HAL
open science

Modélisation par éléments finis des actions des matériaux granulaires sur les parois de silos

Ali Reza Naddaf Oskouei

To cite this version:

Ali Reza Naddaf Oskouei. Modélisation par éléments finis des actions des matériaux granulaires sur les parois de silos. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1995. Français. NNT : 1995METZ015S . tel-01776913

HAL Id: tel-01776913

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01776913

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

ACADEMIE DE NANCY-METZ
UNIVERSITÉ DE METZ
INSTITUT SUPÉRIEUR DE GÉNIE MÉCANIQUE ET PRODUCTIQUE
LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX
(U.R.A. CNRS N° 1215)

THÈSE

Présentée devant:

UNIVERSITÉ DE METZ

pour obtenir le grade de:

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ
SPÉCIALITE MÉCANIQUE

Par:

Ali Reza NADDAF OSKOUEI

MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DES ACTIONS DES MATÉRIAUX GRANULAIRES SUR LES PAROIS DE SILOS

Soutenue publiquement le 24 juillet 1995
devant la Commission d'Examen

Membres du Jury:

MM.	**M. POTIER-FERRY**	Président
	J. MARTINEZ	Rapporteur
	A. COLSON	Rapporteur
		Examinateur
		Directeur de Thèse
		Examinateur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ
022 420519 7

VB 8170

ACADEMIE DE NANCY-METZ
UNIVERSITÉ DE METZ
INSTITUT SUPÉRIEUR DE GÉNIE MÉCANIQUE ET PRODUCTIQUE
LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX
(U.R.A. CNRS N° 1215)

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ
N° inv. 1995028 S
Cote S/Mz 95/15
Loc Magasin

THÈSE

Présentée devant:

UNIVERSITÉ DE METZ

pour obtenir le grade de:

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ
SPÉCIALITE MÉCANIQUE

Par:

Ali Reza NADDAF OSKOUEI

MODÉLISATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DES ACTIONS DES MATÉRIAUX GRANULAIRES SUR LES PAROIS DE SILOS

Soutenue publiquement le 24 juillet 1995
devant la Commission d'Examen

Membres du Jury:

MM.	**M. POTIER-FERRY**	Président
	J. MARTINEZ	Rapporteur
	A. COLSON	Rapporteur
	S. BARAKA	Examinateur
	J.C. ROTH	Directeur de Thèse
	A. KHELIL	Examinateur

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été réalisés au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'I.S.G.M.P. de l'Université de Metz, et au GRRS de l'IUT de Nancy-Brabois sous la direction de Monsieur le Professeur J.C. ROTH, à qui je suis reconnaissant d'avoir assuré avec beaucoup de rigueur, de dynamisme, de gentillesse et d'amitié, le suivi scientifique de ce travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur M. POTIER-FERRY, Professeur à l'Université de Metz, qui m'a soutenu dans des périodes difficiles et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de ma thèse.

Monsieur J. MARTINEZ, Professeur à l'INSA de Rennes, a bien voulu être rapporteur de mon travail. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance et pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de faire partie de mon jury de thèse.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur le Professeur A. COLSON, directeur de l'ENSAIS de Strasbourg, qui a bien voulu être rapporteur de ce travail, et pour l'honneur qu'il me fait en participant à mon jury de thèse.

J'exprime aussi ma reconnaissance à Monsieur S. BARAKA, Docteur-Ingénieur de recherche et développement au CTICM et membre de la commission de normalisation concernant les silos, qui a accepté d'évaluer ce travail.

Monsieur A. KHELIL, Maître de Conférences et chef du département Génie Civil à l'IUT Nancy-Brabois, a co-dirigé cette thèse, qu'il en soit sincèrement remercié pour m'avoir proposé ce travail et pour son soutien constant et ses conseils tout le long de mes recherches.

Je ne saurais oublier Monsieur F. MOHRI Maître de Conférences à l'IUT de Nancy et tous les amis chercheurs, en particulier V. S. GBAGUIDI, D. TANKOUA, Y. ROHANI, N. GUEDDOUM, C. OUBAJA et A. ZÉNNIR pour toute leur collaboration et l'ambiance très amicale que nous avons vécue ensemble. Je m'en souviendrai encore longtemps.

Naturellement je n'oublie pas d'associer à mes remerciements tout le corps enseignant, personnel de l'atelier et du secrétariat de l'I.U.T. Génie Civil de Nancy et de l'ISGMP de Metz, avec lequel j'ai eu tout au long de ma présence dans l'établissement des rapports amicaux. De peur d'oublier des personnes, je ne citerai pas de nom.

J'exprime ma gratitude au Ministère de la Culture et de l'Enseignement Supérieur du Gouvernement Iranien qui a financé mes études.

Il m'est difficile de trouver les mots qui expriment mes remerciement et me gratitude vers la personne qui s'est donné corps et âme pour que j'achève ce travail . . . *ma femme*.

RÉSUMÉ

L'étude des structures de stockage nécessite avant tout la détermination des pressions normales sur les parois. Deux types de méthodes de calcul sont en général développées, soit une méthode analytique soit une technique numérique par éléments finis. Les méthodes analytiques sont généralement exploitées dans l'étude pratique et rapide des silos élancés. Par contre, la considération du comportement complexe du matériau ensilé, de l'influence de la flexibilité de la paroi et du comportement de l'interface matériau-paroi, nécessite l'utilisation d'une méthode numérique par éléments finis. Les travaux antérieurs, utilisant cette méthode, considèrent souvent un comportement complexe du matériau ensilé, par contre, la flexibilité de la paroi et le comportement de l'interface matériau-paroi ont peu d'importance.

Le but de ce travail est de démontrer qu'une technique relativement simple par éléments finis peut précisément déterminer les pressions sur la paroi dans le cas du remplissage, en utilisant les caractéristiques appropriées du frottement sur la paroi. Quatre éléments différents sont présentés pour l'interface, deux pour la jupe et deux pour la trémie. La performance de la méthode est très satisfaisante, comparativement aux autres travaux et résultats expérimentaux, pour les silos à faible, à moyen et à fort élancement. On constate également que, l'utilisation d'une loi de comportement très sophistiquée du matériau ensilé n'est pas nécessaire, par contre, la modélisation précise du frottement sur la paroi est très importante. Cependant, il est possible dans cette étude d'introduire facilement les comportements plus complexes de matériaux ensilés si nécessaire.

ABSTRACT

The design of storage structures requires, above all, the calculation of the normal pressures on silo walls. Two methods of calculation are generally used, the analytical and the numerical method. The analytical methods are generally used for practical and rapid calculations in slender silos. However, if we consider the complex behavior of the ensiled material, the effect of wall flexibility, and the behavior of the material-wall interface, only a numerical finite element technique can be used. Earlier studies, using this method, often consider a complex behavior of the ensiled material, however, show a simple behavior in the material-wall interface, and the effect of wall flexibility is usually neglected.

Our aim is to study the pressure distributions in circular silos with flexible walls, and to show that comparatively simple finite element techniques, which include appropriate wall friction characteristics, can accurately model the pressures exerted by stored solids on silo walls in filling conditions. Four different contact elements are applied to the interface, two for the cylindrical section and two for the conical section. The performance of this method is very satisfactory compared to the experimental, theoretical and numerical results, for the squat and slender silos. It can be noted that the use of a very sophisticated behavior law for ensiled material is not necessary, whereas an exact modeling of the wall friction is vital. However, if necessary, a more complex behavior of ensiled material can be incorporated into this study.

بسمه تعالی

چکیده

تحلیل سازه‌های ذخیره‌سازی یا باصطلاح سیلو، قبل از هر چیز احتیاج به محاسبه فشارهای وارده از طرف مواد ذخیره شده بدیواره سیلو دارد. در حالت کلی، دو روش در این زمینه توسعه یافته است، یکی روش تحلیلی و دیگری روش عددی با استفاده از اجزاء محدود. روشهای تحلیلی عمدتاً جهت مطالعات کاربردی و سریع و بیشتر برای سیلوهای مرتفع توسعه یافته اند. درحالیکه با در نظر گرفتن رفتار پیچیده مواد ذخیره شده و انعطاف پذیری دیواره سیلو (که در مطالعات قبلی مورد توجه زیاد نبوده است) از یک طرف و مشابه سازی تماس بین مواد و دیواره از طرف دیگر، تنها روش اجزاء محدود است که میتواند پاسخگو باشد. مطالعات انجام یافته قبلی با این روش معمولاً رفتار پیچیده مواد را در نظر گرفته اند اما تأثیر انعطاف پذیری دیواره و رفتار تماسی مواد - دیواره را کمتر مورد توجه قرار داده اند.

هدف این پایان نامه، اثبات این است که، یک روش نسبتاً ساده اجزاء محدود قادر است فشارهای وارده از طرف مواد ذخیره شده به دیواره سیلو را در حالت بارگیری آن بطور دقیق ارائه دهد. چهار جزء (المان) جهت اعمال بین مواد ذخیره شده و دیواره سیلو، ارائه شده است، دو جزء برای قسمت استوانه ای و دو تای دیگری جهت قسمت مخروطی. مقایسه نتایج حاصله با مطالعات انجام یافته قبلی و همچنین با نتایج تجربی موجود برای سیلوهای کم ارتفاع، با ارتفاع متوسط و مرتفع عملکرد این روش را بخوبی ارائه میدهد. نتایج حاصله در همه حالات ارضاء کننده میباشند. نشان داده ایم که تحقیق بیشتر جهت شناخت رفتار دقیق مواد ذخیره شده جهت این کار بهره چندانی بهمراه نخواهد داشت. بهرحال در صورت نیاز، امکان اعمال رفتار پیچیده مواد با این روش همچنان موجود است.

AVANT PROPOS

L'application de la technique de calcul par éléments finis dans un domaine nécessite de la continuité de ce domaine. L'assimilation d'un milieu granulaire à un domaine continu, est donc régi par les lois de la mécanique des milieux continus, et constitue une étape quasi-obligatoire dans toute approche, orientée vers la détermination du champs des sollicitations dans le silo. Cette assimilation doit cependant reposer sur des hypothèses et des comportements bien choisis, par exemple: l'élasticité, la plasticité; on peut également prendre en considération la particularité du problème posé, où l'on aurait tendance à considérer le matériau ensilé comme un solide en cours de remplissage et comme un fluide lors de la vidange.

Dans le premier chapitre, est présenté la justification de ce travail, de manière à mettre en évidence les aspects et nécessités générales de cette étude.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse des paramètres généraux et à l'étude bibliographique des modèles de la littérature.

Dans le troisième chapitre, est abordé l'étude théorique de la modélisation du matériau ensilé et le problème du contact entre le matériau ensilé et la paroi, autrement dit, la modélisation d'une interface entre le matériau ensilé et la paroi.

Le chapitre 4 est consacré à l'exploitation des résultats. Les résultats obtenus sont comparés avec plusieurs méthodes de calcul pour démontrer qu'il est inutile d'utiliser des caractérisations complexes et non linéaires de la matière ensilée pour déterminer les pressions sur la paroi en cours de remplissage.

Enfin, dans la conclusion, nous effectuons une synthèse de nos travaux et présentons les développements à exploiter.

SOMMAIRE

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS 1
RÉSUMÉ 2
ABSTRACT 3
AVANT PROPOS 5
NOTATIONS 11

1. INTRODUCTION 13

2. ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE 17

2.1. GÉNÉRALITÉS 18

2.1.1. Paramètres géométriques de silo 18
2.1.2. Paramètres mécaniques et physiques des matériaux ensilés 19

2.1.2.1. Angle du cône de remplissage 19
2.1.2.2. Angle de frottement interne au remplissage des silos 20
2.1.2.3. Angle de frottement en paroi (Coefficient de frottement) .. 21

2.2. THÉORIES CLASSIQUES DE CALCUL DES PRESSIONS SUR LES PAROIS DE SILOS

2.2.1. Théorie originale de Janssen ..... 23.
2.2.2. Théories proposées à partir de la solution de Janssen 24
2.2.3. Norme Française P 22-630 26
2.2.4. Solution de Reimbert 27
2.2.5. Autres théories de calcul des pressions 27

2.3. MÉTHODES NUMÉRIQUES DE CALCUL DES PRESSIONS SUR LES PAROIS DE SILOS

2.3.1. GÉNÉRALITÉS 29
2.3.2. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DU COMPORTEMENT SUR LA PRESSION NORMALE 30

2.3.2.1. L'effet des paramètres ϕ et C sur les zones plastifiées 30
2.3.2.2. L'effet des paramètres ϕ et C sur la pression normale 32
2.3.2.3. L'effet de la non linéarité élastique sur la pression normale ... 34

3. FORMULATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DU PROBLÈME POSÉ

3.1. GÉNÉRALITÉS 38

3.2. MODÉLISATION DU MATÉRIAU ENSILÉ ET DE LA PAROI

3.2.1. Généralités 40
3.2.2. Théorie de base 42
3.2.3. Élément triangulaire axisymétrique (T3) 44
3.2.4. Éléments quadrilatéraux axisymétriques 47

3.2.4.1. Élément quadrilatéral axisymétrique à quatre noeuds (Q4) . 47
3.2.4.2. Élément quadrilatéral axisymétrique à huit noeuds (Q8) . . . 49

3.3. MODÉLISATION DU CONTACT ENTRE LA PAROI ET LE MATÉRIAU ENSILÉ

3.3.1. ÉLÉMENTS DE CONTACT 52

3.3.1.1. Élément de contact linéaire pour un silo circulaire (C4) 52
3.3.1.2. Élément de contact linéaire pour la trémie (CT4) 58
3.3.1.3. Élément de contact quadratique pour un silo circulaire (C6) 62
3.3.1.4. Élément de contact quadratique pour la trémie (CT6) 67

3.3.2. MODÉLISATION DU FROTTEMENT 69

3.3.2.1. Rigidité normale de l'élément de contact 69
3.3.2.2. Rigidité tangentielle de l'élément de contact 70
3.3.2.3. Critères de convergence 70

4. APPLICATION DE LA MÉTHODE PROPOSÉE AUX DIFFÉRENTS CAS DE SILOS

4.1. INTRODUCTION 74
4.2. SILOS À FAIBLE ÉLANCEMENT 74
4.3. SILOS À ÉLANCEMENT MOYEN 86
4.4. SILOS À FORT ÉLANCEMENT 94
4.5. SILOS AVEC UNE TRÉMIE 97
4.6. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DES SILOS 101

4.6.1. L'effet du coefficient de frottement 101
4.6.2. L'effet du rapport R/t 101
4.6.3. L'effet du module d'élasticité 104
4.6.4. L'effet du coefficient de Poisson du matériau ensilé 108
4.6.5. L'effet de la hauteur d'ensilage 108
4.6.6. L'effet du poids volumique 112

4.7. ÉTUDE DES ASPECTS NUMÉRIQUES

4.7.1. L'effet du nombre d'éléments utilisés 113

4.7.1.1. Élément triangulaire (T3) 113
4.7.1.2. Élément quadrilatéral à quatre noeuds (Q4) 113
4.7.1.3. Élément quadrilatéral à huit noeuds (Q8) 114

4.7.2. Comparaison des résultats obtenus par les éléments différents . 114

4.7.3. Conclusion 118

CONCLUSION 119

BIBLIOGRAPHIE 123

ANNEXES 129

ANNEXE I: Base Expérimentale des Essais de Chartres 130
ANNEXE II: Organigramme du programme CP_SILO et du modélisation du frottement 133

NOTATIONS

A	surface des différents types d'élément
[B]	matrice de déformation
C	cohésion de la matière ensilée
d	diamètre du cercle inscrit de la cellule
E_m	module d'élasticité de la matière ensilée
E_p	module d'élasticité de la paroi
{F}	vecteur des sollicitations globales
[H]	matrice de comportement élastique
H	hauteur totale de la cellule
h_c	hauteur de la partie cylindrique
h_t	hauteur de la trémie
h_s	hauteur du cône supérieur de remplissage (surcharge)
[J]	matrice jacobienne
J	déterminant de la matrice jacobienne
[K]	matrice de rigidité élémentaire
[k]	matrice diagonale des propriétés de l'élément de contact
k_n	rigidité normale de l'élément de contact
k_s	rigidité tangentielle de l'élément de contact
k_p	rigidité de la paroi
L	longueur de l'élément de contact
N_i	fonctions de forme
NPI	nombre de points d'intégration numérique
n, s	coordonnées locales
n	indice de non linéarité de la loi de Boyce
P	périmètre de la section latérale du silo
{p}	vecteur des pressions sur la paroi
p_n	pression normale sur la paroi
p_s	pression tangentielle (frottement) sur la paroi
R	rayon de la cellule circulaire
R_h	rayon hydraulique de la cellule
r, θ, z	coordonnées globales cylindriques
[T]	matrice de passage

t épaisseur de la paroi

$\{u\}$ vecteur de déplacements nodaux

u_i déplacement normal de *i*ème noeud dans le système de coordonnées globales

v_i déplacement tangentiel de *i*ème noeud dans le système de coordonnées globales

$\{w\}$ vecteur de déplacements relatifs de l'élément de contact

w_n^m déplacement normal du côté matériau de l'élément de contact

w_n^m déplacement normal du côté paroi

w_s^m déplacement tangentiel du côté matériau

w_s^m déplacement tangentiel du côté paroi

α angle d'inclinaison de la trémie par rapport à l'horizontal

β égal à $E_m R/E_p t$

δ angle de frottement de la matière contre la paroi

$\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{rz}$ composantes cylindriques de déformations axisymétriques

$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \tau_{rz}$ composantes cylindriques de contraintes axisymétriques

γ poids volumique

Π fonctionnelle de l'énergie potentielle

ν coefficient de Poisson

λ rapport de la contrainte latérale sur la contrainte verticale

μ coefficient de frottement contre la paroi $\mu = tg\delta$

ω_i poids ou coefficient dans les schémas d'intégration numérique

ϕ angle de frottement interne

θ angle entre la paroi du silo et le vertical

ψ angle de talus naturel

τ_m résistance au cisaillement

ξ, η, ζ coordonnées paramétriques

1. INTRODUCTION

La plupart des travaux concernant l'étude des pressions sur les parois de silo considèrent que les silos sont à fort élancement et que leurs parois sont rigidifiées. Ces travaux exploitent des mises en équation inadaptées pour déterminer les pressions lorsque les silos ont des parois flexibles et à faible élancement (silo-magasin). De même, les méthodes actuelles prennent peu ou pas en considération l'interaction matériau-paroi pour calculer les pressions.

Par contre la facilité de mise en oeuvre des structures métalliques a favorisé la construction de silos métalliques de petite taille ou de taille moyenne (élancement faible ou moyen) dont les parois sont flexibles.

De nombreuses tentatives ont été faites pour utiliser le calcul par éléments finis pour prévoir les pressions sur la paroi du silo [7-8-12-16-22-32-36-38]. Presque toutes les méthodes antérieures ne considèrent aucune interaction entre les pressions des matériaux ensilés et la déformation de la paroi. La complexité de la nature des paramètres caractéristiques des matériaux a conduit les chercheurs à se limiter à un nombre restreint de paramètres dans les calculs. Les calculs de Mahmoud et Abdel-Sayed [32] et Ooi-Rotter [36] prennent en considération la structure et le matériau ensilé et ont étudié l'effet de la flexibilité de la paroi sur ces pressions. Cependant, la corrélation entre les pressions expérimentales et analytiques n'est pas proche pour le premier, et le second n'a pas étudié cet effet sur les silos élancés équipés de trémie. Presque dans toutes ces études par éléments finis, aucune tentative n'a été faite pour démontrer que les paramètres caractéristiques complexes du matériau sont nécessaires, ou pour explorer la sensibilité des pressions prévues par rapport aux paramètres donnés qui ne sont pas très significatifs.

Dans notre étude, une technique de calcul par éléments finis relativement simple est présentée en utilisant les caractéristiques appropriées du frottement en paroi. Il est bon de préciser que cette étude portera essentiellement sur la détermination des actions appliquées sur les parois de silos cylindriques, équipés ou non de trémie, avec des conditions aux limites et des conditions de remplissage. Elle prend en considération l'action du matériau ensilé et la paroi de silo circulaire. Les résultats obtenus par éléments finis, sont comparés avec les études théoriques, numériques et expérimentales antérieures. Il est montré qu'on n'a pas besoin des

caractérisations complexes et non linéaires du matériau ensilé pour déterminer les pressions sur la paroi en remplissage.

On ne prétend pas que les matériaux ensilés, ne présentent qu'un comportement élastique, ou que les déformations initiales des différentes parties de matériaux sont sans importances. Cette étude est entreprise pour explorer les états de contraintes qui se rencontrent dans une masse élastique linéaire et homogène sans déformation initiale. Elle est soumise à son poids propre et emmagasinée dans un silo à fond plat, ou à trémie avec des contacts sur la paroi avec frottement. Ce travail apporte des résultats importants mais simple. Ils peuvent être utilisés comme référence à des modèles plus complexes. Quelques études paramétriques préliminaires sur la distribution des pressions aux parois de silos sont présentées et les paramètres critiques qui affectent les résultats sont identifiés. Cette étude permet la détermination raisonnable des effets de flexibilité de la paroi et les autres paramètres.

CHAPITRE: 2

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

2.1. GÉNÉRALITÉS

2.1.1. PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DU SILO

Lorsque l'on s'intéresse aux silos ou aux trémies, il s'agit en général d'accumulateur de matériaux ou de réservoirs pour le stockage des produits en vrac; constitué, généralement de deux parties:

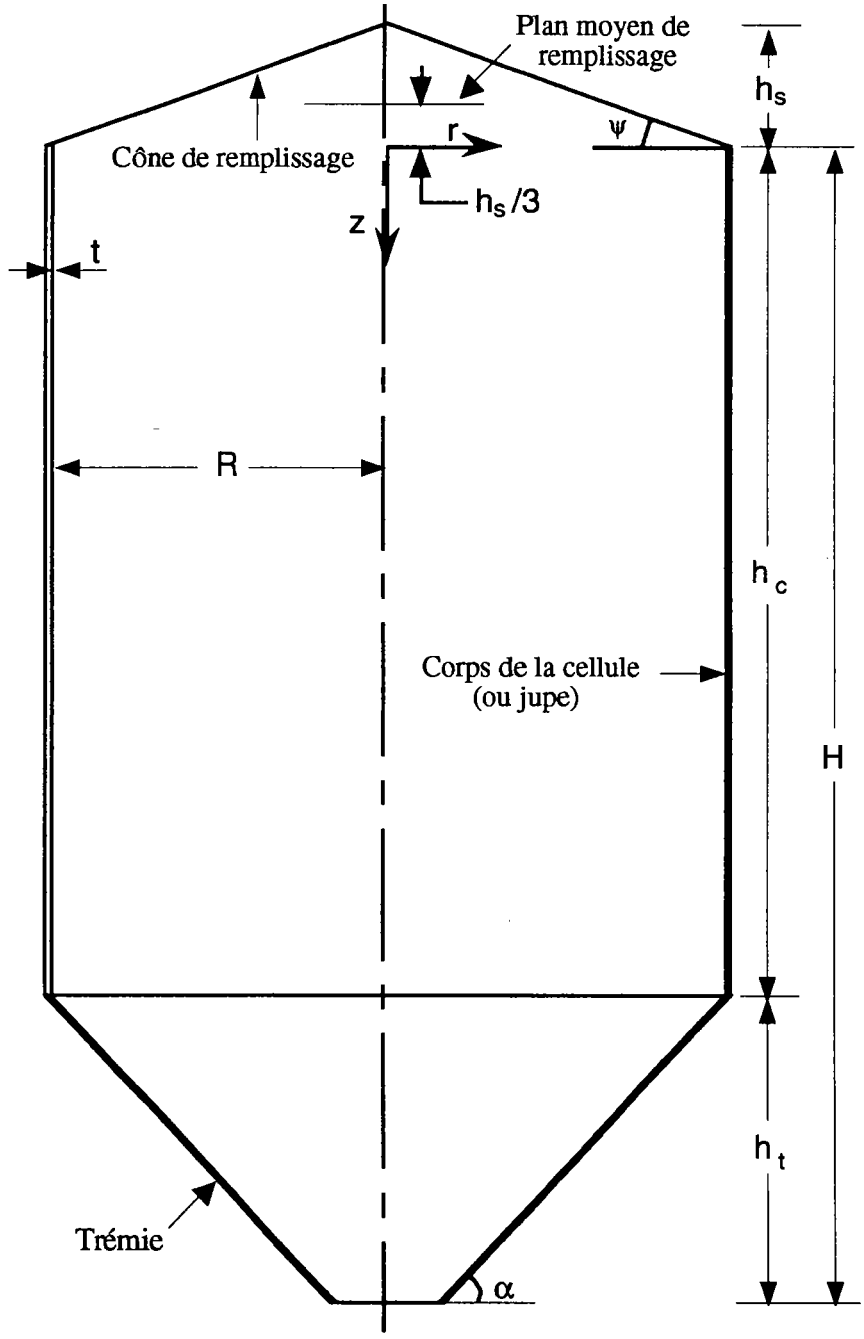


Figure 2-1 Géométrie de silo

une partie à parois verticales que l'on désigne par cellule ou corps du silo et une partie à parois inclinées que l'on désigne par trémie. La figure 2-1 décrit un silo, avec les désignations adoptées par la norme NF P22-630, [34].

Nous désignerons par "silo", tout accumulateur de matière, constitué d'une paroi à génératrices verticales, terminé inférieurement par des parois inclinées ou par un fond plat horizontal.

2.1.2. PARAMÈTRES MÉCANIQUES ET PHYSIQUES DES MATÉRIAUX ENSILÉS

Un milieu granulaire, dans sa forme générale est composé d'un ensemble de particules discrètes, en contact les unes avec les autres et qui sont de formes, de dimensions et d'orientations diverses, à titre d'exemples: céréales, sable, gravier. Le comportement en remplissage des silos fait appel aux notions d'angle d'éboulement, angle de frottement interne et angle de frottement en paroi.

2.1.2.1. Angle du cône de remplissage

L'angle d'éboulement d'un matériau granulaire, est utilisé pour déterminer l'angle du cône de remplissage ψ (ou angle de talus naturel), figure 2-1, est celui que forme l'horizontale avec la génératrice d'un tas conique de produit tombant lentement et régulièrement de faible hauteur, exprimé en degré.

L'angle d'éboulement n'est pas une mesure directe de la capacité d'écoulement du produit en vrac. L'angle décrit ici sert essentiellement à des fins de comparaison entre les cônes de remplissage des différentes matières ensilées. Le plan moyen de remplissage est défini par rapport au cône de remplissage de la matière ensilée. Ce plan est pris au tiers de la hauteur du cône de remplissage, h_S, figure 2-1. La mesure de l'angle d'éboulement est obtenue par la procédure opératoire suivante:

Conformément à la définition, le produit en vrac est versé lentement et régulièrement de faible hauteur sur un plan horizontal. Le but à atteindre est d'obtenir un tas de forme conique aussi abrupte et régulière que possible. Il est

procédé à la mesure des diamètres conjugués D_1 et D_2 ainsi que la hauteur h, figure 2-2.

Les diamètres D_1 et D_2 doivent mesurer au moins 20 fois le diamètre des grains constituant le produit et se chiffrer au minimum environ 100 mm.

L'angle d'éboulement ψ est calculé à partir des valeurs mesurées h, D_1 et D_2:

$$\psi = \mathrm{Arctg}\,\frac{4h}{D_1+D_2} \qquad (2.1.1)$$

La mesure est effectuée au moins trois fois et, à partir des résultats obtenus, on calcule la valeur moyenne arithmétique:

$$\psi = \frac{\psi+\psi+\psi}{3} \qquad (2.1.2)$$

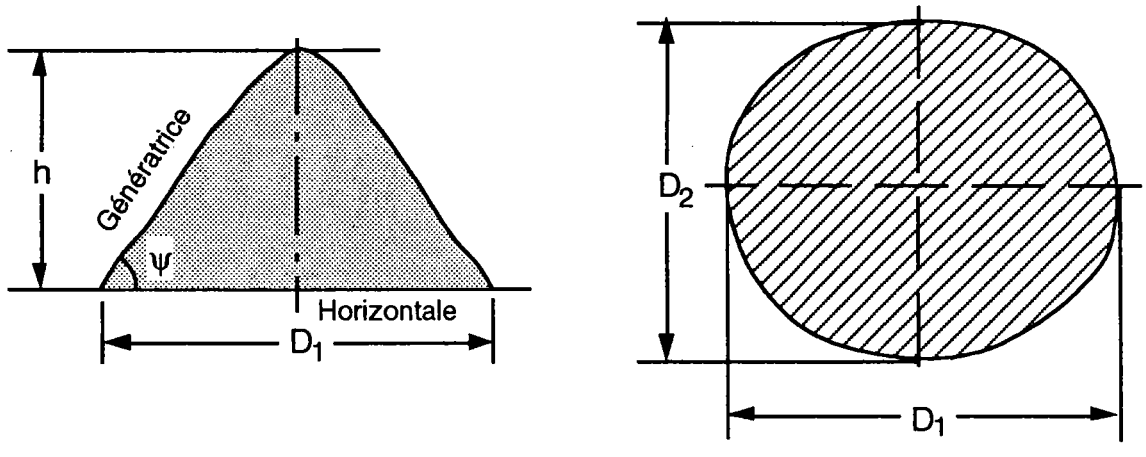


Figure 2-2 Angle d'éboulement

2.1.2.2. Angle de frottement interne au remplissage des silos

La mécanique des sols classique utilise le critère de Mohr-Coulomb, précisant que la contrainte tangentielle τ dépend linéairement de la contrainte normale σ, perpendiculaire à la surface de rupture:

$$\tau = \sigma \mathrm{tg}\phi + C \qquad (2.1.3)$$

L'angle ϕ est défini comme étant l'angle de frottement interne de la matière. Le paramètre C représente la contrainte tangentielle maximale à σ=0, figure 2-3, il est appelé *cohésion*. La cohésion due aux forces d'attraction des particules dépend de la contrainte et donc de la densité en place ρ. Les matériaux granulaires sont en général à faible cohésion.

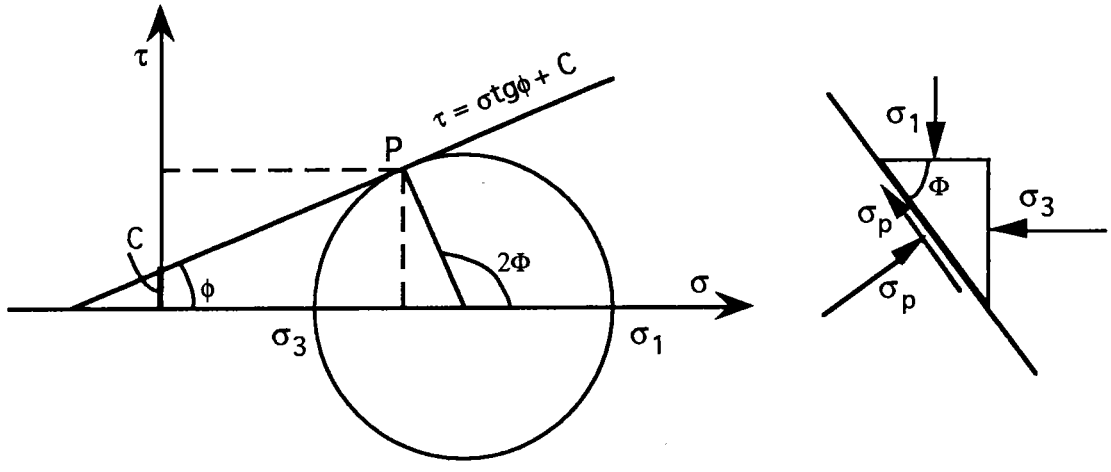


Figure 2-3 Condition de rupture après Mohr-Coulomb

Les phases de remplissage d'un silo sont des phases de compression (tassement) de la matière ensilée. L'angle de frottement lors du remplissage, ϕ, est déterminé par l'essai triaxial: inclinaison de la tangente à l'enveloppe des cercles de Mohr [33]. Toutefois on peut avoir deux angles de frottement dans les essais triaxiaux: un angle de frottement maximum ϕ_{max} et un angle de frottement minimum ϕ_{min}.

L'angle de frottement maximum est obtenu par la tangente aux premiers petits cercles de Mohr et l'angle de frottement minimum par la tangente aux derniers grands cercles de Mohr. Toutefois on peut prendre l'angle ϕ comme la tangente à l'enveloppe linéarisée de tous les cercles de Mohr, dans ce cas, ϕ diminue avec l'augmentation de la contrainte latérale σ_3 [27].

2.1.2.3. Angle de frottement en paroi (Coefficient de frottement)

L'angle de frottement en paroi est déterminé facilement à l'aide de l'appareil de cisaillement de Jenike ou de Casagrande. La tangente de cet angle est appelée

coefficient de frottement en paroi et désignée par μ. On mesure l'effort de cisaillement du matériau confiné lorsque ce matériau est déplacé sur une surface plane faite du matériau de la paroi, figure 2-3. Le tracé de l'effort de cisaillement τ en fonction de la contrainte normale σ dans un diagramme τ–σ, donne souvent dans le cas de parois métalliques une droite passant par l'origine du plan τ–σ, figure 2-4. L'angle produit entre cette droite et l'axe horizontal est appelé *angle de frottement en paroi* La tangente de cet angle, tgδ, est le coefficient de frottement en paroi. Il y a cependant d'autres associations paroi-matière pour lesquelles le diagramme τ–σ n'est pas une droite [27].

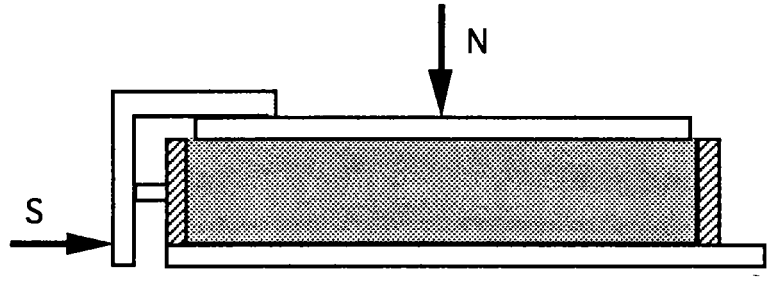


Figure 2-3 Boîte de cisaillement

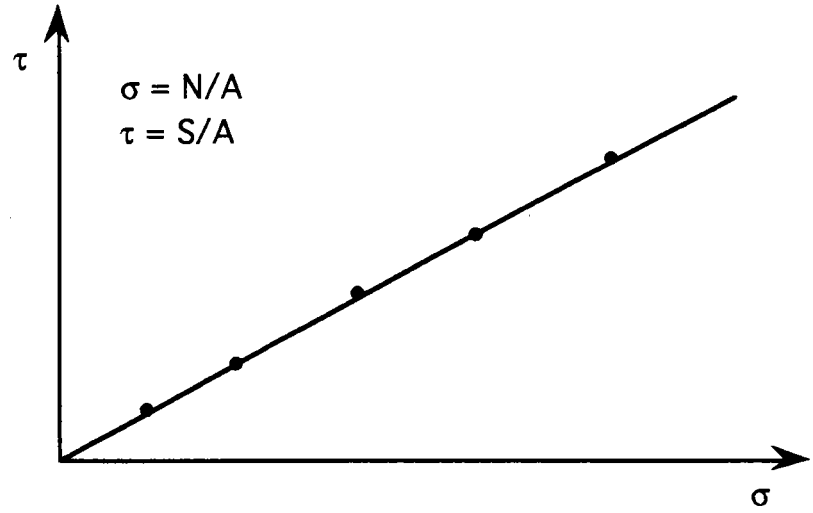


Figure 2-4 Coefficient de frottement en paroi

Il est toutefois possible de déterminer l'angle de frottement en paroi à l'aide de l'appareil triaxial. Il suffit dans ce cas de considérer une partie de l'échantillon comme matériau de paroi en lui donnant une forme inclinée afin que le cisaillement ait lieu sur la face inclinée.

2.2. THÉORIES CLASSIQUES DE CALCUL DES PRESSIONS SUR LES PAROIS DE SILOS

Il y a beaucoup de théories qui tentent de prévoir les pressions provoquées par les matériaux ensilés, sur la paroi. Ces théories peuvent être classées en deux groupes: le premier groupe intéresse les silos élancés et le second les structures de stockage ou silos à faible élancement. Cette différence survient parce que les pressions sur la paroi en silos élancés résultent de la formation de voûte, alors que les silos à faible élancement, grâce à l'effet de butée-pousée, sont suffisamment flexibles pour qu'on suppose un glissement sur l'interface. Une description brève des différences importantes entre ces théories est donnée dans la suite. Des descriptions complémentaires peuvent être trouvées ailleurs [1-3-19].

2.2.1. Théorie originale de Janssen

Les théories pour les silos élancés sont basées en générale sur l'équation différentielle d'équilibre vertical pour une couche horizontale de matériaux, figure 2-5:

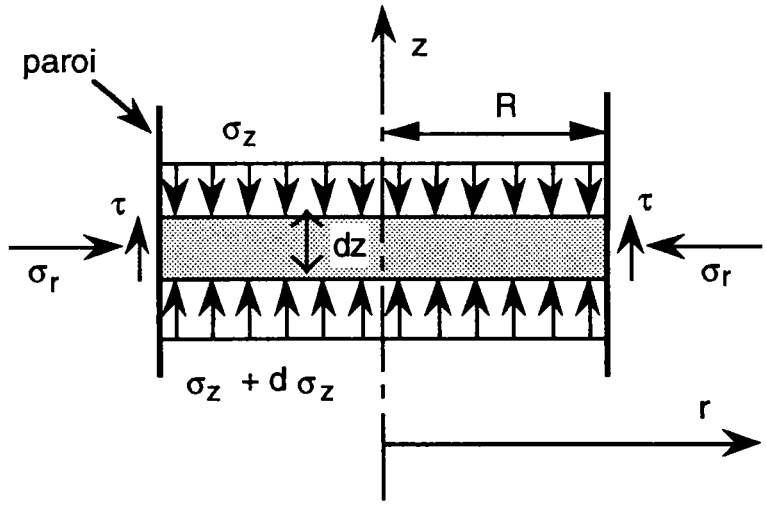


Figure 2-5 Équilibre d'une couche de matière ensilée

Le bilan des contraintes dans la direction z donne:

$$S\,\sigma_z + \gamma\,S\,dz - \tau\,P\,dz - (\sigma_z + d\sigma_z)\,S\,dz = 0 \qquad (2.2.1)$$

avec:

S : surface intérieure de la section droite de la cellule du silo

P : périmètre intérieur de la cellule suivant cette section

γ : poids volumique de matériau ensilé,

σ_z : contrainte horizontale

τ : contrainte de cisaillement, égale à $\mu\sigma_r$, où σ_r est la contrainte normale et

μ : coefficient de frottement.

La résolution de cette équation à deux inconnues, c'est-à-dire les pressions horizontale et verticale, nécessite l'utilisation d'une relation complémentaire définissant le rapport λ entre deux pressions ci-dessus, appelé *rapport de pression latérale*. La solution originale de Janssen [25] suppose que λ est invariant avec la profondeur du matériau. Cette hypothèse conduit à la distribution de pression:

$$p = \frac{\gamma R_h}{\mu}\,[1 - e^{-z/z_o}] \qquad (2.2.2)$$

avec:

$$z_o = \frac{R_h}{\mu\lambda} \qquad \text{et} \qquad R_h = \frac{S}{P}$$

R_h est appelé le rayon hydraulique de la section et pour un silo circulaire est égal à R/2 où R est le rayon du silo.

2.2.2. Théories proposées à partir de la solution de Janssen

Cette solution a été adoptée par Koenen [28], Pieper et Wenzel [37], Walker [50], Walters [51], Jenike *et al.* [26] et Sokol [45] dans leurs propositions pour déterminer les pressions après le remplissage.

Bien que ces auteurs aient supposé que le rapport de pression latérale est invariant avec la profondeur, sa valeur déterminée par chacun était différente. Koenen [28] a adopté le rapport de pression active de Rankine:

$$\lambda = \frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi} \tag{2.2.3}$$

où ϕ est l'angle effectif du frottement interne.

Pieper et Wenzel [37] ont suggéré que la valeur de λ ci-dessus est trop faible et ont proposé une relation empirique d'après Jaky [24]:

$$\lambda = 1-\sin\phi \tag{2.2.4}$$

Les modèles de Walker et Walters reposent sur l'hypothèse d'une distribution non uniforme de la contrainte verticale depuis l'axe du silo jusqu'à la paroi, toute en ne respectant que l'équation d'équilibre global par tranche donnée en (2.2.1).

Walker [50] a constaté que les matériaux ensilés adjacent à la paroi ne peuvent pas supporter la contrainte de cisaillement exigée si on utilise un état plastique correspondant à l'état actif de Rankine (équation 2.2.3), et a déterminé λ sur l'hypothèse que les matériaux adjacent à la paroi glissent en bas de la paroi et sont à la limite de rupture:

$$\lambda = \frac{1+ \sin^2\phi - 2\sqrt{[\sin^2\phi - \mu^2\cos^2\phi]}}{\cos^2\phi + 4\mu^2} \tag{2.2.5}$$

ceci conduit aux valeurs de λ entre celles obtenues par l'équation (2.2.3) quand la paroi est lisse et:

$$\lambda = \frac{1 - \sin^2\phi}{1 + \sin^2\phi} \tag{2.2.6}$$

quand la paroi est rugueuse [50] de telle sorte que les particules glissent sur elles-mêmes.

Walters [51] a étendu cette analyse pour admettre la non uniformité des contraintes verticales sur une couche des matériaux ensilés à une profondeur

importante, en supposant que la masse entière est en état de rupture plastique. Ceci conduit à:

$$\lambda = \frac{1 - \sin^2\phi}{1 + \sin^2\phi + 4\cos\phi \dfrac{[tg^3\phi - (tg^2\phi - \mu^2)^{3/2}]}{3\mu^2}} \qquad (2.2.7)$$

qui produit des valeurs entre celles des équations (2.2.3) et (2.2.5).

En constatant l'augmentation de la complexité dans tous ces travaux, Jenike *et al.* [26] ont proposé λ=0.4 et Homes [23] a proposé λ=0.45 pour un grand choix des matériaux communément utilisés.

Sokol [45] détermine les équations donnant les contraintes maximales qui peuvent se produire en remplissage et en vidange dans un silo. En partant de la variation du coefficient λ, deux états d'équilibre sont alors étudiés. Le premier état d'équilibre peut se produire au remplissage. Dans l'équation d'équilibre des forces verticales sur une couche horizontale selon Janssen, Sokol prend comme contrainte verticale, la moyenne de la contrainte verticale sur une couche. La valeur de λ proposé par lui, pour l'état limite actif, en tout point de la section est alors:

$$\lambda = \frac{1 - \sin\phi \cos 2v_{cp}}{1 + \sin\phi \cos^2 v_{cp}} \qquad (2.2.8)$$

qui produit les valeurs p presque égales à celles de Jenike [26]. v_{cp} est l'angle entre le vecteur contrainte principale majeur à la paroi et l'axe vertical.

2.2.3. Norme Française P 22-630

Cette norme utilise la formule originale de Janssen. La valeur de λ est celui proposé par Sokol (l'équation 2.2.8). L'angle v_{cp} est déduit de la formule:

$$\cos v_{cp} = \frac{\sin^2\delta + \sqrt{\sin^2\phi - \sin^2\delta}\cos\delta}{\sin\phi} \qquad (2.2.9)$$

avec: $\delta = \mathrm{Arctg}\mu$.

2.2.4. Solution de Reimbert

Quand la théorie de Janssen est appliquée à plusieurs silos à faible élancement, l'origine du système de coordonnées est pris au tiers de la hauteur du cône de remplissage, ce qui conduit à la prédiction des pressions significatives au point de contact des matériaux avec la paroi à la surface libre. Reimber [40] a produit une autre solution de l'équation différentielle qui permet à λ de varier entre zéro à la surface libre de matériaux (en haut) et la valeur de l'équation (2.2.3) à une profondeur importante de matériaux. Ceci a conduit à:

$$p = \frac{\gamma R}{2\mu}\left[1 - (\frac{z}{z_o} + 1)^{-2}\right] \qquad (2.2.10)$$

avec:

$$z_o = \frac{R}{2\mu\lambda} - \frac{h_s}{3} \qquad (2.2.11)$$

et h_s est la hauteur du cône de remplissage.

L'équation (2.2.10) produit des pressions plus grandes que les équations (2.2.2) et (2.2.3) près de la surface libre du matériau ensilé.

2.2.5. Autres théories de calcul des pressions

Toutes les théories ci-dessus sont développées à l'origine pour des silos élancés. Moins d'attention a été apportée par les chercheurs aux pressions dans les silos à faible élancement. La théorie de Rankine [39] a été proposée parfois par Lambert [31], et l'équation générale proposée pour la pression sur la paroi est:

$$p = \gamma z \cos\psi \left[\frac{\cos\psi - \sqrt{\cos^2\psi - \cos^2\phi}}{\cos\psi + \sqrt{\cos^2\psi - \cos^2\phi}}\right] \qquad (2.2.12)$$

où ψ est l'angle du talus naturel, formé par la matière ensilée (cône de remplissage).

Les pressions sur la paroi données par la théorie de Rankine agissent toujours dans la direction parallèle à la pente du cône de remplissage et le frottement de paroi est négligé. Stewart [47] a recommandé l'utilisation de la théorie de Coulomb [14] pour surmonter ce problème. Ceci conduit à:

$$p = \frac{\gamma z \sin^2(\theta - \phi)}{\sin^2\theta \sin(\theta+\delta)\left[1 + \left(\frac{\sin(\phi+\delta)\sin(\phi-\psi)}{\sin(\theta+\delta)\sin(\theta-\psi)}\right)^{1/2}\right]^2} \qquad (2.2.13)$$

où:

$$\delta = \mathrm{Arctg}\mu$$

et θ est l'angle entre l'horizontal et la paroi .

Les deux théories de Rankine et de Coulomb sont appliquées aux parois planes, non aux parois circulaires communément utilisées en silos. Abdel-sayed [1] a modifié la théorie de Coulomb pour l'appliquer à l'anneau conique de matériaux qui glissent dans la direction axiale.

Ragneau [38] a présenté une méthode de calcul des pressions normales à la paroi, qui est basée sur l'équilibre interne du matériau ensilé, compte tenu des conditions de frottement qui se développent au contact de la paroi et moyennant des hypothèses sur les variations des contraintes suivant le rayon du silo:

$$p = \gamma\lambda z_o(1 - e^{-z/z_o}) + (1 - \frac{r^2}{R^2})\frac{\gamma R^2}{4z_o} e^{-z/z_o} \qquad (2.2.14)$$

avec:

$$z_o = \frac{R}{2\mu\lambda} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{1 + \sin\phi \cos 2\theta_o}{1 - \sin\phi \cos 2\theta_o}$$

θ_o désigne l'angle entre la facette parallèle à l'axe r et la direction principale majeure.

Il a présenté une autre solution à partir de l'introduction d'emblée un terme cubique dans la loi de variation du cisaillement selon le rayon.

La plus grande partie des théories simples ci-dessus sont comparées dans le chapitre 4 avec les résultats de l'étude élastique par éléments finis.

2.3. MÉTHODES NUMÉRIQUES DE CALCUL DES PRESSIONS SUR LES PAROIS DE SILOS

2.3.1. GÉNÉRALITÉS

Plusieurs tentatives ont été faites pour calculer les pressions sur la paroi du silo par la méthode des éléments finis en cas du remplissage; comme les travaux de Bishara [55] modélisé, les travaux de Eibl et les travaux de Ragneau-Aribert [38] en France. Le remplissage de la cellule dans les travaux de Bishara est modélisé par superposition de couches d'éléments finis (élément rectangulaire à 4 noeuds) en adoptant une loi de comportement visco-élastique pour le matériau ensilé et une loi de frottement à la paroi de type Coulomb. L'élasticité de la paroi est également simulée par des éléments particuliers traduisant uniquement l'effet des déformations radiales. Eibl a utilisé deux méthodes différentes (hypo-élastique et élasto-plastique) pour la simulation du comportement du matériau ensilé en cours de remplissage. L'étude de Ragneau-Aribert utilise le comportement élastique non linéaire et élastique non linéaire couplé avec le critère élasto-plastique du matériau ensilé en cours de remplissage.

Tous ces travaux ont utilisé les caractérisations complexes du matériau ensilé, par exemple, la loi élasto-plastique de Lade [30] avec 14 paramètres à obtenir, ou la loi hypo-élastique de Kolymbas [29] avec 4 paramètre sans sens physique. Quelques études bibliographiques et assez complètes de ces modèles ont été réalisées par les auteurs, par exemple, les travaux de Roth-Khelil [57], Martinez [56], Ragneau-Aribert [38]. On va démontrer dans le paragraphe suivant que les paramètres complexes et difficiles à obtenir tels que les notions de l'angle de frottement interne et la cohésion du matériau ensilé ou la notion de la non linéarité élastique, ne peuvent pas influencer de la manière importante les pressions normales à la paroi. Nos résultats avec un comportement simplifié, présentés dans le chapitre 4, sont très proches à ces méthodes numériques, qui ont utilisé les paramètres complexes du matériau ensilé.

2.3.2. INFLUENCE DES PARAMÈTRES DU COMPORTEMENT SUR LA PRESSION NORMALE

2.3.2.1. L'effet des ϕ et C sur les zones plastifiées

L'étude de E. Ragneau [38] constate que pour les silos à faible élancement avec H/d inférieur à 1,5, les zones plastifiées dans le matériau ensilé sont pas très importantes. Cette étude pour un silo avec H/d égal à un, ne présente aucune zone plastifiée au bord de la paroi, figure 2-7. Ainsi suivant que l'on accepte ou non l'hypothèse d'une faible cohésion, les zones plastifiées sont limitées au bord de la paroi lorsque C (cohésion du matériau ensilé) est nul, et se concentrent au contraire vers le fond de la cellule lorsque C augmente, figure 2-6.

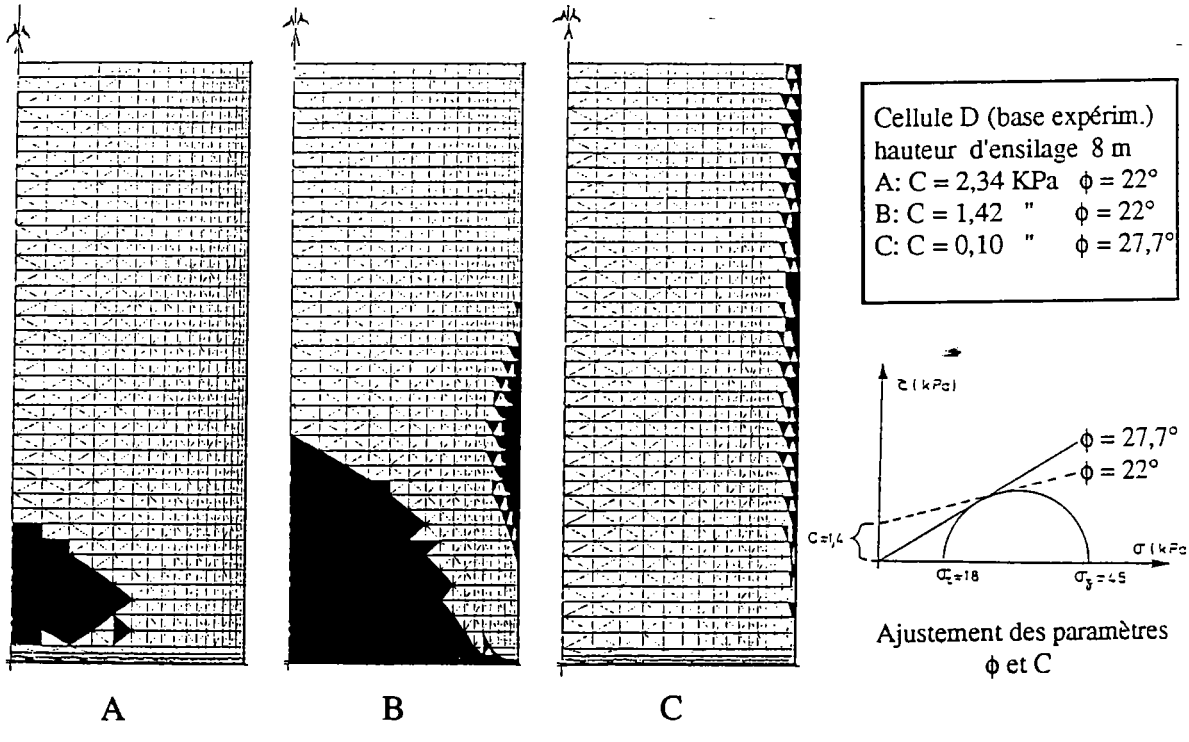


Figure 2-6 Influence des paramètre ϕ et C sur les zones plastiques [38]

Il paraît important de souligner que l'évaluation des zones plastifiées, qui est faite dans l'étude de [38], en terme d'invariants du tenseur des contraintes (critère

de Druker-Prager) n'implique pas obligatoirement une plastification au sens de Mohr-Coulomb, si l'on se place dans le plan de symétrie (r,z) de la cellule. Dans la figure 2-8, en utilisant le critère de Mohr-Coulomb les zones plastifiées pour deux angles de frottement interne différents, ϕ égal à 30° et à 40°, sont présentées [36]. Ces zones plastifiées ne peuvent pas encore influencer considérablement les pressions normales dans le cas de remplissage, surtout quand ϕ est assez grand. Des dépassements de seuil d'élasticité vus dans cette figure conduisent aux pressions normales prévues légèrement plus grandes que si le critère plastique du matériau ensilé était respecté.

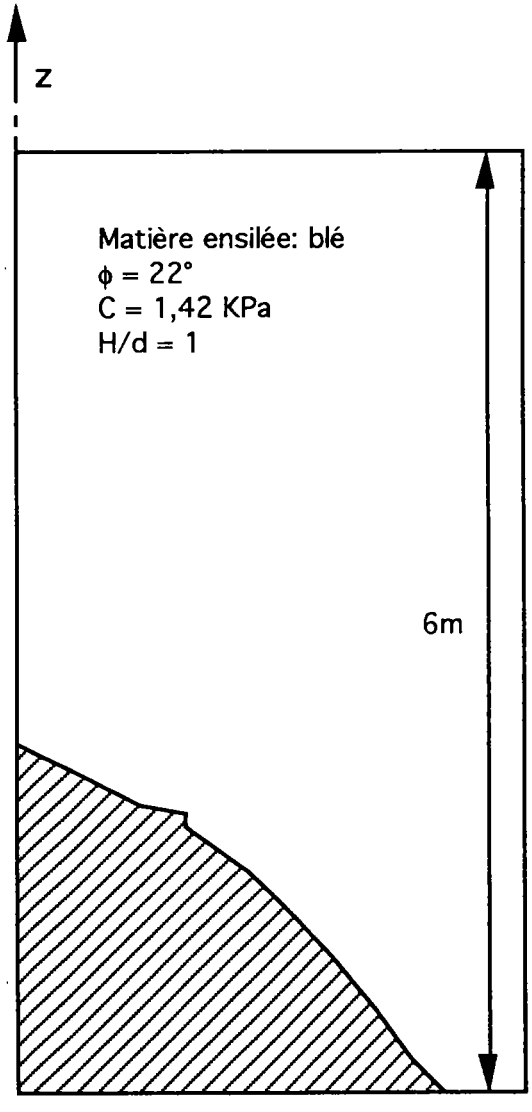


Figure 2-7 La zone plastifiée dans un silo à faible élancement [38]

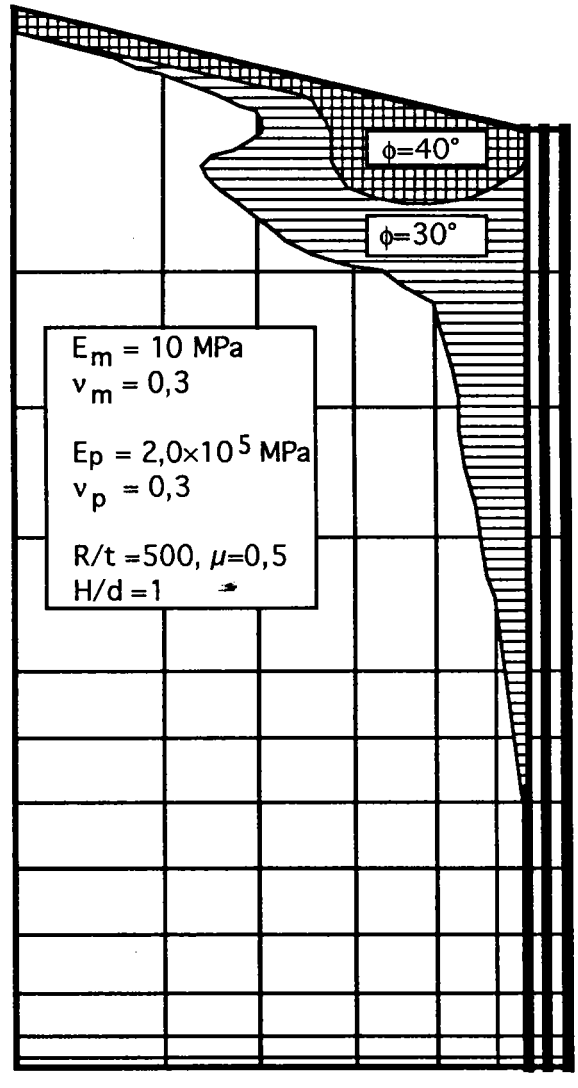


Figure 2-8 Les zones plastiques pour $\phi = 30°$ et $\phi = 40°$ [36]

2.3.2.2. L'effet des paramètres ϕ et C sur la pression normale

En revanche, il semblerait que les paramètres couplés (C et ϕ) n'aient pas une influence déterminante sur la distribution des pressions normales à la paroi comme tend à le montrer la figure 2-9. En effet les répercussions qu'entraînent l'utilisation des paramètres caractéristiques complexes de matériau ensilé sur les efforts transmis à la paroi, sont finalement très faibles et peu significatives. Les modèles de comportement complexe établis à partir de l'une ou l'autre étude expérimentale, conduisent finalement à un comportement de la matière ensilée globalement équivalent lorsqu'on se place au niveau de la paroi, même si localement les rigidités calculées peuvent être très différentes [38].

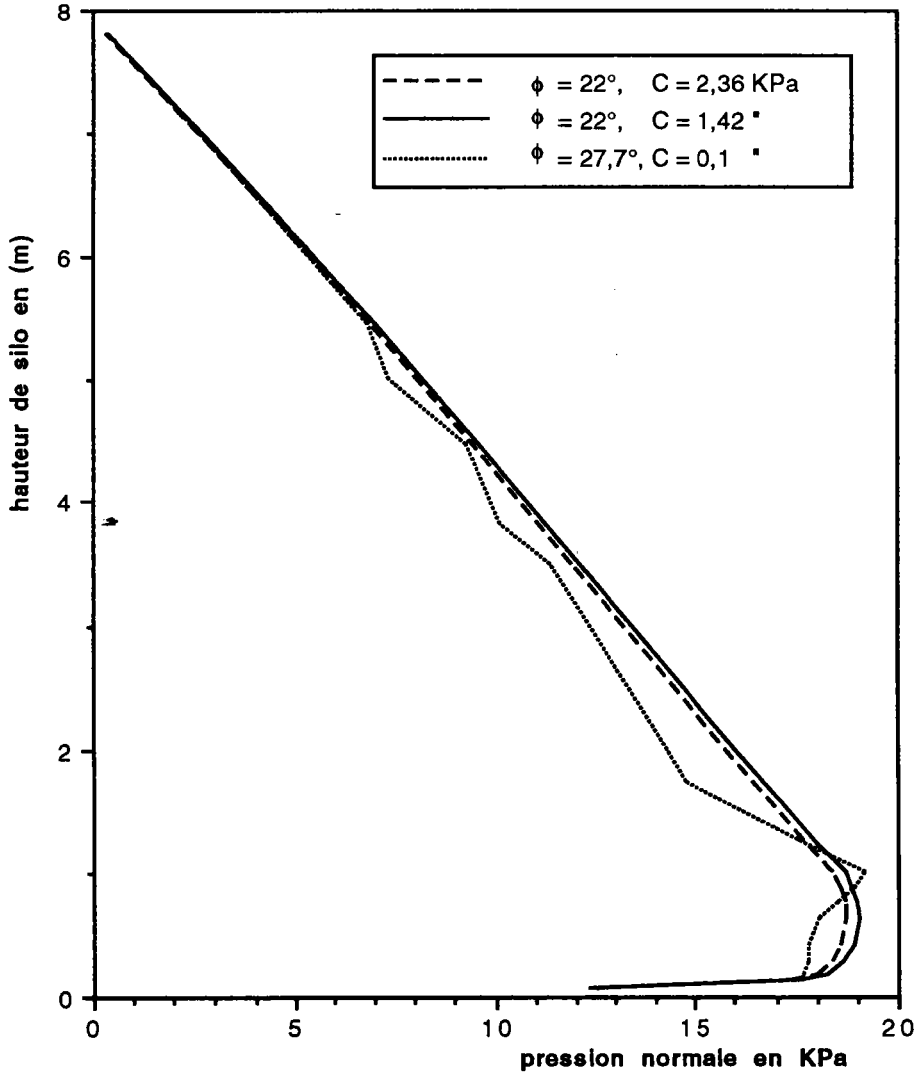


Figure 2-9 Influence de ϕ et C sur la pression normale [38]

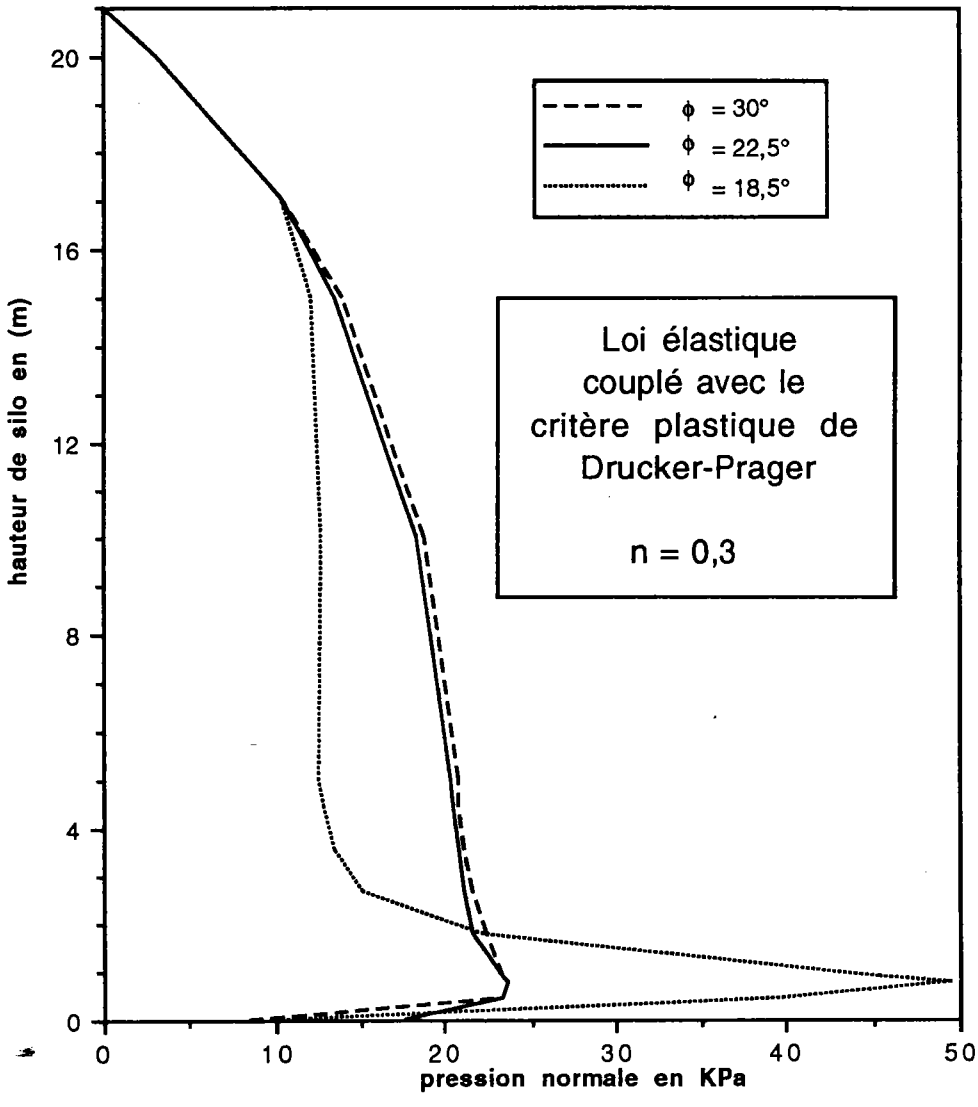


Figure 2-10 Influence de ϕ sur la pression normale [38]

L'influence des paramètres du comportement dans le cadre du modèle élastique non linéaire de Boyce couplé avec le critère plastique de Drucker-Prager a était étudiée par [38]. Le produit ensilé utilisé est le blé avec les paramètres élastiques déduits des essais effectués au L.M.S. [21]. La figure 2-10 présente trois distributions de pression normale le long de la paroi, obtenues pour différentes valeurs de l'angle de frottement interne (respectivement 18,5°, 22,5° et 30°), faites par [38]. Dans le premier cas l'effet de pic près du fond de la cellule est amplifié, ce qui tend à réduire la valeur approximative de la pression normale asymptotique. Ce cas ne correspond pas à l'expérience; on ne peut jamais trouver dans la norme

française une matière ensilée avec un angle de frottement interne inférieur à 22°. La valeur moyenne de l'angle de frottement interne pour 20 matériaux présentés dans cette norme est 30,5°, ce qui est très différent avec le premier cas.

Les deux autres courbes dans la figure 2-10, correspondent pourtant à deux valeurs assez différentes de ϕ (22,5° et 30°), restent quasiment identiques sur toute la hauteur de la cellule. Par conséquent, il semblerait que la prise en compte de l'angle de frottement interne dans le modèle numérique n'ait pas de répercussions importantes sur la distribution des pressions normales [38].

Par conséquent, l'influence des paramètres caractéristiques complexes du matériau ensilé sur le calcul de la pression normale à la paroi reste faible; surtout si l'assimilation de frottement sur la paroi est adoptée avec une bonne précision.

2.3.2.3. L'effet de la non linéarité élastique sur la pression normale

Le paramètre de non linéarité de la loi de Boyce n, traduit un comportement réel et fortement non linéaire pour n=0,3 (la linéarité étant réalisée pour n=1), figure 2-11. $\bar{\sigma}$ est le niveau de contrainte moyen à mi-hauteur du silo. Pour connaître l'effet de cette non linéarité, dans la figure 2-12, on a représenté les pressions normales à la paroi pour les deux cas extrêmes (n = 0,3 et n = 1), [38]. Les résultats présentés, figure 2-12, correspondent au cas d'un silo de hauteur 24m, de rayon 2m avec un coefficient de frottement à la paroi de 0,33 et un fond supposé lisse. Ils montrent que la distribution des pressions normales à la paroi pour ces deux cas extrêmes a sensiblement la même allure; elle est majorée d'environ 5% en élasticité linéaire, ce qui traduit un écart faible.

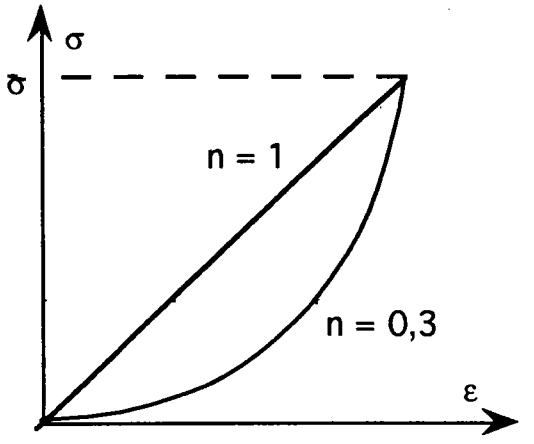


Figure 2-11 Présentation du paramètre de non linéarité *n*

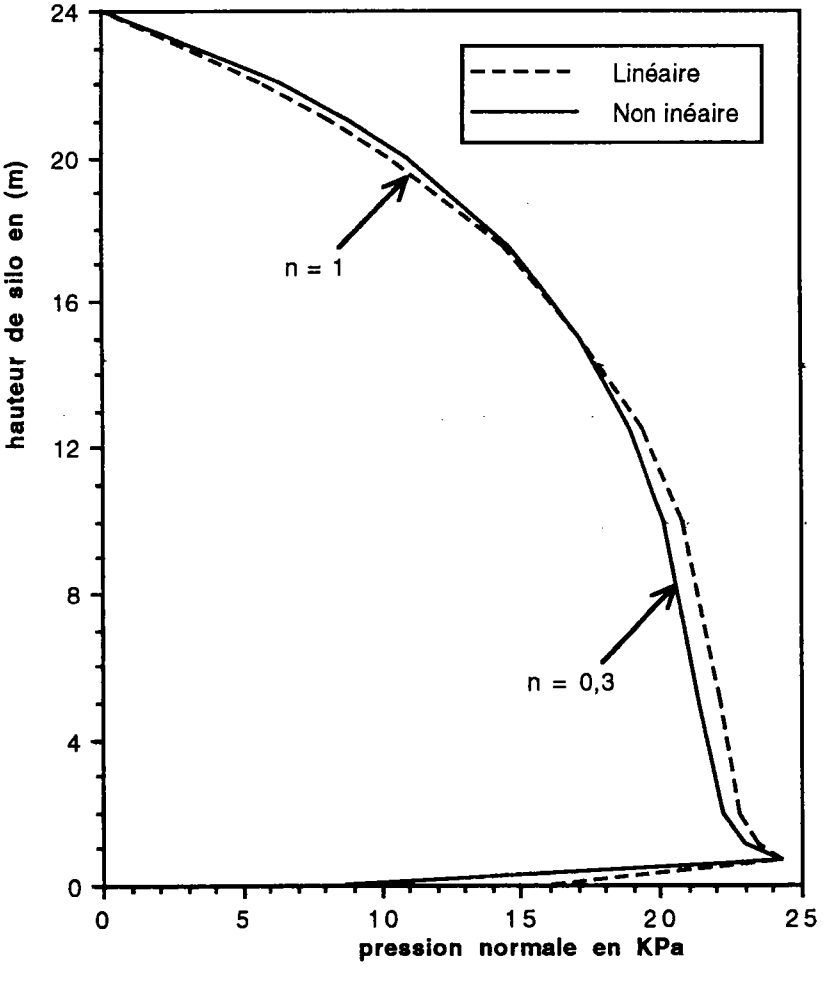


Figure 2-12 Comparaison de la distribution de pressions normales obtenues pour les deux cas de comportement linéaire et fortement non linéaire du produit ensilé

CHAPITRE: 3

FORMULATION PAR ÉLÉMENTS FINIS DU PROBLÈME POSÉ

3.1. GÉNÉRALITÉS

Le silo circulaire et les matériaux ensilés sont supposés chacun comme un matériau élastique linéaire et homogène. Cette hypothèse élémentaire, est faite car le matériau ensilé constitue un bloc solide contre la paroi et un modèle élémentaire comme celui-ci peut être utile pour les calculs plus complexe. Les résultats qui résultent de cette théorie simple, montrent que ces hypothèses sont valables.

Le matériau ensilé et la paroi du silo sont modélisés comme étant des solides axisymétriques à l'aide de la méthode des éléments finis [6]. Les éléments utilisés sont isoparamétriques et pendant ce travail, l'analyse avec les éléments à trois, quatre et huit noeuds est testée. L'élément quadratique à huit noeuds (avec quatre points d'intégration de Gauss [53]) fournis de meilleurs résultats de ce problème pour un nombre de degré de liberté total donné. Un maillage typique est montré pour représenter une section radiale de matériaux ensilés et du silo; on prend un maillage fin près du fond, de la jonction cellule-trémie et de la paroi, figure 3-1. L'interface matériau-paroi, en général, est modélisée par deux éléments de contact, à quatre et à six noeuds. Les matériaux ensilés sont traités comme ayant une densité uniforme, et les contraintes résiduelles qui se développent pendant le remplissage progressif sont négligées.

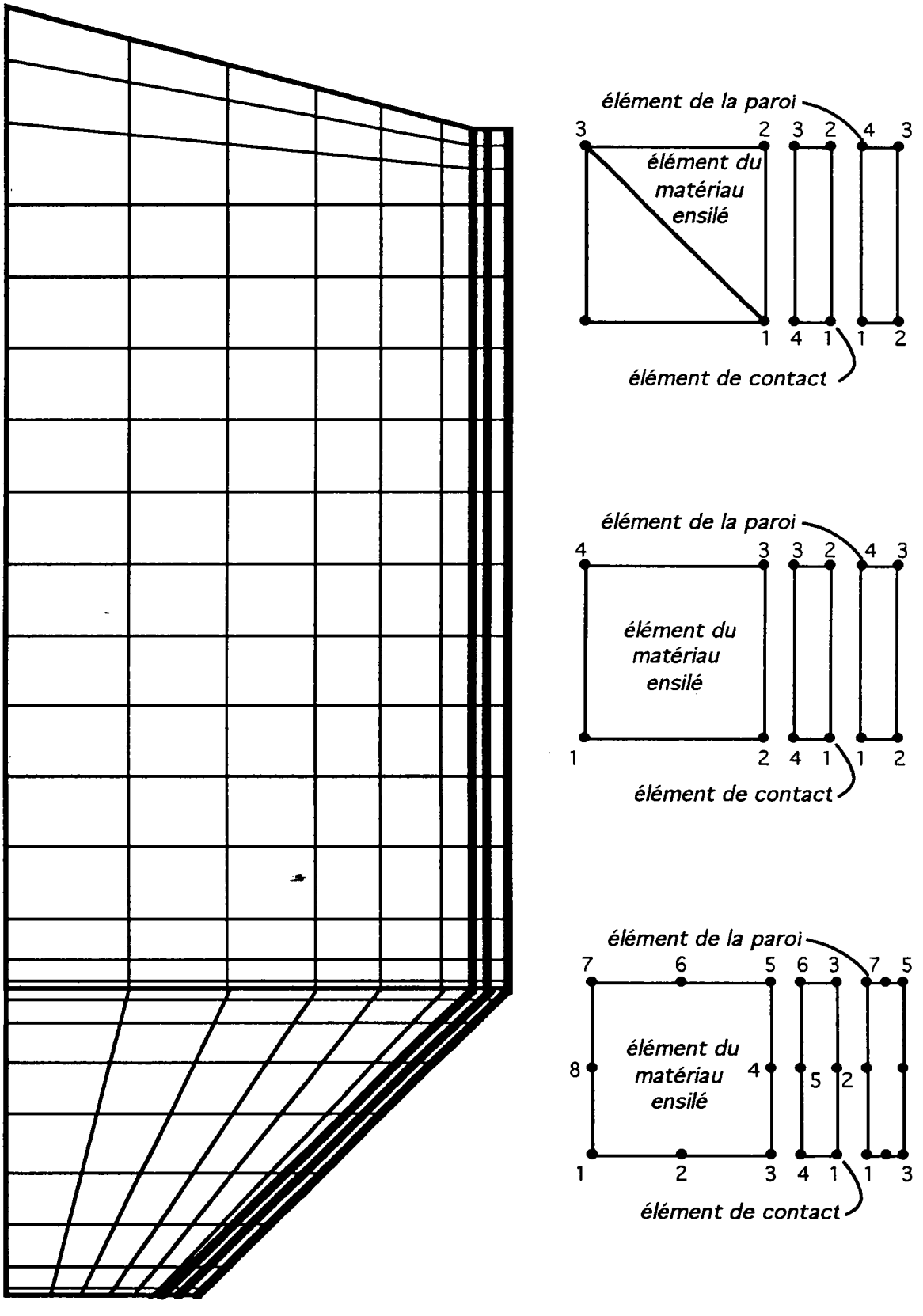


Figure 3-1 Maillage typique

3.2. MODÉLISATION DU MATÉRIAU ENSILÉ ET DE LA PAROI

3.2.1. GÉNÉRALITÉS

La méthode des éléments finis est une technique particulière d'approximation des fonctions solutions par sous-domaines. Grâce à la géométrie du matériau ensilé dans un silo circulaire, c'est-à-dire, un corps à symétrie de révolution soumis à un chargement ayant la même symétrie, on prend en considération la symétrie du problème comme pour un corps axisymétrique [43]. La figure 3-2 présente un élément de volume de ce corps.

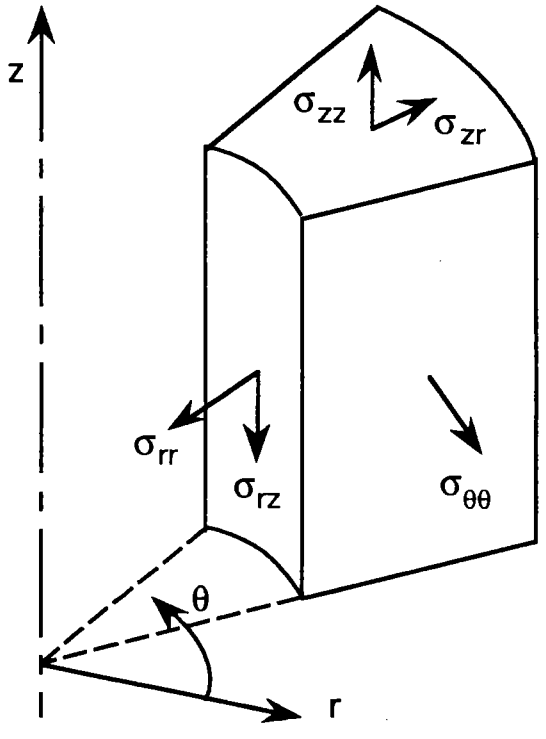


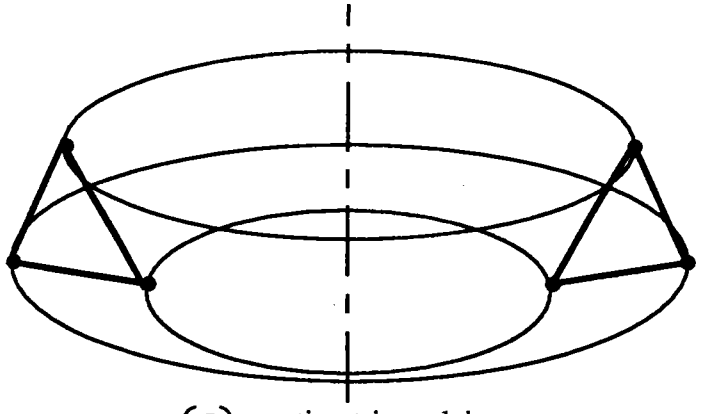
figure 3-2 Les contraintes dans un problème axisymétrique

Le problème théorique est analogue à celui des contraintes planes ou des déformations planes car il est, ici encore, bidimensionnel. Pour des raisons de symétrie, les deux composantes du déplacement dans toute section plane contenant l'axe de symétrie définissent complètement le champs des déformations et donc les

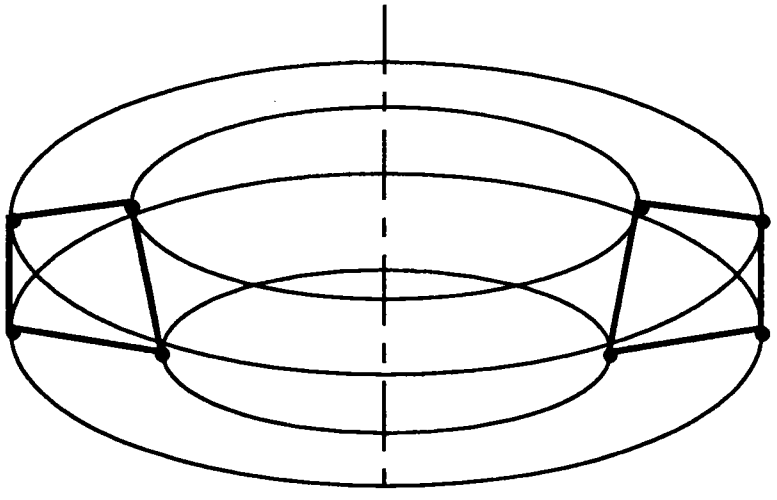
contraintes. Une telle section plane est représentée sur la figure 3-3. On voit bien qu'un élément axisymétrique est un tore de section, par exemple, triangulaire ou quadrilatérale.

Soient r et z respectivement les composantes radiale et axiale d'un point, u et v les déplacements correspondants, on trouve immédiatement que les fonctions définissant le déplacement de l'élément axisymétrique sont celles de l'élément plan bidimensionnel.

Dans les problèmes d'élasticité plane, le travail interne est associé aux trois composantes de la déformation dans le plan, la composante normale de la contrainte n'intervenant jamais, soit parce qu'elle est elle-même nulle, soit parce que la composante correspondante du déplacement est nulle.



(a) section triangulaire



(b) section quadrilatérale

Figure 3-3 Les éléments axisymétriques toriques

En symétrie de révolution, la composante radiale du déplacement produit automatiquement une déformation tangentielle et comme la contrainte correspondante est sûrement différente de zéro, il faut faire intervenir une quatrième composante des déformations et des contraintes. C'est là que réside la différence essentielle de la symétrie de révolution, [6] et [53].

3.2.2. THÉORIE DE BASE

Le principe des déplacements virtuels et du minimum d'énergie potentielle totale jouent un rôle important dans les méthodes de calcul des structures élastiques par éléments finis. Dans le cas où l'on ne considère que des sollicitations statiques ne dépendant pas de l'état de déformation (ce qui est le cas en théorie linéaire classique de l'élasticité) on peut définir une fonctionnelle Π [6-13-44-48-52], appelée énergie potentielle totale telle que:

$$W = \delta(\Pi(\underset{\sim}{u}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \underset{\sim}{u}} . \delta \underset{\sim}{u} = 0 \qquad (3.2.1)$$

W est la forme intégrale de type Galerkin conduisant aux modèles déplacements en éléments finis et:

$$\Pi(u,w) = \Pi_{int}(u,w) - \Pi_{ext}(u,w) \qquad (3.2.2)$$

où Π_{int} est l'énergie interne de déformation (forme quadratique en $\{\varepsilon\}$):

$$\Pi_{int}(u,w) = 2\pi \int_A (\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T[H]\{\varepsilon\}\, r\, dr\, dz \qquad (3.2.3)$$

et $-\Pi_{ext}$ est le potentiel des forces de volume et de surface (forme linéaire en $\underset{\sim}{u}$):

$$\Pi_{ext}(u,w) = 2\pi \int_A \{u\}^T\{f_v\}\, r\, dr\, dz + 2\pi \int_{S_f} \{u\}^T\{f_s\}\, r\, ds \qquad (3.2.4)$$

A représente l'aire du plan méridien (r, z) et S_f la partie de contour de ce plan où sont imposés les efforts. $\{f_v\}$ et $\{f_s\}$ sont respectivement les forces de volume et surfaciques:

$$\{f_v\}^T = \langle f_r \;\; f_z \rangle \text{ et } \{f_s\}^T = \langle f_{sr} \;\; f_{sz} \rangle \tag{3.2.5}$$

La solution {u} du problème d'élasticité correspond à un minimum de l'énergie potentielle totale. Le principe du minimum de l'énergie potentielle totale s'énonce ainsi [6]:

> «Parmi tous les champs de déplacements cinématiquement admissibles celui qui rend Π minimum correspond à la solution du problème».

Les quantités importantes sont récapitulées par la suite [43]:

Les composantes des contraintes:

$$\{\sigma\}^T = \langle \sigma_{rr} \;\; \sigma_{\theta\theta} \;\; \sigma_{zz} \;\; \tau_{rz} \rangle \tag{3.2.6}$$

Les composantes des déformations:

$$\{\varepsilon\}^T = \langle \varepsilon_{rr} \;\; \varepsilon_{\theta\theta} \;\; \varepsilon_{zz} \;\; \gamma_{rz} \rangle \tag{3.2.7}$$

Les relations entre les déformations et les déplacements:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \qquad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \tag{3.2.8}$$

Pour un matériau isotrope la matrice d'élasticité:

$$[H] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ & & 1-\nu & 0 \\ \text{sym} & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

Dans le domaine des matériaux granulaires, on s'intéresse aux modules de compressibilité K et de cisaillement G:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad \text{et} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{3.2.9a}$$

3.2.3. ELEMENT TRIANGULAIRE AXISYMETRIQUE (T3)

L'élément est un tore de section triangulaire, figures 3-3a et 3-4. On représente ici l'élément de référence et l'élément réel dans un plan rz pour $\theta=\zeta=0$, [6].

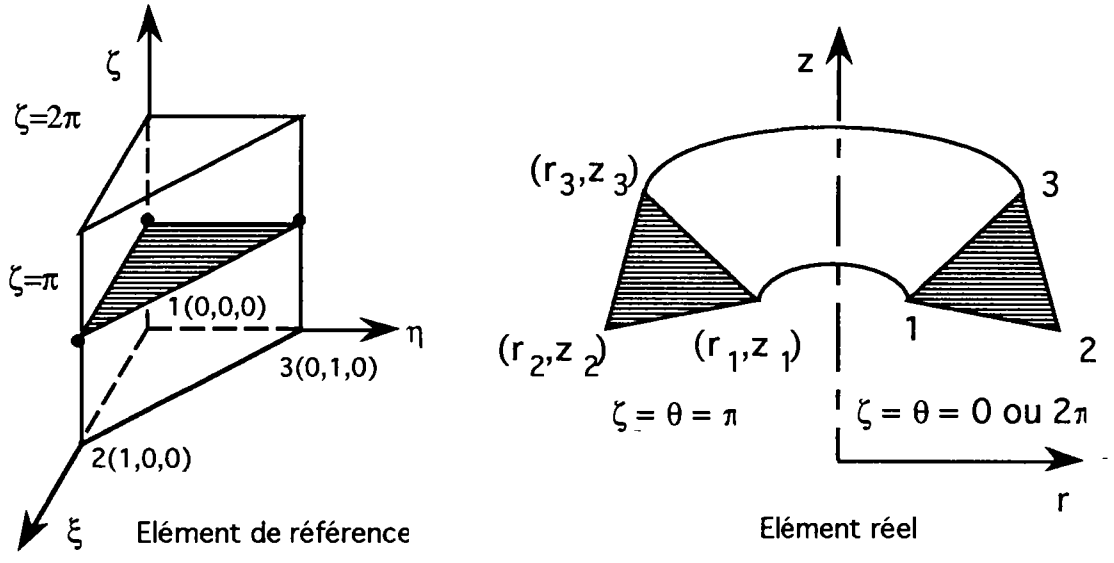


Figure 3-4 La géométrie de l'élément triangulaire

Les fonctions d'interpolation pour u, w, r et z (élément isoparamétrique) sont définies par:

$$N_1 = \lambda, \qquad \text{avec } \lambda = 1 - \xi - \eta \tag{3.2.10}$$
$$N_2 = \xi$$
$$N_3 = \eta$$

et donc:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} = [N]\{U\} \tag{3.2.11}$$

[N] est la matrice des fonctions d'interpolation (fonctions de formes), et
{U} est le vecteur des degrés de liberté (ddl) de l'élément, ou bien le vecteur de déplacements nodaux.

En considérant les équations (3.2.8), les déformations axisymétriques sont:

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}$$

Compte tenir la relation (3.2.11), l'équation précédente s'écrit:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\} \tag{3.2.12}$$

[B] est la matrice reliant les déformations aux déplacements nodaux:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} z_{23} & 0 & z_{31} & 0 & z_{12} & 0 \\ \frac{\lambda}{r}2A & 0 & \frac{\xi}{r}2A & 0 & \frac{\eta}{r}2A & 0 \\ 0 & r_{32} & 0 & r_{13} & 0 & r_{21} \\ r_{32} & z_{23} & r_{13} & z_{31} & r_{21} & z_{12} \end{bmatrix} \tag{3.2.13}$$

avec:

$$2A = z_{31}r_{21} - r_{31}z_{21}$$
$$r_{ij} = r_j - r_i \; ; \quad z_{ij} = z_j - z_i$$

A est la surface de l'élément.

Le domaine d'intégration est:

$$\int_{Ve} (...)\, dV = 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-\xi} (...) r\, J\, d\eta\, d\xi \tag{3.2.14}$$

J est le déterminant de la matrice jacobienne de transformation:

$$[J] = \begin{bmatrix} r_{21} & z_{21} \\ r_{31} & z_{31} \end{bmatrix} \tag{3.2.15}$$

et pour ce cas J = 2A. L'élément d'aire est: $dS = J\, d\xi\, d\eta$

La matrice de rigidité est intégrée numériquement:

$$[K]_{6\times6} = \sum_{i=1}^{NPI} ([B]^T(\omega_i 2A.2\pi r.[H])[B])_{\xi_i,\eta_i} \tag{3.2.16}$$

où $[H]_{4\times4}$ est la matrice d'élasticité et ω_i est le poids d'intégration numérique. NPI est le nombre de points d'intégration numérique.

En général [K] est évaluée par intégration réduite avec un seul point:

$$\xi_i = \eta_i = \frac{1}{3}; \quad \omega_i = \frac{1}{2}; \qquad r_m = \frac{1}{3}(r_1 + r_2 + r_3)$$

soit

$$[K]_{6\times6} = 2\pi A r_m [B]^T[H][B] \tag{3.2.17}$$

où la matrice [B] correspond à l'équation (3.2.13) sauf pour la seconde linge de la matrice qui est alors:

$$\frac{1}{r_m} < \frac{1}{3} \;\; 0 \;\; \frac{1}{3} \;\; 0 \;\; \frac{1}{3} \;\; 0 >$$

Le rang de [K] est alors égal à 4. Il y a un mode de corps rigide (translation en z) et un mode parasite qui disparaît en assemblant deux éléments.

Le vecteur sollicitation dû à des forces de volumes $f_r(r,z)$ suivant r et $f_z(r,z)$ suivant z est:

$$\{f_v\}^T = \sum_{i=1}^{NPI} (<N_1 f_r \;\; N_1 f_z \;\; N_2 f_r \;\; N_2 f_z \;\; N_3 f_r \;\; N_3 f_z> \omega_i \, J \, 2\pi r)_{\xi_i, \eta_i} \quad (3.2.18)$$

pour f_z constant et $f_r = 0$ et en considérant la formule suivante pour l'intégration:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \xi^i \eta^i \, d\eta \, d\xi = \frac{i! \; j!}{(i+j+2)} \quad (3.2.19)$$

on trouve:

$$\{f_v\}^T = 2\pi f_z \frac{A}{12} < 0 \;\; r_1 + 3r_m \;\; 0 \;\; r_2 + 3r_m \;\; 0 \;\; r_3 + 3r_m > \quad (3.2.20)$$

Les contraintes en un point (r,z) sont reliées aux variables nodales par la relation suivante:

$$\{\sigma\} = [H][B]\{U\}$$

3.2.4. ÉLÉMENTS QUADRILATÉRAUX AXISYMÉTRIQUES

3.2.4.1. Élément quadrilatéral axisymétrique à quatre noeuds (Q4)

L'élément est un tore de section quadrilatérale. On présente ici l'élément de référence et l'élément réel dans un plan (r,z) pour θ=0, figure 3-5, [6].

Les fonctions de formes pour u, w, r et z (élément isoparamétrique) sont définis par:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \quad (3.2.21)$$

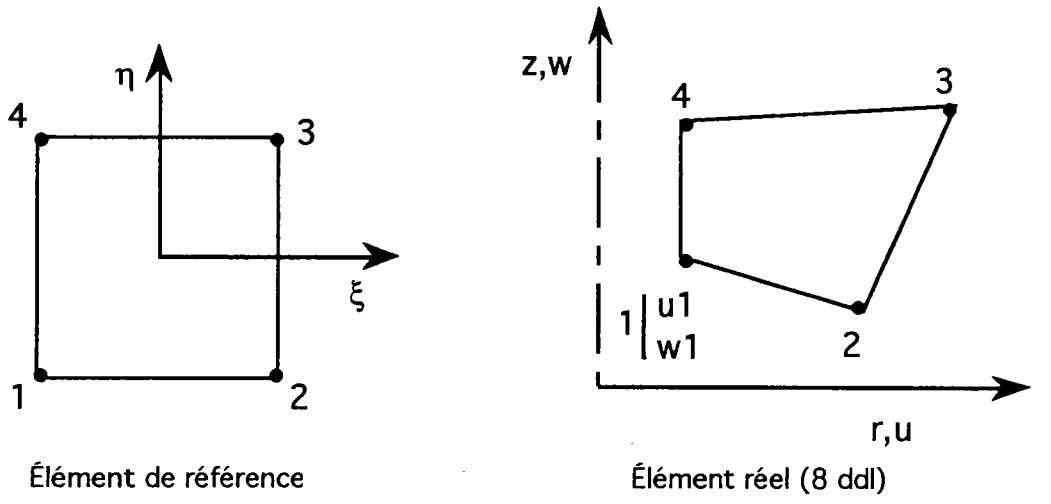


Figure 3-5 Elément quadrilatéral axisymétrique à quatre noeuds

La matrice jacobienne de transformation:

$$[J] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} r_{21}(1-\eta)+r_{34}(1+\eta) & z_{21}(1-\eta)+z_{34}(1+\eta) \\ r_{41}(1-\xi)+r_{32}(1+\xi) & z_{41}(1-\xi)+z_{32}(1+\xi) \end{bmatrix} \qquad (3.2.22)$$

et pour ce cas:

$$J = \det [J] = A_0 + A_1\xi + A_2\eta$$

avec:

$$A_0 = \frac{1}{8}(z_{42}r_{31} - z_{31}r_{42}) \text{ où } 4A_0 \text{ est l'aire du quadrilatère}$$

$$A_1 = \frac{1}{8}(z_{34}r_{21} - z_{21}r_{34}) \;;\quad A_2 = \frac{1}{8}(z_{41}r_{32} - z_{32}r_{41})$$

Pour l'élément d'aire on a: $dS = J\, d\xi\, d\eta$

La matrice [B] est:

$$[B]_{4\times 8} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 & \frac{N_4}{r} & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 & b_4 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & b_4 & a_4 \end{bmatrix}$$

(3.2.23)

avec:

$$a_i = N_{i,r} = j_{11}\, N_{i,\xi} + j_{12}\, N_{i,\eta}\ ; \qquad b_i = N_{i,z} = j_{21}\, N_{i,\xi} + j_{22}\, N_{i,\eta}\ ; \quad i = 1,\ldots,4$$

j_{ij} sont les composantes de la matrice inverse de [J], c'est-à-dire, $[J]^{-1}$.

Le calcul de [K] et $\{f_v\}$ s'effectue comme pour le triangle avec des schémas d'intégration du type Gauss. Pour cet élément les polynômes à intégrer sont quadratiques; un schémas de Gauss à quatre points (2×2) donne une intégration exacte.

3.2.4.2. Élément quadrilatéral axisymétrique à huit noeuds (Q8)

L'élément est un tore de section quadrilatérale, figure 3-6. On présente ici l'élément de référence et l'élément réel dans un plan (r,z) pour θ=0, [6 et 43]:

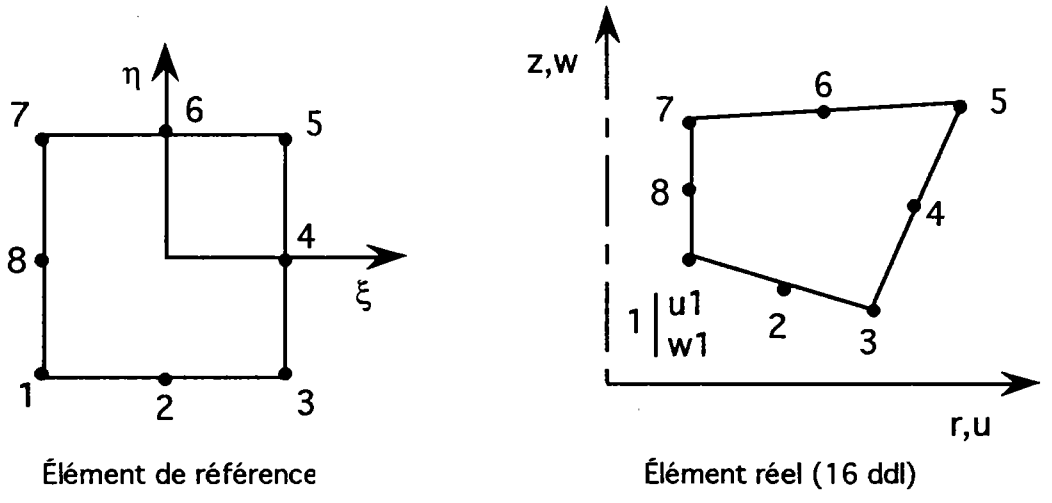


Figure 3-6 Elément quadrilatéral axisymétrique à 8 noeuds

Les fonctions de formes pour u, w, r et z (élément isoparamétrique) sont définis par:

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1) \qquad N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \qquad N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi)$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \qquad N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \tag{3.2.24}$$

$$N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1) \qquad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi)$$

Les déplacements de l'élément sont:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = [N]\{U\} \tag{3.2.25}$$

avec:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \tag{3.2.26}$$

$$\{U\}^T = < u_1\ w_1\ u_2\ w_2\ u_3\ w_3\ u_4\ w_4\ u_5\ w_5\ u_6\ w_6\ u_7\ w_7\ u_8\ w_8 > \tag{3.2.27}$$

La matrice de rigidité:

$$[K]_{16\times16} = 2\pi \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B]^T[H][B]\, rJ\, d\eta\, d\xi \tag{3.2.28}$$

où:

$$[B]_{4\times16} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 & 0 & \dots & a_8 & 0 \\ \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} & 0 & \dots & \frac{N_8}{r} & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & \dots & 0 & b_8 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & \dots & b_8 & a_8 \end{bmatrix} \tag{3.2.29}$$

avec:

$$a_i = N_{i,r} = j_{11}\, N_{i,\xi} + j_{12}\, N_{i,\eta}\ ; \qquad b_i = N_{i,z} = j_{21}\, N_{i,\xi} + j_{22}\, N_{i,\eta}\ ; \quad i = 1,\dots,8$$

j_{ij} est les composantes de la matrice inverse de [J], c'est-à-dire, $[J]^{-1}$.

$$\{f_v\}^T_{16\times1} = 2\pi \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [N]^T \begin{Bmatrix} f_r \\ f_z \end{Bmatrix} rJ\, d\eta\, d\xi \qquad (3.2.30)$$

Pour l'élément plan à huit noeuds, on utilise souvent une intégration réduite 2×2 pour [K]. La matrice [K] a alors un rang [4] égal à 12 (un mode parasite et trois modes rigides; les modes parasites disparaissent en assemblant deux éléments). L'élément axisymétrique à huit noeuds a un rang égal à 15 (et un mode rigide), alors un schémas d'intégration de Gauss à quatre points donne une intégration exacte, [6].

3.3. MODÉLISATION DU CONTACT ENTRE LA PAROI ET LE MATÉRIAU ENSILÉ

3.3.1. ÉLÉMENTS DE CONTACT

Un élément de contact est introduit entre les matériaux ensilés et la paroi pour la modélisation des caractéristiques de frottement. La méthode d'utilisation d'un élément de contact pour la modélisation du frottement est expliquée par Goodman, [20] et [36]. On teste deux types d'éléments, élément de contact linéaire et quadratique.

3.3.1.1. Elément de contact linéaire pour un silo circulaire (C4)

En partant d'une équation d'énergie minimisée par rapport aux déplacements nodaux, la rigidité pour l'élément linéaire à quatre noeuds est obtenue. Cet élément de contact typique est représenté sur la figure 3-7.

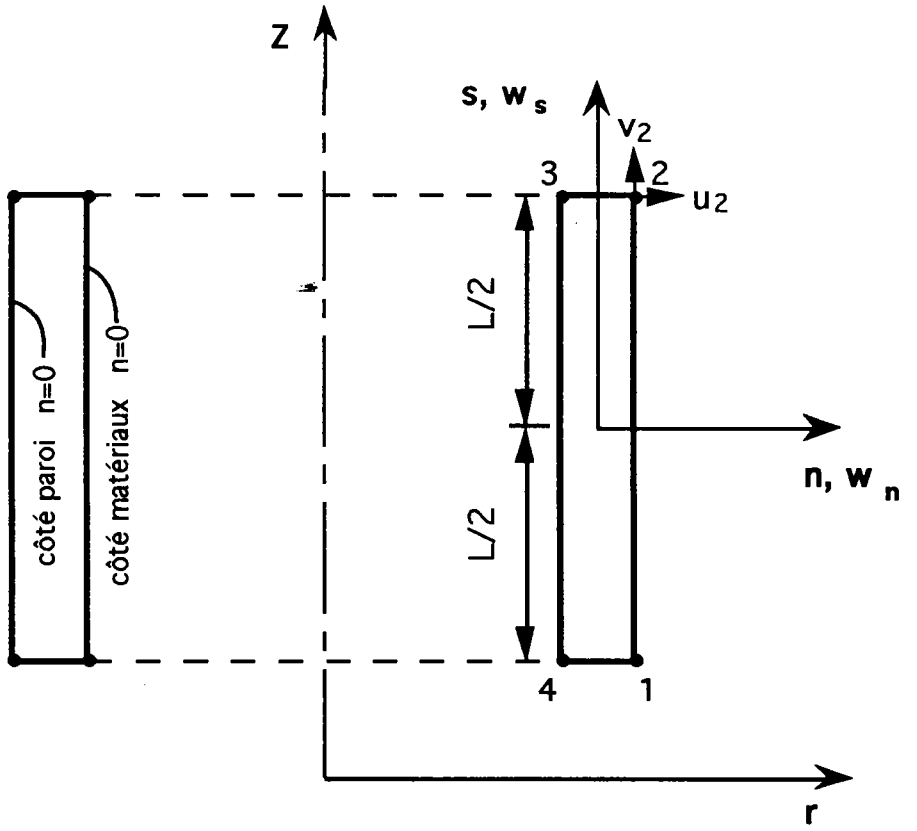


Figure 3-7 Elément de contact à quatre noeuds, système de coordonnées locales et globales, largeur = zéro

Cet élément est de longueur L et de largeur zéro, c'est-à-dire les couples de points (1,4) et (2,3) ont initialement les mêmes coordonnées.

En général, la matrice de rigidité pour un élément peut être obtenue à partir d'une fonctionnelle de l'énergie potentielle et en remplaçant les contraintes et les déformations en fonction des déplacements nodaux:

$$\Pi = \frac{1}{2}A\{u\}^T[K]\{u\} - L\{u\}^T\{F\} \tag{3.3.1}$$

où A est la surface de l'élément, L est la longueur qui est soumise à la charge répartie, [K] est la matrice de rigidité de l'élément et {F} est le vecteur des forces généralisées. En minimisant cette fonctionnelle, on obtient l'équation du système:

$$A[K]\{u\} = L\{F\} \tag{3.3.2}$$

En particulier, l'énergie potentielle, Π, de l'élément de contact est dûe aux forces appliquées par unité de surface, p_i, agissant le long de la trajectoire du déplacement, intégrée sur la surface de l'élément. Donc:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_A w_i\, p_i\, dA \tag{3.3.3}$$

où w_i est le déplacement relatif. En considérant un cylindre circulaire, on aura:

$$dA = Pds \tag{3.3.4}$$

P est le périmètre de la section du silo au point s. En remplaçant l'expression de dA dans l'équation (3.3.3), on trouve:

$$\Pi = \frac{1}{2}P\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} w_i\, p_i\, ds \tag{3.3.5}$$

ou sous forme matricielle:

$$\Pi = \frac{1}{2} P \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{w\}^T \{p\} \, ds \tag{3.3.6}$$

où $\{w\}$ est le vecteur de déplacements relatifs donnés par:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} w_n^m - w_n^p \\ w_s^m - w_s^p \end{Bmatrix} \tag{3.3.7}$$

w_n^m et w_s^m sont respectivement les déplacements normal et tangentiel sur les matériaux ensilés avec les exposants m,
w_n^p et w_s^p sont ceux sur la paroi avec les exposants p, et:

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_n \\ p_s \end{Bmatrix} \tag{3.3.8}$$

est le vecteur des pressions (contraintes) normale et tangentielle.

Le vecteur $\{p\}$ peut être exprimé comme suit:

$$\{p\} = [k] \, \{w\} \tag{3.3.9}$$

[k] est une matrice diagonale des propriétés , exprimant la rigidité de l'élément de contact par unité de longueur dans les directions normale et tangentielle:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \tag{3.3.10}$$

k_s, c'est-à-dire, la rigidité tangentielle de l'élément de contact est une quantité non-linéaire par rapport à la hauteur de silo.

Les équations (3.3.6) et (3.3.9) donnent:

$$\Pi = \frac{1}{2} P \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{w\}^T [k] \{w\} \, ds \tag{3.3.11}$$

Les déplacements $\{w\}$ peuvent être exprimés en fonction des déplacements nodaux $\{u\}$ à partir d'une interpolation linéaire:

$$N_1 = \frac{1}{2} - \frac{s}{L} \qquad N_2 = \frac{1}{2} + \frac{s}{L} \tag{3.3.12}$$

Soient u_i et v_i respectivement les déplacements dans les directions normale et tangentielle au point nodal i, appartenant à la paroi:

$$\begin{Bmatrix} w_n^p \\ w_s^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{s}{L} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{s}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{s}{L} & 0 & \frac{1}{2} + \frac{s}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{3.3.13}$$

et au point appartenant aux matériaux ensilés:

$$\begin{Bmatrix} w_n^m \\ w_s^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{s}{L} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{s}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{s}{L} & 0 & \frac{1}{2} - \frac{s}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{3.3.14}$$

alors le déplacement relatif de l'élément de contact devient:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} w_n^m - w_n^p \\ w_s^m - w_s^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{3.3.15}$$

et symboliquement:

$$\{w\} = [B]\,\{u\} \tag{3.3.16}$$

[B] et {u} sont définis par l'équation (3.3.15). Les équations (3.3.11) et (3.3.16) donnent:

$$\Pi = \frac{1}{2} P \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{u\}^T [B]^T [k][B]\{u\}\, ds \tag{3.3.17}$$

Le développement de l'équation (3.3.17) donne:

$$[B]^T[k][B] = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 \\ -N_2 & 0 \\ 0 & -N_2 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & N_2 & 0 & N_1 \end{bmatrix} \tag{3.3.18}$$

d'où:

$$[B]^T[k][B] =$$

$$\begin{bmatrix} N_1^2k_n & 0 & N_1N_2k_n & 0 & -N_1N_2k_n & 0 & -N_1^2k_n & 0 \\ 0 & N_1^2k_s & 0 & N_1N_2k_s & 0 & -N_1N_2k_s & 0 & -N_1^2k_s \\ N_1N_2k_n & 0 & N_2^2k_n & 0 & -N_2^2k_n & 0 & -N_1N_2k_n & 0 \\ 0 & N_1N_2k_s & 0 & N_2^2k_s & 0 & -N_2^2k_s & 0 & -N_1N_2k_s \\ -N_1N_2k_n & 0 & -N_2^2k_n & 0 & N_2^2k_n & 0 & N_1N_2k_n & 0 \\ 0 & -N_1N_2k_s & 0 & -N_2^2k_s & 0 & N_2^2k_s & 0 & N_1N_2k_s \\ -N_1^2k_n & 0 & -N_1N_2k_n & 0 & N_1N_2k_n & 0 & N_1^2k_n & 0 \\ 0 & -N_1^2k_s & 0 & -N_1N_2k_s & 0 & N_1N_2k_s & 0 & N_1^2k_s \end{bmatrix} \tag{3.3.19}$$

Dans l'exploitation de l'équation (3.3.17), compte tenu de la relation (3.3.19), les seuls termes qui varient sur la longueur, sont les trois termes N_1^2, N_2^2 et N_1N_2; on a donc trois intégrales à évaluer:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_1^2\, ds = \frac{L}{3}; \qquad \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_2^2\, ds = \frac{L}{3} \qquad (3.3.20 \text{ et } 21)$$

et

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_1 N_2\, ds = \frac{L}{6} \qquad (3.3.22)$$

En utilisant ces résultats, l'intégration de l'équation (3.3.17) donne:

$$\Pi = \frac{1}{2} L P \{u\}^T [K]\, \{u\} \qquad (3.3.23)$$

avec:

$$[K] = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} [K_1] & [K_2] \\ [K_2] & [K_1] \end{bmatrix}$$

où:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 2k_n & 0 & k_n & 0 \\ & 2k_s & 0 & k_s \\ \text{Sym} & & 2k_n & 0 \\ & & & 2k_s \end{bmatrix}; \quad [K_2] = \begin{bmatrix} -k_n & 0 & -2k_n & 0 \\ & -k_s & 0 & -2k_s \\ \text{Sym} & & -k_n & 0 \\ & & & -k_s \end{bmatrix}$$

ou bien:

$$[K]_{8\times 8} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2k_n & 0 & k_n & 0 & -k_n & 0 & -2k_n & 0 \\ & 2k_s & 0 & k_s & 0 & -k_s & 0 & -2k_s \\ & & 2k_n & 0 & -2k_n & 0 & -k_n & 0 \\ & & & 2k_s & 0 & -2k_s & 0 & -k_s \\ & & & & 2k_n & 0 & k_n & 0 \\ & & \text{Sym} & & & 2k_s & 0 & k_s \\ & & & & & & 2k_n & 0 \\ & & & & & & & 2k_s \end{bmatrix} \qquad (3.3.24)$$

Par analogie à l'équation (3.3.1), [K] est la matrice de rigidité par unité de surface. Le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'équation (3.3.23) sera éliminé en prenant la variation de Π comme dans l'équation (3.3.2).

La matrice de rigidité de l'élément de contact a 32 composantes non-nulles et elle ne dépend que des rigidités dans les directions normale et tangentielle.

3.3.1.2. Elément de contact linéaire pour la partie conique (CT4)

Dans le cas général, la dernière étape pour l'obtention de la matrice de rigidité de l'élément de contact est la définition des calculs dans le système global pour la structure entière. Pour cela, en considérant la figure 3-8 on peut écrire:

$$\begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} = [T_o] \begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} \tag{3.3.25}$$

avec:

$$[T_o] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

où n et s sont les coordonnées locales dans les directions normale et tangentielle sur la paroi et $[T_o]$ est la matrice de passage aux coordonnées globales r et z. θ est l'angle entre la paroi et l'axe vertical. On peut le déterminer à partir de la relation suivante:

$$tg\theta = (\frac{dr}{dz})_i = \frac{\Sigma N_i' r_i}{\Sigma N_i' z_i} \tag{3.3.26}$$

i est le nombre des noeuds sur un côté de l'élément et N_i' est la première dérivée de la fonction de forme appartenant au noeud i.

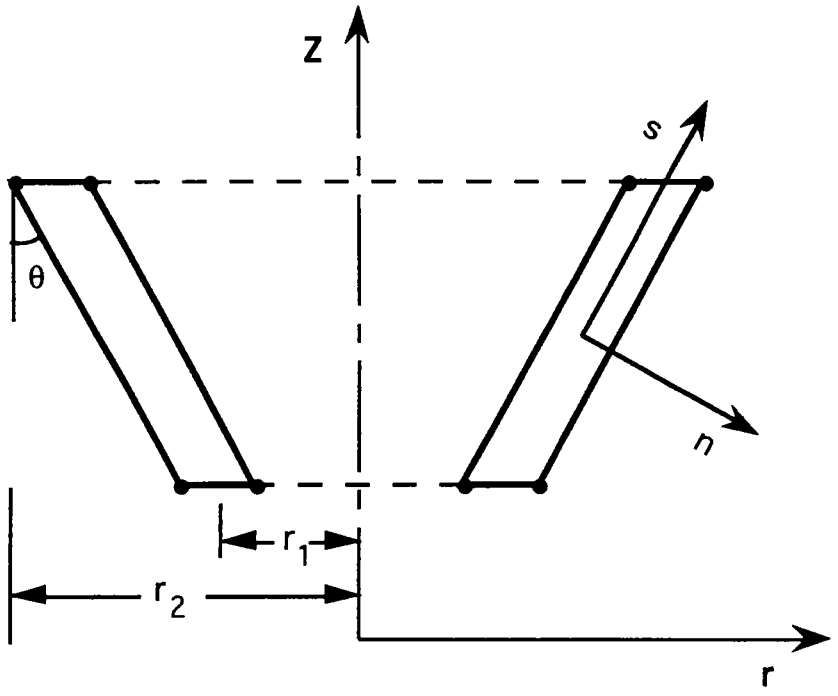


Figure 3-8 Systèmes de coordonnées local et global

La relation entre les déplacements nodaux dans les systèmes local et global à partir de la matrice $[T_o]$, s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} = [T_o] \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix} \tag{3.3.27}$$

U_i et V_i sont les déplacements normal et tangentiel du noeud i dans le système global. Pour l'ensemble des noeuds d'un élément, on peut écrire la relation suivante à partir de l'équation précédente:

$$\{u\} = [T]\{u_g\} \tag{3.3.28}$$

où $\{u_g\}$ est le vecteur de déplacements nodaux dans le système global et:

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_o] & & & \\ & [T_o] & & \\ & & [T_o] & \\ & & & [T_o] \end{bmatrix} \tag{3.3.29}$$

est une matrice 8×8 pour un élément de contact à quatre noeuds.

Pour un élément de contact conique, applicable à la partie de trémie du silo, figure 3-8, l'équation (3.3.17) se récrit:

$$\Pi = \frac{1}{2}(2\pi)\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{u_g\}^T[T]^T[B]^T[k][B][T]\{u_g\} r ds \qquad (3.3.30)$$

avec:

$$r = r_m + s\sin\theta \qquad (3.3.31)$$

r_m est le rayon moyen de l'élément, c'est-à-dire, $(r_1+r_2)/2$, figure 3-8.

Dans l'exploitation de l'équation (3.3.30), compte tenu de la relation (3.3.19), les seuls termes qui varient sur la longueur, sont les trois termes rN_1^2, rN_2^2 et rN_1N_2; on a donc trois intégrales à évaluer:

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_1^2 r ds = \frac{L}{3}\left(r_m - \frac{L\sin\theta}{4}\right); \qquad \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_2^2 r ds = \frac{L}{3}\left(r_m + \frac{L\sin\theta}{4}\right) \qquad (3.3.32 \text{ et } 33)$$

et

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} N_1 N_2 r ds = \frac{L}{6} r_m \qquad (3.3.34)$$

Compte tenu de ces résultats, l'intégration de l'équation (3.3.30) donne:

$$\Pi = \frac{1}{2}(2\pi L)\{u_g\}^T[T]^T[K_e]\,[T]\{u_g\} \qquad (3.3.35)$$

avec:

$$[K_e]_{8\times 8} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2ak_n & 0 & ck_n & 0 & -ck_n & 0 & -2ak_n & 0 \\ & 2ak_s & 0 & ck_s & 0 & -ck_s & 0 & -2ak_s \\ & & 2bk_n & 0 & -2bk_n & 0 & -ck_n & 0 \\ & & & 2bk_s & 0 & -2bk_s & 0 & -ck_s \\ & & & & 2bk_n & 0 & ck_n & 0 \\ & & \text{Sym} & & & 2bk_s & 0 & ck_s \\ & & & & & & 2ak_n & 0 \\ & & & & & & & 2ak_s \end{bmatrix} \qquad (3.3.36)$$

où:

$$a = r_m - \frac{L\sin\theta}{4}; \qquad b = r_m + \frac{L\sin\theta}{4} \quad \text{et} \quad c = r_m \qquad (3.3.37)$$

La matrice de rigidité élémentaire dans le système global s'écrit:

$$[K_g] = [T]^T[K_e]\,[T] \qquad (3.3.38)$$

Par analogie à l'équation (3.3.1), $[K_g]$ est la matrice de rigidité par unité de longueur. Le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'équation (3.3.35) sera éliminé en prenant la variation de Π.

Pour une paroi cylindrique, avec une surface moyenne de rayon R, la matrice de passage [T] est une matrice unique.

3.3.1.3. Elément de contact quadratique pour un silo circulaire (C6)

En considérant la figure 3-9, on peut écrire pour un élément quadratique à une dimension les fonctions de formes comme suit [43]:

$$N_1 = -\frac{\eta}{2}(1-\eta)$$

$$N_2 = (1+\eta)(1-\eta) \qquad (3.3.39)$$

$$N_3 = \frac{\eta}{2}(1+\eta)$$

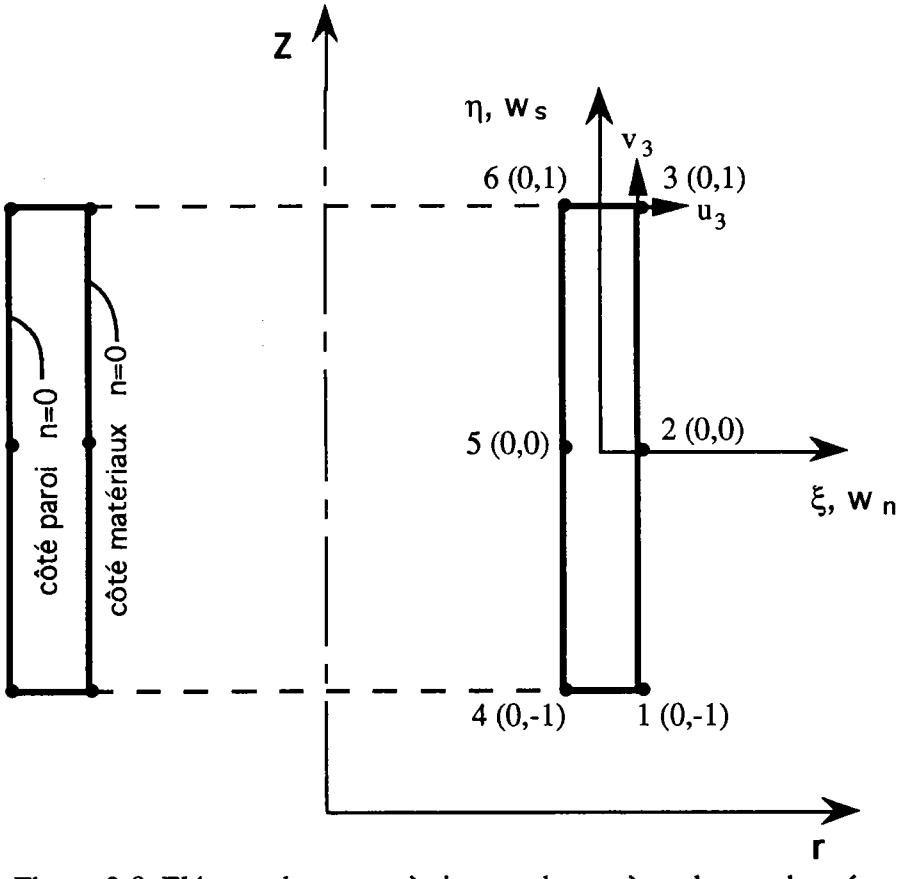


Figure 3-9 Elément de contact à six noeuds, système de coordonnées locales et globales, largeur = zéro

Les déplacements relatifs {w} peuvent être exprimés en fonction des déplacements nodaux {u} comme la démarche précédente pour un élément à quatre noeuds à partir des fonctions de formes. Au point nodal i, appartenant à la paroi:

$$\begin{Bmatrix} w_n^p \\ w_s^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{3.3.40}$$

et au point appartenant aux matériaux ensilés:

$$\begin{Bmatrix} w_n^m \\ w_s^m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} \tag{3.3.41}$$

alors le déplacement relatif de l'élément de contact devient:

$$\{w\} = \begin{Bmatrix} w_n^m - w_n^p \\ w_s^m - w_s^p \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{3.3.42}$$

et symboliquement:

$$\{w\} = [B]\,\{u\} \tag{3.3.43}$$

[B] et {u} sont définis par l'équation (3.3.42). Les équations (3.3.11) et (3.3.43) donnent:

$$\Pi = \frac{1}{2} P \int_{-1}^{1} \{u\}^T [B]^T [k][B]\{u\} \det[J]\, d\eta \tag{3.3.44}$$

avec:

$$[J] = \left[\left(\frac{dr}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.3.45}$$

[J] est la matrice jacobienne avec une seule composante.

Le développement de l'équation (3.3.44) donne:

$$[B]^T[k][B] =$$

$$\begin{bmatrix} -N_1 & 0 \\ 0 & -N_1 \\ -N_2 & 0 \\ 0 & -N_2 \\ -N_3 & 0 \\ 0 & -N_3 \\ N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{3.3.46}$$

d'où:

$$[B]^T[k][B] = \begin{bmatrix} [K_0] & -[K_0] \\ -[K_0] & [K_0] \end{bmatrix} \tag{3.3.47}$$

avec:

$$[K_0] = \begin{bmatrix} N_1^2k_n & 0 & N_1N_2k_n & 0 & N_1N_3k_n & 0 \\ 0 & N_1^2k_s & 0 & N_1N_2k_s & 0 & N_1N_3k_s \\ N_1N_2k_n & 0 & N_2^2k_n & 0 & N_2N_3k_n & 0 \\ 0 & N_2N_1k_s & 0 & N_2^2k_s & 0 & N_2N_3k_s \\ N_3N_1k_n & 0 & N_3N_2k_n & 0 & N_3^2k_n & 0 \\ 0 & N_3N_1k_s & 0 & N_3N_2k_s & 0 & N_3^2k_s \end{bmatrix}$$

Dans l'exploitation de l'équation (3.3.44), compte tenu de la relation (3.3.47), les seuls termes qui varient sur la longueur, sont les six produits de N_1, N_2 et N_3, c'est-à-dire, N_1^2, N_2^2, N_3^2, N_1N_2, N_2N_3 et N_1N_3; on a donc six intégrales à évaluer:

$$\int_{-1}^{1} N_1^2\, d\eta = \frac{4}{15}; \qquad \int_{-1}^{1} N_2^2\, d\eta = \frac{16}{15};$$

$$\int_{-1}^{1} N_3^2\, d\eta = \frac{4}{15}; \qquad \int_{-1}^{1} N_1N_2\, d\eta = \frac{2}{15}; \qquad (3.3.48)$$

$$\int_{-1}^{1} N_2N_3\, d\eta = \frac{2}{15}; \qquad \int_{-1}^{1} N_1N_3\, d\eta = \frac{-1}{15}$$

En utilisant ces résultats et en développant de l'équation (3.3.44), on trouve:

$$\Pi = \frac{1}{2} LP\{u\}^T[K]\,\{u\} \qquad (3.3.49)$$

avec:

$$[K]_{12\times12} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} [K_1] & -[K_1] \\ -[K_1] & [K_1] \end{bmatrix}$$

où:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 4k_n & 0 & 2k_n & 0 & -k_n & 0 \\ & 4k_s & 0 & 2k_s & 0 & -k_s \\ & & 16k_n & 0 & 2k_n & 0 \\ & & & 16k_s & 0 & 2k_s \\ & \text{Sym} & & & 4k_n & 0 \\ & & & & & 4k_s \end{bmatrix}$$

ou bien:

$$[K]_{12\times12} = \frac{1}{30}\times$$

$$\begin{bmatrix} 4k_n & 0 & 2k_n & 0 & -k_n & 0 & -4k_n & 0 & -2k_n & 0 & k_n & 0 \\ & 4k_n & 0 & 2k_s & 0 & -k_s & 0 & -4k_s & 0 & -2k_s & 0 & k_s \\ & & 16k_n & 0 & 2k_n & 0 & -2k_n & 0 & -16k_n & 0 & -2k_n & 0 \\ & & & 16k_s & 0 & 2k_s & 0 & -2k_s & 0 & -16k_s & 0 & -2k_s \\ & & & & 4k_n & 0 & k_n & 0 & -2k_n & 0 & -4k_n & 0 \\ & & & & & 4k_s & 0 & k_s & 0 & -2k_s & 0 & -4k_s \\ & & & & & & 4k_n & 0 & 2k_n & 0 & -k_n & 0 \\ & & & & & & & 4k_s & 0 & 2k_s & 0 & -k_s \\ & & & \text{Sym} & & & & & 16k_n & 0 & 2k_n & 0 \\ & & & & & & & & & 16k_s & 0 & 2k_s \\ & & & & & & & & & & 4k_n & 0 \\ & & & & & & & & & & & 4k_s \end{bmatrix}$$

(3.3.50)

Comme l'élément linéaire et par analogie à l'équation (3.3.1), [K] est la matrice de rigidité de cet élément. Le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'équation (3.3.48) sera éliminé en prenant la variation de Π comme dans l'équation (3.3.2).

Cette matrice de rigidité de l'élément de contact a 72 composantes non-nulles et elle ne dépend que des rigidités dans les directions normale et tangentielle.

3.3.1.4. Elément de contact quadratique pour la partie conique (CT6)

Dans le cas général, la dernière étape pour l'obtention de la rigidité de l'élément de contact est la définition des calculs dans le système global pour la structure entière. La démarche est la même que pour l'élément à quatre noeuds. La matrice [T] pour ce cas est:

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_o] & & & & & \\ & [T_o] & & & & \\ & & [T_o] & & & \\ & & & [T_o] & & \\ & & & & [T_o] & \\ & & & & & [T_o] \end{bmatrix} \qquad (3.3.51)$$

[T] est une matrice 12×12 pour cet élément.

L'équation (3.3.44) se récrit:

$$\phi = \frac{1}{2}(2\pi)\int_{-1}^{1}\{u_g\}^T[T]^T[B]^T[k][B][T]\{u_g\}\det[J]r d\eta \qquad (3.3.52)$$

avec:

$$r = r_2 + s\sin\theta \qquad (3.3.53)$$

r_2 est le rayon de l'élément au deuxième noeud, c'est-à-dire, l'origine du système local, figure 3-9. s est interpolé comme suit:

$$s = N_i s_i\ ; \qquad i=1,3 \qquad (3.3.54)$$

Dans l'exploitation de l'équation (3.3.52), compte tenu de la relation (3.3.47), les seuls termes qui varient sur la longueur, sont les six termes rN_1^2, rN_2^2, rN_3^2, rN_1N_2, rN_2N_3 et rN_1N_3; on a donc six intégrales à évaluer:

$$\int_{-1}^{1} N_1^2\, r d\eta = \frac{4}{15}(r_2 - \frac{3}{8}L\sin\theta); \qquad \int_{-1}^{1} N_2^2\, r d\eta = \frac{16}{15} r_2$$

$$\int_{-1}^{1} N_3^2\, r d\eta = \frac{4}{15}\left(r_2+\frac{3}{8}L\sin\theta\right); \qquad \int_{-1}^{1} N_1 N_2\, r d\eta = \frac{2}{15}\left(r_2+\frac{L}{2}\sin\theta\right) \tag{3.3.55}$$

$$\int_{-1}^{1} N_2 N_3\, r d\eta = \frac{2}{15}\left(r_2-\frac{L}{2}\sin\theta\right); \qquad \int_{-1}^{1} N_1 N_3\, r d\eta = \frac{-1}{15} r_2$$

En utilisant ces résultats et en développant de l'équation (3.3.52), on trouve:

$$\phi = \frac{1}{2}(2\pi L)\{u_g\}^T[T]^T[K_e][T]\{u_g\} \tag{3.3.56}$$

avec:

$$[K_e]_{12\times 12} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} [K_1] & -[K_1] \\ -[K_1] & [K_1] \end{bmatrix} \tag{3.3.57}$$

où:

$$[K_1] = \begin{bmatrix} 4ak_n & 0 & 2dk_n & 0 & -ek_n & 0 \\ & 4ak_s & 0 & 2dk_s & 0 & -ek_s \\ & & 16ek_n & 0 & 2ck_n & 0 \\ & & & 16ek_s & 0 & 2ck_s \\ & \text{Sym} & & & 4bk_n & 0 \\ & & & & & 4bk_s \end{bmatrix}$$

avec:

$$a = r_2-\frac{3}{8}L\sin\theta \qquad d = r_2+\frac{L}{2}\sin\theta$$

$$b = r_2+\frac{3}{8}L\sin\theta \qquad e = r_2$$

$$c = r_2-\frac{L}{2}\sin\theta$$

La matrice de rigidité élémentaire dans le système global s'écrit:

$$[K_g] = [T]^T[K_e]\,[T] \tag{3.3.58}$$

Par analogie à l'équation (3.3.1), $[K_g]$ est la matrice de rigidité par unité de longueur. Le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'équation (3.3.56) sera éliminé en prenant la variation de Π.

Pour une paroi cylindrique, avec une surface moyenne de rayon R, la matrice de passage [T] est une matrice unique.

3.3.2. MODÉLISATION DU FROTTEMENT

L'élément de contact permet le déplacement relatif des noeuds entre les deux côtés de cet élément. La caractéristique essentielle du module normal est que l'élément de contact doit se comporter d'une manière beaucoup plus rigide que la paroi du silo.

3.3.2.1. Rigidité normale de l'élément de contact

La rigidité radiale de la paroi peut être précisément approximée en utilisant la théorie des coques [54]:

$$k_p = \frac{E_p t}{R^2} \tag{3.3.59}$$

où E_p est le module d'élasticité de la paroi, t est l'épaisseur de la paroi, et R est le rayon du silo. L'élément de contact est donc choisi pour avoir un module normal k_n de:

$$k_n = m.k_p = m.\frac{E_p t}{R^2} \tag{3.3.60}$$

où m est grand, par exemple de l'ordre de 1000. Par la variation du facteur m, ses évaluations sont obtenues à partir des erreurs de la prédiction de pression sur la paroi. La valeur de 1000 donne une erreur d'approximation de 0,1%.

3.3.2.2. Rigidité tangentielle de l'élément de contact

Le module de cisaillement est initialement choisi pour avoir une valeur égale à celle du module normal et elle est ensuite diminuée progressivement à partir du glissement entre les matériaux ensilés et la paroi. Le calcul est itératif (voir en annexes). Une fois que les déplacements de contact sont obtenus, on détermine les contraintes normale et tangentielle. Là où la contrainte normale trouvée est une traction, le module de cisaillement est remplacé par zéro pour l'itération suivante. Là où la contrainte normale trouvée, est une compression, la contrainte maximale de cisaillement (résistance au cisaillement) est déterminée comme suit:

$$\tau_m = \mu . p_n \qquad (3.3.61)$$

μ est le coefficient de frottement et il est fonction de la rugosité de la paroi. Si p_s n'est pas plus grande que τ_m, le module de cisaillement pour cet élément est laissé inchangé. Si p_s est plus grand que τ_m, le module de cisaillement est diminué de sorte que les déplacements existants satisfassent la limite plastique de cisaillement. De cette façon le module de l'itération i+1 est déterminé à partir de la valeur de l'itération i:

$$(k_s)_{i+1} = \frac{\tau_m}{p_s} (k_s)_i \qquad (3.3.62)$$

3.3.2.3. Critères de convergence

L'équation de système est itérativement résolue jusqu'à ce que la contrainte tangentielle, pour chaque élément, soit à moins de 5% de la contrainte maximale de cisaillement:

$$p_s < 0{,}95\ \tau_m \qquad (3.3.62)$$

et jusqu'à ce que l'intégrale de cisaillement pour tous les contacts de glissement soit à moins de 1% de l'intégrale de résistance au cisaillement:

$$\sum_{i=1}^{NEC} A_i(p_s)_i < 0{,}99 \sum_{i=1}^{NEC} A_i(\tau_m)_i \qquad (3.3.62)$$

NEC est le nombre d'éléments de contact et A_i est la surface de l'élément i. La condition précédente assure à peu de chose près l'équilibre total, tout en limitant la complication des calculs numériques [36].

CHAPITRE: 4

APPLICATION DE LA MÉTHODE PROPOSÉE AUX DIFFÉRENTS CAS DE SILOS

4.1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre on présente les résultats obtenus par l'exploitation de notre programme dans le cas de différentes structures de silos. Des comparaisons sont établies avec, les normes en vigueur, plusieurs théories classiques, les calculs numériques et les mesures expérimentales. Parmi ces exemples on trouve des silos élancés, des silos à élancement moyen et à faible élancement avec ou sans trémie. Les effets de différents paramètres, comme l'effet, du coefficient de frottement, du rapport R/t, du module d'élasticité et la rigidité globale, du coefficient de Poisson de la matière ensilée, de la hauteur d'ensilage et du poids volumique sur les résultats, sont exploités. Enfin, les aspects numériques du programme comme l'effet des différents éléments de maillage utilisés et l'effet du nombre d'éléments sur les pressions normales, sont étudiés.

4.2. SILOS À FAIBLE ÉLANCEMENT

La distribution de la pression normale à la paroi, dans un silo à faible élancement est tout à fait différente de celle des silos élancés. Dans le cas d'un silo à faible élancement, grâce à l'effet de butée-pousée, le silo est suffisamment flexible pour qu'on suppose un glissement à l'interface matériau-paroi.

Nous donnons ici, à titre d'exemple, la distribution des pressions sur la paroi d'un silo de 6m de hauteur et de 6m de diamètre, figure 4-1. Le fond de silo est supposé rugueux et la paroi est bloquée en bas et libre en haut. Le module de Young pour la paroi est égal à $20\times10^5 MPa$ et à $50 MPa$ pour le matériau ensilé, avec un coefficient de Poisson égal à 0.3 dans les deux cas. Le coefficient de frottement est de 0.5 et l'angle du cône de remplissage est de 25°. Les résultats obtenus montrent une bonne concordance avec les théories classiques et numériques. La valeur λ, utilisée dans les théories classiques, est égale à 0,4. Les valeurs K et G, respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement, correspondantes aux E_m et ν_m sont égales à $41{,}67 MPa$ et à $19{,}23 MPa$.

La figure 4-2 montre les résultats obtenus pour un silo de diamètre 6m et de 8m de hauteur (la cellule D de la base expérimentale de Chartres, voir en annexes). On a également fait figurer sur cette planche des mesures fournies par la base expérimentale [27] en reportant les pressions moyennes obtenues à partir de plusieurs essais, et ceci sur deux génératrices opposées. Les caractéristiques mécaniques du matériau ensilé et de la paroi sont:

$E_p = 2\times10^5$ *MPa*, module d'élasticité de la paroi
$E_m = 50$ *MPa*, module d'élasticité de la matière ensilée
$\nu = 0.3$, coefficient de Poisson de la paroi et de la matière ensilée
$\gamma = 800$ Kg/m^3, poids volumique de la matière ensilée
$\mu = 0.33$, coefficient de frottement sur la paroi
$\phi = 22°$, angle de frottement interne

Les valeurs K et G, respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement, correspondantes aux E_m et ν_m sont égales à 41,67*MPa* et à 19,23*MPa*.

Les résultats sont comparés avec la solution élasto-plastique faite par E. Ragneau [38]. La matière ensilée utilisée dans la base expérimentale est le blé de Chartres avec les caractéristiques suivantes [27]:

$\gamma = 810$ Kg/m^3, poids volumique de la matière ensilée
$\mu = 0.306$, coefficient de frottement sur la paroi
$\phi = 30°$, angle de frottement interne

Les différences entre les caractéristiques des matières utilisées par [38] et celles utilisées dans la base expérimentale peuvent encore augmenter les pressions obtenues par [38] dans la partie inférieure, ce qui éloigne les résultats de E. Ragneau des résultats expérimentaux.

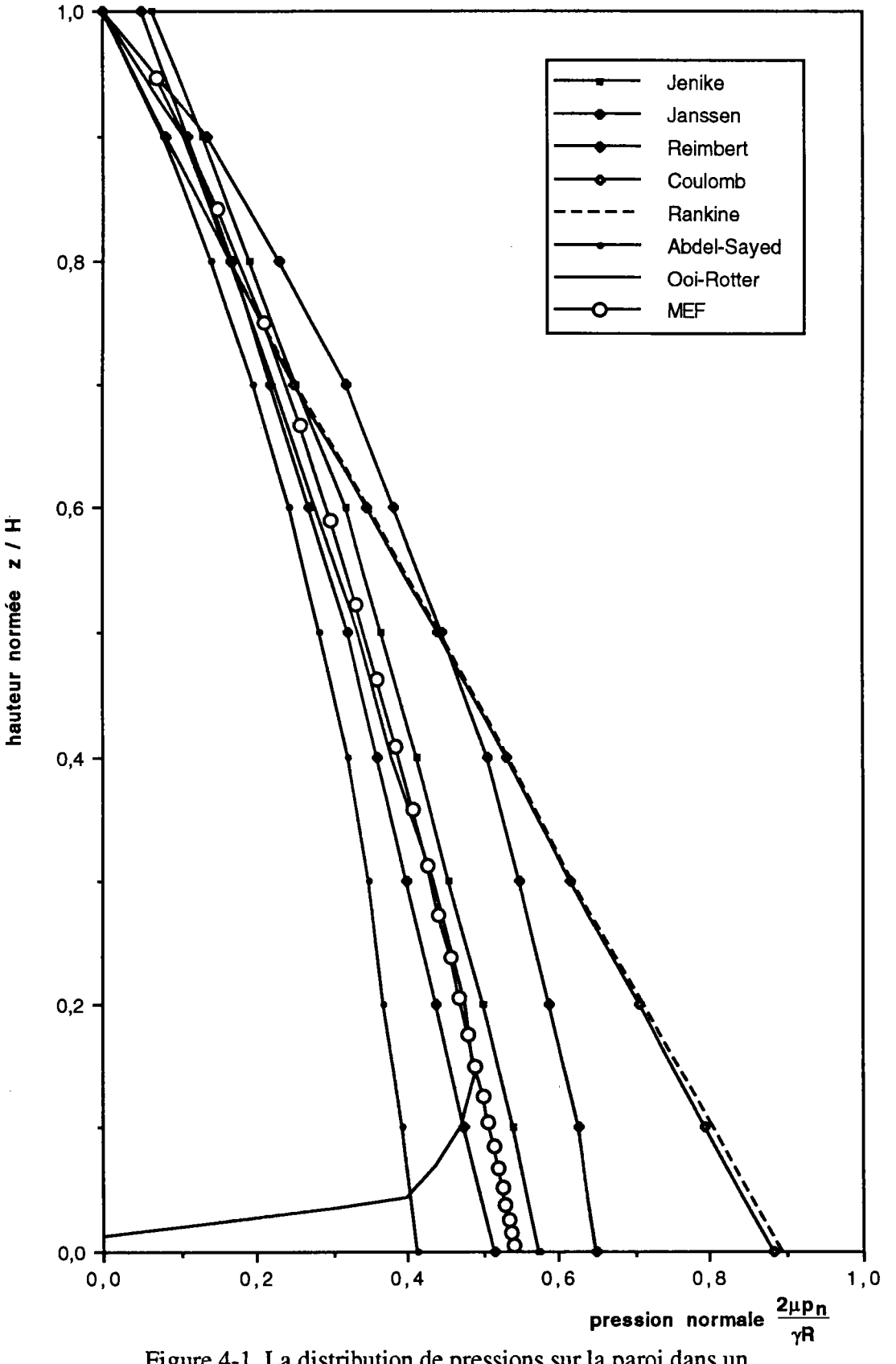


Figure 4-1 La distribution de pressions sur la paroi dans un silo à faible élancement

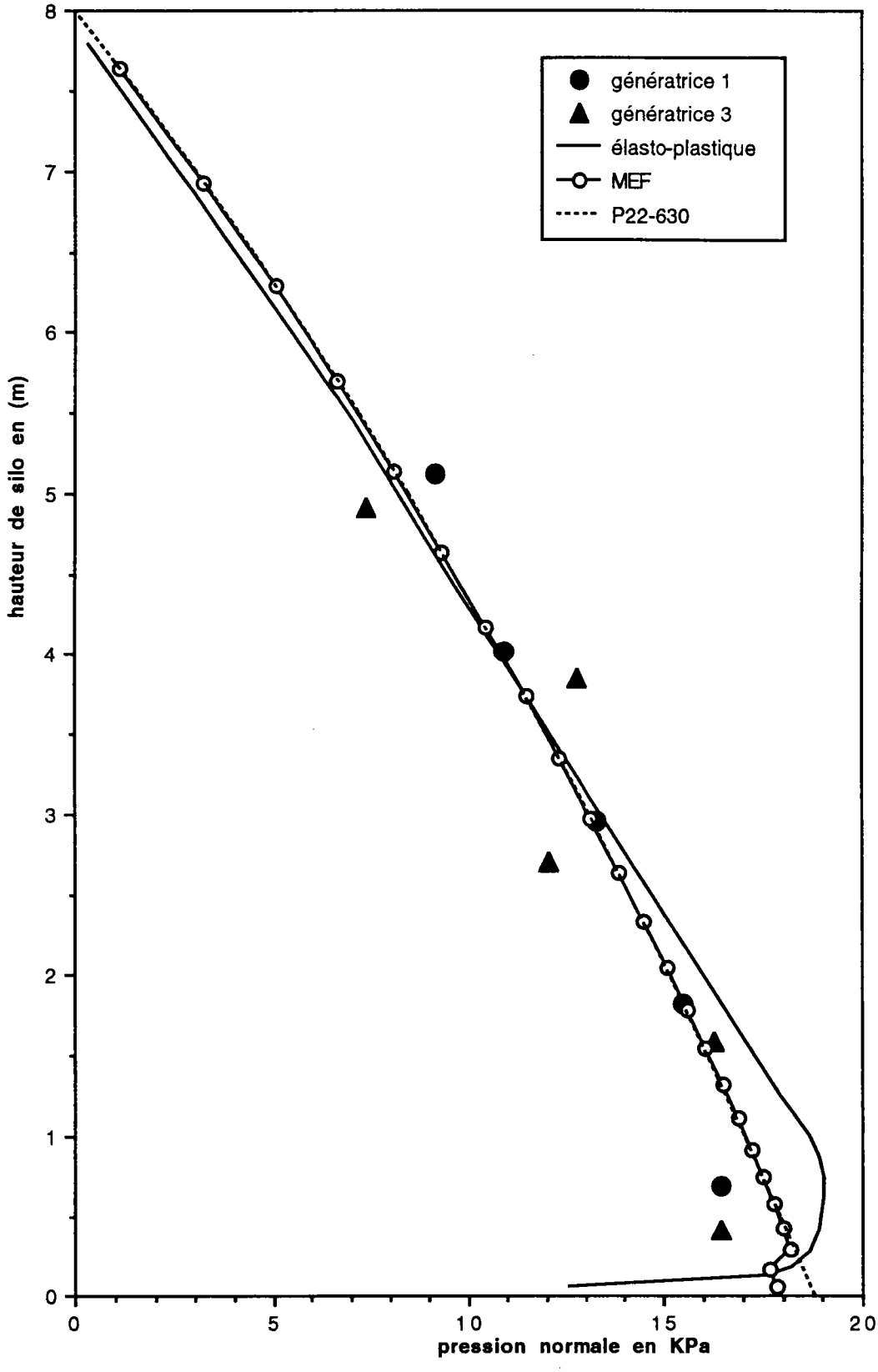


Figure 4-2 Comparaison des résultats obtenus avec les mesures expérimentales pour un silo à faible élancement

La relation théorique entre la pression normale sur la paroi et la contrainte circonférentielle dans la paroi s'obtient en multipliant cette dernière par t/R. La superposition de la pression normale et de la contrainte circonférentielle est représentée par la figure 4-3, qui montre bien une bonne concordance entre elles. Toutefois, on voit une différence entre elles près du fond du silo à cause des conditions aux limites.

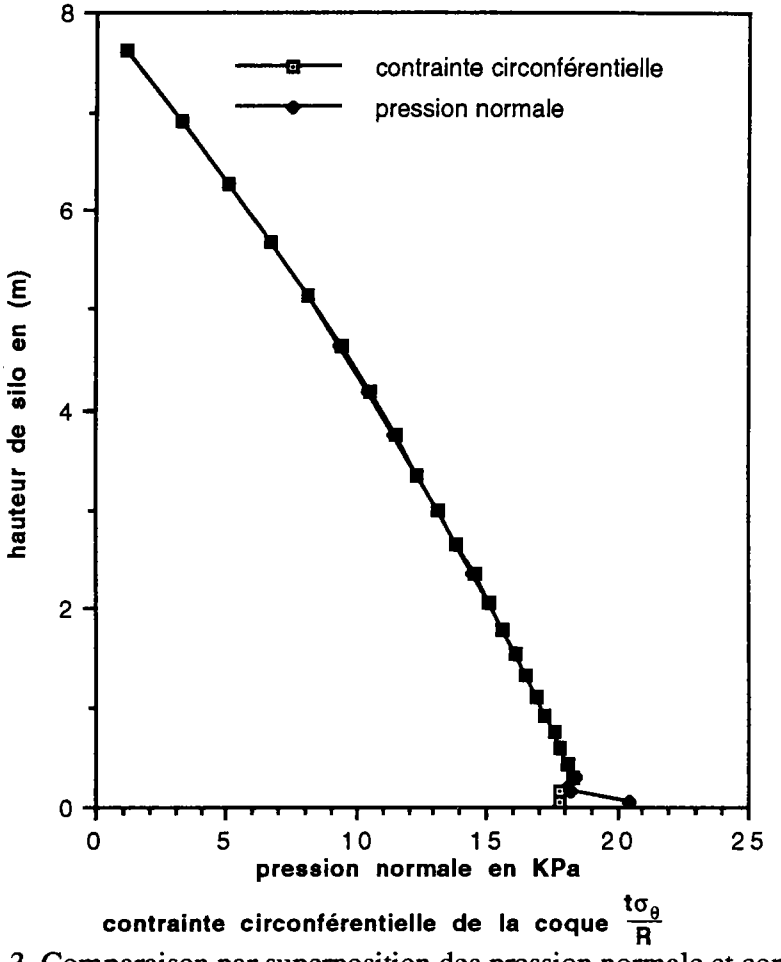


Figure 4-3 Comparaison par superposition des pression normale et contrainte circonférentielle en paroi

Les figures 4-4 à 4-6 représentent les distributions des contraintes verticales, radiales et circonférentielles dans le matériau ensilé pour les différentes tranches horizontales, correspondantes au silo de l'exemple de la figure 4-2. Toutes ces contraintes sont des compressions. Ces distributions de contraintes, sauf près du fond, sont presque constantes par rapport au rayon dans un silo à faible élancement, ceci représente l'hypothèse exploitée dans les théories classiques. La contrainte radiale près de la paroi, peut présenter la pression horizontale sur la paroi du silo. Dans le plan horizontal, la variation du déplacement radial *u* par rapport au rayon est linéaire, par conséquent, les contraintes radiale et circonférentielle sont presque égales.

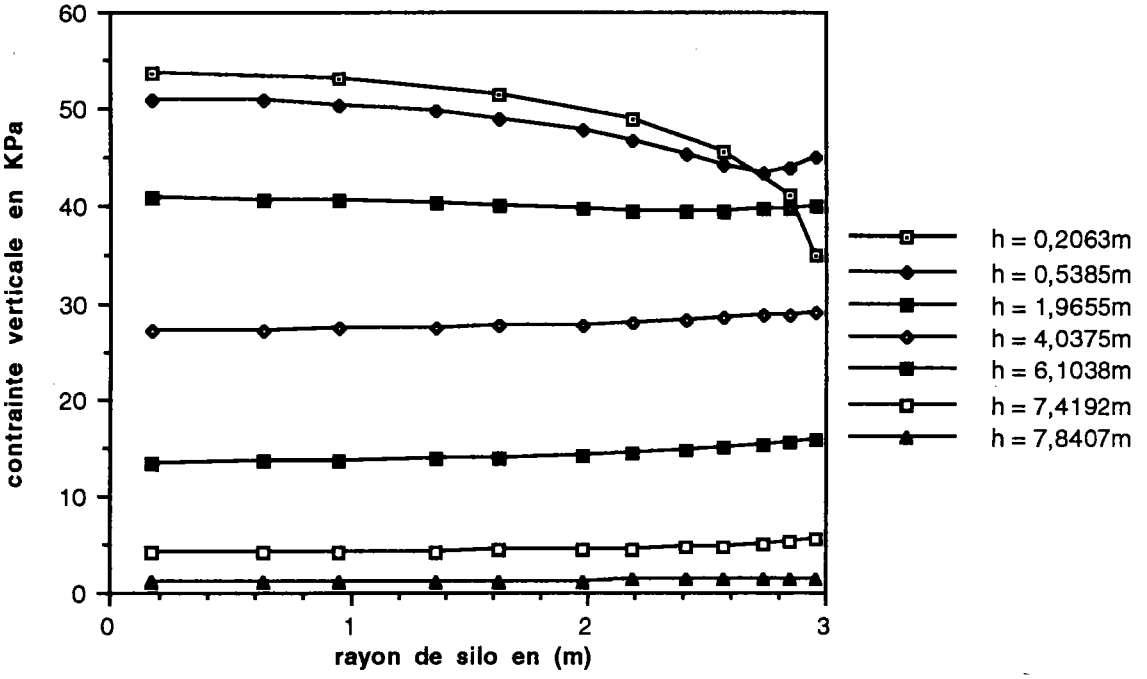


Figure 4-4 Variation de contrainte verticale en fonction du rayon du silo

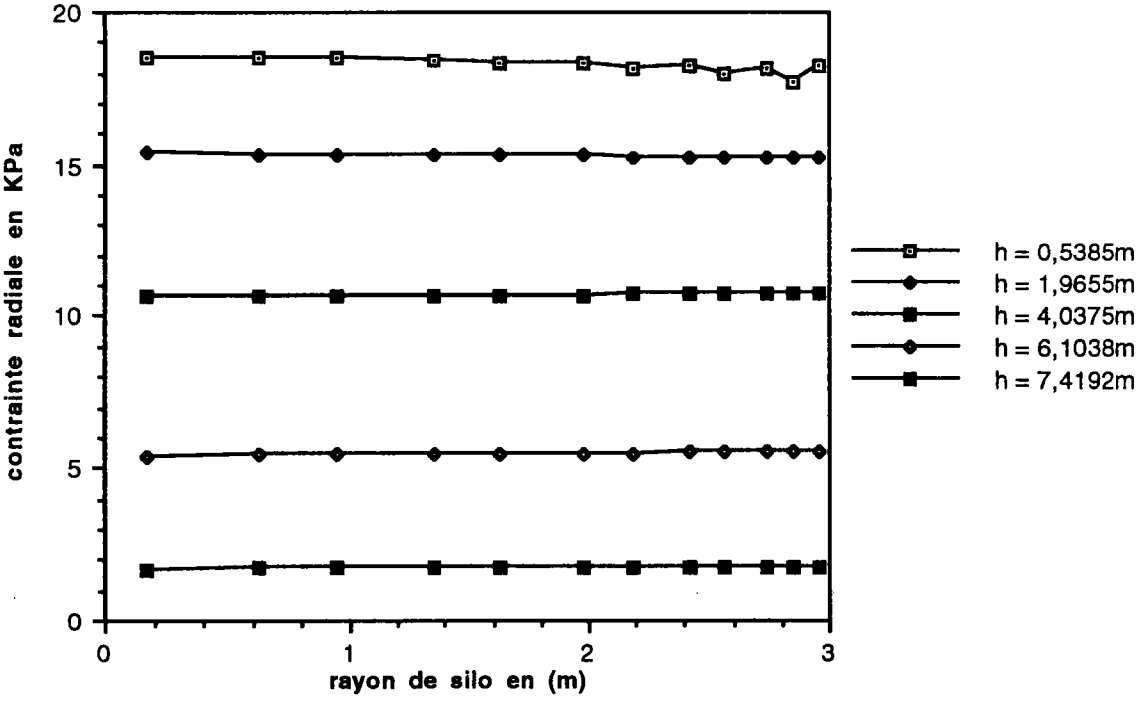


Figure 4-5 Variation de contrainte radiale en fonction du rayon du silo

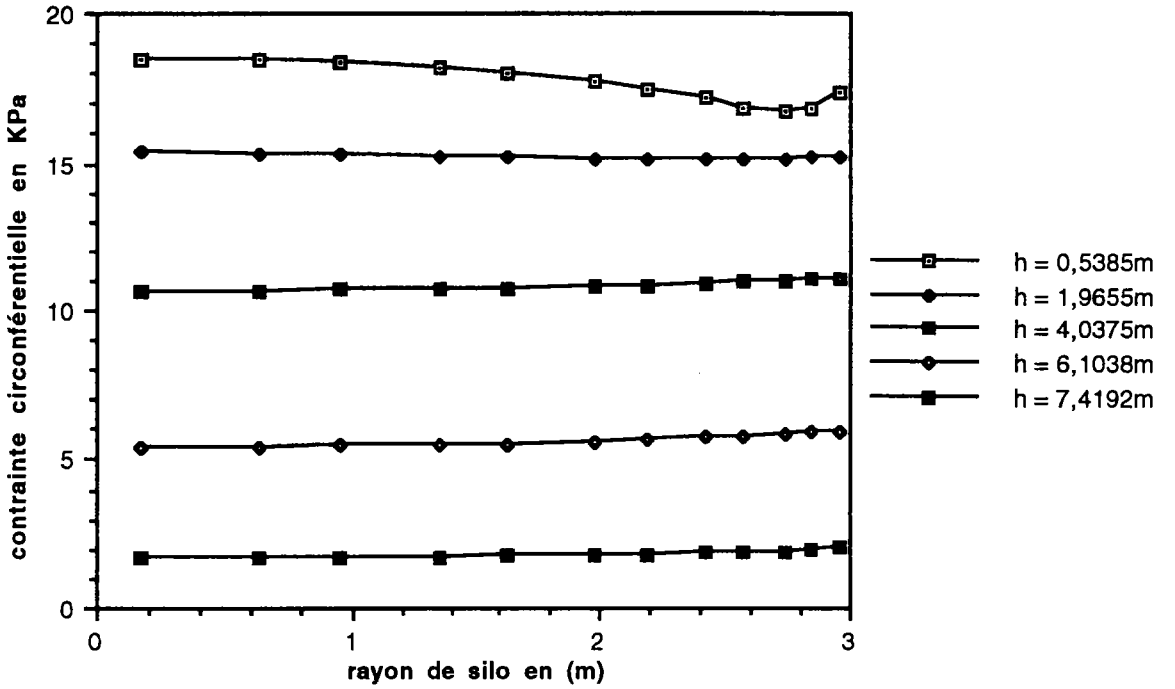


Figure 4-6 Variation de contrainte circonférentielle en fonction de rayon du silo

La figure 4-7 donne la variation de contrainte de cisaillement dans la matière ensilée. Cette variation est presque linéaire, sauf près du fond et près de la surface libre du matériau ensilé. Dans la théorie classique des silos, elle est supposée linéaire.

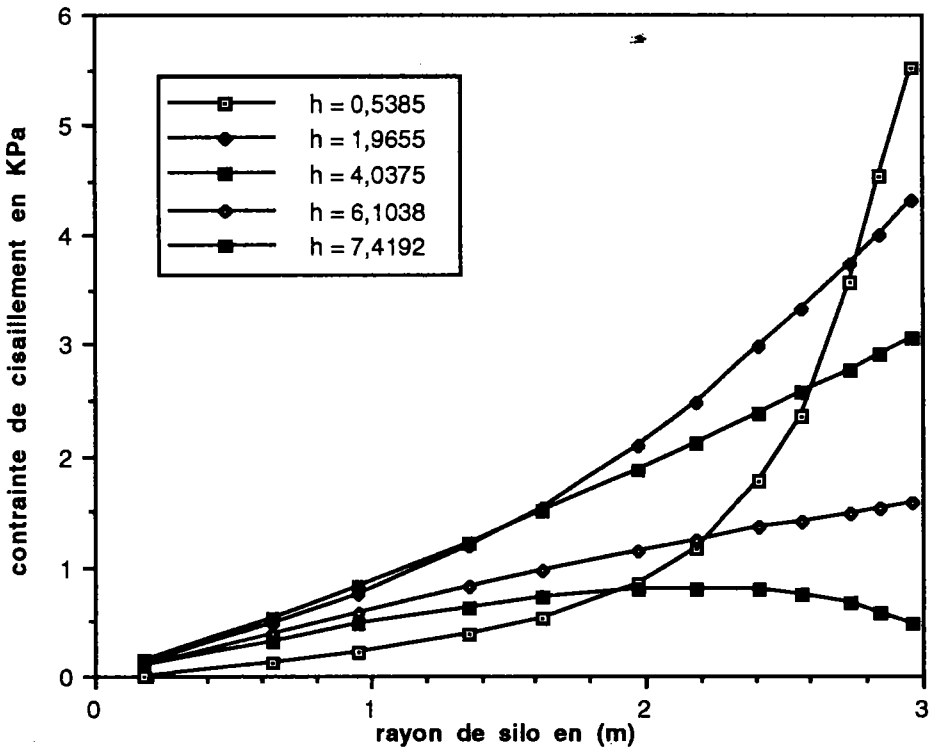


Figure 4-7 Variation de contrainte de cisaillement en fonction de rayon du silo

La répartition de contrainte méridienne (compression) dans la paroi du silo est représentée, figure 4-8. Dans un silo à faible élancement, la distribution de pression normale n'est pas constante, par conséquent, il en est de même pour le frottement. Ceci entraîne donc une distribution non linéaire de la contrainte méridienne dans la paroi du silo. L'évolution de cette contrainte en fonction de la profondeur se rapproche d'une droite. Une contrainte méridienne plus élevée peut provoquer le flambement dans le silo.

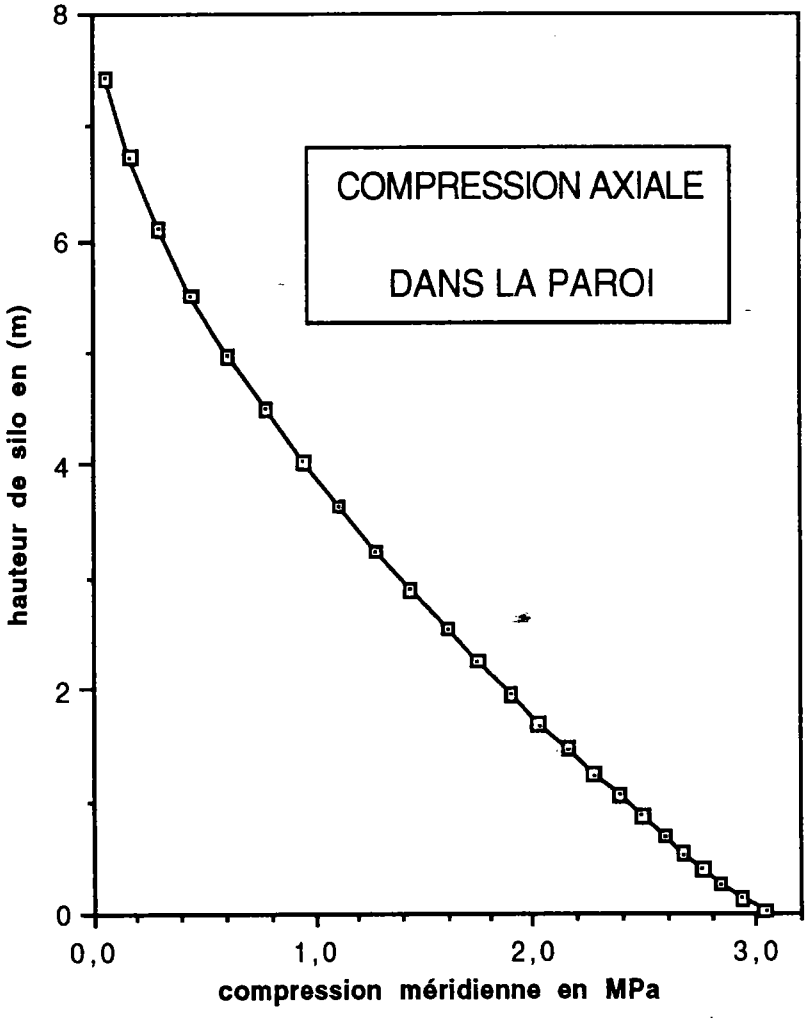


Figure 4-8 Variation de contrainte méridienne dans la paroi du silo en fonction de hauteur du silo

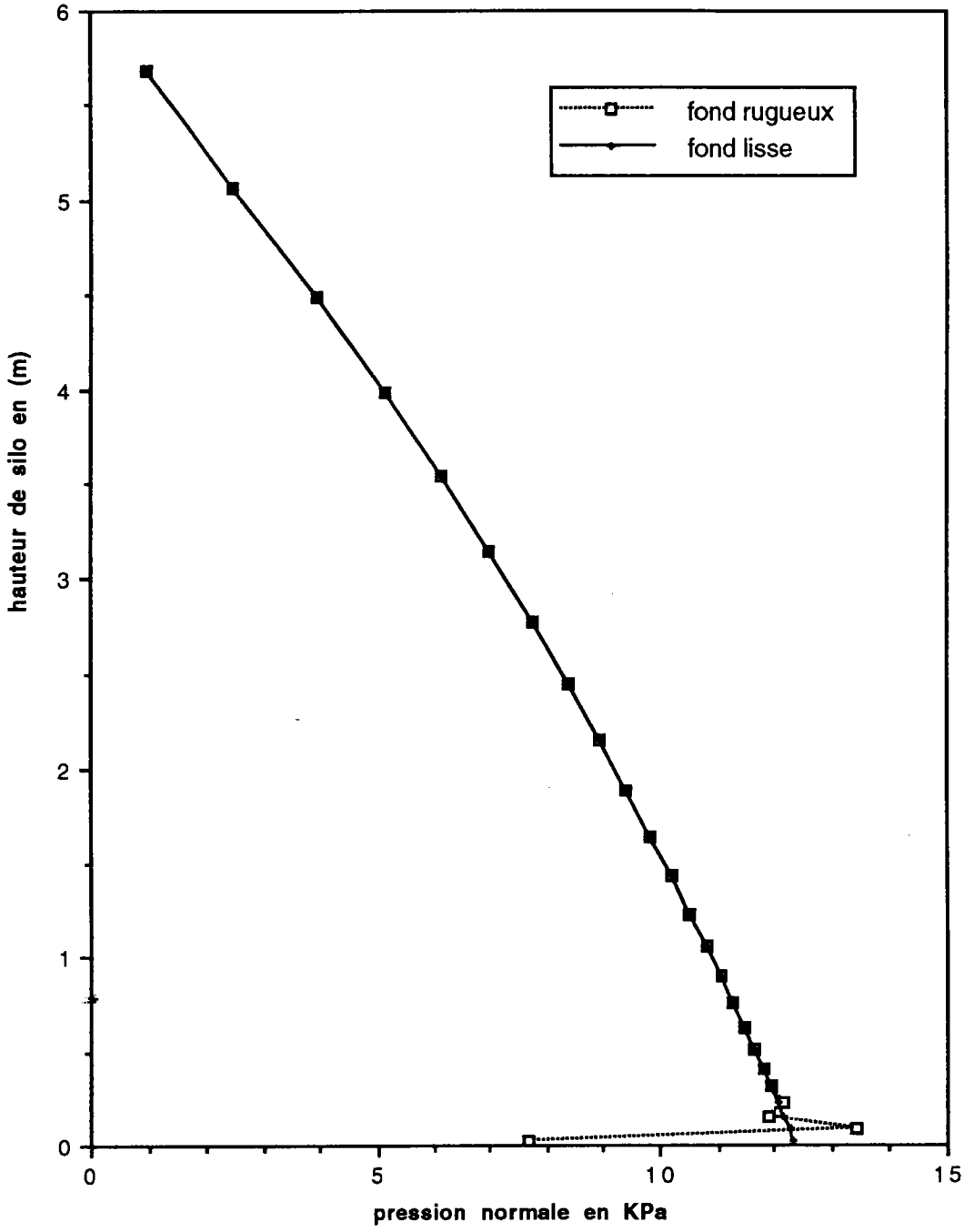


Figure 4-9 Influence du fond du silo sur la répartition des pressions normales à la paroi

La figure 4-9 représente la comparaison des pressions pour un silo à fond rugueux et à fond lisse. Dans le cas du silo à fond rugueux, les déplacements radial et tangentiel, u et v, sont bloqués et on suppose que les matériaux ensilés glissent sur eux-mêmes; par contre, dans le cas où le fond est lisse, le déplacement radial est libre, par conséquent, les matériaux ensilés peuvent glisser sur le fond et pousser normalement la paroi.

La figure 4-10 montre la variation du module tangentiel, k_S, de la paroi en fonction de la hauteur du silo, z. Cette figure montre bien que ce module est non linéaire et presque logarithmique. En haut du silo, les déplacements des matériaux ensilés sont plus grands qu'en bas du silo, donc il faut que la valeur de ce module soit moins élevée en haut qu'en bas pour le tassement du matériau ensilé.

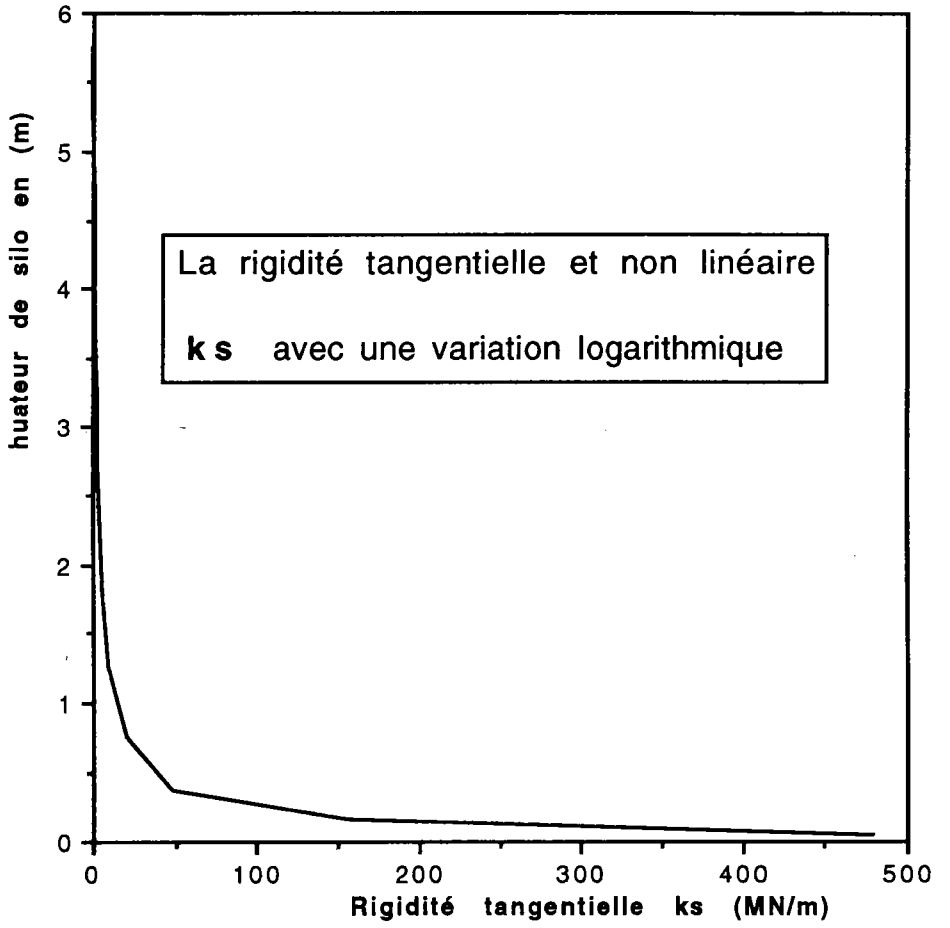


Figure 4-10 La variation de k_S en fonction de z

La figure 4-11 donne la variation du frottement dans un silo de hauteur 8m et de 6m de diamètre. Les résultats obtenus sont bien concordants avec les résultats expérimentaux. La formule de Janssen donne des résultats plus faibles que notre solution, figure 4-1. Les méthodes de Walters et du CTICM [27] donnent des résultats presque identiques et les plus faibles par rapport aux autres méthodes. Nos résultats sont inférieurs et plus proches des résultats obtenus par la Norme Française. Dans la partie inférieure du silo, les résultats obtenus avec les éléments finis sont presque identiques.

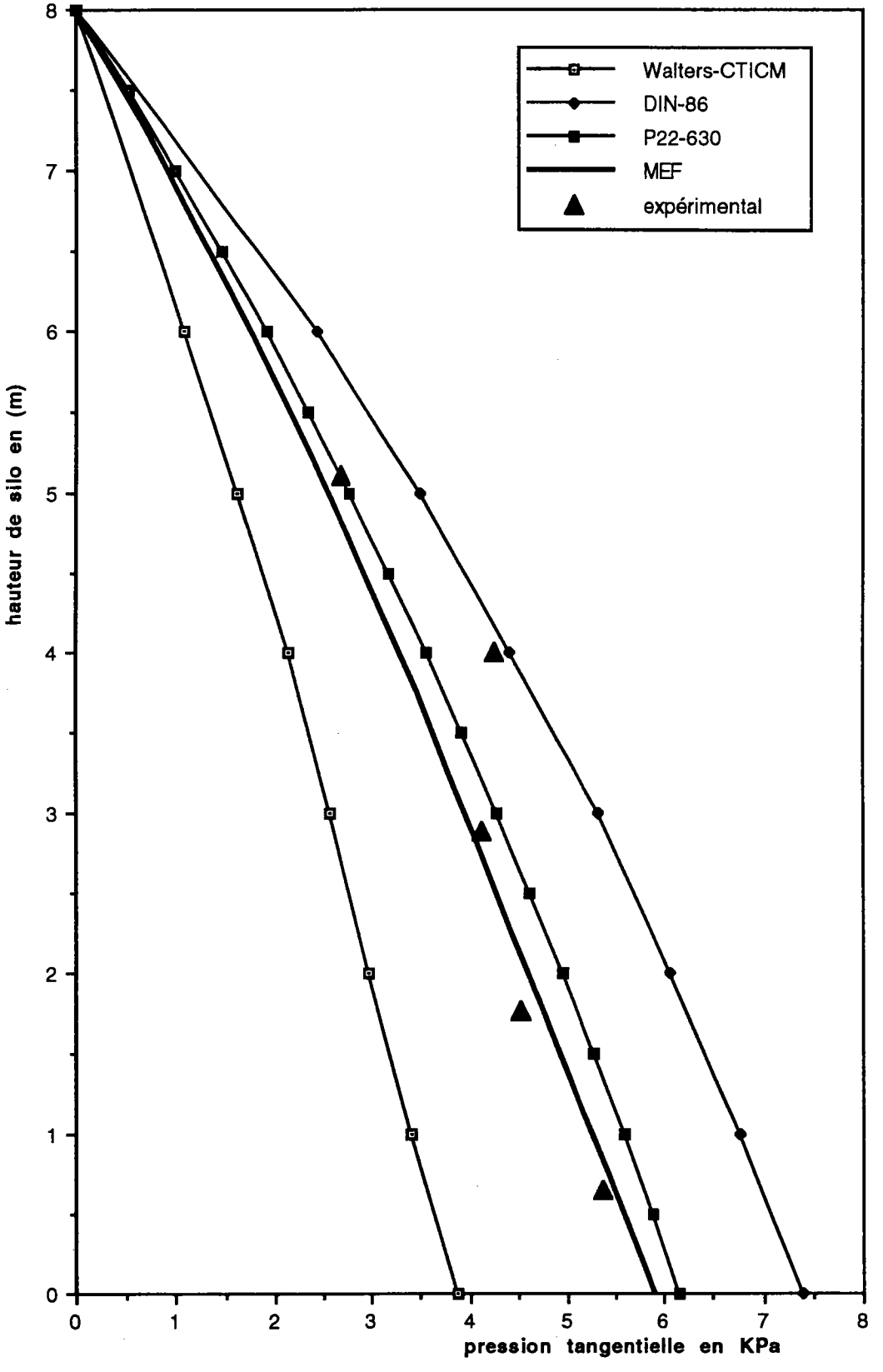


Figure 4-11 Variation du frottement sur la paroi du silo

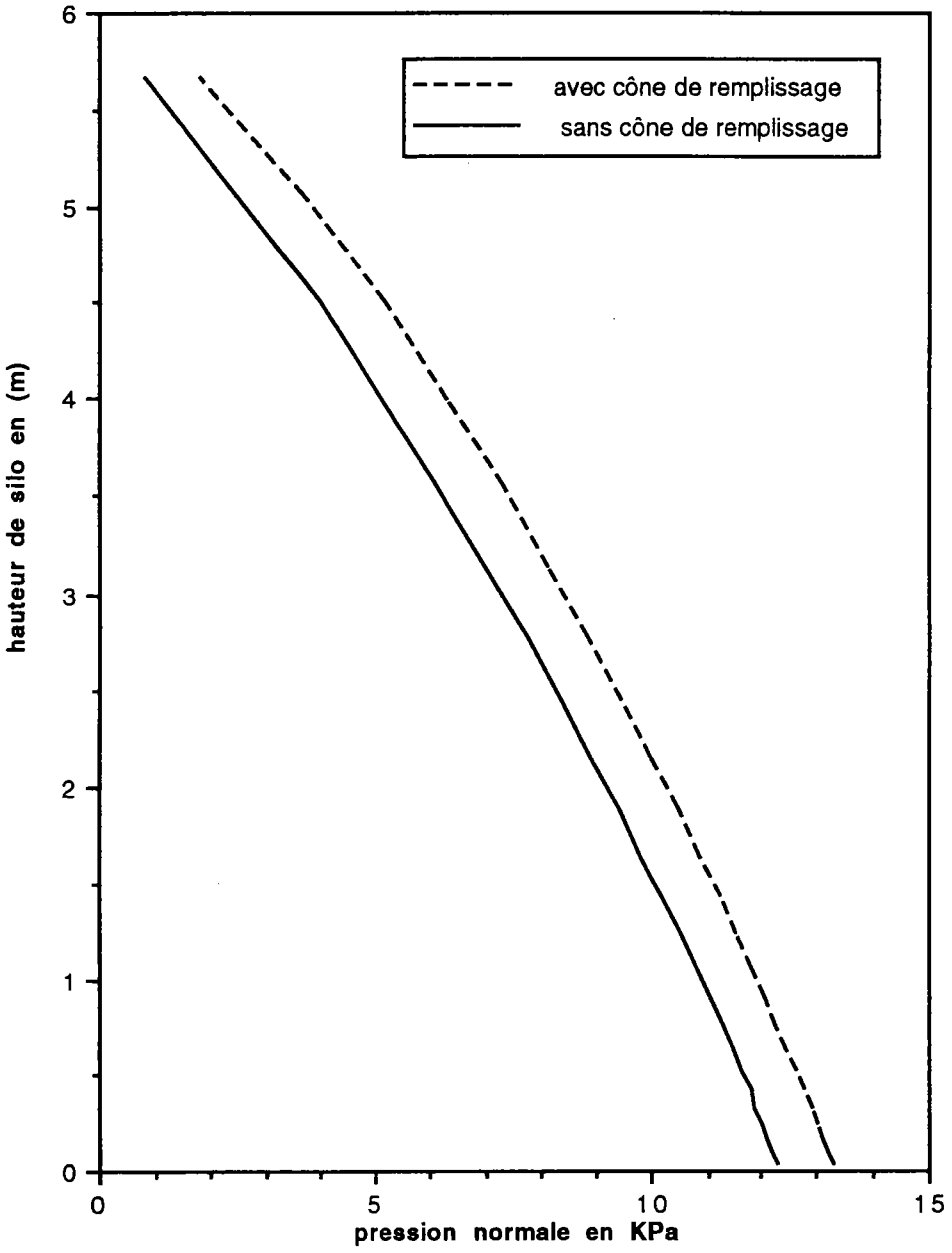


Figure 4-12 Influence du cône de remplissage sur la pression normale

La figure 4-12 présente une comparaison des pressions obtenues pour un silo à faible élancement avec ou sans cône de remplissage. Dans le cas d'un cône de remplissage, la pression normale présente une augmentation constante le long de la hauteur. Pour un silo élancé, cette augmentation de pression n'est pas constante et elle s'annule avec l'augmentation de la profondeur.

4.3. SILOS À ÉLANCEMENT MOYEN

Les travaux de J. Eibl *et al.*, depuis longtemps, étudient les charges dans les silos, qui ont conduit à la mise au point d'une méthode de calcul par élément finis non linéaire pour déterminer les pressions normales sur la paroi. En cours de remplissage, ils ont utilisé deux méthodes différentes pour la simulation du comportement du matériau ensilé dans le calcul. La première consiste en une formulation élasto-plastique, présentée par Lade [30], la seconde consiste à utiliser une formulation hypo-élastique, proposée par Kolymbas [29]. Quelques exemples sont présentés par [41] pour les deux cas. Ils montrent qu'entre deux cas, la distribution des pressions normales à la paroi a sensiblement la même allure; en moyenne, elle est majorée d'environ 3% dans le cas de Lade, ce qui est négligeable. Dans la figure 4-13, on a comparé les résultats obtenus pour le cas du blé avec les résultats obtenus en utilisant le comportement proposé par Kolymbas (hypo-élastique) et avec la Norme Française (P22-630, [34]). Le silo utilisé, est à fond plat de hauteur $28m$ et de $5{,}6m$ de diamètre, rempli de blé. Le coefficient de frottement sur la paroi est égal à 0,5, le module d'élasticité et le coefficient de Poisson sont respectivement égal à $50MPa$ et à 0,3. Le poids volumique supposé du blé est égal à 835 Kg/m^3. Nos résultats sont très proches des résultats obtenus par Eibl; et encore ici, les pressions normales obtenus de notre étude sont bien concordantes avec les résultats obtenus à partir d'un comportement hypo-élastique ou élasto-plastique. La Norme Française montre une majoration maximale d'environ 15%, ce qui est logique en raison de la sécurité. Si on prend en considération la solution élasto-plastique de Ragneau [38], on peut dire premièrement que, l'analyse du comportement d'un matériau ensilé est très difficile, et deuxièmement qu'un comportement plus sophistiqué ne peut pas influencer de manière importante les pressions normales à la paroi du silo.

La figure 4-14, présente une comparaison de nos résultats avec les résultats obtenus par Eibl [41] et avec la Norme Française (P22-630). Les caractéristiques du silo sont les même caractéristiques que dans l'exemple précédent, et seule la matière ensilée est remplacée par du sable ayant un poids volumique égal à 1600 Kg/m^3. Nos résultats sont situés entre la solution hypo-élastique [41] et la solution obtenue par la Norme Française. Ici, les courbes obtenues ne sont pas raisonnables; en principe, la solution hypo-élastique doit être inférieure à notre solution (élastique linéaire), et la solution de N.F. doit être supérieure à notre solution. De toute façon, la différence entre elles, n'est pas importante.

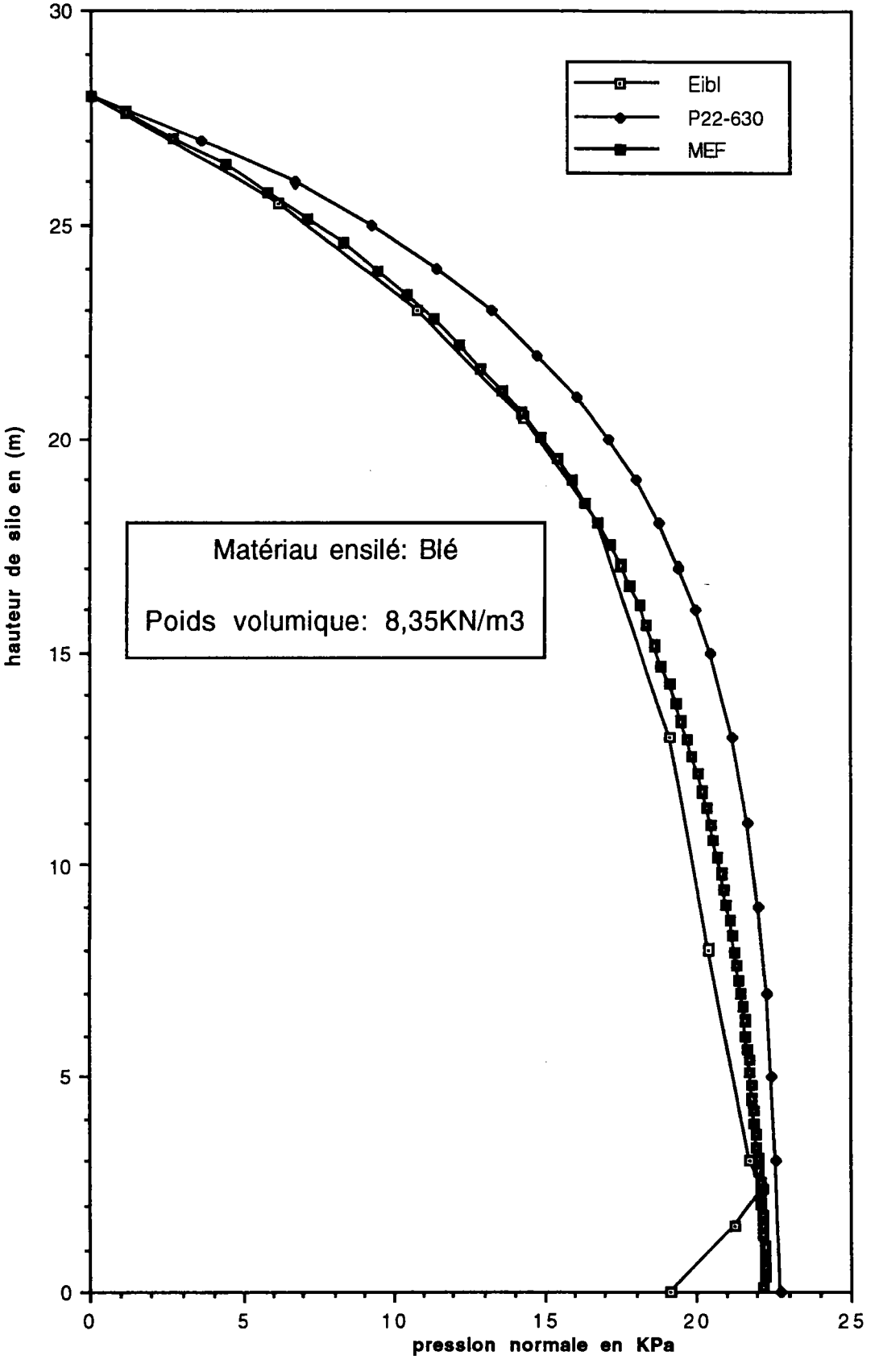


Figure 4-13 Distribution de la pression normale dans un silo à élancement moyen

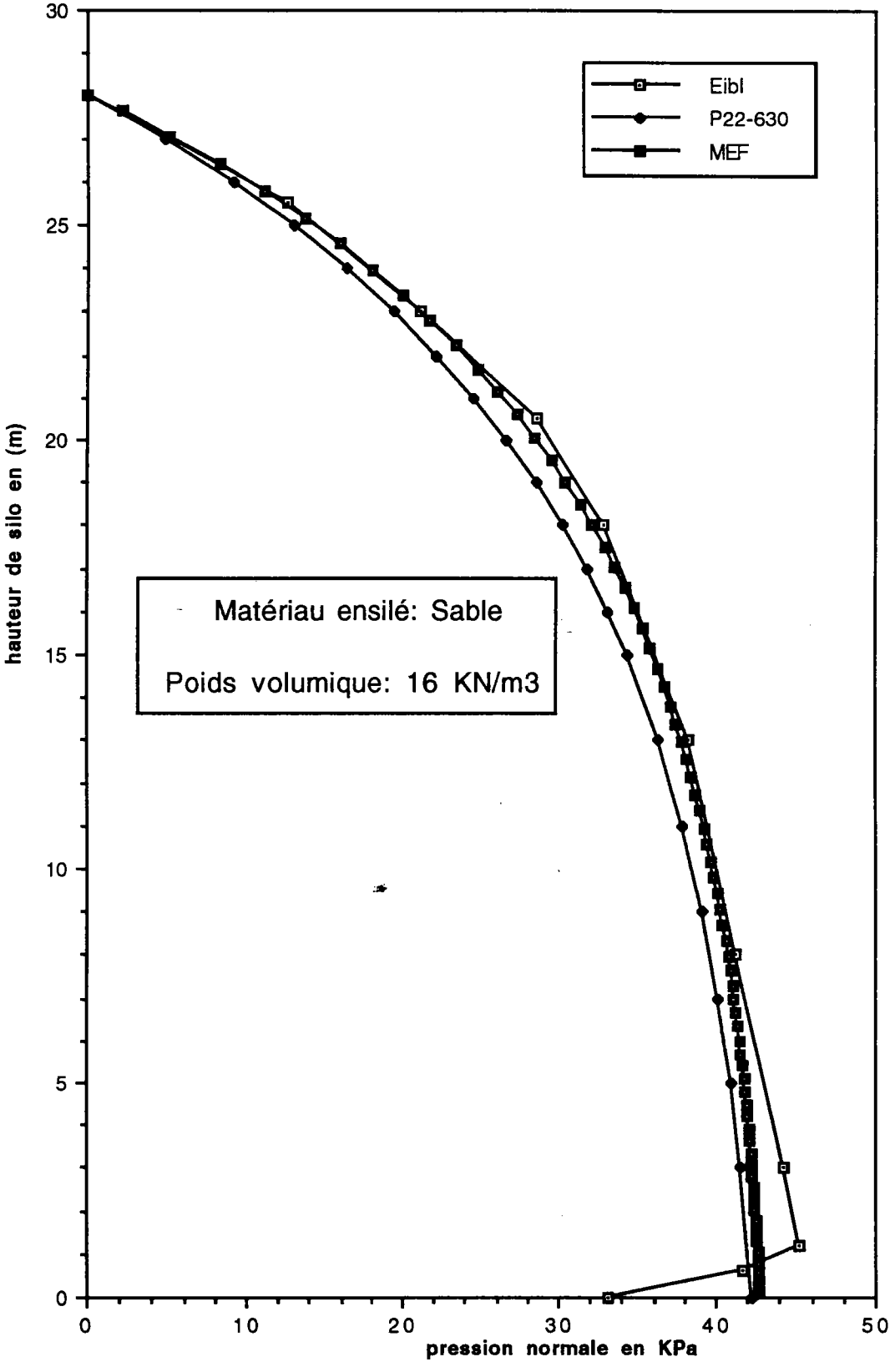


Figure 4-14 Distribution de la pression normale dans un silo à élancement moyen

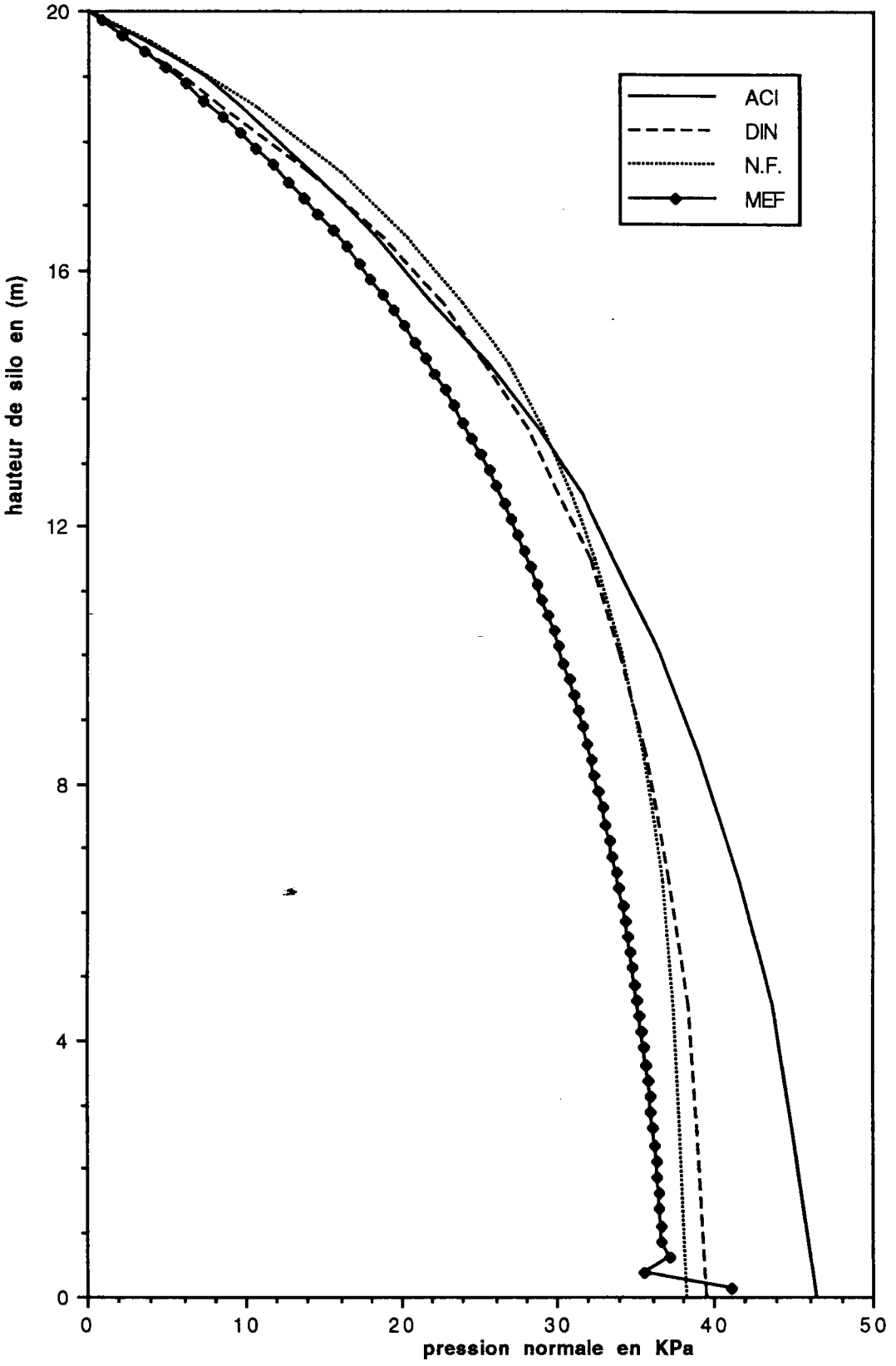


Figure 4-15 Distribution de la pression normale dans un silo à élancement moyen

La figure 4-15, donne une comparaison de nos résultats avec les résultats obtenus par les normes A.C.I. [2], D.I.N. [15] et N.F. [34]. Les résultats présentés sur cette figure, correspondent au cas d'un silo de hauteur 20*m*, de rayon 2,6*m* avec un coefficient de frottement à la paroi de 0,525 et un fond supposé lisse. Ils montrent que les résultats obtenus par la norme française dans la partie inférieure du silo, sont plus faibles que les autres normes, par contre dans la partie supérieure, ils sont les plus importants que les autres. Toutefois nos résultats sont inférieurs à tous les autres résultats obtenus par les normes indiquées ci-dessus, ce qui est cohérent en considérant l'effet du coefficient de sécurité imposé par les normes.

Les figures 4-16 à 4-18 représentent les distributions des contraintes verticales, radiales et circonférentielles pour les différentes tranches horizontales dans la matière ensilée, correspondantes à l'exemple de la figure 4-13. Comme pour le silo à faible élancement, ici encore ces contraintes sauf près du fond du silo, sont constantes par rapport au rayon du silo. La variation de ces contraintes par rapport à la hauteur du silo, est semblable à la variation de pression normale sur la paroi du silo élancé, c'est-à-dire, en augmentant la profondeur de la matière ensilée, elles tendent vers une constante.

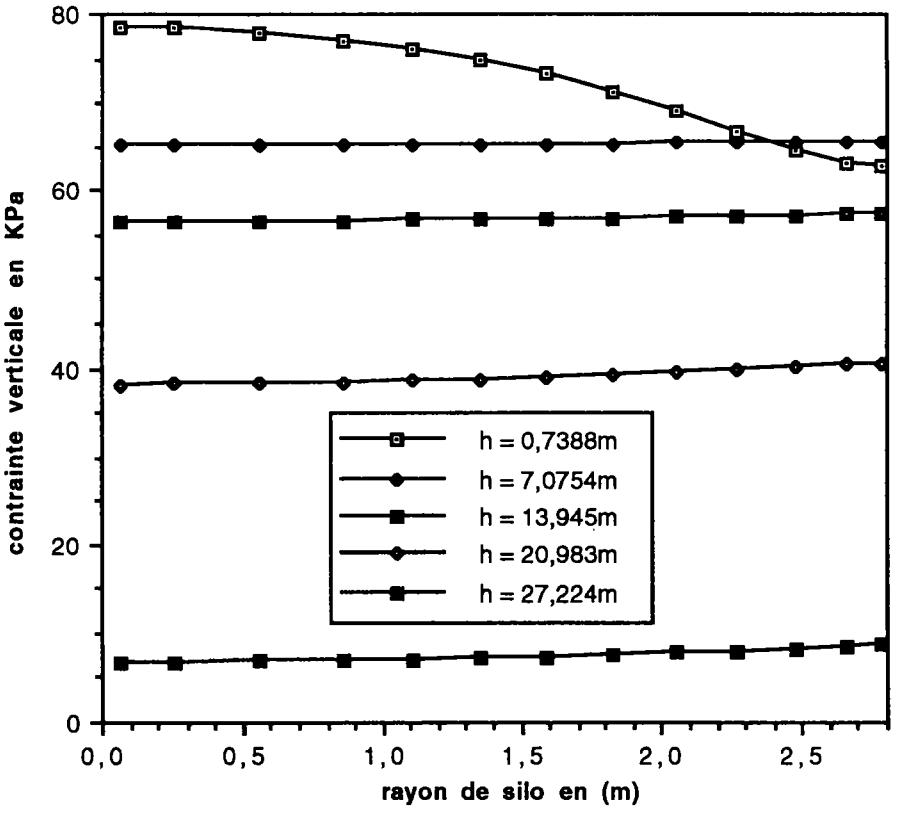


Figure 4-16 Variation de contrainte verticale en fonction du rayon dans un silo élancé

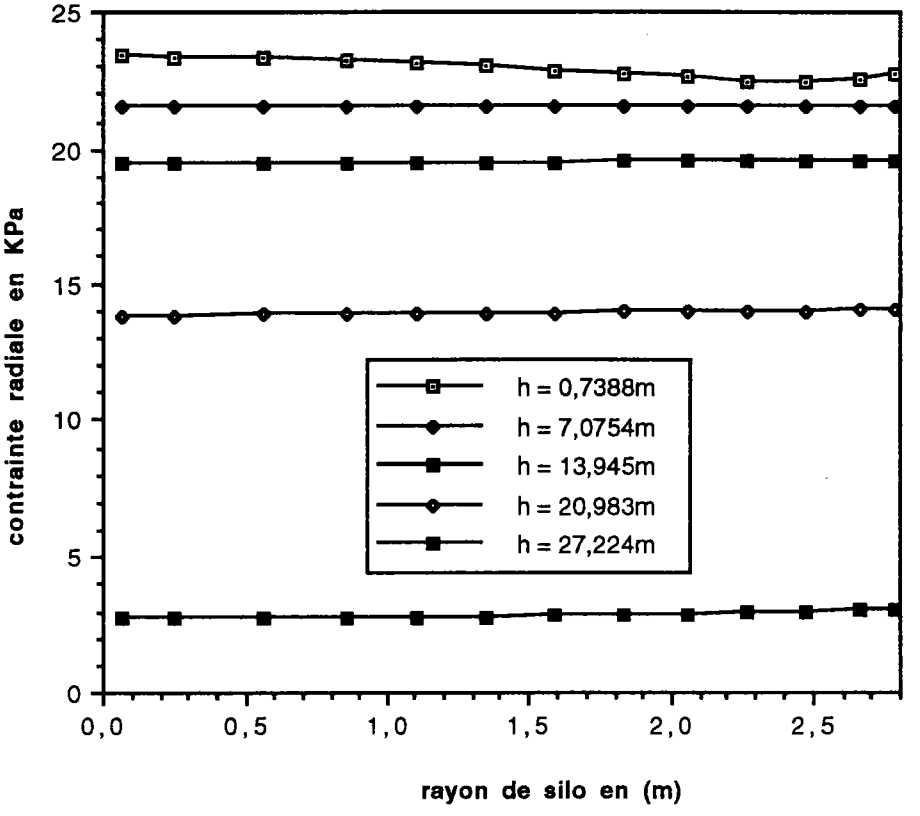


Figure 4-17 Variation de contrainte radiale en fonction du rayon dans un silo élancé

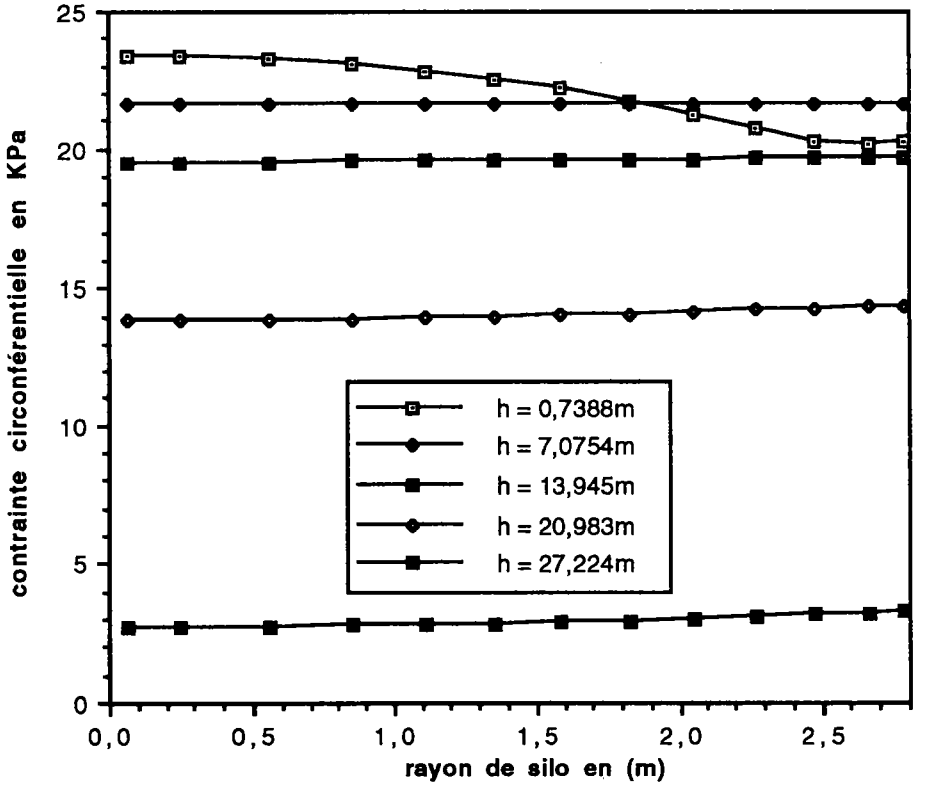


Figure 4-18 Variation de contrainte circonférentielle en fonction du rayon dans un silo élancé

La variation de la contrainte de cisaillement dans les silos élancés par rapport au rayon du silo, a aussi la même allure que dans les silos à faible élancement, c'est-à-dire, cette variation est linéaire, sauf près du fond et près de la surface libre de la matière ensilée. Ceci est représenté dans la figure 4-19.

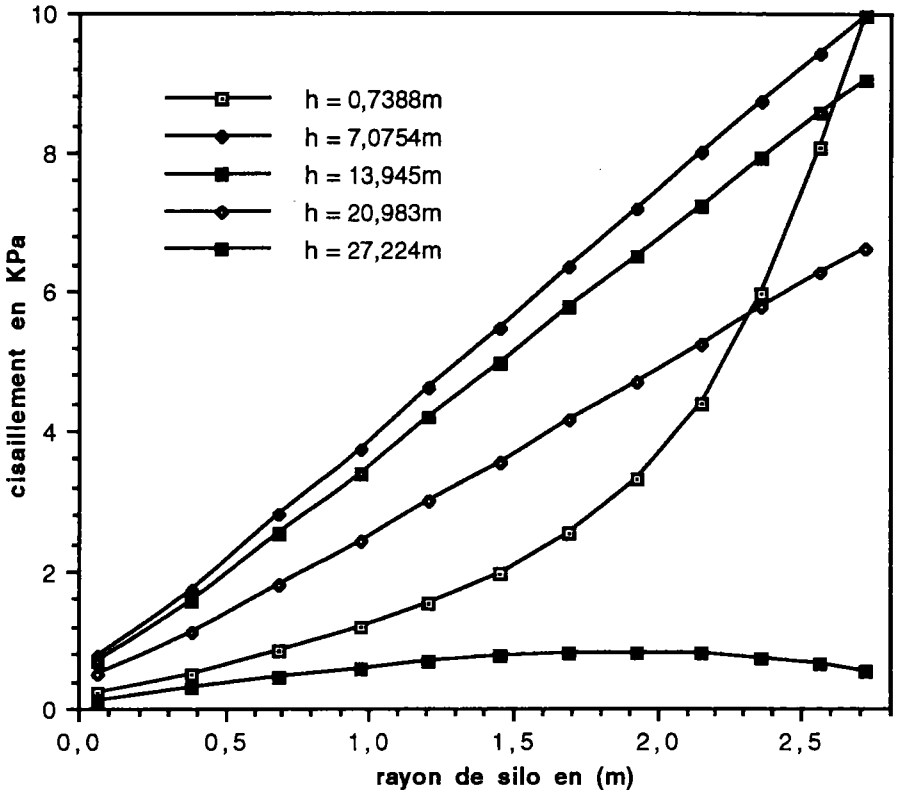


Figure 4-19 Variation de contrainte de cisaillement en fonction de rayon dans un silo élancé

La répartition de contrainte méridienne (compression) dans la paroi du silo est représentée dans la figure 4-20. Comme pour un silo à faible élancement, la distribution de cette contrainte n'est pas linéaire à la partie supérieure du silo, mais dans la partie inférieure cette distribution est linéaire, puisque la variation de pression normale et donc le frottement est constante à cette partie. Une contrainte méridienne plus élevée peut provoquer le flambement dans le silo. On peut également dire que l'intégrale de la contrainte méridienne dans une section horizontale, est presque égale avec l'intégrale de la contrainte (pression) de frottement sur la paroi du silo, en considérant la partie supérieure de cette section.

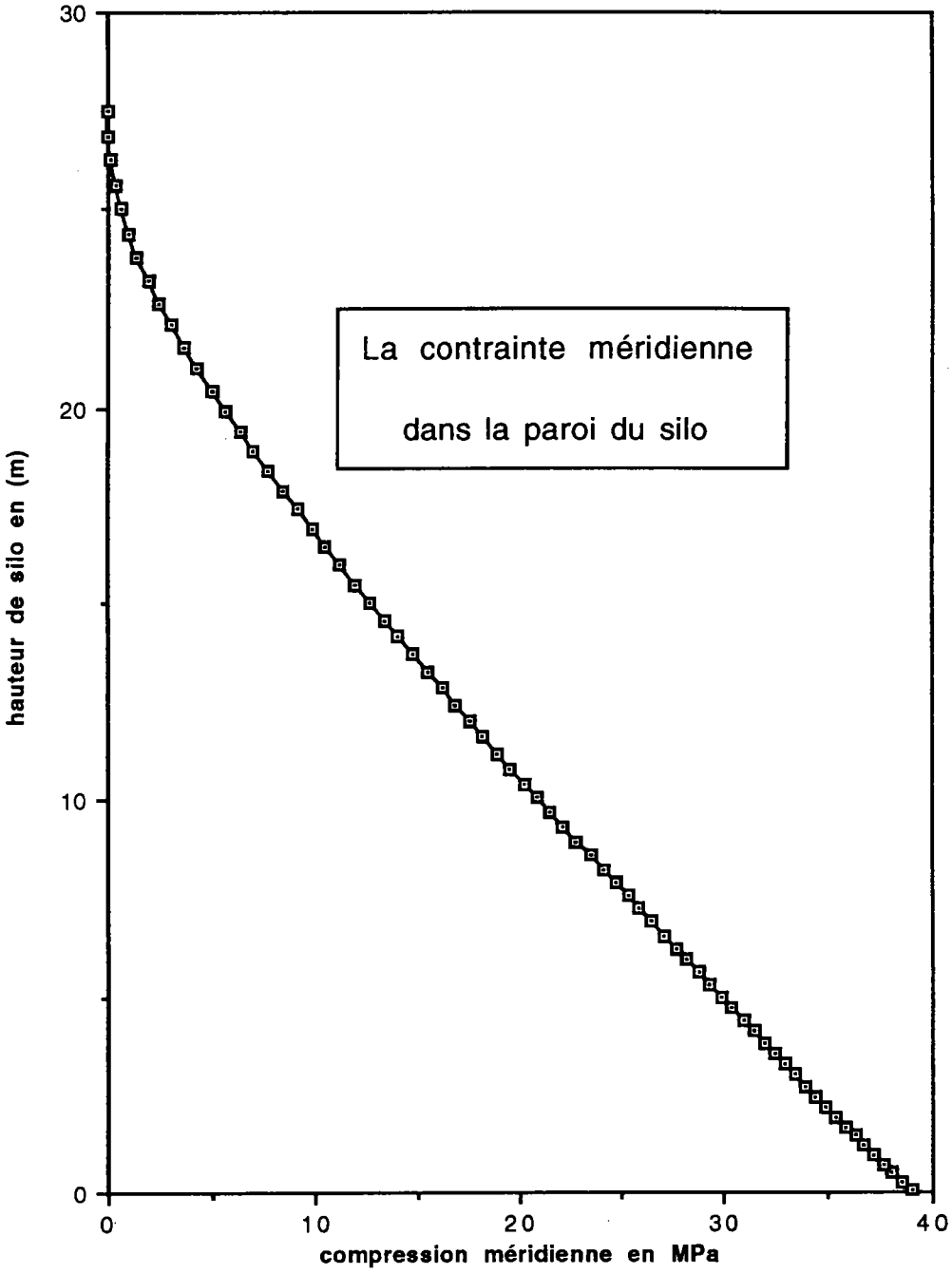


Figure 4-20 Variation de contrainte méridienne dans la paroi en fonction de hauteur dans un silo élancé

4.4. SILOS À FORTS ÉLANCEMENT

Toutes les théories classiques qui sont présentées dans le deuxième chapitre, donnent presque les mêmes valeurs à une profondeur infinie dans un silo. Les résultats obtenus par notre calcul, sont cohérents avec ces théories. Nous donnons à titre d'exemple les courbes de pressions latérales sur la paroi, obtenues par les différentes théories de calcul, pour un silo élancé de diamètre 6m et de 36m de hauteur. Le fond du silo est supposé rugueux, c'est-à-dire, dans le maillage exploité dans notre programme les noeuds sur le fond sont bloqués. La paroi est encastrée en bas et libre en haut. Les caractéristiques mécaniques de la matière ensilée et de la paroi sont :

$E_p = 20\times10^5 MPa$, module d'élasticité de la paroi
$E_m = 50 MPa$, module d'élasticité du matériau ensilé
ν_p et $\nu_m = 0.3$, coefficients de Poisson de la paroi et du matériau ensilé
$\mu = 0.50$, coefficient de frottement sur la paroi
$\psi = 25°$, angle du cône d'ensilage

La valeur λ, utilisée dans les théories classiques, est égale à 0,4. Une comparaison des résultats est effectuée sur la figure 4-21. Les résultats obtenus par éléments finis, près de la surface libre sont inférieurs aux résultats obtenus par Pieper-Wenzel [37] et par Reimbert [40]. Dans la partie inférieure du silo les résultats obtenus par éléments finis dépassent légèrement les autres résultats. L'exemple de la figure 4-22, confirme les remarques précédentes. On trouve également une bonne cohérence entre nos résultats et ceux établis à partir de la norme française [34].

La figure 4-22 présente une comparaison entre les résultats obtenus et les mesures expérimentales données par Nielson *et al.* [35]. Le silo est à fort élancement de hauteur 46*m* et de 7*m* de diamètre. Les caractéristiques mécaniques du matériau ensilé et de la paroi sont:

$E_p = 2\times10^5\ MPa$, module d'élasticité de la paroi
$E_m = 50\ MPa$, module d'élasticité de la matière ensilée
ν_p et $\nu_m = 0.3$, coefficients de Poisson de la paroi et du matériau ensilé
$\gamma = 760\ Kg/m^3$, poids volumique de la matière ensilée
$\mu = 0{,}44$, coefficient de frottement sur la paroi
$\phi = 31°$, angle de frottement interne

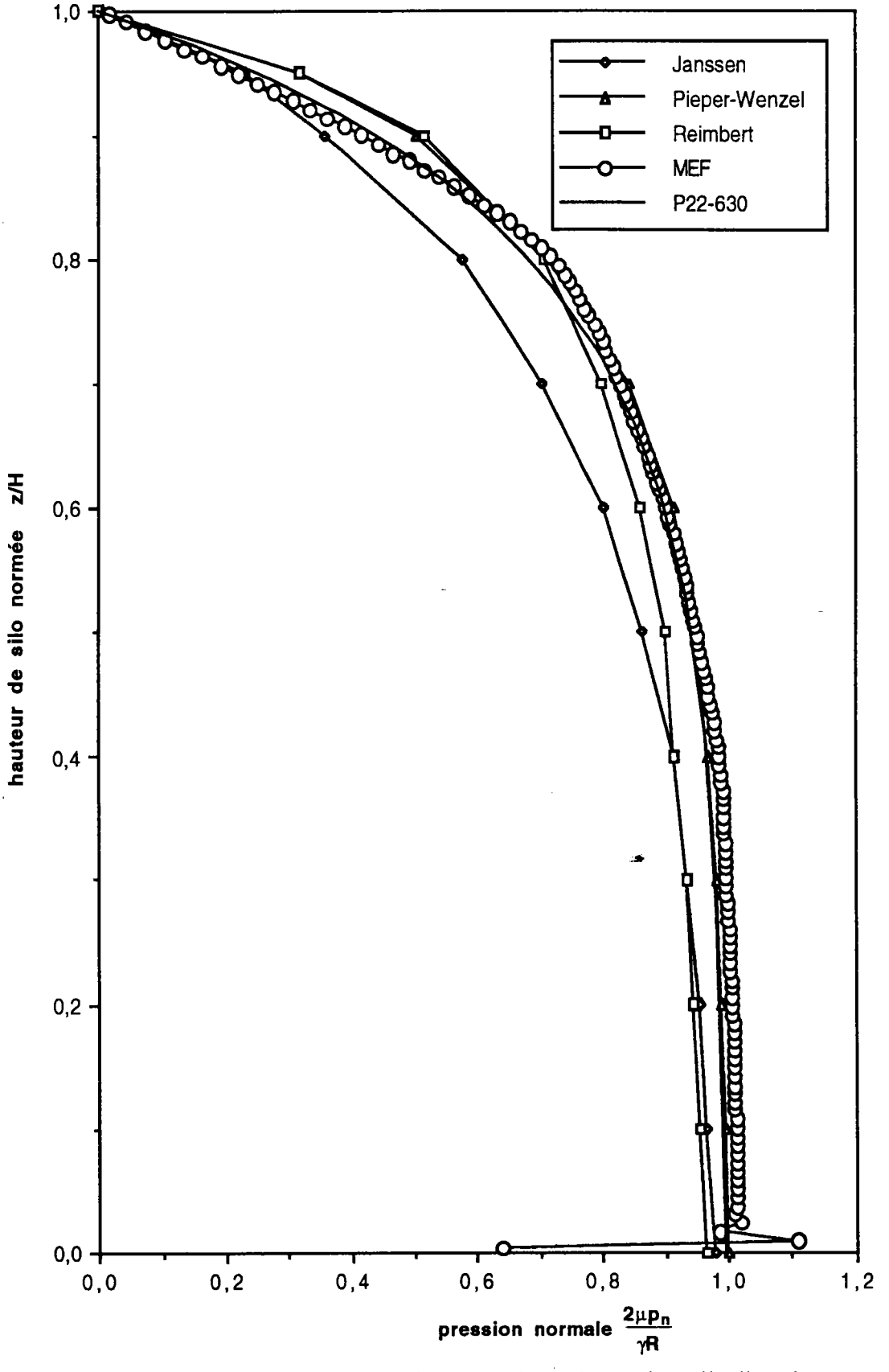


Figure 4-21 Répartition de pression normale sur la paroi en silo élancé

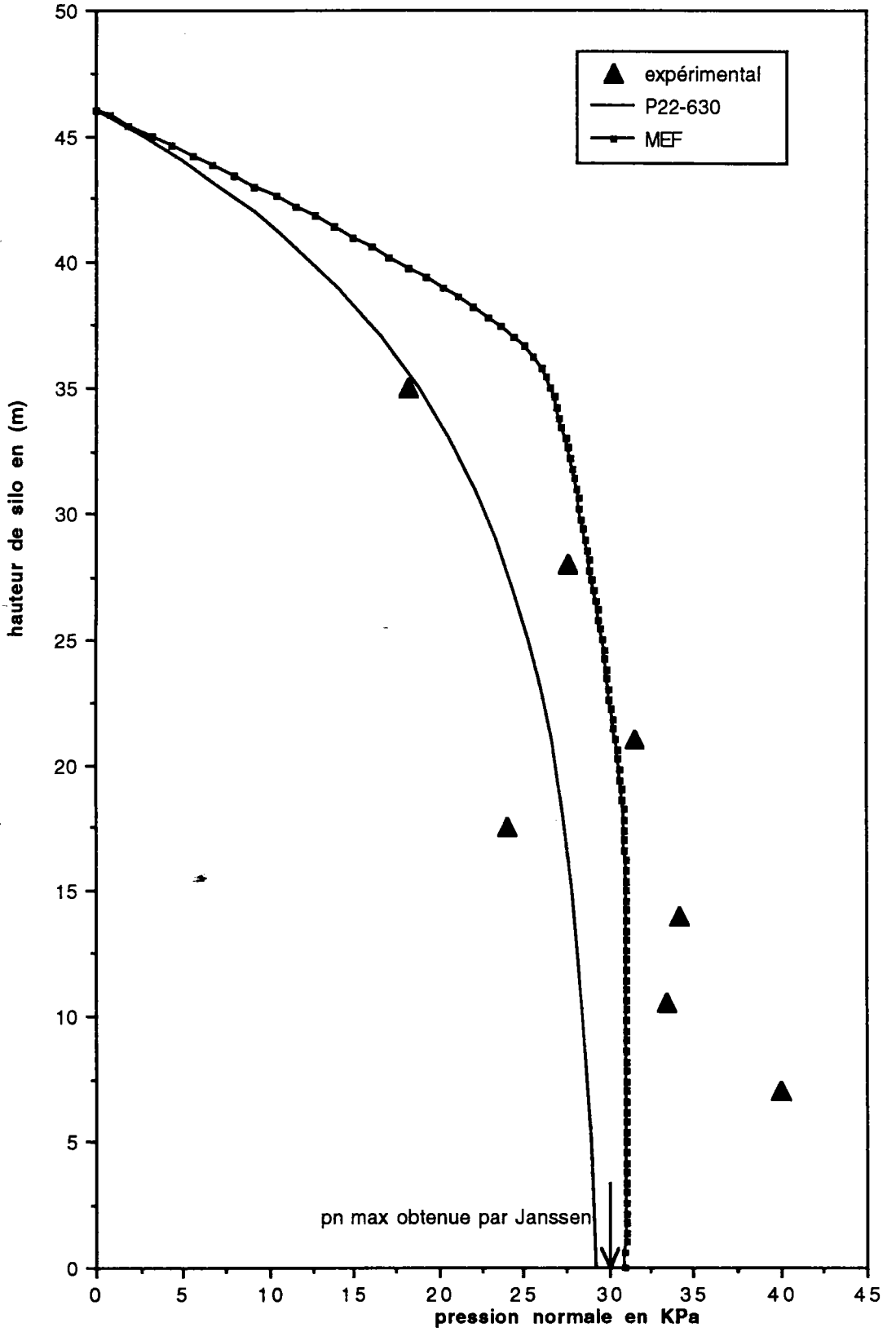


Figure 4-22 comparaison des résultats obtenus avec les mesures expérimentales pour un silo élancé

La pression maximale obtenue pour cet exemple, par la formule de Janssen est égale à 30 *KPa* au fond du silo. Cette comparaison (figure 4-22), prend également en compte la norme NF P22-630 [34]. Nos résultats sont proches des mesures expérimentales.

4.5. SILOS AVEC UNE TRÉMIE

Pour calculer les pressions normales sur la paroi du silo et de la trémie, nous avons utilisé les éléments de contact CT4 et CT6 (cf. § 3.2.1.2 et 3.2.1.4). Contrairement aux éléments de contact C4 et C6 (cf. § 3.2.1.1 et 3.2.1.3), applicables à une interface normale entre le matériau ensilé et la paroi du silo, les éléments CT4 et CT6 sont applicables à la totalité de l'interface matériau-paroi, c'est-à-dire, l'interface de la partie cylindrique et de la trémie. La figure 4-23 montre les résultats obtenus pour une cellule analogue à la cellule D de la base expérimentale de Chartres, de diamètre 6*m* et de 8*m* de hauteur, équipée d'une trémie à 45° avec une ouverture de 0,50*m* de rayon en partie inférieure. Les caractéristiques mécaniques du matériau ensilé et de la paroi sont:

$E_p = 2\times10^5$ *MPa*, module d'élasticité de la paroi
$E_m = 50$ *MPa*, module d'élasticité de la matière ensilée
$\nu = 0.3$, coefficient de Poisson de la paroi et de la matière ensilée
$\gamma = 800$ Kg/m^3, poids volumique de la matière ensilée
$\mu \cong 0.33$, coefficient de frottement sur la paroi
$t = 6$ *mm*, l'épaisseur de la paroi

La distribution des pressions normales le long de la trémie est bien concordante avec la solution élastique non linéaire de Ragneau-Aribert [38]. Par contre, le long de la partie cylindrique notre modélisation donne des résultats inférieurs aux deux autres solutions, c'est-à-dire, élastique non linéaire et élasto-plastique. Dans notre solution, la flexibilité de la paroi est prise en compte, ce qui diminue la pression sur la paroi. Quant à la distribution de pression normale au voisinage de la liaison jupe-virole, celle-ci est très variable et une discontinuité apparaît à ce voisinage en raison de la discontinuité géométrique.

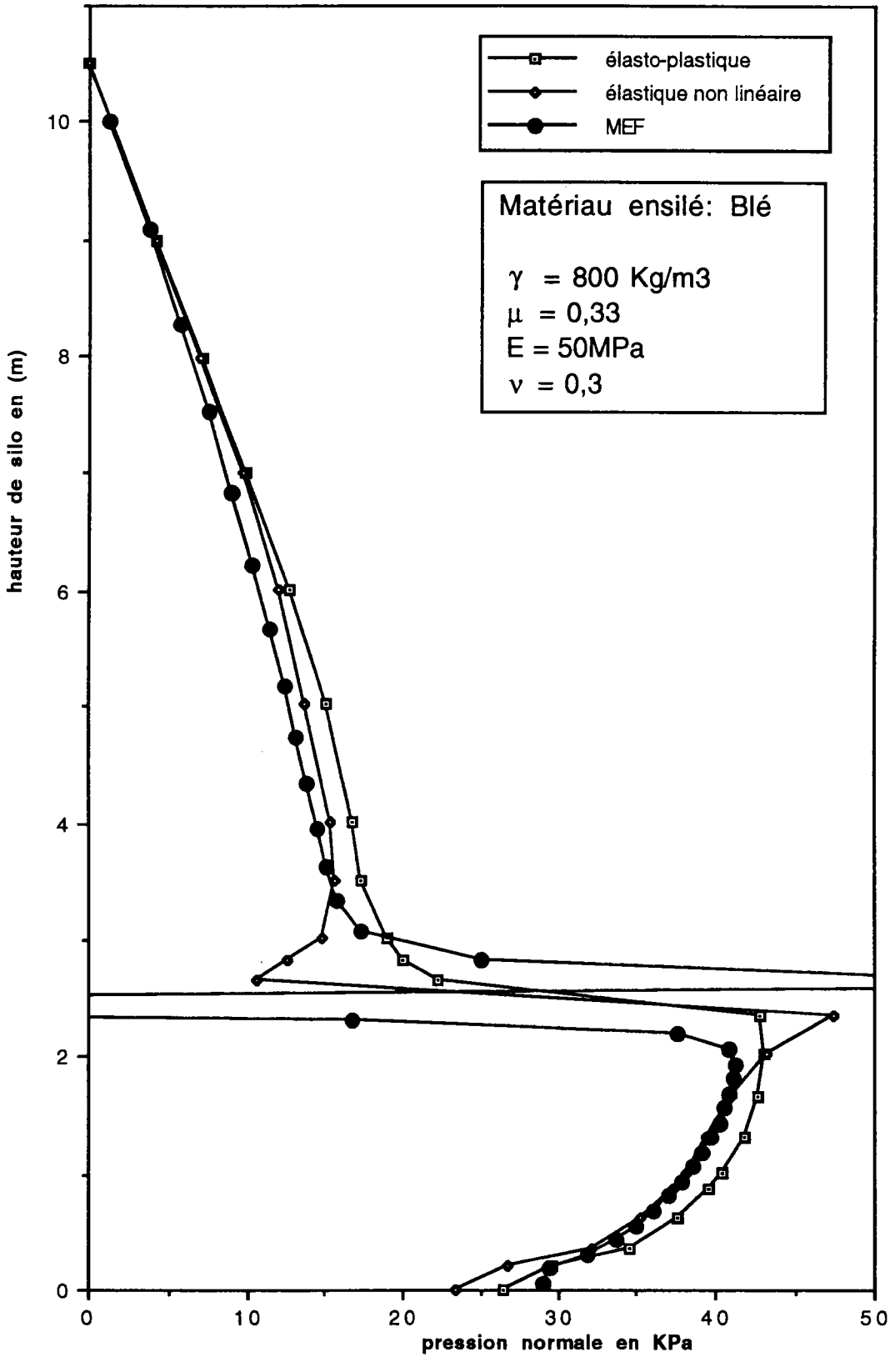


Figure 4-23 La répartition de pression normale dans un silo équipé de trémie

Les travaux de A.G. Bishara *et al.* [8-9-49], depuis 1977, utilisant le comportement des matériaux ensilés à partir d'une loi de comportement viscoélastique, ont conduit à la mise au point d'une méthode de calcul par éléments finis non linéaire pour déterminer les pressions statiques en cours de remplissage. La figure 4-24 présente la comparaison des résultats obtenus par différentes méthodes de calcul. Les caractéristiques mécaniques du matériau ensilé et de la paroi sont:

$E_p = 2\times10^5$ *MPa*, module d'élasticité de la paroi
$E_m = 50$ *MPa*, module d'élasticité de la matière ensilée
$\nu = 0.3$, coefficient de Poisson de la paroi et de la matière ensilée
$\gamma = 769$ Kg/m^3, poids volumique de la matière ensilée
$\mu = 0.30$, coefficient de frottement sur la paroi
$\phi = 33°$, angle de frottement interne

La solution de Janssen donne les pressions les plus faibles par rapport aux autres. Par contre, notre approche donne des pressions plus importantes le long de la trémie par rapport aux autres, ce qui est plus raisonnable en considérant la solution élasto-plastique présenté dans la figure 4-23. Notre solution le long de la partie cylindrique donne des résultats proches des solutions Vedaie-Bishara [49]. Dans la partie cylindrique la solution ADINA [5] donne les pressions plus importantes que les autres.

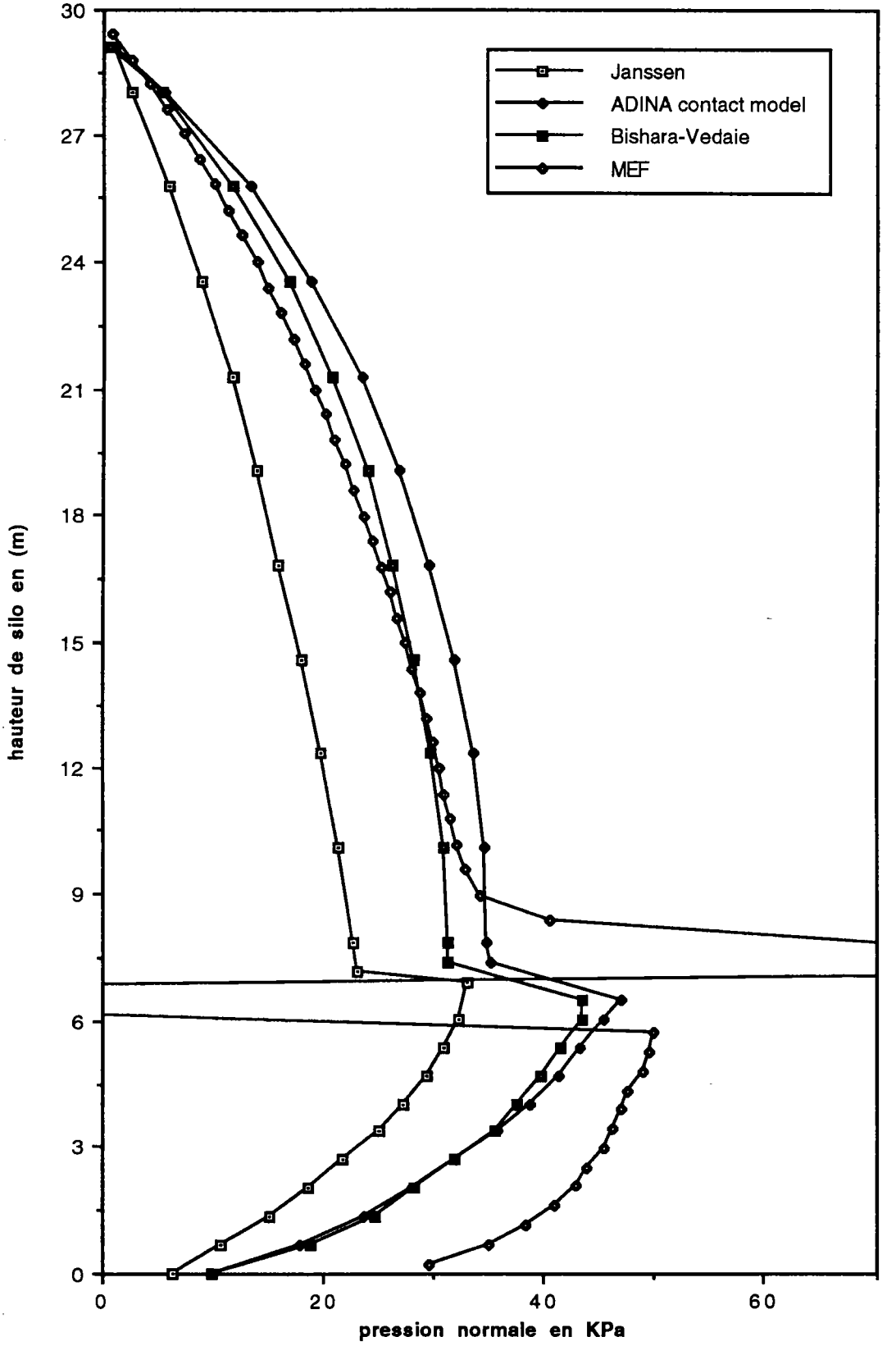


Figure 4-24 Répartition des pressions normales sur les parois du silo élancé équipé de trémie

4.6. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DES SILOS

Dans la littérature, les effets des différents paramètres mécaniques et physiques des matériaux ensilés sur la pression normale à la paroi, ne sont pas systématiquement prise en compte. Dans ce paragraphe, on présente les effets du coefficient de frottement μ, sur la paroi, du rapport R/t, du module d'élasticité de la matière ensilée E, du coefficient de Poisson de la matière ensilée ν, de la hauteur d'ensilage H et du poids volumique de la matière ensilée γ. Comme référence, les paramètres suivants sont adoptés:

$E_p = 2\times10^5$ *MPa*, module d'élasticité de la paroi
$E_m = 50$ *MPa*, module d'élasticité de la matière ensilée
ν_p et $\nu_m = 0.3$, coefficient de Poisson de la paroi et du matériau ensilé
$\mu = 0.5$, coefficient de frottement su la paroi
$\gamma = 835$ Kg/m^3, poids volumique de la matière ensilée
R/t = 600, le rapport entre le rayon du silo et l'épaisseur de la paroi
H/d = 1, le rapport entre la hauteur du silo et le diamètre de la paroi

On fait varier un ou plusieurs de ces paramètres pour étudier leur influence sur la pression normale à la paroi.

4.6.1. L'effet du coefficient de frottement

La figure 4-25, présente l'influence du coefficient de frottement sur la pression normale à la paroi. La distribution de la pression normale est étudiée pour trois valeurs 0.3, 0.5 et 0.7 du coefficient de frottement sur la paroi. Dans la théorie de Janssen l'augmentation du coefficient de frottement sur la paroi provoque une diminution de la pression normale et une augmentation de l'effort de frottement sur la paroi. Notre étude présente la même prédiction.

4.6.2. L'effet du rapport R/t

Dans les études antérieures sur les silo, la flexibilité de la paroi n'est prise en compte que très rarement. La figure 4-26 présente la variation de pression normale par rapport aux différents rapports R/t. Une réduction de l'épaisseur de la paroi augmente la déformation de la paroi et celle-ci cause une réduction de la

pression sur la paroi. La variation de la pression normale par rapport au R/t est non linéaire. En diminuant ce rapport, la pression normale tend vers une asymptote traduisant la pression normale maximale. Cette pression maximale correspond à la pression sur une paroi supposée rigide (formule de Janssen).

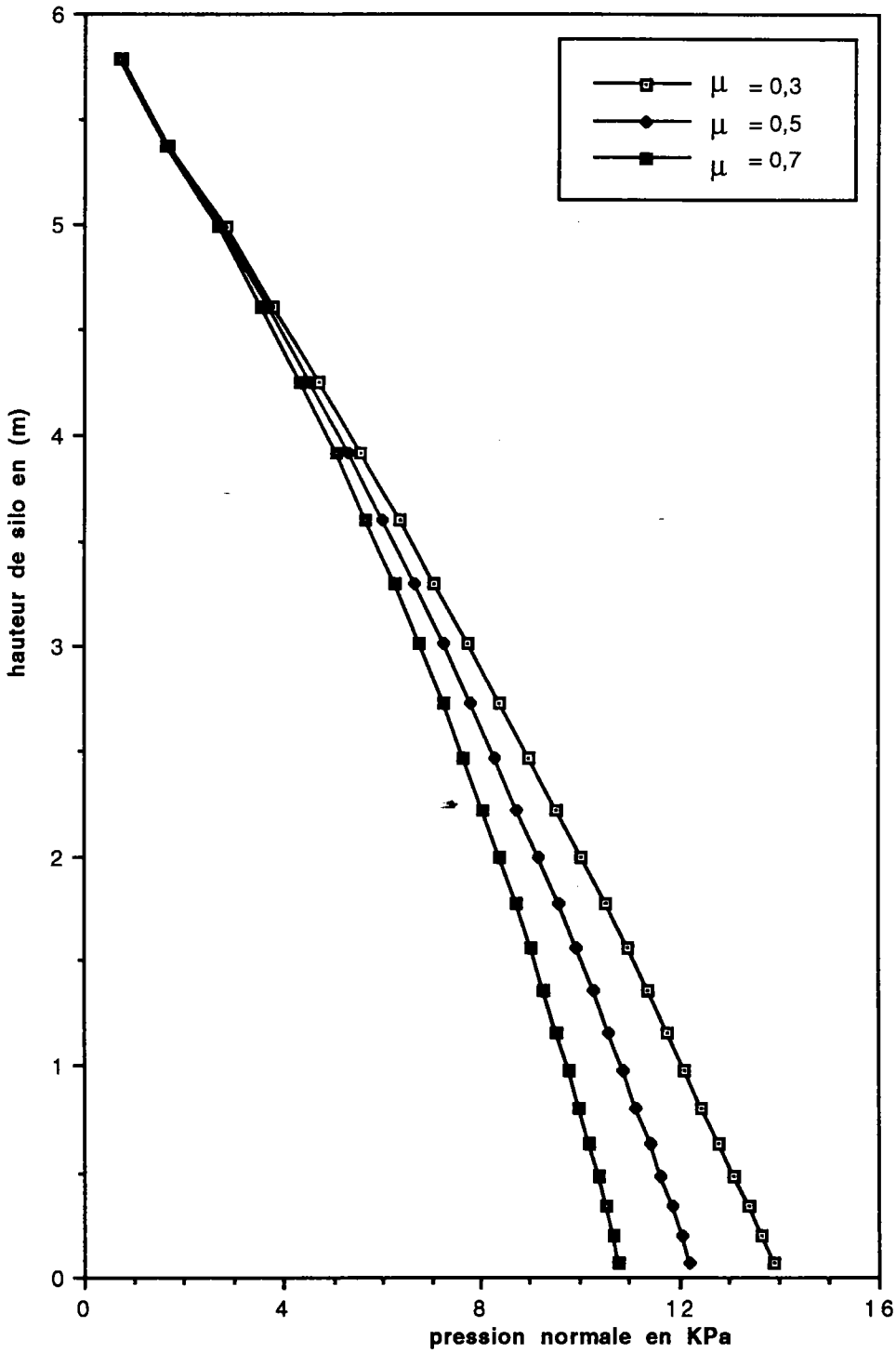


Figure 4-25 Variation de pression normale par rapport aux différents coefficients du frottement μ sur la paroi

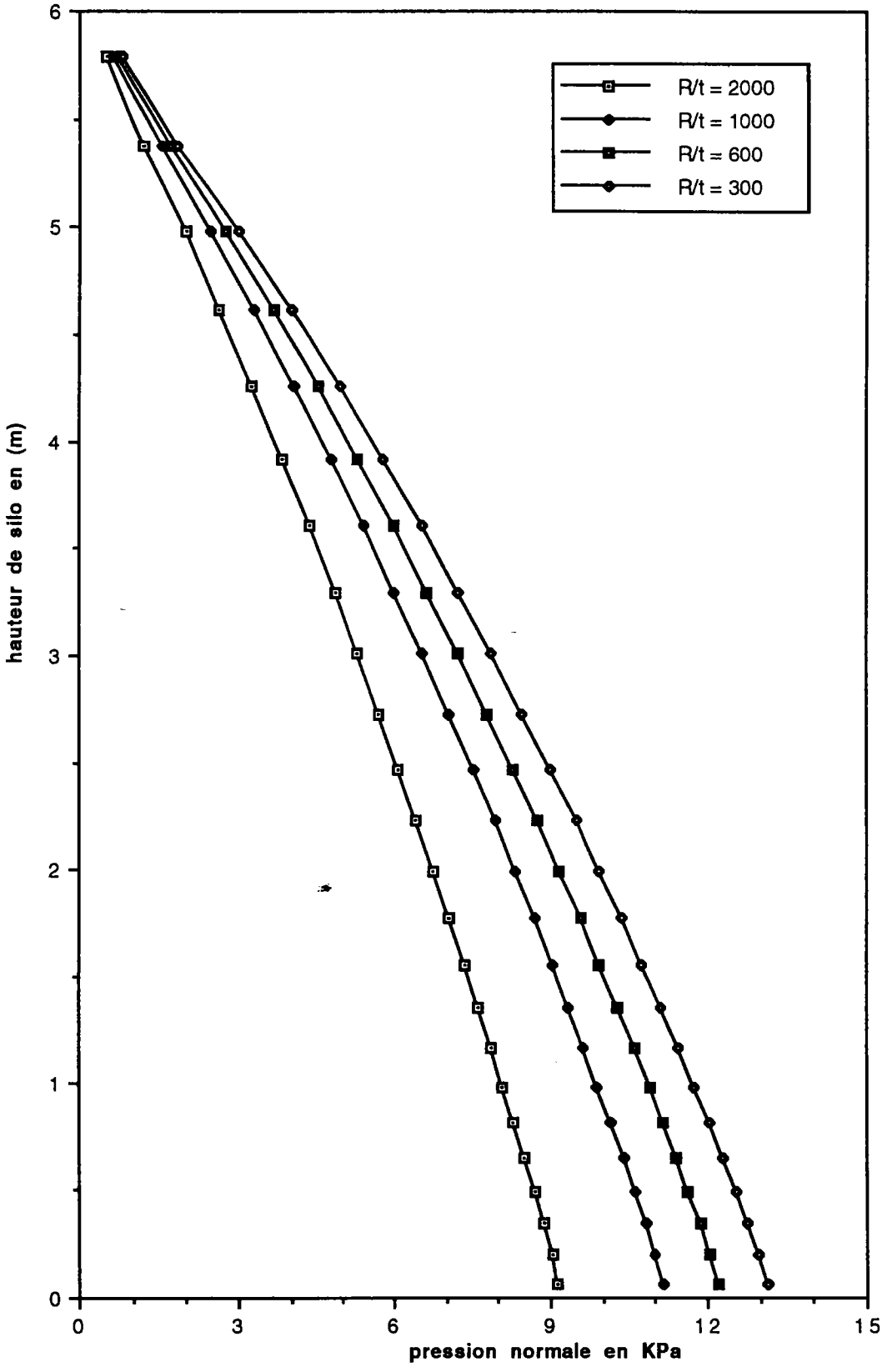


Figure 4-26 Variation de pression normale par rapport à la flexibilité des différentes épaisseurs de la paroi

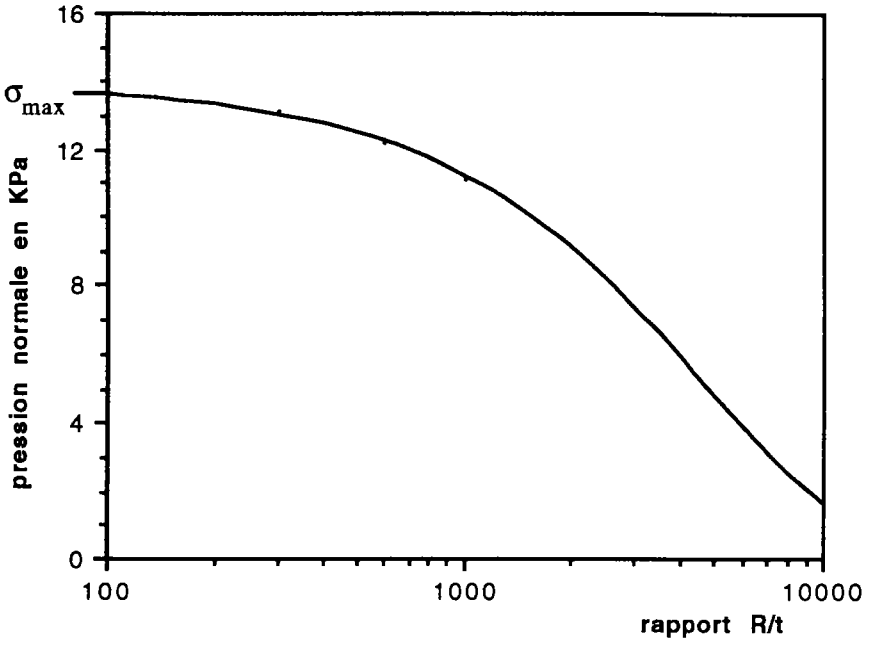


Figure 4-27 Variation de pression normale en fonction du rapport R/t

La figure 4-27 présente la variation de pression normale en fonction du rapport R/t. La courbe obtenue présente une variation presque exponentielle. Cette courbe est obtenu pour le niveau z/H = 0, c'est-à-dire au fond du silo. L'analyse de cette courbe est effectuée dans le paragraphe suivant.

4.6.3. L'effet du module d'élasticité

La figure 4-28 présente la variation de la pression normale par rapport aux différents modules d'élasticité de la matière ensilée. Comme le module d'élasticité augmente, la pression normale sur la paroi baisse. En considérant les relations (3.2.9a), une augmentation du module de compressibilité K ou du module de cisaillement G, baisse aussi la pression normale. En général, on parle d'un rapport de rigidité E_m/E_p, c'est-à-dire le rapport entre les modules d'élasticité de deux matériaux (matériau ensilé et la paroi). L'augmentation de ce rapport fait baisser la pression normale. La combinaison des rapports R/t (cf. § 4.4.2) et E_m/E_p, donne le paramètre $\beta=E_mR/E_pt$, traduisant la rigidité globale de la structure. On fait varier les rapports R/t et E_m/E_p tout en gardant β constant. Les résultats pour les deux cas β=0.075 et 0.75 sont comparés sur la figure 4-29. Pour chaque β, la superposition des résultats est faite pour deux combinaisons différentes de β. On peut bien voir que la distribution des pressions normales pour β constant reste identique.

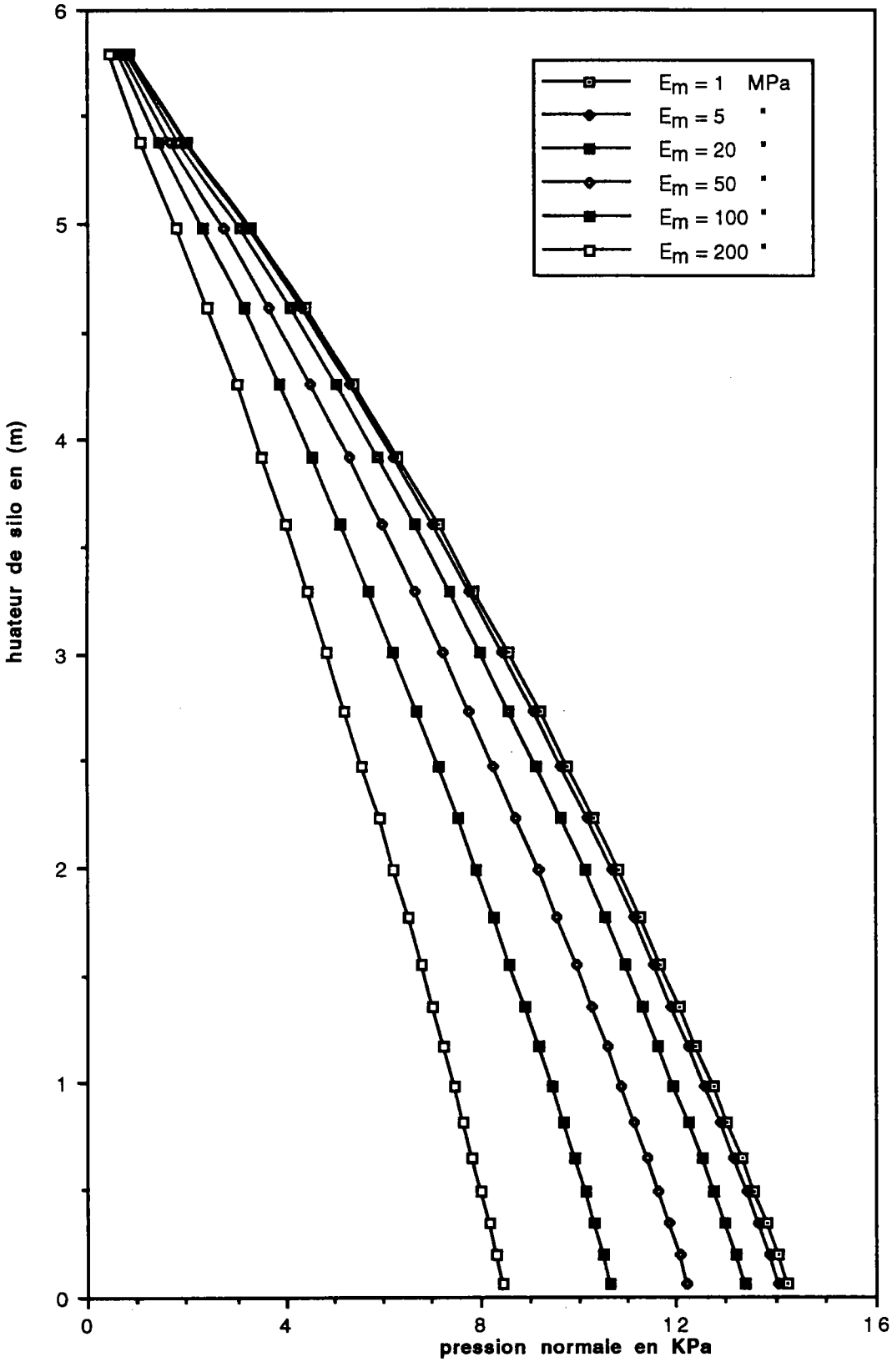


Figure 4-28 Variation de pression normale par rapport aux différents modules d'élasticité E_m des matériaux ensilés

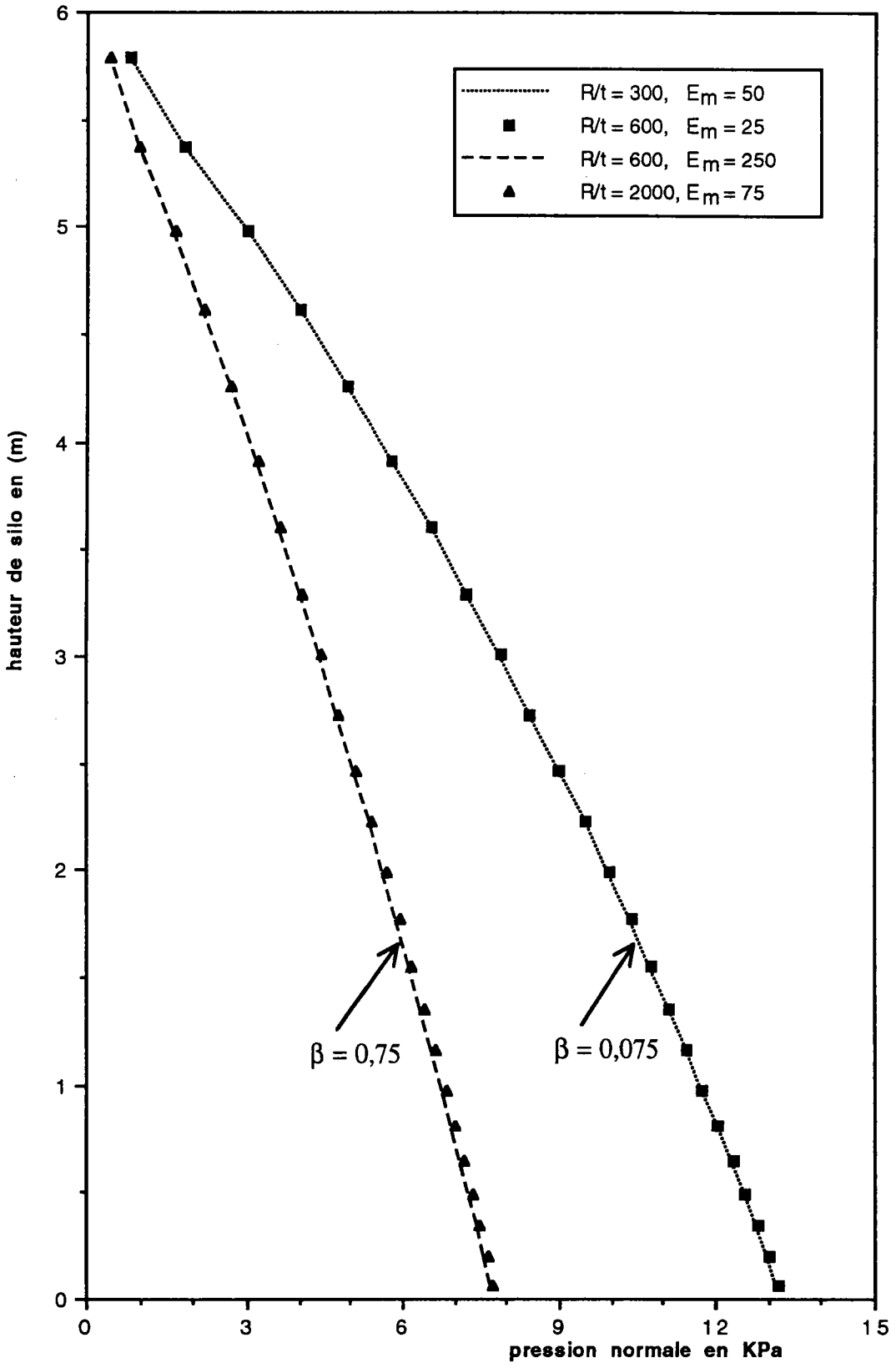


Figure 4-29 Superposition de pression normale pour β identiques

En effet, on peut dire que la distribution de la pression normale sur la paroi dépend du paramètre β, qui est une indication de la rigidité relative des deux matériaux. Dans la figure 4-30, la pression normale est étudiée par rapport au paramètre β, pour quatre hauteurs différentes d'ensilage. Pour β inférieur à 0.01, la pression normale tend vers une asymptote horizontale traduisant la pression normale maximale, ce qui correspond au cas d'un silo à paroi rigide. Ceci est concordant avec la prédiction de la formule de Janssen. Pour β variant entre 0.1 et 1.0 la variation de la pression normale est très rapide. Si on prend β égal à 10, une faible pression est transmise à la paroi. Évidemment ici, l'hypothèse du comportement élastique linéaire pour la matière ensilée est invalide, ce qui présente la matière ensilée comme un matériau autoporteur (solides). En pratique β ne dépasse pas 0.5 et pour les silos à faible élancement ce paramètre est compris, entre 0.01 et 0.2 [36], où l'interface entre le matériau ensilé et la paroi peut jouer un rôle important.

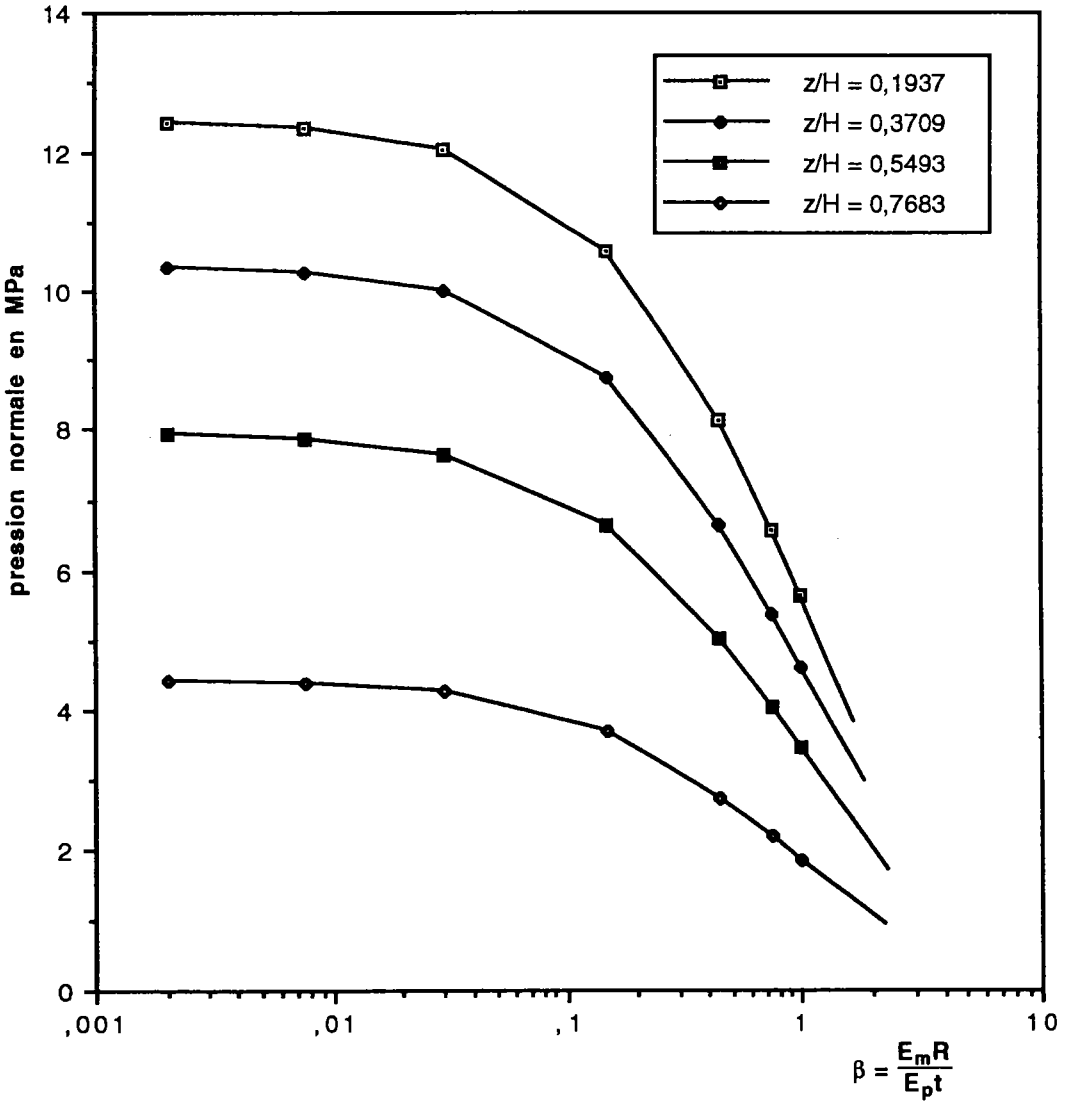


Figure 4-30 Effet du paramètre de rigidité β sur la pression normale

4.6.4. L'effet du coefficient de Poisson du matériau ensilé

La théorie de l'élasticité, prévoit une influence du coefficient de Poisson ν sur la pression normale. La figure 4-31 représente la variation de la pression normale par rapport au coefficient de Poisson du matériau ensilé. Quand ce coefficient s'approche de 0.50, la pression normale augmente considérablement. En effet, si ν passe de 0.2 à 0.4, la pression normale maximale sur la paroi double aussi. En conséquence, dans l'étude par éléments finis, la valeur de ν doit être choisie avec une bonne précision pour avoir des résultats satisfaisants. Dans la théorie de Jenike [26], pour le vidange du silo, le coefficient de Poisson est un paramètre important, il est souvent choisi égal à 0,3. La modélisation de la matière ensilée par l'élasticité peut être élémentaire, mais la modélisation avec un comportement non linéaire doit contenir un paramètre comparable qui jouerait le rôle du coefficient de Poisson.

4.6.5. L'effet de la hauteur d'ensilage

La figure 4-32 représente l'évolution de la distribution de la pression normale à la paroi pour les différentes hauteurs d'ensilage. On peut bien voir qu'en augmentant la hauteur d'ensilage, la tangente à la courbe de pression normale dans la partie inférieure vers le fond du silo, tend vers $\pi/2$. Par extrapolation des courbes obtenues, on peut également montrer que la pression normale reste invariante à la profondeur infinie, ce qui est cohérent avec la prédiction de la formule de Janssen. Cette figure montre également que la relation entre la hauteur d'ensilage et la pression normale n'est pas linéaire, mais aussi exponentielle, ce qui est encore cohérent avec la formule de Janssen.

La figure 4-33 montre une autre type de comparaison entre les distributions de pressions normales sur la paroi par rapport aux différentes hauteurs d'ensilage. Les quatre premières courbes de la figure précédente sont décalées vers le haut et sur la cinquième. Cette fois on voit bien que les courbes coïncident bien. On en déduit que si on a une distribution de pression normale sur la paroi dans un silo, par exemple, à 15*m* de hauteur, on peut prévoir la distribution de pression normale pour les silos, par exemple, à 12, à 9 et à 6*m* de hauteur.

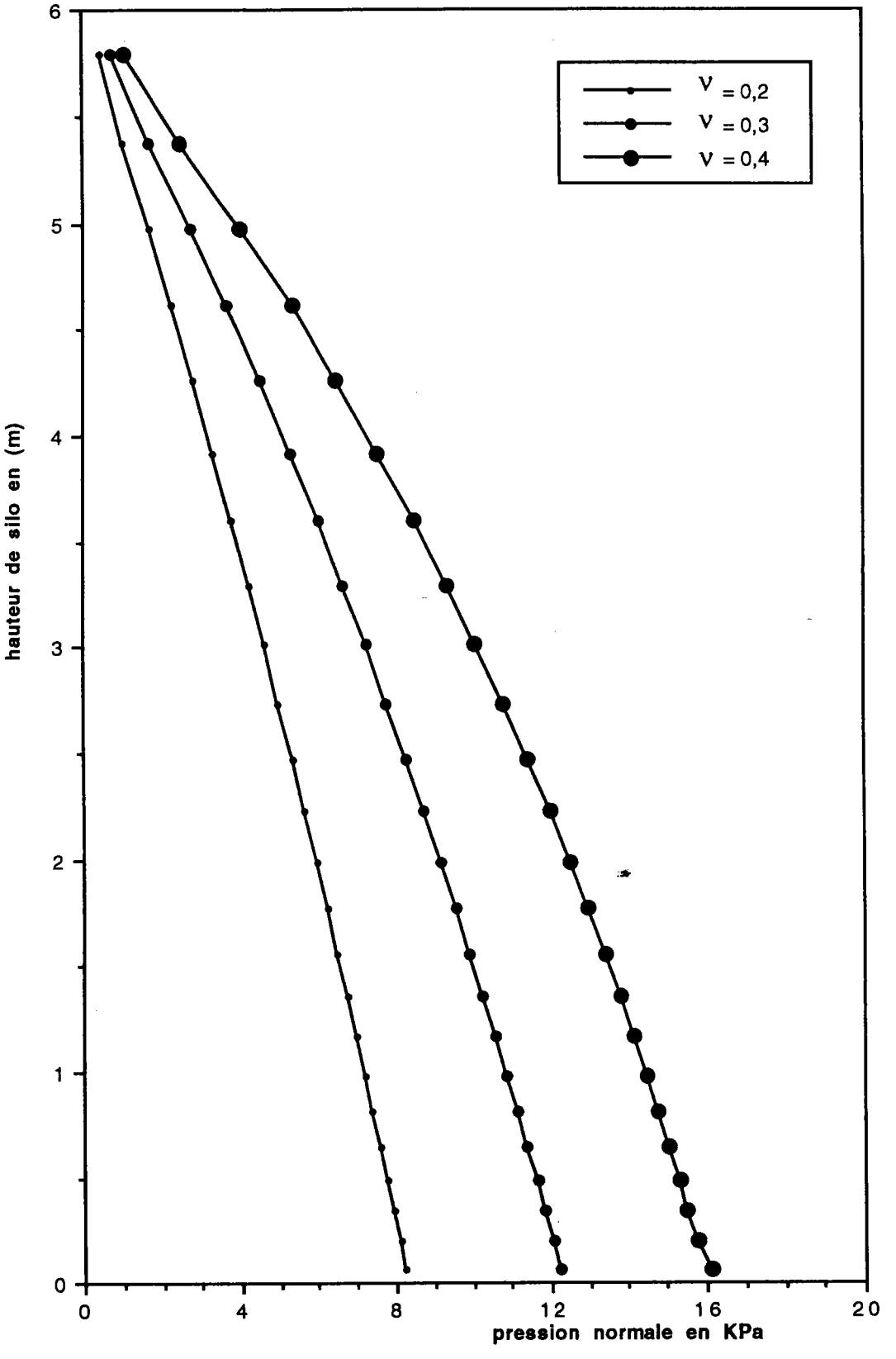


Figure 4-31 Variation de pression normale par rapport aux différents coefficients de Poisson de la matière ensilée

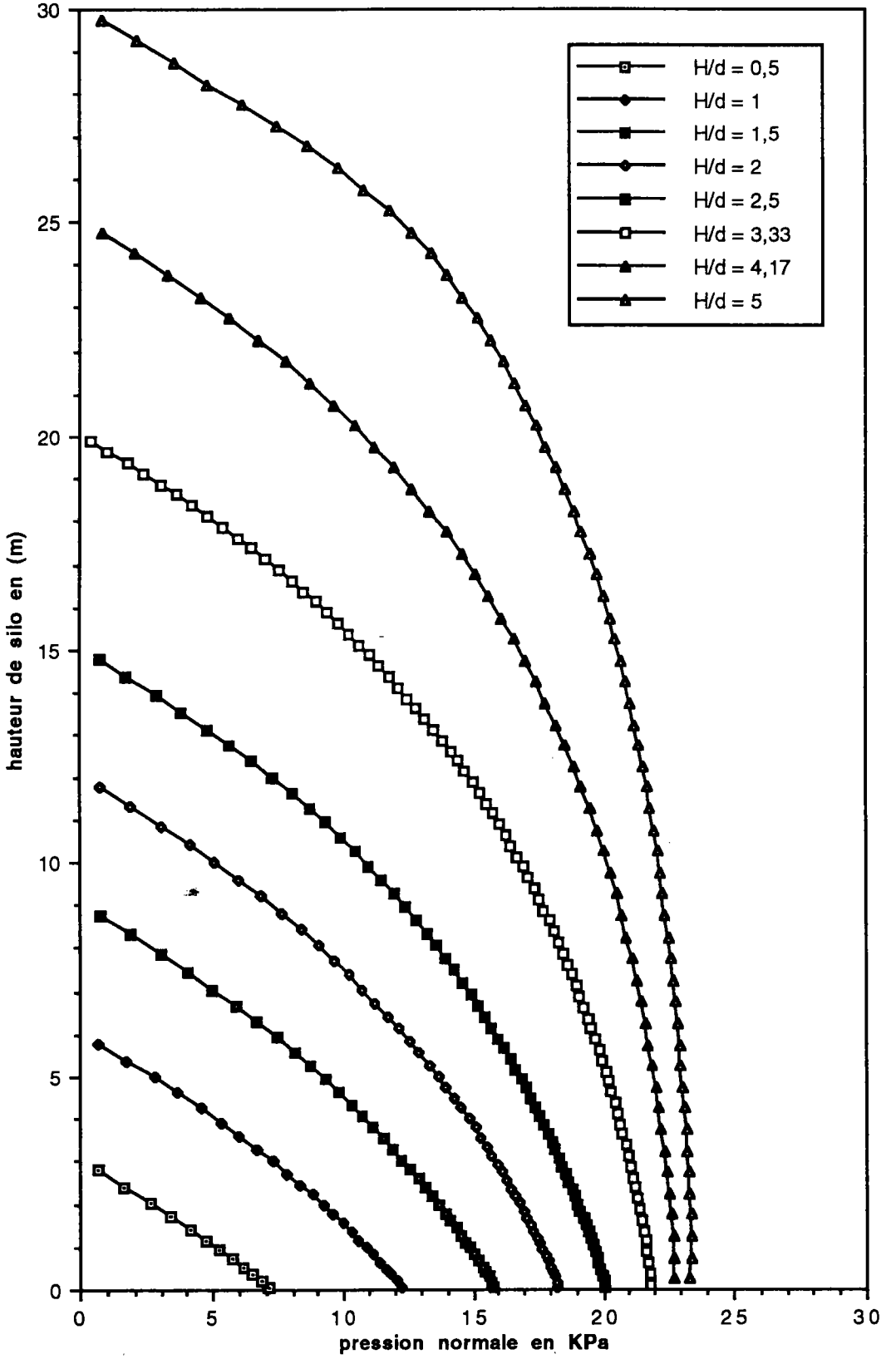


Figure 4-32 Évolution de la répartition de la pression normale par rapport aux différentes hauteurs d'ensilage

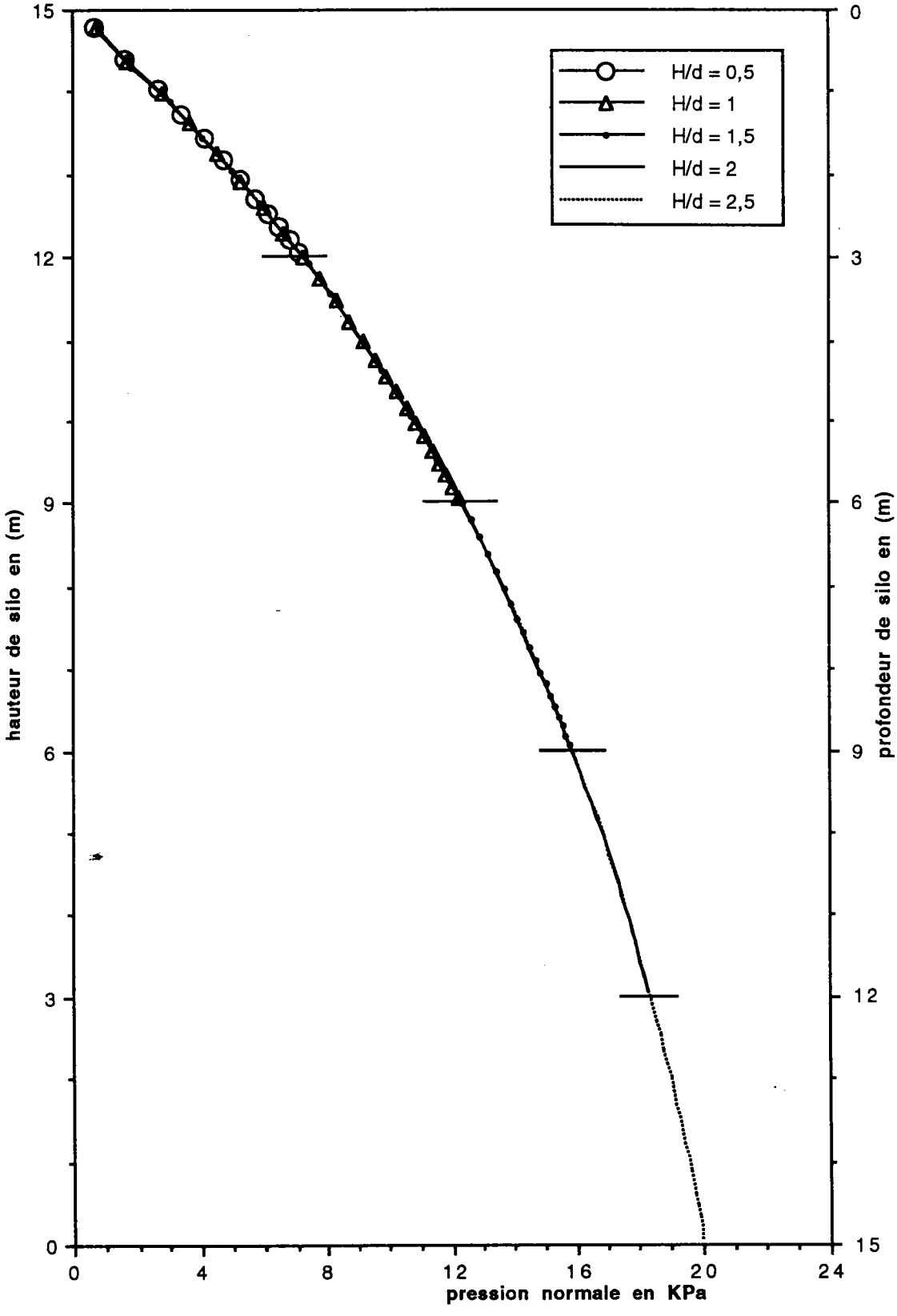


Figure 4-33 Coïncidence de la distribution de la pression normale par rapport aux différentes hauteurs d'ensilage

4.6.6. L'effet du poids volumique

La figure 4-34 présente la variation de la pression normale par rapport aux différents poids volumiques de la matière ensilée. Cette figure montre bien que cette variation est linéaire. En effet, si γ passe de 0.6 à 1.2, la pression normale sur la paroi double aussi. Dans la formule de Janssen, γ joue aussi le même rôle que dans notre étude.

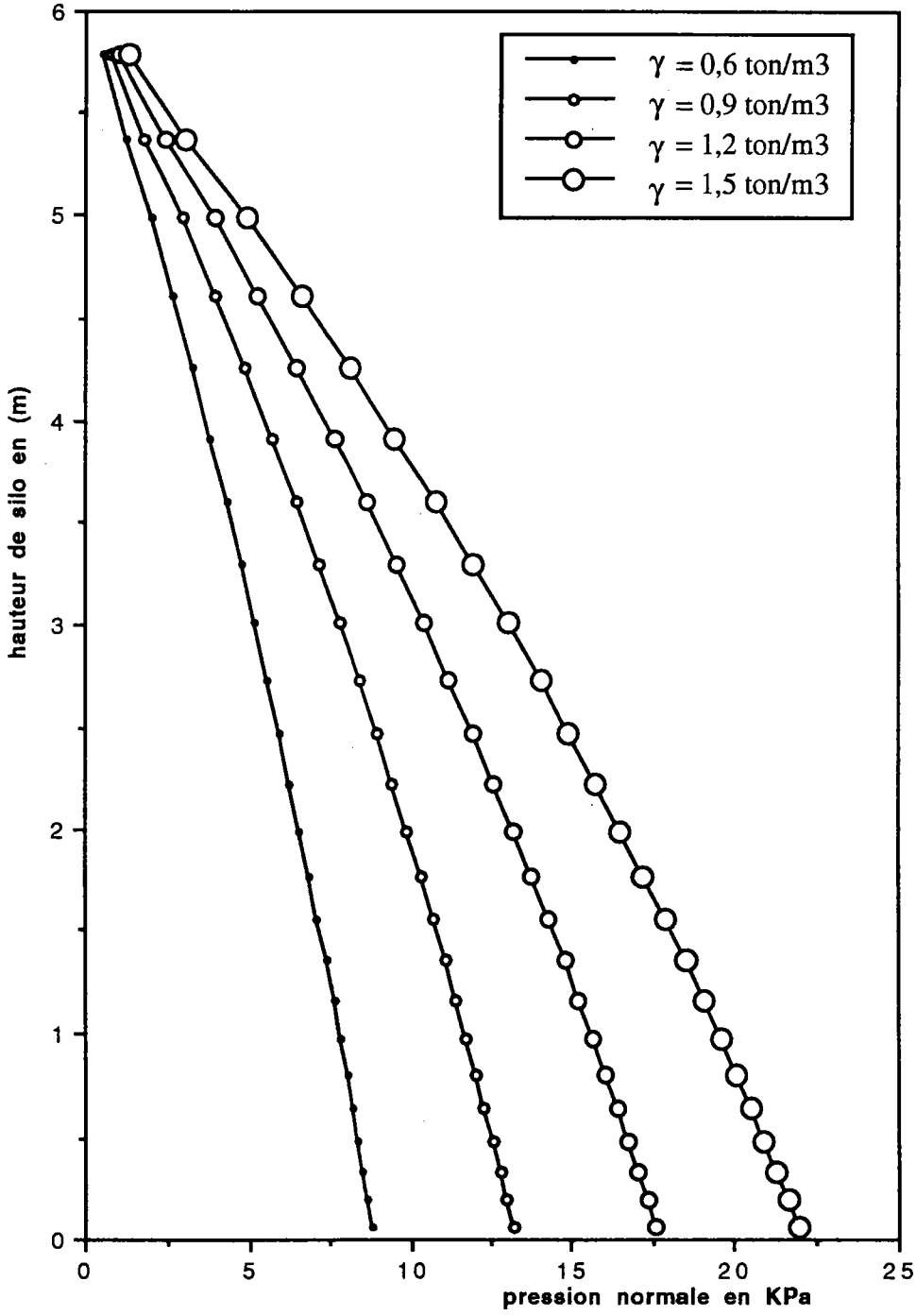


Figure 4-34 Variation de pression normale par rapport aux différents poids volumiques

4.7. ÉTUDE DES ASPECTS NUMÉRIQUES

Dans le calcul par éléments finis, le nombre des éléments utilisés et les différents types d'éléments influencent normalement les résultats obtenus. D'abord, nous allons traiter dans ce paragraphe l'influence du nombre d'éléments avec trois types différents d'éléments, appliqués au matériau ensilé:

a) l'élément triangulaire à trois noeuds (T3),
b) l'élément quadrilatéral à quatre noeuds (Q4),
c) et l'élément quadrilatéral à huit noeuds (Q8).

On verra que cet effet n'est pas très important dans notre démarche, puisque le traitement du matériau ensilé contre la paroi ressemble à un bloc, qu'il ne dépend que des rigidités normale k_n et tangentielle k_s. Ensuite, en étudiant l'influence des différents types d'éléments utilisés, on trouve que cet effet peut être important.

4.7.1. L'EFFET DU NOMBRE D'ÉLÉMENTS UTILISÉS

4.7.1.1. Élément triangulaire (T3)

La figure 4-35, présente les résultats obtenus avec les nombres différents d'éléments triangulaire à trois noeuds (T3). Cet élément est utilisé pour discrétiser le matériau ensilé. Pour l'interface entre le matériau ensilé et la paroi, on a utilisé l'élément de contact à quatre noeuds (C4) et enfin l'élément quadrilatéral à quatre noeuds (Q4), est appliqué pour la paroi. Les courbes présentées dans cette figure, montrent qu'entre les trois cas (avec les nombres d'éléments appliqués au matériau ensilé égal à 48, à 192 et à 768), la distribution des pressions normales à la paroi a sensiblement la même allure; la différence entre elles n'est importante qu'à la partie inférieure et vers le fond du silo, c'est-à-dire là où les conditions aux limites sont appliquées.

4.7.1.2. Élément quadrilatéral à quatre noeuds (Q4)

Les résultats obtenus par l'élément quadrilatéral Q4 montrent une faible différence, même en bas du silo, figure 4-36. On a discrétisé également la matière ensilée avec seulement huit éléments Q4, c'est-à-dire, huit éléments le long de la

hauteur du silo et un élément par rayon du silo. La différence entre les pressions normales obtenues, avec les nombres différents d'éléments, sont négligeables.

4.7.1.3. Élément quadrilatéral à huit noeuds (Q8)

La figure 4-37 présente une comparaison de la distribution des pressions normales à la paroi obtenues, en utilisant les nombres différents d'éléments quadrilatéraux Q8 égal à 8, à 96 et à 384. On a utilisé pour l'interface entre le matériau ensilé et la paroi du silo, l'élément de contact à six noeuds (C6). Pour le matériau ensilé et la paroi, on a appliqué l'élément Q8. Les courbes obtenues coïncident bien, sauf dans la partie inférieure du silo vers le fond, là où l'effet du fond est présent. De plus, on trouve que le nombre d'éléments utilisés ne peut pas influencer sensiblement les pressions normales à la paroi obtenues en utilisant l'élément Q8. Près du fond de silo, la pression tangentielle est très faible, par conséquent, lorsqu'on prend un maillage fin près du fond avec l'élément Q8, dans l'itération suivante à i, c'est-à-dire i+1, le programme ne peut pas corriger la pression normale à cet endroit. C'est pourquoi la courbe obtenue pour 384 éléments présente quelques parasites, qui ne sont pas importants.

4.7.2. COMPARAISON DES RÉSULTATS OBTENUS PAR LES ÉLÉMENTS DIFFÉRENTS

La figure 4-38 présente une comparaison des pressions normales obtenues en utilisant les types différents d'éléments. Les courbes tracées des résultats obtenues, par les éléments Q4 et Q8, montrent une bonne coïncidence sauf vers le fond du silo, où on relève une faible différence. Par contre, cette figure montre une différence considérable entre les résultats obtenus par les éléments Q4 et Q8 d'une part, et les résultats obtenus par l'élément T3 d'autre part, dans la partie inférieure du silo. Les pressions obtenues par T3 montrent une majoration de la pression normale maximale d'environ 13% par rapport aux pressions normales obtenues par les éléments Q4 et Q8. La figure 4-35 montre que même en augmentant le nombre d'éléments, une amélioration importante de pression ne peut pas être atteinte. Cet élément est linéaire, et par contre les éléments Q4 et Q8 sont respectivement bilinéaire et quadratique.

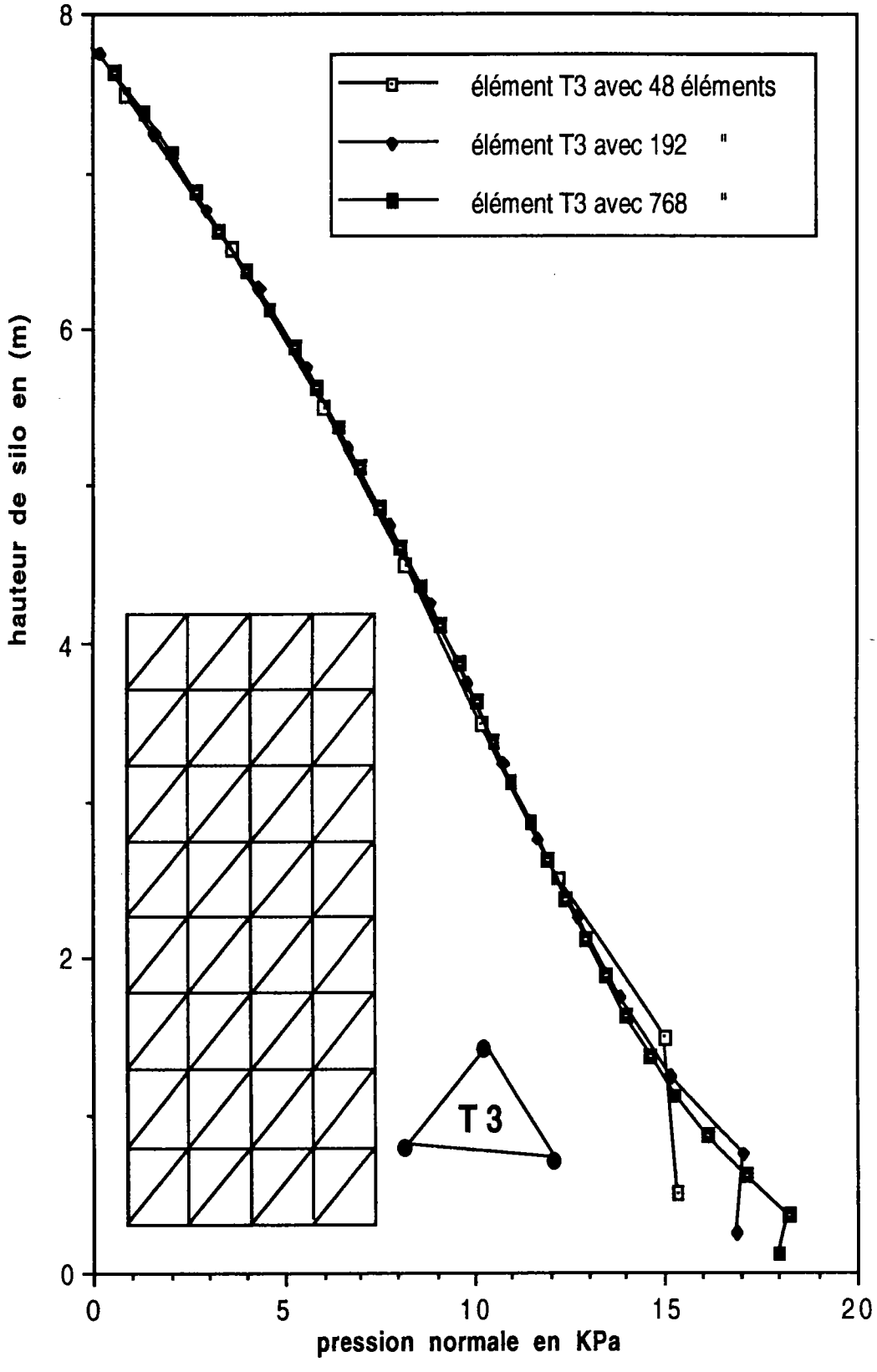


Figure 4-35 Résultats obtenus avec les nombres différents d'éléments T3

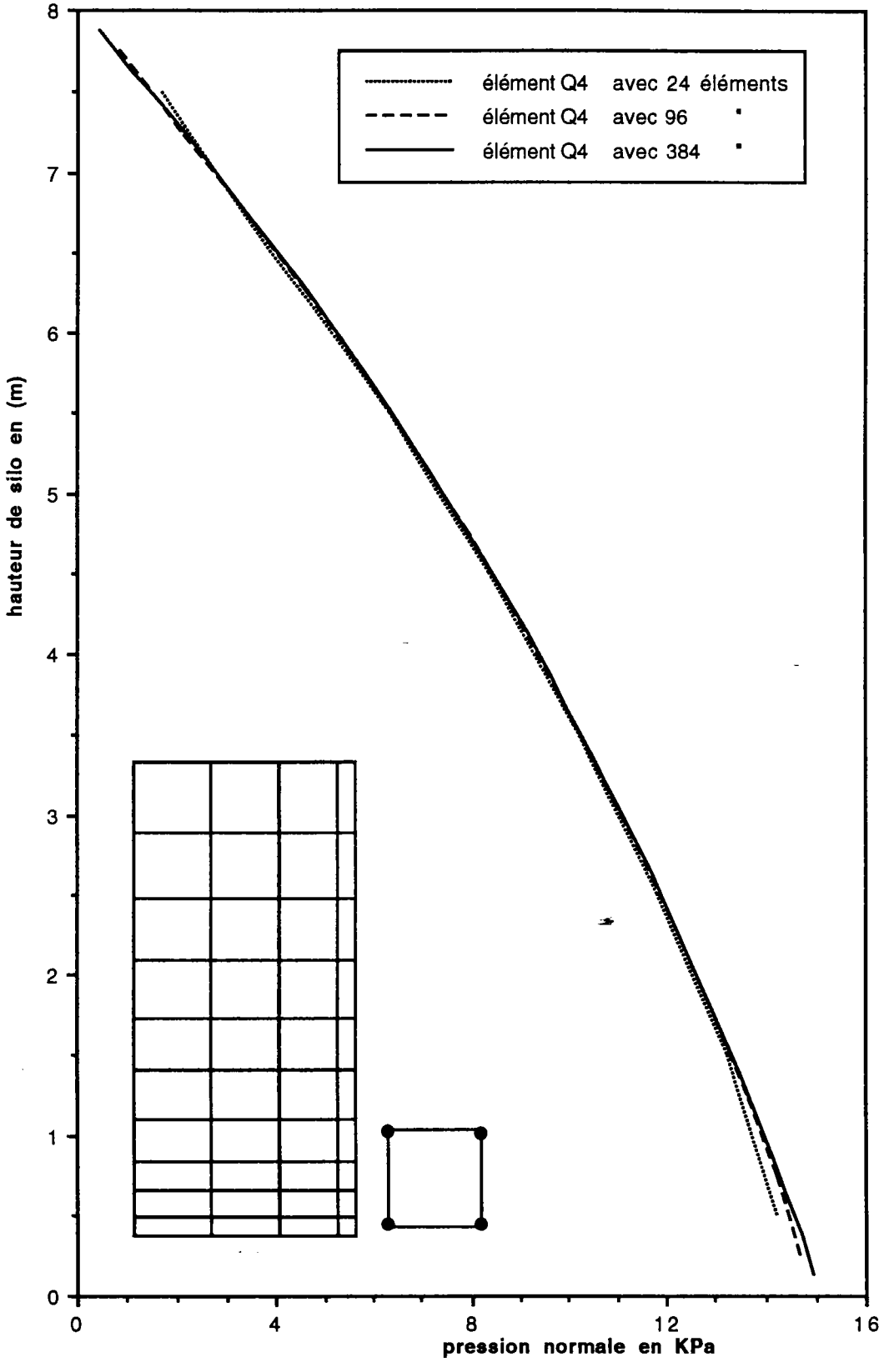


Figure 4-36 Résultats obtenus avec les nombres différents d'éléments Q4

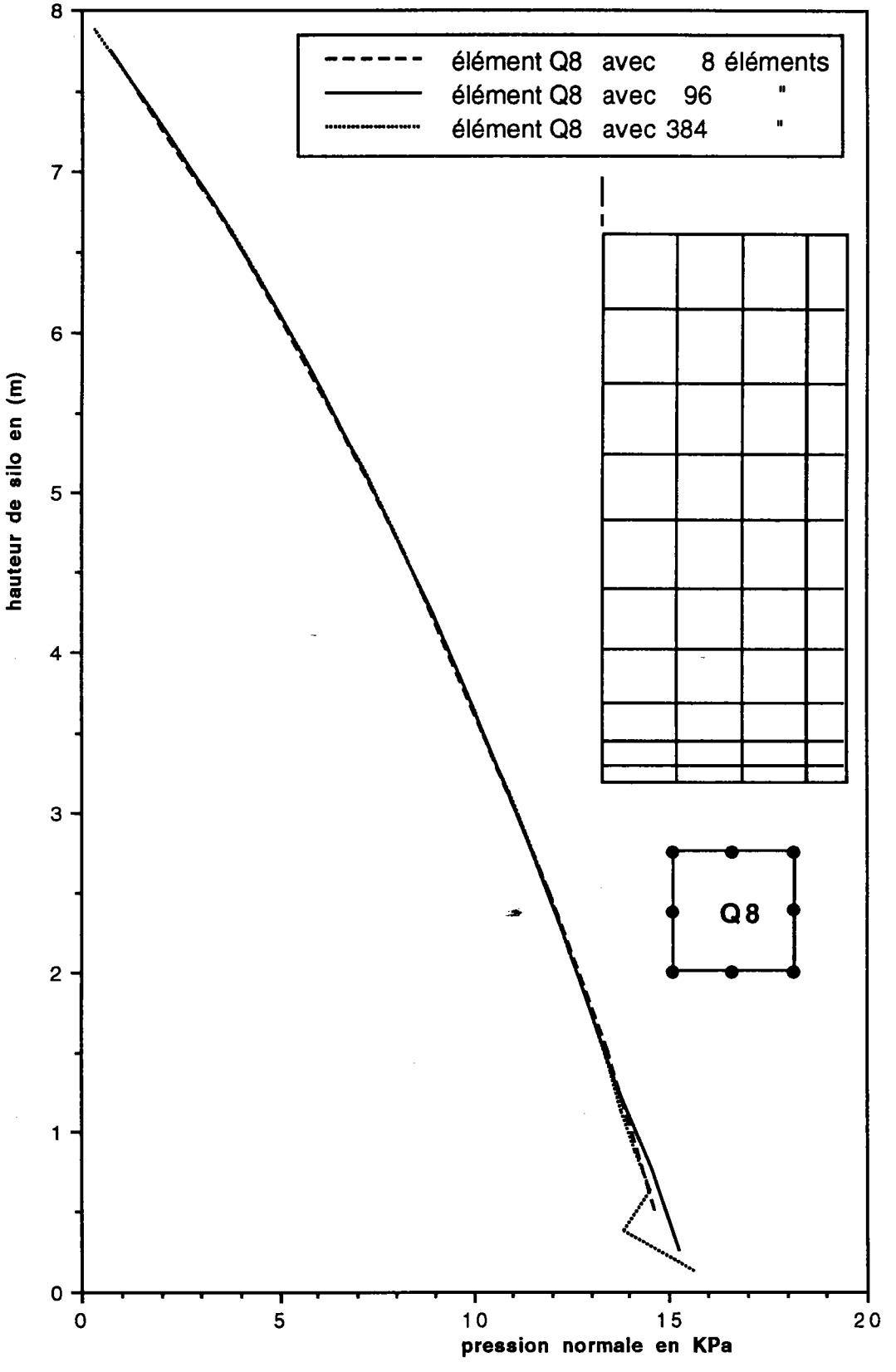


Figure 4-37 Résultats obtenus avec les nombres différents d'éléments Q8

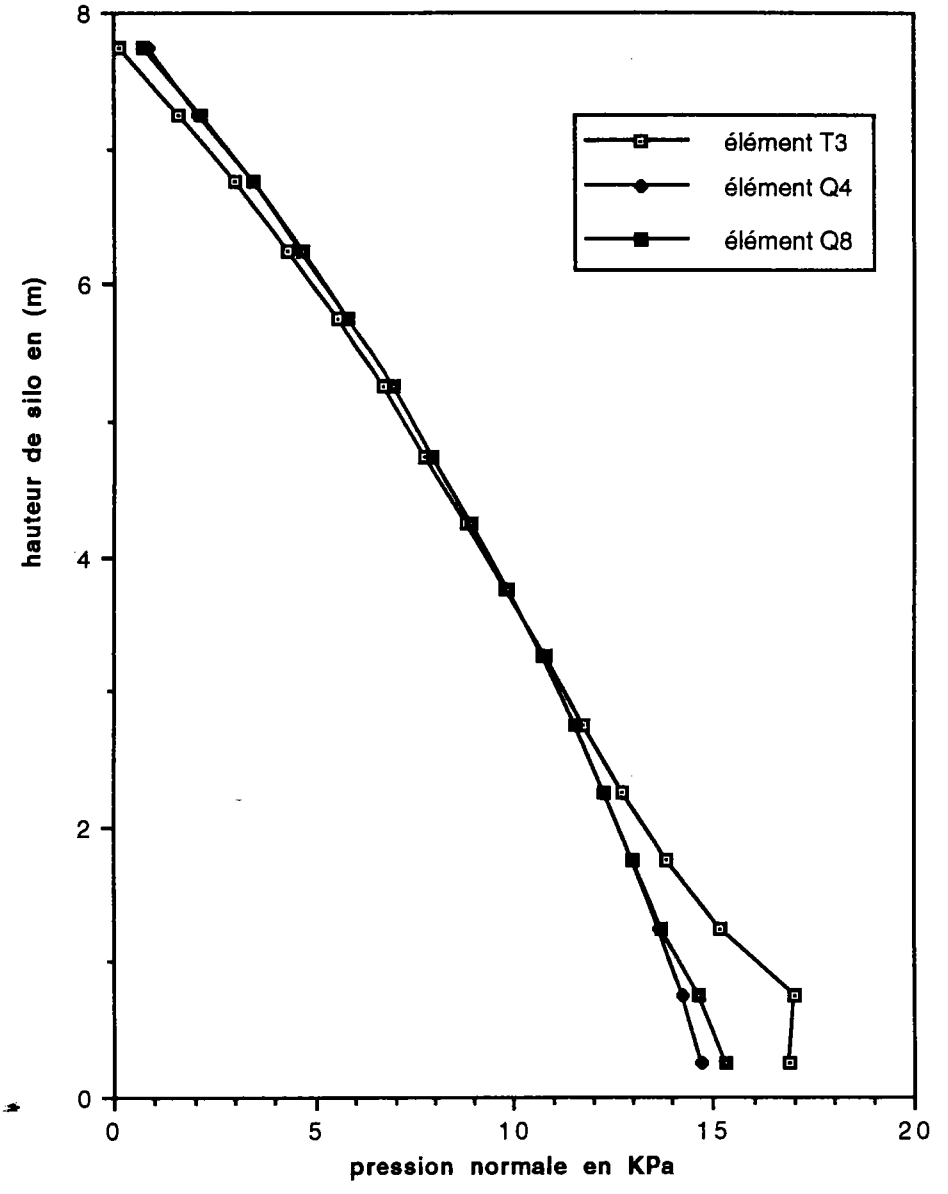


Figure 4-38 Résultats obtenus avec les éléments différents

4.7.3. CONCLUSION

Entre les éléments T3, Q4 et Q8, on trouve que ce dernier accompagné de l'élément de contact C6, donne de meilleurs résultats pour un nombre de degré de liberté total donné. Une étude numérique de comparaison des performances de différents éléments axisymétriques [58] a montré que l'élément triangulaire T6 à six noeuds (n'est pas présenté ici) et l'élément quadrilatéral Q8 s'avèrent les plus performants pour les problèmes traités. L'élément T3 reste très économique pour les situations simples au niveau des conditions aux limites. Les résultats obtenus par l'élément Q4 sont très proches des résultats obtenus par l'élément Q8 dans le cas d'un silo sans trémie.

CONCLUSION

Dans le domaine de l'étude concernant la détermination des actions de la matière stockée sur la paroi des silos, nos travaux ont pour but de montrer que l'utilisation d'une loi de comportement simple donne des résultats satisfaisant dans le cas du remplissage des silos. En effet nous considérons dans nos calculs un comportement élastique linéaire pour caractériser le comportement de la matière ensilée et obtenons des résultats proches des mesures expérimentales connues. Les théories proposant l'étude à partir des critères complexes de rupture ne sont donc pas nécessairement indispensables. L'hypothèse de comportement élastique linéaire de la matière ensilée avec ou sans cohésion, donne des résultats d'autant meilleurs que la matière est confinée sous de faibles charges.

Dans notre travail, nous démontrons que l'hypothèse du comportement élastique linéaire utilisant des paramètres du matériau simples à obtenir, s'affranchit des paramètres tels que la notion de *rapport de pression latérale* λ, ou les notions de l'angle de frottement interne et la cohésion de la matière ensilée, qui sont introduits par les théories classiques développées à partir des méthodes de Janssen et par les méthodes numériques aux éléments finis effectuées à partir d'un comportement élasto-plastique de matériau ensilé. Parmi ces méthodes les effets de flexibilité de la paroi sont rarement pris en considération.

La modélisation exacte du frottement en tenant compte de la flexibilité de la paroi est importante. En effet, le concept d'état limite de frottement, mis en évidence par l'utilisation d'un élément de contact à l'interface matériau-paroi, est entièrement défini à partir de l'angle de frottement à la paroi.

Pour les matériaux ensilés ayant un angle de frottement interne élevé, l'hypothèse de comportement élastique est plus adaptée. Lorsque la cohésion du matériau ensilé est faible, son angle de frottement interne augmente, ce qui est admis pour les matériaux granulaires. L'omission des effets de plastification du matériau ensilé en utilisant l'hypothèse de comportement élastique linéaire de la matière ensilée, entraîne une faible augmentation de la pression normale dans la partie inférieure et une faible diminution de cette pression dans la partie supérieure du silo (cf. § 2-3).

Lorsque le rapport géométrique entre la hauteur et le diamètre de silo H/d est supérieur à 5, la déformation de la paroi est importante, ce qui baisse la précision du fonctionnement de l'élément de contact. Dans ce cas, on préfère rigidifier la paroi, soit en augmentant l'épaisseur de la paroi, soit en bloquant les noeuds le long de la paroi du silo.

Les exemples étudiés pour les cas de silos à fond incliné, montre que la démarche suivie au chapitre 3, peut donner une bonne solution dans la trémie. En réduisant la charge sur la trémie et l'angle α (entre la trémie et l'horizontale) la qualité des résultats obtenus augmente. En augmentant le coefficient de frottement sur la paroi du silo μ, la pression sur la trémie diminue, par conséquent, il y a une amélioration des résultats avec une augmentation de μ. L'élément de contact quadratique CT6 (cf. § 3.2.2.4.) donne des résultats plus précis que l'élément de contact linéaire CT4 (cf. § 3.2.2.2.).

L'effet du coefficient de Poisson ν est très important, et les études ultérieures sur le comportement des matériaux granulaires doivent mesurer le comportement volumétrique.

L'utilisation de ce programme est économique du point de vue du temps de calcul; la linéarité de comportement du matériau ensilé est à l'origine d'une diminution très importante du temps de démarrage du programme. L'exécution du programme est jusqu'à 100 fois plus rapide qu'une résolution non linéaire classique.

La suite à donner à ce travail, consiste à définir des modules d'élasticité globaux du milieu continu équivalent pour les matériaux ensilés et le coefficient de Poisson, ou définir des modules de copressibilité K et de cisaillement G. On peut également trouver une solution simplifiée, en utilisant les éléments de contact présentés dans ce travail, pour le cas de la vidange. Les éléments de contact peuvent modifier en utilisant les éléments axisymétriques de coque pour discrétiser la paroi.

Enfin, à partir de cette étude on peut facilement introduire les comportements plus complexes de matériaux si nécessaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABDEL-SAYED G., MONASA F. and SIDDALL W., "Cold-formed steelfarm structures", Part I: Grain bins. Jul Structures Engineering, ASCE 111(ST10), 2065-2089, 1985.

[2] ACI Standard, 31-77 and Commentary, "Recommended practice for design and construction of concrete silos and bunkers for storing granular material", Jan. 1978.

[3] ARNOLD P.C., McLEAN A.G. and ROBERTS A.W., "Bulk solids: Storage, Flow and Handling. Tunra Bulk Solids Handling Research Associates, Univ. Newcastle, Australia, 1980.

[4] BATHE K.J. and WILSON E.L., "Numerical methods in finite elements analysis", copyright by Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976.

[5] BATHE K.J., "ADINA. Finite element program for automatic dynamic incremental non-linear analysis", Acoustics and Vibration Lab. Dept. of Mech. Eng., Mit. Cambridge, Mass., 1978.

[6] BATOZ J.L., DHATT G., "Modélisation des structures par éléments finis", Hermés, Paris, 1990.

[7] BISHARA A. G., El-AZAZY S.S. and HUANG T. D., "Practical analysis of cylindrical farm silos based on finite element analysis", ACI Jnl 456-462, 1981.

[8] BISHARA A.G., AYOUB S.F. and MAHDI A.S., "Static pressures in concrete circular silos storing granular materials", ACI Jnl, May-June 1983, Title No. 80-21, pp. 56-62.

[9] BISHARA A. G., "Bulk material-silo interaction using material characterization and finite element analysis proceeding", STANDFORD congress, 1983, pp 49-65.

[10] BLIGHT G.E. et HALMAGIU A.R., "Measured pressures compared with code recommendations for a multi-cell silo storing fly ash", J. Powder Handling processing, V. 6, No. 4, oct/dec. 1994.

[11] BUISSON R., GABRIEL J. et SERRIERE C., "Capteur d'action grain-paroi à grande raideur", Revue de construction métallique N° 2.89, 1989.

[12] CHANDRANGSU K. and BISHARA A. G., "Non-linear finite element analysis of farm silos", Proc. ASCE 104, No. ST7, 1045-1059, 1978.

[13] COOK R. D., "Concepts and applications of finite element analysis", copyright by John Wiley & sons, Inc., 1981.

[14] COULOMB C.A., "Sur une application des régles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture", Mémoires Savants etrang. l'Acad. Sci. Paris 7, 343-382, 1773.

[15] DIN 1055, TEILL 6, 1986, "DEUTSCHENORM", Lastannahmen fur Bauten Lasten in Silozellen-Beuth verlag Gmbh BERLIN 30.

[16] EIBL J., LANDAHL H., HAUSSLER U. and GLADEN W., "Zur frage des silodrucks", Beton-und stahlbetonbau 77(4), 104-110, 1982.

[17] EIBL J. et ROMBACH G., "Stress and velocity fields at discharging of silos", Proc. of NUMETA, Swansea, july 1987.

[18] EIBL J. et ROMBACH G., "Numerical computation of velocity and stress fields in silos, theory and application" Proc. SILOSY, Sklarska Poreba, oct. 87.

[19] GAYLORD E.H. and GAYLORD C.N.," Design of steel bins for storage of bulk solids", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

[20] GOODMAN R. E., TAYLOR R.L. et BREKKE T.L., " A model for the mechanics of jointed rocks" Jal Soil Mech.Found. Div., ASCE SM4, 637-659 (1968).

[21] HABIB P. et LUONG M.P., "Recherche *silos* du CTICM. Comportement réologique des matériaux en vrac stockés en silo", Rapport des essais de laboratoire suivant notre proposition du 27 novembre 1987, août 1988.

[22] HAUSSLER U. and EIBL J., "Numerical investigations on discharging silos", Jnl Engng Mech. Div., ASCE 110(EM6), 957-971, 1984.

[23] HOMES A.G., "Lateral pressures of granular material in silos", ASME Paper No. 72-MH-30 for Meeting, Sept. 17-20, 1972.

[24] JAKY J., "Pressures in silos", Proc. 2nd Int. Conf. on Silo, Mechanics and Foundation Engng, Rotterdam, June 21-30, Vol. 1, pp.103-107, 1948.

[25] JANSSEN H.A., "Versuche uber getreidedruck in silozellen", Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure 39(35), 1045-1049, 1895.

[26] JENIKE A.W., JOHANSON J.R. and CARSON J.W., "Bin loads - Part 3: mass flow bins" Jnl Engng Industry, Trans. ASME 95(Ser. B, No. 1), 6-12, 1973.

[27] KHELIL A., "Étude du champ de vitesses et de contraintes dans les silos métalliques", Thèse de Doctorat, ENSEM, INPL, 1989.

[28] KOENEN M., "Berechnung des Seiten und Bodendrucks in Silos", Zentralbl. Bauverwaltung 16, 446-449, 1895.

[29] KOLYMBAS D., "A constitutive law of the rate type for silos and other granular materials", Proc. Numerical Methods in Geomech., Kosice, 1987.

[30] LADE P.V., "Elastique-Plastique stress-strain theory for cohesionless silos with curved yield surfaces", Int. J. of solids and structures, Vol. 13, 1977.

[31] LAMBERT F.W., "The theory and practical design of bunkers", Brit. Constr. Steelwk Assoc., London, Publ. 32, 1968.

[32] MAHMOUD A. A. and ABDEL-SAYED G., "Loading on shallow cylindrical flexible grain bin", Jnl Powder Bulk Solids Tech. 5(3), 12-19, 1981.

[33] NEUSS D.O., "Die innere reibung von schuttguttern untersuchugen materialeigenschaften verschie-dener silolagerstoffe", Thèse D.Ing., Univertsitat Braunschweig 1967.

[34] N.F. P22-630: "Norme Exprimentale Française", AFNOR, 1992.

[35] NIELSEN J. and ANDERSEN E. Y., "Loads in grain silos", published and edited by Danish Society for Structural Science and Engineering, Vol. 53, No. 4, pp. 123-135.

[36] OOI J.Y. et ROTTER J.M. "Wall pressures in squat steel silos from simple finite element analysis" Computers & Structures Vol. 37,No. 4, pp. 361-374, 1990.

[37] PIEPER K. and WANZEL F., "Comments on DIN1055: Design loads for buildings loads in silo bins", Beton-und Stahlbetonbau 6-11, 1963.

[38] RAGNEAU E., "Modélisation numérique et nouvelles méthodes analitiques pour le calcul des actions dans les silos cylindro-coniques (remplissage et vidange)", Thèse de Doctorat, INSA de Rennes, 1993.

[39] RANKINE W.J.M., "One of the stability of loose earth", Phil. Trans. R. Soc. Lond. 147, 9, 1857.

[40] REIMBERT M. and REIMBERT A., "Silos: Théorie et pratique", 7ème Édition, Eyrolles éditeur, Paris, 1982.

[41] ROMBACH G. et EIBL J., "Numerical simulation of filling and discharging processes in silos", 3rd Int. Conf. on Bulk Materials, Storage, Handling and Transportation, Newcastle, 27-29 June 1989.

[42] ROMBACH G. and EIBL J., "Wall pressure in eccentric discharged silos", FIP/ISO Paper No.: 20/80.

[43] SEGERLIND L.J., "Applied Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, Inc., New York, 1976.

[44] SHAMES I.H., C.L. DYM, "Energy and finite element methods in structural mechanics", McGraw-Hill,1985.

[45] SOKOL L., "Wall loads in vertical silos", International Journal of bulk solids storage in silos,1985.

[46] SOKOL L., "Méthode de calcul pour l'évaluation des actions dues à la matière ensilée", Revue de construction métallique N° 2.89, 1989.

[47] STEWART B.R., Active and passive wall pressures induced by sorghum grain in a shallow bin", Trans. Amer. soc. Agric. Engnrs, 15(1), 121-125, 1972.

[48] VALID R., "La mécanique des milieux continus et le calcul des structures", Eyrolles, 1977.

[49] VEDAIE B. et BISHARA A. G., "Pressures in circular hopper silos under axisymmetric mass flow", Silos-Forschung und Praxis Tagung 88 KARLSRUHE, pp 25-52.

[50] WALKER D.M., "An approximate theory for pressure and arching in hoppers", Chem. Eng. science 21, 975-997, 1966.

[51] WALTERS J.K., "A theoretical analysis of stresses in silos with vertical walls", Chem. Eng. science 28,13-21, 1973.

[52] WASHIZU K., "Variational methods in elasticity and plasticity", 3rd edition, Pergamon Press, 1982.

[53] ZIENKIEWICZ O.C., "The Finite Element Method", 3ème édition, McGraw-Hill, London, 1989.

[54] TIMOSHENKO S.P., "Strenght of Materials", D. VAN NOSTRAND Company, Inc., Princeton, New Jercy, 1968.

[55] BISHARA A. G., MAHMOUD M. H. et CHANDRANGSU K., "Finite element formulation for farm silo analysis", Jal of the Structural Division, USA 1977.

[56] MARTINEZ J., "Contribution au dimensionnement des chaussées souples, comportement des matériaux et méthode de calcul", Thèse de Docteur-Ingénieur, INSA de Rennes,1980.

[57] REMESCH J.C., KHELIL A. et ROTH J.C., "Simulation numérique de contraintes au sien de matières granulaires ensilées, comparaison avec les mesures in situ", Rev. Franç. Geo-tech., n° 52, pp 51-65, 1990.

[58] DUROCHER L., GASPER A. et RHOADES G., "A numerical comparison of axisymmetric finite elements", IJNME, Vol. 12, pp 1415-1427, 1978.

ANNEXES

ANNEXE I

PRÉSENTATION DE LA BASE EXPÉRIMENTALE D'ESSAIS DES SILOS DE CHARTRES

L'implantation générale au sol des cellules est indiquée sur la figures 1. on a retenu une disposition en ligne des cellules, d'une part elle est la plus économique et d'autre part elle est plus rationnelle et laisse la possibilité de compléter ultérieurement la base par d'autres types des cellules, selon les besoins et les moyens futurs.

Actuellement il y a quatre cellules de divers types, permettant d'examiner les différents paramètres en vue de justifier les hypothèse de base retenues pour la méthodes de calcul qui est adoptée dans le cadre de la norme de vérification de la résistance des silos [27].

Cellule A

Elle est de section horizontale carrée, avec paroi en tôle trapézoïdale, maintenues au moyen de tirants. Les nervures sont orientées horizontalement. La rigidité verticale des parois est assurée par les montants et les tirants.

Cellule B

Elle est de section horizontale rectangulaire, avec les parois en tôle trapézoïdale autoportantes. Les nervures sont orientées horizontalement. La rigidité verticale des parois est assurée par les montants. Cette cellule offre la possibilité d'installer des tirants. Il est envisagé de procéder à des essais avec deux types de tirants: souples et rigides.

Cellule C

Elle est de section horizontale circulaire, en tôle ondulée. La rigidité verticale de la virole est assurée par les montants.

Cellule D

Elle est de section horizontale circulaire, en tôle lisse. Cette cellule est équipée d'un extracteur rotatif pour assurer une vidange mécanique de la matière ensilée.

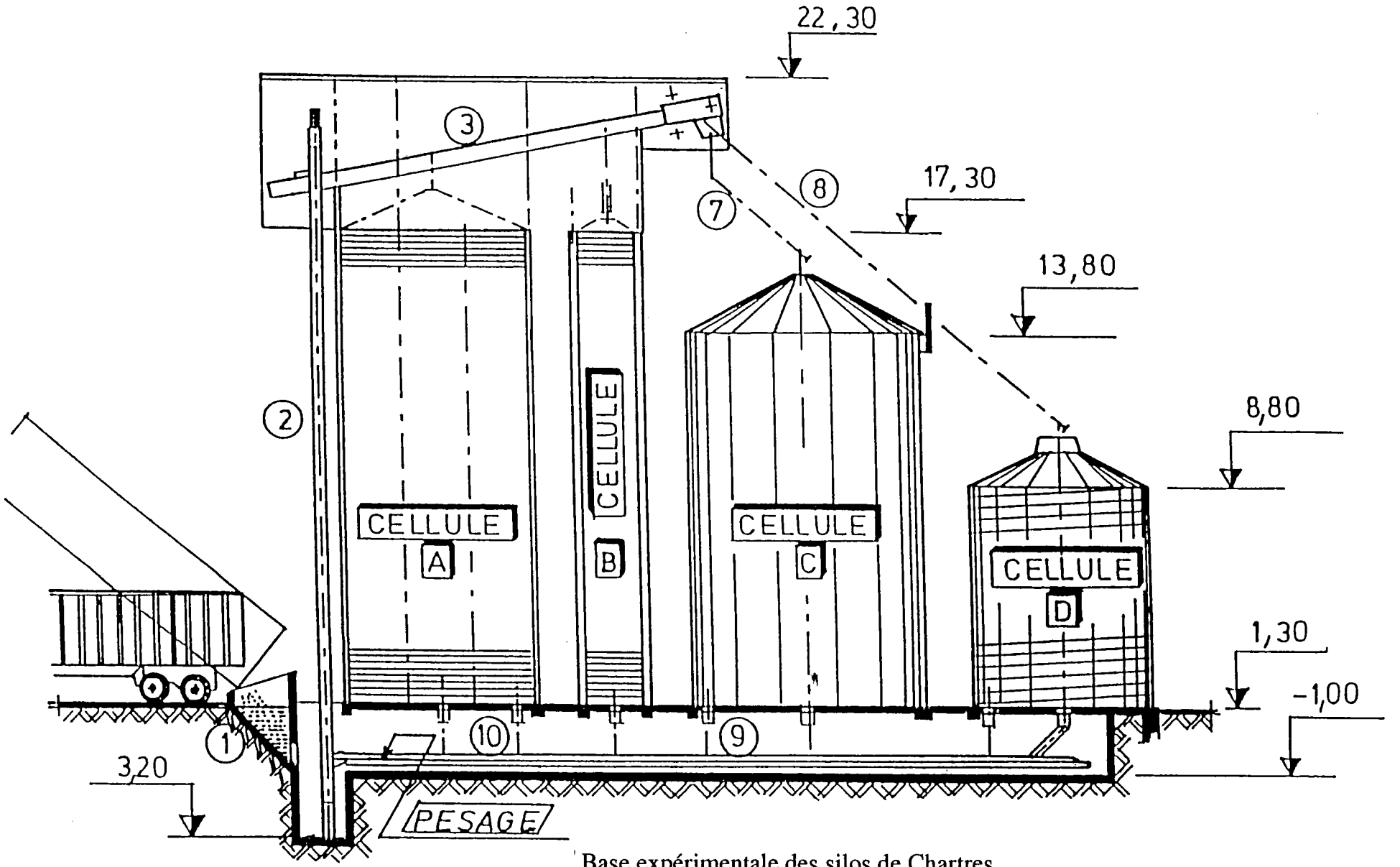
CARACTÉRISTIQUES DES CELLULES

Les caractéristiques principales des cellules sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Cellule	A	B	C	D
Forme géométrique	Carrée	Rectangulaire	Circulaire	Circulaire
Forme des parois	Trapézoïdale	Trapézoïdale	ondulée	Lisse
Système de maintien des paroi	Tirants/ montants	Montants (avec et sans tirants)	Montants	Autoportant
Dimension (m)	6,42 × 6,42 × 16	2,25 × 6,42 × 16	8 × 12,5	6 × 7,5
Capacité de stockage (m^3)	660	200	660	220
Rayon hydraulique (m)	1,605	0,833	2,0	1,5
Élancement h/l	9,97	19,2	6,0	4,67
Forme du fond	Plat, horizontal	Plat, horizontal	Plat, horizontal	Plat, horizontal
Système de vidange	Gravitaire	Gravitaire	Gravitaire/ mécanique	Gravitaire
Fonction de vidange	Centrée/ excentrée	Centrée/ excentrée	Centrée/ excentrée	Centrée/ excentrée

Caractéristiques principales des cellules

Chacun des silos peut être instrumenté suivant plusieurs génératrices verticales avec des capteurs des pressions très performants spécialement conçus pour mesurer à la fois la composante normale à la paroi et la composante tangentielle due au frottement (deux modèles ont été fabriqués, l'un par la société BETA [46] et l'autre par le CETIM [11]). Des systèmes complémentaires permettent de mesurer au cours des différentes phases d'utilisation du silo, divers paramètres comme par exemple le débit de l'écoulement, le poids de matière ensilée, la hauteur d'ensilage, la déformation et de déplacement des parois.



Base expérimentale des silos de Chartres
(vue de face) [38]

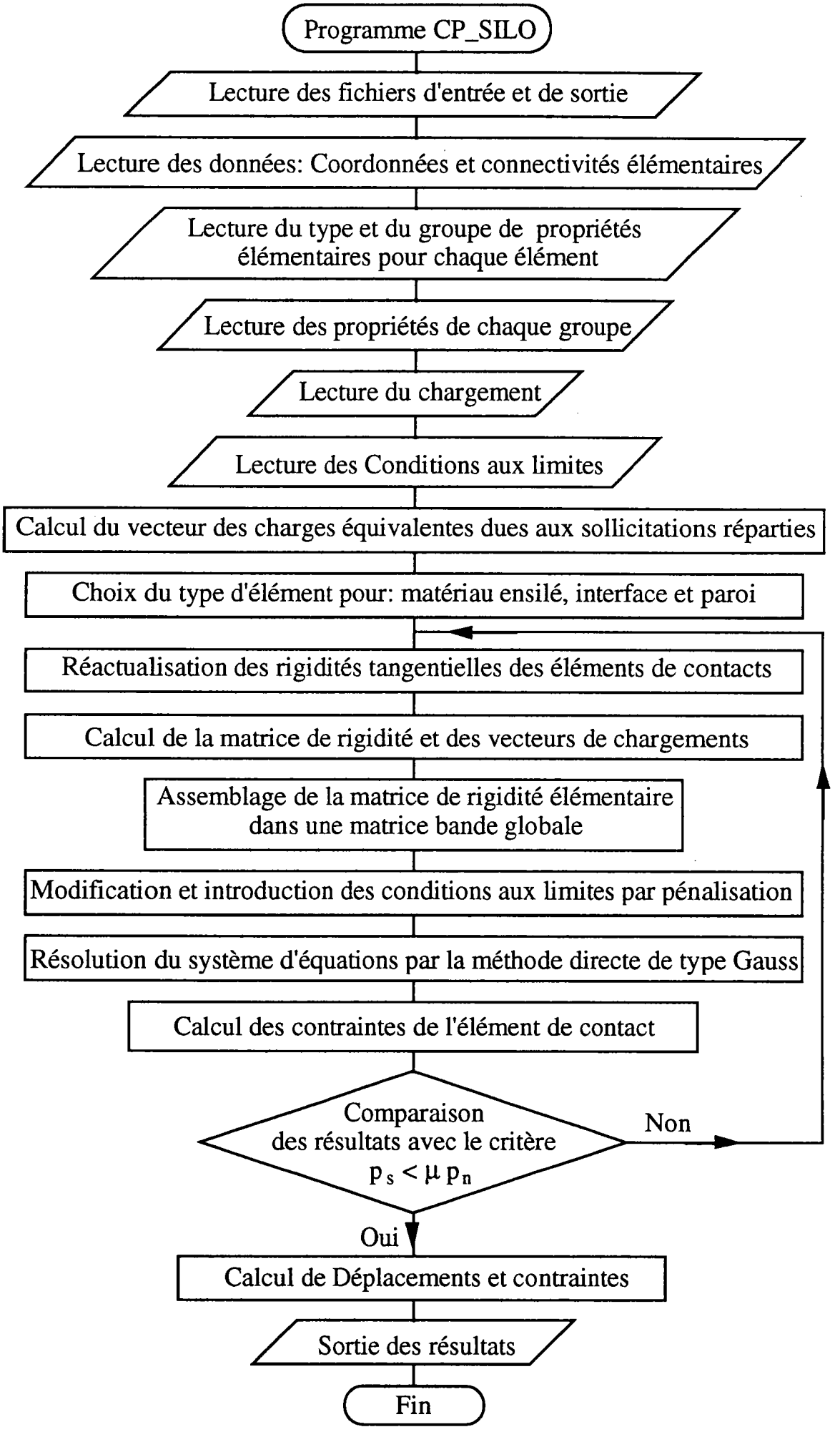
ANNEXE II

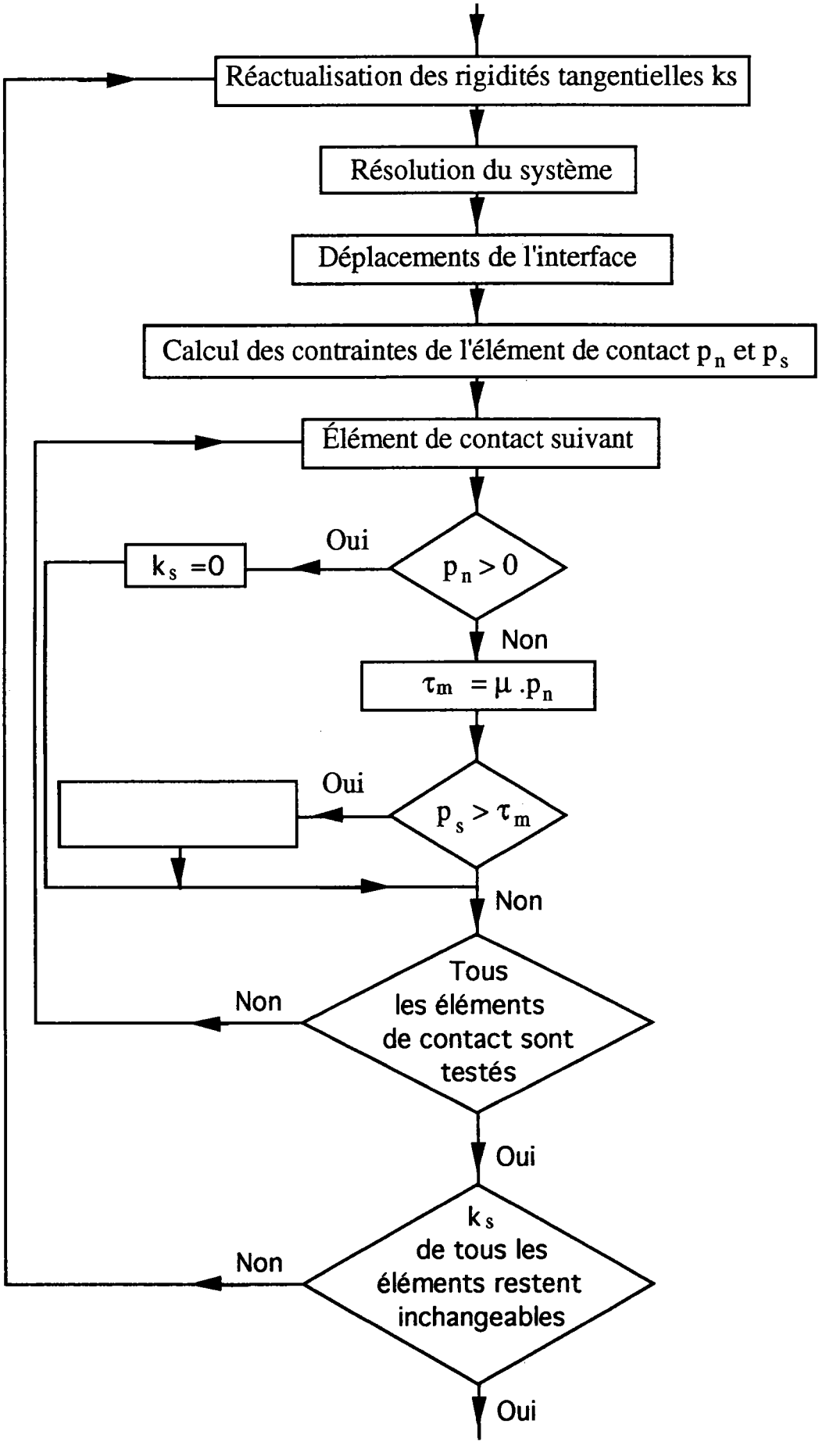
ORGANIGRAMMES

DU PROGRAMME CP_SILO

ET

DU MODÉLISATION DU FROTTEMENT


Programme CP_SILO
Lecture des fichiers d'entrée et de sortie
Lecture des données: Coordonnées et connectivités élémentaires
Lecture du type et du groupe de propriétés élémentaires pour chaque élément
Lecture des propriétés de chaque groupe
Lecture du chargement
Lecture des Conditions aux limites
Calcul du vecteur des charges équivalentes dues aux sollicitations réparties
Choix du type d'élément pour: matériau ensilé, interface et paroi
Réactualisation des rigidités tangentielles des éléments de contacts
Calcul de la matrice de rigidité et des vecteurs de chargements
Assemblage de la matrice de rigidité élémentaire dans une matrice bande globale
Modification et introduction des conditions aux limites par pénalisation
Résolution du système d'équations par la méthode directe de type Gauss
Calcul des contraintes de l'élément de contact
Comparaison des résultats avec le critère $p_s < \mu p_n$
Non
Oui
Calcul de Déplacements et contraintes
Sortie des résultats
Fin


Réactualisation des rigidités tangentielles ks
Résolution du système
Déplacements de l'interface
Calcul des contraintes de l'élément de contact p_n et p_s
Élément de contact suivant
$p_n > 0$
Oui
$k_s = 0$
Non
$\tau_m = \mu . p_n$
$p_s > \tau_m$
Oui
Non
Tous les éléments de contact sont testés
Non
Oui
k_s de tous les éléments restent inchangeables
Non
Oui

UNIVERSITE DE METZ

Le Président de l'Université de METZ

VU l'arrêté du 30 mars 1992 relatif aux études de troisième cycle,

VU l'arrêté du Président de l'Université de METZ en date du 26 juin 1995 nommant les rapporteurs chargés d'examiner les travaux de Monsieur NADDAF OSKOUEI Ali Reza ,

VU les rapports de Messieurs COLSON et MARTINEZ, Rapporteurs,

ARRETE

ARTICLE 1 : **Monsieur NADDAF OSKOUEI Ali Reza** est autorisé à soutenir une thèse de Doctorat de l'Université de METZ intitulée :

" Modélisation par éléments finis des actions des matériaux ensilés sur les parois de silos "

ARTICLE 2 : La composition du jury de soutenance de thèse de **Monsieur NADDAF OSKOUEI Ali Reza** est fixée comme suit :

Monsieur BARAKA Saïd,
Ingénieur Docteur CTICM, SAINT REMY LES CHEVREUSES (78),

Monsieur COLSON André, Rapporteur,
Professeur, Directeur de l'E.N.S.A.I.S. de STRASBOURG,

Monsieur KHELIL Abdel,
Maître de Conférences, IUT Génie civil de VILLERS LES NANCY,

Monsieur MARTINEZ Jean, Rapporteur,
Professeur à l'I.N.S.A. de RENNES,

Monsieur POTIER-FERRY Michel,
Professeur à l'Université de METZ,

Monsieur ROTH Jean-Claude, Directeur de thèse,
Professeur à l'Université de METZ.

ARTICLE 3 : La soutenance aura lieu le **lundi 24 juillet 1995 à 14 h 30** à la Faculté des Sciences de METZ - Amphithéâtre Pascal

Fait à Metz, le 20 Juillet 1995

Le Président de l'Université de METZ

UNIVERSITE DE METZ
LE PRESIDENT
57

G. NAUROY