



**HAL**  
open science

# Modélisation de la plasticité orthotrope en contraintes planes : application à la détermination des limites de formage des tôles

Rabih Makkouk

► **To cite this version:**

Rabih Makkouk. Modélisation de la plasticité orthotrope en contraintes planes : application à la détermination des limites de formage des tôles. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1994. Français. NNT : 1994METZ053S . tel-01776807

**HAL Id: tel-01776807**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776807>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

# THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

**MAKKOUK Rabih**

Pour l'obtention du grade de :  
**DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ**

**SPECIALITE : Sciences de l'ingénieur**  
**OPTION : Mécanique**

**MODELISATION DE LA PLASTICITE ORTHOTROPE  
EN CONTRAINTES PLANES  
APPLICATION A LA DETERMINATION DES LIMITES DE  
FORMAGE DES TOLES**

Soutenu le *1 juillet 1994* devant le jury composé de :

Mr.	<b>F. SIDOROFF</b>	Rapporteur
Mr.	<b>F. MONTHEILLET</b>	Rapporteur
Mr.	<b>G. FERRON</b>	Directeur de thèse
Mr.	<b>M. BERVEILLER</b>	Examinateur
Mr.	<b>J. MORREALE</b>	

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420510 4

Laboratoire

U. R. A. CNRS. 1215

UB 8 165

# TABLE DES MATIERES

**INTRODUCTION GENERALE** 1

## **CHAPITRE I ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE**

**I-1 INTRODUCTION** 3

**I-2 CRITERES DE PLASTICITE ISOTROPES** 4

I-2-1 Généralités

I-2-2 Critère de Tresca

I-2-3 Critère de Von Mises

I-2-4 Critère de Drucker

I-2-5 Critère de Mazilu

I-2-6 Critère de Hosford et Logan et Hosford

**I-3 CRITERES DE PLASTICITE A ISOTROPIE TRANSVERSE** 9

I-3-1 Généralités

I-3-2 Critère quadratique de Hill

I-3-3 Critère de Hosford

I-3-4 Critère non quadratique de Hill

I-3-5 Critère de Bassani

I-3-6 Formulation paramétrique de Budiansky

**I-4 CRITERES DE PLASTICITE ORTHOTROPE** 14

I-4-1 Généralités

I-4-2 Critère quadratique de Hill

I-4-3 Critère de Gotoh

I-4-4 Critère de Boehler

I-4-5 Critères de Barlat et Lian et Barlat et coll

I-4-6 Critère non quadratique de Hill

I-4-7 Critère de Karafillis et Boyce

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ	
N° inv.	1994/159S
Cote	SM3 94/53
Loc	Magasin

<b><u>I-5 DEFORMATION ET ECROUISSAGE DES MATERIAUX STANDARD GENERALISES</u></b>	19
---	----

<b><u>I-6 COMPARAISON DES CRITERES DE PLASTICITE USUELS AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX OU DES RESULTATS DE CALCULS D'HOMOGENEISATION</u></b>	21
--	----

I-6-1 Cas de l'isotropie

I-6-2 Cas de l'isotropie transverse

I-6-3 Cas de l'anisotropie transverse

<b><u>I-7 CONCLUSION</u></b>	28
------------------------------	----

## **CHAPITRE II MODELISATION DE LA PLASTICITE ORTHOTROPE EN CONTRAINTES PLANES**

<b><u>II-1 INTRODUCTION</u></b>	29
---------------------------------	----

<b><u>II-2 SURFACE DE PLASTICITE ET LOI D'ECOULEMENT ASSOCIEE - CAS DE L'ISOTROPIE TRANSVERSE</u></b>	29
---	----

II-2-1 Différentes représentations de la surface de plasticité et de la loi d'écoulement associée

II-2-2 Choix d'une description paramétrique de l'isotropie transverse

II-2-3 Conditions de symétrie et de convexité de la surface de plasticité

II-2-4 Expressions des vitesses de déformation

II-2-5 Coefficient d'anisotropie normale

<b><u>II-3 SURFACE DE PLASTICITE ET LOI D'ECOULEMENT ASSOCIEE - CAS DE L'ANISOTROPIE TRANSVERSE</u></b>	34
---	----

II-3-1 Différentes représentations de la surface de plasticité et de la loi d'écoulement associée

II-3-2 Choix d'une description paramétrique de l'anisotropie transverse

II-3-3 Conditions de symétrie et de convexité de la surface de plasticité

II-3-4 Expressions des vitesses de déformation

II-3-5 Quantités liées à la cinématique de la déformation

II-3-6 Relations de consistance

II-3-7 Passage de l'isotropie transverse à l'anisotropie transverse

II-4 CONCLUSION 46

## **CHAPITRE III MISE AU POINT ET ANALYSE DU MODELE**

III-1 INTRODUCTION 47

III-2 RECHERCHE D'UNE FONCTION  $g(\theta)$  DECRIVANT  
L'ISOTROPIE TRANVERSE 47

III-2-1 Développement de  $g(\theta)$  en série de Fourier

III-2-2 Extension du critère de Drucker au cas de l'isotropie transverse

III-2-3 Forme générale du modèle

III-3 COMPARAISON DU MODELE AVEC DES RESULTATS  
EXPERIMENTAUX OU DES RESULTATS DE CALCULS  
D'HOMOGENEISATION 52

III-3-1 Cas de l'isotropie

III-3-2 Cas de l'isotropie transverse

III-3-3 Cas de l'anisotropie transverse

III-4 CONCLUSION 75

## **CHAPITRE IV APPLICATION A LA PREVISION DES LIMITES DE FORMAGE DES TOLES**

IV-1 INTRODUCTION 76

IV-2 APPROCHES THEORIQUES DES LIMITES DE FORMAGE 77

IV-2-1 Analyses de bifurcation

IV-2-2 Analyses de localisation

IV-2-3 Analyse de perturbation

<b><u>IV-3 LIMITES DE FORMAGE EN EXPANSION</u></b>	82
IV-3-1 Mise en équations	
IV-3-2 Influence de l'écroutissage et de la sensibilité à la vitesse de déformation	
IV-3-3 Influence de la forme de la surface de plasticité	
IV-3-4 Rôle de la rupture ductile	
IV-3-5 Comparaison avec des courbes limites de formage expérimentales	
<b><u>IV-4 CONCLUSION</u></b>	91
<b><u>CONCLUSION GENERALE</u></b>	92
<b><u>ANNEXES</u></b>	94
<b><u>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</u></b>	105

## Remerciements

C'est au sein du laboratoire de Physique et Mécanique de Matériaux de L'Université de Metz que j'ai réalisé ce travail sous la direction de Monsieur Gérard FERRON.

Ma gratitude et ma reconnaissance s'adressent tout d'abord à Gérard qui a accepté de diriger cette thèse. Grâce à son enthousiasme, sa rigueur et son goût passionné pour la recherche scientifique, qu'il a su me faire partager, j'ai trouvé auprès de lui l'aide la plus efficace qui m'a permis de mener à bien cette thèse.

Messieurs les professeurs F. SIDOROFF et F. MONTHEILLET ont accepté d'examiner et de porter leur jugement sur ce travail. Je tiens à les remercier très vivement.

Je remercie également les professeurs M. BERVEILLER, A. ZEGHLOUL et messieurs F. RONDE OUSTAU et J. MORREALE d'avoir acceptés de participer au jury et de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je tiens à remercier tous les membres du L.P.M.M ainsi que mes collègues de bureau qui m'ont supporté pendant ces trois années.

Sur un plan moins professionnel mais tout aussi important, j'exprime ma reconnaissance à mes amis et surtout à mes parents sans qui rien n'aurait été possible.



## INTRODUCTION GENERALE

Les codes de calculs ont fait profondément évoluer la conception des pièces mécaniques au cours des dernières années. Celle-ci fait maintenant très largement appel à la simulation des procédés de fabrication, afin de contrôler la faisabilité de la pièce et de s'assurer de l'absence de défauts. Sans avoir à réaliser l'outillage, le résultat d'une opération telle que l'emboutissage d'une tôle peut donc théoriquement être prévu. Si le processus de simulation est correctement maîtrisé aux différents stades d'obtention du produit fini, les risques d'échec sur pièces réelles devraient être minimisés, évitant ainsi, en particulier, de coûteuses modifications de l'outillage.

Les logiciels de calcul de structures industriels utilisent toutefois des lois de comportement où la plasticité est prise en compte à l'aide de modèles classiques simples. Or, les efforts et la répartition des déformations dans une opération d'emboutissage de tôles, ainsi que les instabilités pouvant survenir dans des zones critiques de la pièce, dépendent d'une façon significative des paramètres rhéologiques du matériau. L'objectif général de ce travail est donc de proposer une description phénoménologique du comportement plastique des tôles permettant une meilleure prise en compte des résultats de calculs micro-macro ou des résultats expérimentaux.

Le premier chapitre est consacré à une étude bibliographique des critères de plasticité usuels de la littérature. Nous nous limitons aux critères de plasticité orthotrope, en envisageant les améliorations successives qui ont été proposées depuis l'établissement par Hill d'un critère de forme

quadratique. Nous signalons également les insuffisances de ces critères, en particulier leur inaptitude à décrire correctement à la fois les aspects "niveaux de contraintes" et "cinématique de la déformation" dans le cadre de la théorie des matériaux standards.

Le second chapitre présente un cadre général de description de la plasticité orthotrope en contraintes planes, qui fait appel à une représentation en contraintes principales de la surface de plasticité. Nous établissons en particulier des relations de consistance qui permettent d'éclairer le passage d'un critère isotrope transverse à un critère anisotrope transverse. Nous proposons pour ce passage une forme analytique généralisant les critères antérieurs.

Le troisième chapitre est consacré à la mise au point et à l'analyse du modèle. Nous proposons une extension du critère isotrope de Drucker au cas de l'isotropie transverse puis de l'anisotropie transverse, dans le cadre de la modélisation établie au chapitre II. Nous analysons ensuite le rôle des paramètres introduits dans le modèle, en confrontant celui-ci avec des résultats de calculs d'homogénéisation et des résultats expérimentaux.

Enfin, nous étudions dans le chapitre IV les prévisions de limites de formage obtenues avec le présent modèle dans le domaine de l'expansion. Nous analysons le rôle des paramètres du matériau, en particulier ceux qui interviennent sur la forme de la surface de plasticité et qui, en plus de l'érouissage et de la sensibilité à la vitesse de déformation, contrôlent le processus de localisation. Des comparaisons avec des courbes limites de formage expérimentales sont également discutées.

## CHAPITRE I

### ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

#### I-1 INTRODUCTION

Un critère de limite élastique ou critère de plasticité définit, pour un élément de volume dans un état donné, l'atteinte du régime plastique sous la forme d'une relation entre les composantes  $\sigma_{ij}$  du tenseur des contraintes :

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (I-1)$$

La fonction  $f$  est appelée fonction de charge et la surface de plasticité définie par la relation (I-1) est également appelée surface de charge. Si l'état de contraintes est tel que  $f(\sigma_{ij}) < 0$ , le matériau obéit à un comportement élastique (domaine d'élasticité). Si l'état de contraintes vérifie la relation (I-1), le matériau est en chargement plastique. Il subit alors le phénomène d'écroutissage, de telle façon qu'à chaque instant une relation du type (I-1) soit vérifiée. Toutefois, la structure interne du matériau évoluant, il apparaît que l'on doit prendre en compte un certain nombre de variables internes dans l'expression de la fonction de charge. La surface de plasticité doit donc être écrite, pour tenir compte de l'écroutissage, sous la forme :

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_k) = 0 \quad (I-2)$$

où les  $\alpha_k$  désignent les variables internes, dont l'évolution dépend de l'histoire de chargement plastique. L'évolution de la surface de plasticité peut être complexe : dilatation, translation, rotation, déformation. Si la surface se dilate de façon homothétique, l'écroutissage est isotrope, et une variable interne scalaire permet de caractériser l'écroutissage. Si la surface se translate sans changement de forme ni de taille l'écroutissage est cinématique, et une variable interne tensorielle (représentant le " centre " de la surface) caractérise l'écroutissage.

La surface initiale elle-même peut être isotrope ou anisotrope. L'isotropie peut être envisagée pour un matériau idéalement recristallisé par exemple. L'isotropie de la surface sera conservée par déformation

plastique si l'écrouissage lui même est isotrope. Il apparaît toutefois en règle générale que l'isotropie est détruite par déformation plastique et en particulier par le procédé d'élaboration ayant conduit au matériau étudié, dont l'état qualifié " d'initial " correspond en fait à une histoire thermo-mécanique complexe. Ainsi le laminage conduit à des matériaux sous forme de tôles, dont " l'état initial " est orthotrope de par le processus d'élaboration qu'ils ont subi.

Nous nous concentrons dans ce chapitre sur l'étude des critères de plasticité orthotropes proposés dans la littérature. Il est clair que leur utilisation dans des calculs impliquant l'écrouissage du matériau nécessite que l'orthotropie ne soit pas détruite par la déformation plastique subie, ce qui sera vérifié le plus simplement en supposant l'isotropie de l'écrouissage. Cette hypothèse peut être raisonnable pour les tôles embouties, tant que les déformations plastiques d'emboutissage induisent des évolutions de texture relativement faibles par rapport à la texture initiale de laminage, et que les trajets de déformation restent relativement linéaires.

Nous présentons, successivement, les critères de plasticité dans le cas particulier de l'isotropie, puis dans le cas plus général de l'isotropie transverse (anisotropie normale) et enfin dans le cas de l'orthotropie.

Nous rappelons ensuite le principe du travail plastique maximal, ainsi que les propriétés de convexité de la surface de plasticité et de normalité des incréments de déformation plastique qui lui sont attachées.

Enfin, nous discutons l'aptitude des critères de plasticité orthotrope à décrire les résultats théoriques ou expérimentaux, en mettant en évidence certains insuffisances qu'il conviendrait de pallier.

## **I-2 CRITERES DE PLASTICITE ISOTROPES**

### **I-2-1 Généralités**

Ces critères expriment que l'atteinte du régime plastique est obtenue pour des états de contraintes vérifiant la relation (I-1), indépendamment de l'orientation du repère dans lequel sont appliquées les contraintes par rapport à un quelconque repère matériel. On peut donc aussi bien

exprimer l'équation de la surface de plasticité en fonction des trois contraintes principales  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (\text{I-3})$$

ou

$$f(I_1, I_2, I_3) = 0 \quad (\text{I-4})$$

où  $I_1 = \text{Tr}(\sigma) = \sigma_{kk}$ ,  $I_2 = \frac{1}{2} [(\text{Tr}(\sigma))^2 - \text{Tr}(\sigma^2)] = \frac{1}{2} [\sigma_{kk}^2 - \sigma_{ij}\sigma_{ij}]$  et

$I_3 = \det|\sigma|$  sont les trois invariants, solution de l'équation caractéristique :  $-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0$ . Les invariants  $I_1, I_2, I_3$  peuvent être remplacés, de façon équivalente, par :

$$I_1 = \text{Tr}(\sigma) = \sigma_{kk},$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma^2) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}\sigma_{ij}, \quad (\text{I-5})$$

$$I_3 = \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma^3) = \frac{1}{3} \sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki}$$

Pour les métaux ductiles, l'expérience montre que l'addition d'un état de contraintes hydrostatique ne modifie pas les conditions de l'écoulement plastique, pour les niveaux de contraintes hydrostatiques usuels. On peut donc ne tenir compte que de la partie déviatorique du tenseur des contraintes,  $s = \sigma - \frac{1}{3}I_1 I$  dans l'expression de la fonction de charge, et ré-exprimer le critère sous la forme :

$$f(J_2, J_3) = 0 \quad (\text{I-6})$$

avec  $J_2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(s^2) = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}$  et  $J_3 = \frac{1}{3} \text{Tr}(s^3) = \frac{1}{3} s_{ij}s_{jk}s_{ki}$ .

Il est commode de se référer à une représentation dans les axes  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  (ou espace de Haigh-Westergaard) pour obtenir une interprétation géométrique des critères de plasticité isotropes. Pour des matériaux insensibles à une pression hydrostatique, ces critères sont représentés par des cylindres ayant pour axe l'axe hydrostatique  $\Delta$  de cosinus directeurs

$(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ , et dont il suffit d'étudier la trace dans le plan déviatoire, d'équation  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ . La figure I-1 illustre la représentation d'un critère de plasticité isotrope dans l'espace de Haigh-Westergaard.

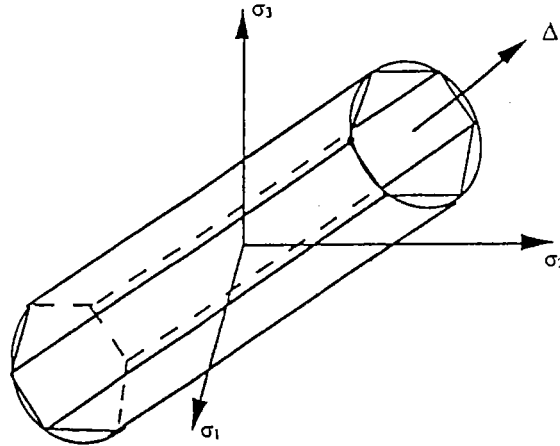


Figure I-1 Représentation d'un critère de plasticité isotrope dans l'espace de Haigh-Westergaard, pour un matériau insensible à une sollicitation hydrostatique.

### I-2-2 Critère de Tresca (1864)

Le premier critère encore utilisé actuellement pour les matériaux métalliques a été proposé par Tresca en 1864. Ce critère postule que la limite d'élasticité est atteinte lorsque la contrainte de cisaillement maximum atteint une valeur critique  $k$ . La surface de plasticité est donc déterminée par :

$$\text{Max} \left[ \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_2|; \frac{1}{2} |\sigma_2 - \sigma_3|; \frac{1}{2} |\sigma_3 - \sigma_1| \right] - k = 0 \quad (\text{I-7})$$

La constante  $k$  est une mesure de la limite élastique en cisaillement; elle peut aussi être déterminée par un essai de traction uniaxiale, pour lequel

la limite élastique  $\sigma_0$  est égale  $2k$ . Ce critère correspondant à un matériau isotrope insensible à la pression hydrostatique, il peut être exprimé en fonction des invariants  $J_2$  et  $J_3$ , sous la forme :

$$f(J_2, J_3) = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 36k^2J_2^2 + 96k^4J_2 - 64k^6 = 0 \quad (I-8)$$

Sa représentation dans l'espace de Haigh-Westergaard correspond à un prisme droit d'axe  $\Delta$  ayant pour base un hexagone régulier dans le plan déviatoire (Figure I-2).

### I-2-3 Critère de Von Mises (1913)

Le critère de Von Mises (1913) revient à considérer que la fonction de charge ne dépend que de l'invariant  $J_2$ . La surface de plasticité s'exprime sous la forme :

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \quad (I-9)$$

La constante  $k$  est une mesure de la limite élastique en cisaillement; elle est aussi liée à la limite élastique en traction/compression uniaxiale  $\sigma_0$  par la relation  $\sigma_0 = \sqrt{3}k$ . Sa représentation dans l'espace de Haigh-Westergaard correspond à un cylindre d'axe  $\Delta$  à base circulaire de rayon  $\sqrt{2}k$  dans le plan déviatoire (Figure I-2). En utilisant l'expression développée de  $J_2$ , on peut également représenter la surface de plasticité par les équations :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 6k^2 = 0$$

ou

(I-10)

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - 6k^2 = 0$$

dans les axes principaux de contraintes ou dans des axes quelconques, respectivement.

Ce critère peut être interprété en considérant soit que l'énergie élastique de cisaillement atteint une valeur critique, soit que la contrainte de cisaillement sur les plans octaédriques, d'équation  $x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$  dans les

axes principaux de contraintes, atteint une valeur critique.

#### I-2-4 Critère de Drucker (1949)

Un critère isotrope dont la trace dans le plan déviatoire se situe entre l'hexagone de Tresca et le cercle de Von Mises a été proposé par Drucker (1949). Il fait intervenir une combinaison des invariants  $J_2$  et  $J_3$ , qui s'exprime sous la forme :

$$f(J_2, J_3) = (3J_2)^3 [1 - c (J_3^2/J_2^3)] = [1 - (4c/27)] \sigma_0^6 = 0 \quad (\text{I-11})$$

où  $\sigma_0$  désigne la limite élastique en traction / compression uniaxiale ou équi-biaxiale. La condition de convexité de la surface est vérifiée pour  $c \leq 9/4$ . La figure I-2 représente les surfaces de plasticité dans le plan déviatoire, correspondant aux trois critères précédents.

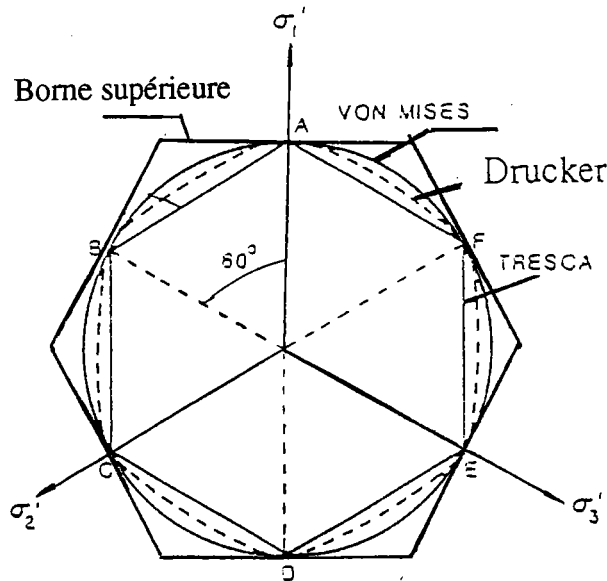


Figure I-2 Représentation dans le plan déviatoire, de la surface de plasticité correspondant aux critères de Von Mises, de Tresca et de Drucker.



I-2-5 Critère de Mazilu (1985)

Une forme particulière du critère proposé par Mazilu (1985), en ne tenant pas compte de l'anisotropie de l'érouissage introduite dans le modèle, s'exprime :

$$f(J_2, J_3) = 2J_2 - k^2 \left[ 1 - \alpha \left( 1 - \frac{27J_3^2}{4J_2^3} \right) \right] = 0 \quad (\text{I-12})$$

Cette fonction de charge permet également de reproduire des surfaces de plasticité intermédiaires entre celles de Tresca et de Von Mises.

I-2-6 Critère de Hosford (1972) et Logan et Hosford (1980)

Ce critère se présente formellement comme une extension non quadratique du critère de Von Mises, sous la forme :

$$f = |\sigma_1 - \sigma_2|^m + |\sigma_2 - \sigma_3|^m + |\sigma_3 - \sigma_1|^m - 2\sigma_0^m = 0 \quad (\text{I-13})$$

Barlat et coll (1991) ont montré que la fonction de charge ainsi définie peut effectivement être exprimée en fonction des invariants  $J_2$  et  $J_3$ , l'expression obtenue étant de la forme :

$$3J_2\psi(\theta) - 2\sigma_0^m = 0 \quad (\text{I-14})$$

où  $\theta = \arccos\left(\frac{J_3}{J_2^{3/2}}\right)$  repère la position angulaire du point représentatif du déviateur des contraintes dans le plan déviatoire.

I-3 CRITERES DE PLASTICITE A ISOTROPIE TRANSVERSEI-3-1 Généralités

L'isotropie transverse (ou l'anisotropie dite normale) représente un cas particulier de l'orthotropie, correspondant à l'existence d'une direction privilégiée  $z$ , toutes les directions perpendiculaires à  $z$  étant équivalentes du point de vue des propriétés mécaniques. Ce cas est présenté séparément

en raison des modélisations spécifiques auxquelles il a donné lieu. Différents critères ont en effet été développés, avec pour objectif de rendre compte du comportement plastique des tôles sollicitées en contraintes planes, en supposant la tôle isotrope dans son plan. Les critères décrits ci-dessous s'appliquent donc pour des états de contraintes planes  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$  dans le plan normal à z.

De façon équivalente, ces critères peuvent être exprimés en fonction des contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  indépendamment de l'orientation des directions principales, puisque le matériau est "isotrope dans le plan (x,y)".

### I-3-2 Critère quadratique de Hill (1948)

Dans le cas particulier décrit ci-dessus, le critère orthotrope de Hill (1948) se réduit à l'expression :

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + r(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - (1+r)\sigma_0^2 = 0$$

ou

(I-15)

$$(1 + 2r)(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 - 2(1+r)\sigma_0^2 = 0$$

où  $\sigma_0$  représente la limite élastique en traction uniaxiale, et r est un coefficient caractérisant l'anisotropie normale. Ce coefficient représente le rapport des vitesses de déformation  $\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_3}$ , perpendiculairement à la direction 1 de traction uniaxiale, la direction 2 appartenant au plan (x,y) et 3  $\equiv$  z désignant la direction normale.

Au cours des années 1970, plusieurs critères ont été proposés afin de rendre compte de façon plus satisfaisante d'un certain nombre de résultats expérimentaux, en particulier pour des matériaux, tels que l'aluminium, ayant un coefficient d'anisotropie r inférieur à l'unité. Ces différents critères correspondent à des expressions homogènes, non quadratiques des contraintes.

I-3-3 Critère de Hosford (1972)

Ce critère se présente comme une extension non quadratique de la première présentation donnée dans (I-15) pour le critère quadratique de Hill. Il s'exprime sous la forme :

$$|\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m + r|\sigma_1 - \sigma_2|^m - (1+r)\sigma_0^m = 0 \quad (\text{I-16})$$

I-3-4 Critère non quadratique de Hill (1979)

Le critère non quadratique de Hill (1979) correspond à un critère orthotrope applicable uniquement dans le cas où les axes principaux des contraintes coïncident avec les directions d'orthotropie. Il s'exprime par :

$$\begin{aligned} f|\sigma_2 - \sigma_3|^m + g|\sigma_3 - \sigma_1|^m + h|\sigma_1 - \sigma_2|^m + a|2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3|^m + \\ b|2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1|^m + c|2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2|^m - \sigma_0^m = 0 \end{aligned} \quad (\text{I-17})$$

En fait, ce critère a été principalement utilisé dans deux cas particuliers correspondant à un état de contraintes planes avec isotropie transverse, à savoir :

avec  $a=b=c=0$  et  $f=g$  : on retrouve le critère de Hosford (1972).

avec  $a=b=f=g=0$  on obtient :

$$(1 + 2r)|\sigma_1 - \sigma_2|^m + |\sigma_1 + \sigma_2|^m - 2(1+r)\sigma_0^m = 0 \quad (\text{I-18})$$

Cette forme du critère se présente comme une extension non quadratique de la seconde présentation donnée dans (I-15) pour le critère quadratique de Hill.

I-3-5 Critère de Bassani (1977)

Ce critère correspond à une extension à deux exposants  $m$  et  $n$  de la forme (I-18) du critère non quadratique de Hill. Son expression est donnée par :

$$|\sigma_1 + \sigma_2|^m + \frac{n}{m}(1+2r)\sigma_0^{n-m}|\sigma_1 - \sigma_2|^m = \sigma_0^n \left[ 1 + \frac{n}{m}(1+2r) \right] \quad (\text{I-19})$$

I-3-6 Formulation paramétrique de Budiansky (1984)

Budiansky (1984) a développé une représentation en coordonnées polaires de la surface de plasticité pour un matériau à isotropie transverse soumis à un état de contraintes planes. La surface de plasticité est décrite sous forme paramétrique par :

$$x_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2\sigma_b} = g(\theta)\cos(\theta)$$

et

(I-20)

$$x_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\sigma_s} = g(\theta)\sin(\theta)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes principales,  $g(\theta)$  est une fonction représentant le rayon polaire du point courant de la surface de plasticité normée par  $\sigma_b$  et  $\sigma_s$ , qui sont respectivement les contraintes d'écoulement en traction équibiaxiale et en cisaillement, et  $\theta$  l'angle polaire associé. Un schéma de cette représentation en coordonnées polaires est donnée sur la figure I-3.

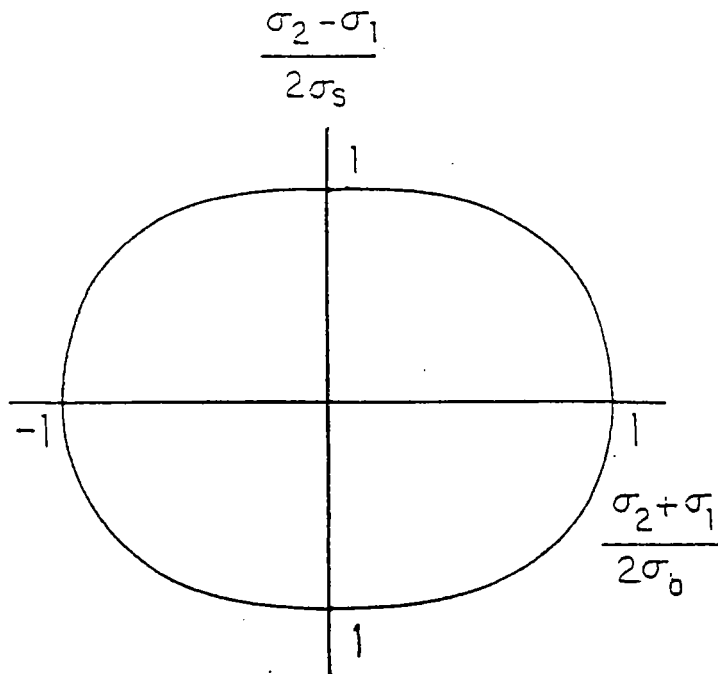


Figure I-3 Représentation en coordonnées polaires de la surface de plasticité pour un matériau à isotropie transverse sollicité en contraintes planes.

La condition de convexité de la surface de plasticité s'exprime par l'inégalité suivante :

$$g^2 + 2g'^2 - g g'' \geq 0 \quad (\text{I-21})$$

La contrainte de traction uniaxiale  $\sigma_u$  est obtenue avec  $\sigma_1=0$  dans les équations (I-20), ce qui donne :

$$\sigma_u = 2 \sigma_s g(\theta_u) \sin(\theta_u) = 2 \sigma_b g(\theta_u) \cos(\theta_u) \quad (\text{I-22})$$

où l'angle polaire  $\theta_u$  correspondant à la traction uniaxiale est lié au rapport des contraintes  $\sigma_b$  et  $\sigma_s$  par :

$$\text{tg}(\theta_u) = \frac{\sigma_b}{\sigma_s} = Y \quad (0 < \theta_u < \pi/2) \quad (\text{I-23})$$

La contrainte de traction uniaxiale  $\sigma_u$  étant prise comme contrainte équivalente  $\sigma$ , les contraintes principales s'expriment finalement par :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma} &= -\frac{Xg(\theta)\sin(\theta - \theta_u)}{\sin(\theta_u)} \\ \frac{\sigma_2}{\sigma} &= \frac{Xg(\theta)\sin(\theta + \theta_u)}{\sin(\theta_u)} \end{aligned} \quad (\text{I-24})$$

où  $X = \frac{\sigma_b}{\sigma}$

Enfin, une condition relie le coefficient d'anisotropie  $r$ , le paramètre  $Y$  et les valeurs de  $g$  et de  $g'$  pour  $\theta = \theta_u$ ; cette condition s'écrit :

$$\frac{g'(\theta_u)}{g(\theta_u)} = \frac{Y^2 - 1 - 2r}{2Y(1+r)} \quad (\text{I-25})$$

Par conséquent, le tracé d'une surface de plasticité à l'aide du critère de Budiansky nécessite la connaissance des paramètres  $X$ ,  $Y$ ,  $r$ ,  $\theta_u$  et de la fonction  $g(\theta)$ . Budiansky a proposé d'utiliser pour  $g(\theta)$  un développement en série de Fourier sous la forme suivante:

$$g(\theta) = \sum a_n \cos(2n\theta) \quad (I-26)$$

qui, en prenant suffisamment de termes, permet a priori d'obtenir une surface de plasticité rendant compte avec précision des points expérimentaux ou des résultats de calculs d'homogénéisation.

Pour  $g(\theta)=1$ , les relations ci-dessus se réduisent à celles qui s'appliquent dans le cas du critère quadratique de Hill (avec  $X = \sqrt{\frac{1+r}{2}}$  et  $Y = \sqrt{1+2r}$ ) ou celui de Von Mises (avec  $X=1$  et  $Y=\sqrt{3}$ ). Les fonctions non quadratiques proposées par Hill (1979) et par Bassani (1977) représentent aussi des cas particuliers de la formulation de Budiansky.

#### I-4 CRITERES DE PLASTICITE ORTHOTROPE

##### I-4-1 Généralités

L'orthotropie correspond à un cas particulier d'anisotropie, pour lequel le matériau présente trois plans de symétrie orthogonaux. Si l'on suppose a priori une extension quadratique du critère de Von Mises, qui fait intervenir une expression isotrope de la forme  $s:s$ , sous la forme  $s:B:s$  ( $B$  étant un tenseur d'ordre 4) les 81 composantes de  $B$  se ramènent de par les symétries  $B_{ijkl}=B_{ijlk}=B_{jikl}=B_{klij}$ , à 21 coefficients indépendants dans le cas général de l'anisotropie, et à 15 coefficients indépendants si l'on tient compte de l'indépendance vis-à-vis d'une sollicitation hydrostatique. Le cas particulier de l'orthotropie conduit finalement à 6 coefficients indépendants. On obtient alors le critère quadratique de Hill (1948), présenté ci-après, dont la principale limitation est liée à sa forme quadratique. Une formulation beaucoup plus générale a été proposée par Boehler (1982).

##### I-4-2 Critère quadratique de Hill (1948)

Ce critère constitue une extension quadratique du critère de Von Mises qui s'exprime dans les axes principaux d'orthotropie  $(x,y,z)$ , en fonction de 6 paramètres  $F,G,H,L,M,N$  et d'une contrainte équivalente  $k$ , sous la forme :

$$2f = F (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + G (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + H (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 2L \sigma_{yz}^2 + 2M \sigma_{zx}^2 + 2N \sigma_{xy}^2 - k^2 = 0 \quad (I-27)$$

Dans le cas particulier d'un état de contraintes planes ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ ) dans le plan principal d'orthotropie (x,y), le critère devient :

$$(G+H) \sigma_x^2 - 2H \sigma_x \sigma_y + (F+H) \sigma_y^2 + 2N \sigma_{xy}^2 - k^2 = 0 \quad (I-28)$$

#### I-4-3 Critère de Gotoh (1977)

A partir de la théorie générale de Hill (1950), Gotoh (1977) a proposé une fonction de charge du quatrième ordre pour décrire la plasticité anisotrope d'une tôle métallique. Dans le cas de l'orthotropie, les conditions de symétrie ont pour conséquence que la fonction de charge s'écrit pour un état de contraintes planes ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ ) dans le plan principal d'orthotropie (x,y) sous la forme suivante:

$$f = A_0 (\sigma_x + \sigma_y)^2 + \left[ \begin{array}{l} A_1 \sigma_x^4 + A_2 \sigma_x^3 \sigma_y + A_3 \sigma_x^2 \sigma_y^2 + A_4 \sigma_x \sigma_y^3 + A_5 \sigma_y^4 \\ + (A_6 \sigma_x^2 + A_7 \sigma_x \sigma_y + A_8 \sigma_y^2) \tau_{xy}^2 + A_9 \tau_{xy}^4 \end{array} \right] \quad (I-29)$$

où x et y désignent les axes correspondant aux directions d'orthotropie. Le premier terme dans l'expression de la fonction de charge f dépend de la pression hydrostatique et il est nul ( $A_0=0$ ) quand le matériau est incompressible.

#### I-4-4 Critère de Boehler (1982)

Dans de nombreuses publications Boehler propose, à partir d'une formulation en invariants, un critère général rendant compte d'une anisotropie initiale aussi bien qu'induite. Dans le cas d'un matériau initialement orthotrope soumis à une prédéformation en chargement proportionnel (par exemple une tôle mince laminée) une forme réduite de ce critère a été proposée (1982) :

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \left[ -\frac{1}{3} + a_1 \text{tr} \tilde{p} + a_2 \sqrt{\text{tr} \tilde{p}^2} + a_3 \text{tr}^2 \tilde{p} + a_4 \text{tr} \tilde{p}^2 + a_5 \text{tr} \tilde{p} \sqrt{\text{tr} \tilde{p}^2} \right] \text{tr}^2 \tilde{\zeta} \\
 & + \left[ 1 + b_1 \text{tr} \tilde{p} + b_2 \sqrt{\text{tr} \tilde{p}^2} + b_3 \text{tr}^2 \tilde{p} + b_4 \text{tr} \tilde{p}^2 + b_5 \text{tr} \tilde{p} \sqrt{\text{tr} \tilde{p}^2} \right] \text{tr}^2 \tilde{\zeta} \\
 & + \left[ c_0 + c_1 \text{tr} \tilde{p} + c_2 \text{tr} \tilde{M} \tilde{p} + c_3 \text{tr}^2 \tilde{p} + c_4 \text{tr}^2 \tilde{M} \tilde{p} + c_5 \text{tr} \tilde{p} \text{tr} \tilde{M} \tilde{p} + c_6 \text{tr} \tilde{p}^2 \right] \text{tr}^2 \tilde{M} \tilde{\zeta} \\
 & + \left[ d_0 + d_1 \text{tr} \tilde{p} + d_2 \text{tr} \tilde{M} \tilde{p} + d_3 \text{tr}^2 \tilde{p} + d_4 \text{tr}^2 \tilde{M} \tilde{p} + d_5 \text{tr} \tilde{p} \text{tr} \tilde{M} \tilde{p} + d_6 \text{tr} \tilde{p}^2 \right] \text{tr} \tilde{\zeta} \text{tr} \tilde{M} \tilde{\zeta} \\
 & + \left[ e_0 + e_1 \text{tr} \tilde{p} + e_2 \text{tr} \tilde{M} \tilde{p} + e_3 \sqrt{\text{tr} \tilde{p}^2} \right] \text{tr} \tilde{\zeta} \text{tr} \tilde{\zeta} \tilde{p} \\
 & + \left[ f_0 + f_1 \text{tr} \tilde{p} + f_2 \text{tr} \tilde{M} \tilde{p} + f_3 \sqrt{\text{tr} \tilde{p}^2} \right] \text{tr} \tilde{M} \tilde{p} \text{tr} \tilde{\zeta} \tilde{p}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{I-30}) \\
 & = 2k^2 \left( 1 + h \sqrt{\text{tr} \tilde{p}^2} + w \text{tr} \tilde{p}^2 \right)
 \end{aligned}$$

où  $\tilde{\zeta}$  est le tenseur des contraintes,  $\tilde{p}$  le tenseur de prédéformation et  $\tilde{M}$  le "tenseur de structure" initial du matériau (par exemple  $\tilde{M} = v_1 \otimes v_1$ , dans le cas d'un laminage parallèle à  $v_1$ ).

Dans ce critère, les termes en  $(\text{tr}^2 \tilde{\zeta})$  et  $(\text{tr} \tilde{\zeta}^2)$  décrivent la partie isotrope du critère initial. L'écoulement isotrope induit est pris en compte par  $\tilde{p}$ . Les termes en  $(\text{tr}^2 \tilde{M} \tilde{\zeta})$  et  $(\text{tr} \tilde{\zeta} \text{tr} \tilde{M})$  décrivent la partie orthotrope du critère initial et l'évolution de son degré en fonction de  $\tilde{p}$ . Le terme en  $(\text{tr} \tilde{\zeta} \text{tr} \tilde{\zeta} \tilde{p})$  décrit l'anisotropie induite par  $\tilde{p}$  et le terme en  $(\text{tr} \tilde{M} \tilde{\zeta} \text{tr} \tilde{\zeta} \tilde{p})$ , le couplage entre l'orthotropie initiale et l'anisotropie induite. Les coefficients  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, h$  et  $w$  sont des constantes matérielles.

#### I-4-5 Critères de Barlat et Lian (1989) et Barlat et Coll (1991)

La construction de ces critères s'appuie sur l'observation que le critère de Hosford (équation (I-13)) s'exprime, pour un état de contraintes planes, sous la forme :

$$f = |\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m + |\sigma_1 - \sigma_2|^m - 2\sigma_0^m = 0 \quad (\text{I-31})$$

ou, dans des axes quelconques (x,y)

$$f = |K_1 - K_2|^m + |K_1 + K_2|^m + |2K_2|^m - 2\sigma_0^m = 0 \quad (\text{I-32})$$



$$\text{avec } K_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

$$\text{et } K_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right|$$

L'extension proposée pour un matériau orthotrope sollicité en contraintes planes s'exprime, dans les axes d'orthotropie  $x$  et  $y$  (Barlat et Lian, 1989):

$$f = a|K_1 - K_2|^m + a|K_1 + K_2|^m + (2 - a)|2K_2|^m - 2\sigma_0^m = 0 \quad (\text{I-33})$$

$$\text{avec } K_1 = \frac{\sigma_x + h\sigma_y}{2}$$

$$\text{et } K_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - h\sigma_y}{2}\right)^2 + p^2\sigma_{xy}^2}$$

où  $h$  et  $p$  sont des paramètres utilisés pour transformer linéairement l'état de contraintes, et décrire ainsi l'anisotropie de la surface de plasticité. Une généralisation au cas d'un état de contraintes quelconque appliqué à un matériau orthotrope a ensuite été proposée par Barlat et coll (1991).

#### I-4-6 Critère non quadratique de Hill (1990)

Dans le cas d'un état de contraintes planes  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$  dans le plan d'orthotropie  $(x, y)$ , Hill (1990) a tout d'abord envisagé de ré-exprimer son critère quadratique (équation (I-28)) dans le repère principal des contraintes. L'équation (I-28) se réécrit, après changement de repère :

$$\begin{aligned} & (\sigma_1 + \sigma_2)^2 + (\sigma/\tau)^2 (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \\ & - 2a(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \cos 2\alpha + b(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos^2 2\alpha - (2\sigma)^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{I-34})$$

où  $\tau$  est la limite élastique en cisaillement parallèlement aux directions  $x$  et  $y$ ,  $\sigma$  est la limite élastique en traction équibiaxiale,  $\alpha = (x, 1) = (y, 2)$  est l'angle entre les directions d'orthotropie et les directions principales de

contraintes, et a et b sont des constantes qui s'expriment en fonction des paramètres F,G,H et N apparaissant dans l'expression (I-28). On reconnaît, en faisant a=b=0 dans l'équation (I-34), le critère quadratique applicable à un matériau à isotropie transverse. En s'appuyant sur l'expression non quadratique (I-18), Hill propose la généralisation suivante, applicable au cas orthotrope :

$$\begin{aligned} & |\sigma_1 + \sigma_2|^m + (\sigma / \tau)^m |\sigma_1 - \sigma_2|^m & (I-35) \\ & + |\sigma_1^2 + \sigma_2^2|^{(m/2)-1} \left\{ -2a(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + b(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \cos(2\alpha) \right\} \cos(2\alpha) \\ & - (2\sigma)^m = 0 \end{aligned}$$

Nous reviendrons plus longuement dans le chapitre II sur les raisons qui justifient la généralisation faisant passer de l'expression (I-18) pour un critère à isotropie transverse à l'expression (I-35) pour un critère orthotrope.

#### I-4-7 Critère de Karafillis et Boyce (1993)

Le critère de Karafillis et Boyce (1993) s'appuie sur les deux extensions du critère de Von Mises, exprimées par :

$$\phi_1(S(\sigma)) = (S_1 - S_2)^{2k} + (S_2 - S_3)^{2k} + (S_3 - S_1)^{2k} = 2Y^{2k} \quad (I-36)$$

et

$$\phi_2(S(\sigma)) = S_1^{2k} + S_2^{2k} + S_3^{2k} = \frac{2^{2k} + 2}{3^{2k}} Y^{2k} \quad (I-37)$$

où  $S_i = S_i(\sigma)$  sont les valeurs principales du déviateur des contraintes et k est un entier supérieur ou égal à 1. En remarquant que, lorsque k tend vers l'infini, ces deux expressions conduisent respectivement aux surfaces correspondant à la borne inférieure (critère de Tresca) et à la borne supérieure (cf. figure I-2), les auteurs proposent tout d'abord d'utiliser un "mixage" de ces deux fonctions, de la forme :

$$\phi(S(\sigma)) = (1 - c)\phi_1(S(\sigma)) + c \frac{3^{2k}}{2^{2k-1} + 1} \phi_2(S(\sigma)) = 2Y^{2k} \quad (I-38)$$

où  $c \in [0,1]$ . L'anisotropie est introduite en utilisant un tenseur d'ordre 4 pour transformer la description de l'état de contraintes, sous la forme :

$$\tilde{S} = L \sigma \quad (\text{I-39})$$

Le tenseur  $\tilde{S}$  est alors utilisé dans l'expression (I-38) en remplacement de  $S$ .

### I-5 DEFORMATION ET ECROUISSAGE DES MATERIAUX STANDARDS GENERALISES

On montre, dans le cas de matériaux polycristallins dont chaque cristal obéit à la loi de glissement de Schmid, que l'état de contraintes qui provoque un écoulement plastique donné est celui qui développe le plus grand travail plastique, comparé à celui de tout état virtuel de contrainte ne violant pas le critère de plasticité (cf., par exemple, François et coll, 1991). Cette propriété rejoint le principe du travail plastique maximal de Hill décrivant le comportement des matériaux qualifiés de standard. Le principe du travail maximal conduit à la double propriété de convexité de la surface de plasticité et de normalité attachée à l'incrément  $d\varepsilon^P$  (ou à la vitesse  $\dot{\varepsilon}^P$ ) de déformation plastique, qui s'expriment :

$$d\varepsilon^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \text{ou} \quad \dot{\varepsilon}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (\text{I-40})$$

ou, en fonction des composantes des tenseurs,

$$d\varepsilon_{ij}^P = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{ou} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{I-41})$$

où  $d\lambda$  (ou  $\dot{\lambda}$ ), parfois appelé multiplicateur plastique, est un scalaire positif,  $d\varepsilon^P$  ayant le même sens que  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ , c'est à dire que la normale extérieure à la surface de plasticité. Ainsi, la fonction de charge  $f$  joue le rôle d'un potentiel plastique qui détermine, en direction et en sens, l'écoulement plastique.

Une extension du principe du travail maximal, correspondant à la

normalité généralisée ou aux matériaux qualifiés de standard généralisés, consiste, en s'appuyant sur la thermodynamique des processus irréversibles, à adjoindre à la loi de normalité (I-40), la loi suivante, portant sur les variables internes  $\alpha_k$  et les forces thermodynamiques  $X_k$  associées:

$$d\alpha_k = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial X_k} \quad (\text{I-42})$$

Ainsi, dans l'hypothèse d'un écrouissage isotrope, en notant  $p$  la variable interne scalaire d'écrouissage et  $R$  la force thermodynamique associée, supposons que la fonction de charge soit exprimée sous la forme :

$$f(\sigma_{ij}) = \Phi(\sigma_{ij}) - R - \sigma_0 = \bar{\sigma} - R - \sigma_0 \quad (\text{I-43})$$

où  $\sigma_0$  et  $\bar{\sigma} = \Phi(\sigma_{ij})$  sont les limites élastiques initiale et actuelle (souvent associées à un état de traction uniaxiale);  $\Phi(\sigma_{ij})$  est une fonction homogène de degré un des contraintes. Il s'ensuit, d'après l'identité d'Euler, que :

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \equiv \Phi(\sigma_{ij}) \quad (\text{I-44})$$

ou

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \equiv \bar{\sigma}$$

D'autre part, les équations (I-41) et (I-42) se ré-expriment :

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{I-45})$$

et

$$dp = -d\lambda \frac{\partial f}{\partial R} = d\lambda \quad (\text{I-46})$$

Il s'ensuit, en combinant les équations (I-44), (I-45) et (I-46), que :

$$\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \bar{\sigma} dp \quad (\text{I-47})$$

où la variable interne  $p$ , homogène à une déformation, est généralement notée  $\bar{\varepsilon}^p$ , déformation plastique équivalente conjuguée de la contrainte

équivalente  $\bar{\sigma}$ . La relation (I-47), connue sous le nom d'équivalence du travail plastique, permet de déterminer l'incrément de déformation plastique  $dp = d\bar{\epsilon}^p$  associé à un critère de plasticité particulier. Ainsi, en partant du critère de Von Mises exprimé sous la forme :

$$\Phi(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (\text{I-48})$$

on obtient :

$$d\bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} \quad (\text{I-49})$$

## I-6 COMPARAISON DES CRITERES DE PLASTICITE USUELS AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX OU DES RESULTATS DE CALCULS D'HOMOGENEISATION

Afin d'estimer la capacité des critères de plasticité usuels à décrire le comportement des matériaux orthotropes - principalement des tôles métalliques - nous examinons un certain nombre de résultats de la littérature, correspondant successivement aux cas d'un comportement isotrope, puis d'un comportement à isotropie transverse, avant de passer au cas général de l'orthotropie .

### I-6-1 Cas de l'isotropie

La figure I-4 montre les résultats obtenus par Barlat (1987) à partir d'un calcul d'homogénéisation s'appuyant sur le modèle de Taylor (1938) et Bishop et Hill (1951), pour des matériaux isotropes de structure cubique (c.c.) ou cubique à faces centrées (c.f.c.). Dans les deux cas, les surfaces de plasticité initiales obtenues se situent entre celles de Von Mises et de Tresca, l'aplatissement de la surface observé au voisinage de la déformation plane et du cisaillement (par rapport à la surface de Von Mises) étant plus accentué dans le cas du matériau c.f.c., pour lequel le nombre de systèmes de glissement est moins grand.

Une autre présentation pour un matériau de structure c.f.c. est donnée sur la figure I-5, empruntée à Barlat et Lian (1989). La représentation adoptée correspond à différentes sections de la surface de plasticité dans

l'espace  $(\frac{\sigma_{xx}}{\bar{\sigma}}, \frac{\sigma_{yy}}{\bar{\sigma}}, \frac{\sigma_{xy}}{\bar{\sigma}})$  par des plans correspondant à différentes valeurs de la contrainte de cisaillement normalisée,  $S = \frac{\sigma_{xy}}{\bar{\sigma}}$  ( $\bar{\sigma}$  désignant la contrainte de traction uniaxiale). En raison de l'isotropie, x et y sont des axes orthogonaux arbitraires dans le plan des contraintes planes appliquées. La courbe pour  $S=0$  correspond à la surface tracée dans les axes de contraintes principales  $(\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}}; \frac{\sigma_2}{\bar{\sigma}})$  (figure I-4-a).

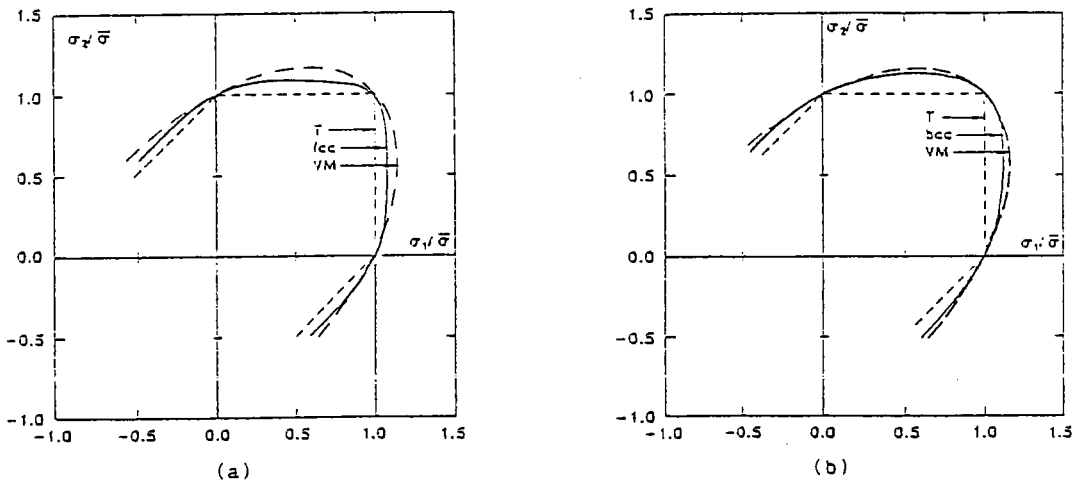


Figure I-4 Représentation des surfaces de plasticité calculées avec le modèle de Taylor, pour un matériau c.f.c (a) et c.c. (b) (d'après Barlat 1987)

La représentation de la figure I-5 montre en outre un couplage entre contraintes normales et contrainte de cisaillement, qui se manifeste par un changement de forme des sections lorsque S varie.

Finalement, Barlat et Lian (1989) obtiennent un excellent ajustement des surfaces calculées en utilisant le critère de Hosford (1972) avec  $m=6$  pour un matériau c.c., et  $m=8$  pour un matériau c.f.c..

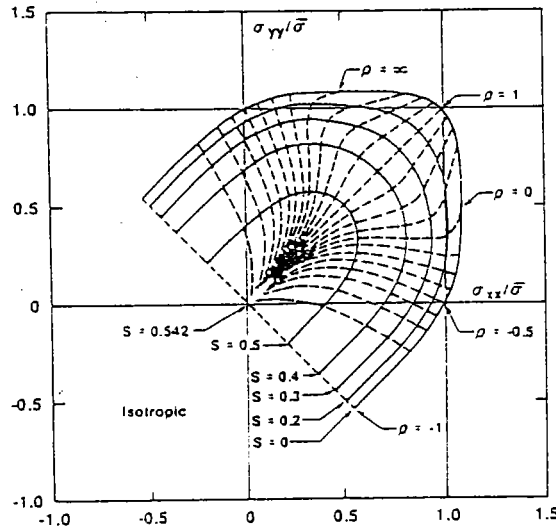


Figure I-5 Représentation de la surface de plasticité pour différentes sections dans l'espace  $\sigma_{xx}/\bar{\sigma}, \sigma_{yy}/\bar{\sigma}, \sigma_{xy}/\bar{\sigma}$  pour un matériau c.f.c. (d'après Barlat et Lian, 1989).

Des résultats expérimentaux obtenus par Chan (1985) sur des tubes en acier sollicités en traction plus pression interne et présentant un comportement quasi-isotrope fournissent des résultats comparables (figure I-6). Chan (1985) propose d'utiliser le critère de Drucker (1949) pour rendre compte de la surface obtenue.

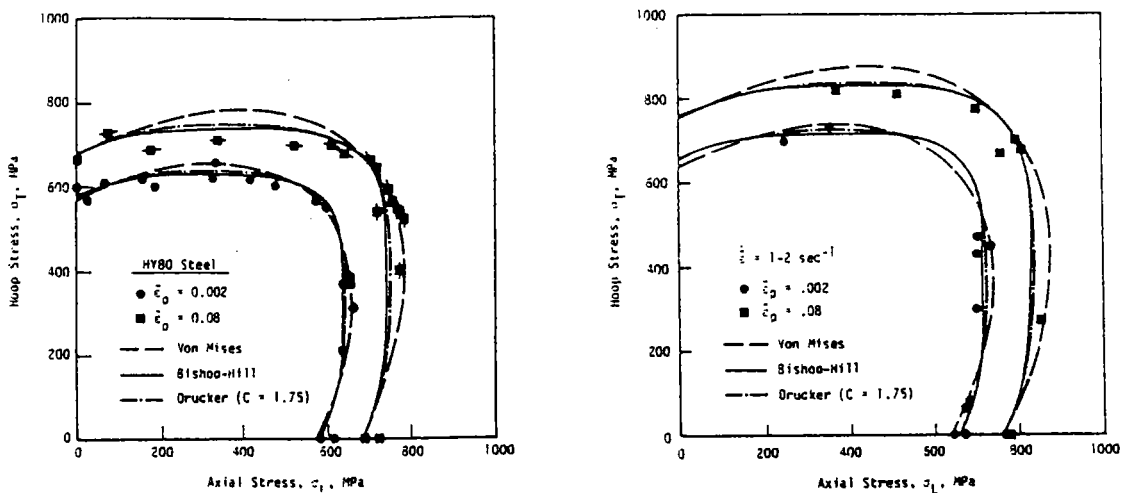


Figure I-6 Comparaison des surfaces de plasticité obtenues à l'aide des critères de Von Mises, Drucker et de la théorie de Bishop-Hill, avec des points expérimentaux, pour deux niveaux de déformation plastique. (d'après Chan, 1985).

Ces différents résultats montrent donc l'insuffisance du critère de Von Mises, pour rendre compte de façon précise de la forme des surfaces de plasticité des matériaux isotropes. La prise en compte du troisième invariant apparaît nécessaire pour être en mesure d'obtenir des surfaces de plasticité intermédiaires entre celles de Von Mises et de Tresca, conformément aux résultats présentés ci-dessus. On notera à ce propos que les critères de Hosford (1972) et de Drucker (1949) conduisent à des surfaces de plasticité qui sont très proches.

### I-6-2 Cas de l'isotropie transverse

Les résultats expérimentaux sont souvent représentés en utilisant en première approche des valeurs moyennes des contraintes d'écoulement et du coefficient d'anisotropie  $r$ , obtenues pour différentes orientations dans le plan de la tôle. Un exemple classique de l'insuffisance du critère quadratique de Hill (1948) pour décrire le comportement plastique observé sous différents trajets de chargement est fourni par l'aluminium, qui, bien qu'ayant une valeur moyenne du coefficient d'anisotropie  $\bar{r}$  inférieure à l'unité, présente un rapport contrainte équilibriaxiale/contrainte uniaxiale ( $\sigma_b/\sigma_u$ ) proche de 1. Afin de rendre compte de ce comportement, Parmar et Mellor (1978) proposent d'utiliser la forme (I-18) du critère non quadratique de Hill, avec  $m=1,8$ . Toutefois, cet ajustement sur les résultats expérimentaux ne prend pas en compte d'autres trajets de chargement, particulièrement la déformation plane et le cisaillement, pour lesquels les niveaux de contraintes d'écoulement sont particulièrement bas.

Une autre analyse a été effectuée par Mliha-Touati (1985) sur la base de résultats obtenus par Hecker et Stout (1983) sur un aluminium commercial présentant une valeur moyenne du coefficient d'anisotropie  $\bar{r}=0,59$ . La figure I-7 montre les points expérimentaux de Hecker et Stout (1983), ainsi que les prévisions du critère quadratique de Hill (1948) et de la formulation de Budiansky (1984), dans laquelle  $g(\theta)$  est pris égal à :

$$g(\theta) = 1 + a[\cos(2\theta) - \cos(6\theta)] \quad (\text{I-50})$$



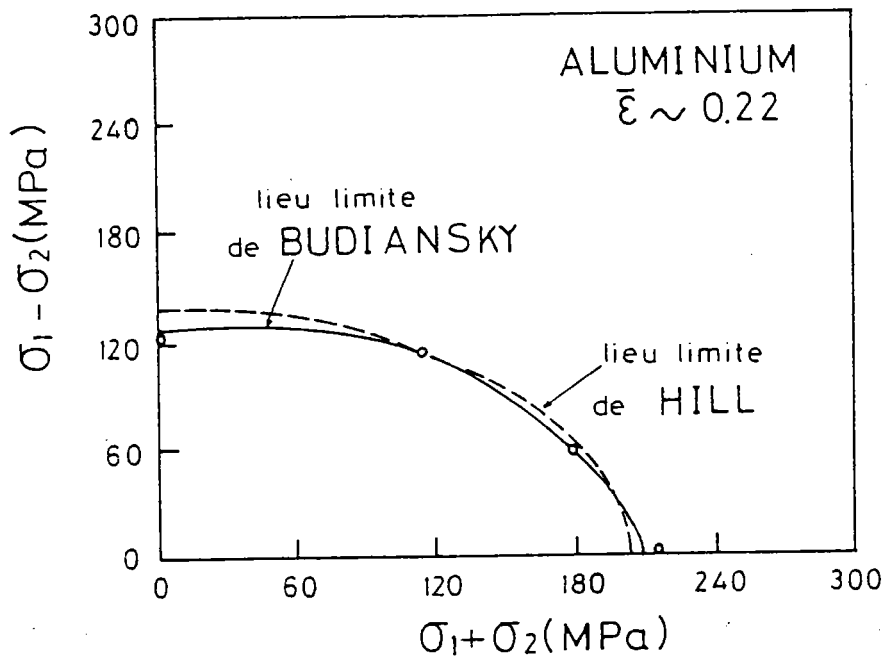


Figure I-7 Comparaison des surfaces de plasticité obtenues à l'aide des critères de Hill et de Budiansky avec des points expérimentaux empruntés à Hecker et Stout (1983) (d'après Mliha-Touati, 1985).

Les points expérimentaux conduisent à un "aplatissement" de la surface de plasticité près de la déformation plane et du cisaillement. Cet aplatissement est pris en compte par la fonction  $g(\theta)$  donnée par (I-50). On observe également qu'alors que le critère quadratique de Hill (avec  $r < 1$ ) sous-estime le rapport  $(\sigma_b/\sigma_u)$ , la fonction  $g(\theta)$  donnée par (I-50) permet une meilleure estimation de ce rapport.

Des résultats expérimentaux obtenus par Mesrar (1991) sur différents aciers conduisent à des conclusions comparables (figure I-8). On observe un faible niveau de contraintes en déformation plane, et, cette fois-ci, une surestimation du rapport  $(\sigma_b/\sigma_u)$  avec le critère quadratique de Hill, lorsque le coefficient d'anisotropie moyen  $\bar{r}$  est supérieur à l'unité.

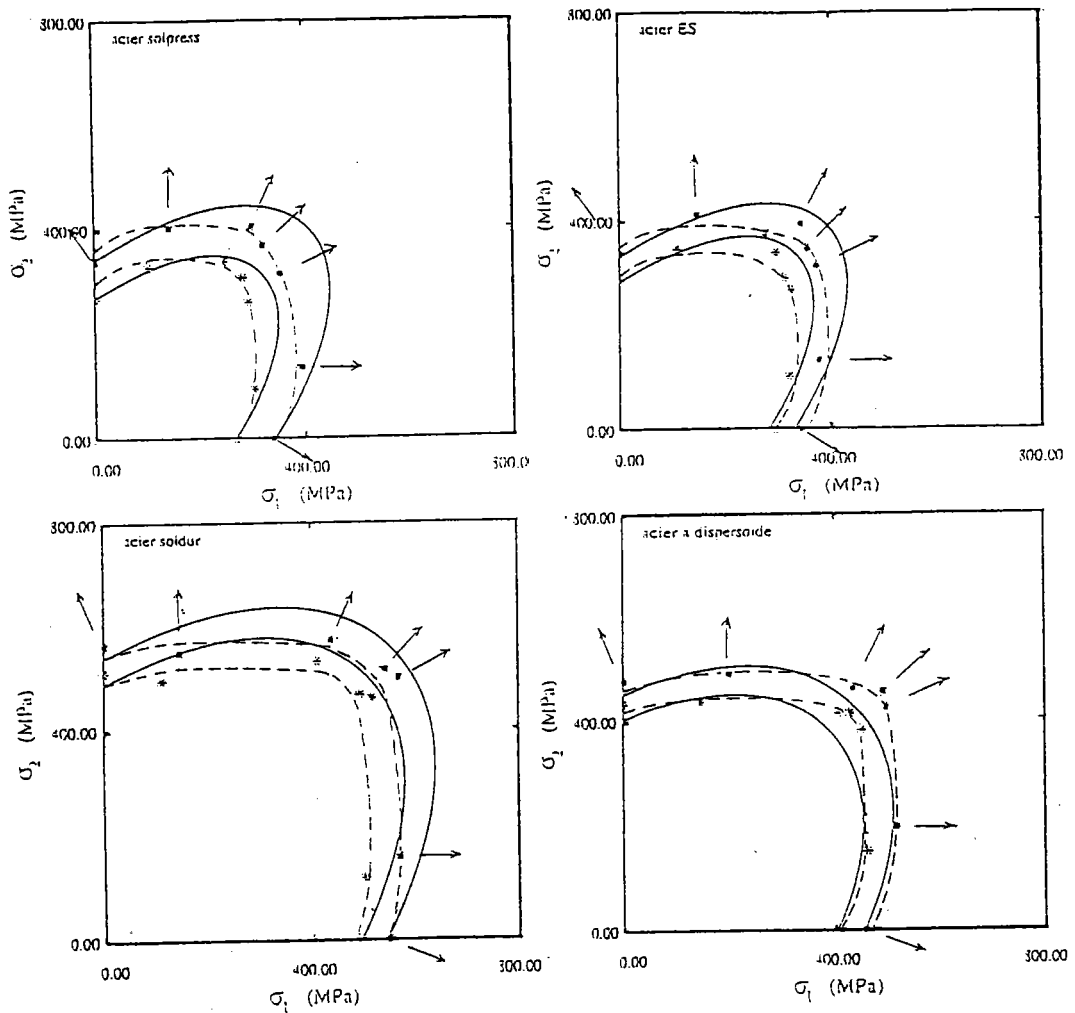


Figure I-8 Comparaison des surfaces de plasticité de quatre aciers obtenues à l'aide du critère de Hill quadratique (—) avec des points expérimentaux à deux niveaux de déformation équivalente, (d'après Mesrar, 1991).

### I-6-3 Cas de l'anisotropie transverse

Le principal élément à prendre en compte lorsque l'on considère l'anisotropie transverse concerne l'influence de l'orientation de la sollicitation sur le niveau des contraintes d'écoulement. Les aspects cinématiques de la déformation et les niveaux de contraintes sont liés à la description de la surface de plasticité par le biais de la loi de normalité. Ainsi, on obtient avec le critère quadratique de Hill (1948) l'expression suivante pour la contrainte de traction uniaxiale  $\sigma_\alpha$  dans une direction

faisant un angle  $\alpha$  avec la direction x d'orthotropie (en pratique, la direction de laminage) :

$$\sigma_\alpha = \frac{\{r_{90}(1+r_0)\}^{\frac{1}{2}} \sigma_0}{\left\{r_0 \sin^2 \alpha + r_{90} \cos^2 \alpha + r_0 r_{90} \cos^2 2\alpha + r_{45}(r_0 + r_{90}) \sin^2 \frac{2\alpha}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (I-51)$$

où  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$  sont les coefficients d'anisotropie mesurés lors d'essais effectués respectivement à  $\alpha=0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  de la direction de laminage.

La figure (I-9) montre, dans le cas d'aciers austénitiques et austéno-ferritiques étudiés par Makinde (1986), les valeurs expérimentales des contraintes d'écoulement pour différentes orientations, et les prévisions obtenues avec le critère quadratique de Hill (1948) en utilisant les valeurs expérimentales de  $r_0$ ,  $r_{45}$  et  $r_{90}$ . On observe une très forte surestimation des variations de  $\sigma_\alpha$  avec l'orientation, lorsque les paramètres du critère de Hill sont ainsi identifiés à partir des valeurs du coefficient d'anisotropie.

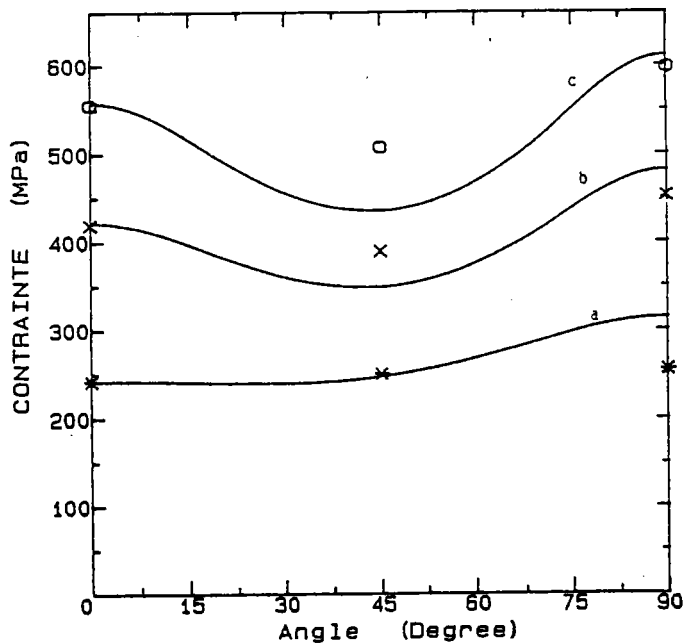


Figure I-9 Variation de la contrainte de traction uniaxiale en fonction de l'angle  $\alpha$  entre la direction de traction et la direction de laminage pour des aciers austénitiques et austéno-ferritiques, (d'après Makinde, 1986).

Il est clair qu'inversement une identification des paramètres du critère à partir des valeurs des contraintes d'écoulement en traction uniaxiale selon différentes orientations conduirait à une forte sous-estimation des variations de  $r_\alpha$  avec l'orientation. D'autres exemples conduisant aux mêmes conclusions seront discutés au chapitre III.

### I-7 CONCLUSION

Ce chapitre récapitule les principaux critères de plasticité utilisés dans le cas de la mise en forme à froid des métaux. Les propositions faites au cours des vingt dernières années ont eu pour objectif de mieux décrire le comportement observé expérimentalement ou calculé par des méthodes d'homogénéisation. Toutefois, on peut attendre des progrès dans ces descriptions phénoménologiques, qui manquent encore de souplesse pour rendre compte, à la fois, de la forme des surfaces de plasticité et de l'influence de l'orientation de la sollicitation sur les contraintes d'écoulement dans le cas d'un comportement anisotrope transverse.

## CHAPITRE II

### MODELISATION DE LA PLASTICITE ORTHOTROPE EN CONTRAINTES PLANES

#### II-1 INTRODUCTION

La modélisation des surfaces de plasticité proposée par Budiansky (1984) offre une grande souplesse pour décrire le comportement des matériaux à isotropie transverse (ou anisotropie normale) sollicités en contraintes planes. Il s'agit toutefois simplement d'un cadre général, à l'intérieur duquel il est nécessaire de spécifier la forme analytique de la fonction  $g(\theta)$  décrivant l'évolution angulaire du rayon polaire du point courant sur la surface de plasticité normalisée (cf. § I-3-6).

Nous proposons ici d'étendre le formalisme de Budiansky (1984) au cas de l'anisotropie dans le plan de la tôle, en faisant intervenir l'angle entre les directions principales de contraintes et d'orthotropie, qui est sans signification physique dans le cas de l'isotropie transverse.

Nous reprenons tout d'abord le formalisme de Budiansky avec quelques modifications relatives à la normalisation de la surface et au choix de la contrainte équivalente. Nous étendons ensuite cette approche au cas de l'anisotropie transverse, en établissant en outre les expressions des vitesses de déformation découlant de la loi d'écoulement associée, dans le cadre de la représentation choisie pour la surface de plasticité. Enfin, nous établissons des relations de consistance vis-à-vis de l'orthotropie, et proposons une extension analytique permettant de passer d'un critère à isotropie transverse à un critère orthotrope, tout en respectant les conditions de consistance préalablement définies.

#### II-2 SURFACE DE PLASTICITE ET LOI D'ECOULEMENT ASSOCIEE - CAS DE L'ISOTROPIE TRANSVERSE

##### II-2-1 Différentes représentations de la surface de plasticité et de la loi d'écoulement associée

La présentation la plus usuelle consiste à exprimer l'équation de la surface de plasticité sous la forme :

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2) = \sigma \quad (\text{II-1})$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les deux contraintes principales non nulles agissant dans le plan normal à la direction d'anisotropie et  $\sigma$  est une mesure de contrainte équivalente. L'isotropie dans le plan (1,2) implique, en supposant en outre l'absence d'effets Bauschinger, que :

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2) = \phi(\sigma_2, \sigma_1) = \phi(-\sigma_1, -\sigma_2) \quad (\text{II-2})$$

Les conditions de symétrie (II-2) sont illustrées schématiquement sur la figure II-1.

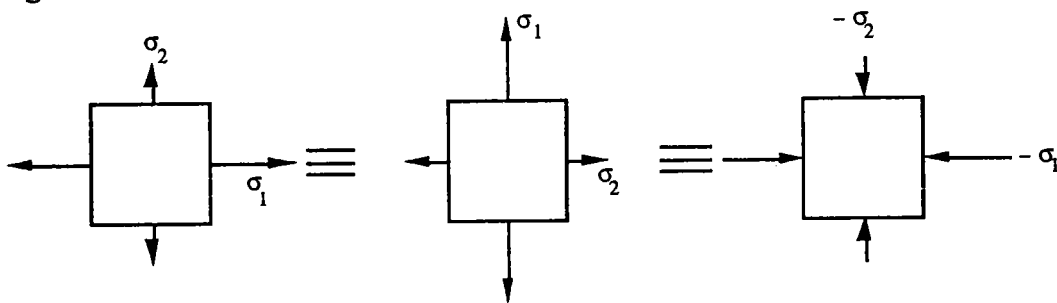


Figure II-1 Représentation schématique des états de contraintes planes équivalents vis-à-vis de l'atteinte de la limite élastique, pour un matériau à isotropie transverse ne présentant pas d'effets Bauschinger.

La loi d'écoulement associée prescrit que les vitesses de déformation ( $\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2$ ) dans les directions (1,2) vérifient :

$$\dot{\epsilon}_1 d\sigma_1 + \dot{\epsilon}_2 d\sigma_2 = 0 \quad (\text{II-3})$$

pour tout incrément ( $d\sigma_1, d\sigma_2$ ) tangent à la surface. D'après l'équation (II-1), ces incréments sont tels que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 = 0 \quad (\text{II-4})$$

La comparaison des équations (II-3) et (II-4) conduit alors aux expressions :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_2} \quad (\text{II-5})$$

où  $\dot{\lambda}$  est le multiplicateur plastique. Les expressions (II-5) représentent un cas particulier de l'expression générale de la loi de normalité,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (\text{II-6})$$

Un changement de variable défini par :

$$x_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma} \quad ; \quad x_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma} \quad (\text{II-7})$$

est maintenant envisagé. Les équations (II-1) à (II-4) se ré-expriment alors de la façon suivante :

$$\psi(x_1, x_2) = 1 \quad (\text{II-8})$$

$$\psi(x_1, x_2) = \psi(x_1, -x_2) = \psi(-x_1, -x_2) \quad (\text{II-9})$$

$$(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2) dx_1 + (\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2) dx_2 = 0 \quad (\text{II-10})$$

et

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (\text{II-11})$$

où  $(dx_1, dx_2)$ , avec  $dx_1 = (d\sigma_1 + d\sigma_2)/2\sigma$  et  $dx_2 = (d\sigma_1 - d\sigma_2)/2\sigma$ , désigne un incrément tangent à la surface dans l'espace  $(x_1, x_2)$ . On notera que la contrainte équivalente  $\sigma$  reste bien sûr constante pour de tels incréments.

### II-2-2 Choix d'une description paramétrique de l'isotropie transverse

La présentation finalement adoptée pour décrire l'isotropie transverse correspond à une représentation paramétrique de l'équation (II-8), de la forme :

$$x_1 = x_1(\theta) \quad ; \quad x_2 = x_2(\theta) \quad (\text{II-12})$$

où le paramètre  $\theta$  est choisi comme étant l'angle associé à la

représentation polaire définie par :

$$x_1 = g(\theta) \cos(\theta) \quad ; \quad x_2 = g(\theta) \sin(\theta) \quad (\text{II-13})$$

Dans l'expression ci-dessus,  $g(\theta)$  représente le rayon polaire d'un point courant de la surface de plasticité dans l'espace  $(x_1, x_2)$ . Cette formulation suit donc la même démarche que celle proposée par Budiansky (1984). Une première différence porte sur le fait que  $x_1$  et  $x_2$  sont normés par la même contrainte  $\sigma$  dans l'équation (II-5). D'autre part, cette contrainte  $\sigma$ , choisie comme mesure de contrainte équivalente, sera identifiée avec la contrainte en traction ou compression équibiaxiale. Ce choix offre l'avantage que cette définition de contrainte équivalente pourra être conservée dans le cas d'un matériau à anisotropie transverse, sans faire référence à une quelconque orientation par rapport aux directions d'orthotropie, puisque les directions principales de contraintes dans le plan de chargement sont indéterminées pour cette sollicitation.

### II-2-3 Conditions de symétrie et de convexité de la surface de plasticité

Les conditions d'isotropie transverse avec l'hypothèse d'absence d'effets Bauschinger, préalablement exprimées par (II-2) et (II-9) deviennent :

$$g(\theta) = g(-\theta) = g(\theta + k\pi) \quad (\text{II-14})$$

de sorte que la surface de plasticité est symétrique par rapport aux axes  $x_1$  et  $x_2$ . Par ailleurs la condition de convexité de la surface de plasticité implique que, pour toute valeur de  $\theta$ ,

$$g^2 + 2g'^2 - g g'' \geq 0 \quad (\text{II-15})$$

avec  $g' = dg/d\theta$ . Quelques valeurs particulières de  $g(\theta)$  sont données par  $g(k\pi) = 1$  pour une traction/compression équibiaxiale;  $g(\pi/4 + k\pi/2) = (\frac{\sqrt{2}}{2})(\sigma_u/\sigma)$  pour une traction/compression uniaxiale et  $g(\pi/2 + k\pi) = (\tau/\sigma)$  pour un cisaillement pur, où  $\sigma_u$  et  $\tau$  désignent respectivement les contraintes en traction/compression uniaxiale et en cisaillement pur.



II-2-4 Expressions des vitesses de déformation

Il convient maintenant d'exprimer les vitesses de déformation à partir de la représentation polaire définie par les équations (II-12) et (II-13). Un incrément de contraintes  $(dx_1, dx_2)$  tangent à la surface de plasticité est, d'après (II-13), lié à l'incrément angulaire  $d\theta$  sur la surface de plasticité, par :

$$dx_1 = (g \cos(\theta))' d\theta \quad ; \quad dx_2 = (g \sin(\theta))' d\theta \quad (\text{II-16})$$

En remplaçant dans l'équation (II-10), on obtient :

$$(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)(g \cos(\theta))' + (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)(g \sin(\theta))' = 0 \quad (\text{II-17})$$

de sorte que les vitesses de déformation vérifient :

$$\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2 = \dot{\lambda} (g \sin(\theta))' \quad ; \quad \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2 = - \dot{\lambda} (g \cos(\theta))' \quad (\text{II-18})$$

où  $\dot{\lambda}$  est un multiplicateur plastique. Nous introduisons maintenant la vitesse de déformation équivalente  $\dot{\epsilon}$  conjuguée de  $\sigma$ , qui est donnée par :

$$\sigma \dot{\epsilon} = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 \quad (\text{II-19})$$

En utilisant le changement de variables défini par l'équation (II-7), la vitesse de déformation équivalente  $\dot{\epsilon}$  se ré-exprime sous la forme :

$$\dot{\epsilon} = x_1(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) + x_2(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \quad (\text{II-20})$$

En remplaçant  $(x_1; x_2)$  et  $(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2; \dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)$  par leurs expressions (II-13) et (II-18) respectivement, on obtient :

$$\dot{\lambda} = \dot{\epsilon} / g^2 \quad (\text{II-21})$$

Les vitesses de déformation plastique s'expriment finalement, en utilisant (II-18) et (II-21), sous la forme :

$$\frac{\dot{\epsilon}_1}{\dot{\epsilon}} = \frac{g(\theta)\sin(\pi/4 + \theta) - g'(\theta)\cos(\pi/4 + \theta)}{\sqrt{2} g^2} \quad (II-22)$$

$$\frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}} = \frac{g(\theta)\cos(\pi/4 + \theta) + g'(\theta)\sin(\pi/4 + \theta)}{\sqrt{2} g^2}$$

### II-2-5 Coefficient d'anisotropie normale

Il peut être utile de déterminer le coefficient d'anisotropie normale défini par le rapport des vitesses de déformation transversale et normale au plan d'isotropie dans un essai de traction uniaxiale,

$$r = \dot{\epsilon}_2 / \dot{\epsilon}_3 \quad (II-23)$$

D'après la condition d'incompressibilité plastique, on a :  $\dot{\epsilon}_3 = -(\dot{\epsilon}_2 + \dot{\epsilon}_1)$ , d'où :

$$r = -\dot{\epsilon}_2 / (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) \quad (II-24)$$

En utilisant les expressions des vitesses de déformations  $\dot{\epsilon}_1$  et  $\dot{\epsilon}_2$  fournies par (II-22), nous obtenons une relation entre le coefficient d'anisotropie  $r$ , la fonction  $g(\theta)$  et sa dérivée pour  $\theta = \pi/4$ , correspondant à la traction uniaxiale:

$$-\frac{r}{1+r} = \frac{g'(\pi/4)}{g(\pi/4)} \quad (II-25)$$

## II-3 SURFACE DE PLASTICITE ET LOI D'ECOULEMENT ASSOCIEE - CAS DE L'ANISOTROPIE TRANSVERSE

### II-3-1 Différentes représentations de la surface de plasticité et de la loi d'écoulement associée

Les critères de plasticité orthotrope sont le plus souvent représentés sous la forme d'une relation entre les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy dans les axes  $(x,y,z)$  correspondant aux directions principales d'orthotropie. Pour un état de contraintes planes dans le plan  $(x,y)$ , le critère de plasticité orthotrope s'exprime alors sous la forme :

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) = \sigma \quad (\text{II-26})$$

où  $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$  désigne les contraintes dans le plan  $(x,y)$  et  $\sigma$  est une mesure de contrainte équivalente. L'orthotropie dans le plan  $(x,y)$  implique, en supposant en outre l'absence d'effets Bauschinger, que :

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) = f(\sigma_x, \sigma_y, -\sigma_{xy}) = f(-\sigma_x, -\sigma_y, \pm\sigma_{xy}) \quad (\text{II-27})$$

Les conditions de symétrie (II-27) sont illustrées schématiquement sur la figure II-2.

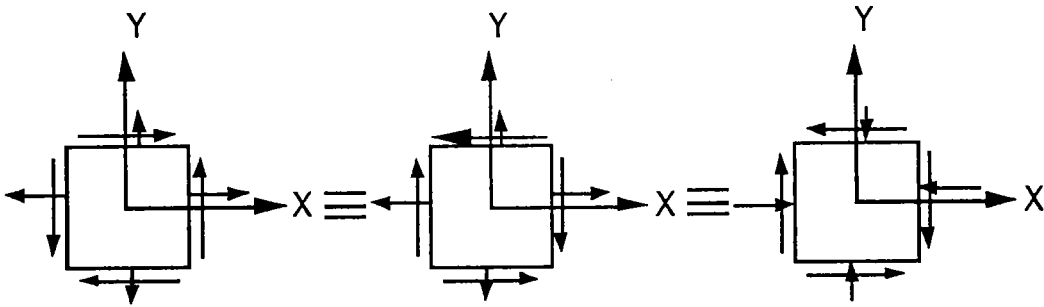


Figure II-2 Représentation schématique des états de contraintes planes équivalents vis-à-vis de l'atteinte de la limite élastique, pour un matériau à anisotropie transverse ne présentant pas d'effets Bauschinger (représentation dans les axes d'orthotropie).

La loi d'écoulement associée prescrit que les vitesses de déformation  $(\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_{xy})$  dans les axes  $(x,y)$  vérifient :

$$\dot{\epsilon}_x d\sigma_x + \dot{\epsilon}_y d\sigma_y + 2\dot{\epsilon}_{xy} d\sigma_{xy} = 0 \quad (\text{II-28})$$

pour tout incrément  $(d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_{xy})$  tangent à la surface. D'après l'équation (II-26), ces incréments sont tels que :

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} d\sigma_{xy} = 0 \quad (\text{II-29})$$

La comparaison des équations (II-28) et (II-29) conduit alors aux expressions :

$$\dot{\epsilon}_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} ; \dot{\epsilon}_y = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} ; 2\dot{\epsilon}_{xy} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} \quad (\text{II-30})$$

Comme dans le cas de l'isotropie transverse, plusieurs autres représentations peuvent être envisagées. Les représentations détaillées ci-dessous conduisent finalement à une représentation en coordonnées polaires de la surface de plasticité, qui généralise celle présentée dans le cas de l'isotropie transverse.

L'état de contraintes est tout d'abord spécifié par les composantes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et par l'angle  $\alpha = (x,1) = (y,2)$  définissant l'orientation du repère principal des contraintes par rapport aux directions principales d'orthotropie. Les équations (II-26) à (II-29) se réexpriment alors de la façon suivante :

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2, \alpha) = \sigma \quad (\text{II-31})$$

$$\phi(\sigma_1, \sigma_2, \alpha) = \phi(\sigma_1, \sigma_2, -\alpha) = \phi(\sigma_2, \sigma_1, \pi/2 \pm \alpha) = \phi(-\sigma_1, -\sigma_2, \pm \alpha) \quad (\text{II-32})$$

$$\dot{\epsilon}_{11} d\sigma_{11} + \dot{\epsilon}_{22} d\sigma_{22} + 2\dot{\epsilon}_{12} d\sigma_{12} = 0 \quad (\text{II-33})$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \sigma_1} d\sigma_1 + \frac{\partial \phi}{\partial \sigma_2} d\sigma_2 + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \quad (\text{II-34})$$

où  $(\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{12})$  sont les composantes de vitesses de déformation dans les axes principaux de contraintes et  $(d\sigma_{11}, d\sigma_{22}, d\sigma_{12})$  sont les incréments de contraintes tangents à la surface de plasticité dans l'espace  $(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$ . Par contre, dans l'équation (II-34) les incréments tangents à la surface sont représentés par les incréments des composantes principales  $d\sigma_1$  et  $d\sigma_2$  et par l'incrément angulaire  $d\alpha$ .

La figure II-3 illustre les conditions de symétrie données par les relations (II-32).

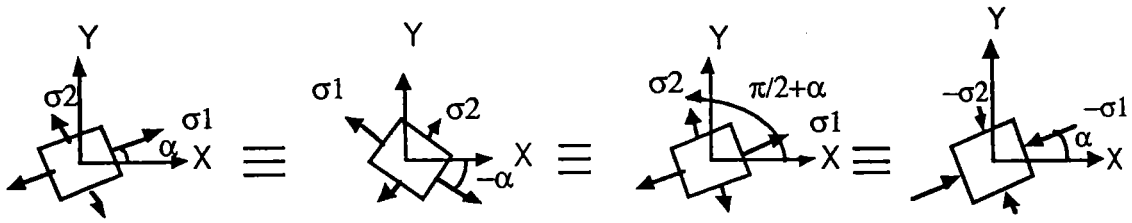


Figure II-3 Représentation schématique des états de contraintes planes équivalents vis-à-vis de l'atteinte de la limite élastique, pour un matériau à anisotropie transverse ne présentant pas d'effets Bauschinger (représentation dans les axes de contraintes principales).

Un calcul analytique simple fournit les relations suivantes entre les incréments présentés sous la forme  $(d\sigma_{11}, d\sigma_{22}, d\sigma_{12})$  ou sous la forme  $(d\sigma_1, d\sigma_2, d\alpha)$  (Hill, 1980) :

$$d\sigma_{11} = d\sigma_1 ; d\sigma_{22} = d\sigma_2 ; d\sigma_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2) d\alpha \quad (\text{II-35})$$

de sorte que la loi de normalité (II-33) peut être ré-exprimée sous la forme :

$$\dot{\epsilon}_{11} d\sigma_1 + \dot{\epsilon}_{22} d\sigma_2 + 2\dot{\epsilon}_{12} (\sigma_1 - \sigma_2) d\alpha = 0 \quad (\text{II-36})$$

Une nouvelle représentation peut être obtenue à partir du changement de variables défini par :

$$x_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma} ; x_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma} \quad (\text{II-37})$$

où, comme dans le cas de l'isotropie transverse, la contrainte équivalente  $\sigma$  sera choisie comme la contrainte de traction équi-biaxiale. L'ensemble des équations décrivant la surface de plasticité et la loi d'écoulement associée se met alors sous la forme :

$$\Psi(x_1, x_2, \alpha) = 1 \quad (\text{II-38})$$

$$\Psi(x_1, x_2, \alpha) = \Psi(x_1, x_2, -\alpha) = \Psi(x_2, x_1, \pi/2 \pm \alpha) = \Psi(-x_1, -x_2, \pm\alpha) \quad (\text{II-39})$$

$$(\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) dx_1 + (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}) dx_2 + 4\dot{\epsilon}_{12} x_2 d\alpha = 0 \quad (\text{II-40})$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \quad (\text{II-41})$$

où  $dx_1 = (d\sigma_1 + d\sigma_2)/2\sigma$ ,  $dx_2 = (d\sigma_1 - d\sigma_2)/2\sigma$  et  $d\alpha$  représentent les incréments tangents à la surface de plasticité dans l'espace  $(x_1, x_2)$ . De la même manière que dans le cas d'un matériau à isotropie transverse, la contrainte équivalente  $\sigma$  reste constante pour de tels incréments.

### II-3-2 Choix d'une description paramétrique de l'anisotropie transverse

La représentation finalement adoptée pour décrire l'anisotropie transverse correspond à une représentation paramétrique de l'équation (II-38), de la forme :

$$x_1 = x_1(\theta, \alpha) ; \quad x_2 = x_2(\theta, \alpha) \quad (\text{II-42})$$

où le paramètre  $\theta$  est choisi comme étant l'angle associé à la représentation polaire définie par :

$$x_1 = g(\theta, \alpha) \cos(\theta) \quad ; \quad x_2 = g(\theta, \alpha) \sin(\theta) \quad (\text{II-43})$$

Dans l'expression ci-dessus,  $g(\theta, \alpha)$  représente le rayon polaire d'un point courant de la surface de plasticité dans l'espace  $(x_1, x_2)$ . Cette formulation peut être considérée comme une extension de celle proposée par Budiansky (1984) dans le cas plus restrictif de l'isotropie transverse (ou anisotropie normale), où l'angle  $\alpha$  n'a pas de signification physique.

### II-3-3 Conditions de symétrie et de convexité de la surface de plasticité

Les conditions de symétrie orthotrope avec l'hypothèse d'absence d'effets Bauschinger, décrites dans les différentes représentations précédentes par les relations (II-27), (II-32) et (II-39), s'expriment maintenant par :

$$g(\theta, \alpha) = g(\theta, -\alpha) = g(-\theta, \pi/2 \pm \alpha) = g(\theta + k\pi, \pm \alpha) \quad (\text{II-44})$$

Pour chaque valeur de  $\alpha$ , la surface de plasticité est symétrique par rapport à l'origine, en raison de l'hypothèse d'absence d'effets Bauschinger. De plus, la surface de plasticité pour  $\pi/2 \pm \alpha$  se déduit de

celle pour  $\pm\alpha$  par symétrie par rapport aux axes  $x_1$  ou  $x_2$ . En particulier, la surface elle-même est symétrique par rapport à ces axes pour  $\alpha=\pm\pi/4$ .

La figure II-4 illustre la description en coordonnées polaires de la surface de plasticité correspondant à la présente modélisation.

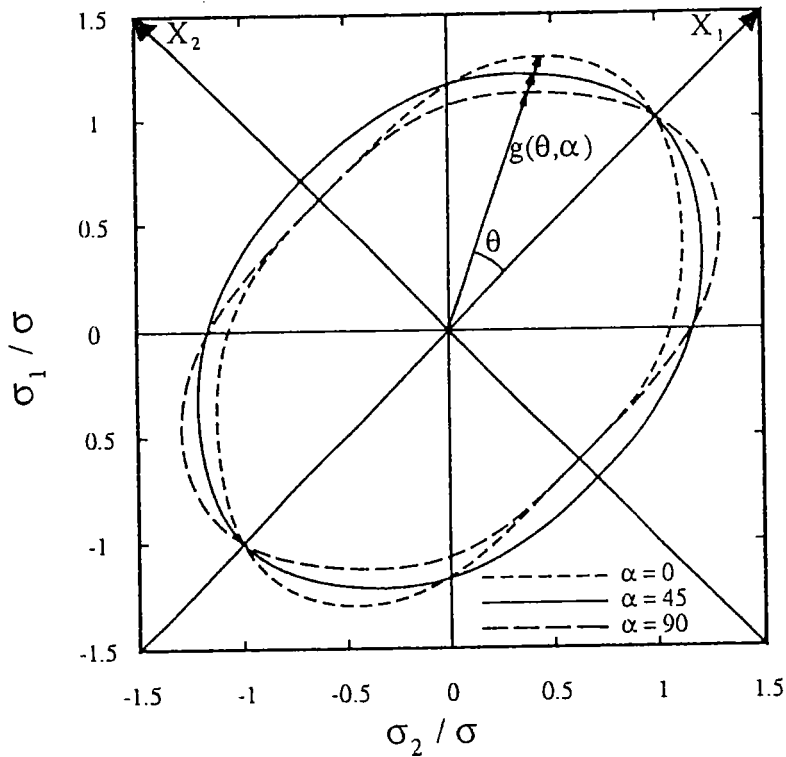


Figure II-4 Représentation en coordonnées polaires de la surface de plasticité dans l'espace des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ). Les lieux limites sont paramétrés par l'angle  $\alpha$  entre les directions d'orthotropie et les directions principales de contraintes.

La convexité de la surface de plasticité, représentée sous la forme d'une fonction  $g(\theta, \alpha)$ , est assurée quand la condition suivante :

$$g^2 + 2 (\partial g / \partial \theta)^2 - g (\partial^2 g / \partial \theta^2) \geq 0 \quad (\text{II-45})$$

est satisfaite pour toute valeur de  $\theta$  et  $\alpha$ . Quelques valeurs particulières de  $g(\theta, \alpha)$  sont données par  $g(\kappa\pi, \alpha) = 1$  pour la contrainte en traction/compression équi-biaxiale;  $g(\pi/4 + k\pi, \alpha) = (\frac{\sqrt{2}}{2})(\sigma_\alpha / \sigma)$  pour la contrainte en traction/compression uniaxiale et  $g(\pi/2 + k\pi, \alpha + \pi/4) = (\tau_\alpha / \sigma)$

pour un cisaillement pur, où  $\sigma_\alpha$  est la contrainte en traction/compression uniaxiale à un angle  $\alpha$  de l'axe  $x$  d'orthotropie et  $\tau_\alpha$  est la contrainte en cisaillement pur à un angle  $\alpha$  de l'axe  $x$  ( $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_\alpha$  à l'angle  $\alpha + \pi/4$ ). En utilisant les notations de Hill (1990), c'est-à-dire  $\tau$  et  $\tau'$  pour les contraintes en cisaillement respectivement à  $0^\circ$  et  $45^\circ$  de l'axe d'orthotropie, on obtient  $\tau / \sigma = g(\pi/2, \pi/4)$  et  $\tau' / \sigma = g(\pi/2, 0)$ .

### II-3-4 Expressions des vitesses de déformation

Il convient maintenant d'exprimer les vitesses de déformation à partir de la représentation polaire définie par la fonction  $g(\theta, \alpha)$ . En prenant la différentielle de l'équation (II-42) et en remplaçant dans l'équation (II-41), on obtient :

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) d\theta + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \right) d\alpha = 0 \quad (\text{II-46})$$

où  $d\theta$  et  $d\alpha$  sont maintenant utilisés pour représenter les incréments tangents à la surface de plasticité. L'équation (II-46) devant être vérifiée quel que soit le couple  $(d\theta, d\alpha)$ , les dérivées partielles doivent donc être liées par les relations suivantes :

$$\frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}{\frac{\partial x_2}{\partial \theta}} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_2}}{-\frac{\partial x_1}{\partial \theta}} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}}{\left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \right) - \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \right)} \quad (\text{II-47})$$

Il résulte de la comparaison des équations (II-40), (II-41) et (II-47) que :

$$\frac{\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}}{\frac{\partial x_2}{\partial \theta}} = \frac{\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}}{-\frac{\partial x_1}{\partial \theta}} = \frac{4x_2 \dot{\epsilon}_{12}}{\left( \frac{\partial x_1}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \right) - \left( \frac{\partial x_2}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \right)} \quad (\text{II-48})$$

En utilisant les expressions de  $x_1(\theta, \alpha)$  et  $x_2(\theta, \alpha)$  données par (II-43) on a :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} &= \lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (g \sin(\theta)) \\ \dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22} &= -\lambda \frac{\partial}{\partial \theta} (g \cos(\theta)) \end{aligned} \quad (\text{II-49})$$



$$2\dot{\epsilon}_{12} = \frac{\dot{\lambda}}{2x_2} \left[ \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (g \cos(\theta)) - \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} (g \sin(\theta)) \right] \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right) = - \frac{\dot{\lambda}}{2\sin(\theta)} \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right)$$

où le multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  peut être déterminé, de la même façon que dans le cas de l'isotropie transverse, à partir du principe d'équivalence du travail plastique défini par  $\sigma \dot{\epsilon} = \sigma_1 \dot{\epsilon}_{11} + \sigma_2 \dot{\epsilon}_{22}$ . En utilisant le changement de variables défini par l'équation (II-37) et les expressions des vitesses de déformation données par (II-49), on obtient :

$$\dot{\lambda} = \dot{\epsilon} / g^2 \quad (\text{II-50})$$

L'utilisation des équations (II-49) et (II-50) conduit finalement à exprimer les vitesses de déformation par :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\epsilon}_{11}}{\dot{\epsilon}} &= \frac{g \sin(\pi/4 + \theta) - \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \cos(\pi/4 + \theta)}{\sqrt{2} g^2} \\ \frac{\dot{\epsilon}_{22}}{\dot{\epsilon}} &= \frac{g \cos(\pi/4 + \theta) + \left( \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) \sin(\pi/4 + \theta)}{\sqrt{2} g^2} \\ \frac{2\dot{\epsilon}_{12}}{\dot{\epsilon}} &= \frac{-\partial g / \partial \alpha}{2 g^2 \sin \theta} \end{aligned} \quad (\text{II-51})$$

Le choix de la fonction  $g(\theta, \alpha)$  devra être tel que l'indétermination observée dans l'expression de la vitesse de glissement  $\dot{\epsilon}_{12}$  (équation (II-51)) soit levée, c'est-à-dire que  $[(1/\sin(\theta))(\partial g(\theta, \alpha)/\partial \alpha)]$  prenne une valeur finie pour  $\theta = k\pi$ . Ce point sera discuté plus loin, et une condition de consistance liée à l'analyse d'un état de contraintes équi-biaxial permettra de préciser cette valeur.

### II-3-5 Quantités liées à la cinématique de la déformation

Les vitesses de déformation étant maintenant déterminées en fonction du rayon polaire  $g(\theta, \alpha)$ , il est possible de déterminer un certain nombre de quantités liées à la cinématique de la déformation, en particulier l'angle  $\beta$  entre les axes principaux de contraintes et de vitesses de déformation, les directions éventuelles de vitesse de déformation nulle, le coefficient

d'anisotropie  $r_\alpha$  en traction uniaxiale et le coefficient  $\Gamma_\alpha$  introduit par Barlat et Richmond (1987) pour quantifier la déformation de glissement dans un essai de traction uniaxiale "hors-axes".

L'orientation des axes principaux des vitesses de déformations peut tout d'abord être déterminée. Notons par  $\dot{\epsilon}_1$  et  $\dot{\epsilon}_2$  les composantes principales de vitesses de déformation, et par  $\beta$  l'angle entre les axes principaux de contraintes et de vitesses de déformation. Ces trois quantités sont reliées aux composantes de vitesses de déformation dans les axes principaux de contraintes,  $\dot{\epsilon}_{11}$ ,  $\dot{\epsilon}_{22}$  et  $\dot{\epsilon}_{12}$ , par les formules de changement de repère :

$$\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} = \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2; \quad \dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22} = (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \cos 2\beta; \quad 2\dot{\epsilon}_{12} = (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \sin 2\beta \quad (\text{II-52})$$

En utilisant les expressions (II-49), on obtient :

$$\tan 2\beta = 2\dot{\epsilon}_{12} / (\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}) = \left( \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right) / \left\{ 2 \sin \theta \frac{\partial (g \cos \theta)}{\partial \theta} \right\} \quad (\text{II-53})$$

Les directions de vitesse de déformation nulle présentent une importance particulière dans un certain nombre de problèmes d'instabilité. Leur existence est assujettie à la condition que les vitesses de déformation principales aient des signes opposés, ou que l'une d'elles soit nulle. On montre facilement que leur orientation est définie par :

$$\cos 2(\psi - \beta) = - (\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2) / (\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2) \quad (\text{II-54})$$

où  $\psi$  désigne l'angle entre la direction principale de contraintes associée à  $\sigma_1$  et la direction d'extension nulle. En utilisant les équations (II-51) et (II-52), il s'ensuit que :

$$\frac{\cos 2(\psi - \beta)}{\cos 2\beta} = \frac{\partial (g \sin \theta) / \partial \theta}{\partial (g \cos \theta) / \partial \theta} = \frac{g \cos \theta + (\partial g / \partial \theta) \sin \theta}{-g \sin \theta + (\partial g / \partial \theta) \cos \theta} \quad (\text{II-55})$$

Le coefficient d'anisotropie  $r_\alpha = -\dot{\epsilon}_{22} / (\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22})$ , mesurant le rapport des vitesses de déformation transverse et normale pour un essai de traction uniaxiale dans la direction 1, faisant un angle  $\alpha$  avec l'axe  $x$  d'orthotropie, est, d'après les équations (II-51), donné par :

$$-\frac{r_\alpha}{1+r_\alpha} = \frac{(\partial g / \partial \theta)(\pi / 4, \alpha)}{g(\pi / 4, \alpha)} \quad (\text{II-56})$$

La caractérisation de l'écoulement plastique en traction uniaxiale dans la direction définie par l'angle  $\alpha$  peut être complétée par la détermination du paramètre  $\Gamma_\alpha = \dot{\epsilon}_{12} / \dot{\epsilon}_{11}$  introduit par Barlat et Richmond (1987) pour quantifier le glissement dans une sollicitation hors-axes ( $\alpha \neq k\pi / 2$ ). Ce paramètre, déterminé à partir des équations (II-51), est égal à :

$$\Gamma_\alpha = -\frac{(\partial g / \partial \alpha)(\pi / 4, \alpha)}{2g(\pi / 4, \alpha)} \quad (\text{II-57})$$

### II-3-6 Relations de consistance

En plus des conditions de symétrie résultant de l'orthotropie et de l'absence d'effet Bauschinger (II-44), l'hypothèse d'un comportement plastique orthotrope conduit à plusieurs autres relations devant être vérifiées par la fonction  $g(\theta, \alpha)$ , qui vont être explicitées ci-dessous. Tout d'abord, les directions principales de contraintes et de vitesses de déformation coïncident lors d'une sollicitation dans les axes d'orthotropie. En d'autres termes,  $\dot{\epsilon}_{12}$  doit être nul pour  $\alpha = k\pi/2$ , et donc, d'après l'équation (II-51) :

$$\left. \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial g(\theta, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha = k\pi / 2} = 0 \quad (\text{II-58})$$

D'autre part, pour un état de traction ou de compression équi-biaxiale, le même état de vitesses de déformation, avec  $x$  et  $y$  comme directions principales de vitesses de déformation, doit être obtenu quel que soit l'angle  $\alpha$  considéré pour spécifier les directions principales de contraintes. Autrement dit, les équations (II-52) doivent être vérifiées pour cette sollicitation (c'est à dire pour  $\theta = k\pi$ ) en considérant une rotation  $\beta = -\alpha$  pour passer des directions principales de contraintes aux directions principales de vitesses de déformation, et ceci quel que soit l'angle  $\alpha$ . Si l'on tient compte des conditions de symétrie (II-44), il suffit d'exprimer ces relations de consistance pour  $\theta = 0$ . En utilisant les équations (II-49) pour exprimer  $(\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22})$ ,  $(\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22})$  et  $2\dot{\epsilon}_{12}$ , et en remarquant que  $(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2)$  et  $(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2)$  peuvent être déterminés à partir de ces

mêmes équations en considérant la valeur  $\alpha=0$  pour spécifier les directions principales de contraintes, on obtient :

$$g(0,\alpha)=g(0,0)$$

$$\left. \frac{\partial g(\theta,\alpha)}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial g(\theta,\alpha)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha=0} \cos 2\alpha \quad (\text{II-59})$$

$$\left. \frac{1}{2 \sin \theta} \frac{\partial g(\theta,\alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\theta=0} = - \left. \frac{\partial g(\theta,\alpha)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\alpha=0} \sin 2\alpha$$

On remarque que la première de ces équations correspond à la normalisation des axes  $x_1$  et  $x_2$  par la contrainte de traction / compression équi-biaxiale  $\sigma$  (équation (II-37)), de sorte que, d'après (II-43),  $g(0,\alpha)=g(0,0)$  doit en outre être égal à l'unité.

### II-3-7 Passage de l'isotropie transverse à l'anisotropie transverse

Une description des surfaces de plasticité orthotropes s'appuyant sur le formalisme mis au point dans ce chapitre nécessite que l'ensemble des conditions représentées par les équations (II-44),(II-58) et (II-59) soient respectées. La construction de fonctions  $g(\theta,\alpha)$  respectant ces conditions peut s'appuyer sur une extension d'une fonction  $g(\theta)$  représentant un comportement avec isotropie transverse. Il est utile, pour construire une telle extension, de remarquer que le critère de plasticité quadratique de Hill (1948) peut être mis sous la forme :

$$g(\theta,\alpha)^{-2} = \cos^2 \theta + (\sigma / \tau)^2 \sin^2 \theta - 2a \sin \theta \cos \theta \cos 2\alpha + b \sin^2 \theta \cos^2 2\alpha \quad (\text{II-60})$$

où les deux premiers termes du second membre correspondent à la description de l'isotropie transverse, et où  $a$  et  $b$  sont des paramètres sans dimension caractérisant l'anisotropie transverse. De façon comparable, l'extension proposée par Hill (1990) pour le critère non quadratique du même auteur (Hill,1979), s'exprime sous la forme :

$$g(\theta,\alpha)^{-m} = |\cos \theta|^m + (\sigma / \tau)^m |\sin \theta|^m + 2^{1-(m/2)} (-2a \sin \theta \cos \theta \cos 2\alpha + b \sin^2 \theta \cos^2 2\alpha) \quad (\text{II-61})$$

Nous exprimons également le critère de trois composantes proposé par Barlat (1989) équation (I-33) sous forme paramétrique tout en respectant les conditions de consistance, la fonction  $g(\theta, \alpha)$  se met sous la forme suivante :

$$g^m(\theta, \alpha) = \frac{2\sigma_0^m}{\sigma^m \left[ a \left( \frac{1}{2} \right)^m |A - B|^m + a \left( \frac{1}{2} \right)^m |A + B|^m + (2 - a)|B|^m \right]} \quad (\text{II-62})$$

avec  $A = \cos \theta(1 + h) + \sin \theta \cos 2\alpha(1 - h)$

$$B = \sqrt{[\cos \theta(1 - h) + \sin \theta \cos 2\alpha(1 + h)]^2 + 4p^2 \sin^2 \theta \sin^2 2\alpha}$$

Considérons plus généralement une fonction  $g(\theta)$  représentant un comportement avec isotropie transverse. Cette fonction  $g(\theta)$  doit vérifier les conditions de symétrie (II-14), ainsi que la condition de normalisation  $g(k\pi)=1$  et la condition  $g'(k\pi/2)=0$  traduisant l'absence de points anguleux pour  $\theta=k\pi/2$ . Considérons de plus l'extension au cas anisotrope transverse définie par :

$$g(\theta, \alpha)^{-m} = g(\theta)^{-m} - 2a \sin \theta \cos^{2n-1} \theta \cos 2\alpha + b \sin^{2p} \theta \cos^{2q} 2\alpha \quad (\text{II-63})$$

où  $n$ ,  $p$  et  $q$  sont des entiers positifs. On vérifie alors que les conditions de symétrie (II-44) et de consistance (II-58) et (II-59) sont automatiquement satisfaites en utilisant l'équation (II-63). On remarque en particulier que  $g(\theta, \pi/4)$  s'identifie à  $g(\theta)$ , la surface de plasticité pour  $\alpha=\pi/4$  étant, comme celle pour l'isotropie transverse, symétrique par rapport aux axes  $x_1$  et  $x_2$  (cf. §II-3-3).

En plus du choix de la fonction  $g(\theta)$  qui reste ouvert, cette extension présente une plus grande généralité que les équations (II-60) et (II-61), dans lesquelles les exposants  $n, p$  et  $q$  sont égaux à l'unité. On analysera au chapitre III l'importance de cette généralisation, qui permet de contrôler l'influence de l'orientation de la sollicitation sur les niveaux des contraintes d'écoulement.

## II-4 CONCLUSION

La description des surfaces de plasticité orthotropes et de la loi d'écoulement associée présentée dans ce chapitre diffère radicalement des présentations habituelles, qui s'appuient sur une expression de la fonction de charge dans l'espace des contraintes exprimées selon les directions d'orthotropie. La présentation adoptée ici privilégie au contraire une description dans l'espace des contraintes principales, à laquelle il convient d'adjoindre la connaissance de l'orientation des directions principales de contraintes par rapport aux directions d'orthotropie. Cette présentation permet une comparaison plus immédiate avec les essais de laboratoire, dans lesquels l'orientation de la sollicitation (particulièrement en traction uniaxiale) est un paramètre-clé de la caractérisation de l'anisotropie transverse.

L'approche suivie a de plus conduit à clarifier le passage de l'isotropie transverse à l'anisotropie transverse, par l'établissement de relations de consistance liées à la symétrie orthotrope, et à proposer pour ce passage une fonction de charge qui généralise les modèles existants.

## CHAPITRE III

### MISE AU POINT ET ANALYSE DU MODELE

#### III-1 INTRODUCTION

Le modèle présenté au chapitre II permet de généraliser un critère de plasticité à isotropie transverse au cas de l'anisotropie transverse. Afin d'obtenir une description analytique complète, il reste à préciser la fonction  $g(\theta)$  associée au cas de l'isotropie transverse.

Les différentes approches que nous avons envisagées pour décrire la fonction  $g(\theta)$  sont discutées. Nous nous appuyons sur les tendances obtenues expérimentalement, ou par calcul d'homogénéisation, pour choisir finalement une extension du critère isotrope de Drucker, dont les conséquences sont discutées.

Le modèle permet de pallier nombre des insuffisances constatées avec les critères de plasticité usuels, comme nous le montrons à partir de résultats expérimentaux obtenus soit dans l'équipe de recherche ou en collaboration avec le LEDEPP (centre de recherche de la société SOLLAC), soit issus de la littérature, ainsi qu'à partir de résultats de calculs d'homogénéisation de la littérature.

#### III-2 RECHERCHE D'UNE FONCTION $g(\theta)$ DECRIVANT L'ISOTROPIE TRANSVERSE

##### III-2-1 Développement de $g(\theta)$ en série de Fourier

Comme cela avait été proposé par Budiansky (1984) dans sa formulation de l'isotropie transverse, nous pouvons envisager pour la fonction  $g(\theta)$  un développement en série de Fourier, de la forme :

$$g(\theta) = \sum_{i=0}^n a_i \cos(2i\theta) \quad (\text{III-1})$$

Les conditions de symétrie et d'absence d'effets Bauschinger (équation II-14) sont automatiquement satisfaites par ce développement en série.

Les cinq premiers termes ( $n=4$ ) sont pris en considération pour obtenir une souplesse suffisante. On considère d'autre part que trois quantités adimensionnelles sont accessibles à l'expérience : le coefficient d'anisotropie en traction uniaxiale  $r$ , et les rapports de contraintes  $(\sigma_u/\sigma)$  et  $(\tau/\sigma)$ , où  $\sigma$ ,  $\sigma_u$  et  $\tau$  sont respectivement les contraintes de traction équibiaxiale, de traction uniaxiale et de cisaillement. Ces données, auxquelles il convient d'ajouter la condition de normalisation  $g(k\pi)=1$ , fournissent un système de quatre équations :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 1 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 &= \tau/\sigma \\ a_0 - a_2 + a_4 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) (\sigma_u/\sigma) \\ a_1 - 3a_3 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) (\sigma_u/\sigma) \left[ \frac{r}{1+r} \right] \end{aligned} \tag{III-2}$$

La résolution de ce système conduit aux valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a_0 + a_4 &= \frac{1}{4} \left[ 1 + \sqrt{2} \left( \frac{\sigma_u}{\sigma} \right) + \left( \frac{\tau}{\sigma} \right) \right] \\ a_1 &= \frac{1}{8} \left[ 3 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \frac{\sigma_u}{\sigma} \right) \left( \frac{r}{1+r} \right) - 3 \left( \frac{\tau}{\sigma} \right) \right] \\ a_2 &= \frac{1}{4} \left[ 1 - \sqrt{2} \left( \frac{\sigma_u}{\sigma} \right) + \left( \frac{\tau}{\sigma} \right) \right] \\ a_3 &= \frac{1}{8} \left[ 1 - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \frac{\sigma_u}{\sigma} \right) \left( \frac{r}{1+r} \right) - \left( \frac{\tau}{\sigma} \right) \right] \end{aligned} \tag{III-3}$$

L'introduction du terme correspondant à  $i=4$  laisse un degré de liberté supplémentaire. Il est possible, afin de tester les possibilités de ce développement en série, d'approcher un certain nombre de critères usuels, pour lesquels les rapports de contraintes  $(\sigma_u/\sigma)$  et  $(\tau/\sigma)$  s'expriment en fonction de  $r$  par les relations suivantes :



Critère quadratique de Hill (1948)

$$(1+2r) (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 - (2\sigma)^2 = 0 \quad (\text{III-4})$$

$$\frac{\sigma_u}{\sigma} = \sqrt{\frac{2}{1+r}} \quad \frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1+2r}}$$

Critère de Hosford (1972)

$$r|\sigma_1 - \sigma_2|^m + |\sigma_1|^m + |\sigma_2|^m - 2\sigma^m = 0 \quad (\text{III-5})$$

$$\frac{\sigma_u}{\sigma} = \left[ \frac{2}{1+r} \right]^{1/m} \quad \frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{(1+2^{m-1}r)^{1/m}}$$

Critère non quadratique de Hill (1979)

$$(1+2r)|\sigma_1 - \sigma_2|^m + |\sigma_1 + \sigma_2|^m - (2\sigma)^m = 0 \quad (\text{III-6})$$

$$\frac{\sigma_u}{\sigma} = \frac{2}{[2(1+r)]^{1/m}} \quad \frac{\tau}{\sigma} = \frac{1}{(1+2r)^{1/m}}$$

Les figures III-1 et III-2 montrent, respectivement pour le critère quadratique de Hill et pour le critère de Hosford, les fonctions  $g(\theta)$  "exactes" et celles obtenues par développement en série de Fourier. Dans chaque cas, le coefficient  $a_4$  a été choisi de façon à obtenir un bon ajustement pour  $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ , c'est-à-dire entre la traction uniaxiale et le cisaillement. On observe alors, pour les fortes valeurs de  $r$  avec le critère quadratique de Hill, et pour le critère de Hosford que les courbes ne sont pas correctement reproduites pour  $0 \leq \theta \leq \pi/4$ , c'est-à-dire entre la traction équi-biaxiale et la traction uniaxiale, et que donc davantage de termes seraient nécessaires dans le développement en série. La difficulté serait alors de dégager une méthode d'identification des paramètres faisant appel à des données plus nombreuses. Le développement en série nous a semblé peu convaincant, et a été abandonné.

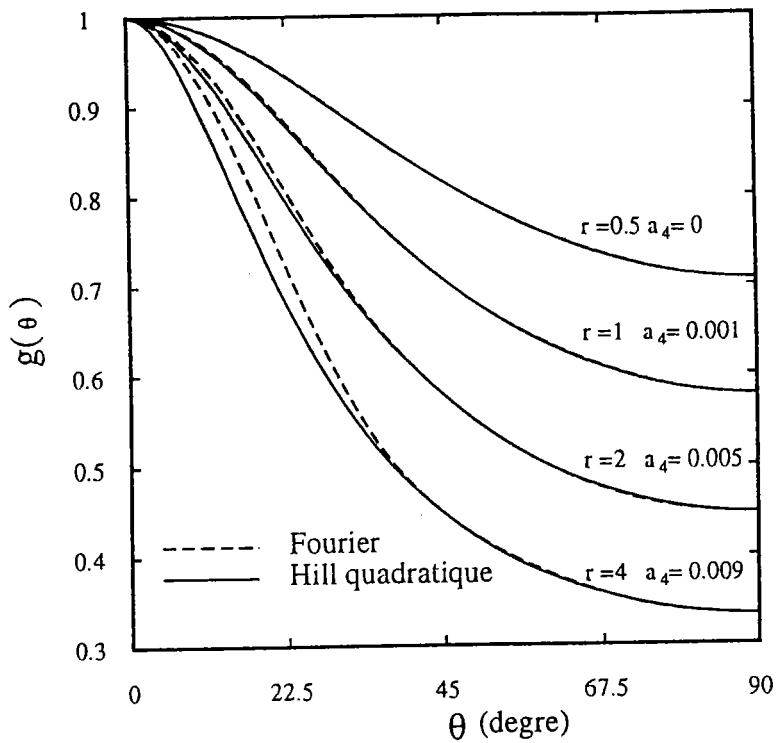


Figure III-1 Comparaison entre les fonctions  $g(\theta)$  correspondant au critère quadratique de Hill, et à un ajustement par développement en série de Fourier.

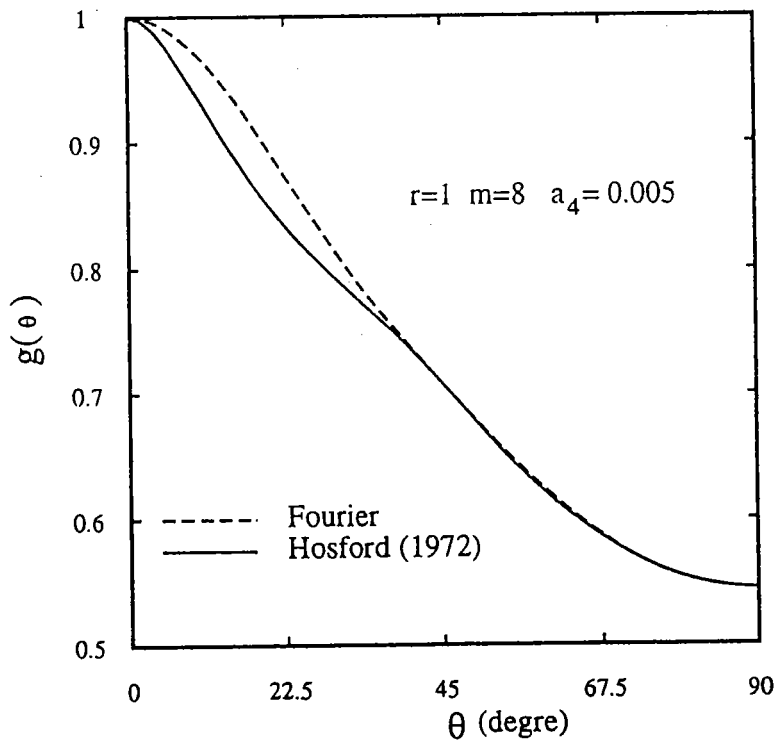


Figure III-2 Comparaison entre les fonctions  $g(\theta)$  correspondant au critère de Hosford, et à un ajustement par développement en série de Fourier.

### III-2-2 Extension du critère de Drucker au cas de l'isotropie transverse

Le critère de Drucker (1949) est un critère isotrope, faisant intervenir les deuxième et troisième invariants du déviateur des contraintes. Comme nous l'avons vu au § I-6-1, il permet de rendre compte de façon très satisfaisante de surfaces de plasticité qui, dans le cas de l'isotropie, se situent souvent entre les prévisions du critère de Von Mises et du critère de Tresca. La surface de plasticité de Drucker est décrite par l'équation (I-11). Il est possible, dans le cas d'un état de contraintes planes, de présenter ce critère sous la forme d'une fonction  $g(\theta)$ , par un calcul analytique simple ou à partir de considérations géométriques dans l'espace de Haigh Westergaard (cf. Annexe I). On obtient le résultat suivant :

$$(1 - k)g(\theta)^{-6} = (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta)^3 - k \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - 9 \sin^2 \theta)^2 \quad (\text{III-7})$$

avec  $k=4c/27$ . Un critère pouvant être envisagé pour décrire un comportement avec isotropie transverse s'obtient à partir de (III-7), sous la forme :

$$(1 - k)g(\theta)^{-6} = (\cos^2 \theta + A \sin^2 \theta)^3 - k \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - B \sin^2 \theta)^2 \quad (\text{III-8})$$

où A et B sont des constantes positives sans dimension. Les trois paramètres k, A et B apparaissant dans l'équation (III-8) peuvent être déterminés en connaissant les trois quantités adimensionnelles :  $r$ ,  $(\sigma_u/\sigma)$  et  $(\tau/\sigma)$  (cf Annexe II).

### III-2-3 Forme générale du modèle

C'est la forme (III-8) de la fonction  $g(\theta)$  que nous avons retenue dans la suite de cette étude. Ainsi, l'expression générale pour le cas de l'anisotropie transverse est donnée par l'équation (II-62), dans laquelle  $g(\theta)$  correspond à l'expression (III-8). Le modèle est donc représenté par les équations :

$$(1 - k)^{m/6} g(\theta, \alpha)^{-m} = [F(\theta)]^{m/6} - 2a \sin \theta \cos^{2n-1} \theta + b \sin^{2p} \theta \cos^{2q} 2\alpha \quad (\text{III-9})$$

avec

$$(1 - k)g(\theta)^{-6} = F(\theta) = \left( \cos^2 \theta + A \sin^2 \theta \right)^3 - k \cos^2 \theta \left( \cos^2 \theta - B \sin^2 \theta \right)^2$$

Comme cela est détaillé dans l'annexe III, la détermination des paramètres peut être effectuée de la façon suivante : tout d'abord, les valeurs de  $k$ ,  $A$  et  $B$  peuvent être obtenues à partir des valeurs  $r_{45}$ ,  $(\sigma_{45}/\sigma)$  et  $(\tau/\sigma)$  correspondant à des essais où les directions principales de contraintes sont à  $45^\circ$  des directions d'orthotropie ( $\tau$  désignant la contrainte de cisaillement pur parallèlement aux axes d'orthotropie c'est-à-dire  $\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$  à l'angle  $\alpha = \pi/4$ ). Les coefficients  $a$  et  $b$  caractérisant l'anisotropie transverse sont ensuite obtenus en fonction des valeurs de  $r_0$  et  $r_{90}$  et des paramètres  $m$ ,  $n$  et  $p$ . Le choix des exposants  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$  conditionne l'évolution du lieu limite dans l'espace  $(\sigma_1, \sigma_2)$  lorsque  $\alpha$  varie, comme cela sera discuté au § III-3-3.

### **III-3 COMPARAISON DU MODELE AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX OU DES RESULTATS DE CALCULS D'HOMOGENEISATION**

Nous confrontons maintenant les prévisions du modèle à un certain nombre de résultats théoriques ou expérimentaux, comme cela a été envisagé au chapitre I pour les critères de plasticité usuels de la littérature. En même temps, nous essayons de dégager l'influence des différents paramètres introduits dans le modèle, afin de guider le choix de ces paramètres et de mettre en lumière les améliorations apportées par la présente description. Comme dans le chapitre I, nous procédons par étapes successives, en envisageant le cas de l'isotropie, puis de l'isotropie transverse et enfin l'anisotropie transverse.

#### **III-3-1 Cas de l'isotropie**

Nous avons déjà signalé au § I-6-1 que le critère de Drucker (1949) permet d'obtenir des surfaces de plasticité intermédiaires entre celles de Von Mises et de Tresca, de façon comparable au critère de Hosford (1972). Afin de confirmer l'aptitude du critère de Drucker à décrire, en particulier, les surfaces de plasticité initiales obtenues par calcul

d'homogénéisation par Barlat et Lian (1989), les prévisions du critère de Drucker sont reportées sur la figure III-3 sous la forme de différentes sections de la surface de plasticité dans l'espace  $(\sigma_{xx}/\sigma, \sigma_{yy}/\sigma, \sigma_{xy}/\sigma)$  par des plans correspondant à différentes valeurs de la contrainte de cisaillement normalisée,  $S = \sigma_{xy}/\sigma$ . La comparaison avec la figure I-5 confirme que le critère de Drucker décrit de façon très précise les résultats du calcul d'homogénéisation, de manière tout-à-fait comparable au critère de Hosford (1972). On peut donc considérer que le critère de Drucker constitue un point de départ bien adapté aux extensions successives qui sont analysées maintenant.

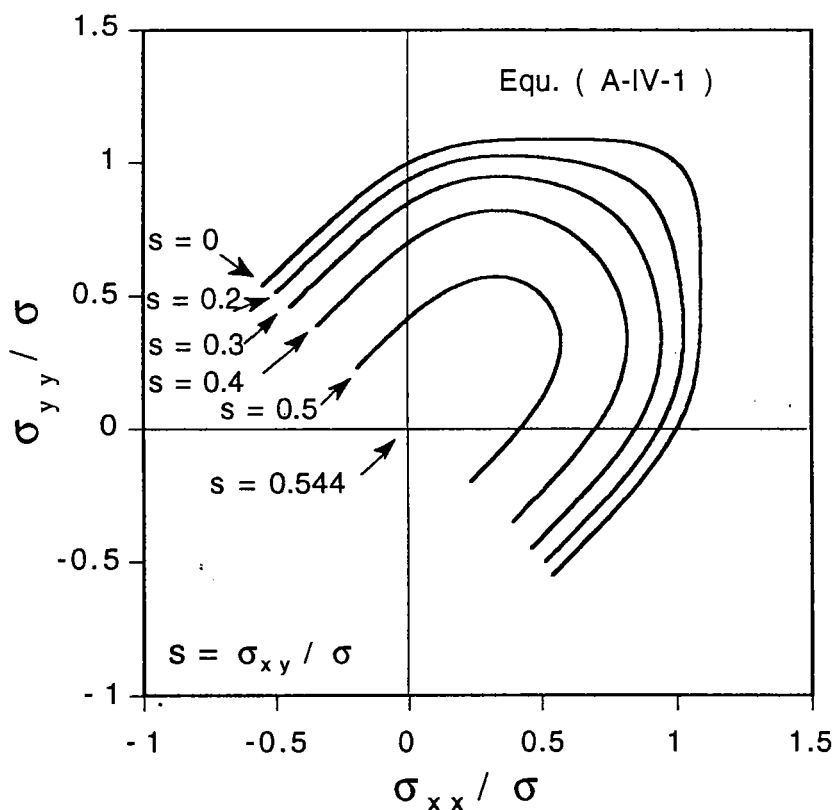


Figure III-3 Représentation du critère de Drucker (1949) pour différentes sections dans l'espace  $\sigma_{xx}/\sigma, \sigma_{yy}/\sigma, \sigma_{xy}/\sigma$ . Cette figure est à rapprocher de la figure I-5.

### III-3-2 Cas de l'isotropie transverse

La figure III-4 fournit une comparaison des prévisions du critère quadratique de Hill (1948) et du présent modèle (équation (III-8)), pour quatre matériaux modèles ayant pour valeurs du coefficient d'anisotropie

normale,  $r=0,5$ ;  $r=1$ ;  $r=2$  et  $r=4$ . Les valeurs des paramètres A et B dans l'équation (III-8) sont liées par la relation  $B=3A$ , de façon à obtenir  $A=3$  et  $B=9$  dans le cas isotrope ( $r=1$ ). De plus, la valeur  $k=0,3$  a été choisie pour obtenir des surfaces convexes pour toutes les valeurs de  $r$ .

On observe, en plus de l'aplatissement des surfaces de plasticité au voisinage de la déformation plane et du cisaillement, une plus faible influence du coefficient  $r$  sur le rapport de contraintes ( $\sigma/\sigma_u$ ) avec le présent modèle qu'avec le critère quadratique de Hill. Cette tendance va dans le sens des observations expérimentales signalées au § I-6-2.

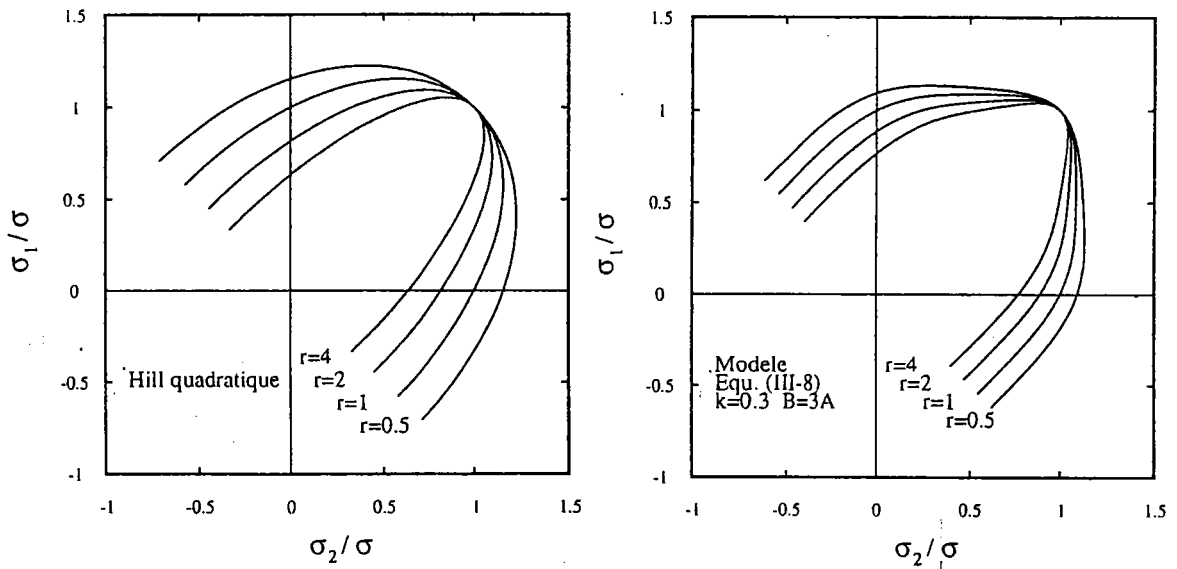


Figure III-4 Surfaces de plasticité prévues pour des matériaux avec isotropie transverse, pour différentes valeurs du coefficient d'anisotropie normale  $r$ .

La figure III-5 reprend les points expérimentaux obtenus par Hecker et Stout (1983) sur un aluminium commercial présentant une valeur moyenne du coefficient d'anisotropie  $\bar{r}=0,6$ . Les prévisions du critère quadratique de Hill (1948) et du présent modèle (équation (III-8)) sont également reportées. Les paramètres  $k$ , A et B du présent modèle ont été déterminés à partir des valeurs de  $(\sigma/\sigma_u)$ ,  $(\sigma/\tau)$  et  $r$  estimées à partir des résultats de Hecker et Stout (1983), puis leurs valeurs ont été légèrement modifiées afin d'assurer la convexité de la surface de plasticité obtenue.

On constate une prévision bien meilleure qu'avec le critère quadratique de Hill, l'écart maximal sur les valeurs de contraintes étant de 1,3% en cisaillement pur alors qu'il est de 14% avec le critère quadratique de Hill.

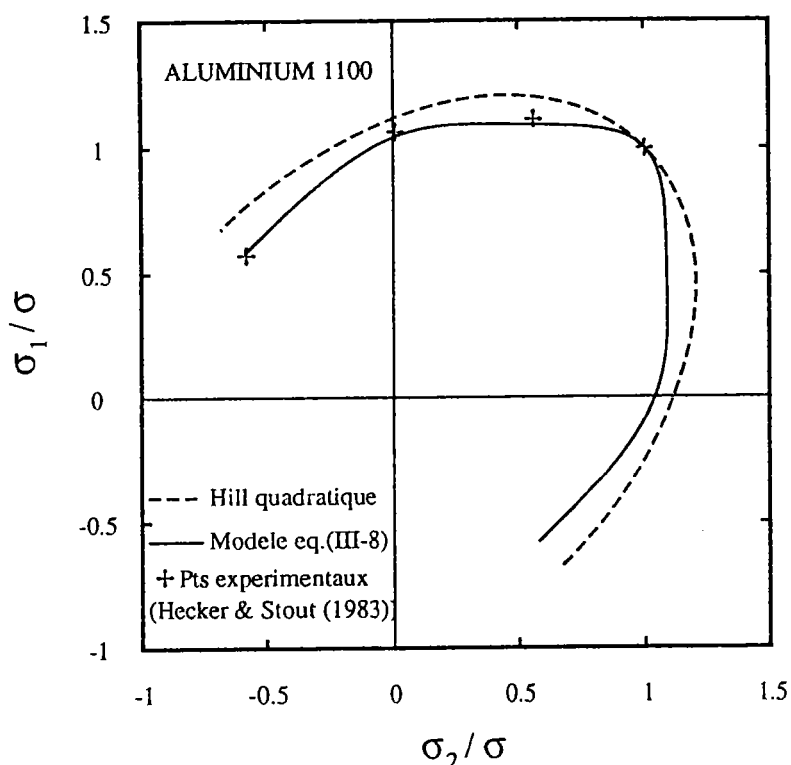


Figure III-5 Comparaison des surfaces de plasticité obtenues à l'aide du critère de Hill et du présent modèle avec des points expérimentaux empruntés à Hecker et Stout (1983).

### III-3-3 Cas de l'anisotropie transverse

Afin d'analyser le rôle des paramètres introduits pour "passer" d'un critère à isotropie transverse à un critère à anisotropie transverse, nous considérons tout d'abord un matériau modèle ayant pour coefficients d'anisotropie  $r_0=2$ ,  $r_{45}=3$  et  $r_{90}=1$  selon des directions de traction à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$ , respectivement, de la direction de laminage. Les coefficients  $k$ ,  $A$  et  $B$  sont tout d'abord déterminés en considérant le comportement du matériau obtenu lorsque les directions principales de contraintes sont à  $45^\circ$  des directions d'orthotropie ( $\alpha=\pi/4$ ). En imposant la condition  $B=3A$  et en fixant une valeur de  $k$  assurant un aplatissement de la surface de plasticité près de la déformation plane et du cisaillement pur, tout en préservant la convexité de la surface, la valeur du paramètre  $A$  est alors déterminée à partir de la valeur de  $r_{45}$ . Les paramètres d'anisotropie

transverse a et b étant déterminés en fonction de  $r_0$ ,  $r_{90}$  et des exposants  $m$ ,  $n$  et  $p$ , il nous reste à analyser le rôle de ces exposants, ainsi que de l'exposant  $q$ , sur les variations des contraintes d'écoulement en fonction de l'orientation de la sollicitation.

Le rôle de ces exposants peut être discuté à partir des figures III-6 à III-8, qui montrent l'évolution de la contrainte de traction uniaxiale  $\sigma_\alpha$  en fonction de l'orientation.

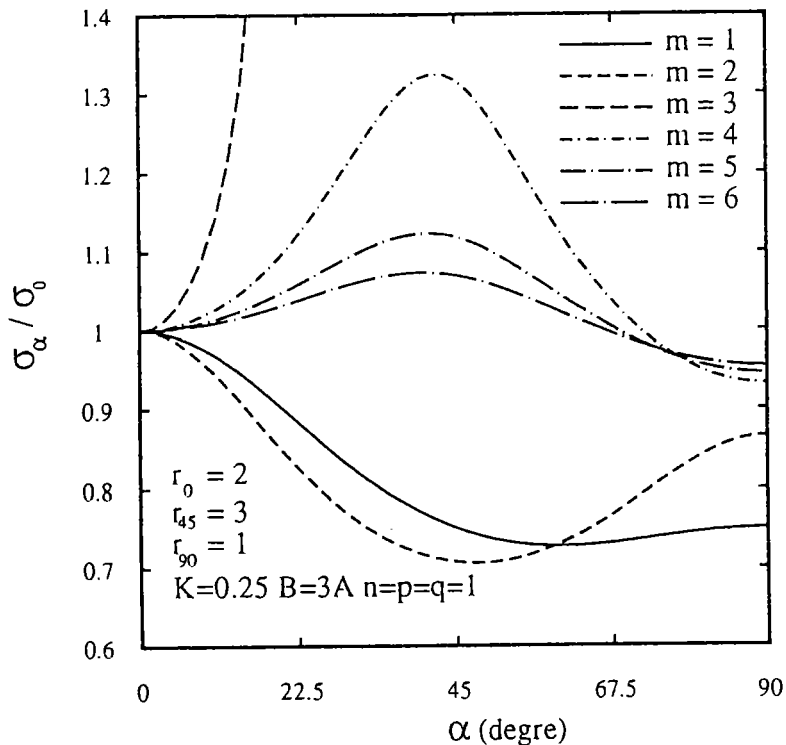


Figure III-6 Influence de l'exposant  $m$  sur la variation de la contrainte de traction uniaxiale en fonction de l'angle  $\alpha$ .

L'influence de l'exposant  $m$  est mise en évidence sur la figure III-6. On observe pour des valeurs de  $m$  inférieures à 3, le comportement classiquement obtenu (par exemple, avec le critère quadratique de Hill), à savoir qu'avec  $r_{45} > r_0 > r_{90}$  on obtient  $\sigma_0 > \sigma_{90} > \sigma_{45}$ . Le minimum de  $\sigma_\alpha$  est par contre changé en un maximum pour des valeurs de  $m$  supérieures à 3, pour lesquelles on obtient  $\sigma_{45} > \sigma_0 > \sigma_{90}$ . Enfin, une singularité est observée pour  $m=3$ . Le comportement habituellement observé correspond au premier cas ( $\sigma_0 > \sigma_{90} > \sigma_{45}$  pour  $r_{45} > r_0 > r_{90}$ ). Compte-tenu de la souplesse apportée par le choix des exposants  $n$  et  $p$ , nous avons fixé dans toutes les simulations de surfaces de plasticité la valeur de  $m$  à 2.



Le rôle des exposants  $n$  et  $p$  est analysé sur la figure III-7. L'évolution observée pour  $n=p=1$  est très proche de celle qui serait obtenue avec le critère quadratique de Hill (1948), c'est-à-dire que la prise en compte d'un coefficient  $k$  "d'aplatissement" de la surface joue un faible rôle sur l'évolution de  $\sigma_\alpha$ , et plus généralement, sur l'épaisseur de l'anneau généré dans le plan des contraintes principales  $(\sigma_1, \sigma_2)$  lorsque  $\alpha$  varie.

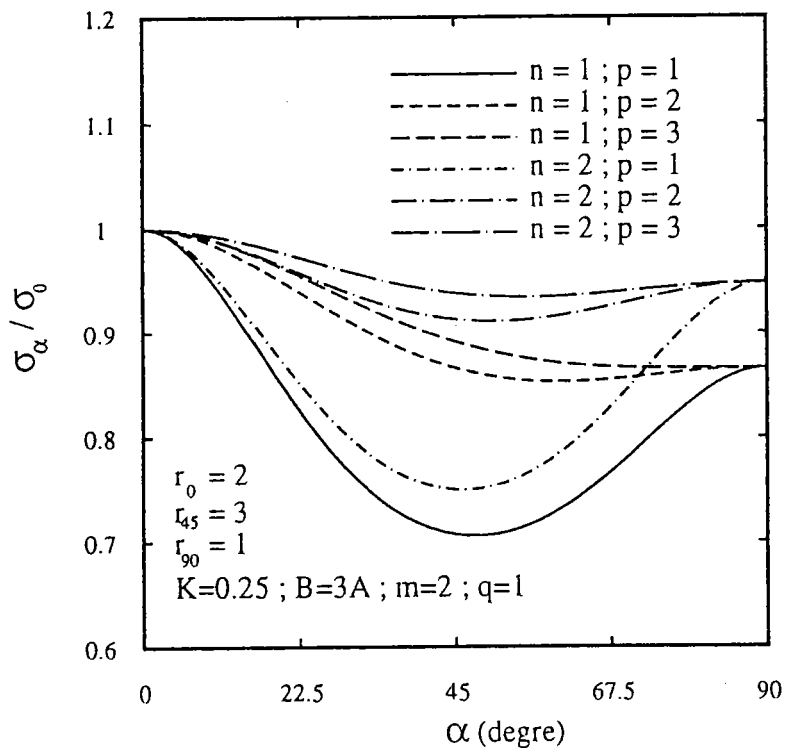


Figure III-7 Influence des exposants  $n$  et  $p$  sur la variation de la contrainte uniaxiale en fonction de l'angle  $\alpha$ .

Une augmentation de l'exposant  $n$  conduit à un rapprochement des deux contraintes  $\sigma_0$  et  $\sigma_{90}$ , sans modifier sensiblement la forme de la courbe  $\sigma_\alpha(\alpha)$ , qui conserve un minimum marqué au voisinage de  $\alpha = 45^\circ$ . Par contre, une augmentation de l'exposant  $p$  ne modifie pas les valeurs relatives de  $\sigma_0$  et de  $\sigma_{90}$ , mais conduit à une forte augmentation du minimum de  $\sigma_\alpha$  observé pour  $\alpha \cong 45^\circ$ . Lorsque l'on choisit des valeurs de  $n$  et  $p$  toutes deux supérieures à l'unité, on combine les deux effets, c'est-à-dire que l'on obtient à la fois un rapprochement des deux contraintes  $\sigma_0$  et  $\sigma_{90}$ , et une augmentation de  $\sigma_{45}$ .

Le paramètre  $q$  ne modifie pas les valeurs relatives de  $\sigma_0$ ,  $\sigma_{45}$  et  $\sigma_{90}$ , mais son augmentation conduit à un "évasement" de la courbe  $\sigma_\alpha(\alpha)$  (Figure III-8). L'évolution obtenue avec  $q=1$  correspond au

comportement généralement observé.

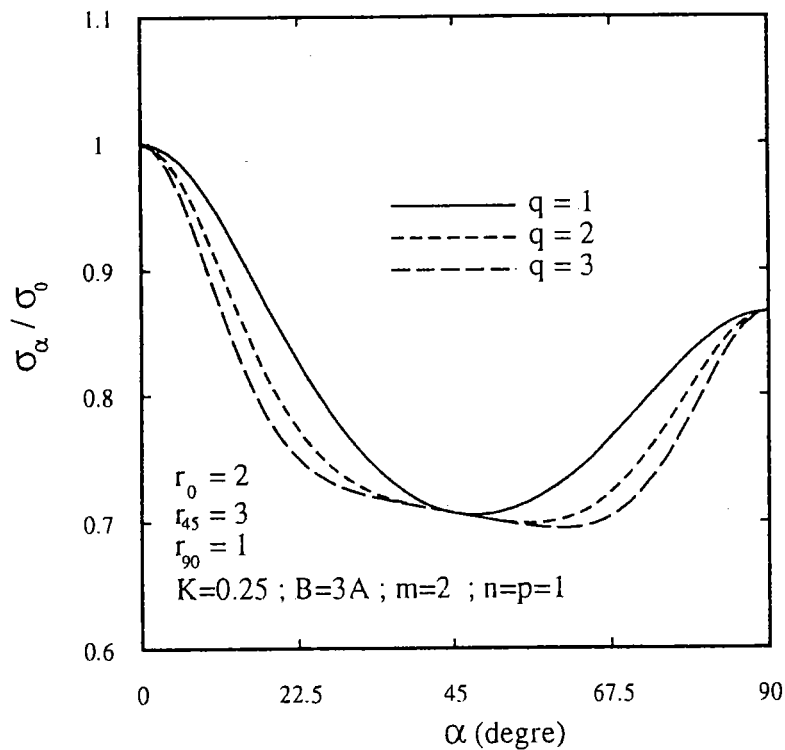


Figure III-8 Influence de l'exposant  $q$  sur la variation de la contrainte uniaxiale en fonction de l'angle  $\alpha$ .

Nous analysons maintenant cinq aciers, pour lesquels les résultats obtenus pour différents trajets de chargement nous ont été fournis par le LEDEPP. Les essais correspondent à des tractions uniaxiales selon les directions à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  de la direction de laminage, à des tractions planes (déformation plane) à  $90^\circ$  de la direction de laminage sur éprouvettes larges, et à des expériences de gonflement hydraulique dont les résultats ont été analysés de façon à obtenir le comportement sous sollicitation équi-biaxiale au pôle. Les courbes  $\sigma$ - $\varepsilon$  de ces cinq aciers ont été reconstituées à partir d'un ajustement selon une loi polynomiale de degré 6 donnée.

Les courbes  $\sigma$ - $\varepsilon$  pour les différents aciers, et les coefficients d'anisotropie mesurés selon les trois directions de traction sont reportés sur les figures III-9 (a), (b), (c), (d) et (e) et dans le tableau III-1, respectivement. Les aciers IF, ES et Solphor présentent une variation du coefficient d'anisotropie avec un minimum au voisinage de  $45^\circ$

( $r_{45} < r_0 < r_{90}$ ). Pour ces trois aciers, la courbe  $\sigma_{45}$  est au dessus des autres, les courbes  $\sigma_0$  et  $\sigma_{90}$  étant peu différentes. Le classement attendu à partir du critère quadratique de Hill,  $\sigma_0 < \sigma_{90}$ , n'est respecté que pour l'acier Solphor, mais l'écart observé dans le cas des aciers IF et ES est très faible. Les aciers à dispersoïdes et Solpress présentent une variation monotone de  $r_\alpha$  ( $r_0 < r_{45} < r_{90}$ ) assez peu marquée, et les courbes de traction sont proches les unes des autres. Les courbes de traction équibiaxiale se situent toutes nettement au dessus des courbes de traction uniaxiale, l'écart relatif étant plus faible pour l'acier à Dispersoïdes qui présente la plus faible valeur du coefficient d'anisotropie. Les courbes de traction plane présentent en général un taux d'écroutissement plus fort puis plus faible que pour les autres essais. Toutefois, les essais de traction large conduisent à des gradients de contraintes et de déformation importants selon la largeur et sont donc les moins fiables vis-à-vis de l'identification de la loi d'écroutissement.

Acier	$r_0$	$r_{45}$	$r_{90}$	$\bar{r}$
IF	2.09	1.94	2.78	2.19
ES	1.84	1.35	2.21	1.69
Solphor	1.68	1.42	1.85	1.6
Solpress	1.92	2.03	2.59	2.15
Dispersoïdes	0.96	1.07	1.24	1.09

Tableau III-1 Valeurs du coefficient d'anisotropie mesurées sur les cinq aciers.

On peut donc estimer que l'écroutissement est comparable quel que soit le trajet envisagé, de sorte que les surfaces de plasticité associées aux courbes  $\sigma$ - $\varepsilon$  pour différents trajets, et pour des niveaux croissants de déformation équivalente, obéissent raisonnablement à un écroutissement isotrope. Plutôt que de choisir la définition de déformation équivalente associée au critère de Von-Mises, il est plus logique de se référer aux résultats expérimentaux, et de tracer les surfaces de plasticité à un niveau donné de travail plastique. Nous comparons, sur les figures III-10 (a), (b), (c), (d) et (e) et III-11 (a), (b), (c), (d) et (e), les surfaces de plasticité correspondant, respectivement, au critère de Hill quadratique et au modèle proposé (équation (III-9)). Les points expérimentaux correspondant à un niveau donné de travail plastique sont également

reportés. La détermination des paramètres du modèle a été effectuée de la façon suivante : les paramètres  $k$ ,  $A$  et  $B$  étant déterminés en faisant intervenir la contrainte en cisaillement pur (qui n'est pas mesurée), cette dernière a été estimée à partir des trois équations A-II-1, A-II-2 et A-II-3 de manière à se situer près de la limite de convexité, et obtenir ainsi un aplatissement des surfaces au voisinage de la déformation plane. Les exposants  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$  ont dans tous les cas été pris égaux à 2, 2, 2 et 1, respectivement, et  $a$  et  $b$  sont donc obtenus à partir des deux valeurs de  $r_0$  et  $r_{90}$ . Les valeurs des paramètres sont récapitulées dans le tableau III-2.

Acier	$k$	$A$	$B$	$a$	$b$
IF	8.2E-2	4,381	15.779	-9.3E-2	0,403
ES	0,4467	3,716	6,2554	-5,89E-2	0,635
Solphor	0,4269	3,76	7,348	-3,17E-2	0,337
Solpress	0,315	4,452	10,74	-9,77E-2	0,147
Dispersoïdes	0,223	3,165	1.267	-8.74E-2	1.3E-2

Tableau III-2 Valeurs des paramètres intervenant dans le modèle proposé (équation (III-9)) pour les cinq aciers.

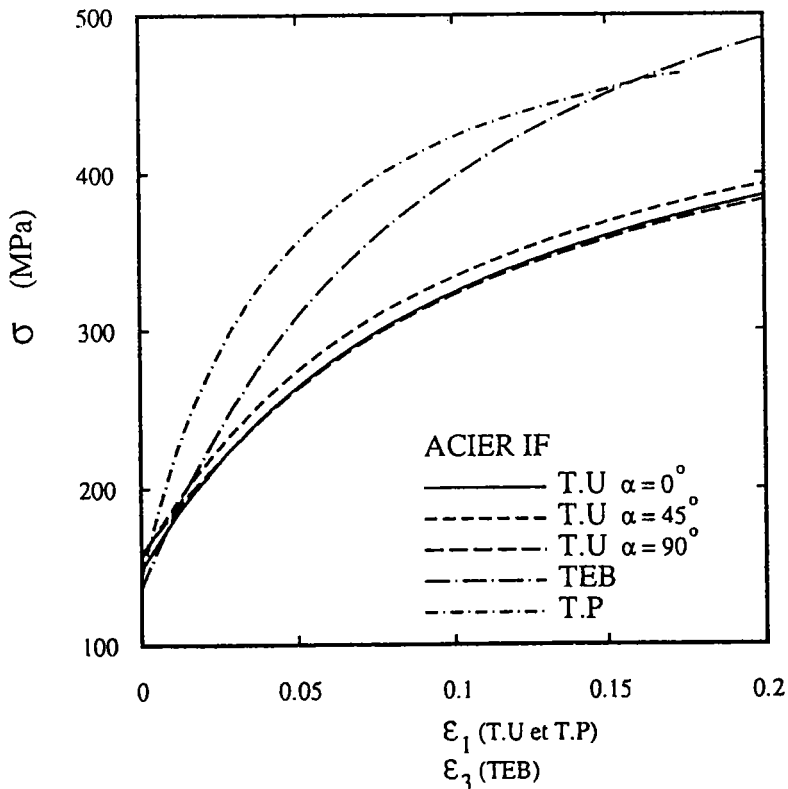


Figure III-9 ( a )

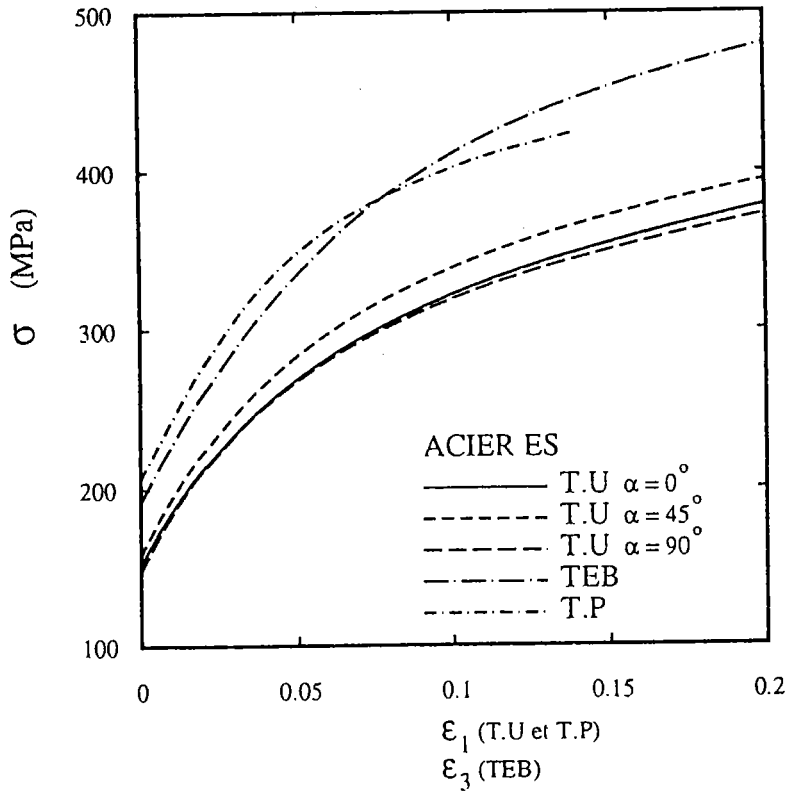


Figure III-9 ( b )

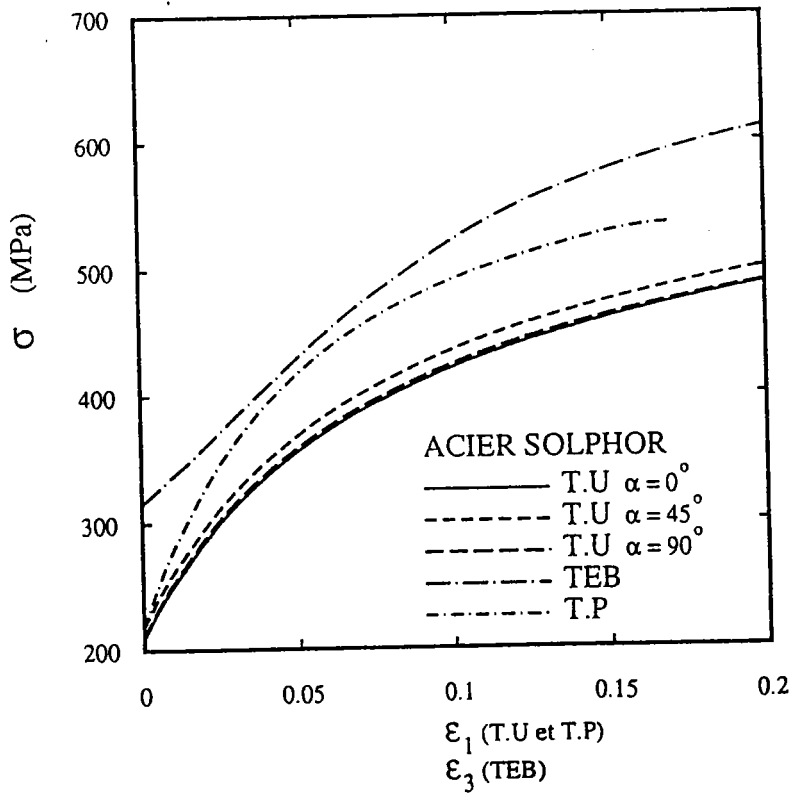


Figure III-9 ( c )

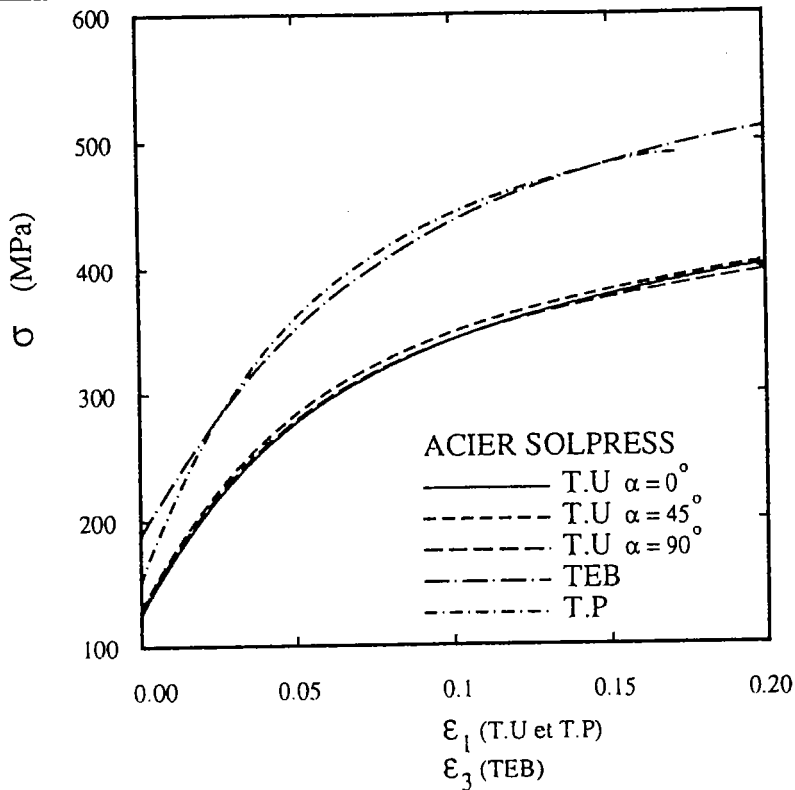


Figure III-9 ( d )

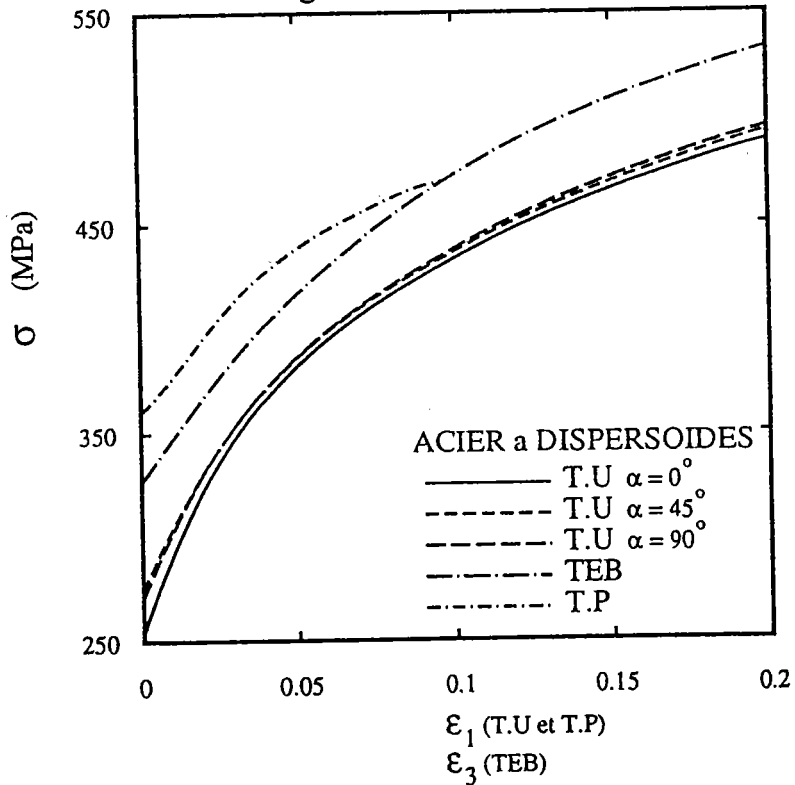


Figure III-9 ( e )

Figure III-9 Courbes  $\sigma$ - $\epsilon$  obtenues sur les cinq nuances d'acier, en traction uniaxiale pour les trois directions à  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $90^\circ$  de la direction de laminage, en traction plane et en traction équi-biaxiale.

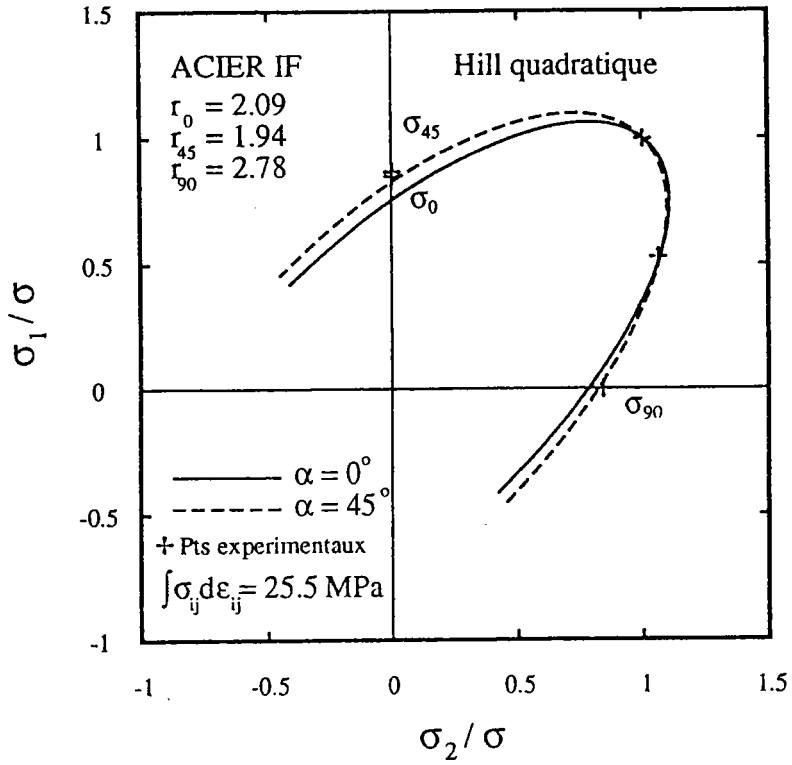


Figure III-10 ( a )

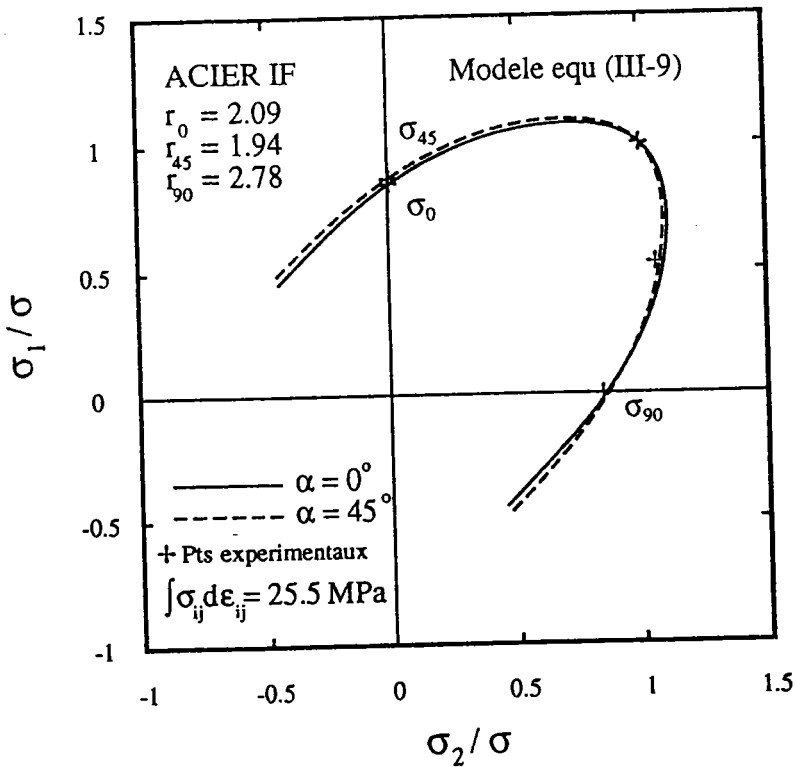


Figure III-11 ( a )

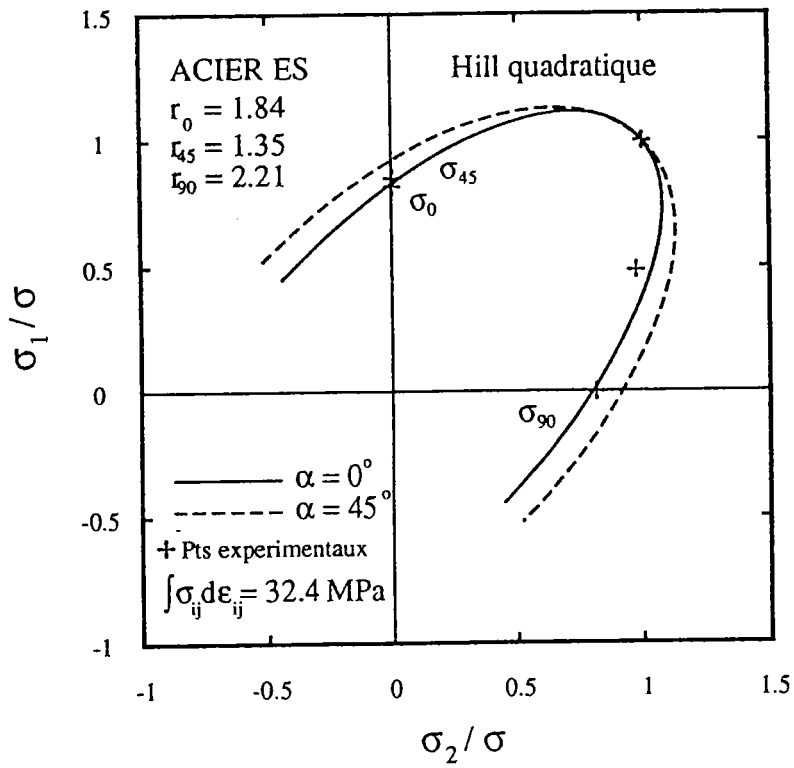


Figure III-10 ( b )

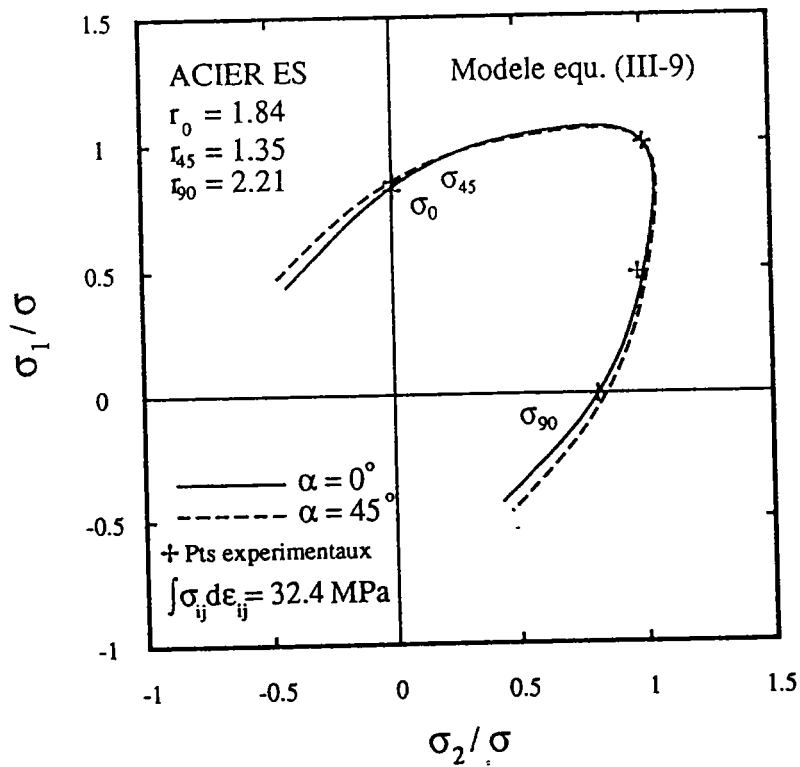


Figure III-11 ( b )



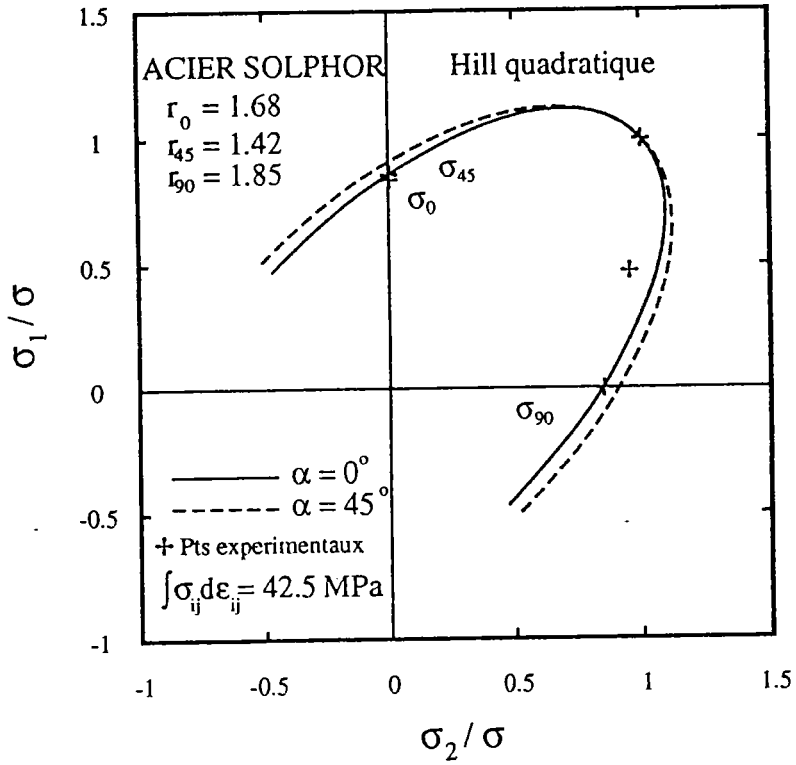


Figure III-10 ( c )

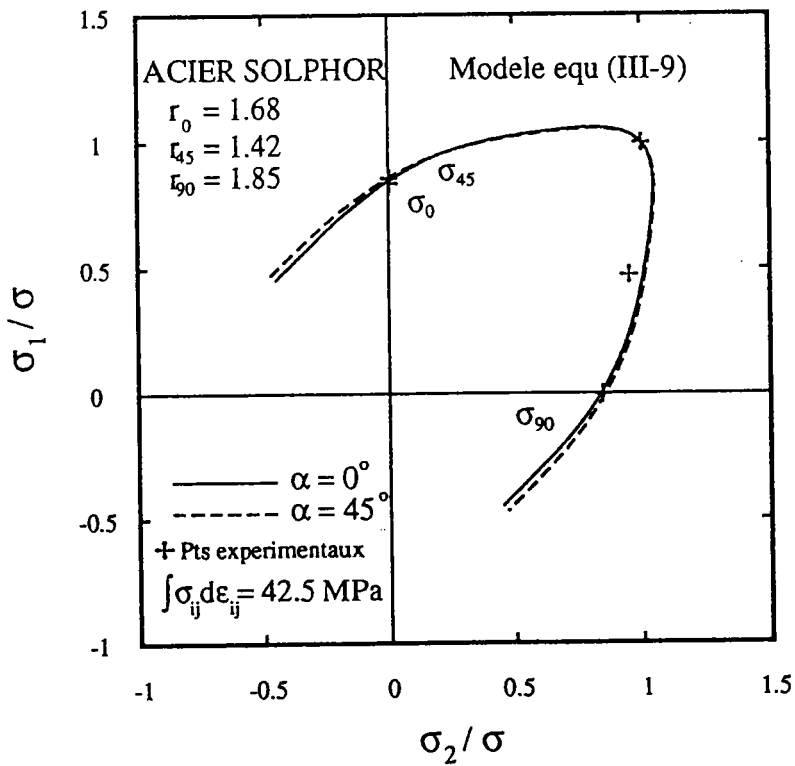


Figure III-11 ( c )

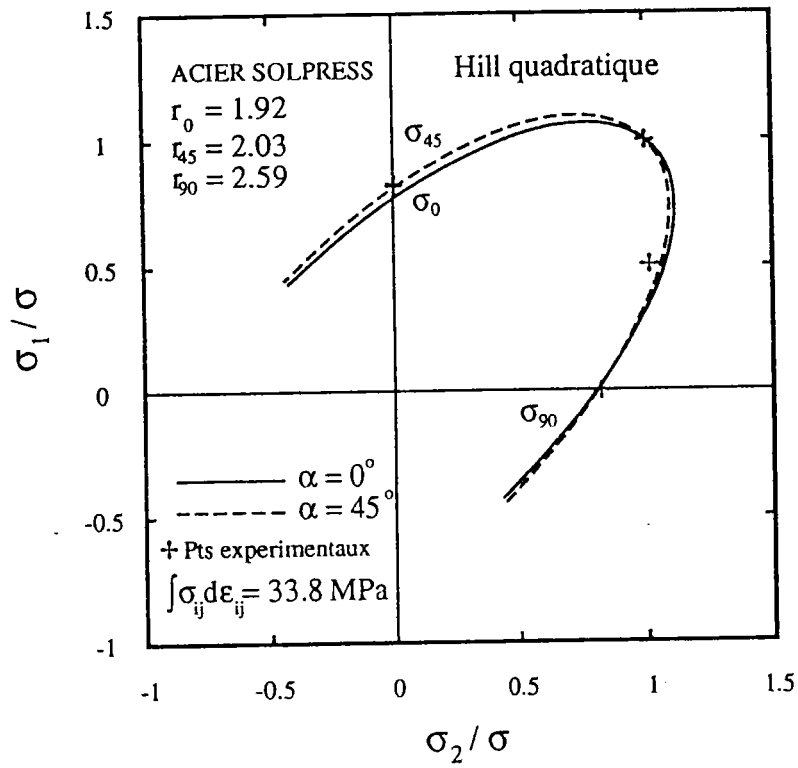


Figure III-10 ( d )

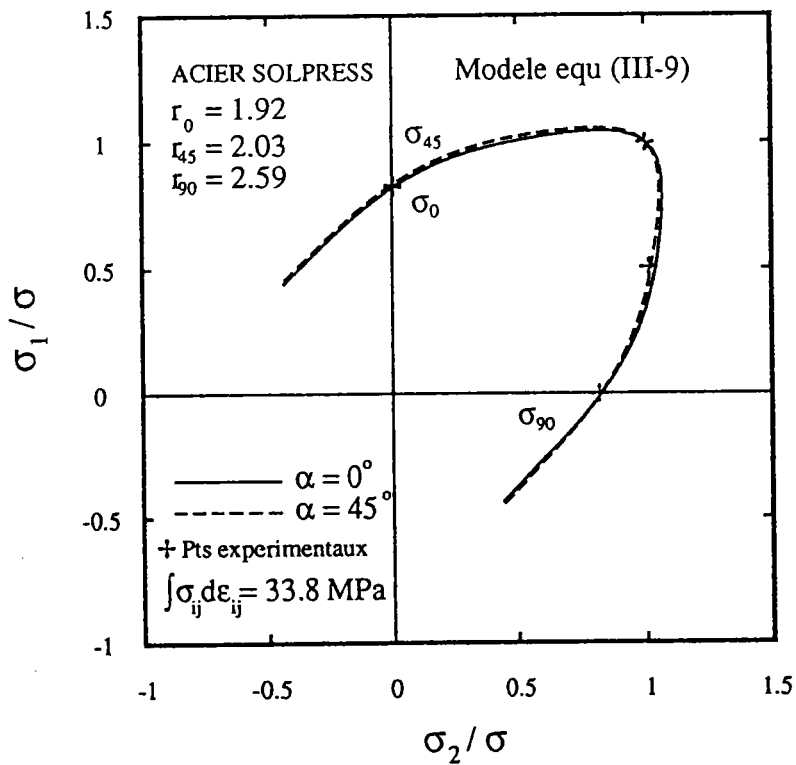


Figure III-11 ( d )

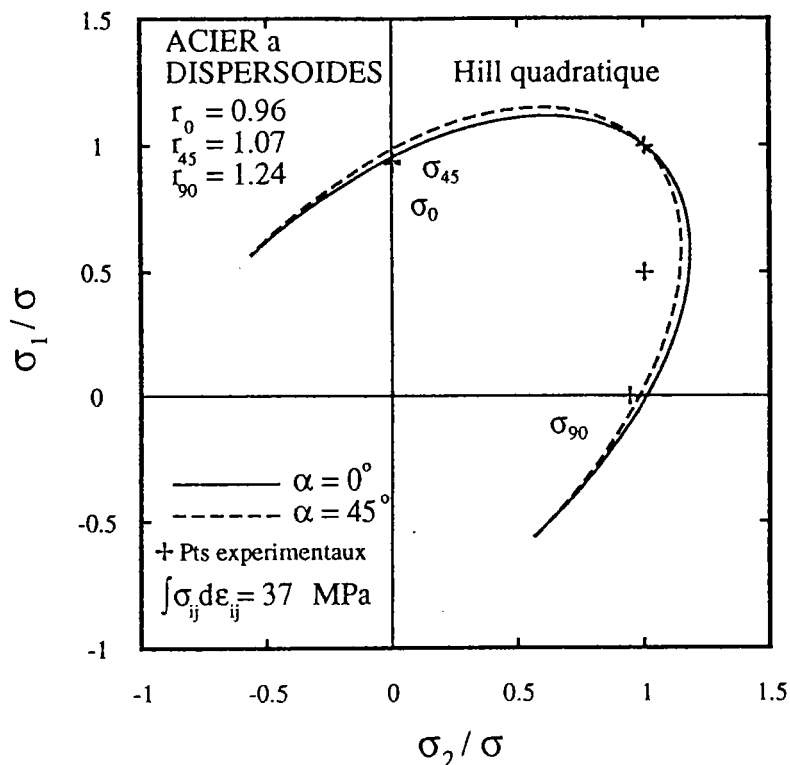


Figure III-10 ( e )

Figure III-10 Comparaison des surfaces de plasticité correspondant au critère quadratique de Hill avec des points expérimentaux pour les cinq aciers

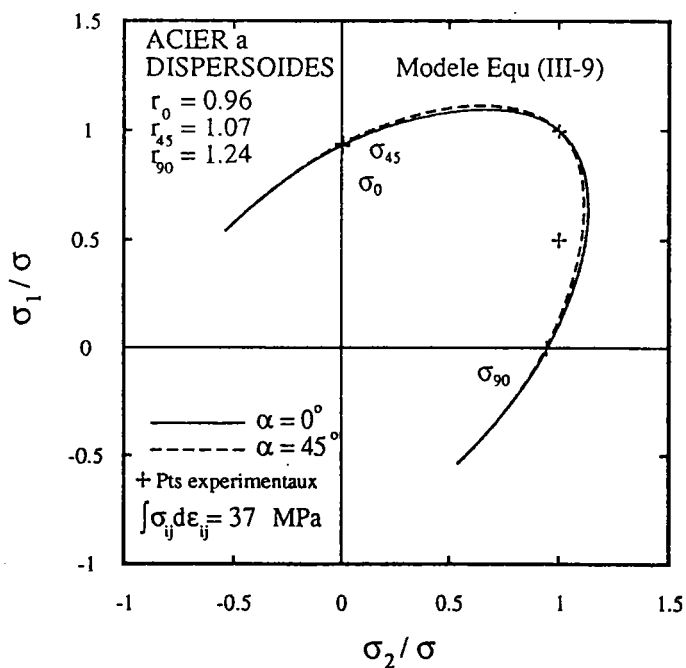


Figure III-11 ( e )

Figure III-11 Comparaison des surfaces de plasticité correspondant au modèle proposé (équation (III-9)) avec des points expérimentaux pour les cinq aciers.

Pour le modèle proposé (équation (III-9)), nous constatons sur la figure (III-11), en plus de l'aplatissement de la surface de plasticité au voisinage de la déformation plane et du cisaillement, une diminution de l'épaisseur du domaine annulaire engendré dans l'espace des contraintes principales ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) lorsque  $\alpha$  varie : cela est dû au choix des exposants  $n$  et  $p$  supérieurs à l'unité. En particulier, les variations de la contrainte uniaxiale sont fortement diminuées par rapport aux prévisions du critère quadratique de Hill, comme cela est mis en évidence sur les figures III-12 (a), (b), (c), (d) et (e). Nous obtenons ainsi des variations beaucoup plus proches de l'expérience tout en observant, comme avec le critère quadratique de Hill, des évolutions qui obéissent aux inéquations  $\sigma_0 < \sigma_{90} < \sigma_{45}$  lorsque  $r_{45} < r_0 < r_{90}$  (aciers IF, ES et Solphor); ou  $\sigma_0 < \sigma_{45} < \sigma_{90}$  lorsque  $r_0 < r_{45} < r_{90}$  (aciers à dispersoïdes et Solpress).

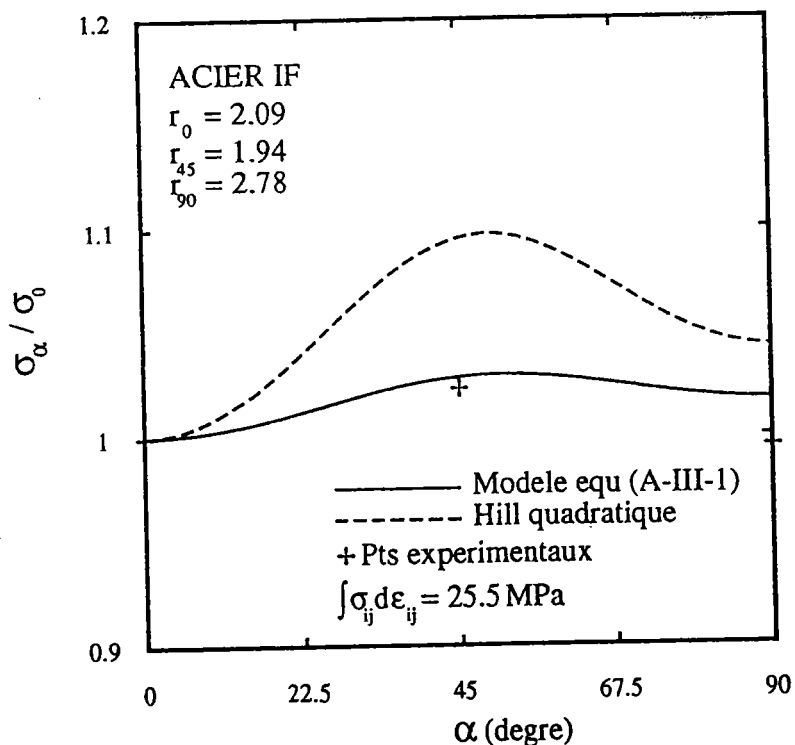


Figure III-12 ( a )

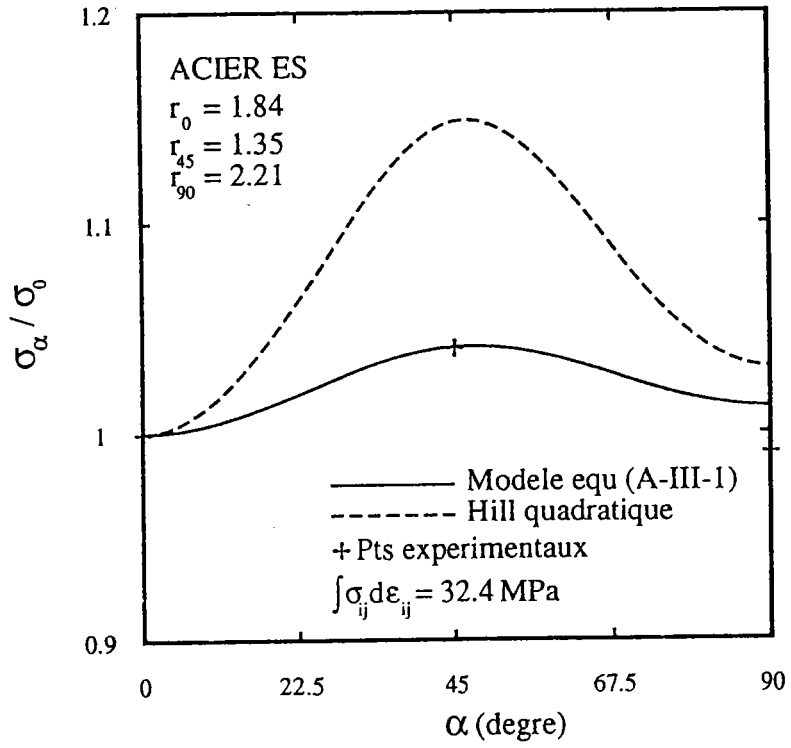


Figure III-12 ( b )

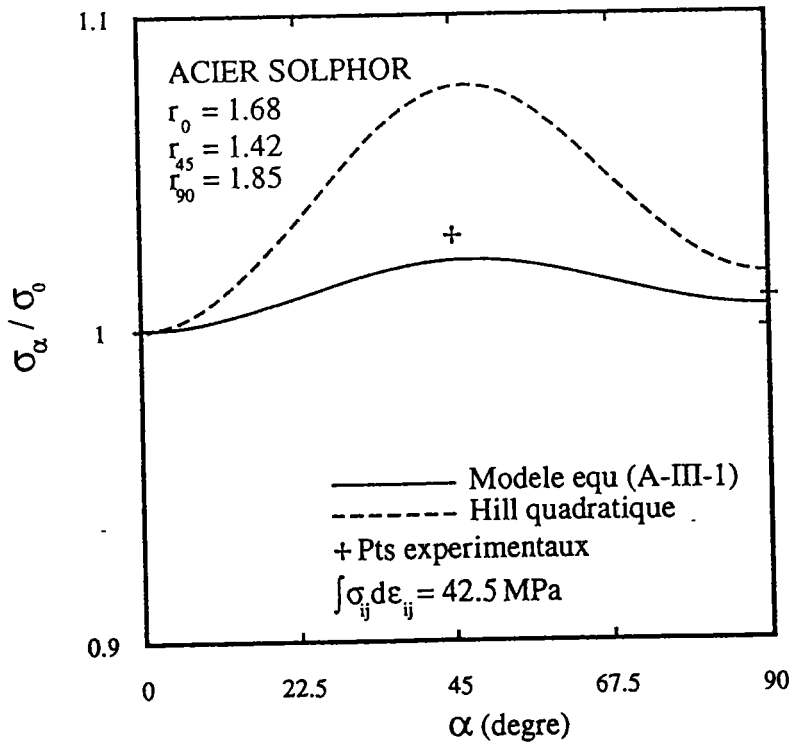


Figure III-12 ( c )

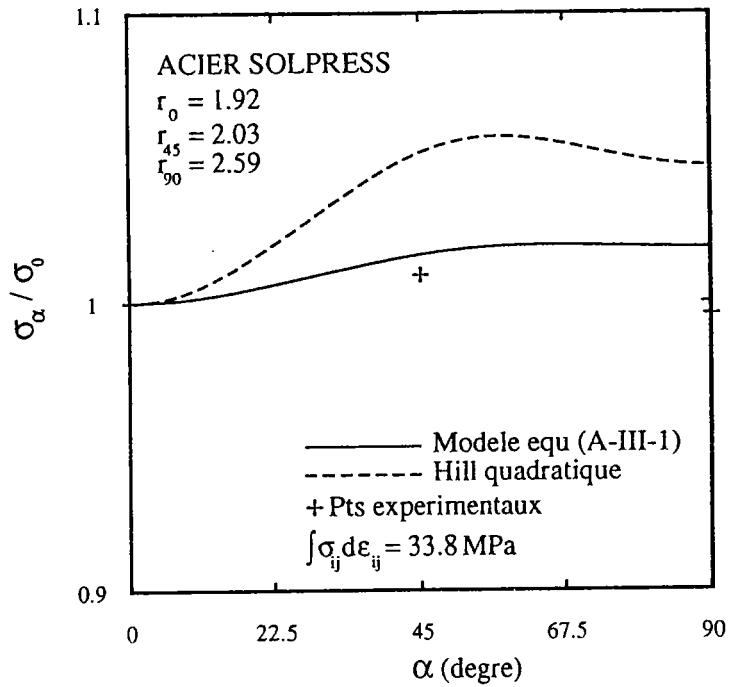


Figure III-12 ( d )

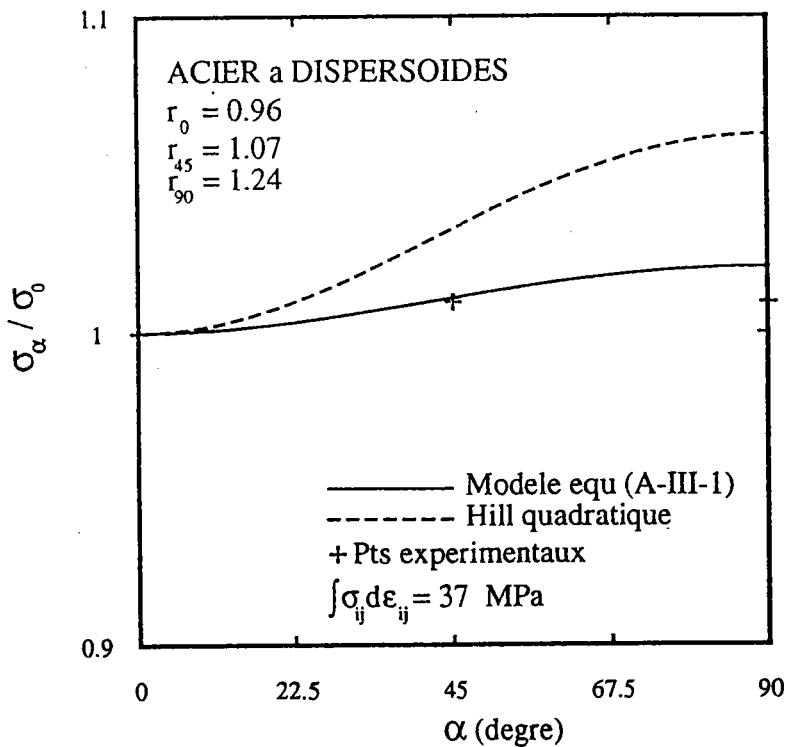


Figure III-12 ( e )

Figure III-12 Variations de la contrainte de traction uniaxiale en fonction de l'orientation  $\alpha$  pour les cinq aciers.

Un tel comportement est observé sur de nombreux aciers. La figure III-13 reprend les résultats présentés sur la figure I-9 pour des aciers austénitiques et austéno-férritiques étudiés par Makinde (1986). Nous avons ajouté les prévisions obtenues avec le présent modèle avec  $m=n=p=2$  et  $q=1$ , qui fournissent un meilleur accord avec les points expérimentaux que le critère quadratique de Hill.

les coefficients d'anisotropie selon les trois directions de traction sont reportés dans le tableau III-3.

ACIER	$r_0$	$r_{45}$	$r_{90}$
AUSTENITE	0.55	1.17	1.5
AUSTENO-FERRITIQUE (31,5% ferrite)	0.36	1.36	0.53
AUSTENO-FERRITIQUE (75% ferrite)	0.39	1.58	0.51

Tableau III-3 Valeurs du coefficient d'anisotropie  $r$ .

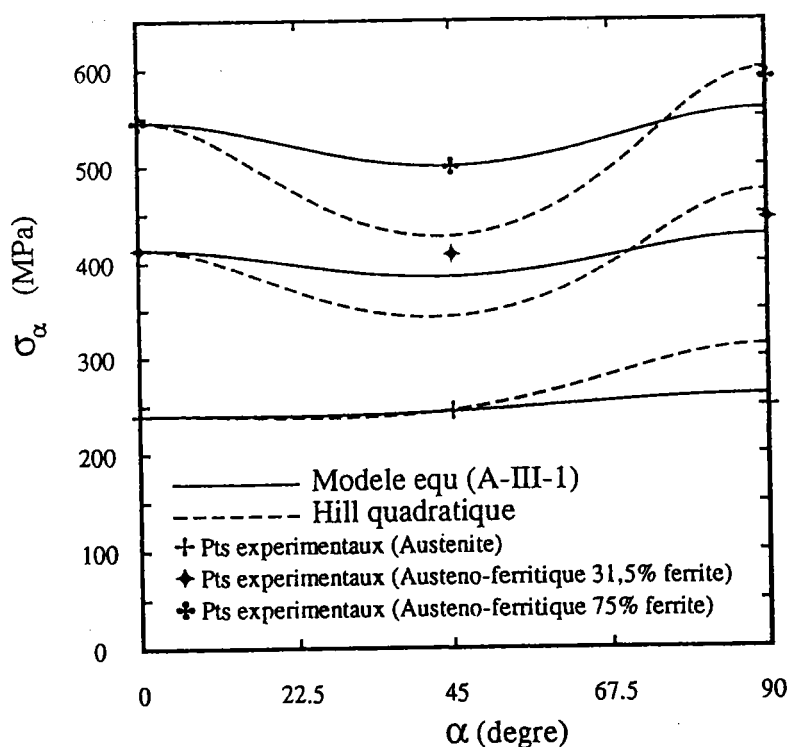


Figure III-13 Variations de la contrainte de traction uniaxiale en fonction de l'orientation  $\alpha$  pour des aciers austénitiques et austéno-férritiques.

Nous présentons enfin sur les figures III-14 à III-18 des comparaisons avec des calculs d'homogénéisation effectués par Lege et coll. (1989). La fonction de distribution des orientations cristallographiques a été choisie comme donnée d'entrée par ces auteurs pour déterminer, à l'aide de la théorie de Taylor-Bishop-Hill, les variations de  $r_\alpha$ ,  $\sigma_\alpha / \sigma_0$  et  $\Gamma_\alpha$  en fonction de l'orientation. On constate (Figures III-15 et III-16) que notre modèle fournit une bonne description des surfaces dans l'espace des contraintes ( $\sigma_{xx}/\sigma$ ,  $\sigma_{yy}/\sigma$ ,  $\sigma_{xy}/\sigma$ ), avec un couplage fort entre contraintes normales et contraintes de cisaillement. De plus, le critère quadratique de Hill et la surface de plasticité utilisée par Lege et coll. (correspondant au critère à trois composantes de Barlat et Lian (1989)) surestiment les variations de  $\sigma_\alpha$  (Figure III-17) et de  $\Gamma_\alpha$  (Figure III-18), qui mesure le glissement observé lors d'une traction hors-axes (équation (II-57)). A partir de ce résultat, on peut prévoir en particulier des cornes d'emboutissage moins prononcées, dans l'essai d'emboutissage d'un godet, avec le présent modèle où les meilleurs ajustements ont été obtenus avec  $n=p=2$ , qu'avec le critère quadratique de Hill.

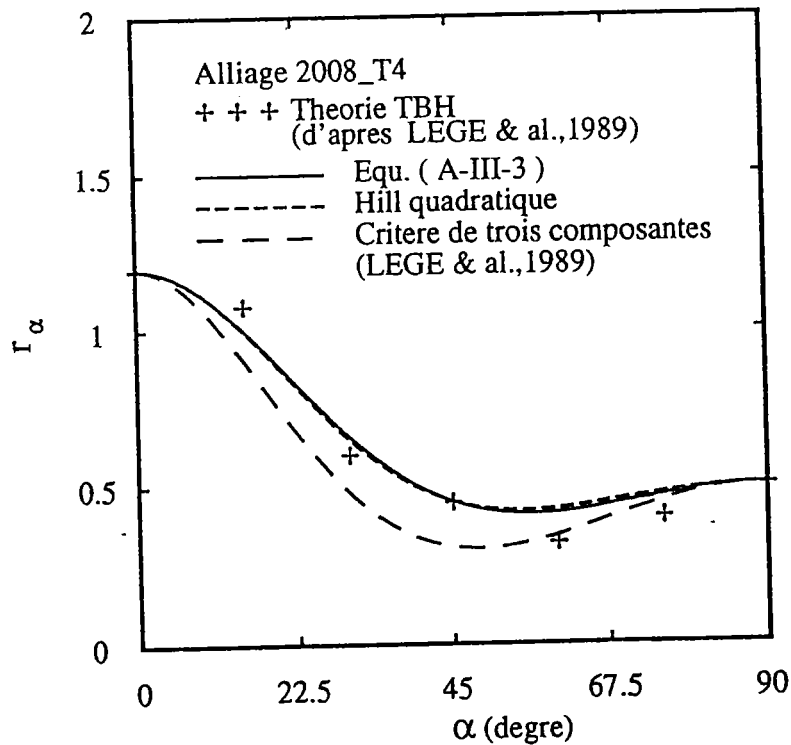


Figure III-14 Variation du coefficient d'anisotropie  $r_\alpha$  pour l'alliage 2008-T4. Prévisions de différents modèles.



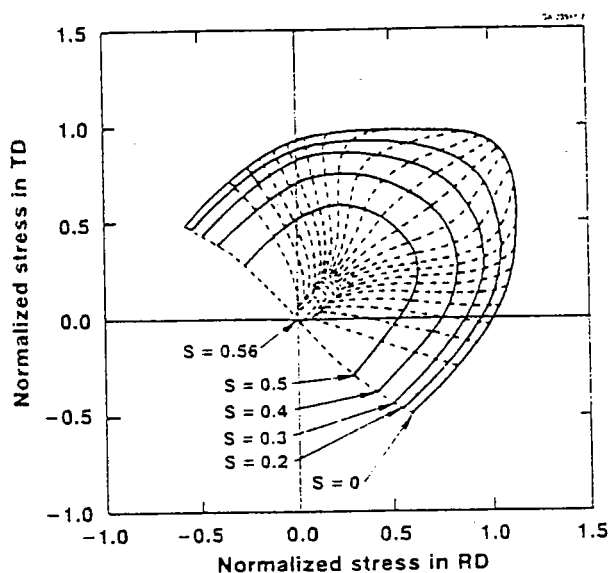


Figure III-15 Représentation de la surface de plasticité pour différentes sections dans l'espace  $(\sigma_{xx}/\sigma, \sigma_{yy}/\sigma, \sigma_{xy}/\sigma)$  pour l'alliage 2008-T4. (d'après Lege et coll. (1989)).

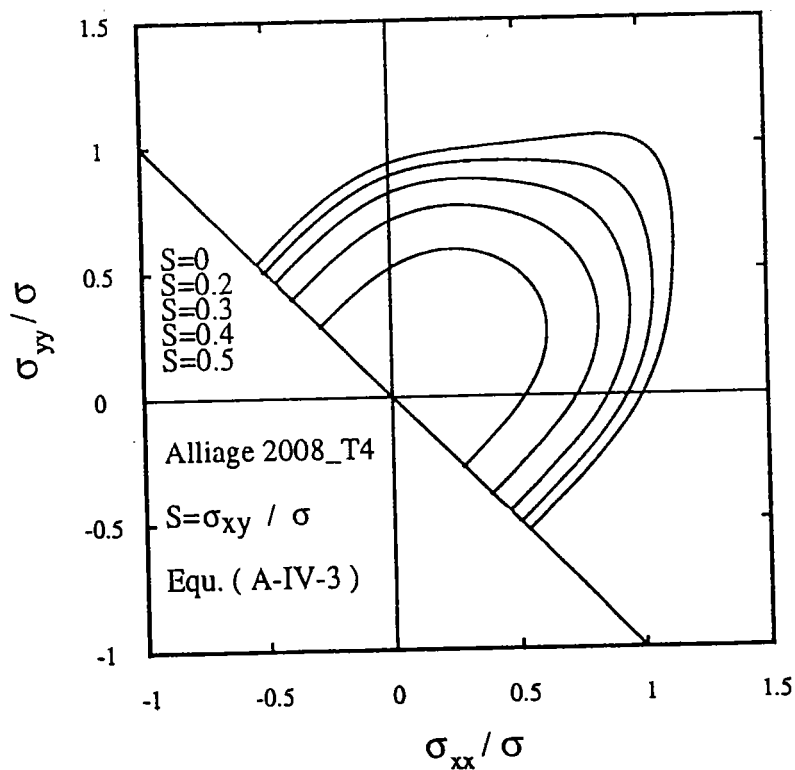


Figure III-16 Représentation de la surface de plasticité pour différentes sections dans l'espace  $(\sigma_{xx}/\sigma, \sigma_{yy}/\sigma, \sigma_{xy}/\sigma)$  pour l'alliage 2008-T4 (équation (A-IV-3)).

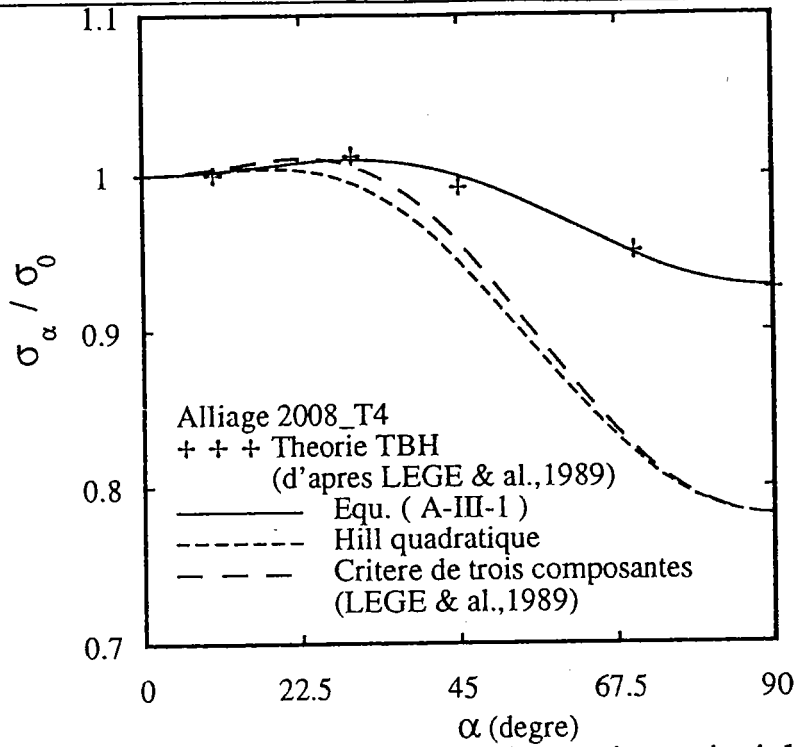


Figure III-17 Variation de la contrainte de traction uniaxiale  $\sigma_\alpha$  pour l'alliage 2008-T4. Prévisions de différents modèles.

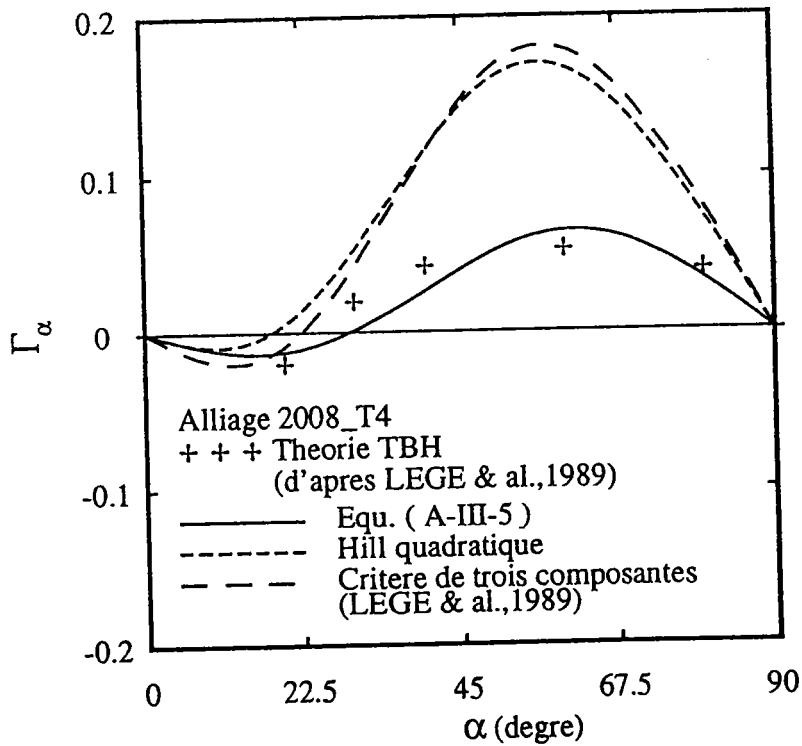


Figure III-18 Variation du coefficient de glissement en traction uniaxiale  $\Gamma_\alpha$  pour l'alliage 2008-T4. Prévisions.

### III-4 CONCLUSION

La description du comportement plastique orthotrope, dont les caractéristiques générales avaient été développées au chapitre II, a été complétée dans ce chapitre par le choix d'une fonction décrivant le comportement isotrope transverse. Cette fonction s'appuie sur une extension du critère isotrope de Drucker. Ainsi, la modélisation proposée nous a conduit à construire un critère de plasticité orthotrope comme une extension pas-à-pas d'un critère isotrope au cas de l'isotropie transverse puis de l'anisotropie transverse. Cette modélisation permet d'analyser de façon simple l'influence des paramètres sur l'atteinte de la limite élastique, avec un découplage entre les paramètres introduits pour décrire la surface de plasticité dans l'hypothèse d'isotropie transverse (ou lorsque les directions principales des contraintes sont à 45° des directions d'orthotropie) et ceux décrivant l'influence de l'orientation de la sollicitation sur les contraintes d'écoulement.

Dans le cas de l'isotropie transverse, le modèle, qui comporte alors trois paramètres, permet d'obtenir un aplatissement de la surface de plasticité au voisinage de la déformation plane et du cisaillement, tout en imposant le rapport contrainte équibiaxiale / contrainte uniaxiale ( $\sigma/\sigma_u$ ) et en respectant la valeur du coefficient d'anisotropie normale  $r$  obtenue en traction uniaxiale.

Dans le cas de l'anisotropie transverse, le modèle est susceptible de rendre compte d'une faible dépendance des contraintes d'écoulement en fonction de l'orientation de la sollicitation, tout en respectant les valeurs du coefficient d'anisotropie  $r_\alpha$  mesuré ou calculé en traction uniaxiale selon les différentes orientations utilisées habituellement : 0°, 45° et 90°. A notre connaissance, seul le critère de Karafillis et Boyce (1993), est également susceptible d'autoriser une telle souplesse.

## CHAPITRE IV

### APPLICATION A LA PREVISION DES LIMITES DE FORMAGE DES TÔLES

#### IV-1 INTRODUCTION

Les procédés de formage des métaux, notamment l'emboutissage des tôles, correspondent à des processus complexes où intervient un grand nombre de paramètres difficiles à cerner et à maîtriser. Par là même, il va de soi qu'une connaissance approfondie du matériau et de sa formabilité est nécessaire pour l'utiliser dans des conditions optimales et pour rationaliser les procédés de mise en forme.

Le calcul, malgré des moyens puissants et des modélisations de plus en plus précises, ne permet pourtant pas encore de prévoir à coup sûr la valeur et la localisation des déformations. La prévision des déformations limites fait couramment appel à la courbe limite de formage (CLF) initialement proposée par Keeler (1965) et par Goodwin (1968). Cette courbe représente, dans un diagramme  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  (où  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont respectivement la plus grande et la plus petite des déformations principales dans le plan de la tôle), les déformations limites obtenues soit à l'apparition de la striction, soit à la rupture de la tôle, pour des chemins de déformation quasi-linéaires (c'est-à-dire en maintenant le rapport  $\rho = \varepsilon_2 / \varepsilon_1$  aussi constant que possible).

Nous exposons tout d'abord dans ce chapitre les principales approches théoriques visant à obtenir une prévision des limites de formage à striction. Nous étudions ensuite, dans le domaine de l'expansion (correspondant à des déformations  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  toutes deux positives) les limites de formage prévues par une analyse de localisation en prenant en compte les influences de l'écroutissage, de la sensibilité à la vitesse de déformation et de l'anisotropie normale du matériau ou, plus généralement, de la forme de la surface de plasticité. Enfin, nous confrontons les prévisions théoriques de notre modèle avec des résultats expérimentaux.

## IV-2 APPROCHES THEORIQUES DES LIMITES DE FORMAGE

### IV-2-1 Analyses de bifurcation

La première analyse de bifurcation est due à Hill (1952). L'instabilité correspond à l'apparition d'une striction localisée, qui se produit le long d'une ligne d'extension nulle, inclinée d'un angle  $\psi$  par rapport à l'axe de plus grande contrainte principale  $\sigma_1$ . Cette ligne n'existe que dans le domaine du rétreint, c'est-à-dire pour  $\rho = \varepsilon_2 / \varepsilon_1 \leq 0$ . La striction se produit lorsque les forces normale et tangentielle à cette direction d'extension nulle deviennent stationnaires. En utilisant le critère de Von Mises avec écrouissage isotrope et la loi d'écrouissage de Hollomon  $\bar{\sigma} = K\bar{\varepsilon}^n$ , le critère s'exprime simplement par :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = n \quad (\text{IV-1})$$

ce qui représente l'équation analytique de la CLF dans le domaine du rétreint.

En utilisant la théorie de l'écoulement, une approche de bifurcation ne permet pas de prévoir les limites de formage observées dans le domaine de l'expansion ( $\rho > 0$ ). Stören et Rice (1975) ont utilisé la théorie de la déformation afin d'obtenir des limites de formage dans ce domaine. Ces auteurs notent que les équations de la théorie de la déformation permettent en fait de modéliser l'apparition d'un point anguleux sur la surface d'écoulement. Cette analyse de bifurcation a été ré-examinée par Hutchinson et Neale (1978).

L'analyse est faite en cherchant si, dans une bande de localisation de la déformation, la vitesse de déformation peut être différente de celle du reste du matériau. L'écriture des équations d'équilibre et de compatibilité fournit alors, classiquement, un système linéaire homogène (de deux équations à deux inconnues) dont le déterminant doit être nul pour avoir une solution non triviale pour le saut de gradient de vitesse. On obtient en particulier, dans le domaine de l'expansion où l'angle de la bande de localisation minimisant la déformation critique est nul, l'expression suivante de la déformation  $\varepsilon_1$  à bifurcation :

$$\varepsilon_{1c} = \frac{3\rho^2 + n(2 + \rho)^2}{2(2 + \rho)(1 + \rho + \rho^2)} \quad (\text{IV-2})$$

#### IV-2-2 Analyses de localisation

Afin d'obtenir des limites de formage dans le domaine de l'expansion, tout en utilisant la théorie de l'écoulement avec une surface sans points anguleux, Marciniak et coll. (1967,1973) ont considéré un matériau à deux zones, chacune homogène mais d'épaisseurs différentes, pour expliquer la localisation de l'écoulement plastique. Hutchinson et Neale (1978) ont étendu l'analyse à tout le domaine allant de la traction uniaxiale à l'expansion équibiaxiale, en supposant le défaut incliné initialement d'un angle  $\psi(0)$ . La localisation de la déformation commence dès le début du chargement, en s'accélégrant fortement au cours de celui-ci. Les déformations limites sont définies comme les valeurs obtenues dans la zone "homogène", lorsque la déformation équivalente dans la zone de sous-épaisseur tend vers l'infini, ou lorsque celle-ci atteint une valeur critique associée à un critère de rupture ductile (Ghosh, 1978).

Le défaut d'épaisseur est caractérisé par le facteur  $f$  :

$$f = \frac{h_0^a - h_0^b}{h_0^a} \quad (\text{IV-3})$$

où  $h_0^a$  et  $h_0^b$  sont, respectivement, les épaisseurs initiales de la zone homogène et de la zone de striction. On impose une trajectoire de déformation rectiligne à la zone homogène, soit :

$$\rho = \varepsilon_2^a / \varepsilon_1^a = \text{Cte} \quad (\text{IV-4})$$

Les axes 1 et 2 sont les axes principaux de contraintes et de vitesses de déformation. L'inclinaison de la bande évolue au cours de la déformation, selon l'expression suivante :

$$\tan \psi = \tan \psi(0) \exp[(1 - \rho)\varepsilon_1^a] \quad (\text{IV-5})$$

En notant  $n$  et  $t$  les directions normale et tangentielle à la bande, les conditions d'équilibre entre les deux zones s'écrivent :

$$\begin{aligned}\sigma_{nn}^a h^a &= \sigma_{nn}^b h^b \\ \sigma_{nt}^a h^a &= \sigma_{nt}^b h^b\end{aligned}\tag{IV-6}$$

L'équation de compatibilité des déformations dans la direction  $t$  est :

$$d\varepsilon_{tt}^a = d\varepsilon_{tt}^b\tag{IV-7}$$

Ces équations, complétées par la loi de comportement du matériau, permettent d'obtenir les équations gouvernant le processus de localisation de la déformation. Leur résolution donne la déformation plastique cumulée  $\bar{\varepsilon}^b$  dans la zone de striction en fonction de la déformation  $\bar{\varepsilon}^a$  dans la zone homogène. L'angle initial  $\psi(0)$  est choisi de façon à minimiser la limite de formage  $\bar{\varepsilon}^a$ . Dans le cas de l'isotropie transverse, cet angle est égal à 0 dans le domaine de l'expansion, ce qui correspond à l'analyse initiale de Marciniak et coll. (1967, 1973).

De nombreuses études ont été effectuées en considérant différentes surfaces de plasticité avec écrouissage isotrope (Parmar et Mellor (1978), Lian, Zhou et Baudalet (1989)), ou en prenant en compte l'influence d'un écrouissage cinématique (Tvergaard (1978), Dudzinski et Molinari (1985)). L'influence de la forme de la surface de plasticité est très importante dans le domaine de l'expansion, comme cela est illustré sur la figure (IV-1).

Une interprétation qualitative de cette influence a été donnée par Sowerby et Duncan (1971). La condition de compatibilité ( $d\varepsilon_2^a = d\varepsilon_2^b$  pour  $\psi=0$ ) implique que le chemin de déformation dans la zone  $b$  dévie progressivement vers la déformation plane au cours du processus de localisation ( $\rho^b = d\varepsilon_2^a / d\varepsilon_2^b \rightarrow 0$ ). Pour une valeur donnée de déformation équivalente, cette évolution vers la déformation plane conduirait à une augmentation de la plus grande contrainte principale  $\sigma_1^b$ . Autrement dit, la déviation du trajet de déformation conduit à un effet stabilisant dans l'équation d'équilibre, qui s'exprime  $\sigma_1^b h^b = \sigma_1^a h^a$  pour  $\psi=0$ . Ferron et Mliha-Touati (1985) ont montré, à partir d'une analyse

linéaire de localisation, que la courbure de la surface de plasticité intervient explicitement dans l'équation de localisation qu'ils ont établie, ce qui traduit bien l'influence de la forme de la surface de plasticité. Lian et coll. (1989) ont choisi d'introduire le rapport de contraintes  $P = \sigma_{1ps} / \sigma_b$  pour rendre compte de cet effet ( $\sigma_b$  et  $\sigma_{1ps}$  étant respectivement la contrainte de traction équi-biaxiale et la plus grande contrainte en déformation plane). La figure (IV-2) montre que pour des valeurs données du coefficient d'écroutissage et du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation, la déformation limite en traction équi-biaxiale augmente lorsque le coefficient P augmente.

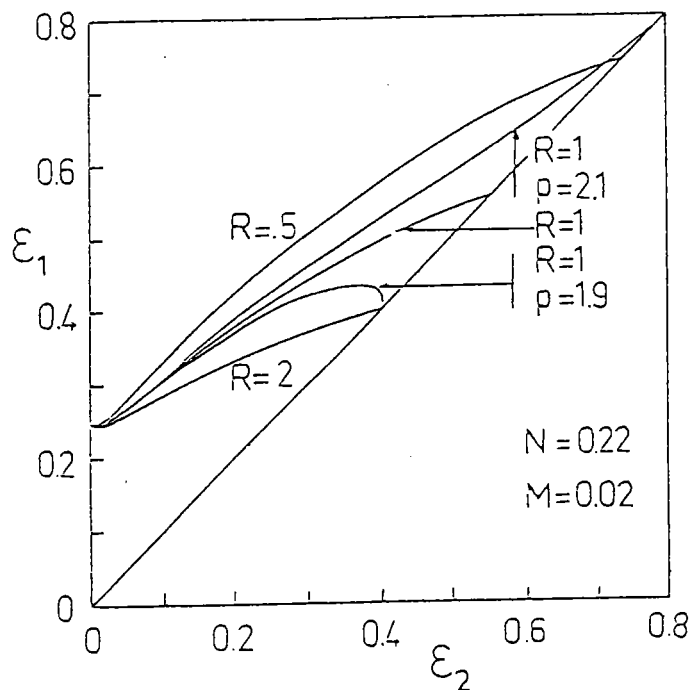


Figure IV-1 Courbes limites de formage calculées avec le critère de Von Mises ( $r=1$ ); le critère quadratique de Hill ( $r=0.5$  et  $r=2$ ); le critère non quadratique de Hill, équation (I-18), (d'après Ferron et Molinari, 1989).

Dans le cas du rétreint la mise en oeuvre numérique est plus complexe puisqu'il faut alors chercher l'angle  $\psi(0)$  minimisant la limite de formage. Toutefois, la sensibilité des limites de formage à la forme de la surface de plasticité est très peu marquée dans le domaine du rétreint. Chan et coll. (1984) et Lian et Zhou (1989) ont montré, en supposant le défaut d'épaisseur aligné selon la direction d'extension nulle, qu'un critère de déformation en épaisseur peut alors être établi,



indépendamment de la surface de plasticité. La déformation critique en épaisseur ne dépend alors que de  $n$  (coefficient d'écroûissage),  $m$  (coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation) et  $f$  (taille du défaut). On retrouve le critère de Hill (équation (IV-1)) avec  $m=0$  et  $f=0$ . L'erreur introduite dans cette analyse ne dépassant pas 2% par rapport à une analyse exacte, il semble inutile d'étudier plus en détail l'influence du choix de la surface de plasticité dans le domaine du rétreint. De plus, les prévisions théoriques sont généralement en bon accord avec l'expérience dans ce domaine.

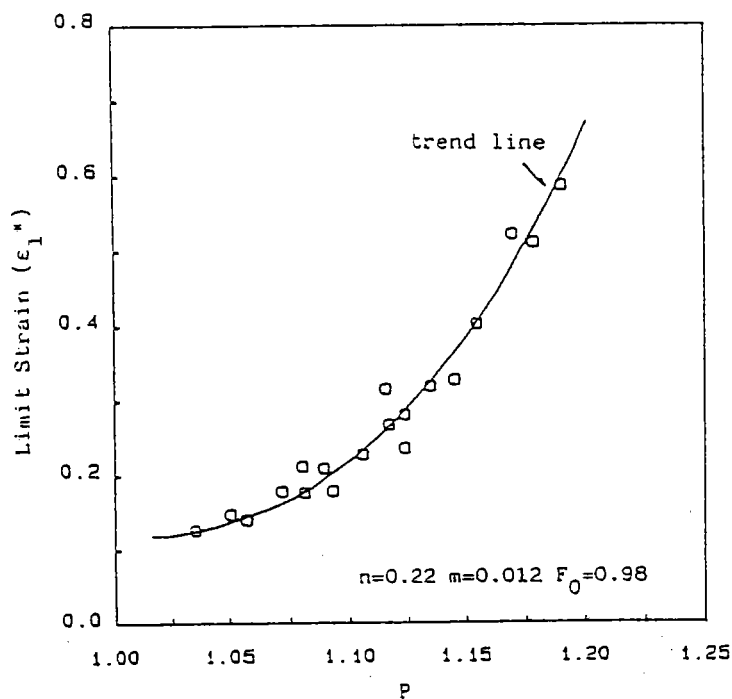


Figure IV-2 Influence du rapport  $P = \sigma_{1ps} / \sigma_b$  sur la limite de formage en traction équilibrée, (d'après Lian et coll, 1989).

#### IV-2-3 Analyse de perturbation

Une analyse de perturbation a été effectuée par Dudzinski et Molinari (1991) afin d'éviter le caractère artificiel du défaut introduit dans les analyses de localisation. A chaque instant du processus de déformation, une perturbation est appliquée. La croissance ou la décroissance de la perturbation traduit la stabilité ou l'instabilité de l'écoulement. Un faible taux de croissance de la perturbation est obtenu en expansion, montrant le caractère instable de l'écoulement, même si aucune bifurcation n'est

prévue. Les limites de formage sont alors définies à partir du choix d'une valeur critique du taux de croissance de la perturbation.

### IV-3 LIMITES DE FORMAGE EN EXPANSION

Nous analysons maintenant les limites de formage prévues à partir d'une approche de localisation utilisant le modèle de plasticité décrit dans les chapitres II et III. Nous nous limitons au cas de l'expansion, pour un matériau à isotropie transverse et à écrouissage isotrope. Le matériau est viscoplastique, et vérifie une loi multiplicative de la forme  $\sigma = K(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n \dot{\varepsilon}^m$ .

#### IV-3-1 Mise en équations

Dans le cas étudié l'angle  $\psi$  minimisant la limite de formage est nul. On considère donc un défaut géométrique de taille  $f$ , perpendiculaire à la direction de plus grande contrainte  $\sigma_1$ . Les équations d'équilibre et de compatibilité sont données respectivement par :

$$\sigma_1^a h^a = \sigma_1^b h^b \quad (IV-8)$$

et

$$\Delta \varepsilon_2^a = \Delta \varepsilon_2^b$$

où  $\Delta \xi$  désigne l'incrément de la variable  $\xi$  au cours d'un pas de calcul. On impose un chemin de déformation radial dans la zone homogène  $a$ , soit :

$$\rho = \frac{\Delta \varepsilon_2^a}{\Delta \varepsilon_1^a} = \text{Cte} = \rho^a \quad (IV-9)$$

Le calcul est piloté par le choix d'un incrément  $\Delta \varepsilon_1^a$ . La valeur nominale  $\theta^a$  de l'angle  $\theta$  sur la surface de plasticité est connue en fonction de  $\rho^a$  à partir de la relation suivante, obtenue à partir des équations (II-22) :

$$\rho = \frac{g \cos(\theta + \pi / 4) + g' \sin(\theta + \pi / 4)}{g \sin(\theta + \pi / 4) - g' \cos(\theta + \pi / 4)} \quad (IV-10)$$

et l'incrément de déformation équivalente dans la zone a se calcule à l'aide de (II-22) :

$$\Delta\varepsilon = \frac{\sqrt{2}g^2\Delta\varepsilon_1}{g \sin(\theta + \pi / 4) - g' \cos(\theta + \pi / 4)} \quad (\text{IV-11})$$

On peut ainsi déterminer la force normale  $F^a = \sigma_1^a h^a$  à la fin du pas de calcul. La résolution consiste alors à déterminer les valeurs du rapport de vitesse de déformation  $\rho^b = \Delta\varepsilon_2^a / \Delta\varepsilon_1^b$  ou, de façon équivalente, la valeur de l'angle  $\theta^b$  sur la surface de plasticité, pendant le pas de calcul considéré, de façon que  $F^b = \sigma_1^b h^b$  soit égal à  $F^a$  à la fin du pas. On utilise une procédure itérative sur  $\theta^b$ , qui est nécessairement compris entre  $\theta^a$  et  $\theta_{ps}$  (angle correspondant à la déformation plane).

Les déformations limites ont été définies dans la zone a, lorsque  $\Delta\varepsilon_1^b$  tend vers l'infini (en pratique, le calcul est arrêté lorsque  $\Delta\varepsilon_1^b / \Delta\varepsilon_1^a > 50$ ). Nous avons également envisagé la possibilité d'une rupture ductile dans la zone b, qui surviendrait alors que la localisation serait encore peu développée. Une telle situation peut se rencontrer lorsqu'on s'approche d'un état de traction équibiaxiale (Ghosh, 1978). Nous avons pour cela utilisé le critère de rupture ductile de Cockcroft et Latham (1968), qui s'exprime par l'équation :

$$\int_0^{\varepsilon_f} \sigma(\sigma_1 / \sigma) d\varepsilon = C \quad (\text{IV-12})$$

où  $\sigma = \sigma^b$  et  $\varepsilon = \varepsilon^b$  désignent la contrainte et la déformation équivalente dans la zone b,  $\sigma_1 = \sigma_1^b$  est la plus grande contrainte principale dans la zone b,  $\varepsilon_f$  est la déformation équivalente à rupture et C est une constante. La valeur de la constante C a été choisie en supposant que la déformation à rupture en déformation plane,  $\varepsilon_{1fps}$ , est connue. En utilisant les définitions de contrainte équivalente et de déformation équivalente associées à un état de contraintes équibiaxiales, on montre alors que la constante C, pour un matériau insensible à la vitesse de déformation, est liée à K par la relation :

$$\frac{C}{K} = \frac{P}{n+1} \left[ \left( \varepsilon_0 + P\varepsilon_{1fps} \right)^{n+1} - \varepsilon_0^{n+1} \right] \quad (\text{IV-13})$$

$$\text{avec } P = \frac{\sigma_{1ps}}{\sigma} = \sqrt{2}g(\theta_{ps})\sin(\theta_{ps} + \pi/4).$$

Dans toutes les simulations présentées ci-après, la taille initiale  $f$  du défaut a été prise égale à 1%.

#### IV-3-2 Influence de l'écroissage et de la sensibilité à la vitesse de déformation

La figure (IV-3) montre, pour un matériau de Von Mises insensible à la vitesse de déformation, l'influence de l'exposant d'écroissage  $n$ . On observe globalement une augmentation des limites de formage associée à une augmentation de  $n$ , le rapport des déformations limites en traction équi-biaxiale et en déformation plane tendant à diminuer lorsque  $n$  augmente.

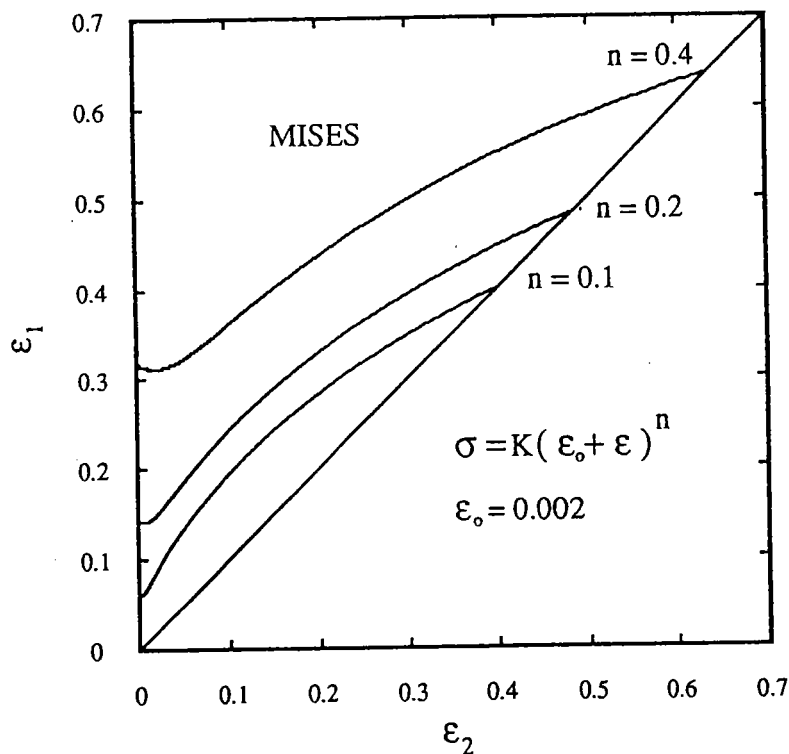


Figure IV-3 Influence de l'exposant d'écroissage  $n$  sur la CLF en expansion.

L'effet stabilisant de la sensibilité à la vitesse de déformation est qualitativement comparable à celui de l'écroissage (Figure (IV-4)).

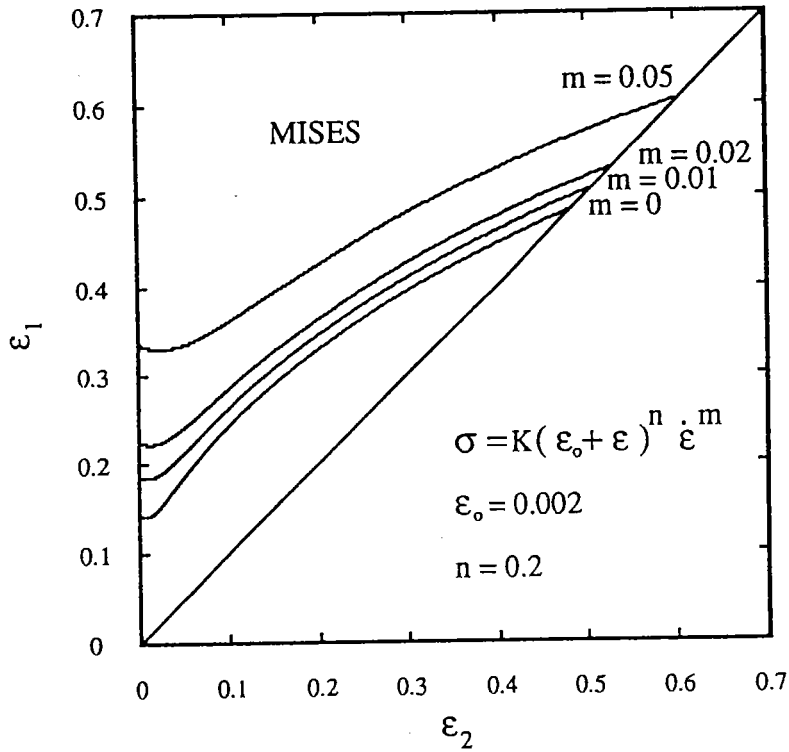


Figure IV-4 Influence de la sensibilité à la vitesse de déformation  $m$  sur la CLF en expansion.

#### IV-3-3 Influence de la forme de la surface de plasticité

Cette influence est d'abord mise en évidence dans le cas d'un matériau isotrope obéissant soit au critère de Von Mises, soit au critère de Drucker (Figure (IV-5)). Les limites de formage plus faibles obtenues avec le critère de Drucker s'expliquent par l'aplatissement de la surface de plasticité au voisinage de la déformation plane, c'est-à-dire par la valeur plus faible du rapport  $P = \sigma_{1ps} / \sigma_b$ .

L'influence du coefficient d'anisotropie observée en utilisant le critère quadratique de Hill (1948) est visualisée sur la figure (IV-6). De la même façon que précédemment, les limites de formage plus faible obtenues lorsque  $r$  augmente sont dues au fait que  $P$  diminue lorsque  $r$  augmente. En utilisant le critère à isotropie transverse correspondant à l'équation (III-8) avec  $B=3A$  (cf. les surfaces de plasticité représentées sur la figure (III-4)), on obtient pour différentes valeurs de  $r$ , les CLF

présentées sur la figure (IV-7). L'influence de  $r$  est alors nettement diminuée, les variations de  $P$  étant elles-mêmes nettement moindres qu'avec le critère quadratique de Hill.

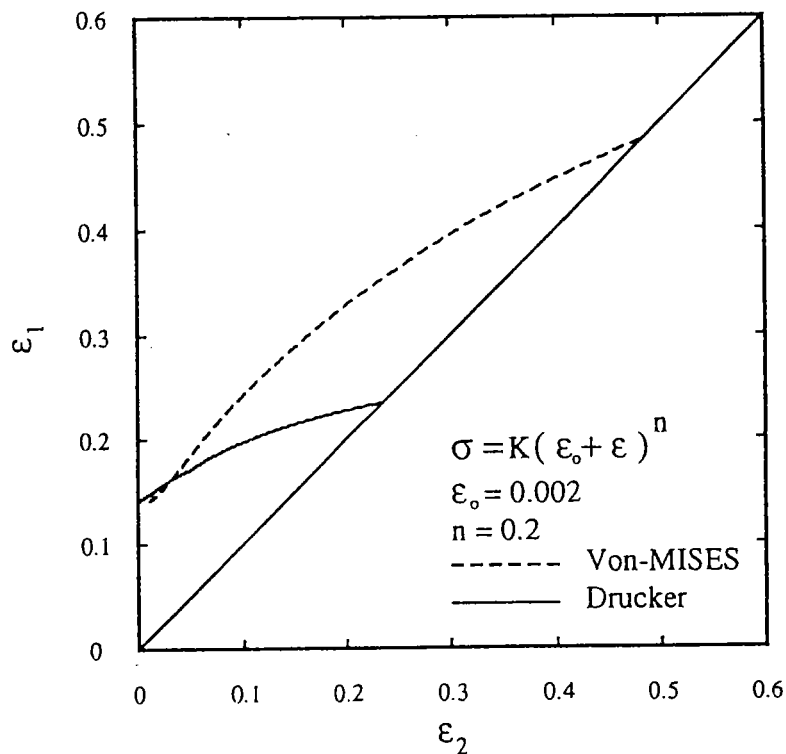


Figure IV-5 CLF calculées avec le critère de Von-Mises, et avec le critère de Drucker.

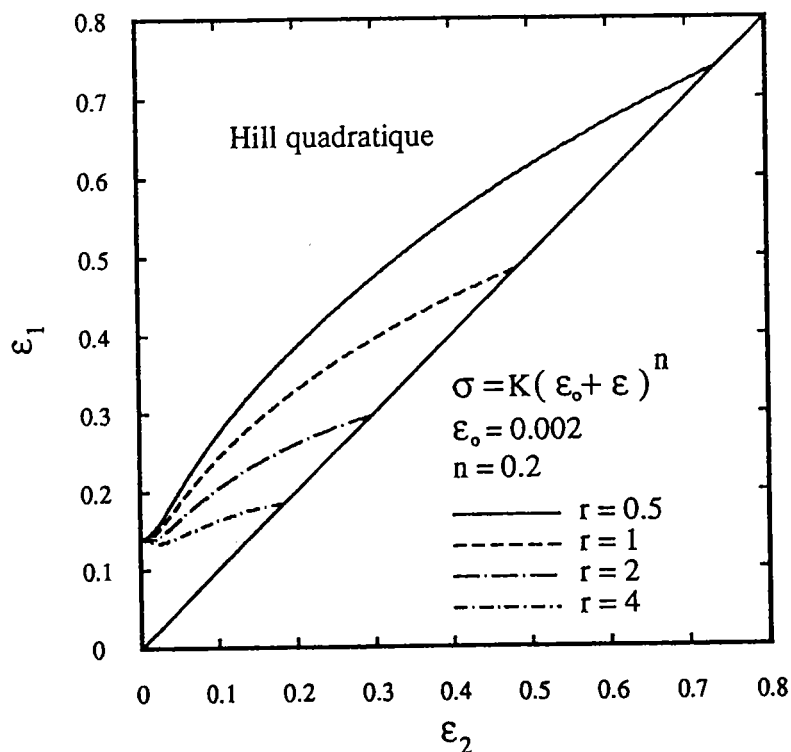


Figure IV-6 CLF calculées avec le critère quadratique de Hill, pour différentes valeurs du coefficient d'anisotropie normale  $r$ .

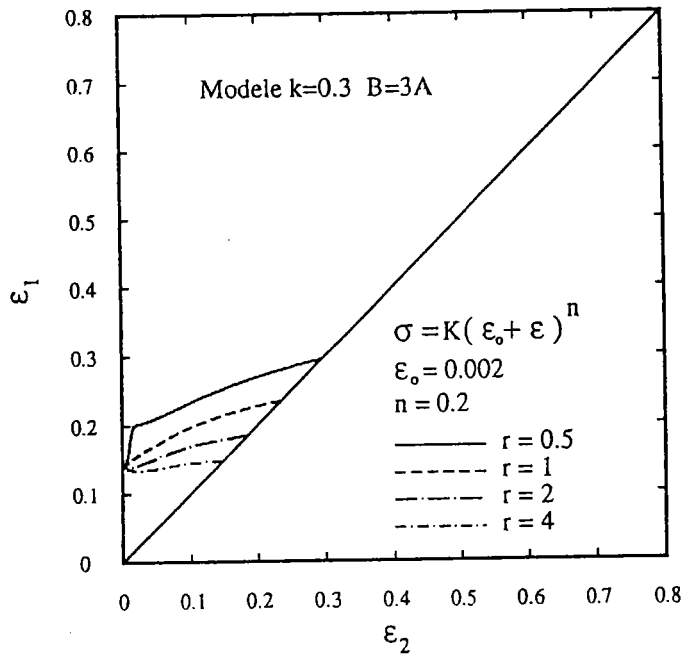


Figure IV-7 CLF calculées avec le présent modèle, pour différentes valeurs du coefficient d'anisotropie normale r.

Afin de mettre en évidence cette influence du paramètre P, nous avons porté sur la figure (IV-8) les déformations limites en traction équi-biaxiale en fonction de P, en prenant les valeurs utilisées par Lian et coll. (1989), n=0,22; m=0,012 et f=0,02.

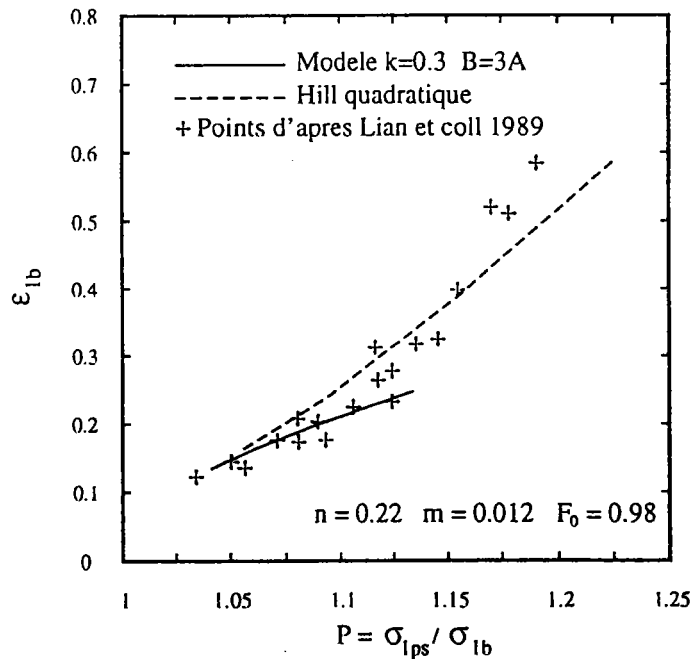


Figure IV-8 Influence du rapport  $P = \sigma_{1ps} / \sigma_b$  sur les limites de formage en traction équi-biaxiale.

Les courbes obtenues en faisant varier le coefficient de  $r$  dans le critère quadratique de Hill et dans notre modèle fournissent des résultats qui se recoupent parfaitement avec ceux de Lian et coll. (1989). Le rapport  $P$ , qui mesure en quelque sorte une surcontrainte associée au chargement de trajet de déformation dans la zone de sous-épaisseur, joue un rôle stabilisant essentiel dans le développement de la striction dans le domaine de l'expansion.

#### IV-3-4 Rôle de la rupture ductile

Les simulations ont également été effectuées en utilisant le critère de rupture ductile, correspondant à l'équation (IV-12). Avec un coefficient d'écroutissage  $n=0,2$ , et en supposant que la déformation à rupture en déformation plane  $\varepsilon_{1fps}$  est égale à 0,8 (valeur moyenne obtenue par Ghosh (1976) sur des tôles d'acier), les limites de formage ne sont influencées par l'intervention de la rupture ductile que lorsque celles ci dépassent la valeur de 0,6 en traction équibiaxiale. C'est le cas pour les faibles valeurs de  $r$  avec le critère quadratique de Hill (figure IV-9), ou pour des fortes valeurs du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. Les limites de formage sont alors plus basses au voisinage de la traction équibiaxiale.

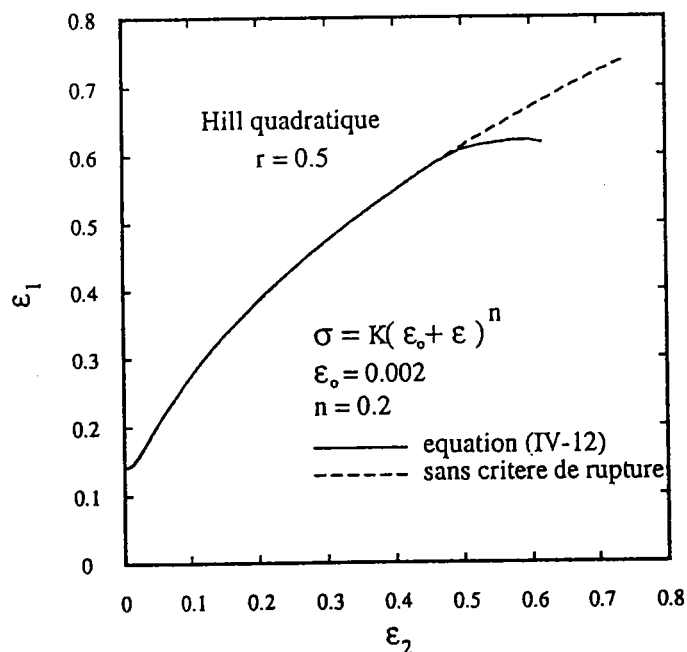


Figure IV-9 Influence de la rupture ductile sur les limites de formage calculées dans le domaine de l'expansion.

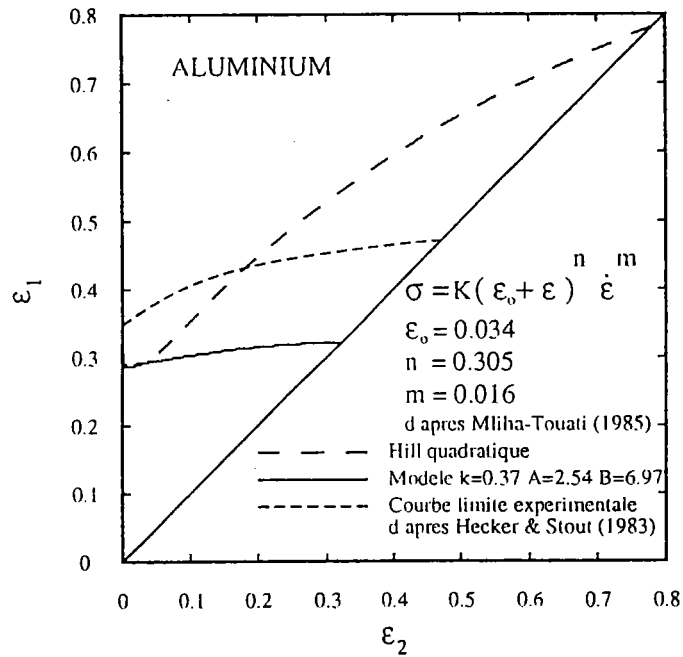


#### IV-3-5 Comparaison avec des courbes limites de formage expérimentales

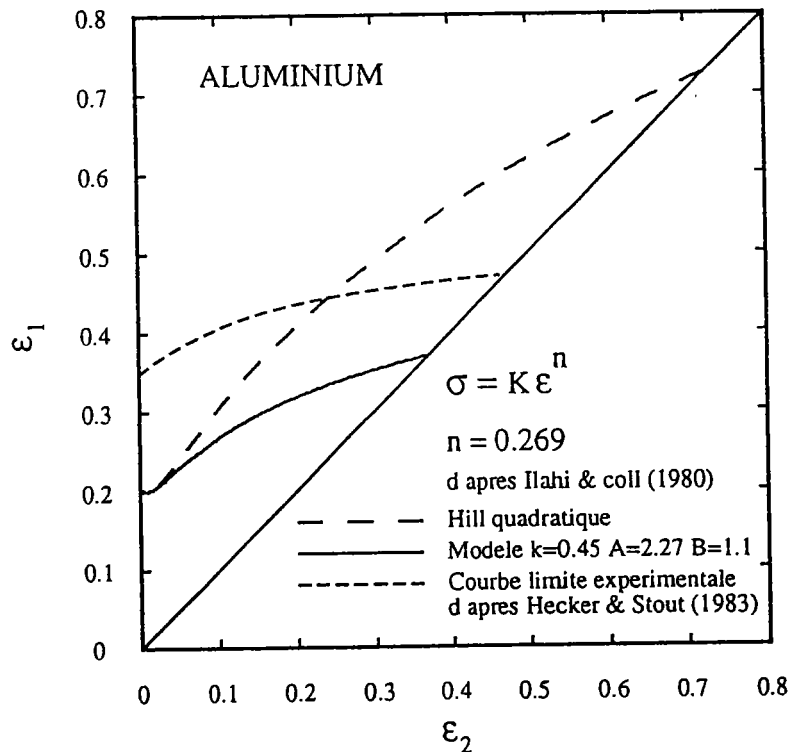
Les figures IV-10 comparent des CLF expérimentales obtenues par chargement "dans le plan", empruntées à Hecker et Stout (1983), avec celles calculées avec le critère quadratique de Hill, et avec le présent modèle. Dans la mesure où nous ne disposons pas de l'ensemble des paramètres rhéologiques du matériau étudié par Hecker et Stout, nous avons procédé de la manière suivante : dans les simulations de la figure IV-10-a, nous avons utilisé les deux surfaces de plasticité de la figure III-5, en faisant appel à la loi d'écoulement viscoplastique établie par Mliha-touati (1985) sur une même nuance d'aluminium. Dans la figure IV-10-b, nous avons utilisé les paramètres déduits d'une étude de Ilahi et coll. (1981), en utilisant le coefficient d'anisotropie moyen, la loi d'écoulement et une surface de plasticité déduite des résultats expérimentaux de ces auteurs. Dans les deux simulations, nous remarquons que la CLF prévue par le modèle a une allure proche de celle déterminée par Hecker et Stout, mais qu'elle est plus basse, ce qui peut s'expliquer par une valeur trop faible du coefficient d'écoulement utilisé dans les calculs. Par contre, l'accord concernant la forme de la CLF est compatible avec une estimation correcte du rapport  $P = \sigma_{1ps} / \sigma_b$  avec le présent modèle, alors que celui-ci est surestimé avec le critère quadratique de Hill.

Sur la figure IV-11, nous présentons des CLF expérimentale et calculées, pour un acier ES qui a un coefficient d'anisotropie moyen  $\bar{r} = 1,92$ , et dont les caractéristiques d'écoulement ont été estimées selon la loi de Hollomon. Les points expérimentaux ont été déterminés à partir d'essais de gonflement hydraulique en utilisant des flans circulaires et elliptiques, de différents rapports d'ellipticité. Les CLF calculées avec le critère de Hill ou avec le présent modèle sont proches, les surfaces de plasticité correspondantes étant elles-mêmes peu différentes. En outre, celles-ci se situent toutes deux en dessous des points expérimentaux. Toutefois, il convient de remarquer que les limites de formage sont sensibles à un "effet de structure", et dépendent du mode de chargement hors-plan appliqué pour leur détermination. Cette influence des conditions aux limites, et le caractère non-intrinsèque des CLF a été discuté en particulier par Zeghloul et Ferron (1993). De ce fait, les CLF déterminées dans l'hypothèse d'un chargement plan présentent un intérêt pour estimer la résistance du matériau à la striction, mais l'analyse du

processus de mise en forme ne peut être évitée pour accéder aux limites de formage effectivement observées, même si, dans le cas présent de l'acier ES, la différence entre CLF expérimentale et calculées est assez peu importante.



( a )



( b )

Figure IV-10 Comparaison des CLF, expérimentale et calculées, dans le cas de l'aluminium.

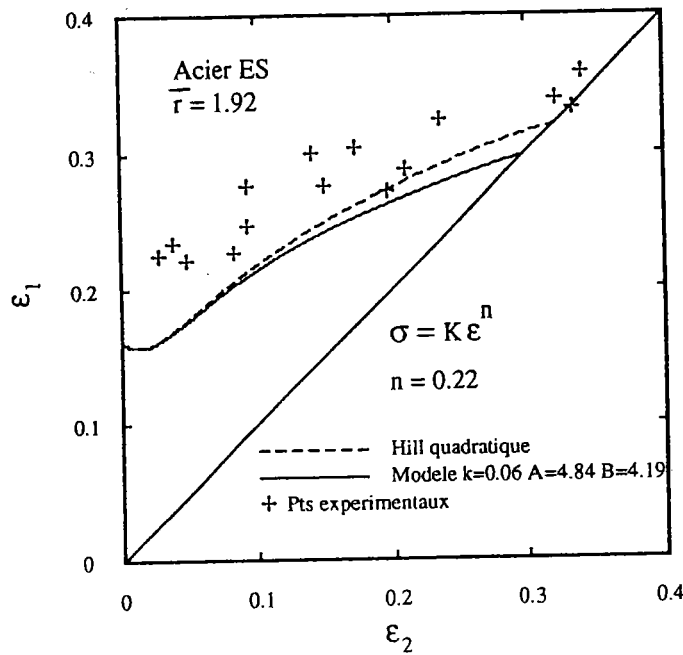


Figure IV-11 Comparaison des CLF, expérimentale et calculées, dans le cas d'un acier ES.

#### IV-4 CONCLUSION

Les influences du coefficient d'écroûissage, de la sensibilité à la vitesse de déformation et de la forme de la surface de plasticité sur les courbes limites de formage (CLF) ont été étudiées dans le domaine de l'expansion dans le cas de l'isotropie transverse. En plus des effets stabilisants de l'écroûissage et de la sensibilité à la vitesse de déformation, les effets associés à la forme de la surface de plasticité sont très importants. Le paramètre  $P$ , qui représente le rapport entre la contrainte de déformation plane et la contrainte équi-biaxiale, permet de caractériser l'effet stabilisant associé au changement de trajet dans la zone de striction, qui contrôle la forme de la CLF en expansion. Les effets associés au choix de la surface de plasticité, ou à la valeur du coefficient d'anisotropie  $r$ , peuvent être interprétés en considérant ce paramètre. Dans le cas de l'aluminium, il est bien connu que le critère quadratique de Hill surestime le niveau de la CLF en expansion. Par contre, nous avons montré qu'un assez bon accord pouvait être obtenu à partir de la modélisation que nous avons établie, ce qui est compatible avec une estimation correcte du rapport  $P$ , celui-ci étant surestimé avec le critère quadratique de Hill.

Enfin, l'apparition de la rupture ductile peut, dans certains cas, contrôler les limites de formage au voisinage de l'expansion équi-biaxiale.

---

## CONCLUSION GENERALE

Nous avons développé dans ce travail une description de la plasticité orthotrope faisant appel à une représentation de la surface d'écoulement dans l'espace des contraintes principales. Cette approche permet de construire de façon cohérente un critère orthotrope comme une extension d'un critère isotrope au cas de l'isotropie transverse puis de l'anisotropie transverse. On obtient de cette manière une interprétation claire du rôle des différents paramètres introduits dans le modèle, certains décrivant la condition seuil dans l'hypothèse d'isotropie transverse, et les autres décrivant l'influence de l'orientation de la sollicitation sur les contraintes d'écoulement.

Plus précisément, l'approche envisagée a permis de construire le critère de plasticité comme une extension du critère isotrope de Drucker, qui fait intervenir le deuxième et le troisième invariants du déviateur des contraintes. Il est ainsi possible (1) d'obtenir un aplatissement des surfaces de plasticité au voisinage de la déformation plane et du cisaillement; (2) d'imposer le rapport des contraintes en traction équibiaxiale, traction uniaxiale et cisaillement indépendamment du coefficient d'anisotropie mesuré en traction uniaxiale; (3) de contrôler l'influence de l'orientation de la sollicitation sur les contraintes d'écoulement. Les possibilités ainsi offertes conduisent à des améliorations très substantielles dans la description des surfaces obtenues expérimentalement ou par calcul micro-macro.

Une application du modèle a été présentée concernant la prévision des limites de formage des tôles dans le domaine de l'expansion. Nous avons

---

montré, dans l'hypothèse de l'isotropie transverse, que la prise en compte d'améliorations réalistes concernant la forme de la surface de plasticité permet une meilleure prévision des limites de formage, qui sont souvent surestimées avec les critères quadratiques de Von Mises ou de Hill. Cet effet est lié de façon directe à l'estimation du rapport entre la contrainte de déformation plane et contrainte de traction équibiaxiale, qui est lui-même souvent surestimé avec les critères de plasticité usuels.

Une suite logique de ce travail, en cours de réalisation au sein de l'équipe de recherches, consiste à implanter le modèle dans des codes de calcul, en vue d'application à des problèmes d'emboutissage. Les résultats escomptés concernent une meilleure prévision des efforts, des répartitions des déformations ainsi que des effets spécifiques à l'anisotropie transverse, tels que les cornes d'emboutissage.

## ANNEXE I

## REPRESENTATION PARAMETRIQUE DU CRITERE DE DRUCKER

La description paramétrique du critère de Drucker (1949) donnée par l'équation (III-7) peut être obtenue à partir d'un calcul analytique, ou de considérations géométriques dans l'espace de Haigh-Westergaard.

D'après les équations (II-7) et (II-13), les contraintes principales sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\sigma} &= \sqrt{2}g(\theta) \sin(\pi / 4 + \theta) \\ \frac{\sigma_2}{\sigma} &= \sqrt{2}g(\theta) \cos(\pi / 4 + \theta) \end{aligned} \quad (\text{A-I-1})$$

L'équation (III-7) est obtenue analytiquement à partir de (I-11) en exprimant les deuxième et troisième invariants du déviateur des contraintes  $J_2$  et  $J_3$  en fonction des contraintes principales pour un état de contraintes planes, puis en remplaçant les contraintes principales par leurs expressions (A-I-1).

On peut également obtenir l'équation (III-7) à partir des relations suivantes, déduites de considérations géométriques dans l'espace de Haigh-Westergaard :

$$3J_2 = (\sigma g)^2 (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) \quad (\text{A-I-2})$$

$$J_3^2 / J_2^3 = (4 / 27) \cos^2 3\varphi = (4 / 27) \cos^2 3\varphi' \quad (\text{A-I-3})$$

$$\cos^2 \varphi' = \cos^2 \theta / (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta) \quad (\text{A-I-4})$$

Où l'angle  $\varphi$  désigne la position angulaire du point représentatif du déviateur des contraintes dans le plan déviatoire  $\pi$  par rapport à la projection d'un quelconque des axes principaux, et  $\varphi' = \varphi + (2k+1)\pi/3$  représente la position angulaire du même point par rapport à la

projection d'une quelconque des directions de traction équi-biaxiale (Figure A-I-1).

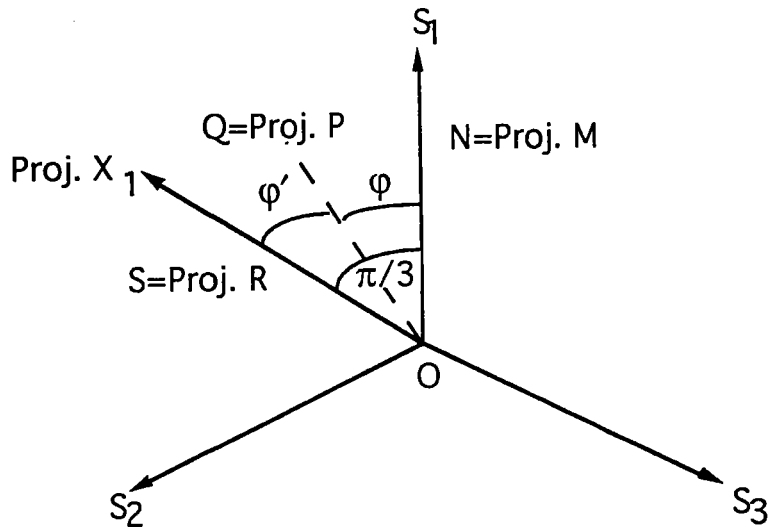


Figure A-I-1 Représentation géométrique dans l'espace de Haigh-Westergaard.

L'équation (III-7) est obtenue en combinant l'équation (I-11) et les équations (A-1-2), (A-1-3) et (A-1-4) , et en utilisant l'identité  $\cos 3\varphi' = 4\cos^2\varphi' - 3\cos\varphi'$ .

## ANNEXE II

IDENTIFICATION DES PARAMETRES DE LA SURFACE DE  
PLASTICITE DECRITE PAR L'EQUATION (III-8)  
(CAS DE L'ISOTROPIE TRANSVERSE)

La fonction  $g(\theta)$  donnée par l'équation (III-8) fait intervenir les trois paramètres  $k$ ,  $A$  et  $B$ . Sachant que le rapport entre les contraintes en cisaillement pur et la contrainte de traction équi-biaxiale est donné par  $\tau/\sigma = g(\pi/2)$ , le coefficient  $A$  s'exprime sous la forme :

$$A = (1 - k)^{1/3} \left( \frac{\sigma}{\tau} \right)^2 \quad (\text{A-II-1})$$

Le rapport entre les contraintes de traction équi-biaxiale et uniaxiale,  $\frac{\sigma}{\sigma_u} = \frac{\sqrt{2}}{2g(\pi/4)}$ , est donné par :

$$\left( \frac{\sigma}{\sigma_u} \right)^6 = \frac{(A + 1)^3 - k(B - 1)^2}{64(1 - k)} \quad (\text{A-II-2})$$

Enfin, le coefficient d'anisotropie  $r$ , déterminé à partir de l'équation (II-25), s'exprime sous la forme :

$$r = \frac{(A + 1)^2 (A - 1) - (k/3)(B - 1)(B + 3)}{2(A + 1)^2 - (2k/3)(B - 1)(B - 3)} \quad (\text{A-II-3})$$

En résolvant le système constitué par les trois équations (A-II-1), (A-II-2) et (A-II-3), nous pouvons déterminer les trois paramètres  $k$ ,  $A$  et  $B$  en fonction des trois quantités mesurables expérimentalement  $(\sigma/\tau)$ ,  $(\sigma/\sigma_u)$  et  $r$ . Dans le cas où seuls des essais de traction sont disponibles, on peut supposer que  $A$  et  $B$  sont liés par une relation telle que  $B=9$  quand  $A=3$  (cas de l'isotropie); une valeur positive entraîne un aplatissement de la surface au voisinage de la déformation plane et du cisaillement. L'analyse de résultats expérimentaux montre que l'introduction d'une valeur de  $k \approx 0,2-0,3$  fournit souvent un bon accord avec l'expérience.



## ANNEXE III

IDENTIFICATION DES PARAMETRES DE LA SURFACE DE  
PLASTICITE DECRITE PAR L'EQUATION (III-9)  
(CAS DE L'ANISOTROPIE TRANSVERSE)

La fonction  $g(\theta, \alpha)$  donnée par l'équation (III-9) fait intervenir 9 paramètres : les trois paramètres  $k$ ,  $A$  et  $B$  introduits pour décrire l'isotropie transverse, et les six paramètres  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $a$  et  $b$  décrivant l'influence de l'orientation de la sollicitation.

Sachant que le rapport entre la contrainte de cisaillement parallèlement aux axes d'orthotropie et la contrainte de traction équibiaxiale est donné par  $\tau/\sigma = g(\pi/2, \pi/4)$ , le coefficient  $A$  dans l'équation (III-9) s'exprime, comme précédemment, par la relation (A-II-1). De même, le rapport entre les contraintes de traction équibiaxiale et uniaxiale pour  $\alpha = \pi/4$  est donné par  $\sigma/\sigma_{45} = \sqrt{2}/[2g(\pi/4, \pi/4)]$ , ce qui conduit à l'équation (A-II-2), et le coefficient d'anisotropie  $r_{45}$  est donné par (A-II-3). Les valeurs des paramètres  $k$ ,  $A$  et  $B$  peuvent donc être identifiées à partir des essais à  $\alpha = \pi/4$ , selon la méthode proposée dans le cas de l'isotropie transverse.

Dans le cas d'une orientation quelconque le rapport entre les contraintes de traction équibiaxiale et uniaxiale,  $\sigma/\sigma_\alpha = \sqrt{2}/[2g(\pi/4, \alpha)]$  est donné par :

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_\alpha}\right)^6 = \frac{\left\{ \left[ (A+1)^3 - k(B-1)^2 \right]^{m/6} - 2^{m/6} \left[ 2^{1-n} a \cos 2\alpha - 2^{-p} b \cos^{2q} 2\alpha \right] \right\}^{6/m}}{64(1-k)} \quad (\text{A-III-1})$$

En particulier,

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^6 = \frac{\left\{ \left[ (A+1)^3 - k(B-1)^2 \right]^{m/6} - 2^{m/6} \left[ 2^{1-n} a - 2^{-p} b \right] \right\}^{6/m}}{64(1-k)}$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{90}}\right)^6 = \frac{\left\{[(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{m/6} + 2^{m/6} [2^{1-n} a + 2^{-p} b]\right\}^{6/m}}{64(1-k)} \quad (\text{A-III-2})$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{45}}\right)^6 = \frac{(A+1)^3 - k(B-1)^2}{64(1-k)}$$

En outre, le coefficient d'anisotropie  $r_\alpha$ , déterminé à partir de l'équation (II-56), s'exprime sous la forme :

$$r_\alpha = \frac{(A+1)^2(A-1) - (k/3)(B-1)(B+3) + (2^{m/2}/m)K[2^{2-n}(n-1)a \cos 2\alpha - 2^{1-p}pb \cos^{2q} 2\alpha]}{2(A+1)^2 - (2k/3)(B-1)(B+3) - (2^{m/2}/m)K[2^{1-n}(2n+m-2)a \cos 2\alpha - 2^{-p}(2p-m)b \cos^{2q} 2\alpha]} \quad (\text{A-III-3})$$

$$\text{où } K = [(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{1-(m/6)}.$$

En particulier,

$$r_0 = \frac{(A+1)^2(A-1) - (k/3)(B-1)(B+3) + (2^{m/2}/m)K[2^{2-n}(n-1)a - 2^{1-p}pb]}{2(A+1)^2 - (2k/3)(B-1)(B+3) - (2^{m/2}/m)K[2^{1-n}(2n+m-2)a - 2^{-p}(2p-m)b]} \quad (\text{A-III-4})$$

$$r_{90} = \frac{(A+1)^2(A-1) - (k/3)(B-1)(B+3) + (2^{m/2}/m)K[-2^{2-n}(n-1)a - 2^{1-p}pb]}{2(A+1)^2 - (2k/3)(B-1)(B+3) - (2^{m/2}/m)K[-2^{1-n}(2n+m-2)a - 2^{-p}(2p-m)b]}$$

$$r_{45} = \frac{(A+1)^2(A-1) - (k/3)(B-1)(B+3)}{2(A+1)^2 - (2k/3)(B-1)(B+3)}$$

Enfin, Le paramètre  $\Gamma_\alpha = \frac{\dot{\epsilon}_{12}}{\dot{\epsilon}_{11}}$ , donné par l'équation (II-57), est égal à :

$$\Gamma_\alpha = \frac{(2^{m/2}/m)[2^{1-n}a - 2^{1-p}qb \cos^{2q-1} 2\alpha] \sin 2\alpha}{[(A+1)^3 - k(B-1)^2]^{(m/6)} - 2^{m/2}[2^{1-n}a \cos 2\alpha - 2^{-p}b \cos^{2q} 2\alpha]} \quad (\text{A-III-5})$$

---

Les paramètres d'anisotropie transverse  $a$  et  $b$  sont obtenus en fonction des valeurs expérimentales de  $r_0$  et  $r_{90}$  et des exposants  $m$ ,  $n$  et  $p$  à partir des équations (A-III-4). L'influence des exposants  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$  est discutée au § III-3-3.

## ANNEXE IV

REPRESENTATION DE LA SURFACE DE PLASTICITE DANS  
L'ESPACE  $(\sigma_x / \sigma, \sigma_y / \sigma, \sigma_{xy} / \sigma)$ 

Dans le cas de l'isotropie transverse, nous exprimons la fonction paramétrique  $g(\theta)$  en fonction des contraintes dans l'espace normalisé  $(\sigma_x / \sigma, \sigma_y / \sigma, \sigma_{xy} / \sigma)$  correspondant à des axes quelconque dans le plan de la tôle par l'équation suivante :

$$(1 - k) = \left[ (K_1^2 + AK_2^2)^3 - k K_1^2 (K_1^2 - BK_2^2)^2 \right] \quad (\text{A-IV-1})$$

$$\text{avec : } K_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2\sigma}$$

$$K_2 = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2}{(2\sigma)^2}}$$

$$\cos^2 \theta = \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\sigma g} \right)^2 = \left( \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2\sigma g} \right)^2$$

sachant que :

$$\sin^2 \theta = \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma g} \right)^2 = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2}{(2\sigma g)^2} \quad (\text{A-IV-2})$$

De même, dans le cas de l'anisotropie transverse nous pouvons exprimer la surface de plasticité dans les directions principales d'orthotropie  $x$  et  $y$  suivant la représentation (II-26). La fonction  $g(\theta, \alpha)$  peut se mettre alors sous la forme suivante :

$$(1 - k)^{m/6} = \left[ (K_1^2 + AK_2^2)^3 - k K_1^2 (K_1^2 - BK_2^2)^2 \right]^{m/6} \quad (\text{A-IV-3})$$

$$- 2aK_1^{2n-1}K_3 (K_1^2 + K_2^2)^{(m/2-n)} + bK_2^{2p} \left( \frac{K_3}{K_2} \right)^{2q} (K_1^2 + K_2^2)^{(m/2-p)}$$

$$\text{avec : } K_3 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\sigma}$$

$$\text{sachant que : } \cos^2 2\alpha = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (\text{A-III-4})$$

**REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

- Barlat, F., "Crystallographic texture, Anisotropic Yield Surfaces and Forming Limits of Sheet Metals", *Mat. Sci. Eng.* **91**, 55, 1987.
- Barlat, F. and Lian, J., "Plastic Behavior of Sheets Metals. Part I : A Yield Function for Orthotropic Sheets Under Plane Stress Conditions", *Int. J. Plasticity* **5**, 51, 1989.
- Barlat, F. and Richmond, O., "Prediction of Tricomponent Plane Stress Yield Surfaces and Associated Flow and Failure Behaviour of Strongly Textured f.c.c. Polycrystalline Sheets", *Mat. Sci. Eng.*, **95**, 15, 1987.
- Barlat, F., Lege, D. and Brem, J.C. , "A Six-Component Yield Function for Anisotropic Materials", *Int. J. Plasticity*, **7**, 693, 1991.
- Bassani, J. L., "Yield Characterization of Metals with Transversely Isotropic Properties", *Int. J. Mech. Sci.* **19**, 651, 1977.
- Bishop, J.F.W. and Hill, R., "A Theory of the Plastic Distortion of a Polycrystalline Aggregate under Combined Stresses", *Phil. Mag.* **42**, 414 and 1298, 1951.
- Boehler, J.P. and Raclin, J., "Anisotropic Hardening of Prestrained Rolled Sheet-Steel", in *Current Advances in Mechanical Design and Production, Second Cairo Un. MDP Conf., Cairo*, 483, 1982.
- Budiansky, B., "Anisotropic Plasticity of Plane-Isotropic Sheets", *Mechanics of Material Behaviour*, ed. G.J. Dvorak and R.T. Shield, Elsevier Science Publishers B.V., p. 15, 1984.
- Chan, K. S., Koss, D. A. and Ghosh, A. K., "Localized Necking of Sheet at Negative Minor Strains", *Mater. Trans.*, **15A**, 323, 1984.
- Chan, K. S., "Effects of Plastic Anisotropy and Yield Surface on Sheet Metal Stretchability", *Metall. Trans.* **16A**, 629, 1985.

- Chan, K.S., Lindholm, U.S. and Wise, J., "Biaxial Strength of HY80 Steel", *J. of Engineering Materials and Technology*, vol. **107**, pp 132-137, 1985.
- Cockcroft, M.G. and Latham, D.J., "Ductility and the workability of metals", *J. Inst. Metals*, **96**, 33, 1968
- Dudzinski, D. and Molinari, A. "Effect of Anisotropic Hardening and Thermomechanical Coupling on Sheet Formability", *Proc. Symp. Plastic Instability, Considere Memorial, Paris, France, Presses Ponts et Chaussées*, **25**, 1985.
- Dudzinski, D., "Application du modèle d'écrouissage cinématique à la mise en forme, influence de la température sur la limite de formage", *Thèse de doctorat de l'université, Metz*, 1986.
- Dudzinski, D. and Molinari, A. "Perturbation analysis of thermoviscoplastic instability in biaxial loading", *Int. J. of Solids and Structures*, **27**, 5, 601-628, 1991.
- Drucker, D. C., "Relation of Experiments to Mathematical Theories of Plasticity", *J. Appl. Mech.* **16**, 349, 1949.
- Ferron, G. and Mliha-Touati, M., "Determination of the forming limits in planar isotropic and temperature sensitive sheet metals", *Int. J. Mech. Sci.*, **237**, 121, 1985.
- Ferron, G. and Molinari, A., "Mechanical and Physical Aspects of Sheet-Metal Ductility". In *Forming Limit Diagrams : Concepts, Methods and Applications*, ed. R. H. Wagoner, K. S. Chan & S. P. Keeler. TMS, Warrendale, 111, PA 1989.
- François, D., Pineau, A. et Zaoui, A., "Comportement mécanique des matériaux", volume I, 1991.
- Ghosh, A.K., "Plastic Flow Properties In Relation To Localized Necking In Sheets", *Mechanics Of Sheet Metal Forming*, Plenum Press, 287, 1978.
- Goodwin, G.M., *Metallurgia Ital.*, **60**, 767, 1968.

- Gotoh, M., "A Theory of Plastic Anisotropy Based on a Yield Function of Fourth Order (Plane Stress State)", *Int. J. Mech. Sci.* **19**, 505 and 513, 1977.
- Hecker, S.S. and Stout, M.G., "Strain Hardening of Heavily Cold Worked Metals", *Proc. of the seminar "Deformation, Processing and Structure"*, Krauss, G. ed., American Society for Metals, 1983.
- Hill, R., "A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals", *Proc. Roy. Soc. London* **A193**, 281, 1948.
- Hill, R., "The Mathematical Theory of Plasticity", Clarendon press, Oxford, 1950.
- Hill, R., "On Discontinuous Plastic States With Special Reference to Localized Necking in thin Sheets", *J. Mech. Phys. Solids* Vol **1**, 19-30, 1952.
- Hill, R., "Theoretical Plasticity of Textured Aggregates", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **85**, 179, 1979.
- Hill, R., "Basic Stress Analysis of Hyperbolic Regimes in Plastic Media", *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **88**, 359, 1980.
- Hill, R., "Constitutive Modelling of Orthotropic Plasticity in Sheet Metals", *J. Mech. Phys. Solids* **38**, 405, 1990.
- Hosford, W. F., "A Generalized Isotropic Yield Criterion", *J. Appl. Mech.* **39**, 607, 1972.
- Hutchinson, J.W. and Neale K.W., "Sheet Necking Part I, II and III", *Mechanics of Sheet Metal Forming* Plennon Press N.Y., 1978.
- Ilahi, M.F., Parmar, A. and Mellor, P.B., "Hydrostatic Bulging of a circular Aluminium diaphragm", *Int. J. Mech. Sci.*, vol **23**, pp 221-227, 1981.
- Jalinier, J.M., "Mise en forme et endommagement", Thèse de doctorat d'Etat, Metz, 1981.

- Karafillis, A.P. and Boyce, M.C., "A General Anisotropic Yield Criterion Using Bounds and a Transformation Weighting Tensor", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, No. 12, 1859-1886, 1993.
- Keeler, S.P., *Sheet Metal Ind.*, **42**, 683, 1965.
- Lege, D.J., Barlat, F. and Brem, J.C., "Characterization and Modeling of the Mechanical Behaviour and Formability of a 2008-T4 Sheet Sample", *Int. J. Mech. Sci.*, **31**, 549, 1989.
- Lian, J. and Zhou, D., "Diffuse Necking and Localized Necking Under Plane Stress", *Mater. Sci. Engng*, **111**, 1, 1989.
- Lian, J., Zhou, D. and Baudalet, B., "Application of Hill's New Yield Theory to Sheet Metal Forming", *Int. J. Mech. Sci.*, **31**, 237, 1989.
- Lian, J., Barlat, F. and Baudalet, B., "Plastic Behavior and Stretchability of Sheets Metals. Part II Effect of Yield Surface Shape on Sheet Forming Limit", *Int. J. Plasticity*, Vol 5, pp 131-147, 1989.
- Logan, R.W. and Hosford, W.F., "Upper-Bound Anisotropic Yield Locus Calculations Assuming  $\langle 111 \rangle$  Pencil Glide", *Int. J. Mech. Sci.* **22**, 419, 1980.
- Makinde, A., "Mise au point d'un dispositif original de traction biaxiale application à l'étude expérimentale de l'érouissage des métaux sous différents chemins de déformation", Thèse de doctorat de l'université, Poitiers, 1986.
- Marciniak, Z. and Kuczynski, K., "Limit Strains in the Processes of Stretch-Forming Sheet Metal", *Int. J. Mech. Sci.* Vol 9, 609-620, 1967.
- Marciniak, Z., Kuczynski, K. and Pokora, T., "Influence of the Plastic Properties of a Material on the Forming Limit Diagram for Sheet Metal in Tension", *Int. J. Mech. Sci.* Vol 15, 789-805, 1973.



- Mazilu, P. and Meyers, A., "Yield Surface Description of Isotropic Materials after Cold Prestrain". *Ingenieur Archiv.* **55**, 213-220, 1985.
- Mesrar, R., "Comportement Plastique des toles sous sollicitation biaxiale et analyse numérique de la mise en forme par gonflement hydraulique", Thèse de doctorat de l'université, Metz, 1991.
- Mliha-Touati, M., "Etude des lois de comportement plastique de métaux sous sollicitation uniaxiale ou biaxiale application à l'analyse de la striction et à la détermination des limites de formage des toles", Thèse de doctorat d'Etat, Poitiers, 1985.
- Parmar, A. and Mellor, P.B., "Plasticity Analysis of Sheet Metal Forming", in Koistinen, D.P. and Wang, N.M. (eds), *Mechanics of Sheet Metal Forming*, New York, 53, 1978.
- Parmar, A. and Mellor, P.B., "Predictions of Limit Strains in Sheet Metal Using a More General Yield Criterion", *Int. J. Mech. Sci.*, **20**, 385, 1978.
- Stören, S. and Rice, J.R., "Localized Necking in thin Sheets", *J. Mech. Phys. Solids*, **23**, 421-441, 1975.
- Sowerby, R. and Duncan, J.L., "Failure in Sheet Metal in Biaxial Tension", *Int. J. Mech. Sci.*, **13**, 217, 1971.
- Swift, H.W., "Plastic instability under plane stress", *J. of Mech and Phys Solids Vol 1*, 1618, 1952.
- Taylor, G.I., "Plastic Strain in Metals", *J. Inst. Metals* **62**, 307, 1938.
- Tresca, H., *Comptes Rendus Acad. Sci.* **59**, 754, 1864.
- Von-Mises, R., *Göttinger Nachrichten, Math. -Phys. Klasse*, 582, 1913.
- Zegloul, A. and Ferron, G., "Limit Strain Predictions for Out-of-Plane Stretching of Sheets Metals", *Int. J. Plasticity*, Vol **9**, pp 1-16, 1993.

## Résumé

La prévision de la répartition des déformations dans l'emboutissage des tôles et des limites de formage exige l'introduction dans les codes de calculs de lois décrivant avec précision le comportement plastique du matériau.

Le but du présent travail est de proposer une modélisation de la surface d'écoulement plastique applicable aux matériaux orthotropes en contraintes planes. Cette modélisation est basée sur une représentation en coordonnées polaires de la surface d'écoulement dans l'espace des contraintes principales, et prend en compte l'orientation des axes principaux de contraintes par rapport aux directions principales d'orthotropie.

Par rapport aux critères de plasticité classiques, la modélisation proposée a permis d'améliorer notablement la description des surfaces de plasticité expérimentales ou obtenues par un calcul d'homogénéisation. De même, elle a permis de mieux décrire les variations de la contrainte en traction uniaxiale en fonction de l'angle entre la direction de laminage et la direction de traction. Nous avons introduit le critère de plasticité proposé dans un code de calcul de prévision des limites de formage dans le cas d'une tôle isotrope transverse sollicitée en expansion. Les résultats montrent que la prise en compte d'améliorations réalistes concernant la forme de la surface de plasticité permet une meilleure prévision des limites de formage.

Mots clés:

Critères de plasticité-Théorie de l'écoulement-Orthotropie-Contraintes planes-Emboutissage des tôles-Courbes limites de formage-Aluminium-Aciers.