



Comportement thermoélastique global des composites à renforts enrobés : modélisation micromécanique et applications

Mohammed Cherkaoui

► To cite this version:

Mohammed Cherkaoui. Comportement thermoélastique global des composites à renforts enrobés : modélisation micromécanique et applications. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1995. Français. NNT : 1995METZ012S . tel-01776905

HAL Id: tel-01776905

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776905>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

VB 84698

I S G M P

INSTITUT SUPÉRIEUR DE GÉNIE MÉCANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THÈSE

Présentée à



UNIVERSITÉ DE METZ

PAR

Mohammed Cherkaoui

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPÉCIALITÉ : *Sciences de l'Ingénieur*
OPTION : *Génie Mécanique*

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ	
N° inv.	19950225
Cote	SI/M3 95/12
Loc	Magasin

COMPORTEMENT THERMOELASTIQUE GLOBAL DES COMPOSITES A
RENFORTS ENROBES : MODELISATION MICROMECHANIQUE ET
APPLICATIONS

Soutenance prévue le 24 Mars 1995 devant le Jury composé de :

M. BERVEILLER	Université de Metz	Dir. de thèse
G. FANTOZZI	INSA, Lyon	Rapporteur
O. FASSI-FEHRI	ENSET, Rabat	Rapporteur
F. LENE	UPMC, Paris	Examineur
F. SIDOROFF	Ecole Centrale, Lyon	Président
A. VAUTRIN	Ecole des Mines, Saint-Etienne	Rapporteur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux
U. R. associée au C.N.R.S., n° 1215
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Institut supérieur de Génie Mécanique et Productique de Metz sous la direction de Marcel Berveiller.

Ma gratitude et ma reconnaissance s'adressent tout d'abord à Marcel Berveiller qui a accepté de diriger cette thèse. Grâce à son enthousiasme, sa rigueur et son goût passionné pour la recherche scientifique, qu'il a su me faire partager, j'ai trouvé auprès de lui l'aide la plus efficace qui m'a permis de mener à bien cette thèse.

Je tiens à remercier monsieurs les professeurs, G. Fantozzi, O. Fassi-Fehri, F. Léné, F. Sidoroff et A. Vautrin pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de participer à mon jury de thèse.

J'exprime ma gratitude à Hafid Sabar pour son aide durant une grande partie de ma thèse.

Finalement je tiens à remercier tous les membres du laboratoire et tout particulièrement Denis Muller pour ses conseils et sa sympathie.

TABLE DES MATIERES

I - INTRODUCTION.....	4
II - MICROMECHANIQUE DE L'INCLUSION ENROBEE : CAS ELASTIQUE.....	16
1. Introduction.....	16
2. Topologie de l'inclusion enrobée.....	19
3. Equation intégrale.....	19
4. Opérateurs interfaciaux.....	23
5. Application au problème de l'inclusion enrobée.....	26
6. Déformations moyennes dans l'inclusion et l'enrobage.....	28
7. Cas particulier d'une inclusion enrobée sphérique et de matériaux à comportement élastique isotrope.....	37
8. Conclusion.....	48
9. Bibliographie.....	50

III - APPROCHE AUTOCOHERENTE ET APPLICATIONS AUX COMPOSITES.....	52
1. Position du problème.....	52
2. Rappels sur les techniques d'homogénéisation.....	53
3. Approche autocohérente.....	57
4. Cas d'un composite isotrope à inclusions enrobées sphériques : solution analytique.....	60
4.1 - Expression de λ^{eff} et μ^{eff}	63
5. Méthode numérique (cas général).....	65
5.1 - Confrontation des deux méthodes (cas d'un matériau isotrope à renforts enrobés sphériques).....	68
6. Application aux mousses syntactiques.....	70
6.1 - Comparaison avec les résultats théoriques et expérimentaux de Huang et Gibson.....	74
6.2 - Comparaison avec une méthode par éléments finis.....	76
7. Mécanismes de renforcement des réseaux polyépoxy.....	78
7.1 - Renforcement par une phase d'élastomère.....	78
7.2 - Renforcement par des billes de verre.....	79
7.2 - Association des deux modes de renforcement.....	81
8. Cas des fibres longues enrobées.....	83
9. Conclusion.....	87
10. Bibliographie.....	88

IV - EXTENSION DU MODELE PROPOSE	
 AU CAS THERMOELASTIQUE.....	90
1. Introduction.....	90
2. Position du problème.....	91
3. Tenseurs de localisation des déformations.....	93
4. Application.....	101
5. Bibliographie.....	104
CONCLUSION GENERALE.....	105
ANNEXES.....	107
ANNEXE-A.....	107
ANNEXE-B.....	113
ANNEXE-C.....	127
ANNEXE-D.....	130
Bibliographie.....	135

INTRODUCTION

I - INTRODUCTION.

Ces dernières années, les matériaux composites ont pris un essor considérable. Dans l'industrie automobile et aéronautique, le matériau composite permet un gain de poids important tout en ayant des propriétés mécaniques supérieures aux matériaux classiques.

Pour qu'un matériau puisse être qualifié de composite, il doit être constitué d'au moins deux matériaux distincts séparés par une interface bien définie. La liaison des deux constituants s'effectue de manière à ce qu'il y ait un transfert des contraintes de l'un vers l'autre.

Divers paramètres influencent le comportement des matériaux composites:

- le comportement des constituants
- la microstructure
- les interfaces

C'est pour cela, que les spécialistes de la conception peuvent choisir avec une certaine liberté, à la fois la composition et la structure interne des matériaux pour obtenir un comportement donné. Cependant, pour répondre à un cahier des charges bien défini, il est nécessaire de connaître l'influence de chaque paramètre définissant le matériau sur son comportement global. Ceci n'est toutefois possible que sur des bases théoriques solides qui permettent de prévoir l'effet de chaque variable sur les performances du produit.

Comme les matériaux composites sont examinés en tant que matériaux hétérogènes, on peut considérer que les progrès réalisés dans ce domaine sont à

la base du développement des méthodes utilisées.

Pour prendre en compte les phénomènes et les paramètres de la microstructure ainsi discutés, trois démarches peuvent être envisagées :

- L'approche phénoménologique qui ne tient pas compte explicitement de la microstructure et identifie les paramètres d'une loi standard classique à partir d'essais macroscopiques usuels [1].

- L'approche très physique se contente très souvent d'analyser des phénomènes locaux (cohésion de l'interface, évaluation des contraintes internes à l'interface fibre-matrice par l'intermédiaire de la physique des dislocations [2]).

- Une autre approche consiste à ne pas décrire le matériau à partir de considérations macroscopiques, mais à décrire son comportement global à partir du comportement local et de sa microstructure. Ce type d'approche, plus riche que les précédentes, évite le recours systématique à l'identification de paramètres macroscopiques et peut permettre, en plus d'une meilleure description du comportement pour une microstructure donnée, de résoudre les problèmes inverses d'optimisation de la microstructure pour obtenir un comportement macroscopique donné. Ainsi, grâce à l'étude de l'hétérogénéité élémentaire faite par Eshelby [3], qui a permis d'illustrer l'importance des phénomènes de concentration de contraintes d'origine élastique, thermique et plastique, et au-delà des modèles simples de Voigt [4], Reuss [5] et Hill [6], se sont développées des méthodes statistiques systématiques qui font intervenir l'ensemble des fonctions de corrélations des constantes élastiques des constituants [7]. Des méthodes intermédiaires ont été développées par Kröner [8], Berveiller et Zaoui [9]. Ces méthodes fournissent des résultats exacts dans

le cas de matériaux parfaitement désordonnés ; elles sont la base des modèles autocohérents. Des développements plus récents ont cherché à mieux décrire les interactions entre inclusions par l'intermédiaire de la solution du problème de la paire d'inclusions par Fassi-Fehri [10], ou par l'intermédiaire du modèle à trois phases introduit par Christensen et Lo [11] et développé par Hervé et Zaoui [12].

La démarche ainsi que les problèmes sont maintenant bien cernés. Les recherches actuelles ont été dirigées surtout pour l'amélioration de la performance des matériaux composites. Ceci, en augmentant leur résistance à l'impact et à la fissuration. Dans ce cadre, plusieurs travaux ont montré que la maîtrise des propriétés et de la microstructure de l'interface renfort-matrice permet de mieux comprendre et prédire le comportement des composites, et par voie de conséquence, améliorer leur performance [13-16]. En effet les propriétés de l'interface sont de la plus haute importance : c'est par elle que les contraintes mécaniques sont transmises de la matrice aux renforts ; en plus, elle est le siège des défauts et des endommagements dans les matériaux composites (glissement interfacial, empilement de dislocations, fissuration, etc.). Citons, en particulier, les travaux de Jianmin Qu [17], qui a montré l'effet d'une liaison imparfaite entre les inclusions et la matrice sur le comportement élastique global des composites ; il a modélisé la liaison imparfaite par un glissement entre l'inclusion et la matrice qui se traduit par une discontinuité du vecteur déplacement au passage de l'interface inclusion-matrice. Les propriétés effectives du composite ont été déterminées par l'intermédiaire du modèle de Mori-Tanaka [18].

Dans le présent travail, on s'intéresse au cas où ces interfaces sont constituées par des interphases à épaisseur faible par rapport aux dimensions

caractéristiques des renforts et dont les propriétés thermomécaniques sont différentes de celles des inclusions et de la matrice. La présence de cette interphase interfaciale modifie profondément les mécanismes de transfert de charges entre inclusions et matrice et affecte à la fois les propriétés thermomécaniques macroscopiques et les concentrations des contraintes. De ce fait, elle joue un rôle fondamental dans les problèmes d'optimisation de la microstructure des matériaux composites.

Durant les procédés de mise en oeuvre d'un matériau composite, plusieurs facteurs peuvent contribuer à la formation d'une interphase. En effet, la plupart des matériaux composites peuvent être considérés comme des milieux chimiquement non équilibrés dans lesquels existe un gradient de potentiel chimique de la fibre à la matrice. Cette différence de potentiel est l'élément moteur pour les phénomènes de diffusion et les réactions chimiques quand le composite est utilisé à de très hautes températures (en service ou pendant la fabrication). Les réactions chimiques prenant naissance à l'interface sont à l'origine de la formation des interphases. Cependant, la formation d'une interphase n'est pas uniquement limitée aux conséquences de la mise en oeuvre des matériaux composites. Une interphase peut être introduite systématiquement lorsque les renforts subissent un traitement de surface (dit ensimage) qui les rend aptes à établir de solides liaisons avec la matrice dans laquelle ils sont noyés.

A l'opposé des matériaux techniques traditionnels, le matériau composite doit, par ses propriétés, s'adapter aux exigences de conception alors qu'habituellement celle-ci se trouve adaptée aux possibilités des matériaux. C'est pourquoi, une interphase, à propriétés bien choisies (épaisseur, constantes élastiques, coefficients de dilatation thermique), peut être introduite

délibérément afin d'optimiser le comportement macroscopique pour une application bien déterminée du composite. C'est dans cette optique que différentes études ont été menées [19, 20], et qui ont montré que l'introduction d'une interphase permet d'atteindre un compromis acceptable entre la rigidité et la résistance à la fissuration et à l'impact du composite. C'est le cas, par exemple, des travaux effectués par Amdouni et al. [21] sur les matériaux composites à matrice époxy renforcée par des microbilles de verre. Ces travaux ont montré que l'enrobage des billes de verre par une phase d'élastomère (inclusion à bas module), améliore la ténacité du composite sans nuire à ses propriétés thermoélastiques.

L'étude micromécanique des composites, contenant une interphase (ou enrobage), a suscité un grand intérêt chez de nombreux chercheurs durant les dernières années. Ainsi, différents modèles ont été mis en oeuvre afin de montrer l'effet de l'enrobage sur le comportement thermoélastique global des composites, ainsi que sur les concentrations des contraintes dans chacune des phases. En utilisant le modèle des assemblages des cylindres composites, introduit en premier lieu par Hashin et Rosen [22], Pagano et Tando [23] ont étudié l'évolution du champ de contraintes dans les fibres, la matrice et l'enrobage en fonction de l'épaisseur, du module d'Young et du coefficient de dilatation thermique de l'enrobage. Dans le même but, Benveniste et al. [24] ont proposé un modèle micromécanique basé sur la méthode de Mori-Tanaka [18] modifiée par l'introduction du modèle des assemblages des cylindres composites. Hervé et Zaoui [10] ont utilisé le schéma à trois phases de Christensen et Lo [9] pour résoudre le problème micromécanique d'une inclusion enrobée sphérique isotrope située dans un milieu infini. Jayaraman et al. [25] ont étendu le modèle de Benveniste et al. au cas où l'interphase possède un comportement hétérogène. Récemment, Jasiuk et Kouider [26] ont étudié

l'effet d'une interphase hétérogène sur le comportement élastique global des composites à fibres unidirectionnelles qui présentent une anisotropie dans le comportement global. Les propriétés effectives du composites ont été évaluées en utilisant à la fois le modèle d'Hashin et Rosen et celui de Christensen et Lo. On voit clairement que les différents modèles sont basés essentiellement sur le modèle des assemblages des cylindres composites (Hashin et Rosen) ou sur le schéma à trois phases de Christensen et Lo, d'où leur restriction aux cas d'inclusions enrobées sphériques avec un comportement isotrope ou éventuellement des assemblages cylindriques qui présentent un comportement isotrope transverse.

Le présent travail consiste en une approche nouvelle du problème d'inclusions enrobées de forme ellipsoïdale et de matériaux anisotropes à partir d'une démarche micromécanique utilisant simultanément l'équation intégrale et les opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides [27, 28].

Le chapitre II est consacré à la résolution du problème d'une inclusion enrobée ellipsoïdale en interaction avec un milieu homogène infini de référence. L'étude est restreinte au cas des matériaux à comportement élastique linéaire et ne présentant pas de discontinuités du vecteur déplacement et du vecteur contrainte aux interfaces. L'épaisseur Δa de l'enrobage est supposée petite ($\Delta a/a \ll 1$) devant les dimensions caractéristiques a de l'inclusion. La définition des propriétés effectives de l'élément de volume représentatif ne faisant intervenir que les tenseurs de localisation moyens dans l'inclusion et l'enrobage, les déformations moyennes dans l'enrobage sont calculées à partir de l'hypothèse d'un champ uniforme selon l'épaisseur de l'enrobage en utilisant le champ moyen dans l'inclusion. Les équations sont développées dans le cas

général de matériaux anisotropes et d'inclusions enrobées ellipsoïdales avec une géométrie non homothétique. Elles sont particularisées au cas de matériaux isotropes et une inclusion enrobée sphérique pour lesquels des solutions analytiques sont connues. Contrairement à ce qui été admis par Walpole [29], la déformation dans l'inclusion est perturbée par la présence de l'enrobage : le champ est non uniforme et sa valeur moyenne dans l'inclusion est différente de celle déduite du calcul d'Eshelby.

En effet, si E désigne la déformation imposée à l'infini et ε^I la déformation moyenne dans l'inclusion, la formule classique d'Eshelby

$$\varepsilon^I = E - T^I(C^0) (C^I - C^0) \varepsilon^I$$

est modifiée par des termes additionnels faisant intervenir les propriétés de l'enrobage et la forme de l'inclusion enrobée au travers uniquement des termes $(C^I - C^0)$, $(C^c - C^0)$, $(C^I - C^c)$ et les tenseurs $T^I(C^*)$ et $T^2(C^*)$ qui désignent l'intégrale du tenseur de Green modifié pour l'inclusion et l'inclusion enrobée calculés par rapport à un milieu de référence de propriétés C^* (*= o ou c). (C^I , C^c et C^0 désignent les constantes élastiques de l'inclusion, de l'enrobage et du milieu infini respectivement).

Ainsi, le formalisme de l'inclusion enrobée permet une extension des résultats classiques d'Eshelby au cas où une interphase est présente entre l'inclusion et le milieu infini. Les relations de localisation des parties sphérique et déviatorique données par Eshelby dans le cas d'une inclusion sphérique et de matériaux isotropes

$$\varepsilon_{kk}^I = \frac{k^0}{k^0 + \alpha^0(k^I - k^0)} E_{kk}$$

$$\varepsilon_{ij}^{Id} = \frac{\mu^0}{\mu^0 + \beta^0(\mu^I - \mu^0)} E_{ij}^d$$

deviennent dans le cas d'une inclusion enrobée

$$\varepsilon_{kk}^I = \frac{k^0}{k^0 + \alpha^0(k^I - k^0) + \frac{1-q}{q} \left\{ \frac{\alpha^c k^0(1-\alpha^0) - \alpha^0 k^c(1-\alpha^c)}{k^c} \right\} (k^I - k^c)} E_{kk}$$

$$\varepsilon_{ij}^{Id} = \frac{\mu^0}{\mu^0 + \beta^0(\mu^I - \mu^0) + \frac{1-q}{q} \left\{ \frac{\beta^c \mu^0(1-\beta^0) - \beta^0 \mu^c(1-\beta^c)}{\mu^c} \right\} (\mu^I - \mu^c)} E_{ij}^d$$

Ces expressions analytiques représentent dans le cas particulier où elles sont écrites ici, la contribution originale de notre travail traduisant ainsi une extension des résultats classiques d'Eshelby.

Dans le chapitre III, on rappelle sommairement les techniques classiques d'homogénéisation qui permettent d'exprimer le comportement élastique global d'un composite en fonction du comportement de ses constituants et des tenseurs de localisation des déformations. Dans notre cas, les équations font apparaître les tenseurs de localisation de l'inclusion et de l'enrobage. Ces tenseurs sont déterminés à partir des résultats du chapitre II et ceci en utilisant une approximation autocohérente qui tient compte des interactions entre

inclusions enrobées. L'application du modèle proposé au cas de matériaux réels fournit des résultats en bon accord avec des mesures expérimentales, aussi bien qu'avec des résultats déduits à partir d'autres approches.

Une extension du modèle au cas thermoélastique est proposée au chapitre IV.

Pour ne pas trop alourdir le texte principal de calculs et de formules trop complexes, les différentes techniques de calcul sont développées dans les annexes A et B. L'annexe C est consacrée à une comparaison avec le problème d'inclusion à frontière mobile [30]. Dans l'annexe D on propose une autre méthode de calcul des propriétés effectives par l'intermédiaire du modèle de Mori-Tanaka.

Bibliographie.

- [1] LEMAITRE J., "Modèles rhéologiques et lois d'écoulement", *Ecole d'Ete de Métallurgie Physique de Villars-sur-ollon*, édition du CNRS septembre (1975).
- [2] NEUMANN P. - HAASEN P., "Work-hardening theory of fibre reinforced composites", *Institut für metallphysik, universität Gottingen, Germany*, Septembre 1970, pp 285-291.
- [3] ESHELBY J. D., "Elastic inclusions and inhomogeneities", *Prog. in Solid Mech.* - Amsterdam (1961).
- [4] VOIGT W., "Über die beziehung zurischen den beiden elastizitäts konstanten isotroper körper", *Wied, Ann*, Vol. 38, (1889).
- [5] REUSS A., "Berechnung der fliessgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung f'r einkristall", *Z. Ang. Math. Mech.*, Vol. 9, (1929).
- [6] HILL R., "Continuum micro-mechanisms of elastoplastic polycrystals", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 13, (1965).
- [7] KRÖNER E., "Graded and perfect disordered in random media elasticity", *J. Engng. Mech. Division*, Vol. EM5, (1980).
- [8] KRÖNER E., "Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalles aus den konstanten des einkristalls", *Z. Phys.*, Vol. 157, (1958).
- [9] BERVEILLER M. - ZAOUÏ A. "Méthodes self-consistantes en mécanique des solides hétérogènes", *15e colloque du groupe français de rhéologie. Comportement rhéologique des matériaux*, (1980), pp 175-199.
- [10] BERVEILLER M. - FASSI-FEHRI O. - HIHI A., "The problem of two plastic and heterogeneous inclusions", *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 25, (1987).
- [11] CHRISTENSEN R. M. - LO K. H., "Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models" *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 27, (1979).

- [12] HERVE E. - ZAOUI A., "Modelling the effective behavior of nonlinear matrix-inclusion composites", *Eur. J. Mech. (A)* Vol. 9,(1990).
- [13] BENVENISTE Y., "The effective mechanical behavior of composite materials with imperfect contact between the constituents", *Mech. of Mater.*, Vol. 4, (1985).
- [14] STEIF P. S. - DOLLAR A., "Longitudinal shearing of a weakly bonded fiber composite", *ASME, J. App. Mech.*, Vol. 55, (1988).
- [15] PAGANO N. J. - TANDON G. P., "Modeling of imperfect bonding in fiber reinforced brittle matrix composites", *Mech. Mater.*, Vol. 9, (1990).
- [16] HASHIN Z., "Thermoelastic properties of particulate composite with imperfect interface", *J. Mech. phys. Solids* ,Vol. 39, (1991).
- [17] QU J., "The effect of slightly weakened interfaces on the overall elastic properties of composite materials", *Mech. of Mater.*, Vol. 14, (1993).
- [18] MORI T. - TANAKA K., "Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions", *Act. Metall.*, Vol. 21, (1973).
- [19] PAVAN A. - RICCO T., "Thermal stresses in rubber-modified glassy polymers", *J. Appl. Polym. Sci.*, Vol. 31, (1979).
- [20] MATONIS V. A. - SMALL N. C., "A macroscopic analysis of composites containing layered spherical inclusions", *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 9, (1969).
- [21] AMDOUNI N. - SAUTEREAU H. - GERARD J.F., "Epoxy composites based on glass beads", *J. App. Plym. Sci.*, Vol. 46, (1992).
- [22] HASHIN Z. - ROSEN B.W., "The elastic moduli of fiber reinforced composites", *J. Appl. Mech.*, Vol. 31, (1964).
- [23] PAGANO N. J. - TANDON G. P., "Thermo-elastic model for multidirectional coated fiber composites : traction formulation", *Comp. Sci. Techn.*, Vol. 31, (1990).
- [24] BENVENISTE Y. - DVORAK G. J. - CHEN T. , "Stress fields in composites with coated inclusions", *Mech. Mater.*, Vol. 7, (1989).

- [25] JAYARAMAN K. - GAO Z. - REIFSNIDER K. L., "*Stress fields in continuous fiber composites with interphasial property gradients*", *Proc. Technical Conf. of the American Society for Composites*, Technomic, Lancaster, p. 759, (1991).
- [26] JASIUK I. - KOUIDER M.W., "*The effect of an inhomogeneous interphase on the elastic constants of transversely isotropic composites*", *Mech. of Mater.*, Vol. 15, (1993).
- [27] WALPOLE L.J., "*The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium*" *Proc. Roy. Soc.*, (1967).
- [28] HILL R., "*Interfacial Operators in the mechanics of composite media*". *J. Mech. Phys. Solids* Vol. 31, (1983).
- [29] WALPOLE J., "*A coated inclusion in an elastic medium*", *Math. Proc. Camb. Vol.* 83, (1977).
- [30] SABAR H. - BUISSON M. - BERVEILLER M., "*The inhomogeneous and plastic inclusion problem with moving boundary*", *Int. J. Plast.*, Vol. 7, (1991).

CHAPITRE II

II - MICROMECHANIQUE DE L'INCLUSION ENROBEE : CAS ELASTIQUE.

1. Introduction.

De nombreux problèmes de mécanique des solides ou de mécanique des matériaux sont résolus par les méthodes autocohérentes, qui consistent à déterminer les lois de comportement macroscopiques des solides à partir des mécanismes physiques de déformation, à l'échelle microscopique, et de la microstructure (souvent représentée par des inclusions et une matrice) [1-5].

Appliquée aux composites, la méthode autocohérente présente une facilité de mise en oeuvre (de point de vue modélisation et temps de calcul) et une bonne évaluation du comportement effectif global des matériaux. En général, on passe par deux grandes étapes pour l'application de la méthode autocohérente :

- Détermination des relations entre champs locaux et conditions imposées à la frontière ; c'est la phase de localisation.
- Opérations de moyenne et détermination du comportement effectif ; c'est la phase d'homogénéisation.

La résolution du problème de localisation, dans le cadre de la méthode autocohérente, est basée essentiellement sur la résolution du problème élémentaire de l'inclusion, introduit en premier lieu par Eshelby dans le cas de l'inclusion plastique et inhomogène [6] et adapté, par la suite, aux divers problèmes de la mécanique par la résolution d'une équation intégrale à partir des fonctions de Green correspondant à un milieu homogène infini de

référence [6-8]. Ainsi, le problème d'inclusion constitue un problème de base en mécanique des milieux hétérogènes, puisqu'il concerne la situation élémentaire d'hétérogénéité entre une zone donnée (l'inclusion) et son environnement (la matrice). De même, il permet de déduire le comportement du matériau dans le cas dilué où les interactions entre inclusions sont négligées.

On se propose dans ce chapitre d'adapter le problème d'inclusion pour résoudre le problème de localisation d'un composite à renforts enrobés. Dans ce cas, l'hétérogénéité sera décrite par deux inclusions ellipsoïdales concentriques mais *non homothétiques* définissant l'inclusion I et son enrobage c . La démarche micromécanique mise en oeuvre est basée, d'une part, sur l'équation intégrale, et d'autre part, sur les relations interfaciales caractéristiques de la topologie d'inclusion enrobée [9, 10].

La définition des propriétés effectives de l'élément de volume représentatif ne faisant intervenir que les tenseurs de localisation moyens dans l'inclusion et l'enrobage (cf. § III), les déformations moyennes dans l'enrobage sont calculées à partir de l'hypothèse d'un champ uniforme selon l'épaisseur de l'enrobage en utilisant le champ moyen dans l'inclusion [11, 12]. Les équations sont développées dans le cas général de milieux anisotropes et d'inclusions ellipsoïdales, elles sont résolues *asymptotiquement* en se basant essentiellement sur l'hypothèse d'une couche mince. Dans le cas de matériaux élastiques isotropes et d'une inclusion enrobée sphérique, des solutions analytiques sont obtenues.

Enfin, une comparaison avec une solution exacte dans le cas d'une inclusion enrobée sphérique isotrope obtenue par Zaoui et Hervé [13], permet de vérifier la pertinence des approximations effectuées dans ce travail.

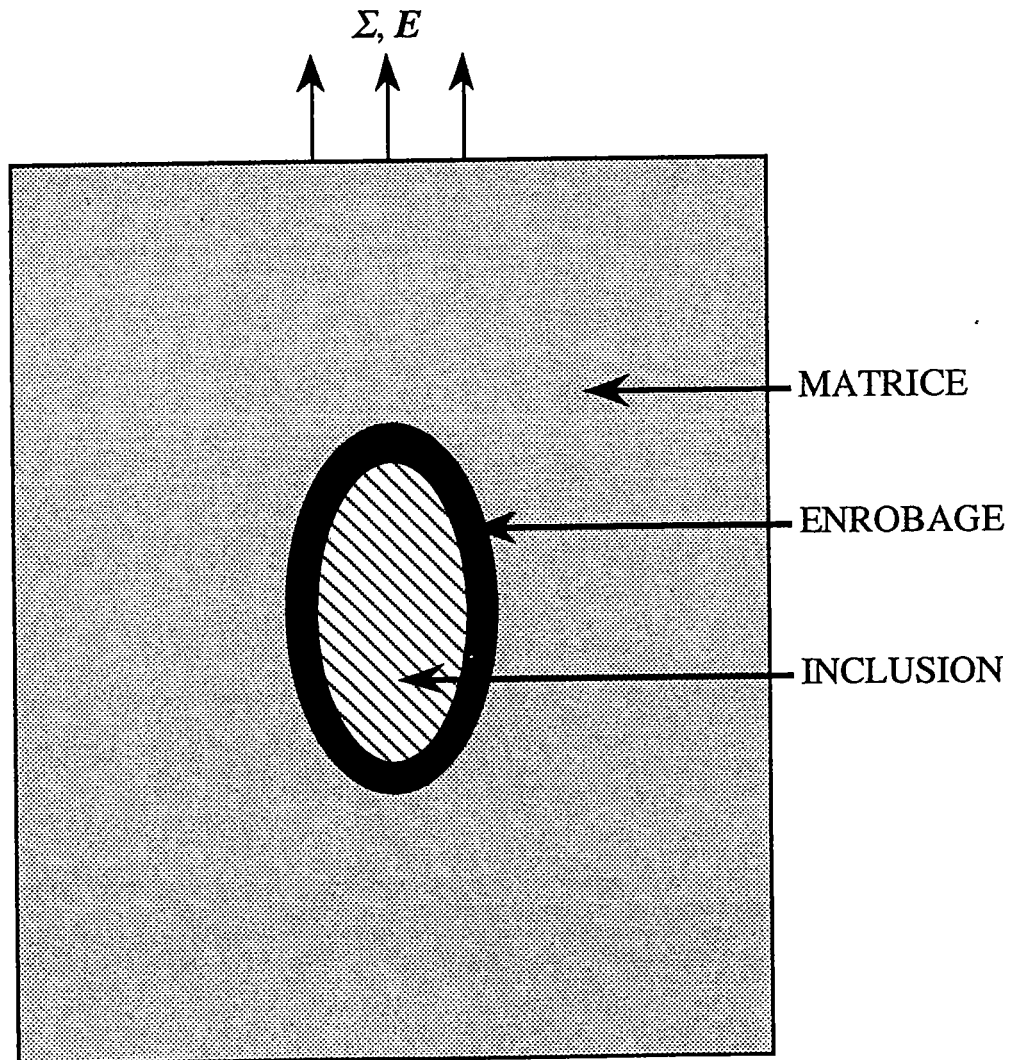


Fig. II-1 : Topologie de l'inclusion enrobée

2. Topologie de l'inclusion enrobée.

La topologie de l'inclusion enrobée (fig. II-1) correspond à une inclusion de volume V_I de constantes élastiques C^I entourée d'une couche mince d'un autre matériau de constantes élastiques C^c et de volume V_c , l'ensemble est plongé dans un milieu infini (matrice M) de constantes élastiques C^0 .

On se limite au cas de l'élasticité linéaire en petites perturbations (les phénomènes d'inertie sont négligés). On suppose que la liaison entre tous les constituants (inclusion - enrobage et enrobage - matrice) est parfaite de telle sorte que les déplacements et les vecteurs contraintes sont continus sur toutes les interfaces.

3. Equation intégrale.

Nous cherchons les champs de déformations et de contraintes dus à des déplacements $u^d = E \cdot x$ ($x \in S$) imposés sur la surface extérieure (S) de la matrice, qui créent un champ uniforme (Σ, E) dans le milieu infini et homogène.

En se basant sur la loi de comportement locale $\sigma(\vec{r}) = C(\vec{r}) : \varepsilon(\vec{r})$, les équations d'équilibre $\text{div}(\sigma) = 0$ (en l'absence des forces de volumes) et la technique du tenseur de Green du milieu de référence C^0 , on obtient l'équation intégrale suivante, portant sur le champ de déformations élastiques $\varepsilon(\vec{r})$ [7] :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = E_{ij} - \int_V \Gamma_{ijkl}^0(\vec{r} - \vec{r}') \delta C_{klmn}(\vec{r}') \varepsilon_{mn}(\vec{r}') dr \quad \text{II-1}$$

V étant le volume du milieu infini (volume représentatif).

$\Gamma^0(\vec{r} - \vec{r}')$ est le tenseur de Green modifié relié au tenseur de Green usuel $G^0(\vec{r} - \vec{r}')$ du milieu de référence C^0 par :

$$\Gamma_{ijkl}^0(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{2} \left\{ G_{ki,jl}^0(\vec{r} - \vec{r}') + G_{kj,il}^0(\vec{r} - \vec{r}') \right\} \quad \text{II-2}$$

$\delta C(\vec{r})$ est la fluctuation due à l'hétérogénéité élastique introduite par l'inclusion et son enrobage. Ainsi, le tenseur d'élasticité local est décomposé en une partie uniforme correspondant aux constantes élastiques du milieu homogène de référence et une partie correspondant à la déviation $\delta C(\vec{r})$:

$$C(\vec{r}) = C^0 + \delta C(\vec{r}) \quad \text{II-3}$$

Dans notre cas, et avec les notations du paragraphe précédent, on a :

$$\delta C(\vec{r}) = (C^I - C^0) \theta^I(\vec{r}) + (C^c - C^0) \left\{ \theta^2(\vec{r}) - \theta^I(\vec{r}) \right\} \quad \text{II-4}$$

où les fonctions caractéristiques $\theta^I(\vec{r})$ et $\theta^2(\vec{r})$ sont définies par:

$$\theta^I(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r} \in V_I \\ 0 & \text{si } \vec{r} \notin V_I \end{cases} \quad \text{II-5}$$

$$\theta^2(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r} \in V_2 \\ 0 & \text{si } \vec{r} \notin V_2 \end{cases}$$

Dans ce cas, V_2 désigne le volume de l'inclusion composite (inclusion+enrobage). On peut également écrire (II-4) sous la forme :

$$\delta C(\vec{r}) = \Delta C^{Io} \theta^I(\vec{r}) + \Delta C^{co} \left\{ \theta^2(\vec{r}) - \theta^I(\vec{r}) \right\} \quad \text{II-6}$$

où :

$$\Delta C^{Io} = (C^I - C^0) \quad \text{et} \quad \Delta C^{co} = (C^c - C^0) \quad \text{II-7}$$

Dans les développements qui vont suivre, le problème de l'inclusion enrobée est traité *asymptotiquement* en se basant sur l'hypothèse de la couche mince. A partir de ce point de vue, on peut écrire en première approximation :

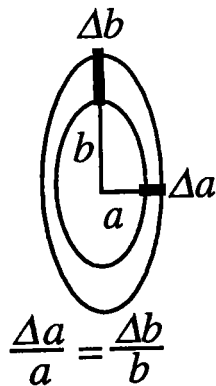
$$\theta^2(\vec{r}) - \theta^I(\vec{r}) = \delta \theta^I(\vec{r}) \quad \text{II-8}$$

et :

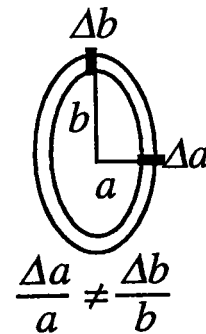
$$\delta \theta^I(\vec{r}) \approx \sum_{\alpha} \Delta a_{\alpha} \frac{\partial \theta^I(\vec{r})}{\partial a_{\alpha}} \quad \text{II-9}$$

où a_{α} désignent les demi axes de l'inclusion ellipsoïdale et Δa_{α} l'épaisseur de l'enrobage suivant l'axe α .

On suppose également que l'inclusion composite (inclusion+enrobage) est de forme ellipsoïdale de demi - axes $(a_i + \Delta a_i)$ et on traite le cas général d'une géométrie *non homothétique* qui se traduit par le fait que $\frac{\Delta a_i}{a_i} \neq \frac{\Delta a_j}{a_j} (i \neq j)$



GEOMETRIE
HOMOTHETIQUE



GEOMETRIE
NON HOMOTHETIQUE

Dans ces conditions on montre que (voir annexe-A) :

$$\delta\theta^I(\vec{r}) \approx p \sum_{\alpha} \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} \delta(S_I) \quad \text{II-10}$$

où x_{α} sont les coordonnées d'un point de la surface de l'inclusion et $\delta(S_I)$ la distribution de Dirac sur la surface S_I de l'inclusion.

La distance p perpendiculaire de l'origine de l'inclusion à la tangente plane de sa surface est donnée par :

$$p = \frac{1}{\left(\frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_3^2}{a_3^4} \right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{II-11}$$

En prenant en compte le résultat (II-10), $\delta C(\vec{r})$ prend la forme suivante :

$$\delta C(\vec{r}) = \Delta C^{Io} \theta^I(\vec{r}) + p \Delta C^{co} \sum_{\alpha} \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} \delta(S_I) \quad \text{II-12}$$

et en substituant $\delta C(\vec{r})$ donnée par (II-12) dans l'équation intégrale (II-1), on obtient pour le champ $\varepsilon(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\vec{r}) = & E_{ij} - \int_V \Gamma_{ijkl}^o(\vec{r} - \vec{r}') \Delta C_{klmn}^{Io} \varepsilon_{mn}(\vec{r}') \theta^I(\vec{r}') dr \\ & - \sum_{\alpha} \int_V \Gamma_{ijkl}^o(\vec{r} - \vec{r}') \Delta C_{klmn}^{co} \varepsilon_{mn}(\vec{r}') p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} \delta(S_I) dr \end{aligned} \quad \text{II-13}$$

Compte tenu des propriétés de la fonction caractéristique $\theta^I(\vec{r}')$ et de la distribution $\delta(S_I)$, l'équation intégrale (II-13) devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\vec{r}) = & E_{ij} - \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^o(\vec{r} - \vec{r}') \Delta C_{klmn}^{Io} \varepsilon_{mn}(\vec{r}') dr \\ & - \sum_{\alpha} \int_{S_I^+} \Gamma_{ijkl}^o(\vec{r} - \vec{r}^+) \Delta C_{klmn}^{co} \varepsilon_{mn}(\vec{r}^+) p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} dS \end{aligned} \quad \text{II-14}$$

S_I^+ est la surface extérieure de l'inclusion et $\vec{r}^+$ un point de l'interface inclusion-enrobage vu par l'extérieur de l'inclusion (du côté de l'enrobage), les composantes $\varepsilon_{mn}(\vec{r}^+)$ décrivent alors le champ des déformations à l'intérieur de l'enrobage en un point très proche de l'interface. Par conséquent, on peut relier ce champ à celui à l'intérieur de l'inclusion en utilisant les opérateurs interfaciaux de la mécanique des solides. Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

4. Les opérateurs interfaciaux.

Le champ de contraintes dans la couche varie de manière complexe. De plus, il existe une discontinuité des champs σ et ε au passage d'une interface. Lorsque l'épaisseur de l'enrobage est faible, on peut admettre raisonnablement que les champs σ ou (et) ε sont uniformes selon l'épaisseur de la couche, si bien que l'on peut relier les déformations de part et d'autre de l'interface (inclusion-enrobage) à partir d'une formulation simplifiée des équations de champ (équilibre et compatibilité) conduisant aux opérateurs interfaciaux [9, 10].

Soit le cas général de deux solides (1) et (2) de constantes élastiques C^1 et C^2 séparés par une interface de normale unitaire $\vec{n}$ (fig. II-2).

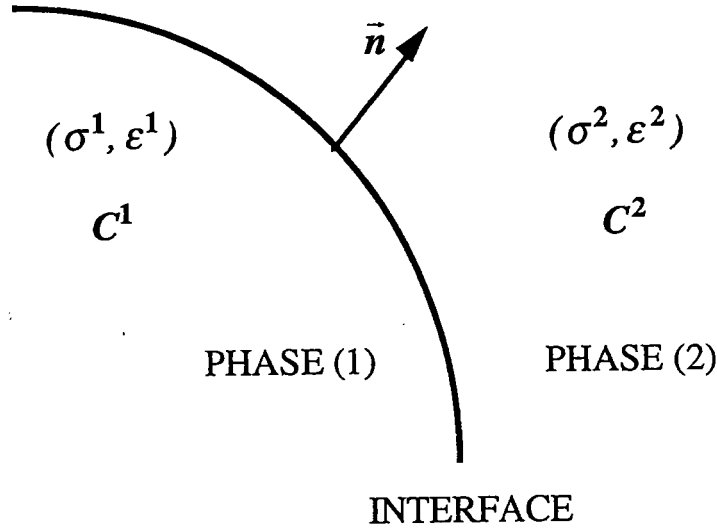


Fig. II-2 : Problème d'interface dans les matériaux composites.

On désigne par $(\sigma^1, \varepsilon^1)$ et $(\sigma^2, \varepsilon^2)$ les champs des contraintes et déformations de part et d'autre de l'interface. Comme il a été démontré par Eshelby, Hill et Walpole [6, 9, 10], ces champs peuvent être reliés explicitement au travers uniquement des propriétés élastiques des constituants de part et d'autre de l'interface et la normale unitaire à l'interface.

En effet, le fait de supposer qu'il s'agit d'une liaison parfaite entre les deux phases (pas de glissement), conduit à une continuité du vecteur déplacement

$$[u_i] \equiv u_i^1 - u_i^2 = 0$$

II-15

et une continuité du vecteur contrainte

$$\left[\sigma_{ij} \right] n_j \equiv \left(\sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2 \right) n_j = 0 \quad \text{II-16}$$

où n_i sont les composantes du vecteur normal unitaire.

En un point $\vec{r}(x_i)$ de l'interface, les conditions de compatibilité $du_i = u_{i,j} dx_j$ et la continuité du vecteur déplacement imposent pour le saut du gradient de déplacement l'équation suivante :

$$\left[u_{i,j} \right] dx_j \equiv (u_{i,j}^1 - u_{i,j}^2) dx_j = 0 \quad \text{II-17}$$

et puisque $n_j dx_j = 0$, la condition (II-17) est équivalente à :

$$\left[u_{i,j} \right] \equiv u_{i,j}^1 - u_{i,j}^2 = \lambda_i n_j \quad \text{II-18}$$

et le saut des déformations $\left[\varepsilon_{ij} \right]$ s'obtient par symétrisation de $\left[u_{i,j} \right]$ par rapport aux indices i et j

$$\left[\varepsilon_{ij} \right] \equiv \varepsilon_{ij}^1 - \varepsilon_{ij}^2 = \frac{1}{2} (\lambda_i n_j + \lambda_j n_i) \quad \text{II-19}$$

où $\vec{\lambda}$ est un vecteur de proportionnalité (correspondant à l'amplitude du saut), il est déterminé complètement par la condition (voir annexe-B) :

$$C_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^1 n_j = C_{ijkl}^2 \varepsilon_{kl}^2 n_j \quad \text{II-20}$$

Le vecteur $\vec{\lambda}$ peut être évalué à partir des composantes du champ de déformation dans chacune des phases, on obtient alors pour le saut des

déformations les deux expressions équivalentes (voir annexe-B):

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^1 - \varepsilon_{ij}^2 = P_{ijkl}^1 (C_{klmn}^2 - C_{klmn}^1) \varepsilon_{mn}^2 \\ \varepsilon_{ij}^2 - \varepsilon_{ij}^1 = P_{ijkl}^2 (C_{klmn}^1 - C_{klmn}^2) \varepsilon_{mn}^1 \end{cases} \quad \text{II-21}$$

Cette équivalence est confirmée par l'identité suivante (voir annexe-B) :

$$P_{ijkl}^1 (C_{klmn}^2 - C_{klmn}^1) P_{mnpq}^2 = P_{ijpq}^1 - P_{ijpq}^2 \quad \text{II-22}$$

où P^* (* = 1 ou 2) est l'opérateur interfacial qui dépend de la normale $\vec{n}$ à l'interface au point considéré et des constantes élastiques C^* du milieu (*) (* = 1 ou 2).

On montre que l'opérateur P s'écrit sous la forme suivante (voir annexe-B) :

$$P_{ijkl}^* = \frac{1}{4} (K_{ik}^{*-1} n_j n_l + K_{jk}^{*-1} n_i n_l + K_{il}^{*-1} n_j n_k + K_{jl}^{*-1} n_i n_k) \quad \text{II-23}$$

où K^{-1} est l'inverse de la matrice de Christoffel K dont les composantes sont données par :

$$K_{ik}^* = C_{ijkl}^* n_j n_l \quad \text{II-24}$$

5. Application au problème de l'inclusion enrobée.

A présent, l'analyse précédente peut être spécifiée dans le cas du problème d'inclusion enrobée où la phase (1) est décrite par une inclusion entourée par un enrobage mince qui constitue la phase (2). Ainsi, à l'aide des équations (II-21), (II-23) et (II-24), on peut relier les déformations $\varepsilon(\vec{r}^+)$ et $\varepsilon(\vec{r}^-)$

de part et d'autre de l'interface par la relation exacte :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}^+) = \varepsilon_{ij}(\vec{r}^-) + P_{ijkl}(C^c, \vec{n}) \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}(\vec{r}^-) \quad \text{II-25}$$

où $\vec{r}^-$ est un point de l'interface inclusion-enrobage vu par l'intérieur de l'inclusion et $\Delta C^{Ic} = C^I - C^c$.

En première approximation, on remplace dans (II-14) et (II-25) le champ $\varepsilon(\vec{r})$ ($\vec{r} \in V_I$) par sa valeur moyenne ε^I dans le volume V_I de l'inclusion, de telle sorte qu'on peut écrire $\varepsilon(\vec{r}^+)$ sous la forme approchée suivante :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}^+) = \varepsilon_{ij}^I + P_{ijkl}(C^c, \vec{n}) \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \quad \text{II-26}$$

et en substituant le champ $\varepsilon(\vec{r}^+)$ par son expression (II-26) dans l'équation intégrale (II-14), il vient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\vec{r}) = & E_{ij} - \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^o(\vec{r} - \vec{r}') \Delta C_{klmn}^{Io} \varepsilon_{mn}^I dr' \\ & - \sum_{\alpha} \int_{S_I^+} \Gamma_{ijkl}^o(\vec{r} - \vec{r}^+) \Delta C_{klmn}^{co} \varepsilon_{mn}^I p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} dS \\ & - \sum_{\alpha} \int_{S_I^+} \Gamma_{ijkl}^o(\vec{r} - \vec{r}^+) \Delta C_{klmn}^{co} P_{mnpq}(C^c, \vec{n}) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} dS \end{aligned} \quad \text{II - 27}$$

Les champs $\varepsilon_{ij}(\vec{r})$ sont en général difficiles à évaluer. Par ailleurs, dans les problèmes d'homogénéisation pour un milieu dans lequel le tenseur $C(\vec{r})$ est uniforme par morceaux, seules les déformations moyennes d'une phase interviennent (cf. § III). On se propose, dans le paragraphe suivant, de déduire de (II-26) et (II-27) les déformations moyennes dans l'inclusion et

l'enrobage, ce qui permet par la suite de résoudre le problème de localisation de l'inclusion enrobée.

6. Déformations moyennes dans l'inclusion et l'enrobage.

Les déformations moyennes dans l'inclusion et l'enrobage, notées ε^I et ε^c , sont définies par :

$$\varepsilon_{ij}^I = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \varepsilon_{ij}(\vec{r}) dr$$

II-28

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \varepsilon_{ij}(\vec{r}) dr$$

ε^I est calculée à partir de l'équation intégrale (II-27), on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^I = & E_{ij} - \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^o(\vec{r} - \vec{r}') \Delta C_{klmn}^{Io} \varepsilon_{mn}^I dr' dr \\ & - \frac{1}{V_I} \sum_{\alpha} \int_{S_I^+} \left\{ \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^o(\vec{r} - \vec{r}^+) dr \right\} \Delta C_{klmn}^{co} \varepsilon_{mn}^I p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} dS \\ & - \frac{1}{V_I} \sum_{\alpha} \int_{S_I^+} \left\{ \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^o(\vec{r} - \vec{r}^+) dr \right\} \Delta C_{klmn}^{co} P_{mnpq}(C^c, \vec{n}) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} dS \end{aligned} \quad \text{II - 29}$$

D'autre part, l'épaisseur de l'enrobage étant supposée petite, le calcul de la valeur moyenne de la déformation dans l'enrobage est effectué en supposant que le champ $\varepsilon(\vec{r})$ ($\vec{r} \in V_c$) est uniforme selon l'épaisseur de l'enrobage et égal à $\varepsilon(\vec{r}^+)$. Dans ce cas $\varepsilon(\vec{r})$ ($\vec{r} \in V_c$) ne dépend que de la normale $\vec{n}$ à la frontière de V_I et de ce fait, on en déduit à partir de (II-26) :

$$\varepsilon_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^I + \frac{1}{V_c} \left\{ \int_{V_c} P_{ijkl}(C^c, \bar{n}) dr \right\} \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \quad \text{II-30}$$

Pour résoudre (II-29) et (II-30), nous utilisons, dans la suite, la relation suivante, qui relie le tenseur de Green modifié à l'opérateur interfacial calculé par rapport à un milieu de référence de propriétés C^0 (voir annexe-B).

$$\int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^0(\bar{r}^+ - \bar{r}) dr = T_{ijkl}^I(C^0) - P_{ijkl}(C^0, \bar{n}) \quad \text{II-31}$$

où

$$T_{ijkl}^I(C^0) = \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^0(\bar{r} - \bar{r}') dr' \quad \text{si } \bar{r} \in V_I \quad \text{II-32}$$

est un tenseur classique qui se déduit facilement du tenseur d'Eshelby S [6] par

$$S_{ijmn} = T_{ijkl}^I(C^0) C_{klmn}^0 \quad \text{II-33}$$

Compte tenu de la relation (II-31), l'équation intégrale (II-29) devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^I &= E_{ij} - T_{ijkl}^I(C^0) \Delta C_{klmn}^{Io} \varepsilon_{mn}^I \\ &- \frac{1}{V_I} \left\{ T_{ijkl}^I(C^0) \sum_{\alpha} \int_{S_I} p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} dS - \sum_{\alpha} \int_{S_I} p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} P_{ijkl}(C^0, \bar{n}) dS \right\} \Delta C_{klmn}^{co} \varepsilon_{mn}^I \\ &- \frac{1}{V_I} T_{ijkl}^I(C^0) \Delta C_{klmn}^{co} \left(\sum_{\alpha} \int_{S_I} p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} P_{mnpq}(C^c, \bar{n}) dS \right) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I \\ &+ \frac{1}{V_I} \sum_{\alpha} \int_{S_I} p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} P_{ijkl}(C^0, \bar{n}) \Delta C_{klmn}^{co} P_{mnpq}(C^c, \bar{n}) dS \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I \end{aligned} \quad \text{II-34}$$

et d'après les propriétés (II-22) des opérateurs interfaciaux

$$P_{ijkl}(C^0, \vec{n}) \Delta C_{klmn}^{co} P_{mnpq}(C^c, \vec{n}) = P_{ijpq}(C^0, \vec{n}) - P_{ijpq}(C^c, \vec{n}) \quad \text{II-35}$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^I &= E_{ij} - T_{ijkl}^I(C^0) \Delta C_{klmn}^{Io} \varepsilon_{mn}^I \\ &- \frac{1}{V_I} \left\{ T_{ijkl}^I(C^0) \sum_{\alpha} \int_{S_I} p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} dS - \sum_{\alpha} \int_{S_I} p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} P_{ijkl}(C^0, \vec{n}) dS \right\} \Delta C_{klmn}^{co} \varepsilon_{mn}^I \\ &- \frac{1}{V_I} T_{ijkl}^I(C^0) \Delta C_{klmn}^{co} \left(\sum_{\alpha} \int_{S_I} p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} P_{mnpq}(C^c, \vec{n}) dS \right) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I \\ &- \frac{1}{V_I} \sum_{\alpha} \int_{S_I} p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} \left\{ P_{ijkl}(C^c, \vec{n}) - P_{ijkl}(C^0, \vec{n}) \right\} dS \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \end{aligned} \quad \text{II-36}$$

On voit clairement que le premier terme $\varepsilon^I = E - T^I(C^0) \Delta C^{Io} \varepsilon^I$ est classique et tient compte de l'hétérogénéité introduite par l'inclusion. On y trouve le tenseur classique T^I qui intervient dans les formules d'Eshelby-Krüner des problèmes d'inclusion. Il est calculé par les techniques habituelles dans le cas général d'une inclusion ellipsoïdale de forme quelconque et pour des anisotropies quelconques de la matrice.

Les trois derniers termes sont dus à la présence de l'enrobage, ils dépendent des propriétés mécaniques et de la géométrie de l'enrobage par l'intermédiaire des constantes élastiques C^c et de l'épaisseur Δa_{α} . Ils font intervenir deux intégrales de surface :

$$\sum_{\alpha} \int_{S_I} p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} P_{mnpq}(C^*, \bar{n}) dS \quad \text{II-37}$$

$$\sum_{\alpha} \int_{S_I} p \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} dS \quad \text{II-38}$$

avec $C^* = C^0$ ou $C^* = C^c$.

Vu les expressions compliquées de la projection orthogonale p et l'opérateur interfacial P , la résolution directe de ces intégrales de surface nécessite le recours à des méthodes mathématiques complexes. C'est pourquoi, dans la suite, on se propose de déterminer ces intégrales en se basant sur l'hypothèse de la couche mince et la relation entre l'opérateur interfacial et le tenseur de Green modifié. En effet, on peut étendre l'intégrale sur V_c en une intégrale sur le volume représentatif V en l'écrivant sous une forme utilisant les fonctions caractéristiques θ^2 et θ^I :

$$V_c = \int_{V_c} dr = \int_V \{ \theta^2(\bar{r}) - \theta^I(\bar{r}) \} dr \quad \text{II-39}$$

En introduisant la forme approchée de $\theta^2(\bar{r}) - \theta^I(\bar{r})$

$$\theta^2(\bar{r}) - \theta^I(\bar{r}) = \delta\theta^I(\bar{r}) \approx \sum_i p \frac{x_i^2}{a_i^2} \frac{\Delta a_i}{a_i} \delta(S_I) \quad \text{II-40}$$

il vient :

$$V_c = \int_V \sum_i p \frac{x_i^2}{a_i^2} \frac{\Delta a_i}{a_i} \delta(S_I) dr \quad \text{II-41}$$

et en utilisant les propriétés de $\delta(S_I)$, on obtient :

$$V_c = \sum_i \int_{S_I} p \frac{x_i^2}{a_i^2} \frac{\Delta a_i}{a_i} dS \quad \text{II-42}$$

En conséquence, l'intégrale (II-38) n'est autre qu'une forme approchée du volume V_c de l'enrobage.

D'autre part, à partir de la relation (II-31) écrite par rapport à un milieu de référence de propriétés C^* (* = o ou c), il vient :

$$P_{ijkl}(C^*, \vec{n}) = T_{ijkl}^I(C^*) - \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^*(\vec{r}^+ - \vec{r}) dr \quad \text{II-43}$$

où Γ^* est le tenseur de Green modifié du milieu C^* .

En intégrant cette expression sur le volume V_c de la couche, on obtient :

$$\int_{V_c} P_{ijkl}(C^*, \vec{n}) dr = V_c T_{ijkl}^I(C^*) - \int_{V_c} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^*(\vec{r}^+ - \vec{r}) dr^+ dr \quad \text{II-44}$$

et du fait que $V_c = V_2 - V_I$, le terme $\int_{V_c} \int_{V_I} \Gamma^*(\vec{r}^+ - \vec{r}) dr^+ dr$ peut être

décomposé sous la forme suivante :

$$\int_{V_c} \int_{V_I} \Gamma^*(\vec{r}^+ - \vec{r}) dr^+ dr = \int_{V_2} \int_{V_I} \Gamma^*(\vec{r}^+ - \vec{r}) dr^+ dr - \int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma^*(\vec{r} - \vec{r}') dr dr' \quad \text{II-45}$$

Par ailleurs, d'après les résultats d'Eshelby concernant l'uniformité de $\int \Gamma^*(\vec{r} - \vec{r}') dr'$ pour une inclusion ellipsoïdale, on a :

$$\int_{V_2} \Gamma_{ijkl}^* (\bar{r} - \bar{r}') dr = T_{ijkl}^2(C^*) \quad \text{si} \quad \bar{r} \in V_2$$

II-46

$$\int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^* (\bar{r} - \bar{r}') dr = T_{ijkl}^I(C^*) \quad \text{si} \quad \bar{r} \in V_I$$

Par conséquent, il vient :

$$\int_{V_2} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^* (\bar{r}^+ - \bar{r}) dr^+ dr = V_I T_{ijkl}^2(C^*)$$

II-47

$$\int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^* (\bar{r} - \bar{r}') dr dr = V_I T_{ijkl}^I(C^*)$$

ce qui permet d'exprimer (II-45) sous la forme :

$$\int_{V_c} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^* (\bar{r}^+ - \bar{r}) dr^+ dr = V_I (T_{ijkl}^2(C^*) - T_{ijkl}^I(C^*)) \quad \text{II-48}$$

Le tenseur $T^2(C^*)$ est calculé sur le volume V_2 de l'inclusion composite (inclusion + enrobage) supposée de forme ellipsoïdale. Comme pour $T^I(C^*)$, ce tenseur est classique et se déduit facilement du tenseur d'Eshelby. Notons également que $T^I(C^*)$ dépend de la géométrie de l'inclusion par l'intermédiaire du rapport d'axes a_i/a_j tandis que $T^2(C^*)$ dépend de la géométrie de l'inclusion composite par l'intermédiaire du rapport d'axes $a_i + \Delta a_i/a_j + \Delta a_j$.

Dans le cas particulier d'une géométrie homothétique où $\frac{\Delta a_i}{a_i} = \frac{\Delta a_j}{a_j}$, on a :

$$\frac{a_i + \Delta a_i}{a_j + \Delta a_j} = \frac{a_i \left(1 + \frac{\Delta a_i}{a_i}\right)}{a_j \left(1 + \frac{\Delta a_j}{a_j}\right)} = \frac{a_i}{a_j} \quad \text{II-49}$$

et de ce fait l'inclusion et l'inclusion composite ont le même rapport d'axes et par la suite $T^2(C^*) = T^I(C^*)$.

En introduisant (II-48) dans (II-44), on arrive à :

$$\int_{V_c} P_{ijkl}(C^*, \vec{n}) dr = V_c T_{ijkl}^I(C^*) - V_I \left(T_{ijkl}^2(C^*) - T_{ijkl}^I(C^*) \right) \quad \text{II-50}$$

De même, l'intégrale de l'opérateur P sur V_c peut être étendue en une intégrale sur le volume représentatif V en introduisant la fonction caractéristique $\delta\theta^I(\vec{r})$, on en déduit donc :

$$\int_{V_c} P_{ijkl}(C^*, \vec{n}) dr = \int_V P_{ijkl}(C^*, \vec{n}) \delta\theta^I(\vec{r}) dr \quad \text{II-51}$$

et à partir de l'expression (II-10) de $\delta\theta^I(\vec{r})$ et les propriétés de $\delta(S_I)$, il vient :

$$\int_{V_c} P_{ijkl}(C^*, \vec{n}) dr = \sum_{\alpha} \int_{S_I} P_{ijkl}(C^*, \vec{n}) \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} p dS \quad \text{II-52}$$

D'où finalement :

$$\sum_{\alpha} \int_{S_I} P_{ijkl}(C^*, \vec{n}) \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} p dS = V_c T_{ijkl}^I(C^*) - V_I \left(T_{ijkl}^2(C^*) - T_{ijkl}^I(C^*) \right) \quad \text{II-53}$$

Les résultats (II-42) et (II-53) permettent alors d'exprimer les intégrales de surface (II-37) et (II-38) en fonction de tenseurs connus ; les tenseurs T^I et T^2 calculés respectivement sur les volumes V_I et V_2 de l'inclusion et de l'inclusion composite et qui se déduisent facilement du tenseur d'Eshelby.

Finalement, avec les résultats précédents l'équation (II-36) devient :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij}^I = & E_{ij} - T_{ijkl}^2(C^0) \Delta C_{klmn}^{I0} \varepsilon_{mn}^I \\
 & - \frac{V_c}{V_I} T_{ijkl}^I(C^0) \Delta C_{klmn}^{c0} T_{mnpq}^I(C^c) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I \\
 & - \frac{V_c}{V_I} \left\{ T_{ijkl}^I(C^c) - T_{ijkl}^I(C^0) \right\} \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \\
 & + (I_{ijmn} + T_{ijkl}^I(C^0) \Delta C_{klmn}^{c0}) \left(T_{mnpq}^2(C^c) - T_{mnpq}^I(C^c) \right) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I
 \end{aligned} \tag{II-54}$$

On peut également déduire les déformations moyennes dans l'enrobage par l'intermédiaire de l'équation (II-30) et en utilisant le résultat (II-50) :

$$\varepsilon_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^I + \left\{ T_{ijkl}^I(C^c) - \frac{V_I}{V_c} \left(T_{ijkl}^2(C^c) - T_{ijkl}^I(C^c) \right) \right\} \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \tag{II-55}$$

Les équations (II-54) et (II-55) ont été développées dans le cas général d'inclusion enrobée de forme ellipsoïdale avec une géométrie non homothétique et une anisotropie quelconque des tenseurs C , leur résolution permet de déterminer les tenseurs de localisation des déformations A^I et A^c dans l'inclusion et l'enrobage et ne nécessitent que le calcul des tenseurs T^I et T^2 .

Le calcul de T^I et T^2 est classique et déjà acquis par de nombreuses études ; on y exploite notamment trois méthodes valables pour une inclusion ellipsoïdale dans un milieu anisotrope [14, 15, 16] :

- méthode de la transformée de Fourier,
- méthode des fonctions potentielles,
- méthode directe à partir des résultats d'Eshelby.

Dans le cas de deux inclusions ellipsoïdales homothétiques qui définissent l'inclusion I et son enrobage c les tenseurs T^I et T^2 sont équivalents et par suite les équations (II-54) et (II-55) se réduisent aux formes suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^I &= E_{ij} - T_{ijkl}^I(C^0) \Delta C_{klmn}^{I0} \varepsilon_{mn}^I \\ &\quad - \frac{V_c}{V_I} T_{ijkl}^I(C^0) \Delta C_{klmn}^{c0} T_{mnpq}^I(C^c) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I \\ &\quad - \frac{V_c}{V_I} \left\{ T_{ijkl}^I(C^c) - T_{ijkl}^I(C^0) \right\} \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \end{aligned} \quad \text{II-56}$$

$$\varepsilon_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^I + T_{ijkl}^I(C^c) \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \quad \text{II-57}$$

On voit clairement que la solution du problème de l'inclusion enrobée élastique, dans le cas d'une géométrie homothétique ($T^2 = T^I$), se ramène uniquement au calcul du tenseur classique T^I . D'ailleurs, cette géométrie particulière décrit, par exemple, le cas de deux inclusions sphériques concentriques décrivant la topologie d'une inclusion enrobée sphérique. On se propose dans la suite de poursuivre les calculs dans le cas d'une inclusion enrobée sphérique et de propriétés élastiques isotropes et de déduire de (II-56)

et (II-57) une forme analytique des tenseurs de localisation A^I et A^c de l'inclusion et de l'enrobage.

7. Cas particulier d'une inclusion enrobée sphérique et de matériaux à comportement élastique isotrope.

On se propose de déduire de (II-56) et (II-57) une forme analytique des tenseurs de localisation des déformations A^I et A^c dans le cas d'une inclusion enrobée sphérique et de matériaux isotropes.

Les constantes d'élasticité de l'inclusion, de l'enrobage et de la matrice sont données respectivement dans le cas isotrope par :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^I &= \lambda^I \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^I (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ C_{ijkl}^c &= \lambda^c \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^c (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ C_{ijkl}^o &= \lambda^o \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^o (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \end{aligned} \quad \text{II-58}$$

où (λ^I, μ^I) , (λ^c, μ^c) et (λ^o, μ^o) sont respectivement les modules élastiques de l'inclusion, l'enrobage et la matrice.

Dans les équations générales les différences ΔC^{Io} , ΔC^{co} et ΔC^{Ic} s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta C_{ijkl}^{Io} &= (\lambda^I - \lambda^o) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2(\mu^I - \mu^o) I_{ijkl} \\ \Delta C_{ijkl}^{co} &= (\lambda^c - \lambda^o) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2(\mu^c - \mu^o) I_{ijkl} \\ \Delta C_{ijkl}^{Ic} &= (\lambda^I - \lambda^c) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2(\mu^I - \mu^c) I_{ijkl} \end{aligned} \quad \text{II-59}$$

où $I_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ est le tenseur unité de 4^e ordre.

D'autre part, les tenseurs $T^I(C^o)$ et $T^I(C^c)$ se déduisent du tenseur classique d'Eshelby et on obtient dans le cas isotrope les formes analytiques suivantes :

$$T_{ijkl}^I(C^o) = \frac{(4-5\nu^o)}{15\mu^o(1-\nu^o)} I_{ijkl} - \frac{1}{30\mu^o(1-\nu^o)} \delta_{ij}\delta_{kl} \quad \text{II-60}$$

$$T_{ijkl}^I(C^c) = \frac{(4-5\nu^c)}{15\mu^c(1-\nu^c)} I_{ijkl} - \frac{1}{30\mu^c(1-\nu^c)} \delta_{ij}\delta_{kl} \quad \text{II-61}$$

A partir de (II-59) et (II-60), on en déduit :

$$T_{ijkl}^I(C^o)\Delta C_{klmn}^{Io} = \left(\frac{(4-5\nu^o)(\lambda^I - \lambda^o)}{15\mu^o(1-\nu^o)} - \frac{(\lambda^I - \lambda^o)}{10\mu^o(1-\nu^o)} \right. \quad \text{II-62}$$

$$\left. - \frac{(\mu^I - \mu^o)}{15\mu^o(1-\nu^o)} \right) \delta_{ij}\delta_{mn} + \frac{2(4-5\nu^o)(\mu^I - \mu^o)}{15\mu^o(1-\nu^o)} I_{ijmn}$$

En introduisant le module de compressibilité $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$, (II-62) devient :

$$T_{ijkl}^I(C^o)\Delta C_{klmn}^{Io} = \left(\frac{(4-5\nu^o)(k^I - k^o)}{15\mu^o(1-\nu^o)} - \frac{(k^I - k^o)}{10\mu^o(1-\nu^o)} \right. \quad \text{II-63}$$

$$\left. - \frac{2(4-5\nu^o)(\mu^I - \mu^o)}{3 \cdot 15\mu^o(1-\nu^o)} \right) \delta_{ij}\delta_{mn} + \frac{2(4-5\nu^o)(\mu^I - \mu^o)}{15\mu^o(1-\nu^o)} I_{ijmn}$$

où encore :

$$T_{ijkl}^I(C^0)\Delta C_{klmn}^{Io} = \left(\frac{(1-2\nu^0)(k^I - k^0)}{6\mu^0(1-\nu^0)} - \frac{2}{3} \frac{(4-5\nu^0)(\mu^I - \mu^0)}{15\mu^0(1-\nu^0)} \right) \delta_{ij}\delta_{mn} \\ \text{II-64}$$

$$+ \frac{2}{15} \frac{(4-5\nu^0)}{\mu^0(1-\nu^0)} (\mu^I - \mu^0) I_{ijmn}$$

En introduisant les paramètres α^0 et β^0 définis par :

$$\alpha^0 = \frac{1}{3} \frac{1+\nu^0}{1-\nu^0} \quad \beta^0 = \frac{2}{15} \frac{4-5\nu^0}{1-\nu^0} \quad \text{II-65}$$

et en utilisant le fait que :

$$\mu = \frac{3k(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \quad \text{II-66}$$

(II-64) devient :

$$T_{ijkl}^I(C^0)\Delta C_{klmn}^{Io} = \frac{1}{3} \left(\alpha^0 \frac{(k^I - k^0)}{k^0} - \beta^0 \frac{(\mu^I - \mu^0)}{\mu^0} \right) \delta_{ij}\delta_{mn} \\ \text{II-67} \\ + \beta^0 \frac{(\mu^I - \mu^0)}{\mu^0} I_{ijmn}$$

De même on a :

$$T_{ijkl}^I(C^0)\Delta C_{klmn}^{co} = \frac{1}{3} \left(\alpha^0 \frac{(k^c - k^0)}{k^0} - \beta^0 \frac{(\mu^c - \mu^0)}{\mu^0} \right) \delta_{ij}\delta_{mn} \\ \text{II-68} \\ + \beta^0 \frac{(\mu^c - \mu^0)}{\mu^0} I_{ijmn}$$

et

$$T_{ijkl}^I(C^c)\Delta C_{klmn}^{Ic} = \frac{1}{3}\left(\alpha^0 \frac{(k^I - k^c)}{k^c} - \beta^0 \frac{(\mu^I - \mu^c)}{\mu^c}\right)\delta_{ij}\delta_{mn} + \beta^0 \frac{(\mu^I - \mu^c)}{\mu^c} I_{ijmn} \quad \text{II-69}$$

Des relations (II-67), (II-68) et (II-69) , nous obtenons pour la déformation moyenne ε^I :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^I = E_{ij} - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha^0(k^I - k^0)}{k^0} + \frac{1-q}{q}\left\{\frac{\alpha^c(1-\alpha^0)}{k^c} - \frac{\alpha^0(1-\alpha^c)}{k^0}\right\}(k^I - k^c) \right. \\ \left. - \frac{\beta^0(\mu^I - \mu^0)}{\mu^0} + \frac{1-q}{q}\left\{\frac{\beta^c(1-\beta^0)}{\mu^c} - \frac{\beta^0(1-\beta^c)}{\mu^0}\right\}(\mu^I - \mu^c)\right)\delta_{ij}\varepsilon_{kk}^I \\ - \left(\frac{\beta^0(\mu^I - \mu^0)}{\mu^0} + \frac{1-q}{q}\left\{\frac{\beta^c(1-\beta^0)}{\mu^c} - \frac{\beta^0(1-\beta^c)}{\mu^0}\right\}(\mu^I - \mu^c)\right)\varepsilon_{ij}^I \end{aligned} \quad \text{II-70}$$

q est un paramètre qui dépend des dimensions de l'inclusion et l'enrobage et il est donné par :

$$q = \frac{a^3}{(a + \Delta a)^3} \quad \text{II-71}$$

avec a le rayon de l'inclusion et Δa l'épaisseur de l'enrobage.

La dilatation volumique ε_{kk}^I peut être déduite de (II-70) par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kk}^I = E_{kk} - \left(\frac{\alpha^0(k^I - k^0)}{k^0} \right. \\ \left. + \frac{1-q}{q}\left\{\frac{\alpha^c(1-\alpha^0)}{k^c} - \frac{\alpha^0(1-\alpha^c)}{k^0}\right\}(k^I - k^c)\right)\varepsilon_{kk}^I \end{aligned} \quad \text{II-72}$$

ou encore :

$$\varepsilon_{kk}^I = \frac{k^0}{k^0 + \alpha^0(k^I - k^0) + \frac{1-q}{q} \left\{ \frac{\alpha^c k^0(1-\alpha^0) - \alpha^0 k^c(1-\alpha^c)}{k^c} \right\} (k^I - k^c)} E_{kk}$$

On obtient ainsi l'équation de localisation des dilatations volumiques dans le cas d'une inclusion enrobée sphérique. De la même manière, on peut déduire une équation de localisation de la partie déviatorique qui s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^{Id} = \frac{\mu^0}{\mu^0 + \beta^0(\mu^I - \mu^0) + \frac{1-q}{q} \left\{ \frac{\beta^c \mu^0(1-\beta^0) - \beta^0 \mu^c(1-\beta^c)}{\mu^c} \right\} (\mu^I - \mu^c)} E_{ij}^d$$

On retrouve ainsi les termes classiques

$$\frac{k^0}{k^0 + \alpha^0(k^I - k^0)}$$

et

$$\frac{\mu^0}{\mu^0 + \beta^0(\mu^I - \mu^0)}$$

obtenus par Eshelby dans le cas du problème élémentaire de l'inclusion. Ainsi l'effet de l'enrobage apparaît à travers les termes

$$\frac{1-q}{q} \left\{ \frac{\alpha^c k^0(1-\alpha^0) - \alpha^0 k^c(1-\alpha^c)}{k^c} \right\} (k^I - k^c)$$

$$\frac{1-q}{q} \left\{ \frac{\beta^c \mu^0(1-\beta^0) - \beta^0 \mu^c(1-\beta^c)}{\mu^c} \right\} (\mu^I - \mu^c)$$

qui dépendent de l'épaisseur et des propriétés élastiques des trois constituants.

D'autre part, en posant :

$$M^I = \frac{k^0}{k^0 + \alpha^0(k^I - k^0) + \frac{1-q}{q} \left\{ \frac{\alpha^c k^0(1 - \alpha^0) - \alpha^0 k^c(1 - \alpha^c)}{k^c} \right\} (k^I - k^c)}$$

et

$$N^I = \frac{\mu^0}{\mu^0 + \beta^0(\mu^I - \mu^0) + \frac{1-q}{q} \left\{ \frac{\beta^c \mu^0(1 - \beta^0) - \beta^0 \mu^c(1 - \beta^c)}{\mu^c} \right\} (\mu^I - \mu^c)}$$

l'équation (II-70) devient :

$$\varepsilon_{ij}^I = N^I E_{ij} + \frac{1}{3} (M^I - N^I) E_{kk} \delta_{ij} \quad \text{II-73}$$

ce qui permet de déduire le tenseur de localisation A^I par :

$$A_{ijkl}^I = N^I I_{ijkl} + \frac{1}{3} (M^I - N^I) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad \text{II-74}$$

On peut également déduire une forme analytique du tenseur de localisation dans l'enrobage à partir de (II-57) et en utilisant le résultat (II-69) :

$$\begin{aligned} A_{ijkl}^c = N^I & \left(\frac{\mu^c + \beta^c(\mu^I - \mu^c)}{\mu^c} \right) I_{ijkl} \\ & + \frac{1}{3} \left[M^I \left(\frac{k^c + \alpha^c(k^I - k^c)}{k^c} \right) - N^I \left(\frac{\mu^c + \beta^c(\mu^I - \mu^c)}{\mu^c} \right) \right] \delta_{ij} \delta_{kl} \end{aligned} \quad \text{II-75}$$

Pour vérifier la pertinence des approximations effectuées, on compare les termes $M^I(q)$ et $N^I(q)$ à ceux que l'on peut déduire d'un calcul exact dans le cas d'une inclusion sphérique enrobée obtenue par Zaoui et Hervé [13].

Ce modèle est basé sur le schéma à trois phases de Christensen et Lo [17] qui a été introduit pour mieux décrire les interactions entre l'inclusion et la matrice, pour les biphasés classiques (inclusion-matrice), et par suite, améliorer le modèle autocohérent classique. Pour cela, l'interaction entre l'inclusion et le milieu homogène équivalent a été remplacée par celle d'une inclusion enrobée et le milieu homogène équivalent, et où l'enrobage est constitué par la matrice (*fig. II-3*). La solution de ce problème est basée sur la résolution des équations aux déplacements de Navier en élastostatique, d'où la géométrie particulière d'inclusion enrobée sphérique et de milieux isotropes.

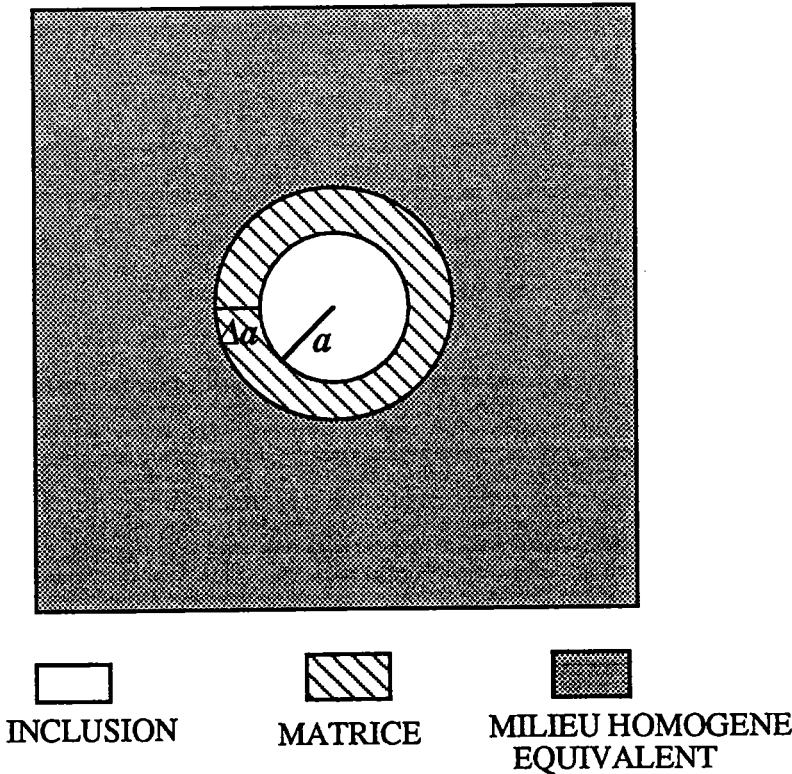


fig. II-3 : Schéma à trois phases de Christensen et Lo

Les termes $M^I(q)$ et $N^I(q)$ déduits à partir de la solution exacte de Hervé et Zaoui [13] sont donnés par :

$$M^I(q) = \frac{(3k^0 + 4\mu^0)(3k^I + 4\mu^c)}{(3k^c + 4\mu^0)(3k^I + 4\mu^c) + 12q(\mu^0 - \mu^c)(k^c - k^I)}$$

$$N^I(q) = 225(1 - \nu^0)(1 - \nu^c)X^0 \times \frac{-4(X^0 - 1)[\eta^1 q^{7/3} - \eta^2(7 - 10\nu^c)] + 35\eta^2(1 - \nu^c)}{\Delta}$$

avec :

$$\Delta = [2(4 - 5\nu^0)C + (7 - 5\nu^0)AX^0](X^0 - 1) + 525\eta^2(1 - \nu^c)$$

$$[2\kappa(\nu^c - \nu^0)q + (1 - \nu^0)\eta^3]X^0$$

$$\eta^1 = (49 - 50\nu^c\nu^I)\kappa + 35(1 + \kappa)(\nu^I - 2\nu^c) + 35(2\nu^I - \nu^c)$$

$$\eta^2 = (7 + 5\nu^I)(1 + \kappa) + 4(7 - 10\nu^I)$$

$$\eta^3 = 2(1 + \kappa)(4 - 5\nu^c) + 7 - 5\nu^c$$

$$\kappa = \frac{\mu^I}{\mu^c} - 1$$

$$X^0 = \frac{\mu^0}{\mu^c}$$

$$A = -4[\eta^3 - 2\kappa(4 - 5\nu^c)q][\eta^1 q^{7/3} - \eta^2(7 - 10\nu^c)] - 126\kappa\eta^2 q(1 - q^{2/3})^2$$

$$C = -[\eta^3 + \kappa(7 - 5\nu^c)q][4\eta^1 q^{7/3} + \eta^2(7 + 5\nu^c)] - 126\kappa\eta^2 q(1 - q^{2/3})^2$$

Dans le cas où

$$(\mu^I = 150 \text{ GPa}, \nu^I = 0.2),$$

$$(\mu^c = 15 \text{ GPa}, \nu^c = 0.2)$$

$$(\mu^o = 1.5 \text{ GPa}, \nu^o = 0.2),$$

les valeurs de $M^I(q)$ et $N^I(q)$ obtenues par la présente approche et celles déduites des formules exactes de Hervé et Zaoui sont reportées dans les figures (II-4) et (II-5) en fonction de q .

On constate que les deux modèles donnent pratiquement les mêmes résultats jusqu'à un rapport $\frac{\Delta a}{a} = 20\%$.

L'avantage de la méthode simplifiée présentée ici réside dans le fait qu'elle peut s'étendre par voie numérique aux cas d'inclusion enrobée ellipsoïdale et de matériaux anisotropes.

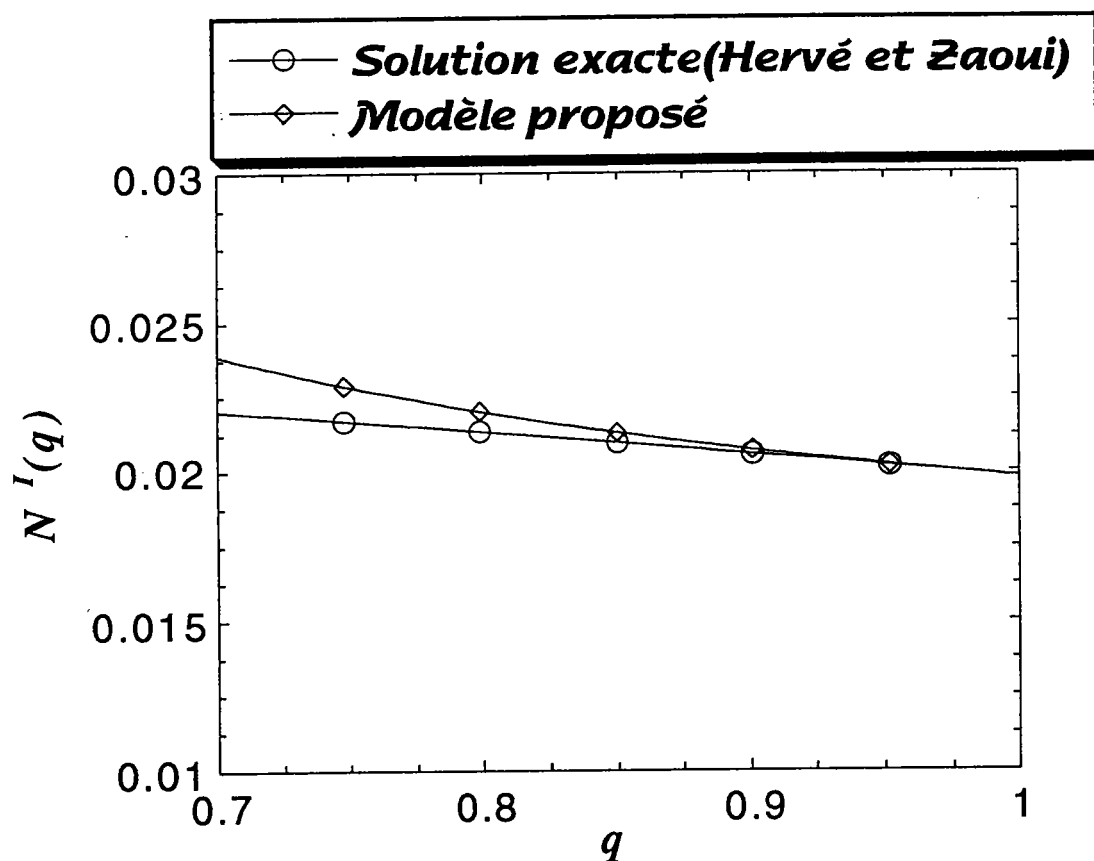


Fig. II-4 : Comparaison du facteur $N^I(q)$ déduit à partir du modèle proposé à celui calculé par la solution exacte pour différentes valeurs de q .

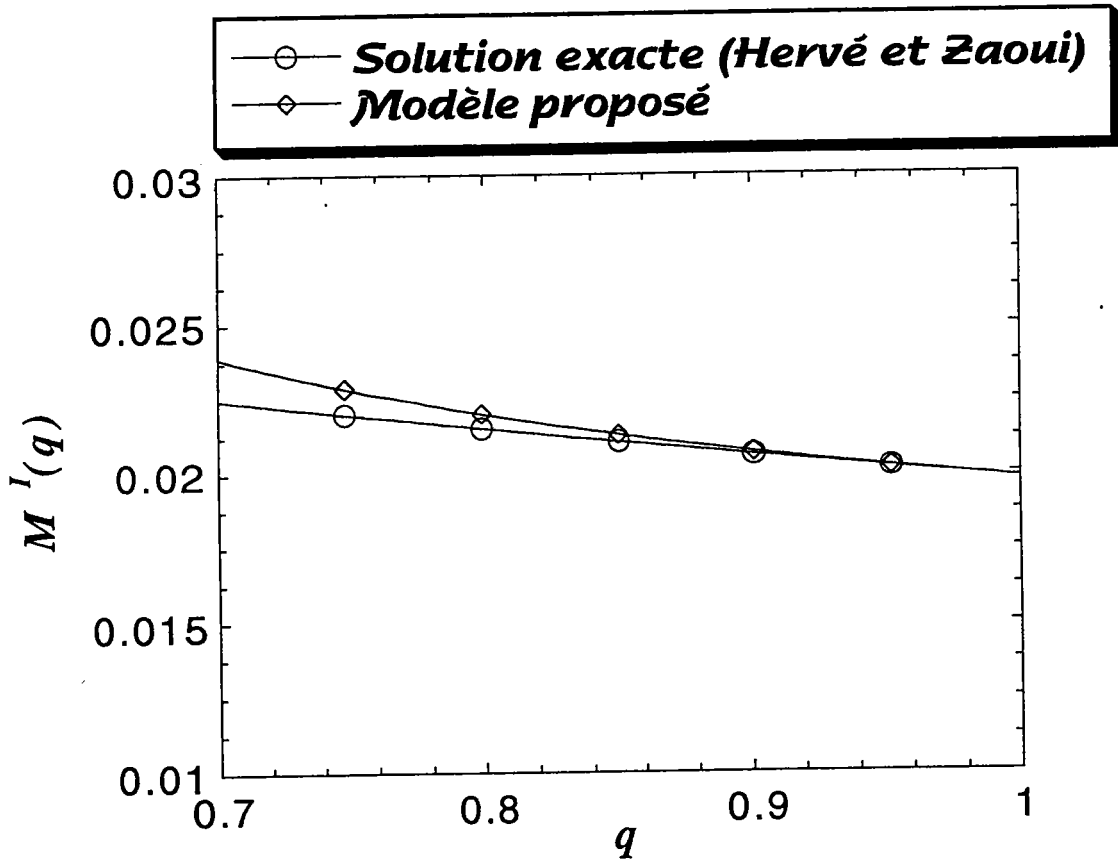


Fig. II-5 : Comparaison du facteur $M^I(q)$ déduit à partir du modèle proposé à celui calculé par la solution exacte pour différentes valeurs de q .

8. Conclusion

Dans le cas général d'une inclusion enrobée ellipsoïdale, avec une géométrie non homothétique, dans une matrice anisotrope, le problème de la détermination des champs de déformations moyens locaux est résolu par les équations (II-54) et (II-55). Les relation de localisation nécessitent le calcul des tenseurs T^2 et T^I qui requiert des méthodes numériques dans le cas d'une matrice anisotrope et d'inclusions ellipsoïdales. Dans le cas d'une géométrie homothétique les équations sont réduites aux formes (II-56) et (II-57) qui demandent uniquement le calcul du tenseur classique T^I .

La comparaison avec une méthode de résolution exacte, dans le cas d'une inclusion enrobée sphérique et de matériaux isotropes incompressibles, montre que le calcul des déformations moyennes locales avec l'hypothèse d'un champ moyen selon l'épaisseur de l'enrobage et en utilisant le champ moyen dans l'inclusion, constitue une évaluation correcte des effets de l'enrobage, tout au moins lorsque $\frac{\Delta a}{a} \ll 1$.

Le calcul des contraintes moyennes dans l'inclusion et l'enrobage découle directement de (II-54) et (II-55).

On peut souligner l'intérêt de ce modèle en faisant deux remarques :

- sa facilité de mise en oeuvre ; on précise par là que les calculs qu'il induit ne sont pas plus difficiles que ceux des problèmes d'inclusions classiques.

- son originalité ; cela provient du fait qu'on a utilisé simultanément l'équation intégrale et les opérateurs interfaciaux, de même il présente une approche nouvelle du problème d'inclusion enrobée qui a le mérite de s'appliquer à des inclusions ellipsoïdales et de matériaux anisotropes, alors que le schéma à trois phases de Christensen et Lo n'a été développé que pour des inclusions sphériques et de matériaux isotropes.

Dans la suite, nous utilisons les résultats précédents pour calculer les propriétés effectives d'un matériau composite contenant de nombreuses inclusions enrobées. Dans ce cas il faut prendre en compte les interactions entre ces dernières, interactions qui sont évaluées par l'intermédiaire d'une approche aurocohérente dans laquelle une inclusion enrobée est plongée dans un milieu infini dont les propriétés sont celles du milieu homogène équivalent.

9. Bibliographie.

- [1] KRÖNER E., "*Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalles aus den konstanten des einkristalls*", Z. Phys., Vol. 157, (1958).
- [2] KRÖNER E., "*Zur plastischen verformung des vielkristalls*", Acta. Metall., Vol. 9, (1961).
- [3] BERVEILLER M. - ZAOUI A., "*An extension of the self-consistent scheme to plastically folowing pycrystals*", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 26, (1979).
- [4] BERVEILLER M. - ZAOUI A., "*Méthodes self-consistantes en mécanique des solides hétérogènes*", 15e colloque du groupe français de rhéologie. Comportement rhéologique des matériaux, (1980), pp 175-199.
- [5] KRÖNER E., "*Bounds for effective elastic moduli of disordered materials*", J. Mech. Phys. solids, Vol. 25, (1977).
- [6] ESHELBY J.D., "*Elastic inclusions and inhomogeneities*". Prog. in Solid Mech. - Amsterdam (1961).
- [7] DEDERICHS P.H. - ZELLER R., "*Variational treatment of the elastic constants of disordered Materials*". Z. Phys. Vol. 259 (1973).
- [8] BERVEILLER M. - FASSI-FEHRI O. - HIHI A., "*The problem of two plastic and heterogeneous inclusions*", Int. J. Engng. Sci., Vol. 25, (1987).
- [9] WALPOLE L.J. "*The elastic field of an inclusion in an anisotropic medium*" Proc. Roy. Soc., (1967).
- [10] HILL R., "*Interfacial Operators in the mechanics of composite media*". J. Mech. Phys. Solids Vol. 31, (1983).
- [11] CHERKAOUI M. - SABAR H. - BERVEILLER M. "*Micromechanical approach of the coated inclusion problem and applications to composite materials*" J. Engng. Mater. Techno., Vol. 116, (1994).

- [12] CHERKAOUI M. - SABAR H. - BERVEILLER M., "*Elastic composites with coated reinforcements : a micromechanical approach for non homothetic topology*", *Int. J. Engng. Sci.*, (sous presse).
- [13] HERVE E. - ZAOUI A., "*Modelling the effective behavior of nonlinear matrix-inclusion composites*". *Eur. J. Mech. (A)* Vol. 9,(1990).
- [14] MURA T. - KINOSHITA N., "*Green's functions for anisotropic elasticity*", *Phys. Status Solids*, Vol. 47, (1971).
- [15] FASSI-FEHRI O., "*Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope : application à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité*", Thèse de doctorat d'état (Metz).
- [16] FAIVRE G., *Journal de Physique*, Vol. 32, (1971).
- [17] CHRISTENSEN R. M. - LO K. H., "*Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models*" *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 27, (1979).

CHAPITRE III

III - APPROCHE AUTO-COHERENTE ET APPLICATIONS AUX COMPOSITES.

1. Position du problème.

La résolution du problème de localisation par la solution du problème élémentaire d'une inclusion enrobée en interaction avec un milieu homogène de propriétés élastiques C^0 , nous a permis de relier les déformations moyennes dans l'inclusion et l'enrobage à la déformation macroscopique imposée à l'infini. On peut directement utiliser ces résultats pour déduire le comportement global dans le cas dilué (faible concentration d'inclusions enrobées), par contre, dans le cas non dilué il faut tenir compte des interactions entre inclusions enrobées et ceci en utilisant une approximation autocohérente.

On se propose, dans ce chapitre, de déduire le comportement élastique global d'un matériau composite constituant un milieu élastique infini composé de trois éléments différents, d'une matrice dont les caractéristiques mécaniques sont représentées par le tenseur C^M et d'inclusions de forme ellipsoïdale dont les caractéristiques mécaniques élastiques sont représentées par le tenseur C^I . Chaque inclusion est entourée d'une couche mince qui constitue l'enrobage et dont les propriétés élastiques sont désignées par C^c . On suppose également que l'inclusion composite (inclusion+enrobage) est de forme ellipsoïdale.

On note par V le volume total du milieu élastique, V_I le volume total des inclusions, V_c le volume total de l'enrobage et V_M le volume de la matrice de telle sorte que $V = V_I + V_c + V_M$.

En introduisant les tenseurs de localisation reliant les champs locaux aux chargements mécaniques, les relations de moyenne de Hill-Mandel permettront de déduire le comportement effectif global du composite. Ceci permet d'obtenir une extension de la méthode d'homogénéisation classique aux cas de matériaux à trois phases. Les tenseurs de localisation sont évalués à partir d'une approximation autocohérente qui consiste à faire un choix particulier du tenseur C^0 décrivant la "matrice" et à limiter, dans le cas de la méthode autocohérente à un site, les interactions entre constituants à celles entre une inclusion enrobée ellipsoïdale et le milieu homogène équivalent considéré comme matrice.

Les équations obtenues à partir de la formulation autocohérente sont appliquées pour déduire l'effet de l'enrobage sur le comportement d'un certain nombre de matériaux réels. La confrontation des résultats obtenus avec des mesures expérimentales aussi bien qu'avec d'autres approches permet de tester la validité du modèle proposé dans ce travail.

2. Rappels sur les techniques d'homogénéisation

Si on applique au milieu élastique une déformation d'ensemble E à la frontière du volume élémentaire représentatif, elle sera égale à la valeur moyenne volumique des déformations locales au sein du composite :

$$E_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij}(\vec{r}) dr \quad \text{III-1}$$

où $\varepsilon(\vec{r})$ est la déformation microscopique au point $\vec{r}$ du composite.

La contrainte d'ensemble Σ résultant de l'application de la déformation E est la moyenne sur le volume V de la contrainte locale $\sigma(\vec{r})$ dans le composite :

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\vec{r}) dr \quad \text{III-2}$$

Les coefficients de comportement homogénéisés seront les coefficients qui relient la moyenne E sur le volume V de la déformation locale $\varepsilon(\vec{r})$ à la moyenne Σ de la contrainte locale $\sigma(\vec{r})$:

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^{\text{eff}} E_{kl} \quad \text{III-3}$$

Dans ce cas, C^{eff} désignent les constantes élastiques effectives du matériau composite.

D'autre part, on peut écrire d'après la linéarité du problème pour le comportement élastique linéaire :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = A_{ijkl}(\vec{r}) E_{kl} \quad \text{III-4}$$

où A est le tenseur de localisation des déformations.

En appelant ε^I la déformation moyenne dans la phase <<inclusions>>, ε^c la déformation moyenne dans la phase <<enrobage>> et ε^M celle dans la matrice, on peut écrire à partir de (III-1) :

$$E_{ij} = \frac{V_I}{V} \varepsilon_{ij}^I + \frac{V_c}{V} \varepsilon_{ij}^c + \frac{V_M}{V} \varepsilon_{ij}^M \quad \text{III-5}$$

On pose :

$$f^I = \frac{V_I}{V} \quad \text{fraction volumique de la phase <<inclusions>>.$$

$$f^c = \frac{V_c}{V} \quad \text{fraction volumique de la phase <<enrobage>>.$$

$$f^M = \frac{V_M}{V} \quad \text{fraction volumique de la matrice.}$$

$$\text{et on a : } f^I + f^c + f^M = 1$$

Avec ces notations, (III-5) devient :

$$E_{ij} = f^I \varepsilon_{ij}^I + f^c \varepsilon_{ij}^c + f^M \varepsilon_{ij}^M \quad \text{III-6}$$

De même pour les contraintes, si on désigne par Σ la contrainte macroscopique, σ^I la contrainte moyenne dans la phase <<inclusions>>, σ^c la contrainte moyenne dans la phase <<enrobage>> et σ^M celle dans la matrice, on a :

$$\Sigma_{ij} = f^I \sigma_{ij}^I + f^c \sigma_{ij}^c + f^M \sigma_{ij}^M \quad \text{III-7}$$

A partir de (III-4), on peut écrire :

$$\varepsilon_{ij}^I = A_{ijkl}^I E_{kl} \quad \text{III-8}$$

$$\varepsilon_{ij}^c = A_{ijkl}^c E_{kl}$$

Par ailleurs, la loi de Hooke permet d'écrire :

$$\sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}^I \quad \text{III-9}$$

$$\sigma_{ij}^c = C_{ijkl}^c \varepsilon_{kl}^c \quad \text{III-10}$$

et compte tenu de (III-8), on a :

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^I &= C_{ijkl}^I A_{klmn}^I E_{mn} \\ \sigma_{ij}^c &= C_{ijkl}^c A_{klmn}^c E_{mn}\end{aligned}\tag{III-11}$$

De même dans la matrice, on a :

$$\sigma_{ij}^M = C_{ijkl}^M \varepsilon_{kl}^M \tag{III-12}$$

D'après (III-6) :

$$\varepsilon_{ij}^M = \frac{1}{f^M} \left(I_{ijkl} - f^I A_{ijkl}^* - f^c A_{ijkl}^c \right) E_{kl} \tag{III-13}$$

et

$$\sigma_{ij}^M = \frac{1}{f^M} C_{ijkl}^M \left(I_{klmn} - f^I A_{klmn}^* - f^c A_{klmn}^c \right) E_{mn} \tag{III-14}$$

des relations (III-7), (III-11) et (III-14), nous déduisons pour Σ :

$$\Sigma_{ij} = \left(C_{ijmn}^M + f^I (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M) A_{klmn}^I + f^c (C_{ijkl}^c - C_{ijkl}^M) A_{klmn}^c \right) E_{mn} \tag{III-15}$$

relation qui permet d'obtenir les constantes élastiques C^{eff} sous la forme :

$$C_{ijklmn}^{\text{eff}} = C_{ijmn}^M + f^I (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M) A_{klmn}^I + f^c (C_{ijkl}^c - C_{ijkl}^M) A_{klmn}^c \tag{III-16}$$

On obtient ainsi à partir d'opérations de moyenne classiques, basées sur le fait que les déformations et les contraintes macroscopiques sont les moyennes des champs locaux correspondants, une forme générale du comportement effectif dans le cas de milieux à trois phases. Cette relation fait intervenir les caractéristiques mécaniques des divers constituants composant le matériau hétérogène ainsi que leur fraction volumique. Cette forme est fonction aussi des tenseurs de localisation A^I et A^c des déformations moyennes dans les inclusions et les enrobages dont la détermination s'effectue à partir d'une approche autocohérente.

3. Approche autocohérente.

L'Approche autocohérente (ou méthode self-consistante) consiste à calculer les coefficients élastiques équivalents d'un matériau composite contenant des inclusions enrobées de forme ellipsoïdale noyées dans une matrice en considérant l'interaction entre une hétérogénéité qui est l'inclusion enrobée et le milieu équivalent au milieu hétérogène initial. Ce milieu homogène a les propriétés élastiques équivalentes C^{eff} .

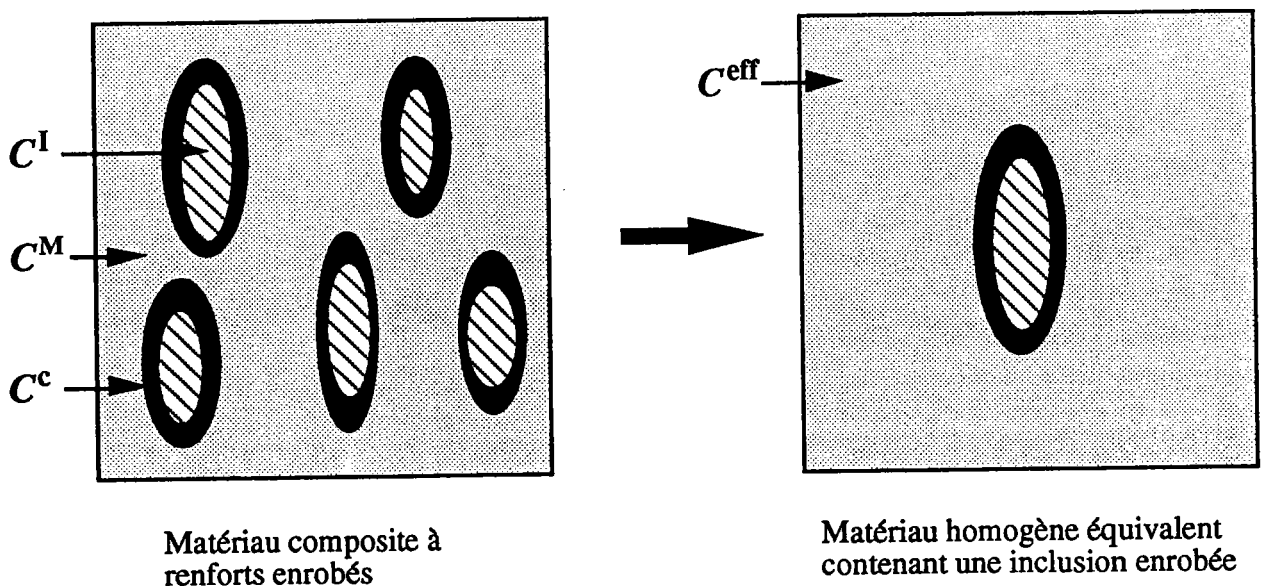


Fig. III-1 : Schématisation du modèle self-consistent.

On voit alors que la détermination des tenseurs de localisation A^I et A^c , par l'approche autocoherente, se ramène à utiliser les résultats du problème de l'inclusion enrobée hétérogène, traité au chapitre II, dans lequel il suffit de remplacer dans les équations C^0 par C^{eff} qui représente, dans ce cas, le milieu homogène équivalent. Par conséquent, les équations (II-54) et (II-55) deviennent :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^I = & E_{ij} - T_{ijkl}^2(C^{eff}) \Delta C_{klmn}^I \varepsilon_{mn}^I \\ & - \frac{V_c}{V_I} T_{ijkl}^I(C^{eff}) \Delta C_{klmn}^c T_{mnpq}^I(C^c) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I \\ & - \frac{V_c}{V_I} \left\{ T_{ijkl}^I(C^c) - T_{ijkl}^I(C^{eff}) \right\} \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \end{aligned} \quad \text{III - 17}$$

$$\begin{aligned} & + (I_{ijmn} + T_{ijkl}^I(C^{eff}) \Delta C_{klmn}^c) \left(T_{mnpq}^2(C^c) - T_{mnpq}^I(C^c) \right) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I \\ \varepsilon_{ij}^c = & \varepsilon_{ij}^I + \left\{ T_{ijkl}^I(C^c) - \frac{V_I}{V_c} \left(T_{ijkl}^2(C^c) - T_{ijkl}^I(C^c) \right) \right\} \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \end{aligned} \quad \text{III-18}$$

où $\Delta C^I = C^I - C^{eff}$ et $\Delta C^c = C^c - C^{eff}$

et dont la résolution permet de déduire les tenseurs de localisation A^I et A^c par :

$$\begin{aligned} A_{ijrs}^I = & \left\{ I_{ijrs} + T_{ijpq}^2(C^{eff}) \Delta C_{pqrs}^I + \right. \\ & + \left(I_{ijmn} + T_{ijkl}^I(C^{eff}) \Delta C_{klmn}^c \right) \left(T_{mnpq}^2(C^c) - T_{mnpq}^I(C^c) \right) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \\ & \left. + \frac{f_c}{f_I} \left(T_{ijkl}^I(C^{eff}) \Delta C_{klmn}^c T_{mnpq}^I(C^c) + \left(T_{ijpq}^I(C^c) - T_{ijpq}^I(C^{eff}) \right) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \right) \right\}^{-1} \end{aligned} \quad \text{III - 19}$$

$$A_{ijpq}^c = \left\{ I_{ijmn} + \left(T_{ijkl}^I(C^c) - \frac{f_I}{f_c} \left(T_{ijkl}^2(C^c) - T_{ijkl}^I(C^c) \right) \right) \Delta C_{klmn}^{Ic} \right\} A_{mnpq}^I \quad \text{III-20}$$

Les formules (III-19) et (III-20) donnent les tenseurs de localisation moyens dans l'inclusion et l'enrobage dans le cas général de matériaux anisotropes et de renforts ellipsoïdaux. Ces renforts sont représentés par l'intermédiaire de deux inclusions ellipsoïdales concentriques et non homothétiques définissant les inclusions et leur enrobage. Cette représentation est l'une des plus générales. En effet, si on désigne par a , b et c les paramètres de forme de l'inclusion ellipsoïdale et par Δa , Δb et Δc les épaisseurs de l'enrobage correspondantes, on peut traiter les cas :

- d'une géométrie homothétique par l'intermédiaire du problème d'inclusions enrobées sphériques où $a = b = c$ et $\Delta a = \Delta b = \Delta c$. Ainsi on décrit l'inclusion enrobée sphérique par deux paramètres géométriques ; a le rayon de l'inclusion et Δa l'épaisseur de l'enrobage avec $\frac{\Delta a}{a} \ll 1$.

- de fibres longues enrobées où $a = b \ll c$, $\Delta a = \Delta b$ et $\Delta c = 0$, c'est le cas d'une géométrie non homothétique où la fibre longue enrobée est décrite par trois paramètres géométriques ; a et c les paramètres de forme de la fibre et Δa l'épaisseur de l'enrobage.

Dans chaque cas, on teste la validité du modèle en le comparant à des résultats expérimentaux aussi bien qu'aux résultats obtenus à partir d'autres approches. Auparavant, il paraît cependant intéressant de présenter des solutions analytiques dans le cas de milieux isotropes et d'inclusions enrobées sphériques.

4. Cas d'un composite isotrope à inclusions enrobées sphériques : solution analytique.

Dans ce cas, les propriétés élastiques des constituants se réduisent aux constantes rassemblées dans le tableau III-1.

	Matrice	Inclusion	Enrobage
Coefficients de Lamé	λ^M, μ^M	λ^I, μ^I	λ^c, μ^c

Tableau III-1. : Propriétés élastiques des constituants isotropes du composite.

Le matériau composite contient des inclusions enrobées caractérisées par les constantes isotropes C^I et C^c telles que :

$$C_{ijkl}^I = \lambda^I \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 \mu^I I_{ijkl} \quad \text{III-21}$$

$$C_{ijkl}^c = \lambda^c \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 \mu^c I_{ijkl} \quad \text{III-22}$$

Les constantes de la matrice supposée isotrope s'écrivent également de la même manière :

$$C_{ijkl}^M = \lambda^M \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 \mu^M I_{ijkl} \quad \text{III-23}$$

où I est le tenseur unité de 4^e ordre.

Nous nous proposons de chercher les solutions $C^{\text{eff}}(\lambda^{\text{eff}}, \mu^{\text{eff}})$ du milieu homogène équivalent telles que :

$$C_{ijkl}^{\text{eff}} = \lambda^{\text{eff}} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 \mu^{\text{eff}} I_{ijkl} \quad \text{III-24}$$

Pour cela, nous cherchons une forme analytique des tenseurs de localisation des déformations A^I et A^c déduits, dans le cas homothétique, du système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^I &= E_{ij} - T_{ijkl}^I(C^{\text{eff}}) \Delta C_{klmn}^I \epsilon_{mn}^I \\ &\quad - \frac{f_c}{f_I} T_{ijkl}^I(C^{\text{eff}}) \Delta C_{klmn}^c T_{mnpq}^I(C^c) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \epsilon_{rs}^I \end{aligned} \quad \text{III-25}$$

$$- \frac{f_c}{f_I} \left\{ T_{ijkl}^I(C^c) - T_{ijkl}^I(C^{\text{eff}}) \right\} \Delta C_{klmn}^{Ic} \epsilon_{mn}^I$$

$$\epsilon_{ij}^c = \left\{ I_{ijmn} + T_{ijkl}^I(C^c) \Delta C_{klmn}^{Ic} \right\} \epsilon_{mn}^I \quad \text{III-26}$$

Avec l'hypothèse de la couche mince, on a :

$$\frac{f_c}{f_I} = \frac{V_c}{V_I} \approx 3 \frac{\Delta a}{a} \quad \text{III-27}$$

La forme analytique des tenseurs de localisation A^I et A^c est déduite de celle obtenue au chapitre II, où il suffit de remplacer C^0 par C^{eff} , on obtient ainsi:

$$A_{ijkl}^I = N^I I_{ijkl} + \frac{1}{3} (M^I - N^I) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad \text{III-28}$$

$$A_{ijkl}^c = N^I \left(\frac{\mu^c + \beta^c (\mu^I - \mu^c)}{\mu^c} \right) I_{ijkl} + \frac{1}{3} \left[M^I \left(\frac{k^c + \alpha^c (k^I - k^c)}{k^c} \right) - N^I \left(\frac{\mu^c + \beta^c (\mu^I - \mu^c)}{\mu^c} \right) \right] \delta_{ij} \delta_{kl} \quad \text{III-29}$$

où

$$M^I = \frac{k^{\text{eff}}}{k^{\text{eff}} + \alpha^{\text{eff}} (k^I - k^{\text{eff}}) + 3 \frac{\Delta a}{a} \left\{ \frac{\alpha^c k^{\text{eff}} (1 - \alpha^{\text{eff}}) - \alpha^{\text{eff}} k^c (1 - \alpha^c)}{k^c} \right\} (k^I - k^c)}$$

$$N^I = \frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^{\text{eff}} + \beta^{\text{eff}} (\mu^I - \mu^{\text{eff}}) + 3 \frac{\Delta a}{a} \left\{ \frac{\beta^c \mu^{\text{eff}} (1 - \beta^{\text{eff}}) - \beta^{\text{eff}} \mu^c (1 - \beta^c)}{\mu^c} \right\} (\mu^I - \mu^c)}$$

On obtient ainsi les deux termes classiques

$$\frac{k^{\text{eff}}}{k^{\text{eff}} + \alpha^{\text{eff}} (k^I - k^{\text{eff}})} \quad \frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^{\text{eff}} + \beta^{\text{eff}} (\mu^I - \mu^{\text{eff}})}$$

obtenus dans le cas d'un matériau composite à deux phases.

On voit clairement que l'effet de l'enrobage apparaît à travers les termes

$$3 \frac{\Delta a}{a} \left\{ \frac{\alpha^c k^{\text{eff}} (1 - \alpha^{\text{eff}}) - \alpha^{\text{eff}} k^c (1 - \alpha^c)}{k^c} \right\} (k^I - k^c)$$

$$3 \frac{\Delta a}{a} \left\{ \frac{\beta^c \mu^{\text{eff}} (1 - \beta^{\text{eff}}) - \beta^{\text{eff}} \mu^c (1 - \beta^c)}{\mu^c} \right\} (\mu^I - \mu^c)$$

qui dépendent de l'épaisseur de l'enrobage et de ses propriétés élastiques.

4.1 - Expression de λ^{eff} et μ^{eff} .

Pour pouvoir décrire le tenseur C^{eff} il suffit de déterminer λ^{eff} et μ^{eff} . A partir de (III-16), (III-21), (III-22) et (III-23), C^{eff} prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^{\text{eff}} = & \left\{ \lambda^{\text{M}} + f^{\text{I}} \left[(\lambda^{\text{I}} - \lambda^{\text{M}}) M^{\text{I}} + \frac{2}{3} (M^{\text{I}} - N^{\text{I}}) (\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{M}}) \right] \right. \\ & \left. + f^{\text{c}} \left[(\lambda^{\text{c}} - \lambda^{\text{M}}) M^{\text{I}} \phi^{\text{c}} + \frac{2}{3} (M^{\text{I}} \phi^{\text{c}} - N^{\text{I}} \psi^{\text{c}}) (\mu^{\text{c}} - \mu^{\text{M}}) \right] \right\} \delta_{ij} \delta_{mn} \quad \text{III-30} \\ & + 2 \left[\mu^{\text{M}} + f^{\text{I}} (\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{M}}) N^{\text{I}} + f^{\text{c}} (\mu^{\text{c}} - \mu^{\text{M}}) N^{\text{I}} \psi^{\text{c}} \right] I_{ijmn} \end{aligned}$$

et d'après (III-24), nous déduisons pour λ^{eff} et μ^{eff} :

$$\begin{aligned} \lambda^{\text{eff}} = & \lambda^{\text{M}} + f^{\text{I}} \left[(\lambda^{\text{I}} - \lambda^{\text{M}}) M^{\text{I}} + \frac{2}{3} (M^{\text{I}} - N^{\text{I}}) (\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{M}}) \right] \\ & + f^{\text{c}} \left[(\lambda^{\text{c}} - \lambda^{\text{M}}) M^{\text{I}} \phi^{\text{c}} + \frac{2}{3} (M^{\text{I}} \phi^{\text{c}} - N^{\text{I}} \psi^{\text{c}}) (\mu^{\text{c}} - \mu^{\text{M}}) \right] \end{aligned} \quad \text{III-31}$$

$$\mu^{\text{eff}} = \mu^{\text{M}} + f^{\text{I}} (\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{M}}) N^{\text{I}} + f^{\text{c}} (\mu^{\text{c}} - \mu^{\text{M}}) N^{\text{I}} \psi^{\text{c}} \quad \text{III-32}$$

où :

$$\phi^{\text{c}} = \frac{k^{\text{c}} + \alpha^{\text{c}} (k^{\text{I}} - k^{\text{c}})}{k^{\text{c}}} \quad \text{et} \quad \psi^{\text{c}} = \frac{\mu^{\text{c}} + \beta^{\text{c}} (\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{c}})}{\mu^{\text{c}}}$$

Les relations (III-31) et (III-32) sont des équations de second degré en λ^{eff} et μ^{eff} . Leur résolution permet de connaître le comportement effectif global du composite à trois phases pour des fractions volumiques données des inclusions et de l'enrobage.

On peut également écrire (III-31) et (III-32) en fonction uniquement de la fraction volumique des inclusions et l'épaisseur Δa de l'enrobage. En effet, à partir de la relation (III-27) on en déduit que :

$$f^c \approx 3 \frac{\Delta a}{a} f^I \quad \text{III-33}$$

ce qui permet d'écrire (III-31) et (III-32) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \lambda^{\text{eff}} = \lambda^M + f^I \left\{ \left[(\lambda^I - \lambda^M) M^I + \frac{2}{3} (M^I - N^I) (\mu^I - \mu^M) \right] \right. \\ \left. + 3 \frac{\Delta a}{a} \left[(\lambda^c - \lambda^M) M^I \phi^c + \frac{2}{3} (M^I \phi^c - N^I \psi^c) (\mu^c - \mu^M) \right] \right\} \end{aligned} \quad \text{III-34}$$

$$\mu^{\text{eff}} = \mu^M + f^I \left\{ (\mu^I - \mu^M) N^I + 3 \frac{\Delta a}{a} (\mu^c - \mu^M) N^I \psi^c \right\} \quad \text{III-35}$$

Les résultats analytiques ainsi obtenus seront comparés par la suite aux résultats numériques obtenus par la méthode décrite dans le paragraphe suivant.

5. Méthode numérique (cas général).

Contrairement à la méthode analytique exposée précédemment, celle ci est valable dans le cas le plus général du composite :

- forme des inclusions enrobées ellipsoïdale avec une géométrie non homothétique.
- comportement local anisotrope.

Les coefficients élastiques effectifs du composite sont déterminés à partir de l'équation (III-16) qu'on écrira d'une manière détaillée en considérant les expressions (III-19) et (III-20) des tenseurs de localisation A^I et A^c et en utilisant le fait que dans le cas d'une inclusion enrobée ellipsoïdale les fractions volumiques des inclusions et de l'enrobage sont reliées par :

$$f^c = \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \right) f^I \quad \text{III-36}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} C^{\text{eff}} = C^M + f^I & \left\{ \Delta C^{\text{IM}} + \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \right) \Delta C^{\text{cM}} \right. \\ & \left. \left[I + \left(T^I(C^c) + \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \right)^{-1} (T^2(C^c) - T^I(C^c)) \right) \Delta C^{\text{Ic}} \right] \right\} \\ & \left\{ I + T^2(C^{\text{eff}}) \Delta C^I + \left(I + T^I(C^{\text{eff}}) \Delta C^c \right) (T^2(C^c) - T^I(C^c)) \Delta C^{\text{Ic}} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \right) \left(T^I(C^{\text{eff}}) \Delta C^c T^I(C^c) + (T^I(C^c) - T^I(C^{\text{eff}})) \Delta C^{\text{Ic}} \right)^{-1} \right\} \end{aligned} \quad \text{III-37}$$

$$\text{où} \quad \Delta C^{\text{IM}} = C^I - C^M \quad \Delta C^{\text{cM}} = C^c - C^M$$

On pourra remarquer que la relation (III-37) est une équation implicite en C^{eff} puisque ce tenseur figure dans les deux membres de l'égalité. Pour résoudre cette équation, on utilise la méthode d'itération qui consiste, en général, à partir d'une solution approchée pour aboutir ensuite à la solution réelle. Dans un premier pas de calcul on peut injecter dans l'expression de A^I et A^c , pour obtenir C^{eff} , des constantes élastiques initiales, par exemple, à partir de la loi des mélanges obtenue par Voigt ($A^I = A^c = I$) :

$$C^{eff} = C^M + f^I \left\{ \Delta C^{IM} + \left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c} \right) \Delta C^{cM} \right\} \tag{III-38}$$

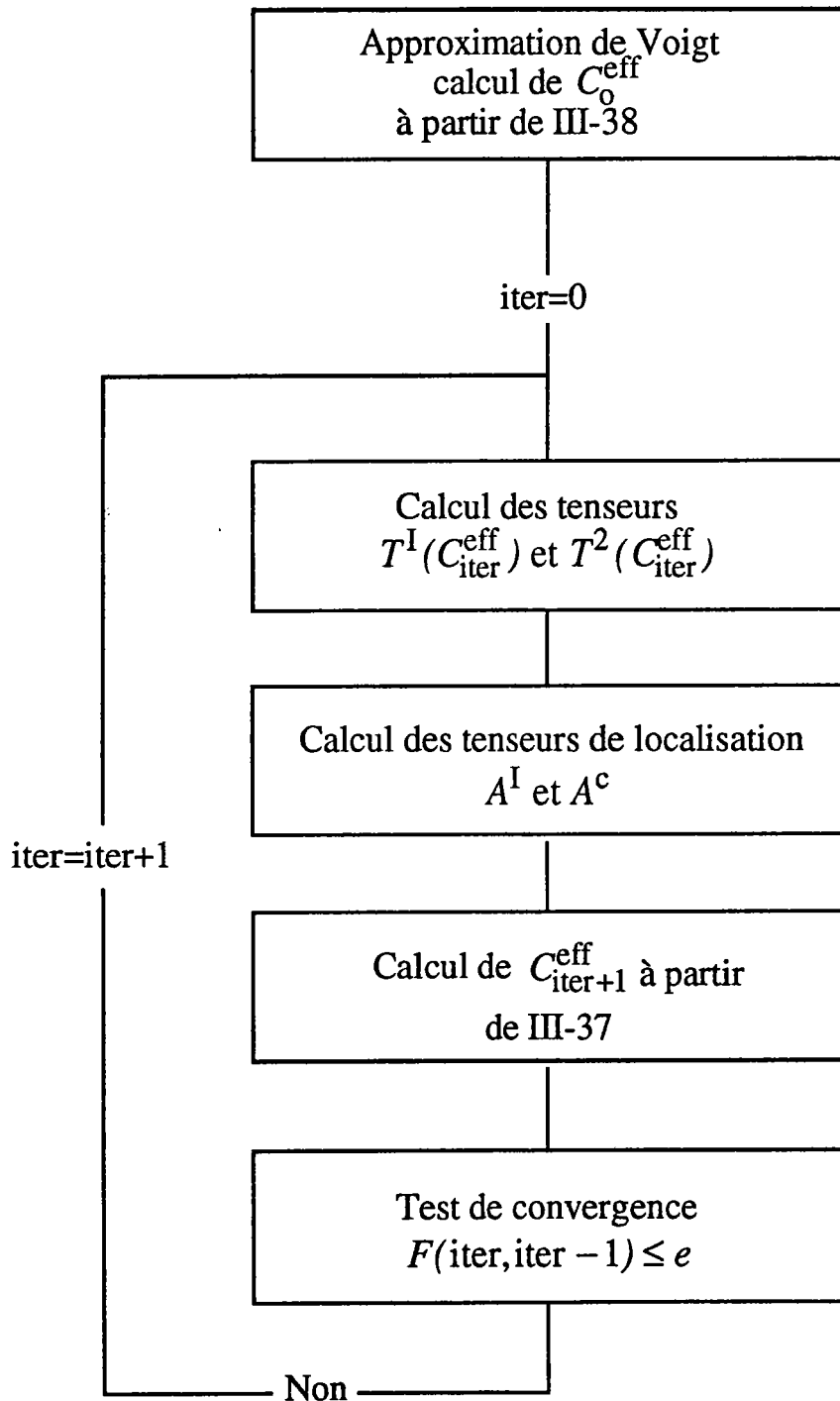
Quand les solutions obtenues n'avoisinent pas les constantes élastiques injectées, on calcule de nouveau les constantes C^{eff} en introduisant les solutions obtenues dans l'expression de C^{eff} . On répète le même processus jusqu'à convergence. On peut adapter le critère de convergence suivant :

$$\frac{(C_{n+1}^{eff})^2 - (C_n^{eff})^2}{(C_n^{eff})^2} \leq e \tag{III-39}$$

où n est le nombre de pas dans le processus itératif et e un nombre petit devant 1.

Les données nécessaires à la résolution numérique se présentent de la manière suivante :

Paramètres géométriques	Les demi-axes de l'inclusion ellipsoïdale a, b, c	Les épaisseurs de l'enrobage $\Delta a, \Delta b, \Delta c$
Propriétés mécaniques	Tenseurs d'ordre 4 des constantes élastiques C^I, C^c, C^M	
Paramètre de précision	e	



**Algorithme 1 : Détermination des propriétés effectives
du composite à trois phases.**

5.1 - Confrontation des deux méthodes (cas d'un matériau isotrope à renforts enrobés sphériques).

Le calcul numérique est effectué pour le composite à trois phases dont les propriétés mécaniques des constituants sont données par :

$$\mu^M = 1.5 \text{ GPa} \quad \nu^M = 0.2$$

$$\mu^c = 15 \text{ GPa} \quad \nu^c = 0.2$$

$$\mu^I = 150 \text{ GPa} \quad \nu^I = 0.2$$

et pour un rapport $\frac{\Delta a}{a} = 10\%$.

Les figures (III-2) et (III-3) représentent les variations des modules effectifs en fonction de la fraction volumique des inclusions sphériques. Sont reportés sur les figures les résultats obtenus par la méthode analytique (formules (III-34) et (III-35)) et les résultats numériques obtenus par la méthode d'itération.

On remarque que dans tous les cas, les courbes correspondant aux résultats numérique sont confondues avec celles obtenues à partir des calculs analytiques. Les calculs numériques sont ainsi vérifiés dans le cas des composites isotropes à renforts enrobés sphériques par la méthode analytique développée.

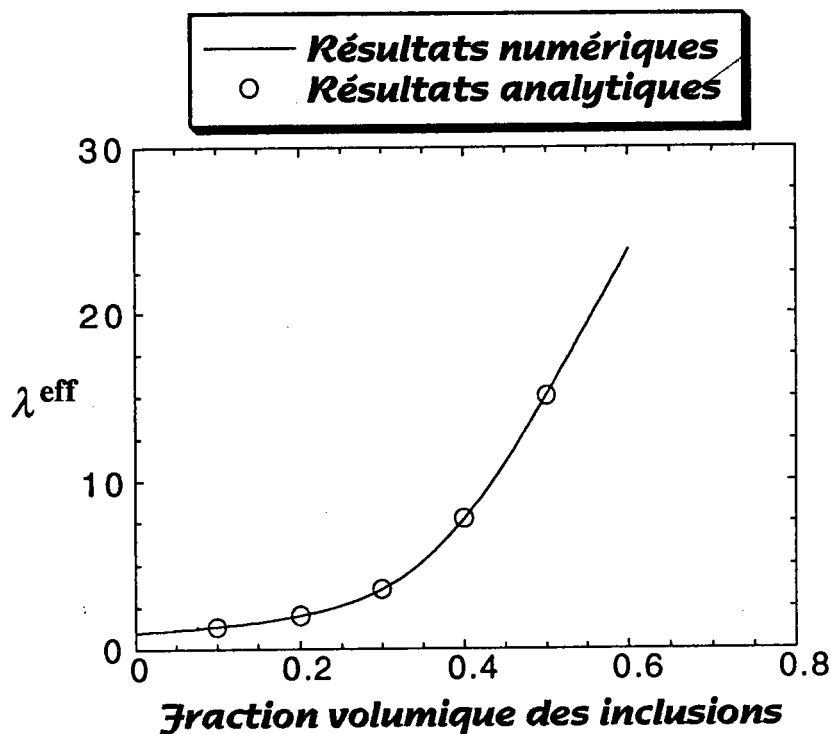


Fig. III-2 : Evolution du coefficient de Lamé λ en fonction de la fraction volumique des inclusions.

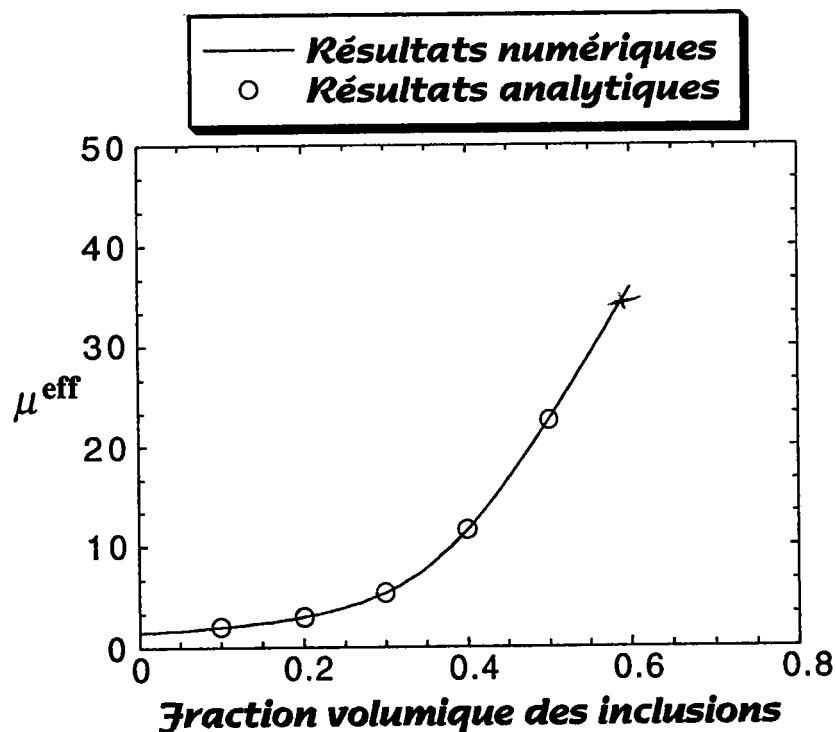


Fig. III-3 : Evolution du coefficient de Lamé μ en fonction de la fraction volumique des inclusions.

Afin de vérifier la pertinence des approximations effectuées dans ce travail, le modèle proposé est utilisé pour déterminer le comportement effectif global des matériaux composites réels à trois phases. Les résultats obtenus sont comparés avec des mesures expérimentales et des résultats déduits à partir d'autres approches (théoriques ou numériques).

On traite deux types de matériaux composites :

- les mousses syntactiques et les composites à base d'une matrice d'époxy et de billes de verre enrobées par une couche d'élastomère. Ces matériaux contiennent des inclusions enrobées sphériques et présentent un comportement isotrope.

- Les composites à fibres longues enrobées qui présentent une anisotropie dans le comportement global.

6. Application aux mousses syntactiques

Pour réaliser des matériaux poreux insubmersibles et ayant une très haute résistance aux pressions hydrostatiques, on utilise des microbilles creuses de verre pour le renforcement du composite. Les microbilles creuses ont des diamètres faibles et contiennent un gaz inerte. Elles sont obtenues par passage de poudre de verre dans une zone chaude. Les gaz contenus dans le verre s'expandent et les microbilles molles gonflent en contenant leur gaz. Un refroidissement fige alors le verre de la paroi sous pression de gaz inerte. Ces micro-ballons sont très légers et ont une résistance mécanique élevée. Ils peuvent être combinés avec différentes résines (époxydes, polyester, etc.).

On désigne sous le nom de mousses syntactiques des matériaux composites constitués de charges creuses entièrement noyées dans une résine. Ces inclusions sont généralement formées de microballons de verre, dont le diamètre varie entre 5 et 200 micromètres, avec une épaisseur variant de 1 à 3% de leur diamètre. Ceci confère à ces matériaux une faible masse volumique (de 0.5 à 0.3 g/cm³) qui favorise leur utilisation dans les domaines variés, notamment dans la construction de structures sous-marines.

Ces matériaux, utilisés essentiellement pour alléger des véhicules ou des conduits destinés à travailler pendant des séjours prolongés en immersion, à des profondeurs pouvant atteindre 6000 m, sous une pression hydrostatique de 600 Bars, courent des risques d'endommagement dus à plusieurs facteurs :

- écrasement des microbilles entraînant une forte variation de la densité du matériau,
- rupture par traction ou cisaillement des microbilles engendrant des cassures à l'échelle macroscopique,
- pénétration de l'eau à travers la matrice entraînant un gain de poids du matériau.

On comprend donc l'intérêt que portent les fabricants de ces matériaux aux études qui peuvent apporter une meilleure compréhension de leur comportement et, par voie de conséquence, une amélioration de leurs performances.

La compréhension du comportement des mousses syntactiques a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs. Citons en premier lieu Deruntz et Hoffman [1] qui proposent une étude macroscopique basée sur une série d'essais

mécaniques au cours desquels ils observent toujours un comportement élastique linéaire suivie d'une modification brutale du comportement. Ils expliquent ce changement de comportement par l'apparition de ruptures de microbilles et de décohésion verre-résine. Plus récemment, des modèles micromécaniques basés sur la technique d'homogénéisation des milieux à trois phases et, dont la résolution s'effectue par la méthode des éléments finis, ont été proposés afin de prédire le comportement de ces matériaux [2, 3].

On se propose dans ce paragraphe de déduire à partir du modèle proposé le comportement effectif des mousses syntactiques en fonction de la fraction volumique des billes de verre creuses et l'épaisseur de la couche du verre. Les résultats obtenus sont comparés, d'une part, aux résultats théoriques et expérimentaux de Huang et Gibson [4], et d'autre part, aux résultats obtenus par une technique d'homogénéisation des milieux périodiques proposée par Ben Hamida et Léné [5].

Dans le composite nous sommes en présence de trois phases : de la résine qui constitue la matrice, des microbilles composées de verre qui constitue dans ce cas l'enrobage et du gaz inerte qui décrit les inclusions.

La résine et le verre ont un comportement élastique linéaire. Ils sont supposés homogènes et isotropes. Le gaz inerte étant un fluide, on prendra dans les équations les coefficients C^I nuls (on néglige la compressibilité du gaz inerte contenu dans les billes creuses).

Le comportement du matériau composite est fonction de la fraction volumique des microbilles dans la résine, les caractéristiques mécaniques des constituants et du rapport $\Delta a/a$ (Δa étant l'épaisseur de la couche du verre et a le rayon intérieur des microbilles).

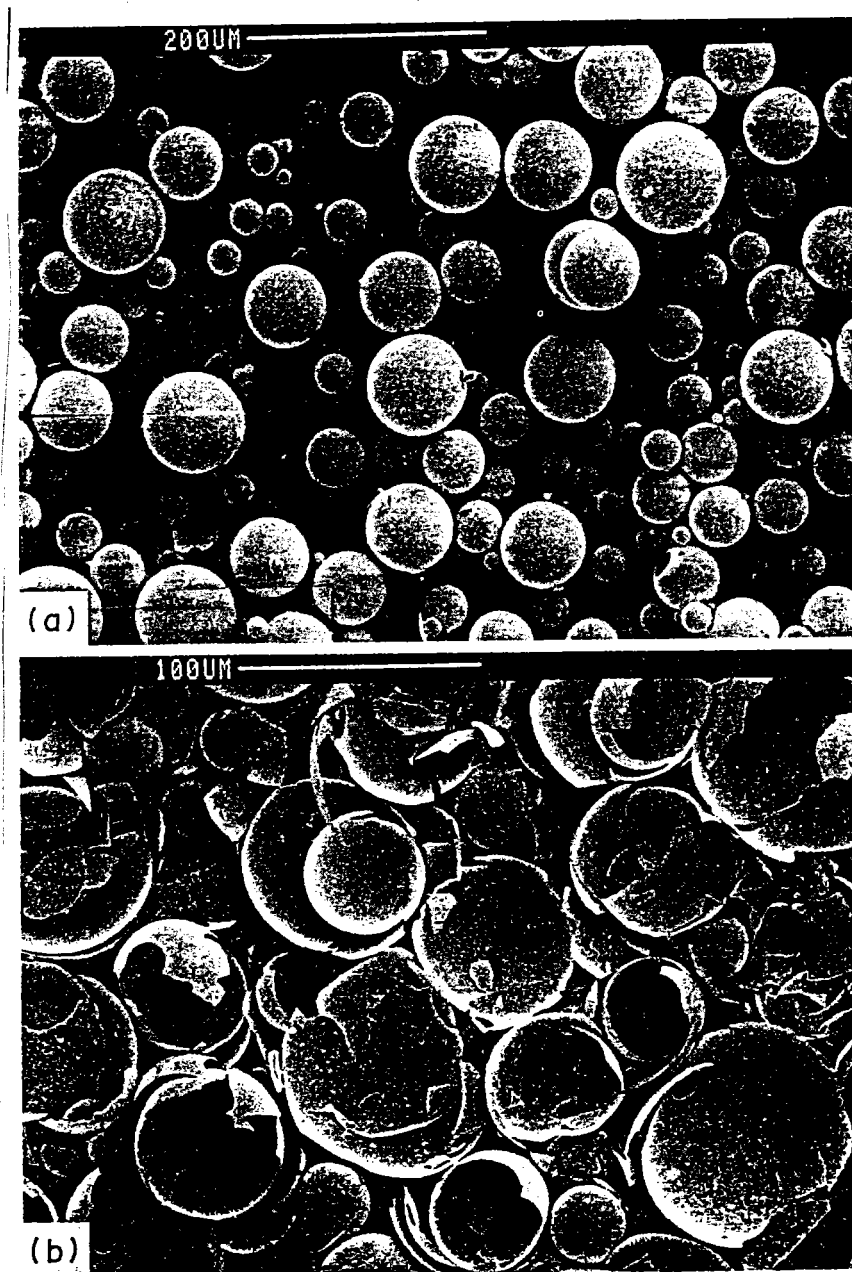


Fig. III-4 : Micrographie des billes de verre creuses utilisées dans les composites (a) intactes, (b) endommagées [4].

6.1 - Comparaison avec les résultats théoriques et expérimentaux de Huang et Gibson.

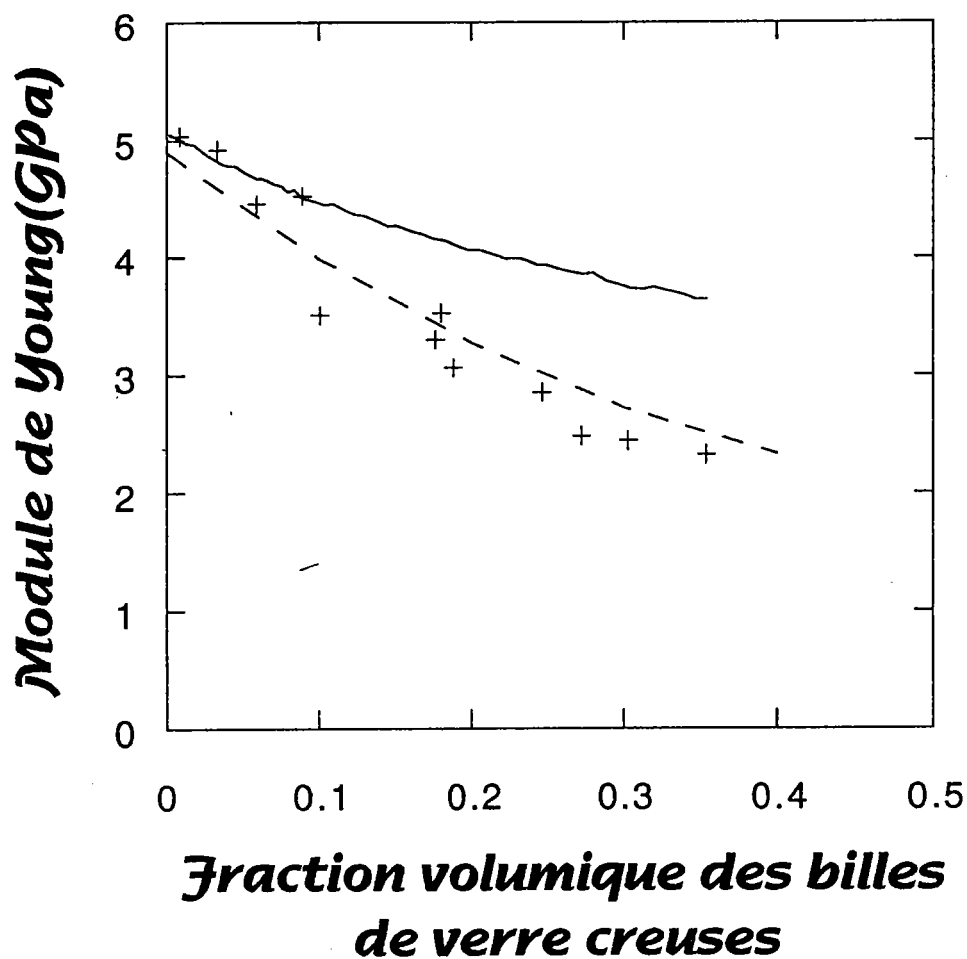
Dans un travail récent, Huang et Gibson ont proposé un modèle micromécanique basé sur la solution du problème d'une inclusion sphérique creuse située dans une matrice infinie isotrope obtenue par Lur'e [6]. Les interactions entre inclusions ont été négligées et leurs résultats ne sont valables que dans le cas de milieux dilués.

Effectivement, dans le cas d'une matrice en résine époxy contenant des billes de verre creuses, les résultats de leur modèle ne s'accordent avec leurs mesures expérimentales du module de Young que pour des fractions volumiques d'inclusions enrobées ne dépassant pas 0.1 (Fig. III-5). En reprenant les propriétés et paramètres définissant le matériau (rappelés dans le Tab. III-2) donnés par Huang et Gibson, nous avons calculé le module de Young équivalent à partir du modèle proposé dans ce travail. La figure (III-5) représente simultanément les résultats des mesures de Huang et Gibson, leurs calculs théoriques ainsi que les valeurs obtenues à partir du modèle proposé dans ce travail.

On observe que le modèle proposé fournit des résultats en bon accord avec les mesures expérimentales, y compris dans le cas de milieux non dilués.

	Verre	Polyester	$\Delta a/a$
$\mu(\text{GPa})$	28.5	1.75	0.017
ν	0.23	0.4	

Tableau III-2 : Paramètres mécaniques du matériau étudié par Huang et Gibson.



- Modèle de Huang et Gibson.
- +++ Mesures expérimentales de Huang et Gibson.
- Modèle proposé dans ce travail.

Fig. III-5 : Module de Young en fonction de la fraction volumique des billes de verre creuses.

6.2 - Comparaison avec une méthode par éléments finis.

Le comportement macroscopique des mousses syntactiques a été étudié par Ben Hamida et Léné [5] en utilisant une approche micromécanique basée sur les techniques classiques d'homogénéisation des milieux périodiques. Cette technique est basée sur des développements asymptotiques à double échelle et la résolution du problème sur la cellule de base s'effectue par la méthode des éléments finis.

Sur la figure (III-6) nous avons reporté les résultats concernant le module de Young homogénéisé par la méthode des éléments finis et ceux obtenus par le modèle proposé dans ce travail. On constate que les deux méthodes fournissent des résultats en bon accord.

On pourra remarquer que, dans tous les cas, la fraction volumique des billes de verre creuses n'intervient pas dans le changement de rigidité du composite (passage d'un milieu moins rigide que la matrice à un milieu plus rigide et vice versa). Ce changement n'est fonction que du rapport $\Delta a/a$.

Notons également que la méthode par éléments finis rencontre, dans ce type d'applications, des difficultés liées d'une part au fait que les problèmes à résoudre sont tridimensionnels, d'autre part au fait que l'épaisseur du verre est très faible par rapport à la taille de la cellule et impose par conséquent un maillage assez fin du domaine. Ainsi, le calcul par éléments finis demande un logiciel performant et un temps de calcul considérable. Par contre la méthode exposée dans ce travail est directe et facile à mettre en oeuvre. Les résultats peuvent être déduits directement à partir des solutions analytiques qui demandent uniquement une résolution d'une équation de second ordre.

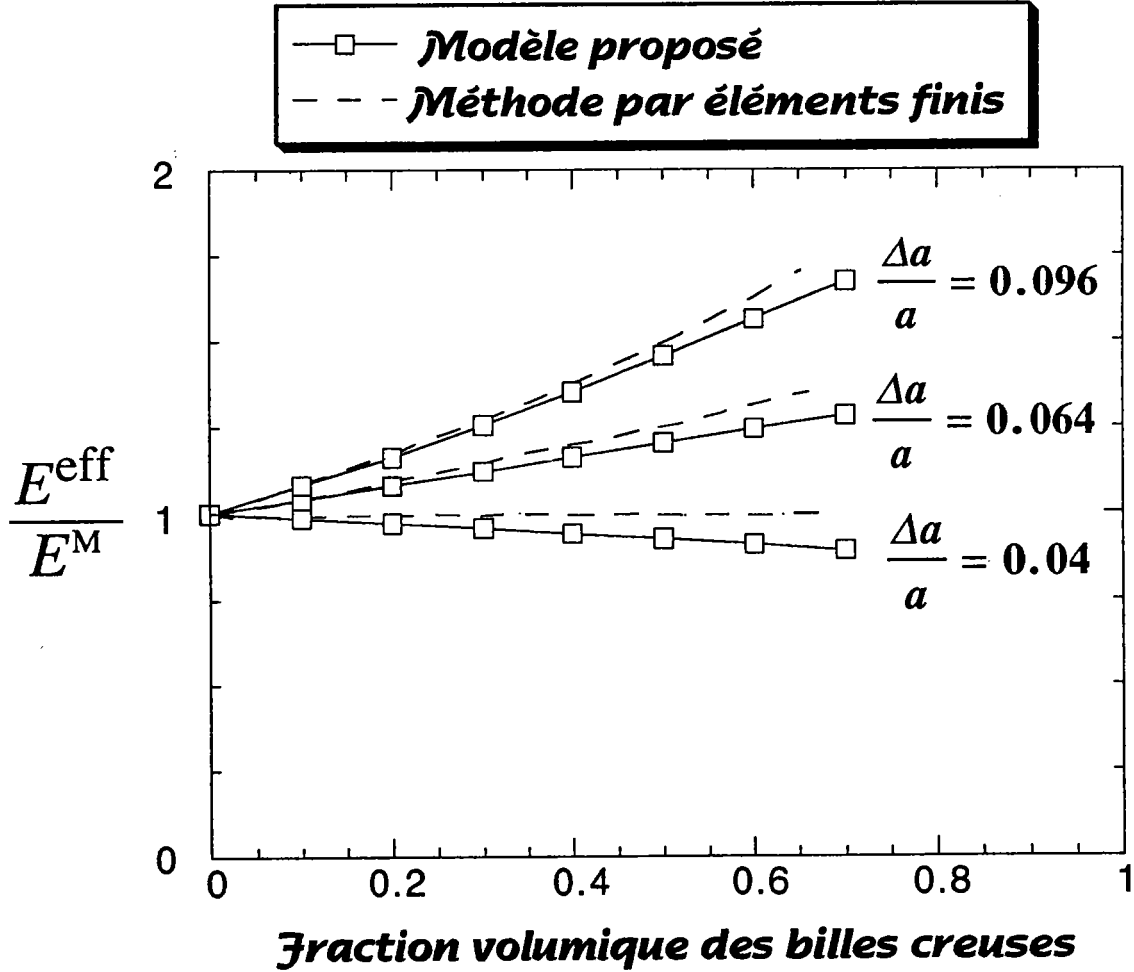


Fig. III-6 : Variation du module de Young homogénéisé en fonction de la fraction volumique des billes de verre creuses pour différentes valeurs du rapport $\Delta a/a$.

7. Mécanismes de renforcement des réseaux polyépoxy.

7.1 - Renforcement par une phase d'élastomère.

Les réseaux polyépoxy constituent un champ important d'investigation dans le domaine des matrices pour matériaux composites, compte tenu de leurs propriétés thermiques et mécaniques. Cependant, leur mauvaise résistance au choc et à la propagation des fissures limite leurs applications. Pour pallier ce problème, différentes voies de renforcement de ces réseaux ont été explorées. La méthode la plus répandue consiste en l'introduction d'un élastomère (inclusion à bas module). Ainsi, différents travaux ont été menés afin d'étudier les performances du composite (matrice d'époxy contenant des particules d'élastomère) [7-9].

Ces travaux ont montré, d'une part, que la contrainte au seuil d'écoulement du matériau renforcé diminue lorsque la fraction volumique de la phase d'élastomère dispersée augmente, ainsi les microparticules d'élastomère favorisent l'aptitude à la déformation plastique.

D'autre part, ces mêmes travaux ont montré que l'augmentation de la fraction volumique de la phase d'élastomère dispersée améliore la résistance à la fissuration. Ceci a été mis en évidence par le fait que le facteur d'intensité de contrainte critique et le taux de restitution d'énergie élastique sont fortement améliorés.

La démarche, ainsi que ces phénomènes, sont maintenant bien cernés. le seul problème qui demeure est la chute du module de rigidité provoquée par l'incorporation des particules d'élastomères (inclusions à bas module). L'idéal serait bien entendu un matériau qui possède à la fois de bonnes propriétés mécaniques et une bonne ténacité.

7.2 - Renforcement par des billes de verre.

La voie qui est couramment utilisée pour augmenter la rigidité des réseaux polyépoxy est l'introduction de renforts dont le module est supérieur à celui de la matrice et plus particulièrement les billes de verre. La littérature montre que les propriétés des composites élaborés dépendent de nombreux paramètres tels que la nature et la fraction volumique des renforts et bien entendu la nature de la matrice. Le problème qui se pose dans ce genre de renforcement est l'adhésion charge-matrice. En effet, dans la majorité des cas, la rupture des composites s'amorce à l'interface charge-matrice car les contraintes locales y sont plus importantes que la contrainte appliquée à la matrice.

Différentes voies ont été recherchées afin d'améliorer la ténacité de ces composites. La méthode la plus souvent employée est l'amélioration de l'adhésion charge-matrice en utilisant des agents de couplage. Cependant, il a été montré que l'utilisation de ceux-ci ne peut pas homogénéiser la répartition des contraintes locales présentes autour des charges, qui deviennent plus aiguës lorsqu'une contrainte extérieure est appliquée au composite.

On voit alors qu'à partir de ces deux mécanismes de renforcement on a un gain d'une propriété au détriment de l'autre. En effet, l'introduction des particules d'élastomère permet d'obtenir un composite qui a une bonne résistance à l'impact et la fissuration mais avec un faible module de rigidité, par contre, l'utilisation des billes de verre permet un gain de rigidité mais une perte de ténacité. C'est dans cette optique que l'on introduit dans la matrice deux types d'inclusions :

- Une inclusion à haut module pour accroître la rigidité.
- Une inclusion à bas module pour améliorer la ténacité.

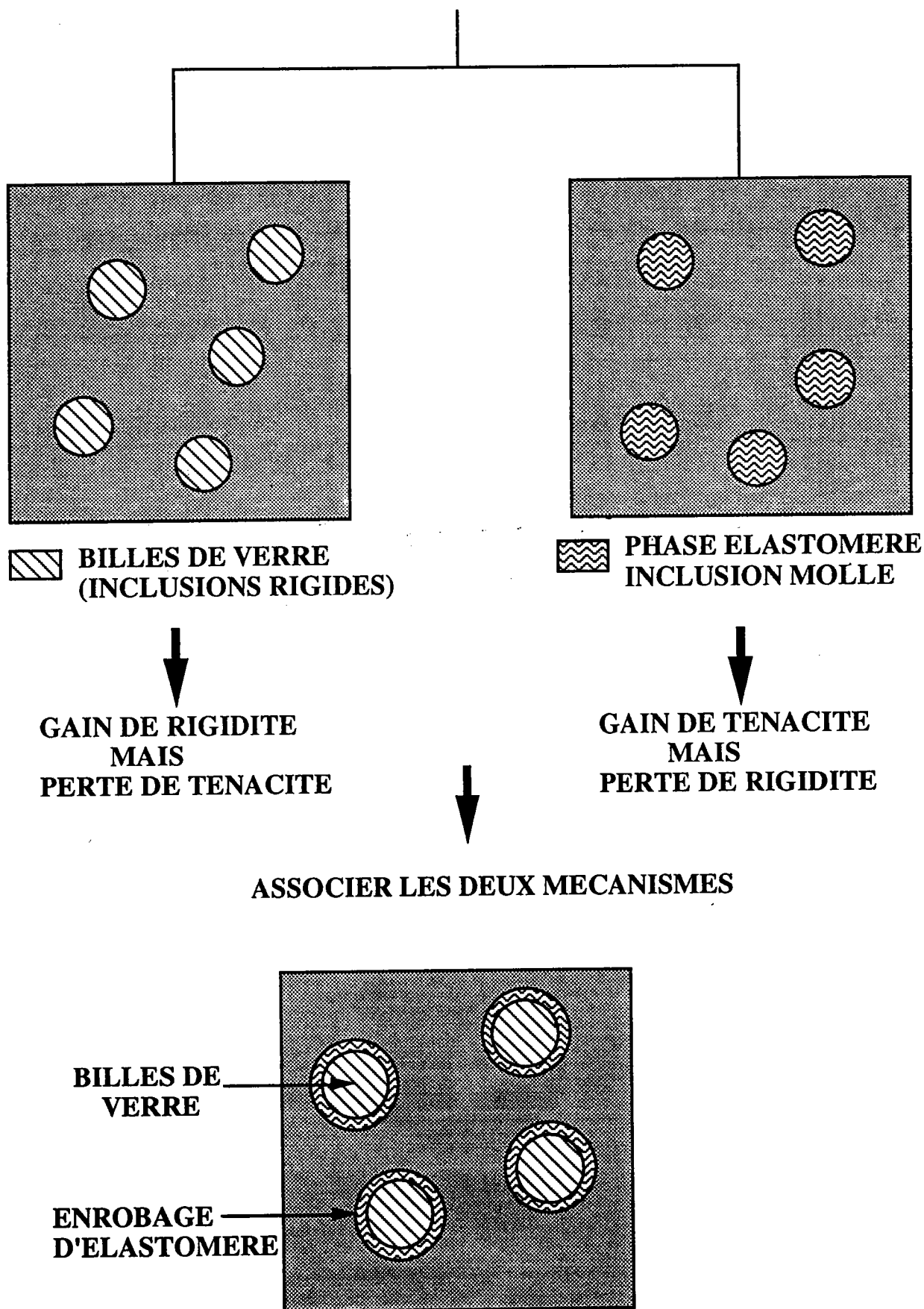


Fig. III-7 : Mécanismes de renforcement des matrices époxy.

7.3 - Association des deux modes de renforcement.

On a vu que l'utilisation de chaque mode de renforcement des réseaux polyépoxy conduit à un gain d'une propriété au désavantage de l'autre. L'idée est de trouver un compromis entre la rigidité du composite et sa résistance à l'impact et à la fissuration et ceci en associant les deux mécanismes de renforcement.

Dans ce but, Amdouni et al. [10] ont montré que l'enrobage des particules de verre par une couche mince d'élastomère permet d'obtenir un composite plus résistant à l'impact et à la fissuration sans perte des propriétés élastiques. Ceci a été mis en évidence expérimentalement par le fait que le facteur d'intensité de contrainte critique et le taux de restitution d'énergie élastique sont fortement améliorés par l'introduction de l'enrobage d'élastomère.

Comme application, on compare nos résultats à ceux obtenus expérimentalement par Amdouni et al. pour le module de Young de ces composites. Les matériaux de base retenus pour cette comparaison sont les suivants :

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-----------------|
| - Matrice d'époxy | $E^M = 2.9 \text{ GPa}$ | $\nu^M = 0.4$ |
| - Particules de verre | $E^I = 73 \text{ GPa}$ | $\nu^I = 0.2$ |
| - Enrobage d'élastomère | $E^c = 10 \text{ MPa}$ | $\nu^c = 0.499$ |

Tous ces matériaux sont supposés isotropes et parfaitement élastiques.

La figure III-8 montre l'évolution du module de Young en fonction de la fraction volumique des particules de verre pour différentes épaisseurs d'élastomère. On observe que le modèle fournit des résultats en bon accord avec les mesures expérimentales de Amdouni et al.

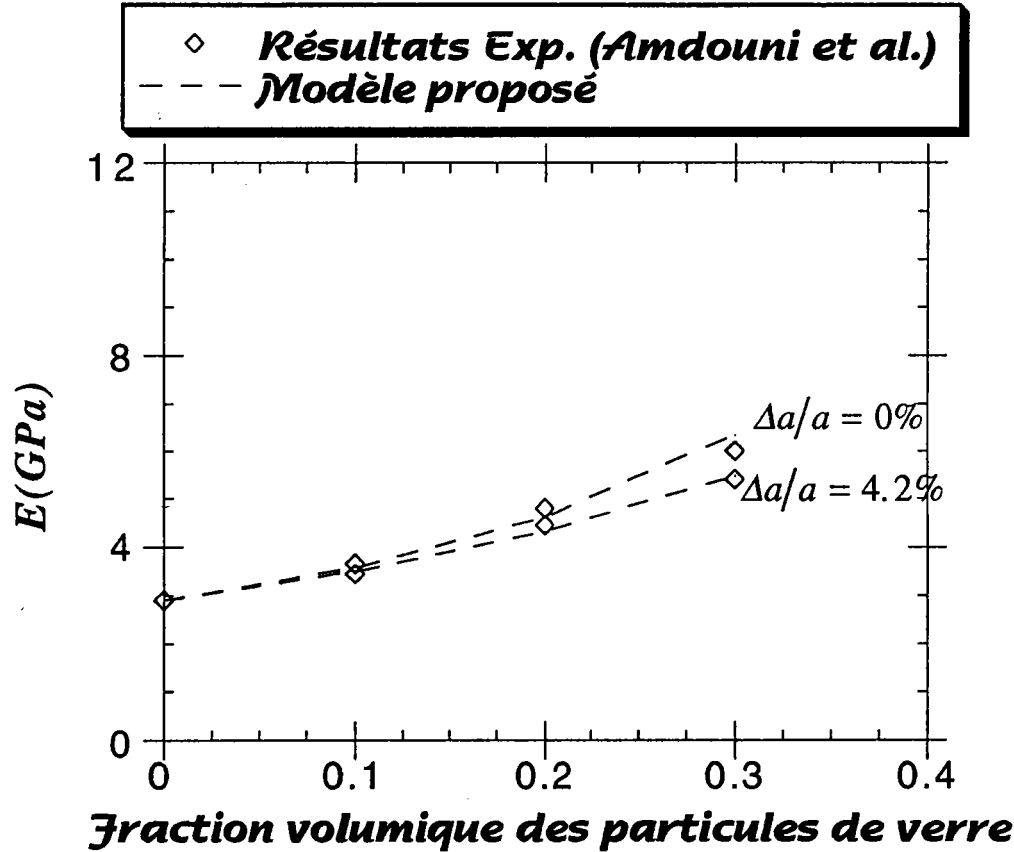


Fig. III-8 : Module de Young en fonction de la fraction volumique des particules de verre.

8. Cas des fibres longues enrobées.

Dans un travail récent, Jasiuk et Kouider [11] ont étudié l'effet d'une interphase hétérogène sur le comportement effectif global des composites renforcés par des fibres unidirectionnelles. Les fibres sont supposées de forme cylindrique à base circulaire. Chaque fibre est enrobée par une interphase dont les propriétés élastiques varient entre celles de la matrice et celles de la fibre avec deux types de variations : linéaire et en puissance. En utilisant à la fois le modèle d'Hashin et Rosen [12] et celui de Christensen et Lo [13], ils ont évalué les constantes élastiques effectives du composite à trois phases et illustré leur résultats analytiques par deux cas : carbone/époxy et verre/époxy (fibre/matrice).

Le modèle d'Hashin et Rosen est basé sur la méthode des assemblages des cylindres composites. Celle-ci a été introduite pour décrire le comportement effectif des composites unidirectionnels qui présentent une anisotropie dans le comportement global. Comme son nom l'indique, cette méthode suppose que le composite est représenté par une collection de cylindres composites qui remplissent entièrement l'espace du volume représentatif (Fig. III-9). Ainsi, le problème consiste à déduire le comportement effectif du composite à partir uniquement des modules équivalents du cylindre composite. Par conséquent, les résultats ne sont valables que dans le cas des milieux dilués.

Afin de généraliser cette méthode au cas des milieux non dilués, Christensen et Lo ont introduit l'approximation autocohérente pour tenir compte des interactions entre cylindres composites. Pour cela, ils résolvent le problème d'un cylindre composite en interaction avec le milieu homogène équivalent qui a les propriétés effectives du composite.

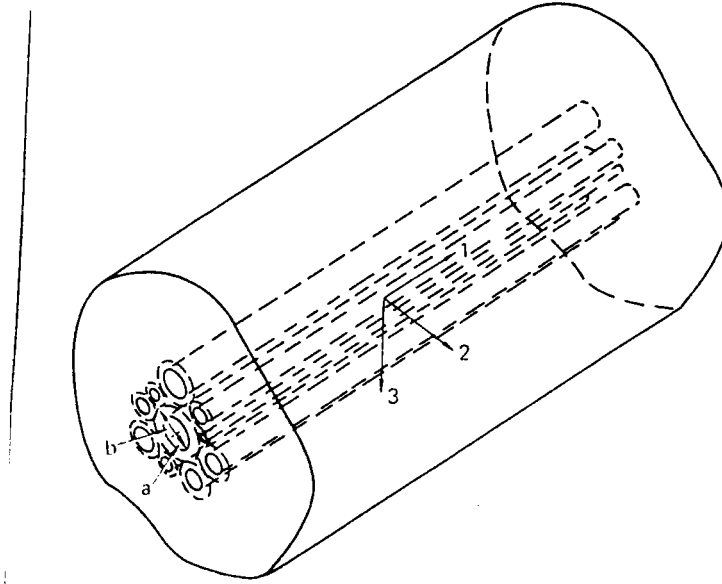


Fig. III-9 : Modèle des cylindres composites.

En reprenant les propriétés et paramètres définissant les matériaux (carbone/époxy et verre/époxy) étudiés par Jasiuk et Kouider, nous avons calculé les modules effectifs de ces composites à partir de l'équations (III-37) et en utilisant l'algorithme 1 du calcul numérique. Les fibres de carbone ont un comportement isotrope transverse décrit par cinq paramètres indépendants :

$$E_A^I = 214 \text{ GPa}, E_T^I = 14 \text{ GPa} \text{ (modules de Young axial et transverse)}$$

$$\nu_A^I = 0.25, \nu_T^I = 0.2 \text{ (rapports de Poisson axial et transverse)}$$

$$G_A^I = 8 \text{ GPa} \text{ (module de cisaillement axial).}$$

La matrice d'époxy et les fibres de verre ont un comportement isotrope dont les propriétés élastiques sont données respectivement par :

$$E^M = 3.5 \text{ GPa}, \nu^M = 0.35 \text{ et } E^I = 69 \text{ GPa}, \nu^I = 0.2.$$

Dans chaque cas, l'interphase est supposée avoir un comportement isotrope avec des constantes élastiques données par :

$$E^c = \frac{1}{b-a} \int_a^b P r Q \, dr \text{ et } \nu^c = \frac{\nu_T^I + \nu^M}{2}$$

où a et b désignent les rayons de la fibre et de la fibre composite (fibre+enrobage) respectivement. Les constantes P et Q sont évaluées à partir des conditions suivantes :

$$\text{en } r = a \text{ on a : } E^c = E^I \text{ et en } r = b \text{ on a : } E^c = E^M.$$

Les modules de cisaillement effectifs axial et transverse déduits à partir de notre approche et celle de Jasiuk et Kouider sont représentés en fonction de la fraction volumique des fibres dans les figures (III-10) et (III-11). Tous les calculs sont effectués pour un rapport $\frac{\Delta a}{a} = 10\%$. On observe que les deux modèles fournissent des résultats en bon accord.

Ainsi, cette comparaison nous a permis de valider le modèle dans le cas d'une géométrie non homothétique qui décrit la topologie des fibres longues enrobées.

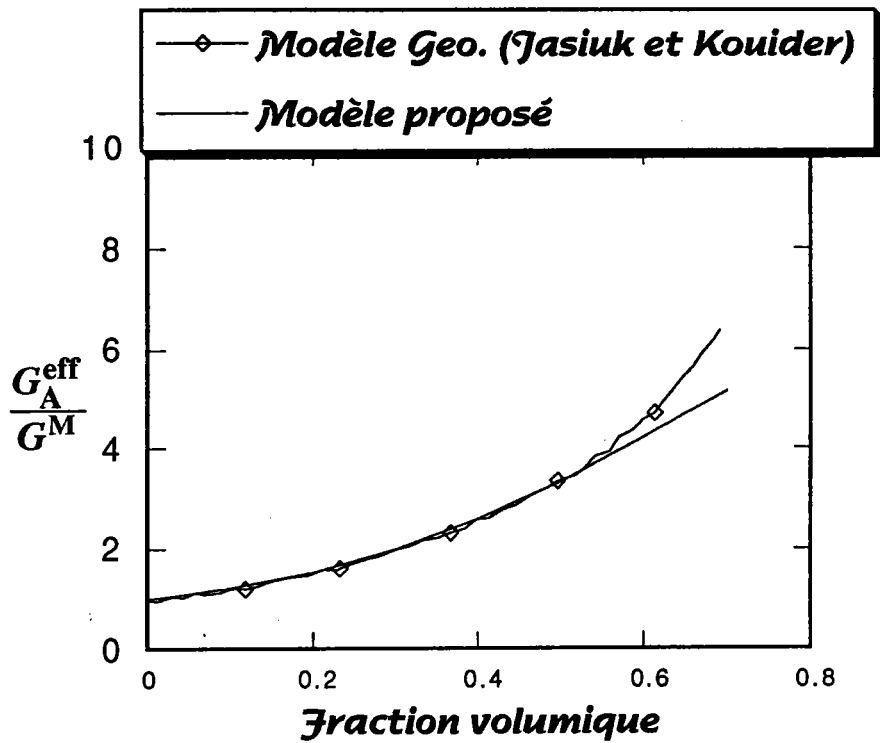


Fig. III-10 : Module de cisaillement axial en fonction de la fraction volumique des fibre (verre/époxy $\Delta a/a = 10\%$).

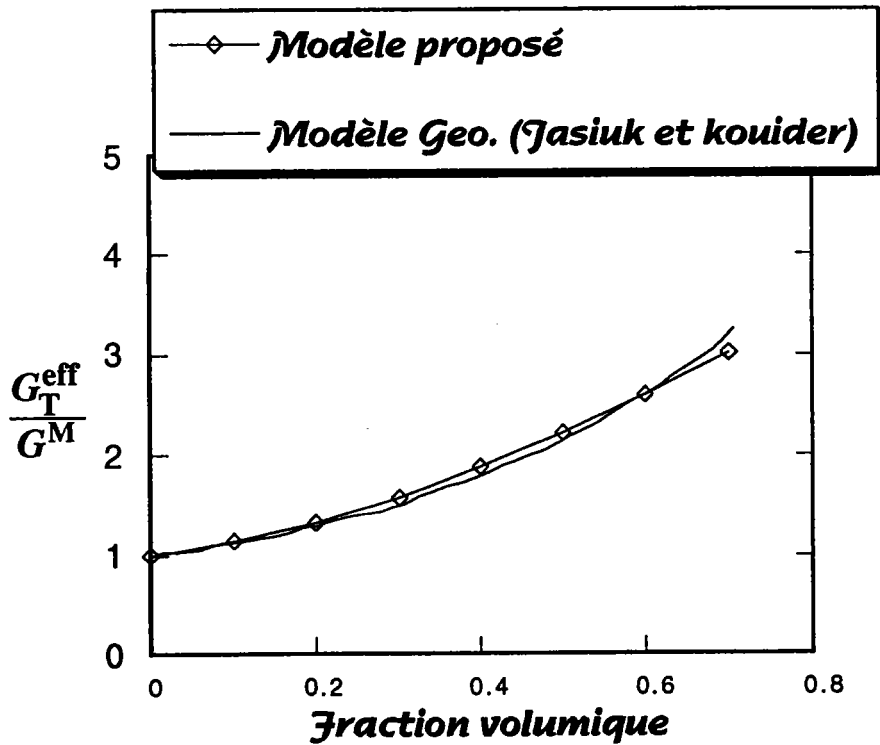


Fig. III-11 : Module de cisaillement transverse en fonction de la fraction volumique des fibre (carbone/époxy $\Delta a/a = 10\%$).

8. Conclusion.

En se basant sur les techniques classiques d'homogénéisation des milieux hétérogènes, le comportement élastique global du composite à trois phases est déterminé en fonction des propriétés mécaniques des constituants et des tenseurs de localisation des déformations des renforts enrobés.

Les tenseurs de localisation sont déterminés en utilisant le formalisme de l'inclusion enrobée (chapitre II), ceci par l'intermédiaire d'une approximation autocohérente. Les équations sont développées dans le cas général de matériaux anisotropes et de renforts enrobés ellipsoïdaux avec une géométrie non homothétique. Elles sont particularisées dans le cas de matériaux isotropes et d'inclusions enrobées sphériques pour lesquels des solutions analytiques sont obtenues.

L'application du modèle aux cas de matériaux réels a montré un bon accord avec des résultats expérimentaux, aussi bien qu'avec ceux déduits à partir d'autres approches. Dans la suite on propose une extension du modèle au cas thermoélastique.

Bibliographie.

- [1] DERUNTZ J. A. - HOFFMAN O., "The static strength of syntactic foams", *J. App. Mech.*, Vol. 36, (1969).
- [2] AVZENA A. - BUNSELL A. R., "Comportement à long terme des matériaux composites en immersion sous pression hydrostatique", *JNC5*, pp 409, Paris (1986).
- [3] DAN W., "Etudes micromécaniques de l'endommagement des mousses syntactiques", *Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris*, (1987).
- [4] HUANG J. S. - GIBSON L. J., "Elastic moduli of a composite with hollow spheres in a matrix", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, (1993).
- [5] BEN HAMIDA A. - LENE F., "Une méthode micromécanique pour la détermination du critère de limite d'élasticité des mousses syntactiques", *1e congrès de mécanique*, pp 133, Rabat, (1993).
- [6] LUR'E A. I., "Three dimensional problems of the theory of elasticity", (1964).
- [7] ROWE E. H. - SIEBERT A. R. - DRAKE R. S., "Toughening thermosets with liquid butadiene/acrylonitrile polymer", *Modern plastics*, Vol. 47, (1970).
- [8] SULTAN J. N. - LAIBLE R. C. - GARRY MC., "Microstructure of two phase polymers", *J. App. Polym. Sci.*, Vol. 6, (1971).
- [9] MAAZOUZ A. - SAUTEREAU H. - GERARD J. F., "Elastomer-modified diglycidyl ether of bisphenol-A/dicyandiamide (DDA) networks : morphology, viscoelastic and mechanical properties", *Polym. Networks Blends*, Vol. 2, (1992).
- [10] AMDOUNI N. - SAUTEREAU H. - GERARD J.F., "Epoxy composites based on glass beads", *J. App. Polym. Sci.*, Vol. 46, (1992).

- [11] JASIUK I. - KOUIDER M.W., "*The effect of an inhomogeneous interphase on the elastic constants of transversely isotropic composites*", *Mech. of Mater.*, Vol. 15, (1993).
- [12] HASHIN Z. - ROSEN B.W., "*The elastic moduli of fiber reinforced composites*", *J. Appl. Mech.*, Vol. 31, (1964).
- [13] CHRISTENSEN R. M. - LO K. H., "*Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models*" *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 27, (1979).

CHAPITRE IV

IV- EXTENSION DU MODELE PROPOSE AU CAS THERMOELASTIQUE.

1. Introduction.

Les matériaux composites utilisés comme éléments de structure dans les domaines de haute technologie (les industries aérospatiales, automobiles...), sont soumises dans de nombreuses situations à des sollicitations thermiques très importantes et les constituants de ces composites ne se dilatent pas de la même manière. Cette différence dans les coefficients de dilatation thermique engendre des contraintes thermiques qui peuvent conduire à une plastification ou une rupture totale. Ceci justifie alors la nécessité de déterminer le comportement thermoélastique des composites à partir des caractéristiques thermomécaniques des constituants. Ainsi ont vu le jour plusieurs approches micromécaniques qui ont cherché à montrer l'effet de chaque variable (fraction volumique, la morphologie, l'orientation et la nature des composants) sur le comportement thermomécanique global des composites.

Dans l'état actuel des travaux, différents modèles ont été mis en oeuvre afin de montrer l'effet d'une interphase sur la répartition locale des contraintes. Ces travaux ont montré que l'introduction d'une troisième phase à l'interface fibre-matrice et dont les propriétés sont bien choisies (modules élastiques, coefficient de dilatation thermique et l'épaisseur) modifie profondément la distribution des contraintes thermiques dans la fibre et la matrice [1, 2]. Citons, par exemple, les travaux théoriques de Gardner et al. [3], qui se sont intéressés particulièrement aux composites à base de fibres de carbone et une matrice d'époxy, subissant une variation de température en l'absence d'un chargement mécanique.

En utilisant un modèle micromécanique basé sur la méthode des cellules introduite par Aboudi [2], ils ont montré que l'enrobage des fibres de carbone par une phase d'élastomère conduit à une nette atténuation des contraintes thermiques dans chacune des phases et par voie de conséquence une amélioration de la résistance du composite à la fissuration.

Le but de ce chapitre est de généraliser le problème de l'inclusion enrobée élastique au cas thermoélastique. L'étude concerne le cas général d'inclusions ellipsoïdales et de matériaux anisotropes. Elle est basée sur l'utilisation simultanée de l'équation intégrale et les opérateurs interfaciaux.

2. Position du problème.

On se propose de déduire le comportement thermoélastique global ainsi que les concentrations des contraintes d'un composite à trois phases subissant un chargement thermomécanique. La première est décrite par des inclusions de fraction volumique f^I et de constantes élastiques C^I et de coefficients de dilatation thermique α^I , la seconde est constituée par l'enrobage de fraction volumique f^c et de constantes thermoélastiques C^c et α^c . La troisième est une matrice de propriétés C^M et α^M .

Les propriétés locales étant clairement définies, nous cherchons à identifier la loi de comportement globale reliant les contraintes macroscopiques Σ aux déformations correspondantes E et à la variation de température ΔT . La recherche de cette loi de comportement est de la forme :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^{\text{eff}} (E_{kl} - \alpha_{kl}^{\text{eff}} \Delta T) \quad \text{IV-1}$$

qu'on peut également écrire :

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^{\text{eff}} E_{kl} - \beta_{kl}^{\text{eff}} \Delta T \quad \text{où} \quad \beta_{ij}^{\text{eff}} = C_{ijkl}^{\text{eff}} \alpha_{kl}^{\text{eff}}$$

C^{eff} et α^{eff} désignent les propriétés thermoélastiques effectives du composite.

Rappelons qu' à partir d'opérations de moyenne, dans le cadre de la méthode d'homogénéisation classique (cf. § III), le comportement élastique effectif du composite est donné par :

$$C_{ijmn}^{eff} = C_{ijmn}^M + f^I (C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^M) A_{klmn}^I + f^c (C_{ijkl}^c - C_{ijkl}^M) A_{klmn}^c \quad IV-2$$

Par ailleurs, les relations établies par Levin [4] peuvent être étendues au cas de matériaux à trois phases, on obtient ainsi :

$$\beta_{ij}^{eff} = \beta_{ij}^M + f^I A_{ijkl}^I (\beta_{kl}^I - \beta_{kl}^M) + f^c A_{ijkl}^c (\beta_{kl}^c - \beta_{kl}^M) \quad IV-3$$

$$\text{où } \beta_{ij}^I = C_{ijkl}^I \alpha_{kl}^I, \beta_{ij}^c = C_{ijkl}^c \alpha_{kl}^c \text{ et } \beta_{ij}^M = C_{ijkl}^M \alpha_{kl}^M$$

Les tenseurs de localisation des déformations A et a sont définis par :

$$\varepsilon_{ij}^I = A_{ijkl}^I E_{kl} + a_{ij}^I \Delta T \quad \varepsilon_{ij}^c = A_{ijkl}^c E_{kl} + a_{ij}^c \Delta T \quad IV-4$$

ε^I et ε^c sont les déformations moyennes dans l'inclusion et l'enrobage.

Connaissant le comportement local, défini par les tenseurs C^* et β^* ($*$ =I,c ou M), il ne reste qu'à définir les tenseurs de localisation A^*, a^* ($*$ =I ou c) pour en déduire les modules effectifs. Les contraintes locales découlent directement de (IV-4).

3. Tenseurs de localisation des déformations.

Les tenseurs de localisation mécanique A et thermique a sont déterminés à partir de l'équation intégrale dont la résolution s'effectue en utilisant l'approximation autocohérente. Cette méthode consiste à calculer les coefficients effectifs du composite en remplaçant les interactions entre une inclusion enrobée et le milieu réel environnant par celles entre une inclusion enrobée et le milieu homogène équivalent qui a les propriétés C^{eff} et β^{eff} (Fig. IV-1).

Pour cela, on considère une inclusion de volume V_I , de constantes thermoélastiques C^I et β^I entourée d'une couche supposée mince de volume V_c et de constantes thermoélastiques C^c et β^c , l'ensemble est plongé dans un milieu infini de propriétés C^{eff} et β^{eff} . Le milieu subit sur sa frontière S une variation de température ΔT et une contrainte Σ ou une déformation E .

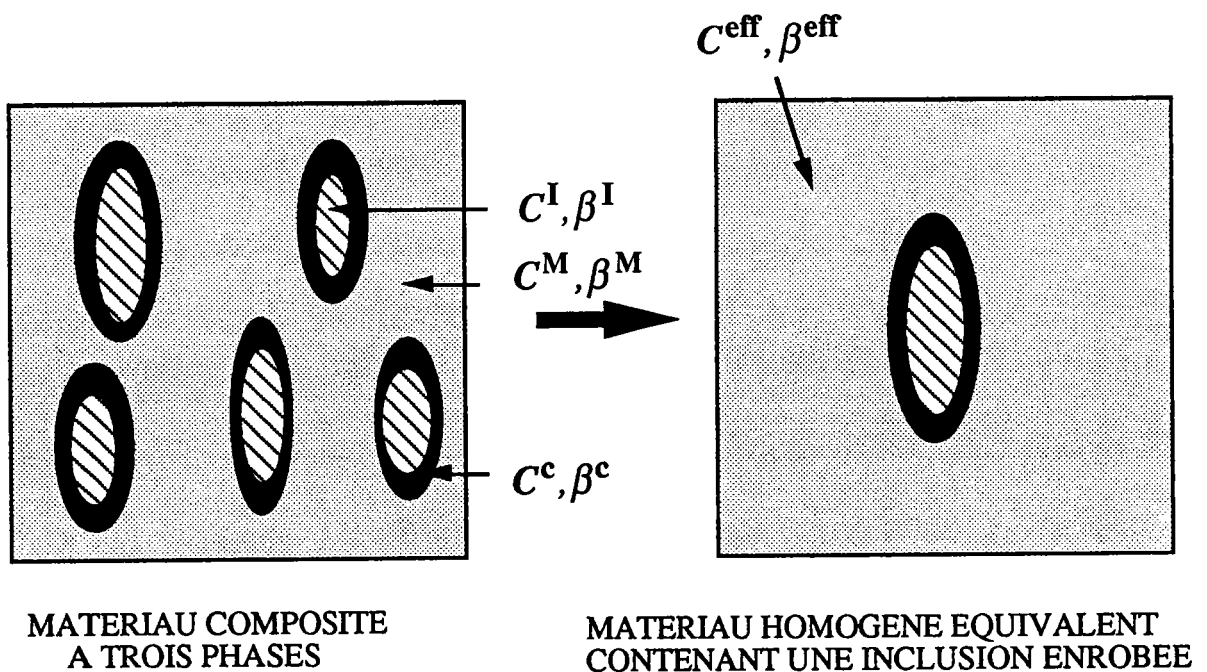


Fig. IV-1 : Schéma autocohérent pour le comportement thermoélastique.

A partir de la loi de comportement locale $\sigma(\vec{r})=C(\vec{r})\varepsilon(\vec{r})-\beta(\vec{r})\Delta T$, les équations d'équilibre et la technique du tenseur de Green on obtient l'équation intégrale suivante, portant sur le champ des déformations thermoélastiques $\varepsilon(\vec{r})$ [5] :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r})=E_{ij}+\int_V \Gamma_{ijkl}(\vec{r}-\vec{r}') \left[\delta\beta_{kl}(\vec{r}')\Delta T - \delta C_{klmn}(\vec{r}')\varepsilon_{mn}(\vec{r}') \right] dr' \quad \text{IV-5}$$

V étant le volume du milieu infini et $\Gamma(\vec{r}-\vec{r}')$ le tenseur de Green modifié. Dans notre cas, on a :

$$\delta C_{ijkl}(\vec{r})=(C_{ijkl}^I-C_{ijkl}^{\text{eff}})\theta^I(\vec{r})+(C_{ijkl}^c-C_{ijkl}^{\text{eff}})\delta\theta^I(\vec{r}) \quad \text{IV-6}$$

$$\delta\beta_{ij}(\vec{r})=(\beta_{ij}^I-\beta_{ij}^{\text{eff}})\theta^I(\vec{r})+(\beta_{ij}^c-\beta_{ij}^{\text{eff}})\delta\theta^I(\vec{r}) \quad \text{IV-7}$$

où les fonctions caractéristiques $\theta^I(\vec{r})$ et $\delta\theta^I(\vec{r})$ sont définies par :

$$\theta^I(\vec{r})=\begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r} \in V_I \\ 0 & \text{si } \vec{r} \notin V_I \end{cases} \quad \delta\theta^I(\vec{r})=\begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r} \in V_c \\ 0 & \text{si } \vec{r} \notin V_c \end{cases} \quad \text{IV-8}$$

Dans les développements qui vont suivre, on suppose que l'inclusion composite (inclusion+enrobage) est de forme ellipsoïdale de demi-axes $(a_i + \Delta a_i)$. On traite le cas général d'une géométrie *non homothétique* ($\Delta a_i/a_i \neq \Delta a_j/a_j$).

D'après (II-10), on a :

$$\delta\theta^I(\vec{r}) \approx p \sum_{\alpha} \frac{\Delta a_{\alpha}}{a_{\alpha}} \frac{x_{\alpha}^2}{a_{\alpha}^2} \delta(S_I) = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha} \delta(S_I) \quad \text{IV-9}$$

avec
$$\chi_\alpha = p \frac{\Delta a_\alpha}{a_\alpha} \frac{x_\alpha^2}{a_\alpha^2}$$

Les a_i désignent les demi-axes de l'inclusion ellipsoïdale et Δa_i l'épaisseur de l'enrobage suivant l'axe (i), les x_α sont les coordonnées d'un point de la surface de l'inclusion et $\delta(S_I)$ la distribution de Dirac sur la surface S_I de l'inclusion. La projection orthogonale p est donnée par :

$$p = \left(x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4 + x_3^2/a_3^4 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{IV-10}$$

A partir de (IV-5), (IV-6) et (IV-8) et en utilisant les propriétés de $\theta^I(\vec{r})$ et $\delta(S_I)$, l'équation intégrale (IV-4) devient :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = E_{ij} + \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\vec{r} - \vec{r}') \left[(\beta_{kl}^I - \beta_{kl}^{\text{eff}}) \Delta T - (C_{klmn}^I - C_{klmn}^{\text{eff}}) \varepsilon_{mn}(\vec{r}') \right] dr' \quad \text{IV - 11}$$

$$+ \sum_{\alpha} \int_{S_I^+} \Gamma_{ijkl}(\vec{r} - \vec{r}^+) \left[(\beta_{kl}^c - \beta_{kl}^{\text{eff}}) \Delta T - (C_{klmn}^c - C_{klmn}^{\text{eff}}) \varepsilon_{mn}(\vec{r}^+) \right] \chi_\alpha dS$$

S_I^+ étant la surface extérieure de l'inclusion et $\vec{r}^+$ un point de l'interface inclusion-enrobage vu de l'extérieur de l'inclusion (du côté de l'enrobage). Les composantes $\varepsilon_{mn}(\vec{r}^+)$ sont celles du champ des déformations thermoélastiques à l'intérieur de l'enrobage en un point très proche de l'interface.

Puisque l'enrobage est à faible épaisseur, on peut relier ce champ à celui à l'intérieur de l'inclusion en utilisant les opérateurs interfaciaux.

En effet, le saut des déformations thermoélastiques à travers l'interface inclusion-enrobage vérifie la condition de compatibilité suivante :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}^+) - \varepsilon_{ij}(\vec{r}^-) = \frac{1}{2} \left(\lambda_i n_j + \lambda_j n_i \right) \quad \text{IV-12}$$

où $\vec{r}^-$ est un point de l'interface vu de l'intérieur de l'inclusion et $\vec{n}$ la normale extérieure à l'interface. $\vec{\lambda}$ est un vecteur quelconque car (IV-12) décrit la discontinuité de ε admissible au passage d'une interface.

A partir des équations d'équilibre à l'interface

$$\left[\sigma_{ij}(\vec{r}^+) - \sigma_{ij}(\vec{r}^-) \right] n_j = 0$$

et les lois de comportement dans chacune des phases

$$\sigma_{ij}(\vec{r}^+) = C_{ijkl}^c \varepsilon_{kl}(\vec{r}^+) - \beta_{ij}^c \Delta T$$

$$\sigma_{ij}(\vec{r}^-) = C_{ijkl}^I \varepsilon_{kl}(\vec{r}^-) - \beta_{ij}^I \Delta T$$

on détermine complètement le vecteur $\vec{\lambda}$ par :

$$\lambda_i = K_{ik}^{-1} n_l \left[(C_{klmn}^I - C_{klmn}^c) \varepsilon_{mn}(\vec{r}^-) + (\beta_{kl}^c - \beta_{kl}^I) \Delta T \right] \quad \text{IV-13}$$

où K^{-1} est l'inverse de la matrice de Christoffel K dont les composantes sont données par :

$$K_{ik} = C_{ijkl}^c n_j n_l \quad \text{IV-14}$$

En substituant λ_i par son expression (IV-13) dans la relation (IV-12), on obtient pour le saut des déformations :

$$\varepsilon_{ij}(\bar{r}^+) - \varepsilon_{ij}(\bar{r}^-) = P_{ijkl} \left[(C_{klmn}^I - C_{klmn}^c) \varepsilon_{mn}(\bar{r}^-) + (\beta_{kl}^c - \beta_{kl}^I) \Delta T \right] \quad \text{IV-15}$$

En première approximation, on remplace dans (IV-15) et (IV-11) le champ $\varepsilon(\bar{r})$ ($\bar{r} \in V_I$) par sa valeur moyenne ε^I sur V_I . L'expression (IV-15) devient

$$\varepsilon_{ij}(\bar{r}^+) = \varepsilon_{ij}^I + P_{ijkl} \left[(C_{klmn}^I - C_{klmn}^c) \varepsilon_{mn}^I + (\beta_{kl}^c - \beta_{kl}^I) \Delta T \right] \quad \text{IV-16}$$

et en substituant $\varepsilon_{mn}(\bar{r}^+)$ par son expression (IV-16) dans l'équation intégrale (IV-11), on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\bar{r}) = & E_{ij} + \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\bar{r} - \bar{r}') \left[\Delta \beta_{kl}^I \Delta T - \Delta C_{klmn}^I \varepsilon_{mn}^I \right] dr' \\ & + \sum_{\alpha} \int_{S_I^+} \Gamma_{ijkl}(\bar{r} - \bar{r}^+) \left[\Delta \beta_{kl}^c \Delta T - \Delta C_{klmn}^c \varepsilon_{mn}^I \right] \chi_{\alpha} dS \\ & + \sum_{\alpha} \int_{S_I^+} \Gamma_{ijkl}(\bar{r} - \bar{r}^+) \Delta C_{klmn}^c P_{mnpq} \left[\Delta \beta_{pq}^{Ic} \Delta T - \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I \Delta T \right] \chi_{\alpha} dS \end{aligned} \quad \text{IV - 17}$$

où $\Delta \beta^I = \beta^I - \beta^{\text{eff}}$, $\Delta \beta^c = \beta^c - \beta^{\text{eff}}$, $\Delta \beta^{Ic} = \beta^I - \beta^c$,

$$\Delta C^I = C^I - C^{\text{eff}}, \Delta C^c = C^c - C^{\text{eff}} \text{ et } \Delta C^{\text{Ic}} = C^I - C^c$$

A ce stade, les valeurs moyennes ε^I et ε^c du champ $\varepsilon(\vec{r})$ sont calculées à partir des équations (IV-16) et (IV-17), ce qui conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^I = & E_{ij} + \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\vec{r} - \vec{r}') [\Delta \beta_{kl}^I \Delta T - \Delta C_{klmn}^I \varepsilon_{mn}^I] dr dr' \\ & + \frac{1}{V_I} \sum_{\alpha} \int_{S_I^+} \left\{ \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\vec{r} - \vec{r}^+) dr \right\} [\Delta \beta_{kl}^c \Delta T - \Delta C_{klmn}^c \varepsilon_{mn}^I] \chi_{\alpha} dS \quad \text{IV - 18} \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{V_I} \sum_{\alpha} \int_{S_I^+} \left\{ \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\vec{r} - \vec{r}^+) dr \right\} \Delta C_{klmn}^c P_{mnpq}(C^c, \vec{n}) [\Delta \beta_{pq}^{\text{Ic}} \Delta T - \Delta C_{pqrs}^{\text{Ic}} \varepsilon_{rs}^I] \chi_{\alpha} dS$$

$$\varepsilon_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^I + \frac{1}{V_c} \int_{V_c} P_{ijkl}(C^c, \vec{n}) dr [\Delta C_{klmn}^{\text{Ic}} \varepsilon_{mn}^I - \Delta \beta_{kl}^{\text{Ic}} \Delta T] \quad \text{IV-19}$$

En utilisant les mêmes techniques de calcul introduites dans le concept de l'inclusion enrobée élastique (cf. § II), les équations (IV-18) et (IV-19) deviennent :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij}^I &= E_{ij} + T_{ijkl}^2(C^{\text{eff}}) \left[\Delta\beta_{kl}^I \Delta T - \Delta C_{klmn}^I \varepsilon_{mn}^I \right] \\
 &+ \frac{f^c}{f^I} T_{ijkl}^I(C^{\text{eff}}) \Delta C_{klmn}^c T_{mnpq}^I(C^c) \left[\Delta\beta_{pq}^{\text{Ic}} \Delta T - \Delta C_{pqrs}^{\text{Ic}} \varepsilon_{rs}^I \right] \\
 &+ \frac{f^c}{f^I} \left(T_{ijkl}^I(C^c) - T_{ijkl}^I(C^{\text{eff}}) \right) \left[\Delta\beta_{kl}^{\text{Ic}} \Delta T - \Delta C_{klmn}^{\text{Ic}} \varepsilon_{mn}^I \right] \quad \text{IV - 20} \\
 &- (I_{ijmn} + T_{ijkl}^I(C^{\text{eff}}) \Delta C_{klmn}^c) \left(T_{mnpq}^2(C^c) - T_{mnpq}^I(C^c) \right) \left[\Delta\beta_{pq}^{\text{Ic}} \Delta T - \Delta C_{pqrs}^{\text{Ic}} \varepsilon_{rs}^I \right]
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^I + \left(T_{ijkl}^I(C^c) - \frac{f^I}{f^c} \left(T_{ijkl}^2(C^c) - T_{ijkl}^I(C^c) \right) \right) \left(\Delta C_{klmn}^{\text{Ic}} \varepsilon_{mn}^I - \Delta\beta_{kl}^{\text{Ic}} \Delta T \right) \quad \text{IV-21}$$

Dans le cas d'une géométrie homothétique où $T^2 = T^I$, les équations (IV-20) et (IV-21) se réduisent aux formes suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij}^I &= E_{ij} + T_{ijkl}^I(C^{\text{eff}}) \left[\Delta\beta_{kl}^I \Delta T - \Delta C_{klmn}^I \varepsilon_{mn}^I \right] \\
 &+ \frac{f^c}{f^I} T_{ijkl}^I(C^{\text{eff}}) \Delta C_{klmn}^c T_{mnpq}^I(C^c) \left[\Delta\beta_{pq}^{\text{Ic}} \Delta T - \Delta C_{pqrs}^{\text{Ic}} \varepsilon_{rs}^I \right] \quad \text{IV-22} \\
 &+ \frac{f^c}{f^I} \left(T_{ijkl}^I(C^c) - T_{ijkl}^I(C^{\text{eff}}) \right) \left[\Delta\beta_{kl}^{\text{Ic}} \Delta T - \Delta C_{klmn}^{\text{Ic}} \varepsilon_{mn}^I \right]
 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^I + T_{ijkl}^I(C^c) \left(\Delta C_{klmn}^{\text{Ic}} \varepsilon_{mn}^I - \Delta\beta_{kl}^{\text{Ic}} \Delta T \right) \quad \text{IV-23}$$

La résolution des équations (IV-20) et (IV-21) permet d'obtenir une forme générale des tenseurs de localisation thermomécaniques A^* , a^* (*=I ou c) dans le cas général de matériaux anisotropes et d'inclusions enrobées ellipsoïdales avec une géométrie non homothétique :

$$A^I = \left\{ I + T^2(C^{\text{eff}}) \Delta C^I + \left((I + T^I(C^{\text{eff}}) \Delta C^c) (T^2(C^c) - T^I(C^c)) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{f_c}{f_I} (T^I(C^{\text{eff}}) \Delta C^c T^I(C^c) + T^I(C^c) - T^I(C^{\text{eff}})) \right) \Delta C^{Ic} \right\}^{-1} \quad \text{IV-24}$$

$$a_{ij}^I = A_{ijkl}^I A_{kl}^* \quad \text{IV-25}$$

$$A^* = \left\{ T^2(C^{\text{eff}}) \Delta \beta^I - \left((I + T^I(C^{\text{eff}}) \Delta C^c) (T^2(C^c) - T^I(C^c)) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{f_c}{f_I} (T^I(C^{\text{eff}}) \Delta C^c T^I(C^c) + T^I(C^c) - T^I(C^{\text{eff}})) \right) \Delta \beta^{Ic} \right\}^{-1} \\ \text{où}$$

$$A^c = \left\{ I + \left(T^I(C^c) - \frac{f_I}{f_c} (T^2(C^c) - T^I(C^c)) \right) \Delta C^{Ic} \right\} A^I \quad \text{IV-26}$$

$$a^c = \left\{ a^I + \left(T^I(C^c) - \frac{f_I}{f_c} (T^2(C^c) - T^I(C^c)) \right) (\Delta C^{Ic} a^I - \Delta \beta^{Ic}) \right\} \quad \text{IV-27}$$

Rappelons que $T^I(C^*)$ et $T^2(C^*)$ sont des tenseurs classiques qui se déduisent facilement du tenseur d'Eshelby. Le tenseur $T^I(C^*)$ dépend de la géométrie de l'inclusion par l'intermédiaire du rapport d'axes a_i/a_j ($i \neq j$), tandis que le tenseur $T^2(C^*)$ dépend de la géométrie de l'inclusion composite par l'intermédiaire du rapport d'axes $(a_i + \Delta a_i)/(a_j + \Delta a_j)$ ($i \neq j$). Dans le cas d'une croissance homothétique où $\Delta a_i/a_i = \Delta a_j/a_j$, l'inclusion et l'inclusion composite ont le même rapport d'axes et par suite $T^I(C^*) = T^2(C^*)$.

4. Application.

On se propose dans ce paragraphe de déterminer les contraintes thermiques moyennes dans chacune des phases, dans le cas où le matériau subit une variation de température ΔT en l'absence d'un chargement mécanique ($\Sigma = 0$).

On désigne par $\sigma^I, \sigma^c, \sigma^M$ les contraintes thermiques moyennes dans l'inclusion, l'enrobage et la matrice respectivement. A partir de la loi de comportement locale et des relations de localisation (IV-22)-(IV-25), on obtient :

$$\sigma_{ij}^I = \left\{ C_{ijkl}^I \left(A_{klmn}^I S_{mnpq}^{\text{eff}} \beta_{pq}^{\text{eff}} + a_{kl}^I \right) - \beta_{ij}^I \right\} \Delta T \quad \text{IV-28}$$

$$\sigma_{ij}^c = \left\{ C_{ijkl}^c \left(A_{klmn}^c S_{mnpq}^{\text{eff}} \beta_{pq}^{\text{eff}} + a_{kl}^c \right) - \beta_{ij}^c \right\} \Delta T \quad \text{IV-29}$$

$$\text{où } S^{\text{eff}} = (C^{\text{eff}})^{-1}$$

et du fait que $\Sigma = \mathbf{0}$, on déduit pour σ^M :

$$\sigma_{ij}^M = \frac{-1}{1 - (f_I + f_c)} \left[f_I \sigma_{ij}^I + f_c \sigma_{ij}^c \right] \tag{IV-30}$$

Comme application, on traite le cas de composites unidirectionnels qui présentent une anisotropie dans le comportement global. Ainsi les équations (IV-28), (IV-29) et (IV-30) sont appliquées au calcul des contraintes thermiques pour les composites tungstène/carbone/nickel et SiC/carbone/aluminate de titane (fibre/enrobage/matrice). Les résultats obtenus (tableau IV-2) sont comparés à ceux déduits d'un modèle type Mori Tanaka, basé sur un assemblage de cylindres composites introduit par Benveniste et al. [1]. De même, ces résultats sont comparés à deux modèles [2, 3] utilisant la méthode des cellules introduite par Aboudi [2]. Tous les calculs sont effectués pour une fraction volumique des fibres $f^I = 0.4$ et $\Delta a/a = 1.3\%$. Les propriétés thermomécaniques des constituants de chaque matériau sont regroupées dans le tableau (IV-1).

	E^A	E^T	ν^A	ν^T	G^A	α^A	α^T
Constituants	(GPa)	(GPa)			(GPa)	(10 ⁻⁶ /°C)	(10 ⁻⁶ /°C)
fibre de tungstène	345	345	0.278	0.278	135	5.0	5.0
enrobage de carbone	34.48	34.48	0.202	0.202	14.34	3.3	3.3
matrice de nickel	214	214	0.311	0.311	81.6	13.3	13.3
fibre de SiC	431	431	0.253	0.253	172	4.86	4.86
enrobage de carbone	34.48	34.48	0.202	0.202	14.34	3.3	3.3
matrice d'aluminate de titane	96.5	96.5	0.3	0.3	37.1	9.25	9.25

Tableau IV-1 : Propriétés mécaniques des constituants.

Contrainte moyenne suivant l'axe des renforts (MPa)			
$\Delta T = 1^{\circ}\text{C}$	Fibre	Enrobage	Matrice
Modèle proposé	1.792	0.499	-1.245
Référence [1]	1.721	0.376	-1.175
Référence [2]	1.826	0.412	-1.247
Référence [3]	1.744	0.401	-1.163
tungstène/carbone/nickel			
Modèle proposé	0.537	0.214	-0.374
Référence [1]	0.556	0.147	-0.380
Référence [2]	0.583	0.157	-0.399
Référence [3]	0.564	0.163	-0.376
SiC/carbone/aluminate de titane			

Tableau IV-2 : Comparaison des contraintes axiales calculées à partir du modèle proposé avec celles déduites des références [1-3].

Bibliographie.

- [1] BENVENISTE Y. - DVORAK G. - CHEN T. *"Stress fields in composites with coated inclusions" Mechanics of Materials Vol. 7, (1989).*
- [2] ABOUDI J. *"Micro-failure criteria for coated fiber composites" Reinforced Plastics and composites, Vol. 10, (1991).*
- [3] GARDNER S. D. - PITTMAN C. U. - HACKETT R. M. J. *"Residual thermal stresses in filamentary polymer-matrix composites containing an elastomeric interphase" Comp. Mat. Vol. 27, (1993).*
- [4] LEVIN V. M., *"Thermal expansion coefficients of heterogeneous materials", Mekhanika tverdogo tela, Vol. 2, (1967).*
- [5] BERVEILLER M. - FASSI-FEHRI O. - HIHI A., *"The problem of two plastic and heterogeneous inclusions", Int. J. Engng. Sci., Vol. 25, (1987).*

CONCLUSION GENERALE

CONCLUSION GÉNÉRALE.

Dans de nombreuses situations, une couche mince située à l'interface inclusion-matrice et dont les propriétés thermomécaniques sont différentes de celles des inclusion et de la matrice, est présente dans les matériaux composites. Elle résulte d'opérations d'ensimage ou de réactions chimiques ou physiques entre l'inclusion et la matrice conduisant à la formation de nouveaux composés. La présence de cette interphase interfaciale (ou enrobage) modifie profondément les mécanismes de transfert de charges entre l'inclusion et la matrice et affecte à la fois les propriétés effectives du composite ainsi que les concentrations des contraintes.

En se basant sur l'équation intégrale et les opérateurs interfaciaux, nous avons mis en oeuvre un modèle micromécanique qui tient compte de la présence d'une interphase interfaciale dans les matériaux composites. Le développement de la méthode passe par deux étapes :

- la détermination des tenseurs de localisation des déformations par la solution du problème d'une inclusion enrobée ellipsoïdale en interaction avec un milieu homogène de référence. Ceci a permis d'une part l'extension du problème élémentaire de l'inclusion d'Eshelby, et d'autre part la généralisation du schéma à trois phase de Christensen et Lo au cas d'une inclusion ellipsoïdale et de matériaux anisotropes.

- l'utilisation d'une approche autocohérente pour déduire le comportement élastique effectif d'un composite à renforts enrobée (on a également proposé une méthode de calcul utilisant le modèle de Mori-Tanaka). L'extension du modèle au cas thermoélastique se déduit facilement du cas élastique.

Cette étude a clairement montré l'effet de l'interphase sur le comportement thermomécanique effectif du composite, ainsi que sur la répartition locale des contraintes. L'application du modèle au cas de matériaux réels, a donné des résultats en bon accord avec des mesures expérimentales et des résultats obtenus à partir d'autres approches.

L'intérêt majeur de ce modèle consiste à sa facilité de mise en oeuvre, puisque les calculs qu'il induit utilisent des solutions classiques d'inclusion. Signalons également que l'utilisation simultanée des opérateurs interfaciaux et le tenseur de Green a mis en clair un certain nombre de propriétés intéressantes pour d'autres classes de comportement des matériaux.

Il est en particulier acquis que les comportements des matériaux composites dont l'hétérogénéité se manifeste à diverses échelles, se montrent très fortement dépendants des conditions de couplage entre constituants. Gérer les mécanismes d'endommagement des composites en contrôlant le comportement des zones interfaciales constitue donc une facette essentielle de l'adaptation de leur propriétés aux utilisations. Ce modèle est particulièrement adapté à traiter ce problème en introduisant des propriétés mécaniques évolutives à l'interface.

Un autre type d'extension concerne des développements non linéaires liés à la déformation plastique du composite. Ces deux exemples de comportement non linéaire sont bien sûr à traiter de façon incrémentale en utilisant directement la présente approche.

ANNEXES

ANNEXE - A

A.1 - Calcul des dérivées de $\theta^I(x_i, a_i)$, $\frac{\partial \theta^I}{\partial a_i}(x_i, a_i)$ et $\frac{\partial \theta^I}{\partial x_i}(x_i, a_i)$

L'équation d'un ellipsoïde I dans un repère orthonormé, s'écrit :

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1 = 0$$

La fonction caractéristique définie sur le volume V_I par :

$$\theta^I(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r} \in V_I \\ 0 & \text{si } \vec{r} \notin V_I \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\theta^I\left(\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} - 1\right) \quad \text{ou} \quad \theta^I\left(\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2} - 1\right)$$

Posons $U_i = \frac{x_i}{a_i}$

$$\Rightarrow \theta^I(U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 - 1) \quad \text{ou} \quad \theta^I\left(\sum_i U_i^2 - 1\right)$$

Calculons maintenant les dérivées partielles de θ^I :

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial a_i}\left(\sum_i U_i^2 - 1\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta^I}{\partial x_i}\left(\sum_i U_i^2 - 1\right)$$

Calcul de $\frac{\partial \theta^I}{\partial a_i}$

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial a_1} = \frac{\partial \theta^I}{\partial U_1} \frac{\partial U_1}{\partial a_1} = -\frac{x_1}{a_1^2} \frac{\partial \theta^I}{\partial U_1}$$

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial a_2} = \frac{\partial \theta^I}{\partial U_2} \frac{\partial U_2}{\partial a_2} = -\frac{x_2}{a_2^2} \frac{\partial \theta^I}{\partial U_2}$$

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial a_3} = \frac{\partial \theta^I}{\partial U_3} \frac{\partial U_3}{\partial a_3} = -\frac{x_3}{a_3^2} \frac{\partial \theta^I}{\partial U_3}$$

D'une manière générale :

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial a_i} = -\frac{x_i}{a_i^2} \frac{\partial \theta^I}{\partial U_i}$$

A-1

Calcul de $\frac{\partial \theta^I}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial x_1} = \frac{\partial \theta^I}{\partial U_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{1}{a_1} \frac{\partial \theta^I}{\partial U_1}$$

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial x_2} = \frac{\partial \theta^I}{\partial U_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \frac{1}{a_2} \frac{\partial \theta^I}{\partial U_2}$$

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial x_3} = \frac{\partial \theta^I}{\partial U_3} \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \frac{1}{a_3} \frac{\partial \theta^I}{\partial U_3}$$

D'une manière générale :

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial x_i} = \frac{1}{a_i} \frac{\partial \theta^I}{\partial U_i} \quad \text{A-2}$$

En éliminant le terme $\frac{\partial \theta^I}{\partial U_i}$ entre les équations (A-1) et (A-2), on obtient :

$$(A-1) \Rightarrow \frac{\partial \theta^I}{\partial U_i} = -\frac{a_i^2}{x_i} \frac{\partial \theta^I}{\partial a_i}$$

$$(A-2) \Rightarrow \frac{\partial \theta^I}{\partial U_i} = a_i \frac{\partial \theta^I}{\partial x_i}$$

D'où :

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial a_i} = -\frac{x_i}{a_i} \frac{\partial \theta^I}{\partial x_i} \quad \text{A-3}$$

Calcul de la variation $\delta \theta^I(\vec{r})$

Par définition :

$$\delta \theta^I(x_i, a_i) = \theta(x_i, a_i + \Delta a_i) - \theta^I(x_i, a_i) \approx \sum_i \frac{\partial \theta^I}{\partial a_i} \Delta a_i$$

En substituant $\frac{\partial \theta^I}{\partial a_i}$ par son expression (A-3), on obtient :

$$\delta \theta^I(x_i, a_i) = -\sum_i \frac{x_i}{a_i} \Delta a_i \frac{\partial \theta^I}{\partial x_i} \quad \text{A-4}$$

D'après les propriétés de $\theta^I(\vec{r})$, on a [1] :

$$\frac{\partial \theta^I}{\partial x_i} = -n_i \delta(S_I)$$

où n_i est la composante du vecteur normal unitaire et $\delta(S_I)$ la distribution surfacique de Dirac.

Avec cette propriété, (A-4) devient :

$$\delta \theta^I(x_i, a_i) = \sum_i \frac{x_i}{a_i} \Delta a_i n_i \delta(S_I) \quad \text{A-5}$$

Calcul de n_i

L'équation de l'ellipsoïde s'écrit :

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

Par dérivation, on obtient :

$$\frac{x_1 dx_1}{a_1^2} + \frac{x_2 dx_2}{a_2^2} + \frac{x_3 dx_3}{a_3^2} = 0$$

Ce qui permet d'écrire :

$$d\vec{x} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\text{où } d\vec{x} \begin{cases} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{A} \begin{cases} \frac{x_1}{a_1^2} \\ \frac{x_2}{a_2^2} \\ \frac{x_3}{a_3^2} \end{cases}$$

$d\vec{x}$ étant le vecteur tangent à la surface de l'inclusion, par conséquent, le vecteur normal unitaire $\vec{n}$ est donné par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} \quad \text{où} \quad \|\vec{A}\|^{-1} = p = \frac{1}{\left(\frac{x_1^2}{a_1^4} + \frac{x_2^2}{a_2^4} + \frac{x_3^2}{a_3^4} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

En conséquence, $\vec{n}$ aura pour composantes :

$$\vec{n} \begin{cases} \frac{x_1}{a_1^2} p \\ \frac{x_2}{a_2^2} p \\ \frac{x_3}{a_3^2} p \end{cases} \quad \text{ou} \quad n_i = \frac{x_i}{a_i^2} p \quad \text{A-6}$$

Avec (A-6), (A-5) devient :

$$\delta\theta^I(x_i, a_i) = \sum_i p \frac{x_i^2}{a_i^2} \frac{\Delta a_i}{a_i} \delta(S_I) \quad \text{A-7}$$

A.2 - Forme approchée du volume V_c de la couche

En utilisant les fonctions caractéristiques θ^2 et θ^I , le volume V_c peut s'écrire sous la forme suivante :

$$V_c = \int_{V_c} dr = \int_V \{ \theta^2(\vec{r}) - \theta^I(\vec{r}) \} dr$$

V étant le volume du milieu infini.

Or, avec l'hypothèse de la couche mince, on a :

$$\theta^2(\vec{r}) - \theta^I(\vec{r}) = \delta\theta^I(\vec{r}) \approx \sum_i p \frac{x_i^2}{a_i^2} \frac{\Delta a_i}{a_i} \delta(S_I)$$

$$\text{d'où} \quad V_c = \int_V \sum_i p \frac{x_i^2}{a_i^2} \frac{\Delta a_i}{a_i} \delta(S_I) dr$$

Compte tenu des propriétés de $\delta(S_I)$, on obtient finalement :

$$V_c = \sum_i \int_{S_I} p \frac{x_i^2}{a_i^2} \frac{\Delta a_i}{a_i} dS$$

ANNEXE-B

B.1 - Saut des déformations au passage d'une interface [2].

Le saut des déformations au passage de l'interface s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^2 - \varepsilon_{ij}^1 = \frac{1}{2} \left(\lambda_i n_j + \lambda_j n_i \right) \quad \text{B-1}$$

λ_i est calculée en fonction du champ ε^1 ou du champ ε^2 de part et d'autre de l'interface en prenant respectivement le milieu C^1 ou C^2 comme référence. Elle est déterminée complètement par la condition suivante :

$$C_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^1 n_j = C_{ijkl}^2 \varepsilon_{kl}^2 n_j \quad \text{B-2}$$

Cette condition s'obtient à partir de la continuité du vecteur contrainte au passage de l'interface en utilisant les lois de comportement dans chaque phase. Si on prend C^1 comme milieu de référence, l'équation (B-1) permet d'éliminer le champ ε^2 dans l'équation (B-2), on obtient ainsi :

$$C_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^1 n_j = C_{ijkl}^2 (\varepsilon_{kl}^1 + \lambda_k n_l) n_j \quad \text{B-3}$$

ou encore

$$(C_{ijkl}^1 - C_{ijkl}^2) \varepsilon_{kl}^1 n_j = C_{ijkl}^2 n_l n_j \lambda_k \quad \text{B-4}$$

En posant :

$$K_{ik} = C_{ijkl}^2 n_l n_j \quad \text{B-5}$$

(B-4) devient :

$$K_{ik} \lambda_k = (C_{ijkl}^1 - C_{ijkl}^2) \varepsilon_{kl}^1 n_j \quad \text{B-6}$$

Ce qui permet de déduire λ_i sous la forme suivante:

$$\lambda_i = K_{ik}^{-1} n_l (C_{klmn}^1 - C_{klmn}^2) \varepsilon_{mn}^1 \quad \text{B-7}$$

Avec (B-7), (B-1) devient :

$$\varepsilon_{ij}^2 - \varepsilon_{ij}^1 = \frac{1}{2} \left(K_{ik}^{-1} n_j n_l + K_{jk}^{-1} n_i n_l \right) (C_{klmn}^1 - C_{klmn}^2) \varepsilon_{mn}^1 \quad \text{B-8}$$

En posant :

$$P_{ijkl}^2 = \frac{1}{4} \left(K_{ik}^{-1} n_j n_l + K_{jk}^{-1} n_i n_l + K_{il}^{-1} n_j n_k + K_{jl}^{-1} n_i n_k \right) \quad \text{B-9}$$

(B-8) est équivalente à :

$$\varepsilon_{ij}^2 - \varepsilon_{ij}^1 = P_{ijkl}^2 (C_{klmn}^1 - C_{klmn}^2) \varepsilon_{mn}^1 \quad \text{B-10}$$

En prenant C^2 comme milieu de référence, on obtient l'expression analogue suivante :

$$\varepsilon_{ij}^1 - \varepsilon_{ij}^2 = P_{ijkl}^1 (C_{klmn}^2 - C_{klmn}^1) \varepsilon_{mn}^2 \quad \text{B-11}$$

B.2 - Propriétés des opérateurs interfaciaux.

L'opérateur interfacial P a été introduit par Hill pour décrire les discontinuités des champs au passage d'une interface. Il dépend des constantes élastiques du milieu de référence choisi et des composantes de la normale unitaire à l'interface. Des propriétés intéressantes de l'opérateur P peuvent être mises en évidence par l'intermédiaire des définitions :

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2} \left[(\delta_{ik} - n_i n_k)(\delta_{jl} - n_j n_l) + (\delta_{jk} - n_j n_k)(\delta_{il} - n_i n_l) \right] \quad \text{B-12}$$

$$B_{ijkl} = \frac{1}{2} \left[(\delta_{ik} - n_i n_k) n_j n_l + (\delta_{il} - n_i n_l) n_j n_k + (\delta_{jl} - n_j n_l) n_i n_k \right. \\ \left. + (\delta_{jk} - n_j n_k) n_i n_l \right] + n_i n_j n_k n_l \quad \text{B-13}$$

des tenseurs interfaciaux orthogonaux A et B (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker) Ces tenseurs apparaissent dans la décomposition suivante :

$$t_{ij} = A_{ijkl} t_{kl} + B_{ijkl} t_{kl} \quad \text{B-14}$$

où t est un tenseur quelconque d'ordre 2.

D'autre part, à partir des définitions des tenseurs A et B , on obtient les propriétés suivantes :

$$A_{ijkl} + B_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) = I_{ijkl} \quad \text{B-15}$$

$$AB = BA = 0, AA = A, BB = B \quad \text{B-16}$$

De même, on peut déduire facilement les relations suivantes :

$$AP = PA = 0, BP = PB = P \quad \text{B-17}$$

$$(BCB)P = B = P(BCB) \quad \text{B-18}$$

Par ailleurs, le saut des déformations au passage d'une interface est décrit par les expressions équivalentes suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}^1 - \varepsilon_{ij}^2 = P_{ijkl}^1 (C_{klmn}^2 - C_{klmn}^1) \varepsilon_{mn}^2 \\ \varepsilon_{ij}^2 - \varepsilon_{ij}^1 = P_{ijkl}^2 (C_{klmn}^1 - C_{klmn}^2) \varepsilon_{mn}^1 \end{cases} \quad \text{B-19}$$

Cette équivalence est confirmée par l'égalité suivante :

$$P^1(C^2 - C^1)P^2 = P^1 - P^2 \quad \text{B-20}$$

qu'on peut déduire à partir des tenseurs **A** et **B**. En effet, en utilisant les propriétés (B-15), (B-17) et (B-18), on obtient :

$$\begin{aligned} P^1(C^2 - C^1)P^2 &= P^1(A + B)(C^2 - C^1)(A + B)P^2 \\ &= P^1BC^2BP^2 - P^1BC^1BP^2 \\ &= P^1B - BP^2 \\ &= P^1 - P^2 \end{aligned} \quad \text{B-21}$$

B.3 - Relation entre le tenseur de Green et l'opérateur interfacial.

On se propose de déterminer une relation entre le tenseur de Green G et l'opérateur interfacial P , ce qui permet par la suite, de décrire la discontinuité des champs de déformations et de contraintes à partir seulement de tenseurs classiques déduits du tenseur S d'Eshelby.

Pour cela, on définit le tenseur T par :

$$T_{ijkl}(\vec{r}) = - \int_V G_{ki,jl}(\vec{r} - \vec{r}') \theta^I(\vec{r}') d\vec{r}' \quad \text{B-22}$$

V étant le volume du milieu infini.

$\vec{r}$ est un point quelconque du milieu infini, de composantes (x_1, x_2, x_3) .

$\theta^I(\vec{r})$ fonction caractéristique définie sur le volume V_I de l'inclusion ellipsoïdale I .

Pour évaluer le tenseur $T(\vec{r})$ nous utilisons la transformée de Fourier du tenseur de Green G définie par :

$$\tilde{G}_{ki}(\vec{k}) = \int_V e^{-2i\pi\vec{k}\cdot\vec{r}} G_{ki}(\vec{r}) d\vec{r} \quad \text{B-23}$$

et sa transformée de Fourier inverse :

$$G_{ki}(\vec{r}) = \int_{V_k} e^{2i\pi\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{G}_{ki}(\vec{k}) d\vec{k} \quad \text{B-24}$$

D'où :

$$G_{ki,j}(\vec{r}) = 2i\pi \int_{V_k} e^{2i\pi\vec{k}\cdot\vec{r}} k_j \tilde{G}_{ki}(\vec{k}) dk \quad \text{B-25}$$

$$G_{ki,jl}(\vec{r}) = -4\pi^2 \int_{V_k} e^{2i\pi\vec{k}\cdot\vec{r}} k_j k_l \tilde{G}_{ki}(\vec{k}) dk \quad \text{B-26}$$

Par conséquent, la transformée de Fourier de $G_{ki,jl}(\vec{r})$ est $-4\pi^2 k_j k_l \tilde{G}_{ki}(\vec{k})$.

De même, la transformée de Fourier de la fonction $\theta^I(\vec{r})$ est donnée par :

$$\tilde{\theta}(\vec{k}) = \int_V e^{-2i\pi\vec{k}\cdot\vec{r}} \theta^I(\vec{r}) dr \quad \text{B-27}$$

Avec les propriétés de la fonction $\theta^I(\vec{r})$, (B-27) devient :

$$\tilde{\theta}(\vec{k}) = \int_{V_1} e^{-2i\pi\vec{k}\cdot\vec{r}} dr \quad \text{B-28}$$

Puisque $T_{ijkl}(\vec{r})$ est le produit de convolution de $G_{ki,jl}(\vec{r})$ et de la fonction $\theta^I(\vec{r})$, on peut alors utiliser les propriétés de la transformation de Fourier, et nous obtenons pour la transformée de Fourier de $T(\vec{r})$ [3] :

$$T_{ijkl}(\vec{k}) = 4\pi^2 k_j k_l \tilde{G}_{ki}(\vec{k}) \tilde{\theta}(\vec{k}) \quad \text{B-29}$$

D'où inversement :

$$T_{ijkl}(\vec{r}) = \int_{V_k} e^{2i\pi\vec{k}\cdot\vec{r}} 4\pi^2 k_j k_l \tilde{G}_{ki}(\vec{k}) \tilde{\theta}(\vec{k}) dk \quad \text{B-30}$$

Les intégrales (B-30) sont calculées dans le cas général d'une inclusion ellipsoïdale de demi - axes a, b, c . Pour cela on passe de l'inclusion sphérique de rayon a par le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}\vec{k}(k_1, k_2, k_3) &\rightarrow \vec{K}(k_1, \frac{b}{a}k_2, \frac{c}{a}k_3) \\ \vec{r}(x_1, x_2, x_3) &\rightarrow \vec{R}(x_1, \frac{a}{b}x_2, \frac{a}{c}x_3)\end{aligned}\tag{B-31}$$

Le changement est effectué de telle sorte que $\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{K} \cdot \vec{R}$.
Pour ce qui est des éléments de volume nous avons :

$$dr = \frac{b \cdot c}{a^2} dR \quad \text{et} \quad dk = \frac{a^2}{b \cdot c} dK\tag{B-32}$$

et comme $\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{K} \cdot \vec{R}$, il vient immédiatement de (B-28) que :

$$\tilde{\theta}(\vec{k}) = \frac{b \cdot c}{a^2} \tilde{\theta}(\vec{K})\tag{B-33}$$

avec

$$\tilde{\theta}(\vec{K}) = \int_{\text{sphère}} e^{-2i\pi \vec{K} \cdot \vec{R}} dR\tag{B-34}$$

La fonction $\tilde{\theta}(\vec{K})$ est bien connue, elle est donnée en fonction du module du vecteur $\vec{K}$ et le rayon de la sphère par :

$$\tilde{\theta}(\vec{K}) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin(2\pi Ka) - 2\pi Ka \cos(2\pi Ka)}{K^3} \quad \text{B-35}$$

D'autre part, les composantes $\tilde{G}_{ki}(\vec{k})$ de la transformée de Fourier du tenseur de Green vérifient le système linéaire suivant :

$$4\pi^2 C_{ijkl}^* k_j k_l \tilde{G}_{km}(\vec{k}) = \delta_{im} \quad \text{B-36}$$

avec C^* les propriétés élastiques d'un milieu de référence.

En introduisant les cosinus directeurs de $\vec{k}$ qu'on notera χ_j , (B-36) devient :

$$4\pi^2 C_{ijkl}^* \chi_j \chi_l k^2 \tilde{G}_{km}(\vec{k}) = \delta_{im} \quad \text{B-37}$$

En posant :

$$C_{ijkl}^* \chi_j \chi_l = M_{ki} \quad \text{B-38}$$

(B-37) devient :

$$M_{ki} (4\pi^2 k^2 \tilde{G}_{km}) = \delta_{im} \quad \text{B-39}$$

ou encore :

$$(4\pi^2 k^2 \tilde{G}_{ki}) = M_{ki}^{-1} \quad \text{B-40}$$

On voit alors que les M_{ki}^{-1} ne dépendent que de la direction de $\vec{k}$ et il en va de même du facteur intervenant dans l'intégrale (B-30) :

$$4\pi^2 k_l k_j \tilde{G}_{ki}(\vec{k}) = \chi_j \chi_l M_{ki}^{-1} \quad \text{B-41}$$

ce qui permet de réaliser séparément l'intégration sur le module de $\vec{K}$.

$$T_{ijkl}(\vec{r}) = \int d\Omega \chi_j \chi_l M_{ki}^{-1} \int_0^\infty K^2 dK e^{2i\pi K u R} \tilde{\theta}(\vec{K}) \quad \text{B-42}$$

où $d\Omega$ est l'élément d'angle solide et $u = \cos(\vec{K}, \vec{R})$.
L'intégrale sur K est complexe. cependant $\chi_j \chi_l M_{ki}^{-1}$ est réel et seule la partie réelle de l'intégrale sur K doit donner une contribution finale non nulle. Nous laissons donc de côté sa partie imaginaire. Comme $\tilde{\theta}(\vec{K})$ est une fonction paire de K , il vient que :

$$\begin{aligned} \text{Re} \int_0^\infty K^2 dK e^{2i\pi K u R} \tilde{\theta}(\vec{K}) \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} K^2 dK e^{2i\pi K u R} \tilde{\theta}(\vec{K}) \end{aligned} \quad \text{B-43}$$

En se reportant à l'expression (B-35) de $\tilde{\theta}(\vec{K})$, nous voyons que (B-43) comprend deux termes correspondants aux intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dK e^{2i\pi K u R} \frac{\sin(2\pi K a)}{\pi K} = \begin{cases} 1 & \text{si } |uR| < 1 \\ 0 & \text{si } |uR| > 1 \end{cases} \quad \text{B-44}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dK e^{2i\pi KuR} \cos(2\pi Ka) = \frac{1}{2R} \left[\delta(u + \frac{a}{R}) + \delta(u - \frac{a}{R}) \right] \quad \text{B-45}$$

Avec ce résultat, (B-42) devient :

$$T_{ijkl}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{|u| < \frac{a}{R}} d\Omega \chi_j \chi_l M_{ki}^{-1} - \frac{1}{4\pi} \frac{a}{R} \oint_{|u| = \frac{a}{R}} d\Phi \chi_j \chi_l M_{ki}^{-1} \quad \text{B-46}$$

Le premier terme dans (B-46) donne une intégrale sur les orientations de $\vec{k}$ telle que $|u| = \cos(\vec{K}, \vec{R})$ et une seconde intégrale sur celles telles que $|u| = \frac{a}{R}$.

Φ est l'angle le long des cercles $|u| = \frac{a}{R}$.

D'une autre façon, la première intégrale s'effectue sur la surface comprise entre les cercles $u = \frac{a}{R}$ et $u = -\frac{a}{R}$.

En reprenant l'expression (A-1) de $T_{ijkl}(\vec{r})$ et en symétrisant suivant les indices (i, j) et (k, l) on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\vec{r} - \vec{r}') dr' &= \frac{1}{16\pi} \int_{|u| < \frac{a}{R}} d\Omega (\chi_j \chi_l M_{ki}^{-1} + \chi_i \chi_l M_{kj}^{-1} + \chi_i \chi_k M_{lj}^{-1} + \chi_j \chi_k M_{li}^{-1}) \\ &\quad - \frac{1}{16\pi} \frac{a}{R} \oint_{|u| = \frac{a}{R}} d\Phi (\chi_j \chi_l M_{ki}^{-1} + \chi_i \chi_l M_{kj}^{-1} + \chi_i \chi_k M_{lj}^{-1} + \chi_j \chi_k M_{li}^{-1}) \end{aligned}$$

B-47

Lorsque $R \rightarrow a$ on a : $r = r^+$.

Par conséquent, $|u| = \cos(\vec{K}, \vec{R}) \rightarrow 1$ c'est à dire : $\frac{\vec{K} \cdot \vec{R}}{|\vec{K}| |\vec{R}|} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{|\vec{k}| |\vec{r}|} \rightarrow 1$

ou encore : $\vec{\chi} \cdot \vec{n} \rightarrow 1$, ceci est équivalent à $\vec{\chi} \rightarrow \vec{n}$.

et d'après l'expression (B-38) de M_{ki} :

$M \rightarrow$ la matrice de Christoffel K .

De même, $\oint d\Phi \rightarrow 4\pi$, et puisque :

$$d\Omega = \frac{bc}{a^2} \left(\frac{k}{K}\right)^3 d\omega$$

(où $d\omega$ est l'élément d'angle solide ellipsoïdal).

(B-47) devient :

$$\begin{aligned} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl} (\vec{r}^+ - \vec{r}') dr' &= \frac{1}{16\pi} \int d\omega (\chi_j \chi_l M_{ki}^{-1} + \chi_i \chi_l M_{kj}^{-1} + \chi_i \chi_k M_{lj}^{-1} + \chi_j \chi_k M_{li}^{-1}) \times \\ &\quad \frac{abc}{(a^2 \chi_1^2 + b^2 \chi_2^2 + c^2 \chi_3^2)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{1}{4} (n_j n_l M_{ki}^{-1} + n_i n_l M_{kj}^{-1} + \chi_i \chi_k M_{lj}^{-1} + \chi_j \chi_k M_{li}^{-1}) \end{aligned}$$

Or :

$$T_{ijkl}^I(C^*) = \frac{1}{16\pi} \int d\omega (\chi_j \chi_l M_{ki}^{-1} + \chi_i \chi_l M_{kj}^{-1} + \chi_i \chi_k M_{lj}^{-1} + \chi_j \chi_k M_{li}^{-1}) \times$$

$$\frac{abc}{(a^2 \chi_1^2 + b^2 \chi_2^2 + c^2 \chi_3^2)^{3/2}}$$

$$P_{ijkl}(\vec{n}, C^*) = \frac{1}{2} (n_j n_l M_{ki}^{-1} + n_i n_l M_{kj}^{-1} + \chi_i \chi_k M_{lj}^{-1} + \chi_j \chi_k M_{li}^{-1})$$

D'où finalement :

$$\int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\vec{r}^+ - \vec{r}) dr = T_{ijkl}^I(C^*) - P_{ijkl}(\vec{n}, C^*)$$

Autre méthode.

Considérons un milieu infini de constantes élastiques C^* contenant une inclusion ellipsoïdale de constantes élastiques C^I et de volume V_I .

A partir des résultats classiques de la littérature, le champ élastique est donné par :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}) = E_{ij} - \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^*(\vec{r} - \vec{r}') (C_{klmn}^I - C_{klmn}^*) \varepsilon_{mn}^I dr' \quad \text{B-48}$$

où ε^I est le champ uniforme à l'intérieur de l'inclusion, Γ^* est le tenseur de Green modifié calculé par rapport au milieu de référence C^* .

Les champs $\varepsilon(\vec{r}^+)$ et $\varepsilon(\vec{r}^-)$ peuvent être déduites à partir de (B-48) par :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}^+) = E_{ij} - \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^*(\vec{r}^+ - \vec{r}') (C_{klmn}^I - C_{klmn}^*) \varepsilon_{mn}^I dr' \quad \text{B-49}$$

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}^-) = E_{ij} - \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^*(\vec{r}^- - \vec{r}') (C_{klmn}^I - C_{klmn}^*) \varepsilon_{mn}^I dr'$$

Puisque $\vec{r}^- \in V_I$, $\int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^*(\vec{r}^- - \vec{r}') dr = T_{ijkl}^I(C^*)$ est uniforme, on obtient

ainsi :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}^-) = \varepsilon_{ij}^I = E_{ij} - T_{ijkl}^I(C^*) (C_{klmn}^I - C_{klmn}^*) \varepsilon_{mn}^I \quad \text{B-50}$$

A partir de (B-49) et (B-50), on obtient pour le saut des déformations :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}^+) - \varepsilon_{ij}(\vec{r}^-) = \left\{ T_{ijkl}^I(C^*) - \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^*(\vec{r}^+ - \vec{r}') dr' \right\} (C_{klmn}^I - C_{klmn}^*) \varepsilon_{mn}^I$$

B-51

D'autre part, $\varepsilon(\vec{r}^+)$ et $\varepsilon(\vec{r}^-)$ peuvent être reliées en utilisant les opérateurs interfaciaux :

$$\varepsilon_{ij}(\vec{r}^+) - \varepsilon_{ij}(\vec{r}^-) = P_{ijkl}(C^*, \vec{n}) (C_{klmn}^I - C_{klmn}^*) \varepsilon_{mn}^I$$

B-52

Finalement, à partir de (B-51) et (B-52) on obtient :

$$P_{ijkl}(C^*, \vec{n}) = T_{ijkl}^I(C^*) - \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^*(\vec{r}^+ - \vec{r}') dr'$$

B-53

ou

$$\int_{V_I} \Gamma_{ijkl}^*(\vec{r}^+ - \vec{r}') dr' = T_{ijkl}^I(C^*) - P_{ijkl}(C^*, \vec{n})$$

B-54

ANNEXE-C : COMPARAISON AVEC LE PROBLEME D'INCLUSION A FRONTIERE MOBILE.

Le problème des frontières mobiles [4] a été introduit pour décrire des situations dans lesquelles la microstructure du matériau évolue par l'intermédiaire du mouvement des interfaces séparant les constituants, c'est le cas, par exemple des transformations de phase par diffusion et précipitation, recristallisation primaire et secondaire, transformation martensitique etc.

Le travail consiste, par une approche micromécanique, d'incorporer le déplacement des interfaces dans l'étude des matériaux hétérogènes, et ceci par une généralisation des problèmes d'inclusions en incluant explicitement l'évolution de la géométrie de l'inclusion par l'intermédiaire du déplacement de l'interface inclusion-matrice.

La démarche micromécanique mise en oeuvre dans le problème d'inclusion à frontière mobile, fait apparaître, en plus du tenseur classique T^I , un tenseur dû au déplacement de l'interface inclusion-matrice et qui n'est autre que la dérivée de T^I par rapport aux demi-axes de l'inclusion ellipsoïdale et il est donné par :

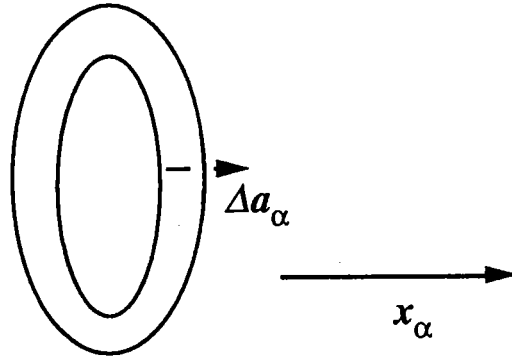
$$\frac{\partial T^I}{\partial a_\alpha} = \frac{1}{a_\alpha} (T^I - T^{I\alpha})$$

$$\text{où } T^{I\alpha} = \int_{V_I} \Gamma_{,\alpha}(\bar{r} - \bar{r}') x'_\alpha dr$$

sans sommation sur l'indice α .

Ainsi, si on désigne par $(a_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ les demi-axes de l'inclusion ellipsoïdale, par le mouvement de l'interface inclusion-matrice, l'ellipsoïde se transforme en une autre ellipsoïde de demis-axes $(a_\alpha + \Delta a_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$.

On a : schématiquement :



On voit clairement que le problème d'inclusion enrobée et celui d'inclusion à frontière mobile sont décrits par la même topologie, d'où l'idée de comparer les deux approches.

En effet l'hypothèse de la couche mince nous permet d'utiliser des développements asymptotiques en fonction de l'épaisseur Δa_α et d'exprimer le terme $T^2(C^*) - T^I(C^*)$ sous la forme approchée suivante :

$$T^2(C^*) - T^I(C^*) = T^2(C^*, a_\alpha + \Delta a_\alpha) - T^I(C^*, a_\alpha) \approx \sum_\alpha \frac{\partial T^I(C^*)}{\partial a_\alpha} \Delta a_\alpha$$

En conséquence, l'intégrale de surface (II-37) devient :

$$\sum_\alpha \int_{S_I} P(C^*, \vec{n}) \frac{\Delta a_\alpha}{a_\alpha} \frac{x_\alpha^2}{a_\alpha^2} p \, dS = V_c T^I(C^*) - V_I \sum_\alpha \frac{\partial T^I(C^*)}{\partial a_\alpha} \Delta a_\alpha$$

et les équations (II-54) et (II-55) prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^I &= E - \left(T^I(C^0) + \sum_{\alpha} \frac{\partial T^I(C^0)}{\partial a_{\alpha}} \Delta a_{\alpha} \right) \Delta C^{I0} \varepsilon^I \\
 &\quad - \frac{V_c}{V_I} T^I(C^0) \Delta C^{c0} T^I(C^c) \Delta C^{Ic} \varepsilon^I \\
 &\quad - \frac{V_c}{V_I} \{ T^I(C^c) - T^I(C^0) \} \Delta C^{Ic} \varepsilon^I \\
 &\quad + (I + T^I(C^0) \Delta C^{c0}) \sum_{\alpha} \frac{\partial T^I(C^c)}{\partial a_{\alpha}} \Delta a_{\alpha} \Delta C^{Ic} \varepsilon^I \\
 \varepsilon^c &= \varepsilon^I + \frac{1}{V_c} \left\{ V_c T^I(C^c) - V_I \sum_{\alpha} \frac{\partial T^I(C^c)}{\partial a_{\alpha}} \Delta a_{\alpha} \right\} \Delta C^{Ic} \varepsilon^I
 \end{aligned}$$

Les formules du problème d'inclusion enrobée ainsi exposées, il apparaît clairement que, comme pour le problème d'inclusion à frontière mobile, les champs de déformations moyens dépendent, pour leur calcul, de la connaissance des tenseurs T^I et $\frac{\partial T^I}{\partial a_{\alpha}}$.

Notons également que dans le cas d'une géométrie homothétique, qui prend le nom d'une croissance homothétique dans le contexte d'inclusion à frontière mobile, il a été montré que $\sum_{\alpha} \frac{\partial T^I(C^c)}{\partial a_{\alpha}} \Delta a_{\alpha} = 0$, et de ce fait on retrouve les équations (II-56) et (II-57) qui donnent les champs moyens dans le cas d'une géométrie homothétique.

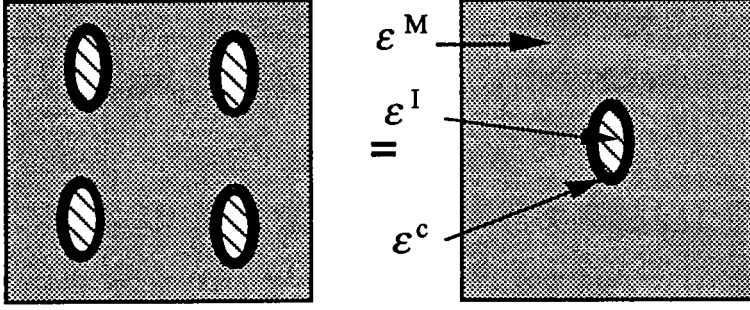
ANNEXE-D : MODELE DE MORI-TANAKA

Rappelons que l'approximation autocohérente a été introduite pour tenir compte des interactions entre inclusions et d'évaluer le comportement effectif dans le cas de milieux non dilués. Ceci est réalisé en remplaçant les interactions entre inclusions par celles d'une inclusion et le milieu homogène équivalent.

Dans le même but, le modèle de Mori-Tanaka a été développé. Il consiste à relier le champ des déformations à l'intérieur de l'inclusion à celui dans la matrice par la résolution du problème élémentaire d'une inclusion en interaction avec un milieu homogène infini qui a les propriétés de la matrice, et de déduire, par la suite, le comportement effectif du composite à partir des techniques d'homogénéisation classiques.

On se propose ici d'utiliser le modèle de Mori-Tanaka pour déduire le comportement élastique effectif d'un composite à renforts enrobés.

Appliqué au problème de l'inclusion enrobée, le modèle de Mori-Tanaka consiste à relier les déformations moyennes dans l'inclusion et l'enrobage aux déformations dans la matrice à partir du formalisme de l'inclusion enrobée (chapitre II) où il suffit de remplacer la déformation macroscopique E par la déformation ε^M dans la matrice et C^0 par C^M .



$$+ E = f^I \varepsilon^I + f^c \varepsilon^c + f^M \varepsilon^M$$

On obtient ainsi les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^I &= \varepsilon_{ij}^M - T_{ijkl}^2(C^M) \Delta C_{klmn}^{IM} \varepsilon_{mn}^I \\ &\quad - \frac{f_c}{f_I} T_{ijkl}^I(C^M) \Delta C_{klmn}^{cM} T_{mnpq}^I(C^c) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I \\ &\quad - \frac{f_c}{f_I} \left\{ T_{ijkl}^I(C^c) - T_{ijkl}^I(C^M) \right\} \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \\ &\quad + (I + T_{ijkl}^I(C^M) \Delta C_{klmn}^{cM}) \left(T_{mnpq}^2(C^c) - T_{mnpq}^I(C^c) \right) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \varepsilon_{rs}^I \end{aligned} \quad D-1$$

$$\varepsilon_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^I + \left\{ T_{ijkl}^I(C^c) - \frac{f_I}{f_c} \left(T_{ijkl}^2(C^c) - T_{ijkl}^I(C^c) \right) \right\} \Delta C_{klmn}^{Ic} \varepsilon_{mn}^I \quad D-2$$

$$\text{où } \Delta C^{IM} = C^I - C^M \text{ et } \Delta C^{cM} = C^c - C^M.$$

On peut également écrire (D-1) et (D-2) sous les formes suivantes :

$$\varepsilon_{ij}^I = A_{ijkl}^{IM} \varepsilon_{kl}^M \quad \varepsilon_{ij}^c = A_{ijkl}^{cM} \varepsilon_{kl}^M \quad D-3$$

où

$$A_{ijrs}^{IM} = \left\{ I + T_{ijpq}^2(C^M) \Delta C_{pqrs}^{IM} + \right. \\ \left. + \left(I_{ijmn} + T_{ijkl}^I(C^M) \Delta C_{klmn}^{CM} \right) \left(T_{mnpq}^2(C^c) - T_{mnpq}^I(C^c) \right) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \right. \\ \left. + \frac{f_c}{f_I} \left(T_{ijkl}^I(C^M) \Delta C_{klmn}^c T_{mnpq}^I(C^c) + \left(T_{ijpq}^I(C^c) - T_{ijpq}^I(C^M) \right) \right) \Delta C_{pqrs}^{Ic} \right\}^{-1} \quad D-4$$

$$A_{ijpq}^{CM} = \left\{ I_{ijmn} + \left(T_{ijkl}^I(C^c) - \frac{f_I}{f_c} \left(T_{ijkl}^2(C^c) - T_{ijkl}^I(C^c) \right) \right) \Delta C_{klmn}^{Ic} \right\} A_{mnpq}^{IM} \quad D-5$$

Par ailleurs, les contraintes et les déformations macroscopiques sont les moyennes des grandeurs locales correspondantes

$$E_{ij} = f^I \varepsilon_{ij}^I + f^c \varepsilon_{ij}^c + f^M \varepsilon_{ij}^M \quad D-6$$

et

$$\Sigma_{ij} = f^I \sigma_{ij}^I + f^c \sigma_{ij}^c + f^M \sigma_{ij}^M \quad D-7$$

Compte tenu des expressions (D-3), (D-6) devient :

$$E = \left[f^I A^{IM} + f^c A^{CM} + f^M I \right] \varepsilon^M \quad D-8$$

ou encore :

$$\varepsilon^M = \left[f^I A^{IM} + f^c A^{CM} + f^M I \right]^{-1} E \quad D-9$$

De même, en introduisant les lois de comportements locales, (D-7) devient :

$$\Sigma = \left[f^I C^I A^{IM} + f^c C^c A^{cM} + f^M C^M \right] \varepsilon^M \quad D-10$$

En substituant ε^M par (D-9) dans (D-10), on obtient finalement :

$$\Sigma = \left[f^I C^I A^{IM} + f^c C^c A^{cM} + f^M C^M \right] \left[f^I A^{IM} + f^c A^{cM} + f^M I \right]^{-1} E \quad D-11$$

relation qui permet de déduire le comportement effectif du composite sous la forme suivante :

$$C^{eff} = \left[f^I C^I A^{IM} + f^c C^c A^{cM} + f^M C^M \right] \left[f^I A^{IM} + f^c A^{cM} + f^M I \right]^{-1} \quad D-12$$

Application : cas de milieux isotropes incompressibles à renforts sphériques.

On se propose de déterminer le module de cisaillement effectif dans le cas d'inclusions enrobées sphériques et de matériaux isotropes incompressibles pour lesquels :

$$\varepsilon_{kk} = 0 \text{ et } \nu^I = \nu^c = \nu^M = \frac{1}{2}$$

Dans ce cas, on déduit des résultats du chapitre II une forme analytique des tenseurs A^{IM} et A^{cM} qui s'écrit :

$$A^{IM} = \frac{5\mu^M}{2\mu^I + 3\mu^M + \frac{18}{5} \frac{\Delta a}{a} \left(\frac{\mu^M}{\mu^c} - 1 \right) (\mu^I - \mu^c)}$$

$$A^{cM} = \left(\frac{2\mu^I + 3\mu^c}{5\mu^c} \right) A^{IM}$$

De (D-12), nous déduisons pour μ^{eff} :

$$\mu^{\text{eff}} = \mu^M + f^I H \left[(\mu^I - \mu^M) + 3 \frac{\Delta a}{a} \left(\frac{2\mu^I + 3\mu^c}{5\mu^c} \right) (\mu^c - \mu^M) \right]$$

où

$$H = \frac{5\mu^M}{2\mu^I + 3\mu^M + 2f^I(\mu^M - \mu^I) + \frac{6}{5} \frac{\Delta a}{a} \left(\frac{\mu^M}{\mu^c} - 1 \right) (f^I(2\mu^I + 3\mu^c) + 3(\mu^I - \mu^c))}$$

Bibliographie.

- [1] DEWIT R., *J. Res. Nat. Standards, A Phys., Chem.* 77 A, No 1, (1973).
- [2] HILL R., "*Interfacial Operators in the mechanics of composite media*". *J. Mech. Phys. Solids* Vol. 31, (1983).
- [3] FAIVRE G., *Journal de Physique*, Vol. 32, (1971).
- [4] SABAR H. - BUISSON M. - BERVEILLER M., "*The inhomogeneous and plastic inclusion problem with moving boundary*", *Int. J. Plast.*, Vol. 7, (1991).