



Contribution à la résolution du problème d'intersection de deux carreaux de surfaces

Mohamed Berroug

► To cite this version:

Mohamed Berroug. Contribution à la résolution du problème d'intersection de deux carreaux de surfaces. Informatique [cs]. Université Paul Verlaine - Metz, 1995. Français. NNT : 1995METZ034S . tel-01777090

HAL Id: tel-01777090

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777090>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

Présentée à

l'UNIVERSITÉ de METZ

Pour l'obtention du grade de:
DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de METZ

Spécialité : INFORMATIQUE

Mohamed BERROUG

CONTRIBUTION À LA RÉOLUTION DU PROBLÈME D'INTERSECTION DE DEUX CARREAUX DE SURFACES

Soutenue à Metz le 22 décembre 1995

Membres du jury:

<i>Directeur de thèse:</i>	Yvon GARDAN	(Professeur à l'Université de Metz)
<i>Rapporteurs:</i>	Michel VERON	(Professeur à l'Université de Nancy 1)
	Denis VANDORPE	(Professeur à l'Université de Lyon)
<i>Examineurs:</i>	André ROUX	(Professeur à l'Université de Metz)
	Didier GALMICHE	(Habilitation à diriger des recherches à l'Université de Nancy 1)
	Myriam SAHNOUNE	(Maître de conférences à l'Université de Metz)

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 420540 1

LA

FORMATIQUE DE METZ

THÈSE

Présentée à

L'UNIVERSITÉ de METZ

Pour l'obtention du grade de:
DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de METZ

Spécialité : INFORMATIQUE

Mohamed BERROUG

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	19950655
Cote	S/M3 95/34
Loc	Magasin

CONTRIBUTION À LA RÉOLUTION DU PROBLÈME D'INTERSECTION DE DEUX CARREAUX DE SURFACES

Soutenue à Metz le 22 décembre 1995

Membres du jury:

<i>Directeur de thèse:</i>	Yvon GARDAN	(Professeur à l'Université de Metz)
<i>Rapporteurs:</i>	Michel VERON	(Professeur à l'Université de Nancy I)
	Denis VANDORPE	(Professeur à l'Université de Lyon)
<i>Examineurs:</i>	André ROUX	(Professeur à l'Université de Metz)
	Didier GALMICHE	(Habilitation à diriger des recherches à l'Université de Nancy I)
	Myriam SAHNOUNE	(Maître de conférences à l'Université de Metz)

LABORATOIRE DE RECHERCHE EN INFORMATIQUE DE METZ

*On ne peut prétendre connaître et maîtriser un phénomène
tant que on n'a pas su le représenter par un tableau de nombres.*

Lord William Kelvin

Remerciements

Je tiens ici à exprimer mes remerciements aux personnes qui ont accepté de juger ce travail ainsi que celles qui m'ont aidé au long de cette thèse.

Merci à Y.Gardan pour m'avoir accueilli dans son laboratoire, à M.Sahnoune pour m'avoir conseillé dans mes travaux, à D.Vandorpe et M.Veron d'avoir bien voulu être rapporteurs de ce travail, à A.Roux et D.Galmiche pour leur présence dans ce jury.

Je tiens à exprimer mes remerciements à l'ensemble des membres du laboratoire de recherche en informatique de Metz. A Denise, Ahmed et Dominique, membres de l'équipe modélisation, pour m'avoir aidé à la réalisation de ce rapport.

Je terminerai par un grand merci à mes parents, à mes frères, à Malory pour m'avoir accompagné tout le long de cette épreuve.

Mohamed

Table des matières

INTRODUCTION	8
1. COURBES ET SURFACES PARAMETRIQUES	10
1.1. Introduction	11
1.2. Définition et propriétés	12
1.2.1. Fonctions de la base B-spline	12
1.2.2. Courbes Nurbs	13
1.2.3. Surfaces Nurbs	15
1.3. Algorithmes de base	16
1.3.1. Algorithme de Casteljau	16
1.3.2. Algorithme de Boehm	19
1.3.3. Algorithme de Cox-De Boor	20
1.3.4. Représentation matricielle	21
1.4. Conclusion	24
2. PRINCIPALES APPROCHES DU PROBLEME D'INTERSECTION	25
2.1. Problème d'intersection	26
2.2. Méthode de subdivision récursive	28
2.2.1. Algorithme général	28
2.2.2. Séparabilité	30
2.2.3. Arrêt des subdivisions	30
2.2.4. Conclusion	32
2.3. Méthode de suivi	33
2.3.1. Procédé de suivi	34
2.3.2. Fonction distance orientée	35
2.3.3. Conclusion	35
2.4. Méthode de substitution	37
2.4.1. Représentation explicite d'une courbe algébrique plane	37
2.4.2. Représentation implicite d'une surface paramétrique	38
2.4.3. Conclusion	39
2.5. Synthèse	40
3. METHODE DE SUBDIVISION RECURSIVE	41
3.1. Introduction	42
3.2. Tests de séparabilité	43

3.2.1. Boîtes par enveloppe convexe.....	43
3.2.1.1. Boîtes minmax non orientées	43
3.2.1.2. Boîtes minmax orientées.....	44
3.2.1.3. Algorithme fusionnant les deux approches	45
3.2.2. Boîtes par approximation.....	46
3.2.2.1. Boîtes par approximation non orientées	46
3.2.2.2. Boîtes par approximation orientées.....	47
3.3. Tests d'arrêts des subdivisions.....	50
3.3.1. Subdivision adaptative	50
3.3.1.1. Test de planéité	50
3.3.1.2. Test de linéarité des bords	51
3.3.2. Subdivision uniforme	52
3.3.2.1. Niveau de subdivision.....	53
3.3.2.2. Majoration des dérivées secondes d'une surface	54
3.3.2.3. Effet de la fonction projection homogène.....	55
3.4. Conclusion.....	57
4. METHODE DE SUIVI.....	58
4.1. Introduction.....	59
4.2. Procédé de suivi.....	60
4.2.1. Courbe approchante.....	60
4.2.1.1. Courbe d'intersection régulière.....	60
4.2.1.2. Calcul des coefficients des courbes approchantes	61
4.2.2. Pas de suivi.....	64
4.2.3. Calcul exact du point suivant.....	66
4.2.3.1. Formulation de la méthode	67
4.2.3.2. Conditions d'arrêt	68
4.3. Définition et propriétés des points significatifs.....	70
4.3.1. Préliminaires	70
4.3.1.1. Projection orthogonale d'un point sur une surface	70
4.3.1.2. Fonction distance orientée ϕ	73
4.3.1.3. Champ de vecteurs $\nabla\phi$	74
4.3.2. Points significatifs.....	76
4.3.2.1. Points critiques.....	76
4.3.2.2. Points NC(normale colinéaire)	77
4.3.2.3. Points singuliers.....	78
4.4. Calcul des points significatifs.....	81
4.4.1. Calcul d'approximation.....	81
4.4.1.1. Test d'absence de points NC	82

4.4.1.2. Localisation par subdivision récursive	83
4.4.2. Calcul exact	84
4.5. Calcul des points germes	86
4.5.1. Méthode des courbes isoparamétriques	86
4.5.2. Méthode des points significatifs.....	87
4.6. Conclusion.....	88
5. MISE EN OEUVRE	89
5.1. Introduction.....	90
5.2. Implantation de la méthode de subdivision récursive.....	91
5.2.1. Méthode adaptative	91
5.2.2. Méthode uniforme	92
5.3. Implantation de la méthode de suivi.....	95
5.4. Conclusion.....	98
CONCLUSION.....	99
Annexe 1	102
Annexe 2.....	103
Annexe 3	105
Annexe 4.....	106
Bibliographie.....	108

Notations et Conventions

On a essayé d'utiliser une notation claire et la plus familière possible à la communauté de chercheurs en modélisation géométrique. Les notations les plus utilisées sont énumérées ci-dessous:

S, T	surfaces à traiter de paramètres respectifs (u,v) et (s,t)
N_S, N_T	vecteur unitaire normal à S et T respectivement
C	courbe d'intersection de paramètre r
H	application homogène définie de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$
S^h, T^h, C^h	représentation homogène des surfaces S, T et de la courbe C
$B_i^m(u)$	$i^{\text{ème}}$ polynôme de Bernstein de degré m
$N_i^m(u)$	$i^{\text{ème}}$ fonction de base B-spline constitué de polynômes de degré m
∇f	gradient de la fonction réelle f
f_u, f_v	dérivées partielles de la fonction $f(u,v)$
$\langle A, B \rangle$	produit scalaire
$A \wedge B$	produit vectoriel
$\phi(u,v)$	fonction distance orientée entre deux surfaces
$[\cdot]$	désigne une matrice ou un vecteur
$[\cdot]^{-1}$	matrice inverse
$\det([\cdot])$	déterminant d'une matrice
$[\cdot]^T$	désigne le transposé d'une matrice ou d'un vecteur
$\ \cdot \ $	norme euclidienne

INTRODUCTION

La modélisation géométrique est un aspect fondamental de la conception et fabrication assistée par ordinateur (C.F.A.O), son objectif est de représenter des objets volumiques ou surfaciques. Son développement est motivé par le besoin des industriels d'améliorer les processus de conception et de fabrication, de réduire le temps et le coût de production. Divers secteurs allant de l'automobile à l'aéronautique jusqu'au cinéma ne peuvent plus se passer de cette technologie, qui permet la visualisation sur un écran ou l'exécution de plans, mais aussi diverses fonctions évoluées telles que l'exécution de calculs relatifs à la dynamique, cinématique, mécanique des milieux continus, ou la transmission de données à des outils d'usinage à commande numérique.

Les approches utilisées par un système de modélisation géométrique sont de deux classes différentes, qui cohabitent parfois au sein d'un même système. La première construit un objet par combinaison booléenne de volumes simples: c'est la représentation par arbre de construction (CSG: Constructive Solid Geometry). La deuxième construit un objet par assemblage des faces constituant sa peau, c'est la représentation par frontières (B-Rep: Boundary Representation). Ces surfaces peuvent être des surfaces planes, des surfaces de révolution, des quadriques ou même des surfaces gauches. Les exigences en créativité et interactivité de la modélisation des surfaces ont fait que le modèle Nurbs est devenu un standard.

Pour qu'un objet soit défini de façon précise et complète, il est nécessaire de déterminer les courbes et surfaces qui le délimitent. Le calcul des courbes d'intersection de deux surfaces et la construction des surfaces de raccordement sont donc des opérations fondamentales lors de la construction d'objets volumiques.

Le calcul d'intersection de deux surfaces est une opération délicate lorsque ces surfaces sont des surfaces gauches, ce qui nécessite la mise en oeuvre d'algorithmes complexes. En effet, le degré d'une courbe d'intersection entre deux surfaces paramétriques est beaucoup plus élevé que le degré des surfaces. Une courbe d'intersection entre deux carreaux bicubiques peut être représentée par une équation algébrique de degré 324. En général, il est presque impossible de trouver une représentation paramétrique donc explicite de l'intersection.

Dans cette thèse, on traite le problème d'intersection de deux carreaux de surfaces. Les courbes de petites tailles ainsi que les intersections tangentielles sont les principales difficultés à surmonter. Nous proposons de développer les deux principales méthodes (subdivision récursive, suivi), et d'apporter une réponse aux questions suivantes:

- améliorer les deux modules définissant la méthode de subdivision récursive: arrêt des subdivisions et séparabilité de deux surfaces, et trouver une implantation optimisée.

- en partant des récents travaux sur la notion de fonction distance entre deux surfaces, on développera cet outil pour résoudre les problèmes des courbes d'intersection de petites tailles et celui d'analyse locale au voisinage des points d'intersection tangentielle.

- contrôler la densité des points à calculer par courbe pour que ces points constituent une bonne représentation de la courbe recherchée et trouver un procédé permettant de calculer un point avec un coût réduit.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les notions de base sur le modèle de représentation Nurbs. Nous faisons également un tour d'horizon des algorithmes de traitement sur les courbes et surfaces Nurbs. Dans le deuxième chapitre, nous exposons les principales méthodes disponibles: subdivision récursive, suivi, substitution. Nous développons ensuite séparément les deux premières méthodes dans les chapitres III et IV, la troisième est similaire à la deuxième. Finalement, dans le chapitre V, nous discutons les résultats et les détails techniques de l'implantation de ces méthodes.

1. COURBES ET SURFACES PARAMETRIQUES

1.1. Introduction

Les courbes et surfaces sont des éléments fondamentaux de la modélisation géométriques d'objets complexes. La forme paramétrique est la plus utilisée pour représenter ces entités géométriques, une courbe est représentée à l'aide d'un paramètre et une surface à l'aide de deux. Le modèle B-spline rationnel non uniforme ou Nurbs (Non-Uniform-Rational-B-spline) est un modèle paramétrique qui offre de larges possibilités de création et de modification, il est actuellement le principal modèle utilisé en C.F.A.O. Son intérêt essentiel concerne la représentation des quadriques et l'unification qu'il réalise entre ces formes et les B-splines décrivant des formes gauches.

Les méthodes de calcul d'intersection étudiées dans cette thèse sont principalement applicables au modèle Nurbs et ses sous classes: modèle de Bézier et B-spline; il est donc important d'exposer leurs propriétés fondamentales. En effet, ces méthodes font un appel de manière intensive aux opérations de base sur les courbes et surfaces, à savoir la subdivision et le calcul de la position ou des dérivées en un point. Leurs performances sont donc fortement influencées par ces opérations, qui doivent s'effectuer avec rapidité et précision.

L'algorithme de Boehm est le principal algorithme permettant d'effectuer ces opérations. Nous exposons donc cet algorithme et ses différentes variantes qui sont les algorithmes de De Casteljau et de Cox-De Boor. L'algorithme de Horner est aussi une solution pour effectuer ces opérations, son utilisation nécessite la conversion des Nurbs vers la base canonique. Cette approche permet une réduction considérable du temps d'exécution. L'algorithme de Boehm sera utilisé pour effectuer cette conversion.

1.2. Définition et propriétés

Une courbe ou surface Nurbs est une forme polynomiale rationnelle par morceaux, construite d'une succession de polynômes rationnels de même degré. Ces polynômes se raccordent entre eux en des points de façon à ce que la continuité en ces points soit d'ordre inférieur au degré.

1.2.1. Fonctions de la base B-spline

Une fonction B-spline est construite à partir d'une succession de polynômes de même degré, qui se raccordent entre eux en des points de façon à ce que la continuité en ces points soit d'ordre inférieur au degré. Ces points de raccordement sont appelés des noeuds, l'ensemble des noeuds est appelé séquence nodale. La définition mathématique de ces fonctions fait appel à la notion de différence fractionnée [LEO 91], on se contente de donner la relation récurrente de Cox-De Boor qui permet de les évaluer:

$$\begin{cases} N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ N_{i,m}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+m} - u_i} N_{i,m-1}(u) + \frac{u_{i+m+1} - u}{u_{i+m+1} - u_{i+1}} N_{i+1,m-1}(u) \quad \text{si } m > 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

où $\{u_i, i, \dots\}$ est une suite réelle croissante, elle est dite la séquence nodale des fonctions $\{N_{i,m}\}$. Un noeud peut se présenter plusieurs fois dans sa séquence, des dénominateurs de la relation (1.1) peuvent donc s'annuler, la convention $0/0=0$ est adoptée.

L'ordre de multiplicité d'un noeud caractérise le nombre d'occurrence de ce noeud dans la séquence nodale, ainsi un noeud u_i est de multiplicité μ si: $u_i = u_{i+1} = \dots = u_{i+\mu-1}$

Une séquence nodale est dite uniforme si les noeuds sont équidistants.

Propriétés

On reprend les principales propriétés des fonctions de la base B-spline [LEO 91]:

- les fonctions de la base B-spline sont positives ou nulles.
- une fonction $N_{d,m}$ est identiquement nulle en dehors de l'intervalle $[u_d, u_{d+m+1}]$
- dans un intervalle $[u_d, u_{d+1}]$ bien défini, seules les fonctions $(N_{i,m}; i = d - m, \dots, d)$ sont non nulles.

- partition de l'unité: $\sum_{d-m}^d N_{i,p}(u) = 1 \quad \forall u \in]u_d, u_{d+1}[$

- en un noeud u_i de multiplicité μ , les fonctions non nulles de la base B-spline sont différentiables de classe $m-\mu$. En dehors des noeuds, elles sont indéfiniment différentiables.

- dans le cas particulier où la séquence nodale U est de la forme $\{0,0,\dots,0,1,1,\dots,1\}$ où 0 et 1 sont des noeuds de multiplicité $(m+1)$. Les fonctions de la base B-spline coïncident avec les fonctions de Bernstein, elles sont données explicitement par:

$$B_{i,m}(u) = N_{i,m}(u) = C_m^i u^i (1-u)^{m-i} \quad \forall u \in [0,1]$$

1.2.2. Courbes Nurbs

Une courbe Nurbs C est définie par une forme paramétrique donnée par:

$$C: [\alpha, \beta] \longrightarrow R^3$$

$$u \longrightarrow \frac{\sum_{i=0}^k w_i P_i N_{i,m}(u)}{\sum_{i=0}^k w_i N_{i,m}(u)} \quad (1.2)$$

La transformation C est définie par la structure de donnée suivante:

- deux entiers m et k où m est le degré et k ($0 \leq m \leq k$) un entier contrôlant le nombre de morceaux composant la courbe C ($k-m$ morceaux au plus).
- une suite de points caractéristiques $\{P_i, i=0, \dots, k\}$ dans l'espace 3D, dite réseau de points de contrôle.
- une suite $\{w_i, i=0, \dots, k\}$ de réels positifs, dits poids associés aux points caractéristiques. Ces poids sont des coefficients de pondération qui permettent de faire varier l'influence de chaque point caractéristique.
- une séquence nodale non uniforme de la forme $\{\alpha, \alpha, \dots, \alpha, u_{m+1}, \dots, u_k, \beta, \beta, \dots, \beta\}$ où les noeuds extrêmes α et β sont de multiplicité $(m+1)$.

D'après la relation de la partition d'unité des fonctions B-spline, si tous les poids w_i sont égaux à 1, alors le dénominateur de $C(u)$ est égal à 1. La courbe C est dans ce cas une B-spline non rationnelle:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,p}(u) \quad (1.3)$$

Toute courbe Nurbs peut être représentée par une courbe B-spline dans l'espace homogène 4D, on notera C^h représentation homogène de la courbe C .

C^h est une courbe B-spline non rationnelle de même degré et de même séquence nodale que la courbe C , elle est définie par l'application suivante:

$$C^h: [\alpha, \beta] \longrightarrow R^4$$

$$u \longrightarrow \sum_{i=0}^n P_i^h N_{i,m}(u) \quad (1.4)$$

Les points caractéristiques de C^h sont donnés par:

$$P_i^h = (w_i P_i, w_i) = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i) \quad : i = 0, 1, \dots, k$$

Pour voir la relation entre ces deux représentations, on rappelle la définition de la fonction projection orthogonale H définie par:

$$\begin{aligned} H: R^3 \times R^* &\longrightarrow R^3 \\ (x, y, z, w) &\longrightarrow \left(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

La fonction H permet de passer du réseau caractéristique de C^h à celui de C par la relation suivante:

$$H(P_i^h) = P_i \quad \text{pour } i = 0 \dots n \quad (1.6)$$

De même C et C^h sont reliées par :

$$C(u) = H(C^h(u)) \quad \forall u \in [\alpha, \beta] \quad (1.7)$$

Propriétés

- comportement local: sur un intervalle non vide $[u_d, u_{d+1}]$, la courbe C est un polynôme rationnel de degré m où seuls les points $\{P_j; j=d-m, \dots, d\}$ ont une influence. La modification du reste des points caractéristiques n'a aucune influence dans cet intervalle.

- enveloppe convexe: sur chaque intervalle non vide $[u_d, u_{d+1}]$, le morceau de la courbe C correspondant est entièrement inclus dans l'enveloppe convexe des points caractéristiques $\{P_i; i=d-m, \dots, d\}$.

- Invariance par transformation affine: pour toute transformation affine A dans l'espace R^3 , on

a la relation suivante:
$$A(C(u)) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i A(P_i) N_{i,p}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i N_{i,p}(u)} \quad u \in [\alpha, \beta]$$

- différentiabilité: la courbe C est indéfiniment différentiable entre chaque paire de noeuds disjoints. En un noeud de multiplicité μ , elle est de classe $m-\mu$ ($\mu \leq m$).

Cas particulier: courbes de Bézier

Si la séquence nodale U est de la forme $\{0,0,\dots,0,1,1,\dots,1\}$ où les noeuds 0 et 1 sont de multiplicité $(m+1)$, alors la courbe C est formée d'un seul morceau. Les fonctions de la base B-spline coïncident avec celles de la base de Bernstein.

Dans ce cas, C est une courbe de Bézier rationnelle.

1.2.3. Surfaces Nurbs

Un carreau Nurbs S est une surface paramétrique définie par une transformation de la forme suivante:

$$S : [\alpha, \beta] \times [\mu, \nu] \longrightarrow R^3$$

$$(u, v) \longrightarrow \frac{\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l w_{i,j} P_{i,j} N_{i,m}(u) N_{j,n}(v)}{\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l w_{i,j} N_{i,m}(u) N_{j,n}(v)} \quad (1.8)$$

La transformation S est définie par la structure de données suivantes:

- quatre entiers m, n, k, l où les deux premiers sont les degrés respectifs selon la première et la deuxième direction. k et l sont respectivement le nombre de subdivision du domaine selon la première et deuxième direction. S est formée de $(k-m)(l-n)$ morceaux au plus.
- un réseau de points caractéristiques

$$\{P_{ij} : i=0, \dots, m, j=0, \dots, n\}$$

- une matrice de poids correspondants aux points du réseau caractéristiques:

$$\{w_{ij} : i=0, \dots, m, j=0, \dots, n\}$$

- deux séquences nodales de la forme:

$$U = \{\alpha, \alpha, \dots, \alpha, u_{m+1}, \dots, u_k, \beta, \beta, \dots, \beta\} \quad V = \{\mu, \mu, \dots, \mu, v_{n+1}, \dots, v_l, v, v, \dots, v\}$$

Toutes les propriétés décrites pour les courbes sont valables pour les carreaux.

De la même manière, une représentation homogène des carreaux Nurbs est donnée par:

$$S^h(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j}^h N_{i,p}(u) N_{j,k}(v) \quad (1.9)$$

où S^h est la représentation homogène de S . Elles sont reliées par les mêmes relations que les courbes:

$$H(S^h(u, v)) = S(u, v) \quad \text{et} \quad P_{i,j}^h = (w_{i,j} P_{i,j}, w_{i,j}) \quad \forall i, j$$

Cas particuliers: si les deux séquences nodales U et V sont de la même forme que pour les courbes de Bézier. Dans ce cas, S est dit un carreau de Bézier rationnel.

1.3. Algorithmes de base

L'utilisation des Nurbs comme modèle de représentation des courbes et surfaces nécessite la mise en oeuvre d'algorithmes, pour effectuer un certain nombre d'opérations de base, à savoir:

- évaluation d'un point sur une surface ou des dérivées partielles en ce point
- subdivision d'une Nurbs
- conversion vers le modèle de Bézier rationnel
- insertion d'un noeud dans une séquence nodale

Les algorithmes développés à cet effet se distinguent en deux approches différentes:

- L'algorithme d'insertion de noeud de Boehm est un outil de base pour effectuer toutes les opérations ci-dessus. C'est une généralisation de l'algorithme de Casteljau pour le modèle de Bézier et de l'algorithme de Cox-De Boor pour les B-spline.
- L'algorithme de Horner permet d'effectuer des opérations d'évaluation sur des formes polynomiales écrites dans la base canonique; la conversion des Nurbs vers cette base permet d'utiliser cet algorithme.

L'objectif de ce paragraphe est d'abord de rappeler les algorithmes classiques (Boehm, Cox-De Boor, De Casteljau), ensuite de montrer comment chercher une représentation matricielle des Nurbs en utilisant les algorithmes précédents.

1.3.1. Algorithme de Casteljau

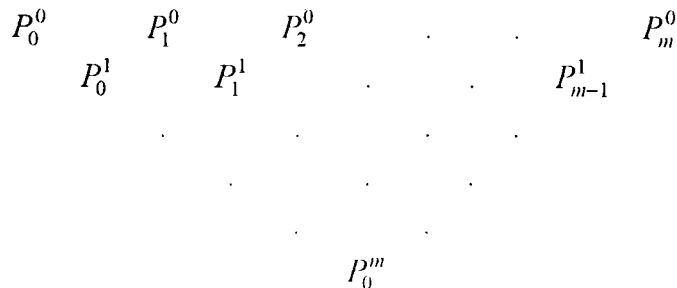
L'algorithme de Casteljau est le principal algorithme pour le modèle de Bézier, il permet d'effectuer toutes les opérations citées ci-dessus. C'est un algorithme simple qui met en évidence les relations liant le polygone caractéristique et la courbe ou le carreau qui lui est associé. On décrira dans la suite l'algorithme pour les courbes, qu'on généralisera ensuite pour les carreaux.

L'algorithme

Soit C une courbe de Bézier de degré m définie par un réseau caractéristiques $\{P_i : i=0 \dots m\}$. Pour une abscisse u donnée ($u \in [0,1]$), le point $C(u)$ est calculé par l'algorithme de Casteljau de la manière suivante:

$$\begin{cases} P_i^0 = P_i & i = 0, \dots, m \\ P_i^r = (1-u)P_i^{r-1} + uP_{i+1}^{r-1} & \begin{cases} r = 1, \dots, m \\ i = 0, \dots, m-r \end{cases} \end{cases}$$

Le point courant recherché $C(u)$ est égal au dernier point calculé P_0^m . Pour schématiser cet algorithme, on représente les points intermédiaires sous la forme du schéma triangulaire suivant:



Subdivision d'une courbe de Bézier

L'algorithme de Casteljau est aussi un outil de subdivision de la courbe C au point $C(u)$ en deux courbes C_g et C_d de même degré. Les points caractéristiques de ces sous-courbes sont donnés par le schéma triangulaire ci-dessus. La courbe C_g est définie par le côté gauche du triangle:

$$P_0^0, P_0^1, P_0^2 \dots, P_0^{m-1}, P_0^m$$

De même, la courbe C_d est définie par le côté droit du triangle:

$$P_m^0, P_{m-1}^1, P_{m-2}^2 \dots, P_1^1, P_0^m$$

Dérivées d'une courbe de Bézier

L'algorithme de Casteljau permet aussi de déterminer les dérivées successives de C par:

$$C'(u) = m(P_1^{m-1} - P_0^{m-1})$$

$$C''(u) = m(m-1)(P_2^{m-2} - 2P_1^{m-2} + P_0^{m-2})$$

Dans certaines applications, on a parfois besoin de la position courante ainsi que des dérivées successives en même temps. L'algorithme de Casteljau offre un moyen rapide pour résoudre ce problème.

Généralisation de l'algorithme aux carreaux de Bézier

L'algorithme de Casteljau appliqué aux carreaux est une généralisation de l'algorithme appliqué aux courbes.

Soit S un carreau de Bézier de degré (m,n) défini par son réseau caractéristique $\{P_{i,j} : i,j\}$. En un point $(u,v) \in [0,1]^2$, $S(u,v)$ est calculé en appliquant l'algorithme de Casteljau aux $(m+1)$ lignes de la matrice de points caractéristiques, on obtient ainsi $(m+1)$ points. Ces points forment le réseau caractéristique d'une u -isoparamétrique sur S . Ensuite on applique l'algorithme à ces points pour donner finalement le résultat recherché.

En initialisant les points $\{P_{i,j}^{0,0} = P_{i,j} : i,j\}$, l'algorithme de Casteljau pour les carreaux s'énonce par le schéma suivant:

$$\begin{cases} P_{i,j}^{r,0} = (1-u)P_{i,j}^{r-1,0} + uP_{i+1,j}^{r-1,0} & \text{où } \begin{cases} r = 1, \dots, m \\ i = 0, \dots, m-r \\ j = 0, \dots, n \end{cases} \\ P_{0,j}^{m,r} = (1-v)P_{0,j}^{0,r-1} + vP_{0,j+1}^{0,r-1} & \text{où } \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ j = 0, \dots, n-r \end{cases} \end{cases}$$

Le point recherché $S(u,v)$ est égal au dernier point calculé $P_{0,0}^{m,n}$.

L'algorithme est décrit en traitant d'abord les $(m+1)$ lignes (direction de u), le même résultat est obtenu en commençant par les $(n+1)$ colonnes (direction de v). Le coût de calcul de $S(u,v)$ dépend du choix de la direction de traitement, ce coût est réduit en choisissant la direction du plus faible degré.

Dérivées partielles:

De la même manière que pour les courbes, les dérivées partielles du carreau S sont données en fonction des points intermédiaires de l'algorithme de Casteljau par:

$$\begin{aligned} S_u(u,v) &= m(P_{1,0}^{m-1,n} - P_{0,0}^{m-1,n}) \\ S_v(u,v) &= n(P_{0,1}^{m,n-1} - P_{0,0}^{m,n-1}) \\ S_{uu}(u,v) &= m(m-1)(P_{2,0}^{m-2,n} - 2P_{1,0}^{m-2,n} + P_{0,0}^{m-2,n}) \\ S_{uv}(u,v) &= mn(P_{1,1}^{m-1,n-1} - P_{1,0}^{m-1,n-1} - P_{0,1}^{m-1,n-1} + P_{0,0}^{m-1,n-1}) \\ S_{vv}(u,v) &= n(n-1)(P_{0,2}^{m,n-2} - 2P_{0,1}^{m,n-2} + P_{0,0}^{m,n-2}) \end{aligned}$$

Subdivision

La subdivision d'un carreau peut être une subdivision en deux ou quatre sous-carreaux. Les lignes de découpe sont des lignes isoparamétriques, selon la première ou la deuxième direction.

Les sous-carreaux obtenus forment une partition du carreau initial, ils sont tous de même degré.

Pour découper S selon une u -isoparamétrique u^* , on applique l'algorithme de Casteljau à chacune des $(m+1)$ lignes du réseau caractéristique de S . On obtient ainsi les deux réseaux de points caractéristiques des deux sous-carreaux. De la même manière pour découper S selon une v -isoparamétrique v^* , on applique l'algorithme de Casteljau à chacune des $(n+1)$ colonnes du réseau caractéristique de S . Pour faire une découpe en quatre sous carreaux, on applique simultanément ces deux décompositions.

Algorithme de Casteljau pour le modèle de Bézier rationnel

On a présenté l'algorithme de Casteljau pour des courbes et surfaces de Bézier non rationnelles. La généralisation au modèle de Bézier rationnel s'effectue en travaillant dans l'espace homogène, et en appliquant ensuite la transformation homogène au résultat obtenu.

1.3.2. Algorithme de Boehm

L'algorithme de Boehm permet d'insérer des noeuds dans la séquence nodale et de calculer les nouveaux points de caractéristiques, tout en laissant la forme de la courbe inchangée. Il permet ainsi une nouvelle partition du domaine paramétrique.

L'insertion d'une valeur peut être répétée jusqu'à ce que sa multiplicité soit égale au degré.

L'algorithme

Soit C une courbe B-spline de degré m définie par son réseau caractéristique $\{P_i : i=0, \dots, k\}$ et sa séquence nodale $U=\{u_i : i=0, \dots, k+m+1\}$.

Pour insérer μ fois ($\mu \leq m$) une valeur u ($u \in [u_d, u_{d+1}]$) dans la séquence nodale U , l'algorithme de Boehm est décrit par le schéma suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i^r = \alpha_i^r P_i^{r-1} + (1 - \alpha_i^r) P_{i-1}^{r-1} \\ \text{où } \alpha_i^r = \frac{u - u_i}{u_{i+m+1-r} - u_i} \\ \text{et } \left| \begin{array}{l} r = 1, \dots, \mu \\ i = d - m + r, \dots, d \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les points intermédiaires de ce schéma algorithmique sont représentés par le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccc}
 P_0 & \dots & P_{d-m} \\
 & & \vdots \\
 & & P_d \dots P_k \\
 & & \vdots \\
 & & P_{d-m+\mu}^{\mu} \dots P_d^{\mu}
 \end{array}$$

Les points qui y figurent sont les nouveaux points caractéristiques la courbe C, ceci après μ insertions de la valeur u .

Conversion vers le modèle de Bézier

Considérons le cas où les noeuds u_d et u_{d+1} sont disjoints et de multiplicité m . Rappelons que les fonctions de la base B-spline qui ne s'annulent pas sur l'intervalle $[u_d, u_{d+1}]$ sont exactement les fonctions de la base de Bernstein définies sur cet intervalle. Ainsi les points caractéristiques $\{P_i; i=d-m, \dots, d\}$ sont exactement les points caractéristiques de la courbe de Bézier définie sur $[u_d, u_{d+1}]$.

D'après cette constatation, toute courbe ou surface Nurbs peut être représentée par une suite de courbes ou carreaux de Bézier rationnelles. Ceci s'effectue en insérant suffisamment de fois chaque valeur nodale dans sa séquence nodale, jusqu'à ce qu'elle atteigne la multiplicité maximale.

1.3.3. Algorithme de Cox-De Boor

L'algorithme de Cox-De Boor est aux B-spline ce que l'algorithme de Casteljau est aux Bézier. Il permet, d'évaluer la position et les dérivées en un point courant d'une courbe ou surface B-spline, de les subdiviser en courbes ou sous-carreaux de même degré.

Cet algorithme est une application de l'algorithme de Boehm. Pour une valeur donnée, il consiste à l'insérer suffisamment de fois dans la séquence nodale jusqu'à ce qu'elle atteigne une multiplicité égale au degré.

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i^r = \alpha_i^r P_i^{r-1} + (1 - \alpha_i^r) P_{i-1}^{r-1} \\ \text{où } \alpha_i^r = \frac{u - u_i}{u_{i+m+1-r} - u_i} \\ \text{et } \left| \begin{array}{l} r = 1, \dots, m - \mu \\ i = d - m + r, \dots, d \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Remarques

- on peut voir la ressemblance avec l'algorithme de Casteljau
- de la même manière l'algorithme est généralisé aux surfaces Nurbs
- l'algorithme de Cox-De Boor traite les courbes et surfaces B-spline non rationnelles. Pour des Nurbs, l'algorithme doit s'effectuer dans l'espace homogène, ensuite appliquer une transformation homogène.

1.3.4. Représentation matricielle

Les courbes et surfaces Nurbs sont des formes polynomiales par morceaux, il est donc toujours possible de les écrire dans la base canonique. L'algorithme de Horner permet d'effectuer des évaluations rapides sur des courbes ou surfaces écrites dans cette base.

La conversion d'une base vers la base canonique nécessite le calcul d'une matrice de passage. Le modèle de Bézier est écrit dans la base de Bernstein, la matrice de conversion correspondante est connue explicitement. Les fonctions B-spline sont définies par la relation récurrente de Cox-De Boor, la matrice de conversion correspondante nécessite un calcul à l'aide de la relation précédente.

Modèle de Bézier

Soit $C(u)$ une courbe de Bézier écrite sous sa forme habituelle:

$$C(u) = \sum_{i=0}^m P_i B_{i,m}(u)$$

elle peut encore s'écrire sous une forme usuelle:

$$C(u) = [P][B] = [P][M_m][U]$$

où

$$[P] = [P_0, P_1, \dots, P_m]^T$$

$$[B_m(u)] = [B_{0,m}(u), B_{1,m}(u), \dots, B_{m,m}(u)]^T$$

$$[U] = [1, u, u^2, \dots, u^m]^T$$

$[M_m]$ est la matrice de conversion de la base de Bernstein à la base canonique, elle est donnée de façon explicite par:

$$m_{ij} = \begin{cases} (-1)C_m^i C_j^j & \text{si } i \geq j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Pour une surface de Bézier S, elle s'écrit sous sa forme usuelle:

$$S(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v)$$

une représentation matricielle de S est de la forme suivante:

$$\begin{aligned} S(u,v) &= [B_m(u)]^T [P] [B_n(v)] \\ &= [U]^T [M_m]^T [P] [M_n] [V] \end{aligned}$$

Modèle B-spline

On considère C une courbe B-spline non rationnelle de degré m, elle peut s'écrire donc comme une suite de courbes de Bézier de même degré. On propose de chercher la représentation matricielle de chaque morceau de C défini sur un intervalle $[u_d, u_{d+1}]$.

Les fonctions de la base B-spline non nulles sur cet intervalle sont $\{N_{i,m}: i=d-m, \dots, d\}$, elles constituent une base de l'espace polynomiale de degré m. La matrice de passage de cette base à la base canonique peut être évaluée en utilisant la relation récurrente de Cox-De Boor. Avant d'effectuer cela, on effectue un changement de paramètre pour ramener chaque morceau de C comme une fonction définie dans le domaine paramétrique normalisé $[0,1]$ ($[0,1]^2$ pour les carreaux):

$$t = \frac{u - u_d}{u_{d+1} - u_d} \quad t \in [0,1] \text{ et } u \in [u_d, u_{d+1}]$$

Cette normalisation du paramètre rend l'algorithme de conversion plus stable numériquement [GRA 92].

On définit des fonctions tel que $A_{i,r}(t) = N_{i,r}(u)$ et on écrit ensuite ces fonctions dans la base canonique:

$$A_{i,r}(t) = a_{i,r}^0 + a_{i,r}^1 t + a_{i,r}^2 t^2 + \dots + a_{i,r}^r t^r$$

Pour calculer les coefficients $\{a_{i,r}^j\}$, on écrit la relation de Cox-De Boor liant ces fonctions:

$$\begin{cases} A_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \\ A_{i,r}(t) = \frac{(u_d - u_i) + t(u_{d+1} - u_d)}{u_{i+r} - u_i} A_{i,r-1}(t) + \frac{(u_{i+r+1} - u_{d+1}) - t(u_{d+1} - u_d)}{u_{i+r+1} - u_{i+1}} A_{i+1,r-1}(t) \end{cases}$$

En remplaçant cette relation dans la forme canonique de $A_{i,r}(t)$, on obtient ensuite les relations suivantes:

$$a_{i,r}^j = \begin{cases} \frac{u-u}{u_{i+r}-u_i} a_{i,r-1}^0 + \frac{u-u}{u_{i+r+1}-u_{i+1}} a_{i+1,r-1}^0 & \text{si } j=0 \\ \frac{(u_d-u_i)a_{i,r-1}^j + (u_{d+1}-u_d)a_{i,r-1}^{j-1}}{u_{i+r}-u_i} + \frac{(u_{i+r+1}-u_{i+1})a_{i+1,r-1}^j - (u_{d+1}-u_d)a_{i+1,r-1}^{j-1}}{u_{i+r+1}-u_{i+1}} & \text{si } 0 < j < r-1 \\ \frac{u_{d+1}-u_d}{u_{i+r}-u_i} a_{i,r-1}^{r-2} - \frac{u_{d+1}-u_d}{u_{i+r+1}-u_{i+1}} a_{i,r-1}^{r-2} & \text{si } j=r-1 \end{cases}$$

1.4. Conclusion

Le modèle Nurbs est aujourd'hui le principal modèle de représentation des courbes et surfaces paramétriques, la souplesse de création et de modification sont ses avantages majeurs. On a exposé les propriétés et les algorithmes de traitement disponibles sur ce modèle, elles seront utiles pour les méthodes de calcul d'intersection. Les performances de ces dernières dépendent en effet des algorithmes effectuant les opérations de base sur les courbes et surfaces.

Nous avons présenté le modèle Nurbs comme une généralisation des modèles de Bézier et B-spline. Il est un outil idéal pour représenter de manière unique formes gauches et quadriques. Cependant, il n'apporte pratiquement rien à la modélisation des formes gauches. Son principal avantage, par rapport aux deux autres modèles, est la possibilité de faire varier le poids d'un point de contrôle pour modifier la courbe ou la surface correspondante sans modifier ce point.

Les algorithmes de calcul d'intersection sont des opérations complexes, qui nécessitent un appel aux opérations d'évaluation et de dérivation beaucoup plus coûteuses que pour le modèle non rationnel. La conversion des Nurbs vers la base canonique permet de réduire considérablement le coût de ces opérations. Cependant, elle s'accompagne d'une certaine perte de précision, l'évaluation par l'algorithme de Horner est une opération moins stable que par l'algorithme de Boehm. Ces erreurs sont beaucoup moins importantes que les erreurs commises dans le calcul d'intersection.

Dans la suite, on expose le problème d'intersection de deux surfaces paramétriques quelconques. La propriété de l'enveloppe convexe est requise pour certaines méthodes.

2. PRINCIPALES APPROCHES DU PROBLEME D'INTERSECTION

2.1. Problème d'intersection

Historiquement, la modélisation géométrique a été caractérisée par le développement des techniques de construction des courbes et surfaces. Ainsi, ont été développés successivement les modèles de Bézier, B-spline et Nurbs. Ces techniques, dites de construction, ne constituent pourtant qu'une étape de la conception d'un objet. Il est souvent nécessaire de faire des traitements et des retouches pour aboutir au résultat final, ceci a conduit à la mise en oeuvre d'opérations de traitement de ces objets. La recherche des courbes d'intersection et la construction de surfaces de raccordement entre deux surfaces sont ces principales opérations.

Le calcul d'intersection de deux surfaces est l'opération traitée dans cette thèse. Elle intervient tant au moment de la construction d'une surface, lorsque son domaine paramétrique doit être restreint, que lors de la recherche d'interférence avec d'autres objets. Elle intervient aussi dans:

- la simulation et contrôle du processus de fabrication
- la visualisation
- la génération d'objets par éléments finis
- la reconnaissance des formes

Dans un système de modélisation surfacique, une surface peut être représentée sous une forme paramétrique ou algébrique. Les algorithmes de calcul d'intersection de deux surfaces dépendent donc de leurs représentations internes, le problème se pose ainsi sous trois formes différentes:

- les deux surfaces sont paramétriques, l'ensemble d'intersection est solution d'un système de trois équations à quatre inconnues:

$$\begin{cases} x_1(u, v) - x_2(s, t) = 0 \\ y_1(u, v) - y_2(s, t) = 0 \\ z_1(u, v) - z_2(s, t) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où $(x_1(u, v), y_1(u, v), z_1(u, v))$ et $(x_2(s, t), y_2(s, t), z_2(s, t))$ sont les représentations paramétriques des deux surfaces.

- les deux surfaces sont décrites implicitement (surfaces algébriques), le problème revient à résoudre un système de deux équations à trois inconnues:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

où $f_1(x, y, z)$ et $f_2(x, y, z)$ sont les représentations algébriques des deux surfaces.

- les deux surfaces ont des représentations internes différentes (algébrique- paramétrique), l'ensemble d'intersection est solution d'une équation à deux inconnues:

$$f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=0 \quad (2.3)$$

où $f(x,y,z)$ et $(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ sont respectivement les représentations algébrique et paramétrique des deux surfaces.

Notons que dans ces trois situations, le problème consiste à résoudre un système d'équations à un seul degré de liberté. La dernière situation est particulièrement avantageuse, du fait du nombre réduit de paramètres et d'équations à gérer. Parmi les techniques de résolutions, certaines consistent à ramener le problème à cette situation (c.-à-d. une équation algébrique et une paramétrique) en convertissant la représentation de l'une des deux surfaces. Malheureusement, ces techniques aboutissent généralement à la résolution d'une équation de degré très élevé, ce qui limite cette approche au traitement de cas simples.

Dans cette thèse, on traite la première forme d'intersection où les deux surfaces sont représentées paramétriquement. Ce mode de représentation, le mieux adapté pour modéliser des formes complexes, entraîne la forme d'intersection la plus compliquée vu la taille des systèmes à résoudre. Les principales techniques développées à cet effet appartiennent à trois classes importantes: subdivision, suivi et substitution.

Dans la suite, on décrira les principes et les dernières solutions proposées pour ces méthodes, pour montrer enfin les avantages et les limitations de chacune de ces trois approches.

2.2. Méthode de subdivision récursive

La méthode de subdivision récursive est l'une des premières approches proposées pour résoudre le problème d'intersection entre deux surfaces paramétriques [CAR 82]. Dans sa forme générale, la méthode opère par décomposition récursive du problème en sous problèmes plus simples; elle est aussi dite méthode de "diviser pour régner" (divide and conquer). Les surfaces à traiter sont subdivisées en sous-carreaux jusqu'à ce qu'ils puissent être approchés par facettes planes. Ces facettes forment une approximation linéaire par morceaux des surfaces originales, qui les remplacent dans des traitements délicats tels que le calcul d'intersection et la visualisation. L'évaluation de l'intersection de ces facettes donne un ensemble de segments qu'il faut ranger pour former à leur tour une approximation linéaire par morceaux de l'ensemble des courbes d'intersection.

La méthode génère pour chaque surface une structure d'arbre quaternaire, où les racines sont les deux surfaces à traiter et les noeuds vides des sous carreaux ne participant pas à l'intersection. Les feuilles correspondent aux sous-carreaux approchables par facettes planes et contenant, en général, des branches de courbe d'intersection.

L'algorithme de la méthode se présente sous une forme récursive, un niveau de subdivision est un niveau d'appel récursif. A chaque niveau de subdivision, seules les régions susceptibles de contenir des branches de courbes d'intersection sont prises en compte. Un filtre, dit test de séparabilité, est utilisé à cet effet pour éviter de traiter les zones dépourvues d'intersection. La condition d'arrêt de l'algorithme est que les sous-carreaux restant soient approchables par facettes planes, un test dit d'arrêt de subdivision est développé à cet effet. Ce test permet de décider si un sous-carreau nécessite des subdivisions supplémentaires ou s'il a atteint l'étape finale; dans ce cas il servira à évaluer une intersection élémentaire.

La méthode est étroitement liée aux modèles de surfaces de Bézier et B-spline, les tests de séparabilité et d'arrêt de subdivision étant dépendants de la propriété de l'enveloppe convexe de ces surfaces. [HOU 85] a développé un algorithme pour des surfaces différentiables; des solutions approximatives sont proposées pour les deux tests de la méthode. Dans la suite, on présentera l'algorithme général et les différentes possibilités d'implanter les deux tests de la méthode.

2.2.1. Algorithme général

Les deux surfaces traitées sont décomposées simultanément en arbres quaternaires. A chaque niveau de subdivision, on ne conserve que les sous-carreaux susceptibles de contenir des branches de courbe d'intersection. L'algorithme aboutit ainsi à la formation de couples de

sous-carreaux suffisamment plats et impliqués dans l'intersection. Le calcul de l'intersection de ces couples donne un ensemble de segments approchant les courbes d'intersection. Tout segment obtenu doit être rangé dans une liste correspondant à la courbe qui le porte, le résultat final et une liste de courbes, elles même listes de segments.

On décrit la forme générale d'un algorithme de subdivision récursive pour le calcul d'intersection de deux surfaces paramétriques quelconques S et T . On utilisera les deux tests suivants:

- si S et T sont disjoints: ce test de séparabilité doit permettre de détecter si ces deux surfaces ne se coupent pas.
- si S est assimilable à une facette: ce test d'arrêt de subdivision doit permettre de savoir si S est assimilable à une facette plane selon une certaine tolérance.

Algorithme *Subdivision_Réursive*(S, T)

début

si S et T sont non disjoints

alors si S est approchable par facette plane

alors si T est approchable par facette plane

alors calculer l'intersection des facettes approchantes de S et T
ranger le résultat obtenu

sinon subdiviser T en sous-carreaux $\{T_i; i=1,2,3,4\}$

Subdivision_Réursive(S, T_i) $\{i=1,2,3,4\}$

sinon subdiviser S en sous-carreaux $\{S_i; i=1,2,3,4\}$

si T est approchable par facette plane

alors *Subdivision_Réursive*(S_i, T) $\{i=1,2,3,4\}$

sinon subdiviser T en sous-carreaux $\{T_j; j=1,2,3,4\}$

Subdivision_Réursive(S_i, T_j) $\{i,j=1,2,3,4\}$

fin

2.2.2. Séparabilité

La méthode de subdivision récursive est sélective, dans la mesure où la recherche doit se limiter aux zones susceptibles de contenir des branches de courbes d'intersection. A chaque niveau de subdivision, l'algorithme aboutit à la formation d'un certain nombre de sous-carreaux de plus en plus plats. Les paires dont on peut détecter une disjonction triviale sont éliminées des étapes de subdivision ultérieures.

La décision de rejeter une paire de carreaux disjoints est effectuée par un test de séparabilité. Dans ce test, on construit pour chaque carreau un volume englobant. Si deux englobants de deux carreaux sont disjoints, alors ces deux carreaux sont nécessairement disjoints. Comme les surfaces traitées sont des surfaces paramétriques à tendance rectangulaire, les parallélépipèdes rectangles sont les englobants les plus adaptés; on appellera ces volumes des boîtes. La vérification de la disjonction de deux boîtes est simple et rapide.

Les tests de séparabilité utilisant des boîtes diffèrent dans la manière de construction de ces dernières. Les techniques utilisées se distinguent en deux classes:

- la première dépend de la propriété de l'enveloppe convexe et de la notion de points caractéristiques [CAR 82][YEN 91]. Une surface vérifiant cette propriété est à l'intérieur de la boîte englobante de son réseau de points caractéristiques, les boîtes calculées de cette manière seront dites des boîtes minmax.

- La seconde est une approche plus générale: elle consiste à construire des boîtes englobantes indépendamment du type de surfaces. [HOU 85] utilise des boîtes orientées dans un repère défini par trois des quatre sommets du carreau traité. Dans ce repère, [HOU 85] construit la boîte englobant les quatre sommets du carreau, ensuite il élargit cette boîte d'une certaine valeur pour englober le carreau. [BAR 90] utilise le même principe que le précédent. Les vecteurs tangents aux 4 sommets du carreau sont utilisés pour calculer une valeur d'élargissement de la boîte obtenue. Le résultat obtenu n'est pas nécessairement un englobant de son carreau. [FIL 86] utilise une valeur d'élargissement garantissant un englobant.

2.2.3. Arrêt des subdivisions

Au cours du procédé de subdivision récursive, un sous carreau atteint l'étape de subdivision finale s'il est approchable par une ou deux facettes planes selon une certaine tolérance. Ces facettes servent à calculer directement un éventuel segment approchant un arc de courbe d'intersection.

A chaque niveau de subdivision et à chaque sous-carreau susceptible de contenir des points d'intersection, la méthode effectue un test d'arrêt de subdivision. Un sous carreau qui réussit ce test est un carreau assimilable à une facette plane, aucune subdivision supplémentaire n'est nécessaire pour ce sous carreau.

La méthode de subdivision récursive peut être implantée de deux manières, dépendantes de la façon d'effectuer le test d'arrêt des subdivisions:

subdivision adaptative:

Les différentes zones d'une surface sont subdivisées en fonction de leurs propriétés géométriques, seuls les sous-carreaux n'ayant pas encore atteint un certain caractère plat seront subdivisés. Un test de planéité et de linéarité des courbes de bord sont utilisés à cet effet pour savoir si un sous-carreau est assimilable à une facette plane.

Les surfaces vérifiant la propriété de l'enveloppe convexe permettent un test d'arrêt utilisant les points caractéristiques [CAR 82]. Si le réseau de points caractéristiques d'une telle surface est assimilable à une facette plane, alors la surface l'est aussi. Pour des surfaces quelconques, [BAR 90] [HOU 85] évaluent le vecteur normal et tangent sur une grille de points dans le domaine paramétrique. Si la variation angulaire du vecteur normale ne dépasse pas une certaine tolérance, alors la surface est considérée assez plane. De même si la variation angulaire du vecteur tangent sur un bord ne dépasse pas une certaine tolérance, alors ce bord est considéré linéaire.

subdivision uniforme:

A chaque surface, on calcule un niveau de subdivision maximale. Ces niveaux garantissent qu'après subdivision uniforme, chaque sous-carreau est assimilable à deux triangles (selon une certaine tolérance). Tous les sous carreaux finals sont du même niveau de subdivision.

La méthode de subdivision uniforme peut effectuer inutilement un certain nombre de subdivisions, mais elle permet d'éviter tous les tests de planéité et de linéarité de bord qui sont coûteux en temps de calcul.

Le niveau de subdivision maximale d'un carreau est calculé en utilisant un théorème qui permet de majorer la distance maximale entre un carreau et le quadrilatère passant par ces quatre sommets[FIL 86]. Le calcul de ce niveau de subdivision nécessite une majoration de ses dérivées secondes. Ces majorations sont difficiles à calculer pour des surfaces rationnelles ou de degré élevé.

2.2.4. Conclusion

Pour des surfaces vérifiant la propriété de l'enveloppe convexe, le polygone des points caractéristiques converge vers la surface originale. Ainsi avec un niveau de subdivision avancé, la méthode promet une solution complète et précise. Mais ceci entraîne une prolifération de données à garder en mémoire, par suite la méthode devient lente et peu adaptée à des utilisations dans le contexte interactif. De même, avec un niveau de subdivision limité, la méthode peut entraîner des mauvaises identifications de l'ensemble d'intersection, oublier des courbes de petites tailles.

Ces limitations pratiques font que la méthode est abandonnée pour d'autres méthodes telles que la méthode de suivi. En effet, la méthode de subdivision appliquée à un petit niveau est un excellent moyen pour éviter la recherche dans des sous carreaux disjoints. Ainsi c'est la méthode utilisée pour calculer des points d'intersection nécessaires à l'utilisation de la méthode de suivi.

La méthode peut être considérablement améliorée en modifiant les tests de séparabilité et les tests d'arrêt des subdivisions. Nous avons décrit les principes d'un algorithme de subdivision récursive, et montré les différentes possibilités d'effectuer ces deux tests. La forme adaptative de la méthode est la première approche utilisée, elle effectue un minimum de subdivision. Mais avec tous les tests d'arrêt de subdivision coûteux, la méthode est ralentie. La forme uniforme nous paraît une solution intéressante, puisque la condition d'arrêt de cette méthode est d'atteindre ce niveau maximal. Nous allons continuer dans ce sens de façon à pouvoir améliorer le calcul des niveaux de subdivision.

2.3. Méthode de suivi

La méthode de suivi est la deuxième méthode développée dans cette thèse, elle traite des surfaces paramétriques différentiables. Son principe consiste à choisir d'abord un certain nombre de points de départ sur les différentes courbes d'intersection, ces points sont appelés points germes. A partir de chaque point germe, la méthode calcule séquentiellement une suite de points sur la courbe d'intersection passant par ce point. Ce procédé de suivi peut être comparé à une promenade le long d'une courbe d'intersection, tout en marquant les traces des pas. Ainsi, les courbes d'intersection sont représentées par une approximation linéaire par morceaux, donnée par la suite de points ordonnés obtenus par la méthode.

Elle est le sujet de la plus part des travaux récents sur le problème d'intersection, sa rapidité et sa précision font d'elle la méthode la plus traitée. Parmi ces travaux, on citera [BAJ 88] qui propose une généralisation du procédé de suivi. Etant donné que le problème d'intersection sous ses trois formes se ramène à la résolution d'un système d'équations à un seul degré de liberté, il peut donc être formulé sous une forme commune.

On retiendra [LUK 89] qui a donné une bonne formulation mathématique du problème de calcul du point suivant pour le procédé de suivi. Le contrôle du nombre de point calculé sur une même courbe est un problème important, on se référera aux travaux de [OZS 89][LUK 89][BAJ 89].

La difficulté majeure de cette méthode est de trouver toutes les courbes d'intersection, le choix des points germes est alors d'une importance capitale. En effet, il est essentiel de déterminer un point de départ sur chaque composante connexe de l'ensemble d'intersection, sinon certaines courbes seront oubliées dans le résultat final. Ce problème est généralement supporté par une méthode de subdivision [BAR 90], ou bien par une méthode d'isoparamétries [OZS 88]. En fait, la difficulté majeure est l'oubli des courbes d'intersection des petites tailles et fermées. [SED 89] a proposé un algorithme de test d'absence de ces courbes, la subdivision des surfaces jusqu'à un certain niveau permet de n'avoir que des courbes ouvertes.

Le procédé de suivi suppose que la tangente à la courbe recherchée soit toujours bien définie, ce qui limite la validité de la méthode à des courbes régulières. La présence d'un point singulier rend le procédé de suivi classique sujet à l'échec au voisinage de ces points, d'où l'importance du calcul préalable de ces points. Les recherches sur ce sujet se sont multipliées depuis l'introduction de la notion de fonction distance entre deux surfaces paramétriques [CHE 89]. L'étude de cette fonction permet d'identifier la structure locale aux voisinages de ces points, elle permet également d'identifier les courbes de petites tailles.

Dans la suite, on décrira le procédé de suivi d'une courbe d'intersection régulière. Puis on exposera les recherches concernant la fonction distance entre deux surfaces paramétriques.

2.3.1. Procédé de suivi

Le procédé de suivi d'une courbe d'intersection régulière C consiste à chercher séquentiellement une suite de points sur cette courbe: à partir d'un point germe connu, dans le sens de la tangente à C , on cherche un point d'intersection voisin. A partir de ce dernier et toujours dans la même direction, on cherche un autre point d'intersection. Ce procédé itératif est répété jusqu'à ce que la courbe C soit entièrement parcourue; on appellera le dernier point calculé point courant et le point recherché point suivant. Le résultat final est une suite de points d'intersection ordonnés, qui constituent une approximation linéaire par morceaux de C .

Le procédé de suivi se ramène au problème de calcul d'un point suivant, tout en contrôlant l'espacement des points consécutifs obtenus par la méthode. Ce calcul est effectué dans [BAJ 89] en deux étapes par une méthode dite de prédiction correction. La première est effectuée en construisant une courbe voisine de la courbe d'intersection au point courant. En se déplaçant sur cette courbe d'une certaine valeur dite pas de suivi, on obtient une estimation d'un point suivant. La seconde est une étape de correction, elle calcule itérativement la valeur exacte d'un point suivant à partir de l'estimation obtenue par l'étape précédente.

Algorithme Suivi

début

$j=0$

***tant que** (non fin de la courbe C)*

***faire** construire une courbe approchante au point C_j*

calculer une estimation du point suivant sur la courbe approchante

calculer itérativement le point suivant à partir de l'estimation précédente

$j \leftarrow j+1$

fin tant que

fin

[BAJ 88] a donné une formulation générale du procédé de suivi, qui se ramène toujours à la résolution d'un système d'équations à un degré de liberté (n équations à $n+1$ inconnues). Il effectue l'étape de prédiction en construisant un développement de Taylor d'ordre 3. Le pas de suivi est choisi heuristiquement de façon à ce que la contribution du troisième terme de la courbe approchante soit inférieure au $(1/5)$ du second et du premier terme.

[LUK 89] donne une bonne formulation du problème d'intersection de deux surfaces paramétriques. Il propose de construire en chaque point courant, une équation supplémentaire dépendante du point courant et du pas de suivi. Ceci permet de ramener le problème à la résolution d'un système d'ordre 4. Le pas de suivi est calculé adaptativement en chaque point courant, pour cela il approche la courbe par son cercle osculateur. Cette valeur est ainsi choisie de façon à ce que la distance maximale entre l'arc de cercle entre deux points consécutifs et la corde reliant ces deux points ne dépasse pas une certaine tolérance.

2.3.2. Fonction distance orientée

Le procédé de suivi décrit précédemment suppose un certain nombre de conditions sur la courbe recherchée. La direction de son engagement est calculée comme sa dérivée première, cette direction doit être définie en tout point. De même, pour chaque courbe, un point germe doit être connu.

L'introduction de la notion de fonction distance entre deux surfaces paramétriques au problème d'intersection a permis d'appréhender la structure locale et globale de l'ensemble d'intersection. Un ensemble de points significatifs découle des propriétés de cette fonction, ces points sont soit des points d'intersections tangentielles soit des points intérieurs de courbe d'intersection fermées. Dans un chapitre suivant, on développera cet outil et on montrera les propriétés de ces points importants.

Les points d'intersection tangentielle sont des extrema de cette fonction. [MAR 89] utilise la méthode de Newton-Raphson pour calculer l'ensemble de ces points. Ceci permet de découper les courbes d'intersection en ces points qui sont la cause de l'échec du procédé de suivi. Cette méthode présente beaucoup de difficultés pratiques: la fonction distance n'est pas connue explicitement, une approximation initiale de ces points n'est pas donnée.

[KRI 92] a décrit les propriétés importantes de la fonction distance. Il a proposé d'utiliser le théorème d'indice d'un champ de vecteurs plan pour localiser ces points. Cette localisation sert à calculer une estimation initiale pour un calcul itérative à l'aide de la méthode de Newton-Raphson.

2.3.3. Conclusion

Nous avons exposé le principe du procédé de suivi des courbes régulières, et montré qu'il se ramène au problème du calcul du point suivant. L'utilisation des courbes approchantes est une bonne amélioration de la méthode. Elle garantit une bonne approximation initiale du

point suivant. Le choix du pas de suivi ainsi que l'ordre de la courbe approchante sont les principales questions aux quelles il faut répondre.

Nous avons décrit brièvement la notion de la fonction distance orientée et celle de l'ensemble des points significatifs qui en découle. Dans un chapitre suivant, nous allons étudier plus en détail cette fonction afin de pouvoir bien identifier l'ensemble des points significatifs.

2.4. Méthode de substitution

Initialement, la méthode de substitution traite le problème d'intersection d'une surface algébrique et une surface paramétrique. Par substitution des coordonnées de la surface paramétrique dans l'équation de la surface algébrique, on obtient une représentation de l'intersection par une courbe algébrique (implicite) dans le plan. Cette courbe est ensuite résolue (explicitée) par un procédé de suivi.

Ceci est le principe original de la méthode telle qu'il est décrit dans [FAR 86]. La méthode peut s'adapter aux autres formes d'intersection par des techniques de conversion entre les deux modes de représentation de surfaces. Ainsi, quand les deux surfaces sont paramétriques, la conversion de l'une des deux vers sa forme algébrique permet de s'adapter aux conditions de la méthode. De même, quand les deux surfaces sont algébriques, il faut chercher une représentation paramétrique de l'une des deux surfaces. Notons que cette dernière conversion n'est pas toujours possible, alors que l'implicitisation [SED 85] est une opération possible pour toute surface paramétrique polynomiale et rationnelle.

La représentation de l'intersection par une courbe algébrique dans le plan est avantageuse pour les points suivants:

- le procédé de suivi d'une courbe est plus simple dans le plan que dans l'espace. En effet, il est moins difficile de gérer une équation à deux variables que de gérer un système à plusieurs équations.
- il est possible de construire une approximation paramétrique et polynomiale par morceaux d'une courbe algébrique [WAG 88], ce qui permet d'obtenir une représentation compacte et facilement utilisable pour des traitements ultérieurs.
- la technique de transformation rationnelle quadratique des coordonnées permet d'examiner la structure de la courbe au voisinage des points d'intersection tangentielle [WAG 87].

Une fois une représentation algébrique de l'intersection est obtenue, il faut pouvoir identifier et représenter l'ensemble de toutes les courbes composantes de l'ensemble d'intersection.

2.4.1. Représentation explicite d'une courbe algébrique plane

La description explicite d'une courbe algébrique plane est généralement effectuée par un procédé de suivi, similaire à celui décrit pour les courbes spatiales. Le problème de calcul des points germes et l'identification des voisinages des points singuliers sont les principales difficultés à surmonter.

[FAR 86] propose de découper les courbes d'intersection en branches de courbes ouvertes et monotones, les points de découpage sont des points où la normale est colinéaire aux axes. Ces points sont solutions d'un système de deux équations à deux inconnues:

$$\begin{cases} g_u(u, v) = 0 \\ g(u, v) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} g_v(u, v) = 0 \\ g(u, v) = 0 \end{cases}$$

La résolution de ces systèmes n'est pas une opération simple, [FAR 86] utilise pour cela la technique de la résultante. Cette technique consiste à éliminer des variables d'un système et ramener le problème à celui de la recherche des racines d'un polynôme à une seule variable. Cette approche offre une possibilité de déterminer l'ensemble de toutes les courbes d'intersection. Cependant, elle ne permet pas de traiter des systèmes même de faibles degrés. Pour une surface paramétrique bicubique, son intersection par un plan entraîne la résolution d'un système dont la résultante est de degré 15, ce degré augmente à 66 pour une quadrique. Ceci cause des problèmes de stabilité et d'efficacité, la méthode est ainsi restreinte à des cas limités.

[KRI 90] propose la même décomposition de l'ensemble d'intersection, mais une approche différente pour calculer ces points de décomposition. Il utilise dans un premier temps la technique de subdivision récursive pour calculer une approximation de ces points, ensuite il effectue un calcul plus précis par une méthode itérative.

2.4.2. Représentation implicite d'une surface paramétrique

Il est bien connu que la forme paramétrique d'une surface est souhaitable pour calculer des points courants, tandis que la forme implicite est avantageuse pour savoir si un point est sur cette surface. Il est parfois utile de disposer des deux représentations.

La conversion du modèle paramétrique au modèle algébrique peut s'effectuer de façon exacte pour toute courbe ou surface paramétrique polynomiale et rationnelle. En ce qui nous concerne, la description implicite d'une surface consiste à éliminer les deux paramètres d'un système de trois équations pour obtenir la représentation implicite.

$$\begin{cases} x(u, v) - x = 0 \\ y(u, v) - y = 0 \\ z(u, v) - z = 0 \end{cases}$$

La résultante de ce système est la forme implicite recherchée, [HOF 93] décrit les techniques d'élimination utilisées en modélisation géométrique.

Les représentations obtenues par ces méthodes peuvent être réductibles, c'est à dire d'un degré plus élevé que le degré effectif. Cette réductibilité est due à une dépendance des équations du système.

Comme dans le cadre de la méthode de subdivision récursive, on évalue l'intersection pour des facettes planes approchant les surfaces à traiter. Dans le cadre de la méthode de substitution, des techniques de recherche d'une description implicite approximative ont été développées. [CHU 89] propose une méthode de recherche d'une approximation locale en un point donné de la forme implicite d'une courbe ou surface paramétrique. Cette forme atteint un ordre de contact prescrit auparavant.

2.4.3. Conclusion

La méthode de substitution est intéressante si les surfaces sont représentées différemment, et si les degrés des surfaces sont petits. Pour des surfaces paramétriques, il faut effectuer la conversion de l'une des deux surfaces vers le modèle algébrique. Cette conversion donne en général des équations de degrés élevés, ce qui rend la méthode sujette aux erreurs numériques.

2.5. Synthèse

Les techniques de résolution du problème d'intersection de deux surfaces se sont développées durant ces dernières décennies, elles sont déjà implantées dans divers systèmes commerciaux. Le système CIMPLEX, développé par Automation Technology Products, est commercialisé depuis 1986: il utilise une méthode hybride combinant les principes des méthodes de suivi et de subdivision récursive. Cependant, les difficultés à surmonter restent encore nombreuses, même si de considérables efforts sont investis dans le problème. L'impossibilité de représenter explicitement l'ensemble des courbes d'intersection fait que les solutions données par ces méthodes ne sont que des approximations linéaires par morceaux de la solution.

Les méthodes de résolution du problème d'intersection de deux surfaces paramétriques les plus importantes sont la subdivision récursive, suivi et substitution. Nous avons exposé les diverses possibilités de les utiliser ainsi que les dernières améliorations apportées à ces méthodes.

Les méthodes de suivi et de substitution sont similaires par le fait que les deux cherchent l'intersection par un procédé de suivi. Cette dernière se ramène à la résolution d'une équation algébrique dans le plan, ce qui est très avantageux. Cependant, elle nécessite que les deux surfaces soient représentées différemment (algébrique et paramétrique).

Notre objectif dans cette thèse est d'apporter des améliorations aux deux principales méthodes de suivi et subdivision récursive. La complexité de ces traitements entraîne des temps d'exécution importants: un de nos premiers objectifs est de réduire ces temps d'exécutions. Ces deux méthodes, même si elles opèrent de façons différentes, ont toutes les deux des difficultés à traiter les cas des intersections tangentielles et d'identifier les courbes de petites tailles. La fiabilité de ces méthodes est donc un problème qui reste posé: notre deuxième objectif est d'apporter une solution à ce problème.

Le problème de représentation de l'intersection par une approximation linéaire par morceaux est commun aux deux méthodes: notre troisième objectif est de trouver une approximation suffisamment représentative avec un nombre de points réduit.

3. METHODE DE SUBDIVISION RECURSIVE

3.1. Introduction

Dans la description du principe de la méthode de subdivision récursive, nous avons montré qu'elle est définie par les deux tests de séparabilité et d'arrêt des subdivisions. L'amélioration de ses performances doit passer par une étude de ces deux tests, ainsi que de la façon d'effectuer les subdivisions et d'organiser les données.

Un test de séparabilité est un filtre pour la méthode: il sert à éviter le traitement des zones dépourvues de courbes d'intersection. Les boîtes minmax sont les englobants les plus utilisés dans le traitement de surfaces vérifiant la propriété de l'enveloppe convexe. Ces boîtes, calculées dans un repère bien choisi, permettent une amélioration de la méthode. Le choix d'un tel repère doit être judicieux, les boîtes calculées après changement de repère sont dites boîtes minmax orientés. On donnera un algorithme combinant les avantages de ces deux approches. Ces boîtes sont efficaces et assez simples à calculer, mais elles dépendent du modèle de surfaces traitées. Les boîtes par approximation sont une solution pour des surfaces quelconques, on exposera donc la méthode décrite dans [FIL 86], qui calcule des boîtes non orientées. Comme pour les boîtes minmax orientées, on proposera une méthode similaire calculant des boîtes par approximation orientées.

Un test d'arrêt de subdivision sert à décider si une zone nécessite des subdivisions supplémentaires ou bien qu'elle est approchable par facette plane. La méthode peut être implantée, en fonction de ce test, sous une forme adaptative ou uniforme.

La forme adaptative dite classique est la première forme utilisée, nous allons exposer donc les différentes opérations nécessaires pour l'implanter. La forme uniforme, développée plus récemment par [FIL 86], nous paraît une solution intéressante puisqu'elle permet d'éviter des tests d'arrêt coûteux. Nous allons donc redéfinir la notion de niveau de subdivision de façon à optimiser cette méthode. On montrera ensuite comment calculer ce niveau en utilisant la conversion vers la base de Tchebychev et en estimant l'effet de la projection orthogonale pour les surfaces rationnelles.

3.2. Tests de séparabilité

Un test de séparabilité sert à éviter d'exécuter des tâches de calcul d'intersection coûteuses pour des paires de sous-carreaux dont la disjonction peut être décidée rapidement. Cependant, il ne doit pas être un traitement plus coûteux que ce qui il est censé éviter; pour cela, il faut utiliser des englobants aussi fins que possibles, faciles à calculer et à traiter.

Un bon test de séparabilité permet de détecter la disjonction de deux sous carreaux rapidement, ce qui permet un gain de temps et d'espace mémoire nécessaire pour stocker les structures d'arbres engendrées par la méthode. Un mauvais test entraîne des subdivisions supplémentaires inutiles et par suite, une perte de temps et d'espace mémoire.

Les surfaces paramétriques définies sur des pavés sont à tendance rectangulaire, les boîtes sont donc des englobants bien adaptés pour effectuer des tests de séparabilité. Dans la suite, on développera les deux méthodes construction de ces boîtes: par enveloppe convexe et par approximation.

3.2.1. Boîtes par enveloppe convexe

Une surface vérifiant la propriété de l'enveloppe convexe, est complètement englobée par l'enveloppe convexe de son réseau de points caractéristiques. Cette enveloppe peut servir pour un test de séparabilité, mais les traitements résultants constituent une tâche lourde et délicate. Pour ne pas passer beaucoup de temps dans le traitement de tels volumes, on utilise des volumes plus gros mais plus simples à utiliser.

Les boîtes minmax sont les englobants les plus utilisées, elles sont calculées à partir des points caractéristiques. Elles peuvent être calculées dans un repère bien choisi et favorisent ainsi des englobants plus fins.

3.2.1.1. Boîtes minmax non orientées

Une boîte minmax d'une surface, vérifiant la propriété de l'enveloppe convexe, est le plus petit parallélépipède rectangle contenant son réseau de points caractéristiques. Elle est calculée en cherchant les extrema de l'ensemble de ces points, selon chaque direction du repère réel.

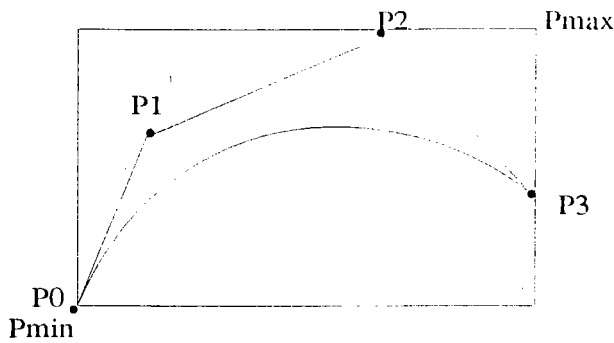


Figure 3.1: Boîte minmax d'une courbe de Bézier de degré 3.

Le test de séparabilité à l'aide des boîtes minmax (non orientées) est un test simple et rapide. Cependant, il peut être inefficace dans certains cas (figure 3.2); les boîtes minmax orientées tentent de traiter ces cas.

3.2.1.2. Boîtes minmax orientées

Les boîtes minmax décrites précédemment sont calculées dans le repère réel. Un changement de repère pourra produire des boîtes plus fines et plus proches de leurs surfaces, par suite un test de séparabilité plus intéressant.

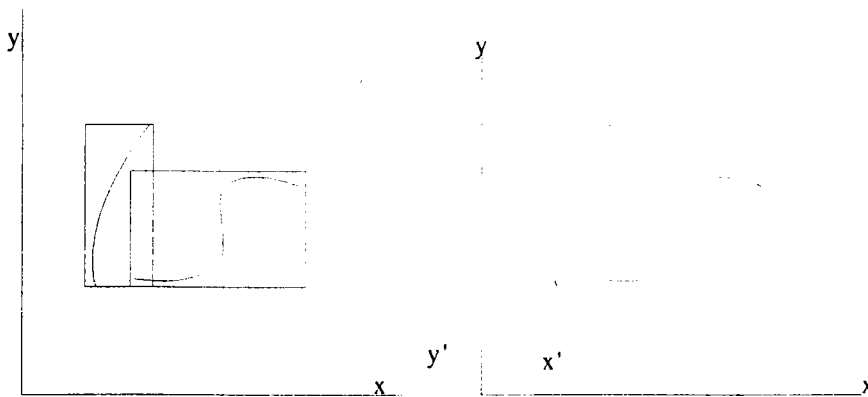


Figure 3.2 :Echec d'un test de séparabilité à l'aide des boîtes minmax non orientée.

Pour calculer la boîte minmax orientée d'une surface dans un repère donné, on transforme tous ses points de contrôle dans ce nouveau repère. La boîte minmax non orientée, calculée dans ce repère, est la boîte recherchée. De même, pour effectuer le test de séparabilité à l'aide des boîtes minmax orientées dans un repère donné, on transforme les deux réseaux de points caractéristiques dans ce nouveau repère. On y effectue ensuite le test de séparabilité par les boîtes minmax non orientées.

L'utilisation des boîtes minmax orientées doit s'effectuer dans un repère bien choisi. Une solution optimale garantissant la plus fine des boîtes minmax nécessite un traitement

compliqué, ce qui risque de rendre le test de séparabilité coûteux. De plus, un repère qui réalise la plus fine des boîtes minmax pour une surface, ne l'est pas nécessairement pour l'autre surface. Pour cela, il est souhaitable d'effectuer ce test dans un repère associé à la première surface. En cas d'échec, il faut recommencer avec un repère associé à la deuxième surface.

La recherche d'une bonne orientation pour un carreau est une opération délicate, qui peut être parfois sans un réel intérêt. On prend une solution pratique et simple, cherchant cette orientation à partir des 4 sommets du carreau. Les directions de ce repère sont calculées selon une moyenne des directions des segments joignant les 4 sommets du carreau.

3.2.1.3. Algorithme fusionnant les deux approches

Le test de séparabilité à l'aide des boîtes minmax orientées est un test coûteux. Il nécessite d'abord de rechercher un bon repère pour la première surface, de transformer chaque point de contrôle de chacune des deux surfaces, ensuite d'effectuer le test de séparabilité à l'aide des boîtes minmax non orientées. En cas d'échec, il faut recommencer ce traitement en inversant le rôle des deux surfaces.

Avant d'effectuer ce test, il est important de s'assurer d'une disjonction triviale à l'aide des boîtes minmax non orientées. Dans la suite, on décrit l'algorithme d'un test de séparabilité combinant les avantages de chacune des deux méthodes précédentes.

Algorithme TestDeSéparabilité(S, T)

début

calculer BS et BT boîtes minmax non orientées de S et T

si $BS \cap BT \neq \emptyset$

alors chercher une orientation de S

calculer BOS et BOT boîtes minmax orientées de S et T

si $BOS \cap BOT \neq \emptyset$

alors chercher une orientation de T

calculer BOS' et BOT' boîtes minmax orientées de S et T

si $BOS' \cap BOT' \neq \emptyset$

*alors $\{S$ et T sont considérées non disjointes et seront
traitées dans la suite de l'algorithme}*

sinon arrêt

sinon arrêt

sinon arrêt {disjonction triviale}

fin.

3.2.2. Boîtes par approximation

Pour éviter d'effectuer des subdivisions à l'aide de l'algorithme de Boehm, il faut pouvoir rendre le calcul des boîtes englobantes indépendant des points caractéristiques. Les boîtes obtenues par approximation constituent une solution à ce problème.

Dans la suite de ce paragraphe, on désigne par:

- $S(u,v)$ une surface différentiable de classe deux, et définie dans un domaine DS de la forme $DS = [u_0, u_0 + h] \times [v_0, v_0 + k]$, où h et k sont des réels positifs et petits (DS est un petit pavé).
- T_1 et T_2 deux triangles obtenus par subdivision de DS par une de ses diagonales.
- $L(u,v)$ une surface bilinéaire définie sur chacun des triangles T_1 et T_2 , elle est de la forme suivante:

$$L(u,v) = \begin{cases} au + bv + c & \forall u,v \in T_1 \\ a'u + b'v + c' & \forall u,v \in T_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2.2.1. Boîtes par approximation non orientées

On suppose L définie par (1) coïncidant avec S aux 4 sommets du domaine de définition DS, la distance maximale entre ces deux surfaces peut être majorée par une valeur δ :

$$\|S(u,v) - L(u,v)\| \leq \delta \quad \forall u,v \in DS \quad (3.2)$$

où δ est donnée dans [FIL 86] en fonction d'une majoration des dérivées secondes de S par:

$$\delta = \frac{1}{8}(h^2 M_1 + 2hk M_2 + k^2 M_3)$$

$$M_1 = \sup_{u,v} \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial u^2}(u,v) \right\| \quad M_2 = \sup_{u,v} \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial v}(u,v) \right\| \quad M_3 = \sup_{u,v} \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial v^2}(u,v) \right\|$$

L'inégalité (3.2) permet de construire facilement une boîte englobante de S de la manière suivante:

- construire la boîte $\{P_0, P_1\}$ englobant les 4 sommets de L .
- élargir cette boîte de la valeur δ selon chaque direction du repère réel. On obtient ainsi la boîte définie par $\{P_0 - (\delta, \delta, \delta), P_1 + (\delta, \delta, \delta)\}$.

La qualité de la boîte obtenue dépend de la valeur de δ qui doit être petite. En pratique, pour une surface définie sur le carré unité, après un niveau de subdivision n , la valeur de δ devient rapidement petite:

$$h = k = (1/2)^n$$

$$\delta = (1/8) \cdot (1/2)^{2n} \cdot (M_1 + 2M_2 + M_3)$$

Le calcul de M_1 , M_2 et M_3 est un traitement coûteux, mais il sera effectué une seule fois pour chaque surface.

3.2.2.2. Boîtes par approximation orientées

On désigne par A, B, C et D les quatre sommets de S. L est l'approximation bilinéaire de S sur le domaine $DS = [u_0, u_0 + h] \times [v_0, v_0 + k]$ et ayant pour sommets:

$$L(u_0, v_0) = A - W$$

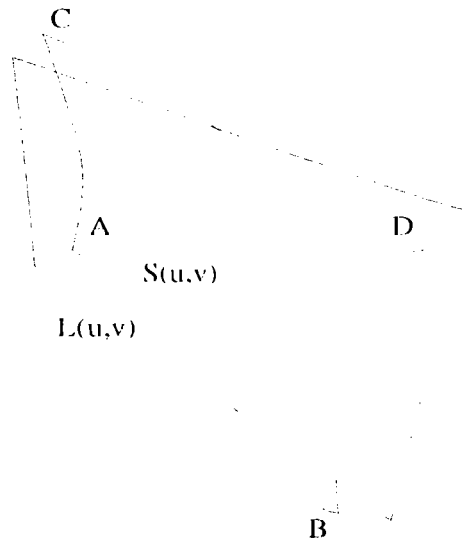
$$L(u_0, v_0 + k) = B + W$$

$$L(u_0 + l, v_0) = C + W$$

$$L(u_0 + l, v_0 + k) = D - W$$

où le point W est une moyenne donnée par: $W = \frac{1}{4}(A - B - C + D)$.

On peut voir que les quatre sommets de la surface L sont dans un même plan, c'est donc est une surface plane.



De la même manière, il est possible de majorer la distance maximale entre les deux surfaces S et L par une valeur δ :

$$\|S(u, v) - L(u, v)\| \leq \delta \quad \forall u, v \in D \quad (3.3)$$

où δ est donné dans [FIL 86] par:

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{8} (h^2 M_1 + 2hkM_2 + k^2 M_3)$$

$$M_1 = \sup_{u,v} \left(\left| \frac{\partial^2 X}{\partial^2 u} \right|, \left| \frac{\partial^2 Y}{\partial^2 u} \right|, \left| \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 u} \right| \right) \quad M_2 = \sup_{u,v} \left(\left| \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \right|, \left| \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} \right|, \left| \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} \right| \right) \quad M_3 = \sup_{u,v} \left(\left| \frac{\partial^2 X}{\partial^2 v} \right|, \left| \frac{\partial^2 Y}{\partial^2 v} \right|, \left| \frac{\partial^2 Z}{\partial^2 v} \right| \right)$$

Une boîte orientée englobant S est construite dans un repère ayant deux vecteurs portés par le plan de la surface L . On la construit de la manière suivante:

- dans le plan porteur de L , chercher un rectangle englobant les 4 sommets de L . On note $\{P_0, P_1\}$ deux sommets opposés de ce rectangle.
- la boîte est construite dans un repère d'origine P_0 défini par les vecteurs directeurs du rectangle. On élargit ce rectangle de la valeur δ selon chaque direction du nouveau repère, on obtient ainsi une boîte orientée définie par $\{P_0 - (\delta, \delta, \delta), P_1 + (\delta, \delta, \delta)\}$.

La qualité de la boîte obtenue dépend de la valeur de δ qui doit être petite; cette valeur devient rapidement petite avec quelques subdivisions.

La boîte obtenue est d'autant fine que ce rectangle est petit, on n'a pas développé de méthode de construction du rectangle $\{P_0, P_1\}$.

Conclusion:

Les performances de la méthode de subdivision récursive dépendent du test de séparabilité utilisé. Celui-ci doit détecter aussi tôt que possible la disjonction de deux sous-carreaux. Les deux approches de construction des boîtes englobantes utilisées par ces tests sont traitées dans ce paragraphe; la première est dépendante de la propriété de l'enveloppe convexe; la deuxième est valable pour des surfaces différentiables.

Nous avons développé l'approche classique utilisant les points caractéristiques et la propriété de l'enveloppe convexe, pour en faire un test combinant les avantages des boîtes minmax non orientées et celles orientées. Les points caractéristiques des sous carreaux doivent être disponibles, ce qui fait que la méthode est très gourmande en espace mémoire. En ce qui concerne la deuxième approche, son but n'est pas de généraliser la méthode, puisque pratiquement les seules surfaces utilisées en C.F.A.O vérifient la propriété de l'enveloppe convexe. Nous l'avons développée pour rendre le calcul des englobants indépendants des points caractéristiques et du type de surfaces.

La subdivision des surfaces de Bézier (resp B-spline) peut s'effectuer par un algorithme de De Casteljau (resp Boehm), ou simplement en subdivisant les domaines de définition. Dans ce dernier cas, les points caractéristiques des sous-carreaux ne sont pas connus, ce qui nécessite la construction des boîtes englobantes par approximation. Cette façon est intéressante puisqu'elle permet d'éviter, de garder en mémoire des structures de données importantes, et les calculs dus aux subdivisions. Cependant, elle nécessite une évaluation des quatre sommets des sous carreaux traités.

Cette description des avantages et inconvénients respectifs des deux approches ne nous permet pas de choisir. Une comparaison des performances doit s'effectuer par une implantation.

3.3. Tests d'arrêts des subdivisions

Un test d'arrêt de subdivision peut être effectué de façon à ce que la méthode soit adaptative ou uniforme. La forme adaptative, classique, nécessite d'effectuer un test de planéité et de linéarité des courbes bords. Nous allons montrer ces tests pour des surfaces vérifiant la propriété de l'enveloppe convexe. La forme uniforme nécessite le calcul d'un niveau de subdivision maximale pour chacune des deux surfaces. Nous allons définir ce niveau de façon à ce que, selon chacune des deux directions du domaine paramétrique, la subdivision soit uniforme.

3.3.1. Subdivision adaptative

La subdivision adaptative consiste à appliquer un test d'arrêt à chaque niveau de subdivision, et à chaque sous-carreau. Ce test effectue une analyse géométrique du sous-carreau traité, pour savoir s'il est assimilable à une facette plane selon une certaine tolérance. Cette méthode effectue un minimum de subdivisions pour atteindre le résultat final, son problème essentiel est de déterminer quel plan et quel contour choisir pour approcher un carreau. Pour ce faire, les notations suivantes seront adoptées:

S : un carreau défini par ses points caractéristiques $\{P_{ij}\}$ et vérifiant la propriété de l'enveloppe convexe.

$\mathcal{P}$: plan porteur d'une facette approximation de S , définie par un point de passage A et un vecteur normal $\vec{N}$.

$\mathcal{D}$: droite porteuse d'un segment approchant une courbe frontière de S , elle est définie par un point de passage A et un vecteur directeur unitaire $\vec{U}$.

3.3.1.1. Test de planéité

Au fur et à mesure que le niveau de subdivision avance, l'enveloppe du réseau caractéristique $\{P_{ij}\}$ devient une bonne approximation de S . C'est un moyen simple pour calculer un plan approchant $\mathcal{P}$, l'utilisation de points sur S nécessitant des opérations d'évaluation coûteuses.

Pour trouver $\mathcal{P}$ à partir du réseau de contrôle, deux solutions sont envisageables:

- la première consiste à chercher $\mathcal{P}$ comme le plan qui passe le mieux au sens des moindres carrés à travers le réseau des points caractéristiques. Si $\mathcal{P}$ est défini par un point de passage A

et un vecteur normal unitaire $\bar{N}$, cette méthode revient à minimiser la somme suivante par rapport à A et $\bar{N}$:

$$\sum_{i,j} (AP_{ij} \cdot \bar{N})^2 \quad (3.4)$$

C'est une solution optimale mais coûteuse en temps de calcul.

- la seconde est une solution pratique qui utilise seulement les quatre points extrêmes du réseau caractéristique. Le quadrilatère formé par ces points devient une bonne approximation de S au fur et à mesure que le niveau de subdivision avance. On prend le plan P défini par un point de passage A barycentre de ces points, et le vecteur $\bar{N}$ orthogonal aux moyennes, selon les deux directions, des côtés du quadrilatère.

Une fois qu'un plan approchant P du carreau S est choisi, le test de planéité devient simple: il suffit que tous les points caractéristiques soient à une distance de P ne dépassant pas une certaine tolérance donnée ε :

$$AP_{ij} \cdot \bar{N} \leq \varepsilon \quad \forall i, j \quad (3.5)$$

Cette condition garantit que la distance maximale entre S et l'enveloppe convexe de $\{P_{ij}\}$ ne dépasse pas ε . La distance maximale entre S et le plan P peut être largement inférieure à ε , d'où la difficulté de choisir ε .

3.3.1.2. Test de linéarité des bords

Si le test de planéité est effectué avec succès, un test de linéarité de courbe doit être appliqué à chacune des quatre courbes frontières de S . Ce test permet de savoir si ces courbes sont assimilables à des segments, selon une certaine tolérance ε .

Pour tester la linéarité d'une courbe C : la propriété de l'enveloppe convexe est encore utilisée pour chercher un segment approchant. Une fois que ce segment est choisi, le test de linéarité devient simple. Il suffit que tous les points caractéristiques $\{P_i\}$ de C soient à une distance de ce segment inférieure à la tolérance ε .

$$\|AP_i \wedge \bar{U}\| \leq \varepsilon \quad \forall i \quad (3.6)$$

Cette inégalité est une contrainte forte, elle fait assimiler le réseau de contrôle de C à un segment approchant à ε près. La courbe C est à l'intérieur de l'enveloppe convexe de son réseau de contrôle, elle est assimilable à ce segment à une certaine tolérance ε_1 ($\varepsilon_1 < \varepsilon$).

Ce test de linéarité est un test simple, il dépend du bon choix du segment approchant. Comme pour la planéité, deux solutions sont envisageables pour ce choix:

- la première consiste à choisir le segment porté par la droite qui passe le mieux au sens des moindres carrés à travers les points de contrôle de C. Cette méthode revient à minimiser la somme suivante par rapport à A et $\bar{U}$:

$$\sum_i (AP_i \wedge \bar{U})^2 \quad (3.7)$$

- la seconde est une solution pratique qui consiste à approcher une courbe par le segment joignant les deux points extrêmes du réseau de contrôle. C'est une solution simple et rapide

3.3.2. Subdivision uniforme

Une surface de Bézier rationnelle a en général une courbure assez uniforme. Il est parfois avantageux de lui appliquer une subdivision uniforme, qui garantit une approximation triangulaire selon une certaine tolérance. Ceci s'effectue en évitant tous les tests coûteux de planéité et de linéarité.

La méthode de subdivision uniforme consiste à calculer pour chaque surface, un niveau de subdivision maximal. Ce niveau garantit qu'après subdivision uniforme, chaque sous carreau est approchable par deux facettes triangulaires selon une certaine tolérance ε . L'idée de la méthode consiste à majorer la distance maximale entre une surface et une approximation plane ayant ses sommets sur cette surface. Si cette distance est inférieure à une certaine tolérance, alors la surface est considérée assimilable à cette approximation plane. Une majoration de cette distance a été donnée dans [LAN 79], ensuite considérablement réduite dans [FIL 86].

Au lieu d'effectuer une subdivision uniforme, on définira le niveau de subdivision maximal comme un couple d'entiers, où chacun correspond au nombre de subdivision maximal selon une direction du domaine paramétrique. L'obtention de ces nombres nécessite le calcul des majorations des dérivées secondes de la surface considérée. Ces majorations peuvent être difficiles à obtenir, notamment pour des surfaces de degrés élevés ou pour des surfaces rationnelles. La conversion vers la base de Chebychev et l'utilisation des propriétés de la fonction projection orthogonale permettent d'apporter une solution au problème.

3.3.2.1. Niveau de subdivision

Soit $S(u,v)$ une surface différentiable de classe deux définie sur un domaine $DS=[0,1]^2$, à valeurs dans l'espace euclidien de dimension donnée. Dans notre cas, le domaine est choisi unitaire pour des raisons de simplicité, la surface S est dans l'espace euclidien de dimension 3 ou 4.

Soit (α,β) un couple d'entiers qui désignera le niveau de subdivision. Après α subdivisions récursives selon le paramètre u et β subdivisions récursives selon v , le domaine DS est découpé en pavés rectangulaires de taille égale à $2^{-\alpha} \times 2^{-\beta}$. A chacun de ces pavés, on effectue une subdivision par l'une de ses diagonales (la première par exemple), ce qui entraîne une triangulation uniforme du domaine DS .

Dans la suite, T désignera un de ces triangles.

Soit $L(u,v)$ une surface définie sur le domaine DS , telle que sa restriction sur chacun des triangles T est une application bilinéaire coïncidente avec la surface S aux trois sommets de T .

$$\begin{cases} L(u,v) = au + bv + c & \forall (u,v) \in T \\ L(u_i, v_i) = S(u_i, v_i) & \text{pour } i = 1, 2, 3 \\ (u_i, v_i)_{i=1,2,3} & \text{sont les sommets de } T \end{cases} \quad (3.8)$$

$L(u,v)$ est une surface triangulaire par morceaux, c'est une approximation linéaire par morceaux de la surface S . Comme la subdivision est uniforme, la surface L est continue et ne présente pas de trous, ce qui n'est pas le cas pour la subdivision adaptative.

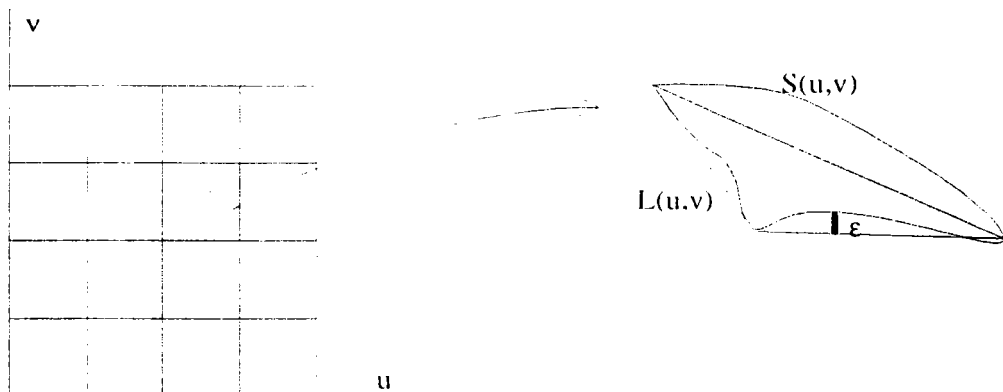


Figure 3.3: triangulation d'une surface paramétrique

L est une approximation de S à ϵ près si la distance maximale entre S et L ne dépasse pas la tolérance ϵ :

$$\begin{aligned} \|S(u_1, v_1) - L(u_2, v_2)\| &\leq \varepsilon \quad \forall T \subset D \\ &\forall u_1, v_1, u_2, v_2 \in T \end{aligned} \quad (3.9)$$

Comme pour l'inégalité (2), on peut majorer la distance maximale entre S et L par :

$$\|S(u, v) - L(u, v)\| \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2^{2\alpha}} M_1 + \frac{2}{2^{\alpha+\beta}} M_2 + \frac{1}{2^{2\beta}} M_3 \right) \quad (3.10)$$

Pour que le niveau de subdivision (α, β) garantisse une approximation triangulaire à ε près de S par L, il faut que le couple (α, β) vérifie l'inégalité:

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{2^{2\alpha}} M_1 + \frac{2}{2^{\alpha+\beta}} M_2 + \frac{1}{2^{2\beta}} M_3 \right) \leq \varepsilon \quad (3.11)$$

Il reste à trouver une valeur pour α et β en fonction de la tolérance ε :

- si $M_1=0$: aucune subdivision selon u n'est nécessaire, puisque la surface est linéaire selon cette direction. On prend ainsi $\alpha=0$ et on résout l'inégalité précédente en β .
- si $M_3=0$: aucune subdivision selon v n'est nécessaire, puisque la surface est linéaire selon cette direction. On prend ainsi $\beta=0$ et on résout l'inégalité précédente en α .
- si $M_1 \neq 0$ et $M_3 \neq 0$: on pose $\lambda = M_1/M_3$ et $2^\alpha = \lambda \cdot 2^\beta$ et on résout l'inéquation suivante en β :

$$2^\beta \geq \sqrt{\frac{1}{8\lambda^2\varepsilon}} (M_1 + 2\lambda M_2 + \lambda^2 M_3)$$

3.3.2.2. Majoration des dérivées secondes d'une surface

Le calcul du niveau de subdivision maximal d'une surface S nécessite le calcul des majorations de ses dérivées secondes. Ces nombres doivent être calculés une fois pour toutes avant de lancer la méthode de subdivision; ils peuvent être stockés avec la structure de la surface pour des traitements ultérieurs. Le calcul exact de ces valeurs nécessite le calcul des dérivées partielles troisièmes, de leurs racines et l'évaluation des dérivées secondes en ces racines. Ce traitement est évident pour des surfaces de degré inférieur à 3, mais il se complique avec l'augmentation du degré.

Des solutions approximatives doivent être prises, mais il faut que les valeurs trouvées soient assez proches des valeurs exactes. Pour des surfaces de Bézier non rationnelles, ces nombres peuvent être majorés en utilisant la propriété de la partition de l'unité des fonctions de la base de Bernstein:

$$\begin{aligned}
M_1 &= \max_{i:0 \dots m-2; j:0 \dots n} \left\{ m \cdot (m-1) \cdot \left\| P_{i+2,j} - 2P_{i+1,j} + P_{i,j} \right\| \right\} \\
M_2 &= \max_{i:0 \dots m-1; j:0 \dots n-1} \left\{ m \cdot n \cdot \left\| P_{i+2,j} - P_{i+1,j} - P_{i,j+1} + P_{i,j} \right\| \right\} \\
M_3 &= \max_{i:0 \dots m; j:0 \dots n-2} \left\{ n \cdot (n-1) \cdot \left\| P_{i+2,j} - 2P_{i,j+1} + P_{i,j} \right\| \right\}
\end{aligned} \quad (3.12)$$

Ces majorations peuvent être beaucoup plus grandes que les valeurs exactes, notamment pour des surfaces de degré élevé. La conversion de la base de Bernstein vers la base de Chebychev permet d'exploiter les propriétés de ces dernières et de donner des majorations meilleures [SHE 92]. Après conversion de la surface S vers la base de Chebychev, on peut écrire ses coordonnées sous la forme:

$$x(u,v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n t_{i,j} C_i(2u-1) C_j(2v-1)$$

où $x(u,v)$ est la première coordonnée de $S(u,v)$ et C_i la $i^{\text{ème}}$ fonction polynomiale de la base de Chebychev:

$$C_i(x) = \cos(i \cdot \arccos(x)) \quad \text{avec } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } i \geq 0$$

Des majorations des dérivées secondes de $x(u,v)$ sont données dans [SHE 92] par:

$$\begin{aligned}
m_{1,x} &= \frac{4}{3} \sum_{j=0}^n \sum_{i=2}^m |t_{i,j}| j^2 (j^2 - 1) \\
m_{2,x} &= 4 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |t_{i,j}| j^2 \quad (3.13) \\
m_{3,x} &= \frac{4}{3} \sum_{j=2}^n \sum_{i=0}^m |t_{i,j}| j^2 (j^2 - 1)
\end{aligned}$$

3.3.2.3. Effet de la fonction projection homogène

Les dérivées partielles d'une surface rationnelle sont des formes compliquées à calculer et à gérer, ce qui rend difficile l'opération de calcul des majorations de ces dérivées. Une approche proposée dans [FUH 92] calcule le niveau de subdivision dans l'espace homogène, où les surfaces sont polynomiales. Ensuite, elle cherche une estimation de l'effet de la fonction projection homogène sur la distance entre la surface et son approximation triangulaire.

L'idée de la méthode consiste à chercher une tolérance δ en fonction de la tolérance ε de façon à ce que, si un niveau de subdivision (α, β) garantit une triangulation de S^h à δ près, alors ce niveau garantit une triangulation à ε près de la surface originale S . Dans la suite, on désigne

par L^h la surface définie de la même manière que L , et coïncidant avec S^h aux sommets des triangles T obtenus après (α, β) subdivision uniforme du domaine DS . On a donc:

$$\|S^h(u_1, v_1) - L^h(u_2, v_2)\| \leq \delta \quad \forall T \subset D$$

$$\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in T$$

En appliquant la transformation homogène à cette inégalité, on obtient:

$$\|H(S^h(u_1, v_1)) - H(L^h(u_2, v_2))\| = \|S(u_1, v_1) - L(u'_2, v'_2)\| \leq \varepsilon$$

Les relations entre ε et δ sont décrites dans [FUH 92] par:

$$\delta = \begin{cases} \frac{\omega \varepsilon}{\sqrt{1 + \omega^2 \varepsilon^2}} & 0 < \varepsilon \leq r \\ \omega \varepsilon & r < \varepsilon \leq 2r \\ +\infty & 2r < \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{où } \omega = \inf_{i,j} \{\omega_{i,j}\} \text{ et } r = \sup_{i,j} \|P_{i,j}\|$$

Pour résumer, si (α, β) garantit une approximation triangulaire de S^h à δ près, alors il garantit une approximation triangulaire de S à ε près.

Conclusion:

Un test d'arrêt des subdivisions est un élément important dans un algorithme de subdivision récursive, la méthode se présente sous deux formes. La forme adaptative subdivise une surface en fonction de sa courbure locale, elle effectue ainsi un minimum de subdivisions. Mais avec tous les tests de planéité et de linéarité, elle tend à être consommatrice en temps de calcul. Elle est dépendante de la propriété de l'enveloppe convexe des surfaces utilisées.

La seconde forme est uniforme, elle permet d'éviter tous les tests de planéité et de linéarité des bords. Cette approche ne nécessite pas de disposer des points caractéristiques, elle est particulièrement avantageuse pour des surfaces à courbure uniforme. La méthode peut être lente si le niveau de subdivision calculé est grand, elle peut effectuer une sur-subdivision de certaines zones des surfaces traitées. Nous avons défini le niveau de subdivision comme un couple d'entier où chacun correspond à une direction du domaine paramétrique. Ceci est particulièrement avantageux quand il y a une différence de planéité entre les deux directions.

3.4. Conclusion

Après avoir décrit le principe général de la méthode, on a développé diverses possibilités de l'implanter. Ces implantations dépendent de la procédure subdivision d'un carreau, de la procédure de séparation de deux sous-carreaux et de la procédure d'arrêt des subdivisions.

La séparabilité peut s'effectuer par des boîtes minmax, ou des boîtes obtenues par approximations. Les premières sont calculées à partir du réseau de points caractéristiques. Les secondes calculées par approximation, elles sont indépendantes du modèle de surfaces. On a développé ces deux méthodes en proposant d'effectuer le calcul des ses boîtes dans des repères bien choisis. Ceci permet de rendre le test de séparabilité plus efficace dans les situations où les surfaces ne sont pas à tendances parallèles aux axes du repère réel.

L'arrêt des subdivisions peut s'effectuer adaptativement ou uniformément en calculant pour chacune des surfaces un niveau de subdivision maximal. De la même manière, la première est dépendante de la propriété de l'enveloppe convexe, la seconde est valable pour des surfaces quelconques. On a développé la notion de niveau de subdivision pour que la subdivision s'effectue indépendamment selon chacune des deux directions du domaine paramétrique.

La subdivision des surfaces de Bézier (resp B-spline, Nurbs) peut s'effectuer par l'algorithme de Casteljau (resp Boehm), ou simplement en subdivisant leurs domaines de définition. Dans ce dernier cas, les points caractéristiques des sous-carreaux ne sont pas connus, ce qui nécessite la construction des boîtes englobantes par approximation et le calcul des niveaux de subdivision maximaux pour les tests d'arrêt de subdivision.

Cette façon est intéressante puisqu'elle permet d'éviter de garder en mémoire des structures de données importantes, et les calculs dus aux subdivisions. Cependant, elle nécessite une évaluation des quatre sommets des sous carreaux traités. Le coût de ces évaluations est réduit en utilisant l'algorithme de Horner.

Enfin pour résumer, la méthode de subdivision récursive se présente sous deux formes adaptative ou uniforme. La forme adaptative est intéressante pour des surfaces à large variation de courbure, elle est dépendante de la propriété de l'enveloppe convexe. La forme uniforme est intéressante pour des surfaces à courbure assez uniforme, elle est valable pour des surfaces quelconques (différentiables).

4. METHODE DE SUIVI

4.1. Introduction

La méthode de suivi est actuellement la technique, de calcul d'intersection de deux carreaux de surface, la plus prometteuse. Après avoir donné sa description générale dans le deuxième chapitre, on a soulevé les principales difficultés à surmonter: l'identification des courbes fermées et des points d'intersection tangentielle, le choix du pas de suivi et de l'ordre de la courbe approchante qu'on entend traiter dans ce chapitre.

Le procédé de suivi d'une courbe régulière se ramène au problème de calcul du point suivant, tout en contrôlant l'espacement des points consécutifs. Ce calcul est généralement effectué en deux étapes de prédiction et de correction: la correction calcule itérativement une valeur précise à partir d'une estimation déjà calculée par l'étape de prédiction. Les courbes approchantes introduites par [BAJ 88] sont calculées comme un développement de Taylor de la courbe recherchée, elles garantissent une bonne approximation du point suivant. Nous allons décrire en détail la construction de ces courbes; le problème du choix du pas suivi et l'ordre de la courbe approchante sont les questions auxquelles il faut répondre.

La notion de fonction distance entre deux surfaces paramétriques constitue l'outil fondamental permettant d'identifier les courbes fermées et les intersections tangentielles. Un ensemble de points significatifs, qui découle des propriétés de cette fonction doit être calculé. [KRI 92] a défini ces points comme des extrema de la fonction distance; il a utilisé la notion de l'indice d'un champ de vecteurs pour les isoler dans des petits pavés; ensuite la méthode de Newton-Raphson pour les calculer itérativement. Cette approche présente des problèmes pratiques et théoriques dus au fait que ces extrema ne sont pas définis de façon explicite.

Nous allons exposer les détails et les propriétés de cet outil pour définir ensuite l'ensemble des points significatifs de façon explicite. Leur calcul indispensable sera facilité par cette définition et par une méthode fondée sur la technique de subdivision récursive.

4.2. Procédé de suivi

Le procédé de suivi est l'opération permettant de calculer séquentiellement une suite de points sur une courbe d'intersection. Il se ramène à un problème de calcul d'un point d'intersection voisin à partir d'un point déjà connu. Ce calcul s'effectue en deux étapes de prédiction et de correction: une estimation est calculée sur une courbe approchante, ensuite corrigée par une méthode itérative.

On commence ce chapitre par une description mathématique de la construction des courbes approchantes. On montrera la stratégie pris pour le choix du pas de suivi et de l'ordre de la courbe approchante.

4.2.1. Courbe approchante

Une courbe approchante à la courbe d'intersection C , en un point courant C_j , est construite comme son développement de Taylor d'un certain ordre en ce point, elle permet de calculer une approximation d'un point suivant. Cette approximation doit être donnée dans l'espace et dans les domaines paramétriques des deux surfaces S et T , il faut donc construire cette courbe approchante pour chacune des trois représentations paramétriques de C .

4.2.1.1. Courbe d'intersection régulière

En un point d'intersection régulier, la courbe d'intersection passant par ce point admet une représentation paramétrique vérifiant:

$$C(r) = \begin{pmatrix} X(r) \\ Y(r) \\ Z(r) \end{pmatrix} = S(u(r), v(r)) = T(s(r), t(r)) \quad (4.1)$$

où r varie dans un certain intervalle réel, on choisira r abscisse curviligne de la courbe C .

Les courbes planes $(u(r), v(r))$ et $(s(r), t(r))$ sont appelées coordonnées paramétriques de la courbe $C(r)$, dans les domaines des surfaces respectives S et T . On démontre facilement que ces trois représentations paramétriques sont autant différentiables que la moins différentiable des deux surfaces (annexe I).

Pour déterminer une courbe approchante, on suppose que C est assez différentiable, et on écrit ensuite ses trois premières dérivées en fonction de la base de Frenet $\{\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}\}$:

$$\begin{aligned}
C'(r) &= \bar{t} \\
C''(r) &= \frac{d\bar{t}}{dr} = \kappa \bar{n} \\
C'''(r) &= \frac{d}{dr}(\kappa \bar{n}) = \kappa' \bar{n} + \kappa (\tau \bar{b} - \kappa \bar{t})
\end{aligned} \tag{4.2}$$

où κ et τ désignent la courbure et la torsion de la courbe C au point $C(r)$. On rappelle les relations de Frenet-Serret liant les vecteurs de la base de Frenet:

$$\frac{d\bar{t}}{dr} = \kappa \bar{n}, \quad \frac{d\bar{b}}{dr} = -\tau \bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{dr} = \tau \bar{b} - \kappa \bar{t} \tag{4.3}$$

4.2.1.2. Calcul des coefficients des courbes approchantes

Pour calculer une estimation d'un point suivant, une courbe approchante doit être construite pour chacune des trois représentations de la courbe C , de façon à connaître ses coordonnées paramétriques et sa position dans l'espace. Ainsi, en un point courant C_j , les courbes approchantes d'un certain ordre n sont données par les sommes de Taylor suivantes:

$$\begin{cases}
u_j(r) = u_j + r u_j' + \frac{1}{2} r^2 u_j'' + \dots + \frac{1}{n!} r^n u_j^{(n)} \\
v_j(r) = v_j + r v_j' + \frac{1}{2} r^2 v_j'' + \dots + \frac{1}{n!} r^n v_j^{(n)} \\
s_j(r) = s_j + r s_j' + \frac{1}{2} r^2 s_j'' + \dots + \frac{1}{n!} r^n s_j^{(n)} \\
t_j(r) = t_j + r t_j' + \frac{1}{2} r^2 t_j'' + \dots + \frac{1}{n!} r^n t_j^{(n)} \\
C_j(r) = C_j + r C_j' + \frac{1}{2} r^2 C_j'' + \dots + \frac{1}{n!} r^n C_j^{(n)}
\end{cases} \tag{4.4}$$

Pour déterminer ces courbes approchantes, il est nécessaire de chercher leurs dérivées jusqu'à l'ordre n souhaité. Pour l'instant, on suppose que les dérivées de C jusqu'à l'ordre n sont connues, et on cherche par suite les dérivées des coordonnées paramétriques u , v , s et t .

Par dérivation d'ordre n par rapport à r de la formule (4.1), on obtient:

$$\begin{aligned}
C^n &= S_u u^n + S_v v^n + V^{n-1} \\
C^n &= T_s s^n + T_t t^n + W^{n-1}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

V^{n-1} dépend des dérivées partielles de S et des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ de u , v .

W^{n-1} dépend des dérivées partielles de T et des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ de s , t .

Pour calculer les dérivées u^n (resp v^n), on écrit la première équation du système (4.5) sous la forme:

$$C^n - V^{n-1} = S_u u^n + S_v v^n \quad (4.6)$$

Ensuite, on effectue le produit vectoriel de (4.6) par S_v (resp S_u):

$$(C^n - V^{n-1}) \wedge S_v = S_u \wedge S_v u^n \quad (4.7)$$

$$(C^n - V^{n-1}) \wedge S_u = S_v \wedge S_u v^n \quad (4.8)$$

Pour calculer u^n (resp v^n), on peut prendre:

$$u^n = \frac{[(C^n - V^{n-1}) \wedge S_v]_i}{[S_u \wedge S_v]_i}, \quad v^n = \frac{[(C^n - V^{n-1}) \wedge S_u]_i}{[S_v \wedge S_u]_i} \quad (4.9)$$

où i désigne l'indice de la plus grande coordonnée de $S_u \wedge S_v$ en valeur absolue.

De la même manière, les dérivées s^n et t^n sont données par:

$$s^n = \frac{[(C^n - W^{n-1}) \wedge T_l]_i}{[T_s \wedge T_l]_i}, \quad t^n = \frac{[(C^n - W^{n-1}) \wedge T_s]_i}{[T_l \wedge T_s]_i} \quad (4.10)$$

où i désigne l'indice de la plus grande coordonnée de $T_s \wedge T_l$ en valeur absolue.

Maintenant que les dérivées des coordonnées paramétriques u , v , s et t sont déterminées, on cherche les dérivées de la courbe C . La première dérivée peut être calculée facilement en fonction des deux vecteurs normaux aux deux surfaces. Pour une courbe régulière, $C'(r)$ est unitaire et colinéaire au produit vectoriel de ces deux normales. Son sens est déterminé par le sens de traversée de la courbe C :

$$C' = \pm \frac{N_s \wedge N_T}{\|N_s \wedge N_T\|} \quad (4.11)$$

Le signe $\pm$ désigne le sens de parcours choisi sur la courbe $C(r)$.

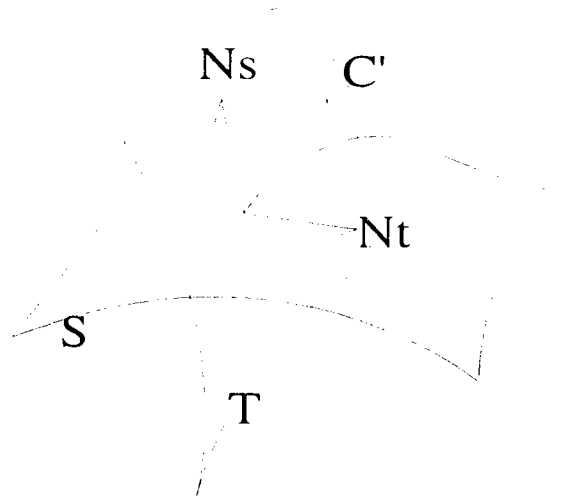


Figure 4.1 : En un point d'intersection transversale. N_S , N_T , C' forment une base.

En un point d'intersection régulier, les vecteurs N_S , N_T et C' forment une base dans l'espace. Chaque vecteur dérivée C^n de $C(r)$ peut s'écrire dans cette base sous la forme:

$$C^n = \alpha_n N_S + \beta_n N_T + \chi_n C' \quad (4.12)$$

où α_n , β_n et χ_n sont des réels donnés par:

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \langle V^{n-1}, N_S \rangle \\ \beta_n &= \langle W^{n-1}, N_T \rangle \\ \chi_n &= \langle C^n, C' \rangle \end{aligned} \quad (4.13)$$

α_n , β_n sont connues de façon explicite, puisque les vecteurs V^{n-1} et W^{n-1} sont déjà calculés, les χ_n sont par contre moins évidentes à trouver. Les relations du (4.2) permettent de calculer ces derniers pour les ordres inférieurs ou égaux à 3:

$$\begin{aligned} n=1, \chi_1 &= \langle C', C' \rangle = 1 \\ n=2, \chi_2 &= \langle C'', C' \rangle = 0 \\ n=3, \chi_3 &= \langle C''', C' \rangle = -\kappa^2 \end{aligned}$$

L'ordre de la courbe approchante, utilisé dans un algorithme de suivi est normalement fixé une fois pour toutes. L'ordre 0 consiste à prendre le dernier point calculé comme estimation du point suivant [LUK 89]. Ceci signifie que les courbes approchantes ne sont pas utilisées. L'ordre 1 consiste à prendre la droite tangente comme courbe approchante, c'est l'ordre le plus implanté, car il est simple à réaliser. [BAJ 88] a utilisé l'ordre 3 qui offre une meilleure approximation initiale du point suivant.

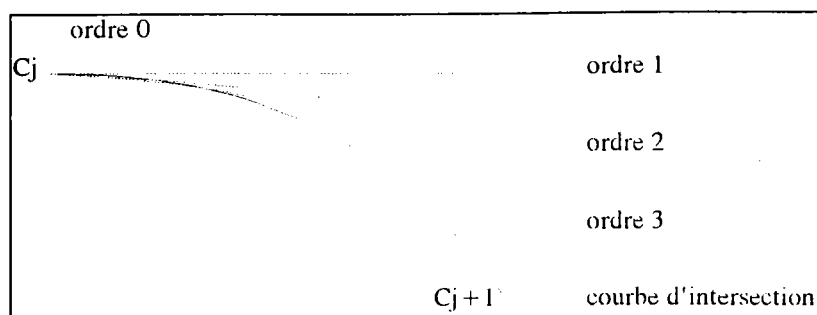


Figure 4.2: Courbes approchantes d'ordres 0, 1, 2 ou 3.

Notons que plus l'ordre augmente, meilleure est l'approximation initiale, mais le coût augmente. Un compromis doit donc être pris entre le coût en calcul et la qualité de la solution. On détaillera après avoir fait un choix du pas de suivi, l'ordre qu'on va utiliser.

4.2.2. Pas de suivi

Dans ce qui précède, on a décrit la construction d'une courbe approchante d'un ordre donné et en un point donné. En se déplaçant sur cette courbe d'une certaine valeur "pas de suivi", on obtient une estimation d'un point suivant. Ce pas est une valeur qui doit être bien choisie, de façon à contrôler la distance entre les points consécutifs pour obtenir une bonne représentation de la courbe recherchée.

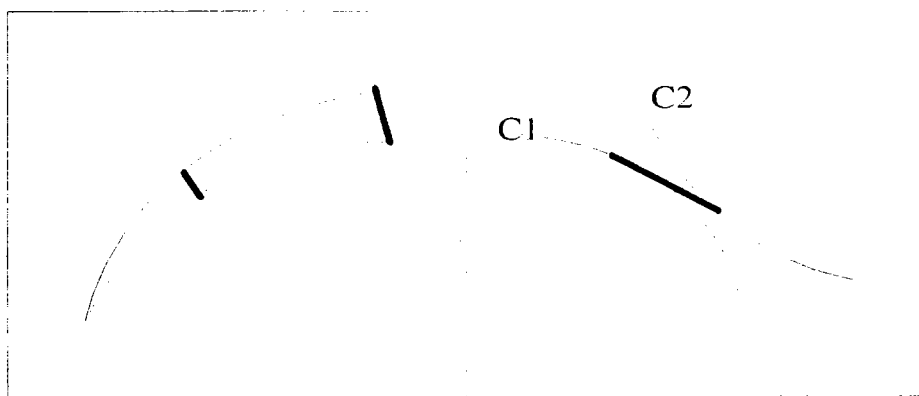


Figure 4.3- l'estimation du point suivant est d'autant loin de la valeur exacte que le pas de suivi est grand.

- exemple de mauvaise connexion.

Le choix du pas de suivi doit s'effectuer en fonction des propriétés géométriques locales de la courbe d'intersection et de la qualité de la solution finale souhaitée. Une petite valeur donne une bonne approximation initiale d'un point suivant (figure 4.3), mais elle entraîne le calcul d'un nombre important de points d'intersection. Alors qu'une grande valeur peut entraîner un échec du procédé de suivi, ou une mauvaise connexion de deux courbes d'intersection voisines.

Un pas fixe est la solution la plus simple et la plus implantée [NAD 90], elle ne nécessite aucun traitement. [BAJ 88] propose un choix de façon à ce que la contribution du second et du troisième terme de la courbe approchante ne dépasse pas le 1/10 du premier terme. Ces solutions pratiques ne tiennent pas compte des propriétés géométriques intrinsèques de la courbe recherchée, elles ne permettent pas de contrôle du procédé de suivi.

[LUK 89] a proposé un choix adaptatif calculé en fonction de la valeur exacte de la courbure locale de la courbe traitée; pour cela il approche localement la courbe par son cercle osculateur. [OZS 89] a proposé un choix similaire. Ces deux dernières propositions n'utilisent par les courbes approchantes

Nous considérons que la meilleure manière de contrôler l'espacement des points représentatifs sur la courbe d'intersection C est de choisir le pas de suivi tel que:

Si C_j , C_{j+1} désignent respectivement le point courant et le point suivant, alors le pas de suivi est choisi de façon à ce que la déviation maximale entre l'arc de courbe d'intersection joignant C_j et C_{j+1} , et le segment $[C_j, C_{j+1}]$, ne dépasse pas une certaine tolérance (figure 4.4).

A une étape donnée du procédé de suivi, le point suivant n'est pas encore connu. Le calcul de cette déviation maximale est donc impossible, ce qui nous amène à prendre le choix suivant:

La déviation maximale entre l'arc de la courbe approchante entre C_j et $\tilde{C}_{j+1}$, et le segment joignant ces deux points ne dépasse pas une certaine tolérance. $\tilde{C}_{j+1}$ désigne une approximation du point suivant C_{j+1} sur la courbe approchante (figure 4.4)

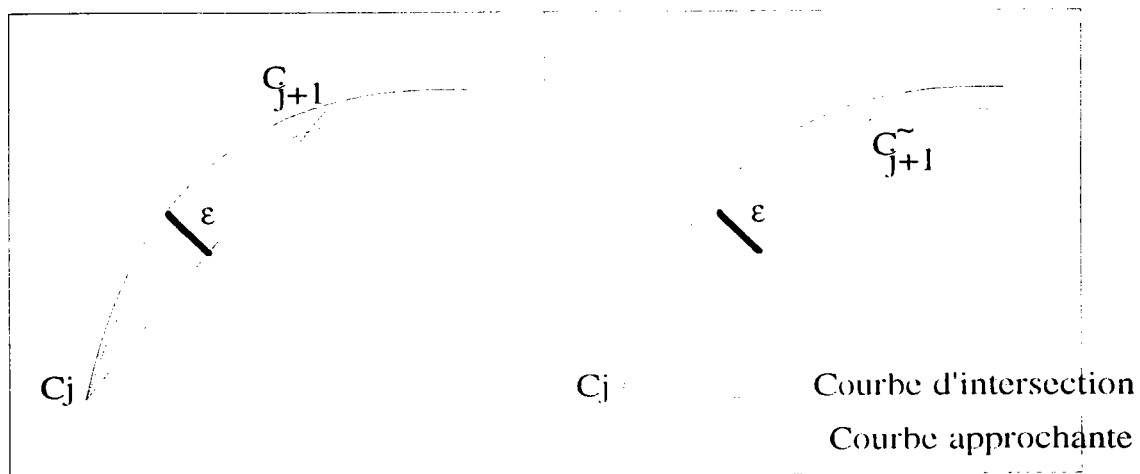


Figure 4.4: Principes de choix du pas de suivi

Le théorème de l'annexe 2 permet de majorer la distance maximale entre la courbe approchante et le segment joignant le point courant et l'estimation du point suivant, on obtient ainsi l'inégalité suivante:

$$\sup_{0 \leq r \leq r_j} \|\tilde{C}_j(r) - L(r)\| \leq \frac{1}{8} r_j^2 \sup_{0 \leq r \leq r_j} \left\| \frac{d^2}{dr^2} (\tilde{C}_j(r)) \right\|$$

où $L(r)$ désigne la paramétrisation linéaire du segment $[C_j, \tilde{C}_{j+1}]$.

Le choix de la courbe approchante $C_j(r)$ d'ordre 2 nous permet d'écrire:

$$\sup_{0 \leq r \leq r_j} \|\tilde{C}_j(r) - L(r)\| \leq \frac{1}{8} r_j^2 \|C_j''\| = \frac{1}{8} r_j^2 \kappa$$

Cette distance maximale ne doit pas dépasser une certaine tolérance ε_{pas} fixée par l'utilisateur, le pas de suivi est ainsi donné par:

$$r_j = \sqrt{\frac{8\varepsilon_{\text{pas}}}{\kappa}} \quad (4.14)$$

Maintenant qu'un pas de suivi est choisi, on calcule une estimation du point suivant en évaluant les séries de Taylor de second $C_j(r)$, $u_j(r)$, $v_j(r)$, $s_j(r)$ et $t_j(r)$ au point r_j .

Remarque

Dans les cas extrêmes de la courbure κ de C ($\kappa \rightarrow 0$ ou $\kappa \rightarrow \infty$), le choix du pas de suivi r_j par la relation (4.14) peut ne pas être très judicieux. Pour cette raison, on choisit deux constantes pour limiter le domaine de variation de r_j :

$$r_{\min} \leq r_j \leq r_{\max} \quad (4.15)$$

où $r_{\min}$ et $r_{\max}$ sont donnés par:

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{8\varepsilon_{\text{pas}}}{\kappa_{\min}}}, \quad r_{\min} = \sqrt{\frac{8\varepsilon_{\text{pas}}}{\kappa_{\max}}}$$

4.2.3. Calcul exact du point suivant

L'estimation du point suivant obtenu par les deux étapes précédentes sert de valeur initiale pour un calcul itératif et précis du point suivant. Ce calcul revient à résoudre un système de 3 équations non linéaires à 4 inconnues. Deux solutions sont possibles, la première revient à fixer un des quatre paramètres, ensuite à résoudre un système de 3 équations à 3 inconnues [MIC 92]. La seconde consiste à rajouter une équation supplémentaire, ensuite résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues [LUK 89]. C'est cette dernière solution qu'on adopte, car la fixation d'un paramètre pose un problème de choix, pour lequel aucune solution n'apparaît clairement.

Nous avons limité l'utilisation de la méthode aux courbes régulières de façon à garantir le succès du calcul des courbes approchantes et du point suivant.

4.2.3.1. Formulation de la méthode

Le point suivant C_{j+1} est un point d'intersection, il est donc solution d'un système de 3 équations non linéaires à 4 inconnues:

$$S(u,v)-T(s,t)=0 \quad (4.16)$$

Une équation supplémentaire est donc nécessaire pour rendre cette résolution possible, elle est déterminée en cherchant le point C_{j+1} dans un plan orthogonal à la tangente à la courbe C au point C_j . Ce plan est situé à une certaine distance δ du point courant, elle sera calculée plus tard en fonction du pas de suivi.

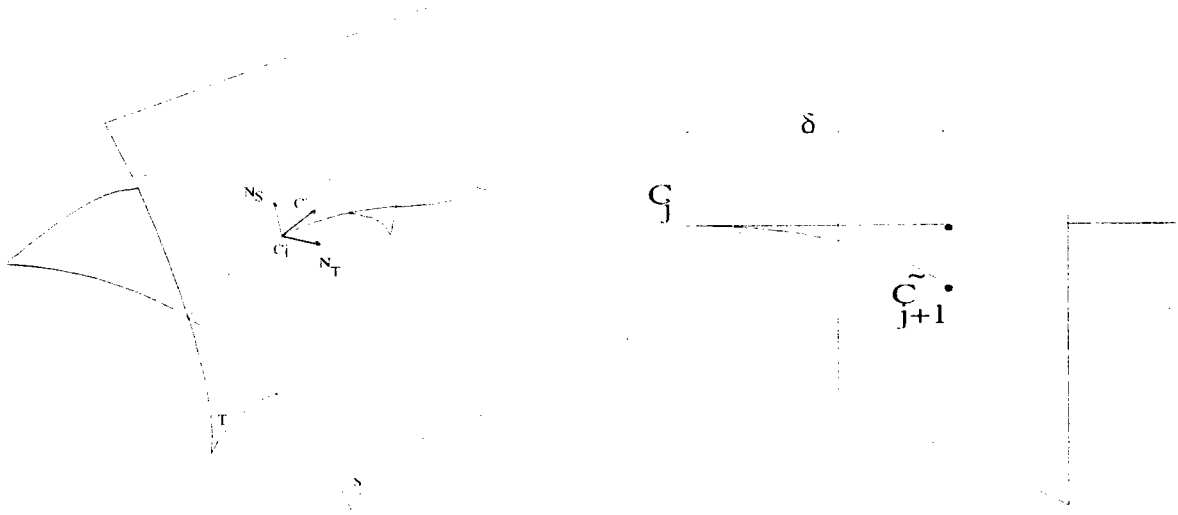


Figure 4.5: Recherche du point suivant dans un plan situé à une distance δ du point courant.

On peut voir que le point recherché C_{j+1} est solution de deux équations supplémentaires:

$$\begin{cases} \langle S(u,v) - C_j, C'_j \rangle = \delta \\ \langle T(s,t) - C_j, C'_j \rangle = \delta \end{cases} \quad (4.17)$$

Comme une seule de ces deux équations est suffisante pour résoudre le système (4.16), on choisira l'équation concernant la surface la plus régulière. En fait, il est plus prudent de se déplacer sur une surface régulière, le choix de la surface de plus faible degré permet d'éviter le coût de traitement supplémentaire. Pour fixer les idées, on prendra dans la suite la première équation. Le point C_{j+1} est choisi solution d'un système déterminé de 4 équations non linéaires à 4 inconnues:

$$\begin{cases} S(u, v) - T(s, t) = 0 \\ \langle S(u, v) - C_j; C'_j \rangle = \delta \end{cases} \quad (4.18)$$

Pour bien définir le point C_{j+1} , il faut déterminer une valeur de la distance δ du point courant au plan définissant le point suivant. D'après la construction de l'estimation du point suivant sur une courbe approchante d'ordre 2 par:

$$\tilde{C}_{j+1} = C_j + r_j C'_j + \frac{1}{2} r_j^2 C''_j \quad (4.19)$$

Sur la figure précédente, on peut voir que le module de la projection de ce point sur la tangente à C en C_j est égal à $\delta = \|r_j C'_j\| = r_j$

Une fois que le point recherché est bien défini par le système (4.18), il faut déterminer la valeur de ce point. Ceci revient à résoudre un système non linéaire de 4 équations à 4 inconnues (u, v, s et t). Pour simplifier les notations, on définit l'application F dans R^4 par:

$$\begin{aligned} F: \quad DS \times DT \subset R^4 &\longrightarrow R^4 \\ w = (u, v, s, t) &\longrightarrow \left\{ S(u, v) - T(s, t); \langle S(u, v) - C_j; C'_j \rangle - \delta \right\} \end{aligned}$$

Ainsi la recherche du point suivant C_{j+1} revient à résoudre le système non linéaire :

$$F(w) = 0 \quad (4.20)$$

On utilise pour cela la méthode classique de Newton-Raphson, partant d'une valeur initiale calculée par les relations (4.4) et (4.14). Le schéma classique est donné par:

$$\begin{cases} w^0 = (u^0, v^0, s^0, t^0) \text{ donné} \\ \Delta w^i = -[\text{Jacob}(F)(w^i)]^{-1} \cdot F(w^i) \\ w^{i+1} = w^i + \Delta w^i \quad \forall i = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (4.21)$$

4.2.3.2. Conditions d'arrêt

1) Le schéma itératif de Newton-Raphson (4.21) doit continuer jusqu'à ce que chacune des coordonnées de $F(w^i)$ soit nulle selon une certaine tolérance d'arrêt. Les conditions mathématiques qui garantissent la convergence de la suite (w^i) sont délicates à vérifier. On imposera que la suite $\|w_{i+1} - w_i\| = \|\Delta w_i\|$ soit décroissante pour détecter les cas de divergence de l'algorithme, l'algorithme sera interrompu dès que cette condition n'est pas vérifiée.

2) Si au cours des itérations, un des paramètres u , v , s , ou t quitte son domaine de variation, on doit arrêter l'algorithme. Cela signifie que le dernier point calculé est un point voisin de l'extrémité de la courbe traitée. Ce point est calculé en cherchant l'intersection de la courbe bord atteinte avec la seconde surface.

3) La matrice jacobienne de F doit être inversible à chaque itération, ceci n'est pas vérifié dans les deux situations suivantes:

- à l'approche d'un point d'intersection tangentielle, la matrice jacobienne devient singulière, ce qui empêche le bon déroulement de l'algorithme. Nous avons limité l'utilisation du procédé de suivi décrit dans ce chapitre, aux courbes régulières afin d'éviter cette situation.

- si le point courant est régulier, le rang de la matrice jacobienne de F est au moins égal à 3. La singularité de cette matrice est due à un mauvais choix de la fonction supplémentaire. Cette situation peut être résolue en changeant le pas de suivi ou la surface utilisée dans l'équation supplémentaire.

4) Un test d'arrêt doit être effectué pour éviter un suivi interminable sur des courbes fermées, ce problème ne se pose pas si on calcule tous les points significatifs.

Conclusion:

Nous avons présenté un procédé de suivi pour le calcul d'une courbe d'intersection régulière entre deux surfaces paramétriques, et montré que le problème se ramène à un problème de calcul du point suivant. En chaque point courant, on effectue une analyse de second ordre, ce qui permet de choisir un pas de suivi et de calculer une estimation du point suivant. Cette estimation sera ensuite corrigée par la méthode itérative de Newton qui calcule la valeur exacte du point suivant.

Le pas de suivi est choisi en chaque point courant, il est calculé en tenant compte de la géométrie intrinsèque locale de la courbe d'intersection. Ce choix garantit une bonne représentation linéaire par morceaux de la courbe recherchée.

Cette méthode offre un meilleur contrôle du procédé de suivi pour des courbes régulières. La présence d'un point singulier sur une courbe d'intersection peut passer inaperçue, tout en réussissant à effectuer un suivi à priori correct. La probabilité de tomber sur un point singulier est petite.

Des précautions supplémentaires doivent être prises pour le traitement des courbes singulières, ça sera le sujet des deux paragraphes suivants.

4.3. Définition et propriétés des points significatifs

La notion de projection orthogonale d'un point sur une surface sera introduite dans le début de ce paragraphe: c'est un outil indispensable pour définir clairement la fonction distance orientée entre deux surfaces paramétriques. On étudie ensuite le champ de vecteurs gradient de cette fonction, la notion d'indice d'un champ de vecteurs plans. Les propriétés découlantes de cette étude nous permettrons de définir un ensemble de points importants dits points significatifs.

4.3.1. Préliminaires

4.3.1.1. Projection orthogonale d'un point sur une surface

A est un point quelconque dans l'espace et T une surface différentiable définie sur son domaine paramétrique DT.

Soit (s,t) un point du domaine DT de la surface T tel que (s,t) est un minimum de la fonction définie de DT dans $\mathbf{R}$ par:

$$(s, t) \longrightarrow \|A - T(s, t)\|^2 \quad (4.22)$$

Comme T est une fonction continue sur le domaine compact DT, alors l'existence du point (s,t) est assurée pour tout point A. Notons que (s,t) n'est pas nécessairement unique.

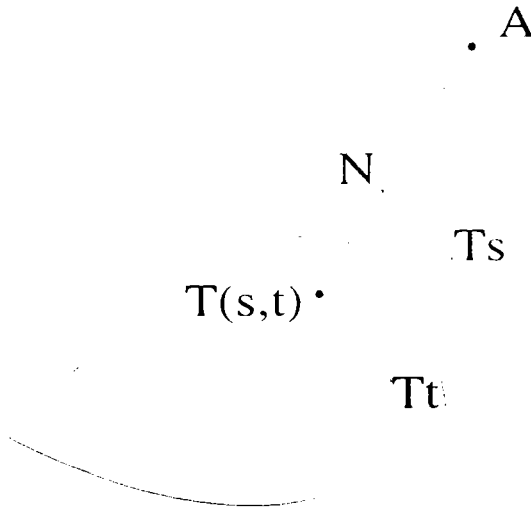


Figure 4.6: projection orthogonale d'un point sur une surface.

Si ce minimum (s,t) n'est pas atteint sur le bord de DT, alors il est solution du système:

$$\begin{cases} \langle A - T(s, t), T_s(s, t) \rangle = 0 \\ \langle A - T(s, t), T_t(s, t) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

Dans cette situation, la droite passant par les points A et T(s,t) est orthogonale au plan tangent à la surface T au point T(s,t). On dit que le point T(s,t) est la projection orthogonale du point A sur la surface T, et que le point (s,t) est l'image de la projection orthogonale du point A sur la surface T.

Remarques:

- Comme le domaine de T est borné, la projection orthogonale d'un point A sur la surface T n'est pas toujours assurée.
- Si un point admet une projection orthogonale sur une surface, alors cette projection n'est pas nécessairement unique.

Fonction projection orthogonale:

La fonction projection orthogonale de la surface S sur la surface T, notée h est définie par:

$$h: DS \longrightarrow DT$$

$$(u, v) \longrightarrow (s, t) \text{ tel que}$$

(s,t) correspond à la projection orthogonale du point S(u,v) sur la surface T.

Cette fonction est utile pour la définition de la fonction distance orientée ϕ . On peut voir sur les exemples 1 et 2 (ci-après) qu'elle n'est pas toujours bien définie. On étudiera dans la suite des cas où elle est mal définie ou indéfinie. Ceci n'affecte pas nécessairement l'efficacité et la rigueur de la méthode, car l'utilisation des fonctions h et ϕ aura comme but d'appréhender la structure de l'ensemble des courbes d'intersection et non de les rechercher.

Pour tout point (u,v) de DS où h est bien défini, h(u,v) est solution du système:

$$\begin{cases} \langle S(u, v) - T(s, t), T_s(s, t) \rangle = 0 \\ \langle S(u, v) - T(s, t), T_t(s, t) \rangle = 0 \end{cases} \text{ avec } (s, t) \in DT \quad (4.24)$$

Comme la normale N_T à T est orthogonale aux dérivées partielles T_s et T_t , alors la droite passant par S(u,v) et T(s,t) est colinéaire à la normale N_T .

Propriétés de la fonction h:

1) h est une fonction définie en tout point de DS, sauf dans les deux cas suivants:

- l'ensemble des points de T les plus proches d'un point $S(u,v)$ est infini, la présence de ces points ne pose pas de problème. [KRI 92] a démontré que pour une surface différentiable de classe deux, ce type de points ne peut jamais être un point d'intersection.
- la projection orthogonale de $S(u,v)$ sur T n'existe pas, ceci signifie que le point sur T le plus proche de $S(u,v)$ est atteint sur le bord de DT . On dit dans ce cas que (u,v) est un point bord. La présence de ces points ne cause pas de problème, car ils peuvent être calculés facilement, en cherchant l'intersection des courbes de bord de chacune des surfaces par rapport à la seconde.

2) En un point d'intersection régulier, la fonction h est bien définie dans un certain voisinage de ce point. On peut démontrer qu'elle est une fois de moins différentiable que la moins différentiable des deux surfaces S et T (annexe 3).

Evaluation de h en un point :

Pour des surfaces quelconques, la valeur de la fonction h en un point ne peut être donnée explicitement, son existence n'est même pas assurée. Cependant, une évaluation itérative à l'aide de la méthode de Newton-Raphson peut être faite en résolvant le système (4.24). Une approximation initiale de la valeur de h en un point est donnée en utilisant la méthode de subdivision récursive.

Exemple 1:

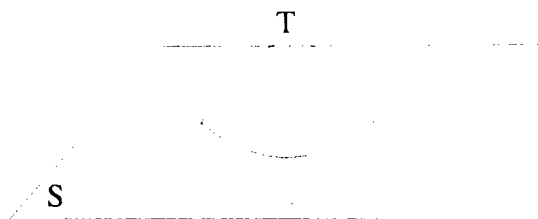


Figure 4.7: exemple de point admettant une infinité de projection orthogonale

La surface S représente un plan passant par le centre de la sphère T . Tout point de T est la projection orthogonale du centre de T , le paramètre de DS correspondant à ce point a une infinité d'images par la fonction projection orthogonale.

Exemple 2:

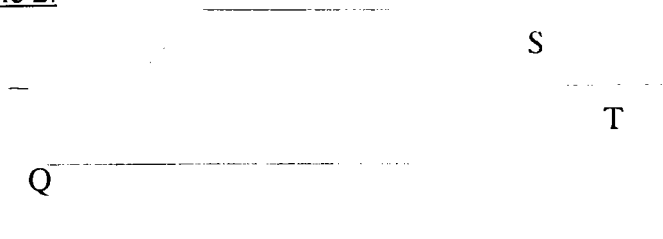


Figure 4.8: exemple de point n'admettant aucune projection orthogonale

Le point Q de la surface S n'a pas de projection orthogonale sur la surface T, c'est un point bord. Une projection orthogonale existe sur un prolongement continue de T.

4.3.1.2. Fonction distance orientée ϕ

La fonction distance orientée ϕ de la surface S par rapport à la surface T, est une fonction réelle définie dans le domaine DS de S. Pour tout point (u,v) de DS où la fonction h est bien définie, ϕ fait associer la distance de S(u,v) à sa projection orthogonale T(h(u,v)). $\phi(u,v)$ est ainsi donné en fonction de h(u,v) par:

$$\phi(u, v) = \langle S(u, v) - T(h(u, v)), N_T(h(u, v)) \rangle \quad (4.25)$$

où N_T désigne le vecteur normal unitaire à la surface T

Propriétés :

- la valeur de ϕ en un point nécessite la donnée de la valeur de h en ce point, les deux fonctions ont donc le même domaine de définition.
- comme pour la fonction h, une valeur de ϕ ne peut être donnée explicitement. Cependant, une évaluation peut s'effectuer en un point donné par une méthode itérative.
- la valeur absolue $|\phi(u,v)|$ est la distance euclidienne de S(u,v) à sa projection orthogonale T(h(u,v)) sur T. Le signe de $\phi(u,v)$ détermine si le point S(u,v) est d'un coté ou de l'autre de la surface T.
- une *courbe de niveau* $c(c \in \mathbf{R})$ est l'ensemble des points de DS solutions de l'équation:

$$\phi(u,v)=c \quad (4.26)$$

Ceci correspond à l'ensemble des points sur S, situés à une distance constante c par rapport à leurs projections orthogonales sur T.

- les courbes de niveau zéro $\phi(u,v)=0$ correspondent à des courbes d'intersection.
- une courbe de niveau est dite fermée si elle ne coupe pas un bord du domaine DS de S, et que son image par la fonction h est une courbe fermée dans le domaine DT.

Différentiabilité:

Soit (u,v) un point de DS où ϕ est bien définie et (s,t) son image par la fonction h. La dérivée partielle par rapport à u de ϕ en (u,v) est donnée par:

$$\phi_u = \langle S_u - T_u, N_T \rangle + \langle S - T, \frac{\partial N_T}{\partial u} \rangle \quad (4.27)$$

Le second terme est nul puisque $S-T$ est colinéaire à N_T , de même T_u est orthogonal à N_T . On obtient donc:

$$\phi_u(u, v) = \langle S_u, N_T(s, t) \rangle \quad (4.28)$$

De la même manière, on obtient:

$$\phi_v(u, v) = \langle S_v, N_T(s, t) \rangle \quad (4.29)$$

Les dérivées secondes sont données par:

$$\begin{aligned} \phi_{uu} &= \langle S_{uu}, N_T \rangle + \langle S_u, N_{T,u} \rangle \\ \phi_{vv} &= \langle S_{vv}, N_T \rangle + \langle S_v, N_{T,v} \rangle \\ \phi_{uv} &= \langle S_{uv}, N_T \rangle + \langle S_u, N_{T,v} \rangle \\ \phi_{vu} &= \langle S_{vu}, N_T \rangle + \langle S_v, N_{T,u} \rangle \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tous les termes sont connus sauf les dérivées de N_T par rapport à u et v . On trouvera dans l'annexe 4 plus de détails sur le calcul des dérivées seconde de ϕ .

4.3.1.3. Champ de vecteurs $\nabla\phi$

Le gradient de la fonction distance orientée ϕ est le champ de vecteurs plan qui à tout point (u, v) de DS où la fonction h est bien définie fait associer:

$$\nabla\phi(u, v) = \begin{pmatrix} \langle S_u(u, v), N(h(u, v)) \rangle \\ \langle S_v(u, v), N(h(u, v)) \rangle \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Le vecteur $\nabla\phi(u, v)$ est orthogonal à la courbe de niveau passant par ce point, il est toujours dirigé vers les courbes de niveaux supérieurs.

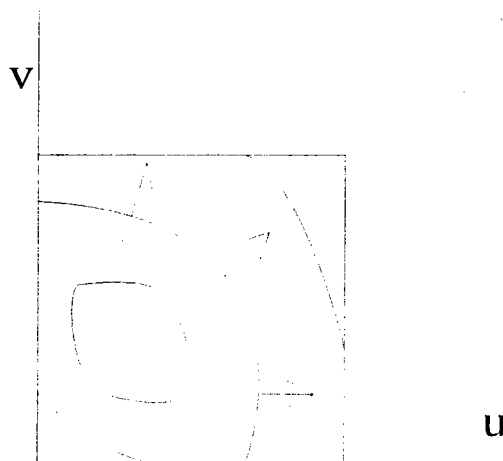


Figure 4.9: Courbes de niveaux et champ de vecteurs gradient de la fonction distance

On appellera point critique un zéro du champ de vecteurs $\nabla\phi$. La notion de l'indice d'un champ de vecteurs nous permettra de voir le rôle de ces points pour l'identification des courbes d'intersection fermées.

Indice d'un champ de vecteurs

Soient V un champ de vecteurs quelconque défini dans le plan et γ une courbe fermée orientée dans le plan ne passant par aucun zéro de V . En parcourant la courbe γ dans son sens positif, le champ de vecteurs V est animé d'un mouvement de rotation continue. Après avoir parcouru toute la courbe γ , le champ de vecteurs peut avoir accompli une ou plusieurs rotations. Ce nombre de rotation appelé indice de V sur γ est donné par l'intégrale:

$$\text{ind}_{\gamma}(V) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{\chi d\psi - \psi d\chi}{\chi^2 + \psi^2} \quad (4.32)$$

où χ et ψ sont les coordonnées de V .

La principale propriété de l'indice réside dans le théorème suivant:

Théorème 1: [ARN 88]

Sous les conditions sur V et γ citées ci-dessus. Si l'indice du champ de vecteurs V sur la courbe γ est non nul, alors il existe au moins un point critique à l'intérieur de γ .

On cite les deux propriétés importantes de l'indice. Elles se déduisent trivialement du théorème précédent.

- Propriété 1: l'indice du champ de vecteurs V sur la courbe γ est constant par déformation continue de γ , tant que cette courbe ne passe pas par un point critique.

- Propriété 2: L'indice du champ de vecteurs V sur la courbe γ est constant par déformation continue du champ de vecteurs, tant que la courbe ne passe pas par un point critique du vecteur déformé, le temps que dure cette déformation.

Pour vérifier l'existence d'une courbe d'intersection fermée dans une zone, on vérifie l'existence d'un point critique à l'intérieur de cette zone. D'après les deux propriétés précédente, l'indice du champ de vecteurs $\nabla\phi$ est un entier qui peut être calculé à 0.5 près. [KRI 92] utilise cette propriété pour localiser les points critiques, il propose de subdiviser le domaine de la fonction ϕ en un certain nombre de pavés rectangulaires et égaux. Si l'indice du champ de vecteurs $\nabla\phi$ sur le bord de l'un de ces pavés est non nul, et si la fonction ϕ est bien définie à l'intérieur de ce pavé, il y existe alors au moins un point critique.

4.3.2. Points significatifs

Les points significatifs constituent un minimum d'informations nécessaires pour identifier toutes les composantes connexes de l'ensemble d'intersection, ainsi que l'ensemble des points d'intersection tangentielle dits points singuliers. On définira cet ensemble de points: critiques, singuliers et NC (normale colinéaire)

4.3.2.1. Points critiques

Un point critique (u,v) est un extremum de la fonction distance orientée ϕ , où le champ de vecteurs $\nabla\phi$ est nul. Il vérifie le système suivant:

$$\begin{cases} \phi_u(u,v) = \langle S_u(u,v), N_T(s,t) \rangle = 0 \\ \phi_v(u,v) = \langle S_v(u,v), N_T(s,t) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

où (s,t) est l'image de (u,v) par la fonction projection orthogonale h .

Comme les dérivées partielles de S sont orthogonales à N_S ($S_u \wedge S_v // N_S$), alors les vecteurs normaux $N_S(u,v)$ et $N_T(s,t)$ sont colinéaires. L'importance de ces points réside dans le résultat suivant:

Théorème 2:

Si la fonction ϕ est bien définie à l'intérieur d'une courbe d'intersection fermée, alors il existe au moins un point critique à l'intérieur de cette courbe ou sur cette courbe.

La démonstration de ce théorème est une conséquence évidente du théorème de l'indice. On peut distinguer deux cas:

- Sur une courbe d'intersection fermée non singulière (figure 10.a), le champ de vecteurs $\nabla\phi$ fait au moins un tour entier.
- Sur une courbe singulière (figure 10.b), il existe une courbe de niveau voisine, non singulière et fermée. Le champ de vecteurs $\nabla\phi$ fait un tour au moins sur cette courbe.

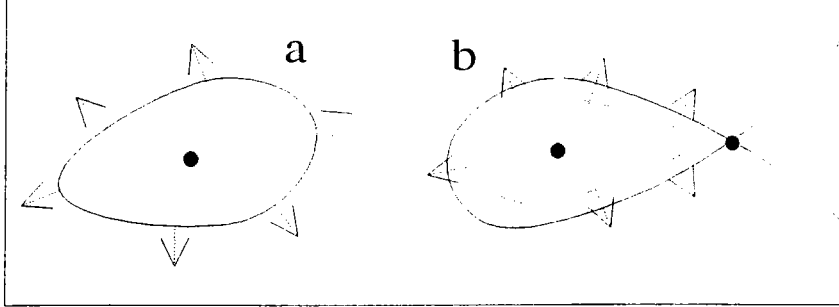


Figure 4.10: Exemples de courbes d'intersection fermées.

Dans les deux cas l'indice de $\nabla\phi$ est non nul, d'où l'existence d'un point critique à l'intérieur de toute courbe d'intersection fermée.

4.3.2.2. Points NC(normale colinéaire)

Le théorème précédent nécessite que la fonction ϕ soit bien définie à l'intérieur d'une courbe d'intersection fermée, ce qui n'est pas facile à vérifier. Pour cela, on définit une classe de points indépendamment de la fonction distance orientée, ces points partagent la même propriété que les points critiques.

(u,v) un point de DS est un point à normale colinéaire (NC) s'il existe un point (s,t) de DT tel que la droite joignant les points $S(u,v)$ et $T(s,t)$ soit orthogonale aux plans tangents des deux surfaces en ces points. On déduit de cette définition les deux propriétés caractéristiques suivantes:

$T(s,t)$ est une projection orthogonale de $S(u,v)$ sur la surface T.

$S(u,v)$ est une projection orthogonale de $T(s,t)$ sur la surface S.

On caractérisera un point NC par le système suivant suivantes:

$$\begin{cases} \langle S(u,v) - T(s,t), T_s(s,t) \rangle \geq 0 \\ \langle S(u,v) - T(s,t), T_t(s,t) \rangle \geq 0 \\ \langle S_u(u,v), N_T(s,t) \rangle \geq 0 \\ \langle S_v(u,v), N_T(s,t) \rangle \geq 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

Les deux premières équations signifient que la droite passant par S et T est orthogonale à T, les deux dernières équations signifient que la normale à S est colinéaire à la normale à T.

Un point critique est par définition un point NC, la réciproque est vraie si la fonction projection orthogonale h est bien définie en ce point. Le théorème précédent a pour objectif d'identifier la présence de courbes d'intersection fermées, il nécessite que la fonction projection orthogonale soit bien définie. Ceci ne peut être vérifié pratiquement, [SED 88] avait énoncé un théorème similaire indépendant de la notion de fonction distance.

Théorème 3 [SED 88]

Si deux surfaces différentiables se coupent suivant une courbe fermée, et si la variation angulaire du vecteur normal unitaire sur chacune des deux surfaces ne dépasse pas 90° , alors il existe un point NC à l'intérieur de cette courbe.

La condition sur la normale signifie que pour chaque surface, la variation angulaire de la normale ne dépasse pas 90° . Ceci entraîne que tout point d'une surface est la projection orthogonale d'un point au plus sur l'autre surface. Mais cela ne signifie pas que la fonction distance orientée est bien définie à l'intérieur de la courbe d'intersection fermée.

4.3.2.3. Points singuliers

Un point singulier est un point d'intersection critique, la fonction ϕ est bien définie en ces points et elle vérifie le système suivant:

$$\begin{cases} \phi(u, v) = \langle S(u, v) - T(s, t), N(s, t) \rangle = 0 \\ \phi_u(u, v) = \langle S_u(u, v), N(s, t) \rangle = 0 \\ \phi_v(u, v) = \langle S_v(u, v), N(s, t) \rangle = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Un point singulier est un point où les surfaces se coupent tangentiellement, les normales aux deux surfaces en ce point sont colinéaires. La tangente à la courbe d'intersection passant par ce point ne peut pas être déterminée comme la droite parallèle au produit vectoriel des deux normales aux surfaces S et T , ce qui rend le procédé de suivi décrit dans le chapitre 1 impossible.

Un point singulier (u, v) est dit d'ordre n si une au moins des dérivées partielles d'ordre $(n+1)$ de ϕ en ce point est non nulle, et si toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égale à n sont nulles. La tangente à la courbe d'intersection en ces points n'est pas unique. Si (λ, μ) désigne une direction possible, alors elle est solution de l'équation:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \lambda^i \mu^{n+1-i} \frac{\partial^{n+1} \phi}{\partial u^i \partial v^{n+1-i}} = 0 \quad (4.36)$$

Il est possible d'avoir donc $(n+1)$ directions de la tangente à la courbe d'intersection en ce point.

Cas particulier: points singuliers simples

Un point singulier simple est un point d'ordre 1. L'étude des ordres supérieurs s'effectue de la même manière, mais le calcul des points correspondants est beaucoup plus difficile que celui des points simples. Il est nécessaire d'enregistrer pour chaque point singulier son ordre de singularité, et les directions possibles de la tangente en ces points. Dans la suite, (λ, μ) désigne les directions de la tangente en un point singulier simple, elles sont donc solutions de l'équation:

$$\lambda^2 \phi_{uu} + 2\lambda\mu \phi_{uv} + \mu^2 \phi_{vv} = 0 \quad (4.37)$$

trois cas sont à distinguer:

- deux solutions réelles: ceci signifie l'existence de deux tangentes différentes à la courbe passant par ce point, autrement la courbe se coupe d'elle même.
- une solution double: cette situation est similaire à la précédente, sauf que la tangente en ce point est unique; la courbe se coupe elle même tangentiellement.
- aucune solution: ceci signifie que la courbe passant par ce point se réduit à un point d'intersection isolé.

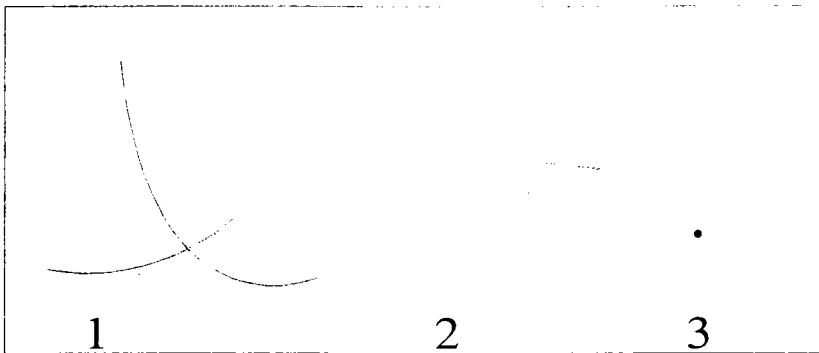


Figure 4.11 : les trois possibilités d'une singularité simple

Conclusion:

La notion de fonction distance orientée entre deux surfaces paramétriques est un outil indispensable pour appréhender la structure globale et locale de l'ensemble d'intersection. Après avoir présenté les importantes propriétés qui découlent de l'étude de cette fonction, on a

défini l'ensemble des points significatifs. Leur calcul est nécessaire pour un bon déroulement du procédé de suivi des différentes courbes d'intersection.

Les points significatifs sont définis comme des sous classes des points NC. Ils sont ainsi tous solution d'un système d'ordre 4 d'équations non linéaires et explicites. Cette définition explicite est intéressante, car elle permettra de faciliter le calcul de ces points.

4.4. Calcul des points significatifs

L'introduction de la notion de fonction distance orientée a permis de définir l'ensemble des points significatifs. Le calcul de ces points est indispensable pour résoudre les difficultés majeures de la méthode de suivi. La définition implicite de la fonction distance orientée ϕ et la complexité des systèmes à résoudre font que ce calcul est une tâche délicate.

La technique itérative de Newton Raphson permet une résolution locale des systèmes d'équations non linéaires; cependant, elle nécessite la donnée d'une approximation de chaque racine. [MAR 89] l'a utilisée pour calculer l'ensemble des points singuliers; il fait appel à chaque itération à des évaluations de la fonction projection orthogonale, qui à son tour fait appel à une évaluation itérative par la même technique. L'algorithme est ainsi complexe et sensible aux erreurs numériques, aucune solution n'est apportée au problème des approximations initiales. [KRI 92] a poursuivi la même stratégie que [MAR 89], il a proposé d'utiliser les propriétés de l'indice du champ de vecteurs $\nabla\phi$ pour calculer une estimation des points singuliers et critiques. On a déjà vu dans un paragraphe précédent que cette technique ne garantit pas une solution globale et présente des difficultés d'implantation.

Dans ce paragraphe, on décrit la stratégie prise pour le calcul des points significatifs, elle sera faite en deux étapes: localisation et calcul exact. On utilisera la méthode de Newton-Raphson dans cette deuxième étape, cette technique est reconnue par la qualité de sa solution et de la rapidité de sa convergence. Cependant, la présence d'une racine multiple ou la donnée d'une mauvaise approximation initiale peut entraîner l'échec de cette méthode. On se limitera au traitement des points singuliers simples, afin d'assurer au mieux la convergence des calculs en ces points.

Le calcul d'approximations des points significatifs doit s'effectuer avec efficacité, l'oubli d'une approximation d'un point significatif entraîne l'ignorance du point correspondant. Les points significatifs sont tous des points NC, ces derniers sont définis par un système d'équations explicites. La technique de subdivision récursive est parfaitement adaptable au problème de localisation de ces points: elle nous garantira une solution complète au problème. On développera dans la suite cette adaptation de la subdivision récursive au problème de localisation des points NC, et montrera ensuite la méthode de Newton-Raphson pour le calcul précis des points recherchés.

4.4.1. Calcul d'approximation

La détermination des points significatifs, qui ne sont pas des points d'intersection, permet de subdiviser les courbes d'intersection en branches ouvertes, puis de calculer des

points germes sur ces branches. Le calcul exact de ces points n'est pas nécessaire, une approximation parfois même grossière suffit dans certaines situations (figure 4.12).



Figure 4.12: la localisation du point intérieur d'une courbe fermée est suffisante

Contrairement aux points critiques et NC, non seulement les points singuliers doivent être calculés avec précision, mais ils nécessitent également la détermination de leur ordre de singularité et les directions des courbes passant en ces points. Le calcul d'approximation de ces points doit être assez précis, afin d'assurer au mieux la convergence de la procédure de calcul exact.

En tenant compte de ces propriétés, c'est à dire qu'un point significatif à l'intérieur d'une courbe fermée ne nécessite pas un calcul exact, et qu'un point singulier doit être calculé avec précision. Notre stratégie pour calculer une approximation de ces points, consiste à éliminer récursivement les zones ne présentant pas de points NC.

4.4.1.1. Test d'absence de points NC

Pour effectuer un test d'absence de points NC entre deux surfaces paramétriques, on cherche si une des 4 équations du système définissant un point NC ne peut pas être nulle. Pour cela, on utilise une technique simple s'appliquant à des fonctions polynomiales rationnelles définies sur des pavés de $\mathbf{R}^n$. Pour savoir si une fonction réelle f est non nulle sur un pavé de $\mathbf{R}^n$, on évalue son domaine de variations par de simples opérations arithmétiques sur des intervalles. Si 0 n'est pas dans ce domaine, alors la fonction f ne peut pas être nulle.

Pour effectuer un test d'absence de points NC, on associe à chacune des quatre équations du système (4.34) une fonction polynomiale de DSxDT vers $\mathbf{R}$. A chacune de ces quatre fonctions, on applique la technique précédente. Si une de ces fonctions est non nulle, alors les surfaces S et T ne présentent aucun point significatif.

Les dérivées partielles S_u , S_v , T_s , T_l peuvent être considérées comme des surfaces à part. Pour chacune de ces surfaces, ainsi que S et T , on construit une boîte englobante. Dans chacune des quatre équations du système (4.34) définissant un point NC, on remplace chacune de ces six surfaces par sa boîte englobante. Après évaluation par des opérations arithmétiques simples, on obtient un domaine de variation de chaque équation.

4.4.1.2. Localisation par subdivision récursive

La technique de subdivision récursive appliquée au problème de calcul d'intersection entre deux surfaces, présente la propriété d'être stable et efficace. Avec quelques modifications, on adapte cette technique au problème de localisation des points NC. Ainsi à chaque niveau de subdivision, au lieu d'éliminer les paires de sous carreaux disjoints par un test de séparabilité, on élimine les paires de sous carreaux ne présentant pas de points NC.

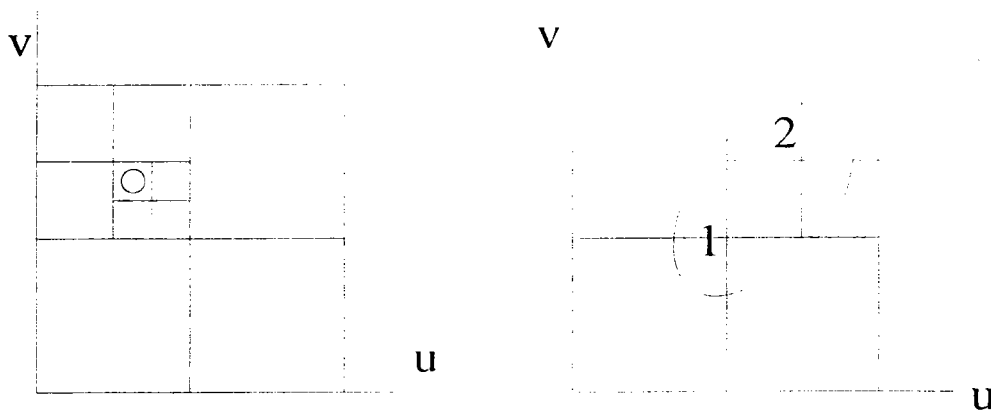


Figure 4.13: les deux conditions d'arrêt de la localisation par subdivision récursive

Comme le but de ce traitement n'est pas un calcul exact, la méthode sera appliquée jusqu'à un certain niveau fixé d'avance. Ce niveau doit être choisi de façon à ce que la taille du domaine d'un carreau finale soit assez petite pour fournir une approximation suffisante de ce point. Les points intérieurs de courbes d'intersection fermées ne nécessitent pas un calcul précis, la méthode doit s'arrêter dès qu'une paire de sous carreaux ne présentant pas de point NC ne participe pas à l'intersection. Ceci est effectué par un test de séparabilité à chaque niveau de subdivision.

Algorithme LocalisationPointsSignificatifs(S, T)

début

si (non absence point NC entre S et T)

alors **si** (S et T non disjoints)

alors **si** (taille de DS supérieur à la taille minimale)

alors Subdiviser S en S_1, S_2, S_3, S_4

Subdiviser T en T_1, T_2, T_3, T_4

LocalisationPointsSignificatifs(S_i, T_j) $\{i, j = 1..4\}$

sinon {prendre un point de DS comme approximation initiale}

sinon {un point singulier ou centre d'une boucle de petite taille}

sinon {absence de points significatifs }

fin.

La localisation des points NC par élimination est sûrement une opération plus facile et plus efficace que celle de calcul direct des points significatifs résultants de la fonction distance orientée ϕ .

4.4.2. Calcul exact

La méthode de localisation décrite dans le paragraphe précédent, permet d'isoler les points NC dans des pavés de tailles plus au moins petites. Un point NC localisé dans un pavé, de taille supérieure à la taille minimale et ne contenant aucun point d'intersection, est susceptible d'être à l'intérieur d'une courbe d'intersection fermée. De tels points ne nécessitent aucun traitement supplémentaire.

Pour un point NC localisé dans un pavé de taille minimale, un calcul exact est nécessaire pour déterminer sa valeur et sa catégorie exacte. Si ce point est un point d'intersection, alors il est singulier. Sinon il est critique ou NC tout simplement, il est probablement à l'intérieur d'une courbe d'intersection fermée et de petite taille.

Le calcul exact d'un point de cette dernière catégorie peut être effectuée itérativement, en prenant comme approximation initiale le centre du pavé contenant ce point. La fonction F définie par:

$$F(u, v, s, t) = \begin{pmatrix} \langle S(u, v) - T(s, t), T_s(s, t) \rangle \\ \langle S(u, v) - T(s, t), T_t(s, t) \rangle \\ \langle S_u(u, v), T_s(s, t) \wedge T_t(s, t) \rangle \\ \langle S_v(u, v), T_s(s, t) \wedge T_t(s, t) \rangle \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

résolue par la méthode de Newton-Raphson. Nous avons remplacé dans les deux dernières équations du système (4.34) le vecteur N_T par $T_S^{\wedge} T_l$, ceci reste valable pour toute surface régulière.

Comme on s'intéresse aux points simples, la résolution par la méthode de Newton est suffisante, à condition que le point de départ soit assez proche du point recherché.

Le cas de singularité d'ordre supérieur peut être traité par la méthode de Newton modifié ou par la méthode de minimisation.

Conclusion:

Nous avons développé un algorithme hybride de calcul des points significatifs, capable de traiter avec efficacité les cas de singularités simples et isolées. Cet algorithme combine d'une part l'efficacité et la stabilité de la technique de subdivision récursive, et d'autre part la rapidité et l'exactitude de la méthode de Newton-Raphson.

La technique de subdivision récursive est utilisée pour éliminer les zones ne présentant aucun point significatif. Cette subdivision s'arrête une fois qu'une approximation suffisante de ces points est obtenue. Ceci permet d'éviter des calculs coûteux pour des points significatifs qui ne sont pas des points d'intersection. A la fin de cette étape, les points singuliers ou les points se trouvant à l'intérieur d'une courbe d'intersection de petite taille sont localisés dans des pavés d'une taille (petite) fixée d'avance. Les points significatifs se trouvant à l'intérieur d'une courbe d'intersection (assez grande) sont localisés dans des pavés ne contenant aucun point d'intersection.

Seuls les points singuliers et les points NC, se trouvant à l'intérieur de courbes d'intersection fermées et de petites taille, nécessitent un calcul précis. La méthode de Newton-Raphson permettra d'effectuer ce calcul dans le cas où ces points sont des solutions simples et isolées du système définissant un point NC.

4.5. Calcul des points germes

Un point germe est un point quelconque sur une courbe d'intersection, il est le point de départ du procédé de suivi qui déterminera la courbe d'intersection passant par ce point. Un seul point germe est suffisant par courbe d'intersection, une courbe sur laquelle aucun point n'a été détecté sera absente du résultat final. Il est possible de trouver plusieurs points germes sur une même courbe; il faut donc prendre des précautions pour éviter des calculs deux fois sur une même branche, et pour faire la bonne connexion des différentes branches.

4.5.1. Méthode des courbes isoparamétriques

Avant l'introduction de la notion de fonction distance orientée, les points germes étaient souvent calculés par la méthode des courbes isoparamétriques. Un certain nombre de courbes isoparamétriques équidistantes est choisi sur une surface, le calcul de l'intersection de ces courbes avec la seconde surface donne un certain nombre de points germes. Cette méthode offre une solution complète dans les situations où les courbes d'intersection sont assez grandes. Cependant, elle présente des difficultés à trouver une solution complète, notamment en présence de courbes d'intersection de petites tailles ou de points d'intersection isolés. Une augmentation du nombre de courbes isoparamétriques peut diminuer le risque d'oubli de certaines courbes, mais elle ralentira la méthode dans des situations où le calcul des points germes est évident.

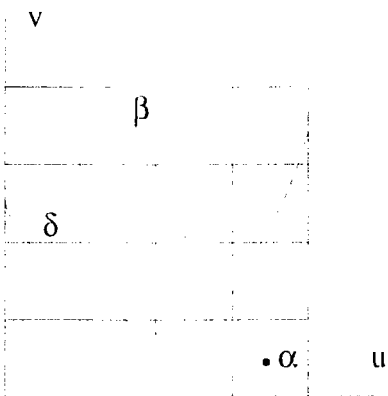


Figure 4.14: exemples d'échec de la méthode des courbes isoparamétriques

Le problème des courbes de très petites tailles et des points isolés ne pourra pas être résolu efficacement par cette méthode. La figure précédente montre un exemple d'échec de la méthode d'isoparamétriques à détecter un point germe sur les courbes α et β , alors que sur la courbe δ , la méthode entraîne le calcul d'un nombre important de points germes inutiles.

4.5.2. Méthode des points significatifs

La méthode des points significatifs consiste à choisir en fonction des situations le nombre et l'emplacement des courbes isoparamétriques; elles seront choisies parmi ces trois cas:

- les isoparamétriques de bords sont choisies dépendamment pas des points significatifs, elles permettent de calculer des points germes sur les courbes d'intersection ouvertes. Ce calcul est fait en cherchant l'intersection des quatre courbes de bord de chacune des surfaces avec la seconde surface.
- en chaque point critique ou NC, on prend une isoparamétrique selon une des deux directions. Le choix de ces isoparamétriques permet de découper les courbes d'intersection probablement fermées et entourant ces points, par suite trouver des points germes sur chacune ses courbes.
- en chaque point singulier, le découpage de la courbe passant par ces points permet d'obtenir que des courbes où les points singuliers ne puissent être qu'aux extrémités.

Conclusion:

La détermination des points significatifs permet de résoudre de façon globale et efficace le problème de calcul des points germes. Le calcul de ses points nécessite le calcul de l'intersection courbe/surface, la combinaison de la méthode de subdivision récursive et de Newton nous permet de résoudre efficacement ce problème dans les cas d'intersection non tangentielles.

La décomposition des courbes d'intersection aux points significatifs, permet une solution complète au problème des points germes. Cependant, les points obtenus par cette méthode ne sont pas toujours utiles. Un point germe obtenu à l'intérieur d'une courbe ouverte est inutile, la courbe d'intersection entourant un point NC ou critique n'est pas nécessairement fermée. Il est donc nécessaire d'éliminer ces points inutiles

4.6. Conclusion

On a développé un algorithme de suivi, qui est un prolongement des travaux de [BAJ 88] pour le procédé de suivi et de [KRI 92] pour l'identification de la structure locale et globale de l'ensemble d'intersection. Cet algorithme promet d'effectuer un procédé de suivi rapide et adaptatif, d'identifier les courbes d'intersection fermées et la structure de l'intersection voisinage des points singuliers.

La première famille de problèmes concerne le procédé de suivi, c'est à dire le calcul des points d'une approximation linéaire d'une courbe d'intersection. Cette approximation doit être à la fois rapide et représentative, ce qui impose un contrôle de la distance entre chaque paire de points consécutifs. L'utilisation d'un développement de Taylor d'ordre deux en chaque point courant est un moyen efficace pour le calcul du pas de suivi et d'une approximation du point suivant.

Après avoir étudié la notion de fonction distance, on a défini l'ensemble des points significatifs comme des sous classes de l'ensemble des points NC. Ces derniers sont définis, indépendamment de la fonction distance orientée, par un système d'équations explicites. La localisation de ces points est ainsi réalisée par une procédure de subdivision récursive qu'on a adaptée au problème.

Le calcul exact des points significatifs ne concerne que des points singuliers ou des points à l'intérieur de courbes fermées de petites tailles. On a effectué ce traitement à l'aide de la méthode de Newton Raphson, ce qui suppose que ces points soient des racines simples et isolés.

5. MISE EN OEUVRE

5.1. Introduction

Lors de l'élaboration d'une technique nouvelle, la réalisation pratique est essentielle pour valider les concepts proposés. Elle permet souvent de révéler des aspects ignorés lors de l'étude théorique, ou de mettre en évidence les conséquences réelles des détails négligés. L'expérimentation permet d'estimer dans quelle mesure une proposition est valide, ceci est d'autant plus vrai en informatique ou en conception d'algorithmes particuliers. C'est pourquoi, après avoir développé les spécifications des méthodes de suivi et de subdivision, il est indispensable d'implanter les solutions décrites dans les chapitres III , IV et de les confronter à des cas réels.

Un algorithme de subdivision récursive est défini par les tests d'arrêt et de séparabilité. Les diverses possibilités offertes d'effectuer ces deux tests nous permettent d'implanter la méthode selon plusieurs versions. Le paragraphe suivant nous montre sur quelques exemples les avantages et les inconvénients de chacune des implantations.

Contrairement à la méthode de subdivision pour laquelle il fallait comparer entre diverses versions, l'implantation de la méthode de suivi est effectuée pour vérifier la validité de nos propositions concernant le calcul du pas de suivi, de la procédure du calcul du point suivant, de la procédure l'identification et du calcul de l'ensemble des points significatifs.

Le problème d'intersection de deux surfaces Nurbs se ramène au problème d'intersection de deux surfaces de Bézier rationnelles, les surfaces utilisées dans les exemples qui suivent sont toutes des Bézier rationnelles ou non. L'écriture de nos programmes en C++ nous a permis de développer des programmes courts et lisibles. Les temps d'exécution sont donnés en secondes CPU sur une station de travail SUN Sparc équipée du système Unix.

5.2. Implantation de la méthode de subdivision récursive

La méthode de subdivision récursive peut être implantée sous deux formes, qui diffèrent par la manière d'effectuer le test d'arrêt des subdivisions. La première effectue des subdivisions adaptativement en fonction de la courbure locale des surfaces traitées. Un minimum de subdivisions est effectué, mais un test d'arrêt coûteux est sollicité avant chaque subdivision. La deuxième calcule un niveau de subdivision maximale pour chacune des deux surfaces. Elle permet ainsi d'éviter des tests d'arrêt coûteux, mais elle peut effectuer beaucoup plus de subdivisions qu'il n'est nécessaire. Ceci constitue les avantages et les inconvénients évidents de chacune des deux approches, mais ne nous permet pas de savoir dans quelle mesure une approche est plus avantageuse que l'autre. Seule une implantation expérimentale nous permettra de comparer leurs performances.

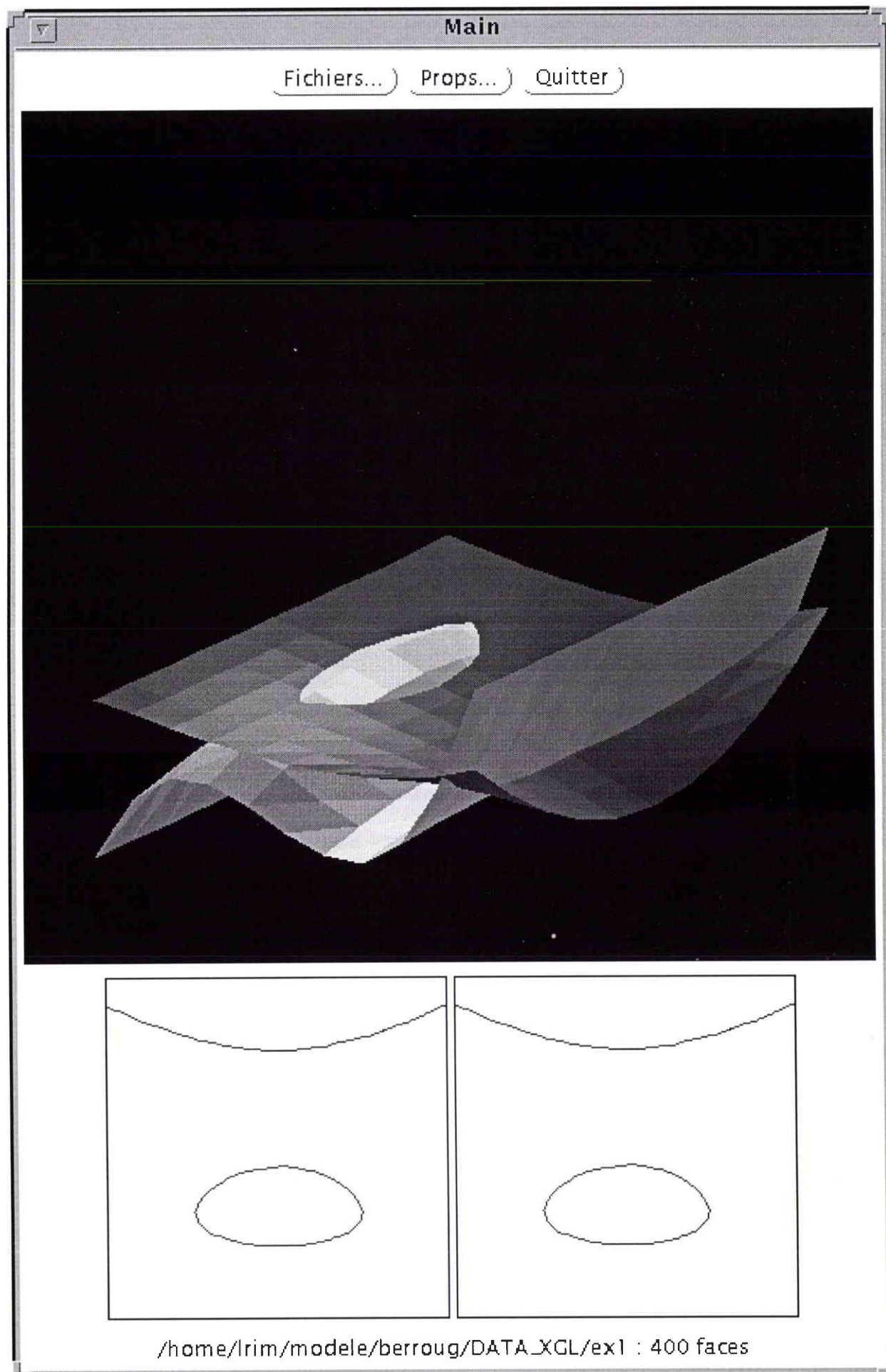
Le test de séparabilité peut s'effectuer à l'aide des boîtes minmax (orientées ou non), des boîtes par approximation (orientées ou non). La combinaison de ces différentes possibilités de test de séparabilité avec les deux possibilités de la méthode nous permet d'implanter la méthode sous diverses formes.

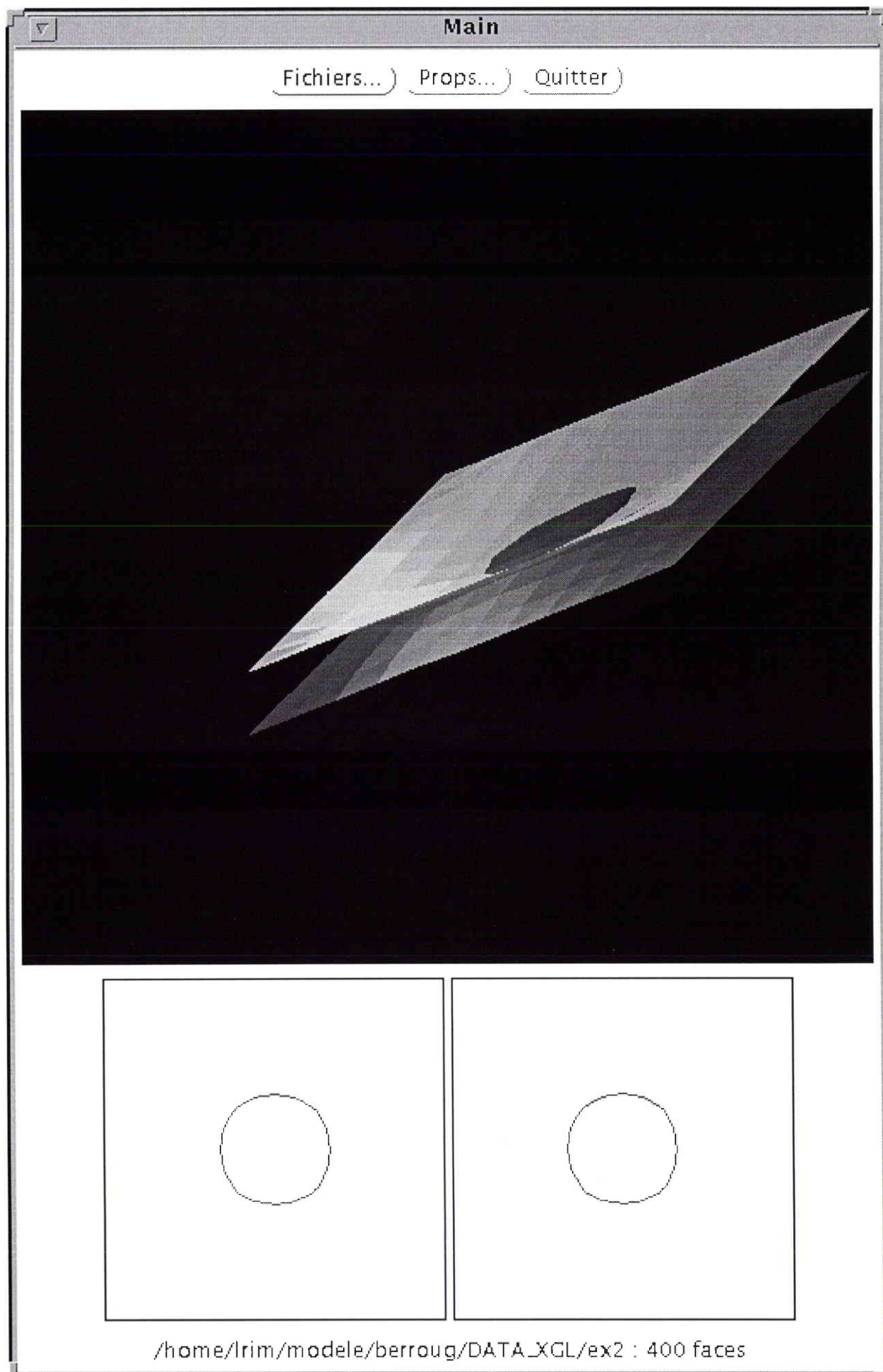
5.2.1. Méthode adaptative

La méthode adaptative est la méthode classique, nous l'avons implantée en utilisant des tests de planéité et de linéarité simples. Les points du réseau caractéristiques sont utilisés comme il est décrit dans le chapitre III, une même tolérance est utilisée pour ces deux tests. Un carreau vérifiant la condition d'arrêt est assimilable, selon la tolérance donnée, par deux facettes triangulaires passant par ses quatre sommets.

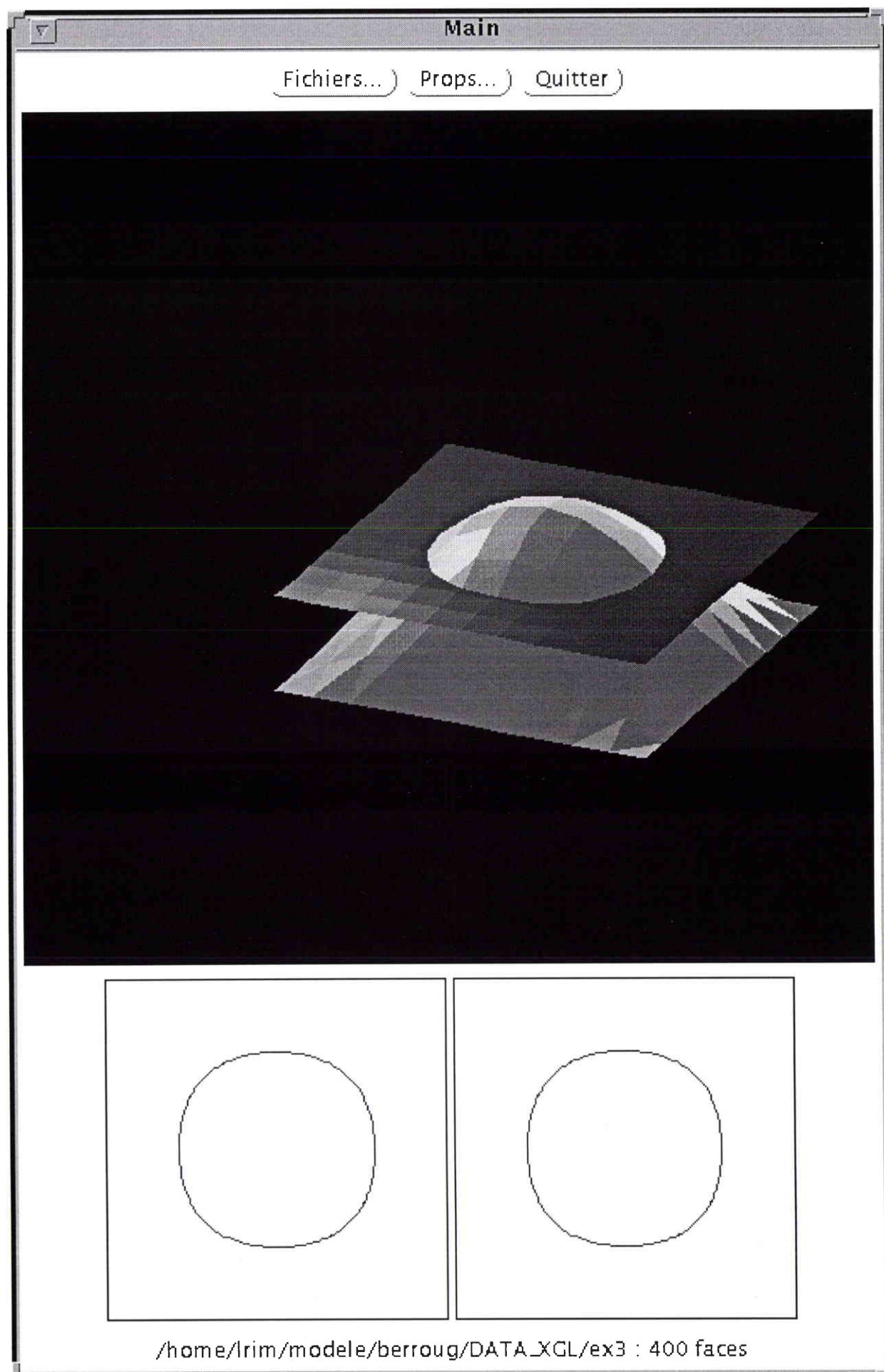
Pour effectuer les tests de séparabilité, nous avons utilisé successivement des boîtes minmax non orientées et orientées. Les boîtes orientées sont implantées de la manière décrite dans le chapitre III, un repère associé à un carreau est calculé à partir des quatre points extrêmes du réseau caractéristique. Le test de séparabilité à l'aide des boîtes minmax orientées est effectué successivement dans les repères associés à chacun des deux carreaux à tester. Les exemples suivants sont utilisés pour illustrer les différences entre ces deux implantations.

Pour une même tolérance d'arrêt $\varepsilon=0.1$, les tableaux suivants représentent le nombre de subdivisions effectuées sur chacune des deux surfaces, le nombre de segments obtenus par chacune des deux méthodes ensuite les temps d'exécutions.





/home/lrim/modele/berroug/DATA_XGL/ex2 : 400 faces



exemple 1	boîtes minmax	boîtes minmax orientées
nb de subdivisions de S	131	73
nb de subdivisions de T	427	189
nb de segments	122	122
temps d'exécution	986	698

exemple 2	boîtes minmax	boîtes minmax orientées
nb de subdivisions de S	1293	171
nb de subdivisions de T	1323	171
nb de segments	74	74
temps d'exécution	4617	911

exemple 3	boîtes minmax	boîtes minmax orientées
nb de subdivisions de S	0	0
nb de subdivisions de T	149	149
nb de segments	258	258
temps d'exécution	236	325

Sur les exemples 1 et 2, la méthode utilisant les boîtes minmax orientées est de 1.6 à 3.7 fois plus rapide que la méthode classique. L'utilisation des boîtes minmax orientées permet de réduire le nombre de subdivisions effectuées sur les deux surfaces, mais elle ne s'accompagne pas nécessairement d'une réduction du temps d'exécution. Elle peut même entraîner un ralentissement de la méthode (exemple 3).

En effet, les boîtes minmax orientées peuvent être intéressantes si les deux surfaces sont en moyenne à tendance non parallèles aux axes du repère réel. Pour cela, il faut implanter ce test de séparabilité de façon à ce qu'un changement de repère ne soit effectué que si les deux sous-carreaux testés vérifient cette condition. Pratiquement, nous avons implanté ce test de façon à ce qu'un changement de repère ne soit effectué que si la variation angulaire entre la normale moyenne à un carreau et le troisième axe du repère réel soit comprise entre 30 et 60 degrés.

5.2.2. Méthode uniforme

L'implantation de la méthode de subdivision uniforme nécessite le calcul des majorations des dérivées secondes de chacune des deux surfaces traitées. Ces majorations servent d'abord à calculer les niveaux de subdivisions maximales, ensuite à construire des boîtes englobantes par approximation. L'utilisation des points de contrôle (3.12) pour calculer

ces majorations est facile, mais les valeurs trouvées sont plus grandes que les valeurs réelles. Nous avons ainsi implanté une procédure de conversion de la base de Bernstein vers la base de Tchebychev, les valeurs trouvées (3.13) après cette conversion sont plus petites par rapport aux valeurs trouvées par la méthode précédente.

La méthode de subdivision uniforme effectue des subdivisions sur les domaines paramétriques et non sur leurs définitions, elle permet ainsi d'éviter de garder en mémoire des structures de données importantes et le coût en calcul de l'algorithme de subdivision de Casteljau ou de Boehm. Par contre, elle nécessite d'évaluer les quatre sommets de chaque sous carreaux pour la construction des boîtes par approximations. Nous avons implanté cette méthode en effectuant successivement ces évaluations par l'algorithme de Casteljau et de Horner, une réduction du temps d'exécution est apportée aux trois exemples précédents

temps d'exécution	évaluation par De Casteljau	évaluation par Horner
exemple 1	9421	6295
exemple 2	27278	14888
exemple 3	177	149

Cette réduction est d'autant plus importante que les degrés des surfaces sont élevés, la conversion vers la base canonique et l'utilisation de l'algorithme de Horner sont profitables. Cependant, il faut noter une certaine perte de précision due à cette conversion et à l'algorithme de Horner, l'erreur commise reste tout de même négligeable par rapport à la précision atteinte par la méthode.

A chaque niveau de subdivision, la méthode uniforme effectue huit évaluations, alors que la méthode adaptative effectue deux subdivisions (coût subdivision≈coût évaluation par De Casteljau). Afin d'éviter ces évaluations, nous avons implanté la méthode uniforme en effectuant des subdivisions sur les surfaces. le test de séparation est ainsi effectué à l'aide des boîtes minmax. L'exécution de cette méthode a montré une réduction considérable du temps d'exécution.

temps d'exécution	par subdivision de la structure des surfaces	par subdivision des domaines paramétriques
exemple 1	6269	28445
exemple 2	9295	29798
exemple 3	300	535

En fin de notre analyse sur l'implantation de la méthode de subdivision, la version uniforme est beaucoup plus lente que la version adaptative. Dans notre étude théorique, nous avons espéré de meilleurs résultats avec la méthode uniforme. Nous l'avons améliorée en utilisant des subdivisions uniformes selon chacune des deux directions du domaine paramétrique, et en calculant des majorations des dérivées secondes après conversion vers la base de Tchebychev.

En fait, les défauts de la méthode uniforme sont dus à la valeur utilisée pour majorer la distance maximale entre une surface et son approximation et aux valeurs des dérivées secondes qui ne sont pas calculées exactement. Il faut tout de même noter ses atouts majeurs: indépendance du modèle de surfaces utilisé, et continuité de la solution obtenue.

5.3. *Implantation de la méthode de suivi*

L'implantation de la méthode de suivi nécessite d'effectuer trois importantes opérations, qui sont le calcul des points germes, des points significatifs et du point suivant. Ces opérations s'effectuent de façon similaire en deux étapes, ce qui a facilité leur réalisation. La première calcule une approximation du point recherché, elle est effectuée par une méthode de subdivision récursive ou par construction d'une courbe approchante pour un point suivant. La seconde calcule une valeur plus précise, elle est effectuée par la méthode de Newton-Raphson en résolvant un système d'équations non linéaires d'ordre 3 pour les points germes ou d'ordre 4 pour les deux autres. Pour un bon déroulement de ces opérations, un certain nombre de tolérances doivent être bien choisies.

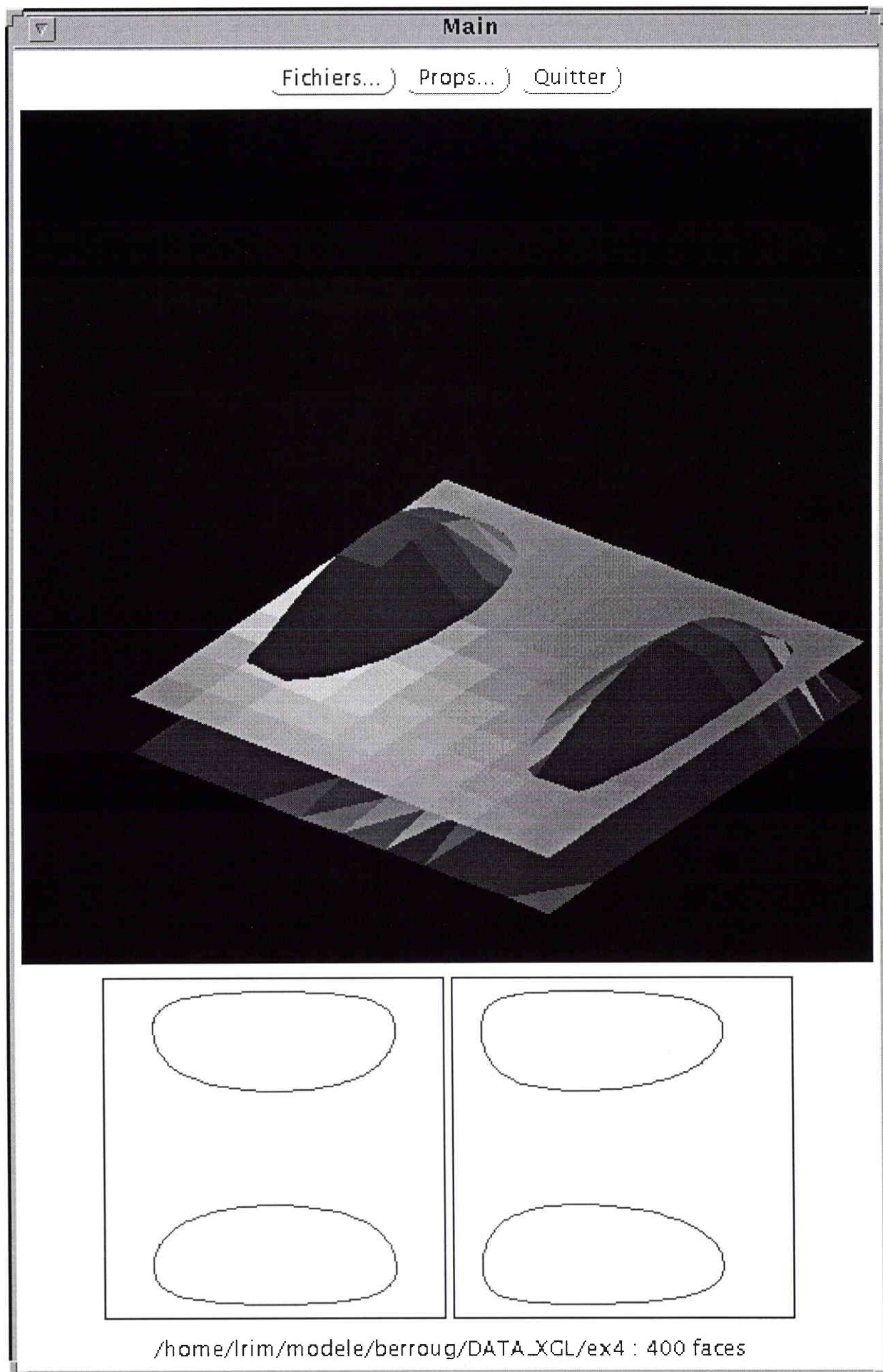
Choix des tolérances

- tolérance d'arrêt du procédé de calcul itératif d'un point suivant, ses coordonnées cartésiennes sont données selon cette tolérance près. On a utilisé des valeurs allant jusqu'à $10e-12$.
- tolérance d'arrêt du procédé de calcul itératif d'un point singulier, nous avons utilisé la même valeur que la précédente tolérance.
- la même tolérance que les précédentes est utilisée par la procédure de calcul itératif d'un point d'intersection d'une courbe et une surface.
- la tolérance de choix du pas de suivi, on a utilisé des valeurs allant jusqu'à $10e-1$, la convergence moyenne est de 2 à 3 itérations.
- tolérances de limitation du domaine de variation de la courbure locale, ceci est fait pour un contrôle du pas de suivi. On a utilisé des valeurs arbitraires pour minimiser et majorer cette courbure ($8.10e-2$, $8.10e+2$).

Ordre des courbes approchantes

Le second ordre est utilisé pour la construction des courbes approchantes, puisqu'il permet un choix efficace du pas de suivi. Pour le comparer avec les autres ordres, on a implanté la méthode en utilisant successivement l'ordre 0, 1, 2 et 3. Avec une valeur fixée de la tolérance du pas de suivi, on a remarqué que la convergence moyenne est de 2 itérations pour les ordres 1, 2 ou 3, alors qu'elle est de 3 itérations pour l'ordre 0.

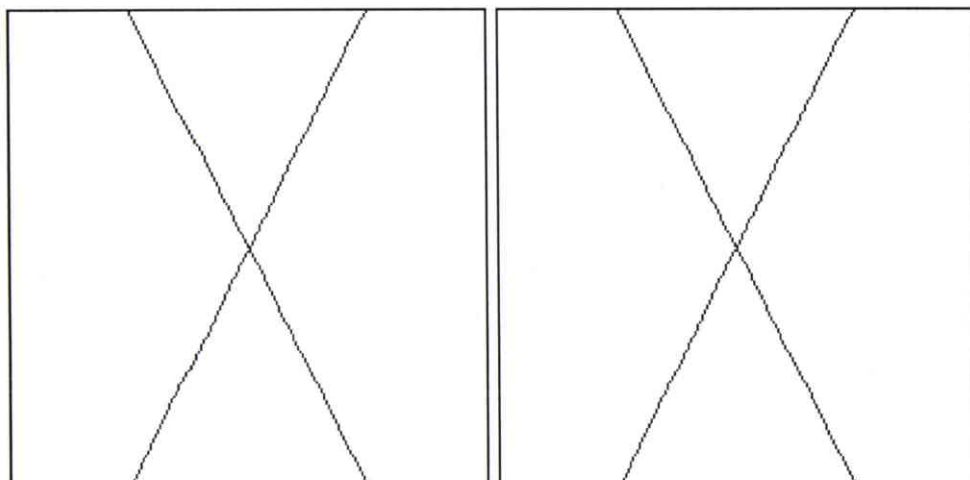
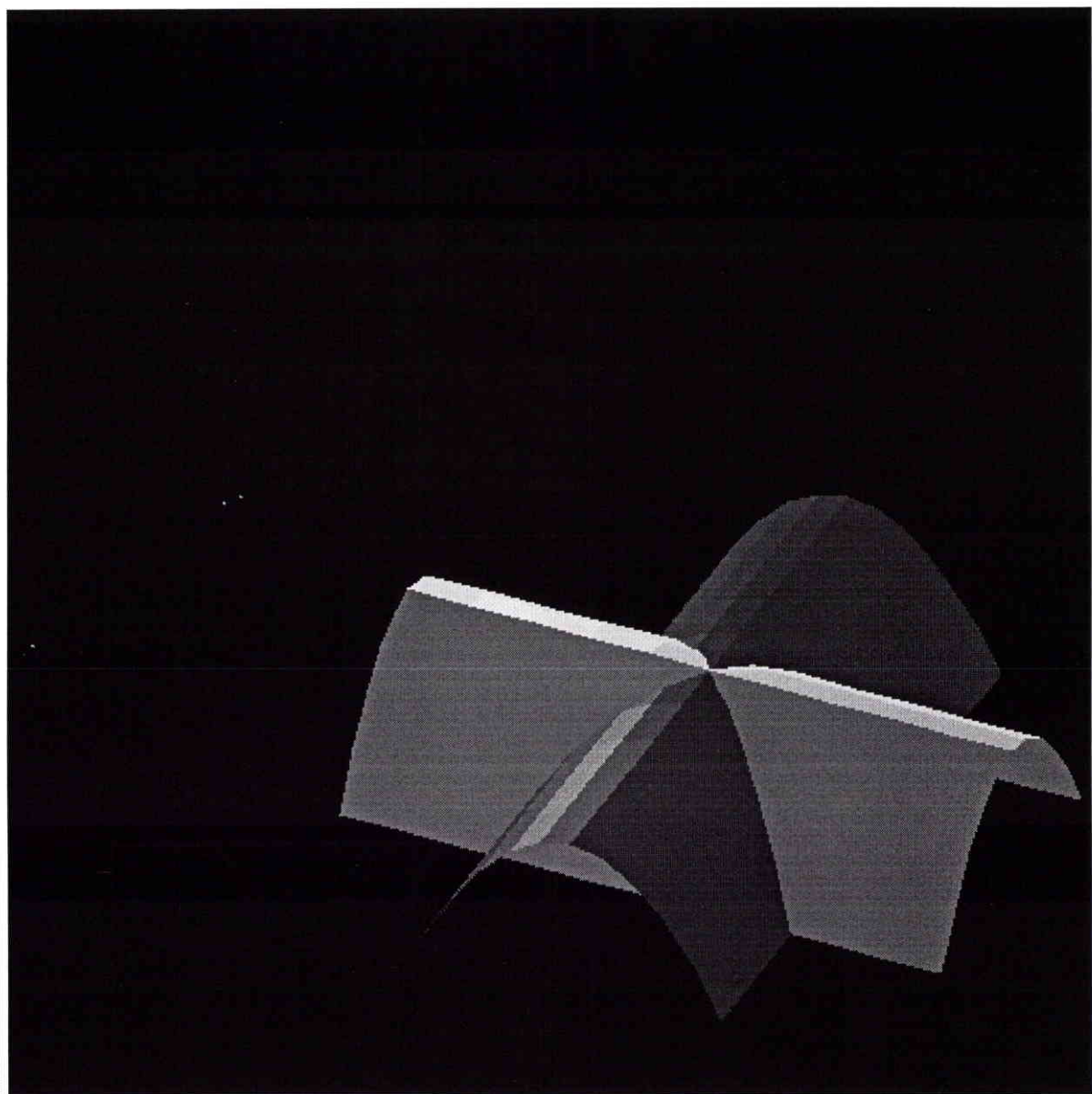
Ceci nous montre que l'ordre 3 n'est pas plus intéressant que le second ordre du point de vue convergence, puisqu'il nécessite beaucoup plus de calculs. L'implantation de l'ordre 1 nécessite le calcul de la dérivée seconde de la courbe d'intersection pour permettre le calcul du pas de suivi, son coût est alors équivalent à celui de l'ordre 2.



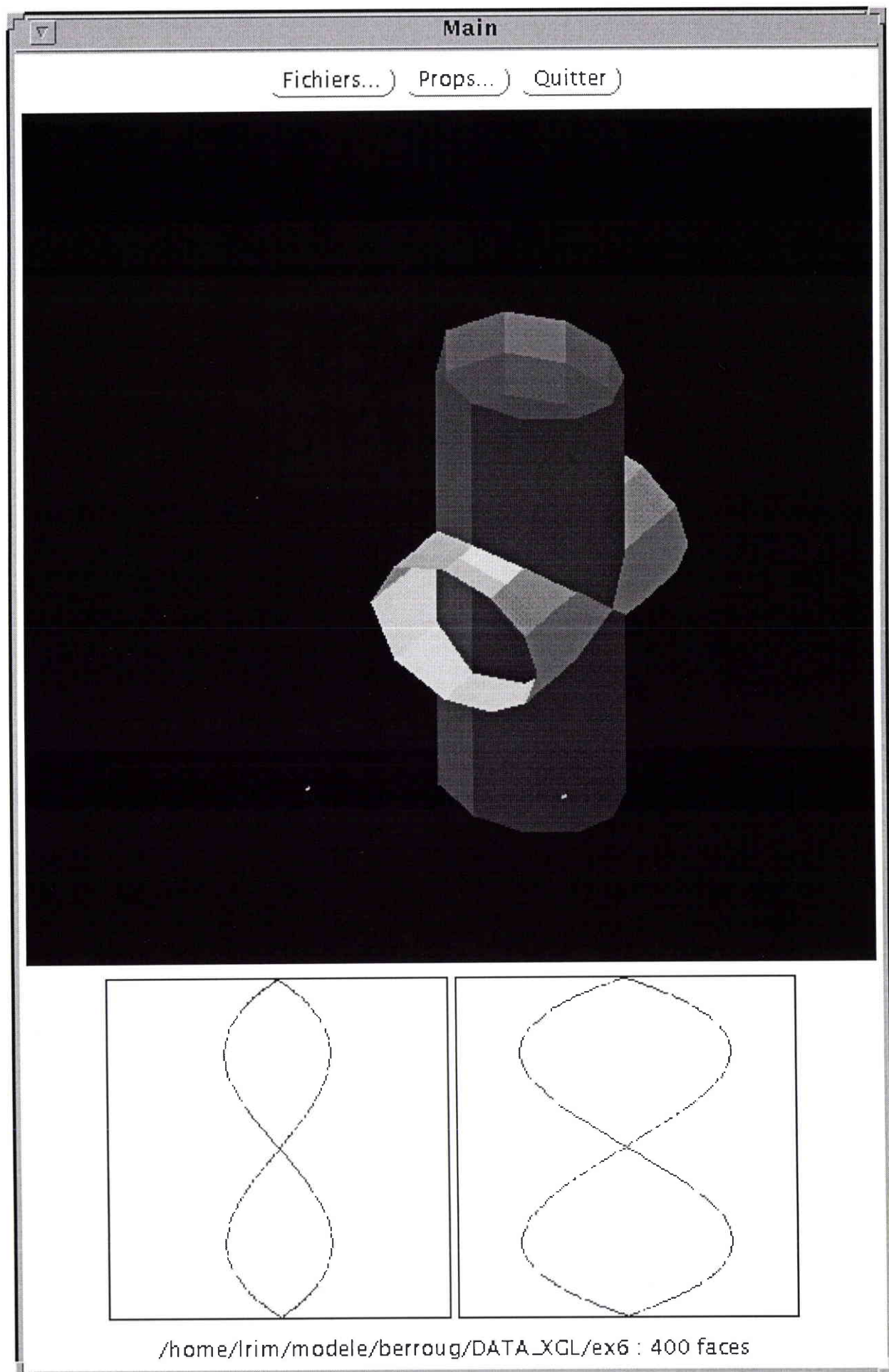


Main

Fichiers...) Props...) Quitter)



/home/lrim/modele/berroug/DATA_XGL/ex5 : 400 faces



Localisation des points NC

La localisation des points NC s'effectue à l'aide d'une méthode de subdivision récursive bien adaptée au problème. Nous l'avons implantée pour le traitement de deux surfaces de Bézier non rationnelles, le test d'absence de point NC est ainsi facilité par le fait que les surfaces et leurs dérivées partielles peuvent être remplacées par leurs boîtes minmax. L'ensemble de tous les points NC sont localisés par cette méthode, mais certaines zones localisées peuvent être inutiles. Ceci est conséquence du fait que le test utilisé est une condition trop restrictive. Pour éliminer ces zones, on a compacté les zones adjacentes et éliminé celles touchant un bord du domaine paramétrique.

Nous avons également éliminé les zones pour lesquelles il est facile de vérifier qu'elles ne sont pas entourées par une courbe d'intersection. On effectue cela en cherchant l'intersection des deux isoparamétriques orthogonales et passant par le centre de ces zones, avec la seconde surface. Si une isoparamétrique coupe la seconde surface en moins de deux points, alors cette zone sera rejetée.

La localisation doit s'effectuer pour isoler tous les points NC dans des pavés de taille plus au moins grande selon la catégorie. On a utilisé une taille minimale égale à 0.1, le temps d'exécution de cette procédure augmente de façon considérable en fonction de cette taille.

Performances et comparaison

Vu la diversité des situations et de la structure de l'ensemble d'intersection, l'implantation de la méthode de suivi nous a confronté à certaines difficultés techniques qu'on n'a pas réussies à bien traiter:

- chaque branche de courbe doit être suivie une et une seule fois.
- aux points singuliers, le procédé de suivi peut échouer ou zigzaguer autour de ces points.

Les exemples utilisés dans ce paragraphe sont effectués en adaptant notre implantation à une situation bien précise. Le tableau suivant montre les temps d'exécutions du procédé de suivi et celui de calcul des points significatifs sur certains exemples.

temps d'exécution	procédé de suivi	calcul des points importants
exemple 4	300	680
exemple 5	110	190
exemple 6		échec

L'exécution de la méthode de suivi a échoué sur l'exemple 6, les deux points singuliers de bord sont multiples. Le résultat sur l'image correspondante est obtenu par la méthode de subdivision récursive. A part aux voisinages des points singuliers, cette dernière méthode permet l'obtention d'une solution, alors que la méthode de suivi nécessite le succès du calcul des points significatifs.

D'après notre expérimentation, le procédé de suivi est une opération très rapide capable de donner une solution d'une très grande précision et en un temps très favorable à une utilisation interactive. Le calcul des points significatifs occupe une part considérable du temps d'exécution total de la méthode de suivi, il peut être inutile dans certain cas. Cependant, il constitue un traitement essentiel pour développer un algorithme complet. Le temps d'exécution total reste très petit par rapport à celui de la méthode de subdivision. Le tableau suivant nous permettra de comparer les performances en temps des deux méthodes de subdivision récursive et de suivi sur un certain nombre d'exemples où les deux aboutissent à un résultat complet.

temps d'exécution	méthode de subdivision classique (10e-2)	méthode de suivi (10e-7)
exemple 1	14410	1200
exemple 3	1140	580
exemple 4	3120	980
exemple 5	10440	300

Les deux méthodes sont exécutées avec des tolérances différentes, l'utilisation d'une même tolérance (10e-7) aurait entraîné des temps d'exécution excessifs pour la première. Malgré cette différence de précision, la solution de la méthode de suivi est obtenue en un temps réduit jusqu'à 34 fois moindre (exemple 5) que par la méthode de subdivision récursive.

5.4. Conclusion

L'étude pratique a permis de valider nos résultats sur les deux méthodes et d'évaluer leurs performances. Elle a permis également de soulever quelques difficultés pratiques concernant notamment la méthode de suivi pour laquelle, il a été difficile d'organiser le procédé de suivi aux points singuliers.

La méthode de subdivision récursive efficace pour les cas d'intersection non tangentielle et quand la précision souhaitée est faible. Elle est plus performante sous forme adaptative, les boîtes minmax orientées constituent une amélioration des performances dans la plupart des cas traités. La forme uniforme s'est révélée plus lente même en améliorant le calcul du niveau de subdivision, son principal avantage est son indépendance par rapport au modèle de surface utilisé.

La méthode de suivi permet l'obtention d'une solution avec une précision et vitesse considérable par rapport à la précédente. Le calcul des points significatifs constitue une étape relativement lente, qui pénalise par la suite cette méthode lorsque aucun de ces points n'est nécessaire. Cependant, il constitue un traitement essentiel pour le développement d'un algorithme complet et efficace.

CONCLUSION

Le calcul d'intersection de deux surfaces est l'une des opérations les plus difficiles lors de la modélisation d'objets complexes par des carreaux de surfaces. Les méthodes de subdivision récursive et de suivi sont les principales solutions disponibles pour le traitement de ce problème. Elles sont déjà implantées dans divers systèmes, mais de nombreuses difficultés demeurent encore mal traitées ou non prises en compte. Notre objectif, tout au long de ce mémoire, a été de proposer une amélioration à ces deux approches. La représentation de l'intersection, le traitement des intersections tangentielles et des courbes fermées de petites tailles, les temps d'exécutions sont des difficultés communes aux deux méthodes et auxquelles nous avons essayé de remédier.

La méthode de subdivision récursive est une méthode efficace lorsque la précision souhaitée est faible et en absence d'intersection tangentielle. Elle se trouve confrontée à des obstacles dus à sa lenteur lorsque cette précision devient élevée et aux risques d'erreurs aux zones singulières. Les tests de séparabilité et d'arrêt de subdivision sont les deux points essentiels que nous avons développé pour améliorer cette méthode.

Le test de séparabilité peut s'effectuer à l'aide de boîtes minmax ou des boîtes obtenues par approximation. Les premières sont utilisées lorsque les points de contrôles sont connus à chaque étape de l'algorithme, un changement de repère judicieux permet de rendre ce test plus efficace. Nous avons développé un algorithme de séparabilité utilisant des boîtes minmax dans des repères bien choisis, cette solution a montré une accélération de la méthode dans la plupart des cas. Quand aux boîtes obtenues par approximation, elles sont solutions au problème de séparabilité lorsque la structure des sous carreaux n'est pas disponible. Nous avons montré comment les calculer de façon orientée.

En fonction du test d'arrêt de subdivision, la méthode se présente sous une forme adaptative ou uniforme. La deuxième forme présente l'avantage d'être indépendante du modèle de surface utilisé; elle permet d'éviter les coûts de subdivision et de réduire l'espace mémoire nécessaire. Nous avons amélioré la définition du niveau de subdivision et montré comment calculer ce niveau.

La méthode de suivi est une méthode beaucoup plus rapide et plus précise que la précédente. Cependant, elle présente des risques d'oubli d'une partie de la solution (courbes fermées et points isolés) ou d'échec aux points singuliers. Le développement du procédé de

suivi et le traitement des intersections tangentielles et des courbes fermées sont les questions abordées pour améliorer cette méthode.

Le calcul d'un point sur une courbe et le contrôle de la densité des points à calculer sont les points abordés pour le développement du procédé de suivi. L'utilisation des courbes approchantes de second ordre nous a permis de trouver un choix adaptatif du pas de suivi, et d'élaborer une procédure rapide de calcul du point suivant.

Le traitement des courbes singulières ou fermées a été rendu possible par l'introduction de la notion de fonction distance orientée et des points significatifs. Le calcul de ces points est une opération délicate et nécessaire pour le traitement de ces difficultés. L'étude des propriétés de la fonction distance nous a permis de définir l'ensemble des points significatifs comme des sous classes des points NC. Ces derniers sont décrits par un système d'équations explicites, ce qui a permis de développer une procédure de localisation de l'ensemble de ces points. Cette procédure, fondée sur le principe de la méthode de subdivision récursive, permet de localiser la globalité l'ensemble des points recherchés.

Un calcul précis de ces points n'est effectué que pour les points singuliers ou entourés par une courbe de petite taille, ce qui a permis d'éviter des calculs inutiles

L'implantation de ces solutions nous a permis de valider nos propositions, de comparer les performances des deux méthodes, et de tirer les constatations suivantes:

- Malgré l'amélioration de la méthode de subdivision uniforme, elle s'est montrée considérablement lente par rapport à la méthode adaptative. La seule amélioration constatée sur cette méthode est l'utilisation des boîtes minmax orientées.
- L'implantation du procédé de suivi des courbes régulières permet l'obtention rapide de la solution avec une précision élevée.
- La localisation des points significatifs peut être globalement traitée par notre procédure de subdivision récursive. Cependant, sa prise en compte constitue une part considérable du temps d'exécution.
- Les points singuliers sont calculés avec efficacité lorsqu'ils sont simples et isolés, les autres cas nécessitent des traitements plus compliqués

Pour finir, ces solutions, validées sur un certain nombre d'exemples, ne sont pas infaillibles et de nombreux points demeurent encore non traités. Les intersections tangentielles, d'ordre supérieur à un peuvent être traitées par des méthodes de minimisation, alors que celles le long d'une courbe entière nécessitent des traitements plus compliqués et une adaptation du procédé de suivi.

Même si le procédé de suivi proposé nous permet un contrôle de la densité des points calculés, une représentation compacte de l'intersection n'est pas donnée. Il est nécessaire de trouver un moyen pour lisser ses points et obtenir une représentation compacte du résultat.

suivi et le traitement des intersections tangentielles et des courbes fermées sont les questions abordées pour améliorer cette méthode.

Le calcul d'un point sur une courbe et le contrôle de la densité des points à calculer sont les points abordés pour le développement du procédé de suivi. L'utilisation des courbes approchantes de second ordre nous a permis de trouver un choix adaptatif du pas de suivi, et d'élaborer une procédure rapide de calcul du point suivant.

Le traitement des courbes singulières ou fermées a été rendu possible par l'introduction de la notion de fonction distance orientée et des points significatifs. Le calcul de ces points est une opération délicate et nécessaire pour le traitement de ces difficultés. L'étude des propriétés de la fonction distance nous a permis de définir l'ensemble des points significatifs comme des sous classes des points NC. Ces derniers sont décrits par un système d'équations explicites, ce qui a permis de développer une procédure de localisation de l'ensemble de ces points. Cette procédure, fondée sur le principe de la méthode de subdivision récursive, permet de localiser la globalité l'ensemble des points recherchés.

Un calcul précis de ces points n'est effectué que pour les points singuliers ou entourés par une courbe de petite taille, ce qui a permis d'éviter des calculs inutiles

L'implantation de ces solutions nous a permis de valider nos propositions, de comparer les performances des deux méthodes, et de tirer les constatations suivantes:

- Malgré l'amélioration de la méthode de subdivision uniforme, elle s'est montrée considérablement lente par rapport à la méthode adaptative. La seule amélioration constatée sur cette méthode est l'utilisation des boîtes minmax orientées.
- L'implantation du procédé de suivi des courbes régulières permet l'obtention rapide de la solution avec une précision élevée.
- La localisation des points significatifs peut être globalement traitée par notre procédure de subdivision récursive. Cependant, sa prise en compte constitue une part considérable du temps d'exécution.
- Les points singuliers sont calculés avec efficacité lorsqu'ils sont simples et isolés, les autres cas nécessitent des traitements plus compliqués

Pour finir, ces solutions, validées sur un certain nombre d'exemples, ne sont pas infallibles et de nombreux points demeurent encore non traités. Les intersections tangentielles, d'ordre supérieur à un peuvent être traitées par des méthodes de minimisation, alors que celles le long d'une courbe entière nécessitent des traitements plus compliqués et une adaptation du procédé de suivi.

Même si le procédé de suivi proposé nous permet un contrôle de la densité des points calculés, une représentation compacte de l'intersection n'est pas donnée. Il est nécessaire de trouver un moyen pour lisser ses points et obtenir une représentation compacte du résultat.

Les erreurs dues à l'arithmétique des nombres en virgule flottante ont un effet sur la précision de la solution, notamment pour la méthode de suivi où tous les calculs sont itératifs. Ce sujet, non abordé dans cette thèse, nécessite d'être exploré pour pouvoir contrôler les erreurs commises lors du calcul d'intersection.

Annexe 1

Différentiabilité d'une courbe d'intersection entre deux surfaces paramétriques:

Théorème

Soient $S(u,v)$ et $T(s,t)$ deux surfaces différentiables et (u_0, v_0) (s_0, t_0) les coordonnées paramétriques d'un point d'intersection non tangentielle et n'appartenant au bord d'aucune des deux surfaces. Alors la courbe d'intersection passant par ce point admet une représentation paramétrique dans le voisinage de ce point, cette représentation est autant différentiable que la moins différentiable des deux surfaces.

Démonstration

La démonstration est un résultat du théorème de la fonction implicite, pour cela on définit une fonction φ par:

$$\varphi: (u, v, s, t) \longrightarrow S(u, v) - T(s, t)$$

Le point d'intersection considéré est régulier, on peut donc extraire des 4 vecteurs $S_u(u_0, v_0)$, $S_v(u_0, v_0)$, $T_s(s_0, t_0)$ et $T_t(s_0, t_0)$ une base dans l'espace, sinon notre point est un point d'intersection tangentielle.

Maintenant, supposons que les 3 premiers vecteurs forment cette base. La fonction différentielle de φ par rapport à u, v et s en (u_0, v_0, t_0) est inversible:

$$\partial_{u,v,s}\varphi = (S_u, S_v, -T_s)$$

Il existe donc un voisinage de t_0 dans lequel (u, v, s) dépend de façon différentielle de t (de classe la classe de la moins différentiable des deux surfaces).

Annexe 2

Majoration de la distance entre une courbe et la corde joignant les extrémités de la courbe:

Théorème

Soit $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction de classe C^2 et $l(t)$ une paramétrisation linéaire du segment définie par les points $f(a)=l(a)$ et $f(b)=l(b)$.

On a alors:

$$\sup_{a \leq t \leq b} \|f(t) - l(t)\| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \sup_{a \leq t \leq b} \|f''(t)\|$$

Démonstration

On pose les fonctions suivantes:

$$e(t)=f(t)-l(t) \text{ et } s(t)=e(t).e(t)$$

Alors $s(a)=s(b)=0$ entraîne l'existence d'un maximum t_0 de $[a,b]$ en lequel :

$$s'(t_0)=0, e'(t_0).e(t_0)=0$$

Par développement limité de $e(t)$ en t_0 , on obtient:

$$e(t) = e(t_0) + e'(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t (t-x)e''(x)dx$$

En effectuant le produit scalaire de cette égalité par $e(t_0)$, on obtient:

$$e(t_0).e(t) = e(t_0).e(t_0) + e(t_0). \int_{t_0}^t (t-x)e''(x)dx$$

Sans perte de généralité, on suppose que t_0 est dans $[a, 1/2(a+b)]$, et on prend $t=a$ (notons que $e''(t)=f''(t)$). On obtient ensuite:

$$-e(t_0).e(t_0) = e(t_0). \int_{t_0}^a (a-x)f''(x)dx$$

Ceci entraîne:

$$\begin{aligned}
\|e(t_0)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^a (a-x)f''(x)dx \right\| \\
&\leq \sup_{a \leq t \leq b} \|f''(t)\| \left\| \int_{t_0}^a (a-x)dx \right\| \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{a \leq t \leq b} \|f''(t)\| (t_0 - a)^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \sup_{a \leq t \leq b} \|f''(t)\| \left(\frac{1}{2}(b-a)\right)^2 \\
&\leq \frac{1}{8} \sup_{a \leq t \leq b} \|f''(t)\| (b-a)^2
\end{aligned}$$

Annexe 3

Différentiabilité de la fonction projection orthogonale h:

On garde toujours les mêmes conditions sur les surfaces S et T, et on rappelle la fonction h définie par:

$$h: DS \longrightarrow DT$$

$$(u, v) \longrightarrow (s, t)$$

tel que T(s,t) soit la projection orthogonale du point S(u,v) sur la surface T.

Théorème

La fonction h est différentiable sur tout ouvert où elle est définie, elle est même de classe:

$$(m,n) = \inf \{ \text{classe de S, classe de T moins 1} \}$$

Démonstration

Soit (u_0, v_0) un point de DS et (s_0, t_0) son image par la fonction h.

La surface T étant supposée régulière, en tout point (s,t) la famille $\{T_s, T_t, N_T\}$ est libre.

On utilise le théorème d'inversion locale, pour cela on considère la fonction:

$$\varphi: (s, t, w) \longrightarrow T(s, t) + wN_T(s, t)$$

Le point $S(u_0, v_0)$ se projetant orthogonalement en $T(s_0, t_0)$ sur la surface T, est situé à une certaine distance w_0 de $T(s_0, t_0)$ dans le sens de la normale $N_T(s_0, t_0)$.

On a donc:

$$\varphi(s_0, t_0, w_0) = S(u_0, v_0)$$

Puisque T est régulière, le jacobien de φ :

$$\text{Jacobien}(\varphi) = (T_s, T_t, N_T)$$

est inversible en tout point. Il existe donc un voisinage de (s_0, t_0, w_0) dans lequel φ est inversible:

$$(s, t, w) = \varphi^{-1}(S(u, v))$$

Ceci entraîne que (s, t) dépendent de façon différentiable de (u,v), et aussi de classe (m,n) avec:

$$(m,n) = \inf \{ \text{la classe de S, classe de T moins 1} \}.$$

Annexe 4

Calcul des dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction distance orientée ϕ

D'après la valeur explicite des dérivées premières de la fonction distance orientée ϕ :

$$\phi_u = \langle S_u, N_T \rangle \quad \phi_v = \langle S_v, N_T \rangle$$

On peut donner les dérivées partielles seconde par:

$$\phi_{uu} = \langle S_{uu}, N_T \rangle + \langle S_u, N_{T,u} \rangle$$

$$\phi_{uv} = \langle S_{uv}, N_T \rangle + \langle S_u, N_{T,v} \rangle$$

$$\phi_{vu} = \langle S_{vu}, N_T \rangle + \langle S_v, N_{T,u} \rangle$$

$$\phi_{vv} = \langle S_{vv}, N_T \rangle + \langle S_v, N_{T,v} \rangle$$

Où tous les termes sont connus sauf les dérivées partielles $N_{T,u}$ et $N_{T,v}$. Ces dernières peuvent s'écrire en fonction des dérivées de s et t par rapport à u et v :

$$N_{T,u} = N_{T,s} \frac{ds}{du} + N_{T,t} \frac{dt}{du}$$

$$N_{T,v} = N_{T,s} \frac{ds}{dv} + N_{T,t} \frac{dt}{dv}$$

Maintenant, il reste à calculer les dérivées de s et t par rapport à u et v . Pour cela, on écrit le système définissant l'image de (u,v) par la fonction h :

$$\begin{cases} \langle S(u,v) - T(s,t), T_s(s,t) \rangle = 0 \\ \langle S(u,v) - T(s,t), T_t(s,t) \rangle = 0 \end{cases}$$

où $(s,t)=h(u,v)$, h est supposée bien définie en (u,v) .

Par dérivation du système précédent par rapport à u , on obtient:

$$\begin{cases} \langle S_u - T_s \frac{ds}{du} - T_t \frac{dt}{du}, T_s \rangle + \langle S - T, T_{ss} \frac{ds}{du} + T_{st} \frac{dt}{du} \rangle = 0 \\ \langle S_u - T_s \frac{ds}{du} - T_t \frac{dt}{du}, T_t \rangle + \langle S - T, T_{ts} \frac{ds}{du} + T_{tt} \frac{dt}{du} \rangle = 0 \end{cases}$$

Ce qui entraîne:

$$\left[\frac{ds}{du}, \frac{dt}{du} \right]^T = K^{-1} [\langle S_u, T_s \rangle, \langle S_u, T_t \rangle]^T$$

Où la matrice carré K est donnée par:

$$K_{ij} = \langle T_i, T_j \rangle - \langle S - T, T_{ij} \rangle \quad i, j = s, t$$

De la même manière, pour déterminer les dérivées de s et t par rapport à v . On dérive par rapport à v le système définissant $h(u,v)$, et on obtient ensuite:

$$\left[\frac{ds}{dv}, \frac{dt}{dv} \right]^T = K^{-1} [\langle S_v, T_s \rangle, \langle S_v, T_t \rangle]^T$$

Bibliographie

- [ARN 88] V.ARNOLD
"Equations différentielles ordinaires"
Edition Mir, Moscou
- [AZI 90] N.M.AZIZ, S.BHAT
"Bezier surface/surface intersection"
IEEE Computer Graphics&Applications Janvier 1990, pp 50-58
- [BAR 90] R.E.BARNHILL, S.N.KERSEY
"A marching methode for parametric surface/surface intersection"
Computer Aided Geometric Design vol 7 , 1990 , pp 257-280
- [BAR 88] R.E.BARNHILL, G.FARIN, L.FAYARD, H.HAGEN
"Twists, curvatures and surface interrogation"
Computer-Aided-Design volume 20 No 6, July/Aug 1988, pp 341-346
- [BAR 87] R.E.BARNHILL, G.FARIN, M.JORDAN, B.R.PIPER
"Surface/surface intersection"
Computer Aided Geometric Design 4 , 1987, pp 3-16
- [BAJ 88] C.L.BAJAJ, C.M.HOFFMANN, R.E.LYNCH, J.E.H.HOCROFT
"Tracing surfaces intersections"
Computer Aided Geometric Design volume 5 pp 285-307 Avril 1988
- [CAR 82] W.E.CARLSON
"An algorithm and data structure for 3D object synthesis using surface patch intersection"
Computer graphics vol 16, n° 3, pp 255-263
- [CHA 87] V.CHANDRU, B.KOCHAR
"Analytic techniques for geometric intersection problems"
Geometric Modeling: Algorithms and New Trends by Gerald E.FARIN
1987 SIAM, pp 305-318
- [CHE 89] K.P.CHENG
"Using plane vector fields to obtain all intersection curves of two general surfaces" dans Theory and Practice of Geometric Modelig Springer-Verlag ,USA(1989)" W STRASSER et SEIDEL, pp 187-204.
- [CHO 90] B.K.CHOI, Y.S.YOO, C.S.LEE
"Matrix representation for NURBS curves and surfaces"
Computer-Aided-Design vol 22 n° 4 may 1990 pp 235-240

- [CHU 89] J.H.CHUANG, C.M.HOFFMANN
"On local implicit approximation and its applications"
A.C.M Transactions on Graphics volume 8 n°4 pp 298-321
- [DAN 89] M.DANIEL
"Modélisation de courbes et surfaces par des B-splines.Application à la conception assistée par ordinateur et à la visualisation des formes"
Thèse de l'Université de Nantes 1989
- [FAR 90] G.FARIN
"Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric design"
A Practical Guide Academic Press, USA(1990)
- [FAR 87] R.FAROUKI
"Direct surface section evaluation"
Geometric Modeling: Algorithms and New trends by Gerald E.FARIN
1987 SIAM, pp 319-334
- [FIL 86] D.FILIP, R.MAGEDSON, R.MARKOT
"surface algorithms using bounds on derivatives"
Computer Aided Geometric Design vol 3 , No 4 , decm 1986 , pp 295-311
- [FUH 92] FUHIA.CHENG
"Estimating subdivision depths for rational curves and surfaces"
ACM Transactions on Graphics volume 11,No 2, avril 1992, pp 140-151
- [GAR 89] Y.GARDAN, D.MICHEL, M.SAHNOUNE
"Etude comparée des formes paramétriques pour la modélisation des surfaces"
Rapport de recherche LRIM 1989
- [GEO 92] P.GEORGIADES, D.P.GREENBERG
"Locally manipulating the geometry of curved surfaces"
IEEE Computer Graphics&Applications Jan 1992 , pp 54-64
- [GER 93] G.ELBER, E.COHEN
"Second-order surface analysis using hybrid symbolic and numeric operators"
ACM Transactions on Graphics Vol 12, No 2 April 1993,pp 160-178
- [GOL 85] R.N.GOLDMAN
"The method of resolvents: a technique for the implicitisation, inversion, and intersection of non planar parametric rational cubics curves"
Computer Aided Geometric Design 2 , 1985
- [GOL 86] R.N.GOLDMAN, T.D.DEROSE
"Recursive subdivision without the convex hull property"
Computer Aided Geometric Design 3 , 1986 pp 247-265

- [GRA 92] H.GRABOWSKI, X.LI
 "Coefficient formula and matrix of nonuniform B-spline functions"
 Computer Aided Design vol 24 n° 12 december 1992 pp 637-642
- [HOF 93] C.M.HOFFMANN
 "Implicit curves and surfaces in CAGD"
 IEEE Computer Graphics&Applications 1993 pp 78-88
- [HOM 91] M.E.HOHMEYER
 "A surface intersection algorithms based on loop detection"
 Proc. Symp. Solid Modeling Foundation, ACM, New York, 1991, pp 197-207
- [HOU 85] E.G.HOUGHTON, R.F.EMNETT, J.D.FACTOR, C.L.SABHARWAL
 "Implementation of a divide-and-conquer methode for intersection of parametric surfaces"
 Computer Aided Geometric Design 2 , 1985 , pp 173-183
- [KAJ 82] J.T.KAJIYA
 "Ray tracing parametric patches"
 ACM computer graphics vol 16 n°3 pp 245-254
- [KAT 88] S.KATZ T.W.SEDERBERG.
 "Genus of the intersection curve of two rational surface patches"
 Computer Aided Geometric Design 5, 1988, pp 253-258
- [KOP 86] P.PKOPARKAR, S.P.MUDUR
 "Generation of continuous smoth curves resulting from operations on parametric surfaces patches"
 Computer Aided Design Vol 18 n° 4 1986 , pp 193-206
- [KRI 90] G.A.KRIEZIS, P.V.PRAKASH, N.M.PATRIKALAKIS
 "A method for intersecting algebraic surfaces with rational polynomial patches"
 Computer-Aided-Design volume 22-No10 1990, pp 645-654
- [KRI 92] G.A.KRIEZIS, N.M.PATRIKALAKIS, F.E.WOLTER
 "Topological and differential equation methods for surfaces intersections"
 Computer-Aided-Design volume 24-No1 Janvier 1992, pp 41-55
- [LUK 89] G.LUKACS
 "The generalised inverse matrix and the surface/surface intersection problem"
 dans Theory and Practice of Geometric Modelig Springer-Verlag USA(1989)
 W STRASSER et SEIDEL, pp 167-185
- [MAN 94] D.MANOCHA
 "Solving systems of polynomial equations"
 IEEE Computer Graphics&Applications Mars 1994, pp 46-55

- [MAR 89] R.P.MARKOT, R.L.MAGEDSON
 "Solution of tangential surface and curve intersections"
 Computer-Aided-Design volume 21-7 septembre 1989
- [MAR 89] R.P.MARKOT, R.L.MAGEDSON
 "Procedural method for evaluating the intersection curves of two parametric surfaces"
 Computer-Aided-Design volume 21-7 septembre 1989
- [MIC 92] D.MICHEL
 "Contribution à la conception, la mise en oeuvre et l'amélioration des algorithmes de calcul des intersections des carreaux NURBS"
 Thèse de l'Université de Metz 1992
- [MON 86] Y.DE.MONTAUDOIN, W.TILLER, H.VOLD
 "Applications of power series in computational geometry"
 Computer-Aided-Design volume 18 n° 10 december 1986
- [MON 91] Y.DE.MONTAUDOIN
 "Resolution of $P(x,y)=0$ "
 Computer-Aided-Design volume 23 n° 9 1991 pp 653-654
- [OZS 88] J.J.CHEN, T.M.OZSOY
 "Predictor-corrector type of intersection algorithm for 2 parametric surfaces"
 Computer-Aided-Design vol 20 n° 6 Juillet/Aout 1992, pp 347-352
- [PAT 93] N.M.PATRIKALAKIS
 "Surface to surface intersections"
 IEEE Computer Graphics&Applications Janvier 1993, pp89-95
- [PIE 91] L.PIEGL
 "On NURBS: A Survey"
 IEEE Computer Graphics&Applications Janvier 1991, pp55-71
- [PHA 92] F.PHAM
 "Géométrie et calcul différentiel sur les variétés"
 InterEditions, Paris 1992
- [PRA 89] H.PRAUTZSCH
 "A round trip to B-splines via de Casteljau"
 ACM Transactions on Graphics vol 8 n°3 July 1989 pp 243-254
- [SED 85] T.W. SEDERBERG, D.C.ANDERSON, R.N.GOLDMAN
 "Implicit representation of curves and surfaces"
 Computer Vision and Image Processing 28 1984
- [SED 86] T.W.SEDERBERG, S.R.PARRY
 "Comparaison of three curve intersection algorithms"
 Computer-Aided-Design volume 18,1 Jan/Feb 1986, pp 58-63

- [SED 88] T.W.SEDERBERG, R.J.MEYERS
"Loop detection in surface patch intersection"
Computer-Geometric-Aided-Design volume 5 (1988) pp161-171
- [SED 89] T.W. SEDERBERG, H.N.CHRISTIANSEN, S.KATZ
"An improved test for closed loops in surface intersections"
Computer-Aided-Design volume 21-No7 Octobre1989, pp 505-508
- [SHE 92] X.SHENG, B.E.HIRSCH
"Triangulation of trimmed surfaces i paramétric space"
Computer-Aided-Design volume 24, n° 8 (1992), pp 437-444
- [STR 86] B.STROUSTROUP
"The C++ Programing Language"
Addison-Wesley, 1986
- [TIL 92] W.TILLER
"Knot-removal algorithms for NURBS curves and surfaces"
Computer-Aided-Design volume 24 n° 8 1992 pp 445-453
- [YEN 91] J.YEN, S.SPATCH, M.SMITH, R.PULLEYBLANK
"Parallel boxing in B-spline intersection"
IEEE Computer Graphics&Applications Jan 1991, pp 72-79
- [WAN 91] Y.WANG, E.L.GURSOZ, J.M.CHEN, F.B.PRINZ, N.M.PATRIKALAKIS
"Intersection of parametric surfaces for next generation geometric modelers"
dans Product Modeling for Computer-Aided Design and Manufacturing.
J.TURNER, J.PEGNA, M.WOZNY, eds Elsevier, New York 1991, pp 75-96

Résumé:

Le calcul des courbes d'intersection de deux carreaux de surfaces est une opération délicate et indispensable pour la représentation d'objets solides en CAO. Ces courbes peuvent être complexes; les méthodes existantes ne nous permettent de représenter l'intersection que par des listes de points ou de segments. Les difficultés à surmonter sont le traitement des intersections tangentielles, les courbes de petites tailles et la représentation de l'intersection. Dans cette thèse, on étudie les deux principales méthodes de subdivision récursive et de suivi. Après avoir étudié le principe de la première méthode, on développe les deux modules de séparabilité et d'arrêt des subdivisions qui la définissent. On implantera la méthode sous différentes formes pour lesquelles on montrera les avantages et inconvénients. En ce qui concerne la méthode de suivi, on propose un procédé de suivi des courbes régulières. Ce procédé tient compte des propriétés géométriques locales de la courbe recherchée et promet un résultat rapide. On développe également la notion de fonction distance orientée entre deux surfaces pour pouvoir traiter les intersections tangentielles et les courbes fermées de petites tailles.

Mots clés:

C.F.A.O, Bézier, B-splines, Nurbs, carreaux, subdivision récursive, suivi