



**HAL**  
open science

# Stabilisation de systèmes bilinéaires et de systèmes mécaniques

Martine Orlandini Clavier

► **To cite this version:**

Martine Orlandini Clavier. Stabilisation de systèmes bilinéaires et de systèmes mécaniques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1995. Français. NNT : 1995METZ037S . tel-01777094

**HAL Id: tel-01777094**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777094v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



## REMERCIEMENTS

Je remercie toute l'équipe du projet CONGE à l'INRIA qui m'a accueillie au sein du département pour préparer cette thèse en particulier Monsieur G. Sallet qui a su me faire confiance au cours de ces années.

Toute ma gratitude va à P. Adda qui m'a apporté soutien et conseils et sans qui ce travail n'aurait pu aboutir. Je remercie aussi J.C. Vivalda qui a permis l'illustration de cette thèse mais surtout qui a su nous redonner confiance lorsque nous étions déroutés par la complexité des calculs.

Tout ma reconnaissance à Melle Agostini qui a effectué la majorité des travaux de mise en page.

Martine Clavier

# TABLE DES MATIERES

<b>I. Introduction</b> .....	4
A. Rappel - théorème de Kalman .....	4
B. Remarques sur la nature du feedback cherché .....	7
<b>II. Application aux systèmes bilinéaires : placement de pôles variable</b> .....	9
A. Idée générale .....	9
B. Remarques .....	10
C. Réduction du problème - écriture simplifiée du système .....	15
<b>III. Placement de pôles variable, le spectre choisi étant du type <math>\alpha \pm i</math></b> .....	17
A. Calcul du feedback $u_\alpha(x)$ .....	17
B. Les trajectoires "tournent autour de l'origine" .....	18
C. Cas particulier $\alpha = 0$ .....	19
D. Cas général $\alpha \neq 0$ . (Le spectre est fixé à $\alpha \pm i$ ) .....	28
E. Estimation du temps mis pour effectuer un demi-tour sur la trajectoire .....	30
F. Conclusion : Comparaison des résultats avec le cas linéaire .....	34
<b>IV. Contrôles constants par secteurs</b> .....	36
A. Conditions nécessaires à l'existence d'un tel feedback .....	37
B. Accroissement de $\rho$ sur un demi-tour .....	40
C. Etude d'un exemple .....	41
D. Cas général, recherche de conditions suffisantes $k \neq 1$ .....	45
<b>V. Placement de pôle variable avec le spectre fixé à <math>(\alpha, \beta)</math> réels</b> .....	52
A. Calcul du feedback .....	52
B. Recherche et classement des directions propres .....	54
C. Estimation de la vitesse de convergence .....	58
D. Conclusions : similitudes avec le cas linéaire .....	68
<b>Conclusion</b> .....	70
<b>Bibliographie</b> .....	71

Dans cette étude on s'intéresse à la stabilisation avec estimation de la vitesse de convergence de systèmes bilinéaires.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + uBx \\ x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, B \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ces systèmes ont un intérêt pratique car ils modélisent de nombreux problèmes physiques et théorique car ils constituent une approximation de systèmes plus généraux.

Un des principaux objectifs est de proposer une ou plusieurs stratégies de stabilisation de systèmes non  $C^1$  stabilisables ne vérifiant pas les conditions de Brockett [3] que nous rappelons :

théorème : soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x, u) \\ x \in \mathcal{U}, u \in \mathcal{V} \\ \mathcal{U} \text{ ouvert connexe de } \mathbb{R}^n \text{ et } \mathcal{V} \text{ contenu dans } \mathbb{R}^m \end{cases}$$

et  $X : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C_1$  vérifiant  $X(0, 0) = 0$

si ce système admet un feedback stabilisateur de classe  $C^1$  dans un voisinage de  $\in \mathbb{R}^n$  alors :

(i) le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlables associés à des valeurs propres strictement positives.

(ii) il existe un voisinage  $\mathcal{N}$  de  $(0,0)$  tel que pour tout  $\xi \in \mathcal{N}$ , il existe un contrôle  $u_\xi(\cdot)$  défini sur  $[0, +\infty[$  qui ramène de l'état  $x = \xi$  en  $t = 0$  à l'état  $x = 0$  en  $t = \infty$ . En d'autres termes, si  $x(t)$  est une solution de  $\dot{x} = \mathcal{X}(x, u_\xi)$  vérifiant  $x(0) = \xi$  alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

(iii) l'application  $\gamma : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x, u) \longrightarrow \mathcal{X}(x, u)$$

est surjective sur un voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$ .

On observe assez facilement que les systèmes bilinéaires homogènes (1) peuvent rentrer dans cette catégorie de systèmes non  $C^1$  stabilisables.

exemple :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x + u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x \quad A \text{ et } u(0)B = \begin{pmatrix} 1+u(0) & -1 \\ 1 & 1-u(0) \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(A + u(0)B) = 2$$

on montrera que l'ensemble des systèmes de type (1) non  $C^1$  stabilisables est d'intérieur non vide.

Divers travaux sont parus étudiant la stabilisation des systèmes bilinéaires mais avec des hypothèses restrictives sur A Jurdjevic Quinn [10] puis JP Gauthier et I. Kupka [7] (avec l'hypothèse A dissipative).

Dans le cas où le système est non  $C_1$  stabilisable (il n'existe pas de  $u(x)$  continue) on peut songer à stabiliser le système en boucle ouverte (feedback  $u(t)$ ) (on obtient alors un système non autonome) et en particulier à utiliser des feedback périodiques de façon à utiliser les théories bien connues correspondantes (Floquet - Lyapounov). Cette approche s'est avérée peu fructueuse, même en petite dimension (Arnold).

On peut alors, se référant aux travaux récents de J.P. Pomet et J.H. Coron [B] chercher une commande dépendant de  $x$  et de  $t$  périodique en  $t$ . Des résultats constructifs ont été obtenus par ces derniers pour des systèmes non linéaires sans dérive du type  $\dot{x} = \sum_{i=1}^n u_i f_i(x)$  et des résultats non constructifs d'existence dans le cas avec dérive. On ne peut donc espérer répondre directement à notre problème par application directe de ces résultats. Il n'en reste pas moins que la voie des commandes du type  $u(x,t)$  reste à explorer dans le cadre des systèmes bilinéaires.

Dans l'optique de la stabilisation par feedback  $u(x)$  (non nécessairement  $c^1$ ) que nous adopterons dans ce travail, peu de travaux ont été publiés. On peut citer les travaux de P. Adda [1] qui a donné pour les systèmes (1) une CNS de contrôlabilité en dimension 2, et en fait des feedback constants par morceaux en s'appuyant sur des considérations géométriques que nous reprendrons.

De même R. Chabour, G. Sallet, J.C. Vivalda [5] ont proposé pour ces systèmes une classification, donnant pour les systèmes stabilisables un feedback constant, ou polynomial ou homogène (la condition de Jurdjevic - Quinn étant réalisée) ou en montrant que le système n'est pas stabilisable.

Un des objectifs de cette thèse est non seulement de construire un feedback stabilisant les systèmes (1), mais aussi de pouvoir agir sur la vitesse de convergence à travers des paramètres de départ (choix des valeurs propres, ou valeur du feedback constant,...). La méthode du placement de pôles variable s'est avérée très fructueuse nous permettant d'agir sur la vitesse de convergence, mais aussi sur le portrait de phase (trajectoires en spirales ou trajectoires contenues dans un secteur angulaire) et même dans le cas où les pôles sont choisis à partie réelle positive (il n'y a pas alors convergence) nous avons pu dresser un portrait des trajectoires. Ce dernier résultat relevant plus du domaine des équations différentielles que du domaine de stabilisation.

La méthode du placement de pôle variable exploite la ressemblance existant entre un système bilinéaire homogène et un système linéaire.

<u>Système linéaire</u>	<u>Système bilinéaire</u>
$\dot{x} = Ax + ub \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ A \in M_{n \times n} \\ b \in \mathbb{R}^n \end{cases}$	$\dot{x} = Ax + uBx \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ A \in M_{n \times n} \\ B \in M_{n \times n} \end{cases}$
	on pose $b(x) = Bx$
	$\dot{x} = Ax + ub(x)$

on reprend alors l'idée du placement de pôle pour un système linéaire si on choisit alors un spectre  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  associé au polynôme caractéristique  $P(k) = k^n + \beta_1 k^{n-1} + \dots + \beta_n$ . On impose alors au système de vérifier :

hypothèse de Kalman	hypothèse de Kalman adaptée
$\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b\}$ de rang n	$\{b(x), Ab(x), \dots, A^{n-1}b(x)\}$ de rang n pour tout $x \neq 0$
Si P est la matrice de changement de base	$P(x)$ sera la matrice de changement de base

on considère alors la matrice ligne  $F' = ((\alpha_n - \beta_n), (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1}), \dots, (\alpha_1 - \beta_1))$

où  $\alpha_n, \dots, \alpha_1$  sont les coefficients du polynôme caractéristique de A



$$F = F' P^{-1}$$

$u = F_x$  le feedback est linéaire

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + bF)x \\ &= M x\end{aligned}$$

M est une matrice à coefficients constants

$$F(x) = F' P^{-1}(x)$$

$u(x) = F(x) x$  le feedback est non linéaire

$$\dot{x} = [A + b(x) F(x)] x = M(x) x$$

M(x) est une matrice à coefficients qui sont des fractions rationnelles homogènes de degré 0

d'où l'idée de passer en coordonnées polaires pour les calculs

Bien que les idées mises en oeuvre soient simples, il apparaît vite que les résultats ne peuvent être obtenus qu'au prix de démonstrations assez difficiles (faute d'arguments qualificatifs) du fait de la relative complexité du système bouclé.

Les résultats obtenus sont assez complets et de forme simple, ils portent sur le portrait de phase, la vitesse de convergence et dans la première partie sur la vitesse de cotation.

Il faut remarquer, la grande similitude des résultats obtenus avec ceux du cas linéaire tant dans la description du portrait de phase, que sur la vitesse de convergence.

Précisons les résultats obtenus :

### Spectre fixé à $\alpha \pm i$

Dans cette première partie, en plaçant les pôles sur des valeurs propres du type  $\alpha \pm i$  les courbes obtenues sont des spirales (déformées) qui sont :

- cycliques pour  $\alpha = 0$ ,
- convergentes vers 0 pour  $\alpha < 0$ ,
- divergentes pour  $\alpha > 0$ .

On a en outre précisé :

- la vitesse de convergence est exponentielle avec une majoration de la norme du type  $\|x(t)\| \leq K e^{\alpha t}$ ,
- la vitesse moyenne de rotation sur un tour est de 1 (i.e. que l'on a une pseudo-période de  $2\pi$ ) ; à chaque tour la norme est multipliée par  $e^{2\pi\alpha}$ .

Dans ce cas, la ressemblance avec les résultats pour un système linéaire de même spectre est quasi parfaite (à un difféomorphisme près des trajectoires).

Ces résultats ont été soumis à la 2ème conférence internationale de Marrakech avec pour le cas  $\alpha = 0$ , une démonstration différente se référant à un article de Cima - Libre.

Si le spectre est réel  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

Comme dans le cas linéaire, il apparaît des directions propres où le champ est radial, ces directions propres sont aussi des séparatrices des trajectoires, mais ces droites sont au nombre de 8 (si  $\alpha \neq \beta$ ) alternées en  $\alpha$  et  $\beta$ . Lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont négatifs, les trajectoires sont de type noeud tendant asymptotiquement vers la direction propre correspondant à la plus grande valeur propre.

Dans ce cas, on a aussi estimé la vitesse de convergence, qui est exponentielle, avec une majoration de la norme ( $\|x(t)\|$ ) du type  $Ke^{\alpha t}$  où  $\alpha$  est la plus grande valeur propre.

Donc, dans ce cas, les résultats sont comparables avec le cas linéaire au dédoublement près des directions propres.

### Conclusion

Les résultats obtenus apparaissent très simples et très similaires à ceux obtenus dans le cas d'un système linéaire de même spectre. Ces résultats étaient peu prévisibles, du fait d'une certaine complexité du système bouclé et surtout des calculs.

### 3° Contrôles constants par secteur

Guidés par la nature du feedback obtenu dans la première partie (constant sur les rayons), on essaie une solution plus simple et plus robuste en choisissant des feedback constants par secteur. L'aspect intéressant est dans la nécessité (qui apparaît dans les calculs) d'adopter diverses stratégies de contrôles suivant  $\text{tr}(B)$ .

## I. Introduction

### A. Rappel : théorème de Kalman ; placement de Pôles pour les systèmes linéaires

Soit le système (2)  $\dot{x} = Ax + bu$  où

$$\begin{aligned}x &\in \mathbb{R}^n \\ A &\in M_{nn} \\ b &\in \mathbb{R}^n \\ u &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Définissons un spectre : c'est un ensemble de  $n$  complexes  $k_1, k_2, \dots, k_n$

$$\text{Spect} = \{k_1, k_2, \dots, k_n\}$$

qui vérifie la propriété suivante :

$$k_i \in \text{Spect} \Rightarrow \overline{k_i} \in \text{Spect}$$

de telle sorte que le polynôme  $P(k) = (k-k_1)(k-k_2) \dots (k-k_n)$

$$= k^n + \beta_1 k^{n-1} + \beta_2 k^{n-2} + \dots + \beta_n$$

soit un polynôme à coefficients réels.

On a alors le théorème suivant :

#### Théorème de Kalman :

Si le système (2) vérifie la condition du rang c'est-à-dire si la famille  $(b, Ab, A^2b, \dots)$  est de rang  $n$ , alors quel que soit le spectre  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ , on peut trouver une matrice ligne  $F$  telle que la matrice  $A + bF$  ait pour spectre (ensemble de valeurs propres de  $A$ ) ;  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$ .

De plus, si les complexes  $k_i$  sont tous à partie réelle négative, le feedback linéaire  $Fx$  stabilise le système.

Bien que le résultat soit très connu, on en donne une démonstration complète et une construction explicite des feedbacks stabilisants, car c'est cette construction qui sera utilisée dans la suite

Démonstration :

→ changement de base forme de compagnon de  $A$

La matrice A ayant pour polynôme caractéristique  $P_A(k) = k^n + \alpha_1 k^{n-1} + \alpha_2 k^{n-2} + \dots + \alpha_n$ , on considère la famille de vecteurs

$$\begin{aligned} e_1 &= A^{n-1}b + \alpha_1 A^{n-2}b + \dots + \alpha_{n-1}b \\ e_2 &= A^{n-2}b + \alpha_1 A^{n-3}b + \dots + \alpha_{n-2}b \\ &\vdots \\ e_{n-1} &= Ab + \alpha_1 b \\ e_n &= b \end{aligned}$$

Cette famille est une base de  $\mathbb{R}^n$  d'après l'hypothèse du rang. Si l'on note P la matrice de changement de base, alors

$A' = P^{-1}AP$  est de la forme

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \dots & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \dots & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

appelée forme compagnon de A.

→ construction du feedback :

Dans cette nouvelle base, b' est de la forme  $b' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

soit alors le polynôme  $P(k) = (k-k_1)(k-k_2) \dots (k-k_n)$  associé au spectre  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  choisi

$$P(k) = k^n + \beta_{n-1}k^{n-1} + \beta_{n-2}k^{n-2} + \dots + \beta_n$$

et F la matrice ligne  $(\alpha_n - \beta_n, \dots, \alpha_1 - \beta_1)$

alors  $A' + b'F$  est la matrice  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & & 1 \\ -\beta_n & -\beta_{n-1} & & -\beta_1 \end{bmatrix}$  qui a pour valeurs propres  $\{k_1, \dots, k_n\}$

$$A' + b'F = P^{-1}AP + b'F$$

d'où  $P(A' + b'F)P^{-1} = A + Pb'FP^{-1} = A + bF$  en posant  $F = FP^{-1}$   
a le même spectre  $\{k_1, \dots, k_n\}$ .

Exemple Soit  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  et  $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$   $P_k(A) = (k^3 - k^2 - k + 1)$

La famille  $\{b, Ab, A^2b\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$  est de rang 3

on pose  $e^1 = b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$   $e^2 = Ab + \alpha_1 b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$   $e^3 = A^2b + \alpha_1 Ab + \alpha_2 b = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

La matrice de passage  $P = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  et  $P^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Si l'on choisit comme spectre  $(-1, -2, -3)$  alors  $P(k) = k^3 + 6k^2 + 11k + 6$

on a alors  $F = (-5, -12, -7)$

et  $F = FP^{-1} = (6, 13, 0)$

et  $M = A + bF = \begin{bmatrix} 7 & 15 & 0 \\ -6 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$  a effectivement pour polynôme

caractéristique  $P(k) = k^3 + 6k^2 + 11k + 6$

Pour les systèmes linéaires la technique du placement de pôles donne donc un feedback linéaire stabilisant le système avec une vitesse de convergence et un portrait de phase déterminés au départ.

Peut-on espérer un résultat de même nature pour les systèmes (1) ?

## B. Remarques sur la nature du feedback cherché

### 1°) Les systèmes du type (1) sont souvent non $C_1$ et même non $C_0$ stabilisables

En effet, s'il existe un feedback  $C_1$  qui stabilise le système, alors la matrice  $A + u(0) B$  est stable, mais si  $B$  est une matrice de trace nulle et  $A$  une matrice de trace positive, alors

$$\text{tr}(A + u(0) B) = \text{tr}(A)$$

et la matrice  $A + u(0) B$  n'est pas stable

→ donnons un exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } A + uB = \begin{pmatrix} 1+u & -1 \\ 1 & 1-u \end{pmatrix} \quad \text{avec } \text{tr}(A + uB) = 2$$

donc  $A + uB$  n'est pas stable.

→ on peut élargir cette classe de systèmes non  $C_1$  stabilisables

$$\text{Plus généralement, si } A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a > 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \quad \text{avec } k > 0$$

$$\text{alors } M = A + uB = \begin{pmatrix} a+u & -b \\ b & a-ku \end{pmatrix}$$

a pour polynôme caractéristique  $X^2 - SX + P$

$$\text{avec } S = 2a + u(1-k)$$

$$\text{et } P = -u^2k + au(1-k) + a^2 + b^2$$

Montrons qu'il existe une infinité de valeurs de  $k$  pour lesquelles  $\forall u \in \mathbb{R} \quad S > 0$  ou  $P < 0$

donc pour lesquelles  $M$  a soit une racine réelle positive, soit des racines complexes à partie réelle positive (donc  $M$  non stable).

On peut se restreindre à  $k \in [0, 1]$ .

$$\text{Donc } S > 0 \Leftrightarrow u > -\frac{2a}{1-k} = u_0$$

quant à  $P$ , son discriminant est positif et comme  $k > 0$ .

$P$  a 2 racines  $u_1$  et  $u_2$  vérifiant  $u_1 < u_2$

montrons qu'il existe une infinité de  $k$  vérifiant ( $u_0 < u_1$ ). Pour ces valeurs de  $k$  on aura :

$$\forall u \quad S(u) > 0 \text{ ou } P(u) < 0$$

$$-\frac{2a}{1-k} < \frac{-a(1-k) + \sqrt{\Delta}}{-2k} \Leftrightarrow a \left( \frac{1-k}{2k} \right) + \frac{2a}{1-k} > \frac{\sqrt{\Delta}}{2k}$$

$$\Leftrightarrow a^2 \left[ \frac{(1-k)^2 + 4k}{2k(1-k)} \right]^2 > \frac{\Delta}{4k^2} \Leftrightarrow a^2 \frac{(1+k)^4}{(1-k)^2} > \Delta$$

$$\Leftrightarrow a^2 \left( \frac{(1+k)^4}{(1-k)^2} \right) > a^2(1-k)^2 + 4k(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a^2(1+k)^4 - (1-k)^4 - 4k(1-k)^2 \geq 4k b^2(1-k)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2(4k(k+1)^2) \geq 4k b^2(1-k)^2$$

$$\Leftrightarrow a(k+1) \geq |b|(1-k)$$

$$\Leftrightarrow k(a + |b|) \geq |b| - a$$

$$\Leftrightarrow k \geq \frac{|b| - a}{|b| + a}$$

on remarquera que  $\frac{|b| - a}{|b| + a} < 1$

donc pour toute valeur de  $k > 0$  vérifiant  $\frac{|b| - a}{|b| + a} < k < 1$

la matrice  $M$  n'est pas stable ( $\forall u \in \mathbb{R}$ )

donc pour ces matrices, il n'existe pas de feedback  $C_0$  stabilisant le système (2).

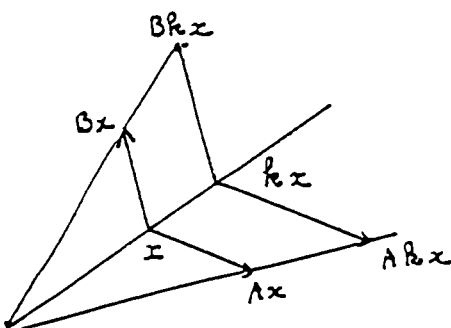
On notera donc que l'ensemble des systèmes du type (1) non  $C_0$  stabilisable est d'intérieur non vide. Cet ensemble est entièrement décrit dans [4].

### Conclusion

On cherchera pour stabiliser le système (1) des feedbacks aussi réguliers que possible ( $C^\infty$ ) sauf à l'origine pour préciser le type de feedbacks recherchés. On peut faire des remarques géométriques sur le système.

#### 2°) Remarques géométriques

Les champs de vecteurs ( $x \rightarrow Ax$ ) et ( $x \rightarrow Bx$ ) sont stables par les homothéties ( $Akx = k Ax$  si  $k \in \mathbb{R}$ ).



La situation est à une homothétie près la même le long de chaque rayon pour exploiter cette propriété. On cherchera de préférence des feedbacks constants sur chaque rayon donc soit constants par secteurs angulaires, soit des fonctions  $C^\infty$  (sauf en 0), mais homogènes de degré 0.

→ on notera que dans la méthode que l'on appliquera, le feedback trouvé est en fait une fraction rationnelle homogène de degré 0.

→ en calquant les calculs sur le cas des systèmes linéaires, nous allons déterminer un feedback  $u$  dont nous étudierons les propriétés.

## II. Application aux systèmes bilinéaires : placement de pôles variable

### A. Idée générale

Soit le système

$$\dot{x} = Ax + uBx \quad (1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in M_{n \times n}$ ,  $B \in M_{n \times n}$ ,  $u \in \mathbb{R}$ ,

on pose  $b(x) = Bx$

Le système (1) peut s'écrire  $\dot{x} = Ax + b(x)u$

Cette écriture du système ressemblant à celle des systèmes linéaires, on essaie d'appliquer la technique du placement de pôles en tout point  $x$ , c'est-à-dire qu'en chaque point  $x$  on calcule un feedback  $u(x)$  permettant de placer les pôles sur un spectre fixé à l'avance (toujours le même). C'est cette technique que l'on appellera placement de pôles variable.

On considère alors l'hypothèse suivante

la famille  $(b(x), A b(x), A^2 b(x), \dots, A^{n-1} b(x))$  est de rang  $n$  quel que soit  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$

La matrice  $A$  ayant pour polynôme caractéristique  $P_A(k) = k^n + \alpha_1 k^{n-1} + \dots + \alpha_n$

on construit la matrice de passage (dépendant de  $x$ )

$$P(x) = \begin{bmatrix} A^{n-1}b(x) + \alpha_1 A^{n-2}b(x) + \dots + \alpha_{n-1}b(x) ; A^{n-2}b(x) + \alpha_1 A^{n-3}b(x) + \dots + \alpha_{n-2}b(x) ; \\ Ab(x) + \alpha_1 b(x) ; b(x) \end{bmatrix}$$

Si on choisit comme spectre  $\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$  le polynôme caractéristique associé est

$$P'(k) = (k - k_1)(k - k_2) \dots (k - k_n) = k^n + \beta_1 k^{n-1} + \dots + \beta_n$$

on pose  $F'(k) = (\alpha_n - \beta_n ; \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} ; \dots ; \alpha_1 - \beta_1)$  (matrice ligne, constante mais  $F(x) = F' \cdot P^{-1}(x)$  dépend de  $x$ )

Le feedback  $u(x) = F(x) \cdot x$  dépend lui aussi de  $x$ .  $F(x)$  n'étant pas constante, ce feedback n'est pas linéaire.

Compte tenu de l'expression de  $u(x)$ , le système (1) devient (1)'

$$\dot{x} = [A + F(x) \cdot xB]x = \overline{M}(x) \cdot x$$

en utilisant l'associativité des matrices.



$$\begin{aligned}
[F(x).x.B]x &= [F(x).x][Bx] \\
&= F(x).x b(x) \\
&= b(x) F(x).x \quad \text{car } F(x).x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

et (1)' peut s'écrire

$$\dot{x} = [A + b(x) F(x)]x = M(x)x$$

On cherche alors à étudier le système bouclé obtenu. Avant on peut faire quelques remarques sur la nature du feedback obtenu.

### B. Remarques

→ Remarque 1 : La matrice  $M(x)$  a ses coefficients qui sont des fractions rationnelles homogènes de degré 0.

On a posé  $F(x) = F' P^{-1}(x)$

$$\text{où } P^{-1}(x) = \frac{1}{\det P(x)} \times {}^t C_0(P(x))$$

chaque coefficient de  $P(x)$  est linéaire en  $x$  donc le déterminant  $\det(P(x))$  est un polynôme homogène de degré  $n$ .

Chaque coefficient de  ${}^t C_0(P(x))$  est un polynôme homogène de degré  $(n-1)$

donc le feedback  $u(x) = F(x).x$  est une fraction rationnelle homogène de degré 0

et la matrice  $\bar{M} = A + u(x)B$  est donc une matrice dont les coefficients sont des fractions rationnelles homogènes de degré 0 de la variable  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , il en est de même de la matrice  $M = A + b(x) F(x)$ .

Le système bouclé  $\dot{x} = M(x).x$  est donc homogène de degré 1 et donc les trajectoires sont homothétiques et symétriques par rapport à 0.

→ Remarque 2 : L'hypothèse n'est réalisable qu'en dimension 2.

Dans le cas générique où  $B$  est inversible.

L'hypothèse de Kalman ;  $\forall x \neq 0 \quad (Bx, ABx, A^2Bx \dots)$  de dimension  $n$  pour tout  $x$  ne peut être réalisée qu'en dimension 2.

\* sur  $\mathbb{R}^2$  : la matrice  $A$  peut avoir

→ 2 valeurs propres réelles, mais alors si  $b(x)$  est un vecteur propre de  $A$   $Ab(x), A^2b(x) \dots$  sont des vecteurs colinéaires à  $b(x)$ , le système de vecteurs est donc de rang 1  $\neq 2$

→ 2 valeurs propres complexes conjuguées non réelles.

alors  $Ab(x)$  ne peut être colinéaire à  $b(x)$  donc le système  $\{b(x), Ab(x)\}$  est effectivement de rang 2 pour tout vecteur  $b(x)$ .

\* sur  $\mathbb{R}^3$  : la matrice A admet une valeur propre réelle au moins en reprenant le raisonnement précédent si  $b(x)$  est un vecteur propre, le système  $\{b(x), Ab(x), A^2b(x)\}$  est de rang 1  $\neq$  3. On peut aussi remarquer qu'algébriquement  $\det P(x)$  étant homogène de degré impair s'annule.

\* sur  $\mathbb{R}^4$  : la matrice A peut avoir des valeurs propres imaginaires conjuguées même dans ce cas il peut exister des vecteurs  $b(x)$  tels que le système  $\{b(x), Ab(x), A^2b(x), A^3b(x)\}$  soit de dimension 2, c'est-à-dire génère un plan  $\neq \mathbb{R}^4$ .

\* De façon plus générale, si  $Bx$  appartient à un sous-espace propre de A, la famille  $\{b(x), \dots, A^{n-1}b(x)\}$  est contenue dans ce sous-espace propre.

### Conclusion

Dans les cas où B est inversible, l'hypothèse de Kalman en tout point  $x$  (de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ ) n'est réalisable que dans  $\mathbb{R}^2$  avec A matrice possédant deux valeurs propres imaginaires conjuguées.

On peut élargir l'ensemble des matrices A pour lesquelles les hypothèses s'appliquent en faisant deux remarques

1°) en notant que [Ghraïba thèse]

"Si le système (1) est contrôlable sur les directions, alors il existe un feedback constant  $u_0$  tel que  $[A + u_0B]$  soit à spectre non réel, il n'est donc pas nécessaire de se restreindre au cas  $\text{sp } A \subset \mathbb{R}$ ".

2°) mais on peut de façon plus pragmatique chercher s'il existe  $u_0$  tel que  $[A + u_0B] \subset \mathbb{C} - \mathbb{R}$

$$\text{si } A \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = A + u_0B = \begin{pmatrix} a + u_0 & c \\ b & d - k u_0 \end{pmatrix}$$

Polynôme caractéristique  $P(X) = X^2 - \text{tr } \bar{A} X + \det \bar{A}$  a deux racines complexes si et seulement si  $\Delta < 0$ .

$$\begin{aligned} \Delta &= [a + u_0 + d - k u_0]^2 - 4[(a + u_0)(d - k u_0) - bc] \text{ qui est un polynôme du deuxième degré} \\ &= [(1-k)^2 + 4k]u_0^2 + [2(1-k)(a+d) - 4(d-ka)]u_0 + (a+d)^2 - 4(ad-bc) \\ &= (1+k)^2 u_0^2 + 2[a+d-ka-kd-2d+2ka]u_0 + (a-d)^2 + 4bc \\ &= (1+k)^2 u_0^2 + 2[a-d][1+k]u_0 + (a-d)^2 + 4bc \end{aligned}$$

Ce polynôme en  $u_0$  est négatif pour certaines valeurs de  $u_0$ , à condition que son discriminant soit positif (en effet " $a$ " =  $(1+k)^2 > 0$ )

$$\begin{aligned} \Delta_u &= 4(a-d)^2(1+k)^2 - 4(1+k)^2[(a-d)^2 + 4bc] \\ &= -16bc(1+k)^2 > 0 \Leftrightarrow \underline{bc < 0} \end{aligned}$$

Donc si  $bc < 0$ , on peut trouver un  $u_0$  tel que  $\text{sp}(A + u_0 B) \subset \mathbb{C} - \mathbb{R}$  et en appliquant un premier feedback  $u_0$  se ramener au cas précédent.

→ Remarque 3

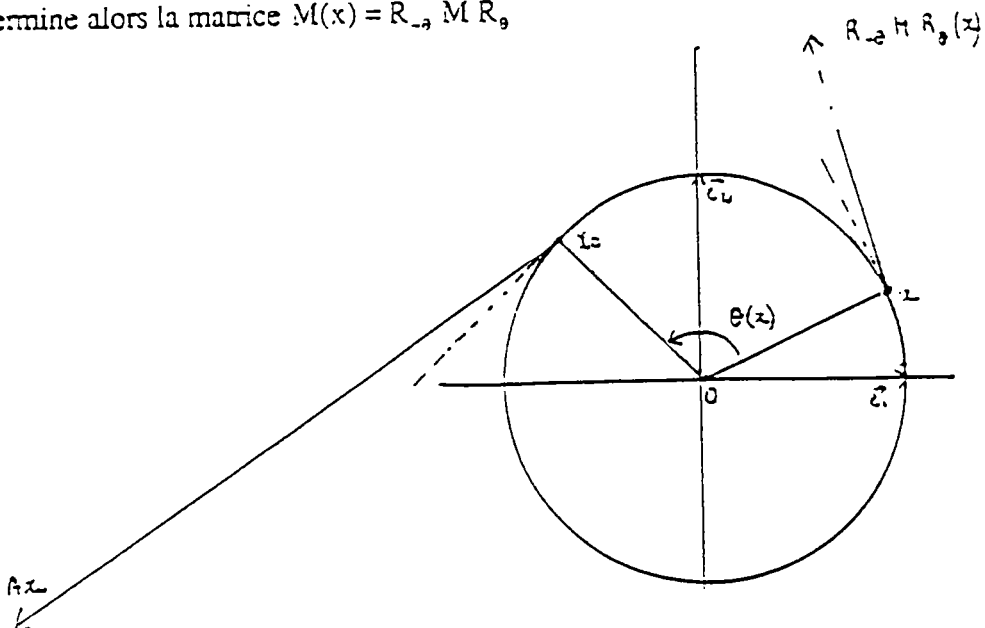
La condition  $\text{Re}(\text{sp}(M(x))) < 0$  n'implique pas que le système soit asymptotiquement stable (même si  $M(x)$  est une matrice homogène de degré 0).

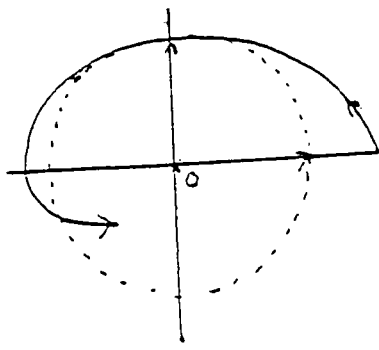
Pour montrer ce résultat, construisons un contre exemple en suivant le raisonnement géométrique suivant.

Soit  $M$  une matrice de valeurs propres imaginaires conjuguées (ex:  $-1 \pm 2i$ ), on détermine un vecteur  $x_0$  pour lequel le champ  $\dot{x} = Mx_0$  soit un vecteur sortant par rapport au cercle  $\|x\| = \|x_0\|$ .

On construit alors un champ de vecteurs reproduisant cette situation en tout point  $x$ . Pour cela, on pose  $\theta = (x, x_0)$  et  $R_\theta$  la rotation d'angle  $\theta$ .

On détermine alors la matrice  $M(x) = R_{-\theta} M R_\theta$





Calcul sur un exemple : soit  $M$  la matrice  $M = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  de valeurs propres  $-1 \pm 2i$ , sur les trajectoires il existe des positions de  $x$  pour lesquelles  $M(x)$  est un vecteur sortant par exemple le vecteur  $x_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . En effet, on a

$$\langle x_0, Mx_0 \rangle = 1 > 0.$$

La matrice  $M(x)$  est alors égale à

$$M(x) = R_{-\theta} M R_{\theta}$$

$$\text{avec } R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } \cos\theta = \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x\| \|x_0\|} = \frac{-x_1 + x_2}{\sqrt{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \text{ et } \sin\theta = \frac{\det(x, x_0)}{\|x\| \|x_0\|} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

et donc

$$M(x) = \frac{1}{2(x_1^2 + x_2^2)} \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 & +x_1 + x_2 \\ -x_1 - x_2 & -x_1 + x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 & -x_1 - x_2 \\ +x_1 + x_2 & -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$M(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1^2 - 5x_2^2}{2(x_1^2 + x_2^2)} & \frac{-5x_1^2 + 6x_1x_2 - 5x_2^2}{2(x_1^2 + x_2^2)} \\ \frac{5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2}{2(x_1^2 + x_2^2)} & \frac{-5x_1^2 + x_2^2}{2(x_1^2 + x_2^2)} \end{pmatrix}$$

avec  $x = (x_1, x_2)$ .

→ les termes de cette matrice sont des fractions rationnelles en  $(x_1, x_2)$  homogènes de degré 0.

→ les valeurs propres de cette matrice sont les solutions de

$$P(k) = k^2 - \text{tr}(M)k + \det M$$

$$\text{avec } \text{tr}(M) = \frac{-4(x_1^2 + x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)} = -2$$

$$\text{et } \det(M) = \frac{20(x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4)}{4(x_1^2 + x_2^2)^2} = 5.$$

Les valeurs propres de  $M(x)$  sont donc  $-1 \pm 2i$  quel que soit  $x$ , elles sont à partie réelle négative.

$$\text{Après avoir calculé } \dot{x} = Mx = \frac{1}{2(x_1^2 + x_2^2)} \begin{pmatrix} x_1^3 - 5x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 5x_2^3 \\ 5x_1^3 + x_1^2x_2 + 5x_2^2x_1 + x_2^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{on constate que } \langle x, \dot{x} \rangle = \frac{1}{2(x_1^2 + x_2^2)} (x_1^4 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^4) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

Si on pose  $r = \|x\|$  on a donc  $\frac{\dot{r}}{r} = \frac{1}{2}$  soit  $r = e^{\frac{1}{2}t} r_0$

Aucune trajectoire du système  $\dot{x} = M(x)x$  ne converge vers 0.

### Conclusion

L'argument des valeurs propres à partie réelle négative n'est pas suffisant pour montrer que le système bouclé est stable (même si les coefficients de  $M(x)$  sont des fractions rationnelles homogènes de degré 0).

On peut faire une autre remarque limitant le champ des arguments pour obtenir le résultat désiré.

→ **Remarque 4 : Le système n'est pas un système linéaire non autonome.**

Malgré la forme  $\dot{x} = M(x(t))x$ , le système ne peut être considéré comme un système linéaire non autonome. En effet, les coefficients de la matrice  $M$  dépendent directement de  $x(t)$  et sont donc liés aux conditions initiales, c'est-à-dire que pour une même valeur de  $t$  si on change de conditions initiales, les coefficients changent l'ensemble des solutions n'est pas un espace vectoriel - de plus dans un système linéaire non autonome de matrice  $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}$ , la condition  $\text{Re}(\text{spe } A(t)) < 0 \forall t$  n'assure pas la stabilité asymptotique du système.

Après ces remarques limitant les démonstrations possibles, terminons sur une remarque mettant en évidence l'originalité du système considéré.

→ **Remarque 5 : Les matrices  $A + u(x)B$  et  $A + b(x)F(x)$  sont distinctes.**

Nous avons vu que le système bouclé pouvait s'écrire

$$\dot{x} = M(x).x \quad \text{ou} \quad \dot{x} = \overline{M}(x).x \quad (1)$$

car en tenant compte de l'associativité des matrices

$$M(x).x = (A + b(x)F(x))x = (A + u(x)B).x \text{ noté } \overline{M}(x).x$$

malgré ces égalités, on remarquera que les matrices  $M(x)$  et  $\overline{M}(x)$  non seulement sont distinctes, mais elles n'ont pas le même spectre.

Donnons un exemple de construction

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

effectuons les constructions précédentes en fixant le spectre à  $-1 \pm i$ .

$$\text{On a } F(x) = \frac{-1}{x_1^2 + x_2^2} (4x_1 + 4x_2 ; 4x_1 - 4x_2)$$

$$\text{et } u(x) = \frac{-4x_1^2 - 8x_1x_2 + 4x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

d'où les matrices  $\bar{M}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - u(x) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & -1 \\ 1 & \frac{5x_1^2 + 8x_1x_2 - 3x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$

et  $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} F(x) = \begin{pmatrix} \frac{-3x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{-5x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \frac{x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$

La matrice  $M(x)$  par construction a effectivement pour spectre  $-1 \pm i$ , mais pour  $\bar{M}(x)$ , on remarquera que  $\text{tr}(\bar{M}) = 2$

et  $\det(\bar{M}) = -15 + \frac{64x_1x_2(-x_1^2 + x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$

et donc que le spectre de  $\bar{M}(x)$  n'est pas  $-1 \pm i$  et qu'il change avec  $x$ .

Cependant les champs  $M(x).x$  et  $\bar{M}(x).x$  sont égaux, on a en effet

$$M(x).x = \begin{pmatrix} \frac{-3x_1^3 - 9x_1^2x_2 + 5x_1x_2^2 - x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{x_1^3 + 5x_1^2x_2 + 9x_1x_2^2 - 3x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix} = \bar{M}(x).x$$

Nous avons vu au cours des remarques quelques exemples et contre-exemples. Dans chacun d'eux les matrices  $A$  et  $B$  avaient une forme particulière

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

Nous montrerons pour terminer cette partie que l'on peut à l'aide de remarques simples ramener le cas général à ce type de matrices.

### C. Réduction du problème - écriture simplifiée du système

L'écriture simplifiée du système permettra la réduction de 6 à 3 du nombre des paramètres rendant ainsi possible les calculs de la partie III. Compte tenu de la remarque n°2, l'étude du système est ramenée au cas modeste du plan ( $n = 2$ ) et pour une matrice  $A$  dont les valeurs propres sont des complexes conjugués.

De même si  $B$  a deux valeurs propres réelles non nulles de même signe, il existe alors un feedback constant stabilisant le système, ainsi que dans le cas où  $B$  a 2 valeurs propres conjuguées non réelles. Les seuls cas génériques non triviaux restent donc les cas où  $B$  a deux valeurs propres réelles de signes contraires.

Nous partirons donc de la situation

$A$	a deux valeurs propres imaginaires conjuguées
$B$	a deux valeurs propres réelles de signes contraires

Nous allons montrer que l'on peut trouver une base dans laquelle le système (1)  $\dot{x} = Ax + uBx$  a une "écriture" simplifiée d'abord par un changement de base puis par un changement de feedback.

→ on peut pour commencer travailler dans une base  $(e_1, e_2)$  constituée de vecteurs propres de B dans une telle base  $B = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

→ en effectuant un changement de feedback  $u' = uk_1$   
On a  $uB = u'B'$  avec  $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$   $k = -\frac{k_2}{k_1} > 0$

Dans une telle base  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  mais A a 2 valeurs propres complexes donc  $bc < 0$

→ On peut trouver une base  $e'_1 = r e_1$ ,  $e'_2 = s e_2$   
où B s'écrira  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$  et  $A \begin{pmatrix} a & -b' \\ b' & d \end{pmatrix}$

En effet dans une telle base A s'écrit  $\begin{pmatrix} a & \frac{s}{r}c \\ \frac{r}{s}b & d \end{pmatrix}$

On peut alors trouver r et s tels que  $\frac{r}{s}b = -\frac{s}{r}c \Leftrightarrow \frac{r^2}{s^2} = -\frac{c}{b} > 0$

Dans la base  $(e'_1, e'_2)$ , le système (1) s'écrit

$$\dot{x} = \left[ \begin{pmatrix} a & -b' \\ b' & d \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \right] x$$

→ en décomposant  $u = u_1 + u_2$ , on peut trouver  $u_1$  tel que

$$a' = a + u_1 = d - u_1, k = d' \Leftrightarrow u_1 = \frac{d-a}{1+k} \quad (k > 0 \text{ donc } 1+k \neq 0)$$

On a alors

$$\dot{x} = \left[ \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \right] x \quad (1)$$

Compte tenu de toutes ces remarques, nous étudierons dorénavant le système (1) sous la forme

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} x + u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} x \quad \text{avec } k > 0$$

et  $b > 0$

Compte tenu de cette écriture, nous allons effectuer dans le détail le calcul du feedback  $u(x)$  obtenu par la méthode du "placement de pôles variable", car nous avons vu que des arguments plus généraux ne nous permettraient pas de conclure.

### III. Placement de pôles variable, le spectre choisi étant du type $\alpha \pm i$

Nous calculerons explicitement le feedback obtenu noté  $u_\alpha(x)$ , puis nous étudierons la nature des trajectoires obtenues qui présentent des similitudes avec les trajectoires obtenues dans des systèmes linéaires où les pôles sont placés en  $\alpha \pm i$ .

C'est-à-dire que les trajectoires ont un sens de rotation fixe, que pour  $\alpha = 0$  ce sont des cycles et qu'enfin pour  $\alpha < 0$ , les trajectoires convergent asymptotiquement vers 0 avec une rapidité de convergence directement liée à  $\alpha$  tandis que pour  $\alpha > 0$  les trajectoires tendent vers  $\infty$ .

Tout d'abord calculons  $u_\alpha(x)$ .

#### A. Calcul du feedback $u_\alpha(x)$

Soit le système

$$\dot{x} = Ax + uBx \quad (1)$$

avec  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$

soit  $P_A(X)$  le polynôme caractéristique de A

$$P_A(X) = X^2 + \alpha_1 X + \alpha_2 \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= -\text{tr}(A) = -2a \\ \alpha_2 &= \det A = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Notons  $P(x)$  la matrice

$$P(x) = \begin{bmatrix} [Ab(x) + \alpha_1 b(x), b(x)] & \\ [bkx_2 - ax_1, x_1] & \\ [bx_1 + akx_2, -kx_2] & \end{bmatrix}$$

où  $\det P(x) = -b[x_1^2 + k^2 x_2^2]$  pour  $x \neq 0$

On a alors

$$P^{-1}(x) = \frac{1}{\det P(x)} \begin{bmatrix} -kx_2 - ax_1 & -x_1 \\ -bx_1 - akx_2 & bkx_2 - ax_1 \end{bmatrix}$$

Si on fixe le spectre de  $M(x)$  à  $\alpha \pm i$

On pose  $F = F' P^{-1}$  avec  $F' = (a^2 + b^2 - (\alpha^2 + 1), -2a + 2\alpha)$

d'où

$$F(x) = \frac{-1}{b(x_1^2 + k^2 x_2^2)} \begin{bmatrix} -kx_2(a^2 + b^2 - (\alpha^2 + 1)) + 2(\alpha - a)(-bx_1 - akx_2), -x_1(a^2 + b^2 - \alpha^2 - 1) \\ +2(\alpha - a)(bkx_2 - ax_1) \end{bmatrix}$$



et

$$u_\alpha(x) = F(x) \cdot x = \frac{-1}{b(x_1^2 + k^2 x_2^2)} \begin{bmatrix} -kx_1 x_2 (a^2 + b^2 - (\alpha^2 + 1)) - 2(\alpha - a)bx_1^2 - 2ak(\alpha - a)x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 (a^2 + b^2 - \alpha^2 - 1) + 2(\alpha - a)bkx_2^2 - 2(\alpha - a)ax_1 x_2 \end{bmatrix}$$

d'où l'on tire

$$u_\alpha(x) = \frac{-1}{b(x_1^2 + k^2 x_2^2)} [2(\alpha - a)b(-x_1^2 + kx_2^2) - (k+1)x_1 x_2 (-a - \alpha)^2 + b^2 - 1]$$

Le calcul de  $u_\alpha(x)$  étant effectué, on considère le système bouclé

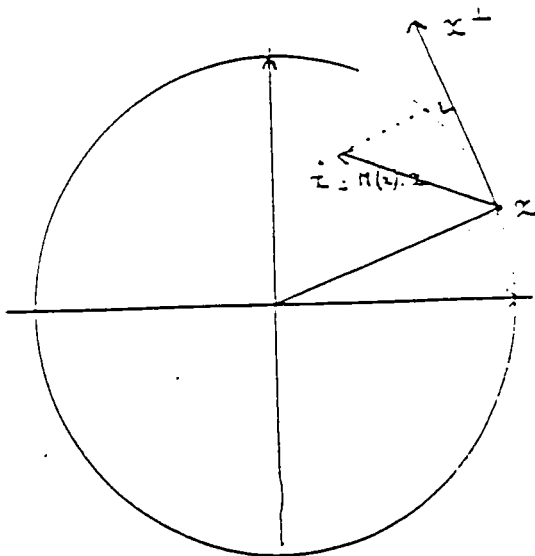
$$\dot{x} = [A + u_\alpha(x)B]x = \overline{M}(x) \cdot x \quad (2)$$

$$= [A + b(x)F(x)]x = M(x) \cdot x$$

Montrons que les trajectoires du système (2) ont comme dans le cas des systèmes linéaires un sens de rotation fixe.

### B. Les trajectoires "tournent autour de l'origine"

Nous montrerons ce résultat par des remarques d'ordre géométrique. Il se trouvera confirmé dans la suite des calculs.



Pour tout vecteur de  $S_1$  ( $\|x\|=1$ ), le sinus de l'angle  $(\dot{x}, x)$  est donné par

$$\det[M(x) \cdot x, x] = \det[\overline{M}(x) \cdot x, x] \text{ en notant } M(x) = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \text{ où } A, B, C, D \text{ dépendent de } x, \text{ mais}$$

comme  $\text{spect}(M(x)) = \alpha \pm i$ ,  $A + D = 2\alpha$  et  $AD - BC = \alpha^2 + 1$  ( $\Rightarrow BC \neq 0$ ).

$$\begin{aligned} \text{On a } \det[M(x) \cdot x, x] &= -Bx_1^2 + (A - D)x_2 x_1 + Cx_2^2 \\ &= -B(x_1 - \frac{A - D}{2B}x_2)^2 + \frac{(A + D)^2 - 4(AD - BC)}{4B}x_2^2 \end{aligned}$$

$$\text{mais } (A + D)^2 - 4(AD - BC) = -4$$

$$\det[M(x).x,x] = -B \left[ (x_1 - \frac{A-D}{2B} x_2)^2 + \frac{1}{B^2} x_2^2 \right]$$

mais B ne s'annule pas.

Donc  $\det[M(x).x,x]$  garde un signe constant et ne s'annule jamais quel que soit x vecteur de  $S_1$ .

Le vecteur  $M(x).x = \dot{x}$  n'est jamais radial.

Compte tenu du caractère symétrique (par rapport à 0) des trajectoires, on peut en déduire que  $\forall x \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  le vecteur  $\dot{x}$  n'est jamais radial et le sinus de l'angle  $(\dot{x}, x)$  est de signe constant.

Le champs  $M(x).x$  a un sens de rotation fixe.

Cette remarque nous conduit à étudier le système en passant aux coordonnées polaires (nous vérifierons d'ailleurs que  $\dot{\theta}$  a alors un signe constant).

On pose donc  $x = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$

le système

$$\dot{x} = [A + u_\alpha(x)B]x \quad (2)$$

où  $u_\alpha$  est fonction de x, mais c'est une fraction rationnelle homogène de degré 0.

donc  $u_\alpha(x) = u_\alpha(\theta)$

En calculant  $\dot{x} = \dot{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \dot{\theta}$

et en remplaçant dans (2), on obtient

$$\frac{\dot{r}}{r} = (\cos \theta, \sin \theta) [A + u_\alpha(\theta)B] \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = a + u_\alpha(\theta)(\cos^2 \theta - k \sin^2 \theta) \quad (3)$$

$$\dot{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta) [A + u_\alpha(\theta)B] \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = b + u_\alpha(\theta)(-\sin \theta \cos \theta (k+1)) \quad (4)$$

nous allons donc étudier le cas  $\alpha = 0$  ; montrer que dans ce cas les trajectoires sont des cycles, puis nous montrerons comment les autres cas ( $\alpha > 0$ ,  $\alpha < 0$ ) peuvent s'en déduire.

### C. Cas particulier $\alpha = 0$

L'objectif de cette question est de montrer que les trajectoires sont des cycles, c'est-à-dire qu'après un tour, le rayon reprend la même valeur

$$\forall \theta \quad r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$$

en remarquant :  $\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{dt} \times \frac{dt}{d\theta}$

on pose  $I = \int_a^{a+2\pi} \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta} \times d\theta = [\ln r]_a^{a+2\pi}$

mais I peut s'écrire

$$I = \int_0^{\theta+2\pi} \frac{1}{r} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} d\theta$$

le but est donc de montrer que  $I = \ln(r(\theta+2\pi)) - \ln(r(\theta)) = 0$

Les fonctions  $\dot{r}$  et  $\dot{\theta}$  sont des fonctions périodiques de période  $2\pi$ .

Donc le calcul de l'intégrale peut se faire sur n'importe quel intervalle de longueur  $2\pi$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} d\theta$$

En tenant compte du caractère homothétique des trajectoires, on peut faire le calcul sur un demi-tour (on pourra remarquer qu'en fait  $\dot{r}$  et  $\dot{\theta}$  sont des fonctions de période  $\pi$ ).

Pour montrer le résultat désiré, il suffit donc de démontrer que

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1}{r} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} d\theta$$

$$\text{soit donc } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a + u_0(\theta)[\cos^2 \theta - k \sin^2 \theta]}{b + u_0(\theta)[-(k+1) \sin \theta \cos \theta]} d\theta$$

$$\text{On pose } u = \tan \theta \quad d\theta = \frac{du}{1+u^2}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-a(1+u^2) + u_0(u)(1+ku^2)}{-b(1+u^2) - u_0(u)(k+1)u} \frac{du}{1+u^2}$$

car  $u$  étant une fraction rationnelle de degré 0.

$u_0(\theta)$  peut s'écrire  $u_0(u)$ .

$$\text{En effet, } u_0(x) = -\frac{1}{b(x_1^2 + k^2 x_2^2)} [-2ab(-x_1^2 + kx_2^2) - (k+1)(-a^2 + b^2 - 1)x_1 x_2] \text{ où } x = (x_1, x_2)$$

d'où il vient

$$u_0(\theta) = -\frac{1}{b(\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta)} [-2ab(-\cos^2 \theta + k \sin^2 \theta) - (k+1)(-a^2 + b^2 - 1) \sin \theta \cos \theta]$$

et

$$u_0(u) = -\frac{1}{b(1+k^2 u^2)} [-2ab(-1+ku^2) - (k+1)(-a^2 + b^2 - 1)u]$$

en reportant dans I, on obtient l'expression

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ab(1+u^2)(1+k^2 u^2) - (1-ku^2)[-2ab(-1+ku^2) - (k+1)(-a^2 + b^2 - 1)u]}{b^2(1+u^2)(1+k^2 u^2) + (k+1)u[-2ab(-1+ku^2) - (k+1)(-a^2 + b^2 - 1)u]} \frac{du}{(1+u^2)}$$

soit en réduisant chaque polynôme et en ordonnant les termes

$$I = \int \frac{-abk^2v^4 - k(k+1)(-a^2 + b^2 - 1)v^3 + ab(1 + k^2 + 4k)v^2 + (k+1)(-a^2 + b^2 - 1)v - ab}{k^2b^2v^4 - 2ab(k+1)kv^3 + [(k+1)^2(a^2 + 1) - 2kb^2]v^2 + 2ab(k+1)v + b^2} \frac{dv}{(1+v^2)}$$

### Remarque

L'objectif est de montrer que  $I = 0$ .

On peut s'assurer de ce résultat dans un cas particulier.

$$\text{Exemple : } \begin{cases} a = b = 1 \\ k = 1 \end{cases} \quad (\text{cf. exemples})$$

$$I = \int \frac{-v^4 + 2v^3 + 6v^2 - 2v - 1}{v^4 - 4v^3 + 6v^2 + 4v + 1} \frac{dv}{(1+v^2)}$$

ou on peut encore revenir à la variable  $\theta$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\tan^4 \theta + 2 \tan^3 \theta + 6 \tan^2 \theta - 2 \tan \theta - 1}{\tan^4 \theta - 4 \tan^3 \theta + 6 \tan^2 \theta + 4 \tan \theta + 1} d\theta$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^4 \theta + 2 \sin^3 \theta \cos \theta + 6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos^3 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^4 \theta - 4 \sin^3 \theta \cos \theta + 6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 4 \sin \theta \cos^3 \theta + \cos^4 \theta} d\theta$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin 2\theta \cos 2\theta + 8 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 1}{2 \sin 2\theta \cos 2\theta + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 1} d\theta$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{1}{2} \sin 4\theta - \cos 4\theta}{\sin 4\theta + \sin^2 2\theta + 1} d\theta = I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(\theta) d\theta$$

$$\text{soit } y = \sin 4\theta + \sin^2 2\theta + 1$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} = y' &= 4 \cos 4\theta + 2 \sin 2\theta \cos 2\theta \times 2 = 4 \cos 4\theta + 2 \sin 4\theta \\ &= -4 \left[ -\frac{1}{2} \sin 4\theta - \cos 4\theta \right] \end{aligned}$$

$$\text{donc } F(\theta) = \frac{y'}{y} \text{ et } I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{4} \frac{y'}{y} d\theta = -\frac{1}{4} [\ln|y|]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Dans ce cas particulier, le résultat est donc bien démontré.

→ Cas général : calcul de  $I$

$$I = \int \frac{-abk^2v^4 + k(k+1)(b^2 - a^2 - 1)v^3 - ab(1 + k^2 + 4k)v^2 - (k+1)(b^2 - a^2 - 1)v + ab}{b^2k^2v^4 - 2abk(k+1)v^3 + [(k+1)^2(a^2 + 1) - 2kb^2]v^2 + 2ab(k+1)v + b^2} \frac{dv}{(1+v^2)}$$

On pose  $f(v) = \frac{P(v)}{Q(v) \times (1 + v^2)}$

Pour calculer I, on va décomposer la fraction  $f(v)$  en éléments simples

$$f(v) = \frac{av_0 + bkv_1 v}{bkv^2 + ev + bd} + \frac{av_2 + bkv_3 v}{bkx^2 - (2a(k+1) + e)v + bc} + \frac{v_4 + v_5 v}{1 + v^2}$$

où  $v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, e, d$  sont des réels

En identifiant  $Q(v)$  et  $Q_1(v) \times Q_2(v)$ , avec  $Q_1(v) = (bkv^2 + ev + bd)$  et  
 $Q_2(v) = (bkv^2 - (2a(k+1) + e)v + bc)$

$$Q(v) = b^2dc + [bce - bd(2a(k+1) + e)]v + [b^2dk - e(2a(k+1) + e) + b^2kc]v^2 + [bek - bk(2a(k+1) + e)]v^3 + b^2k^2v^4$$

En identifiant les coefficients, on a le système d'équations

$$c = \frac{1}{d} \tag{1}$$

puis  $b(c-d)e - 2abd(k+1) = 2ab(k+1)$

$$d'où e = \frac{2a(k+1)(d+1)}{c-d} = -\frac{2a(m+1)d(d+1)}{d^2-1}$$

$$e = -\frac{2a(k+1)d}{d-1} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } 2a(k+1) + e &= 2a(k+1) - \frac{2a(k+1)d}{d-1} \\ &= 2a(k+1)\left(1 - \frac{d}{d-1}\right) \end{aligned}$$

On a aussi

$$2a(k+1) + e = -\frac{2a(k+1)}{d-1} \tag{3}$$

En fait, l'égalité des polynômes fournit le système suivant :

$$\begin{cases} \text{deg 4} & b^2k^2 = b^2k^2 \\ \text{deg 3} & -bk2a(k+1) = -2ab(k+1)k \\ \text{deg 2} & b^2kc + b^2dk + e \times (-2a(k+1) - e) = (k+1)^2(a^2+1) - 2kb^2 \\ \text{deg 1} & ebc - bd[2a(k+1) + e] = 2ab(k+1) \\ \text{deg (0)} & b^2dc = b^2 \end{cases}$$

$$\text{d'où} \begin{cases} dc = 1 & (1) \\ e = -\frac{2a(k+1)d}{d-1} & (2) \text{ ou } 2a(k+1) + e = -\frac{2a(k+1)}{d-1} & (3) \\ b^2kc + b^2dk - e[2a(k+1) + e] = (k+1)^2(a^2+1) - 2kb^2 & (4) \end{cases}$$

$$b^2k \frac{1}{d} + b^2dk - e[2a(k+1) + e] = (k+1)^2(a^2+1) - 2kb^2 \quad (4)$$

Si on substitue  $e \rightarrow b^2k\left(\frac{1}{d} + d\right) - \frac{4a^2d(k+1)}{(d-1)^2} = (k+1)^2(a^2+1) - 2kb^2$

soit  $b^2k(1+d^2)(d-1)^2 - 4a^2d^2(k+1)^2 = [(k+1)^2(a^2+1) - 2kb^2]d(d-1)^2$

Si on regroupe les termes en "a" et ceux en "b"

$$b^2k(1+d^2)(d-1)^2 + 2kb^2d(d-1)^2 = 4a^2d^2(k+1)^2 + (k+1)^2(a^2+1)d(d-1)^2$$

$$b^2k(1+d^2)[1+d^2+2d] = (k+1)^2d[4a^2d + (a^2+1)(d-1)^2]$$

$$b^2k(d-1)^2(d+1)^2 = (k+1)^2d[a^2(d+1)^2 + (d-1)^2]$$

$$b^2kd(d-1)^2 = \frac{(k+1)^2d^2}{(d+1)^2} [a^2(d+1)^2 + (d-1)^2]$$

$$\text{Soit en résumé} \begin{cases} dc = 1 & (1) \\ e = -\frac{2a(k+1)d}{d-1} & (2) \text{ ou } 2a(k+1) + e = -\frac{2a(k+1)}{d-1} & (3) \\ b^2kd(d-1)^2 = \frac{(k+1)^2d^2}{(d+1)^2} [a^2(d+1)^2 + (d-1)^2] & (4) \end{cases}$$

On peut déduire de (4) que  $d > 0$  (en rappelant que  $k > 0$ )

→ Si on décompose les polynômes  $Q_1(v)$  et  $Q_2(v)$ , on obtient

$$Q_1(v) = bkv^2 + ev + bd = bk \left[ \left( v + \frac{e}{2bk} \right)^2 + \frac{4b^2dk - e^2}{4b^2k^2} \right]$$

on remarque que  $\frac{4b^2dk - e^2}{4b^2k^2} = \frac{b^2dk(d-1)^2 - (k+1)^2a^2d^2}{b^2k^2(d-1)^2}$

avec  $b^2dk(d-1)^2 - (k+1)^2a^2d^2 = \frac{(k+1)^2d^2}{(d+1)^2} [a^2(d+1)^2 + (d-1)^2 - a^2(d+1)^2]$

$$= \frac{(k+1)^2d^2}{(d+1)^2} (d-1)^2$$

il vient  $\frac{4b^2dk - e^2}{4b^2k^2} = \frac{(k+1)^2d^2}{(d+1)^2b^2k^2} > 0$

On pose  $\Delta_1 = \frac{(k+1)d}{(d+1)bk}$  ( $d > 0$  et  $k > 0$ )

de même pour  $Q_2(v)$

$$Q_2(v) = bkv^2 - [2a(k+1) + e]v + bc$$

$$= bk \left[ \left( v - \frac{2a(k+1) + e}{2bk} \right)^2 + \frac{4b^2ck - (2a(k+1) + e)^2}{4b^2k^2} \right]$$

Calculons de même

$$\frac{4b^2ck - (2a(k+1) + e)^2}{4b^2k^2} = \left[ \frac{4b^2k}{d} - \frac{4a^2(m+1)^2}{(d-1)^2} \right]$$

$$= \frac{(d-1)^2b^2k - a^2d(k+1)^2}{b^2k^2(d-1)^2d} = \frac{(d-1)^2dkb^2 - (k+1)^2a^2d^2}{b^2k^2(d-1)^2d^2}$$

On tire  $\Delta_2^2 = \frac{\Delta_1^2}{d_2}$

d'où  $\Delta_1 = d\Delta_2$  (rappel  $d > 0$ )

et

$$Q_1(v) = bk \left[ \left( v + \frac{e}{2bk} \right)^2 + \Delta_1^2 \right] \quad \text{avec } \Delta_1 = d\Delta_2$$

$$Q_2(v) = bk \left[ \left( v - \frac{2a(k+1) + e}{2bk} \right)^2 + \Delta_2^2 \right] \quad \text{et } \Delta_1 = \frac{(k+1)d}{(d+1)bk}$$

## Retour au calcul de l'intégrale

→ Calcul des termes  $u_4$  et  $u_5$

$$u_4 + u_5 i = \frac{P(i)}{Q(i)} = \frac{abk^2 + ab + ab(1 + k^2 + 4k) + i(-k(k+1)(b^2 - a^2 - 1) - (k+1)(b^2 - a^2 - 1))}{b^2k^2 + b^2 - [(k+1)^2(a^2 + 1) - 2kb^2] + i[2ab(k+1) + 2abk(k+1)]}$$

$$= \frac{2ab(k+1)^2 - i(k+1)^2(b^2 - a^2 - 1)}{(k+1)^2[b^2 - a^2 - 1 + i(2ab)]} = -i$$

d'où l'on tire

$$u_4 = 0 \quad \text{et} \quad u_5 = -1$$

(i)                      (i,i)

→ on a donc

$$f(v) = \frac{u_1}{2} \frac{2bkv + e}{Q_1(v)} + \frac{adv_0 - \frac{ev}{2}}{Q_1(v)} + \frac{u_2}{2} \frac{2bkv - (2a(k+1) + e)}{Q_2(v)} + \frac{acu_2 + u_3 \left( \frac{2a(k+1) + e}{2} \right)}{Q_2(v)} - \frac{v}{1+v^2}$$

d'où

$$\int f(v)dv = u_1 \ln(Q_1(v)) + \left(adv_0 - \frac{ev}{2}\right) \frac{1}{\Delta_1 bk} \operatorname{Arc tan} \left[ \frac{v + \frac{e}{2bk}}{\Delta_1} \right] + \frac{u_2}{2} \ln(Q_2(v))$$

$$+ \left( acu_2 + \frac{u_3(2a(k+1) + e)}{2} \right) \frac{1}{\Delta_2 bk} \operatorname{Arc tan} \left[ \frac{v - \frac{2a(k+1) + e}{2bk}}{\Delta_2} \right] - \frac{1}{2} \ln(1+v^2) + \text{cste}$$

On multiplie  $f(v)$  par  $v$ , puis on fait tendre  $v$  vers  $+\infty$ .

On obtient

$$\frac{bk u_1}{bk} + \frac{bk u_2}{bk} - 1 = 0 \quad \text{soit} \quad u_1 + u_2 = 1$$

(i, i, i)

Alors dans l'intégrale le terme en logarithme est égal à

$$\frac{u_1}{2} \ln \left( \frac{Q_1(v)}{1+v^2} \right) + \frac{u_2}{2} \ln \left( \frac{Q_2(v)}{1+v^2} \right) \text{ et donc}$$

$$I = \pi \left[ \left(adv_0 - e \frac{u_1}{2}\right) \frac{1}{\Delta_1 bk} + \left( acu_2 + \frac{u_3(2a(k+1) + e)}{2} \right) \frac{1}{\Delta_2 bk} \right]$$



On s'intéresse donc au calcul de l'expression

$$h = 2adv_0 - ev_1 + d(2acv_2 + v_3(2a(k+1) + e))$$

Calculons les termes  $v_i$ . Rappelons que :  $v_1 + v_3 = 1$

Si on considère l'expression de  $f(v)$

$$f(v) = \frac{adv_0 + bkv_1v}{bkv^2 + ev + bd} + \frac{acv_2 + bkv_3v}{bkv^2 - (2a(k+1) + e)v + bc} + \frac{-v}{1+v^2}$$

L'identification terme à terme du numérateur avec

$P(x) = abk^2v^4 + k(k+1)(b^2 - a^2 - 1)v^3 - ab(1 + k^2 + 4k)v^2 - (k+1)(b^2 - a^2 - 1)v + ab$   
 donne le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{deg 0} \quad adv_0bc + acv_2bk = ab \\ \text{deg 1} \quad b^2kcv_1 - adv_0(2a(k+1) + e) + b_2kdv_3 + acev_2 - b^2 = -(k+1)(b^2 - a^2 - 1) \\ \text{deg 2} \quad adbcv_0 + acv_2bd - bkv_1(2a(k+1) + e) + adv_0bk + bkv_3e \\ \quad + acv_2bk - 2ab(k+1) = -ab(1 + k^2 + 4k) \\ \text{deg 3} \quad b^2kcv_1 - adv_0(2a(k+1) + e) + b^2kdv_3 + acev_2 \\ \quad + b^2k^2v_1 + b^2k^2v_3 - (k+1)^2(a^2 + 1) + 2kb^2 = k(k+1)(b^2 - a^2 - 1) \\ \text{deg 4} \quad - bkv_1(2a(k+1) + e) + adv_0bk + bkv_3e + acv_2bk \\ \quad + 2abk(k+1) = abk^2 \\ \text{deg 5} \quad b^2k^2v_1 + b^2k^2v_3 - b^2k^2 = 0 \end{array} \right.$$

La ligne 5 donne  $v_1 + v_3 = 1$ .

La ligne 0 donne  $v_0 + v_2 = 1$ .

On peut remarquer que :

$$\text{ligne 0} + \text{ligne 4} = \text{ligne 2} \quad \text{et} \quad \text{ligne 1} + \text{ligne 5} = \text{ligne 3}$$

Donc le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 + v_3 = 1 \\ v_0 + v_2 = 1 \\ \text{ligne (1)} \\ \text{ligne (4)} \end{array} \right.$$

Dans la ligne (4), si on reporte  $v_1 = 1 - v_3$  et  $v_0 = 1 - v_2$ , on trouve

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow -bk(1 - v_3)(2a(k+1) + e) + adbk(1 - v_2) + bkv_3e + acv_2bk \\ &= abk^2 - 2abk(k+1) \end{aligned}$$

Soit  $bkv_3[2a(k+1) + 2e] + abkv_2(c-d) = bk[2a(k+1) + e] - adb k + abk^2 - 2abk^2 - 2abk$

ou encore en utilisant  $e = -\frac{2a(k+1)d}{d-1}$

$$(4) \Leftrightarrow -bkv_3 \left[ \frac{2a(k+1)}{(d-1)} \right] [d-1-2d] + abkv_2 \left( \frac{1-d^2}{d} \right) = \frac{-2a(k+1)bk}{d-1} - adb k - abk(k+2)$$

On peut simplifier cette ligne  $abk$

(4)  $\Leftrightarrow$

$$\boxed{-\frac{2(k+1)}{(d-1)}(d+1)v_3 + \left(\frac{1-d^2}{d}\right)v_2 = -\frac{2(k+1)}{d-1} - d - (k+2)}$$

Rappelons l'expression à calculer  $h = adv_0 - ev_1 + d(2acv_2 + v_3(2a(k+1) + e))$ .

Ecrivons-la à l'aide de  $v_3$  et  $v_2$   $\begin{cases} v_0 = 1 - v_2 \\ v_1 = 1 - v_3 \end{cases}$

$$h = 2ad(1 - v_2) - e(1 - v_3) + 2acd v_2 + d v_3(2a(k+1) + e)$$

$$\text{soit (4)} \Leftrightarrow h = 2a(1-d)v_2 - v_3 + \frac{a(k+1)d}{(d-1)} + 2ad + 2a \frac{(k+1)d}{(d-1)}$$

$$\text{ou encore } h = 2a \left[ (1-d)v_2 - 2v_3 \frac{(k+1)d}{(d-1)} + d + \frac{(k+1)d}{(d-1)} \right]$$

En multipliant alors (4) par  $\frac{d}{d+1}$ , on obtient

$$-2(k+1) \frac{d}{(d-1)} v_3 + (1-d)v_2 = -\frac{2(k+1)}{(d-1)} \times \frac{d}{(d+1)} - \frac{d^2}{(d+1)} - \frac{(k+2)d}{d+1}$$

en reportant dans  $h$

$$h = 2a \left[ -\frac{2(k+1)}{(d-1)} \frac{d}{(d+1)} - \frac{d^2}{(d+1)} - \frac{(k+2)d}{(d+1)} + d + \frac{(k+1)d}{(d-1)} \right]$$

$$\text{soit } h = 2a \left[ k \left( -\frac{2d}{(d^2-1)} - \frac{d}{(d+1)} + \frac{d}{(d-1)} \right) + d \left( \frac{-2}{(d^2-1)} - \frac{d}{d+1} - \frac{2}{d+1} + 1 + \frac{1}{(d-1)} \right) \right]$$

On trouve en simplifiant  $h = 0$ .

### Conclusion

L'intégrale  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dr}{d\theta} \frac{1}{r} d\theta = 0$

$$\text{et } \ln\left(r\left(+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \ln\left(r\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\text{ou encore } r\left(+\frac{\pi}{2}\right) = r\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

De plus, la fonction  $\frac{dr}{d\theta} \frac{1}{r}$  est périodique de période  $\pi$ . Donc l'intégrale calculée sur tout intervalle de longueur  $\pi$  est égale à 0, donc est nulle.

Il s'ensuit  $r(\theta) = r(\theta + \pi)$  pour toute valeur de  $\theta$

et donc  $r(\theta + 2\pi) = r(\theta)$ . Les trajectoires sont donc effectivement cycliques.

Montrons maintenant que ce résultat peut nous permettre de conclure dans le cas plus général  $\alpha \neq 0$ .

*D. Cas général  $\alpha \neq 0$ .* (Le spectre est fixé à  $\alpha \pm i$ )

Considérons le système

$$\dot{x} = M(A, \alpha)x \tag{3}$$

où  $M(A, \alpha) = A + u(A, x, \alpha)B$

avec  $u(A, x, \alpha)$  étant le contrôle fixant le spectre de  $\bar{M} = [A + b(x)F]$  à  $\alpha \pm i$ .

Effectuons alors le changement de variable

$$y = e^{-\alpha t} x$$

Ecrivons l'équation vérifiée par  $y$

$$\begin{aligned} \text{on a } \dot{y} &= -\alpha e^{-\alpha t} x + e^{-\alpha t} \dot{x} \\ &= [A - \alpha I + u_\alpha(x)B]y \end{aligned}$$

Si on note  $\bar{A} = A - \alpha I$

on a

$$\dot{y} = [\bar{A} + u_\alpha(x)B]y \tag{4}$$

mais  $u_\alpha(x) = u_\alpha(e^{-\alpha t} y) = u_\alpha(y)$  car  $u_\alpha(x)$  est homogène de degré 0

On remarquera que  $\bar{A} = \begin{pmatrix} a - \alpha & -b \\ b & a - \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & -b \\ b & a_1 \end{pmatrix}$  avec  $a_1 = a - \alpha$ .

Les hypothèses faites sur la matrice  $A$  sont encore vraies pour la matrice  $\bar{A}$  :

- forme de la matrice
- les valeurs propres de  $\bar{A}$  sont celles de  $A$  diminuées de  $\alpha$ .

Donc elles sont aussi complexes conjuguées.

D'autre part, si l'on considère le système de type (1)

$$\dot{y} = [\bar{A} + uB]y \quad (1')$$

et que l'on calcule le feedback  $u_0$  associé au placement de pôles en  $\alpha \pm i$ , le système (1)' bouclé s'écrit

$$\dot{y} = [\bar{A} + u_0B]y \quad (2')$$

Si on rappelle les calculs, on a

$$u_0(y) = -\frac{1}{b(y_1^2 + k^2 y_2^2)} \left[ -2a_1 b(-y_1^2 + ky_2^2) - (k+1)(-a_1^2 + b^2 - 1)y_1 y_2 \right] \text{ avec } a_1 = a - \alpha$$

On remarque que  $u_0(y) = u_\alpha(y) = u_\alpha(x)$

donc le système (2')  $\dot{y} = [\bar{A} + u_0B]y$  est le même que le système (4)  $\dot{y} = [\bar{A} + u_2B]y$ .

A noter que le changement de variable "ne revient pas" à faire  $\alpha=0$ , car la matrice  $\bar{A}$  est différente de  $A$  et dépend de  $\alpha$ , mais l'étude du système (3) est ramenée à l'étude du système ((2)') qui est du type déjà étudié et nous savons que les trajectoires pour un tel système sont des cycles

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad y(\theta + 2\pi) = y(\theta)$$

En revenant à la variable  $x$

$$x(t) = e^{\alpha t} y(t)$$

si  $y(t)$  est un cycle  $\|y(t)\|$  est bornée donc  $\|x(t)\|$  tend vers  $\infty$  si  $\alpha > 0$  et au contraire tend vers 0 si  $\alpha < 0$  ce qui montre les résultats annoncés, mais on peut préciser la rapidité de convergence (lorsque  $\alpha < 0$ ).

Nous allons montrer que le temps moyen pour effectuer un tour est de  $2\pi$  et donc que

$$\theta(t + 2\pi) = \theta(t) + 2\pi$$

Ce qui nous permettra d'établir le lien entre  $x(t + 2\pi)$  et  $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t + 2\pi) &= x(\theta(t + 2\pi)) = e^{\alpha(t+2\pi)} y(\theta(t + 2\pi)) \\ &= e^{\alpha t} \times e^{2\pi\alpha} \times y(\theta(t) + 2\pi) \\ &= e^{\alpha t} \times e^{2\pi\alpha} \times y(\theta(t)) \\ x(t + 2\pi) &= e^{2\pi\alpha} \times x(t) \end{aligned}$$

Donc la rapidité de convergence est directement liée à  $\alpha$  par l'intermédiaire du coefficient  $e^{2\pi\alpha}$

Le but du calcul est donc de montrer que  $\theta(t + 2\pi) - \theta(t) = 2\pi$

ou toujours pour des raisons de symétrie des trajectoires

$$\theta(t + \pi) - \theta(t) = \pi$$

$$\Leftrightarrow \int_{\theta_0}^{\theta_0 + \pi} dt = \pi \quad \text{mais } dt = \frac{dt}{d\theta} \times d\theta = \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta$$

et comme  $\dot{\theta}$  est une fonction périodique

$$\Leftrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\dot{\theta}} d\theta = \pi$$

### E. Estimation du temps mis pour effectuer un demi-tour sur la trajectoire

Considérons donc le système

$$\dot{x} = [A + u_0 B]x \quad (2)$$

et évaluons pour ce système

$$J = \int_{\theta = -\frac{\pi}{2}}^{\theta = \frac{\pi}{2}} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\dot{\theta}}$$

Rappelons que  $\dot{\theta} = b - u(k+1) \sin\theta \cos\theta$

$$\text{avec } u(0) = -\frac{1}{b(\cos^2\theta + k^2 \sin^2\theta)} \left[ -2ab(-\cos^2\theta + k \sin^2\theta) - (k+1)(b^2 - a^2 - 1) \sin\theta \cos\theta \right]$$

d'où

$$J = \int_{\theta = -\frac{\pi}{2}}^{\theta = \frac{\pi}{2}} \frac{b[\cos^2\theta + k^2 \sin^2\theta]}{b^2[\cos^2\theta + k^2 \sin^2\theta] + (k+1) \sin\theta \cos\theta [-2ab(-\cos^2\theta + k \sin^2\theta) - (k+1) \sin\theta \cos\theta (b^2 - a^2 - 1)]} d\theta$$

$$\text{En posant } v = \tan^2\theta \quad \frac{dv}{1+v^2} = d\theta$$

on obtient

$$J = \int_{-1}^{1} \frac{b[1+k^2v^2]}{b^2[1+k^2v^2][1+v^2] + (k+1)v[-2ab(-1+kv^2) - (k+1)(b^2-a^2-1)v]} dv$$

$$\text{En posant } f(v) = \frac{b[1+k^2v^2]}{Q(v)}$$

on a déjà vu que  $Q(v) = Q_1(v) \times Q_2(v)$

Rappelons la factorisation de  $Q_1$  et  $Q_2$ .

$$Q(v) = Q_1(v) \times Q_2(v)$$

$$Q_1(v) = (bkv^2 + ev + bd) = k \left[ \left( v + \frac{e}{2bk} \right)^2 + \Delta_1^2 \right]$$

$$Q_2(v) = (bkv^2 - [2a(k+1) + e]v + bc) = bk \left[ \left( v + \frac{2a(k+1) + e}{2bk} \right)^2 + \Delta_2^2 \right]$$

avec  $\Delta_1 = d\Delta_2$   $\Delta_1 = \frac{(k+1)d}{(d+1)bk}$

et d'autre part, nous avons obtenu 
$$\begin{cases} dc = 1 \\ e = -\frac{2(k+1)ad}{d-1} \end{cases}$$

Pour calculer J, nous essaierons une décomposition de f(x) similaire

$$f(v) = \frac{adv_0 + bkv_1 v}{Q_1(x)} + \frac{acv_2 + bkv_3 v}{Q_2(x)}$$

L'identification des deux expressions de f(x) aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} \text{deg 3} & b^2k^2v^3 + b^2k^2v_1 = 0 \\ \text{deg 2} & -bkv_1(2a(k+1) + e) + adv_0bk + acv_2bk + ebkv_3 = bk^2 \\ \text{deg 1} & b^2ckv_1 + adv_0 \times (-2a(k+1) + e) + b^2kdv_3 + acv_2e = 0 \\ \text{deg 0} & bcadv_0 + acv_2bd = b \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} v_3 + v_1 = 0 \Leftrightarrow v_3 = -v_1 \\ bkv_1(-2a(k+1) - 2e) + bk(adv_0 + c(1 - av_0)) = bk^2 \\ b^2kv_1(c - d) + av_0(-d(2a(k+1) + e) - ce) = -ce \\ av_0 + av_2 = 1 \end{cases}$$

On rappelle que  $c = \frac{1}{d}$

$$\begin{cases} v_3 + v_1 = 0 \\ av_0 + av_2 = 1 \\ bkv_1(-2a(k+1) - 2e) + bk(adv_0 + \frac{1}{d}(1 - av_0)) = bk^2 \\ b^2kv_1(\frac{1}{d} - d) + av_0(-d(2a(k+1) + e) - \frac{e}{d}) = -\frac{e}{d} \end{cases}$$

Compte tenu de ces notations, on a

$$J = \frac{\pi}{\Delta_1 bk} \left\{ \left[ av_0d - \frac{ev_1}{2} \right] + \left[ acv_2 + v_3 \left( \frac{2a(k+1) + e}{2} \right) \right] d \right\}$$

On rappelle que dans un calcul précédent, on a obtenu

$$\Delta_1 = \frac{(k+1)d}{(d+1)bk}$$

d'où  $J = \frac{\pi(d+1)}{(k+1)d} [T]$  où  $T$  reste à calculer.

Reste alors à évaluer les coefficients  $v_i$ .

Compte tenu de  $\begin{cases} v_3 + v_1 = 0 \\ av_0 + av_2 = 1 \end{cases}$  on peut exprimer  $T$  à l'aide de  $v_0$  et  $v_1$ .

Rappelons que  $cd = 1$ , on obtient

$$T = av_0(d-1) + 1 + \frac{2v_1}{d-1} a(k+1)d$$

Cherchons à calculer  $v_0$  et  $v_1$ . Pour cela, rappelons les deux dernières équations du système et remplaçons  $v_3$  par  $-v_1$  et  $av_2$  par  $1 - av_0$ .

On rappelle que  $e = -\frac{2(k+1)ad}{d-1}$

On obtient

$$(i) \quad bkv_1 \left( -2a(k+1) + 4\frac{(k+1)ad}{d-1} \right) + bk \left( av_0 + \frac{1-av_0}{d} \right) = bk^2$$

$$\frac{2bkv_1(k+1)a}{d-1} (-(d+1) + 2d) + \frac{bk}{d} (av_0(d^2-1) + 1) = bk^2$$

$$(i) \quad v_1(d(d+1)2bk(k+1)a) + v_0(a(d^2-1)(d-1)bk) = bk(k - \frac{1}{d})d(d-1)$$

qui se simplifie par  $bk$

$$(i) \quad v_1(2d(d+1) + a(k+1)) + v_0a(d^2-1)(d-1) = (k - \frac{1}{d})d(d-1)$$

quant à la dernière équation, elle peut s'écrire

$$(ii) \quad v_1 b^2 k \left( \frac{1-d^2}{d} \right) + av_0 \left( \frac{2ad(k+1)}{d-1} + \frac{2(k+1)a}{d-1} \right) = \frac{2(k+1)a}{d-1}$$

$$b^2 kv_1 \left( \frac{1-d^2}{d} \right) + av_0 2a(k+1) \frac{(d+1)}{(d-1)} = 2a \frac{(k+1)}{d-1}$$

$$(ii) \quad v_1 (b^2 k(1-d^2)(d-1)) + v_0 (2a^2(k+1)(d+1)d) = 2(k+1)ad$$

Le système vérifié par  $(v_0, v_1)$  est donc le suivant :

$$(i) \quad \begin{cases} v_1 d(d+1) 2a(k+1) + v_0 a(d+1)(d-1)^2 = (k - \frac{1}{d})(d-1)d \\ (ii) \quad -v_1 (k+1) [a^2(d+1)^2 + (d-1)^2] + v_0 (2a^2(d+1)^2) = 2a(d+1) \end{cases}$$

pour obtenir la 2me ligne, on a utilisé la relation obtenue (p21) (factorisation de  $Q(x)$ )

$$b^2kd(d-1)^2 = \frac{(k+1)^2d^2}{(d+1)^2} [a^2(d+1)^2 + (d-1)^2]$$

ce qui permet d'éliminer le paramètre  $b$  des calculs.

On utilise alors la méthode des déterminants

$$\begin{aligned} \det S &= d(d+1)2a(k+1) \times 2a^2(d+1)^2 + a(d+1)(d-1)^2(k+1)[a^2(d+1)^2 + (d-1)^2] \\ &= a(k+1)(d+1) \left[ a^2 \left[ (d+1)^2 \left[ (d-1)^2 + 4d \right] + (d-1)^4 \right] \right] \\ &= a(k+1)(d+1) \left[ a^2(d+1)^4 + (d-1)^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } v_0 &= \frac{1}{\det S} \begin{vmatrix} d(d+1)2a(k+1) & (k-\frac{1}{d})(d-1)d \\ -(k+1)[a^2(d+1)^2 + (d-1)^2] & 2a^2(d+1) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\det S} d(k+1) \left[ 4a^2(d+1)^2 + (d-1)(k-\frac{1}{d})(a^2(d+1)^2 + (d-1)^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de même } v_1 &= \frac{1}{\det S} \begin{vmatrix} (k-\frac{1}{d})(d-1)d & a(d+1)(d-1)^2 \\ 2(d+1)a & 2a^2(d+1)^2 \end{vmatrix} \\ v_1 &= \frac{2a^2}{\det S} (d+1)^2(d-1) \left[ (k-\frac{1}{d})d - (d-1) \right] \\ &= \frac{2a^2(d+1)^2(d-1)d(k-1)}{\det S} \end{aligned}$$

reste donc à remplacer dans  $T$

$$T = av_0(d-1) + 2v_1 \frac{a(k+1)d}{d-1} + 1$$

soit

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\det S} \left[ a(d-1)d(k+1) \left[ 4a^2(d+1)^2 + (d-1)(k-\frac{1}{d})(a^2(d+1)^2 + (d-1)^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2a(k+1)d}{(d-1)} 2a^2(d+1)^2(d-1)d(k-1) \right] + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{ad(k+1)}{\det S} \left[ (d-1) \left[ 4a^2(d+1)^2 + (d-1)(k-\frac{1}{d})(a^2(d+1)^2 + (d-1)^2) \right] + 4a^2(d+1)^2 + (k-1) \right] + 1 \\ &= \frac{ad(k+1)}{\det S} \left[ a^2(d+1)^2 \left\{ 4(d-1) - \frac{(d-1)^2}{d} - 4d + k[(d-1)^2 + 4d] \right\} + (d-1)^4(k-\frac{1}{d}) \right] + 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
T &= \frac{ad(k+1)}{\det S} \left[ a^2(d+1)^2 \left\{ \frac{-4d - (d-1)^2}{d} + k(d+1)^2 \right\} + (d-1)^4 \left( k - \frac{1}{d} \right) \right] + 1 \\
&= \frac{ad(k+1)}{\det S} \left[ a^2(d+1)^2 \left\{ -\frac{(d+1)^2}{d} + k(d+1)^2 \right\} + (d-1)^4 \left( k - \frac{1}{d} \right) \right] + 1 \\
&= \frac{ad(k+1)}{\det S} \left( k - \frac{1}{d} \right) \left[ a^2(d+1)^4 + (d-1)^4 \right] + 1 \\
&= \frac{ad(k+1) \left( k - \frac{1}{d} \right) \left[ a^2(d+1)^4 + (d-1)^4 \right]}{a(k+1)(d+1) \left( a^2(d+1)^4 + (d-1)^4 \right)} + 1 = \frac{d \left( k - \frac{1}{d} \right)}{d+1} + 1
\end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{(d+1)} [dk - 1 + d + 1] = \frac{d(k+1)}{d+1}$$

puis en remplaçant T dans le calcul de J

$$J = \frac{\pi(\delta+1)}{(k+1)d} \times \frac{d(k+1)}{d+1} = \pi$$

On a bien montré que le temps moyen pour faire un demi-tour est de  $\pi$ .

Dans le cas du système  $\dot{y} = (\bar{A} + u_0 B)y$

et donc dans le système (2), on a bien

$$x(t + 2\pi) = e^{2\pi\alpha} x(t)$$

## F. Conclusion : Comparaison des résultats avec le cas linéaire

### 1°) Rappel des résultats du cas linéaire

Soit le système

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

1.1. Dans la base de Jordan où A a sa forme réduite  $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$

les coordonnées polaires donnent  $\begin{cases} \dot{\rho} = \alpha\rho \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$

→ c'est-à-dire que la vitesse de convergence est constante (la dérivée logarithmique de  $\rho$  est constante égale à  $\alpha$ ).

→ la vitesse de rotation est constante égale à 1

1.2. Dans une autre base  $\dot{y} = P^{-1}APy$  avec  $x = Py$  vérifie (1)

→ la vitesse moyenne de rotation sur un demi-tour est encore égale à 1

→ évaluons la vitesse de convergence

comme  $x(t) = x(t_0) e^{\alpha t}$

$$\|y(t)\| = \|P^{-1}(x(t))\| \leq \|P^{-1}\| \|x(t)\| \leq \|P^{-1}\| \|P\| \|y_0\| e^{\alpha t}$$

donc  $\|y(t)\| \leq K e^{\alpha t}$  où  $K$  est une constante

On remarquera que la majoration donnée par  $\alpha$  est la meilleure possible.

En effet, s'il existe  $\alpha' < \alpha$  tel que  $\|y(t)\| \leq K' e^{\alpha' t}$

alors comme  $x(t) = Py(t)$  on aurait

$$\|x(t)\| \leq \|P\| \times K' e^{\alpha' t}$$

soit  $e^{\alpha t} \|x_0\| \leq \|P\| \times K' e^{\alpha' t}$

$$e^{(\alpha-\alpha')t} \leq \frac{\|P\|K'}{\|x_0\|}$$

Ce qui est impossible pour  $\alpha' < \alpha$ , car alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{(\alpha-\alpha')t} = +\infty$

$\alpha$  donne donc la meilleure idée de la rapidité de convergence.

## 2°) Analogie des résultats

### 2.1. Portrait de phase

Le système a le même portrait de phases que dans le cas linéaire. les trajectoires sont les mêmes à un difféomorphisme près.

### 2.2. Vitesse moyenne de rotation

On a trouvé que la vitesse moyenne pour faire un demi-tour était de 1. Ce résultat est donc le même que dans le cas linéaire.

### 2.3. Pour estimer la vitesse de convergence

On a trouvé  $\|x(t)\| \leq c e^{\alpha t}$  comme dans le cas linéaire.

Reste à montrer que dans ce cas aussi  $\alpha$  donne la meilleure majoration possible.

En effet, s'il existait  $\alpha' < \alpha$  tel que  $\|x(t)\| \leq c' e^{\alpha' t}$

en revenant au changement de variable  $x(t) = y(t) e^{\alpha t}$  où  $y(t)$  a une trajectoire cyclique on obtient

$$\|x(t)\| = \|y(t)\| e^{\alpha t} \leq c' e^{\alpha t}$$

$$\|y(t)\| \leq c' e^{(\alpha' - \alpha)t}$$

mais  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\alpha' - \alpha)t} = 0$  si  $\alpha' < \alpha$

ce qui est en contradiction avec le fait que  $y(t)$  est cyclique.

Donc là encore la meilleure approximation de la rapidité de la convergence est donnée par  $\alpha_1$ .

### Conclusion

Le système homogène de degré 1 obtenu avec le placement de pôles variable fixé à  $\alpha \pm i$  a un comportement en tous points semblables à un système linéaire (qui aurait le même spectre) à un difféomorphisme près.

Au début du chapitre I B 2°), on a remarqué que les différents types de feedbacks intéressants pouvant être outre les fractions rationnelles homogènes de degré 0 ou constants par morceaux. Le 1er cas résolu, cherchons s'il existe des feedbacks constants par secteurs angulaires stabilisants le système.

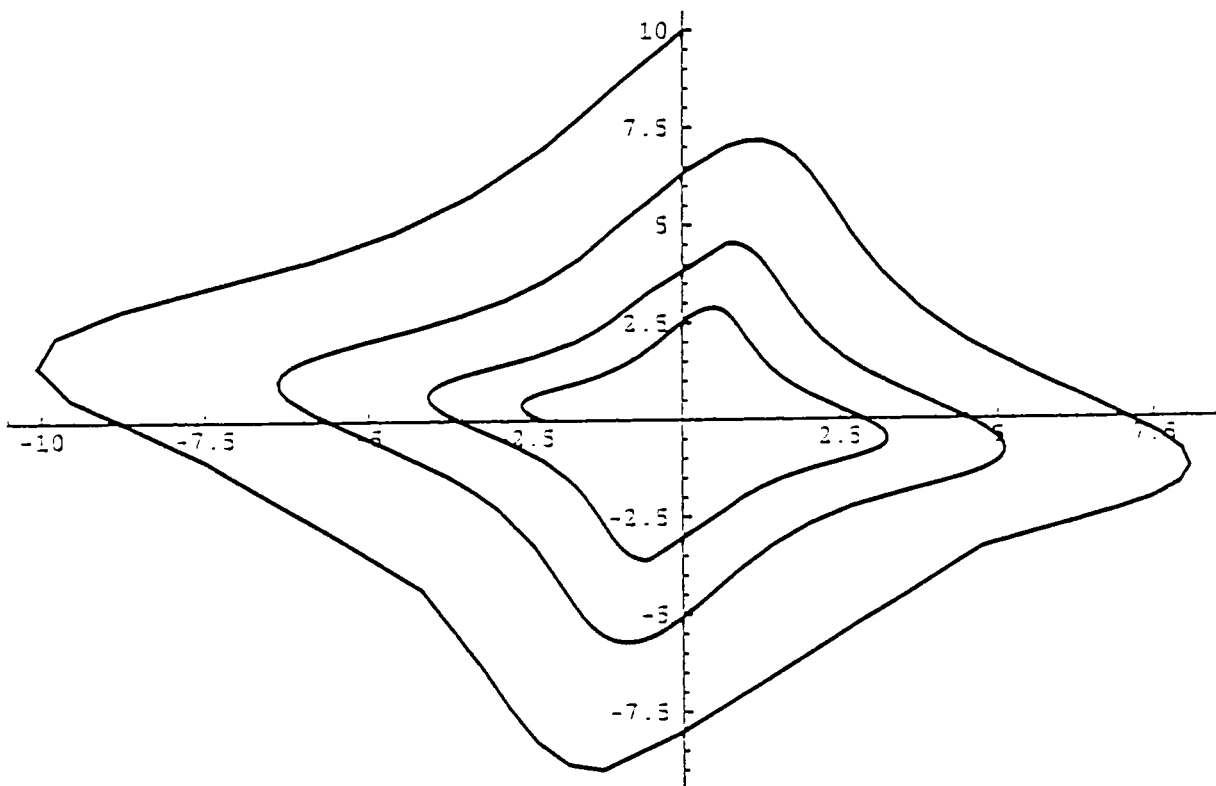


FIG. 5 - « Spectre » fixé à  $-\frac{1}{3} \pm i$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u(x) = \frac{9(-8x_1^2 - 9x_1x_2 + 8x_2^2)}{32(x_1^2 + x_2^2)}$$

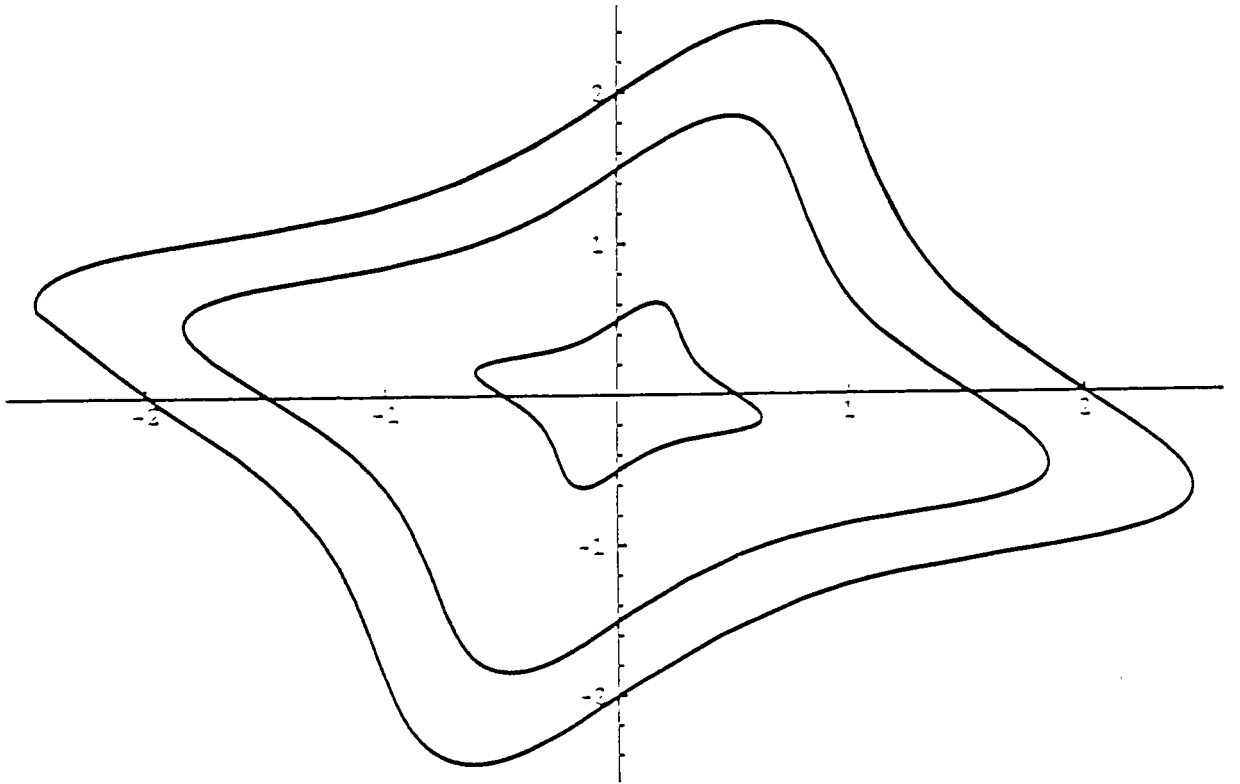
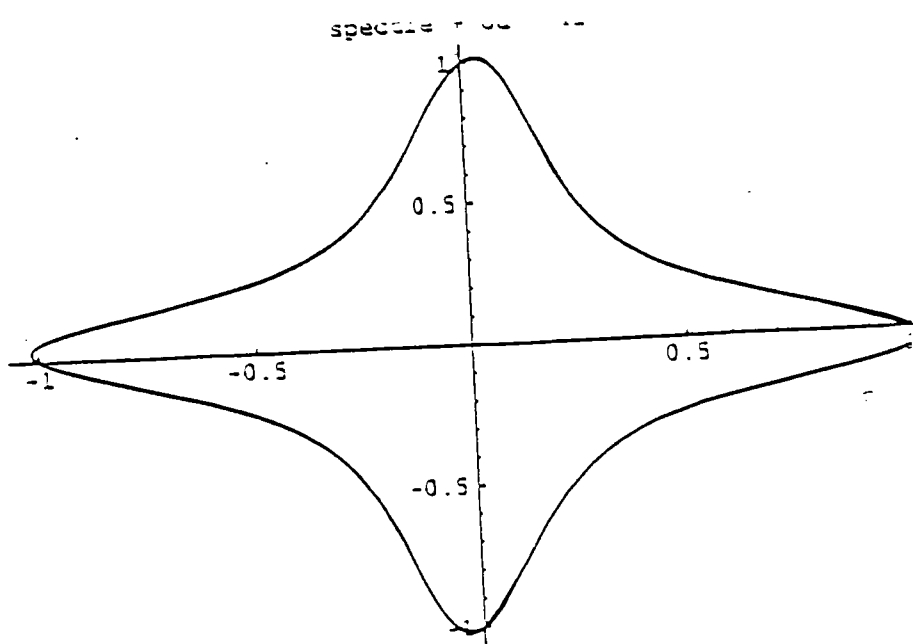


FIG. 4 - « Spectre » fixé à  $\pm i$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u(x) = \frac{2(-x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}$$

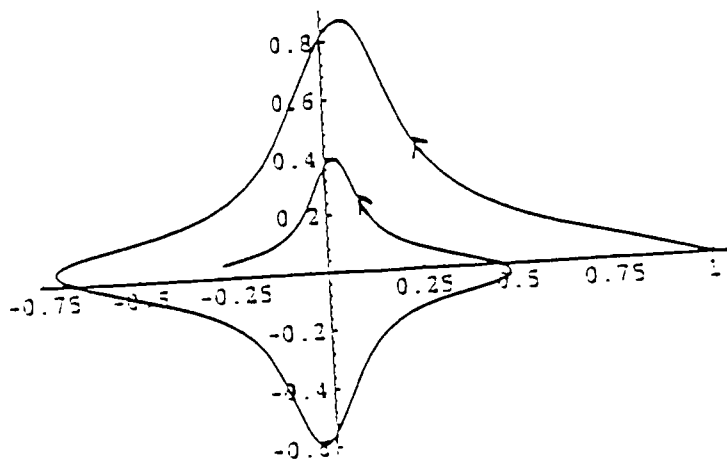


$$\dot{x} = Ax + uBx$$

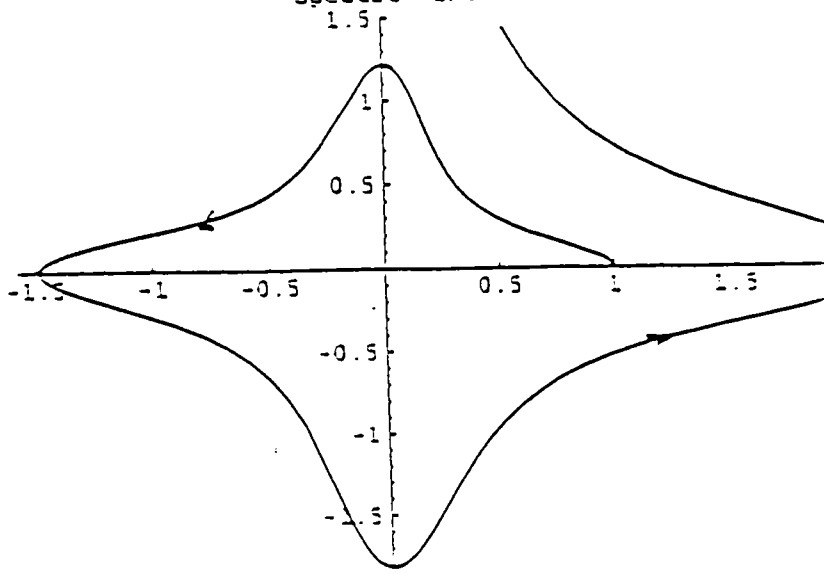
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

spectre fixe a  $-\frac{1}{2} \pm 4i$



spectre  $\pm 1/2 + ou - 4i$



#### IV. Contrôles constants par secteurs

Soit le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + uBx & (1) \\ x &\in \mathbb{R}^2 \\ \text{et } \text{sp}(A) &\subset \mathbb{C} - \mathbb{R}\end{aligned}$$

Dans la première partie, nous avons exploité les propriétés géométriques des trajectoires. Il serait intéressant de conserver ces propriétés or le long des rayons

$$\begin{aligned}\text{si } y &= kx \\ \text{alors } \dot{y} &= k\dot{x} = k(Ax + u(x)Bx) \\ &= Ay + u(x)By\end{aligned}$$

si  $u(x) = u(y)$ , alors les trajectoires seront homothétiques les unes des autres. Une condition pour garder cette propriété est que  $u$  soit constant sur les rayons. Parmi les feedbacks, ceux qui sont constants par secteurs angulaires peuvent éventuellement répondre au problème de la stabilisation et apportent une solution simple et robuste particulièrement dans le cas des systèmes non  $C_1$  stabilisables même si cette solution est plus grossière que celle obtenue dans le chapitre III.

En conservant les notations de la question précédente, nous montrerons que l'on peut trouver des feedbacks constants sur des secteurs angulaires qui stabilisent le système.

#### Rappel des notations

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad a > 0 \text{ et } b > 0 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}^*$$

Nous étudierons, compte tenu des objectifs, le système sous sa forme polaire que nous rappelons

$$\begin{cases} \dot{\rho} = a + u \left( \left( \frac{1-k}{2} \right) + \frac{1+k}{2} \cos 2\theta \right) \\ \dot{\theta} = b - u \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (2)$$

#### Stratégie adoptée

L'idée poursuivie est la suivante : déterminer un feedback  $u$  tel que les trajectoires tournent autour de l'origine (pour exploiter les propriétés de symétrie) et tel que le champ soit rentrant par rapport à la norme euclidienne usuelle, c'est-à-dire par rapport aux cercles dans un premier

temps nous écrivons les conditions nécessaires pour obtenir de telles trajectoires puis nous essaierons de voir dans quelle mesure elles sont suffisantes.

### A. Conditions nécessaires à l'existence d'un tel feedback

#### 1°) Les trajectoires tournent autour de l'origine

On a  $\dot{\theta} = b - u \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta$  ( $b > 0; k > 0$ )

pour s'assurer d'un signe constant pour  $\dot{\theta}$ , on peut par exemple imposer  $\dot{\theta} > 0$  ( $\forall t$ ) en gardant

$$\underline{-u \sin 2\theta > 0}$$

(ce qui donne une contrainte de signe pour  $u$  en fonction de  $\theta$ ).

#### 2°) Le champ doit être rentrant

Pour cela, calculons le produit scalaire

$${}^t x \dot{x} = {}^t x A x + u {}^t x B x$$

$$= a(x_1^2 + x_2^2) + u(x_1^2 - kx_2^2) \text{ en posant } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

pour que le champ soit rentrant, il faut  ${}^t x \dot{x} < 0$

Il faut donc  $u(x_1^2 - kx_2^2) < 0 \Leftrightarrow u p^2 \cos^2 \theta (1 - k \tan^2 \theta) < 0$   
 $\Leftrightarrow \underline{u(1 - k \tan^2 \theta) < 0}$

Posons  $\theta_0 = \text{Arc tan} \left( \frac{1}{\sqrt{k}} \right)$  ( $k > 0$ )  $\theta_0 \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$   
 $\Leftrightarrow k = \frac{1}{\tan^2 \theta_0}$

La condition  $(1 - k \tan^2 \theta) < 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta_0} < 0 \Leftrightarrow \tan^2 \theta > \tan^2 \theta_0$

et sur l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[$

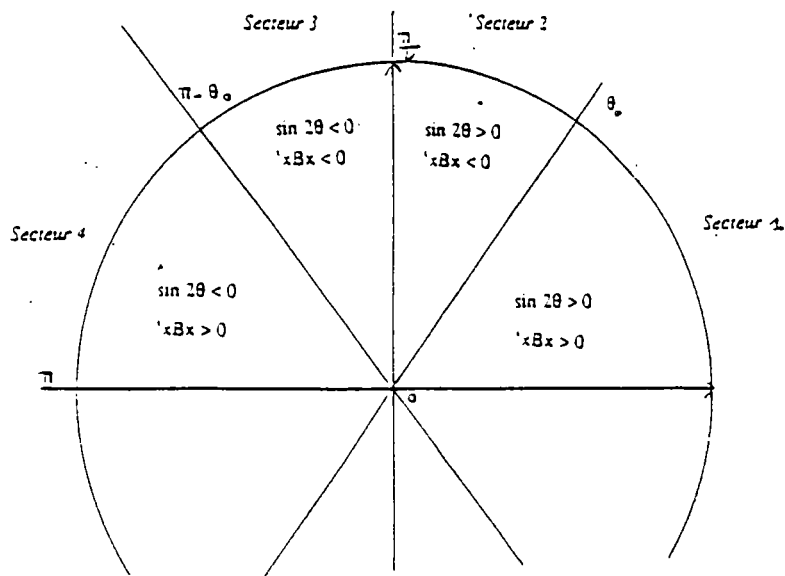
La condition devient  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, -\theta_0 \right[ \cup \left] \theta_0, +\frac{\pi}{2} \right[$

On peut noter que les demi-droites d'angles polaires  $\pm \theta_0 \pmod{\pi}$  forment l'ensemble des points où le champ est tangent aux cercles.



Nous obtenons déjà des conditions de signes par secteurs angulaires de l'expression  $(1 - \tan^2 \theta k)$ . On peut alors espérer en prenant  $|u|$  assez grand que  $'x \dot{x}$  soit négatif dans le secteur correspondant.

On peut déjà récapituler ces différentes conditions secteur par secteur pour vérifier si elles sont compatibles.



L'étude est faite sur un demi-tour, les trajectoires du système étant symétriques par rapport à 0 (si on considère  $u$  comme tel).

Ayant donc choisi un sens de rotation (celui de  $A$ ) qui est la condition prioritaire, dans les secteurs où on le peut, c'est-à-dire dans les secteurs où les conditions sont compatibles, on essaie de rendre  $(A + uB) \dot{x}$  rentrant en choisissant  $u$ .

Dans les autres secteurs, nous choisissons  $u = 0$ . Compte tenu du choix de rotation, les trajectoires continueront à tourner dans le même sens, mais elles peuvent s'éloigner de l'origine, nous mesurerons le gain en norme dans ces secteurs par l'intermédiaire de l'expression  $\frac{\rho(\theta_2)}{\rho(\theta_1)}$  si  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ .

Géométriquement, en prenant  $|u|$  assez grand (borné) dans les secteurs favorables, on peut prévoir raisonnablement compenser l'accroissement en norme dans les secteurs défavorables.

## Conclusion

Choix de  $u$  suivant les secteurs.

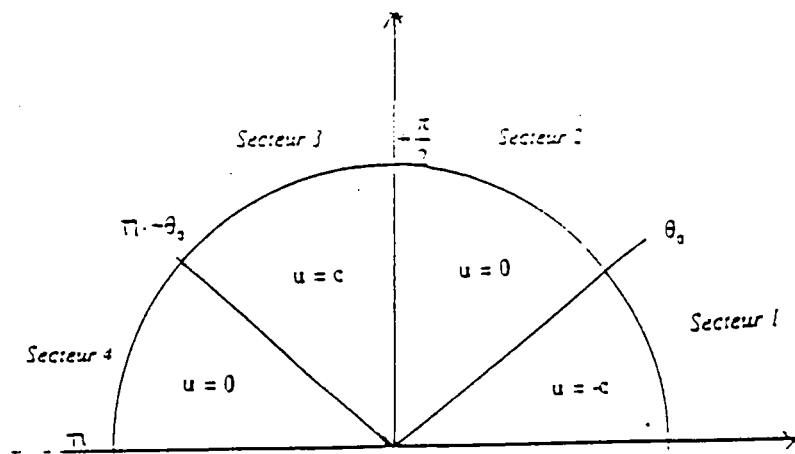
*Secteur 1*  $\sin 2\theta > 0$  donc  $-u \sin 2\theta > 0 \Leftrightarrow u < 0$   
 $'x B x > 0$  pour obtenir  $'x \dot{x} < 0$  il faut  $u < 0$   
 Ces conditions sont compatibles  
 $u = -c \quad c > 0$

*Secteur 2*  $\sin 2\theta > 0$  donc  $-u \sin 2\theta > 0 \Leftrightarrow u < 0$   
 $'x B x < 0$  donc  $'x \dot{x} < 0$  il faut  $u > 0$   
 Ces conditions sont incompatibles  
 $u = 0$

*Secteur 3*  $\sin 2\theta < 0$ ;  $-u \sin 2\theta > 0 \Leftrightarrow u > 0$   
 $'x B x < 0$   $'x \dot{x} < 0 \Leftrightarrow u > 0$   
 On posera  $u = c \quad c > 0$

*Secteur 4*  $\left. \begin{array}{l} \sin 2\theta < 0 \text{ donc } u > 0 \\ 'x B x > 0 \quad u < 0 \end{array} \right\} \text{ incompatibles}$   
 $u = 0$

## Résumé



Reste donc mesurer les gains de la norme ( $\|x\|$ ) dans chacun des secteurs pour déterminer les valeurs de  $c$ , telles que  $\|x\|$  soit globalement décroissante.

## B. Accroissement de $\rho$ sur un demi-tour

### 1°) Dans les secteurs où $u$ est choisi égal à zéro

Dans un tel secteur, le système s'écrit  $\dot{x} = Ax$   
 ou encore 
$$\begin{cases} \dot{\rho} = a \\ \dot{\theta} = b \end{cases}$$

Les solutions sont alors 
$$\begin{cases} \rho = e^{at} \rho(t_0) \\ \theta = bt + \theta(t_0) \end{cases} \quad (\rho(t_0), \theta(t_0) \text{ valeurs initiales})$$

d'où l'on tire  $\rho$  en fonction de  $\theta$  
$$\rho = e^{\frac{a}{b}(\theta - \theta_0)} \rho(t_0)$$

donc dans un secteur angulaire compris entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  on a :

$$\frac{\rho(\theta_2)}{\rho(\theta_1)} = e^{\frac{a}{b}(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$\text{soit } \underline{\rho(\theta_2) = e^{\frac{a}{b}(\theta_2 - \theta_1)} \rho(\theta_1)} \quad (i)$$

### 2°) Dans les secteurs où $u$ est non nul

Dans un secteur compris entre 2 valeurs  $\theta_2$  et  $\theta_1$ ,

on a

$$\underline{\rho(\theta_2) = e^{I(\theta_2 - \theta_1)} \rho(\theta_1)} \quad (ii)$$

avec

$$I(\theta_2, \theta_1) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\dot{\rho}}{\rho \dot{\theta}} d\theta = \ln \frac{\rho(\theta_2)}{\rho(\theta_1)}$$

Ces deux expressions (i) et (ii) permettent de "mesurer" l'accroissement de  $\rho$  sur chacun des secteurs correspondants.

Reste à démontrer que l'on peut trouver  $u$  de telle sorte que "l'accroissement" global de  $\rho$  soit inférieur à 1 
$$\left( \frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} < 1 \right)$$

### C. Etude d'un exemple

Pour comprendre la stratégie suivie, étudions un cas particulier où les calculs sont simples.

Soit l'exemple 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

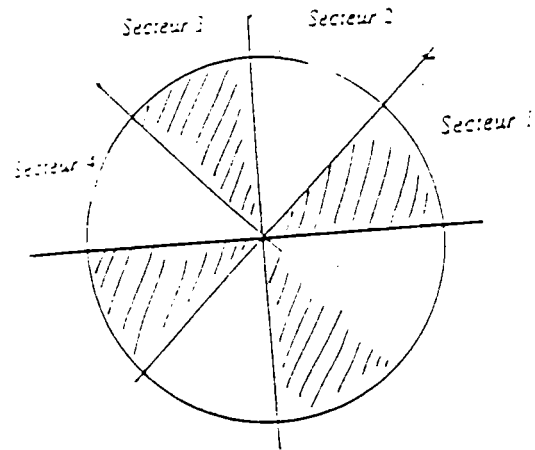
Le système s'écrit alors : (en polaires)

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 1 + u \cos 2\theta \\ \dot{\theta} = 1 - u \sin 2\theta \end{cases}$$

On note  $\theta_0 = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} \dot{x}\dot{x} &= x_1^2 + x_2^2 + u(x_1^2 - x_2^2) & \text{avec} & & \dot{x}Bx &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= \rho^2 + u\rho^2(\cos_2 \theta) & & & &= \rho^2 \cos 2\theta \end{aligned}$$

D'après l'étude précédente, on a suivant les secteurs



Dans le secteur

- 1  $\dot{x}Bx \geq 0$  et  $\sin 2\theta \geq 0$   $u = -c$
- 2  $\dot{x}Bx \leq 0$  et  $\sin 2\theta \geq 0$   $u = 0$
- 3  $\dot{x}Bx \geq 0$  et  $\sin 2\theta \leq 0$   $u = c$
- 4  $\dot{x}Bx \leq 0$  et  $\sin 2\theta \leq 0$   $u = 0$

On va montrer qu'il suffit alors de choisir  $c$  suffisamment grand dans les secteurs 1 et 2 pour que  $\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} < 1$ .

Calculons donc le gain obtenu pour  $\rho(0)$  dans chacun des secteurs où  $u$  est non nul.

→ secteur 1  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$

Calculons  $\ln \frac{\rho(\frac{\pi}{4})}{\rho(0)} = I_1$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\dot{\rho}}{\rho \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - c \cos 2\theta}{1 + c \sin 2\theta} d\theta$$

Mais la fraction se décompose

$$\frac{1 - c \cos 2\theta}{1 + c \sin 2\theta} = -\frac{1}{2} \frac{2c \cos 2\theta}{1 + c \sin 2\theta} + \frac{1}{1 + c \sin 2\theta}$$

d'où

$$I_1 = -\frac{1}{2} \left[ \ln |1 + c \sin 2\theta| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + c \sin 2\theta} d\theta$$

En remarquant que dans  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$   $2\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $\sin 2\theta \geq 0$

on obtient  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + c \sin 2\theta} d\theta \leq \frac{\pi}{4}$

On obtient une majoration de  $I_1$  :  $I_1 \leq \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(1 + c)$

Quand  $c$  tend vers  $+\infty$ , on aura donc  $\lim_{c \rightarrow +\infty} I_1 = -\infty$

Cette limite montre que l'on pourra trouver des valeurs de  $c$  telles que

$$I_1 \leq K \quad (K \text{ donné})$$

→ secteur 2  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$   $u = c > 0$

Calculons  $I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1 + c \cos 2\theta}{1 - c \sin 2\theta} d\theta$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \left[ \ln |1 - c \sin 2\theta| \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{1 - c \sin 2\theta} d\theta$$

avec le même type de remarques que précédemment

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right] \Rightarrow 2\theta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \text{ et } \sin 2\theta \leq 0$$

on a encore  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{1 - c \sin 2\theta} d\theta \leq \frac{\pi}{4}$

et finalement  $I_2 \leq -\frac{1}{2} \ln(1+c) + \frac{\pi}{4}$

On peut donc choisir la même valeur que précédemment.

Après un demi-tour, calculons le "gain" pour  $\rho = \|x(t)\|$

En estimant 
$$\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} = \frac{\rho(\pi)}{\rho(\frac{3\pi}{4})} \times \frac{\rho(\frac{3\pi}{4})}{\rho(\frac{\pi}{2})} \times \frac{\rho(\frac{\pi}{2})}{\rho(\frac{\pi}{4})} \times \frac{\rho(\frac{\pi}{4})}{\rho(0)}$$

nous avons fait apparaître le "gain" sur chacun des secteurs, on peut reporter les différentes majorations obtenues.

$$\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} \leq e^{\frac{\pi}{4}} \times e^{1/2} \times e^{\frac{\pi}{4}} \times e^{1/2}$$

Soit 
$$\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} \leq e^{\pi - \ln(1+c)}$$

montrons qu'alors on peut choisir  $c$  tel que  $\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} < 1$

Il suffit que  $e^{\pi - \ln(1+c)} < 1$  soit 
$$\underline{c > e^\pi - 1}$$

On peut donc choisir  $c$  de telle sorte que  $\rho$  soit globalement décroissant.

En fait, on peut donner une majoration du même type lorsque  $k = 1$ , mais  $a$  et  $b$  sont quelconques.

$\theta_0$  vaut donc encore  $\frac{\pi}{4}$

et 
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\dot{\rho}}{\rho \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a + \cos 2\theta u}{b - u \sin 2\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a - c \cos 2\theta}{b + c \sin 2\theta} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|b+c| + a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{b+c \sin 2\theta}$$

$\sin 2\theta \in [0, 1]$  
$$\frac{\pi}{4} \frac{1}{b+c} \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{b+c \sin 2\theta} \leq \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{b}$$

et 
$$\underline{I_1 \leq -\frac{1}{2} \ln|b+c| + \frac{a}{b} \frac{\pi}{4}}$$

De même 
$$I_2 = -\frac{1}{2} \ln|b-c| + a \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\theta}{b-c \sin 2\theta}$$

et  $\sin 2\theta \in [-1, 0]$  donc 
$$\frac{\pi}{4} \frac{1}{b+c} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\theta}{b-c \sin 2\theta} \leq \frac{\pi}{4} \frac{1}{b}$$

et 
$$\underline{I_2 \leq -\frac{1}{2} \ln|b-c| + \frac{a}{b} \frac{\pi}{4}}$$

et 
$$\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} \leq e^{\frac{\pi a}{2b}} \times e^{a} \times e^{\frac{\pi a}{2b}} \times e^{a}$$

$$\leq e^{\frac{a}{b} \frac{\pi}{2} - \frac{a}{b} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \ln|b+c| - \frac{1}{2} \ln|b-c|}$$

donc  $\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} < 1$  dès que

$$\frac{a}{b} \pi - \frac{1}{2} \ln|b^2 - c^2| < 0$$

soit  $\ln|b^2 - c^2| > \frac{a}{b} \pi$

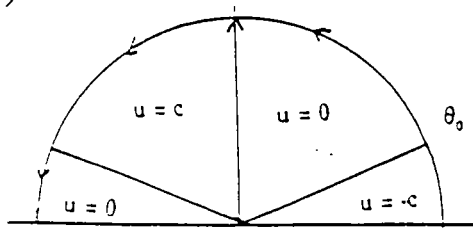
si  $c > b$

$$\begin{aligned} c^2 - b^2 &> e^{\frac{a}{b} \pi} \\ c^2 &> e^{\frac{a}{b} \pi} + b^2 \\ c &> \left[ e^{\frac{a}{b} \pi} + b^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Donc, toute valeur  $c$  supérieure à  $c_0 = \sup \left( b, \left[ e^{\frac{a}{b} \pi} + b^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right)$

$$c_0 = \left( e^{\frac{a}{b} \pi} + b^2 \right)^{\frac{1}{2}} \text{ convient.}$$

Pour les valeurs de  $k \neq 1$  ( $\theta_0 \neq \frac{\pi}{4}$ ) la stratégie est a priori la suivante :



Nous noterons à nouveau  $I_1 = \int_0^{\theta_0} \frac{\dot{\rho}}{\rho\theta} d\theta$   
 et  $I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\theta_0} \frac{\dot{\rho}}{\rho\theta} d\theta$

Les deux intégrales correspondant aux secteurs où  $u$  est non nul.

**D. Cas général, recherche de conditions suffisantes  $k \neq 1$**

De même que précédemment, on calcule le gain sur chacun des secteurs, en s'attardant sur les secteurs où  $u$  n'est pas nul.

Le calcul de  $I_1$  et  $I_2$  montrera que la stratégie  $u = \pm c$  ne convient pas.

On distinguera deux cas ( $k < 1$ ,  $k > 1$ ) où  $u$  sera non nul sur un secteur seulement. Malgré cette restriction, il sera quand même possible de déterminer  $C$  (suffisamment grand) de telle sorte que sur un demi-tour  $\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} < 1$ .

1°) Calcul de  $I_1$  et  $I_2$

$I_1$  Pour  $\theta \in [0, \theta_0]$  où  $\theta_0 = \text{Arc tan}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

$u = -c$

$$I_1 = \int_0^{\theta_0} \frac{\dot{\rho}}{\rho\theta} d\theta = \int_0^{\theta_0} \frac{a + \left(\frac{1+k}{2}\right) \cos 2\theta u + u \left(\frac{1-k}{2}\right)}{b - u \left(\frac{1+k}{2}\right) \sin 2\theta} d\theta$$

---


$$I_1 = -\frac{1}{2} \ln \left| b + c \left(\frac{1+k}{2}\right) \sin 2\theta_0 \right| + \left( a - c \left(\frac{1-k}{2}\right) \right) \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{b + c \left(\frac{1+k}{2}\right) \sin 2\theta}$$


---



$I_2$  Pour  $\theta \in \theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi - \theta_0 \right]$   $u = c > 0$

on a

$$I_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \theta_0} \frac{\dot{\rho}}{\rho \dot{\theta}} d\theta =$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \ln \left| b - c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta_0 \right| + \left( a + c \left( \frac{1-k}{2} \right) \right) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \theta_0} \frac{d\theta}{b - c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta}$$

Si l'on considère  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{b - u \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta}$

comme notre stratégie est d'imposer  $\dot{\theta} = b - u \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta > 0$  la fraction est positive, donc les

intégrales  $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{b - u \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta}$  sont positives dès que  $\theta_2 > \theta_1$ .

En conséquence, l'expression

$$\left[ a + u \left( \frac{1-k}{2} \right) \right] \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{b - u \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta}$$

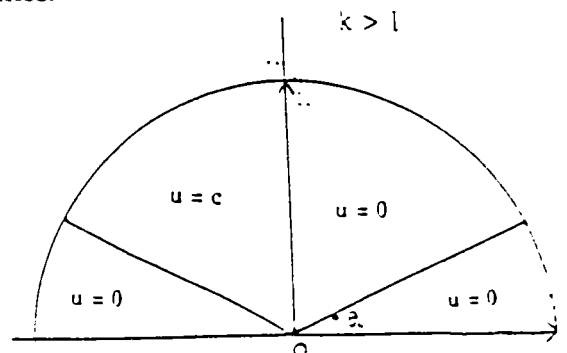
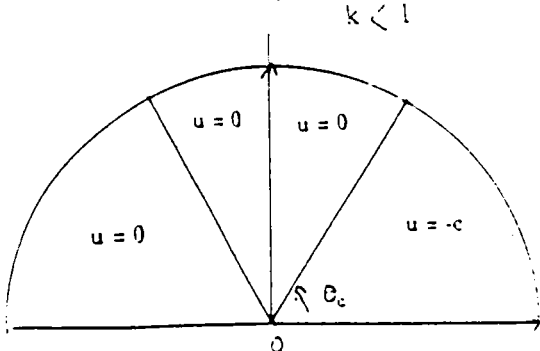
a le signe de  $a + u \left( \frac{1-k}{2} \right)$

et même celui de  $u \left( \frac{1-k}{2} \right)$  dès que  $|u| = c$  est assez grand.

Comme cette expression prend des valeurs infinies avec  $|u| = c$ .

L'intégrale  $I_1$  ou  $I_2$  risque d'être positive si  $u \left( \frac{1-k}{2} \right)$  l'est.

En conséquence, contrairement à l'exemple, on est amené par le calcul à distinguer 2 cas :  $k > 1$  ou  $k < 1$ , auxquels correspondent deux stratégies différentes.



## 2°) Majorations de $I_1$ et $I_2$

Nous allons estimer  $I_1$  et  $I_2$  de façon à donner des majorations aussi fines que possibles pour les valeurs constantes du contrôle.

Pour cela, calculons 
$$J = \int \frac{d\theta}{b - u\left(\frac{1+k}{2}\right) \sin 2\theta}$$

Effectuons le changement de variable  $v = \tan \theta$

$$J = \int \frac{dv}{bv^2 - u(1+k)v + b} = \int \frac{dv}{P(v)}$$

$P(v)$  a pour discriminant  $\Delta = u^2(1+k)^2 - 4b^2$  qui est positif dès que  $|u| = c$  est assez grand

$$\left[ c > \frac{2b}{(1+k)} \right]$$

Donc  $P(v)$  a deux racines notées  $v'$  et  $v''$

$$v' = \frac{u(1+k) - \sqrt{\Delta}}{2b} \qquad v'' = \frac{u(1+k) + \sqrt{\Delta}}{2b}$$

On a alors 
$$J(v) = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{v - v'}{v - v''} \right|$$

Distinguons suivant les valeurs de  $k$  et les secteurs

si  $k < 1$

$u$  est non nul sur le premier secteur  $u = -c$  et

$$I_1 = -\frac{1}{2} \ln \left| b + c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta_0 \right| + \left[ a - c \left( \frac{1-k}{2} \right) \right] [J(v)]_0^{\tan \theta_0}$$

Plus précisément, calculons 
$$[J(v)]_0^{\tan \theta_0} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{\tan \theta_0 - v'}{\tan \theta_0 - v''} \times \frac{v''}{v'} \right|$$

en remarquant que  $v' v'' = 1$ , on a

$$[J(v)]_0^{\tan \theta_0} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{v'' \tan \theta_0 - 1}{v' \tan \theta_0 - 1} \right| = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left( \frac{1 - v'' \tan \theta_0}{1 - v' \tan \theta_0} \right)$$

avec  $v' = \frac{-c(1+k) - \sqrt{c^2(1+k)^2 - 4b^2}}{2b} < 0$

$$v' < v'' < 0$$

$$v'' = \frac{-c(1+k) + \sqrt{c^2(1+k)^2 - 4b^2}}{2b} < 0$$

Lorsque  $c$  tend vers  $+\infty$   $\lim_{c \rightarrow +\infty} v' = -\infty$  et  $v' = \frac{-2c(1+k)}{2b}$   
 et  $\lim_{c \rightarrow +\infty} v'' = 0$   $\left( v'' = \frac{2b}{-c(1+k) - \sqrt{c^2(1+k)^2 - 4b^2}} \right)$

On a alors  $\lim_{c \rightarrow +\infty} [J(v)]_0^{\tan \theta_0} = 0$  et  $[J(v)]_0^{\tan \theta_0} \approx +\frac{1}{c(1+k)} \times \ln(c)$

donc  $\left[ a - c \left( \frac{1-k}{2} \right) \right] [J(v)]_0^{\tan \theta_0}$  a pour équivalent  $-\frac{c(1-k)}{2c(1+k)} \ln c$

(en ayant remarqué  $\sqrt{\Delta} \approx c(1+k)$ )

Comme la première intégrale  $-\frac{1}{2} \ln \left| b + c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta_0 \right|$  a pour équivalent  $-\frac{1}{2} \ln c$   
 c'est-à-dire un équivalent de même ordre.

Nous nous limiterons à remarquer que le deuxième terme est négatif

et  $I_1 \leq -\frac{1}{2} \ln \left| b + c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta_0 \right|$  sans perdre sur la rapidité de convergence.

si  $k > 1$

$u$  est non nul sur le troisième secteur  $u = c$  et

$$I_2 = -\frac{1}{2} \ln \left| b - c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta_0 \right| + \left[ a + c \left( \frac{1-k}{2} \right) \right] \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\theta_0} \frac{d\theta}{b - c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta}$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \ln \left| b - c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta_0 \right| + \left[ a + c \left( \frac{1-k}{2} \right) \right] \left[ J(\tan \theta_0) - \lim_{v \rightarrow +\infty} J(v) \right]$$

avec  $J(\tan \theta_0) - \lim_{v \rightarrow +\infty} J(v) = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left| \frac{-\tan \theta_0 - v'}{-\tan \theta_0 - v''} \right|$

car  $\lim_{v \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{v - v'}{v - v''} \right| = 0$

$$v' = \frac{c(1+k) - \sqrt{c^2(1+k)^2 - 4b^2}}{2b} > 0$$

$$v'' > v' > 0$$

$$v'' = \frac{c(1+k) + \sqrt{c^2(1+k)^2 - 4b^2}}{2b} > 0$$

Donc  $J(\tan \theta_0) - \lim_{v \rightarrow +\infty} J(v) = +\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \ln \left( \frac{v'' + \tan \theta_0}{v' + \tan \theta_0} \right)$

Là encore,  $\lim_{c \rightarrow +\infty} v'' = +\infty$  et  $v'' = \frac{2c(1+k)}{2b}$   
 $\lim_{c \rightarrow +\infty} v' = 0$

et donc  $\left[ a + c \left( \frac{1-k}{2} \right) \right] \left[ J(\tan \theta_0) - \lim_{v \rightarrow +\infty} J(v) \right] = c \left( \frac{1-k}{2} \right) \times -\frac{1}{c(1+k)} \times \ln c$   
 $= -\frac{(1-k)}{(1+k)} \times \frac{\ln c}{2}$

Nous ferons la même remarque que précédemment et nous nous limiterons à

$$I_2 \leq -\frac{1}{2} \ln \left| b - c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta_0 \right|$$

### 3°) Synthèse : accroissement sur un demi-tour

pour  $k < 1$

\* L'accroissement sur un demi-tour

$$\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} = \frac{\rho(\pi)}{\rho(\theta_0)} \times \frac{\rho(\theta_0)}{\rho(0)} = e^{\frac{a}{b}(\pi-\theta_0)} \times e^{1_1}$$

$$\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} \leq e^{\frac{a}{b}(\pi-\theta_0) - \frac{1}{2} \ln \left( b + c \sin 2\theta_0 \left( \frac{1+k}{2} \right) \right)}$$

pour que  $\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} < 1$ , il suffit que  $\frac{a}{b}(\pi - \theta_0) - \frac{1}{2} \ln \left( b + c \sin 2\theta_0 \left( \frac{1+k}{2} \right) \right) < 0$

Soit  $b + c \sin 2\theta_0 \left( \frac{1+k}{2} \right) > e^{\frac{2a}{b}(\pi-\theta_0)}$

$$c > \frac{e^{\frac{2a}{b}(\pi-\theta_0)} - b}{\sin 2\theta_0 \left( \frac{1+k}{2} \right)}$$

Toute valeur  $c$  supérieure à  $c_0 = \sup \left[ \frac{e^{\frac{2a}{b}(\pi-\theta_0)} - b}{\sin 2\theta_0 \left( \frac{1+k}{2} \right)}, \frac{2b}{1+k} \right]$

conviendra.

pour  $k > 1$

\* L'accroissement sur un demi-tour

$$\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} = \frac{\rho(\pi)}{\rho(\pi-\theta_0)} \times \frac{\rho(\pi-\theta_0)}{\rho(\frac{\pi}{2})} \times \frac{\rho(\frac{\pi}{2})}{\rho(0)}$$

$$= e^{\frac{a}{b} \left( \pi - \pi + \theta_0 + \frac{\pi}{2} - 0 \right)} \times e^{1_2}$$

$$\leq e^{\frac{a}{b} \left( \frac{\pi}{2} + \theta_0 \right) - \frac{1}{2} \ln \left( c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta_0 - b \right)}$$

pour que  $\frac{\rho(\pi)}{\rho(0)} < 1$ , il suffit donc de choisir  $c$  tel que

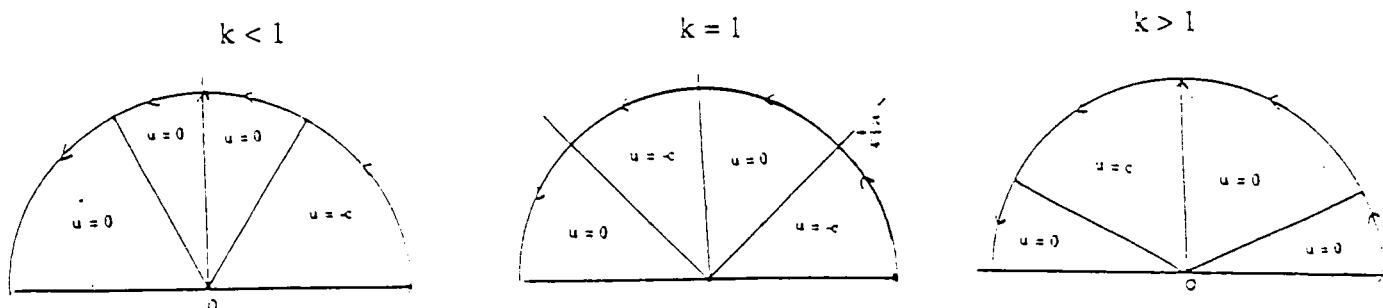
$$\frac{a}{b} \left( \frac{\pi}{2} + \theta_0 \right) - \frac{1}{2} \ln \left( c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta_0 - b \right) < 0$$

soit 
$$c \left( \frac{1+k}{2} \right) \sin 2\theta_0 - b > \frac{e^{\frac{2a}{b} \left( \frac{\pi}{2} + \theta_0 \right)} + b}{\sin 2\theta_0 \left( \frac{1+k}{2} \right)}$$

Il suffit donc de choisir  $c$  supérieur à  $c_0$

avec 
$$c_0 = \sup \left[ \frac{e^{\frac{2a}{b} \left( \frac{\pi}{2} + \theta_0 \right)} + b}{\sin 2\theta_0 \left( \frac{1+k}{2} \right)}, \frac{2b}{1+k} \right]$$

Donc, dans chacun des cas,  $k > 1$ ,  $k < 1$ ,  $k = 1$ , on peut trouver un feedback constant stabilisant le système en suivant la stratégie



La situation  $k = 1$  semblant être un cas frontière.

Dans cette partie, comme dans la précédente, la stratégie choisie était de considérer des trajectoires tournant autour de l'origine.

En revenant à l'idée du placement de pôles variable, nous allons essayer de stabiliser le système en plaçant les pôles sur deux valeurs propres réelles négatives.

Les trajectoires resteront alors contenues dans des secteurs angulaires limités par des droites correspondant aux directions propres du système ( $\dot{x}$  colinéaire à  $x$ ).

Dans ce cas, nous donnerons aussi une estimation de la vitesse de convergence.

## V. Placement de pôles variable avec le spectre fixé à $(\alpha, \beta)$ réels

Il est nécessaire de reprendre tout d'abord le calcul du feedback correspondant

### A. Calcul de $u_{\alpha\beta}$

On rappelle que dans

$$\dot{x} = Ax + uBx \quad (1)$$

on a  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  avec  $b > 0$   $a > 0$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$   $k > 0$

Le feedback  $u_{\alpha\beta}(x) = F(x) \cdot x$

avec  $F(x) = F' P^{-1}(x)$  où  $P^{-1}(x) = -\frac{1}{b(x_1^2 + k^2 x_2^2)} \begin{bmatrix} -kx_2 & -x_1 \\ -bx_1 - akx_2 & b kx_2 - ax_1 \end{bmatrix}$

et  $F' = (a^2 + b^2 - \alpha\beta ; -2a + \alpha + \beta)$

On trouve donc

$$u_{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{b[x_1^2 + k^2 x_2^2]} \left[ -kx_2(a^2 + b^2 - \alpha\beta) + (-2a + \alpha + \beta)(-bx_1 - akx_2) ; \right. \\ \left. -x_1(a^2 + b^2 - \alpha\beta) + (b kx_2 - ax_1)(-2a + \alpha + \beta) \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Soit

$$u_{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{b(x_1^2 + k^2 x_2^2)} \left[ -kx_1 x_2 (a^2 + b^2 - \alpha\beta) + (-2a + \alpha + \beta)(-bx_1^2 - akx_1 x_2) \right. \\ \left. -x_1 x_2 (a^2 + b^2 - \alpha\beta) + (b kx_2^2 - ax_1 x_2) \times (-2a + \alpha + \beta) \right]$$

Soit encore

$$\underline{u_{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{b(x_1^2 + k^2 x_2^2)} \left[ (-2a + \alpha + \beta)(b)(-x_1^2 + kx_2^2) + x_1 x_2 (k+1)((a-\alpha)(a-\beta) - b^2) \right]}$$

Soit alors le système bouclé :

$$\dot{x} = [A + u_{\alpha\beta}(x)B]x = \overline{M}(x)x \quad (2)$$

pour étudier la forme des trajectoires nous étudierons d'abord les directions propres c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs pour lesquels le champs défini par (2) est radial.

## Remarque 1

Pour une direction propre on aura donc  $\dot{x} = \alpha x$   
mais comme  $\dot{x} = M(x)x = \overline{M}(x)x$  avec  $M(x) = A + b(x)F(x)$ .

$M(x)$  a pour valeurs propres  $\alpha$  et  $\beta$  donc  $r$  vaut  $\alpha$  ou  $\beta$ .

Les directions propres correspondent à des trajectoires particulières (droites) et sont des séparatrices (sur ces séparatrices on a  $\rho(t) = \rho_0 e^{rt}$ ).

## Remarque 2

Dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels négatifs sur toute direction propre, le champ sera alors rentrant, nous pouvons alors utiliser le théorème :

Théorème [W. Hahn - Stability of the Motion] p. 68-69.

Dans le plan pour un système polynomial, homogène, lorsque le champ est rentrant sur toutes les directions propres, alors le système est stable.

Le système (2)  $\dot{x} = M(x).x$  est bien homogène. nous l'avons déjà remarqué, mais il n'est pas polynomial. Cependant, les coefficients de la matrice  $M(x)$  sont des fractions rationnelles qui ont toutes le même dénominateur :  $(x_1^2 + k^2 x_2^2)$ , donc en tout point  $x$ ,  $\dot{x}$  est colinéaire au vecteur  $M_1(x).x$  où  $M_1(x)$  est la matrice dont les coefficients sont les numérateurs des coefficients de  $M(x)$  donc les trajectoires de (2) sont les mêmes que celles de  $\dot{x} = M_1(x).x$  (3). Mais ce système est polynomial et homogène et possède les mêmes directions propres que (2). De plus, comme  $x_1^2 + k^2 x_2^2 > 0$ , si le champ défini par (2) est rentrant pour une valeur de  $x$ , il l'est aussi pour (3). Le système (3) est donc stable et par conséquent, (2) aussi.

On notera que [Hahn] donne la forme des trajectoires dans les secteurs limités par deux directions propres suivant le sens du champ sur ces directions.

En fait, nous retrouverons par le calcul que le système (2) est asymptotiquement stable et nous préciserons la "vitesse" de convergence.

### ***B. Recherche et classement des directions propres***

Pour déterminer ces directions, nous calculerons  $\det(\dot{x}, x)$  dans le but de déterminer les vecteurs pour lesquels  $x$  et  $\dot{x}$  sont colinéaires, après factorisation de  $\det(\dot{x}, x)$  nous déterminerons en fait 4 directions propres lorsque  $\alpha \neq \beta$  et 2 lorsque  $\alpha = \beta$ .



$$\det(\dot{x}, x) = 0 \Leftrightarrow \det[(A + u_{\alpha\beta}(x)B)x, x] = 0$$

$$\Leftrightarrow \det[Ax, x] + u_{\alpha\beta}(x)\det[Bx, x] = 0 \quad \text{par bilinéarité}$$

Mais  $\det(Ax, x) = -b(x_1^2 + x_2^2)$  et  $\det(Bx, x) = (1+k)(x_1x_2)$ .

Posons alors  $\varphi(x) = \det[\dot{x}, x] = -b(x_1^2 + x_2^2) + u_{\alpha\beta}(x)(1+k)x_1x_2$

Si on remplace  $u_{\alpha\beta}(x)$  par sa valeur calculée précédemment, on obtient

$$\varphi(x) = -b(x_1^2 + x_2^2) - \frac{[(-2a + \alpha + \beta)b(-x_1^2 + kx_2^2) + x_1x_2(k+1)(a^2 - b^2 + \alpha\beta - a(\alpha + \beta))]}{b(x_1^2 + k^2x_2^2)}(1+k)(x_1x_2)$$

$$\varphi(x) = -\frac{b(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + k^2x_2^2) + [(-2a + \alpha + \beta)b(-x_1^2 + kx_2^2) + x_1x_2(k+1)(a^2 - b^2 + \alpha\beta - a(\alpha + \beta))](1+k)(x_1x_2)}{b(x_1^2 + k^2x_2^2)}$$

Soit en ordonnant le numérateur

$$\varphi(x) = -\frac{b^2x_1^4 - (2a + \alpha + \beta)b(1+k)x_1^3x_2 + [b^2(1+k^2) + (1+k)^2(a^2 - b^2 + \alpha\beta - a(\alpha + \beta))]x_1^2x_2^2 + (-2a + \alpha + \beta)bkx_1x_2^3 + b^2k^2x_2^4}{b(x_1^2 + k^2x_2^2)}$$

Le numérateur se factorise sous la forme

$$N(x) = [bx_1^2 + (1+k)(a - \alpha)x_1x_2 - bkx_2^2][bx_1^2 + (1+k)(a - \beta)x_1x_2 - bkx_2^2]$$

On a donc

$$\varphi(x) = -\frac{(bx_1^2 + (1+k)(a - \alpha)x_1x_2 - bkx_2^2)(bx_1^2 + (1+k)(a - \beta)x_1x_2 - bkx_2^2)}{b(x_1^2 + k^2x_2^2)}$$

De cette factorisation on peut déduire que à une valeur propre  $\alpha$  sont associées deux directions

$$x_1 = \frac{-(1+k)(a - \alpha) \pm \sqrt{(1+k)^2(a - \alpha)^2 + b^2k}}{2b} \quad \left( \begin{array}{l} b > 0 \\ \text{et } k > 0 \end{array} \right)$$

Sur chacune de ces droites, on sait que  $\det(x, \dot{x}) = 0$  donc que  $\dot{x} = r x$ .

On peut supposer que  $r = \alpha$ .

Pour vérifier cela, calculons le produit scalaire  $\langle x, \dot{x} \rangle = \langle x, (A + uB)x \rangle = \langle x, Ax \rangle + u(x) \langle x, Bx \rangle$

où  $\langle x, Ax \rangle = a(x_1^2 + x_2^2)$  et  $\langle x, Bx \rangle = x_1^2 - kx_2^2$

mais comme  $x$  appartient à une direction propre donnée par

$$bx_1^2 + (1+k)(a-\alpha)x_1x_2 - bkx_2^2 = 0 \text{ on a}$$

$$x_1^2 - kx_2^2 = -\frac{(1+k)(a-\alpha)}{b}x_1x_2 \quad (1)$$

$$\text{d'où } \langle x, \dot{x} \rangle = a(x_1^2 + x_2^2) + \frac{u(x)}{b}(-1+k)(a-\alpha)x_1x_2$$

$$\text{avec } u(x) = -\frac{1}{b(x_1^2 + k^2x_2^2)} \left[ ((\alpha-a) + (\beta-a))b(-x_1^2 + kx_2^2) + x_1x_2(k+1)((a-\alpha)(a-\beta) - b^2) \right]$$

mais

$$\begin{aligned} (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + k^2x_2^2) &= x_1^4 + k^2x_2^4 + (1+k^2)x_1^2x_2^2 = (x_1^2 - kx_2^2)^2 + (1+k)^2x_1^2x_2^2 \\ &= x_1^2x_2^2(1+k)^2 \times \frac{b^2 + (a-\alpha)^2}{b^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Compte tenu de (1), on peut simplifier  $u(x)$  avant de remplacer

$$u(x) = -\frac{1}{b(x_1^2 + k^2x_2^2)} \left[ (\alpha-a)b(-x_1^2 + kx_2^2) - b^2(k+1)x_1x_2 \right]$$

En reportant on obtient

$$\langle x, \dot{x} \rangle = a(x_1^2 + x_2^2) - \frac{x_1^2 - kx_2^2}{b(x_1^2 + k^2x_2^2)} \left[ (\alpha-a)b(-x_1^2 + kx_2^2) - (k+1)b^2x_1x_2 \right]$$

$$\langle x, \dot{x} \rangle = \frac{a(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + k^2x_2^2) - (x_1^2 - kx_2^2) \left[ (\alpha-a)b(-x_1^2 + kx_2^2) - (k+1)b^2x_1x_2 \right]}{(x_1^2 + k^2x_2^2)}$$

Soit en tenant compte de (1)

$$\langle x, \dot{x} \rangle = \frac{ax_1^2x_2^2(1+k)^2 \left[ \frac{b^2 + (a-\alpha)^2}{b^2} \right] - \frac{-(1-k)(a-\alpha)}{b}x_1x_2 \left[ \frac{(\alpha-a)(1-k)(\alpha-a)}{b}x_1x_2 - (k-1)x_1x_2b \right]}{(x_1^2 + k^2x_2^2)}$$

$$= \frac{x_1^2x_2^2}{(x_1^2 + k^2x_2^2)} \frac{(1+k)^2}{b^2} \left[ a(b^2 + (a-\alpha)^2) + (a-\alpha) [-(\alpha-a)^2 - b^2] \right]$$

$$= \frac{x_1^2x_2^2}{x_1^2 + k^2x_2^2} \frac{(1+k)^2}{b^2} (b^2 + (a-\alpha)^2)(\alpha) = \alpha(x_1^2 + x_2^2)$$

En utilisant la relation (2) obtenue précédemment.

$$\langle x, \dot{x} \rangle = \alpha(x_1^2 + x_2^2)$$

montre que l'on a bien  $\dot{x} = \alpha x$  comme on le supposait.

## Conclusion

A chaque valeur propre  $\alpha$  est associé un couple de directions propres donnée par  
 $(bx_1^2 + (1+k)(a-\alpha)x_1x_2 - bkx_2^2) = 0$

On peut remarquer que dans le cas où  $\alpha = \beta$

$$\varphi(x) \text{ s'écrit } \varphi(x) = -\frac{(bx_1^2 + (1+k)(a-\alpha)x_1x_2 - bkx_2^2)^2}{b(x_1^2 + k^2x_2^2)}$$

Là encore à la valeur propre  $\alpha$  est associé un couple de directions propres.

Le plan de phases est découpé en 8 octants délimités par les séparatrices que sont les directions propres.

Pour préciser la forme des trajectoires nous pouvons préciser le "sens de rotation" dans le secteur angulaire compris entre deux directions propres.

Pour cela, on rappelle que le déterminant  $\det(x, \dot{x}) = -\varphi(x) = \dot{\theta}$  a le même signe que  $\sin(x, \dot{x})$ .

Si on rappelle la factorisation de  $\varphi(x)$  et en notant

$$P_\alpha(x) = (bx_1^2 + (1+k)(a-\alpha)x_1x_2 - bkx_2^2)$$

$$\text{on a } \det(x, \dot{x}) = \frac{P_\alpha(x) \times P_\beta(x)}{b(x_1^2 + kx_2^2)}$$

Donc le signe de  $\det(x, \dot{x})$  est donné par le produit  $P_\alpha(x) \times P_\beta(x)$ .

Si on pose  $t = \frac{x_2}{x_1} = \tan \theta$  (compte tenu des coordonnées polaires)

il nous faut étudier le signe du produit  $Q_\alpha(t) \times Q_\beta(t)$ .

avec  $Q_\alpha(t) = [-kbt^2 + (1+k)(a-\alpha)t + b]$  (de même pour  $Q_\beta(t)$ )

On sait que  $Q_\alpha(t)$  possède deux racines  $t_1(\alpha)$  et  $t_2(\alpha)$  (car  $\Delta > 0$ ) de signes contraires (le produit vaut  $-\frac{1}{k} < 0$ ).

Nous noterons  $t_1(\alpha)$  la racine positive, il nous faut à présent placer les solutions les unes par rapport aux autres.

Pour cela calculons

$$\begin{aligned} Q_\beta(t_1(\alpha)) &= -kbt_1^2(\alpha) + (1+k)(a-\beta)t_1(\alpha) + b \\ &= [-kbt_1^2(\alpha) + b] + (1+k)(a-\beta)t_1(\alpha) = -(1+k)(a-\alpha)t_1(\alpha) + (1+k)(a-\beta)t_1(\alpha) \end{aligned}$$

car  $t_1$  est racine de  $Q\alpha = 0$

$$Q_\beta(t_1(\alpha)) = t_1(\alpha)(1+k)(\alpha - \beta)$$

$$\text{et "a"} Q_\beta(t_1(\alpha)) = -kbt_1(\alpha)(1+k)(\alpha - \beta)$$

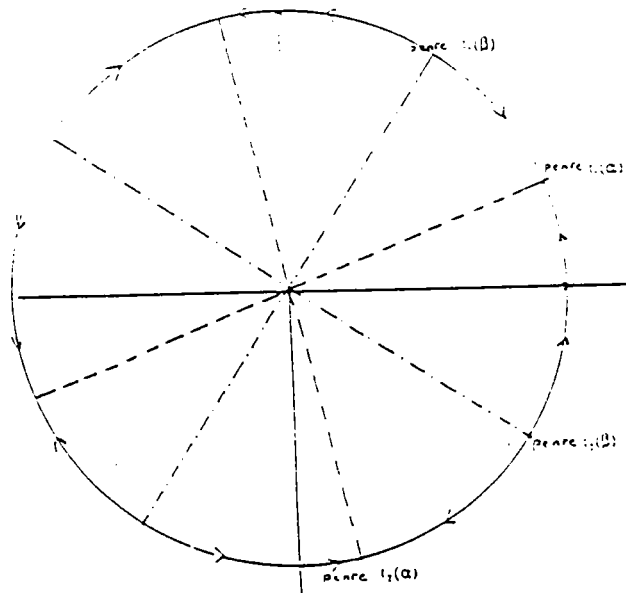
Rappelons que la valeur propre notée  $\alpha$  la plus grande  $(\alpha - \beta) \geq 0$

donc "a"  $Q_\beta(t_1(\alpha))$  est de signe contraire à  $t_1(\alpha)$  puisque  $t_1(\alpha) > 0$ . "a"  $Q_\beta(t_1(\alpha)) < 0$  et  $t_1(\alpha)$  est dans l'intervalle compris entre  $t_1(\beta)$  et  $t_2(\beta)$ .

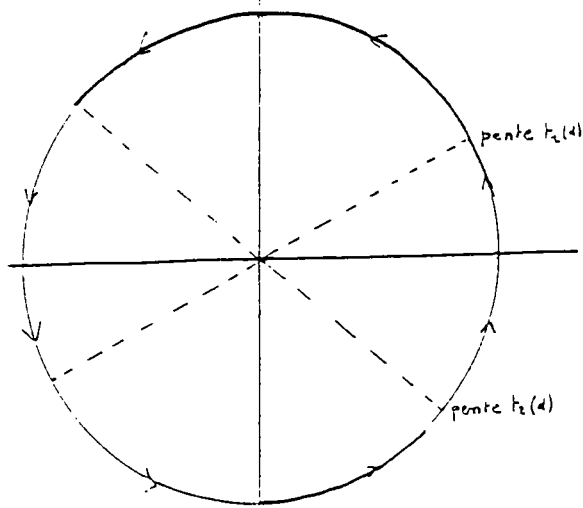
On a donc le tableau des signes suivant :

$t$	$-\infty$	$t_2(\alpha)$	$t_1(\beta)$	$t_1(\alpha)$	$t_1(\beta)$	$+\infty$
$Q_\alpha(t)$	-	0	+	+	0	-
$Q_\beta(t)$	-	-	0	+	+	0
$\sin(x, x)$ ou $\theta$	+	0	-	0	+	0

On peut alors dresser le portrait de phases angulaires suivant :



Les directions propres associées à  $\alpha$  (la plus grande valeur propre) semblent attractives.  
 Et dans le cas où  $\alpha = \beta$



Si l'on compare ces portraits de phases angulaires avec ceux obtenus dans le cas linéaire, on obtient des résultats comparables à un "dédoublément près" des séparatrices. Là encore, à la plus grande valeur propre correspondent des directions propres attractives.

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  sont négatifs, le système est alors stable et il serait intéressant d'avoir une idée de la rapidité de la convergence obtenue et de la comparer avec le cas linéaire correspondant.

### C. Estimation de la vitesse de convergence

On mesure l'accroissement de  $\ln(\rho)$  sur  $[\theta_0, \theta]$ .

Pour donner une estimation de la vitesse de convergence, nous montrerons que l'on obtient une majoration du type  $\rho(t) \leq Ke^{\alpha t}$  (on sait déjà que sur les directions propres on a  $\rho(t) = \rho_0 e^{\alpha t}$ , (ou  $\rho(t) = \rho_0 e^{\beta t}$ )).

Pour obtenir cette majoration, on peut écrire

$$\rho(\theta) = e^{I(\theta)} \rho(\theta_0) \text{ avec } I(\theta) = \ln \frac{\rho(\theta)}{\rho(\theta_0)}$$

il faut donc évaluer  $I(\theta)$ , on désire obtenir une majoration de  $I(\theta)$  de la forme

$$I(\theta) \leq \alpha t + c$$

En effet, nous aurons alors

$$\rho(t) \leq e^{\alpha t} \times e^c \times \rho_0 = Ke^{\alpha t}$$

Posons ce but, nous évaluerons  $I(\theta)$  en fonction de  $\theta$ .

Puis nous calculerons  $t(\theta)$  (le temps en fonction de l'angle polaire) et enfin nous ferons le lien entre les deux.

## 1°) Calcul de $I(\theta)$

Rappelons que  $I(\theta) = \ln \frac{\rho(\theta)}{\rho(\theta_0)}$

$$\text{On a donc } I(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\varphi} d\varphi = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\dot{\rho}}{\rho\dot{\varphi}} d\varphi$$

(pour des commodités de calculs, nous noterons  $\varphi$  l'angle polaire intervenant dans le calcul de l'intégrale)

$$\varphi \in [\theta_0, \theta]$$

On rappelle que  $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = a + u_{\alpha\beta}(\varphi)(\cos^2 \varphi - k \sin^2 \varphi)$

et  $\dot{\varphi} = b - u_{\alpha\beta}(\varphi)(k+1)(\sin \varphi \cos \varphi)$

avec

$$u_{\alpha\beta}(\varphi) = \frac{-1}{b(\cos^2 \varphi + k^2 \sin^2 \varphi)} \left[ (-2a + \alpha + \beta)b(-\cos^2 \varphi + k \sin^2 \varphi) + \sin \varphi \cos \varphi (k+1) [(a - \alpha)(a - \beta) - b^2] \right]$$

$$\text{et donc } I(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{a + u_{\alpha\beta}(\varphi)(\cos^2 \varphi - k \sin^2 \varphi)}{b - u_{\alpha\beta}(\varphi)(k+1)(\sin \varphi \cos \varphi)} d\varphi$$

Ce calcul ressemble par bien des aspects à un calcul effectué dans la première partie. Cependant, lorsque le spectre était fixé à  $\alpha \pm i$ , la vitesse angulaire  $\dot{\varphi}$  ne s'annulait pas (il n'y avait pas de directions propres) ce qui n'est pas le cas ici.

C'est-à-dire qu'au niveau des calculs, la fraction  $\frac{\dot{\rho}}{\rho\dot{\varphi}}$  n'avait pas de pôle réel dans la première partie, alors qu'elle en possède 4 ici (dans le cas où  $\alpha \neq \beta$ ) et donc les deux intégrales se calculent différemment. De plus, pour terminer le calcul, nous sommes obligés de nous placer dans un secteur angulaire compris entre deux directions propres.

On doit donc calculer, après avoir posé  $v = \tan \varphi$ , soit  $dv = (1 + v^2)d\varphi$

$$I(\theta) = \int_{\tan(\theta_0)}^{\tan(\theta)} \frac{ab(1 + k^2 v^2)(1 + v^2) - [(-2a + \alpha + \beta)b(-1 + kv^2) + v((a - \alpha)(a - \beta) - b^2)(k + 1)]}{b^2(1 + k^2 v^2)(1 + v^2) - [(-2a + \alpha + \beta)b(-1 + kv^2) + v((a - \alpha)(a - \beta) - b^2)(k + 1)]} \times \frac{(1 - kv^2)}{(-v(k + 1))} \frac{dv}{1 + v^2}$$

On sait d'après B. que le dénominateur se factorise sous la forme

$$Q_{\alpha}(v) \times Q_{\beta}(v) \times (1 + v^2)$$

avec  $Q_\alpha(v) = -bkv^2 + (1+k)(a-\alpha)v + b$

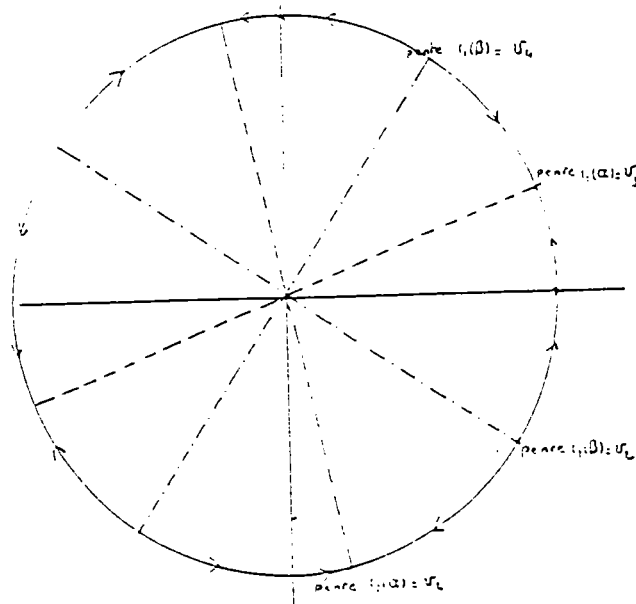
$$\text{d'où } I(\theta) = \int_{\tan(\theta_0)}^{\tan(\theta)} \frac{N(v)}{Q_\alpha(v) \times Q_\beta(v) \times (1+v^2)} dv = \int_{\tan(\theta_0)}^{\tan(\theta)} F(v) dv$$

La fraction  $F(v)$  possède 4 pôles qui sont les racines de  $Q_\alpha(v)$  et  $Q_\beta(v)$ .

Nous noterons dans l'ordre d'apparition sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$

$$v_1 = t_2(\alpha) \quad ; \quad v_2 = t_2(\beta) \quad ; \quad v_3 = t_1(\alpha) \quad ; \quad v_4 = t_1(\beta)$$

et nous nous placerons sur un intervalle  $[\theta_0, \theta] \subset [\arctan v_1, \arctan v_{i+1}]$



Compte tenu de ces notations,  $F(v)$  peut s'écrire

$$F(v) = \frac{1}{b^2} \left[ \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i}{(v - v_i)} + \frac{\alpha_5 + \alpha_6 v}{1 + v^2} \right]$$

On peut déjà calculer  $\alpha_5$  et  $\alpha_6$  en remarquant que

$$\alpha_5 + \alpha_6 i = \frac{N(i)}{Q_\alpha(i)Q_\beta(i)} \times b^2$$

$$\begin{aligned} \text{mais } Q_\alpha(i) &= b(1 - kv^2) + (1+k)(a - \alpha)v \text{ avec } v = i \\ &= b(1+k) + (1+k)(a - \alpha)i \\ &= (1+k)(b + i(a - \alpha)) \end{aligned}$$

$$\text{Et de même, } Q_\beta(i) = (1+k)(b + i(a - \beta))$$

$$\text{d'où } Q_\alpha(i) \times Q_\beta(i) = (1+k)^2 [b^2 - (a - \alpha)(a - \beta)] + ib(2a - \alpha - \beta)$$

Et comme

$$N(v) = ab(1 + k^2v^2)(1 + v^2) + (1 - kv^2)^2(-2a + \alpha + \beta)b - v(1 - kv^2)(k+1)[(a - \alpha)(a - \beta) - b^2]$$

$$\begin{aligned} \text{on a } N(i) &= (1+k)^2 [b(-2a + \alpha + \beta) - i((a - \alpha)(a - \beta) - b^2)] \\ &= i(1+k)^2 [-[(a - \alpha)(a - \beta) - b^2] - ib(-2a + \alpha + \beta)] \\ &= iQ_\alpha(i) \times Q_\beta(i) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \alpha_5 + \alpha_6 i = ib^2$$

$$\begin{cases} \alpha_5 = 0 \\ \alpha_6 = b^2 \end{cases}$$

L'expression de I est donc

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i}{b^2} \ln \left| \frac{\tan \theta - v_i}{\tan \theta_0 - v_i} \right| + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right)$$

dans laquelle on peut préciser les coefficients  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )

$$\alpha_1 = \frac{b^2 N(t_2(\alpha))}{Q_\beta(t_2(\alpha)) \times -b \times (t_2(\alpha)) - t_1(\alpha) \times (1 + t_2^2(\alpha))}$$

$$\alpha_2 = \frac{b^2 N(t_2(\beta))}{Q_\alpha(t_2(\beta)) \times -b \times (t_2(\beta)) - t_1(\beta) \times (1 + t_2^2(\beta))}$$

$$\alpha_3 = \frac{b^2 N(t_1(\alpha))}{Q_\beta(t_1(\alpha)) \times -b \times (t_1(\alpha)) - t_2(\alpha) \times (1 + t_1^2(\alpha))}$$



$$\alpha_4 = \frac{b^2 N(t_1(\beta))}{Q_\alpha(t_1(\beta)) \times -b \times (t_1(\beta)) - t_2(\beta) \times (1 + t_1^2(\beta))}$$

Pour préciser les signes de ces coefficients  $\alpha_i$  (dans le but de majorer I) on peut calculer

$$N(v_i) = ab(1 + k^2 v_i^2)(1 + v_i^2) + u(v_i)(1 - kv_i^2) \times b \times (1 + k^2 v_i^2)$$

On peut tenir compte du fait que les valeurs  $v_i$  annulent le dénominateur de F

$$Q_\alpha(v_i) \times Q_\beta(v_i) = 0 \Leftrightarrow b(1 + v_i^2) - u(v_i) \times v_i(k + 1) = 0$$

soit la valeur de  $u_{\alpha\beta}$  pour ces pôles  $v_i$

$$u_{\alpha\beta}(v_i) = \frac{b(1 + v_i^2)}{v_i(k + 1)}$$

En reportant

$$N(v_i) = b(1 + k^2 v_i^2) \left[ a(1 + v_i^2) + \frac{b(1 + v_i^2)}{v_i(k + 1)}(1 - kv_i^2) \right]$$

$$N(v_i) = b(1 + k^2 v_i^2)(1 + v_i^2) \left[ a + \frac{b(1 - kv_i^2)}{v_i(k + 1)} \right] \quad (i)$$

$$\text{mais on a encore } Q_\alpha(v_i) = 0 \qquad b(1 - kv_i^2) + v_i(k + 1)(a - \alpha) = 0$$

$$\text{ou } Q_\beta(v_i) = 0 \qquad \text{ou } b(1 - kv_i^2) + v_i(1 + k)(a - \beta) = 0$$

$$\text{donc } N(v_i) = b(1 + k^2 v_i^2)(1 + v_i^2) \times \begin{cases} \alpha \\ \text{ou} \\ \beta \end{cases} \quad \text{suivant que } v_i \text{ est racine de } Q_\alpha \text{ ou de } Q_\beta$$

Comme  $\alpha$  et  $\beta$  sont négatives  $N(v_i) < 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4$

En se reportant alors au tableau de signes de  $Q_\alpha$  et de  $Q_\beta$  on obtient

$$\alpha_1 > 0 \quad ; \quad \alpha_2 < 0 \quad ; \quad \alpha_3 > 0 \quad ; \quad \alpha_4 < 0$$

## 2°) Calcul du temps en fonction de $\theta$

Sur la trajectoire entre les angles polaires  $\theta_0$  et  $\theta$ , le temps mis à parcourir cet arc est

$$\tau(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\dot{\varphi}} d\varphi$$

$$\tau(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{b - u_{\alpha\beta}(\varphi) \sin \varphi \cos \varphi (k+1)} d\varphi$$

On pose à nouveau  $v = \tan \varphi$       $dv = (1 + v^2)d\varphi$

$$\tau(\theta) = \int_{\tan \theta_0}^{\tan \theta} \frac{b(1 + k^2 v^2)}{Q_{\alpha}(v) \times Q_{\beta}(v)} dv = \int_{\tan \theta_0}^{\tan \theta} G(v) dv$$

On peut encore décomposer la fraction  $G(v)$

$$G(v) = \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i}{b^2} \left( \frac{1}{v - v_i} \right)$$

D'où l'expression de  $\tau$

$$\tau(\theta) = \sum_{i=1}^4 \frac{\beta_i}{b^2} \ln \left| \frac{\tan \theta - v_i}{\tan \theta_0 - v_i} \right|$$

où les coefficients  $\beta_i$  sont donnés par

$$\beta_1 = \frac{b^3(1 + k^2 t_2^2(\alpha))}{Q_{\beta}(t_2(\alpha)) \times -b \times (t_2(\alpha) - (t_1(\alpha)))}$$

$$\beta_2 = \frac{b^3(1 + k^2 (t_2^2(\beta)))}{Q_{\alpha}(t_2(\beta)) \times -b \times (t_2(\beta) - (t_1(\beta)))}$$

$$\beta_3 = \frac{b^3(1 + k^2 (t_1^2(\alpha)))}{Q_{\alpha}(t_1(\alpha)) \times -b \times (t_1(\alpha) - (t_2(\alpha)))}$$

$$\beta_4 = \frac{b^3(1 + k^2 (t_1^2(\beta)))}{Q_{\alpha}(t_1(\beta)) \times -b \times (t_1(\beta) - (t_2(\beta)))}$$

On a visiblement  $\beta_i$  de signe contraire à  $\alpha_i$ .

On peut même préciser le lien entre les coefficients

$$\beta_i = \frac{b^3(1+k^2v_i^2)}{b^2(N(v_i))} \alpha_i = \frac{1}{(\alpha \text{ ou } \beta)} \alpha_i$$

compte tenu de (i).

### 3°) Lien entre I et t

Rappelons les résultats :

$$I(\theta) = \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i}{b^2} \ln \left| \frac{\tan \theta - v_i}{\tan \theta_0 - v_i} \right| + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right)$$

$$t(\theta) = \sum_{i=1}^4 \frac{\alpha_i}{\alpha \text{ ou } \beta} \ln \left| \frac{\tan \theta - v_i}{\tan \theta_0 - v_i} \right|$$

$$\text{d'où } I(\theta) = \alpha t(\theta) + \frac{\beta - \alpha}{b^2} \left[ \ln \left| \frac{\tan \theta - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} \right| + \ln \left| \frac{\tan \theta - v_1}{\tan \theta_0 - v_1} \right| \right] + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right|$$

Suivant les secteurs angulaires, nous procéderons à une majoration des termes

$$\ln \left| \frac{\tan \theta - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} \right| = K_2(\theta)$$

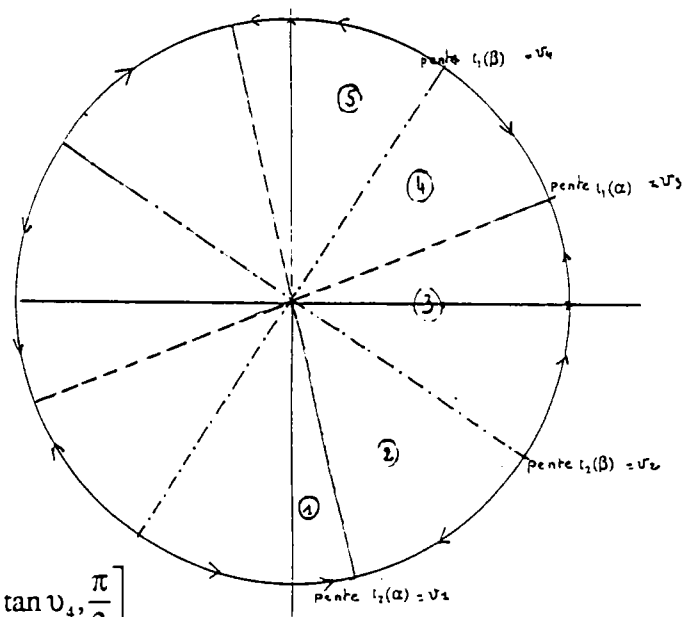
$$\ln \left| \frac{\tan \theta - v_1}{\tan \theta_0 - v_1} \right| = K_1(\theta)$$

$$\ln \left| \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right| = K(\theta)$$

On pourra faire une remarque géométrique. Quelque soit le secteur considéré, compte tenu du sens de rotation sur les trajectoires, celles-ci ont tendance à s'éloigner des directions propres liées à  $\beta$ . (Celles liées à  $\alpha$  semblent attractives). Les majorations ne devraient donc pas poser de problèmes pour  $K_2$  et  $K_1$ .

Pour le dernier terme, les valeurs à exclure sont  $\theta = \frac{\pi}{2}(\pi)$ , mais ces valeurs n'interviennent que du fait du changement de variable  $v = \tan \theta$ . Les angles polaires  $\theta = \frac{\pi}{2}(\pi)$  ne provoquent pas de discontinuité dans les trajectoires.

Si on numérote les secteurs,



On peut remarquer que dans le secteur 5,

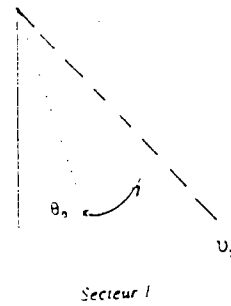
$$\theta_0 \in \left[ \text{Arc tan } v_4, \frac{\pi}{2} \right]$$

la trajectoire se poursuit pour des valeurs de  $\theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \text{Arc tan}(v_1) + \pi \right]$  et sera alors symétrique de la trajectoire obtenue dans le secteur 1.

L'étude se fera donc dans les secteurs 1, 2, 3 et 4.

4°) Majoration suivant les secteurs

→ 1er secteur  $\theta_0 \in \left] \frac{\pi}{2}, \text{Arc tan}(v_1) \right[$



Dans ce secteur,  $\theta$  est croissant, on a donc

$$\tan \theta_0 < \tan \theta < v_1 < v_2 < 0 < v_3 < v_4$$

$$\tan \theta_0 - v_2 < \tan \theta - v_2 < v_1 - v_2 < 0$$

$$0 < \frac{v_1 - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} < \frac{\tan \theta - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} < 1 \text{ de même } 0 < \frac{v_1 - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} < \frac{\tan \theta - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} < 1$$

On a alors

$$K_2(\theta) = \ln \left( \frac{\tan \theta - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} \right) \quad \text{et} \quad \ln \left( \frac{v_1 - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} \right) < K_2(\theta) < 0$$

de même

$$K_4(\theta) = \ln \left( \frac{\tan \theta - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} \right) \quad \text{et} \quad \ln \left( \frac{v_1 - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} \right) < K_4(\theta) < 0$$

De plus,

$$\tan^2 \theta < \tan^2 \theta_0 \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} < 1 \text{ et donc } \ln \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} < 0$$

D'où ; (en rappelant  $I(\theta) = \alpha(t(\theta)) + \frac{\beta - \alpha}{b^2} (K_2(\theta) + K_4(\theta)) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right)$ )

$$I(\theta) \leq \alpha t(\theta) + \frac{\beta - \alpha}{b^2} \left[ \ln \left( \frac{v_1 - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} \right) \left( \frac{v_1 - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} \right) \right] \text{ car } (\beta - \alpha < 0)$$

où encore  $I(\theta) \leq \alpha t(\theta) + C$  (C étant une constante).

→ 2nd secteur

Dans ce secteur,  $\theta$  est décroissant, on a donc

$$v_1 < \tan \theta < \tan \theta_0 < v_2 < 0 < v_3 < v_4$$

$$v_1 - v_2 < \tan \theta - v_2 < \tan \theta_0 - v_2 < 0$$

$$1 < \frac{\tan \theta - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} < \frac{v_1 - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} \text{ de même } 1 < \frac{\tan \theta - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} < \frac{v_1 - v_4}{\tan \theta_0 - v_4}$$

On obtient alors

$$K_2(\theta) = \ln \left( \frac{\tan \theta - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} \right) > 0 \text{ et } K_4(\theta) = \ln \left( \frac{\tan \theta - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} \right) > 0$$

$$\tan^2 \theta_0 < \tan^2 \theta < v_1^2 \text{ donc } \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} < \frac{v_1^2 + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \text{ soit } K(\theta) \leq \ln \left( \frac{v_1^2 + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right)$$

En reportant

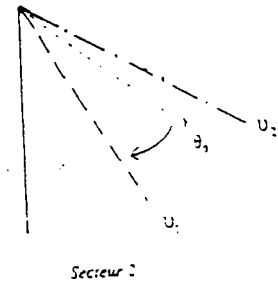
$$I(\theta) \leq \alpha t(\theta) + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{v_1^2 + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right)$$

soit encore  $I(\theta) \leq \alpha t(\theta) + C$  où C est une constante.

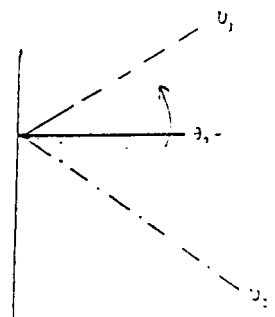
→ 3me secteur

Dans ce secteur,  $\theta$  est croissant, on a donc

$$v_2 < \tan \theta_0 < \tan \theta < v_3 < v_4$$



Secteur 2



Secteur 3

$$0 < \tan \theta_0 - v_2 < \tan \theta - v_2 < v_3 - v_2$$

$$1 < \frac{\tan \theta - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} < \frac{v_3 - v_2}{\tan \theta_0 - v_2}$$

$$\text{soit } K_2(\theta) = \ln \left( \frac{\tan \theta - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} \right) \text{ vérifie } 0 < K_2(\theta) < \ln \left( \frac{v_3 - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} \right)$$

$$\text{Mais } \tan \theta_0 - v_4 < \tan \theta - v_4 < v_3 - v_4 < 0$$

$$0 < \frac{v_3 - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} < \frac{\tan \theta - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} < 1 \text{ donc } K_4(\theta) = \ln \left( \frac{\tan \theta - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} \right) \text{ vérifie}$$

$$\ln \left( \frac{v_3 - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} \right) < K_4(\theta) < 0$$

$$\text{De plus, } \tan^2 \theta < \sup(v_1^2, v_2^2) \text{ et } \ln \left( \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right) < \ln \left[ \frac{\sup(v_1^2, v_2^2) + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right]$$

On aura donc

$$I(\theta) \leq \alpha t(\theta) + \frac{\beta - \alpha}{b^2} \ln \left( \frac{v_3 - v_4}{\tan \theta_0 - v_4} \right) + \ln \left( \frac{\sup(v_1^2, v_2^2) + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right)$$

Soit encore  $I(\theta) \leq \alpha t(\theta) + C$  où  $C$  est une constante.

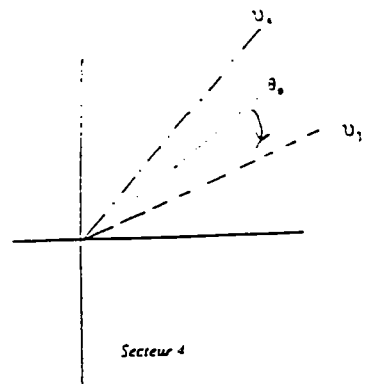
→ 4<sup>me</sup> secteur

Dans ce secteur,  $\theta_0$  est décroissant, on a donc

$$v_2 < 0 < v_3 < \tan \theta < \tan \theta_0 < v_4$$

$$0 < v_3 - v_2 < \tan \theta - v_2 < \tan \theta_0 - v_2$$

$$\Rightarrow \frac{v_3 - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} < \frac{\tan \theta - v_2}{\tan \theta_0 - v_2} < 1$$



$$\text{d'où } K_2(\theta) = \ln\left(\frac{\tan\theta - v_2}{\tan\theta_0 - v_2}\right) \text{ vérifie } \ln\left(\frac{v_3 - v_2}{\tan\theta_0 - v_2}\right) < K_2(\theta) < 0$$

$$v_3 - v_4 < \tan\theta - v_4 < \tan\theta_0 - v_4 < 0$$

$$1 < \frac{\tan\theta - v_4}{\tan\theta_0 - v_4} < \frac{v_3 - v_4}{\tan\theta_0 - v_4} \text{ donc}$$

$$K_4(\theta) = \ln\left(\frac{\tan\theta - v_4}{\tan\theta_0 - v_4}\right) \text{ vérifie } 0 < K_4(\theta) < \ln\left(\frac{v_3 - v_4}{\tan\theta_0 - v_4}\right)$$

$$\text{De plus, } \tan^2\theta < \tan^2\theta_0 \text{ donc } \ln\left(\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^2\theta_0 + 1}\right) < 0$$

$$\text{d'où } I(\theta) \leq \alpha t(\theta) + \frac{\beta - \alpha}{b^2} \ln\left(\frac{v_3 - v_2}{\tan\theta_0 - v_2}\right)$$

$$\text{soit } \underline{I(\theta) \leq \alpha t(\theta) + C}$$

Dans tous les secteurs, on obtient une majoration du type  $I(\theta) \leq \alpha t(\theta) + C$ ,

$$\text{soit } \ln\left(\frac{\rho(\theta)}{\rho(\theta_0)}\right) \leq \alpha t(\theta) + C \text{ ou encore } \rho(\theta) \leq \rho(\theta_0) \times e^C \times e^{\alpha t}$$

*D. Conclusions : similitudes avec le cas linéaire*

### 1°) Rappel du cas linéaire

Placement de pôle à  $(\alpha, \beta)$   $\beta < \alpha < 0$ .

$$\rightarrow \text{dans la base constituée de vecteurs propres } \dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} x$$

$$\text{d'où } x_1 = x_{01} e^{\alpha t} \quad x_2 = x_{02} e^{\beta t} \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = x_{01}^2 e^{2\alpha t} + x_{02}^2 e^{2\beta t}$$

$$\text{et } \|x\|^2 \leq \|x_0\|^2 e^{2\alpha t} \text{ soit } \|x\| \leq \|x_0\| e^{\alpha t}$$

$\rightarrow$  dans une autre base  $\dot{y} = My$  avec  $y = P^{-1}x$

$$\text{d'où } \|y(t)\| \leq \|P^{-1}\| \|x_0\| \leq \|P^{-1}\| \times \|x_0\| \times e^{\alpha t} \Rightarrow \|y(t)\| \leq ce^{\alpha t}$$

→ la majoration donnée par  $\alpha$  est la plus fine possible,

en effet, si on pouvait écrire  $\|y(t)\| \leq c'e^{\alpha't}$  avec  $\alpha' < \alpha$

alors  $x(t) = P(t)y(t)$  vérifierait  $\|x(t)\| \leq \|P\| \times c'e^{\alpha't}$  ou  $\|x\|^2 \leq \|P\|^2 \times c'^2 \times e^{2\alpha't}$

mais  $\|x(t)\| = x_{01}^2 e^{2\alpha t} + x_{02}^2 e^{2\beta t} \Rightarrow x_{01}^2 e^{2(\alpha-\alpha')t} + x_{02}^2 e^{2(\beta-\alpha')t} \leq \|P\|C'^2$

Mais comme  $e^{2(\alpha-\alpha')t}$  est une expression qui tend vers  $+\infty$  avec  $t$ , une telle majoration est impossible.

## 2°) Comparaison avec les résultats obtenus

→ Nous avons une similitude du portrait de phases avec le cas linéaire au dédoublement près des directions propres, y compris pour le sens de rotation. Les directions propres correspondant à la plus grande valeur propre semblant attractives.

→ nous avons obtenu une majoration de la norme  $\|x(t)\|$  de la forme  $\|x(t)\| \leq Ke^{\alpha t}$  qui est donc comparable à la majoration obtenue dans le cas linéaire.

→ montrons que dans ce cas encore "on ne peut pas faire mieux", c'est-à-dire qu'une majoration du type  $\|x(t)\| \leq c'e^{\alpha't}$  avec  $\alpha' < \alpha$  est impossible.

En effet, si l'on pouvait écrire une telle majoration pour tout  $t$ , on aurait  $x(t)e^{-\alpha't}$  majoré indépendamment du temps.

Soit  $I(\theta) - \alpha't < 0$

$$\text{mais } I(\theta) = \alpha t(\theta) + \frac{\beta - \alpha}{b^2} [K_2(\theta) + K_4(\theta)] + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right)$$

$$\text{et } I(\theta) - \alpha't = (\alpha - \alpha')t + \frac{\beta - \alpha}{b^2} [K_2(\theta) + K_4(\theta)] + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right)$$

Mais nous avons vu que les termes  $K_2(\theta), K_4(\theta)$  ;  $\ln \left( \frac{\tan^2 \theta + 1}{\tan^2 \theta_0 + 1} \right)$  étaient majorés par des constantes quelque soit le secteur considéré, on obtient alors  $(\alpha - \alpha')t < C''$  ce qui est impossible pour  $\alpha' < \alpha$ .



## CONCLUSION

Malgré le cadre restreint de la dimension 2 et le fait que la stabilisation des systèmes bilinéaires ait déjà été étudiée, des résultats intéressants par leur simplicité inattendue et leurs similitudes avec le cas linéaire ont été obtenus. Bien entendu, ce travail ne prétend pas être intéressant au point de vue applications - il apporte toutefois des résultats beaucoup plus précis que ceux déjà connus ; leur simplicité constitue l'intérêt principal de ce travail, à savoir une certaine esthétique mathématique.

La technique de placement de pôles variable semblant fructueuse, on peut essayer de l'étendre dans différentes voies, par exemple :

- à des systèmes bilinéaires homogènes dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n > 2$ ) en essayant de contourner, la difficulté constituée par l'ensemble des  $x$  tels que  $\text{rg}(b(x), Ab(x), \dots, A^{m-1}b(x))$  est nul sachant que cet ensemble est de mesure nulle.

- à des systèmes bilinéaires observés,

- à des systèmes bilinéaires non homogènes

$$\dot{x} = Ax + u(Bx + d)$$

- puis à des systèmes du type :  $\dot{x} = Ax + ug(x)$

dans deux directions :

a) si  $g(0) \neq 0$ , comparer la placement de pôle linéaire avec le placement de pôles variable (avec la condition  $(g(x), Ag(x), \dots, A^{n-1}g(x))$  de rang  $n$  au moins localement),

b) si  $g(0) = 0$  et  $g'(0) \neq 0$ , en se ramenant au cas d'un système bilinéaire homogène.

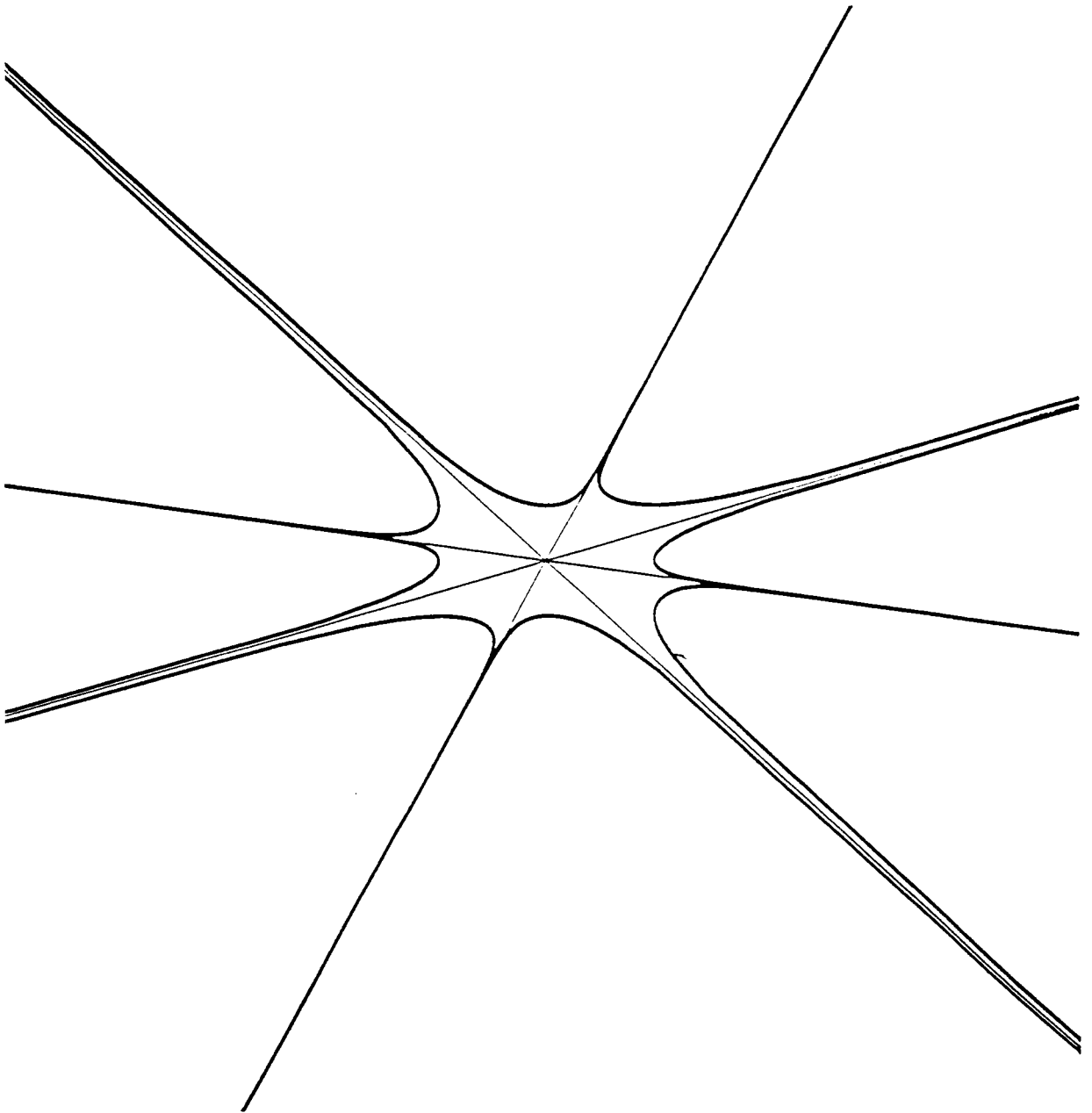


FIG. 1 - « Spectre » fixé à  $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad u(x) = \frac{-x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

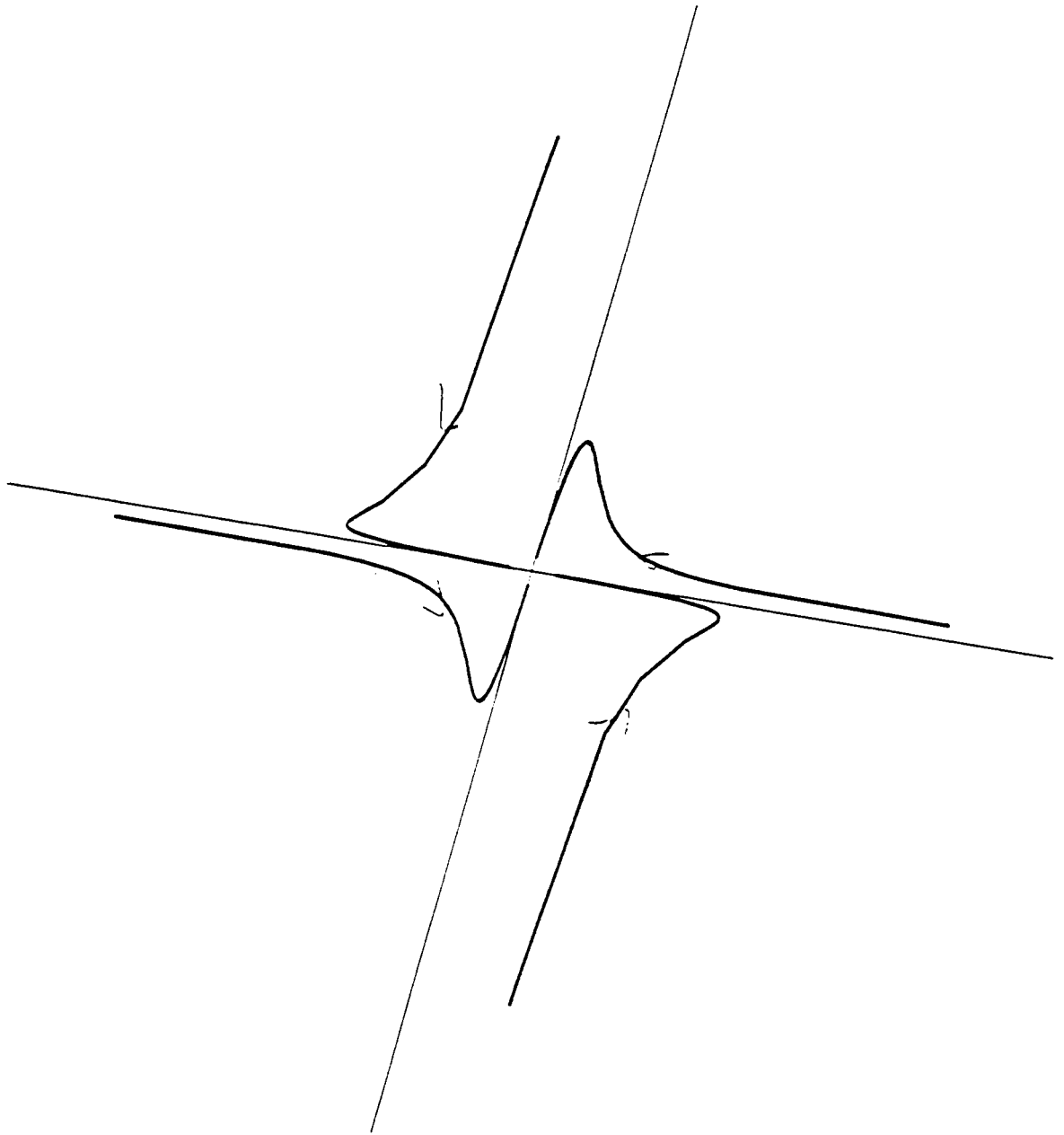


FIG. 3 - « Spectre » fixé à  $(-1, -1)$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad u(x) = \frac{-4x_1^2 - 9x_1x_2 + 8x_2^2}{x_1^2 + 4x_2^2}$$

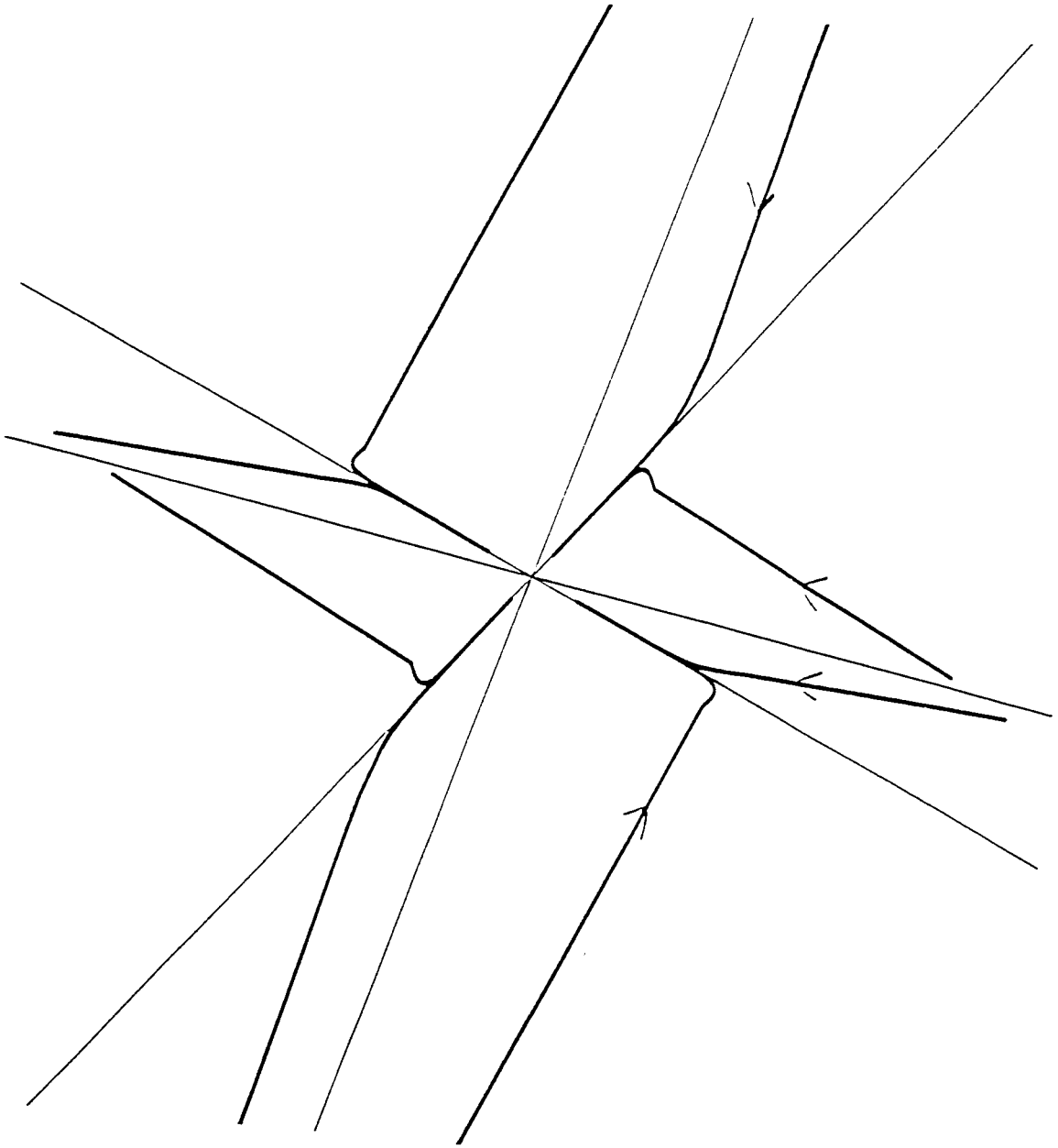


FIG. 2 - « Spectre » fixé à  $(-\frac{1}{4}, -\frac{7}{4})$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & -1 \\ 1 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad u(x) = \frac{5(-x_1^2 + 2x_2^2)}{2(x_1^2 + 4x_2^2)}$$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ADDA, *Contrôlabilité des systèmes bilinéaires dans le plan*, Publications du département de mathématiques de Lyon (1985).
- [2] V. ARNOLD, *Equations différentielles ordinaires* (Eds MIR).
- [3] R.W. BROCKETT, *Differential Geometric Control Theory*, Eds Brockett, Milmann and Sussmann.
- [4] R. CHABOUR et J-C. VIVALDA, *Stabilization of nonlinear two-dimensional systems: a bilinear approach*, in: NOLCOS'92 (Bordeaux, France).
- [5] R. CHABOUR et J-C. VIVALDA, *Stabilisation des systèmes bilinéaires dans le plan*, *CR Acad. Sci.*, Paris (312) pp. 1017-1020 (1991).
- [6] J-P. GAUTHIER, *Structure des systèmes non linéaires*, Eds du CNRS.
- [7] J.P. GAUTHIER et I. KLUPKA - Control systems en semi simple Lie groups and their homogeneous spaces - *Ann. Institut Fourier* Tome 3, Fax. 4 (1981).
- [8] J-P. GAUTHIER et G. BORNARD, *A Theorem of Controllability for Bilinear System*, Note interne LAG Grenoble (France).
- [9] J-P. GAUTHIER et G. BORNARD, *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique et la théorie du signal*, Chapitre : Stabilisation des systèmes non linéaires. Eds du CNRS (1981).
- [10] V. JURDJEVIC et J.P. QUINN Controllability and stability - *Journal of Differential Equations*, (28) : 381 - 389, (1978).
- [11] W. HAHN, *Stability of the Motion*, Springer-Verlag (1967).
- [12] H. KAWSKI, Stabilization of nonlinear systems in the plane, *Systems and Control Letters* (12) pp. 169-175 (1990).

- [13] J.P. POMET et J.M. CORON A remark on design of time-varying stabilising feedback laws for controllable systems without drift.
- [14] H. NIJMEIJER et A. VAN DER SCHAFT, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag.
- [15] N. ROUCHE et J. MAWHIN, *Equations différentielles ordinaires*, (vol.2) Eds. Masson.
- [16] M. SPIVAK, *Differential Geometry*, (vol. 1) Eds. Publish or Perish (1979).

# STABILISATION, PAR ESTIMATION DE LA VITESSE, D'UN MANIPULATEUR RIGIDE

## §1 INTRODUCTION

On se propose dans ce papier de construire un feedback stabilisant un manipulateur rigide à travers l'estimation donnée par un observateur. L'équation d'un robot est classiquement donnée par :

$$H(q)\dot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + \tau_g(q) = \tau(q)$$

On supposera que l'on peut observer  $q$ , il faut donc reconstruire  $\dot{q}$  à l'aide d'un observateur approprié.

Dans [1], on nous a proposé un feedback et un observateur qui stabilisent en fait le système linéarisé. Nous proposons de travailler directement sur le système. De plus, leur stabilisation repose sur un argument mathématiquement incorrect [ ] - comme il sera montré dans le paragraphe suivant : §6.

## §2 ENONCE DU PROBLEME

### A) Equations du système

Un manipulateur rigide est un système mécanique invariant. Son énergie cinétique est une forme quadratique définie positive en les vitesses articulaires, soit

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T H(q) \dot{q} \quad q \in \mathbb{R}^n \quad \dot{q} \in \mathbb{R}^n \quad H = (h_{ij}) \in M_{n,n}$$

en appliquant les équations de Lagrange à ce système, on obtient

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$\text{mais } \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = (H\dot{q})_i = \sum_{j=1}^n h_{ij} \dot{q}_j$$

$$\text{d'où, } \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n \dot{h}_{ij} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$\text{il vient } Q_i = \sum_{j=1}^n h_{ij} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

$$\text{soit } Q_i = H(q) \dot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q}$$

$$\text{ou } H(q) \dot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + \tau_g(q) = \tau$$

$$\text{avec : } [C(q, \dot{q}) \dot{q}]_i = \dot{q}^T N_i \dot{q}, \quad N_i = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial h_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial h_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial q_i} \right]$$

Donc,  $[C(q, \dot{q}) \dot{q}]_i$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  dont chaque composante est une forme quadratique des vitesses, les matrices  $N_i$  sont symétriques et vérifient  $\|N_i(q)\| \leq \alpha_i \quad \forall q \in \mathbb{R}^n$ .

Ce vecteur représente les forces de coriolis et centripètes appliquées au système.

$\tau_g(q)$  est un vecteur représentant les forces de gravité.

$\tau(q)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  représentant les forces extérieures appliquées au système (moteur, ...).

Comme un robot est un système physique, il paraît raisonnable de supposer que les vitesses sont bornées, c'est-à-dire que

$$\|\dot{q}\| \leq \beta \quad (\text{cette supposition est aussi faite dans [1]}).$$

B) En posant

$$x_1 = q$$

$$x_2 = \dot{q}$$

$$\text{et } g(x_1, x_2) = -H^{-1}(x_1) [C(x_1, x_2) x_2 + \tau_g(x_1)]$$

$$u(t) = H^{-1}(x_1) \tau$$

Le système s'écrit alors

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g(x_1, x_2) + u \end{cases}$$



## §3 CONSTRUCTION D'UN FEEDBACK STABILISANT

Proposition 1

Le système (1) ou encore (2) est stabilisé par le feedback

$$u = H^{-1}(x_1)\tau_g(x_1) + \tilde{F}x$$

où  $\tilde{F}$  est une application linéaire que l'on explicitera ci-dessous.

Lemme 1

Le système (2) peut s'écrire (3) avec la paire (A, B) contrôlable.  
 $\dot{x} = Ax + B[u + g(x_1, x_2)] \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2n} \quad (3)$

soit en posant  $x_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$   
 $x_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)$

et  $x = (x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \dots, x_1^n, x_2^n) \in \mathbb{R}^{2n}$

On prend pour matrice  $A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ & & \ddots \\ & 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad A \in M_{2n \times 2n}$

et  $B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 \\ & & \ddots \\ & 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad B \in M_{2n \times n}$

La paire (A, B) est alors contrôlable.

\* démonstration de la proposition (1)

Il résulte de [2] que le système (3) peut être stabilisé. Nous proposons une démonstration adaptée au système proposé qui est légèrement plus simple.

Etape 1

La paire  $(A, B)$  étant contrôlable, il existe  $F$  telle que  $M=A+BF$  ait toutes ses valeurs propres avec parties réelles négative.  
D'après les équations de Lyapunov, il existe alors une matrice  $S$  définie positive vérifiant

$$M^T S + SM = -Q \quad Q \text{ étant une matrice définie positive}$$

Etape 2

On considère la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix} & 0 \\ & 0 & \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha > 1 \quad \text{de } M_{2n \times 2n}$$

Cette matrice vérifie les propriétés suivantes

- i)  $\alpha \Phi^{-1} A \Phi = A$
- ii)  $\forall F \in \mathbb{R}_{n \times 2n}$  il existe  $\bar{F} \in \mathbb{M}_{n \times 2n}$  telle que  

$$B \bar{F} = \alpha \Phi^{-1} B F \Phi$$
soit  $\bar{F} = \alpha B^T \Phi^{-1} B F \Phi$
- iii)  $\frac{1}{\alpha^2} \|x\| \leq \|\Phi(x)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|x\|$

Etape 3

Le feedback  $u = H^{-1}(x_1) \tau_z(x_1) + \bar{F}x$  stabilise le système

En effet : si on pose  $\bar{M} = A + B \bar{F}$

Le système (3) peut s'écrire

$$\dot{x} = \bar{M}x - B H^{-1}(x_1) (C(x_1, x_2) x_2) = \bar{M}x + B \bar{g}(x_1, x_2)$$

$$\text{avec } \bar{g}(x_1, x_2) = -H^{-1}(x_1) C(x_1, x_2) x_2$$

La fonction  $V$  définie par  $V(x) = x^T \phi S \phi x$  est une fonction de Lyapunov

Elle est définie positive et de plus,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= x^T \phi S \phi \dot{x} + \dot{x}^T \phi S \phi x \\ &= x^T [\phi S \phi \bar{M} + \bar{M}^T \phi S \phi] x + 2x^T \phi S \phi B \bar{g}(x_1, x_2) \\ &= -\alpha x^T \phi Q \phi x + 2x^T \phi S \phi B \bar{g}(x_1, x_2)\end{aligned}$$

On remarque que

$$x^T \phi Q \phi x \geq a \|\phi x\|^2 \quad \text{où } a = \inf(z^T Q z \quad z \in S^{2n-1})$$

Soit alors

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha a \|\phi(x)\|^2 + 2\|\phi(x)\| \cdot \|\bar{S}\| \cdot \|\phi B \bar{g}(x_1, x_2)\|$$

si on calcule

$$\phi B \bar{g}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha^2} \bar{g}_1(x_1, x_2) \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha^2} \bar{g}_2(x_1, x_2) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\text{on a } \|\phi B \bar{g}(x_1, x_2)\|^2 = \frac{1}{\alpha^4} [\bar{g}_1^2(x_1, x_2) + \bar{g}_2^2(x_1, x_2) + \dots] = \frac{1}{\alpha^4} \|\bar{g}(x_1, x_2)\|^2$$

$$\|\phi B \bar{g}(x_1, x_2)\| = \frac{1}{\alpha^2} \|\bar{g}(x_1, x_2)\|$$

$$\text{mais } \bar{g}(x_1, x_2) = -H^{-1}(x_1) C(x_1, x_2) x_2 \quad \text{où } C(x_1, x_2) x_2 = \begin{pmatrix} x_2^T N_1(x_1) x_2 \\ \vdots \\ x_2^T N_i(x_1) x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

on obtient alors

$$\|\bar{g}(x_1, x_2)\| \leq K_1 K_2 \|x_2\|^2$$

$$\text{où } \|H^{-1}(x_1)\| \leq K_1$$

$$\text{et } K_2 = \sup(\alpha_i) \quad \text{avec } \|N_i(x_1)\| \leq \alpha_i$$

$$\|\phi B \bar{g}(x_1, x_2)\| \leq \frac{1}{\alpha^2} K_1 K_2 \|x_2\|^2$$

mais

$$fx = \begin{pmatrix} \frac{x_1^1}{\alpha} \\ \frac{x_1^2}{\alpha} \\ \frac{x_2^1}{\alpha^2} \\ \frac{x_2^2}{\alpha^2} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

d'où  $\|\phi x\|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_1^i}{\alpha}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_2^i}{\alpha^2}\right)^2 = \frac{\|x_1\|^2}{\alpha^2} + \frac{\|x_2\|^2}{\alpha^4} \geq \frac{\|x_2\|^2}{\alpha^4}$

$\|\phi x\| \geq \frac{\|x_2\|^2}{\alpha^2}$       rappelons que  $\|x_2\| \leq \beta$

on obtient alors  $\|\phi B \tilde{g}(x_1, x_2)\| \leq \frac{1}{\alpha^2} K_1 K_2 \|x_2\| \alpha^2 \|\phi x\| \leq K_1 K_2 \beta \|\phi x\|$

soit  $\|\phi B \tilde{g}(x_1, x_2)\| \leq K \|\phi x\|$

et en reportant dans la majoration de  $\dot{V}(x)$

$$\dot{V}(x) \leq [-\alpha a + 2K \|S\|] \|\phi x\|^2$$

en choisissant  $\alpha > \text{Max}(1, \frac{2K \|S\|}{a})$

alors  $\dot{V}(x) \leq -C \|\phi x\|^2$  avec  $C > 0$

$$\dot{V}(x) \leq -\frac{C}{\alpha^2} \|x\|^2 \leq -C \|x\|^2$$

Le système tend donc asymptotiquement vers l'origine.

#### §4 CONSTRUCTION D'UN OBSERVATEUR

Dans ce paragraphe, on se propose de construire un observateur du système qui fournira une estimation de  $\dot{q}$  la technique est semblable à celle de [2].

On vérifiera que les hypothèses requises sont celles du système

Considérons le système (3)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B[u + g(x_1, x_2)] \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\text{avec } C = \begin{pmatrix} (1,0) & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & (1,0) & \\ & & 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad C \in \mathbb{M}_{n,2n}$$

compte tenu des notations décrites dans le lemme (1) et  $y = x_1$ , on remarquera que la paire  $\{A, C\}$  est observable.

On définit l'observateur suivant

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B[u + g(x_1, \hat{x}_2) - \bar{E}(C\hat{x} - y)] \quad (4)$$

en posant  $e = \hat{x} - x$

$$\dot{e} = (A - \bar{E}C)e + B[g(x_1, \hat{x}_2) - g(x_1, x_2)] \quad (5)$$

### Proposition 2

| Il existe une application  $\bar{E}$  telle que (4) soit un observateur asymptotique de (3).

Démonstration analogue à la précédente

On remarquera que :  $g(x_1, \hat{x}_2) - g(x_1, x_2) = -H^{-1}(x_1)(C(x_1, \hat{x}_2)\hat{x}_2 - C(x_1, x_2)x_2)$

$$\text{avec } C(x_1, \hat{x}_2)\hat{x}_2 - C(x_1, x_2)x_2 = \begin{pmatrix} \hat{x}_2^T N_1(x_1)\hat{x}_2 - x_2^T N_1(x_1)x_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_2^T N_i(x_1)\hat{x}_2 - x_2^T N_i(x_1)x_2 \end{pmatrix}$$

soit en remarquant  $\hat{x}_2^T N_i(x_1)\hat{x}_2 - x_2^T N_i(x_1)x_2 = (\hat{x}_2 + x_2)^T N_i(x_1)(\hat{x}_2 - x_2)$   
( $N_i$  est symétrique)

$$\|g(x_1, \hat{x}_2) - g(x_1, x_2)\| \leq K_1 K_2 \|\hat{x}_2 + x_2\| \|\hat{x}_2 - x_2\| \quad (K_2 = \sup_i \alpha_i)$$

$$\leq 2K_1 K_2 \beta \|\hat{x}_2 - x_2\|$$

en posant  $K' = 2K_1 K_2 \beta$

$$\|g(x_1, \hat{x}_2) - g(x_1, x_2)\| \leq K' \|\hat{x}_2 - x_2\|$$

La démonstration se termine comme précédemment, en posant :

$$W = e^T \Phi S_1 \Phi e \text{ et en montrant } \dot{W} \leq -c_1 \|e\|^2$$

L'observateur proposé est un observateur asymptotique.

## §5 LE SYSTEME BOUCLE

Dans ce paragraphe, on utilise l'estimation des vitesses donnée par l'observateur précédent pour stabiliser le système.

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B[\bar{F}\hat{x} + g(x_1, x_2)] \\ \dot{e} = (A - \bar{E}C)e + B(g(x_1, \hat{x}_2) - g(x_1, x_2)) \end{cases} \quad (6)$$

### Proposition 3

Le système bouclé avec l'estimation donnée par l'observateur est G.A.S..

Démonstration : on pose  $e = \hat{x} - x$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B\bar{F})x + B(\bar{F}e + g(x_1, x_2)) \\ \dot{e} = (A - \bar{E}C)e + B(g(x_1, \hat{x}_2) - g(x_1, x_2)) \end{cases} \quad (7)$$

en posant  $u(x, e) = \beta V(x) + W(e)$   $\beta > 0$

on peut trouver  $\beta$  (cf. [2]) de telle sorte que  $\dot{u}(x, e)$  soit définie négative.

### §6 STABILISATION DU SYSTEME SUR UNE TRAJECTOIRE DONNEE

Dans ce paragraphe on considère une trajectoire de référence  $q_r$  deux fois dérivable.

On pose  $\bar{d}(t) = q(t) - q_r(t)$

$$\bar{d}(t) = \dot{q}(t) - \dot{q}_r(t)$$

$$\bar{d}(t) = \ddot{q}(t) - \ddot{q}_r(t)$$

Le système que vérifie  $\bar{d}$  est alors

$$\ddot{\bar{d}} = -H^{-1}(q(t))[C(q, \dot{q})\dot{q} + \tau g(q)] + u - \ddot{q}_r \quad (8)$$

soit en posant  $d_1 = \bar{d}$

$$d_2 = \dot{\bar{d}}$$

Le système devient

$$\begin{cases} \dot{d}_1 = d_2 \\ \dot{d}_2 = -H_{-1}(x_1)[C(x_1, x_2)x_2 + \tau g(x_1)] + u - \ddot{q}_r \end{cases} \quad (9)$$

La démarche du § s'applique

si on pose  $z = (d_1^1, d_2^1, d_1^2, d_2^2, \dots, d_1^n, d_2^n)$   $z \in \mathbb{R}^{2n}$

on obtient

$$\{\dot{z} = Az + B[u + g(d_1, d_2)]\} \quad (10)$$

avec les matrices  $A, B$  précédemment définies

$$\text{soit } A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & & 0 \\ \vdots & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} (0 \ 1) & & & \\ & (0 \ 1) & 0 & \\ & & (0 \ 1) & \\ & 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{et } g(d_1, d_2) = -H^{-1}(x_1)[C(x_1, x_2)x_2 + \tau_3(x_1)] - \ddot{q}_r$$

#### Proposition 4

Le feedback  $u = \ddot{q}_r + H^{-1}(x_1)[C(x_1, \dot{q}_r)\dot{q}_r + \tau_3(x_1)] + \ddot{F}z$

stabilise le système (10) sur l'origine, donc la trajectoire  $q(t)$  sur la trajectoire  $q_r(t)$  de référence.

#### Démonstrations

On applique les démonstrations précédentes. Pour cela, on doit majorer l'expression  $\| \Phi B H^{-1}(x_1) \bar{g}(d_1, d_2) \|^2$

$$\| \Phi B H^{-1}(x_1) \bar{g}(d_1, d_2) \|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha^2} [H^{-1}(x_1) \bar{g}(d_1, d_2)]_1 \\ 0 \\ \frac{1}{\alpha^2} [H^{-1}(x_1) \bar{g}(d_1, d_2)]_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$= \frac{1}{\alpha^4} [H^{-1}(x_1) \bar{g}(d_1, d_2)]^2 \leq \frac{1}{\alpha^4} K_1^2 [\bar{g}(d_1, d_2)]^2$$

$$\text{avec } \bar{g}(d_1, d_2) = C(x_1, x_2)x_2 - C(x_1, \dot{q}_r)\dot{q}_r$$

$$\begin{aligned} \text{ou encore } [\bar{g}(d_1, d_2)]_i &= x_2^T N_i(x_1)x_2 - \dot{q}_r^T N_i(x_1)\dot{q}_r \\ &= (x_2 + \dot{q}_r)^T N_i(x_1)(x_2 - \dot{q}_r) \\ &= (x_2 + \dot{q}_r) N_i(x_1) d_2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \|\bar{g}(d_1, d_2)\|^2 = \sum_{i=1}^n g_i^2 \leq K_2^2 \|d_2 + 2\dot{q}_r\|^2 \|d_2\|^2$$

$$\text{avec } K_2 = \sup_{i=1, \dots, n} (\alpha_i) \quad \text{et } \alpha_i \text{ tel que } \|N_i(x)\| \leq \alpha_i$$

On suppose à nouveau  $\dot{q}_r$  et  $x_2$  majorés par une constante  $\beta$

$$\|\bar{g}(d_1, d_2)\|^2 \leq K_2^2 4\beta^2 \|d_2\|^2$$

$$\|\bar{g}(d_1, d_2)\| \leq 2K_2 \beta \|d_2\|$$

$$\text{soit } \| \Phi B H^{-1}(x_1) \bar{g}(d_1, d_2) \|^2 \leq \frac{1}{\alpha^4} K_1^2 K_2^2 4\beta^2 \|d_2\|^2$$

résultat comparable à celui utilisé dans le §2. La démonstration se termine de la même façon.

De même que dans le §4, on peut construire un observateur destiné à donner une estimation de la vitesse  $x_2$ .

Si le système donné est :

$$\begin{cases} \dot{d}_1 = d_2 \\ \dot{d}_2 = g(d_1, d_2) + u \\ y = Cz \end{cases} \quad (11)$$

ou encore

$$\dot{d} = Ad + B[u + g(d_1, d_2)] \quad (12)$$

L'observateur choisi est

$$\begin{aligned} \hat{\dot{d}} &= A\hat{d} + B[u + g(d_1, \hat{d}_2)] - \bar{E}(c\hat{d} - y) \\ z &= (d_{11}, d_{21}, d_{12}, d_{22}) \\ \hat{z} &= (\hat{d}_{11}, \hat{d}_{21}, \hat{d}_{12}, \hat{d}_{22}) \\ \text{et } \hat{d}_2 &= (\hat{d}_{21}, \hat{d}_{22}) \end{aligned} \quad (13)$$

La définition de  $\bar{E}$  donné au paragraphe §4 reste la même, en posant  $e = \hat{d} - d$  on obtient

$$\dot{e} = Ae + B[g(d_1, \hat{d}_2) - g(d_1, d_2)] \quad (14)$$

$$\text{avec } g(d_1, \hat{d}_2) - g(d_1, d_2) = -H^{-1}(d_1 + q_r) \underbrace{\left[ (x_1, \hat{d}_2 + \dot{q}_r)(\hat{d}_2 + \dot{q}_r) - C(x_1, d_2 + \dot{q}_r)d_2 + \dot{q}_r \right]}_{h(d_1, d_2, \hat{d}_2)}$$

avec la composante de rang  $i$

$$\begin{aligned} [h(d_1, d_2, \hat{d}_2)]_i &= (\dot{q}_r + \hat{d}_2)^T N_i(q_r + d_1)(\dot{q}_r + \hat{d}_2) - (\dot{q}_r + d_2)^T N_i(q_r + d_1)(\dot{q}_r + d_2) \\ &= (2\dot{q}_r + \hat{d}_2 + d_2)^T N_i(q_r + d_1)(\hat{d}_2 - d_2) \\ &= (x_2 + \dot{q}_r + \hat{d})^T N_i(x_1)(e_2) \end{aligned}$$

Cette relation permet d'obtenir une majoration similaire à celle déjà démontrée.

L'observateur choisi est bien asymptotique, et le couplage effectué au paragraphe §5 permet donc de stabiliser le système sur la trajectoire  $q_r$  de référence.

## §7 ETUDE D'UN EXEMPLE

Dans cette partie, on étudie le cas particulier d'un manipulateur à deux articulations.



Ces équations du système sont données par l'équation (1)

$$\text{avec } H(q) = \begin{bmatrix} h_0 + 2h_1c_2 & h_2 + h_1c_2 \\ h_2 + h_1c_2 & h_2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} h_1s_2(-2\dot{q}_1\dot{q}_2 - \dot{q}_2^2) \\ h_1s_1\dot{q}_1^2 \end{bmatrix}$$

où  $h_i$  et  $g_i$  sont des constantes fonctions des distances, masses et autres paramètres.

Les valeurs choisies pour la simulation sont

$$h_0 = 6,7 \quad h_1 = 3 \quad h_2 = 3,4 \quad g_1 = 43 \quad g_2 = 30$$

La notation  $C_{ij}$  est utilisée pour  $\cos(q_i + q_j)$ , pour une trajectoire de référence

$$q_{1r} = \cos(3t)$$

$$q_{2r} = \sin(5t)$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} x_1(0) &= [1; 0; 5]^T & \dot{x}_1(0) &= [1; 0; 5]^T \\ x_2(0) &= [1; 4]^T & \dot{x}_2(0) &= [2; 2]^T \\ q_r(0) &= [1; 0]^T \\ \dot{q}_r(0) &= [0; 5]^T \end{aligned}$$

Le feedback proposé est

$$u = -\ddot{q}_r + H^{-1}(x_r)[C(x_r, \dot{q}_r)\dot{q}_r + \text{tg}(x_r)] + \tilde{F}\hat{z}$$

avec  $\hat{z} = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_1^2, \hat{d}_2^2)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Partie 1

Il existe  $F$  tel que  $A + BF$  ait toute ses valeurs propres à partie réelle négative

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ alors } A + BF = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

qui a pour valeurs propres  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$$\tilde{F} = \alpha B^T \Phi^{-1} B F \Phi \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha = \max(1, \frac{2\|S\|_k}{a})$

### Partie 2

Pour toute matrice définie positive  $Q$ , il existe  $S$  définie positive, telle que

$$SM + M^T S = -Q$$

$$\text{si } Q = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \text{ alors } S = Q.$$

### Partie 3

$$z^T Q z = 2z_1^2 + 2z_1 z_2 + z_2^2 + 2z_3^2 + 2z_3 z_4 + 2z_4^2$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 \leq z^T Q z \leq 3(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2)$$

donc  $1 \leq a \leq 3$

$K_2 = \sup(\alpha_i)$  avec  $\|IN_i(x_i)\| \leq \alpha_i$

$$\text{ici } C(q, \dot{q})\dot{q} = \begin{pmatrix} h_1 s_2 (-2\dot{q}_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_2^2) \\ h_1 s_2 \dot{q}_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } \dot{q}^T N_1(q)\dot{q} = h_1 s_2 (-2\dot{q}_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_2^2) \Rightarrow N_1 = \begin{pmatrix} 0 & -h_1 s_2 \\ -h_1 s_2 & -h_1 s_2 \end{pmatrix} = -h_1 s_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où  $\|N_1\| \leq |h_1 s_2| \times 3 \leq 3h_1$  ( $s_2 = \sin q_2$ )

$$\dot{q}^T N_2(q)\dot{q} = h_1 s_2 \dot{q}_1^2 \text{ d'où } N_2 = \begin{pmatrix} h_1 s_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $\|IN_2\| \leq |h_1 s_2| \leq h_1$

soit  $K_2 = \sup(|h_1 s_2|, 3|h_1 s_2|) = 3|h_1 s_2| \leq 3h_1$

$K_1$  défini par  $\|H^{-1}(x_1)\| \leq K_1$ .

$$H(x_1) = \begin{bmatrix} (h_0 + 2h_1 c_2) & h_2 + h_1 c_2 \\ h_2 + h_1 c_2 & h_2 \end{bmatrix} \quad (s_2 = \sin q_2)$$

§8 CONCLUSION

Le système stabilisé est le système de départ et non le système linéarisé. Le prix à payer est que l'on doit supposer les vitesses bornées, mais on remarquera que la même hypothèse est faite dans [1].

De plus, dans [1], l'argument de la stabilisation reposant sur le lemme 1 (p. 10) est mathématiquement inexact car :

dans la majoration obtenue  $\|\tilde{x}(t)\| \leq \alpha_1 e^{(a_2 b_0 - \alpha)t}$

les constantes  $a_2 b_0$  et  $\alpha$  sont interdépendantes ; elles sont définies par les relations :

$$\begin{aligned} \alpha &\leq |\lambda_{\max}\{A^*\}| && \text{pour } \alpha \\ \|\beta(t)\| &\leq b_0 && \text{pour } b_0 \\ \left\| e^{A^*(t-C)} \right\| &\leq a_2 e^{-\alpha(t-T)} && \text{pour } a_2 \end{aligned}$$

Les constantes dépendent donc de la norme choisie sur l'ensemble des matrices  $\mathcal{M}$ . L'équivalence des normes sur  $\mathcal{M}$  fixe donc un lien entre  $a_2 b_0$  et  $\alpha$ . Peut-on, dans ces conditions, espérer rendre  $(a_2 b_0 - \alpha)$  négatif, en alignant le spectre de  $A^*$  ?

## Références

- [1] C. CANUDAS de WIT, K. J. ASTROM et N. FIXOT, Speed estimation in robot manipulators.
- [2] A. IGGIDR et G. SALLET, Exponential Stabilization of nonlinear systems by an estimated state feedback.
- [3] M. LE BORGNE, *Modélisation des robots manipulateurs rigides*, IRISA.
- [4] C. SAMSON, M. LE BORGNE et B. ESPIAU, *Robot control: the task function approach*, Oxford Engineering Science Series n°22, Oxford University Press 1991.