6/09/94

c.nopo

1025 POINTS

1025 NOEUDS

1792 ELEMENTS

1792 TRIANGLES

0 TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

-0.5613 -0.5500

COIN HAUT DROIT :

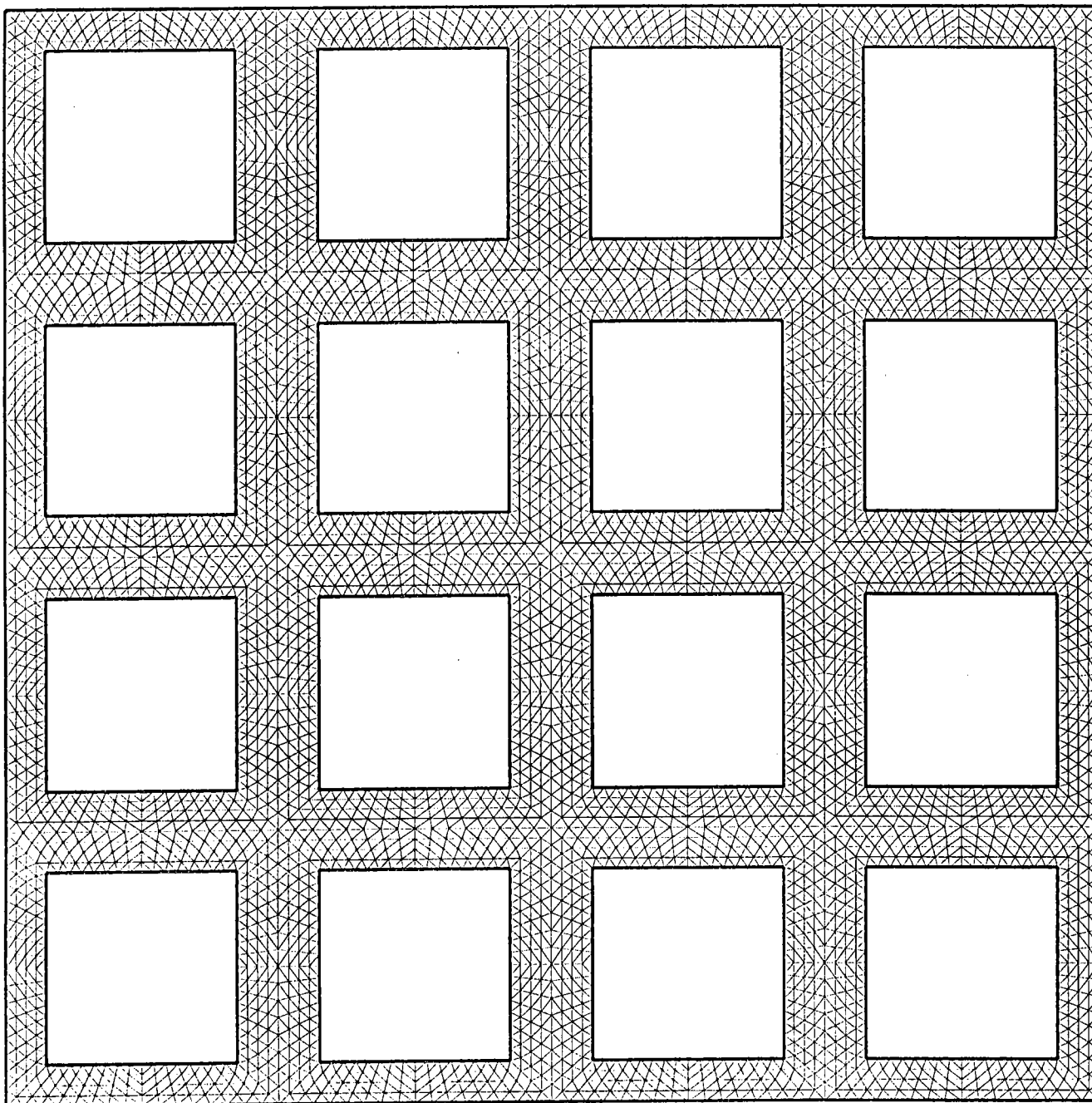
0.5613 0.5500

REFERENCE (POINT)

Figure 11

Cellule de base de la figure 2
 dans les figures

12 8-00-1001 ~ 10h 16mn
 Titificatour imco
 Noesin 1



MODULEF : jmse

PER3

8/09/94

r.nopo

4721 POINTS

4721 NOEUDS

8192 ELEMENTS

8192 TRIANGLES

16 TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

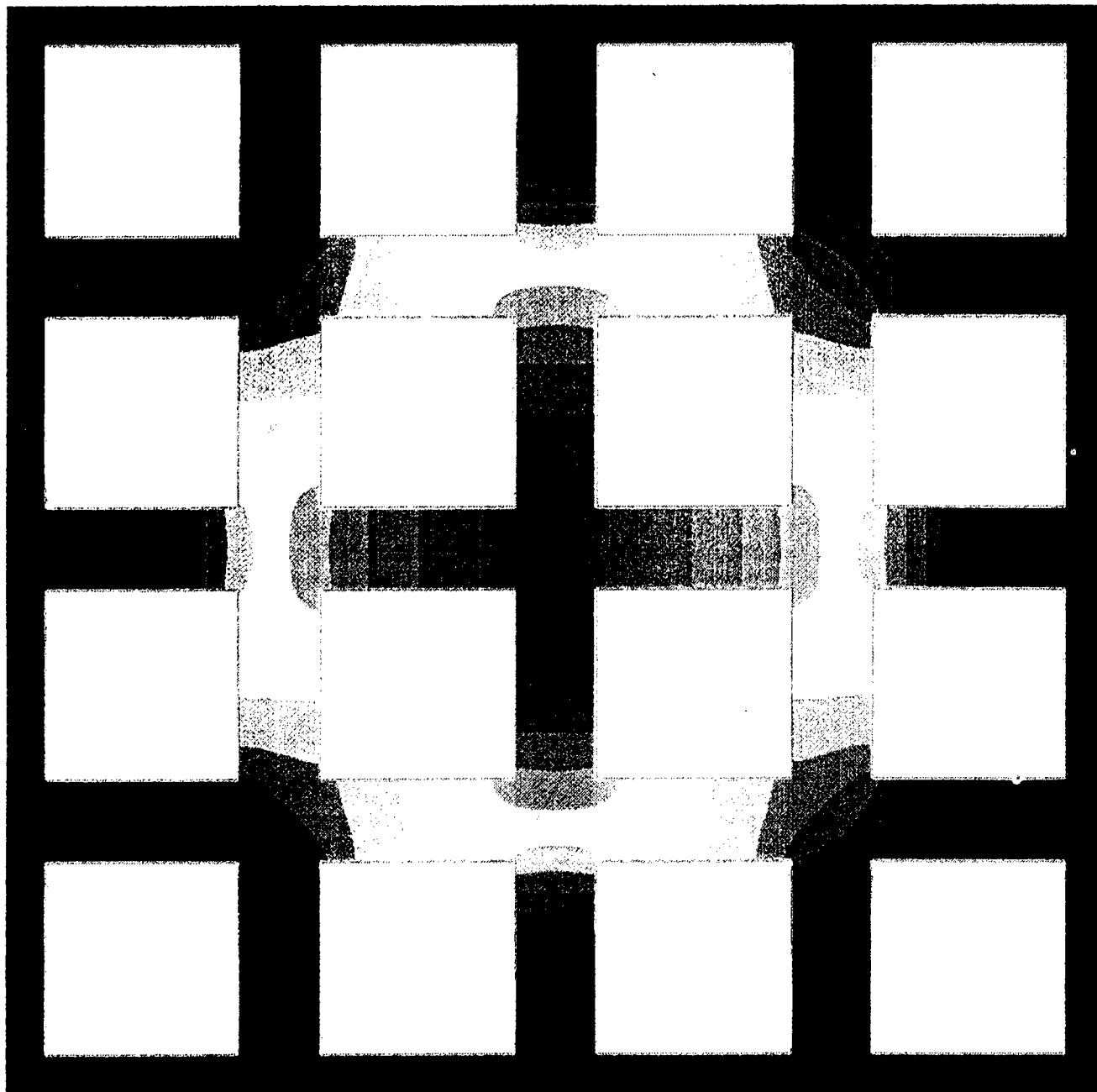
-2.745 -2.700

COIN HAUT DROIT :

1.745 1.700

Figure 12

Structure réelle à bords d'épaisseur moyenne.



08/09/94

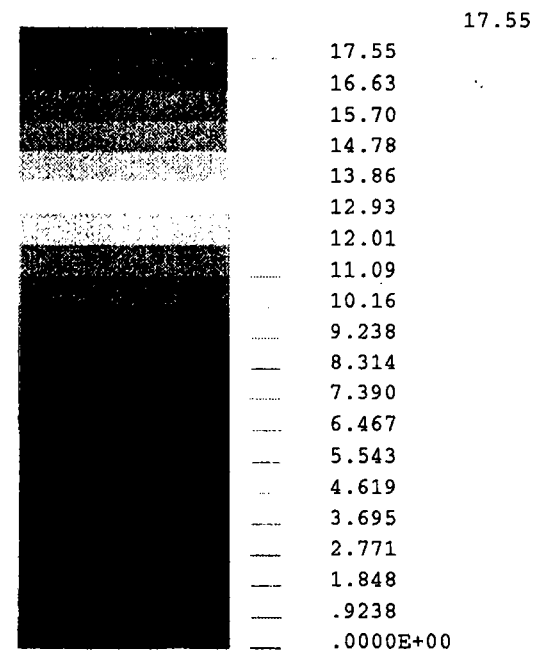
r.mail

r.coor

r.b

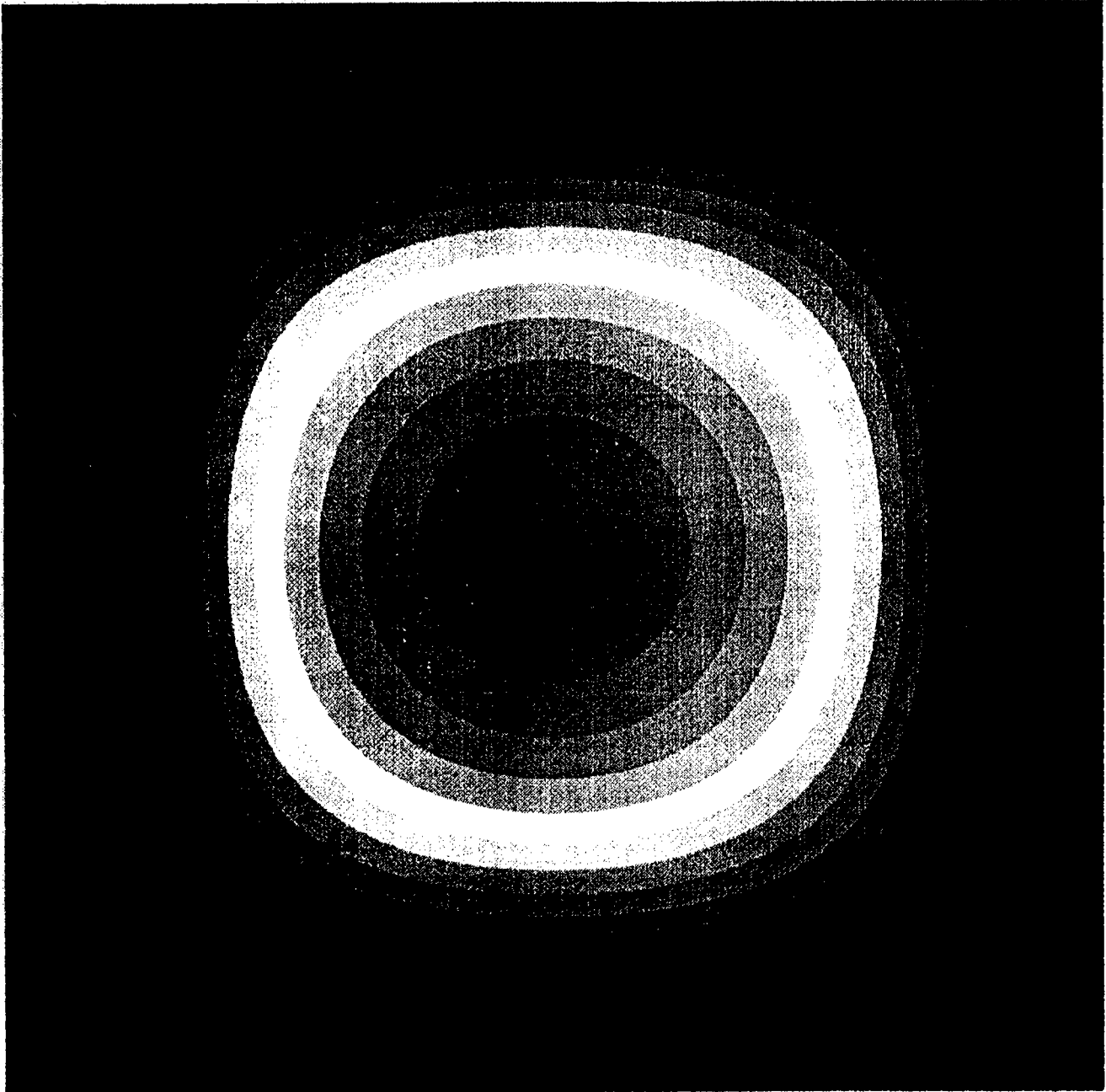
4721 POINTS
 4721 NOEUDS
 8192 ELEMENTS
 8192 TRIANGLES

INCONNUE : 1 MNEMO :VN



20 ISOVALEURS

Figure 13
 structure réelle à bords d'épaisseur
 moyenne.
 Trace d'isovaleurs.



MODULEF : jmse

20/09/94

h.mail

h.coor

h.b

1089 POINTS
 1089 NOEUDS
 2048 ELEMENTS
 2048 TRIANGLES

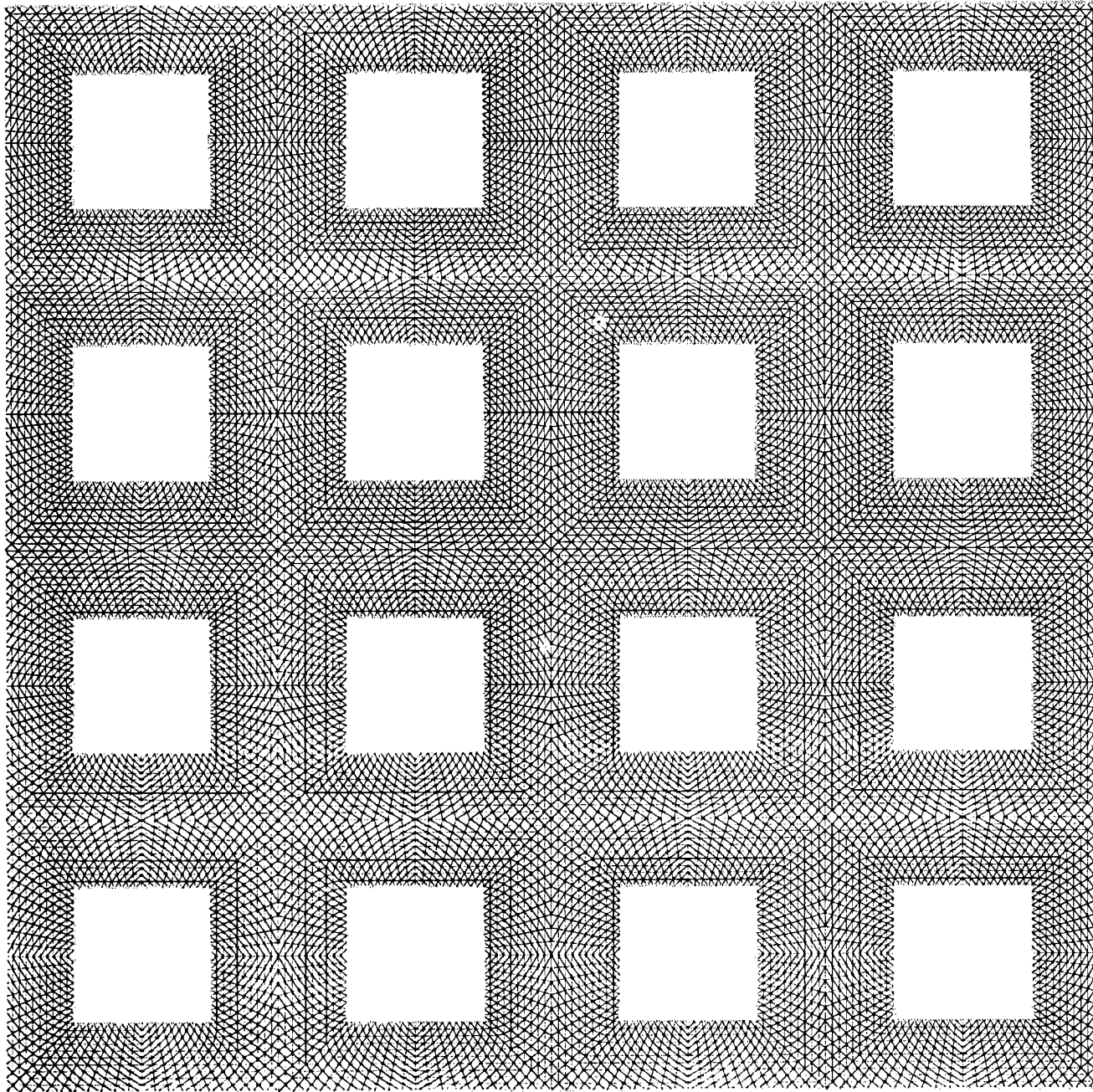
INCONNUE : 1 MNEMO :VN

17.55

.....	17.55
.....	16.63
.....	15.70
.....	14.78
.....	13.85
.....	12.93
.....	12.01
.....	11.08
.....	10.16
.....	9.236
.....	8.313
.....	7.389
.....	6.465
.....	5.542
.....	4.618
.....	3.694
.....	2.771
.....	1.847
.....	.9236
.....	.0000E+00

20 ISOVALEURS

Figure 14
 Structure homogénéisée correspondante à
 la structure à bandes d'épaisseur moyenne
 tracé d'isovaleurs.



MODULEF : jmse

PER3

09/09/94

r.nopo

13585 POINTS

13585 NOEUDS

25600 ELEMENTS

25600 TRIANGLES

16 TROU(S)

COIN BAS GAUCHE :

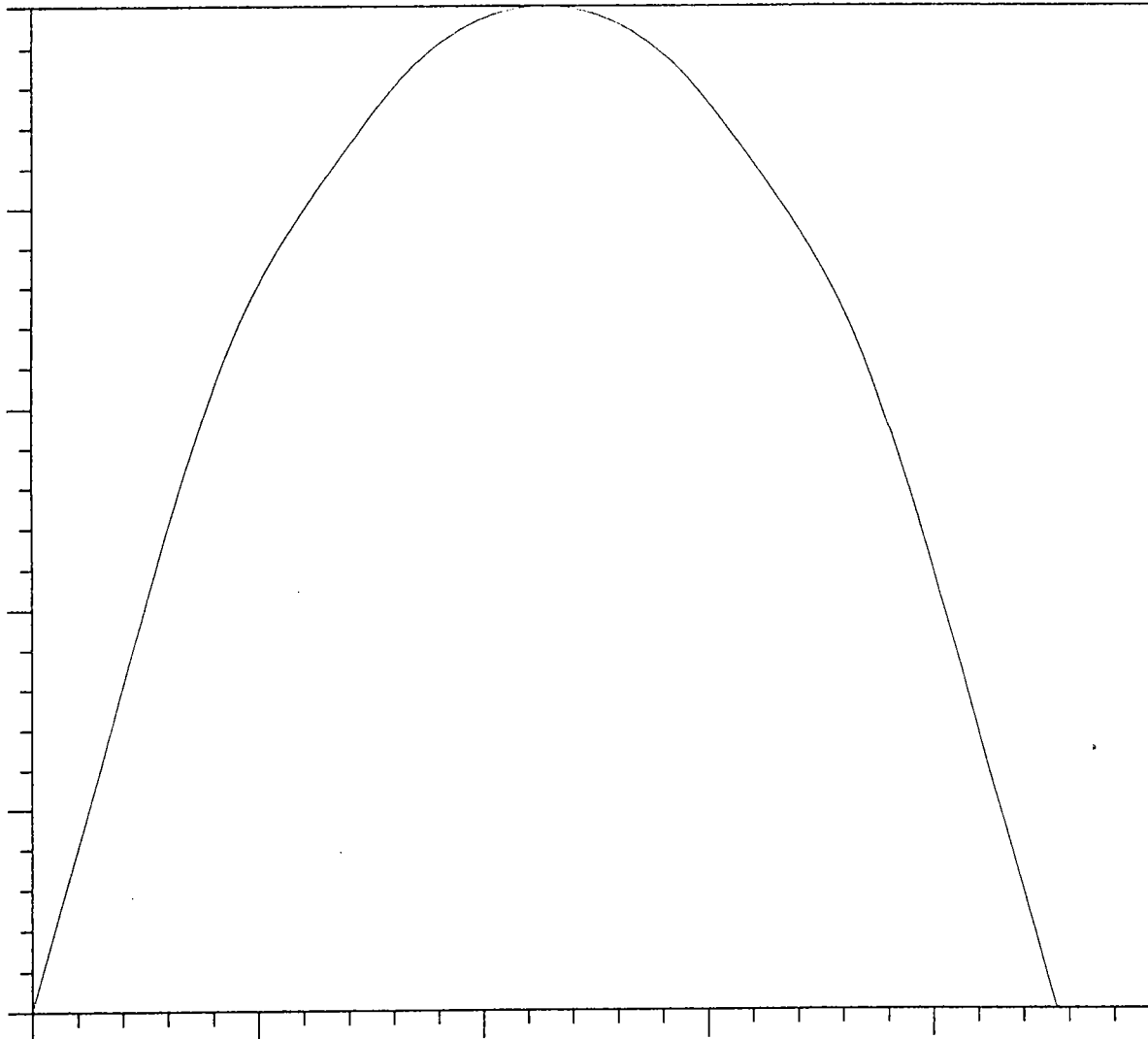
-2.745 -2.700

COIN HAUT DROIT :

1.745 1.700

Figure 15

Structure réelle à bords épais.



MODULEF : jmse

20/09/94

r.mail

r.coor

r.b

NOMBRE DE COUPES : 1

EXTREMA DE LA FONCTION :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	14.919	.00000E+00

EXTREMA DE LA COUPE :

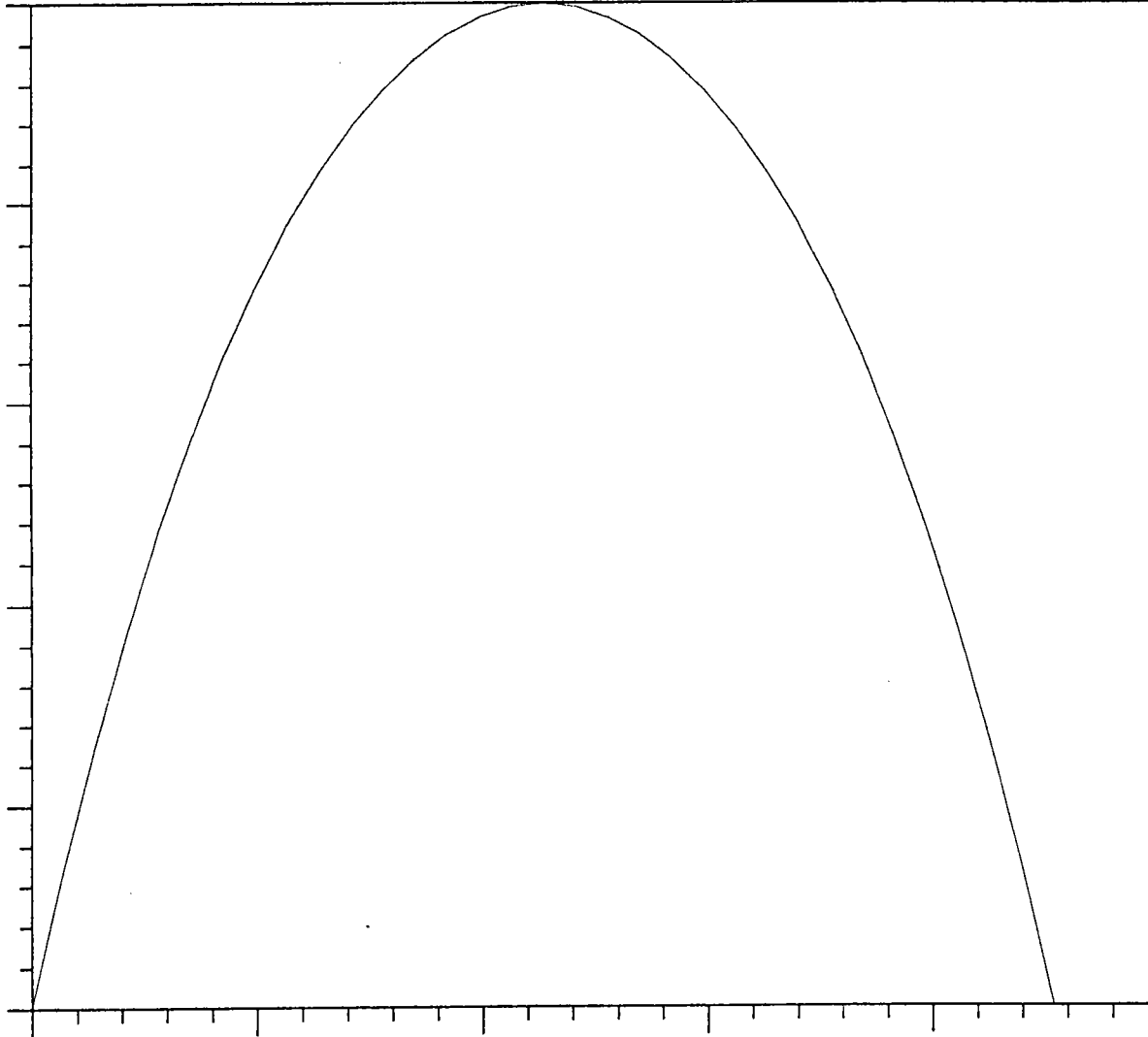
NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	14.918	.20858E-01

— : VC INC : 1 MNEMO : VN

TRACE DE COUPES

Figure 17

Structure réelle à barres épaisses.
 coupe horizontale au point par par les
 barres



MODULEF : jmse

20/09/94

h.mail

h.coor

h.b

NOMBRE DE COUPES : 1

EXTREMA DE LA FONCTION :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	14.924	.00000E+00

EXTREMA DE LA COUPE :

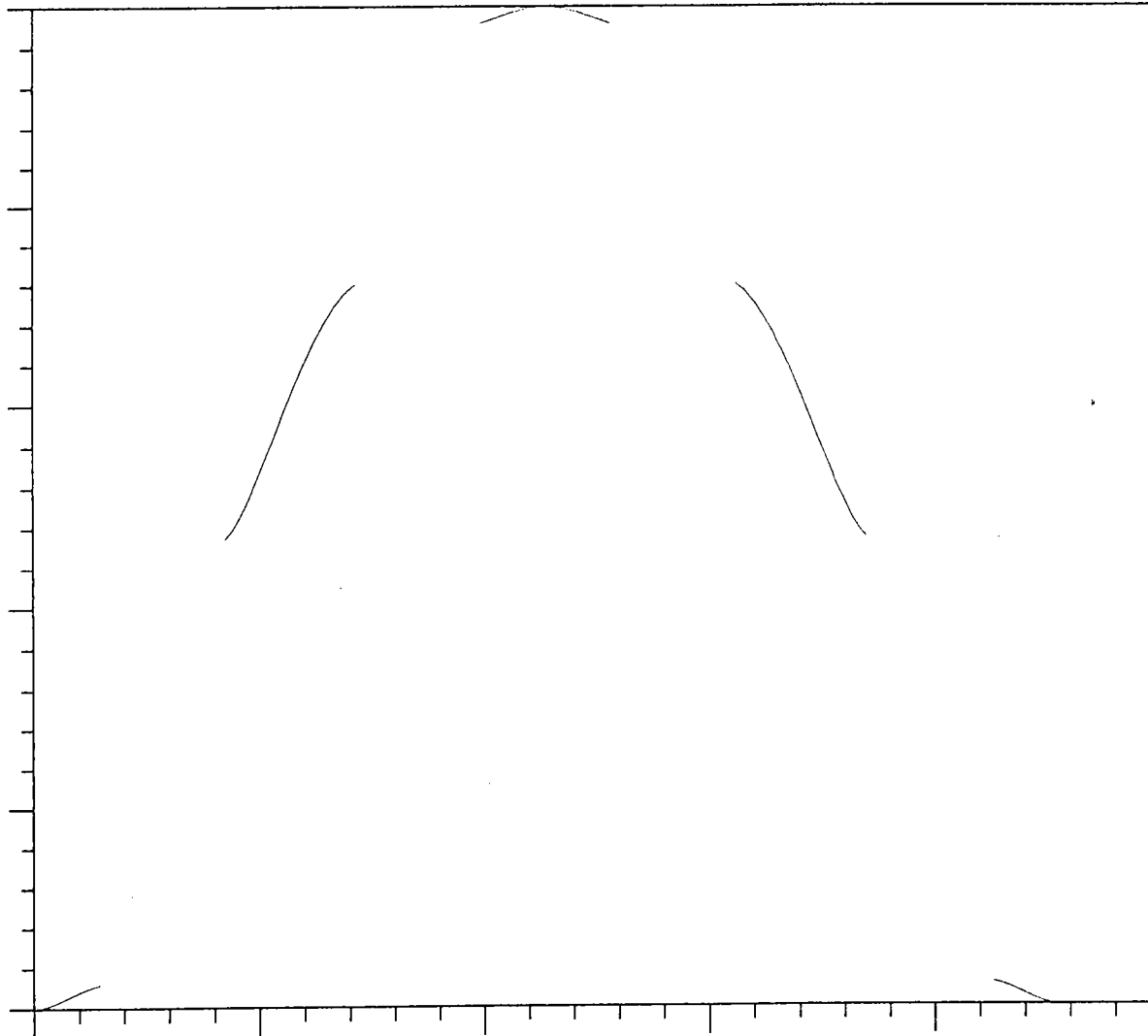
NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	14.923	.00000E+00

— : VC INC : 1 MNEMO : VN

TRACE DE COUPES

Figure 18

Structure homogénéisée correspondant à la structure à baves épaisses - coupe horizontale correspondant à celle de la figure 17.



MODULEF : jmse

20/09/94

r.mail

r.coor

r.b

NOMBRE DE COUPES : 1

EXTREMA DE LA FONCTION :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	14.919	.00000E+00

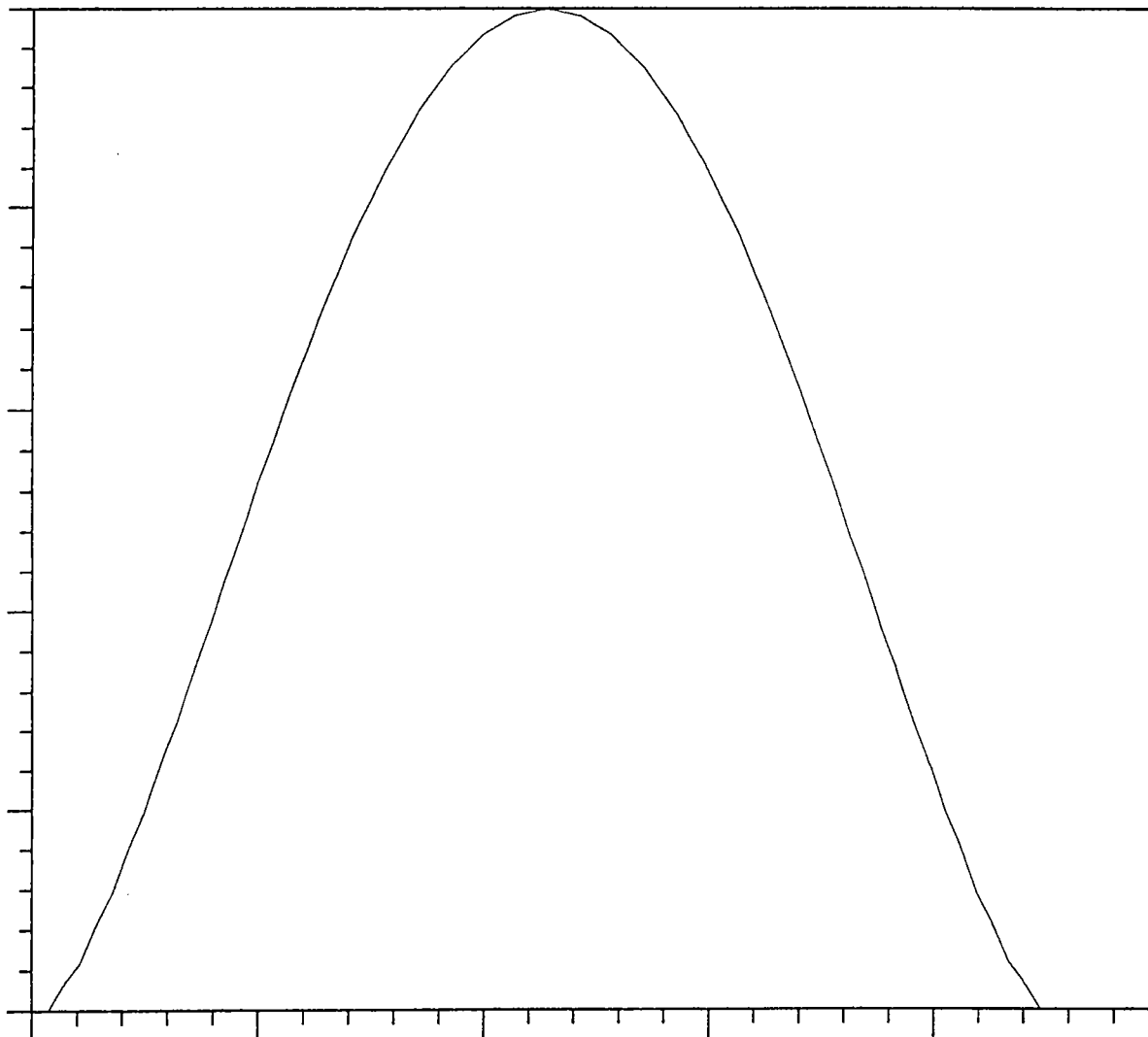
EXTREMA DE LA COUPE :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	14.918	.00000E+00

— : VC INC : 1 MNEMO : VN

TRACE DE COUPES

Figure 19
 Structure réelle à barres épaisses -
 Coupe horizontale passant par les trous



MODULEF : jmse

20/09/94

h.mail

h.coor

h.b

NOMBRE DE COUPES : 1

EXTREMA DE LA FONCTION :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	14.924	.00000E+00

EXTREMA DE LA COUPE :

NUMERO	MAXIMUM	MINIMUM
1	14.920	.00000E+00

— : VC INC : 1 MNEMO : VN

TRACE DE COUPES

Figure 20

structure homogénéisée correspondant à la structure réelle à barres épaisses - coupe horizontale correspondant à celle de la figure 19.