



**HAL**  
open science

# Prévision du comportement thermomécanique des composites à matrice métallique

Filomeno Corvasce

► **To cite this version:**

Filomeno Corvasce. Prévision du comportement thermomécanique des composites à matrice métallique. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1989. Français. NNT : 1989METZ010S . tel-01776886

**HAL Id: tel-01776886**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776886v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

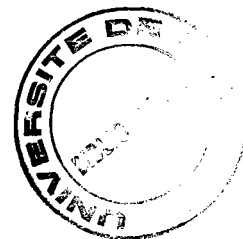
**THESE**  
**PRESENTEE A L'UNIVERSITE**  
**DE METZ**

**POUR OBTENIR LE GRADE DE**

**DOCTEUR ES-GENIE MECANIQUE**

**par**

**FILOMENO CORVASCE**



**PREVISION DU COMPORTEMENT  
THERMOMECHANIQUE  
DES COMPOSITES A MATRICE METALLIQUE**

**soutenue le 20 novembre 1989 devant le jury  
composé de:**

**Rapporteurs:**

Monsieur A. ZAOUÏ Professeur à L'Université de Paris-Nord,  
Monsieur F. GOBIN Professeur à l'INSA de Lyon.

**Directeur de thèse:**

Monsieur M. BERVEILLER Professeur à L'Université de Metz.

**Examineurs:**

Monsieur M. POTIER-FERRY Professeur à l'Université de Metz,  
Monsieur P. LIPINSKI Maître de conférence à l'Université de Metz,  
Monsieur P. JARRY Ingénieur recherche Pechiney Voreppe,  
Monsieur P. DEROO Ingénieur recherche Renault Paris.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420325 4

**MECANIQUE DES MATERIAUX**

**N 1215**

**UNIVERSITE DE METZ**

**EX TEL. 87-90-58-40**

14 MARS 1990

Cette thèse a été préparée sous la direction de Monsieur le Professeur M. BERVEILLER. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoignée et le soutien qu'il m'a toujours apporté .

Je tiens aussi à remercier Monsieur P. Lipinski pour l'aide et les précieux conseils qu'il m'a toujours suggérer.

Que Monsieur A. ZAOUÏ trouve ici l'expression de mes remerciements pour avoir accepté de présider ce travail, ainsi que Messieurs GOBIN , POTIER-FERRY , JARRY et DEROO pour leur participation au jury.

---

Je remercie vivement tous mes collègues du laboratoire de physique et Mécanique des Matériaux pour l'aide scientifique et morale qu'ils m'ont apporté ainsi que pour l'ambiance sympathique qu'ils n'ont jamais négligée.

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19890205
Cote	S/M3 29/10
Loc	Majorsch

1

**CHAPITRE I**  

---

**LES MATERIAUX COMPOSITES**  

---

**1.1 INTRODUCTION GENERALE**  

---

- a) INTERET
- b) PROPRIETES DES FIBRES
- c) PROPRIETES DE LA MATRICE METALLIQUE

**1.2 LES PROCEDES DE FABRICATION DU MATERIAU COMPOSITE**  

---

**A MATRICE METALLIQUE**  

---

- a) ETAT LIQUIDE
- b) ETAT SOLIDE
- c) LES PROBLEMES LIES A LA FABRICATION ET A L'UTILISATION
- d) PROPRIETES
- e) CONCLUSION

**1.3 BIBLIOGRAPHIE**  

---

**CHAPITRE II**  

---

**LES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES ELASTIQUE, THERMIQUE  
ET PLASTIQUE. EVALUATION ET PRISE EN COMPTE  
DANS LES MODELISATIONS**  

---

**2.1 INTRODUCTION**  

---

## 2.2 LE PROBLEME DE L'INCLUSION PLASTIQUE HOMOGENE

---

## 2.3 LE PROBLEME DE L'INCLUSION HETEROGENE

---

## 2.4 LE MODE MIXTE

---

## 2.5 LES MODELES POUR LES MATERIAUX HETEROGENES

---

## 2.6 LES PARAMETRES MICROPHYSIQUES

---

## 2.7 BIBLIOGRAPHIE

---

### CHAPITRE III

---

## LOI DE COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE DES MATERIAUX MICROHETEROGENES

---

### 3.1 INTRODUCTION ET LISTE DE NOTATIONS

---

### 3.2 PROPRIETES THERMOELASTOPLASTIQUES LOCALES

---

### 3.3 HOMOGENEISATION ET LOCALISATION

---

### 3.4 EQUATION INTEGRALE THERMOMECHANIQUE

---

### 3.5 SOLUTIONS DE L'EQUATION INTEGRALE

---

### **3.6 APPROXIMATION AUTOCOHERENTE**

---

### **3.7 MISE EN OEUVRE**

---

### **3.8 BIBLIOGRAPHIE**

---

## **CHAPITRE IV**

---

# **APPLICATIONS A L'ELASTOPLASTICITE ET A LA LA THERMOELASTOPLASTICITE**

---

### **4.1 LES PARAMETRES PHYSIQUES UTILISES**

---

### **4.2 LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES**

---

#### **A MATRICE METALLIQUE**

---

##### **4.2.1 LE COMPORTEMENT DE LA MATRICE SANS RENFORTS**

---

##### **4.2.2 COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DU COMPOSITE**

---

###### **4.2.2.1 COURBES DE TRACTION**

---

###### **4.2.2.2 LES CONTRAINTES RESIDUELLES**

---

- a) traction
- b) compression
- c) influence de la forme des fibres et de leurs proportions

###### **4.2.2.3 EFFET BAUSCHINGER**

---

- a) influence de la proportion de fibres et du rapport de forme.

4.2.2.4 LES SURFACES D'ECOULEMENT

- a) sans précharge
- b) avec précharge

4.3 LE COMPORTEMENT THERMOELASTOPLASTIQUE DES MATERIAUX

COMPOSITES A MATRICE METALLIQUE

4.3.1 LES CONTRAINTES D'ORIGINE THERMIQUE

- a) influence de la forme des fibres
- b) influence de la proportion des fibres

4.3.2 COURBES DE TRACTION ET COMPRESSION

- a) influence de la forme des fibres
- b) influence de la proportion des fibres

4.3.3 BIBLIOGRAPHIE

4.4 CONCLUSION GENERALE

ANNEXE 1 LOI DE COMPORTEMENT THERMOELASTOPLASTIQUE DU MONOCRISTAL

ANNEXE 2 LE CALCUL DU TENSEUR D'INTERACTIONS



## CHAPITRE I

<p style="text-align: center;"><b>LE COMPOSITE SA FABRICATION ET SON UTILISATION</b></p>
--

### 1.1 INTRODUCTION GENERALE

#### a) INTERET

- les différentes catégories de fibres et matrice
- les matrices organiques
- les matrices métalliques
- les matrices vitro céramiques et céramiques
- leurs avantages et défauts

#### b) PROPRIETES DES FIBRES

- les fibres de carbone
- les fibres de carbure de silicium
- les fibres de bore

#### c) PROPRIETES DE LA MATRICE

- les matrices métalliques

### 1.2 LES PROCEDES DE FABRICATION DU MATERIAU COMPOSITE A A MATRICE METALLIQUE

#### a) ETAT LIQUIDE

- par dépôt chimique

- par pulvérisation
- par dépôt électrochimique
- par forgeage liquide
- par rhéomoulage

#### b) ETAT SOLIDE

- hot isostatic pressing
- cold isostatic pressing
- laminage à chaud

#### c) LES PROBLEMES LIES A LA FABRICATION ET A L'UTILISATION

- le problème d'adhérence fibre-matrice
- la porosité
- l'endommagement
- la réactivité de ces fibres avec la matrice
- les problèmes liés à l'élaboration
- l'hétérogénéité des coefficients de dilatation entre la fibre et la matrice

#### d) PROPRIETES DES PRINCIPALES FIBRES

#### e) CONCLUSION

### 1.3 BIBLIOGRAPHIE

## 1.1 INTRODUCTION GENERALE

### a) INTERET

Ces dernières années , les matériaux composites ont pris un essor considérable. Dans l'industrie automobile et aéronautique, le matériau composite représente le matériau d'avenir, il permet un gain de poids considérable tout en ayant des propriétés mécaniques supérieures aux matériaux classiques.

Afin de prendre en compte les nécessaires économies d'énergie et en même temps accroître les vitesses de transport , il faut trouver des compromis coût/poids et répondre aux exigences de sécurité croissantes.

Par exemple, le fuselage d'un avion subsonique ou supersonique doit résister à d'importantes contraintes aérodynamiques et simultanément pour certaines de ses parties, subir des gradients thermiques considérables.

Dans le cas de la navette spatiale, certaines parties peuvent atteindre, lors de la rentrée dans l'atmosphère, des températures de l'ordre de 1300 K. De même pour un avion d'interception , les températures atteignent facilement 700 K . Suivant le moyen de propulsion, la gamme des températures est très variable. Par exemple dans le cas d'un moteur à refroidissement par eau (type automobile), hormis certains organes particuliers , on avoisine les 450 K alors que dans le cas d'un stato réacteur à combustion supersonique , on a facilement des températures de l'ordre de 2000 K.

Il faut donc des matériaux nouveaux qui doivent être réfractaires, plus performants et aussi plus légers.

Afin de développer de tels matériaux , on a pensé à combiner deux substances qui ,séparement, ne répondent pas à ces exigences , mais dont l'union permet l'obtention d'un matériau adapté aux conditions d'utilisations thermomécaniques sévères.

Evidemment,certaines substances répondent aux conditions thermiques mais elles présentent l'inconvénient d'être fragiles, cassantes ( oxyde d'aluminium , carbone de silicium , carbone ) . Pour des pièces de grosse taille , il est difficile d'obtenir un matériau parfait sans défauts structuraux car,suite à un usage fréquent,des défauts internes apparaissent et peuvent ainsi altérer la sécurité de la structure.

Le compromis consiste à fabriquer des matériaux sous forme de particules ou fibres qui seront noyées dans une matrice ,et,bien que la matrice ou les renforts ne présentent pas indépendamment les critères voulus , le matériau composite ainsi créé verra ses propriétés thermomécaniques améliorées.

Les matériaux utilisés pour la matrice sont en général ductiles contrairement aux renforts qui sont plus fragiles.

Par exemple , si on soumet un faisceau de fibres de carbones à un essai de traction la rupture d'une des fibres unidirectionnelles

entraîne une détérioration très rapide du faisceau due à la redistribution très défavorable des contraintes sans cesse croissantes au fur et à mesure que les fibres se rompent.

A présent "emprisonnons" la fibre dans une matrice plus déformable. Lorsqu'une fibre casse, il y a écoulement plastique ou compensation élastique afin de rétablir les différentes tensions qui préexistent avant la rupture.

En combinant des fibres et des matrices de comportements différents il est possible d'envisager l'obtention d'un matériau de propriétés demandées.

On a l'habitude de classer les matériaux composites en plusieurs catégories afin de pouvoir caractériser leurs propriétés de manière succincte .

Suivant la nature de la matrice, on peut distinguer trois grandes familles de composites.

-Les composites à matrice organique formés à partir de résines organiques thermoplastiques ou thermodurcissables.

-Les composites à matrice métallique qui sont principalement à base d'alliages de magnésium, d'aluminium ou de titane.

-Les composites à matrices vitro céramiques et céramiques pour des applications à très hautes températures.

Il va de soi que selon les exigences du cahier des charges il convient d'utiliser le matériau composite qui présente les propriétés thermomécaniques adaptées.

Citons à titre de référence différents cas exemplaires de matrices. De la famille des matrices thermodurcissables prenons le cas de polymères .La structure moléculaire de celui-ci sous l'action de la chaleur se rigidifie, par conséquent le matériau brûle avant même de fondre, mais ce n'est pas le cas de tous les polymères. Des recherches sont en cours actuellement pour développer ce type de matériau, afin qu'il puisse supporter plus longtemps des températures élevées. Au contraire, les matrices thermoplastiques présentent la caractéristique d'être plus malléables aux hautes températures sans pour autant fondre, ce qui leur confère des résistances aux chocs supérieures aux matrices thermodurcissables.

Quant aux matrices métalliques, elles sont en général plus ductiles que les renforts; ce qui leur permet d'absorber sans rupture une grande quantité d'énergie. Mais il est aussi vrai que le fait d'introduire des renforts a tendance à fragiliser la matrice, ce qui constitue un handicap s'il est exigé de celle-ci une certaine tenue à la rupture. Mais suivant la répartition ou l'orientation des fibres, il est possible d'augmenter sa limite à la rupture ce qui constitue un atout important .De par sa nature ,le composite à matrice métallique est un matériau hétérogène. Bien évidemment, de nombreux matériaux sont hétérogènes car ils présentent différentes phases comme

les biphasés, les super alliages, etc..., mais cependant c'est par son caractère structurel que se joue la principale différence : dans le cas d'un composite, il est possible de jouer sur la proportion, la taille et la forme des différentes phases le constituant, puisqu'il s'agit d'un matériau "manufacturé".

Enfin en ce qui concerne les matrices céramiques celles-ci, étant très rigides et résistantes, il faut diminuer leur fragilité. Les fibres ont ce rôle :

- elles ont l'avantage de stopper ou ralentir l'évolution des fissures, ce qui améliore la tenue en rupture du composite alors que la matrice sans fibres, se détériore bien plus facilement.

Les composites de ce type ont une grande résistance à la variation de température.

Les matrices en carbure de silicium, en nitrure de silicium ou silicate d'aluminium résistent à des températures allant jusqu'à 2000 K. D'ailleurs cette caractéristique constitue un problème de conception, car les méthodes usuelles de fabrication, basées sur la fusion du constituant sont difficiles à mettre en oeuvre au vu des caractéristiques thermiques. On fabrique généralement ce type de matériau par frittage, en mélangeant les fibres ou whiskers avant d'agglomérer le tout à température et pressions élevées.

Le présent travail est limité au composite à matrice métallique.

Dans un premier temps, nous présentons les différents types

de fibres et matrices utilisées , les moyens de fabrication type extrusion, forgeage (squeeze casting), laminage et d'autres ainsi que les différents problèmes liés à l'utilisation de ce type de matériau tels que:

- Le problème d'adhérence fibre-matrice.
- L'hétérogénéité des coefficients de dilatation entre la fibre et la matrice.
- Le phénomène de porosité.
- Le comportement mécanique.
- L'endommagement.
- La réactivité de ces fibres avec la matrice.
- Les problèmes liés à l'élaboration de ce matériau.

#### b) PROPRIETES DES FIBRES

Il existe principalement deux catégories de fibres:

- Les fibres céramiques ( filaments de bore , fibres ou whiskers de carbone, alumine ou carbure de silicium).
- Les fibres métalliques (acier, W, Mo, Be, Cr).

Les fibres se présentent sous formes de filaments, de plus ou moins grande longueur et de rapports de forme différents .

Les qualités recherchées pour les renforts sont:

- Bonnes caractéristiques mécaniques.
- Faible densité.
- Faible coût de fabrication.
- compatibilité chimique avec la matrice.



Suivant le procédé de fabrication ,la fibre est polycristalline , polyphasée ou de type whiskers.

Les whiskers ou encore appelé trichites, sont des fibres courtes constituées de cristaux parfaits .Du fait de l'absence de défauts intracristallins (dislocations) , la fibre présente des caractéristiques mécaniques proches des caractéristiques théoriques déterminées par les liaisons entre atomes.

A titre d'exemple , la résistance en traction d'une fibre de carbone classique est de l'ordre de 3000 MPa, alors qu'elle est de 20000 MPa pour un whisker de carbone . Mais l'obtention de ce type de fibre est plus délicate, elle nécessite en effet des procédés de fabrication complexes.

Afin d'être plus concis et par souci de clarté, cherchons à définir les principaux types de fibres ainsi que leurs qualités et défauts.

#### -Les fibres métalliques

Les fibres métalliques sont généralement moins intéressantes que les fibres céramiques de par leur haute densité de l'ordre de 2 à 3 g/cm<sup>3</sup> pour les céramiques et de 5 à 8 g/cm<sup>3</sup> pour les métalliques.

#### -Les fibres de carbone

Les fibres de carbone ont d'excellentes caractéristiques mécaniques. Leur densité s'échelonne entre 1.8 et 1.9 g/cm<sup>3</sup> tandis que leur résistance à la rupture en traction varie entre 2000 MPa et 3100 MPa.

L'utilisation de ce type de fibre apporte un gain de poids considérable mais son application se trouve restreinte à des domaines particuliers (hautes températures) où la matrice ne doit pas interagir chimiquement avec la fibre et doit garder ses caractéristiques mécaniques .

La fibre de carbone présentant une grande rigidité (allongement à la rupture faible de l'ordre de 1% ),des précautions s'imposent à l'utilisation afin d'éviter une détérioration trop rapide du composite.

Les fibres de carbure de silicium et de bore

La fabrication des fibres de carbure de silicium comme les fibres de bore se fait par dépôt chimique de la phase vapeur sur un fil support.C'est un procédé assez coûteux. Leurs avantages principaux; une résistance à la rupture en traction ou compression supérieure à 3500 MPa et une bonne tenue à la fatigue et au vieillissement.Une très grande rigidité supérieur à 400000MPa.

Par contre elles possèdent une densité importante 2.6 g/cm<sup>3</sup> pour les fibres de bore et 3.4 g/cm<sup>3</sup> pour les fibres SiC.

Les fibres carbure de silicium sont plus intéressantes que les fibres de bore car la résistance à 400°C en traction des fibres de bore diminue de 40% alors que pour les fibres SiC la résistance à la rupture reste inchangée.

Les fibres les plus couramment employées comme les fibres de bore,

carbure de silicium ou alumine sont utilisées pour les structures à hautes températures ,pièces de moteur automobile,aviation,etc.

En fin de chapitre,un récapitulatif des principales propriétés des fibres est proposé sous forme de tableaux.

### c) PROPRIETES DE LA MATRICE (Matrice métallique)

En ce qui concerne la matrice ,tous les types de matrice sont possibles.C'est suivant le cahier des charges que se fera le choix d'un matériau composite. Les critères de choix seront les suivants la faible densité ,la tenue en température,la résistance à la corrosion ,les possibilités de mise en oeuvre,la tenue au choc.

La plus couramment utilisée,en association avec les fibres de bore, ou de Sic est la matrice d'aluminium ou matrice d'alliages légers dont les qualités sont les possibilités d'utilisation jusqu'à des températures de l'ordre de 700 K,une bonne ténacité et résilience .

Il existe aussi d'autres types ; les composites à matrice de titane utilisés pour leurs hautes résistances à la rupture et leurs hauts modules d'élasticité fabriqués par des méthodes de compression à chaud [1] , [2] les fibres sont de type B , SiC , Be (whiskers),les composites à matrice de magnésium sont très intéressants de par leur faible poids,ou encore les composites à base de cuivre qui ont une bonne résistance à la rupture une bonne conduction thermique et électrique.

## 1.2 LES PROCÉDES DE FABRICATION DU MATERIAU COMPOSITE A MATRICE

### METALLIQUE

Les différentes méthodes de fabrication dépendent surtout du choix du type de fibre et de la matrice.

Il faut une bonne cohésion fibre matrice ,une bonne mouillabilité de la fibre pour éviter la porosité résiduelle, maîtriser la formation de composé intermétallique par réaction chimique lors de la mise en oeuvre ou encore lors de l'utilisation.

Il va de soi, que suivant le procédé de fabrication choisi, la micro-structure du composite sera fortement influencée.

Regroupons par conséquent les principales méthodes de conception en deux catégories:

- la première concerne l'élaboration à l'état liquide dans laquelle une des phases est à l'état liquide.
- la seconde catégorie concerne la fabrication par voie solide.

#### a) état liquide

La principale difficulté lors de la fabrication d'un composite où la matrice se trouve à l'état liquide est qu'il faut une bonne mouillabilité des fibres. Celle-ci joue un rôle prépondérant tant en tenue à la rupture qu'à la corrosion.

Ce type de procédé nécessite l'utilisation de fibres préparées recouvertes d'un composé . Celui ci a pour but d'améliorer la surface favorisant ainsi la mouillabilité de celle-ci . Les différents

composés sont obtenus soit par:

- bain dans une solution alcaline type sodium [3],[4],[5].
- revêtement par des métaux type nickel , cuivre , ou alliage cuivre cobalt ou argent [6],[7],[8],[9].
- revêtement par des céramiques (Ti-B) [10].

D'autres méthodes de fabrication consistent à enrober la fibre par l'aluminium ou ses alliages sans pression ni mouillage.

- par dépôt chimique d'aluminium en phase gazeuse [11].
- pulvérisation [12],[13].
- dépôt électrochimique (galvanoplastie) [14],[15].

De nombreux composites sont obtenus par pressage en phase semi-liquide.

- le forgeage liquide (ou squeeze casting) est en fait une coulée suivie d'une mise sous pression élevée du métal liquide par déplacement d'un piston. Les fibres s'orientent perpendiculairement à la direction de pressage [16] [17],[18],[19],[20],[21].
- le rhéomoulage par injection où la matrice est dans un état semi liquide ( pateux ). Dans ce cas, le mélange fibre matrice est continuellement brassé jusqu'à l'injection [22],[23],[24].

#### b) état solide

En général les matériaux à mettre en oeuvre se présentent sous

forme de poudre : mélange de particules d'aluminium et de renforts.

Les étapes de fabrication sont les suivantes :

- malaxage.
- pressage.
- frittage (permettant la coalescence des grains).

Ces méthodes s'appliquent soit à chaud ou à froid (hot isostatic pressing, cold isostatic pressing) et dans ces deux cas les opérations de pressage et frittage se font simultanément [25],[26].

Dans le cas du laminage à chaud, la matrice est sous forme de feuilles entre lesquelles on intercale les fibres courtes . La cohésion est assurée par une pression à température élevée [27],[28].

Ce procédé est assez avantageux, car il permet de réduire le temps de réaction chimique entre les fibres et la matrice pendant lequel, il peut y avoir création d'un composé intermétallique nuisant au bon comportement en service du composite.

### c) Les problèmes liés à la fabrication et à l'utilisation

Une bonne compréhension des relations entre la microstructure , les propriétés thermoélastoplastiques et les procédés de fabrication est essentielle pour pouvoir utiliser au mieux le composite approprié.

Les problèmes généraux rencontrés sont les endommagements de type chimique et mécanique dus aux procédés de fabrication. Cependant, il est évident que les propriétés finales du composite sont fortement

dépendantes de la nature et des propriétés des fibres et de la matrice.

La plupart des matériaux composites peuvent être considérés comme des milieux chimiquement non équilibrés dans lesquels existe un gradient de potentiel chimique de la fibre à la matrice. Cette différence de potentiel est un élément moteur pour la diffusion et les réactions chimiques quand le composite est utilisé à de très hautes températures (en service ou pendant la fabrication).

Les réactions chimiques prémantnaissance à l'interface sont à l'origine de la fabrication de nouvelles phases ou composés intermétalliques. Suivant le moyen de conception, il est possible d'augmenter la cohésion fibre-matrice par l'apparition de composé intermétalliques favorisant la mouillabilité de la fibre par la matrice ou par l'addition d'éléments favorisant la diffusion à l'interface. Le rôle de l'interface entre la fibre et la matrice est crucial, pour la limite en rupture du composite. D'une part par la formation de microporosités et d'autres part par les liaisons plus ou moins fortes entre le renfort et la matrice. La qualité des procédés de fabrication de type squeeze casting repose sur la bonne imprégnation de la fibre par la matrice.

L'importance de la fraction volumique des porosités joue un rôle primordial tant en élasticité, plasticité qu'en rupture. Les micropores ont une forte influence sur la rupture ductile. Ils peuvent engendrer une décohésion prématurée entre la fibre et la matrice. Il va de soi que cette teneur en micropores dépend du

procédé de fabrication.

A ces différents problèmes d'élaboration et d'utilisation vient s'ajouter celui de l'hétérogénéité des coefficients de dilatation. Lors d'une variation de température importante, le matériau subit de forts gradients thermiques d'où des problèmes de corrosion et diffusion. D'autre part, des déformations plastiques locales prennent naissance aux interfaces dues au développement de fortes contraintes internes thermiques.

#### e) conclusion

L'utilisation de ces nouveaux matériaux pose de nombreux problèmes liés à l'élaboration, leur mise en oeuvre, leur transformation et leur propriétés d'emploi.

Nous nous limitons ici à ce dernier aspect, en proposant des méthodes et modèles permettant, dans le cadre de la thermoélasto-plasticité non couplée et sans endommagement de déterminer les propriétés effectives du matériau composite considéré comme milieu microhétérogène et macrohomogène.

De ce fait, certains problèmes ne sont pas traités dans cette approche (diffusion, formation de composés intermétallique, formation de microporosités, endommagement).

Dans le chapitre 2, on rappelle succinctement différents modèles et problèmes permettant une approche partielle des phénomènes de localisation et d'homogénéisation.



Dans le chapitre 3 , on présente les différentes étapes du modèle proposé :

- lois de comportement locales.
- localisation et homogénéisation.
- Equation intégrale thermomécanique.
- Approximation autocohérente.

Ce modèle permet la prise en compte de paramètres structuraux tels que :

- La texture cristallographique des fibres et de la matrice.
- La texture morphologique.
- La nature polycristalline de la matrice.
- Les contraintes internes initiales résultant des procédés de mise en oeuvre.

Il permet la prévision:

- des propriétés thermoélastoplastiques linéaires.
- des surfaces de plasticité initiales et induites.
- des modules élastoplastiques tangents.
- des réponses à des chargements thermomécaniques monotones ou cycliques, radiaux ou complexes.
- des contraintes résiduelles, qui sont nécessaires à la mise en oeuvre de lois d'endommagement.

Dans le chapitre 4 on présente différents résultats obtenus à partir de cette formulation.

Ces résultats théoriques ont pu être confrontés aux (rares) résultats expérimentaux disponibles pour cette classe de matériaux.

Lorsque cette confrontation a été possible, on observe un accord théorie-expérience plus que satisfaisant.

**PRINCIPALES PROPRIETES DES DIFFERENTES  
CATEGORIES DE FIBRES EXISTANTES**

tiré du rapport du CETIM tome 1  
les matériaux composites  
ministère de l'industrie et  
de la recherche

### PROPRIETES MECANIQUES

Fibre		Propriété type	Diamètre du filament unitaire (μ)	Densité	Charge de rupture en traction (MPa) (1)	Module d'élasticité (MPa)
Végétale	Sisal	Faible coût	19	1,3	50	15.000
	Cellulose naturelle (bois, coton, papier) + phénolique	Résistance à l'abrasion et isolant thermique	-	0,7 à 1,4	50 à 200	10.000
Minérale	Amiante	Isolant thermique	0,03 à 0,09	2,4 à 3,3	500 à 3500	160.000 à 190.000
Synthétique	Polyester HT	Résistance au choc	23	1,4	1100	14.000
	Polyamide HT	Résistance au choc spécifique	14	1,1	950	7.000
	Kernel	Protection thermique		1,34	470	7.000
	Nomex		1,38	470	16.000	
	Kyncl	Ininflammable	10 à 25	1,25	200	6.000
	PBI	Ininflammable		1,43	500	11.000
	Acrylique	Résistance chimique (UV et intempéries)	10 à 25	1,2	300	
	Dérivés cellulosiques (rayonne, viscose)	Faible coût	10 à 40	1,3 à 1,5	200 à 450	
	Téflon	Coefficient de frottement faible	20	2,1	360	2.500
Métallique	Aciers	Résistance mécanique	12 à 50	7,9	800 à 2500	210.000
	Alliages d'aluminium	Conductivité thermique et électrique		2,7 à 2,8	200 à 650	70.000
	Cuivre et alliages			7 à 8,5	200 à 800	90.000 à 130.000
	Alliages nickel, Cobalt	Résistance thermique		7,5 à 8,5	800 à 1200	200.000
	Alliages titane, Zirconium, Niobium	Matériaux		4,4	800 à 1000	110.000

**PROPRIETES MECANIQUES**

Fibre	Aspect	Propriété type	Diamètre du filament élémentaire (μ)	Densité	Charge de rupture en traction (MPa)	Module d'élasticité (MPa)
Verre E	Soyeux blanc	Prix/performance	3 à 30	2,54	3400	73000
Verre R (ou S)		Résistance en traction		2,48	4400	86000
Verre D		Rigidité diélectrique		2,14	2500	55000
Verre C		Résistance aux acides		2,5	2800	70000
Silice		Tenue thermique	9	2,2	3500	68000
Aramide bas module	Soyeux jaune	Résistance en traction/densité	12	1,45	3100	70000
Aramide haut module		Résistance et module en traction/densité	12	1,45	3100	130000
Carbone haute ténacité	Soyeux noir	Tenue en flexion et compression	8	1,78	2800	200000
Carbone haut module		Haut module	8	1,80	2200	400000
Carbone Thornel P		Haut module/prix	12	2,02	2200	380000
Carbone GY 70		Très haut module	8	1,95	1800	530000
Bore	Métallique gris - noir	Tenue mécanique générale	100 à 200	2,63	3500	400000
Bore Carbure de bore		Tenue mécanique générale		2,6	3900	400000
Carbure de silicium		Tenue mécanique à haute température		3,45	3300	450000

## PROPRIETES THERMIQUES

Fibre	Coefficient de dilatation à 20°C		Conductivité (W m <sup>-1</sup> °K <sup>-1</sup> )	Capacité calorifique massique (J Kg <sup>-1</sup> °K <sup>-1</sup> )	Point de fusion (°C)
	Sens longitudinal (°K <sup>-1</sup> )	Sens radial (°K <sup>-1</sup> )			
Verre E	5.10 <sup>-6</sup>		1	800	850
Verre R (ou S)	3.10 <sup>-6</sup>		1	800	990
Verre D	3.10 <sup>-6</sup>		0,8	800	
Verre C	8,5.10 <sup>-6</sup>				
Silice	0,5.10 <sup>-6</sup>		0,12	960	Sublimation 2000°C
Aramide bas module	-2.10 <sup>-6</sup>	60.10 <sup>-6</sup>	0,03	1400	Décomposition 480
Aramide haut module	-2.10 <sup>-6</sup>	60.10 <sup>-6</sup>	0,03	1400	Décomposition 480
Carbone haute ténacité	0,2.10 <sup>-6</sup>	20.10 <sup>-6</sup>			
Carbone haut module	0,8.10 <sup>-6</sup>	20.10 <sup>-6</sup>	175	800	Se dégrade à 2500
Carbone GY 70					
Bore	4.10 <sup>-6</sup>				2000
Bore Carbure de bore	4.10 <sup>-6</sup>				Décomposition
Carbure de silicium	5.10 <sup>-6</sup>				Décomposition

## PROPRIETES THERMIQUES

Fibre	Coefficient de dilatation de 20°C à 100°C		Conductivité (W m <sup>-1</sup> °K <sup>-1</sup> )	Capacité calorifique massique (J Kg <sup>-1</sup> °K <sup>-1</sup> )	Point de fusion (°C)
	Sens longitudinal (°K <sup>-1</sup> )	Sens radial (°K <sup>-1</sup> )			
Sisal			0,006		Ne fond pas
Cellulose naturelle (bois, coton, papier) + phénolique	4.10 <sup>-6</sup>		0,2	1200 à 1500	Ne fond pas
Amiante				850	Se décompose à partir de 600 à 1500°C selon variété
Polyster HT	20.10 <sup>-6</sup>		0,021		260
Polyamide HT	35.10 <sup>-6</sup>		0,056		250
Kermel	20.10 <sup>-6</sup>		0,3.10 <sup>-3</sup>	1250	Se décompose à 400
Nomex					Se décompose à 370
Kynol					
PBI					Se carbonise à partir de 400
Acrylique	28.10 <sup>-6</sup>		0,028		
Dérivés cellulosiques (rayonne, viscosse)	50.10 <sup>-6</sup>		0,035		Se décompose à: rayonne 140° acétate 300
Téflon	30.10 <sup>-6</sup>		0,038	1000	300
Aciers	10.10 <sup>-6</sup>		20 à 100	460	1300
Alliages d'aluminium	23.10 <sup>-6</sup>		210	880	800
Cuivre et alliages	20.10 <sup>-6</sup>		400	380	1000
Alliages nickel Cobalt	13.10 <sup>-6</sup>		60	470	1500
Alliages Titane Tantale, Niobium	8.10 <sup>-6</sup>		50	480	2000

### 4.3 BIBLIOGRAPHIE

---

- (1) Paultnoi , K.I, Slibekov, S.E., Svetlov, I.L. and Chubarov, V.M. Structure and Properties of Composite Materials, (1979)
- (2) Lenel, F.V. Powder Metallurgy: Principles and Applications Metal Powder Industries Federation, Princeton, NJ, USA, 1980
- (3) R.T. Pepper and al V.S. Patent 3,770,448, nov. 6, 1973
- (4) M. Oberlin , brevet français 2,259,916, Août 1974
- (5) A.P. Levitt, H.E. Band, V.S. Patent 4,157,409, Jun. 5, 1979
- (6) E. Fitzer , E. Ignatowitz, High Temperatures, High pressures, 7(1975) 299-394
- (7) R. Lignon , Brevet français 2,081,237, Mars 1970
- (8) D.M. Goddard , R.W. Sexton , Brevet Français 2,497,84, Janvier 1982
- (9) E. De Lahotte , K. Phillips , A.J. Perry, H.R. Killias, J. Mat. Sci. Letters , 7 (1972) 346-349
- (10) W. Meyerer, D. Kizer, S. Paprocki, H. Paul in Proceedings of the second International Conference on Composites Materials, Toronto 1978 , edited by B. Noton and al (TMS-AIME, 1978), 141-153
- (11) The research Institute for Iron Steel and Other Metals of the Tohoku University , Brevet Français n°2,363,636, dec. 1976
- (12) K.G Kreider, R.D. Schile, E.M. Breiman, M. Marciano, Plasma Sprayed Metal Matrix Fiber Reinforced Composites, AFML-TR 68-119, July 1968
- (13) H. Asanuma , A. Okura in proceedings of the Fourth International Conference on composite Materials, Tokyo 1982 edited by T. Higashi and al. (Japan Society for Composite materials, Tokyo 1982 ), 1435-1442



- (14) F.J. Schmidt, I.J. Hess, C.H. Esola, A.G. Buschow, Electroforming of Aluminium Composite Structures by Code position of High Strength, High Modulus Fibers, Nasa Contract. Rep. (1969), Nasa -CR- 66749
- (15) H. Fukunaga, T. Onde, in Proceedings of the fourth International Conference on Composite Materials edited by T. Higashi and al. (Japan Society for Composite Materials, Tokyo 1982), 1435-1442
- (16) H. Fukunaga, S. Komatsu, Bulletin of JSME, 26 (1983) 1814-1819
- (17) Y. Abe, S. Horikiri, K. Fujimura, E. Ichiki, in Proceedings of the Fourth Conference on Composite Materials edited by T. Higashi and al, (Japan Society for Composite Materials, Tokyo 1982), 1427-1434
- (18) Rajagopal S. Squeeze casting a review and update J. Applied Metal Working of ASM 1 N°41981 pp3-14
- (19) Das, A.A. and Chatterjee, S. Squeeze casting of an aluminum alloy containing small amounts of silicon carbide whiskers The metallurgist and Materials Technologist (March 1981) pp137-142
- (20) Zantout, B., Das, A.A. and Franklin, J.R. Squeeze-cast aluminum alloy containing small amounts of silicon carbide whiskers The Metallurgy of Light Alloys Spring Residential Conf. (The Institute of Metallurgists, March 1983) N°20
- (21) Gibson P.R. Clegg, A.J. and Das, A.A., Compocast graphite aluminum-silicon alloys Foundry Trade Journal (February 1982) pp 253-263
- (22) Gibson P.R., Clegg, A.J. and Das, A.A. The production of cast aluminum-silicon alloys containing graphite, in The Metallurgy of Light Alloys, Spring Residential Conf, op cit p208
- (23) Gibson P.R., Clegg, A.J. and Das, A.A., Compocast Graphite aluminum-silicon alloys, Foundry Trade Journal (February 1982) pp 253-263
- (24) Interim Technical Report ARPA Contact n° DAAG 46-73-C-040, Prepared for AMMRC Watertown, Mass. 02172

- (25) Paultnoi ,K.I. Salibekov , S.E. , Svetlov , I.L. and Chubarov, V.M. 'Structure and Properties of Composite Materials '(1979)
- (26) Lenel , F.V., Powder Metallurgy: Principles and Applications, (Metal Powder Industries Federation , Princeton, NJ,USA,1980)
- (27) Larsson , L.O.K. and Warren, R. Tungsten wire reinforced metals for high temperature application , Advanced Fibers and Composites for Elevated Temperatures ,po cit pp108-125
- (28) Doble , G.A. and Toth , I.J. Roll diffusion bonding of boron aluminum composites , Proc ICCM-I(The Metallurgical Society of AIME,1975) 2p775

## CHAPITRE II

LES CONCENTRATIONS DE CONTRAINTES ELASTIQUE, THERMIQUE  
ET PLASTIQUE. EVALUATION ET PRISE EN COMPTE  
DANS LES MODELISATIONS.

### 2.1 INTRODUCTION

### 2.2 LE PROBLEME DE L'INCLUSION PLASTIQUE HOMOGENE

### 2.3 LE PROBLEME DE L'INCLUSION HETEROGENE

### 2.4 LE MODE MIXTE

- cas du mode mixte
- discussion

### 2.5 LES MODELES POUR LES MATERIAUX HETEROGENES

- modèle de Kröner
- modèle de Hill

### 2.6 LES PARAMETRES MICROPHYSIQUES

- Leurs descriptions et leurs effets

### 2.7 BIBLIOGRAPHIE

## 2.1 INTRODUCTION

Le but essentiel du présent travail est de décrire, à partir du comportement local et de la microstructure du matériau, le comportement thermomécanique effectif du composite.

Nous pensons, à l'instar de ce qui a été développé pour d'autres classes de comportement et d'autres classes de matériaux hétérogènes, que la détermination des propriétés effectives de tels matériaux, par les méthodes dites d'homogénéisation (au sens large) constitue un progrès réel à la fois par la qualité des lois de comportement obtenues et destinées aux calculs de structures, mais également par la prise en compte directe des informations sur le matériau destinées aux "architectes" de nouveaux matériaux.

Dans le cas des composites à matrice métallique, plusieurs phénomènes essentiels sont à prendre en compte dans la description du comportement effectif macroscopique.

Il s'agit de:

- L'hétérogénéité élastique : différence de comportement élastique entre renforts et matrice.
- la possibilité d'un écoulement plastique de la matrice polycristalline qui entraîne des contraintes internes, une déformation supplémentaire .....
- l'hétérogénéité des coefficients de dilatation thermique qui engendrent des contraintes ( et accessoirement une déformation thermique supplémentaire ).

Les phénomènes précédents vont dépendre fortement de la microstructure du composite caractérisé par exemple, par la fraction volumique des renforts , leur forme et leur répartition, la taille des grains de la matrice, la texture cristallographique .....

Pour prendre en compte les phénomènes et les paramètres de la microstructure ainsi discutés, trois démarches peuvent être envisagées:

- l'approche phénoménologique ne tient pas compte explicitement de la microstructure et identifie les paramètres d'une loi standard classique ( ou améliorée ) à partir d'essais macroscopiques usuels Lemaitre [1].
- l'approche très physique se contente très souvent d'analyser des phénomènes très locaux par exemple:
  - cohésion de l'interface
  - évaluation des contraintes internes à l'interface fibre matrice par l'intermédiaire de la physique des dislocations Neumann P. , Haasen P. [2].
- l'approche "micro-macro" ou par homogénéisation déduit le comportement global à partir du comportement local et de la microstructure du matériau.

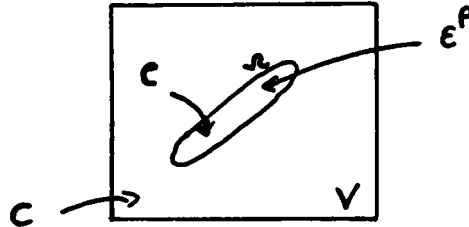
C'est cette dernière approche qui est développée dans ce travail.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord illustrer les phénomènes mécaniques et microstructuraux discutés précédemment en analysant les solutions des problèmes élémentaires d'inclusion. Nous discutons ensuite les différents modèles développés pour les matériaux composites à matrice métallique.

## 2.2 LE PROBLEME DE L'INCLUSION PLASTIQUE HOMOGENE

Considérons un milieu infini  $V$  non chargé, homogène élastique , puis

une inclusion ellipsoïdale  $\alpha$  dans laquelle réside une déformation plastique uniforme  $\epsilon^P$ .



La théorie d'Eshelby [3] permet de trouver le champ de contrainte ou de déplacement associé aux incompatibilités de la déformation plastique existantes entre l'inclusion et la matrice. La solution d'un tel problème s'obtient grâce au tenseur d'Eshelby  $S$  qui relie la déformation plastique  $\epsilon^P$  à la déformation totale  $\epsilon^t$  dans l'inclusion.

$$\epsilon_{ij}^t = S_{ijkl} \epsilon_{kl}^P$$

La déformation élastique dans l'inclusion est:

$$\epsilon_{ij}^e = (S_{ijkl} - I_{ijkl}) \epsilon_{kl}^P$$

et pour les contraintes on a:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (S_{klpq} - I_{klpq}) \epsilon_{pq}^P$$

Le tenseur  $S$  ne dépend que des constantes élastiques de la matrice et de la forme de l'inclusion. C'est cette dernière propriété qui permet l'emploi de la solution d'Eshelby pour des inclusions de

forme très variées (plaquettes, sphère, cylindre....).

Dans le cas d'un composite à matrice ductile une démarche inverse est à envisager. Suivant une méthode proposée par Kröner [4], les interactions entre le renfort et la matrice peuvent être évaluées en prenant une déformation plastique nulle dans le renfort (limite d'élasticité importante) alors que la matrice aurait subi une déformation plastique uniforme  $E^P$ .

Dans l'inclusion on aurait par conséquent, si le milieu est homogène:

$$\epsilon_{ij}^t = \epsilon_{ij}^e = (I_{ijkl} - S_{ijkl}) E_{kl}^P$$

ou le tenseur  $A=(I-S)$  est un tenseur localisation de déformation élastique pour le renfort.

On a par conséquent:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (I_{klpq} - S_{klpq}) E_{pq}^P$$

Ce qui correspond à des contraintes internes considérables. Cependant, cette première évaluation des contraintes internes surestime la réalité, car on admet qu'une accommodation élastique des incompatibilités plastiques entre le renfort et la matrice. Une deuxième amélioration, consiste également à prendre en compte les hétérogénéités de comportement élastique entre le renfort et la matrice paragraphe 2.3 .

La démarche précédente s'applique également au cas des contraintes d'origines thermiques.

Si les coefficients de dilatation de la matrice et de l'inclusion sont respectivement  $\alpha^M$  et  $\alpha^I$ , les déformations thermiques pour une variation  $\theta$  de la température s'écrivent:

$$\varepsilon^M = \alpha^M \theta$$

$$\varepsilon^I = \alpha^I \theta$$

Les formules précédentes s'appliquent encore en remplaçant  $\varepsilon^P$  par  $(\alpha^I - \alpha^M) \theta$ .

Dans ce cas, on a pour les contraintes dans les renforts:

$$\sigma^I = C (I - S) (\alpha^I - \alpha^M) \theta$$

Pour les composites à matrice métallique, les termes  $(\alpha^I - \alpha^M)$  sont facilement de l'ordre de  $10^{-5} / ^\circ\text{C}$ .

Pour une variation de température  $\theta$  de l'ordre de  $100^\circ\text{C}$  et pour une fibre longue  $(I - S) \approx I$ , on aurait  $\sigma^I \approx C \cdot 10^{-3}$  ce qui correspond aux contraintes appliquées. Les contraintes d'origine thermique jouent donc un rôle essentiel dans le composite à matrice métallique.

### 2.3 LE PROBLEME DE L'INCLUSION HETEROGENE

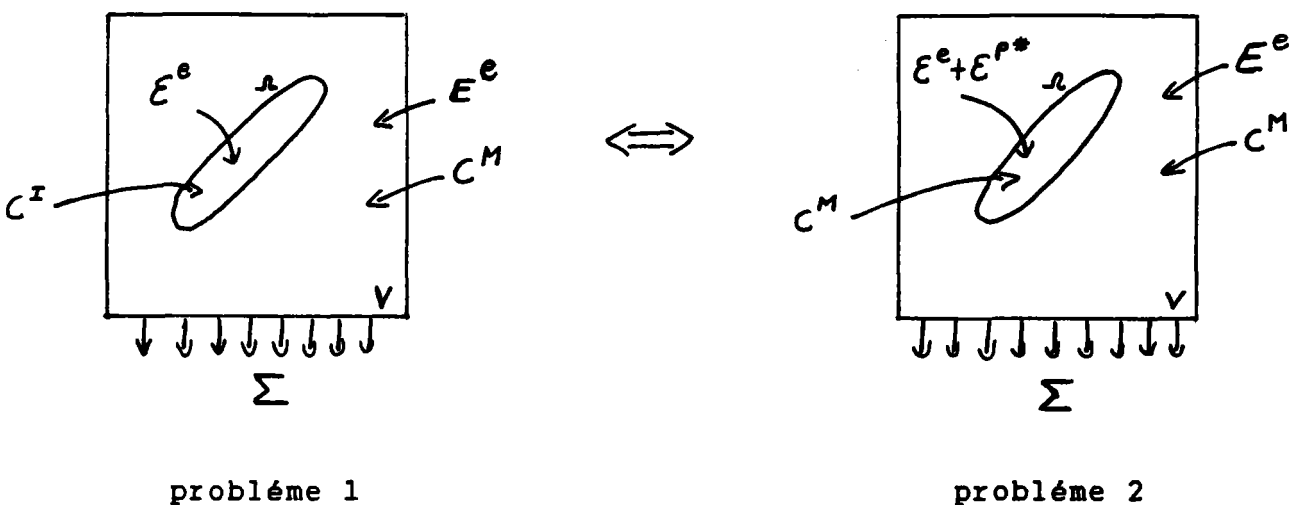
Nous rappelons maintenant la solution du problème de l'inclusion hétérogène ( sans déformation plastique ).

Cette approche peut être liée à la précédente de la manière suivante.



Lorsque le milieu est soumis à une contrainte uniforme à l'infini il apparait des contraintes internes différentes dans le renfort I et la matrice M qui sont liées à l'hétérogénéité élastique de l'ensemble.

On peut donc résoudre le problème par le biais d'une déformation plastique fictive  $\epsilon^{p^*}$  dans l'inclusion  $\Omega$  pour un problème homogène. Les hétérogénéités de comportement élastiques sont alors traduites par la déformation plastique fictive  $\epsilon^{p^*}$ .



La déformation totale et les contraintes sont supposées identiques dans les deux inclusions pour les deux problèmes.

On a donc :

Problème 1

$$\begin{aligned} \epsilon^e & \\ \sigma^I &= C^I \epsilon^e \end{aligned}$$

Problème 2

$$\begin{aligned} &= \epsilon + \epsilon^t \\ &= \Sigma + C^M (S-I) \epsilon^{p^*} \end{aligned}$$

avec d'après le paragraphe 2.2  $\epsilon^t = S \epsilon^{p^*}$ .

Si on différencie les expressions :

$$\begin{aligned}\sigma^I &= C^I \varepsilon^e &= & \Sigma + C^M (S-I) \varepsilon^{P^*} \\ C^M \varepsilon^e & &= & C^M_E + C^M_S \varepsilon^{P^*}\end{aligned}$$

on obtient que :

$$(C^I - C^M) \varepsilon^e = -C^M \varepsilon^{P^*}$$

par conséquent:

$$\varepsilon^{P^*} = C^{M^{-1}} (C^I - C^M) \varepsilon^e$$

avec

$$\varepsilon^e = E + S \varepsilon^{P^*}$$

on a finalement que

$$\varepsilon^e = E + S C^{M^{-1}} (C^M - C^I) \varepsilon^e$$

la forme de l'équation ainsi obtenue est la forme particulière de l'équation intégrale qu'on verra dans le paragraphe 3.4.

La solution se présente en élasticité sous la forme:

$$\varepsilon^e = [I - T (C^M - C^I)]^{-1} E$$

avec T tenseur d'interaction entre le renfort et la matrice tel

que  $T = S C^{M^{-1}}$ .

Le tenseur contrainte interne dans le renfort est par conséquent de la forme:

$$\sigma^I = C^I \varepsilon^e = C^I [I - T (C^M - C^I)]^{-1} C^{M^{-1}} \Sigma$$

Appelons B le tenseur concentration de contrainte interne lié au chargement  $\Sigma$ . Il a pour expression:

$$B = C^I [I - T (C^M - C^I)]^{-1} C^{M^{-1}}$$

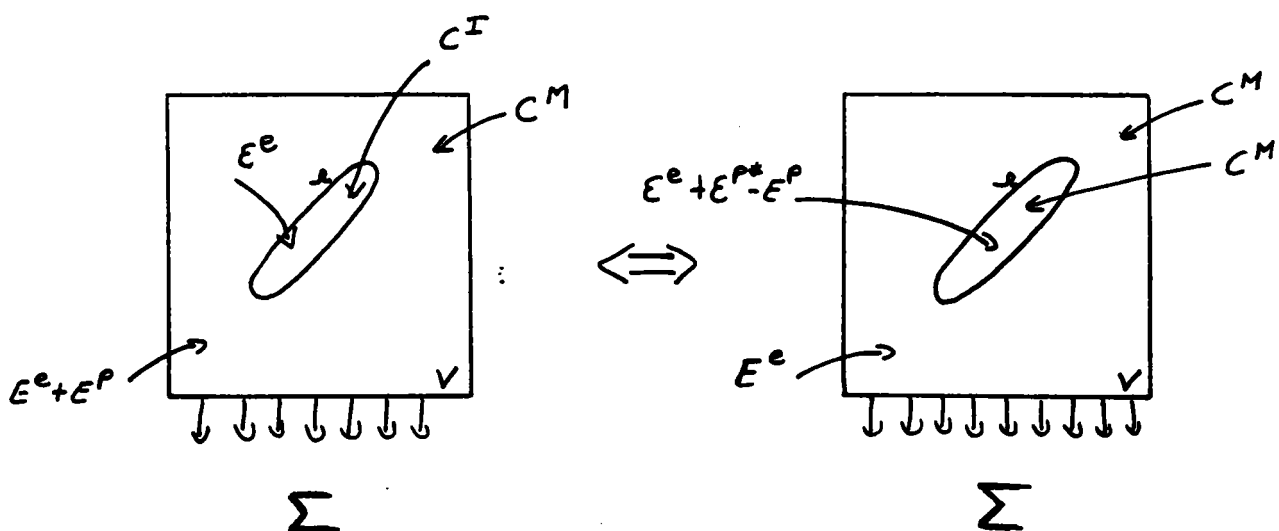
Par cette approche, il est possible de prendre en considération

les hétérogénéités de comportement élastique entre le renfort et la matrice. Pour les matériaux faiblement hétérogènes  $C^M \approx C^I$ , les contraintes locales sont proches des contraintes appliquées. Pour les composites à matrice métallique on a des rapports " $C^I / C^M$ " de l'ordre de 10 et les concentrations de contraintes élastiques sont donc à prendre en compte.

Envisageons à présent un mode mixte où la matrice peut avoir un comportement élastoplastique et le renfort un comportement purement élastique.

#### 2.4 LE MODE MIXTE

A partir d'une démarche analogue au cas de l'inclusion hétérogène, on étudie le cas où le renfort I a un comportement élastique  $C^I$  et la matrice a subi une déformation plastique  $E^P$  et son comportement est caractérisé par  $C^M$ .



Par le biais de la déformation plastique fictive  $\varepsilon^{P^*}$  dans le renfort on a :

$$\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + C^M_{ijkl} (S_{klpq} - I_{klpq}) (\varepsilon^{P^*}_{pq} - E^P_{pq})$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \varepsilon^e &= C^{M-1} \Sigma + (S - I) (\varepsilon^{P^*} - E^P) \\ &= E^e + E^P - \varepsilon^{P^*} + S (\varepsilon^{P^*} - E^P) \end{aligned}$$

soit

$$\varepsilon^t = E^t + S (\varepsilon^{P^*} - E^P)$$

Or on sait que pour le renfort de comportement élastique :

$$\sigma^I = C^I (\varepsilon^t)$$

Soit par conséquent :

$$C^I \varepsilon^t = C^M E^t + C^M S (\varepsilon^{P^*} - E^P) - C^M \varepsilon^{P^*}$$

ce qui nous donne en utilisant  $\varepsilon^t = E^t + S (\varepsilon^{P^*} - E^P)$  que :

$$C^M \varepsilon^t = C^M E^t + C^M S (\varepsilon^{P^*} - E^P)$$

En utilisant les deux expressions précédentes on obtient :

$$(C^I - C^M) \varepsilon^t = -C^M \varepsilon^{P^*}$$

Sachant que  $\varepsilon^t = E^t + S (\varepsilon^{P^*} - E^P)$  on obtient finalement que :

$$\varepsilon^t = E^t + S C^{M-1} [(C^M - C^I) \varepsilon^t - C^M E^P]$$

La forme de l'équation ainsi obtenue n'est en fait qu'un cas particulier de l'équation (vue au paragraphe 2.3).

On a encore

$$\varepsilon^t = (I - S C^{M-1} (C^M - C^I))^{-1} (E^t - S E^P)$$

et finalement la contrainte dans le renfort vaut:

$$\sigma = C^I ( E^t - S C^{M-1} [ (C^M - C^I) \epsilon^t + C^M E^P ] )$$

Cette dernière approche permet par conséquent de prendre en compte les hétérogénéités de comportement élastoplastique entre le renfort et la matrice. IL convient de noter que la déformation  $\epsilon^P$  peut aussi représenter les déformations anélastiques (thermique et plastique), qui doivent être prises en compte dans le cas d'un chargement thermo-mécanique. Il convient donc de tenir compte de ces effets afin de modéliser correctement le comportement effectif de ces matériaux microhétérogènes.

## 2.5 LES MODELES POUR LES MATERIAUX HETEROGENES

La discussion précédente centrée autour des problèmes élémentaires d'inclusion a permis d'illustrer l'importance des phénomènes de concentration de contraintes d'origine élastique, thermique et plastique.

Telles que, les formules précédentes ne peuvent être utilisée directement pour décrire le comportement global car il manque :

- les lois de comportement locales
- les relations ( de moyenne ) entre grandeurs locales et macroscopique.

De plus les matériaux composites sont rarement dans la situation d'un milieu hétérogène dilué, c'est à dire que les interactions entre

les renforts sont négligées dans les formules précédentes.

Il faut donc compléter la discussion précédente. Nous rappelons les différents modèles développés pour approcher le comportement effectif global d'un matériau microhétérogène.

Au delà des modèles "simplistes" qui supposent que les contraintes ou les déformations sont uniformes (Voigt [5], Reuss [6], Taylor [7], Sachs [8].....).

Kröner a proposé une formulation autocohérente permettant de déterminer le comportement effectif élastique et plastique des matériaux microhétérogènes [9], [10]. Dans ce cas les interactions entre un grain particulier et tous les autres, sont assimilées à celle entre le grain considéré et un milieu homogène constitué d'un matériau équivalent dont le comportement est celui du polycristal pris globalement. Le milieu est soumis à un chargement uniforme à l'infini pour lequel on évalue la déformation dans chaque inclusion. À partir du champ de déformation, le comportement élastique ou élastoplastique macroscopique est alors déterminé.

Hill [11] a aussi proposé une formulation autocohérente dans le cas des matériaux microhétérogènes.

Il considère que l'inclusion dans une matrice infinie de module  $L$  subit un incrément de déformation plastique  $d\varepsilon^p$  tel que l'incrément de contrainte soit:

$$d\sigma^i = d\Sigma + L^* (dE - d\varepsilon^i)$$

$L^*$  est obtenu en résolvant le problème de l'inclusion dans une matrice infinie de comportement toujours donné par  $L$ .

ou  $d\epsilon^i$  est l'incrément de déformation totale pour l'inclusion  $i$ .

Partant des hypothèses telles que

$$d\sigma^i = L_c d\epsilon^i \quad d\Sigma = L dE$$

$$dE = \overline{d\epsilon^i} \quad \text{moyenne des incréments de déformations locaux}$$

$$d\Sigma = \overline{d\sigma^i} \quad \text{moyenne des incréments de contraintes locaux}$$

On en arrive à la relation implicite:

$$L = L_c^i (L_c^i + L^*)^{-1} (L + L^*)$$

$L_c$  : modules tangents d'un grain particulier

$L$  : modules tangents du polycristal et de la matrice. La complexité de cette approche vient du fait que  $L^*$  dépend de manière complexe de  $L$ .

Kröner a aussi proposé des méthodes statistiques concernant les propriétés linéaires des milieux microhétérogènes à comportements linéaires [12]. Bien que la solution obtenue soit rigoureuse elle présente le désavantage d'être difficile à mettre en oeuvre. De plus une approche similaire dans le cas de la thermoélastoplasticité

n'est pas aussi facile.

Ces différents modèles polycristallins constituent les modèles de base .Suivant certaines restrictions plus ou moins poussées, ils permettent d'évaluer le comportement élastoplastique des matériaux microhétérogènes.Des généralisations de ces différents procédés sont apportées dans le cas des composites .

Par exemple Hutchinson [13] a proposé une extension au cas des composites du modèle de Hill pour les métaux polycristallins.

Lipinski P. et Berveiller M. [14] ont généralisé la méthode statistique de Kröner au cas des grandes déformations élastoplastiques des polycristaux.

Dans ce travail nous reprenons la démarche générale des méthodes statistique en cherchant à écrire le problème thermomécanique sous forme d'équation intégrale et en la résolvant par une approche autocohérente.

Dans notre cas nous restreindrons l'étude aux petites déformations bien que la théorie présentée dans le chapitre 3 peut être appliquée aux grandes déformations avec certaines restrictions.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux différents paramètres microphysiques principaux qui apparaissent importants à prendre en compte ,afin de modéliser correctement le comportement des matériaux composites à matrice métallique.



## 2.6 LES PARAMETRES MICROPHYSIQUES

---

Les composites à matrice métallique sont des matériaux microhétérogènes à plusieurs échelles :

- hétérogène entre renfort et matrice
- hétérogène pour les grains de la matrice
- hétérogène à l'intérieur des grains |
  - déformation plastique hétérogène
  - présence possible de précipités

Le problème général de l'homogénéisation de tels matériaux est donc très complexe . On peut l'attaquer de différentes manières en considérant successivement les cas :

- d'un matériau biphasé:fibres+matrice homogène (mono ou polycristalline).
- d'un matériau polycristallin à renforts : fibre+matrice polycristalline )
- d'un matériau à plusieurs échelles d'hétérogénéité, fibres polycristalline, matrice polycristalline ou polyphasée, grains avec précipités etc....

La première approche ne nous semble pas intéressante pour deux raisons:

- la difficulté d'avoir une bonne loi "phénoménologique" pour la matrice.
- on néglige certaines caractéristiques microstructurales de la matrice.

La troisième approche étant trop complexe, nous nous limitons à la seconde. Pour cette approche, on peut distinguer plusieurs grandes familles de paramètres qui ont une forte influence sur le comportement mécanique de l'agrégat déformé thermoélastoplastiquement.

a) A une échelle microscopique, la multiplication des dislocations et leur répartition spatiale (cellules de dislocation) modifient l'état mécanique de la matrice (écrouissage) ou de plus, la forme, l'orientation morphologique et la fraction volumique des renforts thermoélastique jouent un rôle prédominant.

La déformation plastique des grains est liée à la nature du réseau, celui-ci définissant le nombre et le type de système de glissement. Dans notre cas, la déformation de la matrice sera décrite par les glissements plastiques sur ces systèmes de glissement.

b) A l'échelle intergranulaire la différence de comportement plastique entre les grains de la matrice et les fibres, la désorientation relative des grains de la matrice constituent des sources d'incompatibilités plastiques.

Les contraintes internes ainsi développées peuvent être soit relâchées par déformation plastique ou contribuées à un écrouissage macroscopique.

Les joints de grains ou de phase dans le composite ont deux fonctions primordiales, d'une part il peuvent être considérés comme passifs servant uniquement d'obstacles au mouvement des dislocations d'autre

part il peuvent être considérés comme actifs constituant des sources et des puits de dislocations. L'analyse des phénomènes intervenant dans la région intergranulaire est nécessaire pour permettre d'étudier correctement la réponse à une sollicitation macroscopique. Elle ne sera cependant pas abordée directement ici.

c) L'hétérogénéité des coefficients de dilatation entre la fibre et la matrice contribue aux développements d'incompatibilités thermiques.

d) La présence d'une texture morphologique et topologique dans le cas d'un composite et l'évolution de la texture cristallographique constituent des facteurs prédominants pour les procédés de mise en forme.

Les modèles classiques utilisés pour étudier le comportement thermomécanique des matériaux microhétérogènes ne prennent pas en considération ou pas suffisamment les caractéristiques physiques précédentes du composite.

Dans ce travail on se propose d'étudier le comportement thermomécanique inélastique des composites à matrice métallique. Le comportement envisagé est limité à la thermoélastoplasticité sans endommagement et les mécanismes physiques à l'origine de la plasticité de la matrice sont associés aux glissements plastiques cristallographiques.

Dans le chapitre 3, on rappelle la forme générale des relations de comportement locales décrivant le comportement thermoélastoplastique. Dans l'approche présentée ici, la température n'intervient que par l'intermédiaire de la dilatation thermique. En introduisant les tenseurs localisations, reliant les champs mécaniques locaux aux chargements thermomécaniques, les relations de moyennes usuelles de Hill-Mandel permettront de déduire le comportement global.

Les tenseurs localisations sont évalués à partir d'une approximation autocohérente de l'équation intégrale thermomécanique établie. Les résultats numériques sont présentés dans le dernier chapitre.

## 2.7 BIBLIOGRAPHIE

---

- (1) Lemaitre J., "Modèles rhéologiques et lois d'écoulement", Ecole d'Ete de Métallurgie Physique de Villars-sur-Ollon, édition du CNRS septembre 1975.
- (2) Neumann P. and Haasen P., "Work-hardening Theory of Fibre-reinforced Composites", Institut für Metallphysik, Universität Göttingen, Germany, Septembre 1970, pp 285,291.
- (3) Eshelby J.D., in Prog. in Solids Mechanics, 2 ed. Sneddon, Hill North Holland, p 89-140 , (1961).
- (4) Kröner E. , Acta. Met. , 26 , 591 , 1978.
- (5) Voigt W. , "Uber die Beziehung Zurischen den beiden Elastizitäts Konstanten isotropes körper , Wied , Ann , Volume 38 , 1889 , pp 573-587.
- (6) Reuss A. , "Berechnung der sliessgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für ein Kristall, Z. Ang. math. mech. , 1929, vol. 9, p49-58.
- (7) Taylor G.I., J. inst. Metals, 62, 307, 1938.
- (8) Sachs G., Z. des V.D.I. , 72, 734, 1928.
- (9) Kröner E. , " Linear Properties of Random Media : The Systematic Theory" (15<sup>o</sup> Colloque du groupe français de rhéologie, Paris, 1980)
- (10) Kröner E. , " Kontinuums theorie der Versetzungen und Eigenspannungen" , Springer Verlag (1958).
- (11) Hill R. , "Continuum Micro-Mechanisms of Elastoplastic Polycrystals" (J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, 1905, p.89)
- (12) Kröner E. , "Statiscal Modelling", Elsevier Appl. Science London, NewYork 1986 (from Modelling Small Deformations of Polycrystals) pp 229-291.
- (13) Hutchinson J.W., "Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites" , Proc. Roy. Soc. Lond. A. 319, 247-272 (1970).
- (14) Lipinski P. , Berveiller M. , " Elastoplasticity of microinhomogeneous metals at large strains", Int. J. Plasticity, à paraitre

## CHAPITRE III

---

<p>LOI DE COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE DES MATERIAUX MICROHETEROGENES</p>
--

### 3.1 INTRODUCTION ET LISTE DES NOTATIONS

---

### 3.2 PROPRIETES THERMOELASTOPLASTIQUES LOCALES

---

- la matrice d'écrouissage
- les systèmes potentiellement actifs
- les modules tangents élastoplastiques locaux
- les cissions critiques
- les amplitudes de glissement
- les contraintes thermiques

### 3.3 HOMOGENEISATION ET LOCALISATION

---

- les tenseurs localisation de déformation mécanique et thermique
- les tenseurs localisation de contrainte mécanique et thermique
- les modules tangents élastoplastiques effectifs
- le comportement thermomécanique macroscopique

### 3.4 EQUATION INTEGRALE THERMOMECHANIQUE

---

### 3.5 SOLUTIONS DE L'EQUATION INTEGRALE

---

3.6 APPROXIMATION AUTO-COHERENTE

3.7 MISE EN OEUVRE

-algorithmes utilisés

3.8 CONCLUSION

3.9 BIBLIOGRAPHIE

### 3.1 INTRODUCTION ET LISTE DES NOTATIONS

Un des avantages du modèle proposé est qu'il ne nécessite pas l'introduction d'une loi de comportement phénoménologique pour la plasticité de la matrice. Dans le paragraphe 3.2 nous présentons les hypothèses retenues pour identifier et décrire le comportement des grains de la matrice, celui des renforts et de l'interface.

Dans le paragraphe 3.3, en introduisant les tenseurs localisations, reliant les champs mécaniques locaux aux chargements thermomécaniques, les relations de moyennes de Hill-Mandel permettront de déduire le comportement global. Les tenseurs localisations seront évalués à partir d'une approximation autocohérente de l'équation intégrale thermomécanique (paragraphe 3.4, 3.5, 3.6).

Par souci de clarté, une liste des notations utilisées est proposée.

$B_{ijkl}(r)$  : tenseur concentration de contrainte mécanique.

$b_{ij}(r)$  : tenseur concentration de contrainte thermique.

$C_{ijkl}$  : tenseur constantes d'élasticité.

$\dot{\epsilon}_{ij}^T(r)$  : tenseur taux de déformation local.

$\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^T$  : tenseur taux de déformation macroscopique.

$\dot{\sigma}_{ij}(r)$  : tenseur taux de contrainte local.

$\dot{\bar{\sigma}}_{ij}$  : tenseur taux de contrainte macroscopique.

$\dot{\epsilon}_{ij}^{th}(r)$  : tenseur taux de déformation thermique local.

$\dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^{th}(r)$  : tenseur taux de déformation thermique macroscopique.

$I_{ijkl}$  : tenseur identité.



- $l_{ijkl}(r)$ : modules tangents élastoplastiques locaux  
 $L_{ijkl}^o$  :modules tangents élastoplastique du milieu homogène fictif  
 $L_{ijkl}^{eff}$  :modules tangents élastoplastiques effectifs  
 $G_{ij}$  :tenseur de Green  
 $\delta l_{ijkl}(r)$ :variation des modules tangents élastoplastiques locaux  
 $H^{mn}$  :matrice d'écrouissage  
 $u_i(r)$  : champ de déplacement local  
 $u_i^o(r)$  : champ de déplacement du milieu homogène fictif  
 $R_{ij}^h$  : facteur de Schmid sur le système h  
 $Q_{ij}^h$  : partie antisymétrique du tenseur orientation des systèmes de glissement.  
 $w_{ij}(r)$ : tenseur rotation local  
 $W_{ij}$  :tenseur rotation macroscopique  
 $\dot{\gamma}^h$  : vitesse de glissement sur le système h  
 $\sigma_c^n$  : Cission critique sur le système h  
 $A_{ijkl}(r)$ : tenseur concentration de déformation macroscopique  
 $a_{ij}(r)$ : tenseur concentration de déformation thermique  
 $\alpha_{ij}(r)$ :tenseur des coefficients de dilatation thermique local  
 $\alpha_{ij}^{eff}$  :tenseur des coefficients de dilatation thermique effectifs  
 $\theta$  : variation de température  
 $P_{ijkl}(r)$ : complaisances tangentes plastiques dépendant du chargement local

### 3.2 PROPRIETES THERMOELASTOPLASTIQUES LOCALES

Bien que le comportement macroscopique soit thermoélastoplastique, localement le comportement est fortement hétérogène: thermoélastique pour les fibres (limite d'élasticité importante), thermoélastoplastique pour les grains de la matrice.

Nous définissons par conséquent sous sa forme générale la loi de comportement locale thermoélastoplastique avec laquelle il est possible de prendre en compte la différence de limite élastique fibre ,grains de la matrice.

#### a) Thermoélastoplasticité

En un point  $r$  du milieu , différents mécanismes physiques contribuent à la vitesse de déformation totale locale  $\dot{\epsilon}^T(r)$  telle que :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T(r) = \dot{\epsilon}_{ij}^e(r) + \dot{\epsilon}_{ij}^{th}(r) + \dot{\epsilon}_{ij}^p(r) \quad (1)$$

où

- a)  $\dot{\epsilon}_{ij}^e(r)$  est la vitesse de déformation élastique locale associée aux contraintes internes et appliquées.

$\dot{\epsilon}_{ij}^e(r)$  est liée à la vitesse des contraintes locales  $\dot{\sigma}_{ij}(r)$  par la relation de comportement locale :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e(r) = S_{ijkl}(r) \dot{\sigma}_{kl}(r) \quad (2)$$

$S_{ijkl}$  : tenseur des complaisances élastiques locales

- b) Si la variation de température  $\theta$  est considérée comme uniforme dans le solide, la vitesse de la partie thermique

$$\text{s'écrit: } \dot{\epsilon}_{ij}^{th}(r) = \alpha_{ij}(r) \dot{\theta} \quad (3)$$

où  $\alpha_{ij}(r)$  désignent les coefficients de dilatation thermique.

c) Le dernier terme de la relation (1) correspond à la vitesse de déformation inélastique associée aux glissements plastiques.

Dans le paragraphe 3.b nous verrons que la loi de comportement associée à la plasticité s'écrit sous la forme:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P(r) = P_{ijkl}(r) \dot{\sigma}_{kl}(r) + t_{ij}(r) \dot{\theta} \quad (4)$$

$P_{ijkl}$ : tenseur des complaisances tangentes plastiques

$t_{ij}$ : tenseur des déformations anélastiques associées à la variation des cissions critiques en fonction de la température.

On a donc :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T(r) = (S_{ijkl}(r) + P_{ijkl}(r)) \dot{\sigma}_{kl}(r) + (\alpha_{ij}(r) + t_{ij}(r)) \dot{\theta} \quad (5)$$

ou encore sous forme inverse:

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = l_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}^t(r) - m_{ij}(r) \dot{\theta} \quad (6)$$

$$\text{avec } l_{ijkl} = (S_{ijkl} + P_{ijkl})^{-1}$$

$l_{ijkl}$ : module tangent élastoplastique local.

$$\text{et } m_{ij} = (S_{ijkl} + P_{ijkl})^{-1} (\alpha_{kl} + t_{kl}) \quad (7)$$

Il est important de remarquer que ce type d'approche nécessite un suivi très rigoureux de l'évolution des différents paramètres microphysiques au cours du chargement (plasticité).

Afin de connaître le comportement de l'agrégat, il faut pouvoir connaître à chaque instant l'évolution de la cission critique sur chaque système de glissement et cela pour chaque grain comme nous le verrons dans le paragraphe suivant.

### b) Plasticité

Dans ce cas, le mécanisme élémentaire retenu pour la déformation plastique d'un grain est le glissement plastique cristallographique pour lequel on utilise une loi de Schmid généralisée. La loi de Schmid impose alors la condition nécessaire pour l'écoulement plastique sur le système de glissement  $m$  :

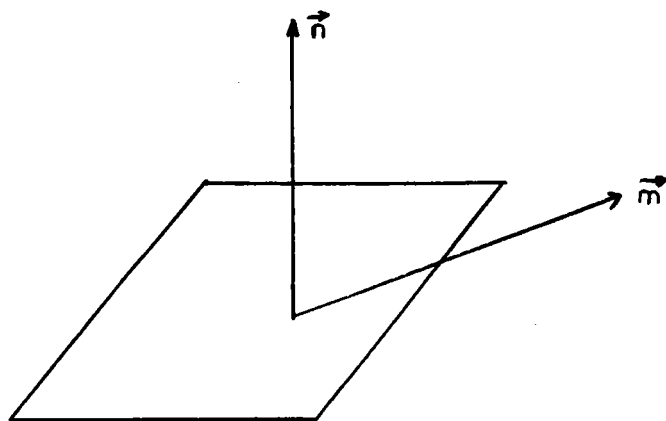
$$\tau_C^m = |\tau_r^m| \quad (8)$$

$\tau_C^m$  et  $\tau_r^m$  sont respectivement la cission critique et réduite sur le système  $m$ .

Considérons d'abord un monocristal possédant un seul système de glissement.

#### Pour un seul système de glissement

Le plan de glissement a pour normale  $\vec{n}$  de composantes  $n_i$ . La direction de glissement est définie par  $\vec{m}$  de coordonnées  $m_i$ .



Le champ de déplacement est alors de la forme suivante :

$$u_k = \gamma (n_i x_i) m_k \quad (9)$$

$$u_{k,i} = \gamma n_i m_k$$

Par conséquent  $\epsilon_{ik}^p = \frac{1}{2} (u_{k,i} + u_{i,k})$  (10)

$$= \frac{1}{2} (n_i m_k + n_k m_i) \gamma$$

Si on pose  $R_{ij}^m = \frac{1}{2} (m_i^m n_j^m + m_j^m n_i^m)$ , on a les relations classiques :

$$\epsilon_r^m = m_i^m n_j^m \sigma_{ij}^m = R_{ij}^m \sigma_{ij}^m \quad (11)$$

$$d\epsilon_{ik}^p = R_{ik}^m d\gamma^m \quad (12)$$

$\sigma_{ij}$  étant la contrainte dans le grain.

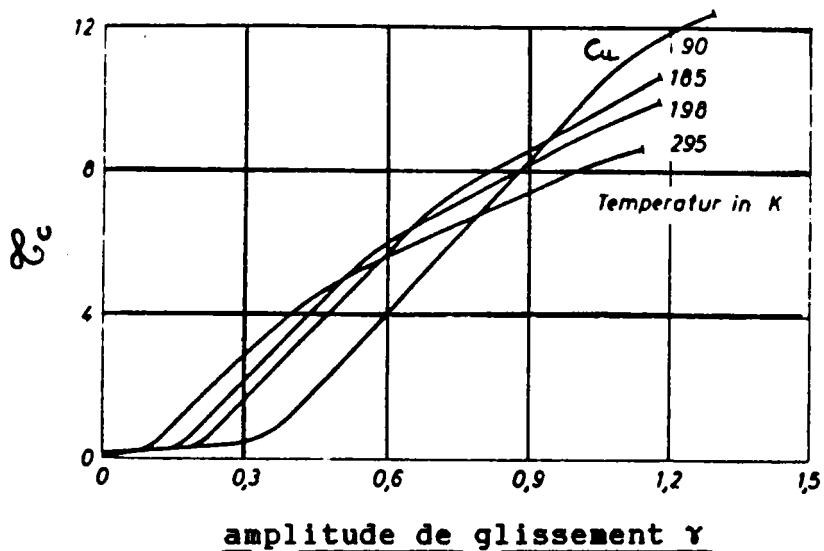
La cission critique sur le système  $m$  définie par  $\tau_c^m$  dépend, d'une part de l'amplitude de glissement  $\gamma$  et d'autre part de la température telle que :

$$\tau_c^m (\gamma, \theta)$$

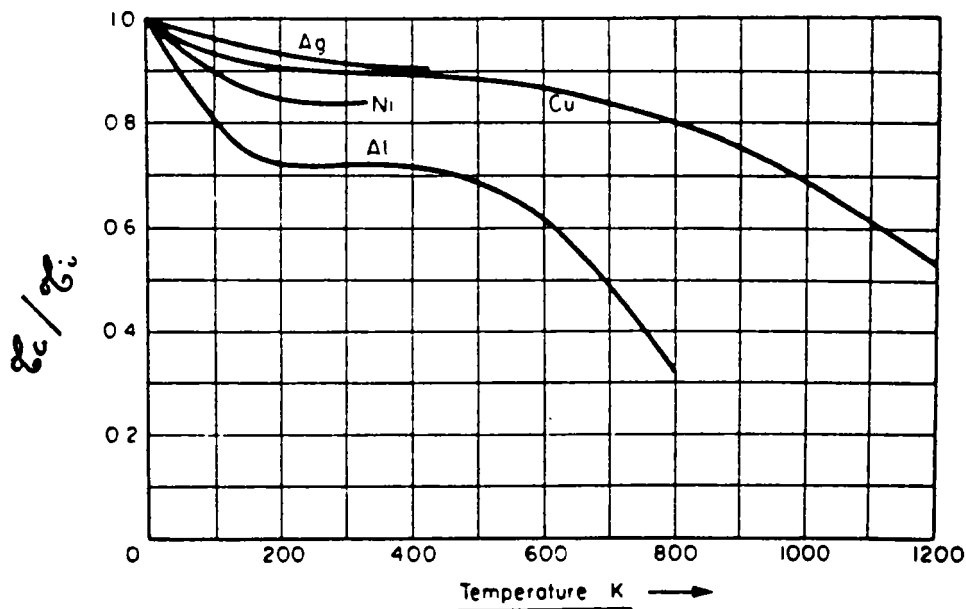
de sorte que :

$$d \tau_c = \frac{\partial \tau_c}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial \tau_c}{\partial \theta} d\theta \quad (13)$$

Ceci apparait sur les figures (1) et (2).



(1) évolution de la cission critique en fonction de l'amplitude de glissement pour du cuivre d'après Diehl and Barner [1].



(2) évolution du rapport  $\tau_c / \tau_0$  en fonction de la température d'après Mitchel [2]. ( $\tau_0$  est la cission critique à 0°K)

D'après la loi de schmid, il est possible de définir la fonction seuil  $f(\sigma_{ij}, Y, \theta)$  qui est de la forme:

$$\sigma_{ij} R_{ij} - \sigma_c(Y, \theta) = 0 \quad \text{ou } \sigma_c \text{ est la cission critique du système étudié.} \quad (14)$$

On peut dire que:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial Y} dY \quad (15)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}}_{d_Y f} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial Y} dY}_{d_{\sigma, \theta} f} \quad (16)$$

$d_Y f$  variation de la fonction  $f$  à paramètres d'érouissage constants.

$d_{\sigma, \theta} f$  variation de la fonction  $f$  à contrainte et température imposées constantes.

Utilisant la propriété de normalité des matériaux standards, on a pour l'écoulement plastique:

$$d\varepsilon_{ij}^P = K \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d_Y f \quad \text{avec } K \text{ paramètre d'érouissage}$$

A température constante ou décroissante

D'après la figure (1) il est possible de définir le rapport  $\frac{dY}{d\sigma}$  qui vaut pour le cuivre et l'aluminium  $K = \frac{250}{\mu}$  en stade II.

$$d'où \quad d\varepsilon_{ij}^P = \frac{250}{\mu} R_{ij} R_{kl} d\sigma_{kl} \quad (17)$$

A température non constante et croissante

$$d\varepsilon_{ij}^P = K R_{ij} d_Y f \quad (18)$$

$$d\varepsilon_{ij}^P = K R_{ij} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta \right) \quad (19)$$

Pour un système de glissement on a par conséquent les expressions:

$$d\epsilon_{ij}^P = K R_{ij} R_{kl} d\sigma_{kl} + K R_{ij} a_{\theta} d\theta \quad \text{pour } \theta > 0 \quad (20)$$

ou  $a_{\theta}$  est un coefficient de sensibilité à la température qui peut être déduit de la figure (2)

$$\text{ou} \quad d\epsilon_{ij}^P = \frac{250}{\mu} R_{ij} R_{kl} d\sigma_{kl} \quad \text{pour } \theta \leq 0 \quad (21)$$

Il est important de remarquer que l'évolution de la cission critique en fonction de la température suit trois stades distincts que l'on peut noter sur la figure (2).

Pour l'aluminium , on a par exemple:

$$0 < \theta < 200 \text{ K} \quad a_{\theta} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \theta} = - \frac{0.3}{200} \sigma_i$$

$$200 < \theta < 400 \text{ K} \quad a_{\theta} = 0 \text{ nous n'avons pas d'effet thermique}$$

$$400 < \theta \quad a_{\theta} = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \theta} = - \frac{0.21}{200} \sigma_i$$

Si on compare la partie thermique à la partie mécanique on a pour

$$R_{ij} \approx \frac{1}{2} \quad \text{que :}$$

$$\begin{aligned} d\epsilon_{ij}^P &\approx \frac{250}{\mu} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d\sigma - \frac{250}{\mu} \cdot \frac{1}{2} 10^{-3} \sigma_i d\theta \\ &\approx \frac{250}{2} \left( \frac{d\sigma}{2\mu} - \frac{10^{-3}}{\mu} \sigma_i d\theta \right) \end{aligned}$$



Pour les métaux usuels  $\epsilon_i \approx \frac{\mu}{100}$

Donc

$$d\epsilon^P \approx \frac{250}{2} \left( \frac{d\sigma}{2\mu} - 10^{-5} d\theta \right)$$

Les valeurs usuelles de  $\frac{d\sigma}{2\mu}$  sont de l'ordre de  $10^{-3}$ . Les effets thermiques sur la déformation plastique vont être sensibles pour des variations de température de l'ordre de  $10^2$  K.

Cependant, cette analyse ne prend pas en compte le palier athermique ( $\epsilon(\theta)$  indépendant de  $\theta$ ), ni la viscoplasticité qui apparait aux températures plus élevées. On peut donc raisonnablement éliminer l'effet thermique du comportement plastique des grains de la matrice.

Pour tous les systèmes de glissement

Par conséquent, pour plusieurs systèmes de glissement actifs on a sous forme incrémentale:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \sum_m R_{ij}^m \dot{\gamma}^m \quad (22)$$

$$\dot{\omega}_{ij}^P = \sum_m Q_{ij}^m \dot{\gamma}^m \quad (23)$$

$\omega^P$  désigne la rotation plastique dont la connaissance est néces-

saire au calcul des textures.

La texture développée étant variable selon la proportion des fibres, leur répartition, les caractéristiques élastiques de la fibre et de la matrice et par souci de rigueur il est intéressant de ne pas omettre d'en tenir compte.

Actuellement, l'écroutissement intracristallin est plutôt décrit à l'aide d'une matrice d'écroutissement [4],[5] reliant la vitesse de la cission critique sur les systèmes de glissement à la vitesse du glissement plastique sur les systèmes actifs.

L'écroutissement du monocristal sera pris en compte par les équations linéaires:

$$\dot{\epsilon}_C^m = \sum_n H^{mn} \dot{\gamma}^n \quad (24)$$

$\dot{\epsilon}_C^m$  est la cission critique sur le système m.

Chaque terme de la matrice d'écroutissement H représente les interactions entre deux systèmes de glissement (m,n) .

La matrice étant plus ductile que la fibre, dans ce qui suit nous

nous intéressons uniquement à la description de l'écroutissage latent d'un monocristal de la matrice. Compte tenu de la multitude de réseaux cristallins et de la difficulté à décrire les différents mécanismes de plastification nous restreindrons l'étude au système cubique à faces centrées, celui-ci étant un des plus fréquemment rencontrés pour les alliages constituant la matrice du composite.

Pour les monocristaux C.F.C ( cuivre , aluminium , argent...), les courbes d'écroutissage présentent généralement trois stades (fig 3):

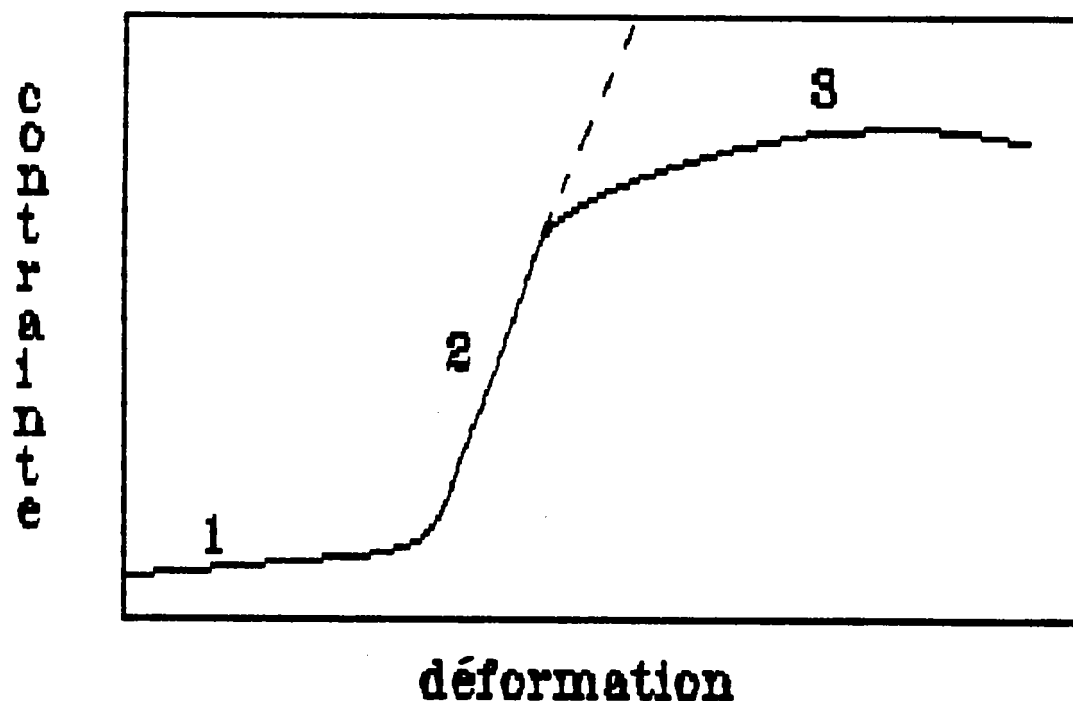


fig 3. Courbe d'écroutissage pour un monocristal  
Mc Lean [3].

- Le stade I correspondant au glissement facile sur un seul système de glissement. La pente est de l'ordre de  $\mu 10^{-4}$ .
- Le stade II pour le glissement multiple ou double dont la pente est de l'ordre de  $4 \mu 10^{-3}$ .

-Le stade III correspondant au glissement dévié engendré par des contraintes internes élevées. Dans ce cas les dislocations ont tendance à contourner l'obstacle en changeant de plan de glissement.

Le stade I est pratiquement absent dans le cas d'un polycristal, plus précisément dans le cas d'un composite à matrice métallique; car le développement de fortes contraintes internes dues à l'hétérogénéité de comportement donne lieu rapidement au glissement multiple.

La matrice d'écroutissage H reflète divers types d'interactions à courte distance entre les familles de dislocations qui leur sont associées.

Le durcissement latent étant toujours supérieur à l'autodurcissement ( $H^{mn} \gg H^{mm}$  pour  $m \neq n$ ).

On peut distinguer quatre familles d'interactions par ordre croissant d'intensité.

-Les interactions entre systèmes d'une même famille ( autodurcissement ).

-Les interactions entre systèmes ne pouvant pas créer de réactions de jonction entre les dislocations qui leurs appartiennent ( coplanaires ).

193

-Les interactions entre systèmes créant des réactions de jonction glissiles.

-Les interactions entre systèmes créant des réactions de jonctions sessiles ( barrières de Lomer-Cottrel ).

Les termes de la matrice H sont pris constant, ce qui s'accorde correctement avec les propriétés du stade II des monocristaux CFC. Pour les grains de la matrice, la valeur initiale de la cission critique est prise identique pour tous les systèmes de glissement du monocristal et du polycristal la constituant. A partir de mesures expérimentales de l'écroutissage latent Franciosi P. , Berveiller M. and A. Zaoui [4] , Franciosi [5] nous admettons que la matrice d'écroutissage peut être définie par seulement deux termes  $H_{fa}$  et  $H_{fo}$  qui représentent les interactions faibles et fortes.

Cette matrice constitue une première approche des phénomènes réels tels que les interactions , créations et annihilation des dislocations qui ont lieu au cours de la déformation plastique du monocristal.

La forme de la matrice H est la suivante, on y distingue quatre constantes de valeurs  $H_0$  proche de  $H_1$  et  $H_2$  proche de  $H_3$  nous avons pris  $H_1=H_0=H_{fa}$  et  $H_2=H_3=H_{fo}$ .

A2	A3	A6	B2	B4	B5	C1	C3	C5	D1	D4	D6	
H0	H1	H1	H1	H2	H2	H1	H2	H3	H1	H3	H2	A2
H1	H0	H1	H2	H1	H3	H2	H1	H1	H3	H1	H2	A3
H1	H1	H0	H2	H3	H1	H3	H2	H1	H2	H2	H1	A6
H1	H2	H2	H0	H1	H1	H1	H1	H3	H2	H1	H2	B2
H2	H1	H3	H1	H0	H1	H3	H1	H2	H2	H1	H2	B4
H2	H3	H1	H1	H1	H0	H2	H2	H1	H3	H2	H1	B5
H1	H2	H3	H1	H3	H2	H0	H1	H1	H1	H2	H2	C1
H2	H1	H2	H3	H1	H2	H1	H0	H1	H2	H1	H3	C3
H3	H2	H1	H2	H2	H1	H1	H1	H0	H2	H3	H1	C5
H1	H3	H2	H1	H2	H3	H1	H2	H2	H0	H1	H1	D1
H3	H1	H2	H2	H1	H2	H2	H1	H3	H1	H0	H1	D4
H2	H2	H1	H3	H2	H1	H2	H3	H1	H1	H1	H0	D6

Les lettres A,B,C,D représentent les quatres plans cristallographiques de type {111}:

$$A \rightarrow (\bar{1} 1 1)$$

$$B \rightarrow (1 1 1)$$

$$C \rightarrow (\bar{1} \bar{1} 1)$$

$$D \rightarrow (1 \bar{1} 1)$$

et les chiffres les directions de glissement:

$$1 \rightarrow \langle 0 1 1 \rangle$$

$$2 \rightarrow \langle 0 \bar{1} 1 \rangle$$

$$3 \rightarrow \langle 1 0 1 \rangle$$

$$4 \rightarrow \langle \bar{1} 0 1 \rangle$$

$$5 \rightarrow \langle \bar{1} 1 0 \rangle$$

$$6 \rightarrow \langle 1 1 0 \rangle$$

Chaque terme de H représente les interactions entre deux systèmes de glissement dans le monocristal.

La matrice d'écrouissage H permet de prendre en compte de façon rigoureuse ce que l'on appelle les actions de contact .

C'est à dire les interactions intervenant entre dislocations , par répulsion où attraction, par combinaison partielle, par séparation de la jonction formée , Saada G. [6].

Mais il est évident que ce n'est pas le seul mécanisme intervenant dans l'écrouissage du monocristal .Il peut y avoir présence de précipités obstacles au mouvement des dislocations.L'hétérogénéité de la densité de dislocations au sein du monocristal ,l'arrangement particulier des dislocations contribuent au développement à distance de contraintes internes qui peuvent favoriser ou empêcher le franchissement de dislocations obstacles par les dislocations mobiles. La matrice d'écrouissage étant clairement définie, il nous est possible d'obtenir un ensemble d'équations et d'inéquations pour le le comportement du monocristal qui s'écrivent sous la forme:

$$\text{-Si le système est inactif } |\sigma_{ij}^{R^m}| < |\tau^0 + \sum_m H^{mn} \gamma^n| \quad (25)$$

-Le système est potentiellement actif si:

$$|\sigma_{ij}^{R^m}| = |\tau^0 + \sum_m H^{mn} \gamma^n| \quad (26)$$

-Le système se désactive si

$$|d(\sigma_{ij} R_{ij}^m)| < \left| \sum_m H^{mn} d\gamma^n \right| \quad (27)$$

- Le système reste actif si

$$|d(\sigma_{ij} R_{ij}^m)| = \left| \sum_m H^{mn} d\gamma^n \right| \quad (28)$$

Lorsque la texture initiale du matériau, ainsi que le comportement des monocristaux sont connus, il est possible de connaître à tout instant le nombre et la nature des systèmes potentiellement actifs et la vitesse de glissement plastique sur chaque système. La loi de comportement locale peut être alors mise sous la forme:

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = l_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}^T - m_{ij}(r) \dot{\theta} \quad (29)$$

avec

$$l_{ijkl} = C_{ijkl} - \sum_m C_{ijrs} R_{rs}^m R_{pq}^n C_{pqkl} N^{nm} \quad (30)$$

et

( voir annexel )

$$m_{ij} = l_{ijrs} \alpha_{rs} \quad (31)$$

### Pour les fibres

Dans le cas où les fibres ont un comportement thermoélastique linéaire, il conviendra de calculer la rotation élastique des fibres en tenant compte des incompatibilités plastiques et élastiques existantes à l'interface.



Pour les grains de la matrice

L'évolution de la texture peut aussi être prise en compte grâce au calcul de la vitesse de rotation du réseau cristallin  $\dot{\omega}^{ei}$  par l'intermédiaire de relations approchées, Berveiller [7] :

$$\dot{\omega}_{ij}^{ei} = - \dot{\omega}_{ij}^{pi} = - \sum Q_{ij}^{mi} \dot{\gamma}^{mi} \quad (32)$$

où  $i$  est l'indice repérant le grain pour lequel il est possible de suivre l'évolution de son orientation cristallographique et par conséquent la formation de nouvelles textures cristallographiques.

Lorsque la vitesse de glissement plastique  $\dot{\gamma}^m$  sur les différents systèmes de glissement potentiellement actifs peut être calculée; il en va de même pour la variation des trois angles d'Euler  $\phi_1, \phi, \phi_2$  introduits par Bunge [8], définissant l'orientation de chaque grain. Les relations ainsi obtenues s'écrivent à l'aide de (32):

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \frac{\sin \phi_2}{\sin \phi} * \dot{\omega}_{23}^p + \frac{\cos \phi_2}{\sin \phi} * \dot{\omega}_{31}^p \\ \dot{\phi} &= \cos \phi_2 * \dot{\omega}_{23}^p - \sin \phi_2 * \dot{\omega}_{31}^p \\ \dot{\phi}_2 &= \dot{\omega}_{12}^p - \dot{\phi}_1 * \cos \phi \end{aligned} \quad (33)$$

La principale difficulté à présent réside dans la détermination du comportement macroscopique effectif, sachant que pour la matériau composite à matrice métallique, il faudra pouvoir tenir compte des différents microparamètres physiques évoqués dans le chapitre 2.

### 3.3 HOMOGENEISATION ET LOCALISATION

Les propriétés locales étant clairement définies, nous cherchons à identifier la loi de comportement globale reliant les contraintes macroscopiques  $\dot{\Sigma}$  aux vitesses de déformations correspondantes  $\dot{E}^T$  et à la variation de température  $\dot{\theta}$ .

Les contraintes et les déformations  $\dot{\Sigma}$  et  $\dot{E}^T$  sont reliés aux grandeurs locales correspondantes par les relations de moyenne usuelles:

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int \dot{\sigma}_{ij}(r) dV \equiv \overline{\dot{\sigma}_{ij}} \quad (34)$$

$$\dot{E}_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^T(r) dV \equiv \overline{\dot{\epsilon}_{ij}^T} \quad (35)$$

Afin de décrire le comportement global à partir des relations locales et de la microstructure du matériau, deux relations de localisation reliant les grandeurs locales aux quantités macroscopiques correspondantes sont introduites.

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = B_{ijkl}(r) \dot{\Sigma}_{kl} + b_{ij}(r) \dot{\theta} \quad (36)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T(r) = A_{ijkl}(r) \dot{E}_{kl}^T + a_{ij}(r) \dot{\theta} \quad (37)$$

où B et b sont les tenseurs concentration de contraintes mécaniques et thermique. A, a sont les tenseurs localisation de déformation macroscopique et thermique.

La recherche d'une loi de comportement globale de la forme:

$$\dot{\Sigma}_{ij} = L_{ijkl}^{eff} \dot{E}_{kl}^T - M_{ij}^{eff} \dot{\theta} \quad (38)$$

s'obtient alors à partir des relations de comportement (5) et (6), des relations de moyenne (34), (35) et des équations (36) et (37) pour la localisation.

Par exemple , en partant de :

$$\hat{\sigma}_{ij} = B_{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl} + b_{ij} \hat{\theta} \quad (39)$$

$$\hat{\epsilon}_{ij} = l_{ijkl}^{-1} \hat{\sigma}_{kl} + \alpha_{ij} \hat{\theta} \quad (40)$$

On a :

$$\hat{\epsilon}_{ij} = l_{ijkl}^{-1} (B_{klpq} \hat{\epsilon}_{pq} + b_{kl} \hat{\theta}) + \alpha_{ij} \hat{\theta} \quad (41)$$

Soit à partir des relations de moyenne (35):

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \overline{(l_{ijkl}^{-1} B_{klpq})} \hat{\epsilon}_{pq} + \overline{(l_{ijkl}^{-1} b_{kl} + \alpha_{ij})} \hat{\theta} \quad (42)$$

et on identifie:

$$L_{ijkl}^{eff}^{-1} = \overline{l_{ijpq}^{-1} B_{pqkl}} \quad (43)$$

$$\alpha_{ij}^{eff} = \overline{l_{ijkl}^{-1} b_{kl} + \alpha_{ij}} \quad (44)$$

De manière analogue en partant de:

$$\hat{\epsilon}_{ij} = A_{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl} + a_{ij} \hat{\theta}$$

$$\hat{\sigma}_{ij} = l_{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl} - m_{ij} \hat{\theta}$$

On obtient:

$$\hat{\sigma}_{ij} = l_{ijkl} (A_{klpq} \hat{\epsilon}_{pq} + a_{kl} \hat{\theta}) - m_{ij} \hat{\theta}$$

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \overline{l_{ijkl} A_{klpq}} \hat{\epsilon}_{pq} + \overline{l_{ijkl} a_{kl} - m_{ij}} \hat{\theta}$$

Par conséquent :

$$L_{ijkl}^{eff} = \overline{l_{ijpq} A_{pqkl}} \quad (45)$$

$$M_{ij}^{eff} = \overline{l_{ijkl} a_{kl} - m_{ij}} \quad (46)$$

Remarques

En fait les tenseurs A , B , a , b ne sont pas indépendants .

En utilisant les équations (36),(38) on a :

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = B_{ijkl}(r) [ L_{klmn}^{eff} \dot{E}_{mn}^T - M_{kl}^{eff} \dot{\theta} ] + b_{ij}(r) \dot{\theta} \quad (47)$$

à l'aide de (40) le tenseur taux de déformation locale peut alors s'écrire :

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T(r) = l_{ijkl}^{-1}(r) [ B_{klmn}(r) ( L_{mnpq}^{eff} \dot{E}_{pq}^T - M_{mn}^{eff} \dot{\theta} ) + b_{kl}(r) \dot{\theta} + m_{kl}(r) \dot{\theta} ] \quad (48)$$

On a donc les relations suivantes :

$$A_{ijkl}(r) = l_{ijmn}^{-1}(r) B_{mnpq}(r) L_{pqkl}^{eff} \quad (49)$$

$$a_{ij}(r) = - l_{ijmn}^{-1}(r) [ B_{mnpq}(r) M_{pq}^{eff} - b_{mn}(r) - m_{mn}(r) ] \quad (50)$$

La détermination du comportement thermomécanique macroscopique se ramène alors au calcul de  $L^{eff}$  et  $M^{eff}$  à partir de  $l, m$ , des tenseurs localisation A et a et des relations de moyenne (34) et (35).

Par ailleurs, les relations établies par Levin [9] peuvent être

étendues au cas non linéaire présenté ici.

Nous considérons deux chargements thermomécaniques du même matériau. Pour le premier chargement, on impose  $\theta = \theta^1 = 0$  et  $\dot{\xi} = \dot{\xi}^1 \neq 0$ . Pour le second, on a  $\theta = \theta^2 \neq 0$  et  $\dot{\xi} = \dot{\xi}^2 = 0$ .

L'intégrale

$$I_1 = \int_V \dot{\sigma}_{ij}^1 \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^2 \, dV \tag{51}$$

devient en utilisant les relations  $\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ji}$  et  $\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})$  et l'intégration par parties :

$$I_1 = \int_V \dot{\sigma}_{ij}^1 n_j \dot{u}_i^2 \, dS \tag{52}$$

avec  $\dot{\sigma}_{ij,j}(\underline{x}) = 0$  relations d'équilibre en volume,

Les conditions sur la frontière nous donnant  $\dot{\sigma}_{ij}^1 n_j = \dot{\xi}_{ij}^1 n_j$

et 
$$\dot{E}_{ij}^2 = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^2 \, dV$$

La forme finale de  $I_1$  est donc:

$$I_1 = \dot{\xi}_{ij}^1 \dot{E}_{ij}^2 V \tag{53}$$

Un résultat analogue peut être obtenu pour l'intégrale  $I_2$ :

$$I_2 = \int_V \dot{\sigma}_{ij}^2 \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^1 \, dV \tag{54}$$

mais puisque  $\dot{\xi}^2 = 0$  on obtient  $I_2 = 0$

Sachant que  $I_2 = 0$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_V \dot{\sigma}_{ij}^2 \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^1 dv = \int_V l_{ijkl}^1 (\dot{\epsilon}_{kl}^2 - \alpha_{kl} \dot{\theta}) (l_{ijmn}^{-1} \dot{\sigma}_{mn}^1) dv \\
 &= \int_V l_{ijkl}^1 (l_{klpq}^{-1} \dot{\sigma}_{pq}^2) (l_{ijmn}^{-1} \dot{\sigma}_{mn}^1) dv = 0
 \end{aligned} \tag{55}$$

L'intégrale  $I_1$  peut encore s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_V \dot{\sigma}_{ij}^1 \dot{\epsilon}_{ij}^2 dv = \int_V l_{ijkl}^1 \dot{\epsilon}_{kl}^1 (\alpha_{ij} \dot{\theta} + l_{ijmn}^{-1} \dot{\sigma}_{mn}^2) dv \\
 &= \int_V l_{ijkl}^1 l_{klpq}^{-1} \dot{\sigma}_{pq}^1 (\alpha_{ij} \dot{\theta} + l_{ijmn}^{-1} \dot{\sigma}_{mn}^2) dv
 \end{aligned}$$

ce qui d'après (55) nous donne :

$$I_1 = \int_V \dot{\sigma}_{pq}^1 \alpha_{pq} \dot{\theta} dv = \dot{\epsilon}_{ij}^1 \dot{\epsilon}_{ij}^2 v \tag{56}$$

$$\text{où } \dot{\epsilon}_{ij}^2 = \alpha_{ij}^{\text{eff}} \dot{\theta} \tag{57}$$

avec  $\alpha^{\text{eff}}$  coefficients de dilatation effectifs du polycristal

$$\text{Donc } I_1 = L_{ijkl}^{\text{eff}} \dot{\epsilon}_{kl}^1 \alpha_{ij}^{\text{eff}} \dot{\theta} v = \int_V l_{ijpq}^1 A_{pqkl} \dot{\epsilon}_{kl}^1 \alpha_{ij} \dot{\theta} dv$$

ce qui montre que finalement :

$$M_{kl}^{\text{eff}} = L_{ijkl}^{\text{eff}} \alpha_{ij}^{\text{eff}} = \frac{1}{V} \int_V l_{ijpq}^1 A_{pqkl} \alpha_{ij} dv \tag{58}$$

ou encore

$$M_{kl}^{\text{eff}} = \frac{l_{ijpq}^1 A_{pqkl} \alpha_{ij}}{V} \tag{59}$$

La relation (59) montre qu'il suffit de connaître le tenseur localisation  $A$  pour calculer le tenseur  $M^{eff}$  et  $L^{eff}$ .

On pourrait donc penser que seule la localisation cinématique suffit.

De fait il n'en est rien puisque le tenseur des modules tangents élastoplastiques local ( $l_{ijkl}$ ) dépend des contraintes locales en particulier des contraintes thermiques, ce qui suppose la connaissance de  $a$ .

Afin de connaître les propriétés effectives du matériau, il reste donc à identifier et préciser les tenseurs localisations  $A$  et  $a$ . La détermination de ces tenseurs se fait par l'intermédiaire d'une équation intégrale reliant le gradient de vitesse local du milieu hétérogène aux conditions cinématiques (ou statiques) imposées sur la surface extérieure du solide.

### 3.4 EQUATION INTEGRALE THERMOMECHANIQUE

En élastoplasticité, Berveiller et Zaoui [10] ont formulé une équation intégrale pour les petites déformations. Ici une démarche analogue est utilisée. Nous considérons le milieu hétérogène comme un milieu continu à microstructure devant satisfaire les lois générales de la mécanique des milieux continus.

- L'équilibre statique d'un élément de volume  $dV$  exige que la résultante générale et le moment résultant des forces appliquées

soient nuls. Dans un milieu où la densité de force de volume est  $f$ , l'équilibre exige que  $\sigma$  soit un tenseur symétrique et que :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (60)$$

Dans notre cas les forces volumiques sont supposées nulles.

-les relations de compatibilité, dans le cas des petites déformations auxquelles nous nous limitons compte tenu des faibles déformations macroscopiques obtenues dans le cas des composites.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j}^T + \dot{u}_{j,i}^T) \quad (61)$$

-les relations de comportement locales.

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = l_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}^T(r) - m_{ij}(r) \dot{\theta} \quad (62)$$

D'après l'expression (30) il apparait que le tenseur  $l_{ijkl}$  possède les symétries habituelles du tenseur d'élasticité. Un raisonnement analogue peut être fait pour le tenseur  $m_{ij}$  compte tenue de la symétrie du tenseur de dilatation thermique.



Il a été démontré par Hill [11] que si la loi de comportement locale possède certaines symétries, ces symétries sont retrouvées à l'échelle macroscopique .

En introduisant un milieu homogène (sans microstructure) de comportement  $L^0$ ,  $\alpha^0$  uniforme tel que :

$$l_{ijkl}(r) = L_{ijkl}^0 + \delta l_{ijkl}(r) \quad (63)$$

$$\alpha_{ij}(r) = \alpha_{ij}^0 + \delta \alpha_{ij}(r) \quad (64)$$

$$m_{ij}(r) = m_{ij}^0 + \delta m_{ij}(r) \quad (65)$$

On a à partir des équations (31), (63), (64), (65) :

$$\delta m_{ij}(r) = \delta l_{ijkl} \alpha_{kl}^0 + l_{ijkl}^0 \delta \alpha_{kl} + \delta l_{ijkl} \delta \alpha_{kl} \quad (66)$$

Les équations (60), (61), (62), (63), (64) et (65) où  $L^0$  représente les modules tangents élastoplastiques du milieu homogène fictif, permettent d'obtenir :

$$L_{ijkl}^0 \dot{u}_{k,lj}^T(r) + [\delta l_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}^T(r) - \delta m_{ij}(r) \dot{\theta}]_{,j} = 0 \quad (67)$$

où la partie entre crochets correspond à des forces volumiques fictives.

$$f_i(r) = [\delta l_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}^T(r) - \delta m_{ij}(r) \dot{\theta}]_{,j} \quad (68)$$

$$f_i(r) = \sigma_{ij}^{fic}(r)_{,j} \quad (69)$$

$\sigma_{ij}^{fic}(r)$  : est un champ de contraintes fictives.

L'équation (67) peut être transformée en une équation intégrale en utilisant le tenseur de Green  $G_{km}(x-x')$  pour un milieu homogène infini caractérisé par  $L^0$ .

Ce tenseur de Green permet de lier la vitesse de déplacement  $\dot{u}_k(r)$  en  $r$  aux forces volumiques  $f_i$  appliquée suivant la direction  $m$  à la position  $r'$  si bien que l'expression définissant  $G$  s'écrit :

$$L^0_{ijkl} G_{km, lj}(r-r') + \delta_{jm} \delta(r-r') = 0 \quad (70)$$

avec la condition  $G_{km} \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$

Le champ vitesse de déplacement peut encore s'écrire sous la forme

$$\dot{u}_m(r) = \int_{V'} \delta_{jm} \delta(r-r') \dot{u}_j(r') dV' \quad (71)$$

En utilisant (69) et par intégrations par parties on obtient:

$$\begin{aligned} \dot{u}_m(r) = & \int L^0_{ijkl} \{G_{km, lj}(r-r') \dot{u}_j(r')\}_i dV' + \int L^0_{ijkl} \{G_{km}(r-r') \dot{u}_{j, i}(r')\}_l dV' \\ & - \int_{V'} L^0_{ijkl} G_{km}(r-r') \dot{u}_{j, i}(r') dV' \end{aligned} \quad (72)$$

Ce qui par le théorème d'Ostrogradsky peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \dot{u}_m(r) = & - \int_{S'} L^0_{ijkl} \{G_{km, lj}(r-r') \dot{u}_j(r')\}_i dS'_i + \int_{S'} L^0_{ijkl} \{G_{km}(r-r') \dot{u}_{j, i}(r')\}_l dS'_l \\ & - \int_{V'} L^0_{ijkl} G_{km}(r-r') \dot{u}_{j, i}(r') dV' \end{aligned} \quad (73)$$

La seconde intégrale est nulle compte tenu des conditions aux limites traduites par le tenseur de Green.

Or d'après (67) et (69) la troisième intégrale après intégration par

partie s'écrit :

$$\begin{aligned}
 - \int_V L_{ijkl}^0 G_{km}(r-r') \dot{u}_{j,i}(\underline{r}') dV' &= \int_S G_{mj}(r-r') \dot{\sigma}_{ij}^f(\underline{r}') dS_i, \\
 - \int_V G_{mj,i}(r-r') [\delta l_{ijkl}(r') \dot{u}_{k,i}(\underline{r}') - \delta m_{ij}(r') \dot{\theta}] dV' & \quad (74)
 \end{aligned}$$

où la première intégrale est aussi nulle pour les mêmes conditions limites du tenseur de Green évoquées auparavant.

En conclusion de l'équation (72) seule reste la première intégrale celle-ci étant la solution d'un milieu homogène fictif soumis aux conditions limites en surface et la deuxième de (74).

l'équation intégrale alors obtenue est de la forme:

$$\dot{u}_m^T(r) = \dot{u}_m^0 + \int_V G_{mi,j}(r-r') [\delta l_{ijkl}(r') \dot{\epsilon}_{kl}^T(r') - \delta m_{ij}(r') \dot{\theta}] dV' \quad (75)$$

ou encore après dérivation et symétrisation :

$$\dot{\epsilon}_{mn}^T(r) = \dot{\epsilon}_{mn}^0 + \int_V \Gamma_{mnij}(r-r') [\delta l_{ijkl}(r') \dot{\epsilon}_{kl}^T(r') - \delta m_{ij}(r') \dot{\theta}] dV' \quad (76)$$

$$\Gamma_{mnij} = \Gamma_{nmij} \quad (77) \quad \text{et} \quad \Gamma_{mnij} = \frac{1}{2} (G_{mi,jn} + G_{ni,jm}) \quad (78)$$

Ces expressions sont analogues à celles obtenues par, Berveiller M., Zaoui A [12]; Fassi Fehri O., Hihhi A., Berveiller M. [13] dans le cas d'un milieu hétérogène avec déformations inélastiques.

La relation (76) constitue une équation intégrale reliant (indirectement) la vitesse de déformation locale  $\dot{\epsilon}^T$  au chargement thermo-mécanique caractérisé par  $\dot{\epsilon}^0$  et  $\dot{\theta}$ . Sa solution permet de calculer les tenseurs localisations  $A$  et  $a$ . L'équation intégrale pour un milieu élastique linéaire a été proposé par Kröner [14], puis Dederich et Zeller [15]. La complexité d'une telle équation nécessite le recours à des simplifications ou approximations conduisant à tout un ensemble de modèles. Parmi

ceux-ci , nous présentons la méthode de BORN mais surtout l'ap-  
 proche autocohérente qui a l'avantage d'être relativement perfor-  
 mante tout en ne nécessitant que des moyens de calculs limités.

### 3.5 SOLUTIONS DE L'EQUATION INTEGRALE

La solution de l'équation intégrale peut être mise sous la forme  
 d'un développement successif d'intégrale multiple ; on peut ainsi  
 obtenir différents ordres d'approximations de l'équation intégrale.  
 L'approximation d'ordre 0 est obtenue en négligeant la partie inté-  
 grale de l'équation (76) ce qui correspond en fait au modèle de  
 Taylor-Lin.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T(r) = \dot{\epsilon}_{ij}^O(r) = \dot{E}_{ij}^T \quad (79)$$

L'approximation de premier ordre est obtenue en remplaçant  $\dot{\epsilon}_{ij}^T(r)$   
 Dans ce cas l'équation intégrale s'écrit sous la forme:

$$\dot{\epsilon}_{mn}^T(r) = \dot{\epsilon}_{mn}^O + \int_{V'} \Gamma_{mni_j}(r-r') [\delta l_{ijkl}(r') \dot{\epsilon}_{kl}^O - \delta m_{ij}(r') \dot{\theta}] dv' \quad (80)$$

L'approximation d'ordre 2 consiste à prendre l'équation (80) et à  
 la remplacer dans l'équation (76). Il est ainsi possible d'obtenir  
 l'approximation d'ordre n suivant que l'on substitue n fois  $\dot{\epsilon}_{ij}^T(r')$   
 par des solutions de plus en plus approchées tel que:

$$\hat{\epsilon}_{mn}^T(r) = \hat{\epsilon}_{mn}^0 + \int_{V'} \Gamma_{mnpq}(r-r') [\delta l_{pqkl}(r')] \epsilon_{kl}^0 ] dV' \quad (81)$$

n fois --

$$\left\{ \begin{aligned} & + \int_{V'} \int_{V''} \Gamma_{mnpq}(r-r') [\delta l_{pqkl}(r')] \Gamma_{klrs}(r'-r'') \\ & \delta l_{rsij}(r'') \epsilon_{ij}^0 ] dV' dV'' + \dots \\ & - \int_{V'} \Gamma_{mnkl}(r-r') \delta m_{kl}(r') \theta ] dV' \end{aligned} \right.$$

ce qui nous amène à une expression similaire à (37) où  $A(r)$  et  $a(r)$  ont la forme:

$$\begin{aligned} A_{mnkl} &= I_{mnkl} + \int_{V'} \Gamma_{mnpq}(r-r') \delta l_{pqkl}(r') dV' \\ &+ \int_{V'} \int_{V''} \Gamma_{mnpq}(r-r') [\delta l_{pqij}(r')] \Gamma_{ijrs}(r'-r'') \delta l_{rskl}(r'') dV' dV'' \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (82)$$

$$a_{mn}(r) = - \int_{V'} \Gamma_{mnkl}(r-r') \delta m_{kl}(r') \theta ] dV' \quad (83)$$

Bien que la solution obtenue soit rigoureuse elle nécessite des moyens de calculs performants et complexes, ainsi que la détermination précise et complète de toute la microstructure du matériau. Pour cela nous développons l'approche autocohérente plus adaptée à nos exigences.

### 3.6 APPROXIMATION AUTO-COHERENTE

L'approximation autocohérente de l'équation intégrale (76) consiste

à faire un choix particulier du tenseur  $L^0$  et à limiter, dans le cas de la méthode autocohérente à un site, les interactions entre constituants à celles entre une inclusion ellipsoïdale et le milieu homogène équivalent considéré comme matrice.

Cette méthode a été élargie au cas de plusieurs sites par Fassi Fehri et al [13]. Pour des comportements élastoplastiques, en grandes déformations, la méthode autocohérente a été proposée par Lipinski et Berveiller [16].

Considérant le milieu comme étant granulaire représenté par  $N$  inclusions de volume  $V^I$  et de fraction volumique  $F^I$ , dans lesquels le champ vitesse de déformation et de contraintes peuvent être pris uniformes sur chaque inclusion.

Les champs  $\varepsilon^T(r)$ ,  $\dot{\sigma}(r)$ ,  $\delta l(r)$ ,  $\delta m(r)$  ont donc les formes particulières suivantes:

$$\delta l_{ijkl}(r) = \sum_{I=1}^N \delta l_{ijkl}^I H^I(r) = \sum_{I=1}^N (l_{ijkl}^I - L_{ijkl}^0) H^I(r) \quad (84)$$

$$\delta m_{ij}(r) = \sum_{I=1}^N [l_{ijkl}^I \alpha_{kl}^I - l_{ijkl}^0 \alpha_{kl}^0] H^I(r) \quad (85)$$

où  $H^I(r)$  est la fonction indicatrice d'Heaviside de l'inclusion  $I$ .

$$H^I(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \notin V^I \\ 1 & \text{si } r \in V^I \end{cases}$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = \sum_{I=1}^N \dot{\sigma}_{ij}^I H^I(r) \quad (86)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T(r) = \sum_{I=1}^N \dot{\epsilon}_{ij}^{TI} H^I(r) \tag{87}$$

$$\alpha_{ij}(r) = \sum_{I=1}^N \alpha_{ij}^I H^I(r) \tag{88}$$

La valeur moyenne de  $\dot{\epsilon}^T$  dans les inclusions peut être à présent calculée :

$$\dot{\epsilon}^{TI} = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \dot{\epsilon}^T(r) dV \tag{89}$$

Puisque  $\delta l_{ijkl}(r') : \dot{\epsilon}_{kl}^T(r') = \sum_I \delta l_{ijkl}^I \epsilon_{kl}^I H^I(r')$

On a par conséquent :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{mn}^{TI} &= \dot{\epsilon}_{mn}^0 + \frac{1}{V^I} \sum_J \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma_{mnkl}(r-r') \delta l_{klpq}^J \dot{\epsilon}_{pq}^{TJ} dV^I dV^J \\ &\quad - \frac{1}{V^I} \sum_J \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma_{mnkl}(r-r') \delta m_{kl}^J \theta dV^I dV^J \end{aligned} \tag{90}$$

Posons

$$T_{mnkl}^{IJ} = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma_{mnkl}(r-r') dV^I dV^J \tag{91}$$

L'équation précédente devient

$$\dot{\epsilon}_{mn}^{TI} = \dot{\epsilon}_{mn}^0 + \sum_J T_{mnkl}^{IJ} ( \delta l_{klpq}^J \dot{\epsilon}_{pq}^{TJ} - \delta m_{kl}^J \theta ) \tag{92}$$

ou encore

$$\dot{\epsilon}_{mn}^{TI} = \dot{\epsilon}_{mn}^0 + T_{mnkl}^{II} ( \delta_{klpq}^I \dot{\epsilon}_{pq}^{TI} - \delta_{kl}^I \dot{\theta} )$$

$$+ \sum_{I \neq J} T_{mnkl}^{IJ} ( \delta_{klpq}^J \dot{\epsilon}_{pq}^{TJ} - \delta_{kl}^J \dot{\theta} )$$
(93)

Dans le cas du modèle autocohérent à 1 site, nous restreindrons l'étude au cas où seul le tenseur  $T^{II}$  est pris en considération . En effet le tenseur  $T^{IJ}$  étant composé de deux termes le premier proportionnel en  $\frac{1}{R^3}$  et le second  $\frac{1}{R^5}$  , ( Fassi Fehri [17] ) , Dans ce cas les interactions entre les différentes inclusions s'effectuent par le biais du milieu homogène équivalent qui est la matrice de comportement thermoélastoplastique effectif ( $L^{eff, \alpha}$ ). Par définition, pour le choix  $L^0 = L^{eff}$  ,  $\dot{\epsilon}^0$  est égal à  $\dot{E}^T$  et les tenseurs  $A^I, a^I$  s'écrivent pour l'inclusion I :

$$A_{mnkl}^I = ( I_{mnkl} - T_{mnij}^{II} \delta_{ijkl}^I )^{-1}$$
(94)

où  $I_{mnkl}$  désigne le tenseur unité d'ordre 4

$$et \quad a_{mn}^I = ( I_{mnkl} - T_{mnij}^{II} \delta_{ijkl}^I )^{-1} T_{klpq}^{II} \delta_{pq}^I$$
(95)

Ces tenseurs résultent de la définition (89). On a :



$$A_{ijkl}^I = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} A_{ijkl}(r) dv_I \quad (96)$$

$$a_{ij}^I = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} a_{ij}^I(\xi) dv_I \quad (97)$$

de sorte que , pour la localisation cinématique reliant la déformation moyenne dans un grain I à la déformation macroscopique et à la variation  $\theta$ , on peut écrire:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{TI} = A_{ijkl}^I \dot{\epsilon}_{kl}^T + a_{ij}^I \dot{\theta} \quad (98)$$

Le tenseur  $L^{eff}$  tenseur des modules élastoplastiques tangents du composite peut à présent être trouvé à partir de (45).

$$L_{ijkl}^{eff} = \sum_I F^I A_{ijpq}^I l_{pqkl}^I \quad (99)$$

de même à partir de (58):

$$\alpha_{ij}^{eff} = L_{ijkl}^{eff -1} \left( \sum_I l_{klpq}^I A_{pqrs}^I \alpha_{rs}^I \right) \quad (100)$$

(99) et (100) sont des formes discrètes des équations "continues" analogues à (89) , (96), (97).

### 3.7 MISE EN OEUVRE

L'application directe de la modélisation autocohérente consiste à envisager (pour des fibres unidirectionnelles de même rapport de forme) une localisation unique pour les fibres et de multiples localisations pour l'ensemble des grains (sphériques) de la matrice. Cependant, cette approche ne nous semble pas adaptée au cas des composites à matrice métallique.

En effet, supposons que la matrice soit homogène. Dans ce cas, on a pour les tenseurs localisations dans les fibres et dans la matrice:

$$A^I f^I + A^M (1 - f^I) = I \quad (101)$$

(on appelle  $f^I$  la fraction volumique des renforts,  $C^I$  et  $C^M$  les tenseurs d'élasticité de la fibre et de la matrice).

$$\text{et } A^I = (I - T^{II} \delta C^I)^{-1} \quad (102)$$

$$\text{par conséquent } A^M = I - f^I (I - T^{II} \delta C^I)^{-1} / (1 - f^I)$$

où  $A^M$  est déduit de (101) à partir de (102).

Dans ce cas l'anisotropie de  $A^M$  provient à la fois de celle de  $C^{eff}$ , de  $\delta C^I$  et de la forme des renforts.

Si on calcule le tenseur  $A^M$  en considérant un grain (sphérique) de la matrice dans le milieu homogène équivalent, on aurait obtenu:

$$A^M = (I - T_{eq}^{SS} \delta C^M)^{-1}$$

Dans ce cas, l'anisotropie de  $A^M$  provient uniquement de celle de  $C^{eff}$  et de  $C^M$ , mais pas de la morphologie des renforts ( si ce n'est par l'anisotropie de  $C^{eff}$  ).

Il convient donc de revoir la démarche de la formulation autocohérente afin d'obtenir une localisation correcte pour les grains de la matrice.

Nous formulons une méthode dans le cas de l'élasticité mais celle ci s'applique également au cas de la thermoélastoplasticité.

Soit  $\epsilon^M$  la déformation moyenne de la matrice et  $\epsilon^I$  la déformation moyenne des fibres.

On a :

$$\epsilon^I = ( I - T_{eq}^I \delta C_{eq}^I )^{-1} E$$

De la relation :

$$f^I \epsilon^I + ( 1 - f^I ) \epsilon^M = E$$

On tire :

$$\epsilon^M = \frac{ [ I - f^I ( I - T_{eq}^I \delta C_{eq}^I )^{-1} ]}{1 - f^I} E \quad (103)$$

Ici  $T_{eq}^I$  est calculé pour des fibres ellipsoïdales dans le milieu homogène équivalent et

$$\delta C_{eq}^I = C^I - C_{eq}$$

Envisageons un grain sphérique g de la matrice dans lequel la déformation est  $\epsilon^{gM}$ .

On a :

$$\epsilon^{gM} = ( I - T_M^{gs} \delta C_M^g )^{-1} \epsilon^M \tag{104}$$

Maintenant  $T_M^{gs}$  est calculé pour le milieu équivalent matrice et une forme sphérique pour le grain.

On tire de (103) et (104) la relation :

$$\epsilon^{gM} = ( I - T_M^{gs} \delta C_M^g )^{-1} \frac{ I - f^I ( I - T_{eq}^I \delta C_{eq}^I )^{-1} }{ 1 - f^I } E \tag{105}$$

Si on localise directement un grain g de la matrice dans le milieu homogène équivalent, on aurait :

$$\epsilon^{gM} = ( I - T_{eq}^{ge} \delta C_{eq}^g )^{-1} E \tag{106}$$

où  $T_{eq}^{ge}$  est calculé pour un milieu homogène équivalent et un ellipsoïde e de forme inconnue puisque on veut que (105) et (106) soient équivalentes.

On a donc à rechercher la forme de  $T_{eq}^{ge}$  pour que :

$$( I - T_{eq}^{ge} \delta C_{eq}^g )^{-1} = ( I - T_M^{gs} \delta C_M^g )^{-1} \frac{ I - f^I ( I - T_{eq}^I \delta C_{eq}^I )^{-1} }{ 1 - f^I }$$

Nous évaluons  $T_{eq}^{ge}$  avec les hypothèses simplificatrices suivantes:

- La matrice est faiblement hétérogène et les grains g sont sphériques. Dans ce cas  $(I - T_M^{gs} \delta C_M^g)^{-1} \approx I$
- Nous admettons que les termes  $T \delta C$  sont petits par rapport au tenseur unité.
- Nous supposerons également que  $C_{eq}$  peut être approché par le modèle de Voigt c'est à dire :

$$C_{eq} = C^I f^I + (1 - f^I) C^M$$

Dans ce cas , on a :

$$(1 - f^I) (I + T_{eq}^{ge} \delta C^g) \approx I - f^I I - f^I T_{eq}^I \delta C_{eq}^f$$

Soit

$$(1 - f^I) T_{eq}^{ge} \delta C_{eq}^g \approx - f^I T_{eq}^I \delta C_{eq}^I \tag{107}$$

Avec l'approximation  $C_{eq} = C^I f^I + (1 - f^I) C^M$ , on a:

$$\begin{aligned} \delta C_{eq}^g &\approx C^M - C_{eq} = C^M - C^I f^I - (1 - f^I) C^I \\ &= f^I (C^M - C^I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta C_{eq}^I &\approx C^I - C_{eq} = C^I - C^I f^I - (1 - f^I) C^M \\ &= (1 - f^I) (C^I - C^M) \end{aligned}$$

Soit pour l'équation (107) :

$$T_{eq}^{ge} (C^M - C^I) \approx - T_{eq}^I (C^I - C^M)$$

Soit

$$\boxed{T_{eq}^{ge} \approx T_{eq}^I}$$

Les tenseurs  $T_{eq}^{ge}$  et  $T_{eq}^I$  étant calculés pour le même milieu homogène équivalent, il convient de localiser les déformations des grains de la matrice en leur affectant une forme (e) identique à celle des renforts (I).

On verra par la suite que cette démarche n'a pas de grand effet en élastoplasticité mais par contre est essentielle dans le cas de la thermoélastoplasticité.

Nous donnons maintenant quelques indications sur les méthodes numériques mises en oeuvre:

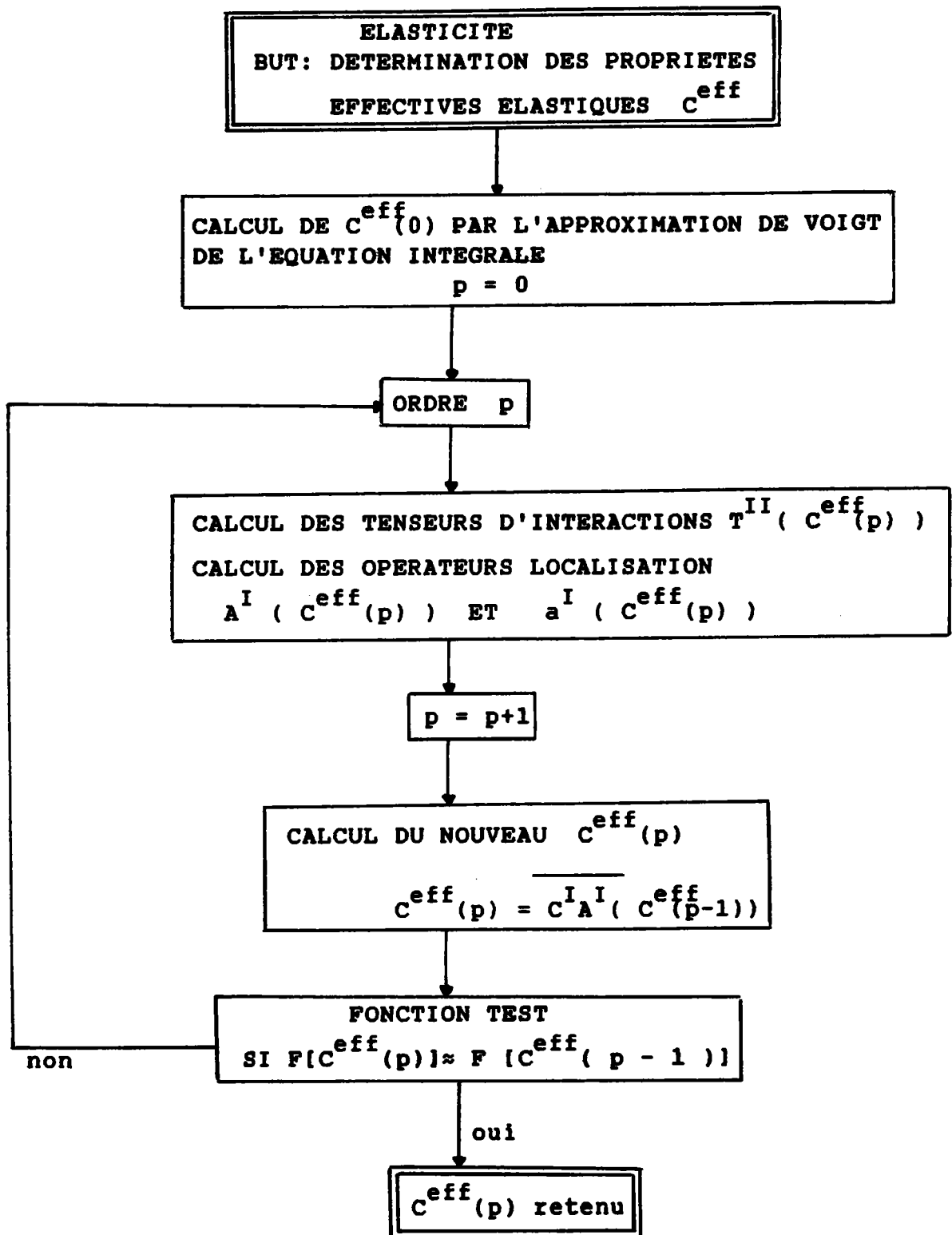
-L'expression explicite des tenseurs d'interactions  $T^{II}$  est obtenue

par l'intermédiaire des transformées de Fourier du tenseur de Green, le détail des calculs est dans l'annexe 2. Le calcul numérique des tenseurs d'interaction a été mis au point par P. Lipinski [19]. Il est possible de prendre en compte n'importe quelle forme d'inclusion ellipsoïdale ainsi que n'importe quelle constantes d'élasticité (anisotrope ou non) pour le milieu homogène équivalent.

La théorie formulée en vitesse s'applique de la manière suivante:

- le comportement élastique effectif est d'abord calculé à l'aide du modèle autocohérent à 1 site où une formulation itérative est utilisée d'après Ahaouari K. [18], algorithme n°1.
  
- La détermination du comportement élastoplastique effectif se calcule alors pour un chargement et un incrément donné, le milieu de référence calculé sert au calcul du pas qui suit, suivant un algorithme n°2 mis au point par P. Lipinski [19]. Celui-ci est utilisé et adapté au calcul des propriétés thermoélastoplastiques effectives.

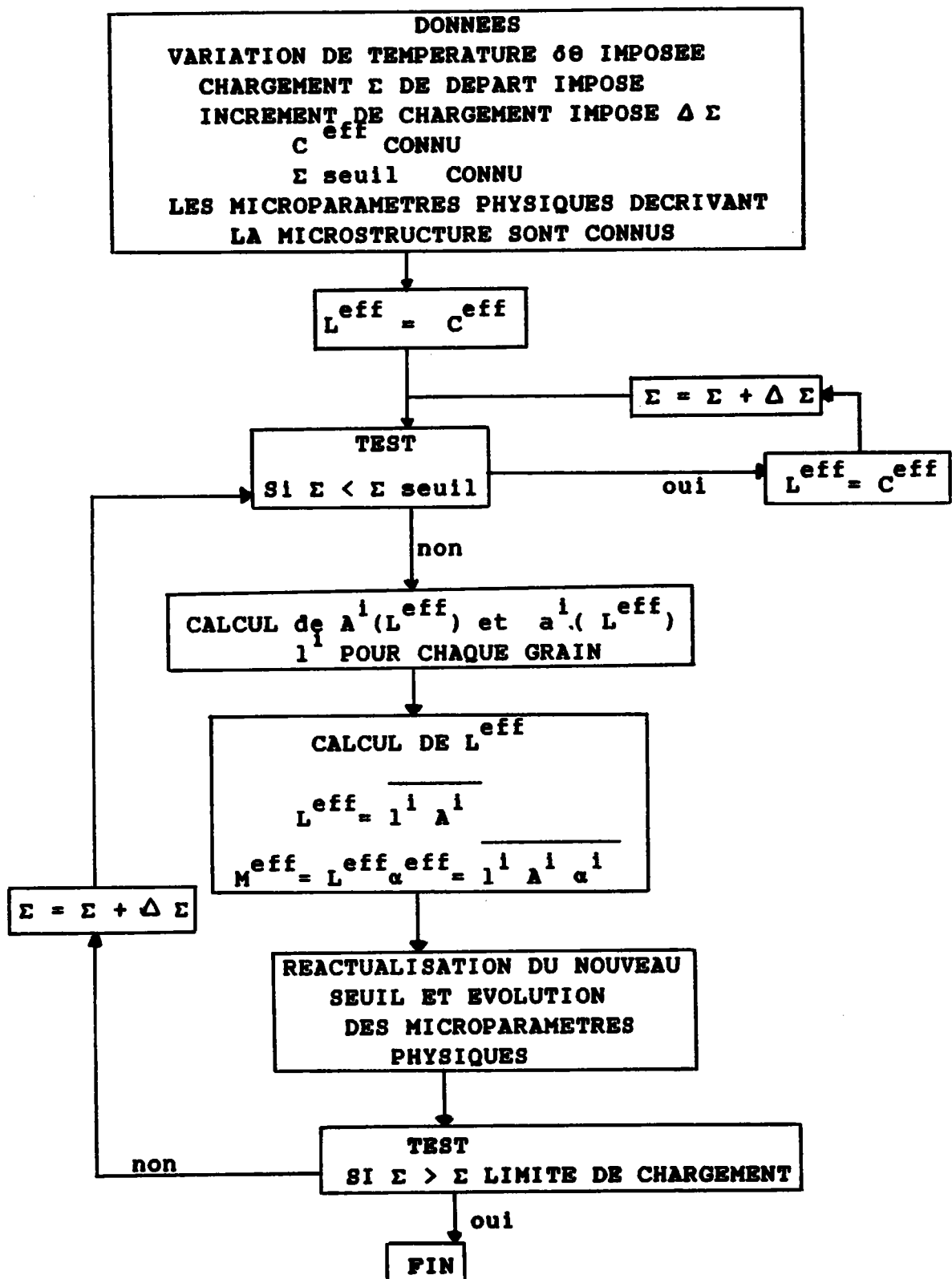
PAR METHODE ITERATIVE



algorithme n°1 concernant la détermination des propriétés effectives élastiques du matériau composite à matrice métallique.



METHODE INCREMENTALE



Algorithme n°2 concernant la détermination des propriétés effectives thermoélastoplastiques du matériau composite à matrice métallique.

### 3.8 Conclusion

Formulées pour la thermoélastoplasticité, les équations précédentes s'appliquent également dans le cas d'un comportement thermoélastique linéaire. Le composite peut être décrit à partir d'un matériau hétérogène biphasé constitué d'une matrice et de renforts.

La matrice est assimilée à un milieu continu thermoélastique linéaire de constantes élastiques isotropes  $C^M$  et de coefficients de dilatation  $\alpha^M$ . Les renforts seront décrits par leur constantes d'élasticité  $C^f$  et leurs coefficients  $\alpha^f$ .

En élasticité les différents tenseurs de localisation sont calculés et présentés dans [20],[21], un développement plus poussé de ce type d'approche a permis d'étudier le comportement élastique non linéaire des composites à matrice métallique. Les calculs des constantes d'élasticité du troisième ordre sont présentés dans la thèse de Ahaouari [18].

Dans le chapitre 4 nous étudierons le cas plus complexe de la thermoélastoplasticité. Les résultats peuvent être regroupés en deux catégories. Une première concernant les résultats obtenus par le modèle où seul le comportement élastoplastique de la matrice polycristalline est étudié. Ces premiers résultats ont l'avantage de servir de test au modèle, par comparaison à des résultats expérimentaux. De plus ils permettent une meilleure compréhension des différents mécanismes de déformation élastoplastique.

La deuxième catégorie de résultats concerne le comportement thermo-

élastoplastique des matériaux composites à matrice métallique, en fonction de la forme des renforts, de leur fraction volumique, de la température d'utilisation.

Pour le comportement élastoplastique des matériaux composites à matrice métallique, on étudiera en fonction de la forme des renforts et de leur proportions :

- Les courbes de traction
- Les contraintes résiduelles
- Les surfaces d'écoulement
- Effet Bauschinger
- Chargement cyclique

Pour le comportement thermoélastoplastique, on étudiera en fonction de la forme des fibres, de la fraction volumique et des coefficients de dilatation :

- La limite d'élasticité
- Les courbes de traction et compression.
- Les contraintes d'origine thermique en fonction de la texture morphologique (fibre, matrice).

Des confrontations modélisation expérimentation sont proposées pour certains cas.

### 3.9 BIBLIOGRAPHIE

---

- (1) Diehl, J and Berner , R., Temperaturabhängigkeit der Verfestigung von Kupfer-Einkristallen oberhalb 78K, Z.f. Metallkde. , 51,522,1960.
- (2) Honeycombe , R.W.K. ,The Plastic Deformation of Metals, Arnold,London,1968.
- (3) Mc Lean , D.,Mechanical Properties of Metals , Wiley, New York 1962.
- (4) Franciosi P. , Berveiller M. and A. Zaoui, "Latent Hardening in Copper and Aluminum Single Crystals" , Acta Metallurgica, Vol. 28. pp. 273 to 283
- (5) Franciosi. Etude théorique et expérimentale du comportement élastoplastique des monocristaux,(thèse Paris-nord,1984).
- (6) Saada G. Publication de l'IRSID Série A n°251,1961.
- (7) Berveiller M. , Contribution à l'étude du comportement Plastique et des textures de Déformation des Polycristaux Métalliques (Thèse Paris XIII , 1978 )
- (8) Bunge H.J.,Mathematische Methoden der Textur Analyse Berlin-Akademie Verlag,1969
- (9) Levin V.M., 1967, "Thermal Expansion Coefficients of Heterogeneous Materials", Mekhanika Tverdogo Tela, Vol.2,pp. 88-94
- (10) Berveiller,M.,Zaoui,A.,J. Mech. Phys. Solids,26,pp 325-339, 1979.
- (11) Hill R. "On Constitutive Macro-Variables for Heterogeneous Solids at Finite Strain " , Proc. Roy. Soc. , London, A326 (1972) : 131.
- (12) Berveiller M.,Zaoui A.,Groupe français de rhéologie (1980)
- (13) Fassi Fehri O.,HiHi A.,Berveiller M.,1988,"Multiple site self-consistent scheme" à paraître dans Int. J. Engng Science.
- (14) Kröner E. , Linear Properties of Random Media : The Systematic Theory ( 15° Colloque du groupe français de rhéologie,Paris, 1980 )
- (15) Dederich P.H. et Zeller R. , Variational Treatment of the Elastic Constants of disordered materials (Z. Physik.,Vol.259, 1973,p. 103-116)
- (16) Lipinski P. , Berveiller M. , Elastoplasticity of microinhomogeneous metals at large strains, Int. J. Plasticity, à paraître.

- (17) Fassi Fehri O. thèse doctorat d'état présentée à Metz 1987
- (18) Ahaouari K., thèse doctorat à paraître (Metz).
- (19) Lipinski P., thèse (habilitation) à paraître (Metz).
- (20) Corvasce F., Lipinski P., Berveiller M., 3rd Int. Symposium on Nondestructive Charact. of Mat. Saarbrücken 3-6 oct 1988.
- (21) Ahaouari K., Patoor E., Lipinski P., Berveiller M., localisation et homogénéisation des milieux microhétérogènes inélastiques à comportement thermomécanique, 23eme Colloque du G.F. Rhéologie Bordeaux 19-21 oct 1988.

CHAPITRE IV

APPLICATIONS A LA THERMOELASTOPLASTICITE ET CONFRONTATION AVEC DES RESULTATS EXPERIMENTAUX

4.1 LES PARAMETRES PHYSIQUES UTILISES

- les tableaux de données pour :
  - Al-SiC
  - Cu- W

4.2 LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DES MATERIAUX COMPOSITES

A MATRICE METALLIQUE

4.2.1 LE COMPORTEMENT DE LA MATRICE SANS RENFORTS

- courbe de traction de la matrice
- texture cristallographique et son évolution en fonction du chargement
- contraintes résiduelles
- énergie élastique stockée

4.2.2 LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DU COMPOSITE

4.2.2.1 COURBES DE TRACTION MONOTONE DU COMPOSITE

- influence de la forme des fibres et de leur proportion sur le comportement en traction de l'Al-SiC à fibres unidirectionnelles.

4.2.2.2 LES CONTRAINTES RESIDUELLES

- influence de la forme des fibres et de leur proportion pour l'Al-SiC fibres unidirectionnelles

**4.2.2.3 EFFET BAUSCHINGER**

---

- influence de la forme des fibres et de leur proportion pour l'Al-SiC fibres unidirectionnelles
- effet Bauschinger pour le composite cuivre - tungstène à fibres unidirectionnelles et confrontation avec l'expérimentation.

**4.2.2.4 LES SURFACES D'ECOULEMENT**

---

- l'évolution des surfaces seuils en fonction du niveau de déformation plastique pour le composite Al-SiC à fibres unidirectionnelles; celui-ci n'ayant pas subi de prédéformations plastiques.
- l'évolution des surfaces seuils pour l'Al-SiC à fibres unidirectionnelles prédéformées.

**4.3 LE COMPORTEMENT THERMOELASTOPLASTIQUE DES MATERIAUX**

---

**COMPOSITES A MATRICE METALLIQUE**

---

**4.3.1 LES CONTRAINTES D'ORIGINE THERMIQUE**

---

- influence de la forme des fibres et de leur proportion et des coefficients de dilatation.
- leur influence sur la limite d'élasticité

**4.3.2 LES COURBES DE TRACTION ET COMPRESSION**

---

- influence de la forme des fibres et de leur proportion et des coefficients de dilatation.
- les contraintes d'origine thermique en fonction de la texture morphologique.

**4.3.3 BIBLIOGRAPHIE**

---

**4.4 CONCLUSION GENERALE**

---

## INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus à partir de la formulation autocohérente. Deux cas distincts sont étudiés :

- Le comportement élastoplastique de la matrice polycristalline . La confrontation des résultats obtenus ,avec les mesures expérimentales permet de tester la validité du modèle. De plus en analysant l'évolution de la structure interne du polycristal pour un chargement donné , nous pourrions mieux percevoir les changements dus à l'introduction de fibres .
- Le comportement élastoplastique et thermoélastoplastique des matériaux composites à matrice métallique . On étudiera l'effet de la forme des fibres ,de leur proportion et de leur texture morphologique.

### Les hypothèses de calcul

Le composite à matrice métallique est considéré comme un milieu microhétérogène à deux constituants.

- Les renforts ont un comportement élastique linéaire et isotrope parfait.
- La matrice est elle-même un milieu microhétérogène polycristallin constitué de grains de même comportement intrinsèque mais désorientés les uns par rapport aux autres. Le comportement élastoplastique des grains est



alors décrit par les relations de comportement définies dans le chapitre III, où intervient la cission critique sur chaque système de glissement, le réseau qui ici sera cubique à faces centrées, la matrice d'écrouissage.

#### 4.1 LES PARAMETRES PHYSIQUES UTILISES

Dans ce qui suit, nous nous attachons plus principalement à l'étude de l'Al-SiC.

##### La texture morphologique des fibres

Les propriétés mécaniques ainsi que les facilités de fabrication de L'Al-SiC font de lui un des matériaux composites le plus couramment utilisé. Les propriétés mécaniques exigées par celui-ci font que, dans la plupart des cas, il est obtenu par extrusion. Nous nous restreindrons alors à l'étude du comportement thermoélastoplastique des matériaux composites à matrice métallique extrudés.

Une analyse par rayons X effectuée par Nieh Tg.[1] a permis de caractériser l'orientation morphologique des whiskers carbure de silicium du composite sur la figure de pole  $\langle 111 \rangle$ .

En effet, toutes les directions cristallographiques  $\langle 111 \rangle$  sont presque parfaitement parallèles à leur axes principaux. Dans ce cas la direction la plus longue de la fibre se trouve alignée avec la direction d'extrusion, (fig 1).

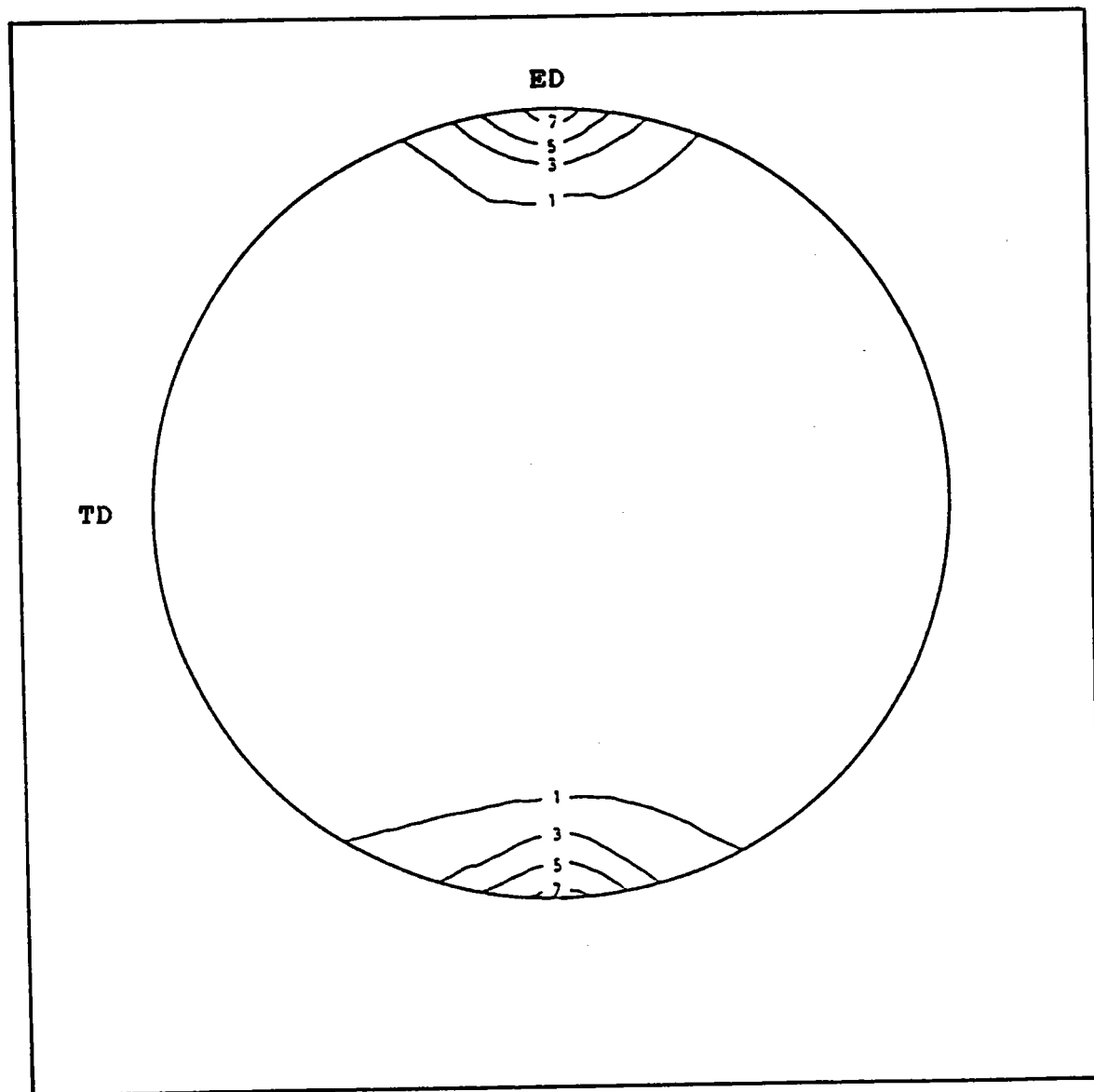


fig.1) figure de pole  $\langle 111 \rangle$  des fibres SiC pour un composite extrudé  
ED et TD indiquent respectivement les directions d'extrusion  
et transversale .

Dans les applications qui suivent ,le matériau composite présentera une texture morphologique très marquée.

Les fibres sont décrites par des paramètres de forme (a,b,c) et sont unidirectionnelles (fig 2).

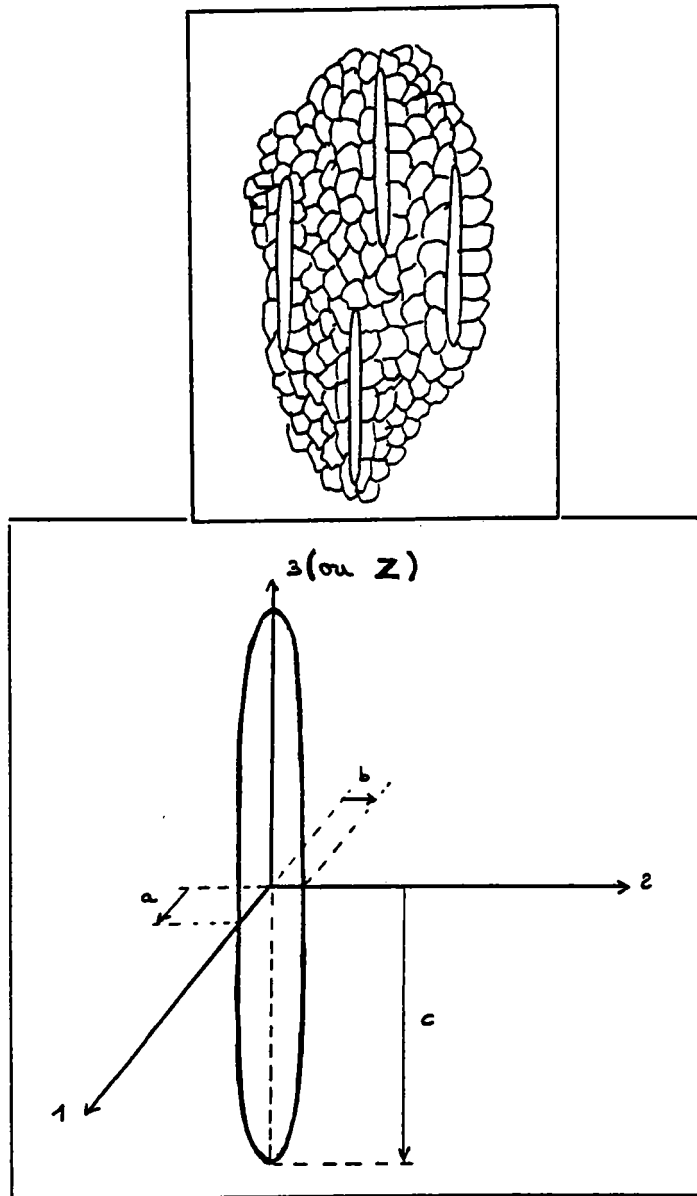


fig 2. Schématisation de la microstructure du composite et paramètres de l'ellipsoïde décrivant les fibres.

## La texture cristallographique de la matrice

---

La matrice polycristalline est décrite par 100 grains, l'orientation cristallographique de chaque grain est choisie de manière à ce que le comportement élastoplastique macroscopique de la matrice ( sans les renforts) soit quasiment isotrope.

La texture adoptée pour l'étude apparait sur la figure de pole inverse (fig.3) où chaque pole indique la position de l'axe de traction macroscopique par rapport au repère du monocristal.

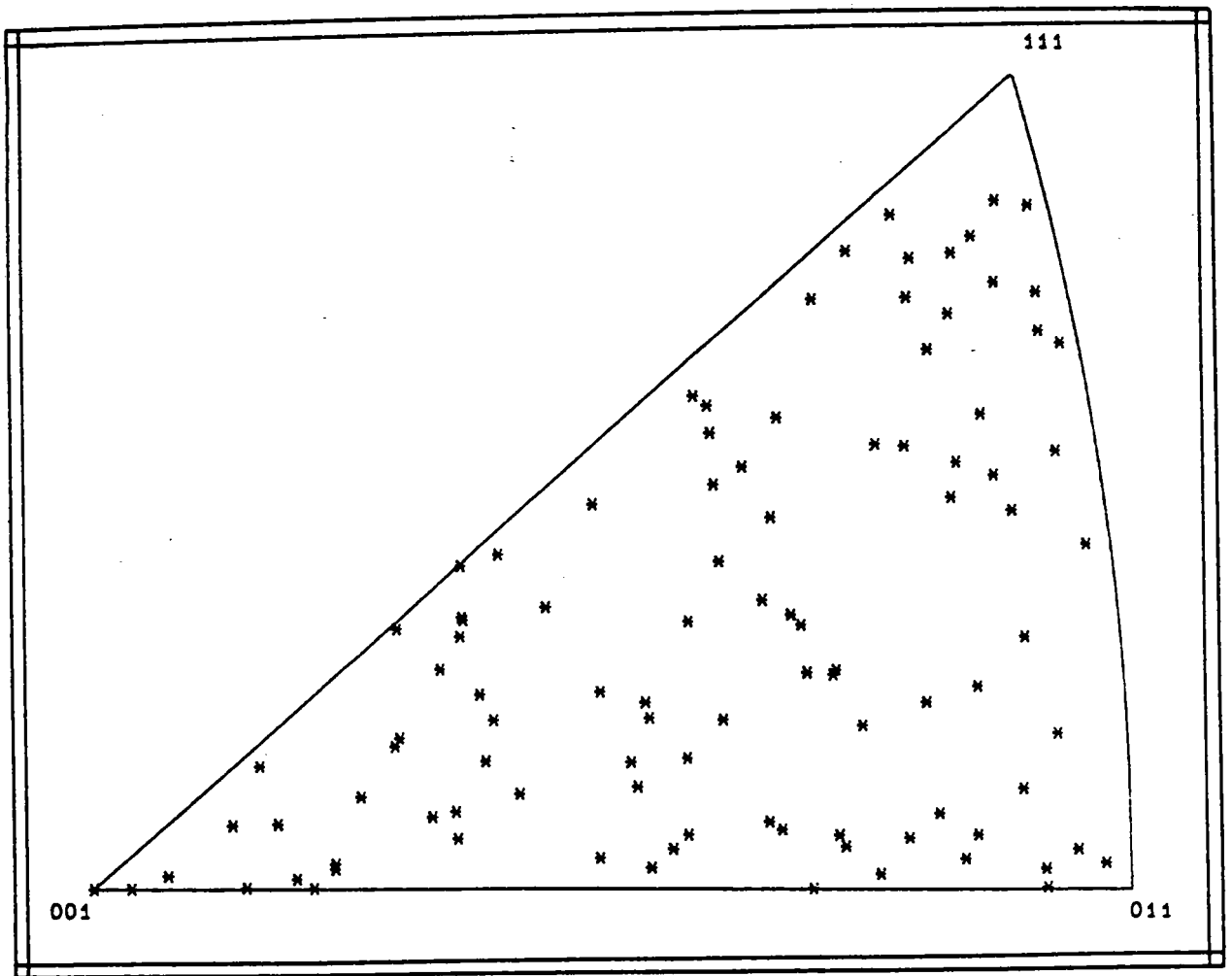


fig. 3) figure de pole inverse définissant l'orientation de l'axe de traction de chaque grain par rapport au repère du monocristal.

Différentes simulations sont envisagées. Elles concernent principalement le comportement thermoélastoplastique des matériaux composites à matrice métallique tel l'Al-SiC. Mais afin de pouvoir comparer certains résultats de la modélisation à l'expérimentation, les matériaux composites à matrice métallique tel le Cu-W et le Fe-Fe<sub>3</sub>C sont aussi étudiés.

Un récapitulatif des caractéristiques des différents matériaux composites utilisés est proposé sous forme de tableaux.

On sait que l'état structural de la fibre (whiskers ou polycristalline) influe sur ses propriétés élastiques.

Nous avons donc étudié deux classes de composites tableau 1 et tableau 2.

Pour le biphasé Cu-W, les valeurs retenues sont déduites des mesures de Lilholt [2] et Nye [3].

**Remarque :** Pour les trois tableaux qui suivent la valeur adoptée pour la cission critique initiale des systèmes de glissement de la matrice est choisie arbitrairement .

**LES CARACTERISTIQUES DES MATERIAUX COMPOSITES  
UTILISEES POUR LA MODELISATION SONT DONNEES  
DANS LES TABLEAUX SUIVANTS**

Valeurs conventionnelles de l'Al-SiC

		fibre	matrice
élasticité	module de cisaillement rapport de poisson	$\mu_f = 27559 \text{ daN/mm}^2$ $\nu^f = 0.27$ D'après Jarry [4]	$\mu_m = 2692 \text{ daN/mm}^2$ $\nu^m = 0.3$
Plasticité	cission critique initiale Systèmes de glissement Matrice d'écrouissage	$\infty$  pas de plasticité	14 daN/mm <sup>2</sup>  12 systèmes de type (111) <110> Hfa = $\mu_m / 250$ Hfo = 3 . Hfa
micro-structure	Fraction volumique des renforts Forme des fibres et des monocristaux de la matrice Orientations morphologique  Orientations cristallo-graphiques	$F_i$  ellipsoïdes de paramètres de forme (a,b,c) fibres unidirectionnelles	$(1-F_i)$  sphériques  matrice de 100 grains texture cristallo-graphiques isotrope
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha_{ij}$	$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} \cdot 10^{-6}$ $\alpha = 4 \cdot 10^{-6}$ D'après Jarry [4]	$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} \cdot 10^{-6}$ $\alpha = 21 \cdot 10^{-6}$

Tableau 1 :Caractéristiques mécaniques et microstructurales du composite étudié

Valeurs de l'Al-SiC

		fibre	matrice
élasticité	module de cisaillement rapport de poisson	$\mu_f = 16538 \text{ daN/mm}^2$ $\nu_f = 0.27$ Mesures de Schneider [5]	$\mu_m = 2980 \text{ daN/mm}^2$ $\nu_m = 0.3$
Plasticité	contrainte critique initiale Systèmes de glissement Matrice d'écroutissage	∞  pas de plasticité	14 daN/mm <sup>2</sup>  12 systèmes de type (111) <110> Hfa = $\mu_m / 250$ Hfo = 3 . Hfa
micro-structure	Fraction volumique des renforts Forme des fibres et des monocristaux de la matrice Orientations morphologique  Orientations cristallo-graphiques	$F_i$  ellipsoïdes de paramètres de forme (a,b,c) fibres unidirectionnelles	$(1-F_i)$  sphériques  matrice de 100 grains texture cristallo-graphiques isotrope
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha_{ij}$	$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} \cdot 10^{-6}$ $\alpha = 4 \cdot 10^{-6}$ D'après Jarry [4]	$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} \cdot 10^{-6}$ $\alpha = 21 \cdot 10^{-6}$

Tableau 2 :Caractéristiques mécaniques et microstructurales du composite étudié



Valeurs conventionnelles de Cu-W (cuivre-tungstène)

		fibre	matrice
élasticité	module de cisaillement rapport de poisson	$\mu_f = 13269 \text{ daN/mm}^2$ $\nu^f = 0.3$ D'après Nye [3]	$\mu_m = 4769 \text{ daN/mm}^2$ $\nu^m = 0.3$
Plasticité	cission critique initiale Systèmes de glissement Matrice d'écrouissage	∞  pas de plasticité	14 daN/mm <sup>2</sup>  12 systèmes de type (111) <110> Hfa= 55 Hfo= 3 . Hfa
micro-structure	Fraction volumique des renforts Forme des fibres et des monocristaux de la matrice Orientations morphologique  Orientations cristallographiques	$F_i$  ellipsoïdes de paramètres de forme (a,b,c) fibres unidirectionnelles	$(1-F_i)$  elliptiques  matrice de 100 grains texture cristallographiques isotrope
Coefficient de dilatation thermique	$\alpha_{ij}$	D'après Nye [3] $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ $\alpha = 4.6 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ $\alpha = 16.5 \cdot 10^{-6}$

Tableau 3 :Caractéristiques mécaniques et microstructurales du composite étudié

#### 4.2.1 LE COMPORTEMENT DE LA MATRICE SANS RENFORTS

---

Le modèle est appliqué au cas d'un polycristal décrit par 100 grains sphériques, l'orientation cristallographique de chaque grain est donnée de telle manière que le comportement élastoplastique macroscopique soit quasiment isotrope . La texture adoptée pour l'étude est celle présentée sur la figure de pole inverse ( fig.3). L'état initial est caractérisé par une texture cristallographique isotrope, la non existence de contraintes résiduelles , les cissions critiques initiales prise identiques sur tous les systèmes de glissement.

L'élasticité du monocristal est supposée isotrope de module de cisaillement  $\mu=3000 \text{ daN/mm}^2$  et de rapport de poisson  $\nu=0.3$ . Les normales aux plans de glissement sont du type  $\langle 111 \rangle$  et les directions de glissement sont parallèles à  $\langle 110 \rangle$  ce qui définit 24 systèmes de glissement. La matrice d'écrouissage précédemment définie est composée de deux termes, l'un exprimant les interactions faibles entre dislocations  $H1=\mu/250$  et l'autre  $H2$  représentant les interactions fortes entre dislocations tel que  $H2=3*H1$ . L'évolution du comportement du matériau avec le chargement est à attribuer à la modification de la microstructure induite par la déformation.

Pour un essai de traction simple monotone suivant l'axe z (fig 4) on a suivi l'évolution de la texture cristallographique (fig 5).

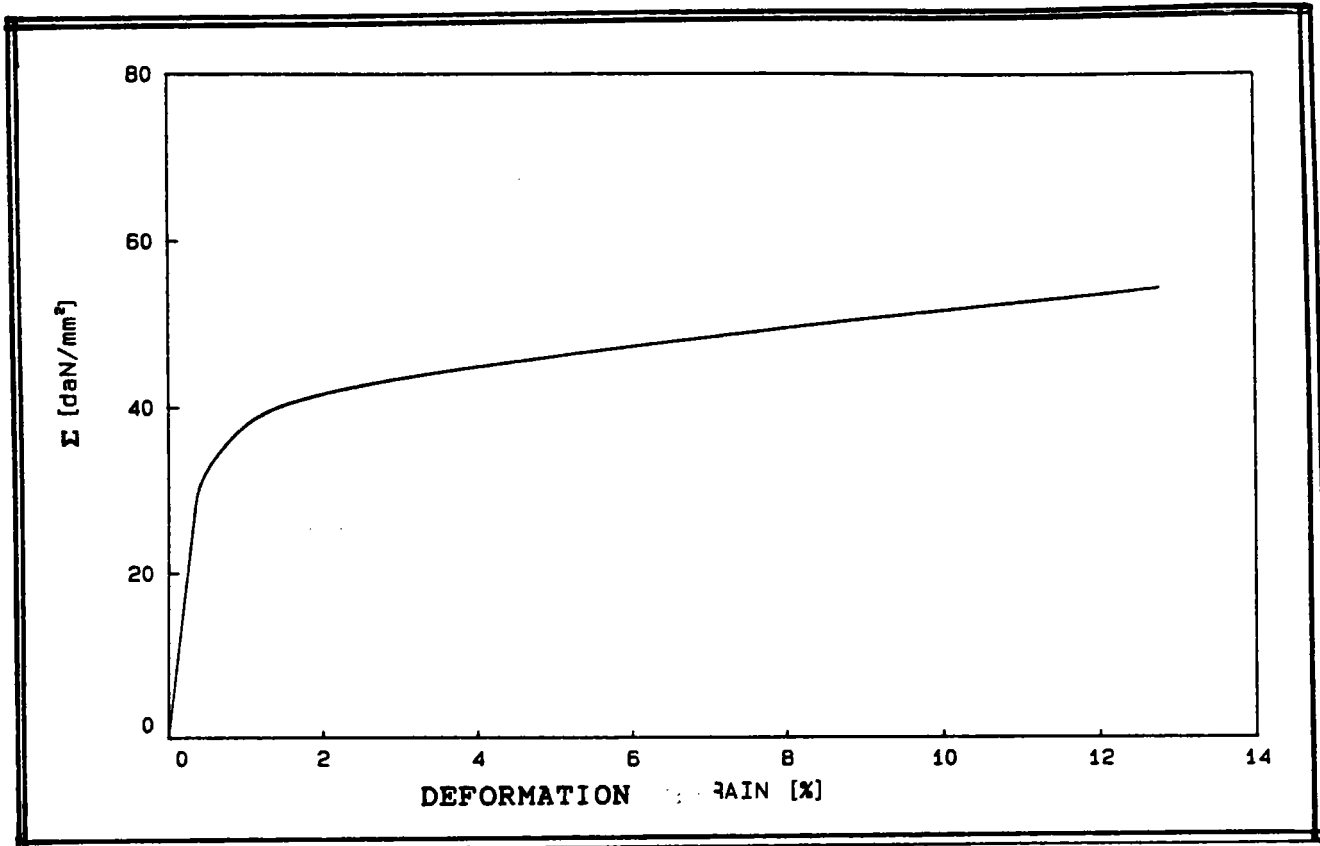


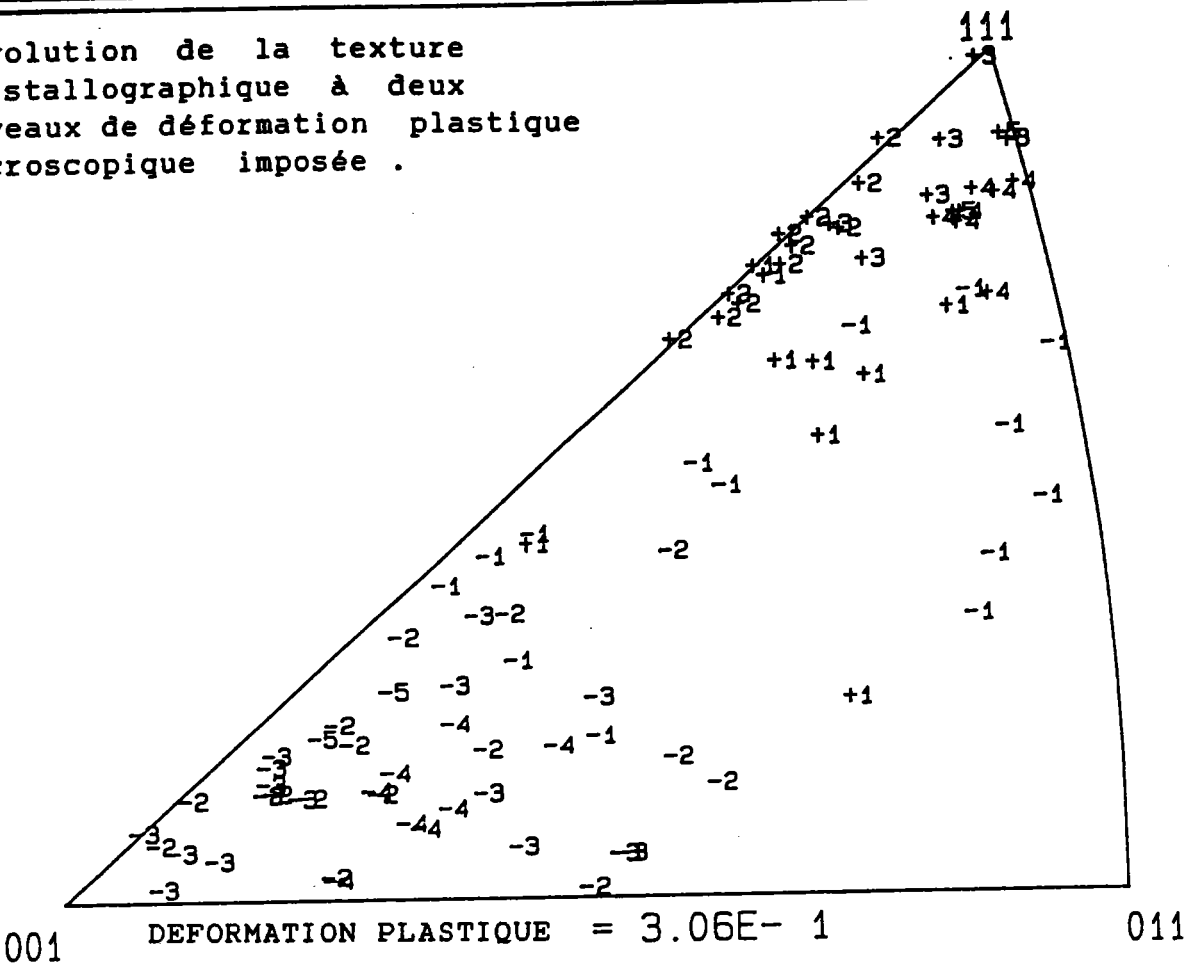
fig. 4) Evolution de la contrainte macroscopique  $\Sigma$  en fonction de la déformation totale.

On retrouve bien l'allure expérimentale de la courbe de traction Jaoul [6] :

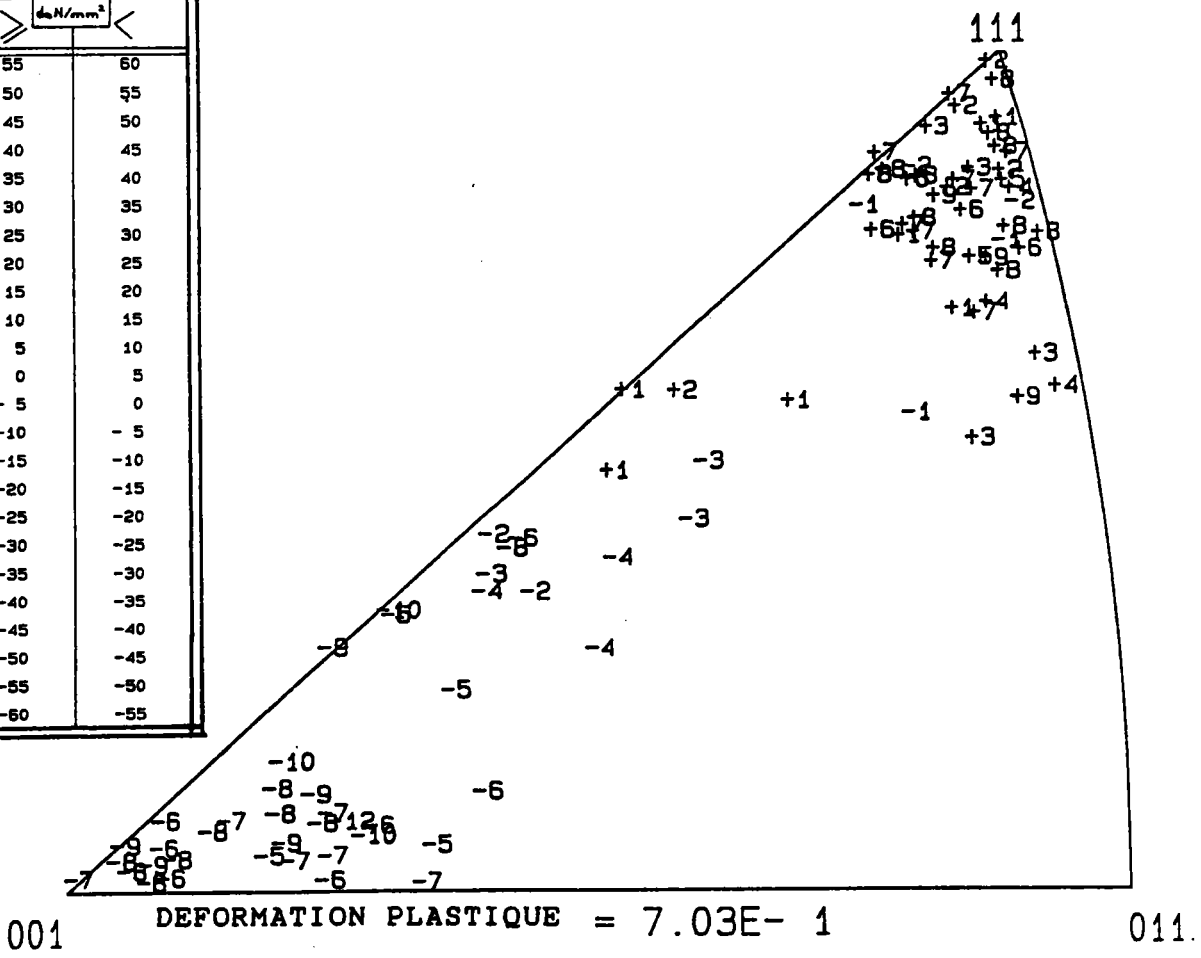
- Un régime à allure parabolique jusque 2% de déformation plastique.
- Un stade quasi linéaire de pente voisine à  $E/100$  où  $E$  est le module d'Young du polycristal

Les figures de pole inverses (fig. 5) décrivent l'évolution de la texture cristallographique pour différents niveaux de déformation plastique. Sur ces figures sont repérées les orientations de l'axe de traction  $z$  pour chaque grain par rapport au repère du monocristal, ainsi que les contraintes résiduelles (composantes parallèles à l'axe de chargement) après décharge.

fig 5) Evolution de la texture cristallographique à deux niveaux de déformation plastique macroscopique imposée .



indice $\sigma_{33}$	$\epsilon_{33}/\text{mm}^2$	
	>	<
+12	55	60
+11	50	55
+10	45	50
+ 9	40	45
+ 8	35	40
+ 7	30	35
+ 6	25	30
+ 5	20	25
+ 4	15	20
+ 3	10	15
+ 2	5	10
+ 1	0	5
- 1	- 5	0
- 2	-10	- 5
- 3	-15	-10
- 4	-20	-15
- 5	-25	-20
- 6	-30	-25
- 7	-35	-30
- 8	-40	-35
- 9	-45	-40
-10	-50	-45
-11	-55	-50
-12	-60	-55



17

La figure (5) met en évidence le regroupement des différentes orientations autour des axes de fibres  $\langle 111 \rangle$  et  $\langle 100 \rangle$  ce qui est bien observé expérimentalement Van Houtte [7], Grewen J., Wassermann [8].

On s'aperçoit que les monocristaux regroupés autour de l'axe de fibre  $\langle 111 \rangle$  sont soumis à des contraintes résiduelles de traction alors que pour les monocristaux se rapprochant de l'axe de fibre  $\langle 100 \rangle$ , les contraintes résiduelles sont de compression.

Les grains orientés suivant l'axe  $\langle 111 \rangle$  s'écroutissent beaucoup plus que les grains orientés suivant l'axe  $\langle 100 \rangle$  (fig 6). Ce résultat est bien conforme aux résultats expérimentaux sur des monocristaux.

Ceci apparaît clairement sur la figure (7), suivant les poles  $\langle 111 \rangle$  et  $\langle 001 \rangle$  les contraintes résiduelles sont respectivement de traction et de compression ce qui nous permet d'affirmer que, lors du chargement, les contraintes internes sont soit supérieures ou inférieures à la contrainte macroscopique .

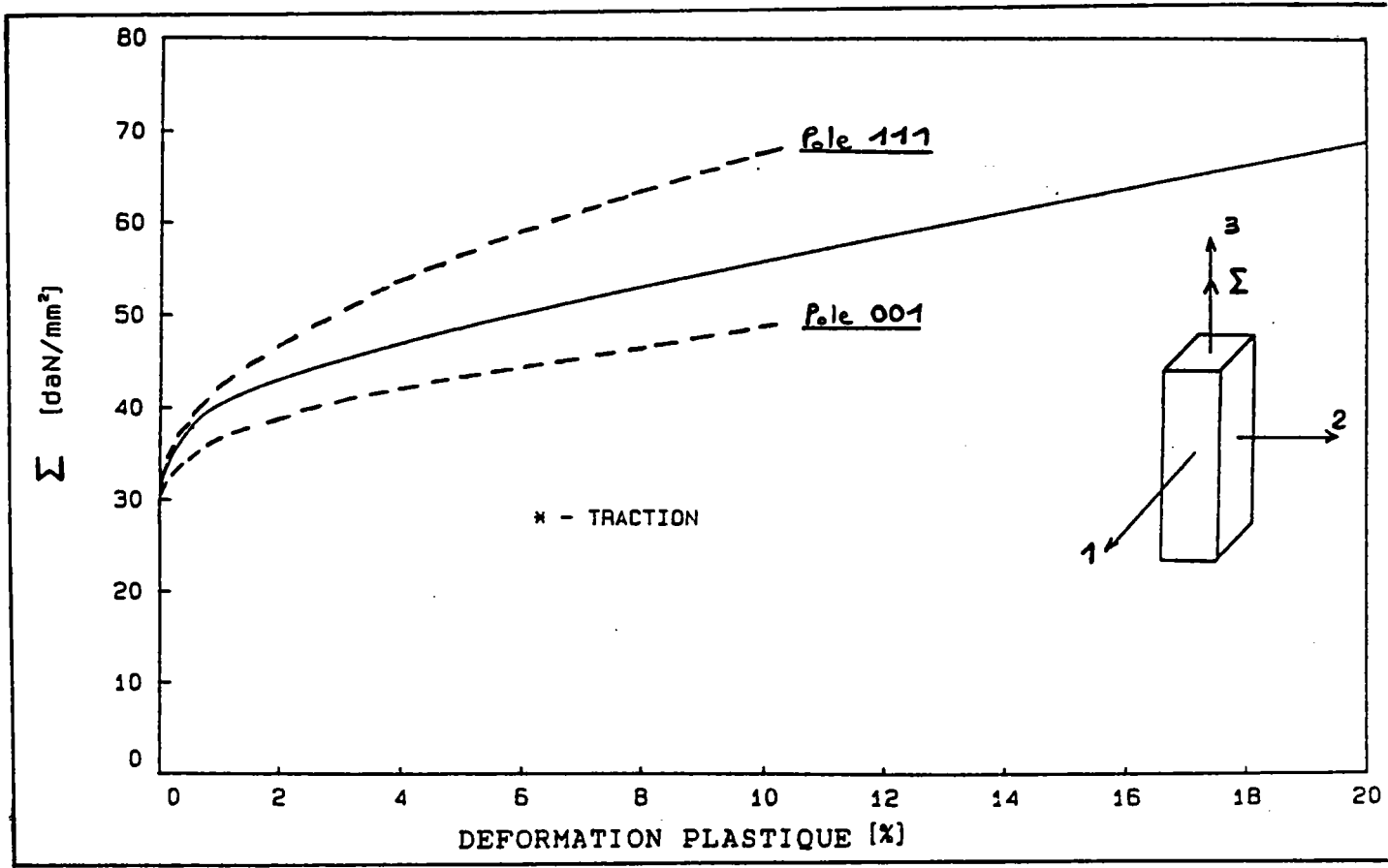


fig. 6 Evolution des contraintes internes dans les grains orientés suivant les poles <111> et <001> et de la contrainte macroscopique en fonction de la déformation plastique.

L'orientation cristallographique d'un monocristal de la matrice est un facteur prédominant , elle implique un écrouissage plus ou moins important.

Suivant la texture cristallographique obtenue après traitement thermomécanique la matrice ne présentera pas le même comportement élastoplastique ce qui constitue un élément essentiel pour l'étude du comportement élastoplastique du composite.

A partir de la figure de pole inverse (fig 3) nous tirons six orientations préférentielles associées aux poles  $\langle 111 \rangle$ ,  $\langle 011 \rangle$  et  $\langle 001 \rangle$  que nous dénommerons A , B , C , D , E , F .Puis en fonction de la déformation plastique nous suivons l'évolution des contraintes résiduelles (fig 7). $\Sigma$  représente la contrainte macroscopique de traction imposée suivant l'axe Z.

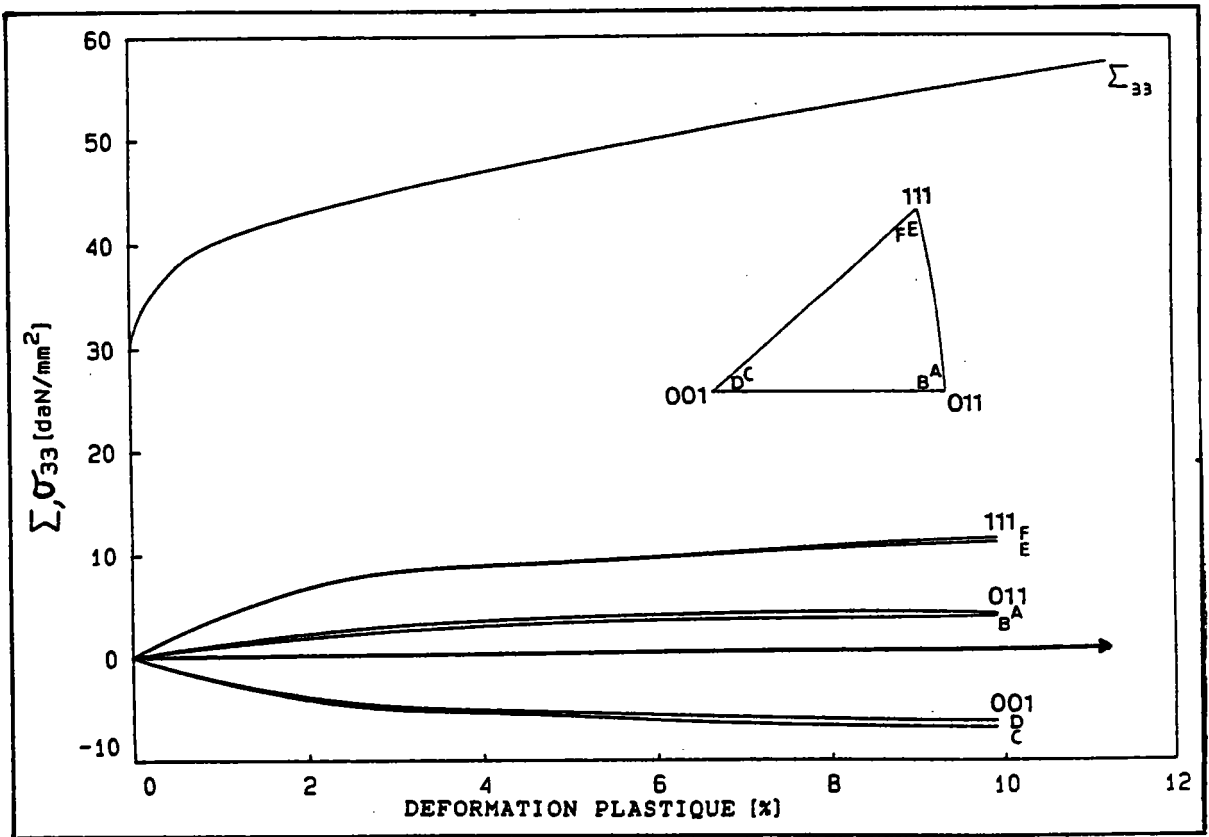


fig. 7) Evolution des contraintes résiduelles (composante  $\sigma_{33}$ ) dans différents grains de la matrice et de la contrainte macroscopique  $\Sigma$  en fonction de la déformation plastique macroscopique

Plusieurs points importants sont à observer:

-les contraintes résiduelles développées sont de l'ordre de 20% de la contrainte macroscopique.

-Il est observé une rapide évolution des contraintes résiduelles celle-ci étant due aux développements de fortes incompatibilités plastiques entre grains. En début de plastification, peu de systèmes de glissement sont actifs ce qui a pour effet de développer facilement des incompatibilités plastiques aux joints de grains ; alors que pour 3% et plus l'augmentation des contraintes résiduelles est plus faible ceci étant dû au nombre plus grand de systèmes de glissement actifs .

La figure 8) permet de suivre l'évolution des contraintes résiduelles  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  en fonction de la déformation plastique. On observe que ces composantes sont supérieures à la composante  $\sigma_{33}$  mais ont une évolution analogue.

Il est difficile de mesurer directement ces contraintes et ainsi d'avoir une confrontation théorie-expérience. Par contre une mesure globale attachée aux contraintes résiduelles est contenue dans l'énergie élastique stockée dans le matériau après une déformation plastique.



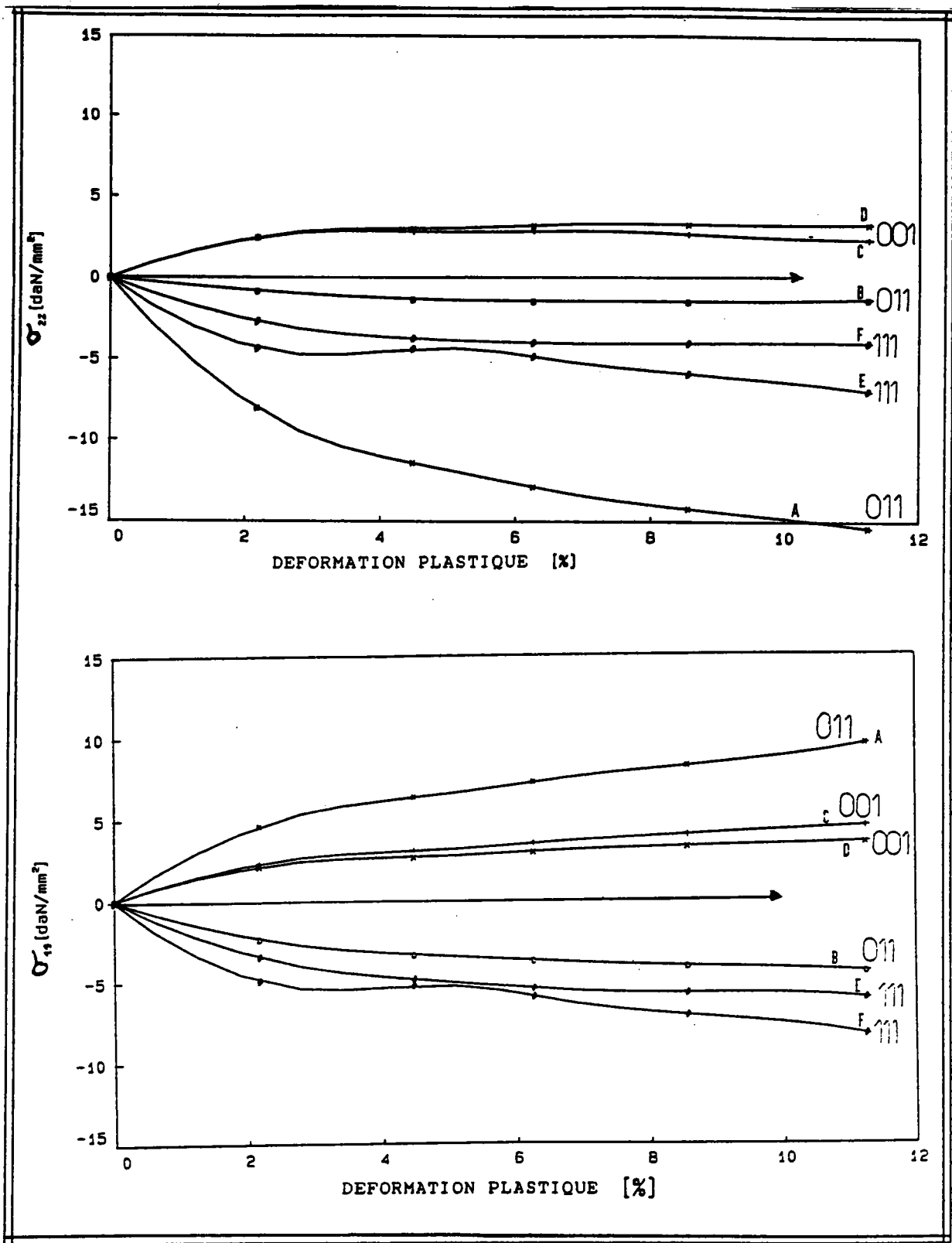


fig.8) Evolution des contraintes résiduelles (composante  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$ ) dans différents grains de la matrice en fonction de la déformation plastique macroscopique .

Au cours du chargement , le matériau se déforme élastoplastiquement les conséquences sont les suivantes, il y a d'une part échauffement et d'autre part écrouissage de celui-ci. Le travail de déformation contient trois termes:

- l'énergie dissipée
- l'énergie élastique récupérable à la décharge
- l'énergie stockée dans le matériau sous forme de défauts et de contraintes internes.

On appellera l'énergie élastique stockée la différence d'énergie entre le travail de déformation plastique et la quantité de chaleur dissipée. Les détails des calculs concernant l'évaluation des différentes quantités sont donnés dans [9].

L'énergie élastique stockée représente une faible partie de l'énergie de déformation totale. Néanmoins c'est cette énergie qui est caractéristique de l'état interne du matériau.

La figure 9) permet de suivre pour un essai de traction simple l'évolution de l'énergie élastique  $U_S^\sigma$  associée aux contraintes résiduelles du deuxième ordre ainsi que l'énergie de dislocation  $U_S^d$  celle-ci étant déduite de l'évolution des cissions critiques sur chaque systèmes de glissement.

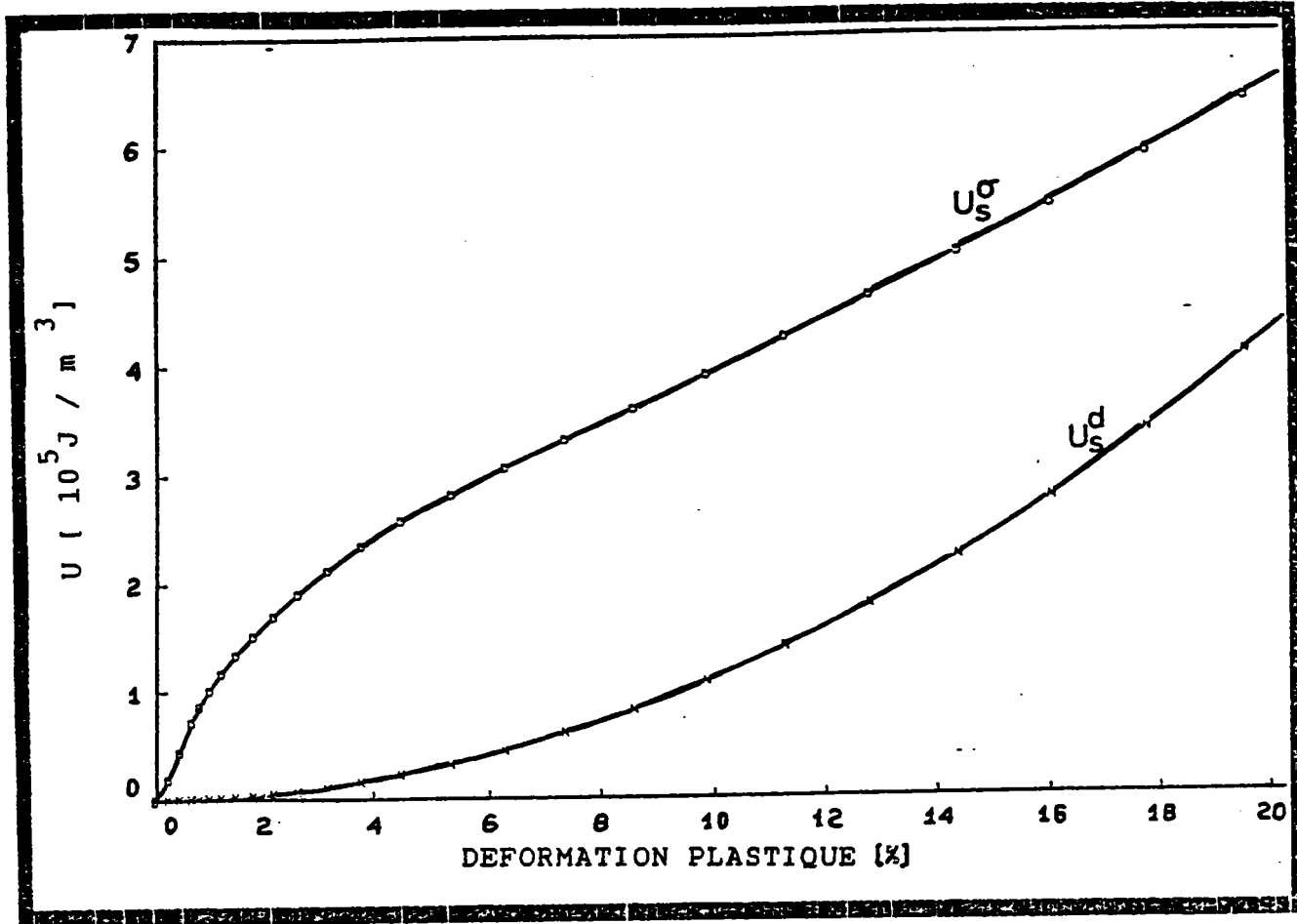


figure 9) évolution de l'énergie élastique stockée et de l'énergie de dislocations en fonction de la déformation plastique.

Une forte évolution de l'énergie élastique stockée est observée pour de faibles valeurs de déformations plastiques, ce qui s'accorde avec la forte augmentation des contraintes résiduelles en début de plastification. Compte tenu du faible nombre de systèmes actifs, il y a incompatibilité de la déformation plastique aux joints de grains et l'énergie de dislocations est faible au début. Par la suite, les contraintes internes sont partiellement relaxées par le glissement multiple, qui augmente plus rapidement l'énergie stockée associée aux dislocations.

La figure 10) représente la fraction d'énergie bloquée associée aux contraintes internes du second ordre en fonction de la déformation plastique lors d'un essai de traction. L'allure de la courbe obtenue

ainsi que ses différentes caractéristiques ( maximum, valeur asymptotique...) sont conformes aux mesures expérimentales obtenues sur de nombreuses classes de matériaux [10],[11],[12].

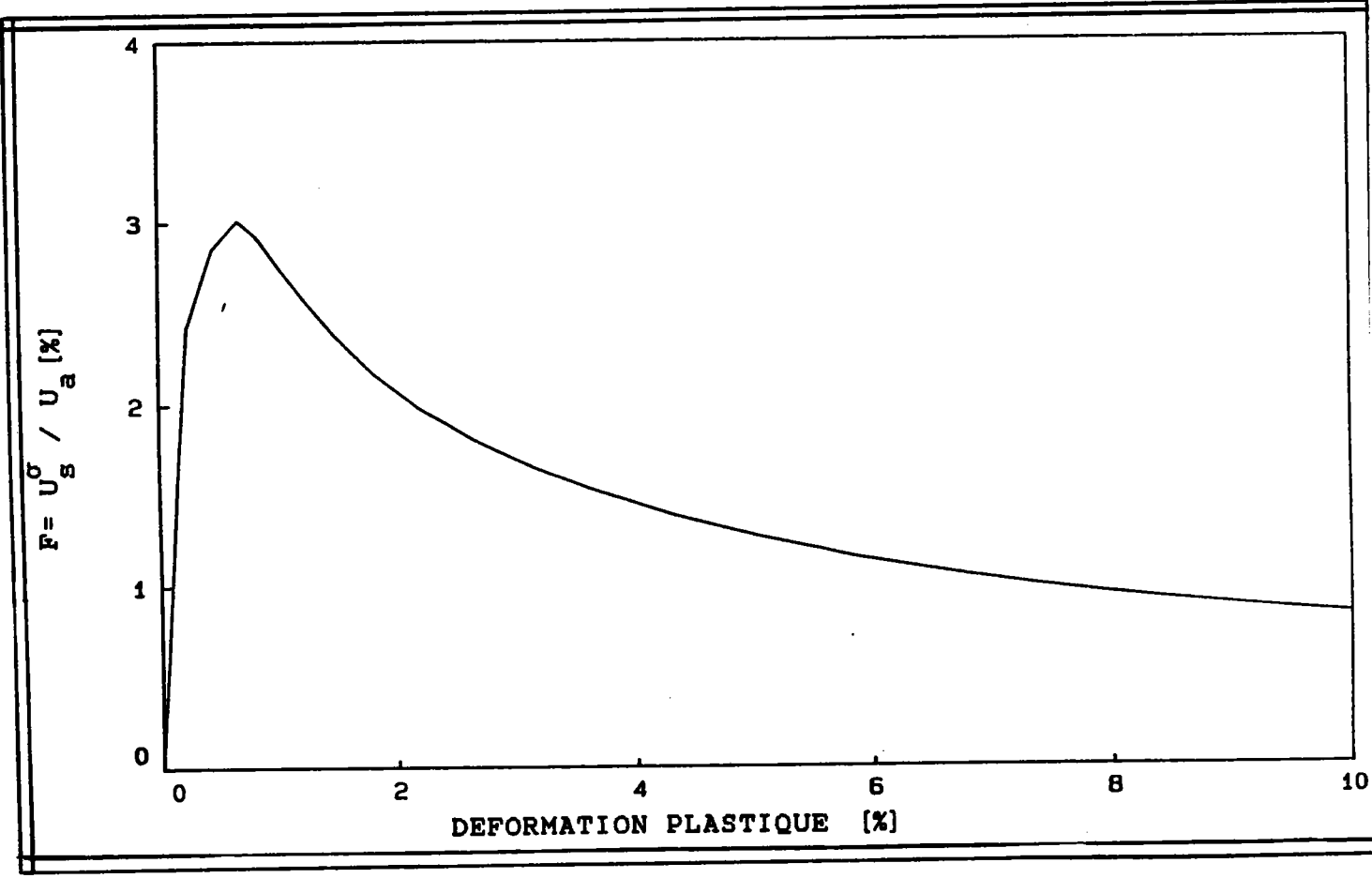


figure 10) évolution de la fraction d'énergie bloquée en fonction de la déformation plastique.  $F = U_s^\sigma / U_a$ .

$U_a$  est l'énergie de déformation plastique .

Les contraintes résiduelles accumulées au cours du chargement peuvent être relaxées par traitement thermique, mais aussi par une déformation plastique supplémentaire. Pour cela, analysons le cas d'un chargement séquentiel. La figure 11) représente l'évolution de la contrainte d'écoulement pour un essai de traction, suivi d'une compression. La matrice prédeformée en traction (pour une déformation plastique équivalente de 20%) sera ensuite soumise à un essai de compression pour lequel, on va chercher à connaître l'évolution de l'énergie élastique bloquée.

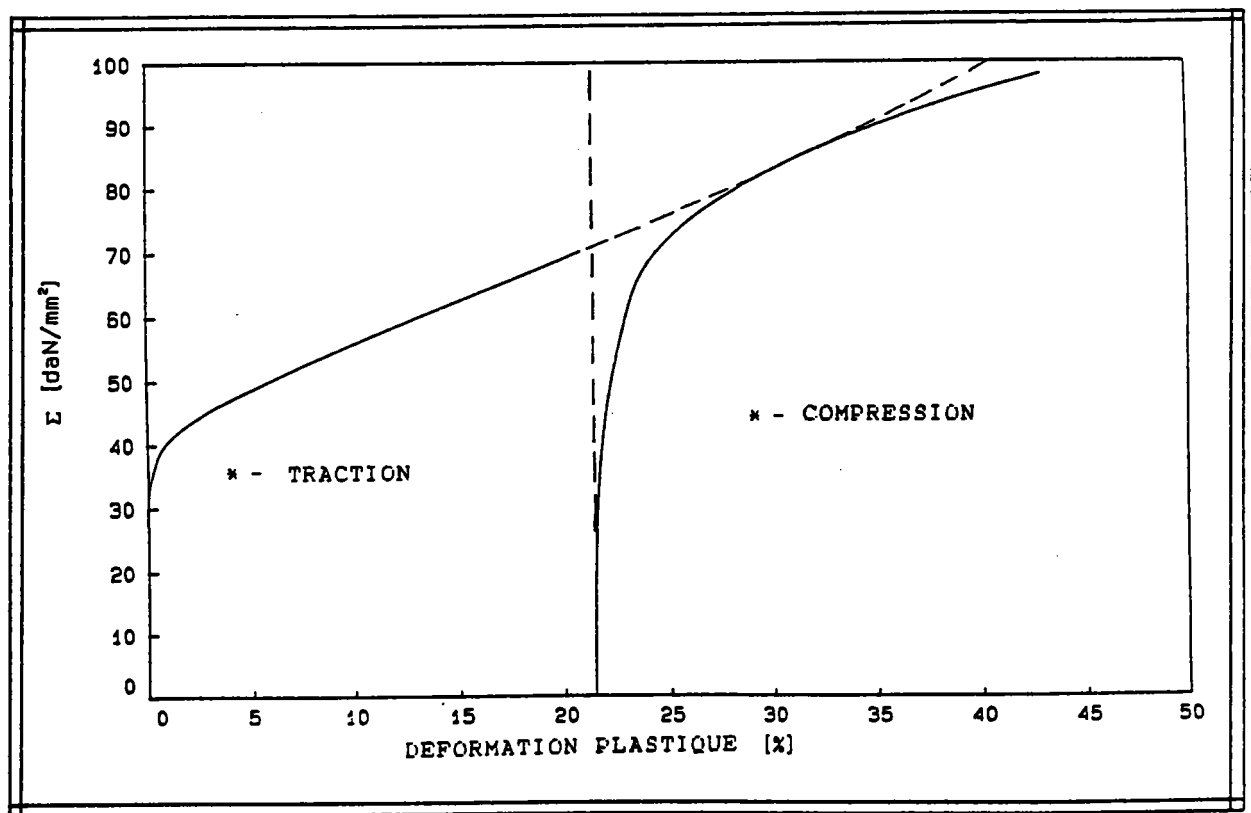


figure 11) évolution de la courbe de traction et de la courbe de compression après prédeformation.

La figure 12) décrit l'évolution de l'énergie élastique stockée en fonction de la déformation plastique. Une diminution sensible de l'énergie stockée apparaît au début de la compression. Cette restitution est associée à la relaxation des contraintes internes du deuxième ordre due à l'activation de systèmes de glissement autre que ceux potentiellement actifs lors de la traction .

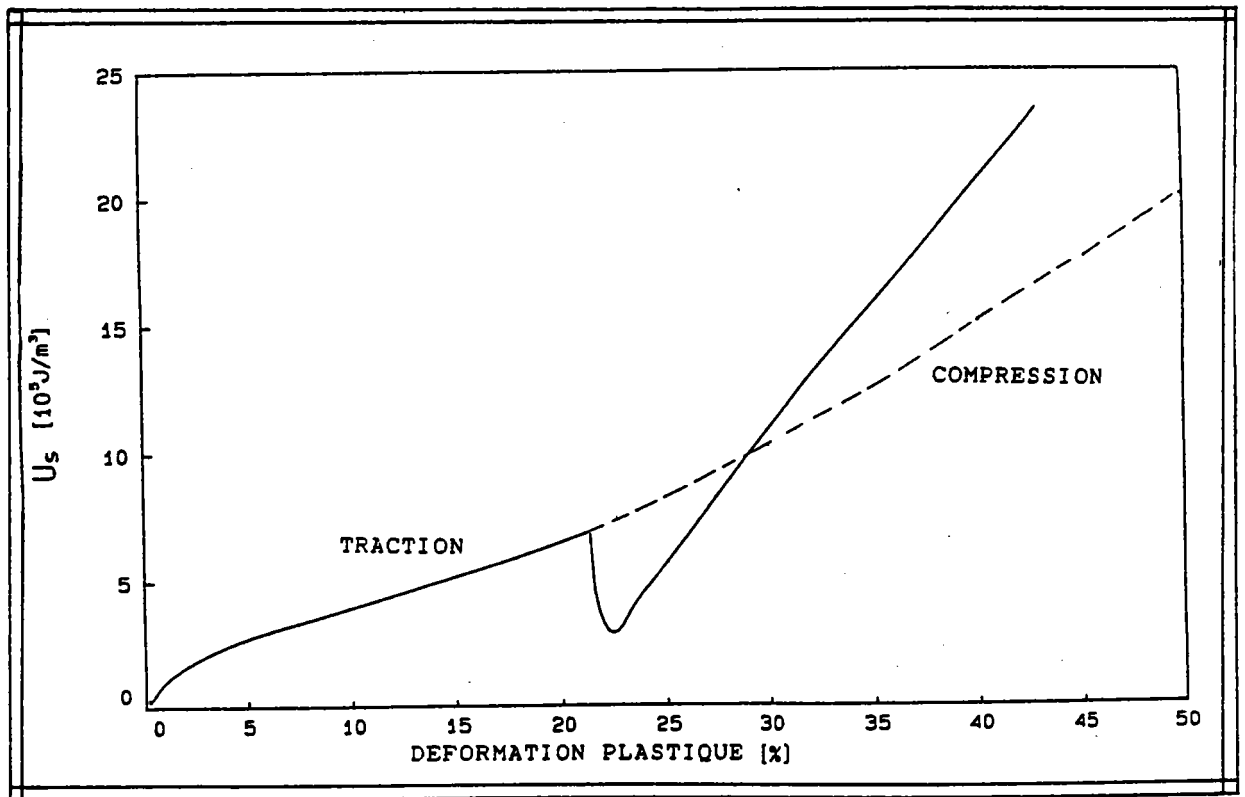


figure 12) évolution de l'énergie élastique stockée pour un chargement séquentiel.

Dans le cas d'un chargement séquentiel une évolution analogue a été observée expérimentalement ,Bever [13] .

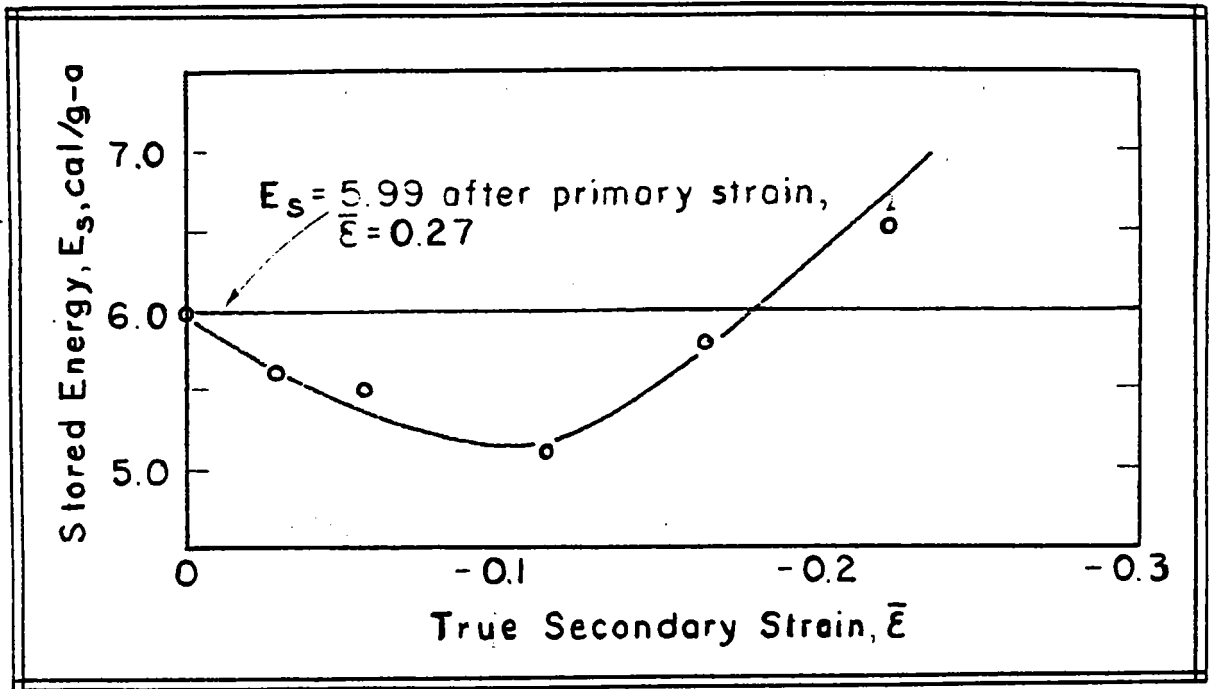


figure 13) courbe expérimentale décrivant l'évolution de l'énergie élastique stockées pour un chargement séquentiel. D'après Bever [13].

Il est intéressant de remarquer que pour de faibles déformations plastiques macroscopiques , les contraintes internes du second ordre développées contribuent à rendre le matériau anisotrope en élastoplasticité , alors que pour des déformations plus élevées l'évolution de l'orientation cristallographique des grains est la source principale d'anisotropie . Dans ce cas une confrontation expérimentation, modélisation dans le cas du laminage est proposée dans [14].

## conclusion

Dans ce travail, on peut considérer que les résultats obtenus à partir de la formulation autocohérente sont en très bon accord avec l'ensemble des observations expérimentales.

Des calculs plus poussés concernant le comportement élastoplastique des métaux en grandes déformations ( Lipinski P. , Krier J. , Berveiller M., [14] ) ont aussi été effectués.

L'utilisation d'une approximation autocohérente à un site de l'équation intégrale nous permet d'obtenir des résultats satisfaisants et de conclure que l'anisotropie du comportement élastoplastique résulte simultanément des contraintes internes du second ordre, des textures cristallographiques et des paramètres d'écroutissage.

A présent étudions le cas plus complexe du matériau composite à matrice métallique pour lequel il faut prendre en compte le caractère polycristallin de la matrice mais de plus les hétérogénéités de comportement entre la fibre (thermoélastique) et les grains de la matrice (thermoélastoplastique).



#### 4.2.2 LE COMPORTEMENT ELASTOPLASTIQUE DU COMPOSITE A MATRICE METALLIQUE

Dans ce paragraphe on étudie donc en fonction de la forme des renforts et de leur fraction volumique, le comportement élastoplastique des matériaux composites à matrice métallique.

Pour le composite Al-Sic les caractéristiques élastiques et plastiques sont données dans les tableaux précédents 1 et 2.

La forme des renforts est définie par les paramètres de forme a,b,c. Les fibres sont unidirectionnelles. Nous n'avons pas de contraintes d'origine thermique, résiduelles, ni de variation de la température.

Les différents essais présentés concernent:

- les courbes de traction pour différentes formes et fraction volumique de fibres.
  
- l'évolution des contraintes résiduelles
  
- l'effet Bauschinger
  
- les surfaces de plasticité
  
- le chargement cyclique

#### 4.2.2.1 COURBES DE TRACTION

Ce paragraphe concerne l'étude de l'influence des renforts sur le comportement élastoplastique des matériaux composites à matrice métallique lorsque le chargement correspond à un essai de traction monotone uniaxiale .

Pour illustrer la discussion menée en fin de chapitre 3 ( paragraphe mise en oeuvre ), nous avons calculé différentes courbes de traction pour un composite donné en affectant différentes formes aux grains de la matrice.

En partant de grains sphériques, nous avons fait varier le rapport  $c/a$  des grains jusqu'à une valeur égale à celle des renforts.

La figure (14) présente les résultats obtenus.

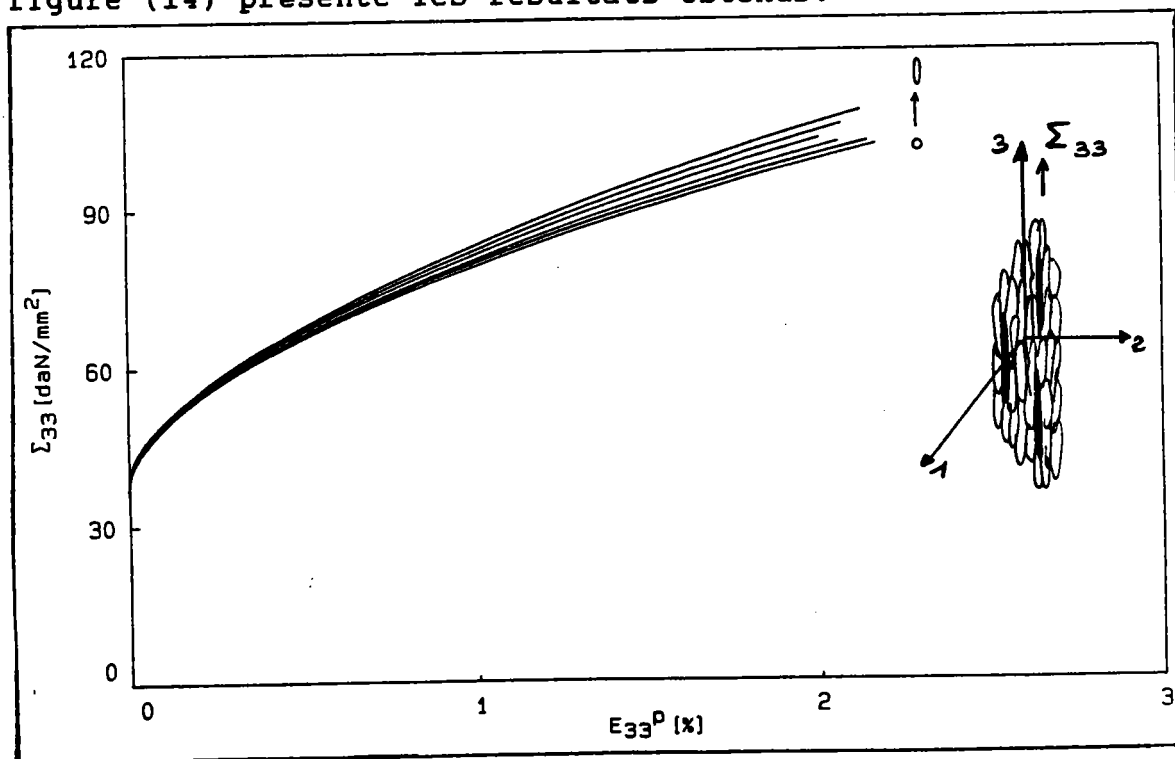


fig.14 Evolution des contraintes de traction imposées en fonction de la déformation plastique macroscopique pour différentes formes de grains de la matrice (  $c/a = 1$  à  $7$  ), les grains de la matrice sont unidirectionnels et parallèles aux fibres SiC (  $a=b=c/7$ ,  $f_f=10\%$  )

On constate que les courbes partent pratiquement de la même limite élastique et que l'écroutissement devient plus important au fur et à mesure que la forme choisie pour les grains se rapproche de celle des fibres. Néanmoins, l'effet semble faible par rapport à ceux qui sont associés à la fraction volumique  $f^I$  ou à la forme des renforts. En élastoplasticité la texture morphologique de la matrice ne semble pas jouer un rôle important. Par conséquent dans ce cas nous considérons que les grains de la matrice peuvent être assimilés à des sphères. La figure 15) montre les différentes courbes de traction obtenues pour des renforts sphériques ( $a=b=c$ ) et pour différentes fractions volumiques ( $F_i=0\%, F_i=10\%, F_i=20\%$ ).

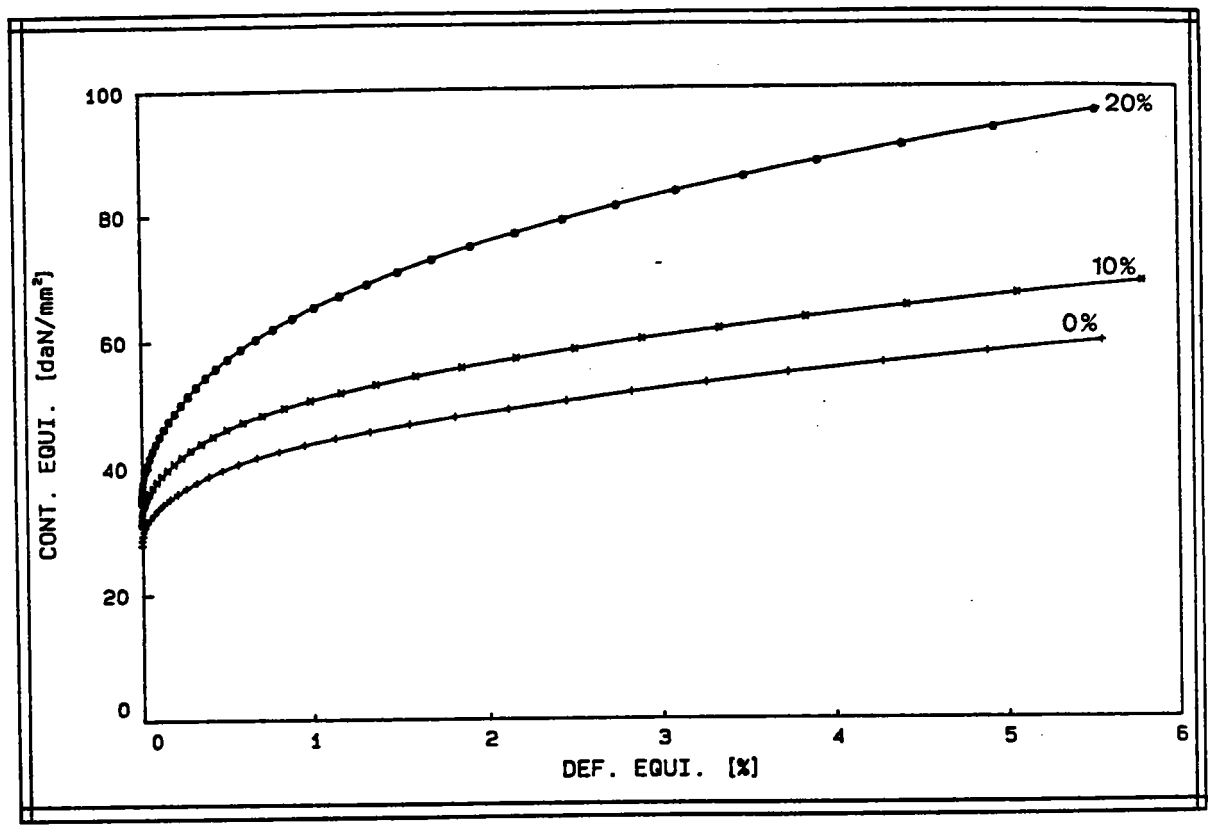


figure 15) Courbes de traction simple uniaxiale calculées pour différentes fractions volumiques (0%, 10%, 20%) les renforts sont sphériques ( $a=b=c=1$ ).

Plusieurs points importants sont à noter :

-La limite d'élasticité qui physiquement correspond à l'activation du système de glissement le plus chargé est différente de la limite d'élasticité de la matrice uniquement.

Pour les essais de traction sur la matrice, il avait été observé que la limite d'élasticité correspondait approximativement au double de la pression critique initiale imposée. Ceci est retrouvé pour une fraction volumique de fibres nulles.

$$\Sigma \approx 2. \sigma_0$$

Par contre la limite d'élasticité pour un composite à renforts sphériques augmente avec la fraction volumique des renforts. Ceci est dû aux tenseurs concentration de contraintes élastiques différents pour les fibres et la matrice.

-Le stade parabolique de la courbe de traction correspond à l'activation progressive des différents systèmes de glissement dans la matrice. Les interactions entre grains et renforts jouent un rôle prépondérant à ce stade par rapport à l'écroutissement intracristallin.

L'effet des tenseurs concentration de contraintes élastiques (dû à l'hétérogénéité élastique) s'observe dès la limite élastique et s'amplifie avec la déformation plastique en raison de l'hétérogénéité elastoplastique.

-Finalement un stade linéaire est observé : peu de systèmes s'activent et ceux qui le sont suffisent à relaxer les fortes contraintes internes dues aux incompatibilités de la déformation plastique aux joints de grains.

La figure 16) représente les résultats obtenus pour deux fractions volumiques ( 10 % et 20 % ) de fibres ayant des formes allongées parallèles à l'axe de traction.

L'effet de la forme des renforts est nettement visible et durcit considérablement le matériau lorsque  $c/a$  augmente.

La limite d'élasticité augmente avec le rapport de forme des fibres et leurs fractions volumiques (fig 17).

La pente du stade linéaire augmente avec la forme de fibres et leurs proportions.

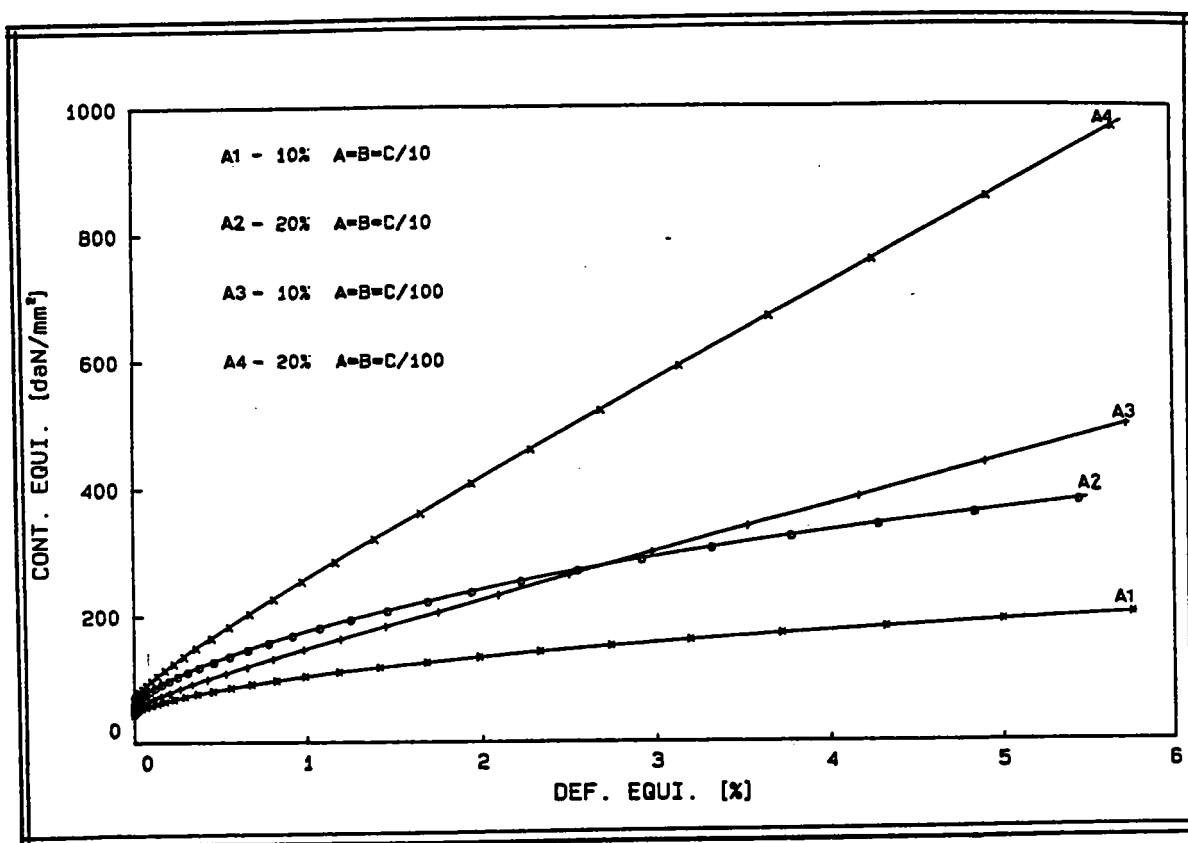


figure 16) Effets de la forme des renforts (parallèles) et de leur proportions sur le comportement en traction simple de composites Al-Sic.

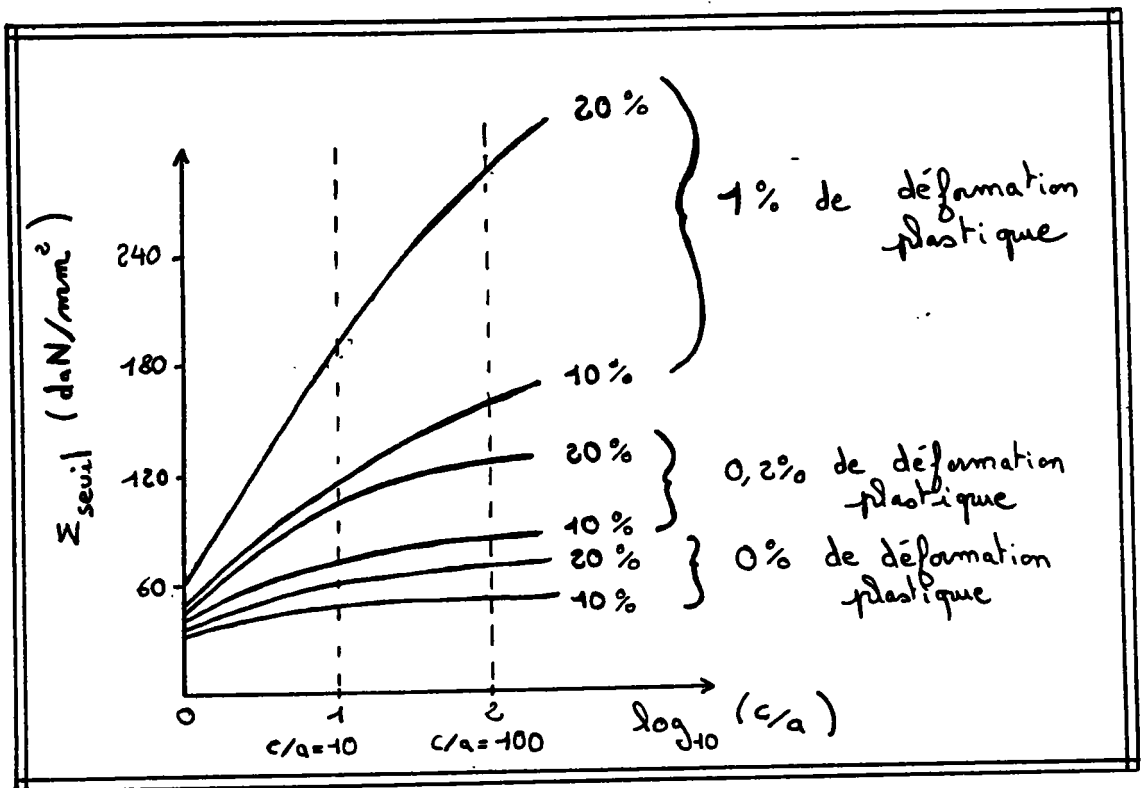


figure 17) Evolution de la contrainte seuil pour différents niveaux de déformation plastique en fonction de la forme des renforts et de leur proportion (ces résultats sont extrapolés de la figure 16)

#### 4.2.2.2 Les contraintes résiduelles

Après une précharge en traction suivant l'axe Z des fibres unidirectionnelles, on s'intéresse aux contraintes résiduelles.

Les figures 18) et 19) représentent l'évolution, de la composante  $\sigma_{33}$  des contraintes résiduelles en fonction de la déformation plastique pour deux formes de renforts  $c/a=10$  fig. (18) et  $c/a=100$  fig. (19) et deux fractions volumiques de SiC (10%, 20%).

Les lettres A, E, C correspondent à trois grains de la matrice qui sont orientés suivant les poles  $\langle 111 \rangle$ ,  $\langle 011 \rangle$ ,  $\langle 001 \rangle$  (voir figure 3)).

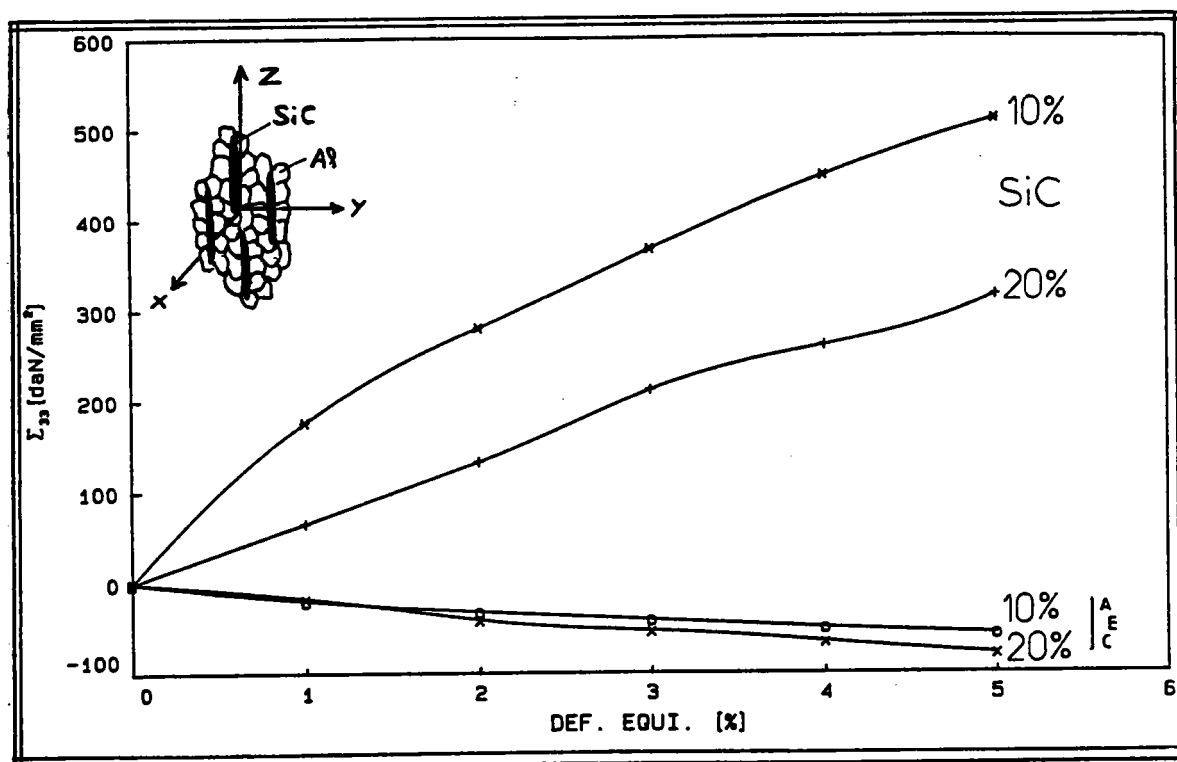


figure 18) Contraintes résiduelles ( $\sigma_{33}$ ) dans les renforts (SiC) et les grains (A, E, C) de la matrice en fonction de la prédéformation plastique et différentes teneurs en SiC ( $a=b=c/10$ ).

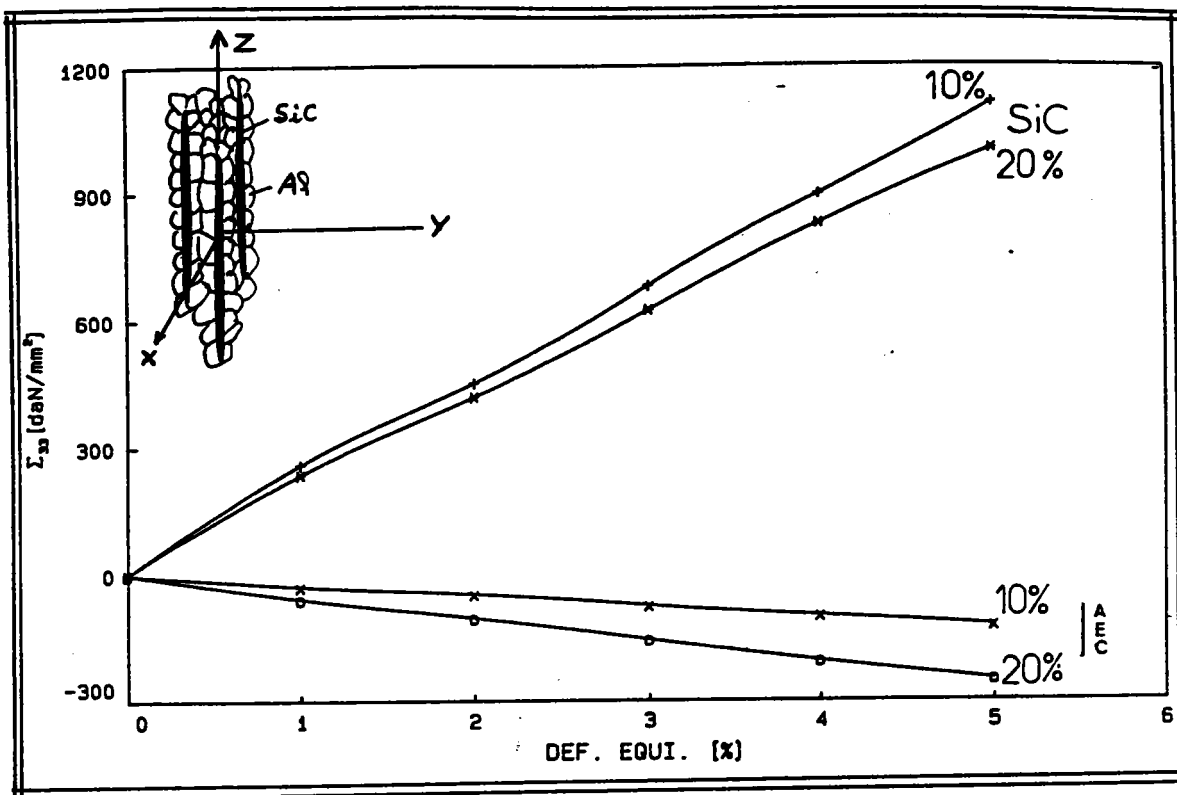


figure 19) Contraintes résiduelles ( $\sigma_{33}$ ) dans les renforts (SiC) et les grains (A, E, C) de la matrice en fonction de la prédéformation plastique et différents teneurs en SiC ( $a=b=c/100$ ).

Dans ces cas , l'hétérogénéité intragranulaire de la matrice apparait comme négligeable et tous les grains de la matrice sont en compression.

Par contre l'hétérogénéité fibre-matrice est considérable et crée des contraintes internes très fortes, particulièrement dans les renforts.

Les contraintes résiduelles dans les fibres diminuent lorsque la



la fraction volumique augmente ceci confirme les résultats numériques trouvés en élasticité où le tenseur de concentration mécanique (composante  $B_{3333}$ ) décroît lorsque la fraction volumique volumique des fibres augmente Ahaouari K., Corvasce F., Lipinski P., Berveiller M. [15].

Faute de résultats expérimentaux concernant l'Al-SiC, nous présentons ceux de la perlite Fe - Fe<sub>3</sub>C obtenus par Hauk V.M. [17] en utilisant la diffraction des R.X.

En effet, un comportement analogue est observé pour la perlite où les plaquettes de cémentite parallèles entre elles et toutes orientées suivant l'axe de charge jouent le rôle de fibres, d'après Sevillano J.Gil., Aernoudt E [16].

La figure qui suit permet de suivre l'évolution de contraintes résiduelles pour un chargement de traction.

On constate que pour une déformation plastique très petite la ferrite est en traction et la cémentite en compression, ceci est dû à l'hétérogénéité des coefficients de dilatation, des contraintes résiduelles peuvent prendre naissance du à la différence de contraction thermique dès la température de transformation (figure 20). Pour des déformations plastiques plus grandes, la cémentite ayant une limite d'élasticité plus grande que la ferrite présente des contraintes résiduelles de traction.

On constate une forte ressemblance entre les résultats obtenus par la modélisation sur l'Al-SiC et les résultats expérimentaux Fe-Fe<sub>3</sub>C. On retrouve des contraintes résiduelles de traction pour les plaquettes de cémentite et des contraintes résiduelles de compression pour la matrice de ferrite avec des évolutions quasi linéaires en fonction de la déformation plastique.

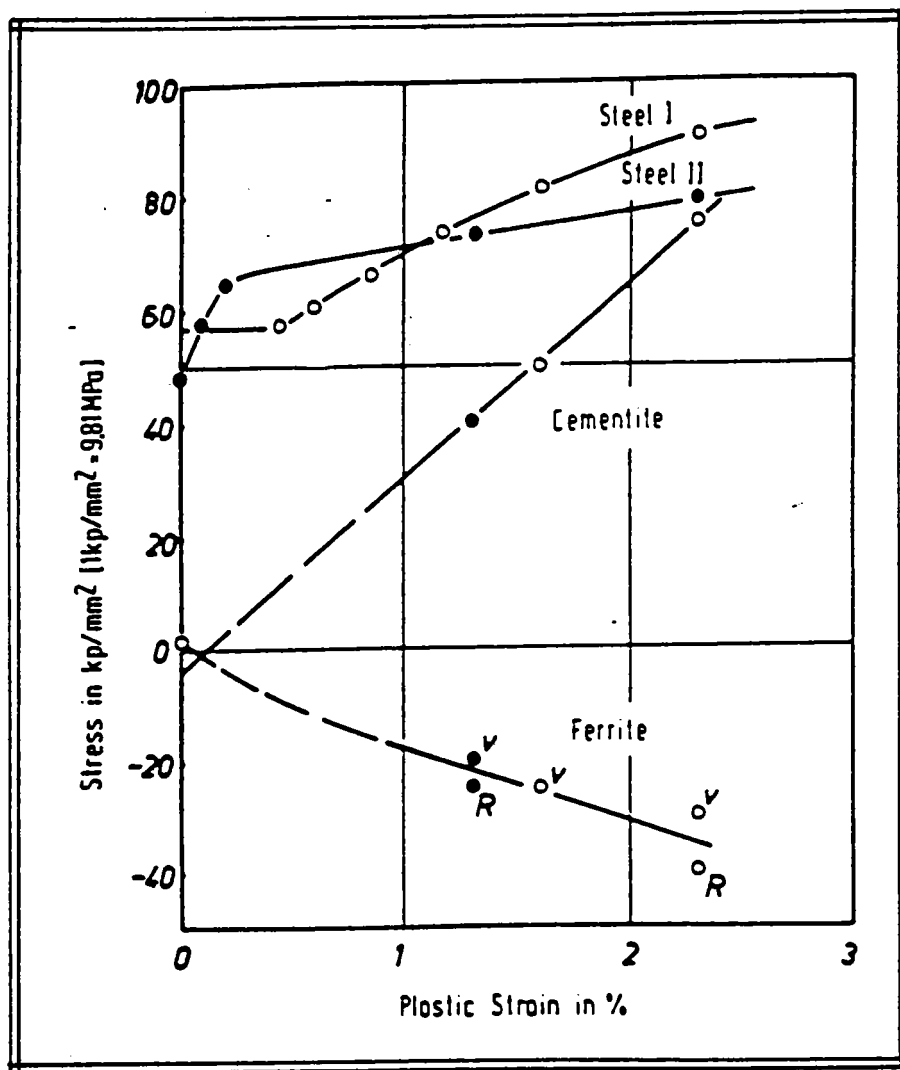


figure 20) Evolution des contraintes résiduelles dans la ferrite et la cémentite en fonction de la déformation plastique. Résultats expérimentaux d'après Hauk V.M. tirés de l'ouvrage Residual Stress and Stress Relaxation [17].

#### 4.2.2.3 Effet Bauschinger

---

Il a été observé par Bauschinger [18] qu'après une prédéformation en traction, la limite d'écoulement en compression est inférieure à celle obtenue en traction.

L'effet Bauschinger a pu être observé sur des monocristaux, il est dû au développement de contraintes internes liées à l'hétérogénéité de la déformation plastique intragranulaire (formation de cellules de dislocations, sous joints de grains, ....).

A l'échelle intergranulaire, les incompatibilités plastiques prenant naissance aux joints de grains développent de fortes contraintes internes. L'effet Bauschinger peut être caractérisé par des mécanismes se situant à deux échelles intragranulaire et intergranulaire.

Bien que les hétérogénéités de déformations dans le monocristal ne sont pas prise en compte dans ce modèle, il est intéressant d'analyser l'effet Bauschinger dans le cas des composites sachant que les contraintes internes sont très importantes.

Le développement de fortes contraintes internes associées à l'hétérogénéité de comportement est responsable d'un effet Bauschinger important , ainsi qu'il apparaît sur la figure 21).

Après une déformation plastique macroscopique de 1%, on observe à la décharge un écoulement plastique de compression alors que la contrainte appliquée est de traction.

De la même manière la figure 22) représente l'effet Bauschinger pour des fibres de paramètres de formes  $(a=b=c/14)$  ,  $(a=b=c/21)$  et pour 20% de fractions volumiques de celles-ci.

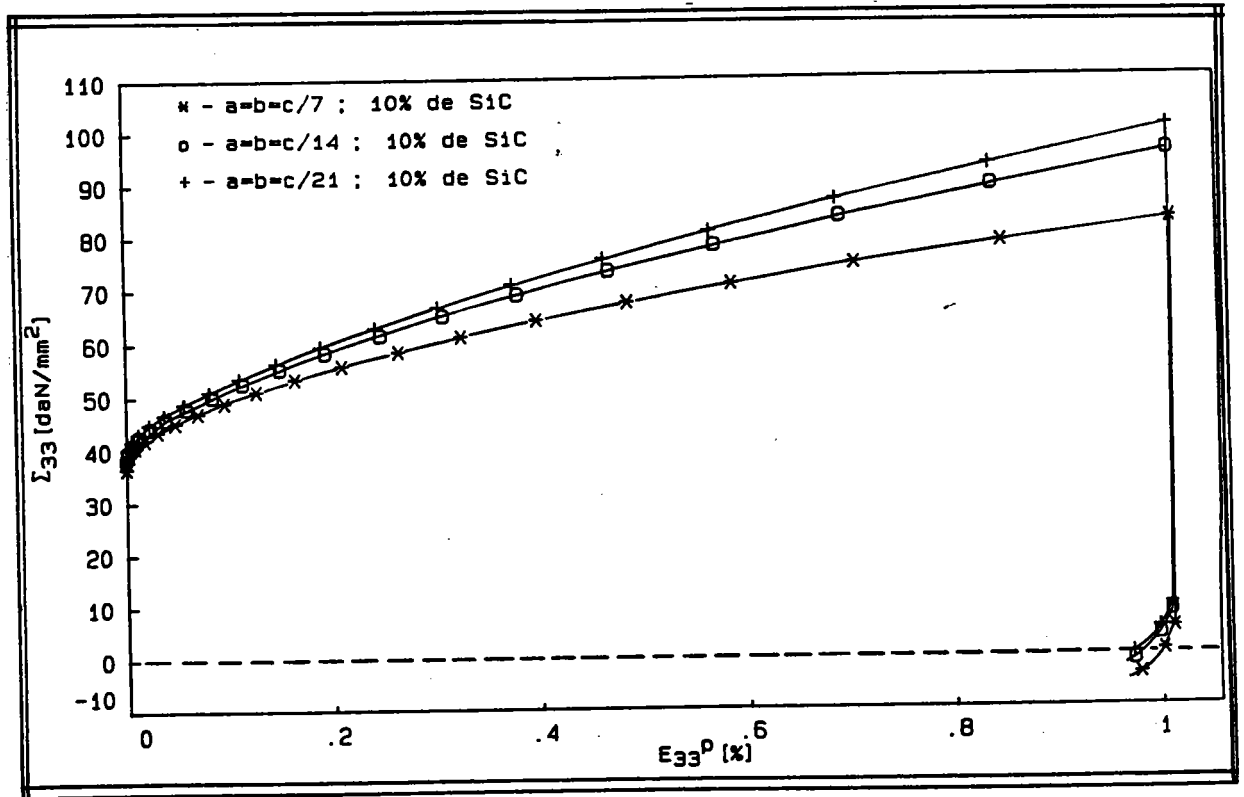


figure 21) effet Bauschinger en traction simple sur un composite à matrice métallique ( $F_i = 10\%$ ) et  $(a=b=c)$ ,  $(a=b=c/7)$   $(a=b=c/21)$ .

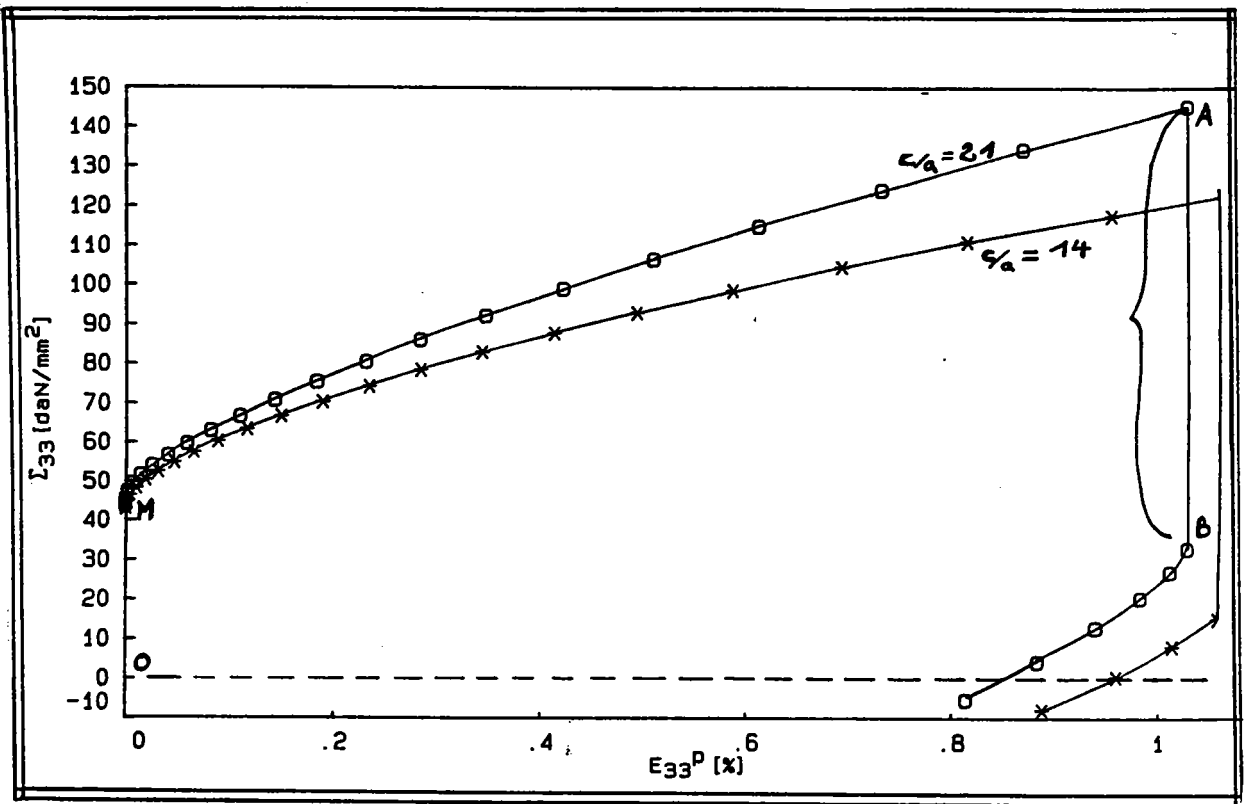
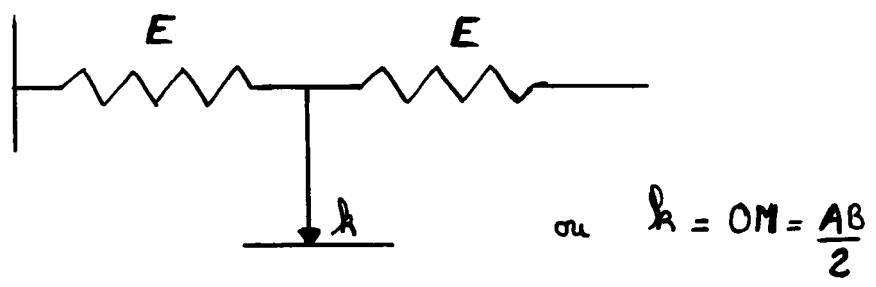


figure 22) effet Bauschinger en traction simple sur un composite à matrice métallique ( $F_i = 20\%$ ) et  $(a=b=c/14), (a=b=c/21)$ .

Le segment AB étant pratiquement égale au double de OM, on peut dire que l'écroûissage est presque parfaitement cinématique et correspond à un modèle usuel du type:



## essai Bauschinger sur le composite Cuivre-Tungstène

A défaut de résultats expérimentaux sur l'Al-SiC, nous proposons une comparaison modélisation expérimentation pour le composite Cu-W.

Parmi les essais cycliques qu'a effectué Lilholt [2] sur du cuivre renforcés par de longues fibres de tungstène de  $20\mu\text{m}$  de diamètre nous avons retenu un cas particulier. Dans ce cas le composite cuivre tungstène est composé d'une matrice polycristalline, les fibres sont unidirectionnelles allongées ( $a=b=c/100$ ) suivant l'axe de chargement, la fraction volumique de celles-ci est de 2%.

(L'essai experimental s'effectue à une température de 77 K figure 23).

Les caractéristiques élastiques et plastiques utilisées pour la modélisation sont données dans le tableau 3.

La matrice est ici composée de grains elliptiques de rapport de forme  $a=b=c/20$ , unidirectionnels allongés suivant l'axe de traction figure 24).

L'allure générale des résultats du calcul semble correspondre aux résultats expérimentaux. Cependant une forte différence est observée entre la contrainte de compression expérimentale et la contrainte de compression théorique, ce qui nous laisse croire que les contraintes internes sont mal évaluées dans le modèle. Ceci peut provenir de la:

- non prise en compte des contraintes thermiques initiales qui sont importantes dans ce cas.

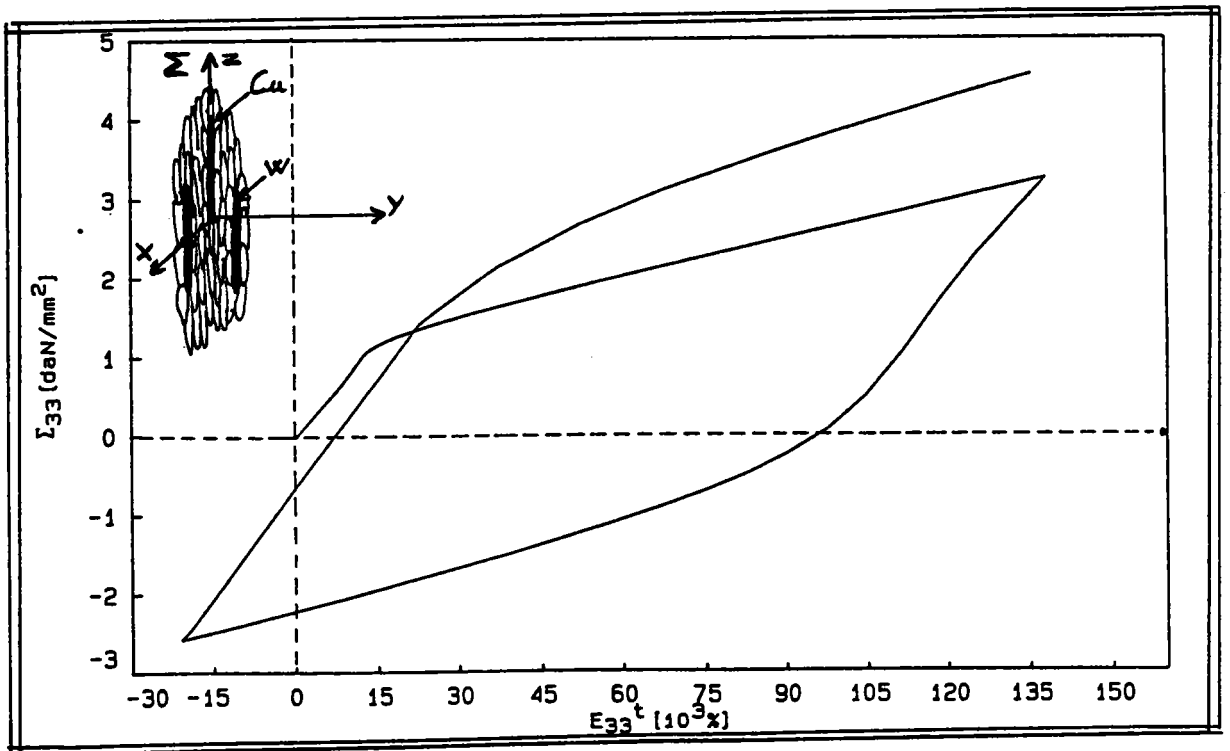
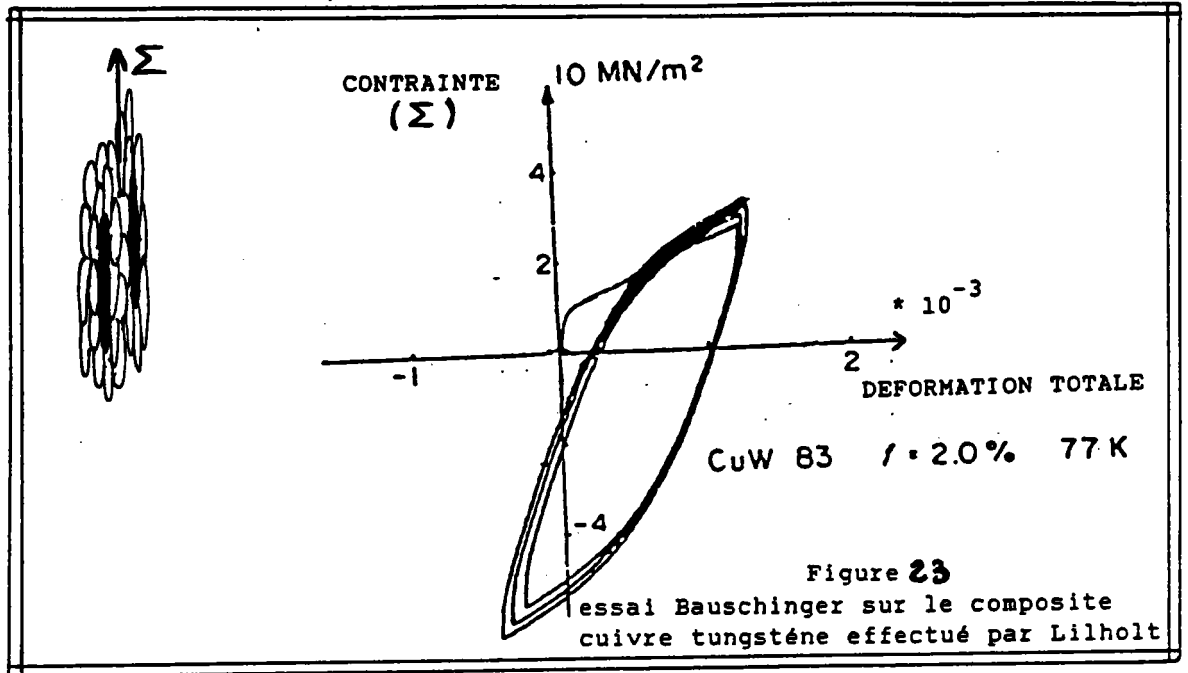


figure 24 ) essai Bauschinger sur le composite cuivre tungstène obtenu par la modélisation.

#### 4.2.2.4 Les surfaces d'écoulement

De nombreuses difficultés expérimentales sont rencontrées lorsqu'on veut suivre l'évolution des surfaces seuils :

- La limite d'élasticité mesurée qui dépend du chargement. Dans le cas d'un essai de traction il est facile de mesurer la déformation permanente pour une certaine contrainte atteinte mais il s'avère plus difficile d'évaluer la limite d'élasticité dans le cas d'un chargement multiaxial où le concept de contrainte équivalente et déformation équivalente est utilisé.
- Pour des chargements cycliques, on peut observer une diminution de la limite d'élasticité dans le sens inverse du premier chargement (effet Bauschinger), des courbes contrainte déformation qui traduisent soit un durcissement, un adoucissement ou une stabilisation.

Il va de soi que l'expérimentateur doit connaître les différents phénomènes physiques pouvant influencer ses résultats .Pour cela les modèles phénoménologiques actuels ne permettent pas d'étudier de façon assez rigoureuse le comportement élastoplastique des matériaux microhétérogènes comme les matériaux composites.

Pour l'Al-Sic à renforts sphériques ou elliptiques et pour différents chargements :

- chargements biaxés radiaux et monotones
- chargements complexes

nous présentons les différentes surfaces seuils pour différents niveaux de déformation plastique.

la figure 25) représente différentes surfaces seuils obtenues pour plusieurs chargements biaxés radiaux et monotones dans le plan ( $\epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ ). Les renforts sont sphériques les caractéristiques élastiques et plastiques sont données dans le tableau 2. La fraction volumique des renforts est de 10% .



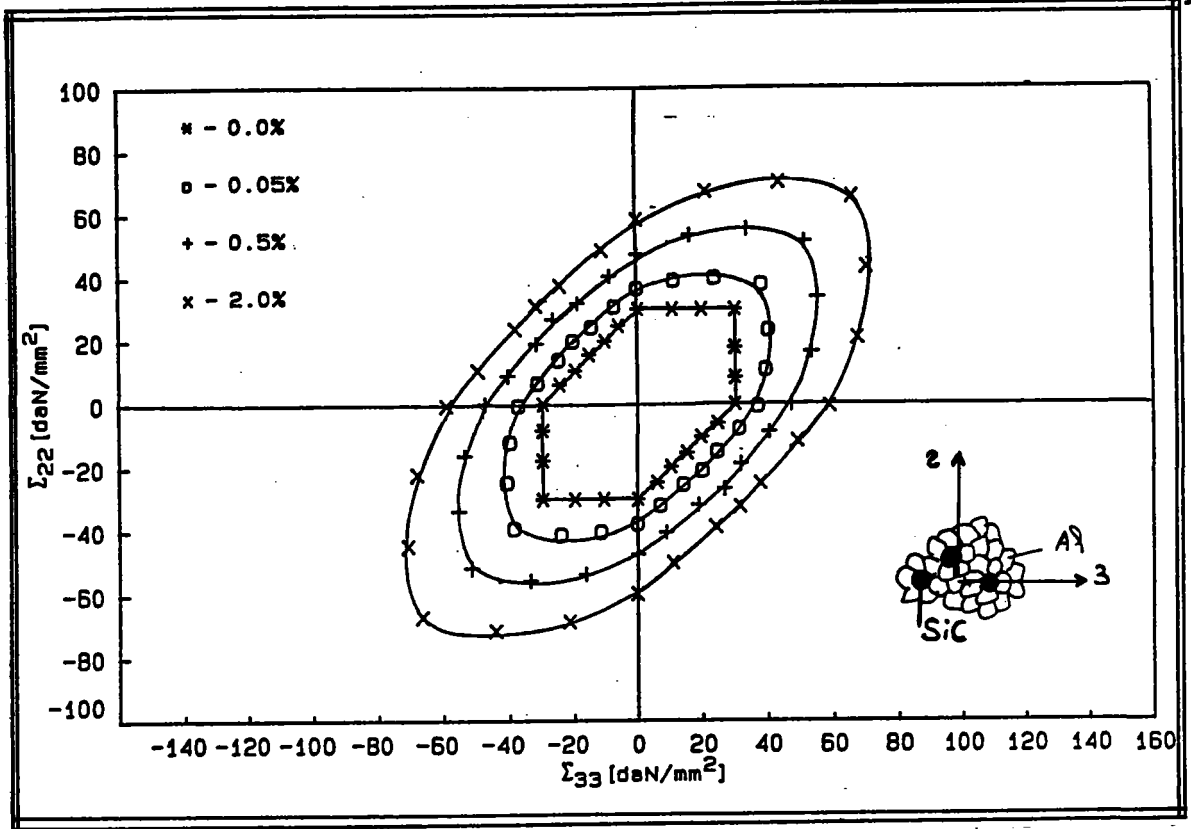


figure 25) Evolution des surfaces de plasticité en chargement biaxé pour un composite à renforts sphériques  $a=b=c=1$  avec une fraction volumique de renforts de 10%.

La surface seuil initiale correspond à l'état de contrainte nécessaire pour activer le premier système de glissement d'un monocristal de la matrice.

Les différentes surfaces seuils sont données pour différents niveaux de déformation plastique équivalente au sens de von Mises  $E_e^P = \frac{2}{3} \sqrt{\epsilon_{ij}^P \epsilon_{ij}^P}$ . La surface perd assez vite son caractère angulaire pour suivre un gonflement régulier d'allure elliptique proche de de l'ellipse de Von Mises. On observe un comportement isotrope (comme attendu) mais la forme de la surface dépend fortement du seuil de plasticité choisi.

Dans le cas de renforts de forme allongée, on constate une forte anisotropie initiale du seuil de plasticité due à l'hétérogénéité élastique. Les fibres sont unidirectionnelles de rapport de forme  $a=b=c/7$  avec une fraction volumique de 10% figure 26).

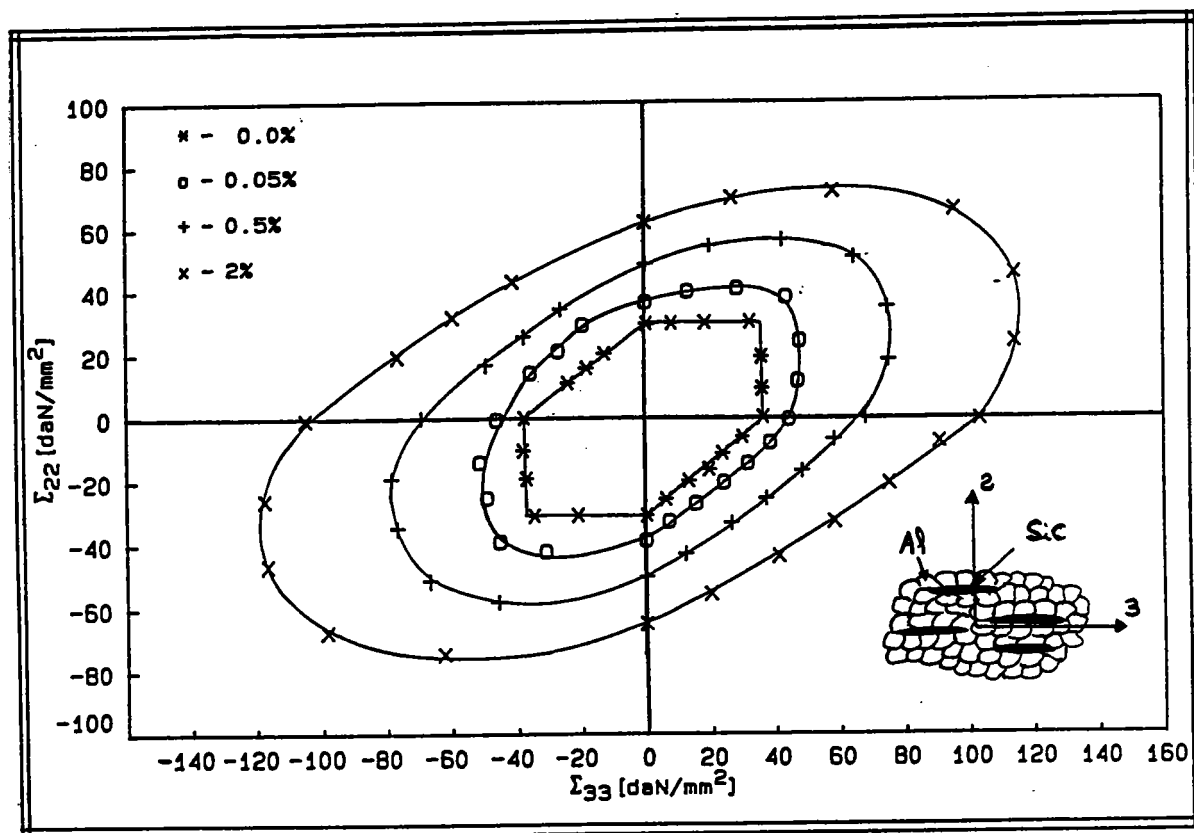


figure 26) Evolution des surfaces de plasticité en chargement biaxé pour un composite à renforts sphériques  $a=b=c=1$  avec une fraction volumique de renforts de 10%.

Lorsque le seuil de plasticité choisi augmente, cette anisotropie est accentuée et de plus, la forme elliptique de Von Mises n'est plus présente.

On se propose à présent d'étudier l'évolution des surfaces de plasticité après un préchargement en traction suivant l'axe allongé des fibres ( $a=b=c/7$ , fraction volumique de 10 %).

La figure 27) décrit l'évolution de la contrainte imposée avec la déformation plastique, la décharge est aussi prise en considération. Pour une déformation plastique donnée à la décharge il est possible d'avoir une déformation plastique de compression alors que la contrainte macroscopique est de traction. Ceci constitue un point important, l'étude des surfaces seuils pour un matériau prédéformé ne pourra s'effectuer que si la décharge est faite correctement.

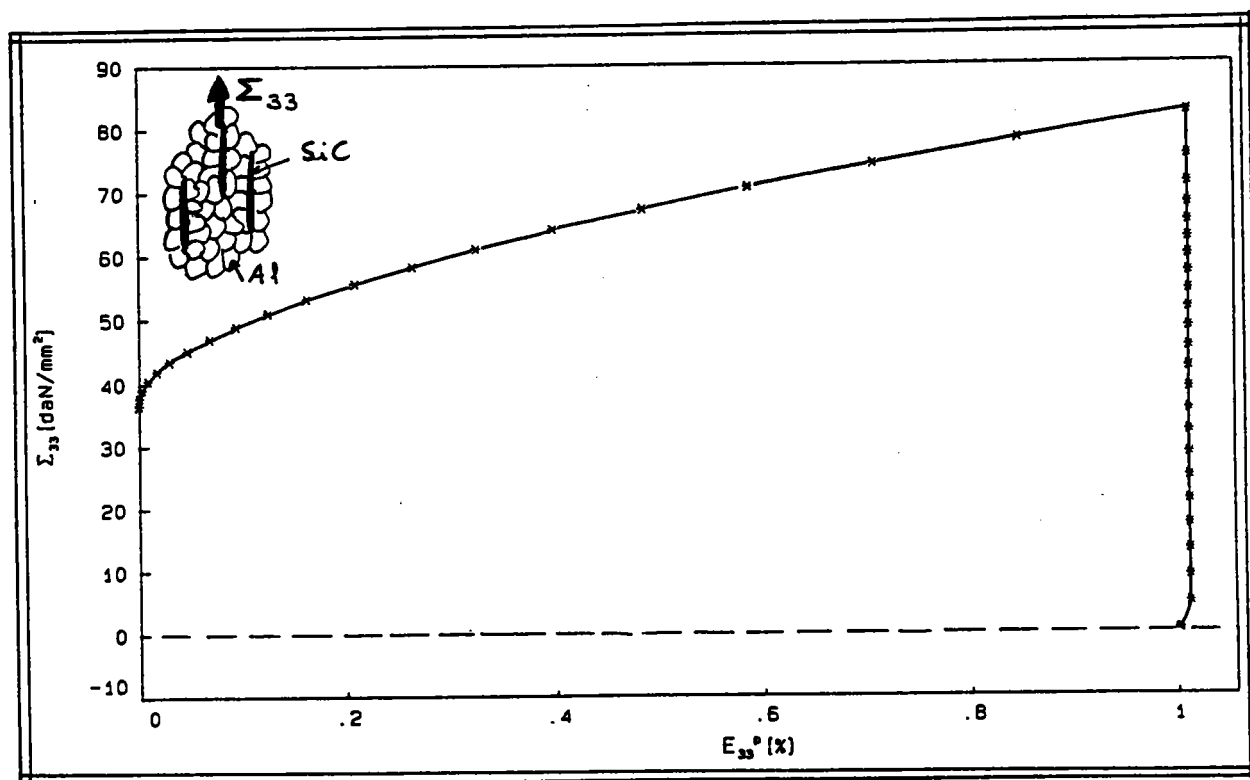


figure 27) Evolution de la contrainte de préchargement en fonction de la déformation plastique. Les fibres sont unidirectionnelles ( $a=b=c/7$ ) et allongées suivant l'axe de chargement. La fraction volumique des fibres est de 10%.

La figure 28) décrit l'évolution des surfaces seuils après un chargement en traction suivi d'une décharge pour le composite Al-SiC(10% de fibres de paramètres de forme  $a=b=c/7$ ) les grains de la matrice sont sphériques les caractéristiques élastiques et plastiques sont celles du tableau 2 . On constate la présence simultanée d'un écrouissage cinématique important et d'une déformation complexe de la surface de plasticité qui présente un point anguleux plus ou moins marqué dans la direction de chargement.

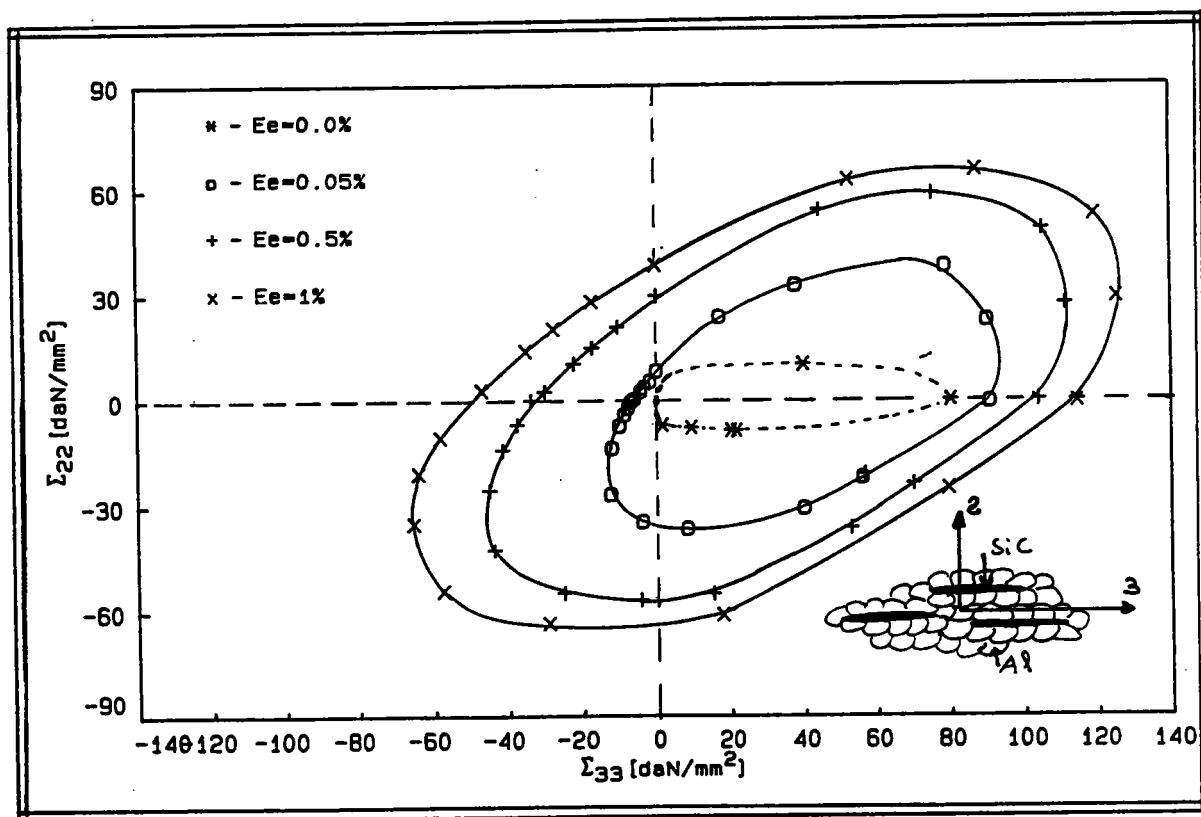


figure 28) Evolution des surfaces seuils pour différents niveaux de déformation plastique équivalente au sens de Von Mises pour le composite Al-SiC prédeformé en traction de 1% en déformation plastique.

77

Ces résultats constituent une première approche du comportement élastoplastique des matériaux composites à matrice métallique. Il est évident que le modèle ne reflète pas tous les mécanismes spécifiques à de tels matériaux. Il serait bon d'y pouvoir inclure le glissement hétérogène, la formation de microbandes....

Par ailleurs, le fait de ne pas disposer de matériaux de base (matrice + fibres ) et de différents composites ne nous a pas permis d'effectuer une confrontation directe avec des résultats expérimentaux.

Le travail présenté doit donc être considéré comme un outil théorique à améliorer en liaison avec des campagnes d'essai expérimentaux.

Dans le prochain paragraphe, nous présentons des résultats obtenus lors de chargements thermomécaniques.

## 4.3 LE COMPORTEMENT THERMOELASTOPLASTIQUE DES MATERIAUX

### COMPOSITES A MATRICE METALLIQUE

Les hypothèses de calcul sont les mêmes que pour le cas de l'élastoplasticité. De plus, les coefficients de dilatation des fibres et des grains dans la matrice ainsi qu'un chargement thermique sont pris en compte.

Ici on suppose que la cission critique est indépendante de la température. De ce fait les effets thermiques n'interviennent que par l'intermédiaire des contraintes thermiques.

#### 4.3.1 LES CONTRAINTES D'ORIGINE THERMIQUE

Nous considérons le matériau composite à matrice métallique Al-SiC suivant:

- Les fibres sont unidirectionnelles et allongées suivant l'axe Z macroscopique. Le rapport de forme est  $a=b=c/7$
- La matrice est polycristalline composé de 100 grains la texture cristallographique est celle utilisée dans le paragraphe 4.1 (figure de pole inverse fig.2).
- Les caractéristiques élastiques, plastiques et thermique sont celles utilisées dans le tableau 2.

Nous cherchons tout d'abord à analyser les contraintes thermiques dans le cas thermoélastique à partir d'un modèle autocohérent thermoélastique développé par Ahaouari K. [19].

Le comportement thermoélastique de la matrice et des renforts étant isotrope, on s'attend du fait de la forme allongée des renforts, à trouver un tenseur localisation des contraintes dans la

matrice de la forme :

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

ou C est la valeur trouvée suivant l'axe Z.

On peut décomposer b en une partie sphérique  $b^s$  et  $b'$ .

tels que:

$$b_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}}_{b^s} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C-A \end{pmatrix}}_{b'}$$

La partie sphérique n'ayant aucun effet sur la plastification de la matrice, seul le terme C-A permettra d'obtenir un écoulement plastique des grains.

En fin de chapitre 3 nous avons vu qu'il est plus rigoureux de prendre les grains de la matrice de forme elliptique unidirectionnels parallèles à l'axe allongé des fibres. Il est alors important de pouvoir évaluer le comportement thermoélastoplastique pour différentes formes de grains de la matrice.

Par conséquent nous calculons la composante  $b'_{33}$  pour différentes fractions volumiques de fibres (10%, 20%, 30%) et nous faisons varier les paramètres de forme des grains de la matrice de  $a=b=c=1$  à  $a=b=c/7$  (fig.29).

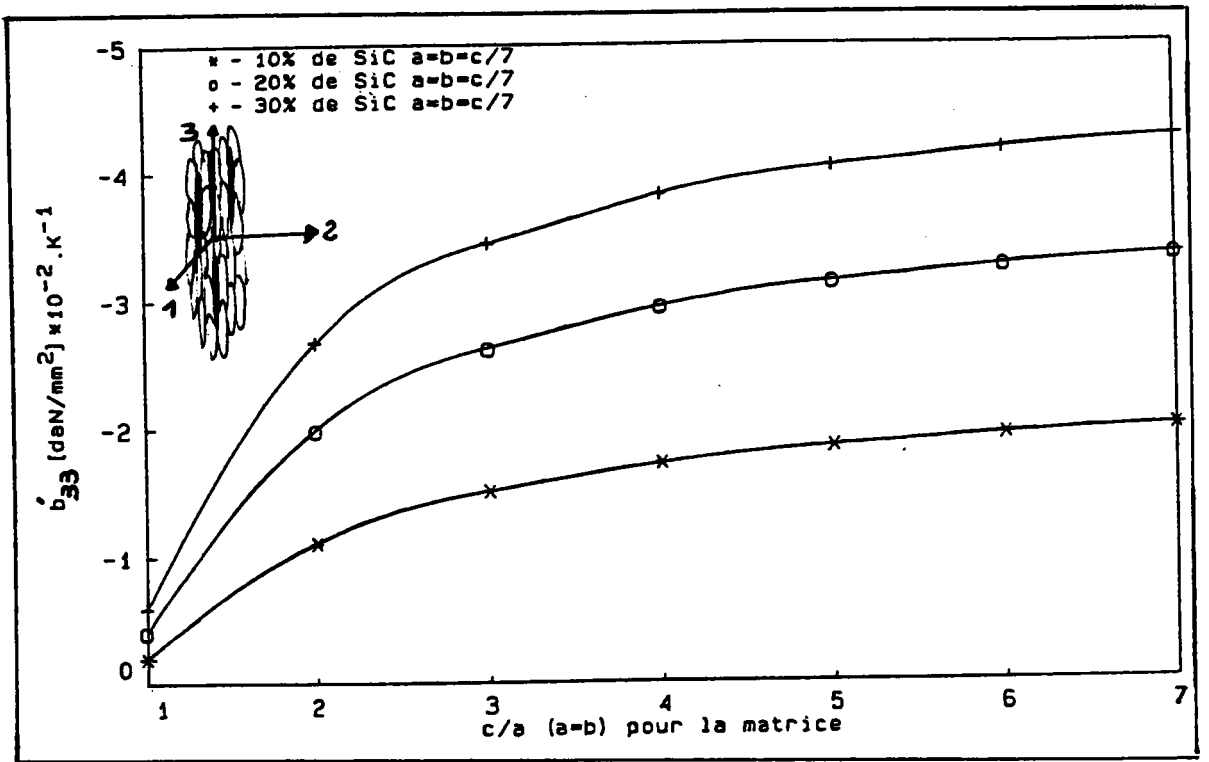


fig 29 Evolution de la composante  $b'_{33}$  en fonction de la forme des grains de la matrice et de la fraction volumique des fibres (obtenue par l'approximation autocohérente à un site pour la thermoélasticité).

On constate que:

- Les contraintes internes thermiques développées dans la matrice sont de compression et dépendent de la forme des renforts mais aussi de la fraction volumique.
- La composante  $b'_{33}$  augmente avec la fraction volumique des fibres.
- Pour les trois fractions volumiques de fibres, on constate une forte augmentation de la composante  $b'_{33}$  pour des paramètres de forme  $c/a$  des grains variant de 1 à 3. Par la suite un régime quasi stationnaire est observé. Ce qui confirme la discussion du chapitre 3. Suivant la variation de température et la forme admise pour les grains de la matrice, les contraintes internes thermiques pourront par conséquent influencer la limite d'élasticité et le comportement thermoélastoplastique de manière notable.

A partir du modèle thermoélastoplastique et pour une déformation macroscopique plastique initiale de 0% (limite d'élasticité), limite



à partir de laquelle au moins un système de glissement est actif ; nous avons suivi l'évolution de la contrainte seuil de traction suivant l'axe allongé des fibres . Comme auparavant nous faisons évoluer la forme des inclusions équivalentes décrivant les grains de la matrice.

La limite d'élasticité est évaluée à deux températures différentes, dans un cas nous incrémentons la température de 300°C et dans l'autre cas nous laissons la température inchangée .

Le matériau composite est soumis dans les deux cas à un essai de traction uniaxial (fig 30.)

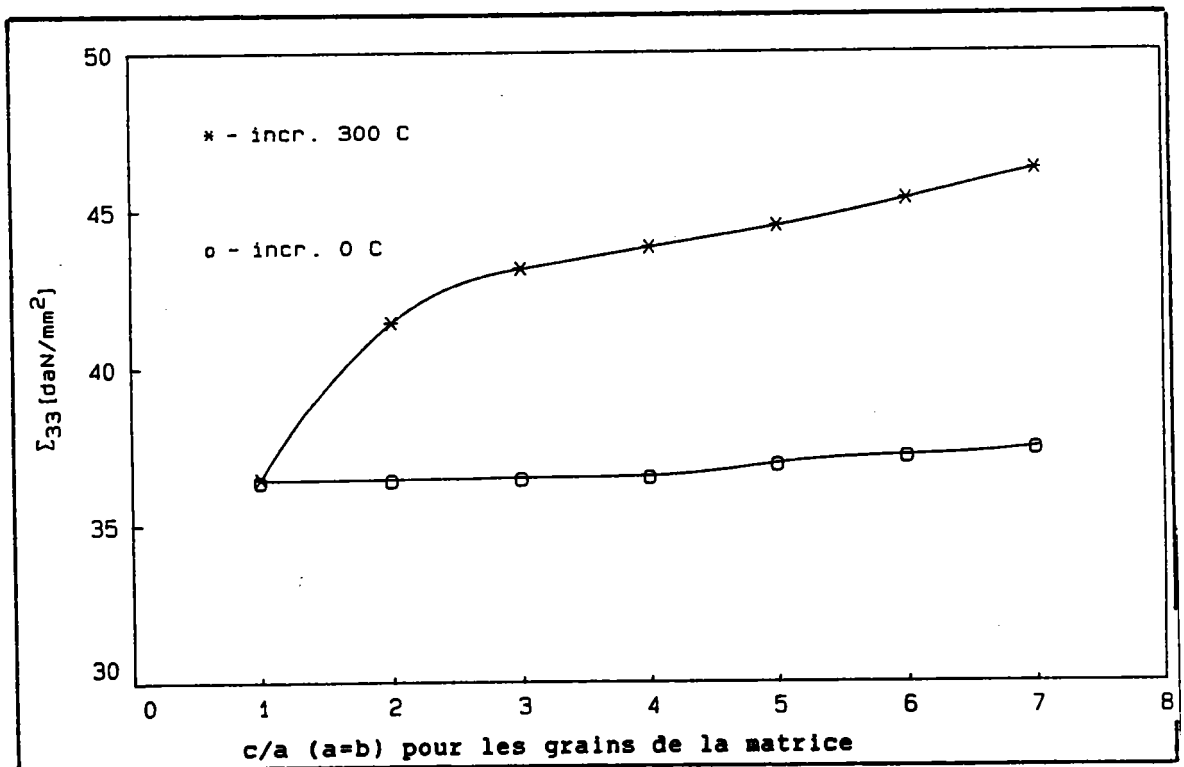


fig 30 Evolution de la limite d'élasticité en traction en fonction des paramètres de forme de la matrice et pour une fraction volumique de fibres de 10% ( $a=b=c/7$ ).

On observe une forte évolution de la limite d'élasticité en traction pour  $c/a$  compris entre 1 et 3 pour  $\theta = 300^{\circ}\text{C}$ .

La limite d'élasticité en traction pour  $\theta = 0^{\circ}\text{C}$  semble peu affectée par la "texture morphologique" de la matrice.

Ces résultats confirment ceux de la thermoélasticité.

Les hétérogénéités de comportement élastoplastique entre grains de la matrice sont négligeables pour l'Al-SiC par rapport à la différence de comportement élastique pour les fibres et élastoplastique pour les grains de la matrice.

Par contre en thermoélastoplasticité la forme des inclusions équivalentes décrivant les grains sphériques de la matrice modifie considérablement le champ des contraintes thermiques.

On s'aperçoit que la limite d'élasticité augmente en traction suivant que la forme des grains de la matrice est plus allongée. On retrouve une forme analogue aux courbes calculées en élasticité pour la composante  $b'_{33}$ .

On se propose à présent d'étudier le comportement thermoélastoplastique en traction et compression.

#### 4.3.2 LES COURBES DE TRACTION ET COMPRESSION

---

Les figures 31,32 montrent respectivement l'influence de la forme des inclusions équivalentes pour les grains de la matrice sur le comportement global de traction et de compression. On augmente la température de 300°C, la matrice se met alors en compression dans le cas de l'Al-SiC et de ce fait la limite d'élasticité change. Si le matériau est soumis à un essai de traction à 0°C sa limite d'élasticité sera différente de sa limite d'élasticité à 300°C.

On fait donc évoluer la "forme de grains" de la matrice (a,b,c) et de plus le composite est soumis à deux chargements thermique et mécanique (traction ou compression). Les courbes sont obtenues pour les paramètres de forme suivant:

matrice	fibres
paramètres de forme	
- a=b=c	10% de fibres a=b=c/7
- a=b=c/2	10% de fibres a=b=c/7
- a=b=c/4	10% de fibres a=b=c/7
- a=b=c/7	10% de fibres a=b=c/7

Les chargements sont décrits dans la figure ci dessous:

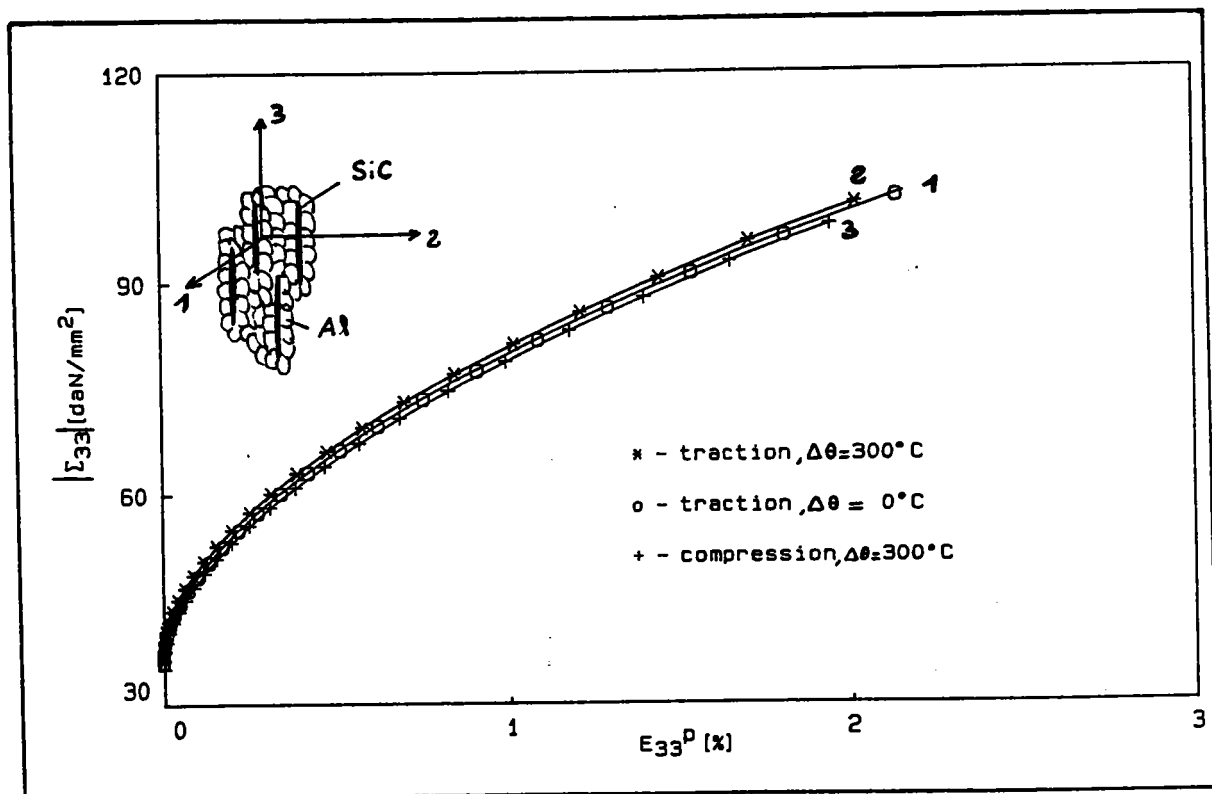
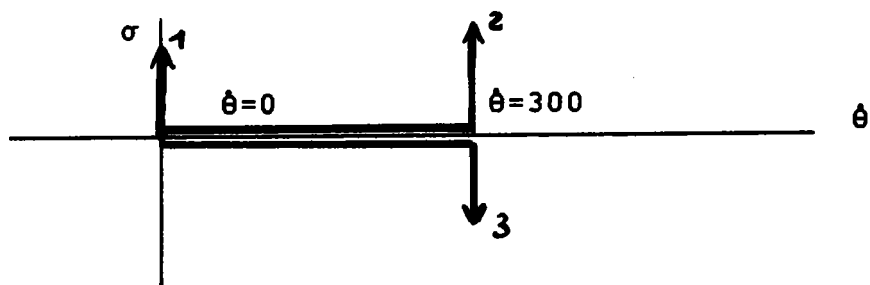
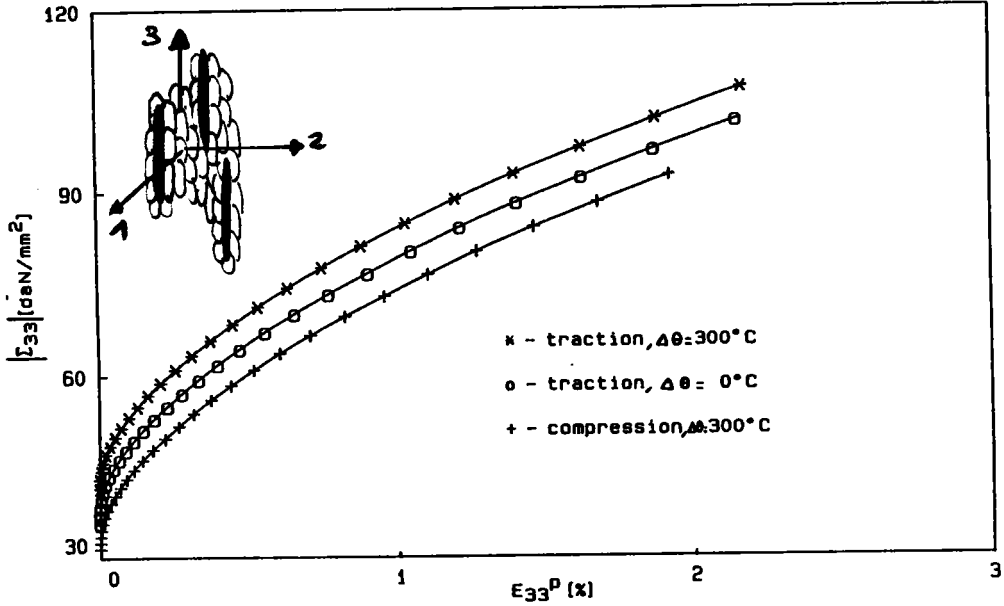
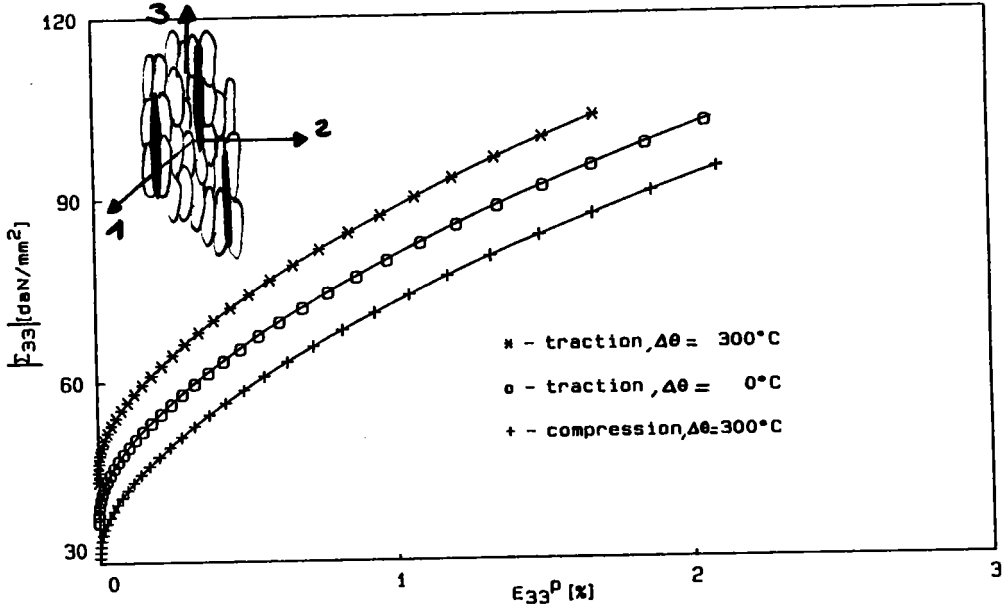


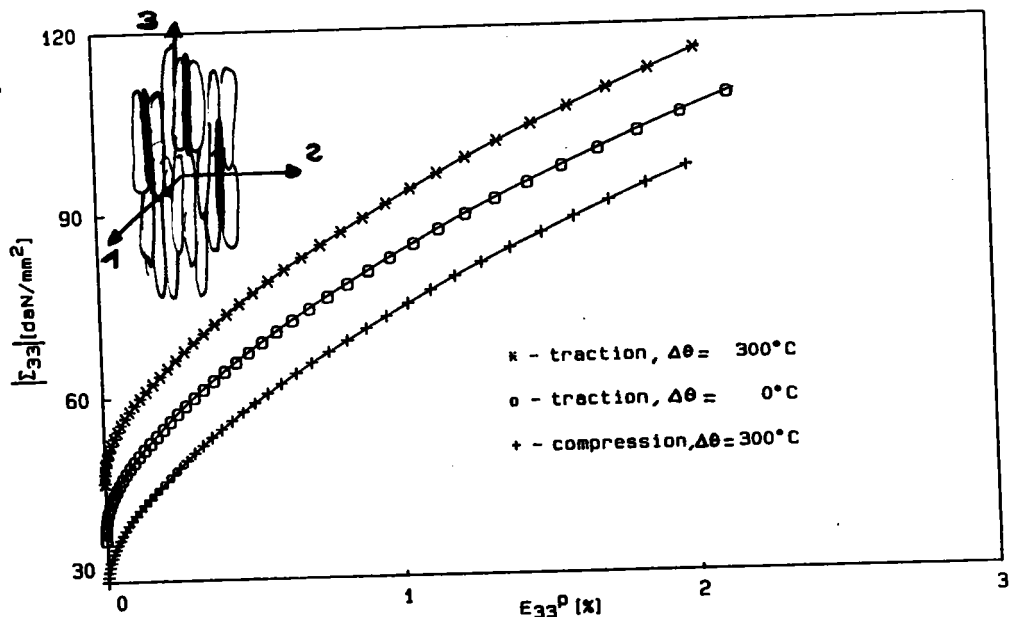
fig. 31 Evolution de la contrainte macroscopique de traction et de compression en fonction de la déformation plastique et pour des grains de la matrice sphériques. Les fibres sont unidirectionnelles (10%,  $a=b=c/7$ ). Nous avons deux températures d'essai.



a/c = 2



a/c = 4



a/c = 7

fig. 32 Evolution de la contrainte macroscopique de traction et de compression en fonction de la déformation plastique et pour différents paramètres de forme de la matrice. Les fibres sont unidirectionnelles (10%,  $a=b=c/7$ ). Nous avons deux températures d'essai .

Pour un incrément de température de 300°C la matrice se met en compression ce qui explique la variation de limite d'élasticité pour un matériau composite à renforts ellipsoïdaux. Cette évolution est faible quand les grains de la matrice sont sphériques, mais s'accroît si la forme équivalente des grains de la matrice devient plus allongée. Cette évolution est prononcée pour  $c/a$  compris entre 1 et 3 puis s'atténue lorsque  $c/a$  atteint le  $c/a$  des fibres.

On retrouve une évolution similaire au calcul de  $b'_{33}$  en thermoélasticité et aux résultats obtenus pour la limite élastique.

Un essai dual permet de mettre en évidence l'effet des contraintes thermiques sur la réponse à une variation de température.

On soumet le matériau à une charge constante de compression suivant l'axe allongé des fibres puis on incrémente par petit pas la température (figure 33).

Deux phénomènes se superposent. D'une part la limite d'élasticité évolue en élastoplasticité avec la "forme des grains" mais aussi en thermoélastoplasticité.

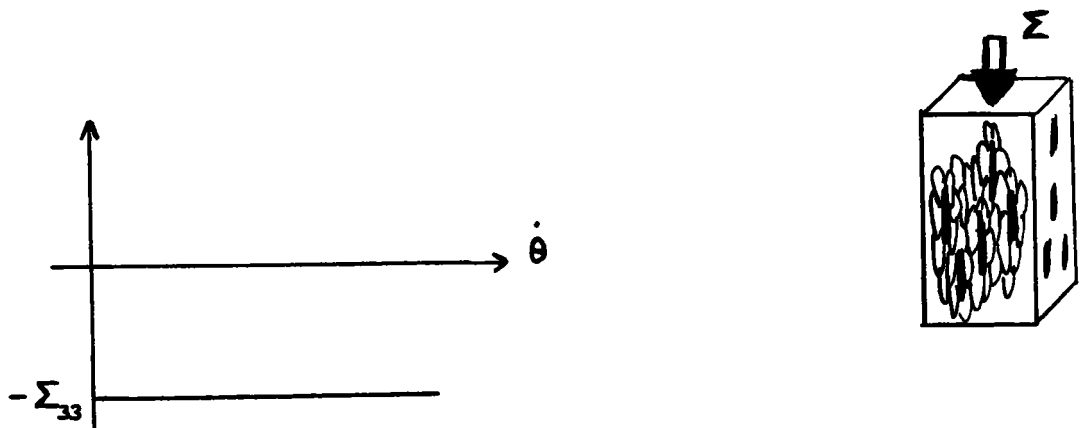
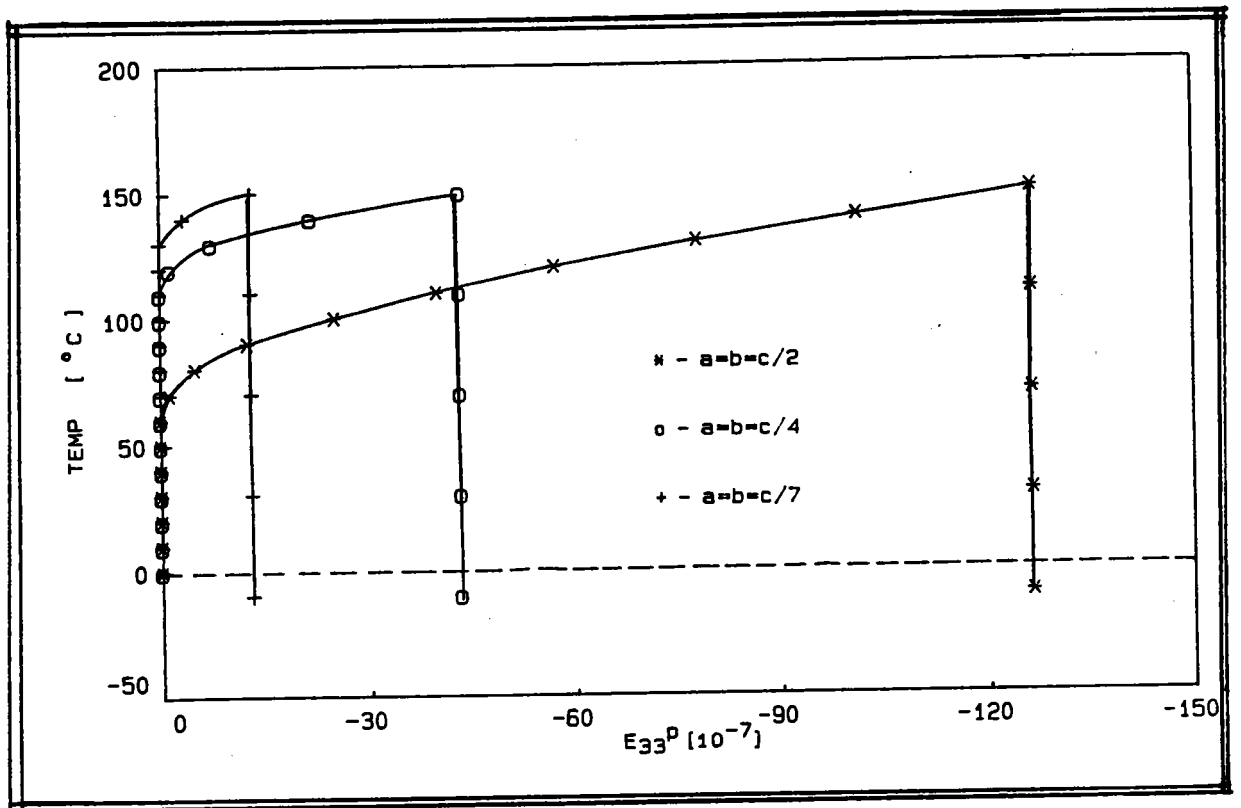


Fig. 33) Evolution de la déformation plastique en fonction de la température. La contrainte de compression est constante et fixée proche de la limite d'élasticité  $\Sigma_{33} = 36.5 \text{ daN/mm}^2$ . Les résultats sont obtenus pour différents paramètres de forme des grains de la matrice unidirectionnels.

A incrément de température nul on a une évolution de la limite d'élasticité faible figure 30) mais cette variation est suffisante pour influencer la limite d'élasticité pour un incrément de température fini. Comme il apparaît sur la figure 33) afin de récupérer une déformation plastique de compression il faut incrémenter la température de 60°C, 110°C, 130°C respectivement pour les grains de la matrice unidirectionnels de paramètres de forme  $c/a=2$  ,  $c/a=4$  ,  $c/a=7$ .

On peut cependant noter que les déformations plastiques sont très faibles et du même ordre de grandeur que les déformations thermiques.



### 4.3.3 BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] Nieh Tg. , Creep Rupture of a silicon Carbide Reinforced Aluminum Composite. Metallurgical Transactions A.
- [2] Lilholt H. Hardening in two-phase materials, strength contributions in fibre-reinforced copper-tungsten. Metallurgy Departement, Research Establishment Riso, Denmark. Acta Metallurgica. Vol 25 pp 571-585, 1977.
- [3] Nye propriétés physique traduction de la première édition (1957) de l'ouvrage publié en langue anglaise sous le titre: Physical Properties of Crystals Clarendon Press
- [4] Jarry Ph, 1987 Communication personnelle.
- [5] Schneider E., Lee D., Razvi S., Salama K. , Non destructive characterization of metal-matrix-composites, Proc. of the 16th Symposium on Non destructive Evaluation, San Antonio, USA, 1987.
- [6] Jaoul, B., Etude de la plasticité et application aux métaux (Ed. Dunod), 1964.
- [7] Van Houtte, P., 7th Int Conf on Texture of Materials Holland, pp 7-23 , 1984.
- [8] Grewen J., Wassermann G., Texturen Metallischer Werkstoffe , Springer Verlag Berlin, 1969.
- [9] F. Corvasce , P. Lipinski, M. Berveiller, Storage and release of energy by cold work of Metals, J. Mech. Phys. Solids. (soumis)
- [10] F. Haessner, W. Hemminger, Zeit. Metall., Bd 69, p 553-563, (1978).
- [11] W. Witzel, F. Haessner, Zeit. Metall., Bd 78, p 316-323 , (1987).
- [12] D. Rönnpagel, Ch. Schwink, Acta Met. 26, p 319, (1978).
- [13] M.B. Bever , D.L Holt , A.L. Titchener -Prog. in Mat. Sciences, Vol.17, 1973.
- [14] P. Lipinski, J. Krier, M. Berveiller. Elastoplasticité des métaux en grandes déformations: Comportement global et évolution de la structure interne. Acta met. (à paraître)
- [15] K. Ahaouari , F. Corvasce, P. Lipinski, M. Berveiller, Détermination des propriétés thermomécaniques des composites à matrice métallique. Article invité pour les Mémoires Scientifiques de la société Française de Métallurgie.
- [16] Sevillano J. Gil. , Aernoudt E., Courbe d'écrouissage de la perlite lamellaire. Mémoires scientifiques rev. métallurgie., LXX, n°12, 1973.

- [17] Sagamore army materials research conference proceedings  
Residual Stress and Stress Relaxation edited by Eric Kula  
and Volker Weiss Volume 28,1982.
- [18] Bauschinger J. Veber die Veränderung der Elasticitätsgrenze  
und des Elasticitäts moduls verschie-dener (Metall civiling,  
NF 27,1881,p.289-384)
- [19] Ahaouari K., thèse présentée à la faculté des sciences de Metz  
1989.

#### 4.4 CONCLUSION GENERALE

Ce travail constitue une première approche du comportement thermoélastoplastique des matériaux composites à matrice métallique. Celle ci aurait dû être menée parallèlement à des études expérimentales sur une classe de matériaux composites à matrice métallique donnée . Cependant un tel travail complet sort du cadre de cette thèse dont l'objectif premier concerne la modélisation. La confrontation avec des résultats expérimentaux constitue sans doute la première suite à donner à ce travail.

Néanmoins cette approche fournit des résultats satisfaisants et ne nécessite pas des moyens de calcul trop performants. Le choix d'une texture cristallographique de 100 grains pour la matrice permet un bon compromis qualité-rapidité de calcul. Par ailleurs, pour les propriétés non linéaires (comportement thermoélastoplastique) on sait que l'approximation autocohérente à un site surestime les contraintes d'écoulement plastique et sous estime les déformations plastiques. On peut alors recourir à une approximation à sites multiples ou à des inclusions composites . L'équation intégrale obtenue reste alors valable.

Le calcul des contraintes internes pourrait servir de base à des lois d'endommagement.

Il conviendrait d'étudier aussi de façon précise comment évolue

la matrice d'écroutissage ainsi que les cissions critiques sur chaque système de glissement en fonction de la température. Pour le comportement élastoplastique d'un grain de la matrice il serait bon d'y inclure les mécanismes de déformation anélastiques tel le glissement hétérogène , la formation de microbandes.

**ANNEXE 1**

---

**LOI DE COMPORTEMENT LOCALE**

Loi de comportement locale

Pour un système de glissement potentiellement actif

l'on a :

$$\sum_m H^{mn}(r) \dot{\gamma}^m(r) + a^n(r) \dot{\theta} = R_{ij}^n(r) \dot{\sigma}_{ij} = R_{ij}^n(r) C_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}^e(r) \quad (L1)$$

sachant que  $\dot{\epsilon}_{ij}^T = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^D + \dot{\epsilon}_{ij}^{th}$

$$R_{ij}^n(r) C_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}^e(r) = R_{ij}^n(r) C_{ijkl}(r) ( \dot{\epsilon}_{kl}^T(r) - \dot{\epsilon}_{kl}^D(r) - \dot{\epsilon}_{kl}^{th}(r) )$$

d'où

$$\sum_m H^{mn}(r) \dot{\gamma}^m(r) + a^n(r) \dot{\theta} = R_{ij}^n(r) C_{ijkl}(r) ( \dot{\epsilon}_{kl}^T(r) - \dot{\epsilon}_{kl}^D(r) - \dot{\epsilon}_{kl}^{th}(r) )$$

avec  $\dot{\epsilon}_{kl}^D = \sum_m R_{kl}^m \dot{\gamma}^m$  (L2)

Il est alors possible de connaître le taux d'amplitude de glissement sur le système m utilisant (L1):

$$\dot{\gamma}^m = \sum_n ( R_{ij}^n C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^T - R_{ij}^n C_{ijkl} \dot{\theta} \alpha_{kl} - a^n \dot{\theta} ) * N^{nm} \quad (L3)$$

$$\text{ou } N^{nm} = ( H^{nm} + R_{ij}^n C_{ijkl} R_{kl}^m )^{-1} \quad (L4)$$

L'expression finale de la loi de comportement du monocristal peut être obtenue à partir de:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^T - C_{ijkl} \alpha_{kl} \dot{\theta} - \sum_m C_{ijkl} R_{kl}^m \sum_n ( R_{pq}^n C_{pqrs} ( \dot{\epsilon}_{rs}^T - \alpha_{rs} \dot{\theta} ) - a^n \dot{\theta} ) * N^{nm}$$

sous la forme :

$$\dot{\sigma}_{ij} = l_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^T - m_{ij} \dot{\theta} \quad (L5)$$

$$\text{où } l_{ijkl} = C_{ijkl} - \sum_{m,n} C_{ijrs} R_{rs}^m R_{pq}^n C_{pqkl} N^{nm} \quad (L6)$$

$l_{ijkl}$ : module tangent élastoplastique local

et

$$m_{ij} = \sum_{m,n} C_{ijrs} R_{rs}^m N^{nm} a^n + l_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (L7)$$

**ANNEXE 2**

---

**LE TENSEUR D'INTERACTIONS T** <sup>ii</sup>



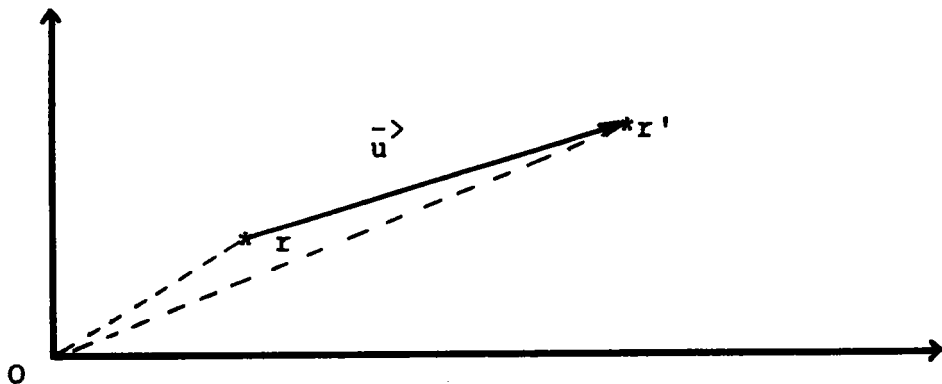
Le tenseur d'interactions  $T^{ii}$

D'après l'expression (70)

$$L_{ijkl}^0 G_{km,ij}(r-r') + \delta_{jm} \delta(r-r') = 0$$

et les transformées de Fourier appliquées au tenseur de Green et à la fonction de Dirac. Il est possible d'aboutir à une forme simplifiée du tenseur d'interaction  $T^{ii}$ .

Appelons  $\vec{u}$  le vecteur distance entre le point défini par  $r$  et le point  $r'$  et  $k$  le vecteur conjugué de  $u$ .



La transformée de Fourier de la fonction de Dirac est:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = \int e^{i \cdot \vec{k} \cdot \vec{u}} \delta(\vec{u}) d\vec{u} \quad (T1)$$

la transformée inverse est

$$\delta(\vec{u}) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i \cdot \vec{k} \cdot \vec{u}} d\vec{k} \quad (T2)$$

De même pour la dérivée seconde du tenseur de Green qui est dans notre cas une différentielle exacte.

Par la transformée inverse de Fourier l'on obtient:

$$G_{km,ij}(\vec{u}) = \frac{1}{8\pi^3} \int -k_1 k_j \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i.\vec{k}.\vec{r}} d\vec{k} \quad (T3)$$

L'expression (62) devient alors:

$$L_{ijkl}^0 \frac{1}{8\pi^3} \int -k_1 k_j \tilde{G}_{km}(\vec{k}) e^{-i.\vec{k}.\vec{u}} d\vec{k} + \delta_{im} \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i.\vec{k}.\vec{u}} d\vec{k} = 0 \quad (T4)$$

ce qui nous amène à:

$$L_{ijkl}^0 \tilde{G}_{km}(\vec{k}) k_1 k_j = \delta_{im} \quad (T5)$$

avec  $L_{ijkl}^0$  tenseur des modules élastoplastiques du milieu homogène équivalent pour le composite.

L'on s'intéresse au calcul des interactions entre une inclusion de forme quelconque définie par ses paramètres de forme a,b,c et le milieu homogène équivalent.

De nombreux travaux ont été effectués en ce qui concerne le calcul de  $T^{ii}$  pour un milieu homogène équivalent élastique [1],[2],[3],[4]. Ce type d'approche a été repris par Fassi Fehri et développé pour le calcul de  $T^{ij}$  [5].

La principale difficulté de cette approche réside dans la définition du milieu homogène équivalent. Par le biais de l'équation (70), il nous est possible de reprendre les différents travaux précédemment cités et de se ramener au calcul de  $T^{ii}$  qui ici traduit les interactions entre l'inclusion  $i$  et le milieu homogène équivalent qui est élastoplastique.

Démarche suivie

Introduisons les cosinus directeurs de  $k$  qu'on notera  $X_j$  tel que  $k_j = k X_j$  où le repère d'origine  $O$  et le centre de l'inclusion ellipsoïdale sont confondus.

L'expression (T5) devient par conséquent:

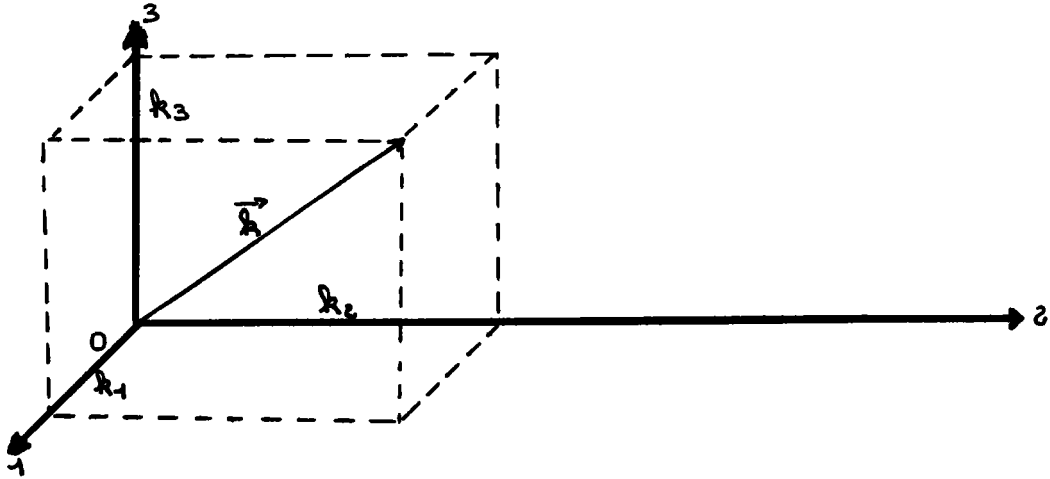
$$L_{ijkl}^0 X_j X_l (k^2 \tilde{G}_{km}) = \delta_{im} \tag{T6}$$

d'où

$$k^2 \tilde{G}_{km} = (L_{mjkl}^0 X_j X_l)^{-1} \tag{T7}$$

avec

$$\begin{aligned} X_1 &= \sin \theta \cos \phi & 0 \leq \theta \leq \pi \\ X_2 &= \sin \theta \sin \phi & 0 \leq \phi \leq 2\pi \\ X_3 &= \cos \theta \end{aligned} \tag{T8}$$



$$\text{or } T_{klmj}^{ii} = \frac{1}{2} \left[ \int_{V^i} \int_{V^i} G_{km,lj}(\vec{r} - \vec{r}') + G_{lm,kj}(\vec{r} - \vec{r}') \right] dv^i dv^i \quad (T9)$$

$$\text{et } \int_{V^i} \int_{V^i} G_{km,lj} = \Gamma_{klmj}^{ii}$$

$$\Gamma_{klmj}^{ii} = \int_{V^i} \int_{V^i} \int_{V^k} \frac{1}{8\pi^3} k_l k_j \tilde{G}_{km}(k) e^{-ik(\vec{r}-\vec{r}')} d\vec{k} d\vec{r} d\vec{r}'$$

$$= \int_{V^i} \int_{V^i} \int_{V^k} \frac{1}{8\pi^3} X_l X_j k^2 \tilde{G}_{km}(k) e^{-ik(\vec{r}-\vec{r}')} d\vec{k} d\vec{r} d\vec{r}'$$

$$= \int_{V^i} \int_{V^i} \int_{V^k} \frac{1}{8\pi^3} X_l X_j L_{mpkq}^0 X_p X_q e^{-ik(\vec{r}-\vec{r}')} d\vec{k} d\vec{r} d\vec{r}' \quad (T10)$$

Afin de résoudre plus facilement cette triple intégrale complexe effectuons le changement de variable suivant:

$$\vec{k} \vec{r} = \vec{K} \vec{R} \quad (T11)$$

$$k_i = \phi_{it} K_t \quad (T12)$$

$$x_j = a_{js} X_s^{-1} \quad (T13)$$

$$\phi_{it} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a/b & 0 \\ 0 & 0 & a/c \end{bmatrix} \quad (T14)$$

$$a_{js} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b/a & 0 \\ 0 & 0 & c/a \end{bmatrix} \quad (T15)$$

Nous avons par conséquent

$$\vec{dr} = \frac{b \cdot c}{a^2} d\vec{R} \quad \text{et} \quad d\vec{k} = \frac{a^2}{b \cdot c} d\vec{K} \quad (T16)$$

et l'équation (62) devient :

$$L_{ijkl}^0 \tilde{G}_{km}(K) K_t \phi_{lt} K_n \phi_{jn} = \delta_{im} \quad (T17)$$

ce qui nous permet de transformer:

$$\Gamma_{klmj}^{ii} = \int_{V^i} \int_{V^i} \int_{V^k} \frac{1}{8\pi^3} k_l k_j \tilde{G}_{km}(k) e^{-ik(r-r')} d\vec{k} d\vec{r} d\vec{r}'$$

en

$$\Gamma_{klmj}^{ii} = \int_{V^i} \int_{V^i} \int_{V^k} \frac{b \cdot c}{a \cdot 8\pi^3} K^2 \tilde{G}_{km}(K) X_t \phi_{lt} X_n \phi_{jn} e^{-ik(r-r')} d\vec{K} d\vec{R} d\vec{R}' \quad (T18)$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme

$$r_{klmj}^{ii} = \frac{a.b.c}{3} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} K^2 \tilde{G}_{km}(K) X_t \phi_{lt} X_n \phi_{jn} \, d\phi \quad (T19)$$

La partie symétrique du tenseur d'interaction est :

$$T_{klmj}^{ii} = \frac{1}{2} [ r_{klmj}^{ii+} \quad r_{lkmj}^{ii} ] \quad (T20)$$

La partie antisymétrique du tenseur d'interaction est :

$$T_{klmj}^{ii} = \frac{1}{2} [ r_{klmj}^{ii-} \quad r_{lkmj}^{ii} ] \quad (T21)$$

avec  $K^2 \tilde{G}_{km}(k) = (L_{mjkl}^{eff} X_j X_l)^{-1}$

## BIBLIOGRAPHIE

- (1) Kneer G. , phy. stat. sol. , 9 , (1965)
- (2) Mura T. , phy. stat. sol. , 15 , (1973)
- (3) Laws N. , J. Elasticity (1977)
- (4) Gharhremani F. , Mech. Res. Comm. 4(2), 1977
- (5) Fassi Fehri O. thèse doctorat d'état présentée à Metz 1987