



HAL
open science

Une modélisation des ponts de fibres pour le délaminage des matériaux composites

Loïc Daridon

► **To cite this version:**

Loïc Daridon. Une modélisation des ponts de fibres pour le délaminage des matériaux composites. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1993. Français. NNT : 1994METZ070S . tel-01776867

HAL Id: tel-01776867

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776867v1>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

DB 80430

INSTITUT SUPÉRIEUR DE GÉNIE MÉCANIQUE ET PRODUCTIQUE
UNIVERSITÉ DE METZ

THÈSE

présentée à l'UNIVERSITÉ de METZ par

LOIC DARIDON

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR en MÉCANIQUE

UNE MODÉLISATION DES PONTS DE FIBRES POUR LE DÉLAMINAGE DES MATÉRIAUX COMPOSITES

Soutenue le 18 février 1993 devant le jury composé de :

O. Allix
M. L. Benzeggagh
B. Cochelin
D. Guedra-Degeorges
M. Potier-Ferry
A. Vautrin

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19930735
Cote	SI M ₃ 93/23
Loc	Magasin

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux U. R. A. CNRS. 1215
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur le Professeur M. Potier-Ferry pour avoir accepté de diriger cette thèse avec la gentillesse, l'humour et la compétence qu'on lui connaît.

Je remercie Monsieur le Docteur B. Cochelin pour tous les conseils éclairés qu'il a prodigués et les nombreuses heures qu'il a consacrées au petit scarabée que je suis.

Je remercie Monsieur le Professeur A. Vautrin d'avoir bien voulu présider le jury et de l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail.

Je remercie les professeurs O. Allix et M. L. Benzeggagh pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je les remercie également pour l'intérêt qu'ils ont porté sur ce travail.

J'exprime mes remerciements à Monsieur D. Guedra-Degeorges de l'Aérospatiale pour avoir accepté de participer au jury.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du L.P.M.M. et plus particulièrement, mes deux compagnons de chambrée pour la bonne humeur dans laquelle ce sont passées ces trois années de thèse et de dur travail.

Sur un plan moins professionnel mais tout aussi important, j'exprime ma reconnaissance à mes parents des personnes sans qui rien n'aurait été possible.

J'offre ce travail à L. Gavini qui m'a soutenu, encouragé et aidé durant ces années et le fera encore longtemps je l'espère.

RÉSUMÉ

Nous étudions la propagation d'un délaminage existant dans un matériau composite à matrice organique et à fibres longues.

Plus précisément, nous proposons de modéliser la formation d'un pont de fibres au cours de cette propagation par une densité de ressorts endommageables disposée le long de la fissure. Les modèles présentés ici sont essentiellement à une dimension.

Nous réalisons la simulation numérique de la propagation de la fissure pour différents modes de rupture et différents types d'essais standards, par la méthode de Newton-Raphson.

Mots clés

CALCUL FORMEL

COMPOSITE

DÉLAMINAGE

NEWTON-RAPHSON

PONT DE FIBRES

POUTRES

PROPAGATION

RUPTURE

SIMULATION NUMÉRIQUE

TAUX DE RESTITUTION DE L'ÉNERGIE

TABLEAU DES NOTATIONS UTILISÉES

Ω	Structure fissurée
Ω_i	Poutre n° i
Γ	Interface entre les poutres
L	Longueur totale de l'éprouvette
a	Longueur totale de la fissure
l	Longueur de la fissure avec pont de fibres
m	Longueur de la fissuresans pont de fibres
h_i	Hauteur de la poutre n° i
y_{Gi}	Ordonnée de la ligne moyenne de la poutre n° i
E	Module d'élasticité de young
ν	Coefficient de Poisson
F	Force appliquée sur l'éprouvette
C. N. F.	Centred Notched Flexure
D. C. B.	Double Cantilever Beam
E. L. S.	End Load Split
E. N. F.	End Notched Flexure
M. E. L. S.	Modified End Load Split
M. M. F. S.	Mixed Mode Flexure Specimen
C	Compliance totale dans l'éprouvette
D_t	Dissipation totale dans l'éprouvette
D_m	Dissipation due à l'avancée de la pointe de fissure
D_p	Dissipation due à l'endommagement de l'interface
G_t	Taux de Restitution de l'Énergie totale dans l'éprouvette

G_m	Taux de Restitution de l'Énergie en pointe de fissure
G_p	Taux de Restitution de l'Énergie dans l'interface
G_{Ic}	Taux de Restitution de l'Énergie critique en mode I
G_{IIc}	Taux de Restitution de l'Énergie critique en mode II
u_i, v_i	Les déplacements horizontaux et verticaux de la poutre n°i
ϵ_{x_i}	Déformation longitudinale
σ_{x_i}	Contrainte longitudinale
e_i, k_i	Déplacements généralisés
N_i, M_i, T_i	Efforts internes généralisés
A_i, B_i, D_i	Coefficients des lois de comportement généralisé
ΔV_c	Ouverture maximale en mode I de l'interface
ΔU_c	Ouverture maximale en mode II de l'interface
k	Raideur de l'interface
f_c	Force maximale dans l'interface
W_{def}	Énergie de déformation totale de l'éprouvette
W_i	Énergie de déformation interne de la poutre n°i
W_{if}	Énergie de déformation interne de l'interface
$P_{int}^{\Omega_i}(\delta U)$	Puissance virtuelle des efforts intérieurs à Ω_i
$P_{ext}^{\Omega}(\delta U)$	Puissance virtuelle des efforts extérieurs

TABLE DES MATIÈRES

1	INTRODUCTION	6
2	INTRODUCTION AU PROBLÈME	10
2.1	ASPECTS EXPÉRIMENTAUX	10
2.1.1	<i>Essais en Mode I</i>	11
2.1.2	<i>Essais en mode II</i>	17
2.1.3	<i>Essais en mode mixte</i>	18
2.1.4	<i>Conclusion</i>	19
2.2	LES MODÈLES EXISTANTS	19
2.2.1	<i>La mécanique de la rupture fragile</i>	19
2.2.2	<i>La mécanique de la rupture ductile</i>	21
2.2.3	<i>La mécanique de l'endommagement</i>	22
2.3	CONCLUSION	24
3	MODÉLISATION DU PONT DE FIBRES EN MODE I	26
3.1	INTRODUCTION	26
3.2	MODÈLE ÉLASTIQUE-FRAGILE	26
3.2.1	<i>Cinématique</i>	26
3.2.2	<i>Application du Principe des Puissances Virtuelles</i>	31
3.2.3	<i>Calcul de la dissipation totale dans l'éprouvette</i>	34
3.2.4	<i>Simulation de la propagation</i>	39
3.2.5	<i>Résultats numériques et discussion</i>	45
3.2.6	<i>Conclusion</i>	51
3.3	MODÈLE ENDOMMAGEMENT PROGRESSIF	52
3.3.1	<i>Les nouvelles équations</i>	52
3.3.2	<i>Mise en place de la propagation</i>	54
3.3.3	<i>Résultats numériques et discussion</i>	57
3.3.4	<i>Comparaison avec l'expérience</i>	62
3.3.5	<i>Conclusion</i>	64
3.4	MODÈLE AVEC PRISE EN COMPTE DES ROTATIONS	65
3.4.1	<i>Modélisation des rotations et nouvelles conditions limites</i>	65
3.4.2	<i>Modèle complet : endommagement progressif et rotation en fond de fissure</i>	67
3.4.3	<i>Courbes résultats</i>	67
3.5	CONCLUSION	69
4	MODÉLISATION DU PONT DE FIBRES EN MODE II	70
4.1	INTRODUCTION	70
4.2	MODÈLE E. L. S	70

4.2.1.....	<i>Cinématique et équations</i>	70
4.2.2.....	<i>Calcul de la dissipation et critère de propagation</i>	75
4.2.3.....	<i>Propagation et résultats numériques</i>	77
4.3.....	MODÈLE MODIFIED END LOAD SPLIT	81
4.3.1.....	<i>Nouvelle éprouvette</i>	81
4.3.2.....	<i>Cinématique et calcul de dissipation</i>	82
4.3.3.....	<i>Propagation et résultats numériques</i>	83
4.4.....	CONCLUSION	85
5.....	MODÈLE MODE MIXTE	87
5.1.....	DÉCOMPOSITION MODE I - MODE II	87
5.1.1.....	<i>Modèle de z. suo et j. w. hutchinson</i>	87
5.1.2.....	<i>Une décomposition basée sur les hypothèses poutre</i>	89
5.1.3.....	<i>Comparaison entre les deux approches</i>	96
5.2.....	MODÈLE MODE MIXTE	98
5.2.1.....	<i>Définition de l'interface et équations</i>	100
5.2.2.....	<i>Calcul de la dissipation et critère de propagation</i>	105
5.2.3.....	<i>Simulation et résultats numériques</i>	107
5.3.....	CONCLUSION	111
6.....	CONCLUSION	112
7.....	BIBLIOGRAPHIE	115
8.....	ANNEXE	122
8.1.....	ANNEXE 1	122
8.2.....	ANNEXE 2	128
8.3.....	ANNEXE 3	130
8.4.....	ANNEXE 4	132
8.5.....	ANNEXE 5	134
8.6.....	ANNEXE 6	136
8.7.....	ANNEXE 7	139

1. INTRODUCTION

L'utilisation des composites est de plus en plus répandue dans les industries de l'automobile, de l'aéronautique, de la construction spatiale et navale. Cependant "la jeunesse" de ce type de matériau laisse encore de nombreuses interrogations en ce qui concerne son comportement à rupture. En effet, il n'existe pas, aujourd'hui, de modèles pour reproduire tous les résultats expérimentalement observés.

Dans ce travail nous allons nous intéresser plus précisément au délaminage des structures composites stratifiés à fibres longues et à matrice organique. Un composite stratifié est constitué d'un assemblage de plis élémentaires, eux mêmes constitués d'un assemblage de fibre et de matrice. Le délaminage est le mode de rupture de ces matériaux stratifiés où la fissure s'initie et se propage entre deux plis élémentaires constituant le composite stratifié. Lors d'un délaminage, la fissure n'est pas une surface parfaitement plane avec un front bien régulier et, de plus, il apparaît en arrière de la pointe de fissure un enchevêtrement de fibres et de matrice, que l'on appelle le pont de fibre (fig 1.).

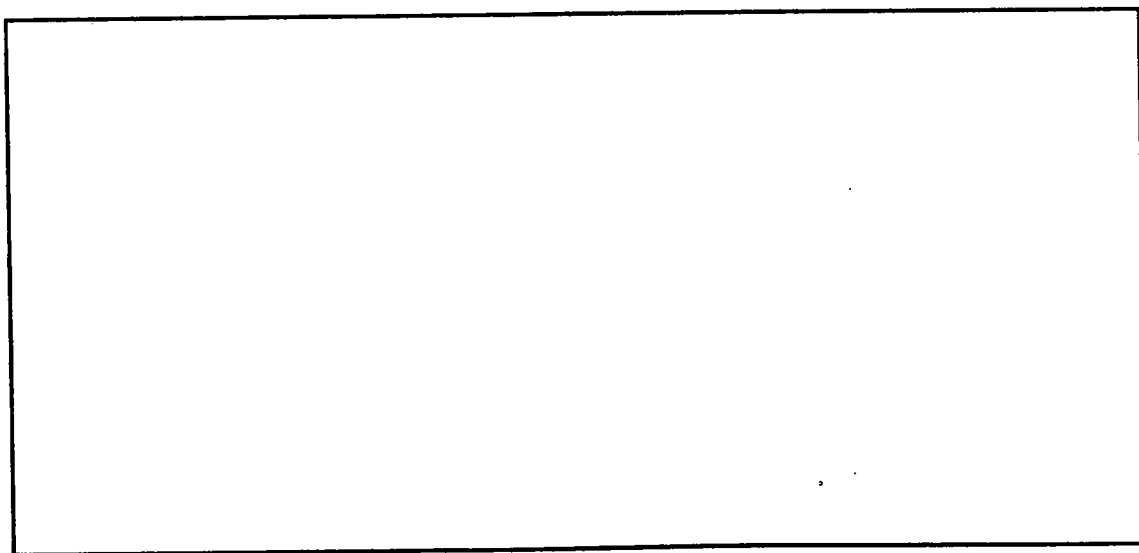


fig 1 . Photo d'un pont de fibres

Ce pont de fibres peut être dû à l'interpénétration des plis du composite lors de la fabrication ou, à la dégradation des couches adjacentes à la fissure en cours de propagation du délaminage. La présence de ce pont de fibres dans la fissure entraîne une modification de la ténacité du matériau lors de la propagation. C'est une des différences notables entre la fissuration dans un milieu homogène comme les métaux et la fissuration dans les composites.

Est-il alors possible d'utiliser les outils classiques de prédiction, comme la mécanique de la rupture fragile, pour prévoir la propagation d'un délaminage dans une structure composite ? Ces outils semblent acceptables pour prédire l'initiation du délaminage à partir d'une fissure existante, mais ils sont inadaptés pour la phase de propagation du délaminage, car ils ne prennent pas en compte, notamment, ce phénomène de pont de fibres. Il semble en effet nécessaire de tenir compte de la formation du pont de fibres au cours de la propagation pour en obtenir une simulation en accord avec l'expérience. Dans ce travail, nous allons donc proposer une modélisation de ce pont de fibres par une interface endommageable pour tenter de simuler, de façon réaliste, la propagation du délaminage dans les structures composites. C'est dans une optique de simulation numérique que seront développées toutes nos modélisations. Nous présentons ce travail sous la forme de quatre chapitres.

Le premier chapitre est une revue de certains travaux réalisés sur le délaminage et sur la modélisation du pont de fibres. Nous y présentons dans un premier temps les résultats expérimentaux ainsi que les observations faites par les expérimentateurs. Il en ressort d'une manière générale que l'augmentation de la ténacité est en rapport direct avec la présence de pont de fibres. Dans un deuxième temps nous passerons en revue les trois grands cadres de travail, permettant d'aborder le délaminage, que sont la mécanique de la rupture fragile, la mécanique de la rupture ductile et la mécanique de l'endommagement. Le

cadre de travail que nous utilisons est à rapprocher du cadre de la mécanique de la rupture ductile. C'est à dire que nous utilisons des résultats de la mécanique de la rupture fragile auxquels nous ajoutons une modélisation du pont de fibres.

Dans le deuxième chapitre nous présentons notre modélisation du pont de fibres pour une fissuration en mode I sur un test Double Cantilever Beam. La modélisation que nous proposons est à une dimension et en théorie de poutre linéaire. Nous représentons l'éprouvette par un assemblage de trois poutres et le pont de fibres par une densité de ressorts endommageables. Nous déterminons alors la dissipation totale dans l'éprouvette ainsi modélisée et mettons en évidence l'existence de deux termes, l'un lié à l'avancée de la fissure et l'autre lié à l'endommagement du pont de fibres. Nous réalisons la simulation numérique de la propagation à l'aide de deux types de lois d'endommagement pour la densité de ressorts, l'une brutale et l'autre progressive. Ces deux types de lois permettent de rendre compte des effets du pont de fibres, c'est à dire une augmentation de la ténacité du matériau au cours de la fissuration, mais la loi à endommagement progressif donne des résultats plus satisfaisants.

Dans le troisième chapitre nous appliquons les mêmes idées à la fissuration en mode II d'une éprouvette. Nous développons uniquement le modèle pour une interface à endommagement progressif. Les simulations numériques que nous faisons alors soulignent le caractère instable de la propagation en mode II dans l'essai End Load Split, ce qui est en accord avec les observations expérimentales. Ce caractère instable de la propagation est un obstacle à la compréhension et à l'étude de ce mode de rupture. Nous proposons alors la simulation numérique d'un nouveau test où la propagation en mode II est stable.

Dans le quatrième chapitre nous nous intéressons à la fissuration d'un

matériau composite en mode mixte. Pour pouvoir simuler une telle propagation il faut être capable de résoudre deux nouveaux problèmes. Le premier consiste à déterminer, dans la dissipation localisée en pointe de fissure, la part inhérente à chaque mode actif. Le deuxième est d'introduire un endommagement couplé au niveau de la loi de comportement de l'interface. Ainsi, pour la séparation mode I-mode II, nous exposerons les travaux réalisés par Z. Suo et J. W. Hutchinson à l'aide d'une approche locale avant de présenter notre décomposition basée sur une approche globale et sur les hypothèses poutre. Pour le second point, l'interface endommageable sera constituée de deux types de ressort à endommagement couplé, l'un actif en mode I et l'autre actif en mode II. Cette modélisation nous permettra de réaliser des simulations numériques rendant compte des effets de pont de fibres.

2. INTRODUCTION AU PROBLÈME

Le délaminage est une des causes principales de rupture des structures composites dans leurs applications industrielles. Ce phénomène fait l'objet de nombreuses études, aussi bien sur le plan expérimental que sur le plan théorique. Dans ce chapitre nous allons faire un bilan non exhaustif des différents travaux effectués.

2.1. ASPECTS EXPÉRIMENTAUX

Nous devons, dès à présent, distinguer les différents modes de rupture car les phénomènes physiques, mis en jeu dans ces différents modes de rupture, sont de natures différentes. Ces modes de rupture peuvent se définir de façon purement cinématique en considérant la discontinuité des déplacements le long de la fissure. Tous les déplacements le long de la fissure se réduisent à une combinaison des trois modes principaux [J.Lemaitre et J.L.Chaboche ; D.François et al] notés mode I, mode II, mode III. Nous pouvons les présenter à l'aide de la fig I.1 :

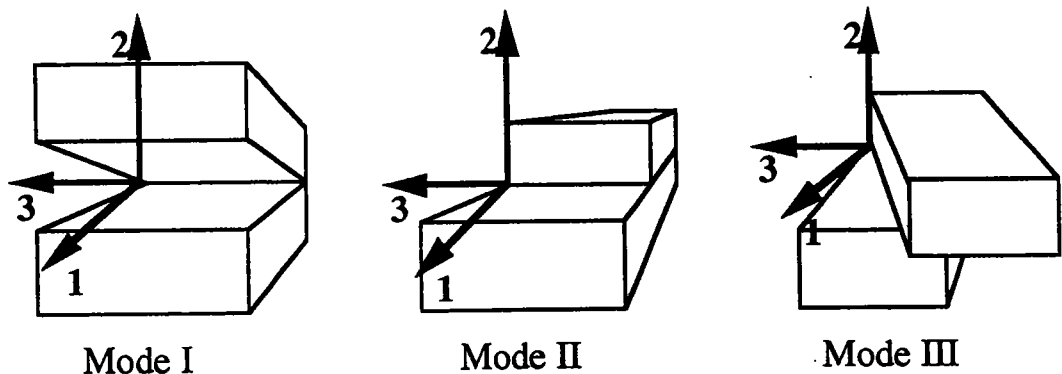


fig I.1. Les trois modes de rupture principaux

Le mode I est un mode d'ouverture où :

$$[[U_1]] = 0, [[U_2]] \neq 0, [[U_3]] = 0 \quad (\text{eq.I.1})$$

Le mode II est un mode de glissement plan où :

$$[[U_1]] \neq 0, [[U_2]] = 0, [[U_3]] = 0 \quad (\text{eq.I.2})$$

Le mode III est un mode de glissement anti-plan où :

$$[[U_1]] = 0, [[U_2]] = 0, [[U_3]] \neq 0 \quad (\text{eq.I.3})$$

2.1.1. Essais en Mode I

La littérature traitant de la fissuration en mode I est beaucoup plus abondante que celle traitant des autres modes de rupture. Ce foisonnement provient en partie du fait qu'il existe pour ce type de rupture un essai reconnu de tous : l'essai Double Cantilever Beam (D. C. B.) [J. M. Whitney et al - 82 ; L. B. Ilcewicz et al - 88]. Ce test consiste à faire propager une fissure existante dans une éprouvette symétrique (fig.I.2).

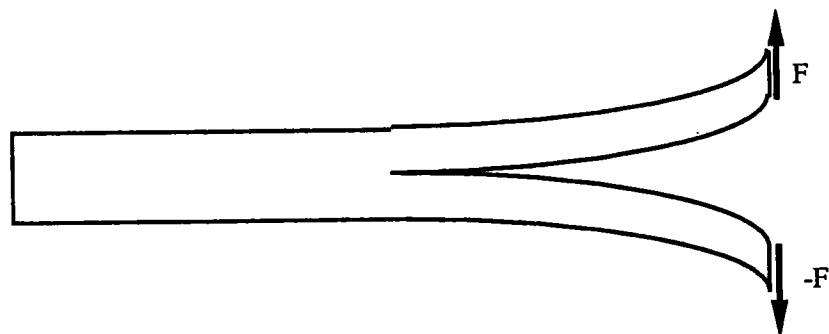


fig.I.2. Schématisation d'une éprouvette Double Cantilever Beam .

La plupart des auteurs s'accorde à penser que l'on peut définir un Taux de

Restitution de l'Énergie (T. R. E.) critique, noté G_{Ic} , permettant de caractériser l'initiation d'une fissure établie dans un composite multicouches à fibres longues. De nombreuses expériences montrent que cette valeur est indépendante de la longueur de la fissure initiale et de la hauteur de l'éprouvette. Elle caractérise donc de façon correcte et intrinsèque l'initiation d'une propagation en mode I . Nous pouvons accéder à cette valeur caractéristique du matériau de deux façons :

* En utilisant une modélisation de l'essai Double Cantilever Beam : on simule l'essai avec un modèle d'élasticité, 2-D ou 3-D, ou un assemblage de poutres. Dans les deux cas, on peut accéder à la valeur du Taux de Restitution de l'Énergie du modèle en utilisant soit une formule analytique, soit une intégrale de Rice ou une méthode de Crack Closure (éléments finis) [E. F. Rybicki et M. F. Kanninen - 77]. L'inconvénient de ces approches est de devoir introduire une certaine modélisation de l'essai Double Cantilever Beam. Les valeurs "expérimentales" du Taux de Restitution de l'Énergie critique ne sont pas véritablement "brutes d'essai" puisqu'elles dépendent de la modélisation retenue [J. G. Williams - 92].

* En utilisant un dépouillement direct des courbes charge-déplacements obtenues au cours de l'essai, par la méthode de la compliance ou la méthode des aires. Le Taux de Restitution d'Énergie étant défini comme le rapport entre la variation d'énergie stockée dans la structure et la variation de surface de la fissure, nous pouvons l'écrire comme suit :

$$G_{Ic} = -\frac{dU}{dA} = -\frac{1}{b} \frac{dU}{da} = \frac{1}{2b} P_c^2 \frac{dC}{da} \quad (\text{eq.I.1})$$

Où dU est la variation d'énergie, dA la variation de surface de la fissure, b la largeur de l'éprouvette, da la variation de la longueur de la fissure, P_c la force

critique au début de la propagation et dC la variation de la compliance. La méthode des aires consiste à déterminer une approximation de dU à partir de la variation d'aire sous la courbe charge-déplacement expérimentale, puis de l'introduire dans l'équation I.1. pour obtenir la valeur de G_{Ic} . La méthode de la compliance consiste à calculer la valeur expérimentale de dC à partir de la courbe charge-déplacement puis à l'introduire dans eq.I.1 pour obtenir la valeur de G_{Ic} . Ces méthodes permettent ainsi de déterminer des résultats qui sont, cette fois, "bruts d'essai". Cette façon de procéder, préférable à la première, est souvent utilisée par les expérimentateurs. Elle permet de rendre compte de la dissipation totale dans l'éprouvette.

En utilisant la méthode de la compliance, on observe, au cours de la propagation et cela de façon quasi-systématique, une augmentation puis une stabilisation de la dissipation globale dans l'éprouvette. Cette observation a été faite sur des verres-epoxy [X. N. Huang et D. Hull - 89 ; W. Hwang et K. S. Han - 89] et sur des carbones-époxy [P. Robinson et D. Q. Song - 92 ; D. Nesa - 87]. Ce phénomène est connu sous le nom de l'effet de courbe R (fig.I.3). L'effet de courbe R est l'augmentation puis la stabilisation de la dissipation totale dans l'éprouvette en fonction de la longueur de fissure. Cette augmentation de la dissipation s'accompagne physiquement, dans le cas des matériaux composites, de la création d'un pont de fibres le long d'une partie de la fissure [W. S. Johnson et P. B. Mangalgiri - 87]. La courbe que nous présentons (fig I.3) est celle d'un essai réalisé par P. Robinson et D. Q. Song [P. Robinson et D. Q. Song - 92]. Le matériau utilisé est un carbone-époxy (XAS-913C). La méthode de dépouillement utilisée pour déterminer la valeur de G_{Ic} est la méthode de la compliance.

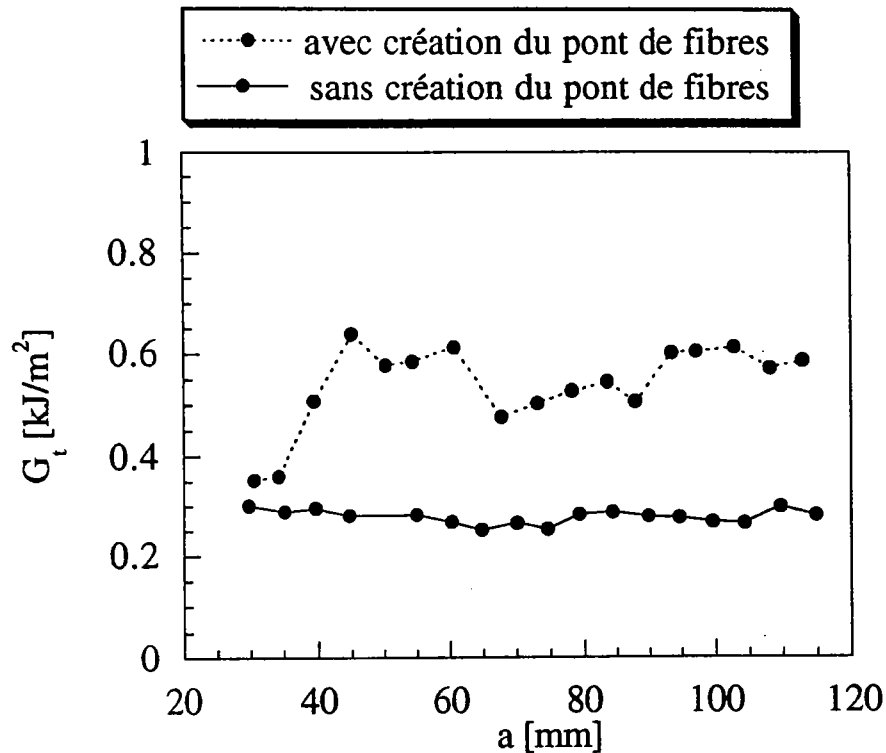


fig.I.3. L'effet de courbe R

Ces deux courbes sont obtenues à partir de deux empilements différents du même matériau. La courbe horizontale est celle d'un $[0^\circ/0^\circ]$ où l'expérimentateur n'a observé aucune formation de pont de fibres. L'autre est celle d'un $[45^\circ/45^\circ]$ où il a été observé une formation de pont de fibres. Cette expérience met en évidence que sans formation de pont de fibres la dissipation est quasi-constante, alors qu'avec l'apparition du pont de fibres on observe une augmentation de la dissipation totale dans l'éprouvette.

De nombreuses expériences ont permis de déterminer quelques facteurs influençant la création du pont de fibre ainsi que son influence sur l'effet de courbe R. X. J. Gong a étudié l'influence de l'angle des plis adjacents à la fissure sur la valeur du T. R. E. critique [X. J. Gong et al -90]. L'étude a porté sur l'évaluation du Taux de Restitution de l'Énergie caractéristique de l'initiation, noté G_{IC} , et du T. R. E. caractéristique de la propagation, noté G_{IP}^s . Elle observe la formation de pont de fibres et un effet de courbe R important. La valeur de G_{IP}^s est de 4 à 7 supérieure à celle de G_{IC} au cours de la propagation de la

fissure. Cette différence varie en fonction des différentes éprouvettes étudiées : le pont de fibres ne se développe pas de la même façon suivant l'angle des plis adjacents. Ces observations renforcent l'idée de lien entre l'effet de courbe R et la présence du pont de fibres.

D'autres auteurs ont étudié l'influence des caractéristiques mécaniques de la matrice sur la formation et le développement du pont de fibres. [D. J. Nicholls et J. P. Gallagher - 83] Des études ont mis l'accent soit sur la qualité de l'interface fibre-matrice [M. S. Madhukar et L. T. Drzal - 91 ; 92], soit sur l'influence de la température [D. Nesa - 87 ; S. Hashemi et al - 90].

L'une des expériences les plus explicites sur ce lien existant entre le pont de fibre et l'effet de courbe R est celle réalisée par Huang [X. N. Huang et D. Hull - 89]. On notera qu'une expérience similaire a été réalisée par Nesa [D. Nesa - 87]. H. Huang et D. Hull font un essai de fissuration en mode I, à l'aide d'un test Double Cantilever Beam, où ils vont détruire le pont de fibre à certains moments du test et en observer les conséquences (fig.I.4). Le matériau utilisé est un E verre-époxy unidirectionnel fabriqué par Vetrotex. La géométrie de l'éprouvette est la suivante : $E_{11} = 40$ GPa, $b = 25$ mm, $2h = 3$ mm. Les résultats présentés sont obtenus en utilisant la formule de Ripling-Mostovoy. Ils ont proposé une modélisation de l'essai Double Cantilever Beam basée sur un assemblage de poutres avec des corrections pour rendre compte des effets locaux de rotations en fond de fissure.

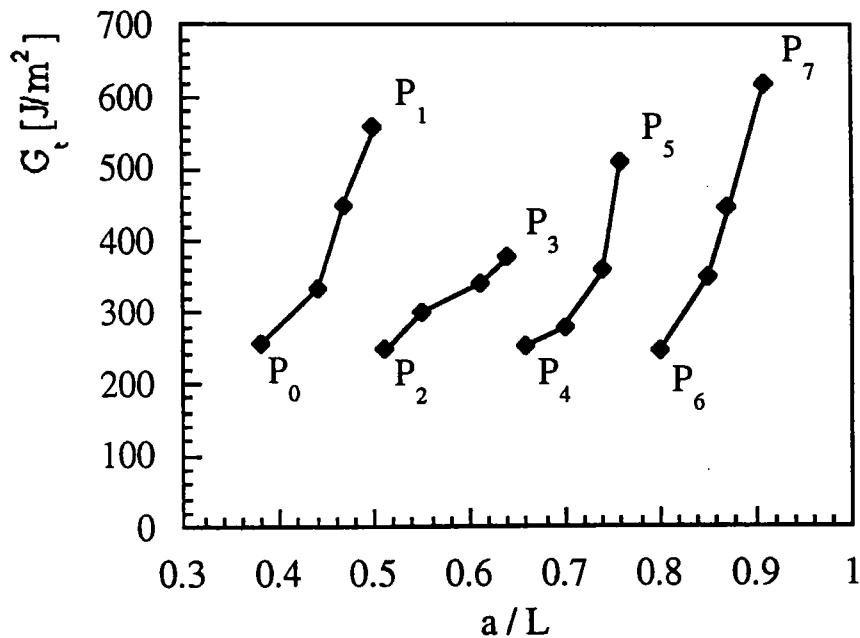


fig.I.4. Courbe de dissipation totale avec coupure du pont de fibres en cours de propagation

L'expérience est réalisée sur une éprouvette unique avec des coupures de pont successives. Les points P_0 , P_2 , P_4 , P_6 , sont caractéristiques de l'initiation de la propagation pour des fissures de longueurs différentes et non pontées. Nous remarquons que ces quatre points sont presque alignés. Ceci renforce donc l'idée qu'il existe un Taux de Restitution de l'Énergie critique caractéristique de l'initiation d'un délaminage pour une fissure établie et libre de tout pont. Les points se situant entre P_0 , P_1 , par exemple, sont le reflet de l'augmentation de la dissipation due à la création du pont de fibres. La chute entre P_1 , P_2 , est due à la coupure du pont créé, on se retrouve alors au niveau correspondant à l'initiation. Cette coupure est réalisée à l'aide d'un traitement par l'acide HCL.

Aussi, dans la modélisation que nous allons proposer, nous nous attacherons à prendre en compte ces deux idées : l'existence d'une valeur caractéristique de l'initiation, puis l'apparition d'une dissipation supplémentaire

couplée avec la création du pont de fibres.

2.1.2. Essais en mode II

En ce qui concerne la propagation d'une fissure en mode II, les avis sont partagés sur l'essai le plus adéquat. Il en existe classiquement trois pour le mode II : le Centred Notched Flexure (C. N. F.), le End Notched Flexure (E. N. F.) et le End Load Split (E. L. S.) (fig.I.5). Le Centred Notched flexure a surtout pour but d'étudier le délaminage des structures à la suite d'impacts [H. Maikuma et al - 89]. Les deux autres tests sont réalisés avec une éprouvette ayant la même géométrie que celle servant à un essai Double Cantilever Beam . Le End Notched flexure est un essai de flexion trois points [L. A. Carlsson et al - 86(a) ; 86(b)], et le E. L. S. est un essai de flexion simple [S. Hashemi et al - 90].

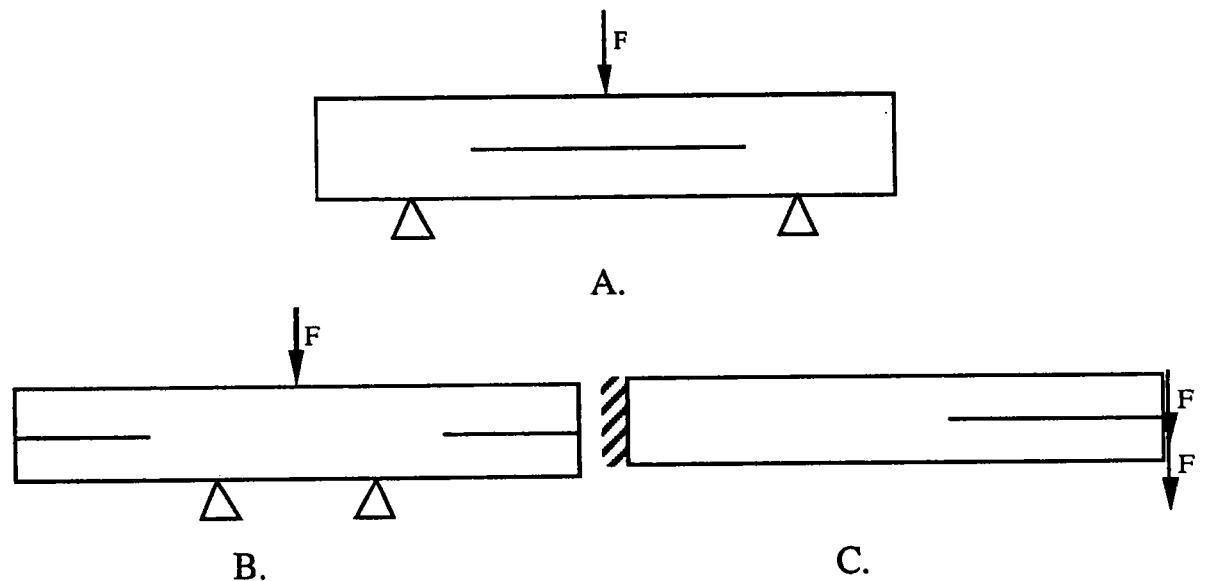


fig.I.5. Schéma des trois essais utilisés pour le mode II.

A : essai Centred Notched Flexure

B : essai End Notched Flexure

C : essai End Load Split

À la vue de différents articles, un fait apparaît reconnu de tous : le Taux de Restitution de l'Énergie critique en mode II, noté G_{IIC} , est nettement

supérieur à celui du mode I et cela dès l'initiation [M. L. Benzeggagh et al - 90 ; M. S. Madhukar et L. Drzal - 92(b)]. Cette différence est due aux phénomènes microscopiques responsables de la rupture. En effet, les faciès de rupture observés après destruction de l'éprouvette sont très différents [D. Nesa - 87]. Nous pouvons faire une autre remarque sur ces deux tests : ils présentent généralement une propagation instable pour les petites longueurs de fissure [M. S. Madhukar et L. Drzal - 92(b)]. Cette instabilité est un obstacle à la compréhension et à l'étude de cette forme de rupture. Certains auteurs notent aussi l'apparition d'un effet de courbe R lors de la propagation [S. Hashemi et al - 90]. Si la présence de pont de fibres semble moins fréquente qu'en mode I, cet effet de courbe R nous laisse cependant penser qu'il existe là aussi deux effets dissipatifs différents au cours de la propagation : l'un est caractéristique de l'initiation et il est différent de celui observé en mode I, et l'autre est caractéristique de l'augmentation. Cette nouvelle dissipation peut être due à la présence d'un pont de fibre mais aussi aux frottements interlaminaires non négligeables dans ce type de rupture.

2.1.3. Essais en mode mixte

Les articles traitant de ce mode de rupture sont encore plus rares que ceux traitant du mode II. Là aussi, il n'existe pas de test reconnu par tous les expérimentateurs comme étant le plus adapté et le plus efficace pour étudier ce type de rupture. [M. L. Benzeggagh et al - 90 ; X. J. Gong et al - 91 ; S. Hashemi et al - 90 ; Y. J. Yum et C. S. Hong - 91]. L'essai le plus souvent utilisé dans la littérature est cependant l'essai Mixed Mode Flexure Specimen (M. M. F. S.)(fig.I.6).

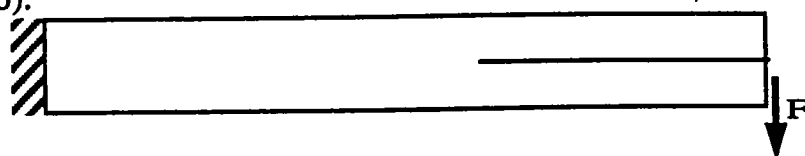


fig.I.6. Schéma de l'éprouvette M. M. F. S.

2.1.4. Conclusion

A la lecture des différents articles traitant de la propagation d'un délaminage dans une éprouvette, deux faits apparaissent clairement établis :

- * l'existence d'un Taux de Restitution de l'Énergie caractéristique de l'initiation de la propagation et cela dans tous les modes de ruptures.
- * une augmentation de la dissipation totale dans l'éprouvette pendant la propagation avec l'apparition d'un pont de fibres le long de la fissure.

Nous tiendrons compte de ces observations dans la modélisation que nous proposerons.

2.2. LES MODÈLES EXISTANTS

En ce qui concerne les différents cadres de modélisation permettant de simuler un délaminage, nous distinguons deux approches : la Mécanique de la Rupture (M. R.) et la Mécanique de l'Endommagement (M. E.) . La mécanique de la rupture vise à décrire la propagation du délaminage à l'aide du Taux de Restitution de l'Énergie qui est une variable thermodynamique globale. La mécanique de l'endommagement vise à décrire les processus de dégradation du matériau qui conduisent à la rupture du matériau. Ce cadre d'étude est plus lourd à mettre en œuvre mais offre la possibilité d'étudier l'initiation d'un délaminage à partir d'un matériau sain. Nous allons maintenant développer les principaux modèles existants dans ces cadres.

2.2.1. La mécanique de la rupture fragile

Les premières théories consacrées à la rupture concernaient des matériaux

fragiles comme le verre. Il apparaît que dans ce type de matériau aucune déformation plastique et aucun endommagement progressif ne précèdent la rupture. En 1920, Griffith fût alors le premier à relier l'énergie élastique restituée lors de l'avancée de la fissure avec l'énergie dissipée sous forme de création de nouvelle surface. Il définit la force d'extension de la fissure ou encore Taux de Restitution de l'Énergie, noté G :

$$G = -\frac{\partial P}{\partial A} \quad (\text{eq.I.5})$$

où ∂P représente l'énergie potentielle élastique restituée au cours de l'allongement de la fissure et ∂A représente l'incrément de surface correspondant. Le critère de propagation associé s'écrit :

$$\begin{aligned} G < G_c & \quad \text{Pas de propagation} \\ G = G_c & \quad \text{Propagation} \end{aligned} \quad (\text{eq.I.6})$$

Ultérieurement, d'autres études ont mis en place des critères multi-modes pour des matériaux fragiles E. M. Wu. et Benzeggagh M. L.. [E. M. Wu. - 92 ; Benzeggagh M. L. et al - 88]. Cependant, l'utilisation de la mécanique de la rupture fragile seule n'est pas envisageable dans des matériaux composites à fibres longues.

En effet, l'augmentation de la dissipation totale dans l'éprouvette est en désaccord avec le critère de Griffith. Mais nous pouvons à l'aide de ce critère déterminer, facilement et simplement, la valeur du Taux de Restitution de l'Énergie caractéristique de l'initiation de la propagation d'une fissure existante et libre de tout pont de fibres. La fig.I.3 montre, que sans création de pont de fibres le critère de Griffith est valable. Nous pourrions donc conserver ce critère comme critère d'initiation dans les composites à fibres longues.

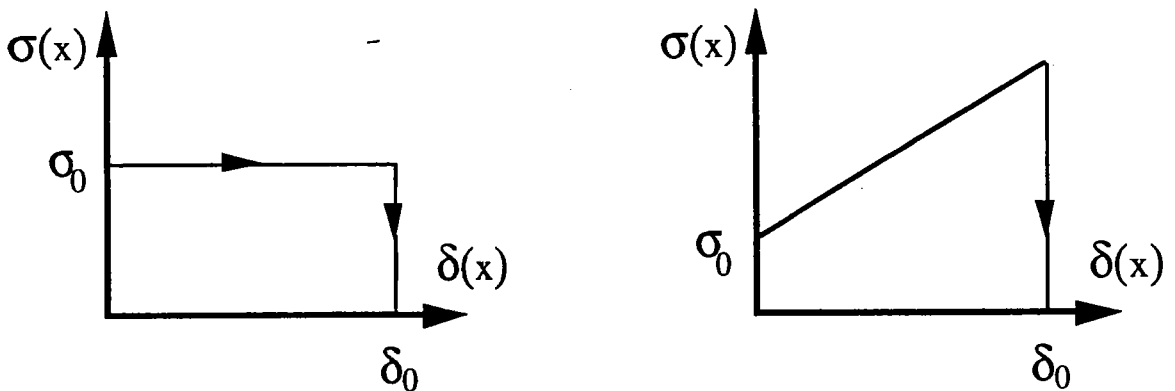
2.2.2. La mécanique de la rupture ductile

Ce cadre permet d'étudier la propagation d'une fissure dans un matériau où se développe une zone de plasticité non négligeable en pointe de fissure. Un des premiers modèles rendant compte de ces effets fût celui de Irwing (1960). Il remarqua qu'une fissure accompagnée d'une zone plastique localisée en sa pointe se comportait comme une fissure élastique plus longue. Il définit alors une longueur, appelée correction de zone plastique d'Irwing, qu'il ajoute à la longueur de fissure réelle. Cette approche permet de rendre compte de l'effet de courbe R de façon artificielle. Le modèle suivant fût réalisé par D. S. Dugdale [D. S. Dugdale - 60 ; G. Bao et Z. Suo -92(a)]. Il modélisa l'effet de la zone plastique par une densité de contrainte le long d'une partie de la fissure. Il obtint des résultats comparables à ceux de Irwing. Plus récemment, des modèles ont été développés pour des matériaux composites à matrice fragile. Ces matériaux développent aussi des ponts de fibres. Un modèle fut développé par S. Nirmalendran et H. Horii pour les matrices céramique avec renforcement de fibres courtes [S. Nirmalendran et H. Horii - 92]. La zone pontée est représentée par une partie de la macro-fissure où les contraintes continuent à se transmettre entre les lèvres de la fissure. La contrainte, dans le pont de fibres et l'ouverture des lèvres de la fissure, satisfont la relation suivante (eq.I.5):

$$\frac{\sigma}{\sigma_c} = 1 - \frac{w}{w_c} \quad \text{eq.I.7}$$

Les paramètres σ_c et w_c sont caractéristiques du pont utilisé. D'autres modèles ont été développés sur ce type de matériau [B. Budiansky et al - 88 ; B. Budiansky et J. C. Amazigo - 89; G. Meda et P. S. Steif 92 ; C. K. Y. Leung et V. C. Li - 92 ; L. J. Ghosn et al - 92 ; L. R. F. Rose - 82, 87 ; V. Tvergaard et J. W. Hutchinson - 92]. Ces résultats ne sont pas directement transférables aux délaminages dans les composites à matrice organique et à fibres longues car les

échelles mises en jeu dans les deux cas ne sont pas les mêmes. Z. Suo a développé un modèle dit de grande échelle. Il suppose l'existence d'un Taux de Restitution de l'Énergie critique caractéristique de l'initiation et modélise une zone endommagée ayant une longueur non négligeable devant la longueur de fissure [Z. Suo et al - 92]. En s'inspirant du modèle de Dugdale, il applique le long de cette zone une contrainte dépendante de l'ouverture des lèvres. Il propose plusieurs types de loi (fig.I. 6) :



fig(I.6). Type de loi proposées par Z. Suo

On note que D. Nesa [D. NESA - 87] a réalisé un calcul éléments finis en utilisant la première loi. L'étude de Z. Suo est basée sur des modèles d'élasticité 2D en contrainte plane. Ce type d'approche est certainement plus précis que celui que l'on va présenter au chapitre 2, qui sera basé lui sur des modèles poutre. Cependant sa mise en œuvre est plus lourde (nombreux calculs éléments finis). A l'aide de cette modélisation du pont de fibres, il simule de façon correcte l'effet de courbe R à partir de deux phénomènes dissipatifs différents dans l'éprouvette, l'un venant de l'avancée de la fissure et l'autre venant du pont de fibre.

2.2.3. La mécanique de l'endommagement

Nous allons parler, maintenant, des modèles existants dans le cadre de la

mécanique de l'endommagement. La théorie de l'endommagement a pour objectif de décrire l'évolution des phénomènes de dégradation depuis l'état vierge jusqu'à l'amorçage, puis la propagation de la fissure macroscopique. J. Lemaitre et J. L. Chaboche ont étudié vers 1970 l'application d'une telle approche pour des matériaux isotropes tels que les métaux. L'endommagement et la rupture des matériaux composites ont fait l'objet de nombreuses études au L. M. T. Cachan dans l'équipe de P. Ladevèze. [P. Ladevèze - 86 ; D. Gilletta - 85 ; Y. Reymond - 84 ; O. Allix - 89]. O. Allix et L. Daudeville ont abordé le délaminage par la mécanique de l'endommagement [P. Ladevèze et al - 90 ; O. Allix - 92 ; L. Deaudeville - 92]. L'approche du délaminage dans un tel cadre se situe à l'échelle dite " méso". Ils considèrent qu'un composite stratifié peut se modéliser à l'aide de trois entités : Deux mono couches et une interface où se propage le délaminage (fig.I.7) .

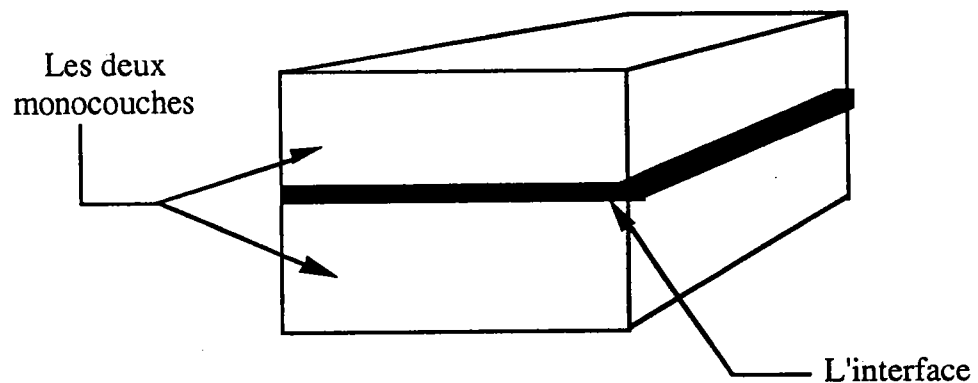


fig.I.7. Modélisation à l'échelle " méso" .

L'interface ne participe pas à la rigidité de l'ensemble mais assure le transfert des déplacements et des contraintes entre les plis élémentaires. Sous l'effet des contraintes cette interface se dégrade progressivement jusqu'à rupture complète : c'est le délaminage.

Dans [O. Allix - 92] la dégradation est gouvernée par trois variables d'endommagement pour les trois directions de sollicitations. Les lois d'évolution de ces variables d'endommagement sont couplées. Un des avantages de leur

approche est de pouvoir simuler un délaminage à partir d'un matériau complètement sain. Une des applications de cette possibilité est de pouvoir étudier le délaminage dû aux effets de bord [O. Allix - 89, 92 ; L. Daudeville - 92], ce qui est impossible avec la Mécanique Linéaire de la Rupture. O. Allix et L. Daudeville ont montré que leur interface endommageable, placée entre deux couches purement élastiques, permettait de retrouver les résultats classiques de la mécanique de la rupture avec un critère de Griffith. Il semble, toutefois, que l'effet de courbe R ne soit pas représenté dans leur modèle d'interface : toute la dissipation supplémentaire responsable de l'effet est attribué à la dégradation par micro fissuration des deux monocouches adjacentes au délaminage. Cette approche nécessite une modélisation de l'endommagement de l'interface et des monocouches élémentaires. La mise en œuvre numérique de ces modèles est relativement complexe par rapport aux modèles de type Dugdale ou de type Suo.

2.3. CONCLUSION

Quel que soit le cadre dans lequel on se situe, il apparaît que le problème de la modélisation du pont de fibres et de ses conséquences reste ouvert. Nous allons proposer une nouvelle approche qui se situe dans le cadre de la Mécanique Linéaire de la Rupture ductile. Dans les modèles que nous allons développer, nous nous efforcerons d'appliquer les idées émises au § 1.2.2. :

- * L'existence d'un Taux de Restitution de l'Énergie caractéristique de l'initiation de la propagation.
- * L'apparition d'une dissipation supplémentaire avec l'arrivée du pont de fibres.

Ces modèles seront développés avec des modèles de poutre 1-D pour obtenir une résolution analytique complète du problème. Nous pourrions alors, à

l'aide d'une résolution par la méthode de Newton-Raphson, simuler de façon complète la propagation de la fissure, la création et le transport du pont fibre, ceci pour tous les essais classiques comme le Double Cantilever Beam , le End Load Split et le Mixed Mode Flexure Specimen.

3. MODÉLISATION DU PONT DE FIBRES EN MODE I

3.1. INTRODUCTION

L'objectif de ce chapitre est de montrer que l'on peut rendre compte de l'effet de courbe R, de façon réaliste, en modélisant les ponts de fibres par une densité de ressorts ayant une loi de comportement convenable. Pour simplifier, nous nous limiterons à des modélisations 1-D en théorie des poutres dont l'assemblage reste identique à celui utilisé par B. Cochelin [thèse - 89]. L'intérêt de cette approche est de pouvoir simuler complètement la propagation d'un délaminage, sans résolution numérique complexe.

Dans ce chapitre, nous nous appuyerons sur l'étude et la modélisation de l'essai D. C. B., qui est le test le plus répandu pour caractériser la rupture en mode I. Nous étudierons deux types de lois d'endommagement pour les ressorts: Élastique-fragile et Endommagement Progressif. La simulation complète de la propagation du délaminage avec création de ponts de fibre sera réalisée et discutée dans les deux cas. Enfin, nous étudierons l'influence des rotations en fond de fissure.

3.2. MODÈLE ÉLASTIQUE-FRAGILE

3.2.1. Cinématique

Nous assemblons trois poutres (P_i) de type Bernoulli occupant chacune un domaine Ω_i $i = \{0,1,2\}$ et nous introduisons une densité de ressorts élastiques-fragiles sur une partie de la fissure occupant un domaine, noté Ω_3 (fig II. 1).

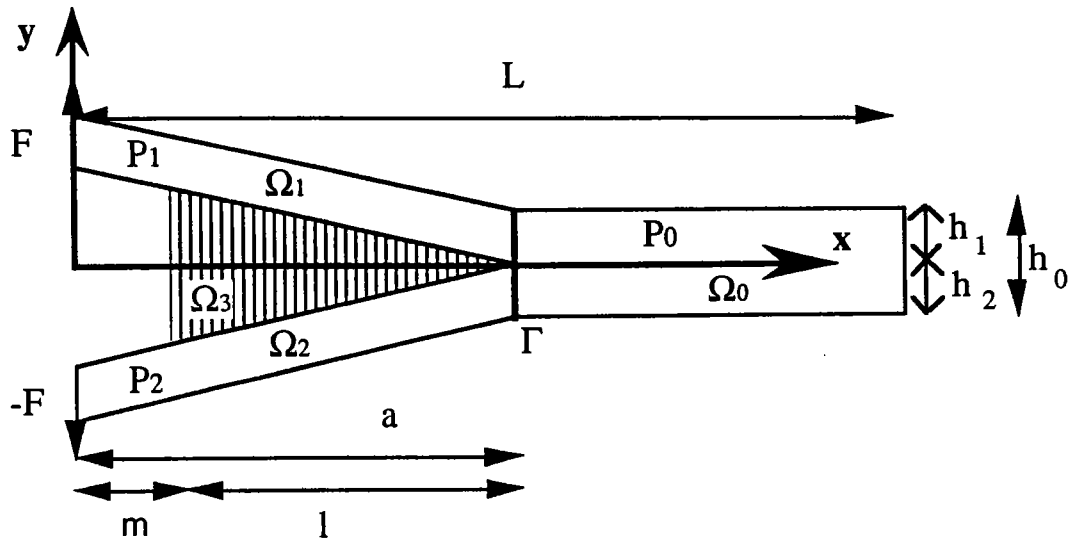


fig II. 1 Assemblage des poutres et des ressorts.

Pour le modèle D. C. B. la fissure est centrée
et nous avons $h_1 = h_2 = h_0/2$

3.2.1.1. Cinématique des poutres

Les déplacements des poutres sont classiquement définis par :

$$\bar{U}_i(x, y) = \left(u_i(x) - \left(y - y_{G_i} \right) v_i'(x) \right) \bar{x} + v_i(x) \bar{y} \quad i = \{0, 1, 2\} \quad (\text{eq II.1})$$

où sur chaque domaine Ω_i , $u_i(x)$ et $v_i(x)$ sont respectivement le déplacement longitudinal et transversal de la ligne moyenne et y_{G_i} son ordonnée. On note que dans l'essai D. C. B. $y_{G_0} = 0$, $y_{G_1} = \frac{h_2}{2}$, $y_{G_2} = -\frac{h_1}{2}$, où h_i est la hauteur de la poutre P_i . On impose les conditions suivantes de raccord cinématique au niveau de la pointe de fissure, le long de Γ :

$$\bar{U}_\alpha(a, y) = \bar{U}_0(a, y) \quad \alpha = 1, 2 \quad (\text{eq II.2})$$

Le champ de déplacement de la structure est ainsi entièrement défini à l'aide de ces six fonctions qui vérifient les six conditions de raccord suivantes :

$$\begin{cases} u_1(a) = u_0(a) - \frac{h_2}{2} v_0'(a) \\ u_2(a) = u_0(a) + \frac{h_1}{2} v_0'(a) \\ v_1(a) = v_2(a) = v_0(a) \\ v_1'(a) = v_2'(a) = v_0'(a) \end{cases} \quad (\text{eq II.3})$$

Nous travaillons dans le cadre des petites perturbations avec un matériau élastique linéaire, aussi les déformations longitudinales s'écrivent :

$$\varepsilon_{x_i}(x, y) = u_i' - (y - y_{G_i}) v_i''(x) \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{eq II.4})$$

Les contraintes longitudinales sont reliées aux déformations par la relation :

$$\sigma_{x_i}(x, y) = E_i(y) \varepsilon_{x_i}(x, y) \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{eq II.5})$$

Nous définissons les déformations généralisées $e_i(x)$, $k_i(x)$ et les contraintes généralisées $N_i(x)$, $M_i(x)$, b étant la largeur de l'éprouvette, par :

$$\begin{cases} e_i(x) = u_i'(x) \\ k_i(x) = -v_i''(x) \\ N_i(x) = b \int_{-h_i/2}^{h_i/2} \sigma_{x_i}(x, y) dy \\ M_i(x) = b \int_{-h_i/2}^{h_i/2} y \sigma_{x_i}(x, y) dy \end{cases} \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{eq II.6})$$

Compte tenu des définitions précédentes, nous pouvons écrire les

relations de comportement entre déformations et contraintes généralisées :

$$\begin{cases} N_i(x) = A_i e_i(x) + B_i k_i(x) \\ M_i(x) = B_i e_i(x) + D_i k_i(x) \end{cases} \quad i = 0,1,2 \text{ (sans sommation sur } i \text{) (eq II.7)}$$

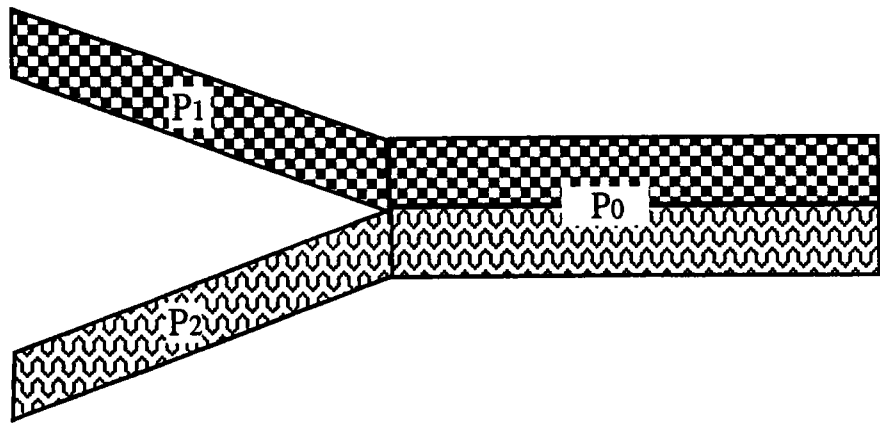
où les coefficients A_i , B_i , D_i sont donnés par :

$$A_i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} b E_i(y) dy \quad i = 0,1,2 \quad (\text{eq II.8})$$

$$B_i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} y b E_i(y) dy \quad i = 0,1,2 \quad (\text{eq II.9})$$

$$D_i = \int_{-h_i/2}^{h_i/2} y^2 b E_i(y) dy \quad i = 0,1,2 \quad (\text{eq II.10})$$

Dans le cas des composites stratifiés, la poutre P_0 est constituée du même matériau que la poutre P_1 au dessus du délaminage et que la poutre P_2 au dessous. fig(II.2).



fig(II.2) Répartition des matériaux dans l'éprouvette

En d'autres termes le module d'Young est continu au niveau du raccord des trois poutres. En conséquence, les neuf coefficients A_i , B_i , D_i vérifient les

trois relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 A_0 &= A_1 + A_2 \\
 B_0 &= B_1 + B_2 + \frac{h_2}{2} A_1 - \frac{h_1}{2} A_2 \\
 D_0 &= D_1 + D_2 + h_2 B_1 - h_1 B_2 + \frac{h_2^2}{4} A_1 + \frac{h_1^2}{4} A_2
 \end{aligned}
 \tag{eq II.11}$$

3.2.1.2. Comportement de l'interface

Maintenant, nous allons définir le comportement de l'interface. Cette interface, modélisant le pont de fibre, est constituée d'une densité de ressort à endommagement fragile. La relation donnant la force dans le ressort, en fonction de l'ouverture relative des lèvres de la fissure, est schématisée par la figure (II.3).

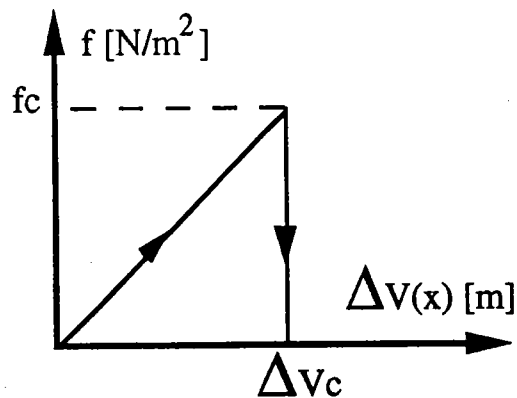


fig II.3 La loi élastique-fragile de l'interface

Les équations correspondantes sont :

$$\begin{cases}
 f(x) = k\Delta V(x) & \text{si } \Delta V(x) \leq \Delta V_c \\
 f(x) = 0 & \text{si } \Delta V(x) > \Delta V_c
 \end{cases}
 \tag{eq II.12}$$

où :

$$k = \frac{f_c}{\Delta V_c} \quad \text{et} \quad \Delta V(x) = (v_1(x) - v_2(x)) \quad (\text{eq II.13})$$

Nous pouvons alors définir l'énergie élastique stockée dans l'interface par :

$$W_{if} = \frac{b}{2} \int_m^a f(x) \Delta V(x) dx \quad (\text{eq II.14})$$

3.2.2. Application du Principe des Puissances Virtuelles

Nous appliquons le Principe des Puissances Virtuelles (P. P. V.) pour déterminer les équations d'équilibre du modèle. Nous nous intéressons surtout aux déplacements le long du pont de fibres. Nous appliquons le P. P. V. à l'ensemble formé par les trois poutres P₀, P₁, P₂, et par l'interface Ω_3 :

$$\sum_{k=0}^3 \left(P_{int}^{\Omega_k}(\delta U) \right) + P_{ext}^{\Omega}(\delta U) = 0 \quad \forall \delta U \in \{C.A\} \quad (\text{eq II. 15})$$

Le champ de déplacements δU est cinématiquement admissible (C.A.), si il vérifie les conditions limites et les conditions de raccords entre les différentes poutres, eq. II.3. L'écriture explicite de la puissance intérieure pour chaque poutre, et donc sur chaque domaine Ω_i ($i=0..2$) (il n'y a pas de sommation sur i), est :

$$P_{int}^{\Omega_i}(\delta U) = - \int_{\Omega_i} (N_i \delta(e_i(x)) + M_i \delta(k_i(x))) d\omega_i \quad (\text{eq II. 16})$$

et pour l'interface :

$$P_{int}^{\Omega_3}(\delta U) = - \int_{\Omega_3} f(x) \delta(\Delta v(x)) d\omega_3 \quad (\text{eq II. 17})$$

L'écriture de la puissance des efforts extérieurs est :

$$P_{\text{ext}}^{\Omega}(\delta U) = F\delta v_1(0) - F\delta v_2(0) \quad (\text{eq II. 18})$$

Après une double intégration par partie de l'équation (eq II. 15), nous obtenons toutes les équations d'équilibres ainsi que les équations de raccord sur les efforts généralisés en $x = a$ (eq II. 19). Ces trois équations correspondent respectivement au raccord des efforts normaux, des moments fléchissants et des efforts tranchants.:

$$\begin{aligned} N_0 &= N_1 + N_2 \\ M_0 &= M_1 + M_2 + \frac{h_2}{2}N_1 - \frac{h_1}{2}N_2 \\ M'_0 &= M'_1 + M'_2 \end{aligned} \quad (\text{eq II. 19})$$

Nous développerons les équations d'équilibre seulement dans le cadre d'une éprouvette Double Cantilever Beam. Dans le cas du D. C. B. , nous pouvons faire des simplifications pour des raisons de symétrie dans l'éprouvette. Il existe une symétrie miroir et de chargement au niveau de chacune des pattes de l'éprouvette. De plus, on note que $h = h_1 = h_2 = h_0/2$. Les simplifications sont alors les suivantes :

$$v_0(x) = 0 \quad , \quad u_0(x) = 0 \quad (\text{eq II.19})$$

$$v_1(x) = -v_2(x) = v(x) \quad (\text{eq II.20})$$

$$u_1(x) = -u_2(x) = u(x) \quad (\text{eq II.21})$$

$$B_1 = B_2 = B_0 = 0 \quad (\text{eq II.22})$$

$$A_1 = A_2 = A \quad (\text{eq II.23})$$

$$D_1 = D_2 = D \quad (\text{eq II.24})$$

A l'aide des équations (eq II.14) à (eq II.19), nous pouvons aussi

simplifier l'écriture des déformations et des contraintes généralisées :

$$e_1(x) = e_2(x) = e(x) \quad (\text{eq II. 25})$$

$$k_1(x) = -k_2(x) = k(x) \quad (\text{eq II. 26})$$

$$N_1(x) = N_2(x) = N(x) = A e(x) \quad (\text{eq II. 27})$$

$$M_1(x) = -M_2(x) = M(x) = D k(x) \quad (\text{eq II. 28})$$

Nous développons, ici seulement, les équations le long du pont de fibre, c'est à dire $x \in [m, a]$:

* Équations d'équilibre local le long du pont fibres :

$$\begin{cases} N'(x) = 0 \\ M''(x) - 2kbv(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{eq II. 29})$$

*Les conditions limites ramenées aux extrémités du pont :

- $x = m$:

$$N(m) = 0$$

$$M(m) = -Fm \quad (\text{eq II. 30})$$

$$M'(m) = -F$$

- $x = a$:

$$u(a) = 0$$

$$v(a) = 0 \quad (\text{eq II. 31})$$

$$v'(a) = 0$$

En utilisant la définition des contraintes et déformations généralisées, eq II.20 à eq II.23, nous obtenons les équations suivantes :

$$u''(x) = 0 \quad (\text{eq II.32})$$

$$v^{(4)}(x) + \frac{2kb}{D} v(x) = 0 \quad (\text{eq II.33})$$

La résolution de ces équations se fait simplement en utilisant les six conditions limites ((eq II.29),(eq II.30)). Les solutions sont :

$$u(x) = 0 \quad (\text{eq II.34})$$

$$v(x) = (\alpha \sin(\lambda x) + \beta \cos(\lambda x))\text{ch}(\lambda x) + (\gamma \sin(\lambda x) + \delta \cos(\lambda x))\text{sh}(\lambda x)$$

où :

$$\lambda^4 = \frac{kb}{2D} \quad (\text{eq II.35})$$

Les coefficients $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sont des fonctions non-linéaires dépendantes de $(\frac{1}{a}, \lambda l, \lambda m)$. La résolution de ces équations différentielles a été faite avec un code de calcul formel. Nous avons utilisé un tel procédé de calcul pour faciliter les différentes étapes ultérieures de la simulation. Leur écriture complète, ainsi que le programme permettant leur calcul, se trouvent dans l'annexe 1. Nous avons donc déterminé l'équation de la flèche pour une fissure partiellement pontée.

3.2.3. Calcul de la dissipation totale dans l'éprouvette

Dans cette partie, nous allons déterminer la dissipation globale dans l'éprouvette que nous venons de modéliser par un assemblage de trois poutres et une densité de ressort endommageable. Nous supposons que la fissure avance à la vitesse $\dot{a}(t)$ et que l'extrémité du pont avance elle aussi, mais à une vitesse différente $\dot{m}(t)$. Pour ce faire, nous nous situerons dans le cadre d'une approche quasi-statique et isotherme sans nous limiter au cas de l'éprouvette D. C. B. Dans ce cadre on peut écrire la dissipation globale pour un domaine Ω comme :

$$D_t = P_{\text{ext}} - \frac{d}{dt} (W_{\text{def}}^{\Omega}) \quad (\text{eq II.36})$$

$$\text{où : } \Omega = \bigcup_{k=0}^3 \Omega_k$$

P_{ext} : Puissance des efforts extérieurs

W_{def}^{Ω} : Énergie de déformation interne de l'ensemble
poutres plus interface

B. Cochelin [B. Cochelin - 89] a montré que pour un assemblage de trois poutres uniquement, la dissipation globale s'écrivait :

$$D_t = \dot{a}(t)G(a) \quad (\text{eq II.37})$$

où $G(a)$, le Taux de Restitution de l'Énergie en pointe de fissure est égale à :

$$G(a) = [[W]]_{x=a} = (W_1(a) + W_2(a) - W_0(a))$$

$W_i(a)$ étant l'énergie de déformation de la poutre i en $x = a$ définie par :

$$W_i(a) = \frac{1}{2}(N_i(a)e_i(a) + M_i(a)k_i(a)) \quad (\text{eq II.38})$$

Ce résultat, reliant le taux de restitution de l'énergie avec la discontinuité de l'énergie de déformation des différentes poutres en pointe de fissure, est en accord avec les résultats publiés par B. Storakers [B. Storakers - 89]. On trouvera des résultats similaires dans la thèse de R. M. Pradeilles, où de nombreux modèles d'assemblage de poutres et de plaques ont été étudiés [R. M. Pradeilles - 92]. Nous allons procéder d'une manière identique à celle utilisée par B. Cochelin dans sa thèse, en considérant que nous avons un assemblage qui comprend trois poutres et une densité de ressort. Nous allons développer, maintenant, les éléments essentiels du calcul de la dissipation totale dans l'éprouvette :

$$W_{\text{def}}^{\Omega} = \underbrace{\sum_{i=0}^2 \int_{\Omega_i} W_i(x) d\omega_i}_{\text{Énergie de déformation due aux trois poutres}} + \underbrace{\int_{\Omega_3} \frac{k}{2} (\Delta v(x))^2 d\omega_3}_{\text{Énergie de déformation due aux ressorts}} \quad (\text{eq II.39})$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (W_{\text{def}}^{\Omega}) &= \sum_{i=0}^2 \int_{\Omega_i} \frac{d}{dt} (W_i(x)) d\omega_i + \int_{\Omega_3} \frac{d}{dt} \left(\frac{k}{2} (\Delta v(x))^2 \right) d\omega_3 \\ &+ \dot{a}(t) [[W]]_{x=a} + \dot{a}(t) \left(\frac{kb}{2} (\Delta v(a))^2 \right) - \dot{m}(t) \left(\frac{kb}{2} (\Delta v(m))^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{eq II.40})$$

Dans l'équation (eq II.40) nous obtenons deux types de termes. Les deux premiers sont le reflet de la variation d'énergie dans le temps et dans le domaine considéré. Les trois derniers sont le reflet de la variation d'énergie dans le temps due aux déplacements des frontières du domaine. En effet, dans la modélisation que nous proposons, il existe deux frontières libres : l'une en pointe de fissure, $x = a$, et l'autre à l'autre extrémité de la densité de ressort, $x = m$.

En appliquant donc le Principe des Puissances Virtuelles à la poutre P0 et à l'ensemble {P1+P2+Densité de ressort}, et en distinguant les efforts de liaisons au niveau du raccord de ces deux ensembles, leur puissance virtuelle est notée P_{Γ} , nous pouvons l'écrire comme :

$$\sum_{k=0}^3 \left\{ - \int_{\Omega_k} \frac{d}{dt} (W_k(x, t)) dx + P_{\text{ext}} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \right) + P_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \right) \right\} = 0 \quad (\text{eq II.41})$$

En utilisant les équations (eq II.39) à (eq II.41), nous obtenons la relation

suivante pour l'expression de la dissipation totale :

$$D_t = \underbrace{-\dot{a}(t)[[W]]_{x=a} + P_\Gamma \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \right)}_{\text{Dissipation en pointe de fissure}} + \underbrace{\dot{m}(t) \left(\frac{kb}{2} (\Delta v(m))^2 \right) - \dot{a}(t) \left(\frac{kb}{2} (\Delta v(a))^2 \right)}_{\text{Dissipation dans l'interface endommageable}}$$

$$D_t = D_m + D_p$$

(eq II.42)

Déjà à ce stade de calcul, nous avons mis en évidence deux termes dissipatifs distincts, l'un caractéristique des phénomènes en pointe de fissure et l'autre caractéristique des phénomènes dans l'interface endommageable. Nous pouvons simplifier l'écriture de cette dissipation totale.

Pour le terme concernant la pointe de fissure, noté D_m , il faut tenir compte que les discontinuités de contraintes se déplacent comme la pointe de fissure à la vitesse $\dot{a}(t)$ [Nguyen - 80]. Nous montrons alors :

$$P_\Gamma \left(\frac{\partial u_k}{\partial t} \right) = \dot{a}(t) [[Ne - Mk + Tv']]_{x=a} \quad (\text{eq II.43})$$

ce qui entraîne :

$$D_m = \dot{a}(t) [[-W + (Ne - Mk + Tv')]]_{x=a} \quad (\text{eq II.44})$$

et compte tenu de l'équilibre des efforts tranchants et de la linéarité de la loi de comportement :

$$D_m = \dot{a}(t) [[W]]_{x=a} \quad (\text{eq II.45})$$

Nous noterons désormais cette discontinuité de W en $x = a$ par G_m :

$$G_m = [[W]]_{x=a} \quad (\text{eq II.46})$$

ainsi :

$$D_m = \dot{a}(t)G_m \quad (\text{eq II.47})$$

Nous pouvons observer que ce terme de dissipation, ainsi que le taux de restitution associé, sont les mêmes que ceux déterminés par B. Cochelin [B. Cochelin et M. Potier Ferry - 91] et B. Storakers [B. Storakers - 89] pour un assemblage ne comprenant pas de ressorts. Une écriture explicite de G_m montre, pour le cas de l'éprouvette Double Cantilever Beam, que c'est une fonction non-linéaire des variables $(\lambda_m, \lambda_a, \frac{m}{a})$, c'est à dire qu'elle dépend de façon explicite des différentes caractéristiques de l'interface, raideur et longueur. Nous ne donnons pas cette expression car elle serait illisible, mais donnons dans l'annexe 1 le programme de calcul formel permettant de la calculer.

En ce qui concerne le terme caractéristique du pont de fibre, noté D_p , une simplification évidente s'opère de part la continuité des déplacements en pointe de fissure $\Delta v(a) = 0$ et donc :

$$D_p = \dot{m}(t) \left(\frac{kb}{2} (\Delta v(m))^2 \right) \quad (\text{eq II.48})$$

$$D_p = \dot{m}(t)G_p \quad (\text{eq II.49})$$

En injectant les résultats des équations (eq II.47) et (eq II.49), nous démontrons que la dissipation totale dans l'éprouvette ainsi modélisée s'écrit :

$$D_t = \dot{a}(t)G_m + \dot{m}(t)G_p \quad (\text{eq II.50})$$

Nous pouvons définir aussi un Taux de Restitution de l'Énergie totale, noté G_t , en écrivant :

$$D_t = \dot{a}(t)G_t \quad (\text{eq II.51})$$

et donc :

$$G_t = G_m + \frac{dm}{da} G_p \quad (\text{eq II.52})$$

Nous avons mis en évidence deux termes dissipatifs dans l'écriture de la dissipation globale dans l'éprouvette. Ces deux termes sont les reflets de deux phénomènes différents : l'un rend compte de la dissipation en pointe de fissure et l'autre de la dissipation au niveau de l'interface modélisant le pont de fibres. L'idée qui va maintenant être développée est d'attribuer au pont de fibres toute l'augmentation apparente du T. R. E. cours de la propagation . On note, dès à présent, qu'avec ce type de loi à endommagement brutal, toute la dissipation développée dans l'interface est concentrée à l'extrémité $x=m$ du pont de fibres.

3.2.4. Simulation de la propagation

3.2.4.1. Les critères de propagation

Au travers des critères de propagation que nous utiliserons, nous allons nous appliquer à rendre compte de deux phénomènes observés expérimentalement qui sont :

- L'existence d'un Taux de Restitution de l'Énergie critique caractéristique de l'initiation de la propagation d'une fissure établie.

- L'effet de courbe R caractéristique de l'apparition du pont fibre.

En nous appuyant sur les observations expérimentales visant à montrer que lorsqu'il n'y a pas de formation de pont de fibres la dissipation totale dans l'éprouvette est constante, nous concentrons alors toute l'augmentation de la dissipation au cours de la propagation dans le terme lié au pont de fibres, noté D_p . Nous utiliserons le critère de Griffith comme critère de propagation en pointe de fissure tout au long de la fissuration. Ainsi nous écrivons :

$$G_m < G_{Ic} \quad \dot{a}(t) = 0 \quad \text{pas de propagation} \quad (\text{eq II.53})$$

$$G_m = G_{Ic} \quad \dot{a}(t) > 0 \quad \text{propagation} \quad (\text{eq II.54})$$

G_{Ic} représente l'énergie nécessaire pour faire propager une fissure sans pont de fibres. Il est donc représentatif des phénomènes dissipatifs qui ont lieu en pointe de fissure. Nous conserverons donc, comme premier critère de propagation, $G_m = G_{Ic}$ en pointe de fissure à l'initiation, puis tout au long de la propagation. Nous rappelons que G_m est la partie du T. R. E. totale localisée en pointe de fissure. Le deuxième critère, que nous utiliserons simultanément au cours de la propagation, est un critère de déplacement maximum sur les ressorts, introduit dans la définition de la loi du ressort (eq II.12) . Au cours de la propagation, le point $x=m$ est mobile, au même titre que le point $x=a$. La loi d'évolution en $x=m$ est donc par analogie avec celle du point $x=a$:

$$\Delta V(m) < \Delta V_c \quad \dot{m}(t) = 0 \quad \text{pas de transport} \quad (\text{eq II.55})$$

$$\Delta V(m) = \Delta V_c \quad \dot{m}(t) > 0 \quad \text{transport} \quad (\text{eq II.56})$$

L'association de ces deux critères, au cours des différentes phases de propagation de la fissure dans l'éprouvette, nous permettra de simuler de façon

plus réaliste un essai Double Cantilever Beam complet .

3.2.4.2. La propagation complète

Au cours de cette simulation nous allons distinguer deux phases : une phase de création et une phase de transport.

La première est constituée de l'initiation de la propagation, à partir d'une fissure déjà existante, et de la création du pont de fibres sans déplacement de l'extrémité $x=m$ de l'interface. Nous avons donc $\dot{a}(t) > 0$ et $\dot{m}(t) = 0$.

Durant la deuxième phase nous avons simultanément l'allongement de la fissure et la création du pont de fibres avec déplacement de l'extrémité $x=m$ de l'interface : c'est cette étape que nous appelons phase de transport. Nous avons donc $\dot{a}(t) > 0$ et $\dot{m}(t) > 0$. Ces deux étapes seront simulées à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Nous pouvons procéder de la sorte car nous connaissons les solutions analytiques du déplacement (eq II.35) et du Taux de Restitution de l'Énergie en pointe de fissure (eq II.46).

2.2.4.2.1. La première phase

Au cours de cette phase, nous utilisons seulement le critère de type Griffith défini par les équations II.53, 54. Nous pouvons représenter cette étape à l'aide de la figure (fig II.4) :

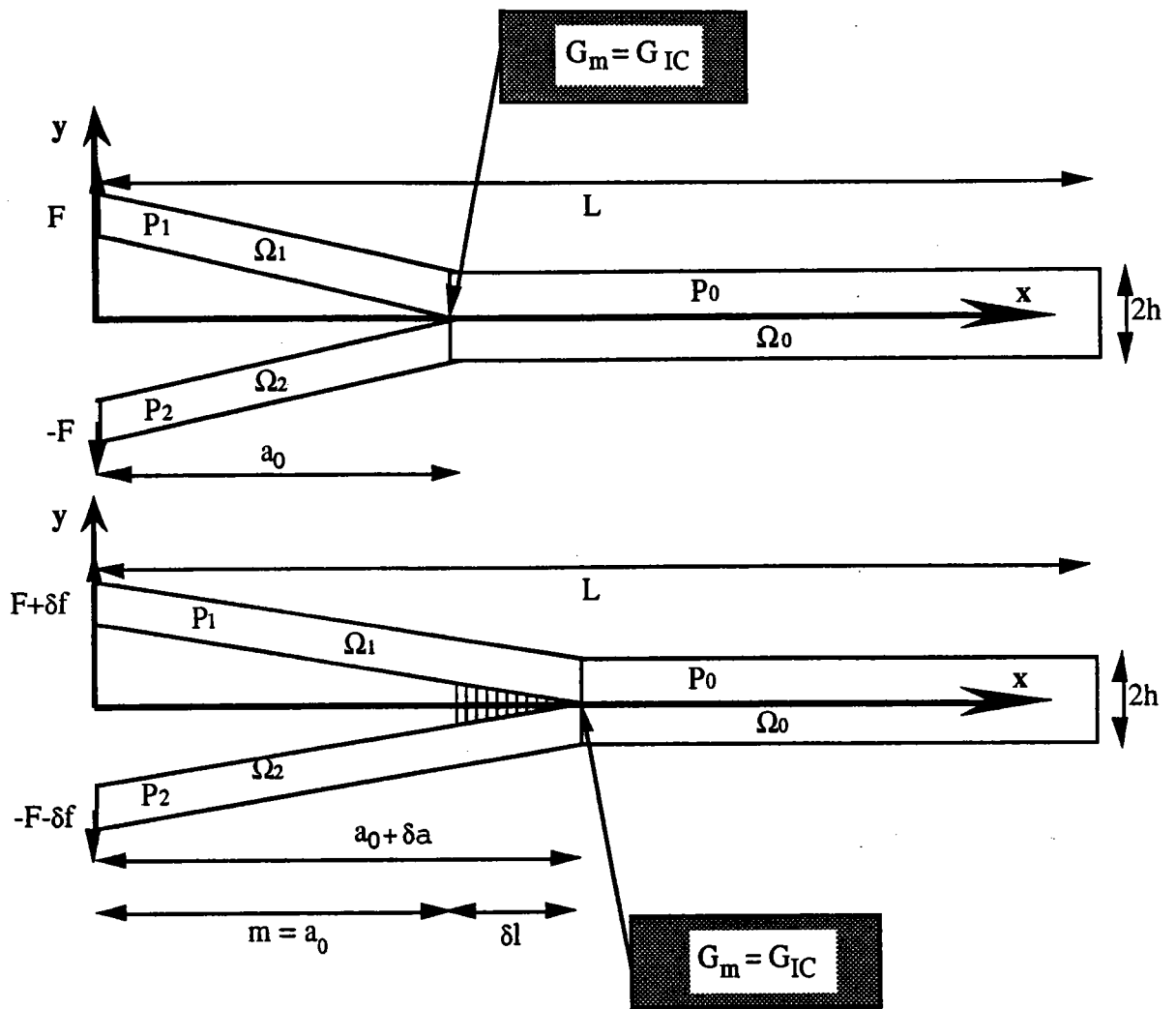


fig II.4 . Schématisation de la phase 1

Le modèle 1-D, que nous avons mis en place pour la modélisation du pont de fibres, nous permet de conserver un cheminement quasi analytique, contrairement au modèle développé par Z. Suo [Z. Suo et al - 92]. En effet, pour une géométrie et un chargement fixé, nous sommes à même de donner toutes les fonctions analytiques (flèche au bout de l'éprouvette, Taux de Restitution de l'Énergie critique en pointe de fissure) utiles au modèle. Nous pouvons, de cette manière, mettre en place la simulation numérique de la propagation de la fissure ainsi que de la création du pont de fibres à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Au cours de cette phase, nous supposons que l'extrémité $x=m$ ne se déplace pas. Nous pouvons traduire la figure (fig.II.4) par un système de neuf équations. Le système à résoudre est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(a) = 0 \\ v'(a) = 0 \\ v''(m) = \frac{fm}{D} \\ v'''(m) = \frac{f}{D} \\ v_m + v_{pm}m + \frac{fm^3}{3D} - v_{fl} = 0 \\ v(m) - v_m = 0 \\ v'(m) - v_{pm} = 0 \\ G_m - G_{Ic} = 0 \\ a_0 - m = 0 \end{array} \right. \quad (\text{eq II.57})$$

où $v(x)$ est la solution de l'équation (eq II.33) prise sous la forme de l'équation (eq II.35) :

$$v(x) = (\alpha \sin(\lambda x) + \beta \cos(\lambda x)) \operatorname{ch}(\lambda x) + (\gamma \sin(\lambda x) + \delta \cos(\lambda x)) \operatorname{sh}(\lambda x)$$

Les quatre premières équations du système correspondent aux conditions limites du système, eq II 30 et 31. Elles permettent de déterminer les valeurs de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ au cours de la propagation. L'équation suivante permet de calculer la flèche à l'extrémité de l'éprouvette, $x=0$.

Dans cette équation, nous utilisons les deux variables v_m et v_{pm} définies par les deux équations suivantes : l'avant dernière correspond au critère de Griffith en pointe de fissure, et la dernière exprime le non transport du pont au cours de cette phase. Les dix inconnues du système sont donc $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, v_m, v_{pm}, v_{fl}, f, a, m)$. Nous avons utilisé le code de calcul formel MAPLE pour déterminer la solution $v(x)$ ainsi que pour former la matrice tangente (9x10) du système. L'utilisation d'un tel outil de travail permet d'obtenir cette matrice

tangente nécessaire à la méthode de Newton-Raphson de façon simple. Nous développerons plus en détail l'avantage d'une telle méthode dans l'annexe 7. Nous sommes donc à présent capable de simuler numériquement la première phase de la propagation de la fissure.

3.2.4.2.2. La deuxième phase

Cette deuxième phase commence dès que l'on atteint le second critère au bout du pont de fibres (eq II.56). Cette étape peut être schématisée par la figure suivante (fig.II.5) :

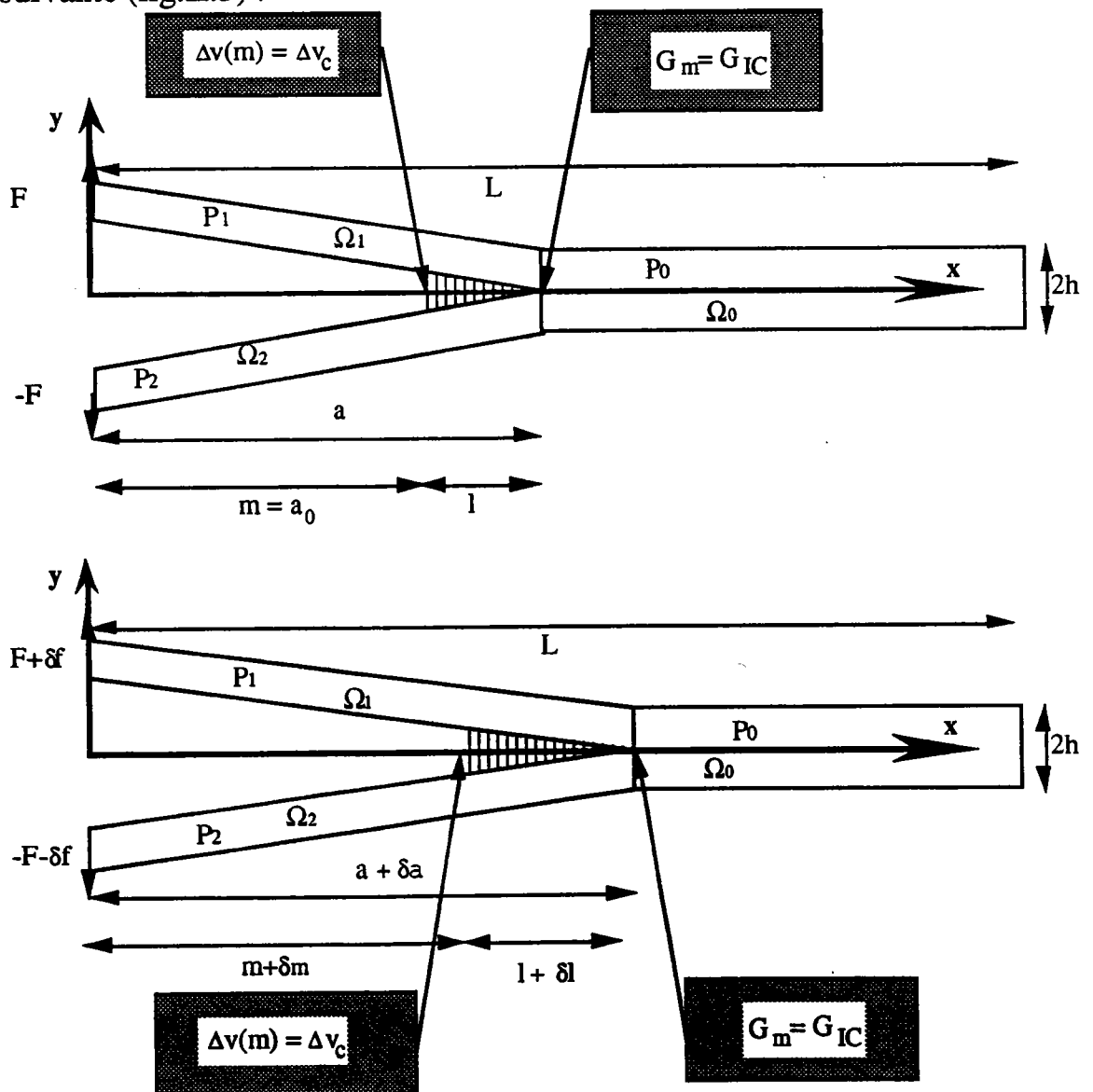


fig II.4 . Schématisation de la phase 2

Nous pouvons également traduire cette figure par des équations et, ainsi, procéder à la simulation de la propagation de la fissure avec transport du pont. Pour obtenir le système d'équation régissant cette phase, il suffit de remplacer la dernière équation du système précédant (eq II.54) par l'équation du critère de déplacement maximum appliquée au pont de fibres (eq II.58).

$$\Delta V(m) - \Delta V_c = 0 \quad (\text{eq II.58})$$

Les dix variables du système restent les mêmes. Il nous suffit d'utiliser à nouveau le code de calcul formel pour obtenir la nouvelle matrice tangente. Dans la pratique, nous avons calculé une seule fois la matrice jacobienne des dix équations (eq II.57 + eq II.58). Ensuite, il suffit d'extraire la matrice tangente correspondant à chacune des phases. Le programme de calcul formel permettant d'obtenir cette matrice tangente est donné dans l'annexe 1.

Nous pouvons alors simuler à l'aide de ces deux critères simples la propagation d'une fissure dans une éprouvette Double Cantilever Beam, tout en tenant compte de la création puis du transport du pont de fibres.

3.2.5. Résultats numériques et discussion

Nous présentons dans une première partie les courbes charge-déplacement, puis dans une seconde les courbes R correspondantes. La modélisation du pont de fibres dépend de deux paramètres physiques f_c et ΔV_c , qui caractérisent la raideur du ressort. Nous étudierons donc l'influence de ces deux paramètres sur ces différentes courbes. Nous comparerons nos résultats avec ceux obtenus sans modélisation du pont et avec le critère de Griffith, utilisé comme critère de propagation. Les données géométriques et matériau de l'éprouvette que nous avons utilisées sont celles de P. Robinson et D. Q. Song

[P. Robinson et D. Q. Song - 92] : $E = 126 \text{ GPa}$, $h = 1.5 \text{ mm}$, $b = 30 \text{ mm}$. Le paramètre que nous faisons évoluer est λ défini dans l'équation (eq II.34) que nous rappelons ici, $\lambda^4 = \frac{f_c b}{2D\Delta v_c}$. Les courbes tracées pour $\lambda = 0$ sont celles que l'on obtient par la mécanique de la rupture fragile sans pont de fibre.

3.2.5.1. Courbes charge - déplacement

Nous présentons ici les courbes charge-déplacement. Les courbes sont présentées sous une forme sans dimension pour une meilleure compréhension : la force critique est rapportée à la force critique initiale et le déplacement de l'extrémité de l'éprouvette à la demie hauteur de l'éprouvette. Nous présentons trois familles de courbes correspondant à trois études paramétriques. Dans un premier temps, nous faisons varier f_c et conservons fixe Δv_c (fig.II.5). Dans un deuxième temps, nous conservons fixe f_c et faisons varier Δv_c (fig.II.6). Puis finalement, nous conservons $G_{pc} = \frac{f_c b \Delta v_c}{2}$ constant (fig.II.7).

* Nous prenons dans ce cas $\Delta v_c = 2 \text{ mm}$,

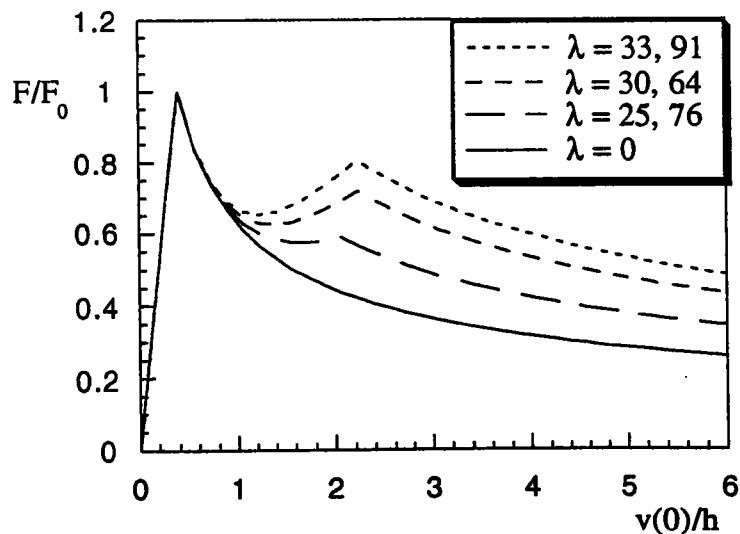


fig.II.5. Courbe charge-déplacement - $\Delta v_c = \text{cste}$

* Nous prenons dans ce cas $f_c = 125 \text{ KN/mm}^2$

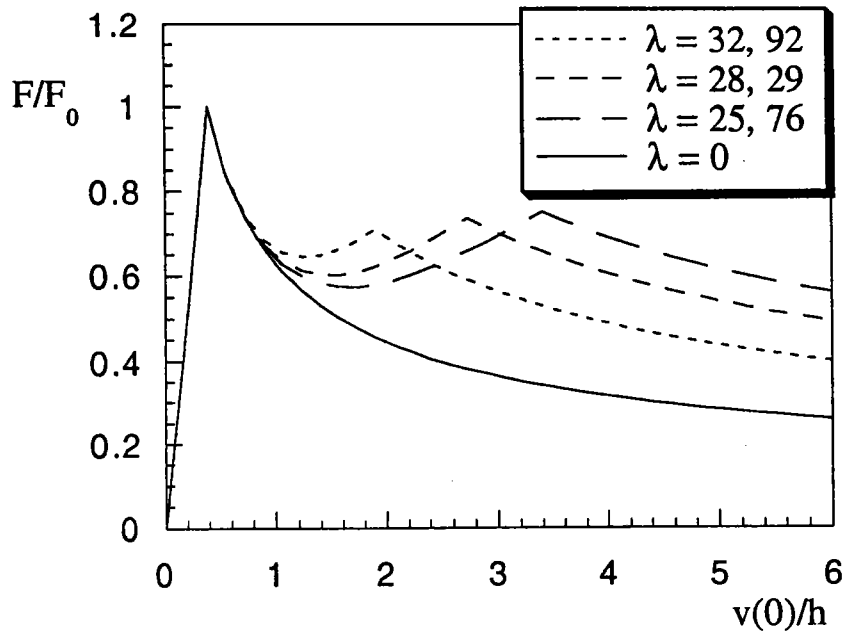


fig.II.6. Courbe charge-déplacement - $f_c = \text{cste}$

* Nous prenons dans ce cas $Gp_c = 125 \text{ J/m}^2$

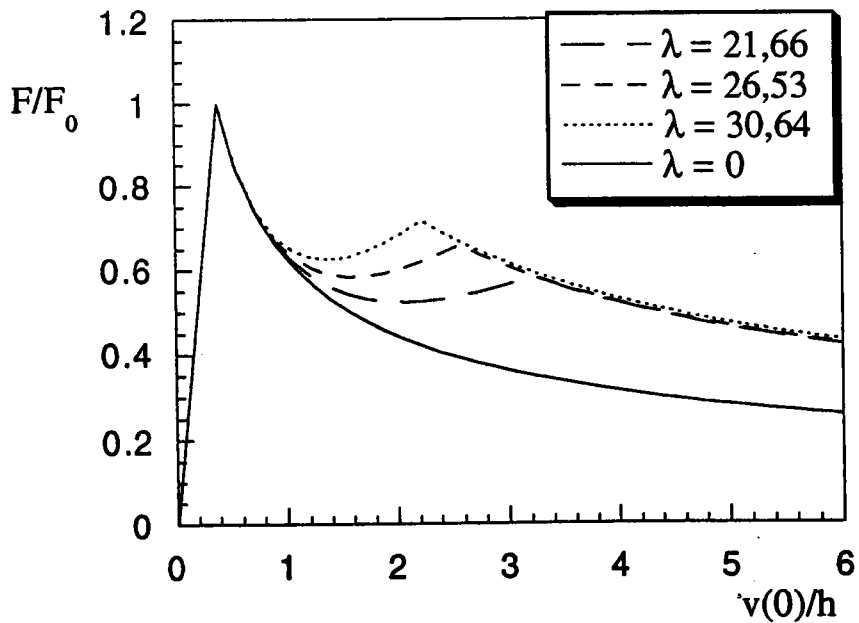


fig.II.7. Courbe charge-déplacement - $Gp_c = \text{cste}$

Il est facile d'observer l'influence des deux paramètres sur ces courbes charge-déplacement. Nous remarquons, à partir de la fin de la montée élastique linéaire, qu'il existe clairement deux phases, sur chacune des courbes, séparées par une discontinuité de pente. Ce changement de pente correspond au début du transport de l'extrémité, $x=m$, du pont de fibres. Pour la fig.II.5, cette transition intervient pour des valeurs quasi-constantes de $v(0)/h$ de l'ordre de 2,1. Cette valeur est donc fortement influencée par Δv_c . Sur la fig.II.6, le changement de phase se situe pour une valeur de F/F_0 quasi-constante de l'ordre de 0,75. Nous observons, en accord avec la première courbe, que ce point se déplace vers la droite avec l'augmentation de Δv_c . Sur la fig.II.7, où G_{p_c} est constant, nous remarquons que les courbes tracées tendent vers une asymptote commune.

Nous pouvons, aussi, faire deux observations qui sont communes à toutes les courbes : la première se situe au commencement de la propagation où l'on observe une faible influence du pont de fibres, la deuxième se situe au niveau de la rupture de pente dans la courbe. Le premier phénomène est lié aux conditions de raccord cinématique que nous avons imposées. En effet, nous ne prenons pas en compte les rotations en fond de fissure dans notre modèle. Nous exposerons une façon de les prendre dans la dernière partie de ce chapitre. Le deuxième phénomène est dû au caractère brutal de l'endommagement des ressorts. Le lien avec la loi du ressort sera encore plus évidente sur les courbes R correspondantes.

3.2.5.2. Effet de courbe R

Nous présentons, ici, les courbes R que nous obtenons à partir des courbes charge-déplacement exposées précédemment. Les courbes sont présentées sous une forme sans dimension : Le Taux de Restitution de l'Énergie totale, noté G_t , est rapporté au T. R. E. caractéristique de la fissuration du matériau en mode I, noté G_m , et le déplacement de l'extrémité de l'éprouvette est rapporté à la demi-

hauteur de l'éprouvette. Pour obtenir les courbes R correspondantes nous dépouillons les courbes charge-déplacement par la méthode de la compliance. Nous utilisons ce mode de dépouillement pour être le plus proche des méthodes utilisées par les expérimentateurs. Cette façon de procéder donne des résultats identiques à ceux que l'on obtiendrait par la formule analytique de notre modèle (eq II.52). La formule que nous utilisons pour obtenir G_t est donc :

$$G_t = \frac{F_c^2}{2b} \frac{dc}{da} \quad \text{où} \quad c = \frac{2v(0)}{F_c}, \text{ c étant la compliance.}$$

où nous approchons au cours de la propagation $\frac{dc}{da}$ par $\frac{\Delta c}{\Delta a}$, Δc représentant la variation de la compliance de l'éprouvette pour une avancée de la fissure de Δa .

* Nous prenons dans ce cas $\Delta v_c = 2 \text{ mm}$

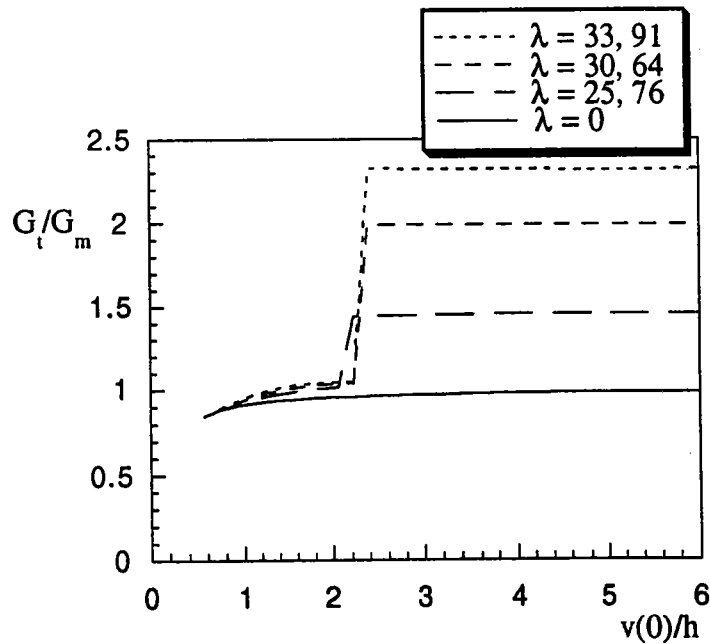


fig.II.8. Courbe R - $\Delta v_c = \text{cste}$

* Nous prenons dans ce cas $f_c = 125 \text{ KN/mm}^2$

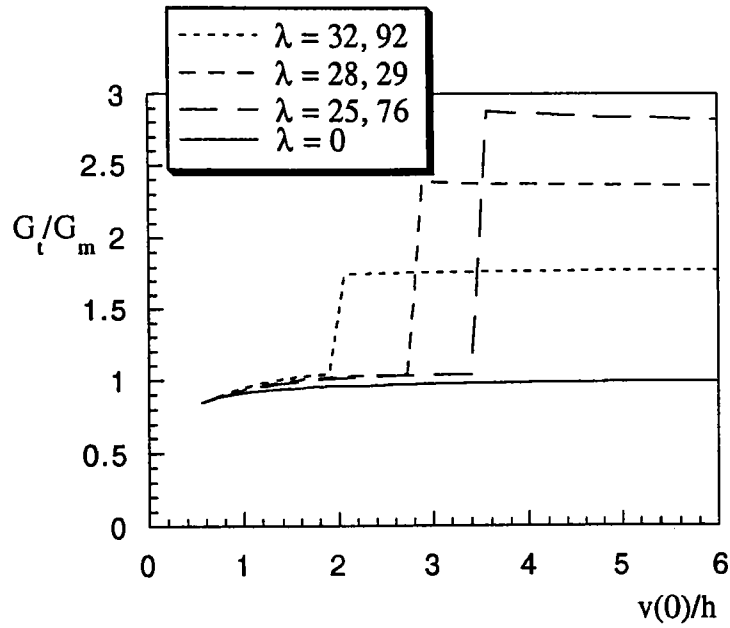


fig.II.9. Courbe R - $f_c = \text{cste}$

* Nous prenons dans ce cas $Gp_c = 125 \text{ J/m}^2$

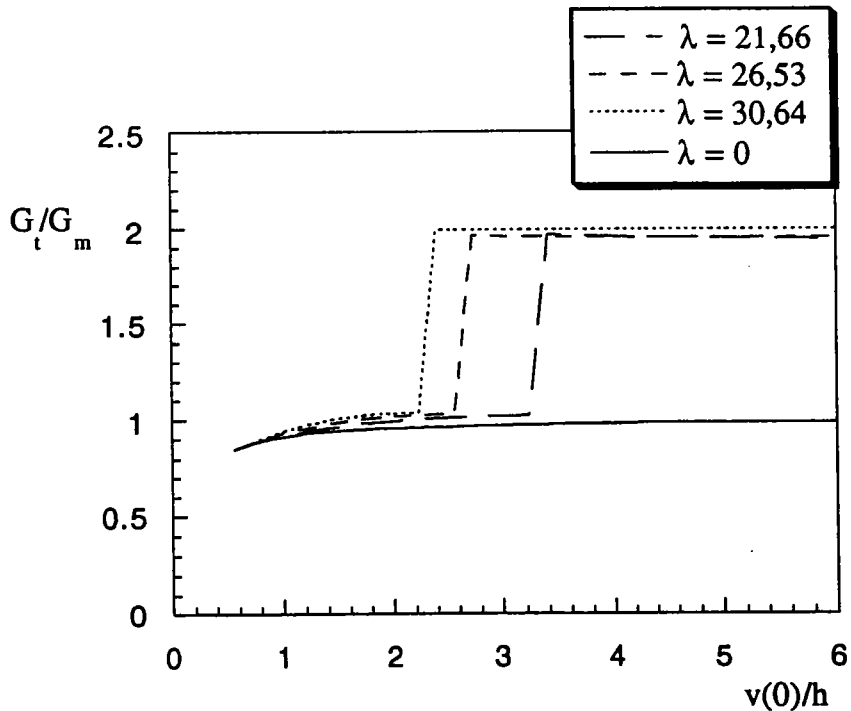


fig.II.10. Courbe R - $Gp_c = \text{cste}$

La courbe de référence $\lambda = 0$ est celle obtenue en utilisant uniquement le critère de Griffith sans modélisation du pont de fibre. Les figures (fig.II.8) à

(fig.II.10) montrent une augmentation du Taux de Restitution de l'Énergie total dans l'éprouvette de façon discontinue. Cette discontinuité est à rapprocher de la rupture de pente observée dans les courbes charge-déplacement. La formule analytique (eq II.52) laissait prévoir un tel phénomène. En effet, au cours de la phase 1 de la propagation, il n'y a pas de transport du pont. La seule dissipation dans l'éprouvette est alors en pointe de fissure. Durant cette phase, nous utilisons uniquement le critère de Griffith, il est donc logique que ces courbes coïncident avec la courbe de référence. Au cours de la phase 2 de la fissuration de l'éprouvette, nous avons transport du pont, entraînant la rupture de ressort, et donc l'apparition d'une dissipation supplémentaire dans l'éprouvette. De la formule $\frac{G_t}{G_m} = 1 + \frac{\Delta m}{\Delta a} G_{pc}$ nous pouvons obtenir si $\Delta m = \Delta a$ que la valeur du saut est égale au Taux de Restitution de l'Énergie critique du pont, noté $G_{pc} = \frac{f_c b \Delta v_c}{2}$. On retrouve bien ce résultat analytique avec la méthode de la compliance. La figure (fig.II.10) montre, en effet, que le saut observé sur les courbes tend vers cette valeur à partir d'un certain temps de propagation. Ceci est cohérent avec le fait que le pont se translate à longueur quasi-constante au bout d'un certain temps de propagation dans notre modèle. Ce plateau est caractéristique de l'interface introduite pour modéliser le pont de fibres. La hauteur du plateau observée expérimentalement est donc un facteur permettant d'identifier l'un des deux paramètres du modèle.

3.2.6. Conclusion

Nous avons montré que l'on pouvait rendre compte d'un effet de courbe R en conservant le critère de Griffith en pointe de fissure, et en modélisant le pont de fibres créé au cours de la propagation. La modélisation que nous avons développé dans ce chapitre est la plus simple que l'on puisse faire et donc possède quelques défauts. Le principal est la discontinuité dans les courbes R,

liée à la loi d'endommagement brutal choisie pour le ressort. Il suffit donc de modifier cette loi pour obtenir des résultats plus réalistes. Dans le prochain chapitre, nous allons redévelopper le modèle en utilisant une loi d'endommagement progressif pour les ressorts.

3.3. MODÈLE ENDOMMAGEMENT PROGRESSIF

3.3.1. Les nouvelles équations

3.3.1.1. La nouvelle loi de l'interface

Suite aux observations expérimentales qui montrent une densité du pont de fibres de plus en plus importante lorsque l'on s'approche de la pointe de fissure, nous avons modifié la loi de comportement de l'interface. Cette densité plus importante entraîne au niveau du pont une rigidité plus importantes. Il semble aussi que l'on observe une dégradation progressive du pont avec l'ouverture des lèvres de la fissure. Toutes ces remarques ainsi que les résultats donnés par le modèle élastique-fragile, nous amènent à modifier la loi de l'interface comme suit (fig.II.11) :

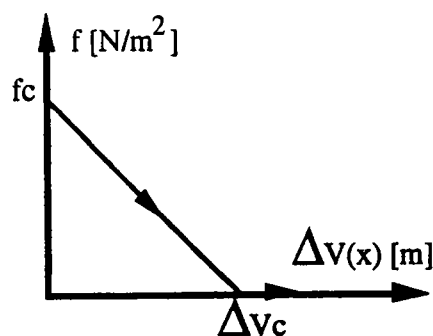


fig.II.11 .La loi d'endommagement progressif de l'interface, la force décroît linéairement avec l'ouverture Δv

Cette loi est un cas particulier de celles utilisées par Z. Suo [Z. Suo et al - 92]. Elle reflète, de façon simple, toutes les idées énoncées précédemment. La loi de comportement de l'interface s'écrit alors :

$$\begin{cases} f = f_c - k\Delta V(x) & \text{si } \Delta V(x) \leq \Delta V_c \\ f = 0 & \text{si } \Delta V(x) > \Delta V_c \end{cases} \quad (\text{eq II.59})$$

Cette modélisation du pont de fibres dépend toujours de deux paramètres f_c , ΔV_c ou $k = \frac{f_c}{\Delta V_c}$ qui représentent la résistance du pont ou sa loi de dégradation. Cette relation (eq II.59) n'est valable que si la vitesse d'ouverture $\Delta \dot{v}(x)$ est positive, ce qui sera toujours le cas dans toutes nos simulations numériques. En toute rigueur, nous devrions tenir compte d'une possibilité de retour élastique pour le ressort lorsque $\Delta \dot{v}(x)$ devient négatif, cela équivaut à la refermeture de la fissure.

Le critère de propagation que nous appliquons sur le pont de fibres reste le même que celui utilisé dans le cas de la loi élastique-fragile (eq II.55 et 56).

3.3.1.2. Les nouvelles équations

Comme dans le paragraphe 2.2., nous utilisons le Principe des Puissances Virtuelles pour déterminer les équations du système ainsi que les conditions limites. Nous nous intéressons toujours au domaine se limitant à $x \in [m, a]$. Nous conservons toutes les notations adoptées dans le paragraphe 2.2. Nous développons ici seulement les équations qui ont subi une modification par rapport au modèle précédent.

* Équations d'équilibre local :

$$\begin{cases} N'(x) = 0 \\ M''(x) - kb(\Delta v_c - \Delta v(x)) = 0 \end{cases} \quad (\text{eq II. 60})$$

*Les conditions aux limites sont inchangées.

En utilisant la définition des contraintes et des déformations généralisées, eq II.20 à eq II.23, nous obtenons l'équation suivante :

$$v^{(4)}(x) - \frac{2kb}{D} v(x) = -\frac{f_c b}{D} \quad (\text{eq II.61})$$

La résolution de cette équation se fait simplement en utilisant les quatre conditions limites concernant $v(x)$, eq II.30 et 31. La nouvelle solution est :

$$v(x) = \alpha \sin(\lambda x) + \beta \cos(\lambda x) + \gamma \text{sh}(\lambda x) + \delta \text{ch}(\lambda x) + \frac{\Delta v_c}{2} \quad (\text{eq II.62})$$

où : $\lambda^4 = \frac{2kb}{D}$

Comme pour le modèle élastique-fragile, les coefficients (α , β , γ , δ) sont des fonctions non-linéaires dépendantes de $(\frac{m}{a}, \lambda m, \lambda a)$. L'écriture du programme de calcul formel permettant leurs calculs se trouve dans l'annexe 2. Nous avons donc déterminé la nouvelle équation de la flèche. Nous allons maintenant calculer la nouvelle dissipation totale dans l'éprouvette.

3.3.2. Mise en place de la propagation

Pour simuler la propagation de la fissure, nous allons procéder de la même façon que celle utilisée avec le modèle élastique-fragile. Nous déterminons, dans un premier temps l'expression de la dissipation totale en la

séparant en deux termes. Nous appliquons ensuite la résolution numérique à l'aide de la méthode de Newton-Raphson.

3.3.2.1. Calcul de la dissipation totale dans l'éprouvette

Nous allons utiliser la même approche que celle faite dans le cadre de la loi élastique-fragile. Il suffit de redéfinir l'énergie stockée dans le ressort :

$$W_{if} = \frac{1}{2} \int_m^a kb(\Delta v_c - \Delta v(x))\Delta v(x)dx \quad (\text{eq II.63})$$

et donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(W_{if}) &= \frac{1}{2} \int_m^a kb[(\Delta v_c - 2\Delta v(x))\Delta \dot{v}(x)]dx \\ &= \underbrace{\dot{a}(t) \left(\frac{kb(\Delta v_c - \Delta v(a))}{2} \Delta v(a) \right)}_{A1} - \underbrace{\dot{m}(t) \left(\frac{kb(\Delta v_c - \Delta v(m))}{2} \Delta v(m) \right)}_{A2} \end{aligned} \quad (\text{eq II.64})$$

Nous pouvons réaliser des simplifications sur les termes A1 et A2 de l'équation (eq II.64). Le terme A1 est nul car $\Delta v(a) = 0$, par continuité des déplacements en pointe de fissure. Le terme A2 est aussi nul, car durant la première phase $\dot{m}(t)=0$, et durant la seconde $\Delta v_c - \Delta v(m)=0$ (c'est le second critère de propagation). Il reste donc uniquement le terme intégral que l'on peut réécrire de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt}(W_{if}) = \underbrace{\int_m^a fb\Delta \dot{v}(x)dx}_{A3} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_m^a f_c b\Delta \dot{v}(x)dx}_{A4} \quad (\text{eq II.65})$$

La variation d'énergie élastique stockée dans le ressort est égale à la puissance reçue, le terme A3 de l'eq II.65, moins l'énergie dissipée par l'endommagement progressif du ressort, le terme A4 de l'eq II.65. En utilisant la même approche que pour le modèle élastique-fragile, nous montrons que nous pouvons écrire la dissipation totale dans l'éprouvette comme :

$$D_t = \dot{a}(t)G_m + \underbrace{\frac{1}{2} \int_m^a f_c b \Delta \dot{v}(x) dx}_{A4} \quad (\text{eq II.66})$$

$$= D_m + D_p$$

Nous pouvons alors définir le Taux de Restituen de l'Énergie totale, noté G_t , de la même façon que dans le paragraphe 2.2.3, c'est à dire :

$$D_t = \dot{a}(t)G_t \quad (\text{eq II.67})$$

et donc

$$G_t = G_m + \underbrace{\frac{1}{2} \int_m^a f_c b \frac{d(v(x))}{da} dx}_{G_p} \quad (\text{eq II.68})$$

Nous mettons, là aussi, en évidence deux termes dans l'écriture de la dissipation totale : l'un caractéristique de la dissipation en pointe de fissure et l'autre caractéristique de celle provenant du pont de fibres. Mais, contrairement au modèle élastique-fragile, où la dissipation dans l'interface est au bout du pont de fibres, ici la dissipation est répartie de la pointe de fissure au bout du pont de fibres. Cette répartition est due au caractère progressif de l'endommagement de l'interface. Il y a destruction partielle des ressorts au cours de la création du

pont. Cette modélisation donnera des résultats plus réalistes.

3.3.2.2. Critères de propagation et propagation

Nous allons utilisé la même façon de procéder que dans le cas du ressort élastique-fragile. Nous distinguons les deux mêmes phases et utilisons les deux mêmes critères :

- * le critère de Griffith sur la partie du Taux de Restitution de l'Énergie localisée en pointe de fissure
- * le critère de déplacement maximum sur le ressort.

Pour faire la simulation numérique de la propagation, nous devons alors utiliser deux systèmes d'équations analogues à ceux utilisés pour le modèle élastique-fragile. En réalité , il suffit de prendre les systèmes du premier modèle et d'y substituer la nouvelle expression de $v(x)$ et de G_m . En utilisant le code de calcul formel, nous déterminons les deux matrices tangentes qui serviront à la simulation numérique par la méthode de Newton-Raphson. L'utilisation du code de calcul formel permet de passer d'un modèle à l'autre sans grande difficulté. Tous les programmes de calcul formel permettant la formation des deux matrices tangentes sont données dans l'annexe 2.

3.3.3. Résultats numériques et discussion

Nous présentons les même types de courbes que celles exposées dans le cas élastique-fragile.

3.3.3.1. Courbes charge - déplacement

Les courbes que nous présentons sont réalisées avec les mêmes données géométriques que pour le modèle élastique-fragile (cf § 2.2.5). Les valeurs de f_c et Δv_c sont les mêmes que celles utilisées dans le premier modèle (cf § 2.2.5). La valeur de λ est déterminée par la formule de l'eq II.62, que nous rappelons ici, $\lambda^4 = \frac{2f_c b}{D\Delta v_c}$.

* Nous prenons dans ce cas $\Delta v_c = 2$ mm

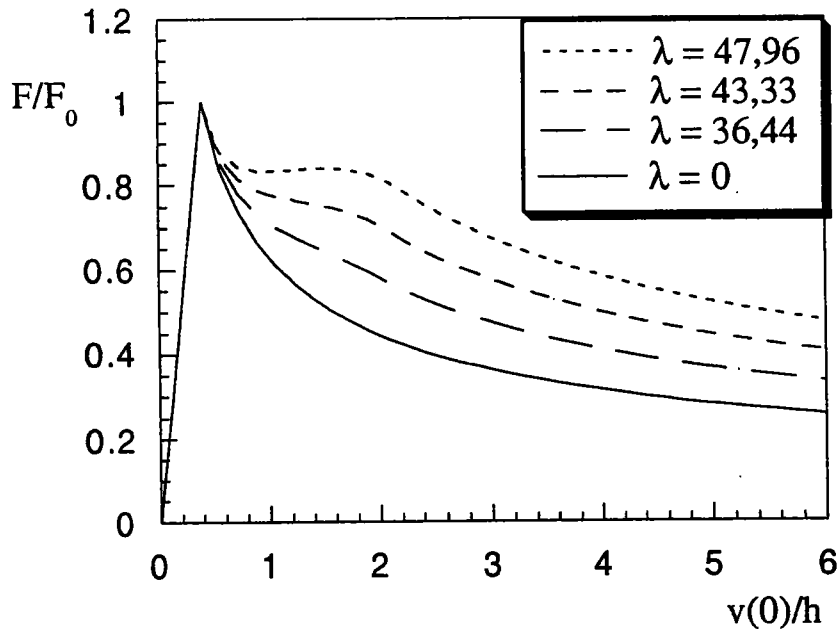


fig.II.12. courbe charge-déplacement - $\Delta v_c = \text{cste}$

* Nous prenons dans ce cas $f_c = 125 \text{KN/m}^3$

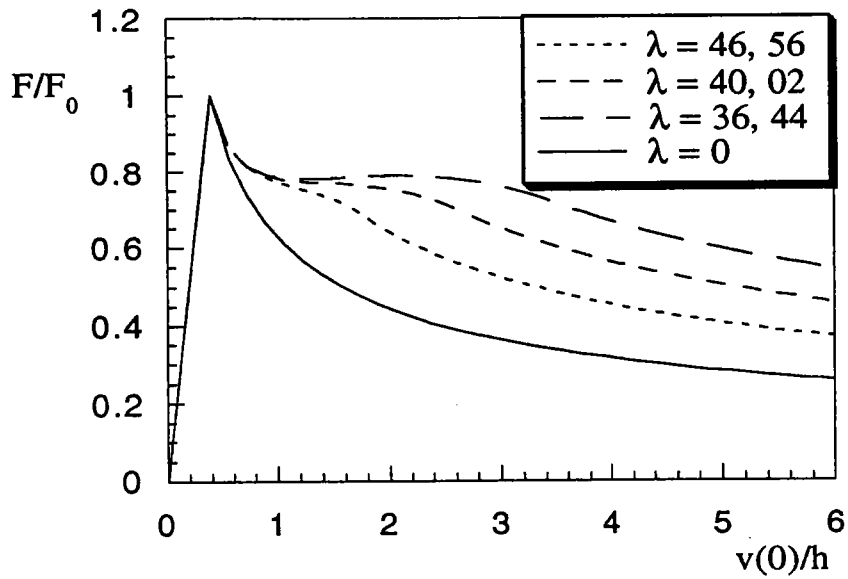


fig.II.13. Courbe charge-déplacement - $f_c = \text{cste}$

* Nous prenons dans ce cas $G_{pc} = 125 \text{J/m}^2$

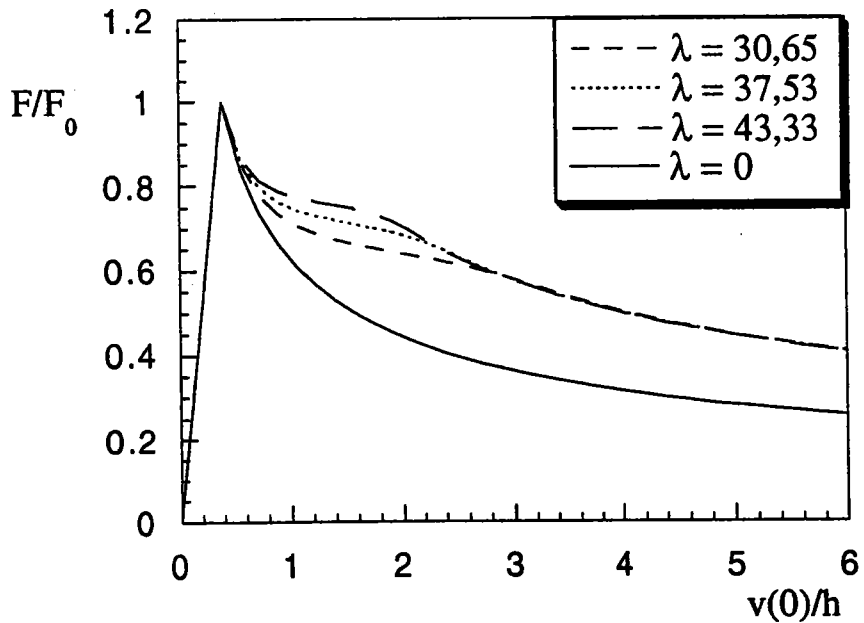


fig.II.14. Courbe charge-déplacement - $G_{pc} = \text{cste}$

Les tendances observées dans le modèle élastique-fragile sont toujours

présentes. Les valeurs de f_c et Δv_c influencent le début de la courbe alors que la valeur de G_{pc} influence la fin de la courbe. Par ailleurs, on peut remarquer que l'une des deux observations globales faites dans le cas élastique-fragile reste d'actualité. Si la discontinuité de la pente a disparu, les ponts de fibres conservent une faible influence au début de la propagation. Cet aspect sera étudié dans la dernière partie du chapitre.

3.3.3.2. Courbes R

Nous présentons ici les courbes correspondantes. Ces courbes sont obtenues à l'aide de la méthode de la compliance. L'adimensionalisation appliquée sur les courbes est la même que celle faite sur celles du modèle élastique-fragile.

*Nous prenons dans ce cas $\Delta v_c = 2$ mm

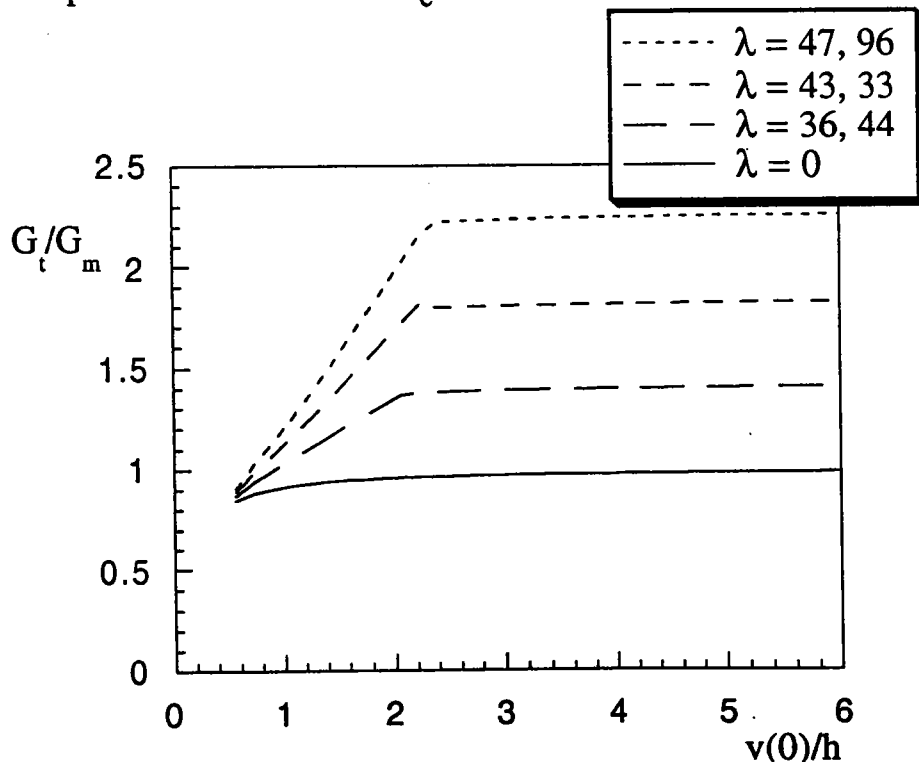


fig.II.15. Courbe R - $\Delta v_c = \text{cste}$

*Nous prenons dans ce cas $f_c = 125 \text{KN/m}^2$

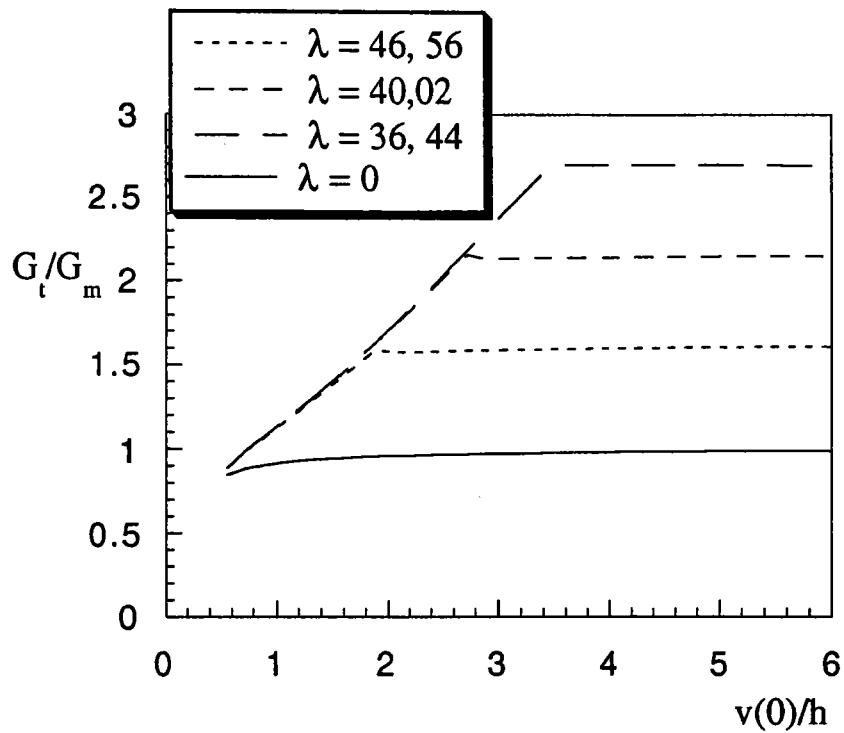


fig.II.16. Courbe R - $f_c = \text{cste}$

*Nous prenons dans ce cas $G_{pc} = 125 \text{J/m}^2$

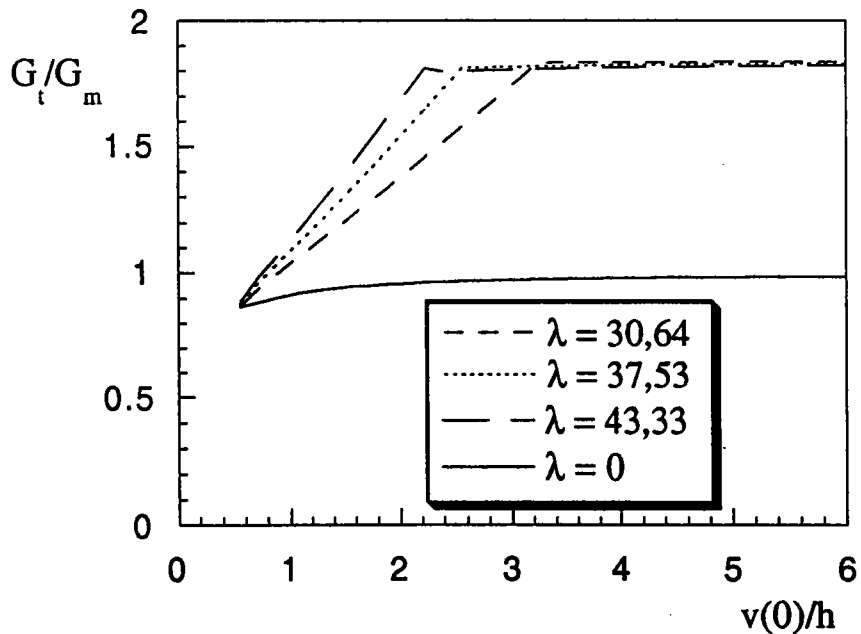


fig.II.17. Courbe R - $\Delta v_c = \text{cste}$

Nous observons que la discontinuité des pentes, due au changement de

phase sur les différentes courbes, a disparu. La continuité des courbes est due à la forme intégrale du terme G_p , eqII.68. Dans le cas élastique-fragile, la dissipation était concentrée en bout de pont de fibres, alors que maintenant elle est répartie tout au long du pont de fibres. La représentation de l'effet de courbe R est donc plus réaliste. Nous obtenons les deux phases du phénomène : l'augmentation continue puis la stabilisation en plateau. Nous observons, comme pour le modèle élastique-fragile, que sa hauteur est gouvernée par G_{pc} . Le début de la courbe semble plus sensible à la variable f_c et Δv_c . Il semble que nous puissions déterminer la valeur de ces deux paramètres à la simple lecture des courbes R , obtenues expérimentalement, à l'aide de la hauteur du plateau et du point où il débute.

3.3.4. Comparaison avec l'expérience

Dans ce paragraphe, nous allons comparer notre modèle à endommagement progressif avec l'expérience réalisée par P. Robinson et D. Q. Song . [P. Robinson et D. Q. Song - 92]. Pour cela nous déterminons à l'aide de leur courbe expérimentale la valeur du module d'Young de l'éprouvette à partir de la montée élastique, $E = 45.7$ GPa. Les autres données matériaux sont $b = 30$ mm, $h = 1.5$ mm, $a_0 = 29.5$ mm et $F_0 = 73$ N. Les valeurs que nous avons prises pour les paramètres du modèle sont : $f_c = 175000$ N/m² et $\Delta v_c = 4$ mm. Nous présentons, dans un premiers temps, la comparaison entre les courbes charge-déplacement obtenues avec un modélisation ne prenant pas en compte la présence du pont de fibres, notre modèle avec une interface à endommagement progressif pour modéliser le pont de fibres et les résultats expérimentaux publiés par P. Robinson et D. Q. Song . [P. Robinson et D. Q. Song - 92]. Ensuite nous comparons les courbes R correspondantes.

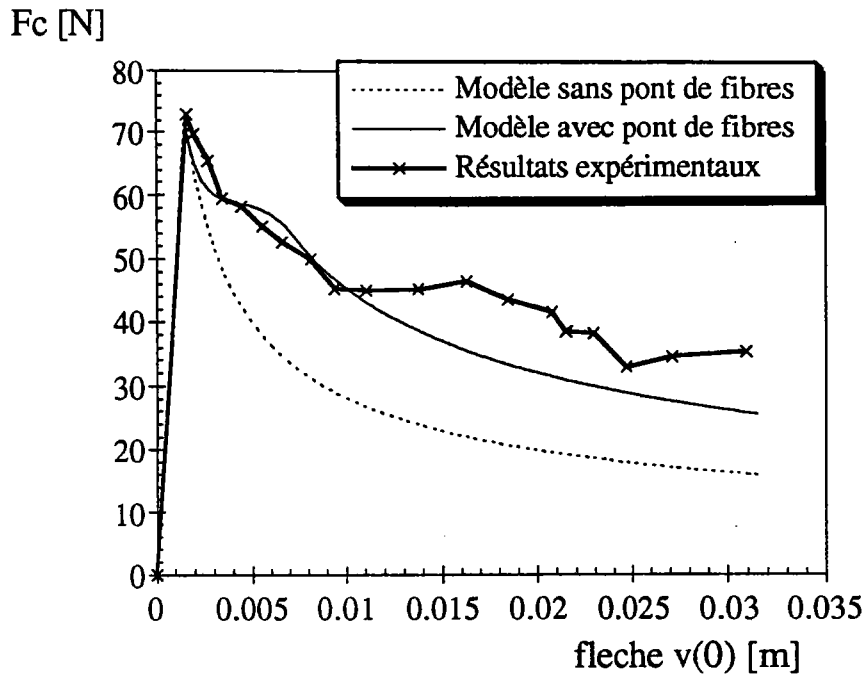


fig II.18. Courbes comparatives en charge-déplacement

Les valeurs que nous avons prises pour les deux paramètres du modèle donnent des résultats qui sont globalement en bonne correspondance avec l'expérience. La valeur de $\Delta v_c = 4\text{mm}$, que nous avons prise pour l'ouverture maximale du pont de fibres, est en accord avec les observations faites sur l'éprouvette testée. Les deux paramètres du modèle utilisés donnent des longueurs de pont de fibres de l'ordre de 3 cm, qui sont elles aussi en accord avec les résultats expérimentaux. On note aussi que le plateau obtenu est légèrement supérieur à celui déterminé par les expérimentateurs (fig II.19). Cette différence peut s'expliquer, en partie, par les méthodes utilisées dans les deux cas pour dépouiller les courbes charge-déplacement. Nous avons utilisé la méthode de la compliance directe pour dépouiller la courbe charge-déplacement (fig II.18). C'est à dire que nous utilisons la formule suivante pour obtenir G_t :

$$G_t = \frac{F_c^2}{2b} \frac{dc}{da} \quad \text{où} \quad c = \frac{2v(0)}{F_c}, \text{ c étant la compliance}$$

Nous approchons au cours de la propagation $\frac{dc}{da}$ par $\frac{\Delta c}{\Delta a}$, Δc représentant la variation de la compliance de l'éprouvette pour une avancée de la fissure de Δa . Les expérimentateurs ont, eux aussi, utilisé la méthode de la compliance mais ils ont ajouté des coefficients permettant de prendre en compte les rotations en fond de fissure, les effets de bord dus aux conditions expérimentales et la non-linéarité géométrique due aux grands déplacements.

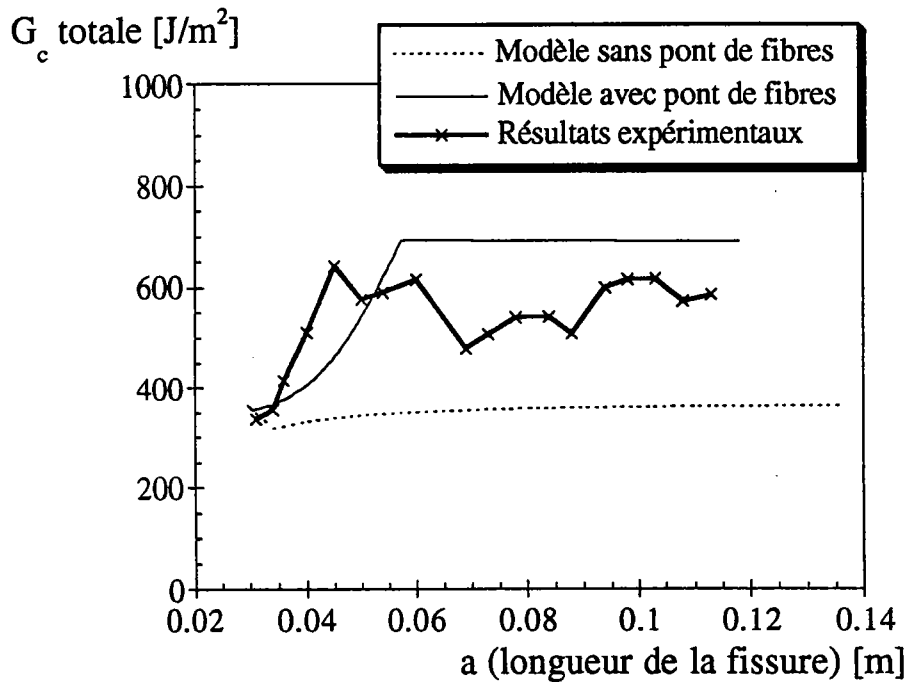


fig II.19. Courbes comparatives en
T. R. E. Totale- en fonction de la longueur de fissure

3.3.5. Conclusion

Cette nouvelle modélisation du pont de fibres, par une loi à endommagement progressif, donne des résultats plus conformes à la réalité. Nous avons réalisé, à l'aide de cette modélisation une simulation complète d'un essai Double Cantilever Beam en tenant compte de la création du pont de fibres. Nous avons simulé les deux phases de la propagation, l'initiation avec la

création du pont de fibres puis la propagation avec le transport du pont, avec leurs conséquences sur la dissipation totale de l'éprouvette : l'effet de courbe R. Il semble donc raisonnable de penser que l'on puisse représenter un effet de courbe R avec une modélisation 1-D de l'éprouvette et avec des critères de propagation simples. Il faut simplement pour cela modéliser le pont de fibres à l'aide d'une densité de ressorts à endommagement progressif.

3.4. MODÈLE AVEC PRISE EN COMPTE DES ROTATIONS

Nous allons traiter, dans ce paragraphe, un modèle tenant compte des rotations en fond de fissure à titre d'exemple. Pour cela, nous utiliserons un modèle comprenant une interface à endommagement progressif, pour modéliser le pont de fibres, et un ressort pour prendre en compte les rotations en fond de fissure. Nous pourrions ainsi étudier l'influence de ces rotations sur les courbes charge-déplacement et les courbes R correspondantes.

3.4.1. Modélisation des rotations et nouvelles conditions limites

Pour modéliser les rotations en fond de fissure, nous introduisons un ressort, de raideur C , au niveau du raccord entre les poutres $P0$ et $P1$, les poutres $P0$ et $P2$. Nous le schématisons par la fig.II.24.

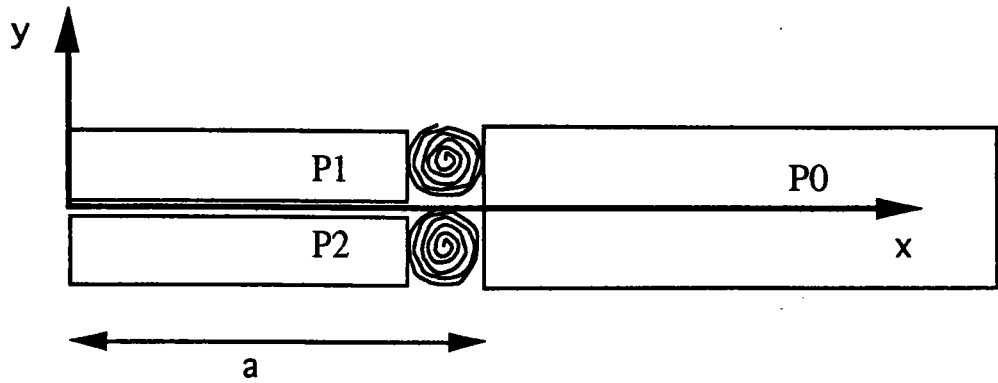


fig II.24. Assemblage pour la modélisation
des rotations en fond de fissure

Nous admettons que la correction, amenée par la prise en compte des rotations en fond de fissure, est de l'ordre de $\frac{h}{a}$. Nous pouvons alors écrire la flèche au bout de la fissure comme :

$$v(a) = \frac{fa^3}{3D} \left(1 + \gamma \frac{h}{a} \right) \quad (\text{eq II.66})$$

où γ est caractéristique du ressort utilisé pour modéliser les rotations en fond de fissure. Nous pouvons définir la relation entre C et γ :

$$C = \frac{3D}{\gamma h} \quad (\text{eq II.67})$$

et définir les nouvelles conditions aux limites, en pointe de fissure, du problème :

$$v(a) = 0 \quad (\text{eq II.68})$$

$$v''(a) = \frac{3}{\gamma h} v'(a) \quad (\text{eq II.69})$$

L'équation eq II.69 remplace l'équation $v'(a) = 0$, que l'on trouve dans les

conditions limites de l'encastrement. À l'aide de ce nouveau paramètre γ , nous pouvons prendre en compte les rotations en fond de fissure dans l'écriture de nos conditions limites.

3.4.2. Modèle complet : endommagement progressif et rotation en fond de fissure

Pour intégrer les rotations en fond de fissure dans le modèle de propagation en mode I à endommagement progressif, il suffit de remplacer l'équation $v'(a) = 0$ par l'eq II.69. dans les différents systèmes utilisés pour la propagation (eq II.57 et 58). Nous devons simplement utiliser une nouvelle fois le code de calcul formel pour déterminer les différentes matrices tangentes, utiles à la méthode de Newton-Raphson. On note, ici encore, l'intérêt d'utiliser le code de calcul formel pour obtenir ces matrices tangentes. Le paramètre γ sera déterminé à l'aide d'un calcul 2-D éléments finis.

3.4.3. Courbes résultats

Pour observer l'influence de la prise en compte des rotations en fond de fissure, nous allons réaliser une comparaison entre les résultats expérimentaux présentés par P. Robinson et D. Q. Song . [P. Robinson et D. Q. Song - 92], ce nouveau modèle et le modèle sans prise en compte des rotations en fond de fissure. La géométrie de l'éprouvette ainsi que les valeurs des deux paramètres du modèles sont ceux indiqués dans le paragraphe de comparaison avec l'expérience (cf § 2.3.4). La valeur de γ , permettant de rendre compte des rotations, a été déterminée par un calcul 2-D élément finis, $\gamma = 1,10$ pour un élanement de $h/a=1/20$. Les courbes que nous présentons sont les courbes charge-déplacements (fig .II.25) et les courbes R correspondantes (fig .II.26).

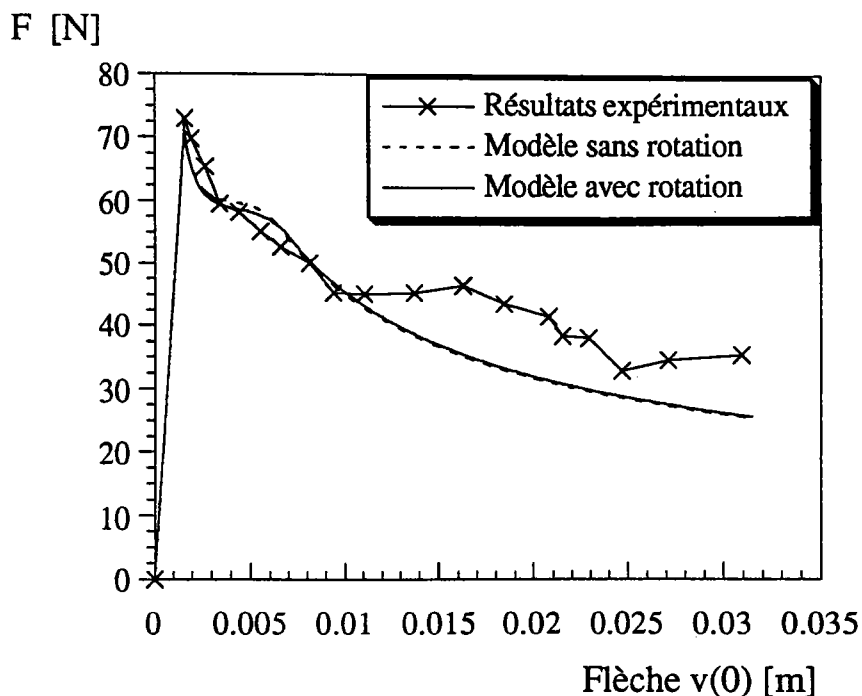


fig II.25 Comparaison des courbes charge-déplacement entre les deux modèles et l'expérience

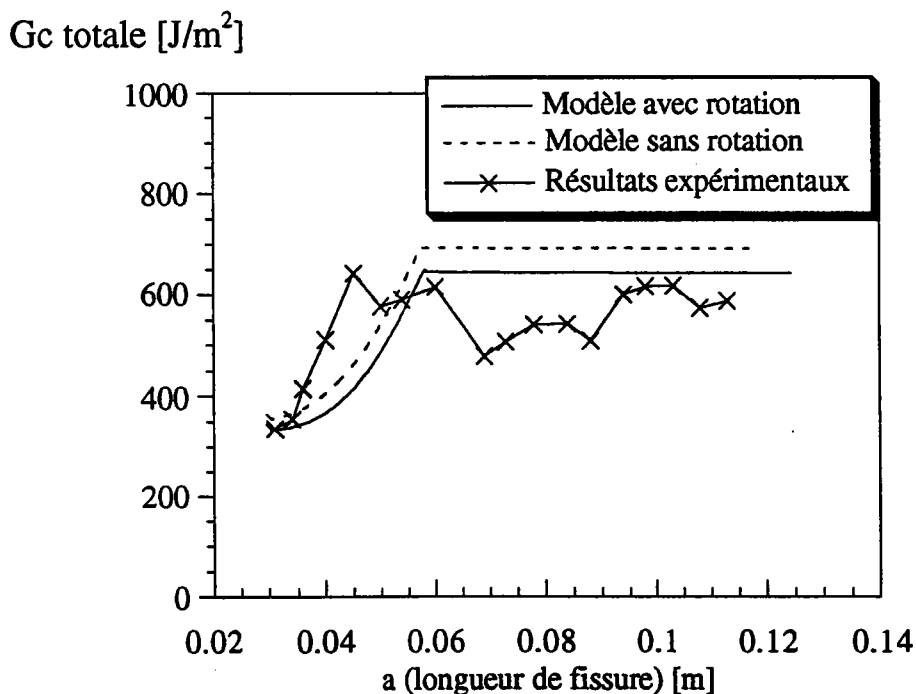


fig II.26 Comparaison des courbes R entre les deux modèles et l'expérience

La prise en compte des rotations en fond de fissure, par cet artifice, amène peu de modifications dans la courbe charge-déplacement mais modifie la hauteur du plateau de stabilisation de la courbe R. Nous sommes donc à même de prendre en compte ces rotations, par cette modification des conditions limites, mais nous observons qu'elles n'ont qu'une faible influence sur la propagation de la fissure. Cette influence est réduite par l'apparition du pont de fibres.

3.5. CONCLUSION

Nous avons étudié deux types de lois d'endommagement pour l'interface. Nous observons que la loi d'endommagement progressif est la plus réaliste. Cette loi permet de simuler la propagation d'une fissure dans un essai Double Cantilever Beam tout en tenant compte de la création, puis du transport d'un pont de fibres. Cette modélisation nous permet aussi de rendre compte de l'effet de courbe R au cours de la propagation en attribuant toute l'augmentation de la dissipation totale dans l'éprouvette à la dissipation venant du pont de fibre. Cela nous permet de conserver des critères simples de propagation. Nous développerons des modèles similaires pour la propagation de fissure en mode II dans un troisième chapitre et en mode mixte dans le quatrième.

4. MODÉLISATION DU PONT DE FIBRES EN MODE II

4.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous allons premièrement modéliser, à l'aide d'une éprouvette End Load Split (fig.III.1), la fissuration en mode II dans un composite. Pour cela, nous nous appuyerons sur les idées développées en mode I : L'existence d'un Taux de Restitution de l'Énergie critique caractéristique de l'initiation de la propagation d'une fissure existante, noté G_{IIC} , et l'augmentation de la dissipation totale dans l'éprouvette au cours de la propagation. Cet effet de courbe R n'est pas seulement attribué à la présence d'un pont de fibres mais aussi à des effets dissipatifs tel que le frottement entre les lèvres ou la complexification de la surface de rupture au cours de la propagation (D. Nesa - 87). Nous modéliserons ces phénomènes à l'aide d'une interface à endommagement progressif. Nous réaliserons alors la simulation de la propagation à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. Nous étudierons ensuite un nouveau test, appelé Modified End Load Split (fig.III.10), noté M. E. L. S. , où la propagation en Mode II est stable.

4.2. MODÈLE E. L. S

4.2.1. Cinématique et équations

Pour modéliser l'éprouvette nous conservons un assemblage de trois poutres et d'une interface. La cinématique utilisée reste celle de Bernoulli pour les trois poutres. Nous conservons aussi les raccords cinématiques en pointe de fissure définis par l'équation eq II.3.

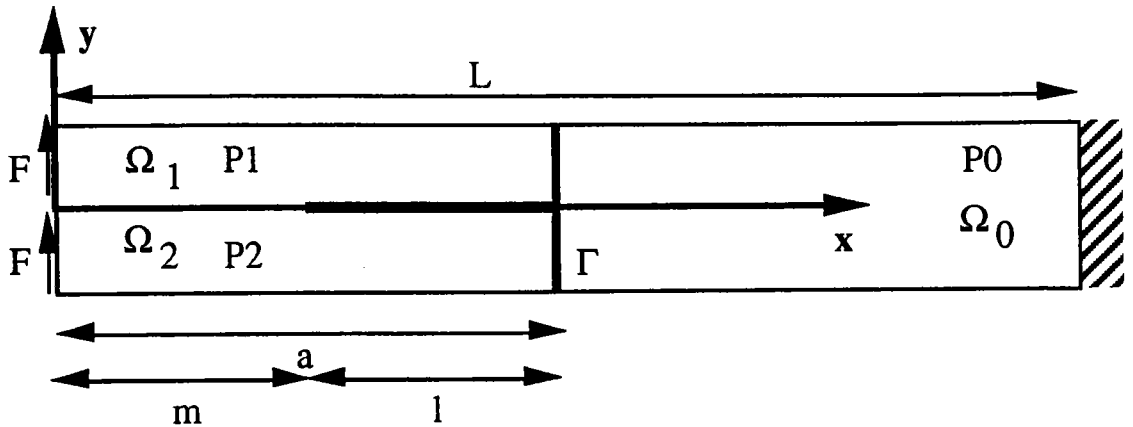


fig.III.1. Éprouvette End Load Split (E. L. S.)

Maintenant, nous définissons le comportement de l'interface. La relation donnant la force dans l'interface en fonction du glissement relatif des deux lèvres de la fissure, noté $\Delta U(x)$, est schématisée par la figure fig.III.2 :

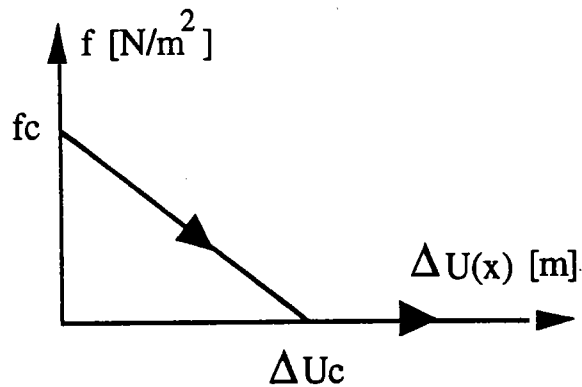


fig.III.2. La loi d'endommagement progressif de l'interface

Les équations correspondantes sont :

$$\begin{cases} f(x) = f_c - k \Delta U(x) & \text{si } \Delta U(x) \leq \Delta U_c \\ f(x) = 0 & \text{si } \Delta U(x) \geq \Delta U_c \end{cases} \quad (\text{eq III.1})$$

Ces équations restent uniquement valables dans le cas où nous avons $\Delta \dot{U}$

positif. Cela suppose qu'il n'y a pas de retour élastique en cours de propagation.

Le glissement relatif des deux lèvres s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta U(x) &= (U_1(x,0) - U_2(x,0)) \cdot \bar{x} : \\ \Delta U(x) &= u_1(x) - u_2(x) + \left(\frac{h_2}{2} v_1'(x) + \frac{h_1}{2} v_2'(x) \right) \end{aligned} \quad (\text{eq III.2})$$

La première formule de Bresse et les conditions de raccord II.3 permettent d'écrire :

$$u_1(x) = u_1(a) + \int_a^x u'(x) dx = u_0(a) - \frac{h_2}{2} v'(a) + \int_a^x u'(x) dx$$

et de même pour $u_2(x)$. Le terme intégral correspond à l'allongement dû aux efforts de membrane qui peut être négligé devant les termes de flexion en $hv'(x)$.

Nous obtenons alors :

$$\Delta U(x) = \left(\frac{h_2}{2} v_1'(x) + \frac{h_1}{2} v_2'(x) \right) - \frac{h_0}{2} v_0'(a) \quad (\text{eq III.4})$$

Nous définissons l'énergie stockée dans l'interface par :

$$W_{if} = \frac{b}{2} \int_m^a f(x) \Delta U(x) dx \quad (\text{eq III.5})$$

En utilisant les notations introduites dans le chapitre II sur les contraintes et les déformations généralisées (eq II.20 à eq II.23), le Principe des Puissances Virtuelles s'écrit :

$$\underbrace{\sum_{i=0}^2 \int_{\Omega_i} N_i \delta e_i(x) + M_i \delta k_i(x) d\omega_i}_{\text{Énergie de déformation due aux trois poutres}} + \underbrace{b \int_m^a f(x) \delta \Delta U(x) dx}_{\text{Énergie de déformation due à l'interface}} = F\delta(v_1(0)) + F\delta(v_2(0))$$

$$\forall \delta u_i(x), \delta v_i(x), \delta \Delta U(x) \in \{C.A\}$$

(eq III.6)

Par raison de symétrie géométrique et de chargement dans l'éprouvette, nous pouvons écrire :

$$v_1(x) = v_2(x) = v(x) \quad (\text{eq III.7})$$

$$u_1(x) = -u_2(x) = u(x) \quad (\text{eq III.8})$$

En réalisant une double intégration par partie de l'équation (eq III.6), nous obtenons les équations et les conditions aux limites du problème. Nous développons ici seulement les résultats pour $x \in [m, a]$:

* Équations d'équilibre local :

$$\begin{cases} N'(x) = 0 \\ M''(x) - \frac{kbh^2}{2} v''(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{eq. III. 9})$$

*Les conditions aux limites transportées aux extrémités de l'interface :

* $x = m$:

$$N(m) = 0$$

$$M(m) = -Fm \quad (\text{eq III.10})$$

$$M'(m) + \frac{kbh^2}{2} \left[\frac{fc}{kh} - (v'(m) - v'(a)) \right] = -F$$

* x = a :

$$u(a) = -\frac{h}{2} v'(a)$$

$$v(a) = \frac{F(a^3 - 3aL^2 + 2L^3)}{3D_0} \quad (\text{eq III.11})$$

$$v'(a) = \frac{F(a^2 - L^2)}{D_0}$$

On note que la simplification opérée sur $\Delta U(x)$ a entraîné un découplage des équations d'équilibre de membrane et de flexion ainsi que la nullité des efforts de membrane. En utilisant les définitions des contraintes généralisées (eq II.22 et eq II.23), nous obtenons les équations suivantes :

$$u''(x) = 0 \quad (\text{eq III.12})$$

$$v^{(4)}(x) + \frac{kbh^2}{2D} v^{(2)}(x) = 0 \quad (\text{eq III.13})$$

La résolution de ces équations se fait simplement en utilisant les conditions aux limites (eq III.10) et (eq III.11). Les solutions sont :

$$u(x) = \frac{Fh(L^2 - a^2)}{2D_0} \quad (\text{eq III.14})$$

$$v(x) = -\frac{\alpha}{\lambda^2} \sin(\lambda x) - \frac{\beta}{\lambda^2} \cos(\lambda x) + \gamma x + \delta \quad (\text{eq III.15})$$

$$\text{où : } \quad \lambda^2 = \frac{kbh^2}{2D} \quad (\text{eq III.16})$$

Les coefficients $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ sont des fonctions non-linéaire dépendantes de $\frac{1}{a}$ et de λ . L'explicitation de ces coefficients ainsi que le programme de calcul formel correspondant se trouvent dans l'annexe 3.

4.2.2. Calcul de la dissipation et critère de propagation

Pour déterminer la dissipation totale dans l'éprouvette, nous adoptons la même démarche que celle utilisée pour le mode I. C'est à dire que nous nous situons dans le cadre d'une approche quasi-statique et isotherme. Nous montrons alors que la dissipation totale, notée D_t , s'écrit :

$$D_t = P_{\text{ext}} - \frac{d}{dt}(W_{\text{def}})$$

où :

$$W_{\text{def}} = \underbrace{\sum_{i=0}^2 \int_{\Omega_i} w_i(x) dx}_{\text{Énergie de déformation due aux trois poutres}} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_{\Omega_3} f(x) \Delta U(x) dx}_{\text{Énergie de déformation due à l'interface}}$$

$$P_{\text{ext}} = F(v_1(0) + v_2(0))$$

Nous montrons que D_t peut s'écrire comme :

$$\begin{aligned} D_t &= \dot{a}(t)G_m + \frac{f_c bh}{2} \int_m^a \dot{v}'(x) dx \\ &= D_m + D_p \end{aligned} \quad (\text{eq III.17})$$

En utilisant les notations de l'équation eq III.18.:

$$D_t = \dot{a}(t)G_t \quad (\text{eq III.18})$$

Nous obtenons que le Taux de Restitution de l'Énergie total, noté G_t , s'écrit :

$$\begin{aligned}
 G_t &= G_m + G_p \\
 &= [[W]]_{x=a} + \frac{f_c b h}{2} \int_m^a \frac{d}{da} (v'(x)) dx
 \end{aligned}
 \tag{eq III.19}$$

Nous avons, là aussi, mis en évidence deux termes dans l'écriture du Taux de Restitution de l'Énergie total de l'éprouvette, noté G_t : l'un caractéristique des phénomènes localisés en pointe de fissure, noté G_m , et l'autre des phénomènes localisés le long de l'interface, noté G_p . Nous appliquerons donc les deux mêmes types de critères que ceux utilisés en mode I. Pour traduire l'existence d'un Taux de Restitution de l'Énergie critique caractéristique de l'initiation, noté G_{IIc} , et des phénomènes localisés en pointe de fissure, nous appliquerons le critère de Griffith sur la partie du T. R. E. totale localisée en pointe de fissure, noté G_m . Nous conserverons ce critère de propagation en pointe de fissure durant les deux phases de la propagation :

$$G_m < G_{IIc} \quad \dot{a}(t) = 0 \quad \text{pas de propagation} \quad \text{(eq III.20)}$$

$$G_m = G_{IIc} \quad \dot{a}(t) > 0 \quad \text{propagation} \quad \text{(eq III.21)}$$

Le deuxième critère que nous utiliserons est un critère de déplacement maximum, introduit dans la loi de comportement de l'interface eq III.1 :

$$\Delta U(m) < \Delta U_c \quad \dot{m}(t) = 0 \quad \text{pas de transport} \quad \text{(eq III.22)}$$

$$\Delta U(m) = \Delta U_c \quad \dot{m}(t) > 0 \quad \text{transport} \quad \text{(eq III.23)}$$

De ce fait, nous conservons aussi les deux mêmes phases de propagation

que dans le mode I : une phase d'initiation et de création de l'interface et une phase de propagation avec transport de l'interface. Nous avons tous les résultats analytiques nécessaires à la simulation numérique de la propagation d'une fissure établie en mode II dans un éprouvette End Load Split , par la méthode de Newton-Raphson.

4.2.3. Propagation et résultats numériques

Pour simuler la propagation complète de la fissure, il suffit de construire les deux systèmes d'équations correspondant à chacune des deux phases. Le système correspondant à la phase 1, initiation de la propagation et création de l'interface, est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(a) = \frac{F(a^3 - 3aL^2 + 2L^3)}{3D_0} \\ v'(a) = \frac{F(a^2 - L^2)}{D_0} \\ v''(m) = \frac{Fm}{D} \\ v'''(m) - \frac{kbh^2}{2D} \left[\frac{fc}{kh} - (v_{pm} - v'(a)) \right] = \frac{F}{D} \\ v(m) - v_m = 0 \\ v'(m) - v_{pm} = 0 \\ v_m + v_{pm}m + \frac{fm^3}{3D} - v_{fl} = 0 \\ G_m - G_{IIc} = 0 \\ a_0 - m = 0 \end{array} \right. \quad (\text{eq III.24})$$

où $v(x)$ est la solution de l'équation (eq III.15). Les quatre premières équations correspondent aux conditions aux limites et permettent de déterminer,

à chaque pas de calcul, les coefficients (α , β , γ , δ). Les trois suivantes permettent le calcul de la flèche à l'extrémité de l'éprouvette. les deux dernières sont les critères utilisés durant cette phase. L'avant dernière correspond au critère de Griffith que nous appliquons sur la partie du Taux de Restitution de l'Énergie totale localisée en pointe de fissure, noté G_m . La dernière équation correspond au fait que durant cette première phase, il n'y a pas de transfert du pont. Pour obtenir le système correspondant à la phase 2, il suffit, dès que l'on atteint le critère de déplacement maximum à l'extrémité de l'interface, $x=m$, défini par l'équation (eq III.23), de remplacer la dernière équation du système de la phase 1, (eq III.24), par l'équation suivante :

$$h(v'(m) - v'(a)) - \Delta U_c = 0 \quad (\text{eq III.25})$$

Nous avons ainsi les deux systèmes d'équations régissant les deux phases de la propagation. Il suffit alors de déterminer les matrices tangentes à l'aide du code de calcul formel et d'utiliser la méthode de Newton-Raphson pour obtenir la simulation complète de la propagation. Les programmes de calcul formel permettant de déterminer l'équation de la flèche ainsi que les deux matrices tangentes se trouvent dans l'annexe 3.

Nous présentons, ici, les courbes charge-déplacement et Taux de Restitution de l'Énergie total-déplacement obtenues à l'aide de cette modélisation. Comme pour le mode I, nous présentons des courbes sans dimension pour une meilleur compréhension. La force critique, F , est divisée par la force critique initiale, noté F_0 . La flèche, $v(0)$, est divisée par la demie hauteur de l'éprouvette, h . Le Taux de Restitution de l'Énergie total, noté G_t , est divisé par le Taux de Restitution de l'Énergie caractéristique du matériau, noté G_m . Les données géométriques et matériaux que nous avons utilisées sont celles de M. S. Madhukar et L. T. Drazl [M. S. Madhukar et L. T. Drazl - 91b]: $E =$

134 GPa, $h = 1.7$ mm, $b = 25$ mm. Nous présentons ici une seule famille de courbes correspondant à l'étude paramétrique suivante où nous prenons f_c constant (fig.III.4). Le paramètre que nous faisons évoluer est λ défini par l'équation (eq III.26). La courbe tracée pour $\lambda = 0$ est celle que l'on obtient par la mécanique de la rupture fragile sans modélisation du pont de fibres.

$$\lambda^2 = \frac{f_c b h^2}{2 \Delta U_c D} \quad (\text{eq III.26})$$

* Nous prenons dans ce cas $f_c = 300 \text{KN/m}^2$

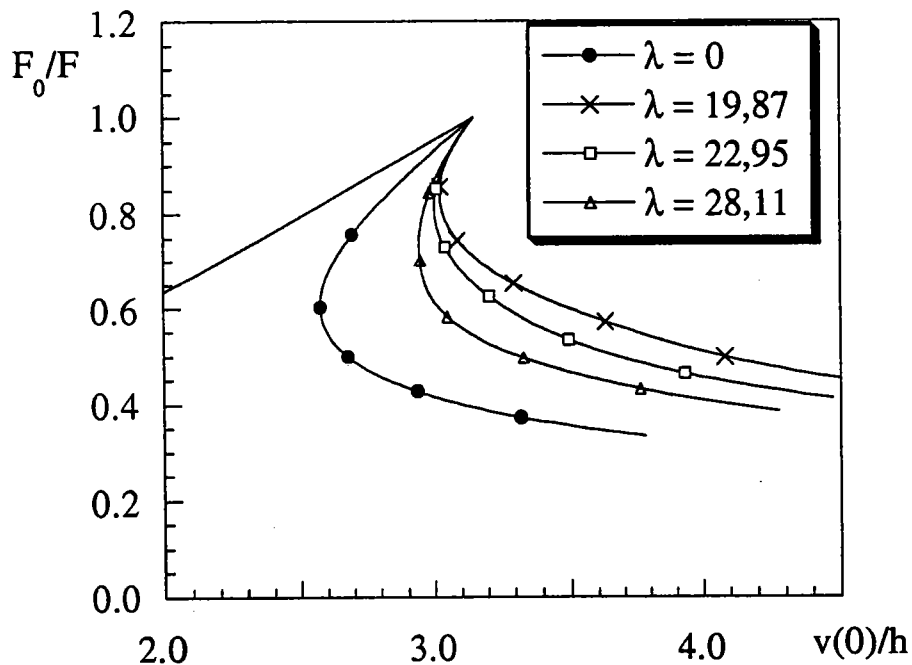


fig.III.3. Courbe charge-déplacement - $f_c = \text{cste}$

Ces courbes, en forme de " C ", sont représentatives du caractère instable de la propagation en mode II dans ce type d'essais. Cette instabilité de la propagation est notée par tous les auteurs utilisant ce type de test. De ce fait nous avons utilisé la longueur de fissure " a " comme paramètre de pilotage dans la méthode de Newton-Raphson. La première observation que nous pouvons faire est que l'introduction d'une interface endommageable entraîne une

augmentation de la force de stabilisation, noté F_{sta} (fig.III.4).

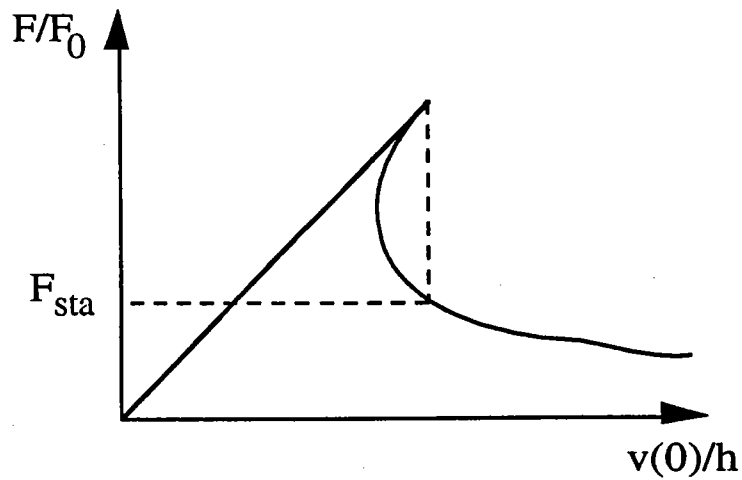


fig.III.4. Représentation de la force de stabilisation.

Nous présentons maintenant les courbes R correspondantes :

* Nous prenons dans ce cas $f_c = 300\text{KN/m}^2$

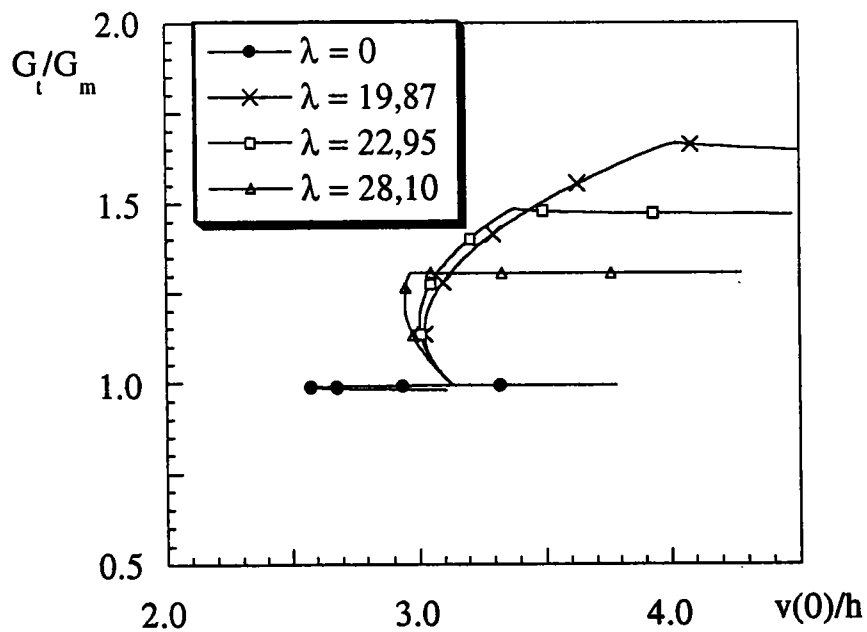


fig.III.5. Courbe R - $f_c = \text{cste}$

Ces courbes R, représentant l'augmentation de la dissipation totale dans l'éprouvette au cours de la propagation, n'ont jamais été observées dans la littérature. En effet, il est impossible de les obtenir à partir d'un essai réel, car la

propagation instable de la fissure entraîne la ruine totale de l'éprouvette juste après l'initiation de la propagation. On note, cependant, que les effets obtenus sur ces courbes sont du même type que ceux observés en mode I. C'est à dire que nous avons une augmentation continue du Taux de Restitution de l'Énergie totale au cours de la propagation et que la hauteur du plateau est gouvernée par l'énergie stockée dans l'interface $G_{pc} = \frac{b}{2} f_c \Delta U_c$.

4.3. MODÈLE MODIFIED END LOAD SPLIT

4.3.1. Nouvelle éprouvette

L'instabilité de la propagation d'une fissure dans une éprouvette End Load Split est un obstacle à l'étude de ce mode de rupture. Dans ce paragraphe, nous allons modéliser une éprouvette où la propagation est stable. C'est le test Modified End Load Split, M. E. L. S. (fig.III.10). Ce test fictif que nous présentons a pour but d'orienter la réalisation d'un test stable en mode II. Pour obtenir cette stabilité au cours de la propagation, nous avons pris le test End Load Split auquel nous avons ajouté un appui simple mobile au niveau de la pointe de fissure. Ceci est très facile à réaliser numériquement mais il semble que la solution technologique soit, elle, très compliquée à réaliser.

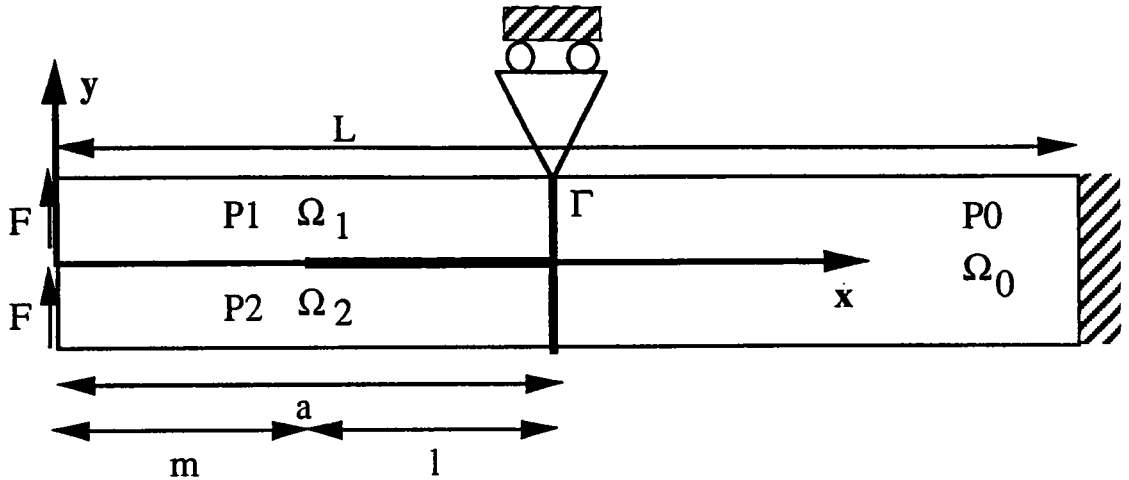


fig.III.10. Éprouvette Modified End Load Split

4.3.2. Cinématique et calcul de dissipation

Nous conservons toute la cinématique introduite pour le modèle End Load Split. En appliquant le Principe des Puissances Virtuelles, on montre simplement que seules les conditions aux limites en $x = a$ ont changé. Cette modification des conditions aux limites vient de l'introduction du nouvel appui en pointe de fissure. Les équations régissant le problème restent les mêmes que pour le test E. L. S. (eq III. 12,13). Les nouvelles conditions aux limites $x = a$ sont :

$$\begin{aligned} v(a) &= 0 \\ v'(a) &= -\frac{1}{2} \frac{Fa(L-a)}{D_0} \end{aligned} \quad (\text{eq III.28})$$

La forme générale de la solution reste donc la même que pour le test End Load Split, mais il faut utiliser les nouvelles conditions aux limites pour déterminer la valeur des coefficients $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. On trouvera le programme de calcul formel correspondant dans l'annexe 4. Nous avons déterminé la nouvelle expression de la flèche, nous allons maintenant calculer la nouvelle dissipation

totale dans l'éprouvette.

Pour déterminer la dissipation totale dans l'éprouvette, nous utilisons toujours la même démarche. La seule différence intervient au niveau du calcul du Taux de Restitution de l'Énergie en pointe de fissure. En effet, l'appui que nous avons ajouté modifie l'expression de la formule de G_m . Son expression est donnée par l'équation III.30.

$$\begin{aligned} D_t &= D_m + D_p \\ &= \dot{a}(t)G_m + \frac{f_c b h}{2} \int_m^a \dot{v}'(x) dx \end{aligned} \quad (\text{eq III.29})$$

$$G_m = [[W]]_{x=a} + [[T]]_{x=a} v'(a) \quad (\text{eq III.30})$$

où :

$$[[T]]_{x=a} = 2M'(a) - M'_0(a) \quad (\text{eq III.31})$$

La formule de G_m donnée par l'équation (eq III.30) est en accord avec les résultats déjà obtenus par B. Cochelin [B. Cochelin - 89], B. Storakers [B. Storakers] et R. M. Pradeille [R. M. Pradeille - 92]. A l'aide de ces nouveaux résultats analytiques, nous pouvons réaliser la simulation numérique complète de la propagation d'un délaminage existant dans ce type d'éprouvette.

4.3.3. Propagation et résultats numériques

Pour simuler la propagation complète de la fissure, il suffit alors de construire les nouvelles matrices tangentes à l'aide du code de calcul formel. Les résultats que nous présentons sont réalisés avec les mêmes données que pour le test End Load Split.

* Nous prenons dans ce cas $f_c = 300\text{KN/m}^2$

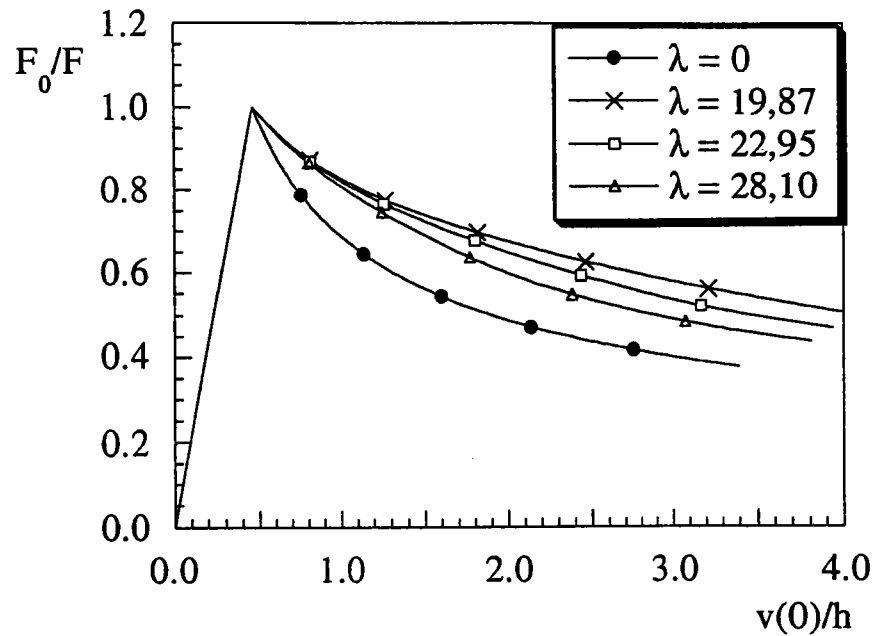


fig.III.13. Courbe charge-déplacement

Nous remarquons que le test, que nous avons modélisé, présente bien une propagation stable de la fissure et cela en mode II. L'instabilité du modèle End Load Split est donc due à la géométrie du test. L'introduction de l'interface dans le modèle entraîne des changements semblables à ceux observés dans les autres modèles à interface endommageable.

Nous présentons maintenant les courbes R correspondantes :

* Nous prenons dans ce cas $f_c = 300\text{KN/m}^2$

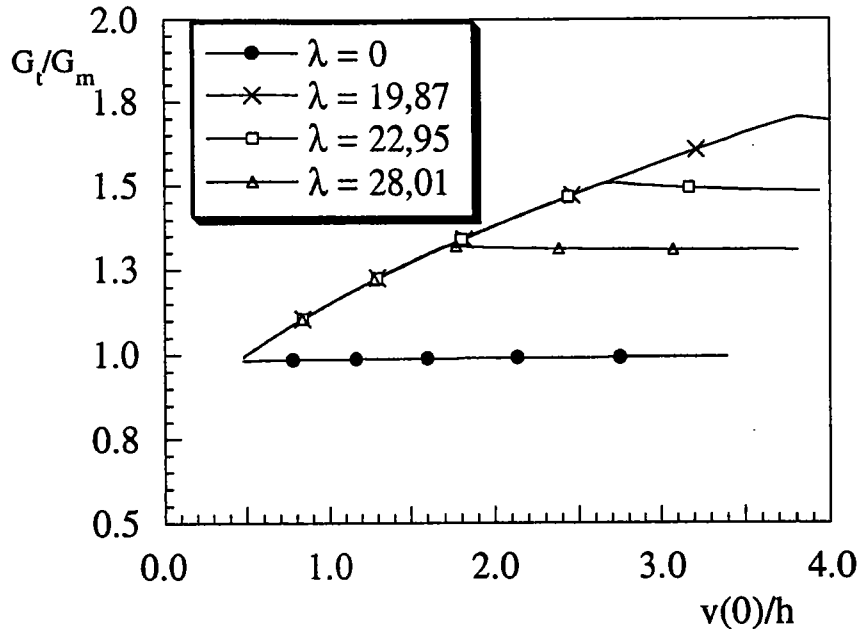


fig.III.16. Courbe R

Les courbes R obtenues dans ce type d'essai sont d'une forme beaucoup plus classique que celles obtenues avec le test End Load Split . On note, comme en mode I, que la pente de l'augmentation est liée à f_c (fig III.16) et que la hauteur du plateau est dépendante de $G_{pc} = \frac{f_c b \Delta U_c}{2}$ (fig III.16). Les courbes présentées dans cette partie sont bien évidemment théoriques, car il n'existe pas encore de réalisation technologique de cet essai.

4.4. CONCLUSION

Au cours d'un essai End Load Split, les effets dynamiques, liés à l'instabilité de la propagation, entraînent la ruine de l'éprouvette juste après l'initiation de la fissuration. Il en résulte que les courbes charge-déplacement ne donnent aucune information sur les phénomènes existant au cours de la

propagation. Il serait donc utile de mettre au point un essai de propagation stable en mode II, pour permettre une meilleure appréhension des phénomènes apparaissant durant la propagation. Nous avons réalisé la modélisation d'un tel essai, mais nous n'avons pas la solution technologique correspondante. D'ailleurs, il semble difficile, voir impossible, de réaliser technologiquement un appui qui suive exactement la pointe de fissure. On peut quand même, peut-être, envisager une solution approchée avec un appui qui serait proche de la pointe de fissure et que l'on déplacerait par à-coup au cours de la propagation.

5. MODÈLE MODE MIXTE

Après l'étude des deux modes élémentaires de rupture, nous allons essayer de réaliser une propagation en mode mixte avec modélisation d'un pont de fibres. Pour pouvoir réaliser ce type de simulation, nous devons, dans un premier temps, être à même de déterminer la répartition entre le mode I et le mode II dans le Taux de Restitution de l'Énergie globale de l'éprouvette. Pour cela, nous exposerons l'analyse faite par Z. Suo et J. W. Hutchinson et proposerons, par la suite, une analyse basée sur les hypothèses poutre. Ensuite, nous devons utiliser un critère multi-mode, basé sur cette décomposition, pour remplacer le critère de Griffith utilisé dans les propagations mono-mode. Une autre difficulté de ce type de propagation sera de modéliser l'interface. Nous devons introduire une interface avec des rigidités dans deux directions pour les modes d'ouverture et de glissement ayant un endommagement couplé. Une fois ces problèmes résolus, nous procéderons d'une façon analogue à celle développée dans les chapitres précédents.

5.1. DÉCOMPOSITION MODE I - MODE II

5.1.1. Modèle de z. suo et j. w. hutchinson

Ces auteurs ont réalisé leur analyse sur un bi-matériau élastique et pour un cas de chargement général. L'éprouvette qu'ils considèrent est formée de deux matériaux isotopes situés de part et d'autre de la fissure, ce qui correspond au décollement d'un film mince sur un support. On peut schématiser ainsi la structure du problème à l'aide de la figure suivante (fig.IV.1) :

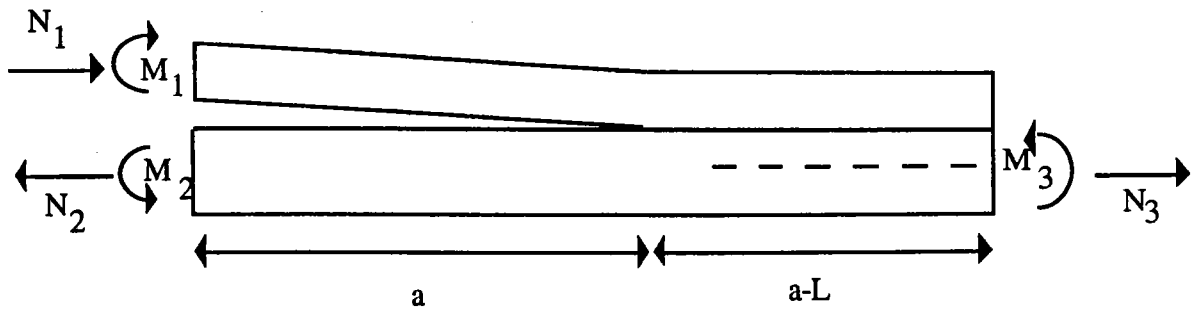


fig.IV.1. Schéma de l'éprouvette.

La partie saine de l'éprouvette peut être alors considérée comme une poutre composite constituée de deux matériaux. La solution élastique au voisinage de la fissure ne dépend que des six paramètres définis au loin, N_i et M_i $i \in \{1,2,3\}$, qui sont reliés par deux équations d'équilibre. Après élimination de la solution régulière, ils montrent que les singularités en pointe de fissure ne dépendent que de deux paramètres. On peut alors se ramener à l'étude d'un cas où il existe seulement deux paramètres de charge, noté P et M . Ces deux paramètres dépendent des six paramètres initiaux, M_i et N_i , $i \in \{1,2,3\}$. Ils déterminent la valeur du Taux de Restitution de l'Énergie en pointe de fissure en fonction de ces deux nouveaux paramètres, et montrent qu'il est égal à :

$$G = \frac{c_1}{16} \left[\frac{P^2}{Ah} + \frac{M^2}{Ih^3} + 16PM\Sigma(1 + \eta) \right] \quad (\text{eq IV.1})$$

où :

$$\frac{1}{A} = 1 + \Sigma(4\eta + 6\eta^2 + 3\eta^3) \quad \frac{1}{I} = 12(1 + \Sigma\eta^3)$$

$$\Sigma = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$$

$$\eta = \frac{h}{H}$$

(α, β) étant les deux paramètres de Dundurs. Ils dépendent des caractéristiques mécaniques des deux matériaux constituant l'éprouvette.

Par ailleurs, ils effectuent une étude des singularités en pointe de fissure,

et montrent que les contraintes à la distance r de la pointe de fissure s'obtiennent sous la forme :

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} r^{i\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)} \quad (\text{eq IV.2})$$

avec

$$K = K_1 + iK_2$$

où K est le facteur complexe d'intensité des contraintes défini par (J. R. Rice -88). On montre que le Taux de Restitution de l'Énergie est alors fonction du facteur d'intensité K sous la forme :

$$G = \text{CoefMat} |K|^2 \quad (\text{eq IV.3})$$

On peut ainsi relier le module de K avec P et M à l'aide de CoefMat et de l'équation IV.1. La décomposition en partie réelle et imaginaire de K suit les arguments présentés dans J. W. Hutchinson et al -87. Cette décomposition mode I, mode II est basée sur des considérations très locales en pointe de fissure. elle est parfois utilisée pour des composites [B. Storakers et Nilson - 92 ; G. A. Kardomateas - 93] bien que l'on soit loin de l'hypothèse de départ qui est, nous le rappelons : une fissure séparant deux matériaux élastiques homogènes isotropes.

5.1.2. Une décomposition basée sur les hypothèses poutre

Le but de ce paragraphe est de déterminer une décomposition du Taux de Restitution de l'Énergie globale de l'éprouvette en une partie caractéristique du mode I et une autre du mode II. Cette décomposition sera faite à l'aide de considération globale sur les modes considérés. Nous rappelons, ici, que le

mode I est un mode d'ouverture de la fissure, alors que le mode II est un mode de glissement des lèvres de la fissure. L'étude que nous avons menée se situe dans le cadre d'une éprouvette composite quelconque. Les notations que nous utilisons sont celles introduites dans le chapitre II. L'éprouvette, ainsi que son chargement, sont représentés par la figure (fig. IV.1). Nous rappelons que les relations reliant les efforts généralisés aux déplacements généralisés sont alors :

$$N_i(x) = A_i e_i(x) + B_i k_i(x) \quad (\text{eq IV.3})$$

$$M_i(x) = B_i e_i(x) + D_i k_i(x) \quad (\text{eq IV.4})$$

Nous rappelons, ici, que de part la nature stratifiée de l'éprouvette composite, ces neuf coefficients vérifient les trois relations suivantes (eq IV.5) :

$$\begin{cases} A_0 = A_1 + A_2 \\ B_0 = B_1 + B_2 + \frac{h_2}{2} A_1 - \frac{h_1}{2} A_2 \\ D_0 = D_1 + D_2 + h_2 B_1 - h_1 B_2 + \frac{h_2^2}{4} A_1 + \frac{h_1^2}{4} A_2 \end{cases} \quad (\text{eq IV.5})$$

Pour obtenir une décomposition en mode I-mode II du Taux de Restitution de l'Énergie en pointe de fissure, nous allons procéder en deux étapes. La première consistera à déterminer une partie active dans le Taux de Restitution de l'Énergie en pointe de fissure, en éliminant la solution régulière. La deuxième consistera à réaliser la séparation mode I - mode II de la partie active du Taux de Restitution de l'Énergie . Pour cela, nous nous appuierons sur des considérations globales sur les deux modes de ruptures considérés.

Pour déterminer la partie active dans le Taux de Restitution de l'Énergie , nous allons décomposer les déplacements généralisés, $\{e_1, k_1, e_2, k_2\}$, en une

partie assurant la continuité avec les déplacements généralisés, $\{e_0, k_0\}$, et en une partie assurant la discontinuité. Cette décomposition est donnée par la relation suivante :

$$\begin{cases} e_1 = \left(e_0 + \frac{h_2}{2} k_0 \right) + e_1^* \\ e_2 = \left(e_0 - \frac{h_1}{2} k_0 \right) + e_2^* \\ k_1 = k_0 + k_1^* \\ k_2 = k_0 + k_2^* \end{cases} \quad (\text{eq IV.6})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 Partie passive

$\underbrace{\hspace{10em}}$
 Partie active

En injectant ces notations dans le calcul du T. R. E. et en utilisant les trois relations de l'équation (eq IV.5), nous obtenons :

$$G = W_1^* + W_2^* \quad (\text{eq IV.7})$$

où :

$$2W_\alpha^* = N_\alpha^* e_\alpha^* + M_\alpha^* k_\alpha^* \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (\text{eq IV.8})$$

Nous avons ainsi établi une expression du Taux de Restitution de l'Énergie dépendant uniquement de la partie active des déplacements généralisés, $\{e_\alpha^*, k_\alpha^*\}$, eq IV.7. Cette relation est analogue à celle déterminée par Z. Suo et J. W. Hutchinson, (eq IV.1.) En injectant une nouvelle fois ces notations, (eq IV.6), dans les équations de raccord, (eq II. 19), nous obtenons les équations de raccord sur les quantités actives des efforts généralisés, qui sont :

$$N_1^* + N_2^* = 0 \quad (\text{eq IV.9})$$

$$M_1^* + M_2^* + N_1^* \frac{h_2}{2} - N_2^* \frac{h_1}{2} = 0 \quad (\text{eq IV.10})$$

Nous allons maintenant faire la partition du Taux de Restitution de

l'Énergie en pointe de fissure en donnant une définition des modes I et II dans le cadre de poutre stratifiée anisotrope. Le mode I étant un mode d'ouverture, il est raisonnable de définir le mode I pur comme un mode associé à deux moments, notés M_I et $-M_I$, sans aucun effort normal. Le mode II étant un mode de glissement, nous le définissons par un glissement pur des deux lèvres de la fissure, donc par une continuité des flèches et des courbures, soit $k_1^* = k_2^*$. En générale, cette condition se traduit par une combinaison d'efforts normaux et de moments. Nous décomposons alors les moments actifs comme suit :

$$M_1^* = M_1^{\text{II}} + M^{\text{I}} \quad (\text{eq IV.11})$$

$$M_2^* = M_2^{\text{II}} - M^{\text{I}} \quad (\text{eq IV.12})$$

où il reste à préciser la forme des efforts pour notre mode II.

Les deux équations de raccord, (eq .IV.9 - IV.10), peuvent alors se réécrire de la façon suivante:

$$N_1^* = -N_2^* = N^{\text{II}} \quad (\text{eq IV.13})$$

$$M_1^{\text{II}} + M_2^{\text{II}} + N^{\text{II}} \frac{h_0}{2} = 0 \quad (\text{eq IV.14})$$

En inversant les relations de comportement, on montre que :

$$\begin{cases} e_\alpha^* = a_\alpha N_\alpha^* + b_\alpha M_\alpha^* \\ k_\alpha^* = b_\alpha N_\alpha^* + d_\alpha M_\alpha^* \end{cases} \quad \alpha \in \{1,2\} \quad (\text{eq IV.15})$$

Notre définition du mode II $k_1^* = k_2^*$, nous donne :

$$(b_1 + b_2)N^{\text{II}} + a_1M_1^{\text{II}} - a_2M_2^{\text{II}} = 0 \quad (\text{eq IV.16})$$

À l'aide de l'équation IV.14 et IV.16, nous déterminons les relations entre M_{α}^{II} et N^{II} . Ces relations sont données par les formules suivantes:

$$M_1^{\text{II}} = -N^{\text{II}} \frac{(h_0 a_2 + 2(b_1 + b_2))}{2(a_1 + a_2)} \quad (\text{eq IV.17})$$

$$M_2^{\text{II}} = -N^{\text{II}} \frac{(h_0 a_1 - 2(b_1 + b_2))}{2(a_1 + a_2)} \quad (\text{eq IV.18})$$

En injectant ces relations ainsi que les relations de l'équation IV.15 dans l'écriture du Taux de Restitution de l'Énergie, (eq IV.7), nous montrons qu'il peut se décomposer, sans aucun couplage, entre les modes I et II que nous avons précédemment définis :

$$\begin{aligned} G &= \chi(N^{\text{II}})^2 + \psi(M^{\text{I}})^2 \\ &= G_{\text{II}} + G_{\text{I}} \end{aligned} \quad (\text{eq IV.19})$$

où

$$2\chi = \frac{(d_1 + d_2)(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)^2 + 2a_1 b_2 h + a_1 h^2 a_2 - 2a_2 b_1 h}{(a_1 + a_2)} \quad (\text{eq IV.20})$$

$$2\psi = (a_2 + a_1) \quad (\text{eq IV.21})$$

On note que pour un matériau homogène isotrope avec une fissure centrale l'écriture devient :

$$G = \frac{(hN^{\text{II}})^2}{3EI} + \frac{(M^{\text{I}})^2}{EI} \quad (\text{eq IV.22})$$

Ce résultat est en accord avec les résultats données dans [B. Cochelin -

89] et avec ceux de Z. Suo et J. W. Hutchinson. Nous pouvons récapituler les différentes étapes pour obtenir une décomposition mode I - mode II basée sur les hypothèses poutres par la figure suivante fig. IV.2. Nous donnons aussi dans l'annexe 5 le programme en calcul formel permettant de déterminer l'expression de N^{II} et M^{I} dans différents cas.

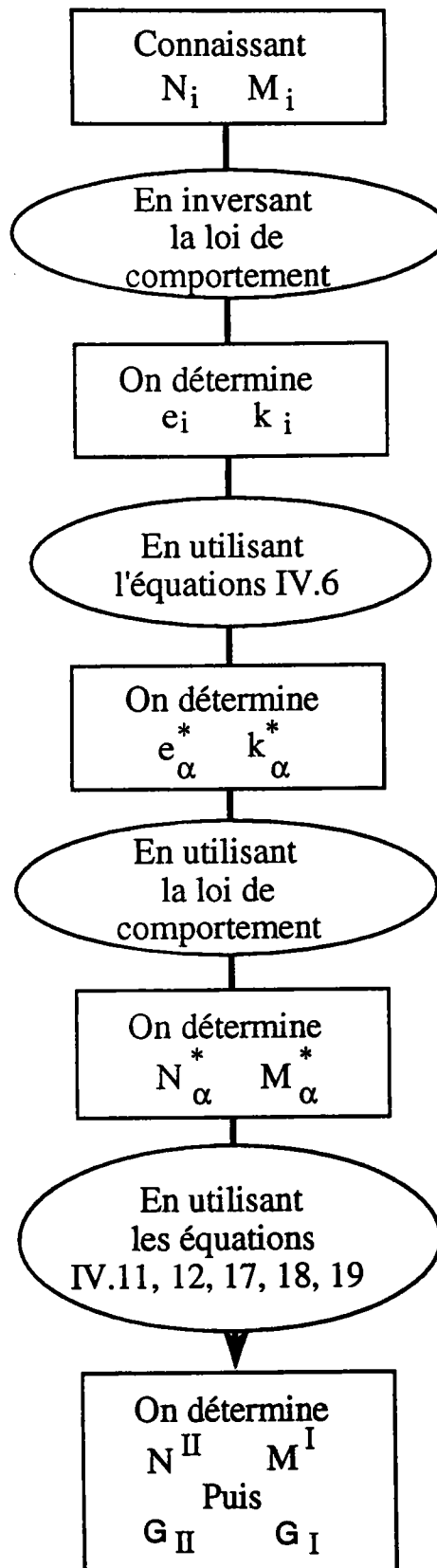


fig. IV.2. Schéma récapitulatif de la séparation mode I mode II
basée sur les hypothèses poutre

Nous avons donc obtenu une séparation du Taux de Restitution de

l'Énergie en pointe de fissure en un G_I , caractéristique du mode I, et en un G_{II} , caractéristique du mode II. Nous allons maintenant comparer, de façon plus précise, ces résultats obtenus par notre approche globale du problème à ceux obtenus par Z. Suo et J. W. Hutchinson avec une approche plus locale.

5.1.3. Comparaison entre les deux approches

Pour comparer les deux approches nous allons raisonner sur un matériau homogène isotrope. Nous allons faire deux types de comparaison. La première se fera sur une éprouvette avec une fissure centrée. La deuxième consistera à étudier l'influence de la position de la fissure sur la répartition mode I-mode II.

5.1.3.1. Première comparaison

Nous allons étudier l'éprouvette suivante (fig. IV.3) en faisant varier λ dans $[-1,1]$. Ainsi, nous passons d'un mode I pur à un mode II pur.

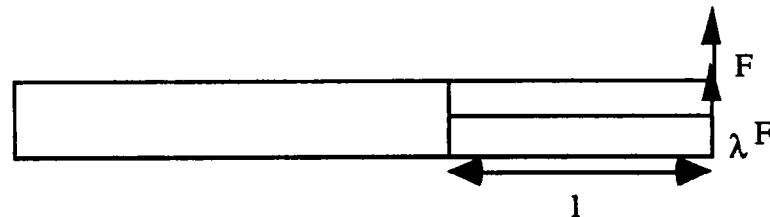


fig. IV.3. Éprouvette de comparaison 1.

En utilisant les équations IV.3 à IV.18, nous déterminons la valeur de N^{II} et M^I :

$$M^I = Fl \left(\frac{1-\lambda}{2} \right) \quad (\text{eq IV.23})$$

$$N^{II} = -\frac{3}{4h} Fl(1+\lambda) \quad (\text{eq IV.24})$$

et donc :

$$\sqrt{\frac{G_{II}}{G_I}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) \quad (\text{eq IV.25})$$

En utilisant l'approche développée par Z. Suo et J. W. Hutchinson, on montre que :

$$\frac{K_2}{K_1} = \sqrt{\frac{G_{II}}{G_I}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) \quad (\text{eq IV.26})$$

Nous remarquons que dans un tel cas de figure, matériau homogène isotrope et fissure centrale, nous obtenons des résultats identiques.

5.1.3.2. Deuxième comparaison

Pour étudier l'influence de la position de la fissure dans l'éprouvette nous allons étudier le test suivant fig. IV.4 :

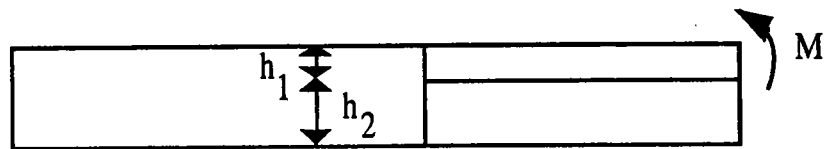


fig. IV.4. Éprouvette de comparaison 2.

En utilisant les équations IV.3 à IV.18, nous montrons que dans un tel cas, nous pouvons écrire :

$$\sqrt{\frac{G_{II}}{G_I}} = \frac{\sqrt{3}\eta^2}{1+\eta} \quad \text{où } \eta = \frac{h_1}{h_2} \quad (\text{eq IV.27})$$

En remplaçant η par 1, on retrouve le résultat précédent. En faisant tendre η vers 0, on observe que $\sqrt{\frac{G_{II}}{G_I}}$ tends vers 0. C'est à dire que plus la fissure se

rapproche de la face supérieure de l'éprouvette, plus le mode d'ouverture prédominant est le mode I. Nous en concluons que dans l'approche que nous proposons, il existe donc une forte dépendance entre la position de la fissure et la décomposition mode I - mode II.

En utilisant l'approche développée par Z. Suo et J. W. Hutchinson, on montre que le développement limité de $\frac{K_2}{K_1}$ en $\eta = 0$ est :

$$\frac{K_2}{K_1} = 0,77 + 2,78\eta^2 + o(\eta^2) \quad (\text{eq IV.28})$$

Avec cette approche, on observe que la répartition mode I - mode II est peu sensible à la position de la fissure dans l'éprouvette. En effet $\frac{K_2}{K_1}$ varie de 0,86, quand la fissure est au milieu de la l'éprouvette (eq IV.26), à 0,77 lorsque la fissure est à la surface de l'éprouvette (eq IV.28).

Il est difficile de savoir quel est la bonne approche à adopter pour obtenir une partition modes I - II dans un composite. Une approche très localisée, basée sur les singularités de contrainte élastique en pointe de fissure, n'est probablement pas très réaliste pour le délaminage d'un composite. Notre approche très globale est aussi critiquable car elle occulte complètement les aspects localisés et utilise une définition très grossière des deux modes de rupture. Il existe cependant une correspondance assez nette entre ces deux approches. Dans le modèle de propagation en mode mixte que nous allons présenter, nous utiliserons la décomposition basée sur l'approche globale que nous avons développée.

5.2. MODÈLE MODE MIXTE

Pour simuler la propagation en mode mixte d'une fissure dans une éprouvette composite, nous allons utiliser le test Mixed Mode Flexure (M. M. F.) (fig. IV.5). D'autres types d'éprouvettes sont utilisés dans la littérature pour étudier la fissuration en mode mixte [Z. Aboura et al - 92 , M. L. Benzeggagh et al - 88] .

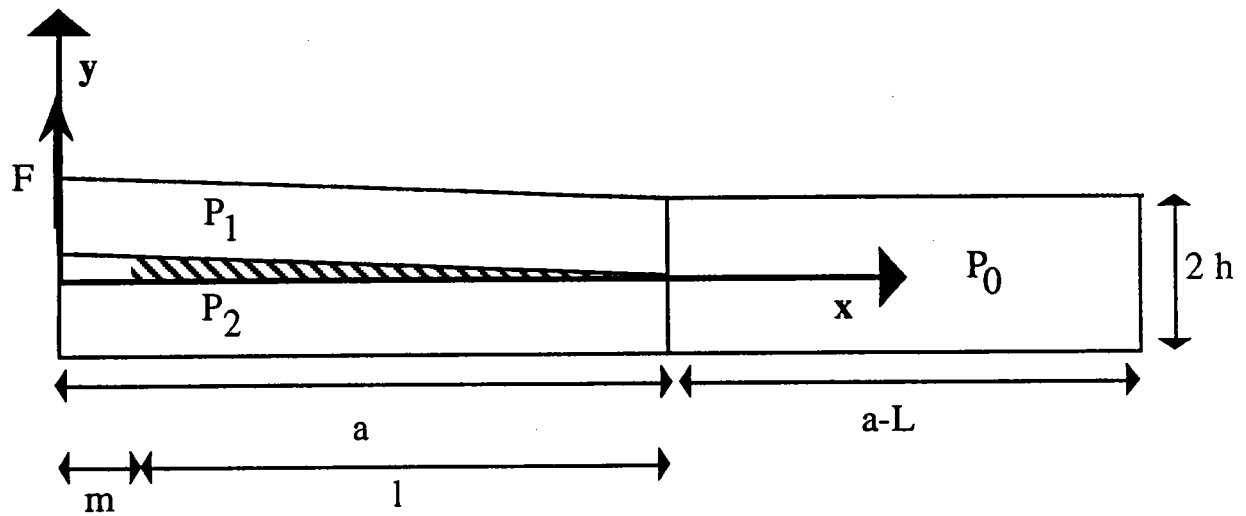


fig. IV.5. Test M. M. F.

Au cours de la propagation, nous simulerons la création d'une interface dissipative permettant de représenter les effets de courbe R ainsi que la création d'un pont de fibres. Nous définirons donc dans un premier temps la nature de cette interface, puis nous réaliserons la simulation de cet essai à l'aide de la méthode de Newton-Raphson.

5.2.1. Définition de l'interface et équations

5.2.1.1. DÉFINITION DE L'INTERFACE

Dans les études que nous avons déjà menées, nous définissons deux types d'interface : l'une active en mode I et l'autre en mode II. Afin de pouvoir représenter les phénomènes existants au cours d'un essai en mode mixte nous devons introduire ces deux types de ressort. Cependant, si nous nous contentons d'introduire les ressorts comme nous les avons définis précédemment, nous aurions deux ressorts à endommagements indépendants. C'est à dire que le ressort actif en mode I ne s'endommage pas au cours d'une ouverture en mode II et réciproquement. Cela est peu réaliste, car si l'on rompt entièrement un pont de fibres à l'aide d'une ouverture en mode I et que l'on réalise ensuite un essai en mode II, on observe aucun effet de courbe R, le pont de fibres ayant été rompu une fois pour toute. Cette remarque nous oblige à introduire un couplage au niveau de la loi des ressorts entre le mode I et le mode II. Une façon très simple de prendre ce couplage est de considérer que la force f dans le ressort décroît linéairement en fonction de l'ouverture en mode I et du glissement en mode II. (fig. IV.6).

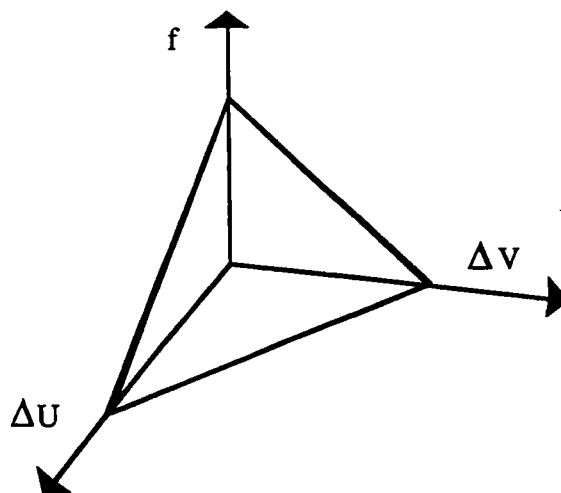


fig. IV.6. Loi endommagement progressif
d'un ressort en mode mixte

De plus pour représenter le fait que le pont se rompt de la même façon, quelque soit la combinaison des modes, il faut imposer que la droite dans le plan ΔV - ΔU soit identique pour les deux ressorts. Nous pouvons alors définir la loi de comportement pour chacun des ressorts comme suit :

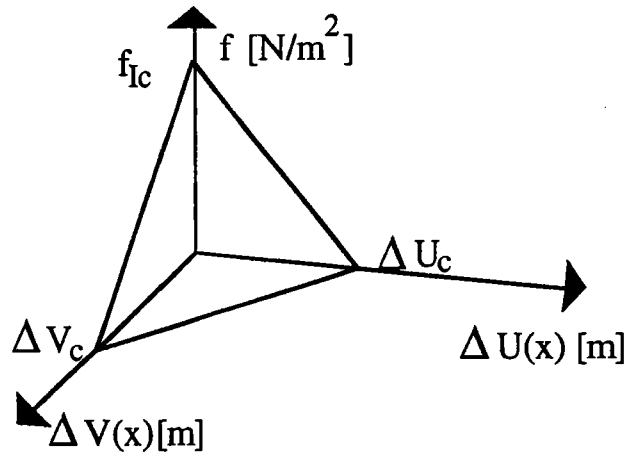


fig IV.7. Loi pour le ressort actif en mode I.

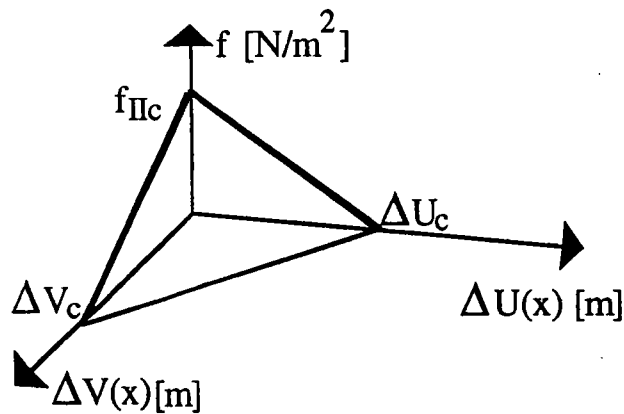


fig IV.8. Loi pour le ressort actif en mode II.

Les quatre paramètres (f_{Ic} , f_{IIc} , ΔV_c , ΔU_c) sont ceux définis dans les deux modélisations précédentes. C'est à dire que (f_{Ic} , ΔV_c) sont les paramètres introduits dans la modélisation de la propagation en mode I avec interface à endommagement progressif et (f_{IIc} , ΔU_c) ceux introduits pour le mode II. Ces quatre paramètres peuvent donc être identifiés à l'aide de deux essais, l'un en mode I pur et l'autre en mode II pur. L'expression analytique de la force dans

chacun des ressorts est donné par les formules suivantes :

$$F_I(x) = f_{Ic} - \left(k_I^{(1)} \Delta V(x) + k_I^{(2)} \Delta U(x) \right) \quad (\text{eq IV.29})$$

$$F_{II}(x) = f_{IIc} - \left(k_{II}^{(1)} \Delta V(x) + k_{II}^{(2)} \Delta U(x) \right) \quad (\text{eq IV.30})$$

où :

$$\begin{aligned} k_I^{(1)} &= \frac{f_{Ic}}{\Delta V_c} & k_I^{(2)} &= \frac{f_{Ic}}{\Delta U_c} \\ k_{II}^{(1)} &= \frac{f_{IIc}}{\Delta V_c} & k_{II}^{(2)} &= \frac{f_{IIc}}{\Delta U_c} \end{aligned} \quad (\text{eq IV.31})$$

Nous rappelons que nous prenons :

$$\Delta V(x) = v_1(x) - v_2(x)$$

$$\Delta U(x) = \left(\frac{h_2}{2} v_1'(x) + \frac{h_1}{2} v_2'(x) \right) - \frac{h_0}{2} v_0'(a)$$

Nous pouvons alors définir l'énergie stockée dans l'interface. Nous distinguons celle provenant de l'ouverture de la fissure en mode I, noté W_I , et celle provenant de son ouverture en mode II, noté W_{II} . Nous écrivons alors :

$$\begin{aligned} W_{if} &= \frac{b}{2} \int_m^a F_I(x) \Delta V(x) + F_{II}(x) \Delta U(x) \, dx \\ &= \frac{b}{2} \int_m^a F_I(x) \Delta V(x) \, dx + \frac{b}{2} \int_m^a F_{II}(x) \Delta U(x) \, dx \quad (\text{eq IV.32}) \\ &= W_I + W_{II} \end{aligned}$$

Comme précédemment, nous nous plaçons dans le cas où les vitesses d'ouverture $\Delta \dot{V}$ et $\Delta \dot{U}$ sont toujours positives. Il n'y a jamais de retour élastique pour le ressort. Les équations IV.29 et IV.30 sont valables tout au long du chargement.

5.2.1.2. ÉQUATIONS

En utilisant le Principe des Puissances Virtuelles et en réalisant une double intégration par partie, il est facile de montrer que les équations d'équilibre local s'écrivent comme :

$$-M_1''(x) + bF_1(x) - \frac{bh}{2} F_{II}'(x) = 0 \quad (\text{eq IV.33})$$

$$-M_2''(x) - bF_1(x) - \frac{bh}{2} F_{II}'(x) = 0 \quad (\text{eq IV.34})$$

que l'on peut réécrire dans les cas d'une éprouvette symétrique, $h_1=h_2=h$, sous la forme :

$$\begin{cases} D \text{ So}^{(4)}(x) + bh \left(k_{II}^{(1)} \text{Di}'(x) + \frac{hk_{II}^{(2)}}{2} \text{So}''(x) \right) = 0 \\ D \text{ Di}^{(4)}(x) + 2b \left(f_{Ic} - \left(k_I^{(1)} \text{Di}(x) + \frac{hk_I^{(2)}}{2} (\text{So}'(x) - \text{So}'(a)) \right) \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{eq IV.33})$$

où :

$$D = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b E(y) dy \quad (\text{eq IV.34})$$

$$\text{So}(x) = (v_1 + v_2)(x) \quad , \quad \text{Di}(x) = (v_1 - v_2)(x) \quad (\text{eq IV.35})$$

On montre que les solutions de ce système (eq IV.33, IV.34) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \text{So}(x) = & S_0 + S_1 x + S_2 \cos(\lambda_0 x) + S_3 \sin(\lambda_0 x) \\ & + S_4 \text{ch}(\lambda_1 x) + S_5 \text{sh}(\lambda_1 x) + S_6 \text{ch}(\lambda_2 x) + S_7 \text{sh}(\lambda_2 x) \end{aligned} \quad (\text{eq IV.36})$$

et

$$D_i(x) = H(S_o^{(7)}, S_o^{(5)}, S_o^{(1)}) \quad (\text{eq IV.37})$$

où : $(\lambda_0^2, \lambda_1^2, \lambda_2^2)$ sont les racines de l'équation cubique suivante :

$$x^3 + \frac{bh^2 k_{II}^{(2)}}{D} x^2 - 2 \frac{bk_I^{(1)}}{D} x - \frac{b^2 h^2 k_{II}^{(2)} k_I^{(1)}}{D^2} = 0 \quad (\text{eq IV.38})$$

Les conditions aux limites sont :

en $x = a$:

$$D_i(a) = 0 \quad D_i'(a) = 0 \quad (\text{eq IV.39})$$

$$S_o(a) = 2v_0(a) \quad S_o'(a) = 2v_0'(a) \quad (\text{eq IV.40})$$

en $x = m$:

$$D_i''(m) = \frac{Fm}{D} \quad D_i'''(m) = \frac{F}{D} \quad (\text{eq IV.41})$$

$$S_o''(a) = \frac{Fm}{D} \quad S_o'''(m) - \frac{bh}{D} F_{II}(m) = \frac{F}{D} \quad (\text{eq IV.42})$$

Il est alors possible de déterminer à l'aide des ces huit conditions aux limites, l'expression des huit coefficients S_i , $i \in \{0, \dots, 7\}$ et ainsi l'expression de $S_o(x)$ et $D_i(x)$. Nous pouvons alors déterminer la valeur de $v_1(x)$ et $v_2(x)$ à l'aide des équations suivantes:

$$v_1(x) = \frac{S_o(x) + D_i(x)}{2} \quad (\text{eq IV.43})$$

$$v_2(x) = \frac{S_o(x) - D_i(x)}{2} \quad (\text{eq IV.44})$$

5.2.2. Calcul de la dissipation et critère de propagation

Pour déterminer la dissipation totale dans l'éprouvette, nous conservons la même démarche que celle adoptée dans les autres modèles. C'est à dire que nous nous situons dans le cadre d'une approche quasi-statique et isotherme. Nous montrons que la dissipation totale peut s'écrire comme :

$$D_t = P_{\text{ext}} - \frac{d}{dt}(W_{\text{def}}) \quad (\text{eq IV.45})$$

où :

$$W_{\text{def}} = \underbrace{\sum_{i=0}^2 \int_{\Omega_i} W_i(x) d\omega_i}_{\text{Énergie de déformation due aux trois poutres}} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega_3} F_I(x) \Delta V(x) + F_{II}(x) \Delta U(x) d\omega_3}_{\text{Énergie de déformation due à l'interface}}$$

$$P_{\text{ext}} = Fv_1(0) \quad (\text{eq IV.46})$$

Et donc nous montrons que D_t peut s'écrire comme :

$$D_t = \dot{a}(t)G_m + D_p \quad (\text{eq IV.47})$$

où :

$$D_p = \frac{b}{2} \int_m^a f_{Ic} \Delta \dot{V}(x) + f_{IIc} \Delta \dot{U}(x) + (k_{II}^{(1)} - k_I^{(2)}) (\Delta \dot{U}(x) \Delta V(x) - \Delta U(x) \Delta \dot{V}(x)) dx \quad (\text{eq IV.48})$$

En utilisant la notation, $D_t = \dot{a}(t)G_t$, on montre que :

$$G_t = G_m + G_{\text{int}} \quad (\text{eq IV.49})$$

où :

$$G_m = [[W]]_{x=a} = W_1(a) + W_2(a) - W_0(a) \quad (\text{eq IV.50})$$

$$W_i(x) = \frac{1}{2} (N_i(x)e_i(x) + M_i(x)k_i(x))$$

et

$$G_p = \frac{b}{2} \int_m^a f_{Ic} \frac{d}{da} (\Delta V)(x) + f_{IIc} \frac{d}{da} (\Delta U)(x) + \left(k_{II}^{(1)} - k_I^{(2)} \right) \left(\frac{d}{da} (\Delta U)(x) \Delta V(x) - \Delta U(x) \frac{d}{da} (\Delta V)(x) \right) dx$$

(eq IV.51)

Nous mettons, là aussi, en évidence deux termes : l'un localisé en pointe de fissure, noté G_m , et l'autre réparti le long de l'interface, noté G_{int} . Nous appliquons comme pour les modèles précédents deux critères au cours de la propagation : un critère pour l'avancée de la pointe de fissure et un critère pour l'interface.

Comme nous sommes dans un cas de fissuration multi-mode, nous ne pouvons appliquer un critère de type Griffith en pointe de fissure. Le critère que nous appliquerons pour la partie du Taux de Restitution de l'Énergie localisée en pointe de fissure, noté G_m , est un critère de type Wu, eq IV.52. On note dans la littérature l'existence d'autres critères multi-mode [M. L. Benzeggagh et al - 88]. L'utilisation de ce type de critère multi-mode nous oblige à réaliser une séparation mode I - mode II au niveau du Taux de Restitution de l'Énergie localisé en pointe fissure. Cette séparation sera obtenue en utilisant la méthode basée sur les hypothèses poutre que nous avons développée dans la première partie de ce chapitre. Nous noterons G_{mI} la partie de G_m correspondant au mode I et G_{mII} la partie de G_m correspondant au mode II. Le critère de Wu s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{G_{mI}}{G_{Ic}} + \frac{G_{mII}}{G_{IIc}} &< 1 & \dot{a}(t) &= 0 \\ \frac{G_{mI}}{G_{Ic}} + \frac{G_{mII}}{G_{IIc}} &= 1 & \dot{a}(t) &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{(eq IV.52)}$$

Le critère que nous appliquerons sur l'interface est un critère de déplacement maximum. Ce critère de rupture est le même pour les deux types de ressorts du fait du couplage que nous avons introduit sur l'endommagement des ressorts. Il est déduit des relations de comportement des ressorts (eq IV.21 et IV.23) et il est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(m)}{\Delta V_c} + \frac{\Delta U(m)}{\Delta U_c} < 1 & \quad \dot{m}(t) = 0 \\ \frac{\Delta V(m)}{\Delta V_c} + \frac{\Delta U(m)}{\Delta U_c} = 1 & \quad \dot{m}(t) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{eq IV.53})$$

Maintenant que nous avons défini les deux critères de rupture que nous utiliserons, nous allons mettre en place la simulation numérique de la propagation en mode mixte dans ce type d'éprouvette.

5.2.3. Simulation et résultats numériques

Comme pour les modèles précédents, pour simuler numériquement la propagation de la fissure à l'aide de la méthode de Newton-Raphson, il faut déterminer les deux systèmes d'équations correspondant aux deux phases de propagation. Nous rappelons que la première phase est l'initiation de la propagation, puis la fissuration avec création de pont de fibres jusqu'à atteindre le critère de déplacement maximum en bout de pont de fibres, $x = m$. La deuxième phase est la propagation de la fissure avec création et transport du pont de fibres. Aussi, pour obtenir la simulation numérique de la première phase de la propagation il suffit de résoudre le système d'équation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 Di(a) = 0 \\
 Di'(a) = 0 \\
 So(a) - \frac{F(a^3 - 3aL^2 + 2L^3)}{3D_0} = 0 \\
 So'(a) - \frac{F(a^2 - L^2)}{D_0} = 0 \\
 Di''(m) - \frac{Fm}{D} = 0 \\
 Di'''(m) - \frac{F}{D} = 0 \\
 So''(m) - \frac{Fm}{D} = 0 \\
 So'''(m) - \frac{bh}{D} F_{II}(m) - \frac{F}{D} = 0 \\
 v_{fl} - \left(v_{1fl} + mv_{1pfl} + \frac{Fm^3}{3D} \right) = 0 \\
 v_{1fl} - v_1(m) = 0 \\
 v_{1pfl} - v_1'(m) = 0 \\
 v_{2fl} - v_2(m) = 0 \\
 v_{2pfl} - v_2'(m) = 0 \\
 G_{mII} - \left(\frac{(hN^{II})^2}{3D} \right) = 0 \\
 G_{mI} - \left(\frac{(M^I)^2}{D} \right) = 0 \\
 1 - \left(\frac{G_{mI}}{G_{Ic}} + \frac{G_{mII}}{G_{IIc}} \right) = 0 \\
 a_0 - m = 0
 \end{array} \right. \quad (\text{eq IV.54})$$

Où, $So(x)$ et $Di(x)$ sont les solutions du système d'équation (eq IV.33) prises respectivement sous la forme des équations eq IV.36 et 37 . $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont respectivement les déplacements verticaux dans la poutre P1 et P2 définis

à l'aide des équations eq IV.43 et IV.44.

Les huit premières équations sont les conditions aux limites qui permettent de déterminer les coefficients S_i , $i=0..7$, au cours de la propagation. La neuvième équation permet de calculer la flèche à l'extrémité de la poutre P1 à l'aide des deux paramètres définis dans les deux équations suivantes. La douzième et la treizième équation permettent de calculer la flèche et la pente de la poutre P2 à l'extrémité de l'interface, $x = m$. L'avant dernière équation est le critère multi-mode que nous utilisons pour la partie du Taux de Restitution de l'Énergie globale localisée en pointe de fissure, noté G_m . Nous écrivons ce critère à l'aide des deux paramètres G_{mI} et G_{mII} définis dans les deux équations précédentes. Ces deux paramètres, G_{mI} et G_{mII} , sont respectivement la partie active en mode I et en mode II du T. R. E. localisé en pointe de fissure, noté G_m . Nous rappelons que cette décomposition a été réalisée en utilisant la méthode que nous avons développée dans le paragraphe 4.1.2. Pour des raisons de lisibilité des équations donnant les valeurs des paramètres G_{mI} et G_{mII} , nous n'avons pas écrit l'expression de N^I et M^{II} mais elles sont données dans l'annexe 5. La dernière équation traduit le fait que, durant cette première phase, il y a création sans transport de l'interface. Nous avons 17 équations et donc 18 variables qui sont (S_i , $i=[0..7]$, v_{1fl} , v_{1pfl} , v_{2fl} , v_{2pfl} , G_{mI} , G_{mII} , m , a , F).

Pour obtenir le système d'équation correspondant à la deuxième phase de la propagation, il suffit, dès que l'on atteint le critère de déplacement maximum défini par l'équation eq IV.53, à l'extrémité du pont de fibres, $x = m$, de remplacer la dernière équation du système par l'équation suivante :

$$\frac{v_{1fl} - v_{2fl}}{\Delta V_c} + \frac{\left(\frac{h_2}{2} v_{1pfl} + \frac{h_1}{2} v_{2pfl}\right) - \frac{h_0}{2} v'_0(a)}{\Delta U_c} = 1 \quad (\text{eq IV.55})$$

Nous avons ainsi les deux systèmes d'équations régissant les deux phases

de la propagation. Il suffit alors de déterminer les matrices tangentes, à l'aide du code de calcul formel, et d'utiliser la méthode de Newton-Raphson pour obtenir la simulation complète de la propagation. Le programme permettant d'obtenir les deux matrices tangentes est donné dans l'annexe 6.

Nous présentons ici une courbe charge-déplacement et la courbe R correspondante obtenues à l'aide de cette modélisation. Nous conservons la même forme de présentation pour les résultats. C'est à dire que les courbes sont présentées sans dimension. Nous rappelons que la force critique F est divisée par la force critique initial F_0 , que la flèche $v_1(0)$ est divisée par la demi-hauteur de l'éprouvette h et que T. R. E. total est divisé par le Taux de Restitution de l'Énergie caractéristique du matériau, noté $G_m = G_{mI} + G_{mII}$.

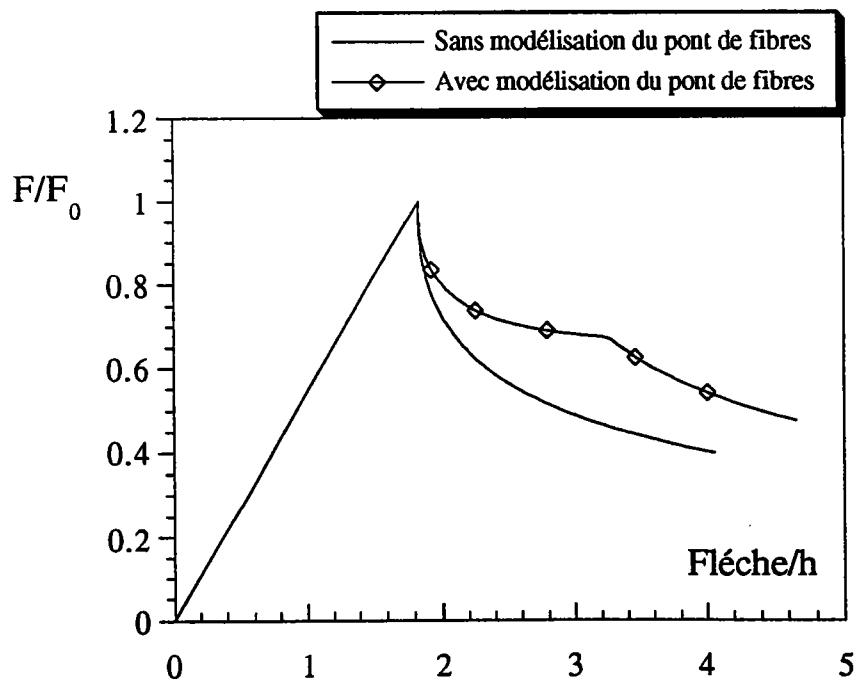


fig IV.9. Courbes charge déplacement

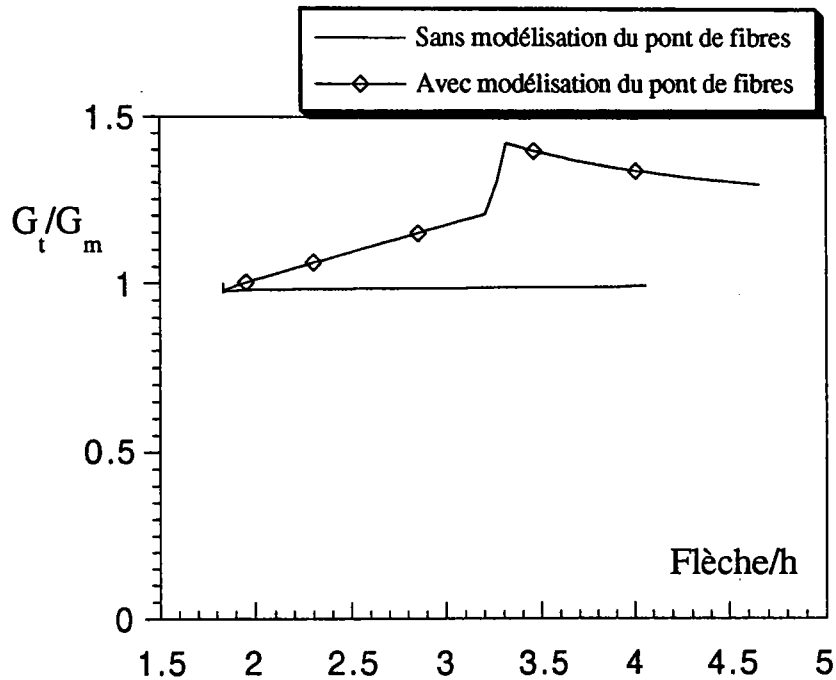


fig IV.10. Courbe R correspondante

Si la courbe de la Fig IV.9 conserve une forme habituelle, il n'est pas de même pour la courbe R correspondante. Le manque de recul ne nous permet pas d'analyser correctement cette courbe. Pour cela il est nécessaire de réaliser une étude paramétrique complète du modèle.

5.3. CONCLUSION

La modélisation du pont de fibres par deux types de ressorts à endommagement liés est une première approche du délaminage en mode mixte. Pour valider ce modèle et la décomposition Mode I-Mode II basée sur les hypothèses poutres, § 4.1.2, ainsi que pour mieux cerner les difficultés de la propagation en mode mixte, il semble nécessaire de réaliser une campagne d'essai.

6. CONCLUSION

Dans ce travail, nous nous sommes attachés à modéliser de façon simple la propagation d'un délaminage établi dans un matériau composite à fibres longues, tout en tenant compte de la création puis de la destruction du pont de fibres qui se développe en arrière de la pointe de fissure.

L'idée maîtresse que nous développons, induite par des observations expérimentales, est de conserver le cadre de la mécanique de la rupture fragile auquel nous ajoutons une modélisation des ponts de fibres par une densité de ressorts endommageables ou interface endommageable. Nous attribuons alors toute l'augmentation de la dissipation dans l'éprouvette au cours de la propagation à l'endommagement de l'interface.

La modélisation que nous proposons n'est pas la seule façon de procéder et ne répond pas à toutes les questions. Elle ne permet toujours pas de simuler l'initiation d'une fissure dans un matériau composite sain. Cependant, elle a l'intérêt de pouvoir simuler complètement un délaminage tout en restant dans un cadre classiquement établi et en utilisant des critères de propagation simples: le critère de type Griffith pour l'avancée de la fissure et un critère de déplacement maximum sur l'interface.

Dans ce mémoire, nous avons testé nos modèles de pont de fibres en assimilant le composite à des poutres. Cela nous permet de réaliser la simulation numérique complète du délaminage pour les essais standards. Ces modèles de poutre sont bien sûr incapables de représenter tous les phénomènes locaux au voisinage de la fissure, mais permettent d'accéder de façon correcte à la valeur du Taux de Restitution de l'Énergie en pointe de fissure. D'autre part,

une cinématique de poutre est tout à fait acceptable dans la mesure où les longueurs de pont de fibres sont grandes devant l'épaisseur du composite.

Nous avons réalisé la simulation de l'essai Double Cantilever Beam et montré l'influence des deux paramètres du modèle sur les courbes charge-déplacement ainsi que sur les courbes R correspondantes. La comparaison que nous avons réalisée avec l'expérience montre une bonne correspondance entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus par le modèle. Ensuite, nous avons développé cette modélisation pour un essai End Load Split et proposé un test ayant une propagation stable en mode II, l'essai Modified End Load Split. Enfin nous avons réalisé la simulation numérique de la propagation d'une fissure en mode mixte, en utilisant la séparation Mode I-Mode II, basée sur les hypothèses poutres, que nous avons développée.

L'extension de ces premiers résultats 1-D à des fronts de délaminage 2-D est un problème encore ouvert. Une des difficultés existantes est qu'une interface entre deux plis ne développe pas le même pont de fibres suivant la direction du front de fissure par rapport à l'axe des fibres [Robinson P. et Song D. Q. - 92]. Il faudra tenir compte de ce résultat dans un modèle 2-D et plus généralement clarifier, à l'aide d'une campagne d'essais, la façon dont se développe le pont de fibres au cours d'une propagation

Les simulations numériques des modèles non-linéaires 1-D présentés dans ce mémoire ne posent pas de réelles difficultés théoriques mais leur mise en œuvre est assez fastidieuse. Nous avons donc utilisé un code de calcul formel pour en faciliter la mise en place et ainsi mis en évidence l'utilité d'un tel outil pour résoudre des problèmes pratiques. Cet outil permet en effet d'obtenir rapidement et sûrement les matrices jacobiniennes des systèmes non-linéaires à résoudre ainsi que leur transcription directe en langage Fortran, évitant ainsi les

trop nombreuses erreurs de frappes.

7. BIBLIOGRAPHIE

- Aboura Z. , Gong X. J.,
Sastra Y. H. et
Benzeggagh M. L. 1992 6^{ième} Journées Nationales sur
les Composites. Étude comparative entre deux tests de mode mixte
(I+II) introduisant des géométries d'éprouvettes de type IDCB et
MMB.
- Allix O. 1989 Thèse à l'Université de Paris VI.
Modélisation du comportement des composites stratifiés : Application
à l'analyse du délaminage.
- Allix O. 1992 Mémoire d'habilitation. à diriger
des recherches Paris VI. Une nouvelle méthode d'analyse du
délaminage.
- Bao G. and Suo Z. 1992 Appl. Mech. Rev. . 45 (355-366)
Remarks on crack-bridging concepts.
- Benzeggagh M. L. , Gong X. J. ,
Roelandt J. M. 1988 6^{ième} Journées Nationales sur
les Composites. Mixed Mode interlaminar fracture. (366-377).
- Benzeggagh M. L. , Gong X. J. ,
Laksimi A. et Roelandt J. M. 1992 9th NRCC/IMI symposium
"Composites - 90". On the mode I delamination test and the
importance of laminates lay-ups.
- Binienda W. , Wang A. S. D. and
Dedale F. 1991 Int. J. Fract. 47 (1-24)
Analysis of bent crack in unidirectional fibre reinforced composites.

- Budiansky B. , Amazigo J. C.
and Evans A. G. 1988 **J. Mech. Phys. Solids.** 36 (167-187). **Small-scale crack bridging and the fracture toughness of particulate-reinforced ceramics.**
- Budiansky B. , Amazigo J. C. 1988 **J. Mech. Phys. Solids.** 37 (93-109) **Toughening by aligned, frictionally constrained fibers.**
- Carlsson L. A. ,Gillespie J. W. and
Trethewey B. R. 1986 **J. Rein. Plas. Comp.** .5 (170-187). **Mode II interlaminar fracture of graphite/epoxy and graphite/peek.**
- Carlsson L. A. ,Gillespie J. W. and
Pipes R. B. 1986 **J. Comp. Mat.** . 20 (594-604). **On the analysis and design of the end notched flexure (E. N. F.) specimen for mode II testing.**
- Chatterjee S. N. 1991 **J. Comp. Mat.** .25 (470-493). **Analysis of test specimens for interlaminar mode II fracture toughness, part 1. elastic laminates.**
- Cochelin B. 1989 **Thèse de l'Université de Metz**
Flambage et délaminage dans les plaques composites stratifiées.
- Cochelin B. et Potier -Ferry M. 1991 **C. M. A. M. E.-**
A numerical model for buckling and growth of delamination in composite material. (361-380)
- Daudeville L. 1992 **Thèse de l'Université de Paris**
VI. Une méthode simplifiée pour l'analyse du délaminage dans des structures composites stratifiées.
- Dugdale D. S. 1959 **J. Mech. Phys. Sol.** . 23 (100-104). **Yielding of steel sheets containing slits.**
- François D, Pineau A et Zaoui A. 1993 **edt Hermes**
Comportement mécanique des matériaux

Ghosn L. J. ,Kantzos P. and

Telesman J. 1992 Int. J. Fract. 54 (345-357)

Modeling of crack bridging in a unidirectional metal matrix composite.

Gong X. J. , Benzeggagh M. L. ,

Laksimi A. et Roelandt J. M. 1990 7^{ième} Journées Nationales sur

les Composites. Étude du délaminage dans les stratifiés multidirectionnels verre/epoxy sollicité en mode I d'ouverture.

Gong X. J. , Benzeggagh M. L. ,

Laksimi A. et Roelandt J. M. 1991 I. C. C .M 8. Characterization

of mode I, mode II and mixed mode I+II delamination failure in multidirectional laminates for glass/epoxy.

Han K. S. and Kousty J.

1981 J. Comp. Mat. . 15 (371-388) .

The interlaminar fracture energy of glass fiber reinforced polyester composites.

Hashemi S. , Kinloch A. J. and

Williams J. G. 1990 J. Comp. Mat. . 24 (918-956) .

The effects of geometry, rate and temperature on mode I, mode II and mixed-mode I/II interlaminar fracture of carbon-fiber/poly (ether-ether ketone) composites

Huang X. N. and Hull D.

1989 Comp. Scie. Tech. . 35 (283-299)

Effects of fiber bridging on G_{IC} of a unidirectional glass/epoxy composite.

Hwang W. and Han K. S.

1989 J. Comp. Mat. . 23 (396-431) .

Interlaminar fracture behavior and fiber bridging of glass-epoxy composite under mode I static and cyclic loadings.

Ilcewicz L. B. , Keary P. E.

and Trostle J. 1988 Poly. Eng. Scie. . 28 (592-604) .
Interlaminar fracture behavior and fiber bridging of glass-epoxy composite under mode I static and cyclic loadings.

Johnson W. S. and Mall S. 1985 ASTM STP 876 . (189-199)
A fracture mechanics approach for designing adhesively bonded joints.

Johnson W. S. and

Mangalgi P. D. 1987 J. Comp. Tech. Res. . 9 (10-13)
Investigation of fiber bridging in double cantilever beam specimens.

Kardomateas G. A. 1993 I. C. C. M 9 -6(479-486)
Delamination growth during the initial postbuckling phase in composite plates.

Lemaitre J. et Chaboche J. L; 1985 edt Dunod
Mécanique des matériaux solides

Leung C. K. Y. and Li V. C. 1992 J. Mech. Phys. Solids. 40 (1333-1362) .
Effect of fiber inclination on crack bridging stress in brittle fiber reinforced brittle matrix composites.

Madhukar M. S. and Drzal L. T. 1991-a J. Comp. Mat. .25 (932-957)
Fiber-matrix adhesion and its effect on composite mechanical properties : I. Inplane and interlaminar shear behavior of graphite/epoxy composites.

Madhukar M. S. and Drzal L. T. 1991-b J. Comp. Mat. .25 (958-991)
Fiber-matrix adhesion and its effect on composite mechanical properties : II. Longitudinal (0°) and transverse (90°) tensile and flexure behavior of graphite/epoxy composites.

- Madhukar M. S. and Drzal L. T. 1992-a **J. Comp. Mat. .25 (310-333)**
Fiber-matrix adhesion and its effect on composite mechanical properties : III. Longitudinal (0°) compressive properties of graphite/epoxy composites
- Madhukar M. S. and Drzal L. T. 1992-b **J. Comp. Mat. .25 (936-968)**
Fiber-matrix adhesion and its effect on composite mechanical properties : IV. Mode I and mode II fracture toughness of graphite/epoxy composites.
- Maikuma H. , Gillespie J. W.
and Whitney J. M. 1989 **J. Comp. Mat. .23 (756-785)**
Analysis and experimental characterization of the center notch flexural specimen for mode II interlaminar fracture.
- Mandell J. F. , Wang S. S. and
Mc Garry F. J. 1975 **J. Comp. Mat. .9 (266-287)**
The extension of crack tip damage zones in fiber reinforced plastic laminates.
- Meda G. and Steif P. S. 1992 **J. App. Mech. . 59 (524-529)**
Analysis of a crack bridged by a single fiber.
- Nairn J. A. , Liu S. , Chen H.
and Wedgewood A. R. 1991 **J. Comp. Mat. .25(1086-1107)**
Longitudinal splitting in epoxy and K-polymer composites : shear lag analysis including the effect of fiber bridging.
- Nesa D. 1987 **Thèse de École Nationale Supérieure des Mines de Paris. Étude de la fissuration d'un composite unidirectionnel verre-résine**
- Nicholls D. J. and Gallagher J. P. 1983 **J. Rein. Plas. Comp. .2 (2-17)**
Determination of G_{Ic} in angle ply composites using a cantilever beam test method.

- Nirmalendran S. and Horii H. 1991 **J. Mech. Phys. Sol. . (863-886)**
Analytical modeling of microcracking and bridging in the fracture of quasi-brittle materials.
- Nilsson K. F. and Storakers B. 1992 **A. S. M. E. 59 (530-538)**
On interface crack growth in composite plates.
- Penado F. E. 1993 **J. Comp. Mat. 27 (383-407)**
A closed form solution for the energy release rate of double cantilever beam specimen with an adhesive layer.
- Phillips D. C. and Wells G. M. 1982 **J. Mat. Scie. Letters 1 (321-324)**
The stability of transverse cracks in fibre composites.
- Pradeilles R. M. 1992 **Thèse à l'École Polytechnique**
Évolution de systèmes avec surfaces de discontinuités mobiles :
Application au délaminage.
- Rice J. R. 1968 **J. Appl. Mech. (379-385)**
A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks.
- R'mili M. , Rouby D. and
Fantozzi G. 1990 **. 6^{ième} Journée National sur les**
Composites. (440-450) Energy toughness parameters of 2-D carbon fibre reinforced carbon composites.
- Robinson P. and Song D. Q. 1992 **J. Comp. Mat. . 26 (1554-1577)**
A modified D. C. B. specimen for mode I testing of multidirectional laminates.
- Rose L. R. F. 1982 **Int. J. Frac. . 18 (135-144) . A**
crack plate repaired by bonded reinforcements.
- Rose L. R. F. 1987 **J. Mech. Phys. Solids. 35 (383-405) . Crack reinforcement by distributed springs.**

- Rybicki E. F. and Kanninen M. F. 1977 *Eng. Frac. Mech.* .9 (931-938)
A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral.
- Storakers B. 1989 17^{ième} congrés I. U. T. A. M.-89 (315-336). **Nonlinear aspects of delamination in structural members.**
- Suo Z. , Bao G. and Fan B. 1992 *J. Mec Phys Sol.* 40 (1-15)
Delamination R-curve phenomena due to damage.
- Suo Z. and Hutchinson J. W. 1992 *Int. J. Fract.* 43 (1-18)
Interface crack between two elastic layers.
- Tvergaard V. and Hutchinson J. W. 1992 *J. Mec Phys Sol.* 40 (1377-1397)
The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids.
- Wu E. M. 1992 (191-247) **Strength and fracture of composites.**
- Whitney J. M. , Browning C. E. and Hoogsteden W. 1992 *J. Rein. Plas. Comp.* .1 (297-313). **A double cantilever beam test for characterizing mode I delamination of composite materials.**
- Williams J. G. 1989 *J. Strain Analysis.* .24 (207-214).
The fracture mechanics of delamination tests.
- Yum Y. J. and Hong C. S. 1991 *Int. J. Frac.* .47 (53-67).
Stress intensity factors in finite orthotropic plates with a crack under mixed mode deformation.

8. ANNEXE

8.1. ANNEXE 1

```

-----
-                                     -
- PROGRAMME MAPLE PERMETTANT DE CALCULER -
- LA SOLUTION ET LES COEFFICIENTS  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  -
- POUR LE CAS D.C.B. AVEC RESSORTS -
- ÉLASTIQUE-FRAGILE -
-----

-                                     -
- écriture de l'équation différentielle -
- et des conditions limites -
-----

eqdif:=(D@@4)(v)(x)+4* $\lambda$ ^4*v(x)=0:
cl1:=v(a)=0:
cl2:=(D@@1)(v)(a)=0:
cl3:=(D@@2)(v)(m)=f*m/(e*iner):
cl4:=(D@@3)(v)(m)=f/(e*iner):
-----

-                                     -
- résolution de l'équation différentielle -
-----

dsolve({eqdif,cl1,cl2,cl3,cl4},{v(x)}):
collect(simplify(v(x)),distributed,[ch( $\lambda$ *x),sh( $\lambda$ *x)):
```

```

-----
- PROGRAMME MAPLE PERMETTANT DE CALCULER -
- LA MATRICE TANGENTE POUR LE CAS -
- D. C. B. AVEC RESSORT ÉLASTIQUE FRAGILE -
-

```

```

-----
- écriture de la solution -
-----

```

```

v:= x->(\alpha*\sin(\lambda*x)+\beta*\cos(\lambda*x))*ch(\lambda*x)+(\gamma*\sin(\lambda*x)+\delta*\cos(\lambda*x))*sh(\lambda*x):
      vp:=D(v):
      v2p:=D(vp):
      v3p:=D(v2p):

```

```

-----
- écriture des équations du système -
-----

```

```

eq1:= v(a)=0:
eq2:= vp(a)=0:
eq3:= v2p(m)=f*m/(e*iner):
eq4:= v3p(m)=f/(e*iner):
eq5:= vfl-(vm+vpm*m+f*m^3/(3*e*iner)):
eq6:= vm-v(m)=0:
eq7:= vpm-vp(m):
eq8:= e*iner*v2p(m)-GIC=0:
eq9:= a0-m=0:
eq10:= 2*vm-\Delta vC=0:
sys:=[eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq9,eq10]:
vars:=[\alpha,\beta,\gamma,\delta,vm,vpm,vfl,a0,m,f]:

```

```

-----
- écriture de la matrice tangente et du residu -
-----

```

```

with(linalg):
res:=vector(sys):
tgm:=jacobian(res,vars):

```

```

-----
- transcription en fortran des matrices -
- pour pouvoir les inserer dans le code de calcul -
-----

```

```

fortran(res,optimized,filename='residu'):
fortran(tgm,optimized,filename='mat-tangente'):

```

$$\alpha = 1/2 f (\text{lbd m} \cos(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \cos(\text{lbd a}) \sin(\text{lbd a})$$

$$- \text{lbd m} \cos(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd a})^2 + \text{lbd m} \cos(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd m})$$

$$- \sinh(\text{lbd m}) \sin(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd a})^2$$

$$+ \sin(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd a}) \sinh(\text{lbd a})$$

$$- \text{lbd m} \sin(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd a})^2 + \text{lbd m} \sin(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m})$$

$$- \text{lbd m} \sin(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m})^2 \cos(\text{lbd a})$$

$$+ \text{lbd m} \cos(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd a}) \sinh(\text{lbd a})$$

$$+ \text{lbd m} \cosh(\text{lbd a}) \sinh(\text{lbd a}) \sin(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd m})$$

$$+ \cos(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m})^2 \cos(\text{lbd a})$$

$$+ \cos(\text{lbd a})^2 \cos(\text{lbd m}) \text{lbd m} \sinh(\text{lbd m})$$

$$+ \sin(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \cos(\text{lbd a}) \sin(\text{lbd a})$$

$$+ \text{lbd m} \sin(\text{lbd a}) \cos(\text{lbd a}) \sin(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd m})$$

$$+ \sinh(\text{lbd m}) \sin(\text{lbd m}) / (\text{lbd e iner} (\cos(\text{lbd a})^2$$

$$- 2 \sin(\text{lbd a}) \cos(\text{lbd a}) \sin(\text{lbd m}) \cos(\text{lbd m})^2 + \cos(\text{lbd m})$$

$$+ \cosh(\text{lbd m})^2 - 2 \cos(\text{lbd m})^2 \cos(\text{lbd a})^2$$

$$+ 2 \cosh(\text{lbd a}) \sinh(\text{lbd a}) \sinh(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m})$$

$$- 2 \cosh(\text{lbd m})^2 \cosh(\text{lbd a})^2 + \cosh(\text{lbd a})^2 - 2))$$

$$\begin{aligned}
 \text{beta} = & 1/2 f (- \sin(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \\
 & + \cos(\text{lbd m}) \cos(\text{lbd a}) \text{lbd m} \cosh(\text{lbd m}) \\
 & - \cos(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \cos(\text{lbd a}) \sin(\text{lbd a}) \\
 & - \cos(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd a})^2 + \sin(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \cos(\text{lbd a})^2 \\
 & - 2 \text{lbd m} \sin(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd m}) \\
 & + \text{lbd m} \sin(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd m}) \cos(\text{lbd a})^2 \\
 & + \cos(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd a}) \sinh(\text{lbd a}) \\
 & + \cosh(\text{lbd a}) \cos(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd a}) \text{lbd m} \sinh(\text{lbd m}) \\
 & - \cosh(\text{lbd a}) \text{lbd m} \cosh(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd a}) \sin(\text{lbd m}) \\
 & - \cosh(\text{lbd a})^2 \text{lbd m} \cos(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \\
 & + \cosh(\text{lbd a})^2 \text{lbd m} \sin(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd m}) + \cos(\text{lbd m}) \sinh(\text{lbd m}) \\
 & + \sin(\text{lbd a}) \cosh(\text{lbd m}) \text{lbd m} \cos(\text{lbd a}) \sin(\text{lbd m}) \\
 & - \sin(\text{lbd a}) \cos(\text{lbd m}) \text{lbd m} \cos(\text{lbd a}) \sinh(\text{lbd m})) / (\text{lbd}^3 \text{e iner} (\\
 & \cos(\text{lbd a})^2 - 2 \sin(\text{lbd a}) \cos(\text{lbd a}) \sin(\text{lbd m}) \cos(\text{lbd m}) + \cos(\text{lbd m})^2 \\
 & + \cosh(\text{lbd m})^2 - 2 \cos(\text{lbd m}) \cos(\text{lbd a})^2 \\
 & + 2 \cosh(\text{lbd a}) \sinh(\text{lbd a}) \sinh(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd m}) \\
 & - 2 \cosh(\text{lbd m}) \cosh(\text{lbd a})^2 + \cosh(\text{lbd a})^2 - 2))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{gama} = & \frac{1}{2} f \left(-\cos(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } a) \text{lbd } m \cosh(\text{lbd } m) \right. \\
 & - \sin(\text{lbd } a) \cos(\text{lbd } a) \sin(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } m) \\
 & - \sin(\text{lbd } a) \cosh(\text{lbd } m) \text{lbd } m \cos(\text{lbd } a) \sin(\text{lbd } m) \\
 & - \cos(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } a) \\
 & - \sin(\text{lbd } a) \cos(\text{lbd } m) \text{lbd } m \cos(\text{lbd } a) \sinh(\text{lbd } m) \\
 & + \text{lbd } m \sin(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } a) \\
 & + \cosh(\text{lbd } a) \sinh(\text{lbd } a) \sin(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } m) \\
 & + \cosh(\text{lbd } a) \cos(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } a) \text{lbd } m \sinh(\text{lbd } m) \\
 & + \cosh(\text{lbd } a) \text{lbd } m \cosh(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } a) \sin(\text{lbd } m) \\
 & - \sin(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } a) \\
 & - \cosh(\text{lbd } a) \text{lbd } m \sin(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } m) \\
 & - \cosh(\text{lbd } a) \text{lbd } m \cos(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } m) \left. \right) / (\text{lbd } e \text{ iner} (\cos(\text{lbd } a) \\
 & - 2 \sin(\text{lbd } a) \cos(\text{lbd } a) \sin(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } m) + \cos(\text{lbd } m) \\
 & + \cosh(\text{lbd } m)^2 - 2 \cos(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } a) \\
 & + 2 \cosh(\text{lbd } a) \sinh(\text{lbd } a) \sinh(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } m) \\
 & - 2 \cosh(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } a) + \cosh(\text{lbd } a)^2 - 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{delta} = & - 1/2 f (- \sinh(\text{lbd } m) \sin(\text{lbd } a) \cos(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } a) \\
 & + \sinh(\text{lbd } m) \sin(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } a)^2 + \cos(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } a)^2 \cosh(\text{lbd } m) \\
 & - \cos(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } a) \sinh(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } a) - \sinh(\text{lbd } m) \sin(\text{lbd } m) \\
 & + \text{lbd } m \sin(\text{lbd } a) \cos(\text{lbd } a) \sin(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } m) \\
 & - \text{lbd } m \cos(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } a) \sin(\text{lbd } a) \\
 & + \text{lbd } m \cos(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } a)^2 - \text{lbd } m \cos(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } m) \\
 & + \cos(\text{lbd } a)^2 \cos(\text{lbd } m) \text{lbd } m \sinh(\text{lbd } m) - \text{lbd } m \sin(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } m) \\
 & + \text{lbd } m \sin(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } a)^2 \\
 & - \text{lbd } m \sin(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } a)^2 \\
 & + \text{lbd } m \cosh(\text{lbd } a) \sinh(\text{lbd } a) \sin(\text{lbd } m) \sinh(\text{lbd } m) \\
 & - \text{lbd } m \cos(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } a) \sinh(\text{lbd } a)) / (\text{lbd } e \text{ iner } (\\
 & \cos(\text{lbd } a)^2 - 2 \sin(\text{lbd } a) \cos(\text{lbd } a) \sin(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } m) + \cos(\text{lbd } m)^2 \\
 & + \cosh(\text{lbd } m)^2 - 2 \cos(\text{lbd } m) \cos(\text{lbd } a)^2 \\
 & + 2 \cosh(\text{lbd } a) \sinh(\text{lbd } a) \sinh(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } m) \\
 & - 2 \cosh(\text{lbd } m) \cosh(\text{lbd } a)^2 + \cosh(\text{lbd } a)^2 - 2))
 \end{aligned}$$

8.2. ANNEXE 2

```

-----
- PROGRAMME MAPLE PERMETTANT DE CALCULER -
- LA SOLUTION ET LES COEFFICIENTS  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  -
- D. C. B. AVEC RESSORT A -
- ENDOMMAGEMENT PROGRESSIF -
-

```

```

-----
- écriture de l'équation différentielle -
- et des conditions limites -
-----

```

```

eqdif:=D[4](v)(x)- $\lambda^4$ *v(x)=-f/(e*iner):
cl1:=v(a)=0:
cl2:=(D@@1)(v)(a)=0:
cl3:=(D@@2)(v)(m)=f*m/(e*iner):
cl4:=(D@@3)(v)(m)=f/(e*iner):

```

```

-----
- résolution de l'équation différentielle -
-----

```

```

dsolve({eqdif,cl1,cl2,cl3,cl4},{v(x)}):
collect(simplify(v(x)),distributed,[ch( $\lambda$ *x),sh( $\lambda$ *x),sin( $\lambda$ *x),cos( $\lambda$ *x)]):

```

```

-----
- PROGRAMME MAPLE PERMETTANT DE CALCULER -
- LA MATRICE TANGENTE POUR LE CAS -
- D. C. B. AVEC RESSORT A -
- ENDOMMAGEMENT PROGRESSIF -
-----

```

```

-----
- écriture de la solution -
-----

```

```

v:= x->alpha*sin(lambda*x)+beta*cos(lambda*x)+gamma*sh(lambda*x)+delta*ch(lambda*x)+Delta*vc/2:
      vp:=D(v):
      v2p:=D(vp):
      v3p:=D(v2p):

```

```

-----
- écriture des équations du système -
-----

```

```

eq1:= v(a)=0:
eq2:= vp(a)=0:
eq3:= v2p(m)=f*m/(e*iner):
eq4:= v3p(m)=f/(e*iner):
eq5:= vfl-vm+vp*m+f*m^3/(3*e*iner):
eq6:= vm-v(m)=0:
eq7:= vpm-vp(m):
eq8:= e*iner*v2p(m)-Glc=0:
eq9:= a0-m=0:
eq10:= 2*vm-Delta*vc=0:
sys:=[eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq9,eq10]:
vars:=[alpha,beta,gamma,delta,vm,vpm,vfl,a0,m,f]:

```

```

-----
- écriture de la matrice tangente et du residu -
-----

```

```

with(linalg):
res:=vector(sys):
tgm:=jacobian(res,vars):

```

```

-----
- transcription en fortran des matrices -
- pour pouvoir les inserer dans le code de calcul -
-----

```

```

fortran(res,optimized,filename='residu'):
fortran(tgm,optimized,filename='mat-tangente'):

```

8.3. ANNEXE 3

 - PROGRAMME MAPLE PERMETTANT DE CALCULER -
 - LA SOLUTION ET LES COEFFICIENTS $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ -
 - E. L. S. AVEC RESSORT A -
 - ENDOMMAGEMENT PROGRESSIF -
 - -----

 - écriture de l'équation différentielle -
 - et des conditions limites -
 - -----

```
eqdif:=(D@4)(v)(x)+λ^2*v(x)=0:
cl1:=v(a)=f*(a^3-3*a*L^2+2*L^3)/(3*e*iner0):
cl2:=(D@@1)(v)(a)=f*(a^2-L^2):
cl3:=(D@@2)(v)(m)=f*m/(e*iner):
cl4:=(D@@3)(v)(m)+λ^2*(fc/(k*h)-(D(v)(m)-D(v)(a))=f/(e*iner):
```

 - résolution de l'équation différentielle -
 - -----

```
dsolve({eqdif,cl1,cl2,cl3,cl4},{v(x)}):
collect(simplify(v(x)),distributed,[x,sin(λ*x),cos(λ*x)]):
```

```

-----
- PROGRAMME MAPLE PERMETTANT DE CALCULER -
- LA MATRICE TANGENTE POUR LE CAS -
- E. L. S . AVEC RESSORT A -
- ENDOMMAGEMENT PROGRESSIF -
-----

```

```

-----
- écriture de la solution -
-----

```

```

v:= x->α/λ^2*sin(λ*x)+β/λ^2*cos(λ*x)+γ*x+δ:
vp:=D(v):
v2p:=D(vp):
v3p:=D(v2p):

```

```

-----
- écriture des équations du système -
-----

```

```

eq1:= v(a)=f*(a^3-3*a*L^2+2*L^3)/(3*e*iner0):
eq2:=vp(a)=f*(a^2-L^2)/(e*iner0):
eq3:=v2p(m)=f*m/(e*iner):
eq4:=v3p(m)+λ^2*(f_c/(k*h)-(vpm-vp(a))=f/(e*iner):
eq5:=vfl-vm+vpm*m+f*m^3/(3*e*iner):
eq6:=vm-v(m)=0:
eq7:=vpm-vp(m):
eq8:=e*iner*v2p(m)-G_Ic=0:
eq9:=a0-m=0:
eq10:=h*(vpm-vp(a))-ΔU_c=0:
sys:=[eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq9,eq10]:
vars:=[α,β,γ,δ,vm,vpm,vfl,a0,m,f]:

```

```

-----
- écriture de la matrice tangente et du residu -
-----

```

```

with(linalg):
res:=vector(sys):
tgm:=jacobian(res,vars):

```

```

-----
- transcription en fortrandes matices -
- pour pouvoir les inserer dans le code de calcul -
-----

```

```

fortran(res,optimized,filename='residu'):
fortran(tgm,optimized,filename='mat-tangente'):

```

8.4. ANNEXE 4

 - PROGRAMME MAPLE PERMETTANT DE CALCULER -
 - LA SOLUTION ET LES COEFFICIENTS $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ -
 - M.E. L. S. AVEC RESSORT A -
 - ENDOMMAGEMENT PROGRESSIF -
 - -----

 - écriture de l'équation différentielle -
 - et des conditions limites -
 - -----

```

eqdif:=D[ @4](v)(x)+λ^2*v(x)=0:
cl1:=v(a)=0:
cl2:=(D@ @ 1)(v)(a)=-1/2*f*a*(a-1)/(e*iner):
cl3:=(D@ @ 2)(v)(m)=f*m/(e*iner):
cl4:=(D@ @ 3)(v)(m)+λ^2*(fc/(k*h)-(D(v)(m)-D(v)(a))=f/(e*iner):
    
```

 - résolution de l'équation différentielle -
 - -----

```

dsolve({eqdif,cl1,cl2,cl3,cl4},{v(x)}):
collect(simplify(v(x)),distributed,[x,sin(λ*x),cos(λ*x)]):
    
```



```

-----
- PROGRAMME MAPLE PERMETTANT DE CALCULER -
- LA MATRICE TANGENTE POUR LE CAS -
- M.E. L. S . AVEC RESSORT A -
- ENDOMMAGEMENT PROGRESSIF -
-----

```

```

-----
- écriture de la solution -
-----

```

```

v:= x->alpha/lambda^2*sin(lambda*x)+beta/lambda^2*cos(lambda*x)+gamma*x+delta:
vp:=D(v):
v2p:=D(vp):
v3p:=D(v2p):

```

```

-----
- écriture des équations du système -
-----

```

```

eq1:= v(a)=0:
eq2:=vp(a)=-1/2*f*a*(a-1)/(e*iner0):
eq3:=v2p(m)=f*m/(e*iner):
eq4:=v3p(m)+lambda^2*(fc/(k*h)-(vpm-vp(a))=f/(e*iner):
eq5:=vfl-vm+vpm*m+f*m^3/(3*e*iner):
eq6:=vm-v(m)=0:
eq7:=vpm-vp(m):
eq8:=(e*iner*v2p(m)^2+(2*e*iner*v3p(a)-e*iner0*v03p(a))*vp(a))-
GIc=0:
eq9:=a0-m=0:
eq10:=h*(vpm-vp(a))-DeltaUc=0:
sys:=[eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq9,eq10]:
vars:=[alpha,beta,gamma,delta,vm,vpm,vfl,a0,m,f]:

```

```

-----
- écriture de la matrice tangente et du residu -
-----

```

```

with(linalg):
res:=vector(sys):
tgm:=jacobian(res,vars):

```

```

-----
- transcription en fortran des matrices -
- pour pouvoir les inserer dans le code de calcul -
-----

```

```

fortran(res,optimized,filename='residu'):
fortran(tgm,optimized,filename='mat-tangente'):

```

8.5. ANNEXE 5

```

-----
- PROGRAMME MAPLE PERMETTANT DE CALCULER NI et MII DANS DIFFÉRENTS CAS -
-                                     -
-----

- INVERSER LES LOIS DE COMPORTEMENT -
-----

    eq1:= N1=A1*e1+B1*k1:
    eq2:= M1=B1*e1+D1*k1:
    solu1:=(solve({eq1,eq2},{e1,k1}):
    assign:=(solu1):
    eq3:= N2=A2*e2+B2*k2:
    eq4:= M2=B2*e2+D2*k2:
    solu2:=(solve({eq3,eq4},{e2,k2}):
    assign:=(solu2):
    eq5:= N0=A0*e0+B0*k0:
    eq6:= M0=B0*e0+D0*k0:
    solu0:=(solve({eq5,eq6},{e0,k0}):
    assign:=(solu0):

-----
- DÉTERMINER e1p,e2p,k1p,k2p -
-----

    e1p:=e1-(e0+h2/2*k0):
    k1p:=k1-k0:
    e2p:=e2-(e0-h1/2*k0):
    k2p:=k2-k0:

-----
- DÉFINITION DES Mmd12 ET Mmd22 ET DE NII A L'AIDE DES M1P,M2P,N1P,N2P -
-----

    N1P:=NII:
    N2P:=-NII:
    M1P:=Mmd12+Mmd1:
    M2P:=Mmd22-Mmd1:

-----
- RELATIONS SIMPLIFICATRICES -
-----

    A0:=A1+A2
    B0:=B1+B2+h2/2*A1-h1/2A2:
    D0:=D1+D1+B1*h2-B2*h1+1/4*h2^2*A1+1/4*h1^2*A2:
    N0:=N1+N2:
    M0:=M1+M2+N1*h2/2-N2*h1/2:

```

 DÉTERMINATION DE LA RELATION ENTRE
 NII ET Mmd12, Mmd22

```

eq11:= N1P=A1*e12p+B1*k12p:
eq12:= M1P=B1*e12p+D1*k12p:
solu12p:=(solve({eq11,eq12},{e12p,k12p}):
assign:=(solu12p):
eq13:= N2P=A2*e22p+B2*k22p:
eq14:= M2P=B2*e22p+D2*k22p:
solu22p:=(solve({eq13,eq14},{e22p,k22p}):
assign:=(solu22p):
eq15:=M1p+M2p+N1p*h2/2-N2p*h1/2=0:
eq16:=k12p-k22p=0:
solu:=(solve({eq15,eq16},{Mmd12,Mmd22}):
assign (solu);
  
```

 DÉTERMINATION DE LA RELATION ENTRE
 NII ET MI
 EN FONCTION DES SIX QUANTITÉS Ni, Mi

CAS GÉNÉRAL

```

NII:=simplify(A1*e1p+B1*k1p):
M1p:=B1*e1p+D1*k1p:
MI:=simplify(M1p-Mmd12):
  
```

CAS SYMÉTRIQUE

```

B1:=0:
B2:=0:
B0:=0:
h1:=h:
h2:=h:
h0:=2*h:
NII:=simplify(A1*e1p+B1*k1p):
M1p:=B1*e1p+D1*k1p:
MI:=simplify(M1p-Mmd12):
  
```

CAS ISOTROPE

```

A1:=E*S:
D1:=E*INER:
A2:=E*S:
D2:=INER:
S:=h*b:
INER:=h^3*b/12:
NII:=simplify(A1*e1p+B1*k1p):
M1p:=B1*e1p+D1*k1p:
MI:=simplify(M1p-Mmd12):
  
```

8.6. ANNEXE 6

```

-----
- PROGRAMME MAPLE PERMETTANT DE CALCULER -
- LA MATRICE TANGENTE POUR LE CAS -
- M. M. F. S. AVEC RESSORT A -
- ENDOMMAGEMENT PROGRESSIF -
-
-----

- calcul de la solution vo et uo -
-----

eqdifv0 := (D@@4)(v0)(x)=0:
cl1v0:=(D@@3)(v0)(a)=-f/(e*iner0):
cl2v0:=(D@@2)(v0)(a)=f*a/(e*iner0):
cl3v0:=(D@@1)(v0)(L)=0:
cl4v0:=(v0)(L)=0:
sysv0:={eqdifv0,cl1v0,cl2v0,cl3v0,cl4v0}:
assign(dsolve(sysv0,v0(x))):
vo:=y ->(subs(x=y,v0(x))):
vop:=D(vo):
vopp:=D(vop):
uo:=x -> 0:
uop:=D(u0):

-----

- calcul des solutions v1 et v2 -
- So = v1 +v2 -
- Di = v1 - v2 -
-----

So := x -> S1+S2*x+S3*cosh(lbd0*x)+S4*sinh(lbd0*x)+
S5*cos(lbd1*x)+S6*sin(lbd1*x)+S7*cos(lbd2*x)+
S8*sin(lbd2*x):
Sop:= D(So)
Sop2:= D(Sop)
Sop3:= D(Sop2)
Sop4:= D(Sop3)
Sop5:= D(Sop4)
Sop6:= D(Sop5)
Sop7:= D(Sop6)
Sop8:= D(Sop7)

Di := x -> -1/c1*(a*Sop7(x)+b1/(2*a1)*Sop5(x))-d1/c1*
(Sop(x)-Sop(a))+fc1/rk11:
Dip:= D(Di)
Dip2:= D(Dip)
Dip3:= D(Dip2)
Dip4:= D(Dip3)
Dip5:= D(Dip4)
Dip6:= D(Dip5)
Dip7:= D(Dip6)
Dip8:= D(Dip7)
F1 := x -> (fc1-(rk11*Di(x)+rk12*h/2*(Sop(x)-Sop(a))):

```

```
F2 := x -> (fc2-(rk21*Di(x)+rk22*h/2*(Sop(x)-Sop(a)))
```

```
a1:=b*h*rk21/(e*iner):
```

```
b1:=b*h^2*rk22/(e*iner):
```

```
c1:=2*b*rk11/(e*iner):
```

```
d1:=b*h*rk12/(e*iner):
```

```
v1 := x-> simplify((So(x)+Di(x))/2):
```

```
v1p:= D(v1):
```

```
v1p2:=D(v1p):
```

```
v1p3:=D(v1p2):
```

```
v2 := x-> simplify((So(x)-Di(x))/2):
```

```
v2p:= D(v2):
```

```
v2p2:=D(v2p):
```

```
v2p3:=D(v2p2):
```

```
-----
-
-          CRÉATION DU SYSTÈME NON LINÉAIRE POUR
-          LA RÉOLUTION PAR LA MÉTHODE DE
-          NEWTON RAPHSON
-
-
-----
```

```
s:=12*iner/h^2:
```

```
NII:= h/2*vopp(a):
```

```
MI := e*iner*(v1pp(a)-vopp(a) -h*NII/2):
```

```
cl1v1 := v1(a)-vofl:
```

```
cl2v1:= v1p(a)-vopf1:
```

```
cl3v1:= v1p3(m)+f/(e*iner):
```

```
cl2v1 := v1p2(m)-fm/e*iner:
```

```
cl1v2 := v2(a)-vofl:
```

```
cl2v2:= v2p(a)-vopf1:
```

```
cl3v2:= v2p3(m)-0:
```

```
cl2v2:= v2p2(m)-0:
```

```
eq1 := vofl - vo(a):
```

```
eq2 := vopf1 - vop(a):
```

```
eqg1:=GI - (MI^2/(e*iner)):
```

```
eqg2:=GII- (NII^2/(3*e*iner)):
```

```
eq3 := v2fl - v2(m):
```

```
eq4 := v2pfl - v2p(m):
```

```
eq5 := v1fl - v1(m):
```

```
eq6 := v1pfl - v1p(m):
```

```
eq7 := vfl -( v1fl - m v1pfl + f*m^3/(3*e*iner)):
```

```
eq8 := 1- GI/G1c - GII/G2c:
```

```
eq9 := a0 - m :
```

```
eq10 := 1 - (Di(m)/ΔVc+h/2*(Sop(m)-Sop(a))/ΔUc):
```

-
- CREATION DE LA MATRICE TANGENTE EN FORTRAN -
-

```
nvar:=20:
neq :=20:
eqs: = [c11v1,c12v1,c13v1,c14v1,c11v2,c12v2,c13v2,c14v2
        ,eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq9,eq7,eq8,eq10,eqg1,eqg2]
with(linalg):
res:=vector(eqs):
difmat:=evalf(jacobian(res,vars)
fortran(res,optimized,filename='residu'):
fortran(difmat,optimized,filename='mattangente'):
```

8.7. ANNEXE 7

POURQUOI UTILISER UN CODE DE CALCUL FORMEL ?

Nous avons utilisé cet outil performant pour tenter de systématiser et de simplifier notre démarche dans les différents modèles développés. En effet l'approche utilisée dans les différentes modélisations est similaire :

- détermination des solutions analytiques du problème
- calcul de la dissipation totale dans l'éprouvette
- mise en place de la méthode de Newton-Raphson.

C'est dans cette dernière étape que l'utilisation du code de calcul formel est déterminante. En effet, il est fastidieux et long de déterminer les différentes matrices tangentes nécessaire à la simulation des modèles développés. De plus, son utilisation évite les erreurs de calculs et de transcription, permettant dès lors de consacrer son attention sur le fond du problème. Cet outils nous a aussi permis de passer d'une façon plus simple d'un modèle à l'autre et de tester facilement deux types de loi d'endommagement pour le ressort. Son utilisation permet une recherche plus facile des erreurs, car les équations du problème sont écrites de façon explicite.(Annexe 1 à 6).

Toutefois, on ne peut pas utiliser cet outil de façon aveugle. Il est souvent nécessaire de réaliser un travail de mise en forme du problème pour obtenir des résultats facilement exploitables. Il est toujours nécessaire de comprendre un outil pour bien l'utiliser.