



**HAL**  
open science

# Flambage et délaminage dans les plaques composites stratifiées

Bruno Cochelin

► **To cite this version:**

Bruno Cochelin. Flambage et délaminage dans les plaques composites stratifiées. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1989. Français. NNT : 1989METZ014S . tel-01776891

**HAL Id: tel-01776891**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776891>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THESE

présentée à l'UNIVERSITE de METZ par

**BRUNO COCHELIN**

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR**

en

**MECANIQUE**



## FLAMBAGE ET DELAMINAGE

## DANS LES PLAQUES COMPOSITES STRATIFIEES

soutenue le 3 Février 1989 devant la Commission d'Examen composée de :

J.L. BATOZ	Rapporteur
P. DESTUYNDER	
A. MOLINARI	
Q.S. NGUYEN	Rapporteur
M. POTIER-FERRY	
C. CZEKAJSKI	Invité

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	1989 0285
Cote	S/M3 89/14
Loc	Majestik

*Monsieur Alain MOLINARI m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse, et je l'en remercie très sincèrement.*

*Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma profonde gratitude à Monsieur Michel POTIER-FERRY qui a accepté de diriger cette thèse. Avec gentillesse et bienveillance, il a su me conseiller et m'encourager tout au long de ce travail.*

*Messieurs Jean Louis BATOZ et Quoc Son NGUYEN ont accepté d'examiner et de porter un jugement sur ce travail. Je tiens à leur adresser mes très vifs remerciements.*

*Je remercie Monsieur Philippe DESTUYNDER pour l'intérêt qu'il a porté à ces travaux et pour sa participation au jury.*

*Je remercie Monsieur Casimir CZEKAJSKI d'avoir accepté l'invitation à la soutenance.*

*Que tous mes collègues, chercheurs, enseignants, techniciens et secrétaires, trouvent ici mes remerciements chaleureux pour le plaisir que j'ai eu à travailler en leur compagnie.*

*Enfin, je remercie très vivement Monsieur Joël REMY-VINCENT qui a assuré la conception technique de ce mémoire.*

## Table des Matières

1	RESUME . . . . .	1
2	ABSTRACT . . . . .	2
1	INTRODUCTION . . . . .	3
Chapitre 1 LES MODELES A UNE DIMENSION : " MODELES D'ASSEMBLAGE DE POUTRES" 11		
1.1	DESCRIPTION DU MODELE D'ASSEMBLAGE DE POUTRES . . . . .	11
1.2	DESCRIPTION DE LA CINEMATIQUE . . . . .	13
1.3	PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES . . . . .	15
1.4	INTEGRATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE . . . . .	16
1.5	ADIMENSIONNALISATION . . . . .	19
1.6	RESOLUTION DES EQUATIONS . . . . .	20
1.6.1	PRINCIPE . . . . .	20
1.6.2	RESOLUTION NUMERIQUE . . . . .	22
1.7	TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE . . . . .	25
1.8	RESULTATS . . . . .	26
1.8.1	UN EXEMPLE TYPIQUE . . . . .	26
1.8.2	PROPAGATION DE FISSURE . . . . .	29
1.8.3	INFLUENCE DE LA PROFONDEUR DES FISSURES . . . . .	31
1.8.4	CONCLUSIONS . . . . .	34
1.9	COMPARAISON ENTRE LE MODELE "ASSEMBLAGE DE POUTRES" ET L'ELASTICITE 2D . . . . .	35
1.9.1	LE PROBLEME D.C.B. : MODELE ASSEMBLAGE DE POUTRES LINEAIRES . . . . .	36
1.9.2	LE PROBLEME DCB: ELASTICITE LINEAIRE 2D EN CONTRAINTE PLANE . . . . .	37
1.9.3	COMPARAISON POUTRE - ELASTICITE . . . . .	38
1.9.4	CONCLUSIONS . . . . .	39
1.10	UN ASSEMBLAGE DE POUTRES POUR LES FISSURES COURTES . . . . .	40
1.10.1	DESCRIPTION DE L'ASSEMBLAGE . . . . .	40
1.10.2	APPLICATION AU PROBLEME D.C.B. . . . .	45
1.10.3	APPLICATION AU PROBLEME DU FLAMBAGE . . . . .	46
1.11	CONCLUSION . . . . .	48
Chapitre 2 TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE 49		
2.1	RAPPELS SUR LES METHODES DE CALCUL DU TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE EN ELASTICITE . . . . .	49
2.2	TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE EN THEORIE DES PLAQUES . . . . .	50
2.3	UNE NOUVELLE APPROCHE POUR LE CALCUL DU TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE POUR LES MODELES DE POUTRE . . . . .	52
2.3.1	INTRODUCTION . . . . .	52
2.3.2	TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE EN THEORIE DES POUTRES . . . . .	52
2.3.3	APPLICATION AU MODELE NON LINEAIRE DE POUTRE DE BERNOULLI . . . . .	56

2.3.4	DECOMPOSITION DU TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE EN MODES I ET II . . . . .	58
2.3.5	UNE EXPRESSION DE $G$ INDEPENDANTE DU CONTOUR . . . . .	61
2.3.6	CONCLUSIONS . . . . .	62
2.4	CONFRONTATION DU TAUX DE RESTITUTION $G$ EN POUTRE ET DE L'APPROCHE 2D . . . . .	62
2.5	EXTENSION DES RESULTATS A UN ASSEMBLAGE DE PLAQUES . . . . .	65
2.6	CONCLUSIONS . . . . .	71
Chapitre 3 UNE APPROCHE BIDIMENSIONNELLE :		
	LES MODELES D'ASSEMBLAGE DE PLAQUES	73
3.1	DIVERS MODELES D'ASSEMBLAGES DE PLAQUES .	73
3.2	ASSEMBLAGE DE TROIS PLAQUES DE VON KARMAN . . . . .	76
3.3	MISE EN OEUVRE NUMERIQUE DU MODELE . . .	78
3.3.1	LES ELEMENTS FINIS DE PLAQUE UTILISES . . . . .	78
3.3.2	LES RACCORDEMENTS DE PLAQUES . . . .	79
3.3.3	DETERMINATION DES COURBES « CHARGE-DEPLACEMENT » . . . . .	82
3.4	MISE EN OEUVRE NUMERIQUE DU CALCUL DE « $G$ » . . . . .	82
3.5	RESULTATS NUMERIQUES . . . . .	84
3.5.1	COMPARAISON AVEC UN CALCUL ANALYTIQUE . . . . .	86
3.5.2	INFLUENCE DE LA FINESSE DU MAILLAGE .	88
3.5.3	DELAMINAGE ELLIPTIQUE . . . . .	89
3.5.4	INFLUENCE DE LA PROFONDEUR DE LA FISSURE . . . . .	93
3.5.5	CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES . . . .	95
Annexe A	Bibliographie	97
Annexe B	Equations adimensionnelles	103
Annexe C	RESULTATS DE CALCULS	105

## 1 RESUME

Nous étudions les interactions entre le flambage local et la propagation des délaminages dans les plaques composites chargées en compression.

Le phénomène est décrit à l'aide de modèles d'assemblages de poutres ou de plaques prenant en compte des non-linéarités géométriques. Plusieurs façons d'assembler les plaques sont proposées, notamment pour l'étude des délaminages courts.

Le post flambage d'une structure délaminée est simulé par la méthode des éléments finis pour différentes formes et positions du délaminage.

Une nouvelle approche pour le calcul du taux de restitution de l'énergie dans ces modèles est proposée et testée.

Nous avons réalisé un post-processeur éléments finis pour le calcul du taux de restitution local de l'énergie le long d'un front de délaminage.

### Mots clés

COMPRESSION            DELAMINAGE            ELEMENTS FINIS            FLAMBAGE  
NON-LINEARITE GEOMETRIQUE            PLAQUE COMPOSITE RUPTURE FRAGILE  
TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE

## 2 ABSTRACT

### BUCKLING AND DELAMINATION IN LAMINATED COMPOSITE PLATES

The interaction between local buckling and delamination growth in laminated composite plates is investigated.

The phenomenon is described within the framework of beams and plates theories with account of geometric nonlinearities. Several models are proposed including the case of relatively short delamination.

The finite element method is used in order to simulate the postbuckling behaviour of delaminated structure for different shapes and positions of the delaminated area. A specific approach for the determination of the energy release rate is suggested in these models.

A finite element-postprocessor is developed in order to compute the local energy release rate along a delamination crack front.

#### Key words

COMPRESSION                      DELAMINATION                      FINITE ELEMENT  
BUCKLING                      COMPOSITE PLATE                      GEOMETRIC NON-LINEARITY  
BRITTLE FRACTURE                      ENERGY RELEASE RATE



## 1 INTRODUCTION

La présence de délaminages dans une structure stratifiée composite peut réduire de façon très significative sa tenue en compression. Les flambages locaux qui interviennent au niveau des zones de décohésion participent activement à la propagation de ces délaminages et conduisent à une ruine prématurée de la structure. Le calcul de la réduction de charge supportable est un problème industriel fort important qui suscite actuellement un grand effort de recherche.

La modélisation et la simulation numérique de ces phénomènes font appels à deux grandes branches de la mécanique :

- La stabilité des structures.
- La mécanique de la rupture.

C'est en 1976 que Kachanov publie le premier article sur ce thème et c'est à partir de 1980 que de nombreux auteurs vont apporter des développements nouveaux (Chai & al, 1981-1985); (Bottega & Maewal, 1983); (Evans & Hutchinson, 1984); (Yin, 1984,1985). Les modèles proposés dans ces travaux avaient pour premier objectif de développer la compréhension des phénomènes et ils s'appuient essentiellement sur des théories de poutres et de plaques, pour des délaminages de formes géométriques simples (rectilignes, circulaires, elliptiques) et des positions particulières dans l'épaisseur (très superficiel ou à mi-épaisseur).

Des raffinements ont ensuite été introduits pour améliorer ces modélisations simples dont les résolutions étaient avant tout analytiques : introduction des éléments finis, prise en compte du cisaillement transverse (Wang & al., 1985).

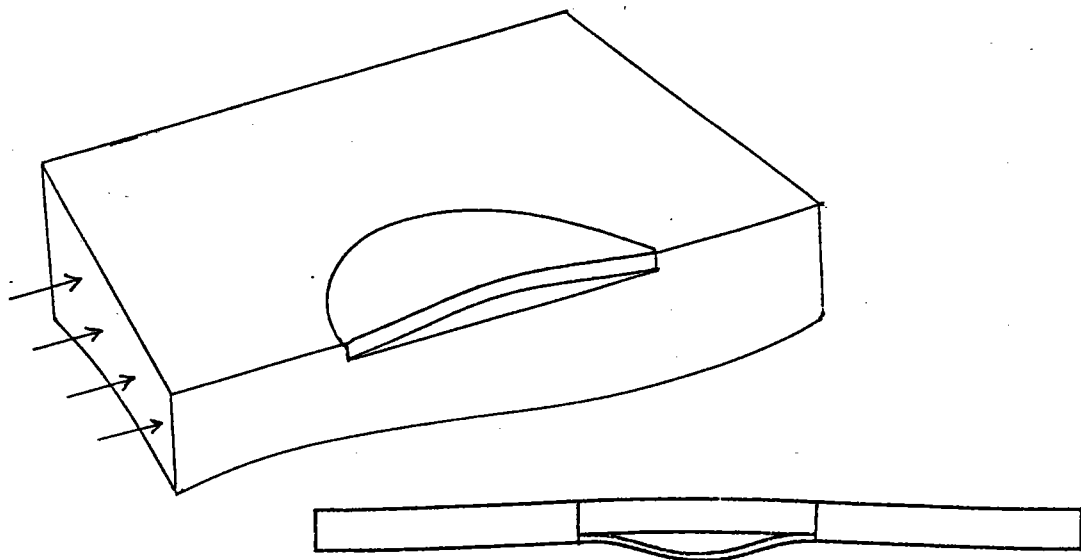


Figure 1: modélisation d'une structure délaminée à l'aide de poutres et de plaques

Malgré un effort de recherche important comme en témoigne les récentes publications : Storåkers, (1988-a-b), Yin (1988), Bottega (1988), Williams (1988); la simulation complète de la formation et de la propagation d'une cloque n'a pas encore été réalisée. Ceci tient essentiellement à trois difficultés clés :

- Le flambage local est un phénomène moteur pour la propagation des fissures. La prise en compte des non-linéarités géométriques et du postflambage est donc indispensable pour représenter correctement le phénomène de propagation.
- Malgré une faible épaisseur de la structure délaminée (plaque ou coque), le problème est tridimensionnel au voisinage de la pointe de la fissure.
- La caractérisation du comportement mécanique d'un stratifié à couches unidirectionnelles est délicate. Le matériau est inhomogène, anisotrope et cache sous un comportement global quasi-linéaire de fortes non-linéarités localisées dans la matrice (plasticité, endommagement). Les lois de propagation des délaminages sont mal connues.

Si la résolution d'un problème 3D non-linéaire n'est pas hors de portée avec les moyens de calcul actuel, l'étude systématique en

3D non-linéaire de différentes formes et positions de délaminage pour différentes séquences d'empilement est exclue.

Le travail présenté ici apporte de nouveaux développements pour la description du flambage local et de la propagation des délaminages à l'aide de modèles de plaques (2D).

#### « premier chapitre »

Dans le premier chapitre (page 11), nous présentons une modélisation à une dimension en théorie des poutres, tout à fait semblable à celle proposée par Chai & al (1981) et repris par Yin & al. (1986). La structure fissurée est assimilée à un assemblage de plusieurs poutres pour lesquelles on admet les hypothèses de petites déformations et rotations modérées. La description complète des phénomènes de flambage local et global est obtenue en résolvant numériquement les équations non-linéaires du modèle. La propagation des délaminages est étudiée dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile et du critère de Griffith. Une étude paramétrique met en évidence l'influence de la longueur et de la profondeur de fissure sur la propagation.

L'intérêt de ce modèle simple réside surtout dans l'aide qu'il apporte à la compréhension de l'interaction flambage-délaminage.

Nous effectuons ensuite une comparaison entre ce modèle d'assemblage de poutres et l'élasticité 2D.

Cette confrontation met en évidence les insuffisances du modèle d'assemblage de poutres et nous conduit à proposer un nouveau modèle d'assemblage de poutres, plus performant que celui de Chai lorsque les fissures sont courtes.

## « deuxième chapitre »

Le second chapitre (page 49) est entièrement consacré à la mécanique de la rupture et plus particulièrement à la mise au point d'une méthode de calcul du taux de restitution de l'énergie.

Nous commençons par une revue des méthodes classiques de calcul de taux de restitution de l'énergie. Elles sont généralement associées à l'élasticité et ne peuvent s'appliquer directement à des modèles d'assemblages de poutres et de plaques.

En reprenant les idées contenues dans la méthode de l'intégrale de contour de l'élasticité, nous proposons une nouvelle approche pour le calcul du taux de restitution de l'énergie dans les modèles non-linéaires d'assemblage de poutres et de plaques.

Nous avons obtenus des formules analytiques du taux de restitution local de l'énergie qui ne font intervenir que la solution du modèle de plaque sur le front de fissure.

La démarche est d'abord présentée sur un modèle d'assemblage de poutres avec lequel on établit deux propriétés importantes :

- indépendance du contour
- décomposition en mode I et mode II

Nous montrons ensuite que ces résultats sont en très bon accord avec une approche en élasticité 2D.

Nous généralisons ensuite aux assemblages de plaques.

### « troisième chapitre »

Le troisième chapitre (page 73) est consacré à la généralisation des résultats établis au premier chapitre, afin d'étudier les délaminages réels (2D) de formes et de positions à priori quelconques. La mise en oeuvre numérique par éléments finis d'un modèle d'assemblage de trois plaques de Von Karman est présentée. Ce modèle numérique permet de simuler les flambages locaux et globaux d'une structure délaminée quelconque. La taille de la zone délaminée doit toutefois être grande par rapport à l'épaisseur des plaques. Nous avons utilisé deux éléments finis de plaques différents : Discret Kirchhoff Triangle et Free Formulation Triangle. Les solutions sont obtenues par l'algorithme de Newton-Raphson avec un pilotage en force. Un post-processeur éléments finis pour le calcul du taux de restitution local de l'énergie sur le front de fissure a été réalisé. Des exemples de calculs pour des délaminages circulaires et elliptiques sont présentés en fin de chapitre.

## TABLEAU DES NOTATIONS UTILISEES

$\Omega$	structure fissurée
$\Omega_i$	poutre n° i ou plaque n° i
$\omega$	ligne moyenne des poutres ou des plaques
$\partial\omega$	bord des poutres ou des plaques
$\Gamma$	interfaces entre les poutres ou les plaques
$a$	demi longueur de fissure
$L$	demi-longueur de structure
$h_1$	épaisseur des poutres ou des plaques
$I_1$	moment quadratique rapporté à l' unité de largeur de poutre
$E_1$	modules d'élasticité de Young
$G_1$	modules d'élasticité de Coulomb
$\nu_1$	coefficients de Poisson
$\alpha$	rapport des modules de Young : $E_2/E_1$
$\beta$	facteur de longueur de fissure : $a/L$
$\gamma$	facteur de position de fissure : $h_2/h_1$
$F$	charge axiale par unité de largeur de poutre
$G$	taux de restitution de l'énergie
$J$	intégrale de Rice

$P_{int}^{\Omega_1}(\delta u)$	puissance virtuelle des efforts intérieurs à $\Omega_1$
$P_{ext}^{\Omega_1}(\delta u)$	puissance virtuelle des efforts extérieurs donnés.
$P_{\Gamma}^{\Omega_1}(\delta u)$	puissance virtuelle des efforts de liaison
$p_{\Gamma}^{\Omega_1}(\delta u)$	puissance virtuelle au bord par unité de longueur
$W_{def}^{\Omega_1}$	énergie de déformation
$W_{ext}^{\Omega_1}$	travail des efforts extérieurs
$W$	énergie de déformation par unité de longueur
$u_1, v_1, w_1$	déplacements
$\epsilon_{1j}$	tenseur des déformation
$\sigma_{1j}$	tenseur des contraintes
$\epsilon_1, k_1$	déformations généralisées pour les poutres
$N, M, T$	efforts intérieurs généralisées pour les poutres
$\epsilon_{\alpha\beta}, k_{\alpha\beta}$	déformations généralisées pour les plaques
$N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, Q_{\alpha}$	efforts intérieurs généralisées pour les plaques
$k_1, k_2$	facteurs de correction pour le cisaillement transverse.
D.C.B.	Double Cantilever Beam
C.S.T.	Constant Strain Triangle
D.K.Q.	Discret Kirchoff Quadrangle
D.K.T.	Discret Kirchoff Triangle
F.F.T.	Free Formulation Triangle

## Symboles

$\underline{u}$  vecteur  $u$

$u'$  dérivée de  $u$  par rapport à la variable d'espace  $x$

$\dot{u}$  dérivée de  $u$  par rapport au temps

pour la convention de l'indice muet :

$i, j, k, l$  varient de 1 à 3

$\alpha, \beta, \gamma$  varient de 1 à 2



## Chapitre 1

### LES MODELES A UNE DIMENSION : " MODELES D'ASSEMBLAGE DE POUTRES"

Les premiers modèles (analytiques ou semi-analytiques) développés pour étudier l'interaction flambage - délaminage reposent sur les deux simplifications suivantes :

- \* Problèmes unidimensionnels : les délaminages sont rectilignes ou circulaires, et les matériaux sont homogènes et isotropes.
- \* Le délaminage est très proche de la surface externe de la structure (très superficiel). Il sépare une zone fine du reste du stratifié considéré comme semi-infini. On peut ainsi se ramener à l'étude du postflambage d'une seule plaque.  
(Chai & al, 1981), (Bottega & Maewal, 1983), (Evans & Hutchinson, 1984), (Yin, 1985).

Ces modèles "couche fine" ("thin film") ont par la suite été étudiés dans des cas plus réalistes avec des méthodes numériques (éléments finis, méthode de Rayleigh Ritz). On citera les études de Chai & Babcock (1985), Shivakumar & Whitcomb (1985), pour les délaminages elliptiques et des matériaux orthotropes. De tels modèles sont toutefois limités aux cas où l'épaisseur de la zone délaminée ne dépasse pas 5 à 10 % de l'épaisseur totale du stratifié.

L'objectif de cette thèse est d'étudier le cas plus général d'un délaminage de forme et de position quelconque. Le problème est plus complexe que dans le cas "couche fine" car on doit tenir compte de toute la structure.

Nous présentons en ce début de chapitre un modèle à une dimension (poutre) pour décrire le flambage et la propagation des délaminages dans le cas d'une fissure a-priori quelconque. Ce modèle est très semblable à celui de Chai & al (1981). Les résultats obtenus seront ensuite fort utiles pour construire des modèles bidimensionnels plus réalistes.

### 1.1 DESCRIPTION DU MODELE D'ASSEMBLAGE DE POUTRES

Nous considérons une plaque composite stratifiée présentant un délaminage rectiligne traversant de longueur  $2a$  .

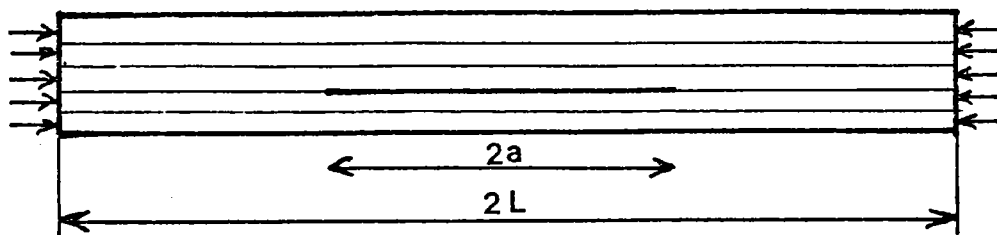


Figure 1.1: plaque stratifiée délaminée

Pour étudier la réponse en compression de cette structure, nous assimilons la plaque délaminée à un assemblage de trois poutres.

Nous ne considérons qu'une demi-structure pour des raisons de symétrie. Nous appellerons dorénavant « modèle d'assemblage de poutres » l'ensemble de ces trois poutres plus l'interface entre ces poutres.

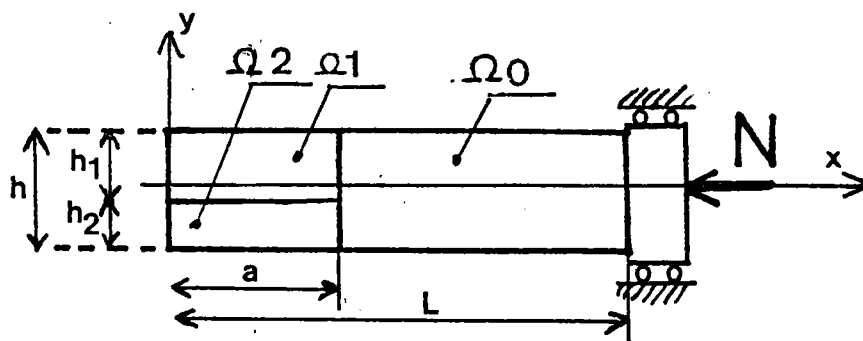


Figure 1.2: l'assemblage de poutres

La théorie non-linéaire classique des poutres en petites déformations et rotations modérées est utilisée ici (Brush & Almroth - 1975).

Nous supposons que la plaque est constituée d'un empilement symétrique de  $2n$  couches élémentaires. Dans la partie saine

(non fissurée) de la poutre, il n'y a donc pas de couplage entre les effets de tension et de flexion. Il n'y a en revanche aucune raison pour que, de part et d'autre de la fissure, les empilements de plis restent symétriques et il y a couplage tension-flexion dans les parties 1 et 2. La prise en compte de ces phénomènes introduirait déjà, au niveau des lois de comportement, de nombreux coefficients (8 ici) qui dépendent de la séquence d'empilement. Nous simplifions le problème en considérant des matériaux linéaires homogènes pour chaque poutre et nous négligeons les couplages tension-flexion. Le module  $E_0$  de la poutre  $\Omega_0$  est le module homogène de traction de la partie saine.  $E_1$  et  $E_2$  sont les modules homogènes de traction des empilements de plis séparés par la fissure. Ces trois modules vérifient la relation :

$$(1) \quad E_0 h = E_1 h_1 + E_2 h_2$$

L'adoption de modules de Young différents pour les poutres 1 et 2 permet d'introduire de manière simple un défaut dans la structure

## 1.2 DESCRIPTION DE LA CINEMATIQUE

Nous adoptons une cinématique de type Bernoulli (Kirchhoff en plaque). Les champs de déplacement sur chaque poutre sont pris sous la forme :

$$(2) \quad \underline{u}_i(x, y) = (u_i(x) - (y - y_G) v_i'(x)) \underline{x} + v_i(x) \underline{y} \quad i = 0, 1, 2$$

et on impose les conditions de raccord cinématique suivantes entre les poutres au niveau de l'interface :

$$(3) \quad \underline{u}_1(a, y) = \underline{u}_0(a, y) \quad (4) \quad \underline{u}_2(a, y) = \underline{u}_0(a, y)$$

Le champs de déplacement de la structure est ainsi entièrement défini par six fonctions :

$$(5) \quad u_0(x), v_0(x) \quad x \in [a, L]$$

$$(6) \quad u_1(x), v_1(x), u_2(x), v_2(x) \quad x \in [0, a]$$

qui, afin de satisfaire (2) et (3), vérifient les six conditions de raccord suivantes :

$$(7) \quad u_1(a) = u_0(a) - \frac{h_2}{2} v_0'(a) \quad (10) \quad u_2(a) = u_0(a) + \frac{h_1}{2} v_0'(a)$$

$$(8) \quad v_1(a) = v_0(a) \quad (11) \quad v_2(a) = v_0(a)$$

$$(9) \quad v_1'(a) = v_0'(a) \quad (12) \quad v_2'(a) = v_0'(a)$$

Le champ de déplacement devra vérifier en plus des conditions de raccord, les conditions aux limites suivantes :

$$(13) \quad u_1(0) = 0 \quad (16) \quad u_2(0) = 0 \quad (19) \quad v_0(L) = 0$$

$$(14) \quad v_1'(0) = 0 \quad (17) \quad v_2'(0) = 0 \quad (20) \quad v_0'(L) = 0$$

$$(15) \quad v_1'''(0) = 0 \quad (18) \quad v_2'''(0) = 0$$

Symétrie par rapport à Oy

encastrement

Sous l'hypothèse classique des petites déformations et des rotations modérées nous avons les déformations suivantes :

$$(21) \quad \varepsilon_{x1}(x,y) = (u_1'(x) - y v_1''(x)) + \frac{1}{2} v_1'^2(x)$$

$$(22) \quad \varepsilon_{xy1}(x,y) = 0$$

Le matériau est supposé linéaire et homogène. Les contraintes s'écrivent alors :

$$(23) \quad \sigma_{x1}(x,y) = E_1 \varepsilon_{x1}(x,y)$$

Nous définissons les contraintes généralisées  $N_1$ ,  $M_1$  par :

$$(24) \quad N_1(x) = \int_{-h_1/2}^{+h_1/2} \sigma_{x1} dy = E_1 h_1 \left( u_1'(x) + \frac{1}{2} v_1'^2(x) \right)$$

$$(25) \quad M_1(x) = \int_{-h_1/2}^{+h_1/2} y \sigma_{x1} dy = - \frac{E_1 h_1^3}{12} v_1''(x)$$

Notons que le champ de déformation n'est en général pas continu au niveau de l'interface entre les poutres. Seuls les déplacements sont continus sur tout le domaine  $\Omega$ , les déformations et par conséquent les contraintes présentent des discontinuités sur  $\Gamma$ .

déformations et par conséquent les contraintes présentent des discontinuités sur  $\Gamma$ .

### 1.3 PRINCIPE DES PUISSANCES VIRTUELLES

Sur chaque domaine  $\Omega_i$  (chaque poutre) les déplacements et les contraintes sont continûment dérivables et le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$(26) \quad P_{\text{int}}^{\Omega_i} (\delta U) + P_{\text{ext}}^{\Omega_i} (\delta U) + P_{\Gamma}^{\Omega_i} (\delta U) = 0 \quad \forall \delta U$$

$i = 0, 1, 2$

La puissance virtuelle des efforts extérieurs à  $\Omega_i$  est écrite à l'aide de deux termes :

- $P_{\text{ext}}^{\Omega_i} (\delta U)$  pour les efforts extérieurs donnés
- $P_{\Gamma}^{\Omega_i} (\delta U)$  pour les efforts de liaisons exercés par les deux autres poutres sur l'interface  $\Gamma$ .

Les efforts de liaison doivent bien sûr satisfaire au théorème des actions mutuelles que l'on exprime ici sous une forme variationnelle :

$$(27) \quad \sum_{i=0}^2 P_{\Gamma}^{\Omega_i} (\delta U) = 0$$

pour tout  $\delta U$  compatible avec les conditions de raccord (7) à (12). Une écriture globale du principe des puissances virtuelles est obtenu en condensant (26) et (27) et en se limitant à des  $\delta U$  cinématiquement admissibles :

$$(28) \quad \sum_{i=0}^2 \left\{ P_{\text{int}}^{\Omega_i} (\delta U) + P_{\text{ext}}^{\Omega_i} (\delta U) \right\} = 0 \quad \forall \delta U \text{ C.A.}$$

On explicite (28) sous la forme :

$$(29) \quad - \sum_{i=0}^2 \int_{\omega_i} \left[ N_i (\delta u_i' + v_i' \delta v_i'') - M_i \delta v_i'' \right] d\omega + N \delta u(L) = 0$$

$\forall \delta U \text{ C.A.}$

Après intégration par parties, (29) conduit aux équations suivantes :

■ équilibre local :

$$(30) \quad \left[ \begin{array}{l} N_1' = 0 \\ M_1'' - N_1 v_1'' = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} N_1 = \text{Cste} \\ v_1^{(4)} - \frac{N_1}{E_1 I_1} v_1'' = 0 \end{array}$$

■ conditions aux limites en effort à l'extrémité  $x = L$  :

$$(31) \quad N_0 = N$$

■ trois conditions de raccord sur les efforts en  $x = a$  :

$$(32) \quad N_0 = N_1 + N_2$$

$$(33) \quad M_0 = M_1 + N_1 \frac{h_1}{2} + M_2 - N_2 \frac{h_2}{2}$$

$$(34) \quad M_0' + N_0 v_0' = M_1' + N_1 v_1' + M_2' + N_2 v_2'$$

Ces trois dernières relations expriment les raccords sur les efforts normaux, les moments fléchissants et les efforts tranchants. Elles traduisent le théorème des actions mutuelles. Notons qu'il y a couplage entre les effets de membrane et de flexion dans (33) car les lignes moyennes des poutres sont à des hauteurs différentes et rappelons que ces équations n'entraînent pas la continuité des contraintes locales sur  $\Gamma$ .

#### 1.4 INTEGRATION DES EQUATIONS D'EQUILIBRE

On intègre les équations d'équilibre local (30) et l'on obtient, compte tenu des conditions aux limites (13) à (20) et de la relation (34) sur les efforts tranchants la forme suivante des déplacements :

$$(35) \quad v_1(x) = A_1 \left[ \frac{1 - \cos \omega_1 x}{\omega_1^2} \right] + D_1$$

$$(36) \quad v_2(x) = A_2 \left[ \frac{1 - \cos \omega_2 x}{\omega_2^2} \right] + D_2$$

$$(37) \quad v_0(x) = A_0 \left[ \frac{1 - \cos \omega_0 (x - L)}{\omega_0^2} \right]$$

$$(38) \quad u_1(x) = \frac{N_1 x}{E_1 S_1} - \int_0^x \frac{v_1'^2}{2} dx$$

$$(39) \quad u_2(x) = \frac{N_2 x}{E_2 S_2} - \int_0^x \frac{v_2'^2}{2} dx$$

$$(40) \quad u_0(x) = \frac{N_0 (x - a)}{E_0 S_0} - \int_0^x \frac{v_0'^2}{2} dx + u_0(a)$$

avec  $\omega_1^2 = - N_1 / E_1 S_1 \quad ( N_1 < 0 )$

On est donc ramené à un problème algébrique où les huit inconnues :

$$N_1, N_2, A_1, A_2, A_0, D_1, D_2, u_0(a)$$

satisfont les huit équations (7) à (12), (32) et (33)

Remarques :

- Pour l'intégration des équations d'équilibre, nous avons supposé que les trois parties étaient en compression ( $N_1 < 0, \omega_1^2 > 0$ ). Cet état de fait est assurément vérifié en début de chargement, mais il peut arriver que l'une des deux poutres 1 ou 2 repasse en tension lorsque les déplacements transversaux deviennent importants. Le cosinus devra alors être remplacé par un cosinus hyperbolique.
- Les coefficients  $A_1, A_2, A_0$  correspondent aux courbures des poutres en  $x = 0$  et  $x = L$ .

■ Dans la formulation du problème, il n'y a aucune condition qui interdise l'interpénétration des poutres 1 et 2. Il convient donc, au niveau de la résolution, d'éliminer les solutions ne correspondant pas à une ouverture de la fissure.

■ Les inconnues  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $u_0(a)$  apparaissent de façon linéaire dans les équations (7), (8), (10) et (11) et peuvent donc s'exprimer en fonction des autres inconnues du problème.

Cette dernière remarque nous permet de dire que le problème est entièrement gouverné par le système de cinq équations suivant, en  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_0$  et par la donnée  $N$ .

$$(41) \quad N_0 = N_1 + N_2$$

$$(42) \quad E_0 I_0 A_0 \cos \omega_0 (a-L) = E_1 I_1 A_1 \cos \omega_1 a - N_1 \frac{h_2}{2} \\ + E_2 I_2 A_2 \cos \omega_2 a + N_2 \frac{h_1}{2}$$

$$(43) \quad \frac{A_0}{\omega_0} \sin \omega_0 (a-L) = \frac{A_1}{\omega_1} \sin \omega_1 (a-L)$$

$$(44) \quad \frac{A_0}{\omega_0} \sin \omega_0 (a-L) = \frac{A_2}{\omega_2} \sin \omega_2 (a-L)$$

$$(45) \quad \frac{A_0}{\omega_0} \sin \omega_0 (a-L) = \frac{2a}{h} \left[ \frac{N_2}{E_2 S_2} - \frac{A_2^2}{4\omega_2^2} \left[ 1 - \frac{\sin 2\omega_2 a}{2\omega_2 a} \right] \right] \\ - \frac{2a}{h} \left[ \frac{N_1}{E_1 S_1} - \frac{A_1^2}{4\omega_1^2} \left[ 1 - \frac{\sin 2\omega_1 a}{2\omega_1 a} \right] \right]$$

$$\omega_1^2 = - N_1 / E_1 I_1$$



## 1.5 ADIMENSIONNALISATION

Nous adimensionnalisons le problème en rapportant l'effort appliqué  $N$  à la charge de flambage d'Euler de la structure sans fissure.  $\underline{N}$  représente ainsi la réduction de charge (charge réduite).  $\underline{N}_1$  et  $\underline{N}_2$  sont les rapports des efforts normaux  $N_1$  et  $N_2$  sur les charges de flambage respectives des poutres 1 et 2 (charge de flambage pour une poutre encastree aux deux extrémités).

$$(46) \quad \underline{N} = \frac{-N}{\left[ \frac{\pi^2 E_0 I_0}{L^2} \right]} \quad (47) \quad \underline{N}_1 = \frac{-N_1}{\left[ \frac{\pi^2 E_1 I_1}{a^2} \right]} \quad (48) \quad \underline{N}_2 = \frac{-N_2}{\left[ \frac{\pi^2 E_2 I_2}{a^2} \right]}$$

pour les courbures, on prend :

$$(49) \quad \underline{A}_1 = A_1 h_1 \left[ \frac{L^2}{h^2} \right]$$

Les déplacements sont rapportés à la hauteur de la structure :

$$(50) \quad \underline{v}_1 = v_1 / h$$

En injectant ces définitions dans les équations, il ne subsiste plus que trois paramètres adimensionnels :

$\alpha = E_2 / E_1$  : dissymétrie des modules de Young

$\beta = a / L$  : caractérisant la longueur de la fissure

$\gamma = h_2 / h_1$  : position de la fissure

Les équations adimensionnelles et les formules de  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $U_0(a)$  sont données pour plus de clarté en annexe B, page 103.

Nous allons maintenant étudier l'influence de chacun de ces paramètres dans les paragraphes suivants.

## 1.6 RESOLUTION DES EQUATIONS

### 1.6.1 PRINCIPE

Le système d'équations algébriques non linéaire précédent a été résolu de façon numérique.

Nous appellerons « courbe charge-déplacement » la courbe d'évolution des cinq grandeurs  $\underline{N}_1$ ,  $\underline{N}_2$ ,  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$ ,  $\underline{A}_0$  en fonction de la charge  $\underline{N}$ . Une telle courbe est définie pour un jeu de valeurs des trois paramètres adimensionnels  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

Nous nous proposons de tracer les réseaux de courbes charge-déplacement en faisant varier successivement la longueur de la fissure ( $\beta$ ) et sa position dans la structure ( $\gamma$ ). L'influence du rapport des modules de Young ( $\alpha$ ) sera discuté.

Nous avons pour ce faire utilisé les méthodes de Newton-Raphson (NR), Newton-Raphson modifiée (NRM), associées à des pilotages en force, en déplacement ou à longueur d'arc imposée. La principale difficulté a été d'assurer un pilotage automatique du suivi de courbe pour tous les jeux de valeur de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Ceci tient au fait que les courbes charge-déplacement peuvent admettre des points limites ou des bifurcations.

Nous remarquons en effet que pour un matériau homogène sur toute la structure - c'est à dire avec  $\alpha = 1$  ( $E_1 = E_2 = E_0$ ) -, le système admet la solution triviale :

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{N}_1 = \beta^2 (1 + \gamma)^2 \underline{N} \\ \underline{N}_2 = \beta^2 \left\{ \frac{1 + \gamma}{\gamma} \right\}^2 \underline{N} \\ \underline{A}_1 = \underline{A}_2 = \underline{A}_0 = 0 \end{array} \right.$$

qui correspond à l'état de compression uniforme sans déplacement transversal.

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \text{constante} \\ v_1, v_2, v_0 \text{ identiquement nuls} \end{array} \right.$$

Avec une méthode de perturbation, on montre analytiquement qu'il apparaît une branche bifurquée sur cette solution fondamentale pour  $\underline{N} = \underline{N}_{\text{critique}}$  toujours inférieur à 1.  $\underline{N}_{\text{critique}}$  correspond à la plus petite valeur de  $\underline{N}$  qui annule le déterminant de la matrice tangente au système.  $\underline{N}_{\text{critique}}$  dépend uniquement de la longueur et de la position de la fissure.

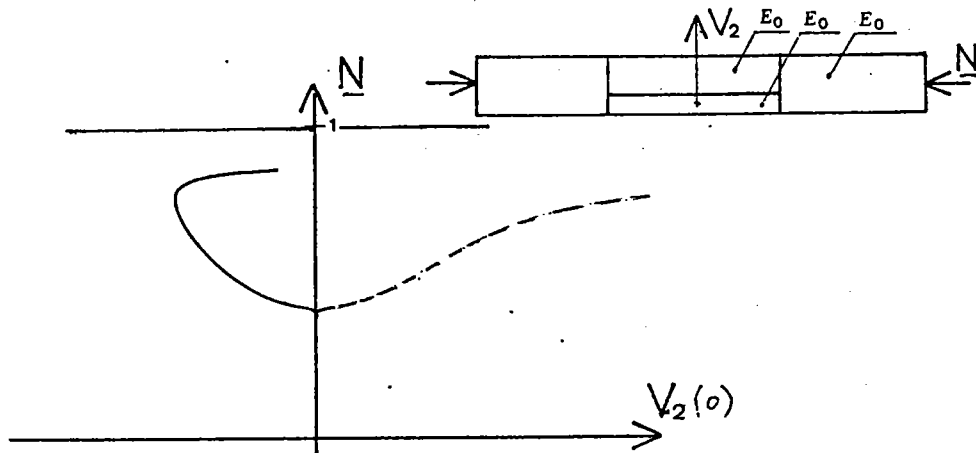


Figure 1.3: Courbe CHARGE-DEPLACEMENT :  $\alpha = 1$

La courbe charge-déplacement pour un matériau homogène ( $\alpha = 1$ ) est présentée figure 1.3. On représente le déplacement transverse  $y_2(0)$  de la poutre 2 en fonction de la charge. La solution fondamentale est sur l'axe vertical, la branche bifurquée en trait plein correspond à l'ouverture de la fissure. La branche en pointillé correspond à l'interpénétration des deux poutres et doit être éliminée. La barre horizontale  $\underline{N} = 1$  représente la branche bifurquée que l'on obtiendrait en l'absence de fissure (flambage d'Euler).

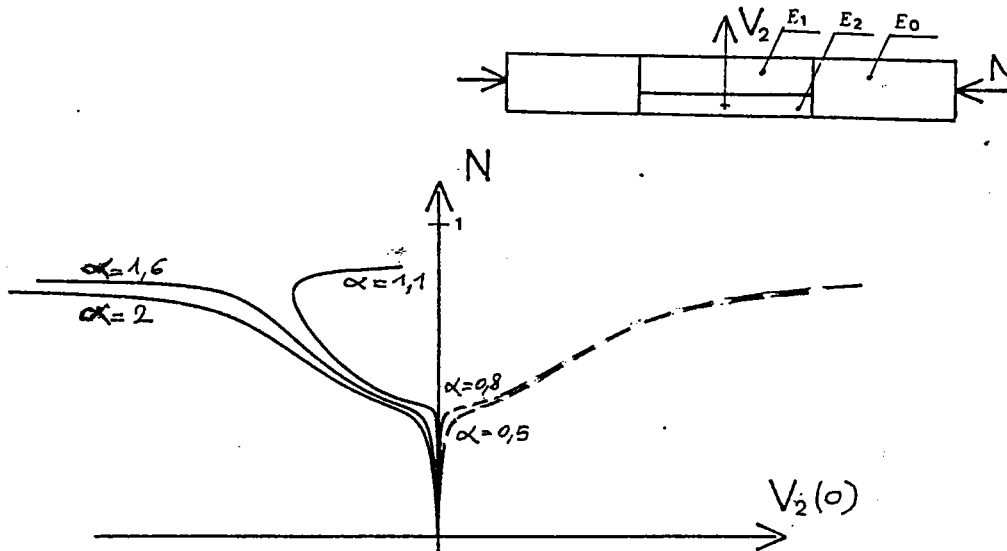


Figure 1.4: Courbe CHARGE-DEPLACEMENT :  $\alpha$  variable

Lorsque l'on fait varier  $\alpha$  ( $\beta$  et  $\gamma$  toujours fixés), on obtient un réseau de courbes typique d'un problème de flambage avec défaut.  $(1 - \alpha)$  joue le rôle de défaut et la bifurcation n'existe plus pour  $\alpha$  différent de 1. On voit tout de suite que la dissymétrie des matériaux peut favoriser l'ouverture de la fissure ou au contraire tendre à rapprocher ses lèvres, conférant ainsi une meilleure tenue à la structure.

Sur le plan purement numérique, le défaut permet d'éliminer le problème posé par la bifurcation et on obtient les courbes charge-déplacement pour un matériau homogène sur la structure comme courbes limites lorsque l'on fait tendre  $\alpha$  vers 1.

### 1.6.2 RESOLUTION NUMERIQUE

Le système de 5 équations est écrit de façon condensée :

$$(53) \quad f(u, \underline{N}) = 0 \quad \text{avec} \quad u^T = [ \underline{N}_1, \underline{N}_2, \underline{A}_1, \underline{A}_2, \underline{A}_0 ]$$

la différentiation de ce système s'écrit :

$$(54) \quad f, u \delta u + f, \underline{N} \delta \underline{N} = 0$$

Le système est résolu pas à pas à partir de la solution initiale  $\underline{N} = 0, u = 0$ . Connaissant  $\underline{N}_1, u_1$  une solution du système, faire un pas consiste à trouver  $\Delta \underline{N}$  et  $\Delta u$  (6 composantes) tel que :

$$(55) \quad f(u_1 + \Delta u, N_1 + \Delta N) = f(u_{1+1}, N_{1+1}) = 0 \quad (5 \text{ équations})$$

On doit bien sûr se donner une équation supplémentaire : ou on se fixe  $\Delta N$  - c'est le pilotage en force - ou bien on se fixe une composante de  $\Delta u$  - c'est le pilotage en déplacement - ou encore on s'impose une condition mixte en  $\Delta u, \Delta N$  - c'est le pilotage à longueur d'arc imposé -. Ce choix peut bien sûr être remis en cause à chaque pas .  $\Delta N$  et  $\Delta u$  sont déterminés par " prédiction-correction "

$$(56) \quad \begin{aligned} \Delta N &= \Delta N_0 + \Delta N_1 + \Delta N_2 + \dots + \Delta N_n \\ \Delta u &= \underbrace{\Delta u_0}_{\text{prédiction}} + \underbrace{\Delta u_1 + \Delta u_2 + \dots + \Delta u_n}_{\text{correction}} \end{aligned}$$

\* On a choisi un prédicteur tangent .

$\Delta N_0$  et  $\Delta u_0$  correspondent à un déplacement le long de la tangente à la courbe au point  $N_1, u_1$ . Ils sont solutions du système d'équation :

$$(57) \quad f, u \Delta u_0 + f, N \Delta N_0 = 0$$

avec une équation supplémentaire déterminant la valeur du pas .

$$(58) \quad \Delta N_0 = P \quad \text{pour le pilotage en force}$$

$$(59) \quad \text{une composante de } \Delta u_0 = P \quad \text{pour le pilotage en déplacement}$$

$$(60) \quad \Delta u_0^T \Delta u_0 + \Delta N_0^2 = P^2 \quad \text{pour le pilotage à longueur d'arc imposée}$$

\* Les  $\Delta u_i$  et  $\Delta N_i$  sont des corrections qui permettent d'annuler le résidu. Ils sont solutions de

$$(61) \quad f, u \Delta u_i + f, N \Delta N_i = f(u_1 + \Delta u_0 + \dots + \Delta u_{(i-1)}, N_1 + \Delta N_0 + \dots + \Delta N_{(i-1)})$$

La matrice  $f, u$  est actualisée à chaque itération (NR) ou non (NRM). L'équation supplémentaire est cette fois :

$$(62) \quad \underline{\Delta N}_1 = 0 \quad \text{pour le pilotage en force}$$

$$(63) \quad \text{une composante de } \Delta u_1 = 0 \quad \text{pour le pilotage en déplacement}$$

$$(64) \quad (\Delta u_0 + \dots + \Delta u_1)^T (\Delta u_0 + \dots + \Delta u_1) + (\Delta N_0 + \dots + \Delta N_1)^2 = p^2$$

pour le pilotage à longueur d'arc imposée

D'autres variantes de (64) sont possibles (Riks - 1972, Wempner - 1971, Chrisfield - 1981, 1983).

Notons que (64) est non linéaire et que le système (61)-(64) se résout en posant :

$$(65) \quad \underline{\Delta N}_1 = \underline{\Delta N}_1^{(a)} + \lambda \underline{\Delta N}_1^{(b)}$$

$$(66) \quad \Delta u_1 = \Delta u_1^{(a)} + \lambda \Delta u_1^{(b)}$$

où les quantités  $\Delta u_1^{(a)}$  et  $\Delta u_1^{(b)}$  sont solutions de :

$$(67) \quad f, u \Delta u_1^{(a)} + f, N \underline{\Delta N}_1^{(a)} = \text{résidu}_{1-1}$$

$$(68) \quad f, u \Delta u_1^{(b)} + f, N \underline{\Delta N}_1^{(b)} = 0$$

et  $\lambda$  solution de l'équation du second degré :

$$(69) \quad \left( \Delta u_1^{(b)T} \Delta u_1^{(b)} + \underline{\Delta N}_1^{(b)2} \right) \lambda^2 + (\Delta u_0 + \Delta u_1 + \dots + \Delta u_{(1-1)} + \Delta u_1^{(a)})^T \Delta u_1^{(b)} + (\Delta N_0 + \dots + \Delta N_1) \underline{\Delta N}_1^{(b)} \lambda + (\Delta u_0 + \Delta u_1 + \dots + \Delta u_{(1-1)} + \Delta u_1^{(a)})^T (\Delta u_0 + \dots + \Delta u_1^{(a)}) + (\Delta N_0 + \dots + \Delta N_1^{(a)})^2 - p^2 = 0$$

Le pilotage à longueur d'arc imposée est très souvent associé à la méthode (NRM) car dans ce cas,  $f, u$  n'étant pas actualisé,  $u_1^{(b)}$  est tout simplement pris égal à  $\Delta u_0$  et nous n'effectuons qu'une seule résolution à chaque itération. Ce type de pilotage permet de passer les points limites et améliore la convergence de NRM par rapport à un pilotage en force ou en déplacement (Chrisfield 1981). Le surplus de temps calcul est tout à fait minime : former et résoudre l'équation du second degré (69).

Etant donné la petite taille de la matrice tangente, et la très forte non-linéarité de notre problème de flambage, la priorité n'était pas de limiter le nombre d'inversions de la matrice tangente mais d'assurer le passage automatique des "zones difficiles". Les meilleurs résultats ont été obtenus avec la méthode de Newton-Raphson pure associée à un pilotage à longueur d'arc imposée. Le suivi de courbe est ainsi très stable et le passage des maximums est possible. Il faut toutefois faire deux résolutions par itération, (67) et (68), avec une matrice  $f, u$  réactualisée. Dans notre cas, les temps C.P.U. ne dépassent jamais la dizaine de secondes.

### 1.7 TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE

Pour décrire la fissuration, nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile et nous utilisons les lois de propagation de Griffith. C'est une approche énergétique de la rupture où la grandeur fondamentale est le taux de restitution de l'énergie  $G$ , défini comme la dérivée de l'énergie potentielle totale par rapport à la longueur de la fissure. La fissure se propage lorsque le taux de restitution atteint une valeur critique  $G_c$  caractéristique du matériau. De plus la propagation est stable si la condition  $\dot{G} = 0$  est assurée pendant la fissuration.

Résumons les lois de propagation :

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } G < G_c & \dot{a} = 0 \quad \text{pas de propagation} \\ \text{si } G = G_c \text{ et } \dot{G} = 0 & \dot{a} > 0 \quad \text{propagation stable} \end{array} \right.$$

La condition  $\dot{G} = 0$  n'est réalisable que si l'inégalité  $\partial G / \partial a < 0$  est satisfaite (condition de stabilité). Dans le cas contraire, la fissuration est incapable d'absorber la totalité de l'énergie libérée par la structure et il y a apparition d'énergie cinétique (effets dynamiques) au cours du processus. Pour notre modèle de poutre, le taux de restitution de l'énergie est calculé à l'aide d'une formule analytique dont nous donnerons une démonstration au chapitre suivant.

$$(71) \quad G = w_1(a) + w_2(a) - w_0(a)$$

$$(72) \quad w_1(a) = \frac{1}{2} \frac{N_1(a)^2}{E_1 S_1} + \frac{1}{2} \frac{M_1(a)^2}{E_1 I_1}$$

Il n'apparaît que la solution du problème de poutre au niveau de l'interface et le calcul de  $G$  associé à une courbe charge-déplacement est immédiat.

On adimensionnalise le taux de restitution de l'énergie en posant :

$$(73) \quad \underline{G} = \frac{G}{G_0} \quad \text{avec} \quad G_0 = \frac{1}{2E_0 S_0} \left\{ \frac{4\pi^2 E_0 I_0}{[2L]^2} \right\}^2$$

## 1.8 RESULTATS

### 1.8.1 UN EXEMPLE TYPIQUE

Nous présentons sur les figures 1.5 et 1.6 un exemple typique de suivi de courbe pour le jeu de valeur des paramètres suivant :

$$\alpha = 1,1 \quad \beta = 0,3 \quad \gamma = 0,2$$

Les courbes 1.5 a, b, c et d représentent l'évolution des déplacements  $v_1(0)$ ,  $v_2(0)$  et des efforts normaux  $\underline{N}_1$  et  $\underline{N}_2$  en fonction de la charge  $\underline{N}$ . On visualise la déformée sur la figure 1.5 e ; les déplacements sont à l'échelle 1:1 et nous avons choisi un rapport  $h/L = 0,1$  pour une bonne lisibilité de la figure sachant que le résultat est indépendant de  $h/L$ . Le taux de restitution de l'énergie est représenté figure 1.6. On distingue nettement une première phase linéaire pour  $\underline{N} < 0,35$ , phase au cours de laquelle les poutres restent droites ( $\underline{v} \approx 0$ ) et le taux de restitution est quasi nul. Pour  $\underline{N} > 0,35$  la poutre 2 atteint sa charge de flambage ( $\underline{N}_2 \approx 1$ ) et nous avons le flambage local. Les déplacements  $\underline{v}_2$  évoluent avec  $\underline{N}$  alors que l'effort normal  $\underline{N}_2$  reste quasi constant. Les accroissements de charge sont entièrement supportés par la poutre 1. Lorsque  $\underline{N}$  atteint 0,75 nous avons le flambage local de l'ensemble avec  $\underline{v}_1 > 0$ .

On constate que le taux de restitution de l'énergie ne devient significatif qu'avec le flambage local, et que ce phénomène va



participer activement à la propagation des fissures. L'énergie libérée par la structure dans une avancée virtuelle de fissure provient essentiellement de la poutre 2.  $G$  augmente ensuite très rapidement avec le flambage global. Indépendamment du phénomène de propagation, la réduction de charge est déjà importante (25%); elle le sera encore plus si la fissure se propage avant le flambage global.

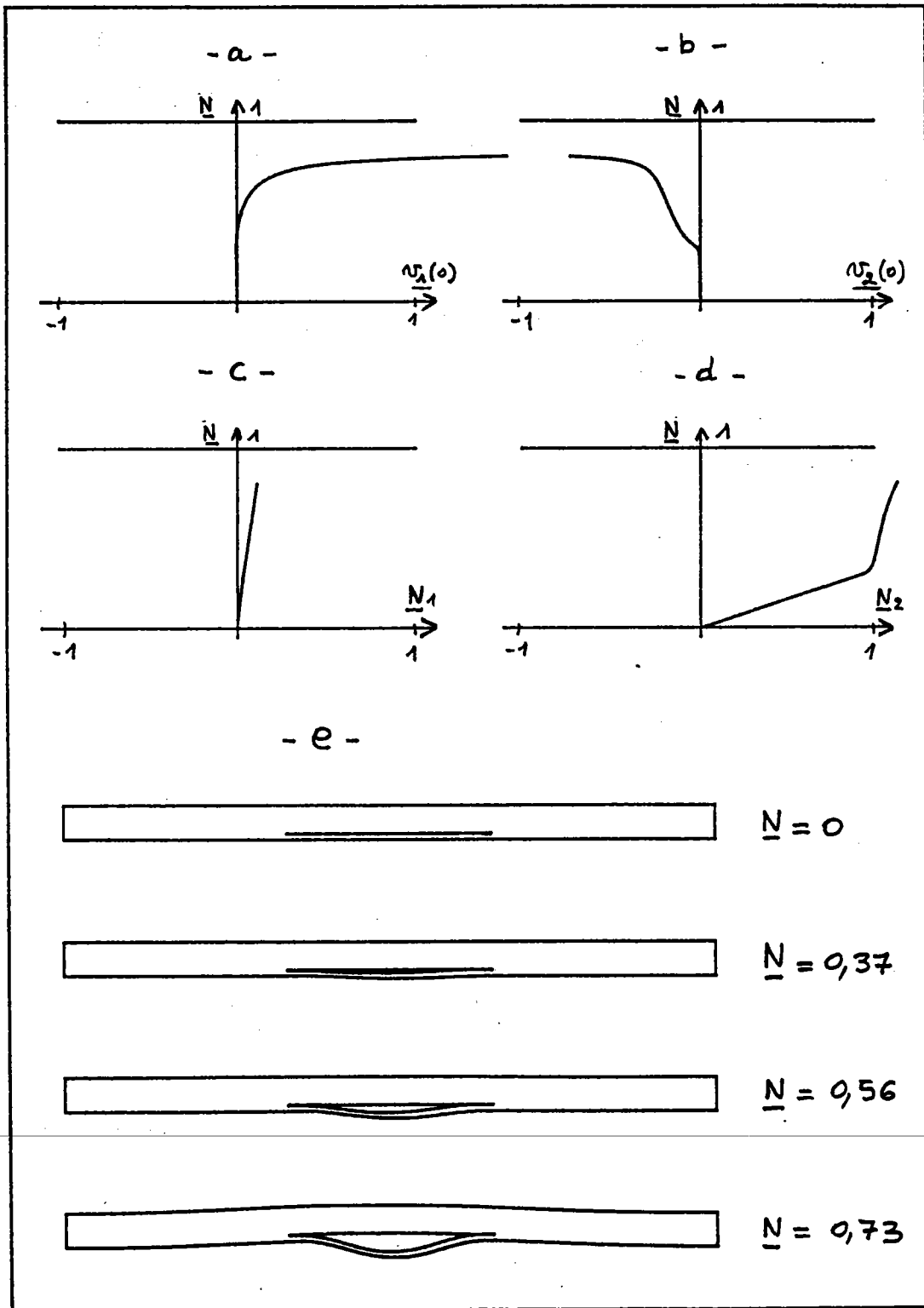


Figure 1.5: Un exemple de suivi de courbe :  $\alpha = 1.1$   $\beta = 0.3$   $\gamma = 0.2$

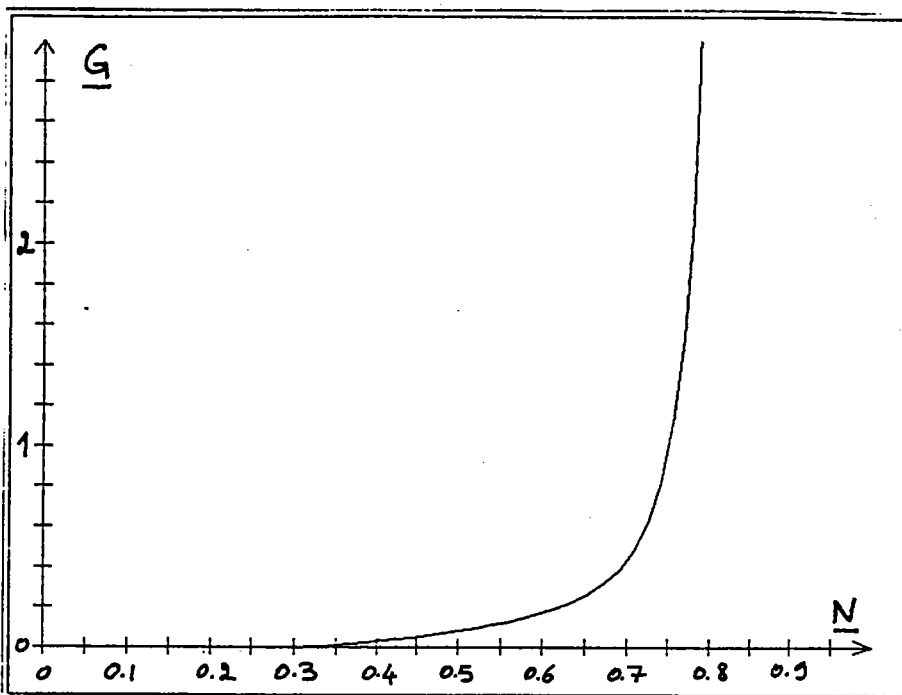


Figure 1.6: Taux de restitution en fonction de la charge

### 1.8.2 PROPAGATION DE FISSURE

L'analyse précédente (1.8.1) suppose que la fissure n'avance pas. Nous allons maintenant la compléter en prenant en compte les lois de propagation des fissures (70). Pour résoudre ce problème, nous avons suivi les courbes charge-déplacement en faisant varier la longueur de fissure  $\beta$  ( $\alpha = 1,1$  et  $\gamma = 0,2$  fixes) et on représente sur la figure 1.7 l'évolution de  $G$  en fonction de  $N$  et  $\beta$ .

La figure 1.7-a permet de déterminer la charge nécessaire pour propager une fissure de longueur donnée et on visualise directement sur 1.7-b la stabilité de la propagation (stable si  $\partial G / \partial \beta < 0$ ).

Admettons par exemple une valeur de  $G_{critique}$  de 0,06. Nous constatons alors que :

- \* pour les fissures courtes -  $\beta < 0,2$  - il n'y a pas de propagation possible.
- \* Pour les fissures moyennes -  $0,2 < \beta < 0,42$  - nous avons une propagation instable. Une restabilisation est ensuite possible.

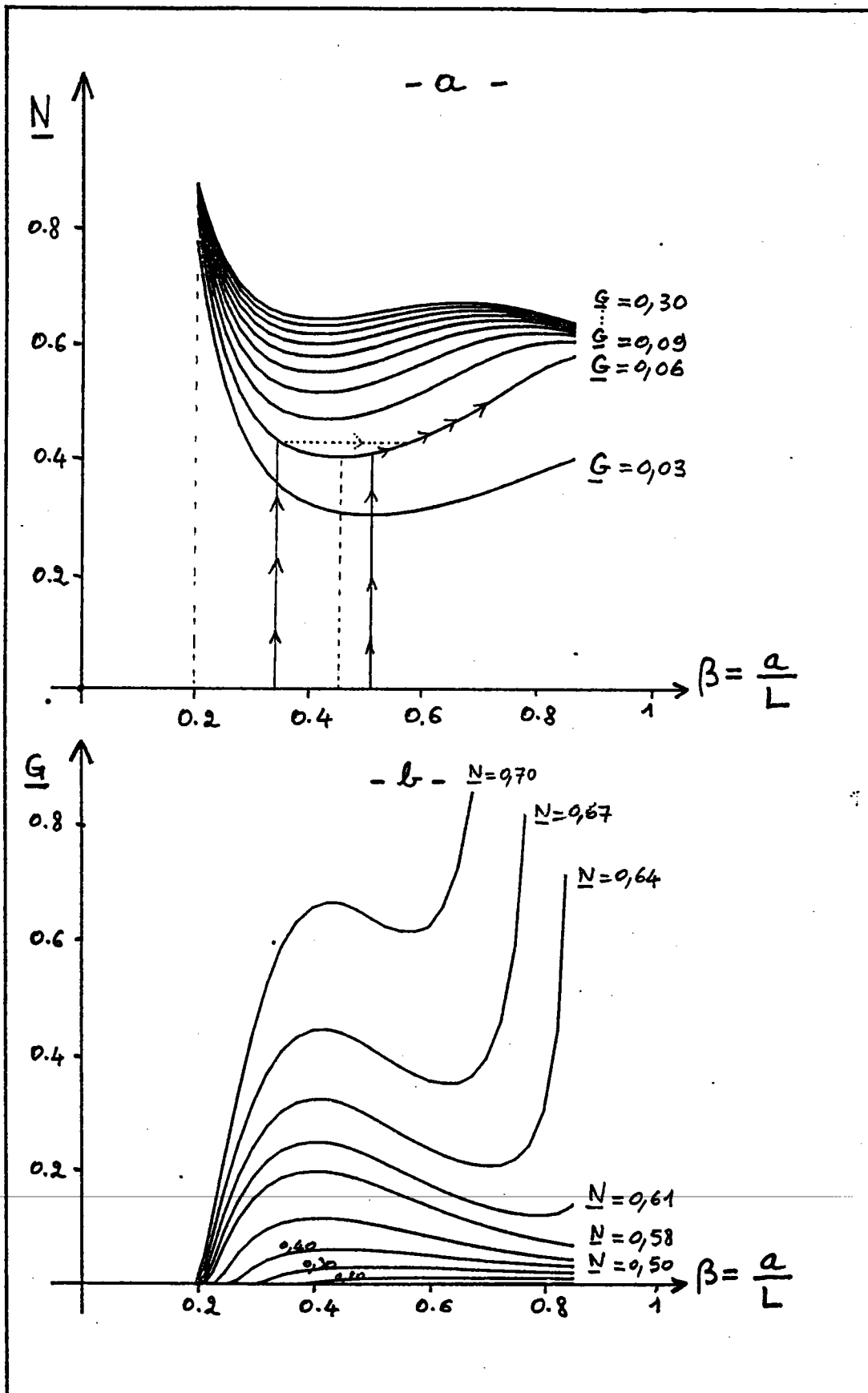


Figure 1.7: Taux de restitution de l'énergie en fonction de la charge  $\underline{N}$  et de la longueur de fissure  $\beta$ , pour  $\alpha = 1.1$  et  $\gamma = 0.2$

\* pour les fissures longues -  $\beta > 0,42$  - la propagation est stable, et l'on peut suivre l'évolution de la longueur de la fissure avec la charge sur la figure 1.7-a à l'aide de l'isovaleur  $G = Cste$

### 1.8.3 INFLUENCE DE LA PROFONDEUR DES FISSURES

Nous allons maintenant montrer l'influence de la profondeur de fissure en faisant varier le paramètre  $\gamma$  et en conservant  $\alpha$  et  $\beta$  constants ( $\alpha = 1,1$  et  $\beta = 0,3$ ). On visualise les déformées obtenues pour quatre valeurs de  $\gamma$  sur la figure 1.8 et les taux de restitution de l'énergie correspondants sur 1.9 (pages 33 et 34).

\* Pour des fissures très superficielles -  $\gamma \approx 0,05$ , le flambage local apparaît très tôt -  $\underline{N} = 0,06$  - et le flambage global très tard -  $\underline{N} = 0,80$  -.

\* pour des fissures un peu plus profondes -  $\gamma = 0,15$  - le flambage local est retardé -  $\underline{N} = 0,3$  et le flambage global plus précoce -  $\underline{N} \approx 0,71$  -

Dans ces deux cas l'effondrement de la structure se produit du coté du tronçon le plus épais (vers le haut sur la figure).

\* Au delà d'une certaine profondeur -  $\gamma > 0,35$  - il n'y a plus vraiment de découplage entre le flambage local et le flambage global. La poutre 2 n'atteint pas sa charge critique de flambage et l'effondrement de la structure se fait cette fois dans le sens opposé (vers le bas).

\* Pour des fissures très profondes -  $\gamma$  voisin de 1 - il n'y a plus qu'un flambage global.

En ce qui concerne le taux de restitution de l'énergie, on montre sur la figure 1.9 l'évolution des courbes  $G(\underline{N})$  quand on fait varier  $\gamma$ .

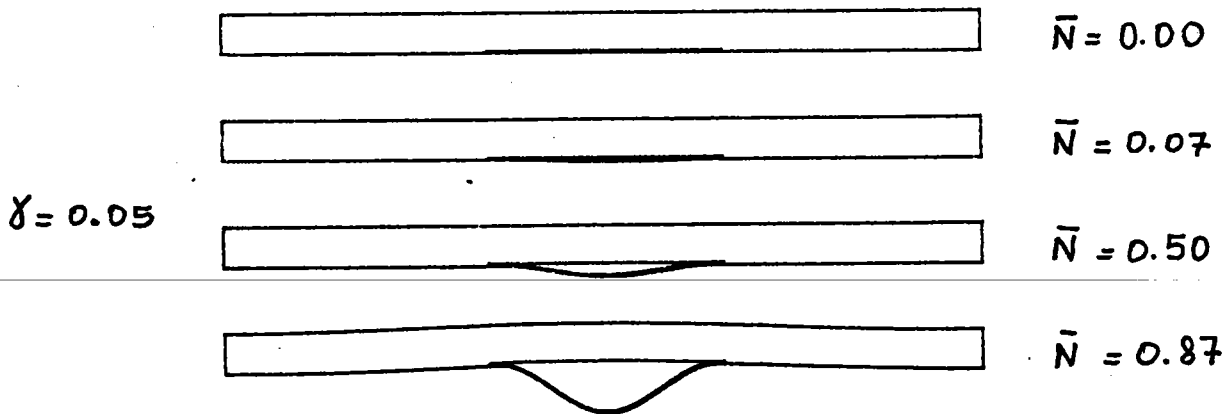
\* Dans le cas de fissures très profondes,  $G$  est quasi nul pendant tout le début du chargement puis il augmente

brutalement avec l'apparition du flambage global ( $\gamma=0.8$ ) et il n'y a pas de propagation possible avant la charge maximale .

\* dans le cas de fissures très superficielles ( $\gamma=0.05$ ),  $G$  devient très tôt non nul (avec le flambage local). Il croit ensuite faiblement avec l'augmentation de la charge .

\* Il y a une profondeur critique  $\gamma_c$  (ici  $\gamma_c \approx 0,2$ ) pour laquelle les taux de restitution de l'énergie sont les plus élevés Dans la mesure où le flambage local existe, on conçoit que la quantité d'énergie libérable dans une avancée virtuelle de fissure est d'autant plus importante que la zone en flambage est épaisse. La poutre 2 constitue alors un réservoir d'énergie plus important.

D'une façon générale, on montre que les fissures les plus pénalisantes correspondent à des profondeurs  $\gamma$  comprises entre 0,1 et 0,25.



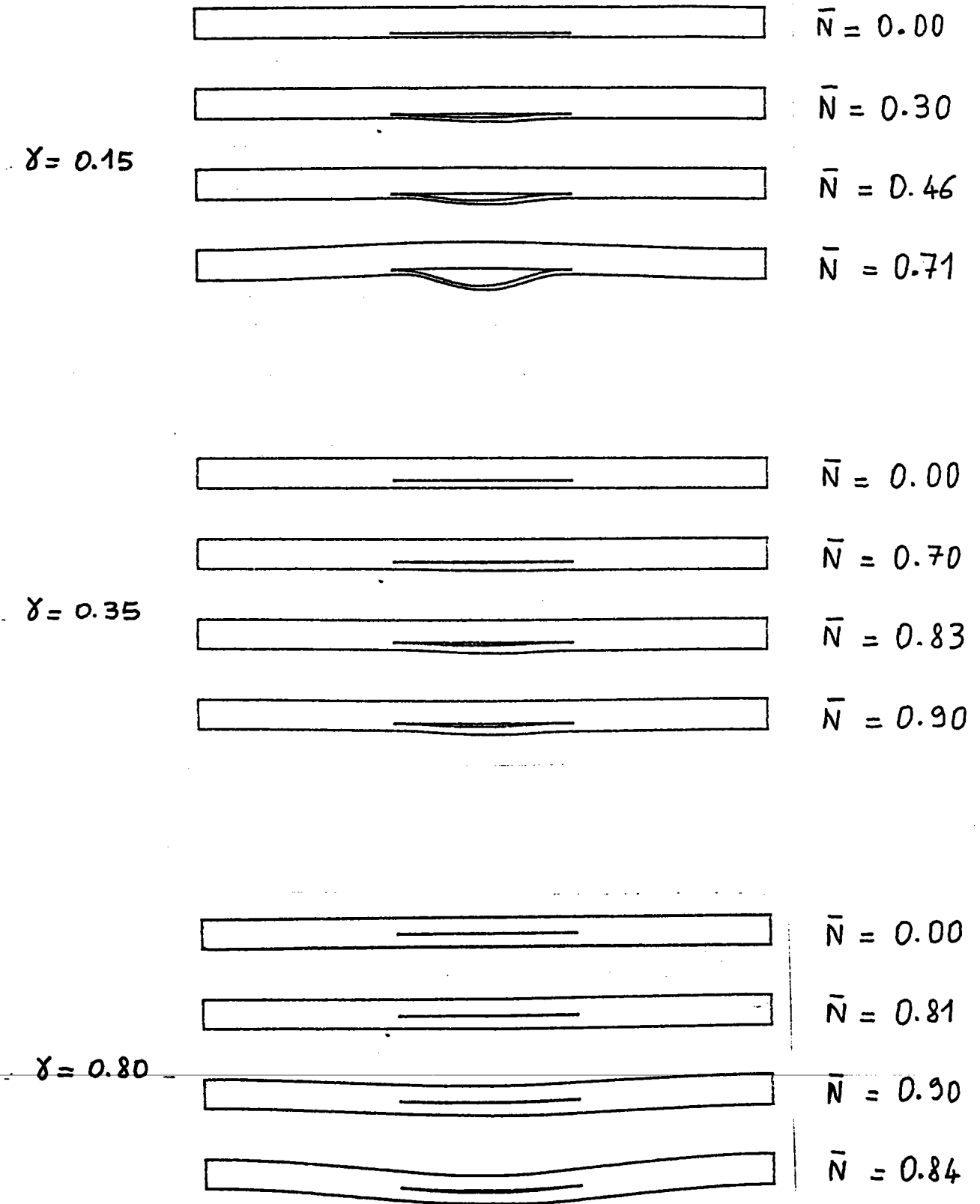


Figure 1.8: Visualisation des déformées : influence de la profondeur des fissures

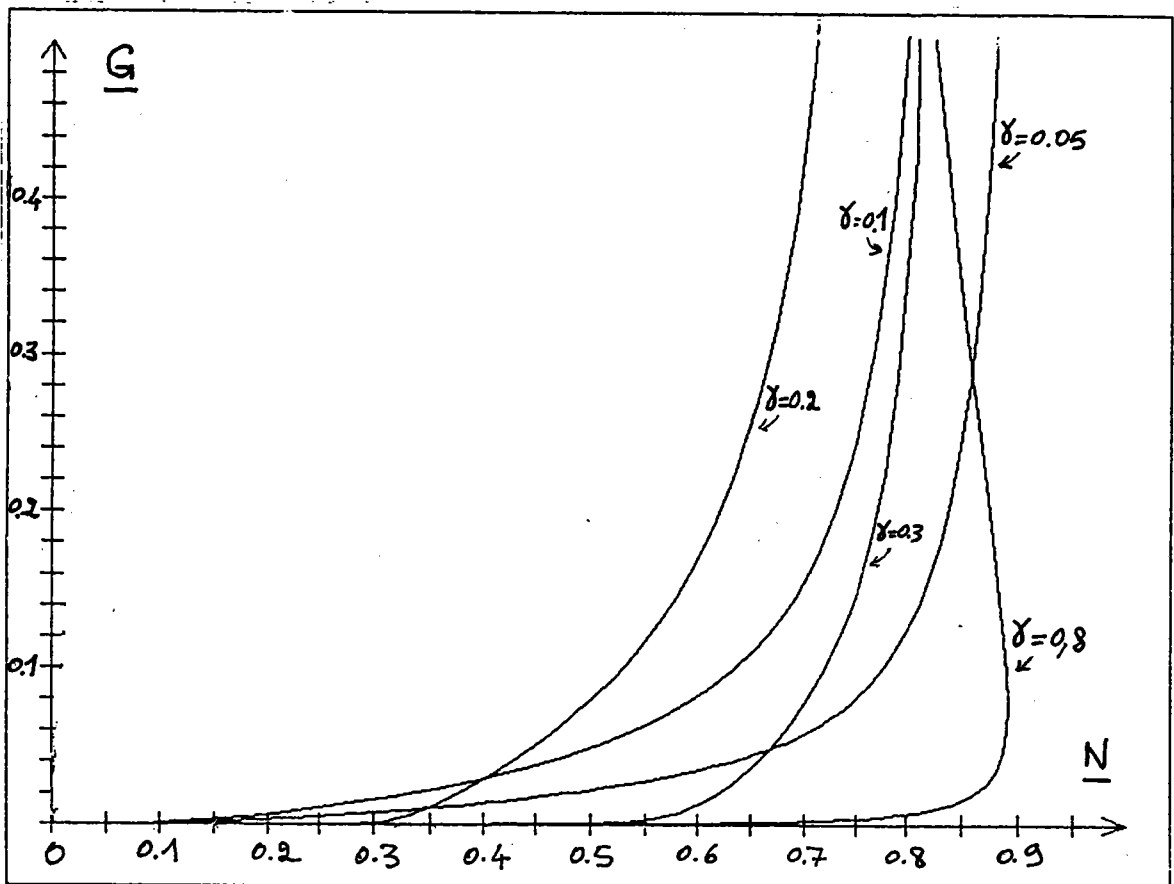


Figure 1.9: Influence de la profondeur de fissure sur  $G$

#### 1.8.4 CONCLUSIONS

Les résultats présentés dans ce début de chapitre sont en bon accord avec ceux de Chai & al (1981) et de Yin & al. (1986). Nous en rappelons les points importants :

- Le taux de restitution de l'énergie est quasi-nul avant le flambage local ou global.
- Le flambage local provoque une croissance de  $G$  et peut entraîner la propagation des fissures.
- Les fissures très courtes ne se propagent pas avant l'effondrement de la structure.
- les fissures courtes se propagent de façon instable avec une restabilisation éventuelle.
- Les fissures les plus délaminantes correspondent à des profondeurs  $\gamma = h_2 / h_1$  comprises entre 0.1 et 0,25.



Cette dernière remarque montre que les modèles "couche fine" ont une portée très limitée. car ils ne permettent pas d'étudier les cas les plus sévères. Il est admis que pour  $\gamma$  supérieur à 0,1 ces modèles ne sont plus applicables .

### 1.9 COMPARAISON ENTRE LE MODELE "ASSEMBLAGE DE POUTRES" ET L'ELASTICITE 2D

Le problème de structure que l'on cherche à résoudre - compression d'une poutre fissurée - est par nature un problème bidimensionnel. En assimilant la structure à un assemblage de poutres, on se ramène à une modélisation unidimensionnelle simple dont la résolution est beaucoup moins coûteuse que celle du problème d'élasticité non linéaire 2D. Il est important maintenant de situer les résultats obtenus avec le modèle assemblage de poutre par rapport à l'élasticité 2D qui constitue la référence.

Une façon naturelle d'effectuer cette comparaison consisterait à résoudre par éléments finis le problème d'élasticité non linéaire 2D de la poutre en compression. Nous allons toutefois chercher à simplifier en faisant deux remarques :

- Loin de la pointe de fissure, les hypothèses de poutres sont tout à fait licites et un modèle de poutre est sûrement en mesure d'approcher correctement les solutions du problème d'élasticité 2D. On sait en revanche qu'au voisinage de la fissure, les solutions poutres ou élasticité sont radicalement différentes et c'est dans cette zone que la comparaison présente un intérêt.
- Il est assez naturel de commencer à comparer les solutions au voisinage de la pointe de fissure sous les hypothèses de petites perturbations. L'introduction des effets de non-linéarité pourra constituer une étape ultérieure.

Nous allons effectuer cette comparaison sur un problème très simple et bien connu : le modèle D.C.B. (Double Cantilever Beam) pour un matériau homogène isotrope.

1.9.1 LE PROBLEME D.C.B. : MODELE ASSEMBLAGE DE POUTRES LINEAIRES

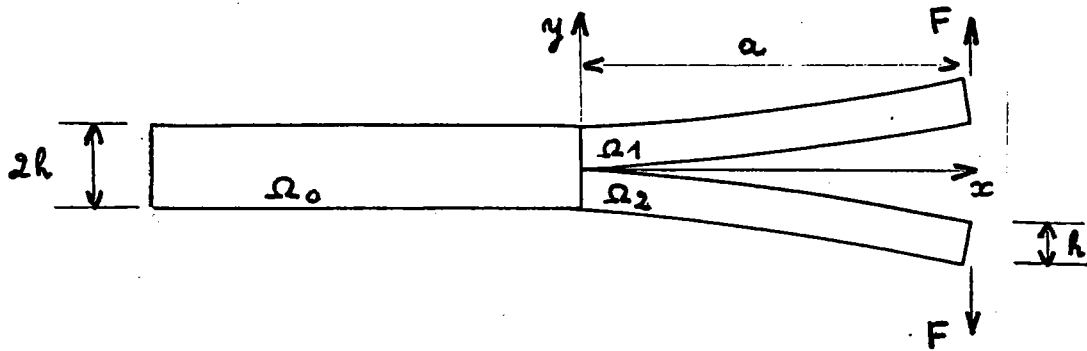


Figure 1.10: l'assemblage de poutres

- \* les déplacements et les contraintes sont nuls sur  $\Omega_0$ .
- \*  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  se comportent comme des poutres encastées en  $x = 0$  (déplacements et rotations nuls)

	Poutre de Bernoulli (sans cisaillement)	Poutre de Mindlin (avec cisaillement)
Déplacement sous l'action de la charge	$v(a) = \frac{F a^3}{3 E I}$	$v(a) = \frac{F a^3}{3 E I} \left[ 1 + \frac{(3 E) h^2}{(10 G) a^2} \right]$
Rotation sous l'action de la charge	$v'(a) = \frac{F a^2}{2 E I}$	$v'(a) = \frac{F a^2}{2 E I} \left[ 1 + \frac{(3 E) h^2}{(5 G) a^2} \right]$
Taux de restitution de l'énergie	$G = \frac{F^2 a^2}{E I}$	$G = \frac{F^2 a^2}{E I} \left[ 1 + \frac{(3 E) h^2}{(10 G) a^2} \right]$

## 1.9.2 LE PROBLEME DCB: ELASTICITE LINEAIRE 2D EN CONTRAINTE PLANE

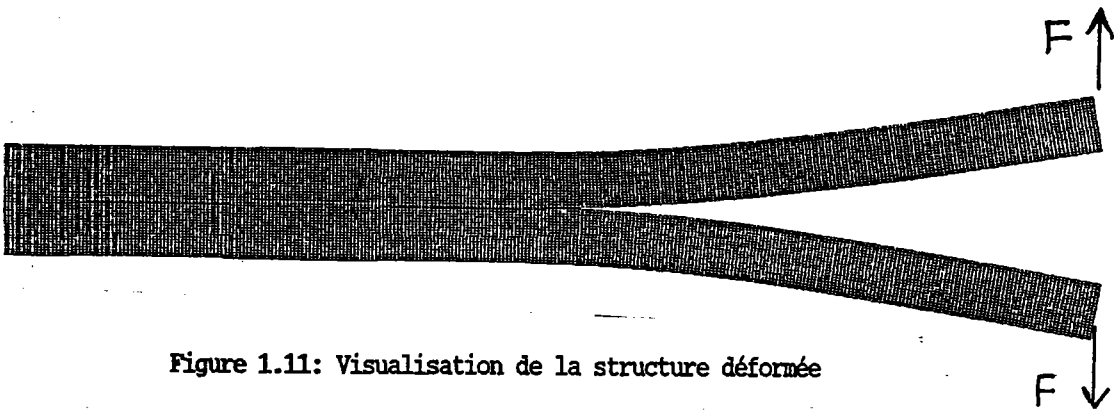


Figure 1.11: Visualisation de la structure déformée

On a résolu le problème d'élasticité avec des éléments finis en déplacement, quadrangles de type P1 (6000 éléments, 12642 ddl pour une demi-structure). A partir de la solution numérique, nous avons fait les observations suivantes :

- Les déplacements et les contraintes sont nuls dans la région  $\Omega_0$  à l'exception des deux bords : l'encastrement et la zone de raccordement avec les deux autres poutres.
- Pour les régions  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , et toujours loin des bords, les contraintes  $\sigma_{xx}$  sont linéaires dans l'épaisseur,  $\sigma_{xy}$  est petit,  $\sigma_{yy}$  est quasi-nul.

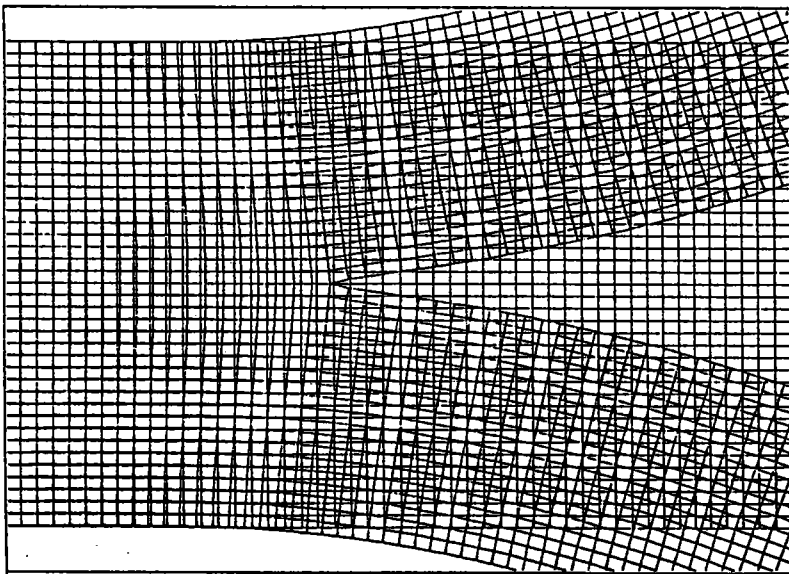


Figure 1.12: déplacements en pointe de fissure

■ Détail en pointe de fissure :

# les déplacements sont quasi linéaires dans l'épaisseur pour les régions 1 et 2.

# Les déplacements dans la région 0 sont « quasi linéaires par morceaux », il y a une brisure au niveau de la pointe de fissure. Cet effet local est souvent appelé dans la littérature "rotation en fond de fissure".

# Le champ de contrainte est 2D en pointe de fissure. On note un cisaillement relativement important dans la partie 0.

1.9.3 COMPARAISON POUTRE - ELASTICITE

On adopte les dimensions suivantes :  $h/a = 0,1$   $\nu = 0,3$   
 et on rapporte tous les résultats à celui du modèle de Bernoulli :

	poutre de Bernoulli	poutre de Mindlin	Elasticité
Déplacement sous charge	1	1,0039	1,202
Rotation sous charge	1	1,0026	1,126
Taux de rest. de l'énergie	1	1,0013	1,133
Energie de déformation	1	1,0039	1,202

La première constatation est que les modèles de poutres sont trop rigides. Les déplacements sous charge sont inférieurs d'environ 17 % à ceux de l'élasticité. Cette trop grande rigidité provient essentiellement de la façon dont on a raccordé les poutres car on peut constater que, à un déplacement de solide près, il y a une très bonne correspondance entre l'élasticité et le modèle assemblage de poutres dans les régions 1 et 2.

La cinématique du modèle d'assemblage de poutres interdit la rotation en fond de fissure, ou, dit d'une autre façon, le modèle de poutres est en fait incapable de représenter l'effet de bord dans la région 0.

Plusieurs auteurs ont proposés des solutions pour améliorer la modélisation :

Ripling & Mostovoy (1964) ont établi la relation suivante pour le calcul du taux de restitution de l'énergie :

$$(74) \quad G = \frac{F^2}{EI} \left[ (a + a_0)^2 + \frac{h^2}{3} \right] = \frac{F^2 a^2}{E I} \left[ 1 + 1,12 \frac{h}{a} + 0,69 \frac{h^2}{a^2} \right]$$

$a_0$  est fixé de façon empirique à  $0,6 h$  pour tenir compte de la rotation des barreaux en fond de fissure.

Kanninen (1973) propose une modélisation du problème DCB en considérant deux poutres reliées entre elles par des ressorts.

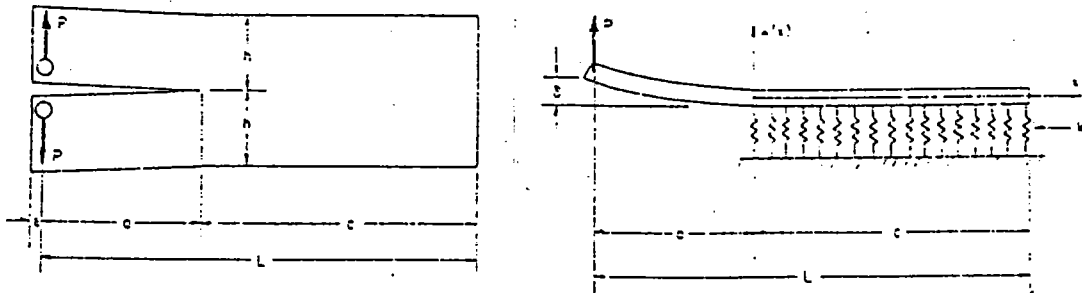


Figure 1.13: modèle de Kanninen (d'après Kanninen (1973))

En choisissant de façon "ad hoc" la raideur des ressorts, il obtient de façon théorique la relation

$$(75) \quad G = \frac{F^2 a^2}{E I} \left[ 1 + 1,28 \frac{h}{a} + 0,406 \frac{h^2}{a^2} \right]$$

Ces deux relations sont en très bon accord avec les résultats obtenus en élasticité plane.

#### 1.9.4 CONCLUSIONS

- On a montré dans un cas simplifié que le modèle d'assemblage de poutre était plus rigide que l'élasticité. On commet avec ce type de modèles une erreur sur la valeur du taux de restitution de l'énergie dont l'ordre de grandeur est  $h/a$ .
- La différence constatée entre les modèles d'assemblage de poutres et l'élasticité provient essentiellement d'une mauvaise prise en compte des rotations à l'extrémité de la poutre 0.

## 1.10 UN ASSEMBLAGE DE POUTRES POUR LES FISSURES COURTES

### 1.10.1 DESCRIPTION DE L'ASSEMBLAGE

Si l'on souhaite étudier le cas des fissures courtes, le modèle d'assemblage de poutres précédent doit être amélioré pour tenir compte des deux phénomènes suivant :

# cisaillement transverse dans les poutres

# rotations en fond de fissure.

Pour ce faire, nous allons toujours utiliser des modèles de poutres, mais l'assemblage est cette fois tout à fait différent : la structure est modélisée par deux poutres de Mindlin collées entre elles, et la fissure est introduite en décollant les poutres sur une longueur  $a$ .

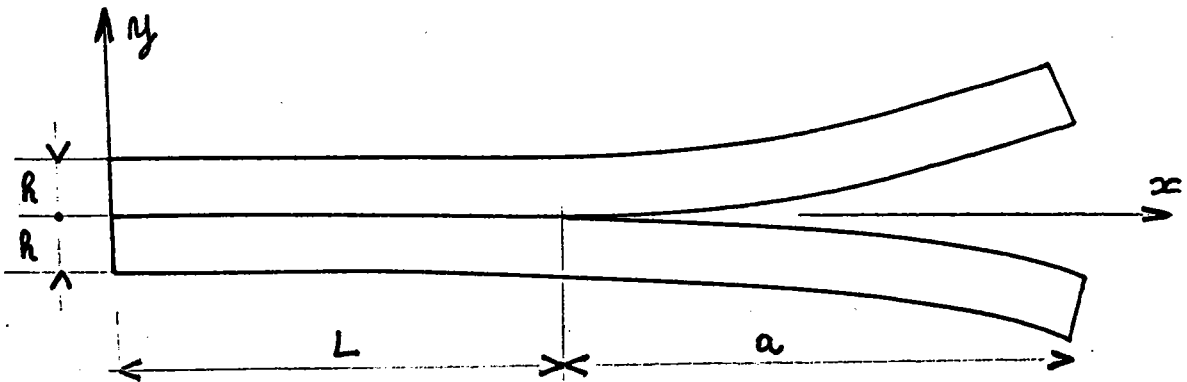


Figure 1.14: assemblage de deux poutres de Mindlin

Le but de ce paragraphe n'est pas de développer complètement ce nouveau modèle d'assemblage de poutres, mais plutôt de montrer que cette modélisation est plus performante lorsque les fissures sont courtes. Par « plus performante », nous entendons en meilleure corrélation avec l'élasticité.

Nous nous plaçons dans le cadre des hypothèses de petites perturbations et prenons une fissure située au milieu de

l'épaisseur du stratifié. Les deux parties ont ainsi même hauteur  $h$ .

Le champ de déplacement sur chaque poutre est défini à l'aide de trois fonctions  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $\beta_1$  par les relations classiques de Mindlin :

$$(76) \quad \underline{u}_1(x,y) = \left( u_1 - \left( y - \frac{h}{2} \beta_1 \right) \right) \underline{x} + v_1 y$$

$$(77) \quad \underline{u}_2(x,y) = \left( u_2 - \left( y + \frac{h}{2} \beta_2 \right) \right) \underline{x} + v_2 y$$

On impose que les déplacements de la face inférieure de 1 soit égaux à ceux de la face supérieure de 2, et cela sur une longueur  $L$ .

$$(78) \quad u_1(x,0) = u_2(x,0) \quad x \in ] 0, L [$$

ceci se traduit par les deux relations

$$(79) \quad u_1 + \frac{h}{2} \beta_1 = u_2 - \frac{h}{2} \beta_2$$

$$(80) \quad v_1 = v_2$$

Ainsi la cinématique de la poutre comprise entre 0 et  $L$  est entièrement définie par 4 fonctions indépendantes  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\Gamma_0$  que l'on choisit sous la forme suivante :

$$(81) \quad \left[ \begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{2} ( u_1 + u_2 ) \\ v_0 = v_1 = v_2 \\ \beta_0 = \frac{1}{2} ( \beta_1 + \beta_2 ) \\ \Gamma_0 = \frac{1}{2} ( \beta_1 - \beta_2 ) \end{array} \right.$$

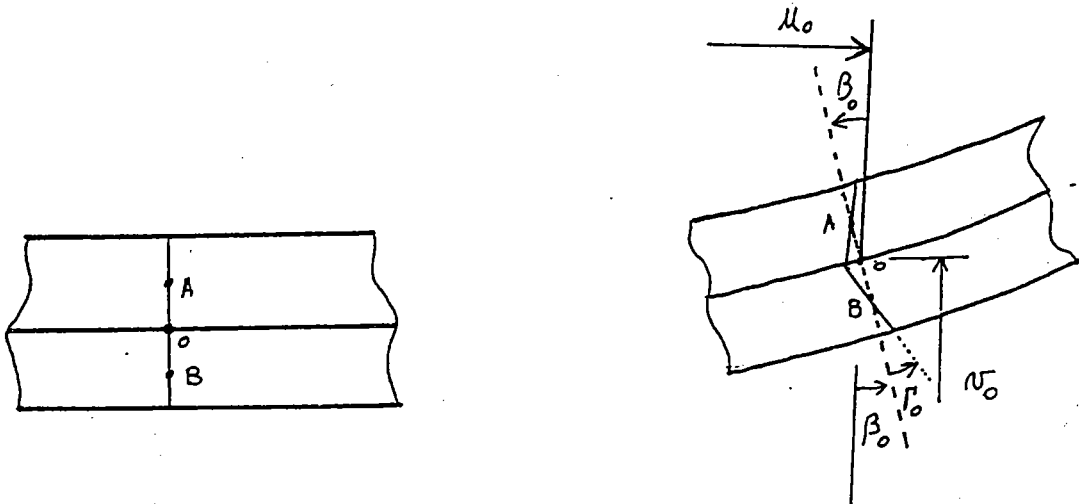


Figure 1.15: cinématique des déplacements

$u_0, v_0, \beta_0$  caractérisent le déplacement classique de Mindlin correspondant à un mouvement de solide de la section droite.

$\Gamma_0$  enrichit la cinématique de la poutre en autorisant une brisure de la section droite. On pourra ainsi mieux prendre en compte la rotation en fond de fissure.

L'établissement des équations de ce modèle n'offre pas de difficultés :

Les déformations s'expriment à partir des déplacements :

$$(82) \quad \text{sur } \Omega_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = u_0' - y\beta_0' - (y - \frac{h}{2})\Gamma_0' \\ 2\varepsilon_{12} = v_0' - \beta_0 - \Gamma_0 \end{array} \right.$$

$$(83) \quad \text{sur } \Omega_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = u_0' - y\beta_0' - (y + \frac{h}{2})\Gamma_0' \\ 2\varepsilon_{12} = v_0' - \beta_0 + \Gamma_0 \end{array} \right.$$

et les contraintes à l'aide des relations de comportement :

$$(84) \quad \sigma_{11} = E \varepsilon_{11} \qquad \sigma_{12} = G \varepsilon_{12} \cdot f(y)$$

où la fonction  $f(y)$  permet de mieux représenter la répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.



On définit quatre efforts généralisés à partir de ces contraintes locales :

$$(85) \quad N_0 = \int_{-h}^{+h} \sigma_{11} \, dy$$

$$(86) \quad M_0 = \int_{-h}^{+h} y \cdot \sigma_{11} \, dy$$

$$(87) \quad T_0 = \int_{-h}^{+h} \sigma_{12} \, dy$$

$$(88) \quad B_0 = \int_0^{+h} \sigma_{12} \, dy - \int_{-h}^0 \sigma_{12} \, dy$$

Les trois premières quantités sont tout à fait classiques, effort normal, moment fléchissant et effort tranchant.  $B_0$  est un effort généralisé associé à la brisure de la section droite :

$B_0$  est la différence des efforts tranchants dans chacune des deux poutres.

Le principe des puissances virtuelles

$$(89) \quad - \int_{\Omega} \sigma_{1j} \delta \varepsilon_{1j} \, d\Omega + P_{\text{ext}}^{\Omega} (\delta \underline{u}) = 0 \quad \forall \delta \underline{u} \text{ C.A.}$$

conduit aux équations suivantes :

$$(90) \quad N_0' + f_x = 0$$

$$(91) \quad T_0' + f_y = 0$$

$$(92) \quad -M_0' + T_0 = 0$$

$$(93) \quad B_0'' - \frac{6k_2 G}{Eh^2} B_0 = 0$$

sur ]0,L[

Le terme de puissance au bord permettant d'écrire les conditions aux limites vaut :

$$(94) \quad \left[ -N_0 \delta u_0 + M_0 \delta \beta_0 - T_0 \delta v_0 - \left\{ \frac{E h^2}{6k_2 G} B_0' \right\} \delta \Gamma_0 \right]_0^L$$

Les relations de comportement généralisées s'écrivent :

$$(95) \quad N_0 = E (2h) u_0'$$

$$(96) \quad M_0 = - \frac{E (2h)^3}{12} \beta_0'$$

$$(97) \quad T_0 = - k_1 \frac{G (2h)}{2} (v_0' - \beta_0)$$

$$(98) \quad B_0 = - k_2 \frac{G (2h)}{2} \Gamma_0$$

(95) à (97) sont les relations de comportement généralisées classiques d'un modèle de Mindlin, (98) relie la différence des efforts tranchants dans chaque poutre à la brisure dans la section droite.

En assemblant deux poutres de Mindlin , on a construit un modèle de poutre que l'on peut voir en définitive comme la superposition d'un modèle de Mindlin [équations (90), (91), (92), (94), (95), (96), (97)] et d'un effet de brisure de la section droite régi par les équations (93), (94), (98).

Compte tenu de (93) et (98),  $\Gamma_0(x)$  s'exprime sous forme exponentielle :

$$(99) \quad \Gamma_0(x) = A e^{rx} + B e^{-rx}$$

$$\text{avec} \quad rx = \left[ \frac{6 k_2 G}{E} \right]^{1/2} \frac{x}{h} \quad h \text{ petit}$$

Les figures suivantes présentent l'allure des courbes  $\Gamma_0(x)$  pour différentes conditions aux limites.

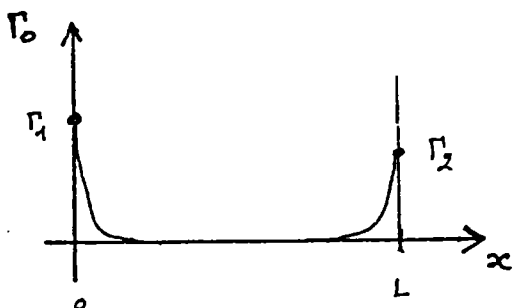


Figure 1.16: courbes  $\Gamma_0(x)$  pour  $\Gamma_0(0) = \Gamma_1$  et  $\Gamma(L) = \Gamma_2$

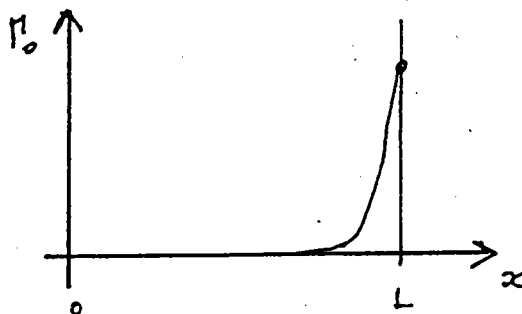


Figure 1.17: courbes  $\Gamma_0(x)$  pour  $\Gamma_0(0) = 0$  et  $B_0(L) = M$

$\Gamma_0$  et  $B_0$  deviennent négligeables dès que l'on s'éloigne des bords de la poutre : 2 à 3 fois  $h$  .  $\Gamma_0$  et  $B_0$  sont nuls à l'intérieur de la poutre, où l'on retrouve une cinématique de Mindlin pure. Ces deux quantités permettent d'approcher l'effet de bord dans la poutre 0. Le cisaillement est ainsi mieux pris en compte dans cette région.

Les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  sont des facteurs de correction de l'énergie de cisaillement transverse. Ils dépendent de la

répartition des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur qui est déterminée loin des bords, en intégrant les équations d'équilibres 2D. Pour l'effet intérieur on a :  $k_1 = k_2 = 5/6$ .

On remarquera que le coefficient  $k_2$ , lié à  $B_0$ , ne joue un rôle que sur le bord et la valeur  $5/6$ , valable à l'intérieur de la poutre, n'est probablement pas satisfaisante dans ce cas. L'étude de la valeur de  $k_2$  mériterait quelques développements.

### 1.10.2 APPLICATION AU PROBLEME D.C.B.

Nous reprenons le problème DCB avec cette nouvelle façon d'assembler les poutres et nous obtenons les résultats suivants :

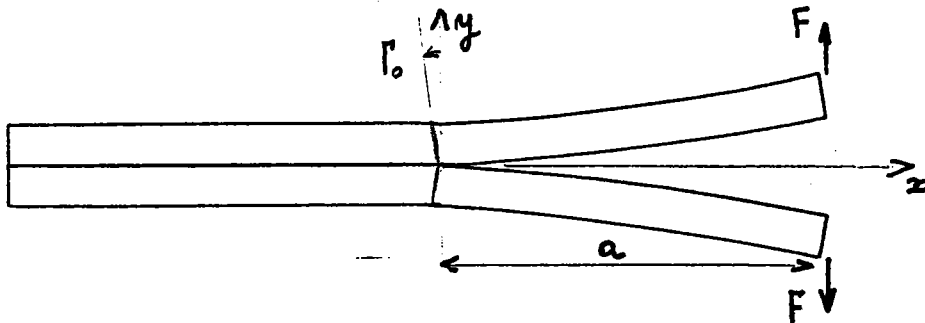


Figure 1.18: le problème DCB

- $N_0$ ,  $M_0$  et  $T_0$  sont nuls dans la région 0 .
- Les déplacements et les contraintes sont nuls dans la région 0 sauf au voisinage de la pointe de fissure où  $B_0$  et  $\Gamma_0$  sont non nuls. La rotation en fond de fissure vaut :

$$(100) \quad \Gamma_0(L) \approx \frac{a F}{E I} \left\{ \left[ \frac{E}{6 k_2 G} \right]^{1/2} h \right\}$$

- A une rotation de solide  $\Gamma_0(L)$  près, les poutres 1 et 2 se comportent comme si elles étaient encastées en  $x = L$  .

■ Nous obtenons analytiquement les deux formules suivantes :

$$(101) \quad v(L) = \frac{Fa^3}{3EI} \left\{ 1 + \left[ \frac{9 E}{6k_2 G} \right]^{1/2} \left\{ \frac{h}{a} \right\} + \left[ \frac{3 E}{12k_2 G} \right] \left\{ \frac{h^2}{a^2} \right\} \right\}$$

$$(102) \quad G = \frac{F^2 a^2}{E I} \left\{ 1 + \left[ \frac{4 E}{6k_2 G} \right]^{1/2} \left\{ \frac{h}{a} \right\} + \left[ \frac{E}{12k_2 G} \right] \left\{ \frac{h^2}{a^2} \right\} \right\}$$

Ces deux dernières relations sont à rapprocher des formules de Kanninen et Ripling & Mostovoy . Avec notre approche, les coefficients des termes en  $(h/a)$  et  $(h/a)^2$  dépendent naturellement des matériaux (et plus précisément du rapport  $(E/G)$  ) alors que ces coefficients sont fixés dans les relations (74) et (75).

Pour un matériau homogène isotrope, de coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ , et en adoptant pour  $k_1$  et  $k_2$  des valeurs  $5/6$ , nous avons :

$$(103) \quad v(L) = \frac{Fa^3}{3EI} \left\{ 1 + 1,53 \left\{ \frac{h}{a} \right\} + 0,39 \left\{ \frac{h^2}{a^2} \right\} \right\}$$

$$(104) \quad G = \frac{F^2 a^2}{E I} \left\{ 1 + 1,02 \left\{ \frac{h}{a} \right\} + 0,13 \left\{ \frac{h^2}{a^2} \right\} \right\}$$

Si l'on reprend l'exemple de 1.9 ( $h/a = 0,1$ ) l'erreur sur le taux de restitution de l'énergie est inférieure à 3 % (contre 11,5 % sur le modèle défini en 1.1).

La formule (104) est légèrement moins bonne que celle de Kanninen. Le coefficient 1.02 du terme en  $h/a$  est un peu faible (Kanninen propose 1.28). Rappelons que la détermination du coefficient  $k_2$  est un problème ouvert et que nous avons pris  $5/6$  à défaut de mieux.

### 1.10.3 APPLICATION AU PROBLEME DU FLAMBAGE

Pour déterminer la charge de flambage local de la structure présentée ci-après, on adopte au niveau de la région 0 un modèle de deux poutres de Mindlin linéaires collées.

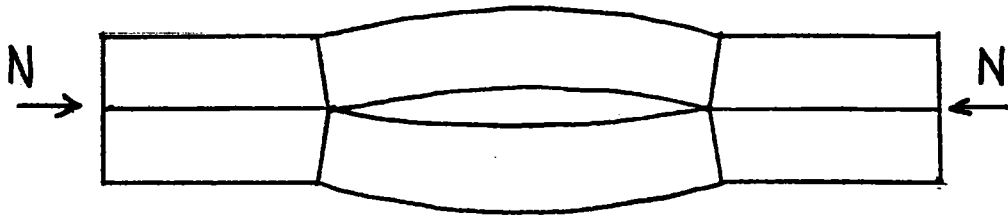


Figure 1.19: flambage local avec rotation en fond de fissure

Compte tenu du raccord entre les poutres, tout se passe comme si ces deux poutres étaient en appui avec un ressort de rappel en spirale de raideur  $K$  égale à :

$$(105) \quad K = \frac{a F}{\Gamma_0(L)} = \frac{E I}{[E/6k_2G]^{1/2} h}$$

On sait que le phénomène de flambage est très sensible aux conditions aux limites (il y a un rapport 4 sur la charge de flambage entre l'appui simple et l'encastrement) et l'on peut déjà pressentir que, compte tenu de la souplesse introduite au niveau du raccord, cette modélisation donnera des charges de flambages plus faible que celles obtenues avec le précédent raccord de poutres.

On supposant  $(h/a)$  petit on obtient comme charge critique :

$$(106) \quad N_c = \frac{\pi^2 E I}{a^2} \left\{ \frac{1 - H}{1 + H} \right\}^2$$

avec

$$(107) \quad H = \left\{ \left[ \frac{E}{6 k_2 G} \right]^{1/2} \frac{h}{a} \right\}$$

Par sa trop grande rigidité, le modèle de poutre de 1.1 surestime les charges de flambage. La correction apportée, en prenant en compte les rotations en fond de fissure joue un rôle assez important dès que les élancements  $a/h_1$  des poutres sont faibles.

### 1.11 CONCLUSION

Dans ce premier chapitre, nous avons étudié la réponse en compression d'une structure fissurée avec des modélisations à une dimension en théorie des poutres.

Les applications pratiques de ces modèles sont certes limitées mais ils nous ont permis de mieux appréhender l'interaction entre les phénomènes de flambage local, de flambage global et de propagation des fissures. Les résultats obtenus constituent une base intéressante pour construire des modèles d'assemblage de plaques capables de mieux représenter les problèmes réels que sont les délaminages de formes et de positions quelconques sous des chargements quelconques (on se reportera au chapitre 3 page 73).

Nous avons montré que les rotations en fond de fissure jouent un rôle important dès que les élancements sont faibles et nous proposons d'assembler deux poutres de Mindlin pour prendre en compte ce phénomène.

Le prochain chapitre est consacré aux méthodes de calcul du taux de restitution de l'énergie pour ces modèles d'assemblage de poutres et de plaques.

## Chapitre 2

## TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE

## 2.1 RAPPELS SUR LES METHODES DE CALCUL DU TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE EN ELASTICITE

La mécanique de la rupture et les méthodes de calcul du taux de restitution de l'énergie ont principalement été développées dans le cadre de l'élasticité bidimensionnelle ou tridimensionnelle, et elles sont très souvent associées à la méthode des éléments finis qui s'avère être un outil puissant pour la résolution des problèmes d'élasticité.

On distingue deux approches possibles, l'une locale, l'autre globale. L'approche locale (ou directe) est basée sur la notion de facteur d'intensité des contraintes et requiert la connaissance des solutions singulières en fond de fissure. Comme il n'est cependant pas possible d'obtenir les singularités avec des éléments finis classiques en déplacement, cette approche nécessite certains raffinements : maillage très affiné en pointe de fissure, éléments spéciaux incluant les singularités.

L'approche globale (dite aussi énergétique, ou indirecte) due à Griffith, définit le taux de restitution de l'énergie comme la dérivée de l'énergie potentielle totale par rapport à la longueur de la fissure. Les méthodes indirectes les plus classiques sont :

- L'intégrale de contour
- La dérivation numérique de l'énergie potentielle
- La virtuel crack extension technique

Ces méthodes ne nécessitent pas le calcul exact des grandeurs en fond de fissure et paraissent de ce fait bien adaptées aux éléments finis. Notons toutefois que, hormis l'intégrale de contour, deux calculs sont généralement nécessaires pour obtenir

le taux de restitution de l'énergie (noté  $G$ ). De plus, la décomposition de  $G$  suivant les différents modes d'ouverture n'est pas systématiquement possible alors qu'elle est immédiate avec une méthode directe.

## 2.2 TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE EN THEORIE DES PLAQUES

La mécanique de la rupture a été étendue aux théories des plaques pour des fissures transversales par rapport au plan moyen de la plaque.

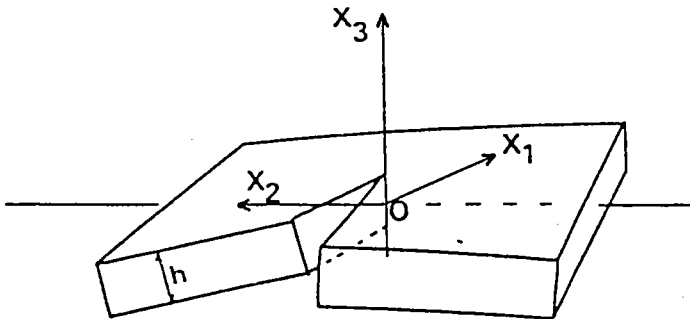


Figure 2.1: Fissure transversale des plaques (d'après Bui)

Ces extensions sont dues à Williams (1961) pour la théorie de Kirchhoff et Bergez & Radenkovic (1971) pour la théorie de Mindlin. Simmonds & Duva (1981) ont montré que la théorie de Kirchhoff est suffisante pour calculer précisément le taux de restitution de l'énergie. Destuynder (1982-1986) effectue un développement asymptotique des équations de l'élasticité 3D et montre que le taux de restitution de l'énergie tridimensionnelle peut s'exprimer à partir de la solution de Kirchhoff. Sa démarche, baptisée "teta méthode", souligne l'importance des effets tranchants dans ce type de problèmes.

Ce n'est que récemment que l'on trouve les premiers travaux sur le calcul du taux de restitution de l'énergie pour les assemblages de poutres ou de plaques comme celui présenté au



chapitre 1 . La fissure est cette fois parallèle au plan moyen de la structure et non plus transversale. La structure délaminée est modélisée par trois plaques saines (sans fissure) et c'est en assemblant ces plaques que l'on matérialise la fissure. Les méthodes développées pour les fissures transversales ne sont plus applicables ici.

Nous rappelons que ces modèles d'assemblage de plaques sont incapables de fournir des solutions acceptables en fond de fissure et par conséquent seule une approche énergétique de la fissuration est licite. Chai & al (1981-1985) ont utilisé une dérivation numérique de l'énergie potentielle pour leur modèle de poutre et leur modèle de couches fines en plaque. Deux calculs sont alors nécessaires pour des longueurs de fissure voisines. Yin (1985), Evans & Hutchinson (1984), Bottega & Maewal (1983) proposent des formules analytiques de  $G$  pour un délaminage circulaire superficiel (couche fine). Bottega (1983) généralise ensuite le résultat pour des délaminages superficiels de forme quelconque. Yin & Wang ont obtenu une expression analytique de  $G$  en calculant l'intégrale de Rice sur un contour éloigné de la pointe de fissure. Leur démonstration est cependant contestable dans la mesure où ils ont utilisé l'intégrale de Rice de l'élasticité linéaire sur un problème de poutre non linéaire et que les effets tranchants ont été complètement négligés.

Très récemment Storåkers & Andersson (1988) ont calculé analytiquement la variation de l'énergie potentielle dans une avancée de fissure et obtiennent une expression analytique de  $G$  pour le modèle à trois plaques.

Citons encore les travaux de Anquez & Nataf (1987) sur le calcul de  $G$  pour un barreau délaminé en traction et ceux de Destuynder & Nevers (1985-1987) qui utilisent la "teta méthode" sur le modèle à trois plaques en petites perturbations.

L'objet de ce début de chapitre était de rappeler les diverses méthodes de calcul de  $G$  et notamment de présenter quelques travaux récents relatifs aux modèles de poutres ou de plaques. Nous allons maintenant présenter notre approche de ce problème dans les paragraphes suivants. Une nouvelle méthode de calcul de

$G$  sera d'abord proposée pour les modèles de poutres puis sera étendue aux plaques.

## 2.3 UNE NOUVELLE APPROCHE POUR LE CALCUL DU TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE POUR LES MODELES DE POUTRE

### 2.3.1 INTRODUCTION

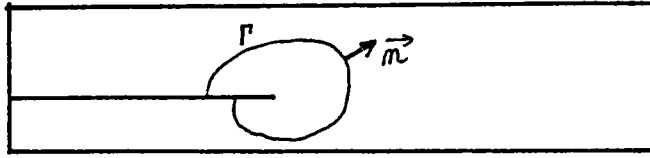
Pour décrire la propagation d'un délaminage de forme quelconque dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile, il est nécessaire de calculer le taux de restitution local de l'énergie  $G(s)$  le long du bord de la fissure ainsi que la variation de  $G(s)$  dans une avancée de fissure. Les différentes méthodes citées dans le cadre de l'élasticité sont soit inadaptées soit inapplicables sur les modèles de poutres et de plaques et il apparaît nécessaire, comme en témoigne les travaux précédemment cités, de développer des méthodes spécifiques pour ces modèles.

L'idée principale de notre travail sur ce sujet a été d'adapter les méthodes de type "intégrale de contour" aux modèles de plaques et de poutres non linéaires.

Nous avons ainsi obtenu des expressions analytiques de  $G(s)$ , qui, outre un calcul efficace du taux de restitution, devraient permettre d'accéder à la variation de  $G(s)$  dans une avancée de fissure.

### 2.3.2 TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE EN THEORIE DES POUTRES

Revenons d'abord sur l'élasticité. En élasticité plane, le champ des contraintes est singulier en pointe de fissure et l'on montre que le taux de restitution de l'énergie  $G$  est égal à l'intégrale de Rice  $J$  définie sur un contour  $\Gamma$  qui encercle la singularité (Rice (1968), Bui (1978), Nguyen (1980))



$$G = J = \int_{\Gamma} (w_{n1} - \sigma_{1j} n_j u_{1,1}) dl$$

 Figure 2.2: Taux de restitution de l'énergie  $G = J$ 

Dans un modèle de poutre équivalent à celui du chapitre 1.1, nous avons déjà mentionné que le champ des contraintes est parfaitement régulier sur chaque poutre et qu'il présente en revanche des discontinuités à l'interface. Nous allons donc considérer un contour formé de trois coupures au sens des poutres qui "encerclent" ces discontinuités de contraintes et nous suivons une démarche analogue à celle qui conduit à l'équivalence entre  $G$  et  $J$  en élasticité plane.

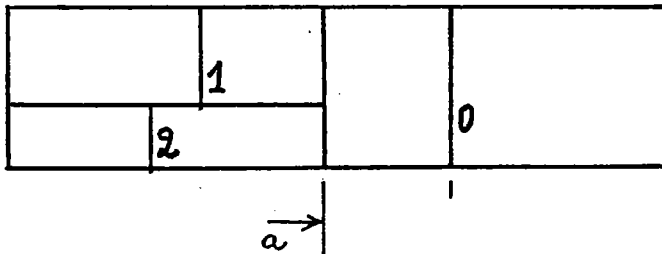


Figure 2.3: Trois coupures encerclent les discontinuités de contraintes

Nous considérons dans un premier temps trois coupures confondues avec l'interface des poutres. Dans une progression quasi statique de fissure à la vitesse  $\dot{a}(t)$ , le taux de restitution de l'énergie  $G$  est défini à partir de la dissipation d'énergie :

$$(108) \quad \text{Dissipation} = G \dot{a} = - \frac{d}{dt} \left\{ W_{\text{def}}^{\Omega} - W_{\text{ext}}^{\Omega} \right\}$$

$$(109) \quad W_{\text{def}}^{\Omega} = \sum_{i=0}^2 \int_{\omega_1} w_i(x, t) dx$$

avec  $w(x,t)$  : énergie de déformation par unité de longueur de la poutre  $\Omega_1$

$W_{def}^{\Omega}$  : énergie de déformation de l'ensemble des poutres

$W_{ext}^{\Omega}$  : travail des efforts extérieurs donnés

La dérivée particulière de l'énergie de déformation de l'ensemble des poutres comprend deux termes qui proviennent l'un de la variation de  $w$ , l'autre de la variation du domaine.

La dérivée particulière du travail des efforts extérieurs est la puissance virtuelle de ces efforts dans le champ des vitesses réelles  $\partial u/\partial t$ .

$$(110) \quad \frac{dW_{def}^{\Omega}}{dt} = \sum_{i=0}^2 \int_{\omega_1} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx + \dot{a} [w_1(a,t) + w_2(a,t) - w_0(a,t)]$$

$$(111) \quad \frac{dW_{ext}^{\Omega}}{dt} = \sum_{i=0}^2 P_{ext}^{\Omega_1} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial t} \right]$$

Nous appliquons le principe des puissances virtuelles à chaque poutre  $\Omega_1$  en distinguant (comme au chapitre 1.4) les efforts extérieurs donnés de ceux exercés par les deux autres poutres au niveau de l'interface  $\Gamma$ . On fait donc apparaître deux termes de puissance bien distincts dans (112).

$$(112) \quad - \int_{\omega_1} \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} dx + P_{ext}^{\Omega_1} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial t} \right] + P_{\Gamma}^{\Omega_1} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial t} \right] = 0$$

Les relations (108) (109) (110) (111) et (112) conduisent à :

$$(113) \quad G \dot{a} = - \dot{a} [w_1(a,t) + w_2(a,t) - w_0(a,t)] - \sum_{i=0}^2 P_{\Gamma}^{\Omega_1} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial t} \right]$$

Nous allons maintenant donner une nouvelle expression du terme de puissance de (113) en écrivant une condition essentielle dans ce genre de démonstration (Nguyen 1980) : les discontinuités de

contraintes se transportent comme la pointe de fissure à la vitesse  $\dot{a}(t)$ .

La vitesse absolue  $\partial \underline{u}_1 / \partial t$  est reliée à la vitesse relative  $\delta \underline{u}_1 / \delta t$  définie dans un repère mobile avec la pointe de la fissure par la relation :

$$(114) \quad \frac{\delta \underline{u}_1}{\delta t} = \frac{d}{dt} \left\{ \underline{u} (x_m + a(t), y_m, t) \right\} = \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} + \dot{a} \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial x}$$

Cette identité est l'équivalente de l'équation (13) proposée par Nguyen (1980) qui exprime le transport des singularités en pointe de fissure en élasticité.

La continuité des déplacements et des vitesses est assurée dans le repère mobile, et la vitesse relative dans ce repère est par conséquent localement cinématiquement admissible.

$$(115) \quad \left\{ \frac{\delta \underline{u}_1}{\delta t} \right\}_1 = \left\{ \frac{\delta \underline{u}_1}{\delta t} \right\}_0 \quad \text{et} \quad \left\{ \frac{\delta \underline{u}_1}{\delta t} \right\}_2 = \left\{ \frac{\delta \underline{u}_1}{\delta t} \right\}_0$$

La déformation  $\partial \underline{u}_1 / \partial x$ , et par conséquent la vitesse absolue  $\partial \underline{u}_1 / \partial t$  sont en revanche discontinues sur l'interface.

Compte tenu de la continuité de la vitesse relative (115) et des conditions de raccord en efforts (32) à (34), nous avons :

$$(116) \quad \sum_{i=0}^2 P_{\Gamma}^{\Omega_1} \left[ \frac{\delta \underline{u}_1}{\delta t} \right] = 0$$

et en utilisant (114) :

$$(117) \quad \sum_{i=0}^2 P_{\Gamma}^{\Omega_1} \left[ \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial t} \right] = - \dot{a} \sum_{i=0}^2 P_{\Gamma}^{\Omega_1} \left[ \frac{\partial \underline{u}_1}{\partial x} \right]$$

Pour des commodités d'écriture, nous introduisons les trois normales extérieures au poutres :

$$(118) \quad \begin{cases} n_1 = n_2 = +1 \\ n_0 = -1 \end{cases}$$

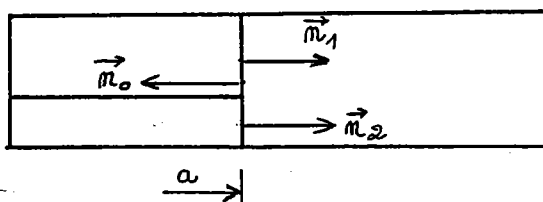


Figure 2.4: normales extérieures

et l'on obtient à partir de (113), (117) et (118) :

$$(119) \quad G = - \sum_{i=0}^2 \left[ m_i(a) n_i - P_{\Gamma}^{\Omega_1} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial x} \right\} \right]$$

qui s'apparente à la forme de l'intégrale de Rice.

Le taux de restitution de l'énergie s'exprime donc à partir de grandeurs mécaniques définies sur les extrémités des poutres au niveau de l'interface. Il est bon de rappeler ici que la démarche suivie appartient à la classe des méthodes globales et qu'il ne faut voir dans (119) qu'une façon commode de calculer la dérivée de l'énergie potentielle totale de toute la structure.

(119) est indépendante de la théorie de poutre utilisée, qu'elle prenne en compte ou non le cisaillement transverse, tout au moins dans le cadre des rotations modérées.

Le raccord cinématique entre les poutres joue par contre un rôle essentiel dans l'établissement de cette formule.

Dans le paragraphe suivant, nous allons d'abord simplifier la relation (119) dans le modèle de poutre présenté au chapitre 1 et nous ferons alors quelques commentaires.

### 2.3.3 APPLICATION AU MODELE NON LINEAIRE DE POUTRE DE BERNOULLI

Une expression plus simple de (119) est obtenue en précisant la théorie de poutre utilisée – en l'occurrence celle du modèle présenté en 1.1 – et en explicitant les valeurs de l'énergie de déformation et des puissances .

Compte tenu de la forme des déplacements (Bernoulli) et des hypothèses de rotation modérée, on a :

$$(120) \quad w_1 = \frac{1}{2} N_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} M_1 k_1$$

$$(121) \quad \frac{P}{\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial x} = (N_1 u_1' - M_1 v_1'' + T_1 v_1') n_1$$

$$\text{avec } T_1 = M_1' + N_1 v_1'$$

Les relations entre déplacements et déformations sont :

$$(122) \quad \varepsilon_1 = u_1' + \frac{1}{2} v_1'^2 \quad k_1 = -v_1''$$

En injectant (120), (121) et (122) dans (119), nous obtenons :

$$(123) \quad G = w_1(a) + w_2(a) - w_0(a) - \sum_{i=0}^2 \left\{ \frac{1}{2} N_1 v_1'^2 - T_1 v_1' \right\} n_1$$

Comme la pente  $v_1'$  est continue à l'interface [cf(9) et (12)] et qu'efforts normaux et efforts tranchants vérifient les conditions de raccord (32) et (34), le dernier terme de (123) est nul et l'on a simplement :

$$(124) \quad G = w_1(a) + w_2(a) - w_0(a)$$

Ainsi le taux de restitution de l'énergie est égal au saut de la densité d'énergie à l'interface entre les poutres.

- (124) est une formule efficace pour le calcul de  $G$  car elle ne dépend que des contraintes généralisées  $N_1$  et  $M_1$  à l'interface. Le calcul est notamment immédiat pour les modèles isostatiques (modèle DCB par exemple).
- (124) est en accord avec les formules analytiques classiques de la littérature pour les poutres (DCB par exemple).
- Le résultat obtenu suppose uniquement des lois de comportement élastique linéaires. (124) peut donc être utilisée pour des poutres stratifiées multicouches avec des couplages tension-flexion au niveau de la loi de comportement.

- Les arguments et les outils employés sont généraux et il est donc possible de généraliser cette formule aux cas des plaques, des coques et aux problèmes à fissures multiples. La généralisation pour les plaques sera donnée plus loin.
- Il est clair que comme en élasticité une approche duale de ce problème conduit à une nouvelle expression de  $G$  qui s'apparente à  $I$  (duale de  $J$ ).
- Nous allons dans les deux paragraphes suivants apporter des éléments de réponse aux deux importantes questions suivantes :
  - # Peut on décomposer  $G$  en mode I et mode II ?
  - # Y a -t-il une expression de  $G$  indépendante du contour ?

#### 2.3.4 DECOMPOSITION DU TAUX DE RESTITUTION DE L'ENERGIE EN MODES I ET II

La séparation de  $G$  en mode I et mode II est un problème important et nous rappelons qu'elle n'est pas systématiquement possible lorsque l'on aborde la rupture d'un point de vue énergétique. Cette décomposition est toutefois aisée dans notre cas, au moins, pour un matériau homogène et isotrope sur les trois poutres.  $G$  ne dépend que de six grandeurs d'efforts intérieurs généralisées que l'on va considérer comme la superposition de plusieurs états correspondant chacun à un mode d'ouverture.

Nous réécrivons (124) en explicitant les termes d'énergie :

$$(125) \quad G = \frac{1}{2 E} \left\{ \frac{N_1^2}{h_1} + \frac{12 M_1^2}{h_1^3} + \frac{N_2^2}{h_2} + \frac{12 M_2^2}{h_2^3} - \frac{N_0^2}{h_0} - \frac{12 M_0^2}{h_0^3} \right\}$$

Les six efforts intérieurs vérifient :

$$(126) \quad \begin{cases} N_0 = N_1 + N_2 \\ M_0 = M_1 + M_2 + N_1 (h_2/2) - N_2 (h_1/2) \end{cases}$$



Dans une première étape nous éliminons la partie passive de ces efforts intérieurs en décomposant de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= N_0 (h_1/h) + 6 M_0 (h_1 h_2/h^3) + N_1^* \\
 N_2 &= N_0 (h_2/h) - 6 M_0 (h_1 h_2/h^3) + N_2^* \\
 M_1 &= M_0 (h_1/h)^3 + M_1^* \\
 M_2 &= M_0 (h_2/h)^3 + M_2^* \\
 N_0 &= N_0 + 0 \\
 M_0 &= M_0 + 0
 \end{aligned}
 \tag{127}$$

passif
actif

La partie gauche, qualifiée de passive, ne dépend que de  $N_0$  et  $M_0$  et a été construite de façon à ce que ces efforts intérieurs passifs correspondent à un champ de contrainte local  $\sigma_x$  continu sur l'interface. Ce qui reste est qualifié d'actif et peut toujours s'exprimer à partir de quatre grandeurs seulement  $N_1^*$ ,  $N_2^*$ ,  $M_1^*$  et  $M_2^*$ . Exprimé d'une autre façon, les discontinuités sont entièrement caractérisées par les quatre grandeurs  $N_1^*$ ,  $N_2^*$ ,  $M_1^*$  et  $M_2^*$  qui vérifient les conditions :

$$\tag{128} \quad \left\{ \begin{aligned} N_1^* + N_2^* &= 0 \\ M_1^* + M_2^* + N_1^* (h_2/2) - N_2^* (h_1/2) &= 0 \end{aligned} \right.$$

En injectant les relation (127) dans (125), on obtient :

$$\tag{129} \quad G = \frac{1}{2 E} \left\{ \frac{N_1^{*2}}{h_1} + \frac{12 M_1^{*2}}{h_1^3} + \frac{N_2^{*2}}{h_2} + \frac{12 M_2^{*2}}{h_2^3} \right\}$$

Dans une seconde étape, nous redécomposons les efforts actifs en mode I et II à l'aide de deux efforts  $N_{II}$  et  $M_I$  en posant :

$$\tag{130} \quad \left\{ \begin{aligned} N_1^* &= N_{II} + 0 \\ N_2^* &= -N_{II} + 0 \\ M_1^* &= -N_{II} (h/2) [h_1^3/(h_1^3 + h_2^3)] + M_I \\ M_2^* &= -N_{II} (h/2) [h_2^3/(h_1^3 + h_2^3)] - M_I \end{aligned} \right.$$

mode II
mode I

Les deux relations (128) sont ainsi automatiquement satisfaites.

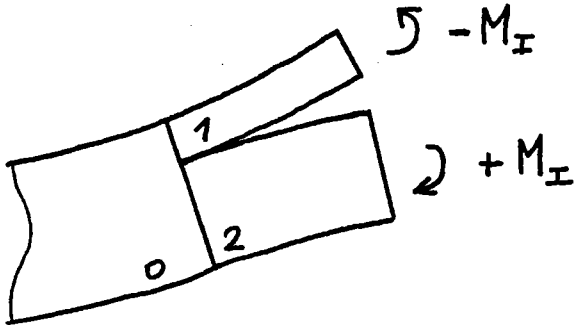


Figure 2.5: mode I

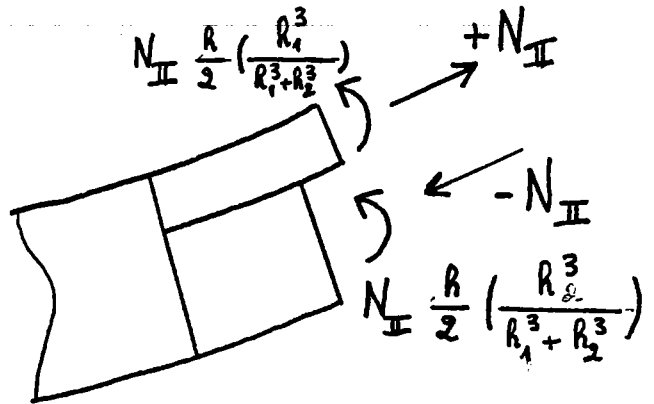


Figure 2.6: mode II

On visualise sur les figures 2.5 et 2.6 la décomposition des efforts. Les deux moments (+M<sub>I</sub>) et (-M<sub>I</sub>) ouvrent la fissure en mode I. Les quatre efforts généralisés, qualifiés de mode II assurent la condition v<sub>1</sub>''(a) = v<sub>2</sub>''(a) et correspondent ainsi à un glissement des deux lèvres de la fissure.

En reportant les équations (130) dans (129), on obtient :

$$(131) \quad G = \frac{1}{2 E} \left[ \left\{ \frac{h}{h_1 h_2} + \frac{3 h^2}{h_1^3 + h_2^3} \right\} N_{II}^2 + \left\{ \frac{12}{h_1^3} + \frac{12}{h_2^3} \right\} M_I^2 \right]$$

En conclusion, nous dirons que la discontinuité des contraintes à l'interface est entièrement déterminée par les deux grandeurs M<sub>I</sub> et N<sub>II</sub> (M<sub>I</sub> et N<sub>II</sub> se calculent à partir de (127) et (130) :

$$(132) \quad M_I = M_1 \left\{ \frac{3 h_1^3}{h_1^3 + h_2^3} \right\} - M_2 \left\{ \frac{3 h_2^3}{h_1^3 + h_2^3} \right\} - M_0 \left\{ \frac{h_1^3 - h_2^3}{h^3} \right\}$$

$$(133) \quad N_{II} = N_1 \left\{ \frac{h_2}{h} \right\} - N_2 \left\{ \frac{h_1}{h} \right\} - 6 M_0 \left\{ \frac{h_1 h_2}{h^3} \right\}$$

Et le taux de restitution peut se séparer en :

$$(134) \quad G = G_I + G_{II}$$

$$(135) \quad G_I = \frac{6}{E} \left\{ \frac{1}{h_1^3} + \frac{1}{h_2^3} \right\} M_I^2$$

$$(136) \quad G_{II} = \frac{1}{2 E} \left\{ \frac{h}{h_1 h_2} + \frac{3 h^2}{h_1^3 + h_2^3} \right\} N_{II}^2$$

Les choix effectués pour la décomposition des efforts sont plutôt intuitifs et c'est la forme finale de (131) qui les justifie à posteriori. (Rappelons que (131) est obtenue en reportant (127) et (130) dans (125)).

### 2.3.5 UNE EXPRESSION DE $G$ INDEPENDANTE DU CONTOUR

Pour obtenir (119) et (124), nous avons considéré des coupures confondues avec l'interface. Nous allons maintenant éloigner ces coupures en utilisant une expression « poutre » de la loi de conservation de Eshelby. En s'inspirant du résultat de Eshelby pour l'élasticité linéaire, on montre facilement que sur un tronçon de poutre non chargé, la quantité :

$$(137) \quad W - ( N u' - M v'' + T v' )$$

est constante le long du tronçon, et que ce résultat reste valable pour les rotations modérées.

On simplifie (137) sous la forme

$$(138) \quad W + T v' - \frac{1}{2} N v'^2 = \text{Cste}$$

et l'on obtient à partir de (123) une expression de  $G$  pour des coupures éloignées de la pointe de fissure.

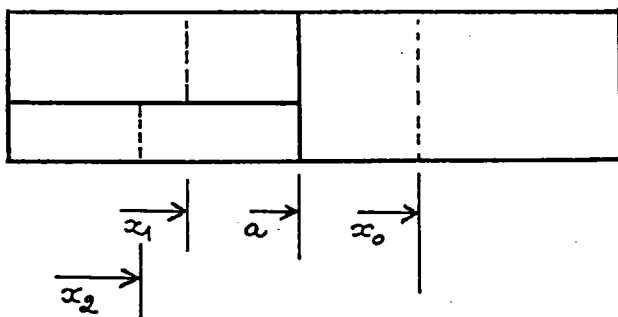


Figure 2.7: position des coupures

$$(139) \quad G = \quad W(x_1) \quad + \quad W(x_2) \quad - \quad W(x_0) \\ + \quad T_1(x_1) v'_1(x_1) \quad + \quad T_2(x_2) v'_2(x_2) \quad + \quad T_0(x_0) v'_0(x_0) \\ - \frac{1}{2} N_1(x_1) v_1'^2(x_1) \quad - \frac{1}{2} N_2(x_2) v_2'^2(x_2) \quad + \frac{1}{2} N_0(x_0) v_0'^2(x_0)$$

La relation (139) montre que les efforts tranchants ne sont pas absents de notre analyse. Rappelons qu'ils ont été éliminés de la formule (124) du fait de la continuité de l'angle et de l'effort tranchant à l'interface entre les poutres. Ces efforts tranchants réapparaissent si on exprime le taux de restitution de l'énergie à partir de coupures éloignées de l'interface.

### 2.3.6 CONCLUSIONS

En nous inspirant de la démarche utilisée pour établir l'équivalence entre le taux de restitution de l'énergie et l'intégrale de Rice, nous avons obtenu des expressions analytiques du taux de restitution de l'énergie dans les modèles de poutres et certaines propriétés ont été mises en évidence : indépendance du contour, décomposition en mode I et mode II.

Ces formules sont des moyens commodes de calculer de façon exacte la dérivée de l'énergie potentielle totale du modèle de poutre. Il est maintenant important de comparer les résultats obtenus avec une approche bidimensionnelle en élasticité.

### 2.4 CONFRONTATION DU TAUX DE RESTITUTION $G$ EN POUTRE ET DE L'APPROCHE 2D

On conserve exactement la même géométrie - structure fine fissurée - mais on cherche cette fois à résoudre le problème d'élasticité plane. On se place en élasticité linéaire, en contraintes planes et l'on suppose le matériau homogène et isotrope. Les champs de déplacements et de contraintes sont obtenus de façon approchée par un développement asymptotique (Gol'Denveizer, 1962) (Ciarlet-Destuynder, 1979) et le taux de restitution de l'énergie est calculé à l'aide de l'intégrale de Rice sur un contour éloigné de la pointe de la fissure, là où les approximations poutre sont valables.

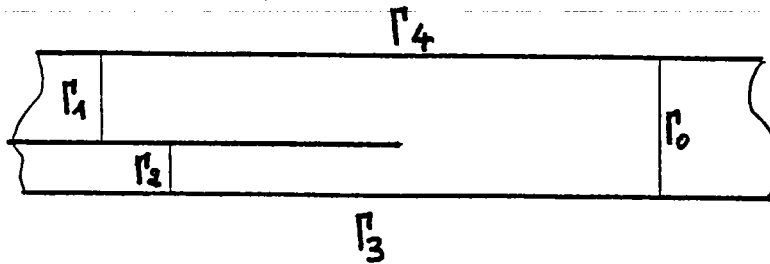


Figure 2.8: contour  $\Gamma$  pour le calcul de l'intégrale de Rice

Le développement asymptotique est effectué dans une zone de faible épaisseur éloignée de la pointe de fissure. La méthode consiste à introduire dans le problème d'élasticité le changement de variables suivant :

$$(140) \quad x = X \quad y = \eta Y$$

ainsi que le développement asymptotique formel :

$$(141) \quad \sigma = ( \sigma_0 + \eta \sigma_1 + \eta^2 \sigma_2 + \dots )$$

$$(142) \quad u = ( u_0 + \eta u_1 + \eta^2 u_2 + \dots )$$

$$(143) \quad v = \frac{1}{\eta} ( v_0 + \eta v_1 + \eta^2 v_2 + \dots )$$

ou  $\eta$  représente un petit paramètre caractéristique de l'épaisseur de la poutre (  $Y$  varie entre  $-1/2$  et  $+1/2$  ).

En injectant les relations (140) à (143) dans les équations du problème d'élasticité, on obtient pour le premier terme du développement les identités suivantes :

$$(144) \quad \left[ \begin{array}{l} v_0(X, Y) = v_0(X) \\ u_0(X, Y) = u_0(X) - Y v_0'(X) \\ \sigma_{x_0}(X, Y) = E ( u_0'(X) - Y v_0''(X) ) \\ \sigma_{xy_0}(X, Y) = 0 \\ \sigma_{y_0}(X, Y) = 0 \end{array} \right.$$

qui reflètent parfaitement le modèle de Bernoulli.

Le premier terme de cisaillement non nul apparaît à l'ordre 1 :

$$(145) \quad \begin{cases} \sigma_{xy1}(X, Y) = -\frac{1}{2} E v_0'''(X) \left\{ \frac{1}{4} - Y^2 \right\} \\ \sigma_{y1}(X, Y) = 0 \end{cases}$$

Revenons maintenant au calcul de l'intégrale de Rice (voir figures 2.2 et 2.8).

Sur les bords  $\Gamma_3$  et  $\Gamma_4$  elle est nulle car :

$$(146) \quad n_x = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_{ij} n_j = 0$$

Sur les bords  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , on utilise le développement précédent :

\* pour le terme en énergie, nous avons :

$$(147) \quad W = \frac{1}{2 E} ( \sigma_{x0}^2 + 2 \eta \sigma_{x0} \sigma_{x1} + 0 (\eta^2) )$$

\* pour le terme de puissance :

$$(148) \quad \sigma_{ij} n_j u_{i,1} = ( \sigma_{x0} \frac{\partial u_0}{\partial X} + \sigma_{xy1} \frac{\partial v_0}{\partial X} + 0 (\eta) )$$

On constate ainsi le fait bien établi que le cisaillement joue un rôle secondaire dans l'énergie de déformation, mais on montre surtout qu'il apparaît dès le premier ordre dans le terme de puissance et qu'il joue donc un rôle important pour le calcul de  $G$ .

En gardant les termes principaux, l'approximation  $J_0$  de  $J$  s'écrit :

$$(149) \quad J_0 = \sum_{i=0}^2 \int_{\Gamma_1} \left[ \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sigma_{x0}^2}{E} \right\} - ( \sigma_{x0} u_0' - \sigma_{x0} Y v_0'' + \sigma_{xy1} v_0' ) \right] n_1 dy$$

qui est analogue à (119). Elle se simplifie sous la forme :

$$(150) \quad J_0 = \sum_{i=0}^2 \left[ \int_{\Gamma_1} - \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sigma_{x0}^2}{E} \right\} dy - v_0' \int_{\Gamma_1} \sigma_{xy1} dy \right] n_1$$

que l'on identifie parfaitement à la version linéaire de (139) :

$$(151) \quad G = \sum_{i=0}^2 (m_i + T_i v_i') n_i$$

La différence de signe entre ces deux dernières formules provient de la définition des normales.

Nous devons maintenant corriger une affirmation précédente en disant que c'est plutôt l'effort tranchant et non le cisaillement qui joue un rôle pour le calcul de  $G$ .

Si le cisaillement est parfois complètement négligé dans les modèles de poutre, la notion d'effort tranchant  $y$  est toujours présente de façon plus ou moins explicite. La similitude entre (150) et (151) montre que le plus simple des modèles de poutre (Bernoulli) est à même de fournir une bonne approximation du taux de restitution de l'énergie du problème d'élasticité.

(150) est très générale car nous l'avons établie à partir d'une approche 2D. La méthode asymptotique utilisée est bien connue pour faire le passage des équations 3D aux équations de plaques de Kirchhoff. Elle est ici employée sur un cas plus simple (2D). On pourra donc utiliser (150) (ou (151)) sur n'importe quel assemblage de poutres (Bernoulli ou Mindlin, raccords des poutres quelconques) dès lors que ce modèle donne, au loin de la pointe de la fissure, une bonne approximation de l'énergie de déformation, des efforts tranchants et de la rotation  $v'$ .

Un autre intérêt de (150) est de valider les formules analytiques obtenues sur le modèle d'assemblage de poutres.

(150) donne d'excellents résultats pour le modèle de deux poutres de Mindlin collées du chapitre 1.10 .

## 2.5 EXTENSION DES RESULTATS A UN ASSEMBLAGE DE PLAQUES

Les arguments que nous avons utilisés pour le calcul du taux de restitution de l'énergie sont généraux et l'extension des résultats aux assemblages de plaques ne pose pas de difficulté.

Précisons le modèle d'assemblage de plaques : la plaque délaminée est assimilée à un assemblage de trois plaques  $\Omega_0$ ,  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  d'épaisseurs respectives  $h$ ,  $h_1$  et  $h_2$ . Les plans moyens des plaques sont notés  $\omega_i$ ,  $i = 0,1,2$ . L'interface est notée  $\Gamma$  et les intersections des plans moyens avec l'interface  $\partial\omega_i$ . On définit une abscisse curviligne  $s$  sur les lignes  $\partial\omega_i$  (figure 2.9).

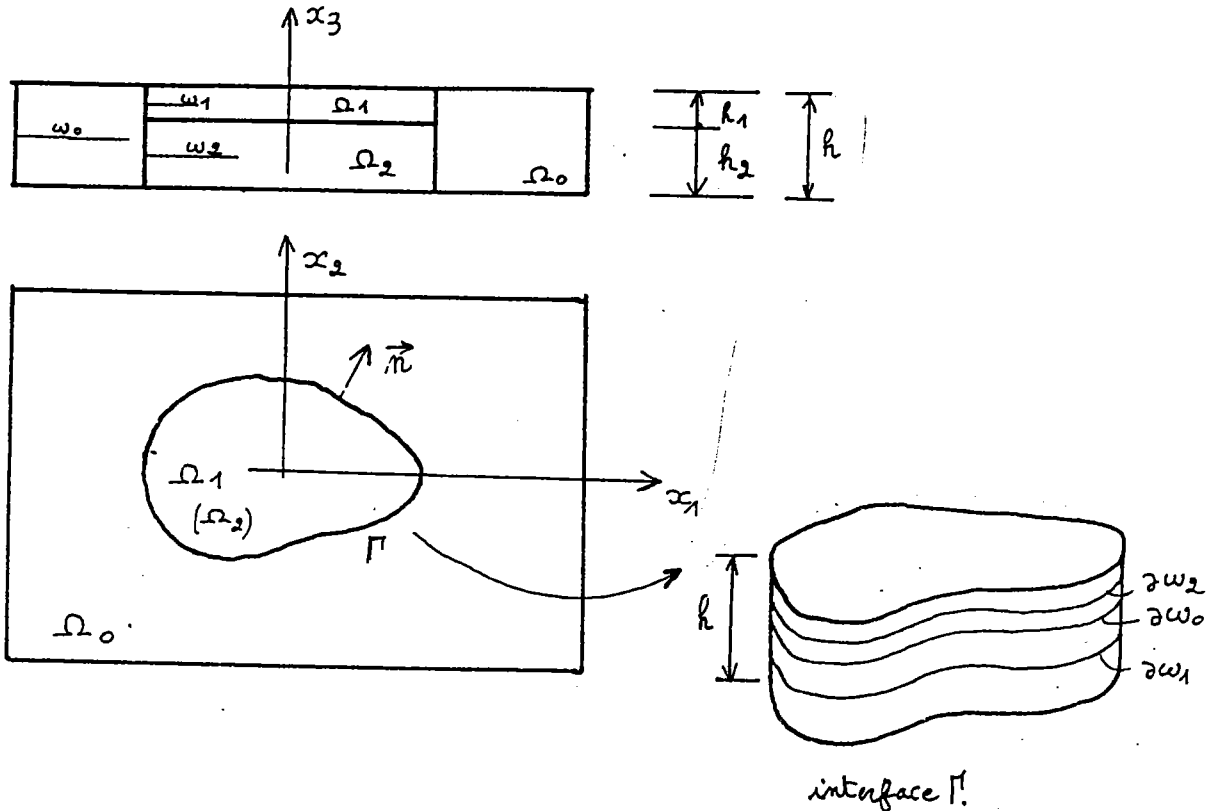


Figure 2.9: modèle d'assemblage de plaques

La vitesse de propagation de la fissure est cette fois définie par un champ de vitesse normal sur la surface  $\Gamma$ .

$$(152) \quad \underline{v}(s, x_3) = v(s) \underline{n}$$



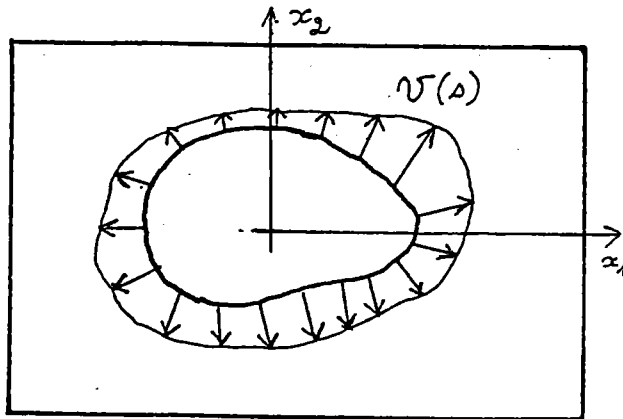


Figure 2.10: le champ de vitesse normal

La dissipation d'énergie liée au processus de propagation dépend naturellement de  $v(s)$  et est défini par :

$$(153) \quad D(v(s)) = - \left\{ \frac{d W_{\text{def}}^{\Omega}}{dt} - \frac{d W_{\text{ext}}^{\Omega}}{dt} \right\}$$

On va montrer que cette dissipation peut se mettre sous la forme

$$(154) \quad D(v(s)) = \int_{\partial \omega_0} G(s) v(s) ds \quad \forall v(s)$$

définissant ainsi le taux de restitution local de l'énergie  $G(s)$ . On calcule  $G(s)$  en reprenant la démarche du paragraphe 2.3.2

L'énergie de déformation s'écrit :

$$(155) \quad W_{\text{def}}^{\Omega} = \sum_{i=0}^2 \int_{\omega_i} m_i(x_1, x_2, t) d\omega$$

et sa dérivée totale par rapport au temps

$$(156) \quad \frac{d W_{\text{def}}^{\Omega}}{dt} = \sum_{i=0}^2 \int_{\omega_i} \frac{\partial m_i}{\partial t} d\omega + \sum_{i=0}^2 \int_{\partial \omega_i} (m_i n_i) v(s) ds$$

En appliquant le principe des puissances virtuelles à chaque plaque et en injectant les résultats dans (153), on obtient une première expression de la dissipation semblable à (113)).

$$(157) \quad D(v(s)) = - \sum_{i=0}^2 \int_{\partial\omega_i} (m \underline{n}_i) \underline{v}(s) ds - \sum_{i=0}^2 P_{\Gamma}^{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial t} \right\}$$

La condition de transport des discontinuités est un peu plus technique. On définit cette fois le champ  $\delta \underline{u}/\delta t$  par la dérivée généralisée de  $\underline{u}$  dans le champ de vitesse  $\underline{v}(s)$ .

(notation P. Germain).

$$(158) \quad \frac{\delta \underline{u}}{\delta t} = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\text{grad } \underline{u}) \underline{v}(s) = \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{u}}{\partial n} v(s)$$

Ce champ  $\delta \underline{u}/\delta t$  est localement cinématiquement admissible et compte tenu du théorème des actions mutuelles nous avons :

$$(159) \quad \sum_{i=0}^2 P_{\Gamma}^{\Omega_i} \left\{ \frac{\delta \underline{u}_i}{\delta t} \right\} = 0$$

et donc

$$(160) \quad \sum_{i=0}^2 P_{\Gamma}^{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial \underline{u}_i}{\partial t} \right\} = - \sum_{i=0}^2 P_{\Gamma}^{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial \underline{u}}{\partial n} v(s) \right\}$$

on écrit le terme de puissance en bord de plaque sous la forme d'une intégrale le long de  $\partial\omega$  :

$$(161) \quad P_{\Gamma}^{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial \underline{u}}{\partial n} v(s) \right\} ds = \int_{\omega_i} P_{\Gamma}^{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial \underline{u}}{\partial n} v(s) \right\} ds = \int_{\omega_i} P_{\Gamma}^{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial \underline{u}}{\partial n} \right\} v(s) ds$$

ainsi la dissipation s'écrit :

$$(162) \quad D(v(s)) = \int_{\partial\omega_0} \left[ - \sum_{i=0}^2 \left[ m \underline{n}_i - P_{\Gamma}^{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial \underline{u}}{\partial n} \right\} \right] v(s) ds \right]$$

et le taux de restitution de l'énergie :

$$(163) \quad G(s) = - \sum_{i=0}^2 \left[ m_i n_i - P_{\Gamma}^{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} \right]$$

Le taux de restitution de l'énergie est exprimé à partir des grandeurs locales du modèle de plaque sur le raccord  $\Gamma$ .

Le calcul du terme de puissance n'est toutefois pas immédiat car le champ  $\partial u / \partial n$  n'est défini que sur l'interface  $\Gamma$ . La relation classique de puissance en bord de plaque du modèle de Kirchhoff :

$$(164) \quad P_{\Gamma}^{\Omega}(\delta u) = (N_{\alpha\beta} n_{\beta}) \delta u_{\alpha} + \left[ Q_{\alpha} n_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial s} (M_{\alpha\beta} n_{\beta} \tau_{\alpha}) \right] \delta w \\ - (M_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta}) \frac{\partial \delta w}{\partial n}$$

n'est pas utilisable ici, car la dérivée normale  $\partial u / \partial n v(s)$  n'est pas un champ de déplacement de type Kirchhoff, ce que suppose la formule (164).

Pour lever cette ambiguïté, nous passons à une expression tridimensionnelle du terme de puissance en bord de plaque :

$$(165) \quad P_{\Gamma}^{\Omega}(\delta u) = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds$$

Pour un modèle de Kirchhoff, le champ de déplacement s'écrit :

$$(166) \quad \underline{u} = (u_{\alpha} - x_3 w, \alpha) \underline{x}_{\alpha} + w \underline{x}_3$$

La dérivée normale du déplacement sur le bord de plaque est :

$$(167) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = (u_{\alpha, \beta} n_{\beta} - x_3 w, \alpha \beta n_{\beta}) \underline{x}_{\alpha} + (w, \alpha n_{\alpha}) \underline{x}_3$$

En injectant (167) dans (165) on obtient :

$$(168) \quad P_{\Gamma}^{\Omega_i} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \right\} = (N_{\alpha\beta}^i n_{\beta}^i) (u_{\alpha, \gamma}^i n_{\gamma}^i) - (M_{\alpha\beta}^i n_{\beta}^i) (w_{, \alpha \gamma}^i n_{\gamma}^i) + (Q_{\alpha}^i n_{\alpha}^i) (w_{, \beta}^i n_{\beta}^i)$$

qui est la version « plaque » de la formule (121).

Nous devons souligner que pour le passage de (165) à (168), nous n'avons pas posé  $\sigma_{13} = 0$  à priori. Les termes de cisaillement apparaissent sous la forme d'intégrales dans l'épaisseur pour donner les efforts tranchants  $Q$ . En posant  $\sigma_{13} = 0$ , on éliminerait les efforts tranchants dans l'expression de la puissance au bord et la relation obtenue serait incomplète.

Nous écrivons donc le taux de restitution local de l'énergie sous la forme :

$$(169) \quad G(s) = \dot{W}_1(s) + \dot{W}_2(s) - \dot{W}_0(s)$$

où

$$(170) \quad \dot{W}_i = -\dot{w}_i + \left[ (N_{\alpha\beta}^i u_{\alpha,\gamma}^i - M_{\alpha\beta}^i w_{,\alpha\gamma}^i + Q_{\beta}^i w_{,\gamma}^i) \right] n_{\beta}^i n_{\gamma}^i$$

Très peu de résultats similaires sont disponibles dans la littérature pour confronter nos résultats.

(169) et (170) permettent de retrouver une formule analytique proposée par Yin (1985) pour un délaminage circulaire très superficiel chargé de manière axisymétrique. Son approche est surtout basée sur des considérations physiques, mais elle est contestable sur le plan théorique dans la mesure où il utilise l'intégrale  $M$  de l'élasticité linéaire pour un problème de plaques non linéaire.

Pour des délaminages très superficiels (couches fines) de formes quelconques, Bottega (1983) a proposé une formule assez voisine de (169) et (170) dans laquelle le terme d'effort tranchant est toutefois inexistant.

Il n'y a, à notre connaissance qu'un seul résultat identique à (169) et (170) dû à Storåkers & Andersson (1988). Leur approche n'est probablement pas aussi proche des méthodes intégrales de contour que la nôtre car les notions de contours et de transport des discontinuités n'apparaissent pas dans leur analyse. Ces auteurs calculent directement la variation d'énergie potentielle totale dans une avancée virtuelle de fissure en traitant avec soin les discontinuités de grandeurs mécaniques sur l'interface. Avec leurs notations cette variation d'énergie potentielle vaut :

$$(171) \quad - \delta U = \int_{\Gamma} \|P_{\alpha\beta}\| n_{\alpha} n_{\beta} \delta a \, d\Gamma$$

$$(172) \quad P_{\alpha\beta} = N \delta_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} u_{\alpha,\beta} + M_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} - Q_{\alpha} w_{,\beta}$$

Elle est en parfait accord avec (169).

## 2.6 CONCLUSIONS

Les méthodes classiques de calcul du taux de restitution de l'énergie sont généralement associées à l'élasticité et sont de fait soit inadaptées soit inapplicables pour les modèles d'assemblages de poutres et de plaques.

L'objectif de ce second chapitre était de mettre au point une méthode efficace pour calculer le taux de restitution de l'énergie associé à ces modélisations.

Notre démarche a consisté à reprendre et à adapter la méthode "intégrale de contour" en prenant en compte, non plus le transport des singularités en fond de fissure, mais le transport des discontinuités à l'interface entre les plaques.

Des formules analytiques ont été établies pour les assemblages de poutres puis généralisées aux assemblages de plaques. Deux propriétés intéressantes ont été mises en évidence dans le cas des poutres :

- indépendance du contour
- décomposition en modes I et II

En utilisant une méthode de développement asymptotique, on a montré qu'un modèle de poutre est suffisant pour déterminer le taux de restitution de l'énergie du problème d'élasticité 2D.

De nouveaux développements devraient voir le jour, nous pensons notamment à la décomposition en mode I, II et III dans le cas des plaques.



### Chapitre 3

#### UNE APPROCHE BIDIMENSIONNELLE : LES MODELES D'ASSEMBLAGE DE PLAQUES

En utilisant les résultats des deux chapitres précédents, nous sommes en mesure de construire des modèles d'assemblage de plaques pour étudier le flambage et la propagation des fissures sur des délaminages plus réalistes, de forme et de positions à priori quelconques. Nous devons toutefois exclure les délaminages très courts ou de formes très irrégulières pour lesquels une approche tridimensionnelle semble inévitable.

Nous commencerons ce chapitre par une réflexion sur les diverses façons d'assembler les plaques. Les difficultés de mise en oeuvre numériques seront discutées.

La suite de ce chapitre est consacrée à l'étude numérique d'un assemblage de trois plaques de Von Karman. Nous avons entièrement simulé le post flambage d'une structure délaminée (flambage local et global). Un post processeur de calcul du taux de restitution de l'énergie local le long du front de fissure a été développé et testé.

Des simulations numériques pour différentes formes et positions de délaminages sont présentées à la fin de ce chapitre.

#### 3.1 DIVERS MODELES D'ASSEMBLAGES DE PLAQUES

Plusieurs modélisations de la structure délaminée sont possibles suivant le modèle de plaque que l'on va utiliser - Mindlin ou Kirchhoff - et suivant la façon dont on va raccorder (assembler) ces plaques.

Les deux principaux modes de raccordement de plaques sont présentés sur les figures 3.1 et 3.2.

- soit on considère trois plaques et on impose des conditions de raccord sur les bords  $\partial\omega$  des plaques (3.1)
- soit on considère deux plaques et l'on impose des conditions de collage sur les faces de contact entre les plaques (3.2).

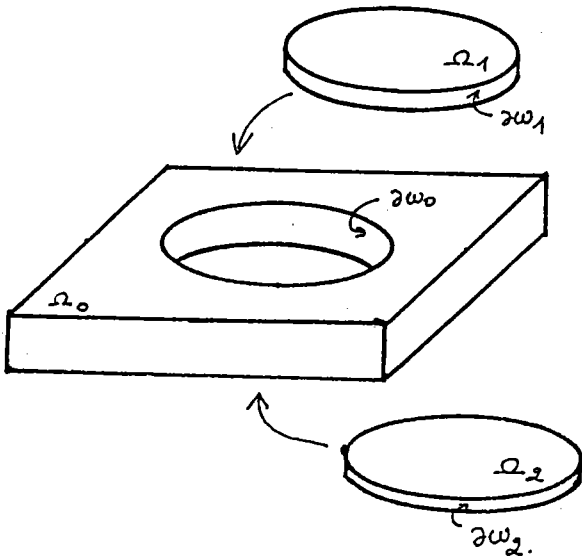


Figure 3.1: assemblage I

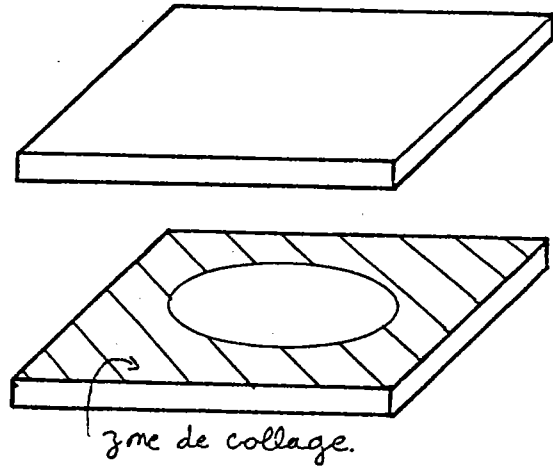


Figure 3.2: assemblage II

Les résultats du premier chapitre (voir 1.9 et 1.10) nous permettent d'affirmer que l'assemblage I de trois plaques est trop rigide (il est pourtant largement utilisé dans la littérature). Les phénomènes de rotation en fond de fissure (effets locaux dans la plaque 0) ne sont pas pris en compte. Cet assemblage est néanmoins tout à fait acceptable si les élancements des plaques sont importants.

Un assemblage II de deux plaques de Mindlin est plus performant car il permet de représenter les rotations en fond de fissure. Un tel modèle est bien adapté à l'étude des délaminages courts (faible élancement au niveau du délaminage) (voir 1.10).

Si l'assemblage II est plus attrayant que le I sur le plan théorique, il n'en est pas de même en ce qui concerne la mise en oeuvre numérique par éléments finis.



L'assemblage I est relativement aisé à traiter numériquement car il suffit d'imposer des relations entre les noeuds situés sur les bords  $\partial\omega$  de chacune des plaques.

L'assemblage II s'apparente à un problème de contact entre deux plaques et pose quant à lui de sérieux problèmes numériques. Il n'est pas du tout trivial d'assurer le contact des faces extérieures des plaques lorsque les déplacements sont discrétisés par éléments finis.

La prise en compte des rotations en fond de fissure augmente donc considérablement la difficulté de mise en oeuvre numérique.

Compte tenu des remarques précédentes, nous proposons un nouveau modèle d'assemblage de plaques qui associe les avantages des deux solutions présentées (voir figure 3.3)

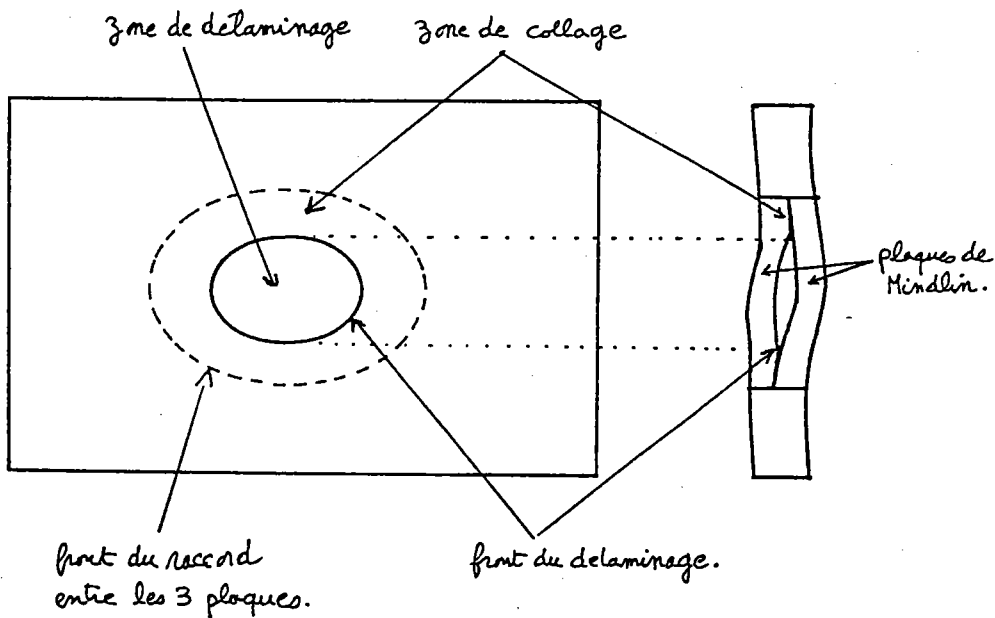


Figure 3.3: un modèle d'assemblage de plaques performant

C'est en fait un assemblage II de deux plaques de Mindlin où l'on réduit la zone de collage en réalisant un assemblage I avec une troisième plaque (rappelons que l'effet de rotation est localisé au voisinage de  $\partial\omega_0$  (1.10)).

- Ce modèle autorise la rotation en fond de fissure.
- On réduit les difficultés numériques en limitant la taille de la zone de contact au strict minimum et en réduisant le nombre d'éléments.

La mise en oeuvre numérique de ce modèle reste néanmoins complexe en raison du collage entre les plaques.

Nous allons dans les paragraphes suivants expliciter la mise en oeuvre numérique d'un assemblage I de trois plaques de Von Karman (cinématique de Kirchhoff + non linéarité). Outre la simplicité, ce choix est motivé par au moins trois autres arguments :

- un tel modèle est suffisant lorsque les élargissements des plaques sont importants.
- nous voulons réaliser une première mise en oeuvre numérique de la formule (169) pour le calcul du taux de restitution de l'énergie local le long d'un front de fissure.
- ce modèle constitue une première étape vers la réalisation du modèles plus performants présentés sur la figure 3.3.

### 3.2 ASSEMBLAGE DE TROIS PLAQUES DE VON KARMAN

Nous mettons en place les équations du modèle d'assemblage I de trois plaques de Von Karman . Nous reprenons les notations introduites en 2.5 et nous les complétons pour alléger les écritures.

- soit  $Z$  une quantité définie sur les bords  $\partial\omega_1$ . On note la discontinuité de  $Z$  de manière classique :

$$(173) \quad \llbracket Z \rrbracket = Z_0 - (Z_1 + Z_2)$$

- on définit les moments  $M$  rapportés à la ligne  $\partial\omega_0$  par :

$$(174) \quad M_1 = M_1 + h_2 N_1 / 2$$

$$(175) \quad M_2 = M_2 - h_1 N_2 / 2$$

$$(176) \quad M_0 = M_0$$

Les déplacements de Love-Kirchhoff sur la plaque de numéro  $i$  ( $i = 0,1,2$ ) s'écrivent :

$$(177) \quad u_1(x_1, x_2, x_3) = \{ u_{1\alpha}(x_1, x_2) - (x_3 - z_1) w_{1,\alpha} \} x_\alpha \\ + w_1(x_1, x_2) x_3$$

où  $z_1$  est la cote de la ligne moyenne de la plaque.

Les conditions de raccord cinématique entre les plaques sur l'interface  $\Gamma$  s'obtiennent à partir de (177) :

$$(178) \quad u_{1\alpha} = u_{0\alpha} - \frac{1}{2} h_2 w_{0,\alpha} \quad (181) \quad u_{2\alpha} = u_{0\alpha} - \frac{1}{2} h_1 w_{0,\alpha}$$

$$(179) \quad w_1 = w_0 \quad (182) \quad w_2 = w_0$$

$$(180) \quad w_{1,\alpha} = w_{0,\alpha} \quad (183) \quad w_{2,\alpha} = w_{0,\alpha}$$

Nous adoptons les hypothèses de Von Karman. La déformation moyenne et la courbure sont de la forme :

$$(184) \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \frac{1}{2} w_{,\alpha} w_{,\beta}$$

$$(185) \quad k_{\alpha\beta} = - w_{,\alpha\beta}$$

On suppose que les matériaux sont élastiques linéaires. L'énergie de déformation  $W(\varepsilon, k)$  est une forme quadratique définie positive en  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  et  $k_{\alpha\beta}$  et les relations de comportement s'écrivent :

$$(186) \quad N_{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}$$

$$(187) \quad M_{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial K_{\alpha\beta}}$$

Les efforts tranchants  $Q_\alpha$  sont définis par la relation :

$$(188) \quad Q_\alpha = M_{\alpha\beta,\beta} + N_{\alpha\beta} w_{,\beta}$$

Le principe des puissances virtuelles ,

$$(189) \quad - \int_{\omega} (N_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \delta K_{\alpha\beta}) d\omega + P_{\text{ext}}^{\Omega} (\delta u) = 0 \quad \forall \delta u \text{ C.A.}$$

conduit aux équations d'équilibre classiques de Von Karman et aux conditions de raccord suivantes sur les efforts intérieurs :

$$(190) \quad \left[ \begin{array}{c} N_{\alpha\beta} \\ n_{\beta} \end{array} \right] = 0$$

$$(191) \quad \left[ \begin{array}{c} M_{\alpha\beta} \\ n_{\alpha} \\ n_{\beta} \end{array} \right] = 0$$

$$(192) \quad \left[ \begin{array}{c} Q_{\alpha} \\ n_{\alpha} + \frac{\partial}{\partial s} (M_{\alpha\beta} n_{\alpha} t_{\beta}) \end{array} \right] = 0$$

### 3.3 MISE EN OEUVRE NUMERIQUE DU MODELE

#### 3.3.1 LES ELEMENTS FINIS DE PLAQUE UTILISES

Nous utilisons une méthode d'éléments finis pour déterminer les solutions en déplacements et en contraintes de notre modélisation.

Le choix d'un élément de plaque - tension + flexion - est délicat dans la mesure où la littérature spécialisée propose une multitude d'éléments plus ou moins performants selon les applications envisagées : tel élément est réputé trop rigide, tel autre ne converge que sous certaines conditions... La situation s'est encore complexifiée avec l'apparition récente d'éléments de plaque spécifiques aux structures composites.

Notre objectif premier n'est pas de déterminer l'élément le mieux adapté à notre problème, mais de montrer la faisabilité de l'étude et de valider certains résultats. Nous avons pour ce faire utilisé deux éléments finis de plaque réputés performants de conceptions très différentes :

- Le premier est l'élément de flexion D.K.T. (Discrets Kirchhoff Triangle) dû à Batoz & al.(1980) couplé au très classique C.S.T. (Constant Strain Triangle) pour l'énergie de

membrane. La base de départ de cet élément est le modèle de Mindlin dans lequel on introduit des hypothèses de Kirchhoff sous forme discrète le long des côtés de l'élément. D.K.T. converge vers la solution de plaque de Kirchhoff.

De nombreux cas test sont disponibles pour cet élément (Batoz & al. - 1980,1982)), ainsi que des comparaisons avec d'autres éléments de la littérature. Les éléments D.K.T. et D.K.Q. (quadrilatères) ont été testés en linéaire, en dynamique, en flambement et une version D.K.Q.24 pour l'analyse des coques composites minces en non-linéaire a été proposée récemment (Chatelain & Batoz - 1988).

- Le second élément est un élément de flexion F.F.T. (Free Formulation Triangle) (Bergan & Nygård,1984) couplé à un C.S.T. en membrane. C'est un élément "non conforme" de type Kirchhoff. Le choix des termes cubiques pour l'interpolation de la flèche est basé sur le concept "Free Formulation".

### 3.3.2 LES RACCORDEMENTS DE PLAQUES

Le raccordement des trois plaques est parfaitement réalisé si l'on impose les relations de raccord (178) à (183) en chaque point du front de fissure  $\partial\omega_0$ . Cette condition n'est pas du tout évidente à réaliser dès lors que les déplacements sont discrétisés par éléments finis. (180) et (183) requièrent une continuité  $C_1$  de la flèche, (178) et (181) demandent une certaine compatibilité des fonctions d'interpolation de  $u_\alpha$  et  $w$  sur l'élément. Il est cependant inutile de chercher à réaliser un raccord parfait des plaques car, comme nous l'avons vu, ce raccord est trop rigide.

Nous avons en pratique imposé les relations (178) à (183) en chaque noeud du front de fissure.

L'accrochage se ramène donc à la prise en compte de relations entre des noeuds du maillage (voir figure 3.4). Deux méthodes ont été envisagées pour imposer ces relations :

- \* multiplicateurs de Lagrange
- \* élimination directe des noeuds surabondants

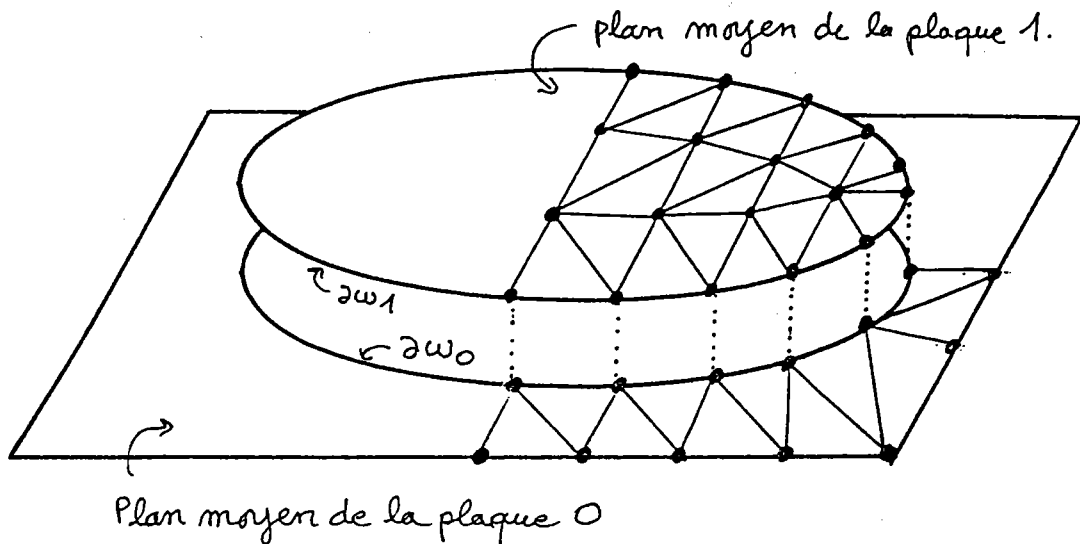


Figure 3.4: Le maillage des plaques

La méthode des multiplicateurs de Lagrange pose un problème dans notre cas car il n'y a aucune conditions aux limites imposées sur les plaques 1 et 2. Si on associe un multiplicateur de Lagrange à chaque relation, la matrice de rigidité, après assemblage et prise en compte des conditions aux limites sur la plaque 0, est encore singulière à cause des mouvements solides des plaques 1 et 2.

Il est plus simple dans notre cas de traiter directement ces relations en éliminant, dans les inconnues du problème, les déplacements des noeuds situés sur les bords de plaque  $\partial\omega_1$  et  $\partial\omega_2$ . Ils sont entièrement déterminés par les déplacements des noeuds situés sur  $\partial\omega_0$  et par les conditions de raccord cinématique (178) à (183).

La réalisation pratique de cet assemblage est un peu technique et n'est pas complètement détaillée ici. Les éléments des plaques 1 et 2 qui possèdent des noeuds sur le bord de ces plaques, nécessitent un traitement spécial pour le calcul des matrices élémentaires de rigidité tangente, des vecteurs d'efforts intérieurs et de résidu (on effectue pour cela des multiplications par des matrices de passage).

Une série de tests (calculs linéaires) a été réalisée pour valider le raccordement des plaques.

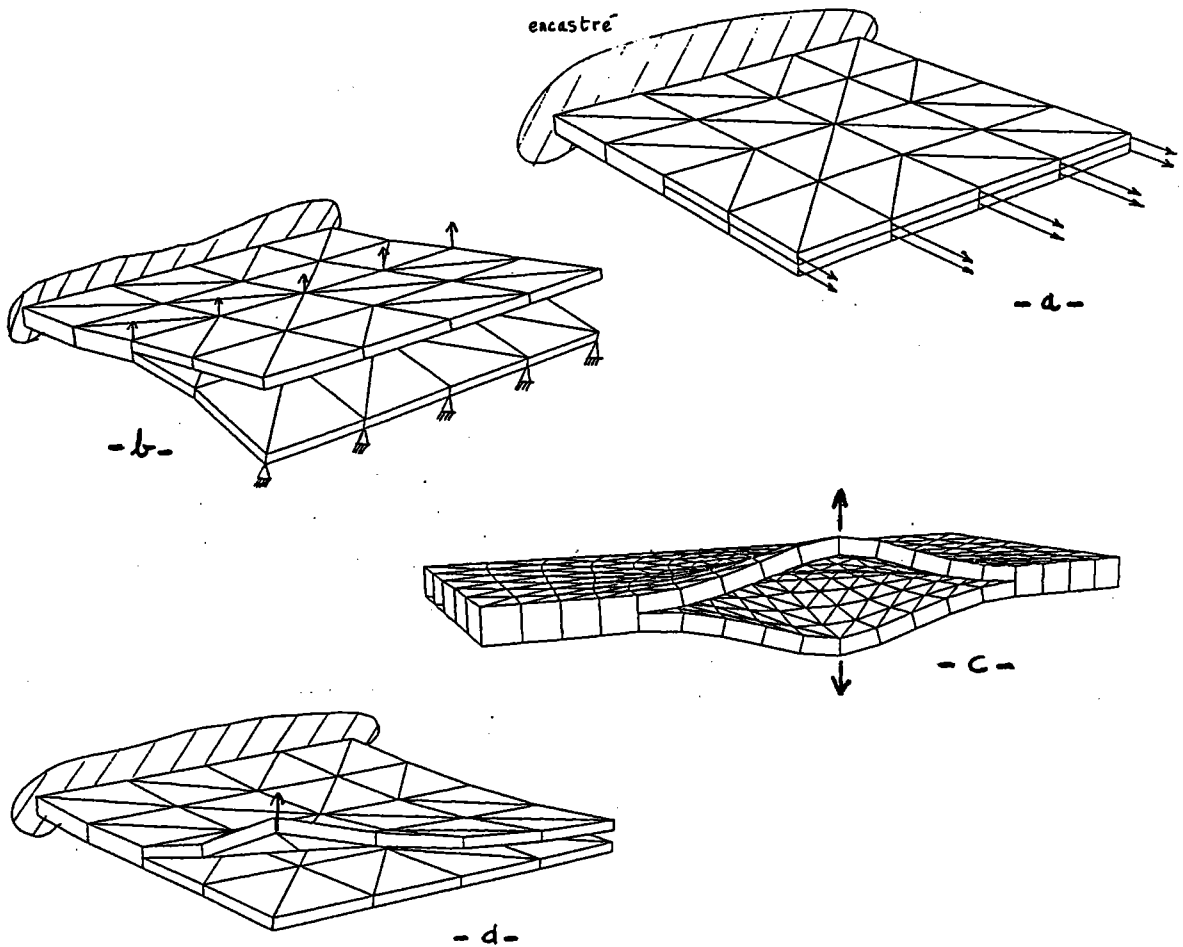


Figure 3.5: Exemple de tests numériques pour le raccord des plaques

L'assemblage de plaques a été sollicité de diverses manières et les résultats obtenus sont conformes à la théorie.

Tous ces tests ont été réalisés avec les éléments DKT et FFT.

Dès que les maillages deviennent un peu fins (-c-), ces deux éléments donnent des résultats très voisins. C'est pourquoi, dans la suite, nous avons choisi de n'utiliser qu'un seul type d'élément, le DKT.

Afin de bien visualiser les déformées des plaques, nous avons dessiné des éléments volumiques en reconstituant l'épaisseur de la plaque. Cette façon de faire est plus lisible que la seule représentation des surfaces moyennes des plaques. Il ne faut toutefois pas perdre de vue que le calcul effectué est bidimensionnel et non tridimensionnel.

Le traitement des faces cachées est effectué suivant l'algorithme du peintre.

### 3.3.3 DETERMINATION DES COURBES « CHARGE-DEPLACEMENT »

Nous utilisons la méthode incrementale de Newton-Raphson pour suivre les courbes charge-déplacement.

On détermine une suite de couples Charge-Déplacement qui satisfont au principe des puissance virtuelles (189).

La différenciation de (189) conduit à la notion de matrice de rigidité tangente  $K_T$  que l'on écrit comme la somme de trois matrices :

- $K_0$  : matrice linéaire
- $K_G$  : matrice géométrique
- $K_L$  : matrice non-linéaire

(notations d'après Zienkiewicz - 1977, chap. 19)

Le pilotage du suivi de courbe est cette fois beaucoup plus facile que dans le cas des poutres car il reste une certaine raideur dans les plaques après le flambage. Le pilotage à force imposée a donné de bons résultats.

### 3.4 MISE EN OEUVRE NUMERIQUE DU CALCUL DE « G »

Le taux de restitution de l'énergie local le long du front de fissure a pu aisément être calculé grâce aux résultats établis en 2.5 (page 65). La mise en oeuvre numérique de la formule (169) pour  $G(s)$  est immédiate.

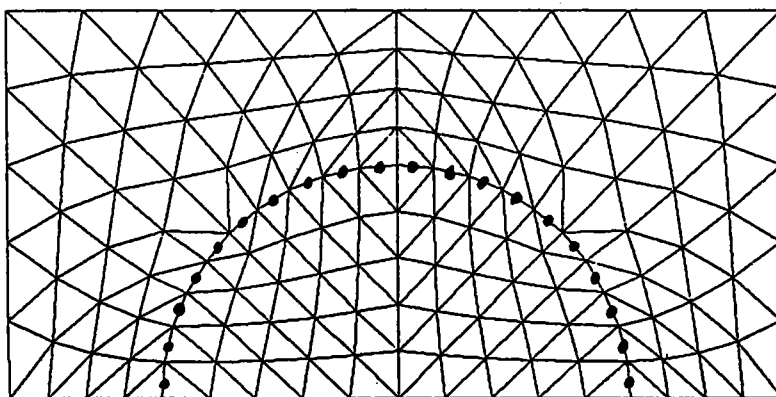


Figure 3.6: Points de calculs de  $G(s)$



Les quantités  $N_{\alpha\beta}$ ,  $M_{\alpha\beta}$ ,  $Q_{\alpha}$ ,  $u_{\alpha,\beta}$ ,  $w_{,\alpha\beta}$ ,  $w_{,\alpha}$  sont calculées au milieu des segments formant le front de fissure.

L'effort tranchant  $Q_{\alpha}$  est lié à la dérivée troisième de la flèche et le calcul précis de cette quantité est problématique en éléments finis .

Cependant, ce calcul d'efforts tranchants n'est pas nécessaire ici car on peut montrer que le terme

$$(193) \quad \left[ Q_{\alpha} \ n_{\alpha} \ w_{,\beta} \ n_{\beta} \right]$$

de la formule (169) joue un rôle très secondaire dans le calcul de  $G(s)$  et nous allons le négliger.

Rappelons que le terme équivalent à (193) dans le modèle d'assemblage de poutres était nul et que l'effort tranchant n'apparaissait pas dans la formule (124) de  $G$ .

Ici, le terme (193) n'est pas nul car, si  $w_{,\beta} \ n_{\beta}$  est continu, la continuité des efforts tranchants

$$\left[ Q_{\alpha} \ n_{\alpha} \right] = 0$$

n'est pas réalisées

dans le modèle de Kirchoff (voir(192)).

On peut se convaincre que la contribution de l'effort tranchant (193) est petite devant celle des autres termes de (169) avec le modèle de Mindlin .

En effet, la loi de comportement en cisaillement d'une plaque de Mindlin s'écrit :

$$(194) \quad w_{,\alpha} = \theta_{\alpha} + \frac{N_{\alpha 3}}{k_1 Gh}$$

l'effort tranchant vaut,

$$(195) \quad Q_{\alpha} = N_{\alpha 3} + N_{\alpha\beta} w_{,\beta}$$

et il vérifie les conditions de raccord suivantes :

$$(196) \quad \left[ Q_{\alpha} \ n_{\alpha} \right] = 0$$

Comme les rotations  $\theta_{\alpha}$  sont égales sur le bord des plaques,

$$(197) \quad \left[ Q_{\alpha} \ n_{\alpha} \ \theta_{\beta} \ n_{\beta} \right] = 0$$

et en reportant ces équations dans (193), on obtient :

$$(198) \quad \left[ \begin{array}{c} Q_{\alpha} \quad n_{\alpha} \quad \frac{N_{\beta 3} \quad n_{\beta}}{k_1 Gh} \end{array} \right]$$

En négligeant (193) dans la formule (123) de  $G(s)$  on commet une erreur équivalente à celle qui consiste à négliger les termes d'énergie de cisaillement par rapport aux termes d'énergie de flexion.

Pour un matériau homogène et isotrope, nous utilisons la relation suivante :

$$(199) \quad G(s) = \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2Eh} \left[ (1+\nu) (N_{\alpha\beta} \quad N_{\alpha\beta}) - \nu (N_{\alpha\alpha})^2 \right] \\ + \frac{6}{Eh^3} \left[ (1+\nu) (M_{\alpha\beta} \quad M_{\alpha\beta}) - \nu (M_{\alpha\alpha})^2 \right] \\ - N_{\alpha\beta} \quad n_{\beta} \quad u_{\alpha,\gamma} \quad n_{\gamma} \quad - \quad M_{\alpha\beta} \quad n_{\beta} \quad w_{,\alpha\gamma} \quad n_{\gamma} \end{array} \right]$$

### 3.5 RESULTATS NUMERIQUES

L'objectif de ce paragraphe est de valider notre modèle numérique et de présenter un certain nombre d'applications.

- Tous les calculs présentés ici ont été réalisés avec l'élément DKT
- Les matériaux sont homogènes et isotropes sur toute la structure. Le coefficient de Poisson vaut  $\nu = 0,3$ . Ceci nous oblige à introduire un défaut - petite force normale appliquée au centre de la plaque 1 - pour éviter de suivre la branche fondamentale du problème (voir 1.6.1).
- Les différentes géométries étudiées sont les suivantes :

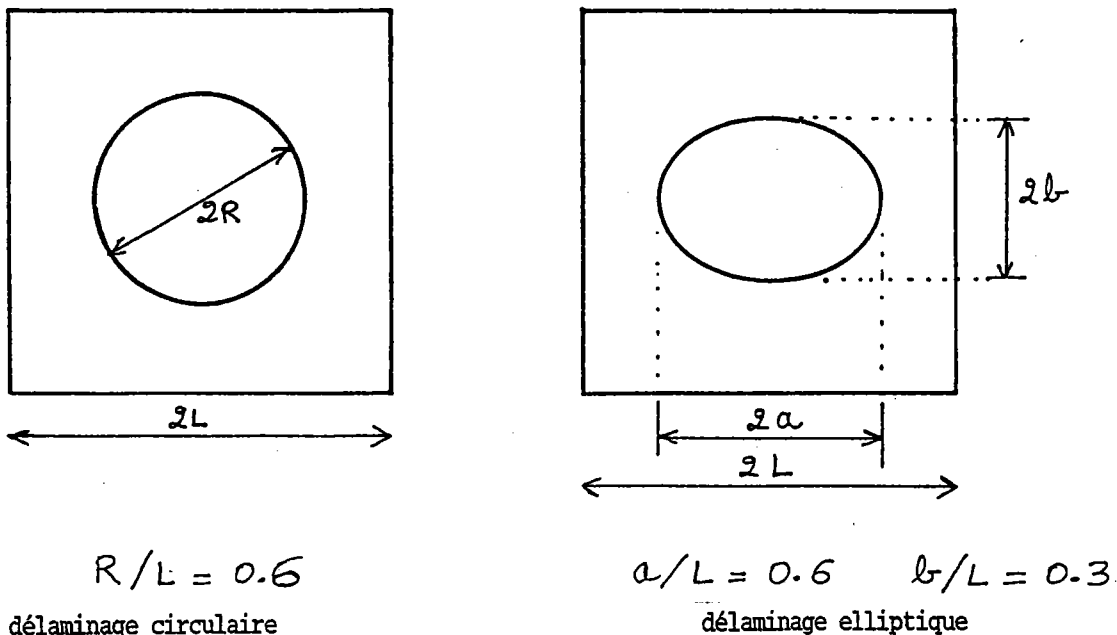
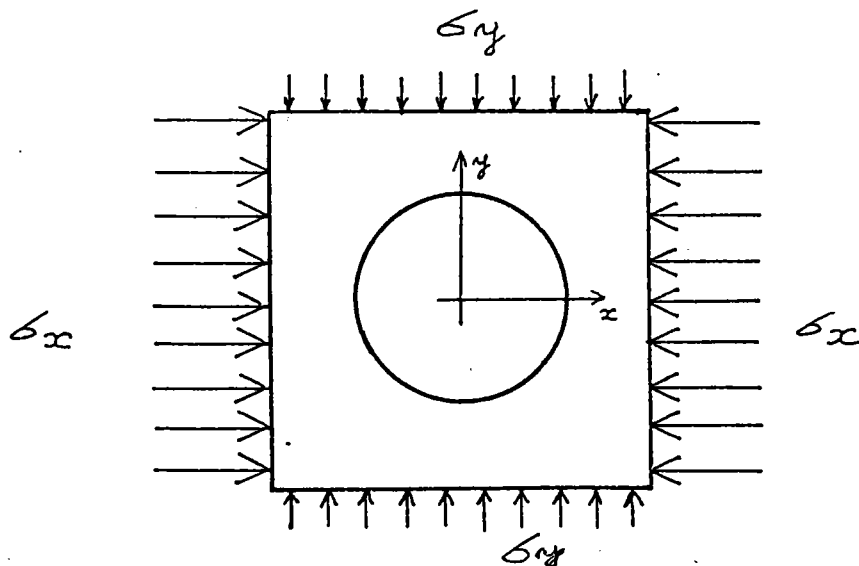


Figure 3.7: géométries de la structure

- La plaque 0 est encadrée sur ces quatre bords (les déplacements dans le plan sont autorisés).
- Un chargement de compression biaxé est appliqué sur les bords de la plaque 0.



Le chargement est entièrement défini par  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$ .

Figure 3.8: chargement de la structure

Nous avons réalisé un post-processeur de calcul et de visualisation du taux de restitution de l'énergie local sur le front de fissure. La structure est représentée en vue de dessus

et la répartition de  $G(s)$  est visualisée par des batonnets normaux au front de fissure.

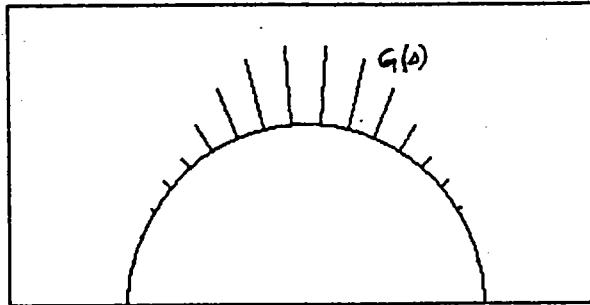


Figure 3.9: visualisation de  $G(s)$

### 3.5.1 COMPARAISON AVEC UN CALCUL ANALYTIQUE

Nous avons confrontés nos résultats numériques avec des résultats analytiques dûs à Evans & Hutchinson (1984) pour des délaminages circulaires très superficiels .

Le problème traité par ces auteurs est celui d'une plaque circulaire encastrée à laquelle on impose un déplacement radial axisymétrique (voir figure 3.10). Ils obtiennent analytiquement les solutions de post-flambage à l'aide d'un développement au premier ordre.

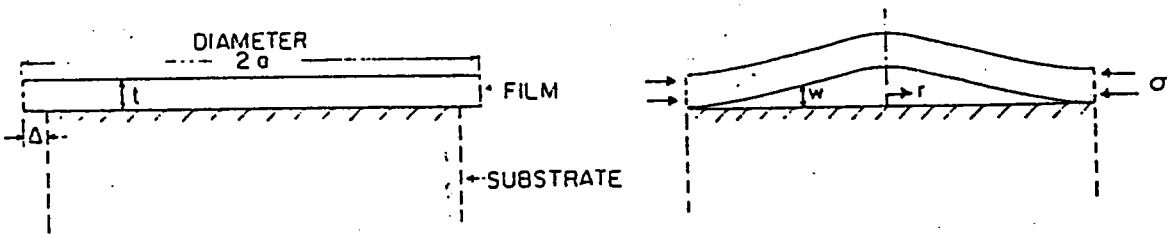


Figure 3.10: Délaminage circulaire (d'après Evans & Hutchinson)

Nous présentons en figure 3.11 le maillage utilisé pour cette comparaison.

- \* la structure est soumise à un chargement biaxé  $\sigma_x = \sigma_y$ .
- \* le délaminage est superficiel  $h_1 / h = 0,1$ .

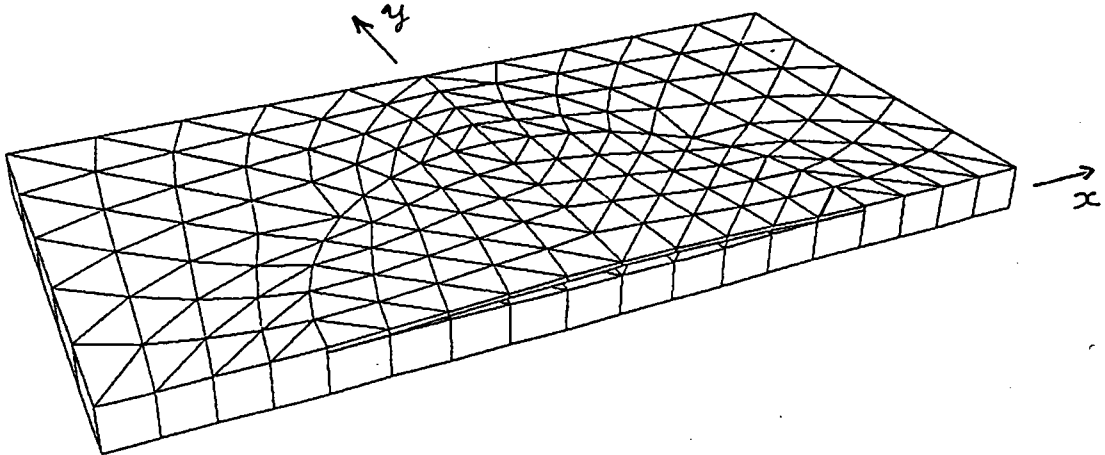
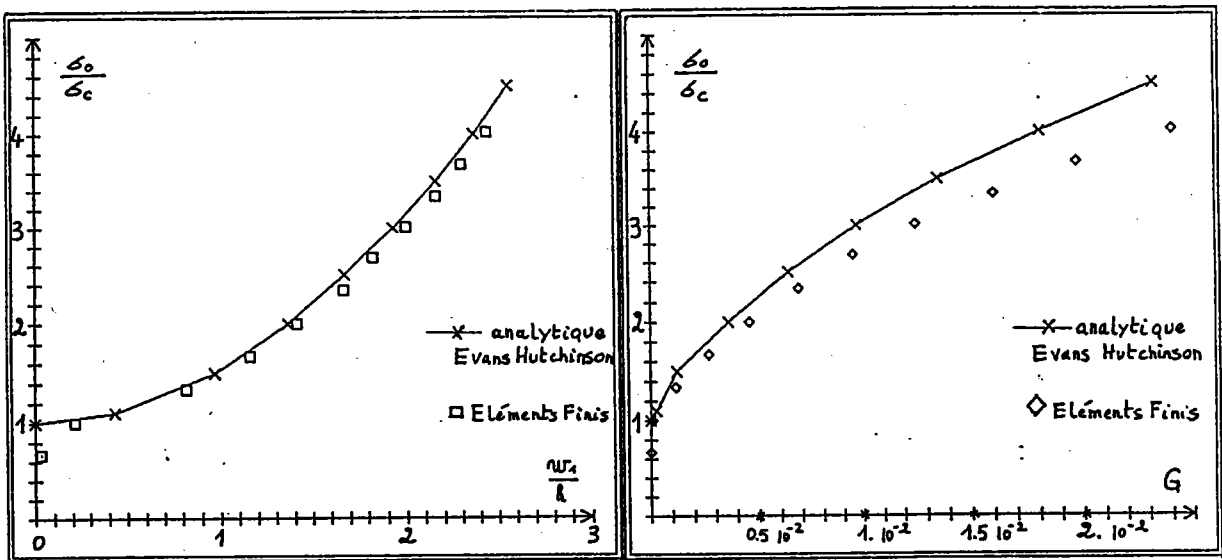


Figure 3.11: Maillage utilisé pour la comparaison (demi structure)

Les résultats sont présentés sur la figure 3.12.



- \*  $w_1$  : flèche au centre de la plaque circulaire
- \*  $G$  : taux de restitution de l'énergie
- \*  $\sigma_0$  : contrainte imposée sur les bords de la structure
- \*  $\sigma_c$  : contrainte critique de flambage de la plaque fine

Figure 3.12: Comparaison Analytique-Numérique

Il y a une très bonne correspondance des résultats en déplacement. Les taux de restitution calculés numériquement sont supérieurs de 10 à 15%. Ceci n'est pas choquant compte tenu des approximations faites dans l'approche analytique et

du fait que les bord de plaques sont proches du front de délaminage. Ce calcul nous a permis de valider notre post processeur et de montrer que la formule d'Evans & Hutchinson donne de bons résultats bien au delà de la contrainte critique. Cependant son domaine d'application est limité aux délaminages très superficiels et le cas  $h_1/h = 0,1$  est déjà limite . En effet avec  $h_1/h = 0,2$  les écarts atteignent 100 % . De plus, la répartition de  $G(s)$  numérique n'est plus constante le long du front de fissure, lorsque l'on atteint trois à quatre fois la contrainte critique, alors que le modèle analytique suppose cette répartition uniforme.

### 3.5.2 INFLUENCE DE LA FINESSE DU MAILLAGE

Nous avons étudié la même structure (délaminage circulaire) avec deux maillages différents, l'un assez fin l'autre plus grossier.

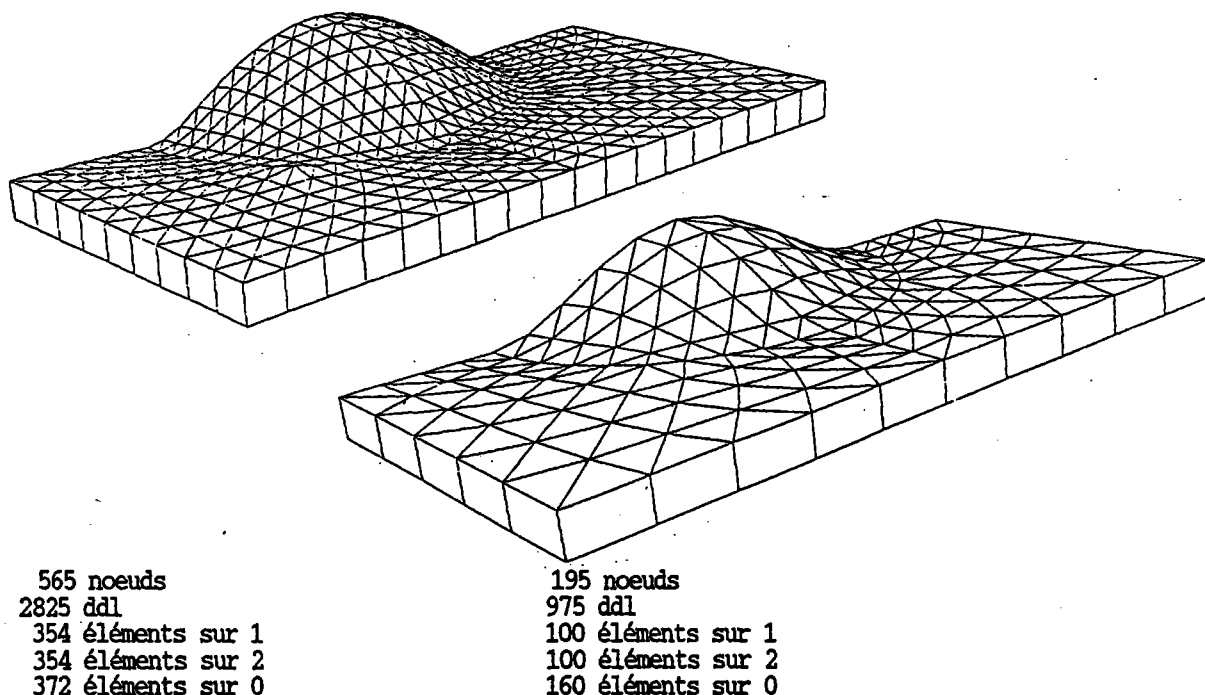


Figure 3.13: Le maillage fin - le maillage grossier

Les déplacements obtenus avec ces deux maillages sont très similaires tout au long du chargement. Il y a une bonne correspondance des taux de restitution de l'énergie au début du chargement et au cours du flambage local. la situation se détériore un peu avec l'apparition du flambage global car le taux de restitution varie assez rapidement le long du front de

fissure et le maillage grossier est incapable de représenter correctement ces variations.

Les temps C.P.U. moyens pour faire un calcul sur une station de travail "Apollo" DN3500 sont de l'ordre de :

Maillage grossier	}	1 à 2 heures CPU
10 pas de chargement		
15 à 30 inversions		
Maillage fin	}	5 à 10 heures CPU
10 pas de chargement		
15 à 30 inversions		

Dans la suite, nous utiliserons exclusivement le maillage grossier car les temps CPU associés au maillage fin sont importants. Rappelons que ce maillage grossier est tout à fait suffisant si  $G(s)$  évolue lentement le long du front de fissure.

### 3.5.3 DELAMINAGE ELLIPTIQUE

Nous avons réalisé une série de calculs avec un délaminage elliptique.

La géométrie de la structure est la suivante :

- \* rapport des axes : 2
- \* rapport des épaisseurs :  $h_1/h = 0,2$

Le maillage utilisé comporte :

- \* 239 noeuds
- \* 1195 ddl
- \* 100 éléments sur 1
- \* 100 éléments sur 2
- \* 260 éléments sur 0

Trois chargements différents ont été appliqués :

- \* compression biaxée
- \* compression uniaxiale suivant le petit axe
- \* compression uniaxiale suivant le grand axe

Les résultats complets de ces calculs (déformée de la structure + visualisation de  $G(s)$  ) sont regroupés dans l'annexe C.

Les taux de restitution pour le chargement biaxé sont comparés à ceux obtenus à partir d'un calcul strictement analogue pour

un délaminage circulaire dont le diamètre est égal au grand axe de l'ellipse (figure 3.14).

$G(s)$  est localisé au voisinage du petit axe de l'ellipse et un tel délaminage aura donc tendance à se circulariser.

La contrainte critique de flambage est supérieure pour le délaminage elliptique. Cependant, le maximum du taux de restitution de l'énergie croît beaucoup plus rapidement après l'apparition du flambage local. On peut constater qu'il dépasse celui obtenu pour le délaminage circulaire à partir du pas 3.

Nous allons maintenant comparer les résultats obtenus avec les chargements uniaxiaux (figure 3.15).

Dans le cas du chargement suivant le petit axe, nous avons un flambage local en mode 1 (une seule cloque).  $G(s)$  est toujours maximum sur le petit axe de l'ellipse, mais sa répartition est plus homogène que précédemment.

Pour l'autre chargement, l'étude des déformées (C) montre plusieurs phases : dans un premier temps un flambage local en mode 1 qui évolue ensuite rapidement vers le mode 3. Il apparait alors des zones de contact entre les plaques (nous n'avons pas encore traité ce phénomène).

On voit très nettement que le chargement suivant le petit axe est de loin le plus délaminant.

Au travers de ces deux exemples, nous voyons que la visualisation de l'évolution de  $G(s)$  au cours du chargement est déjà très riche en informations. Elle permet en effet de comparer de nombreuses formes de fissures et de détecter ainsi les plus délaminantes. On peut également se faire une certaine idée de la façon dont la fissure peut évoluer.



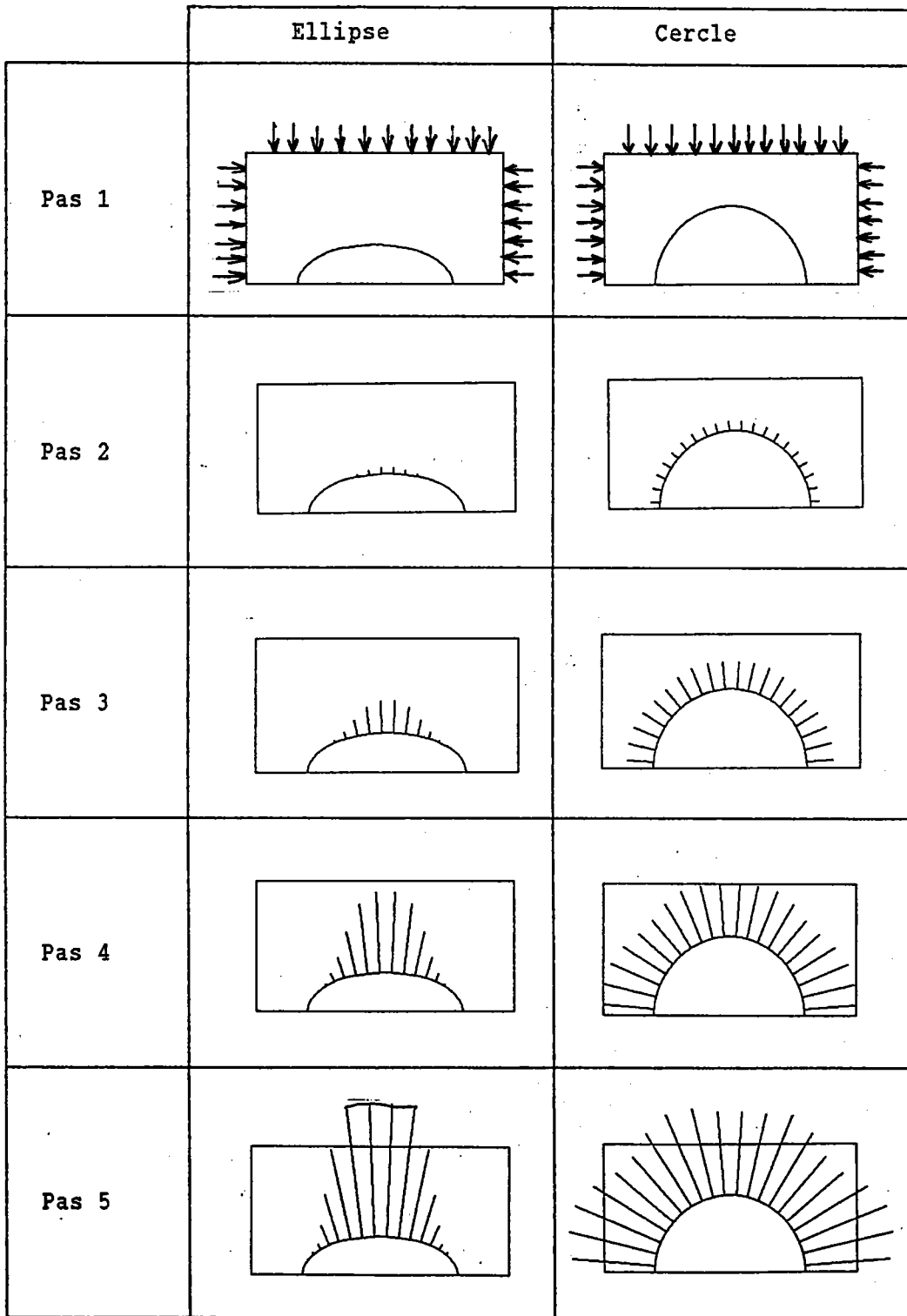


Figure 3.14: Visualisations de  $G(s)$  Chargements biaxés

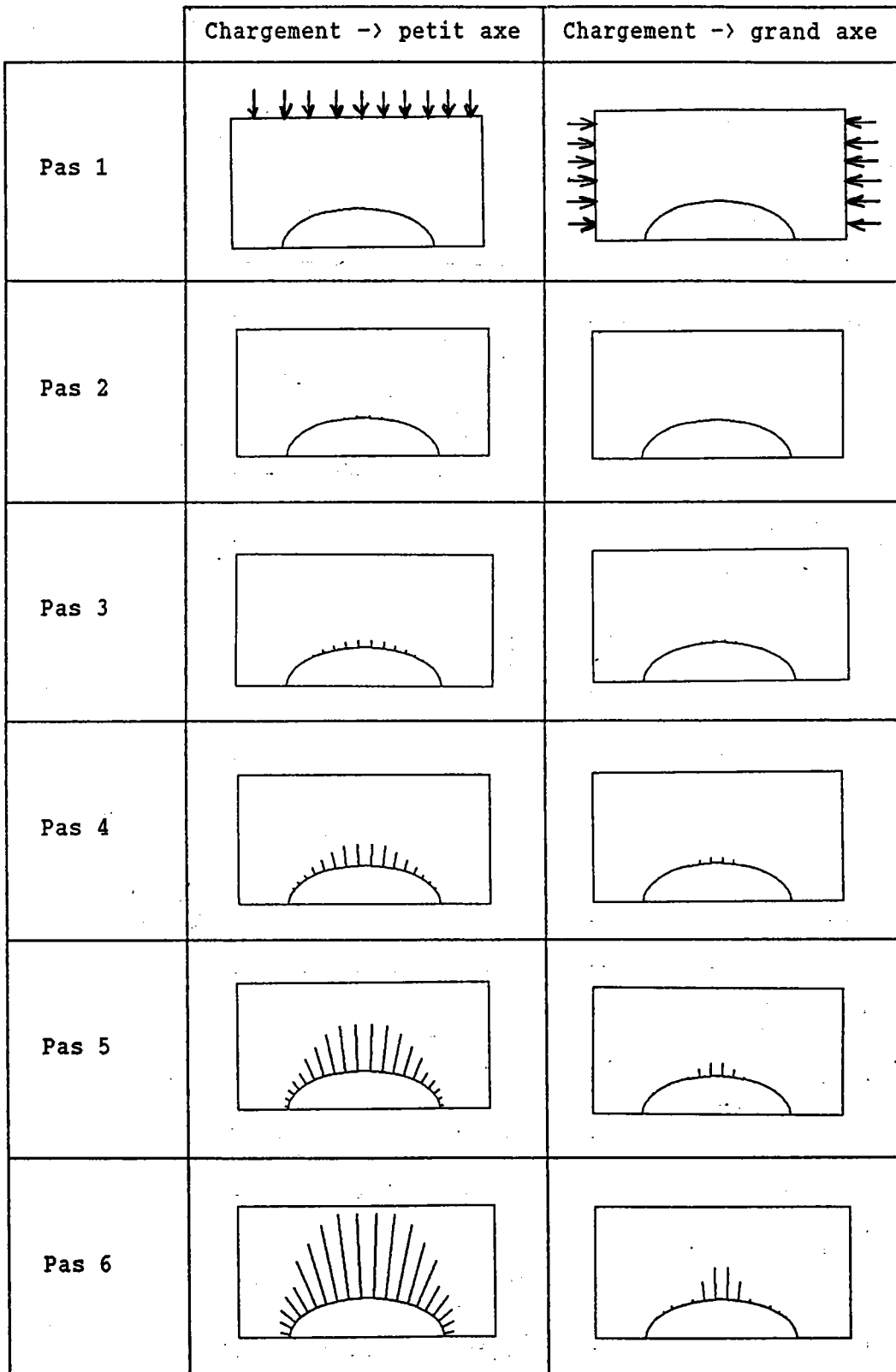


Figure 3.15: Visualisations de  $G(s)$  Chargements uniaxiaux

### 3.5.4 INFLUENCE DE LA PROFONDEUR DE LA FISSURE

Nous avons réalisé une série de calculs pour un délaminage circulaire sous chargement biaxé en faisant varier uniquement la profondeur de la fissure :

- cas I :  $h_1/h = 0,1$
- cas II :  $h_1/h = 0,2$
- cas III :  $h_1/h = 0,3$

Les résultats complets sont donnés en annexe C.

On peut comparer les taux de restitution de l'énergie sur la figure 3.16 . On constate un phénomène analogue à celui observé sur le modèle d'assemblage de poutres (voir 1.8.3) à savoir que les fissures moyennement profondes, ici le cas II sont les plus pénalisantes.

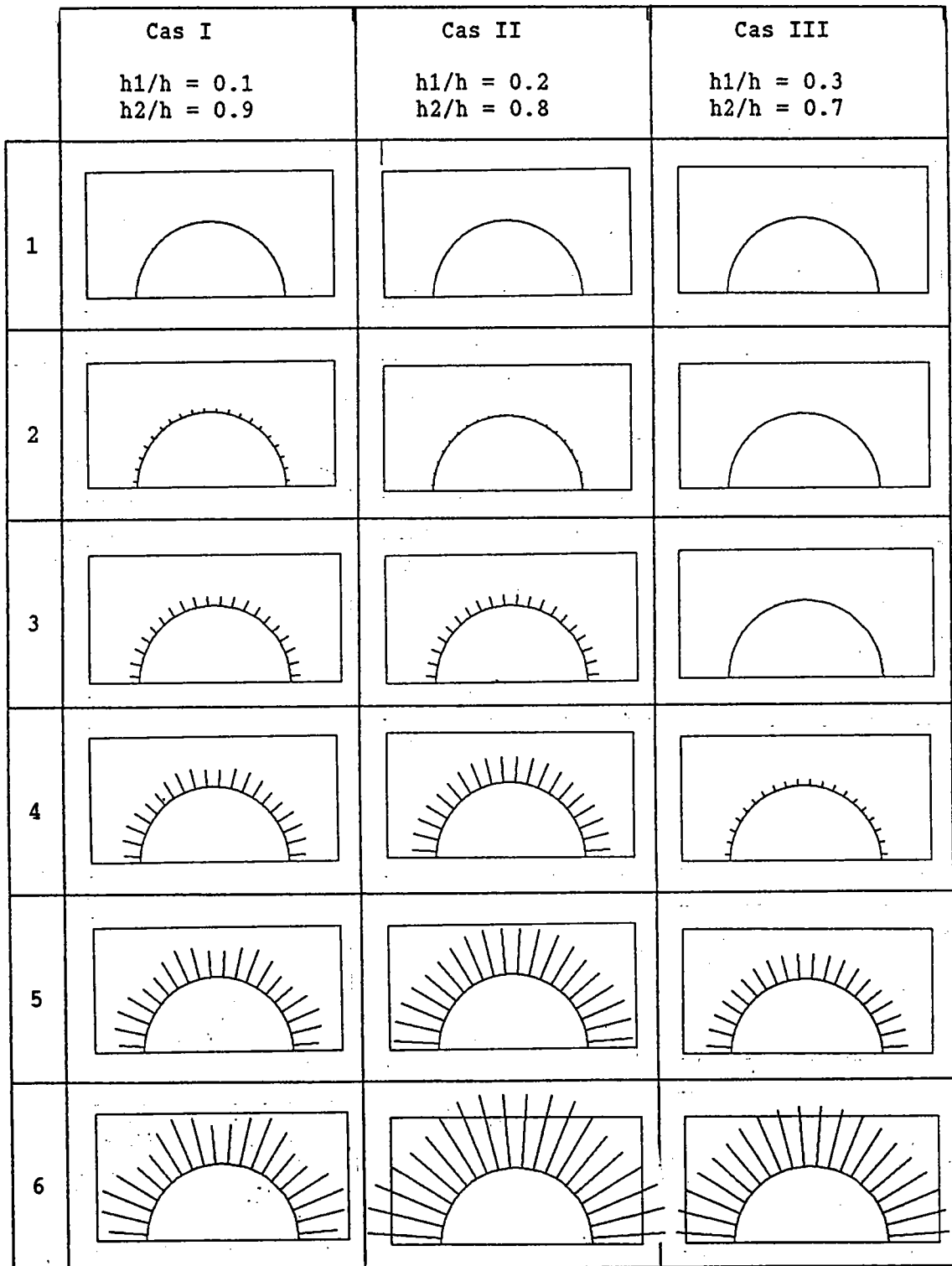


Figure 3.16: Influence de la profondeur de fissure sur  $G(s)$

### 3.5.5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Le modèle numérique d'assemblage de trois plaques de Von Karman présenté ici nous a permis d'étudier le post flambage d'une structure délaminée et de calculer le taux de

restitution de l'énergie local le long du front de fissure.

Nous rappelons ses principales caractéristiques :

- Prise en compte de non linéarités géométriques.
- La forme et la position du délaminage sont quelconques.
- La taille du délaminage doit être grande par rapport à l'épaisseur des plaques
- Les matériaux sont élastiques lineaires. Nous avons réalisé tous nos calculs avec un matériau homogène et isotrope pour valider notre modèle, l'introduction de relations de comportement linéaires plus réalistes, avec notamment des couplages tension-flexion, ne pose pas de difficultés.
- Les problèmes de contact entre les plaques n'ont pas été abordés.

Un tel modèle de flambage avait déjà été présenté sur le plan théorique dans la littérature, mais il n'avait, à notre connaissance, jamais été associé à la méthode des éléments finis.

Nous avons calculé le taux de restitution de l'énergie à l'aide de formules analytiques qui ne dépendent que de la solution locale du modèle de plaque sur le front de fissure. Nos résultats théoriques sont en parfait accord avec des travaux parallèles menés par Storåkers & Andersson (1988). En ce qui concerne l'aspect numérique, notre méthode est très simple à mettre en oeuvre et le calcul de  $G(s)$  à partir de la solution du modèle de plaque est immédiat.

Les travaux présentés dans cette thèse constituent une première étape vers la simulation numérique du post flambage et de la propagation des délaminages.

L'étude devrait être complétée sur les aspect suivants :

- Prise en compte des contacts éventuels entre plaques.
- Mise en oeuvre numérique du collage de deux plaques de Mindlin pour représenter les rotations en fond de fissure. La méthode de calcul du taux de restitution de l'énergie devra notamment être généralisée à ce type d'assemblage.
- Etude théorique et simulation numérique de la propagation de la fissure, en liaison avec des travaux expérimentaux.

## Annexe A

## Bibliographie

- Anquez I. & Nataf F., 1987, "Délaminage d'un barreau composite soumis à une traction uniforme", *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. 6, n° 3, p. 335-350.
- Batoz J.L. - Bathe K.J. & Ho L.W., 1980, "A study of three-node triangular plate bending elements", *International Journal for Numérical Methods in Engineering*, vol. 15, p. 1771-1812.
- Batoz J.L. & Ben Tahar M., 1982, "Evaluation of a new thin plate quadrilateral element", *International Journal for Numérical Methods in Engineering*, vol 18, p. 1655-1677.
- Bergan P.G. & Nygård M.K., 1984, "Finite elements with increased freedom in choosing shape functions", *International Journal for Numérical Methods in Engineering*, vol 20, p. 643-663.
- Bergez D. & Radenkovic D., 1972, "La caractérisation des fissures dans les plaques fléchies et coques", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t 275, p. 221-224.
- Bottega W.J., 1983, "A growth law for propagation of arbitrary shaped delaminations in layered plates", *International Journal of Solids Structures*, vol. 19, N° 11, p. 1009-1017.
- Bottega W.J., 1988, "On thin film delamination growth in a contracting cylinder", *International Journal of Solids Structures*, vol. 24, N° 1, p. 13-26.
- Bottega W.J. & Maewal A., 1983, "Délamination buckling and growth in laminates", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, p. 184-189.
- Brush D.O. & Almroth B.O., 1975, "Buckling of bars, plates and shells", *Mc Graw-Hill Book Compagny*.
- Bui H.D., 1978, *Mécanique le la rupture fragile*, Masson, Paris.

- Chai H. & Babcock C.D., 1985, "Two dimensional modelling of compressive failure in delaminated laminates", *Journal of Composite Materials*, vol. 19, p.67-98.
- Chai H. - Babcock C.D. & Knauss W.G., 1981, "one dimensional modelling of failure in laminated plates by delamination buckling", *International Journal Solids Structures*, vol. 17, N° 11, p. 1069-1083.
- Chatelain & Batoz J.L., 1988, "Flambement et post-flambement de coques minces en matériaux composites avec un élément de coque quadrilatéral plan", *Comptes rendus des 6<sup>èmes</sup> Journées Nationales sur les Composites*, Paris (11-13 octobre), p. 725-738.
- Cochelin B., 1988, "taux de restitution de l'énergie en théorie des poutres", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t 307, Série 2, p. 129-132.
- Cochelin B. & Potier-Ferry M., 1988, "Flambage et délaminage dans les plaques composites stratifiées", *Comptes rendus des 6<sup>èmes</sup> Journées Nationales sur les Composites*, Paris (11-13 octobre), p. 527-538.
- Chrisfield M.A., 1981, "Numerical Analysis of structures", *Developments in Thin-Walled Structure-1*, Ed. Rhodes and Walker, Applied Sciences Publishers Ltd, Chap. 7, p. 235-284.
- Chrisfield M.A., 1983, "An arc-length method including line search and accelerations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, p. 1269-1289.
- Dhatt G. & Touzot G., 1984, *une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine, Paris.
- Destuynder P., 1982, "Sur la propagation des fissures dans les plaques minces en flexion", *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. 1, n° 4, p. 579-594.
- Destuynder P. & Nevers T., 1987, "un modèle de calcul des forces de délaminage dans les plaques minces multicouches", *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. 6, n° 2, p. 179-207.
- Evans A.G. & Hutchinson J.W., 1984, "on the mechanics of delamination and spalling in compressed films", *International Journal of Solids and structures*, vol. 20, n° 5, p. 455-466.

- Germain P. & Muller P., 1973, introduction à la mécanique des milieux continus, Masson, Paris.
- Gol'Denveizer A.L., 1962, "Derivation of an approximate theory of bending of a plate by the method of asymptotic integration of the equations of the theory of elasticity", Prikl. Mat. Mech., 26, p. 668-686. [traduction PMM (1964) p. 1000-1015]
- Kachanov L.M., 1976, "Separation failure of composite materials", Polymer Mechanics., vol. 5, p. 918-922.
- Kanninen M.F., 1973, "An augmented double cantilever beam model for studying crack propagation and arrest", International Journal of Fracture, vol. 9, n° 1, p. 83-92.
- Kim K.S. & Hong C.S., 1986, "Delamination growth in angle-ply laminated composites", Journal of Composite Materials, vol. 20, p. 423-437.
- Nevers T., 1986, "Modélisation théorique et numérique du délaminage des plaques composites", Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Paris (30 mai).
- Nguyen Q.S., 1980, "Méthodes énergétiques en mécanique de la rupture", Journal de Mécanique, vol. 19, n° 2, p. 363-386.
- Potier-Ferry M., 1985, "Foundations of elastic postbuckling theory", Lecture Notes in Physics 288, Springer-Verlag, p. 1-82.
- Potier-Ferry M., 1985, "Toward a catastrophe theory for the mechanics of plasticity and fracture", International Journal of Engineering and Sciences, Vol. 23, NO 8, p. 821-837.
- Ramm E., 1981, "Strategies for tracing the nonlinear response near limite points", Nonlinear FE Analysis in structural mechanics, Springer-Verlag, New York, p. 68-89.
- Rice J.R., 1968, "A path independant integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks", Journal of Applied Mechanics, p. 379-386.
- Riks E., 1972, "The application of Newton's method to the problem of elastic stability", Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, p. 1060-1066.
- Ripling E.J. - Mostovoy S. & Moses R.L., 1964, Mat. Res. Stds., Vol. 4, p. 129.



- Sallam S. & Simitzes G.J., 1985, "Delamination buckling and growth of flat cross-ply laminates", *Composite Structures*, vol. 4, p. 361-381.
- Shivakumar K.N. & Whitcomb J.D., 1985, "Buckling of a sublaminates in a quasi-isotropic composite laminate", *Journal of Composite Materials*, vol. 19, p. 2-18.
- Simitzes G.J. - Sallam S. & Yin W.L., 1985, "Effect of delamination of axially loaded homogeneous laminated plates", *American Institute Aeronautics and Astronautics*, vol 23, p. 1437-1444.
- Simmonds J.G. & Duva J., 1981, "Thickness Effects are minor in the energy-release rate integral for bent plates containing elliptic Holes or Cracks", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 48, p. 320-326.
- Storåkers B. & Andersson B., 1988, "Nonlinear plate theory applied to delamination in composites", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol. 36, N° 6, p. 689-718.
- Storåkers B., 1988, "Non linear aspects of delamination in structural members", *Proceeding of XVIIth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*.
- Wang S.S., "1983, "Fracture mechanics for delamination problems in composite materials", *Journal of Composite Materials*, vol. 17, p. 210-223.
- Wang S.S. - Zahlan N.M. & Suemasu H., 1985, "Compressive stability of delaminated random short-fiber composites", part. I, "Modeling and methods of analysis", part II, "Experimental and analytical results", *Journal of Composite Materials*, vol. 19, p. 296-316 & p. 317-333.
- Wempner G.A., 1971, "Discrete approximations related to nonlinear theories of solids", *International Journal Solids Structures*, vol. 7, p. 1581-1599.
- Whitcomb J.D., 1981, "finite element analysis of instability related delamination growth", *Journal of Composite Materials*, vol. 15, p. 403-426.
- Whitcomb J.D., 1986, "Parametric analytical study of instability-related delamination growth", *Composite Sciences and Technology*, vol. 25, p. 19-48.

- Williams J.G., 1987, "Large displacement and end block effects in the 'DCB' interlaminar test in mode I and II", *Journal of Composite Materials*, vol. 21, p. 330-347.
- Williams J.G., 1988, "On the calculation of energy release rates for cracked laminates", *International Journal of Fracture*, vol. 36, p. 101-119.
- Yin W.L., 1985, "Axisymmetric buckling and growth of a circular delamination in a compressed laminate", *International Journal of Solids Structures*, vol 21, n° 5, p. 503-514.
- Yin W.L., 1988, "The effects of laminated structure on delamination bucking and growth", *Journal of Composite Materials*, vol. 22, n° 6, p.502-517.
- Yin W.L. - Sallam S. & Simitzes G.J., 1986, "Ultimal axial load capacity of a delaminated plate", *American Institute Aeronautics and Astronemics*, vol. 24, p. 123-128.
- Yin W.L. & Wang J.T.S., 1984, "The energy-release rate in the growth of a one-dimensional delamination", *Journal of Applied Mechanics*, vol 51, p. 939-941.
- Zienkiewicz O.C., 1977, *The finite element method*, Mc Graw-Hill, London.





## Annexe B

## Equations adimensionnelles

Pour simplifier les écritures, nous posons :

$$(200) \quad Q_0 = \pi (\beta-1) \sqrt{N}$$

$$(201) \quad Q_1 = \pi \sqrt{N_1}$$

$$(202) \quad Q_2 = \pi \sqrt{N_2}$$

les équations adimensionnelles du problème deviennent :

$$(203) \quad \left[ \beta^2 (1+\alpha\gamma) (1+\gamma)^2 \right] \underline{N} = \underline{N}_1 + \alpha\gamma^3 \underline{N}_2$$

$$(204) \quad (1+\alpha\gamma) (1+\gamma) \underline{A}_0 \cos Q_0 = \left[ \underline{A}_1 \cos Q_1 + Q_1^2 \frac{\gamma}{2\beta^2 (1+\gamma)^2} \right] \\ + \alpha\gamma^2 \left[ \underline{A}_2 \cos Q_2 - Q_2^2 \frac{\gamma}{2\beta^2 (1+\gamma)^2} \right]$$

$$(205) \quad \underline{A}_1 \beta (1+\gamma) \frac{\sin Q_1}{Q_1} = \underline{A}_0 (\beta-1) \frac{\sin Q_0}{Q_0}$$

$$(206) \quad \underline{A}_2 \frac{\beta (1+\gamma)}{\gamma} \frac{\sin Q_2}{Q_2} = \underline{A}_0 (\beta-1) \frac{\sin Q_0}{Q_0}$$

$$(207) \quad \frac{\beta-1}{\beta} \frac{\underline{A}_0 \cos Q_0}{2 Q_0} = \frac{Q_1^2 - \gamma^2 Q_2^2}{12 (1+\gamma)^2 \beta^2} \\ + \frac{\underline{A}_1^2 (1+\gamma)^2 \beta^2}{4 Q_1^2} \left[ 1 - \frac{\sin 2Q_1}{2Q_1} \right] \\ + \frac{\underline{A}_2^2 (1+\gamma)^2 \beta^2}{4 Q_1^2 \gamma^2} \left[ 1 - \frac{\sin 2Q_2}{2Q_2} \right]$$

On pose :

$$(208) \quad \underline{D_1} = \frac{D_1}{h} \quad (209) \quad \underline{D_2} = \frac{D_2}{h} \quad (210) \quad \underline{u_{0a}} = \frac{u_{0a}}{h}$$

Les expressions de  $\underline{D_1}$ ,  $\underline{D_2}$  et  $\underline{u_{0a}}$  sont :

$$(211) \quad \underline{D_1} = \frac{A_0}{\pi^2 N} (1 - \cos Q_0) - \frac{A_1}{Q_1^2} (1+\gamma) \beta^2 (1 - \cos Q_1)$$

$$(212) \quad \underline{D_2} = \frac{A_0}{\pi^2 N} (1 - \cos Q_0) - \frac{A_2}{Q_2^2} \frac{(1+\gamma)}{\gamma} \beta^2 (1 - \cos Q_1)$$

$$(213) \quad \underline{u_1}(a) = \left[ \frac{Q_1^2}{12(1+\gamma)^2 \beta^2} - \frac{A_1^2 (1+\gamma)^2 \beta^2}{4 Q_1^2} \left[ 1 - \frac{\sin 2Q_1}{2Q_1} \right] \right]$$

$$(214) \quad \underline{u_2}(a) = \left[ \frac{Q_2^2 \gamma^2}{12(1+\gamma)^2 \beta^2} - \frac{A_2^2 (1+\gamma)^2 \beta^2}{4 Q_2^2 \gamma^2} \left[ 1 - \frac{\sin 2Q_2}{2Q_2} \right] \right]$$

$$(215) \quad u_{0a} = \frac{\beta}{(1+\gamma)} ( \underline{u_1}(a) + \gamma \underline{u_2}(a) )$$

## Annexe C

## RESULTATS DE CALCULS

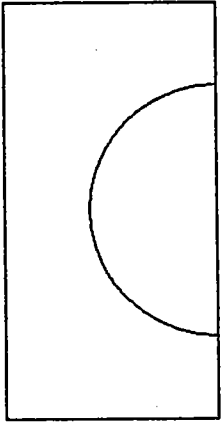
On a regroupé dans les pages ci-après les résultats d'une série de calculs.

- Pour chaque calcul, on a fait 6 pas de chargement.  
Le chargement au n<sup>ième</sup> pas vaut n fois le chargement du premier pas. (pilotage en charge avec un pas constant).
- On adopte  $E = 100\ 000\ \text{MPa}$   $\nu = 0.3$
- On représente une demi-structure. Les déplacements ont été amplifiés 5 fois sur les figures.
- Afin de pouvoir comparer qualitativement ces résultats, on adopte la même norme pour tous les chargements de toutes les figures. Le chargement unité correspond à peu de chose près à la charge de flambage local du délaminage circulaire dans le cas où le rapport des épaisseurs  $h_1/h$  vaut 0.2.
- De même, les taux de restitution de l'énergie sont à la même échelle sur toutes les figures. On note la valeur de  $G_{\text{max}1}$  à chaque pas.

Délaminage CIRCULAIRE 1

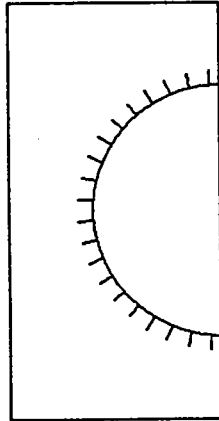
pas 1

$G_{max1} = 0.001$



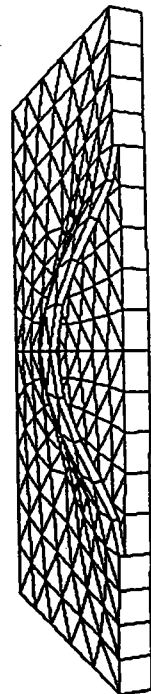
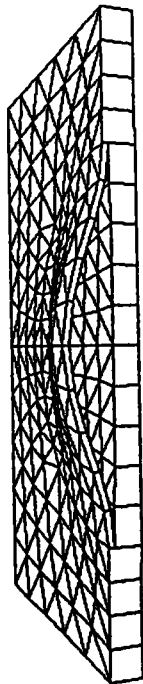
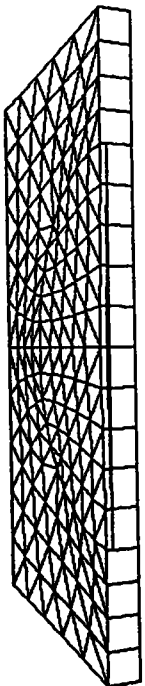
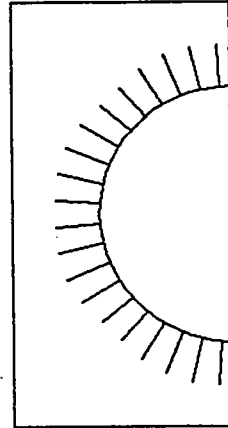
pas 2

$G_{max1} = 0.129$



pas 3

$G_{max1} = 0.364$



Chargement équi biaxé avec  $F_x = F_y = 1$

$(h_1/h) = 0.2$

pas 4

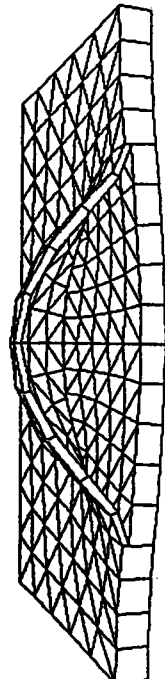
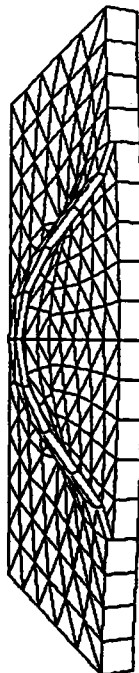
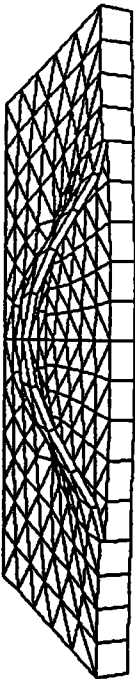
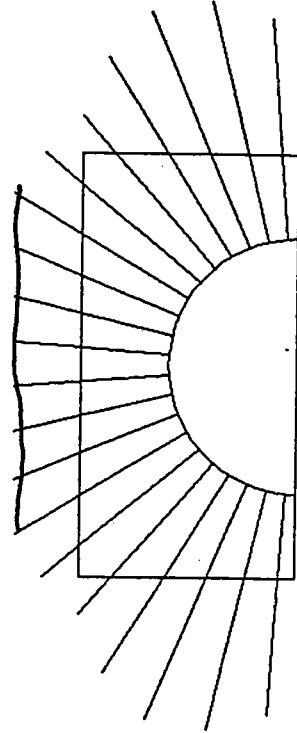
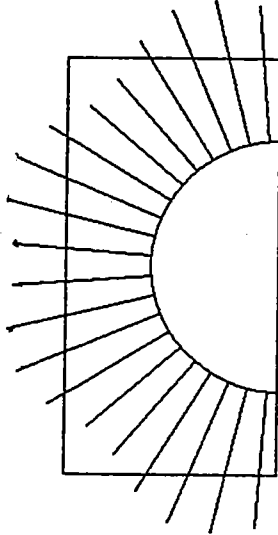
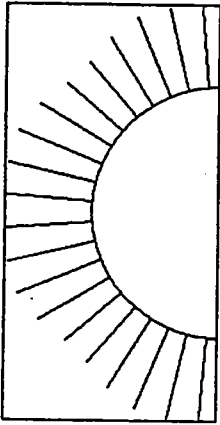
pas 5

pas 6

$G_{max1} = 0.717$

$G_{max1} = 1.206$

$G_{max1} = 1.889$





Délaminage CIRCULAIRE

2

pas 1

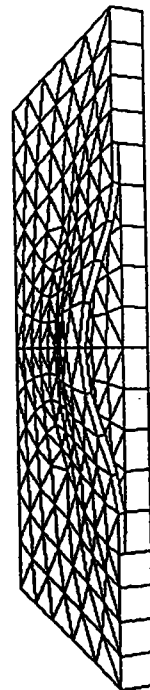
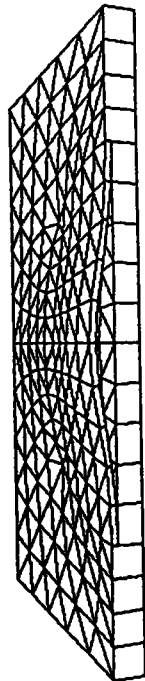
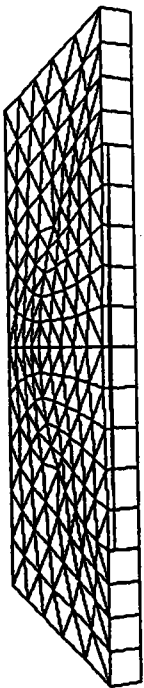
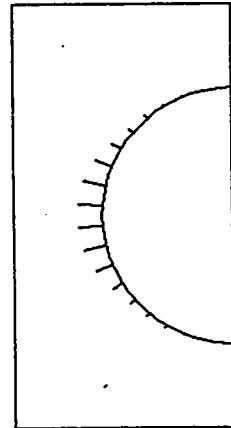
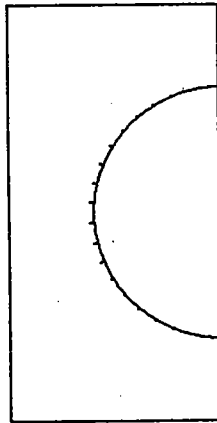
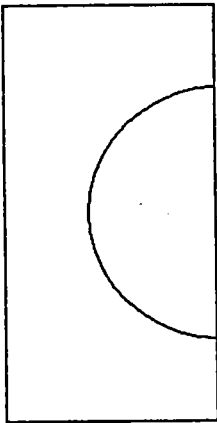
pas 2

pas 3

$G_{maxi} = 0.0004$

$G_{maxi} = 0.039$

$G_{maxi} = 0.203$



Chargement uniaxial avec  $F_x = 1$

$(h_1/h) = 0.2$

pas 4

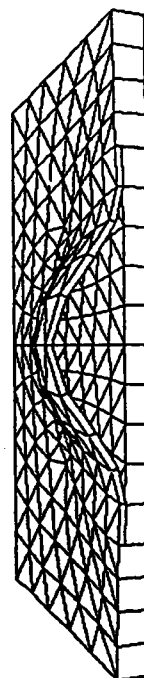
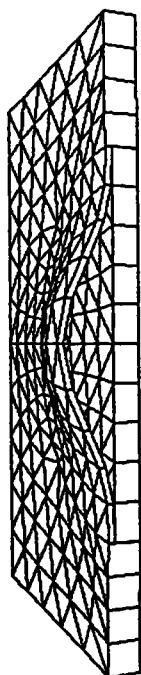
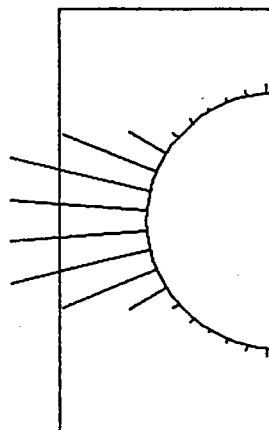
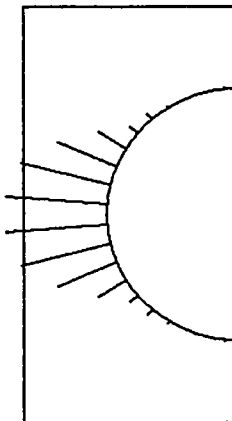
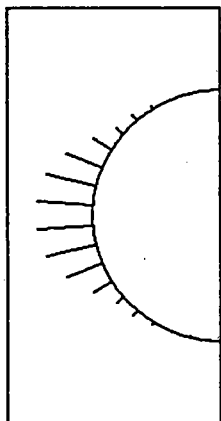
pas 5

pas 6

$G_{max1} = 0.480$

$G_{max1} = 0.899$

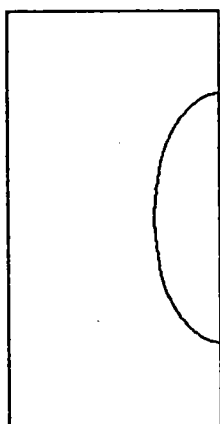
$G_{max1} = 1.450$



Délaminage ELLIPTIQUE 3

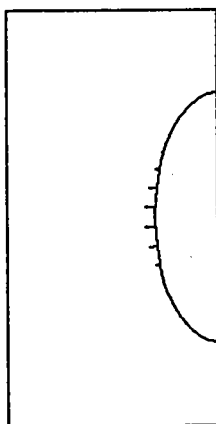
pas 1

$G_{maxi} = 0.004$



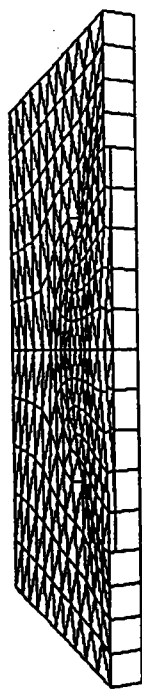
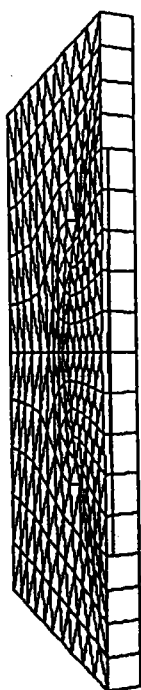
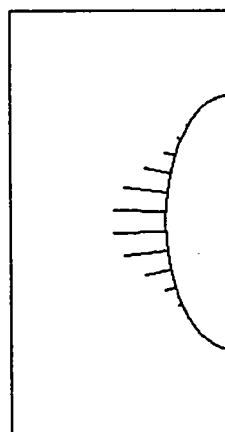
pas 2

$G_{maxi} = 0.088$



pas 3

$G_{maxi} = 0.427$



Chargement équi-biaxé avec  $F_x = F_y = 1$

$(h_1/h) = 0.2$

pas 4

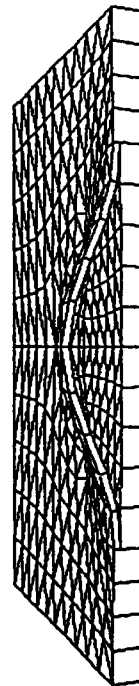
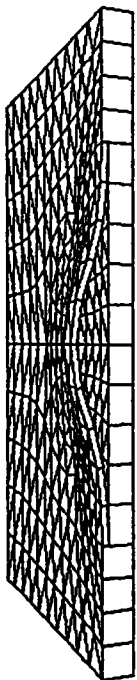
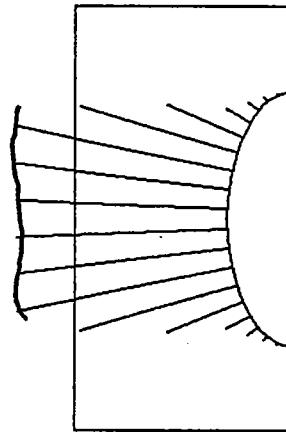
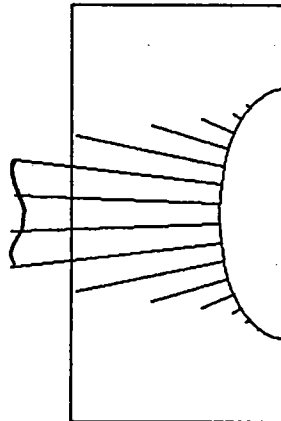
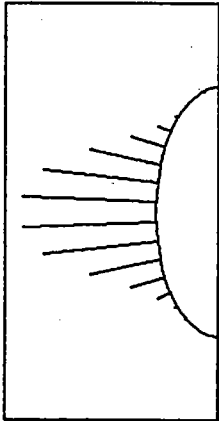
pas 5

pas 6

$G_{max1} = 1.135$

$G_{max1} = 2.089$

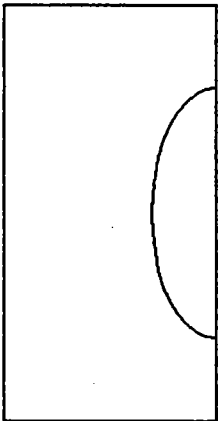
$G_{max1} = 3.210$



Délaminage ELLIPTIQUE 4

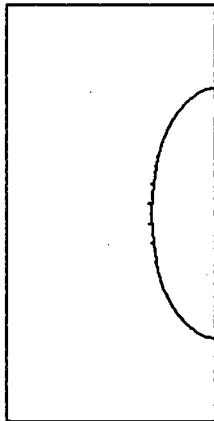
pas 1

$G_{max1} = 0.003$



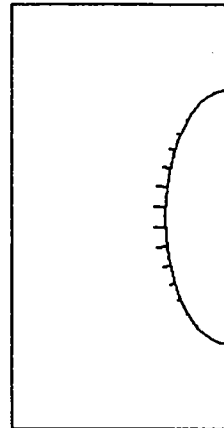
pas 2

$G_{max1} = 0.023$



pas 3

$G_{max1} = 0.093$



Chargement suivant le petit axe avec  $F_y = 1$

$(h_1/h) = 0.2$

pas 4

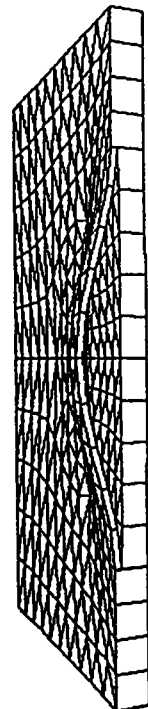
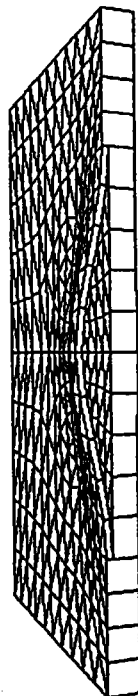
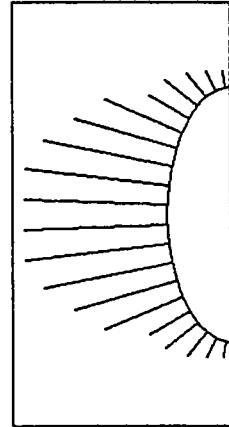
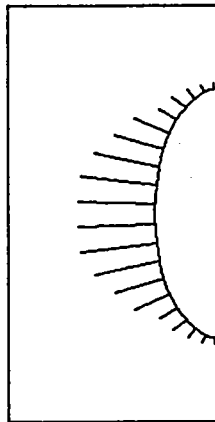
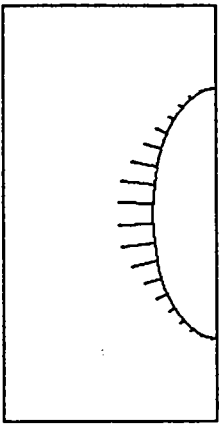
pas 5

pas 6

$G_{max1} = 0.301$

$G_{max1} = 0.678$

$G_{max1} = 1.123$



Délamination ELLIPTIQUE

5

pas 1

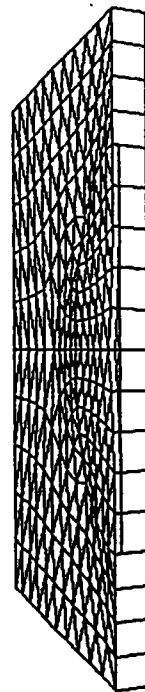
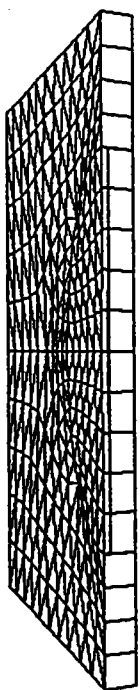
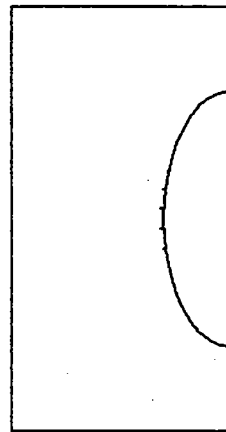
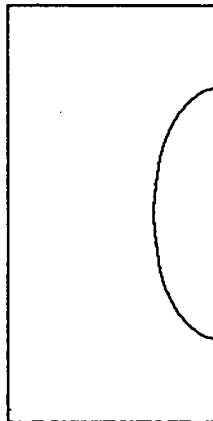
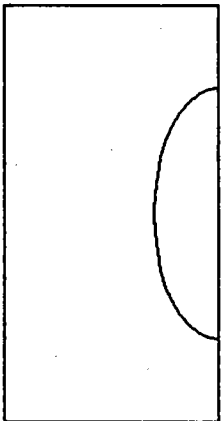
pas 2

pas 3

$G_{max1} = 0.001$

$G_{max1} = 0.008$

$G_{max1} = 0.026$



Chargement suivant le grand axe avec  $F_x = 1$

$(h_1/h) = 0.2$

pas 4

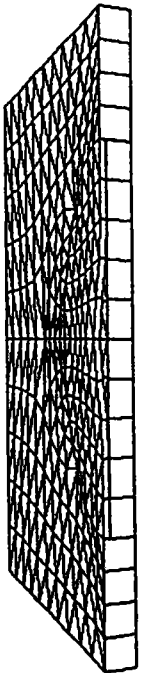
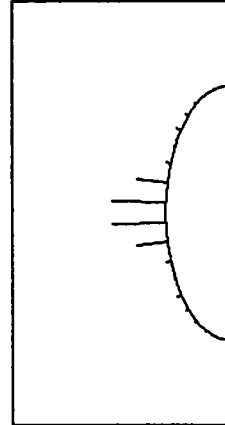
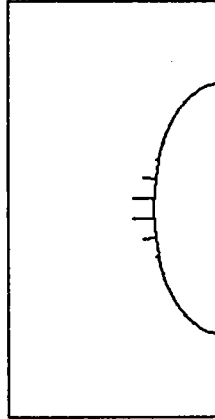
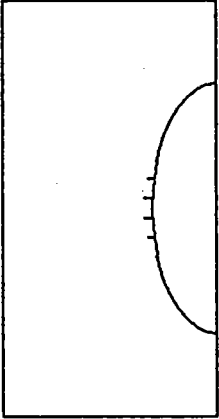
pas 5

pas 6

$G_{maxi} = 0.072$

$G_{maxi} = 0.182$

$G_{maxi} = 0.430$



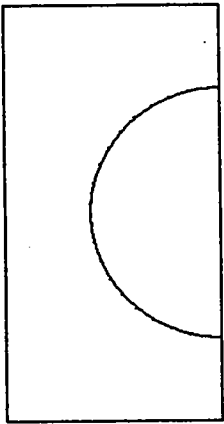


Délaminage CIRCULAIRE

6

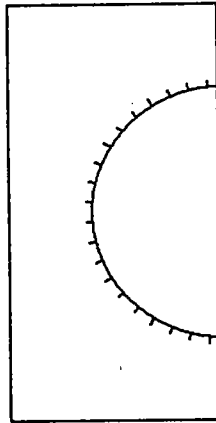
pas 1

$G_{max1} = .$



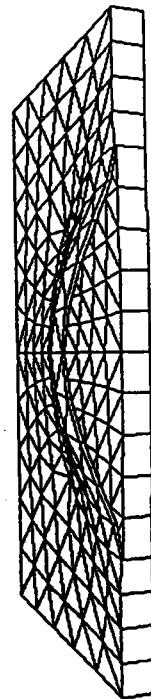
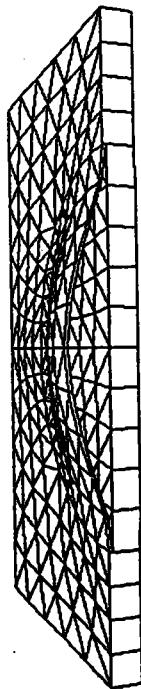
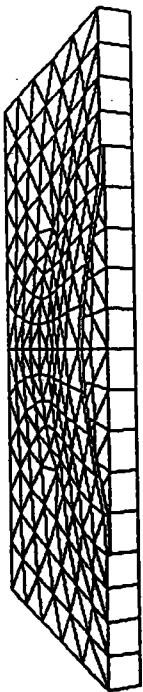
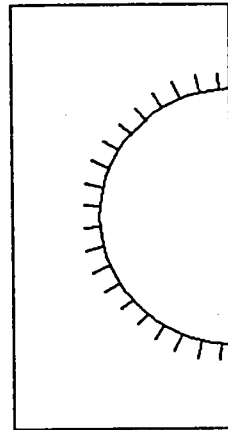
pas 2

$G_{max1} = .$



pas 3

$G_{max1} = .$



Chargement équi-biaxé avec  $F_x = F_y = 0.6$

$(h_1/h) = 0.1$

pas 4

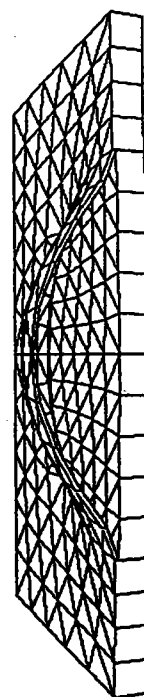
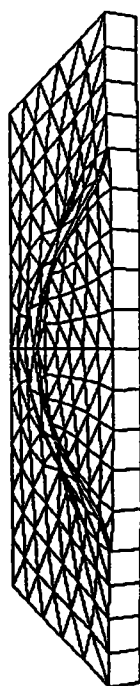
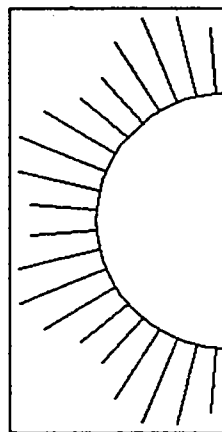
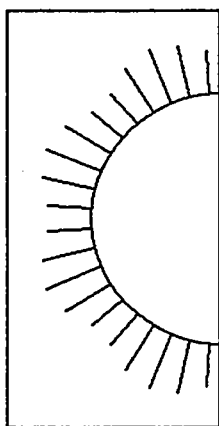
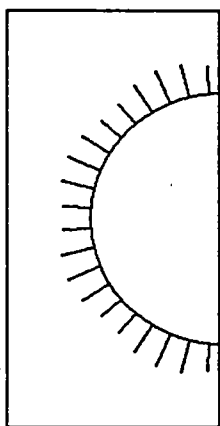
pas 5

pas 6

$G_{max1} = .$

$G_{max1} = .$

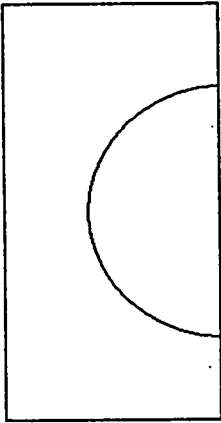
$G_{max1} = .$



Dé laminage CIRCULAIRE 7

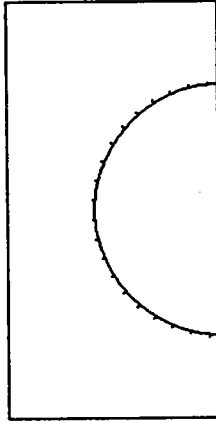
pas 1

$G_{max1} = .$



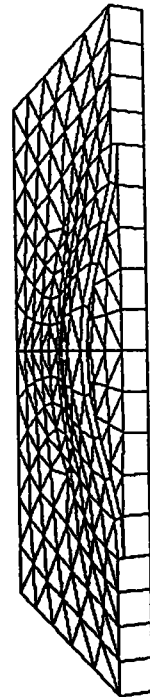
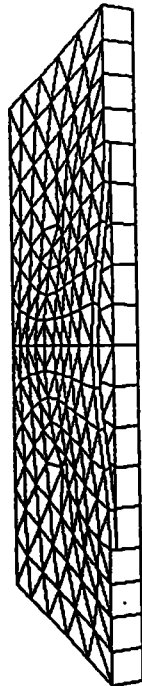
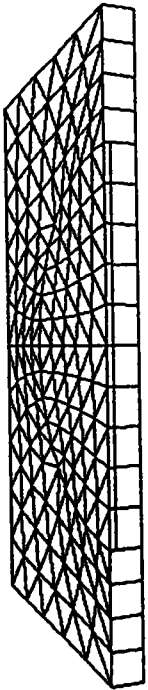
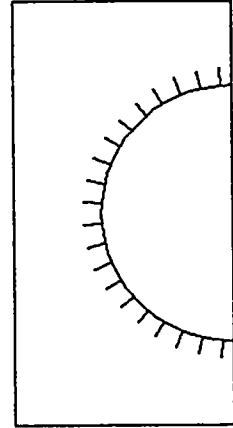
pas 2

$G_{max1} = .$



pas 3

$G_{max1} = .$



Chargement équi-biaxé avec  $F_x = F_y = 0,6$

$(h_1/h) = 0.2$

pas 4

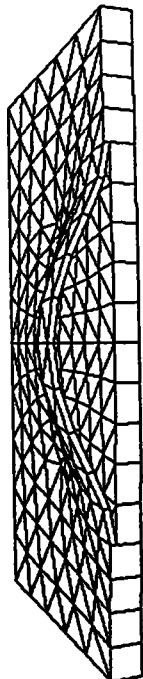
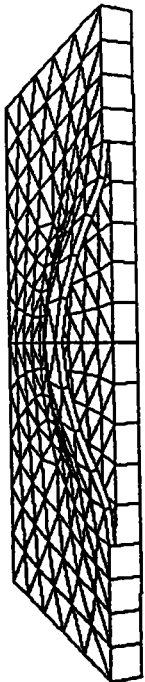
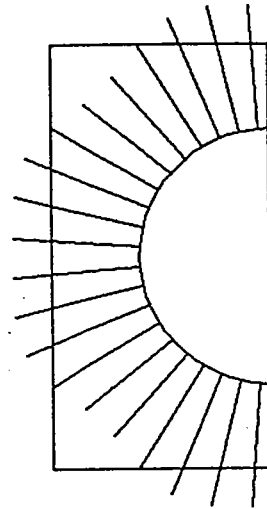
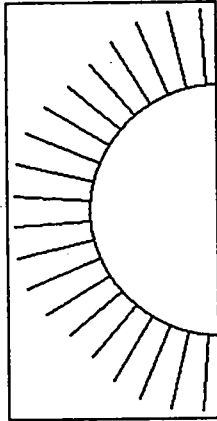
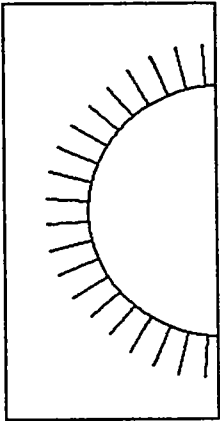
pas 5

pas 6

$G_{max1} = .$

$G_{max1} = .$

$G_{max1} = .$



Délaminage CIRCULAIRE

8

pas 1

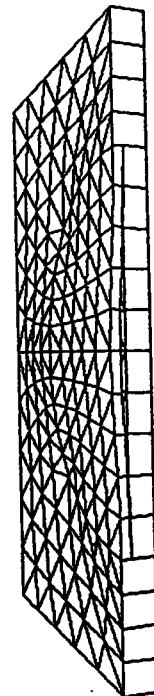
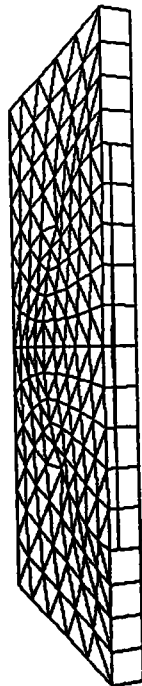
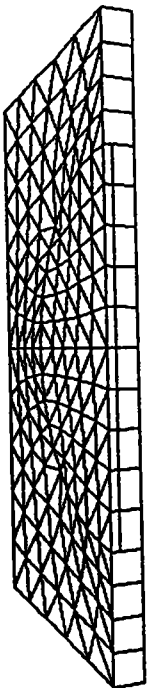
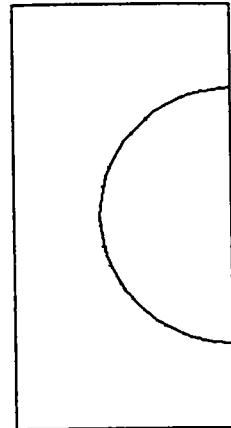
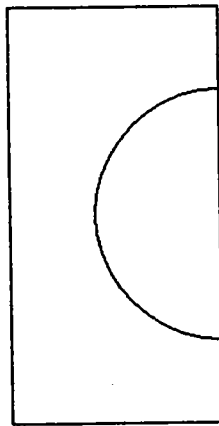
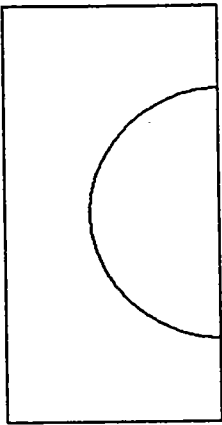
pas 2

pas 3

$G_{max1} = .$

$G_{max1} = .$

$G_{max1} = .$



Chargement équi biaxé avec  $F_x = F_y = 0.6$

$(h_1/h) = 0.3$

pas 4

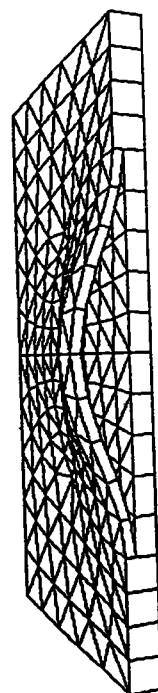
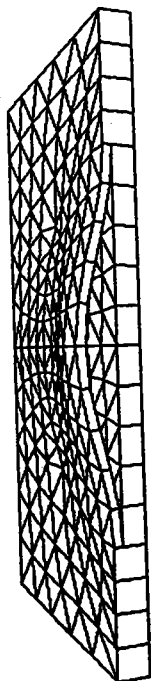
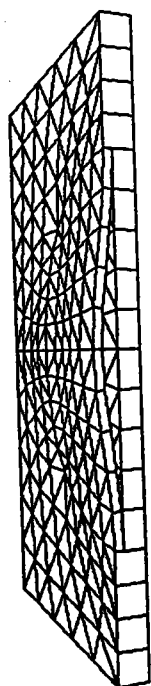
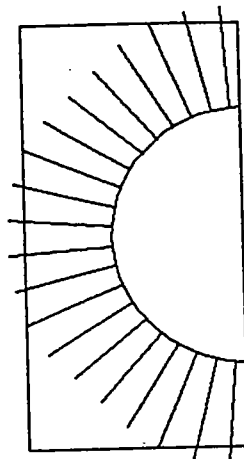
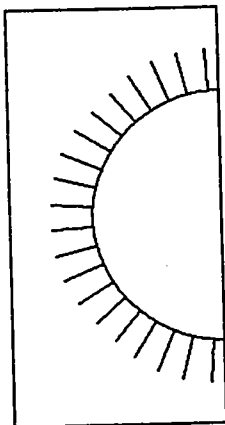
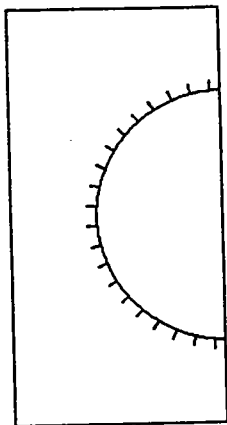
pas 5

pas 6

$G_{max1} = .$

$G_{max1} = .$

$G_{max1} = .$





## Figures

Figure 1: modélisation d'une structure délaminée à l'aide de poutres et de plaques . . . . .	4
Figure 1.1: plaque stratifiée délaminée . . . . .	12
Figure 1.2: l'assemblage de poutres . . . . .	12
Figure 1.3: Courbe CHARGE-DEPLACEMENT : $\alpha = 1$ . . . . .	21
Figure 1.4: Courbe CHARGE-DEPLACEMENT : $\alpha$ variable . . . . .	22
Figure 1.5: Un exemple de suivi de courbe : $\alpha = 1.1$ $\beta = 0.3$ $\gamma = 0.2$ . . . . .	28
Figure 1.6: Taux de restitution en fonction de la charge . . . . .	29
Figure 1.7: Taux de restitution de l'énergie en fonction de la charge $N$ et de la longueur de fissure $\beta$ , pour $\alpha = 1.1$ et $\gamma = 0.2$ . . . . .	30
Figure 1.8: Visualisation des déformées : influence de la profondeur des fissures . . . . .	33
Figure 1.9: Influence de la profondeur de fissure sur $G$ . . . . .	34
Figure 1.10: l'assemblage de poutres . . . . .	36
Figure 1.11: Visualisation de la structure déformée . . . . .	37
Figure 1.12: déplacements en pointe de fissure . . . . .	37
Figure 1.13: modèle de Kanninen (d'après Kanninen (1973)) . . . . .	39
Figure 1.14: assemblage de deux poutres de Mindlin . . . . .	40
Figure 1.15: cinématique des déplacements . . . . .	42
Figure 1.16: courbes $\Gamma_0(x)$ pour $\Gamma_0(0) = \Gamma_1$ et $\Gamma(L) = \Gamma_2$ . . . . .	44
Figure 1.17: courbes $\Gamma_0(x)$ pour $\Gamma_0(0) = 0$ et $B_0(L) = M$ . . . . .	44
Figure 1.18: le problème DCB . . . . .	45
Figure 1.19: flambage local avec rotation en fond de fissure . . . . .	47
Figure 2.1: Fissure transversale des plaques (d'après Bui) . . . . .	50
Figure 2.2: Taux de restitution de l'énergie $G = J$ . . . . .	53
Figure 2.3: Trois coupures encerclent les discontinuités de contraintes . . . . .	53
Figure 2.4: normales extérieures . . . . .	56
Figure 2.5: mode I . . . . .	60
Figure 2.6: mode II . . . . .	60
Figure 2.7: position des coupures . . . . .	61
Figure 2.8: contour $\Gamma$ pour le calcul de l'intégrale de Rice . . . . .	63
Figure 2.9: modèle d'assemblage de plaques . . . . .	66
Figure 2.10: le champ de vitesse normal . . . . .	67
Figure 3.1: assemblage I . . . . .	74
Figure 3.2: assemblage II . . . . .	74
Figure 3.3: un modèle d'assemblage de plaques performant . . . . .	75



Figure 3.4: Le maillage des plaques . . . . .	80
Figure 3.5: Exemple de tests numériques pour le raccord des plaques . . . . .	81
Figure 3.6: Points de calculs de $G(s)$ . . . . .	82
Figure 3.7: géométries de la structure . . . . .	85
Figure 3.8: chargement de la structure . . . . .	85
Figure 3.9: visualisation de $G(s)$ . . . . .	86
Figure 3.10: Délaminage circulaire (d'après Evans & Hutchinson) . . . . .	86
Figure 3.11: Maillage utilisé pour la comparaison (demi structure) . . . . .	87
Figure 3.12: Comparaison Analytique-Numérique . . . . .	87
Figure 3.13: Le maillage fin - le maillage grossier . . . . .	88
Figure 3.14: Visualisations de $G(s)$ Chargements biaxés . . . . .	91
Figure 3.15: Visualisations de $G(s)$ Chargements uniaxiaux . . . . .	93
Figure 3.16: Influence de la profondeur de fissure sur $G(s)$ . . . . .	95