



HAL
open science

Etude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte et de stabilisation dépendant ou non de petits paramètres

Louis Roder Tcheugoué Tébou

► To cite this version:

Louis Roder Tcheugoué Tébou. Etude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte et de stabilisation dépendant ou non de petits paramètres. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1995. Français. NNT : 1995METZ013S . tel-01776912

HAL Id: tel-01776912

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776912>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

UNIVERSITÉ DE METZ

FACULTÉ
DES
SCIENCES

DÉPARTEMENT DE
MATHÉMATIQUES

Thèse de Doctorat de l'Université de Metz

Spécialité: *Mathématiques Appliquées*

titre: **Étude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte et de stabilisation dépendant ou non de petits paramètres**

présentée le 19 mai 1995 par

TCHEUGOUÉ TÉBOU Louis Roder

devant le jury composé de

Mmes **Patrizia DONATO**
Jeannine SAINT JEAN PAULIN

MM **Francis CONRAD**
Alain HARAUX *Rapporteur*
Vilmos KOMORNIK *Rapporteur*

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420557 9

UB 817001

UNIVERSITÉ DE METZ

FACULTÉ
DES
SCIENCES

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19950245
Cote	S/M3 95/13
Loc	Magasin

DÉPARTEMENT DE
MATHÉMATIQUES

Thèse de Doctorat de l'Université de Metz

Spécialité: *Mathématiques Appliquées*

titre: Étude de quelques problèmes de contrôlabilité exacte et de stabilisation dépendant ou non de petits paramètres

présentée le 19 mai 1995 par

TCHEUGOUÉ TÉBOU Louis Roder

devant le jury composé de

Mmes **Patrizia DONATO**
Jeannine SAINT JEAN PAULIN

MM **Francis CONRAD**
Alain HARAUX *Rapporteur*
Vilmos KOMORNIK *Rapporteur*

Remerciements

Je remercie de tout mon cœur mon Sauveur et Seigneur Jésus-Christ dont le précieux soutien a permis que ce travail arrive à son terme.

Je remercie le Professeur Jeannine Saint Jean Paulin qui a accepté de diriger mes travaux et je voudrais ici lui exprimer ma profonde gratitude pour toute la sollicitude dont elle a fait preuve tout au long de la préparation de cette thèse; je vous remercie aussi madame de m'avoir supporté pendant tout ce temps.

Je remercie également les rapporteurs, messieurs Alain Haraux et Vilmos Komornik, respectivement Directeur de recherches au C N R S à Paris VI et Professeur à Strasbourg, pour leurs fructueuses remarques ainsi que pour leur participation au jury.

Je remercie aussi les Professeurs Francis Conrad (Nancy I) et Patrizia Donato (Rouen) d'avoir accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements sont aussi pour mon épouse pour son soutien constant ainsi qu'au Département de Mathématiques de l'Université de Metz dont j'ai bénéficié du précieux support pour la réalisation technique de cette thèse.

Dédicaces

Je dédie cette thèse à mon Sauveur et Seigneur Jésus-Christ ainsi qu'à tous les rachetés de l'Eternel de tous les peuples, de toutes les tribus, de toutes les langues et de toutes les nations, qu'il s'est acquis par son sang précieux.

Mais Dieu a choisi les choses folles du monde pour confondre les sages; Dieu a choisi les choses faibles du monde pour confondre les fortes; et Dieu a choisi les choses viles du monde et celles qu'on méprise, celles qui ne sont point, pour réduire au néant celles qui sont. afin que nulle chair ne se glorifie devant Dieu.

Sommaire

Introduction générale.....	4
Chapitre 1: Contrôlabilité Exacte Interne dans des Domaines Perforés avec une Condition aux Limites de Fourier sur le bord des trous.....	6
Chapitre 2: Contrôlabilité exacte interne des vibrations d'un corps mince.....	40
Chapitre 3: Stabilisation et contrôlabilité exacte internes dans des structures cellulaires minces.....	56
Chapitre 4: Une remarque sur un résultat de J.L. Lions en contrôlabilité exacte et perturbations singulières.....	105
Chapitre 5: Sur la stabilisation de l'équation des ondes et du système de l'élasticité linéaire en dimension 2.....	115
Bibliographie générale.....	136

Introduction générale*

Le premier chapitre de cette thèse a été motivé par les travaux de D. Cioranescu et P. Donato (cf. [VI],[VII]). Dans [VII], les auteurs étudient la contrôlabilité exacte interne de l'équation des ondes, par la méthode H.U.M de J.L. Lions (cf. [XX]), avec une condition de Neumann homogène sur le bord des trous; nous étudions le même problème, mais avec une condition de Fourier sur le bord des trous. Notre condition de Fourier dépend d'un paramètre qui pour la valeur zéro transforme la condition de Fourier en une condition de Neumann homogène; le premier chapitre de cette thèse est donc une généralisation de [VII]. Hormis les résultats de contrôlabilité exacte établis dans ce chapitre, nous y démontrons également des résultats de convergences faible et forte de la suite des contrôles. L'étude de la convergence forte de la suite des contrôles n'a pas été abordée dans [VII].

Le second chapitre de cette thèse porte toujours sur la contrôlabilité exacte interne de l'équation des ondes, mais le domaine considéré ici est tridimensionnel et de faible épaisseur; nous utilisons la méthode H.U.M. Ensuite, nous faisons tendre le paramètre représentant l'épaisseur vers zéro et nous démontrons que la suite des contrôles exacts converge faiblement vers le contrôle exact du système limite bidimensionnel.

Dans le chapitre 3, nous étudions d'abord la stabilisation par "feedback" interne d'un système généralisé des ondes dans un domaine qui se présente sous forme de grillage; nous démontrons qu'on peut stabiliser les vibrations de ce corps indépendamment de son épaisseur, de la taille des trous et de l'épaisseur des barres; nous obtenons un taux de décroissance de l'énergie qui est indépendante de ces trois paramètres. Ensuite, nous faisons tendre, l'un après l'autre, ces trois paramètres vers zéro et nous démontrons à chaque étape de convergence que l'énergie du système limite bidimensionnel décroît exponentiellement et uniformément par rapport au(x) paramètre(s) fixe(s). Après cela, nous utilisons le principe de D.L. Russell (cf. [XXIV]) pour établir des résultats de contrôlabilité exacte à partir des résultats de stabilisation précédemment démontrés puis nous faisons tendre les trois petits paramètres vers zéro comme précédemment et nous démontrons à chaque étape de convergence que la suite des contrôles exacts converge faiblement vers le contrôle exact donné par le principe de Russell du système limite bidimensionnel. A notre connaissance, c'est la première fois qu'on utilise le principe de Russell pour établir des résultats de contrôlabilité exacte dans les domaines perforés.

* Les références bibliographiques contenues dans cette section se trouvent dans la bibliographie générale située en pages 138 et 139.

Dans le chapitre 4 nous répondons à une question ouverte par J.L. Lions dans [XXI]; dans [XXI], l'auteur démontre que si φ_ε est la solution du système

$$(*) \quad \begin{cases} \varphi_\varepsilon'' + \varepsilon \Delta^2 \varphi_\varepsilon - \Delta \varphi_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \varphi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \Delta \varphi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \varphi_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon^0 \in V \\ \varphi_\varepsilon'(0) = \varphi_\varepsilon^1 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où T est un nombre réel strictement positif, ε est un petit paramètre réel strictement positif destiné à tendre vers zéro et

$$V = \left\{ v \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \Delta v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

alors, on a pour tout $T > 2R$,

$$(**) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \left\{ |\nabla \varphi_\varepsilon^1|^2 + \varepsilon |\nabla \Delta \varphi_\varepsilon^0|^2 + |\Delta \varphi_\varepsilon^0|^2 \right\} dx \leq \\ \leq c_\varepsilon \int_0^T \int_{\Gamma_+} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_\varepsilon'}{\partial \nu} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 \right\} d\Gamma dt \end{cases}$$

où pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$, on a

$$R = \text{Max} \left\{ |x - x_0|; x \in \Omega \cup \partial\Omega \right\}, \quad \Gamma_+ = \left\{ x \in \partial\Omega; (x - x_0) \cdot \nu(x) > 0 \right\}$$

ν étant la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

La question ouverte est de donner une estimation sur c_ε . Nous avons donné une valeur explicite de c_ε .

Le cinquième et dernier chapitre a été motivé par un article de V. Komornik (cf. [XIV]); nous travaillons en dimension 2. Nous démontrons un résultat de stabilisation de l'équation des ondes meilleur que celui de [XIV], puis nous étudions la stabilisation par "feedbacks" interne et frontière et pour finir, nous employons les mêmes techniques pour étudier la stabilisation du système linéaire de l'élasticité.

Chapitre 1: Contrôlabilité Exacte Interne dans des Domaines Perforés avec une Condition aux Limites de Fourier sur le bord des trous

Résumé. On considère un domaine Ω de \mathbb{R}^N , ($N \geq 2$) que l'on suppose perforé périodiquement par des trous dont la taille est de l'ordre de ε . On considère la contrôlabilité exacte interne de l'équation des ondes dans le domaine perforé Ω , avec une condition aux limites de Fourier sur le bord des trous. Dans un premier temps, on établit par la méthode H.U.M de J.L. Lions, l'existence du contrôle exact; ensuite, on fait tendre ε vers zéro et on montre que la suite des contrôles converge faiblement vers une fonction qui est le contrôle exact du système homogénéisé. Enfin, on démontre un résultat de convergence forte pour la suite des contrôles.

Abstract. We consider the internal controllability of a generalized wave equation in a periodically perforated domain, with a Fourier type boundary condition on the boundary of the holes. First, we establish by the Hilbert uniqueness method, H.U.M, introduced by J.L. Lions, the existence of the exact control; afterwards, we prove that the sequence of controls weakly converges to a function which is the exact control of the homogenized system. We also prove a strong convergence result for the sequence of controls.

1- Introduction et Position du Problème.

Le premier résultat d'homogénéisation dans la théorie de la contrôlabilité exacte a été établi par J.L. Lions dans [9]. Dans son article, J.L. Lions considère la contrôlabilité exacte interne d'un système généralisé des ondes avec des coefficients rapidement oscillants dans un domaine fixe; il y fournit une technique permettant de régulariser ce système quand les données initiales ne sont pas suffisamment régulières pour appliquer les résultats classiques d'homogénéisation. Puis D. Cioranescu et P. Donato [4] ont traité le même sujet mais cette fois-ci dans un domaine perforé périodiquement de période ε . Dans [4], la condition aux limites au bord des trous est une condition de Neumann homogène et les auteurs ne donnent pas de résultat de convergence forte pour la suite des contrôles. Nous étudions le même problème que dans [4] mais avec plutôt une condition de Fourier au bord des trous et nous démontrons un résultat de convergence forte pour la suite des contrôles.

Dans tout ce qui suit, nous utilisons de façon systématique la convention de sommation sur les indices répétés ainsi que les notations suivantes:

T est un nombre réel arbitraire strictement positif et Ω est un ouvert borné et régulier de \mathbb{R}^N , ($N \geq 2$), ε est un petit paramètre strictement positif destiné à tendre vers zéro et S_ε est l'ensemble de tous les trous contenus dans Ω

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{S_\varepsilon}, \quad \Sigma = \partial\Omega \times]0, T[, \quad \Sigma_\varepsilon = \partial S_\varepsilon \times]0, T[, \quad Y =]0, 1[^N$$

S est une partie ouverte de Y de classe C^2 , représentant le trou et $Y^* = Y \setminus \overline{S}$ les paramètres α et μ sont deux nombres réels avec $\mu \geq 1$, et l'opérateur A_ε est défini par:

$$A_\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \nu_i$$

où $\nu = (\nu_i; 1 \leq i \leq N)$ est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega_\varepsilon$ et les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq N$, vérifient

$$a_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad a_{ij} \text{ est } Y\text{-périodique}, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad M = \max_{1 \leq i, j \leq N} \{ \|a_{ij}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \}$$

$$(1.1) \quad \exists m > 0 : a_{ij}(y) \xi_i \xi_j \geq m \xi_i \xi_i \quad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^N, \quad p.p \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

$$(1.2) \quad \text{On suppose que les trous ne coupent pas le bord de } \Omega.$$

Maintenant, on se donne $\{y_\varepsilon^0, y_\varepsilon^1\}$ dans un espace de Hilbert approprié et l'on considère le système suivant

$$(1.3) \quad \begin{cases} y_\varepsilon'' + A_\varepsilon y_\varepsilon = v_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \times]0, T[\\ \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} + \alpha \varepsilon^\mu y_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \\ y_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma \\ y_\varepsilon(0) = y_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ y_\varepsilon'(0) = y_\varepsilon^1 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

où v_ε est le contrôle que nous nous proposons de déterminer de manière à avoir, si y_ε est la solution de (1.3),

$$(1.4) \quad y_\varepsilon(T; v_\varepsilon) = y'_\varepsilon(T; v_\varepsilon) = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon.$$

La suite de notre travail se présente comme suit

- 2- Etude de la contrôlabilité exacte de (1.3) pour $\alpha \geq 0$.
- 3- Comportement asymptotique de (1.3) pour $\alpha \geq 0$, convergence faible des contrôles.
- 4- Convergence forte des contrôles pour $\alpha \geq 0$.
- 5- Etude du cas où $\alpha < 0$.

2- Etude de la Contrôlabilité Exacte de (1.3) pour $\alpha \geq 0$.

Cette étude est guidée par la méthode d'unicité hilbertienne, H.U.M, introduite par J.L. Lions dans [10]. Prenons $\{y_\varepsilon^0, y_\varepsilon^1\}$ dans $V_\varepsilon \times L^2(\Omega_\varepsilon)$, où

$$V_\varepsilon = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon); u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{V_\varepsilon} = \|\nabla\varphi\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N} \quad \forall \varphi \in V_\varepsilon.$$

Considérons le système d'optimalité $\{\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon\}$ où φ_ε satisfait

$$(2.1) \quad \begin{cases} \varphi_\varepsilon'' + A_\varepsilon \varphi_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \times]0, T[\\ \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} + \alpha \varepsilon^\mu \varphi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \\ \varphi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \varphi_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \varphi_\varepsilon'(0) = \varphi_\varepsilon^1 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \end{cases}$$

et ψ_ε vérifie

$$(2.2) \quad \begin{cases} \psi_\varepsilon'' + A_\varepsilon \psi_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \times]0, T[\\ \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} + \alpha \varepsilon^\mu \psi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \\ \psi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \psi_\varepsilon(T) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \psi_\varepsilon'(T) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

La solution φ_ε de (2.1) est caractérisée par le lemme suivant:

Lemme 2.1. Lorsque $\{\varphi_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^1\}$ appartient à $L^2(\Omega_\varepsilon) \times V_\varepsilon'$, la solution φ_ε de (2.1) vérifie:

$$(2.3) \quad \varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; V_\varepsilon').$$

De plus, il existe deux constantes strictement positives k_1 et k_2 , indépendantes de ε , telles que

$$(2.4) \quad k_1 \{ \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2 \}^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq k_2 \{ \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2 \}^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. La première partie du lemme est un résultat classique que l'on peut trouver dans ([10], p.133). Pour établir (2.4), on va régulariser le problème (2.1) comme dans ([4], p.197). Pour ce faire, introduisons $\chi_\varepsilon \in V_\varepsilon$, solution du système

$$(2.5) \quad \begin{cases} A_\varepsilon \chi_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon^1 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} + \alpha \varepsilon^\mu \chi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial S_\varepsilon \\ \chi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial \Omega, \end{cases}$$

et posons

$$(2.6) \quad \gamma_\varepsilon(x, t) = \int_0^t \varphi_\varepsilon(x, s) ds + \chi_\varepsilon.$$

On vérifie sans peine que γ_ε est la solution du problème

$$(2.7) \quad \begin{cases} \gamma_\varepsilon'' + A_\varepsilon \gamma_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \times]0, T[\\ \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} + \alpha \varepsilon^\mu \gamma_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \\ \gamma_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \gamma_\varepsilon(0) = \chi_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \gamma_\varepsilon'(0) = \varphi_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

On a alors, pour tout $t \in [0, T]$, l'égalité de l'énergie

$$(2.8) \quad \begin{cases} \|\gamma_\varepsilon'(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \gamma_\varepsilon(t)^2 d\Gamma = \\ = \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma. \end{cases}$$

Or comme χ_ε est la solution de (2.5), on a

$$\int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma = \langle -\varphi_\varepsilon^1, \chi_\varepsilon \rangle$$

où le $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre V_ε' et V_ε .

D'où l'on déduit en utilisant une inégalité de Young et la relation (1.1)

$$(2.9) \quad \begin{cases} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma \leq \frac{1}{2m} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2 + \frac{m}{2} \|\chi_\varepsilon\|_{V_\varepsilon}^2 \\ \leq \frac{1}{2m} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx. \end{cases}$$

Des calculs simples dans (2.9) donnent alors

$$(2.10) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + 2\alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma \leq \frac{1}{m} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2,$$

et par suite, comme $\alpha \geq 0$, on a

$$(2.11) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma \leq \frac{1}{m} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2.$$

En vertu de (2.6), on a

$$(2.12) \quad \varphi_\varepsilon = \gamma_\varepsilon'.$$

Combinant alors (2.8), (2.11) et (2.12), on obtient:

$$(2.13) \quad \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq \text{Max} \left\{ \sqrt{T}, \sqrt{\frac{T}{m}} \right\} \left\{ \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

ce qui représente la 2^e inégalité de (2.4).

Pour établir l'inégalité inverse, on procède comme dans ([8]). Soit

$$(2.14) \quad \rho : t \mapsto \rho(t) = t^2(T-t)^2.$$

Multipliant alors (2.7) par $\rho \gamma_\varepsilon$ et intégrant par parties sur $\Omega_\varepsilon \times [0, T]$, on trouve:

$$(2.15) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_i} \rho(t) dx dt + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\Sigma_\varepsilon} \rho(t) [\gamma_\varepsilon(t)]^2 d\Sigma = \\ = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) [\gamma_\varepsilon'(t)]^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho'(t) \gamma_\varepsilon(t) \gamma_\varepsilon'(t) dx dt. \end{cases}$$

Compte tenu de (2.8), on en déduit

$$(2.16) \quad \begin{cases} \left(\int_0^T \rho(t) dt \right) \left\{ \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma \right\} = \\ = 2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) \gamma_\varepsilon'(t)^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho'(t) \gamma_\varepsilon(t) \gamma_\varepsilon'(t) dx dt. \end{cases}$$

Appliquant une inégalité de Young au second terme du membre de droite de (2.16), on obtient pour tout $\lambda > 0$

$$(2.17) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho'(t) \gamma_\varepsilon(t) \gamma_\varepsilon'(t) dx dt \leq \lambda \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) \gamma_\varepsilon(t)^2 dx dt + \\ + c(\lambda) \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \gamma_\varepsilon'(t)^2 dx dt. \end{cases}$$

où l'on a posé

$$c(\lambda) = \frac{1}{4\lambda} \left\| \frac{\rho'^2}{\rho} \right\|_{L^\infty(]0,T])} = \frac{T^2}{\lambda}.$$

D'autre part, si c_p désigne la constante de Poincaré, alors on a

$$(2.18) \quad \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) \gamma_\varepsilon(t)^2 dx dt \leq c_p^2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) |\nabla \gamma_\varepsilon(t)|^2 dx dt.$$

En outre, compte tenu de (1.1) et (2.8), nous avons, pour tout $t \in [0, T]$

$$m \|\nabla \gamma_\varepsilon(t)\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}^2 \leq \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma.$$

En reportant cette relation dans (2.18), on obtient

$$(2.19) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) \gamma_\varepsilon(t)^2 dx dt \leq \\ \leq \frac{c_p^2}{m} \left(\int_0^T \rho(t) dt \right) \left\{ \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma \right\}. \end{cases}$$

On choisit alors $\lambda = \frac{m}{2c_p^2}$ et on utilise dans (2.16) les relations (2.17) et (2.19), puis on regroupe à gauche les termes identiques; il vient

$$(2.20) \quad \begin{cases} \int_0^T \rho(t) dt \left\{ \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma \right\} \leq \\ \leq 2 \left\{ 2\|\rho\|_{L^\infty(]0,T])} + c(\lambda) \right\} \|\gamma_\varepsilon'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}^2 \end{cases}$$

Utilisant (1.1) et (2.12) dans (2.20), on trouve

$$(2.21) \quad \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + m \|\chi_\varepsilon\|_{V_\varepsilon}^2 \leq \frac{2 \left\{ 2\|\rho\|_{L^\infty(]0,T])} + c(\lambda) \right\}}{\|\rho\|_{L^1(]0,T])}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}^2.$$

Ceci démontre l'existence d'une constante c , positive et indépendante de ε telle que

$$(2.22) \quad \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq c \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}^2.$$

Pour démontrer l'inégalité de gauche de (2.4), il reste à démontrer qu'il existe une constante positive k , indépendante de ε , telle que

$$(2.23) \quad \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon} \leq k \|\chi_\varepsilon\|_{V_\varepsilon}.$$

Une formulation variationnelle de (2.5) est

$$(2.24) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon \tau d\Gamma = \langle -\varphi_\varepsilon^1, \tau \rangle \quad \forall \tau \in V_\varepsilon.$$

Grâce au Lemme 3.1 de [5], nous avons

$$(2.25) \quad \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon \tau d\Gamma = \alpha \varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i}\right) \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial (\chi_\varepsilon \tau)}{\partial x_i} dx + c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega_\varepsilon} \chi_\varepsilon \tau dx$$

où ψ_1 vérifie

$$(2.26) \quad \begin{cases} \Delta_y \psi_1 = -c_1 & \text{dans } Y^* \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} = 1 & \text{sur } \partial S \\ \psi_1 \text{ est } Y\text{-périodique et de moyenne nulle} \end{cases}$$

et où $c_1 = \frac{|\partial S|}{|Y^*|}$ (la notation $|A|$ désigne la mesure de Lebesgue d'un ensemble mesurable A). En vertu du fait que S est de classe C^2 , l'application de la Proposition 2.1 de [5] produit

$$(2.27) \quad \psi_1 \in W^{1,\infty}(Y^*).$$

Or l'on a

$$(2.28) \quad \|(\nabla_y \psi_1)^\varepsilon\|_{[L^\infty(\Omega_\varepsilon)]^N} \leq \|\nabla_y \psi_1\|_{[L^\infty(Y^*)]^N}$$

avec

$$(\nabla_y \psi_1)^\varepsilon(x) = (\nabla_y \psi_1) \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad p.p \text{ dans } \Omega_\varepsilon.$$

Il découle alors de (2.25) qu'il existe une constante positive $c(\alpha)$, telle que

$$(2.29) \quad \left| \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon \tau d\Gamma \right| \leq c(\alpha) \varepsilon^{\mu-1} \|\chi_\varepsilon\|_{V_\varepsilon} \|\tau\|_{V_\varepsilon}.$$

Par conséquent, reportant ce résultat dans (2.24), en utilisant le fait que μ est supérieur ou égal à 1, on trouve:

$$(2.30) \quad \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'} \leq \left\{ M + c(\alpha) \right\} \|\chi_\varepsilon\|_{V_\varepsilon}.$$

D'où l'on déduit (2.23) et par suite (2.4); ceci achève la preuve du Lemme 2.1. \square

A présent, nous sommes en mesure de démontrer le théorème de contrôlabilité exacte:

Théorème 2.2. *Pour tout $T > 0$ et pour tout couple de données initiales du système (1.3) vérifiant*

$$(2.31) \quad \{y_\varepsilon^0, y_\varepsilon^1\} \in V_\varepsilon \times L^2(\Omega_\varepsilon),$$

il existe un contrôle interne

$$(2.32) \quad v_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$$

tel que si y_ε est la solution de (1.3), alors y_ε vérifie

$$y_\varepsilon(T) = y_\varepsilon'(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon.$$

Preuve. Posons

$$(2.33) \quad F_\varepsilon = L^2(\Omega_\varepsilon) \times V_\varepsilon', \quad F_\varepsilon' = L^2(\Omega_\varepsilon) \times V_\varepsilon$$

où l'on n'identifie pas F_ε' à son dual. Définissons

$$(2.34) \quad \Lambda_\varepsilon : F_\varepsilon \longrightarrow F_\varepsilon'$$

par

$$(2.35) \quad \Lambda_\varepsilon \{\varphi_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^1\} = \{\psi_\varepsilon'(0), -\psi_\varepsilon(0)\}$$

où ψ_ε est la solution de (2.2).

Des calculs simples montrent que pour tout $\{\xi_\varepsilon^0, \xi_\varepsilon^1\} \in F_\varepsilon$, on a

$$\langle \Lambda_\varepsilon \{\varphi_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^1\}, \{\xi_\varepsilon^0, \xi_\varepsilon^1\} \rangle = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_\varepsilon \xi_\varepsilon dx dt$$

où ξ_ε est la solution de (2.1) avec les données initiales $\{\xi_\varepsilon^0, \xi_\varepsilon^1\}$. Une application de (2.4) donne alors

$$(2.36) \quad k_1 \|\{\varphi_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^1\}\|_{F_\varepsilon} \leq \|\Lambda_\varepsilon \{\varphi_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^1\}\|_{F_\varepsilon'} \leq k_2 \|\{\varphi_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^1\}\|_{F_\varepsilon}.$$

D'où l'on déduit que Λ_ε est un isomorphisme de F_ε sur F'_ε , uniformément par rapport à ε .

Comme $\{y_\varepsilon^1, -y_\varepsilon^0\} \in F'_\varepsilon$, l'équation

$$(2.37) \quad \Lambda_\varepsilon\{\varphi_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^1\} = \{y_\varepsilon^1, -y_\varepsilon^0\}$$

possède une et une seule solution dans F_ε et compte tenu de la définition de Λ_ε , on a donc

$$(2.38) \quad \begin{cases} \psi'_\varepsilon(0) = y_\varepsilon^1 \\ \psi_\varepsilon(0) = y_\varepsilon^0. \end{cases}$$

Posant alors

$$(2.39) \quad v_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon$$

l'on voit que ψ_ε est la solution du système (1.3). Mais ce système n'admettant qu'une solution unique, à savoir y_ε , l'on a par conséquent $\psi_\varepsilon = y_\varepsilon$; par suite,

$$y_\varepsilon(T) = y'_\varepsilon(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon,$$

ce qui achève la preuve du Théorème 2.2. □

3- Comportement asymptotique de (1.3), convergence faible des contrôles pour $\alpha \geq 0$.

Il est question dans ce paragraphe, de faire tendre ε vers zéro et d'étudier la contrôlabilité exacte du système limite.

Posons

$$(3.1) \quad C(\theta, \alpha, \mu) = \begin{cases} \theta\alpha \frac{|\partial S|}{|Y^*|} & \text{si } \mu = 1 \\ 0 & \text{si } \mu > 1 \end{cases}$$

avec

$$(3.2) \quad \theta = \frac{|Y^*|}{|Y|}.$$

Pour $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, introduisons χ^j vérifiant

$$(3.3) \quad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_k}(a_{lk}(y) \frac{\partial(\chi^j - y_j)}{\partial y_l}) = 0 & \text{dans } Y^* \\ (a_{lk}(y) \frac{\partial(\chi^j - y_j)}{\partial y_l}) n_k = 0 & \text{sur } \partial S \\ \chi^j \text{ est } Y\text{-périodique et de moyenne nulle.} \end{cases}$$

Les coefficients homogénéisés et l'opérateur homogénéisé sont respectivement définis par

$$(3.4) \quad \begin{cases} q_{ij} := \frac{1}{|Y^*|} \int_{Y^*} \{a_{ij} - a_{kj} \frac{\partial \chi^i}{\partial y_k}\} dy & (3.4.1) \\ \mathcal{A} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (q_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}). & (3.4.2) \end{cases}$$

Pour la suite de ce travail, nous aurons besoin du résultat suivant que nous rappelons pour la commodité du lecteur

Lemme 3.1. a) (cf. [7]) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur de prolongement $Q_\varepsilon \in \mathcal{L}(H^k(\Omega_\varepsilon), H^k(\Omega))$ ($k = 0, 1$) vérifiant pour tout $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$*

$$(\alpha) \quad Q_\varepsilon v = v \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon,$$

$$(\beta) \quad \|Q_\varepsilon v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)},$$

$$(\gamma) \quad \|\nabla Q_\varepsilon v\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq c \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}.$$

b) (cf. [4]) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un opérateur de prolongement*

$$P_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^\infty(0, T; H^k(\Omega_\varepsilon)), L^\infty(0, T; H^k(\Omega))) \quad (k = 0, 1)$$

tel que pour tout $\varphi \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon))$ avec $\varphi' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$, on ait:

$$(i) \quad P_\varepsilon \varphi = \varphi \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \times]0, T[,$$

$$(ii) \quad P_\varepsilon(\varphi') = (P_\varepsilon \varphi)' \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[,$$

$$(iii) \quad \|P_\varepsilon \varphi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq c \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))}$$

$$(iv) \quad \|\nabla P_\varepsilon \varphi\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^N)} \leq c \|\nabla \varphi\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^N)}$$

$$(v) \quad \|P_\varepsilon \varphi'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq c \|\varphi'\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))}$$

où c est une constante positive indépendante de ε .

Supposons que y_ε^0 et y_ε^1 satisfont aux conditions suivantes:

$$(3.5) \quad \begin{cases} \|y_\varepsilon^0\|_{V_\varepsilon} \leq c \text{ et } \tilde{y}_\varepsilon^0 \rightharpoonup y^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \tilde{y}_\varepsilon^1 \rightharpoonup y^1 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

où le $\tilde{\cdot}$ désigne le prolongement par zéro de toute fonction définie dans Ω_ε et c est une constante positive indépendante de ε . On a alors le

Théorème 3.2. *On suppose que les données initiales de (1.3) vérifient (3.5). Soit v_ε le contrôle exact donné par H.U.M du système (1.3). Alors, lorsque ε tend vers zéro, on a*

$$(3.6) \quad \tilde{v}_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible}$$

où v est le contrôle exact du système homogénéisé

$$(3.7) \quad \begin{cases} \theta y'' + \mathcal{A}y + C(\theta, \alpha, \mu)y = v & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ y(0) = \frac{y^0}{\theta} & \text{dans } \Omega \\ y'(0) = \frac{y^1}{\theta} & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

De plus si P_ε est l'opérateur de prolongement du Lemme 3.1, on a

$$(3.8) \quad \begin{cases} P_\varepsilon y_\varepsilon \rightharpoonup y & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible } * \\ P_\varepsilon y'_\varepsilon \rightharpoonup y' & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible } *. \end{cases}$$

Pour établir ce théorème, nous aurons besoin du résultat suivant:

Lemme 3.3. *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, si $\{\varphi_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^1\}$ est défini par la relation (2.37), alors il existe φ_*^1 dans $H^{-1}(\Omega)$, φ^0 dans $L^2(\Omega)$, φ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et une sous-suite extraite de $\{\varepsilon\}$, encore notée $\{\varepsilon\}$, tels que*

$$(3.9) \quad \begin{cases} \widetilde{\varphi}_\varepsilon^0 \rightharpoonup \varphi^0 & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \widetilde{\varphi}_\varepsilon \rightharpoonup \varphi & \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible} \end{cases}$$

où φ est la solution du problème

$$(3.10) \quad \begin{cases} \theta \varphi'' + \mathcal{A}\varphi + C(\theta, \alpha, \mu)\varphi = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \varphi(0) = \varphi^0 & \text{dans } \Omega \\ \varphi'(0) = \varphi_*^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Preuve. Procédons d'abord aux estimations a priori. En vertu de (3.5), (2.37), (2.36) et (2.4), on a l'existence d'une constante positive c , indépendante de ε , telle que

$$(3.11) \quad \begin{cases} \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c & (3.11.1) \\ \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'} \leq c & (3.11.2) \\ \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon \times]0, T])} \leq c & (3.11.3) \end{cases}$$

Grâce à (3.11.1) et (3.11.3), on a déjà (3.9). L'existence de φ_*^1 est assurée par le résultat suivant démontré dans l'Appendice

Lemme 3.4. *Soit $f_\varepsilon \in V_\varepsilon'$. On suppose qu'il existe une constante k , positive et indépendante de ε telle que*

$$\|f_\varepsilon\|_{V_\varepsilon'} \leq k.$$

Soit $\tau_\varepsilon \in V_\varepsilon$ la solution du problème

$$\begin{cases} A_\varepsilon \tau_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial \tau_\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} + \alpha \varepsilon^\mu \tau_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial S_\varepsilon \\ \tau_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial \Omega. \end{cases}$$

Alors il existe $f^* \in H^{-1}(\Omega)$ et une sous-suite extraite de ε , encore notée ε tels que si Q_ε est l'opérateur de prolongement du Lemme 3.1, on ait

$$Q_\varepsilon \tau_\varepsilon \rightharpoonup \tau \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}$$

avec τ vérifiant

$$A\tau + C(\theta, \alpha, \mu)\tau = f^* \text{ dans } \Omega.$$

Grâce au Lemme 3.4, on sait que si χ_ε est la solution de (2.5), alors

$$(3.12) \quad Q_\varepsilon \chi_\varepsilon \rightharpoonup \chi \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}$$

où Q_ε est l'opérateur de prolongement du Lemme 3.1 et χ vérifie

$$(3.13) \quad \mathcal{A}\chi + C(\theta, \alpha, \mu)\chi = -\varphi_*^1 \text{ dans } \Omega.$$

Combinant (2.9), (3.11.1), (3.11.2), (2.8) et (2.11), on obtient

$$(3.14) \quad \begin{cases} \|\gamma'_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq c & (3.14.1) \\ \|\gamma_\varepsilon(t)\|_{V_\varepsilon} \leq c & (3.14.2) \end{cases}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Il découle de (3.14) qu'après extraction éventuelle d'une sous-suite, l'on a

$$(3.15) \quad \begin{cases} P_\varepsilon \gamma_\varepsilon \rightharpoonup \gamma \text{ dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible } * \\ P_\varepsilon \gamma'_\varepsilon \rightharpoonup \gamma' \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible } *. \end{cases}$$

Maintenant, posons

$$(3.16) \quad \xi_i^\varepsilon(x, t) = a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial x_j}(x, t).$$

Appliquant alors (3.14.2), on trouve

$$(3.17) \quad \|\xi^\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; [L^2(\Omega_\varepsilon)]^N)} \leq c$$

de sorte qu'à une extraction de sous-suite près, l'on a

$$(3.18) \quad \tilde{\xi}^\varepsilon \rightharpoonup \xi^* \text{ dans } L^\infty(0, T; [L^2(\Omega)]^N) \text{ faible } *.$$

D'autre part, compte tenu de (3.16), le système (2.7) se réécrit

$$(3.19) \quad \begin{cases} \gamma_\varepsilon'' - \operatorname{div}(\xi^\varepsilon) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \times]0, T[\\ \xi^\varepsilon \cdot \nu + \alpha \varepsilon^\mu \gamma_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_\varepsilon \\ \gamma_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \gamma_\varepsilon(0) = \chi_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \gamma_\varepsilon'(0) = \varphi_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Multipliant la première équation de (3.19) par $l \otimes v$ (avec $l \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}(]0, T[)$), et intégrant par parties sur $\Omega_\varepsilon \times]0, T[$, on trouve

$$(3.20) \quad \int_0^T \int_\Omega (P_\varepsilon \gamma_\varepsilon) \chi(\Omega_\varepsilon) l v'' dx dt + \int_0^T \int_\Omega (\tilde{\xi}^\varepsilon \cdot \nabla l) v dx dt + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma_\varepsilon l v d\Gamma dt = 0$$

où, ici et dans la suite, $\chi(\Omega_\varepsilon)$ désigne la fonction caractéristique de Ω_ε .
En vertu du Lemme 3.1 de [5], l'on a

$$(3.21) \quad \alpha \varepsilon^\mu \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma_\varepsilon l v d\Gamma dt = \alpha \varepsilon^\mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} \right) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial(\gamma_\varepsilon l)}{\partial x_i} v dx dt + c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \gamma_\varepsilon l v dx dt.$$

Grâce à (2.28) et (3.14), on sait que

$$(3.22) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \alpha \varepsilon^\mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} \right) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial(\gamma_\varepsilon l)}{\partial x_i} v dx dt \right\} = 0 \quad \forall \mu \geq 1.$$

Quant au second terme du membre de droite de (3.21), il vérifie, compte tenu de (3.15)

$$(3.23) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \gamma_\varepsilon l v dx dt \right\} = \begin{cases} c_1 \alpha \theta \int_0^T \int_\Omega \gamma l v dx dt & \text{si } \mu = 1 \\ 0 & \text{si } \mu > 1. \end{cases}$$

Comme $c_1 = \frac{|\partial S|}{|Y^*|}$, il découle de (3.1) et (3.23) que

$$(3.24) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \gamma_\varepsilon l v dx dt \right\} = C(\theta, \alpha, \mu) \left\{ \int_0^T \int_\Omega \gamma l v dx dt \right\}.$$

Le passage à la limite dans (3.20) produit alors

$$(3.25) \quad \int_0^T \int_\Omega \theta \gamma l v'' dx dt + \int_0^T \int_\Omega (\xi^* \cdot \nabla l) v dx dt + C(\theta, \alpha, \mu) \int_0^T \int_\Omega \gamma l v dx dt = 0.$$

D'où l'on déduit facilement l'équation homogénéisée

$$(3.26) \quad \theta \gamma'' - \operatorname{div}(\xi^*) + C(\theta, \alpha, \mu) \gamma = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[.$$

Procédons maintenant à l'identification de ξ^* . Comme les coefficients a_{ij} sont indépendants du temps, nous suivons ce qui a été fait dans ([7]) dans le cas des problèmes elliptiques. Considérons alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^N$, la solution w_λ du système

$$(3.27) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_k} (a_{lk}(y) \frac{\partial w_\lambda}{\partial y_l}) = 0 & \text{dans } Y^*, \\ (a_{lk}(y) \frac{\partial w_\lambda}{\partial y_l}) n_k = 0 & \text{sur } \partial S, \\ w_\lambda - \lambda \cdot y & \text{est } Y\text{-périodique de moyenne nulle.} \end{cases}$$

et posons

$$\begin{aligned} \chi_\lambda(y) &= -w_\lambda + \lambda \cdot y \\ w_\varepsilon(x) &= \lambda \cdot x - \varepsilon(Q\chi_\lambda)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

où $Q \in \mathcal{L}(H^1(Y^*), H^1(Y))$ est un opérateur de prolongement vérifiant:

$$\|\nabla_y(Q\varphi)\|_{[L^2(Y)]^N} \leq c \|\nabla_y \varphi\|_{[L^2(Y^*)]^N} \text{ pour tout } \varphi \in H^1(Y^*).$$

Montrons que

$$(3.28) \quad w_\varepsilon \rightharpoonup f_\lambda \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible}$$

où

$$f_\lambda(x) = \lambda \cdot x = \lambda_i x_i.$$

Puisque $(Q\chi_\lambda)^\varepsilon$ définie par

$$(Q\chi_\lambda)^\varepsilon(x) = (Q\chi_\lambda)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

converge faiblement vers zéro dans $L^2(\Omega)$, on a évidemment

$$w_\varepsilon \rightharpoonup f_\lambda \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

D'autre part,

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j} = \lambda_j - \left[\frac{\partial Q\chi_\lambda}{\partial y_j} \right] \left(\frac{x}{\varepsilon} \right), \quad j = 1, 2, \dots, N$$

et comme on a

$$\int_Y \frac{\partial Q\chi_\lambda}{\partial y_j} dy = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

il vient

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_j} \rightharpoonup \lambda_j \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible, } j = 1, 2, \dots, N.$$

Or on a

$$\lambda_j = \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}$$

de sorte qu'en fin de compte on a (3.28).

Introduisons

$$\eta_j^\lambda := a_{ij}(y) \frac{\partial w_\lambda}{\partial y_i}$$

et

$$(\eta_\varepsilon^\lambda)_j(x) := (\eta_j^\lambda)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Grâce à (3.27), on a

$$(3.29) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(\eta_\varepsilon^\lambda) = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \eta_\varepsilon^\lambda \cdot n = 0 & \text{sur } \partial S_\varepsilon \end{cases}$$

et en vertu de (3.28),

$$(3.30) \quad (\widetilde{\eta_\varepsilon^\lambda})_j \rightharpoonup \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} a_{ij}(y) \frac{\partial w_\lambda}{\partial y_i} dy \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible.}$$

Posons

$$(3.31) \quad \nu_j^\lambda := \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} a_{ij}(y) \frac{\partial w_\lambda}{\partial y_i} dy.$$

Multipliant (3.19) par $w_\varepsilon \varphi \otimes v$ et (3.29) par $P_\varepsilon \gamma_\varepsilon \varphi \otimes v$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $v \in \mathcal{D}([0, T])$ puis intégrant par parties et soustrayant membre à membre, il vient:

$$\int_0^T \int_\Omega (\widetilde{\xi_\varepsilon} \cdot \nabla \varphi) w_\varepsilon v dx dt - \int_0^T \int_\Omega ((\widetilde{\eta_\varepsilon^\lambda}) \cdot \nabla \varphi) P_\varepsilon \gamma_\varepsilon v dx dt = - \int_0^T \int_\Omega P_\varepsilon \gamma_\varepsilon \chi_{\Omega_\varepsilon} \varphi w_\varepsilon v'' dx dt$$

ceci, en remarquant que

$$\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (\xi_\varepsilon \cdot \nabla w_\varepsilon) \varphi v dx dt - \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} (\eta_\varepsilon^\lambda \cdot \nabla \gamma_\varepsilon) \varphi v dx dt = 0.$$

Compte tenu de (5.1), (5.8), (5.10), (3.28), (3.30) et (3.31), on obtient à la limite

$$\int_0^T \int_\Omega (\xi^* \cdot \nabla \varphi) f_\lambda v dx dt - \int_0^T \int_\Omega \nu_j^\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \gamma v dx dt = - \int_0^T \int_\Omega \theta \gamma \varphi f_\lambda v'' dx dt$$

et des calculs supplémentaires produisent

$$\xi^* \cdot \lambda = \nu_j^\lambda \frac{\partial \gamma}{\partial x_j}.$$

A ce niveau, on remarque qu'un choix judicieux de λ permet d'identifier ξ^* . Introduisons la base canonique $\{e_j, j = 1, 2, \dots, N\}$ de \mathbb{R}^N et posons pour $i = 1, 2, \dots, N$,

$$\lambda_i = e_i \quad \text{et} \quad \chi^i = y_i - w_{\lambda_i}.$$

Une vérification immédiate donne

$$(3.32) \quad \xi_i^* = q_{ij} \frac{\partial \gamma}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

de sorte que (3.26) devient

$$(3.33) \quad \theta \gamma'' + \mathcal{A}\gamma + C(\theta, \alpha, \mu)\gamma = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[.$$

D'autre part, l'on a déjà par (3.15)

$$(3.34) \quad \gamma = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Il nous reste à déterminer $\gamma(0)$ et $\gamma'(0)$. Pour ce faire, considérons $l \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}([0, T[)$ et multiplions la première équation de (3.19) par $l \otimes v$ puis effectuons une intégration par parties sur $\Omega_\varepsilon \times]0, T[$. Il vient alors

$$(3.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \left(\int_{\Omega} \widetilde{\varphi}_\varepsilon^0 l dx \right) v(0) + \left(\int_{\Omega} (Q_\varepsilon \chi_\varepsilon) \chi(\Omega_\varepsilon) l dx \right) v'(0) + \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (P_\varepsilon \gamma_\varepsilon) \chi(\Omega_\varepsilon) l v'' dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (\widetilde{\xi}^\varepsilon \cdot \nabla l) v dx dt + \\ + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\Sigma_\varepsilon} \gamma_\varepsilon l v d\Gamma dt = 0 \end{array} \right.$$

Passant à la limite dans (3.35), on trouve

$$(3.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \left(\int_{\Omega} \varphi^0 l dx \right) v(0) + \theta \left(\int_{\Omega} \chi l dx \right) v'(0) + \int_0^T \int_{\Omega} \theta \gamma l v'' dx dt + \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (\xi^* \cdot \nabla l) v dx dt + C(\theta, \alpha, \mu) \int_0^T \int_{\Omega} \gamma l v dx dt = 0. \end{array} \right.$$

En réintégrant (3.36) par parties, on obtient

$$(3.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \left(\int_{\Omega} \varphi^0 l dx \right) v(0) + \theta \left(\int_{\Omega} \chi l dx \right) v'(0) - \theta \left(\int_{\Omega} \gamma(0) l dx \right) v'(0) + \\ + \theta \left(\int_{\Omega} \gamma'(0) l dx \right) v(0) + \left\langle \theta \gamma'' + \mathcal{A}\gamma + C(\theta, \alpha, \mu)\gamma, l \otimes v \right\rangle = 0 \end{array} \right.$$

Grâce à (3.33), le dernier terme du membre de gauche de (3.37) est nul; par conséquent, (3.37) devient

$$(3.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \left(\int_{\Omega} \varphi^0 l dx \right) v(0) + \theta \left(\int_{\Omega} \chi l dx \right) v'(0) - \theta \left(\int_{\Omega} \gamma(0) l dx \right) v'(0) + \\ + \theta \left(\int_{\Omega} \gamma'(0) l dx \right) v(0) = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on choisit dans (3.38), v tel que $v(0) = 0$, des calculs simples montrent alors que

$$(3.39) \quad \gamma(0) = \chi.$$

Si maintenant dans (3.38), v est choisi tel que $v'(0) = 0$, l'on vérifie sans peine que

$$(3.40) \quad \gamma'(0) = \frac{\varphi^0}{\theta}.$$

En définitive, γ est la solution du problème

$$(3.41) \quad \begin{cases} \theta\gamma'' + \mathcal{A}\gamma + C(\theta, \alpha, \mu)\gamma = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \gamma = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \gamma(0) = \chi & \text{dans } \Omega \\ \gamma'(0) = \frac{\varphi^0}{\theta} & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Comme l'on a $\varphi_\varepsilon = \gamma'_\varepsilon$ (voir (2.6)) et comme

$$(3.42) \quad \tilde{\gamma}'_\varepsilon \rightharpoonup \theta\gamma' \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible}$$

on en déduit, en prenant en compte (3.9)

$$\varphi = \theta\gamma',$$

ce qui achève la preuve du Lemme 3.3. □

Preuve du Théorème 3.2. Puisque l'on a $v_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon$ (voir (2.39)), le Lemme 3.3 nous donne (3.6) pour une sous-suite extraite. Il nous reste à démontrer (3.7) et (3.8); pour cela, nous avons besoin de passer à la limite dans (2.2). Procédons aux estimations a priori dans (2.2). L'on sait par (2.38) que

$$(3.43) \quad \begin{cases} \psi'_\varepsilon(0) = y_\varepsilon^1 \\ \psi_\varepsilon(0) = y_\varepsilon^0. \end{cases}$$

D'autre part, on a l'égalité de l'énergie:

$$(3.44) \quad \begin{cases} \|\psi'_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial\psi_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \frac{\partial\psi_\varepsilon(t)}{\partial x_i} dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} [\psi_\varepsilon(t)]^2 d\Gamma = \\ = \|y_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial y_\varepsilon^0}{\partial x_j} \frac{\partial y_\varepsilon^0}{\partial x_i} dx + \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} [y_\varepsilon^0]^2 d\Gamma - \\ - 2 \int_0^t \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_\varepsilon \psi'_\varepsilon dx ds. \end{cases}$$

Or l'on a d'après le Lemme 3.1 de [5]

$$\alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} [y_\varepsilon^0]^2 d\Gamma = \alpha \varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} \right) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial ([y_\varepsilon^0]^2)}{\partial x_i} dx + c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega_\varepsilon} [y_\varepsilon^0]^2 dx$$

D'où l'on déduit facilement

$$(3.45) \quad \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} [y_\varepsilon^0]^2 d\Gamma \leq C \varepsilon^{\mu-1} \|y_\varepsilon^0\|_{V_\varepsilon}^2$$

où la constante C ne dépend pas de ε .

En vertu du lemme de Gronwall, de (3.5), (3.11.3), (3.44), (3.45) et du fait que $\mu \geq 1$, il existe une constante k , positive et indépendante de ε , telle que

$$(3.46) \quad \begin{cases} \|\psi'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq k & (3.46.1) \\ \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;V_\varepsilon)} \leq k. & (3.46.2) \end{cases}$$

D'où l'on déduit qu'à une sous-suite extraite

$$(3.47) \quad \begin{cases} P_\varepsilon \psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \text{ faible } * \\ P_\varepsilon \psi'_\varepsilon \rightharpoonup \psi' \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible } *. \end{cases}$$

Un raisonnement analogue à celui développé dans la preuve du Lemme 3.3, conduit au système suivant

$$(3.48) \quad \begin{cases} \theta \psi'' + \mathcal{A}\psi + C(\theta, \alpha, \mu)\psi = -\varphi & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \psi(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \psi'(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Grâce à (3.5) et (3.43), on vérifie facilement que

$$(3.49) \quad \begin{cases} \psi(0) = \frac{y^0}{\theta} & \text{dans } \Omega, \\ \psi'(0) = \frac{y^1}{\theta} & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Comme l'on a $\psi_\varepsilon = y_\varepsilon$, on a ainsi démontré (3.7) et (3.8) pour une sous-suite appropriée extraite de ε . Une application de la Méthode H.U.M à (3.7) permet la construction d'un isomorphisme

$$\Lambda : L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$$

vérifiant

$$(3.50) \quad \Lambda(\{\varphi^0, \varphi_*^1\}) = \left\{ \frac{y^1}{\theta}, -\frac{y^0}{\theta} \right\}$$

puisque $\psi = y$.

En outre, on sait que $v = -\varphi$ minimise la fonctionnelle

$$J(h) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} h^2 dx dt$$

sur l'ensemble

$$\mathcal{U}_{ad} = \{h \in L^2(0, T; L^2(\Omega)); y(T, h) = y'(T, h) = 0\};$$

ce qui détermine le contrôle v de façon unique. Par suite, toute la suite $\{\tilde{v}_\varepsilon\}$ satisfait

$$\tilde{v}_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible}$$

et donc toute la suite $\{P_\varepsilon y_\varepsilon\}$ vérifie

$$P_\varepsilon y_\varepsilon \rightharpoonup y \quad \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible } *$$

ceci achève la démonstration du Théorème 3.2. □

Remarque 3.4. L'on constate que lorsque $\mu > 1$ et $\alpha > 0$, le système homogénéisé que l'on obtient est semblable à celui obtenu par D. Cioranescu et P. Donato dans [4]; tout se passe donc comme dans le cas où l'on prend $\alpha = 0$.

Remarque 3.5. On peut prendre des données initiales moins régulières dans le système (1.3); en effet, on obtient des résultats analogues aux précédents pour des données initiales y_ε^0 et y_ε^1 vérifiant

$$\begin{cases} y_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega_\varepsilon) \\ y_\varepsilon^1 \in V_\varepsilon' \end{cases}$$

Il y a dans ce cas un transfert de régularité; φ_ε^0 et φ_ε^1 sont plus régulières maintenant. De ce fait, les résultats de convergence liés aux suites $\{\varphi_\varepsilon\}$ et $\{y_\varepsilon\}$ sont échangés, les calculs étant quasiment les mêmes (cf. [4]).

4- Convergence forte des contrôles pour $\alpha \geq 0$.

Dans tout ce qui suit, la notation $u|_{\Omega_\varepsilon}$ désigne la restriction à Ω_ε d'une fonction u définie dans Ω , l'opérateur Q_ε est l'opérateur de prolongement du Lemme 3.1 et Q_ε^* est son adjoint.

Le but de ce paragraphe est de démontrer que si nous remplaçons les hypothèses (3.5) de convergence faible des données initiales du système (1.3) par des hypothèses de convergence forte, le résultat (3.6) de convergence faible des contrôles est remplacé par un résultat de convergence forte. Ceci est l'objet du Théorème 4.4. Mais préalablement, nous allons énoncer un autre résultat de convergence faible en remplaçant les hypothèses (3.5) où la convergence était celle des prolongements par zéro par des hypothèses où la convergence porte sur l'opérateur Q_ε .

Théorème 4.1. *On suppose que les données initiales y_ε^0 et y_ε^1 du système (1.3) vérifient maintenant*

$$(4.1) \quad \begin{cases} Q_\varepsilon y_\varepsilon^0 \rightharpoonup z^0 & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible} & (4.1.1) \\ Q_\varepsilon y_\varepsilon^1 \rightarrow z^1 & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort.} & (4.1.2) \end{cases}$$

Soit v_ε le contrôle exact donné par H.U.M du système (1.3). Alors lorsque ε tend vers zéro, on a

$$(4.2) \quad \tilde{v}_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible}$$

où v est le contrôle exact du système homogénéisé

$$(4.3) \quad \begin{cases} \theta z'' + Az + C(\theta, \alpha, \mu)z = v & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ z = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ z(0) = z^0 & \text{dans } \Omega \\ z'(0) = z^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

De plus l'on a

$$(4.4) \quad \begin{cases} P_\varepsilon y_\varepsilon \rightharpoonup z & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \text{ faible} * \\ P_\varepsilon y'_\varepsilon \rightharpoonup z' & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible} *. \end{cases}$$

Remarque 4.2. Le Théorème 4.1 se démontre comme le Théorème 3.2. Cependant, nous tenons à donner quelques précisions sur les hypothèses (4.1); nous allons montrer qu'il existe des suites $\{y_\varepsilon^0\}$ et $\{y_\varepsilon^1\}$ telles que l'on ait (4.1). En effet, on peut choisir y_ε^0 et y_ε^1 par

$$(4.5) \quad \begin{cases} y_\varepsilon^0 = z_\varepsilon^0|_{\Omega_\varepsilon} \\ z_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega) \text{ et } z_\varepsilon^0 \rightharpoonup z^0 & \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible,} \end{cases}$$

$$(4.6) \quad \begin{cases} y_\varepsilon^1 = z_\varepsilon^1|_{\Omega_\varepsilon} \\ z_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega) \text{ et } z_\varepsilon^1 \rightarrow z^1 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.} \end{cases}$$

Le passage de (4.5) (resp. (4.6)) à (4.1.1) (resp. (4.1.2)) est possible avec le

Lemme 4.3. a) Soit $\{u_\varepsilon\} \subset H_0^1(\Omega)$ avec

$$(4.7) \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

alors

$$(4.8) \quad Q_\varepsilon(u_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) \rightharpoonup u \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

b) Soit $\{u_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ telle que

$$(4.9) \quad u_\varepsilon \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Alors

$$(4.10) \quad Q_\varepsilon(u_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Preuve. La partie a) du Lemme 4.3 est un cas particulier du Lemme 2.1 de [3]. Il suffit donc de démontrer la partie b). On va procéder en deux étapes

. Etape 1. Montrons d'abord que pour tout $u \in L^2(\Omega)$

$$(4.11) \quad Q_\varepsilon(u|_{\Omega_\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Soit $u \in L^2(\Omega)$. Il existe $\{u_n, n \in \mathbb{N}\} \subset H_0^1(\Omega)$ telle que

$$(4.12) \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

En vertu de (4.8), on sait que pour n fixé

$$(4.13) \quad Q_\varepsilon(u_n|_{\Omega_\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_n \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Par conséquent, pour n fixé

$$(4.14) \quad Q_\varepsilon(u_n|_{\Omega_\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_n \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ fort.}$$

Or l'on a

$$(4.15) \quad \begin{cases} \|Q_\varepsilon(u|_{\Omega_\varepsilon}) - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Q_\varepsilon((u - u_n)|_{\Omega_\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} + \\ \quad + \|Q_\varepsilon(u_n|_{\Omega_\varepsilon}) - u_n\|_{L^2(\Omega)} + \|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

Puisque $\|Q_\varepsilon((u - u_n)|_{\Omega_\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}$, on déduit de (4.15)

$$(4.16) \quad \|Q_\varepsilon(u|_{\Omega_\varepsilon}) - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Q_\varepsilon(u_n|_{\Omega_\varepsilon}) - u_n\|_{L^2(\Omega)} + (c+1)\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à (4.13), le passage à la limite en ε dans (4.16) donne

$$(4.17) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Q_\varepsilon(u|_{\Omega_\varepsilon}) - u\|_{L^2(\Omega)} \leq (c+1)\|u_n - u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Passant ensuite à la limite en n dans (4.17), on obtient (4.11).

Etape 2. Soit $\{u_\varepsilon\} \subset L^2(\Omega)$ vérifiant (4.9). On a alors

$$(4.18) \quad \begin{cases} \|Q_\varepsilon(u_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) - u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|Q_\varepsilon((u_\varepsilon - u)|_{\Omega_\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)} + \|Q_\varepsilon(u|_{\Omega_\varepsilon}) - u\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq c\|u_\varepsilon - u\|_{L^2(\Omega)} + \|Q_\varepsilon(u|_{\Omega_\varepsilon}) - u\|_{L^2(\Omega)}. \end{cases}$$

L'on sait par (4.9) et (4.11) que le second membre de (4.18) tend vers zéro avec ε ; d'où l'on déduit (4.10) et le Lemme 4.3 est ainsi démontré. \square

Théorème 4.4. *Soit v_ε le contrôle donné par H.U.M pour le système (1.9). On suppose que y_ε^0 et y_ε^1 vérifient (4.1) et qu'en outre, pour y_ε^0 , on a l'hypothèse supplémentaire*

$$(4.19) \quad \begin{cases} \begin{cases} A_\varepsilon y_\varepsilon^0 = Q_\varepsilon^* g_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial y_\varepsilon^0}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} + \alpha \varepsilon^\mu y_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \partial S_\varepsilon \\ y_\varepsilon^0 = 0 & \text{sur } \partial \Omega \end{cases} \\ g_\varepsilon \in H^{-1}(\Omega), \quad g_\varepsilon \longrightarrow g \text{ dans } H^{-1}(\Omega) \text{ fort.} \end{cases}$$

Alors la convergence (4.2) a lieu dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ fort.

Remarque 4.5. Avant de démontrer ce théorème, nous allons donner quelques éclaircissements sur l'hypothèse (4.19). Pour ce faire, nous rappelons des propriétés de l'opérateur de prolongement Q_ε introduit dans le Lemme 3.1.

$$(4.20) \quad \begin{cases} Q_\varepsilon u = u & \text{dans } \Omega_\varepsilon \quad \forall u \in L^2(\Omega_\varepsilon) \\ \|\nabla Q_\varepsilon u\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq c\|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N} & \forall u \in V_\varepsilon. \end{cases}$$

Il découle de la première équation de (4.20) que

$$(4.21) \quad \|\nabla u\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N} \leq \|\nabla Q_\varepsilon u\|_{[L^2(\Omega)]^N} \quad \forall u \in V_\varepsilon$$

ce qui signifie encore

$$(4.22) \quad \|u\|_{V_\varepsilon} \leq \|Q_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u \in V_\varepsilon.$$

Appliquant alors le Théorème II.20 de [2], on trouve que l'opérateur Q_ε^* , adjoint de Q_ε ,

$$Q_\varepsilon^* : H^{-1}(\Omega) \longrightarrow V_\varepsilon'$$

est surjectif. L'hypothèse (4.19) trouve ainsi une justification. Nous tenons cependant à préciser que ce n'est pas la première fois qu'une hypothèse de ce genre est utilisée; une hypothèse semblable a été déjà utilisée dans [1], (4.5) en vue d'établir un résultat de correcteur pour l'équation des ondes dans le cadre de la H-convergence. Une telle hypothèse a été aussi employée dans [6], (1.9). L'hypothèse (4.19) est plausible contrairement à l'hypothèse

$$(4.23) \quad Q_\varepsilon y_\varepsilon^0 \longrightarrow z^0 \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ fort}$$

qui est un peu artificielle et peu réaliste !

Nous allons à présent procéder à la démonstration du Théorème 4.4

Preuve du Théorème 4.4. Nous savons que le contrôle v_ε est donné par $v_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon$ où φ_ε est la solution de (2.1) avec $\{\varphi_\varepsilon^0, \varphi_\varepsilon^1\}$ vérifiant (2.37). On montre facilement que

$$(4.24) \quad \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi_\varepsilon(x, t)|^2 dx dt = \int_{\Omega_\varepsilon} y_\varepsilon^1 \varphi_\varepsilon^0 dx + {}_{V_\varepsilon'} \langle -\varphi_\varepsilon^1, y_\varepsilon^0 \rangle_{V_\varepsilon}.$$

D'autre part, comme on a (voir (2.5))

$$(4.25) \quad \begin{cases} A_\varepsilon \chi_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon^1 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} + \alpha \varepsilon^\mu \chi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial S_\varepsilon \\ \chi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial \Omega, \end{cases}$$

on en déduit

$$(4.26) \quad \left\{ \begin{aligned} {}_{V_\varepsilon'} \langle -\varphi_\varepsilon^1, y_\varepsilon^0 \rangle_{V_\varepsilon} &= \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial y_\varepsilon^0}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon y_\varepsilon^0 d\Gamma \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial y_\varepsilon^0}{\partial x_j} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon y_\varepsilon^0 d\Gamma \quad (\text{car } a_{ij} = a_{ji}) \\ &= {}_{V_\varepsilon'} \langle A_\varepsilon y_\varepsilon^0, \chi_\varepsilon \rangle_{V_\varepsilon} \\ &= {}_{V_\varepsilon'} \langle Q_\varepsilon^* g_\varepsilon, \chi_\varepsilon \rangle_{V_\varepsilon} \\ &= {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle g_\varepsilon, Q_\varepsilon \chi_\varepsilon \rangle_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \right.$$

Reportant (4.26) dans (4.24), on obtient

$$(4.27) \quad \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} |\varphi_\varepsilon(x, t)|^2 dx dt = \int_{\Omega_\varepsilon} y_\varepsilon^1 \varphi_\varepsilon^0 dx + {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle g_\varepsilon, Q_\varepsilon \chi_\varepsilon \rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

Comme les hypothèses (4.19) et (4.1.2) sont plus fortes que celles contenues dans (3.5), le Lemme 3.3 est encore vrai. Avec toutes ces informations, on peut passer à la limite dans (4.27); il vient alors

$$(4.28) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} |\widetilde{\varphi}_{\varepsilon}(x, t)|^2 dx dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (Q_{\varepsilon} y_{\varepsilon}^1) \widetilde{\varphi}_{\varepsilon}^0 dx + {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle g, \chi \rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} z^1 \varphi^0 dx + {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle g, \chi \rangle_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \right.$$

D'autre part, l'application du Théorème 4.11 de [5] montre que z^0 vérifie

$$(4.29) \quad \mathcal{A}z^0 + C(\theta, \alpha, \mu)z^0 = g \quad \text{dans } \Omega.$$

Par conséquent, on a

$$(4.30) \quad \left\{ \begin{aligned} {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle g, \chi \rangle_{H_0^1(\Omega)} &= \int_{\Omega_{\varepsilon}} q_{ij} \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \frac{\partial z^0}{\partial x_i} dx + C(\theta, \alpha, \mu) \int_{\Omega} \chi z^0 dx \\ &= \int_{\Omega} q_{ij} \frac{\partial \chi}{\partial x_j} \frac{\partial z^0}{\partial x_i} dx + C(\theta, \alpha, \mu) \int_{\Omega} \chi z^0 dx \quad (\text{car } q_{ij} = q_{ji}) \\ &= {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle \mathcal{A}\chi + C(\theta, \alpha, \mu)\chi, z^0 \rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle -\varphi_*^1, z^0 \rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad (\text{d'après (3.13)}). \end{aligned} \right.$$

En utilisant cette relation dans (4.28), on trouve

$$(4.31) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} |\widetilde{\varphi}_{\varepsilon}(x, t)|^2 dx dt = \int_{\Omega} z^1 \varphi^0 dx + {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle \varphi_*^1, -z^0 \rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

L'application de la méthode H.U.M pour la contrôlabilité du système (4.3) montre que

$$(4.32) \quad \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi(x, t)|^2 dx dt = \int_{\Omega} z^1 \varphi^0 dx + {}_{H^{-1}(\Omega)} \langle \varphi_*^1, -z^0 \rangle_{H_0^1(\Omega)}.$$

où φ est donné par le Lemme 3.3. On déduit alors de (4.31) et (4.32) que

$$(4.33) \quad \widetilde{\varphi}_{\varepsilon} \longrightarrow \varphi \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ fort,}$$

ce qui établit le Théorème 4.4 puisque $v_{\varepsilon} = -\varphi_{\varepsilon}$ et $v = -\varphi$. □

5- Etude du cas où $\alpha < 0$.

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de montrer que les résultats établis dans les paragraphes précédents pour les valeurs positives de α restent encore valables pour des valeurs négatives de α . Comme les résultats précédents reposaient essentiellement sur le Lemme 2.1, nous nous bornerons ici à la démonstration d'un lemme analogue au Lemme 2.1.

Comme dans les paragraphes précédents, ici, c_p désigne la constante de Poincaré. On a

Lemme 5.1. (i) Soit $\varepsilon_0 > 0$. On suppose que les paramètres α, ε, μ vérifient

$$(5.1) \quad \mu = 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad -\frac{m}{2\tau_0} < \alpha$$

où $\tau_0 = c_p \{c_1 c_p + 2\varepsilon_0 \|\nabla_y \psi_1\|_{[L^\infty(Y^*)]^N}\}$ et la constante c_1 ainsi que la fonction ψ_1 sont encore données par (2.26).

Alors le problème (2.1) possède une unique solution φ_ε vérifiant (2.3) et, il existe des constantes h_1 et h_2 strictement positives et indépendantes de ε telles que

$$(5.2) \quad h_1 \left\{ \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))} \leq h_2 \left\{ \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Lorsque $\mu > 1$ et α est choisie arbitrairement dans $] -\infty, 0[$, on a la même conclusion que dans (i), pourvu que ε vérifie en plus de (5.1)

$$(5.3) \quad \varepsilon < \left[\frac{m}{-2\alpha\tau_0} \right]^{\frac{1}{\mu-1}}.$$

Remarque 5.2. Dans le cas où $\mu = 1$, l'hypothèse sur α , contenue dans (5.1) est suffisante pour établir (5.2) mais elle est insuffisante pour effectuer le passage à la limite en ε . En effet l'équation homogénéisée associée à (2.5) est toujours donnée par

$$(5.4) \quad \begin{cases} \mathcal{A}\chi + \alpha c_1 \theta \chi = -\varphi_*^1 & \text{dans } \Omega \\ \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que l'application du lemme de Lax-Milgram pour établir l'existence et l'unicité de la solution de cette équation requiert que la valeur absolue de α n'excède pas une certaine valeur; plus précisément, on doit avoir

$$(5.5) \quad -\alpha < \frac{\lambda_1}{\theta c_1}$$

où λ_1 est la première valeur propre de l'opérateur homogénéisé \mathcal{A} (avec condition de Dirichlet). On doit donc combiner (5.1) et (5.5) pour passer à la limite.

Preuve du Lemme 5.1. Démontrons d'abord l'inégalité suivante qui sera utile pour la suite. Pour tout $v \in V_\varepsilon$, on a

$$(5.6) \quad \frac{\alpha\varepsilon^{\mu-1}\tau_0}{m} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \leq \alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} v^2 d\Gamma.$$

Grâce au Lemme 3.1 de [5], on sait que pour tout $v \in V_\varepsilon$, on a

$$(5.7) \quad -\alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} v^2 d\Gamma = -2\alpha\varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i}\right) \left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial v}{\partial x_i} v dx - c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega_\varepsilon} v^2 dx.$$

En vertu de l'inégalité de Poincaré et de (2.28), on a

$$(5.8) \quad \begin{cases} -2\alpha\varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y_i}\right)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial v}{\partial x_i} v dx - c_1\alpha\varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega_\varepsilon} v^2 dx \leq \\ -\alpha\varepsilon^{\mu-1} \{2c_p\varepsilon_0 \|\nabla_y \psi_1\|_{[L^\infty(Y^*)]^N} + c_1 c_p^2\} \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}^2. \end{cases}$$

Or l'on a

$$(5.9) \quad m \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}^2 \leq \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Combinant (5.7), (5.8), et (5.9), on trouve

$$(5.10) \quad -\alpha\varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} v^2 d\Gamma \leq \frac{-\alpha\varepsilon^{\mu-1} c_p \{2\varepsilon_0 \|\nabla_y \psi_1\|_{[L^\infty(Y^*)]^N} + c_1 c_p\}}{m} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

D'où l'on déduit l'estimation voulue, compte tenu de la définition de τ_0 .

Preuve de (i). Les hypothèses faites sur ε , α et μ permettent de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (2.1) comme dans le cas où α est positif. Nous allons établir seulement les inégalités de (5.2). En vertu de (2.8), (5.1) et (5.6) ainsi que de la négativité de α , on a

$$(5.11) \quad \begin{cases} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}^2 + \left[1 + \frac{\alpha\tau_0}{m}\right] \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial\gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \frac{\partial\gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_i} dx dt \leq \\ T \left\{ \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx \right\} \end{cases}$$

Mais grâce à (5.1), on a

$$1 + \frac{\alpha\tau_0}{m} > 0$$

il découle alors de (5.11) que

$$(5.12) \quad \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}^2 \leq T \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + T \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx.$$

Maintenant, nous allons estimer le second terme du membre de droite de (5.12). Nous rappelons l'inégalité (2.10) qui reste valable sous (5.1)

$$(5.13) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + 2\alpha\varepsilon \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma \leq \frac{1}{m} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2.$$

Utilisant (5.6) dans (5.13), on trouve

$$(5.14) \quad \left[1 + \frac{2\alpha\tau_0}{m}\right] \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial\chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx \leq \frac{1}{m} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2.$$

En vertu de l'hypothèse faite sur α , l'inégalité (5.14) se réécrit

$$(5.15) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx \leq \frac{1}{m - \{-2\alpha\tau_0\}} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2.$$

Combinant alors (5.12) et (5.15), on obtient

$$(5.16) \quad \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}^2 \leq T \left\{ \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{m - \{-2\alpha\tau_0\}} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2 \right\}$$

d'où l'on déduit facilement la deuxième inégalité de (5.2) avec la constante h_2 donnée par

$$h_2 = \text{Max} \left\{ \sqrt{T}, \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{m - \{-2\alpha\tau_0\}}} \right\}.$$

Il nous reste à établir la première inégalité de (5.2); nous allons procéder comme dans le cas de la preuve du Lemme 2.1. Compte tenu de ce qui a été fait dans la preuve de la première inégalité du Lemme 2.1 (cf. (2.12) et (2.15)), on a

$$(5.17) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ [\varphi_\varepsilon(t)]^2 + a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_i} \right\} \rho(t) dx dt + \alpha \varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \rho(t) [\gamma_\varepsilon(t)]^2 d\Sigma = \\ = 2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) [\varphi_\varepsilon(t)]^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho'(t) \gamma_\varepsilon(t) \varphi_\varepsilon(t) dx dt. \end{cases}$$

Appliquant une inégalité de Young au second terme du membre de droite de (5.17), on obtient pour tout $\lambda > 0$

$$(5.18) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho'(t) \gamma_\varepsilon(t) \varphi_\varepsilon(t) dx dt \leq \lambda \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) \gamma_\varepsilon(t)^2 dx dt + \\ + c(\lambda) \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(t)^2 dx dt. \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(5.19) \quad c(\lambda) = \frac{1}{4\lambda} \left\| \frac{\rho'^2}{\rho} \right\|_{L^\infty(]0,T])} = \frac{T^2}{\lambda}.$$

D'autre part, on a

$$(5.20) \quad \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) \gamma_\varepsilon(t)^2 dx dt \leq c_p^2 \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) |\nabla \gamma_\varepsilon(t)|^2 dx dt.$$

En outre, compte tenu de (1.1), l'on a, pour tout $t \in [0, T]$

$$(5.21) \quad \|\nabla \gamma_\varepsilon(t)\|_{[L^2(\Omega_\varepsilon)]^N}^2 \leq \frac{1}{m} \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial x_i} dx.$$

En reportant cette relation dans (5.20), on obtient

$$(5.22) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \rho(t) \gamma_\varepsilon(t)^2 dx dt \leq \\ \leq \frac{c_p^2}{m} \left(\int_0^T \rho(t) dt \right) \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_\varepsilon}{\partial x_i} dx. \end{cases}$$

On choisit alors $\lambda = \frac{m}{2c_p^2}$ et on utilise les relations (5.18) et (5.22) dans (5.17), puis on fait les simplifications nécessaires; il vient

$$(5.23) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ [\varphi_\varepsilon(t)]^2 + \frac{1}{2} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_i} \right\} \rho(t) dx dt + \alpha \varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \rho(t) [\gamma_\varepsilon(t)]^2 d\Sigma \leq \\ \leq 2 \{ 2 \|\rho\|_{L^\infty(]0, T[)} + c(\lambda) \} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))}^2 \end{cases}$$

En utilisant (5.6) dans (5.23), on trouve

$$(5.24) \quad \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ [\varphi_\varepsilon(t)]^2 + \left[\frac{m - \{-2\alpha\tau_0\}}{2m} \right] a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_i} \right\} \rho(t) dx dt \leq \\ \leq 2 \{ 2 \|\rho\|_{L^\infty(]0, T[)} + c(\lambda) \} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))}^2 \end{cases}$$

d'où l'on déduit aisément

$$(5.25) \quad \begin{cases} \left[\frac{m - \{-2\alpha\tau_0\}}{2m} \right] \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ [\varphi_\varepsilon(t)]^2 + a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_i} \right\} \rho(t) dx dt \leq \\ \leq 2 \{ 2 \|\rho\|_{L^\infty(]0, T[)} + c(\lambda) \} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))}^2. \end{cases}$$

En vertu de la relation (2.8) et de la négativité de α , on a pour tout $t \in [0, T]$

$$(5.26) \quad \begin{cases} \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma \leq \\ \int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ [\varphi_\varepsilon(t)]^2 + a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_j} \frac{\partial \gamma_\varepsilon(t)}{\partial x_i} \right\} dx. \end{cases}$$

La combinaison de (5.25) et (5.26) produit

$$(5.27) \quad \begin{cases} \|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon^2 d\Gamma \leq \\ \leq \frac{4m \{ 2 \|\rho\|_{L^\infty(]0, T[)} + c(\lambda) \}}{[m - \{-2\alpha\tau_0\}] \|\rho\|_{L^1(]0, T[)}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))}^2. \end{cases}$$

L'utilisation de (5.6) dans (5.27) donne

$$(5.28) \quad \begin{cases} \left[\frac{m - \{-\alpha\tau_0\}}{m} \right] \int_{\Omega_\varepsilon} \left\{ [\varphi_\varepsilon^0]^2 + a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} \right\} dx \leq \\ \leq \frac{4m \{2\|\rho\|_{L^\infty(]0,T])} + c(\lambda)\}}{[m - \{-2\alpha\tau_0\}] \|\rho\|_{L^1(]0,T])}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}^2. \end{cases}$$

Or l'on a pour tout $\tau \in V_\varepsilon$,

$$(5.29) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \tau}{\partial x_i} dx + \alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \chi_\varepsilon \tau d\Gamma = \langle -\varphi_\varepsilon^1, \tau \rangle.$$

D'où l'on déduit

$$(5.30) \quad \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2 \leq [M - \alpha\tau_0]^2 \|\chi_\varepsilon\|_{V_\varepsilon}^2.$$

Des calculs simples dans la relation (5.30) montrent que

$$(5.31) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx \geq \frac{m}{[M - \alpha\tau_0]^2} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2.$$

Combinant alors (5.28) et (5.31), on obtient

$$(5.32) \quad \begin{cases} \left[\frac{m - \{-\alpha\tau_0\}}{m} \right] \int_{\Omega_\varepsilon} [\varphi_\varepsilon^0]^2 dx + \frac{m}{[M - \alpha\tau_0]^2} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2 \leq \\ \leq \frac{4m \{2\|\rho\|_{L^\infty(]0,T])} + c(\lambda)\}}{[m - \{-2\alpha\tau_0\}] \|\rho\|_{L^1(]0,T])}} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}^2 \end{cases}$$

d'où l'on déduit l'inégalité voulue; ce qui achève la preuve de (i).

Preuve de (ii). La démarche étant la même que dans le cas de la preuve de (i), nous nous bornerons ici à la démonstration des relations de la forme (5.15) ou (5.31).

Grâce à (5.6) et (2.10), on sait que

$$(5.33) \quad \left[\frac{m - \{-2\alpha\varepsilon^{\mu-1}\tau_0\}}{m} \right] \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx \leq \frac{1}{m} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2.$$

Utilisant (5.3) dans (5.33), on obtient une relation de la forme (5.15); ce qui permet d'établir sans peine la deuxième inégalité de (5.2). De manière analogue, on montre que

$$(5.34) \quad \int_{\Omega_\varepsilon} a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_j} \frac{\partial \chi_\varepsilon}{\partial x_i} dx \geq \frac{m}{[M - \alpha\varepsilon^{\mu-1}\tau_0]^2} \|\varphi_\varepsilon^1\|_{V_\varepsilon'}^2,$$

ceci permet d'établir la première inégalité de (5.2) et le Lemme 5.1 est démontré. \square

Appendice: Preuve du Lemme 3.4.

Avant de donner la démonstration de ce lemme, nous voulons préciser qu'il correspond, pour $\alpha = 0$, à un résultat de L. Tartar (cf. [4], Theorem 2.5). Notre preuve utilise essentiellement les idées de l'Appendice de [4] basées sur le théorème de compacité par compensation (cf. [12]).

Dans tout ce qui suit, c désigne différentes constantes positives indépendantes de ε et le $\widetilde{}$ désigne le prolongement par zéro de toute fonction définie sur Ω_ε . On suppose que α est positif ou bien α vérifie les hypothèses du Lemme 5.1

Maintenant nous donnons la preuve du Lemme 3.4. Introduisons $\rho_\varepsilon \in V_\varepsilon$, solution du problème

$$(A.1) \quad \begin{cases} -\Delta \rho_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \rho_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial S_\varepsilon. \end{cases}$$

Ensuite, posons

$$(A.2) \quad g_i^\varepsilon = \left[\delta_{ik} - \frac{\partial \chi^i}{\partial y_k} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \right] \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_k}$$

avec χ^i défini par (3.3).

On a alors

$$(A.3) \quad \|g^\varepsilon\|_{[L^1(\Omega)]^N} \leq c$$

D'où l'on déduit qu'à une extraction de sous-suite près, on a

$$(A.4) \quad g^\varepsilon \rightharpoonup g^* \text{ dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^N \text{ faible}$$

où g^* est une mesure de Radon vectorielle. Posons

$$(A.5) \quad \sigma_\varepsilon^i = a_{ij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tau_\varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}.$$

On vérifie facilement que

$$(A.6) \quad \begin{cases} -\operatorname{div} \sigma_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \sigma_\varepsilon \cdot \nu + \alpha \varepsilon^\mu \tau_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial S_\varepsilon. \end{cases}$$

Comme on a

$$(A.7) \quad \|f_\varepsilon\|_{V_\varepsilon'} \leq c,$$

on en déduit d'abord

$$(A.8) \quad \begin{cases} \|\tau_\varepsilon\|_{V_\varepsilon} \leq c \\ \|\rho_\varepsilon\|_{V_\varepsilon} \leq c \end{cases}$$

puis

$$(A.9) \quad \|\sigma_\varepsilon\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq c.$$

Ainsi, on a, après extraction éventuelle d'une sous-suite,

$$(A.10) \quad \begin{cases} \tilde{\sigma}_\varepsilon \rightharpoonup \sigma \text{ dans } [L^2(\Omega)]^N \text{ faible} \\ Q_\varepsilon \tau_\varepsilon \rightharpoonup \tau \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible.} \end{cases}$$

On vérifie sans peine que σ et τ satisfont à la condition suivante

$$(A.11) \quad -\operatorname{div}\sigma + C(\theta, \alpha, \mu)\tau = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Soit $h \in \mathcal{D}(\Omega)$. On introduit $r_\varepsilon \in V_\varepsilon$ tel que

$$(A.12) \quad \begin{cases} A_\varepsilon r_\varepsilon = h & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ r_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} = 0 & \text{sur } \partial S_\varepsilon. \end{cases}$$

On montre aisément que

$$(A.13) \quad Q_\varepsilon r_\varepsilon \rightharpoonup r \text{ dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible}$$

avec r vérifiant

$$(A.14) \quad \begin{cases} \mathcal{A}r = \theta h & \text{dans } \Omega \\ r = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On pose

$$(A.15) \quad \eta_\varepsilon = \tilde{\sigma}_\varepsilon \cdot \nabla(Q_\varepsilon r_\varepsilon).$$

Dans [4], on avait

$$(A.16) \quad \operatorname{div}\tilde{\sigma}_\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

et l'utilisation du théorème de compacité par compensation [12] permettait de conclure directement que

$$(A.17) \quad \eta_\varepsilon \rightharpoonup \sigma \cdot \nabla r \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ faible.}$$

Or dans notre cas, $div \tilde{\sigma}_\varepsilon$ n'est pas borné dans $L^2(\Omega)$ mais nous allons montrer que (A.17) a encore lieu. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Des calculs simples montrent que

$$(A.18) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{D}'(\Omega) \langle \eta_\varepsilon, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} &= -\alpha \varepsilon^\mu \int_{\partial S_\varepsilon} \tau_\varepsilon \varphi r_\varepsilon d\Gamma - \int_{\Omega_\varepsilon} (\sigma_\varepsilon \cdot \nabla \varphi) r_\varepsilon dx \\ &= -\alpha \varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} \right) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial (\tau_\varepsilon \varphi r_\varepsilon)}{\partial x_i} dx - c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega_\varepsilon} \tau_\varepsilon \varphi r_\varepsilon dx - \int_{\Omega_\varepsilon} (\sigma_\varepsilon \cdot \nabla \varphi) r_\varepsilon dx \\ &= -\alpha \varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} \right) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial (\tau_\varepsilon \varphi r_\varepsilon)}{\partial x_i} dx - c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega} \chi(\Omega_\varepsilon) (Q_\varepsilon \tau_\varepsilon) \varphi (Q_\varepsilon r_\varepsilon) dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi) Q_\varepsilon r_\varepsilon dx. \end{aligned} \right.$$

Or l'on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$(A.19) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \alpha \varepsilon^\mu \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} \right) \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial (\tau_\varepsilon \varphi r_\varepsilon)}{\partial x_i} dx \right\} &= 0 \quad \forall \mu \geq 1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ c_1 \alpha \varepsilon^{\mu-1} \int_{\Omega} \chi(\Omega_\varepsilon) (Q_\varepsilon \tau_\varepsilon) \varphi (Q_\varepsilon r_\varepsilon) dx \right\} &= C(\theta, \alpha, \mu) \left\{ \int_{\Omega} \tau \varphi r dx \right\} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_\varepsilon \cdot \nabla \varphi) Q_\varepsilon r_\varepsilon dx &= \int_{\Omega} (\sigma \cdot \nabla \varphi) r dx. \end{aligned} \right.$$

D'où l'on déduit facilement, en utilisant (A.11) que

$$(A.20) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{D}'(\Omega) \langle \eta_\varepsilon, \varphi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = \int_{\Omega} (\sigma \cdot \nabla r) \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ce qui prouve que (A.17) a bien lieu.

Admettons provisoirement que

$$(A.21) \quad \eta_\varepsilon \rightharpoonup q_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_i} - g_i^* \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ faible.}$$

On remarque alors en s'aidant de (A.17) que

$$(A.22) \quad \sigma_i \frac{\partial r}{\partial x_i} = q_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \frac{\partial r}{\partial x_i} - g_i^* \frac{\partial r}{\partial x_i}.$$

Comme le choix de r est arbitraire, on déduit de (A.22) la relation suivante

$$(A.23) \quad -g_i^* = \sigma_i - q_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial x_j},$$

donc

$$(A.24) \quad -div(g^*) = \mathcal{A}\tau + C(\theta, \alpha, \mu)\tau.$$

En vertu de (A.23), on sait que $g^* \in [L^2(\Omega)]^N$; donc $\operatorname{div}(g^*) \in H^{-1}(\Omega)$. On prend alors

$$(A.25) \quad f^* = -\operatorname{div}(g^*),$$

et le Lemme 3.4 est démontré sous réserve que la relation (A.21) soit justifiée.

Etablissons à présent (A.21). On a

$$(A.26) \quad \begin{cases} \eta_\varepsilon = (a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial \tau_\varepsilon}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial x_i}) \frac{\partial(Q_\varepsilon r_\varepsilon)}{\partial x_i} \\ = a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial(Q_\varepsilon \tau_\varepsilon)}{\partial x_j} - \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial(Q_\varepsilon r_\varepsilon)}{\partial x_i}. \end{cases}$$

Grâce au théorème de compacité par compensation (cf. [12]), on sait que

$$(A.27) \quad a_{ij}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial(Q_\varepsilon \tau_\varepsilon)}{\partial x_j} \rightharpoonup q_{ij} \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial \tau}{\partial x_j} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ faible.}$$

Maintenant nous allons démontrer le résultat suivant qui sera utile pour la suite:

$$(A.28) \quad \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial(Q_\varepsilon r_\varepsilon)}{\partial x_i} \rightharpoonup g_i^* \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ faible.}$$

D'après [11], le développement asymptotique de r_ε est donné par

$$(A.29) \quad r_\varepsilon(x) = r(x) - \varepsilon \chi^k(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial r}{\partial x_k}(x) + R_\varepsilon(x)$$

avec R_ε vérifiant

$$(A.30) \quad \|R_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq c \varepsilon^{\frac{1}{2}} \quad \text{où } c > 0 \text{ et } c \text{ est indépendant de } \varepsilon.$$

Grâce à (A.30) on sait que

$$(A.31) \quad \widetilde{\nabla} R_\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{dans } [L^2(\Omega)]^N \text{ fort.}$$

On vérifie sans peine que

$$(A.32) \quad \begin{cases} \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial(Q_\varepsilon r_\varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial \widetilde{r}_\varepsilon}{\partial x_i} \\ = g_k^\varepsilon \frac{\partial r}{\partial x_k} + \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial x_k} \frac{\partial R_\varepsilon}{\partial x_k} - \varepsilon \chi^k(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial^2 r}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial \widetilde{\rho}_\varepsilon}{\partial x_i}. \end{cases}$$

On obtient (A.28) en remarquant que les deux derniers termes du membre de droite de la dernière ligne de (A.32) tendent vers zéro. Combinant alors (A.26), (A.27) et (A.28), on obtient bien (A.21) et la preuve du Lemme 3.4 est terminée. \square

Références bibliographiques

- [1] S. Brahim-Otsmane, G.A. Francfort, F. Murat, Correctors for the homogenization of the wave and heat equations, *J. Math. Pures et Appl.* 71 (1992), 197-231.
- [2] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications* (Masson, Paris, 1983).
- [3] M. Briane, A. Damlamian, P. Donato, H-convergence for perforated domains, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1993), R93031.
- [4] D. Cioranescu, P. Donato, Exact internal controlability in perforated domains, *J. Math. Pures et Appl.* 68 (1989), 185-213.
- [5] D. Cioranescu, P. Donato, Homogénéisation du problème de Neumann non homogène dans des ouverts perforés, *Asymptotic Analysis* 1 (1988), 115-138
- [6] D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat, E. Zuazua, Homogenization and Correctors for the wave equation in domains with small holes, *Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, Sc. Fis. Mat.* 4 (1991), 251-293 .
- [7] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Homogenization in open sets with holes, *J. Math. Anal. Appl.* 71 (1979), 590-607.
- [8] A. Haraux, On a completion problem in the theory of distributed control of wave equations, *Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar 1987-1988*, H. Brézis and J.L. Lions Eds., Res. Notes in Math., Pitman.
- [9] J.L. Lions, Contrôlabilité exacte et homogénéisation I, *Asymptotic Analysis*, 1 (1988), 3-12.
- [10] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tome 1, R.M.A 8 (Masson, Paris, 1988).
- [11] J.L. Lions, Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure, *Rocky Mountain J. of Math.*, 10 (1980), 125-140.
- [12] F. Murat, Compacité par compensation, *Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa*, 5 (1978), 489-507.

Chapitre 2: Contrôlabilité exacte interne des vibrations d'un corps mince

Résumé. Nous étudions la contrôlabilité exacte interne d'un corps tridimensionnel de faible épaisseur. Ensuite nous faisons tendre le paramètre représentant l'épaisseur vers zéro et nous établissons que la limite du contrôle exact est le contrôle exact du système limite bidimensionnel.

Abstract. We study by the Hilbert uniqueness method, (H.U.M), of J.L. Lions, the exact controllability of a 3-dimensional body of very small thickness. Afterwards, we let the thickness parameter go to zero and we prove that the limit of the sequence of exact controls is the exact control given by H.U.M, of the 2-dimensional limit system.

Dans la suite, Ω désigne un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , le domaine mince d'épaisseur e est noté O^e et est donné par $O^e = \Omega \times]-\frac{e}{2}, +\frac{e}{2}[$. Le domaine dilaté noté O est donné par $O = \Omega \times]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[$ et T désigne un nombre réel quelconque strictement positif.

1-Introduction. La contrôlabilité exacte de l'équation des ondes dans des domaines minces a été d'abord abordée par J.L. Lions dans [4, chap.5] dans le cadre de la contrôlabilité exacte frontière, puis ont suivi les travaux de J. Yan (cf. [7]) et de J. Saint Jean Paulin - M. Vanninathan (cf. [6]), dans le même cadre. Dans ce travail, il est plutôt question du cas des contrôles distribués. Plus précisément, on se donne $\{y^0, y^1\}$ dans des espaces de Hilbert appropriés et l'on se propose:

(i) de trouver un contrôle v tel que, si y est la solution du système

$$(1.1) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = v & \text{dans } O^e \times]0, T[\\ \frac{\partial y}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \{\pm \frac{e}{2}\} \times]0, T[\\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{e}{2}, +\frac{e}{2}[\times]0, T[\\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \times]-\frac{e}{2}, +\frac{e}{2}[\\ y'(0) = y^1 & \text{dans } \Omega \times]-\frac{e}{2}, +\frac{e}{2}[\end{cases}$$

on ait

$$(1.2) \quad y(T) = y'(T) = 0 \text{ dans } O^e$$

(ii) d'étudier le comportement limite (lorsque e tend vers zéro) de ce problème.

Maintenant, nous allons nous ramener à un domaine fixe en procédant comme dans [5]. Pour ce faire, on introduit la transformation suivante:

$$(x_1, x_2, x_3) \in O^e \mapsto (z_1, z_2, z_3) \in O$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} z_\alpha &= x_\alpha & \alpha \in \{1, 2\} \\ z_3 &= \frac{x_3}{e}. \end{aligned}$$

De même, pour toute fonction f , on pose

$$f(x_1, x_2, x_3) = f_e(z_1, z_2, z_3).$$

Avec tout cela, le problème à résoudre devient: pour $\{y_e^0, y_e^1\}$ convenablement choisis, trouver un contrôle v_e tel que si y_e vérifie

$$(1.3) \quad \begin{cases} y_e'' - \Delta_e y_e = v_e & \text{dans } O \times]0, T[\\ \frac{\partial y_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \{\pm \frac{1}{2}\} \times]0, T[\\ y_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, T[\\ y_e(0) = y_e^0 & \text{dans } O \\ y_e'(0) = y_e^1 & \text{dans } O \end{cases}$$

avec

$$\Delta_e = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + e^{-2} \frac{\partial^2}{\partial z_3^2}$$

on ait

$$(1.4) \quad y_e(T) = y_e'(T) = 0 \text{ dans } O.$$

Ensuite, on fait tendre e vers zéro et l'on montre que v_e converge dans un sens convenable vers une limite v qui est le contrôle exact du système limite associé à (1.3). La suite de cette étude se présente comme suit

- 2- Contrôlabilité exacte dans l'ouvert dilaté et convergence de la suite des contrôles.
- 3- Cas des données initiales moins régulières.

2- Contrôlabilité exacte dans l'ouvert dilaté et convergence de la suite des contrôles.

Dans tout ce paragraphe ainsi que dans celui qui suivra, on pose

$$V = \left\{ u \in H^1(O); u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\right\}$$

et on munit l'espace V de la norme suivante

$$(2.1) \quad \|u\|_e^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z_2} \right)^2 + e^{-2} \left(\frac{\partial u}{\partial z_3} \right)^2 \right\} d\tilde{z} dz_3$$

puis on désigne par V_e , l'espace de Hilbert ainsi obtenu, V_e' désignera l'espace dual de V_e .

Nous allons à présent mettre en œuvre la méthode d'unicité hilbertienne, H.U.M, présentée dans [3], pour résoudre le problème de contrôlabilité exacte. Introduisons φ_e , solution du système

$$(2.2) \quad \begin{cases} \varphi_e'' - \Delta_e \varphi_e = 0 & \text{dans } O \times]0, T[\\ \frac{\partial \varphi_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \{ \pm \frac{1}{2} \} \times]0, T[\\ \varphi_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, T[\\ \varphi_e(0) = \varphi_e^0 & \text{dans } O \\ \varphi_e'(0) = \varphi_e^1 & \text{dans } O. \end{cases}$$

Remarque 2.1. On montre que lorsque $\varphi_e^0 \in L^2(O)$ et $\varphi_e^1 \in V_e'$, alors la solution φ_e de (2.2), vérifie:

$$(2.3) \quad \varphi_e \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(O)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; V_e').$$

Le lemme suivant sera utile pour la suite:

Lemme 2.2. *Il existe deux constantes positives c_1 et c_2 , indépendantes de e , telles que*

$$(2.4) \quad c_1 \left\{ \|\varphi_e^0\|_{L^2(O)}^2 + \|\varphi_e^1\|_{V_e'}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi_e\|_{L^2(O \times]0, T])} \leq c_2 \left\{ \|\varphi_e^0\|_{L^2(O)}^2 + \|\varphi_e^1\|_{V_e'}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Ce Lemme se démontre comme le Lemme 2.1 du chapitre 1 de cette thèse; pour les détails, nous renvoyons donc le lecteur à ce chapitre. Posons

$$(2.5) \quad F_e = L^2(O) \times V_e', \quad F_e' = V_e \times L^2(O)$$

et définissons

$$(2.6) \quad \|\{\varphi_e^0, \varphi_e^1\}\|_{F_e} = \left\{ \int_0^T \int_O (\varphi_e)^2 dz dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Grâce au Lemme 2.2, on sait que $\|\cdot\|_{F_e}$ est une norme sur F_e uniformément équivalente à la norme de F_e .

Considérons le système rétrograde

$$(2.7) \quad \begin{cases} \psi_e'' - \Delta_e \psi_e = -\varphi_e & \text{dans } O \times]0, T[\\ \frac{\partial \psi_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \{\pm \frac{1}{2}\} \times]0, T[\\ \psi_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, T[\\ \psi_e(T) = 0 & \text{dans } O \\ \psi_e'(T) = 0 & \text{dans } O. \end{cases}$$

D'après [3], on sait que le problème (2.7) possède une et une seule solution ψ_e vérifiant

$$(2.8) \quad \psi_e \in \mathcal{C}([0, T]; V_e) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(O)).$$

Définissons alors l'opérateur

$$(2.9) \quad \Lambda_e : F_e \longrightarrow F_e'$$

par

$$(2.10) \quad \Lambda_e \{\varphi_e^0, \varphi_e^1\} = \{\psi_e'(0), -\psi_e(0)\}$$

On vérifie sans peine la relation suivante:

$$(2.11) \quad {}_{F_e'} \langle \Lambda_e \{\varphi_e^0, \varphi_e^1\}, \{\varphi_e^0, \varphi_e^1\} \rangle_{F_e} = \|\{\varphi_e^0, \varphi_e^1\}\|_{F_e}^2$$

d'où l'on déduit

$$(2.12) \quad \|\Lambda_e\|_{\mathcal{L}(F_e, F'_e)} \geq 1.$$

D'autre part, on montre facilement que Λ_e est continu et satisfait à la condition

$$(2.13) \quad \|\Lambda_e\|_{\mathcal{L}(F_e, F'_e)} \leq 1.$$

Donc Λ_e est un isomorphisme de F_e sur F'_e . Par conséquent, prenant le couple des données initiales $\{y_e^0, y_e^1\}$ du système (1.3) dans F'_e , l'équation

$$(2.14) \quad \Lambda_e\{\varphi_e^0, \varphi_e^1\} = \{y_e^1, -y_e^0\}$$

admet une solution unique dans F_e . En vertu de la définition de Λ_e , on a

$$(2.15) \quad \begin{cases} \psi'_e(0) = y_e^1 \\ \psi_e(0) = y_e^0. \end{cases}$$

Si l'on choisit le vecteur contrôle par

$$(2.16) \quad v_e = -\varphi_e$$

alors, on constate que ψ_e est solution de (1.3). Or avec (2.16), le système (1.3) possède une et une seule solution y_e ; donc $y_e = \psi_e$. Comme ψ_e vérifie

$$(2.17) \quad \begin{cases} \psi_e(T) = 0 & \text{dans } O \\ \psi'_e(T) = 0 & \text{dans } O \end{cases}$$

on a donc (1.4). Ainsi est établi le résultat suivant

Théorème 2.3. *Pour tout nombre réel strictement positif T , pour tout couple de données initiales $\{y_e^0, y_e^1\}$ du système (1.3), pris dans F'_e , le système (1.3) est exactement contrôlable et le contrôle exact v_e est donné par (2.16).*

Maintenant nous allons étudier le comportement limite du système (1.3). Pour ce faire, on suppose que les données initiales y_e^0 et y_e^1 vérifient

$$(2.18) \quad \begin{cases} \|y_e^0\|_e \leq c \text{ et } y_e^0 \rightharpoonup y^0 \text{ dans } H^1(O) \text{ faible} \\ y_e^1 \rightharpoonup y^1 \text{ dans } L^2(O) \text{ faible} \end{cases}$$

où c est une constante positive indépendante de e . On a alors le

Théorème 2.4. *Lorsque e tend vers zéro, le contrôle exact v_e du système (1.3) donné par H.U.M., est tel que*

$$(2.19) \quad v_e \rightharpoonup v \text{ dans } L^2(O \times]0, T[) \text{ faible}$$

où v est indépendant de z_3 et v est le contrôle exact du système

$$(2.20) \quad \begin{cases} y'' - \Delta_2 y = v & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) = \mathcal{M}(y^1) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

avec $\mathcal{M}(y^1)$ défini par

$$(2.21) \quad \mathcal{M}(y^1)(z_1, z_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y^1(z_1, z_2, z_3) dz_3$$

et

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2}.$$

En outre, on a

$$(2.22) \quad \begin{cases} y_e \rightharpoonup y & \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible } * \\ y'_e \rightharpoonup y' & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible } *. \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin des résultats suivants

Lemme 2.5. *Sous les hypothèses (2.18), soit φ_e la solution de (2.2) avec φ_e^0 et φ_e^1 données par (2.14). Alors, lorsque e tend vers zéro, on a*

$$(2.23) \quad \begin{cases} \varphi_e^0 \rightharpoonup \varphi_*^0 & \text{dans } L^2(O) \text{ faible} \\ \mathcal{M}(\varphi_e^1) \rightharpoonup \varphi_*^1 & \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ faible } * \end{cases}$$

ainsi que

$$(2.24) \quad \varphi_e \rightharpoonup \varphi_* \text{ dans } L^2(0, T; L^2(O)) \text{ faible}$$

où φ_* est la solution du système

$$(2.25) \quad \begin{cases} \varphi_*'' - \Delta_2 \varphi_* = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \varphi_* = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \varphi_*(0) = \mathcal{M}(\varphi_*^0) & \text{dans } \Omega \\ \varphi_*'(0) = \varphi_*^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Lemme 2.6. *On suppose que (2.18) a lieu. Soit ψ_e la solution de (2.7) avec φ_e définie par (2.2) et (2.14). Alors, lorsque e tend vers zéro, on a*

$$(2.26) \quad \psi_e \rightharpoonup \psi_* \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible } *$$

ainsi que

$$(2.27) \quad \psi'_e \rightharpoonup \psi'_* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible } *$$

où ψ_* est la solution du système

$$(2.28) \quad \begin{cases} \psi_*'' - \Delta_2 \psi_* = -\varphi_* & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \psi_* = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \psi_*(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \psi_*'(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Esquisse de la Preuve du Lemme 2.5. Grâce au Lemme 2.2 ainsi qu'à (2.14) et (2.18), on a les estimations suivantes

$$(2.29) \quad \begin{cases} \|\varphi_e^0\|_{L^2(O)} \leq c & (2.29.1) \\ \|\varphi_e^1\|_{V_e'} \leq c & (2.29.2) \\ \|\varphi_e\|_{L^2(O) \times]0, T[} \leq c. & (2.29.3) \end{cases}$$

Il découle de (2.29.2) que

$$(2.30) \quad \|\mathcal{M}(\varphi_e^1)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq c.$$

On déduit alors de (2.29.1), (2.29.3) et (2.30) qu'à une extraction de sous-suite près, on a (2.23) et (2.24). Maintenant, nous allons montrer que φ_* est solution de (2.25). Puisque, les données initiales de (2.2) sont peu régulières, on ne peut pas faire tendre e vers zéro directement dans le système (2.2); nous allons donc procéder comme dans [3]. Introduisons la fonction r_e définie par

$$(2.31) \quad r_e(z, t) = \int_0^t \varphi_e(z, s) ds + \tau_e(z)$$

où τ_e est la solution de

$$(2.32) \quad \begin{cases} -\Delta_e \tau_e = -\varphi_e^1 & \text{dans } O \\ \frac{\partial \tau_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \{\pm \frac{1}{2}\} \\ \tau_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[. \end{cases}$$

On vérifie sans peine que r_e est la solution du système

$$(2.33) \quad \begin{cases} r_e'' - \Delta_e r_e = 0 & \text{dans } O \times]0, T[\\ \frac{\partial r_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \{\pm \frac{1}{2}\} \times]0, T[\\ r_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, T[\\ r_e(0) = \tau_e & \text{dans } O \\ \varphi_e'(0) = \varphi_e^0 & \text{dans } O \end{cases}$$

et qu'on a l'égalité de l'énergie

$$(2.34) \quad \|\varphi_e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|r_e(t)\|_e^2 = \|\varphi_e^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tau_e\|_e^2, \quad \forall t \in [0, T].$$

D'autre part, grâce à (2.29) et (2.30), on montre sans difficulté qu'à une sous-suite extraite de $\{e\}$

$$(2.35) \quad \tau_e \rightharpoonup \tau_* \quad \text{dans } H^1(O) \text{ faible}$$

et

$$(2.36) \quad \begin{cases} r_e \rightharpoonup r & \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible} * \\ r'_e \rightharpoonup r' & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible} * \end{cases}$$

avec r indépendante de z_3 et vérifiant

$$(2.37) \quad \begin{cases} r'' - \Delta_2 r = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ r = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ r(0) = \tau_* & \text{dans } \Omega \\ r'(0) = \mathcal{M}(\varphi_*^0) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

De plus, la fonction τ_* est la solution du système

$$(2.38) \quad \begin{cases} -\Delta_2 \tau_* = -\varphi_*^1 & \text{dans } \Omega \\ \tau_* = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si on pose $h = r'$, on vérifie à l'aide de (2.37), (2.38) et de la relation suivante

$$(2.39) \quad r \in \mathcal{C}([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^2([0, T]; H^{-1}(\Omega)).$$

que h est la solution du système

$$(2.40) \quad \begin{cases} h'' - \Delta_2 h = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ h = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ h(0) = \mathcal{M}(\varphi_*^0) & \text{dans } \Omega \\ h'(0) = \varphi_*^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Puisque $\varphi_e = r'_e$, la combinaison de (2.24) et de (2.36) donne

$$(2.41) \quad \varphi_* = r' = h$$

d'où l'on déduit que φ_* est bien la solution de (2.25). □

Esquisse de la preuve du Lemme 2.6. Pour tout $t \in [0, T]$, on a l'inégalité de l'énergie

$$(2.42) \quad \|\psi'_e(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_e(t)\|_e^2 \leq c(T) \left\{ \|\psi'_e(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\psi_e(0)\|_e^2 + \|\varphi_e\|_{L^2(O \times]0, T])}^2 \right\}$$

d'où l'on déduit, en utilisant (2.15), (2.18) et (2.29.3), que

$$(2.43) \quad \begin{cases} \|\psi'_e\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq c \\ \|\psi_e\|_{L^\infty(0, T; H^1(O))} \leq c. \end{cases}$$

A une sous-suite extraite de $\{e\}$ près, on a donc les convergences

$$(2.44) \quad \begin{cases} \psi_e \rightharpoonup \psi \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible } * \\ \psi'_e \rightharpoonup \psi' \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible } * \end{cases}$$

où ψ est une fonction indépendante de z_3 vérifiant

$$(2.45) \quad \begin{cases} \psi'' - \Delta_2 \psi = -\varphi_* & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \psi(T) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \psi'(T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

□

Esquisse de la preuve du Théorème 2.4. Grâce à (2.15), (2.18) ainsi qu'au Lemme 2.6, on a

$$(2.46) \quad \begin{cases} \psi(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \\ \psi'(0) = \mathcal{M}(y^1) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Puisque $y_e = \psi_e$ et $v_e = -\varphi_e$, (voir (2.16)), on a alors (2.19) et (2.22) avec

$$(2.47) \quad v = -\varphi_*, \quad y = \psi$$

pour une sous-suite convenable extraite de $\{e\}$; ceci montre que y est la solution de (2.20). L'application de la méthode d'unicité hilbertienne, H.U.M, au système (2.20) permet de déterminer v de façon unique; donc toute la suite v_e converge vers v et par suite, toute la suite y_e converge vers y . □

3- Cas des données initiales moins régulières.

Dans le problème que nous venons de résoudre, les données initiales y_e^0 et y_e^1 du système (1.3) étaient prises respectivement dans V_e et $L^2(O)$. Maintenant, nous allons les choisir dans $L^2(O)$ et V'_e respectivement.

Dans tout ce qui suit, c désigne différentes constantes positives indépendantes de e .
On a le

Théorème 3.1. *Pour tout $T > 0$, il existe un contrôle*

$$(3.1) \quad v_e \in [H^1(0, T; L^2(O))]'$$

tel que la solution y_e de (1.3) satisfasse la condition

$$(3.2) \quad y_e(T) = y_e'(T) = 0 \text{ dans } O.$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 3.2. *On suppose que les données initiales φ_e^0 et φ_e^1 du système (2.2) vérifient*

$$(3.3) \quad \varphi_e^0 \in V_e, \quad \varphi_e^1 \in L^2(O).$$

Alors, il existe deux constantes c_1 et c_2 , positives et indépendantes de e telles que

$$(3.4) \quad c_1 \left\{ \|\varphi_e^0\|_{V_e}^2 + \|\varphi_e^1\|_{L^2(O)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi_e'\|_{L^2(O \times]0, T])} \leq c_2 \left\{ \|\varphi_e^0\|_{V_e}^2 + \|\varphi_e^1\|_{L^2(O)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve du Lemme 3.2. Pour le système (2.2), on a l'égalité de l'énergie

$$(3.5) \quad \|\varphi_e'(t)\|_{L^2(O)}^2 + \|\varphi_e(t)\|_e^2 = \|\varphi_e^1\|_{L^2(O)}^2 + \|\varphi_e^0\|_e^2, \quad \forall t \in [0, T]$$

d'où l'on déduit aisément l'existence d'une constante positive c_2 telle que

$$(3.6) \quad \|\varphi_e'\|_{L^2(0, T; L^2(O))} \leq c_2 \left\{ \|\varphi_e^0\|_{V_e}^2 + \|\varphi_e^1\|_{L^2(\Omega_e)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Montrons maintenant qu'il existe une constante positive c_1 telle que

$$(3.7) \quad c_1 \left\{ \|\varphi_e^0\|_e^2 + \|\varphi_e^1\|_{L^2(O)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|\varphi_e'\|_{L^2(0, T; L^2(O))}.$$

Pour ce faire, considérons comme dans [2]

$$\eta_e(x, t) = \rho(t)\varphi_e(x, t)$$

avec

$$\rho(t) = t^2(T - t)^2.$$

où φ_e'' vérifie

$$(3.12) \quad \langle -\varphi_e'', \tau \rangle = \int_0^T \int_O \varphi_e' \tau' dx dt \quad \text{pour tout } \tau \in H^1(0, T; L^2(O))$$

de sorte que

$$(3.13) \quad \varphi_e'' \in [H^1(0, T; L^2(O))]' \quad (\text{espace dual de } H^1(0, T; L^2(O))).$$

Posons

$$(3.14) \quad F_e = V_e \times L^2(O) \quad (\text{on a maintenant } F_e' = V_e' \times L^2(O))$$

et définissons Λ_e comme précédemment. Grâce au Lemme 3.2, nous savons que Λ_e est un isomorphisme de F_e sur F_e' tel que

$$(3.15) \quad c_1 \| \{\varphi_e^0, \varphi_e^1\} \|_{F_e} \leq \| \langle \Lambda_e(\{\varphi_e^0, \varphi_e^1\}) \|_{F_e'} \leq c_2 \| \{\varphi_e^0, \varphi_e^1\} \|_{F_e}.$$

D'où il découle que l'équation

$$(3.16) \quad \Lambda_e(\{\varphi_e^0, \varphi_e^1\}) = \{y_e^1, -y_e^0\}$$

a une et une seule solution dans F_e car $\{y_e^1, -y_e^0\} \in F_e'$.

Choisissons

$$(3.17) \quad v_e = \varphi_e''$$

où φ_e est la solution de (2.2) avec $\{\varphi_e^0, \varphi_e^1\}$, solution de (3.16). De plus, on a par définition

$$(3.18) \quad \Lambda_e(\{\varphi_e^0, \varphi_e^1\}) = \{\psi_e'(0), -\psi_e(0)\}.$$

Combinant alors (3.16) et (3.18), et tenant compte de l'unicité de la solution du problème (1.3), on obtient

$$y_e = \psi_e$$

de sorte que v_e défini par (3.17) est le contrôle exact convenable; ceci achève la preuve du Théorème 3.1. \square

Maintenant, nous allons faire tendre le paramètre e vers zéro; on a le

Théorème 3.3. *On suppose que les données initiales y_e^0 et y_e^1 du système (1.3) satisfaisant à (3.16) vérifient*

$$(3.19) \quad \begin{cases} y_e^0 \rightharpoonup y_*^0 & \text{dans } L^2(O) \text{ faible} \\ \|y_e^1\|_{V_e'} \leq c & \text{et } \mathcal{M}(y_e^1) \rightharpoonup y_*^1 & \text{dans } H^{-1}(\Omega) \text{ faible} * . \end{cases}$$

Alors, lorsque e tend vers zéro, on a

$$(3.20) \quad v_e \rightharpoonup v^* \quad \text{dans} \quad [H^1(0, T; L^2(O))]' \text{ faible } *$$

où v^* est le contrôle exact du système

$$(3.21) \quad \begin{cases} y_*'' - \Delta_2 y_* = v^* & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[, \\ y_* = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0, T[, \\ y_*(0) = y_*^0 & \text{dans} \quad \Omega, \\ y_*'(0) = y_*^1 & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

En outre, on a

$$(3.22) \quad y_e \rightharpoonup y_* \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible } *.$$

La preuve de ce Théorème découle aisément des résultats suivants

Lemme 3.4. Soient φ_e^0 et φ_e^1 les données initiales de (2.2) solution de (3.16). Alors, on a

$$(3.23) \quad \begin{cases} \varphi_e^0 \rightharpoonup \varphi^0 & \text{dans} \quad H^1(O) \text{ faible} \\ \varphi_e^1 \rightharpoonup \varphi^1 & \text{dans} \quad L^2(O) \text{ faible} \end{cases}$$

où φ^0 est une fonction indépendante de z_3 .

En outre, on a

$$(3.24) \quad \begin{cases} \varphi_e \rightharpoonup \varphi & \text{dans} \quad L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible } * \\ \varphi_e \rightharpoonup \varphi' & \text{dans} \quad L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible } * \end{cases}$$

où φ est la solution du système

$$(3.25) \quad \begin{cases} \varphi'' - \Delta_2 \varphi = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[\\ \varphi = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \times]0, T[\\ \varphi(0) = \varphi^0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \varphi'(0) = \mathcal{M}(\varphi^1) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

Lemme 3.5. Lorsque e tend vers zéro, la solution ψ_e de (3.11) vérifie

$$(3.26) \quad \psi_e \rightharpoonup \psi \quad \text{dans} \quad L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible } *$$

avec ψ satisfaisant à

$$(3.27) \quad \begin{cases} \psi'' + \Delta_2 \psi = \varphi'' & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \psi(T) = 0 & \text{dans } O \\ \psi'(T) = 0 & \text{dans } O. \end{cases}$$

Esquisse de la Preuve du Lemme 3.4. Grâce au Lemme 3.2 ainsi qu'à (3.16) et (3.19), on a les estimations suivantes

$$(3.28) \quad \begin{cases} \|\varphi_e^0\|_e \leq c \\ \|\varphi_e^1\|_{L^2(O)} \leq c \\ \|\varphi_e'\|_{L^2(O) \times]0, T[} \leq c \\ \|\varphi_e\|_e \leq c \end{cases}$$

On déduit alors de (3.28) qu'à une extraction de sous-suite près, on a (3.23) et (3.24). Puis on vérifie sans peine que φ est la solution de (3.25). \square

Preuve du Lemme 3.5. Nous allons procéder comme dans [1]; pour cela, introduisons $\chi_e \in V_e$, solution de

$$(3.29) \quad \begin{cases} -\Delta_e \chi_e = \varphi_e'(T) & \text{dans } O \\ \frac{\partial \chi_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \{\pm \frac{1}{2}\} \\ \chi_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\end{cases}$$

et posons

$$(3.30) \quad \gamma_e(z, t) = - \int_t^T \psi_e(z, s) ds + \chi_e.$$

On vérifie facilement que γ_e est la solution du système

$$(3.31) \quad \begin{cases} \gamma_e'' - \Delta_e \gamma_e = \varphi_e' & \text{dans } O \times]0, T[\\ \frac{\partial \gamma_e}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Omega \times \{\pm \frac{1}{2}\} \times]0, T[\\ \gamma_e = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, T[\\ \gamma_e(T) = \chi_e & \text{dans } O \\ \gamma_e'(T) = 0 & \text{dans } O. \end{cases}$$

On montre à partir de (3.28) que χ_e est bornée pour la norme de V_e ; par conséquent, à une extraction de sous-suite de $\{e\}$ près, on a

$$(3.32) \quad \chi_e \rightharpoonup \chi \quad \text{dans } H^1(O) \text{ faible}$$

avec χ indépendante de z_3 et vérifiant

$$(3.33) \quad \begin{cases} -\Delta_2 \chi = \varphi'(T) & \text{dans } \Omega \\ \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour le système (3.31), on a l'égalité de l'énergie

$$(3.34) \quad \|\gamma'_e(t)\|_{L^2(O)}^2 + \|\gamma_e(t)\|_e^2 = \|\chi_e\|_e^2 - 2 \int_t^T \int_O \varphi'_e \gamma'_e dz ds, \quad \forall t \in [0, T]$$

Utilisant (3.28) et (3.32) dans (3.34), on trouve qu'à un sous-suite extraite de $\{e\}$ près

$$(3.35) \quad \begin{cases} \gamma_e \rightharpoonup \gamma & \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(O)) \text{ faible} * \\ \gamma'_e \rightharpoonup \gamma' & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(O)) \text{ faible} * \end{cases}$$

où γ est indépendante de z_3 et γ est la solution du système

$$(3.36) \quad \begin{cases} \gamma'' - \Delta_2 \gamma = \varphi' & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \gamma = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \gamma(T) = \chi & \text{dans } O \\ \gamma'(T) = 0 & \text{dans } O. \end{cases}$$

Puisque $\psi_e = \gamma'_e$ on déduit (3.26) de (3.35) et l'utilisation de (3.33) et (3.36) permet d'affirmer que ψ est la solution de (3.27); ce qui termine la preuve du Lemme 3.5. \square

Esquisse de la preuve du Théorème 3.3. Puisque par le Théorème 3.1 on a $y_e = \psi_e$, le Lemme 3.5 nous donne immédiatement

$$y_e \rightharpoonup y_* \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible} *.$$

D'autre part comme $v_e = \varphi''_e$, on a aussi

$$v_e \rightharpoonup v^* \quad \text{dans } [H^1(0, T; L^2(O))]' \text{ faible} *$$

et l'obtention de (3.21) découle du Lemme 3.5. Nous tenons à préciser que toutes les convergences obtenues jusqu'à présent sont liées à des sous-suites extraites de $\{e\}$. Pour achever la preuve du Théorème 3.3, on doit encore montrer que toutes les convergences ont lieu pour toute la suite $\{e\}$. Pour ce faire, on applique la méthode H.U.M au système (3.21); ce qui nous permet de savoir que le contrôle exact v^* est unique; d'où l'on déduit

que toute la suite $\{v_e\}$ converge et par suite, toutes les autres convergences ont lieu pour toute la suite $\{e\}$. \square

Références bibliographiques.

- [1] D. Cioranescu, P. Donato, Exact internal controllability in perforated domains. J. Math. Pures et Appl, 68 (1989), 185-213.
- [2] A. Haraux, On a completion problem in the theory of distributed control of wave equations, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar 1987-1988, H. Brézis and J.L. Lions Eds., Res. Notes in Math., Pitman.
- [3] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tome 1. R.M.A (Masson, Paris, 1988).
- [4] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tome 2. R.M.A (Masson, Paris, 1988).
- [5] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. vol. 1 (Dunod, Paris, 1968).
- [6] J. Saint Jean Paulin, M. Vanninathan, Exact controllability of vibrations of thin bodies. Portugaliae Mathematica, 51(1994), 421-453
- [7] J. Yan, Contrôlabilité exacte pour des domaines minces. Asymptotic Analysis, 5(1992), 461-471.

Chapitre 3: Stabilisation et contrôlabilité exacte internes dans des structures cellulaires minces

Résumé. On étudie d'abord la stabilisation par "feedback" interne d'un système généralisé des ondes dans un domaine qui se présente sous forme de grillage tridimensionnel; on démontre qu'on peut stabiliser les vibrations de ce corps indépendamment de son épaisseur, de la taille des trous et de l'épaisseur des barres; en effet, nous obtenons un taux de décroissance de l'énergie qui est indépendante de ces trois paramètres. Ensuite, nous faisons tendre, l'un après l'autre, ces trois paramètres vers zéro et nous démontrons à chaque étape de convergence que l'énergie du système limite bidimensionnel décroît exponentiellement et uniformément par rapport au(x) paramètre(s) fixe(s). Après cela, nous utilisons le principe de D.L. Russell pour établir des résultats de contrôlabilité exacte à partir des résultats de stabilisation précédemment démontrés puis nous faisons tendre les trois petits paramètres vers zéro comme précédemment et nous démontrons à chaque étape de convergence que la suite des contrôles exacts converge faiblement vers le contrôle exact donné par le principe de Russell du système limite bidimensionnel.

Abstract. We first study the stabilization by internal feedback of a generalized wave system in a domain which looks like a 3-dimensional grid; we prove that it is possible to stabilize the vibrations of this body independently of its thickness, of the size of the holes, of the thickness of the bars; in fact, we obtain a rate of decay which is independent of these parameters. Afterwards, we let these parameters go to zero successively and we prove, at each step of convergence, that the energy of the 2-dimensional limit system exponentially decreases uniformly with respect to fix parameter(s). After that, we use the principle of D.L. Russell to establish exact controllability results from the previous stabilization results; then we let the three small parameters go to zero as previously and we prove at each step of convergence that the limit of the sequence of controls weakly converges to the exact control given by the principle of D.L. Russell for the 2-dimensional limit system.

Introduction. L'objet de ce travail est d'étudier la stabilisation interne d'un corps qui se présente sous la forme d'un grillage (cf. figure 2) et d'utiliser le principe de D.L. Russell [13] pour obtenir la contrôlabilité exacte des vibrations de ce corps.

La contrôlabilité exacte par application du principe de Russell n'a pas encore été abordée dans le cadre des domaines perforés; notre résultat est le premier dans ce sens.

Etant donné que notre problème comporte plusieurs petits paramètres, nous allons utiliser en plus des techniques de stabilisation, des techniques d'analyse asymptotique. La stabilisation utilise les idées de [10] et pour l'analyse asymptotique, nous utilisons les idées de [1], [3], [5], [6] et [7]. La présentation de notre travail est la suivante:

* dans le premier paragraphe, nous démontrons un résultat d'existence et d'unicité ainsi que la stabilisation uniforme des vibrations du corps perforé

* dans les paragraphes 2, 3 et 4, nous faisons tendre les différents petits paramètres vers zéro dans le problème de stabilisation l'un après l'autre et, à chaque étape de convergence, nous démontrons que l'énergie du système limite bidimensionnel décroît exponentiellement et uniformément

* le paragraphe 5 est constitué d'un ensemble de commentaires et de remarques sur les résultats des paragraphes 2, 3 et 4; nous y démontrons qu'il est plus avantageux, lors des passages de faire tendre d'abord l'épaisseur du grillage vers zéro, puis la taille des trous et ensuite l'épaisseur des barres

* dans le paragraphe 6, nous utilisons le principe de Russell pour établir un résultat de contrôlabilité exacte

* dans le paragraphe 7, nous faisons tendre les différents paramètres vers zéro dans le problème de contrôlabilité exacte du paragraphe 6 et à chaque étape, nous montrons que la suite des contrôles converge vers le contrôle exact obtenu par le principe de Russell du système limite obtenu

* dans le paragraphe 8, nous donnons des éléments essentiels dans le cas où les données initiales sont choisies dans un espace plus grand que celui utilisé dans les paragraphes précédents.

1- Position du problème et premier résultat de stabilisation

On considère le domaine perforé décrit par la figure 2; il est contenu dans l'ouvert

$$\Omega_\varepsilon =]0, l_1[\times]0, l_2[\times] - \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$$

où ε est un petit paramètre réel destiné à tendre vers zéro. On suppose que $\varepsilon = \varepsilon \eta$ où ε désigne la période et η est un petit paramètre.

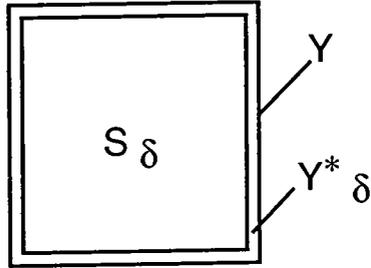


figure 1

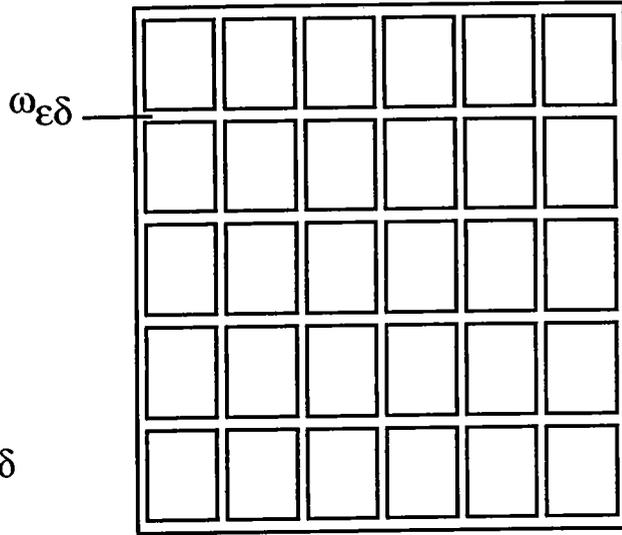


figure 3

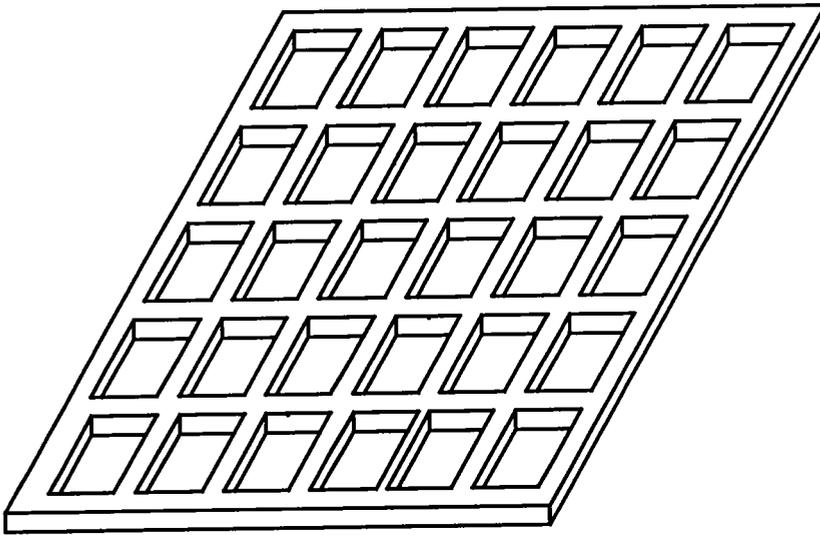


figure 2

On pose

$$\omega =]0, l_1[\times]0, l_2[\quad Y =]0, 1[\times]0, 1[\quad Y^*_\delta = \left\{ y \in Y; \text{dist}(y, \partial Y) \leq \frac{\delta}{2} \right\} \quad \mathcal{Y}^*_\delta = Y^*_\delta \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

où δ est petit paramètre positif strictement inférieur à 2. On suppose que

- (i) la périodicité n'a lieu que dans les directions y_1 et y_2
- (ii) les trous ne coupent pas le bord latéral de Ω_ϵ .

On désigne par

* $S_{\varepsilon\delta}$ l'ensemble de tous les trous contenus dans ω

* $S_{\varepsilon\delta,1} = S_{\varepsilon\delta} \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

* $\omega_{\varepsilon\delta} = \omega \setminus \{S_{\varepsilon\delta} \cup \partial S_{\varepsilon\delta}\}$

* $S_{\varepsilon\delta,e}$ l'ensemble de tous les trous contenus dans Ω_e

et on pose $\Omega_{\varepsilon\delta,e} = \omega_{\varepsilon\delta} \times]-\frac{e}{2}, \frac{e}{2}[$.

Dans toute la suite, nous utilisons systématiquement la convention de sommation sur les indices $i, j, \alpha, \beta, \gamma$ et μ lorsqu'ils sont répétés; par contre, il n'y a pas de sommation sur les indices $\varepsilon, \delta, \eta$ quand ils sont répétés.

On considère le système suivant

$$(1.1) \quad \begin{cases} u''_{\varepsilon\delta,e} + A_\varepsilon u_{\varepsilon\delta,e} + bu'_{\varepsilon\delta,e} = 0 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta,e} \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,e}}{\partial \nu_A} = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,e} \times]0, +\infty[\\ \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,e}}{\partial \nu_A} = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \left\{ \frac{\pm e}{2} \right\} \times]0, +\infty[\\ u_{\varepsilon\delta,e} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ u_{\varepsilon\delta,e}(0) = u_{\varepsilon\delta,e}^0 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta,e} \\ u'_{\varepsilon\delta,e}(0) = u_{\varepsilon\delta,e}^1 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta,e} \end{cases}$$

où

$$A_\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + a^\varepsilon \quad \frac{\partial}{\partial \nu_{A_\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \nu_i^\varepsilon$$

où $\nu^\varepsilon = (\nu_i^\varepsilon; 1 \leq i \leq 3)$ est la normale unitaire extérieure à $\Omega_{\varepsilon\delta,e}$ et les coefficients a_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$, sont des constantes indépendantes de ε , δ et e vérifiant

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad M = \max_{1 \leq i, j \leq 3} \{|a_{ij}|\}$$

$$(1.2) \quad \exists m > 0 : a_{ij} \xi_i \xi_j \geq m \xi_i \xi_i \quad \forall \xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^3$$

$$(1.3) \quad \begin{cases} a \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[), \quad a \text{ est } Y\text{-périodique et positive} \\ a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\varepsilon}, x_3\right) \\ b \text{ est une constante réelle strictement positive.} \end{cases}$$

Pour travailler dans un domaine indépendant de e , on fait le changement de variables suivant

$$(1.4) \quad \begin{cases} (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (z_1 = x_1, z_2 = x_2, z_3 = \frac{x_3}{\varepsilon\eta}) \\ f_e(x_1, x_2, x_3) = f_\eta(z_1, z_2, z_3). \end{cases}$$

Alors le système (1.1) devient

$$(1.5) \quad \begin{cases} u''_{\varepsilon\delta,\eta} + A_{\varepsilon,\eta}u_{\varepsilon\delta,\eta} + bu'_{\varepsilon\delta,\eta} = 0 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[\\ (a_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1}\eta^{-1}a_{\alpha 3} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3})n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,1} \times]0, +\infty[\\ (a_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1}\eta^{-1}a_{33} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3})n_3 = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{\frac{\pm 1}{2}\} \times]0, +\infty[\\ u_{\varepsilon\delta,\eta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, +\infty[\\ u_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ u'_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = u_{\varepsilon\delta,\eta}^1 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

où

$$\Omega_{\varepsilon\delta} = \Omega_{\varepsilon\delta,1}$$

et

$$A_{\varepsilon,\eta}\varphi = -a_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} - \varepsilon^{-1}\eta^{-1}a_{\alpha 3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\alpha \partial z_3} - \varepsilon^{-1}\eta^{-1}a_{3\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_3 \partial z_\beta} - \varepsilon^{-2}\eta^{-2}a_{33} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_3^2} + a^\varepsilon \varphi$$

Posons

$$(1.6) \quad \Omega = \omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[, \quad V_{\varepsilon\delta} = \left\{ v \in H^1(\Omega_{\varepsilon\delta}); v = 0 \text{ sur } \partial\omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\right\}$$

On munit $V_{\varepsilon\delta}$ de la norme

$$(1.7) \quad \|v\|_{\varepsilon\delta,\eta}^2 = \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left\{ a_{\alpha\beta} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha} \frac{\partial v}{\partial z_\beta} + 2\varepsilon^{-1}\eta^{-1}a_{\alpha 3} \frac{\partial v}{\partial z_3} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha} + \varepsilon^{-2}\eta^{-2}a_{33} \frac{\partial v}{\partial z_3} \frac{\partial v}{\partial z_3} + a^\varepsilon v^2 \right\} dz$$

et du produit scalaire correspondant. On a le

Théorème 1.1. *On suppose que les données initiales $u_{\varepsilon\delta,\eta}^0$ et $u_{\varepsilon\delta,\eta}^1$ du système (1.5) vérifient*

$$(1.8) \quad u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 \in V_{\varepsilon\delta} \text{ et } u_{\varepsilon\delta,\eta}^1 \in L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}).$$

Alors (1.5) possède une et une seule solution $u_{\varepsilon\delta,\eta}$ et cette solution satisfait à la condition

$$(1.9) \quad u_{\varepsilon\delta,\eta} \in \mathcal{C}([0, +\infty[; V_{\varepsilon\delta}) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})).$$

Preuve. On va utiliser la méthode de Hille et Yosida (cf. [2], [9], [10]). Pour ce faire, introduisons l'opérateur

$$(1.10) \quad \begin{cases} \mathcal{A}_{\varepsilon\delta} : V_{\varepsilon\delta} \times V_{\varepsilon\delta} \longrightarrow V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \\ (u, v) \longmapsto (-v, A_{\varepsilon,\eta}u + bv) \end{cases}$$

de domaine

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}) = \left\{ (u, v) \in V_{\varepsilon\delta} \times V_{\varepsilon\delta}; A_{\varepsilon,\eta}u \in L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \text{ et} \right. \\ \left. \begin{aligned} (a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial u}{\partial z_3}) n_\alpha &= 0 \quad \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,1} \\ (a_{3\beta} \frac{\partial u}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial u}{\partial z_3}) n_3 &= 0 \quad \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \left\{ \frac{\pm 1}{2} \right\} \end{aligned} \right\}.$$

Nous allons démontrer le Théorème 1.1 pour des données initiales $u_{\varepsilon\delta,\eta}^0$ et $u_{\varepsilon\delta,\eta}^1$ satisfaisant

$$(1.11) \quad \{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0, u_{\varepsilon\delta,\eta}^1\} \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}).$$

Il suffira ensuite d'utiliser un argument de densité pour obtenir la démonstration de ce théorème pour des données initiales vérifiant (1.8). A partir de maintenant, on suppose que (1.11) a lieu. Posons

$$(1.12) \quad Z = (u_{\varepsilon\delta,\eta}, u'_{\varepsilon\delta,\eta}) \text{ et } Z^0 = (u_{\varepsilon\delta,\eta}^0, u_{\varepsilon\delta,\eta}^1)$$

alors le système (1.5) devient

$$(1.13) \quad \begin{cases} Z' + \mathcal{A}_{\varepsilon\delta}Z = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \\ Z(0) = Z^0. \end{cases}$$

Pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution de (1.5), il suffit de démontrer que (1.13) possède une et une seule solution. En vertu du théorème de Hille et Yosida (cf. [2]), il suffit de démontrer que l'opérateur $\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}$ est maximal monotone.

Montrons que $\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}$ est monotone. Soit $(u, v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$. On a

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{aligned} \langle \mathcal{A}_{\varepsilon\delta}(u, v), (u, v) \rangle &= - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} v \{A_{\varepsilon,\eta}u\} dz + \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} v \{A_{\varepsilon,\eta}u\} dz + \\ &\quad + \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} bv^2 dz \\ &= \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} bv^2 dz \\ &\geq 0 \end{aligned} \right.$$

donc $\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}$ est monotone. Il reste à montrer que pour tout $(f, g) \in V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})$, il existe $(u, v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$ tel que

$$(1.15) \quad \mathcal{A}_{\varepsilon\delta}(u, v) + (u, v) = (f, g).$$

En vertu de la définition de l'opérateur $\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}$, la relation (1.15) s'écrit encore

$$(1.16) \quad \begin{cases} u - v = f \\ \mathcal{A}_{\varepsilon,\eta}u + (b+1)v = g \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(1.17) \quad \mathcal{A}_{\varepsilon,\eta}u + (b+1)u = g + (b+1)f.$$

Comme on cherche (u, v) dans $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$, u doit vérifier en plus de (1.17)

$$(1.18) \quad \begin{cases} u \in V_{\varepsilon\delta} \\ (a_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial u}{\partial z_3}) n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,1} \\ (a_{3\beta} \frac{\partial u}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial u}{\partial z_3}) n_3 = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \left\{ \frac{\pm 1}{2} \right\}. \end{cases}$$

Grâce à la théorie des équations elliptiques (voir par exemple [12]), on sait que le système constitué par (1.17) et (1.18) admet une seule solution; ayant ainsi obtenu u , on obtient v en utilisant la première équation de (1.16). En outre, la deuxième équation de (1.16) nous permet d'affirmer que $\mathcal{A}_{\varepsilon,\eta}u \in L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})$; donc $(u, v) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$. Nous avons ainsi établi que l'opérateur $\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}$ est maximal monotone; donc (1.13) possède une seule solution sous l'hypothèse (1.11) et par suite (1.5) possède aussi une seule solution $u_{\varepsilon\delta,\eta}$ et cette solution vérifie

$$(1.19) \quad \{u_{\varepsilon\delta,\eta}, u'_{\varepsilon\delta,\eta}\} \in \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[; V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})).$$

Maintenant, nous supposons que $u_{\varepsilon\delta,\eta}^0$ et $u_{\varepsilon\delta,\eta}^1$ vérifient seulement (1.8).

L'opérateur $\mathcal{A}_{\varepsilon\delta}$ étant maximal monotone, son domaine, $\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\varepsilon\delta})$, est dense dans $V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})$; un simple argument de densité permet de conclure que sous l'hypothèse (1.8), le système (1.5) possède une solution unique $u_{\varepsilon\delta,\eta}$ et cette solution vérifie (1.9); ceci achève la preuve du Théorème 1.1. \square

Lorsque la condition (1.8) est vérifiée, l'énergie du système (1.5) est donnée par

$$(1.20) \quad E_{\varepsilon\delta,\eta}(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u'_{\varepsilon\delta,\eta}(t)|^2 dz + \|u_{\varepsilon\delta,\eta}(t)\|_{\varepsilon\delta,\eta}^2 \right\}, \quad \forall t \geq 0.$$

où $\|\cdot\|_{\varepsilon\delta,\eta}$ est définie par (1.7).

On établit facilement le résultat suivant

Lemme 1.2. *L'énergie $E_{\varepsilon\delta,\eta}$ décroît avec le temps; plus précisément, on a*

$$(1.21) \quad E'_{\varepsilon\delta,\eta}(t) = - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} b |u'_{\varepsilon\delta,\eta}(z, t)|^2 dz, \quad \forall t \geq 0$$

$$(1.22) \quad E_{\varepsilon\delta,\eta}(S) - E_{\varepsilon\delta,\eta}(T) = \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} b|u'_{\varepsilon\delta,\eta}(z,t)|^2 dz dt \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty.$$

Soit λ_0 une constante strictement positive et indépendante de $\varepsilon, \delta, \eta$ telle que pour tout $v \in V_{\varepsilon\delta}$

$$(1.23) \quad \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |v|^2 dz \leq \frac{1}{\lambda_0^2} |\nabla_{\varepsilon\eta} v|^2.$$

où l'on a posé

$$(1.24) \quad |\nabla_{\varepsilon\eta} v|^2 = \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left\{ a_{\alpha\beta} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha} \frac{\partial v}{\partial z_\beta} + 2\varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial v}{\partial z_3} \frac{\partial v}{\partial z_\alpha} + \varepsilon^{-2} \eta^{-2} a_{33} \frac{\partial v}{\partial z_3} \frac{\partial v}{\partial z_3} \right\} dz.$$

Remarque 1.3. Une telle constante λ_0 existe; en effet, on peut prendre

$$(1.25) \quad \lambda_0 = \frac{\sqrt{m}}{c_p} \quad \text{où } c_p \text{ désigne la constante de Poincaré.}$$

On a le

Théorème 1.4. *On suppose qu'en plus de (1.3), a et b vérifient*

$$(1.26) \quad \begin{cases} 2\lambda_0^2 \leq a(y_1, y_2, y_3) \text{ presque partout dans } \mathbb{R}^2 \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\\ b = 2\lambda_0. \end{cases}$$

Alors l'énergie du système (1.5) vérifie

$$(1.27) \quad E_{\varepsilon\delta,\eta}(t) \leq [\exp(1 - \lambda_0 t)] E_{\varepsilon\delta,\eta}(0), \quad \forall t \geq \frac{1}{\lambda_0}.$$

Preuve. En vertu de [8] (on peut aussi consulter [10] et [15]), il suffit de démontrer que pour tout $S \geq 0$

$$(1.28) \quad \int_S^{+\infty} E_{\varepsilon\delta,\eta}(t) dt \leq \frac{1}{\lambda_0} E_{\varepsilon\delta,\eta}(S).$$

En effet, si l'on a (1.28), on en déduit

$$\frac{d}{dS} \left[\exp(\lambda_0 S) \int_S^{+\infty} E_{\varepsilon\delta,\eta}(t) dt \right] \leq 0$$

d'où l'on déduit

$$\int_S^{+\infty} E_{\varepsilon\delta,\eta}(t)dt \leq \exp(-\lambda_0 S) \int_0^{+\infty} E_{\varepsilon\delta,\eta}(t)dt$$

et appliquant (1.28) à cette dernière relation, on trouve

$$(1.29) \quad \int_S^{+\infty} E_{\varepsilon\delta,\eta}(t)dt \leq [\exp(-\lambda_0 S)] \frac{1}{\lambda_0} E_{\varepsilon\delta,\eta}(0).$$

Comme $E_{\varepsilon\delta,\eta}$ décroît, on sait que

$$(1.30) \quad \frac{1}{\lambda_0} E_{\varepsilon\delta,\eta}(S + \frac{1}{\lambda_0}) \leq \int_S^{+\infty} E_{\varepsilon\delta,\eta}(t)dt.$$

Combinant (1.29) et (1.30), on obtient

$$(1.31) \quad E_{\varepsilon\delta,\eta}(S + \frac{1}{\lambda_0}) \leq [\exp(-\lambda_0 S)] E_{\varepsilon\delta,\eta}(0) \quad \forall S \geq 0$$

d'où l'on déduit (1.27).

Maintenant, procédons à la démonstration de (1.28). Soient $0 \leq S < T < +\infty$. Multiplions la première équation de (1.5) par $u_{\varepsilon\delta,\eta}$ et intégrons par parties sur $\Omega_{\varepsilon\delta} \times]S, T[$; il vient alors

$$(1.32) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} u'_{\varepsilon\delta,\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta} dz \right]_S^T - \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u'_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 dz dt + \int_S^T |\nabla_{\varepsilon\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 dt + \\ & + \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} a^\varepsilon |u_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 dz dt + \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} b u'_{\varepsilon\delta,\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta} dz dt = 0. \end{aligned} \right.$$

Ajoutant le terme $2 \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u'_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 dz dt$ aux deux membres de (1.32), on obtient

$$(1.33) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left[\int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} u'_{\varepsilon\delta,\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta} dz \right]_S^T + \int_S^T \left\{ \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \{ |u'_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 dz + |\nabla_{\varepsilon\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 + a^\varepsilon |u_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 \} dz \right\} dt + \\ & + \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} b u'_{\varepsilon\delta,\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta} dz dt = 2 \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u'_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 dz dt. \end{aligned} \right.$$

En tenant compte de la définition de $E_{\varepsilon\delta,\eta}$, on déduit de (1.33)

$$(1.34) \quad \left\{ \begin{aligned} 2 \int_S^T E_{\varepsilon\delta,\eta}(t) dt &= - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} u'_{\varepsilon\delta,\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta} dz \Big|_S^T + 2 \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u'_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 dz dt - \\ &\quad - \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} b u'_{\varepsilon\delta,\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta} dz dt. \end{aligned} \right.$$

Or nous avons par (1.22) et (1.26)

$$(1.35) \quad 2 \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u'_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 dz dt = \frac{2}{b} \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} b |u'_{\varepsilon\delta,\eta}|^2 dz dt = \frac{1}{\lambda_0} (E_{\varepsilon\delta,\eta}(S) - E_{\varepsilon\delta,\eta}(T))$$

et

$$(1.36) \quad \left\{ \begin{aligned} - \int_S^T \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} b u'_{\varepsilon\delta,\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta} dz dt &= \frac{b}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left\{ |u_{\varepsilon\delta,\eta}(z, S)|^2 - |u_{\varepsilon\delta,\eta}(z, T)|^2 \right\} dz \\ &\leq \lambda_0 \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u_{\varepsilon\delta,\eta}(z, S)|^2 dz \\ &\leq \frac{1}{2\lambda_0} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} a^\varepsilon |u_{\varepsilon\delta,\eta}(z, S)|^2 dz. \end{aligned} \right.$$

Posons pour tout $t \geq 0$

$$(1.37) \quad X(t) = - \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} u'_{\varepsilon\delta,\eta}(z, t) u_{\varepsilon\delta,\eta}(z, t) dz; \quad X = X(T) - X(S).$$

Utilisant une inégalité de Young, on obtient l'estimation

$$(1.38) \quad |X(t)| \leq \frac{1}{2\lambda_0} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u'_{\varepsilon\delta,\eta}(z, t)|^2 dz + \frac{\lambda_0}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u_{\varepsilon\delta,\eta}(z, t)|^2 dz$$

et en utilisant (1.23), on déduit de (1.38)

$$(1.39) \quad |X(t)| \leq \frac{1}{2\lambda_0} \left\{ \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u'_{\varepsilon\delta,\eta}(z, t)|^2 dz + |\nabla_{\varepsilon\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta}(t)|^2 \right\}.$$

Combinant (1.37) et (1.39) on trouve

$$(1.40) \quad |X| \leq \frac{1}{\lambda_0} E_{\varepsilon\delta,\eta}(T) + \frac{1}{2\lambda_0} \left\{ \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} |u'_{\varepsilon\delta,\eta}(z, S)|^2 dz + |\nabla_{\varepsilon\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta}(S)|^2 \right\}.$$

Reportant (1.35), (1.36) et (1.40) dans (1.34), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E_{\varepsilon\delta,\eta}(t) dt \leq \frac{1}{\lambda_0} (E_{\varepsilon\delta,\eta}(S) - E_{\varepsilon\delta,\eta}(T)) + \frac{1}{\lambda_0} E_{\varepsilon\delta,\eta}(T) + \frac{1}{\lambda_0} E_{\varepsilon\delta,\eta}(S) \\ \leq \frac{2}{\lambda_0} E_{\varepsilon\delta,\eta}(S) \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(1.41) \quad \int_S^T E_{\varepsilon\delta,\eta}(t) dt \leq \frac{1}{\lambda_0} E_{\varepsilon\delta,\eta}(S) \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty.$$

Il découle de (1.41) que

$$(1.42) \quad \int_S^{+\infty} E_{\varepsilon\delta,\eta}(t) dt \leq \frac{1}{\lambda_0} E_{\varepsilon\delta,\eta}(S) \quad \forall S \geq 0$$

ce qui est la relation (1.28) annoncée et la preuve du Théorème 1.4 est terminée. \square

Remarque 1.5. Au lieu de fixer b égale à une constante dans le Théorème 1.4, on aurait pu y choisir b comme une fonction bornée, strictement positive et périodique dans les directions y_1 et y_2 ; le choix que nous avons fait a pour but de simplifier l'écriture du taux de décroissance de l'énergie; dans chacun des deux choix de b , le taux de décroissance de l'énergie est indépendant des trois petits paramètres ε , δ et η .

2- Premier résultat de convergence: homogénéisation ($\varepsilon \rightarrow 0$).

Dans ce paragraphe et les paragraphes suivants, a et b sont choisis comme dans le Théorème 1.4.

Dans ce paragraphe, nous allons faire tendre ε vers zéro et nous étudierons la stabilisation du problème limite obtenu. Pour ce faire, nous aurons besoin du résultat suivant

Lemme 2.1.- a) (cf. [5]) *Pour tous $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, il existe un opérateur de prolongement $Q_{\varepsilon\delta} \in \mathcal{L}(H^k(\Omega_{\varepsilon\delta}), H^k(\Omega))$ ($k = 0, 1$) vérifiant:*

$$(\alpha) \quad Q_{\varepsilon\delta} v = v \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta},$$

$$(\beta) \quad \|Q_{\varepsilon\delta} v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|v\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})},$$

$$(\gamma) \quad \|\nabla Q_{\varepsilon\delta} v\|_{[L^2(\Omega)]^3} \leq c \|\nabla v\|_{[L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})]^3}.$$

b) (cf. [4]) *Pour tous $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, il existe un opérateur de prolongement*

$$P_{\varepsilon\delta} \in \mathcal{L}(L^\infty(0, +\infty; H^k(\Omega_{\varepsilon\delta})), L^\infty(0, +\infty; H^k(\Omega))) \quad (k = 0, 1)$$

tel que pour tout $\varphi \in L^\infty(0, +\infty; H^k(\Omega_{\varepsilon\delta}))$ avec $\varphi' \in L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))$, on ait:

- (i) $P_{\varepsilon\delta}\varphi = \varphi$ dans $\Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[$,
- (ii) $P_{\varepsilon\delta}(\varphi') = (P_{\varepsilon\delta}\varphi)'$ dans $\Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[$,
- (iii) $\|P_{\varepsilon\delta}\varphi\|_{L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))} \leq c\|\varphi\|_{L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}$
- (iv) $\|\nabla P_{\varepsilon\delta}\varphi\|_{L^\infty(0, +\infty; [L^2(\Omega)]^3)} \leq c\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(0, +\infty; [L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})]^3)}$
- (v) $\|P_{\varepsilon\delta}\varphi'\|_{L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega))} \leq c\|\varphi'\|_{L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))}$

où c est une constante positive indépendante de ε et δ .

Supposons que $u_{\varepsilon\delta, \eta}^0$ et $u_{\varepsilon\delta, \eta}^1$ satisfont aux conditions suivantes:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \|u_{\varepsilon\delta, \eta}^0\|_{\varepsilon\delta, \eta} \leq \frac{c}{\delta} \text{ et } \widetilde{u_{\varepsilon\delta, \eta}^0} \rightharpoonup u_{\delta, \eta}^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \|u_{\varepsilon\delta, \eta}^1\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} \leq c \text{ et } \widetilde{u_{\varepsilon\delta, \eta}^1} \rightharpoonup u_{\delta, \eta}^1 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

où le $\widetilde{}$ désigne le prolongement par zéro de toute fonction définie dans $\Omega_{\varepsilon\delta}$ et c est une constante positive indépendante de ε , δ et η .

Remarque 2.2. On vérifie sans peine que $u_{\delta, \eta}^0$ est une fonction indépendante de z_3 . De plus grâce au Lemme 2.1 et à (2.1), on montre que

$$(2.2) \quad u_{\delta, \eta}^0 \in H^1(\omega)$$

et

$$Q_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta, \eta}^0 \rightharpoonup \frac{u_{\delta, \eta}^0}{\theta(\delta)} \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible}$$

où

$$\theta(\delta) = |Y_\delta^*|, \quad |Y_\delta^*| \text{ est la mesure de Lebesgue de } Y_\delta^*.$$

Donc

$$\left\| \frac{u_{\delta, \eta}^0}{\theta(\delta)} \right\|_{H^1(\omega)} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Q_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta, \eta}^0\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{c}{\delta}$$

où la constante c est indépendante de δ et η .

Théorème 2.3. On suppose que les données initiales de (1.5) vérifient (2.1). Alors quand $\varepsilon \rightarrow 0$ (avec η et δ fixes), on a

$$(2.3) \quad \begin{cases} P_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta, \eta} \rightharpoonup u_{\delta, \eta} \text{ dans } L^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega)) \text{ faible} * \\ P_{\varepsilon\delta}u'_{\varepsilon\delta, \eta} \rightharpoonup u'_{\delta, \eta} \text{ dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \text{ faible} * \end{cases}$$

où

$$(2.4) \quad u_{\delta, \eta} \text{ est indépendant de } z_3$$

et $u_{\delta,\eta}$ vérifie

$$(2.5) \quad \begin{cases} \theta(\delta)u''_{\delta,\eta} - q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} \frac{\partial^2 u_{\delta,\eta}}{\partial z_\alpha z_\beta} + a_\delta u_{\delta,\eta} + b\theta(\delta)u'_{\delta,\eta} = 0 & \text{dans } \omega \times]0, +\infty[\\ u_{\delta,\eta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ u_{\delta,\eta}(0) = \frac{u_{\delta,\eta}^0}{\theta(\delta)} & \text{dans } \omega \\ u'_{\delta,\eta}(0) = \frac{u_{\delta,\eta}^{1*}}{\theta(\delta)} & \text{dans } \omega \end{cases}$$

avec

$$(2.6) \quad \theta(\delta) = |Y_\delta^*| = \delta(2 - \delta)$$

$$(2.7) \quad a_\delta = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{Y_\delta^*} a(y_1, y_2, z_3) dy_1 dy_2 dz_3, \quad u_{\delta,\eta}^{1*} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u_{\delta,\eta}^1 dz_3.$$

Les coefficients homogénéisés $q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta}$ sont donnés par

$$(2.8) \quad q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} = - \int_{Y_\delta^*} \left\{ a_{\gamma\beta} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_\gamma} + \eta^{-1} a_{3\beta} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_3} \right\} dy_1 dy_2 dy_3$$

et les fonctions $w_\alpha^{\delta,\eta}$ sont solutions du système

$$(2.9) \quad \begin{cases} -a_{\gamma\beta} \frac{\partial^2 w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_\gamma y_\beta} - \eta^{-1} a_{\gamma 3} \frac{\partial^2 w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_\gamma y_3} - \eta^{-1} a_{3\beta} \frac{\partial^2 w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_3 y_\beta} - \eta^{-2} a_{33} \frac{\partial^2 w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_3^2} = 0 & \text{dans } \mathcal{Y}_\delta^* \\ \left[a_{\gamma j} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_\gamma} + \eta^{-1} a_{3j} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_3} \right] n_j = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{Y}_\delta^* \setminus \partial\left\{ Y \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\right\} \\ w_\alpha^{\delta,\eta} + y_\alpha & \text{est périodique en } y_1 \text{ et } y_2, \quad \int_{Y_\delta^*} \{w_\alpha^{\delta,\eta} + y_\alpha\} dy_1 dy_2 dy_3 = 0. \end{cases}$$

Preuve. Comme l'énergie du système (1.5) est décroissante, l'on déduit de (2.1) que

$$(2.10) \quad \begin{cases} \|u'_{\varepsilon\delta,\eta}\|_{L^\infty(0,+\infty;L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq \frac{c}{\delta} \\ \|u_{\varepsilon\delta,\eta}\|_{L^\infty(0,+\infty;H^1(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq \frac{c}{\delta} \\ \left\| \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3} \right\|_{L^\infty(0,+\infty;L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq \frac{c}{\delta} \varepsilon \eta. \end{cases}$$

où c est une constante positive indépendante de ε , δ et η .

Grâce au Lemme 2.1, on sait alors qu'à une extraction de sous-suite de $\{\varepsilon\}$, on a

$$(2.11) \quad \begin{cases} P_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup u_{\delta,\eta} & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega)) \text{ faible } * \\ P_{\varepsilon\delta}u'_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup u'_{\delta,\eta} & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \text{ faible } *. \end{cases}$$

On déduit de (2.11) et des deux dernières inégalités de (2.10) que

$$(2.12) \quad u_{\delta,\eta} \text{ ne dépend pas de } z_3.$$

D'autre part, comme $u_{\varepsilon\delta,\eta} = 0$ sur $\partial\omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, +\infty[$, on a en vertu de (2.11)

$$(2.13) \quad u_{\delta,\eta} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[$$

ce qui est la deuxième équation de (2.5).

Nous avons ainsi démontré (2.3), (2.4) et la deuxième équation de (2.5) pour une sous-suite extraite de $\{\varepsilon\}$. Il nous reste à vérifier que $u_{\delta,\eta}$ vérifie les autres équations de (2.5).

Posons

$$(2.14) \quad \sigma_i^{\varepsilon\delta,\eta} = a_{i\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{i3} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

En vertu de (2.10) on sait que

$$(2.15) \quad \|\sigma_i^{\varepsilon\delta,\eta}\|_{L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq \frac{c}{\delta}$$

de sorte qu'à une sous-suite extraite de $\{\varepsilon\}$, on a

$$(2.16) \quad \tilde{\sigma}_i^{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup \sigma_i^{\delta,\eta} \quad \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega)) \text{ faible } *.$$

Pour déterminer l'équation satisfaite par $\sigma_i^{\delta,\eta}$, nous allons adapter la technique de Caillerie [3] qui est basée sur un choix appropriée de fonctions tests dans les domaines cylindriques. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}(]0, +\infty[)$; posons

$$w(z, t) = \left(\int_0^{z_3} \varphi(z_1, z_2, s) ds \right) v(t).$$

Multipliant la première équation de (1.5) par $\varepsilon\eta w$ et intégrant par parties sur $\Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[$, on obtient après quelques calculs

$$(2.17) \quad \begin{cases} \varepsilon\eta \int_0^{+\infty} \int_\Omega P_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta,\eta} w'' \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt + \varepsilon\eta \int_0^{+\infty} \int_\Omega \tilde{\sigma}_\alpha^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial w}{\partial z_\alpha} dz dt + \\ \int_0^{+\infty} \int_\Omega \tilde{\sigma}_3^{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v dz dt + \\ + \varepsilon\eta \int_0^{+\infty} \int_\Omega a^\varepsilon P_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta,\eta} w \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt + \varepsilon\eta \int_0^{+\infty} \int_\Omega b P_{\varepsilon\delta}u'_{\varepsilon\delta,\eta} w \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt = 0 \end{cases}$$

où $\chi(\Omega_{\varepsilon\delta})$ désigne la fonction caractéristique de $\Omega_{\varepsilon\delta}$.

Le passage à la limite dans (2.17) donne

$$(2.18) \quad \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \sigma_3^{\delta,\eta} \varphi v dz dt = 0$$

d'où l'on déduit

$$(2.19) \quad \sigma_3^{\delta,\eta} = 0.$$

Maintenant, si l'on prend $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $v \in \mathcal{D}(]0, +\infty[)$ et que l'on multiplie la première équation de (1.5) par $\varphi \otimes v$, des calculs simples montrent alors que

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v'' \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_{\alpha}^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\alpha}} v dz dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} a^{\varepsilon} P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} b P_{\varepsilon\delta} u'_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt = 0. \end{array} \right.$$

Puisque l'on a pour δ fixé et ε tendant vers zéro

$$(2.21) \quad \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) \rightharpoonup \theta(\delta) \quad \text{dans } L^{\infty}(\Omega) \text{ faible } *$$

et pour presque tout $z_3 \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$

$$(2.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^{\varepsilon} \chi(\Omega_{\varepsilon\delta})(z) = (a\chi(Y_{\delta}^*))\left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}, z_3\right) \\ (a\chi(Y_{\delta}^*))\left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}, z_3\right) \rightharpoonup \int_{Y_{\delta}^*} a(y_1, y_2, z_3) dy_1 dy_2 \quad \text{dans } L^{\infty}(\mathbb{R}^2) \text{ faible } * \end{array} \right.$$

le passage à la limite dans les trois premiers termes du membre de gauche de (2.20) s'effectue sans difficulté; pour passer à la limite dans le dernier terme, on remarque que

$$(2.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} b P_{\varepsilon\delta}(u'_{\varepsilon\delta,\eta}) \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt = \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} b (P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta})' \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt \\ = - \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} b P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v' \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt \end{array} \right.$$

d'où

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} b P_{\varepsilon \delta} (u'_{\varepsilon \delta, \eta}) \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon \delta}) dz dt &= - \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} b u_{\delta, \eta} \varphi v' \theta(\delta) dz dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} b u'_{\delta, \eta} \varphi v \theta(\delta) dz dt. \end{aligned} \right.$$

Passant maintenant à la limite dans (2.20), on trouve

$$(2.25) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} u_{\delta, \eta} \varphi v'' \theta(\delta) dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \sigma_{\alpha}^{\delta, \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\alpha}} v dz dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} a_{\delta} u_{\delta, \eta} \varphi v dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} b u'_{\delta, \eta} \varphi v \theta(\delta) dz dt &= 0. \end{aligned} \right.$$

Il découle de (2.25) que

$$(2.26) \quad \theta(\delta) u''_{\delta, \eta} - \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\alpha}^{\delta, \eta} dz_3 \right) + a_{\delta} u_{\delta, \eta} + b \theta(\delta) u'_{\delta, \eta} = 0 \quad \text{dans } \omega \times]0, +\infty[.$$

Maintenant, nous allons identifier le terme $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\alpha}^{\delta, \eta} dz_3$, $\alpha = 1, 2$. Nous allons procéder comme dans [6]. Posons

$$(2.27) \quad w_{\alpha}^{\varepsilon}(z_1, z_2, z_3) = \varepsilon w_{\alpha}^{\delta, \eta} \left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}, z_3 \right)$$

où $w_{\alpha}^{\delta, \eta}$ est définie par (2.9).

Définissons le prolongement de w_{α}^{ε} à \mathbb{R}^3 par

$$(2.28) \quad \mathcal{R}^{\varepsilon} w_{\alpha}^{\varepsilon}(z_1, z_2, z_3) = -z_{\alpha} + \varepsilon Q^{\varepsilon} \left[(w_{\alpha}^{\delta, \eta} + y_{\alpha}) \left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}, z_3 \right) \right]$$

où Q^{ε} est l'opérateur de prolongement introduit dans [5], (voir aussi le Lemme 2.1).

Introduisons $\xi_{\alpha j}^{\delta, \eta} \in L^2(\mathcal{Y}_{\delta}^*)$ défini par

$$(2.29) \quad \xi_{\alpha j}^{\delta, \eta}(y) = a_{\gamma j} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_{\gamma}} + \eta^{-1} a_{3j} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_3}$$

et posons

$$(2.30) \quad \xi_{\alpha j}^{\varepsilon\delta,\eta}(z) = \xi_{\alpha j}^{\delta,\eta}\left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}, z_3\right).$$

On vérifie que

$$(2.31) \quad -\left\{ \frac{\partial \tilde{\xi}_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1}\eta^{-1} \frac{\partial \tilde{\xi}_{\alpha 3}^{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3} \right\} = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Grâce à (2.28) et (2.30), on montre que

$$(2.32) \quad \begin{cases} \mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon \rightharpoonup -z_\alpha & \text{dans } H^1(\Omega) \text{ faible} \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{\xi}_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta,\eta} dz_3 \rightharpoonup -q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} & \text{dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \end{cases}$$

où les $q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta}$ sont les constantes de la relation (2.8).

Soient $\varphi \in H_0^1(\omega)$, $v \in \mathcal{D}(]0, +\infty[)$. Multiplions la première équation de (1.5) par $(\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon)\varphi \otimes v$ et intégrons par parties sur $\Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[$; il vient

$$(2.33) \quad \begin{cases} \int_0^{+\infty} \int_\Omega P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta} (\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) \varphi v'' \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt + \int_0^{+\infty} \int_\Omega \tilde{\sigma}_\beta^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial}{\partial z_\beta} (\varphi \mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) v dz dt + \\ + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} \int_0^{+\infty} \int_\Omega \tilde{\sigma}_3^{\varepsilon\delta,\eta} \varphi \frac{\partial}{\partial z_3} (\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) v dz dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_\Omega \left\{ a^\varepsilon P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta} (\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) + b P_{\varepsilon\delta} u'_{\varepsilon\delta,\eta} (\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) \right\} dz dt = 0. \end{cases}$$

Multipliant maintenant (2.31) par $\varphi v P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta}$ et intégrant par parties sur $\Omega \times]0, +\infty[$, on trouve

$$(2.34) \quad \begin{cases} \int_0^{+\infty} \int_\Omega \tilde{\xi}_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\beta} v P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta} dz dt + \int_0^{+\infty} \int_\Omega \tilde{\xi}_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial}{\partial z_\beta} (P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta}) \varphi v dz dt + \\ + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} \int_0^{+\infty} \int_\Omega \tilde{\xi}_{\alpha 3}^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial}{\partial z_3} (P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta}) \varphi v dz dt = 0. \end{cases}$$

Soustrayant (2.34) de (2.33) membre à membre et sachant que

$$(2.35) \quad \begin{cases} - \int_0^{+\infty} \int_\Omega \left\{ \tilde{\xi}_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial}{\partial z_\beta} (P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta}) + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} \tilde{\xi}_{\alpha 3}^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial}{\partial z_3} (P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta}) \right\} \varphi v dz dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_\Omega \left\{ \tilde{\sigma}_\beta^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial}{\partial z_\beta} (\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} \tilde{\sigma}_3^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial}{\partial z_3} (\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) \right\} \varphi v dz dt = 0 \end{cases}$$

on obtient

$$(2.36) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta, \eta} (\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) \varphi v'' \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_\beta^{\varepsilon\delta, \eta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_\beta} \right) (\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) v dz dt + \\ & + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \left\{ a^\varepsilon P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta, \eta} (\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) + b P_{\varepsilon\delta} u'_{\varepsilon\delta, \eta} (\mathcal{R}^\varepsilon w_\alpha^\varepsilon) \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) \right\} dz dt - \\ & - \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \tilde{\xi}_{\alpha\beta}^{\varepsilon\delta, \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\beta} v P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta, \eta} dz dt = 0. \end{aligned} \right.$$

Passant à la limite dans (2.36), on obtient

$$(2.37) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \int_0^{+\infty} \int_{\omega} u_{\delta, \eta} z_\alpha \varphi v'' \theta(\delta) d\tilde{z} dt - \int_0^{+\infty} \int_{\omega} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_\beta^{\delta, \eta} dz_3 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z_\beta} z_\alpha v d\tilde{z} dt - \\ & - \int_0^{+\infty} \int_{\omega} \left\{ a_\delta u_{\delta, \eta} + b \theta(\delta) u'_{\delta, \eta} \right\} z_\alpha \varphi v d\tilde{z} dt + \\ & + \int_0^{+\infty} \int_{\omega} q_{\alpha\beta}^{\delta, \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\beta} v u_{\delta, \eta} d\tilde{z} dt = 0. \end{aligned} \right.$$

Intégrant (2.37) par parties et utilisant (2.26), on trouve

$$(2.38) \quad \int_0^{+\infty} \int_{\omega} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_\alpha^{\delta, \eta} dz_3 \varphi v d\tilde{z} dt - \int_0^{+\infty} \int_{\omega} q_{\alpha\beta}^{\delta, \eta} \frac{\partial u_{\delta, \eta}}{\partial z_\beta} \varphi v d\tilde{z} dt = 0$$

d'où l'on déduit

$$(2.39) \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_\alpha^{\delta, \eta} dz_3 = q_{\alpha\beta}^{\delta, \eta} \frac{\partial u_{\delta, \eta}}{\partial z_\beta}.$$

Combinant (2.26) et (2.39), on obtient la première équation de (2.5). Pour terminer la preuve du Théorème 2.3, il reste à montrer que

(i) les deux dernières équations de (2.5) sont vérifiées

(ii) toute la suite $\{P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta, \eta}\}$ converge lorsque ε tend vers zéro.

Montrons (i). Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $v \in \mathcal{D}([0, +\infty[)$. Multiplions la première équation de

(1.5) par $\varphi \otimes v$ et intégrons par parties sur $\Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[$; il vient

$$(2.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \left(\int_{\Omega} \widetilde{u_{\varepsilon\delta,\eta}^1} \varphi dz \right) v(0) + \left(\int_{\Omega} \widetilde{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0} \varphi dz \right) v'(0) + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v'' \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) dz dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \widetilde{\sigma}_{\beta}^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\beta}} v dz dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \left\{ a^{\varepsilon} P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) + b P_{\varepsilon\delta} u'_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v \chi(\Omega_{\varepsilon\delta}) \right\} dz dt = 0. \end{array} \right.$$

Passant à la limite dans (2.40), intégrant le résultat obtenu par parties et utilisant (2.26), on obtient

$$(2.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \left(\int_{\omega} u_{\delta,\eta}^{1*} \varphi d\tilde{z} \right) v(0) + \left(\int_{\omega} u_{\delta,\eta}^0 \varphi d\tilde{z} \right) v'(0) - \theta(\delta) \left(\int_{\omega} u_{\delta,\eta}(0) \varphi d\tilde{z} \right) v'(0) + \\ + \theta(\delta) \left(\int_{\omega} u'_{\delta,\eta}(0) \varphi d\tilde{z} \right) v(0) = 0. \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit aisément

$$(2.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_{\delta,\eta}(0) = \frac{u_{\delta,\eta}^0}{\theta(\delta)} \\ u'_{\delta,\eta}(0) = \frac{u_{\delta,\eta}^{1*}}{\theta(\delta)}. \end{array} \right.$$

Maintenant montrons (ii). Si l'on montre que le système homogénéisé (2.5) possède une et une seule solution, alors, pour toute sous-suite extraite de $\{\varepsilon\}$, la limite de $\{P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta}\}$ sera solution de (2.5); donc la suite $\{P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta}\}$ aura une seule valeur d'adhérence et par conséquent, toute la suite $\{P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta}\}$ convergera. Pour établir que (2.5) a une seule solution, il suffit de démontrer que l'opérateur $-\frac{\partial}{z_{\alpha}} (q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} \frac{\partial}{\partial z_{\beta}})$ est coercif. Pour ce faire.

on remarque que les $q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta}$ sont encore donnés par

$$(2.43) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} = \int_{\mathcal{Y}_i^*} \left\{ a_{\gamma\mu} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta,\eta}}{\partial y_{\gamma}} \frac{\partial w_{\beta}^{\delta,\eta}}{\partial y_{\mu}} + \eta^{-1} a_{\gamma 3} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta,\eta}}{\partial y_{\gamma}} \frac{\partial w_{\beta}^{\delta,\eta}}{\partial y_3} \right\} dy_1 dy_2 dy_3 + \\ + \int_{\mathcal{Y}_i^*} \left\{ \eta^{-1} a_{3\mu} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta,\eta}}{\partial y_3} \frac{\partial w_{\beta}^{\delta,\eta}}{\partial y_{\mu}} + \eta^{-2} a_{33} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta,\eta}}{\partial y_3} \frac{\partial w_{\beta}^{\delta,\eta}}{\partial y_3} \right\} dy_1 dy_2 dy_3. \end{array} \right.$$

Soit $h = \{h_1, h_2\} \in \mathbb{R}^2$. Posons

$$w(y) = h_{\alpha} w_{\alpha}^{\delta,\eta}(y).$$

Il vient alors

$$(2.44) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} h_\alpha h_\beta = \int_{\mathcal{Y}_\delta^*} \left\{ a_{\gamma\mu} \frac{\partial w}{\partial y_\gamma} \frac{\partial w}{\partial y_\mu} + 2\eta^{-1} a_{\gamma 3} \frac{\partial w}{\partial y_\gamma} \frac{\partial w}{\partial y_3} + \eta^{-2} a_{33} \frac{\partial w}{\partial y_3} \frac{\partial w}{\partial y_3} \right\} dy_1 dy_2 dy_3 \\ \geq m \int_{\mathcal{Y}_\delta^*} |\nabla w|^2 dy_1 dy_2 dy_3 \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit, comme dans [1] qu'il existe une constante strictement positive γ dépendant probablement de η et δ telle que

$$(2.45) \quad q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} h_\alpha h_\beta \geq \gamma h_\alpha h_\alpha \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^2$$

ceci achève la preuve du Théorème 2.3. \square

Maintenant, nous allons étudier le comportement de $u_{\delta,\eta}$ lorsque t tend vers $+\infty$; on a

Théorème 2.4. *L'énergie du système (2.5) donnée par*

$$(2.46) \quad E_{\delta,\eta}(t) = \frac{1}{2} \int_\omega \left\{ \theta(\delta) |u'_{\delta,\eta}(t)|^2 + q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} \frac{\partial u_{\delta,\eta}(t)}{\partial z_\beta} \frac{\partial u_{\delta,\eta}(t)}{\partial z_\alpha} + a_\delta |u_{\delta,\eta}(t)|^2 \right\} d\tilde{z}$$

vérifie

$$(2.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_{\delta,\eta}(t) \leq E_{\delta,\eta}(0), \quad \forall t \geq 0 \\ E_{\delta,\eta}(t) \leq \left[\exp\left(1 - \frac{t}{T_0}\right) \right] E_{\delta,\eta}(0), \quad \forall t \geq T_0; \quad T_0 = \frac{\sqrt{2} + 4}{4\lambda_0}. \end{array} \right.$$

Preuve. On multiplie la première équation de (2.5) par $u_{\delta,\eta}$ et on intègre par parties sur $\omega \times]S, T[$; on obtient

$$(2.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta(\delta) \int_\omega u'_{\delta,\eta} u_{\delta,\eta} d\tilde{z} \Big|_S^T - \int_S^T \int_\omega \theta(\delta) |u'_{\delta,\eta}(t)|^2 d\tilde{z} dt + \\ + \int_S^T \int_\omega q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} \frac{\partial u_{\delta,\eta}(t)}{\partial z_\beta} \frac{\partial u_{\delta,\eta}(t)}{\partial z_\alpha} d\tilde{z} dt + \int_S^T \int_\omega a_\delta |u_{\delta,\eta}(t)|^2 d\tilde{z} dt + \\ + \theta(\delta) b \int_S^T \int_\omega u'_{\delta,\eta} u_{\delta,\eta} d\tilde{z} dt = 0 \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(2.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E_{\delta,\eta}(t) dt = -\theta(\delta) \int_\omega u'_{\delta,\eta} u_{\delta,\eta} d\tilde{z} \Big|_S^T + \frac{2}{b} \int_S^T \int_\omega b\theta(\delta) |u'_{\delta,\eta}(t)|^2 d\tilde{z} dt - \\ - \theta(\delta) b \int_S^T \int_\omega u'_{\delta,\eta} u_{\delta,\eta} d\tilde{z} dt. \end{array} \right.$$

Etudions séparément chaque terme du membre de droite de (2.49).

D'après (1.26) et (2.22), on a

$$(2.50) \quad a_\delta \geq 2\lambda_0^2\theta(\delta)$$

et on vérifie sans peine en utilisant une inégalité de Young que

$$(2.51) \quad \left| -\theta(\delta) \int_\omega u'_{\delta,\eta} u_{\delta,\eta} d\tilde{z} \right]_S^T \leq \frac{1}{\sqrt{2}\lambda_0} (E_{\delta,\eta}(T) + E_{\delta,\eta}(S)).$$

D'autre part, on a

$$(2.52) \quad \begin{cases} \frac{2}{b} \int_S^T \int_\omega b\theta(\delta) |u'_{\delta,\eta}(t)|^2 d\tilde{z} dt = \frac{1}{\lambda_0} (E_{\delta,\eta}(S) - E_{\delta,\eta}(T)), & (\text{puisque } b = 2\lambda_0) \\ -\theta(\delta)b \int_S^T \int_\omega u'_{\delta,\eta} u_{\delta,\eta} d\tilde{z} dt \leq \frac{\theta(\delta)b}{2a_\delta} \int_\omega a_\delta |u_{\delta,\eta}(S)|^2 d\tilde{z} \leq \frac{1}{\lambda_0} E_{\delta,\eta}(S). \end{cases}$$

Reportant (2.51) et (2.52) dans (2.49), on obtient

$$(2.53) \quad 2 \int_S^T E_{\delta,\eta}(t) dt \leq \frac{\sqrt{2} + 4}{2\lambda_0} E_{\delta,\eta}(S) \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty.$$

Faisant tendre T vers $+\infty$ dans (2.53), on trouve

$$(2.54) \quad \int_S^{+\infty} E_{\delta,\eta}(t) dt \leq \frac{\sqrt{2} + 4}{4\lambda_0} E_{\delta,\eta}(S) \quad \forall S \geq 0$$

d'où l'on déduit (2.47) et la preuve du Théorème 2.4 est terminée. \square

3- Résultat de convergence sur l'épaisseur du grillage: ($\eta \rightarrow 0$).

Dans ce paragraphe, nous allons faire tendre le paramètre η vers zéro dans le système (2.5) et nous étudierons l'estimation de l'énergie du système limite. Le résultat suivant sera utile pour la suite

Proposition 3.1. *Si $w_\alpha^{\delta,\eta}$ est la solution de (2.9), alors lorsque $\eta \rightarrow 0$, on a*

$$(3.1) \quad w_\alpha^{\delta,\eta} \rightharpoonup w_\alpha^\delta \quad \text{dans } H^1(\mathcal{Y}_\delta^*) \text{ faible}$$

où w_α^δ est une fonction indépendante de y_3 vérifiant

$$(3.2) \quad \begin{cases} w_\alpha^\delta \in W(Y_\delta^*) \\ \int_{Y_\delta^*} (a_{\gamma\beta} - \frac{a_{\gamma 3} a_{3\beta}}{a_{33}}) \frac{\partial w_\alpha^\delta}{\partial y_\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial y_\beta} dy_1 dy_2 = 0 \quad \forall \varphi \in W(Y_\delta^*) \end{cases}$$

avec

$$(3.3) \quad W(Y_\delta^*) = \left\{ \psi \in H^1(Y_\delta^*); \psi \text{ est } Y\text{-périodique et } \int_{Y_\delta^*} \psi dy_1 dy_2 = 0 \right\}.$$

Preuve. Multipliant la première équation de (2.9) par $w_\alpha^{\delta,\eta} + y_\alpha$ et intégrant par parties sur \mathcal{Y}_δ^* (sans faire de sommation sur α), on trouve

$$(3.4) \quad \begin{cases} \int_{\mathcal{Y}_\delta^*} \left\{ a_{\gamma\mu} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_\gamma} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_\mu} + 2\eta^{-1} a_{\gamma 3} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_\gamma} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_3} + \eta^{-2} a_{33} \left(\frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_3} \right)^2 \right\} dy_1 dy_2 dy_3 = \\ = - \int_{\mathcal{Y}_\delta^*} \left\{ a_{\gamma\alpha} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_\gamma} + \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_\gamma} \right\} dy_1 dy_2 dy_3 \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(3.5) \quad \begin{cases} m \|\nabla_\eta w_\alpha^{\delta,\eta}\|_{[L^2(\mathcal{Y}_\delta^*)]^3}^2 \leq M \sqrt{\theta(\delta)} \left\{ \|\nabla_2 w_\alpha^{\delta,\eta}\|_{[L^2(\mathcal{Y}_\delta^*)]^2} + \eta^{-1} \left\| \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_3} \right\|_{L^2(\mathcal{Y}_\delta^*)} \right\} \\ \leq 2M \sqrt{\theta(\delta)} \|\nabla_\eta w_\alpha^{\delta,\eta}\|_{[L^2(\mathcal{Y}_\delta^*)]^3} \end{cases}$$

où on a posé

$$(3.6) \quad \nabla_2 w_\alpha^{\delta,\eta} = \left(\frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_1}, \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_2} \right) \quad \text{et} \quad \nabla_\eta w_\alpha^{\delta,\eta} = \left(\nabla_2 w_\alpha^{\delta,\eta}, \eta^{-1} \frac{\partial w_\alpha^{\delta,\eta}}{\partial y_3} \right).$$

Il découle de (3.5) que

$$(3.7) \quad \|\nabla_\eta w_\alpha^{\delta,\eta}\|_{[L^2(\mathcal{Y}_\delta^*)]^3} \leq \frac{2M \sqrt{\theta(\delta)}}{m}$$

et en vertu de (3.7), on a

$$(3.8) \quad \|\nabla w_\alpha^{\delta,\eta}\|_{[L^2(\mathcal{Y}_\delta^*)]^3} \leq \frac{2M \sqrt{\theta(\delta)}}{m}.$$

Puisque $w_\alpha^{\delta,\eta} + y_\alpha$ est de moyenne nulle sur \mathcal{Y}_δ^* , il existe, d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (cf. [2]), une constante positive c indépendante de η et pouvant dépendre de δ de façon bornée telle que

$$(3.9) \quad \|w_\alpha^{\delta,\eta} + y_\alpha\|_{L^2(\mathcal{Y}_\delta^*)} \leq c \|\nabla w_\alpha^{\delta,\eta}\|_{[L^2(\mathcal{Y}_\delta^*)]^3}.$$

Combinant (3.8) et (3.9), on trouve

$$(3.10) \quad \|w_\alpha^{\delta,\eta}\|_{L^2(\mathcal{Y}_\delta^*)} \leq c \frac{2M \sqrt{\theta(\delta)}}{m}.$$

Donc, quitte à extraire une sous-suite de $\{\eta\}$, on a

$$(3.11) \quad w_{\alpha}^{\delta, \eta} \rightharpoonup w_{\alpha}^{\delta} \quad \text{dans } H^1(\mathcal{Y}_{\delta}^*) \text{ faible}$$

et en vertu de (3.7), w_{α}^{δ} ne dépend pas de y_3 . Maintenant, nous allons montrer que (3.2) a lieu. Pour ce faire, nous allons une fois de plus utiliser la technique de Caillierie [3] basée sur un choix approprié de fonctions tests. Soit $\varphi \in H_{per}^1(\mathcal{Y}_{\delta}^*)$ avec

$$H_{per}^1(\mathcal{Y}_{\delta}^*) = \left\{ \psi \in H^1(Y_{\delta}^*); \psi \text{ est } Y - \text{périodique} \right\}.$$

Posons

$$\psi(y_1, y_2, y_3) = \int_{-\frac{1}{2}}^{y_3} \varphi(y_1, y_2, s) ds$$

et multiplions la première équation de (2.9) par $\eta\psi$ puis intégrons par parties sur \mathcal{Y}_{δ}^* ; il vient

$$(3.12) \quad \int_{\mathcal{Y}_{\delta}^*} \left\{ \eta a_{\gamma\mu} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_{\gamma}} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\mu}} + a_{\gamma 3} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_{\gamma}} \varphi + a_{3\mu} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_3} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\mu}} + \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_3} \varphi \right\} dy_1 dy_2 dy_3 = 0.$$

ce qui se réécrit

$$(3.13) \quad \int_{\mathcal{Y}_{\delta}^*} \left\{ a_{\gamma 3} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_{\gamma}} + \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_3} \right\} \varphi dy = - \int_{\mathcal{Y}_{\delta}^*} \left\{ \eta a_{\gamma\mu} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_{\gamma}} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\mu}} + a_{3\mu} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_3} \frac{\partial \psi}{\partial y_{\mu}} \right\} dy.$$

Passant à la limite dans (3.13), on obtient

$$(3.14) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\mathcal{Y}_{\delta}^*} \left\{ a_{\gamma 3} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_{\gamma}} + \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_3} \right\} \varphi dy = 0 \quad \forall \varphi \in H_{per}^1(\mathcal{Y}_{\delta}^*)$$

donc

$$(3.15) \quad a_{\gamma 3} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_{\gamma}} + \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_3} \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\mathcal{Y}_{\delta}^*) \text{ faible.}$$

Maintenant, multiplions la première équation de (2.9) par φ , ($\varphi \in W(Y_{\delta}^*)$), et intégrons par parties; il vient

$$(3.16) \quad \int_{\mathcal{Y}_{\delta}^*} \left\{ a_{\gamma\mu} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_{\gamma}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{\mu}} + \eta^{-1} a_{3\mu} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_3} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{\mu}} \right\} dy = 0$$

ce qui se réécrit

$$(3.17) \quad \int_{\mathcal{Y}_{\delta}^*} \left(a_{\gamma\mu} - \frac{a_{\gamma 3} a_{3\mu}}{a_{33}} \right) \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_{\gamma}} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{\mu}} dy + \frac{a_{3\mu}}{a_{33}} \int_{\mathcal{Y}_{\delta}^*} \left\{ a_{\gamma 3} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_{\gamma}} + \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial w_{\alpha}^{\delta, \eta}}{\partial y_3} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{\mu}} dy = 0.$$

Passant à la limite dans (3.17) et utilisant (3.15), on trouve

$$(3.18) \quad \int_{\mathcal{Y}_\delta^*} \left(a_{\gamma\beta} - \frac{a_{\gamma 3} a_{3\beta}}{a_{33}} \right) \frac{\partial w_\alpha^\delta}{\partial y_\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial y_\beta} dy_1 dy_2 = 0 \quad \forall \varphi \in W(Y_\delta^*).$$

Nous avons démontré la Proposition 3.1 pour une sous-suite extraite de $\{\eta\}$; pour terminer la démonstration il nous reste à démontrer que (3.1) a lieu pour toute la suite $\{\eta\}$. Si l'on extrait une autre sous-suite de $\{\eta\}$ et qu'on la note $\{\eta'\}$, on vérifie facilement que

$$(3.19) \quad w_\alpha^{\delta, \eta'} \rightharpoonup w_\alpha'^\delta \quad \text{dans } H^1(\mathcal{Y}_\delta^*) \text{ faible}$$

où $w_\alpha'^\delta$ est une fonction indépendante de y_3 et vérifie (3.18). On vérifie aisément que

$$(3.20) \quad \int_{\mathcal{Y}_\delta^*} \left(a_{\gamma\beta} - \frac{a_{\gamma 3} a_{3\beta}}{a_{33}} \right) \frac{\partial (w_\alpha^\delta - w_\alpha'^\delta)}{\partial y_\gamma} \frac{\partial (w_\alpha^\delta - w_\alpha'^\delta)}{\partial y_\beta} dy_1 dy_2 = 0, \quad (w_\alpha^\delta - w_\alpha'^\delta) \in W(Y_\delta^*).$$

Comme l'opérateur $-\frac{\partial}{\partial y_\beta} \left\{ \left(a_{\gamma\beta} - \frac{a_{\gamma 3} a_{3\beta}}{a_{33}} \right) \frac{\partial}{\partial y_\gamma} \right\}$ est coercif dans $W(Y_\delta^*)$ (cf. [3]), on déduit de (3.20) que $w_\alpha^\delta = w_\alpha'^\delta$ et par conséquent toute la suite $\{w_\alpha^{\delta, \eta}\}$ converge; ce qui achève la preuve de la Proposition 3.1. \square

Remarque 3.2. Puisque l'on a

$$(3.21) \quad \begin{cases} q_{\alpha\beta}^{\delta, \eta} = - \int_{\mathcal{Y}_\delta^*} \left\{ a_{\gamma\beta} \frac{\partial w_\alpha^{\delta, \eta}}{\partial y_\gamma} + \eta^{-1} a_{3\beta} \frac{\partial w_\alpha^{\delta, \eta}}{\partial y_3} \right\} dy_1 dy_2 dy_3 \\ = - \int_{\mathcal{Y}_\delta^*} \left(a_{\gamma\beta} - \frac{a_{\gamma 3} a_{3\beta}}{a_{33}} \right) \frac{\partial w_\alpha^\delta}{\partial y_\gamma} dy - \frac{a_{3\beta}}{a_{33}} \int_{\mathcal{Y}_\delta^*} \left\{ a_{\gamma 3} \frac{\partial w_\alpha^{\delta, \eta}}{\partial y_\gamma} + \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial w_\alpha^{\delta, \eta}}{\partial y_3} \right\} dy \end{cases}$$

l'utilisation de (3.14) avec $\varphi = 1$ donne

$$(3.22) \quad q_{\alpha\beta}^{\delta, \eta} \longrightarrow - \int_{\mathcal{Y}_\delta^*} \left(a_{\gamma\beta} - \frac{a_{\gamma 3} a_{3\beta}}{a_{33}} \right) \frac{\partial w_\alpha^\delta}{\partial y_\gamma} dy_1 dy_2.$$

Théorème 3.3. *Il existe une sous-suite extraite de $\{\eta\}$, que nous notons encore $\{\eta\}$ pour simplifier, telle que*

$$(3.23) \quad \begin{cases} u_{\delta, \eta}^0 \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} u_\delta^0 & \text{dans } H_0^1(\omega) \text{ faible} \\ u_{\delta, \eta}^{1*} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} u_\delta^1 & \text{dans } L^2(\omega) \text{ faible} \end{cases}$$

$$(3.24) \quad \begin{cases} u_{\delta, \eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} u_\delta & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\omega)) \text{ faible} * \\ u'_{\delta, \eta} \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} u'_\delta & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\omega)) \text{ faible} * \end{cases}$$

où u_δ est la solution du système

$$(3.25) \quad \begin{cases} \theta(\delta)u_\delta'' - q_{\alpha\beta}^\delta \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_\delta u_\delta + b\theta(\delta)u_\delta' = 0 & \text{dans } \omega \times]0, +\infty[\\ u_\delta = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ u_\delta(0) = \frac{u_\delta^0}{\theta(\delta)} & \text{dans } \omega \\ u_\delta'(0) = \frac{u_\delta^1}{\theta(\delta)} & \text{dans } \omega \end{cases}$$

avec

$$(3.26) \quad q_{\alpha\beta}^\delta = - \int_{Y_\delta^*} \left(a_{\gamma\beta} - \frac{a_{\gamma 3} a_{3\beta}}{a_{33}} \right) \frac{\partial w_\alpha^\delta}{\partial y_\gamma} dy_1 dy_2.$$

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 3.4. *Il existe une constante strictement positive γ indépendante de η telle que*

$$(3.27) \quad q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} h_\alpha h_\beta \geq \gamma h_\alpha h_\alpha \quad \forall h \in \mathbb{R}^2.$$

Preuve. Nous allons procéder comme dans [7]. En vertu de (3.22) et (3.26), on sait que

$$(3.28) \quad q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} \longrightarrow q_{\alpha\beta}^\delta$$

de sorte que

$$q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} = q_{\alpha\beta}^\delta + Q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta}$$

avec

$$(3.29) \quad Q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} \longrightarrow 0.$$

D'autre part, on sait qu'il existe une constante strictement positive k dépendant probablement de δ telle que

$$(3.30) \quad q_{\alpha\beta}^\delta h_\alpha h_\beta \geq k h_\alpha h_\alpha \quad \forall h \in \mathbb{R}^2.$$

Grâce à (3.29), on sait qu'il existe η_0 tel que

$$(3.31) \quad \eta < \eta_0 \implies |Q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta}| < \frac{k}{8}.$$

On a alors pour tout $h \in \mathbb{R}^2$

$$(3.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} h_\alpha h_\beta = q_{\alpha\beta}^\delta h_\alpha h_\beta + Q_{\alpha\beta}^{\delta,\eta} h_\alpha h_\beta \\ \geq k h_\alpha h_\alpha - \frac{k}{8} \sum_1^2 |h_\alpha| \sum_1^2 |h_\beta| \\ \geq k h_\alpha h_\alpha - \frac{k}{2} h_\alpha h_\alpha \\ \geq \frac{k}{2} h_\alpha h_\alpha \end{array} \right.$$

ce qui établit le Lemme 3.4. □

Esquisse de la preuve du Théorème 3.3 Grâce à (2.1) et à la Remarque 2.2, on sait qu'il existe une constante strictement positive c , indépendante de δ et η telle que

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u_{\delta,\eta}^0\|_{H_0^1(\omega)} \leq c \\ \|u_{\delta,\eta}^{1*}\|_{L^2(\omega)} \leq c \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit (3.23).

En vertu du Théorème 2.4, on a

$$E_{\delta,\eta}(t) \leq E_{\delta,\eta}(0), \quad \forall t \geq 0$$

de sorte qu'appliquant le Lemme 3.4, on trouve

$$(3.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|u_{\delta,\eta}\|_{L^\infty(0,+\infty;H_0^1(\omega))} \leq \frac{c}{\delta} \\ \|u'_{\delta,\eta}\|_{L^\infty(0,+\infty;L^2(\omega))} \leq \frac{c}{\delta} \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit aisément (3.24).

Pour obtenir (3.25), on procède comme dans la preuve du Théorème 2.3. □

Maintenant nous allons établir la décroissance exponentielle de l'énergie du système (3.25); avant de poursuivre, nous rappelons que

$$(3.35) \quad \theta(\delta) = \delta(2 - \delta), \quad b = 2\lambda_0.$$

L'énergie du système (3.25) est donnée par

$$(3.36) \quad E_\delta(t) = \frac{1}{2} \int_\omega \left\{ \theta(\delta) |u'_\delta(t)|^2 + q_{\alpha\beta}^\delta \frac{\partial u_\delta(t)}{\partial z_\beta} \frac{\partial u_\delta(t)}{\partial z_\alpha} + a_\delta |u_\delta(t)|^2 \right\} dz.$$

On a le résultat de stabilisation suivant

Théorème 3.5. *L'énergie du système (3.25) vérifie*

$$(3.37) \quad \begin{cases} E_\delta(t) \leq E_\delta(0), & \forall t \geq 0 \\ E_\delta(t) \leq \left[\exp\left(1 - \frac{t}{T_0}\right) \right] E_\delta(0), & \forall t \geq T_0; \quad T_0 = \frac{\sqrt{2} + 4}{4\lambda_0}. \end{cases}$$

La preuve de ce théorème se fait exactement de la même manière que celle du Théorème 2.4 et l'on remarque que le taux de décroissance est le même que dans le Théorème 2.4.

4- Résultat de convergence sur l'épaisseur des barres: ($\delta \rightarrow 0$).

Dans tout ce paragraphe, c désigne différentes constantes strictement positives indépendantes de δ .

Ici nous allons étudier le comportement asymptotique de u_δ lorsque δ tend vers zéro ainsi que la décroissance exponentielle du système limite obtenu. Pour étudier le comportement asymptotique de u_δ lorsque δ tend vers zéro, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 4.1. *Il existe une constante strictement positive q_0 indépendante de δ telle que*

$$(4.1) \quad q_{\alpha\beta}^\delta h_\alpha h_\beta \geq q_0 h_\alpha h_\beta \quad \forall h \in \mathbb{R}^2.$$

Preuve. Montrons d'abord qu'il existe une sous-suite extraite de $\{\delta\}$, notée encore $\{\delta\}$ pour simplifier, telle que

$$(4.2) \quad \delta^{-1} q_{\alpha\beta}^\delta \longrightarrow q_{\alpha\beta} \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

En vertu de (3.8) et (3.11), on sait qu'il existe une constante c strictement positive et indépendante de δ telle que

$$(4.3) \quad \|w_\alpha^\delta\|_{H^1(Y_\delta^*)} \leq c\sqrt{\theta(\delta)}.$$

Or grâce à (3.26), on a

$$(4.4) \quad |q_{\alpha\beta}^\delta| \leq \text{Max} \left\{ |a_{\gamma\beta} - \frac{a_{\gamma 3} a_{3\beta}}{a_{33}}|; \gamma \in \{1, 2\} \right\} \sqrt{\theta(\delta)} \|w_\alpha^\delta\|_{H^1(Y_\delta^*)}.$$

Reportant (4.3) dans (4.4), on trouve qu'il existe une constante k strictement positive et indépendante de δ telle que

$$(4.5) \quad |q_{\alpha\beta}^\delta| \leq k\delta$$

d'où l'on déduit (4.2).

Admettons un instant le résultat suivant qui sera démontré plus loin

$$(4.6) \quad \exists c_0 > 0 : q_{\alpha\beta} h_\alpha h_\beta \geq c_0 h_\alpha h_\alpha \quad \forall h \in \mathbb{R}^2.$$

Nous procédons une fois de plus comme dans [7]; on pose

$$(4.7) \quad \delta^{-1} q_{\alpha\beta}^\delta = q_{\alpha\beta} + Q_{\alpha\beta}^\delta$$

avec

$$(4.8) \quad Q_{\alpha\beta}^\delta \longrightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

On sait alors qu'il existe $\delta_0 > 0$:

$$(4.9) \quad \delta < \delta_0 \implies |Q_{\alpha\beta}^\delta| < \frac{c_0}{8} \quad \forall \alpha, \beta.$$

Soient $h \in \mathbb{R}^2$ et $\delta < \delta_0$. On a alors

$$(4.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta^{-1} q_{\alpha\beta}^\delta h_\alpha h_\beta = q_{\alpha\beta} h_\alpha h_\beta + Q_{\alpha\beta}^\delta h_\alpha h_\beta \\ \geq c_0 h_\alpha h_\alpha - \frac{c_0}{8} \sum_1^2 |h_\alpha| \sum_1^2 |h_\beta| \\ \geq c_0 h_\alpha h_\alpha - \frac{c_0}{2} h_\alpha h_\alpha \\ \geq \frac{c_0}{2} h_\alpha h_\alpha \end{array} \right.$$

ce qui, sous réserve de la démonstration de (4.6), établit le Lemme 4.1 avec $q_0 = \frac{c_0}{2}$.

Maintenant, démontrons la relation (4.6). Dans [6], D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin démontrent que

$$(4.11) \quad q_{\alpha\beta} = 2b_{\alpha\beta} - \sum_1^2 \frac{b_{\alpha\gamma} b_{\gamma\beta}}{b_{\gamma\gamma}}$$

avec

$$(4.12) \quad b_{\gamma\beta} = a_{\gamma\beta} - \frac{a_{\gamma 3} a_{3\beta}}{a_{33}}.$$

En vertu de [3], on sait que

$$(4.13) \quad \exists \mu_0 > 0 : b_{\alpha\beta} h_\alpha h_\beta \geq \mu_0 h_\alpha h_\alpha \quad \forall h \in \mathbb{R}^2.$$

Il est facile de vérifier que

$$(4.14) \quad q_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{si } \alpha \neq \beta$$

et

$$(4.15) \quad q_{11} = \frac{\det(b)}{b_{22}}, \quad q_{22} = \frac{\det(b)}{b_{11}}, \quad b \text{ étant la matrice } (b_{\alpha\beta})$$

d'où l'on déduit que

$$(4.16) \quad q_{11} > 0, \quad q_{22} > 0$$

ceci achève la preuve du Lemme 4.1. □

Remarque 4.2. Puisque les coefficients $q_{\alpha\beta}$ sont donnés explicitement, on vérifie aisément que (4.2) a lieu pour toute la suite $\{\delta\}$.

Le comportement asymptotique de u_δ lorsque δ tend vers zéro est donné par le

Théorème 4.3. *Il existe une sous-suite extraite de $\{\delta\}$, que nous notons encore $\{\delta\}$ pour simplifier, telle que*

$$(4.17) \quad \begin{cases} u_\delta^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u^0 & \text{dans } H_0^1(\omega) \text{ faible} \\ u_\delta^1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u^1 & \text{dans } L^2(\omega) \text{ faible} \end{cases}$$

$$(4.18) \quad \delta^{-1} a_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} a_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

et .

$$(4.19) \quad \begin{cases} \delta u_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\omega)) \text{ faible} * \\ \delta u'_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u' & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\omega)) \text{ faible} * \end{cases}$$

où u est la solution du système

$$(4.20) \quad \begin{cases} 2u'' - q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_0 u + 2bu' = 0 & \text{dans } \omega \times]0, +\infty[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ u(0) = \frac{u^0}{2} & \text{dans } \omega \\ u'(0) = \frac{u^1}{2} & \text{dans } \omega \end{cases}$$

les coefficients $q_{\alpha\beta}$ étant donnés par (4.14) et (4.15).

Remarque 4.4. Avant de démontrer ce théorème, nous voulons donner une précision sur a_0 ; en effet, si la fonction a vérifie en plus de (1.3) et (1.26)

$$(4.21) \quad a \in C(\mathbb{R}^2; L^\infty(\cdot - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(\cdot)))$$

alors procédant de la même manière que D. Cioranescu et J. Saint Jean Paulin dans [6] pour l'identification des $q_{\alpha\beta}$, on montre que

$$(4.22) \quad a_0 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a(t_1, 0, y_3) dt_1 + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a(0, t_2, y_3) dt_2 \right\} dy_3.$$

Preuve du Théorème 4.3. Grâce à (3.23) et (3.33), on sait qu'il existe une constante strictement positive et indépendante de δ telle que

$$(4.23) \quad \begin{cases} \|u_\delta^0\|_{H_0^1(\omega)} \leq c \\ \|u_\delta^1\|_{L^2(\omega)} \leq c \end{cases}$$

d'où l'on déduit (4.17).

Nous rappelons que

$$(4.24) \quad a_\delta = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{Y_\delta^*} a(y_1, y_2, z_3) dy_1 dy_2 dz_3$$

donc

$$(4.25) \quad a_\delta \leq c\delta$$

d'où l'on déduit (4.18).

Puisque l'on a pour tout $t \geq 0$ (voir (3.37))

$$(4.26) \quad E_\delta(t) \leq E_\delta(0)$$

et

$$(4.27) \quad E_\delta(0) \leq \frac{c}{\delta} \left\{ \|u_\delta^1\|_{L^2(\omega)}^2 + \|u_\delta^0\|_{H_0^1(\omega)}^2 \right\}$$

on déduit du Lemme 4.1 et de (4.23), (4.26) et (4.27) que

$$(4.28) \quad \begin{cases} \|\delta u_\delta\|_{L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\omega))} \leq c \\ \|\delta u'_\delta\|_{L^\infty(0, +\infty; L^2(\omega))} \leq c \end{cases}$$

d'où (4.19).

Il reste à montrer que (4.20) a lieu. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$, $v \in \mathcal{D}(]0, +\infty[)$. Multiplions la première équation de (3.25) par $\varphi \otimes v$ et intégrons par parties sur $\omega \times]0, +\infty[$; on obtient alors

$$(4.29) \quad \begin{cases} (2 - \delta) \int_0^{+\infty} \int_\omega \delta u_\delta \varphi v'' d\tilde{z} dt + \int_0^{+\infty} \int_\omega \delta^{-1} q_{\alpha\beta}^\delta \frac{\partial \delta u_\delta}{\partial z_\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} v d\tilde{z} dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_\omega \left\{ \delta^{-1} a_\delta \delta u_\delta + (2 - \delta) b \delta u'_\delta \right\} \varphi v d\tilde{z} dt = 0. \end{cases}$$

Passant à la limite dans (4.29), on trouve

$$(4.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_0^{+\infty} \int_{\omega} u \varphi v'' d\tilde{z} dt + \int_0^{+\infty} \int_{\omega} q_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial z_{\beta}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\alpha}} v d\tilde{z} dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\omega} \{a_0 u + 2bu'\} \varphi v d\tilde{z} dt = 0 \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit la première équation de (4.20). Grâce à la deuxième équation de (3.25) et à la première convergence de (4.19), la deuxième équation de (4.20) est satisfaite. Montrons maintenant que les deux dernières équations de (4.20) sont satisfaites. Pour ce faire, multiplions la première équation de (3.25) par $\varphi \otimes v$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ et $v \in \mathcal{D}([0, +\infty[)$, et intégrons par parties sur $\omega \times]0, +\infty[$; il vient alors

$$(4.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \left(\int_{\omega} u_{\delta}^1 \varphi d\tilde{z} \right) v(0) + \left(\int_{\omega} u_{\delta}^0 \varphi d\tilde{z} \right) v'(0) + (2 - \delta) \int_0^{+\infty} \int_{\omega} \delta u_{\delta} \varphi v'' d\tilde{z} dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\omega} \delta^{-1} q_{\alpha\beta}^{\delta} \frac{\partial \delta u_{\delta}}{\partial z_{\beta}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\alpha}} v d\tilde{z} dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\omega} \{ \delta^{-1} a_{\delta} \delta u_{\delta} + (2 - \delta) b \delta u'_{\delta} \} \varphi v d\tilde{z} dt = 0. \end{array} \right.$$

Le passage à la limite dans (4.31) donne

$$(4.32) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \left(\int_{\omega} u^1 \varphi d\tilde{z} \right) v(0) + \left(\int_{\omega} u^0 \varphi d\tilde{z} \right) v'(0) + 2 \int_0^{+\infty} \int_{\omega} u \varphi v'' d\tilde{z} dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\omega} q_{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial z_{\beta}} \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\alpha}} v d\tilde{z} dt + \int_0^{+\infty} \int_{\omega} \{a_0 u + 2bu'\} \varphi v d\tilde{z} dt = 0. \end{array} \right.$$

Intégrant par parties dans (4.32) et utilisant la première équation de (4.20), on trouve

$$(4.33) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \left(\int_{\omega} u^1 \varphi d\tilde{z} \right) v(0) + \left(\int_{\omega} u^0 \varphi d\tilde{z} \right) v'(0) - \\ - 2 \left(\int_{\omega} u(0) \varphi d\tilde{z} \right) v'(0) + 2 \left(\int_{\omega} u'(0) \varphi d\tilde{z} \right) v(0) = 0 \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit facilement

$$(4.34) \quad u(0) = \frac{u^0}{2}, \quad u'(0) = \frac{u^1}{2}$$

ceci achève la preuve du Théorème 4.3. □

Maintenant, nous allons énoncer et démontrer un résultat de stabilisation pour le système (4.20). L'énergie de ce système est donnée par

$$(4.35) \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_{\omega} \left\{ 2|u'(t)|^2 + q_{\alpha\beta} \frac{\partial u(t)}{\partial z_{\beta}} \frac{\partial u(t)}{\partial z_{\alpha}} + a_0 |u(t)|^2 \right\} d\tilde{z}$$

et on a le

Théorème 4.5. *L'énergie E décroît et l'on a en outre*

$$(4.36) \quad E(t) \leq \left[\exp\left(1 - \frac{t}{\tau_0}\right) \right] E(0), \quad \forall t \geq \tau_0; \quad \tau_0 = \frac{\sqrt{2} + 4}{4\lambda_0}.$$

Remarque 4.6. L'on remarque que le taux de décroissance de l'énergie E est le même que celui de l'énergie E_{δ} du Théorème 3.5.

Preuve. Soient $S, T \in \mathbb{R}$, $0 \leq S < T < +\infty$. Multipliant la première équation de (4.20) par u et intégrant par parties sur $\omega \times]S, T[$, on trouve

$$(4.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E dt = -2 \int_{\omega} u' u d\tilde{z} \Big|_S^T + \frac{2}{b} \int_S^T \int_{\omega} 2b|u'(t)|^2 d\tilde{z} dt - \\ - 2b \int_S^T \int_{\omega} u' u d\tilde{z} dt. \end{array} \right.$$

Des calculs analogues à ceux faits en (2.51) et (2.52) donnent

$$(4.38) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left| -2 \int_{\omega} u' u d\tilde{z} \Big|_S^T \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\lambda_0} (E(S) + E(T)) \\ \frac{2}{b} \int_S^T \int_{\omega} 2b|u'(t)|^2 d\tilde{z} dt = \frac{1}{\lambda_0} (E(S) - E(T)) \\ -2b \int_S^T \int_{\omega} u' u d\tilde{z} dt \leq \frac{1}{2\lambda_0} \int_{\omega} a_0 |u(S)|^2 d\tilde{z} \leq \frac{1}{\lambda_0} E(S). \end{array} \right.$$

Il découle de (4.37) et (4.38) que

$$(4.39) \quad \int_S^T E dt \leq \frac{\sqrt{2} + 4}{4\lambda_0} E(S)$$

d'où l'on déduit comme dans le Théorème 2.4 que

$$E(t) \leq \left[\exp\left(1 - \frac{t}{\tau_0}\right) \right] E(0), \quad \forall t \geq \tau_0.$$

ce qui achève la preuve du Théorème 4.5. □

5- Quelques remarques sur les résultats de convergence des paragraphes précédents.

Dans ce paragraphe, nous montrons dans un premier temps qu'il est plus avantageux de passer à la limite d'abord en η . Ensuite, nous montrons que sous certaines hypothèses sur les données initiales $u_{\varepsilon\delta,\eta}^0$ et $u_{\varepsilon\delta,\eta}^1$ du système (1.5), les convergences dans les paragraphes 3 et 4 ont lieu respectivement pour toute la suite $\{\eta\}$ et pour toute la suite $\{\delta\}$.

On suppose que les données initiales $u_{\varepsilon\delta,\eta}^0$ et $u_{\varepsilon\delta,\eta}^1$ du système (1.5) vérifient

$$(5.1) \quad \begin{cases} \|u_{\varepsilon\delta,\eta}^0\|_{\varepsilon\delta,\eta} \leq \frac{c}{\delta} \text{ et } u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 \rightharpoonup u_{\varepsilon\delta}^0 \text{ dans } H^1(\Omega_{\varepsilon\delta}) \text{ faible} \\ \|u_{\varepsilon\delta,\eta}^1\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} \leq c \text{ et } u_{\varepsilon\delta,\eta}^1 \rightharpoonup u_{\varepsilon\delta}^1 \text{ dans } L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \text{ faible} \end{cases}$$

où c est une constante positive indépendante de ε , δ et η .

On a alors le

Théorème 5.1. *Lorsque ε et δ sont fixes et η tend vers zéro, on a*

$$(5.2) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup u_{\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible} * \\ u'_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup u'_{\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible} * \end{cases}$$

où

$$(5.3) \quad u_{\varepsilon\delta} \text{ est une fonction indépendante de } z_3$$

et $u_{\varepsilon\delta}$ vérifie

$$(5.4) \quad \begin{cases} u''_{\varepsilon\delta} - b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \bar{a}^\varepsilon u_{\varepsilon\delta} + b u'_{\varepsilon\delta} = 0 \text{ dans } \omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[\\ u_{\varepsilon\delta} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ b_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} n_\alpha = 0 \text{ sur } \partial S_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[\\ u_{\varepsilon\delta}(0) = u_{\varepsilon\delta}^0 \text{ dans } \omega \\ u'_{\varepsilon\delta}(0) = u_{\varepsilon\delta}^{1*} \text{ dans } \omega \end{cases}$$

avec

$$(5.5) \quad \begin{cases} b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - \frac{a_{\alpha 3} a_{3\beta}}{a_{33}} \\ \bar{a}^\varepsilon = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a\left(\frac{z_1}{\varepsilon}, \frac{z_2}{\varepsilon}, z_3\right) dz_3 \\ u_{\varepsilon\delta}^{1*}(z_1, z_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u_{\varepsilon\delta}^1(z_1, z_2, z_3) dz_3. \end{cases}$$

Avant de démontrer ce théorème, nous donnons la

Remarque 5.2. Grâce aux hypothèses faites sur $u_{\varepsilon\delta,\eta}^0$, on vérifie sans peine que

$$(5.6) \quad u_{\varepsilon\delta}^0 \text{ est une fonction indépendante de } z_3$$

et $u_{\varepsilon\delta}^0 \in U_{\varepsilon\delta}$ où

$$(5.7) \quad U_{\varepsilon\delta} = \left\{ v \in H^1(\omega_{\varepsilon\delta}); v = 0 \text{ sur } \partial\omega \right\}.$$

Preuve du Théorème 5.1. Utilisant la relation (5.1) et la décroissance de l'énergie du système (1.5), on trouve qu'il existe une constante positive c indépendante de ε, δ et η telle que

$$(5.8) \quad \begin{cases} \|u'_{\varepsilon\delta,\eta}\|_{L^\infty(0,+\infty;L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq \frac{c}{\delta} \\ \|u_{\varepsilon\delta,\eta}\|_{L^\infty(0,+\infty;H^1(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq \frac{c}{\delta} \\ \left\| \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3} \right\|_{L^\infty(0,+\infty;L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} \leq \frac{c}{\delta} \varepsilon \eta. \end{cases}$$

d'où l'on déduit qu'à une sous-suite extraite de $\{\eta\}$, on a

$$(5.9) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup u_{\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty(0,+\infty;H^1(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } * \\ u'_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup u'_{\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty(0,+\infty;L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } * \end{cases}$$

et

$$(5.10) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon\delta} \text{ est indépendante de } z_3 \\ u_{\varepsilon\delta} = 0 \text{ sur } \partial\omega \times]0, +\infty[. \end{cases}$$

Nous avons démontré (5.2), (5.3) ainsi que la deuxième équation de (5.4) pour une sous-suite extraite de $\{\eta\}$; il nous reste à montrer que les autres équations de (5.4) sont satisfaites.

Posons

$$(5.11) \quad \sigma_i^{\varepsilon\delta,\eta} = a_{i\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{i3} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

En vertu de (5.9), on démontre comme dans le paragraphe 3 que

$$(5.12) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha^{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup \sigma_\alpha^{\varepsilon\delta} & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } * \\ \sigma_3^{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup 0 & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } *. \end{cases}$$

Multipliant la première équation de (1.5) par $\varphi \otimes v$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_{\varepsilon\delta})$ et $v \in \mathcal{D}(0, +\infty)$, et intégrant par parties sur $\Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[$, on trouve

$$(5.13) \quad \begin{cases} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v'' dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \sigma_\alpha^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} v dz dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} a^\varepsilon u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} b u'_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v dz dt = 0. \end{cases}$$

Passant alors à la limite dans (5.13), on obtient

$$(5.14) \quad \begin{cases} \int_0^{+\infty} \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} u_{\varepsilon\delta} \varphi v'' dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \sigma_\alpha^{\varepsilon\delta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_\alpha} v dz dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \bar{a}^\varepsilon u_{\varepsilon\delta} \varphi v dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} b u'_{\varepsilon\delta} \varphi v dz dt = 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit aisément

$$(5.15) \quad u''_{\varepsilon\delta} - \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_\alpha^{\varepsilon\delta} dz_3 \right) + \bar{a}^\varepsilon u_{\varepsilon\delta} + b u'_{\varepsilon\delta} = 0 \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[.$$

Maintenant, nous allons identifier $\sigma_\alpha^{\varepsilon\delta}$; ce qui nous permettra d'obtenir la première équation de (5.4). Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_{\varepsilon\delta})$ et $v \in \mathcal{D}(0, +\infty)$. On vérifie facilement que

$$(5.16) \quad \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \sigma_\alpha^{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v dz dt = \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} b_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} \varphi v dz dt + \frac{a_{\alpha 3}}{a_{33}} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \sigma_3^{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v dz dt.$$

Grâce à (5.12), le passage à la limite dans (5.16) donne

$$\int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \sigma_\alpha^{\varepsilon\delta} \varphi v dz dt = \int_0^{+\infty} \int_{\omega_{\varepsilon\delta}} b_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} \varphi v dz dt$$

d'où l'on déduit

$$(5.17) \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\alpha}^{\varepsilon\delta} dz_3 = b_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_{\beta}}.$$

Nous venons d'établir que la première équation de (5.4) est vérifiée. Pour montrer que les deux dernières équations de (5.4) sont satisfaites, on procède comme dans les paragraphes précédents. Montrons maintenant que la troisième équation de (5.4) est satisfaite. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\bar{\omega}_{\varepsilon\delta}) \cap U_{\varepsilon\delta}$ et $v \in \mathcal{D}(0, +\infty)$. Si on multiplie la première équation de (1.5) par $\varphi \otimes v$ et qu'on intègre par parties sur $\Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[$, on trouve la même équation que (5.13)

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v'' dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \sigma_{\alpha}^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\alpha}} v dz dt + \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} a^{\varepsilon} u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v dz dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} b u'_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v dz dt = 0. \end{array} \right.$$

Passant à la limite dans cette dernière égalité, intégrant par parties dans l'équation limite et utilisant (5.15), on obtient

$$(5.18) \quad \int_0^{+\infty} \int_{\partial S_{\varepsilon\delta}} b_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_{\beta}} n_{\alpha} \varphi v ds dt = 0$$

d'où l'on déduit

$$b_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_{\beta}} n_{\alpha} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial S_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[$$

ce qui est l'équation voulue. Il reste maintenant à démontrer que toute la suite $\{u_{\varepsilon\delta,\eta}\}$ converge lorsque η tend vers zéro.

Puisque le système (5.4) admet une solution unique, on en déduit que toute la suite $\{u_{\varepsilon\delta,\eta}\}$ converge lorsque η tend vers zéro et la preuve du Théorème 5.1 est terminée. \square

Maintenant, nous allons faire tendre vers zéro le paramètre ε dans (5.4); le comportement limite de $\{u_{\varepsilon\delta}\}$ est donné dans ce cas par le

Théorème 5.3. *Il existe une sous-suite extraite de $\{\varepsilon\}$, que nous notons encore $\{\varepsilon\}$ pour simplifier, telle que*

$$(5.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{u_{\varepsilon\delta}^0} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\delta*}^0 \quad \text{dans } L^2(\omega) \text{ faible} \\ \widetilde{u_{\varepsilon\delta}^{1*}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} u_{\delta*}^1 \quad \text{dans } L^2(\omega) \text{ faible} \end{array} \right.$$

et

$$(5.20) \quad \begin{cases} P_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u_{\delta*} & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H^1(\omega)) \text{ faible } * \\ P_{\varepsilon\delta}u'_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u'_{\delta*} & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\omega)) \text{ faible } * \end{cases}$$

avec $u_{\delta*}$ vérifiant

$$(5.21) \quad \begin{cases} \theta(\delta)u''_{\delta*} - q_{\alpha\beta}^\delta \frac{\partial^2 u_{\delta*}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_\delta u_{\delta*} + b\theta(\delta)u'_{\delta*} = 0 & \text{dans } \omega \times]0, +\infty[\\ u_{\delta*} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ u_{\delta*}(0) = \frac{u_{\delta*}^0}{\theta(\delta)} & \text{dans } \omega \\ u'_{\delta*}(0) = \frac{u_{\delta*}^1}{\theta(\delta)} & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Les coefficients homogénéisés $q_{\alpha\beta}^\delta$ ainsi que les constantes $\theta(\delta)$ et a_δ sont les mêmes que les paragraphes 3 et 2 respectivement.

Remarque 5.4 Les fonctions $u_{\delta*}^0$ et u_δ^0 , (voir (3.23)), ne sont pas forcément les mêmes. Il en est de même des fonctions $u_{\delta*}^1$ et u_δ^1 , (voir (3.23)).

Remarque 5.5 La démonstration du Théorème 5.3 se fait comme celui du Théorème 2.3; on remarque cependant que lorsque l'on fait tendre η vers zéro avant de faire tendre ε vers zéro, il y a moins de calculs à faire parce qu'on introduit un seul problème auxiliaire, à savoir, le problème (3.2) tandis que, lorsqu'on fait d'abord tendre ε vers zéro, on introduit un problème auxiliaire dépendant de η , (voir (2.9)) et on doit passer à la limite en η dans ce problème, ce qui augmente le nombre de calculs à effectuer.

Le passage à la limite en δ dans le système (5.21) se fait comme dans le cas du Théorème 4.3; on a le

Théorème 5.6. *Il existe une sous-suite extraite de $\{\delta\}$, que nous notons encore $\{\delta\}$ pour simplifier, telle que*

$$(5.22) \quad \begin{cases} u_{\delta*}^0 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u_*^0 & \text{dans } H_0^1(\omega) \text{ faible} \\ u_{\delta*}^1 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u_*^1 & \text{dans } L^2(\omega) \text{ faible} \end{cases}$$

$$(5.23) \quad \delta^{-1}a_\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \bar{a}_0 \quad \text{dans } \mathbb{R}$$

et

$$(5.24) \quad \begin{cases} \delta u_{\delta*} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u_* & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\omega)) \text{ faible } * \\ \delta u'_{\delta*} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} u'_* & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\omega)) \text{ faible } * \end{cases}$$

où u_* est la solution du système

$$(5.25) \quad \begin{cases} 2u_*'' - q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_*}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \bar{a}_0 u_* + 2bu_*' = 0 & \text{dans } \omega \times]0, +\infty[\\ u_* = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ u_*(0) = \frac{u_*^0}{2} & \text{dans } \omega \\ u_*'(0) = \frac{u_*^1}{2} & \text{dans } \omega \end{cases}$$

les coefficients $q_{\alpha\beta}$ étant les mêmes que dans le paragraphe 4.

Remarque 5.7 Les fonctions u_*^0 et u^0 , (voir (4.17)), ne sont pas forcément les mêmes. Il en est de même des fonctions u_*^1 et u^1 , (voir (4.17)), ainsi que des constantes \bar{a}_0 et a_0 .

Maintenant, nous allons donner des hypothèses sur $u_{\varepsilon\delta,\eta}^0$, $u_{\varepsilon\delta,\eta}^1$ et sur la fonction a de manière à obtenir des convergences pour

- (i) toute la suite $\{\eta\}$ dans le Théorème 3.3
- (ii) toute la suite $\{\delta\}$ dans le Théorème 4.3 et le Théorème 5.6
- (iii) toute la suite $\{\varepsilon\}$ dans le Théorème 5.3.

On suppose que $u_{\varepsilon\delta,\eta}^0$, $u_{\varepsilon\delta,\eta}^1$ et a vérifient

$$(5.26) \quad \begin{cases} A_{\varepsilon,\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 = f & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ (a_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}^0}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}^0}{\partial z_3}) n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,1} \\ (a_{3\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}^0}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}^0}{\partial z_3}) n_3 = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \left\{ \frac{\pm 1}{2} \right\} \\ u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 = 0 & \text{sur } \partial\omega \times \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[\end{cases}$$

où

$$(5.27) \quad f \in L^2(\omega).$$

$$(5.28) \quad u_{\varepsilon\delta,\eta}^1 = v^1; \quad v^1 \in L^2(\omega)$$

et

$$(5.29) \quad a \in C(\mathbb{R}^2; L^\infty\left(\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\right]).$$

Alors on a le

Théorème 5.8. (a) Dans le Théorème 3.3, toute la suite $\{u_{\delta,\eta}\}$ converge lorsque η tend vers zéro.

(b) Dans le Théorème 4.3 et le Théorème 5.6, toute la suite $\{u_\delta\}$ converge lorsque δ tend vers zéro.

(c) Dans le Théorème 5.3, toute la suite $\{P_{\varepsilon\delta}u_{\varepsilon\delta}\}$ converge lorsque ε tend vers zéro.

(d) Contrairement au cas général considéré dans les remarques 5.4 et 5.7, on a alors

$$\begin{cases} u_{\delta^*}^0 = u_\delta^0, & u_{\delta^*}^1 = u_\delta^1 \\ u_*^0 = u^0, & u_*^1 = u^1, & \bar{a}_0 = a_0. \end{cases}$$

Preuve. Le Théorème 5.8 sera démontré si l'on montre que toute la suite $\{\delta^{-1}a_\delta\}$ converge et toute la suite $\{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0\}$ vérifie

$$(5.30) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (\lim_{\eta \rightarrow 0} (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta,\eta}^0)) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_{\varepsilon\delta} (\lim_{\eta \rightarrow 0} u_{\varepsilon\delta,\eta}^0)).$$

Or grâce à (5.29), (voir aussi la Remarque 4.4), on a déjà la convergence de toute la suite $\{\delta^{-1}a_\delta\}$; en effet, on a

$$(5.31) \quad \delta^{-1}a_\delta \rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a(t_1, 0, y_3) dt_1 + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a(0, t_2, y_3) dt_2 \right\} dy_3.$$

Il reste à démontrer que (5.30) a lieu. D'après [6], on a le résultat suivant

Lemme 5.9. Lorsque δ et ε sont fixes et η tend vers zéro, on a

$$(5.32) \quad u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 \rightharpoonup v_{\varepsilon\delta}^0 \quad \text{dans } H^1(\Omega_{\varepsilon\delta}) \text{ faible}$$

où $v_{\varepsilon\delta}^0$ est une fonction indépendante de z_3 vérifiant

$$(5.33) \quad \begin{cases} -b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v_{\varepsilon\delta}^0}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \bar{a}^\varepsilon v_{\varepsilon\delta}^0 = f & \text{dans } \omega \\ b_{\alpha\beta} \frac{\partial v_{\varepsilon\delta}^0}{\partial z_\beta} n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta} \\ v_{\varepsilon\delta}^0 = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où les coefficients homogénéisés $b_{\alpha\beta}$ sont donnés par (5.5).

Lorsque δ est fixe et ε tend vers zéro, on a

$$(5.34) \quad Q_{\varepsilon\delta} v_{\varepsilon\delta}^0 \rightharpoonup v_\delta^0 \quad \text{dans } H_0^1(\omega) \text{ faible}$$

avec v_δ^0 vérifiant

$$(5.35) \quad \begin{cases} -q_{\alpha\beta}^\delta \frac{\partial^2 v_\delta^0}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_\delta v_\delta^0 = \theta(\delta)f & \text{dans } \omega \\ v_\delta^0 = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où les coefficients $q_{\alpha\beta}^\delta$ sont donnés par (3.26).

Enfin, lorsque δ tend vers zéro, on a

$$(5.36) \quad v_\delta^0 \rightharpoonup v^0 \quad \text{dans } H_0^1(\omega) \text{ faible}$$

où v^0 est la solution du système

$$(5.37) \quad \begin{cases} -q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 v^0}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_0^* v^0 = 2f & \text{dans } \omega \\ v^0 = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où les coefficients $q_{\alpha\beta}$ sont donnés par (4.14) et (4.15), et

$$(5.38) \quad a_0^* = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a(t_1, 0, y_3) dt_1 + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} a(0, t_2, y_3) dt_2 \right\} dy_3.$$

Remarque 5.10. Si dans le Lemme 5.9, on commence par faire tendre ε vers zéro, puis ε , on obtient le même système limite (5.35).

Grâce au Lemme 5.9 et à la Remarque 5.10, on a (5.30). □

6- Contrôlabilité exacte du système (1.5).

Dans [13], D.L. Russell montre que la décroissance exponentielle de l'énergie d'un système linéaire réversible entraîne sa contrôlabilité exacte. Nous utilisons ce principe pour démontrer le résultat suivant

Théorème 6.1. Soit $T > \frac{1}{\lambda_0}$. Soit $\{w_{\varepsilon\delta,\eta}^0, w_{\varepsilon\delta,\eta}^1\} \in V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})$. Alors il existe un contrôle

$$(6.1) \quad v_{\varepsilon\delta,\eta} \in L^2(0, T; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))$$

tel que si $w_{\varepsilon\delta,\eta}$ est la solution du système

$$(6.2) \quad \begin{cases} w''_{\varepsilon\delta,\eta} + A_{\varepsilon,\eta} w_{\varepsilon\delta,\eta} = v_{\varepsilon\delta,\eta} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, T[\\ (a_{\alpha\beta} \frac{\partial w_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial w_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}) n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,1} \times]0, T[\\ (a_{3\beta} \frac{\partial w_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial w_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}) n_3 = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{\frac{\pm 1}{2}\} \times]0, T[\\ w_{\varepsilon\delta,\eta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, T[\\ w_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = w_{\varepsilon\delta,\eta}^0 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ w'_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = w_{\varepsilon\delta,\eta}^1 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

alors on a

$$(6.3) \quad w_{\varepsilon\delta,\eta}(T) = w'_{\varepsilon\delta,\eta}(T) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}.$$

Preuve. Nous procédons comme dans [10]. Soit $\{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0, u_{\varepsilon\delta,\eta}^1\} \in V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})$. Introduisons $u_{\varepsilon\delta,\eta}$ et $r_{\varepsilon\delta,\eta}$ vérifiant

$$(6.4) \quad \begin{cases} u''_{\varepsilon\delta,\eta} + A_{\varepsilon,\eta} u_{\varepsilon\delta,\eta} + b u'_{\varepsilon\delta,\eta} = 0 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[\\ (a_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}) n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,1} \times]0, +\infty[\\ (a_{3\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}) n_3 = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{\frac{\pm 1}{2}\} \times]0, +\infty[\\ u_{\varepsilon\delta,\eta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, +\infty[\\ u_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ u'_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = u_{\varepsilon\delta,\eta}^1 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

$$(6.5) \quad \begin{cases} r''_{\varepsilon\delta,\eta} + A_{\varepsilon,\eta} r_{\varepsilon\delta,\eta} + b r'_{\varepsilon\delta,\eta} = 0 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[\\ (a_{\alpha\beta} \frac{\partial r_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial r_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}) n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,1} \times]0, +\infty[\\ (a_{3\beta} \frac{\partial r_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial r_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}) n_3 = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{\frac{\pm 1}{2}\} \times]0, +\infty[\\ r_{\varepsilon\delta,\eta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, +\infty[\\ r_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = -u_{\varepsilon\delta,\eta}(T) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ r'_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = u'_{\varepsilon\delta,\eta}(T) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

et posons

$$(6.6) \quad \begin{cases} w_{\varepsilon\delta,\eta}(t) = u_{\varepsilon\delta,\eta}(t) + r_{\varepsilon\delta,\eta}(T-t) \\ v_{\varepsilon\delta,\eta}(t) = -b\{u'_{\varepsilon\delta,\eta}(t) + r'_{\varepsilon\delta,\eta}(T-t)\} & \text{pour } t \in [0, T]. \end{cases}$$

La fonction $w_{\varepsilon\delta,\eta}$ vérifie les quatre premières équations de (6.2) ainsi que (6.3). En outre on a

$$(6.7) \quad \begin{cases} w_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 + r_{\varepsilon\delta,\eta}(T) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ w'_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = u_{\varepsilon\delta,\eta}^1 - r'_{\varepsilon\delta,\eta}(T) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}. \end{cases}$$

Il reste maintenant à démontrer que pour tout $\{w_{\varepsilon\delta,\eta}^0, w_{\varepsilon\delta,\eta}^1\} \in V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})$, il existe $\{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0, u_{\varepsilon\delta,\eta}^1\} \in V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})$ tel que

$$(6.8) \quad \begin{cases} w_{\varepsilon\delta,\eta}^0 = u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 + r_{\varepsilon\delta,\eta}(T) \\ w_{\varepsilon\delta,\eta}^1 = u_{\varepsilon\delta,\eta}^1 - r'_{\varepsilon\delta,\eta}(T). \end{cases}$$

Ceci revient à montrer que l'application

$$(6.9) \quad \begin{cases} L_{\varepsilon\delta} : V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \longrightarrow V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \\ \{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0, u_{\varepsilon\delta,\eta}^1\} \longmapsto \{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 + r_{\varepsilon\delta,\eta}(T), u_{\varepsilon\delta,\eta}^1 - r'_{\varepsilon\delta,\eta}(T)\} \end{cases}$$

est surjective.

Or l'on a

$$(6.10) \quad L_{\varepsilon\delta} = Id - K_{\varepsilon\delta}$$

où

$$(6.11) \quad \begin{cases} K_{\varepsilon\delta} : V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \longrightarrow V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \\ \{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0, u_{\varepsilon\delta,\eta}^1\} \longmapsto \{-r_{\varepsilon\delta,\eta}(T), r'_{\varepsilon\delta,\eta}(T)\} \end{cases}$$

et il suffit de vérifier que

$$(6.12) \quad \|K_{\varepsilon\delta}\|_{\mathcal{L}(V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}))} < 1.$$

Lorsque (6.12) a lieu, $L_{\varepsilon\delta}$ est inversible. Posons

$$W_{\varepsilon\delta} = V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}).$$

En appliquant deux fois le Théorème 1.4, on obtient

$$(6.13) \quad \left\{ \begin{aligned} \|K_{\varepsilon\delta}(u_{\varepsilon\delta,\eta}^0, u_{\varepsilon\delta,\eta}^1)\|_{W_{\varepsilon\delta}} &= \|\{-r_{\varepsilon\delta,\eta}(T), r'_{\varepsilon\delta,\eta}(T)\}\|_{W_{\varepsilon\delta}} \\ &\leq [\exp(1 - \lambda_0 T)]^{\frac{1}{2}} \|\{r_{\varepsilon\delta,\eta}(0), r'_{\varepsilon\delta,\eta}(0)\}\|_{W_{\varepsilon\delta}} \\ &\leq [\exp(1 - \lambda_0 T)]^{\frac{1}{2}} \|\{-u_{\varepsilon\delta,\eta}(T), w'_{\varepsilon\delta,\eta}(T)\}\|_{W_{\varepsilon\delta}} \\ &\leq [\exp(1 - \lambda_0 T)] \|\{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0, u_{\varepsilon\delta,\eta}^1\}\|_{W_{\varepsilon\delta}} \end{aligned} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(6.14) \quad \|K_{\varepsilon\delta}\|_{\mathcal{L}(W_{\varepsilon\delta})} \leq \exp(1 - \lambda_0 T) < 1$$

et la preuve du Théorème 6.1 est terminée. \square

Remarque 6.2. On peut aussi étudier directement la contrôlabilité exacte du système (6.2) en appliquant la méthode H.U.M présentée dans [11]; nous savons que par cette méthode, on obtient un résultat de contrôlabilité exacte meilleur que celui du Théorème 6.1; mais nous avons choisi d'appliquer le principe de Russell [13] qui contrairement à la méthode H.U.M n'a pas encore été utilisé dans le cadre des domaines perforés.

7- Comportement asymptotique du problème de contrôlabilité exacte (6.2).

Dans ce paragraphe, nous nous proposons de faire tendre vers zéro les différents paramètres ε , δ et η du problème de contrôlabilité exacte (6.2) et de démontrer dans chacun des passages à la limite, que la limite de la suite des contrôles est le contrôle exact obtenu par application du principe de Russell [13] du système limite associé.

Dans la suite, c désigne différentes constantes positives indépendantes de ε , δ et η .

Passage à la limite en η .

Théorème 7.1. *On suppose que la fonction a vérifie (5.29) et que les données initiales $w_{\varepsilon\delta,\eta}^0$ et $w_{\varepsilon\delta,\eta}^1$ du système (6.2) vérifient*

$$(7.1) \quad \begin{cases} A_{\varepsilon,\eta} w_{\varepsilon\delta,\eta}^0 = g & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ (a_{\alpha\beta} \frac{\partial w_{\varepsilon\delta,\eta}^0}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial w_{\varepsilon\delta,\eta}^0}{\partial z_3}) n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,1} \\ (a_{3\beta} \frac{\partial w_{\varepsilon\delta,\eta}^0}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial w_{\varepsilon\delta,\eta}^0}{\partial z_3}) n_3 = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \left\{ \frac{\pm 1}{2} \right\} \\ w_{\varepsilon\delta,\eta}^0 = 0 & \text{sur } \partial\omega \times] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\end{cases}$$

où

$$(7.2) \quad g \in L^2(\omega).$$

$$(7.3) \quad w_{\varepsilon\delta,\eta}^1 = w^1; \quad w^1 \in L^2(\omega).$$

Alors la suite des contrôles $\{v_{\varepsilon\delta,\eta}\}$ obtenus par le principe de Russell pour le système (6.2) vérifie

$$(7.4) \quad v_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup v_{\varepsilon\delta} \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } *$$

où $v_{\varepsilon\delta}$ est une fonction indépendante de z_3 et $v_{\varepsilon\delta}$ est le contrôle exact obtenu par application du principe de Russell du système

$$(7.5) \quad \begin{cases} w_{\varepsilon\delta}'' - b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \bar{a}^\varepsilon w_{\varepsilon\delta} = v_{\varepsilon\delta} & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \times]0, T[\\ w_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, T[\\ b_{\alpha\beta} \frac{\partial w_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta} \times]0, T[\\ w_{\varepsilon\delta}(0) = w_{\varepsilon\delta}^0 & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \\ w_{\varepsilon\delta}'(0) = w^1 & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

avec $w_{\varepsilon\delta}^0$ satisfaisant (voir Lemme 5.9)

$$(7.6) \quad \begin{cases} -b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w_{\varepsilon\delta}^0}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \bar{a}^\varepsilon w_{\varepsilon\delta}^0 = g & \text{dans } \omega \\ b_{\alpha\beta} \frac{\partial w_{\varepsilon\delta}^0}{\partial z_\beta} n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta} \\ w_{\varepsilon\delta}^0 = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où les coefficients $b_{\alpha\beta}$ sont donnés par (5.5).

En outre, on a

$$(7.7) \quad \begin{cases} w_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup w_{\varepsilon\delta} & \text{dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } * \\ w'_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup w'_{\varepsilon\delta} & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } * \end{cases}$$

avec $w_{\varepsilon\delta}$ indépendante de z_3 .

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin des résultats suivants:

Lemme 7.2. *Lorsque η tend vers zéro, les données initiales du système (6.4) vérifient*

$$(7.8) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 \rightharpoonup u_{\varepsilon\delta}^0 & \text{dans } H^1(\Omega_{\varepsilon\delta}) \text{ faible} \\ u_{\varepsilon\delta}^0 & \text{est indépendante de } z_3 \end{cases}$$

$$(7.9) \quad u_{\varepsilon\delta,\eta}^1 \rightharpoonup u_{\varepsilon\delta}^1 \text{ dans } L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \text{ faible.}$$

De plus, on a

$$(7.10) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup u_{\varepsilon\delta} & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } * \\ u'_{\varepsilon\delta,\eta} \rightharpoonup u'_{\varepsilon\delta} & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } * \end{cases}$$

où

$$(7.11) \quad u_{\varepsilon\delta} \text{ est une fonction indépendante de } z_3$$

et $u_{\varepsilon\delta}$ vérifie

$$(7.12) \quad \begin{cases} u_{\varepsilon\delta}'' - b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \bar{a}^\varepsilon u_{\varepsilon\delta} + b u'_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[\\ u_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ b_{\alpha\beta} \frac{\partial u_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[\\ u_{\varepsilon\delta}(0) = u_{\varepsilon\delta}^0 & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \\ u'_{\varepsilon\delta}(0) = u_{\varepsilon\delta}^{1*} & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

avec

$$u_{\varepsilon\delta}^{1*}(z_1, z_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} u_{\varepsilon\delta}^1(z_1, z_2, z_3) dz_3.$$

Lemme 7.3. *Lorsque η tend vers zéro, la solution $r_{\varepsilon\delta, \eta}$ de (6.5) vérifie*

$$(7.13) \quad \begin{cases} r_{\varepsilon\delta, \eta} \rightharpoonup r_{\varepsilon\delta} & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H^1(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } * \\ r'_{\varepsilon\delta, \eta} \rightharpoonup r'_{\varepsilon\delta} & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})) \text{ faible } * \end{cases}$$

où

$$(7.14) \quad r_{\varepsilon\delta} \text{ est une fonction indépendante de } z_3$$

et $r_{\varepsilon\delta}$ vérifie

$$(7.15) \quad \begin{cases} r_{\varepsilon\delta}'' - b_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 r_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + \bar{a}^\varepsilon r_{\varepsilon\delta} + br'_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[\\ r_{\varepsilon\delta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ b_{\alpha\beta} \frac{\partial r_{\varepsilon\delta}}{\partial z_\beta} n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[\\ r_{\varepsilon\delta}(0) = -u_{\varepsilon\delta}(T) & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \\ r'_{\varepsilon\delta}(0) = u'_{\varepsilon\delta}(T) & \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

Idées pour la preuve des Lemmes 7.2 et 7.3. On démontre que

$$(7.16) \quad \begin{cases} \|u_{\varepsilon\delta, \eta}^0\|_{\varepsilon\delta, \eta} \leq c \\ \|u_{\varepsilon\delta, \eta}^1\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} \leq c \end{cases}$$

et on applique le Théorème 5.1; ce qui permet de démontrer le Lemme 7.2 pour une sous-suite extraite de η . Pour ce qui est du Lemme 7.3, l'application du Théorème 5.1 permet d'obtenir (7.13), (7.14) et les trois premières équations de (7.15). La démonstration des deux dernières égalités de (7.15) exigeant des calculs un peu plus complexes que ceux utilisés dans les paragraphes précédents, nous avons jugé utile de la donner en détail. Puisqu'on a

$$(7.17) \quad \begin{cases} \|r_{\varepsilon\delta, \eta}(0)\|_{\varepsilon\delta, \eta} \leq c \\ \|r'_{\varepsilon\delta, \eta}(0)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} \leq c \end{cases}$$

on en déduit

$$(7.18) \quad \begin{cases} r_{\varepsilon\delta, \eta}(0) \rightharpoonup \alpha_T & \text{dans } H^1(\Omega_{\varepsilon\delta}) \text{ faible} \\ \alpha_T \text{ est indépendante de } z_3 \end{cases}$$

et

$$(7.19) \quad r'_{\varepsilon\delta,\eta}(0) \rightharpoonup \beta_T \text{ dans } L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \text{ faible.}$$

Maintenant, il nous faut identifier α_T et β_T . Comme l'on a (7.10) et

$$(7.20) \quad \begin{cases} r_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = -u_{\varepsilon\delta,\eta}(T) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ r'_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = u'_{\varepsilon\delta,\eta}(T) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

il est tentant de dire que l'on a directement

$$(7.21) \quad \begin{cases} \alpha_T = -u_{\varepsilon\delta}(T) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \beta_T dz_3 = u'_{\varepsilon\delta}(T) & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \end{cases}$$

mais nous tenons à préciser qu'on ne saurait utiliser (7.10) pour justifier (7.21) parce que le résultat de (7.10) est trop faible pour permettre d'obtenir les deux équations de (7.21) bien qu'avec [14], il permette d'obtenir la première égalité de (7.21). Par souci de complétude, nous démontrons les deux égalités. Multiplions la première équation de (6.4) par $\varphi \otimes v$, avec $\varphi \in \mathcal{D}(\omega_{\varepsilon\delta})$, $v \in \mathcal{D}([0, T])$ vérifiant $v(0) = v'(0) = 0$ et intégrons par parties; il vient alors

$$(7.22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left(\int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} u'_{\varepsilon\delta,\eta}(T) \varphi dz \right) v(T) - \left(\int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} u_{\varepsilon\delta,\eta}(T) \varphi dz \right) v'(T) + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v'' dz dt + \\ & + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \sigma_{\beta}^{\varepsilon\delta,\eta} \frac{\partial \varphi}{\partial z_{\beta}} v dz dt + \\ & + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \left\{ a^{\varepsilon} u_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v + b u'_{\varepsilon\delta,\eta} \varphi v \right\} dz dt = 0 \end{aligned} \right.$$

où $\sigma_{\beta}^{\varepsilon\delta,\eta}$ est donnée par (5.11).

Passant à la limite dans (7.22) et utilisant (7.12), on obtient

$$(7.23) \quad \begin{cases} \left(\int_{\Omega_{\varepsilon\delta}} \beta_T \varphi d\tilde{z} \right) v(T) + \left(\int_{\omega_{\varepsilon\delta}} \alpha_T \varphi d\tilde{z} \right) v'(T) + \left(\int_{\omega_{\varepsilon\delta}} u_{\varepsilon\delta}(T) \varphi d\tilde{z} \right) v'(T) - \\ - \left(\int_{\omega_{\varepsilon\delta}} u'_{\varepsilon\delta}(T) \varphi d\tilde{z} \right) v(T) = 0. \end{cases}$$

d'où l'on déduit aisément (7.21).

Pour achever la preuve de ces lemmes, on doit montrer que les convergences ont lieu pour toute la suite $\{\eta\}$. Pour ce faire, on montre, avec les techniques utilisées au paragraphe 6, que l'opérateur

$$(7.24) \quad \begin{cases} l_{\varepsilon\delta} : U_{\varepsilon\delta} \times L^2(\omega_{\varepsilon\delta}) \longrightarrow U_{\varepsilon\delta} \times L^2(\omega_{\varepsilon\delta}) \\ \{u_{\varepsilon\delta}^0, u_{\varepsilon\delta}^1\} \longmapsto \{u_{\varepsilon\delta}^0 + r_{\varepsilon\delta}(T), u_{\varepsilon\delta}^1 - r'_{\varepsilon\delta}(T)\} \end{cases}$$

est bijectif. Ensuite on utilise le fait que $\{w_{\varepsilon\delta}^0, w^1\}$ est déterminé de façon unique dans $U_{\varepsilon\delta} \times L^2(\omega_{\varepsilon\delta})$ pour conclure que les convergences (7.8) et (7.9) ont lieu pour toute la suite $\{\eta\}$; d'où l'on déduit aisément que les convergences (7.10) et (7.13) ont également lieu pour toute la suite $\{\eta\}$. \square

Esquisse de la preuve du Théorème 7.1. En vertu de la définition de $v_{\varepsilon\delta, \eta}$ (voir (6.6)), et des lemmes 7.2 et 7.3, on a (7.4) avec

$$(7.25) \quad v_{\varepsilon\delta}(t) = -b\{u'_{\varepsilon\delta}(t) + r'_{\varepsilon\delta}(T-t)\}, \quad \text{pour } t \in [0, T].$$

Grâce à la définition de $w_{\varepsilon\delta, \eta}$ et aux lemmes 7.2 et 7.3, on a (7.7) avec

$$(7.26) \quad w_{\varepsilon\delta}(t) = u_{\varepsilon\delta}(t) + r_{\varepsilon\delta}(T-t), \quad \text{pour } t \in [0, T].$$

d'où l'on déduit

$$(7.27) \quad w_{\varepsilon\delta}(T) = w'_{\varepsilon\delta}(T) = 0 \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon\delta}.$$

Pour obtenir (7.5), on procède comme dans le paragraphe 5. \square

Passage à la limite en ε .

Théorème 7.3. *Lorsque ε tend vers zéro, on a*

$$(7.28) \quad \widetilde{v}_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup v_{\delta} \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2(\omega)) \text{ faible } *$$

où v_{δ} est le contrôle exact obtenu par application du principe de Russell du système

$$(7.29) \quad \begin{cases} \theta(\delta)w''_{\delta} - q_{\alpha\beta}^{\delta} \frac{\partial^2 w_{\delta}}{\partial z_{\alpha} z_{\beta}} + a_{\delta}w_{\delta} = v_{\delta} & \text{dans } \omega \times]0, T[\\ w_{\delta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, T[\\ w_{\delta}(0) = w_{\delta}^0 & \text{dans } \omega \\ w'_{\delta}(0) = w^1 & \text{dans } \omega \end{cases}$$

avec w_{δ}^0 vérifiant, (voir Lemme 5.9)

$$(7.30) \quad \begin{cases} -q_{\alpha\beta}^{\delta} \frac{\partial^2 w_{\delta}^0}{\partial z_{\alpha} z_{\beta}} + a_{\delta}w_{\delta}^0 = \theta(\delta)g & \text{dans } \omega \\ w_{\delta}^0 = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où les coefficients $q_{\alpha\beta}^\delta$ sont donnés par (3.26).

En outre, on a

$$(7.31) \quad \begin{cases} P_{\varepsilon\delta} w_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup w_\delta & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\omega)) \text{ faible } * \\ P_{\varepsilon\delta} w'_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup w'_\delta & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\omega)) \text{ faible } *. \end{cases}$$

La preuve de ce Théorème se déduit des lemmes suivants

Lemme 7.5. Lorsque ε tend vers zéro, les données initiales du système (7.12) vérifient

$$(7.32) \quad \begin{cases} Q_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta}^0 \rightharpoonup u_\delta^0 & \text{dans } H_0^1(\omega) \text{ faible} \\ \widetilde{u_{\varepsilon\delta}^{1*}} \rightharpoonup u_\delta^1 & \text{dans } L^2(\omega) \text{ faible} \end{cases}$$

De plus, on a

$$(7.33) \quad \begin{cases} P_{\varepsilon\delta} u_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup u_\delta & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\omega)) \text{ faible } * \\ P_{\varepsilon\delta} u'_{\varepsilon\delta, \eta} \rightharpoonup u'_\delta & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\omega)) \text{ faible } * \end{cases}$$

où u_δ est la solution du système

$$(7.34) \quad \begin{cases} \theta(\delta) u_\delta'' - q_{\alpha\beta}^\delta \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_\delta u_\delta + b\theta(\delta) u'_\delta = 0 & \text{dans } \omega \times]0, +\infty[\\ u_\delta = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ u_\delta(0) = u_\delta^0 & \text{dans } \omega \\ u'_\delta(0) = \frac{u_\delta^1}{\theta(\delta)} & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Lemme 7.6. Lorsque η tend vers zéro, la solution $r_{\varepsilon\delta}$ de (7.15) vérifie

$$(7.35) \quad \begin{cases} P_{\varepsilon\delta} r_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup r_\delta & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\omega)) \text{ faible } * \\ P_{\varepsilon\delta} r'_{\varepsilon\delta} \rightharpoonup r'_\delta & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\omega)) \text{ faible } * \end{cases}$$

avec r_δ satisfaisant

$$(7.36) \quad \begin{cases} \theta(\delta) r_\delta'' - q_{\alpha\beta}^\delta \frac{\partial^2 r_\delta}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_\delta r_\delta + b\theta(\delta) r'_\delta = 0 & \text{dans } \omega \times]0, +\infty[\\ r_\delta = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ r_\delta(0) = -u_\delta(T) & \text{dans } \omega \\ r'_\delta(0) = u'_\delta(T) & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Remarque 7.7. Pour démontrer les lemmes 7.5 et 7.6, on applique le Théorème 5.3 aux systèmes (7.12) et (7.15) ainsi que les idées de la preuve des lemmes 7.2 et 7.3. Une fois que les lemmes 7.5 et 7.6 sont démontrés, on en déduit la preuve du Théorème 7.4; en particulier, on a

$$(7.37) \quad \begin{cases} w_\delta(t) = u_\delta(t) + r_\delta(T - t) \\ v_\delta(t) = -\theta(\delta)b\{u'_\delta(t) + r'_\delta(T - t)\}, \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, T].$$

Passage à la limite en δ .

Théorème 7.8. Lorsque δ tend vers zéro, on a

$$(7.38) \quad \delta^{-1}v_\delta \rightharpoonup v \quad \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\omega)) \text{ faible } *$$

où v est le contrôle exact obtenu par application du principe de Russell du système

$$(7.39) \quad \begin{cases} 2w'' - q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_0^* w = v & \text{dans } \omega \times]0, T[\\ w = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, T[\\ w(0) = w^0 & \text{dans } \omega \\ w'(0) = w^1 & \text{dans } \omega \end{cases}$$

avec w^0 vérifiant, (voir Lemme 5.9)

$$(7.40) \quad \begin{cases} -q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w^0}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_0^* w^0 = 2g & \text{dans } \omega \\ w^0 = 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

où les coefficients $q_{\alpha\beta}$ sont donnés par (4.14) et (4.15), et a_0^* est donnée par (5.38).

En outre, on a

$$(7.41) \quad \begin{cases} w_\delta \rightharpoonup w & \text{dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\omega)) \text{ faible } * \\ w'_\delta \rightharpoonup w' & \text{dans } L^\infty(0, T; L^2(\omega)) \text{ faible } *. \end{cases}$$

La preuve de ce Théorème se déduit des lemmes suivants:

Lemme 7.9. Lorsque δ tend vers zéro, les données initiales du système (7.34) vérifient

$$(7.42) \quad \begin{cases} u_\delta^0 \rightharpoonup u^0 & \text{dans } H_0^1(\omega) \text{ faible} \\ \delta^{-1}u_\delta^1 \rightharpoonup u^1 & \text{dans } L^2(\omega) \text{ faible.} \end{cases}$$

De plus, on a

$$(7.43) \quad \begin{cases} u_\delta \rightharpoonup u & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\omega)) \text{ faible } * \\ u'_\delta \rightharpoonup u' & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\omega)) \text{ faible } * \end{cases}$$

où u est la solution du système

$$(7.44) \quad \begin{cases} 2u'' - q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_0^* u + 2bu' = 0 & \text{dans } \omega \times]0, +\infty[\\ u = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ u(0) = u^0 & \text{dans } \omega \\ u'(0) = \frac{u^1}{2} & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Lemme 7.10. Lorsque δ tend vers zéro, la solution r_δ de (7.36) vérifie

$$(7.45) \quad \begin{cases} r_\delta \rightharpoonup r & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; H_0^1(\omega)) \text{ faible } * \\ r'_\delta \rightharpoonup r' & \text{dans } L^\infty(0, +\infty; L^2(\omega)) \text{ faible } * \end{cases}$$

avec r satisfaisant

$$(7.46) \quad \begin{cases} 2r'' - q_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 r}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} + a_0^* r + 2br' = 0 & \text{dans } \omega \times]0, +\infty[\\ r = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]0, +\infty[\\ r(0) = -u(T) & \text{dans } \omega \\ r'(0) = u'(T) & \text{dans } \omega. \end{cases}$$

Remarque 7.11. Pour démontrer les lemmes 7.9 et 7.10, on applique le Théorème 5.4 aux systèmes (7.34) et (7.36) ainsi que les idées de la preuve des lemmes 7.2 et 7.3. Une fois que les lemmes 7.9 et 7.10 sont démontrés, on en déduit la preuve du Théorème 7.8; en particulier, on a

$$(7.47) \quad \begin{cases} w(t) = u(t) + r(T - t) \\ v(t) = -2b\{u'(t) + r'(T - t)\}, \end{cases} \quad \text{pour } t \in [0, T].$$

8- Cas des données initiales moins régulières.

Dans les paragraphes précédents, on avait

$$(8.1) \quad \{u_{\varepsilon\delta, \eta}^0, u_{\varepsilon\delta, \eta}^1\} \in V_{\varepsilon\delta} \times L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})$$

mais dans ce paragraphe, on suppose que les données initiales $u_{\varepsilon\delta,\eta}^0$ et $u_{\varepsilon\delta,\eta}^1$ du système (1.5) vérifient

$$(8.2) \quad \{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0, u_{\varepsilon\delta,\eta}^1\} \in L^2(\Omega_{\varepsilon\delta}) \times V'_{\varepsilon\delta}$$

et qu'en plus, il existe une constante c positive et indépendante de ε , δ et η telle que

$$(8.3) \quad \begin{cases} \|u_{\varepsilon\delta,\eta}^0\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon\delta})} \leq c \text{ et } \widetilde{u_{\varepsilon\delta,\eta}^0} \rightharpoonup u_{\delta,\eta}^0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible} \\ \|u_{\varepsilon\delta,\eta}^1\|_{V'_{\varepsilon\delta}} \leq \frac{c}{\delta}. \end{cases}$$

Dans ce cas, on obtient des résultats analogues à ceux établis dans les paragraphes précédents en remarquant que $y_{\varepsilon\delta,\eta}$ définie par

$$(8.4) \quad y_{\varepsilon\delta,\eta}(z, t) = \int_0^t u_{\varepsilon\delta,\eta}(z, s) ds + \tau_{\varepsilon\delta,\eta}(z)$$

où $u_{\varepsilon\delta,\eta}$ est la solution de (1.5) avec les données initiales vérifiant (8.2) et (8.3), et $\tau_{\varepsilon\delta,\eta} \in V_{\varepsilon\delta}$ est la solution du système

$$(8.5) \quad \begin{cases} A_{\varepsilon,\eta} \tau_{\varepsilon\delta,\eta} = -u_{\varepsilon\delta,\eta}^1 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ (a_{\alpha\beta} \frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}) n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,1} \\ (a_{3\beta} \frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial \tau_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_j}) n_3 = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{\frac{\pm 1}{2}\} \\ \tau_{\varepsilon\delta,\eta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\end{cases}$$

vérifie

$$(8.6) \quad \begin{cases} y''_{\varepsilon\delta,\eta} + A_{\varepsilon,\eta} y_{\varepsilon\delta,\eta} + b y'_{\varepsilon\delta,\eta} = 0 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \times]0, +\infty[\\ (a_{\alpha\beta} \frac{\partial y_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{\alpha 3} \frac{\partial y_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}) n_\alpha = 0 & \text{sur } \partial S_{\varepsilon\delta,1} \times]0, +\infty[\\ (a_{3\beta} \frac{\partial y_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_\beta} + \varepsilon^{-1} \eta^{-1} a_{33} \frac{\partial y_{\varepsilon\delta,\eta}}{\partial z_3}) n_3 = 0 & \text{sur } \omega_{\varepsilon\delta} \times \{\frac{\pm 1}{2}\} \times]0, +\infty[\\ y_{\varepsilon\delta,\eta} = 0 & \text{sur } \partial\omega \times]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\times]0, +\infty[\\ y_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = \tau_{\varepsilon\delta,\eta} & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta} \\ y'_{\varepsilon\delta,\eta}(0) = u_{\varepsilon\delta,\eta}^0 & \text{dans } \Omega_{\varepsilon\delta}. \end{cases}$$

On applique les résultats des paragraphes précédents au système (8.6) puis on utilise (8.4) pour en déduire des résultats analogues pour $u_{\varepsilon\delta,\eta}$.

Références bibliographiques.

- [1] A. Bensoussan, J. L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures* (Noth-Holland, Amsterdam, 1978).
- [2] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications*. (Masson, Paris, 1983).
- [3] D. Caillerie, Etude de quelques problèmes de perturbations en théorie de l'élasticité et de la conduction thermique. Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1982.
- [4] D. Cioranescu, P. Donato, Exact internal controllability in perforated domains. J. Math. Pures et Appl, 68 (1989), 185-213.
- [5] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Homogenization in open sets with holes. J.Math. Anal. Appl.71 (1979), 590-607.
- [6] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Global behaviour of very thin cellular structures. Applications to networks. Proceedings of the 7th Symposium to trends in Applications of Mathematics to Mechanics, edited by J.F. Besseling, W. Eckhaus. Springer(1988) 26-34.
- [7] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Asymptotic analysis for elastic wireworks. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1989), R89008.
- [8] A. Haraux, Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1978), No. 78011.
- [9] A. Haraux, Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains. Mathematical Reports, edited by J. Dieudonné. Hardwood academic publishers (1987).
- [10] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*. R.A.M (Masson et John Wiley, Paris, 1994).
- [11] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tomes 1 et 2. R.M.A (Masson, Paris, 1988).
- [12] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. vol. 1 (Dunod, Paris, 1968).
- [13] D. L Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, SIAM Review 20 (1978), 639-739.
- [14] J. Simon, Compact sets in $L^p(0, T; B)$. Annali di Mat. pura ed appl., 146 (1987), 65-96.
- [15] L. R. Tcheugoué Tébou, Sur la stabilisation de l'équation des ondes en dimension 2. C. R. Acad. Sci. Paris 319 (1994), 585-588.

Chapitre 4: Une remarque sur un résultat de J.L. Lions en contrôlabilité exacte et perturbations singulières

Résumé. L'objet de ce travail est de résoudre un problème posé par J. L. Lions dans le cadre de l'étude de la contrôlabilité exacte de l'équation des plaques avec perturbations singulières.

Abstract. The aim of this chapter is to solve an open problem due to J.L. Lions in the theory of exact controllability of plates and singular perturbations.

Dans la suite, Ω désigne un ouvert borné de classe C^3 dans \mathbb{R}^n , ($n \geq 1$) et ν est la normale unitaire extérieure au bord de Ω . Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on convient des notations suivantes

$$m(x) = x - x_0, \quad R = \text{Max} \{ |m(x)|; x \in \Omega \cup \partial\Omega \}$$

$$\Gamma_+ = \{ x \in \partial\Omega; m(x) \cdot \nu(x) > 0 \}, \quad \Gamma_- = \partial\Omega \setminus \Gamma_+$$

T est un nombre réel strictement positif et ε est un petit paramètre réel strictement positif destiné à tendre vers zéro.

Pour $\{y_\varepsilon^0, y_\varepsilon^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, on considère le problème suivant: trouver des contrôles $v_{0\varepsilon}$ et $v_{1\varepsilon}$ tels que si y_ε est la solution du système

$$(1) \quad \begin{cases} y_\varepsilon'' + \varepsilon \Delta^2 y_\varepsilon - \Delta y_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ y_\varepsilon = v_{0\varepsilon} & \text{sur } \Gamma_+ \times]0, T[\\ \Delta y_\varepsilon = v_{1\varepsilon} & \text{sur } \Gamma_+ \times]0, T[\\ y_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_- \times]0, T[\\ \Delta y_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_- \times]0, T[\\ y_\varepsilon(0) = y_\varepsilon^0 & \text{dans } \Omega \\ y_\varepsilon'(0) = y_\varepsilon^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

on ait

$$(2) \quad y_\varepsilon(T) = y_\varepsilon'(T) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Pour résoudre ce problème dans [4], J. L. Lions a utilisé la méthode H.U.M qu'il a introduite dans [3]. Cette méthode exige l'introduction du système

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi_\varepsilon'' + \varepsilon \Delta^2 \varphi_\varepsilon - \Delta \varphi_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[\\ \varphi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \Delta \varphi_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\\ \varphi_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon^0 \in V \\ \varphi_\varepsilon'(0) = \varphi_\varepsilon^1 \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où

$$(4) \quad V = \left\{ v \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega); \Delta v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}.$$

On établit pour le système (3) des estimations a priori appropriées qui permettent de conclure.

Dans [4], J. L. Lions démontre le résultat suivant

Théorème 1. *On suppose que*

$$(5) \quad T > \left\{ 2R + \frac{1}{\lambda_0} \right\}$$

où λ_0^2 est la première valeur propre de $-\Delta$ avec condition de Dirichlet.

Alors on a

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left\{ |\nabla \varphi_{\varepsilon}^1|^2 + \varepsilon |\nabla \Delta \varphi_{\varepsilon}^0|^2 + |\Delta \varphi_{\varepsilon}^0|^2 \right\} dx \leq \\ \leq \frac{R}{T - \left\{ 2R + \frac{1}{\lambda_0} \right\}} \int_0^T \int_{\Gamma_+} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'_{\varepsilon}}{\partial \nu} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta \varphi_{\varepsilon}}{\partial \nu} \right)^2 \right\} d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

Remarque 2. J.L. Lions démontre dans [4] par un argument de compacité que (6) a encore lieu pour tout $T > 2R$; cet argument introduit des constantes qui dépendent de ε de façon implicite; ce qui rend impossible l'utilisation des estimations ainsi obtenues pour effectuer le passage à la limite en ε . Notre propos ici est de démontrer (6) pour tout $T > 2R$ par un calcul simple en appliquant les techniques développées dans [1], [2] et [3]. Notre résultat est le suivant

Théorème 3. *Pour tout $T > 2R$, on a*

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \left\{ |\nabla \varphi_{\varepsilon}^1|^2 + \varepsilon |\nabla \Delta \varphi_{\varepsilon}^0|^2 + |\Delta \varphi_{\varepsilon}^0|^2 \right\} dx \leq \\ \leq \frac{R}{T - 2R} \int_0^T \int_{\Gamma_+} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'_{\varepsilon}}{\partial \nu} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta \varphi_{\varepsilon}}{\partial \nu} \right)^2 \right\} d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

Remarque 4. L'énergie du système (3) est donnée par

$$E_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ |\nabla \varphi'_{\varepsilon}(t)|^2 + \varepsilon |\nabla \Delta \varphi_{\varepsilon}(t)|^2 + |\Delta \varphi_{\varepsilon}(t)|^2 \right\} dx$$

et elle vérifie pour tout $t \in [0, T]$

$$E_{\varepsilon}(t) = E_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ |\nabla \varphi_{\varepsilon}^1|^2 + \varepsilon |\nabla \Delta \varphi_{\varepsilon}^0|^2 + |\Delta \varphi_{\varepsilon}^0|^2 \right\} dx.$$

Preuve du Théorème 3. Soit φ_ε une solution suffisamment régulière de (3). Multipliant la première équation de (3) par $-(2m \cdot \nabla \Delta \varphi_\varepsilon + (n+1)\Delta \varphi_\varepsilon)$ et intégrant par parties sur $\Omega \times]0, T[$, on obtient

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \int_{\Omega} \varphi'_\varepsilon (2m \cdot \nabla \Delta \varphi_\varepsilon + (n+1)\Delta \varphi_\varepsilon) dx \Big|_0^T + \\ + \int_0^T \int_{\Omega} \varphi'_\varepsilon (2m \cdot \nabla \Delta \varphi'_\varepsilon + (n+1)\Delta \varphi'_\varepsilon) dx dt + \\ + \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \Delta \varphi_\varepsilon \cdot \nabla (2m \cdot \nabla \Delta \varphi_\varepsilon + (n+1)\Delta \varphi_\varepsilon) dx dt - \\ - 2\varepsilon \int_0^T \int_{\partial\Omega} m \cdot \nu \left(\frac{\partial \Delta \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt - \\ + \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta \varphi_\varepsilon) (2m \cdot \nabla \Delta \varphi_\varepsilon + (n+1)\Delta \varphi_\varepsilon) dx dt = 0. \end{array} \right.$$

Des calculs simples dans le deuxième terme du membre de gauche de (8) donnent

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\Omega} \varphi'_\varepsilon (2m \cdot \nabla \Delta \varphi'_\varepsilon + (n+1)\Delta \varphi'_\varepsilon) dx dt = -(n+1) \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \varphi'_\varepsilon|^2 dx dt - \\ - 2n \int_0^T \int_{\Omega} \varphi'_\varepsilon \Delta \varphi'_\varepsilon dx dt - 2 \int_0^T \int_{\Omega} (m \cdot \nabla \varphi'_\varepsilon) \Delta \varphi'_\varepsilon dx dt. \end{array} \right.$$

Or l'on a

$$(10) \quad -2n \int_0^T \int_{\Omega} \varphi'_\varepsilon \Delta \varphi'_\varepsilon dx dt = 2n \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \varphi'_\varepsilon|^2 dx dt$$

et

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & -2 \int_0^T \int_{\Omega} (m \cdot \nabla \varphi'_\varepsilon) \Delta \varphi'_\varepsilon dx dt = 2 \int_0^T \int_{\Omega} \nabla (m \cdot \nabla \varphi'_\varepsilon) \cdot \nabla \varphi'_\varepsilon dx dt - \\ & \qquad \qquad \qquad - 2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} m \cdot \nu \left(\frac{\partial \varphi'_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \\ & = 2 \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \varphi'_\varepsilon|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} m \cdot \nabla |\nabla \varphi'_\varepsilon|^2 dx dt - 2 \int_0^T \int_{\partial\Omega} m \cdot \nu \left(\frac{\partial \varphi'_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \\ & = (2-n) \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \varphi'_\varepsilon|^2 dx dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} m \cdot \nu \left(\frac{\partial \varphi'_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt. \end{aligned} \right.$$

Reportant (10) et (11) dans (9), on trouve

$$(12) \quad \int_0^T \int_{\Omega} \varphi'_\varepsilon (2m \cdot \nabla \Delta \varphi'_\varepsilon + (n+1) \Delta \varphi'_\varepsilon) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \varphi'_\varepsilon|^2 dx dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} m \cdot \nu \left(\frac{\partial \varphi'_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt.$$

Maintenant nous allons nous occuper du troisième terme du membre de gauche de (8)

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \Delta \varphi_\varepsilon \cdot \nabla (2m \cdot \nabla \Delta \varphi_\varepsilon + (n+1) \Delta \varphi_\varepsilon) dx dt = \\ & = (n+1) \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \Delta \varphi_\varepsilon|^2 dx dt + 2\varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \Delta \varphi_\varepsilon \cdot \nabla (m \cdot \nabla \Delta \varphi_\varepsilon) dx dt \\ & = (n+3) \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \Delta \varphi_\varepsilon|^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} m \cdot \nabla (|\nabla \Delta \varphi_\varepsilon|^2) dx dt \\ & = 3\varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \Delta \varphi_\varepsilon|^2 dx dt + \varepsilon \int_0^T \int_{\partial\Omega} m \cdot \nu \left(\frac{\partial \Delta \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 d\Gamma dt \end{aligned} \right.$$

Si l'on effectue, dans le cinquième terme du membre de gauche de (8), des calculs analogues à ceux développés pour obtenir la dernière ligne de (13), on obtient

$$(14) \quad \int_0^T \int_{\Omega} (\Delta \varphi_\varepsilon) (2m \cdot \nabla \Delta \varphi_\varepsilon + (n+1) \Delta \varphi_\varepsilon) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} |\Delta \varphi_\varepsilon|^2 dx dt.$$

Reportant (12), (13) et (14) dans (8) et utilisant la Remarque 4, on obtient

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \int_{\Omega} \varphi'_\varepsilon (2m \cdot \nabla \Delta \varphi_\varepsilon + (n+1) \Delta \varphi_\varepsilon) dx \Big|_0^T + 2TE_\varepsilon(0) + 2\varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \Delta \varphi_\varepsilon|^2 dx dt = \\ & = \int_0^T \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 \right\} d\Gamma dt. \end{aligned} \right.$$

D'où l'on déduit

$$(16) \quad 2TE_\varepsilon(0) \leq X + \int_0^T \int_{\Gamma_+} (m \cdot \nu) \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 \right\} d\Gamma dt$$

où l'on a posé

$$X = \int_{\Omega} \varphi'_\varepsilon (2m \cdot \nabla \Delta \varphi_\varepsilon + (n+1) \Delta \varphi_\varepsilon) dx \Big|_0^T.$$

Si l'on montre que

$$(17) \quad |X| \leq 4RE_\varepsilon(0)$$

alors la preuve du Théorème 3 est terminée; en effet si on reporte (17) dans (16), on obtient

$$(18) \quad (2T - 4R)E_\varepsilon(0) \leq R \int_0^T \int_{\Gamma_+} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 \right\} d\Gamma dt.$$

Il reste donc à montrer (17). Pour ce faire, posons pour tout $t \in [0, T]$

$$(19) \quad X(t) = - \int_{\Omega} \varphi'_\varepsilon(t) (2m \cdot \nabla \Delta \varphi_\varepsilon(t) + (n+1) \Delta \varphi_\varepsilon(t)) dx.$$

Des calculs simples dans (19) donnent

$$(20) \quad X(t) = \int_{\Omega} (\Delta \varphi_\varepsilon(t)) (2m \cdot \nabla \varphi'_\varepsilon(t) + (n-1) \varphi'_\varepsilon(t)) dx$$

d'où l'on déduit par l'inégalité de Young

$$(21) \quad |X(t)| \leq 2RE_\varepsilon(t) = 2E_\varepsilon(0)$$

et la relation (17) découle aisément de (21). □

Remarque 5. Pour démontrer que l'inégalité (6) a lieu pour tout $T > 2R$, J.L. Lions a eu à estimer la quantité $\|\varphi'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$; il a notamment montré que

$$(22) \quad \exists c(\varepsilon) > 0 : \|\varphi'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c(\varepsilon) \int_0^T \int_{\Gamma_+} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 \right\} d\Gamma dt$$

et le problème qu'il a soulevé était de donner une estimation de $c(\varepsilon)$.

Comme l'on a (7) et

$$\|\varphi'_\varepsilon(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda_0} \|\nabla \varphi'_\varepsilon(t)\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{2E_\varepsilon(0)} \quad \forall t \in [0, T]$$

on voit que

$$(23) \quad \|\varphi'_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{R}{T-2R}} \left[\int_0^T \int_{\Gamma_+} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial \Delta \varphi_\varepsilon}{\partial \nu} \right)^2 \right\} d\Gamma dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On peut donc prendre

$$c(\varepsilon) = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{\frac{R}{T-2R}}.$$

Références bibliographiques.

- [1] V. Komornik, Contrôlabilité exacte en un temps minimal, C. R. Acad. Sci. Paris (1987), 223-225.
- [2] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method*, R.A.M (Masson et John Wiley, Paris, 1994).
- [3] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tome 1. R.M.A 8 (Masson, Paris, 1988).
- [4] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tome 2. R.M.A 9 (Masson, Paris, 1988).

Chapitre 5: Sur la stabilisation de l'équation des ondes et du système de l'élasticité linéaire en dimension 2

Résumé. On montre dans un premier temps qu'un choix judicieux de feedback frontière donne un résultat meilleur que celui de [3] lorsque la dimension d'espace est égale à 2. Puis, on établit un résultat de stabilisation rapide dans le cas où l'on utilise simultanément un feedback interne et un feedback frontière toujours en dimension 2. Enfin, on applique les mêmes techniques pour étudier la stabilisation du système de l'élasticité linéaire en dimension 2.

Abstract. We first show that a judicious choice of boundary feedback gives a better result than the one found in [3] when the dimension of the space is equal to 2. Afterwards, we establish a rapid stabilization result in the case where internal and boundary feedbacks are simultaneously used. Finally, we apply the same techniques to achieve the stabilization of the linear elasticity system in 2-D.

Dans la suite, Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière Γ de classe C^2 . On désigne par ν le vecteur unitaire normal extérieur à Γ . On fixe $x^0 \in \mathbb{R}^2$ et on pose $m(x) = x - x^0$,

$$R = \sup\{|m(x)|, x \in \Omega\}, \quad \Gamma_+ = \{x \in \Gamma; m(x) \cdot \nu(x) > 0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_- = \Gamma \setminus \Gamma_+$$

($u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$).

Pour tout résultat d'existence et d'unicité, dans tout ce qui suit, nous renvoyons à [3] et [5].

I- Equation des ondes.

I.1- Cas du feedback frontière.

Dans [3], V. Komornik propose un résultat de décroissance rapide de l'énergie pour l'équation des ondes; ce résultat est très intéressant pour les dimensions d'espace supérieures ou égales à 3 au vu du principe élaboré dans [8] ainsi que des résultats de [7]. Cependant, on constate qu'il est peu satisfaisant lorsque la dimension d'espace vaut 2. On donne ici un résultat meilleur dans le cas de la dimension 2.

Soit

$$V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_-\}$$

on se donne $\{y^0, y^1\} \in V \times L^2(\Omega)$ et deux fonctions positives a et b avec $a, b \in L^\infty(\Gamma_+)$. Puis l'on considère le système suivant

$$(I.1) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + ay + by' = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma_- \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) = y^1 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On démontre le résultat suivant

Théorème I.1. *Soit $k \in L^\infty(\Gamma_+)$ vérifiant*

$$(I.2) \quad k \geq \frac{1}{R} \quad \text{p.p sur } \Gamma_+, \quad |km| \leq 1 \quad \text{p.p sur } \Gamma_+.$$

On choisit les fonctions a et b par

$$(I.3) \quad a = \frac{2}{3}(m \cdot \nu)k^2, \quad b = (m \cdot \nu)k.$$

Alors on a

$$(I.4) \quad E(t) \leq [\exp(1 - t/3R)] E(0) \quad \forall t \geq 3R$$

où

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} \{|y'(x,t)|^2 + |\nabla y(x,t)|^2\} dx \right\} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} a|y(\Gamma,t)|^2 d\Gamma \quad \forall t \geq 0$$

est l'énergie du système (I.1).

Remarque I.2. Dans [3], V. Komornik montre que pour le choix $a = \frac{1}{2}(m \cdot \nu)k^2$, $b = (m \cdot \nu)k$, on a (I.4) avec $3R$ remplacé par $4R$; donc notre résultat améliore le sien, et il est d'autant meilleur que l'ouvert Ω est étoilé (cf. [3]). Nous conjecturons que (I.4) est la meilleure estimation qu'on puisse obtenir par la méthode usuelle des multiplicateurs qui actuellement est la méthode qui permet d'avoir un taux de décroissance explicite pour le système des ondes (voir par exemple [4]).

La démonstration du Théorème I.1 découle des lemmes suivants

Lemme I.3. Soient $S, T \in \mathbb{R}$, $0 \leq S < T < +\infty$. La solution de (I.1) vérifie,

$$(I.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E(t) dt \leq - \int_{\Omega} y' \{3m \cdot \nabla y + 2y\} dx \Big|_S^T + \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Sigma - \\ - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Sigma - \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} a|y|^2 d\Sigma - 2 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} byy' d\Sigma - \\ - 3 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Sigma. \end{array} \right.$$

Lemme I.4. Sous les hypothèses du Théorème I.1, on a

$$(I.6) \quad \int_S^{\infty} E(t) dt \leq 3R E(S) \quad \forall S \in [0, +\infty[.$$

I.2- Démonstrations des Lemmes I.3 et I.4, et du Théorème I.1.

Pour la démonstration du Lemme I.3, nous utiliserons le résultat suivant dont la preuve est donnée plus loin.

Proposition A. Pour tout $\{u, v\} \in \mathcal{V}$, on a

$$(I.7) \quad \int_{\Omega} (\Delta u) m \cdot \nabla u dx \leq - \int_{\Gamma_+} (au + bv) m \cdot \nabla u d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma.$$

avec V défini par

$$(I.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V} = \left\{ (u, v) \in V \times V; \Delta u \in L^2(\Omega) \text{ et} \right. \\ \left. \int_{\Omega} \{(\Delta u)w + \nabla u \cdot \nabla w\} dx + \int_{\Gamma_+} \{auw + bvw\} d\Gamma = 0 \quad \forall w \in V \right\}. \end{array} \right.$$

Démonstration du Lemme I.3. Puisque \mathcal{V} est dense dans $V \times L^2(\Omega)$, on établit ce résultat sous l'hypothèse

$$\{y^0, y^1\} \in \mathcal{V}$$

le résultat général s'en déduit par un argument de densité.

Lorsque $\{y^0, y^1\} \in \mathcal{V}$, on montre que le système (I.1) possède une et une seule solution y vérifiant

$$(I.9) \quad \{y, y'\} \in C([0, \infty[; \mathcal{V}) \cap C^1([0, \infty[; V \times L^2(\Omega))$$

Dans la suite, on suppose que (I.9) a lieu. Maintenant, multiplions la première équation de (I.1) par $3m \cdot \nabla y + 2y$ et intégrons par parties sur $\Omega \times]S, T[$; il vient alors

$$(I.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} y' \{3m \cdot \nabla y + 2y\} dx \Big|_S^T - \int_{\Omega \times]S, T[} y' \{3m \cdot \nabla y' + 2y'\} dx dt - \\ - \int_{\Omega \times]S, T[} (\Delta y) \{3m \cdot \nabla y + 2y\} dx dt = 0 \end{array} \right.$$

Or puisque $\operatorname{div}(m) = 2$, on a

$$(I.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \int_{\Omega \times]S, T[} y' \{3m \cdot \nabla y' + 2y'\} dx dt = - \int_{\Omega \times]S, T[} \left\{ \frac{3}{2} m \cdot \nabla (|y'|^2) - 2|y'|^2 \right\} dx dt \\ = \int_{\Omega \times]S, T[} |y'|^2 dx dt - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt \end{array} \right.$$

puisque $\operatorname{div}(m) = 2$.

Grâce à (I.7), on a pour tout $t \geq 0$,

$$(I.12) \quad 3 \int_{\Omega} (\Delta y) m \cdot \nabla y dx \leq -3 \int_{\Gamma_+} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Gamma - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma.$$

D'où l'on déduit

$$(I.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega \times]S, T[} (\Delta y) \{3m \cdot \nabla y + 2y\} dx dt \leq -3 \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Gamma dt - \\ - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt + 2 \int_{\Omega \times]S, T[} (\Delta y) y dx dt \\ \leq -3 \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Gamma dt - \\ - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - 2 \int_{\Omega \times]S, T[} |\nabla y|^2 dx dt \\ - 2 \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} \{ay^2 + by'y\} d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

Reportant (I.11) et (I.13) dans (I.10), on trouve

$$(I.14) \left\{ \begin{aligned} & \left[\int_{\Omega} y' \{3m \cdot \nabla y + 2y\} dx \right]_S^T + \int_{\Omega \times]S, T[} |y'|^2 dx dt - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt \leq \\ & \leq -3 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Gamma dt - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - \\ & \quad - 2 \int_{\Omega \times]S, T[} |\nabla y|^2 dx dt - 2 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} \{ay^2 + by'y\} d\Gamma dt. \end{aligned} \right.$$

Ajoutant aux deux membres de (I.14) la quantité $\int_{\Omega \times]S, T[} |\nabla y|^2 dx dt + \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} ay^2 d\Gamma dt$, on obtient

$$(I.15) \left\{ \begin{aligned} & \left[\int_{\Omega} y' \{3m \cdot \nabla y + 2y\} dx \right]_S^T + \int_{\Omega \times]S, T[} \{|y'|^2 + |\nabla y|^2\} dx dt + \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} ay^2 d\Gamma dt \leq \\ & \leq \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt - 3 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Gamma dt \\ & - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - \int_{\Omega \times]S, T[} |\nabla y|^2 dx dt - \\ & \quad - \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} \{ay^2 + 2by'y\} d\Gamma dt. \end{aligned} \right.$$

En vertu de la définition de l'énergie E , il découle de (I.15) que

$$(I.16) \left\{ \begin{aligned} & \left[\int_{\Omega} y' \{3m \cdot \nabla y + 2y\} dx \right]_S^T + 2 \int_S^T E(t) dt \leq \\ & \leq \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt - 3 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Gamma dt \\ & - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} \{ay^2 + 2by'y\} d\Gamma dt. \end{aligned} \right.$$

D'où l'on déduit (I.5) et le Lemme I.3 est démontré. \square

Démonstration du Lemme I.4. Posons

$$(I.17) \left\{ \begin{aligned} X &= \left[\int_{\Omega} y' \{3m \cdot \nabla y + 2y\} dx \right]_S^T \\ Y &= \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt \\ N &= -3 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Gamma dt \\ K &= - \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} \{ay^2 + 2by'y\} d\Gamma dt. \end{aligned} \right.$$

La combinaison de (I.16) et (I.17) donne

$$(I.18) \quad 2 \int_S^T E(t) dt \leq |X| + Y + |N| + K.$$

Introduisons pour tout $t \geq 0$,

$$(I.19) \quad X(t) = \int_{\Omega} y'(t) \{3m \cdot \nabla y(t) + 2y(t)\} dx.$$

On a alors

$$\begin{aligned} |X(t)| &\leq \frac{3R}{2} \int_{\Omega} |y'(t)|^2 dx + \frac{1}{6R} \int_{\Omega} (3m \cdot \nabla y(t) + 2y(t))^2 dx \\ &\leq \frac{3R}{2} \int_{\Omega} |y'(t)|^2 dx + \frac{1}{6R} \int_{\Omega} (9R^2 |\nabla y|^2 + 6m \cdot \nabla(y^2) + 4y^2) dx \\ &\leq \frac{3R}{2} \left[\int_{\Omega} \{|y'(t)|^2 + |\nabla y|^2\} dx + \int_{\Gamma_+} \frac{2}{3} \frac{1}{R^2} (m \cdot \nu) y^2 d\Gamma \right] + \frac{1}{R} \int_{\Omega} (-12 + 4)y^2 dx. \end{aligned}$$

Or le dernier terme est négatif et d'après (I.2) et (I.3), on a

$$\int_{\Gamma_+} \frac{2}{3} \frac{1}{R^2} (m \cdot \nu) y^2 d\Gamma \leq \int_{\Gamma_+} a y^2 d\Gamma$$

donc

$$(I.20) \quad |X(t)| \leq 3RE(t).$$

En vertu de (I.20) on a

$$(I.21) \quad |X| \leq 3R(E(S) + E(T))$$

D'autre part, en remplaçant a et b par leur valeur respective donnée par (I.3) dans l'expression de N , on obtient

$$\begin{aligned} |N| &= 3 \left| \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} \left(\frac{2}{3} ky + y' \right) k(m \cdot \nu) m \cdot \nabla y d\Gamma dt \right| \\ &\leq \frac{3}{2} \left[\int_{\Gamma_+ \times]S, T[} \left(\frac{2}{3} ky + y' \right)^2 (m \cdot \nu) d\Gamma dt + \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} |km|^2 (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt \right]. \end{aligned}$$

En développant et en utilisant encore (I.3), on trouve

$$(I.22) \quad \begin{aligned} |N| &\leq \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} a y^2 d\Gamma dt + 2 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} b y' y d\Gamma dt + \\ &\quad + \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt + \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} |km|^2 (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Maintenant, on reporte (I.21) et (I.22) dans (I.18) ; on trouve alors

$$(I.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E(t) dt \leq 3R(E(S) + E(T)) + \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt - \\ - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt + \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} ay^2 d\Gamma dt + 2 \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} by'y d\Gamma dt + \\ + \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt + \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} |km|^2 (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - \\ - \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} ay^2 d\Gamma dt - 2 \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} by'y d\Gamma dt \end{array} \right.$$

Utilisant (I.2) dans (I.23) et éliminant les termes identiques de signes contraires, on obtient

$$(I.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E(t) dt \leq 3R(E(S) + E(T)) + 3R \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} k(m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt \\ \leq 3R(E(S) + E(T)) + 3R \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} b|y'|^2 d\Gamma dt \quad (\text{d'après (I.3)}). \end{array} \right.$$

Or on a

$$(I.25) \quad E(S) - E(T) = - \int_S^T E'(t) dt = \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} b|y'|^2 d\Gamma dt.$$

Combinant (I.24) et (I.25), on trouve

$$(I.26) \quad \int_S^T E(t) dt \leq 3R E(S) \quad \forall S, T \in [0, \infty[\text{ avec } 0 \leq S < T.$$

Faisant tendre T vers l'infini dans (I.26), on obtient le résultat voulu et le Lemme I.4 est démontré. \square

Démonstration du Théorème I.1. Nous allons procéder comme dans [2]. L'énergie de (I.1) vérifie

$$E'(t) = - \int_{\Gamma_+} b(\Gamma) |y'(\Gamma, t)|^2 d\Gamma \quad \forall t \geq 0$$

et comme la fonction b est positive, on en déduit

$$E'(t) \leq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Grâce au Lemme I.4, on a

$$(I.27) \quad \frac{d}{dS} \left([exp(S/3R)] \int_S^\infty E(t) dt \right) \leq 0, \quad \forall S \geq 0.$$

D'où l'on déduit

$$(I.28) \quad [\exp(S/3R)] \int_S^\infty E(t)dt \leq \int_0^\infty E(t)dt, \quad \forall S \geq 0.$$

Or par (I.6) l'on sait que

$$(I.29) \quad \int_0^\infty E(t)dt \leq 3R E(0).$$

Une combinaison de (I.28) et (I.29) produit

$$\int_S^\infty E(t)dt \leq 3R [\exp(-S/3R)] E(0), \quad \forall S \geq 0.$$

Il découle de cette dernière inégalité que

$$\int_S^{S+3R} E(t)dt \leq 3R [\exp(-S/3R)] E(0), \quad \forall S \geq 0$$

et en vertu de la décroissance de l'énergie, on obtient

$$3RE(S+3R) \leq 3R [\exp(-S/3R)] E(0), \quad \forall S \geq 0.$$

D'où l'on déduit facilement, en posant $t = S + 3R$

$$E(t) \leq [\exp(1 - t/3R)] E(0), \quad \forall t \geq 3R$$

ce qui achève la preuve du Théorème I.1. □

I.3- Cas des feedbacks interne et frontière.

Maintenant, on prend encore $\{y^0, y^1\} \in V \times L^2(\Omega)$ et on considère le système suivant

$$(I.30) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y + l^2 y + ly' = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \frac{\partial y}{\partial \nu} + ay + by' = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma_- \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) = y^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où les fonctions a, b et l vérifient

$$(I.31) \quad \begin{cases} l \in L^\infty(\Omega) \\ l(x) \geq \frac{1}{R} \quad p.p \quad x \in \Omega \end{cases}$$

$$(I.32) \quad a = (m \cdot \nu)k^2, \quad b = (m \cdot \nu)k.$$

L'énergie de ce système est donnée pour tout $t \geq 0$ par

$$(I.33) \quad E_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} \{|y'(x, t)|^2 + |\nabla y(x, t)|^2 + l^2 |y(x, t)|^2\} dx \right\} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} a |y(\Gamma, t)|^2 d\Gamma$$

et elle est décroissante.

Pour ce nouveau système, on établit le

Théorème I.5. *On suppose que (I.31) et (I.32) ont lieu avec $k \in L^\infty(\Gamma_+)$ et k vérifiant*

$$(I.34) \quad k(x) \geq \frac{1}{R} \quad p.p \text{ sur } \Gamma_+.$$

Alors on a

$$(I.35) \quad E_1(t) \leq [\exp(1 - t/2R)] E_1(0) \quad \forall t \geq 2R.$$

Remarque I.6. On remarque que dans la situation présente, la décroissance de l'énergie est plus rapide que dans le cas précédent où l'action était uniquement frontière; cependant, le professeur V. Komornik nous a fait remarquer que contrairement au cas du seul feedback frontière où R est lié à la géométrie du domaine Ω , dans le cas présent, R peut être choisi aussi petit que l'on veut et indépendamment du domaine Ω .

Démonstration du Théorème I.5. Multiplions la première équation de (I.30) par y et intégrons par parties sur $\Omega \times]S, T[$; il vient alors

$$(I.36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} y' y dx \Big|_S^T - \int_{\Omega \times]S, T[} (y')^2 dx dt + \int_{\Omega \times]S, T[} |\nabla y|^2 dx dt + \\ + \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (ay^2 + by'y) d\Gamma dt + \int_{\Omega \times]S, T[} (l^2 y^2 + ly'y) dx dt = 0. \end{array} \right.$$

Ajoutant la quantité $2 \int_{\Omega \times]S, T[} (y')^2 dx dt$ aux deux membres de (I.36), on trouve

$$(I.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} y' y dx \Big|_S^T + \int_{\Omega \times]S, T[} \left\{ (y')^2 + |\nabla y|^2 + l^2 y^2 \right\} dx dt + \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} ay^2 d\Gamma dt + \\ + \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} by'y d\Gamma dt + \int_{\Omega \times]S, T[} ly'y dx dt = 2 \int_{\Omega \times]S, T[} (y')^2 dx dt. \end{array} \right.$$

Or l'on a par l'inégalité de Young

$$(I.38) \quad \left| \int_{\Omega} y'(t)y(t) dx \right| \leq \frac{R}{2} \int_{\Omega} \left\{ (y'(t))^2 + l^2 (y(t))^2 \right\} dx, \quad \forall t \geq 0$$

d'où l'on déduit

$$(I.39) \quad \left| \int_{\Omega} y'(t)y(t)dx \right]_S^T \leq R(E_1(T) + E_1(S)).$$

D'autre part, on vérifie sans peine que

$$(I.40) \quad \begin{cases} 2 \int_{\Omega \times]S, T[} |y'|^2 dx dt \leq 2R(E_1(S) - E_1(T)) \\ - \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} by'y d\Gamma dt \leq \frac{R}{2} \int_{\Gamma_+} a|y(S)|^2 d\Gamma \\ - \int_{\Omega \times]S, T[} ly'y dx dt \leq \frac{R}{2} \int_{\Omega} (l^2(y(S)))^2 dx dt. \end{cases}$$

Reportant (I.39) et (I.40) dans (I.37) et utilisant (I.33), on trouve

$$(I.41) \quad \begin{cases} 2 \int_S^T E_1(t) dt \leq R(E_1(T) + E_1(S)) + 2R(E_1(S) - E_1(T)) + \\ + \frac{R}{2} \int_{\Gamma_+} a(y(S))^2 d\Gamma + \frac{R}{2} \int_{\Omega} (l^2(y(S)))^2 dx dt \end{cases}$$

d'où l'on déduit sans peine

$$(I.42) \quad 2 \int_S^T E_1(t) dt \leq 4RE_1(S), \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty$$

et par suite

$$(I.43) \quad \int_S^{+\infty} E_1(t) dt \leq 2RE_1(S), \quad \forall S \geq 0.$$

La relation (I.35) découle alors aisément de (I.43) et la preuve du Théorème I.5 est terminée. \square

Remarque I.7. Si on suppose que l'ensemble Γ_- est de mesure non nulle, et que l'ouvert Ω est tel que

$$(I.44) \quad c_p < 2R$$

où c_p est la constante de Poincaré, on a un résultat plus fort que (I.43). En effet, dans ce cas, on peut estimer le premier membre de (I.37) autrement; au lieu de (I.38), on peut choisir l'estimation

$$(I.45) \quad \left| \int_{\Omega} y'(t)y(t)dx \right| \leq \frac{c_p}{2} \int_{\Omega} \left\{ (y'(t))^2 + |\nabla y(t)|^2 \right\} dx, \quad \forall t \geq 0$$

de sorte que

$$(I.46) \quad \left| \int_{\Omega} y'(t)y(t)dx \right]_S^T \leq c_p E_1(T) + \frac{c_p}{2} \int_{\Omega} \left\{ (y'(S))^2 + |\nabla y(S)|^2 \right\} dx.$$

Combinant (I.37), (I.40), (I.46) et utilisant (I.33), on trouve

$$(I.47) \quad 2 \int_S^T E_1(t)dt \leq (c_p - 2R)E_1(T) + \text{Max}\{c_p + 2R, 3R\}E_1(S), \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty$$

d'où l'on déduit, en vertu de (I.44)

$$(I.48) \quad \int_S^{+\infty} E_1(t)dt \leq \text{Max}\left\{\frac{c_p}{2} + R, \frac{3R}{2}\right\}E_1(S), \quad \forall S \geq 0$$

ce qui est un résultat meilleur que (I.43).

II- Système de l'élasticité linéaire.

II.1- Cas du feedback frontière.

Dans [5], V. Komornik a étudié la stabilisation du système de l'élasticité linéaire pour les dimensions d'espace plus grandes que 2 et je le remercie de m'avoir suggéré l'étude du cas de la dimension 2. Je signale en passant que le cas unidimensionnel se réduit à l'équation des ondes (cf. [7] et [3]). Les techniques que nous avons utilisées précédemment dans le cas de l'équation des ondes s'appliquent aisément ici; on se donne $\{y^0, y^1\} \in V_0 \times [L^2(\Omega)]^2$ où

$$V_0 = \{v \in [H^1(\Omega)]^2; v = 0 \text{ sur } \Gamma_-\}$$

et deux fonctions positives a et b avec $a, b \in L^\infty(\Gamma_+)$. Puis l'on considère le système suivant

$$(II.1) \quad \begin{cases} y'' - \mu \Delta y - (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} y) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \mu \frac{\partial y}{\partial \nu} + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} y) \nu + ay + by' = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma_- \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) = y^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où λ et μ sont les constantes de Lamé. On suppose que Ω est isotrope; on a alors le résultat suivant

Théorème II.1. *Soit $k \in L^\infty(\Gamma_+)$ vérifiant*

$$(II.2) \quad k \geq \frac{1}{R} \quad p.p \text{ sur } \Gamma_+, \quad |km| \leq 1 \quad p.p \text{ sur } \Gamma_+.$$

On choisit les fonctions a et b par

$$(II.3) \quad a = \frac{2}{3} \mu (m \cdot \nu) k^2 \quad b = \sqrt{\mu} (m \cdot \nu) k.$$

Alors on a

$$(II.4) \quad E(t) \leq [\exp(1 - \sqrt{\mu}t/3R)] E(0) \quad \forall t \geq 3R/\sqrt{\mu}$$

où

$$(II.5) \quad \begin{cases} E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} \{|y'(x, t)|^2 + \mu |\nabla y(x, t)|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} y(x, t))^2\} dx \right\} + \\ \quad \quad \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} a |y(\Gamma, t)|^2 d\Gamma \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

est l'énergie du système (II.1).

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur les résultats suivants

Lemme II.2. Soient $S, T \in \mathbb{R}$, $0 \leq S < T < +\infty$. L'énergie du système (II.1) décroît; plus précisément, on a

$$(II.6) \quad E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_+} b|y'(\Gamma, t)|^2 d\Gamma dt.$$

En outre, si pour tout $t \geq 0$, on pose

$$(II.7) \quad X(t) = \int_{\Omega} y' \cdot \{3(\nabla y)m + 2y\} dx$$

alors on a

$$(II.8) \quad |X(t)| \leq \frac{3}{\sqrt{\mu}} E(t).$$

Lemme II.3. Soient $S, T \in \mathbb{R}$, $0 \leq S < T < +\infty$. La solution de (II.1) vérifie,

$$(II.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E(t) dt \leq X(S) - X(T) + \frac{3}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_+} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt - \\ - \frac{3\mu}{2} \int_S^T \int_{\Gamma_+} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - \int_S^T \int_{\Gamma_+} a|y|^2 d\Gamma dt - 2 \int_S^T \int_{\Gamma_+} by \cdot y' d\Gamma dt - \\ - 3 \int_S^T \int_{\Gamma_+} (ay + by') \cdot (\nabla y)m d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

Lemme II.4. Sous les hypothèses du Théorème II.1, on a

$$(II.10) \quad \int_S^\infty E(t) dt \leq \frac{3R}{\sqrt{\mu}} E(S), \quad \forall S \in [0, +\infty[.$$

Le Théorème II.1 découle sans peine du Lemme II.4 comme le Théorème I.1 du Lemme I.4; nous démontrerons uniquement les lemmes.

II.2- Démonstrations des lemmes II.2, II.3 et II.4.

Preuve du Lemme II.2. Faisant le produit scalaire de la première équation de (II.1) par y' et intégrant par parties sur $\Omega \times]S, T[$, il vient

$$(II.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \int_S^T \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} \{ |y'(x, t)|^2 + \mu |\nabla y(x, t)|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} y(x, t))^2 \} dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} a|y(\Gamma, t)|^2 d\Gamma \right\} + \int_S^T \int_{\Gamma_+} b|y'(\Gamma, t)|^2 d\Gamma dt = 0 \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit aisément la relation (II.6). Maintenant, démontrons la relation (II.8).
L'utilisation de l'égalité de Young dans (II.7) donne

$$(II.12) \quad \left\{ \begin{aligned} |X(t)| &\leq \frac{3R}{2\sqrt{\mu}} \int_{\Omega} |y'(t)|^2 dx + \frac{\sqrt{\mu}}{6R} \int_{\Omega} |3(\nabla y(t))m + 2y(t)|^2 dx \\ &\leq \frac{3R}{2\sqrt{\mu}} \int_{\Omega} |y'(t)|^2 dx + \frac{\sqrt{\mu}}{6R} \int_{\Omega} (9R^2 |\nabla y|^2 + 6m \cdot \nabla(|y|^2) + 4|y|^2) dx \\ &\leq \frac{3R}{2\sqrt{\mu}} \left[\int_{\Omega} \{|y'(t)|^2 + \mu |\nabla y|^2\} dx + \int_{\Gamma_+} \frac{2\mu}{3} \frac{1}{R^2} (m \cdot \nu) |y|^2 d\Gamma \right] \\ &\leq \frac{3R}{\sqrt{\mu}} E(t) \quad (\text{puisque } \int_{\Gamma_+} \frac{2\mu}{3} \frac{1}{R^2} (m \cdot \nu) y^2 d\Gamma \leq \int_{\Gamma_+} ay^2 d\Gamma) \end{aligned} \right.$$

et la preuve du Lemme II.2 est terminée. \square

Démonstration du Lemme II.3. Nous établirons ce résultat pour $\{y^0, y^1\} \in W$ avec

$$(II.13) \quad \left\{ \begin{aligned} W = &\left\{ (u, v) \in V_0 \times V_0; \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} u) \in [L^2(\Omega)]^2 \text{ et} \right. \\ &\int_{\Omega} \{(\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} u)) \cdot w + \mu \nabla u \cdot \nabla w + (\lambda + \mu) \operatorname{div} u \operatorname{div} w\} dx + \\ &\left. + \int_{\Gamma_+} \{au \cdot w + bv \cdot w\} d\Gamma = 0 \quad \forall w \in V_0 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Le cas général s'en déduit par un argument de densité parce que W est dense dans $V_0 \times [L^2(\Omega)]^2$. On montre que lorsque $\{y^0, y^1\} \in W$, le système (II.1) possède une et une seule solution y vérifiant

$$(II.14) \quad \{y, y'\} \in C([0, \infty[; W) \cap C^1([0, \infty[; V_0 \times [L^2(\Omega)]^2).$$

Faisons le produit scalaire de la première équation de (II.1) par $3(\nabla y)m + 2y$ et intégrons par parties sur $\Omega \times]S, T[$; il vient alors

$$(II.15) \quad \left\{ \begin{aligned} X(T) - X(S) - \int_{\Omega \times]S, T[} y' \cdot \{3(\nabla y')m + 2y'\} dx dt - \\ - \int_{\Omega \times]S, T[} \{(\mu \Delta y) + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} y)\} \cdot \{3(\nabla y)m + 2y\} dx dt = 0 \end{aligned} \right.$$

Or l'on a

$$(II.16) \quad \left\{ \begin{aligned} - \int_{\Omega \times]S, T[} y' \cdot \{3(\nabla y')m + 2y'\} dx dt &= - \int_{\Omega \times]S, T[} \left\{ \frac{3}{2} m \cdot \nabla(|y'|^2) + 2|y'|^2 \right\} dx dt \\ &= \int_{\Omega \times]S, T[} |y'|^2 dx dt - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt \end{aligned} \right.$$

puisque $\operatorname{div}(m) = 2$.

Grâce à l'analogie de la Proposition A , on montre que pour tout $t \geq 0$,

$$(II.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} 3 \int_{\Omega} (\mu \Delta y + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} y)) \cdot (\nabla y) m dx \leq -3 \int_{\Gamma_+} (ay + by') \cdot (\nabla y) m d\Gamma - \\ - \frac{3\mu}{2} \int_{\Gamma_+} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma - \frac{3(\lambda + \mu)}{2} \int_{\Gamma_+} (m \cdot \nu) |\operatorname{div} y|^2 d\Gamma \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit

$$(II.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega \times]S, T[} (\mu \Delta y + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} y)) \cdot \{3(\nabla y) m + 2y\} dx dt \leq \\ \leq -3 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Gamma dt - \frac{3\mu}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt + \\ + 2 \int_{\Omega \times]S, T[} (\mu \Delta y + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} y)) \cdot y dx dt \leq \\ \leq -3 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (ay + by') \cdot (\nabla y) m d\Gamma dt - \\ - \frac{3\mu}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - 2 \int_{\Omega \times]S, T[} (\mu |\nabla y|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} y)^2) dx dt - \\ - 2 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} \{a|y|^2 + by' \cdot y\} d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

Reportant (II.16) et (II.18) dans (II.15), on trouve

$$(II.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(T) - X(S) + \int_{\Omega \times]S, T[} |y'|^2 dx dt - \frac{3}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt \leq \\ \leq -3 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Gamma dt - \frac{3\mu}{2} \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - \\ - 2 \int_{\Omega \times]S, T[} (\mu |\nabla y|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} y)^2) dx dt - \\ - 2 \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} \{a|y|^2 + by' \cdot y\} d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

Ajoutant aux deux membres de (II.19) la quantité

$$\int_{\Omega \times]S, T[} \mu |\nabla y|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} y)^2 dx dt + \int_{\Gamma_+ \times]S, T[} a|y|^2 d\Gamma dt$$

on obtient

$$(II.20) \left\{ \begin{aligned} & X(T) - X(S) + \int_{\Omega \times]S, T[} \left\{ |y'|^2 + \mu |\nabla y|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} y)^2 \right\} dx dt + \\ & + \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} a |y|^2 d\Gamma dt \leq \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} \left\{ \frac{3}{2} (m \cdot \nu) |y'|^2 - 3 (ay + by') m \cdot \nabla y \right\} d\Gamma dt - \\ & - \frac{3\mu}{2} \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - \int_{\Omega \times]S, T[} \left\{ \mu |\nabla y|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} y)^2 \right\} dx dt - \\ & \qquad \qquad \qquad - \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} \{ a |y|^2 + 2by' \cdot y \} d\Gamma dt. \end{aligned} \right.$$

Il découle alors de cette dernière expression

$$(II.21) \left\{ \begin{aligned} & X(T) - X(S) + 2 \int_S^T E(t) dt \leq \\ & \leq \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt - 3 \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (ay + by') m \cdot \nabla y d\Gamma dt - \\ & - \frac{3\mu}{2} \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} \{ a |y|^2 + 2by' \cdot y \} d\Gamma dt. \end{aligned} \right.$$

D'où l'on déduit (II.9) et le Lemme II.3 est démontré. □

Démonstration du Lemme II.4. Posons

$$(II.22) \left\{ \begin{aligned} & X = X(S) - X(T) \\ & Y = \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt - \frac{3\mu}{2} \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt \\ & N = -3 \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} (ay + by') \cdot (\nabla y) m d\Gamma dt \\ & K = - \int_{\Gamma_{+ \times]S, T[} \{ a |y|^2 + 2by' \cdot y \} d\Gamma dt. \end{aligned} \right.$$

La combinaison de (II.21) et (II.22) donne

$$(II.23) \quad 2 \int_S^T E(t) dt \leq |X| + Y + |N| + K.$$

En vertu du Lemme II.2, on a

$$(II.24) \quad |X| \leq \frac{3R}{\sqrt{\mu}} (E(S) + E(T)).$$

D'autre part, en remplaçant a et b par leur valeur respective, donnée par (II.3), on obtient dans l'expression de N , on obtient

$$(II.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} |N| = 3 \left| \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} \left(\frac{2\sqrt{\mu}}{3} ky + y' \right) \sqrt{\mu} k(m \cdot \nu) \cdot (\nabla y) m d\Gamma dt \right| \\ \leq \frac{3}{2} \left[\int_S^T \int_{\Gamma_+} \left| \frac{2\sqrt{\mu}}{3} ky + y' \right|^2 (m \cdot \nu) d\Gamma dt + \mu \int_S^T \int_{\Gamma_+} |km|^2 (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt \right] \\ \leq \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} a|y|^2 d\Gamma dt + 2 \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} by' \cdot y d\Gamma dt + \\ + \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt + \frac{3\mu}{2} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} |km|^2 (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

Maintenant, on reporte (II.24) et (II.25) dans (II.23) ; on trouve alors

$$(II.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E(t) dt \leq \frac{3R}{\sqrt{\mu}} (E(S) + E(T)) + \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt - \\ - \frac{3\mu}{2} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt + \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} \{ a|y|^2 + by' \cdot y \} d\Gamma dt + \\ + \frac{3}{2} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} (m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt + \frac{3\mu}{2} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} |km|^2 (m \cdot \nu) |\nabla y|^2 d\Gamma dt - \\ - \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} a|y|^2 d\Gamma dt - 2 \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} by' \cdot y d\Gamma dt. \end{array} \right.$$

Utilisant (II.2) dans (II.26) et éliminant les termes identiques de signes contraires, on obtient

$$(II.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \int_S^T E(t) dt \leq \frac{3R}{\sqrt{\mu}} (E(S) + E(T)) + \frac{3R}{\sqrt{\mu}} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} \sqrt{\mu} k(m \cdot \nu) |y'|^2 d\Gamma dt \\ \leq \frac{3R}{\sqrt{\mu}} (E(S) + E(T)) + \frac{3R}{\sqrt{\mu}} \int_{\Gamma_{+\times]S,T[}} b|y'|^2 d\Gamma dt \quad (\text{d'après (II.3)}). \end{array} \right.$$

Utilisant (II.6) dans (II.27), on trouve

$$(II.28) \quad \int_S^T E(t) dt \leq \frac{3R}{\sqrt{\mu}} E(S) \quad \forall S, T \in [0, +\infty[\text{ avec } 0 \leq S < T.$$

Faisant tendre T vers $+\infty$ dans (II.28), on obtient le résultat voulu et le Lemme II.4 est démontré. \square

II.3- Cas des feedbacks interne et frontière.

Dans le cas de l'élasticité, on peut aussi ajouter à l'action frontière, une action interne; plus précisément, si maintenant, on prend encore $\{y^0, y^1\} \in V_0 \times [L^2(\Omega)]^2$ et on considère le système suivant

$$(II.29) \quad \begin{cases} y'' - \mu \Delta y - (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} y) + l^2 y + l y' = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \mu \frac{\partial y}{\partial \nu} + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} y) \nu + a y + b y' = 0 & \text{sur } \Gamma_+ \times (0, \infty) \\ y = 0 & \text{sur } \Gamma_- \times (0, \infty) \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) = y^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où les fonctions a, b et l vérifient

$$(II.30) \quad \begin{cases} l \in L^\infty(\Omega) \\ l(x) \geq \frac{\sqrt{\mu}}{R} \quad p.p \quad x \in \Omega \end{cases}$$

$$(II.31) \quad a = \mu(m \cdot \nu)k^2, \quad b = \sqrt{\mu}(m \cdot \nu)k.$$

L'énergie de ce système est donnée pour tout $t \geq 0$ par

$$(II.32) \quad \begin{cases} E_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\Omega} \{|y'(x, t)|^2 + \mu |\nabla y(x, t)|^2 + (\lambda + \mu)(\operatorname{div} y(x, t))^2\} dx \right\} + \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} l^2 |y(x, t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} a |y(\Gamma, t)|^2 d\Gamma \end{cases}$$

et elle est décroissante.

Pour ce nouveau système, on a le

Théorème II.5. *On suppose que (II.30) et (II.31) ont lieu avec k vérifiant (I.34). Alors on a*

$$(II.33) \quad E_1(t) \leq [\exp(1 - t\sqrt{\mu}/2R)] E_1(0), \quad \forall t \geq 2R/\sqrt{\mu}.$$

La démonstration de ce théorème se fait comme celle du Théorème I.5; mais pour la commodité du lecteur, nous en donnons les détails.

Démonstration du Théorème II.5. Faisons le produit scalaire de la première équation de (II.29) par y et intégrons par parties sur $\Omega \times]S, T[$; il vient alors

$$(II.34) \quad \begin{cases} X - \int_S^T \int_{\Omega} |y'|^2 dxdt + \int_S^T \int_{\Omega} \left\{ \mu |\nabla y|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} y(x, t))^2 \right\} dxdt + \\ + \int_S^T \int_{\Gamma_+} (a|y|^2 + by' \cdot y) d\Gamma dt + \int_S^T \int_{\Omega} (l^2 |y|^2 + ly' \cdot y) dxdt = 0 \end{cases}$$

où l'on a posé

$$X = \int_{\Omega} y' \cdot y dx \Big|_S^T.$$

Ajoutant la quantité $2 \int_S^T \int_{\Omega} |y'|^2 dxdt$ aux deux membres de (II.34), on trouve

$$(II.35) \quad \begin{cases} X + \int_S^T \int_{\Omega} \left\{ |y'|^2 + \mu |\nabla y|^2 + l^2 |y|^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} y(x, t))^2 \right\} dxdt + \\ + \int_S^T \int_{\Gamma_+} a|y|^2 d\Gamma dt + \int_S^T \int_{\Gamma_+} by' \cdot y d\Gamma dt + \int_S^T \int_{\Omega} ly' \cdot y dxdt = \\ = 2 \int_S^T \int_{\Omega} |y'|^2 dxdt. \end{cases}$$

Or l'on a par (II.30) et l'inégalité de Young

$$(II.36) \quad \left| \int_{\Omega} y'(t) \cdot y(t) dx \right| \leq \frac{R}{2\sqrt{\mu}} \int_{\Omega} \left\{ |y'(t)|^2 + l^2 |y(t)|^2 \right\} dx, \quad \forall t \geq 0$$

d'où l'on déduit

$$(II.37) \quad |X| \leq \frac{R}{\sqrt{\mu}} (E_1(T) + E_1(S)).$$

D'autre part, on vérifie sans peine que

$$(II.38) \quad \begin{cases} 2 \int_S^T \int_{\Omega} |y'|^2 dxdt \leq \int_S^T \int_{\Omega} \frac{2lR}{\sqrt{\mu}} |y'|^2 dxdt \leq \frac{2R}{\sqrt{\mu}} (E_1(S) - E_1(T)) \\ - \int_S^T \int_{\Gamma_+} by' \cdot y d\Gamma dt \leq \frac{R}{\sqrt{\mu}} \int_{\Gamma_+} a|y(S)|^2 d\Gamma \quad (\text{d'après (I.34)}) \\ - \int_S^T \int_{\Omega} ly' \cdot y dxdt \leq \frac{R}{\sqrt{\mu}} \int_{\Omega} l^2 |y(S)|^2 dxdt \quad (\text{d'après (II.30)}). \end{cases}$$

Reportant (II.37) et (II.38) dans (II.35) et utilisant (II.32), on trouve

$$(II.39) \quad \begin{cases} 2 \int_S^T E_1(t) dt \leq \frac{R}{\sqrt{\mu}} (E_1(T) + E_1(S)) + \frac{2R}{\sqrt{\mu}} (E_1(S) - E_1(T)) + \\ + \frac{R}{\sqrt{\mu}} \int_{\Gamma_+} a|y(S)|^2 d\Gamma + \frac{R}{\sqrt{\mu}} \int_{\Omega} l^2 |y(S)|^2 dxdt \end{cases}$$

d'où l'on déduit sans peine

$$(II.40) \quad 2 \int_S^T E_1(t) dt \leq \frac{4R}{\sqrt{\mu}} E_1(S), \quad \forall 0 \leq S < T < +\infty$$

et par suite

$$(II.41) \quad \int_S^{+\infty} E_1(t) dt \leq \frac{2R}{\sqrt{\mu}} E_1(S), \quad \forall S \geq 0.$$

La relation (II.33) découle alors aisément de (II.41) et la preuve du Théorème II.5 est terminée. \square

Remarque II.6. On a des remarques analogues aux remarques I.6 et I.7.

Annexe: Démonstration de la Proposition A

Dans cette partie, on se propose d'établir l'inégalité (I.7); nous la rappelons ici pour la commodité du lecteur. Pour tout $\{u, v\} \in \mathcal{V}$, on a

$$(A.1) \quad \int_{\Omega} (\Delta u) m \cdot \nabla u dx \leq - \int_{\Gamma_+} (au + bv) m \cdot \nabla u d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma.$$

Démonstration. Nous rappelons que l'on a l'identité de Rellich (cf. [3]), pour tout $z \in H^2(\Omega)$, on a

$$(A.2) \quad \int_{\Omega} (\Delta z) m \cdot \nabla z dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial z}{\partial \nu} m \cdot \nabla z d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) |\nabla z|^2 d\Gamma.$$

Maintenant considérons $\{u, v\}$ quelconque dans \mathcal{V} . Fixons $u_1 \in H^2(\Omega) \cap V$ tel que

$$(A.3) \quad \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = -(au + bv) \quad \text{sur } \Gamma_+.$$

Posons alors

$$(A.4) \quad u_2 = u - u_1.$$

On a donc

$$(A.5) \quad \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+.$$

D'après le Corollaire 6.3 de [1], qui dit en gros que si une fonction v vérifie

$$\begin{cases} v \in V \\ \Delta v \in L^2(\Omega) \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+ \end{cases}$$

alors on a

$$\int_{\Omega} (\Delta v)m \cdot \nabla v dx \leq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} m \cdot \nabla v d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) |\nabla v|^2 d\Gamma.$$

on sait que u_2 vérifie

$$(A.6) \quad \int_{\Omega} (\Delta u_2)m \cdot \nabla u_2 dx \leq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial \nu} m \cdot \nabla u_2 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) |\nabla u_2|^2 d\Gamma.$$

D'autre part, u_1 satisfait à (A.2), puisque $u_1 \in H^2(\Omega)$, et l'on a

$$(A.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u)m \cdot \nabla u dx &= \int_{\Omega} (\Delta u_1)m \cdot \nabla u_1 dx + \int_{\Omega} (\Delta u_2)m \cdot \nabla u_2 dx + \\ &+ \int_{\Omega} \{(\Delta u_1)m \cdot \nabla u_2 + (\Delta u_2)m \cdot \nabla u_1\} dx. \end{aligned} \right.$$

Compte tenu de ce que l'on sait sur u_1 et u_2 , on déduit de (A.7)

$$(A.8) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u)m \cdot \nabla u dx &\leq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} m \cdot \nabla u_1 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) |\nabla u_1|^2 d\Gamma + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial \nu} m \cdot \nabla u_2 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) |\nabla u_2|^2 d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} \{(\Delta u_1)m \cdot \nabla u_2 + (\Delta u_2)m \cdot \nabla u_1\} dx. \end{aligned} \right.$$

Des calculs simples montrent que (A.8) s'écrit encore

$$(A.9) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} (\Delta u)m \cdot \nabla u dx &\leq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} m \cdot \nabla u d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma - \\ &- \int_{\partial\Omega} \left\{ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} m \cdot \nabla u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial \nu} m \cdot \nabla u_1 \right\} d\Gamma + \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} \{(\Delta u_1)m \cdot \nabla u_2 + (\Delta u_2)m \cdot \nabla u_1\} dx. \end{aligned} \right.$$

Par une méthode d'approximation de domaine, (voir la preuve du Lemme 2.2 de [6]), on montre que

$$(A.10) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\Omega} \{(\Delta u_1)m \cdot \nabla u_2 + (\Delta u_2)m \cdot \nabla u_1\} dx &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} m \cdot \nabla u_2 d\Gamma + \\ &+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_2}{\partial \nu} m \cdot \nabla u_1 d\Gamma - \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 d\Gamma. \end{aligned} \right.$$

Reportant (A.10) dans (A.9), on trouve

$$(A.11) \quad \int_{\Omega} (\Delta u)m \cdot \nabla u dx \leq \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} m \cdot \nabla u d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma.$$

Or le membre de droite de (A.11) vérifie

$$(A.12) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} m \cdot \nabla u d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma = \int_{\Gamma_+} \frac{\partial u}{\partial \nu} m \cdot \nabla u d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_-} (m \cdot \nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_-} (m \cdot \nu) \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 d\Gamma \end{aligned} \right.$$

car $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu} \nu$ sur Γ_- (puisque $u = 0$ sur Γ_-).

Il découle aisément de (A.12) que

$$(A.13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} m \cdot \nabla u d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma \leq - \int_{\Gamma_+} (au + bv) m \cdot \nabla u d\Gamma - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma \end{aligned} \right.$$

parce qu'on a

$$(A.14) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = -(au + bv) \text{ sur } \Gamma_+ \text{ et } m \cdot \nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_-.$$

Reportant (A.13) dans (A.11), on obtient bien (A.1); ce qui achève la démonstration de la Proposition A. \square

Références bibliographiques.

- [1] P. Grisvard, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités. J. Math. Pures. Appl., 68 (1989), 215-259.
- [2] A. Haraux, Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1978), No. 78011.
- [3] V. Komornik, Rapid boundary stabilization of the wave equation. S.I.A.M J. Control and Opt, 29 (1991), 197-208.
- [4] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method.* R.A.M (Masson et John Wiley, Paris, 1994).
- [5] V. Komornik, Boundary stabilization of linear elasticity systems. Proceedings of the IFIP Workshop on control theory, Laredo, Spain 1994.
- [6] V. Komornik, E. Zuazua, A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. J. Math. Pures. Appl., 69(1990), 33-54.
- [7] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tome 1. R.M.A (Masson, Paris, 1988).
- [8] D.L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, SIAM Review 20 (1978), 639-739.
- [9] L. R. Tcheugoué Tébou, Sur la stabilisation de l'équation des ondes en dimension 2. C. R. Acad. Sci. Paris 319 (1994), 585-588.

Bibliographie générale

- [I] A. Bensoussan, J. L. Lions , G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures* (Noth-Holland, Amsterdam, 1978).
- [II] S. Brahim-Otsmane, G.A. Francfort, F. Murat, Correctors for the homogenization of the wave and heat equations, *J. Math. Pures et Appl.* 71 (1992), 197-231.
- [III] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et Applications* (Masson, Paris, 1983).
- [IV] M. Briane, A. Damlamian, P. Donato, H-convergence for perforated domains, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1993), R93031.
- [V] D. Caillerie, Etude de quelques problèmes de perturbations en théorie de l'élasticité et de la conduction thermique. Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1982.
- [VI] D. Cioranescu, P. Donato, Homogénéisation du problème de Neumann non homogène dans des ouverts perforés, *Asymptotic Analysis* 1 (1988), 115-138
- [VII] D. Cioranescu, P. Donato, Exact internal controlability in perforated domains, *J. Math. Pures et Appl.* 68 (1989), 185-213.
- [VIII] D. Cioranescu, P. Donato, F. Murat, E. Zuazua, Homogenization and Correctors for the wave equation in domains with small holes, *Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, Sc. Fis. Mat.* 4 (1991), 251-293 .
- [IX] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Homogenization in open sets with holes, *J. Math. Anal. Appl.* 71 (1979), 590-607.
- [X] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Global behaviour of very thin cellular structures. Applications to networks. Proceedings of the 7th Symposium to trends in Applications of Mathematics to Mechanics, edited by J.F. Besseling, W. Eckhaus. Springer(1988) 26-34.
- [XI] D. Cioranescu, J. Saint Jean Paulin, Asymptotic analysis for elastic wireworks. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1989), R89008.
- [XII] P. Grisvard, Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités. *J. Math. Pures. Appl.*, 68 (1989), 215-259.
- [XIII] A. Haraux, Semi-linear hyperbolic problems in bounded domains. *Mathematical Reports*, edited by J. Dieudonné. Hardwood academic publishers (1987).
- [XIV] A. Haraux, On a completion problem in the theory of distributed control of wave equations, *Nonlinear partial differential equations and their applications*, Collège de France Seminar 1987-1988, H. Brézis and J.L. Lions Eds., Res. Notes in Math., Pitman.

- [XV] A. Haraux, Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaires périodiques, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1978), No. 78011.
- [XVI] V. Komornik, Contrôlabilité exacte en un temps minimal, C. R. Acad. Sci. Paris (1987), 223-225.
- [XVII] V. Komornik, Rapid boundary stabilization of the wave equation. S.I.A.M J. Control and Opt, 29 (1991), 197-208.
- [XVIII] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization. The multiplier method.* R.A.M (Masson et John Wiley, Paris, 1994).
- [XIX] V. Komornik, Boundary stabilization of linear elasticity systems. Proceedings of the IFIP Workshop on control theory, Laredo, Spain 1994.
- [XX] V. Komornik, E. Zuazua, A direct method for the boundary stabilization of the wave equation. J. Math. Pures. Appl., 69(1990), 33-54.
- [XXI] J.L. Lions, Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure, Rocky Mountain J. of Math., 10 (1980), 125-140.
- [XXII] J.L. Lions, Contrôlabilité exacte et homogénéisation I, Asymptotic Analysis, 1 (1988), 3-12.
- [XXIII] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tome 1, R.M.A 8 (Masson, Paris, 1988).
- [XXIV] J.L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, tome 2. R.M.A (Masson, Paris, 1988).
- [XXV] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* vol. 1 (Dunod, Paris, 1968).
- [XXVI] F. Murat, Compacité par compensation, Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, 5 (1978), 489-507.
- [XXVII] D.L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, SIAM Review 20 (1978), 639-739.
- [XXVIII] J. Saint Jean Paulin, M. Vanninathan, Exact controllability of vibrations of thin bodies. Portugaliae Mathematica, 51(1994), 421-453
- [XXIX] J. Simon, Compact sets in $L^p(0, T; B)$. Annali di Mat. pura ed appl., 146 (1987), 65-96.
- [XXX] L. R. Tcheugoué Tébou, Sur la stabilisation de l'équation des ondes en dimension 2. C. R. Acad. Sci. Paris (1994), 585-588.
- [XXXI] J. Yan, Contrôlabilité exacte pour des domaines minces. Asymptotic Analysis, 5(1992), 461-471.