Etude du comportement en fatigue des fissures semi-elliptiques : application aux plaques en flexion et aux tubes sous pression interne

Taoufik Boukharouba

▶ **To cite this version:**

Taoufik Boukharouba. Etude du comportement en fatigue des fissures semi-elliptiques : application aux plaques en flexion et aux tubes sous pression interne. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1995. Français. NNT : 1995METZ016S . tel-01776911

HAL Id: tel-01776911

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776911

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

Faculté des Sciences de l'Université de Metz

THÉSE

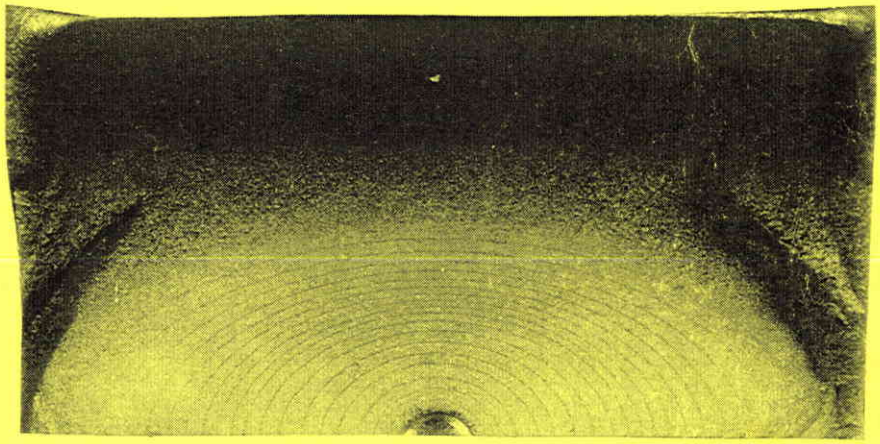
en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

Mention : Sciences de l'Ingénieur n°. 7642
Intitulé : Mécanique de la Rupture et Fatigue des Matériaux

Présentée par

Taoufik BOUKHAROUBA



——— oOo _____

ÉTUDE DU COMPORTEMENT EN FATIGUE DES FISSURES SEMI-ELLIPTIQUES , APPLICATION AUX PLAQUES EN FLEXION ET AUX TUBES SOUS PRESSION INTERNE.

——— oOo _____

Soutenue publiquement le 04 Juillet 1995 devant la commission d'Examen :

MM.	G. PLUVINAGE	: Professeur à *l'Université de Metz*
	A. NGUYEN DANG HUNG	: Professeur à *l'Université de Liège - Belgique*
	J. PETIT	: Professeur à *l'Université de Poitiers*
		Conférences à *l'ENIM de Metz*
		le *CIAT Industrie à Bourges*
		à l'Académie *des Sciences à Kiev - Ukraine*
		à *l'Université de Parme - Italie*

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ
022 420518 0

Laboratoire de Fiabilité Mécanique, Université de Metz, Ile du Saulcy 57045 Metz - France.
Tel : 87 31 53 47 Fax : 87 31 53 03

Ub 81707.

Faculté des Sciences de l'Université de Metz

THÉSE

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ

Mention : Sciences de l'Ingénieur n°. 7642
Intitulé : Mécanique de la Rupture et Fatigue des Matériaux

Présentée par

Taoufik BOUKHAROUBA

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE -METZ
N° inv. 19950935
Cote S/M3 95/16
Loc Magasin

——— oOo ———

ÉTUDE DU COMPORTEMENT EN FATIGUE DES FISSURES SEMI-ELLIPTIQUES , APPLICATION AUX PLAQUES EN FLEXION ET AUX TUBES SOUS PRESSION INTERNE.

——— oOo ———

Soutenue publiquement le 04 Juillet 1995 devant la commission d'Examen :

MM.	G. PLUVINAGE	: Professeur à *l'Université de Metz*
	A. NGUYEN DANG HUNG	: Professeur à *l'Université de Liège - Belgique*
	J. PETIT	: Professeur à *l'Université de Poitiers*
	J. GILGERT	: Maître de Conférences à *l'ENIM de Metz*
	P. MONTIER	: Ingénieur de *CIAT Industrie à Bourges*
	A. KRASOWSKY	: Professeur à l'A*cadémie des Sciences à Kiev - Ukraine*
	A. CARPINTERI	: Professeur à *l'Université de Parme - Italie*

Laboratoire de Fiabilité Mécanique, Université de Metz, Ile du Saulcy 57045 Metz - France.
Tel : 87 31 53 47, Fax : 87 31 53 03

A la mémoire de mon père
A ma mère pour son soutien et sacrifice
A toute ma famille

Avant -propos

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Fiabilité Mécanique de l'Université de Metz, avec l'entreprise GIAT Industrie. Le suivi de ces travaux s'est effectué sous la direction de Monsieur le Professeur Guy PLUVINAGE à qui je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude pour la confiance, les enseignements et les encouragements permanents qu'il m'a constamment témoignés.

J'adresse en premier lieu mes remerciements à Monsieur J. GILGERT pour son aide et la confiance qu'il m'a toujours témoignées et surtout pour son soutien moral sur lequel j'ai toujours compté. Mes remerciements vont aussi à tous les élèves Ingénieurs (notamment la promotion 90 et 91) et tous les techniciens de l'ENIM qui ont participé à la réalisation de loin ou de près du banc d'essai sous pression interne.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur P. MONTIER et à tout le personnel du Laboratoire des essais mécaniques de GIAT Industrie à Bourges pour l'accueil et l'aide qu'ils m'ont fournis.

Je remercie Messieurs NGUYEN Dang Hung de l'Université de Liège, J. PETIT de l'Université de Poitiers, A. CARPINTERI de l'Université de Parme, A. KRASOWSKI de l'Académie d'Ukraine, P. MONTIER de GIAT Industrie, J. GILGERT de l'ENIM et G. PLUVINAGE de l'Université de Metz de m'avoir fait l'honneur de juger ce travail.

Je remercie également Messieurs P. JODIN et C. CHEHIMI pour leurs compréhensions et leurs aides à tous moments quand situation oblige. J'exprime également toute ma reconnaissance à Monsieur S. BAKOWSKI pour son aide, sa compréhension et sa contribution au bon déroulement de cette étude.

Je ne saurai oublier tous mes amis et collègues du Laboratoire de Fiabilité Mécanique de l'Université de Metz pour l'ambiance et leurs soutien moral; qu'ils trouvent ici mes remerciements.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 1

Ier Partie : ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I.1. MÉCANIQUE ET MÉCANISMES DE FISSURATION 2

I.1.1. Plasticité en fond d'entaille 2

I.1.1.1 Contraintes et déformations en fond de fissure 2
I.1.1.2 Influence de l'état de contraintes sur la taille de la zone plastique 4
I.1.1.3 Forme et taille de la zone plastique 4
I.1.1.4 Effet cyclique chargement, déchargement 6

I.1.2. Mécanismes et modèles de fissuration 7

I.1.2.1. Modèles basés sur les lois semi-empiriques 8

I.1.3 Conclusion 9

I.2. CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES EN TROIS DIMENSIONS 10

I.2.1. Cas des cylindres fissurés 10

I.2.1.1 Travaux de Kobayashi & al 10
I.2.1.2 Travaux de Heliot et Labbens 12
I.2.1.3 Travaux de Mc Gowan & Raymund 14
I.2.1.4 Travaux de Newman & Raju 18
I.2.1.5 Conclusion 21

I.2.2. Cas de plaques fissurées 23

I.2.2.1 Travaux de Raju & Newman 23
I.2.2.2 Travaux de Smith & Sorensen 27
I.2.2.3 Travaux de Shah & Kobayashi 28
I.2.2.4 Travaux de Dufresne 32
I.2.2.5 Travaux de Newman 33
I.2.2.6 Travaux de Mars & Smith 35
I.2.2.7 Travaux de Grandt & Sinclair 37
I.2.2.8 Travaux de Ruiz & Epstein 38
I.2.2.9 Travaux de Carpinteri 39

I.2.2.10 Travaux de Mattheck & Morawietz & Munz 40
I.2.2.11 Conclusion 44

I.3. LOIS DE FISSURATION EN TROIS DIMENSIONS 45

I.3.1 Expérience de Sommer & Ratwani 45
I.3.2 Travaux de Varfolomeyev & Vainshtok & Krasowsky 47
I.3.3 Travaux de Mahmoud & Hosseini 49
I.3.4 Conclusion 54

I.4 CONCLUSION 55

IIeme Partie : ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES

II.1 Fissuration sur éprouvette CT 57

II.2. Fissuration sur plaques en flexion 58

II.2.1 Machine d'essais et dispositif de fissuration sur plaques 59
II.2.2 Éprouvette-Plaque 60
II.2.3 Conditions d'essais sur plaques 61
II.2.4. Suivi de la propagation de la fissure 61

II.2.4.1 Jauge de déformation 61
II.2.4.2 Jauge de fissuration 62
II.2.4.3 Méthode de marquage mécanique 62

II.2.5. Mesure de la taille de la fissure au cours de la propagation sur plaques 63

II.2.5.1 Mesure directe 63
II.2.5.2 Mesure indirecte 63

II.3. Fissuration sur tube sous pression interne 63

II.3.1 Description générale 64
II.3.2 Tube-éprouvette 65
II.3.3 Remplissage du tube-éprouvette 65
II.3.4 Réglage des limites de position 67
II.3.5 Dispositif de sécurité 67
II.3.6 Amorçage de la fissure de fatigue sur tubes 68
II.3.7 Conditions d'essai de fissuration sur tubes 69
II.3.8 Suivi de la propagation de la fissure sur tubes 70
II.3.9 Mesure de la taille de la fissure au cours de la propagation sur tubes 70

II.4. Facteur d'intensité de contraintes en trois dimensions 71

II.4.1 Calcul du F.I.C. par la méthode aux éléments finis 71
II.4.2 Calcul du F.I.C. par la solution de Newman & Raju 74
II.4.3 Calcul du F.I.C. semi-local 74

II.5. Dépouillement des résultats 74

II.5.1 Variation du facteur d'intensité de contraintes 74
II.5.2 Loi de fissuration en trois dimensions 75

IIIeme Partie : RÉSULTATS ET DISCUSSION 76

III.1 Résultats des essais de fissuration sur plaques 77

III.2. Résultats des calculs du facteur d'intensité de contraintes 79

III.2.1 Calcul du F.I.C. local par la méthode aux éléments finis 79
III.2.2 Calcul du F.I.C. local par l'équation de Newman & Raju 80
III.2.3 Calcul du F.I.C. semi-local 82

III.3. Lois de fissuration en trois dimensions 89

III.3.1 Détermination des constantes de références de la loi de Paris 91
III.3.2 Dépouillement des résultats sur plaques selon un critère local 91
III.3.3 Dépouillement des résultats sur plaques selon un critère semi-local 92
III.3.4 Comparaison des lois de fissuration sur plaques selon un critère local et semi-local 94

III.4 Résultats des essais de fissuration sur tubes 96

III.5. Résultats des calculs du facteur d'intensité de contraintes sur tube 98

III.5.1 Calcul du F.I.C. local par l'équation de Newman & Raju 98
III.5.2 Calcul du F.I.C. local par la méthode aux éléments finis 98
III.5.3 Calcul du F.I.C. semi-local 100

III.6. Lois de fissuration sur tubes 103

III.6.1 Dépouillement des résultats selon un critère local et semi-local 103
III.6.2 Comparaison des lois de fissuration locale et semi-locale sur tubes sous pression interne 103

III.7. Facteurs de correction de géométrie 104

III.7.1 Facteur de correction de géométrie sur plaques 105
III 7.2 Facteur de correction de géométrie sur tubes 108

IV CONCLUSION GÉNÉRALE 111

INTRODUCTION

La propagation en fatigue d'une fissure, à partir d'un défaut initial existant dans une structure tridimensionnelle chargée mécaniquement, est caractérisée par le fait que le défaut prend ensuite une forme semi-elliptique qui évolue au cours du temps.

Comme ont pu le remarquer de nombreux auteurs **[43, 73, 87 et 99]**, au cours de cette propagation la longueur des demi-axes de l'ellipse a et c augmente, mais le rapport a/c varie de façon complexe. Après croissance et passage par un maximum, le rapport a/c décroît linéairement en fonction de la profondeur a normalisée par rapport à l'épaisseur B dans le cas des plaques.

La sécurité des constructions et notamment celle des réservoirs sous pression interne nécessite de connaître l'évolution de ces défauts au cours du chargement cyclique. Les concepts de sécurité, comme celui de "fuite avant rupture", utilisant à la fois la profondeur et la forme du défaut elliptique au cours de la fissuration nécessitent donc la connaissance de la loi de propagation. Cette évolution complexe est le plus souvent considérée comme régie par des approches basées toutes sur l'hypothèse que la propagation d'une fissure est sensible au gradient de contraintes et donc gouvernée par le facteur d'intensité de contraintes. Trois approches sont utilisées successivement locale, globale et semi-locale.

- l'approche locale suppose que la propagation est régie par la loi de Paris et le facteur d'intensité de contraintes local. Cette approche pose bien évidemment des problèmes en surface, là où le facteur d'intensité de contraintes n'est pas bien défini.

- l'approche semi-locale consiste à moyenner les valeurs locales du facteur d'intensité de contraintes sur un incrément de front de fissure ΔS et à appliquer la loi de Paris en utilisant les valeurs semi-locales $\overline{K_{sl,A}}$ en profondeur et $\overline{K_{sl,C}}$ en surface.

- l'approche globale considère que le front de fissure prend une forme telle qu'il minimise l'énergie dissipée. Le taux d'énergie disponible minimal ainsi calculé permet de déterminer le facteur d'intensité de contraintes global K_{glo}.

Le but de notre étude de recherche est d'examiner la loi de fissuration en trois dimensions qui se conformera le mieux à ces hypothèses. Celle-ci a été menée sur des plaques et des tubes de même matériau et possédant le même défaut de surface de forme semi-elliptique et de même dimensions.

Dans cette étude, nous avons été amenés à réexaminer le problème compte tenu des divergences citées dans la littérature. Dans ce contexte nous avons réalisé des essais sur plaques en flexion trois points et sur tubes sous pression interne. Nous avons recalculé avec un logiciel d'éléments finis le facteur d'intensité de contraintes sur plaques et sur tubes en présence du défaut de surface semi-elliptique. Certains résultats obtenus ont été comparés notamment avec la solution développée par Newman & Raju.

Cette étude illustrée dans ce mémoire est composée de quatre parties. Nous avons débuté par une étude bibliographique, dans la seconde partie, nous présentons les méthodes expérimentales qui ont été développées ou utilisées pour notre étude, dans la troisième partie nous présentons les résultats et discussions et nous terminons par une conclusion générale.

I.1. *MÉCANIQUE ET MÉCANISMES DE FISSURATION*

L'application de la mécanique de la rupture à l'étude de la propagation des fissures de fatigue date des années cinquante, soit cent ans après que Wöhler eu proposé de se concentrer sur l'endurance, méthode qui reste au demeurant très utilisée. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne renseigne pas sur la croissance des fissures et que seul le stade d'amorçage est correctement pris en compte.

La prévision de la tenue à la fatigue est maintenant étudiée dans ces deux stades, même si dans de nombreux cas, la phase d'amorçage est de loin la plus importante en durée de vie. Plusieurs considérations, telles que l'acceptation des défauts, le rôle accru du contrôle non destructif, la maintenance des structures fissurées, font que la connaissance de la croissance des fissures est en elle-même un sujet d'intérêt.

I.1.1. Plasticité en fond d'entaille

A l'aide d'approches théoriques, on a cherché depuis longtemps à exprimer la vitesse de fissuration par fatigue en explicitant l'influence de certains paramètres mécaniques. A l'heure actuelle, les approches les plus prometteuses s'appuient sur :

- l'ouverture de fissure (COD),
- l'écrouissage cyclique à fond de fissure.

Dans les deux cas, la connaissance de la forme et de la taille de la zone plastifiée à fond de fissure est utile.

I.1.1.1 Contraintes et déformations en fond de fissure

Avant d'aborder la question de la plasticité en fond de fissure, il convient de rappeler brièvement les résultats issus de la mécanique de la rupture, sur la formation de la zone plastifiée au bout d'une fissure. Celle-ci est supposée contenue dans une plaque de dimensions infinies, soumise à une sollicitation monotone de traction, dont le chargement est perpendiculaire au plan de fissure.

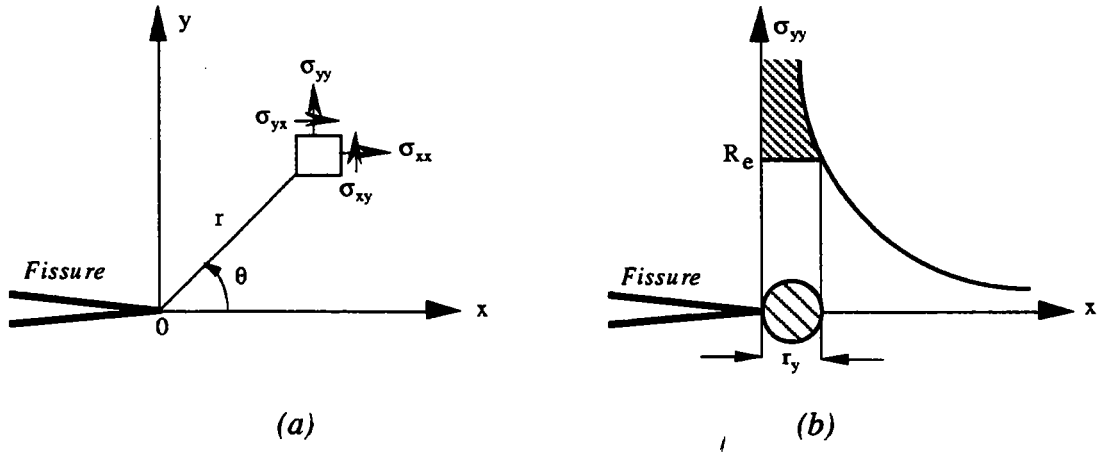


Figure I.1. (a) Champ de contraintes, (b) Première estimation de la zone plastifiée.

Dans ce mode de sollicitation (mode I), l'état de contraintes et de déformations en fond de fissure est donné dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture (figure I.1a) par les relations suivantes :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \qquad (i, j = x, y)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{K_I}{E\sqrt{2\pi r}} g_{ij}(\theta, \upsilon)$$

$$\sigma_{zz} = 0 \qquad \text{en contraintes planes} \qquad (I.1)$$

$$\sigma_{zz} = \upsilon\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \qquad \text{en déformations planes}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \upsilon\,(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right]$$

avec $K_I = \sigma_g\sqrt{\pi a}$: facteur d'intensité de contraintes
r, θ : coordonnées polaires d'un point en avant de pointe de la fissure
E : module d'Young
$f_{ij}(\theta)$: fonction de l'angle θ
$g_{ij}(\theta, \upsilon)$: fonction de l'angle θ et du coefficient de poisson υ

En contraintes planes, la composante σ_{zz} est nulle. De plus si l'on fait l'hypothèse simplificatrice que les composantes σ_{xx} et σ_{xy} n'interviennent pas dans la plastification en fond de fissure, la seule composante active est donc $\sigma_1 = \sigma_{yy}$. Pour $\theta = 0$, $f_{yy(\theta=0)} = 1$ et on a :

$$\sigma_1 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \qquad (I.2)$$

Au cours du chargement, la contrainte σ_1 atteint localement la limite d'élasticité R_e, il y aura alors plastification à la pointe de la fissure dans une zone telle que :

$$\sigma_1 = R_e = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r_y}} \qquad (I.3)$$

Soit :

$$r_y = \frac{K_I^2}{2\pi R_e^2} \qquad (I.4)$$

Ce modèle simple défini par Irwin **[1]**, en mode I et en contraintes planes, fait l'hypothèse que la forme de la zone plastique est circulaire (figure I.1b), et que le matériau est élastique parfaitement plastique. En réalité, la taille de cette zone dépend de nombreux paramètres tels que le coefficient d'écrouissage, l'état de contraintes, le mode de rupture, etc.

I.1.1.2 Influence de l'état de contraintes sur la taille de la zone plastique

Dans la zone plastique en déformations planes, selon le critère de Von Mises, la limite d'élasticité peut être multipliée par un facteur de quelques unités en raison du confinement de la plasticité. Broek **[2]** a proposé d'utiliser un facteur d'entrave à la plasticité défini par la relation : $L = \sigma_{max}/R_e$ et égal à trois. En déformations planes, l'équation (I.4) devient :

$$r_{y,DP} = \frac{K_I^2}{2\pi (L R_e)^2} = \frac{K_I^2}{18\pi R_e^2} \qquad (I.5)$$

On voit donc que la taille de la zone plastique en déformations planes $r_{y,DP}$ est 9 fois plus petite que celle en contraintes planes. Comme les surfaces de l'éprouvette ne sont pas en déformations planes, la valeur moyenne du facteur d'entrave à la plasticité est inférieure à trois. Irwin **[1]** a proposé une valeur empirique de L = 1,68. Cela donne :

$$r_{y,DP} = \frac{K_I^2}{2\pi (1{,}68\, R_e)^2} \approx \frac{K_I^2}{6\pi R_e^2} \qquad (I.6)$$

La taille de la zone plastique serait dans ce cas trois fois plus petite que celle en contraintes planes. Il est à noter que le rapport $r_{y,DP}/r_{y,CP}=3$ est le plus utilisé dans la littérature.

I.1.1.3 Forme et taille de la zone plastique

Irwin a proposé que la forme de la zone plastique soit circulaire. En réalité et en mode I la zone plastique est constituée de deux ailes. Plus récemment, Banks et al **[3]** ont effectué une étude sur la forme et la taille de la zone plastifiée en utilisant le critère de Von Mises. La zone plastifiée est exprimée par la relation suivante :

$$r_m = \alpha \left(\frac{K_I^2}{R_e^2} \right) \qquad (I.7)$$

α est un paramètre fonction de l'angle θ et de l'état de contraintes :

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}\left(1 + \cos\theta + \frac{3}{2}\sin^2\theta\right) \qquad \text{en C. P.}$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}\left[(1-2\upsilon)^2(1+\cos\theta) + \frac{3}{2}\sin^2\theta\right] \qquad \text{en D. P.}$$

Les valeurs de α sont reportées dans le tableau (I.1), aux points A, B, et C définis dans la figure (I.2).

Etat de contraintes	Valeurs de α		
	A	B	C
C. P.	$1/2\pi$ ($\theta_A = 0$)	$1/2\pi$ ($\theta_B = 0$)	$\pm$ 0,205 ($\theta_C = \pm 80°$)
D. P. ($\upsilon = 1/3$)	0,0175 ($\theta_A = 0$)	0,054 ($\theta_B = \pm 51°$)	$\pm$ 0,129 ($\theta_C = \pm 80°$)

Tableau I.1. Valeurs particulières de α [3].

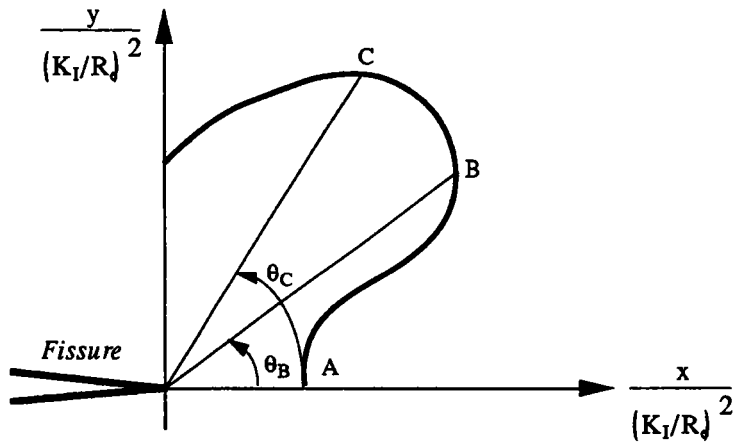


Figure I.2. Définitions des valeurs particulières de α selon Banks et al [3].

D'autres études [4] montrent l'influence du coefficient d'écrouissage sur la forme de la zone plastique. Lorsque ce coefficient augmente, les deux ailes ont tendance à se redresser. La direction moyenne de l'aile par rapport à la direction de fissuration est de 60° dans le modèle de Rice.

Des expériences montrent qu'elle varie de 44° à 30° lorsque le coefficient d'écrouissage passe de 0,25 à 0,07. D'autres facteurs, comme le critère de plasticité choisi ou la configuration de la fissure peuvent avoir une influence sur la forme de la zone plastique.

I.1.1.4 Effet cyclique : chargement, déchargement

La plastification cyclique à la pointe de la fissure due au déchargement et rechargement joue un rôle important en fatigue notamment en raison du fait qu'elle induit le phénomène de fermeture de fissure. Une première solution de ce problème a été proposée par Rice [5] qui a utilisé une méthode de superposition.

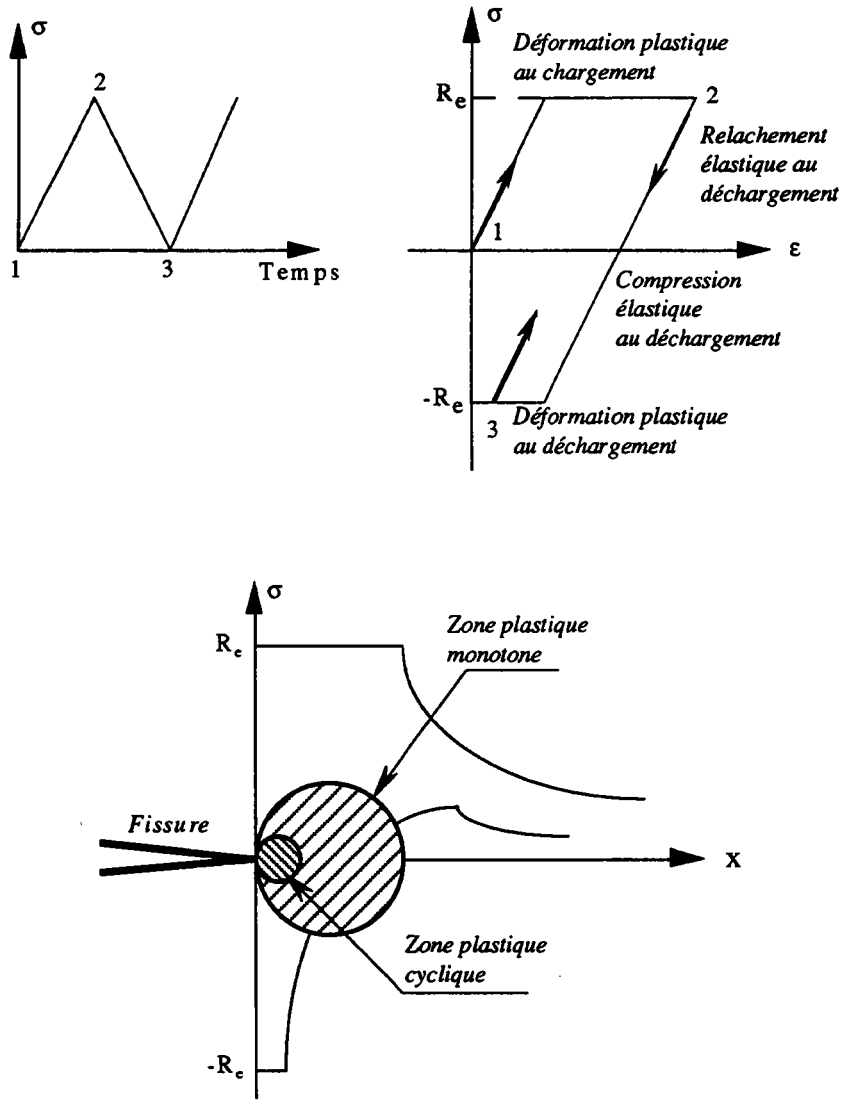


Figure I.3. Mécanisme de la plastification cyclique à fond de fissure de fatigue selon Rice [5].

La figure (I.3) montre schématiquement comment se forment les zones plastifiées à la pointe d'une fissure de fatigue lors d'un chargement de traction cyclique. Lors du chargement, on a plastification quand la limite d'élastisité est atteinte localement et lors du déchargement, l'amplitude de la contrainte localisée dans la zone plastique pour retrouver la plastification est alors égale au double de la limite d'élasticité. En considérant que l'amplitude du chargement $\Delta K = K_{max} - K_{min}$, l'équation (I.1) peut s'écrire sous la forme :

$$\Delta\sigma_{ij} = 2R_e \cdot F_{ij}\left(r/a, \theta, \Delta\sigma_g/2R_e\right)$$

$$\Delta\varepsilon_{ij} = 2\varepsilon_y \cdot G_{ij}\left(r/a, \theta, \Delta\sigma_g/2R_e\right) \qquad (i, j = x, y) \qquad (I.8)$$

La taille de la zone plastique cyclique, pour un matériau élastique parfaitement plastique vaut :

$$r_c = \frac{1}{4} \cdot \frac{\Delta K_I^2}{2\pi\sigma_g^2} \qquad (I.9)$$

Lorsque le rapport de contraintes R vaut zéro, c'est-à-dire lorsque $\Delta K_I = K_{Imax}$, nous avons, quelque soit le matériau, la relation suivante :

$$r_c = \frac{1}{4}\, r_y \qquad (I.10)$$

I.1.2. Mécanismes et modèles de fissuration

Afin de prévoir la rupture des pièces mécaniques sollicitées en fatigue, beaucoup de laboratoire ont tenté, au moins pour des raisons pratiques, d'établir des lois empiriques de fissuration, utiles au bureau d'étude.

Si les mécanismes propres à la fatigue commencent à peine d'être connus, l'influence de certains paramètres sur la vitesse de fissuration est généralement mieux définie. Nous pouvons les classer en deux catégories :

- les paramètres intrinsèques qui dépendent du matériau lui-même, module de Young, limite d'élasticité, propriétés cycliques et état métallurgique du matériau,

- les paramètres extrinsèques qui dépendent des conditions de l'essai, quel que soit le matériau étudié, température, fréquence, environnement, dimension de l'éprouvette, rapport de charge R, etc.

I.1.2.1 Modèles basés sur les lois semi-empiriques

Les modèles qui se proposent de décrire la propagation d'une fissure devraient tenir compte de tous les paramètres qui conditionnent cette dernière dans un matériau donné, mais un tel modèle n'existe actuellement pas. Ainsi, pour tenir compte des paramètres autres que l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes, plusieurs auteurs ont proposé des lois de fissuration empiriques dont le nombre s'est considérablement accru ces dernières années. En fait, la plupart ne sont que des lois du même type que celle de Paris "aménagées" pour mieux représenter une série particulière d'essais. Nous allons donc à titre d'exemples distinguer certaines classes de ces modèles :

- En 1963, Paris & Erdogan **[6]** proposaient une loi qui allait probablement être la plus utilisée en pratique. Si cette relation permet de présenter simplement les résultats, elle ne précise pas l'influence des paramètres intrinsèques ou extrinsèques sur la propagation.

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m \qquad \text{(I.11)}$$

avec da/dN : vitesse de propagation [mm/cycle]
ΔK : l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes [MPa $m^{1/2}$]
C et m : paramètres de la loi de fissuration liés au matériau

- Forman & al **[7]** constatent que l'équation (I.11) ne tient pas compte de la limite imposée par la rupture $K_C = K$ et ils proposent donc une nouvelle relation empirique. Cette équation a été vérifiée de nombreuses fois dans les alliages d'aluminium **[8 - 10]**, mais ne semble pas décrire convenablement le comportement des aciers **[11]** :

$$\frac{da}{dN} = \frac{C.(\Delta K)^m}{(1-R).(K_C - \Delta K)} \qquad \text{(I.12)}$$

avec ΔK_C : l'amplitude de la ténacité du matériau [MPa $m^{1/2}$]
R : rapport de charge

- Pearson **[12]** remarque que la relation de Forman est surtout vérifiée avec des éprouvettes d'alliages d'aluminium en faible épaisseur et que la vitesse calculée à l'aide de la relation (I.12) dépend surtout de la valeur choisie pour K_C. Ainsi cette relation ne décrit pas le comportement de la fissure aux basses vitesses lorsque ΔK tend vers ΔK_{th} **[13]** :

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(1+\beta)^{\alpha}(\Delta K - \Delta K_{th})^m}{K_C - (1-\beta)\Delta K}, \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1+R}{1-R} \qquad \text{(I.13)}$$

avec ΔK_{th} : l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes seuil [MPa $m^{1/2}$]
α : paramètre expérimental

- Richards et Lindley **[14]**, suivent la même analyse que les auteurs précédents, ils désirent décrire l'ensemble de la courbe de fissuration et proposent la relation suivante :

$$\frac{da}{dN} = A\left[\frac{\left(\Delta K - \Delta K_{th}\right)^4}{R_m^2\left(K_C^2 - K_{max}^2\right)}\right]^m \qquad (I.14)$$

avec K_{max} : facteur d'intensité de contraintes maximal [MPa $m^{1/2}$]
R_m : contrainte ultime
A : paramètre expérimental

Il existe bien d'autres lois similaires, mais la simplicité et la forme générale conduit les chercheurs à utiliser le plus fréquemment pour leurs calculs la loi de Paris proprement dite, après en avoir mesuré expérimentalement les paramètres de fissuration C et m.

I.1.3 Conclusion

La validité d'un modèle de propagation de fissures de fatigue est bien souvent limitée. Lorsque, le nombre de paramètres ajustables devient élevé, l'ajustement des prédictions du modèle aux résultats expérimentaux se résume à un calcul de paramètres.

Souvent les modèles théoriques font intervenir des paramètres non disponibles en pratique, parce qu'ils sont rarement mesurés (le coefficient de consolidation cyclique, le coefficient de résistance cyclique) ou difficiles à mesurer. On est donc alors obligé de faire des approximations pour obtenir les valeurs des coefficients désirés.

Une fois ces coefficients déterminés, il reste à confronter les prédictions théoriques avec les résultats expérimentaux. La technique la plus simple consiste à comparer graphiquement les deux résultats. C'est ainsi que l'on admet généralement que la loi de Forman s'applique correctement aux alliages d'aluminium, et généralement moins bien dans le cas des aciers, où l'influence du rapport de chargement R est moins marquée **[15]**.

I.2. CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES POUR UNE FISSURE TRIDIMENSIONNELLE

Le calcul du facteur d'intensité de contraintes dans des situations tridimensionnelles est rendu fréquemment nécessaire par des problèmes industriels. Il est souvent limité à des chargements symétriques en mode I. Dans la pratique il est nécessaire de considérer non seulement les contraintes uniformes mais aussi le gradient de contraintes comme, par exemple celui rencontré lors d'un choc thermique.

Dans le cas où le chargement appliqué sur le solide fissuré est variable dans le temps, il est préférable d'utiliser une méthode conçue pour ne pas répéter le calcul dans sa totalité pour chaque étape de chargement. La connaissance des fonctions de poids tridimensionnelles, définies par Bueckner **[16]** et Rice **[17]** permet de résoudre ce problème. Atluri et Kathiresan **[18]** McGowan et Raymund **[19]** estiment ces fonctions par éléments finis mais cette méthode présente l'inconvénient d'être longue et coûteuse.

Heliot et Labbens **[20]** utilisent une autre méthode qui a été développée par Rezzo **[21]**, Cruse **[22]** et en France par le Centre Technique des Industries de la Mécanique (CETIM), **[23 et 24]**, connue comme la méthode de l'Équation Intégrale Bornée (BIE). Elle utilise dans sa résolution un nombre de noeuds limité par rapport à la méthode aux éléments finis, ainsi la durée de l'estimation est plus courte. Beaucoup d'autres auteurs estiment uniquement la valeur du facteur d'intensité de containtes, on peut citer Underwood **[25]** Kobayashi **[26]** et Kobayashi & Emery **[27]**.

Le calcul du facteur d'intensité de contraintes dans des plaques ou des structures tubulaires en présence d'un défaut elliptique exige l'introduction du facteur de forme géométrique. Ce facteur est défini par une fonction dite " Fonction d'Influence Polynomiale", dépendant de la forme du défaut, de l'épaisseur de l'éprouvette et de l'évolution du rapport de la profondeur du défaut sur l'épaisseur (a/B).

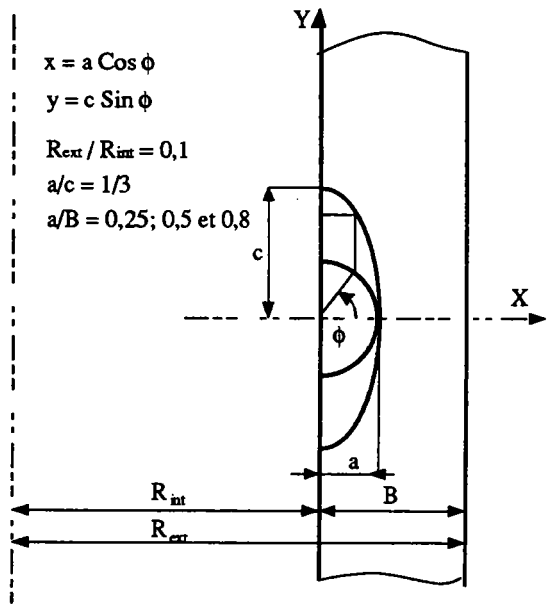
En outre, ces paramètres sont fonction de l'angle d'ellipticité ϕ, définissant un point du contour du défaut. Les résultats publiés dans la littérature seront ici présentés sous forme de courbes, discutés et comparés.

I.2.1. Cas des cylindres fissurés

Dans ce qui suit, nous avons limité notre étude au cas des fissures semi-elliptiques. Notre but est de définir à partir des résultats publiés dans la littérature un mode de calcul du facteur d'intensité de contraintes $K_I(\phi)$ de ces fissures qui soit simple, précis et conservatif.

I.2.1.1 Travaux de Kobayashi & al

Ces auteurs **[27 et 28]** ont développé une méthode numérique aux éléments finis en utilisant des fonctions de poids dépendant uniquement de la géométrie de l'éprouvette et du défaut considéré. Ces fonctions permettent un calcul du facteur d'intensité de contraintes pour un chargement arbitraire. Le calcul a été fait pour différentes valeurs du rapport (a/B), (figure I.4).



R_{int} : *Rayon intérieur du cylindre*
R_{ext} : *Rayon extérieur du cylindre*
B : *Epaisseur de la paroi du cylindre*
a : *Petit demi-axe d'un demi-ellipse*
c : *Grand demi-axe d'un demi-ellipse*
ϕ : *Angle d'exentricité d'une ellipse*

Figure I.4. Défaut semi-elliptique dans un cylindre pressurisé [27 et 28].

Leurs résultats sont présentés sous la forme :

$$K_I(\phi) = \frac{\sigma_{\theta\theta} \cdot \sqrt{\pi a}}{E(k)} \cdot \left(\cos^2\phi + \frac{a^2}{c^2} \sin^2\phi \right)^{\frac{1}{4}} \cdot H_K(\phi) \qquad (I.15)$$

avec $\sigma_{\theta\theta}$: contrainte de référence qui doit être définie pour chaque problème

$H_K(\phi)$: facteur de correction de Kobayashi et al

$E(k)$: intégrale elliptique complète du deuxième genre, $k^2 = 1 - c^2/a^2$

$\left(\cos^2\phi + \frac{a^2}{c^2} \sin^2\phi \right)^{\frac{1}{4}}$: facteur de forme pour une traction uniforme

La contrainte de référence est souvent prise comme la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ sur le côté interne de la paroi. Dans un cylindre mince la contrainte circonférentielle résultant d'une pression interne p est approchée par les relations suivantes :

$$\sigma_{\theta\theta}(x) = 10{,}52.p\left(1 - \frac{1}{10{,}52} \cdot \frac{x}{B}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta}(x) = \sigma_{\theta\theta}\left(1 - 0{,}095 \cdot \frac{x}{B}\right) \qquad (I.16)$$

avec p : pression interne
x : abscisse de l'intérieur de la paroi vers l'extérieur

Ces auteurs **[27 et 28]** concluent que le facteur d'intensité de contraintes résultant d'une pression interne dans un cylindre fissuré est toujours maximal en surface.

On doit noter que, Atluri & Kathiresan **[29]** et Blackburn & Hellen **[30]** ont étudié le même problème que celui de Kobayashi & al sur des cylindres pressurisés épais et dans les conditions suivantes : $B/R_{int} = 0{,}20$; $a/c = 1/5$ et $a/B = 0{,}80$.

Les résultats présentés par Kobayashi & al **[27 et 28]** étaient de 45% inférieurs en surface ($\phi = 90°$) à ceux de Atluri & Kathiresan **[29]** et Blackburn & Hellen **[30]**, alors que l'écart était de 5% au point le plus profond ($\phi = 0°$). Le facteur de correction de Kobayashi & al ($H_K(\phi)$) est issu d'un calcul bi-dimensionnel, de ce fait il est naturel que les trois résultats soient très semblables au point le plus profond, et que la divergence augmente en surface quand la profondeur de fissure augmente ($a/B = 0{,}8$).

I.2.1.2 Travaux de Heliot et Labbens

Ces auteurs **[20]** utilisent la méthode de l'Équation Intégrale Bornée (BIE). Cette équation permet un calcul rapide du facteur d'intensité de contraintes pour n'importe quel type de chargement appliqué.

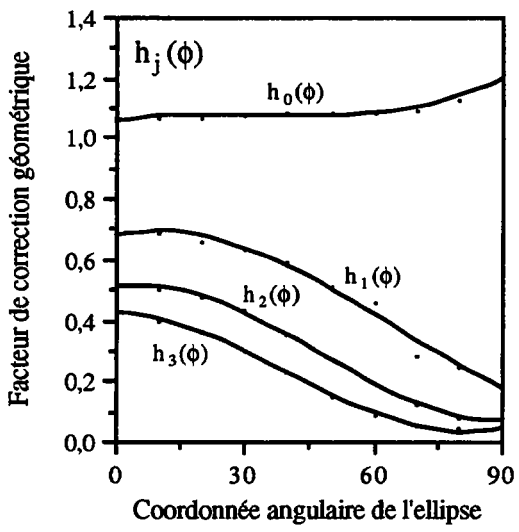
Les deux auteurs approximent la distribution de la contrainte circonferentielle sur la fissure par un polynôme d'ordre quatre de la forme suivante :

$$\sigma_{\theta\theta}(x) = \sigma_{\theta\theta_0} + \sigma_{\theta\theta_1}\cdot\left(\frac{x}{B}\right) + \sigma_{\theta\theta_2}\cdot\left(\frac{x}{B}\right)^2 + \sigma_{\theta\theta_3}\cdot\left(\frac{x}{B}\right)^3 + \sigma_{\theta\theta_4}\cdot\left(\frac{x}{B}\right)^4 \qquad (I.17)$$

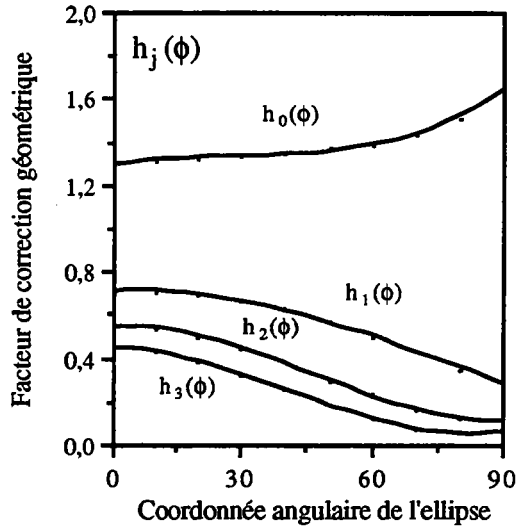
Le facteur d'intensité de contraintes est donné par la relation suivante :

$$\frac{K_j(\phi)}{\sigma_j\left(\frac{a}{B}\right)^j\cdot\sqrt{\pi a}}\cdot\frac{E(k)}{\left(\cos^2\phi + \frac{a^2}{c^2}\sin\phi\right)^{\frac{1}{4}}} = h_j(\phi);\ j = 0, 1, 2, 3, 4 \qquad (I.18)$$

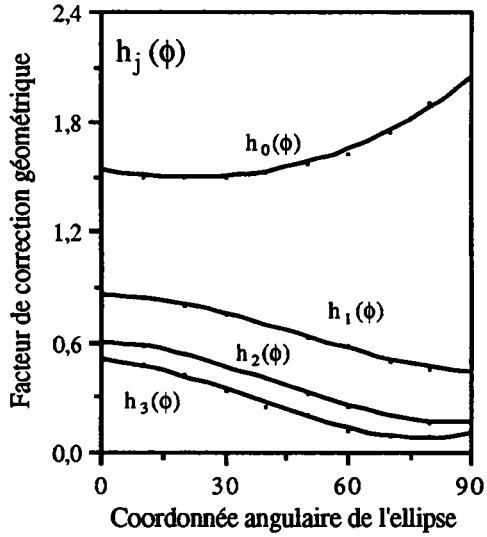
$\sigma_j(a/B)^j$ sont les contraintes d'ordre (j) au point le plus profond de la fissure. Les fonctions $h_j(f)$, nommées "Fonctions d'influences polynomiales" dépendent seulement des paramètres géométriques (R_{int}/R_{ext}), (a/c) et (a/B), (figures I.5a, b et c).



a) Rapport a/B = 0,25



b) Rapport a/B = 0,50



c) Rapport a/B =0,80

Figure I.5. Évolution de la fonction $h_j(\phi)$ en fonction de la coordonnée angulaire de l'ellipse ϕ pour les rapports a/c = 1/3 et R_{ext} / R_{int}=11/10 ***[20]***.

Ces fonctions permettent de calculer le facteur d'intensité de contraintes $K_I(\phi)$, résultant de la contrainte appliquée.

$$K_I(\phi) = \frac{\sigma_{\theta\theta} \cdot \sqrt{\pi a}}{E(K)} \cdot \left(\cos^2\phi + \frac{a^2}{c^2} \sin^2\phi \right)^{\frac{1}{4}} \cdot h(\phi) \qquad (I.19)$$

h(ϕ) est le facteur de correction de Heliot & Labbens donné par la relation :

$$h(\phi) = h_0(\phi) - 0{,}095 \cdot \frac{a}{B} \cdot h_1(\phi) \qquad (I.20)$$

Ces deux auteurs concluent que le facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond d'une fissure semi-elliptique dans un cylindre épais pressurisé est nettement plus petit que le facteur d'intensité de contraintes d'une fissure longue de même profondeur. Ce qui confirme les résultats de Underwood **[25]**.

Une comparaison de ces résultats avec ceux publiés par Kobayashi & al **[27 et 28]**, pour un rapport a/c = 1/3 et a/B = 0,25; 0,5 et 0,8 est donnée dans la figure (I.6). Les courbes $H_K(\phi)$ et h(ϕ) ne sont pas très différentes et cela malgré l'imprécision des courbes présentées par Kobayashi. Par contre une bonne coïncidence peut être notée au point le plus profond (ϕ = 0°) avec une divergence croissante à l'approche de la surface (ϕ = 90°).

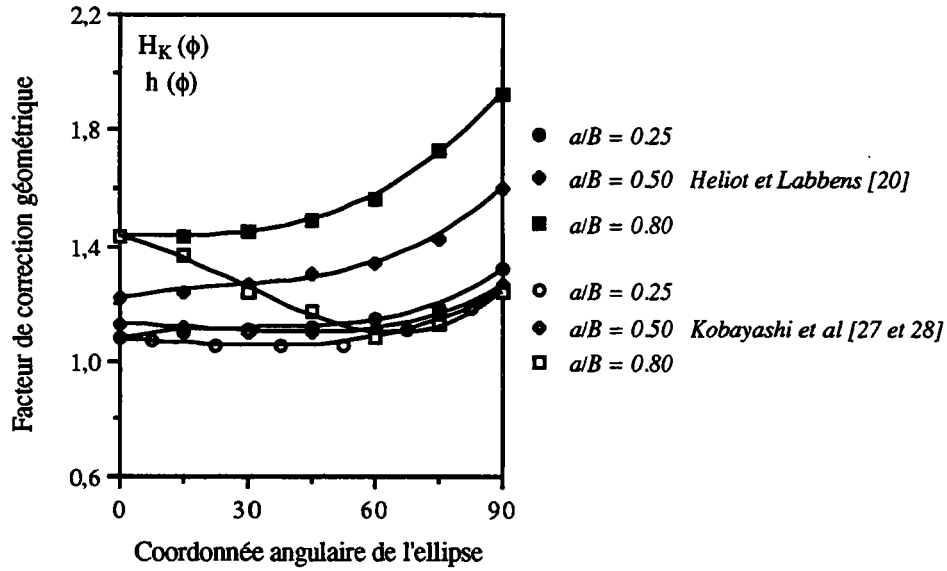


Figure I.6. Comparaison des résultats de Heliot et Labbens avec ceux de Kobayashi pour les rapports a/c = 1/3 et R_{ext} / R_{int} = 11/10 [20].

I.2.1.3 Travaux de McGowan & Raymund

Ces auteurs **[19]** ont traité le même problème que Heliot & Labbens **[20]** et Kobayashi **[27 et 28]** sur un cylindre pressurisé en utilisant la méthode aux éléments finis pour déterminer les déplacements. La méthode dérivative des contraintes de Parks est utilisée pour déterminer la distribution du facteur d'intensité de contraintes le long d'un défaut semi-elliptique. La contrainte appliquée est approchée par un polynôme du type :

$$\sigma_{\theta\theta}(x) = \sigma_{\theta\theta_0} + \sigma_{\theta\theta_1} \cdot \left(\frac{x}{B}\right) + \sigma_{\theta\theta_2} \cdot \left(\frac{x}{B}\right)^2 + \sigma_{\theta\theta_3} \cdot \left(\frac{x}{B}\right)^3 \qquad (I.21)$$

Le facteur d'intensité de contraintes est donné par la relation suivante :

$$K_I(\phi) = \sigma_{\theta\theta} \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \cdot \left(\cos^2\phi + \frac{a^2}{c^2}\sin^2\phi\right)^{\frac{1}{4}} \cdot H_G(\phi) \qquad (I.22)$$

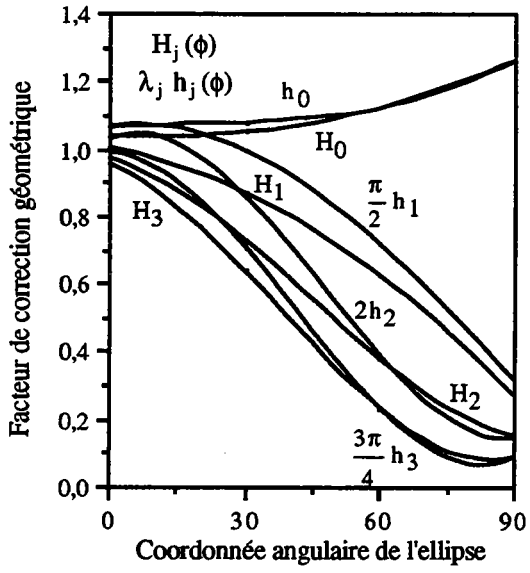
Q est le facteur de forme d'une fissure elliptique et $H_G(\phi)$ le facteur de correction de McGowan & Raymund donnés respectivement par les relations (I.23 et I.24) :

$$Q = 1 + 1{,}464\left(\frac{a}{c}\right)^{1{,}64} \qquad (I.23)$$

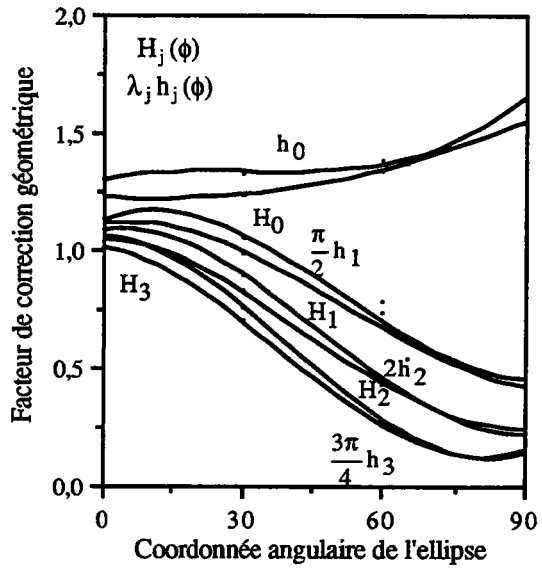
$$H_G(\phi) = H_{G_0}(\phi) + \frac{2}{\pi} H_{G_1}(\phi) + \frac{1}{2} H_{G_2}(\phi) + \frac{4}{3\pi} H_{G_3}(\phi) \qquad (I.24)$$

Une comparaison avec les travaux de Heliot & Labbens montre que les résultats de McGowan & Raymud sont de 7 à 8% moins élevés pour un rapport a/B = 0,25 et 0,8; 3 à 4% pour a/B = 0,5. Les résultats sont donc cohérents entre eux et les différences peuvent être attribuées aux méthodes et aux maillages qui sont différents. Les relations entre les fonctions $H_{Gj}(\phi)$ et $h_j(\phi)$ sont données par le système d'équations (I.25) et reportées dans les figures (I.7a, b et c).

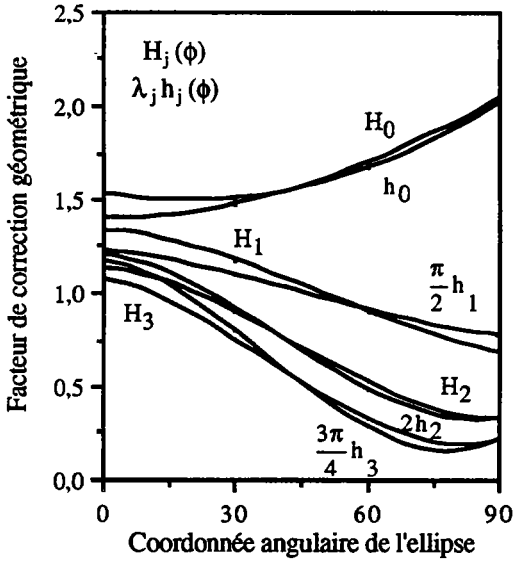
$$\begin{aligned} H_{G_0}(\phi) &= h_0(\phi) \\ H_{G_1}(\phi) &= \frac{\pi}{2} \cdot h_1(\phi) \\ H_{G_2}(\phi) &= 2\, h_2(\phi) \\ H_{G_3}(\phi) &= \frac{3\pi}{4} \cdot h_3(\phi) \end{aligned} \qquad (I.25)$$



a) Rapport a/B = 0,25



b) Rapport a/B = 0,50



c) Rapport a/B = 0,80

Figure I.7. Comparaison des résultats de McGowan & Raymund avec ceux de Heliot & Labbens pour les rapports a/c = 1/3 et R_{ext} / R_{int} = 11/10 ***[20]***.

Les figures (I.8a et b) donnent une comparaison du facteur de correction concernant trois différents auteurs. Les trois solutions concordent très bien pour les fissures peu profondes a/B ≤ 0,25 avec seulement 5% de différence. Mais pour des fissures profondes a/B > 0,25 l'écart augmente et peut atteindre 50% pour a/B = 0,5 et 80% pour a/B = 0,8.

Les résultats de Heliot & Labbens sont proches de ceux de McGowan & Raymund, alors que l'analyse de Kobayashi & al présente une grande divergence notamment en surface ($\phi = 90°$) pour les fissures profondes ($a/B \geq 0.5$).

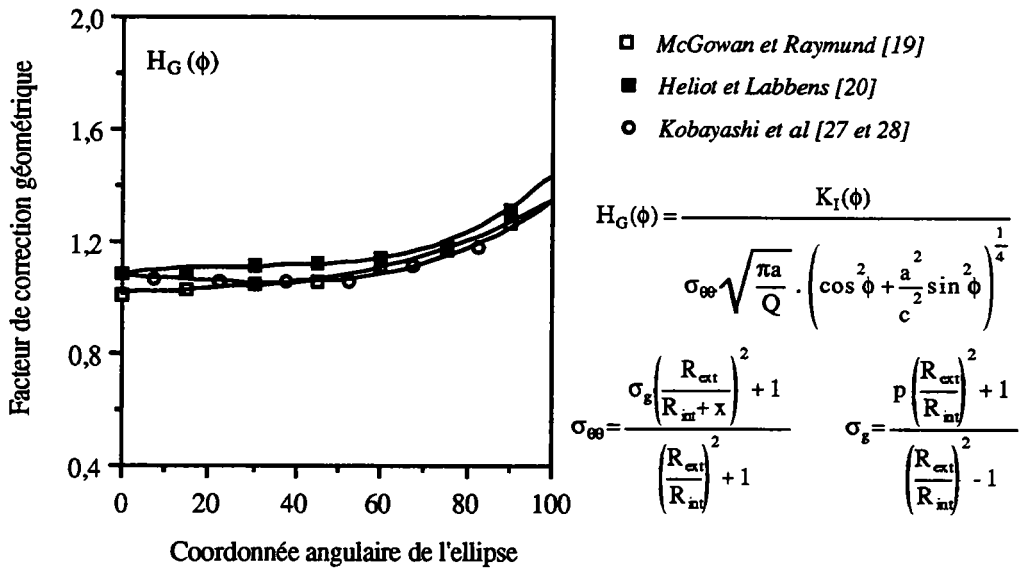


Figure I.8a. Courbes des facteurs de correction géométrique données par différents auteurs, pour les rapports a/B = 0,25, a/c = 1/3 et B/R_{int} = 0,1 [19].

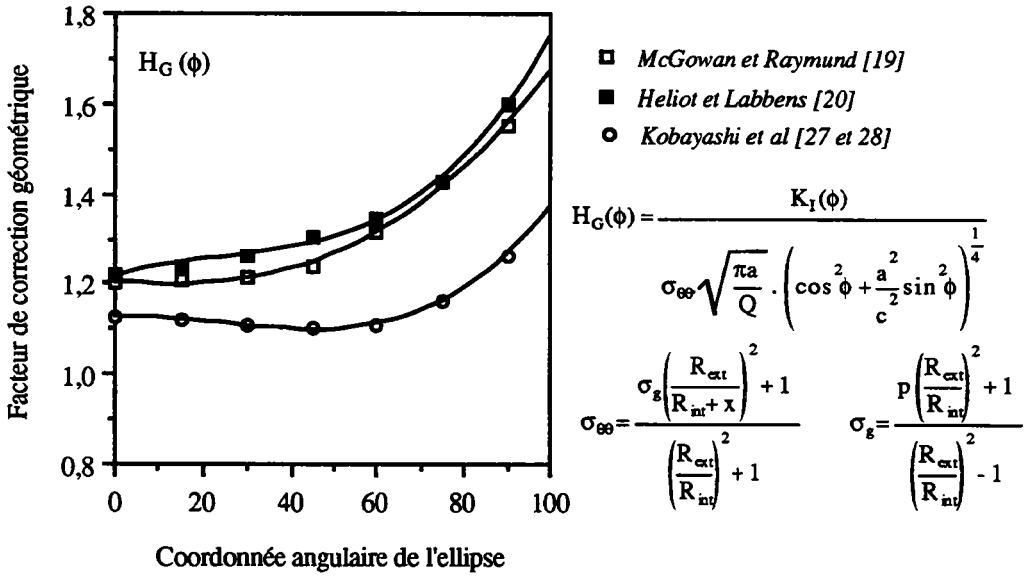
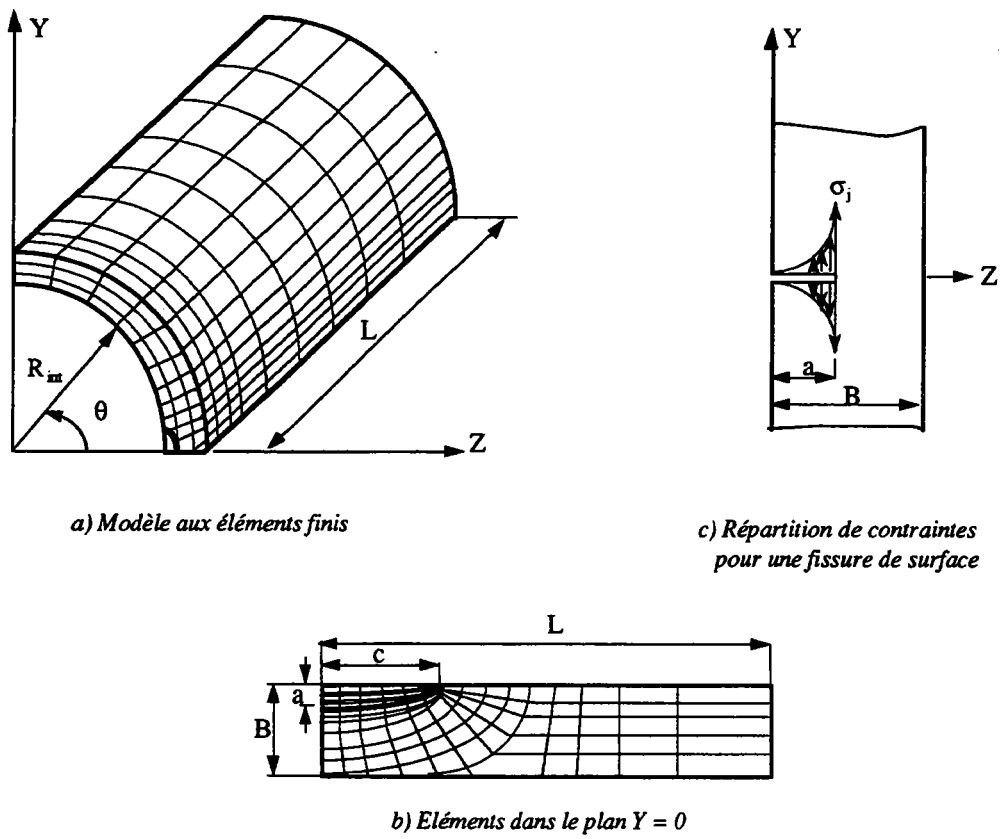


Figure I.8b. Courbes des facteurs de correction géométrique donnés par différents auteurs, pour les rapports a/B = 0,5, a/c = 1/3 et B/R_{int} = 0,1 [19].

I.2.1.4 Travaux de Newman & Raju

Ces deux auteurs **[31 et 32]** font appel à la méthode aux éléments finis pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes le long du front d'une fissure de forme semi-elliptique (figure I.9). Leurs résultats sont présentés sous la forme analytique.



a) Modèle aux éléments finis

c) Répartition de contraintes pour une fissure de surface

b) Eléments dans le plan Y = 0

Figure I.9. Schéma représentatif d'une modélisation aux éléments finis d'un quart de tube soumis à une pression interne [31 et 32].

$$K_I(\phi) = \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \cdot G_j\left(a/c, a/B, B/R_{int}, \phi\right);\ j = 0, 1, 2 \text{ et } 3 \qquad (I.29)$$

G_j est le facteur de correction de bornes qui correspond à la distribution de contraintes σ_j donnée par la relation suivante :

$$\sigma_j = \left(\frac{z}{a}\right)^j;\ j = 0, 1, 2 \text{ et } 3 \qquad (I.30)$$

Pour un cylindre soumis à une pression interne en présence d'un défaut de forme semi-elliptique, le facteur d'intensité de contraintes en mode I est donné par la relation suivante :

$$K_I(\phi) = \frac{pR_{int}}{B} \cdot \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \cdot F\left(a/c, a/B, B/R_{int}, \phi\right) \qquad (I.31)$$

pR_{int}/B correspond à la contrainte circonférentielle $\sigma_{\theta\theta}$ dans un cylindre mince. F est le facteur de correction des faces avant et arrière pour une fissure à l'intérieur d'un cylindre soumis à une pression interne. Il est obtenu par un développement en série de la solution de Lamé **[33]** :

$$F = \frac{B}{R_{int}} \left(\frac{R_{ext}^2}{R_{ext}^2 - R_{int}^2} \right) \left[2G_0 - 2G_1 \left(\frac{a}{R_{int}} \right) + 3G_2 \left(\frac{a}{R_{int}} \right)^2 - 4G_3 \left(\frac{a}{R_{int}} \right)^3 \right] \qquad (II.32)$$

Les différentes valeurs de G_j obtenues sont reportées dans la figure (I.10). Elles sont comparées avec celles données par Heliot & Labbens **[20]** et McGowan & Raymund **[19]** pour des rapports $B/R_{int} = 0,1$, $a/c = 1/3$ et $a/B = 0,8$. Le facteur de correction $H_j(\phi)$, donné par la référence **[19]** est relié à $G_j(\phi)$ par la relation suivante :

$$H_j(\phi) = \frac{B_j \cdot G_j(\phi)}{f_\phi} ; \text{ avec } j = 0, 1, 2 \text{ et } 3 \qquad (I.33)$$

avec $B_0 = 1$, $B_1 = \pi/2$, $B_2 = 2$ et $B_3 = 3\pi/4$ et f_ϕ fonction angulaire donnée par la solution de la fissure elliptique pénétrante **[34]** :

$$f_\phi = \left(\sin^2\phi + \frac{a^2}{c^2} \cdot \cos^2\phi \right) \qquad (I.34)$$

Newman & Raju **[31 et 32]** concluent que la différence entre leurs résultats est de ±2% par rapport à ceux reportés dans la référence **[20]** et de ±8% par rapport à ceux reportés dans la référence **[19]**. Cette différence est due au type de méthode utilisée, méthode de l'équation bornée dans le premier cas **[20]** et méthode aux éléments finis dans le deuxième cas **[19]**.

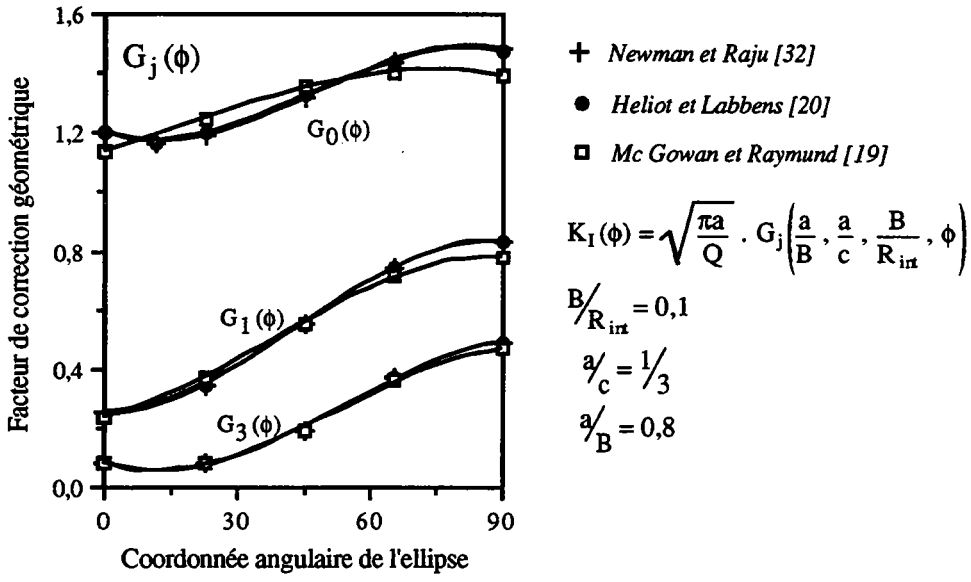


Figure I.10. Comparaison des résultats de Heliot & Labbens et McGowan & Raymund avec ceux de Raju &Newman [32].

A partir de leurs résultats Newman & Raju **[31]** développent une équation analytique qui permet de déterminer le facteur de correction géométrique F en partant des paramètres géométriques de l'éprouvette et du défaut considéré. La Fonction F définie dans l'équation (I.31) est obtenue à partir de la courbe de lissage en utilisant une double série polynomiale en termes de a/c, a/B et une fonction angulaire ϕ.

$$F = 0,97 \cdot \left[M_1 + M_2\left(\frac{a}{B}\right)^2 + M_3\left(\frac{a}{B}\right)^4\right] \cdot g \cdot f_\phi \cdot f_c \qquad (I.35)$$

$$M_1 = 1,13 - 0,09\frac{a}{c}$$

$$M_2 = -0,54 + \frac{0,89}{0,2 + \frac{a}{c}} \qquad (I.36)$$

$$M_3 = 0,5 - \frac{1}{0,65 + \frac{a}{c}} + 14\left(1 - \frac{a}{c}\right)^{24}$$

$$g = 1 + \left[0,1 + 0,35\left(\frac{a}{B}\right)^2\right] \cdot (1 - \sin\phi)^2 \qquad (I.37)$$

$$f_c = \left[\left(\frac{R_{ext}^2 + R_{int}^2}{R_{ext}^2 - R_{int}^2}\right) + 1 - 0,5\sqrt{\frac{a}{B}}\right]\frac{B}{R_{int}} \qquad (I.38)$$

I.2.1.5 Conclusion

Nous avons recherché dans la littérature les formules décrivant le facteur d'intensité de contraintes $K_I(\phi)$ le long du front de fissure de forme semi-elliptique. Une comparaison des résultats dont nous avons eu connaissance est résumée dans le tableau (I.2) et la figure (I.11), elle est relative aux conditions suivantes a/B = 0,8, a/c = 1/3 et $B/R_{int} = 0,1$.

Ces résultats montrent que pour le point le plus profond ($\phi = 0°$) les courbes de Raju & Newman **[31 et 32]**, Heliot & Labbens **[20]** et Kobayashi & al **[27 et 28]** donnent la même valeur du facteur de correction F, hormis celle de McGowan & Raymund **[19]**. Une divergence croissante de la courbe de Kobayashi & al par rapport aux trois autres auteurs apparaît lorsque l'on se rapproche de plus en plus de la surface ($\phi = 90°$). Les courbes de Raju & Newman et de Heliot & Labbens sont très proches l'une de l'autre en surface comme en profondeur. En résumé on retient que :

1) le facteur d'intensité de contraintes n'a été déterminé que pour des valeurs précises des rapports a/B, a/c et R_{ext} / R_{int},
2) il existe très peu de résultats obtenus par calcul,
3) le facteur d'intensité de contraintes est toujours maximal en surface ($\phi = 90°$), à l'exception du résultat de Kobayashi & al **[27 et 28]** pour le rapport a/B = 0,8.
4) les divergences entre les résultats sont importantes notamment en surface, ceci peut être attribué aux méthodes et aux types de maillage qui sont différents,
5) les résultats publiés par Raju & Newman **[31 et 32]** et Heliot & Labbens **[20]** sont très proches l'un de l'autre en surface comme en profondeur et sont probablement à prendre en considération en priorité,
6) l'absence de résultats publiés obtenus par expérience.

a/B = 0,8, a/c = 1/3 et B/Rint = 0,1							
Coordonnée angulaire de l'ellipse $\phi°$	0	15	30	45	60	75	90
Newman & Raju **[31 et 32]**	1,441	1,441	1,450	1,454	1,543	1,738	2,068
McGowan & Raymund **[19]**	1,338	1,369	1,419	1,506	1,631	1,800	1,963
Heliot & Labbens **[20]**	1,431	1,431	1,450	1,488	1,563	1,725	1,950
Kobayashi & al **[27 et 28]**	1,431	1,369	1,238	1,175	1,081	1,131	1,238

Tableau I.2. Valeurs du facteur de correction F données par différents auteurs.

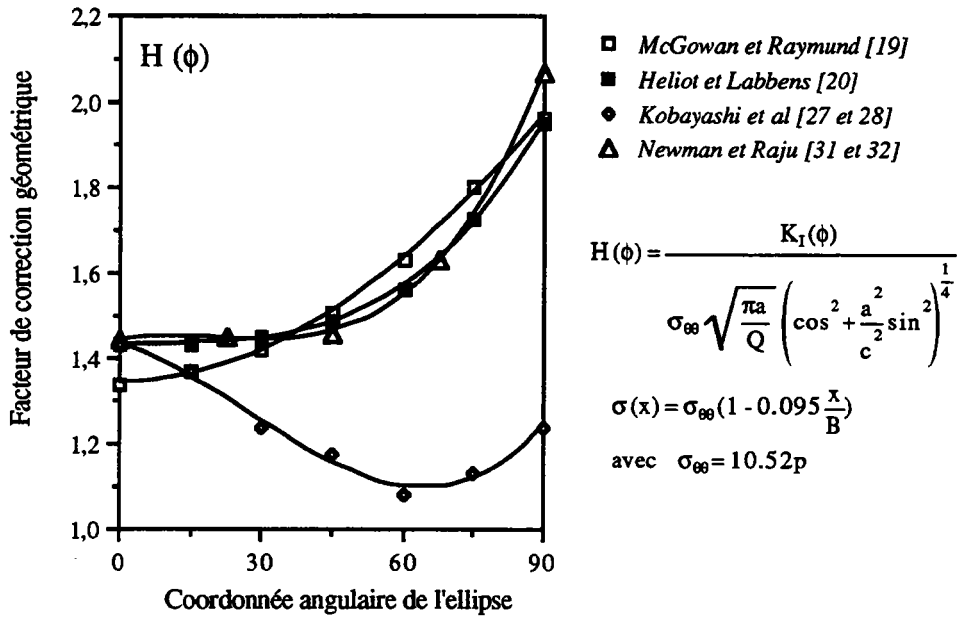


Figure I.11. Courbes du facteur de correction H(ϕ) données par différents auteurs, pour les rapports a/B = 0,8, a/c = 1/3 et B/R_{int} = 0,1.

I.2.2. Cas de plaques fissurées

Les fissures débouchantes sont des défauts qui apparaissent fréquemment dans les composants de structures. Leur dimensionnement correct vis a vis du risque de la rupture fragile nécessite de connaître avec une bonne précision le facteur d'intensité de contraintes en mode I, (K_I) dans le cas d'une sollicitation en traction ou en flexion, présente dans la plupart des cas.

La valeur du facteur de correction de géométrie F a été calculée pour de nombreux cas de géométrie. Smith & Alavi **[37]**, Smith & Sorensen **[38]**, Kobayashi & Moss **[39]** et Carpinteri **[40 et 41]** ont utilisé la méthode itérative, Carpinteri **[42]**, Raju & Newman **[35 et 36]** et Newman & Raju **[43]** une méthode aux éléments finis, Mars & Smith **[44]** et Ruiz & Epstein **[45]** ont eu recours à une méthode expérimentale, la photo-élasticimétrié.

La méthode utilisée pour valider le facteur d'intensité de contraintes en trois dimensions sur des plaques en présence de défauts de surface bien définis, comporte les phases suivantes :

- recueil des données de la littérature sur les différentes méthodes de calcul,
- recueil de données sur des essais de rupture effectués sur des éprouvettes, réalisées à partir des matériaux fragiles,
- comparaison entre les résultats obtenus par le calcul et l'expérience.

I.2.2.1 Travaux de Raju & Newman

Ces auteurs **[35, 36 et 43]** donnent une équation analytique du facteur d'intensité de contraintes pour une fissure de surface en fonction de la coordonnée angulaire de l'ellipse ϕ, la profondeur et la longueur du défaut, l'épaisseur et la longueur de la plaque pour un chargement de traction et de flexion. Cette équation est basée sur le facteur d'intensité de contraintes local obtenu par analyse aux éléments finis en trois dimensions pour une fissure semi-elliptique contenue dans une plaque de dimensions finies dont le matériau a un comportement élastique (figure I.12).

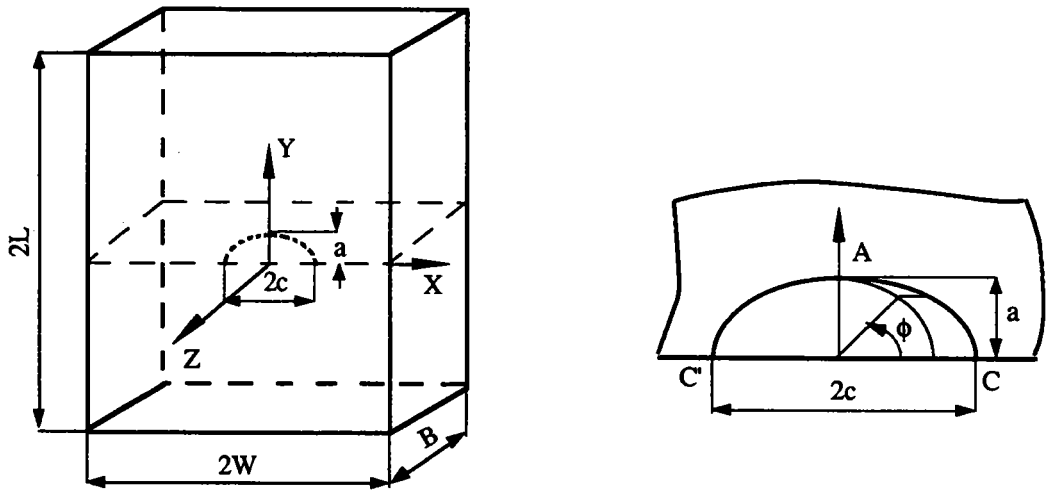


Figure I.12. Définition des éléments géométriques d'une plaque de dimensions finies utilisée par Raju & Newman [35, 36 et 43].

Deux types de chargement ont été appliqués à la plaque. Une traction uniforme σ_t et une flexion pure σ_f. Les valeurs des contraintes dues à ce type de chargement (figures I.13a et b) permettent de d'écrire le facteur d'intensité de contraintes pour un chargement combiné :

$$K_I(\phi) = \left(\sigma_t + H\,\sigma_f\right).\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}\,.\,F\left(\frac{a}{B}, \frac{a}{c}, \frac{c}{W}, \phi\right) \qquad (I.39)$$

L'équation (I.39) est définie dans un domaine appelé "intervalle de Raju & Newman" au delà duquel la solution n'est plus valable.

$$0 < a/c \leq 1 \qquad 0 \leq a/B < 1 \qquad c/W < 0{,}5 \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

avec
- a : profondeur du défaut elliptique
- c : longueur du défaut elliptique
- W : demi largeur de la plaque
- B : épaisseur de la plaque
- ϕ : angle d'excentricité de l'ellipse

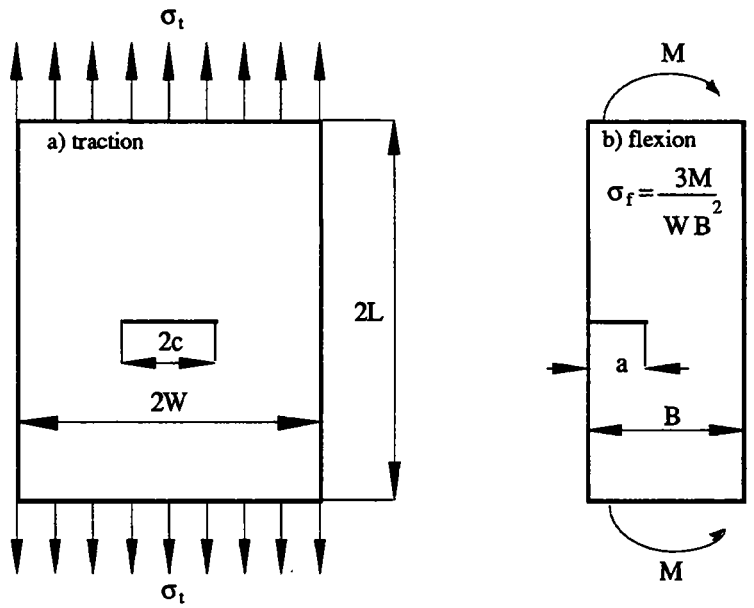


Figure I.13. Représentation schématique d'une plaque sollicitée en traction et en flexion.

Q est le facteur de forme pour une fissure de forme elliptique donné par Rawe et utilisé dans la référence **[46]**.

$$Q = 1 + 1{,}464\left(\frac{a}{c}\right)^{1{,}65} \qquad \left(\frac{a}{c} \leq 1\right) \qquad (I.40)$$

F est défini de façon que le facteur de correction limite pour la traction noté F_t et pour la flexion noté F_f (ce dernier égal au produit HF). Les fonctions F et H sont obtenues à partir des courbes de lissage en utilisant une double série polynomiale en termes de a/c, a/B et une fonction angulaire ϕ. La fonction F est donnée par la relation suivante :

$$F = \left[M_1 + M_2 \left(\frac{a}{B}\right)^2 + M_3 \left(\frac{a}{B}\right)^4 \right] . f_\phi . g . f_w \qquad (I.41)$$

M_1, M2 et M_3 sont donnés par le système d'équations (I.36), g par l'équation (I.37), f_ϕ par l'équation (I.34). f_w, la fonction de correction pour une largeur finie **[47]** est donnée par :

$$f_w = \left[\sec \left(\frac{\pi c}{2W} \cdot \sqrt{\frac{a}{B}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (I.42)$$

La fonction H développée prend la forme suivante :

$$H = H_1 + (H_2 - H_1) \sin^{\alpha} \phi \qquad (I.43)$$

où :

$$\alpha = 0{,}2 + \frac{a}{c} + 0{,}6 \frac{a}{B}$$

$$H_1 = 1 - 0{,}34 \frac{a}{B} - 0{,}11 \left(\frac{a}{c}\right) . \left(\frac{a}{B}\right) \qquad (I.44)$$

$$H_2 = 1 + G_1 . \left(\frac{a}{B}\right) + G_2 . \left(\frac{a}{B}\right)^2$$

Dans l'équation de H_2 on a :

$$G_1 = -1{,}22 - 0{,}12 \left(\frac{a}{c}\right) \qquad (I.45)$$

$$G_2 = 0{,}55 - 1{,}05 \left(\frac{a}{c}\right)^{0{,}75} + 0{,}47 \left(\frac{a}{c}\right)^{1{,}5} \qquad (I.46)$$

Dans toutes les configurations pour lesquelles le rapport $a/B \leq 0{,}8$, l'équation (I.39) donne des résultats situés à ± 5% par rapport aux résultats obtenus par éléments finis. Le tableau (I.3) donne une comparaison entre les valeurs du facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond ($\phi = 0°$) calculé à partir de l'équation (I.39) et les résultats expérimentaux de Jolles **[48]** et ceux de Schroed & al **[49]**.

au point le plus profond ($\phi = 0°$), avec $F = K_{I,A} / \sigma.\sqrt{\pi a}$					
N°. d'essai	1	2	5	6	7
rapport a/c	0,066	0,066	0,066	0,066	0,066
rapport a/B	0,19	0,192	0,347	0,37	0,351
a (mm)	2,54	2,54	2,54	2,54	2,54
B (mm)	13,34	13,21	7,32	6,68	7,24
F par photo-élasticimétrie **[48]**	1,274	1,116	1,582	1,554	1,575
F par l'équation (I.41) **[35, 36 et 43]**	1,255	1,258	1,5507	1,914	1,557
erreur %	1,51	11,28	- 2,01	3,7	- 1,16
méthode utilisée	série de Taylor	série de Taylor	série de Taylor	série de Taylor	série de Taylor

N°. d'essai	1		2	
rapport a/c	0,266		0,493	
rapport a/B	0,256		0,75	
a (mm)	5,08		9,9	
B (mm)	19,8		13,2	
$K_{I,A}$ par photo-élasticimétrie **[49]** [MPa$\sqrt{m}$]	0,400	0,422	0,625	0,543
$K_{I,A}$ par l'équation (I.39) **[35, 36 et 43]** [MPa$\sqrt{m}$]	0,4049	0,4049	0,5975	0,5975
erreur %	1,2	- 4,2	- 4,6	9,12
méthode utilisée	deux paramètres	série de Taylor	deux paramètres	série de Taylor

*Tableau I.3. Comparaison des valeurs du facteur de correction déterminées par deux méthodes, résultats donnés dans la référence **[50]**.*

L'équation (I.39) contient plusieurs paramètres géométriques. Le rapport de la profondeur de fissure à l'épaisseur de la plaque (a/B) et le rapport de la profondeur de la fissure à la longueur de celle-ci (a/c) varient entre 0 et 1, l'effet de la largeur de la plaque sur les variations du facteur d'intensité de contraintes le long du front de fissure est également pris en considération.

La solution de Newman & Raju est utilisée pour prédire l'accroissement de fissure en fatigue sous un chargement de traction et de flexion. Les valeurs maximales du facteur d'intensité de contraintes calculées à partir de l'équation (I.39) sont également utilisées pour corréler les données de rupture à des matériaux fragiles présentant des fissures de surface.

I.2.2.2 Travaux de Smith & Sorensen

La plupart de leurs résultats **[51]** publiés concernant des fissures de forme semi-elliptique soumises soit à une contrainte uniforme, soit à une contrainte variant linéairement en fonction de la distance (y) à la surface libre de la plaque tiennent compte des effets de surfaces et de l'effet de forme de fissure (figure I.14).

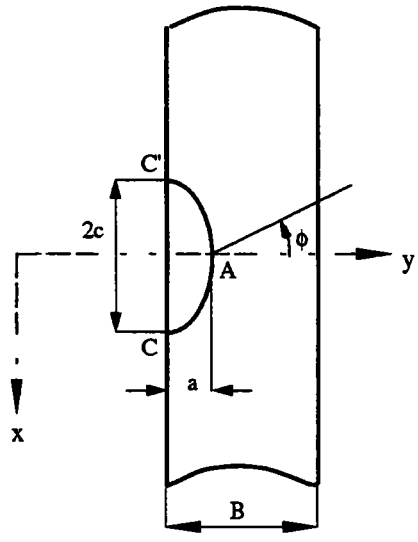


Figure I.14. Fissure semi-elliptique [51].

Smith & Sorensen **[51]** ont considéré plusieurs formes de fissures semi-elliptiques soumises à un chargement uniforme. Pour certaines fissures assez allongées ($a/c < 0.4$); ils ont trouvé que le facteur d'intensité de contraintes $K_I(\phi)$ est maximal non pas au fond de fissure (point A), mais en un point qui peut être à mi-chemin entre le point C et A. La valeur de $K_I(\phi)$ en ce point est au plus 10% plus élevée que la valeur de $K_I(\phi)$ au point A (figures I.15a - c).

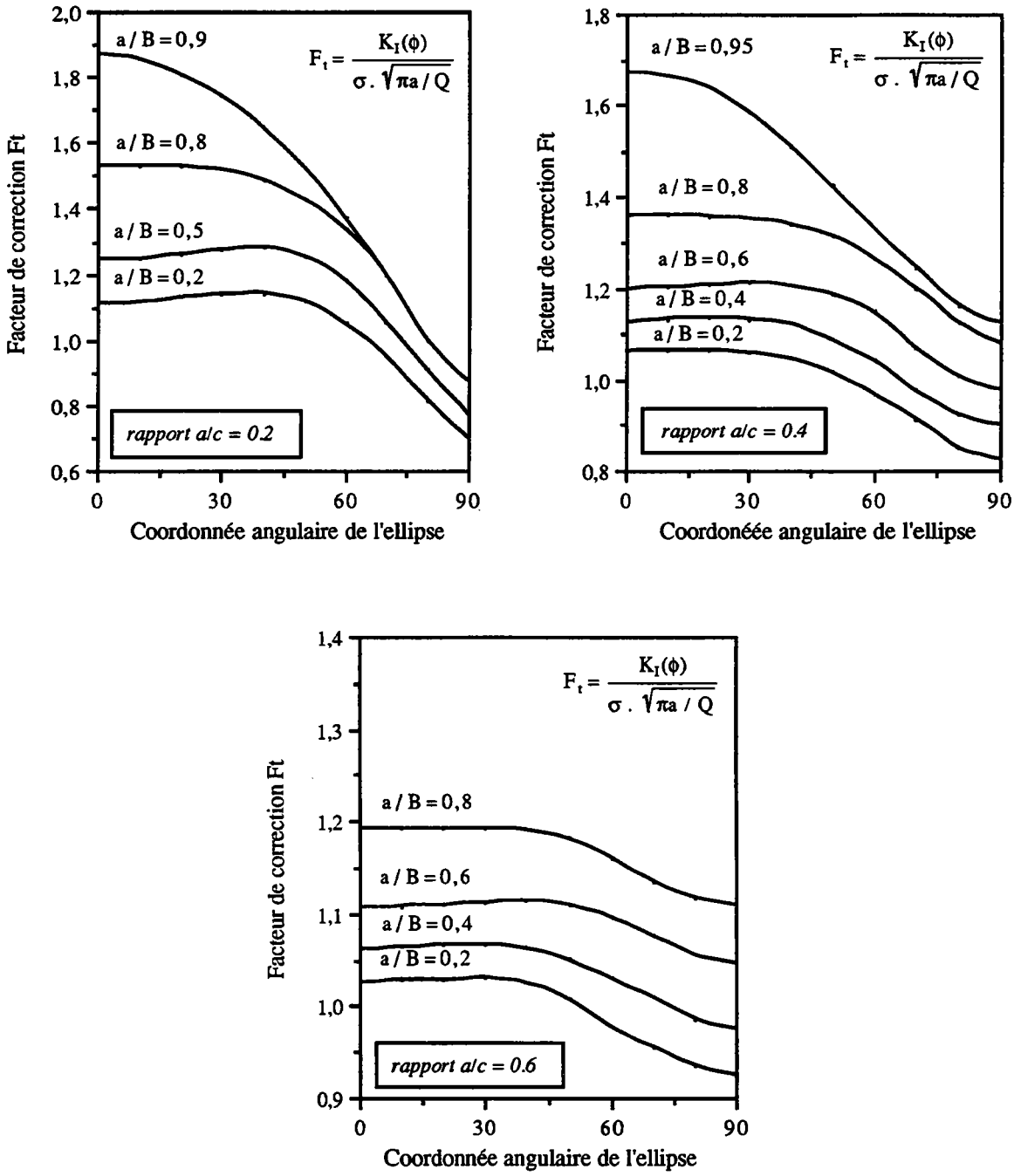


Figure I.15. Résultats de Smith & Sorensen pour un défaut de forme semi-elliptique dans une plaque soumise à une traction simple [51].

I.2.2.3 Travaux de Shah & Kobayashi

Ces auteurs **[52 - 54]** ont calculé le facteur d'intensité de contraintes K_I au point le plus profond d'une fissure semi-elliptique dans une plaque, soumise à une contrainte d'ouverture variant linéairement dans la direction de l'épaisseur. Ils distinguent une contrainte de membrane σ_t et une contrainte de flexion σ_f (figure I.16).

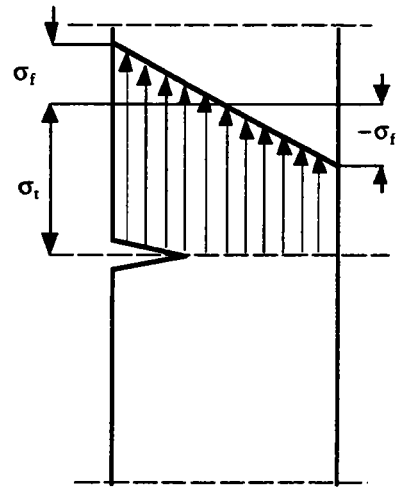


Figure I.16. Définition de σ_t et σ_f à partir des travaux de Shah & Kobayashi [52 - 54].

Les formules qu'ils ont publiées donnent le facteur d'intensité de contraintes seulement en fond de fissure (point A). Leurs expressions sont calquées sur celle du facteur d'intensité de contraintes K_I pour une fissure elliptique dans un milieu infini. La formule de Green et Sneddon conduit en effet pour $\phi = 0°$ à :

$$K_{I,A} = \sigma \frac{\sqrt{\pi a}}{E(k)} \tag{I.47}$$

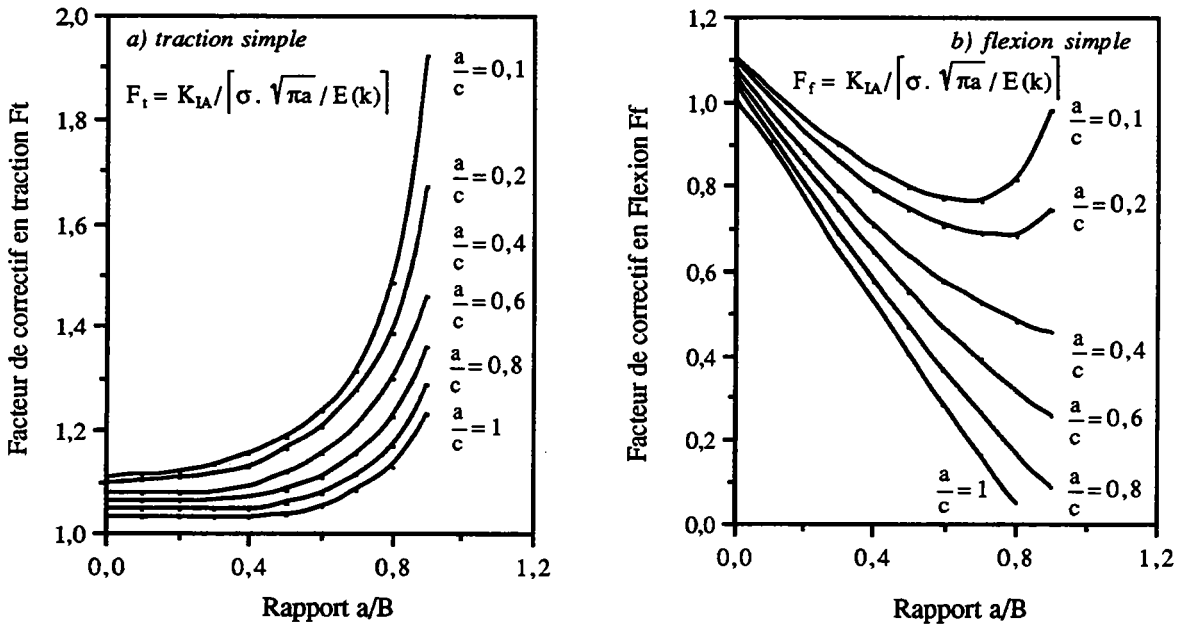
Shah & Kobayashi ont ajouté dans la formule ci-dessus des facteurs de correction (Magnification Factors) F_t et F_f, qu'ils ont calculés par une méthode itérative (Alternating Method) **[55 et 56]**. Le facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond (point A) est donné alors par la relation suivante :

$$K_{I,A}\left[F_t\left(\frac{a}{B},\frac{a}{c}\right)\sigma_t + F_f\left(\frac{a}{B},\frac{a}{c}\right)\sigma_f\right]\frac{\sqrt{\pi a}}{E(k)} \tag{I.48}$$

avec :

σ_t : contrainte de traction
σ_f : contrainte de flexion
F_t : facteur de correction en traction
F_f : facteur de correction en flexion

Les courbes de Shah & Kobayashi donnant F_t et F_f sont probablement exactes à ±10% dans le domaine $a/c \geq 0,4$ et pour les rapports $a/B < 0,8$ et $a/B \leq 0,5$. La figure (II.17a - b) indiquent les valeurs retenues les plus probables respectivement pour F_t et F_f



Figures (II.17). Résultats de Shah & Kobayashi sur les fissures semi-elliptiques [52].

Les formules de Shah & Kobayashi donnent seulement le facteur d'intensité de contraintes en fond de fissure. Or des calculs montrent que K_I peut être maximal au point C et C' où la fissure débouche. De nombreuses expériences montrent que les fissures peuvent être amorcées aux points C et C' d'autres qu'elles peuvent s'étendre en fatigue de préférence dans la direction CC'.

Après la publication des résultats de Shah & Kobayashi, Underwood **[57]** a publié un texte assez court pour commenter ceux-ci. Il fait remarquer que lorsqu'une fissure elliptique telle que le petit demi-axe (a) reste constant et que le rapport a/c tend vers zéro, le facteur d'intensité de contraintes en fond d'entaille devrait tendre vers celui qui existe sur une fissure de même profondeur (a) dans une bande infinie et de même épaisseur (B).

C'est à dire que les courbes de Shah & Kobayashi devraient rejoindre la courbe de Gross & Srawley & Brown **[58]** (figure I.18). Il semble peu vraisemblable que la courbe relative au rapport a/c = 0,1 soit si éloignée de celle de Gross et Srawley.

D'après cette remarque et ces divers résultats, nous considérerons que les formules de Shah et Kobayashi sous-estiment probablement le facteur d'intensité de contraintes dans l'intervalle $0 \leq a/B < 0,4$ dans lequel les courbes de Smith & Sorensen **[51]** sont probablement plus exactes.

La figure (I.19) indique la comparaison entre les valeurs théoriques obtenues par Shah & Kobayashi **[53]** et celles de Smith & Sorensen **[51]** pour différentes valeurs du rapport a/c au point le plus profond ($\theta = 0°$). Les résultats de Smith & Sorensen semble mieux prendre en compte les interactions des surfaces lorsque a/c devient très petit.

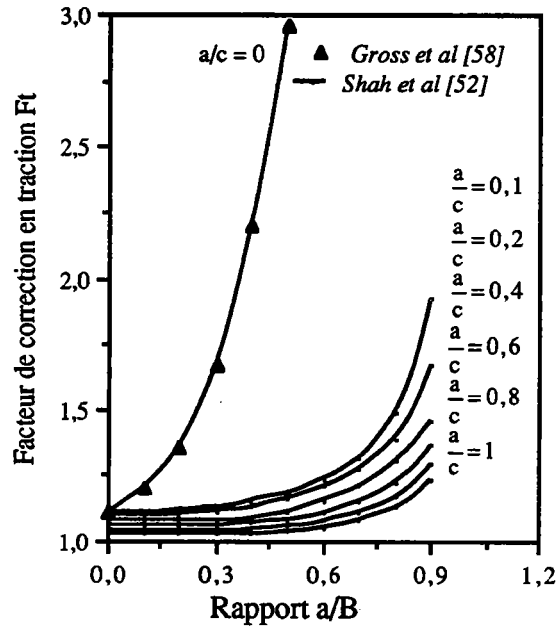


Figure I.18. Comparaison des résultats de Shah & Kobayashi avec ceux de Gross &Srawley & Brown en traction simple [23].

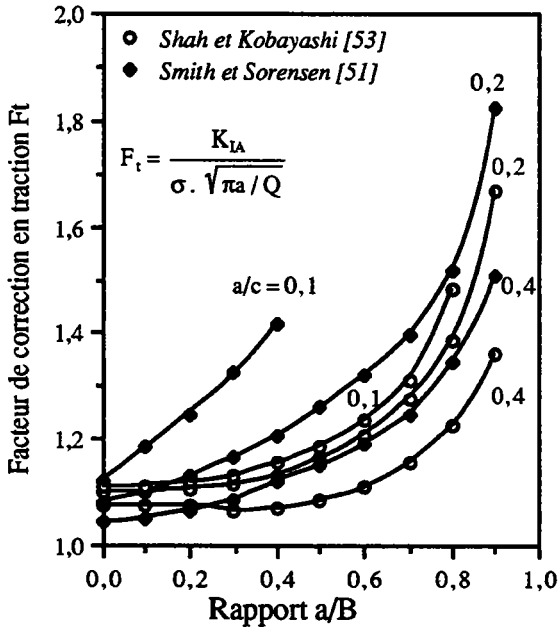


Figure I.19. Comparaison entre les résultats de Shah & Kobayashi et ceux de Smith & Sorensen [51].

I.2.2.4 Travaux de Dufresne

L'auteur **[59]** donne deux formules analytiques pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond d'une fissure de forme semi-elliptique. Cette dernière est donnée pour un chargement de traction et elle est fonction des paramètres géométriques du défaut.

$$K_{I,A} = \sigma_t . \sqrt{\pi a} \left[1{,}14 - 0{,}48\frac{a}{c} + \frac{1}{0{,}2 + 4{,}9\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{a}{B}\right)^2 \right] \qquad \text{(I.49)}$$

σ_t est la contrainte de traction appliquée. Une autre version simplifiée est donnée sous la forme suivante :

$$K_{I,A} = \sigma_g . \sqrt{\pi a} \left[1{,}14 - 0{,}48\frac{a}{c} + \frac{1}{4{,}9\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{a}{B}\right)^2 \right] \qquad \text{(I.50)}$$

Une comparaison entre ces deux équations et la solution de Newman & Raju **[35 et 36]** est donnée par la figure (I.20). L'équation (I.49) est plus proche de celle de Newman & Raju, avec laquelle elle présente un écart de 5% pour les rapports a/c > 0,2 et a/B < 0,8.

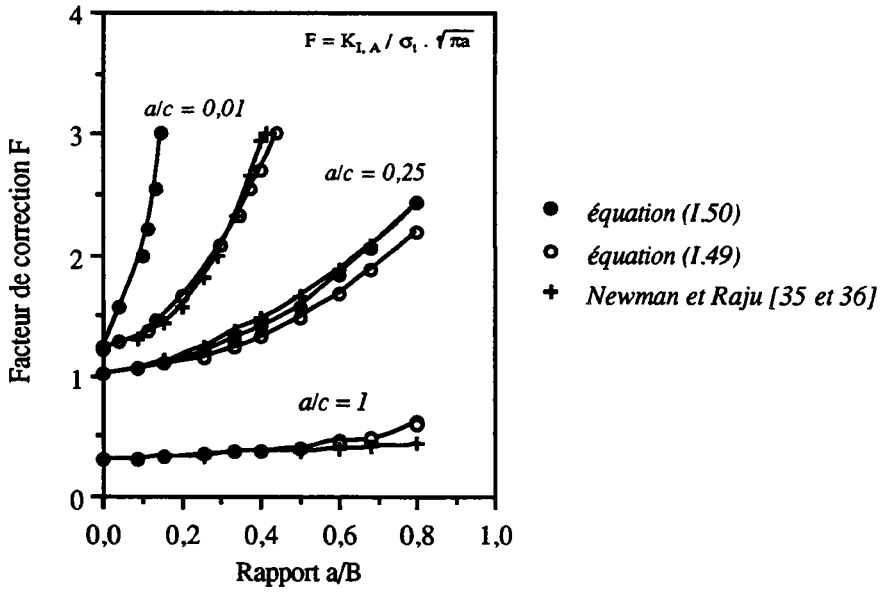


*Figure I.20. Comparaison de différentes solutions du facteur de correction F en traction, valeurs données en référence **[60]**.*

I.2.2.5 Travaux de Newman

Pour une plaque soumise à une traction uniforme en trois dimensions, en présence d'un défaut de surface de forme semi-elliptique, l'auteur **[61 et 62]** donne une équation analytique du facteur d'intensité de contraintes en fonction des paramètres géométriques de l'éprouvette et du défaut considéré :

$$K_I(\phi) = \sigma_t \cdot \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} \cdot F\left(\frac{a}{B}, \frac{a}{c}, \frac{c}{2W}, \phi\right) \qquad (I.51)$$

Avec σ_t la contrainte de traction uniforme, 2W la largeur totale de la plaque et F le facteur de correction de bord.

A partir des résultats publiés par Smith & Alavi **[37]**, Rice & Levy **[63]** et Gross & Srawley **[64]** pour des rapports a/c bien définis, l'auteur donne la fonction F sous la forme :

$$F = \left[M_1 + \left(\sqrt{Q\frac{c}{a}} - M_1\right) \cdot \left(\frac{a}{B}\right)^{\beta}\right] \sqrt{\sec\left[\frac{\pi c}{2W} \cdot \frac{a}{B}\right]} \qquad (I.52)$$

Avec :

$$\beta = 2 + 8\left(\frac{a}{c}\right)^3 \qquad (I.53)$$

$$M_1 = 1{,}13 - 0{,}1\left(\frac{a}{c}\right) \qquad \text{pour} \qquad 0{,}02 \le a/c \le 1 \qquad (I.54)$$

Q est le facteur de forme du défaut elliptique donné par l'équation (I.40) pour un rapport $a/c \le 1$.

Newman **[62]** effectue une large comparaison de 14 résultats concernant le facteur de correction F. Les caractéristiques des méthodes utilisées, l'année de leur parution, la géométrie et le mode de présentation des résultats sont donnés dans le tableau (I.5). On a reproduit dans les figures (I.21 et I.22) les résultats relatifs aux conditions particulières suivantes, rapport a/c = 0,2; 0,6 et angle d'ellipticité $\phi = 0°$.

On constate que la divergence des résultats est faible pour les valeurs du rapport $a/B < 0{,}2$ mais elle peut devenir importante quand ce dernier augmente. Ainsi pour une valeur du rapport a/B = 0,6 la différence entre les résultats peut atteindre 80%. En outre il a été constaté par l'ensemble des auteurs que le facteur d'intensité de contraintes n'est pas constant tout au long du front de fissuration. Toutefois des divergences existent entre la localisation du point où sa valeur est maximale. Pour certains auteurs cette valeur se trouve en surface (point C de la figure I.12), pour d'autres au point le plus profond (point A) ou encore entre A et C.

Auteurs	Années	Réf.	Méthodes	Limitations			
				a/B	a/c	c/W	résultats
Irwin	1962	[67]	E	≤ 0,50	0 à 1	-	équation
Paris & Sih	1965	[68]	E	≤ 0,50	0 à 1	-	équation
Smith	1966	[69]	MI et E	≤ 0,75	0,2 à 1	-	graphe
Kobayashi & Moss	1969	[39]	MI et E	f (a/c)	0 à 1	-	graphe
Masters & Haese & Finger	1969	[70]	ME	≤ 0,98	0,1 à 0,8	-	graphe
Smith & Alavi	1969	[37]	MI et E	≤ 0,85	0,4 à 1	-	graphe
Rice & Levy	1970	[63]	MRL	≤ 0,70	0 à 1	-	graphe
Anderson & Holms & Orange	1970	[71]	E	≤ 1,0	0 à 1	-	équation
Newman	1972	[61]	E	≤ 1,0	0,02 à ∞	< 1	équation
Shah & Kobayashi	1972	[52,53]	MI	≤ 0,9	0,1 à 1	-	graphe
Smith & Sorensen	1974	[38]	MI	≤ 0,9	0,1 à 1	-	graphe
Kobayashi	1976	[72]	MI et E	≤ 0,9	0,2 à 1	-	graphe
Raju & Newman	1977	[36]	MEF	≤ 0,8	0,2 à 2	-	graphe
Newman & Raju	1978	[35,43]	MEF et E	≤ 1,0	0,03 à ∞	< 0,5	équation

(EI) : Estimation, (MI) : Méthode Itérative, (MRL) : Modèle de Ressort Linéaire, (ME) : Méthode Expérimentale, (MEF) : Méthode aux Eléments finis.

Tableau I.5. Comparaison des résultats de différents auteurs concernant le facteur de correction F [62].

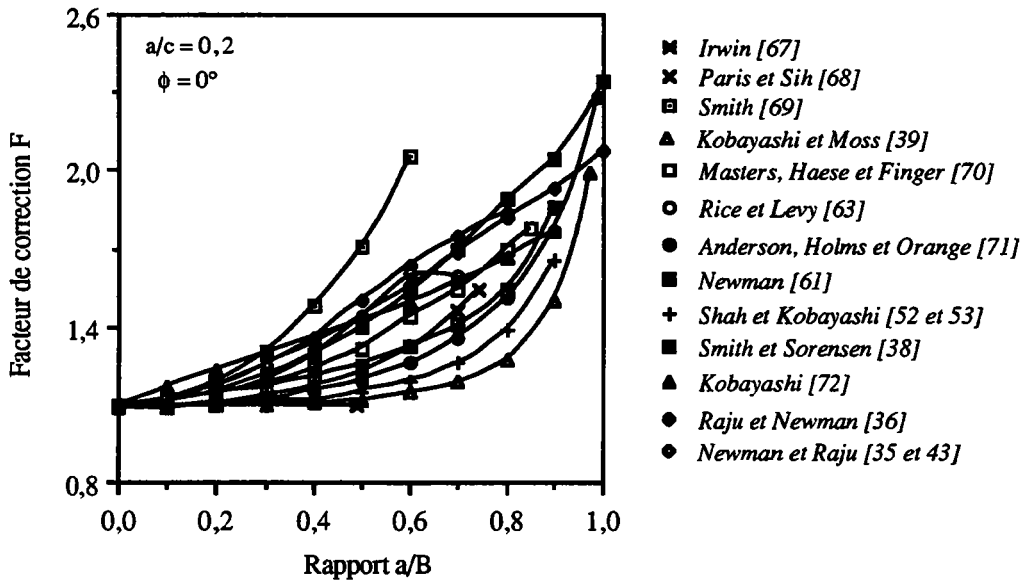


Figure I.21. Comparaison de la variation du facteur de correction F présentée par différents auteurs au point le plus profond ϕ = 0° et pour le rapport a/c = 0,2 **[62].**

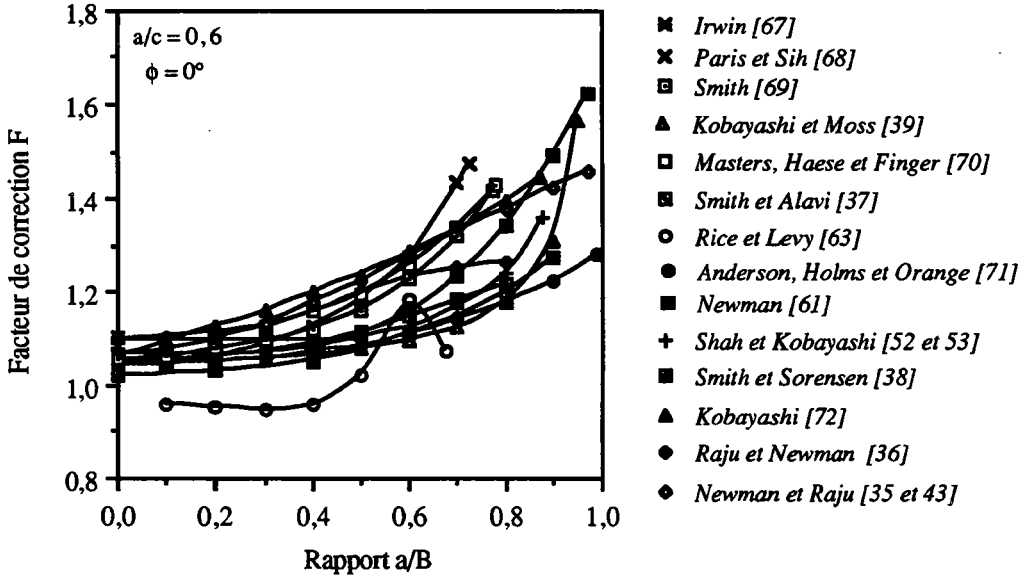


Figure I.22. Comparaison de la variation du facteur de correction F présentée par différents auteurs au point le plus profond ϕ = 0° et pour le rapport a/c = 0,6 **[62].**

I.2.2.6 Travaux de Mars & Smith

Les résultats de ces deux auteurs **[44]** concernent cinq essais de flexion sur des plaques en photo-élasticimétrie.

Les mesures du facteur d'intensité de contraintes $K_I(\phi)$ sont donc obtenues par photo-élasticimétrie. Mars & Smith donnent seulement trois valeurs de F_f pour $\phi = 0°$ le point le plus profond et cinq valeurs pour $\phi = 90°$ où la fissure débouche.

Le tableau (I.6) donne une comparaison entre les valeurs expérimentales données par Mars & Smith et les résultats théoriques représentés par l'équation de Newman & Raju **[35 et 36]** et ceux de Smith **[65]**. Cette comparaison montre que l'écart moyen en surface est moins important qu'en profondeur.

Numéro de l'essai	1	2	3	4	5
En surface ($\phi = 90°$)					
rapport a/c	0,866	0,46	0,50	0,46	0,10
rapport a/B	0,34	0,45	0,37	0,46	0,27
rapport c/l	0,033	0,086	0,63	0,085	0,023
a (mm)	6,60	9,14	7,36	9,14	5,33
B (mm)	19,43	20,14	19,88	19,8	19,86
photo-élasticimétrie **[44]** $F_f = K_{I,C}/\sigma_f . \sqrt{\pi a / Q}$	0,84	0,70	0,82	0,73	1,18
F_f [équation I.41] Newman & Raju **[35 et 43]**	0,98	0,81	0,81	0,812	1,04
erreur %	14,3	13,6	-1,23	10,1	-13,2
F_f théorique, Smith **[65]**	1,05	0,84	0,86	0,84	1,13
erreur %	20,0	16,6	4,70	13,1	-4,40
Au point le plus profond ($\phi = 0°$)					
rapport a/B	-	0,45	0,37	0,46	-
rapport a/c	-	0,46	0,50	0,46	-
rapport c/W	-	0,086	0,63	0,085	-
a (mm)	-	9,14	7,36	9,14	-
B (mm)	-	20,14	19,88	19,80	-
photo-élasticimétrie **[44]** $F_f = K_{I,A}/\sigma_f . \sqrt{\pi a/Q}$	-	0,73	0,73	0,69	-
F_f [équation I.41] Newman & Raju **[35 et 43]**	-	0,55	0,635	0,54	-
erreur %	-	-32,70	-15,0	-27,80	-
Ff théorique, Smith **[65]**	-	0,55	0,61	0,55	-
erreur %	-	-32,70	-20,0	-25,50	-

*Tableau I.6. Valeurs des écarts moyens relatifs entre différents résultats expérimentaux et théoriques **[44]**.*

Le tableau (I.7) donne une deuxième comparaison concernant le facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond ($\phi = 0°$), déterminé à partir de deux essais de flexion en photo-élasticimétrie donné par Schroedel & al **[49]** et entre les résultats théoriques de Newman & Raju **[35 et 43]** et de Shah & Kobayashi **[52 et 53]**. Cette comparaison montre que les résultats de Shah & Kobayashi sont plus proches de ceux de Schroedel & al.

Au point le plus profond ($\phi = 0°$)				
Numéro d'essai	1		2	
rapport a/B	0,37		0,62	
rapport a/c	0,50		0,32	
rapport c/W	0,063		0,182	
a (mm)	7,36		13,1	
B (mm)	19,9		21	
photo-élasticimétrie **[49]** $K_{I,A}$ [N/m$^{3/2}$]	0,441	0,429	0,48	0,418
$K_{I,A}$ [N/m$^{3/2}$] [équation I.39] Newman & Raju **[35 et 43]**	0,393	0,393	0,307	0,307
erreur %	-12,2	-9,16	-56,4	-36,15
$K_{I,A}$ [N/m$^{3/2}$] théorique Shah & al **[52 et 53]**	0,441	0,441	0,442	0,442
erreur %	0	2,72	-8,6	5,42

Tableau I.7. Valeurs des écarts moyens relatifs entre différents résultats expérimentaux et théoriques, résultats donnés par la référence [73].

I.2.2.7 Travaux de Grandt & Sinclair

Ces auteurs **[66]** ont mesuré le facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond d'une fissure de forme semi-elliptique contenue dans une plaque de matériau transparent.

Les dimensions géométriques de la fissure (longueur, largeur) peuvent être mesurées au cours de l'expérience. Ils font l'hypothèse que la propagation de la fissure est gouvernée par le facteur d'intensité de contraintes local, selon une loi type Paris.

Le nombre de points expérimentaux obtenus est important. Au cours de la propagation de la fissure le rapport a/c décroît lorsque a/B augmente. Les résultats concernant des essais de flexion dans les conditions a/c = 0,6 et $\phi = 0°$ ont été reproduits et comparés avec les résultats de Shah & Kobayashi **[52 et 53]** et ceux de Smith **[65]** dans la figure (I.23). Il apparaît que les résultats de Smith sont en bon accord avec les résultats expérimentaux de Grandt & Sinclair (dispersion inférieure à 10%). Les résultats de Shah & Kobayashi conduisent à des valeurs trop élevées.

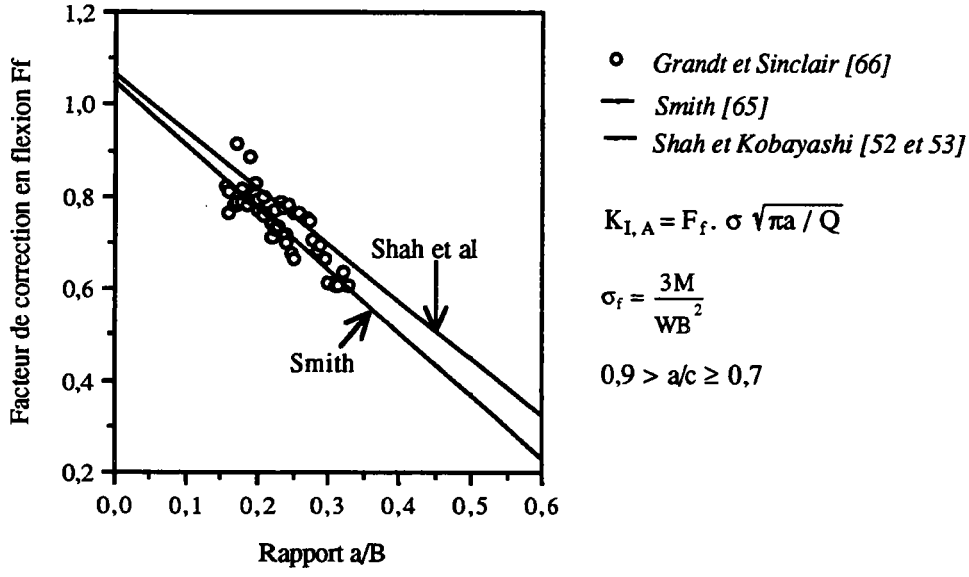


*Figure I.23. Comparaison des résultats expérimentaux de Grandt & Sinclair **[66]** avec les résultats numériques de Smith **[65]** et Shah & Kobayashi **[52 et 53]**.*

I.2.2.8 Travaux de Ruiz & Epstein

Les auteurs **[45]** déterminent par photo-élasticimétrie, le facteur d'intensité de contraintes le long du front d'une fissure de surface de forme semi-elliptique et le compare à celui obtenu par d'autres méthodes. Le matériau utilisé est un alliage de résine Biphenol époxy (ARALDITE CT200) et de Phthalic Analydride (HARDENER HT 901). Deux types d'éprouvettes ont été utilisées :

- éprouvettes de traction de dimensions 40 x 60 x 300 mm,
- éprouvettes de flexion quatre points de dimensions 40 x 75 x 500 mm.

Les figures (I.24 et I.25) donnent une comparaison des résultats expérimentaux de Ruiz & Epstein **[45]** et la solution analytique de Newman & Raju **[35 et 36]** sur des défauts semi-elliptiques pour un chargement en flexion et en traction. La solution expérimentale est en contradiction avec les courbes de Newman & Raju.

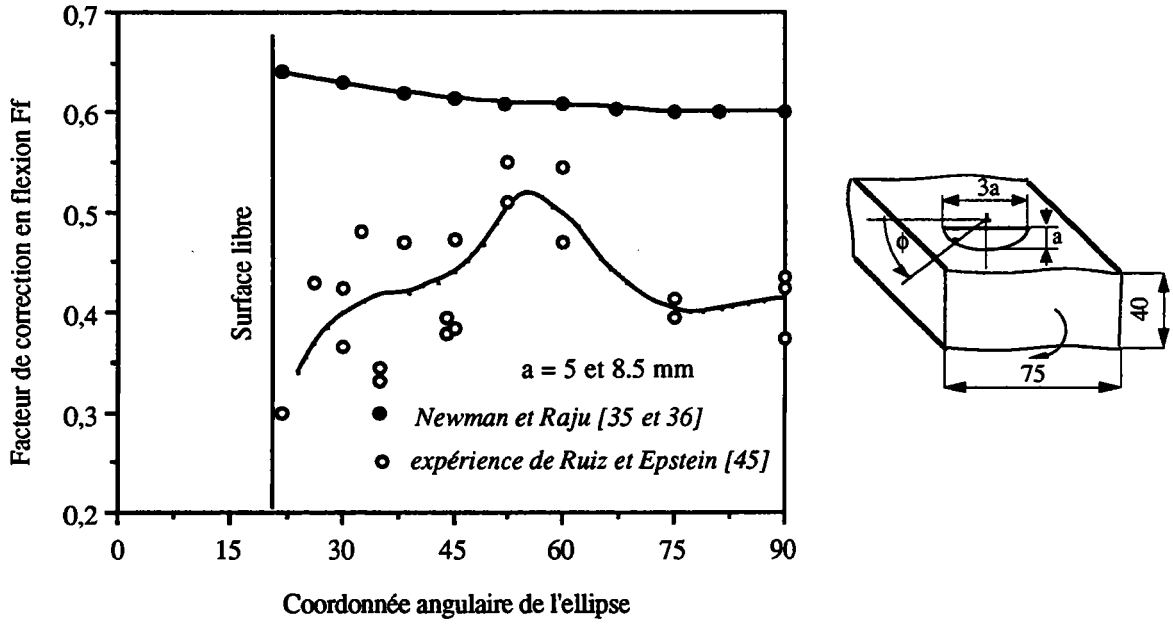


Figure I.24. Comparaison entre les valeurs expérimentales de Ruiz & Epstein [45] et la solution de Newman & Raju [35 et 36] en flexion.

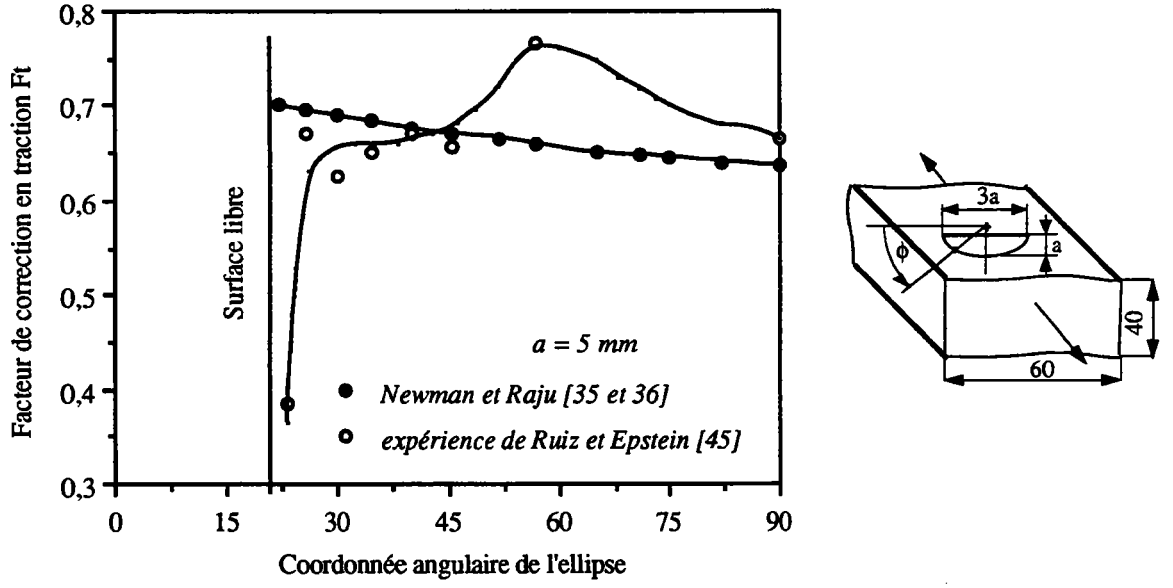


Figure I.25. Comparaison entre les valeurs expérimentales de Ruiz & Epstein [45] et la solution de Newman & Raju [35 et 36] en traction.

I.2.2.9 Travaux de Carpinteri

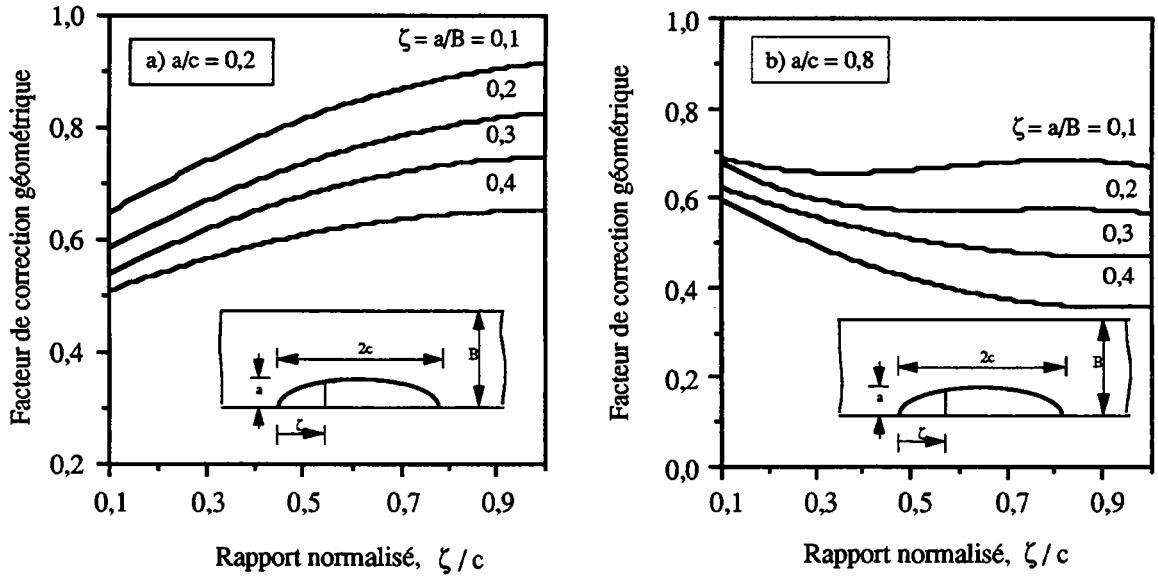
Carpinteri [42] a présenté récemment une série de résultats du facteur d'intensité de contraintes déterminés par la méthode aux éléments finis.

Les résultats sont présentés sous forme de courbes représentant la variation du facteur de correction géométrique F en fonction de la profondeur relative $\xi = a_i/B$ normalisée par la longueur de fissure c. Tous ces résultats sont donnés à partir de $\xi = a_i/B = 0,1$ c'est à dire près mais non très près de la surface $\xi = a_i/B = 0$ (figures I.26a et b).

L'auteur conclu que pour le rapport a/c < 0,4 la valeur maximale du facteur d'intensité de contraintes se trouve ou point le plus profond de fissure. A partir de la valeur de a/c ≥ 0.6 le maximum commence à changer de position et sa valeur se trouve entre le point le plus profond (point A) et un point prés de la surface (point C). L'ensemble de ces résultats peut se décomposer de la façon suivante :

- a/c ≥ 0,6 le maximum se trouve au point $\xi = a_i/B = 0,3$,
- a/c ≥ 0,8 le maximum se trouve au point $\xi = a_i/B = 0,2$,
- a/c > 0,8 le maximum se trouve au point $\xi = a_i/B = 0,1$.

avec a_i un point appartenant au front de fissure.



Figures (I.26a et b). Facteur de forme géométrique en fonction du rapport normalisé ξ/c pour un chargement de flexion selon [42].

I.2.2.10 Travaux de Mattheck & Morawietz & Munz

Ces auteurs **[60]** ont utilisé la méthode de fonction de poids pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes relatifs à une fissure semi-elliptique débouchante en surface dans une tôle soumise à un gradient de contraintes.

En partant de la charge appliquée et du facteur d'intensité de contraintes local et en utilisant les formules de Cruse & Besuner **[74]**, les auteurs calculent le facteur d'intensité de contraintes de référence moyen au point le plus profond $\overline{K}_{I,Ar}$ et en surface $\overline{K}_{I,Cr}$ à partir de :

$$\overline{K}^2_{I,Ar} = \frac{1}{\Delta S_A} \int_{\Delta S_A} K_I^2(\phi) \cdot d\left[\Delta S_A(\phi)\right] \tag{I.55}$$

$$\overline{K}^2_{I,Cr} = \frac{1}{\Delta S_C} \int_{\Delta S_C} K_I^2(\phi) \cdot d\left[\Delta S_C(\phi)\right] \tag{I.56}$$

Avec $K_I(\phi)$ est le facteur d'intensité de contraintes local variable avec l'angle d'excentricité ϕ, ΔS_A un incrément de la propagation de fissure suivant la direction a et ΔS_C suivant la direction c, (figure I.27).

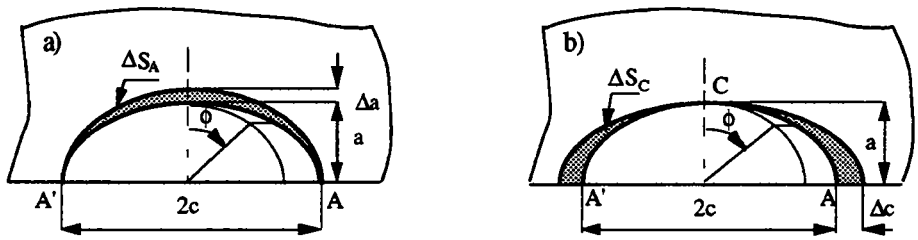


*Figure I.27. Extension de la fissure pour le calcul du facteur d'intensité de contraintes moyen **[60]**.*

A partir de la nouvelle distribution des contraintes $\sigma_{new}(x,y)$ correspondant au facteur d'intensité de contraintes de référence moyen, ils recalculent le facteur d'intensité de contraintes moyen au point le plus profond $\overline{K}_{I,A}$ et en surface $\overline{K}_{I,C}$:

$$\overline{K}^2_{I,A} = \frac{H}{\overline{K}_{I,Ar}} \int \sigma_{new}(x,y) \cdot \frac{\partial u_r(x,y,a,c)}{\partial S_A} dS_A \tag{I.57}$$

$$\overline{K}^2_{I,C} = \frac{H}{\overline{K}_{I,Cr}} \int \sigma_{new}(x,y) \cdot \frac{\partial u_r(x,y,a,c)}{\partial S_C} dS_C \tag{I.58}$$

dS_A et dS_C sont obtenues par intégration :

$$dS_A = \frac{\pi}{2} c\, da \tag{I.59}$$

$$dS_C = \frac{\pi}{2} a\, dc \tag{I.60}$$

Pour un chargement symétrique $\sigma_{new}(x,y) = \sigma_{new}(x,-y)$, les équations (II.57 et I.58) s'écrivent sous la forme :

$$\overline{K_{I,A}} = \frac{H}{\overline{K_{I,Ar}}} \frac{4}{\pi a} \int_{y=0}^{c} \int_{x=0}^{x(y)} \sigma_{new}(x,y) . \frac{\partial u_r}{\partial c} \, dx.dy \qquad (I.61)$$

$$\overline{K_{I,C}} = \frac{H}{\overline{K_{I,Cr}}} \frac{4}{\pi a} \int_{y=0}^{c} \int_{x=0}^{x(y)} \sigma_{new}(x,y) . \frac{\partial u_r}{\partial c} \, dx.dy \qquad (I.62)$$

En se basant sur le travail de Dufresne **[59]** les auteurs limitent leurs études pour l'intervalle relatif aux rapports $a/c > 0,2$ et $a/B < 0,8$ pour que la déviation du facteur d'intensité de contraintes par rapport à la solution de Newman & Raju **[35, 36 et 43]** ne soit pas supérieure à 5% . L'évolution de $u_r(x,y)$ est donnée en trois étapes :

1) première étape u_r (x, y = 0), ainsi l'expression analytique du déplacement peut être obtenue par :

$$u_r(x, y=0) = \frac{\sigma_g}{H} \left\{ \sqrt{1 - \frac{x}{a}} \left[3,224 - 1,358 \frac{a}{c} + 0,577 \left(\frac{a}{B}\right)^2 / \left(\frac{a}{c}\right)^{1,2} \right] + \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{3/2} . \right.$$
$$\left[- 0,27 - 0,602 \frac{a}{c} + 0,343 \left(\frac{a}{B}\right)^2 / \left(\frac{a}{c}\right)^{1,2} \right] \left[-0,405 \left(\frac{a}{B}\right)^2 / \left(\frac{a}{B}\right)^{0,2} + 0,091 \left(\frac{a}{B}\right)^4 / \left(\frac{a}{c}\right)^{2,4} \right.$$
$$\left. \left. + 0,452 \left(\frac{a}{c}\right)^2 \right] \right\} \qquad (I.63)$$

2) seconde étape, on suppose maintenant que le champ de déplacement en surface u_r (y , x = 0) est similaire à celui déterminé pour une fissure de Griffith :

$$u_r(y, x=0) = u_r^{max} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2} \qquad (I.64)$$

$u_r^{max} = u_r$ (x = 0) est obtenu de l'équation (I.63). Les équations (I.63 et I.64) nous donnent le champ de déplacement pour x = 0, et -c < y > +c. Dans le souci de la détermination de ce dernier au voisinage de la fissure et pour la valeur $x \neq 0$, la profondeur de la fissure est une fonction de y donnée par la relation :

$$a^* = a \sqrt{1 - \left(\frac{y}{c}\right)^2} \qquad (I.65)$$

3) troisième étape, dans le cas des problèmes plans le champ de déplacements à la tête d'une fissure est approximé par la relation de Petroski & Achenbach **[75]** :

$$u_r(x, y) = \frac{\sigma_g}{H\sqrt{2}} \left\{ 4F(a^*)\sqrt{a^*}\sqrt{a^* - x} + \sigma_g(a^*)\frac{(a^* - x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a^*}} \right\} \qquad \text{(I.66)}$$

F(a*) est obtenu de l'expression du facteur d'intensité de contraintes donnée par Newman & Raju **[35 et 36]** pour une plaque soumise à une traction (formule I.41) avec :

$$\sigma_g(a^*) = \frac{u_r^{max} \cdot H\sqrt{2}}{a \cdot \sigma_g} - 4F(a^*) \qquad \text{(I.67)}$$

Les figures (I.28a et b) donnent une comparaison entre le facteur d'intensité de contraintes moyen $\overline{K}_{I,A}$ et $\overline{K}_{I,C}$ calculé pour une flexion pure donné par Mattheck & al **[60]** et celui calculé à partir de la solution de Newman & Raju **[35 et 36]**. De cette comparaison on peut retenir que :

- la différence entre les deux méthodes de calcul (locale et moyenne) est de l'ordre de 10% et elle est plus importante pour a/c = 1,
- la méthode proposée par Mattheck & al, permet de calculer le facteur d'intensité de contraintes avec un minimum de manipulation numérique au point le plus profond et en surface,
- les résultats sont en accord satisfaisant avec les résultats obtenus par la méthode aux éléments finis publiés dans la littérature.

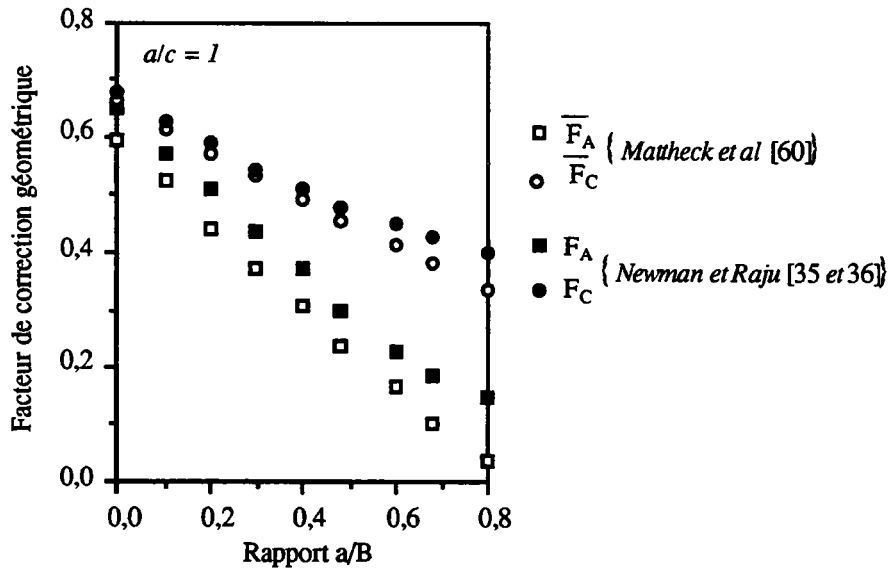


*Figure (I.28a). Comparaison de différentes valeurs de F données par Mattheck & al **[60]** et celles de Newman & Raju **[35 et 36]** pour une flexion pure (rapport a/c = 1).*

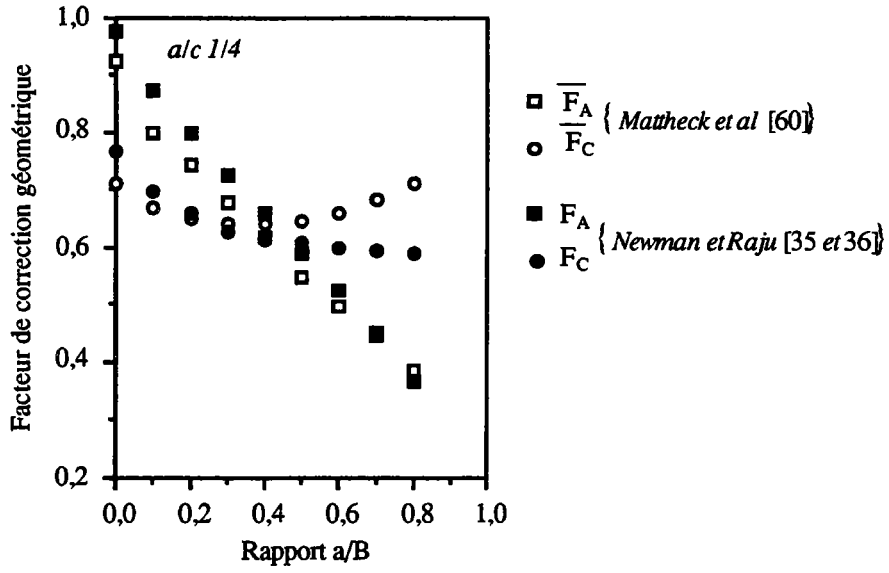


Figure (I.28b). Comparaison de différentes valeurs de F données par Mattheck & al **[60]** et celles de Newman & Raju **[35 et 36]** pour une flexion pure (rapport a/c = 1/4).

I.2.2.11 Conclusion

Nous avons regardé dans la littérature les différentes méthodes de détermination du facteur d'intensité de contraintes pour des défauts de forme semi-elliptiques contenus dans une plaque.

Il existe peu de résultats expérimentaux ou de calcul sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes en surface (a/B = 0). La majorité des travaux sont relatifs au point le plus profond de la fissure. Les travaux de Shah et Kobayashi **[52 - 54]**, Newman **[61 et 62]** et Dufresne **[59]** ont abouti à des équations analytiques donnant uniquement le facteur d'intensité de contraintes en ce point.

Les résultats dont nous avons eu connaissance, montrent que le facteur d'intensité de contraintes n'est pas toujours maximal en surface au point C où la fissure débouche, (figure I.12). Citons notamment les travaux de Smith & Sorensen **[51]**, Ruiz & Epstein **[45]** et plus récemment ceux de Carpinteri **[42]**. En résumé on peut estimer que :

1) La différence entre les résultats de la littérature sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes pour ce type de fissure est importante notamment tout près de la surface. Les figures (I.21 et I.22) reflètent cette divergence qui peut atteindre 80% en surface pour la valeur du rapport a/B $\geq$ 0,6,

2) Peu de solutions analytiques existent et donnent uniquement le facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond à l'exception de la solution de Newman & Raju **[35, 36 et 43]**,

3) Une importante divergence existe entre la localisation du point où sa valeur est maximale. Pour certains auteurs cette valeur se trouve en surface (point C de la figure I.12) pour d'autres au point le plus profond (point A) ou encore entre A et C.

4) La solution développée par Newman & Raju est depuis 1987 la plus adoptée par la majorité des chercheurs sous sa présentation analytique en raison de sa simplicité mais aussi par habitude,

5) La localisation de la valeur maximale pour les fissures de forme semi-elliptique contenues dans une plaque est donc toujours une question en cours.

I.3. LOIS DE FISSURATION EN TROIS DIMENSIONS

Des expériences réalisées dans ce domaine montrent que les fissures de surface contenues dans une plaque soumise à un chargement cyclique de traction ou de flexion changent de forme lors du processus de propagation. Cette variation est souvent représentée sous forme de courbes d'évolution du rapport (a/c) en fonction du rapport de la profondeur de fissure par l'épaisseur de la plaque (a/B).

La méthode de prédiction de la variation de forme doit être judicieusement choisie pour estimer avec précision la durée de vie d'une composante de structure fissurée. Pour cela, un calcul précis du facteur d'intensité de contraintes K_I pour chaque fissure est nécessaire puisque la propagation de fissures de fatigue est liée à celui-ci. Vu la complexité du problème, il n'est pas possible d'avoir une solution analytique exacte du facteur d'intensité de contraintes. Pour résoudre le problème, différents chercheurs ont utilisé les techniques numériques durant ces deux dernières décades. Le but de ce travail est de comparer les différentes méthodes de prédiction de la variation de forme de fissures sous un chargement cyclique afin identifier la plus probable.

L'ensemble des auteurs conserve une propagation régie par la loi de Paris et valable pour les fissures de surface. De plus ils supposent que les fissures semi-elliptiques se propagent de façon à conserver leurs formes elliptiques, seul le rapport (a/c) change. Cette hypothèse est raisonnable car vérifiée expérimentalement comme le montre la littérature.

I.3.1 Expérience de Sommer & Ratwani

Ces auteurs **[76]** ont effectué deux essais de croissance de fissures en fatigue. Le premier sur une plaque d'épaisseur 16,5 mm, le second sur un demi-cylindre de même épaisseur, de rayon intérieur R_{int} = 40,25 mm. Les deux éprouvettes comportent une fissure semi-elliptique de mêmes dimensions et de même forme qui ont été soumises à une traction alternée. Le dépouillement des résultats permet de dégager les enseignements suivants :

1) En appliquant la loi de Paris, les auteurs déterminent la valeur du facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond dans une plaque $K_{I,A}$ et dans un cylindre $K'_{I,A}$. La figure (I.29) donne une comparaison entre les résultats de Sommer & Ratwani et ceux de Shah & Kobayashi **[54]**. Ils constatent que le facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond dans un cylindre $K'_{I,A}$ est plus faible que celui d'une plaque $K_{I,A}$.

Cependant, Broekhven & Van de Ruijtenbreek **[77]** ont montré que la loi de Paris ne s'applique pas au calcul de l'extension locale d'une fissure en fonction de $K_I(\phi)$ local, mais plutôt à une extension moyenne dans une certaine zone, en fonction de $\overline{K_I}\ (\phi)$ moyen sur la même zone. On ne sait pas, à l'heure actuelle, donner à ces "valeurs moyennes" de définition mathématique précise.

2) En analysant la figure (I.30) qui rassemble les résultats obtenus sur une plaque et un demi-cylindre, les auteurs concluent que :

- au début de la croissance, la profondeur de la fissure augmente nettement plus vite que la longueur et le facteur d'intensité de contraintes est maximal au point le plus profond,
- au-delà de la valeur du rapport a/B = 0,5 il est hasardeux de chercher à interpréter les résultats,

- la courbe correspondante au demi-cylindre est très voisine d'une droite dont la pente est légèrement inférieure à 1,
- le facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond est plus faible dans le cas d'un cylindre que dans une plaque,
- les résultats de Sommer & Ratwani ne permettent pas de tirer des conclusions relatives à la valeur de $K_{I,C}$ aux points où la fissure débouche.

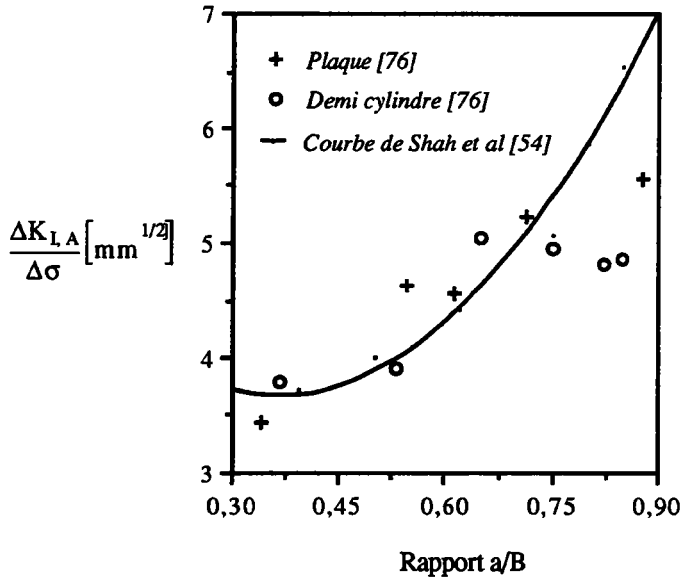


Figure I.29. Comparaison entre les résultats expérimentaux de Sommer & Ratwani [76] et les résultats théoriques de Shah et Kobayashi [54].

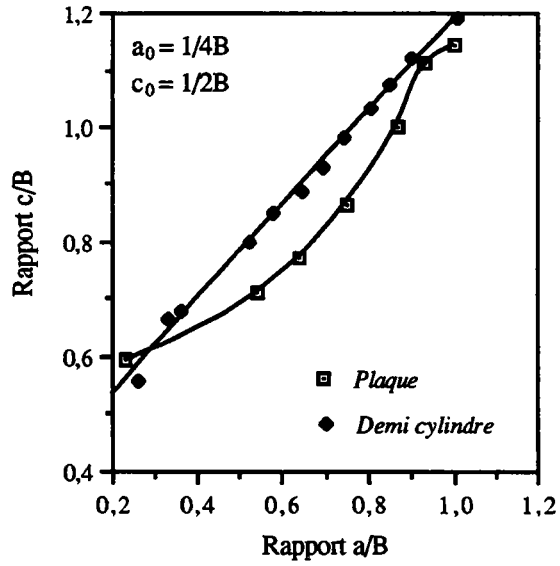


Figure I.30. Résultats expérimentaux de croissance de fissures en fatigue (Traction Simple) [76].

I.3.2 Travaux de Varfolomeyev & Vainshtok & Krasowsky

Varfolomeyev & al **[78]** réalisent cinq essais de propagation de fissure en fatigue. Ces essais ont été menés sur des éprouvettes standards de dimensions 220-116-30 mm en présence d'un défaut de forme semi-elliptique dans un acier 15kh2MFA (R_e = 584 MPa, R_m = 700 MPa et A = 21%). Les expériences ont été conduites en flexion quatre points avec un rapport de charge constant de 0,32 à l'air ambiant. Le suivi de la propagation de la fissure au cours des 5 essais a été assuré par la méthode électro-spark, ainsi qu'un marquage du front de fissure a été réalisé. A partir des mesures effectées sur le front de fissure, les auteurs déterminent la variation du facteur d'intensité de contraintes :

- local $\Delta K_{I,local}$,
- moyen $\overline{\Delta K_I}$,
- effectif $\Delta K_{I,e}$ (à ne pas confondre avec $\Delta K_{I,eff}$).

1) le facteur d'intensité de contraintes local ($K_{I,local}$) est déterminé à partir de la formule développée par Newman & Raju **[35]**.

2) le facteur d'intensité de contraintes moyen $\overline{K_I}$ est donné par le système d'équations (I.55 et I.56) formulé par Cruse & Besuner **[74]**.

3) le facteur d'intensité de contraintes effectif $K_{I,e}$ est donné par la formule :

$$\Delta K_{I,e} = \gamma . \Delta K_I \tag{I.68}$$

Le coefficient γ est déterminé expérimentalement.

En partant de la possibilité d'utiliser le facteur d'intensité de contraintes comme critère de propagation de la fissure en fatigue et en ce basant sur l'analyse micrographique de Letunov & al **[79]** les auteurs estiment que $\Delta K_{I,A} = \Delta K_{I,C}$.

$$\frac{da}{dN} = C_A \left(\Delta K_{I,A}\right)^m = C \left(\gamma_A . \Delta K_{I,A}\right)^m \tag{I.69}$$

$$\frac{dc}{dN} = C_C \left(\Delta K_{I,C}\right)^m = C \left(\gamma_C . \Delta K_{I,C}\right)^m \tag{I.70}$$

L'exposant m est indépendant de la position du point du front de fissure et correspond à la valeur trouvée par les essais. A partir des équations (I.69 et I.70), on peut écrire :

$$\frac{C_A}{C_C} = \left(\frac{\gamma_A}{\gamma_C}\right)^m \tag{I.71}$$

On déduit que :

$$\mu = \frac{\gamma_A}{\gamma_C} = \left(\frac{C_A}{C_C}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{I.72}$$

Le coefficient μ caractérise la différence dans l'estimation de da/dN et dc/dN déterminés à partir de l'équation (I.72), pour une propagation gouvernée par les équations (I.69 et I.70). La valeur de μ varie de 1,089 à 1,113; elle est indépendante du niveau de contraintes.

Les figures (I.31a - c) **[78]** regroupent les points expérimentaux obtenus à partir de cinq éprouvettes utilisées. La variation de da/dN et dc/dN est donnée en fonction de ΔK_I, ΔK_I et $\Delta K_{I,e}$. La ligne en continue représente la courbe de référence et les deux lignes en discontinues représentent la bande de dispersion de la vitesse de fissuration déterminée par le biais des éprouvettes normalisées approximée par la loi de Paris.

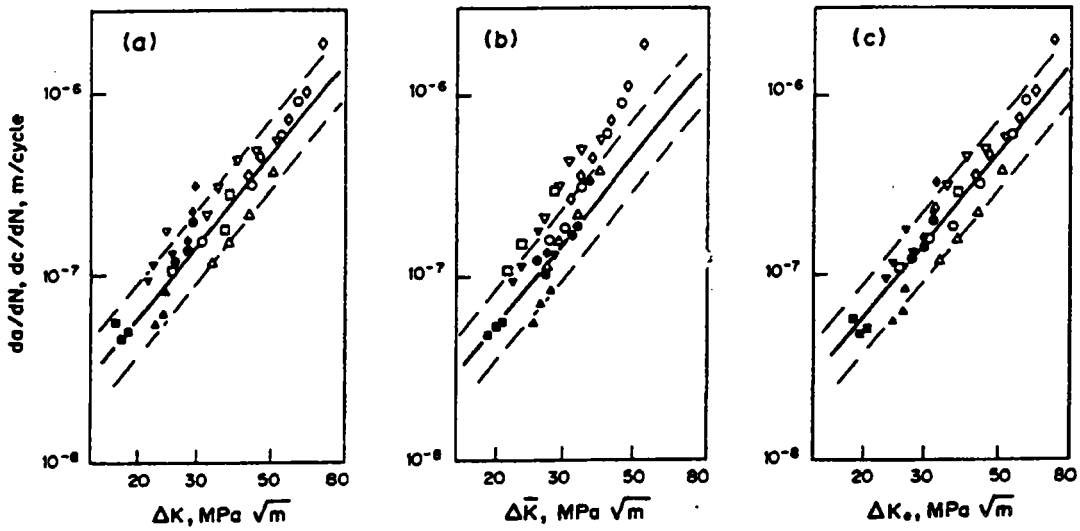
Les auteurs concluent que le facteur d'intensité de contraintes effectif $\Delta K_{I,e}$ obtenu à partir des coefficients γ_A et γ_C regroupe mieux les points expérimentaux et que tous les points sont à l'intérieur de la bande de dispersion.

Le tableau (I.8) donne une comparaison de la valeur de μ obtenue pour différents matériaux à partir des travaux cités dans les références **[79 à 83]**. Ces résultats sont obtenus par estimation de la propagation de fissure en fatigue décrite par la loi de Paris.

On note une nette coïncidence entre les résultats trouvés et ceux donnés par Newman & Raju **[81]** et ceux de Jolles & Tortoriello **[82]**.

Matériaux	Réf.	Chargement	Rapport de charge	Coefficient μ
2024-T351	**[82]**	traction	0,1	1,098
12GN2MFAYu	**[83]**	flexion	0,5	1,131
PMMA	**[80]**	flexion	0,1	1,270
Alliage de Titanium et d'Aluminium, Acier Nickel	**[81]**	traction- flexion	0,0	1,111
BS 4360 50B	**[84]**	traction excentrée	0,05	1,133
15Kh2MFA	**[78]**	flexion	0,32	1,100

Tableau I.8. Estimation du coefficient μ pour différents matériaux [78].



Figures (I.31a - c). Courbes de vitesse de fissuration da/dN et dc/dN en fonction de la variation du facteur d'intensité de contraintes a) local ΔK_I, b) moyen $\overline{\Delta K_I}$, c) effectif $\Delta K_{I,e}$.

I.3.3 Travaux de Mahmoud & Hosseini

Les auteurs présentent une large étude statistique sur les différents modèles de propagation de fissure en surface dans une plaque soumise à un chargement cyclique de traction **[50 et 85]**, de flexion **[73 et 86]** et de traction-flexion **[87]**. Différentes méthodes de prédiction pour les différents rapports a/c de fissures en surface sont comparées avec les données expérimentales. L'objectif est d'identifier la méthode qui s'accorde le mieux avec l'expérimentation.

Ils réalisent une comparaison basée sur un critère quantitatif, ainsi que sur une théorie statistique pour évaluer le niveau d'accord avec les données expérimentales. Une cinquantaine de fissures sont étudiées et le nombre total de points expérimentaux est de 523 provenant de 15 références. La méthode fait intervenir quatre techniques basées sur la solution du facteur d'intensité de contraintes donnée par Newman & Raju **[43 et 88]**. A cause du paramètre de fissuration m qui influe sur les résultats, trois valeurs communes ont été utilisées pour chaque cas. En plus, les formules empiriques de Portch **[89]**, Kawahara & Kurihara **[90]** et Iida **[91]** pour un chargement cyclique en flexion sont également incluses.

Les fissures de forme semi-elliptiques sont classées en deux catégories, fissures profondes $(a/c)_{init} \geq 0.5$ et allongées $(a/c)_{init} < 0,5$. Seul les résultats portants sur la flexion seront exposés.

1) La première technique d'évaluation relève de l'hypothèse suivante :

- la valeur du facteur d'intensité de contraintes local au point le plus profond $K_{I,A}$ et en surface $K_{I,C}$ est suffisante pour prédire le modèle de la propagation de la fissure,
- le paramètre de fissuration C est considéré comme constant le long du front de fissuration, où $C_A = C_C$.

L'utilisation de ces deux hypothèses, l'expression de Newman & Raju et la loi de Paris nous amène a montrer que :

$$\frac{da}{dc}=\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{0,5}\cdot\left(1,1+0,35\left(\frac{a}{B}\right)^{2}\frac{H_1}{H_2}\right)\right]^{m} \tag{I.73}$$

avec :

$$H_1=1-0,35\left(\frac{a}{B}\right)-0,11\left(\frac{a}{c}\right)^{2}\cdot\left(\frac{a}{B}\right)$$

$$H_2=1-G_1\left(\frac{a}{B}\right)+G_2\left(\frac{a}{c}\right)^{2} \tag{I.74}$$

$$G_1=-1,22-0,12\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$G_2=0,55-1,05\left(\frac{a}{c}\right)^{0,75}+0,47\left(\frac{a}{c}\right)^{1,5}$$

2) La seconde technique d'évaluation tient compte de la variation de C_C et C_A le long du front de fissure. Newman & Raju **[43]** suggèrent de lier le paramètre de fissuration C dans la direction de surface à celui dans la direction de l'épaisseur par une corrélation empirique, $C_C = (0.9)^m C_A$. L'équation (I.73) se met sous la forme :

$$\frac{da}{dc}=\left[0,9\left(\frac{a}{c}\right)^{0,5}\cdot\left(1,1+0,35\left(\frac{a}{B}\right)^{2}\frac{H_1}{H_2}\right)\right]^{m} \tag{I.75}$$

3) La troisième technique d'évaluation tient compte de la variation du facteur d'intensité de contraintes le long du front de fissure en utilisant une valeur moyenne au lieu d'une valeur locale, au point le plus profond $\overline{K}_{I,A}$ et en surface $\overline{K}_{I,C}$. Cette approche du facteur d'intensité de contraintes moyen a été suggérée par Cruse & Besuner **[74]**, système d'équations (I.55 et I.56). Introduisant cette valeur du facteur d'intensité de contraintes moyen dans la loi de Paris on aura :

$$\frac{da}{dc}=\left(\frac{\overline{\Delta K_{I,A}}}{\overline{\Delta K_{I,C}}}\right)^{m} \tag{I.76}$$

4) La quatrième technique d'évaluation prend en considération non seulement la variation du $\overline{K_I}$ moyen mais également celle du paramètre de fissuration C. L'utilisation de la précédente corrélation donne :

$$\frac{da}{dc}=\left(\frac{\overline{\Delta K_{I,A}}}{\overline{0,9\,\Delta K_{I,C}}}\right)^{m} \tag{I.77}$$

Les équations (I.73, I.74, I.75 et I.76) indiquent que la variation de la forme de fissure en surface dépend des valeurs a/c, a/B et du paramètre de fissuration m. Les auteurs incluent dans leurs étude trois autres équations empiriques :

- Équation de Portch **[89]** :

$$\left(\frac{a}{c}\right)_i = \left[1{,}05 - \left(\frac{a}{B}\right)_i\right] - \left[1 - \left(\frac{a}{B}\right)_i\right]^4 (1{,}05 - \lambda) \quad \text{pour} \quad \left(\frac{a}{B}\right)_i \geq \left(\frac{a}{B}\right)_b \tag{I.78}$$

et :

$$\left(\frac{a}{c}\right)_i = I\left(\frac{a}{B}\right)_i \quad \text{pour} \quad \left(\frac{a}{B}\right)_i < \left(\frac{a}{B}\right)_b \tag{I.79}$$

avec :

$$\left(\frac{a}{c}\right)_b = \frac{3{,}2 - I}{3(I + 1.0)}, \qquad I = \frac{\left(a/c\right)_{init}}{\left(a/B\right)_{init}} \tag{I.80}$$

- si $(a/B)_b$ est calculé à partir de c pour être > 1, la relation (I.79) est utilisée dans le domaine $0 < (a/B)_i < 1.0$. Mais si $(a/B)_b < 0$, la relation (I.78) est utilisée dans le domaine $0 < (a/B)_i < 1{,}0$. Dans ces deux cas λ est calculé à partir de la relation (I.78) en utilisant les rapports initiaux (a/c) et (a/B).

- si $0 < (a/B)_b < 1$, la relation (I.79) est utilisée dans le domaine $0 < (a/B)_i < (a/B)_b$, dans ce cas le rapport $(a/c)_b$ qui correspond au rapport $(a/B)_b$ est calculé à partir de la relation (I.79) et λ à partir de la relation (I.78) en utilisant les rapports $(a/c)_b$ et $(a/B)_b$.

- Équation de Kawahara & Kurihara **[90]** :

$$a_i = \frac{1{,}05}{\left\{\left(c_i^2 - \lambda^2\right)^{-0{,}5} + \frac{1}{B}\right\}} \tag{I.81}$$

λ est calculé à partir des valeurs initiales de a et c, Gorner et al réécrivent cette équation sous la forme :

$$\left(\frac{a}{c}\right)_i = \left[1{,}05 - \left(\frac{a}{B}\right)_i - \left(\frac{a}{B}\right)_i^2\right] \cdot \left\{\left(\frac{a}{B}\right)_i^2 + \mu^* \left[1{,}05 - \left(\frac{\alpha}{B}\right)_i^2\right]\right\}^{-0{,}5} \tag{I.82}$$

avec μ^*, une constante obtenue à partir de la forme initiale de la fissure.

- Équation de Iida **[91]** :

$$\left(\frac{a}{c}\right)_i = \left[0{,}85 - 0{,}75\left(\frac{a}{B}\right)_i\right] \pm 0{,}0063\left[\left(\frac{a}{B}\right)_i - \lambda^*\right]^{-3{,}8} \tag{I.83}$$

λ^* est une constante calculée à partir des paramètres initiaux (a/c) et (a/B). Elle est donnée dans l'intervalle 0,85 - 0,75 (a/B) < a/c < 0,85 + 0,75 (a/B).

Les auteurs établissent un critère basé sur la détermination du résidu R_i et la déviation standard d_S. L'introduction du paramètre résiduel $R_i = (a/c)_{i\ prédiction} - (a/c)_{i\ expérience}$, a été nécessaire afin de classer ces méthodes analytiques en prenant en considération la somme $\sum R_i^2$ et la déviation standard définit par $d_S = [\sum R^2 / (n - 1)]^{0.5}$; n est le nombre de points pour lequel la propagation est examinée. La bonne solution est celle qui donne la meilleur combinaison " faible déviation standard d_S et moyenne résiduelle proche de zéro".

1) Fissures profondes a/c ≥ 0.5 : vingt trois fissures différentes ont été analysées avec 242 points. Les résultats présentés dans le tableau (I.9) sont établis pour $\Delta a = B/1000$. Ils montrent que le coefficient m a une forte influence sur d_S pour les équations (I.75, I.76 et I.77), d_S et R augmentent avec m.

Mahmoud & Hosseini concluent que l'utilisation de la valeur moyenne de K_I (équations I.76 et I.77) n'améliore pas la prédiction du rapport (a/c). Il est évident qu'à partir du tableau (I.9) ces équations surestiment le rapport (a/c) et par conséquent ne sont pas recommandées pour des fissures dont le rapport initial $(a/c)_{init} \geq 0,5$. Les meilleures solutions sont les équations (I.73 et I.75) respectivement avec m = 3 et 4.

Techniques	m	d_S	R_i	R_i a/B	R_i a/c	d_S a/c	d_S a/B	Rang
	4	0,118	-0,054	E	TF	B	E	4
$K_{I\ local}$ (éqt. I.73)	3	0,104	-0,009	E	F	B	E	1
	2	0,123	0,056	E	F	E	E	6
	4	0,106	0,005	E	F	E	E	2
$K_{I\ local}$ (éqt. I.75) $C_C = (0.9)^m C_A$	3	0,114	0,045	E	B	E	E	3
	2	0,150	0,101	B	B	E	E	10
	4	0,139	0,084	F	TF	E	E	9
$K_{I\ moyen}$ (éqt. I.76)	3	0,173	0,124	TF	TF	E	E	11
	2	0,222	0,176	B	TF	E	E	13
	4	0,214	0,178	B	F	E	E	12
$K_{I\ moyen}$ (éqt. I.77) $C_C = (0.9)^m C_A$	3	0,241	0,206	F	TF	E	E	14
	2	0,279	0,240	TF	TF	E	E	15
Portch (éqt. I.78 et I.79)		0,140	0,060	B	B	E	E	8
Kawahara & al (éqt. I.81 et I.82)		0,131	0,071	E	F	E	E	7
Iida (éqt. I.83)		0,123	0,015	F	F	E	E	5

(E) : Excellent, (B) : Bon, (F) : Faible et (TF) : Très Faible.

Tableau I.9. $(a/c)_{init} \geq 0,5$ [86].

2) Fissures initiales allongées a/c < 0,5 : vingt sept fissures différentes sont analysées, représentant 281 points. Les résultats présentés dans le tableau (I.10) sont établis pour $\Delta a = B/1000$.

Les deux premier rangs donnant de bonnes solutions sont attribuées aux équations (I.73 et I.75) (tableau I.10). La meilleure solution est celle qui est donnée par l'équation (I.73) pour la valeur du coefficient m = 3.

Là aussi, il est clair que l'utilisation de la valeur moyenne du facteur d'intensité de contraintes plutôt que la valeur locale n'améliore pas la précision de la prédiction. Les équations (I.76 et I.77) ne sont donc pas à recommander.

Techniques	m	d_S	R_i	R_i a/B	R_i a/c	d_S a/c	d_S a/B	Rang
	4	0,084	-0,037	E	E	E	B	6
$K_{I\ local}$ (éqt. I.73)	3	0,072	-0,013	E	E	E	E	1
	2	0,076	0,021	E	E	E	E	2
	4	0,080	0,001	TF	E	E	B	3
$K_{I\ local}$ (éqt. I.75) $C_C = (0.9)^m C_A$	3	0,079	0,022	B	E	E	B	4
	2	0,094	0,050	E	E	E	E	8
	4	0,088	0,041	E	E	E	E	7
$K_{I\ moyen}$ (éqt. I.76)	3	0,107	0,060	F	E	E	E	10
	2	0,137	0,083	TF	E	E	E	12
	4	0,142	0,101	E	E	E	E	13
$K_{I\ moyen}$ (éqt. I.77) $C_C = (0.9)^m C_A$	3	0,156	0,112	E	E	E	E	14
	2	0,176	0,124	F	E	E	E	15
Portch (éqt. I.78 et I.79)		0,100	-0,006	TF	TF	E	E	9
Kawahara & al (éqt. I.81 et I.82)		0.079	0,024	E	E	E	E	5
Iida (éqt. I.83)		0,121	0,018	E	TF	E	E	11

(E) : Excellent, (B) : Bon, (F) : Faible et (TF) : Très Faible.

Tableau I.10. $(a/c)_{init} \leq 0,5$ [86]

Nous pouvons retenir que :

- l'utilisation du facteur d'intensité de contraintes local (équation I.73) semble la meilleure méthode pour la prédiction de la propagation de fissure avec une valeur du coefficient m = 3,

- l'utilisation de l'équation (I.75), basée sur l'empirisme donne des valeurs identiques à celles obtenues par l'équation (I.73) lorsque le coefficient m est pris égal à 3 ou 4,
- l'utilisation de la valeur moyenne du facteur d'intensité de contraintes (équation I.76) au lieu de la valeur locale ne conduit pas à une amélioration de la prédiction du modèle de propagation,
- les équations (I.78, I.79 et I.83) sont de performance égale, mais elles sont toutes moins explicites que les équations (I.73 et I.75),
- les équations (I 81et I.82) sont moins précises que les équations (I.73 et I.75) mais elles sont plus faciles à utiliser.

I.3.4 Conclusion

L'analyse expérimentale et théorique de la variation de la forme du front de fissure et la stabilité de celui-ci au cours de la propagation ont été décrites par plusieurs auteurs **[73 et 78]**. Ces derniers ont montré que l'on peut prédire d'une façon assez précise la forme du front de fissuration d'un défaut semi-elliptique durant le processus de propagation. Cette dernière utilise une loi de fissuration type Paris. Trois approches sont possibles :

1) une approche locale basée sur la détermination du facteur d'intensité de contraintes local utilisant la méthode aux éléments finis ou à partir des équations analytiques **[42, 43, 51, 53, 54, 59 et 61]**,
2) une approche semi-locale basée sur le calcul du facteur d'intensité de contraintes moyen **[60, 78 et 79]**,
3) une approche globale basée sur la minimisation du taux d'énergie disponible G qui caractérise l'évolution de la fissure en fatigue **[92]**.

Le peu de résultats dont nous avons eu connaissance, recueillis dans la littérature, portent uniquement sur les deux premières approches. On peut faire les remarques suivantes :

- absence de résultats sur tube à l'exception des travaux de Sommer & Ratwani **[76]** sous une sollicitation de flexion et non en pression interne,

- quasi absence d'utilisation d'un critère global dans le dépouillement des résultats sur plaques et sur tubes.

I.4 CONCLUSION

L'étude bibliographique porte essentiellement sur les différents travaux décrivant le comportement des fissures de forme semi-elliptiques contenues dans des structures épaisses (plaques et tubes). Ceci passe par la détermination du facteur d'intensité de contraintes en trois dimensions et l'établissement d'un critère de fissuration. Celle-ci porte sur quatre parties :

1) Dans la première partie, nous avons rappelé brièvement les résultats issus de la mécanique de la rupture, sur la formation de la zone plastique à la tête d'une fissure de fatigue. Cette dernière selon sa forme et sa taille intervient dans l'établissement des mécanismes de fissuration en fatigue.

2) Dans la seconde partie, nous avons deux types de résultats :

* En premier lieu nous avons examiné les différents travaux relatifs à la détermination du facteur d'intensité de contraintes pour une fissure semi-elliptique contenue dans un tube épais, notamment ceux de Kobayashi & al **[27 et 28]**, Heliot & Labbens **[20]**, McGowan & Raymand **[19]** et Newman & Raju **[31 et 32]**. L'exploitation de la totalité de ces travaux est quasi-impossible à l'exception de ceux de Newman & Raju. Ces derniers à partir de leurs résultats numériques ont pu développer une équation analytique permettant la détermination du facteur d'intensité de contraintes tout le long du front de fissuration elliptique. L'avantage de l'équation de Newman & Raju est sa simplicité d'utilisation. Elle ne dépend que des conditions de chargement, de la géométrie de l'éprouvette et du défaut considéré,

* En second lieu, nous avons regroupé la totalité des travaux permettant la détermination du facteur d'intensité de contraintes sur le même type de défaut mais contenu dans une plaque. L'essentiel de ces travaux sont ceux de :

- Newman & Raju **[35, 36 et 43]** qui ont abouti au développement d'une équation analytique pour différents types de chargements, flexion, traction et flexion-traction. Cette équation présente un inconvénient par rapport à celle développée dans le cas du tube. Elle est limité dans un domaine géométrique bien défini, appelé intervalle de Newman & Raju,

- Smith & Sorensen **[51]** et Shah & Kobayashi **[52 à 54]** ont présenté leurs résultats sous forme numérique qui donnent uniquement le facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond. L'inconvénient de ces résultats est la difficulté d'exploitation,

- Dufresne **[59]** et Newman **[61 et 62]** ont développé deux équations analytiques donnant le facteur d'intensité de contraintes uniquement au point le plus profond pour un chargement de traction. Ces deux dernières présentent une grande simplicité dans leur utilisation,

- Grandt & Sinclair **[66]** et Ruiz & Epstein **[45]** ont mesuré directement le facteur d'intensité de contraintes par photo-élasticimétrie. Leurs résultats présentent beaucoup de dispersion notamment avec ceux évoqués auparavant,

- Carpinteri **[42]** a utilisé la méthode aux éléments finis, ses résultats sont présentés sous forme de courbes tout le long du front de fissuration. L'auteur ne donne pas de résultats en surface, mais proche de celle-ci,

- Mattheck & al **[60]** ont présenté une méthode de calcul basée sur la détermination du facteur d'intensité de contraintes moyen en surface et au point le plus profond en utilisant les équations de Cruse & Besuner **[74]**. Les auteurs ont développé une formule analytique basée

sur le champs déplacement. Cette dernière présente l'inconvénient d'être longue et difficile d'utilisation.

3) La troisième partie est consacrée à l'étude des différents critères de fissuration. Les quelques rares travaux de comparaison des lois de fissuration de fissures semi-elliptiques ont été réalisés sur plaques. Citons notamment, les travaux de Mahmoud & Hosseini **[50, 73, 85 à 87]**. On remarque l'absence :

- d'un critère global basé sur la minimisation du taux d'énergie disponible G,
- de résultats expérimentaux sur tubes notamment sous pression interne.

II. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE ET CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITÉ DE CONTRAINTES.

L'objectif de l'étude expérimentale est d'acquérir les données suivantes :

- la variation du facteur d'intensité de contraintes tout le long du front de fissuration de forme semi-elliptiques, dans le cas d'une plaque et d'un tube,
- une loi de fissuration en trois dimensions sur un acier 35NCDV12.

Pour ce fait, nous avons entrepris trois types d'essais de fissuration sur :

1) éprouvettes conventionnelles de type CT sollicitées en traction cyclique,
2) plaques épaisses sollicitées en flexion cyclique trois points avec trois différents rapports de charge R,
3) tubes épais sollicités sous pression interne avec un rapport de charge R = 0,3.

II.1 Fissuration sur éprouvettes de type CT

Des essais de fissuration ont été réalisés sur des éprouvettes normalisées de type CT (figure II.1 et tableau II.1).

Le matériau utilisé au cours de ces essais est un acier 35NCDV12, ayant subi un traitement thermique. Les caractéristiques mécaniques sont données par le tableau (II.2). La fissure est amorcée à partir d'une entaille usinée par électroérosion avec un angle d'entaille de 60 degrés.

Afin, de pouvoir mesurer précisément la longueur de la fissure avec une loupe binoculaire, les surfaces des éprouvettes doivent être soigneusement polies. Le polissage de nos pièces a été terminé à la pâte de diamant de 3µm. Puisque la propagation de la fissure est toujours en mode I, nous avons poli la pièce parallèlement à l'axe de la sollicitation.

Pour ce type d'éprouvette, la variation du facteur d'intensité de contraintes est calculée par la formule (II.1). Ceci nous a permis de tracer la loi de fissuration type Paris et, de déterminer les coefficients C^* et m^*.

$$\Delta K_I = \frac{\Delta P}{B W^{\frac{1}{2}}} \cdot f_p\left(\frac{a}{W}\right) \qquad \text{(II.1)}$$

Avec a la longueur de la fissure à partir de l'axe du chargement en [mm], B l'épaisseur de l'éprouvette en [mm], W le ligament en [mm], ΔP la variation de la charge appliquée en [N] et f(a/W) la fonction de correction géométrique non dimensionnelle donnée par l'équation suivante :

$$f_p\left(\frac{a}{W}\right) = \frac{(2 + a/W) \cdot (0.76 + 4.8\, a/W - 11.58\, (a/W)^2 + 11.43\, (a/w)^3 - 4.08\, (a/W)^4}{(1 - a/w)^{3/2}} \qquad \text{(II.2)}$$

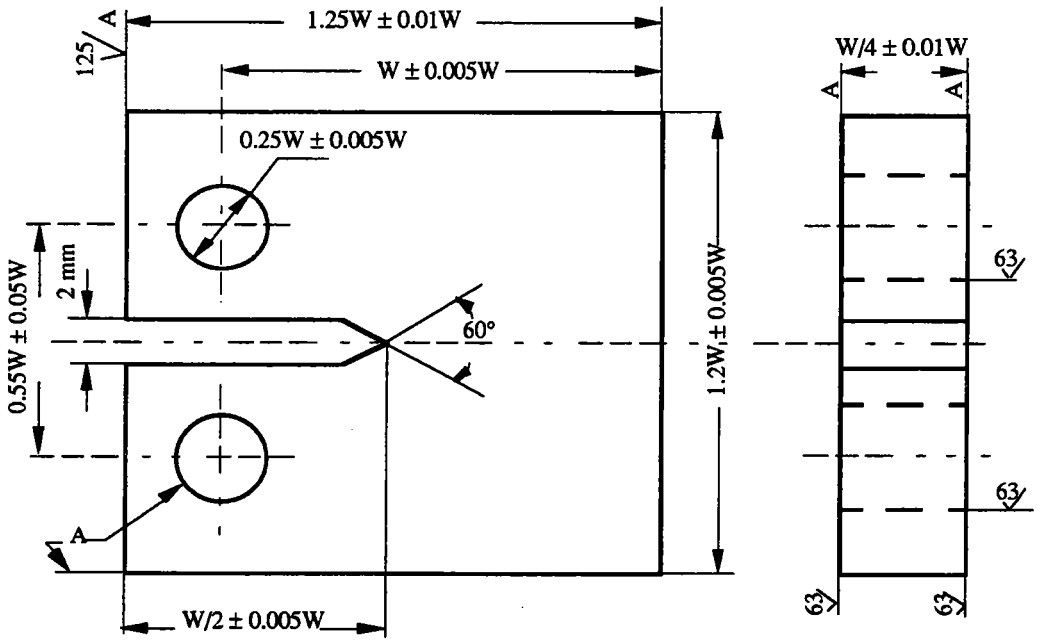


Figure II.1. Éprouvette normalisée CT, dimensions et tolérances.

Ligament	Éprouvette CT 20-80 première direction de laminage	Éprouvette CT 10-40 deuxième direction de laminage
W [mm]	80	40

Tableau II.1. Éprouvette normalisée CT.

Traction			Ténacité
$Re_{0,2}$ [MPa	R_m [MPa]	A%	K_{IC} [MPa$\sqrt{m}$]
1282	1433	11	103

Tableau II.2. Caractéristiques mécaniques de l'acier 35NCDV12.

II.2. Fissuration des plaques en flexion

Le choix de la méthode de fissuration sur plaques sous un chargement de flexion trois points a été guidé par la capacité de la machine utilisée et la possibilité d'adapter un montage sur celle-ci. Le même matériau a été utilisé.

II.2.1 Machine d'essais et dispositif de fissuration sur plaques

Les essais ont été menés sur une machine servo-hydraulique, "INSTRON" de capacité ±100 KN (photo II.1), la gamme de charge étant réglable de façon continue, nos essais ont été effectués à charge contrôlée. Le dispositif utilisé pour la fissuration est schématisé par la figure (II.2).

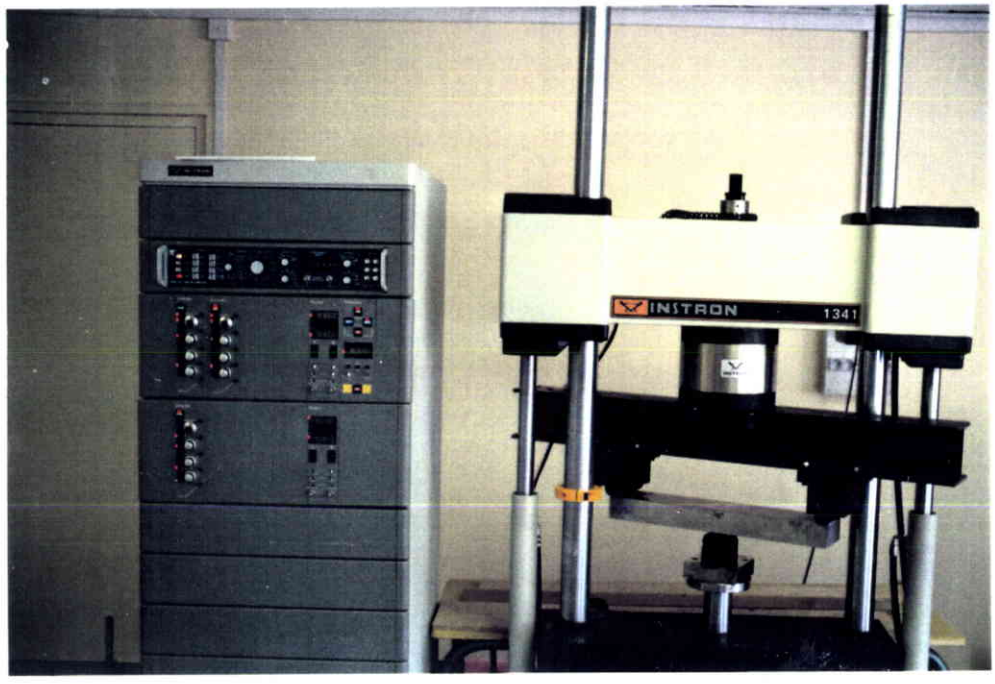


Photo II.1. Machine d'essai et dispositif de fissuration sur plaques.

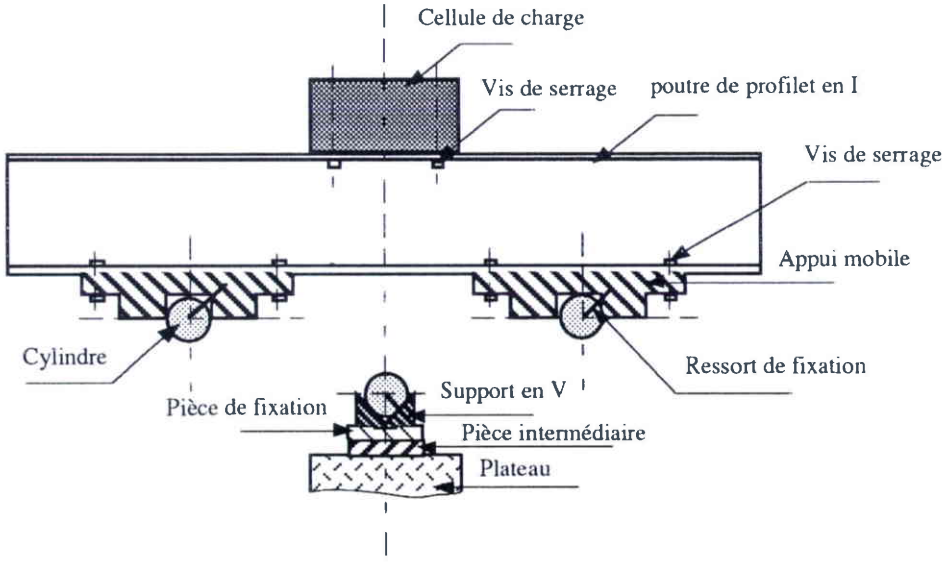


Figure II.2. Schéma du dispositif de fissuration sur plaques.

II.2.2 Éprouvette-Plaque

Notre choix s'est porté sur des plaques épaisses, possédant un défaut de surface, les dimensions et la géométrie sont reportées dans la figure (II.3). La fissure est amorcée à partir d'un défaut mécanique, central de forme semi-elliptique (figure II.3 et photo II.2) usiné par électroérosion avec un rayon à fond d'entaille $\rho = 0{,}2$ mm.

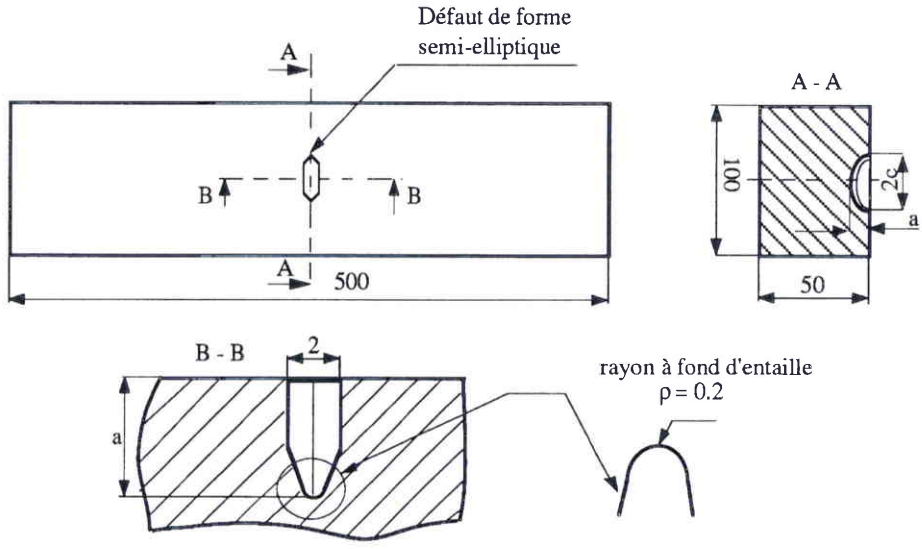


Figure II.3. Dimensions de l'éprouvette plaque.

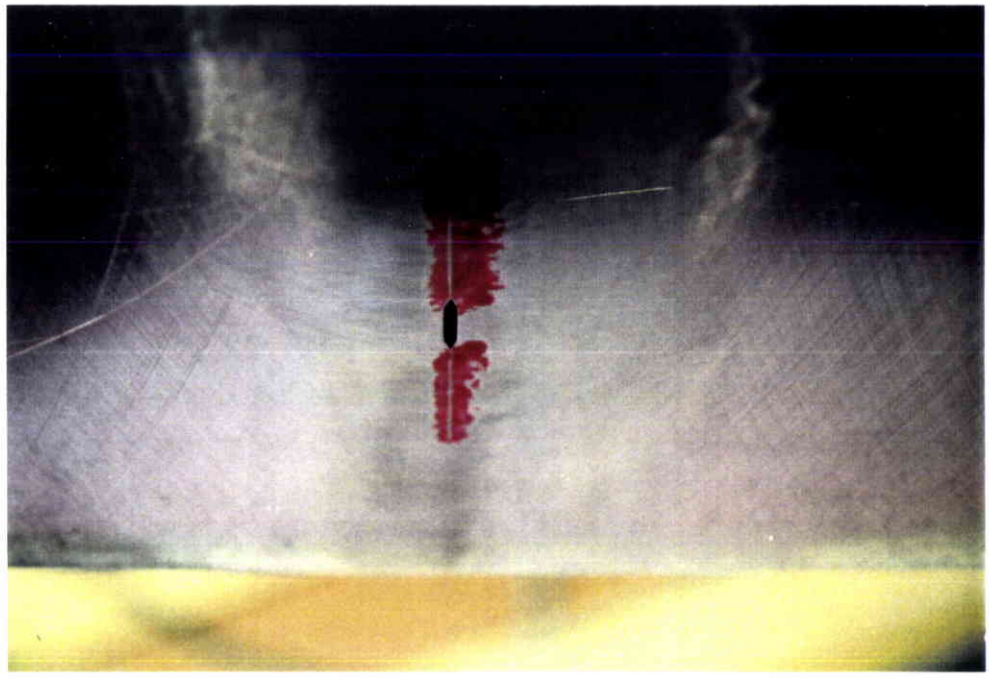


Photo II.2. Éprouvette plaque fissurée.

II.2.3 Conditions d'essais sur plaques

Les essais ont été conduits sous un chargement de flexion cyclique de forme sinusoïdale à l'air ambiant, dont les conditions sont résumées dans le tableau (II.3). Douze essais ont été conduits, quatre pour chaque rapport de charge R.

N° de série des essais	rapport de charge R	charge maximale appliquée [KN]	variation de la contrainte de flexion appliquée $\Delta\sigma_f$[MPa]	distance entre appuis	fréquence d'essai [Hz]
1	0,1	90	234	480	20
2	0,3	90	182	480	20
3	0,5	90	130	480	20

Tableau II.3. Conditions d'essais sur plaques.

II.2.4. Suivi de la propagation de la fissure

Tous nos essais ont été effectués à amplitude de charge maximale constante. Avant de mesurer les premières valeurs de la longueur de fissures, celles-ci ont été amorcées sur 1 où 2 mm de part et d'autre de l'entaille mécanique centrale. Cet amorçage s'est effectué sur le même dispositif de fissuration et dans les mêmes conditions de chargement. Ensuite, le suivi de la progression de la fissure sur plaques a été assuré par un marquage mécanique en cours d'essai. Pour pouvoir bien suivre la progression de la fissure en surface et réaliser un bon marquage mécanique en profondeur, une instrumentation par jauges de déformation et de fissuration a été adoptée. Pour cela, une préparation de la surface de collage est imposée.

II.2.4.1 Jauges de déformation

Cette instrumentation nous a permis de détecter l'amorçage de la fissure de fatigue en profondeur et en surface (figure II.4). Les jauges sont reliées à un oscilloscope numérique à mémoire "NICOLET" par l'intermédiaire d'un pont d'extensomètrie. Les signaux des jauges sont directement visualisés sur l'oscilloscope et enregistrés sur une disquette. L'amorçage de la fissure correspond à une augmentation de l'amplitude du signal (jauge collée dans la direction de la longueur du défaut à une distance de 5 mm) et à la diminution du signal (jauge collée juste derrière le défaut), cette diminution correspond à ± 10% du signal initial.

II.2.4.2 Jauge de fissuration

Cette méthode nous a assurée un suivi de la progression de la fissure de fatigue en surface (figure II.4). La jauge a été collée de façon que le premier brin est situé à une distance de 2 ou 3 mm de la pointe du défaut dans la direction de la propagation de la fissure.

Elle est shuntée à une résistance de 119 OHMS et reliée à une table traçante sensible au milliohm par l'intermédiaire d'un pont d'extensomètrie. Elle nous a permis de réaliser un marquage mécanique correct et régulier.

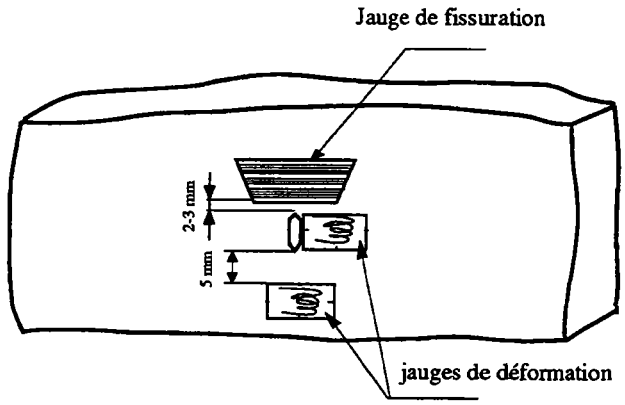


Figure II.4. Position de collage des jauges pour détecter l'amorçage et l'évolution de la propagation de la fissure de fatigue sur plaques.

II.2.4.3 Méthode de marquage mécanique

Le marquage mécanique nous a permis d'obtenir à la fin de l'essai et après rupture des éprouvettes un faciès de rupture caractérisé par des lignes frontales. Ces lignes peuvent être obtenues en appliquant à intervalles réguliers au cours de l'essai de fissuration, un changement de rapport de charge R. On pourra vérifier que ce changement de rapport de charge, pendant quelques milliers de cycles, n'introduit pas de phénomènes parasites sur la fissuration, tel un ralentissement par effet de surcharge. Le tableau (II.4) donne les différents rapports de charge appliqués au cours du marquage mécanique sur plaque.

	rapport de charge R		
fissuration	0,1	0,3	0,5
marquage mécanique	0,5	0,7	0,7

Tableau II.4. différents rapports de charge utilisés au cours du marquage mécanique sur plaques.

II.2.5. Mesure de la taille de la fissure au cours de la propagation sur plaques

Deux méthodes de mesure ont été adoptées, l'une immédiate, au cours de l'essai à l'aide de la jauge de fissuration et l'autre différée à l'aide du marquage mécanique du faciès de rupture.

II.2.5.1 Mesure directe

La jauge de fissuration nous a permis d'obtenir au cours de l'essai une courbe à paliers qui indique, en fonction du temps le nombre de brins rompus. Ces brins sont distants de 1 mm l'un de l'autre (figure II.5). Chaque saut correspond à une rupture d'un brin de jauge ce qui entraîne une augmentation successive de la résistance de celle-ci de 1/25 OHMS.

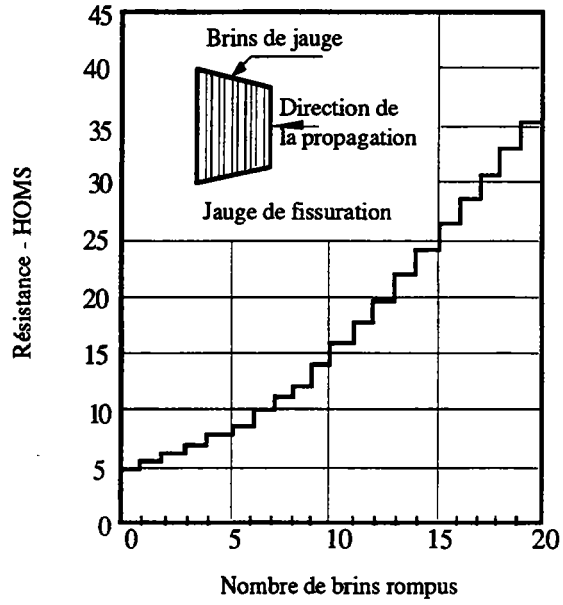


Figure II.5. Schéma représentatif de la variation de la résistance avec la rupture des brins.

II.2.5.2 Mesure indirecte

Après rupture finale de l'éprouvette, des photos de faciès de rupture ont été prises avec un agrandissement de 5 fois. L'évolution de la taille de la fissure suivant les deux directions de la propagation (épaisseur et surface) en fonction du nombre de cycles a été mesurée directement sur les photographies.

II.3. Fissuration sur tubes sous pression interne

Pour réaliser les essais sur tubes sous pression interne, nous avons été amenés à concevoir et réaliser un banc d'essai.

II.3.1 Description générale

La mise sous pression interne du tube se fait par une unité autonome, commandée par une électronique située dans l'armoire de commande "INSTRON" et utilise le groupe hydraulique existant de la machine (figure II.6). Le banc d'essai est constitué par :

1) un multiplicateur de pression commandé par une servo-valve, dont le rapport de 3,2 permet, à partir de la pression du réseau (210 bars), d'obtenir une charge nécessaire à l'essai,

2) un capteur de déplacement (LVDT) monté sur le multiplicateur de pression, permettant de mesurer la course du piston, qui est de 60 mm.

3) un capteur de pression monté sur le flasque de sortie du tube-éprouvette, nous indique la valeur de la pression atteinte dans le tube au cours de l'essai. Sa gamme de mesure est comprise entre 0 et 700 bars,

4) une servo-valve pilotée par l'armoire de commande, par l'intermédiaire du capteur de pression,

5) un tube qui sert comme éprouvette d'essai,

6) un chariot mobile, qui sert à porter l'ensemble du dispositif d'essai, et une coque de protection.

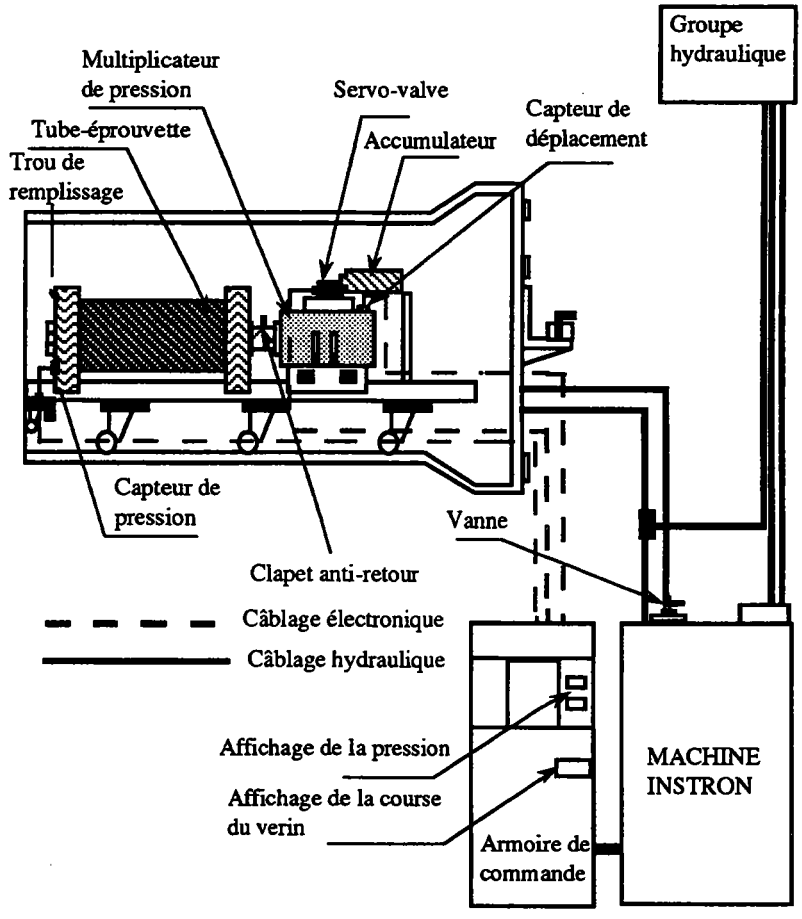


Figure II.6. Schéma de l'installation du banc d'essais sous pression interne.

II.3.2 Tube-éprouvette

Le tube-éprouvette représente l'enveloppe du montage (photo II.3 et figure II.7). Il est obturé de part et d'autre par des flasques dont l'étanchéité est assurée par des joints dynamiques.

Le multiplicateur de pression ne déplaçant qu'un volume de 75 ml d'huile, il nous a fallu installer des noyaux de 194 mm de diamètre à l'intérieur du tube-éprouvette pour limiter la quantité d'huile à 1550 ml, (photo II.4).

Les tirants, disposés autour du tube, reprennent les efforts longitudinaux transmis par les flasques afin de limiter les contraintes axiales qui pourraient perturber l'essai.

Le capteur de pression et le passe-fils sont fixés sur le flasque de sortie par l'intermédiaire d'un adaptateur. Le passe-fils est un dispositif permettant le câblage d'une instrumentation dans une enceinte sous pression. Dans notre montage le passe-fils permet le passage de 12 fils.

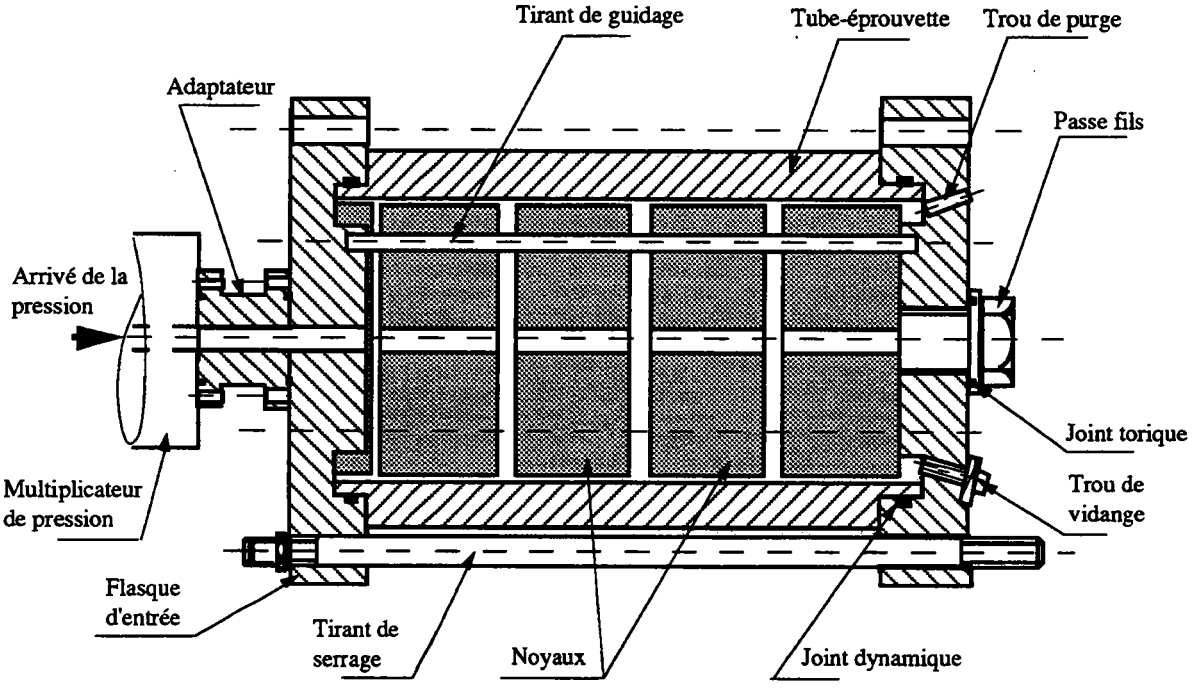


Figure II.7. Schéma du montage tube-éprouvete.

II.3.3 Remplissage du tube-éprouvette

Le remplissage d'huile du tube-éprouvette doit être fait très soigneusement. En effet la présence d'air dans le tube empêcherait de réaliser les essais à la pression désirée. Ce remplissage s'effectue de la manière suivante :

- Après la mise en place du tube, on incline l'ensemble du banc d'essai, on ôte la vis du trou de purge située sur le flasque de sortie (figure II.7), on vérifié que ce point est le plus haut du cylindre.
- On place le vérin du multiplicateur en fond de chambre (position reculée +30 mm).
- Le remplissage est effectué par gravité jusqu'à débordement d'huile par le trou de purge. Lorsque le tube est plein (environ 1,7l d'huile), on laisse ouvert le trou de purge pendant quelques heures, ceci afin de désaérer l'huile. A la fin, il faudra parfaire le remplissage à la seringue.

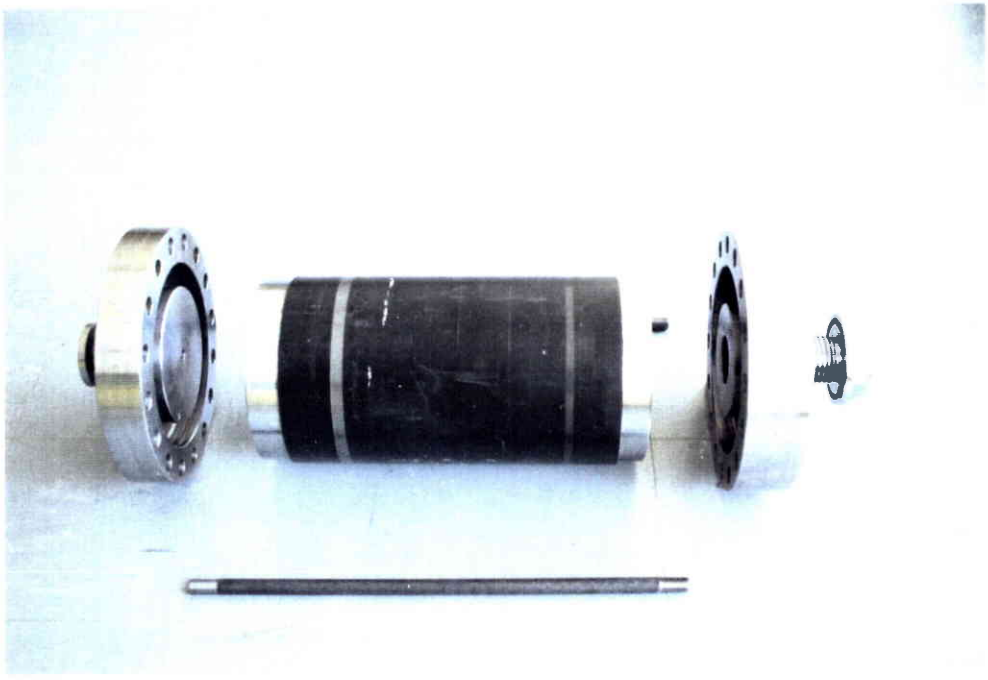


Photo II.3. Tube-éprouvette.

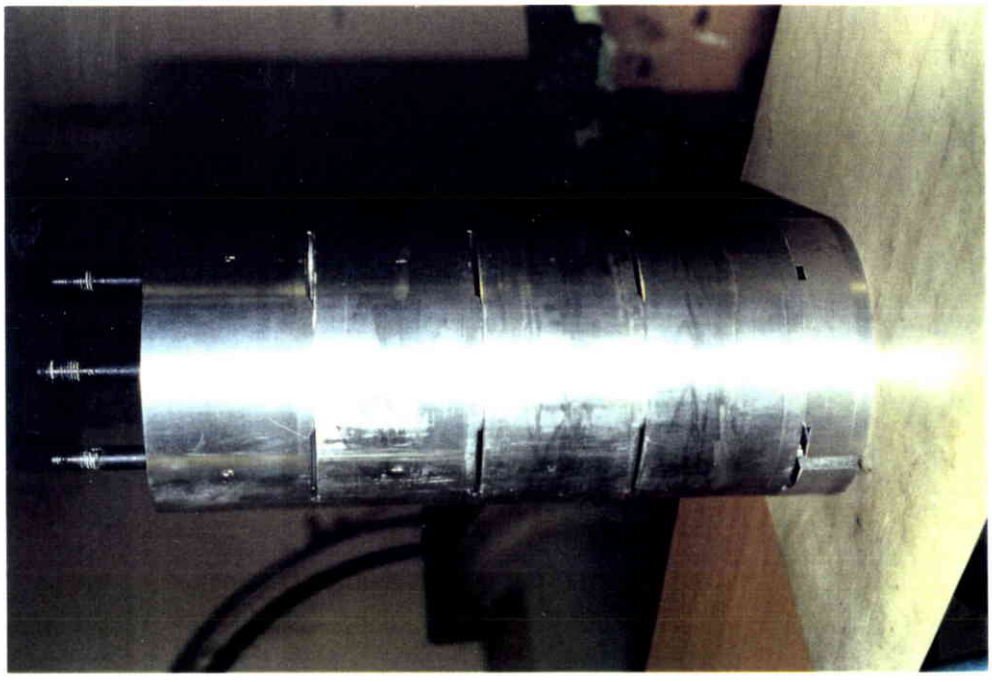


photo II.4 Noyaux.

II.3.4 Réglage des limites de position

La variation de position du vérin détermine la pression instantanée dans le tube-éprouvette. L'essai est réglé en pression, ceci implique un déplacement non contrôlé du piston, jusqu'à l'obtention de la pression de consigne. En cas de fuite d'huile au niveau de l'éprouvette, la pression voulue ne peut être atteinte, le piston se retrouve donc en butée en fond de chambre. La course utile du vérin lors des essais est maintenue dans l'intervalle de -28 à +28 mm.

II.3.5 Dispositif de sécurité

Au vu de la pression atteinte lors des essais (450 bars), une coquille de protection est mise en place autour du dispositif (tube-éprouvette et multiplicateur) afin d'éviter des projections d'huile éventuelles. Ceci implique un banc d'essai mobile pour permettre des manipulations comme le changement du tube en fin d'essai. Ce dispositif de protection est schématisé dans la figure (II.8).

La coquille de protection est en fonte à graphite sphéroïdale doublée de béton, (photo II.5). Elle est obturée d'un côté par une plaque d'acier de 10 mm d'épaisseur fixée par 8 vis M10-50. Dans cette plaque arrière est usiné un trou de diamètre 100 mm permettant le passage des flexibles et câbles. A l'autre extrémité de la coquille, deux demi-portes en tôle de 6 mm d'épaisseur ont été montées.

Le chariot sert de support au tube-éprouvette, au multiplicateur de pression et à l'accumulateur. Il est réalisé en construction mécano-soudée à partir de profilés en U et en L. De part sa forme en U, le chariot sert de réservoir en cas de fuite d'huile. Un bouchon permet la vidange. Les deux flasques du tube-éprouvette reposent sur le U. Le multiplicateur est fixé sur des équerres, réglables en hauteur, afin de réaliser l'étanchéité et l'alignement avec l'adaptateur du tube.

Quatre roulettes de banc supportent le chariot. Quatre autres roulettes guident le dispositif à l'intérieur de la coquille et le maintiennent. Deux pieds télescopiques situés à l'avant équilibrent le chariot en position sortie (changement de tube par exemple). Enfin, un treuil fixé sur la plaque arrière permet de faire rentrer le chariot dans la coquille.

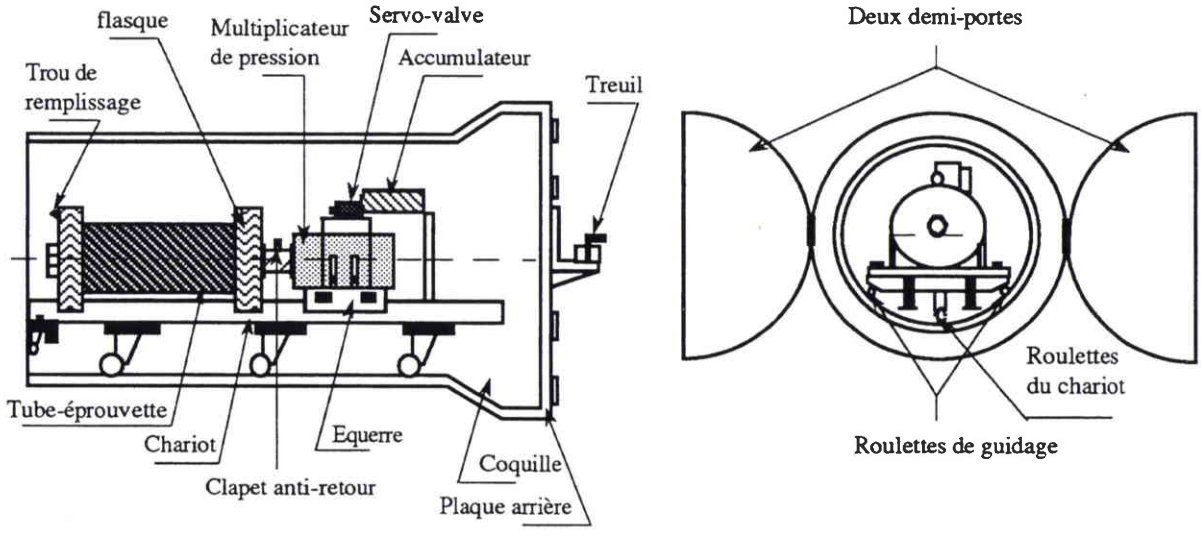


Figure II.8. Schéma de l'ensemble du dispositif de fissuration et de la coquille de protection.

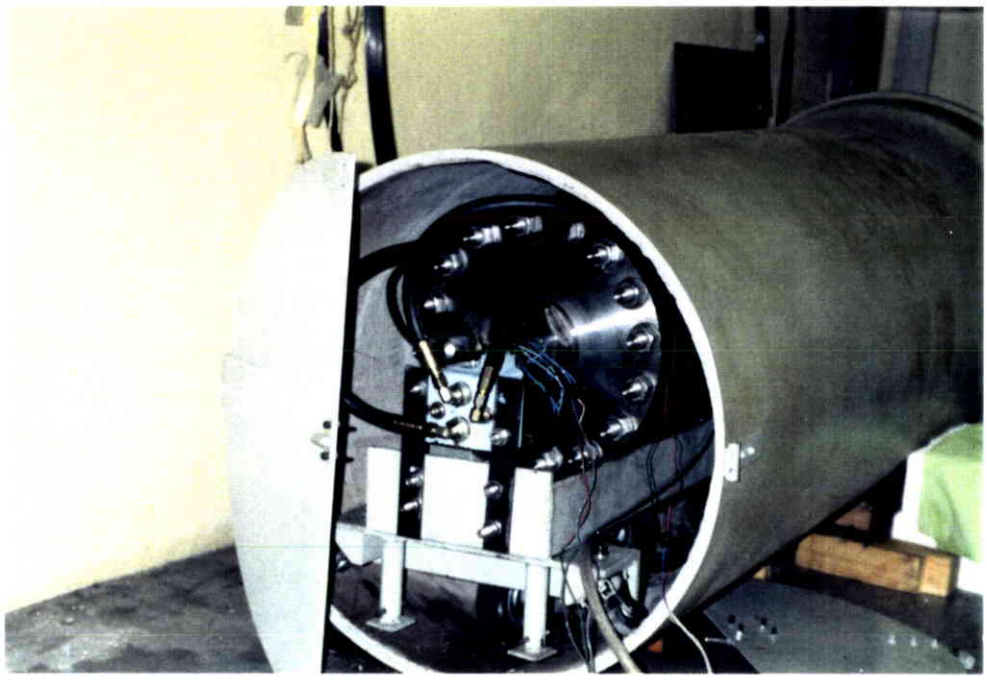


Photo II.5 . Ensemble de la coque de protection et banc d'essais de la fissuration en pression interne.

II.3.6 Amorçage de la fissure de fatigue sur tubes

La fissure est amorcée à partir d'un défaut de surface situé sur la paroi interne du tube en son milieu, de même forme que dans le cas des plaques. Les dimensions sont données par la figure (II.9).

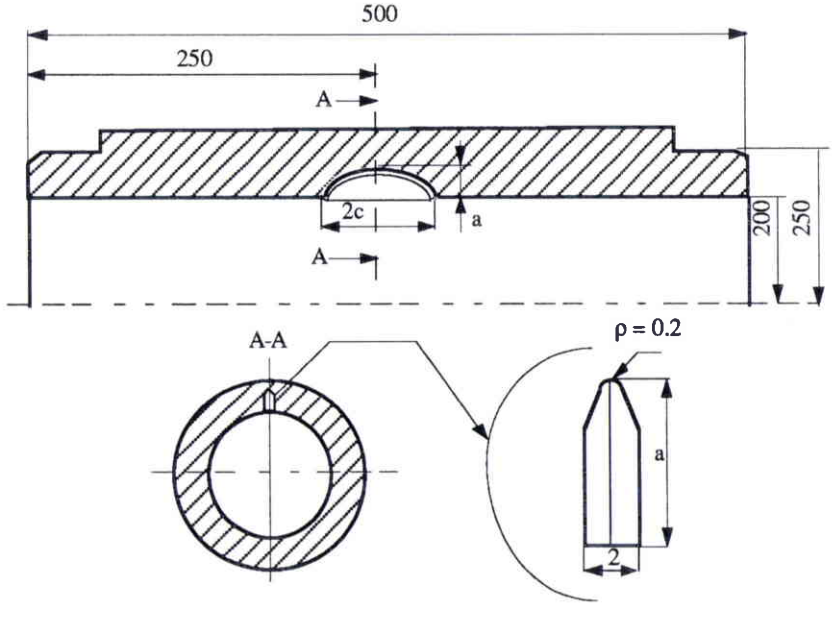
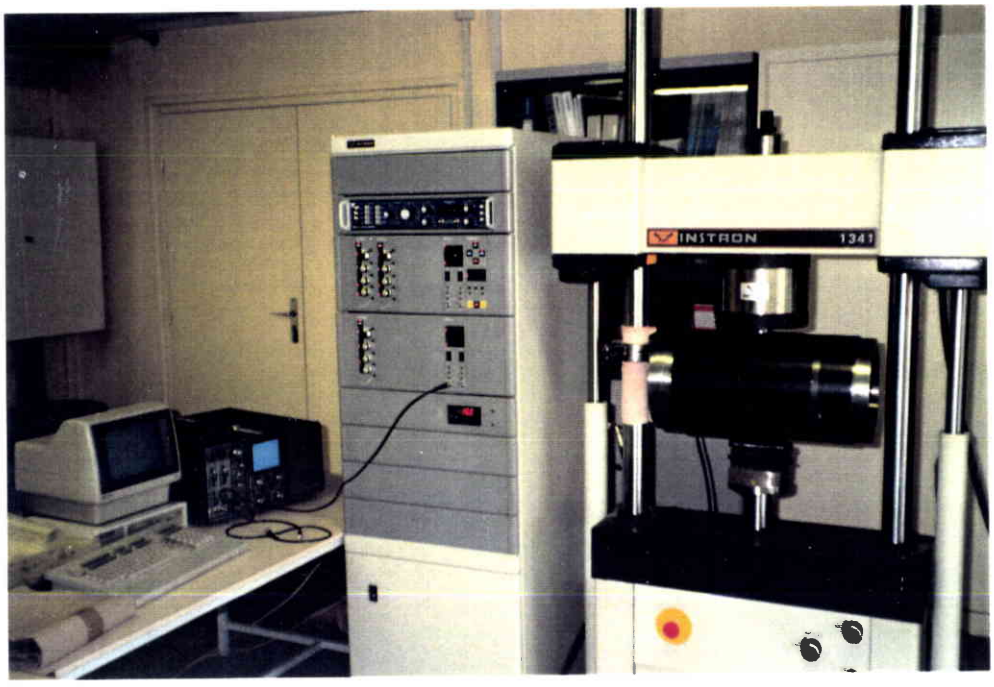


Figure II.9. Dimensions du tube-éprouvette.

l'amorçage a été effectué sur 2 ou 3 mm de part et d'autre de l'entaille. Il a été réalisé sur une machine "INSTRON" de capacité 250KN (photo II.6). Les conditions d'essai sont résumées dans le tableau (II.5).



PhotoII.6. Dispositif d'amorçage de la fissure de fatigue sur tube.

rapport de charge R	fréquence d'essai [Hz]	contrainte appliquée [MPa]	mode de sollicitation	forme du signal
0,1	5	350	flexion 3 points	sinusoïdal à l'air ambiant

Tableau II.5. Conditions d'essai de l'amorçage de la fissure de fatigue sur le tube.

II.3.7 Conditions d'essai de fissuration sur tubes

Les essais ont été conduits sous pression interne cyclique de forme sinusoïdale dans un milieu visqueux dont les conditions sont résumées dans le tableau (II.6). Deux essais ont été réalisés.

rapport de charge R	pression maximale appliquée [bars]	amplitude de la contrainte circonférentielle dans la paroi interne $\Delta\sigma_{\theta\theta}$ ($R = R_{int}$) [MPa]	fréquence d'essai [Hz]
0,3	450	159,6	0,5

Tableau II.6. Conditions d'essai de fissuration sur tubes.

II.3.8 Suivi de la propagation de la fissure sur tubes

Nos essais ont été effectués avec une pression maximale constante. Le suivi de la progression de la fissure a été assuré par un marquage mécanique en cours d'essai afin de pouvoir bien suivre la progression de la fissure en surface et réaliser un bon marquage en profondeur, nous avons utilisé la même instrumentation que pour les plaques (figure II.10). Le marquage mécanique a été réalisé avec un changement du rapport de charge R de 0,3 à 0,7.

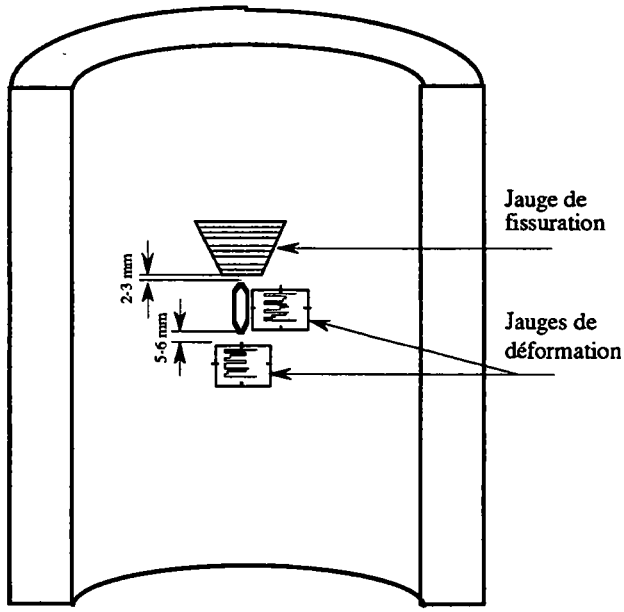


Photo II.10. Position de collage des jauges pour détecter l'amorçage et l'évolution de la propagation de la fissure de fatigue sur tube.

II.3.9 Mesure de la taille de la fissure au cours de la propagation **sur tubes**

Les mêmes méthodes de mesures que sur les plaques ont été adoptées sur tubes. Après rupture finale la longueur des demi-axes de fissure a été mesurée sur photographie representant le faciès de fissuration marqué par des lignes frontales.

II.4. Facteur d'intensité de contraintes en trois dimensions

Nous avons calculé le facteur d'intensité de contraintes relatifs à nos expériences avec trois méthodes :

- la première basée sur la méthode aux éléments finis,
- la seconde utilisant l'expression analytique de Newman & Raju **[35, 36, 43]**,
- la troisième utilisant les équations de Cruse et Besuner **[74]**.

Les deux premières méthodes permettent de calculer le facteur d'intensité de contraintes local et la troisième méthode donne le facteur d'intensité de contraintes semi-local.

II.4.1 Calcul du facteur d'intensité de contraintes par la méthode aux éléments finis

L'analyse aux éléments finis en trois dimensions est prise en compte pour résoudre le problème d'un défaut semi-elliptique en surface. Plus précisément, le défaut semi-elliptique de profondeur maximale a et une demi-largeur c est supposé être situé sur la ligne centrale d'une structure soumise à :

- un moment de flexion M dans le cas de la plaque,
- une pression interne dans le cas du tube.

Des éléments finis spéciaux ont été développés pour obtenir une singularité de contraintes et de déformations au voisinage de fissure en racine carrée de la distance **[93, 94]**. Dans le cas de notre calcul, une vingtaine de nœuds disposés dans un élément isoparamétrique à trois dimensions ont été utilisés et la singularité déjà mentionnée est modélisée par le déplacement du nœud central en un lieu situé à une distance du 1/4 de maille près du front de fissure.

Grâce à la symétrie, seul le quart (le huitième)de la structure plaque (tube) fissurée a été modélisé pour cette analyse.

Pour notre cas le rapport a/c est compris entre 0,64 et 0,80 (quasi constant) alors que le rapport a/B varie de 0,07 à 0,31 dans le cas des plaques (entre 0,27 et 0,70 dans le cas des tubes). Pour chaque configuration, les champs de contraintes et de déplacements sont calculés et la variation du facteur d'intensité de contraintes est déterminée.

Le maillage par éléments finis est affiné de sorte que les résultats de l'analyse de champ de contraintes convergent vers des valeurs asymptotiques. Un nombre total de 3116 nœuds et de 720 éléments dans le cas des plaques (19032 nœuds et 4056 éléments dans le cas des tubes) satisfaisant cette convergence. Les modélisations sur le plan X = 0, dans le cas des plaques et des tubes, sont montrées successivement par les figures (II.11 et II.12). Le comportement singulier de la contrainte à la pointe du front de fissure peut être obtenu par le biais du nœud qui se trouve au quart de l'élément (figures II.11c et II.12c), **[95, 96]**. La valeur du rapport de la hauteur (h) de l'élément possédant un nœud au quart et la profondeur maximale du défaut (a) affecte l'analyse des contraintes pour différentes géométries et conditions de chargement lorsqu'il devient inférieur à 0,1 ou supérieur 0,2 mm **[97]**. Ainsi le rapport (h/a) est supposé compris entre 0,15 et 0,20 dans le cas des plaques (0,10 et 0,15 dans le cas des tubes).

Les résultats présentés ultérieurement sont obtenus pour un moment de flexion maximal M = 10^4 Nm avec trois rapports de charge dans le cas de la plaque et une pression de 450 bars avec un seul rapport de charge dans le cas du tube.

Lorsque les champs de contraintes et de déplacements sont déterminés, le calcul du facteur d'intensité de contraintes peut être déterminé en tout point le long du front de fissure selon la relation :

$$u_i = K_I . \sqrt{r} . g_i(\theta) \qquad \text{(II.3)}$$

Avec u_i : déplacement le long du front de fissure
$g_i(\theta)$: facteur de correction non dimensionnel
r : distance polaire

II.4.2 Calcul du facteur d'intensité de contraintes par la solution de Newman & Raju

Le facteur d'intensité de contraintes a été calculé à partir de l'équation développée par Newman et Raju **[35, 36 et 43]** (équation I.31 pour la pression interne cas des tubes et I.39 pour la flexion cas des plaques). Cette dernière a été utilisée par plusieurs chercheurs pour prédire l'accroissement de fissures semi-elliptiques en fatigue notamment sous un chargement cyclique de flexion (équation I.39).

II.4.3 Calcul du facteur d'intensité de contraintes semi-local

En utilisant la valeur du facteur d'intensité de contraintes local et les équations de Cruse & Besuner **[74]** nous avons calculé le facteur d'intensité de contraintes semi-local en surface et au point le plus profond à partir du système d'équations (I.55 et I.56).

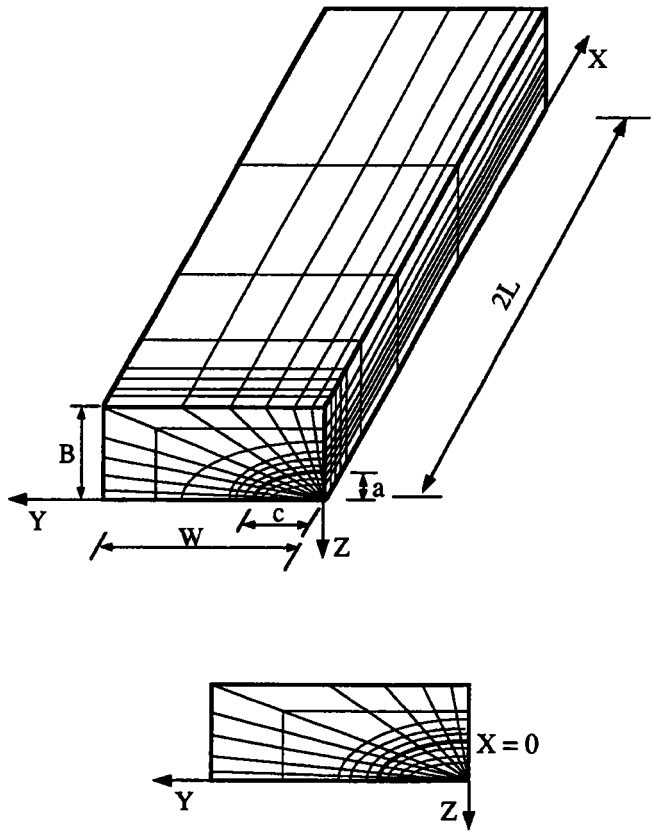


Figure II.11a. Maillage par éléments finis de la géométrie plaque.

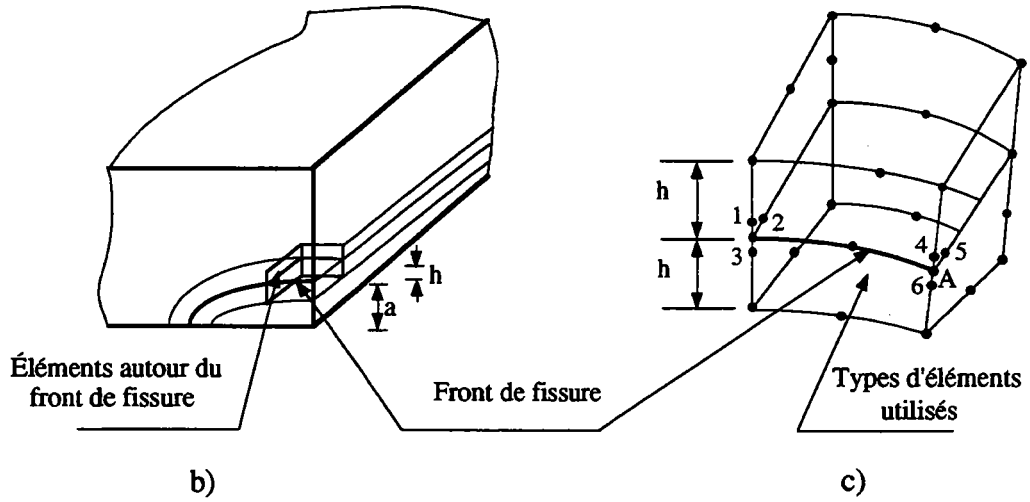


Figure II.11 (b) Éléments autour du front de fissure ; (c) les nœuds centraux situés à une position d'un 1/4 de la maille du front de fissure (nœuds 1 à 6) et appartiennent à deux éléments du front de fissure.

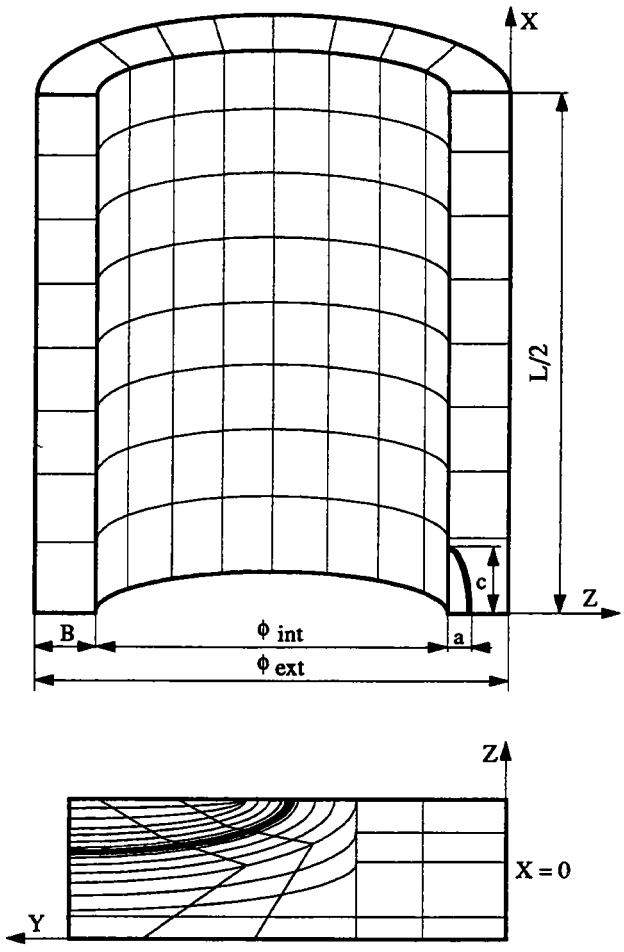
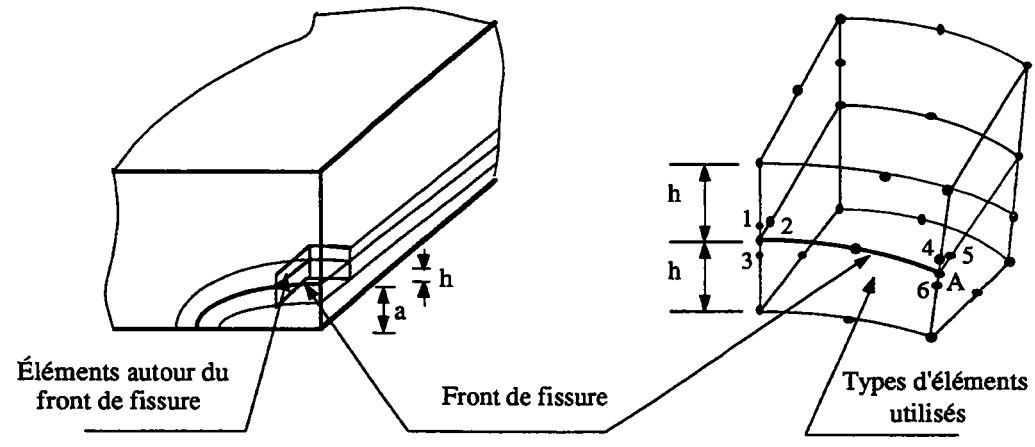


Figure II.12a. Maillage par éléments finis de la géométrie tube.



b) c)

Figure II.12. (b) Éléments autour du front de fissure ; (c) les nœuds centraux situés à une position d'un 1/4 de la maille du front de fissure (nœuds 1 à 6) et appartiennent à deux éléments du front de fissure.

II.5. Dépouillement des résultats

II.5.1 Variation du facteur d'intensité de contraintes

Nous avons particulièrement étudié l'influence de l'angle d'ellipticité sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes tout le long du front de fissuration. Certains résultats obtenus ont été comparés avec d'autres solutions notamment celle de Newman & Raju **[35, 36 et 43]** qui depuis 1978 dans le cas des plaques (1980 dans le cas du tube sous pression interne) adoptées par la majorité des chercheurs sous sa présentation analytique en raison de sa simplicité mais aussi par habitude. Ces derniers sont présentés sous forme de courbes donnant la variation du facteur d'intensité de contraintes en fonction de la coordonnée angulaire de l'ellipse ϕ pour différents rapports a/c et a/B.

II.5.2 Loi de fissuration en trois dimensions

Les données ainsi acquises permettent de tracer la loi de fissuration da/dN = $f(\Delta K_{I,A})$ et dc/dN = $f(\Delta K_{I,C})$ La méthode utilisée est celle dite de la première différence centrale, c'est une méthode de dépouillement avec lissage.

Cette méthode consiste à faire passer une courbe du deuxième degré par un point central (i) et deux points adjacents (i-1) et (i+1). Les pentes da/dN et dc/dN sont calculées au point (i), à partir de la dérivée de la fonction du second degré **[98]**. On utilise la valeur a_i pour le calcul de $\Delta K_{I,A}$ et $\Delta K_{I,C}$, soit :

$$h = N_i - N_{i+1} \tag{II.4}$$

et :

$$\alpha.h = N_{i+1} - N_i \tag{II.5}$$

d'où :

$$\frac{da}{dN}(\text{au point } a_i) = \frac{a_{i+1} - a_i\left(1-\alpha^2\right) - \alpha^2 . a_{i-1}}{\alpha . (1+\alpha) . h} \tag{II.6}$$

et :

$$\frac{dc}{dN}(\text{au point } c_i) = \frac{c_{i+1} - c_i\left(1-\alpha^2\right) - \alpha^2 . c_{i-1}}{\alpha . (1+\alpha) . h} \tag{II.7}$$

III. RÉSULTATS ET DISCUSSION

Dans le cas des plaques épaisses, la valeur du facteur de correction de géométrie $F(\phi)$ associée au facteur d'intensité de contraintes $K_I(\phi)$ a été calculée pour de nombreux cas de géométrie, Smith & Alavi **[37]**, Smith & Sorensen **[38]**, Kobayashi & Moss **[39]**, Carpinteri **[40, 41]** ont utilisé la méthode itérative, Carpinteri **[42]**, Raju & Newman **[35 et 36]** une méthode aux éléments finis, Ruiz & Epstein **[45]** ont eu recours à une méthode expérimentale, la photo-élasticimétrie. En partant de ces données recueillies dans la littérature, il paraît plausible de remarquer que :

1) la divergence entre les différents résultats est faible pour les valeurs du rapport $a/B < 0,2$ mais elle peut devenir importante quand ce dernier augmente. Ainsi pour une valeur du rapport $a/B = 0,6$ la différence peut atteindre 80%,
2) le facteur d'intensité de contraintes n'est pas constant tout au long du front de fissuration,
3) des divergences existent entre la localisation du point où la valeur du facteur d'intensité de contraintes est maximale. Pour certains auteurs cette valeur se trouve en surface (point C), pour d'autre au point le plus profond (point A) ou encore entre A et C,
4) une quasi absence de résultats en surface, tous les résultats sont présentés au point le plus profond.

Dans le cas des tubes sous pression interne, il n'existe pas de résultats expérimentaux publiés. Les résultats dont nous avons eu connaissance portent sur la détermination du facteur de correction géométrique à partir des solutions numériques ou analytiques. Différentes méthodes relatives à différentes conditions a/B, a/c et B/R_{int} ont été adoptées, Heliot & Labbens **[20]** ont utilisé l'équation intégrale bornée, Kobayashi & al **[27 et 28]** les fonctions de poids, Newman & Raju **[31 et 32]** et McGowan & Raymund **[19]** ont eu recours à la méthode aux éléments finis. Dans tous ces cas et en général on constate que :

1) le facteur d'intensité de contraintes est toujours maximal en surface ($\phi = 90°$),
2) les divergences entre les résultats sont importantes notamment en surface,
3) les résultats publiés n'ont pas été vérifiés expérimentalement.

Compte tenu des divergences citées précédemment, nous avons été amenés à réexaminer le problème à l'aide d'une étude beaucoup plus approfondie sur un acier 35NCDV12. Dans cette partie nous présentons les résultats :

- des essais de fissuration sur plaques sous un chargement cyclique de flexion trois points,
- des essais de fissuration cyclique sur tubes sous pression interne,
- du calcul du facteur d'intensité de contraintes local par la méthode aux éléments finis sur plaques et sur tubes,
- du calcul du facteur d'intensité de contraintes semi-local sur plaques et sur tubes.

Ces résultats seront comparés et discutés à partir :

1) de la variation du facteur d'intensité de contraintes local tout le long du front de fissuration,
2) de l'évolution du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local au point le plus profond (point A) et en surface (point C),
3) des paramètres de fissuration C et m de la loi de Paris,
4) de l'évolution du front de fissuration et du faciès de rupture obtenu expérimentalement.

III.1 Résultats des essais de fissuration sur plaques

La propagation en fatigue d'une fissure, à partir d'un défaut initial de surface présent dans une plaque épaisse chargée mécaniquement, est caractérisée par le fait que le défaut prend une forme semi-ellptique qui évolue au cours du temps.

Les résultats de fissuration sont donnés sous forme de courbes. La figure (III.1) montre l'évolution du rapport profondeur, longueur de la fissure de fatigue en fonction du nombre de cycles N pour trois rapports de charge R. Après rupture finale des éprouvettes nous avons mesuré la longueur des demi-axes de l'ellipse à partir du faciès de fissuration. La photo (III.1) montre un faciès de rupture qui présente des marquages et obtenu sur une plaque en flexion.

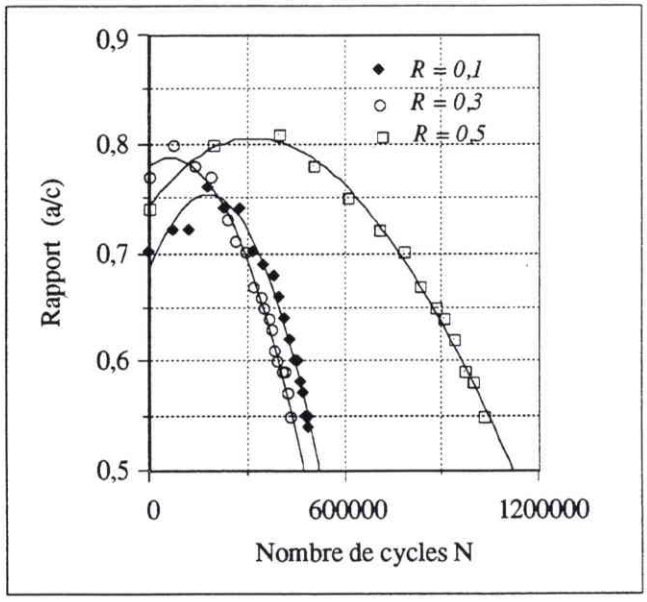


Figure III.1. Évolution du rapport (a/c) en fonction du nombre de cycles N pour trois rapports de charge R, dans le cas des plaques.

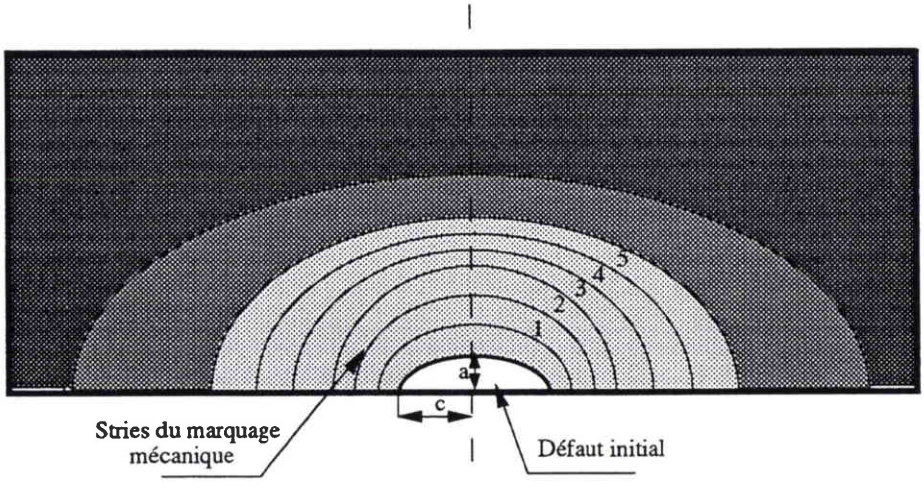


Figure III.2. Schéma représentatif du faciès de rupture après marquage sur plaques.

La figure (III.2) schématise l'évolution des deux demi-axes le l'ellipse visibles sur la photo (III1). Comme ont pu le remarquer de nombreux auteurs **[43, 73, 87 et 93]**, au cours de cette propagation les longueurs des demi-axes de l'ellipse a et c augmentent, mais le rapport a/c varie de façon complexe comme le montre la figure (III.3). Après croissance et passage par un maximum, le rapport a/c décroît linéairement en fonction de la longueur a normalisée par rapport à l'épaisseur B, et les trois courbes tendent vers une asymptote unique. Ce type d'évolution à déjà été rencontrée par d'autres auteurs, notamment Carpinteri **[99]**.

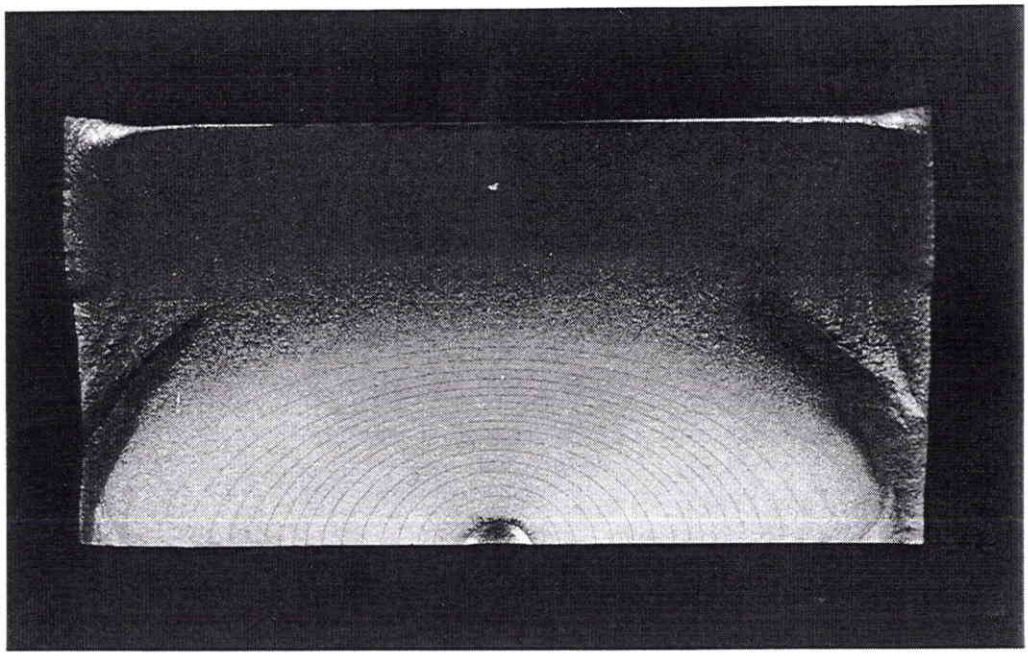


Photo III.1. Faciès de rupture après marquage d'une plaque fissurée.

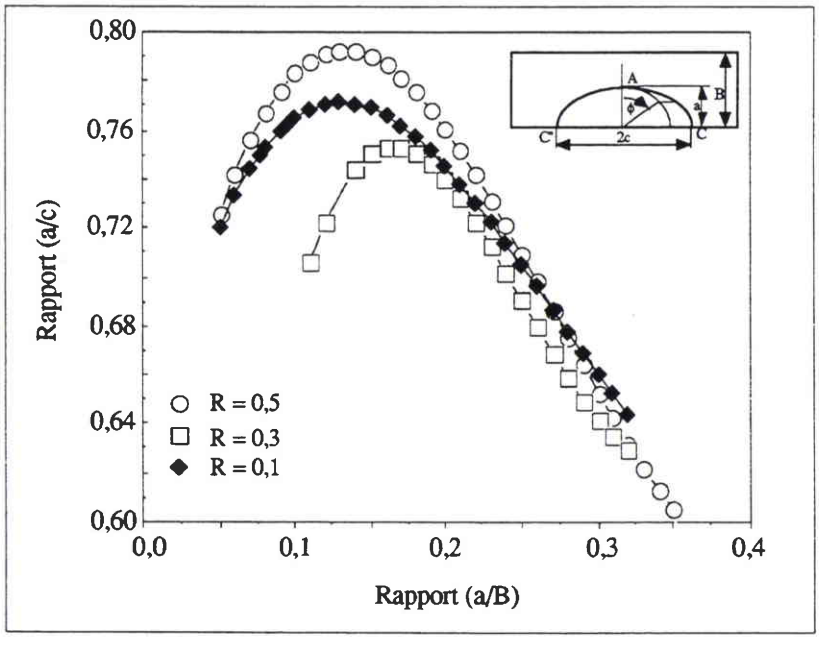


Figure III.3. Évolution de la forme de fissure dans le cas des plaques.

III.2. Résultats du calcul du facteur d'intensité de contraintes sur plaques

Nous avons calculé le facteur d'intensité de contraintes relatifs à nos expériences sur plaques avec trois méthodes :

- la première utilisant un code de calcul (NISA) aux éléments finis,
- la seconde utilisant l'expression analytique de Newman & Raju **[43]**,
- la troisième utilisant les équations de Cruse & Besuner **[74]**.

III.2.1 Calcul du F.I.C local par la méthode aux éléments finis

La configuration étudiée (plaque) est montrée sur la photo (III.2). Elle représente une composante de structure comportant un défaut de surface de forme semi-elliptique, soumise à un chargement de flexion. Les champs de contraintes et de déplacements pour chaque cas considéré sont obtenus par un calcul aux éléments finis qui englobe des éléments solides isoparamétriques en trois dimensions à 20 nœuds autour du front de fissure. Seul le quart de la structure a été modélisé. Lorsque les champs de contraintes et de déplacements sont déterminés, le calcul du facteur d'intensité de contraintes peut être déterminé localement en tous points le long du front de fissure. Certains résultats obtenus sont présentés sous forme de courbes (figures III.4a - d) qui donnent la variation du facteur d'intensité de contraintes local en fonction de la coordonnée angulaire de l'ellipse ϕ. Le calcul a été effectué pour les valeurs réelles de la géométrie du front de fissure que nous avons obtenu au cours des essais de fissuration sur plaques.

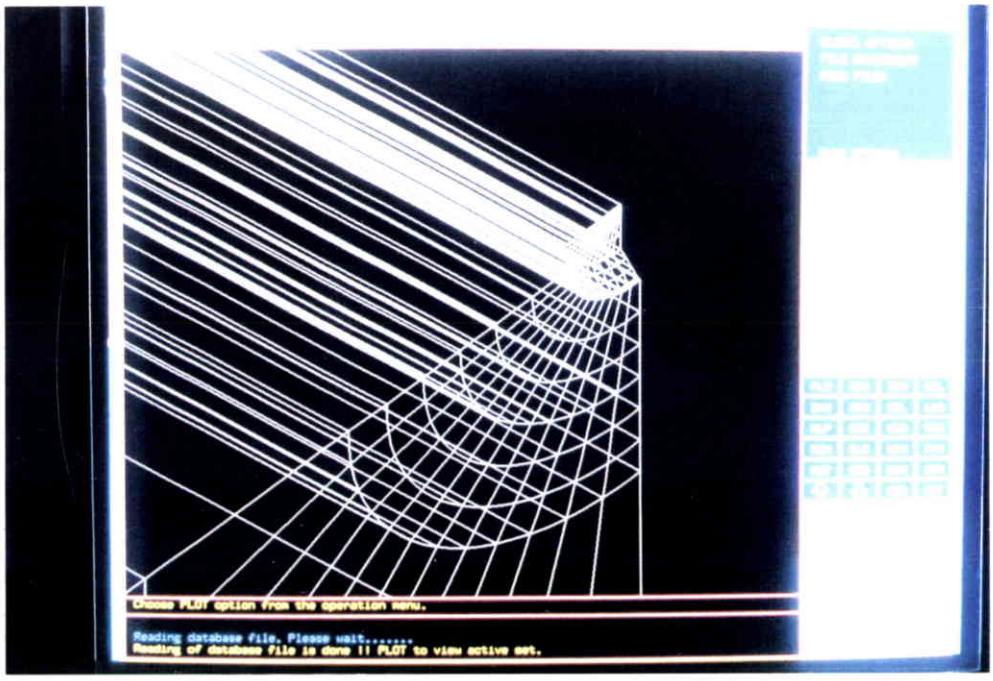


Photo III.2. Modélisation d'une plaques.

III.2.2 Calcul du F.I.C. local par l'équation de Newman & Raju

Le facteur d'intensité de contraintes a été calculé à partir de l'équation (I.39 *chapitre I.2.2.1*) développée en 1978 par Newman & Raju **[43]**. Ces résultats sont comparés avec ceux déterminés par la méthode aux éléments finis.

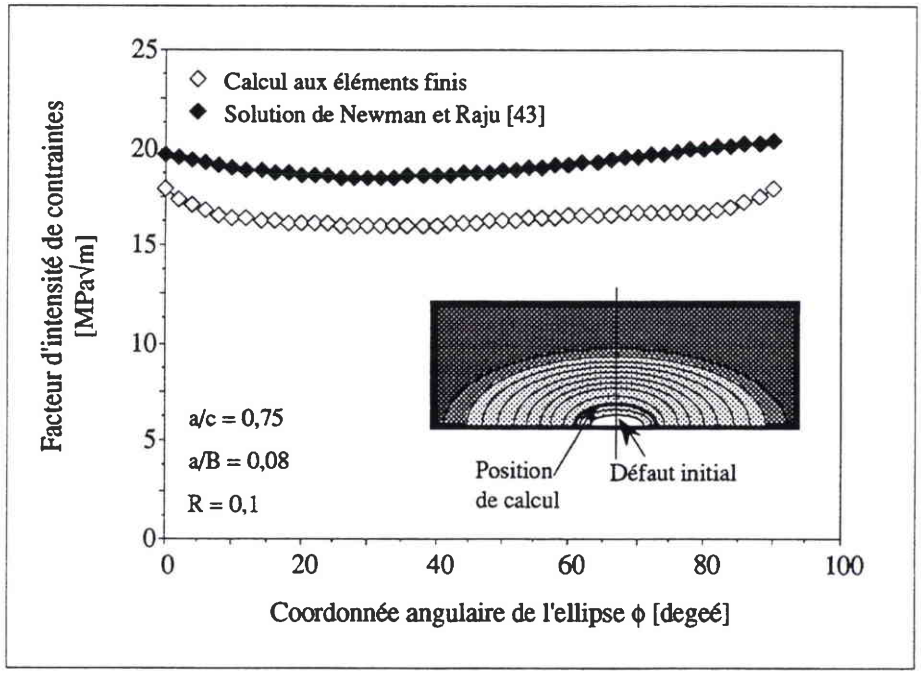


Figure III.4a. Comparaison du F.I.C. local obtenu par la solution de Newman & Raju et par la méthode aux éléments finis pour a/c = 0,75 et a/B = 0,08.

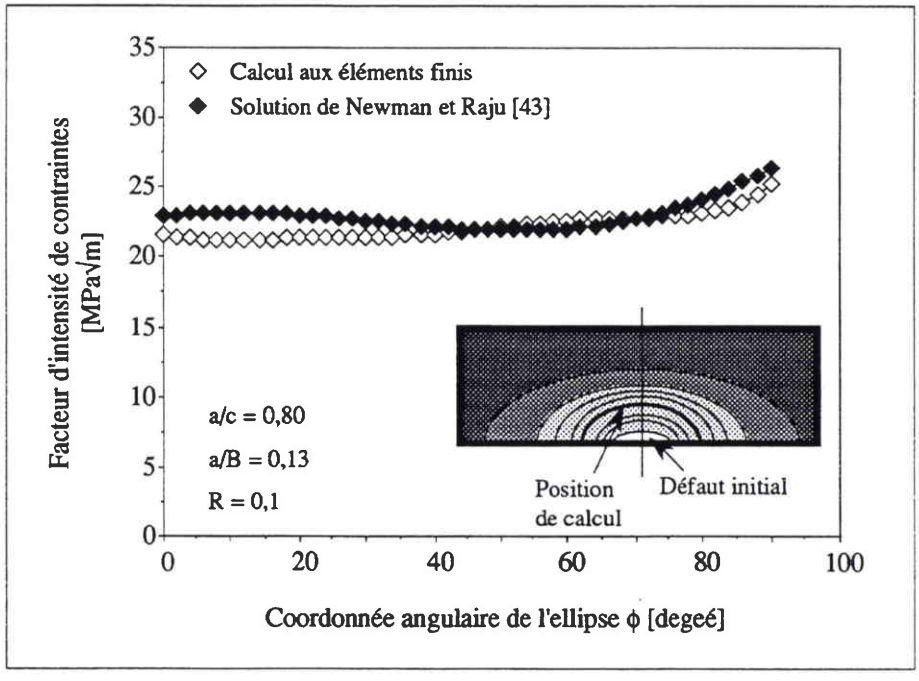


Figure III.4b. Comparaison du F.I.C. local obtenu par la solution de Newman &Raju et par la méthode aux éléments finis pour a/c = 0,80 et a/B = 0,13.

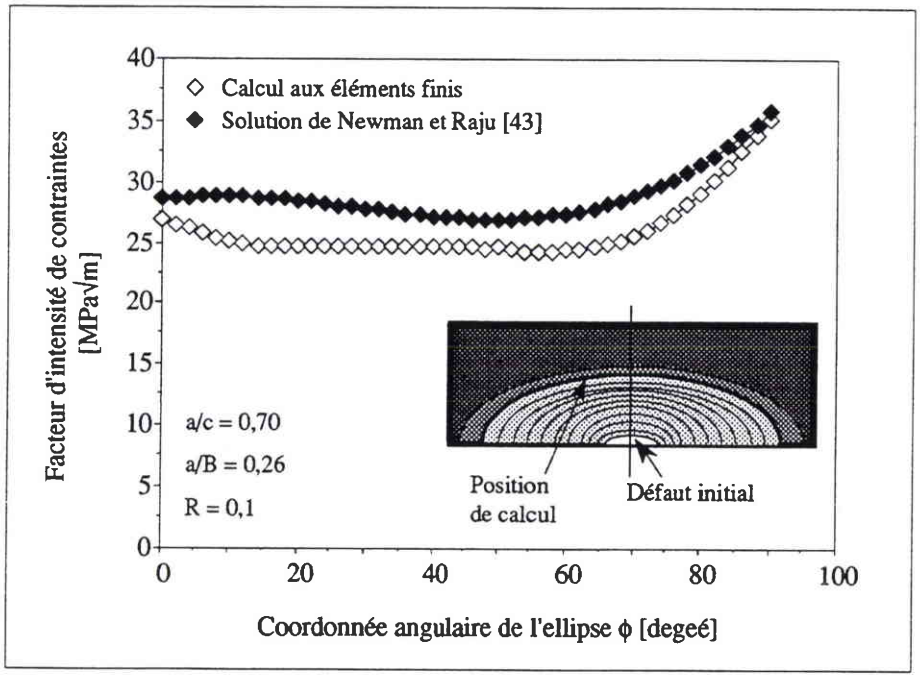


Figure III.4c. Comparaison du F.I.C. local obtenu par la solution de Newman &Raju et par la méthode aux éléments finis pour a/c = 0,7 et a/B = 0,26.

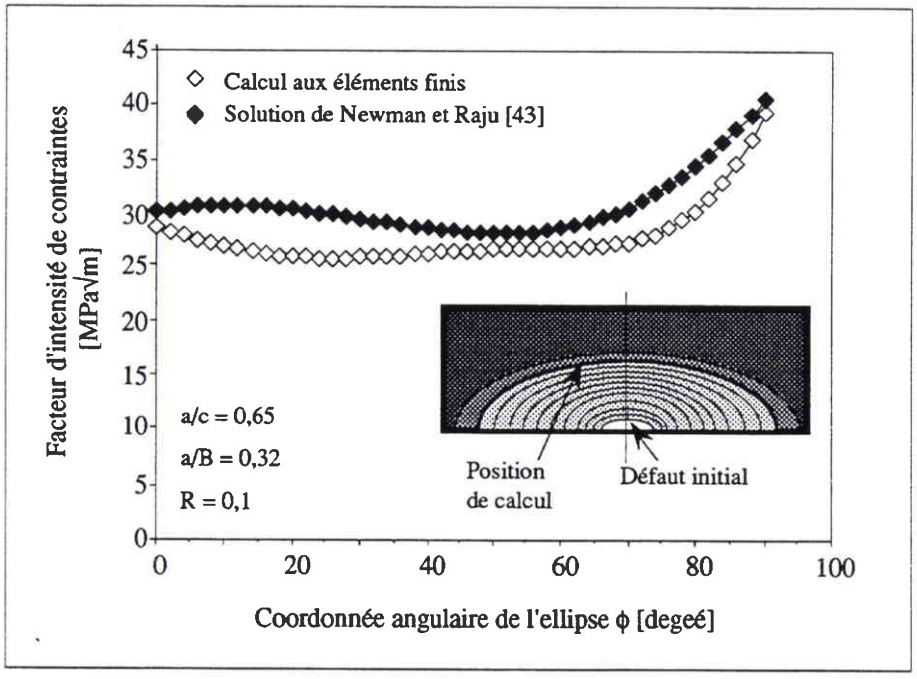


Figure III.4d. Comparaison du F.I.C. local obtenu par la solution de Newman &Raju et par la méthode aux éléments finis pour a/c = 0,65 et a/B = 0,32.

Nous avons particulièrement étudié l'influence de l'angle d'ellipticité sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes local. Nos résultats ont montré une divergence par rapport à la solution de Newman & Raju et ce notamment au point le plus profond. Elle est moins importante en surface notamment pour les fissures profondes (a/B > 0,2).

Il existe peu de résultats expérimentaux ou de calculs sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes au point où la fissure débouche (a/B = 0). La majorité des travaux en traction comme en flexion sont relatifs au point le plus profond de la fissure. Citons notamment les travaux de Shah & Kobayashi **[53 et 54]**, Heliot **[100]**, Newman **[61]**, Dufresne **[59]** et beaucoup d'autres qui donnent uniquement le facteur d'intensité de contraintes local au point le plus profond (point A, $\phi = 0°$).

Les résultats dont nous avons eu connaissance, montrent que le facteur d'intensité de contraintes n'est pas toujours maximal en surface au point C où la fissure débouche. Citons notamment Smith & Sorensen **[51]**, Ruiz & Epstein **[45]** et Carpinteri **[42]**. A l'examen de nos résultats on constate que pour :

- $0,07 \leq a/B \leq 0,10$, le facteur d'intensité de contraintes est maximal au point le plus profond ($\phi = 0°$), (figure III.4a), ceci reflète l'évolution du front de fissure obtenue dans nos expériences. Par contre l'équation de Newman & Raju donne toujours la valeur maximale du facteur d'intensité de contraintes en surface.

- $0,10 < a/B \leq 0,30$, la valeur maximale du facteur d'intensité de contraintes se trouve en surface à une position angulaire $\phi = 90°$ (figures III.4b - d). L'écart relatif entre la valeur trouvée en ce point et celle donnée par la solution de Newman & Raju est inférieur à 18%.

Sur la base de nos travaux et de ceux de nombreux auteurs comme Smith & Sorensen **[51]**, Ruiz & Epstein **[45]** et plus récemment par Carpinteri **[42]**, on peut estimer que le facteur d'intensité de contraintes n'est pas toujours maximal en surface comme l'indique la solution de Newman & Raju **[43]**, mais la position du maximum est bien liée à l'évolution complexe des rapports a/c et a/B.

III.2.3 Calcul du F.I.C. semi-local

On a moyenné les valeurs locales du facteur d'intensité de contraintes sur un incrément de front de fissure ΔS, en utilisant le système d'équation formulée par Cruse & Besuner **[74]**. Les figures (III.5 et III.6) donnent une comparaison de l'évolution du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local au point le plus profond et en surface en fonction du rapport a_i/a_0 (c_i/c_0), a_0 et c_0 sont respectivement le petit et grand demi-axe du défaut initial, a_i et c_i les différentes valeurs de ces derniers mesurées au cours de la propagation de la fissure de fatigue.

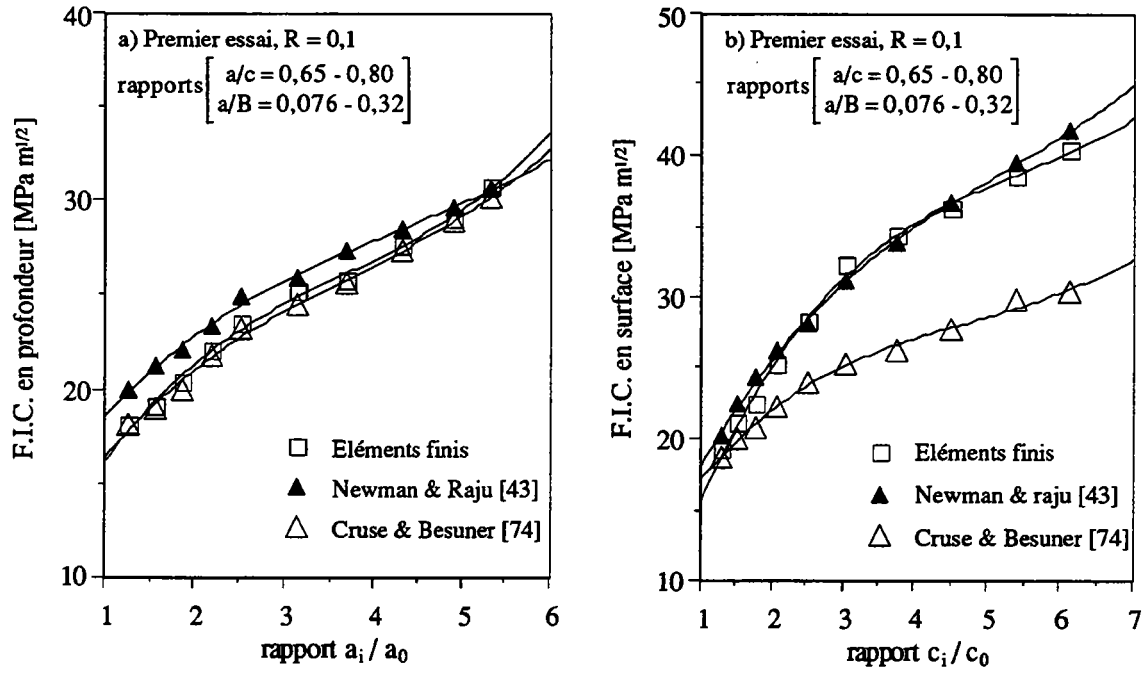


Figure III.5a. Variation du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local a) en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0, b) en surface en fonction du rapport c_i/c_0. pour un rapport de charge R = 0,1.

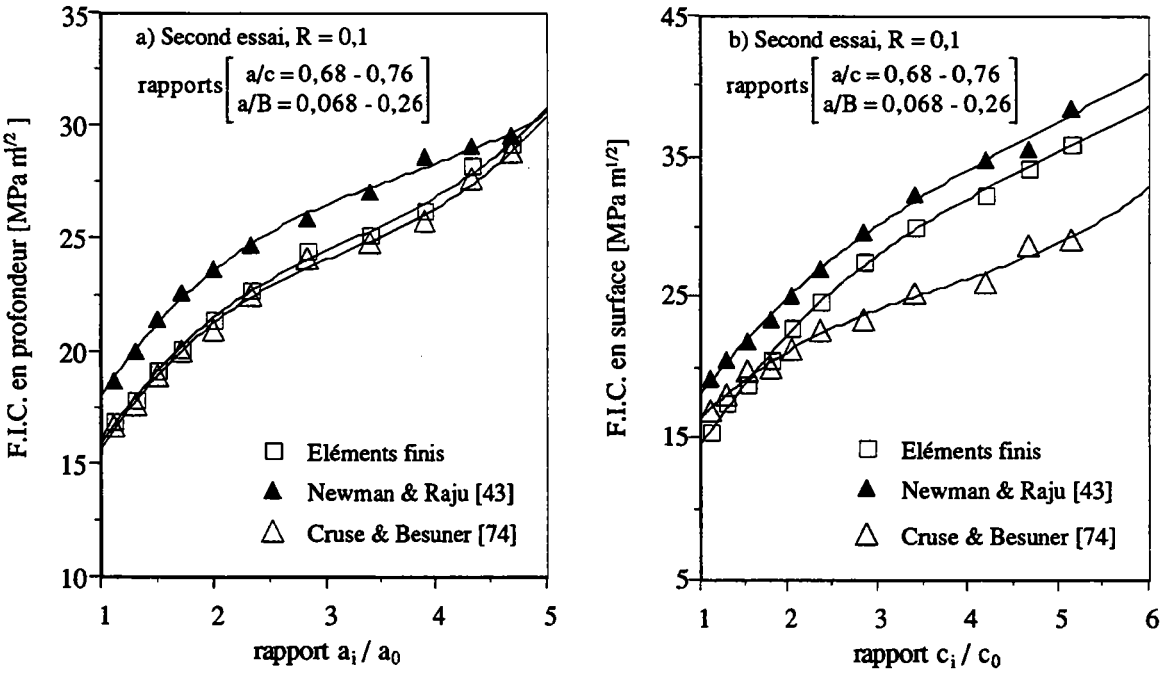


Figure III.5b. Variation du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local a) en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0, b) en surface en fonction du rapport c_i/c_0. pour un rapport de charge R = 0,1.

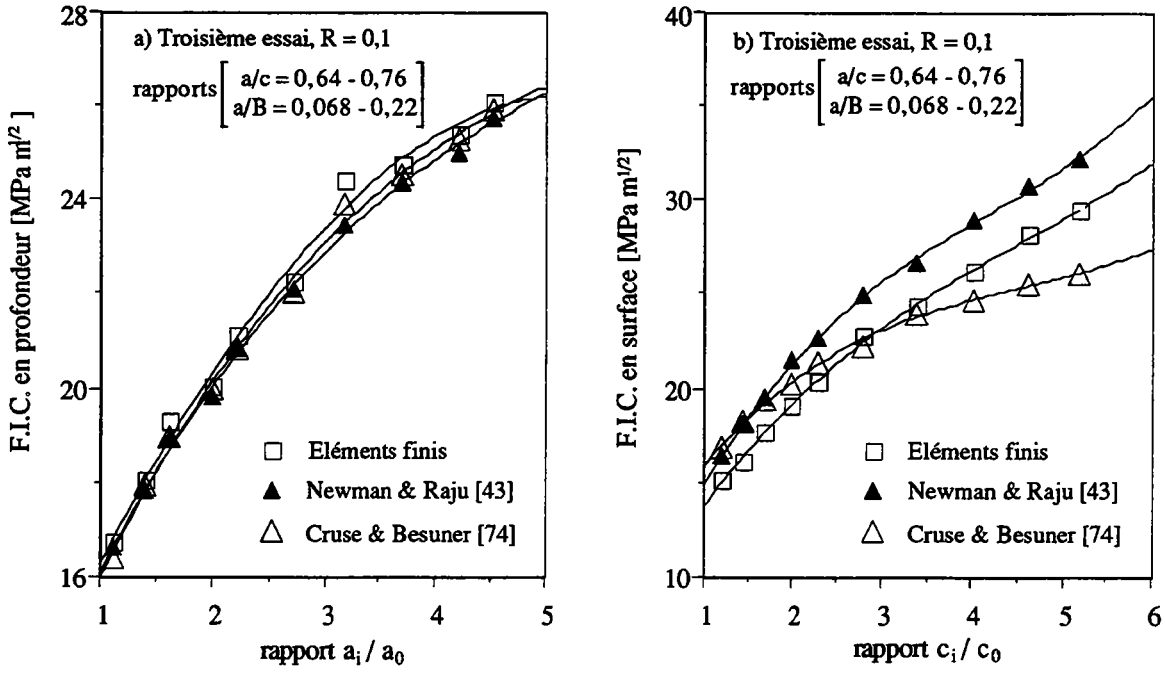


Figure III.5c. Variation du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local a) en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0, b) en surface en fonction du rapport c_i/c_0. pour un rapport de charge R = 0,1.

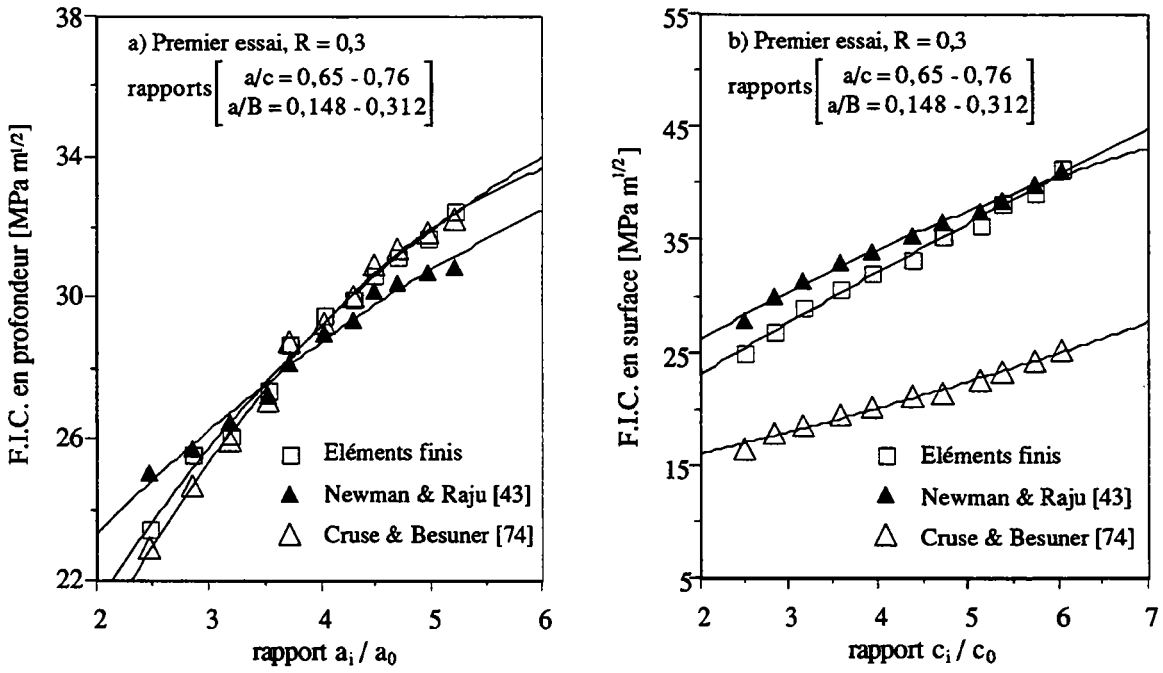


Figure III.6a. Variation du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local a) en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0, b) en surface en fonction du rapport c_i/c_0. pour un rapport de charge R = 0,3.

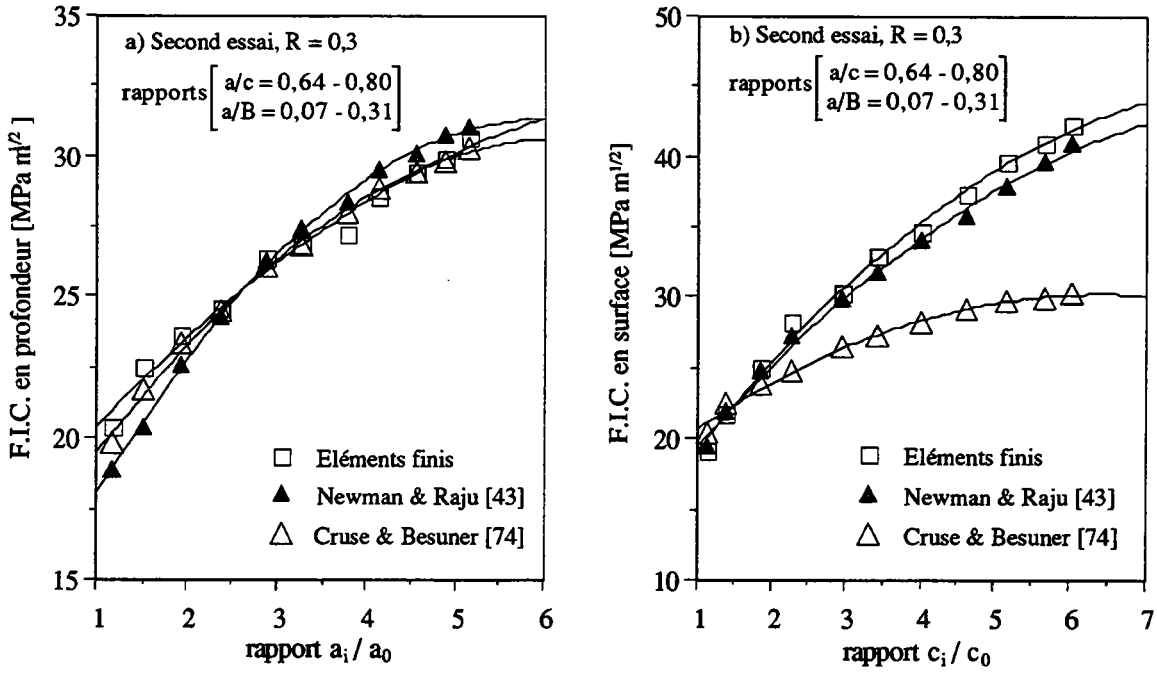


Figure III.6b. Variation du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local a) en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0, b) en surface en fonction du rapport c_i/c_0. pour un rapport de charge R = 0,3.

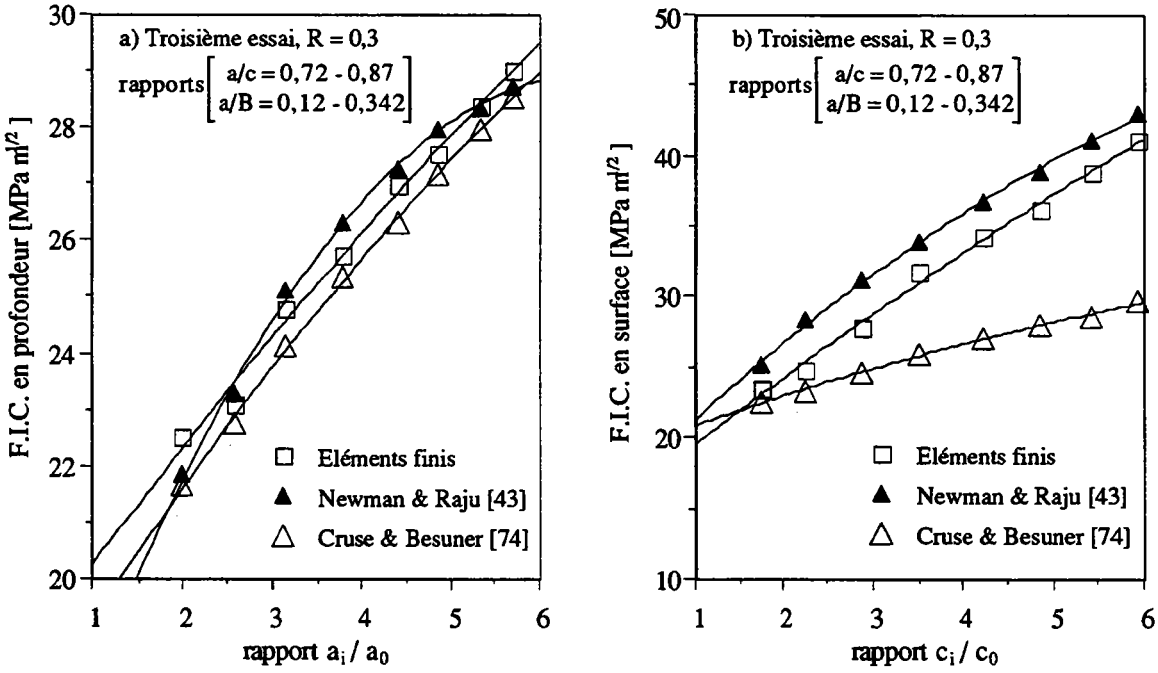


Figure III.6c. Variation du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local a) en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0, b) en surface en fonction du rapport c_i/c_0. pour un rapport de charge R = 0,3.

Nous avons cherché à comparer nos résultats d'essai de fissuration sur plaques, dépouillés par trois différentes méthodes, éléments finis, équation de Newman & Raju et le système d'équations développé par Cruse & Besuner. A partir des valeurs du facteur d'intensité de contraintes calculées nous avons réalisé une comparaison basée sur la variation de l'écart relatif E% en fonction de la variation du rapport a_i/a_0 au point le plus profond (c_i/c_0 en surface).

Nous avons regroupé tous les points pour le même rapport de charge R et ensuite, fait un lissage par un polynôme de troisième degré pour chaque groupe de points étudié. Ce qui nous a permis par la suite et grâce au coefficients de lissage de recalculer les valeurs ajustées $K^a_{Ai} = f(a_i/a_0)$ et $K^a_{Ci} = f(c_i/c_0)$. Le coefficient de régression élevé au carré est compris entre 0,826 et 0,98 (tableau III.1).

Les résultats apparaissent sous forme d'une variation de l'écart relatif E% donné par la formule (III.1) en fonction de l'évolution du rapport a_i/a_0 en profondeur (c_i/c_0 en surface).

$$E\% = \frac{V_C - V_T}{V_C} 100 \qquad \text{III.1}$$

Avec V_C valeur calculée par éléments finis et V_T valeur déterminée par l'équation de Newman & Raju ou de Cruse & Besuner.

Les résultats de cette analyse sont présentés dans les figures (III.7a - d). On peut conclure que les valeurs trouvées à partir de l'équation de Newman & Raju sont plus proches de celles déterminées par la méthode aux éléments finis notamment en surface ou la dispersion au maximale entre ces trois méthodes peut atteindre 18%.

	coefficient de régression élevé au carré					
	en profondeur			en surface		
rapport de charge R	$K_{A\text{-}EF}$	$K_{A\text{-}NR}$	$K_{A\text{-}CB}$	$K_{C\text{-}EF}$	$K_{C\text{-}NR}$	$K_{C\text{-}CB}$
0,1	0,971	0,849	0,975	0,845	0,89	0,943
0,3	0,845	0,915	0,826	0,968	0,98	0,939

$K_{A\text{-}EF}$ et $K_{C\text{-}EF}$ F.I.C. en profondeur et en surface calculés par éléments finis, $K_{A\text{-}NR}$ et $K_{C\text{-}NR}$ solution de Newman & Raju et $K_{A\text{-}CB}$ et $K_{C\text{-}CB}$ solution de Cruse & Besuner.

Tableau III.1. Valeurs des coefficients de régression élevées au carré, dans le cas des plaques.

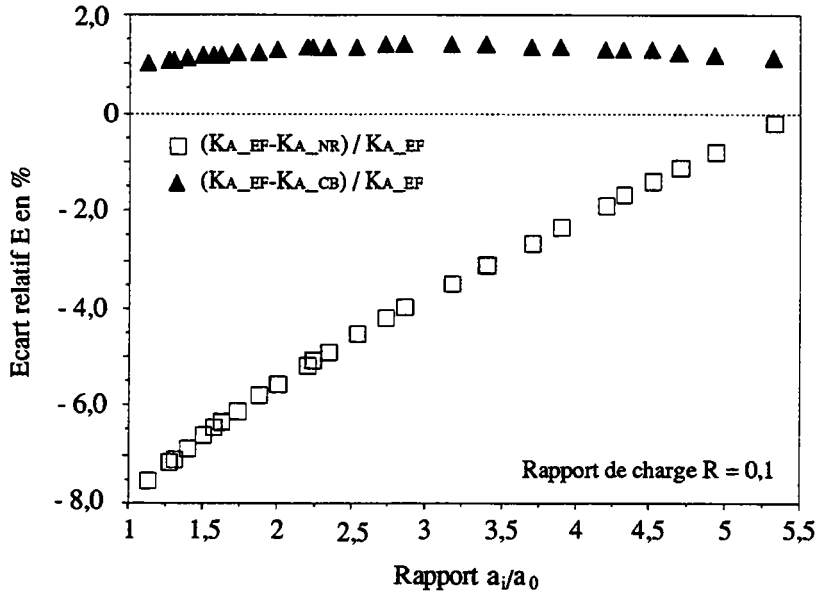


Figure III.7a. Variation de l'écart relatif sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0, pour un rapport de charge R = 0,1.

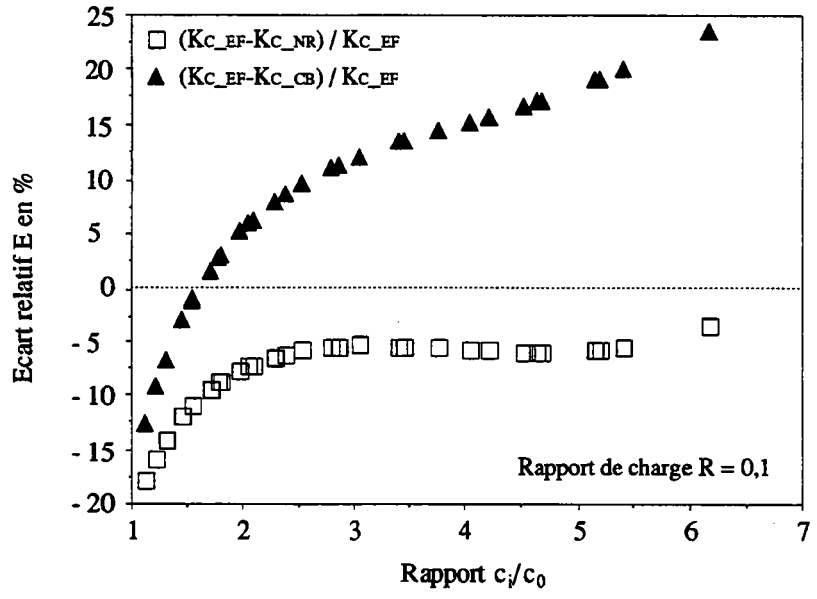


Figure III.7b. Variation de l'écart relatif sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes en profondeur en fonction du rapport c_i/c_0, pour un rapport de charge R = 0,1.

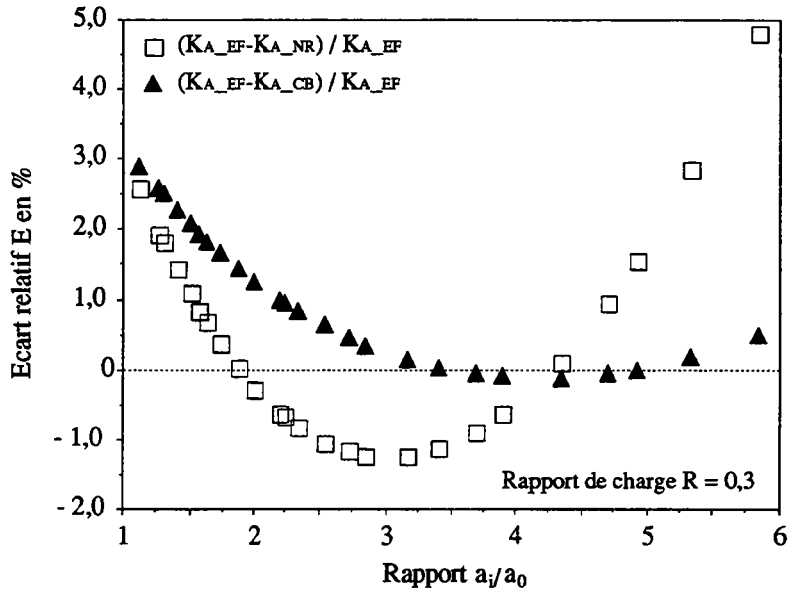


Figure III.7c. Variation de l'écart relatif sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0, pour un rapport de charge R = 0,3.

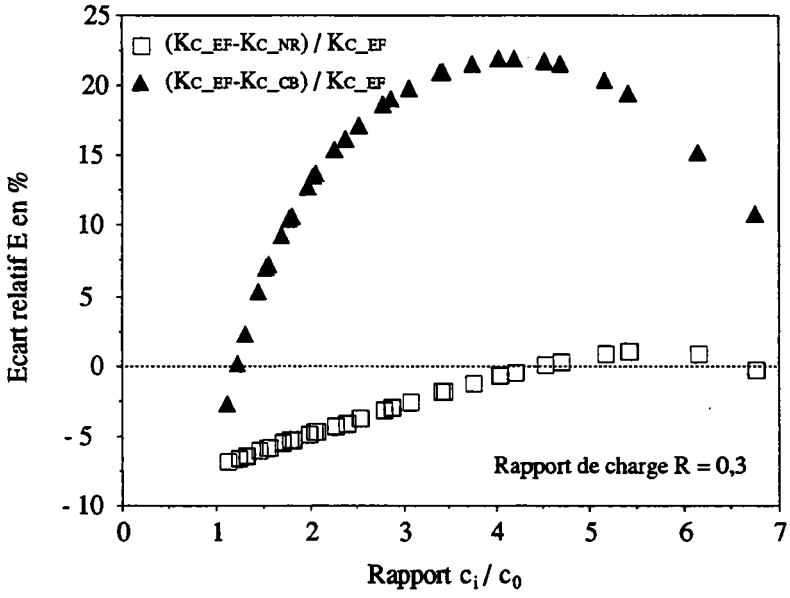


Figure III.7d. Variation de l'écart relatif sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes en surface en fonction du rapport c_i/c_0, pour un rapport de charge R = 0,3.

III.3. Lois de fissuration en trois dimensions

La sécurité des constructions mécaniques et notamment celle des réservoirs sous pression interne nécessite de connaître l'évolution de ces défauts au cours du chargement cyclique. Les concepts de sécurité, comme celui de "fuite avant rupture", utilisent à la fois la profondeur et la forme du défaut elliptique au cours de la fissuration et nécessitent donc la connaissance de la loi de propagation. Cette évolution complexe est le plus souvent considérée comme régie par des approches basées toutes sur l'hypothèse que la propagation d'une fissure est sensible au gradient de contraintes et donc gouvernée par le facteur d'intensité de contraintes. Trois approches sont utilisées successivement, locale, semi-locale et globale.

L'approche locale **[42, 43, 51, 53, 54, 59, et 61]** suppose que la propagation est régie localement par la loi de Paris et le facteur d'intensité de contraintes local. Cette approche pose bien évidemment des problèmes en surface, là où le facteur d'intensité de contraintes n'est pas bien défini.

L'approche semi-locale **[60, 78 et 86]** consiste à moyenner les valeurs locales du facteur d'intensité de contraintes sur un incrément de front de fissure ΔS et appliquer la loi de Paris en utilisant les valeurs semi-locales $\overline{K_{sl,\,A}}$ en profondeur et $\overline{K_{sl,\,C}}$ en surface.

L'approche globale **[92]** considère que le front de fissure prend une forme telle qu'il minimise l'énergie dissipée. Le taux d'énergie disponible minimal ainsi calculée permet de déterminer le facteur d'intensité de contraintes global K_{glo} par la relation suivante :

$$K_{I,\,glo} = \left[\frac{E \cdot J}{1-\nu^2}\right]^{1/2} \qquad \text{en déformations planes} \qquad \text{(III.2)}$$

Avec :

J : Intégrale de Rice
E : Module de Young [MPa]
ν : Coefficient de Poisson

Cette approche nécessite d'être couplée avec un critère de minimisation d'énergie. Le nombre élevé de calculs numériques nécessaires nous a obligé à différer cette étude sur plaques et sur tubes qui sera publiée ultérieurement. Quelque soit le type d'approche utilisée, il est nécessaire d'utiliser des paramètres caractéristiques de fissuration du matériau qui peuvent être identifiés aux coefficients C^* et m^* de la loi de Paris.

$$\frac{da}{dN} = C^* \cdot (\Delta K_I)^{m^*} \qquad \text{(III.3)}$$

En tenant compte de la formule (III.3) et des trois approches citées auparavant pour les défauts de forme semi-elliptique on peut écrire :

Au point le plus profond	*En surface*
$\frac{da}{dN} = C_{1,A} \cdot (\Delta K_{loc})^{m_{1,A}}$	$\frac{dc}{dN} = C_{1,C} \cdot (\Delta K_{loc})^{m_{1,C}}$
$\frac{da}{dN} = C_{2,A} \cdot (\Delta K_{s\text{-}loc})^{m_{2,A}}$	$\frac{dc}{dN} = C_{2,C} \cdot (\Delta K_{s\text{-}loc})^{m_{2,C}}$
$\frac{da}{dN} = C_{3,A} \cdot (\Delta K_{glo})^{m_{3,A}}$	$\frac{dc}{dN} = C_{3,C} \cdot (\Delta K_{glo})^{m_{3,C}}$

(III.4)

da/dN et dc/dN sont respectivement la vitesse de propagation en profondeur et en surface [mm/cycle], les indices 1, 2 et 3 correspondent au type d'approche et les lettres A et C correspondent respectivement au point le plus profond et en surface d'un défaut semi-elliptique.

La question posée est de savoir si les coefficients de fissuration définis dans le système d'équation (III.4) sont les mêmes c'est-à-dire $C_{i,A} = C_{i,C}$ et $m_{i,A} = m_{i,C}$ et dans le cas contraire quel est le pourcentage de dispersion.

Dans ce qui suit nous avons examiné la loi de fissuration en trois dimensions qui se conforme le mieux à cette hypothèse. Pour les raisons évoquées précédemment ce travail a été limité aux deux premières approches.

Ainsi les résultats du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local déterminés sur plaque et tube nous ont permis de tracer la loi de fissuration pour un défaut de forme semi-elliptique, au point le plus profond et en surface en utilisant les deux première approches.

Pour les fissures traversantes, l'équation (III.3) est souvent utilisée **[73, 78 et 86]**, N est le nombre de cycles, ΔK_I est l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes, C^* et m^* sont les paramètres de la loi de fissuration caractéristique du matériau. D'autres lois existent mais elles introduisent des constantes supplémentaires. On suppose que :

- la loi de Paris reste valable pour les fissures de surface,
- dans le cas des plaques les fissures de forme semi-elliptique ne restent pas homothétiques et le rapport a/c évolue. Cette hypothèse est raisonnable et est vérifiée par l'expérience **[101]**,
- dans le cas des tubes les fissures initiales semi-elliptiques changent de forme après quoi elles restent homothétiques et le rapport a/c reste constant tout le long de l'essai de fissuration,
- les plaques testées dans le domaine élastique présentent une faible plastification à la pointe de fissure.
- le tube testé dans le domaine élastique présente une forte plastification à la pointe de fissure, notamment en surface.

III.3.1 Détermination des constantes de références de la loi de Paris

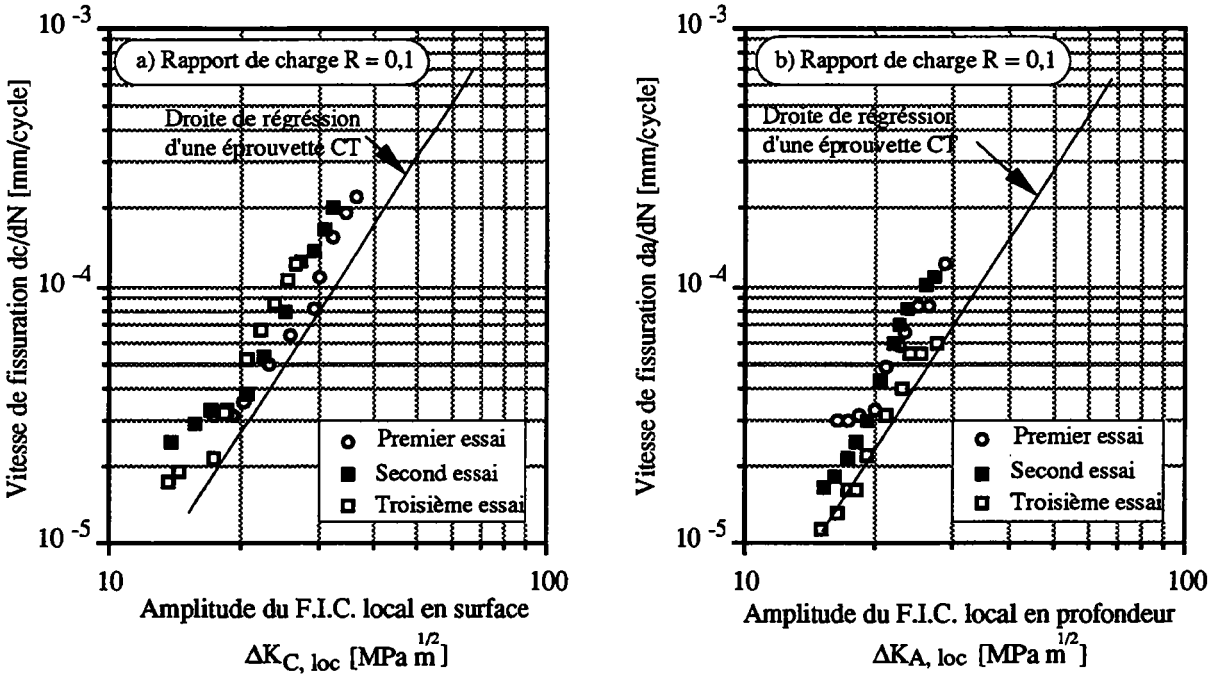
Le tableau (III.1) donnent les paramètres de fissuration déterminés expérimentalement sur des éprouvettes conventionnelles CT dans les deux directions du laminage et pour deux rapports de charge R = 0,1 et 0,3.

Paramètres de fissuration de la loi de Paris			
rapport de charge R = 0,1		rapport de charge R = 0,3	
C*	m*	C*	m*
9,2E-9	2,77	1,5E-8	2,77

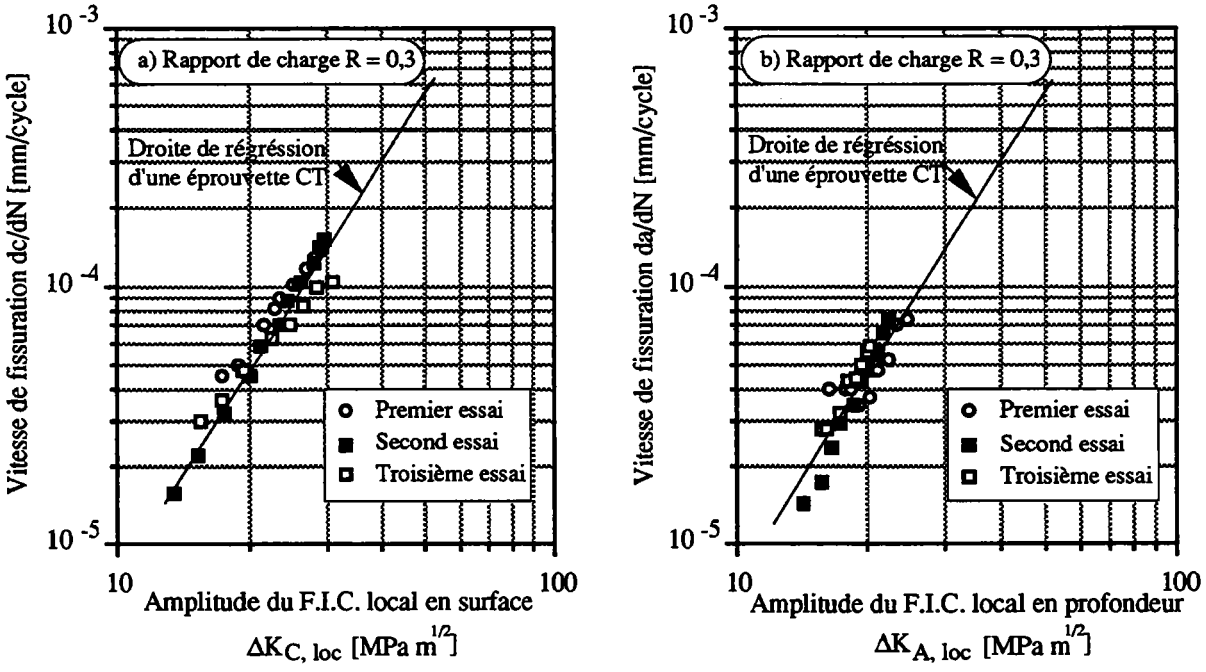
Tableau III.1. Paramètres de fissuration de la loi de Paris déterminés sur une éprouvette normalisée type CT.

III.3.2 dépouillement des résultats sur plaques selon un critère local

On fait l'hypothèse que la propagation de la fissure au point le plus profond et en surface est gouvernée par la valeur locale du facteur d'intensité de contraintes. Les figures (III.8 et III.9) montrent les courbes de fissuration pour un défaut de forme semi-elliptique pour deux rapports de charge R = 0,1 et 0,3 au point le plus profond $da/dN = f(\Delta K_{A,\,loc})$ et en surface $dc/dN = f(\Delta K_{C,\,loc})$. La ligne en trait continu représente la courbe de fissuration déterminée sur une éprouvette normalisée CT pris comme courbe de référence. $\Delta K_{C,\,loc}$ et $\Delta K_{A,\,loc}$ ont été déterminés par un calcul aux éléments finis.



Figures (III.8a et b). Courbes de vitesse de fissuration sur plaques, rapport de charge R = 0,1.

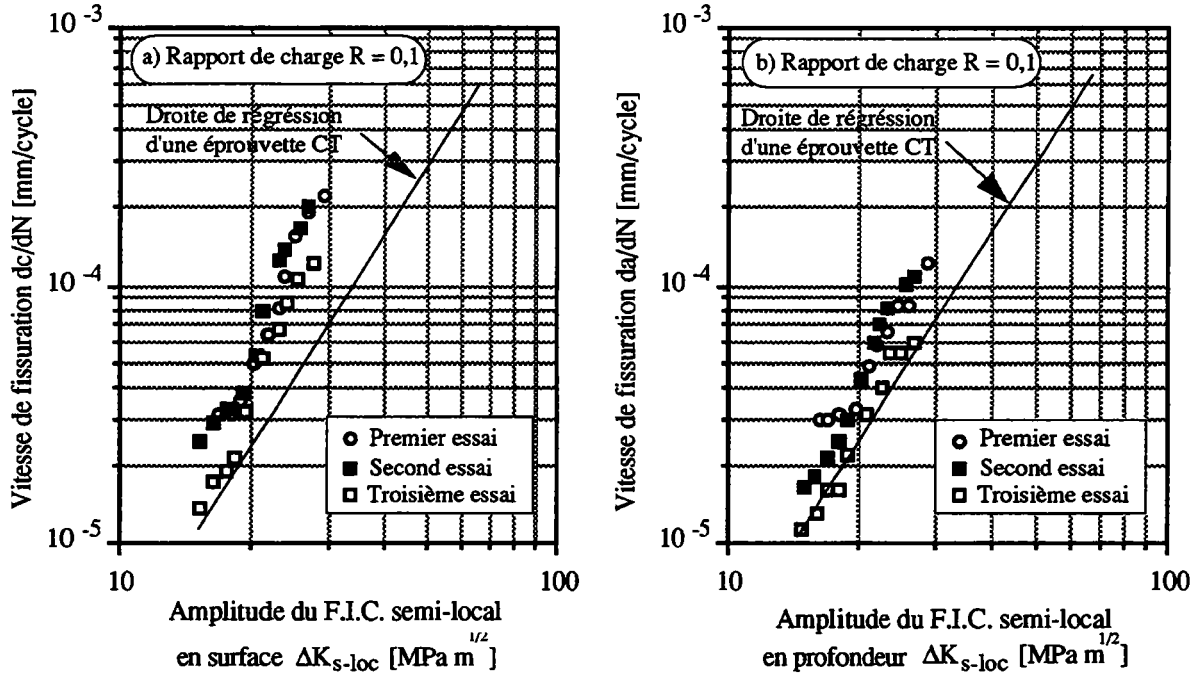


Figures (III.9a et b). Courbes de vitesse de fissuration sur plaques, rapport de charge R = 0,3.

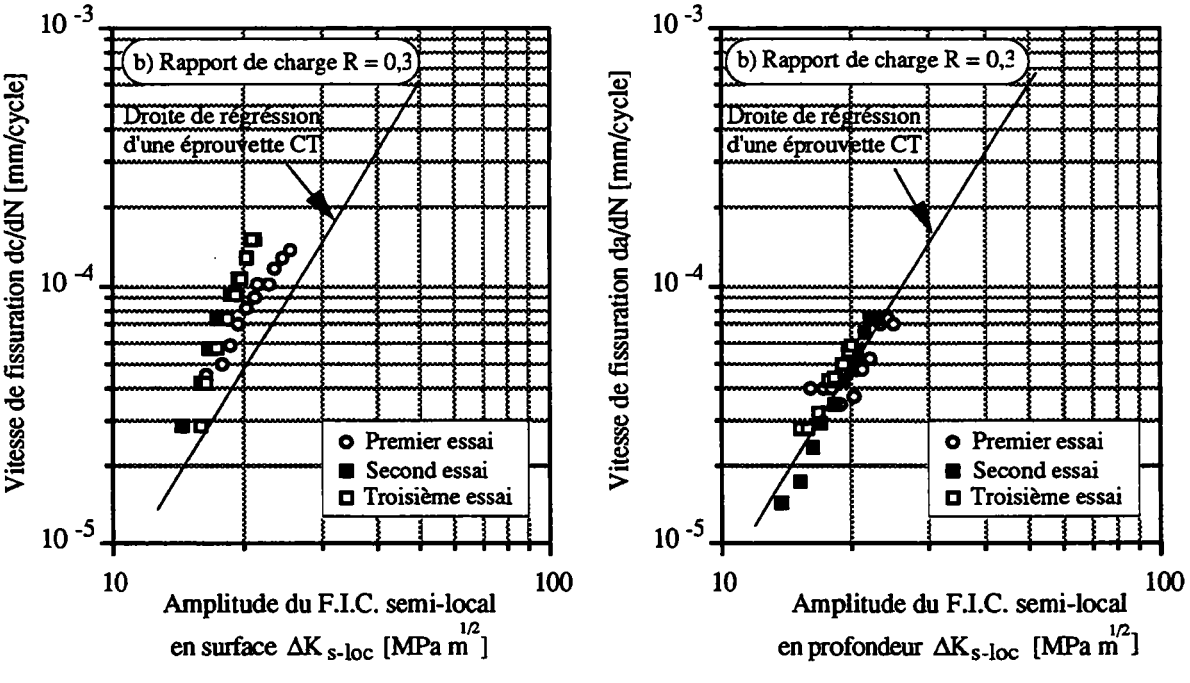
III.3.3 Dépouillement des résultats sur plaques selon un critère semi-local

Cette fois-ci on considère la variation du facteur d'intensité de contraintes le long du front de fissure en moyennant la valeur locale du facteur d'intensité de contraintes.

La propagation à un point du front de fissure est influencée par la valeur de K_I au point adjacent. La valeur semi-locale en surface $\overline{K_{sl,\,C}}$ et au point le plus profond $\overline{K_{sl,\,A}}$ peut être calculée par le système d'équations donné par Cruse et Besuner **[74]**. Les figures (III.10 et III.11) donnent les courbes de fissuration en utilisant le facteur d'intensité de contraintes semi-local en surface et au point le plus profond, la ligne continue a la même signification que précédemment.



Figures (III.10a - b). Courbes de vitesse de fissuration sur plaques, rapport de charge R = 0,1.



Figures (III.11a - b). Courbes de vitesse de fissuration sur plaques, rapport de charge R = 0,3.

III.3.4 Comparaison des lois de fissuration sur plaques selon un critère local et semi-local

Quelques rares travaux de comparaison des lois de fissuration des fissures semi-elliptiques ont étés réalisés. Citons notamment les travaux de Mahmoud & Hosseini **[73 et 86]** et ceux de Varfolomeyev & al **[78]**.

- Mahmoud & Hosseini **[73 et 86]** concluent que l'utilisation de l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes semi-local ΔK_{sl} n'améliore pas la prédiction du rapport (a/c). La meilleure solution est l'utilisation de l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes local pour $m_A = m_C = m^* = 3$ et $C_C = C_A = C^*$ (*chapitre I.3.3 partie bibliographique*).

- Varfolomeyev & al **[78]** concluent aussi que l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes local $\Delta K_{I,\,loc}$ donne moins de dispersion pour $m_A = m_C = m^* = 3$ et $C_C \neq C_A \neq C^*$, (*chapitre III.3.2 partie bibliographique*).

A notre connaissance les avis sont encore partagés sur le type de critère à utiliser (local, semi-local au global) et sur les valeurs des coefficients C et m a introduire dans chaque loi et qui ne sont pas forcement identiques à celles de la loi de fissuration de référence.

Nous avons alors recherché la loi de fissuration la mieux adaptée pour nos essais sur la base des résultats obtenus (figures III.8 à 11). Nous avons réalisé une comparaison basée sur le test Student pour évaluer la différence entre C_{Ai}, C_{Ci} et C^* (et entre m_{Ai}, m_{Ci} et m^*). Le résultat apparaît sous la forme d'un niveau de confiance Pr%. On choisit comme solution la combinaison qui correspond au niveau de confiance Pr% le plus élevé suivant C_i et m_i.

Trois valeurs pour chaque série et pour chaque rapport de charge ont été testées. La méthode fait intervenir deux approches, la première basée sur un calcul aux éléments finis du facteur d'intensité de contraintes au point le plus profond et en surface, la seconde basée sur un calcul semi-local aux mêmes points. Les paramètres de fissuration utilisés pour notre test, sont ceux qui ont été déterminés à partir des deux approches citées auparavant. Le tableau (III.2) présente la moyenne des paramètres de fissuration pour les deux rapports de charge R = 0,1 et 0,3.

Les résultats du test sont présentés dans les figures (III.12 et 13). On peut conclure que l'utilisation de la valeur semi-locale de l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes ne donne pas de bons résultats sur m et C. Il est clair que les deux meilleurs résultats sont ceux qui utilisent l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes local pour un rapport de charge R = 0,3 en profondeur et en surface.

éprouvette CT		critère local				critère semi-local			
ΔK_I		$\Delta K_{A,\,loc}$		$\Delta K_{C,\,loc}$		$\overline{\Delta K_{A,\,sl}}$		$\overline{\Delta K_{C,\,sl}}$	
rapport de charge R = 0,1									
m*	C*	$m_{1,A}$	$C_{1,A}$	$m_{1,C}$	$C_{1,C}$	$m_{2,A}$	$C_{2,A}$	$m_{2,C}$	$C_{2,C}$
2,77	9,2E-9	3,38	1,42E-9	3,45	3,14E-9	3,79	1,73E-9	4,87	2,85E-10
rapport de charge R = 0,3									
2,77	1,5E-8	2,58	2,84E-8	2,73	3,50E-8	3,13	0,64E-8	5,37	1,20E-11

Tableau III.2. Valeurs moyennes des paramètres de fissuration pour un défaut de forme semi-elliptique contenu dans une plaque.

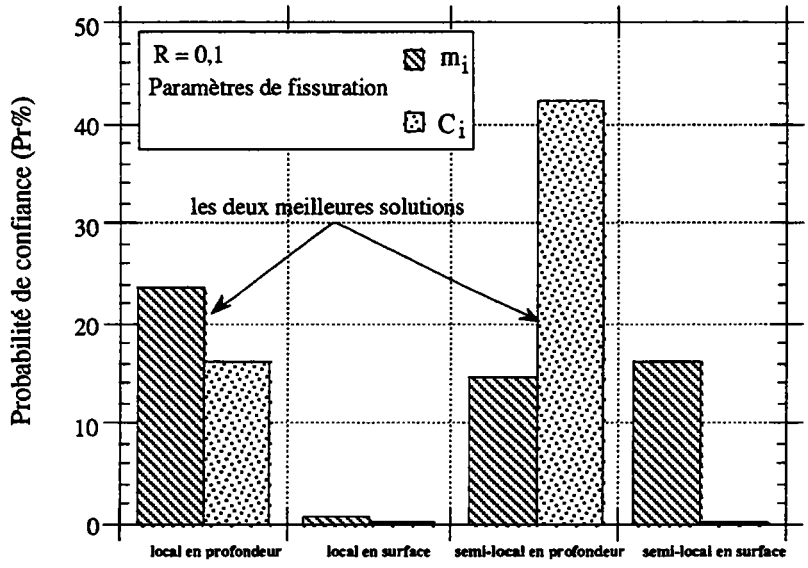


Figure III.12. Résultats du test Student sur les paramètres de fissuration m_i et C_i obtenus sur plaques, pour un rapport de charge R = 0,1.

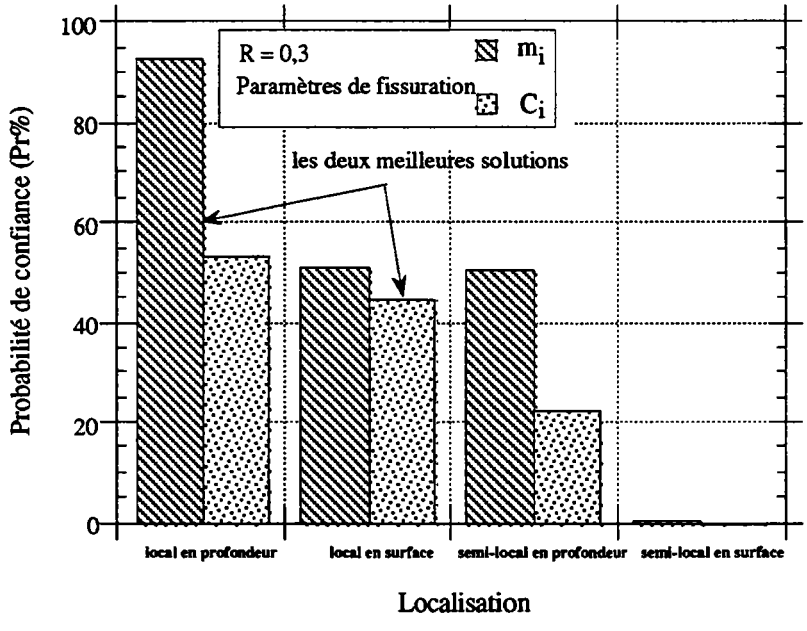


Figure III.13. Résultats du test Student sur les paramètres de fissuration m_i et C_i obtenus sur plaques, pour un rapport de charge R = 0,3.

Les deux méthodes de calcul du facteur d'intensité de contraintes ont données des valeurs différentes concernant les paramètres de fissuration en profondeur et en surface. Ces paramètres sont considérés comme liés au matériau, c'est à dire qu'ils présentent la même valeur en tous points sur le front de fissuration. La valeur la plus proche de celle trouvée sur une éprouvette conventionnelle est celle qui utilise l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes local.

III.4 Résultats d'essai de fissuration sur tubes

Les fissures débouchantes sont des défauts dont le risque d'apparition est fréquent dans les composants sous pression. Nous avons examiné l'évolution dans le comportement d'un défaut initial de forme semi-elliptique contenu dans un tube soumis à une pression interne. Après rupture finale et comme dans le cas des plaques nous avons mesuré la longueur des deux demi-axes de la fissure à partir du faciès de fissuration (photo III. 3).

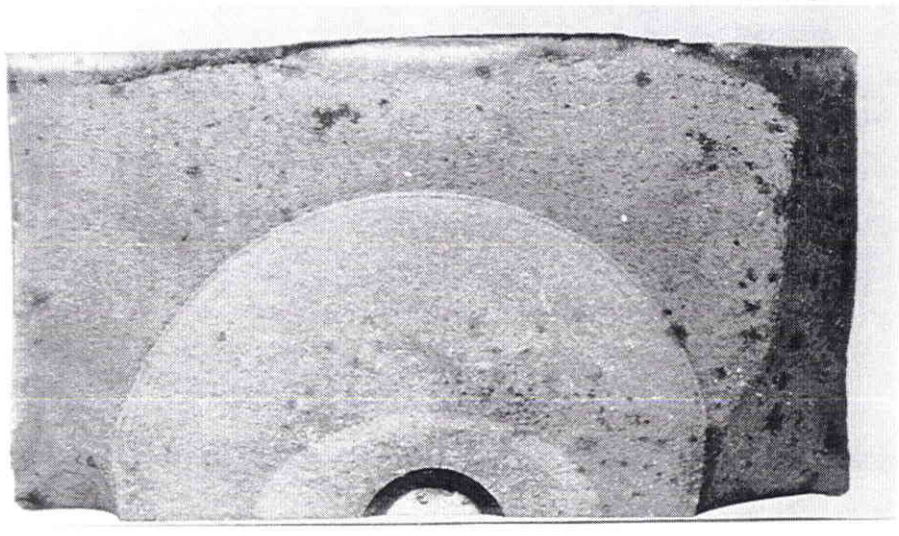


Photo III.3. Faciès de rupture d'un tube sollicité en pression interne.

La figure (III.14) schématise les deux différentes zones de fissuration visibles sur la photo (III.3) :

1) la première en clair de forme semi-elliptique représente la zone de pré-fissuration en flexion trois points. Cette dernière est limitée par une ligne d'arrêt le rapport a/c est, à ce niveau voisin de 0,70.

2) la seconde de forme quasi semi-circulaire en gris représente la zone de fissuration sous pression interne. La première ligne d'arrêt est caractérisée par un rapport a/c = 1,12 après cette ligne, la fissure prend une forme beaucoup plus stable représentée par un rapport a/c voisin de 1,09.

Le comportement de l'évolution de la fissure obtenue par l'essai de fissuration sous pression interne est complètement différente de celle rencontrée sur plaques (figure III.3 *paragraphe III.1*).

L'évolution du rapport a/c au cours de la fissuration, donnée en fonction du rapport a/B est présentée par la figure (III.15). Cette évolution montre clairement deux régions, la première caractérisée par le passage de la forme semi-elliptique à une forme quasi semi-circulaire et la seconde présente une certaine stabilisation dans la valeur du rapport a/c.

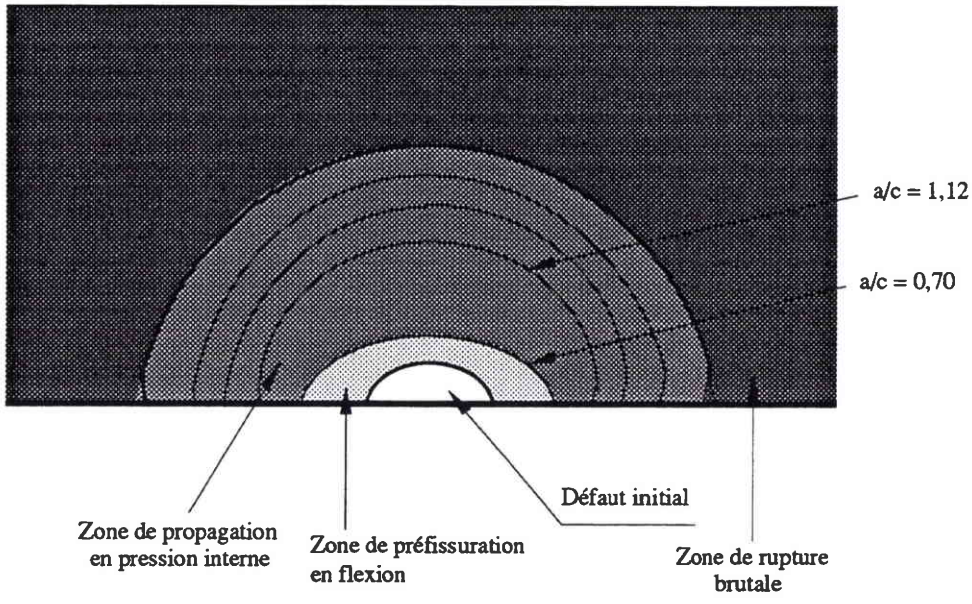


Figure III.14. Schéma représentatif du faciès de rupture sur un tube après marquage.

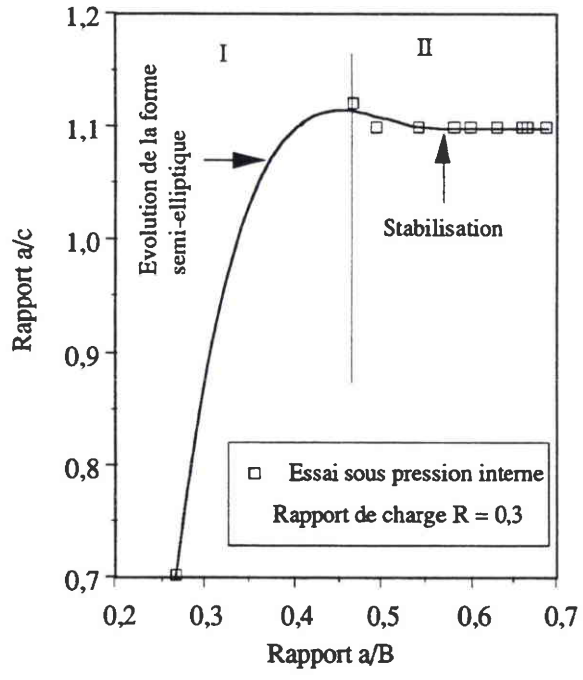


Figure III.15. Évolution de la forme de la fissure dans le cas d'un tube sous pression interne, pour un rapport de charge R = 0,3.

III.5. Calcul du facteur d'intensité de contraintes sur tubes

Nous avons suivi la même démarche de calcul que dans le cas des plaques.

III.5.1 Calcul du F.I.C. local selon l'équation de Newman & Raju

Le facteur d'intensité de contraintes a été calculé à partir de l'équation (I.31 *chapitre I.2.1.4*) développée en 1980 par Newman & Raju **[31 et 32]**.

III.5.2 Calcul du F.I.C. local par la méthode aux éléments finis

La configuration étudiée (tube) est montrée dans la photo (III.4). Elle représente une composante de structure comportant un défaut initial de forme semi-elliptique, soumise à un chargement de pression interne. Les champs de contraintes et de déplacements pour chaque cas considéré est obtenu par un calcul aux éléments finis, qui englobe des éléments solides isoparamétriques en trois dimensions à 20 nœuds autour du front de fissure. Seul le huitième de la structure a été modélisé.

Certains résultats obtenus sont présentés sous forme de courbes (figures III.16a-c) qui donnent la variation du facteur d'intensité de contraintes local en fonction de la coordonnée angulaire de l'ellipse ϕ. Ils sont comparés avec la solution de Newman & Raju **[31 et 32]**. Le calcul a été fait avec la géométrie réelle du front de fissure obtenue au cours des essais de fissuration sur tubes.

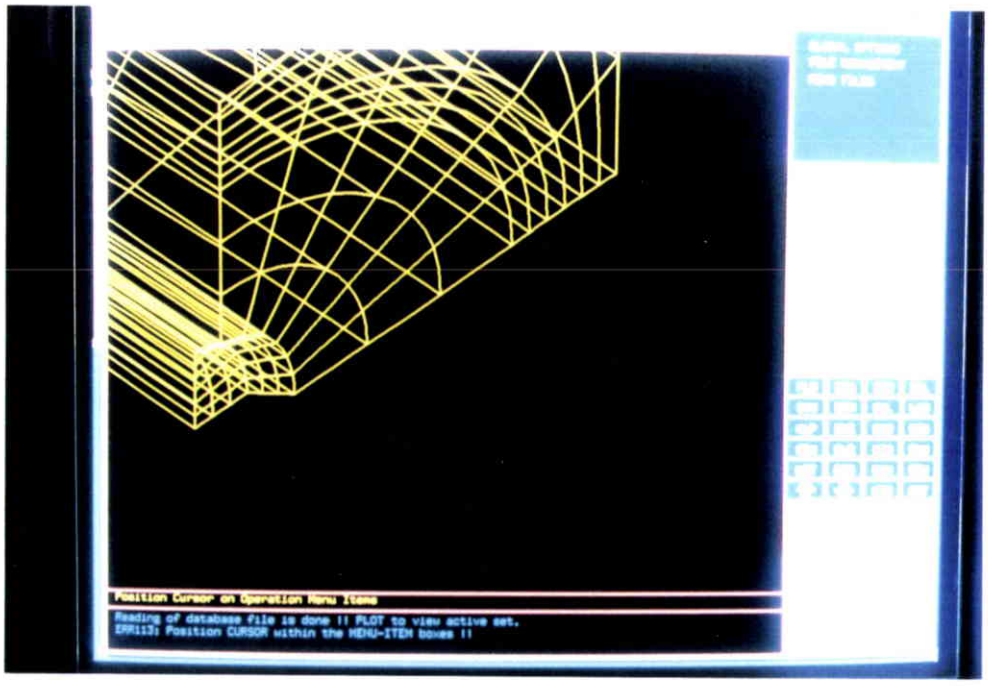


Photo III.4. Modélisation d'un tube sous pression interne.

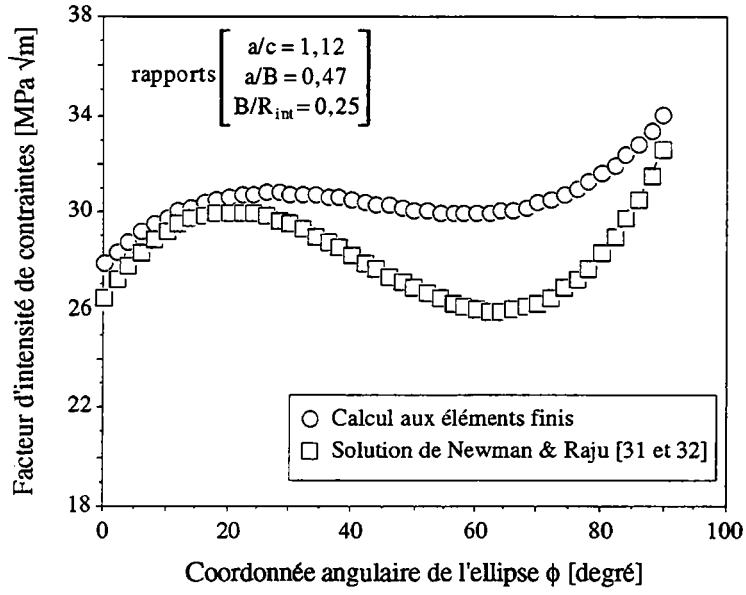


Figure III.16a. Comparaison du facteur d'intensité de contraintes local obtenu par la solution de Newman & Raju et par la méthode aux éléments finis, pour les conditions de géométrie a/c = 1,12; a/B = 0,47 et B/R$_{int}$ = 0,25.

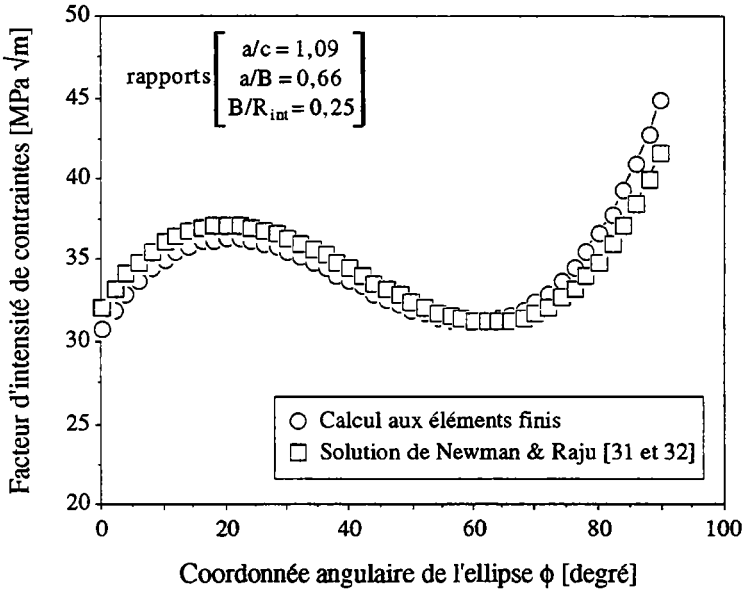


Figure III.16b. Comparaison du facteur d'intensité de contraintes local obtenu par la solution de Newman & Raju et par la méthode aux éléments finis, pour les conditions de géométrie a/c = 1,09; a/B = 0,66 et B/R$_{int}$ = 0,25.

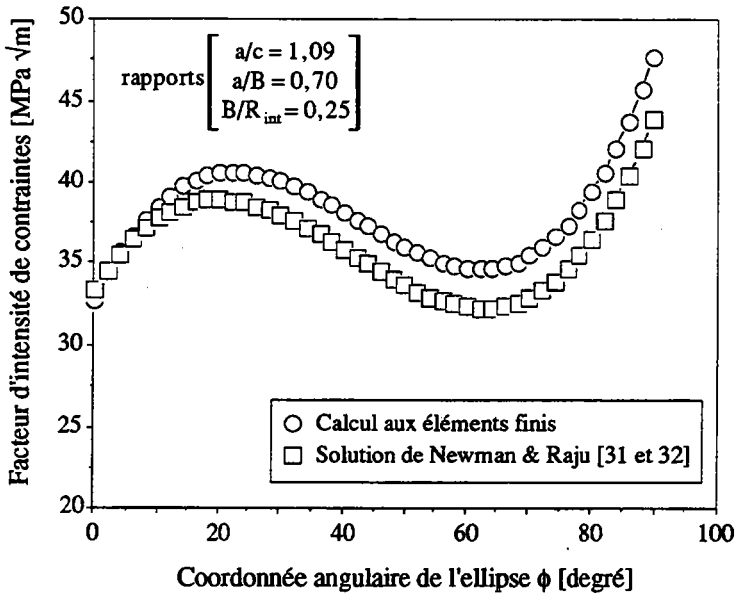


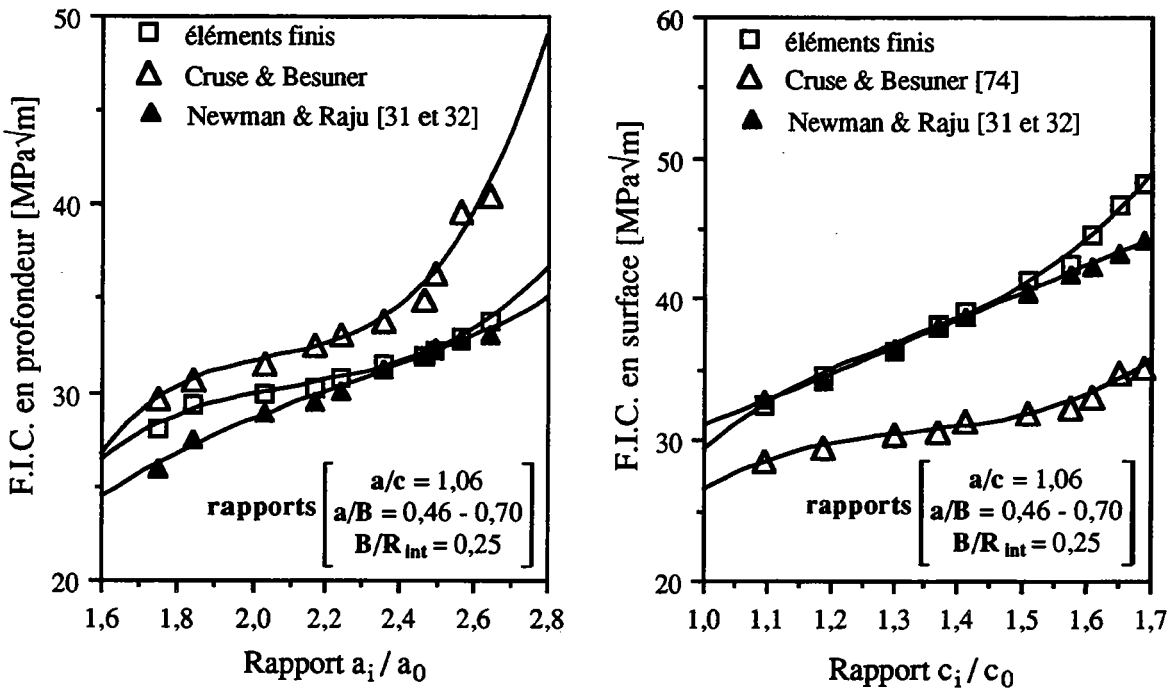
Figure III.16c. Comparaison du facteur d'intensité de contraintes local obtenu par la solution de Newman & Raju et par la méthode aux éléments finis, pour les conditions de géométrie a/c = 1,09; a/B = 0,70 et B/R_{int} = 0,25.

A notre connaissance il n'existe pas de résultats expérimentaux de fissuration sous pression interne publiés. Les résultats des calculs du facteur d'intensité de contraintes les plus connus sont cités notamment dans le chapitre (*I.2.1 partie bibliographique*). Ces derniers sont obtenus à partir de solutions numériques ou analytiques pour des conditions de géométrie différentes des nôtres. La totalité de ces résultats montrent que le facteur d'intensité de contraintes est maximal en surface ($\phi = 90°$) résultat confirmé par nos calculs (figures III.16a - c).

Nos résultats présentent une différence avec la valeur du facteur d'intensité de contraintes obtenue avec la solution de Newman & Raju tout le long du front de fissuration. Elle est légèrement plus importante au point le plus profond qu'en surface. Cette différence est aussi beaucoup plus importante, que celle trouvée dans le cas des plaques. Elle peut atteindre 24% en profondeur et 23% en surface. La différence trouvée avec la solution de Newman & Raju est due à notre avis à des différences dans la densité et le type de maillage utilisés.

III.5.3 Calcul du F.I.C. semi-local

L'utilisation du système d'équations *(I.55 et I.56 chapitre I.2.2.10)* développé par Cruse & Besuner **[74]** donne les résultats présentés dans les figures (III.17a - b). Ces derniers comme dans le cas des plaques sont présentés par comparaison de l'évolution du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local au point le plus profond et en surface en fonction de a_i/a_0 (c_i/c_0).



Figures III.17. Variation du F.I.C. local et semi-local déterminé sur tubes a) en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0, b) en surface en fonction du rapport c_i/c_0 pour un rapport de charge R = 0,3.

A partir des valeurs du facteur d'intensité de contraintes calculées nous avons réalisé, comme dans le cas des plaques, la même comparaison basée sur la variation de l'écart relatif E*% en fonction de la variation du rapport a_i/a_0 au point le plus profond (c_i/c_0 en surface). Le coefficient de régression élevé au carré pour ce cas est voisin de 0,98.

Les résultats apparaissent sous forme d'une variation de l'écart relatif E*% donné par la formule (III.1 *chapitre III.2.3*) en fonction de l'évolution du rapport a_i/a_0 en profondeur (c_i/c_0 en surface).

Les résultats de cette analyse sont présentés dans les figures (III.18a - b). On conclut que l'écart entre les trois solutions est plus important en surface qu'en profondeur et peut atteindre 30%.

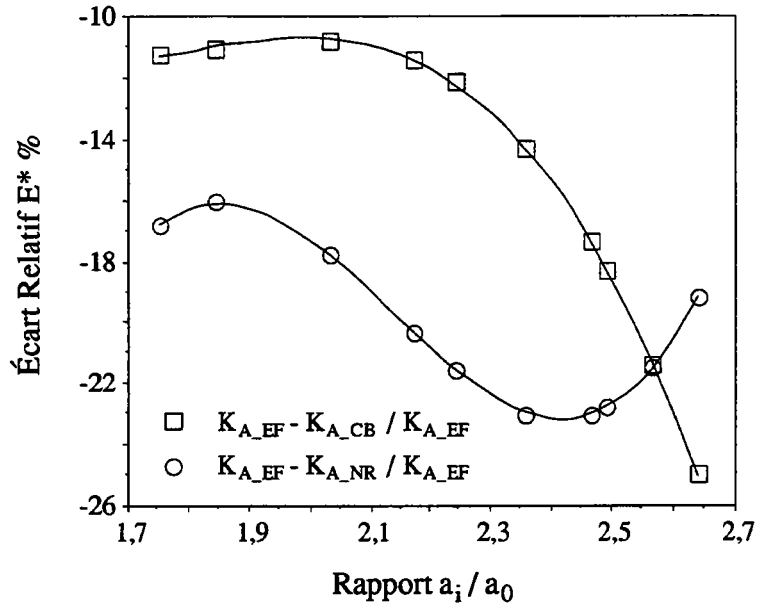


Figure III.18a. Variation de l'écart relatif E*% sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0.

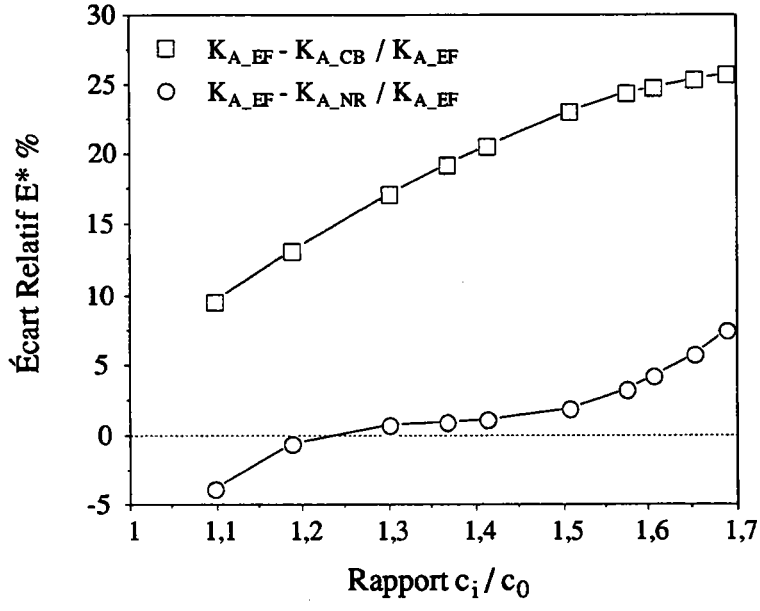


Figure III.18b. Variation de l'écart relatif E% sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes en surface en fonction du rapport c_i/c_0.*

III.6. Lois de fissuration sur tubes

III.6.1 Dépouillement des résultats selon un critère local et semi-local

Les figures (III.19a - b) donnent les courbes de fissuration pour un défaut initialement semi-elliptique pour un rapport de charge R = 0,3 au point le plus profond, da/dN = $f(\Delta K^*_{A,\,loc}$ et $\overline{\Delta K^*_{A,\,sl}})$ et, en surface dc/dN = $f(\Delta K^*_{C,\,loc}$ et $\overline{\Delta K^*_{C,\,sl}})$. La ligne en trait continue représente la courbe de référence comme dans le cas de plaques. $\Delta K^*_{A,\,loc}$ et $\Delta K^*_{C,\,loc}$ ont été déterminé par un calcul aux éléments finis et par l'équation de Newman & Raju et $\overline{\Delta K^*_{A,\,sl}}$, $\overline{\Delta K^*_{C,\,sl}}$ par le système d'équations défini par Cruse & Besuner.

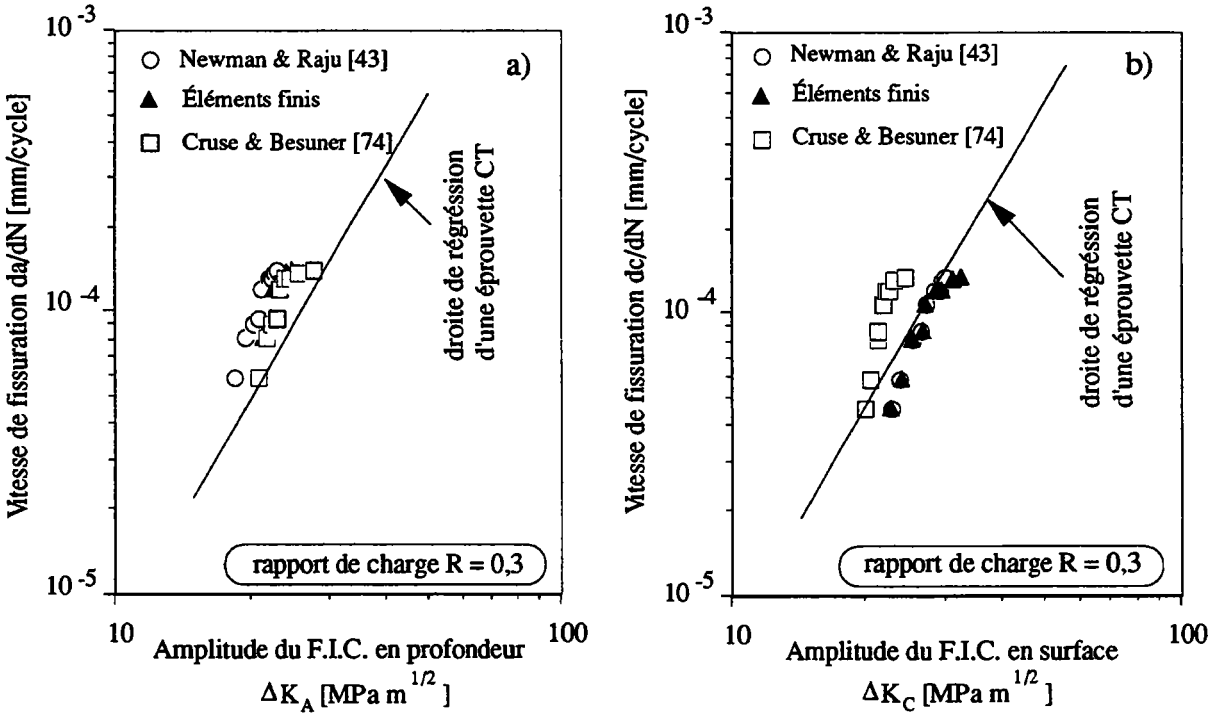


Figure III.19. Courbes de vitesse fissuration locale et semi-locale, a) au point le plus profond, b) en surface, pour un rapport de charge R = 0,3.

III.6.2 Comparaison des lois de fissuration local et semi-local sur tube sous pression interne

L'absence de résultats publiés de fissuration sous pression interne ne nous a pas permis une comparaison de nos résultats. L'examen de nos résultats, portera donc uniquement sur les différentes méthodes de dépouillement utilisées.

Le tableau (III.3) regroupe les valeurs de C_i et m_i déterminées par trois différentes méthodes, calcul aux éléments finis et l'équation de Newman & Raju pour le critère local et le système d'équations de Cruse & Besuner pour le critère semi-local. En comparant les valeurs de C_i et m_i on peut remarquer que la solution qui utilise l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes local (déterminé par la méthode aux éléments finis) en surface et la valeur semi-local au point le plus profond sont très proches de celles déterminées sur une éprouvette conventionnelle CT.

	ΔK_I			
Éprouvette type CT	C^*		m^*	
	1,5 E-8		2,77	
Critère local (éléments finis)	$\Delta K^{EF}_{A,loc}$		$\Delta K^{EF}_{C,loc}$	
	$C_{1,A}$	$m_{1,A}$	$C_{1,C}$	$m_{1,C}$
	4,43 E-11	4,7	4 E-9	3,03
Critère local (Newman & Raju)	$\Delta K^{N\&R}_{A,loc}$		$\Delta K^{N\&R}_{C,loc}$	
	$C_{1,A}$	$m_{1,A}$	$C_{1,C}$	$m_{1,C}$
	7,24 E-10	3,9	3,283 E-10	3,81
Critère semi-local (Cruse & Besuner)	$\Delta K^{C\&B}_{A,sl}$		$\Delta K^{C\&B}_{C,sl}$	
	$C_{2,A}$	$m_{2,A}$	$C_{2,C}$	$m_{2,C}$
	1,01 E-8	2,93	1,39 E-12	5,83

les indices EF: éléments finis, N&R : Newman et Raju et C&B : Cruse et Besuner.

Tableau III.3. Valeurs des paramètres de fissuration déterminées à partir de trois méthodes de calcul du facteur d'intensité de contraintes.

III.6 Facteurs de correction de géométrie

Nous avons cherché à déterminer et à comparer les facteurs de correction de géométrie sur plaques et sur tubes. En se basant sur les résultats précédents et à partir des valeurs du facteur d'intensité de contraintes local calculées, nous avons déterminé les facteurs de correction de géométrie F_A au point le plus profond et F_C en surface, à partir du système d'équations suivant:

sur plaques

$$F_A = \frac{K_A}{\sigma_g \cdot \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}} \quad \text{et} \quad F_C = \frac{K_C}{\sigma_g \cdot \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}} \qquad \text{(III.5)}$$

sur tubes

$$M_A = \frac{K_A}{\frac{pR_{int}}{B} \cdot \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}} \quad \text{et} \quad M_C = \frac{K_C}{\frac{pR_{int}}{B} \cdot \sqrt{\frac{\pi a}{Q}}}$$

III.7.1 Facteurs de correction de géométrie sur plaques

Nous avons regroupé tous les points pour le même rapport de charge R. Par suite, nous avons procédé à un lissage par un polynôme de troisième degré pour chaque groupe de point étudié. Le coefficient de régression élevé au carré pour chaque cas est donné par le tableau (III.4). Les résultats apparaissent sous forme de courbes donnant la variation de F_A au point le plus profond (F_C en surface) en fonction du rapport a_i/a_0 (c_i/c_0), (figures III.20 et III.23).

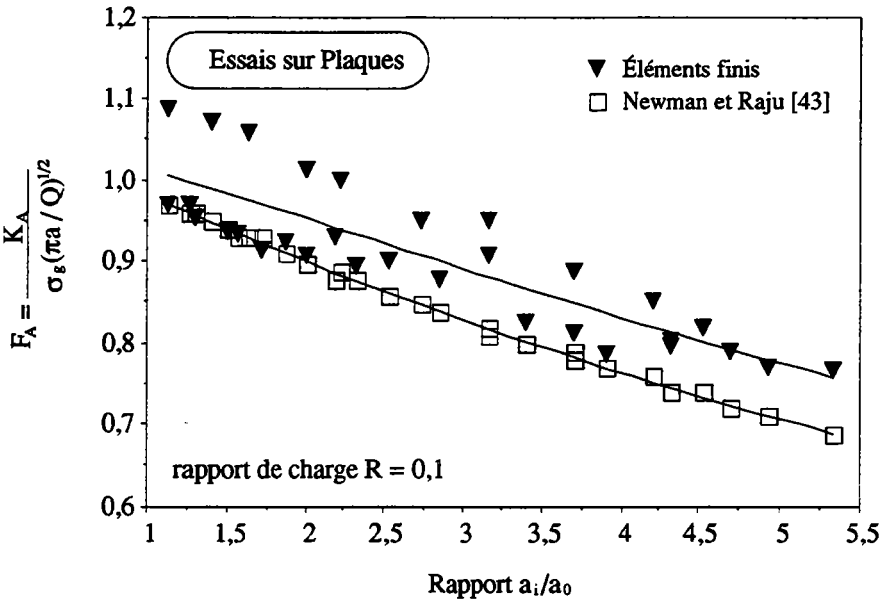


Figure III.20. Variation du facteur de correction de géométrie F_A en profondeur en fonction du rapport a_i/a_0, pour un rapport de charge R = 0,1 et dans le cas d'une plaque.

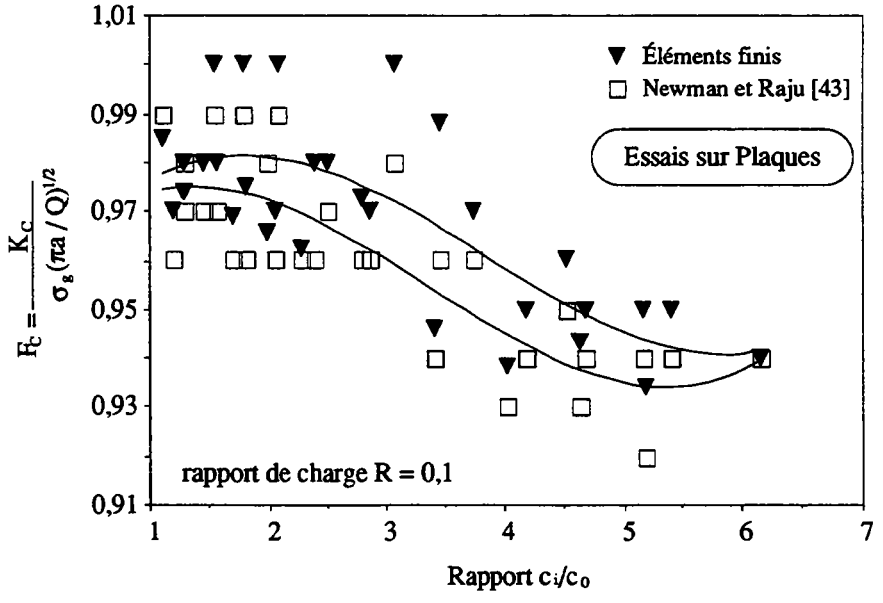


Figure III.21. Variation du facteur de correction de géométrie F_C en surface en fonction du rapport c_i/c_0, pour un rapport de charge R = 0,1 et dans le cas d'une plaque.

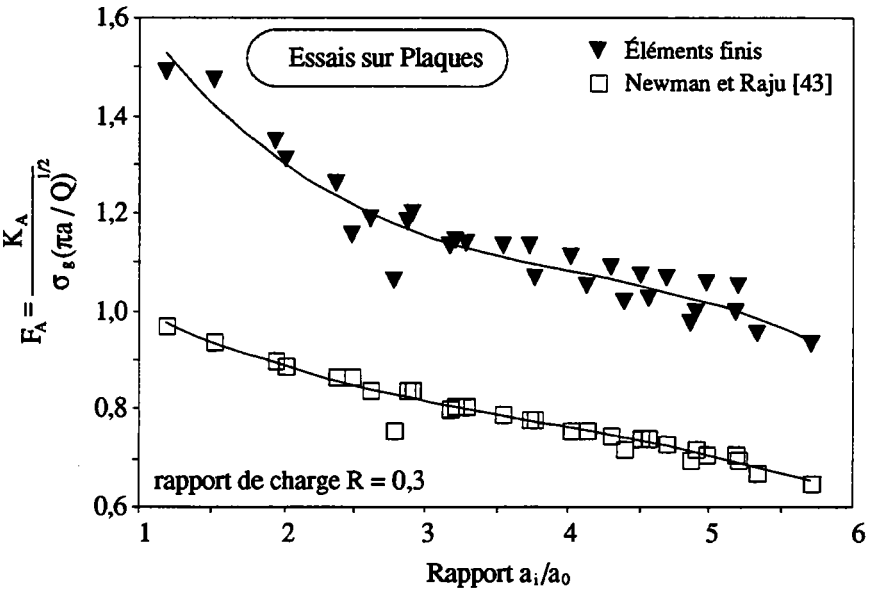


Figure III.22. Variation du facteur de correction de géométrie F_A en profondeur en fonction du rapport c_i/c_0, pour un rapport de charge R = 0,3 et dans le cas d'une plaque.

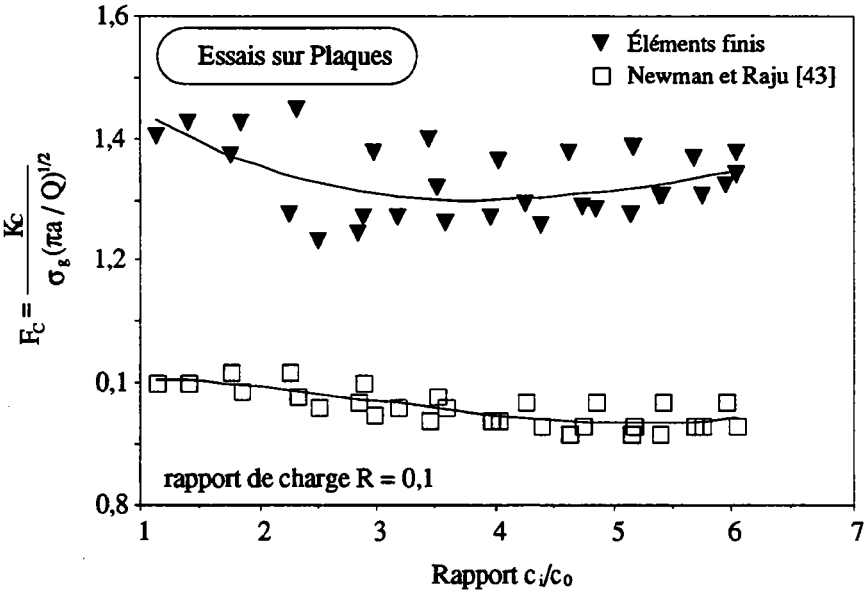


Figure III.23. Variation du facteur de correction de géométrie F_C en surface en fonction du rapport c_i/c_0, pour un rapport de charge R = 0,3 et dans le cas d'une plaque.

Dans les figures (III.20 à III.23) on remarque que :

- les deux valeurs calculées de F_C présentent une plus grande dispersion que celles de F_A. Celà est traduit par la valeur du coefficient de régression élevé, 0,267 pour F_C et 0,925 pour F_A.
- la solution de Newman & Raju présente moins de dispersion pour R = 0,1 par rapport à celle trouvée par éléments finis,

- les deux solutions utilisées présentent une certaine différence, cette dernière est plus importante pour R = 0,3,
- le rapport R = 0,3 conduit à moins de dispersion sur F_A et F_C que le rapport à R = 0,1. Dans ce cas, le coefficient de régression élevé au carré peut atteindre 0,998 au point le plus profond.

	coefficient de régression élevé au carré			
	en profondeur		en surface	
rapport de charge R	$K_{A\text{-}EF}$	$K_{A\text{-}NR}$	$K_{C\text{-}EF}$	$K_{C\text{-}NR}$
0,1	0,748	0,998	0,58	0,672
0,3	0,925	0,958	0,267	0,636

$K_{A\text{-}EF}$ et $K_{C\text{-}EF}$ F.I.C. en profondeur et en surface calculés par éléments finis.
$K_{A\text{-}NR}$ et $K_{C\text{-}NR}$ solution de Newman & Raju.

Tableau III.4. Coefficients de régression élevés au carré dans le cas des plaques.

Pour comparer nos résultats avec la solution de Newman & Raju, nous avons procédé à la détermination de l'écart relatif E_F % en utilisant la formule (III.1 *chapitre III.2.3*). Les résultats sont regroupés dans les figures (III.24 et III.25). La différence entre les deux solutions est plus importante pour R = 0,3 en surface comme en profondeur. En ce point elle peut atteindre 36%.

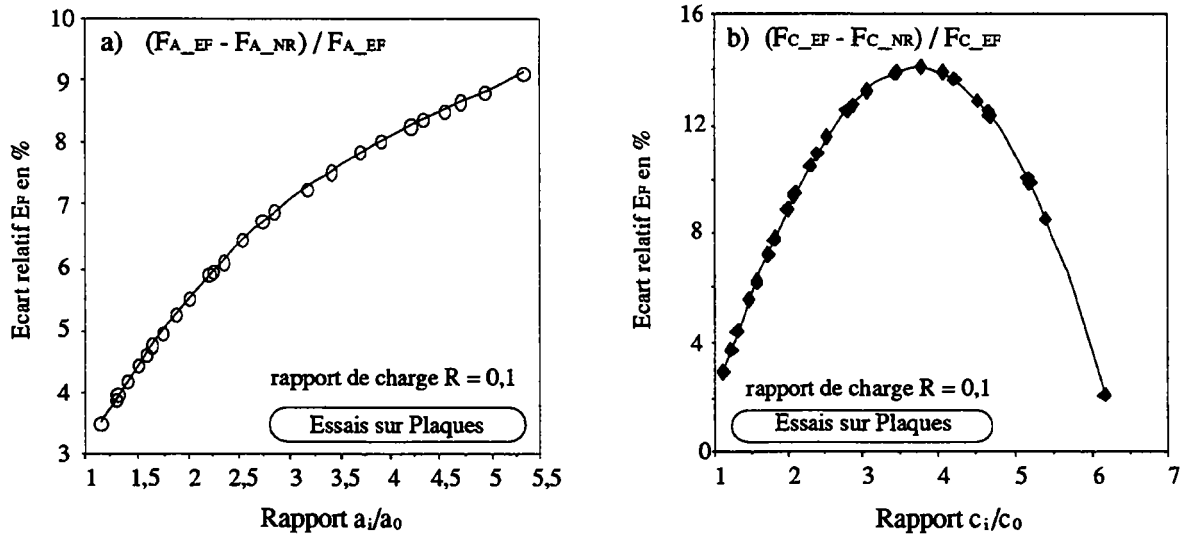


Figure III.24. Variation de l'écart relatif E_F% sur la valeur des facteurs de correction de géométrie, a) F_A en profondeur en fonction de a_i/a_0 et b) F_C en surface en fonction de c_i/c_0, pour un rapport de charge R = 0,1 résultats sur plaques.

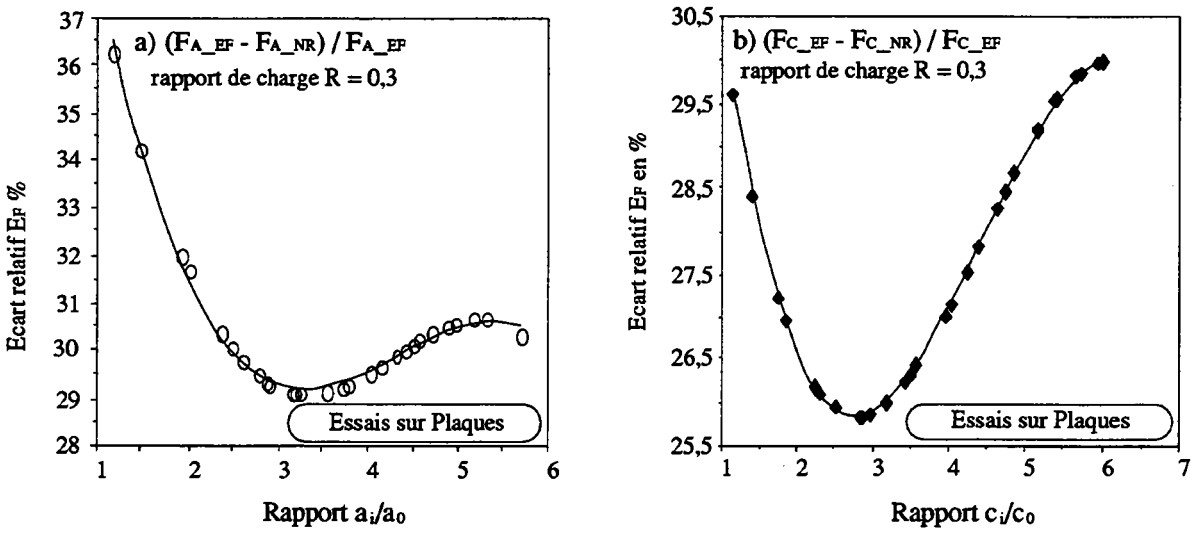


Figure III.23. Variation de l'écart relatif E_F% sur la valeur des facteurs de correction de géométrie, a) F_A en profondeur en fonction de a_i/a_0 et b) F_C en surface en fonction de c_i/c_0, pour un rapport de charge R = 0,3; résultats sur plaques.

III.7.2 Facteurs de correction de géométrie sur tubes

Nous avons procédé de la même manière que sur plaques pour déterminer le facteurs de correction de géométrie sur tubes. Les figures (III.24 et III.25) présentent les résultats de M_A au point le plus profond (M_C en surface) en fonction du rapport a_i/a_0 (c_i/c_0). Le coefficient de régression élevé au carré pour chaque cas est donné par le tableau (III.5).

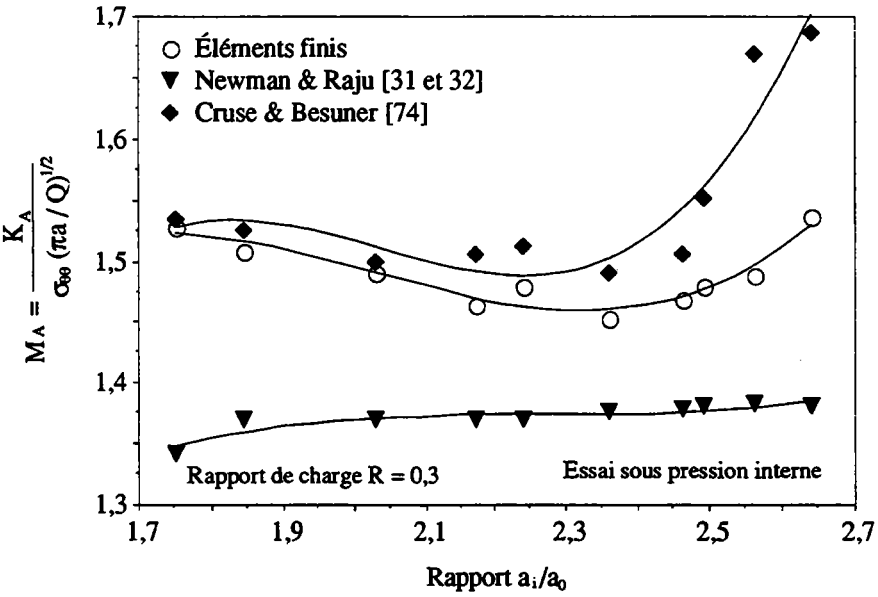


Figure III.24. Variation des facteurs de correction de géométrie M_A en profondeur en fonction de a_i/a_0, pour un rapport de charge R = 0,3 résultats sur un tube.

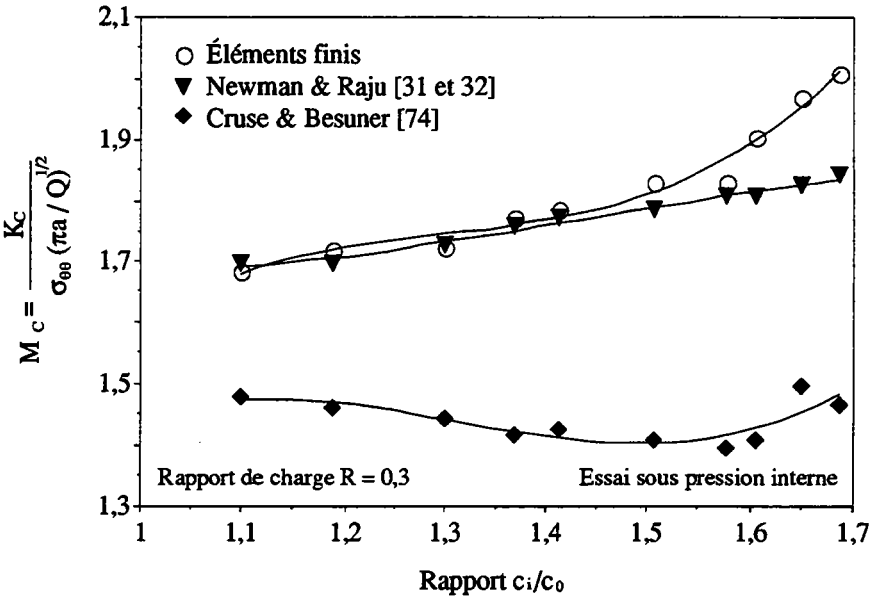


Figure III.25. Variation des facteurs de correction de géométrie M_C en surface en fonction de c_i/c_0, pour un rapport de charge R = 0,3 résultats sur un tube.

A partir des figures (III.24 et III.25) on remarque que :

- les résultats trouvés par éléments finis sont plus proches à la solution de Newman & Raju **[31 et 32]** en surface, par contre elles sont plus proches à la solution de Cruse & Besuner **[74]** en profondeur.
- la solution de Cruse & Besuner présente plus de divergence dans les résultats par rapport au deux autres solutions. Cette différence entre les différentes solutions est montrée par les figures (III.26 et III.27) donnant la variation de l'écart relatif $E_T\%$ en fonction de a_i/a_0 et c_i/c_0.

	coefficient de régression élevé au carré					
	en profondeur			en surface		
rapport de charge R	$K_{A\text{-}EF}$	$K_{A\text{-}NR}$	$K_{A\text{-}CB}$	$K_{C\text{-}EF}$	$K_{C\text{-}NR}$	$K_{C\text{-}CB}$
0,3	0,918	0,553	0,78	0,977	0,977	0,641

$K_{A\text{-}EF}$ et $K_{C\text{-}EF}$ F.I.C. en profondeur et en surface calculés par éléments finis, $K_{A\text{-}NR}$ et $K_{C\text{-}NR}$ solution de Newman & Raju et $K_{A\text{-}CB}$ et $K_{C\text{-}CB}$ solution de Cruse & Besuner.

Tableau III.5. Coefficients de régression élevés au carré dans le cas d'un tube.

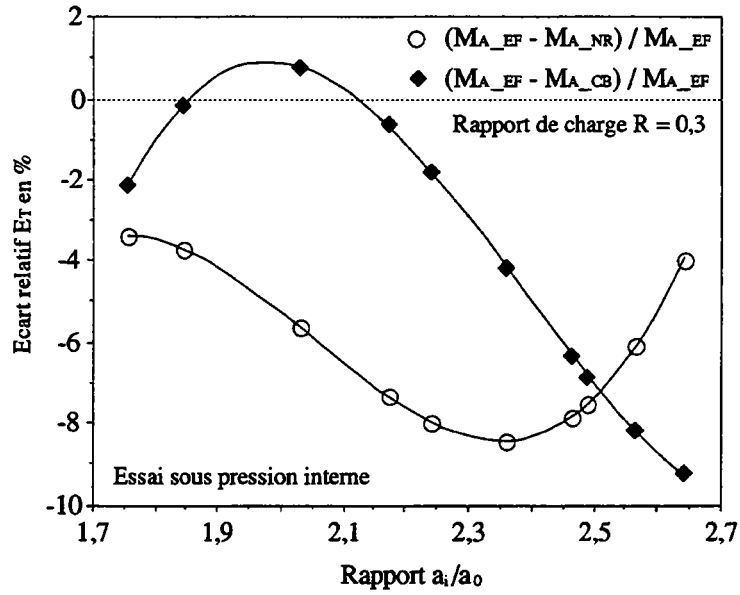


Figure III.26. Variation de l'écart relatif E_T % sur la valeur des facteurs de correction de géométrie M_A en profondeur en fonction de a_i/a_0, pour rapport de charge R = 0,3 résultats sur un tube.

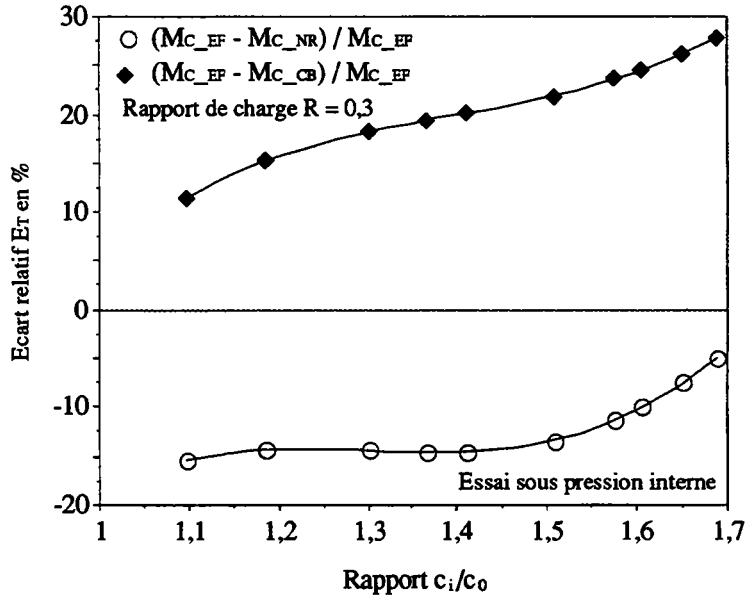


Figure III.27. Variation de l'écart relatif E_T % sur la valeur des facteurs de correction de géométrie M_C en profondeur en fonction de c_i/c_0, pour rapport de charge R = 0,3 résultats sur un tube.

IV CONCLUSION GÉNÉRALE

Au départ de cette étude, nous avons postulé que la propagation d'une fissure elliptique contenue dans une plaque soumise à une flexion cyclique ou dans un tube sous pression interne est gouvernée par l'amplitude facteur d'intensité de contraintes local ou semi-local. Cette hypothèse n'est pas mise totalement en défaut en raison de la dispersion obtenue généralement sur la loi de fissuration.

Par le biais des résultats d'essais de fissuration et de calculs aux éléments finis, nous avons examiné en même temps la valeur et l'évolution du facteur d'intensité de contraintes tout le long du front de fissuration initialement semi-elliptique dans le cas d'une plaque et d'un tube. Le calcul a été fait à partir des mesures réelles du front de fissuration pour différentes conditions de géométrie a/c et a/B.

Après quoi, nous avons utilisé ces résultats pour déterminer les paramètres de fissuration m_i et C_i de la loi de Paris selon la nature du critère utilisé : m_1 et C_1 pour le critère local, m_2 et C_2 pour le critère semi-local. Ces coefficients relatifs à la solution de la fissure semi-elliptique au point le plus profond (point A) et en surface (point C) et pour deux rapports de charge R = 0,1 et 0,3 dans le cas d'une plaque (R = 0,3 dans le cas d'un tube).

Dans toutes les études rencontrées, pour calculer le facteur d'intensité de contraintes, on fixe un des deux rapports a/c ou a/B et l'on fait varier l'autre. Par contre, dans la réalité on n'est pas maître de la situation. Dans tous les essais effectués sur plaques et pour différents rapports de charge les deux rapports a/c et a/B évoluent d'une façon complexe. Par contre, dans le cas d'un tube sous pression interne l'évolution de la fissure est fonction d'un troisième paramètre notamment le rapport B/R_{int}. Ce dernier influe sur l'état de contraintes ainsi que sur la valeur du facteur d'intensité de contraintes.

Les différents résultats publiés, concernant l'étude du comportement de fissures initialements semi-elliptiques ont montré qu'il existe de grandes différences sur :

1) l'évolution du facteur d'intensité de contraintes tout le long du front de fissuration,
2) la localisation de la valeur maximale du facteur d'intensité de contraintes,
3) l'estimation de la valeur elle-même du facteur d'intensité de contraintes comme paramètre gouvernant la fissuration,
4) l'évolution des deux demi-axes de l'ellipse a et c au cours de la propagation,
5) l'évolution de la forme de la fissure pendant l'essai de fissuration, par exemple, cette dernière reste homothétique ou non,
6) le type de critère à utiliser en supposant que la loi de Paris est valable,
7) la valeur des paramètres de fissuration de la loi de Paris a utilisée tout au long du front de fissuration initialement elliptique.

Nos avons assayé d'apporter des éléments de réponse sur ces différents points à partir :

- d'essais de fissuration sur deux différentes structures d'un même matériau, soumises à deux différents types de chargement et comportant le même défaut initial de forme semi-elliptique. Le matériau utilisé est le 35NCDV12, ses caractéristiques et propriétés mécaniques sont données dans les tableaux (II.1 et II.2 *chapitre II.1*),
- des calculs du facteur d'intensité de contraintes local sur plaques et sur tubes par la méthode aux éléments finis en trois dimensions et en utilisant un code de calcul aux éléments finis,
- de la loi de fissuration type Paris sur plaques et sur tubes,
- de l'examen du front de fissuration sur plaques et sur tubes après rupture finale.

Cette étude, nous a permis de comparer nos résultats et d'en discuter à partir de :

1- l'examen du profil obtenu au cours des essais de fissuration,
2- l'évolution du facteur d'intensité de contraintes local et semi-local tout le long du front de fissuration et en particulier au point le plus profond et en surface,
3- paramètres de fissuration C_i et m_i de la loi de Paris.

A travers ces analyses, on constate que :

I- dans le cas d'une plaque.

- le profil de la fissuration conserve une forme semi-elliptique durant la propagation, résultats confirmés par nos essais [101] (photo III.1 *chapitre III.1*) et par différents auteurs [9, 13, 22 et 24].

- Il est constaté que le front de fissure semi-elliptique ne reste pas homothétique (figure IV.1) et que la progression est plus rapide en surface.

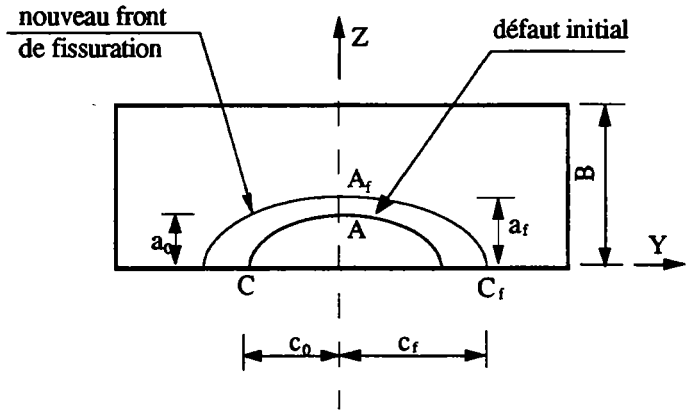


Figure IV.1. Incrément sur le front de fissuration sous l'effet d'un chargement cyclique de flexion trois points.

- le facteur d'intensité de contraintes local en flexion n'est pas toujours maximal en surface (point C) comme l'indique l'équation de Newman & Raju. Ce type de résultats est confirmé par différents auteurs **[45 et 51]** et plus récemment par les résultats de calcul aux éléments finis de Carpinteri **[42]** pour différentes conditions de géométrie a/c et a/B sur des plaques en flexion,

- les divergences entre nos résultats de calcul et ceux de Newman & Raju sont dues à notre avis à la densité et au type de maillage utilisés. Cette différence est plus importante en profondeur notamment pour les fissures peu profondes ($a/B \leq 0,1$), elle est moins importante pour les fissures profondes ($a/B \geq 0,1$),

- l'utilisation de l'amplitude du facteur d'intensité de contraintes local donne les meilleures prédictions concernant le rapport des deux demi-axes de l'ellipse a et c. Mais les paramètres de fissuration C_i et m_i ne sont pas constants le long du front de fissuration semi-elliptique et en particulier au point le plus profond et en surface, c'est à dire $m_A \neq m_C \neq m^*$ et $C_A \neq C_C \neq C^*$,

- les hypothèses simplificatrices de Mahmoud & Hosseini [1 et 14] *(chapitre I.3.3)* et Varfolomeyev & al [2] *(chapitre I.3.2)* ne peuvent être conservées,

- la corrélation empirique suggérée par Newman & Raju [4] et utilisée par plusieurs auteurs notamment Mahmoud & Hosseini [1 et 14] reliant le paramètre C en surface et en profondeur ($C_C = (0,9)^m C_A$) n'est pas vérifiée par nos résultats expérimentaux,

- pas une grande influence du rapport de charge R dans notre cas.

II- dans le cas d'un tube

- le profil de la fissuration ne conserve pas la forme semi-elliptique durant la propagation (photo III.3 *chapitre III.4)*,

- le petit demi-axe (a) augmente rapidement et le front de fissuration atteint la configuration donné par la figure (IV.2). Il est constaté que la fissure en se propageant passe d'une forme semi-elliptique à une forme quasi semi-circulaire, et cela dès les premiers cycles. Ce comportement est tout à fait différent de celui d'une plaque. Après quoi, elle conserve sa nouvelle forme et le rapport a/c reste constant jusqu'à la rupture finale,

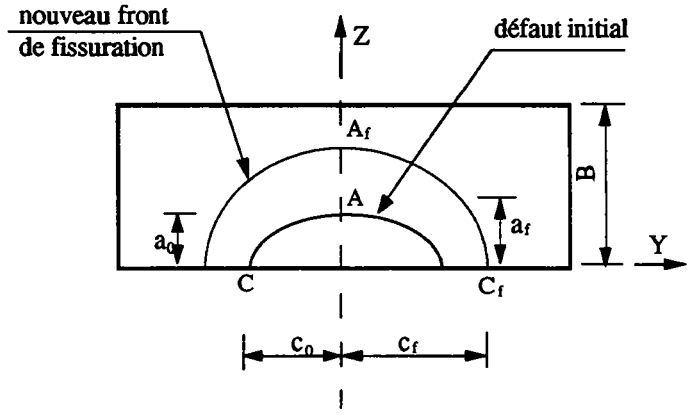


Figure IV.2. Incrément sur le front de fissuration sous l'effet d'un chargement cyclique de pression interne.

- les deux premières méthodes de calcul (éléments finis et l'équation de Newman & Raju) donnent la valeur maximale du facteur d'intensité de contraintes local en surface. A contrario, les résultats expérimentaux montrent clairement que la propagation se fait rapidement en profondeur qu'en surface,

- nos résultats ont montré une certaine divergence avec la solution de Newman & Raju, cela est dû à la densité et au type de maillage utilisés comme dans le cas d'une plaque,

- à la différence de la méthode aux éléments finis et la solution de Newman & Raju, le système d'équations de Cruse & Besuner donne la valeur maximale du facteur d'intensité de contraintes semi-local au point le plus profond.

En général on peut retenir que :

1) l'expérience montre que l'évolution constatée de la fissure dans un tube sous pression interne n'a pas été pris en compte par les différents auteurs qui ont travaillé dans ce domaine. Pour eux, la fissure reste toujours semi-elliptique et la valeur du rapport a/c reste inférieur à 1,

2) le comportement d'une fissure initialement semi-elliptique contenu dans une plaque en flexion trois points est complètement différent à celui sur tube sous pression interne au cours de la fissuration de celle-ci,

3) si on admet par hypothèse que la propagation de la fissure est sensible au gradient de contraintes local, il faut donc accepter que les coefficients de fissuration de la loi de Paris en tout point du front de fissuration sont différents et en particulier cette différence existe entre le point le plus profond et en surface, c'est à dire $C_A \neq C_C$ et $m_A \neq m_C$.

4) quelque soit le type d'approche utilisée, il est nécessaire d'utiliser des paramètres caractéristiques de la fissuration du matériau qui peuvent être identifiés aux coefficients C^* et m^* de la loi de Paris,

5) ces résultats sont une contribution au problème de la propagation des fissures de fatigue semi-elliptiques qui selon nous est encore actuellement un problème ouvert.

Par suite, nous proposons d'utiliser l'approche globale **[92]** qui consiste à faire l'hypothèse que le front de fissure prend une forme telle qu'il minimise l'énergie dissipée. Le taux d'énergie disponible minimal ainsi calculé permet de déterminer le facteur d'intensité de contraintes global K_{glo} par la relation suivante :

$$K_{glo} = \left[\frac{E \cdot J}{1 - \nu^2}\right]^{1/2} \qquad \text{en déformations planes} \qquad \text{(IV.1)}$$

avec :

J	:	intégrale de Rice
E	:	module de Young
ν	:	coefficient de Poisson

La quantité élevée de calculs numériques nécessaires nous a obligé à différer cette étude sur plaques comme sur tubes qui sera publiée ultérieurement.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUE

[1] G.R. Irwin. "Plastic zone near a crack and fracture toughness". Proc. of 7th Sagamore Conf., p. IV63 (1960).

[2] D. Broek. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Noordhoff International Publishing, Leyden (1974).

[3] T.M. Banks et A. Garlick. "The form of crack tip plastic zones". *Eng. Fract. Mechanics*, **Vol. 19**, N°. 3, p. 571-58 (1984).

[4] C. Bathias. "La Fatigue des matériaux et des structures". Maloine S. A. Ed. Paris et les Presses de l'Université de Montréal Québec. Chapitre 5, p. 163-199 (1980).

[5] J.R. Rice. "Mechanics of crack tip deformation and extension by fatigue". *ASTM STP 415*, p. 247-309 (1967).

[6] P. Paris & F. Erdogan. *Trans. ASME*, p. 528-534 (Dec. 1963).

[7] R.G. Forman & V.E. Kearny & R.M. Engle. *Transactions of the ASME D89*, p. 459, (1967).

[8] C. Bathias & M. Gateau & G. Philippe. *Revue Met.*, p. 559-569 (1976).

[9] C.M. Hudson & J. T. Scardina. *Eng. Fract. Mech* , **Vol. 1**, p. 429-446 (1969).

[10] T.W. Crooker & L.A. Cooley & E.A. Lange & C.N. Freed. *Trans. ASME*, **Vol. 61**, p. 568-574 (1968).

[11] B. Yahiaoui & P. Petrequin. *Rev. Phys. Appl.*, **Vol.9**, p. 685-692 (1974).

[12] S. Pearson. *Eng. Fract. Mechanics*, **Vol. 4**, p. 9 (1972).

[13] F. Erdogan & M. Ratwani. *Int. J. Fract. Mech.*, **Vol. 6**, p. 379 (1970).

[14] C.E. Richards & T.C. Lindley. *Eng. Fract. Mechanics*, 4, p. 951 (1972).

[15] C. Bathias. *Eng. Fract. Mechanics*, **Vol. 10**, p. 267-282 (1978).

[16] H.F. Bueckner. *in Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, **Vol. 1**, G. C. SHI; Ed. Noordhoff International Publishing, Leyden, the Netherlands (1973).

[17] J.R. Rice. *International Journal of Solids and Structures*, p. 721 (1972).

[18] SN.N. Atluri & K. Kathiresan. "Outer and inner surface flaws in thich-walled pressure vessels". *Transaction of the Fourth International Conference on Structural Mechanics in Reactor Techology*, San Franciso, Calif. (1977).

[19] J.J. McGowan & M. Raymund. "Stress-intensity factor solutions for internal longitudinal semi-elliptical surface flaws in a cylinder under arbitrary loadings". Fracture Mechanics, *ASTM STP 677*, p. 365-380 (1979).

[20] J. Heliot & R.C. Labbens & A. Pellissier-Tanon. "Semi-elliptical cracks in a cylinder subjected to stress gradients". Fracture Mechanics, *ASTM STP 677*, C. W. Smith, Ed., American Society for Testing and Materials, p. 341-364 (1979).

[21] F.J. Rizzo. *Quarterly of Applied Mathematics*, p. 83-95 (April 1967).

[22] T.A. Cruse. *Int. J. of Solids and Structures*, p. 1259-1274 (1969).

[23] J.C. Lachat & J.O. Watson. "Symposium on boundary integral equation method". *American Society of Mechanical Engineers* (June 1975).

[24] Mémoire Technique du *CETIM N°. 25-CETIM*, 52, Avenue Félix Louat, 60304 Senlis, France.

[25] J.H. Underwood. "Stress-intensity factors for internally pressurized thick-wall cylinders". Fracture Mechanics, *ASTM STP 513*, American Society for Testing and Materials, p. I-59-I-70 (1972).

[26] A.S. Kobayashi. "A simple procedure for estimating stress-intensity factors in regions of high stress gradient" *Significance of defects in welded structures*, eds. T. Kanazawa at A.S. Kobayashi, University for Tokyo Press, p. 127-143 (1974).

[27] A.S. Kobayashi & A.F. Emery & N. Polvanich & W.J. Love. *Int. J. of Pressure Vessels and Piping*, p. 103-133 (1977).

[28] A.S. Kobayashi & N. Polvanich & A.F. Emery & W.J. Love. *J. of Pressure Vessel Technology*, **Vol. 9**, p. 83-89 (Feb.1977).

[29] S.N. Atluri & K. Kathiresan & A.S. Kobayashi & M. Nakagaki. *in Preceedings, 3rd International Conference on Pressure Vessels Technology,* Tokyo, p. 527-533 (1977).

[30] W.S. Blackburn & T.K. Hellen. *in Central Electricity Generating Board Report. RD/B/N3103*, Berkeley Nuclear Laboratories (1974).

[31] J.C. Newman & I.S. Raju. "Stress-intensity factors for internal surface cracks in cylindrical pressure vessels. *J. of Pressure Vessel Technology*, **Vol. 10**, (Nov. 1980).

[32] J.C. Newman & I.S. Raju. "Stress-intensity factors for internal and external surface cracks in cylindrical pressure vessels". *J. of Pressure Vessel Technology*, **Vol. 104** (Nov. 1982).

[33] S. Timoshenko. *Strength of Materials*, Advanced Theory and Problems, D. Van Nostrand Company, New York (1956).

[34] A.E. Green & I.N. Sneddon. "The distribution of stress in the neighborhood of a flat elliptical crack in an elastic solid". *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **Vol. 46**, (1950).

[35] J. Newman & I. Raju. "Stress-intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies". *Fracture Mechanics* : Fourteenth Symposium - Vol. I Theory and Analysis, *ASTM STP 791*, p. I-308 - I-326 (1983).

[36] I.S. Raju & J.C. Newman,. "Improved stress-intensity factors for wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates". *Eng. Fract. Mechanics*, **Vol. 11**, N°. 4, p. 817-829 (1979).

[37] F.W. Smith & M.J. Alavi. in Proceedings, 1st International Conference on Pressure Vessel Technology, Delft, The Netherlands, American Society of Mechanical Engineers, p. 783-800 (1969).

[38] F.W. Smith & D.R. Sorensen. "Mixed mode stress intensity factors for semi-elliptical surface cracks". *NASA CR-134684*, National Aeronautics and Space administration (1974).

[39] A.S. Kobayashi & W.L. Moss. in Fracture, Chapman and Hall, New York and London, p. 31-45 (1969).

[40] A. Carpinteri. "Combined tension and bending stress-intensity factor of surface crack modelled as spring elements". *Theoretical and applied Fracture Mechanics*, **Vol. 14**, p. 243-251 (1990).

[41] A. Carpinteri. "Stress-intensity factors for semi-elliptical surface cracks under tension or bending". *Eng. Fract. Mech.* **Vol. 38**, p. 327-334 (1991).

[42] A. Carpinteri. "Surface flaw stress intensity factor computation with quarter-point element". *J. of Strain Analysis* **Vol. 28**, p. 117-123 (1993).

[43] J.C. Newman & I.S. Raju. "An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack". *Eng. Fracture Mechanics*, **Vol. 15**, N°. 1-2, p. 185-192 (1981).

[44] G.R. Mars & C.W. Smith. "A study of local stress Near surface flaws in bending fields". Stress Analysis and Growth of Cracks, Proceedings of the 1971 National Symposium on Fracture Mechanics, Part I, *ASTM STP 513*, p. 22-36 (1972).

[45] C. Ruiz & J. Epstein. "On the variation of the stress intensity factor along the front of a surface flaws". *Int. J. of Fracture*, **Vol. 28**, p. 231-238 (1985).

[46] J. G. Merkle. "A review of some of the existing stress-intensity factor solutions for part-through surface cracks". *U.S. Atomic Energy Commission ORNL-TM-3983* (1973).

[47] J.C. Newman. "Predicting failure of specimens with either surface cracks or corner cracks at holes". *NASA TN D-8244* (1976).

[48] M. Jolles et al. "Experimental determination of side boundary effects on stress intensity factors in surface flaws". *J. Engng Materials Technol.* ASME, P. 45-51 (Jan. 1975).

[49] M. Schroedel & J. Mc Gowan & C. Smith. "Determination of the stress intensity factor from photoelastic data with applications to surface flaws problems". *Experimental Mechanics*, **Vol. 14**, p. 392 (1974).

[50] A. Hosseini & M.A. Mahmoud. "Evaluation of stress intensity factors and fatigue growth of surface cracks in tension". **Vol. 22**, N°. 6, p. 959-974 (1985).

[51] F.W. Smith & D.R. Sorensen. "The semi-elliptical surface crack - a solution by the alternating method". *Int. J. of Fracture*, **Vol. 12**, N°. 1, p. 47-57 (Feb. 1976).

[52] R.C. Shah & A.S. Kobayashi. "Stress intensity factor for an elliptical crack approaching the surface of plate in bending". Stress Analysis and Growth of Cracks, Proceedings of the 1971 National Symposium on Fracture Mechanics, Part I, *ASTM STP 513*, p. 3-21 (1972).

[53] R.C. Shah & A.S. Kobayashi. "Stress intensity factor for an elliptical crack approaching the surface of a semi-infinite solid". *Int. J. of Fracture*, **Vol. 9**, N°. 2, p. 133-146 (June 1973).

[54] R.C. Shah & A.S. Kobayashi. "Stress Intensity Factor for an Elliptical Crack Under Arbitrary Normal Loading". *Eng. Fract. of Mechanics*, **Vol. 3**, N°. 1, p. 71-96 (1971).

[55] F.W. Smith. "The elastic analysis of the part-circular surface flaw problem by the alternating method". *The Surface Crack, ASME*, p. 125-151 (Nov. 1972).

[56] L.F. Kantorovitch & V I. Krylov. "Approximate methods of higher analysis". Wiley - New York (1964).

[57] Underwood. "Comments on the paper by R.C. Shah and A.S. Kobayashi, Stress intensity factor for an elliptical crack approaching the surface of a semi-infinite solid". *Int. J. of Fracture*, **Vol. 9**, N°. 2 (June 1973).

[58] B.Gross & J.E. Srawley & W.F. Briwn. "Stress intensity factors for edge notch tension specimen by boundary collocation of stress function". *NASA Tech., Note D2395* (August 1964).

[59] J. Dufresne. *in Advance in Fracture Research*, **Vol.2**, ICF5-Conference, p. 517-531. (1981)

[60] C. Mattheck, P. Morawietz et D. Munz. "Stress intensity factor at the surface and at the deepest point of a semi-elliptical surface crack in plates under stress gradients". *Int. J. of Fracture*, **Vol.23**, p.201-212 (1983).

[61] J.C. Newman. "Fracture analysis of surface and through-cracked sheets and plates. symposium on fatigue and fracture", George Washington University, 1972, (also, *Eng. Fract. Mecha.*, **Vol. 5**, p. 667-689 (1973).

[62] J.C. Newman. "A review and assessment of the stress-intensity factors for surface cracks". Part-Through Crack Fatigue Life Prediction. *ASTM STP 687*, J. B. Chang, Ed., *American Society for Testing and Materials*, p. 16-42 (1979).

[63] J.R. Rice & N. Levy. "The part-through surface crack in an elastic plate". *Technical Report NASA NGL 40-002-080/3*, Division of Engineering, Brown University, Transactions, American Society of Mechanical Engineers, *J. of Applied Mechanics*, Paper N° 71-APM-20 (1970).

[64] B. Gross & J.F. Srawley. "Stress-intensity factors for single-edge notch specimens in bending or combined bending and tension by boundary collocation of a stress function". *NASA TN D-2603*, National Aeronautics and Space Administration, (1965).

[65] F.W. Smith. "Stress intensity factors for a semi-elliptical surface flaw". Structural Development Research Memorandum 17, The Boeing Company, Seattle, Wash (Aug. 1966).

[66] A.F. Grandt & G.M. Sinclair. "Stress intensity factor for surface cracks in bending". Fracture Mechanics, Part I, *ASTM STP 513*, p. 37-58 (1972).

[67] G.R. Irwin. *J. of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers, **Vol. 29**, N° 4, p. 651-654 (1962).

[68] P.C. Paris & G.C. Sih. in Fracture Toughness Testing and Its Application, *ASTM STP 381, -American Society for Testing and Materials*, p. 30-83 (1965).

[69] F.W. Smith & A.F. Emery & A.S. Kobayashi. *J. of Applied Mechanics,* **Vol. 34**, N° 4 Transactions, *American Society of Mechanical Engineers*, Series E, p. 953-959 (Dec. 1967).

[70] J.N. Mesters & W.P. Haese & R.W. Finger. "Investigation of deep flaws in thin walled tanks". *NASA CR-72606*, National Aeronautics and Space Administration (Dec. 1969).

[71] R.B. Anderson & A.G. Holms & T. W. Orange. "Stress intensity magnification for deep surface cracks in sheets and plates. *NASA TN D-6054*, National Aeronautics and Space Administration (Oct. 1970).

[72] A.S. Kobayashi. in Proceedings, 2nd International Conference on Mechanical Behavior of Materials, American Society of Mechanical Engineers, p. 1073 (1976).

[73] M.A. Mahmoud & A. Hosseini. "Assessment of stress intensity factor and aspect ratio variability of surface cracks in bending plates". *Eng. Fract. Mechanics*, **Vol. 24**, N°. 2, p. 207-221 (1986).

[74] T.A. Cruse & P.M. Besuner. "Residual life prediction for surface cracks in complex structural details". *J. AirCraft*, **Vol. 12**, p. 369-375 (1975).

[75] H.J. Petroski & J.D. Achenbach. *Eng. Fract. Mechanics*, **Vol. 10**, p. 257-266 (1978).

[76] E. Sommer & M. Ratwani. "Experimental investigation of part-trougth cracks in plates and thick walled shells". 2nd SMIRT (1973).

[77] Broekhven & Van de Ruijtenbreek. in J. Helliot. "Formules de calcul de facteurs d'intensité de contraintes par des fissures semi-elliptiques débouchant dans une paroi". Réalisé à CREUSOT-LOIRE, FRAMATOME (27 Juillet 1976).

[78] V. Varfolomeyev & V.A. Vainshtok & A.YA. Krasowsky. "Prediction of part-through crack growth under cyclic loading". *Eng. Frac. Mechanics*, **Vol. 40**, N°. 6, p. 1007-1022 (1991).

[79] V.I. Letunov & I.V. Kramarenko & B.S. Shulginov & V.A. Vainshtok. "Relationships governing the propagation of surface cracks in a low-alloy steel in asymmetric cyclic bending". Report 2. Strength of Materials 18, p. 13-16 (1986).

[80] S.K. Ray & A.F. Grandt. "Fatigue crack closure of surface flaws loaded in pure bending". *Exp. Mech.* **28**, p. 273-280 (1988).

[81] J.C. Newman & I.S. Raju. "Prediction of fatigue crack-growth patterns and lives in three-dimensional cracked bodies". *In Advances in Fracture Research, Fracture 84, ICF6*, **Vol. 3**, p. 1597-1608 (1984).

[82] M. Jolles & V. Tortoriello. "Geometry variations during fatigue growth of surface flaws". *Fracture Mechanics*: Fourteenth Symposium - Vol. I. Theory and Analysis, *ASTM STP 791*, p. I297 - I307 (1983).

[83] V.I. Letunov & B.S. Shulginov & I. Plundrova & V.A Vainshtok & I.V. Kramarenko. "Relationships governing the propagation of surface cracks in a low-alloy steel in asymmetric cyclic bending". *Report 1. Strength of Materials* 17, p. 1529-1535 (1985).

[84] N.A. Fleck & I.F.C. Smith & R.A. Smith. "Closure behaviour of surface cracks". *fatigue Eng. Mater. Struct.* **6**, p. 225-239 (1983).

[85] M.A. Mahmoud. "Quantitative prediction of growth patterns of surface fatigue cracks in tension plates". *Eng. Fract. Mechanics*, **Vol. 30**, N°. 6, p. 735-746 (1988).

[86] M.A. Mahmoud. "Growth patters of surface fatigue cracks under cyclic bending - A quantitative analysis". *Eng. Fract. Mechanics*, **Vol. 31**, N°. 2, p. 357-369 (1988).

[87] M.A. Mahmoud. "Surface fatigue crack growth under combined tension and bending loading". *Eng. Fract. Mechanics*, **Vol. 36**, N°. 3, p. 389-395 (1990).

[88] J. Newman & I. Raju. "Analysis of surface cracks in finite plates under tension or bending loads". *NASA Technical* Paper 1578 (1979).

[89] D. J. Portch. "An investigation into the change of shape of fatigue cracks initiated at surface flaws". *Central Electricity Generating Board, Report RD/B/N-4645*, Great Britain (1979).

[90] M. Kawahara et M. Kurihara. "Fatigue crack growth from a surface flaw". *Proc. 4th Int. Conf. Fracture (Edited by D. Taplin)*, **Vol. 2**, p. 1361-1373, Waterloo, Canada (1977).

[91] K. Iida. "Aspect ratio expressions for part-through fatigue crack". *IIW Doc. XIII - 967-80* (1980).

[92] J. Lemaitre et J.L. Chaboche."Mécanique des matériaux solides". Ed. Dunod, p. 445-526 (1985).

[93] D.M. Tracey. "Three-dimensional elastic singularity element for evaluation of K along arbitrary crack front". *Int.J. of Fracture* , **Vol. 9**, p. 340-343 (1973).

[94] R.D. Cook. *Concepts and application of finite element analysis.* (2ed Edited John Wiley), New York, (1981).

[95] R.D. Henshell and G. Shawk. "Crack tip elements are unnecessary". *Int.J.numer.Methods Engng.* , **Vol. 9**, p. 493-509 (1975).

[96] A.R. Ingraffea and C. Manu. "Stress intensity factor computation in three dimensions with quarter-point elements". *Int. J. Numer. Methods Engng.*, **Vol. 15**, p. 1427-1445 (1980).

[97] R.S. Barsoum. "Application of quadratic isoparametric finite elements in linear fracture mechanics". *Int. J. of Fracture* , **Vol. 10**, p. 603-605 (1974).

[98] M.G. Salvadori et M. L. Baron. "Numerical Methods in Engineering". Prentice Hall, (1961).

[99] A. Carpinteri. "Shape change of surface cracks in round bars under cyclic axial loading". *Int. J. Fatigue*, **15** N° 1, p. 21-26 (1993).

[100] J. Heliot. "Formule de calcul de facteur d'intensité de contraintes pour des fissures semi-elliptique dans une paroi". Creusot-Loire, dépat. Nuclaire, DT/D-76 834, Framatome (1976).

[101] T. Boukharouba, C. Chéhimi, J. Gilgert et G. Pluvinage. "Behaviour of semi-elliptical cracks in finite plates subjected to cyclic bending". *Handbook of Fatigue Crack*, Ed. Andrea Carpinteri, **Vol. 1**, p. 707-731 (1994).

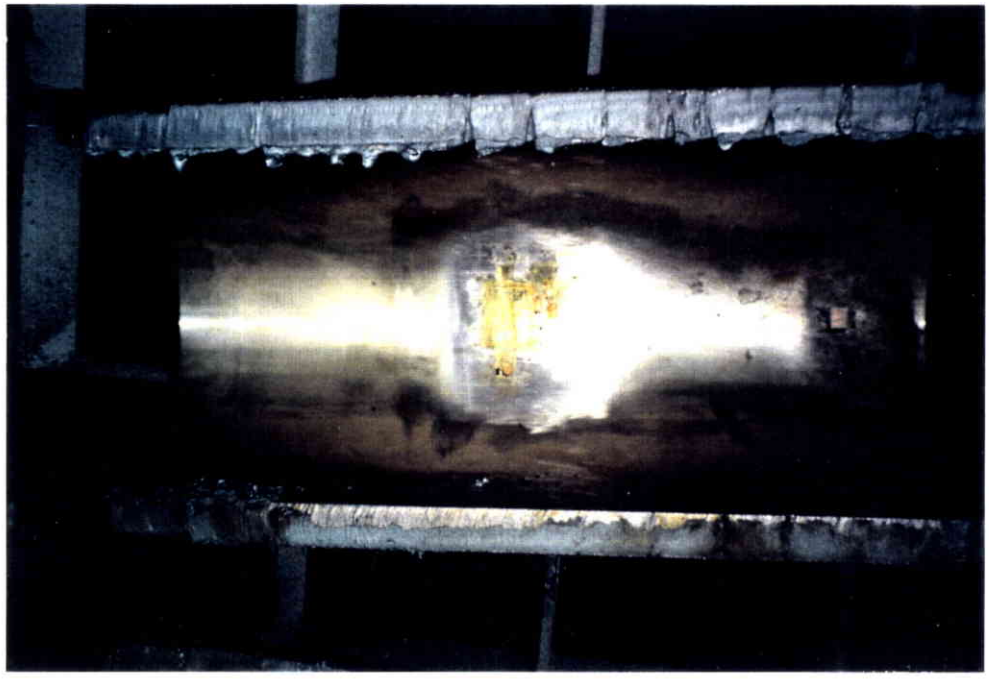


Figure A1. Coupe longitudinale du tube après l'essai de fissuration sous pression interne

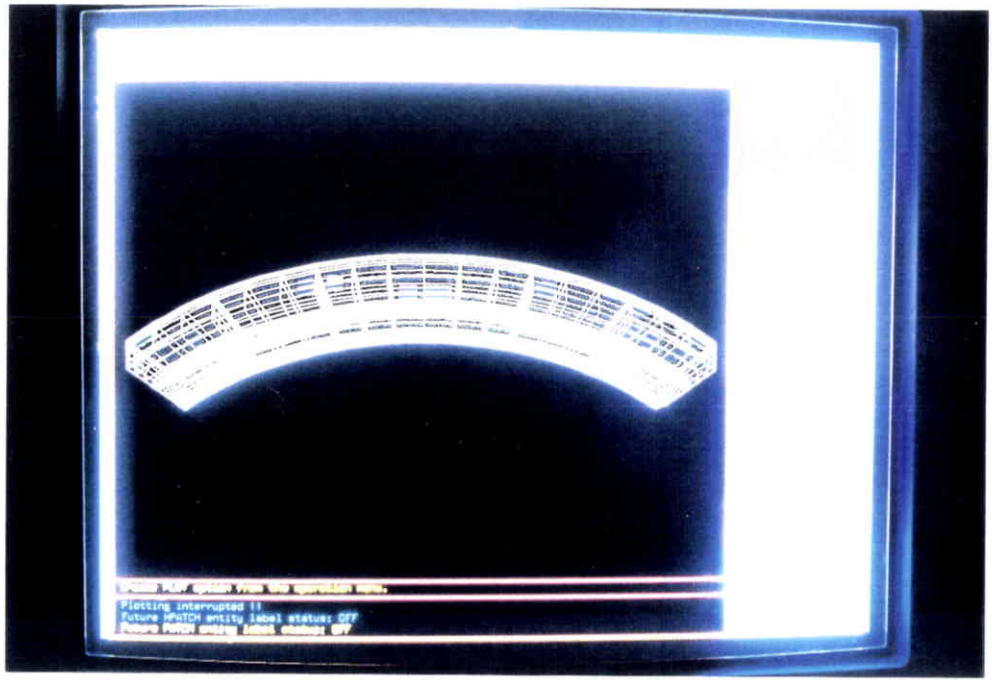


Figure A.2. Modélisation d'un huitième du tube

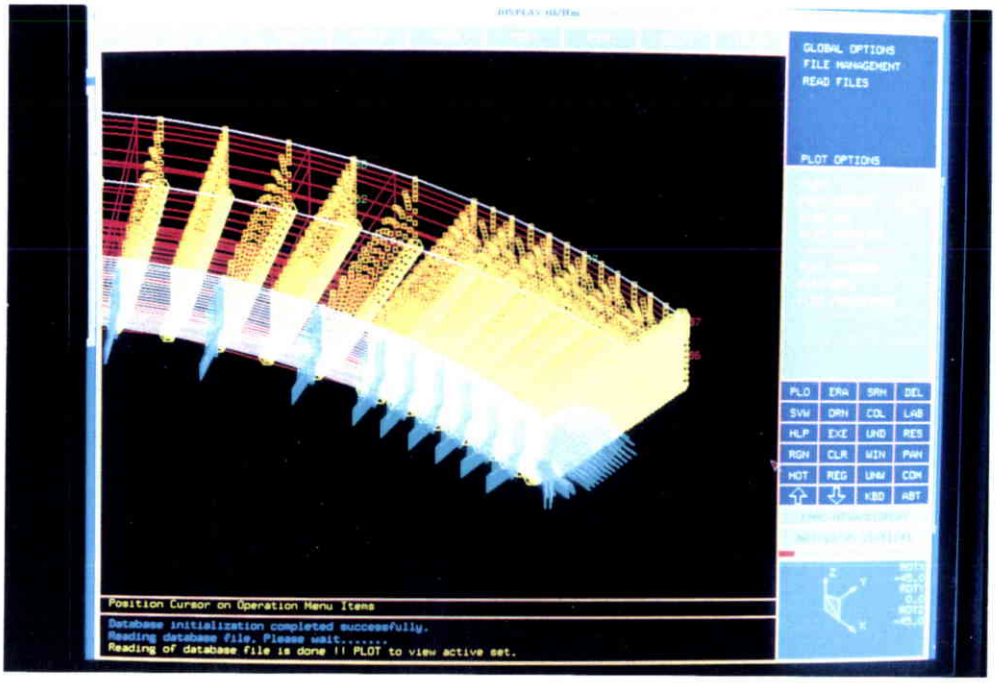


Figure A3. Maillage du tube sous pression interne

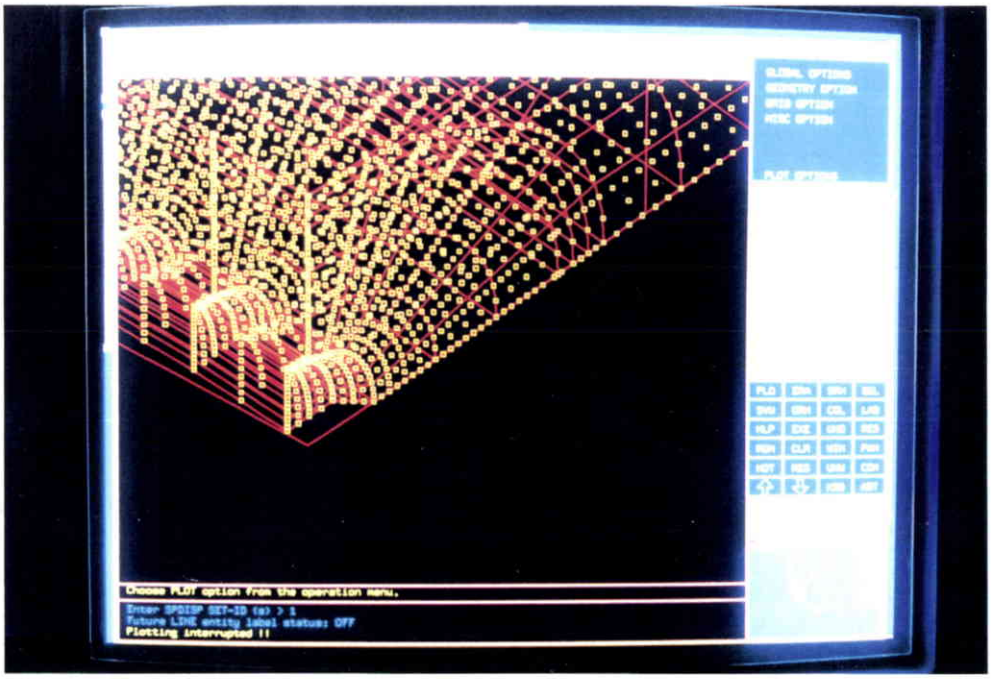


Figure A4. Les nœuds autour du front de fissuration sur tube

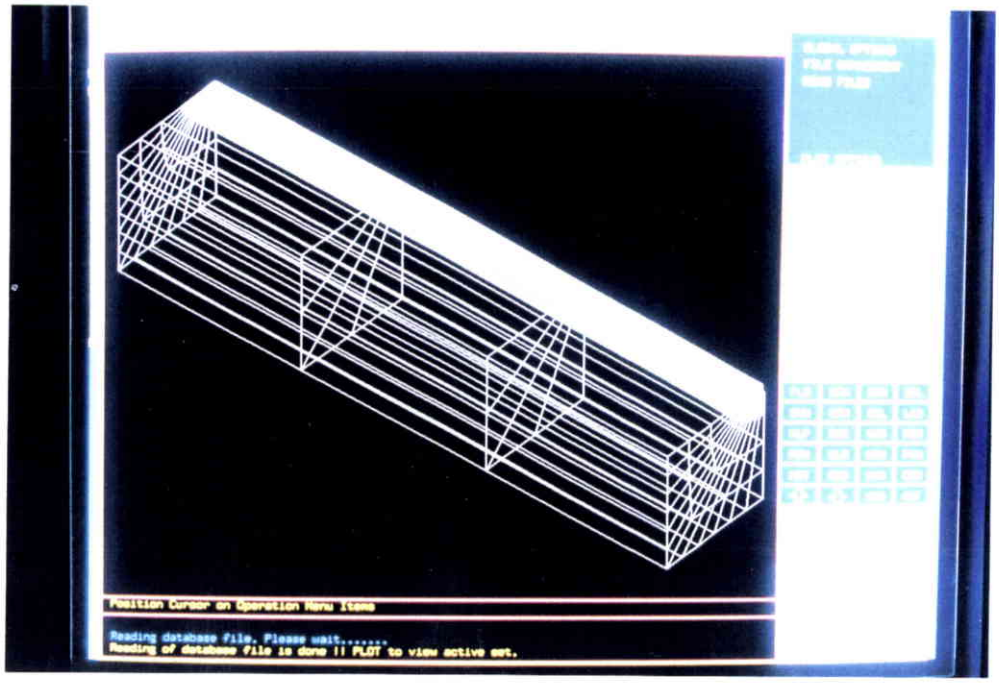


Figure A5. Modélisation d'un quart d'une plaque en flexion trois points

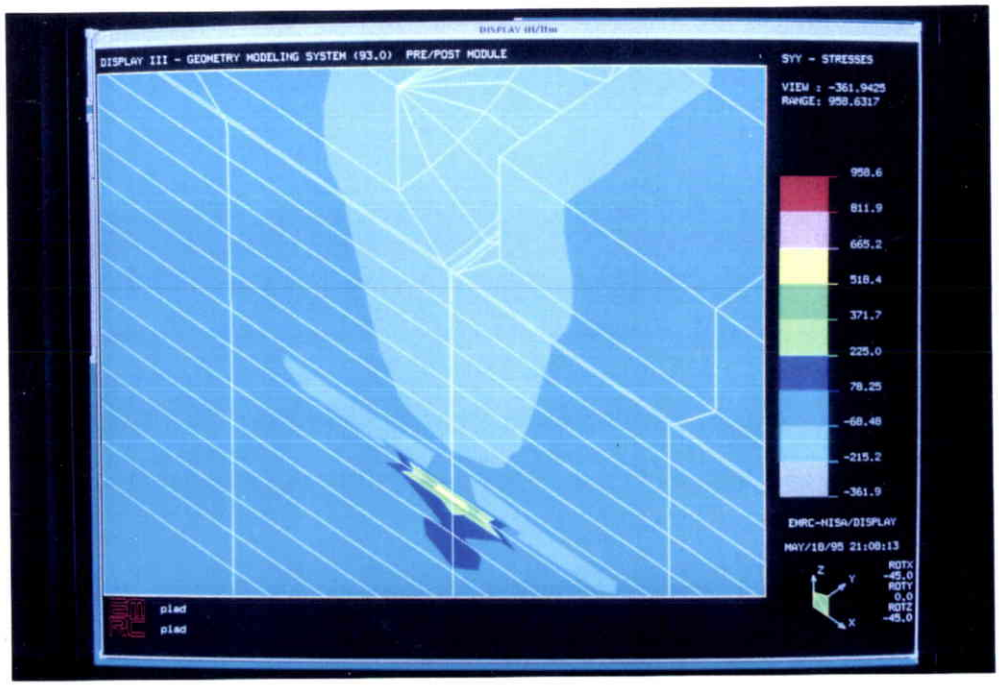


Figure A6. Concentration de contraintes au point le plus profond dans une plaque en flexion trois points

Taoufik Boukharouba
Thèse de doctorat, le 04 juillet 1995

Laboratoire de Fiabilité Mécanique, Université de Metz
Ile du saulcy, 57045 Metz - France.
Tel : 87 31 53 47, Fax : 87 31 53 03

La propagation en fatigue d'une fissure, à partir d'un défaut initial en surface présent dans une structure tridimensionnelle chargée mécaniquement, est caractérisée par le fait que le défaut prend une forme semi-elliptique qui évolue au cours du temps. La sécurité des constructions et notamment celle des réservoirs sous pression interne nécessite de connaître l'évolution de ce défaut au cours du chargement cyclique. Les concepts de sécurité, comme celui de "fuite avant rupture", utilisent à la fois la profondeur et la forme du défaut elliptique au cours de la fissuration et nécessitent donc la connaissance de la loi de propagation. Cette évolution complexe est le plus souvent considérée comme régie par des approches basées toutes sur l'hypothèse que la propagation d'une fissure est sensible au gradient de contraintes et donc gouvernée par le facteur d'intensité de contraintes. Trois approches sont utilisées successivement, locale, globale et semi-locale. Par le biais des résultats des essais de fissuration et des calculs aux éléments finis nous avons examiné en même temps la valeur et l'évolution du facteur d'intensité de contraintes tout le long du front de fissuration initialement semi-elliptique dans le cas d'une plaque en flexion trois points et dans un tube sous pression interne. Le calcul a été fait à partir des mesures réelles du front de fissure sur tubes et sur plaques pour différentes conditions de géométrie a/c et a/B. Après quoi, nous avons utilisé ces résultats pour déterminer les paramètres de fissuration m_i et C_i de la loi de Paris. Ces paramètres sont relatifs à la solution de la fissure semi-elliptique aux point le plus profond et en surface et pour deux rapports de charge R = 0,1 et 0,3 dans le cas d'une plaque (R = 0,3 dans le cas d'un tube). Nos résultats ont montrés une certaine divergence concernant à la fois la valeur et l'évolution du facteur d'intensité de contraintes, notamment par rapport à ceux dépouillés par les solutions de Newman & Raju et Cruse & Besuner. Cette divergence est du à notre avis à la densité et aux types de maillage utilisé. Nos résultats sont une contribution au problème de la propagation des fissures de fatigue semi-elliptiques qui selon nous est encore actuellement un problème ouvert.

The propagation of a fatigue crack emanating from an initial surface defect in a three dimensionnal mechanically loaded structure is characterized by the fact that the defect takes an elliptical shape which evolutes with the time. The safety of constructions and, particularly of pressure vessels, implies to know the evolution of this defect with the cyclic loading. The safety concepts, such as "leak before break", use the depth and the shape of the elliptical defect and need the knowledge of the propagation law. This evolution is often complex and is considered as governed by various approaches all based on the assumption that the propagation of a crack is sensitive to stress gradient and, then, governed by the stress intensity factor. Three approaches will be considered, local, global and semi-local. Results from crack propagation experiments and finite elements calculations have been analysed in terms of stress intensity factor evolution along the semi-elliptical crack front. These analysis were made on plates and tubes, for various a/c and a/B ratios. Our results have been used to determine the crack propagation parameters m_i and C_i of the Paris' law. These coefficients are related to the solution for a semi-elliptical crack at the deepest point and on surface and for two loading ratios (R = 0,1 and R = 0,3 for a plate, R=0,3 for a tube). These results have shown that there is some discrepancy for both the value and the evolution of the stress intensity factor, with respect to those obtained with the method given by Newmann and Raju or Cruse and Besuner. This discrepancy is due to the density and the kind of meshing used. Our results are a contribution to the no-solved problem of the propagation of semi-elliptical fatigue crack.

Taoufik Boukharouba
Thèse de doctorat LFM Université de Metz
04 juillet 1995