



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# Centre d'Analyse Non Linéaire

## Université de Metz

Thèse présentée pour l'obtention du  
doctorat de l'Université de Metz  
en Mathématiques

mention : Mathématiques Appliquées,  
par Mr Bruno LOVAT.

Titre de la thèse :

### ETUDES DE QUELQUES PROBLEMES PARABOLIQUES NON LOCAUX

Soutenue le 20 Novembre 1995 devant le jury composé de :

S. BENACHOUR, professeur à l'Université de Nancy II. Rapporteur.

M. CHIPOT, professeur à l'Université de Metz.

G. MICHAILLE, maître de conférence à l'Université de Montpellier II.  
Rapporteur.

I. SHAFRIR, professeur à l'Université de Metz.

6 100790

# Centre d'Analyse Non Linéaire

## Université de Metz

Thèse présentée pour l'obtention du  
doctorat de l'Université de Metz  
en Mathématiques

mention : Mathématiques Appliquées,  
par Mr Bruno LOVAT.

Titre de la thèse :

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19950695
Cote	S/M3 95/36
Loc	Magasin

### ETUDES DE QUELQUES PROBLEMES PARABOLIQUES NON LOCAUX

Soutenue le 20 Novembre 1995 devant le jury composé de :

**S. BENACHOUR**, professeur à l'Université de Nancy II. Rapporteur.

**M. CHIPOT**, professeur à l'Université de Metz.

**G. MICHAILLE**, maître de conférence à l'Université de Montpellier II.  
Rapporteur.

**I. SHAFRIR**, professeur à l'Université de Metz.

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur CHIPOT pour l'honneur de m'avoir confié ce sujet.

Qu'il soit remercié pour ses encouragements, sa bienveillance et l'aide constante et éclairée qu'il a apportés à ce travail.

J'adresse l'expression de ma gratitude à Monsieur BENACHOUR et à Monsieur MICHAILLE qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs avisés de cette thèse.

Que Monsieur SHAFRIR, qui a accepté de participer à ce jury, reçoive ici mes vifs remerciements.

## INTRODUCTION

# INTRODUCTION

## I. ORIGINE DU PROBLEME.

Depuis quelques années, beaucoup de problèmes sont formulés en termes de modèles non linéaires et non locaux. Ce travail trouve son origine dans un article de M. CHIPOT et J.F. RODRIGUES (cf.[CR]).

### A) PREMIERE APPROCHE.

Nous savons depuis FOURIER que l'équation qui régit la propagation de la chaleur, dans un domaine  $\Omega$ , est :

$$\frac{\partial(cu)}{\partial t} - k\Delta u = 0,$$

où :

- $u(x, t)$  est la température au point  $x$ , à l'instant  $t$ ,
- $k$  la conductivité du corps considéré,
- $c$  sa chaleur massique.

$k$  et  $c$  dépendent de  $u$ , de  $x$  et de  $t$ , donc apparaissent comme des éléments essentiellement locaux. Il y a cependant une difficulté majeure ; cette approche est incompatible avec la notion de mesure physique. Comment mesurer, en effet, la température ponctuelle d'une masse ponctuelle ?

Une solution possible consiste à considérer  $B_x^\epsilon$ , une boule de rayon  $\epsilon$  centrée en  $x$ , et à remplacer  $c(x, t, u)$  et  $k(x, t, u)$  par  $c(x, t, \frac{1}{|B_x^\epsilon|} \int_{B_x^\epsilon} u)$  et  $k(x, t, \frac{1}{|B_x^\epsilon|} \int_{B_x^\epsilon} u)$ .

Il reste alors à examiner la solution  $u^\epsilon$  du problème :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( c(x, t, \frac{1}{|B_x^\epsilon|} \int_{B_x^\epsilon} u) u^\epsilon(x, t) \right) - k(x, t, \frac{1}{|B_x^\epsilon|} \int_{B_x^\epsilon} u) \Delta u^\epsilon(x, t) = 0.$$

En étudiant, en particulier, son comportement quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

La démarche que nous allons adopter ici est différente, et consiste à remplacer  $u$  dans les coefficients  $c$  et  $k$  par sa valeur moyenne  $\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u$ .

Nous sommes ainsi amenés à étudier des équations dont le type général peut s'écrire :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \left( \int_{\Omega} u \right) \Delta u = f(x, u) \text{ dans } \Omega \times (0, T).$$

## B) SECONDE APPROCHE.

De nombreuses équations aux dérivées partielles (appliquées par exemple à la biologie) sont de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(t)\Delta u = f(x, u) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

avec par exemple, ici, des conditions initiales de type DIRICHLET.

C'est le cas des équations de FISCHER qui décrivent l'évolution génétique d'une population, où :

$$f(x, u) = m(x, t)h(u),$$

ou encore :

$$f(x, u) = u(a - bu),$$

pour les problèmes de diffusion logistique qui décrivent l'évolution de la densité d'une population vivant dans  $\Omega$  (cf. [DKM]).

Dans chacun de ces cas, on définit la distribution de  $u(x, t)$  par :

$$c(x, t) = \frac{u(x, t)}{\int_{\Omega} u(x, t) dx}.$$

Nous nous posons la question suivante : existe-t-il une solution  $u(x, t)$  admettant une distribution indépendante du temps ?

Des résultats ont déjà été établis pour d'autres types d'équations.

Par exemple, dans le cas d'une population dont l'évolution est modélisée par la formule classique de LOTKA-McKENDRIK :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial a} = -m(a)u(a, t), \\ u(0, t) = \int_0^{+\infty} f(a)u(a, t) da, \\ u(a, 0) = u_0(a), \end{cases}$$

où : -  $u(a, t)$  est la densité de population d'âge  $a$  à l'instant  $t$ ,

-  $f(a)$  est le coefficient de fertilité à l'âge  $a$ ,

-  $m(a)$  est le coefficient de mortalité à l'âge  $a$ .

Les démographes appellent population équilibrée, une population dont la distribution d'âge  $c(a, t)$  est indépendante du temps :

$$c(a, t) = c(a), \quad \forall t \geq 0.$$

Intuitivement, cela signifie que le pourcentage des personnes ayant l'âge  $a$ , à l'instant  $t$ , ne varie pas avec le temps. La densité d'âge d'une population équilibrée vérifie donc :

$$u(a, t) = c(a) \int_0^{+\infty} u(a, t) da.$$

On constate que  $u$  est à variables séparées.

Réciproquement, si  $u(a, t) = u_1(a)u_2(t)$  avec  $u_1(a) > 0$ , on a :

$$c(a, t) = \frac{u(a, t)}{\int_0^{+\infty} u(a, t) da} = \frac{u_1(a)}{\int_0^{+\infty} u_1(a) da} = c(a).$$

L'intérêt de cette notion réside dans la description du comportement asymptotique de ces populations : toute population qui, sous certaines conditions de régularité, vérifie les formules de LOTKA-McKENDRIK tend au cours de son évolution à devenir une population équilibrée (cf.[H]).

On se demande dans l'étude d'un problème d'évolution de nature parabolique, si de la même façon, l'existence d'une solution équilibrée, c'est à dire, à variables séparées, non nécessairement stationnaire, permet de mieux comprendre son comportement asymptotique.

Cherchons dans un premier temps, une condition sur le coefficient  $p$  du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - p(t)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

pour que ce dernier admette une solution équilibrée (c'est à dire à variables séparées).

### THEOREME 0.1.

**On suppose qu'une au moins des fonctions  $u_0$  et  $f = f(x)$  n'est pas fonction propre de  $(-\Delta)$  sur  $\Omega$ .**

**Soit  $C$  une constante,  $p(t) = \frac{C}{\int_{\Omega} u}$  est une condition nécessaire pour que le problème :**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - p(t)\Delta u = f \neq 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \text{ avec } \int_{\Omega} u_0(x) dx \neq 0, \end{cases}$$

**admette une solution à variables séparées.**

### DEMONSTRATION.

Soit  $u$  une solution à variables séparées. Il existe  $u_1$  définie sur  $\bar{\Omega}$  et  $u_2$  définie sur  $[0, T]$ , telles que :

$$u(x, t) = u_1(x)u_2(t),$$

donc :

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = u_2(t) \int_{\Omega} u_1(x) dx.$$

A l'instant  $t = 0$  :  $\int_{\Omega} u(x, 0) dx = u_2(0) \int_{\Omega} u_1(x) dx \neq 0$ .

Ce qui implique :

$$\frac{u_1(x)}{\int_{\Omega} u_1(x)dx} = \frac{u_0(x)}{\int_{\Omega} u_0(x)dx},$$

et :

$$u(x, t) = \frac{u_0(x)}{\int_{\Omega} u_0(x)dx} \int_{\Omega} u(x, t)dx.$$

On écrit :  $u(x, t) = c(x) \int_{\Omega} u(x, t)dx$  avec  $c(x) = \frac{u_0(x)}{\int_{\Omega} u_0(x)dx}$ .

L'équation initiale devient :

$$c(x) \left( \int_{\Omega} u(x, t)dx \right)_t - p(t) \Delta c(x) \int_{\Omega} u(x, t)dx = f(x). \quad (1)$$

Pour  $u_0 \neq 0$ , il existe  $\Psi$ , fonction propre de  $-\Delta$ , sur  $\Omega$  :

$$\begin{cases} -\Delta \Psi = k\Psi \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ \Psi = 0 \text{ dans } \partial\Omega \times (0, T), \end{cases}$$

telle que :  $\int_{\Omega} u(x, 0)\Psi(x)dx \neq 0$ .  $\Psi$  est non proportionnelle à  $c$ , car sinon  $f$  et  $u_0$  seraient proportionnelles à  $\Psi$ . De plus :

$$\left( \int_{\Omega} u(x, t)\Psi(x)dx \right)_t + kp(t) \int_{\Omega} u(x, t)\Psi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\Psi(x)dx.$$

Or :

$$\int_{\Omega} u(x, t)\Psi(x)dx = \int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx \int_{\Omega} u(x, t)dx,$$

donc :

$$\int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx \left( \int_{\Omega} u(x, t)dx \right)_t + kp(t) \int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx \int_{\Omega} u(x, t)dx = \int_{\Omega} f(x)\Psi(x)dx. \quad (2)$$

En faisant :  $c(x)(2) - \left( \int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx \right)(1)$ , on obtient :

$$p(t) \left( \int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx \right) [kc + \Delta c] \int_{\Omega} u(x, t)dx = c(x) \int_{\Omega} f(x)\Psi(x)dx - f(x) \int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx.$$

D'où, en remarquant que :  $\int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx = \frac{\int_{\Omega} u(x, 0)\Psi(x)dx}{\int_{\Omega} u(x, 0)dx} \neq 0$  et  $\Delta c(x) + kc(x) \neq 0$ ,

$$p(t) \left( \int_{\Omega} u(x, t)dx \right) = \frac{c(x) \left( \int_{\Omega} f(x)\Psi(x)dx \right) - f(x) \int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx}{[\Delta c(x) + kc(x)] \int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx}.$$

On constate que :

- $p(t)(\int_{\Omega} u(x, t)dx)$  est une fonction de  $t$ ,
- $\frac{c(x)(\int_{\Omega} f(x)\Psi(x)dx) - f(x)\int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx}{[\Delta c(x) + kc(x)] \int_{\Omega} c(x)\Psi(x)dx}$  est une fonction de  $x$ .

Donc, il existe une constante  $C$  telle que :

$$p(t) = \frac{C}{\int_{\Omega} u(x, t)dx}.$$

### REMARQUE 0.1.

Réciproquement, on montre sous certaines hypothèses que cette condition est aussi suffisante (voir page 102).

### REMARQUE 0.2.

Le coefficient  $p(t)$  étant de la forme :

$$p(t) = \frac{C}{\int_{\Omega} u(x, t)dx},$$

nous sommes naturellement amenés à étudier le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

et d'une façon plus générale le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Les ouverts disjoints  $\partial\Omega_0$  et  $\partial\Omega_1$  de  $\partial\Omega$  vérifient :  $\overline{\partial\Omega_0} \cup \overline{\partial\Omega_1} = \partial\Omega$ , et  $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$ ,  $n$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$  et  $a$  est une fonction réelle continue.

On supposera souvent  $f(x)$  et  $u_0(x)$  positifs ou nuls pour  $x$  appartenant à  $\Omega$ , domaine régulier de  $R^N$ . On a en effet le théorème suivant qui assure la positivité de  $u$  :

**THEOREME 0.2.**

Si  $f(x)$ ,  $u_0(x) \geq 0$ , si  $a(\int_{\Omega} u) > 0$  et si le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = f(x) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

admet une solution régulière  $u$ , alors :  $u(x, t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ .

**DEMONSTRATION.**

On pose :  $u = u^+ - u^-$  où  $u^+$ ,  $u^-$  désignent respectivement la partie positive et la partie négative de  $u$  et on suppose que ces fonctions peuvent être prises comme fonctions tests.

$$\begin{aligned} \langle u_t, u^- \rangle - a(\int_{\Omega} u) \langle \Delta u, u^- \rangle &= \langle f, u^- \rangle, \\ \langle u_t^+ - u_t^-, u^- \rangle + a(\int_{\Omega} u) \langle \nabla u^+ - \nabla u^-, \nabla u^- \rangle &= \langle f, u^- \rangle, \end{aligned}$$

donc :

$$-\frac{1}{2}(\|u^-\|^2)_t - a(\int_{\Omega} u) \langle \nabla u^-, \nabla u^- \rangle = \langle f, u^- \rangle.$$

Ainsi :  $\|u^-\|^2$  est fonction décroissante de  $t$ . Comme  $u_0 \geq 0$ , elle est nulle en  $t = 0$ , et donc identiquement nulle.

**REMARQUE 0.3.**

Certains exemples que nous expliciterons plus tard, montrent cependant que même pour  $u_0(x) \geq 0$  et  $f(x) \geq 0$ , il existe des temps  $t > 0$  pour lesquels la solution  $u(x, t)$  du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

prend des valeurs négatives. Ceci est dû à la perte du caractère parabolique de ces équations après dégénérescence du coefficient  $a(\int_{\Omega} u)$ .

Pour expliquer ce phénomène, qui est, en fait, la perte du principe du maximum, la nature de la fonction  $a(x)$  est essentielle.

On montre que le comportement de la solution va dépendre de la position de la courbe :

$y = a(x)$  par rapport à l'hyperbole :  $y = \frac{\int_{\Omega} f\phi}{x}$ , où  $\phi$  vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 1 \text{ dans } \Omega, \\ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0 \neq \emptyset, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

### THEOREME 0.3.

On suppose :  $\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx \neq 0$ .

$$\text{L'équation stationnaire : } \begin{cases} -a(\int_{\Omega} u)\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1, \end{cases}$$

admet autant de solutions qu'il y a de racines à l'équation :  $xa(x) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$ .

### DEMONSTRATION.

Si  $u$  est solution, alors :

$$-a\left(\int_{\Omega} u(x,t)dx\right)\phi(x)\Delta u = f(x)\phi(x),$$

et par intégration sur  $\Omega$  :

$$a\left(\int_{\Omega} u(x,t)dx\right) \int_{\Omega} u(x,t)dx = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx.$$

Donc  $\int_{\Omega} u(x,t)dx$  est racine de l'équation :  $xa(x) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$ .

Réciproquement, soit  $l$  une racine de  $xa(x) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$  et soit  $u$  solution de :

$$\begin{cases} -a(l)\Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

On a simultanément :

$$a(l) \int_{\Omega} u(x,t)dx = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx,$$

et :

$$a(l)l = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx,$$

donc :

$$l = \int_{\Omega} u(x,t)dx, \quad \text{car } a(l) \neq 0 \text{ si } \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx \neq 0.$$

### REMARQUE 0.4.

L'hyperbole  $y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$  dégénère en la droite  $y = 0$  pour  $\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = 0$ .  
C'est à dire, si on suppose  $f \geq 0$ , pour  $f = 0$  (cas homogène).

## II. PRESENTATION DES PRINCIPAUX RESULTATS.

Soit  $V$  l'espace des fonctions  $u$  de  $H^1(\Omega)$  telles que  $u|_{\partial\Omega_0} = 0$ .

$V$  muni de la topologie induite est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$ . D'après l'inégalité de POINCARÉ, voir [DL3], on peut munir  $V$  de la norme :  $(\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2)^{\frac{1}{2}}$ , alors équivalente à celle de  $H^1(\Omega)$ .

Comme le laisse entrevoir la remarque précédente, le premier chapitre est consacré à l'étude du problème homogène :

$$(H) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

L'existence globale et le comportement asymptotique de (H) reposent sur un théorème du point fixe réel.

### THEOREME 1.1.

On suppose que  $u_0$  est une fonction de  $L^2(\Omega)$  et que  $a$  est une fonction continue de  $R$  dans  $R$ . On suppose de plus, qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  vérifiant pour tout  $x$  réel :  $0 < m \leq a(x) \leq M$ .

Alors, il existe une unique fonction  $u$  vérifiant (H) telle que :

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0.$$

$u(x, t)$  converge uniformément vers 0 dans  $\bar{\Omega}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , et 0 est un point d'attraction asymptotiquement stable au sens de LYAPUNOV pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

Remarquons que, sous les conditions du théorème 1.1, l'équation reste toujours parabolique et on peut, en particulier, lui appliquer les principes classiques de la théorie (principes du maximum, sous-solutions, sur-solutions...).

Cette situation ne se conserve pas si on affaiblit les conditions sur  $a$ . Par exemple, si on renonce aux "conditions naturelles" :  $0 < m \leq a(x) \leq M$  et si on suppose que  $a$  est une fonction réelle, positive et continue seulement pour  $x > 0$ , on constate que la solution s'éteint après un temps  $T_{\infty}$ .

### THEOREME 1.2. (Extinction en temps fini)

On pose :  $H(t) = \int_{\Omega} v(x, t) dx$  où  $v$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ v(x, 0) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

Soit  $a$  une fonction réelle, positive et continue pour  $x > 0$ , on pose :

$$T_{\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a \circ H[z]} dz,$$

et on suppose :  $T_{\infty} < \infty$ . Le problème (H) admet une unique solution globale toujours positive ou nulle. Cette solution devient identiquement nulle, simultanément en chaque point de  $\bar{\Omega}$  pour  $t = T_{\infty}$ .

Il est possible dans certains cas de déterminer exactement l'instant où la solution devient identiquement nulle. Par contre, le cas général s'avère plus difficile. On se propose, quand le calcul explicite de  $T_{\infty}$  n'est pas possible, de définir un critère simple permettant de dire si  $T_{\infty}$  est fini ou non.

### THEOREME 1.3.

Soit  $a$  une fonction réelle positive et continue sur  $R^{+*}$ .

Soit  $(C, k)$  dans  $R^{+*} \times R$ . On suppose que si :

$f(t) \sim C \exp(-kt)$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , alors  $a[f(t)] \sim a[C \exp(-kt)]$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

$T_{\infty}$  est fini si et seulement si l'intégrale :

$$J = \int_0^{\cdot} \frac{dx}{xa(x)},$$

éventuellement singulière à l'origine, est finie.

On peut parfois prolonger la solution en temps au-delà de  $T_{\infty}$ .

#### THEOREME 1.4.

Soit  $a$  une fonction réelle, continue et positive quand  $x \in R^{*+}$  et soit  $u_0$  positive dans  $C^2(\overline{\Omega})$ .  $D$  est un intervalle ouvert réel contenant 0.

On suppose que  $I(x) = \int_0^x \frac{dy}{ya(y)}$  existe et est finie pour tout  $x$  dans  $D$ .

a) Si la fonction  $xa(x)$  admet une limite nulle, quand  $x \rightarrow 0$ , la solution  $u(x, t)$  se prolonge de façon continue et dérivable en temps, au-delà de  $T_\infty$ , par la fonction nulle.

b) Si la fonction  $xa(x)$  admet une limite finie non nulle, ou infinie quand  $x \rightarrow 0$ , et si  $I(x)$  est bijective de  $D$  sur  $I(D)$ , alors il est encore possible de prolonger la solution  $u(x, t)$  de façon continue (et dérivable) en temps, au-delà de  $T_\infty$ .

L'étude du cas homogène montre qu'il faut des conditions fortes sur  $a$  pour établir l'existence d'une solution globale. La nature même du problème laisse cependant supposer l'existence d'une solution locale. Ceci fait l'objet du chapitre 2.

#### THEOREME D'EXISTENCE LOCALE 2.1.

On suppose que  $u_0$  est une fonction dans  $L^2(\Omega)$  et que  $f$  est dans  $L^2(0, T; V')$ , où  $V'$  est le dual de  $V$ .

$a$  est une fonction continue, strictement positive dans un voisinage de  $\int_\Omega u_0(x)dx$ .

Alors, il existe  $T > 0$  tel que le problème :

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_\Omega u) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

admette une solution (locale) dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ .

La démonstration de ce théorème nous montre aussi quelles hypothèses il faut mettre sur les données du problème pour qu'il y ait existence globale et unicité de la solution.

**THEOREME D'EXISTENCE GLOBALE 2.2.** (avec conditions naturelles de structure)

On suppose que  $u_0$  et  $\Delta u_0$  sont des fonctions de  $L^2(\Omega)$  et que  $f$  est dans  $V$ .  $a$  est une fonction continue, vérifiant les conditions naturelles de structure :

$$0 < m \leq a \leq M.$$

Alors, pour tout  $T > 0$ , le problème (P) admet une solution (globale) dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ .

Si de plus, on suppose que  $a$  est une fonction lipschitzienne, cette solution est unique.

Le chapitre 3 est consacré au comportement asymptotique des solutions globales, et met en évidence l'existence de domaines invariants et de points fixes instables. On considère l'ensemble des points d'intersection entre la courbe :

$$y = a(x),$$

et l'hyperbole :

$$y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$$

contenus dans un compact donné,  $[a_0, a_1] \times [b_0, b_1]$ , de  $R^2$ . On suppose que  $a$  est strictement positive sur  $[a_0, a_1]$ . Définissons alors  $u_m$  et  $u_M$  par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \min_{x \in [a_0, a_1]} a(x)\Delta u_m = f \text{ dans } \Omega, \\ u_m = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_m}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} - \max_{x \in [a_0, a_1]} a(x)\Delta u_M = f \text{ dans } \Omega, \\ u_M = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_M}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{array} \right.$$

On note alors  $Z$  l'ensemble des fonctions de  $V$  comprises entre  $u_M$  et  $u_m$ .

$$Z = \{u \in V / u_M \leq u \leq u_m\}.$$

$Z$  est un convexe, fermé de  $V$ , non vide car contenant  $u_m$  et  $u_M$ .

Nous montrons que  $Z$  est un domaine stable c'est à dire que si  $u_0$ , condition initiale du problème, est prise dans l'ensemble  $Z$  alors  $u(\cdot, t)$ , est encore dans  $Z$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

### THEOREME 3.2.

Soient  $u_0$ , une fonction de  $Z$ , et  $f$  une fonction positive de  $V'$ .

$a$  est strictement positive sur  $[a_0, a_1]$  et vérifie les relations :

$$\min_{x \in [a_0, a_1]} a(x) = \min_{x \in [\int_{\Omega} u_M(x) dx, \int_{\Omega} u_m(x) dx]} a(x) \text{ et } \max_{x \in [a_0, a_1]} a(x) = \max_{x \in [\int_{\Omega} u_M(x) dx, \int_{\Omega} u_m(x) dx]} a(x)$$

Alors, le problème (P) admet une solution globale dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ .  
De plus, si  $u_0$  est dans  $Z$  alors  $u(\cdot, t)$  est encore dans  $Z$ , quelque soit  $t \in [0, T]$ .

L'existence de domaines invariants conduit naturellement à la notion d'attracteur maximal.  
Soit  $w$  la solution de l'équation elliptique :

$$\begin{cases} -\Delta w = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Soit  $X$  la droite de  $L^2(\Omega)$  portée par  $w$ .

$$X = D_w = \{u \in L^2(\Omega) / u = mw, m \in R\}.$$

$X$  contient toutes les solutions stationnaires  $u_{\infty}$  car :

$$u_{\infty} = \frac{w}{a(\int_{\Omega} u_{\infty}(x) dx)}.$$

Pour  $u_{\infty}$  fixé, on suppose qu'il existe  $a^+$  fonction croissante et  $a^-$  fonction décroissante de  $x$ , vérifiant :

$$a^-(x) \leq a(x + \int_{\Omega} u_{\infty}) \leq a^+(x), \quad \forall x \in R,$$

et qu'il existe, pour tout couple de réels strictement positifs  $(x, y)$ , une fonction croissante  $w$ , telle que :

$$\left| \frac{1}{a(x)} - \frac{1}{a(y)} \right| \leq w(|x - y|).$$

Soit  $C$  la constante de POINCARÉ. On pose :

$$F(y) = a^-(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y})y - a^+(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y}) \frac{\|f\|_2^2}{C^2} (w(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y}))^2,$$

et on suppose qu'il existe un unique réel positif  $k$  tel que :

$$F(y) = 0 \text{ pour } y = k, \quad F(y) > 0 \text{ pour } y > k.$$

Pour  $a(x)$  vérifiant :  $0 < m \leq a(x) \leq M$ , on peut poser :

$$a^-(x) = m, \quad a^+(x) = M \quad \text{et} \quad w(x) = \frac{M - m}{m^2}.$$

On a :

$$F(y) = my - \left( \frac{(M - m) \|f\|_2}{m^2} \right)^2 \frac{M}{C^2},$$

et donc :

$$k = \left( \frac{(M - m) \|f\|_2}{m^2} \right)^2 \frac{M}{C^2 m}.$$

On peut établir directement l'inégalité :

$$\| (u - u_\infty) \|_2^2 \leq k + (\| u_0 - u_\infty \|_2^2 - k) \exp(-Cmt),$$

et donc, pour  $t$  assez grand :

$$\| (u - u_\infty) \|_2^2 \leq 1 + k.$$

Si on remarque dans ce cas pour  $s_0$ , nombre positif donné, que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{s_0}^x \frac{dy}{F(y+k)} = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{s_0}^x \frac{dy}{my} = \frac{1}{m} \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{s_0}\right) = -\infty \text{ avec } s_0 > 0,$$

ce résultat provient du théorème général suivant :

#### THEOREME 3.4.

On considère une solution stationnaire  $u_\infty$  élément de  $X$ .

Soit  $K = \{v \in V / \|v - u_\infty\|_2^2 \leq 1 + k\}$ .

On suppose :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{s_0}^x \frac{dy}{F(y+k)} = -\infty.$$

Alors  $K$  est un compact absorbant de  $L^2(\Omega)$  :

$$\forall B \text{ borné } \subset L^2(\Omega), \exists t(B) \text{ tel que } \forall t \geq t(B), \forall u_0 \in B, u \in K.$$

L'existence de  $K$  compact absorbant dans  $L^2(\Omega)$ , espace métrique complet, implique que l'ensemble  $A$  des images des trajectoires complètes bornées est attractif et invariant, c'est à dire qu'il est l'attracteur maximal cherché. (cf. [Ha])

$A$  est exactement l'ensemble des données initiales des solutions  $u$  globales et bornées de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_\Omega u) \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times R, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0 \times R, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \times R. \end{cases}$$

Dans le chapitre 4, nous étudions, afin de mieux comprendre son comportement asymptotique, la croissance de  $u(x, t)$  (Th. 4.1), puis celle de  $\int_{\Omega} u(x, t)dx$  (Th. 4.2) en fonction de la variable  $t$ .

**THEOREME 4.1. (croissance de  $u(t)$ )**

Soient  $u_0$  et  $\Delta u_0$ , deux fonctions de  $L^2(\Omega)$ , et  $f \geq 0$  dans  $V$ .

On suppose que  $a$  est strictement positive, continûment dérivable, décroissante sur  $R^{*+}$  et que :  $f + a(\int_{\Omega} u_0(x)dx)\Delta u_0 \geq 0$ . Alors, le problème (P) admet une solution globale unique dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  qui de plus est fonction croissante de  $t$ .

**THEOREME 4.2. (croissance de  $\int_{\Omega} u(x, t)dx$ )**

On suppose  $\Omega, \partial\Omega_0, \partial\Omega_1$  invariants par chacune des symétries orthogonales ( $S_i$ ) d'hyperplan ( $x_i = 0$ ), où  $i$  parcourt  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ .

Soit  $g_0$  une fonction impaire définie sur  $\Omega$ .

$u_0, f$  et  $\Delta u_0$  sont des fonctions de  $L^2(\Omega)$ .

$a$  est une fonction continue, décroissante de  $R^{*+}$  dans  $R^{*+}$ , lipschitzienne pour  $x \geq \int_{\Omega} u_0(x)dx$ .

On suppose que :

$$\begin{cases} f \geq 0, \\ f + a(\int_{\Omega} u_0)\Delta u_0 \geq g_0, \\ u_0 \geq 0, \quad (u_0 \neq 0). \end{cases}$$

Alors, pour tout  $T > 0$  le problème (P) admet une solution globale unique dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ , telle que  $\int_{\Omega} u(x, t)dx$  est fonction croissante de  $t$ .

On en déduit les deux points suivants :

A) si on suppose que pour  $x$  assez grand, la courbe  $y = a(x)$  est toujours située au-dessus de l'hyperbole,  $y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$ , alors  $\int_{\Omega} u(x, t)dx$  est bornée. D'après l'étude qui précède, elle est convergente quand  $t \rightarrow +\infty$ . On établit qu'il existe une solution stationnaire  $u_{\infty}$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, t) - u_{\infty}(x)| = 0.$$

B) si  $\int_{\Omega} u_0(x)dx$  est dans l'intervalle  $[l, L]$  où  $l$  et  $L$  sont solutions successives de l'équation :

$$a(x) = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x},$$

et si la fonction :

$$y = a(x) - \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$$

s'annule en changeant de signe pour  $x = L$ .  $\int_{\Omega} u(x,t)dx$  est croissante et ne peut quitter l'intervalle  $[l, L]$ .

A nouveau, il existe une solution stationnaire  $u_{\infty}$ , avec  $L = a(\int_{\Omega} u_{\infty}(x)dx)$ , vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x,t) - u_{\infty}(x)| = 0.$$

Dans l'étude des points d'intersection entre la courbe  $y = a(x)$  et  $y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$ , on peut considérer comme extrêmes les situations où  $y = a(x)$  est elle-même du type  $y = \frac{k}{x}$ . Dans le chapitre 5, nous allons considérer :

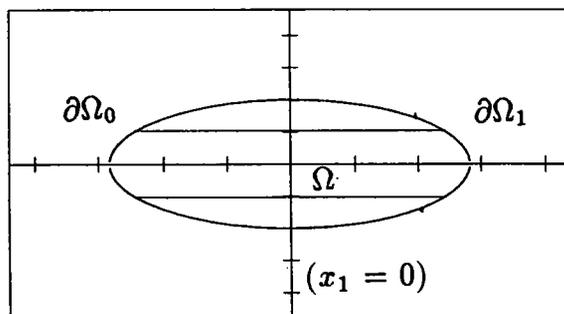
$$\begin{cases} 1) & k = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx, \\ 2) & k > \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx, \\ 3) & k < \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx. \end{cases}$$

Pour  $k = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$ , les deux courbes coïncident et ont donc en commun une infinité de points.

Pour  $k > \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$  ou  $k < \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$ , l'hyperbole  $y = a(x)$  est située strictement au-dessus ou strictement au-dessous, et n'a donc avec  $y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$  aucun point d'intersection.

### PREMIER CAS : $k = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$ .

La courbe :  $y = a(x)$ , et l'hyperbole :  $y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$ , se superposent. Pour démontrer le théorème qui décrit la convergence de  $u$ , nous avons besoin d'un lemme qui est une extension élémentaire de l'inégalité de POINCARÉ à d'autres normes  $L^2$ .



Comme  $\Omega$  est borné, on suppose qu'il est contenu dans une bande d'épaisseur finie  $]-a, a[$  dans la direction  $x_1$ , et que tous les points de  $\Omega$  sont sur des droites passant par  $\partial\Omega_0$  et orthogonales à l'hyperplan  $(x_1 = 0)$ . On prolonge les fonctions en dehors de  $\partial\Omega_0$  par la valeur 0.

**LEMME 5.1.**

Soit  $\alpha > 0$  et soit  $\psi$  une fonction vérifiant  $0 \leq \psi(x) \leq \alpha$ ,  $\forall x \in \Omega$ . On suppose qu'il existe une fonction  $F$  de  $x_1$  intégrable sur  $[-a, a]$  telle que :

$$\int_{-a}^{x_1} \frac{1}{\psi(x, x_2, \dots, x_N)} dx < F(x_1), \quad \forall (x_2, \dots, x_N) \in P,$$

où  $P$  est la projection orthogonale de  $\Omega$  sur l'hyperplan  $x_1 = 0$ .

Pour toute fonction  $v$  de  $V$ , on a :

$$\int_{\Omega} v(x)^2 \psi(x) dx \leq C \int_{\Omega} \|\nabla v(x)\|^2 \psi(x) dx.$$

Nous allons utiliser la notation suivante :

**NOTATION 5.1.**

On désignera par  $S$ , l'ensemble des fonctions poids :  $\psi$  de  $L^2(\Omega)$  pour lesquelles il existe une fonction  $F$  de  $x_1$  intégrable sur  $[-a, a]$  telle que :

$$\int_{-a}^{x_1} \frac{1}{\psi(x, x_2, \dots, x_N)} dx < F(x_1) \quad \forall (x_2, \dots, x_N) \in P,$$

et qui vérifient de plus :  $\Delta \psi(x) \leq 0$ , et  $0 \leq \psi(x) \leq \alpha \quad \forall x \in \Omega$ .

On en déduit :

**THEOREME 5.1.**

Soient  $u_0$  une fonction de  $L^2(\Omega)$ , et  $f$  une fonction de  $V$  qui ne s'annule pas sur  $\partial\Omega_1$ .

Soit  $u$  dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  solution positive du problème :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{\int_{\Omega} u(x)dx} \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{array} \right. \quad \text{avec } \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Soit  $u_{\infty}$  la solution du système stationnaire associé qui vérifie :

$$\int_{\Omega} u_{\infty}(x)\phi(x)dx = \int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx.$$

On suppose que  $\psi(x) = \frac{\phi(x)}{f(x)}$  est dans  $S$ .

Alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u(x, t) - u_{\infty}(x))^2 \frac{\phi(x)}{f(x)} dx = 0.$$

**DEUXIEME CAS :**  $k > \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx.$

La courbe :

$$y = a(x) = \frac{k}{x},$$

est toujours située strictement au-dessus de l'hyperbole :

$$y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}.$$

On montre la perte du caractère parabolique de l'équation. Pour :

$$\Delta\left(\frac{\phi}{f}\right) \leq 0, \text{ et } \left(\frac{\phi}{f}\right) \leq C^{te},$$

il existe  $t_0$ , à partir duquel, l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta u = f,$$

perd son sens puisque l'intégrale  $\int_{\Omega} u(x, t_0)dx$  vérifie :

$$\int_{\Omega} u(x, t_0)dx = 0.$$

**TROISIEME CAS :**  $k < \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx.$

La courbe :

$$y = a(x) = \frac{k}{x},$$

est toujours située strictement sous l'hyperbole :

$$y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}.$$

Nous connaissons le comportement de  $u$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

$$\|u\|_2 \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Nous allons préciser ce comportement, en remarquant, pour certaines conditions initiales données, l'existence de solutions à variables séparées, puis en démontrant que celles-ci "attirent" toutes les trajectoires solutions quand  $t \rightarrow +\infty$ .

### THEOREME 5.2 :

Soit  $f$  une fonction de  $L^2$ , positive ou nulle et non identiquement nulle.

On suppose qu'il existe une fonction  $u_0$  positive ou nulle et non identiquement nulle dans  $V$ , vérifiant au sens des distributions :

$$(u_0 - f) \int_{\Omega} u_0 \leq k \Delta u_0 \leq 0.$$

Alors le problème :

$$\begin{cases} u - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1, \end{cases}$$

admet une solution positive dans  $V$ .

### THEOREME 5.3.

Les conditions du théorème précédent sont encore vérifiées : c'est à dire qu'il existe des solutions à variables séparées :  $v(x, t) = (t + a)v_0(x)$ .

On suppose de plus que :  $\Delta v_0 \leq 0$  ne s'annule pas sur  $\partial\Omega_1$  et que  $\psi = \frac{-\phi}{\Delta v_0} \in S$ .

Soit  $u$  solution positive du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad f \in V, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

$u \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V)$ , avec  $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

Alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u - v\|_{L^2(\psi)} = 0$$

(avec décroissance homographique).

Ce chapitre 5 traduit, en fait, l'existence d'un phénomène de bifurcation. Soit  $\lambda$  un paramètre, écrivons le problème sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta u = \lambda f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

et supposons que les conditions des théorèmes 5.1, 5.2, 5.3 soient vérifiées.

- a) Si  $\lambda < \lambda^*$  : la solution dégénère en temps fini.
- b) Si  $\lambda = \lambda^*$  : la solution converge au sens d'une certaine norme  $L^2$ .
- c) Si  $\lambda > \lambda^*$  : la solution tend vers  $+\infty$  en norme  $L^2$  et on sait expliciter cette convergence à l'aide de solutions à variables séparées.

## Chapitre 1

### ETUDE DE L'EQUATION HOMOGENE

## Chapitre 1

### ETUDE DE L'EQUATION HOMOGENE

L'existence globale et le comportement asymptotique de l'équation homogène reposent sur un théorème du point fixe réel.

#### I. RAPPEL.

Les équations du type :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t)\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

où  $A(t)$  est une fonction mesurable de  $t$ , strictement positive, se réduisent par changement de variable en une équation classique de la chaleur où le terme conductif est égal à 1. Posons :  $\tau(t) = \int_0^t A(y)dy$ ,  $\tau$  est un difféomorphisme de  $[0, T[$  dans  $[0, \tau(T)[$ .

Posons ensuite :  $v(x, \tau) = u(x, t)$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t)\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad \text{s'écrit :} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \tau(T)), \\ v = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, \tau(T)), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, \tau(T)), \\ v(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

#### II. EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION GLOBALE.

##### THEOREME 1.1.

On suppose que  $u_0$  est une fonction de  $L^2(\Omega)$  et que  $a$  est une fonction continue de  $R$  dans  $R$ . On suppose de plus, qu'il existe deux réels  $m$  et  $M$  vérifiant pour tout  $x$  réel :  $0 < m \leq a(x) \leq M$ .

Alors, il existe une unique fonction  $u$  telle que :

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0,$$

où  $V = \{u \in H^1(\Omega) / u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0 \neq \emptyset\}$  et vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

## DEMONSTRATION.

Parmi les fonctions continues strictement positives, on cherche à établir l'existence de  $A(t)$  vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t)\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ A(t) = a(\int_{\Omega} u). \end{cases}$$

On pose :  $H(t) = \int_{\Omega} v(x, t)dx$  où  $v$  est la solution faible du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ v(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Comme  $u_0$  est dans  $L^2(\Omega)$ ,  $v$  est dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$  et  $H(t)$  est fonction continue de  $t$ .  
En effet :

$$\forall \epsilon \geq 0, \quad \exists \eta \geq 0 \quad \text{tel que} \quad |t - t'| \leq \eta \quad \text{implique} :$$

$$|H(t) - H(t')| \leq \int_{\Omega} |v(x, t) - v(x, t')| dx,$$

$$|H(t) - H(t')| \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|v(x, t) - v(x, t')\|_2 \leq \epsilon.$$

On a donc :  $A(t) = a \circ H[\int_0^t A(y)dy]$  car  $H(\tau) = \int_{\Omega} v(x, \tau)dx = \int_{\Omega} u(x, t)dx$ ,  
où, comme précédemment :

$$\tau(t) = \int_0^t A(y)dy.$$

Ce qui nous amène à résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \tau'(t) = a \circ H[\tau(t)], \\ \tau(0) = 0, \end{cases}$$

que l'on écrit sous la forme :

$$\int_0^t \frac{\tau'(z)}{a \circ H[\tau(z)]} dz = t,$$

ou encore :

$$\int_0^{\tau(t)} \frac{1}{a \circ H[z]} dz = t.$$

Posons :  $F(u) = \int_0^u \frac{1}{a \circ H[z]} dz$ . L'expression de  $F(u)$  a un sens car  $v$  étant dans  $C(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $H$ , et  $a \circ H$ , sont des fonctions continues de  $t$ , minorées par  $m > 0$ .  $F$  est une fonction dérivable, strictement croissante de  $[0, +\infty[$  dans  $[0, +\infty[$ . En effet :

- .  $F'(u) = \frac{1}{a[H(u)]} > 0$  car  $a(x) > 0, \forall x \in R$ .
- .  $F(0)=0$ .
- .  $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = +\infty$ .

Car  $0 < m \leq a[H(z)] \leq M$  implique :

$$\int_0^u \frac{1}{M} dz \leq \int_0^u \frac{1}{a \circ H[z]} dz \leq \int_0^u \frac{1}{m} dz,$$

donc :

$$\frac{u}{M} \leq \int_0^u \frac{1}{a \circ H[z]} dz \leq \frac{u}{m},$$

ce qui prouve :  $\lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = +\infty$ .

Ainsi, pour  $t \geq 0$ , l'équation  $F[\tau(t)] = t$  s'inverse en  $\tau(t) = F^{-1}(t)$ .

$\tau$  est donc une fonction strictement croissante de  $t$ . Comme  $A(t) = \tau'(t)$ ,  $A(t)$  existe, est définie de façon unique, et est strictement positive. Le problème étudié s'écrit donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \tau'(t)\Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Comme  $\tau'(t) > 0$ , le rappel qui précède permet d'assurer l'existence et l'unicité de  $u$ . En particulier (cf. [F] ou [DL8]) :

$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} v(x, \tau) = 0$  uniformément dans  $\overline{\Omega}$ , car on a supposé  $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$ .

### DEFINITION 1.1.

Soit  $(X, d)$  un espace de BANACH et  $S(t)_{t \geq 0}$  un système dynamique sur  $X$ . Une trajectoire  $u(t) = S(t)u_0$  est dite  $(X, d)$  asymptotiquement stable au sens de LYAPUNOV si :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 ; x_0 \in X, \quad d(x_0, u_0) \leq \eta \Rightarrow d(S(t)x_0, u(t)) \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0, \\ \exists \nu > 0 ; x_0 \in X, \quad d(x_0, u_0) \leq \nu \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} d(S(t)x_0, u(t)) = 0. \end{aligned}$$

### CONSEQUENCE 1.1.

$u(x, t)$  converge uniformément vers 0 dans  $\overline{\Omega}$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , et 0 est un point d'attraction asymptotiquement stable au sens de LYAPUNOV pour la norme  $\| \cdot \|_{\infty}$ .

En effet, par application du principe du maximum :

$$\| u \|_{\infty} \leq \| u_0 \|_{\infty},$$

et donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta = \epsilon > 0, \|u_0\|_\infty \leq \eta \Rightarrow \|u\|_\infty \leq \epsilon, \forall t \geq 0.$$

### REMARQUE 1.1.

Une étude énergétique  $L^2$  conduisait aussi, directement à ce type de résultat. Soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_\Omega u) \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Si on multiplie par  $u$  l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_\Omega u) \Delta u = 0,$$

on obtient :

$$\frac{u \partial u}{\partial t} - u a(\int_\Omega u) \Delta u = 0.$$

Ceci conduit à l'équation énergétique :

$$\frac{d(\|u\|_2^2)}{dt} = -2a(\int_\Omega u(x, t) dx) \int_\Omega \|\nabla u(x, t)\|^2 dx,$$

où  $\|\nabla u(x, t)\|$  désigne la norme euclidienne du gradient de  $u$ .

$u$  est dans  $L^2(0, T; V)$ , donc d'après l'inégalité de POINCARÉ :

$$-\int_\Omega \|\nabla u(x, t)\|^2 dx \leq -C \|u\|_2^2,$$

donc :

$$\frac{d(\|u\|_2^2)}{dt} \leq -C' \|u\|_2^2, \quad C' > 0,$$

et d'après le lemme de GRONWALL :

$$\|u\|_2^2 \leq \|u_0\|_2^2 e^{-C't}.$$

### REMARQUE 1.2.

La même démonstration d'existence et d'unicité convient si on suppose seulement  $a$  continue, strictement positive sur l'intervalle  $[0, |\Omega|^{-\frac{1}{2}} \|u_0\|_2]$  et  $u_0$  positive.

En effet, on pose  $H(t) = \int_{\Omega} v(x, t) dx$  où  $v$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ v(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Donc, d'après le principe du maximum  $H(t) \geq 0$  et d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$H(t) \leq \|1\|_2 \|v\|_2,$$

$$H(t) \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u_0\|_2,$$

car :  $\|v\|_2 \leq \|u_0\|_2$ .

$a$  étant strictement positive et continue sur l'intervalle  $[0, |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u_0\|_2]$ , il existe  $m$  et  $M$  tels que :  $0 < m \leq a[H(t)] \leq M$ .

### REMARQUE 1.3.

Dans le cas précédent, le temps de parabolicité  $T_{\infty}$  est infini i.e. l'équation reste toujours parabolique et on peut, en particulier, lui appliquer les principes classiques de la théorie (principes du maximum, sous-solutions, sur-solutions...).

Cette situation se conserve-t-elle si on affaiblit les conditions sur  $a$ , par exemple si on renonce aux "conditions naturelles" :  $0 < m \leq a \leq M$  et si on suppose que  $a$  est une fonction réelle, positive et continue seulement pour  $x > 0$  ?

## III. EXTINCTION EN TEMPS FINI DE LA SOLUTION.

### A) THEOREME D'EXISTENCE 1.2.

On pose :  $H(t) = \int_{\Omega} v(x, t) dx$  où  $v$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ v(x, 0) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

Soit  $a$  une fonction réelle, positive et continue pour  $x > 0$ , on pose :

$$T_{\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a \circ H[z]} dz,$$

et on suppose :  $T_{\infty} < \infty$ . Le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u) \Delta u = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \end{cases}$$

admet une unique solution globale qui est toujours positive ou nulle. Cette solution devient identiquement nulle, simultanément en chaque point de  $\bar{\Omega}$  pour  $t \geq T_{\infty}$ .

## DEMONSTRATION.

Comme précédemment, on étudie l'équation :  $F[\tau(t)] = t$  mais cette fois-ci la fonction  $F$  possède d'autres propriétés.

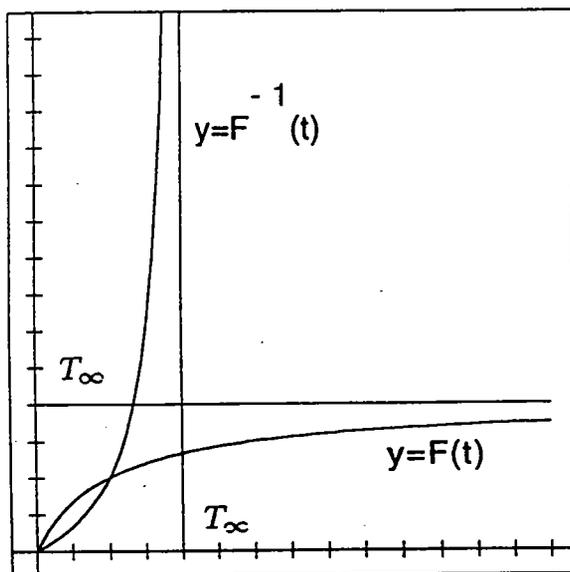
$F'(u)$  est du signe de  $\frac{1}{a[H(u)]}$  or  $a[H(u)] \geq 0$  car  $H(u) \geq 0$ , donc  $F$  est croissante. Supposons par exemple  $\lim_{x \rightarrow 0} a(x) = +\infty$ . Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) = 0$ , il est impossible de trouver  $M$  tel que :  $a \circ H(t) \leq M$ . En particulier on n'a pas nécessairement  $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +\infty$ .

Ici, on se place justement dans le cas d'une fonction réelle  $a$ , positive et continue pour  $x > 0$  et pour laquelle :

$$T_\infty = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a \circ H[z]} dz < \infty.$$

Nous pouvons alors seulement affirmer que  $F$  est dérivable croissante de  $[0, +\infty[$  dans  $[0, T_\infty[$  où :

$$T_\infty = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a \circ H[z]} dz.$$



Ainsi, l'équation :  $F[\tau(t)] = t$  n'est possible que si :  $t \in [0, T_\infty[$  ; auquel cas elle s'inverse en :  $\tau(t) = F^{-1}(t) \geq 0$ .

Donc, tant que  $t$  parcourt  $[0, T_\infty[$ , il existe une solution unique et positive.

Par ailleurs :

$$\lim_{t \rightarrow T_\infty} \int_0^t A(t) dt = \lim_{t \rightarrow T_\infty} \tau(t) = \lim_{t \rightarrow T_\infty} F^{-1}(t) = +\infty,$$

ce qui implique, puisque  $u(x, t) = v(x, \int_0^t A(t))$ , que :  $\lim_{t \rightarrow T_\infty} u(x, t) = 0$ .

Montrons maintenant qu'il n'existe qu'une seule façon de prolonger  $u$  au-delà de  $T_\infty$  en une solution jamais strictement négative ; c'est de choisir  $u = 0$  pour  $t > T_\infty$ . Soit :

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 1 & \text{dans } \Omega, \\ \phi = 0 & \text{dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Dans ces conditions, l'équation :  $\frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_\Omega u)\Delta u = 0$  permet d'écrire l'égalité suivante :

$$\left(\int_\Omega u(x, t)\phi(x)dx\right)_t = -\left(\int_\Omega u(x, t)dx\right)a\left(\int_\Omega u(x, t)dx\right).$$

Donc, pour  $t > T_\infty$ ,  $u(x, t)$  ne saurait rester strictement positif pour tout  $x$  de  $\Omega$ .

En effet, si  $u(x, t)$  est strictement positif, il en est de même pour  $\int_\Omega u(x, t)dx$  et  $-a(\int_\Omega u(x, t)dx)\int_\Omega u(x, t)dx$  est strictement négative .

Dans ce cas,  $\int_\Omega u(x, t)\phi(x)dx$  est fonction décroissante de  $t$ , nulle pour  $t = T_\infty$ . Mais alors,  $\int_\Omega u(x, t)\phi(x)dx < 0$  pour  $t > T_\infty$ , ce qui contredit l'hypothèse  $u(x, t) > 0$ .

Par contre,  $u \equiv 0$  réalise un prolongement continu (mais pas nécessairement dérivable en temps) de  $u(x, t)$ , c'est le seul possible si on exige de la solution qu'elle soit toujours positive ou nulle.

## B) EXEMPLE DE CALCUL EXPLICITE DE $T_\infty$ .

On considère le problème précédent avec  $a(x) = \frac{1}{x}$  qui est bien une fonction réelle positive et continue pour  $x > 0$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\int_\Omega u} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

où  $\partial\Omega_0$  et  $\partial\Omega_1$  sont deux ouverts disjoints de  $\partial\Omega$  vérifiant :

$$\overline{\partial\Omega_0} \cup \overline{\partial\Omega_1} = \partial\Omega,$$

et où  $n$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$ .

Cette équation admet donc, d'après le théorème 1.2, une unique solution globale qui est toujours positive ou nulle, et cette solution devient identiquement nulle, simultanément en chaque point de  $\overline{\Omega}$ , dès que  $t$  atteint la valeur  $t = T_\infty$ , éventuellement infinie. Nous montrons ici que  $T_\infty$  est fini et explicitons sa valeur en fonction de  $u_0$ .

$$T_\infty = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a \circ H[z]} dz,$$

$$T_\infty = \int_0^{+\infty} H[z]dz,$$

$$T_\infty = \int_0^{+\infty} \int_\Omega v(x, z)dx dz,$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ v(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

On multiplie par  $\phi$  et on intègre sur  $\Omega$ .

L'égalité :

$$\frac{d(\int_\Omega v(x, t)\phi(x)dx)}{dt} - \int_\Omega \Delta v(x, t)\phi(x)dx = 0,$$

devient :

$$\frac{d(\int_\Omega v(x, t)\phi(x)dx)}{dt} = - \int_\Omega v(x, t)dx.$$

Donc :

$$T_\infty = - \int_0^{+\infty} \frac{d(\int_\Omega v(x, t)\phi(x)dx)}{dt} dt = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_\Omega v(x, t)dx + \int_\Omega u_0(x)\phi(x)dx = \int_\Omega u_0(x)\phi(x)dx.$$

$$T_\infty = \int_\Omega u_0(x)\phi(x)dx.$$

### C) CRITERE POUR EVALUER SI $T_\infty$ EST FINI.

$a$  est une fonction réelle positive et continue sur  $R^{+*}$ .

Soit  $(C, k)$  dans  $R^{+*} \times R$ , on suppose que si :

$$f(t) \sim C \exp(-kt) \text{ quand } t \rightarrow +\infty \text{ alors } a[f(t)] \sim a[C \exp(-kt)] \text{ quand } t \rightarrow +\infty. \quad (*)$$

(\*) est vraie par exemple pour :  $a(x) = x^\beta \exp(\alpha x)$ .

On se propose, quand le calcul explicite de  $T_\infty$  n'est pas possible, de définir un critère simple permettant de dire si  $T_\infty$  est fini ou non.

$u_0$  est dans  $L^2(\Omega)$ , donc se décompose selon le système orthonormé  $(\Psi_i)$  :

$$\begin{cases} -\Delta \Psi_i = k_i \Psi_i & \text{dans } \Omega, \\ \Psi_i = 0 & \text{dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial \Psi_i}{\partial n} = 0 & \text{dans } \partial\Omega_1, \\ \int_\Omega \Psi_i(x)dx > 0, \quad \int_\Omega \Psi_i^2(x)dx = 1. \end{cases}$$

Dans ces conditions :

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle u_0, \Psi_i \rangle e^{-k_i t} \Psi_i(x),$$

$$H(t) = \int_{\Omega} v(x, t) dx = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle u_0, \Psi_i \rangle e^{-k_i t} \int_{\Omega} \Psi_i(x) dx > 0,$$

$$T_{\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{a(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{+\infty} \langle u_0, \Psi_i \rangle e^{-k_i t} \Psi_i(x) dx)} dt$$

est une intégrale singulière à l'infini.

Il n'y a en effet pas de problème en  $t = 0$  :  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{a[H(t)]} = \frac{1}{a(\int_{\Omega} u_0)}$  avec  $u_0 \geq 0$  et  $u_0 \not\equiv 0$ .

On peut supposer sans restreindre le cas général que :  $\langle u_0, \Psi_1 \rangle \neq 0$ .

$$H(t) \sim \langle u_0, \Psi_1 \rangle e^{-k_1 t} \int_{\Omega} \Psi_1(x) dx, \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Donc  $T_{\infty}$  est fini si et seulement si c'est le cas pour :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{a[\langle u_0, \Psi_1 \rangle e^{-k_1 t} \int_{\Omega} \Psi_1(x) dx]}.$$

On pose :  $x = \langle u_0, \Psi_1 \rangle e^{-k_1 t} \int_{\Omega} \Psi_1(x) dx$  donc,  $dx = -k_1 x dt$ .

$I$ , donc  $T_{\infty}$ , est fini si et seulement si c'est le cas pour :

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{x a(x)}.$$

### THEOREME 1.3.

Considérons  $a$  une fonction réelle, positive et continue sur  $R^{+*}$  vérifiant la condition (\*).

$T_{\infty}$  est fini si et seulement si l'intégrale :

$$J = \int_0^1 \frac{dx}{x a(x)},$$

éventuellement singulière à l'origine, est finie.

#### IV. EXEMPLES ET COMMENTAIRES.

##### A) PREMIERS EXEMPLES.

**EXEMPLE 1.1.**  $a(x) = \frac{1}{x}$ .

On considère :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\int_{\Omega} u} \Delta u = 0 \text{ dans } (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x). \end{cases}$$

D'après les résultats précédents, comme  $J = \int_0^1 \frac{dx}{xa(x)} = \int_0^1 dx$  est fini, le temps de parabolicité  $T_{\infty}$  est fini. On l'a calculé de façon explicite pour  $a(x) = \frac{1}{x}$ .

$$T_{\infty} = \int_{\Omega} u_0(x) \phi(x) dx,$$

$$T_{\infty} = \int_{\Omega} \frac{\sin(\pi x)(x(1-x))}{2},$$

$$T_{\infty} = \frac{2}{\pi^3}.$$

Confirmons ce résultat par le calcul détaillé de la solution. Ecrivons :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\int_{\Omega} u} \Delta u = 0 \text{ dans } (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), \end{cases}$$

sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t) \Delta u = 0 \text{ dans } (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x), \\ A(t) \int_{\Omega} u(x, t) dx = 1. \end{cases}$$

Classiquement :

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 \int_0^t A(y) dy} \sin(\pi x).$$

Donc,  $A(t) \int_{\Omega} u(x, t) dx = 1$  devient :

$$A(t) \int_0^1 e^{-\pi^2 \int_0^t A(y) dy} \sin(\pi x) dx = 1,$$

$$A(t) e^{-\pi^2 \int_0^t A(y) dy} = \frac{\pi}{2}.$$

En intégrant cette relation, on trouve :

$$e^{-\pi^2 \int_0^t A(y) dy} = 1 - \frac{\pi^3 t}{2},$$

d'où :

$$u(x, t) = \left(1 - \frac{\pi^3 t}{2}\right) \sin(\pi x).$$

**EXEMPLE 1.2.**  $a(x) = x.$

On considère :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - (\int_{\Omega} u) \Delta u = 0 \text{ dans } (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x). \end{cases}$$

D'après les résultats précédents, comme  $J = \int_0^1 \frac{dx}{xa(x)} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$  est infini, le temps de parabolicité  $T_{\infty}$  est infini lui aussi. Il y a existence et unicité de la solution sur  $[0, +\infty[$ . On vérifie en effet, que :

$$u(x, t) = \frac{\sin(\pi x)}{1 + 2\pi t}.$$

### COMMENTAIRES.

Dans l'exemple 1.2,  $u(x, t) = \frac{\sin(\pi x)}{1 + 2\pi t}$ , est parfaitement défini pour tout  $t \geq 0$ . Aucun coefficient ne dégénère... On est dans le cadre classique de la théorie.

Dans l'exemple 1.1, par contre,  $u(x, t) = \left(1 - \frac{\pi^3 t}{2}\right) \sin(\pi x)$ , s'annule pour  $T_{\infty} = \frac{2}{\pi^3}$ , instant pour lequel le coefficient  $a(\int_{\Omega} u) = \frac{1}{\int_{\Omega} u}$  "explose".

On peut cependant remarquer que le terme complet intervenant dans l'équation est  $\frac{\Delta u}{\int_{\Omega} u}$ .

Or :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \frac{2}{\pi^3}} \frac{\Delta u}{\int_{\Omega} u} &= \lim_{t \rightarrow \frac{2}{\pi^3}} \frac{(1 - \frac{\pi^3 t}{2})(-\pi^2) \sin(\pi x)}{\int_0^1 (1 - \frac{\pi^3 t}{2}) \sin(\pi x) dx}, \\ \lim_{t \rightarrow \frac{2}{\pi^3}} \frac{\Delta u}{\int_{\Omega} u} &= \frac{-\pi^3}{2} \sin(\pi x), \quad \forall x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Autrement dit,  $\frac{\Delta u}{\int_{\Omega} u}$  n'explose pas !

Ceci explique pourquoi la solution  $u(x, t) = \left(1 - \frac{\pi^3 t}{2}\right) \sin(\pi x)$  existe au-delà de  $T_{\infty}$ .

D'une manière générale, il serait intéressant de savoir s'il est possible de prolonger une solution en temps, au-delà de  $T_{\infty}$  et si c'est possible, avec quelle régularité ?

## B) PROLONGEMENT DE LA SOLUTION.

### THEOREME 1.4.

Soit  $a$  une fonction réelle, continue et positive quand  $x \in R^{+*}$  et soit  $u_0$  positive dans  $C^2(\bar{\Omega})$ .  $D$  est un intervalle ouvert réel contenant 0.

On suppose que  $I(x) = \int_0^x \frac{dy}{ya(y)}$  existe et est finie pour tout  $x$  dans  $D$ .

a) Si la fonction  $xa(x)$  admet une limite nulle, quand  $x \rightarrow 0$ , la solution  $u(x, t)$  se prolonge de façon continue et dérivable en temps, au-delà de  $T_\infty$ , par la fonction nulle.

b) Si la fonction  $xa(x)$  admet une limite finie non nulle, ou infinie quand  $x \rightarrow 0$ , et si  $I(x)$  est bijective de  $D$  sur  $I(D)$ , alors il est encore possible de prolonger la solution  $u(x, t)$  de façon continue (et dérivable) en temps, au-delà de  $T_\infty$ .

### REMARQUE 1.4.

Sous les conditions du THEOREME 1.4,  $T_\infty$  est toujours fini (cf. THEOREME 1.3).

### REMARQUE 1.5.

Il n'y a donc pas unicité de la solution au-delà de  $T_\infty$ .

Il y a une unique solution globale toujours positive ou nulle, mais il est possible d'en construire d'autres, à condition d'accepter qu'elles deviennent négatives.

### DEMONSTRATION.

On commence par évaluer la vitesse  $\frac{\partial u}{\partial t}$  de la solution en fonction de  $x$  quand  $t \rightarrow T_\infty^-$ .

Soit  $v$  vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ v(x, 0) = u_0. \end{cases}$$

Puisque,  $u(x, t) = v(x, \int_0^t A(t))$ , et que  $\lim_{t \rightarrow T_\infty} \int_0^t A(t) dt = +\infty$  (cf. la démonstration du théorème 1.1), on a :

$$\lim_{t \rightarrow T_\infty} \frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow T_\infty} a \left( \int_\Omega u(x, t) dx \right) \Delta u,$$

$$\lim_{t \rightarrow T_\infty} \frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} a \left( \int_\Omega v(x, t) dx \right) \Delta v,$$

$$\lim_{t \rightarrow T_\infty} \frac{\partial u}{\partial t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} a \left( \int_\Omega v(x, t) dx \right) \int_\Omega v(x, t) dx \Delta \left( \frac{v}{\int_\Omega v(x, t) dx} \right).$$

Comme précédemment, on note  $\Psi_1$  la première fonction propre de  $-\Delta$  attachée à la valeur propre  $k_1$ .

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta \left( \frac{v}{\int_\Omega v(x, t) dx} \right) = \frac{-k_1 \Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x) dx}, \text{ uniformément en } x \text{ dans } \bar{\Omega}.$$

En effet, posons :  $w(x, t) = e^{k_1 t} v(x, t)$ .  $w$  est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w - k_1 w = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ w = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ w(x, 0) = u_0. \end{cases}$$

D'après un résultat classique qu'on trouve par exemple dans [DL8],  $w(x, t) \rightarrow C\Psi_1(x)$  dans  $C^2(\bar{\Omega})$  quand  $t \rightarrow +\infty$ , donc  $\Delta w(x, t) \rightarrow -k_1 C\Psi_1(x)$ , uniformément en  $x$  dans  $\bar{\Omega}$ .

Et ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta \left( \frac{v}{\int_\Omega v(x, t) dx} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta \left( \frac{w}{\int_\Omega w(x, t) dx} \right) = \frac{-k_1 \Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x) dx}, \text{ uniformément en } x \text{ dans } \bar{\Omega}.$$

On sait, par ailleurs, que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_\Omega v(x, t) dx = 0^+.$$

Nous sommes ainsi amenés à distinguer trois cas :

a) **premier cas** :  $\lim_{x \rightarrow 0} xa(x) = 0$ .

Alors :

$$\lim_{t \rightarrow T_\infty} \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

et  $u(x, t) = 0$  est le prolongement cherché.

b) deuxième cas :  $\lim_{x \rightarrow 0} xa(x) = l > 0$ .

Alors  $u$  s'annule en  $t = T_\infty$  mais possède à cet instant la vitesse :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=T_\infty} = -l \frac{k_1 \Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x) dx},$$

en chacun des points de  $\Omega$ .

On cherche un prolongement  $U$  régulier de  $u$ . En  $t = T_\infty$  :

$\lim_{t \rightarrow T_\infty} u(x, t) = U(x, T_\infty)$  : prolongement continu en temps.

$\lim_{t \rightarrow T_\infty} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U(x, T_\infty)}{\partial t}$  : prolongement dérivable en temps.

Nous avons donc à chercher le prolongement :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - a(\int_\Omega U) \Delta U = 0 \text{ dans } \Omega \times (T_\infty, T), \\ U = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (T_\infty, T), \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (T_\infty, T), \\ U|_{t=T_\infty} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial t} \Big|_{t=T_\infty} = -l \frac{k_1 \Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x) dx}. \end{cases}$$

Essayons de le trouver sous la forme :

$$\begin{cases} U(x, t) = \frac{g(t) \Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x) dx}, \\ g(T_\infty) = 0, \\ g'(T_\infty) = -lk_1. \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a(\int_\Omega U) \Delta U = 0$$

s'écrit :

$$\frac{g'(t) \Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x) dx} + \frac{g(t) a[g(t)] k_1 \Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x) dx} = 0,$$

ou encore :

$$g'(t) + k_1 g(t) a[g(t)] = 0,$$

$$\int_{T_\infty}^t \frac{g'(t) dt}{g(t) a[g(t)]} + k_1 (t - T_\infty) = 0.$$

On pose  $I(x) = \int_0^x \frac{dy}{ya(y)}$ , d'où :

$$I[g(t)] + k_1 (t - T_\infty) = 0.$$

Cette dernière équation s'inverse en :

$$g(t) = I^{-1}[(T_\infty - t)k_1].$$

$U(x, t) = \frac{I^{-1}[(T_\infty - t)k_1]\Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x)dx}$  réalise donc le prolongement de la solution pour  $t \geq T_\infty$ , puisque

$\lim_{t \rightarrow T_\infty} g(t) = 0$  et que :

$$\lim_{t \rightarrow T_\infty} g'(t) = -k_1 \lim_{t \rightarrow T_\infty} g(t)a[g(t)] = -lk_1.$$

**c) troisième cas :**  $\lim_{x \rightarrow 0^+} xa(x) = +\infty$ .

Alors  $u$  s'annule en  $t = T_\infty$  mais possède à cet instant une vitesse infinie.

Nous avons donc à chercher le prolongement :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - a(\int_\Omega U)\Delta U = 0 \text{ dans } \Omega \times (T_\infty, T), \\ U = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (T_\infty, T), \\ \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (T_\infty, T), \\ U|_{t=T_\infty} = 0, \\ \lim_{t \rightarrow T_\infty} \frac{\partial U}{\partial t} = -\infty. \end{cases}$$

Essayons encore une fois de le trouver sous la forme :

$$\begin{cases} U(x, t) = \frac{g(t)\Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x)dx}, \\ g(T_\infty) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow T_\infty} g'(t) = -\infty. \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - a(\int_\Omega U)\Delta U = 0$$

s'écrit à nouveau :

$$\frac{g'(t)\Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x)dx} + \frac{g(t)a[g(t)]k_1\Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x)dx} = 0,$$

ou encore :

$$g'(t) + k_1g(t)a[g(t)] = 0,$$

$$\int_{T_\infty}^t \frac{g'(t)dt}{g(t)a[g(t)]} + k_1(t - T_\infty) = 0.$$

$I(x) = \int_0^x \frac{dy}{ya(y)}$  existe, donc :

$$I[g(t)] + k_1(t - T_\infty) = 0.$$

Cette dernière équation s'inverse en :

$$g(t) = I^{-1}[(T_\infty - t)k_1].$$

$U(x, t) = \frac{I^{-1}[(T_\infty - t)k_1]\Psi_1}{\int_\Omega \Psi_1(x) dx}$  réalise donc le prolongement de la solution pour  $t \geq T_\infty$ , puisque  $\lim_{t \rightarrow T_\infty} g(t) = 0$  et que :

$$\lim_{t \rightarrow T_\infty} g'(t) = -k_1 \lim_{t \rightarrow T_\infty} g(t)a[g(t)] = -\infty.$$

**EXEMPLE 1.3.**  $a(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ .

On a à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{|\int_\Omega u|}} \Delta u = 0 \text{ dans } (0,1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x). \end{cases}$$

Nous sommes dans le cas :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} xa(x) = 0, \\ I(x) = \int_0^{x_0} \frac{dy}{ya(y)} = 2\sqrt{|x_0|} < \infty, \end{cases}$$

et :

$$U(x, t) = \begin{cases} \sin(\pi x) \left(1 - \frac{\pi^2 \sqrt{\pi} t}{2\sqrt{2}}\right)^2 & \text{pour } t \leq \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{\pi}}, \\ 0 & \text{pour } t \geq \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2 \sqrt{\pi}}, \end{cases}$$

réalise le prolongement cherché :  $U|_{t=T_\infty} = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow T_\infty} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ .

**EXEMPLE 1.4.**  $a(x) = \frac{e^x}{x}$ .

Nous sommes dans le cas :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} xa(x) = 1 > 0, \\ I(x) = \int_0^{x_0} \frac{dy}{ya(y)} = 1 - e^{-x_0} < \infty, \end{cases}$$

et on a à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{e^{\int_\Omega u}}{\int_\Omega u} \Delta u = 0 \text{ dans } (0,1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x). \end{cases}$$

$I(x) = \int_0^x e^{-y} dy = 1 - e^{-x}$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $] -\infty, 1[$ .

$U(x, t) = -(\frac{\pi}{2})\sin(\pi x)\ln[e^{\frac{-2}{\pi}} + t\pi^2]$  réalise le prolongement cherché pour tout  $t$  positif ou nul. Comme le prévoit la théorie, il s'annule en  $t = T_\infty$ , possède à cet instant une vitesse finie non nulle, puis devient négatif.

**EXEMPLE 1.5.**  $a(x) = \frac{1}{x\sqrt{|x|}}.$

Nous sommes dans le cas :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} xa(x) = +\infty, \\ I(x) = \int_0^{x_0} \frac{dy}{ya(y)} = \frac{2}{3}x_0\sqrt{|x_0|} < \infty, \end{cases}$$

et on a à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\int_\Omega u \sqrt{|\int_\Omega u|}} \Delta u = 0 \text{ dans } (0,1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x). \end{cases}$$

$I(x)$  est une bijection de  $R$  dans  $R$ .

$$U(x, t) = \epsilon \frac{3}{2} \sin(\pi x) \left| \frac{2}{3} - \frac{\pi^3 \sqrt{\pi t}}{2\sqrt{3}} \right|^{\frac{2}{3}}$$

réalise le prolongement cherché avec  $\epsilon = 1$  pour  $t \leq T_\infty = \frac{4\sqrt{3}}{3\pi^{3,5}}$  et  $\epsilon = -1$  pour  $t \geq T_\infty$ . Comme le prévoit la théorie, il s'annule lui aussi en  $t = T_\infty$ , possède à cet instant une vitesse infinie, puis devient négatif.

## Chapitre 2

### THEOREMES GENERAUX D'EXISTENCE ET D'UNICITE

## Chapitre 2

### THEOREMES GENERAUX D'EXISTENCE ET D'UNICITE

Les théorèmes d'existence et d'unicité établis dans ce chapitre reposent sur le théorème du point fixe de SCHAUDER et sur le théorème suivant dû à J.L. LIONS (cf.[DL8]).

#### I. RAPPEL.

Soit  $H$  un espace de HILBERT muni du produit scalaire  $(,)$  et de la norme  $|| \cdot ||$ . On identifie  $H$  et son dual. Soit  $V$  un autre espace de HILBERT de norme  $|| \cdot ||$ . On suppose que  $V$  s'injecte dans  $H$  de manière continue et dense.

$$V \subset H \subset V'.$$

Soit  $T$  fixé ; pour presque tout  $t$  dans  $[0, T]$  on se donne une forme bilinéaire  $a(t; u, v)$  :

$$V \times V \rightarrow R,$$

vérifiant les trois propriétés suivantes :

a) la fonction  $t \rightarrow a(t; u, v)$  est mesurable pour tout  $u$  et  $v$  dans  $V$ .

b)  $|a(t; u, v)| \leq M || u || || v ||$  pour presque tout  $t$  dans  $[0, T]$  et quels que soient  $u$  et  $v$  dans  $V$ .

c)  $a(t; v, v) \geq m || v ||^2 - C |v|^2$  pour presque tout  $t$  dans  $[0, T]$  et quel que soit  $v$  dans  $V$ , et où  $m > 0$ ,  $M$  et  $C$  sont des constantes.

Etant donnés  $f$  dans  $L^2(0, T; V')$  et  $u_0$  dans  $H$ , il existe une unique solution  $u$  telle que :

$$\cdot u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H).$$

$$\cdot \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V').$$

$\cdot \langle \frac{du}{dt}(t), v \rangle + a(t; u(t), v) = \langle f(t), v \rangle$  pour presque tout  $t$  dans  $[0, T]$ , quel que soit  $v$  dans  $V$ , et pour  $u(0) = u_0$ .

Nous allons essayer d'utiliser le cadre abstrait et assez général de ce théorème pour étudier l'existence d'une solution faible au problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné, connexe de  $R^n$ ,  $\partial\Omega_0 \neq \emptyset$  et  $\partial\Omega_1$  sont deux ouverts disjoints de  $\partial\Omega$  vérifiant :

$$\overline{\partial\Omega_0} \cup \overline{\partial\Omega_1} = \partial\Omega.$$

$n$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$  et  $a$  une fonction réelle continue.

L'étude du cas homogène, qui repose sur un théorème du point fixe réel, montre qu'en l'absence de conditions fortes sur  $a$ , il est vain d'espérer une existence globale de la solution. Deux questions se posent alors à nous :

. Y a-t-il toujours, comme le laisse supposer la nature même du problème, une solution locale ?

. Quelles hypothèses faut-il mettre sur les données du problème pour qu'il y ait existence globale de la solution ?

Pour résoudre ces problèmes d'existence, nous allons définir l'espace  $V$  des fonctions  $u$  de  $H^1(\Omega)$  telles que  $u|_{\partial\Omega_0} = 0$ .  $V$  muni de la topologie induite est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$ . D'après l'inégalité de POINCARÉ, voir [DL3], on peut munir  $V$  de la norme équivalente à celle de  $H^1(\Omega)$  :  $(\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2)^{\frac{1}{2}}$ .

## II. THEOREME D'EXISTENCE LOCALE 2.1.

On suppose que  $u_0$  est une fonction dans  $L^2(\Omega)$  et que  $f$  est dans  $L^2(0, T, V')$  où  $V'$  est le dual de  $V$ .

$a$  est une fonction continue, strictement positive dans un voisinage de  $\int_{\Omega} u_0(x)dx$ .

Alors, il existe  $T > 0$  tel que le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

admette une solution (locale) dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ .

## DEMONSTRATION.

Soit  $\alpha > 0$  choisi tel que  $a$  soit strictement positive sur  $[\int_{\Omega} u_0(x)dx - \alpha, \int_{\Omega} u_0(x)dx + \alpha]$ . On note respectivement  $M'$  et  $m'$  les valeurs  $a(\int_{\Omega} u_0(x)dx - \alpha)$  et  $a(\int_{\Omega} u_0(x)dx + \alpha)$ . On note  $A$  la fonction obtenue à partir de  $a$ , par troncature autour de  $\int_{\Omega} u_0(x)dx$  :

$$\begin{cases} A(x) = M' & \text{pour } x < \int_{\Omega} u_0(x)dx - \alpha, \\ A(x) = a(x) & \text{pour } \int_{\Omega} u_0(x)dx - \alpha \leq x \leq \int_{\Omega} u_0(x)dx + \alpha, \\ A(x) = m' & \text{pour } x > \int_{\Omega} u_0(x)dx + \alpha. \end{cases}$$

Par conséquent, il existe  $m$  et  $M$  tels que  $A(x)$  vérifie pour tout  $x$  réel :

$$0 < m \leq A(x) \leq M.$$

Soit  $F$  l'application :

$$\begin{cases} L^2(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ v \rightarrow u, \end{cases}$$

où  $u$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(\int_{\Omega} v)\Delta u = f & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

et vérifie :

$$\begin{cases} u \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V), \\ \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V'). \end{cases}$$

### a) INEGALITES A PRIORI.

Nous allons montrer qu'il existe trois constantes  $K, K', K''$  ne dépendant que de  $u_0, T, f$  telles que :

$$\begin{cases} \|u\|_{C(0, T; L^2(\Omega))} \leq K, \\ \|u\|_{L^2(0, T; V)} \leq K', \\ \|u_t\|_{L^2(0, T; V')} \leq K''. \end{cases}$$

Ainsi quitte à prendre  $R$  assez grand, l'image par  $F$  de la boule  $B_R$  de centre 0 et de rayon  $R$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  est encore dans  $B_R$ . De plus, comme l'ensemble des fonctions  $u$  de  $L^2(0, T; V)$  telles que  $u_t$  soit dans  $L^2(0, T; V')$ , s'injecte de manière compacte dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , l'image par  $F$  de  $B_R$  sera relativement compacte dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

On a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A\left(\int_{\Omega} v\right)\Delta u = f.$$

On pose :  $y(t) = \|u(\cdot, t)\|_2^2 = \int_{\Omega} u^2(x, t)dx$  et on note :  $\|\nabla u\|_2$  la norme du module du gradient de  $u(\cdot, t)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

$y(t)$  vérifie l'équation énergétique :

$$\frac{1}{2}y'(t) + A\left(\int_{\Omega} v(x,t)dx\right) \|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega} f(x,t)u(x,t)dx,$$

soit, en intégrant :

$$\frac{1}{2}(y(t) - y(0)) + \int_0^t A\left(\int_{\Omega} v(x,t)dx\right) \|\nabla u\|_2^2 d\tau = \int_0^t \int_{\Omega} f(x,t)u(x,t)dx d\tau,$$

d'où :

$$\frac{1}{2}(y(t) - y(0)) + \int_0^t A\left(\int_{\Omega} v(x,t)dx\right) \|\nabla u\|_2^2 d\tau \leq \left(\int_0^t \|f(\cdot,t)\|_{V'}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|u(\cdot,t)\|_V^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Utilisons maintenant l'inégalité de YOUNG :

$$\frac{1}{2}(y(t) - y(0)) + m \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau \leq \frac{1}{2m'} \int_0^t \|f\|_{V'}^2 d\tau + \frac{m'}{2} \int_0^t \|u\|_V^2 d\tau.$$

On sait que  $\|u\|_V$  est équivalente à  $\|\nabla u\|_2$ , donc il existe  $m'$  tel que :

$$\frac{1}{2}(y(t) - y(0)) + m \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau \leq \frac{1}{2m'} \int_0^t \|f(\cdot,t)\|_{V'}^2 d\tau + \frac{m}{2} \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau.$$

Donc :  $\frac{1}{2}(y(t) - y(0)) + \frac{m}{2} \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau \leq \frac{1}{2m'} \int_0^t \|f(\cdot,t)\|_{V'}^2 d\tau,$

$$\frac{1}{2}(y(t) - y(0)) + \frac{m}{2} \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau \leq \frac{1}{2m'} \|f\|_{L^2[0,T;V']}^2.$$

Nous pouvons ainsi conclure à :

$$\sup_{t \in [0,T]} \|u\|_2 \leq (y(0) + \frac{1}{m'} \|f\|_{L^2[0,T;V']}^2)^{\frac{1}{2}} = K,$$

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)} \leq \left(\frac{y(0) + \frac{1}{m'} \|f\|_{L^2[0,T;V']}^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}} = K'.$$

On sait par ailleurs que :  $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;V')$ . Soit  $w$  une fonction dans  $V$ .

$$\left\langle \frac{du(\cdot,t)}{dt}, w \right\rangle - \left\langle A\left(\int_{\Omega} u\right) \Delta u(\cdot,t), w \right\rangle = \langle f(\cdot,t), w \rangle,$$

$$\left| \left\langle \frac{du(\cdot,t)}{dt}, w \right\rangle \right| \leq M \left| \langle \nabla u(\cdot,t), \nabla w \rangle \right| + \|f(\cdot,t)\|_{V'} \|w\|_V,$$

$$\left| \left\langle \frac{du(\cdot,t)}{dt}, w \right\rangle \right| \leq M \|\nabla u\|_2 \|\nabla w\|_2 + \|f(\cdot,t)\|_{V'} \|w\|_V,$$

$$\left| \left\langle \frac{du(\cdot,t)}{dt}, w \right\rangle \right| \leq [M' \|\nabla u\|_2 + \|f(\cdot,t)\|_{V'}] \|w\|_V.$$

On en déduit :

$$\left\| \frac{du(\cdot, t)}{dt} \right\|_{V'} \leq M' \|\nabla u\|_2 + \|f(\cdot, t)\|_{V'},$$

puis :

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, T; V')}^2 = \int_0^T \left\| \frac{du(\cdot, t)}{dt} \right\|_{V'}^2 dt,$$

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, T; V')}^2 \leq M'^2 \int_0^T \|\nabla u\|_2^2 d\tau + \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_{V'}^2 d\tau + 2M' \int_0^T \|\nabla u\|_2 \|f(\cdot, t)\|_{V'} d\tau.$$

En utilisant l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, on obtient que  $\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, T; V')}^2$  est plus petit que :

$$M'^2 \int_0^T \|\nabla u\|_2^2 d\tau + \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_{V'}^2 d\tau + 2M' \left( \int_0^T \|\nabla u\|_2^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_{V'}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc :

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2(0, T; V')}^2 \leq M'^2 K'^2 + \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_{V'}^2 d\tau + 2M' K' \left( \int_0^T \|f(\cdot, t)\|_{V'}^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = K''^2.$$

## b) CONTINUITÉ DE $F$ DANS $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

Soit  $(v_n)_{n \geq 0}$  une suite convergeant vers  $v$  dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  :

$$\int_0^T \|v_n - v\|_2^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

Alors, il existe une sous-suite  $(v_{n_k})_{n_k \geq 0}$  telle que  $\|v_{n_k} - v\|_2^2 \rightarrow 0$  p.p.t  $t \in [0, T]$ , quand  $n_k \rightarrow +\infty$ , et donc telle que :

$$\int_{\Omega} v_{n_k} \rightarrow \int_{\Omega} v \quad \text{p.p.t } t \in [0, T] \quad \text{quand } n_k \rightarrow +\infty.$$

Par définition,  $u_n = F(v_n)$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - A(\int_{\Omega} v_n) \Delta u_n = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u_n = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u_n(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Il faut montrer que, dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  :

$$F(v_n) \rightarrow F(v) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

c'est à dire :

$$u_n \rightarrow u \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

où par définition,  $u = F(v)$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(\int_{\Omega} v)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Comme  $u_n$  est dans  $F(B_R)$  qui est relativement compact dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , il suffit d'établir que :

$$F(v_{n_k}) \rightarrow F(v) \quad \text{quand } n_k \rightarrow +\infty.$$

On peut donc écrire  $(v_n)$  pour  $(v_{n_k})$ . Par différence :

$$\frac{\partial(u - u_n)}{\partial t} - A(\int_{\Omega} v_n)\Delta(u - u_n) = \Delta u[A(\int_{\Omega} v) - A(\int_{\Omega} v_n)],$$

d'où :

$$\frac{1}{2}(\| (u - u_n)(\cdot, t) \|_2^2 - \| (u - u_n)(\cdot, 0) \|_2^2) + \int_0^t A(\int_{\Omega} v_n(x, t)dx) \| \nabla(u - u_n) \|_2^2 d\tau$$

$$= \int_0^t \int_{\Omega} \Delta u[A(\int_{\Omega} v) - A(\int_{\Omega} v_n)](u - u_n) dx d\tau,$$

$$m \| (u - u_n) \|_{L^2(0, T; V)}^2 \leq \| \Delta u[A(\int_{\Omega} v) - A(\int_{\Omega} v_n)] \|_{L^2(0, T; V')} \| u - u_n \|_{L^2(0, T; V)},$$

$$m \| (u - u_n) \|_{L^2(0, T; V)} \leq \| \Delta u[A(\int_{\Omega} v) - A(\int_{\Omega} v_n)] \|_{L^2(0, T; V')}.$$

Or d'après l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A(\int_{\Omega} v)\Delta u = f,$$

et d'après les inéquations a priori déjà obtenues, il est clair qu'il existe une constante  $C'$  ne dépendant que de  $u_0, T, f$  telle que :

$$\| \Delta u \|_{L^2(0, T; V')} \leq C'.$$

Ainsi, par continuité de  $A$  :

$$\| (u - u_n) \|_{L^2(0, T; V)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty,$$

car :  $\int_{\Omega} v_n \rightarrow \int_{\Omega} v$ , et donc :

$$\| (u - u_n) \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

### c) CONCLUSION.

D'après le théorème du point fixe de SCHAUDER, il existe  $u$  dans  $B_R$  de  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  vérifiant  $F(u) = u$ .

Nous avons ainsi établi l'existence d'une solution  $u$  au problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(\int_{\Omega} u) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

avec la fonction  $A$  et pour tout  $t$  dans  $[0, T]$ .

En particulier, nous savons que la solution  $u$  est continue de  $[0, T]$  dans  $L^2(\Omega)$ , donc que  $\int_{\Omega} u(x, t) dx$  est continue en  $t$ . Ainsi, pour  $t$  assez proche de 0,  $\int_{\Omega} u(x, t) dx$  est suffisamment proche de  $\int_{\Omega} u(x, 0) dx$  pour être dans l'intervalle  $[\int_{\Omega} u(x, 0) dx - \alpha, \int_{\Omega} u(x, 0) dx + \alpha]$ .

Autrement dit, pour  $t$  voisin de 0 :  $A(\int_{\Omega} u(x, t) dx) = a(\int_{\Omega} u(x, t) dx)$ .

Et nous avons, en fait, ainsi établi l'existence d'une solution  $u$  au problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

avec, cette fois-ci la fonction  $a$  et pour tout  $t$  dans  $[0, T]$  ( $T$  assez proche de 0).

Le résultat précédent s'étend immédiatement si pour tout  $x$  réel, il existe  $0 < m \leq M$  tels que :  $0 < m \leq a(x) \leq M$  (conditions naturelles de structure) . Alors :  $a = A$  et on a :

### III. THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE GLOBALE 2.2.

(avec conditions naturelles de structure)

Soit  $V$  l'espace des fonctions  $u$  de  $H^1(\Omega)$  telles que  $u|_{\partial\Omega_0} = 0$ .  $V$  muni de la topologie induite est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$ . On suppose que  $u_0$  et  $\Delta u_0$  sont des fonctions de  $L^2(\Omega)$  et que  $f$  est dans  $V$ .

$a$  est une fonction continue, vérifiant les conditions naturelles de structure :

$$0 < m \leq a \leq M.$$

Alors, pour tout  $T > 0$ , le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

admet une solution (globale) dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ .

Si de plus, on suppose que  $a$  est une fonction  $c$ -lipschitzienne, cette solution est unique.

## DEMONSTRATION.

Il ne reste plus à établir que l'unicité de la solution. La démonstration qui suit est due à M.CHIPOT et J.F.RODRIGUES.

On considère deux solutions  $u$  et  $v$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} - a(\int_{\Omega} v)\Delta v = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ v = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ v(x, 0) = u_0(x). \end{array} \right.$$

Par différence :

$$\frac{\partial(u-v)}{\partial t} - a\left(\int_{\Omega} u\right)\Delta(u-v) = \Delta v\left[a\left(\int_{\Omega} u\right) - a\left(\int_{\Omega} v\right)\right],$$

d'où :

$$\frac{1}{2} \frac{d(\|(u-v)(t)\|_2^2)}{dt} + m \|\nabla(u-v)\|_2^2 \leq c \left| \int_{\Omega} (u-v)dx \right| \|(u-v)\|_2 \|\Delta v\|_2.$$

$\|\Delta v\|_2$  est bornée par une constante qui ne dépend que de  $u_0, T, f$  et :

$$\left| \int_{\Omega} (u-v)dx \right| \|(u-v)\|_2 \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|(u-v)\|_2^2.$$

Donc, il existe une constante  $k$  telle que :

$$\frac{d(\|(u-v)\|_2^2)}{dt} \leq k \|(u-v)\|_2^2,$$

d'où :

$$\|(u-v)\|_2^2 \leq \|(u-v)(0)\|_2^2 e^{kt}.$$

Or :  $\|(u-v)(0)\|_2 = 0$ , et :  $u = v$ .

## Chapitre 3

### DOMAINES INVARIANTS ET STABILITE

## Chapitre 3

### DOMAINES INVARIANTS ET STABILITE

(sans condition naturelle de structure.)

#### I. INTRODUCTION.

Ce chapitre est consacré au comportement asymptotique des solutions globales, et met en évidence l'existence de domaines invariants et de points fixes instables.

Nous avons déjà vu que le nombre de solutions de l'équation stationnaire donc de points fixes dépendait du nombre de points d'intersection entre la courbe :

$$y = a(x),$$

et l'hyperbole :

$$y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x},$$

où  $\phi$  vérifie :

$$\begin{cases} -\Delta\phi = 1 \text{ dans } \Omega, \\ \phi = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Tout notre travail va consister à savoir quel rôle jouent ces points fixes dans la nature asymptotique des solutions.

Nous savons que si un problème du type :  $\frac{du}{dt} + Au = f$ ,  $u(0) = 0$ ,  $f \in C(0, +\infty; X)$ , admet pour  $u_0$  donné dans un espace de BANACH  $X$ , une solution forte :

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

et que si on a une inégalité du type :  $\|S(t)\| \leq Me^{-\mu t}$  (comme c'est généralement le cas dans les problèmes de diffusion) alors il y a convergence au sens de la norme de  $X$  de  $u(t)$  vers la solution stationnaire.

Mais il faut remarquer que dans ce cas, le théorème de HILLE-YOSIDA assure l'unicité du point fixe (cf [DL.8]) alors qu'ici il peut y en avoir une infinité.

Les résultats obtenus montrent cependant que sous des conditions géométriques assez larges il y a encore convergence vers ces points stationnaires.

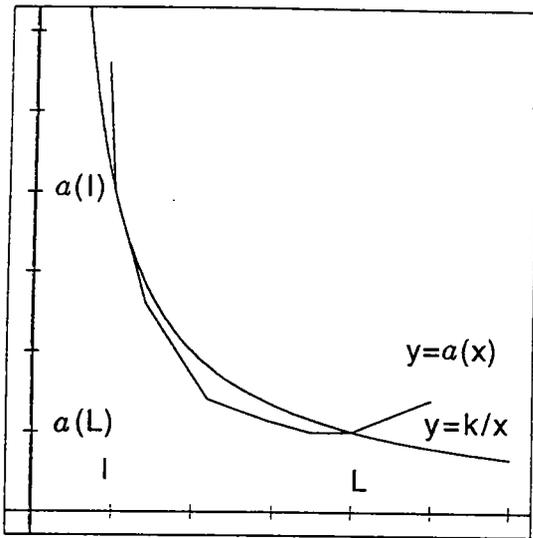
L'idée de base consiste à établir l'existence de régions invariantes puis à conclure par un argument de monotonie.

Toutefois, si on renonce à être trop précis dans la description de  $a$ , on imagine que la nature de l'intersection entre  $y = a(x)$  et l'hyperbole peut s'avérer compliquée.

Nous montrons sous des conditions incluant les cas :  $0 < m \leq a(x) \leq M$ , qu'il existe un attracteur maximal.

Remarquons enfin qu'en dehors de la remarque 3.2,  $y = a(x)$  n'est pas l'hyperbole  $y = \frac{k}{x}$ . On fera ultérieurement l'étude de ce cas où il y a parfaite coïncidence entre les 2 courbes.

## II. ETUDE D'UN CAS PARTICULIER : EXISTENCE DE POINTS FIXES INSTABLES.



On suppose qu'il existe seulement deux points d'intersection entre la courbe :

$$y = a(x),$$

et l'hyperbole :

$$y = \frac{k}{x} \text{ avec } k = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx.$$

On note  $l$  et  $L$  les abscisses respectives de ces deux points et on suppose de plus que :

$$\forall x \in ]l, L[ \quad a(L) < a(x) < a(l).$$

Définissons alors  $u_l$  et  $u_L$  par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{l} \Delta u_l = f \text{ dans } \Omega, \\ u_l = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_l}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{L} \Delta u_L = f \text{ dans } \Omega, \\ u_L = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_L}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{array} \right.$$

On note  $Z_1$  l'ensemble des fonctions de  $V$  comprises entre  $u_l$  et  $u_L$ .

$$Z_1 = \{u \in V / u_l \leq u \leq u_L\}.$$

$Z_1$  est un convexe, fermé de  $V$ , non vide car contenant  $u_l$  et  $u_L$ .

Nous allons montrer que si  $u_0$ , condition initiale du problème, est prise dans l'ensemble  $Z_1$  alors  $u(., t)$ , est encore dans  $Z_1$ . Plus précisément :

### THEOREME 3.1.

Soient  $u_0$ , une fonction de  $Z_1$  et  $f$  une fonction positive de  $V'$ .

$a$  est une fonction continue, strictement positive. On suppose qu'il existe seulement deux points d'intersection entre la courbe :

$$y = a(x),$$

et l'hyperbole :

$$y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}.$$

On note  $l$  et  $L$  les abscisses respectives de ces deux points et on suppose de plus que :

$$\forall x \in ]l, L[ \quad a(L) < a(x) < a(l).$$

Alors, le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

admet une solution globale dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ .

De plus, si  $u_0$ , condition initiale du problème, est prise dans l'ensemble  $Z_1$  alors  $u(., t)$ , est encore dans  $Z_1, \forall t \in [0, T]$ .

### DEMONSTRATION.

Soit  $F$  l'application.:

$$\begin{cases} Z'_1 = \{v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), v(., t) \in Z_1 \quad \forall t \in [0, T]\} \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ v \rightarrow u, \end{cases}$$

où  $u$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} v)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Ce dernier rentre dans le cadre du théorème variationnel de J.L. LIONS. Autrement dit, il existe une solution  $u$  telle que :

$$\begin{cases} u \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V), \\ \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V'). \end{cases}$$

Pour montrer que cette application  $F$  admet un point fixe, il suffit d'après la démonstration du théorème d'existence locale, de nous assurer que  $u$  est encore dans  $Z'_1$ .

Ceci va résulter du principe du maximum, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} v) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{L} \Delta u_L = f \text{ dans } \Omega, \\ u_L = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_L}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

On remarque, après multiplication par  $\phi$ , que  $L = \int_{\Omega} u_L$ , (de même  $l = \int_{\Omega} u_l$ ), on pose :

$$M_L = a(L) = a\left(\int_{\Omega} u_L\right) \text{ et } m_l = a(l) = a\left(\int_{\Omega} u_l\right).$$

Par différence :

$$\begin{cases} \frac{\partial(u-u_L)}{\partial t} - a(\int_{\Omega} v) \Delta(u-u_L) = [a(\int_{\Omega} v) - M_L] \Delta(u_L) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u - u_L = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial(u-u_L)}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) - u_L(x) \geq 0. \end{cases}$$

Or, par définition :

$$\Delta(u_L) \leq 0,$$

et par hypothèse sur  $v$  :

$$\int_{\Omega} u_l \leq \int_{\Omega} v \leq \int_{\Omega} u_L,$$

donc :

$$a\left(\int_{\Omega} v\right) - M_L \geq 0,$$

et :

$$u(\cdot, t) \leq u_L, \quad \forall t \in [0, T].$$

De la même manière, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} v) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -\frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{l} \Delta u_l = f \text{ dans } \Omega, \\ u_l = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_l}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Par différence :

$$\begin{cases} \frac{\partial(u-u_l)}{\partial t} - a(\int_{\Omega} v) \Delta(u-u_l) = [a(\int_{\Omega} v) - m_l] \Delta(u_l) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u - u_l = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial(u-u_l)}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) - u_l(x) \leq 0. \end{cases}$$

Or, par définition :

$$\Delta(u_l) \leq 0,$$

et par hypothèse sur  $v$  :

$$a\left(\int_{\Omega} v\right) - m_l \leq 0.$$

Donc :

$$u(., t) \geq u_l, \quad \forall t \in [0, T].$$

### CONSEQUENCES 3.1.

Soit  $g(x) = xa(x)$ .

On suppose :  $g(x) \geq \int_{\Omega} f(t)\phi(t)dt$ , pour  $x$  dans  $[l, L]$ .

On suppose de plus que  $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$  où  $0 < \alpha < 1$  et que  $u_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$  vérifient les relations classiques de compatibilité sur  $\partial\Omega$ , pour que  $u, \frac{\partial u}{\partial t}$  soient éléments de  $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+)$ .

Nous avons vu dans la démonstration précédente que :

$$\int_{\Omega} u_l(x)dx \leq \int_{\Omega} u(x, t)dx \leq \int_{\Omega} u_L(x)dx,$$

c'est à dire :

$$l \leq \int_{\Omega} u(x, t)dx \leq L.$$

Donc, nous sommes dans le cas où :

$$\left(\int_{\Omega} u(x, t)dx\right)a\left(\int_{\Omega} u(x, t)dx\right) \geq \int_{\Omega} f(t)\phi(t)dt,$$

ainsi :

$$\left(\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx\right)_t = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - \left(\int_{\Omega} u(x, t)dx\right)a\left(\int_{\Omega} u(x, t)dx\right) \leq 0,$$

et  $\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx$  est une fonction décroissante de  $t$ . Par ailleurs, comme  $\phi \geq 0$  :

$$(u \geq u_l) \Rightarrow \left(\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx\right) \geq \int_{\Omega} u_l(x)\phi(x)dx.$$

Donc  $\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx$  est une fonction décroissante de  $t$  et est minorée par  $\int_{\Omega} u_l(x)\phi(x)dx$  donc est convergente quand  $t$  tend vers l'infini.

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx \quad \text{existe et est finie.}$$

Il en résulte que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx\right)_t = 0.$$

En effet, supposons que  $g(t) = (\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx)_t$  n'admette pas 0 comme limite, en  $+\infty$ . Il existe alors  $\epsilon_0$  ainsi qu'une suite  $t_n$  qui tend vers  $+\infty$  et telle que :

$$g(t_n) \geq \epsilon_0 > 0.$$

Comme  $\frac{\partial u}{\partial t}$  est élément de  $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times R^+)$ , il existe  $C > 0$  telle que :

$$\forall (t, t') \in R^{+2}, \quad |g(t) - g(t')| \leq C|t - t'|^{\frac{\alpha}{2}},$$

et donc :

$$\forall (t, t') \in R^{+2}, \quad |t - t'| < \left(\frac{\epsilon_0}{2C}\right)^{\frac{2}{\alpha}} = T_0 \quad \Rightarrow \quad |g(t) - g(t')| \leq C|t - t'|^{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Ainsi :

$$\forall t \in [t_n - T_0, t_n + T_0], \quad \forall n \in N, \quad g(t) \geq \frac{\epsilon_0}{2},$$

puis :

$$\forall n \in N, \quad \int_{t_n - T_0}^{t_n + T_0} g(t)dt \geq T_0 \epsilon_0.$$

Or ceci contredit le fait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_n - T_0}^{t_n + T_0} g(t)dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(x, t_n + T_0)\phi(x)dx - \int_{\Omega} u(x, t_n - T_0)\phi(x)dx = \gamma - \gamma = 0.$$

Ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx \right)_t = 0,$$

puis :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega} u(x, t)dx \right) a \left( \int_{\Omega} u(x, t)dx \right) = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx,$$

avec :

$$l \leq \int_{\Omega} u(x, t)dx \leq L.$$

Donc, par continuité en  $t$  de  $\int_{\Omega} u(x, t)dx$ , celle-ci converge nécessairement vers  $l$  ou  $L$ .

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(x, t)dx \quad \text{existe et est finie.}$$

Il reste à montrer, quand  $t$  tend vers l'infini, que  $u(x, t)$  converge en un sens à préciser.

Un théorème classique (cf.[F] ou [DL8]) assure que  $u$  converge uniformément en  $x$  dans  $\bar{\Omega}$  vers  $w$  solution de :

$$\begin{cases} -a(\alpha)\Delta w = f \text{ dans } \Omega, \\ w = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Ici :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx = \int_{\Omega} w(x)\phi(x)dx \text{ en décroissant.}$$

Donc nécessairement :

$$\alpha = l \text{ et } w = u_l.$$

On peut écrire en conclusion :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, t) - u_l(x)| = 0,$$

et déduire de ceci l'existence dans  $Z_1$  de deux types de points fixes :

- .  $u_l$  est un point fixe stable et même asymptotiquement stable dans  $Z_1$ .
- .  $u_L$  est un point fixe instable dans  $Z_1$ .

### CONSEQUENCES 3.2.

Soit  $g(x) = xa(x)$ .

On suppose :  $g(x) \leq \int_{\Omega} f(t)\phi(t)dt$  pour  $x$  dans  $[l, L]$ .

On suppose de plus que  $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$  où  $0 < \alpha < 1$  et que  $u_0 \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$  vérifient les relations classiques de compatibilité sur  $\partial\Omega$ , pour que  $u, \frac{\partial u}{\partial t}$  soient éléments de  $C^{\alpha, \frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega} \times R^+)$ .

Comme dans le premier cas, nous avons :

$$\int_{\Omega} u_l(x)dx \leq \int_{\Omega} u(x, t)dx \leq \int_{\Omega} u_L(x)dx,$$

c'est à dire :

$$l \leq \int_{\Omega} u(x, t)dx \leq L.$$

Donc, nous sommes dans le cas où :

$$\left( \int_{\Omega} u(x, t)dx \right) a \left( \int_{\Omega} u(x, t)dx \right) \leq \int_{\Omega} f(t)\phi(t)dt.$$

Ainsi :

$$\left( \int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx \right)_t = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - \left( \int_{\Omega} u(x, t)dx \right) a \left( \int_{\Omega} u(x, t)dx \right) \geq 0,$$

et  $\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx$  est une fonction croissante de  $t$ . Par ailleurs :

$$(u \leq u_L) \Rightarrow \left( \int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx \leq \int_{\Omega} u_L(x)\phi(x)dx \right).$$

Ainsi  $\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx$  est une fonction croissante de  $t$  et est majorée par  $\int_{\Omega} u_L(x)\phi(x)dx$ , donc est convergente quand  $t$  tend vers l'infini.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx \text{ existe et est finie.}$$

Il en résulte que :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega} u(x, t) \phi(x) dx \right)_t = 0$ , et donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \int_{\Omega} u(x, t) dx \right) a \left( \int_{\Omega} u(x, t) dx \right) = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx,$$

avec :  $l \leq \int_{\Omega} u(x, t) dx \leq L$ . Donc, par continuité en  $t$  de  $\int_{\Omega} u(x, t) dx$ , celle-ci converge nécessairement vers  $\alpha = l$  ou  $\alpha = L$ .

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(x, t) dx \quad \text{existe et est finie.}$$

Il reste à montrer, quand  $t$  tend vers l'infini, que  $u(x, t)$  converge.

Comme précédemment, nous pouvons affirmer que  $u$  converge vers  $w$ , qui dépend de  $\alpha$ .

Ici :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(x, t) \phi(x) dx = \int_{\Omega} w(x) \phi(x) dx$  en croissant. Donc nécessairement :

$$\alpha = L.$$

Si on remarque de plus que  $w = u_L$ , on peut écrire, en conclusion :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, t) - u_L(x)| = 0.$$

Il existe à nouveau dans  $Z_1$  deux types de points fixes :

- .  $u_L$  est un point fixe stable et même asymptotiquement stable dans  $Z_1$ .
- .  $u_l$  est un point fixe instable dans  $Z_1$ .

### III. CAS GENERAL.

On considère l'ensemble des points d'intersection entre la courbe :

$$y = a(x),$$

et l'hyperbole :

$$y = \frac{\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx}{x}$$

contenus dans un compact donné,  $[a_0, a_1] \times [b_0, b_1]$ , de  $R^2$ . On suppose que  $a$  est strictement positive sur  $[a_0, a_1]$ . Définissons alors  $u_m$  et  $u_M$  par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} - \min_{x \in [a_0, a_1]} a(x) \Delta u_m = f \text{ dans } \Omega, \\ u_m = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_m}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} - \max_{x \in [a_0, a_1]} a(x) \Delta u_M = f \text{ dans } \Omega, \\ u_M = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_M}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{array} \right.$$

On remarque que :  $\int_{\Omega} u_m = \frac{\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx}{\min_{x \in [a_0, a_1]} a(x)}$  et  $\int_{\Omega} u_M = \frac{\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx}{\max_{x \in [a_0, a_1]} a(x)}$ .

On suppose de plus que les relations suivantes, notées (\*\*) sont vérifiées :

$$\min_{x \in [a_0, a_1]} a(x) = \min_{x \in [\int_{\Omega} u_M(x) dx, \int_{\Omega} u_m(x) dx]} a(x), \quad \max_{x \in [a_0, a_1]} a(x) = \max_{x \in [\int_{\Omega} u_M(x) dx, \int_{\Omega} u_m(x) dx]} a(x) \quad (**)$$

On note alors  $Z_2$  l'ensemble des fonctions de  $V$  comprises entre  $u_M$  et  $u_m$ .

$$Z_2 = \{u \in V / u_M \leq u \leq u_m\}.$$

$Z_2$  est un convexe, fermé de  $V$ , non vide car contenant  $u_m$  et  $u_M$ .

Nous allons montrer que  $Z_2$  est un domaine stable c'est à dire que si  $u_0$ , condition initiale du problème, est prise dans l'ensemble  $Z_2$  alors  $u(., t)$ , est encore dans  $Z_2$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

L'idée générale qui est développée ici peut être résumée ainsi :

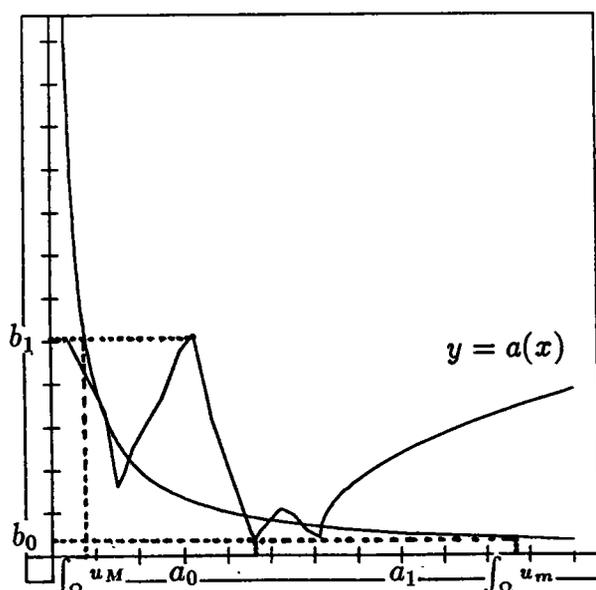
1) on se donne un intervalle  $[a_0, a_1]$  sur  $(Ox)$ .

2) on considère les valeurs extrémales  $b_0 = \min_{x \in [a_0, a_1]} a(x)$  et  $b_1 = \max_{x \in [a_0, a_1]} a(x)$  de  $a(x)$  sur cet intervalle.

3) les droites horizontales  $y = b_0$  et  $y = b_1$  coupent l'hyperbole aux points d'abscisses  $\int_{\Omega} u_M(x) dx$  et  $\int_{\Omega} u_m(x) dx$ .

4) on admet qu'entre  $a_0$  et  $\int_{\Omega} u_M(x) dx$ , et entre  $a_1$  et  $\int_{\Omega} u_m(x) dx$ , la courbe  $y = a(x)$  ne prend aucune nouvelle valeur qui soit plus grande que  $b_1$  ou plus petite que  $b_0$ .

Il faut voir la possibilité de choisir  $[a_0, a_1]$  vérifiant 4) comme une propriété géométrique de la courbe  $y = a(x)$ .



### THEOREME 3.2.

Soient  $u_0$ , une fonction de  $Z_2$ , et  $f$  une fonction positive de  $V'$ .  
On considère l'ensemble des points d'intersection entre la courbe :

$$y = a(x),$$

et l'hyperbole :

$$y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$$

qui sont contenus dans le compact  $[a_0, a_1] \times [b_0, b_1]$  de  $R^2$ . On suppose que  $a$  est strictement positive sur  $[a_0, a_1]$  et qu'elle vérifie les relations (\*\*).

Alors, le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

admet une solution globale dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ . De plus, si  $u_0$ , condition initiale du problème, est prise dans l'ensemble  $Z_2$  alors  $u(., t)$ , est encore dans  $Z_2$ ,  $\forall t \in [0, T]$ .

### DEMONSTRATION.

Soit  $F$  l'application :

$$\begin{cases} Z'_2 = \{v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), v(., t) \in Z_2 \ \forall t \in [0, T]\} \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ v \rightarrow u, \end{cases}$$

où  $u$ , solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} v)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

satisfait aux relations de régularité :

$$\begin{cases} u \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V), \\ \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; V'). \end{cases}$$

Pour montrer que cette application  $F$  admet un point fixe, il suffit d'après la démonstration du théorème d'existence locale, de nous nous assurer que :

$$u \in Z'_2.$$

Ceci va résulter du principe du maximum. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} v)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} - \max_{x \in [a_0, a_1]} a(x)\Delta u_M = f \text{ dans } \Omega, \\ u_M = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_M}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{array} \right.$$

Par différence :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(u-u_M)}{\partial t} - a(\int_{\Omega} v)\Delta(u-u_M) = [a(\int_{\Omega} v) - \max_{x \in [a_0, a_1]} a(x)]\Delta(u_M) \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u - u_M = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial(u-u_M)}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) - u_M(x) \geq 0. \end{array} \right.$$

Or, par définition :

$$\Delta(u_M) \leq 0,$$

et par hypothèse sur  $v$  :

$$\int_{\Omega} u_M(x)dx \leq \int_{\Omega} v(x, t)dx \leq \int_{\Omega} u_m(x)dx \quad \text{p.p.t } t \in [0, T],$$

$$a(\int_{\Omega} v) - \max_{x \in [a_0, a_1]} a(x) = a(\int_{\Omega} v) - \max_{x \in [\int_{\Omega} u_M(x)dx, \int_{\Omega} u_m(x)dx]} a(x) \leq 0.$$

Donc :

$$u(\cdot, t) \geq u_M.$$

De la même manière, on montre que :

$$u(\cdot, t) \leq u_m.$$

### REMARQUE 3.1.

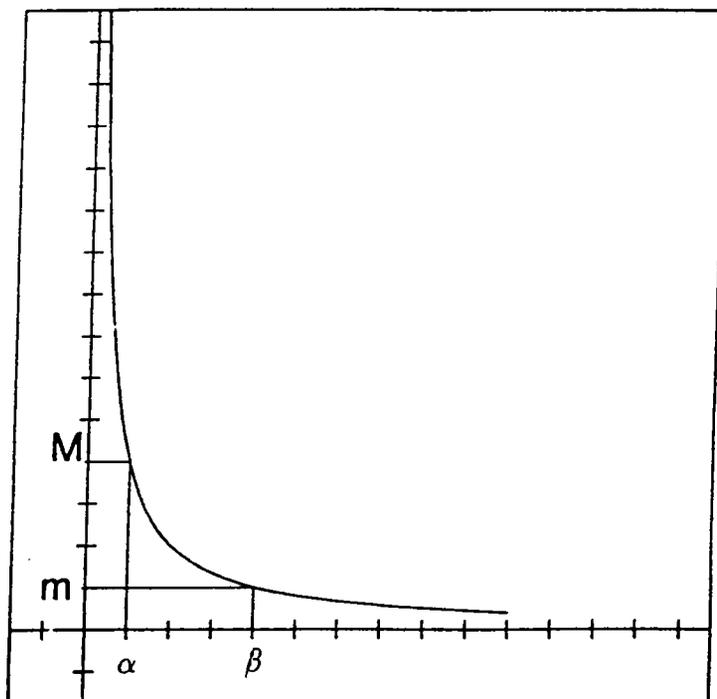
Comparé au premier espace métrique  $Z_1$ , l'étude du second espace métrique  $Z_2$  ne permet pas l'examen du comportement asymptotique mais permet d'éviter des conditions du type :

$$a(L) \leq a(x) \leq a(l), \quad \forall x \in [l, L].$$

### REMARQUE 3.2.

Faisons une première tentative d'extension des résultats au cas où  $a$  est une hyperbole.

Posons : 
$$a(x) = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}.$$



Comment construire une solution globale ?

On se donne sur  $(Ox)$  un intervalle quelconque  $[\alpha, \beta]$  avec  $\alpha > 0$ . On pose :

$$\begin{cases} M = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{\alpha}, \\ m = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{\beta}. \end{cases}$$

Le théorème précédent nous assure que si :

$$u_M(x) \leq u_0(x) \leq u_m(x),$$

$u(x, t)$  est solution globale et reste entre  $u_M(x)$  et  $u_m(x)$ , pour chaque  $t$ , et en particulier quand  $t \rightarrow +\infty$ .

Mais attention, rien ne nous assure a priori que cette solution globale n'est pas une solution triviale.

$$u(x, t) = u_0(x) \quad \forall t \geq 0.$$

### EXEMPLE 3.1.

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \int_{\Omega} u \Delta u = \frac{\pi^3}{2} \sin(\pi x) \text{ dans } (0,1) \times \mathbb{R}^{+*}, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = K \sin(\pi x), \quad K > 0. \end{cases}$$

On a :

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = \int_{\Omega} \frac{\pi^3}{4} \sin(\pi x)x(1-x)dx = 1.$$

Il existe  $M$  et  $m$  tels que :

$$u_M(x) = \frac{\pi}{2M} \sin(\pi x) \leq u_0(x) \leq u_m(x) = \frac{\pi}{2m} \sin(\pi x).$$

La solution est donc globale. En fait, elle est stationnaire :

$$u(x, t) = u_0(x) = K \sin(\pi x), \quad \forall t \geq 0.$$

#### IV. EXISTENCE D'UN ATTRACTEUR MAXIMAL.

L'existence de domaines invariants conduit naturellement à la notion d'attracteur maximal.

##### A) ETUDE D'UN EXEMPLE.

Soit  $\Psi$  la première fonction propre du Laplacien sur  $\Omega$  :

$$\begin{cases} -\Delta \Psi = k\Psi & \text{dans } \Omega, \\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

On suppose  $\int_{\Omega} \Psi(x)dx = 1$  et on considère la droite de  $L^2(\Omega)$  portée par  $\Psi$ .

$$X = D_{\Psi} = \{u \in L^2(\Omega) / u = C\Psi, C \in R\}.$$

On veut étudier dans cet exemple le cas particulier où les conditions initiales  $u_0$  et  $f$  sont éléments de  $X$ . Soit donc  $u$  solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = \alpha\Psi & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = k_0\Psi(x). \end{cases}$$

Pour  $a \in C^1(R)$  vérifiant :

$$0 < m \leq a \leq M,$$

nous allons montrer l'existence dans  $X$ , d'un attracteur maximal pour les solutions du problème précédent.

$u$  est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} u(x, t) = g(t)\Psi(x) \\ g'(t) + kg(t)a[g(t)] = \alpha, \\ g(0) = k_0. \end{cases}$$

Posons :

$$f(t) = -kta(t) + \alpha.$$

$f$  est  $C^1(R)$ , et pour donner un sens à la notion d'attracteur on suppose que  $f^{-1}(0)$  est un ensemble fini non réduit à un point.

Soient  $l_1, l_2, \dots, l_n$ , les racines successives de  $f$ . Pour  $g(t) \not\equiv k_0$ ,  $k_0$  ne peut pas être racine de  $f$ , donc soit il existe  $l_i$  et  $l_{i+1}$ , deux racines successives de  $f$ , encadrant  $k_0$ , soit  $k_0 < l_1$ , soit  $k_0 > l_n$ .

- Si  $k_0 \in ]l_i, l_{i+1}[$ , on pose :  $F(x) = \int_{k_0}^x \frac{dt}{f(t)}$  pour  $x \in ]l_i, l_{i+1}[$ .  $F$  est continue et monotone de  $]l_i, l_{i+1}[$  dans  $F(]l_i, l_{i+1}[)$  donc bijective de  $]l_i, l_{i+1}[$  dans  $F(]l_i, l_{i+1}[)$ . L'équation :  $g'(t) + kg(t)a[g(t)] = \alpha$  s'écrit :

$$F[g(t)] = t \quad \text{donc} \quad g(t) = F^{-1}(t),$$

et  $g(t)$ , par construction est dans  $]l_i, l_{i+1}[$ .

- Si  $F(]l_i, l_{i+1}[) = R$ ,  $g(t)$  est solution globale définie de  $R$  dans  $]l_i, l_{i+1}[$ .

- Si  $F(]l_i, l_{i+1}[) = ]c, d[$ ,  $c$  ou  $d$  fini, montrons qu'on peut prolonger  $g$  en une fonction  $\bar{g}$ , solution globale réelle de notre équation.

Supposons :  $\lim_{t \rightarrow d} g(t) = l_{i+1}$ , et  $\lim_{t \rightarrow c} g(t) = l_i$ , alors :

$$\lim_{t \rightarrow d} g'(t) = \lim_{t \rightarrow d} f(g(t)) = f(l_{i+1}) = 0,$$

et :

$$\lim_{t \rightarrow c} g'(t) = \lim_{t \rightarrow c} f(g(t)) = f(l_i) = 0$$

Par construction la fonction  $\bar{g}$  est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \bar{g}(t) = g(t) & \text{pour } t \in ]l_i, l_{i+1}[ \\ \bar{g}(t) = l_i & \text{pour } t \in ]-\infty, l_i], \\ \bar{g}(t) = l_{i+1} & \text{pour } t \in [l_{i+1}, +\infty[. \end{cases}$$

$\bar{g}$  est solution de notre équation sur  $]c, d[$  par définition de  $g$ , et au-delà car :

$$\bar{g}'(t) - f(\bar{g}(t)) = (l_j)' - f(l_j) = 0 \quad \text{avec} \quad j \in \{i, i+1\}.$$

Le cas où  $\lim_{t \rightarrow d} g(t) = l_i$ , et  $\lim_{t \rightarrow c} g(t) = l_{i+1}$ , se traite de même.

- Si  $k_0 < l_1$ ,  $F$  est croissante de  $] - \infty, l_1[$  dans  $F(] - \infty, l_1[)$ . Par construction,  $g(t) = F^{-1}$  est croissante de  $F(] - \infty, l_1[)$  dans  $] - \infty, l_1[$ , donc  $g(t) < l_1$  et  $g(t) \geq g(0) = k_0$  pour  $t \geq 0$ .  $g(t)$  est bornée par  $k_0$  et  $l_1$ . On montre comme dans le cas précédent que la solution maximale est définie pour  $t \geq 0$ .

- Si  $k_0 > l_n$ , on montre de même que  $g(t)$  est bornée par  $l_n$  et  $k_0$  et que la solution maximale est définie pour  $t \geq 0$ .

En conclusion, toute solution de l'équation :

$$g'(t) + kg(t)a[g(t)] = \alpha$$

est bornée, globale sur  $R^+$  et tend, quand  $t \rightarrow +\infty$ , vers une limite  $l(k_0) \in f^{-1}(0)$  qui dépend de la condition initiale  $k_0$ . Cette convergence n'est pas uniforme pour toutes les conditions initiales  $k_0$  prises dans une boule donnée  $B$ .

L'application  $k_0 \rightarrow l(k_0)$  ne saurait être continue car l'image d'un connexe par une application continue est connexe, or l'ensemble des  $l(k_0)$  est fini.

Nous allons chercher à "uniformiser" la convergence, quitte à perdre des informations sur le comportement asymptotique des trajectoires individuelles (cf.[Ha]). Un argument essentiel consiste à remarquer que la solution est définie globalement dans  $R$  en entier, pour  $t$  positif ou négatif, si et seulement si la condition initiale est prise dans  $[l_1, l_n]$ .

### DEFINITION 3.1.

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $S(t)$  un système dynamique sur  $X$ . Un sous-ensemble  $A$  est dit absorbant si on a :

$$\forall B \text{ borné } \subset X, \exists t(B) \text{ tel que } \forall t \geq t(B), S(t)(B) \subset A.$$

### DEFINITION 3.1'.

Un sous-ensemble fermé borné non vide  $F$  de  $X$  est dit attractif si :

$$\forall B \text{ borné } \subset X, \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in B} d(S(t)x, F) = 0.$$

### DEFINITION-THEOREME 3.2.

Supposons qu'il existe un fermé borné  $A$  tel que :

- i)  $A$  est attractif.
- ii)  $S(t)A = A, \forall t \geq 0$ .

Alors  $A$  est unique et on dit qu'il est l'attracteur maximal de  $S(t)$ . De plus:

$$A = \{u(0), u \in C_B(R, X), u(t+s) = S(t)u(s), \forall (s, t) \in R \times R^+\}.$$

En particulier  $S(t)$  a des trajectoires complètes bornées.

**THEOREME 3.3.**

On note  $l$  et  $L$  la plus petite et la plus grande des racines de l'équation :

$$\alpha - kxa(x) = 0.$$

Soit  $\Psi$  la première valeur propre du Laplacien sur  $\Omega$ , attachée à la valeur propre  $k$ .

$$\begin{cases} -\Delta\Psi = k\Psi & \text{dans } \Omega, \\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

On suppose  $\int_{\Omega} \Psi(x)dx = 1$ . Soit  $X$  la droite de  $L^2(\Omega)$  portée par  $\Psi$ .

$$X = D_{\Psi} = \{u \in L^2(\Omega) / u = C\Psi, C \in R\}.$$

Le segment  $A$  de  $X$  constitué des fonctions de  $X$  comprises entre  $l\Psi$  et  $L\Psi$  est l'attracteur maximal des solutions de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u)\Delta u = \alpha\Psi & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = k_0\Psi. \end{cases}$$

Pour  $a$  dans  $C^1(R)$  vérifiant :

$$0 < m \leq a(x) \leq M, \quad \forall x \in R.$$

**DEMONSTRATION.**

Soit :

$$A' = [l, L].$$

Montrons que  $A'$  est l'attracteur maximal des solutions de l'équation différentielle :

$$g'(t) + kg(t)a[g(t)] = \alpha,$$

ce qui assurera les conclusions du théorème.

i)  $A'$  est attractif car il contient toutes les solutions stationnaires.

ii)  $A'$  est invariant :  $k_0 \in A' \implies g(t) \in A'$ .

En effet, on remarque que  $f(L + \epsilon) < 0$  pour  $\epsilon > 0$  et on suppose  $k_0 < L + \epsilon$ , montrons par l'absurde que :  $g(t) < L + \epsilon$ .

Sinon, il existerait un premier instant  $t_0$  pour lequel :  $g(t_0) = L + \epsilon$ .

$$\frac{d}{dt}[g(t) - (L + \epsilon)]|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}[g(t)]|_{t=t_0} = f(g(t_0)) = f(L + \epsilon) < 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi :  $k_0 < L + \epsilon \implies g(t) < L + \epsilon$ , et par passage à la limite :

$$k_0 < L \implies g(t) < L,$$

de même :

$$k_0 > l \implies g(t) > l.$$

Réciproquement, soit  $S(t)$  le système dynamique associé à l'équation différentielle. L'inclusion  $A' \subset S(t)A'$ ,  $\forall t \geq 0$ , résulte du fait que toute solution maximale  $g(t) = S(t)k_0$ , est globale de  $R$  dans  $]l_i, l_{i+1}[$  pour  $k_0 \in ]l_i, l_{i+1}[$  et de  $R$  dans  $\{l_i\}$  pour  $k_0 = l_i$ . Donc, pour tout  $m$  dans  $A'$ , il existe  $m_0$  dans  $A'$  tel que :  $m = S(t)m_0$ . En effet, il suffit de considérer la trajectoire passant par  $m$  en  $t = 0$ , et de se rappeler que la solution est globale sur  $R$ , donc pour tout  $t$  positif il existe  $m_0$  dans  $A'$ , défini alors dans les temps négatifs, tel que  $m_0$  "atteigne"  $m$  après la durée  $t$ .

## B) CAS GENERAL.

Soit  $w$  la solution de l'équation elliptique : 
$$\begin{cases} -\Delta w = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Soit  $X$  la droite de  $L^2(\Omega)$  portée par  $w$ .

$$X = D_w = \{u \in L^2(\Omega) / u = mw, m \in R\}.$$

$X$  contient toutes les solutions stationnaires  $u_\infty$  car :

$$u_\infty = \frac{w}{a(\int_\Omega u_\infty(x) dx)}.$$

On suppose qu'il existe  $a^+$  fonction croissante et  $a^-$  fonction décroissante de  $x$ , vérifiant :

$$a^-(x) \leq a(x + \int_\Omega u_\infty) \leq a^+(x), \quad \forall x > 0,$$

et qu'il existe, pour tout couple de réels strictement positifs  $(x, y)$ , une fonction croissante  $w$ , telle que :

$$\left| \frac{1}{a(x)} - \frac{1}{a(y)} \right| \leq w(|x - y|).$$

Soit  $C$  la constante de POINCARÉ. On pose :

$$F(y) = a^- (|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y}) y - a^+ (|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y}) \frac{\|f\|_2^2}{C^2} (w(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y}))^2,$$

et on suppose qu'il existe un unique réel positif  $k$  tel que :

$$F(y) = 0 \text{ pour } y = k, \quad F(y) > 0 \text{ pour } y > k.$$

### THEOREME 3.4.

On considère une solution stationnaire  $u_\infty$  élément de  $X$ .

Soit  $K = \{v \in V / \|v - u_\infty\|_2^2 \leq 1 + k\}$  et soit  $s_0$  un réel positif donné.

On suppose :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{s_0}^x \frac{dy}{F(y+k)} = -\infty.$$

Alors  $K$  est un compact absorbant de  $L^2(\Omega)$  :

$$\forall B \text{ borné } \subset L^2(\Omega), \exists t(B) \text{ tel que } \forall t \geq t(B), \forall u_0 \in B, u \in K.$$

### REMARQUE 3.3.

Pour  $a(x)$  vérifiant :  $0 < m \leq a(x) \leq M$ , on peut poser :

$$a^-(x) = m, \quad a^+(x) = M \quad \text{et} \quad w(x) = \frac{M - m}{m^2}.$$

On a :

$$F(y) = my - \left( \frac{(M - m) \|f\|_2}{m^2} \right)^2 \frac{M}{C^2},$$

et donc, après avoir posé :  $k = \left( \frac{(M - m) \|f\|_2}{m^2} \right)^2 \frac{M}{C^2 m}$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{s_0}^x \frac{dy}{F(y+k)} = \lim_{x \rightarrow 0} \int_{s_0}^x \frac{dy}{my} = \frac{1}{m} \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{x}{s_0}\right) = -\infty.$$

Ainsi : pour  $t$  assez grand :

$$\|(u - u_\infty)\|_2^2 \leq 1 + k.$$

On montre en fait, l'inégalité plus précise :

$$\|(u - u_\infty)\|_2^2 \leq k + (\|u_0 - u_\infty\|_2^2 - k) \exp(-Cmt).$$

### DEMONSTRATION.

$K$  est fermé dans  $V$  qui s'injecte de manière compacte dans  $L^2(\Omega)$ .

Soit une solution stationnaire  $u_\infty$  élément de  $K$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\left(\int_{\Omega} u\right) \Delta u = f(x),$$

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial t} - a\left(\int_{\Omega} u_\infty\right) \Delta u_\infty = f(x).$$

En posant,  $y(t) = \| (u - u_\infty)(t) \|_2^2$ , on obtient par différence :

$$\frac{1}{2} \frac{dy(t)}{dt} + a\left(\int_\Omega u\right) \|\nabla(u - u_\infty)\|_2^2 = [a\left(\int_\Omega u\right) - a\left(\int_\Omega u_\infty\right)] \int_\Omega (u - u_\infty) \Delta u_\infty,$$

$$\frac{1}{2} \frac{dy(t)}{dt} \leq -Ca\left(\int_\Omega u\right)y(t) + |a\left(\int_\Omega u\right) - a\left(\int_\Omega u_\infty\right)| \int_\Omega \left[\frac{1}{2\alpha(t)}(u - u_\infty)^2 + \frac{\alpha(t)}{2} \Delta u_\infty^2\right],$$

où  $C$  est la constante de POINCARÉ, et où  $\alpha$  est une fonction de  $t$  que l'on précisera plus tard.

$$\frac{1}{2} \frac{dy(t)}{dt} \leq \left(\frac{|a\left(\int_\Omega u\right) - a\left(\int_\Omega u_\infty\right)|}{2\alpha(t)} - Ca\left(\int_\Omega u\right)\right)y(t) + (|a\left(\int_\Omega u\right) - a\left(\int_\Omega u_\infty\right)|) \frac{\alpha(t)}{2} \|\Delta u_\infty\|_2^2.$$

On choisit  $\alpha(t)$  tel que :

$$\frac{|a\left(\int_\Omega u\right) - a\left(\int_\Omega u_\infty\right)|}{2\alpha(t)} = \frac{Ca\left(\int_\Omega u\right)}{2},$$

c'est à dire :

$$\alpha(t) = \frac{|a\left(\int_\Omega u\right) - a\left(\int_\Omega u_\infty\right)|}{Ca\left(\int_\Omega u\right)}.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2} \frac{dy(t)}{dt} \leq -\frac{Ca\left(\int_\Omega u\right)}{2}y(t) + \frac{(a\left(\int_\Omega u\right) - a\left(\int_\Omega u_\infty\right))^2}{2Ca\left(\int_\Omega u\right)} \|\Delta u_\infty\|_2^2,$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq -Ca\left(\int_\Omega u\right)y(t) + (a\left(\int_\Omega u\right) - a\left(\int_\Omega u_\infty\right))^2 \frac{1}{a\left(\int_\Omega u\right)a\left(\int_\Omega u_\infty\right)^2 C} \|f\|_2^2,$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq -Ca\left(\int_\Omega u\right)y(t) + a\left(\int_\Omega u\right) \frac{\|f\|_2^2}{C} \left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega u\right)} - \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_\infty\right)}\right)^2.$$

On suppose qu'il existe  $a^+$  fonction croissante et  $a^-$  fonction décroissante de  $x$ , vérifiant :

$$a^-(x) \leq a\left(x + \int_\Omega u_\infty\right) \leq a^+(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De cette manière, on peut écrire :

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq -Ca^-(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y(t)})y(t) + a^+(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y(t)}) \frac{\|f\|_2^2}{C} \left(\frac{1}{a\left(\int_\Omega u\right)} - \frac{1}{a\left(\int_\Omega u_\infty\right)}\right)^2.$$

Par hypothèse, il existe une fonction croissante  $w$ , telle que :

$$\left|\frac{1}{a(x)} - \frac{1}{a(y)}\right| \leq w(|x - y|).$$

Ainsi :

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq -Ca^-(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y(t)})y(t) + a^+(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y(t)}) \frac{\|f\|_2^2}{C} (w(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y(t)}))^2.$$

On pose :

$$F(y) = a^- (|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y})y - a^+ (|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y}) \frac{\|f\|_2^2}{C^2} (w(|\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{y(t)}))^2,$$

et on suppose qu'il existe un unique réel positif  $k$  tel que :

$$F(x) = 0 \text{ pour } x = k, \quad F(x) > 0 \text{ pour } x > k.$$

On a donc :  $\frac{d[y(t)]}{dt} \leq -CF(y(t))$  et  $\frac{d[k]}{dt} = -CF(k)$ . Si  $y(0) \leq k$ , il est clair que  $y$  sous-solution, vérifie  $y \leq k$ . Si  $y(0) > k$ , et si il existe un temps  $t_0$  pour lequel  $y(t_0) \leq k$ , alors le même raisonnement, bâti en considérant  $t_0$  comme instant de départ conduit à  $y \leq k$ . Supposons, enfin,  $y(0) > k$  et  $y(t) > k, \forall t > 0$ , et montrons, grâce aux conditions sur  $F$ , que cela conduit encore à une majoration de  $y$ . On peut écrire :

$$\frac{d[y(t) - k]}{dt} \leq -CF(y(t) - k + k),$$

et :

$$H(y - k) \leq H(y_0 - k)e^{-Ct},$$

si on pose :

$$H(x) = e^{\int_{s_0}^x \frac{dy}{F(y+k)}} \text{ avec } s_0 > 0, \text{ fixé.}$$

Par hypothèse,  $F(y+k) > 0$  pour  $y > 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_{s_0}^x \frac{dy}{F(y+k)} = -\infty$  donc  $H$  est bijective, croissante de  $]0, +\infty[$  dans  $]0, H_\infty[$ , où  $H_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$ . Ainsi :

$$y - k \leq H^{-1}[H(y_0 - k)e^{-Ct}],$$

puis :

$$y(t) \leq k + H^{-1}[H(y_0 - k)e^{-Ct}].$$

Par croissance de  $H^{-1}$ , on a donc, pour  $y_0$  borné et  $t$  assez grand :

$$y(t) = \| (u - u_\infty)(t) \|_2^2 \leq 1 + k.$$

### CONSEQUENCE 3.3.

L'existence de  $K$  compact absorbant dans  $L^2(\Omega)$ , espace métrique complet, implique que l'ensemble  $A$  des images des trajectoires complètes bornées est attractif et invariant, c'est à dire qu'il est l'attracteur maximal cherché. (cf. [Ha])

$A$  est exactement l'ensemble des données initiales des solutions  $u$  globales et bornées de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_\Omega u)\Delta u = f \text{ dans } \Omega \times R, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0 \times R, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_1 \times R. \end{cases}$$

(cf. [CFNT] et [Ha])

## Chapitre 4

### AUTRES THEOREMES D'EXISTENCE GLOBALE

AUTRES THEOREMES D'EXISTENCE GLOBALE

( Etude et utilisation de la croissance de  $\int_{\Omega} u(x,t)dx$  )

I. INTRODUCTION.

L'étude d'une suite numérique bornée est grandement facilitée quand on réussit à établir sa monotonie.

L'idée que nous développons ici est très proche. Pour analyser la nature de la solution  $u$ , nous allons essayer d'établir la monotonie de  $\int_{\Omega} u(x,t)dx$ .

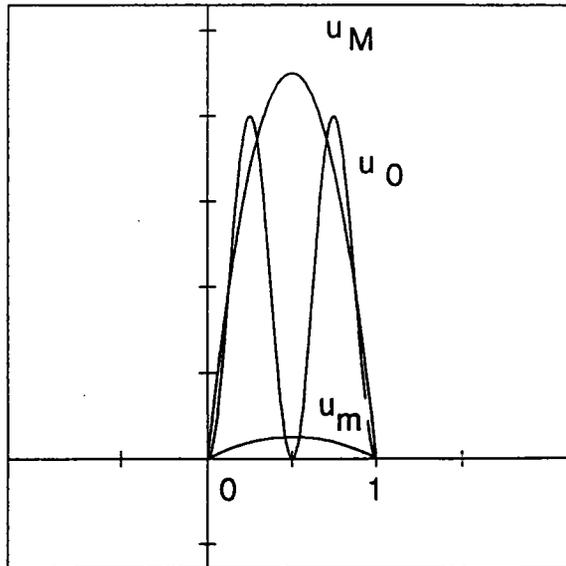
Tout résultat permettant d'étudier la croissance de  $\int_{\Omega} u(x,t)dx$  est intéressant : il nous fait comprendre le comportement asymptotique de la solution et nous permet de préciser la stabilité des points fixes éventuels.

On remarque, de plus que les théorèmes d'existence donnés précédemment ne sont pas exhaustifs.

Par exemple, le problème suivant n'entre pas dans ce cadre :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1 + \int_{\Omega} u(x,t)dx}{\int_{\Omega} u(x,t)dx} \Delta u = C \text{ dans } (0,1) \times \mathbb{R}^{+*}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = 1 - \cos(4\pi x). \end{cases}$$

Il est en effet impossible d'encadrer  $u(x,0) = 1 - \cos(4\pi x)$  entre les deux paraboles :  $u_M(x) = \frac{x(1-x)}{2M}$  et  $u_m(x) = \frac{x(1-x)}{2m}$ .



Imaginons, cependant qu'on ait réussi à établir la croissance de  $\int_{\Omega} u(x, t) dx$ , en fonction de  $t$ . Nous pouvons alors affirmer que :

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx \geq \int_{\Omega} u_0(x) dx = 1,$$

et, comme  $a(x)$  est décroissante :

$$a\left(\int_{\Omega} u\right) \leq a(1) = 2.$$

Par ailleurs :

$$\int_{\Omega} u \geq 1 \geq 0 \Rightarrow a\left(\int_{\Omega} u\right) = 1 + \frac{1}{\int_{\Omega} u} \geq 1.$$

Ainsi, les conditions naturelles de structure :

$$1 \leq a\left(\int_{\Omega} u(x, t) dx\right) = \frac{1 + \int_{\Omega} u(x, t) dx}{\int_{\Omega} u(x, t) dx} \leq 2$$

sont vérifiées et il y a existence et unicité de la solution globale.

Le théorème qui suit permet d'établir ce résultat sous la condition :

$$f(x) + a\left(\int_{\Omega} u_0(x) dx\right) \Delta u_0 = \frac{1 + \int_{\Omega} u(x, 0) dx}{\int_{\Omega} u(x, 0) dx} (16\pi^2 \cos(4\pi x)) \geq 0.$$

Donc pour  $C$  assez grand, car :

$$f(x) + a\left(\int_{\Omega} u_0(x) dx\right) \Delta u_0 = C + 32\pi^2 \cos(4\pi x) \geq 0 \text{ pour } C \geq 32\pi^2 \text{ (ici } \int_{\Omega} u(x, 0) dx = 1).$$

## II. CROISSANCE DE $u(t)$ .

### THEOREME 4.1.

Soient  $u_0$  et  $\Delta u_0$ , deux fonctions de  $L^2(\Omega)$ , et  $f \geq 0$  dans  $V$ .

On suppose que  $a$  est strictement positive, continûment dérivable, décroissante sur  $R^{*+}$  et que :  $f + a\left(\int_{\Omega} u_0(x) dx\right) \Delta u_0 \geq 0$ .

Alors, le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\left(\int_{\Omega} u\right) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

admet une solution globale unique dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  qui de plus est fonction croissante de  $t$ .

**DEMONSTRATION.**

On procède comme auparavant. Soit :

$$Z = \{u \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) / u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), u_t \geq 0, \int_{\Omega} u(x, t) dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} (\|f\|_2 T + \|u_0\|_2)\}$$

Soit  $F$  l'application :

$$\begin{cases} Z \subset L^2(0, T; L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)), \\ v \rightarrow u, \end{cases}$$

où  $u$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} v) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T). \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T). \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

et vérifie d'après les conditions posées sur  $u_0$  et  $f$  :

$$\begin{cases} u \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V), \\ \frac{du}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases}$$

Pour montrer que cette application  $F$  admet un point fixe, il suffit d'après la démonstration du théorème d'existence locale, de nous assurer que :  $u \in Z$ , car alors  $F$  applique  $Z$  sur  $Z$ .

On pose :

$$y(t) = \|u\|_2^2.$$

$y(t)$  vérifie l'équation énergétique :

$$\frac{1}{2} y'(t) + a(\int_{\Omega} v(x, t) dx) \|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega} f(x) u(x, t) dx,$$

d'où :

$$\frac{1}{2} y'(t) + a(\int_{\Omega} v(x, t) dx) \|\nabla u\|_2^2 \leq \|f\|_2 \|u\|_2.$$

On a donc :  $y'(t) \leq 2 \|f\|_2 \sqrt{y}$ , puis :  $\sqrt{y} \leq \|f\|_2 t + \|u_0\|_2$ ,

$$\sqrt{y} \leq \|f\|_2 T + \|u_0\|_2.$$

Ainsi :

$$\int_{\Omega} u(x) dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|u\|_2 \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} (\|f\|_2 T + \|u_0\|_2).$$

On va montrer, ensuite, que  $u(x, t)$  vérifie :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \geq 0.$$

On pose :

$$w = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

$w$  vérifie :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a\left(\int_{\Omega} v\right)\Delta w - a'\left(\int_{\Omega} v\right)\left(\int_{\Omega} v_t\right)\Delta u = 0.$$

Or :

$$\Delta u = \frac{w - f}{a\left(\int_{\Omega} v\right)},$$

donc :

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a\left(\int_{\Omega} v\right)\Delta w - \frac{a'\left(\int_{\Omega} v\right)\left(\int_{\Omega} v_t\right)}{a\left(\int_{\Omega} v\right)}w = -\frac{a'\left(\int_{\Omega} v\right)\left(\int_{\Omega} v_t\right)}{a\left(\int_{\Omega} v\right)}f.$$

On vérifie que 0 est une sous-solution de cette équation :

$$0 \leq -\frac{a'\left(\int_{\Omega} v\right)\left(\int_{\Omega} v_t\right)}{a\left(\int_{\Omega} v\right)}f,$$

puisque  $a$  est décroissante et que  $v_t \geq 0$ .

De plus par hypothèse :  $w(x, 0) = u_t(x, 0) = f + a\left(\int_{\Omega} u_0\right)\Delta u_0 \geq 0$ .

Ceci implique d'après le principe du maximum :  $w \geq 0$ .

Nous pouvons ainsi affirmer qu'il existe  $m, M, m'$  et  $M'$  tels que :

$$0 < m \leq \int_{\Omega} u \leq M,$$

$$\text{et } 0 < m' \leq a\left(\int_{\Omega} u\right) \leq M',$$

avec :

$$\begin{cases} m = \int_{\Omega} u_0(x)dx, \\ M = |\Omega|^{\frac{1}{2}}(\|f\|_2 T + \|u_0\|_2), \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} M' = a\left(\int_{\Omega} u_0(x)dx\right), \\ m' = a(|\Omega|^{\frac{1}{2}}(\|f\|_2 T + \|u_0\|_2)). \end{cases}$$

Nous allons généraliser le résultat précédent en remplaçant la fonction nulle par une fonction impaire  $g_0$ , dans la condition :  $f + a\left(\int_{\Omega} u_0\right)\Delta u_0 \geq 0$ .

### III. CROISSANCE DE $\int_{\Omega} u(x, t)dx$ .

#### DEFINITION 4.1.

On suppose que le domaine  $\Omega \subset R^N$ , ainsi que  $\partial\Omega_0, \partial\Omega_1$  sont invariants par chacune des symétries orthogonales ( $S_i$ ) d'hyperplan ( $x_i = 0$ ), où  $i$  parcourt  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ .

Une fonction  $g_0$  définie sur  $\Omega$  est dite **impaire** si :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\} \quad \forall x \in \Omega : \quad g_0 \circ S_i(x) = -g_0(x).$$

**EXEMPLE 4.1.**

Soit  $\Omega = [-1, 1]^2$  dans  $R^2$ ,  $g_0(x, y) = xy$  est une fonction impaire définie sur  $\Omega$ .

**THEOREME 4.2.**

On suppose  $\Omega$ ,  $\partial\Omega_0$ ,  $\partial\Omega_1$  invariants par chacune des symétries orthogonales  $(S_i)$  d'hyperplan  $(x_i = 0)$ , où  $i$  parcourt  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ .

Soit  $g_0$  une fonction impaire définie sur  $\Omega$ .

$u_0$ ,  $f$  et  $\Delta u_0$  sont des fonctions de  $L^2(\Omega)$ .

$a$  est une fonction continue, décroissante de  $R^{+*}$  dans  $R^{+*}$ , lipschitzienne pour  $x \geq \int_{\Omega} u_0(x)dx$ .

On suppose que :

$$\begin{cases} f \geq 0, \\ f + a(\int_{\Omega} u_0) \Delta u_0 \geq g_0, \\ u_0 \geq 0, u_0 \neq 0. \end{cases}$$

Alors, pour tout  $T > 0$  le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

admet une solution globale unique dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$ , telle que  $\int_{\Omega} u(x, t)dx$  est fonction croissante de  $t$ .

**REMARQUE 4.3.**

La condition :

$$f + a(\int_{\Omega} u_0) \Delta u_0 \geq g_0,$$

implique si on suppose  $\Omega$ ,  $\partial\Omega_0$ ,  $\partial\Omega_1$  invariants par chacune des symétries  $(S_i)$  :

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - a(\int_{\Omega} u_0)(\int_{\Omega} u_0) \geq 0.$$

**REMARQUE 4.4.**

Pour démontrer ces résultats, nous utilisons une méthode itérative, basée sur une discrétisation du temps.

Le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

Le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

va être discrétisé en :

$$\begin{cases} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - a(\int_{\Omega} u_{i-1}) \Delta u_i = f \text{ dans } \Omega, \\ u_i \in V \text{ pour } i \geq 1, \\ u_0 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Essayons de décrire et de justifier brièvement l'utilisation de cette méthode.

Pour  $n$  entier positif, nous réalisons une partition de :  $I = [0, T]$ , en intervalles de longueur  $h = \frac{T}{n}$ . C'est à dire en  $n$  intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$  avec :  $t_i = ih$ , pour  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Après avoir posé :  $u_i = u_{i,n}$ , pour  $u_i$  vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - a(\int_{\Omega} u_{i-1}) \Delta u_i = f \text{ dans } \Omega, \\ u_i \in V \text{ pour } i \geq 1, \\ u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

nous définissons  $u_n$  de  $I$  dans  $V$  de la manière suivante :

$$u_n(t) = u_{i-1} + (t - t_{i-1}) \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad \text{pour } t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Il est clair que si nous réussissons à établir la croissance de la suite  $(u_i)$ , c'est à dire à prouver que  $\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \geq 0$ , nous pourrons approcher  $u$  par une suite  $u_n$  de fonctions croissantes en  $t$ .

Même si la convergence est faible,  $\int_{\Omega} u$  apparaîtra comme limite de fonctions croissantes  $\int_{\Omega} u_n(t)$ .

#### LEMME 4.1.

**On suppose  $\Omega$ ,  $\partial\Omega_0$ ,  $\partial\Omega_1$  invariants par chacune des symétries orthogonales  $(S_i)$  d'hyperplan  $(x_i = 0)$ , où  $i$  parcourt  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$ .**

**Soit  $g$  une fonction impaire définie sur  $\Omega$ .**

**La solution  $u$  de l'équation :  $\begin{cases} u - \Delta u = g, \\ u \in V, \end{cases}$  est impaire.**

#### DEMONSTRATION DU LEMME 4.1.

Soit  $S_i$  la symétrie orthogonale d'hyperplan  $(x_i = 0)$ .

L'image par  $S_i$  de  $(x_1, \dots, x_N)$  est notée :  $(X_1, \dots, X_N)$

$$\begin{cases} X_j = x_j \text{ pour } i \neq j, \\ X_i = -x_i. \end{cases}$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} S_i(S_i(x_1, \dots, x_N)) &= (x_1, \dots, x_N), \\ (x_1, \dots, x_N) &= S_i(X_1, \dots, X_N). \end{aligned}$$

On pose :

$$V = u \circ S_i.$$

On peut donc écrire :

$$V(X_1, \dots, X_N) = u \circ S_i(X_1, \dots, X_N) = u(x_1, \dots, x_N).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial V}{\partial X_j} \text{ pour } i \neq j. \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial X_i}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial V}{\partial X_j} \text{ pour } i \neq j, \\ \\ \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial X_i^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial X_j^2} \text{ pour } i \neq j. \end{cases} \end{cases}$$

L'équation  $u - \Delta u = g$  devient :

$$V(X_1, \dots, X_N) - \Delta V(X_1, \dots, X_N) = g[S_i(X_1, \dots, X_N)],$$

$$V(X_1, \dots, X_N) - \Delta V(X_1, \dots, X_N) = -g(X_1, \dots, X_N),$$

donc :

$$V(X_1, \dots, X_N) = -u(X_1, \dots, X_N) = -u[S_i(x_1, \dots, x_N)],$$

$$u(x_1, \dots, x_N) = V(X_1, \dots, X_N) = -u[S_i(x_1, \dots, x_N)].$$

## DEMONSTRATION DU THEOREME 4.2.

### CONVERGENCE DU PROCEDE ITERATIF.

Comme on l'a déjà vu, on se propose d'obtenir une solution faible du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(\int_{\Omega} u) \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

en utilisant une méthode où le temps est discrétisé.

Soit :

$$T = nh \quad \text{et} \quad u_{i,n} = u_i \text{ pour } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

On commence par résoudre le problème elliptique :

$$\begin{cases} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - a(\int_{\Omega} u_{i-1}) \Delta u_i = f \text{ dans } \Omega, \\ u_i \in V \text{ pour } i \geq 1, \\ u_0 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Le premier d'entre eux :

$$\begin{cases} \frac{u_1 - u_0}{h} - a(\int_{\Omega} u_0) \Delta u_1 = f \text{ dans } \Omega, \\ u_1 \in V, \\ u_0 \in L^2(\Omega), \end{cases}$$

ne présente aucune difficulté car :  $a(\int_{\Omega} u_0) > 0$  pour  $\int_{\Omega} u_0 > 0$ , et conduit donc à une solution unique  $u_1$ . Nous verrons plus tard dans le lemme 4.2 que :  $\int_{\Omega} u_1 \geq \int_{\Omega} u_0 > 0$ , donc :

$$a(\int_{\Omega} u_1) > 0.$$

L'existence et l'unicité de  $u_2$  en résultent, et par récurrence, grâce au lemme 4.2, celle de n'importe quel  $u_i$ .

### a) ESTIMATIONS A PRIORI SUR $u_i$ .

Nous pouvons écrire, pour tout  $v$  dans  $V$  :

$$\left\langle \frac{u_i(x) - u_{i-1}(x)}{h}, v \right\rangle + a(\int_{\Omega} u_{i-1}) \langle \nabla u_i, \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle.$$

Appliquons cette relation à  $i = j$  puis à  $i = j - 1$  :

$$\begin{cases} \left\langle \frac{u_j(x) - u_{j-1}(x)}{h}, v \right\rangle + a(\int_{\Omega} u_{j-1}) \langle \nabla u_j, \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle, \\ \left\langle \frac{u_{j-1}(x) - u_{j-2}(x)}{h}, v \right\rangle + a(\int_{\Omega} u_{j-2}) \langle \nabla u_{j-1}, \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle. \end{cases}$$

On pose :

$$v = \delta_h u_j = \frac{u_j(x) - u_{j-1}(x)}{h},$$

$$\begin{cases} \langle \delta_h u_j, \delta_h u_j \rangle + a(\int_{\Omega} u_{j-1}) \langle \nabla u_j, \nabla \delta_h u_j \rangle = \langle f, \delta_h u_j \rangle, \\ \langle \delta_h u_{j-1}, \delta_h u_j \rangle + a(\int_{\Omega} u_{j-2}) \langle \nabla u_{j-1}, \nabla \delta_h u_j \rangle = \langle f, \delta_h u_j \rangle. \end{cases}$$

Multiplions la première équation par :  $a(\int_{\Omega} u_{j-2})$ , et la seconde par :  $a(\int_{\Omega} u_{j-1})$ .

$$\begin{cases} \langle a(\int_{\Omega} u_{j-2}) \delta_h u_j, \delta_h u_j \rangle + a(\int_{\Omega} u_{j-2}) a(\int_{\Omega} u_{j-1}) \langle \nabla u_j, \nabla \delta_h u_j \rangle = a(\int_{\Omega} u_{j-2}) \langle f, \delta_h u_j \rangle, \\ \langle a(\int_{\Omega} u_{j-1}) \delta_h u_{j-1}, \delta_h u_j \rangle + a(\int_{\Omega} u_{j-1}) a(\int_{\Omega} u_{j-2}) \langle \nabla u_{j-1}, \nabla \delta_h u_j \rangle = a(\int_{\Omega} u_{j-1}) \langle f, \delta_h u_j \rangle. \end{cases}$$

et soustrayons, après avoir remarqué :

$$a(\int_{\Omega} u_{j-1}) = a(\int_{\Omega} u_{j-2}) + (a(\int_{\Omega} u_{j-1}) - a(\int_{\Omega} u_{j-2})).$$

Ainsi en divisant par :  $a(\int_{\Omega} u_{j-2}) > 0$ , et en remarquant que :

$$ha(\int_{\Omega} u_{j-1})a(\int_{\Omega} u_{j-2}) \|\nabla(\delta_h u_j)\|_2^2 \geq 0,$$

on arrive à l'inégalité :

$$\langle \delta_h u_j, \delta_h u_j - \delta_h u_{j-1} \rangle \leq \frac{[a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})]}{a(\int_{\Omega} u_{j-2})} \langle \delta_h u_j, f - \delta_h u_{j-1} \rangle. \quad (A)$$

#### b) LEMME 4.2.

Sous les hypothèses du théorème, nous avons, pour  $j \geq 1$  les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{u_j(x) - u_{j-1}(x)}{h} \leq \int_{\Omega} f(x) dx, \\ \int_{\Omega} u_j \geq \int_{\Omega} u_{j-1}, \\ \int_{\Omega} u_j \leq T \int_{\Omega} f(x) dx + \int_{\Omega} u_0(x) dx. \end{cases}$$

#### DEMONSTRATION DU LEMME 4.2.

Par intégration :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{u_j(x) - u_{j-1}(x)}{h} &= \int_{\Omega} f(x) dx + a(\int_{\Omega} u_{j-1}) \int_{\Omega} \Delta u_{j-1}, \\ \int_{\Omega} \frac{u_j(x) - u_{j-1}(x)}{h} &= \int_{\Omega} f(x) dx + a(\int_{\Omega} u_{j-1}) \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{j-1}}{\partial n}. \end{aligned}$$

Or  $u_{j-1}$  est positive dans  $V$  donc :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_{j-1}}{\partial n} \leq 0,$$

c'est à dire :

$$\int_{\Omega} \frac{u_j(x) - u_{j-1}(x)}{h} \leq \int_{\Omega} f(x) dx.$$

Ceci est la première inégalité du lemme 4.2.

Soit, par ailleurs,  $g_1$  la solution impaire du problème :

$$\begin{cases} g_1 - ha(\int_{\Omega} u_0)\Delta g_1 = g_0, \\ g_1 \in V. \end{cases}$$

Comme par hypothèse :  $f + a(\int_{\Omega} u_0)\Delta u_0 \geq g_0$ ,

$g_1$  est une sous-solution de :

$$\begin{cases} w - ha(\int_{\Omega} u_0)\Delta w = f + a(\int_{\Omega} u_0)\Delta u_0, \\ w \in V, \end{cases}$$

Comme par hypothèse :  $f + a(\int_{\Omega} u_0)\Delta u_0 \geq g_0$ ,

$g_1$  est une sous-solution de :

$$\begin{cases} w - ha(\int_{\Omega} u_0)\Delta w = f + a(\int_{\Omega} u_0)\Delta u_0, \\ w \in V, \end{cases}$$

qui admet  $\frac{u_1 - u_0}{h}$  pour solution.

Donc :  $\frac{u_1 - u_0}{h} \geq g_1$ , et par intégration :

$$\int_{\Omega} \frac{u_1(x) - u_0(x)}{h} \geq 0 \text{ car } \int_{\Omega} g_1 = 0.$$

Mais alors le raisonnement se réitère, car :

$$f + a(\int_{\Omega} u_1)\Delta u_1 = f \frac{[a(\int_{\Omega} u_0) - a(\int_{\Omega} u_1)]}{a(\int_{\Omega} u_0)} + \frac{a(\int_{\Omega} u_1)}{a(\int_{\Omega} u_0)} \left( \frac{u_1(x) - u_0(x)}{h} \right).$$

Comme  $a$  est décroissante,  $f$  positive, et :  $\frac{[a(\int_{\Omega} u_0) - a(\int_{\Omega} u_1)]}{a(\int_{\Omega} u_0)} \geq 0$ , on a :

$$f + a(\int_{\Omega} u_1)\Delta u_1 \geq \frac{a(\int_{\Omega} u_1)}{a(\int_{\Omega} u_0)} g_1(x),$$

où :  $\frac{a(\int_{\Omega} u_1)}{a(\int_{\Omega} u_0)} g_1(x)$  est une fonction impaire. Et par récurrence :

$$f + a(\int_{\Omega} u_i)\Delta u_i \geq \frac{a(\int_{\Omega} u_i)}{a(\int_{\Omega} u_{i-1})} g_i(x),$$

puis :

$$\int_{\Omega} u_{j-1} \geq \int_{\Omega} u_j.$$

On démontre ainsi la seconde inégalité du lemme 4.2.

De plus :

$$\int_{\Omega} u_j = \sum_{k=1}^{k=j} \left( \int_{\Omega} u_k - u_{k-1} \right) + \int_{\Omega} u_0,$$

donc :

$$\int_{\Omega} u_j \leq \sum_{k=1}^{k=j} \left( h \int_{\Omega} f \right) + \int_{\Omega} u_0,$$

$$\int_{\Omega} u_j \leq nh \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} u_0,$$

$$\int_{\Omega} u_j \leq T \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} u_0.$$

c) LEMME 4.3.

Il existe trois constantes  $k, k', k''$ , telles que les trois inégalités suivantes :

$$\left\| \frac{u_i(x) - u_{i-1}(x)}{h} \right\|_2 \leq k,$$

$$\| u_i(x) \|_2 \leq k',$$

et :

$$\| \nabla u_i(x) \|_2 \leq k'',$$

soient vérifiées pour tous les  $n$  assez grands et pour tout  $i$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

DEMONSTRATION DU LEMME 4.3.

Nous repartons de l'inégalité (A) :

$$\langle \delta_h u_j, \delta_h u_j - \delta_h u_{j-1} \rangle \leq \frac{[a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})]}{a(\int_{\Omega} u_{j-2})} \langle \delta_h u_j, f - \delta_h u_{j-1} \rangle,$$

que l'on écrit encore :

$$\langle \delta_h u_j, \delta_h u_j - \delta_h u_{j-1} \rangle \leq \frac{[a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})]}{a(\int_{\Omega} u_{j-2})} (\langle \delta_h u_j, f \rangle - \langle \delta_h u_j, \delta_h u_{j-1} \rangle).$$

$$\text{D'où : } \|\delta_h u_j\|_2^2 \leq \left| \frac{[a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})]}{a(\int_{\Omega} u_{j-2})} \right| (|\langle \delta_h u_j, f \rangle| + |\langle \delta_h u_j, \delta_h u_{j-1} \rangle|)$$

$$+ |\langle \delta_h u_j, \delta_h u_{j-1} \rangle|.$$

Utilisons, ensuite, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ :

$$\|\delta_h u_j\|_2^2 \leq \left| \frac{[a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})]}{a(\int_{\Omega} u_{j-2})} \right| \|\delta_h u_j\|_2 [\|f\|_2 + \|\delta_h u_{j-1}\|_2] + \|\delta_h u_j\|_2 \|\delta_h u_{j-1}\|_2,$$

$$\|\delta_h u_j\|_2 \leq \left| \frac{[a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})]}{a(\int_{\Omega} u_{j-2})} \right| [\|f\|_2 + \|\delta_h u_{j-1}\|_2] + \|\delta_h u_{j-1}\|_2.$$

Or, d'après le lemme 4.2 :

$$\left| \frac{[a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})]}{a(\int_{\Omega} u_{j-1})} \right| = \frac{[a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})]}{a(\int_{\Omega} u_{j-1})},$$

et donc :

$$\left| \frac{a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})}{a(\int_{\Omega} u_{j-1})} \right| = \frac{a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})}{\int_{\Omega} u_{j-1} - \int_{\Omega} u_{j-2}} \left( \int_{\Omega} u_{j-1} - \int_{\Omega} u_{j-2} \right) \left( \frac{1}{a(\int_{\Omega} u_{j-1})} \right).$$

Majorons chaque terme constituant le membre de droite de cette égalité. Comme  $a$  est  $M$ -lipschitzienne :

$$\frac{a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})}{\int_{\Omega} u_{j-1} - \int_{\Omega} u_{j-2}} \leq M.$$

On a aussi :

$$\int_{\Omega} u_{j-1} - \int_{\Omega} u_{j-2} \leq h \int_{\Omega} f(x)dx,$$

et :

$$\frac{1}{a(\int_{\Omega} u_{j-1})} \leq \frac{1}{a(T \int_{\Omega} f(x)dx + \int_{\Omega} u_0(x)dx)},$$

donc :

$$\left| \frac{a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})}{a(\int_{\Omega} u_{j-1})} \right| \leq \frac{Mh \int_{\Omega} f(x)dx}{a(T \int_{\Omega} f(x)dx + \int_{\Omega} u_0(x)dx)}.$$

Nous résumerons cette inégalité, en disant qu'il existe une constante  $C$ , qui ne dépend que des données initiales  $(u_0, f, T)$ , telle que :

$$\left| \frac{a(\int_{\Omega} u_{j-2}) - a(\int_{\Omega} u_{j-1})}{a(\int_{\Omega} u_{j-1})} \right| \leq Ch,$$

donc :

$$\| \delta_h u_j \|_2 - \| \delta_h u_{j-1} \|_2 \leq Ch [\| f \|_2 + \| \delta_h u_{j-1} \|_2].$$

Voyons ce que devient cette inégalité quand  $j$  varie de 2 à  $i$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \| \delta_h u_i \|_2 - \| \delta_h u_{i-1} \|_2 \leq Ch (\| \delta_h u_{i-1} \|_2 + \| f \|_2), \\ \| \delta_h u_{i-1} \|_2 - \| \delta_h u_{i-2} \|_2 \leq Ch (\| \delta_h u_{i-2} \|_2 + \| f \|_2), \\ \dots\dots\dots \\ \| \delta_h u_3 \|_2 - \| \delta_h u_2 \|_2 \leq Ch (\| \delta_h u_2 \|_2 + \| f \|_2), \\ \| \delta_h u_2 \|_2 - \| \delta_h u_1 \|_2 \leq Ch (\| \delta_h u_1 \|_2 + \| f \|_2). \end{array} \right.$$

Faisons la somme :

$$\| \delta_h u_i \|_2 - \| \delta_h u_1 \|_2 \leq Ch \| \delta_h u_1 \|_2 + Ch \sum_{j=2}^{j=i-1} \| \delta_h u_j \|_2 + (i-1)Ch \| f \|_2,$$

donc :

$$\| \delta_h u_i \|_2 \leq (1 + Ch) \| \delta_h u_1 \|_2 + Ch(i-1) \| f \|_2 + Ch \sum_{j=2}^{j=i-1} \| \delta_h u_j \|_2.$$

Montrons que :  $\| \delta_h u_1 \|_2$  est majoré par une constante qui ne dépend que de  $u_0$  et  $f$ . La relation :

$$\left\langle \frac{u_i(x) - u_{i-1}(x)}{h} \right\rangle + a\left(\int_{\Omega} u_{i-1}\right) \langle \nabla u_i, \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle,$$

écrite pour :  $\begin{cases} i = 1, \\ v = \frac{u_1 - u_0}{h} = \delta_h u_1, \end{cases}$  devient :

$$\| \delta_h u_1 \|_2^2 + a(\int_{\Omega} u_0) \langle \nabla u_1, \nabla \delta_h u_1 \rangle = \langle f, \delta_h u_1 \rangle,$$

$$\| \delta_h u_1 \|_2^2 \leq \| f \|_2 \| \delta_h u_1 \|_2 - a(\int_{\Omega} u_0) \langle \nabla u_1, \nabla \delta_h u_1 \rangle,$$

$$\| \delta_h u_1 \|_2^2 \leq \| f \|_2 \| \delta_h u_1 \|_2 - a(\int_{\Omega} u_0) [\langle \nabla(u_1 - u_0), \nabla \delta_h u_1 \rangle + \langle \nabla u_0, \nabla \delta_h u_1 \rangle],$$

$$\| \delta_h u_1 \|_2^2 \leq \| f \|_2 \| \delta_h u_1 \|_2 - ha(\int_{\Omega} u_0) \| \nabla(\delta_h u_1) \|_2^2 + a(\int_{\Omega} u_0) \| \Delta u_0 \|_2 \| \delta_h u_1 \|_2.$$

Cette expression a un sens car :  $\Delta u_0 \in L^2(\Omega)$ .

donc :  $\| \delta_h u_1 \|_2 \leq \| f \|_2 + a(\int_{\Omega} u_0) \| \Delta u_0 \|_2$ . Si on remarque de plus, que :  $ih \leq nh = T$ , on peut écrire :

$$\| \delta_h u_i \|_2 \leq (1 + Ch)(\| f \|_2 + a(\int_{\Omega} u_0) \| \Delta u_0 \|_2) + CT \| f \|_2 + Ch \sum_{j=2}^{j=i-1} \| \delta_h u_j \|_2.$$

Posons :  $K = (1 + Ch)(\| f \|_2 + a(\int_{\Omega} u_0) \| \Delta u_0 \|_2) + CT \| f \|_2$ . Alors :

$$\| \delta_h u_i \|_2 \leq K + Ch \sum_{j=2}^{j=i-1} \| \delta_h u_j \|_2.$$

A fortiori :

$$\| \delta_h u_i \|_2 \leq K + Ch \sum_{j=1}^{j=i-1} \| \delta_h u_j \|_2.$$

Nous allons ensuite utiliser un lemme qui peut être vu comme une version discrète de l'inégalité de GRONWALL et qu'on peut trouver sous une forme plus générale dans [K].

#### LEMME 4.4.

Soient  $C, h, K, T$ , quatre réels,  $Ch < 1$ .

Soit  $\delta_i$ , une suite de réels positifs ou nuls, où  $i$  parcourt  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$  avec  $Nh \leq T$ . On suppose que :

$$\delta_1 \leq K, \text{ et pour } i \geq 2 : \delta_i \leq K + Ch \sum_{j=1}^{j=i-1} \delta_j \quad (a),$$

alors :

$$\delta_i \leq K \exp(CT).$$

## DEMONSTRATION.

Posons :

$$S_i = \sum_{j=1}^{j=i} \delta_j.$$

L'inégalité (a) s'écrit :

$$S_i - S_{i-1} \leq K + Ch \sum_{j=1}^{j=i-1} \delta_j,$$

ou encore :

$$\begin{aligned} S_i - (1 + Ch)S_{i-1} &\leq K, \\ (S_i + \frac{K}{Ch}) &\leq (1 + Ch)(S_{i-1} + \frac{K}{Ch}). \end{aligned}$$

Par récurrence :

$$(S_i + \frac{K}{Ch}) \leq (1 + Ch)^{i-1} (S_1 + \frac{K}{Ch}),$$

donc :

$$\begin{aligned} (S_i + \frac{K}{Ch}) &\leq (1 + Ch)^{i-1} (K + \frac{K}{Ch}), \\ S_i &\leq (1 + Ch)^{i-1} (K + \frac{K}{Ch}) - \frac{K}{Ch}, \end{aligned}$$

puis :

$$K + ChS_i \leq K(1 + Ch)^i.$$

L'inégalité (a) devient :

$$\begin{aligned} \delta_i &\leq K + ChS_{i-1}, \\ \delta_i &\leq K(1 + Ch)^{i-1}, \\ \delta_i &\leq K(1 + Ch)^{\frac{(i-1)h}{h}}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\delta_i \leq K \exp((i-1)Ch) \leq K \exp(CT).$$

Cette relation achève la démonstration du lemme et a pour conséquence :

$$\| \delta_h u_i \|_2 \leq K \exp(CT),$$

qui est la première inégalité du lemme 4.3. On en déduit que :

$$\| u_i \|_2 \leq \| u_0 \|_2 + \sum_{j=1}^{j=i} h \| \delta_h u_j \|_2,$$

$$\| u_i \|_2 \leq \| u_0 \|_2 + hi K \exp(CT),$$

$$\| u_i \|_2 \leq \| u_0 \|_2 + TK \exp(CT).$$

On démontre ainsi la seconde inégalité du lemme 4.3.

L'égalité :

$$\left\langle \frac{u_i(x) - u_{i-1}(x)}{h}, v \right\rangle + a \left( \int_{\Omega} u_{i-1} \right) \langle \nabla u_i, \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle,$$

appliquée à  $v = u_i$  permet d'écrire :

$$\| a \left( \int_{\Omega} u_{i-1} \right) \nabla u_i \|_2^2 = - \left\langle \frac{u_i(x) - u_{i-1}(x)}{h}, u_i \right\rangle + \langle f, u_i \rangle.$$

Comme  $a$  est décroissante :

$$\| a(T \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} u_0) \nabla u_i \|_2^2 \leq \left\| \frac{u_i(x) - u_{i-1}(x)}{h} \right\|_2 \| u_i \|_2 + \| f \|_2 \| u_i \|_2.$$

Posons :  $k = K \exp(CT)$ , puis :  $k' = \| u_0 \|_2 + TK \exp(CT)$ . Ainsi :

$$\| a(T \int_{\Omega} f + \int_{\Omega} u_0) \nabla u_i \|_2^2 \leq k k' + k' \| f \|_2,$$

donc il existe une constante  $k''$  telle que :

$$\| \nabla u_i \|_2 \leq k''.$$

#### d) CONSTRUCTION DE $u_n(t)$ ET DE $U_n(t)$ .

Soit  $n$  un entier positif.

Nous réalisons une partition de :  $I = [0, T]$ , en intervalles de longueur :  $h = \frac{T}{n}$ , c'est à dire en  $n$  intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$  avec :

$$t_i = ih \quad \text{pour } i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Posons :  $u_i = u_{i,n}$ , pour  $u_i$  donnés,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - a \left( \int_{\Omega} u_{i-1} \right) \Delta u_i = f \text{ dans } \Omega, \\ u_i \in V \text{ pour } i \geq 1, \\ u_0 \in L^2(\Omega). \end{cases}$$

Définissons alors  $u_n$  de  $I$  dans  $V$  de la manière suivante :

$$u_n(t) = u_{i-1} + (t - t_{i-1}) \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad \text{pour } t_{i-1} \leq t \leq t_i \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

et de manière similaire :

$$\begin{cases} U_n(0) = u_0, \\ U_n(t) = u_i, \end{cases} \quad \text{pour } t_{i-1} < t \leq t_i, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Ainsi, les inégalités du lemme 4.3 s'écrivent :

$$\begin{cases} \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_{L^2} \leq k, \\ \|u_n(t)\|_V \leq k', \\ \|U_n(t)\|_V \leq k'. \end{cases}$$

Pour continuer, nous avons besoin du lemme suivant que l'on peut trouver dans [K] :

**LEMME 4.5.**

Soient  $V, Y$  des espaces de BANACH réflexifs tels que l'injection :

$$V \hookrightarrow Y$$

soit compacte.

On suppose que les inégalités suivantes ont lieu pour  $n \geq n_0 > 0$  :

$$\begin{cases} \int_I \left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_Y^2 \leq k, \\ \|u_n(t)\|_V \leq k', \\ \|U_n(t)\|_V \leq k'. \end{cases}$$

Alors il existe  $u$  dans  $C(I, Y) \cap L^\infty(I, V)$  avec  $\frac{du}{dt} \in L^2(I, Y)$  et une sous-suite  $(u_{n_k})$  de  $(u_n)$  telle que :

- $u_{n_k} \rightarrow u$  dans  $C(I, Y)$ ,
- $u_{n_k}(t) \rightarrow u(t)$  dans  $V$  pour tout  $t$  dans  $I$ ,
- $U_{n_k}(t) \rightarrow u(t)$  dans  $V$  pour tout  $t$  dans  $I$ ,
- $\frac{du_{n_k}}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt}$  dans  $L^2(I, Y)$ .

De plus si  $\left\| \frac{du_n}{dt} \right\|_Y \leq k$  pour  $n \geq n_0 > 0$  et pour presque tout  $t$  dans  $I$ , alors  $\frac{du}{dt}$  est dans  $L^\infty(I, Y)$  et  $u : I \rightarrow Y$  est  $k$ -lipschitzienne, c'est à dire :

$$\|u(t) - u(t')\|_Y \leq k|t - t'| \quad \forall (t, t') \in I^2.$$

**APPLICATION.**

Ici  $Y = L^2(\Omega)$  et  $V$  est l'espace des fonctions  $u$  de  $H^1(\Omega)$  telles que  $u|_{\partial\Omega_0} = 0$ .  $V$  muni de la topologie induite est un sous-espace fermé de  $H^1(\Omega)$ . D'après l'inégalité de POINCARÉ, on peut munir  $V$  de la norme équivalente à celle de  $H^1(\Omega)$  :

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_2.$$

L'injection :

$$V \hookrightarrow Y$$

est compacte.

L'équation initiale écrite sous sa forme variationnelle devient :

$$\left\langle \frac{du_n(t)}{dt}, v \right\rangle + a\left(\int_{\Omega} U_n(t)\right) \langle \nabla U_n(t), \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \text{ et p.p. } t \in I.$$

Par intégration sur  $(t_1, t_2)$ , on trouve :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{du_n(t)}{dt}, v \right\rangle + \int_{t_1}^{t_2} a\left(\int_{\Omega} U_n(t)\right) \langle \nabla U_n(t), \nabla v \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \langle f, v \rangle,$$

et quitte à prendre des sous-suites, faisons :  $n \rightarrow +\infty$ . On trouve :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\langle \frac{du(t)}{dt}, v \right\rangle + \int_{t_1}^{t_2} a\left(\int_{\Omega} u(t)\right) \langle \nabla u(t), \nabla v \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \langle f, v \rangle.$$

Comme  $(t_1, t_2)$  est quelconque, nous pouvons écrire :

$$\left\langle \frac{du(t)}{dt}, v \right\rangle + a\left(\int_{\Omega} u(t)\right) \langle \nabla u(t), \nabla v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V \text{ et p.p. } t \in I.$$

Autrement dit,  $u$  est la solution faible cherchée.

### e) CROISSANCE DE $\int_{\Omega} u(x, t) dx$ EN FONCTION DE $t$ .

Nous avons mis en évidence une suite de fonctions impaires  $g_i$  qui par construction vérifient :

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} \geq g_i(x).$$

Ainsi  $g_1$ , la seconde d'entre elles, est la solution impaire du problème :

$$\begin{cases} g_1 - ha\left(\int_{\Omega} u_0\right)\Delta g_1 = g_0, \\ g_1 \in V, \end{cases}$$

donc :

$$\|g_1\|_2^2 + ha\left(\int_{\Omega} u_0(x) dx\right) \|\nabla g_1\|_2^2 \leq \|g_0\|_2 \|g_1\|_2,$$

et ainsi :

$$\|g_1\|_2 \leq \|g_0\|_2.$$

Par ailleurs :  $g_2 = \frac{a\left(\int_{\Omega} u_1(x) dx\right)}{a\left(\int_{\Omega} u_0(x) dx\right)} g_1(x)$ , donc :  $\|g_2\|_2 \leq \|g_0\|_2$ .

De la même manière, on montre par récurrence :

$$\|g_i\|_2 \leq \|g_0\|_2.$$

Tous les  $g_i$  sont donc uniformément bornés dans  $L^2(\Omega)$  indépendamment de  $h$ . Il existe donc une sous-suite qui converge faiblement. Par symétrie, cette limite est encore impaire.

Les inégalités :  $f + a(\int_{\Omega} u_{nk})\Delta u_{nk} \geq g_{nk}$  et  $\frac{du_{nk}}{dt} \geq g_{nk}$ , donnent après passage à la limite  $f + a(\int_{\Omega} u)\Delta u \geq g$  et  $\frac{du}{dt} \geq g$ .

Donc :

$$\langle f + a(\int_{\Omega} u)\Delta u, \phi \rangle \geq \langle g, \phi \rangle,$$

et :

$$\langle \frac{du}{dt}, 1 \rangle \geq \langle g, 1 \rangle.$$

On obtient ainsi :

$$\frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{\int_{\Omega} u(x,t)dx} \geq a(\int_{\Omega} u(x,t)dx),$$

et :

$$\frac{d(\int_{\Omega} u(x,t)dx)}{dt} \geq 0.$$

En particulier, ceci implique, que pour  $x = \int_{\Omega} u(z,t)dz$ ,  $y = a(x)$  est sous l'hyperbole :  $y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$  et que  $\int_{\Omega} u(x,t)dx$  est fonction croissante du temps.

#### IV. CONCLUSION.

**A)** Si on suppose que pour  $x$  assez grand, la courbe  $y = a(x)$  est toujours située au-dessus de l'hyperbole  $y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$ , alors  $\int_{\Omega} u(x,t)dx$  est bornée. D'après l'étude qui précède,  $\int_{\Omega} u(x,t)dx$  est monotone donc convergente quand  $t \rightarrow +\infty$ .

En reprenant le raisonnement utilisé pour l'espace  $Z_1$  au chapitre 3, on établit de la même façon qu'il existe une solution stationnaire  $u_{\infty}$  telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x,t) - u_{\infty}(x)| = 0.$$

**B)** Si  $\int_{\Omega} u_0(x)dx$  est dans l'intervalle  $[l, L]$  où  $l$  et  $L$  sont solutions successives de l'équation :

$$a(x) = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x},$$

et si la fonction :

$$y = a(x) - \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$$

s'annule en changeant de signe pour  $x = L$ ,  $\int_{\Omega} u(x,t)dx$  est croissante et ne peut quitter l'intervalle  $[l, L]$ .

En effet, au-delà de  $L$ , chaque point  $(\int_{\Omega} u, a(\int_{\Omega} u))$  est situé au-dessus de l'hyperbole.

On montre à nouveau, avec les mêmes arguments qu'il existe une solution stationnaire  $u_\infty$ , avec  $L = a(\int_\Omega u_\infty(x)dx)$ , vérifiant :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \bar{\Omega}} |u(x, t) - u_\infty(x)| = 0.$$

## Chapitre 5

### APPLICATION AU CAS OU LA FONCTION $a$ REPRESENTE UNE HYPERBOLE

APPLICATION AU CAS OU  
LA FONCTION  $a$  REPRESENTE UNE HYPERBOLE

I. INTRODUCTION.

$$\text{Soit } \phi \text{ vérifiant : } \begin{cases} -\Delta\phi = 1 \text{ dans } \Omega, \\ \phi = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Dans l'étude des points d'intersection entre la courbe  $y = a(x)$  et  $y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$ , on peut considérer comme extrêmes les situations où  $y = a(x)$  est elle-même du type  $y = \frac{k}{x}$ . Pour  $k = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$ , les deux courbes coïncident et ont en commun une infinité de points.

Pour  $k > \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$  ou  $k < \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$ , l'hyperbole  $y = a(x)$  est située strictement au-dessus ou strictement au-dessous, et n'a avec  $y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$  aucun point d'intersection.

$$\text{Nous allons distinguer 3 cas : } \begin{cases} 1) & k = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx, \\ 2) & k > \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx, \\ 3) & k < \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx. \end{cases}$$

Le problème type posé s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Les théorèmes globaux vus dans les chapitres précédents, 3 et 4, assurent l'existence de solutions positives  $u \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V)$ , avec  $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

Nous avons encore :

$$\left( \int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx \right)_t = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - k.$$

Cette relation importante va nous affranchir de toute notion de monotonie pour établir la nature asymptotique de la solution. On pourra, par exemple dans le cas 1) montrer la convergence vers une solution stationnaire sans avoir à établir au préalable que  $\int_{\Omega} u$  est monotone. En particulier, parmi l'infinité des solutions stationnaires, elle nous permettra de caractériser celle qui va convenir.

**II. PREMIER CAS :**  $k = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx$ .

La courbe :

$$y = a(x),$$

et l'hyperbole :

$$y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x},$$

se superposent.

Il résulte de l'égalité :

$$\left(\int_{\Omega} u(x,t)\phi(x)dx\right)_t = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - k = 0,$$

que l'intégrale :

$$\int_{\Omega} u(x,t)\phi(x)dx$$

est indépendante de  $t$ , donc vaut sa valeur en  $t = 0$ .

On obtient ainsi la loi de conservation :

$$\int_{\Omega} u(x,t)\phi(x)dx = \int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx.$$

### REMARQUE 5.1.

Nous allons expliciter, en utilisant la loi de conservation, le comportement asymptotique de la solution globale.

Celle-ci va converger vers une certaine fonction  $u_{\infty}$  que nous définissons maintenant.

Soit  $w$  la solution de l'équation elliptique :

$$\begin{cases} -\Delta w = f \text{ dans } \Omega, \\ w = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

$w$  peut être vue comme une solution particulière de l'équation stationnaire associée :

$$\begin{cases} -\frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{\int_{\Omega} u} \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

En effet :

$$\int_{\Omega} w(x)dx = \int_{\Omega} w(x)(-\Delta\phi(x))dx,$$

$$\int_{\Omega} w(x)dx = \int_{\Omega} (-\Delta w(x))\phi(x)dx,$$

$$\int_{\Omega} w(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx,$$

donc :

$$-\Delta w = f \text{ s'écrit encore : } -\frac{\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx}{\int_{\Omega} w} \Delta w = f.$$

Par homogénéité :  $u_{\infty} = \lambda w$  est encore solution de l'équation :

$$\begin{cases} -\frac{\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx}{\int_{\Omega} u} \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

On choisit  $\lambda$  tel que :  $\int_{\Omega} u_0(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} u_{\infty}(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} \lambda w(x) \phi(x) dx$ .

C'est à dire :  $\lambda = \frac{\int_{\Omega} u_0(x) \phi(x) dx}{\int_{\Omega} w(x) \phi(x) dx}$ . Donc par construction :  $u_{\infty} = \frac{\int_{\Omega} u_0(x) \phi(x) dx}{\int_{\Omega} w(x) \phi(x) dx} w$ .

En conclusion,  $u_{\infty}$  est la solution de l'équation stationnaire qui vérifie :

$$\int_{\Omega} u_0(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} u_{\infty}(x, t) \phi(x) dx.$$

$u_{\infty}$  est un candidat naturel :

- c'est une solution stationnaire et nous savons que sous des conditions assez larges, les solutions d'équations paraboliques convergent vers une solution stationnaire.

- elle vérifie la loi de conservation :

$$\int_{\Omega} u_0(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} u(x, t) \phi(x) dx.$$

Cette loi étant indépendante du temps, on attend qu'elle soit aussi satisfaite par la solution limite.

## REMARQUE 5.2.

Constatons tout de suite qu'on ne peut avoir :  $\begin{cases} u_0(x) \geq u_{\infty}(x), \quad \forall x \in \Omega, \\ \text{ou} \\ u_0(x) \leq u_{\infty}(x), \quad \forall x \in \Omega, \end{cases}$

sans avoir aussitôt :  $u_0(x) = u_{\infty}(x) = u(x, t), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0$ .

Ceci est une propriété de la solution stationnaire. Partant d'un  $u_0$ , il n'est pas possible d'atteindre un  $u_{\infty}$  tel que  $u_0(x) \geq u_{\infty}(x), \quad \forall x \in \Omega$ , ou  $u_0(x) \leq u_{\infty}(x), \quad \forall x \in \Omega$ , sans que le point de départ ne soit lui-même  $u_{\infty}$ . En effet, l'égalité :

$$\int_{\Omega} u_0(x, t) \phi(x) dx = \int_{\Omega} u_{\infty}(x) \phi(x) dx,$$

montre que :  $\int_{\Omega} (u_0(x) - u_{\infty}(x)) \phi(x) dx = 0$ .

Or  $(u_0 - u_\infty)$  et  $\phi$  ont des signes constants sur  $\Omega$ .

Nécessairement :  $u_0 = u_\infty$ , mais alors :

$$u_0(x) = u_\infty(x) = u(x, t), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0.$$

En effet, la solution  $u(x, t)$  existe car il existe  $m$  et  $M$  tels que :

$$u_m(x) \leq u_0(x) = u_\infty(x) \leq u_M(x),$$

où par définition  $u_m$  et  $u_M$  sont proportionnelles à  $u_\infty$  et elle est unique car :

$$y = \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{x}$$

est lipschitzienne sur :  $[\int_{\Omega} u_M(x)dx, \int_{\Omega} u_m(x)]$ .

Ainsi, par unicité de la solution, nécessairement :

$$u_\infty(x) = u(x, t), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0,$$

donc :

$$u_0(x) = u_\infty(x) = u(x, t), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0.$$

Pour démontrer le théorème qui décrit la convergence de  $u$ , nous allons avoir besoin d'un lemme qui est une extension élémentaire de l'inégalité de POINCARÉ à d'autres normes  $L^2$ .

Comme  $\Omega$  est borné, on suppose qu'il est contenu dans une bande d'épaisseur finie  $] -a, a[$  dans la direction  $x_1$ , et que tous les points de  $\Omega$  sont sur des droites passant par  $\partial\Omega_0$  et orthogonales à l'hyperplan  $(x_1 = 0)$ . On prolonge les fonctions en dehors de  $\partial\Omega_0$  par la valeur 0.

### LEMME 5.1.

Soit  $\alpha > 0$  et soit  $\psi$  une fonction vérifiant  $0 \leq \psi(x) \leq \alpha$ ,  $\forall x \in \Omega$ . On suppose qu'il existe une fonction  $F$  de  $x_1$  intégrable sur  $[-a, a]$  telle que :

$$\int_{-a}^{x_1} \frac{1}{\psi(x, x_2, \dots, x_N)} dx < F(x_1), \quad \forall (x_2, \dots, x_N) \in P,$$

où  $P$  est la projection orthogonale de  $\Omega$  sur l'hyperplan  $x_1 = 0$ .

Pour toute fonction  $v$  de  $V$ , on a :

$$\int_{\Omega} v(x)^2 \psi(x) dx \leq C \int_{\Omega} \|\nabla v(x)\|^2 \psi(x) dx.$$

## DEMONSTRATION.

On a :  $u(-a, x_2, \dots, x_N) = 0$ , donc :

$$u(x_1, \dots, x_N) = u(x_1, \dots, x_N) - u(-a, \dots, x_N) = \int_{-a}^{x_1} \frac{\partial u(t, \dots, x_N)}{\partial t} dt.$$

D'où :

$$u^2(x_1, \dots, x_N) \leq \left( \int_{-a}^{x_1} \left| \frac{\partial u(t, \dots, x_N)}{\partial t} \right| dt \right)^2 \leq \int_{-a}^{x_1} \left| \frac{\partial u(t, \dots, x_N)}{\partial t} \right|^2 \psi(t, \dots, x_N) dt \int_{-a}^{x_1} \frac{1}{\psi(t, \dots, x_N)} dt.$$

donc :

$$u^2(x_1, \dots, x_N) \leq \int_{-a}^a \left| \frac{\partial u(t, \dots, x_N)}{\partial t} \right|^2 \psi(t, \dots, x_N) dt \left( \int_{-a}^{x_1} \frac{1}{\psi(t, \dots, x_N)} dt \right),$$

et :

$$u^2(x_1, \dots, x_N) \leq F(x_1) \int_{-a}^a \left| \frac{\partial u(t, \dots, x_N)}{\partial t} \right|^2 \psi(t, \dots, x_N) dt.$$

Par intégration :

$$\int_{\Omega} u^2(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \leq \left[ \int_{-a}^a F(x_1) dx_1 \right] \int_P \left[ \int_{-a}^a \left| \frac{\partial u(t, \dots, x_N)}{\partial t} \right|^2 \psi(t, \dots, x_N) dt \right] dx_2 \dots dx_N,$$

d'où :

$$\int_{\Omega} u^2(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \leq \int_{-a}^a F(x_1) dx_1 \int_{\Omega} |\nabla u(x_1, \dots, x_N)|^2 \psi(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N.$$

On déduit de :

$$\int_{\Omega} u^2(x_1, \dots, x_N) \psi(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \leq \alpha \int_{\Omega} u^2(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N,$$

l'inégalité :

$$\int_{\Omega} u^2(x_1, \dots, x_N) \psi(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \leq \alpha \int_{-a}^a F(x_1) dx_1 \int_{\Omega} |\nabla u(x_1, \dots, x_N)|^2 \psi(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N.$$

On a ainsi :

$$\int_{\Omega} u^2(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x_1, \dots, x_N)|^2 \psi(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N.$$

avec :  $C = \alpha \int_{-a}^a F(x_1) dx_1$ .

### REMARQUE 5.3

Les hypothèses du lemme 5.1 impliquent l'inégalité :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\psi(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \dots dx_N = \int_P \left( \int_{-a}^a \frac{1}{\psi(x_1, \dots, x_N)} dx_1 \right) dx_2 \dots dx_N < \infty.$$

### NOTATION 5.1.

On désignera par  $S$ , l'ensemble des fonctions poids :  $\psi$  de  $L^2(\Omega)$ , positives et bornées pour lesquelles il existe une fonction  $F$  de  $x_1$  intégrable sur  $[-a, a]$  telle que :

$$\int_{-a}^{x_1} \frac{1}{\psi(x, x_2, \dots, x_N)} dx < F(x_1) \quad \forall (x_2, \dots, x_N) \in P,$$

et qui vérifient de plus :  $\Delta\psi(x) \leq 0$ . Par exemple, pour  $\Omega = ]0, 1[$  et  $0 \leq m < 1$ , on a  $\psi_m(x) = x^m(1-x)^m \in S$ .

### THEOREME 5.1.

Soient  $u_0$  une fonction de  $L^2(\Omega)$  et  $f$  une fonction de  $V$  qui ne s'annule pas sur  $\partial\Omega_1$ .

Soit  $u$  dans  $L^2(0, T; V) \cap C(0, T; L^2(\Omega))$  solution positive du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{\int_{\Omega} u(x,t)dx} \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0, \end{cases}$$

avec  $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

Soit  $u_{\infty}$  la solution du système stationnaire associé :

$$\begin{cases} -\frac{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}{\int_{\Omega} u_{\infty}} \Delta u_{\infty} = f \text{ dans } \Omega, \\ u_{\infty} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_{\infty}}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1, \end{cases} \quad \text{qui vérifie :} \quad \int_{\Omega} u_{\infty}(x)\phi(x)dx = \int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx.$$

On suppose que  $\psi(x) = \frac{\phi(x)}{f(x)}$  est dans  $S$ .

Alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u(x, t) - u_{\infty}(x))^2 \frac{\phi(x)}{f(x)} dx = 0.$$

**EXEMPLE 5.1.**

$$\Omega = ]0, 1[ \quad \partial\Omega_0 = \partial\Omega = \{0, 1\}.$$

Soit :  $k = \int_0^1 \sqrt{\sin(\pi x)} \frac{x(1-x)}{2} dx.$

On considère le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \int_{\Omega} u \Delta u = \sqrt{\sin(\pi x)} \text{ dans } (0,1) \times \mathbb{R}^{+*}, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = x(x-1). \end{cases}$$

$\psi(x) = \frac{\phi(x)}{f(x)} = \frac{x(1-x)}{2\sqrt{\sin(\pi x)}}$ , se prolonge par continuité sur  $[0, 1]$  où elle est concave, et  $\psi \in S.$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 (u(x, t) - u_{\infty}(x))^2 \frac{\phi(x)}{f(x)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^1 (u(x, t) - u_{\infty}(x))^2 \frac{x(1-x)}{2\sqrt{\sin(\pi x)}} dx = 0.$$

$u_{\infty}$  est la solution du système stationnaire qui vérifie :

$$\int_{\Omega} u_{\infty}(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} u_0(x) \phi(x) dx = \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{2} = \frac{1}{60}.$$

**DEMONSTRATION.**

Il s'agit de montrer que  $u(x, t)$  tend vers  $u_{\infty}(x)$  pour une certaine norme  $L^2$  quand  $t$  tend vers  $+\infty.$

Pour cela, nous allons considérer le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x) \left(\frac{\phi(x)}{f(x)}\right) dx \text{ avec } 0 \leq \frac{\phi(x)}{f(x)} \leq \alpha, \quad \forall x \in \Omega.$$

Ce produit scalaire est défini pour  $u$  et  $v$  dans  $L^2(\Omega)$  car :

$$\langle u, v \rangle \leq \int_{\Omega} |u(x)v(x) \left(\frac{\phi(x)}{f(x)}\right)| dx \leq \int_{\Omega} u(x)^2 \left(\frac{\phi(x)}{f(x)}\right) dx \int_{\Omega} v(x)^2 \left(\frac{\phi(x)}{f(x)}\right) dx,$$

$$\langle u, v \rangle \leq \alpha^2 \int_{\Omega} u(x)^2 dx \int_{\Omega} v(x)^2 dx.$$

Si on note  $\| \cdot \|$ , la norme qui lui est associée, on a :

$$\| f \|^2 = \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx,$$

et surtout :

$$\int_{\Omega} f(x)(u(x, t) - u_{\infty}(x))\left(\frac{\phi(x)}{f(x)}\right)dx = \int_{\Omega} (u(x, t) - u_{\infty}(x))\phi(x)dx = 0,$$

car nous avons vu que :

$$\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx = \int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx = \int_{\Omega} u_{\infty}(x)\phi(x)dx.$$

Ainsi,  $f$  est orthogonale à  $(u(x, t) - u_{\infty}(x))$  et à  $(u_0(x, t) - u_{\infty}(x))$ .

On calcule :

$$D = \left\langle -\frac{\Delta u}{\int_{\Omega} u(x, t)dx} + \frac{\Delta u_{\infty}}{\int_{\Omega} u_{\infty}(x)dx}, u - u_{\infty} \right\rangle.$$

Ceci a un sens car chaque terme, à  $t$  fixé, est dans  $L^2(\Omega)$ .

$$D = -\frac{\int_{\Omega} (u(x, t) - u_{\infty}(x))\Delta(u - u_{\infty})\left(\frac{\phi(x)}{f(x)}\right)dx}{\int_{\Omega} u(x, t)dx} - \left(\frac{1}{\int_{\Omega} u} - \frac{1}{\int_{\Omega} u_{\infty}}\right) \int_{\Omega} (u - u_{\infty})\Delta(u_{\infty})\left(\frac{\phi}{f}\right)dx.$$

On multiplie par  $\int_{\Omega} u(x, t)dx$  :

$$D \int_{\Omega} u(x, t)dx = - \int_{\Omega} (u - u_{\infty})\Delta(u - u_{\infty})\left(\frac{\phi}{f}\right)dx - \int_{\Omega} u dx \left(\frac{1}{\int_{\Omega} u} - \frac{1}{\int_{\Omega} u_{\infty}}\right) \int_{\Omega} (u - u_{\infty})\Delta(u_{\infty})\left(\frac{\phi}{f}\right)dx$$

et on remarque que :

$$-\frac{\Delta u_{\infty}}{\int_{\Omega} u_{\infty}(x)dx} = \frac{f(x)}{\int_{\Omega} \phi(x)f(x)dx}.$$

$$D \int_{\Omega} u(x, t)dx = - \int_{\Omega} (u - u_{\infty})\Delta(u - u_{\infty})\left(\frac{\phi}{f}\right)dx - \frac{\int_{\Omega} (u - u_{\infty})}{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx} \int_{\Omega} (u - u_{\infty})\phi dx,$$

or :

$$\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx = \int_{\Omega} u_{\infty}(x)\phi(x)dx.$$

Donc :

$$D \int_{\Omega} u(x, t)dx = - \int_{\Omega} (u - u_{\infty})\Delta(u - u_{\infty})\left(\frac{\phi}{f}\right)dx.$$

Appliquons la formule de GREEN :

$$D \int_{\Omega} u(x, t)dx = - \int_{\partial\Omega} (u - u_{\infty})\frac{\partial(u - u_{\infty})}{\partial n}\left(\frac{\phi}{f}\right)dx + \int_{\Omega} \nabla(u - u_{\infty})\nabla[(u - u_{\infty})\left(\frac{\phi}{f}\right)]dx,$$

donc :

$$D \int_{\Omega} u(x, t)dx = \int_{\Omega} \nabla(u - u_{\infty})\nabla[(u - u_{\infty})\left(\frac{\phi}{f}\right)]dx,$$

car d'après les conditions au bord :

$$\int_{\partial\Omega} (u - u_{\infty})\frac{\partial(u - u_{\infty})}{\partial n}\left(\frac{\phi}{f}\right)dx = 0.$$

Ainsi :

$$D \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} \|\nabla(u - u_{\infty})\|^2 \left(\frac{\phi}{f}\right) dx + \int_{\Omega} \nabla(u - u_{\infty})(u - u_{\infty}) \nabla\left(\frac{\phi}{f}\right) dx.$$

On applique une nouvelle fois la formule de GREEN :

$$D \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} \|\nabla(u - u_{\infty})\|^2 \left(\frac{\phi}{f}\right) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - u_{\infty})^2 \Delta\left(\frac{\phi}{f}\right) dx,$$

car  $\phi$  et  $f$  étant dans  $V$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - u_{\infty})^2 \Delta\left(\frac{\phi}{f}\right) dx &= \int_{\partial\Omega} (u - u_{\infty})^2 \frac{\partial\left(\frac{\phi}{f}\right)}{\partial n} dx - \int_{\Omega} \nabla\left[\frac{1}{2}(u - u_{\infty})^2\right] \nabla\left(\frac{\phi}{f}\right) dx, \\ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u - u_{\infty})^2 \Delta\left(\frac{\phi}{f}\right) dx &= - \int_{\Omega} \nabla(u - u_{\infty})(u - u_{\infty}) \nabla\left(\frac{\phi}{f}\right) dx. \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse,  $\Delta\left(\frac{\phi}{f}\right) \leq 0$ , on a donc :

$$D \int_{\Omega} u(x, t) dx \geq \int_{\Omega} \|\nabla(u - u_{\infty})\|^2 \left(\frac{\phi}{f}\right) dx,$$

$$D \geq \frac{1}{\int_{\Omega} u(x, t) dx} \int_{\Omega} \|\nabla(u - u_{\infty})\|^2 \left(\frac{\phi}{f}\right) dx,$$

et d'après l'inégalité de POINCARÉ :

$$D \geq \frac{C}{\int_{\Omega} u(x, t) dx} \| (u - u_{\infty}) \|^2.$$

Nous savons par ailleurs que :

$$\frac{d(u - u_{\infty})}{dt} + \left[ -\frac{\Delta u}{\int_{\Omega} u(x, t) dx} + \frac{\Delta u_{\infty}}{\int_{\Omega} u_{\infty}(x) dx} \right] \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx = 0,$$

$$< \frac{d(u - u_{\infty})}{dt}, u - u_{\infty} > + D \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx = 0,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(\|u - u_{\infty}\|)^2}{dt} = -D \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx,$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(\|u - u_{\infty}\|)^2}{dt} \leq -\frac{C \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx}{\int_{\Omega} u(x, t) dx} \| (u - u_{\infty}) \|^2,$$

donc :

$$\|u - u_{\infty}\|^2 \leq \|u_0 - u_{\infty}\|^2 \exp\left(\int_0^t \frac{-2C \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx}{\int_{\Omega} u(x, t) dx} dt\right).$$

Posons :

$$l(t) = \frac{2C \int_{\Omega} \phi(x) f(x) dx}{\int_{\Omega} u(x, t) dx}.$$

Comme  $u$  est dans  $C(0, T, L^2(\Omega))$ ,  $l(t)$  est continue en  $t$ .

$$\|u - u_\infty\|^2 \leq \|u_0 - u_\infty\|^2 \exp\left(\int_0^t -l(t)dt\right), \quad (1)$$

avec :

$$l(t) > 0.$$

Ainsi,  $\|u - u_\infty\|^2 \leq \|u_0 - u_\infty\|^2$ . Comme :

$$\int_\Omega |u - u_\infty| \leq \int_\Omega (u - u_\infty)^2 \psi \int_\Omega \frac{1}{\psi},$$

il existe, en utilisant (1), une constante  $c_1$  telle que :

$$\left| \int_\Omega u - u_\infty \right| \leq \int_\Omega |u - u_\infty| \leq \|u_0 - u_\infty\|^2 \int_\Omega \frac{1}{\psi} = c_1.$$

Ainsi :

$$\int_\Omega u_\infty(x)dx - c_1 \leq \int_\Omega u(x, t)dx \leq c_1 + \int_\Omega u_\infty(x)dx.$$

Il existe donc une constante  $c_2$  telle que  $0 \leq \int_\Omega u(x, t)dx \leq c_2$ . L'inégalité (1) devient :

$$\|u - u_\infty\|^2 \leq \|u_0 - u_\infty\|^2 \exp(-ct) \text{ avec } c > 0.$$

Ceci montre la convergence exponentielle de  $u$  vers  $u_\infty$  pour la norme considérée quand  $t \rightarrow +\infty$ .

### III. DEUXIEME CAS : $k > \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$ .

La courbe :

$$y = a(x) = \frac{k}{x},$$

est toujours située strictement au-dessus de l'hyperbole :

$$y = \frac{\int_\Omega f(x)\phi(x)dx}{x}.$$

On suppose  $f(x) \geq 0$  et  $u_0(x) \geq 0$ .

L'égalité :

$$\left(\int_\Omega u(x, t)\phi(x)dx\right)_t = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx - k,$$

conduit à :

$$\int_\Omega u(x, t)\phi(x)dx = \left(\int_\Omega f(x)\phi(x)dx - k\right)t + \int_\Omega u_0(x)\phi(x)dx.$$

Cette relation montre que pour :

$$t > \frac{\int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx}{k - \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx},$$

la solution ne reste plus toujours positive.

Elle indique ainsi la perte du caractère parabolique de l'équation car d'après le théorème 0.2, c'est  $\int_{\Omega} u(x, t)dx$ , elle-même, qui ne peut rester strictement positive.

Pour  $u \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V)$ ,  $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , et pour les conditions déjà rencontrées :

$$\Delta\left(\frac{\phi}{f}\right) \leq 0, \quad \left(\frac{\phi}{f}\right) \leq C^{te},$$

montrons directement qu'il existe  $t_0$ , à partir duquel, l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta u = f,$$

perd son sens puisque l'intégrale  $\int_{\Omega} u(x, t_0)dx$  va vérifier :

$$\int_{\Omega} u(x, t_0)dx = 0.$$

Supposons par l'absurde que :

$$\int_{\Omega} u(x, t)dx > 0 \quad \forall t > 0.$$

Multiplions l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta u = f,$$

où chaque terme est, à  $t$  fixé, dans  $L^2(\Omega)$ , par :

$$\frac{u(x, t)\phi(x)}{f(x)},$$

et intégrons sur  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} u_t(x, t) \frac{u(x, t)\phi(x)}{f(x)} dx - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \int_{\Omega} \Delta u(x, t) \frac{u(x, t)\phi(x)}{f(x)} dx = \int_{\Omega} u(x, t)\phi(x) dx.$$

Nous allons considérer à nouveau le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} (u(x)v(x)) \left(\frac{\phi(x)}{f(x)}\right) dx, \quad \text{avec } 0 \leq \frac{\phi(x)}{f(x)} \leq C^{te}, \quad \forall x \in \Omega,$$

et noter  $\| \cdot \|$ , la norme qui lui est associée.

$$\frac{1}{2} \frac{d(\| u \|^2)}{dt} + \frac{k}{\int_{\Omega} u} \| \nabla u \|^2 - \frac{k}{2 \int_{\Omega} u} \int_{\Omega} u^2(x, t) \Delta \frac{\phi(x)}{f(x)} dx = \left( \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx - k \right) t + \int_{\Omega} u_0(x) \phi(x) dx$$

donc :

$$\frac{1}{2} \frac{d(\| u \|^2)}{dt} \leq \left( \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx - k \right) t + \int_{\Omega} u_0(x) \phi(x) dx,$$

$$0 \leq \| u \|^2 \leq \left( \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx - k \right) t^2 + \left( \int_{\Omega} u_0(x, t) \phi(x) dx \right) t + \| u_0 \|^2.$$

Donc  $\int_{\Omega} u$  est bornée tant que le terme de droite reste positif, et jusqu'à cet instant la solution existe et est bornée dans  $L^2(\Omega)$ .

Mais comme :

$$\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx - k < 0,$$

$\| u \|^2$  ne peut rester strictement positif que sur un intervalle de temps fini, ce qui contredit l'hypothèse :

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx > 0 \quad \forall t > 0.$$

#### IV. TROISIEME CAS : $k < \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx$ .

La courbe :

$$y = a(x) = \frac{k}{x},$$

est toujours située strictement sous l'hyperbole :

$$y = \frac{\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx}{x}.$$

Nous connaissons le comportement de  $u$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

En effet, nous sommes dans le cas où :  $\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx > k$ ,

donc l'égalité :

$$\left( \int_{\Omega} u(x, t) \phi(x) dx \right)_t = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx - k,$$

conduit à :

$$\int_{\Omega} u(x, t) \phi(x) dx = \left( \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx - k \right) t + \int_{\Omega} u_0(x, t) \phi(x) dx.$$

Ceci, joint à l'égalité :

$$\int_{\Omega} u(x, t) \phi(x) dx \leq \| u \|_2 \| \phi \|_2,$$

montre que :

$$\| u \|_2 \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Nous allons préciser ce comportement, en remarquant, pour certaines conditions initiales données, l'existence de solutions à variables séparées, puis en démontrant que celles-ci "attirent" toutes les trajectoires solutions quand  $t \rightarrow +\infty$ .

### EXEMPLE 5.2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \int_{\Omega} u \Delta u = \frac{6(e+1)}{13e-35} x(1-x) \quad \text{dans } (0,1) \times \mathbb{R}^{+*}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x) = \frac{a[12(e^x + e^{1-x}) - 6x^2(1+e) + 6x(1+e) - 12(1+e)]}{13e-35}. \end{cases}$$

On a :

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx = \int_{\Omega} \frac{6(e+1)}{13e-35} x^2(1-x)^2 dx = \frac{1+e}{10(13e-35)} > 1 = k.$$

Donc ce problème rentre bien dans le cadre précédent. On vérifie qu'il admet bien une solution à variables séparées :

$$u(x,t) = (t+a) \frac{[12(e^x + e^{1-x}) - 6x^2(1+e) + 6x(1+e) - 12(1+e)]}{13e-35}.$$

En effet :

$$\Delta u(x,t) = \frac{12e^{-x}(t+a)(1-e^x)(e-e^x)}{13e-35},$$

$$\text{et : } \int_0^1 u(x,t)dx = t+a.$$

Ainsi :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \int_{\Omega} u \Delta u = \frac{[12(e^x + e^{1-x}) - 6x^2(1+e) + 6x(1+e) - 12(1+e)]}{13e-35} - \frac{\frac{12e^{-x}(t+a)(1-e^x)(e-e^x)}{13e-35}}{t+a},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \int_{\Omega} u \Delta u = \frac{6(e+1)}{13e-35} x(1-x).$$

### A) RECHERCHE DE SOLUTIONS A VARIABLES SEPARÉES.

L'étude des solutions à variables séparées passe par celle de l'équation stationnaire :

$$\begin{cases} u - \int_{\Omega} u \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Si on recherche les solutions classiques, positives de cette équation il faut s'attendre à avoir besoin de conditions sur  $f$ , comme le montre la remarque suivante :

**REMARQUE 5.4.**  $\Omega = ]0, 1[$   $\partial\Omega_0 = \partial\Omega = \{0, 1\}$ .

Soit  $c$  le point où  $u$  prend sa valeur moyenne.

Par définition :

$$u(c) = \int_0^1 u(x) dx.$$

Appliquons deux fois le théorème des accroissements finis :

$$u(c) - u(0) = cu'(\alpha) \quad \alpha \in ]0, c[,$$

$$u(1) - u(c) = (1 - c)u'(\beta) \quad \beta \in ]c, 1[,$$

donc :

$$u'(\alpha) - u'(\beta) = \frac{u(c)}{c} + \frac{u(c)}{1 - c} = \frac{u(c)}{c(1 - c)} = \frac{\int_0^1 u(x) dx}{c(1 - c)}.$$

L'inégalité évidente :

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta f(x) dx \quad (f \geq 0),$$

devient :

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta u(x) dx - \frac{k \int_\alpha^\beta u'' dx}{\int_0^1 u(x) dx} \geq \int_\alpha^\beta u(x) dx + \frac{k(u'(\alpha) - u'(\beta))}{\int_0^1 u(x) dx},$$

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_\alpha^\beta u(x) dx + \frac{k}{c(1 - c)} \geq \frac{k}{c(1 - c)} \geq 4k,$$

donc :

$$\int_0^1 f(x) dx \geq 4k.$$

### THEOREME 5.2.

Soit  $f$  une fonction de  $L^2$ , positive ou nulle et non identiquement nulle.

On suppose qu'il existe une fonction  $u_0$  positive ou nulle et non identiquement nulle dans  $V$ , vérifiant au sens des distributions :

$$(u_0 - f) \int_\Omega u_0 \leq k \Delta u_0 \leq 0,$$

alors le problème :

$$\begin{cases} u - \frac{k}{\int_\Omega u} \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1, \end{cases}$$

admet une solution positive dans  $V$ .

### REMARQUE 5.5.

Les conditions sur  $u_0$  et  $f$ , impliquent :

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx > k.$$

En effet, puisque  $u_0 \neq 0$  vérifie au sens des distributions :

$$(u_0 - f) \int_{\Omega} u_0 \leq k\Delta u_0 \leq 0,$$

on a, après multiplication par  $\phi(x) \geq 0$  :

$$\left( \int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx - \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx \right) \int_{\Omega} u_0(x)dx \leq k \int_{\Omega} u_0(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} u_0(x)dx > 0.$$

Ainsi :

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx \geq \int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx + k.$$

Or,  $-\Delta u_0 \geq 0$  implique aussi  $\int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx > 0$ , l'inégalité est stricte car  $u_0 > 0$ . Donc :

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx > k.$$

Ceci montre que nous sommes effectivement dans le troisième cas.

Réciproquement si on sort de ce troisième cas, c'est à dire si :

$$\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx \leq k,$$

le problème n'admet plus de solution  $u_0 \geq 0$  car alors :

$$\int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - k \leq 0.$$

Il y a nécessairement des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $u_0(x) \leq 0$ .

### DEMONSTRATION DU THEOREME 5.2.

On considère :

$$K = \{v \in L^2(\Omega) / v \geq u_0 \quad \|v\|_2 \leq \|f\|_2\}.$$

$K$  est un convexe fermé de  $L^2(\Omega)$ , borné dans  $L^2(\Omega)$  et non vide car contenant  $f$ .

Soit  $T$  l'application définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} K \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega), \\ v \rightarrow u = T(v), \end{cases}$$

où  $u$  est solution du problème :

$$\begin{cases} u - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Comme :

$$0 < \int_{\Omega} u_0(x) dx \leq \int_{\Omega} v(x) dx \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|f\|_2,$$

il y a existence et unicité de  $u$ .

a) Montrons que  $T(K) \subset K$ .

$$u - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \Delta u = f,$$

$$u - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \Delta u - (u_0 - \frac{k}{\int_{\Omega} u_0} \Delta u_0) = f - (u_0 - \frac{k}{\int_{\Omega} u_0} \Delta u_0) \geq 0,$$

car par hypothèse :

$$(u_0 - f) \int_{\Omega} u_0 \leq k \Delta u_0 \text{ et } \int_{\Omega} u_0 \geq 0.$$

Donc :

$$(u - u_0) - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \Delta(u - u_0) + \Delta u_0 \left( \frac{k}{\int_{\Omega} u_0} - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \right) \geq 0,$$

$$(u - u_0) - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \Delta(u - u_0) \geq -\Delta u_0 \left( \frac{k}{\int_{\Omega} u_0} - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \right) \geq 0,$$

car on a :

$$\begin{cases} \Delta u_0 \leq 0, \\ \frac{1}{\int_{\Omega} u_0} \geq \frac{1}{\int_{\Omega} v}. \end{cases}$$

Ainsi par application du principe du maximum :

$$u - u_0 \geq 0.$$

De plus :

$$u - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \Delta u = f,$$

implique :

$$\|u\|_2^2 + \frac{k}{\int_{\Omega} v} \|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega} f(x)u(x) dx \leq \|f\|_2 \|u\|_2,$$

donc :

$$\|u\|_2 \leq \|f\|_2.$$

b)  $T$  est continue de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

On commence par établir une majoration pour  $\|\nabla u\|_2$ .

En effet, la relation :

$$\|u\|_2^2 + \frac{k}{\int_{\Omega} v} \|\nabla u\|_2^2 = \int_{\Omega} f(x)u(x)dx \leq \|f\|_2 \|u\|_2,$$

montre que :

$$k \|\nabla u\|_2^2 \leq \int_{\Omega} v \|f\|_2 \|u\|_2,$$

$$k \|\nabla u\|_2^2 \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|v\|_2 \|f\|_2 \|u\|_2 \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|f\|_2^3,$$

c'est à dire :

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}} \|f\|_2^3}{k}.$$

Soit  $v_n \rightarrow v$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Par définition  $u_n$  vérifie :

$$\begin{cases} u_n - \frac{k}{\int_{\Omega} v_n} \Delta u_n = f \text{ dans } \Omega, \\ u_n = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Et  $u$  vérifie :

$$\begin{cases} u - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \Delta u = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Nous devons montrer que  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^2(\Omega)$  quand  $v_n \rightarrow v$  dans  $L^2(\Omega)$ .

$$(u - u_n) - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \Delta(u - u_n) = k \Delta u_n \left( \frac{1}{\int_{\Omega} v} - \frac{1}{\int_{\Omega} v_n} \right),$$

donc :

$$\|u - u_n\|_2^2 \leq \int_{\Omega} k \Delta u_n \cdot (u - u_n) \left( \frac{1}{\int_{\Omega} v} - \frac{1}{\int_{\Omega} v_n} \right),$$

$$\|u - u_n\|_2^2 \leq \int_{\Omega} k \nabla u_n \nabla (u - u_n) \left( \frac{1}{\int_{\Omega} v_n} - \frac{1}{\int_{\Omega} v} \right),$$

$$\|u - u_n\|_2^2 \leq k \|\nabla(u - u_n)\|_2 \|\nabla u_n\|_2 \left| \left( \frac{1}{\int_{\Omega} v} - \frac{1}{\int_{\Omega} v_n} \right) \right|,$$

$$\|u - u_n\|_2^2 \leq k [\|\nabla u\|_2 + \|\nabla u_n\|_2] \|\nabla u_n\|_2 \frac{|\int_{\Omega} v_n - v|}{\int_{\Omega} v \int_{\Omega} v_n},$$

$$\|u - u_n\|_2^2 \leq k [\|\nabla u\|_2 + \|\nabla u_n\|_2] \|\nabla u_n\|_2 \frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}} \|v_n - v\|_2}{(\int_{\Omega} u_0)^2}.$$

D'après les inégalités a priori obtenues précédemment, il existe  $C_1$  telle que :

$$\| u - u_n \|_2^2 \leq C_1 \| v - v_n \|_2 .$$

c)  $T$  est compact.

$V$  s'injecte de manière compacte dans  $L^2(\Omega)$ . L'image  $T(B)$  d'un borné  $B$  de  $L^2(\Omega)$  est un précompact de  $L^2(\Omega)$  car  $T(B)$  est dans  $V$ .

d) **Conclusion.**

D'après le théorème du point fixe de SCHAUDER, il existe  $u$  dans  $K$  tel que :

$$T(u) = u.$$

$u$  est solution de notre problème.

### REMARQUE 5.6.

Pour un choix convenable des conditions initiales, on déduit immédiatement du théorème précédent, qu'il existe des solutions à variables séparées :

$$u(x, t) = (t + a)u_0(x),$$

où  $u_0$  vérifie :

$$\begin{cases} u_0 - \frac{k}{\int_{\Omega} u_0} \Delta u_0 = f \text{ dans } \Omega, \\ u_0 = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

En effet, pour  $a > 0$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta u = u_0 - \frac{k}{\int_{\Omega} u_0} \Delta u_0 = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = (t + a)u_0 = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = (t + a) \frac{\partial u_0}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = au_0(x). \end{cases}$$

### REMARQUE 5.7.

On suppose que  $f \in L^2(\Omega)$ , vérifie :  $\Delta f \geq 0$ .

Montrons l'unicité de la solution positive  $v_0$  au problème :

$$(1) \quad \begin{cases} v_0 - \frac{k}{\int_{\Omega} v_0} \Delta v_0 = f \text{ dans } \Omega, \\ v_0 = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

Si il y avait 2 solutions  $u$  et  $v$  au problème (1), elles vérifieraient :

$$(2) \quad (u - v) - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \Delta(u - v) = k \Delta u \left( \frac{1}{\int_{\Omega} u} - \frac{1}{\int_{\Omega} v} \right).$$

Si  $\int_{\Omega} v = \int_{\Omega} u$ , il est clair que  $u = v$ .

Sinon on peut toujours supposer :  $\int_{\Omega} v > \int_{\Omega} u$  et alors le principe du maximum conduit à une contradiction.

Le problème (1), écrit sous la forme :

$$(u - f) - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta(u - f) = k \Delta f \left( \frac{1}{\int_{\Omega} u} \right),$$

implique :  $u \geq f$ , puis  $\frac{\Delta u}{\int_{\Omega} u} \geq 0$ , car :  $u - f = k \frac{\Delta u}{\int_{\Omega} u}$  et enfin  $\Delta u \geq 0$ . Mais alors l'équation (2) implique  $u \geq v$  car

$$\frac{1}{\int_{\Omega} u} - \frac{1}{\int_{\Omega} v} > 0 \quad \text{et} \quad \Delta u \geq 0.$$

Ce qui contredit l'hypothèse :  $\int_{\Omega} v > \int_{\Omega} u$ .

## B) ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE.

### THEOREME 5.3.

Supposons les conditions du théorème précédent encore vérifiées : c'est à dire qu'il existe des solutions à variables séparées :  $v(x, t) = (t + a)v_0(x)$ .

Supposons de plus que  $\Delta v_0 \leq 0$  ne s'annule pas sur  $\partial\Omega_1$  et que  $\psi = \frac{-\phi}{\Delta v_0} \in S$ .

Soit  $u$  solution positive du problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), & f \in V, \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

$u \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; V)$ , avec  $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

Alors :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u - v\|_{L^2(\psi)} = 0$$

(avec décroissance homographique).

### REMARQUE 5.8.

Ces conditions sont compatibles comme le montre l'exemple numérique 5.2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\int_{\Omega} u} \Delta u = \frac{6(e+1)}{13e-35} x(1-x) & \text{dans } (0,1) \times \mathbb{R}^{+*}, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Pour  $u_0(x) = \frac{a[12(e^x + e^{1-x}) - 6x^2(1+e) + 6x(1+e) - 12(1+e)]}{13e-35}$ ,  $a > 0$ , la solution à variables séparées s'écrit :

$$u(x,t) = (t+a) \frac{[12(e^x + e^{1-x}) - 6x^2(1+e) + 6x(1+e) - 12(1+e)]}{13e-35}.$$

$\Delta u_0$  est du signe de  $\frac{e^x + e^{1-x}}{1+e} - 1$  pour  $x \in [0,1]$ , donc négatif ou nul.

$\psi(x) = |C^{te}| \frac{x(x-1)}{\frac{e^x + e^{1-x}}{1+e} - 1}$  est concave.

Par ailleurs,  $\frac{1}{\psi}$  se prolongeant par continuité sur  $[0,1]$ , il existe  $M$  tel que :

$$\int_{-a}^{x_1} \frac{dt}{\psi(t)} \leq Mx_1 + Ma = F(x_1).$$

Ainsi,  $\psi$  est élément de  $S$ .

### DEMONSTRATION DU THEOREME 5.3.

Il existe des solutions à variables séparées :

$$v(x,t) = (t+a)v_0(x),$$

où  $v_0$  vérifie :

$$\begin{cases} v_0 - \frac{k}{\int_{\Omega} v_0} \Delta v_0 = f & \text{dans } \Omega, \\ v_0 = 0 & \text{dans } \partial\Omega_0, \\ \frac{\partial v_0}{\partial n} = 0 & \text{dans } \partial\Omega_1. \end{cases}$$

$v$  est solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{k}{\int_{\Omega} v} \Delta v = v_0 - \frac{k}{\int_{\Omega} v_0} \Delta v_0 = f & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ v = (t+a)v_0 = 0 & \text{dans } \partial\Omega_0 \times (0,T), \\ \frac{\partial v}{\partial n} = (t+a) \frac{\partial v_0}{\partial n} = 0 & \text{dans } \partial\Omega_1 \times (0,T), \\ v(x,0) = av_0(x). \end{cases}$$

Ainsi :

$$\int_{\Omega} v(x,t)\phi(x)dx = \left( \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - k \right)t + \int_{\Omega} v(x,0)\phi(x)dx,$$

$$\int_{\Omega} v(x, t)\phi(x)dx = \left( \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - k \right)t + a \left( \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - k \right),$$

car :

$$\int_{\Omega} v_0(x)\phi(x)dx = \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - k.$$

Considérons désormais  $u$  solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \int_{\Omega} u \Delta u = f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx = \left( \int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - k \right)t + \int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx,$$

et choisissons  $a$  :

$$a = \frac{\int_{\Omega} u_0(x)\phi(x)dx}{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx - k} > 0,$$

de manière à avoir :

$$\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x)dx = \int_{\Omega} v(x, t)\phi(x)dx.$$

Par différence :

$$\frac{\partial(u-v)}{\partial t} - \frac{k\Delta u}{\int_{\Omega} u dx} + \frac{k\Delta v}{\int_{\Omega} v dx} = \frac{\partial(u-v)}{\partial t} - \frac{k\Delta(u-v)}{\int_{\Omega} u dx} + \left( \frac{k}{\int_{\Omega} v dx} - \frac{k}{\int_{\Omega} u dx} \right) \Delta v = 0.$$

Chaque terme étant, à  $t$  fixé, dans  $L^2(\Omega)$ , on multiplie par :

$$\frac{(u-v)\phi}{k\Delta(-v_0)},$$

et on intègre sur  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(u-v)}{\partial t} \frac{(u-v)\phi}{k\Delta(-v_0)} - \left( \frac{1}{\int_{\Omega} u} \right) \int_{\Omega} \Delta(u-v) \frac{(u-v)\phi}{\Delta(-v_0)} - \left( \frac{1}{\int_{\Omega} u} - \frac{1}{\int_{\Omega} v} \right) \int_{\Omega} \frac{(u-v)\phi}{\Delta(-v_0)} \Delta(v) dx = 0.$$

Or :

$$\int_{\Omega} \frac{(u-v)\phi}{\Delta(-v_0)} \Delta(v) dx = \int_{\Omega} \frac{(u-v)\phi}{\Delta(-v_0)} (t+a) \Delta(v_0) dx = -(t+a) \left( \int_{\Omega} u(x, t)\phi(x) dx - \int_{\Omega} v(x, t)\phi(x) dx \right).$$

Donc :

$$\int_{\Omega} \frac{(u-v)\phi}{\Delta(-v_0)} \Delta(v) dx = 0,$$

car :

$$\int_{\Omega} u(x, t)\phi(x) dx = \int_{\Omega} v(x, t)\phi(x) dx.$$

Ainsi, il reste :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \frac{(u-v)^2 \phi}{k \Delta(-v_0)} \right) - \left( \frac{1}{\int_{\Omega} u} \right) \int_{\Omega} \Delta(u-v) \frac{(u-v)\phi}{\Delta(-v_0)} = 0.$$

On applique deux fois la formule de GREEN :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \frac{(u-v)^2 \phi}{k \Delta(-v_0)} \right) + \left( \frac{1}{\int_{\Omega} u} \right) \left[ \int_{\Omega} \|\nabla(u-v)\|^2 \frac{\phi}{\Delta(-v_0)} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u-v)^2 \Delta \left( \frac{\phi}{\Delta(-v_0)} \right) \right] = 0,$$

d'où :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \frac{(u-v)^2 \phi}{k \Delta(-v_0)} \right) = \left( \frac{-1}{\int_{\Omega} u} \right) \left[ \int_{\Omega} \|\nabla(u-v)\|^2 \frac{\phi}{\Delta(-v_0)} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u-v)^2 \Delta \left( \frac{\phi}{\Delta(-v_0)} \right) \right].$$

On sait que :

$$\begin{cases} \Delta v_0 \leq 0, \\ \Delta \left( \frac{\phi}{\Delta v_0} \right) \geq 0, \end{cases}$$

donc :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u-v)^2 \Delta \left( \frac{\phi}{\Delta(-v_0)} \right) \leq 0.$$

Ainsi :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \frac{(u-v)^2 \phi}{k \Delta(-v_0)} \right) \leq \left( \frac{-1}{\int_{\Omega} u} \right) \int_{\Omega} \|\nabla(u-v)\|^2 \frac{\phi}{\Delta(-v_0)}.$$

Considérons le produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x) \left( \frac{\phi(x)}{\Delta(-v_0(x))} \right) dx \quad \text{avec} \quad \frac{\phi(x)}{\Delta(-v_0(x))} \geq 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

Notons  $\| \cdot \|$ , la norme qui lui est associée, on a, en utilisant l'inégalité de POINCARÉ :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u-v\|)^2 \leq \left( \frac{-1}{\int_{\Omega} u} \right) (\|\nabla(u-v)\|)^2 \leq \left( \frac{-C}{\int_{\Omega} u} \right) (\|u-v\|)^2.$$

Posons :

$$L(t) = \frac{2C}{\int_{\Omega} u(x) dx}.$$

Comme  $u$  est dans  $C(0, T, L^2(\Omega))$ ,  $L(t)$  est continue en  $t$ .

$$\|u-v\|^2 \leq \|u_0 - av_0\|^2 \exp \left( \int_0^t -L(t) dt \right),$$

avec :

$$L(t) > 0.$$

Ainsi, il existe une constante  $K$  telle que :

$$\left| \int_{\Omega} u-v \right| \leq \int_{\Omega} |u-v| \leq \|u_0 - av_0\|^2 \int_{\Omega} \frac{1}{\psi} = K,$$

$$\int_{\Omega} v - K \leq \int_{\Omega} u \leq K + \int_{\Omega} v.$$

Comme  $\int_{\Omega} v$  est linéaire en  $t$ , il existe deux constantes positives  $m$  et  $n$  telles que :

$$\int_{\Omega} u \leq mt + n,$$

et :

$$-L(t) \leq \frac{-2C}{mt + n}.$$

On en déduit que :

$$\|u - v\|^2 \leq \frac{C^{te} \|u_0 - av_0\|^2}{mt + n}.$$

## V. CONCLUSION.

Ce chapitre traduit l'existence d'un phénomène de bifurcation. Soit  $\lambda$  un paramètre, écrivons le problème sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\int_{\Omega} u} \Delta u = \lambda f \text{ dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 \text{ dans } \partial\Omega_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ dans } \partial\Omega_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

et supposons, comme dans l'exemple 5.2, que les conditions des théorèmes 5.1, 5.2, 5.3 soient vérifiées.

Posons :  $\lambda^* = \frac{k}{\int_{\Omega} f(x)\phi(x)dx}$ .

- a) Si  $\lambda < \lambda^*$  : la solution dégénère en temps fini.
- b) Si  $\lambda = \lambda^*$  : la solution converge au sens d'une certaine norme  $L^2$ .
- c) Si  $\lambda > \lambda^*$  la solution tend vers  $+\infty$  en norme  $L^2$  et on sait expliciter cette convergence à l'aide de solutions à variables séparées.

## BIBLIOGRAPHIE

- [B] - **H. Brezis** : Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.  
Masson (1987).
- [CFNT] - **P. Constantin & C. Foias & B. Nicolaenko & R. Temam** : Integral  
Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equations.  
Springer-Verlag (1989).
- [CR] - **M. Chipot & J.F. Rodrigues** : On a class of non linear non local elliptic  
problems. Mathematical Modelling and Numerical Analysis (1992), 447-468.
- [D] - **E. Dibenedetto** : Degenerate Parabolic Equations.  
Springer-Verlag (1993).
- [DKM] - **D. Daners & P. Koch-Medina** : Abstract evolution equations, periodic  
problems and applications. Longman Scientific & Technical (1992), 206-208.
- [DL3] - **R. Dautray & J. Lions** : Analyse mathématique et calcul numérique  
par les sciences et les techniques. Masson (1988) volume 3, 922-935.
- [DL8] - **R. Dautray & J. Lions** : Analyse mathématique et calcul numérique  
par les sciences et les techniques. Masson (1988) volume 8, 485-486, 614-627.
- [F] - **A. Friedman** : Partial Differential Equation of Parabolic Type.  
Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1964), 156-164.
- [H] - **A. Hillion** : Les théories mathématiques des populations. Presses  
Universitaires de France (1986), 62-65.
- [Ha] - **A. Haraux** : Systèmes dynamiques, processus et applications aux  
équations aux dérivées partielles. Cours de D.E.A. (1988-1989), publications  
du laboratoire d'analyse numérique Université Pierre et Marie Curie, Centre  
National de la Recherche Scientifique, chapitre 5.
- [K] - **J. Kačur** : Method of Rothe in Evolution Equations. Teubner-Texte zur  
Mathematik. Band 80 (1985), 26-29.

[L] - **O.A. Ladyzhenskaya** : The boundary Value Problems of Mathematical Physics.  
Springer-Verlag (1985), 103-146.

[LSU] - **O.A. Ladyzhenskaya & V.A. Solonnikov & N.N. Ural'ceva** : Linear and  
Quasilinear Equations of Parabolic Type. Volume Twenty-Three,  
Translation of Mathematical Monographs (1968).

## TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION :</b> .....	1
<b>I ORIGINE DU PROBLEME :</b> .....	2
A. PREMIERE APPROCHE : .....	2
B. SECONDE APPROCHE : .....	3
<b>II PRESENTATION DES PRINCIPAUX RESULTATS :</b> .....	9
<b>CHAPITRE I : ETUDE DE L'EQUATION HOMOGENE :</b> .....	21
I RAPPEL : .....	22
II EXISTENCE ET UNICITE DE LA SOLUTION GLOBALE : .....	22
III EXTINCTION EN TEMPS FINI DE LA SOLUTION : .....	26
A. THEOREME D'EXISTENCE : .....	26
B. EXEMPLE DE CALCUL EXPLICITE DE T : .....	28
C. CRITERE POUR EVALUER SI T EST FINI : .....	29
IV EXEMPLES ET COMMENTAIRES : .....	31
A. PREMIERS EXEMPLES : .....	31
B. PROLONGEMENT DE LA SOLUTION.....	33
<b>CHAPITRE II : THEOREMES GENERAUX D'EXISTENCE ET D'UNICITE :</b> .....	39
I RAPPEL : .....	40
II THEOREME D'EXISTENCE LOCALE : .....	41
III THEOREME D'EXISTENCE GLOBALE ET D'UNICITE : .....	46

<b>CHAPITRE III : DOMAINES INVARIANT ET STABILITE :</b>	<b>48</b>
I INTRODUCTION :	49
II ETUDE D'UN CAS PARTICULIER EXISTENCE DE POINTS FIXES INSTABLES : ..	50
III CAS GENERAL :	56
<b>CHAPITRE IV : AUTRES THEOREMES D'EXISTENCE GLOBALE :</b>	<b>69</b>
I INTRODUCTION :	70
II CROISSANCE DE $u(t)$ :	71
III CROISSANCE DE L'INTEGRALE DE $u(t)$ :	73
IV CONCLUSION :	87
<b>CHAPITRE V : APPLICATION AU CAS OU <math>a</math> REPRESENTE UNE HYPERBOLE :</b>	<b>89</b>
I INTRODUCTION :	90
II PREMIER CAS :	91
III DEUXIEME CAS :	99
IV TROISIEME CAS :	101
A. RECHERCHE DE SOLUTIONS A VARIABLES SEPARÉES :	102
B. ETUDE DU COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE :	108