



**HAL**  
open science

# Simulation numérique du comportement des matériaux granulaires

Seyed Yahya Rohani

► **To cite this version:**

Seyed Yahya Rohani. Simulation numérique du comportement des matériaux granulaires. Autre. Université Paul Verlaine - Metz, 1995. Français. NNT : 1995METZ041S . tel-01777096

**HAL Id: tel-01777096**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777096v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

Vb 81708 .

**ISGMP**  
**INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE**  
**ET PRODUCTIQUE**

**THESE**  
présentée à

**UNIVERSITE DE METZ**

PAR

**ROHANI Seyed Yahya**

Pour l'obtention du grade de:

**DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ**

**SPECIALITE: Mécanique**

**OPTION: Génie Civil**

sujet:

**SIMULATION NUMERIQUE  
DU COMPORTEMENT DES  
MATERIAUX GRANULAIRES**

soutenance: 12 Juillet 1995

Membres du Jury:

MM.	G. FERRON	Président
	M.P. LUONG	Rapporteur
	I. SHAHROUR	Rapporteur
	J.D. WEBER	Examineur
	J.C. ROTH	Directeur de thèse
	A. KHELIL	Examineur

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	1995079S
Cote	S/M3 95/41
Loc	Magasin

## **Remerciements**

Monsieur G. FERRON, Professeur et Directeur du L.P.M.M. m'a fait l'honneur de présider le Jury, ce dont je lui suis gré tout particulièrement.

Monsieur M.P. LUONG, Directeur de Recherche au CNRS à l'Ecole Polytechnique de Paris a bien voulu être rapporteur de mon travail. Je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance.

Monsieur I. SHAHROUR, Professeur à l'Ecole Centrale de Lille a accepté d'être rapporteur de ce travail, je tiens à le remercier très sincèrement pour sa participation à mon Jury.

Monsieur J.D. WEBER, Professeur à l'Université de Metz, sa présence à ce Jury m'est particulièrement agréable et je l'en remercie.

Monsieur J.C. ROTH, Professeur à l'Université de Metz et Directeur de Recherche, m'a guidé, soutenu et fait confiance depuis le début de mes recherches jusqu'à l'aboutissement de ce travail. Sans son soutien et sa détermination, ce travail n'aurait jamais vu le jour. Les mots ne seront jamais assez forts pour lui témoigner toute ma gratitude.

Monsieur A. KHELIL, Maître de Conférences à l'I.U.T. Génie Civil de Nancy I, il m'a guidé et a suivi avec attention l'ensemble de mes recherches, je le remercie d'avoir bien voulu faire partie du Jury de soutenance.

Naturellement je n'oublie pas d'associer à ces remerciements tout le corps enseignant et chercheurs de l'IUT Génie Civil de Nancy et du L.P.M.M. de l'Université de Metz. Je tiens aussi à remercier tous mes amis du laboratoire pour leur amitié et pour leur aide.

Enfin pour terminer je remercie encore le personnel de l'atelier et du secrétariat du département Génie Civil de l'I.U.T. de Nancy I et du secrétariat du L.P.M.M. avec lesquels j'ai eu des contacts amicaux.

## RESUMÉ

La théorie des milieux continus n'étant pas suffisante pour expliquer le comportement des matériaux granulaires, il est nécessaire de tenir compte de la nature discrète de ces milieux. Une méthode qui répond à ce souci est la méthode des éléments distincts.

La simulation numérique du comportement des matériaux analogiques de Schneebeli (2D) et des matériaux granulaires (3D) est effectuée par la méthode des éléments distincts en utilisant le programme TRUBAL afin de reproduire numériquement certains essais expérimentaux de caractérisation des matériaux granulaires.

Les essais de compression biaxiale et de cisaillement simple sont effectués avec des rouleaux de P.V.C. et de verre et l'essai triaxial est simulé avec des billes de verre. Les résultats expérimentaux valident la méthode exploitée et permettent ainsi d'obtenir par le calcul les paramètres caractéristiques des matériaux: l'angle de frottement interne et la variation de volume pour différents chemins de chargement.

L'exploitation des résultats numériques met en évidence le rôle fondamental du frottement intergranulaire et de la densité du matériau, pour caractériser le milieu granulaire, tout en permettant l'analyse des phénomènes de dilatance, de localisation et de bande de cisaillement.

Enfin nous avons appliqué cette étude au comportement des matériaux granulaires soumis aux effets de poussée et butée, et dans le cas du stockage des matériaux ensilés.

## **ABSTRACT**

The theory of continuous media is not sufficient to explain the behaviour of granular materials, so it is necessary to consider the discrete nature of such media. A method that answers such questions is the distinct element method.

The numerical simulation of the behaviour of Schneebeli analogical material (2D) and of granular materials (3D) is done by the distinct element method and by using the TRUBAL program in order to reproduce numerically, certain experimental tests of the characterization of granular materials.

The biaxial compression test and the simple shear test are done with rolls of P.V.C. and glass and the triaxial test is simulated with glass balls. The experimental results validate the method used and enable us to obtain the characteristic parameters of materials by different kinds of loading.

The exploitation of numerical results highlights the fundamental role of the intergrain friction and the material density in order to characterize the granular media, enabling the analysis of the phenomenon of dilatance, localization and shear band.

Finally, we applied this study to the behaviour of granular materials under push and thrust effects, and in the case of ensiled materials.

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	1
----------------------------	---

## PARTIE I

\*\*\*\*\*

### THEORIE DE BASE ET PREMIERS RESULTATS

<b><u>Chapitre 1: Généralités</u></b> .....	3
1.1 Définitions.....	3
1.1.1 Loi de Comportement.....	3
1.1.2 Le comportement des milieux granulaires.....	3
1.1.3 Paramètres physiques et mécaniques des milieux granulaires.....	4
1.1.4 Plasticité.....	7
1.1.4.1 Critère de Coulomb.....	7
1.2 Modélisation des milieux granulaires.....	8
1.2.1 Rhéologie des milieux discrets.....	8
1.2.2 Insuffisance des modèles continus pour les milieux granulaires.....	9
1.2.3 Approche expérimentale .....	9
1.2.4 Approche numérique.....	10
1.3 Conclusion.....	10
<b><u>Chapitre 2: Méthode des Eléments Distincts</u></b> .....	11
2.1 Introduction.....	11
2.2 Conditions d'applications.....	12
2.3 Loi linéaire de force de contact.....	12
2.3.1 La loi : force-déplacement.....	14
2.3.2 Amortissement de contact.....	17
2.3.3 Equation de mouvement.....	18
2.4 Loi non-linéaire de force de contact.....	19
2.4.1 Force normale (loi de Hertz).....	19
2.4.2 Force tangentielle.....	20

2.5 Conditions aux limites.....	20
2.5.1 La frontière de l'échantillon.....	20
2.5.2 Contrôle des déformations aux frontières.....	21
2.5.3 Contrôle des contraintes aux frontières.....	22
2.6 Espace périodique.....	24
2.6.1 Calcul de la vitesse et du déplacement.....	25
2.6.1.1 Calcul de la vitesse.....	25
2.6.1.2 Calcul du déplacement.....	26
2.7 Tenseurs de contrainte.....	26
2.7.1 Tenseur de contrainte moyenne pour une surface circulaire.....	26
2.7.2 Tenseur de contrainte moyenne pour un volume....	28
2.8 Conclusion.....	31

### **Chapitre 3: Présentation de TRUBAL et Exploitation des Résultats en utilisant les lois linéaire et non-linéaire de contact**

<b>3.1 Présentation de TRUBAL.....</b>	<b>32</b>
3.1.1 Définitions.....	32
3.1.2 Caractéristiques de la simulation.....	32
3.1.3 Les étapes d'un essai de simulation.....	35
3.1.4 Passage du milieu formé de sphères au milieu formé de cylindres (3D ==> 2D).....	36
3.1.5 Limites d'utilisation de TRUBAL.....	39
3.1.6 Les résultats de TRUBAL.....	40
3.1.7 Un Exemple: Effet du Nombre des Particules.....	41
3.1.8 Conclusion.....	43
<b>3.2 La contrainte déviatorique dans un milieu granulaire (loi linéaire de contact).....</b>	<b>44</b>
3.2.1 Introduction.....	44
3.2.2 Méthode de calcul des différents tenseurs.....	45
3.2.3 Essai numérique.....	50
3.2.4 Conclusion.....	57
<b>3.3 Paramètres influençant l'angle de frottement interne (loi non-linéaire de contact).....</b>	<b>58</b>
3.3.1 Introduction.....	58
3.3.2 Influence du coefficient de frottement (f) sur l'angle $\phi$ .....	58

3.3.2.1 Définition du frottement intergranulaire.....	59
3.3.2.2 La méthode du test.....	59
3.3.2.3 Résultats.....	60
3.3.3 Influence du compactage sur l'angle $\phi$ .....	64
3.3.3.1 La méthode du test.....	65
3.3.3.2 Résultats.....	65
3.3.3.3 Effet d'arrangement de structure.....	69
3.3.4 Conclusion.....	70

## PARTIE II

\*\*\*\*\*

# SIMULATION NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX GRANULAIRES ET VALIDATION DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE

Introduction.....	71
<b><u>Chapitre 4: Compression biaxiale</u></b> .....	72
4.1 Etude bibliographique.....	72
4.1.1 Comportement mécanique global du matériau de Schneebeli.....	72
4.2 Matériau utilisé.....	73
4.3 Appareil de Compression Biaxiale.....	74
4.4 Essai Numérique Biaxial.....	75
4.4.1 La méthode du test.....	75
4.4.2 Résultats.....	76
4.4.2.1 Courbes Contraintes-Déformations.....	76
4.4.2.2 Courbes de déformation volumique.....	81
4.4.2.3 Homogénéité des matériaux.....	85
4.5 Comparaison des résultats avec les résultats expérimentaux	85
4.6 Conclusion.....	89
<b><u>Chapitre 5: Compression triaxiale</u></b> .....	90
5.1 Rappels.....	90
5.1.1 Concept de l'état caractéristique.....	90
5.1.2 Loi de Monnet.....	92
5.2 Méthode expérimentale.....	93

5.3 Simulation numérique.....	94
5.3.1 Caractéristiques des matériaux et mode opératoire.....	94
5.4 Présentation, Comparaison et Interprétation des résultats.....	95
5.4.1 Courbes contrainte-déformation.....	96
5.4.2 Courbes de déformation volumique.....	102
5.4.3 Courbes caractéristiques.....	107
5.4.4 Enveloppes de rupture.....	109
5.5 Conclusion.....	111

## **Chapitre 6: Cisaillement simple.....** 113

6.1 Introduction.....	113
6.2 Rappel.....	114
6.3 La méthode de l'essai numérique.....	115
6.4 Présentation et interprétations des résultats.....	117
6.4.1 Influence de la contrainte normale sur la résistance au cisaillement du matériau.....	117
6.4.2 Influence du coefficient de frottement (f) sur la résistance au cisaillement du matériau.....	119
6.4.3 Variation de volume.....	120
6.4.4 Enveloppe de rupture.....	120
6.5 Phénomène de localisation dans les matériaux granulaires.....	121
6.6 Conclusion.....	125

## **Chapitre 7: Bande de cisaillement.....** 126

7.1 Introduction.....	126
7.2 Bande de cisaillement et l'essai biaxial.....	127
7.3 Naissance et développement des bandes de cisaillement....	128
7.3.1 Localisation et pic.....	128
7.3.2 Initialisation de la bande de cisaillement.....	129
7.3.3 Développement d'une surface de rupture.....	129
7.3.4 Une ou plusieurs bandes de cisaillement?.....	130
7.4 Variation de volume.....	131
7.4.1 Largeur des bandes de cisaillement.....	131
7.4.2 L'angle de dilatance.....	132
7.5 Les lignes d'extension nulle.....	133
7.6 Direction des bandes de cisaillement.....	135
7.7 Conclusion.....	142

## PARTIE III

\*\*\*\*\*

### APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS DISTINCTS

<b><i>Chapitre 8: Coefficient de pression latérale.....</i></b>	<b>143</b>
8.1 Généralités.....	143
8.2 Coefficient de pression latérale au repos ( $k_0$ ).....	145
8.3 Coefficients de pression latérale extrême ( $k_a$ , $k_p$ ).....	148
8.3.1 Détermination de $k_a$ (essai de poussée).....	148
8.3.2 Détermination de $k_p$ (essai de butée).....	150
8.4 Comparaison des résultats numériques et analytiques.....	152
8.5 Coefficient de pression latérale dans les silos.....	153
8.5.1 Position du problème.....	153
8.5.2 Théorie analytique.....	154
8.5.3 Calcul numérique.....	155
8.6 Conclusion.....	158
CONCLUSION GENERALE.....	159
BIBLIOGRAPHIE.....	161

## INTRODUCTION GENERALE

La construction de routes, de barrages ou de digues fait intervenir la manipulation de grandes quantités de gravier et de sable. Bon nombre de matières premières (ciment, farine, blé, ...) sont des matériaux granulaires transportés, traités et stokés. Beaucoup d'industries, comme les industries pharmaceutiques ou agro-alimentaires, reposent sur le traitement de ces matériaux. Mais au niveau scientifique et des recherches entreprises, leur comportement est mal connu.

Expérimentalement on cherche le comportement des matériaux granulaires par utilisation des essais classiques au laboratoire. Ces essais, comme l'essai de compression triaxiale et l'essai de boîte de cisaillement, appliqués sur des échantillons réels, ne sont pas économique. Durant ces dernières années les entreprises souhaitent diminuer les essais de laboratoire et élargir les résultats par la simulation numérique.

L'objectif de ce travail est la simulation du comportement des matériaux granulaires afin de réaliser des essais faciles, rapides et économiques. Les démarches pour arriver à cet objectif sont:

- l'application d'une nouvelle méthode numérique appelé la méthode des éléments distincts, et l'exploitation du programme TRUBAL, qui est écrit sur la base de cette méthode, pour simuler le comportement des matériaux granulaires.
- la validation de la méthode des éléments distincts et du programme TRUBAL, en comparant les résultats numériques et expérimentaux.
- la préparation de références pour interpréter et ajuster les résultats numériques.
- l'application la simulation numérique à l'étude des essais au laboratoire, et à l'étude de ce qu'on fait expérimentalement en mécanique des milieux granulaires (comme les phénomènes de poussée et butée, mur de soutènement, silo, barrage en terre, ...).

Nous nous sommes limités ici à l'étude du comportement d'un milieu granulaire composé de disques ou de sphères.

Après des généralités sur les milieux granulaires, le chapitre deux présente, la méthode des éléments distincts qui est la théorie de base de notre travail, et du programme TRUBAL de P. Cundall.

Le chapitre trois, présente le programme TRUBAL, ainsi que les lois linéaire et non-linéaire de force de contact. La loi linéaire est utilisée pour l'étude de la contrainte déviatorique dans un milieu granulaire, et la loi non-linéaire pour l'étude des paramètres influençants l'angle de frottement interne des matériaux granulaires.

Les chapitres quatre et cinq illustrent respectivement la simulation numérique des essais en compression biaxiale sur des rouleaux de P.V.C. et celle des essais en compression triaxiale sur les billes de verre.

Dans le chapitre six et sept nous présentons les essais de cisaillement simple sur rouleaux de verre et l'effet de la localisation dans ces matériaux, ainsi que la caractérisation de la bande de cisaillement dans l'essai de compression biaxiale sur rouleaux de verre.

Dans le dernier chapitre nous appliquons la méthode numérique à la mécanique des milieux granulaires en utilisant le programme TRUBAL. Les phénomènes de poussée et butée et le cas intermédiaire (en vue du calcul des actions sur les parois de silos) sont simulés, à partir des rouleaux de verre.

# **PARTIE I**

**\*\*\*\*\***

## **THEORIE DE BASE ET PREMIERS RESULTATS**

- **Généralités**
- **Méthode des Eléments Distincts**
- **Présentation de TRUBAL et Exploitation des Résultats en utilisant les lois linéaire et non-linéaire de contact**
  - **Présentation de TRUBAL**
  - **La contrainte déviatorique dans un milieu granulaire ( loi linéaire de contact )**
  - **Paramètres influençant l'angle de frottement interne ( loi non-linéaire de contact )**

# Chapitre 1

## Généralités

### 1.1 Définitions

#### 1.1.1 Loi de Comportement

On appelle loi de comportement d'un matériau, la relation entre le tenseur des contraintes, celui des déformations, et éventuellement d'autres éléments tels que les vitesses de contrainte et de déformation.

Les relations de comportement, combinées aux équations d'équilibre permettent en général d'obtenir les expressions des contraintes  $\sigma_{ij}(x,y,z,t)$ , des déformations  $\varepsilon_{ij}(x,y,z,t)$ , ou des déplacements  $u_{ij}(x,y,z,t)$  en fonction des sollicitations.

Mais en fait il s'agit d'équations aux dérivées partielles et les solutions doivent être précisées à l'aide de bornes d'intégration appelées "conditions aux limites".

#### 1.1.2 Le comportement des milieux granulaires

La façon la plus simple de calculer les contraintes dans un milieu granulaire soumis à l'action de charge est d'assimiler ce milieu à un milieu continu.

Le comportement des milieux granulaires peut être caractérisé dans un premier temps par le comportement des milieux élastiques. En fait ces matériaux ne sont pas des milieux élastiques, il suffit pour s'en convaincre de comparer les courbes contraintes-déformations d'un milieu grenu et d'un milieu élastique (Fig. 1.1).

Le comportement d'un milieu granulaire est principalement caractérisé par une non-linéarité et une certaine irréversibilité des déformations. Cela tient au caractère discontinu de son squelette. Les lois des contacts entre les grains sont complexes et non-linéaires (exemple: lois de Hertz et Mindlin).

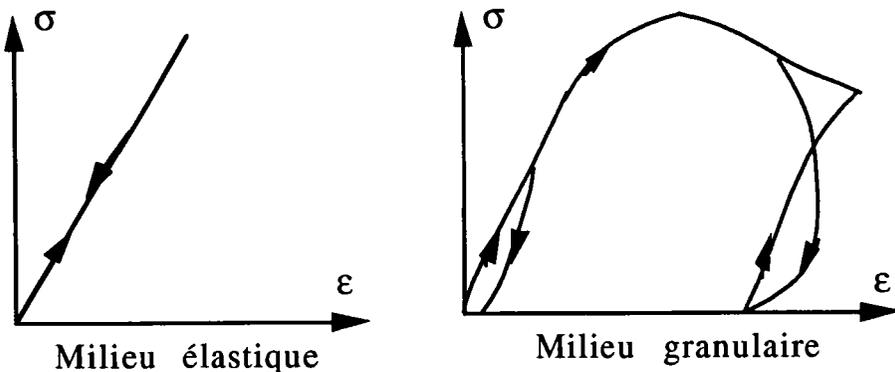


Figure 1.1: Les courbes contraintes-déformations d'un milieu granulaire et d'un milieu élastique

### 1.1.3 Paramètres physiques et mécaniques des milieux granulaires

#### Indice des vides

L'indice des vides ( $e$ ) qui permet de savoir si les vides sont importants ou non, c'est-à-dire si le matériau est dans un état lâche ou dense. L'indice des vides est défini comme étant le rapport du volume des vides ( $V_v$ ) au volume des grains solides ( $V_s$ ):

$$e = \frac{V_v}{V_s} \quad (1.1)$$

Pour les sables on observe que l'indice des vides est toujours compris entre 0,4 et 1,0. Pour le sable de Fontainebleau (grenu)  $e=0,86$ . L'indice des vides peut être supérieur à 1. Le tableau 1.1 résume les différents états du sable (3D) et les matériaux analogues au sable (2D).

Etat du Sable	2D	3D
Lâche	$e > 0,22$	$e > 0,80$
Moyen	$0,20 < e < 0,22$	$0,75 < e < 0,80$
Dense	$e < 0,20$	$e < 0,75$

Tableau 1.1: Différents états du sable

#### Porosité

On définit la porosité ( $n$ ) dont la signification est analogue à celle de l'indice des vides. Elle est le rapport du volume des vides au volume total ( $V$ ):

$$n = \frac{V_v}{V} \quad (1.2)$$

La porosité est toujours inférieure à 1. La porosité et l'indice des vides sont liés par la relation:

$$n = \frac{e}{1 + e} \quad (1.3)$$

### Densité relative

La densité relative ( $D_r$ ) est définie par:

$$D_r = \frac{e_{\max} - e}{e_{\max} - e_{\min}} \quad (1.4)$$

où:

$e$ : est l'indice des vides du milieu étudié;

$e_{\min}$  et  $e_{\max}$ : sont déterminés par des essais de laboratoire normalisés, sur la même population de grains.

La densité relative varie entre 0 et 1. Pour un sol très lâche,  $D_r$  est voisin de zéro, mais tend vers 1 pour un arrangement très serré.

état du milieu	densité relative
lâche	$D_r < 50\%$
dense	$D_r > 50\%$

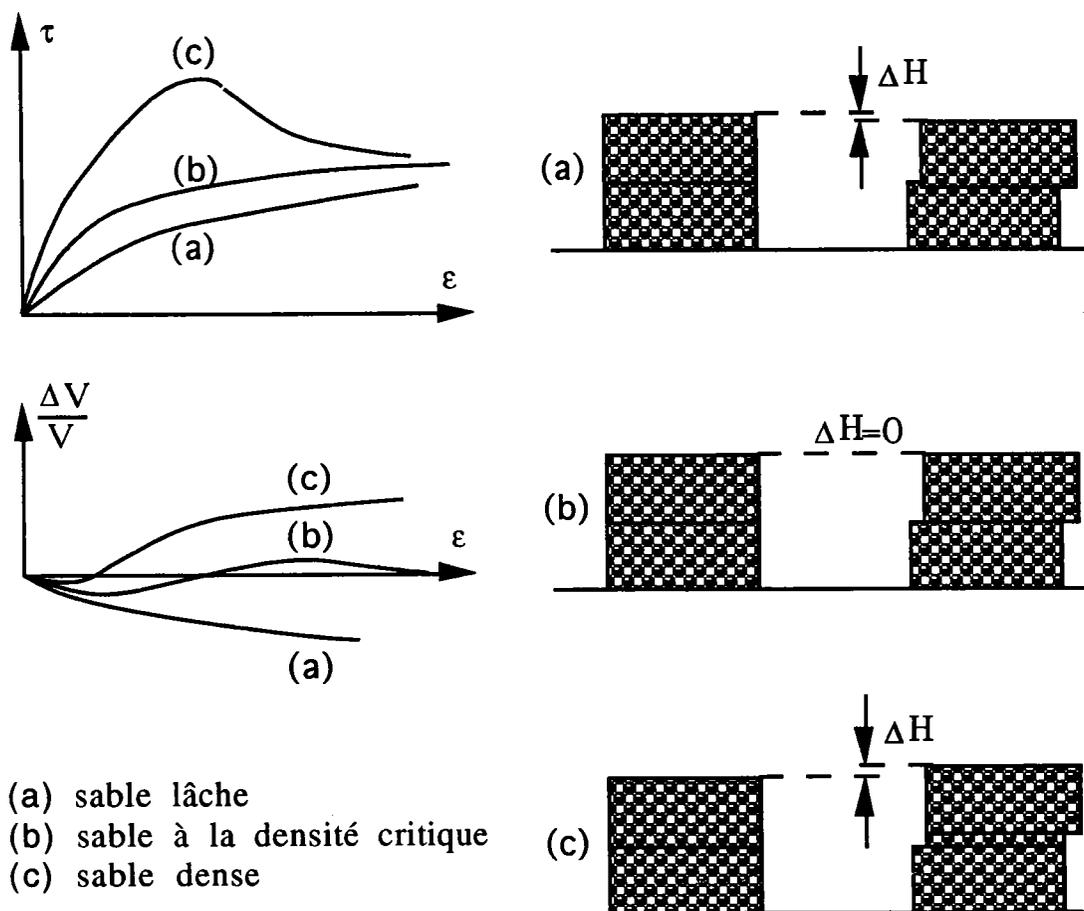
*Tableau 1.2: Différents états du milieu granulaire*

### Densité critique

Lorsqu'un matériau granulaire est soumis à un cisaillement, il subit une variation de volume. Le sens de cette variation dépend de la manière dont les grains sont enchevêtrés les uns par rapport aux autres, c'est-à-dire de l'état de compacité.

La figure 1.2 montre les courbes efforts-déformations, ainsi que les variations de volume correspondantes, lors de trois essais à la boîte de cisaillement, pour un même sable pris dans des conditions de compacité différentes.

Tout d'abord, dans le cas d'un échantillon de sable lâche; la courbe effort déformation n'a pas de maximum, la variation de volume est négative, la contrainte de cisaillement  $\tau$  et la variation de volume  $\Delta v/v$  tendent asymptotiquement vers une limite horizontale.



**Figure 1.2:** Les courbes efforts-déformations et les variations de volume correspondantes pour trois essais dans des conditions de compacité différentes

Pour un échantillon de sable dense; la courbe effort-déformation présente un maximum, la variation de volume est positive,  $\Delta v/v$  et  $\tau$  tendent asymptotiquement vers une limite.

Enfin, pour un échantillon de sable pris à une densité initiale telle qu'il n'y ait pas de variation de volume au cours du cisaillement ( $\Delta v=0$ ), la courbe contrainte-déformation n'a pas de maximum. Dans ce cas la contrainte de cisaillement atteint très vite sa valeur limite et la densité du sable s'appelle *la densité critique*.

On remarque que la valeur limite de  $\tau$  est la même dans les trois cas, ce qui prouve qu'aux grandes déformations la densité d'un sable tend vers la densité critique.

### 1.1.4 Plasticité

Dans l'espace des contraintes, il existe des états de contraintes physiquement possibles et des états de contraintes physiquement impossibles. L'ensemble des points associés aux premiers, constitue un domaine dont la frontière prend le nom de *surface limite*. Son équation,  $f(\sigma_{ij})=0$ , dans l'espace des contraintes est appelée *critère de plasticité*.

Il est utile de rappeler que différents critères sont utilisés pour les sols, notamment ceux de Coulomb et de Drucker-Prager (avec frottement) qui sont apparentés respectivement aux critères de Tresca et de Von Mises (sans frottement interne).

Nous supposons ici que les milieux granulaires vérifient le critère de Coulomb.

#### 1.1.4.1 Critère de Coulomb

Le critère de Coulomb définit dans le plan des contraintes un domaine limité constitué des deux droites symétriques inclinées de l'angle  $\phi$  (angle de frottement interne) sur l'axe des contraintes normales (Fig. 1.3).

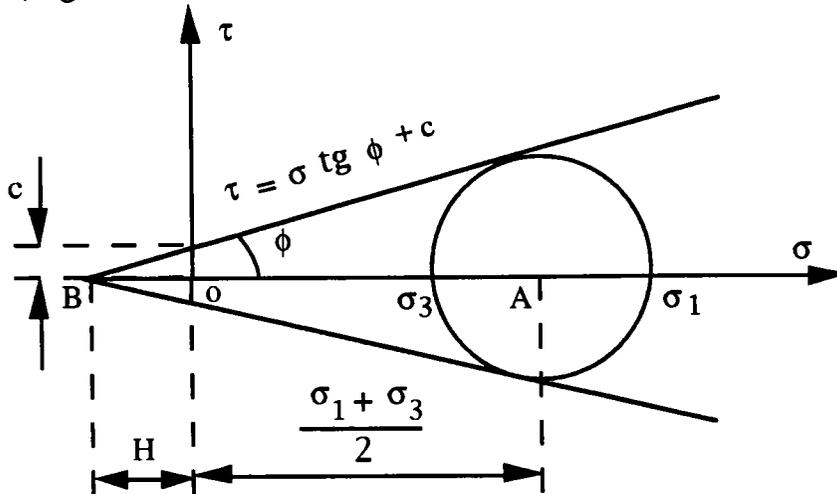


Figure 1.3: Critère de Coulomb représenté dans le plan de Mohr

Le critère de Coulomb s'écrit:

$$|\tau| \leq \sigma \operatorname{tg} \phi + c \quad (1.5)$$

$c$  étant la cohésion. En ordonnant les contraintes principales selon l'inégalité suivante:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (1.6)$$

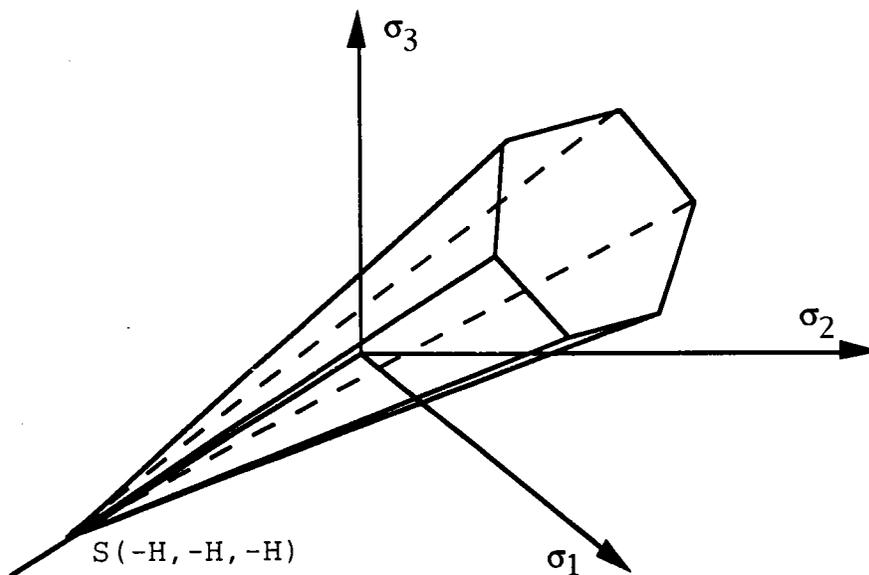
le critère de Coulomb s'écrit:

$$(\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - (\sigma_1 - \sigma_3) + 2c \cos \phi = 0 \quad (1.7)$$

Pour les matériaux granulaires avec  $c=0$ , on aura:

$$\sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \quad (1.8)$$

La surface limite associée au critère de Coulomb, dans l'espace des contraintes principales est une pyramide hexagonale non régulière dont le sommet a pour coordonnées  $S(-H, -H, -H)$  avec  $H = c \cotg \phi$  (Fig. 1.4).



*Figure 1.4: Critère de Coulomb représenté dans l'espace des contraintes principales*

## 1.2 Modélisation des milieux granulaires

### 1.2.1 Rhéologie des milieux discrets

Un milieu discret est un milieu formé d'un ensemble complexe de particules solides, disjoints les uns des autres, visibles à l'oeil nu, et qui sont de dimensions, de formes et d'orientations diverses et voir même parfois de dimensions importantes (sable, gravier).

Bien que les sols soient des milieux discrets, la mécanique des sols classique a généralement cherché à lier les contraintes et les déformations des sols, par des lois rhéologiques de type milieux continus. Les sols répondent très mal aux hypothèses de l'élasticité, de la réversibilité et de la linéarité.

D'une manière générale, les hypothèses de l'élasticité ne peuvent être utilisées que pour les milieux granulaires dans un domaine très restreint où n'interviennent que des petites déformations.

### **1.2.2 Insuffisance des modèles continus pour les milieux granulaires**

Le comportement réel des milieux granulaires n'est à aucun instant ni entièrement réversible, ni entièrement irréversible et répond bien plus à une loi continue de déformation associant à tout moment réversibilité et irréversibilité.

Il est évident que l'hypothèse des milieux continus ne correspond pas aux milieux granulaires formés de particules en contact les unes avec les autres et qui sont de formes, de dimensions et d'orientations diverses. La complexité des relations contraintes-déformations des milieux granulaires est en partie la conséquence de leur nature discrète dont il faut tenir compte.

On cherche un comportement global de ces matériaux en considérant leur nature discrète. Deux approches sont possibles, l'une expérimentale et l'autre numérique.

### **1.2.3 Approche expérimentale**

On réalise des expériences sur des modèles réduits dits modèles analogiques possédant beaucoup de qualités; mais il est difficile d'extrapoler les résultats obtenus aux modèles réels.

Au niveau structural, les mécanismes provoquant la déformation du milieu sont de trois types:

- des glissements-rotations intergranulaires
- des déformations au niveau des grains
- des ruptures de liaison intergrain

On considère des milieux granulaires géométriquement simples, pour lesquels les contraintes et déformations peuvent être mesurées. Ces modèles sont physiques et sont applicables à des assemblages de disques ou sphères. Le modèle physique est basé sur des tests expérimentaux et traite les résultats, statistiquement.

Des tests en laboratoire sont nécessaires pour établir de nouvelles lois de comportement ou pour valider les lois existantes.

Avec une technique expérimentale utilisant les photographies aux rayons x, l'on mesure les déformations, mais pas les contraintes. Les résultats indiquent un comportement contrainte-déformation non linéaire et hystérétique.

#### **1.2.4 Approche numérique**

La méthode numérique est plus rapide, plus facile et plus économique que la méthode expérimentale. Pratiquement la modélisation numérique est très flexible. Ses avantages par rapport aux essais expérimentaux sont:

- le contrôle des résultats à chaque étape du test
- la variation du type de chargement
- la possibilité de changer les dimensions des particules et leurs paramètres physiques.

Néanmoins, cette approche est limitée pour les raisons suivantes:

- l'échantillon est toujours inclus dans un cube
- les particules sont uniformes en dimension

### **1.3 Conclusion**

L'anisotropie des milieux granulaires n'autorise pas à priori l'utilisation des hypothèses de la mécanique des milieux continus. Malgré les différents aménagements des lois classiques d'étude de mécanique des sols, de nombreux auteurs ont exploité, pour caractériser le comportement des milieux formés de particules, la méthode des éléments distincts. Dans cette méthode on considère que les milieux granulaires sont constitués de particules discrètes qui sont en contacts les unes avec les autres.

La simulation du comportement des milieux granulaires est l'objectif de notre travail. La méthode numérique utilisée est la méthode des éléments distincts qui fait l'objet du chapitre suivant.

## Chapitre 2

# Méthode des Éléments Distincts

### 2.1 Introduction

En 1971 et 1974 P.A. Cundall [1] développe la méthode des éléments distincts, qui à l'origine est conçue pour les problèmes de la mécanique des roches. Elle accepte des particules de forme indifférente. La méthode est basée sur l'utilisation d'un système numérique explicite dans lequel l'interaction des particules est contrôlée contact par contact et le mouvement des particules simulé particule par particule. L'interaction des particules est vue comme un problème transitoire avec des états d'équilibre assurés par des forces internes.

Dans cette méthode les forces de contact à l'équilibre, et les déplacements d'un assemblage de disques sous contrainte, sont déterminés selon une série de calculs, représentant les mouvements indépendants des particules. Ces mouvements sont le résultat de la propagation à travers le milieu, de perturbations qui prennent naissance à partir des frontières. La vitesse de propagation est fonction des propriétés physiques du milieu. Les intervalles de temps considérés sont petits de manière à pouvoir représenter les vitesses et accélérations par des constantes.

Notre objectif est d'abord de déterminer les forces de contact et les moments appliqués à chaque disque, et ensuite de calculer le tenseur de contrainte moyenne pour un assemblage de particules. Une force de contact est déterminée par le déplacement relatif de deux disques ou du disque par rapport à la paroi; ensuite à l'aide des lois de la mécanique classique, connaissant les forces appliquées à chaque disque, il est possible de déterminer le mouvement de chaque disque.

## 2.2 Conditions d'applications

Pour appliquer la méthode des éléments distincts il faut considérer les conditions suivantes:

-on choisit un intervalle de temps dans lequel la vitesse et l'accélération du disque sont supposées constantes.

-durant cet intervalle, le déplacement du disque étudié peut se propager uniquement jusqu'à ses voisins directs.

-le mouvement des disques résulte du déplacement imposé aux frontières qui entourent l'ensemble.

-la déformation sur un disque est très petite par rapport à la déformation globale de l'ensemble.

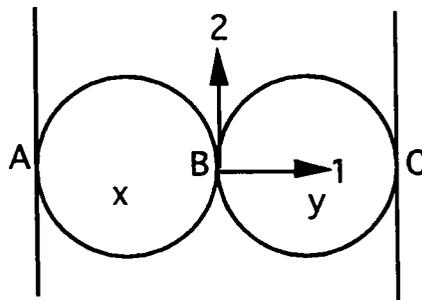
## 2.3 Loi linéaire de force de contact

Pour illustrer cette méthode on prend un exemple de deux disques comprimés entre deux parois qui se rapprochent à vitesse constante  $v$ . (Fig. 2.1-a)

Le calcul se base sur deux lois:

- force-déplacement  $\vec{F} = k \vec{x}$  (2-1)

- force-accélération  $\vec{F} = m \vec{\gamma}$  (2-2)

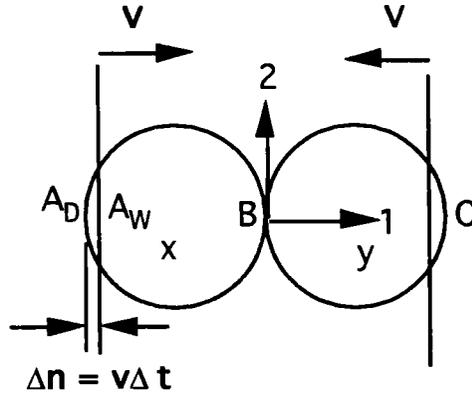


*Figure 2.1-a: deux disques en compression entre deux parois rigides (  $t = t_0$  )*

A l'instant  $t_0$  deux disques  $x$  et  $y$  sont en équilibre. A l'instant  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , on crée une force  $F$  entre la paroi et les disques qui sont en contact avec cette paroi; celle-ci est générée par un déplacement  $\Delta n = v \Delta t$ . (Fig. 2.1-b)

$$F = K_n \Delta n \quad (\text{compression}) \quad (2-3)$$

$$F = K_s \Delta s \quad (\text{cisaillement}) \quad (2-4)$$



**Figure 2.1-b:** deux disques en compression entre deux parois rigides (  $t = t_1 = t_0 + \Delta t$  )

Si on considère les accélérations constantes pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ , on peut déduire les vitesses linéaires et angulaires par intégration sur  $\Delta t$ . Le déplacement et la rotation du disque x sont respectivement :

$$\Delta n = v \Delta t \quad \text{et} \quad \theta = \dot{\theta} \Delta t \quad (2-5)$$

En écrivant ces équations pour les disques x et y en un instant  $t_1$  nous aurons:

$$F_{x1} = k_n \Delta n \quad (2-6)$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{F_{x1}}{m_x} \quad (2-7)$$

$$F_{y1} = -k_n \Delta n \quad (2-8)$$

$$\ddot{y}_1 = \frac{F_{y1}}{m_y} \quad (2-9)$$

Les vitesses des disques x et y à l'instant  $t_2=t_1+\Delta t$  (Fig. 2.1-c) sont:

$$[\dot{x}_1]_{t_2} = \left[ \frac{F_{x1}}{m_x} \right] \Delta t \quad (2-10)$$

$$[\dot{y}_1]_{t_2} = \left[ \frac{F_{y1}}{m_y} \right] \Delta t \quad (2-11)$$

Ce qui donne pour les déplacements:

$$[\Delta_{n2}]_A = \left[ v - \left( \frac{F_{x1}}{m_x} \right) \Delta t \right] \Delta t \quad (2-12)$$

$$[\Delta_{n2}]_B = \left[ \left( \frac{F_{x1}}{m_x} \right) \Delta t - \frac{F_{y1}}{m_x} \Delta t \right] \Delta t \quad (2-13)$$

$$[\Delta_{n2}]_C = \left[ \left( \frac{F_{y1}}{m_y} \right) \Delta t - (-v) \right] \Delta t \quad (2-14)$$

Il y a N cycles et à la fin du N<sup>ème</sup> cycle, on peut avoir les forces et les déplacements finaux.

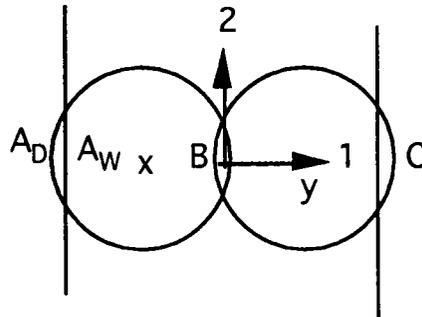


Figure 2.1-c: deux disques en compression entre deux parois rigides (  $t = t_2 = t_0 + 2\Delta t$  )

### 2.3.1 La loi : force-déplacement

Nous présentons cette loi pour deux disques en contact. On définit deux repères; le premier est global et fixe par rapport à l'échantillon (Les axes 1 et 2 ). Le deuxième est local et seulement valable pour deux disques en contact, il sera défini par les vecteurs  $e_i$  et  $t_i$  . ( $e_i$  est porté par la droite passant par le centre des disques et  $t_i$  orthogonal à  $e_i$  , dans le sens inverse au sens trigonométrique). (Fig. 2.2)

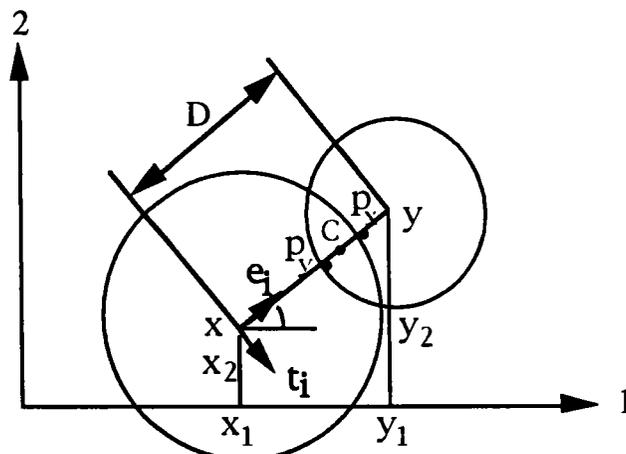


Figure 2.2: la loi: Force-Déplacement

Condition pour que les deux disques soient en contact:

$$D < R_x + R_y \quad (2-15)$$

D étant la distance entre les centres des deux disques,  $R_x$  et  $R_y$  sont les rayons des disques x et y.

Les vecteurs  $e_i$  et  $t_i$  sont égaux à:

$$e_i = \frac{(y_i - x_i)}{D} = (\cos \alpha, \sin \alpha) = (e_1, e_2) \quad (2-16)$$

$$t_i = (\sin \alpha, -\cos \alpha) = (e_2, -e_1) \quad (2-17)$$

La vitesse relative du point  $P_x$  par rapport à  $P_y$  est:

$$\dot{X}_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) - (\dot{\theta}_x R_x + \dot{\theta}_y R_y) t_i \quad (2-18)$$

Les projections de  $X_i$  sur  $e_i$  et  $t_i$  sont:

$$\dot{n} = \dot{X} \cdot e_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) e_i - (\dot{\theta}_x R_x + \dot{\theta}_y R_y) t_i \cdot e_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) e_i \quad (2-19)$$

$$\dot{s} = \dot{X} \cdot t_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) t_i - (\dot{\theta}_x R_x + \dot{\theta}_y R_y) t_i \cdot t_i = (\dot{x}_i - \dot{y}_i) t_i - (\dot{\theta}_x R_x + \dot{\theta}_y R_y) \quad (2-20)$$

Les composantes  $\Delta n$  et  $\Delta s$  de déplacement relatif deviennent:

$$\Delta n = \dot{n} \Delta t = [(\dot{x}_i - \dot{y}_i) e_i] \Delta t \quad (2-21)$$

$$\Delta s = \dot{s} \Delta t = [(\dot{x}_i - \dot{y}_i) t_i - (\dot{\theta}_x R_x + \dot{\theta}_y R_y)] \Delta t \quad (2-22)$$

Les incréments de force normale et tangentielle sont:

$$\Delta F_n = k_n \Delta n = k_n [(\dot{x}_i - \dot{y}_i) e_i] \Delta t \quad (2-23)$$

$$\Delta F_s = k_s \Delta s = k_s [(\dot{x}_i - \dot{y}_i) t_i - (\dot{\theta}_x R_x + \dot{\theta}_y R_y)] \Delta t \quad (2-24)$$

Donc, pour la nouvelle force normale on a:

$$(F_n)_{\text{nouvelle}} = (F_n)_{\text{ancienne}} + (\Delta F_n)_{\text{dernier cycle}} \quad (2-25)$$

$$(F_s)_{\text{nouvelle}} = (F_s)_{\text{ancienne}} + (\Delta F_s)_{\text{dernier cycle}} \quad (2-26)$$

### REMARQUE

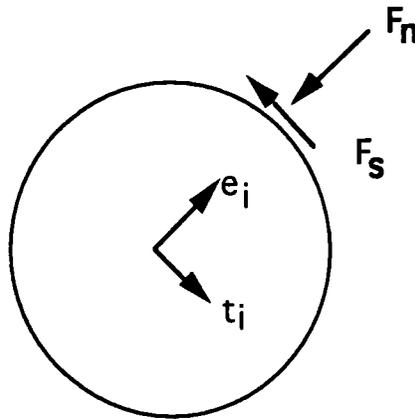
A chaque calcul de la force tangentielle  $F_s$ , elle est comparée à  $(F_s)_{\max}$

$$(F_s)_{\max} = F_n \operatorname{tg} \phi_\mu + c \quad (2-27)$$

$\phi_\mu$ : l'angle de frottement entre particules

$c$ : la cohésion

Si  $F_s$  est supérieure à  $(F_s)_{\max}$ , on les prend égales. (Fig. 2.3)



*Figure 2.3: convention de signe pour  $F_n$  et  $F_s$*

Le moment induit par la force tangentielle, appliquée au disque  $x$ , pour chaque contact est :

$$M_x = R_x (F_s)_{\text{nouvelle}} \quad (2-28)$$

A l'aide de la loi de Newton, on peut écrire:

$$m_x \ddot{x}_i = \Sigma F_{xi} \quad (2-29)$$

$$(\dot{x}_i)_{\text{nouvelle}} = (\dot{x}_i)_{\text{ancienne}} + \left[ \frac{\Sigma F_{xi}}{m_x} \right] \Delta t \quad (2-30)$$

$$I_x \ddot{\theta}_x = \Sigma M_x \quad (2-31)$$

$$(\dot{\theta}_x)_{\text{nouvelle}} = (\dot{\theta}_x)_{\text{ancienne}} + \left[ \frac{\Sigma M_x}{I_x} \right] \Delta t \quad (2-32)$$

On utilise ces équations pour chaque disque. En utilisant les nouvelles vitesses dans la loi de Force-Déplacement, le cycle se répète pour un nouveau  $\Delta t$ .

### 2.3.2 Amortissement de contact

L'amortissement de contact est assimilé à une force de contact, proportionnelle à la vitesse relative mais opposée à la force de contact. On peut modéliser cet amortissement par deux amortisseurs linéaires, l'un agissant dans la direction normale et l'autre agissant dans la direction tangentielle. Si on définit par:

$D_n$ : force d'amortissement normale  
 $D_s$ : force d'amortissement tangentielle  
 $C_n$ : coefficient d'amortissement normal  
 $C_s$ : coefficient d'amortissement tangentiel

$\dot{n}$ : composante normale de la vitesse relative  $\dot{X}_i$  (voir équation 2-18)

$\dot{s}$ : composante tangentielle de la vitesse relative  $\dot{X}_i$

$\beta$ : un coefficient constant

on a:

$$D_n = C_n \dot{n} \quad (C_n = \beta k_n) \quad (2-33)$$

$$D_s = C_s \dot{s} \quad (C_s = \beta k_s) \quad (2-34)$$

En tenant compte des expressions 2-19 et 2-20 pour  $\dot{n}$  et  $\dot{s}$ , on trouve:

$$D_n = C_n (\dot{x}_i - \dot{y}_i) e_i \quad (2-35)$$

$$D_s = C_s [(\dot{x}_i - \dot{y}_i) t_i - (\dot{\theta}_x R_x + \dot{\theta}_y R_y)] \quad (2-36)$$

Si on définit la force d'amortissement de contact par  $D_{xi}$ , les équations 2-30 et 2-32 s'écrivent comme suit:

$$(\dot{x}_i)_{\text{nouvelle}} = (\dot{x}_i)_{\text{ancienne}} + \left[ \frac{\Sigma(F_{xi} + D_{xi})}{m_x} \right] \Delta t \quad (2-37)$$

$$(\dot{\theta}_x)_{\text{nouvelle}} = (\dot{\theta}_x)_{\text{ancienne}} + \left[ \frac{\Sigma M_x}{I_x} \right] \Delta t \quad (2-38)$$

$M_x$  est le couple appliqué au disque  $x$  prenant en compte la contribution des forces d'amortissement.

### 2.3.3 Equation de mouvement

En général l'équation de mouvement s'écrit:

$$m_x \ddot{x}_i = \Sigma [F_{xi} + D_{xi}] - C\dot{x}_i \quad (C = \alpha_c m_x) \quad (2-39)$$

$$I_x \ddot{\theta}_x = \Sigma M_x - C^* \dot{\theta}_x \quad (C^* = \alpha_c I_x) \quad (2-40)$$

C et C\* sont les coefficients d'amortissement global proportionnels à la masse  $m_x$  et respectivement au moment d'inertie  $I_x$ . ( $\alpha_c$  est un coefficient constant)

Pour intégrer ces deux équations de mouvement, on prend les vitesses comme suit:

$$\dot{x}_i = \frac{1}{2} [ (\dot{x}_i)_{\text{nouvelle}} + (\dot{x}_i)_{\text{ancienne}} ] \quad (2-41)$$

$$\dot{\theta}_x = \frac{1}{2} [ (\dot{\theta}_x)_{\text{nouvelle}} + (\dot{\theta}_x)_{\text{ancienne}} ] \quad (2-42)$$

En écrivant les accélérations de la manière suivante:

$$\ddot{x}_i = \frac{ [ (\dot{x}_i)_{\text{nouvelle}} - (\dot{x}_i)_{\text{ancienne}} ] }{ \Delta t } \quad (2-43)$$

$$\ddot{\theta}_x = \frac{ [ (\dot{\theta}_x)_{\text{nouvelle}} - (\dot{\theta}_x)_{\text{ancienne}} ] }{ \Delta t } \quad (2-44)$$

En utilisant les équations de 2-39 à 2-44 on a:

$$(\dot{x}_i)_{\text{nouvelle}} = \frac{ \{ (\dot{x}_i)_{\text{ancienne}} [ 1 - \frac{C}{m_x} \frac{\Delta t}{2} ] + \Sigma (F_{xi} + D_{xi}) \frac{\Delta t}{m_x} \} }{ [ 1 + \frac{C}{m_x} \frac{\Delta t}{2} ] } \quad (2-45)$$

$$(\dot{\theta}_x)_{\text{nouvelle}} = \frac{ \{ (\dot{\theta}_x)_{\text{ancienne}} [ 1 - \frac{C^*}{I_x} \frac{\Delta t}{2} ] + \Sigma M_x \frac{\Delta t}{I_x} \} }{ [ 1 + \frac{C^*}{I_x} \frac{\Delta t}{2} ] } \quad (2-46)$$

Avec ces vitesses on est en mesure de calculer les éléments fondamentaux pour l'étude du comportement de l'échantillon, comme le tenseur des contraintes moyennes et le tenseur des déformations moyennes.

## 2.4 Loi non-linéaire de force de contact

Les forces de contacts dépendent de la géométrie, de l'élasticité et du frottement des particules.

### 2.4.1 Force normale (loi de Hertz)

En un point de contact entre deux disques (Fig. 2.4), les déformations dues à la composante normale de la force de réaction sont réversibles (loi de Hertz). Selon cette loi, la grandeur de la composante normale de la force de contact entre deux disques ( $F_n$ ) est égale à:

$$F_n = \frac{2\sqrt{2\bar{d}}}{3(1-\nu)} G \delta^{1,5} \quad (2-47)$$

où

$$\bar{d} = \frac{d_A d_B}{d_A + d_B}$$

$d_A$  et  $d_B$ : diamètres des disques  
 $\delta$ : déplacement d'un centre de disque  
 $G$ : module de cisaillement  
 $\nu$ : coefficient de Poisson

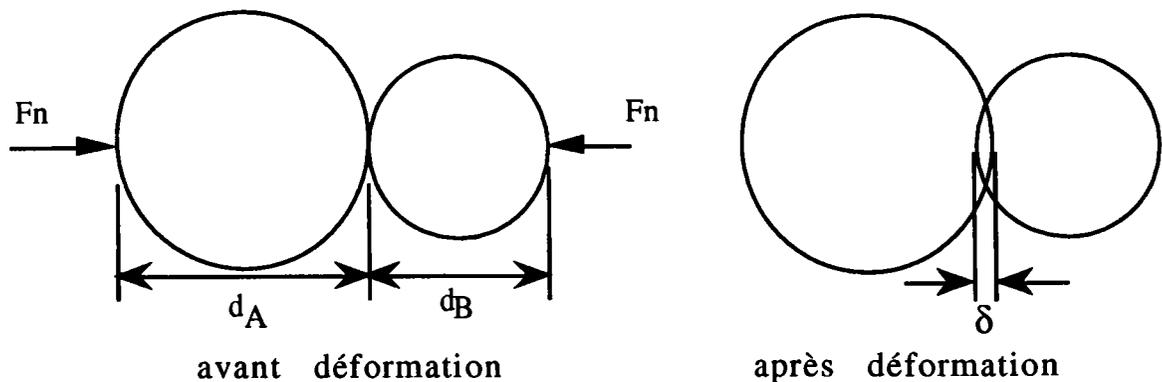


Figure 2.4: Deux disques en contact

## 2.4.2 Force tangentielle

La grandeur de la composante tangentielle de la force de contact est modélisée comme suit:

### sans glissement

$$F_t = K \delta_t \quad (2-48)$$

où

$\delta_t$ : déplacement tangentiel de contact

K: module initial d'élasticité déterminé par Mindlin par la relation:

$$K = \frac{2 G^3}{(2-\nu)} [ 3(1-\nu) \bar{d} F_n ]^{\frac{1}{3}} \quad (2-49)$$

### avec glissement

$$F_t = f F_n \quad (2-50)$$

f: le coefficient de frottement intergranulaire

Les simulations étudiées par Cundall (1988) montre que la partie de la contrainte totale due à la force tangentielle est faible. (presque 30% de tous les contacts glissent.)

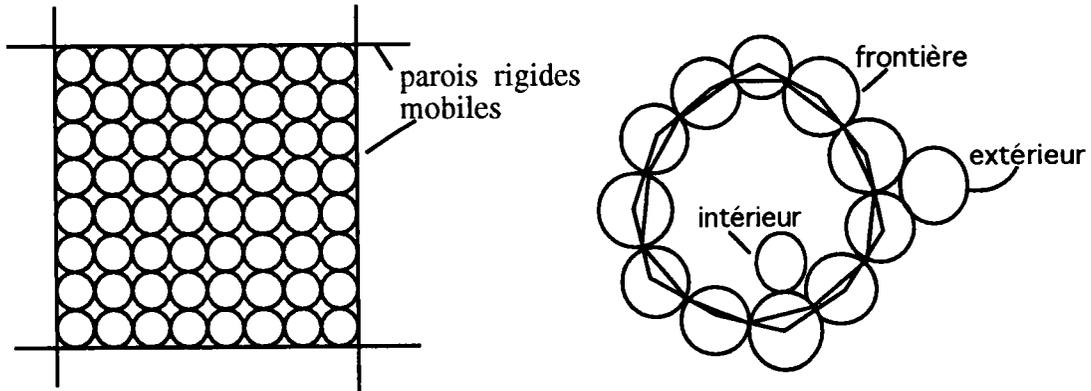
## 2.5 Conditions aux limites

### 2.5.1 La frontière de l'échantillon

L'utilisateur définit le domaine à étudier et spécifie le type de particules utilisées en donnant leurs dimensions et leurs propriétés physiques.

Pour les frontières du domaine étudié, on choisit soit des parois rigides mobiles soit une frontière formée de particules.

Si on choisit des parois rigides mobiles, les conditions aux limites seront les vitesses d'avancement des parois. Si on désire une frontière formée de particules, la frontière devient un polygone convexe. Les particules traversées par le domaine étudié feront parties de la frontière, pour les autres on considère qu'une particule appartient au domaine si son centre est à l'intérieur du polygone (Fig. 2.5).



*Figure 2.5: La frontière de l'échantillon*

La force à la frontière est égale à la force extérieure. La matrice de rigidité de contact pour des éléments périphériques est analogue à la matrice de matériau granulaire. Le mouvement des éléments périphériques est caractérisé par les conditions aux limites définies ci dessous.

Les conditions aux limites peuvent être appliquées directement à l'assemblage des particules en définissant la vitesse et la force appliquées aux particules périphériques. Ces paramètres sont contrôlés respectivement par le tenseur du taux de déformation moyenne et le tenseur de contrainte moyenne. Cette méthode dans un assemblage infini, est plus proche de la réalité que celle qui utilise les parois rigides mobiles à la frontière. Deux cas de condition aux limites sont analysés:

- le contrôle des déformations aux frontières
- le contrôle des contraintes aux frontières

### **2.5.2 Contrôle des déformations aux frontières**

Dans ce cas, la vitesse des particules périphériques est imposée et elle est indépendante des forces appliquées aux particules. Initialement on néglige la vitesse angulaire des

particules périphériques. La vitesse linéaire de chaque particule est donnée comme suit:

$$\dot{u}_i = \dot{\epsilon}_{ji} x_j \quad (i,j= 1,2,3) \quad (2-51)$$

où

$\dot{u}_i$ : vecteur vitesse

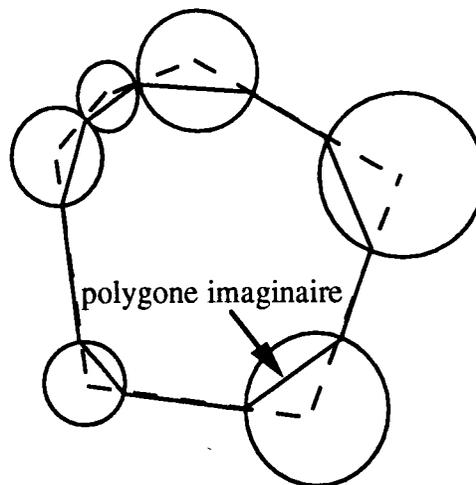
$\dot{\epsilon}_{ji}$ : tenseur du taux de déformation appliqué

$x_j$ : vecteur position par rapport au centre d'assemblage

Sous vitesses imposées (déformation contrôlée), des forces importantes peuvent se développer entre les particules, tandis que dans le cas de "contrainte contrôlée", la force n'a pas d'effet sur l'assemblage, et on risque d'avoir des vitesses incontrôlables aux frontières.

### 2.5.3 Contrôle des contraintes aux frontières

La méthode utilisée dans le programme minimise les couples appliqués aux disques individuelles. On suppose que le tenseur de contrainte s'applique à la surface d'un polygone imaginaire (Fig. 2.6).



**Figure 2.6:** Polygone imaginaire entre les disques

Pour chaque segment, la force s'exprime par:

$$F_i = \sigma_{ji} n_j l \quad (2-52)$$

où

$F_i$ : le vecteur de la force

$\sigma_{ji}$ : le tenseur de contrainte appliqué

$n_j$ : normale unité sortante  
 $l$ : la longueur du segment

Si la force s'applique au milieu d'un segment, le tenseur de contrainte pour la force et pour le moment est symétrique.

Pour transférer la force appliquée sur chaque corde de disques, le procédé dépend du type de liaison. Pour un segment entre deux disques, la force se divise en deux proportionnellement au diamètre de chaque disque (Fig. 2.7).

Exemple pour deux disques:

$$\frac{A}{F_i} = \frac{d_B}{d_A+d_B} F_i \quad \text{et} \quad \frac{B}{F_i} = \frac{d_A}{d_A+d_B} F_i$$

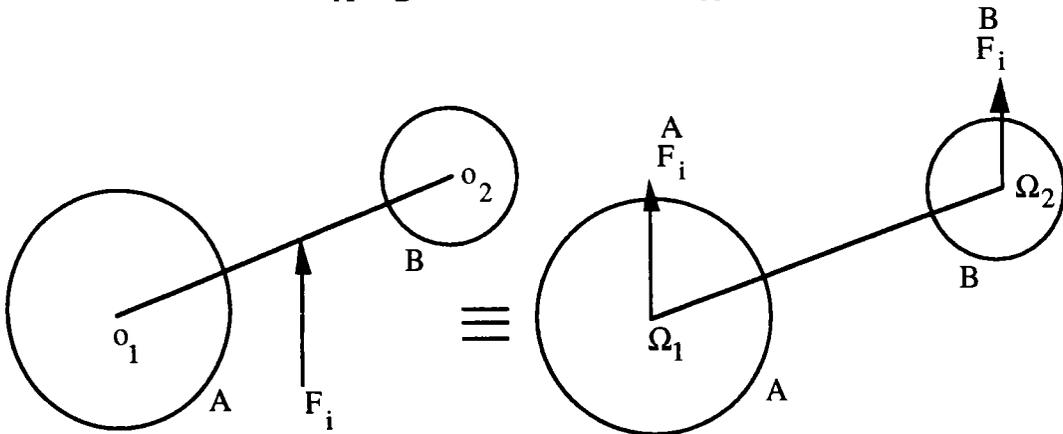


Figure 2.7: Répartition de la force sur les disques

Pour une corde, la force s'applique au centre du disque. Dans ce cas (Fig 2.8) on a un moment  $M$  qui est égal à:

$$M = -\epsilon_{ij} F_i X_j \quad (2-53)$$

où  $X_j$  est le vecteur de distance entre le centre du disque et centre de la corde, et

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

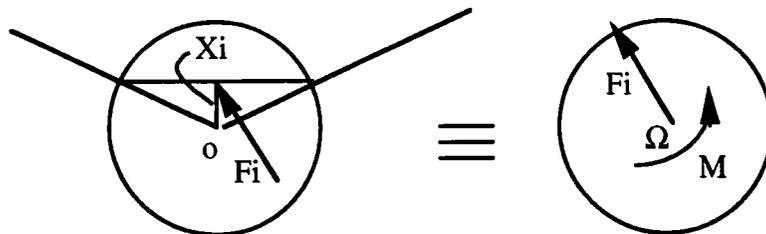
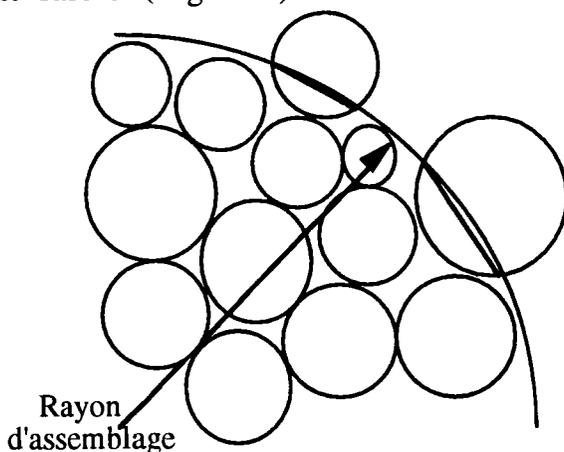


Figure 2.8: La force s'applique au centre du disque.

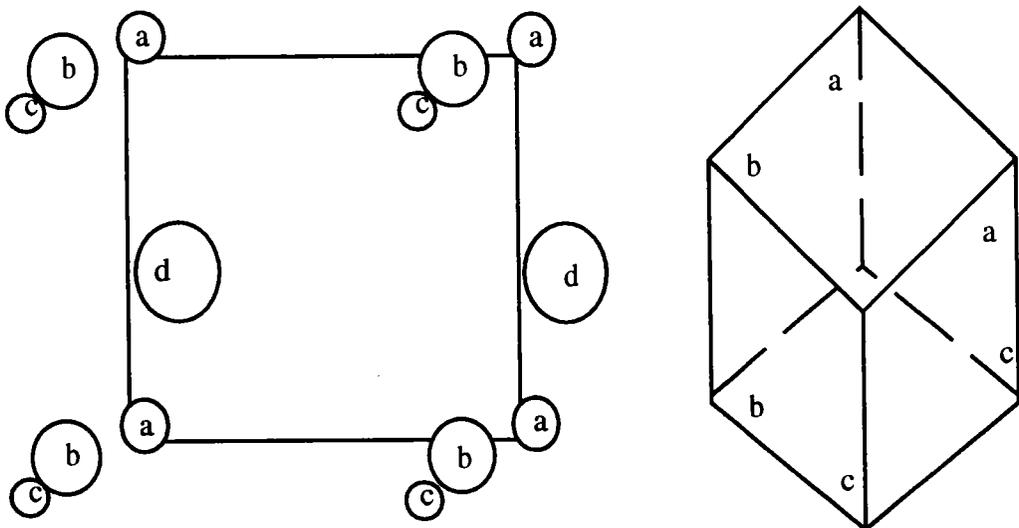
Lorsque le rayon d'assemblage est grand par rapport aux rayons des disques, la corde s'approche du centre du disque et le moment  $M$  devient faible (Fig. 2.9).



*Figure 2.9: Rayon d'assemblage grande par rapport aux rayons des disques*

## 2.6 Espace périodique

On utilise les frontières périodiques pour éliminer l'influence des frontières naturelles. On peut imaginer un espace composé d'une cellule périodique en forme de parallélépipède avec une liaison numérique entre les faces opposées. La figure 2.10 montre l'espace périodique bidimensionnel et tri-dimensionnel.



*Figure 2.10: Espace périodique bi-dimensionnel et tri-dimensionnel*

Dans un espace périodique: "les particules qui sortent d'une face de la cellule, rentrent du côté opposé."

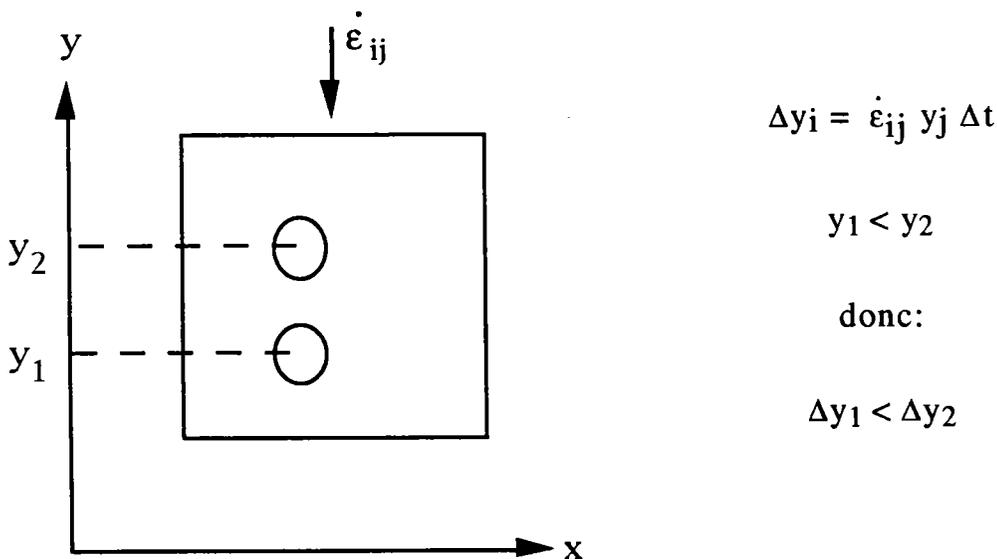
Pour charger l'assemblage des particules, on déforme la cellule et on change son volume. Ce type de chargement correspond au cas appelé "déformation contrôlée".

## 2.6.1 Calcul de la vitesse et du déplacement

Numériquement, l'effet de l'espace déformé est calculé comme suit:

### 2.6.1.1 Calcul de la vitesse

On impose un taux de déformation ( $\dot{\epsilon}_{ij}$ ) aux centres des particules ou à l'espace périodique. On suppose que le déplacement des particules est proportionnel à la position des particules (Fig. 2.11). Donc l'incrément de déplacement des particules, dû au taux de déformation imposé, est différent. Le mouvement des particules continue régulièrement, jusqu'à avoir un contact entre particules. Dès qu'il y a un contact, on a un déplacement relatif entre particules et en conséquence il y aura une vitesse relative réelle entre particules.(voir paragraphe 2.3)



*Figure 2.11: Dans l'espace périodique le déplacement des particules est proportionnel à la position des particules*

Durant le cycle suivant, la vitesse relative de deux particules qui s'approchent est calculée en faisant la somme de leurs vitesses relatives réelles ( $\dot{u}_i^{(réel)}$ ) plus la vitesse due au taux de déformation de l'espace périodique ( $\dot{u}_i^{(espace)}$ ).

$$\dot{u}_i^{(\text{réel})} = \dot{u}_i^{(\text{réel})} + \dot{u}_i^{(\text{espace})}$$

$$\dot{u}_i^{(\text{réel})} = \dot{u}_i^{(\text{réel})} + \dot{\epsilon}_{ij}^{(\text{espace})} z_i^{(\text{diff})} \quad (2-54)$$

où  $z_i^{(\text{diff})}$  est le vecteur entre les centres des particules.

L'espace périodique crée la collision entre les particules; ensuite les particules auront des vitesses relatives. On calcule l'incrément de la force à partir de la vitesse.

### 2.6.1.2 Calcul du déplacement

A chaque intervalle de temps ( $\Delta t$ ), un incrément de déplacement dû au taux de déformation de l'espace périodique ( $\Delta x_i$ ), est ajouté à l'incrément de déplacement calculé à partir de la vitesse réelle de la particule ( $\Delta u_i$ ).

$$\Delta u_i = \Delta u_i + \Delta x_i$$

$$\Delta u_i = \Delta u_i + \dot{\epsilon}_{ij}^{(\text{espace})} x_j \Delta t \quad (2-55)$$

où  $\dot{\epsilon}_{ij}^{(\text{espace})}$  est le taux de déformation de l'espace, qui est supposé indépendant de sa position.  $x_j$  est la coordonnée de la particule.

## 2.7 Tenseurs de contrainte

### 2.7.1 Tenseur de contrainte moyenne pour une surface circulaire

On définit le tenseur de contrainte moyenne pour une région périphérique avec un cercle de rayon  $R$  de centre  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  (Fig. 2.12). On considère deux plans orthogonaux se coupant au centre du cercle, avec les directions normales orientées vers l'extérieur.  $\hat{n}_i^\alpha$ ,  $\hat{n}_i^\beta$  inclinées par rapport à la direction de  $x_1$  des angles  $\alpha$  et  $\beta = \alpha + \pi/2$  respectivement.

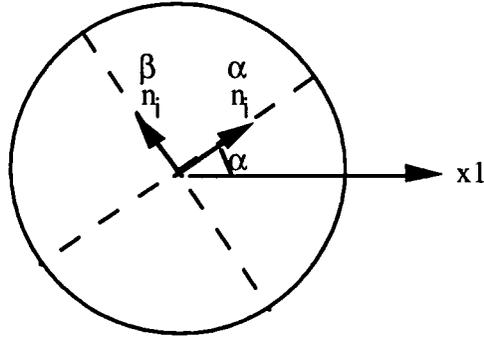


Figure 2.12: Représentation des plans orthogonaux

Si on suppose  $\vec{F}_i^\alpha$  et  $\vec{F}_i^\beta$  les forces appliquées aux plan de normales  $\vec{n}_i^\alpha$ ,  $\vec{n}_i^\beta$ , on aura les vecteurs de contraintes comme suit:

$$\vec{t}_i^\alpha = \frac{\vec{F}_i^\alpha}{2R} \quad \text{et} \quad \vec{t}_i^\beta = \frac{\vec{F}_i^\beta}{2R} \quad (2-56)$$

Les composantes du tenseur de contrainte qui correspondent aux contraintes  $\vec{t}_i^\alpha$  et  $\vec{t}_i^\beta$  sont représentées par  $\sigma_{ij}^\alpha$

$$\vec{t}_i^\alpha = \sigma_{ji}^\alpha \vec{n}_j \quad (2-57)$$

$$\vec{t}_i^\beta = \sigma_{ji}^\beta \vec{n}_j \quad (2-58)$$

La normale  $\vec{n}_j^\beta$  peut s'écrire comme suit:

$$\vec{n}_j^\beta = -\varepsilon_{jk} \vec{n}_k^\alpha \quad (2-59)$$

où

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-60)$$

En remplaçant (2-59) dans (2-58) on a:

$$\vec{t}_i^\beta = -\sigma_{ji}^\alpha \varepsilon_{jk} \vec{n}_k^\alpha \quad (2-61)$$

Si on multiplie par  $\varepsilon_{rp} \vec{n}_p^\alpha$

$$\varepsilon_{rp} \vec{n}_p^\alpha \vec{t}_i^\beta = -\sigma_{ji}^\alpha \varepsilon_{jk} \varepsilon_{rp} \vec{n}_k^\alpha \vec{n}_p^\alpha \quad (2-62)$$

Sachant que:  $\varepsilon_{jk} \varepsilon_{rp} = \delta_{jr} \delta_{kp} - \delta_{rk} \delta_{pj}$

$$\varepsilon_{rp} \overset{\alpha}{n}_p \overset{\beta}{t}_i = - \overset{\alpha}{\sigma}_{ji} [ \delta_{jr} \delta_{kp} - \delta_{rk} \delta_{pj} ] \overset{\alpha}{n}_k \overset{\alpha}{n}_p \quad (2-63)$$

$$\varepsilon_{rp} \overset{\alpha}{n}_p \overset{\beta}{t}_i = - \overset{\alpha}{\sigma}_{ri} \overset{\alpha}{n}_p \overset{\alpha}{n}_p + \overset{\alpha}{\sigma}_{pi} \overset{\alpha}{n}_r \overset{\alpha}{n}_p = - \overset{\alpha}{\sigma}_{ri} + \overset{\alpha}{t}_i \overset{\alpha}{n}_r \quad (2-64)$$

en remplaçant  $\varepsilon_{rp} \overset{\alpha}{n}_p = - \overset{\beta}{h}_r$  on aura:

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ri} = \overset{\alpha}{t}_i \overset{\alpha}{n}_r + \overset{\beta}{h}_r \overset{\beta}{t}_i \quad (2-65)$$

On modifie les indices  $r \rightarrow i$  et  $i \rightarrow j$

$$\overset{\alpha}{\sigma}_{ij} = \overset{\alpha}{n}_i \overset{\alpha}{t}_j + \overset{\beta}{h}_i \overset{\beta}{t}_j \quad (2-66)$$

Le tenseur de contrainte (2-66) ci dessus est fonction de l'angle  $\alpha$  ( $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ ). Le même tenseur de contrainte est obtenu pour l'angle  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ . Donc, si  $\alpha$  varie de 0 jusqu'à  $\frac{\pi}{2}$ , le tenseur de contrainte concerne tout le cercle. Or on peut définir le tenseur de contrainte moyenne  $\bar{\sigma}_{ij}$  de la façon suivante:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \overset{\alpha}{\sigma}_{ij} d\alpha}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overset{\alpha}{\sigma}_{ij} d\alpha \quad (2-67)$$

De la même façon, le tenseur de moment moyenne est défini comme suit:

$$\bar{\mu}_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overset{\alpha}{\mu}_i d\alpha \quad (2-68)$$

### 2.7.2 Tenseur de contrainte moyenne pour un volume

Le tenseur de contrainte moyenne dans un volume V de matériau est défini ainsi:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (2-69)$$

où:

$\bar{\sigma}_{ij}$ : tenseur de contrainte moyenne

V: volume de l'assemblage des particules

$\sigma_{ij}$ : tenseur de contrainte

L'intégrale devient une sommation, parce que les contraintes existent uniquement à l'intérieur des particules:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \sigma_{ij}^p \bar{V}^p \quad (2-70)$$

$\sigma_{ij}^p$ : tenseur de contrainte moyenne pour la particule p

$\bar{V}^p$ : volume de la particule p

N: nombre de particules dans V

De la même façon le tenseur de contrainte moyenne à l'intérieur de la particule p est défini comme suit:

$$\sigma_{ij}^p = \frac{1}{\bar{V}^p} \int_{\bar{V}^p} \sigma_{ij} d\bar{V}^p \quad (2-71)$$

En utilisant le théorème de divergence de Gauss pour (2-71) on a:

$$\sigma_{ij}^p = \frac{1}{\bar{V}^p} \int_S x_i p_j dS \quad (2-72)$$

$p_i$ : vecteur de contrainte surfacique

S: surface de l'assemblage des particules

Les forces surfaciques discrètes s'écrivent:

$$\sigma_{ij}^p = \frac{1}{\bar{V}^p} \sum_{c=1}^m x_i^c F_j^c \quad (2-73)$$

$\overset{c}{x}_i$ : vecteur de position de contact c

$\overset{c}{F}_j$ : force de contact en contact c

m: nombre de contacts sur la particule p

La combinaison de (2-70) et (2-73) donne:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \sum_{c=1}^m \overset{c}{x}_i \overset{c}{F}_j \quad (2-74)$$

Dans le cas de disques et de sphères,

$$\overset{c}{x}_i = \overset{p}{X}_i + \overset{p}{R} \overset{c}{n}_i$$

$\overset{p}{X}_i$ : vecteur de position du centre de la particule p

$\overset{p}{R}$ : rayon de la particule p

$\overset{c}{n}_i$ : vecteur unité normale en contact c

l'équation devient alors:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \overset{p}{R} \sum_{c=1}^m \overset{c}{n}_i \overset{c}{F}_j \quad (2-75)$$

## 2.8 Conclusion

L'étude conduisant à l'utilisation de la méthode des éléments distincts a été motivé par plusieurs idées:

- l'étude des matériaux ensilés à partir de la micromécanique;
- la simulation des essais de caractérisation des matériaux granulaires
- l'équivalence mécanique des résultats moyennement par calage des coefficients.

La méthode des éléments distincts permet de calculer les forces de contact entre particules en utilisant la loi linéaire ou non-linéaire de contact. La méthode pour calculer les forces de contact est la suivante:

- le temps est discrétisé en petits intervalles ( $\Delta t$ ),
- les forces appliquées aux particules, pendant ces intervalles de temps, ( $F_i$ ), communiquent une certaine accélération aux particules  $i$  ( $\gamma_i$ ), ceci se traduit par un déplacement  $\delta_i$ ,
- les déplacements entraînent à leur tour l'apparition de forces de contacts entre les particules  $i$  et  $j$  définies par une relation du type  $F_{ij}=k(\delta_i-\delta_j)$
- le processus itératif est ainsi poursuivi jusqu'à l'obtention de l'équilibre global.

A partir de ces forces de contacts, on peut calculer le tenseur de contrainte moyen de l'échantillon. Ce dernier est utilisé pour définir le comportement des matériaux.

La méthode des éléments distincts conduit au programme BALL, qui est un outil fondamental pour l'étude des milieux granulaires formés de disques. Cette méthode a été adaptée aux sphères et donné le programme TRUBALL.

## Chapitre 3

# Présentation de TRUBAL et Exploitation des résultats en utilisant les lois linéaire et non-linéaire de contact

### 3.1 Présentation de TRUBAL

Le programme TRUBAL développé par P. Cundall (1987) permet d'effectuer des simulations de déformations quasi-statique de matériaux granulaires (3D) ou de matériaux de Schneebeli (2D). Dans ce programme on peut utiliser la loi linéaire ou la loi non-linéaire de contact. D'autre part il est possible d'effectuer les essais avec des éléments cylindriques (disques) ou sphériques de diamètres différents ou de même diamètre.

La technique de calcul exploitée dans TRUBAL est validée en comparant les tracés de vecteur de force obtenus par le programme sur ordinateur avec les tracés correspondants obtenus à l'aide d'une analyse photo-élastique [3]. L'analyse photo-élastique utilisée pour la comparaison est celle appliquée sur un assemblage de disques par De Josselin de Jong et Verruijt (1969).

Les diagrammes de vecteur de force obtenus numériquement sont très voisins de ceux obtenus photo-élastiquement. Cette comparaison permet de conclure que la méthode des éléments distincts est un instrument valable pour la recherche du comportement des assemblages granulaires.

### 3.1.1 Définitions

#### Coordinance

On définit le nombre de coordination ou coordinance (coordination number) comme le nombre moyen de contact par particule:

$$\text{Coordinance} = \frac{\text{nombre total des contacts}}{\text{nombre total des particules}}$$

Généralement si le volume de l'échantillon diminue, la coordinance augmente.

#### Glissement

On définit le glissement (sliding) comme le rapport de nombre de contacts glissés sur le nombre total de contacts.

$$g = \text{Glissement} = \frac{\text{nombre des contacts qui glissent}}{\text{nombre total des contacts}}$$

Si le glissement est nul ( $g=0$ ), il n'y a pas de glissement. Si glissement  $g=1$ , c'est-à-dire tous les contacts glissent. Donc le glissement ( $g$ ) varie entre 0 et 1. Pendant le glissement il y a une perte d'énergie.

### 3.1.2 Caractéristiques de la Simulation

Pour effectuer la simulation numérique, un certain nombre de paramètres doivent être choisis:

#### Caractéristiques géométriques et mécaniques des particules

Au niveau des particules il faut choisir les paramètres suivants:

- diamètre des particules
- coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ )

## Caractéristique du matériau

Avant l'application du chargement sur l'échantillon, il faut que ce dernier ait une porosité ( $n$ ) ou indice de vide ( $e$ ) réel. Pour avoir un indice des vides désiré, le rôle du coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) est très important. En augmentant le coefficient ( $f$ ), on peut avoir un échantillon avec un indice des vides plus grand.

## Caractéristiques du contact

Les forces de contacts linéaires normal et tangentiel sont modélisés par un ressort et amortisseur en parallèle exprimant l'effort normal et pour l'effort tangentiel (Fig. 3.1). Il faut fixer les valeurs des raideurs et des amortissements. La raideur est choisie aussi grande que possible pour avoir un pas de temps assez grand. On choisit le coefficient d'amortissement comme suit:

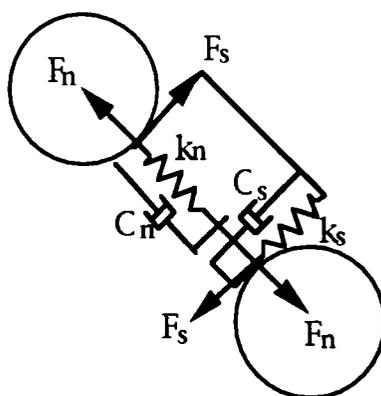
$$C_n = \beta k_n \quad \text{et} \quad C_s = \beta k_s \quad (3.1)$$

où:

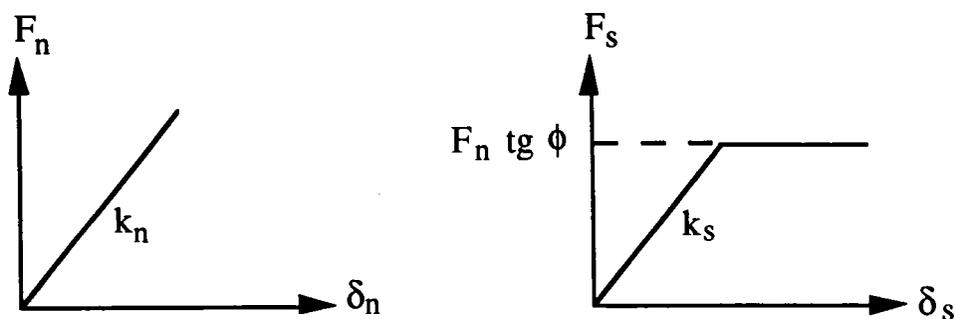
$C_n$  et  $C_s$  sont les coefficients normal et tangentiel des amortisseurs.

$k_n$  et  $k_s$  sont les raideurs normale et tangentielle des ressorts.

$\beta$  est un coefficient constant.



*Figure 3.1: Contact linéaire entre deux disques*



*Figure 3.2: La courbe de force-déplacement correspondant à la figure 3.1*

Pour les contacts non-linéaires il faut rajouter le module de cisaillement ( $G$ ) et coefficient de Poisson ( $\nu$ ) des matériaux.

### 3.1.3 Les étapes d'un essai de simulation

Généralement un essai comprend les étapes suivantes:

#### Préparation de l'échantillon

On distribue les particules de manière aléatoire dans l'espace. Les dimensions des particules dépendent de la distribution désirée. Pour qu'on puisse avoir un nombre important de particules, le volume initial de la cellule doit être grand.

#### Compactage isotrope

Après la génération des particules, il faut compacter la cellule périodique de manière isotropique jusqu'à la porosité désirée (Fig. 3.3).

Pour faire ce compactage on impose un taux de déformation à l'espace périodique (et en conséquence aux centres des particules). Pendant cette phase, pour une contrainte isotropique donnée, le frottement entre des particules peut être augmenté ou diminué. A partir de ce changement, en utilisant la méthode d'expérimentation systématique, on peut obtenir la porosité désirée. L'influence du mode de préparation est important et le compactage peut introduire des précontraintes. Pour éviter ce phénomène, le taux de déformation imposé à l'espace périodique doit être très petit.

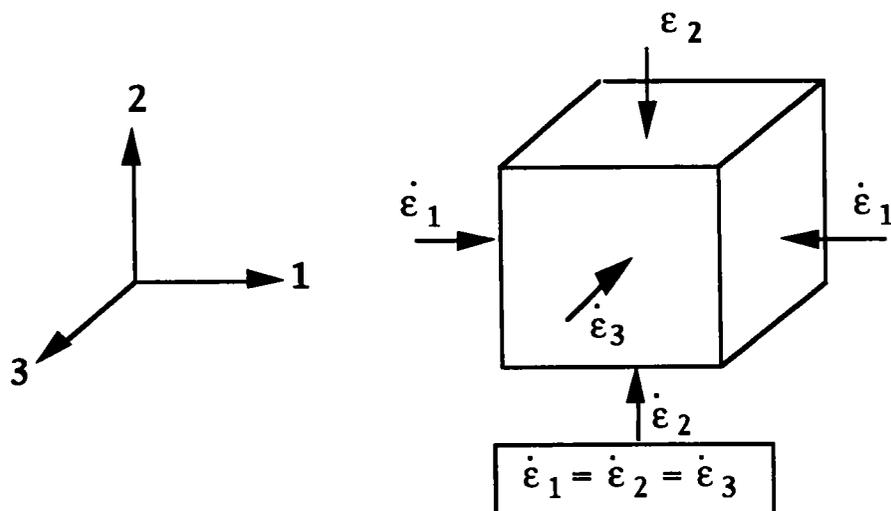


Figure 3.3: Compactage isotrope de l'échantillon

## servocommande

On peut réaliser une servocommande (servo-control) pour régler le taux de déformation de la cellule périodique et aussi pour que la composante mesurée du tenseur de contrainte moyenne reste constante. Par exemple, pour exécuter un essai à contrainte moyenne constante, la servocommande agit comme suit:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon} + G^* (\dot{\sigma}_0^{(\text{desiré})} - \dot{\sigma}_0^{(\text{mesuré})}) \quad (3.2)$$

où  $G^*$  est un paramètre appelé le "gain" de la servocommande.

## Chargement

En utilisant la servocommande et la contrainte isotropique désirée, on peut équilibrer l'échantillon. A partir de là, on impose un taux de déformation à l'espace périodique, comme un chargement. Pour estimer l'effet des forces d'inertie, on peut imposer un taux de déformation zéro, et on compare le changement des composantes de contrainte. Si le changement est trop grand, on impose un taux de déformation plus petit et on répète l'essai. Le chargement peut être isotrope, uniaxial, biaxial, triaxial ou en cisaillement (Fig. 3.4).

### **3.1.4 Passage du milieu formé de sphères au milieu formé de cylindres**

TRUBAL est utilisé à l'origine pour l'étude de sphères (3D). Pour qu'on puisse l'utiliser en 2D, il faut trouver un passage du milieu formé de sphères au milieu formé de cylindres (disques).

La contrainte moyenne de l'échantillon est calculée en faisant la somme de toutes les forces de contact divisée par le volume de l'échantillon.

$$\sigma_{3D} = \frac{\Sigma \text{ toutes les forces de contact}}{a.b.z} \quad (3.3)$$

$a$ ,  $b$  et  $z$  sont les dimensions du parallélépipède dans les données de TRUBAL (3D) (Fig. 3.5).

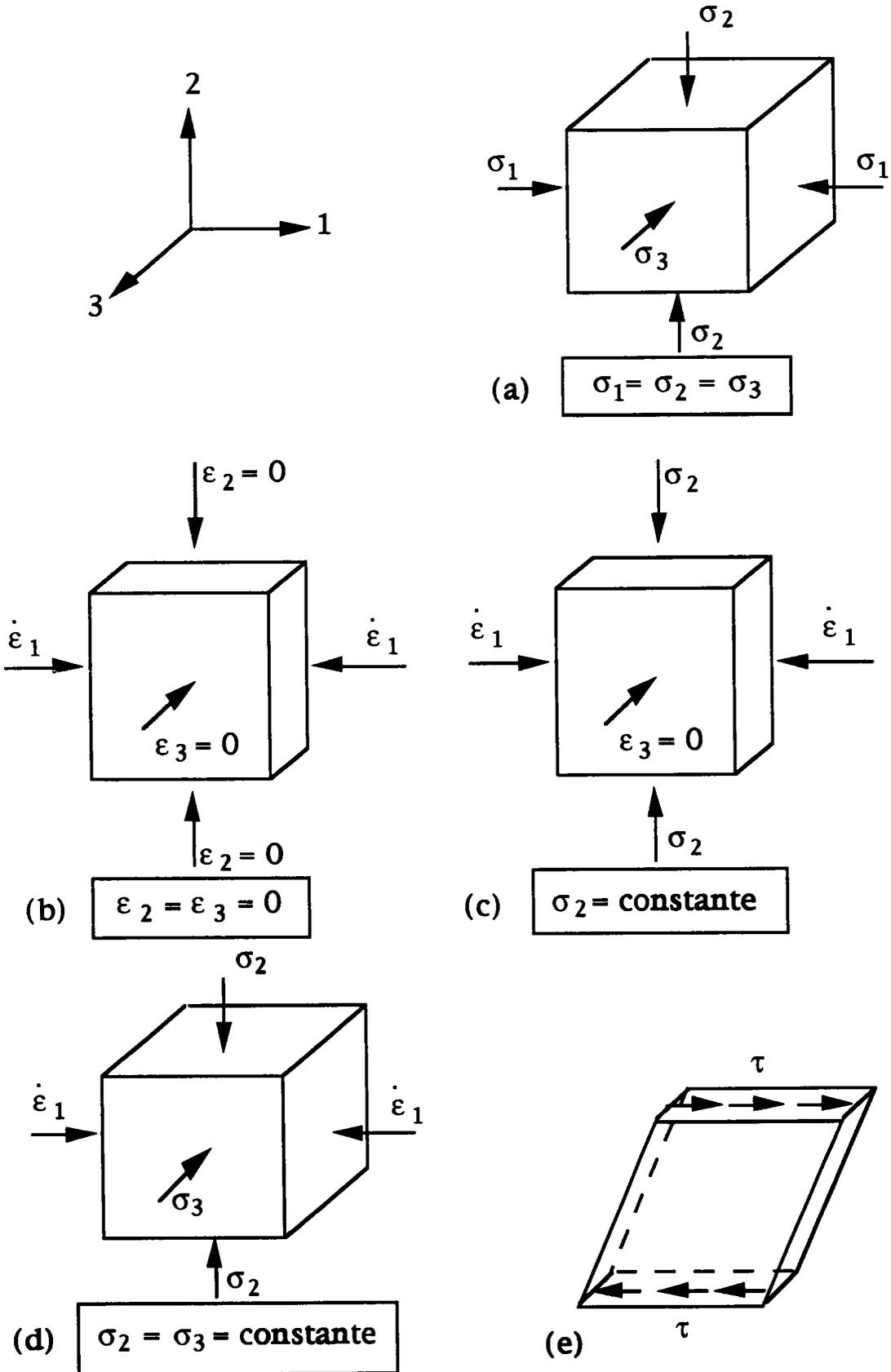
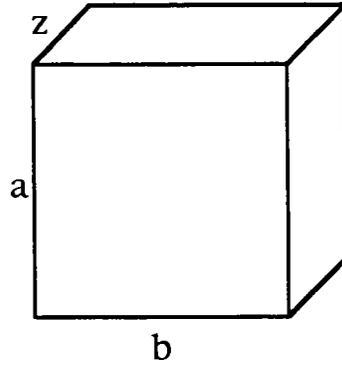


Figure 3.4: Différents cas de chargement: a) Isotrope b) Uniaxial c) Biaxial d) Triaxial e) Cisaillement simple



**Figure 3.5:** Echantillon utilisé dans TRUBAL

L'utilisation des résultats de 3D en 2D, suppose que dans le cas 2D, a et b ne changent pas avec z modifié, en utilisant l'hypothèse suivante: "le volume d'une particule sphérique est égal au volume d'une particule cylindrique de même diamètre."(Fig. 3.6)

$$V_{\text{cylindre}} = V_{\text{sphère}} \quad (3.4)$$

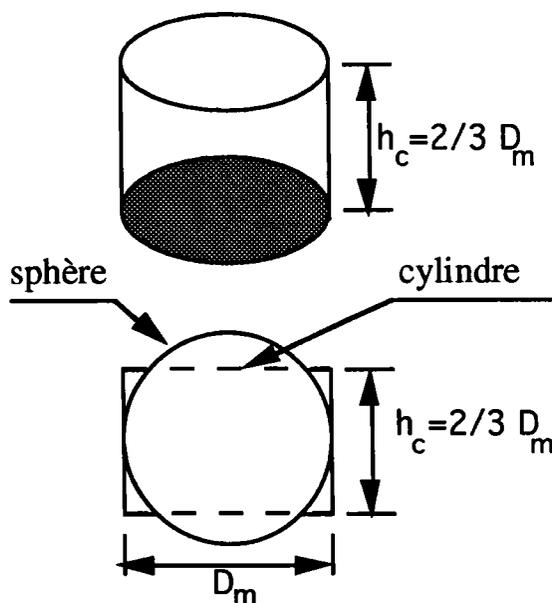
$$\frac{\pi}{4}(D_m)^2 h_c = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{D_m}{2}\right)^3 \quad (3.5)$$

$$h_c = \frac{2}{3}D_m \quad (3.6)$$

où:

$D_m$ : diamètre moyen de la sphère

$h_c$ : hauteur du cylindre = épaisseur du parallélépipède en 2D



**Figure 3.6:** une particule sphérique et une particule cylindrique de même volume et même diamètre

La relation (3.3) en 2D s'écrit:

$$\sigma_{2D} = \frac{\Sigma \text{ toutes les forces de contact}}{a.b.h_c} \quad (3.7)$$

En utilisant les relations (3.3) et (3.7) on aura:

$$\sigma_{2D} = \left(\frac{z}{h_c}\right) \sigma_{3D} \quad (3.8)$$

ce que donne avec la relation (3.6):

$$\sigma_{2D} = \left(\frac{z}{\frac{2}{3}D_m}\right) \sigma_{3D} \quad (3.9)$$

$z$  et  $D_m$  dérivants des donnés et  $\sigma_{3D}$  dérivant des résultats de TRUBAL.

### 3.1.5 Limites d'utilisation de TRUBAL

Dans TRUBAL il y a deux types de limites d'utilisation qu'il faut respecter:

1) Celles qui sont choisies dans le programme: par exemple le nombre maximum de particules de diamètres différents que l'on peut avoir est égal à 5. Ce type de limitation peut être modifié dans le programme.

2) Celles qui sont due à la nature de la méthode et des hypothèses utilisées. Dans ce type de limitation on peut présenter les paramètres suivants:

- le diamètre des particules, est compris entre 0,2 et 1 mm.
- le nombre de particules, doit être important. Si on le choisit petit, il y aura des parasites dans les résultats. On peut montrer que si le nombre de particules est assez important, l'effet de l'espace périodique est négligeable.
- la vitesse de chargement

Le taux de déformation imposé à l'espace périodique doit être suffisamment petit pour que l'hypothèse de comportement quasi-statique soit vraie.

- le pas de temps ( $\Delta t$ )

Dans le programme le pas de temps ( $\Delta t$ ) est calculé à partir de la plus grande raideur choisie. Pour la loi linéaire de contact, il faut donner les valeurs réelles de la raideur normale ( $k_n$ ) et de la raideur tangentielle ( $k_s$ ), car les forces de contacts sont calculées à partir de ces paramètres. Par contre pour la loi non-linéaire de contact, les valeurs de  $k_n$  et  $k_s$  n'ont pas de rôle dans le calcul. Dans ce cas on choisit ces valeurs uniquement pour calculer le pas de temps ( $\Delta t$ ).[9]

Le pas de temps ( $\Delta t$ ) doit être suffisamment petit, pour assurer une division convenable de la période; et pour assurer également la stabilité. Cependant pour gagner en temps de calcul et pour autoriser un pas de temps aussi grand que possible, les valeurs des raideurs sont adaptées.

### 3.1.6 Les résultats de TRUBAL

Les résultats les plus importants que l'on peut obtenir à chaque étape du test sont les suivants:

- les dimensions de l'échantillon
- le tenseur de contrainte moyenne de l'échantillon
- le nombre de contacts, l'histogramme des contacts et les particules qui sont en contact
- la porosité de l'échantillon
- le nombre de coordination
- le glissement
- la représentation schématique et vectorielle dans le plan des: particules, forces, vitesse, rotation et déplacement relatif des particules.

### 3.1.7 Un Exemple: Effet du Nombre des Particules

On a fait les tests avec les ressorts linéaires pour représenter la déformabilité entre deux particules. L'objectif de cet essai est: estimer l'effet de nombre de particules sur les résultats ou l'influence de nature périodique de l'échantillon.

Pour les essais linéaires (avec grandes déformations), nature de la relation de force-déplacement en contacts est relativement peu important; parce que la plupart des déformations se produisent à cause de glissement et réarrangement géométrique. Trois essais linéaires, identiques mais avec un nombre de particules différents (45, 150 et 1200 particules) sont réalisés. Les autres caractéristiques des matériaux sont les suivantes:

- deux diamètres sont utilisés, 2/3 de rayon 10 unités (définies dans le programme initial) et 1/3 de rayon 15 unités.
- la porosité initiale de l'échantillon = 0,33
- la contrainte isotrope =  $1,5 \cdot 10^5$  unités
- la raideur normale =  $2 \cdot 10^8$  unités
- la raideur tangentielle =  $1 \cdot 10^8$  unités
- le coefficient de frottement = 1,0

#### La méthode du test

Un générateur aléatoire est utilisé pour placer les sphères dans un parallélépipède. A l'état initial il n'y a pas de contact entre les particules.

On commence par comprimer l'espace périodique d'une façon isotrope jusqu'à la porosité désirée (Fig. 3.7-a).

Ensuite, un essai de cisaillement est réalisé. Pour cet essai, on diminue la dimension x et on augmente la dimension y de l'espace périodique (Fig. 3.7-b), en maintenant la contrainte moyenne isotrope constante à  $1,5 \cdot 10^5$  unités. Le chargement déviatorique est imposé jusqu'à la contrainte maximum.

#### Résultats

La figure 3.8 représente les résultats de l'essai pour trois échantillons. Ils sont identiques, bien que quelques fluctuations apparaissent pour 45 particules et un peu moins pour 150

particules, mais la courbe pour 1200 particules est tout à fait régulière. Donc on constate que si le nombre de particules est important, l'effet de l'espace périodique est négligeable.

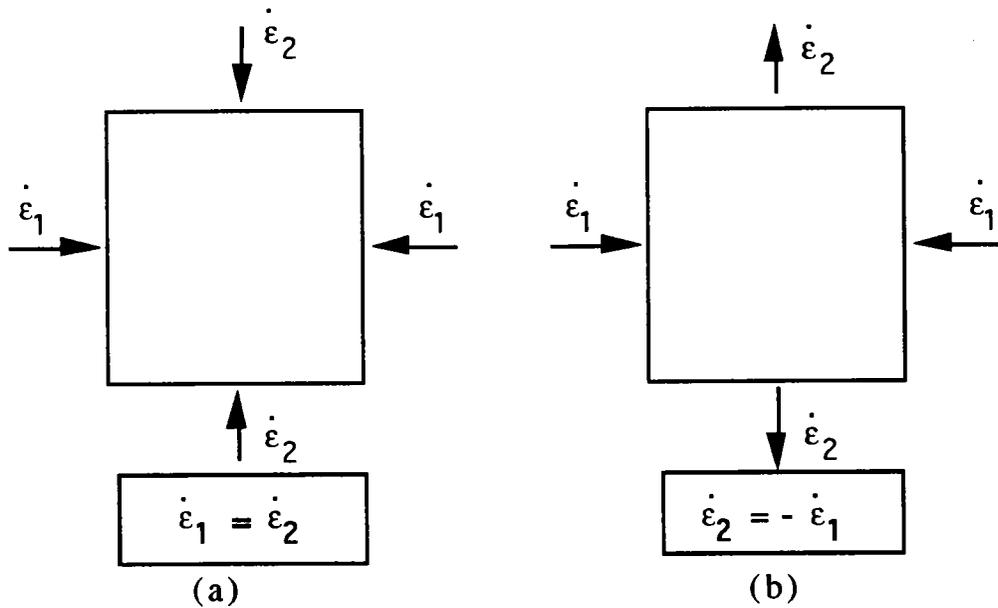


Figure 3.7: a) Compactage de l'échantillon et Chargement isotrope  
b): Chargement Déviatorique

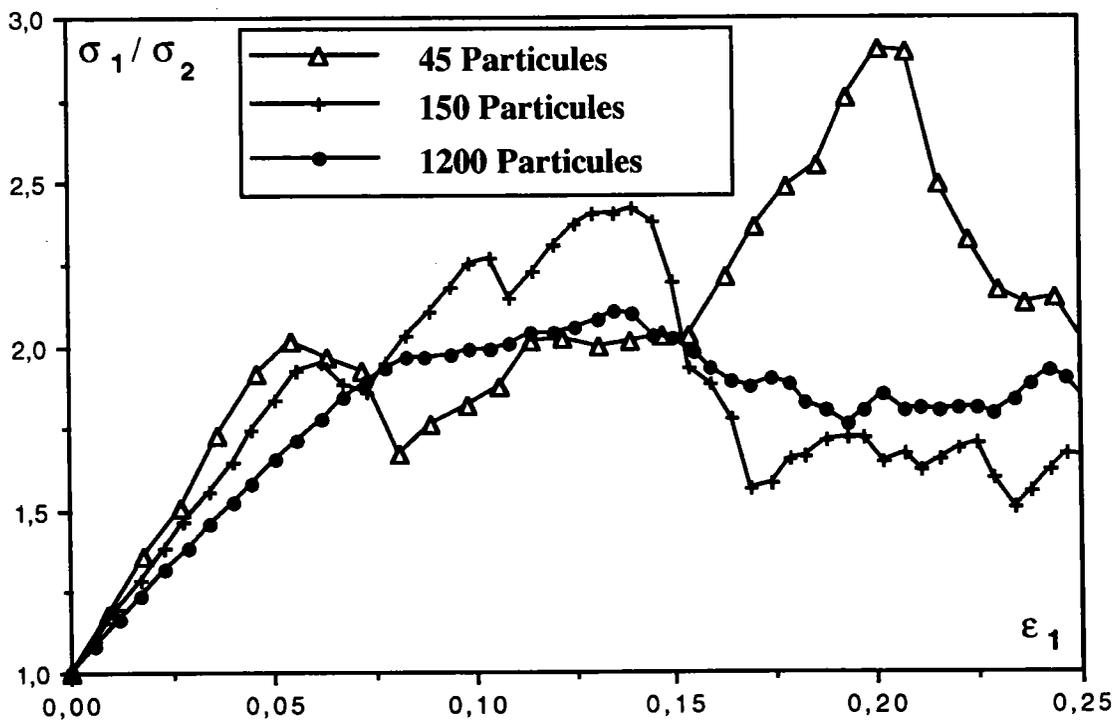


Figure 3.8: Rapport de la contrainte verticale sur la contrainte horizontale en fonction de la déformation axiale

### 3.1.8 Conclusion

En utilisant le programme TRUBAL, on peut effectuer des simulations numériques du comportement des matériaux en 2D ou 3D.

TRUBAL est un programme de recherche, mais pas encore un vrai logiciel. Donc il y a quelques conditions d'utilisation; ainsi que quelques limites d'utilisation. Si on respecte bien ces conditions et ces limites d'utilisation, les résultats de ce programme sont acceptables. Par exemple, pour un petit nombre de particules (inférieur à 200), des fluctuations apparaissent dans la courbe de contrainte-déformation. C'est l'effet de l'espace périodique qui est utilisé dans le programme. Alors que si le nombre de particules est assez important (supérieur de 400), l'effet de périodicité ne joue pas un rôle important.

## 3.2 Contrainte déviatorique dans un milieu granulaire (la loi linéaire de contact)

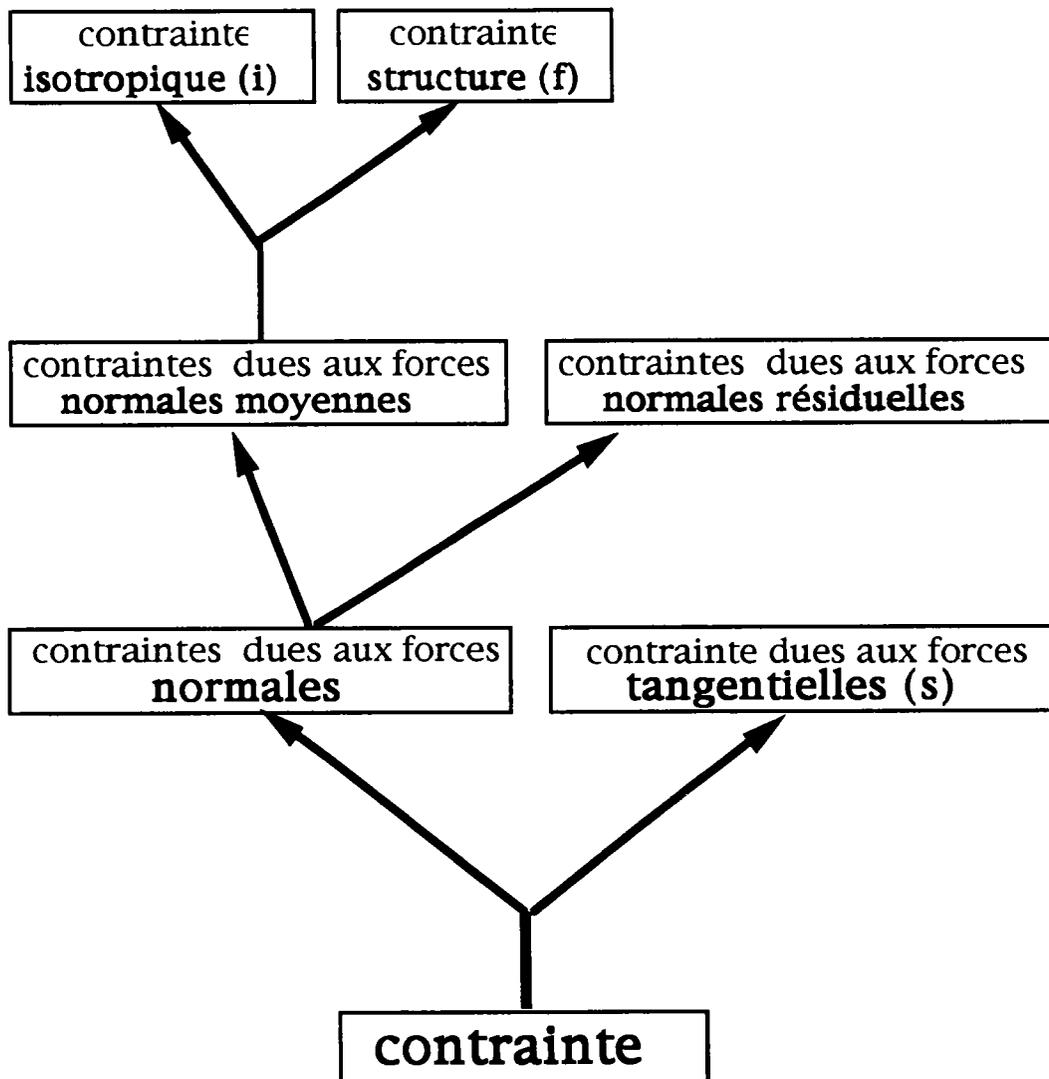
### 3.2.1 Introduction

Dans un milieu granulaire constitué de particules déformables, il est nécessaire d'avoir un modèle capable de rendre compte des changements intérieurs micromécaniques qui sont dus à une sollicitation macromécanique. Le comportement global d'un milieu granulaire dépend fortement des sollicitations locales. Pour caractériser l'état de contraintes d'un milieu granulaire, Cundall a proposé la décomposition en plusieurs parties du tenseur de contrainte, dont chaque partie correspond à un aspect différent du comportement:

- 1- aux contacts, il y a décomposition en contraintes dues aux forces normales, et en contraintes dues aux forces tangentielles.
- 2- pour chaque particule, il y a décomposition en force normale moyenne de la force normale résiduelle.

La première partie du tenseur concerne les contraintes dues aux forces normales et les contraintes dues aux forces tangentielles de contacts. Il a été mis en évidence que les forces tangentielles seules contribuent aux composantes déviatoriques du tenseur de contrainte. La partie isotropique du tenseur vient uniquement des forces normales aux contacts. La contrainte isotropique dépend de la force normale moyenne de contact pour chaque particule, et elle est indépendante de la distribution des forces autour de la particule.

La deuxième partie du tenseur, pour chaque particule, correspond à la décomposition de la force normale moyenne des forces normales résiduelles. Ces dernières forces constituent une partie du tenseur de contrainte qui dépend de la variation angulaire des forces normales ( $n_v$ ). A partir de la force normale moyenne, se créent deux autres parties: une partie associée avec les contraintes isotropiques ( $i$ ) et l'autre avec la structure ( $f$ , fabric tensor). Le schéma ci-dessous résume les différentes parties du tenseur de contrainte. Ces idées sont développées sous forme mathématique pour les assemblages arbitraires des particules.



### 3.2.2 Méthode de calcul des différents tenseurs

D'abord on présente les paramètres. Les indices correspondent aux composantes des vecteurs ou des tenseurs dans le système de coordonnées cartésiennes.

Les symboles et paramètres utilisés sont:

- $R^p$  rayon de la particule  $p$
- $V^p$  volume de la particule  $p$
- $m$  nombre de contacts sur la particule  $p$
- $N$  nombre de particules dans  $V$
- $V$  volume de l'assemblage des particules

S	surface de l'assemblage des particules
$\sigma_0$	contrainte isotrope
$\overset{c}{n}_i$	vecteur unité normale en contact c
$\overset{c}{F}_j$	force de contact en contact c
$p_i$	vecteur de contrainte surfacique
$x_i$	vecteur de position de contact c
$\overset{p}{X}_i$	vecteur de position du centre de la particule p
$\sigma_{ij}$	tenseur de contrainte
$\bar{\sigma}_{ij}$	tenseur de contrainte moyenne
$\overset{p}{\sigma}_{ij}$	tenseur de contrainte moyenne pour la particule p

La formule (2.75) est obtenue pour la contrainte moyenne ainsi:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \overset{p}{R} \sum_{c=1}^m \overset{c}{n}_i \overset{c}{F}_j \quad (3.10)$$

où

$$\sum_{c=1}^m \quad \text{somme sur tous les contacts entre particules p}$$

$$\sum_{p=1}^N \quad \text{somme sur toutes les particules}$$

Soit V le volume de la cellule périodique, alors on peut utiliser cette formule pour l'espace périodique. La déformation moyenne de l'échantillon est égal à la déformation de la cellule. Certaines composantes de la contrainte restent constantes, car l'espace périodique impose une "déformation contrôlée".

Sachant que le terme

$$\sum_{c=1}^m \overset{p}{X}_i \overset{c}{F}_j = \overset{p}{X}_i \sum_{c=1}^m \overset{c}{F}_j = 0 \quad (3.11)$$

traduit l'équilibre.

Le tenseur de contrainte ( $\bar{\sigma}_{ij}$ ) peut se séparer en deux parties, celle due aux forces normales ( $\bar{\sigma}_{ij}(n)$ ) et celle due aux forces tangentielles ( $\bar{\sigma}_{ij}(s)$ ).

$$F_i = F_i(n) + F_i(s) \quad (3.12)$$

et

$$F_i(n) = F_k n_k n_i \quad (3.13)$$

Ces deux parties du tenseur de contraintes s'écrivent:

$$\bar{\sigma}_{ij}(n) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \sum_{c=1}^m \bar{F}_k^c n_k^c n_i^c n_j^c \quad (3.14)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \sum_{c=1}^m [ n_i^c \bar{F}_j^c - \bar{F}_k^c n_k^c n_i^c n_j^c ] \quad (3.15)$$

Quand  $i=j$ , le tenseur pour  $\sigma_{ij}(s)$  disparaîtra, car le cisaillement n'est pas une composante isotropique.

Le tenseur de contrainte due aux forces normales encore peut être décomposé en deux parties dont une partie est constante à chaque contact. ( $\bar{F}^p(av)$ ).

$$\bar{F}_i^c(n) = \bar{F}^p(av) n_i^c + \bar{F}_i^c(nv) \quad (3.16)$$

où  $\bar{F}_i^c(nv)$  est la partie restante;  $(nv)$  représente les " variations normales".  $\bar{F}^p(av)$  est la force normale moyenne pour une particules, qui s'écrit:

$$\bar{F}^p(av) = \frac{1}{m} \sum_{c=1}^m \bar{F}^c(n) = \frac{1}{m} \sum_{c=1}^m \bar{F}_k^c n_k^c \quad (3.17)$$

La partie  $(nv)$  est de la forme suivante:

$$\bar{\sigma}_{ij}(nv) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \sum_{c=1}^m n_i^c \bar{F}_j^c(nv) \quad (3.18)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(nv) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \sum_{c=1}^m [ n_i^c \bar{F}_j^c(n) - n_i^c \bar{F}^p(av) n_j^c ] \quad (3.19)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}(nv) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \frac{p}{R} \sum_{c=1}^m [ \overset{c}{F}_k \overset{c}{n}_k \overset{c}{n}_i \overset{c}{n}_j - \overset{p}{F}(av) \overset{c}{n}_i \overset{c}{n}_j ] \quad (3.20)$$

Enfin, la partie résiduelle du tenseur, deuxième terme négatif de la relation (3.20), peut se séparer en deux parties; une partie isotropique et l'autre partie structure (fabric tensor). Cette dernière dépend uniquement de la géométrie et de la contrainte moyenne isotropique de la particule. La contrainte moyenne isotropique de l'échantillon s'écrit:

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{\bar{\sigma}_{ii}}{\delta_{kk}} = \frac{1}{V \delta_{kk}} \sum_{p=1}^N \frac{p}{R} \sum_{c=1}^m \overset{c}{n}_k \overset{c}{F}_k \quad (3.21)$$

ou en utilisant (3.17)

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{V \delta_{kk}} \sum_{p=1}^N \frac{p}{R} m \overset{p}{F}(av) \quad (3.22)$$

On peut introduire la contrainte moyenne isotropique de la particule,  $\overset{p}{\sigma}_0$ , avec la relation suivante:

$$\overset{p}{\sigma}_0 = \frac{m \frac{p}{R} \overset{p}{F}(av)}{V \delta_{kk}} \quad (3.23)$$

Donc

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \frac{p}{V_k} \overset{p}{\sigma}_0 \quad (3.24)$$

La partie "structure" (fabric tensor) de la contrainte est calculée par soustraction de la contrainte isotropique de la contrainte correspondante au deuxième terme de la relation (3.20) :

$$\bar{\sigma}_{ij}(f) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \frac{p}{R} \sum_{c=1}^m \overset{p}{F}(av) \overset{c}{n}_i \overset{c}{n}_j - \bar{\sigma}_0 \delta_{ij} \quad (3.25)$$

En utilisant les relations (3.23) et (3.24) on peut écrire:

$$\bar{\sigma}_{ij}(f) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \frac{p}{V} \sigma_0^p \left[ \frac{\delta_{kk}}{m} \sum_{c=1}^m n_i^c n_j^c - \delta_{ij} \right] \quad (3.26)$$

En résumé, le tenseur de contrainte moyenne peut être décomposé comme suit:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_{ij}(s) + \bar{\sigma}_{ij}(f) + \bar{\sigma}_{ij}(nv) + \bar{\sigma}_0 \delta_{ij} \quad (3.27)$$

où les parties sont définies comme les relations suivantes par rapport aux forces de contacts et aux vecteurs unités normaux de contacts. Les différents tenseurs de (3.27) s'écrivent:

a) tenseur de contrainte cisaillement (shear):

$$\bar{\sigma}_{ij}(s) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \frac{p}{R} \sum_{c=1}^m \left[ n_i^c F_j^c - F_k^c n_k^c n_i^c n_j^c \right] \quad (3.28)$$

b) tenseur de contrainte structure (fabric tensor):

$$\bar{\sigma}_{ij}(f) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \frac{p}{V} \sigma_0^p \left[ \frac{\delta_{kk}}{m} \sum_{c=1}^m n_i^c n_j^c - \delta_{ij} \right] \quad (3.29)$$

c) tenseur de contrainte variations normales:

$$\bar{\sigma}_{ij}(nv) = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \left[ \frac{p}{R} \sum_{c=1}^m F_k^c n_k^c n_i^c n_j^c - \frac{p}{V} \sigma_0^p \frac{\delta_{kk}}{m} \sum_{c=1}^m n_i^c n_j^c \right] \quad (3.30)$$

d) tenseur de contrainte isotropique:

$$\bar{\sigma}_0 = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^N \frac{p}{V} \sigma_0^p \quad (3.31)$$

où

$$\frac{p}{\sigma_0} = \frac{m \frac{p}{R} F(av)}{p \frac{p}{V} \delta_{kk}} = \frac{p}{p} \frac{R}{V} \sum_{c=1}^m F_k^c n_k^c \quad (3.32)$$

Les relations (3.28), (3.29) et (3.30) représentent uniquement les composantes déviatoriques, et il apparait qu'elles correspondent à trois caractéristiques distinctes de matériaux granulaires; c'est-à-dire:

a)  $\bar{\sigma}_{ij}(s)$ : correspond à la mobilisation des forces de cisaillement; à chaque étape d'essai cette partie dépend des tendances de contacts au glissement, et donc dépend de la dissipation d'énergie.

b)  $\bar{\sigma}_{ij}(f)$ : correspond à la distribution angulaire des contacts; cette partie dépend directement de l'état courant d'anisotropie. La relation (3.29) montre que  $\bar{\sigma}_{ij}(f)$  est proportionnelle à la contrainte isotropique de la particule ( $\bar{\sigma}_0^p$ ) produit par un terme géométrique. La partie géométrique de  $\bar{\sigma}_{ij}(f)$  est pareille à ce qui est proposée par Oda et al [104].

c)  $\bar{\sigma}_{ij}(nv)$ : correspond à la variation de la grandeur des forces normales en fonction de l'orientation. Cette partie montre les excentricités des forces appliquées aux particules, et dépend peut être de la tendance des colonnes de particules au flambage.

L'état interne de l'assemblage de matériaux granulaires est représenté par les grandeurs relatives et les directions des trois parties déviatoriques (s,f,nv), indépendamment des contraintes appliquées. Les différentes parties des contraintes peuvent être considérées comme des variables internes, qui ne peuvent pas être mesurées aux frontières de l'échantillon.

La distribution de la force de contact sur une particule moyenne peut changer pour provoquer une contrainte déviatorique.

### 3.2.3 Essai numérique

Dans ce chapitre, on présente les résultats numériques obtenus ainsi que l'étude en détaillée des mécanismes contrainte-déformation observés.

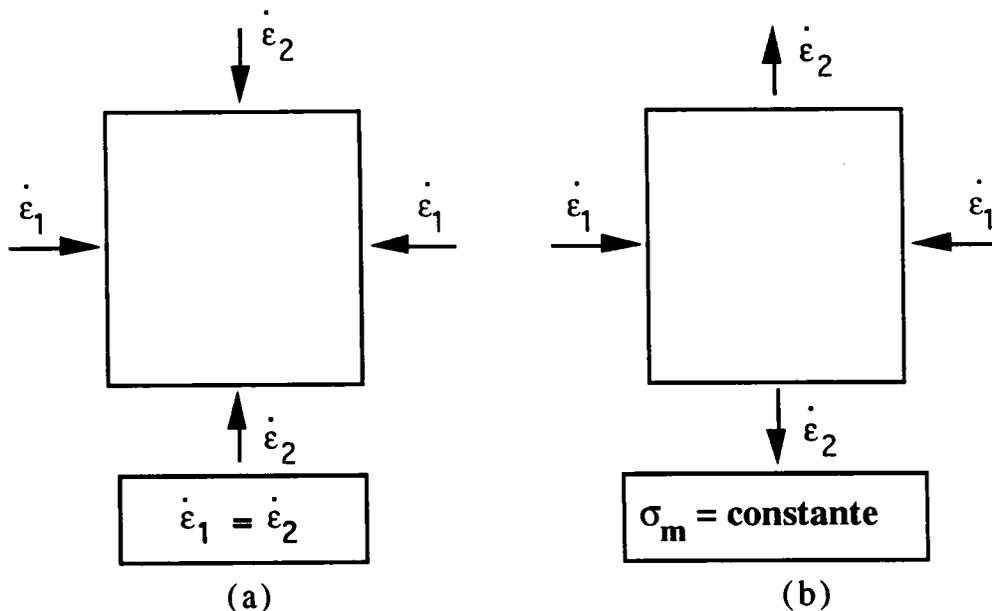
## La méthode du test

Un générateur aléatoire est utilisé pour placer les sphères dans un cube. A l'état initial il n'y a pas de contact entre les particules.

Un test numérique de 150 particules dont 100 de rayon 10 unités et 50 de rayon 15 unités a été effectué. La raideur normale et la raideur tangentielle des matériaux sont respectivement  $2,0 \cdot 10^8$  et  $1,0 \cdot 10^8$  unités.

On commence par comprimer l'espace périodique d'une façon isotrope jusqu'à la porosité désirée (Fig. 3.9-a). Pendant cette compression, le coefficient de frottement est égal à 1,0, mais après compactage il est ramené à ,05 pour 600 intervalles de temps, pour avoir un tenseur de contrainte moyenne isotrope.

Ensuite, un essai de cisaillement est réalisé. Pour cet essai, on diminue la dimension 1 et on augmente la dimension 2 de l'espace périodique (Fig. 3.9-b), en maintenant la contrainte moyenne isotrope constante à  $1,5 \cdot 10^5$  unités.



**Figure 3.9:** a) Compactage de l'échantillon et Chargement isotrope  
b): Chargement Déviatorique

Le chargement déviatorique est imposé jusqu'à la contrainte maximum. Ensuite on a déchargé l'échantillon suivi d'un nouveau chargement jusqu'à la contrainte limite (seuil).

## Résultats

La figure 3.10 représente la courbe contrainte-déformation et la figure 3.11 montre la courbe de changement de volume par rapport à la déformation.

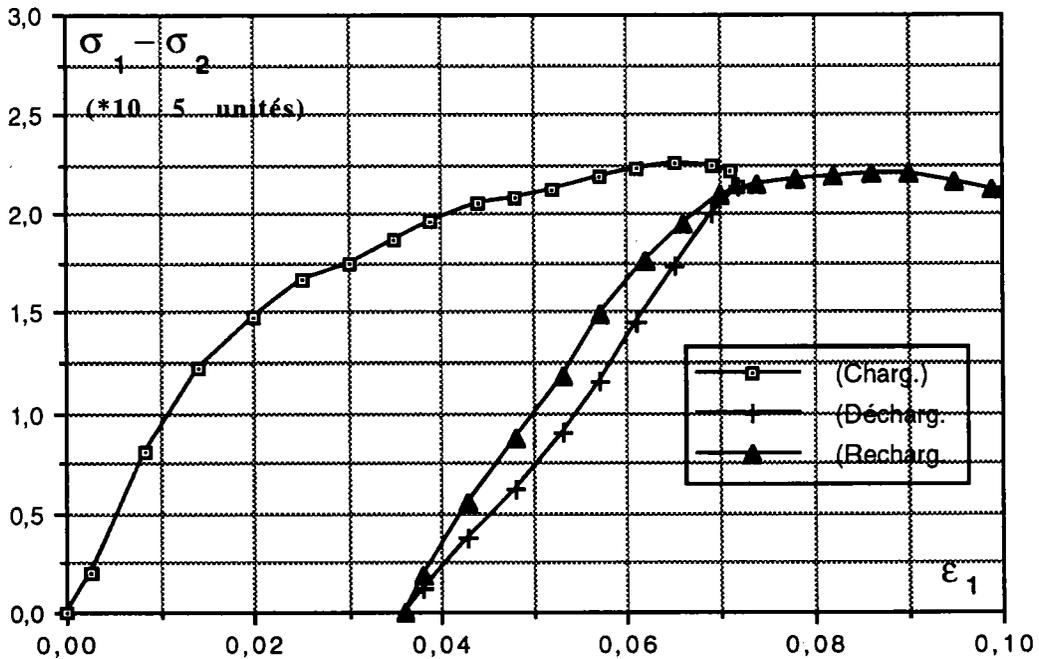


Figure 3.10: variation de la contrainte déviatorique en fonction de la déformation axiale

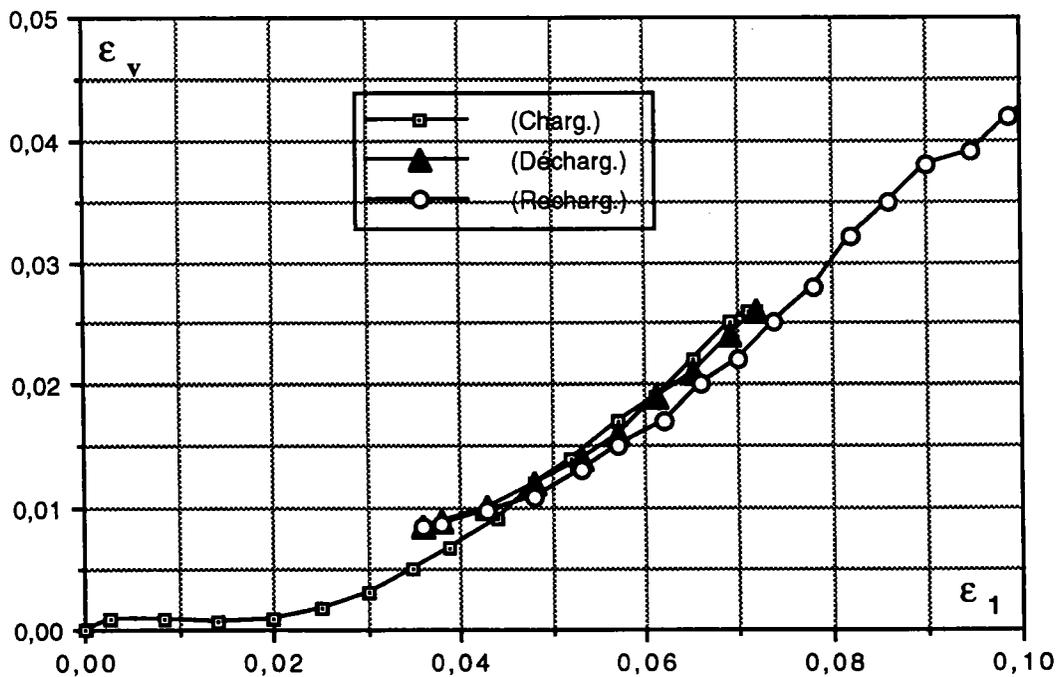


Figure 3.11: changement de volume en fonction de la déformation

La figure 3.12 montre que la contrainte de cisaillement (due aux forces tangentielles de contact) croit rapidement jusqu'à une valeur maximale, et pendant le déchargement elle chute rapidement; car le glissement s'arrête immédiatement, comme le montre la figure 3.13.

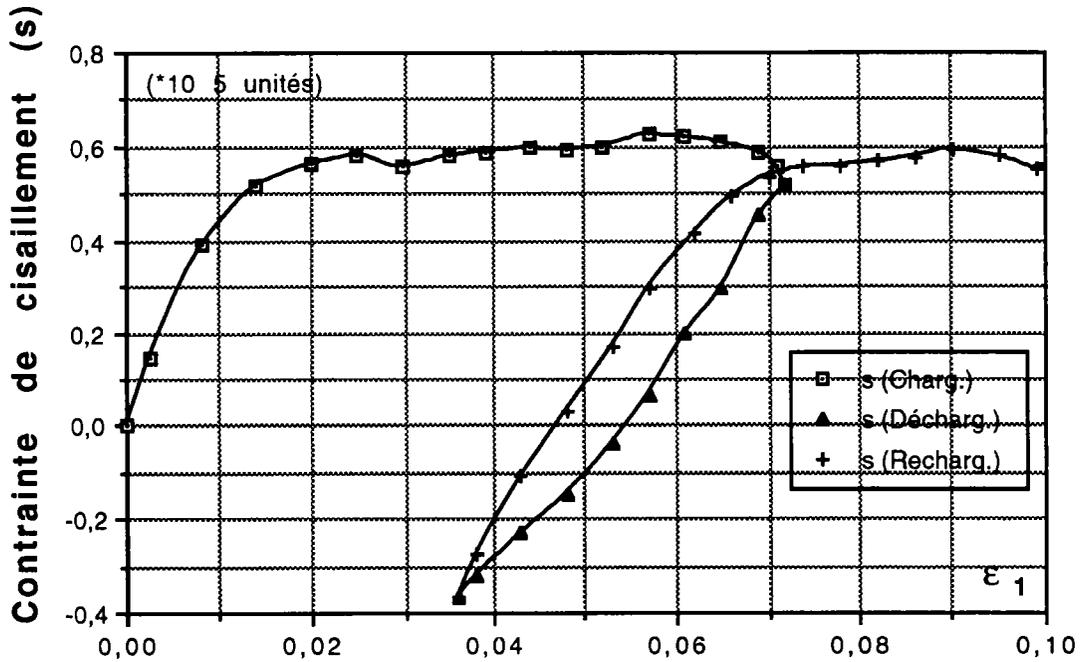


Figure 3.12: La partie cisaillement du déviateur de contrainte(s) en fonction de la déformation axiale

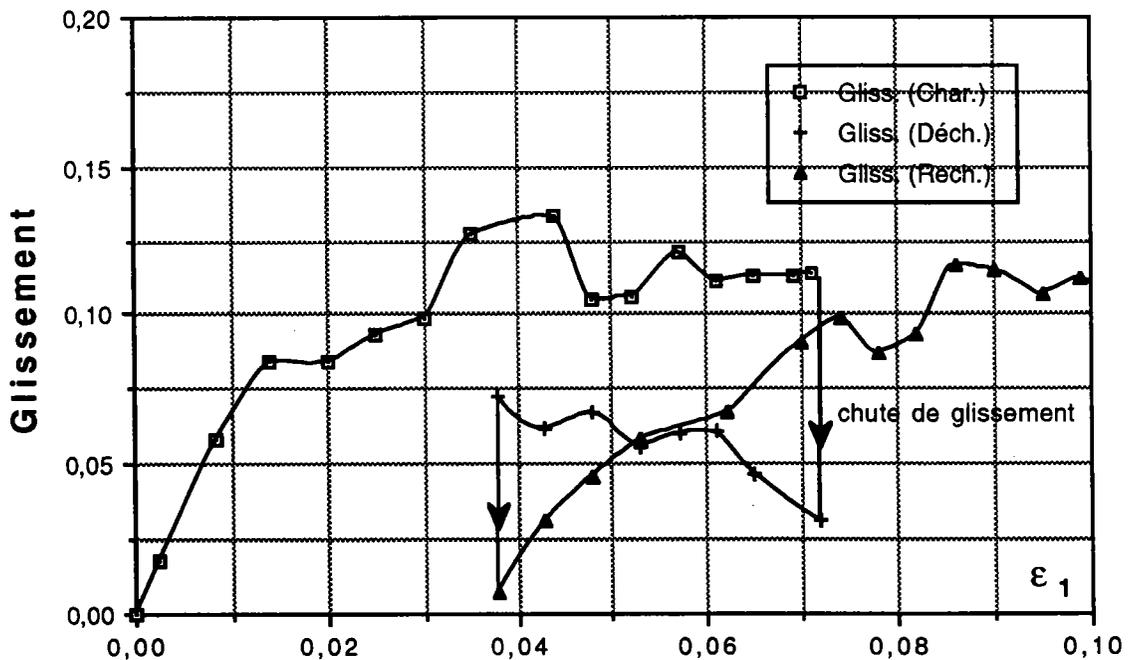


Figure 3.13: Glissement en fonction de la déformation axiale

Par contre, la partie structure qui montre le changement de la distribution de contacts, continue presque jusqu'au point maximum de la contrainte de cisaillement. Pendant le déchargement, elle descend moins rapidement que la contrainte de cisaillement (Fig. 3.14).

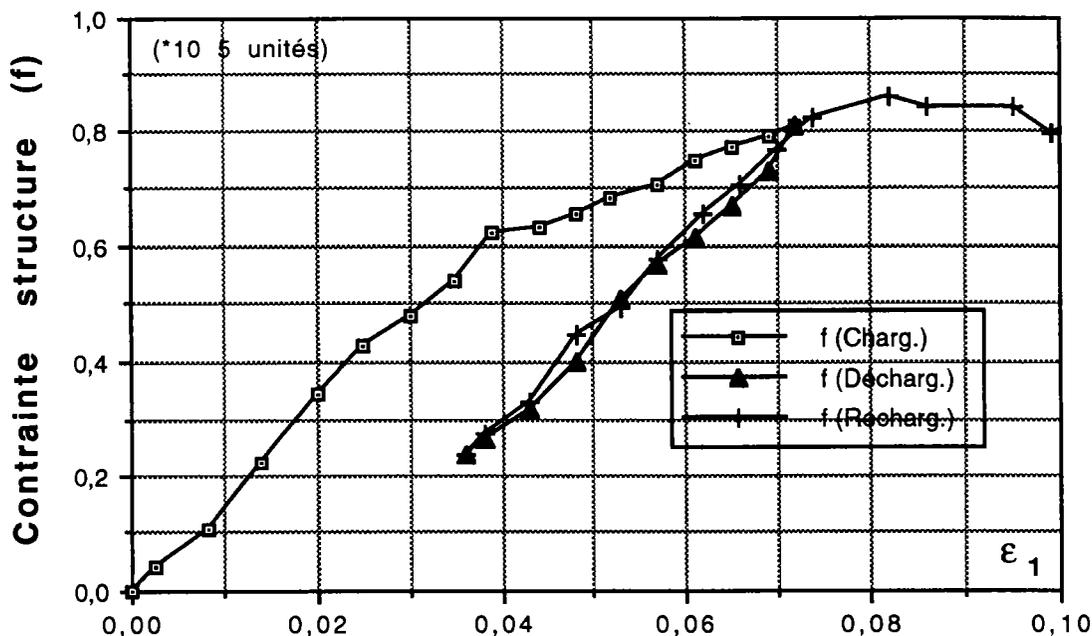


Figure 3.14: La partie structure du déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale

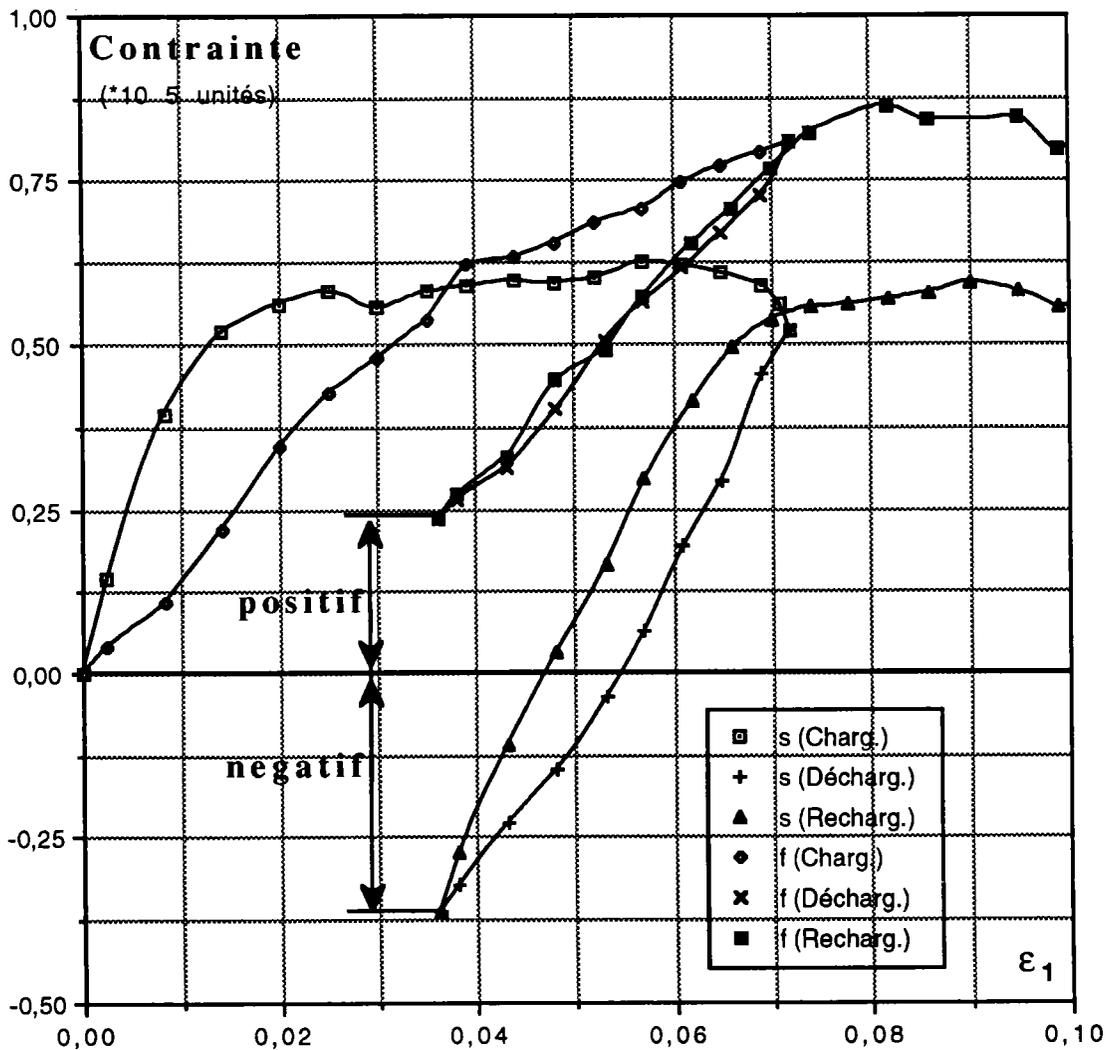
Si la contrainte déviatorique totale (Fig. 3.10) retourne à zéro, la partie négative de la contrainte de "cisaillement(s)" (Fig. 3.12) est presque équilibrée par la partie positive de la contrainte "structure(f)" (Fig. 3.14). C'est à dire:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 0 \Rightarrow \sigma(s) + \sigma(f) \approx 0 \quad (3.33)$$

Le résidu est égal à la contrainte "variation normale(nv)" (Fig. 3.16).

$$\sigma_{\text{déviatorique}}(\text{totale}) = \sigma(s) + \sigma(f) + \sigma(nv) \quad (3.34)$$

On peut comparer les contraintes de cisaillement (Fig. 3.12) et de structure (Fig. 3.14) sur la figure 3.15.



**Figure 3.15:** Les parties cisaillement(s) et structure(f) du déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale

On constate que la contrainte due à la variation angulaire de forces normales résiduelles (nv) n'est pas nulle (Fig. 3.16). Ce phénomène constitue un effet de mémoire:

"Après un chargement, déchargement et rechargement, La contrainte déviatorique mesurée en un point est nulle, mais à l'intérieur, l'état du matériau est différent de l'état initial."

A cause du changement de la structure, il y aura changement de la distribution des contacts. Pendant le chargement déviatorique, le nombre des contacts diminue, parfois de plus de 20% (Fig. 3.17).

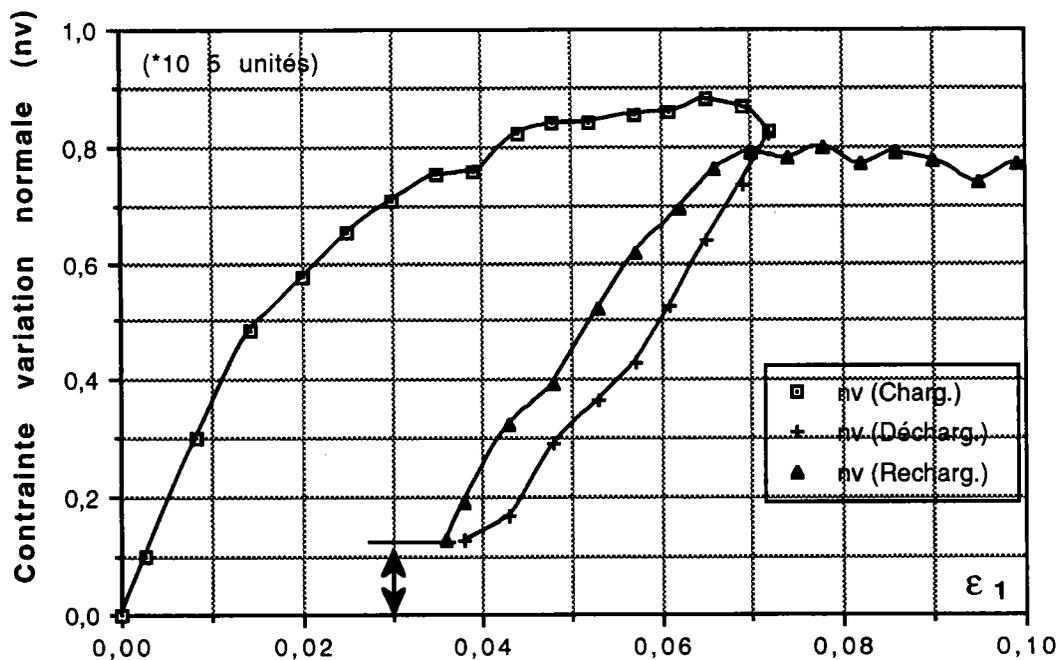


Figure 3.16: Contrainte due à la variation angulaire des forces normales résiduelles en fonction de la déformation axiale

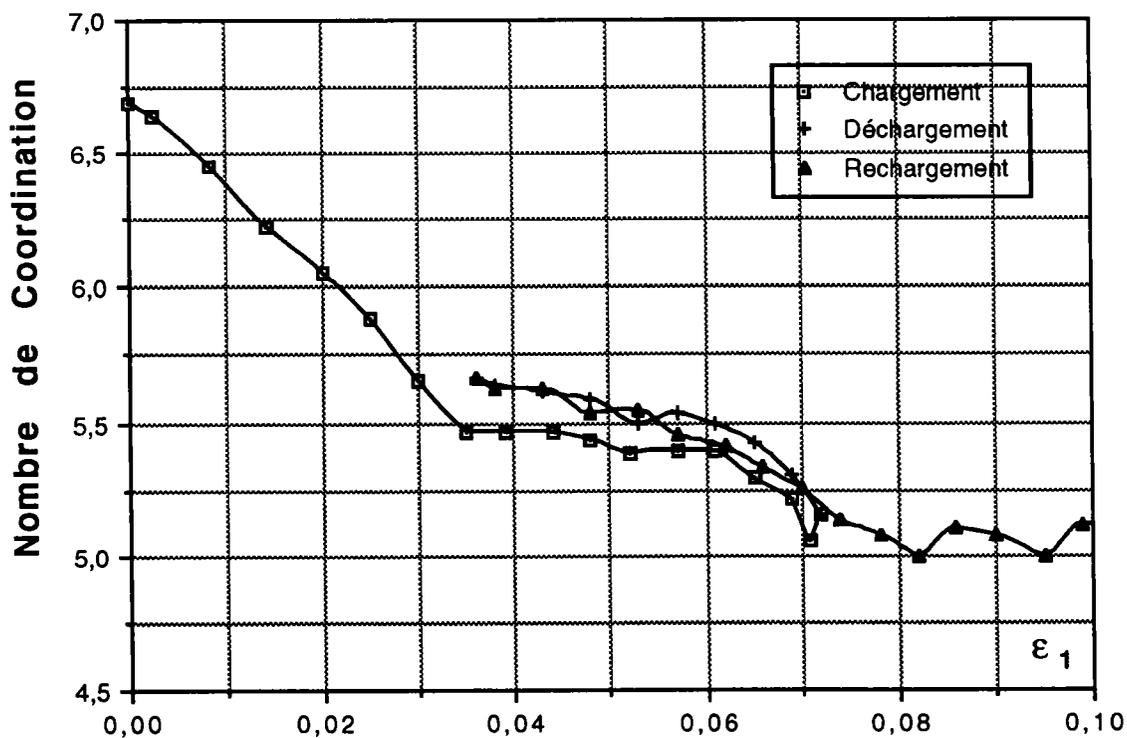


Figure 3.17: Nombre de Coordination en fonction de la déformation axiale

### 3.2.4 Conclusion

Pendant un chargement, déchargement et rechargement les trois parties déviatoriques sont mesurées. On voit que la partie (nv) suit le chemin de la contrainte appliquée, mais au niveau le plus bas; elle retourne à zéro quand les contraintes appliquées retournent à zéro.

Les parties cisaillement (s) et structure (f) suivent le chemin de la contrainte appliquée au chargement, mais (f) ne retourne pas à zéro au déchargement. En compensation, la partie cisaillement (s) devient négative, ce qui montre que les forces de cisaillement sont conservées.

Ces résultats montrent que les parties des contraintes (s,f,nv) enregistrent les effets d'un changement de l'organisation interne des matériaux.

### **3.3 Paramètres influençant l'angle de frottement interne (la loi non-linéaire de contact)**

#### **3.3.1 Introduction**

La résistance au cisaillement d'un milieu granulaire est déterminée par la valeur de l'angle de frottement interne ( $\phi$ ) qui dépend principalement de deux paramètres:

- le coefficient de frottement entre les grains ( $f = \tan \phi_\mu$ )
- l'indice des vides de l'échantillon ( $e$ )

Pour cela, les essais suivants sont conduits, en faisant varier:

- le coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ), avec l'indice des vides constant;
- l'indice des vides, avec le coefficient de frottement  $f$  constant.

#### **3.3.2 Influence de coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) sur l'angle $\phi$**

La valeur de l'angle  $\phi$  dépend beaucoup de la valeur du coefficient de frottement entre les grains ( $f = \tan \phi_\mu$ ). Mais la valeur de  $\phi_\mu$  est très difficile à déterminer expérimentalement de sorte qu'aucune relation valable n'a pu être donnée entre  $\phi$  et  $\phi_\mu$ ; néanmoins, plus le frottement entre les grains est grand, plus l'angle de frottement interne est élevé. On cherche une relation valable entre ces paramètres.

### 3.3.2.1 Définition du frottement intergranulaire

Dans tous les milieux granulaires, une partie de la résistance au cisaillement est due au frottement qui se manifeste aux points de contacts entre les grains. Les composantes tangentielle et normale de la force de réaction qui s'exerce entre deux grains doivent être telles que:

$$\frac{F_t}{F_n} \leq f = \tan \phi_\mu$$

f étant le coefficient de frottement physique au point de contact entre les grains.

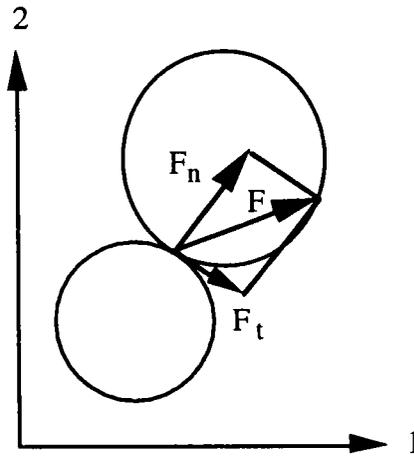


Figure 3.18: Les composantes normale et tangentielle de la force de contact

### 3.3.2.2 La méthode du test

Des simulations numériques de compression bidimensionnelle de disques sont réalisées. L'échantillon est composé de 1000 disques, ou rouleaux de verres dont 1/4 de rayon 0,13 mm, 1/2 de rayon 0,17 mm et 1/4 de rayon 0,21 mm enfermés dans une boîte.

Les parois horizontales sont déplacées verticalement et les parois verticales de la boîte sont déplacées horizontalement. L'essai est poursuivi jusqu'à la porosité désirée; puis la contrainte  $\sigma_2$  est maintenue constante tout en poursuivant le chargement selon la direction 1. A cause de ce chargement,  $\sigma_1$  augmente. On peut avoir l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ :

$$\sin \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

### 3.3.2.3 Résultats

On calcule l'angle de frottement interne ( $\phi$ ) pour la valeur maximum du rapport de  $\sigma_1/\sigma_2$ , car d'après la théorie de Mohr-Coulomb, lorsque  $\sigma_1/\sigma_2$  est max,  $\phi$  est maximum. D'autre part,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont liées au coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) (Fig. 3.19). Donc on aura l'angle de frottement global de l'échantillon en fonction de l'angle de frottement local des particules.

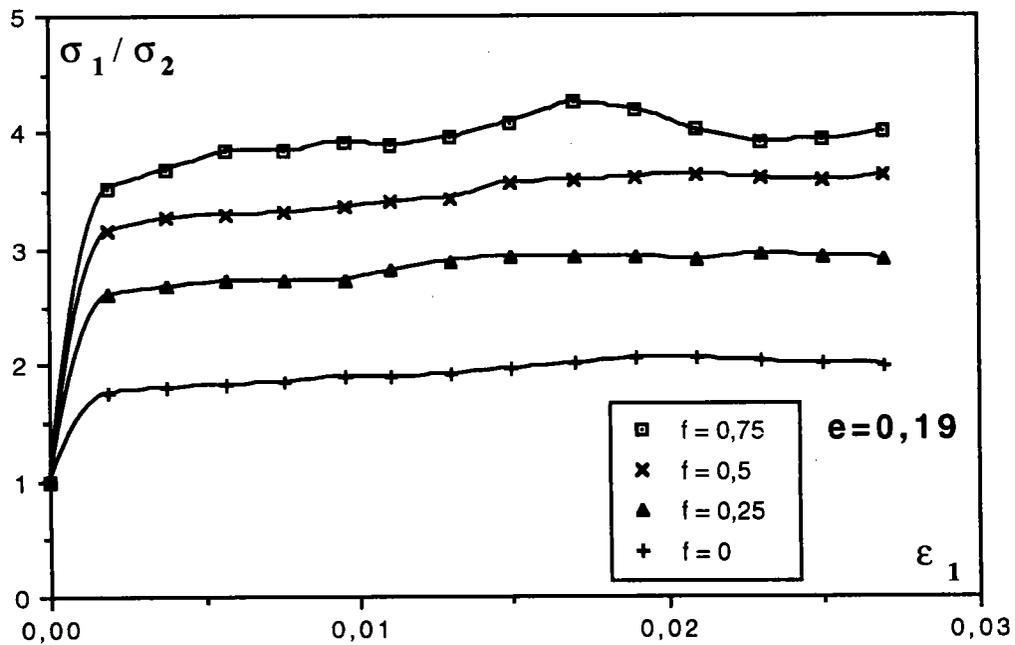
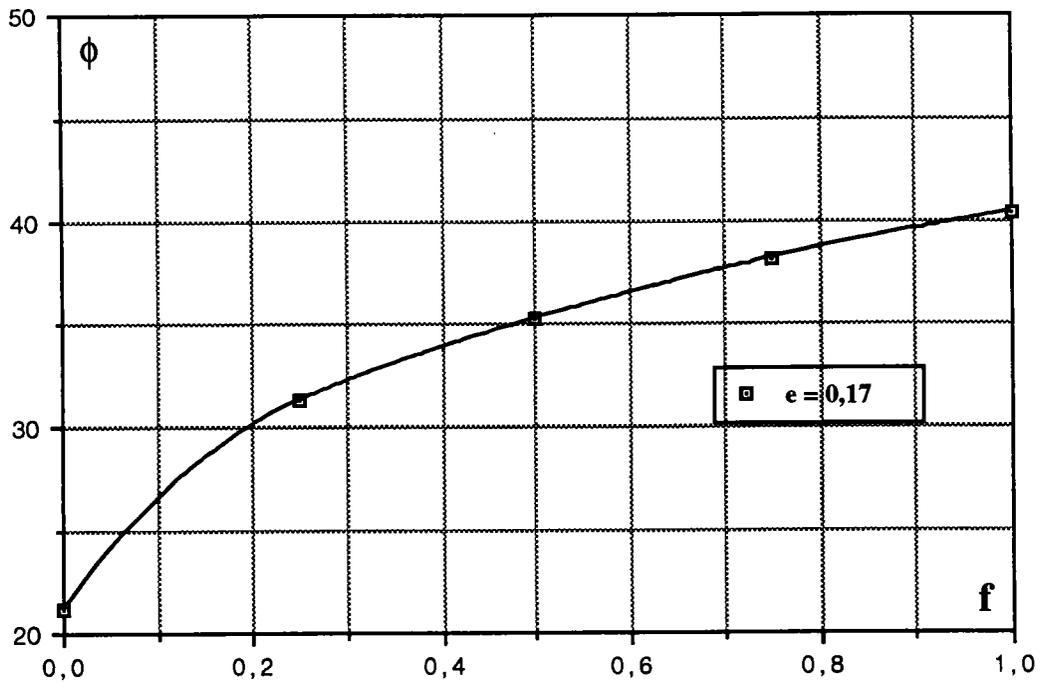


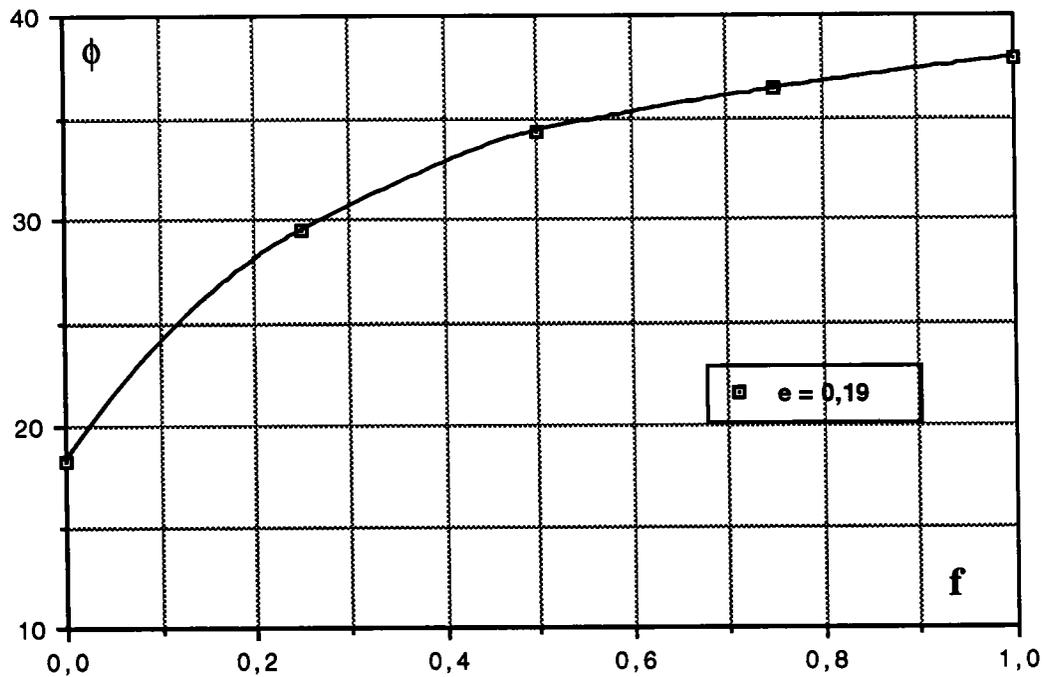
Figure 3.19: Le rapport de la contrainte verticale sur la contrainte horizontale en fonction de la déformation axiale

Le test a été effectué pour plusieurs valeurs de coefficient de frottement locaux, en gardant l'indice de vides constant. On a tracé la courbe de l'angle  $\phi$  en fonction de coefficient de frottement  $f$  pour plusieurs valeur de l'indice de vides.

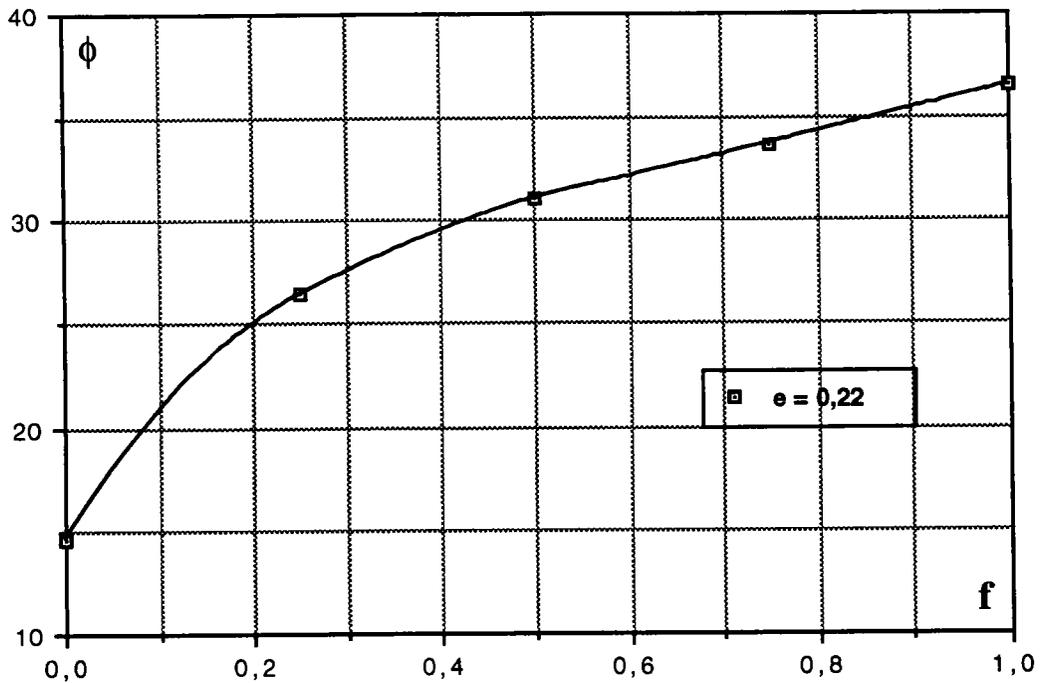
Les figures 3.20 à 3.23 représentent la variation de l'angle  $\phi$  en fonction du coefficient de frottement intergranulaire  $f$ , pour les valeurs de l'indice des vides égales à 0,17 et 0,19 (matériaux denses) et 0,22 et 0,24 (matériaux lâches).



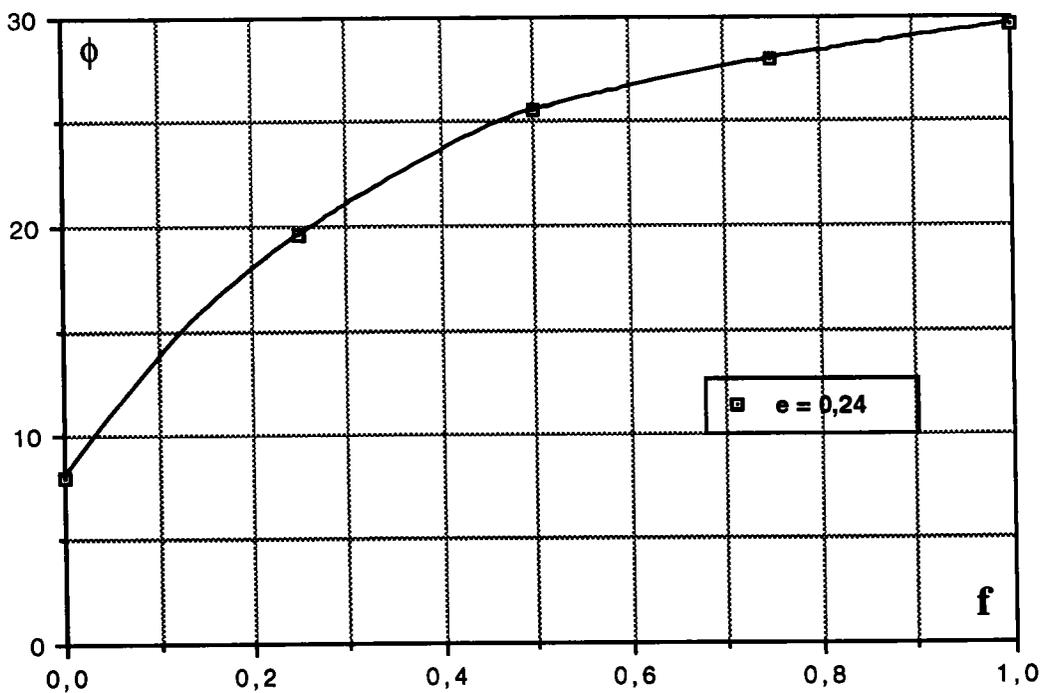
**Figure 3.20:** Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction du coefficient de frottement intergranulaire (f) pour l'indice de vide  $e=0,17$ .



**Figure 3.21:** Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction du coefficient de frottement intergranulaire (f) pour l'indice de vide  $e=0,19$ .



*Figure 3.22: Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction du coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) pour l'indice de vide  $e=0,22$ .*



*Figure 3.23: Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction du coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) pour l'indice de vide  $e=0,24$ .*

La figure 3.24 montre que lorsque le coefficient de frottement local ( $f$ ) est inférieur à une valeur précise pour chaque indice de vide ( $e$ ), le coefficient de frottement global ( $\tan \phi$ ) reste supérieur à  $f$ , et lorsque  $f$  est supérieur à cette valeur,  $\tan \phi$  est inférieur à  $f$ .

Selon Caquot et Kerisel [105], dans le milieu pulvérulent, le coefficient de frottement global est toujours supérieur au coefficient de frottement local. L'explication est la suivante:

Dans les milieux pulvérulents, les particules sont enchevêtrées et les mouvements se produisent non par un déplacement général suivant une surface continue, mais suivant les plans tangents aux différentes facettes en contact.

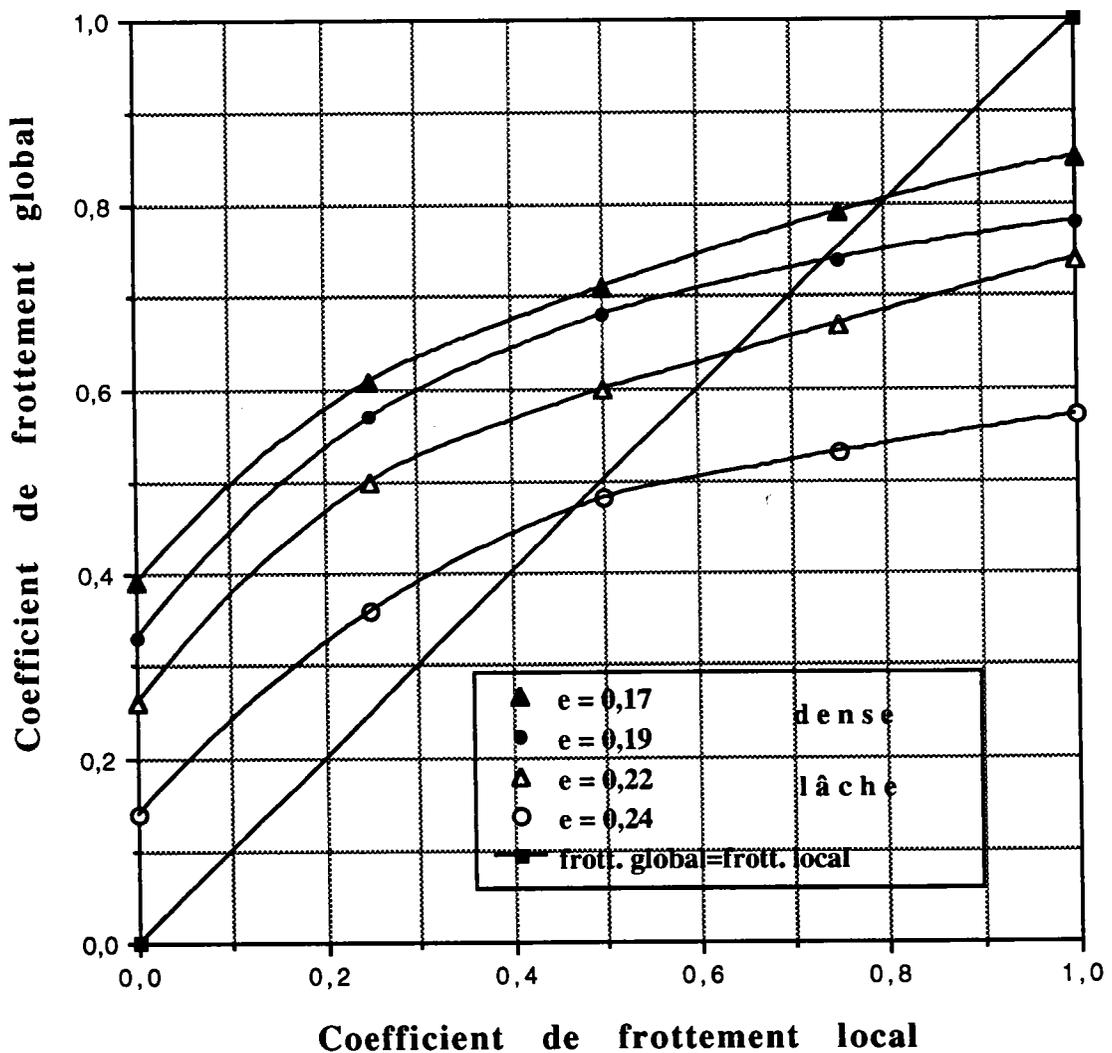
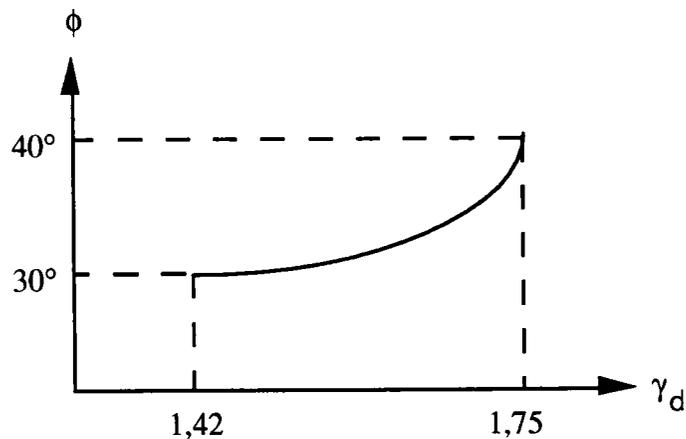


Figure 3.24: Variation du coefficient de frottement global en fonction du coefficient de frottement local ( $e$ =différents)

### 3.3.3 Influence du compactage sur l'angle $\phi$

Suivant qu'un milieu granulaire est lâche ou dense, la valeur de l'angle de frottement interne est différente. La Figure 3.25-a montre les variations de l'angle de frottement interne  $\phi$  du sable de Fontainebleau en fonction de la densité sèche  $\gamma_d$ .

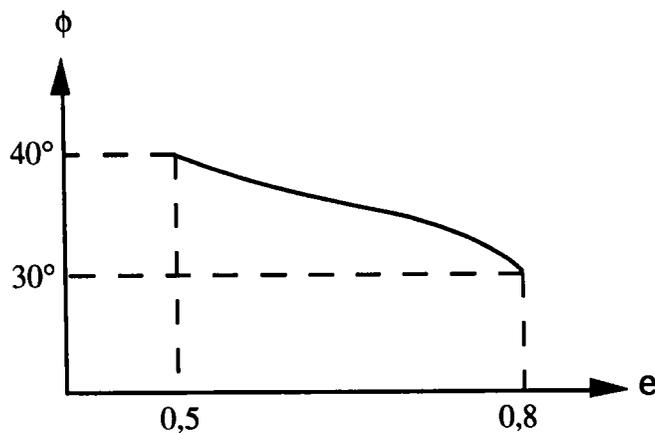


**Figure 3.25-a:** Variation de l'angle de frottement interne  $\phi$  du sable de Fontainebleau en fonction de la densité sèche  $\gamma_d$ .

Sachant que  $\gamma_d$  est donné par la formule suivante:

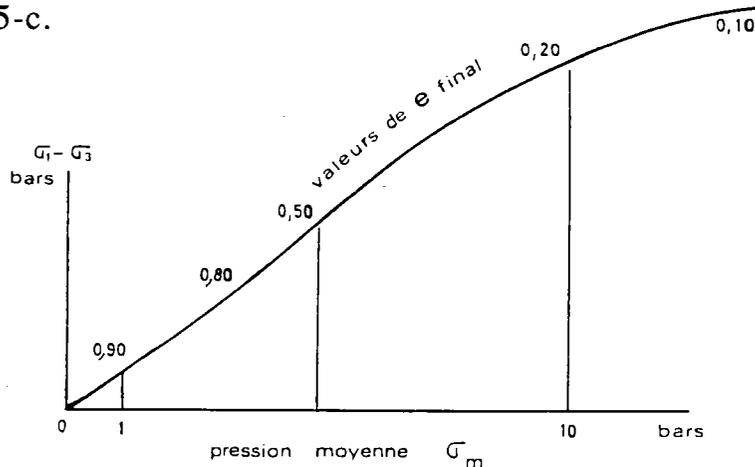
$$\gamma_d = \frac{\gamma_s}{1+e}$$

on constate que l'angle  $\phi$  décroît quand l'indice des vides ( $e$ ) augmente. Par exemple pour  $\gamma_s=2,6$  on obtient la courbe de la figure 3.25-b.



**Figure 3.25-b:** Variation de l'angle de frottement interne  $\phi$  du sable de Fontainebleau en fonction de l'indice des vides ( $e$ ).

Pour les sables normalement consolidés, dans l'intervalle des contraintes moyennes usuelles en mécanique des sols, de 1 à 10 bars pour fixer les idées, Caquot et Kerisel [105] ont présentés la figure 3.25-c.



**Figure 3.25-c:** Courbe intrinsèque pour un sable artificiel normalement consolidé [105]

### 3.3.3.1 La méthode du test

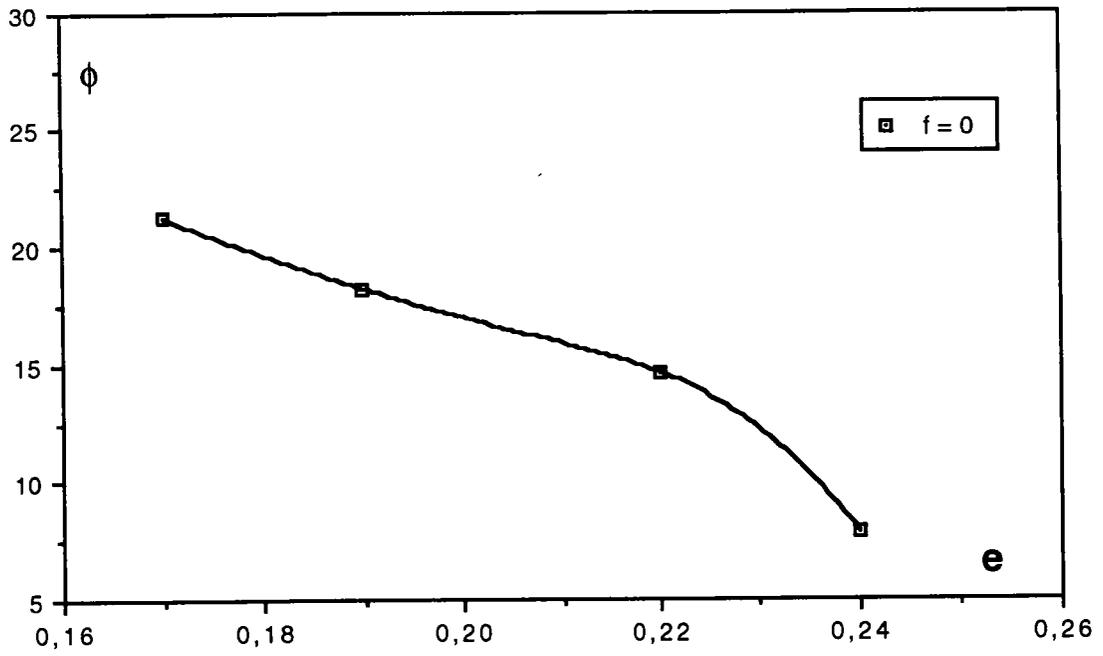
Dans ce test, on a fait varier l'indice de vide ( $e$ ) en gardant le coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) constant. Le test a été effectué pour plusieurs valeurs de coefficient  $f$ . Pour trouver l'influence de l'état de compacité sur la valeur de l'angle  $\phi$ , on a tracé la courbe de l'angle  $\phi$  en fonction de l'indice de vide pour plusieurs valeurs de coefficient de frottement  $f$ .

### 3.3.3.2 Résultats

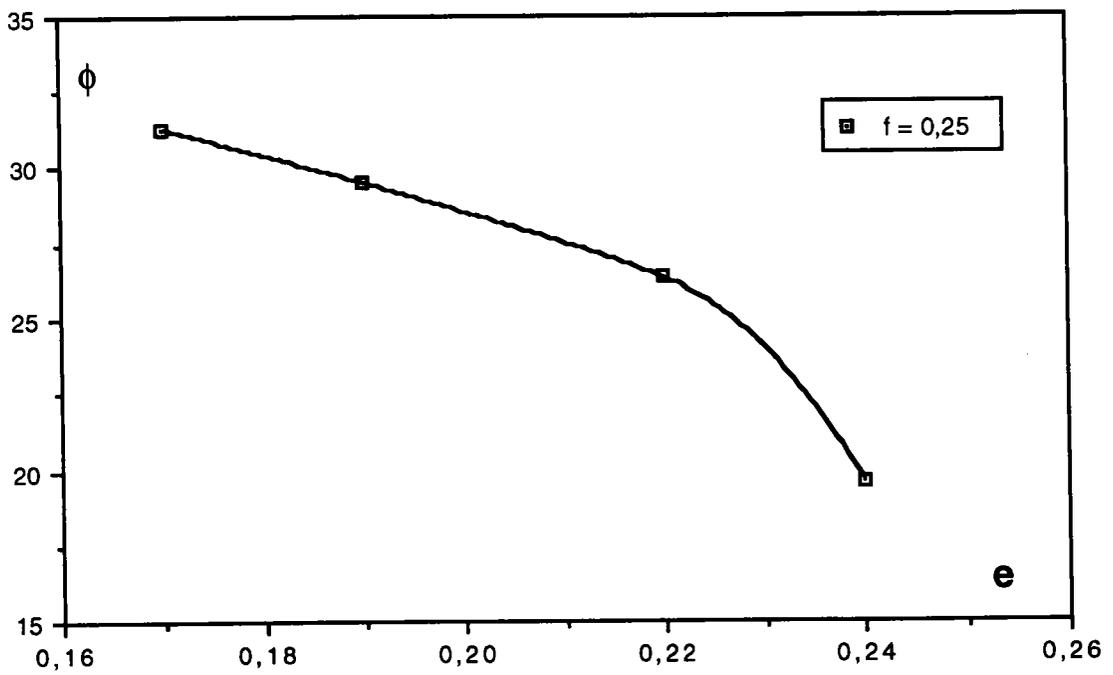
Les figures 3.26 à 3.30 représentent la variation de l'angle  $\phi$  en fonction de l'indice de vide ( $e$ ) pour les différentes valeurs du coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ).

La figure 3.31 rassemble toutes les courbes de la variation de l'angle  $\phi$  en fonction de l'indice des vides. On montre que l'angle de frottement interne diminue en fonction de l'indice des vides.

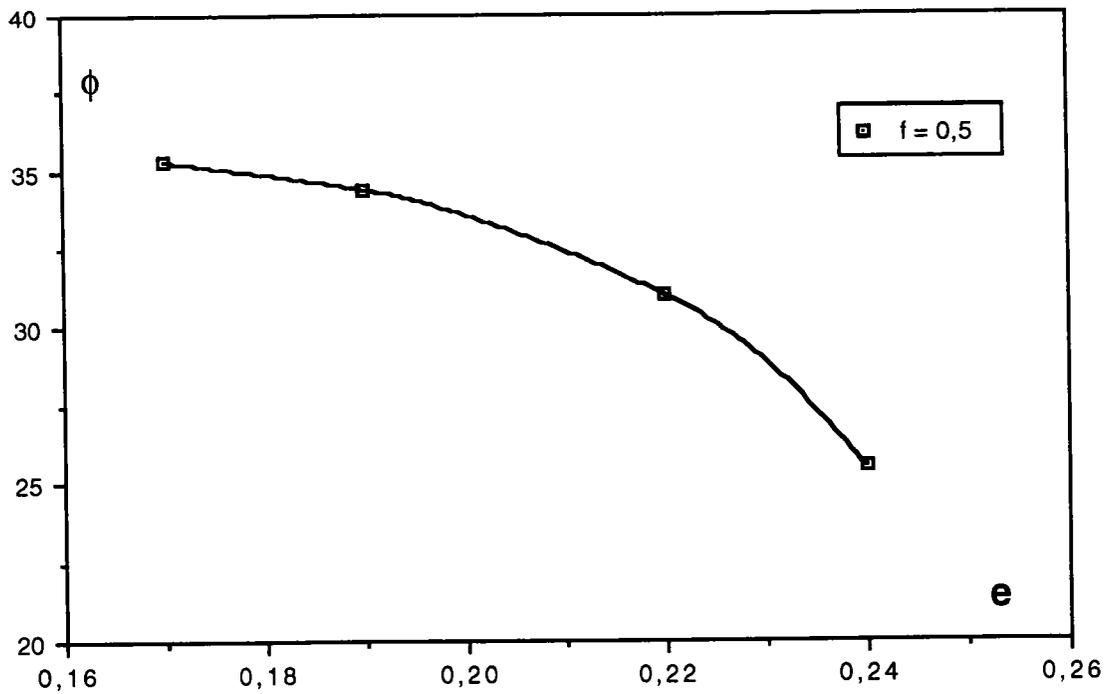
Par contre la figure 3.32 montre que plus le frottement intergranulaire est grand, plus l'angle  $\phi$  est élevé et pour chaque indice des vides ( $e$ ), il y a une asymptote pour l'angle  $\phi$ .



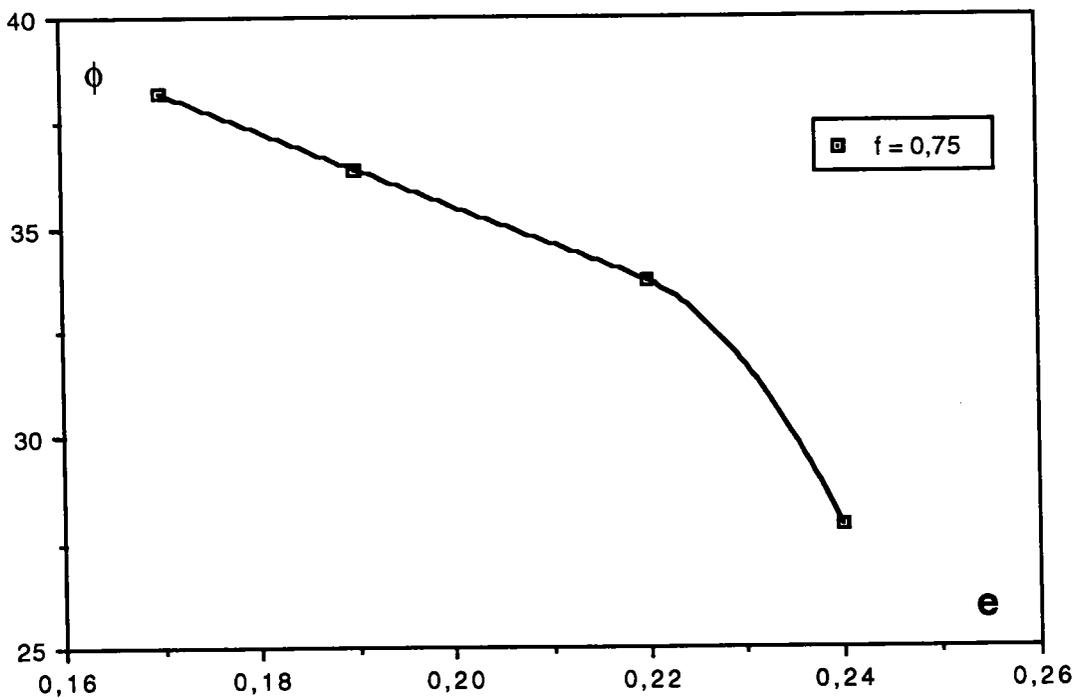
*Figure 3.26: Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction de l'indice de vide ( $e$ ) pour coefficient de frottement  $f=0$ .*



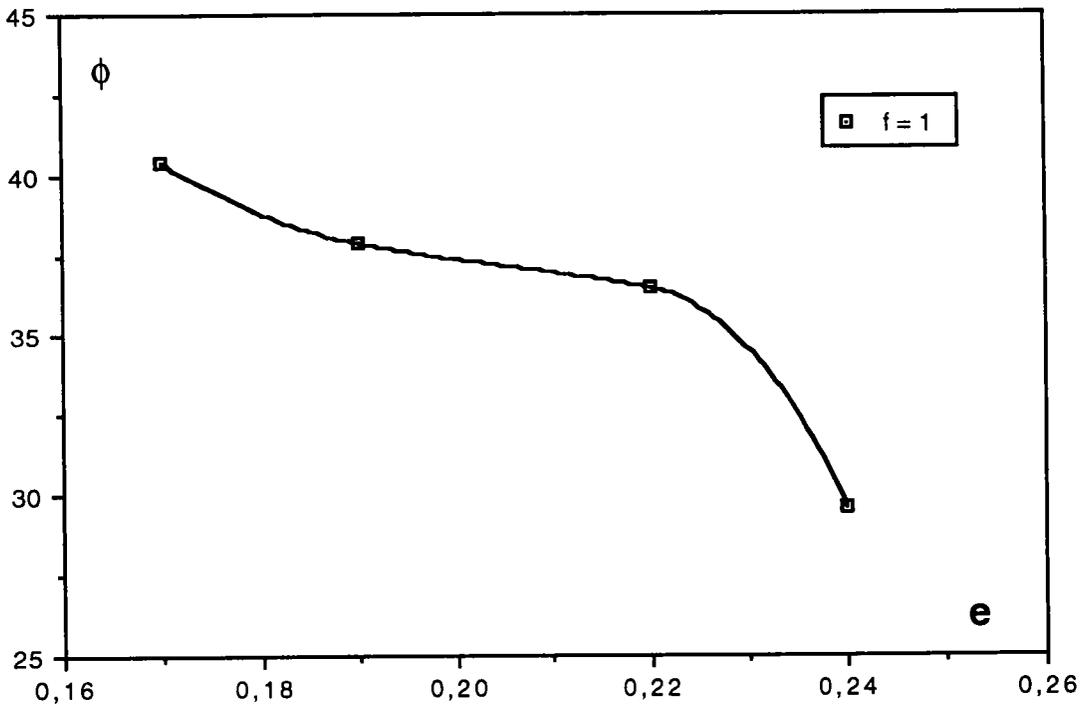
*Figure 3.27: Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction de l'indice de vide ( $e$ ) pour  $f=0,25$ .*



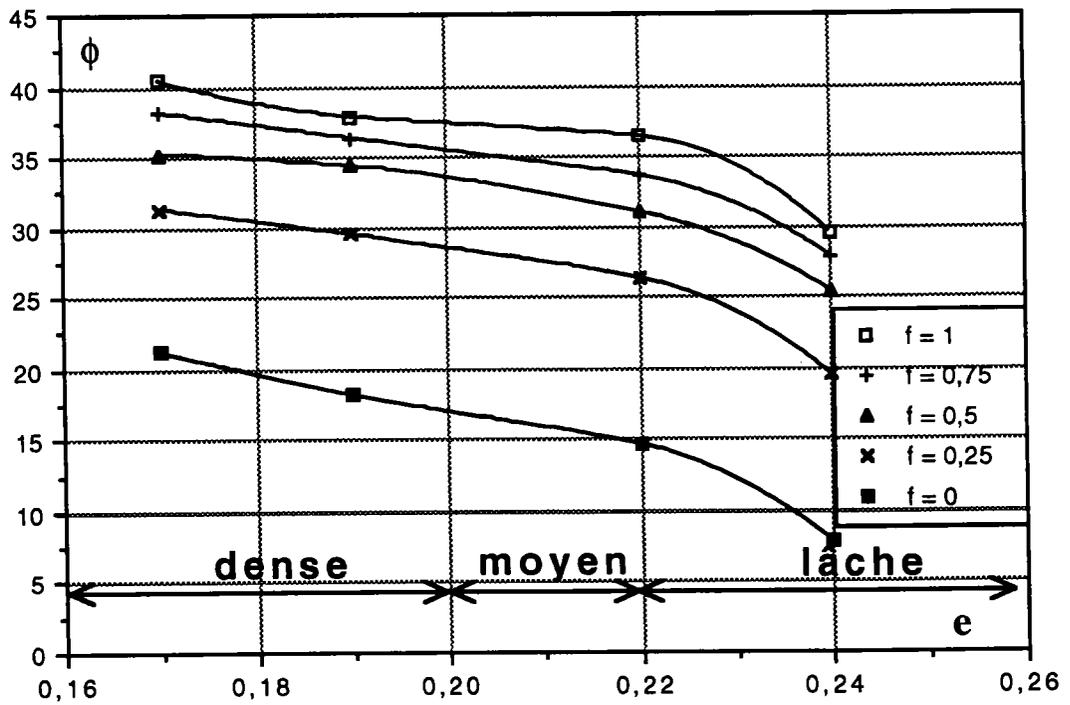
**Figure 3.28:** Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction de l'indice de vide ( $e$ ) pour  $f=0,5$ .



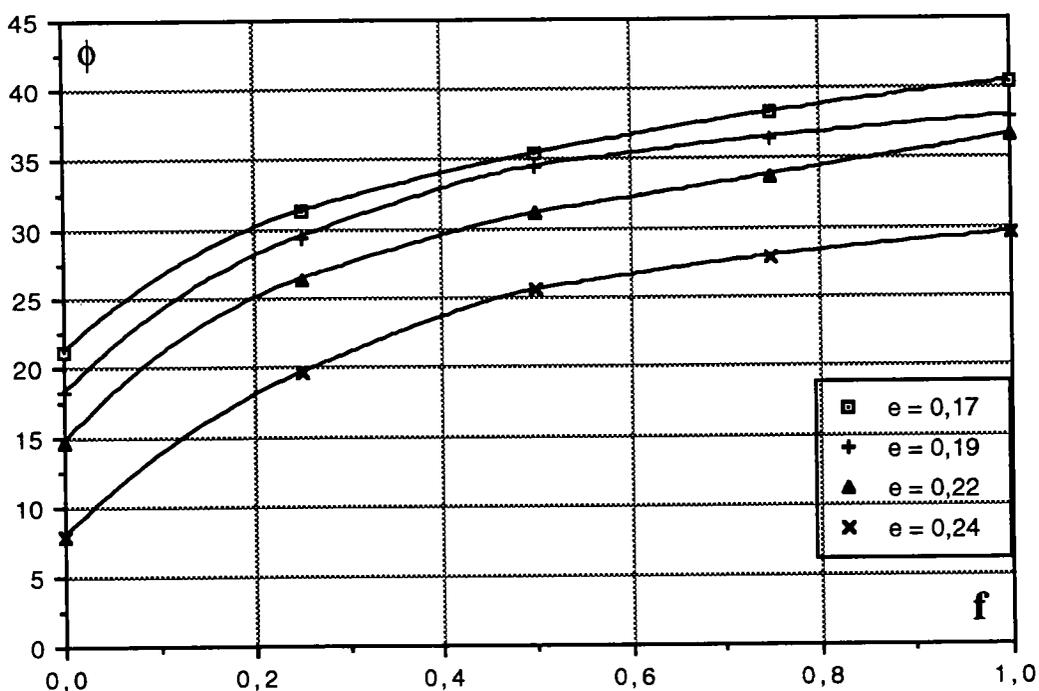
**Figure 3.29:** Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction de l'indice de vide ( $e$ ) pour  $f=0,75$ .



**Figure 3.30:** Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction de l'indice de vide ( $e$ ) pour  $f=1,0$ .



**Figure 3.31:** Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction de l'indice de vide ( $e$ ) pour différents  $f$ .



**Figure 3.32:** Variation de l'angle de frottement global ( $\phi$ ) en fonction du coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) pour des indices de vide différents.

### 3.3.3.3 Effet d'arrangement de structure

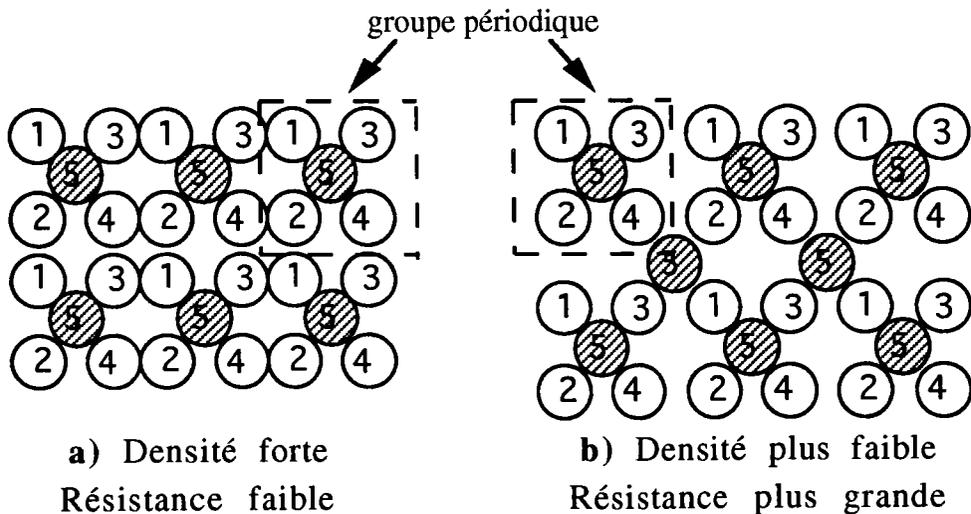
La résistance d'un assemblage de particules dépend non seulement de la densité, mais aussi de l'arrangement des particules. On remarque que pour les *assemblages réguliers* un assemblage dense peut être moins résistant qu'un assemblage lâche.

Par exemple la Figure 3.33-a montre un assemblage de disques infini, formant des groupes périodiques. Il n'a pas de résistance en déformation.

Par contre, l'assemblage de la figure 3.33-b est moins dense, mais il est plus rigide, parce que pour le déformer il faut créer un glissement. Ce sont deux cas particuliers d'assemblages *réguliers*.

Cet exemple montre que pour les assemblages réguliers, un assemblage dense peut être moins résistant qu'un assemblage lâche. Mais notre travail consiste à étudier les assemblages *irréguliers*. Donc on peut énoncer que:

"pour des assemblages irréguliers plus la densité est grande, plus l'angle de frottement interne (ou la résistance de matériau) est élevée."



**Figure 3.33:** *arrangements spéciaux des particules pour démontrer l'effet de l'arrangement sur la résistance*

### 3.3.4 Conclusion

Le coefficient de frottement intergranulaire et l'indice des vides des matériaux granulaires sont les deux paramètres les plus importants qui influencent l'angle de frottement interne des matériaux.

En pratique, déterminer la valeur du coefficient de frottement intergranulaire est très difficile; mais on peut mesurer l'angle de frottement global de matériau par les essais classiques au laboratoire (par exemple l'essai triaxial ou la boîte de cisaillement). La relation entre frottement local et global montrée dans ce chapitre, est une possibilité pour avoir l'angle de frottement local, en ayant l'angle de frottement global. Cette relation vérifie que plus l'angle de frottement local est grand, plus l'angle de frottement global est élevé et il y a une asymptote pour ce dernier.

Le deuxième paramètre influençant l'angle de frottement global des matériaux, est l'indice des vides. L'étude précédente montre que pour les assemblages irréguliers, plus l'indice des vides de l'échantillon est grand, moins l'angle de frottement global est élevé.

## **PARTIE II**

**\*\*\*\*\***

<p><b>SIMULATION NUMÉRIQUE DU COMPORTEMENT DES MATÉRIAUX GRANULAIRES ET VALIDATION DE LA MÉTHODE NUMÉRIQUE UTILISÉE</b></p>
---

- **Compression biaxiale**
- **Compression triaxiale**
- **Cisaillement simple**
- **Bande de cisaillement**

## **Introduction**

Un des objectifs de notre travail est de remplacer les essais expérimentaux (les essais au laboratoire) par les essais numériques. Si les matériaux granulaires étaient isotropes et linéairement élastiques, il serait possible de déterminer leurs caractéristiques élastiques  $E$  (module d'Young) et  $\nu$  (coefficient de Poisson) à partir d'un seul essai et d'utiliser ces caractéristiques pour définir les relations contraintes-déformations pour tous les types de sollicitation. Mais une telle méthode est impossible à envisager, c'est pourquoi différents types d'essais ont été développés pour étudier le comportement des milieux granulaires sous divers types de sollicitations.

Les trois types d'essais généralement utilisés dans la pratique pour la détermination des relation contraintes-déformations des matériaux granulaires sont:

- l'essai de compression triaxiale à contrainte latérale constante
- l'essai de cisaillement direct à la boîte de Cassagrande
- l'essai de compression à déformation latérale nulle

Dans cette partie on présente l'essai de compression biaxiale, de compression triaxiale, de cisaillement simple, ainsi que l'effet de la bande de cisaillement.

# Chapitre 4

## Compression Biaxiale

### 4.1 Etude bibliographique

Le matériau de Schneebeli a été étudié à l'aide d'essais biaxiaux par Tratapel (1977) et Jacquet (1978) à l'Institut de Mécanique de Grenoble. Ces études ont montré que l'hypothèse d'homogénéité du champ des déformations est mise en défaut au cours du déroulement des expériences réalisées. Mezghani (1987) a fait des essais biaxiaux pour la détermination des contraintes macroscopiques au sein d'un milieu bidimensionnel [42]. Duthilleul [39] a fait une campagne d'essais biaxiaux de compression sur ce matériau en vue d'étudier l'apparition des hétérogénéités et le développement de la localisation des déformations en utilisant la méthode stéréophotogrammétrique. Nous avons utilisé ces mêmes essais pour l'étude numérique.

#### 4.1.1 Comportement mécanique global du matériau de Schneebeli

Dans un essai biaxial, on suppose que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes appliquées respectivement suivant les directions 1 et 2 (Fig. 4.1). Cette étude a été effectuée avec des chemins de contraintes monotones croissants à rapport de contraintes  $\sigma_1/\sigma_2$  variables. Le chargement suit un chemin isotrope ( $\sigma_1=\sigma_2$ ) jusqu'à une certaine valeur, puis la contrainte est maintenue constante dans la direction 2, tandis que la contrainte  $\sigma_1$  continue à croître. Plusieurs valeurs de la contrainte latérale  $\sigma_2$  ont été utilisées.

Les mesures tirées de l'essai de compression biaxiale permettent la détermination des déformations  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  ainsi que les contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ .

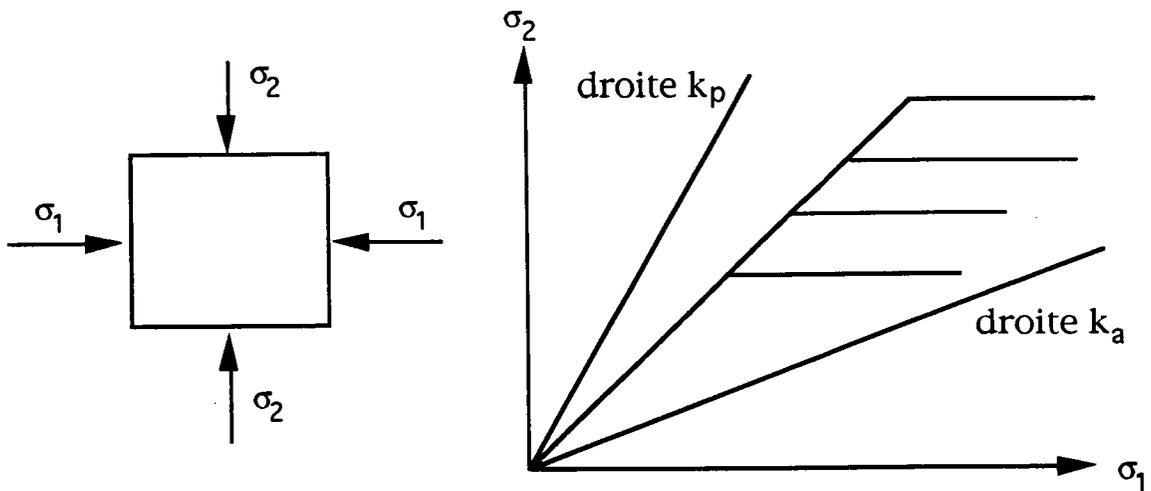


Figure 4.1: Chemins de contraintes étudiés

## 4.2 Matériau utilisé

Différents matériaux ont été utilisés pour les essais sur le modèle analogique de Schneebeli; nous pouvons citer à titre d'exemple l'acier inoxydable, l'aluminium, le pyrex, le P.V.C. (polychlorure de vinyle) et surtout le duralumin. Rappelons que Schneebeli a employé des rouleaux en nylon.

Le modèle analogique utilisé est constitué de rouleaux en P.V.C., pour les raisons suivantes:

- faible prix de revient
- légèreté: le P.V.C. est en effet deux fois plus léger que le duralumin
- élasticité: un rouleau de P.V.C. supporte bien une flexion sous de faibles efforts et a un comportement très réversible lié à une bonne limite élastique.
- facile à appliquer
- la rugosité de l'état de surface: point favorable pour le frottement

Les essais ont été réalisés avec le matériau analogique bidimensionnel dont les caractéristiques sont les suivantes:

- matériau: P.V.C. en baguette rugueuse
- dimensions: longueur 60 mm, diamètre 1,5 mm et 3 mm
- densité du P.V.C.: 1,33 g/cm<sup>3</sup>
- densité du matériau de Schneebeli (en place): 1,1 g/cm<sup>3</sup>
- module d'élasticité: 300 daN/mm<sup>2</sup>

- coefficient de poisson : 0,35
- limite élastique: 5 daN/mm<sup>2</sup>

Les rouleaux sont de deux diamètres différents pour obtenir une bonne homogénéité et une bonne compacité du milieu et surtout pour éviter toute régularité dans l'arrangement des rouleaux. Le répartition des deux diamètres dans le milieu a été faite à poids égal des rouleaux.

### 4.3 Appareil de Compression Biaxiale [51]

Cet appareil est constitué d'un cadre carré, de 21,5 cm de côté, contenant les rouleaux, composé de quatre éléments rectifiés mobiles les uns par rapport aux autres (Fig. 4.2). Deux cadres métalliques indépendants et articulés assurent la mise en charge du milieu selon deux directions perpendiculaires par un système "vis-écrou". L'ensemble repose sur un plan lisse horizontal.

Les rouleaux sont disposés de telle sorte que leurs génératrices soient verticales. Les efforts appliqués à l'aide du système de mise en charge se trouvent dans un plan horizontal et par conséquent le modèle est non-pesant.

Les efforts appliqués sont mesurés par deux anneaux dynamométriques; les déplacements respectifs des différentes parties du cadre sont mesurés à l'aide de comparateurs. Avant chaque essai on intercale un lubrifiant à sec (Téflon) entre les mors et les rouleaux de sorte qu'il n'y ait pas de frottement ou tout au moins qu'il soit négligeable. La création de voûtes de charge est évité et les contraintes extérieures appliquées au milieu sont à tout instant de l'essai des contraintes principales.

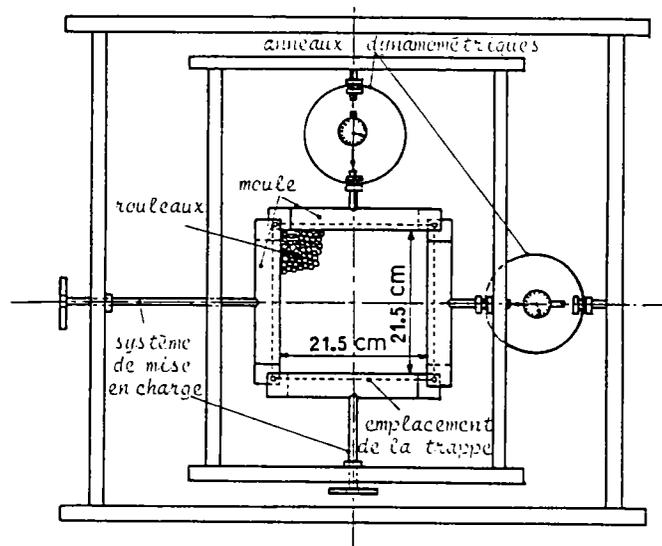


Figure 4.2: Appareil de compression Biaxiale [51]

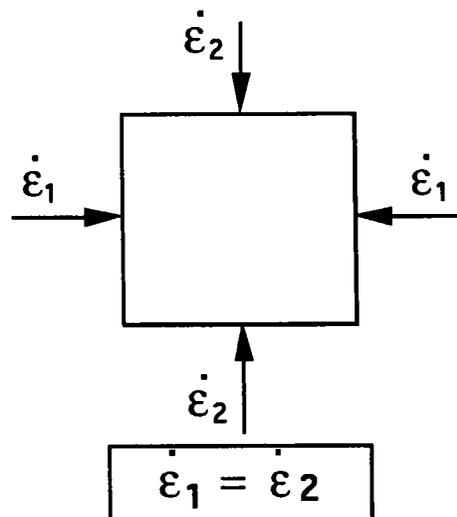
## 4.4 Essai Numérique Biaxial

L'essai biaxial est un essai élémentaire en déformation plane, c'est à dire qu'il s'agit d'un essai pour lequel l'état de contrainte et de déformation sont (dans le cas idéal) les mêmes en tout point.

Les échantillons étant constitués d'un empilement de petits rouleau parallèles, la condition de déformation plane se trouve naturellement vérifiée dans le plan perpendiculaire aux génératrices des cylindres de P.V.C..

### 4.4.1 La méthode du test

Après génération de 1000 disques de P.V.C. dans un parallélépipède, on impose un taux de déformation constant dans les direction 1 et 2, pour obtenir la porosité réelle (Fig. 4.3-a).



*Figure 4.3-a: Sollicitations imposées sur l'échantillon pour arriver à la porosité désirée*

Puis on continue ce chargement pour arriver à la contrainte de confinement constante  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_c = \text{constante}$  (Fig 4.3-b). La valeur du coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) est prise égale à 0,35. Ensuite on continue le chargement dans la direction 1 en gardant  $\sigma_2 = \text{constante}$  (Fig. 4.3-c). A cause de ce chargement  $\sigma_1$  augmente jusqu'à une valeur maximum. Donc les sollicitations imposées sur l'échantillon sont:

- pression latérale  $\sigma_2 = \text{constante}$
- déformation axiale  $\dot{\epsilon}_1$  imposée
- déformation plane:  $\epsilon_3 = 0$
- absence de contrainte tangentielle sur le porteur de l'objet

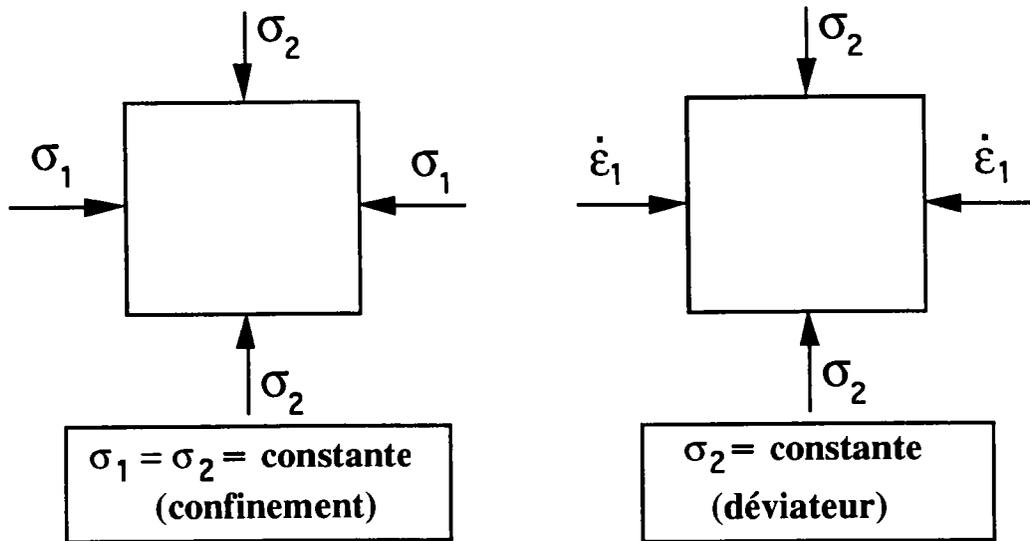


Figure 4.3: (b) Chargement de confinement  
(c) Chargement déviatorique

## 4.4.2 Résultats

### 4.4.2.1 Courbes Contraintes-Déformations

Les figures 4.4, 4.5 et 4.6 présentent des courbes  $\sigma_1/\sigma_2$  par rapport à  $\epsilon_1$  pour des essais réalisés à des pressions latérales différentes: 40 , 60 et 80 KPa.

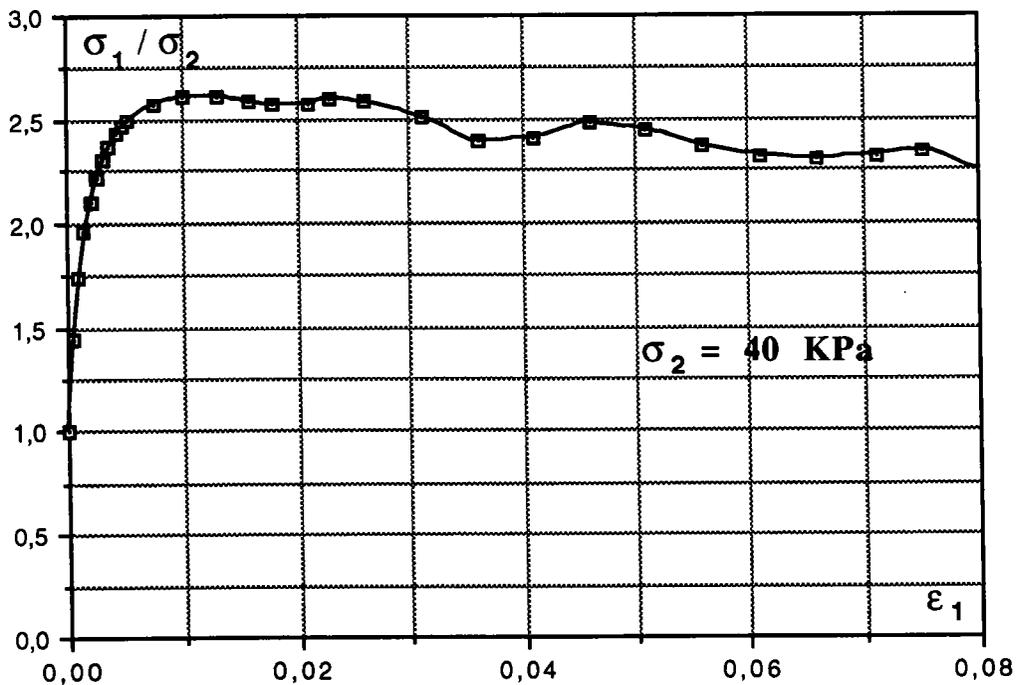
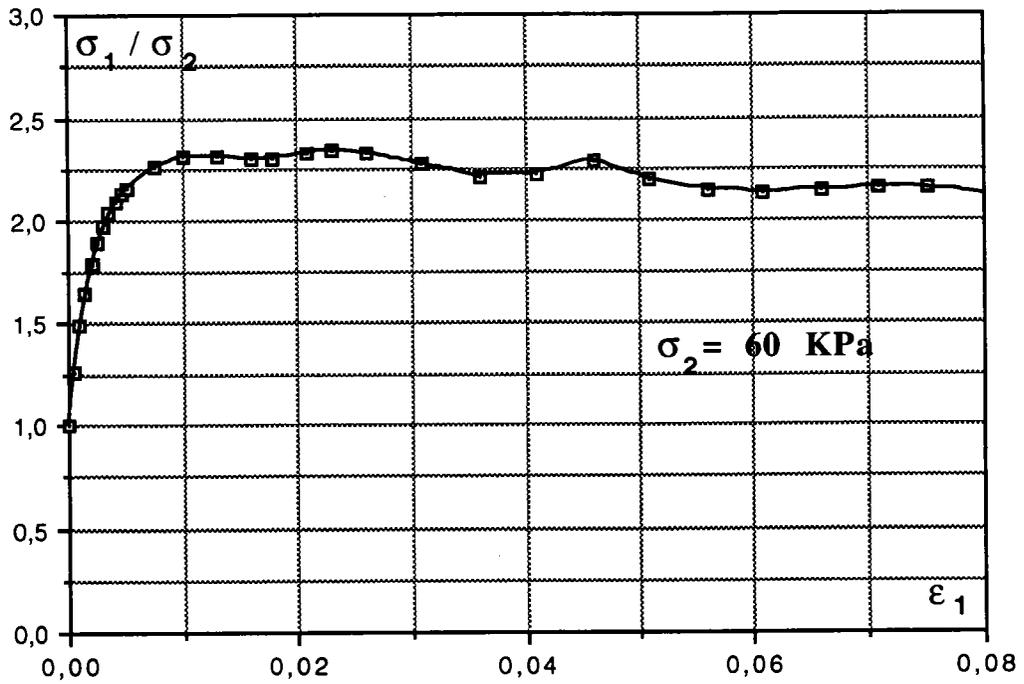
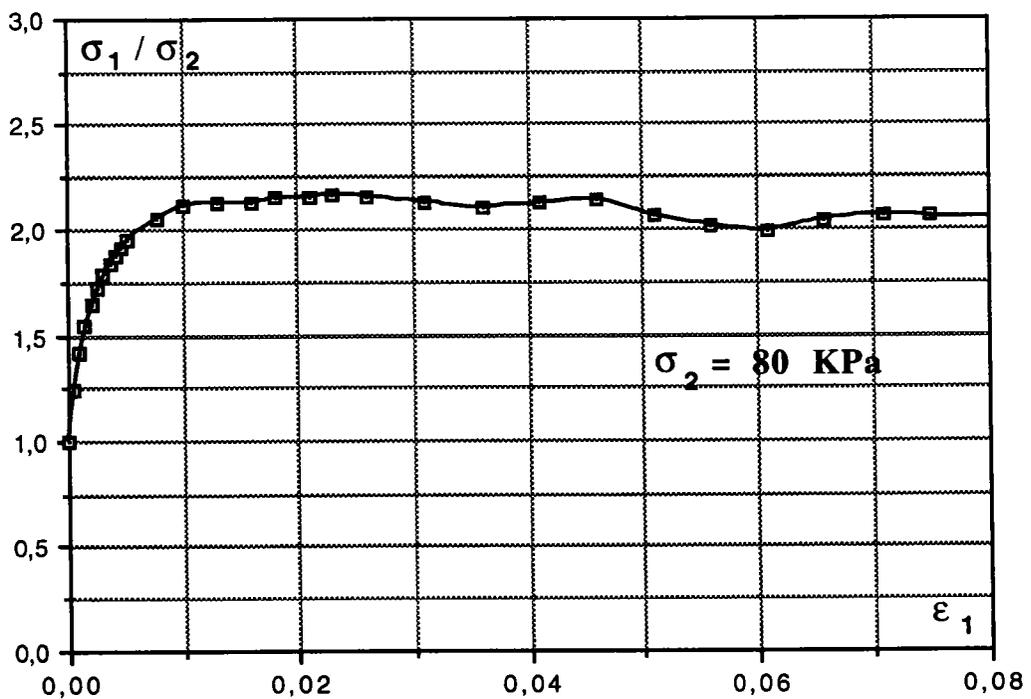


Figure 4.4: Rapport de la contrainte axiale sur la contrainte latérale en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_2 = 40$  KPa)



**Figure 4.5:** Rapport de la contrainte axiale sur la contrainte latérale en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_2 = 60 \text{ KPa}$ )



**Figure 4.6:** Rapport de la contrainte axiale sur la contrainte latérale en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_2 = 80 \text{ KPa}$ )

Plusieurs constatations s'imposent:

- le début des courbes ( $0 < \varepsilon_1 < 1\%$ ) présente une partie régulière, c'est la phase de comportement homogène.

- ce comportement homogène disparaît pour des déformations verticales de l'ordre de 1%. Les courbes s'incurvent et présentent un coude: c'est la fin de la phase d'écroutissage et des instabilités des contraintes apparaissent.

- la valeur maximale du rapport  $\sigma_1/\sigma_2$  est obtenue dans la partie  $1 < \varepsilon_1 < 3\%$ .

- dans le domaine des grandes déformations ( $\varepsilon_1 > 4\%$ ) les efforts se stabilisent sans palier plus marquant. On observe des oscillations du rapport des contraintes dans une bande horizontale restreinte. Ceci correspond au phénomène de glissement bloc sur bloc le long du plan de cisaillement, d'une configuration stable à une autre.

Les figures 4.7, 4.8 et 4.9 présentent les variations du déviateur de contraintes  $\sigma_1 - \sigma_2$  en fonction de la déformation verticale  $\varepsilon_1$  pour trois essais réalisés avec des contraintes latérales différentes.

En utilisant les courbes  $\sigma_1 - \sigma_2 = f(\varepsilon_1)$  on peut déterminer l'angle de frottement maximal,  $\phi_{\max}$ . La valeur moyenne de cette angle pour nos essais se situe autour de  $25^\circ$ .

D'autre part, la figure 4.10 représente les variations du rapport  $\sigma_1/\sigma_2$  pour tous les trois essais. Malgré les instabilités des courbes et les valeurs différentes des modules, on remarque un regroupement des paliers autour d'une valeur moyenne de  $\sigma_1/\sigma_2 = 2,3$ .

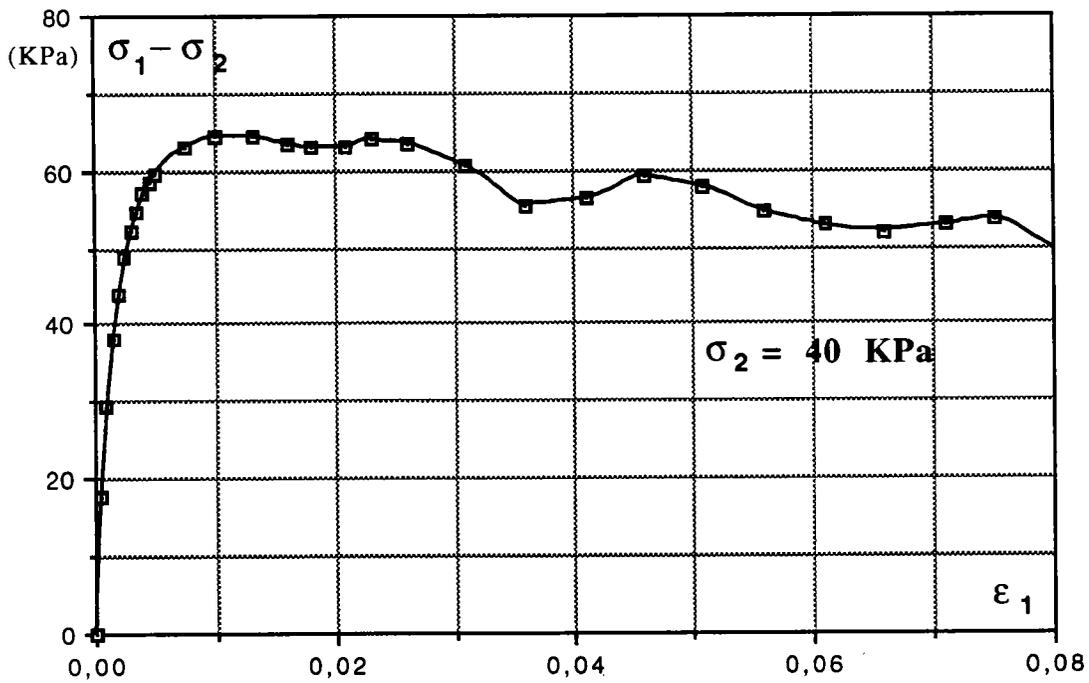


Figure 4.7: Déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_2 = 40$  KPa)

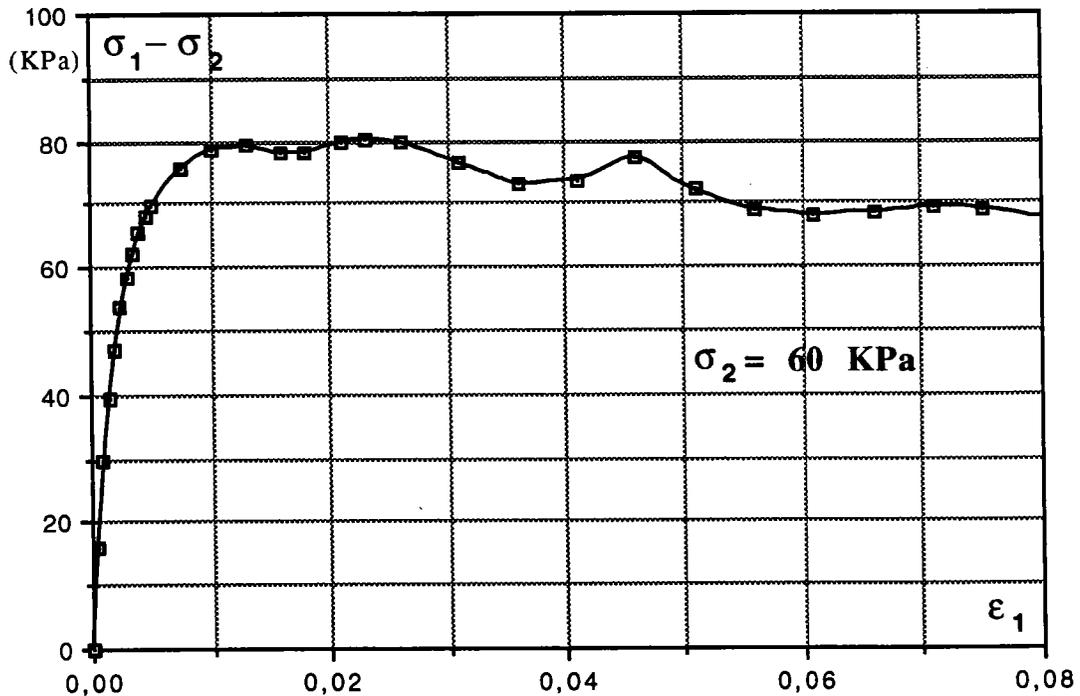


Figure 4.8: Déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_2 = 60$  KPa)

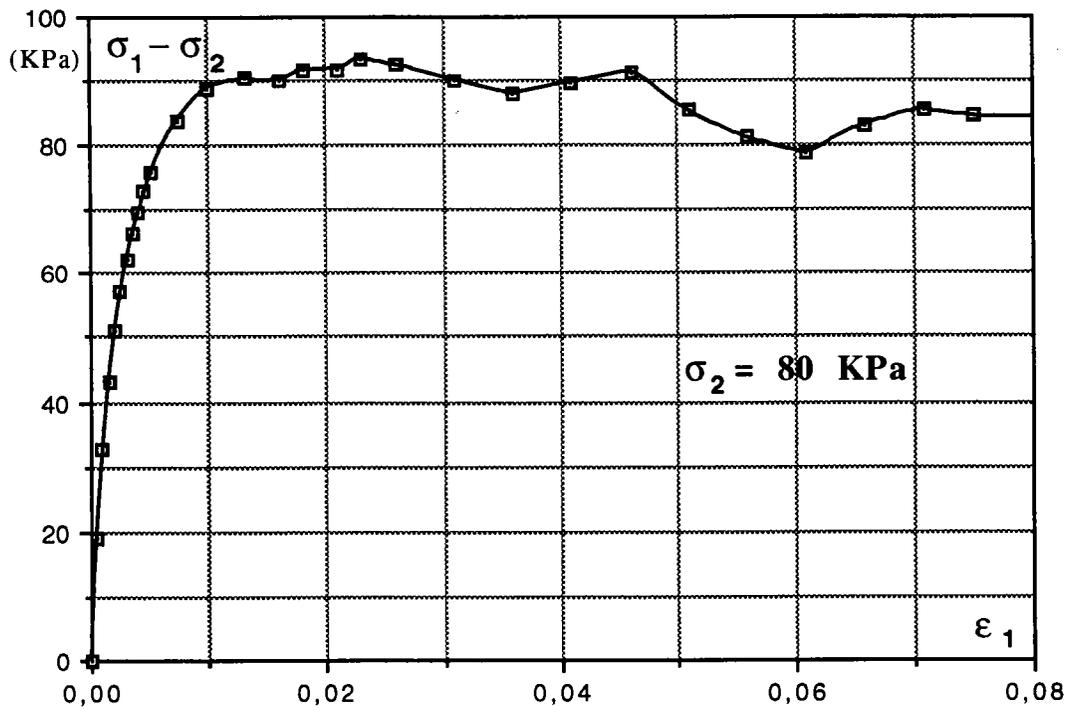


Figure 4.9: Déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_2 = 80 \text{ KPa}$ )

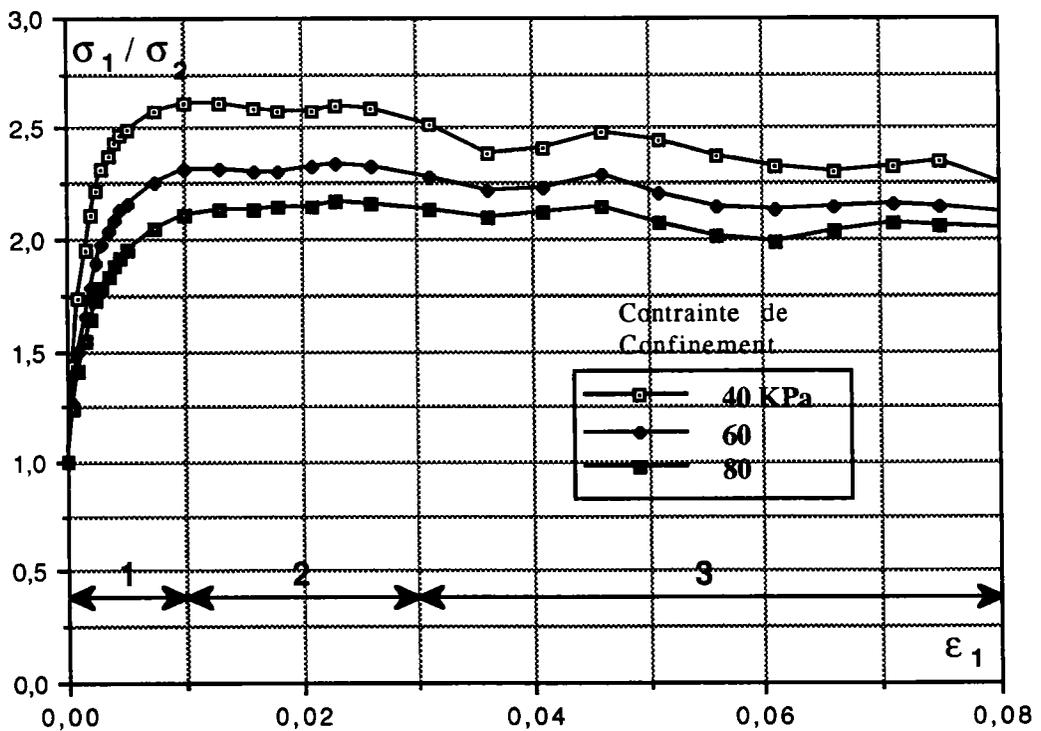


Figure 4.10: Rapport de la contrainte axiale sur la contrainte radiale en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_2=40, 60$  et  $80 \text{ KPa}$ )  
Découpage de la courbe contrainte-déformation

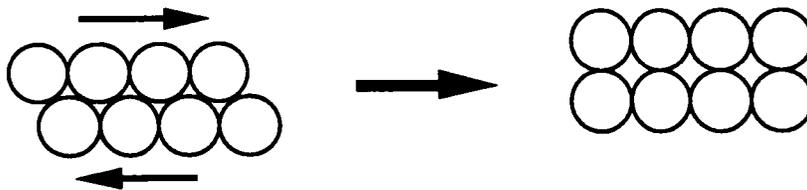
Les courbes contrainte-déformation se découpent schématiquement en trois zones (Fig. 4.10).

- $0 < \varepsilon_1 < 1\%$  phase de comportement homogène.  
Légère contractance.
- $1 < \varepsilon_1 < 3\%$  Apparition de la localisation des déformations.  
Fin de la phase d'écrouissage.  
Présence du maximum du déviateur des contraintes.  
Déformation volumique dilatante.
- $\varepsilon_1 > 3\%$  Domaine d'écoulement plastique.  
Poursuite de la localisation.  
Développement des surfaces de rupture.  
Dilatance importante.  
Stabilisation des efforts et des variations de volume.

#### 4.4.2.2 Courbes de déformation volumique

Les figures 4.12, 4.13 et 4.14 présentent les déformations volumiques globales pour différents essais. Les variations de volume concernant l'ensemble de l'échantillon sont relativement faibles (en général inférieur à 2,5%) et sont accompagnées de dilatance.

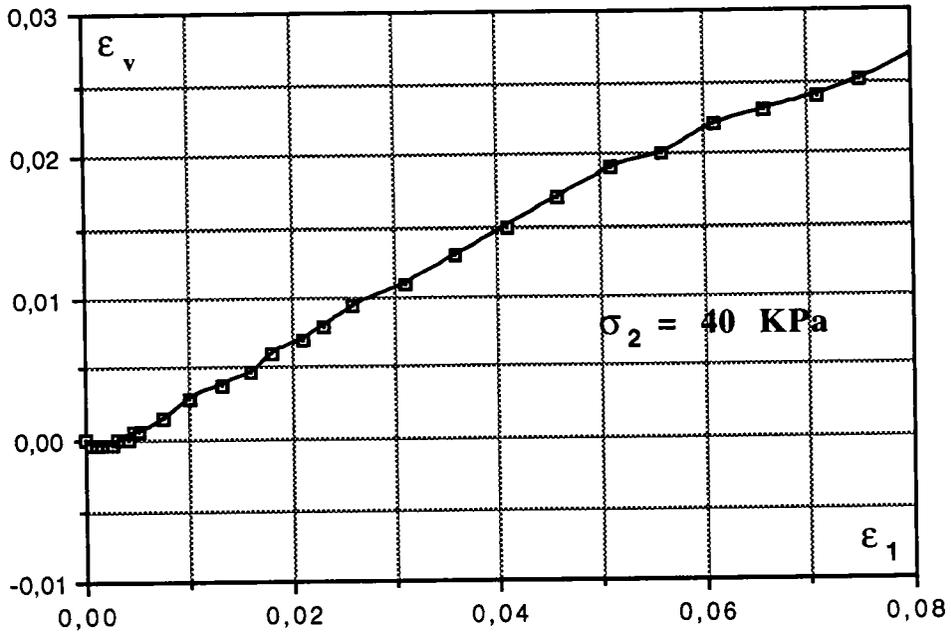
La présence d'une granulométrie discontinue à deux diamètres favorise les arrangements géométriques naturels et permet une mise en place dense. Celle-ci, combinée à une faible résistance au cisaillement, provoque au cours de la déformation, le désenchevêtrement du squelette, qui se manifeste par des déplacements relatifs des grains. Il y a donc rupture de contacts et ainsi dilatance (Fig. 4.11).



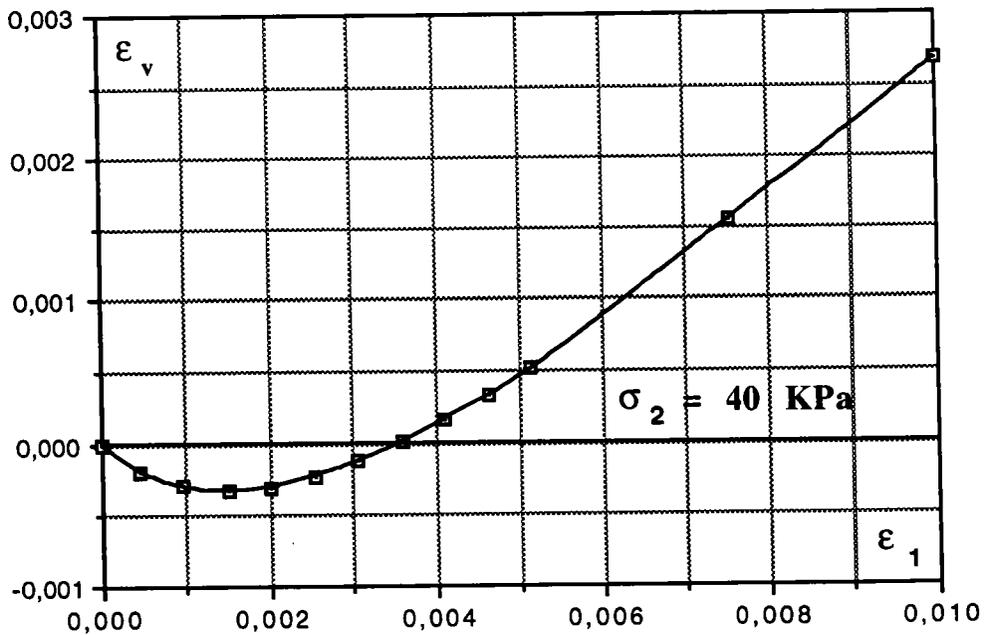
*Figure 4.11: Cisaillement d'un assemblage dense*

Ces constatations permettent d'expliquer les résultats observés au cours de nos essais. Dans la variation de volume il y a généralement une très légère phase de contractance en début d'essai, suivie de dilatance (Figs. 4.12, 4.13 et 4.14).

L'essai réalisé à une faible pression latérale de 40 KPa présente une dilatance plus importante (Fig. 4.12).



*Figure 4.12-a: Déformation volumique globale en fonction de la déformation axiale jusqu'à  $\epsilon_1=8\%$  ( $\sigma_2 = 40 \text{ KPa}$ )*



*Figure 4.12-b: Déformation volumique globale en fonction de la déformation axiale jusqu'à  $\epsilon_1=1\%$  ( $\sigma_2 = 40 \text{ KPa}$ )*

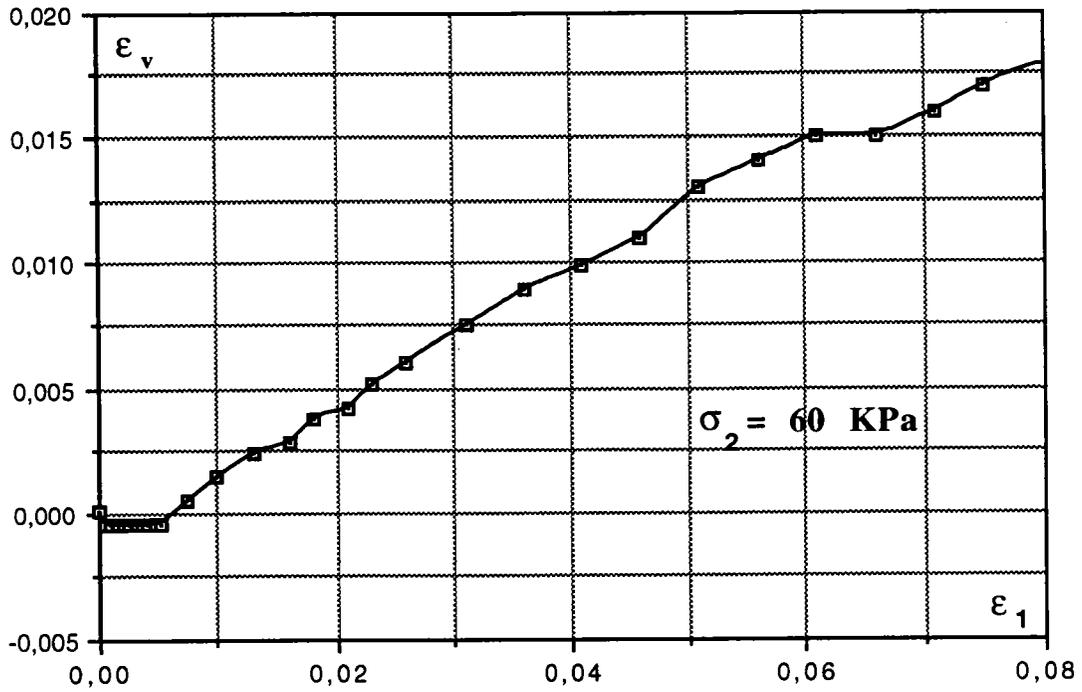


Figure 4.13-a: Déformation volumique globale en fonction de la déformation axiale jusqu'à  $\epsilon_1=8\%$  ( $\sigma_2 = 60$  KPa)

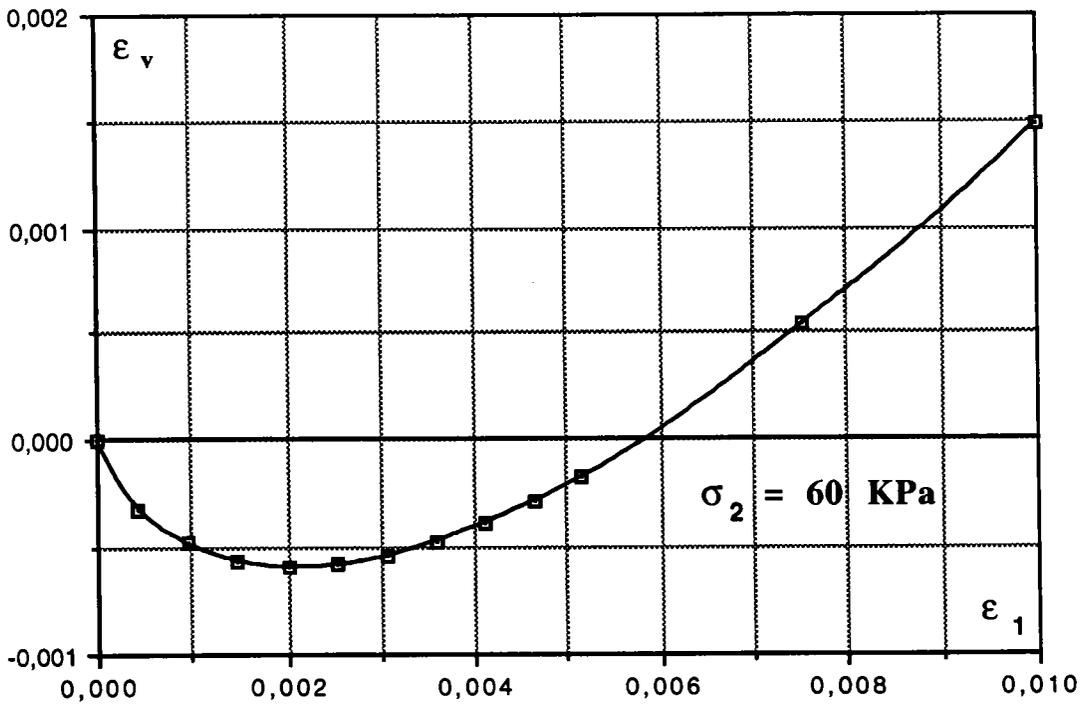
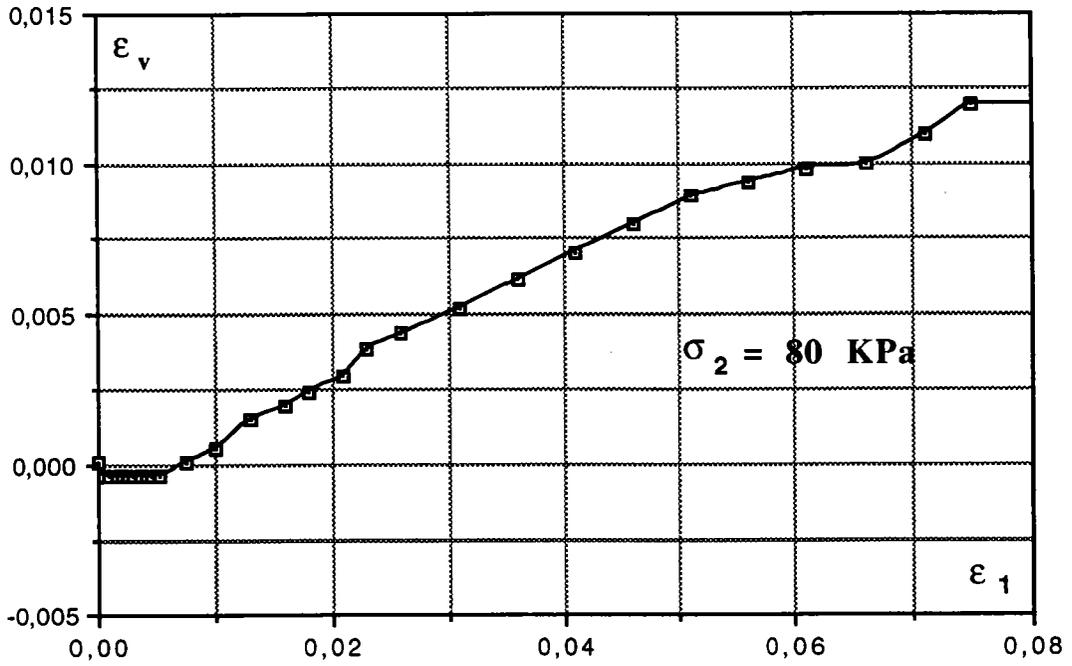
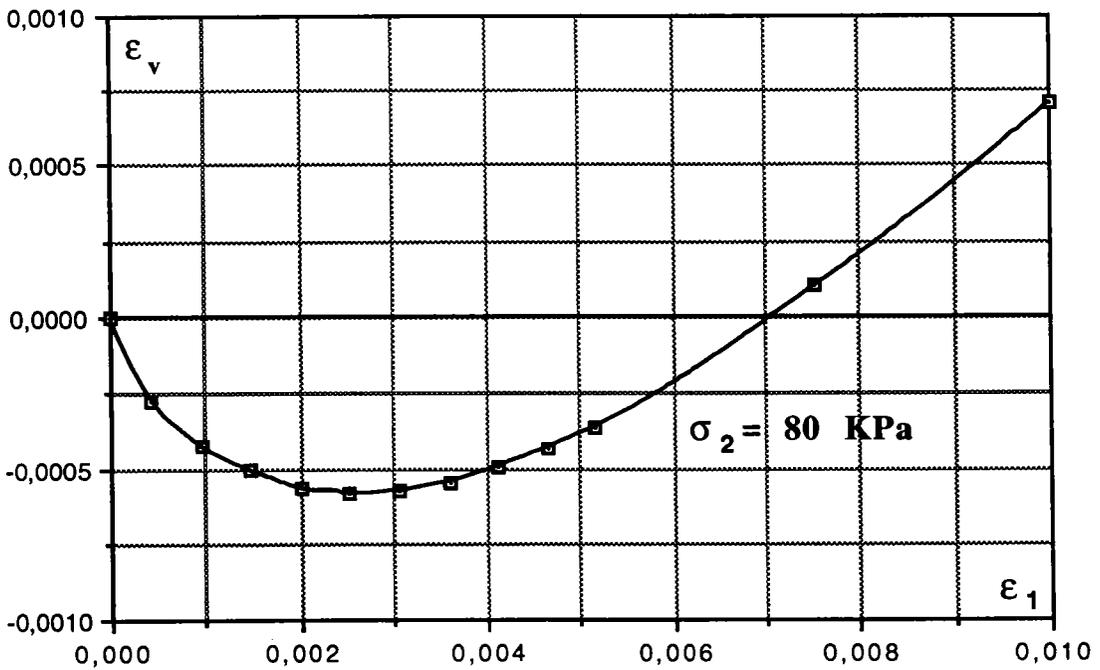


Figure 4.13-b: Déformation volumique globale en fonction de la déformation axiale jusqu'à  $\epsilon_1=1\%$  ( $\sigma_2 = 60$  KPa)



*Figure 4.14-a: Déformation volumique globale en fonction de la déformation axiale jusqu'à  $\epsilon_1=8\%$  ( $\sigma_2 = 80$  KPa)*



*Figure 4.14-b: Déformation volumique globale en fonction de la déformation axiale jusqu'à  $\epsilon_1=1\%$  ( $\sigma_2 = 80$  KPa)*

### 4.4.2.3 Homogénéité des matériaux

Si on admet que notre matériau possède un comportement homogène, on écrira:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (4.1)$$

Connaissant la largeur dans le plan moyen de l'échantillon, on calcule la déformation transversale  $\varepsilon_2$ :

$$\varepsilon_2 = (l - l_0)/l_0 \quad (4.2)$$

où  $l$  et  $l_0$  désignent respectivement la largeur de l'échantillon dans la configuration actuelle et la largeur initiale.

La figure 4.15 présente les variations de volume des rouleaux de P.V.C. mesurées et celles correspondant à la formulation ci-dessus pour  $\sigma_2=80$  KPa.

Il existe un accord au début de l'essai, c'est à dire  $\varepsilon_1 < 1\%$  et un profond désaccord avec l'hypothèse d'homogénéité si  $\varepsilon_1 > 2\%$ . Donc au début le matériau est homogène, mais après 1% de déformation axiale il devient hétérogène.

## 4.5 Comparaison des résultats avec les résultats expérimentaux

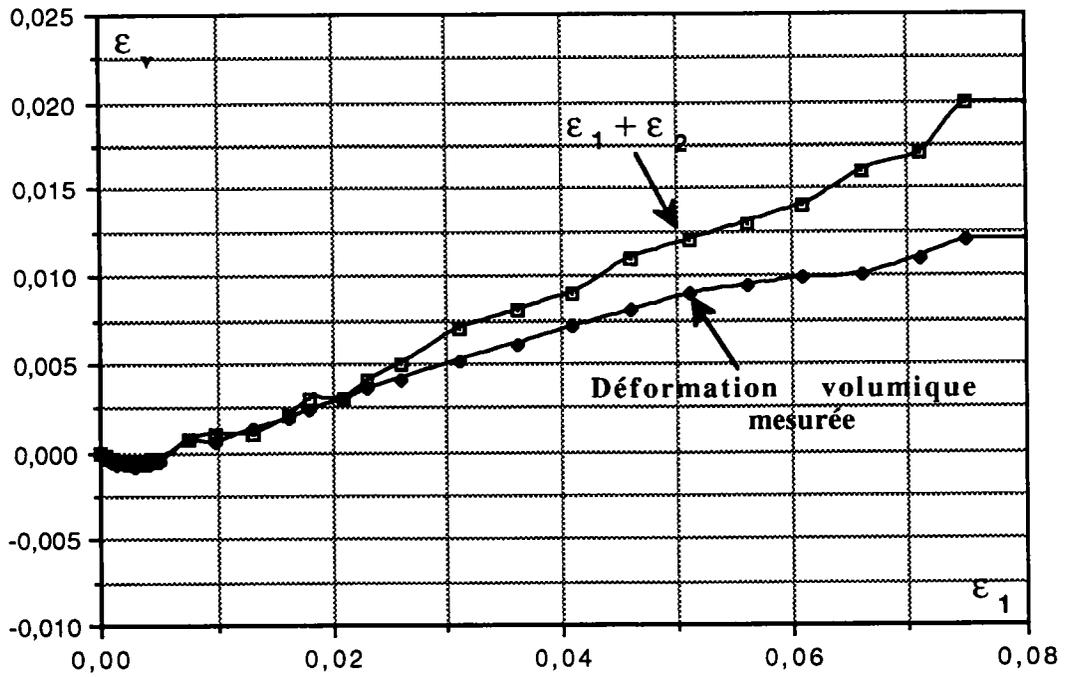
On compare nos résultats avec les résultats de Duthilleul [39] utilisant l'appareil biaxial et la méthode stéréophotogramétrique.

Le tableau 4.1 présente les résultats numériques et expérimentaux. Les valeurs de  $(\sigma_1/\sigma_2)_{\max}$  et  $\phi_{\max}$  sont bien comparables. Toutefois la valeur numérique de la déformation axiale obtenue l'angle de frottement maximale, est inférieur à la valeur expérimentale.

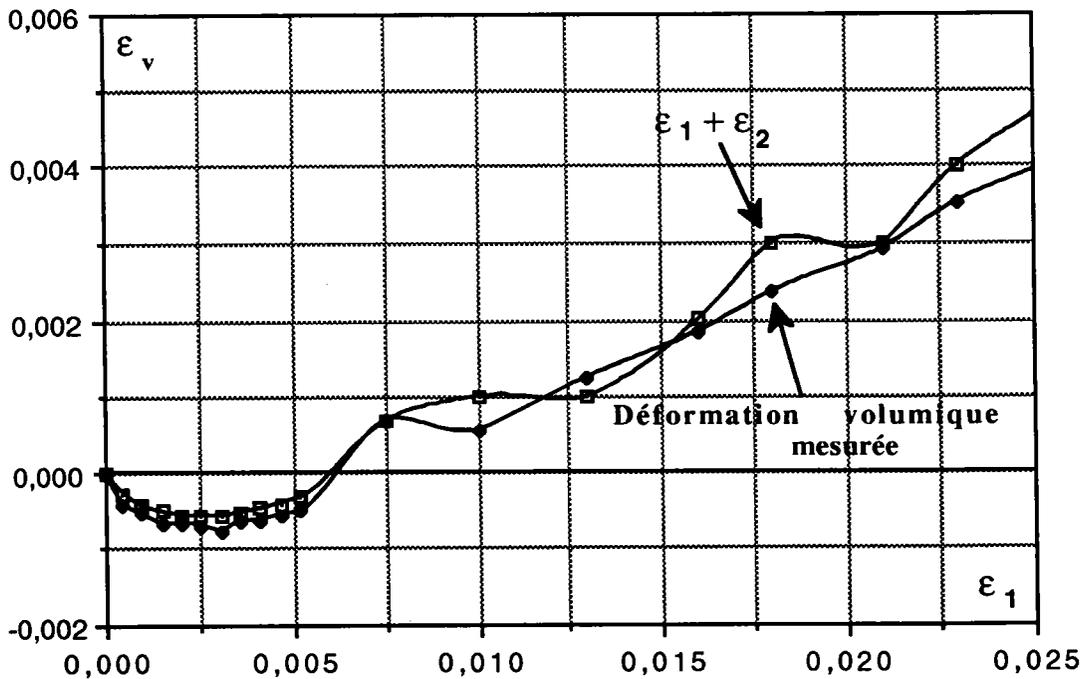
Les figures 4.16 à 4.19 regroupent nos résultats numériques et trois essais réalisés par Duthilleul [39] à des pressions latérales de 40, 60 et 80 KPa. On constate un bon accord entre ces résultats numériques et expérimentaux.

$\sigma_2$ (kpa)	méthode	$(\sigma_1/\sigma_2)_{\max}$	$\phi_{\max}$	$\varepsilon (\phi_{\max}) \%$
40	Numérique	2,61	26,5°	1,55
	Expériment.	2,74	27,7°	3,3
60	N	2,34	23,7°	2,94
	E	2,34	23,6	3,1
80	N	2,17	21,6°	2,58
	E	2,38	24,1	3,8

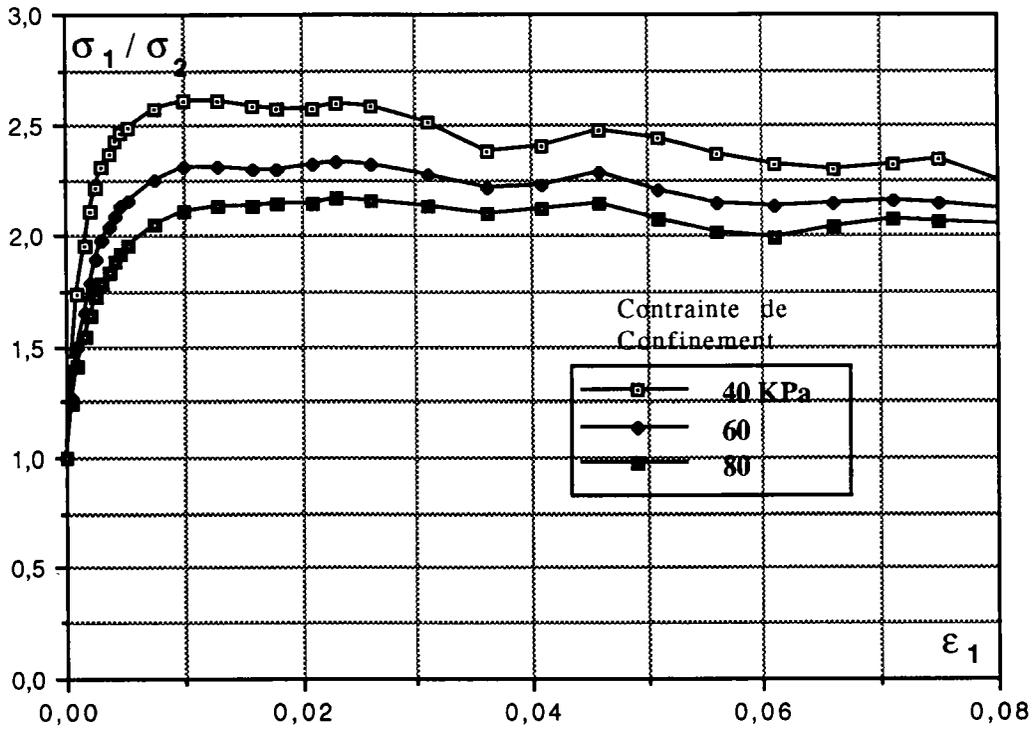
Tableau 4.1: Comparaison des résultats



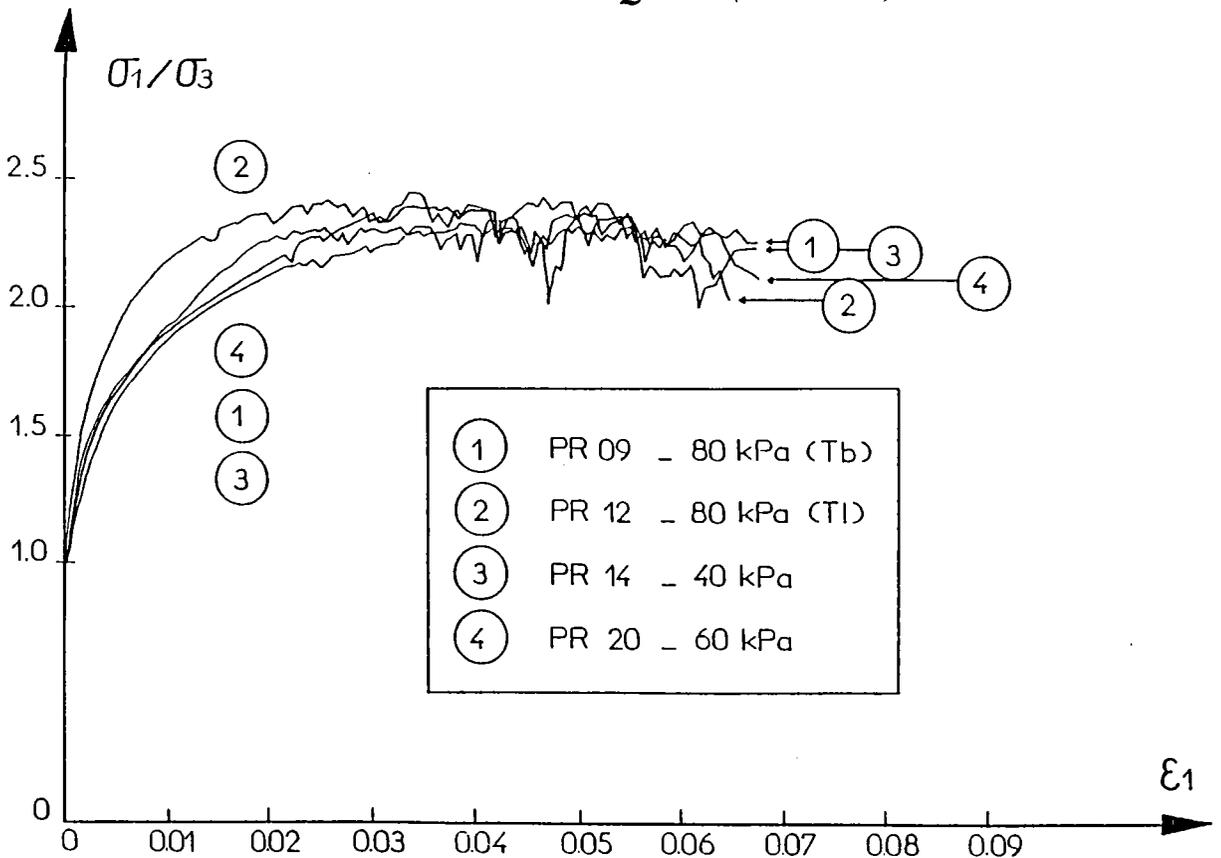
**Figure 4.15-a:** Variations de volume mesurées et celles correspondant à la formulation 1 et 2 jusqu'à  $\epsilon_1=8\%$



**Figure 4.15-b:** Variations de volume mesurées et celles correspondant à la formulation 1 et 2 jusqu'à  $\epsilon_1=2,5\%$



**Figure 4.16:** Rapport de la contrainte axiale sur la contrainte latérale en fonction de la déformation axiale  
**RESULTATS NUMERIQUES (TRUBAL)**



**Figure 4.17:** Rapport de la contrainte axiale sur la contrainte latérale en fonction de la déformation axiale  
**RESULTATS EXPERIMENTAUX (Duthilleul [39])**

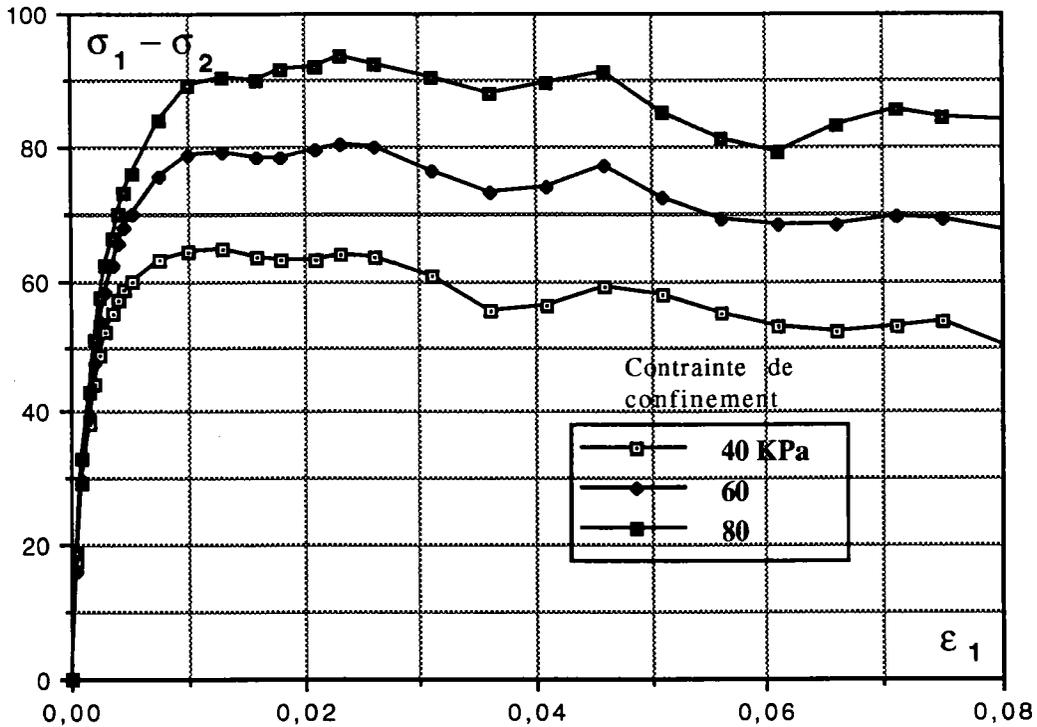


Figure 4.18: Déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale. **RESULTATS NUMERIQUES (TRUBAL)**

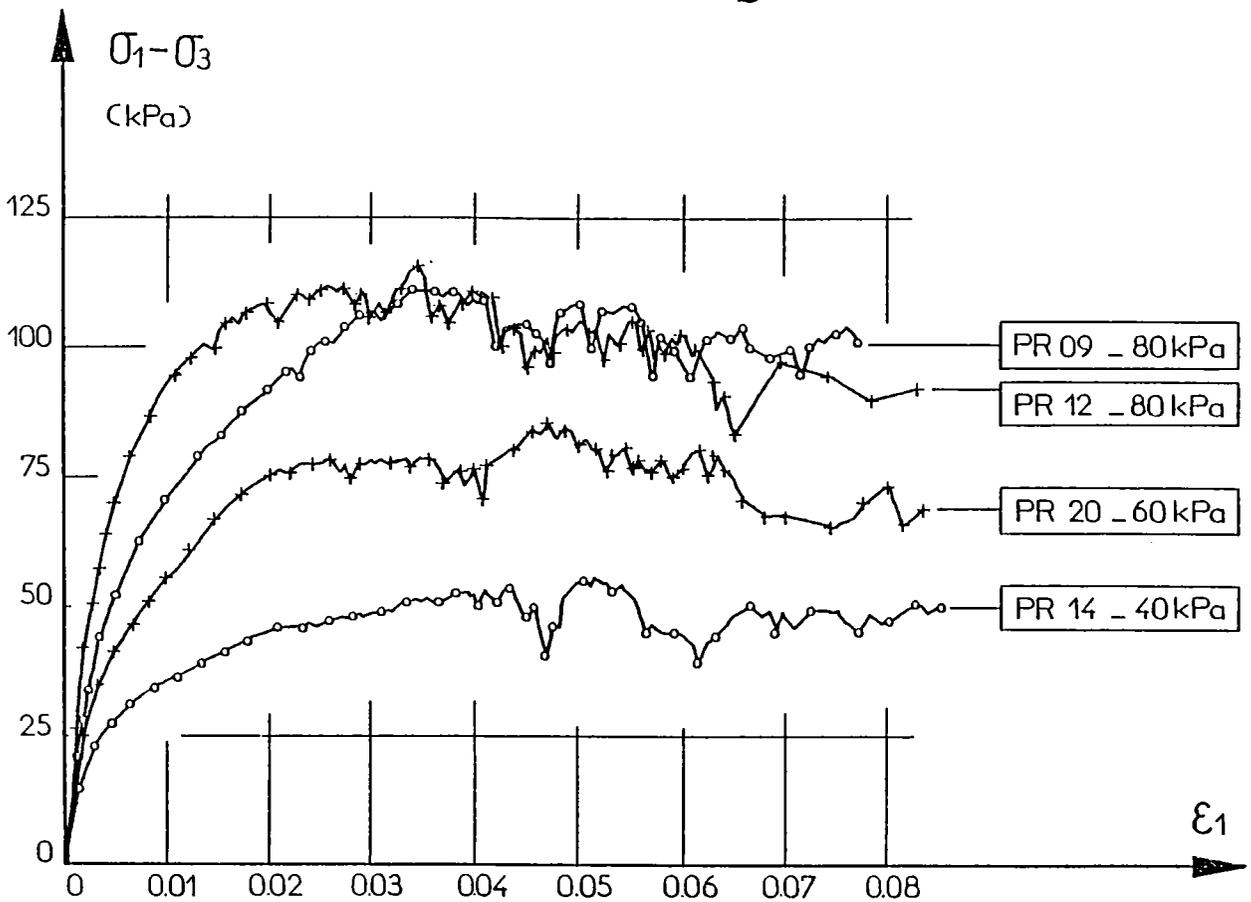


Figure 4.19: Déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale. **RESULTATS EXPERIMENTAUX (Duthilleul[ 39])**

## 4.6 Conclusion

Les simulations numériques faites pour valider la méthode des éléments distincts, sont traitées par le programme TRUBAL. L'essai de compression biaxiale a été effectué expérimentalement sur les rouleaux de P.V.C. de deux diamètres différents à poids et longueur égaux.

Ce chapitre concerne notamment le modèle analogique bidimensionnel de Schneebeli. Dans la méthode numérique l'échantillon est constitué des disques de P.V.C. (simulant les rouleaux) avec des caractéristiques identiques. Les calculs ont été effectués avec les contraintes de confinement égales à 40, 60 et 80 KPa.

Nous avons comparés nos résultats avec les résultats expérimentaux de Duthilleul à Grenoble [39]. L'étude comparative obtenue à l'aide des deux méthodes, nous conduit aux conclusions suivantes:

- l'angle de frottement interne obtenue par la méthode numérique est voisin de celui obtenu expérimentalement.
- la valeur maximale du rapport  $\sigma_1/\sigma_2$  (ou  $\sigma_1-\sigma_2$ ) pour l'essai numérique est bien comparable avec la valeur expérimentale; bien que dans l'essai numérique cette valeur atteint le maximum plus rapidement.
- au début de l'essai ( $\epsilon_1 < 1\%$ ) la variation volumique de l'échantillon montre une homogénéité, mais pour  $\epsilon_1 > 2\%$  le matériau devient hétérogène. Il y a une légère contractance dans la phase de comportement homogène, et la phase de la déformation volumique dilatante apparait rapidement.

# Chapitre 5

## Compression Triaxiale

### 5.1 Rappels

#### 5.1.1 Concept de l'état caractéristique

Habib et Luong [95] ont défini l'état caractéristique du sol par le niveau de contrainte correspondant au passage de la déformation volumique contractante à la déformation volumique dilatante (Fig. 5.1). A cet état du sol sont associés:

- un taux de variation de volume nul;
- un seuil de changement de phase. Le processus d'enchevêtrement des grains se termine pour laisser place au désenchevêtrement. A ce seuil correspond un angle de frottement caractéristique  $\phi_c$  donné par la relation:

$$\phi_c = \text{Arc sin } \frac{3\eta_c}{6+\eta_c} \quad (5.1)$$

$$\eta_c = (q/p)_{\dot{\epsilon}_v=0} \quad (5.2)$$

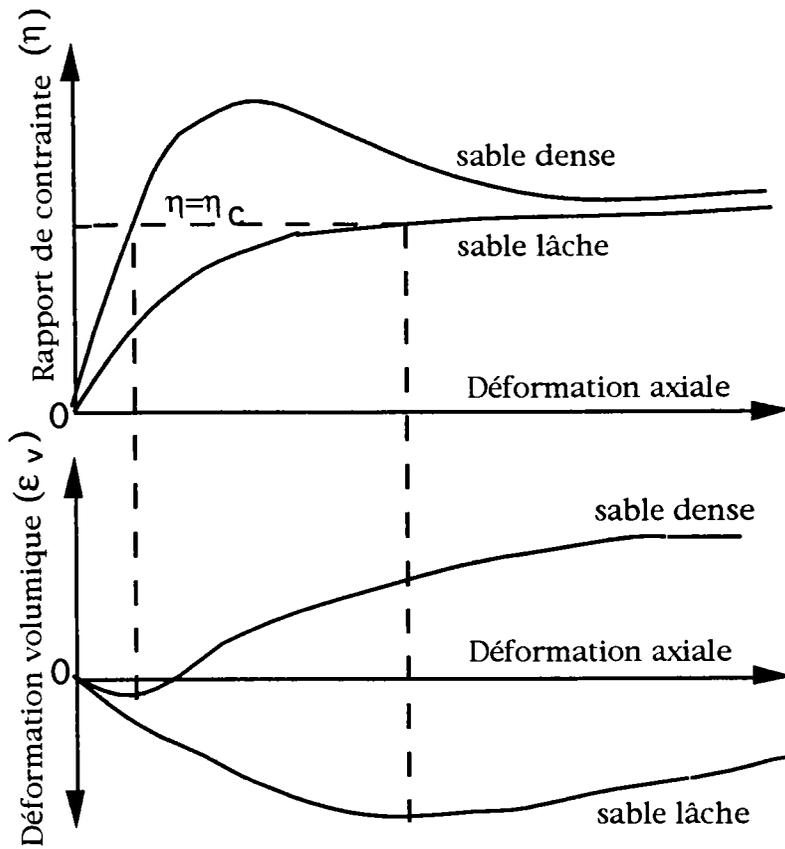
$$q = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (5.3)$$

$$p = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 \quad (5.4)$$

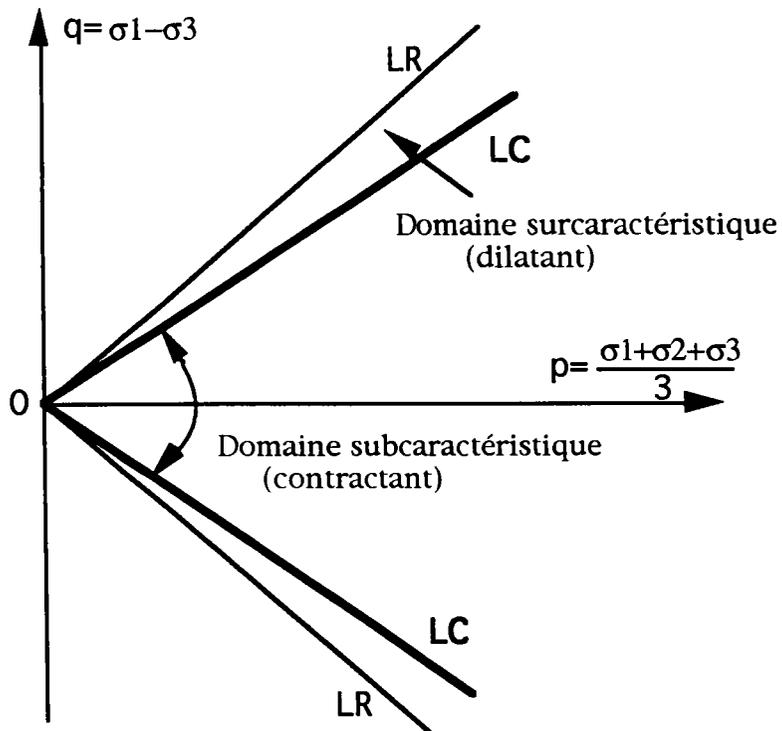
où:

$\eta_c$  est égal au rapport de contrainte  $q/p$  correspondant au seuil de changement de phase,  $q$  est la contrainte déviatorique et  $p$  la contrainte moyenne.

Cet angle caractérise la capacité d'enchevêtrement du matériau. D'après Luong  $\phi_c$  est un paramètre intrinsèque du matériau indépendant de la porosité initiale comme de l'état de volume du matériau.



**Figure 5.1:** Relation contrainte-déformation d'un essai triaxial classique



**Figure 2:** Critère caractéristique (Luong, 1980)

Cet état caractéristique sépare deux types de comportement rhéologique des matériaux granulaires (Fig. 5.2):

- contractant dans le domaine dit subcaractéristique (qui est lié à l'enchevêtrement des grains) et qui est délimité dans le plan (p,q) par des lignes caractéristiques (LC);
- dilatant dans le domaine surcaractéristique (lié au désenchevêtrement des grains) jusqu'à la limite de rupture (LR).

Pour un essai triaxial conventionnel, le seuil de désenchevêtrement correspond pratiquement à l'état de contrainte où la vitesse de déformation volumique est nulle.

### 5.1.2 Loi de Monnet

Monnet a supposé que le sol réagit d'abord élastiquement, puis à partir d'un seuil appelé seuil d'écroutissement, il se produit un écroutissement durcissant accompagné de dilatance. Enfin, quand le cisaillement maximum est atteint un écoulement plastique parfait se produit comme le montre la figure 5.3.

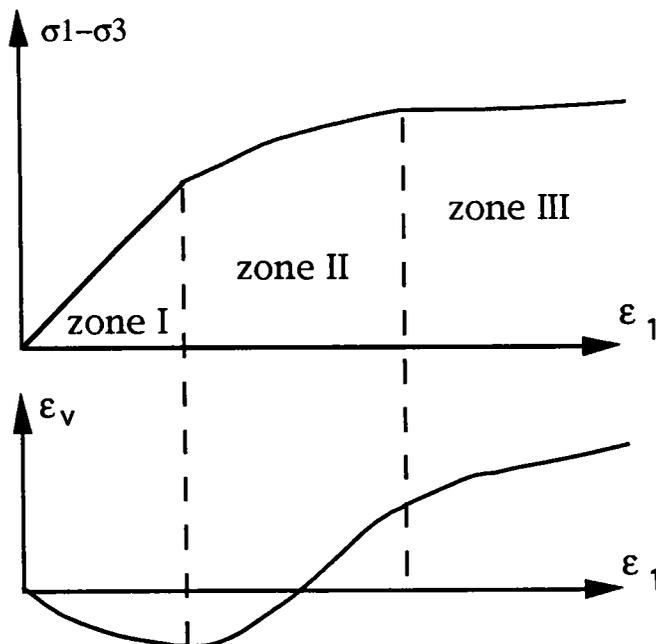


Figure 5.3: Comportement au cisaillement (Monnet, 1977)

- La zone I correspond à l'élasticité;
- La zone II correspond à la plasticité avec écroutissement;
- La zone III correspond à la plasticité parfaite.

## 5.2 Méthode expérimentale

Les matériaux utilisés dans l'étude expérimentale sont des billes de verres dont les caractéristiques sont les suivantes:

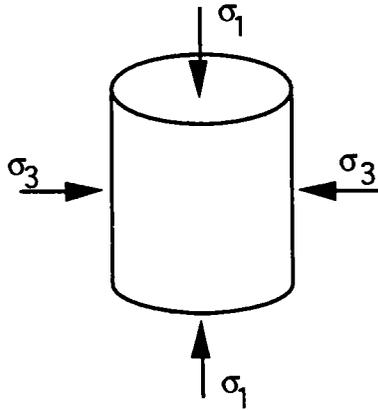
les diamètres des billes varient entre 0,26 mm et 0,42 mm.

la module de cisaillement du verre  $G=2,9 \cdot 10^{10}$  Pa,

le coefficient de Poisson du verre  $\nu=0,2$ ,

l'indice des vides de l'échantillon  $e=0,65$

L'essai en compression triaxiale de révolution est réalisé sur des matériaux en conditions non consolidés dans des éprouvettes de forme cylindrique (Fig. 5.4).



*Figure 5.4: Essai expérimental sur un éprouvette de forme cylindrique*

L'essai consiste à soumettre l'éprouvette à un champ de contrainte isotrope  $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_c$  puis à augmenter progressivement la contrainte axiale  $\sigma_1$  jusqu'à la rupture ou l'écoulement de l'échantillon, tout en gardant la pression de confinement  $\sigma_c$  constante ( $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_c$ ). Les contraintes de confinement appliquées sont égales à 100, 200, 300 et 400 KPa.

## 5.3 Simulation numérique

### 5.3.1 Caractéristiques des matériaux et mode opératoire

Les matériaux utilisés sont des billes de verres dont les caractéristiques sont comme suit:

- 500 billes de verres, dont 1/4 de diamètres 0,26 mm, 1/2 de diamètre 0,34 mm et 1/4 de diamètre 0,42 mm
- la module de cisaillement de verre  $G=2,9 \cdot 10^{10}$  Pa,
- le coefficient de poisson de verre  $\nu=0,2$ ,
- le coefficient de frottement intergranulaire  $f=1,0$

Après génération de billes de verres dans un cube, on impose à l'espace périodique un taux de déformation constant ( $\dot{\epsilon}_1=\dot{\epsilon}_2=\dot{\epsilon}_3$ ) pour obtenir l'indice des vides réel ( $e=0,65$ )(Fig. 5.5).

On continue ce chargement isotrope jusqu'à ce que la contrainte de confinement atteigne la valeur désirée ( $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_c$ ) (Fig. 5.6-a). Les contraintes de confinement appliquées sont égales à 100, 200, 300 et 400 KPa.

Ensuite on continue le chargement dans la direction 1 en gardant  $\sigma_2=\sigma_3=\sigma_c$  constante (Fig. 5.6-b). A cause de ce chargement déviatorique, la contrainte  $\sigma_1$  augmente jusqu'à la valeur maximum. C'est la rupture de l'échantillon.

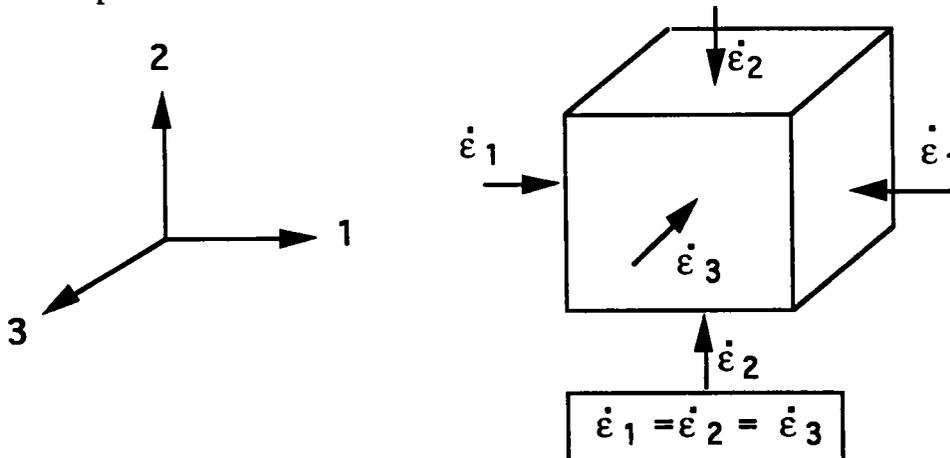


Figure 5.5: Essai numérique sur un échantillon de forme cubique

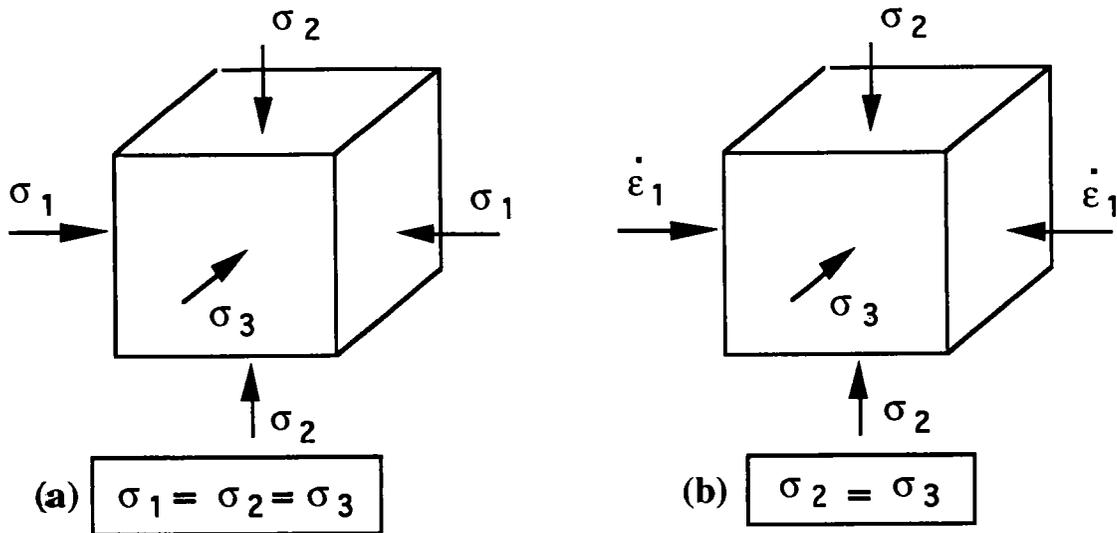


Figure 5.6: Chargement de l'essai Triaxial  
 a) confinement b) déviatorique

## 5.4 Présentation, Comparaison et interprétation des Résultats

Au cours des essais numériques nous avons suivi l'évolution des variables suivantes:

- la déformation axiale  $\varepsilon_1 = \Delta h/h$  dérivant du taux de déformation imposé aux centres des particules;
- le déviateur de contrainte  $q = \sigma_1 - \sigma_3$  dérivant du tenseur de contrainte moyenne de l'échantillon;
- la déformation volumique  $\varepsilon_v$  dérivant de la variation de volume de l'échantillon ( $\varepsilon_v = \Delta V/V$ ).

Pour chaque essai, les résultats des essais triaxiaux sont donnés sous la forme de trois courbes représentant:

- le rapport de  $\sigma_1/\sigma_3$  (ou le déviateur  $\sigma_1 - \sigma_3$ ) en fonction de la déformation axiale;
- la déformation volumique  $\varepsilon_v$  en fonction de la déformation axiale.
- le rapport de  $q/p$  en fonction de la déformation volumique (courbes caractéristiques).

### 5.4.1 Courbes contrainte-déformation

Les courbes contrainte-déformation sont représentées sur les figures 5.7 à 5.16 et correspondent respectivement aux contraintes de confinement 100, 200, 300 et 400 KPa.

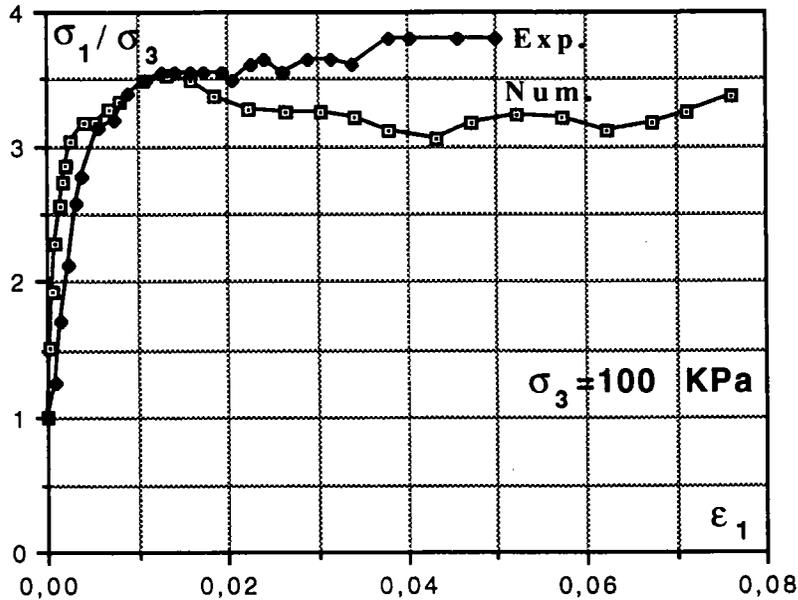


Figure 5.7: Rapport de la contrainte verticale sur la contrainte de confinement en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3=100 \text{ KPa}$ )

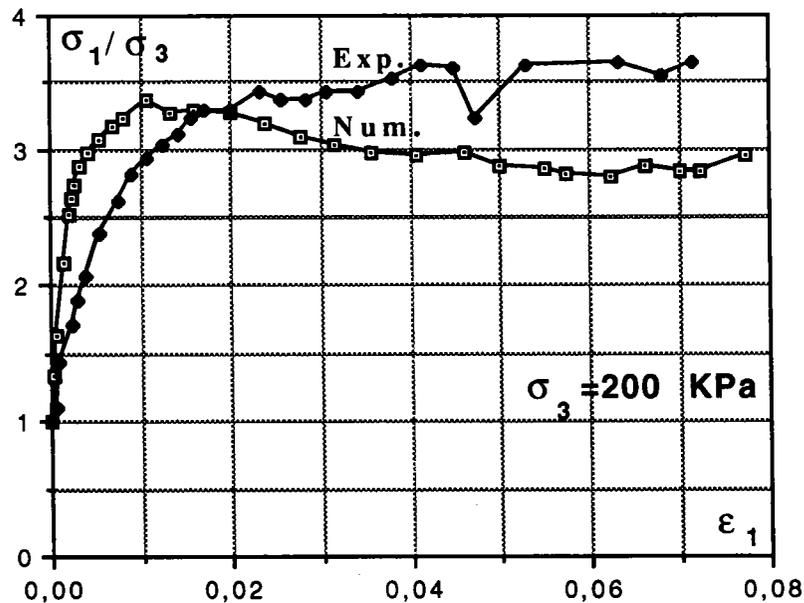
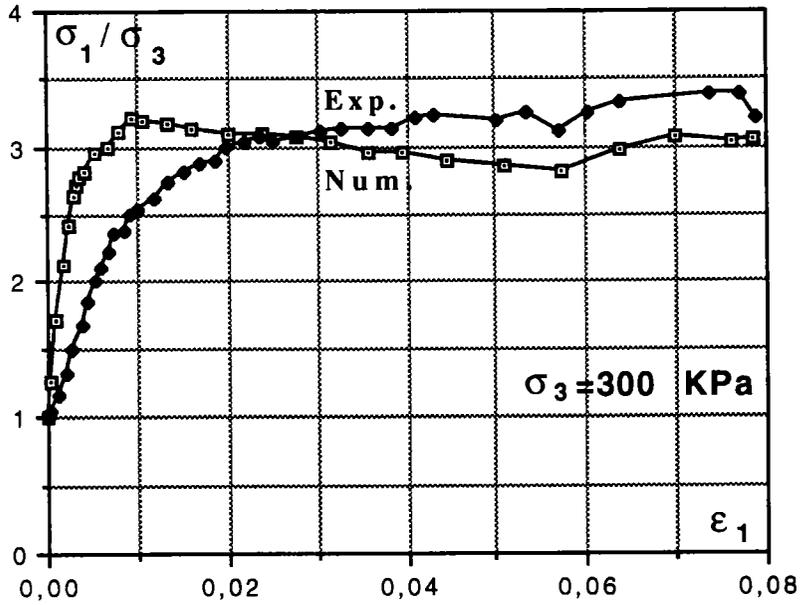
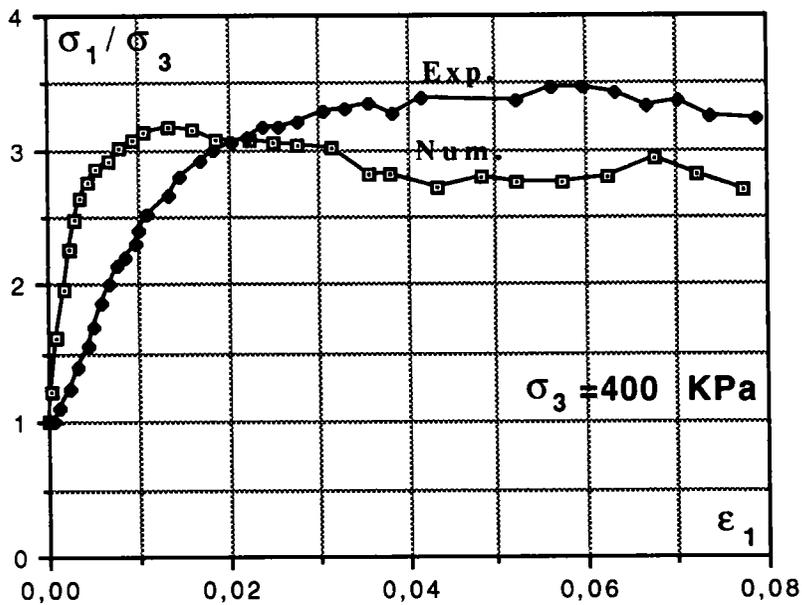


Figure 5.8: Rapport de la contrainte verticale sur la contrainte de confinement en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3=200 \text{ KPa}$ )



*Figure 5.9: Rapport de la contrainte verticale sur la contrainte de confinement en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3=300$  KPa)*



*Figure 5.10: Rapport de la contrainte verticale sur la contrainte de confinement en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3=400$  KPa)*

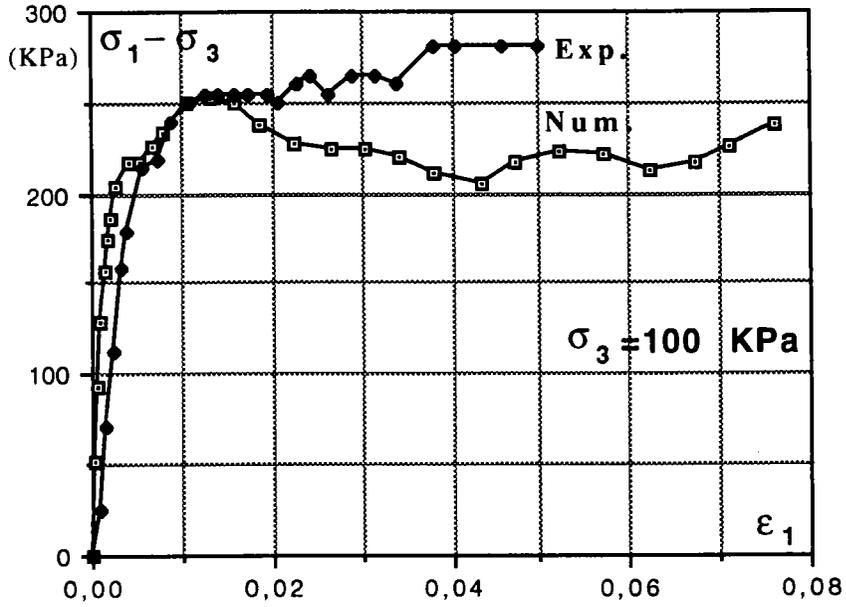


Figure 5.11: Déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3=100$  KPa)

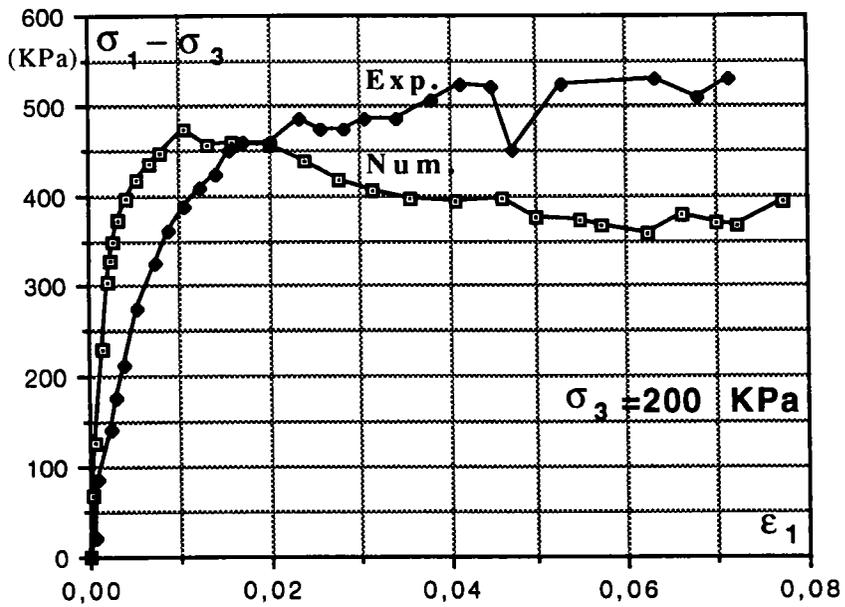


Figure 5.12: Déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3=200$  KPa)

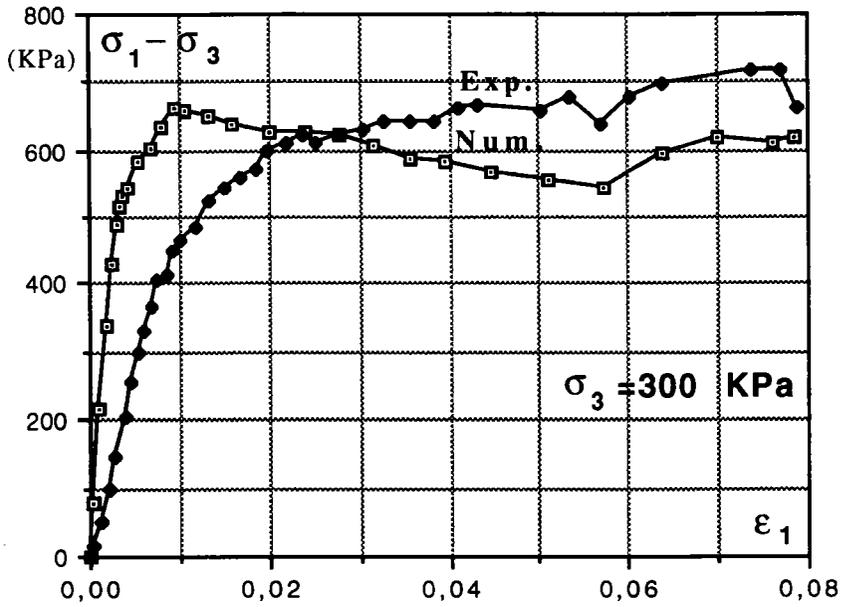


Figure 5.13: Déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3=300$  KPa)

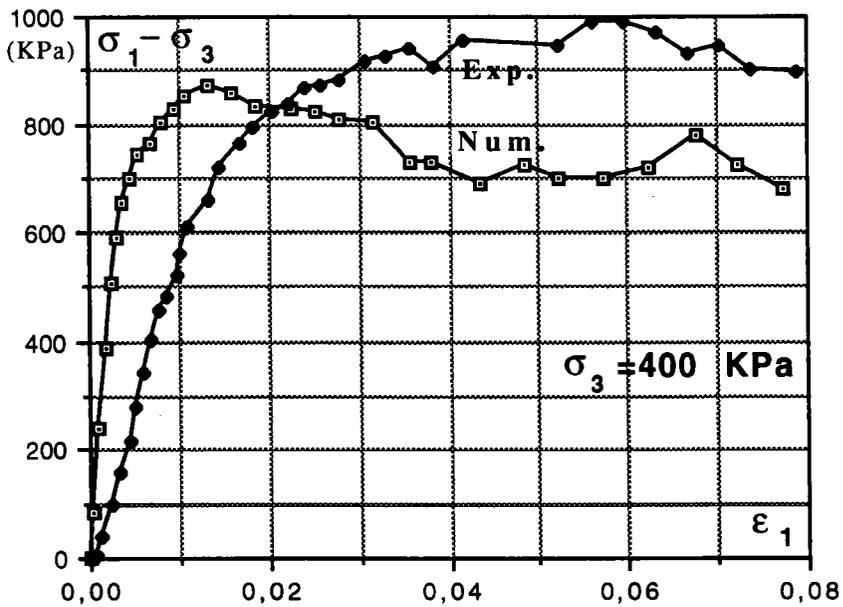
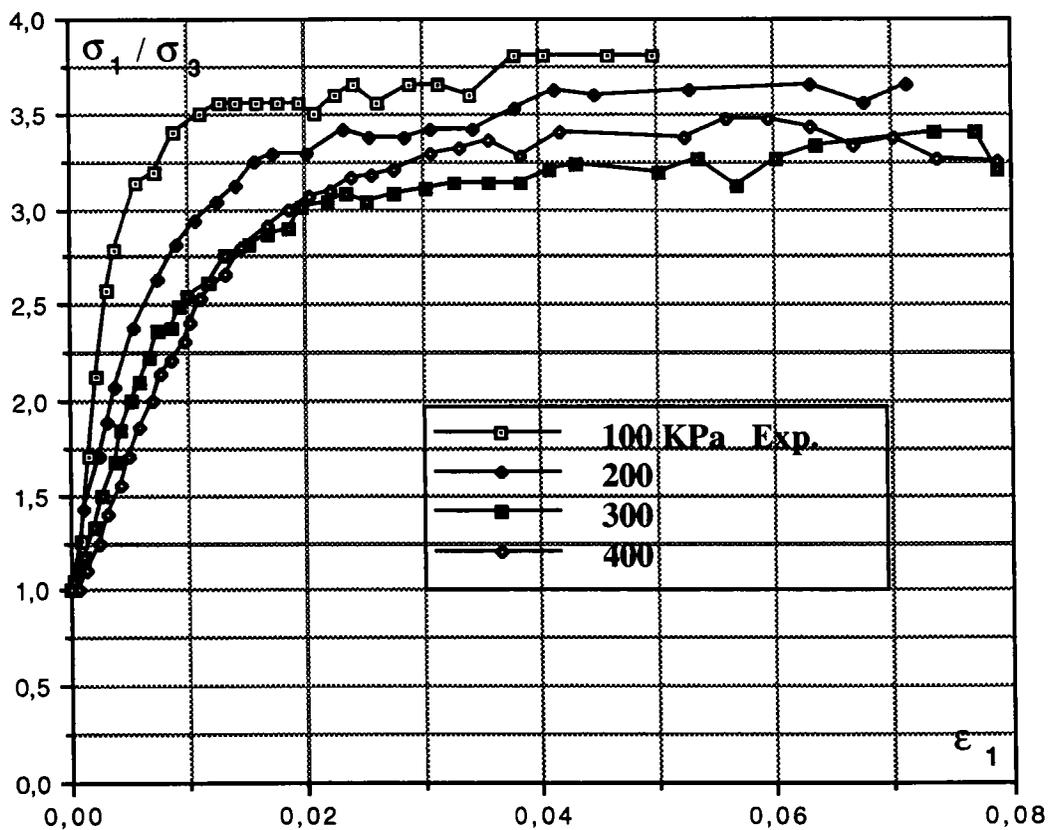
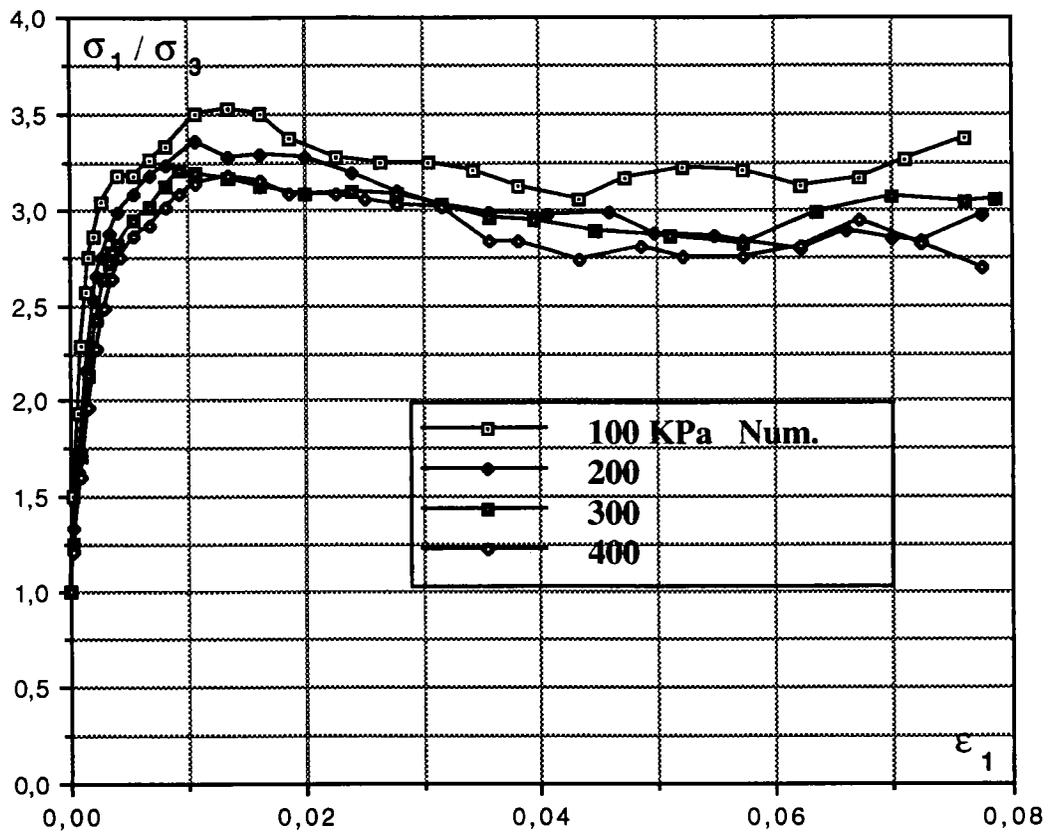
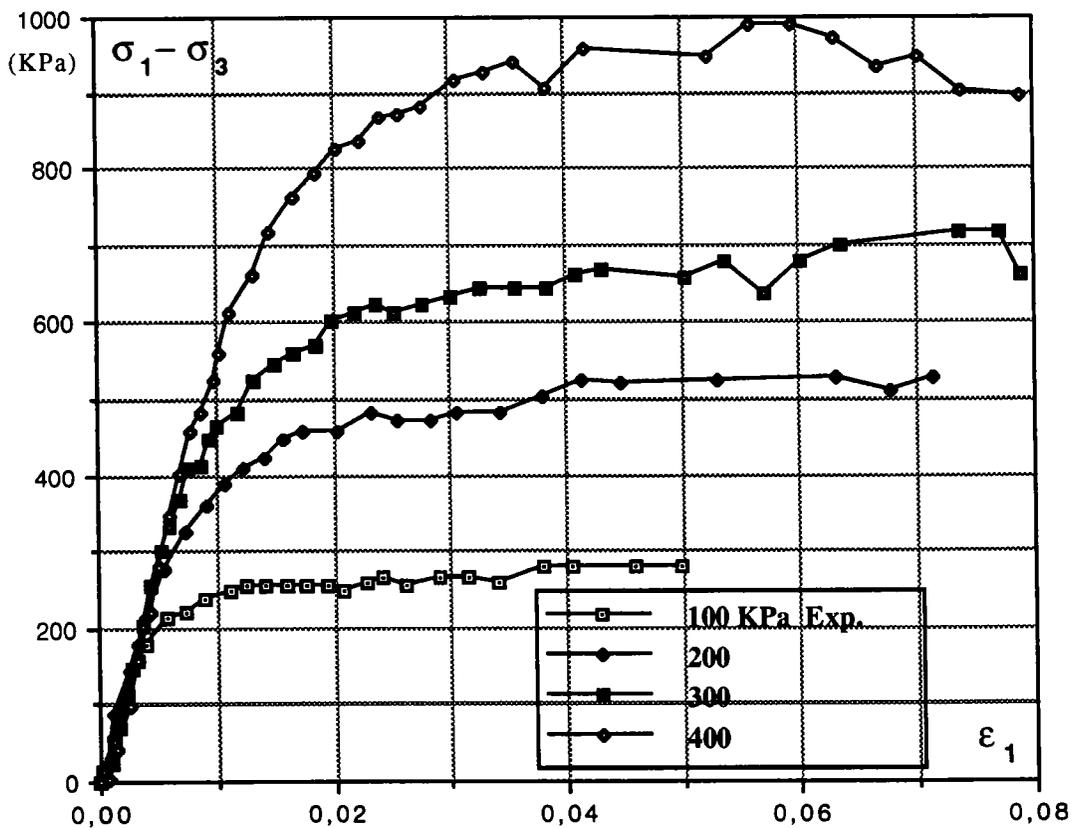
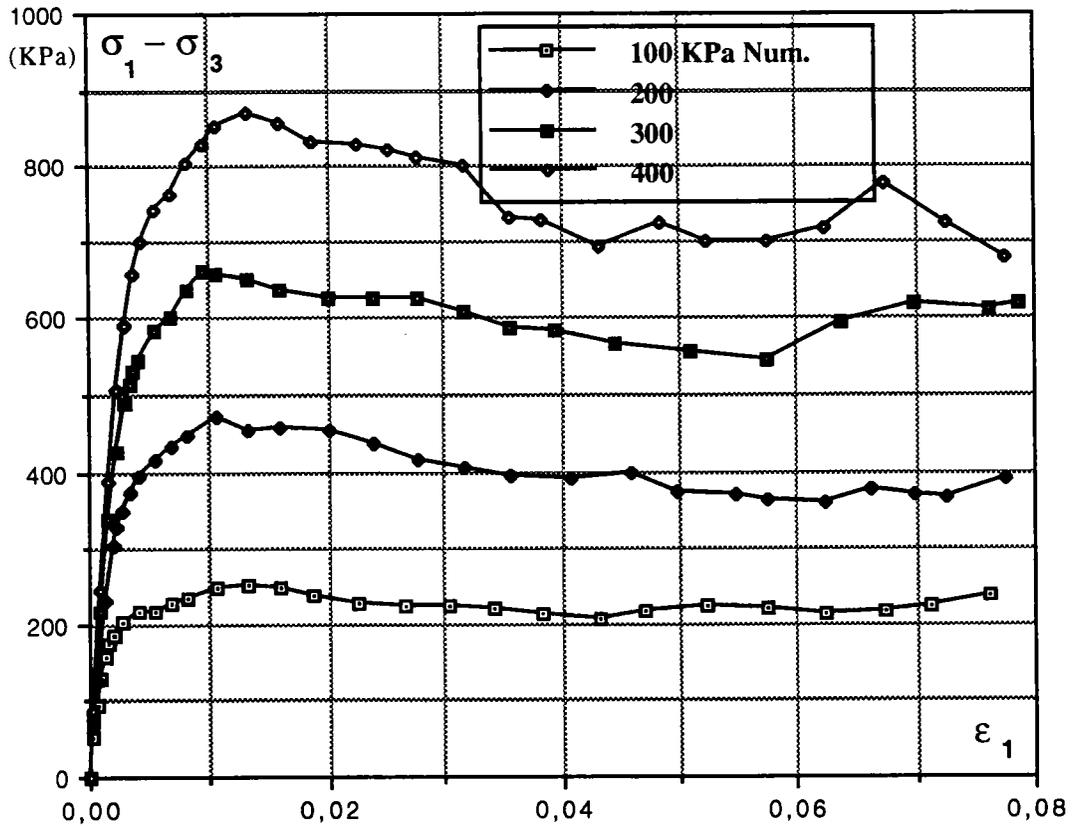


Figure 5.14: Déviateur de contrainte en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3=400$  KPa)



**Figure 5.15: Comparaison des résultats Numériques et Expérimentaux (Rapport des contraintes)**  
 (Contrainte de confinement  $\sigma_3 = 100, 200, 300$  et  $400$  KPa)



**Figure 5.16: Comparaison des résultats Numériques et Expérimentaux (Déviateur de contrainte)**  
 (Contrainte de confinement  $\sigma_3 = 100, 200, 300$  et  $400$  KPa)

La présentation de la variation de  $\sigma_1/\sigma_3$  et  $\sigma_1-\sigma_3$  pour différentes valeurs de  $\sigma_3$  sur les figures 5.15 et 5.16 montre que:

- il y a un regroupement des paliers autour d'une valeur moyenne de  $\sigma_1/\sigma_3=3,35$  (pour les essais numériques) et 3,40 (pour les essais expérimentaux).

- pour les essais numériques le rapport des contraintes (ou déviateur de contrainte) augmente relativement vite en début des essai pour atteindre un maximum.

- la contrainte déviatorique augmente avec l'augmentation de la contrainte de confinement (Fig. 5.16).

### **5.4.2 Courbes de déformation volumique**

Les courbes représentant les déformations volumiques correspondant aux contraintes de confinement 100, 200, 300 et 400 KPa sont représentées sur les figures 5.17 à 5.20.

Les courbes  $\varepsilon_v=f(\varepsilon_1)$  montrent que suivant la pression de confinement ( $\sigma_c$ ), nous distinguons un comportement contractant suivi d'une phase de dilatance.

L'analyse des courbes de déformation volumique montre que pour les matériaux à faibles contraintes de confinement ( $\sigma_c=100$  KPa) le matériau se contracte peu (Fig. 5.17).

Nous notons enfin que les déformations volumiques dans le domaine positif sont presque linéaire.

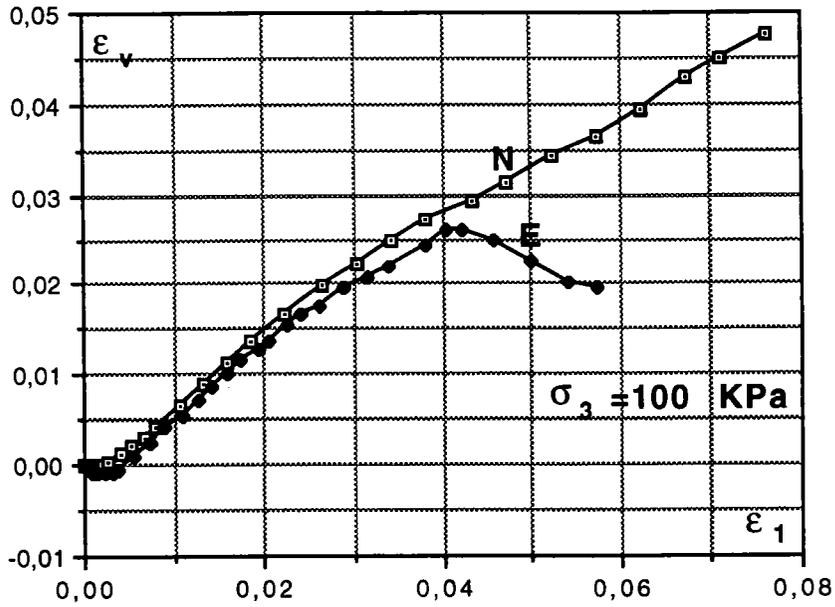


Figure 5.17-a: Déformation volumique en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3 = 100$  KPa)

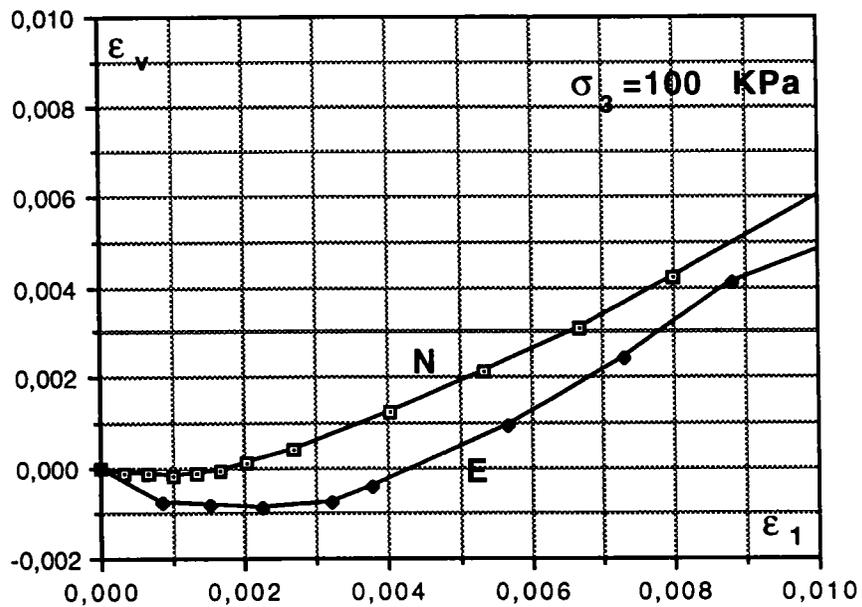
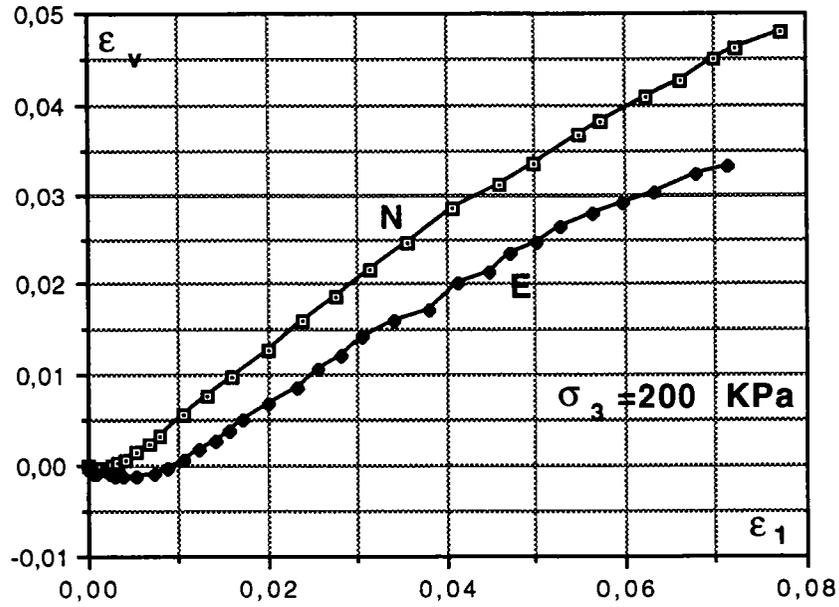
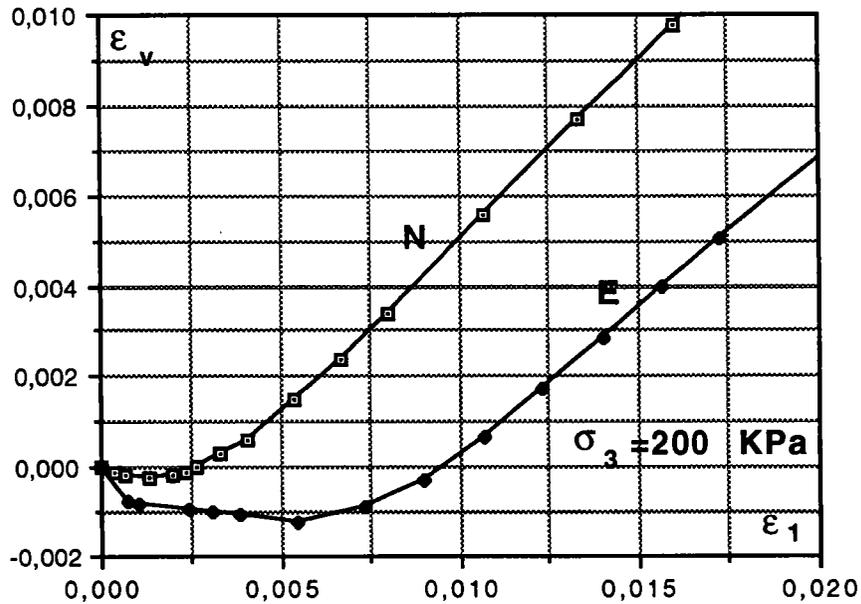


Figure 5.17-b: Déformation volumique en fonction de la déformation axiale jusqu'à  $\epsilon_1 = 0,01$  ( $\sigma_3 = 100$  KPa)



*Figure 5.18-a: Déformation volumique en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3 = 200$  KPa)*



*Figure 5.18-b: Déformation volumique en fonction de la déformation axiale jusqu'à  $\epsilon_1 = 0,02$  ( $\sigma_3 = 200$  KPa)*

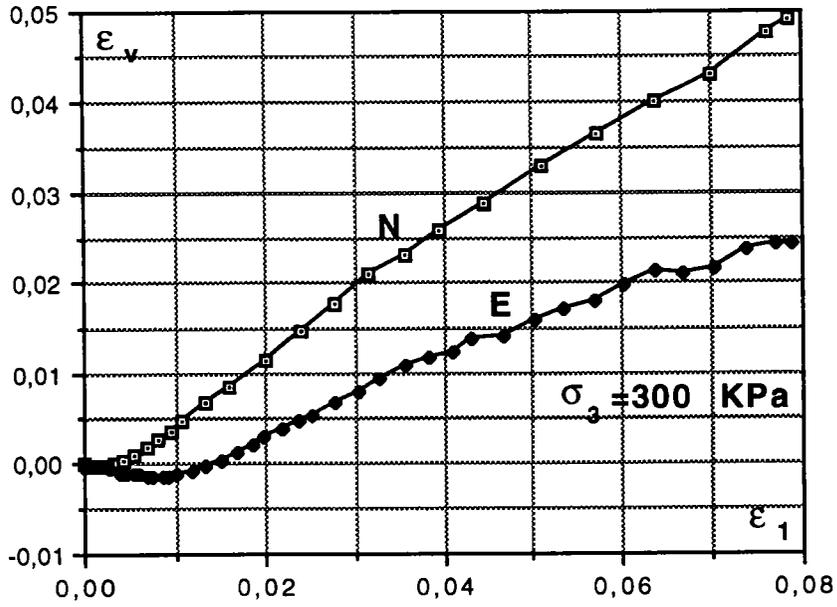


Figure 5.19-a: Déformation volumique en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3 = 300$  KPa)

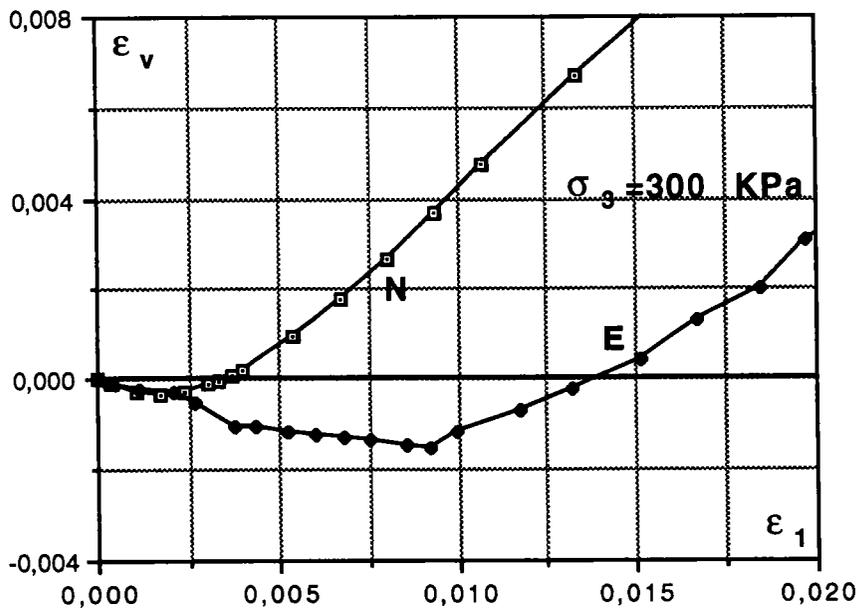
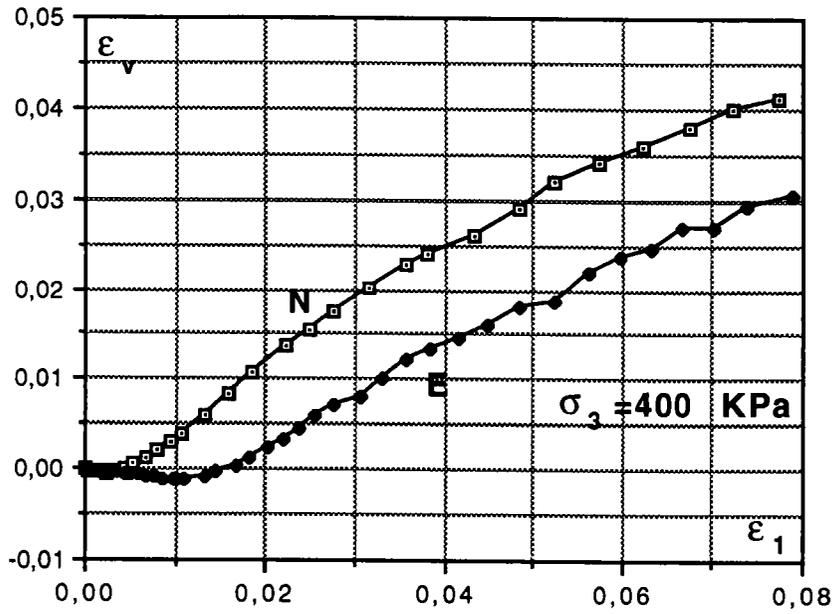
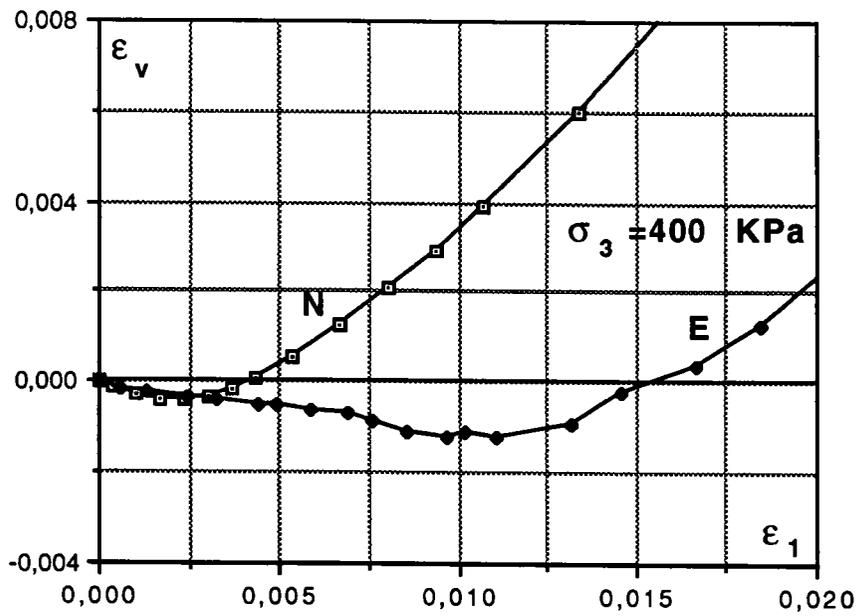


Figure 5.19-b: Déformation volumique en fonction de la déformation axiale jusqu'à  $\epsilon_1 = 0,02$  ( $\sigma_3 = 300$  KPa)



*Figure 5.20-a: Déformation volumique en fonction de la déformation axiale ( $\sigma_3 = 400 \text{ KPa}$ )*



*Figure 5.20-b: Déformation volumique en fonction de la déformation axiale jusqu'à  $\epsilon_1 = 0,02$  ( $\sigma_3 = 400 \text{ KPa}$ )*

### 5.4.3 Courbes caractéristiques

Les figures 5.21 à 5.24 représentent la variation du rapport de contrainte ( $\eta=q/p$ ) en fonction de la déformation volumique. Rappelons que  $p=(\sigma_1+2\sigma_3)/3$  étant la contrainte moyenne et  $q=\sigma_1-\sigma_3$  est la contrainte déviatorique.

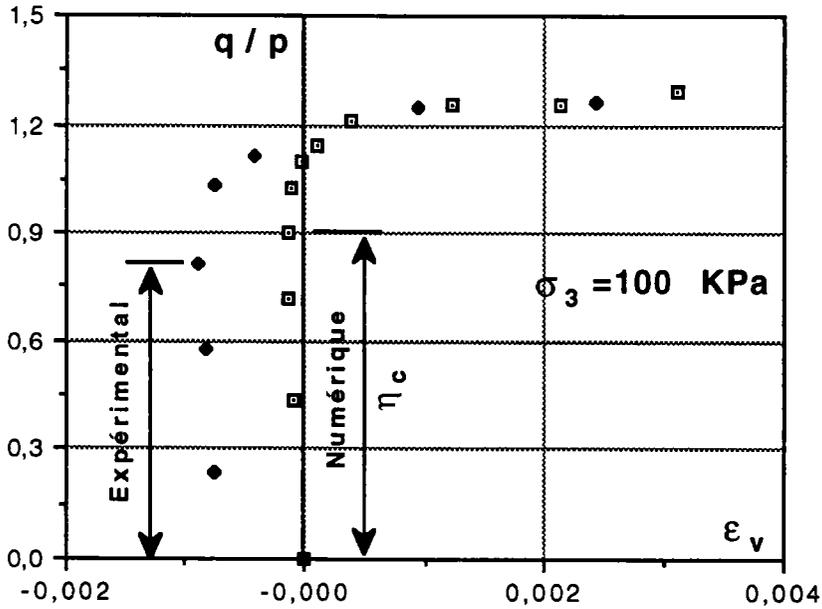


Figure 5.21: Variation du rapport de contrainte ( $\eta=q/p$ ) en fonction de la déformation volumique ( $\sigma_3=100 \text{ KPa}$ )

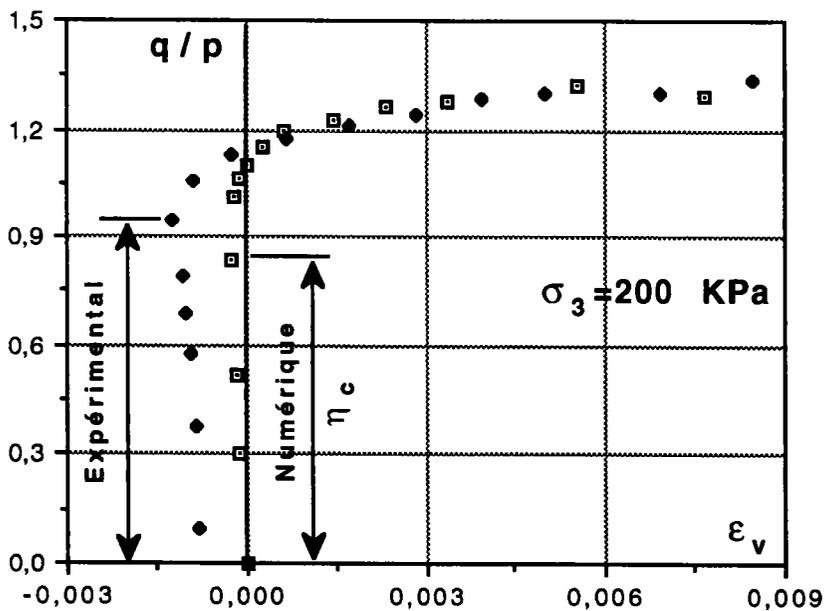
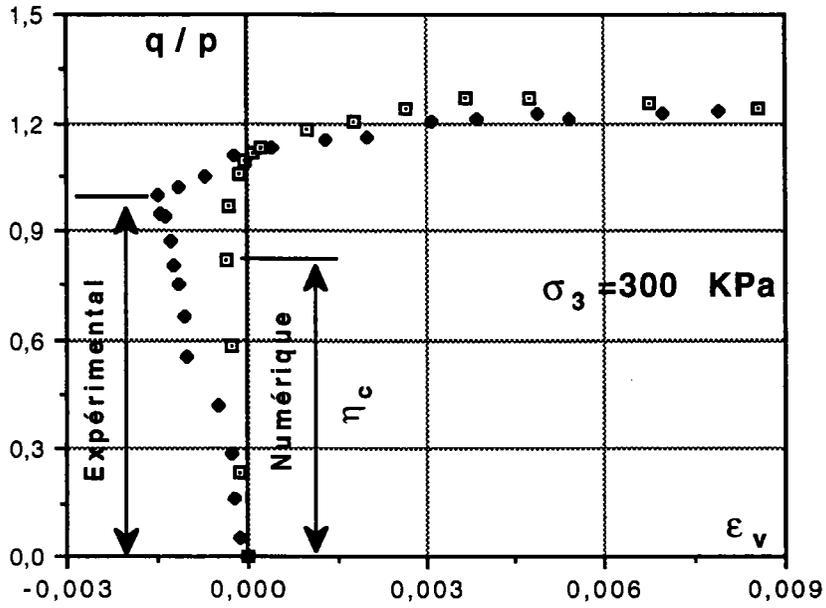
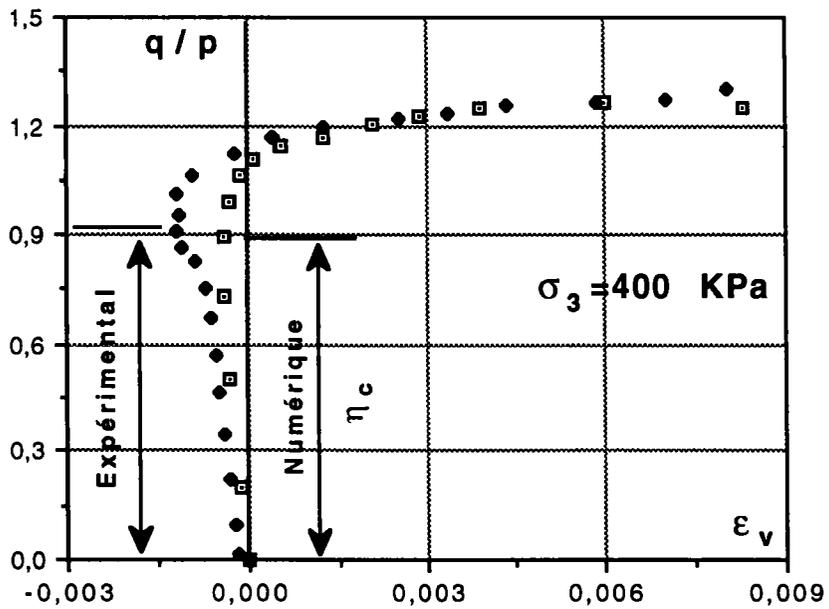


Figure 5.22: Variation du rapport de contrainte ( $\eta=q/p$ ) en fonction de la déformation volumique ( $\sigma_3=200 \text{ KPa}$ )



*Figure 5.23: Variation du rapport de contrainte ( $\eta=q/p$ ) en fonction de la déformation volumique ( $\sigma_3=300$  KPa)*



*Figure 5.24: Variation du rapport de contrainte ( $\eta=q/p$ ) en fonction de la déformation volumique ( $\sigma_3=400$  KPa)*

Les niveaux de contraintes caractéristique ( $\eta_c$ ) correspondant à des vitesses de déformation volumique nulles, nous permettent de calculer l'angle de frottement caractéristique ( $\phi_c$ ) par la formule 5.1.

$$\phi_c = \text{Arc sin } \frac{3\eta_c}{6+\eta_c} \quad (5.1)$$

Cet angle détermine le seuil de désenchevêtrement des grains.

Dans le tableau 5.1 nous avons regroupé les valeurs des  $\eta_c$  et  $\phi_c$  pour les essais numériques et expérimentaux et pour les contraintes de confinement différentes.

	Contrainte de confinement (KPa)	100	200	300	400
$\eta_c$	Numérique	0,9	0,84	0,82	0,89
	Expérimental	0,82	0,93	0,99	0,91
$\phi_c(\text{degré})$	Numérique	23	21,6	21,1	22,8
	Expérimental	21,1	23,9	25,1	23,3

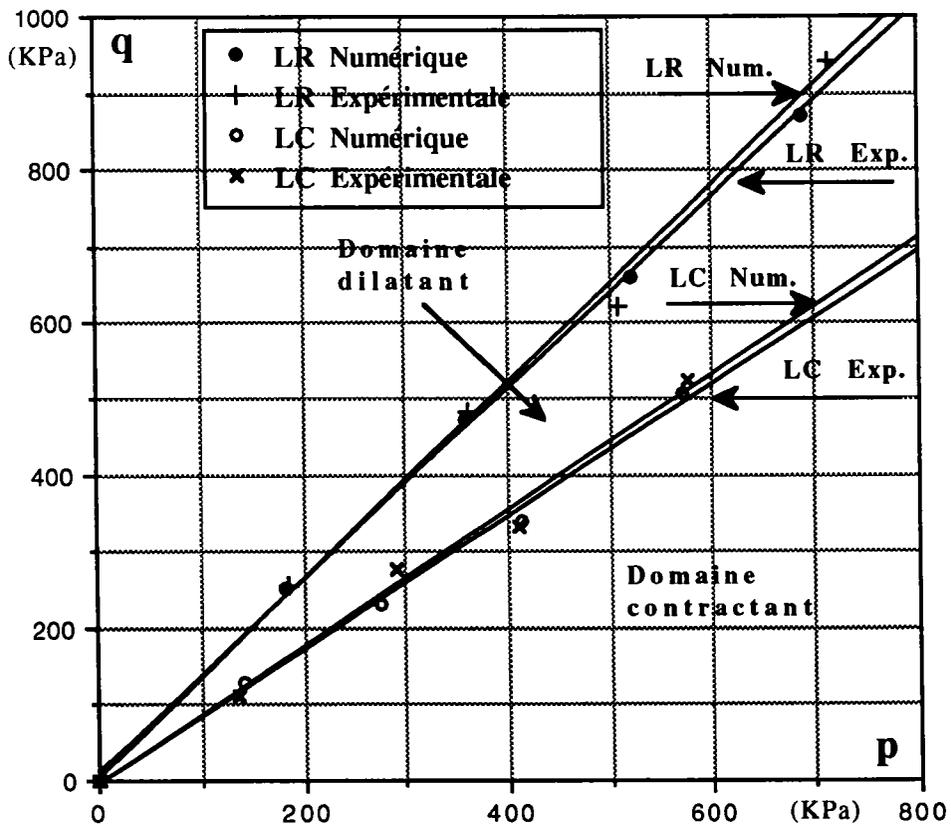
*Tableau 5.1: Les valeurs de  $\eta_c$  et  $\phi_c$  pour les essais numériques et expérimentaux en fonction des contraintes de confinement différentes*

#### 5.4.4 Enveloppes de rupture

Les niveaux de contraintes correspondant au maximum de rapport  $q/p$  définissent les rapports de contrainte maximale que peut supporter le matériau et donc son enveloppe de rupture. Dans le tableau 5.2, nous avons regroupé les valeurs des niveaux de contraintes maximales ( $\eta_{\max}$ ) ainsi que les angles de frottement correspondant en fonction des contraintes de confinement appliquées. La figure 5.25 représente ces valeurs dans le plan(p,q).

		Contrainte de confinement (KPa)			
		100	200	300	400
$\eta_{\max}$	Numérique	1,37	1,32	1,27	1,26
	Expérimental	1,38	1,34	1,28	1,32
$\phi_{\max}$ (degré)	Numérique	33,9	32,8	31,6	31,4
	Expérimental	34,0	33,2	30,6	32,7
$\epsilon(\sigma_{\max})$ (%)	Numérique	1,3	1,05	1,05	1,2
	Expérimental	2	2,3	4,2	3,6

*Tableau 5.2: Les valeurs de  $\eta_{\max}$  et  $\phi_{\max}$  pour les essais numériques et expérimentaux en fonction des contraintes de confinement différentes*



*Figure 5.25: Enveloppe de rupture pour les essais Numériques et Expérimentaux*

## 5.5 Conclusion

La compression triaxiale est étudiée expérimentalement et par simulation numérique, sur les billes de verre de diamètres 0,26 à 0,42 mm. Le module de cisaillement et le coefficient de Poisson pour les billes et l'indice des vides de l'échantillon pour les deux types d'essais sont identiques. Les contraintes de confinement appliquées aux échantillons sont égales à 100, 200, 300, et 400 KPa.

Les résultats obtenus par la simulation comparés aux résultats expérimentaux permettent de présenter les conclusions suivantes:

### 1) courbes de contrainte-déformation en accord pour $f=1,0$ .

La valeur maximale de  $\sigma_1/\sigma_3$  (ou  $\sigma_1-\sigma_3$ ) pour la simulation (avec le coefficient de frottement intergranulaire  $f=1,0$ ) est égale à la valeur expérimentale. Cette valeur dépend beaucoup du coefficient  $f$  et de l'indice des vides de l'échantillon. Dans ce chapitre nous avons fixé l'indice des vides, tandis que pour obtenir une valeur comparable avec l'expérience, on était obligé d'ajuster les valeurs du coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ). La comparaison des résultats montre que avec  $f=1,0$  les résultats numériques et expérimentaux sont en accord.

### 2) variation de volume plus importante dans la simulation numérique

Les courbes de la déformation volumique représentent un comportement contractant au début de l'essai, suivi d'une phase de dilatance. Dans la méthode numérique, les matériaux se dilatent plus qu'expérimentalement. La cause de ce phénomène peut être: soit le type de l'échantillon (en simulation on utilise un échantillon de forme cubique, expérimentalement il est cylindrique) soit les conditions d'essais (préparation de l'échantillon, le mode de chargement, ...). Néanmoins il est évident que avec un indice des vides plus grand, la courbe de variation volumique de la simulation est identique avec l'expérience, mais dans ce cas les courbes de contrainte-déformation ne sont pas en accord. Donc on propose dans nos travaux par la suite de faire la simulation avec un indice des vides réel, car ce qui nous intéresse est plutôt la contrainte que la déformation volumique.

### 3) Lignes Caractéristiques (LC) et Limite de Rupture (LR) pratiquement identiques

Les courbes caractéristiques de simulation et expérimentale sont très proches. Les valeurs de  $\eta_c$  (le rapport de la contrainte déviatorique ( $q$ ) sur la contrainte moyenne ( $p$ ) correspondante à

des vitesses de déformation volumique nulles) et  $\phi_c$  (l'angle de frottement caractéristique) pour deux méthodes sont en accord.

Les enveloppes de rupture pour la simulation et pour l'expérimentation sont voisines. Les valeurs de  $\eta_{\max}$  et  $\phi_{\max}$  obtenues par les méthodes numérique et expérimentale sont pratiquement identiques.

# Chapitre 6

## Cisaillement Simple

### 6.1 Introduction

La boîte de cisaillement permet facilement, sur une facette donnée, de faire varier la contrainte tangentielle en maintenant constante la contrainte normale. Cependant l'appareil le plus utilisé (la boîte de Cassagrande) n'est pas bien adapté et ne permet pas la mesure des déformations tangentielles. Il faut lui préférer la boîte de cisaillement simple qui permet la mesure des distorsions angulaires (Fig. 6.1) [78]. Donc pour s'affranchir des inconvénients de l'essai de cisaillement direct, et notamment celui de l'hétérogénéité des contraintes et des déformations, on adopte parfois le dispositif du cisaillement simple. Celui-ci nécessite la présence de parois déformables. Roscoe, à Cambridge, a mis au point une boîte de section rectangulaire, mais à parois articulées.

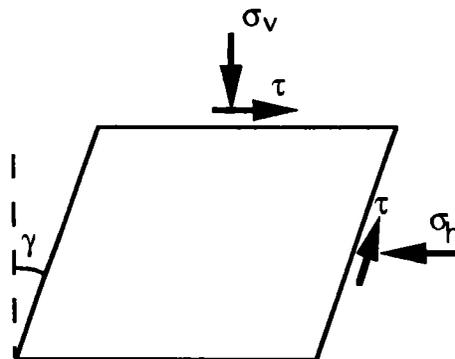


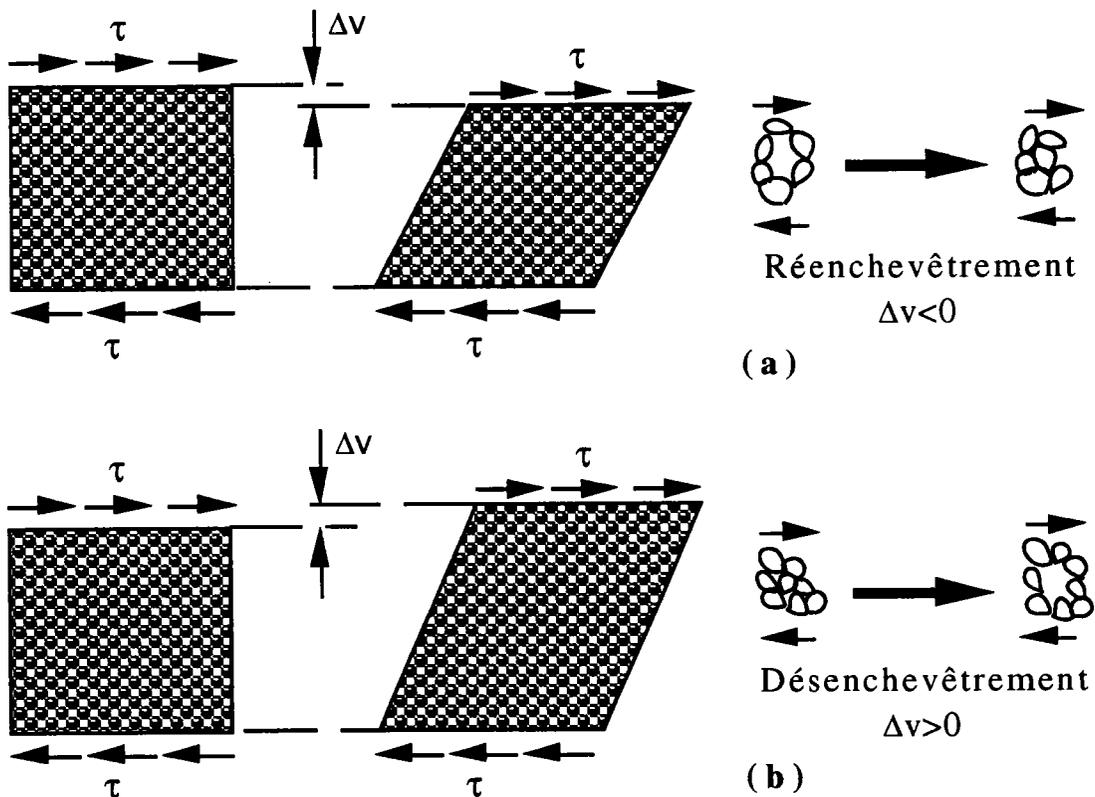
Figure 6.1: La boîte de cisaillement simple

Dans ce chapitre l'essai de cisaillement simple a pour but de:

- déterminer la résistance au cisaillement d'un matériau
- déterminer l'évolution des variations volumiques du matériau
- observer la localisation dans les matériaux étudiés.

## 6.2 Rappel

Dans un essai de cisaillement simple, un matériau granulaire varie de volume. Globalement cette variation peut être positive ou négative suivant l'état de la structure initiale du squelette et peut s'expliquer au niveau des particules. Le cisaillement entraîne en effet des déformations de la structure et progressivement sa destruction. La figure 6.2 montre comment le cisaillement des matériaux granulaires conduit à un réenchevêtrement des grains ( $\Delta v/v < 0$ ) si l'état initial est lâche, à un désenchevêtrement ( $\Delta v/v > 0$ ) si l'état initial est dense.

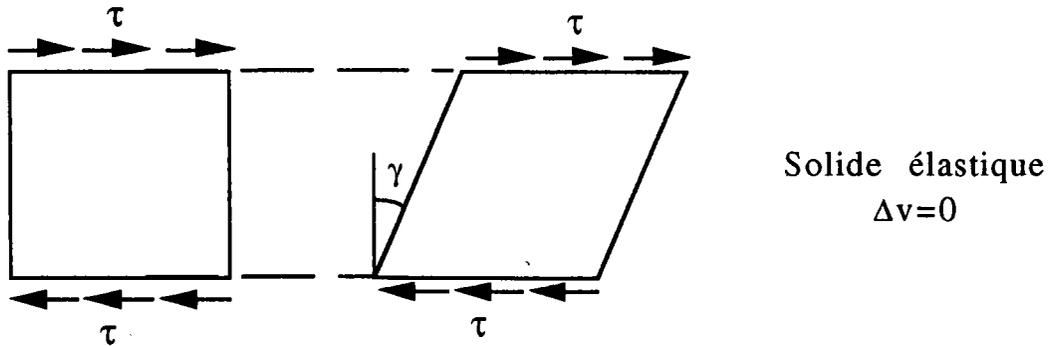


*Figure 6.2: Comportement sous cisaillement simple d'un sol lâche (a) et d'un sol dense (b)*

En élasticité, d'après la loi de Hooke, les variations de volume ne peuvent être provoquées que par des variations de la pression moyenne. Ainsi un solide élastique, en petites déformations dans le domaine élastique, ne donnera lieu à aucune variation de volume dans un essai de cisaillement simple (Fig. 6.3).

Il faut noter que la théorie de l'élasticité linéaire est généralement utilisée en supposant le milieu isotrope et homogène

alors que les matériaux granulaires sont à la fois anisotropes et hétérogènes.



*Figure 6.3: Comportement sous cisaillement simple d'un squelette élastique*

## 6.3 La méthode de l'essai numérique

### Préparation de l'échantillon

L'échantillon choisi est composé de 1000 disques (rouleaux) de verres dont 250 de diamètre 0,26, aussi 500 de diamètre 0,34 et 250 de diamètre 0,42 mm. L'indice des vides initial de l'échantillon 0,19 et le coefficient de frottement intergranulaire est  $f=0,5$ . Le module de cisaillement de verre est  $G=2,9 \cdot 10^{10}$  Pa et le coefficient de Poisson est  $\nu=0,2$ .

A l'aide de cet essai, nous allons étudier l'évolution du comportement mécanique des matériaux. Pour ceci nous réalisons deux types d'essais:

- faire varier la contrainte normale ( $\sigma_n$ ), en gardant le coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) constant.
- faire varier le coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ), en gardant la contrainte normale ( $\sigma_n$ ) constante.

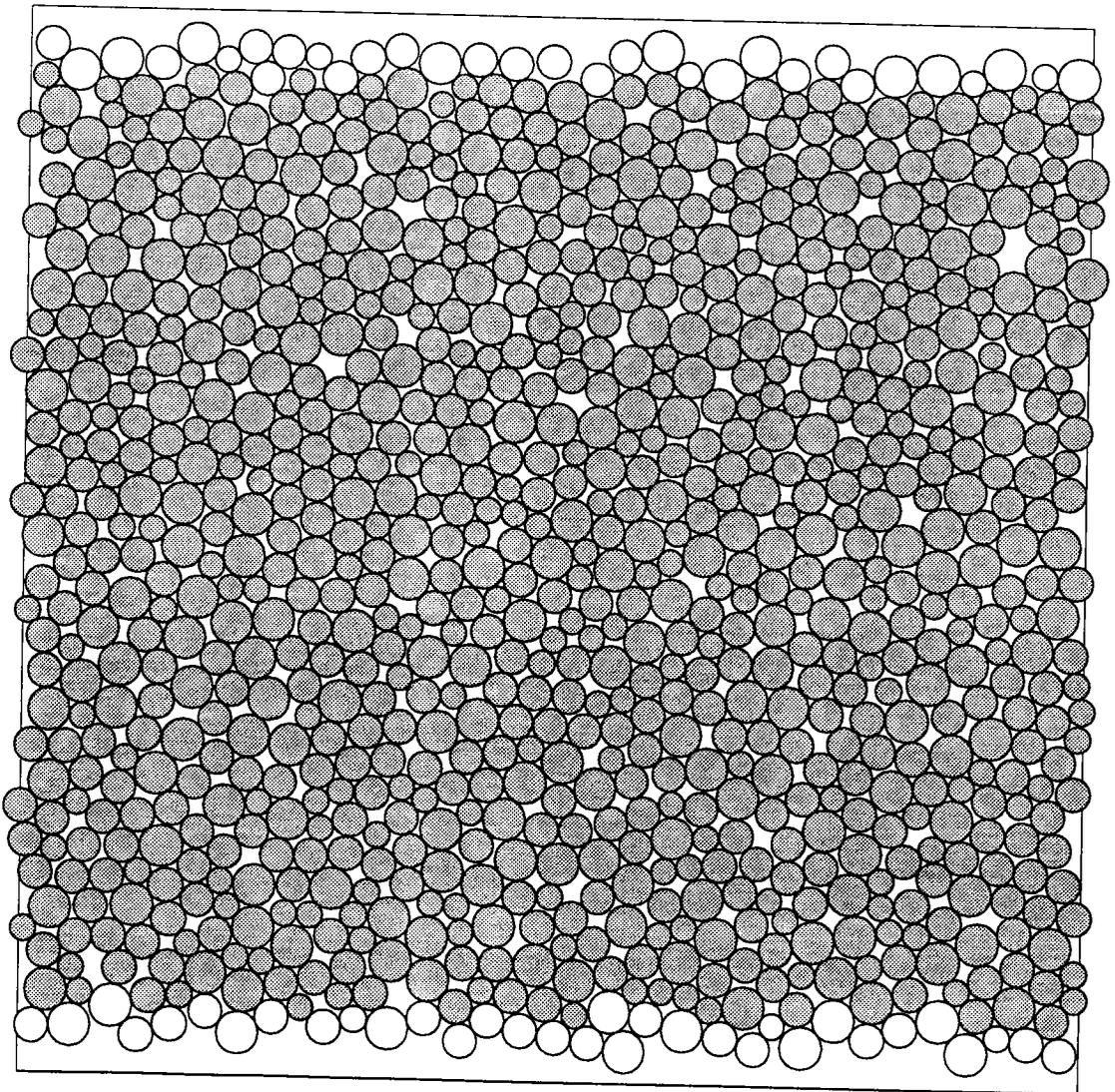
### Principe de l'essai

Dans cet essai, les particules qui sont aux frontières basse et haute sont déplacées comme des parois rigides. La figure 6.4 montre l'état initial de l'échantillon. Comme le montre la figure 4, les particules en partie basse et en partie haute de l'échantillon se déplacent comme des parois rigides en cours d'essais.

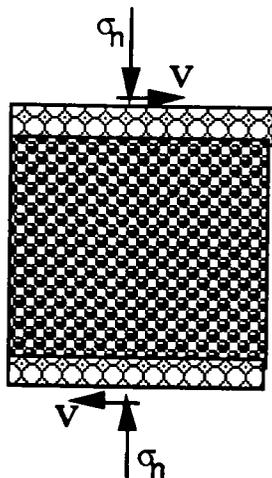
## TRUBAL ... 2-D mode

Cycle number 1118000  
Number of spheres 1000  
Number of contacts 1915  
Boundary of box area  
Sphere plot  
Wall-spheres

*Figure 6.4: L'état initial de l'échantillon de cisaillement simple*



Les essais sont effectués sur l'échantillon déjà préparé, en utilisant les contraintes normales ( $\sigma_n$ ) différentes. Pour effectuer l'essai on impose une contrainte normale  $\sigma_n$  et une vitesse  $v$  aux parois rigides. On impose à la paroi haute une vitesse positive et à la paroi basse une vitesse égale de sens opposé. (Fig. 6.5)



*Figure 6.5: La contrainte normale et les vitesses imposées aux parois*

A cause de ces vitesses, les autres particules subiront les déplacements et les forces de contacts, ainsi que les contraintes tangentielles sur les parois. Ces vitesses de parois entraînent des déformations tangentielles de l'échantillon. On définit la déformation tangentielle comme le rapport du déplacement relatif des parois sur la distance entre elles.

Suite à une étude faite sur des sables à l'aide d'une boîte de cisaillement, Oyenuga [79] a défini un champ de confiance limité à 10% de déformation tangentielle.

## 6.4 Présentation et interprétations des résultats

Dans un essai de cisaillement les deux paramètres les plus importants sur la résistance des matériaux sont la contrainte normale appliquée et le coefficient de frottement intergranulaire.

### 6.4.1 Influence de la contrainte normale sur la résistance au cisaillement du matériau

Nous avons fait trois essais de cisaillement pour différentes valeurs de la contrainte normale (équivalente à  $\sigma_{11}=150, 225$  et  $300$

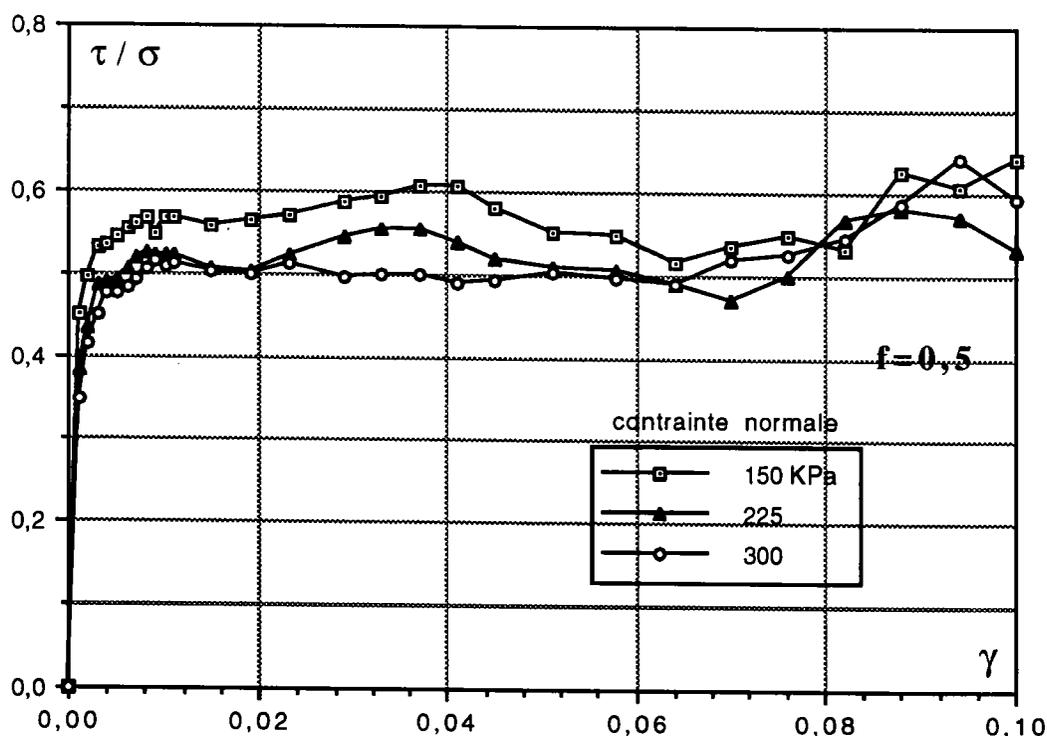
KPa). Pendant ces essais le coefficient de frottement intergranulaire était constant ( $f=0,5$ ). La figure 6.6 représente la variation de la résistance du matériau ( $\tau/\sigma$ ) en fonction de la déformation tangentielle ( $\gamma$ ).

Dans le tableau 6.1 nous avons regroupé les valeurs du rapport de contrainte  $(\tau/\sigma)_{\max}$ , qui représente la résistance du matériau, en fonction des contraintes normales appliquées.

Contrainte normale ( $\sigma_n$ ) (KPa)	Résistance maximum du matériau $(\tau/\sigma_n)_{\max}$
150	0,57
225	0,53
300	0,52

*Tableau 6.1: Résistance maximum du matériau ( f constant)*

Ce tableau et la figure 6.6 montrent que pour un matériau donné, l'augmentation de la contrainte normale entraîne une faible diminution de la résistance de l'échantillon. L'augmentation de la contrainte normale n'a pas d'effet sur la résistance du matériau; ce qui est confirmé expérimentalement par l'utilisation de la boîte de cisaillement.



*Figure 6.6: Rapport de  $\tau/\sigma$  en fonction de la déformation tangentielle ( f constant)*

### 6.4.2 Influence du coefficient de frottement (f) sur la résistance au cisaillement du matériau

Des essais numériques sont effectués sur les rouleaux de verre de différentes valeurs du coefficient de frottement intergranulaire (f). Pour tous les essais la contrainte normale est constante égale à 150 KPa.

La figure 6.7 représente le rapport de  $(\tau/\sigma)$  en fonction de la déformation tangentielle pour différentes valeurs du coefficient de frottement intergranulaire.

Le tableau 6.2 regroupe les valeurs du rapport de la contrainte  $(\tau/\sigma)_{\max}$ , en fonction du coefficient de frottement intergranulaire (f). Ce tableau et la figure 6.7 montrent que la résistance des matériaux augmente avec l'augmentation du coefficient de frottement intergranulaire. C'est une conclusion logique qui peut valider la méthode numérique utilisée.

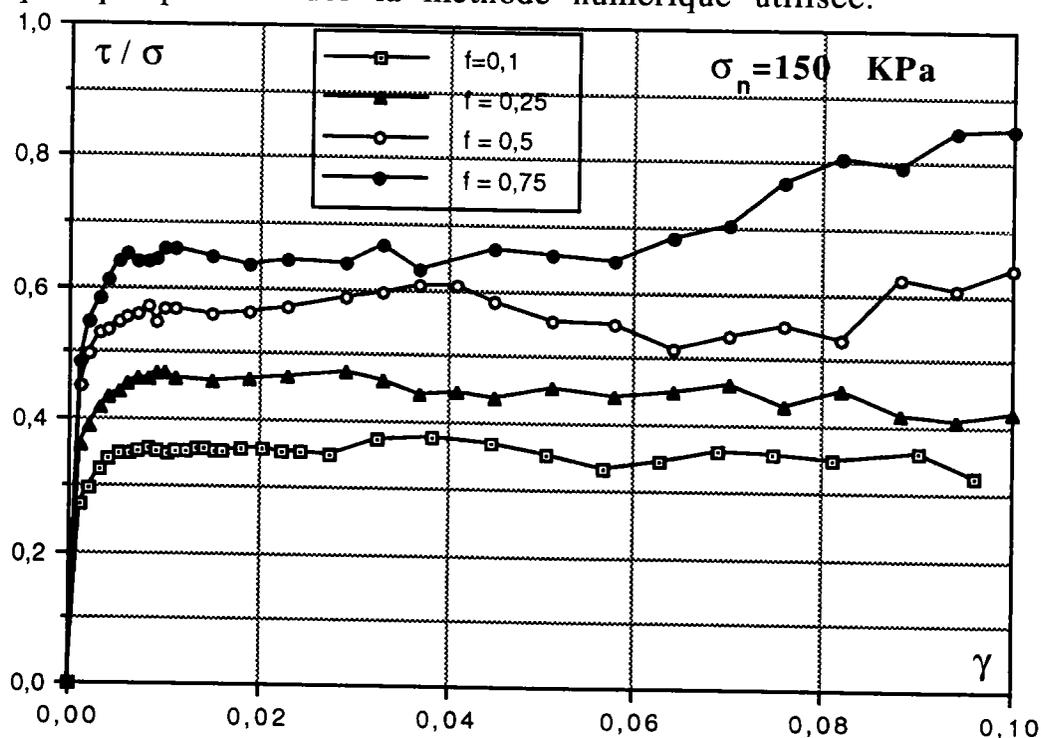


Figure 6.7: Rapport de  $\tau/\sigma$  en fonction de la déformation tangentielle ( $\sigma_n$  constante)

Coefficient de frottement intergranulaire (f)	Résistance maximum du matériau $(\tau/\sigma_n)_{\max}$
0,10	0,36
0,25	0,47
0,50	0,57
0,75	0,65

Tableau 6.2: Résistance maximum du matériau ( $\sigma_n$  constant)

Toutes les courbes représentant l'évolution de la résistance des matériaux en fonction de la déformation tangentielle, sont caractérisées par une première partie linéaire limitée à des faibles déformation tangentielles. Au delà de cette partie la résistance des matériaux continue à évoluer d'une façon non linéaire avec des déformations importantes jusqu'à stabilisation.

### 6.4.3 Variation de volume

La figure 6.8 représente la déformation volumique ( $\epsilon_v$ ) en fonction de la déformation tangentielle ( $\gamma$ ). Les courbes de variation de volume montrent un comportement dilatant.

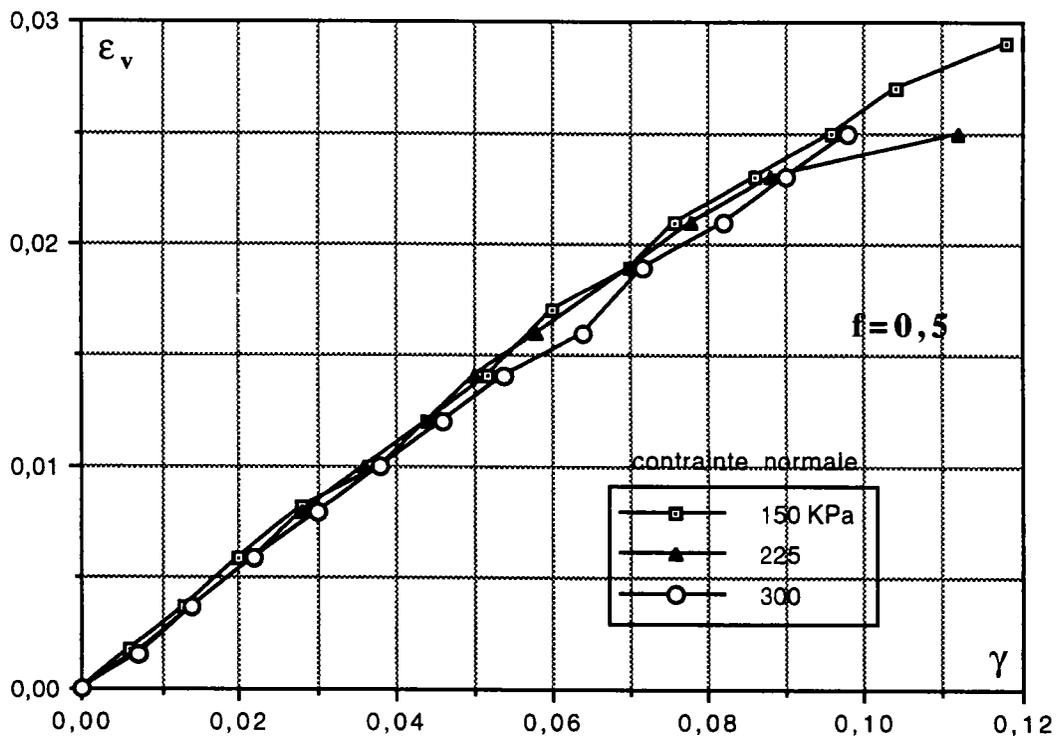


Figure 6.8: Déformation volumique en fonction de la déformation tangentielle (  $f$  constant)

### 6.4.4 Enveloppe de rupture

Pour calculer l'angle de frottement interne nous avons reporté sur la figure 6.9 les valeurs maximales des résistances au cisaillement en fonction des contraintes normales appliquées. L'angle que fait la droite intrinsèque avec l'axe des abscisses est l'angle de frottement interne du matériau. La valeur de cet angle pour nos matériaux (billes de verre) est de  $27,2^\circ$ . Plusieurs essais expérimentaux effectués nous donnent un angle moyen de  $26,2^\circ$ .

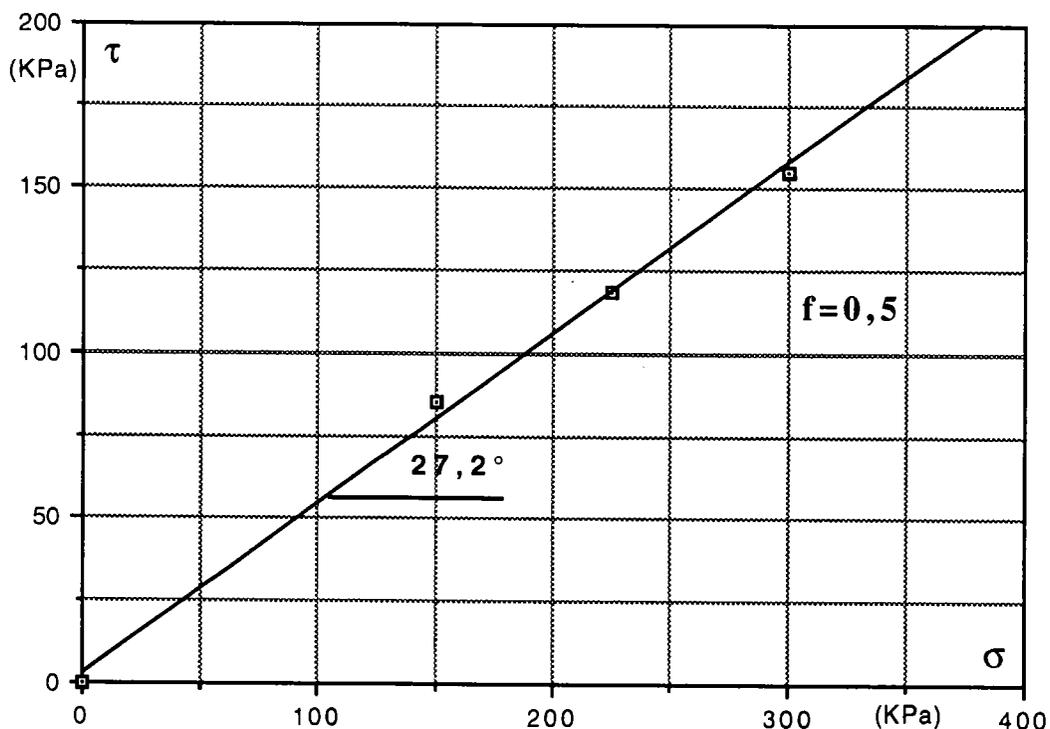


Figure 6.9: Enveloppe de rupture

## 6.5 Phénomène de localisation dans les matériaux granulaires

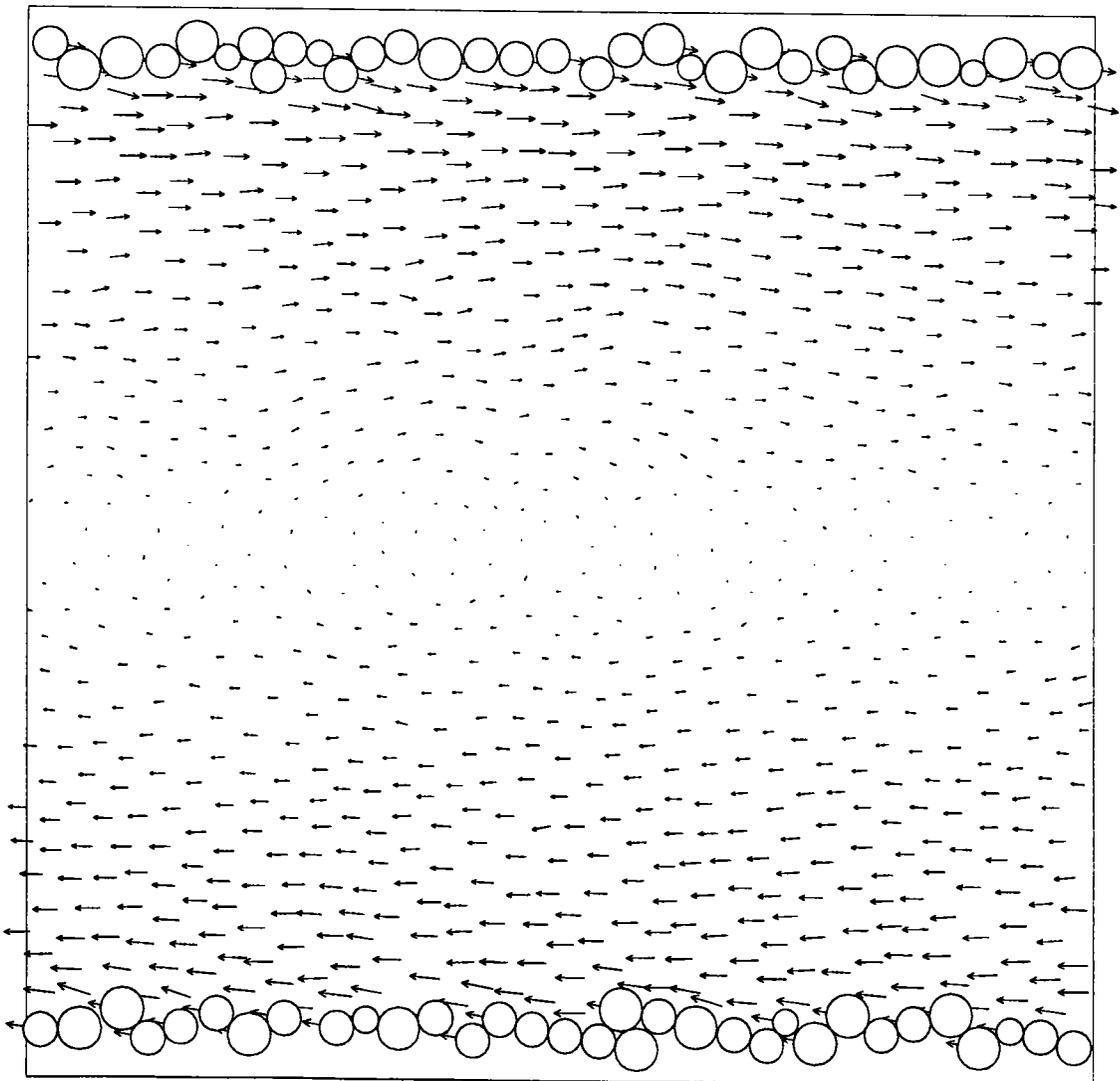
Pour observer la localisation dans les matériaux granulaires on a fait un essai de cisaillement simple bi-dimensionnel sur les rouleaux de verre.

Les figures 6.10 à 6.12 représentent le champ de déplacement incrémental des particules qui montre la localisation progressive. L'épaisseur de la bande localisée diminue jusqu'à un minimum de 4% de déformation tangentielle (Fig. 6.11), ensuite elle augmente. La figure 6.12 présente le champ de déplacement relatif des particules avec 6% de déformation. On peut estimer que l'épaisseur de la bande de cisaillement est de l'ordre de 10 à 15% de la hauteur de l'échantillon.

## TRUBAL ... 2-D mode

Cycle number 1118010  
Number of spheres 1000  
Number of contacts 1718  
Boundary of box area  
Rel. disp. vectors; max = 1.045E-03  
Wall-spheres

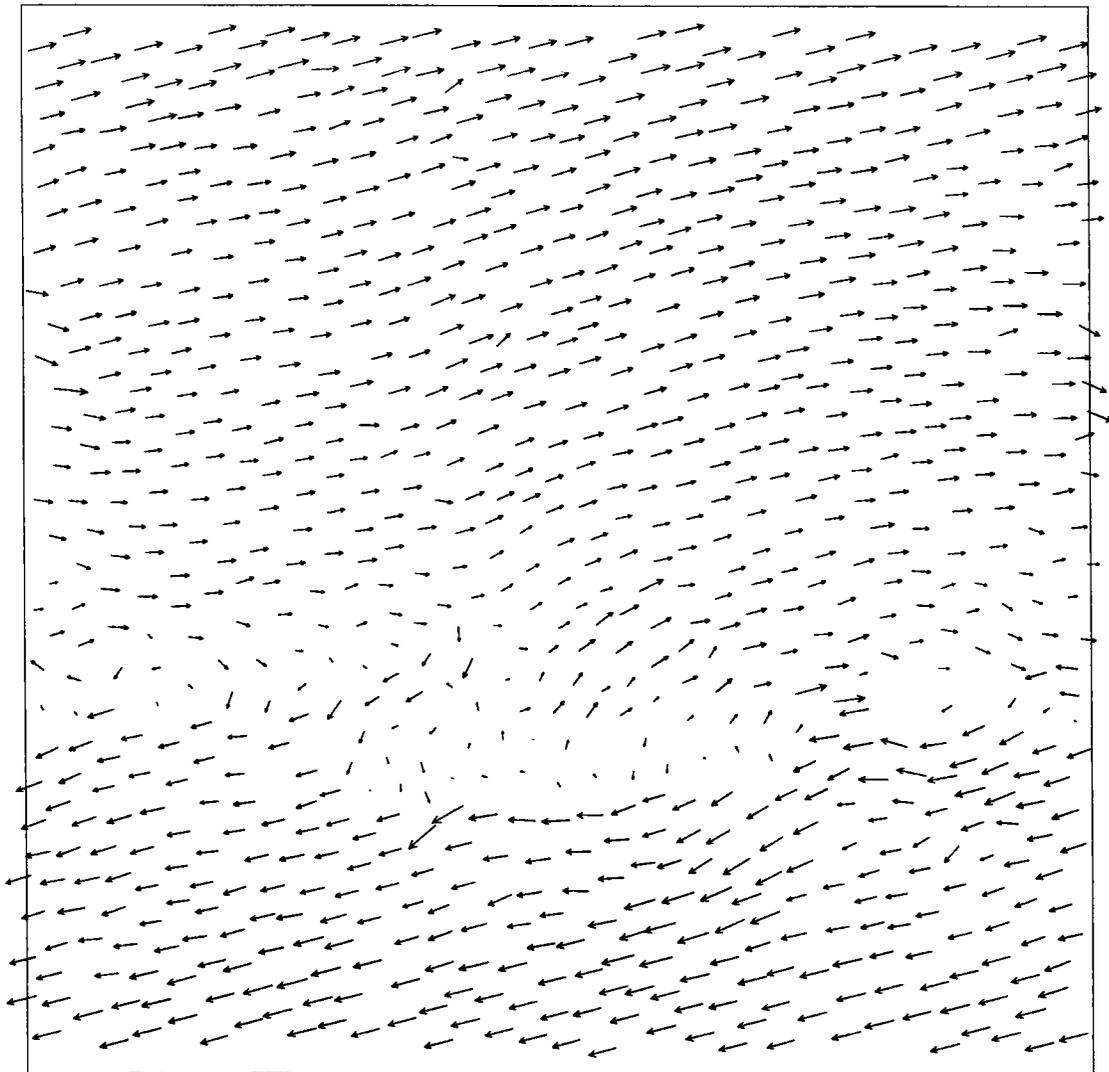
*Figure 6.10: Le champ de déplacement relatif des particules au début de l'essai*



## TRUBAL ... 2-D mode

Cycle number 1318200  
Number of spheres 1000  
Number of contacts 1407  
Boundary of box area  
Rel. disp. vectors; max = 2.451E-02

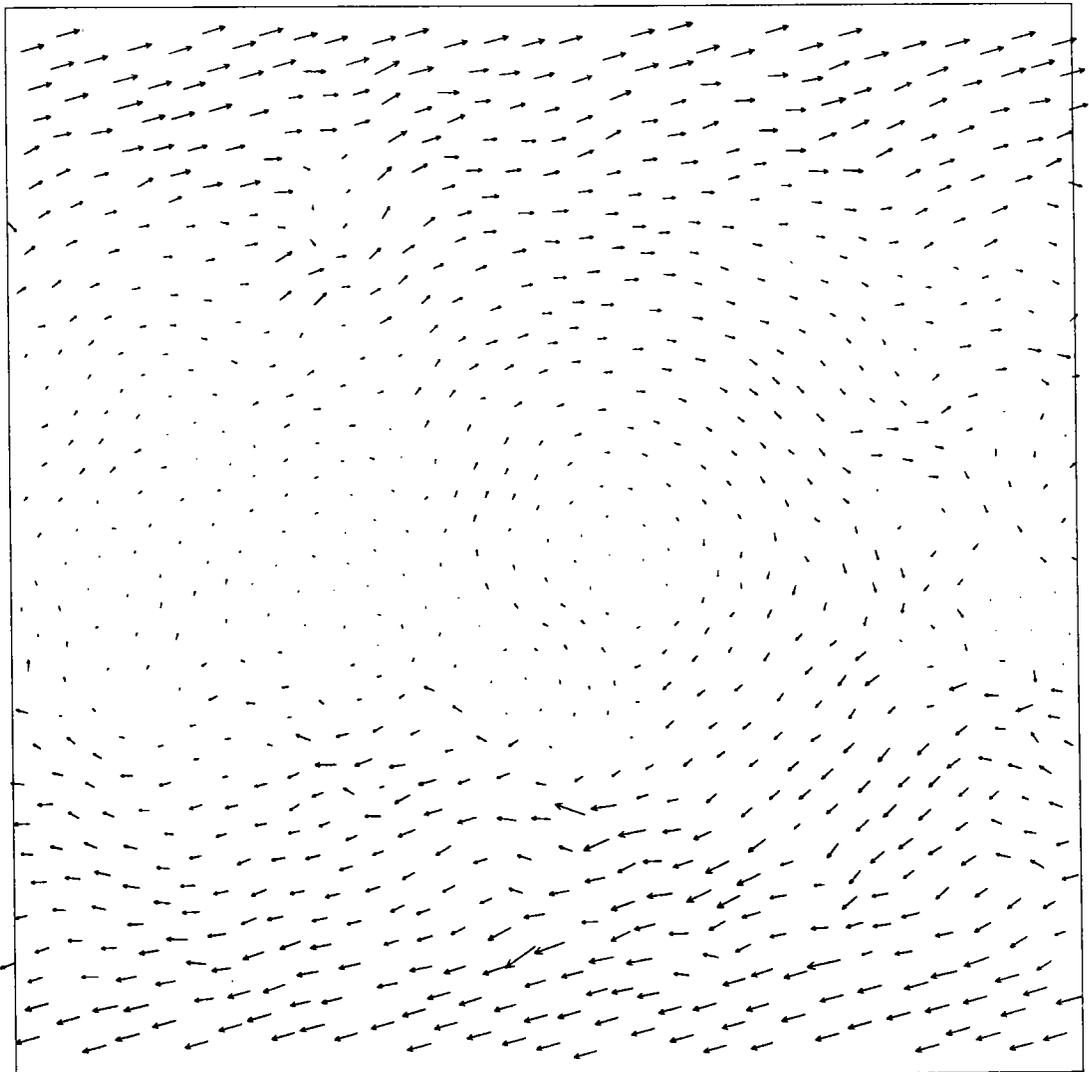
*Figure 6.11: Le champ de déplacement relatif des particules avec  
4% de déformation tangentielle  
(L'épaisseur de la bande localisée est minimum)*



## TRUBAL ... 2-D mode

Cycle number 1418200  
Number of spheres 1000  
Number of contacts 1402  
Boundary of box area  
Rel. disp. vectors; max = 2.982E-02

*Figure 6.12: Le champ de déplacement relatif des particules avec 6% de déformation tangentielle*



## 6.6 Conclusion

A partir de l'étude du cisaillement simple, nous tirons les conclusions suivantes:

- les essais de cisaillement simple montrent que nos matériaux ont un comportement dilatant. Nous avons étudié l'effet de la contrainte normale appliquée et du coefficient de frottement intergranulaire sur le comportement des matériaux. L'augmentation de la contrainte normale n'a pratiquement pas d'effet sur la résistance des matériaux. D'autre part, plus le coefficient de frottement intergranulaire est élevé, plus le matériau est résistant.

- avec une valeur du coefficient de frottement local ( $f$ ) égale au coefficient de frottement global ( $\tan \phi$ ), les résultats numériques sont comparables avec les résultats expérimentaux de la boîte de cisaillement.

- les résultats de quelques essais numériques sont présentés pour expliquer le mécanisme de l'apparition et de l'évolution de la localisation. L'expérience de la simulation de l'assemblage des particules montre que si on continue le cisaillement, l'épaisseur de la bande de cisaillement diminue jusqu'à une valeur minimum, puis elle augmente. Cette observation est en accord avec les prédictions théoriques de Vardoulakis [37] et Triantafyllidis & Aifantis [44].

# Chapitre 7

## Bande de cisaillement

### 7.1 Introduction

Le milieu naturel (sols, roches) offre de nombreux exemples de rupture par développement de glissements de blocs rigides: le long de surface désignée par l'expression dit "surface de rupture" (Fig. 7.1).

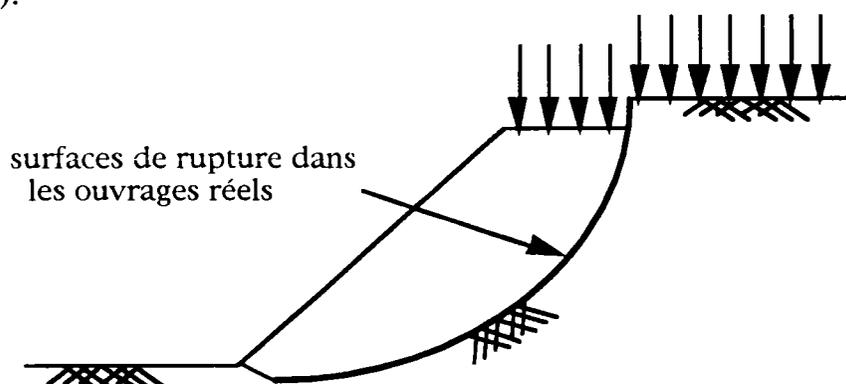


Figure 7.1: Surfaces de rupture dans les ouvrages réels

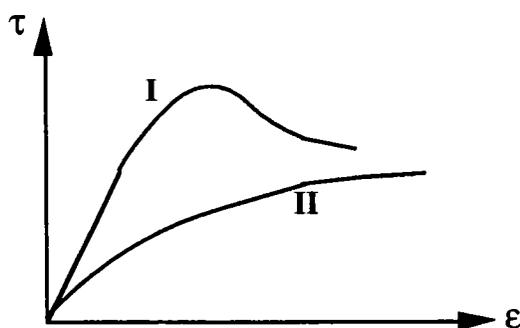
Les matériaux granulaires soumis à des sollicitations en déformation plane sont particulièrement sensibles à la localisation des efforts et des contraintes et se manifestent par l'apparition de bande de cisaillement. Au laboratoire au cours d'essais biaxiaux par exemple on observe la localisation, sous la forme de *plans de rupture*, qui traversent l'échantillon testé suivant une certaine inclinaison par rapport aux axes de l'essai.

#### Définition de la rupture

On définit la rupture à partir de l'observation des courbes effort-déformation dans des essais à déformation contrôlée. Dans ces essais, on retrouve toujours les mêmes formes de courbes (Fig. 7.2):

- soit la forme I qui présente un maximum;
- soit la forme II continuellement croissante.

Dans le cas I, on dit généralement qu'il y a rupture lorsqu'est atteint le maximum de la courbe. Dans le cas II, la définition de la rupture est plus arbitraire, on se fixe généralement un certain pourcentage de déformation. Par exemple suite à une étude faite sur des sables à l'aide d'une boîte de cisaillement, Oyenuga [79] a défini un champ de confiance limité à 10% de déformation tangentielle.

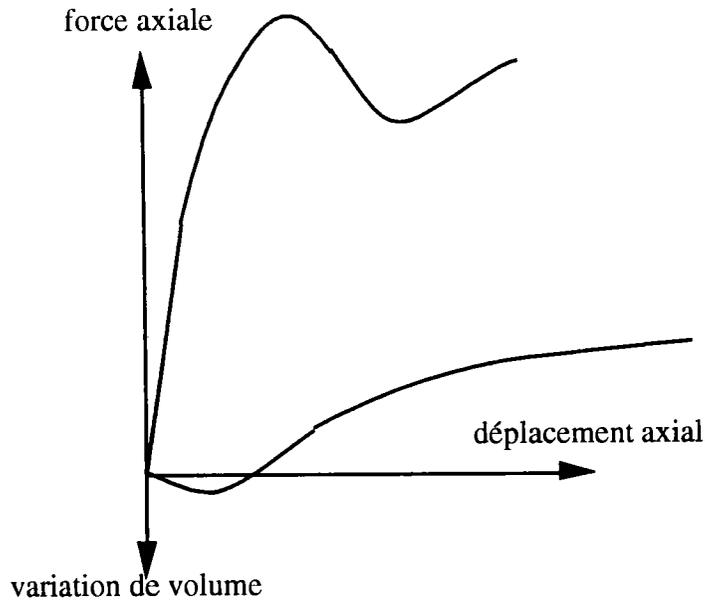


*Figure 7.2: Contrainte-déformation pour un sol dense (I) et un sol lâche (II)*

## 7.2 Bande de cisaillement et essai biaxial

L'essai biaxial est un essai particulièrement bien adapté pour étudier les bandes de cisaillement. C'est un essai élémentaire de déformation plane. On a choisi la déformation plane car cette configuration permet la déformation complète du champ de déformation à partir des données mesurables en surface de l'échantillon. On peut observer directement les bandes de cisaillement, mais seulement à partir du moment où la distorsion dans ces zones est suffisamment prononcée pour être visible. Au contraire, grâce à la méthode stéréophotogrammétrique [39, 67, 72] et à partir des clichés, on peut mesurer le champ de déplacement incrémental entre deux états successifs, et calculer le champs de déformation associé. La figure 7.3 présente la courbe force-déplacement obtenue au cours d'un essai typique.

Nous avons fait les essais biaxiaux sur rouleaux de verre pour étudier la localisation et le rôle de la bande de cisaillement. Les caractéristiques des matériaux sont identiques à ceux qu'on a utilisé dans l'essai de cisaillement simple.



*Figure 7.3: Courbes de force-déplacement et variation de volume d'un essai biaxial typique*

## 7.3 Naissance et développement des bandes de cisaillement

En déformation plane la localisation apparaît systématiquement dans la gamme des contraintes faibles; alors que dans un essai triaxial axisymétrique, l'apparition d'une surface de rupture n'est pas systématique; il arrive qu'on n'en observe pas [72].

### 7.3.1 Localisation et pic

Dans un essai biaxial, la localisation entraîne dans le cas des sols denses, un fort pic dans la courbe contrainte-déformation (Fig. 7.3). Dans le cas des sols lâches, la courbe ne montre pas de pic, mais la localisation est cependant présente.

Certains auteurs ont remarqués qu'il y a une relation entre le pic sur la courbe contrainte-déformation et la localisation. Vardoulakis [81] a noté que l'échantillon se rompt au pic, le long des bandes de cisaillement apparaissant spontanément. Les résultats obtenus par Desrues [67] et Duthilleul [39] montrent que pour les sables denses, la localisation peut s'initialiser sensiblement avant le pic.

Notre travail sur rouleaux de verre montre que la localisation apparaît à un déformation axiale supérieure à 3,5%; après le pic.

(Fig. 7.7) Rappelons que dans la méthode numérique le pic arrive plus tôt que dans la méthode expérimentale.

### **7.3.2 Initialisation de la bande de cisaillement**

Dans les essais sur modèles réduits, les résultats par radiographie de l'essai de mur de soutènement en butée présentés par Roscoe [92] montrent une surface de rupture qui s'initie à partir d'un point dans le massif du sable.

L'examen détaillé des champs de distorsion incrémentale pour divers essais permet de distinguer le moment d'initialisation de la bande de cisaillement et de comparer celui-ci au moment du pic de la courbe contrainte-déformation. Les résultats expérimentaux montrent que la localisation naît avant le pic, et se propage pour donner lieu à un mécanisme complet de bande de cisaillement. Le pic prend place dans cette phase d'extension de la bande de cisaillement, et doit être vu comme une conséquence de la localisation (Fig. 7.7 à 7.10).

### **7.3.3 Développement d'une surface de rupture**

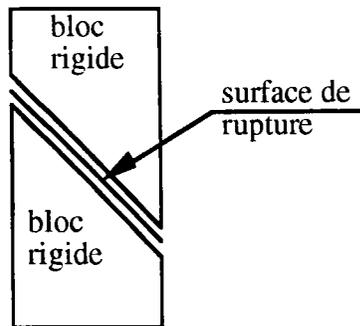
La localisation n'apparaît pas simultanément en tous les points de ce qui sera la bande de cisaillement, mais s'initialise en un point puis se propage rectilignement à partir de ce point. Ce phénomène est confirmé expérimentalement par nombreux auteurs et nous l'avons vu en utilisant la méthode numérique (TRUBAL). Le point d'initialisation est particulièrement sensible aux imperfections.

Après la phase d'érouissage, les bandes de cisaillement se développent progressivement et rectilignement à partir des régions d'initialisation. D'autre part on note, lors du développement des surfaces de rupture, la correspondance entre la concentration des zones dilatantes et le trajet des plans de rupture: la localisation des déformations et la dilatace sont des phénomènes liés. Ce résultat est confirmé par Duthilleul [39].

La surface de rupture est continue; elle traverse l'échantillon de part en part. Lorsque la cinématique le permet, une surface de rupture se développe progressivement.

Au cours de développement de la surface de rupture, le champ de déformation se décompose en deux zones distinctes:

- la bande de cisaillement, à l'intérieur de laquelle se trouve toute la déformation;
- deux blocs rigides, qui ne subissent aucune transformation. (Fig. 7.4)



*Figure 7.4: La surface de rupture divise l'échantillon en deux blocs rigides*

### 7.3.4 Une ou plusieurs bandes de cisaillement?

Dans des essais biaxiaux réalisés sur des échantillon de sable d'Hostun RF sec dense [93] et sur le sable de Touyora sec dense [94], on peut trouver un mécanisme de localisation non pas en une bande continue mais en plusieurs morceaux de bande alignés ensemble dans une direction et qui se recouvrent partiellement. Dans ce cas, on ne trouve pas une seule bande continue qui traverse l'échantillon. La remarque qu'on peut faire est que dans ces deux essais différents, les deux sables sont comparables et l'élançement de l'échantillon est respectivement 2 et 2,5 et les échantillons de deux essais sont testés à sec sans mesures de variations de volume. Il faut noter aussi que les essais de Vardoulakis [81,83,98] et de Desrues [67] réalisés dans des conditions similaires ne montrent qu'une seule bande continue.

Dans le cas où la coaxialité des têtes de l'échantillon est imposée, on observe généralement le développement de deux bandes de cisaillement croisées.

Si l'échantillon est dense (donc raide et dilatant), on aura une seule bande conduisant à un pic, suivie longtemps après par l'apparition d'une nouvelle bande. Si l'échantillon est lâche (moins raide et peu dilatant), on aura une apparition quasi simultanée de deux bandes, ne produisant pas de pic, et se développant alternativement tout au long de l'essai. Dans les deux cas, on peut penser que l'apparition de deux bandes symétriques est le résultat du développement des efforts de réaction de la machine d'essai.

Les résultats de TRUBAL montrent que d'abord une bande de cisaillement apparaît, puis une nouvelle bande commence, mais pas nettement que la première (Fig. 7.9).

Il apparaît donc que la déformation de l'échantillon entraîne la formation de plusieurs plans de rupture qui se développent alternativement.

## **7.4 Variation de volume**

On sait que la rupture localisée dans les sables provoque des variations de volume importantes. Globalement, les variations de volume à la rupture pour un essai biaxial sont faibles. En ce qui concerne les variations de volume locales, les résultats confirment l'existence d'une dilatance importante dans les bandes de cisaillement [72].

L'accroissement du taux de déformation provoque des déplacements relatifs entre les grains du matériau. Il y a alors désenchevêtrement de la structure granulaire. Par suite d'une mise en place dense, la modification du squelette entraîne une augmentation des vides entre particules, d'où la dilatance. La dilatance accompagne les zones actives de déformations.

Lors de l'apparition de la première bande de cisaillement on observe une forte dilatance; lorsque bien plus tard, la deuxième bande apparaît, on observe la même dilatance dans cette bande neuve, mais en revanche la première bande, bien que toujours active en cisaillement, ne montre plus aucune variation de volume [72].

### **7.4.1 Largeur des bandes de cisaillement**

Les résultats expérimentaux montrent que la largeur des bandes de cisaillement est liée à la taille des grains qui constituent le matériau. L'épaisseur de la surface de rupture décroît jusqu'à atteindre une limite d'une dizaine de diamètres de grains [Vardoulakis, Roscoe, Duthilleul]. Desrues [67] a fait les essais sur des grains de tailles très différentes et il a confirmé cette dépendance. Duthilleul [39] a étudié le matériau analogique bidimensionnel de Schneebeli avec un diamètre plus gros, il a observé les bandes de cisaillement plus larges.

Roscoe [92] dans les essais de mur de soutènement en butée et Scarpelli et Wood [97] dans un essai de cisaillement direct indiquent une épaisseur de bande de l'ordre de  $10D_{50}$ . Vardoulakis et Graf [98] trouvent pour les bandes de cisaillement dans le sable de Karlsruhe moyen, une largeur de  $13D_{50}$ . Sur le sable d'Hostun RF (0,125 à 0,5 mm), Desrues [67] donne des largeurs de bande de cisaillement de l'ordre de 5 à 6 mm ( $14$  à  $17D_{50}$ ) sans différence précisée entre le sable dense et lâche.

L'étude expérimentale de Hammad [91] donne une variation de  $13$  à  $22D_{50}$  (pour le sable d'Hostun RF dense) et  $17$  à  $31D_{50}$  (pour le sable lâche). Cette épaisseur diminue avec l'augmentation de la contrainte moyenne.

En ce qui concerne les résultats de TRUBAL, on ne peut pas mesurer exactement la largeur de la bande de cisaillement, mais on peut l'estimer à  $15$  à  $20$  fois le diamètre moyen des particules.

#### 7.4.2 L'angle de dilatance

Hansen [82] propose d'utiliser comme fonction potentiel le critère de Coulomb modifié par un changement de l'angle de frottement  $\phi$  au profit d'un nouvel angle  $\nu$ , appelé l'angle de dilatance. Cet angle est défini à partir des vitesses de déformation en déformation plane, par:

$$\sin \nu = - \frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_2} \quad (7.1)$$

Pour définir l'angle de dilatance, on préfère utiliser des quantités représentatives, à savoir  $\epsilon_1$ , déformation axiale globale et  $\epsilon_v$ , déformation volumique. Il suffit donc d'exprimer l'angle de dilatance en fonction des paramètres  $\dot{\epsilon}_1$  et  $\dot{\epsilon}_v$ . On sait que dans un essai biaxial:

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (7.2)$$

ou:

$$\dot{\epsilon}_2 = \dot{\epsilon}_v - \dot{\epsilon}_1 \quad (7.3)$$

En remplaçant la formule (7.1) dans (7.3) on aura:

$$\sin \nu = - \frac{\dot{\epsilon}_v}{2\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_v} \quad (7.4)$$

$v$  caractérise la règle d'écoulement du matériau en déformation plane.

Pour un milieu standard, l'angle de dilatance et l'angle de frottement interne sont égaux. Pour un sable qui est un matériau non-standard  $\phi=35^\circ$  et  $v=20^\circ$ .

On distingue deux valeurs globale et locale pour l'angle de dilatance. L'angle de dilatance global ( $v_g$ ) est défini comme une mesure moyenne sur l'échantillon et l'angle de dilatance local ( $v_l$ ) sur la bande de cisaillement.

## 7.5 Les lignes d'extension nulle

Les cartes d'isovaleurs de composantes du déplacement incrémental pour les différents essais, montrent que la localisation développée se traduit typiquement par un réseau très resserré d'isovaleurs parallèles à la direction de la bande de cisaillement: ceci s'observe sur toutes les figures présentées (Fig. 7.5).

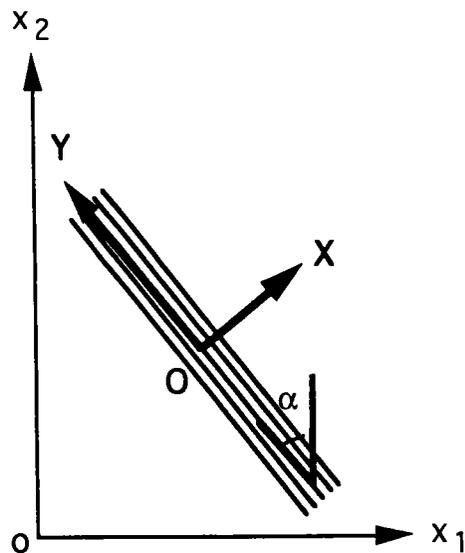


Figure 7.5: Bande de cisaillement

Les composantes de déplacement mesurées sont  $dx$  et  $dy$ , définies dans les axes de l'essai. Soit un repère  $OXY$  tel que  $OX$  coïncide avec la normale à la bande de cisaillement (Fig. 7.5). Le gradient de la vitesse,  $\text{grad } v$ , est défini par:

$$\text{grad } v = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (7.5)$$

On peut définir les composantes de vitesse à partir de:

$$\dot{x}_1 dt = dx \quad (7.6)$$

$$\dot{x}_2 dt = dy \quad (7.7)$$

Dans les axes OXY, grad v s'écrit:

$$\text{grad } v = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{X}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} & \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Soit  $R(\alpha)$  la matrice de changement de repère permettant de passer de  $(o,x,y)$  à  $(O,X,Y)$ :

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

Il est possible d'exprimer les déplacements dans le repère  $(O,X,Y)$  en fonction des  $x_1$  et  $x_2$ :

$$X = x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha \quad (7.10)$$

$$Y = -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha \quad (7.11)$$

avec  $n_1 = \cos \alpha$ ,  $n_2 = \sin \alpha$  ( $\alpha$  est l'angle  $(ox_1, OX)$  de la figure 7.5)

$$\dot{X} = x_1 n_1 + x_2 n_2 \quad (7.12)$$

$$\dot{Y} = -x_1 n_2 + x_2 n_1 \quad (7.13)$$

En première approximation on prend  $dt$  égal à l'unité:

$$\dot{X} = dx n_1 + dy n_2 \quad (7.14)$$

$$\dot{Y} = -dx n_2 + dy n_1 \quad (7.15)$$

Puisque les isovaleurs de  $dx$  et  $dy$  sont parallèles à la bande, les dérivées par rapport à  $Y$  sont nulles. Le tenseur grad v dans le repère  $(O,X,Y)$  s'écrit donc:

$$\text{grad } v = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} & 0 \\ \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

D'où la vitesse de déformation définie par  $D=1/2(\text{grad } v+(\text{grad } v)^t)$ :

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} & \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \dot{Y}}{\partial X} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

La composante  $D_{22}$  est nulle, ce qui traduit la non déformation axiale selon la direction  $Y$ . La déformation se produit perpendiculairement à cette direction, et sous forme de cisaillement. On retrouve donc la notion de ligne d'extension nulle.

Si on considère un élément appartenant à un plan de rupture, sa déformation dans l'axe de la surface est nulle. Seul le cisaillement affecte cet élément. On peut donc annoncer que:

**"une surface de rupture est une ligne d'extension nulle."**

Lors de la présence de surface de rupture développée, la quasi totalité de la déformation se situe dans la bande de cisaillement. On peut caractériser la déformation d'un échantillon comme le glissement relatif de deux blocs rigides le long d'une ligne d'extension nulle (Fig. 7.4).

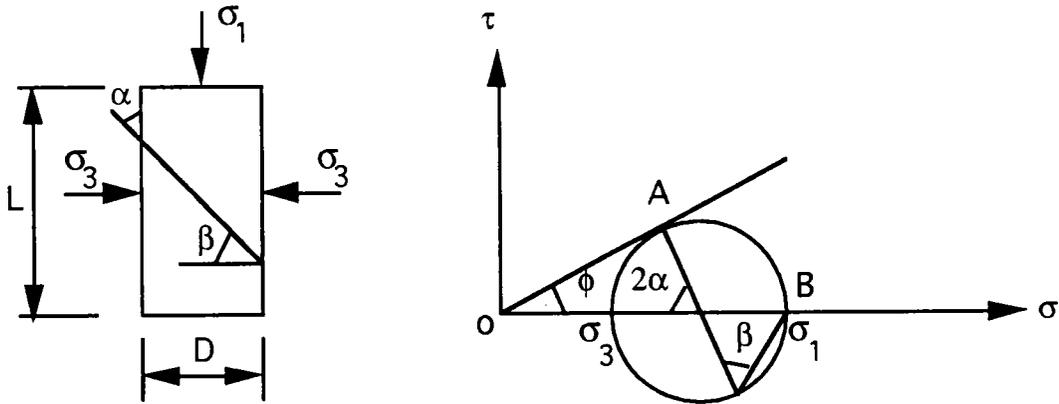
A partir de considérations cinématiques, Roscoe [92] a indiqué que si la bande de cisaillement est une surface de glissement bloc sur bloc, alors il ne doit pas se produire une déformation dans la direction de la bande, d'où les lignes de la bande sont les lignes d'extension nulle. Les évidences expérimentales supportent ce point de vue, les lignes d'isovaleurs du déplacement mesurées dans les essais sont parallèles à la bande [67].

## 7.6 Direction des bandes de cisaillement

Les bandes de cisaillement ne passent pas nécessairement par les coins de l'échantillon, et se développent malgré les frontières rigides. D'autre part, les bandes sont généralement rectilignes. Les directions proposées sont liées aux valeurs globales de l'angle de frottement interne  $\phi$  et de l'angle de dilatance  $v$ .

Pratiquement au cours des essais expérimentaux, on observe une orientation déterminée en bande de cisaillement.

Lors d'un essai à l'appareil triaxial ou biaxial, le plan de rupture n'est pas imposé comme c'est le cas dans un essai à la boîte de cisaillement. La théorie du cercle de Mohr permet de prévoir l'inclinaison de ce plan de rupture (Fig. 7.6).



*Figure 7.6: Cercle de Mohr au plan de la rupture*

En effet, si ce plan fait l'angle  $\alpha$  avec le plan vertical, l'arc qui sépare sur le cercle de Mohr le point A du point B ( $\sigma_a$ ) a pour mesure  $\beta = \pi/2 - \alpha$ . Or cet arc a aussi pour mesure  $1/2(\pi/2 + \phi)$ , donc:

$$\alpha = \pi/4 - \phi/2 \quad (7.18)$$

Pour que le plan de rupture puisse se développer sans être bloqué par les extrémités de l'échantillon, il est donc nécessaire que l'on ait:

$$L/D > \text{tg}(\pi/4 + \phi/2) \quad (7.19)$$

L et D étant la longueur et le diamètre (ou la largeur) de l'échantillon. Le rapport  $L/D$  est l'élançement de l'échantillon. Cet élançement est en général de 2, ce qui correspond à un angle maximum  $\phi$  de  $37^\circ$ .

Un certain nombre d'auteurs ont proposés une liaison entre  $\alpha$  et les valeurs globales de l'angle de frottement  $\phi$  et l'angle de dilataance  $v$  ou une combinaison des deux angles.

Duthilleul [39] sur le matériau bidimensionnel de Schneebeli a observé une bonne concordance avec la direction  $\pi/4 - v_g/2$  ( $v_g$  est angle de dilataance global). Vardoulakis [83] a proposé des orientations plutôt centrées autour de  $\pi/4 - (\phi + v_g)/4$ . Arthur [84] a observé une plage assez large d'orientations, de  $\pi/4 - \phi/2$  à  $\pi/4 - v_g/2$ . Desrues [72] à l'aide de l'essai biaxial a confirmé la théorie du cercle

de Mohr ( $\pi/4-\phi/2$ ), mais il a annoncé que dans le cas général, l'orientation de la bande de cisaillement est comprise entre les valeurs  $\pi/4-\phi/2$  et  $\pi/4-\nu/2$  [67].

Selon Hammad [91], dans la gamme des contraintes de confinement étudiée (100 à 800 KPa), l'orientation des bandes de cisaillement évolue de  $\pi/4-\phi/2$  vers  $\pi/4-(\phi+\nu)/4$  avec l'augmentation de la contrainte de confinement; cette tendance se retrouve pour tous les sables testés.

Pour les rouleaux de verre, TRUBAL donne une valeur de l'ordre de  $34^\circ$  pour l'angle  $\alpha$ .

Tableau 7.1 présente la comparaison des orientations avec les orientations classique, reliée aux angle  $\phi$  et  $\nu_g$ .

Matériau	$\alpha$ (mesuré)	$\pi/4-\phi/2$	$\pi/4-\nu_g/2$	$\pi/4-(\phi+\nu_g)/4$	$\alpha$ (TRUBAL)
sable dense	21-25	21	39	30	-
sable lâche	26-33	27	45	36	-
billes de verre	28	30	34	32	34

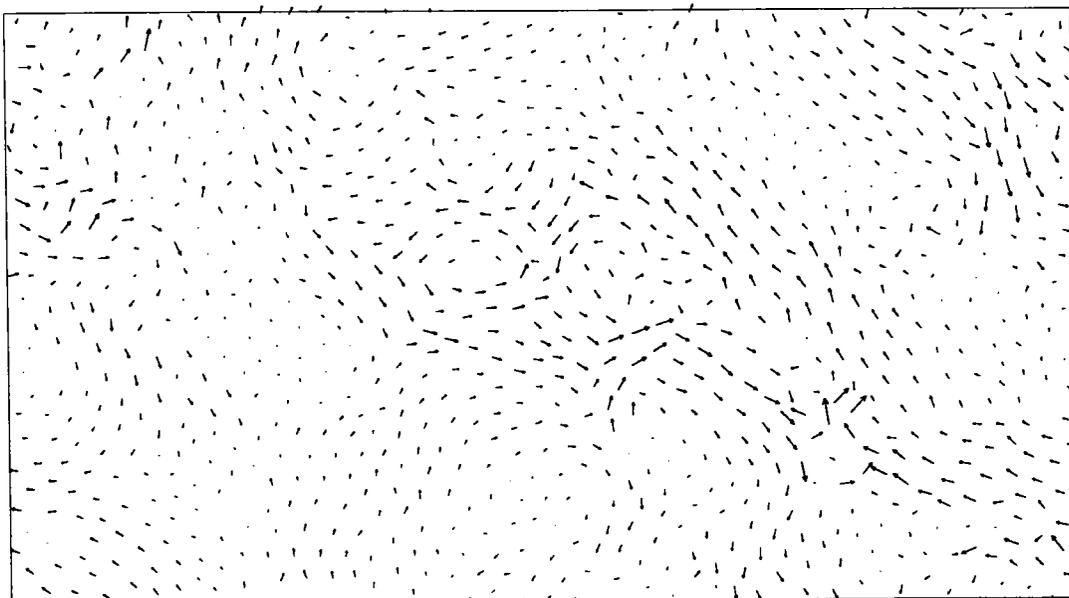
*Tableau 7.1: Comparaison des orientations de la bande de cisaillement (exprimées en degrés)*

Pour les matériaux testés par Desrues, la direction  $\pi/4-\phi/2$  concorde bien avec la borne inférieure de la plage de variation des orientations de bande. Les directions  $\pi/4-\nu_g/2$  et  $\pi/4-(\phi+\nu_g)/4$  par contre, sont en dehors de la plage expérimentale.

## TRUBAL ... 2-D mode

Cycle number 1618100  
Number of spheres 1000  
Number of contacts 1641  
Boundary of box area  
Rel. disp. vectors; max = 1.056E-03

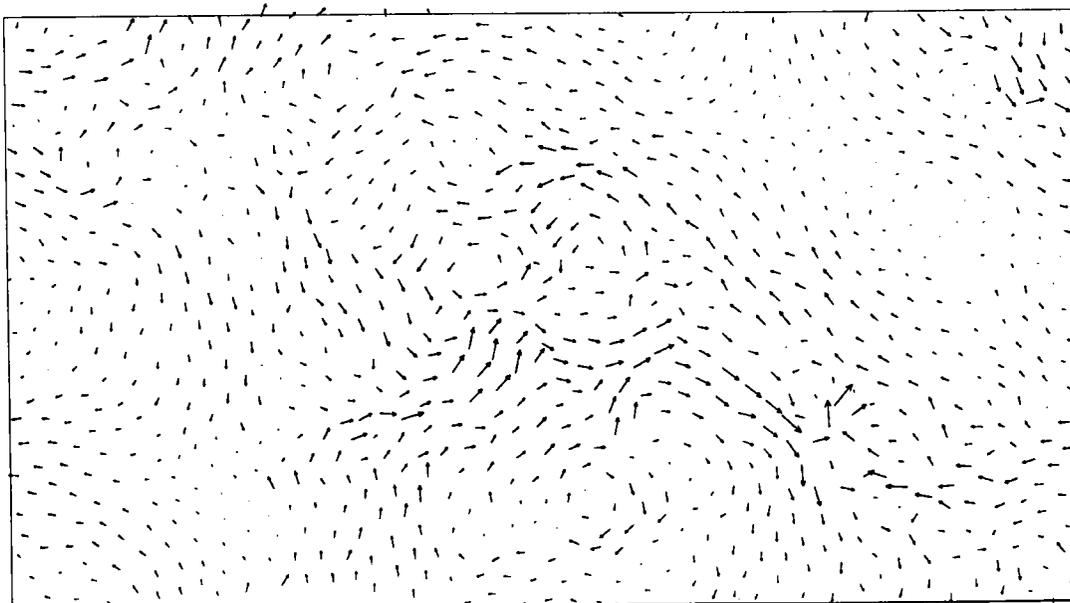
*Figure 7.7: La localisation à une déformation axiale à 3,9%*



## TRUBAL ... 2-D mode

Cycle number 1718100  
Number of spheres 1000  
Number of contacts 1650  
Boundary of box area  
Rel. disp. vectors; max = 8.823E-04

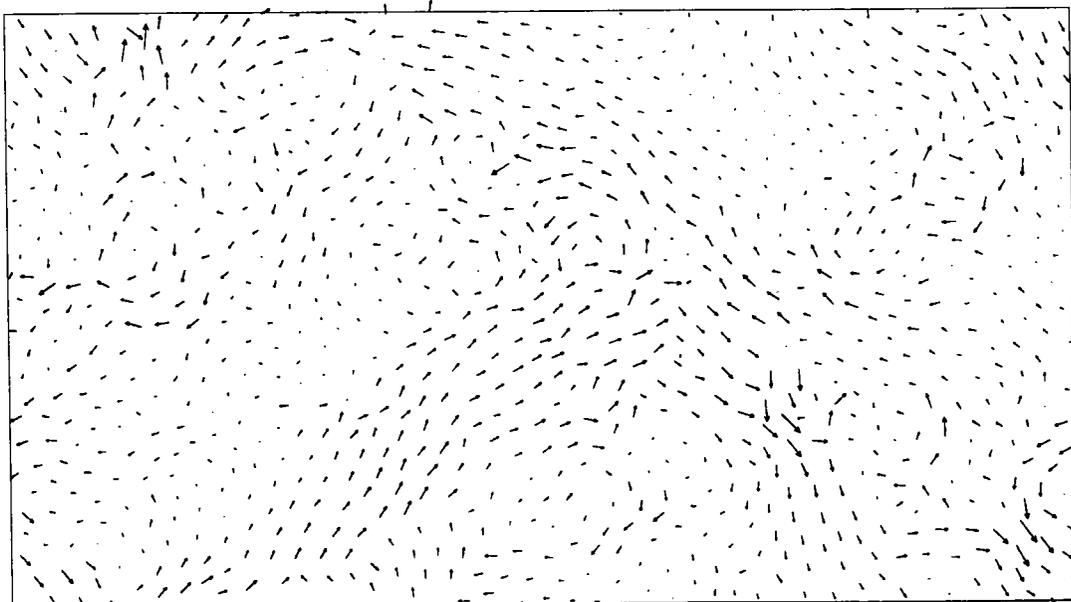
**Figure 7.8:** Le champ de déplacement relatif des particules à une déformation axiale à 4%



## TRUBAL ... 2-D mode

Cycle number 1818100  
Number of spheres 1000  
Number of contacts 1651  
Boundary of box area  
Rel. disp. vectors; max = 7.592E-04

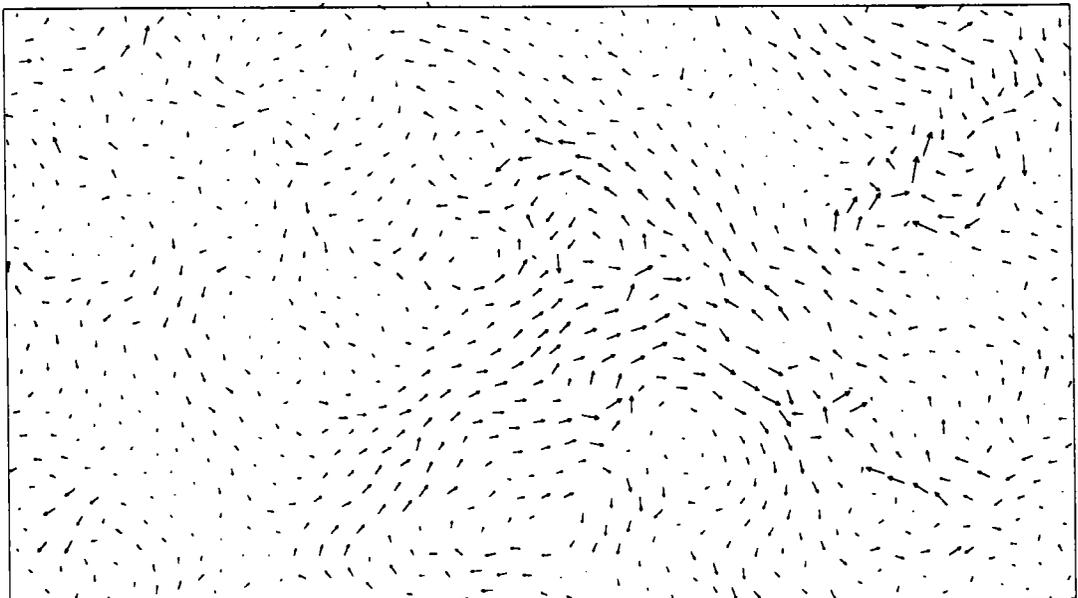
**Figure 7.9:** Le champ de déplacement relatif des particules à une déformation axiale à 4,1%



## TRUBAL ... 2-D mode

Cycle number 1918100  
Number of spheres 1000  
Number of contacts 1646  
Boundary of box area  
Rel. disp. vectors; max = 6.233E-03

*Figure 7.10: Le champ de déplacement relatif des particules à une déformation axiale à 4,2%*



## 7.7 Conclusion

Les essais biaxiaux sur les rouleaux de verre sont effectués pour observer la localisation et la bande de cisaillement. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux montre que dans tous les deux cas la localisation apparaît avec une déformation axiale de l'ordre de 3 à 4%.

La largeur de la bande de cisaillement dépend du diamètre moyen des particules; de 15 à 25 fois le diamètre moyen est une bonne estimation de la réalité.

Selon de nombreux auteurs, la direction des bandes de cisaillement dépend de l'angle de frottement interne  $\phi$  et de l'angle de dilatance  $v$ . On constate que la synthèse des orientations relevées par divers auteurs ne permet pas de dégager un accord unanime concernant l'orientation exprimée en terme d'angle  $\phi$  et  $v$ ; les valeurs  $\pi/4 - \phi/2$  et  $\pi/4 - v/2$  semblent représenter des limites. On peut penser à une influence de la taille des grains, de l'anisotropie initiale et du niveau de contrainte en relation avec la densité comme le montrent les résultats de Hammad [91]. On peut penser aussi que l'absence de convergence entre les résultats indique soit que les paramètres  $\phi$  et  $v$  ne sont pas suffisants pour l'expression de l'orientation, soit que les conditions spécifiques d'essais jouent un rôle considérable encore mal connu.

## **PARTIE III**

**\*\*\*\*\***

### **APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS DISTINCTS**

- **Coefficient de pression latérale**

# Chapitre 8

## Coefficient de pression latérale

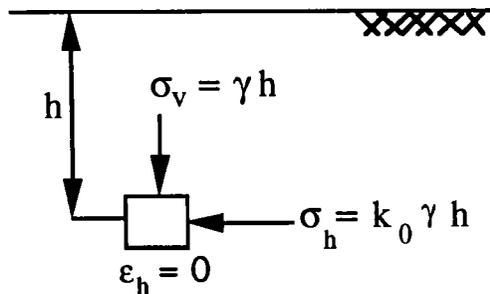
### 8.1 Généralités

Dans le cas d'un sol homogène, à surface horizontale non chargée, lorsque il n'y a pas de possibilité de déplacement latéral (Fig. 8.1), les contraintes verticale et horizontale sont:

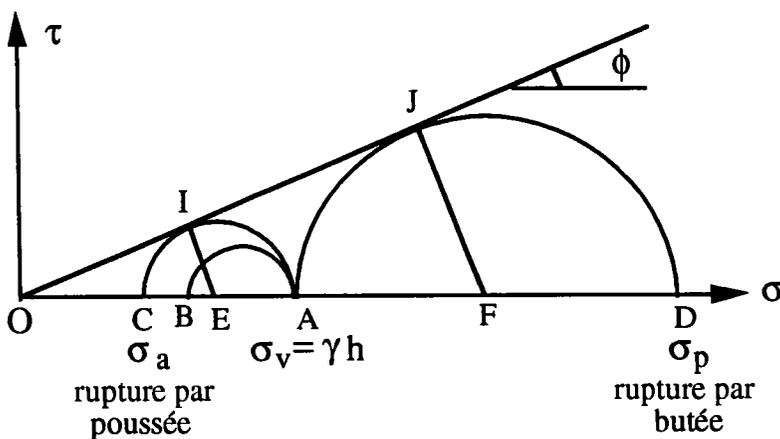
$$\sigma_v = \gamma h \quad (8.1)$$

$$\sigma_h = k_0 \gamma h \quad (8.2)$$

avec  $k_0$  le *coefficient de pression latérale au repos* et  $\sigma_v$  la contrainte principale majeure. Cet état de contrainte bidimensionnel est représenté par le cercle de Mohr de diamètre AB sur la figure 8.2.



**Figure 8.1:** Contraintes verticale et horizontale sur un élément sans déplacement latéral



**Figure 8.2:** Cercle de Mohr

Le coefficient  $k_0$  est généralement inférieur à 1. Sa valeur approximative pour un sable lâche est  $k_0=0,45$  à  $0,5$  et pour un sable compact  $k_0=0,4$  à  $0,45$ .

Dans le cas des sables, il existe une formule due à Jaky, donnant expérimentalement une relation entre  $k_0$  et l'angle de frottement interne  $\phi$  du sable:

$$k_0=1-\sin \phi \quad (8.3)$$

Si nous permettons au milieu une expansion latérale ( $\epsilon_h>0$ ), (Fig. 8.3-a), la contrainte verticale  $\sigma_v$  restera principale et égale à  $\gamma h$  et la contrainte horizontale  $\sigma_h$  va diminuer. Sur la figure 8.2, le point B se rapproche du point C. Lorsque la contrainte atteint la valeur en C, il y a rupture du sol. Ce mode de rupture est appelé *rupture par poussée (état actif)*.

Il est également possible de provoquer la rupture du massif de milieu par compression latérale ( $\epsilon_h<0$ ), (Fig. 8.3-b). Dans ce cas, le point B sur la fig. 8.2 ( $\sigma_h=k_0\gamma h$ ) se rapproche d'abord du point A. En A, il y a un état de contrainte isotrope ( $\sigma_h=\sigma_v=\gamma h$ ) puis la contrainte latérale augmente, le point B atteint le point D où il y a rupture. Ce mode de rupture est appelé *rupture par butée (état passif)*.

La poussée et la butée sont donc deux états de rupture d'un milieu. Elles ne peuvent être mobilisées que lorsque les déformations, donc les déplacements, ont atteint une valeur suffisante.

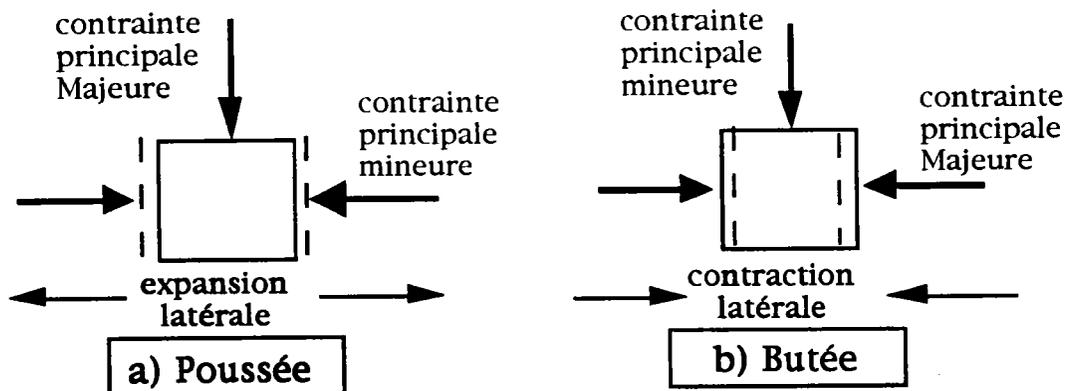


Figure 8.3: Définition de la Poussée et de la Butée

Pour les milieux pulvérulents on peut écrire (Fig. 8.2):

$$IE = OE \sin \phi$$

$$\frac{\sigma_v - \sigma_a}{2} = \frac{\sigma_v + \sigma_a}{2} \sin \phi \quad (8.4)$$

on obtient:

$$\sigma_a = \sigma_v \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \quad (8.5)$$

d'où

$$k_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \quad (8.6)$$

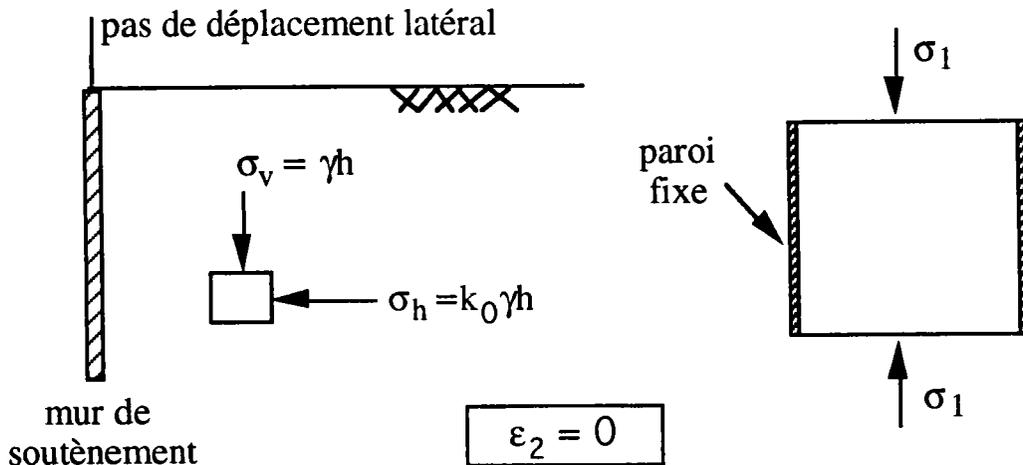
De la même manière, on montre que:

$$k_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \frac{1}{k_a} \quad (8.7)$$

## 8.2 Coefficient de pression latérale au repos ( $k_0$ )

La simulation est effectuée avec un échantillon de 1000 disques (rouleaux) de verres dont 250 de diamètre 0,26, ainsi que 500 de diamètre 0,34 et 250 de diamètre 0,42 mm. La module de cisaillement du verre  $G=2,9 \cdot 10^{10}$  Pa et le coefficient de Poisson  $\nu=0,2$ . L'indice des vides initial de l'échantillon est  $e_0=0,19$ .

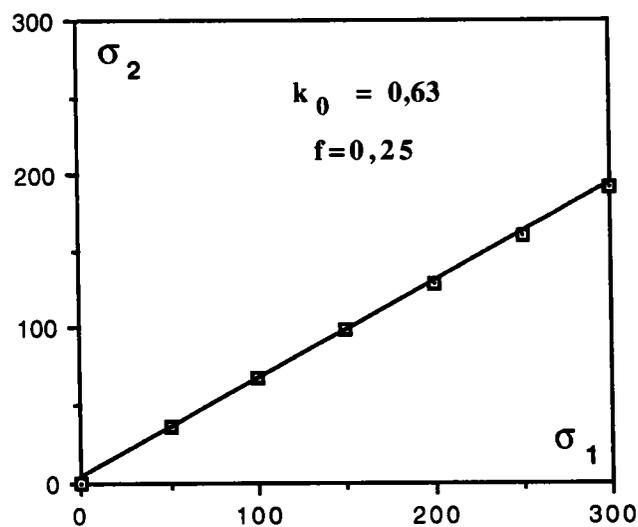
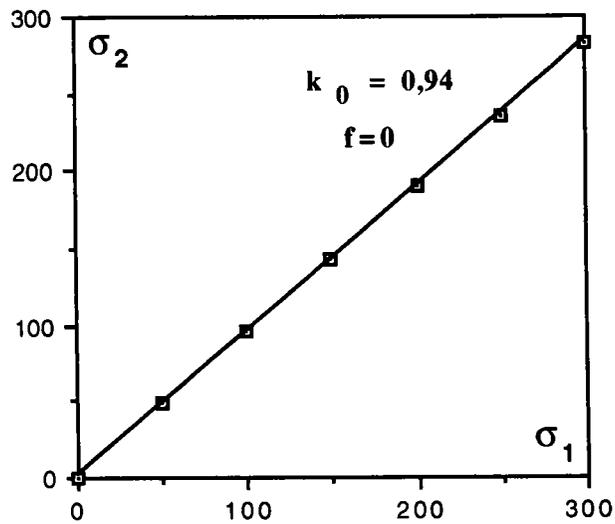
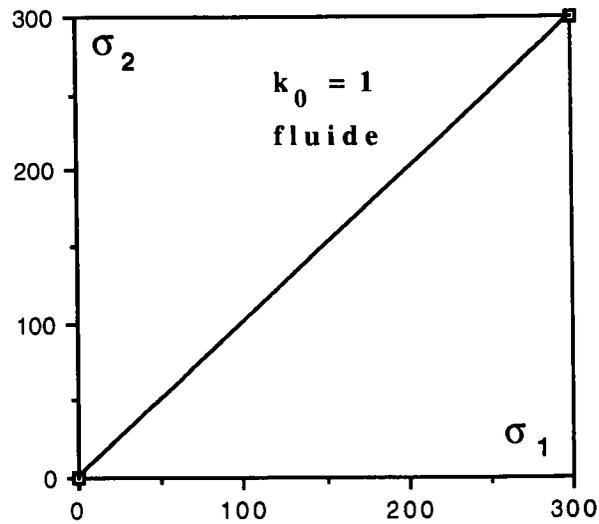
Pour déterminer  $k_0$  on impose un chargement dans la direction verticale en gardant les parois verticales fixes (Fig. 8.4).



**Figure 8.4:** Simulation de l'échantillon de calcul pour  $k_0$

A cause du chargement dans la direction verticale,  $\sigma_1$  augmente. Après augmentation de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  augmente également, parce que les parois latérales sont fixes. La représentation de  $\sigma_2$  par rapport à  $\sigma_1$  permet d'obtenir le coefficient de pression latérale  $k_0$ . Ce coefficient est constant à condition que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  restent inférieur à  $\sigma_{rupture}$ .

L'essai est effectué pour des valeurs différentes du coefficient de frottement ( $f$ ). Les figures 8.5-a à 8.5-f représentent les valeurs de  $k_0$  pour ces valeurs de  $f$ . On constate que la valeur de  $k_0$  pour  $f=0$  est très proche de la valeur de  $k_0$  pour les fluides (Fig 8.5-a et 8.5-b).



*Figure 8.5-a à 8.5-c: Variation de la contrainte horizontale en fonction de la contrainte verticale pour des coefficients de frottement intergranulaire différents.*

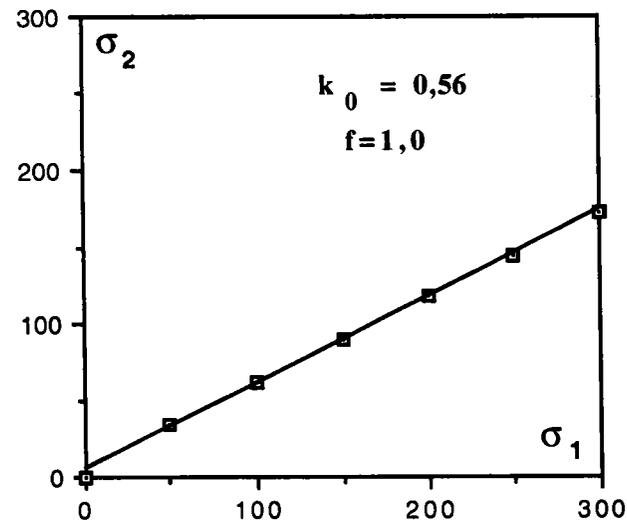
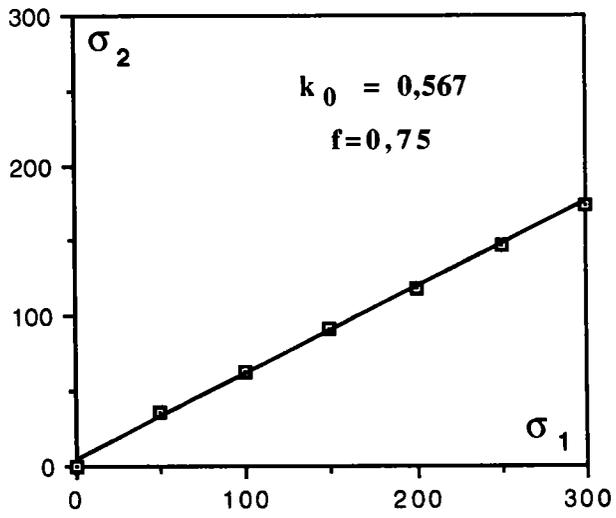
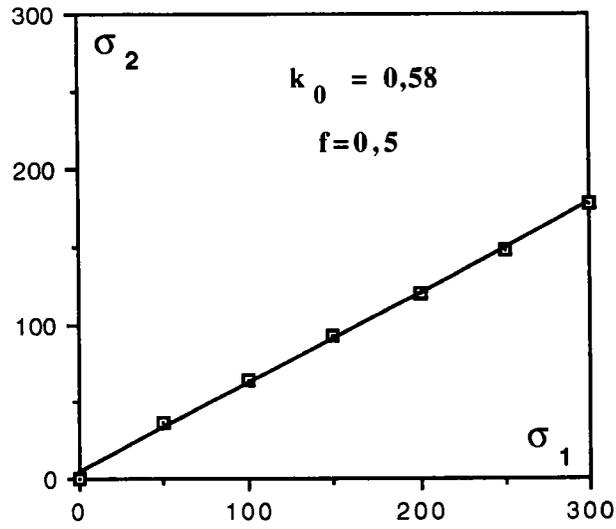
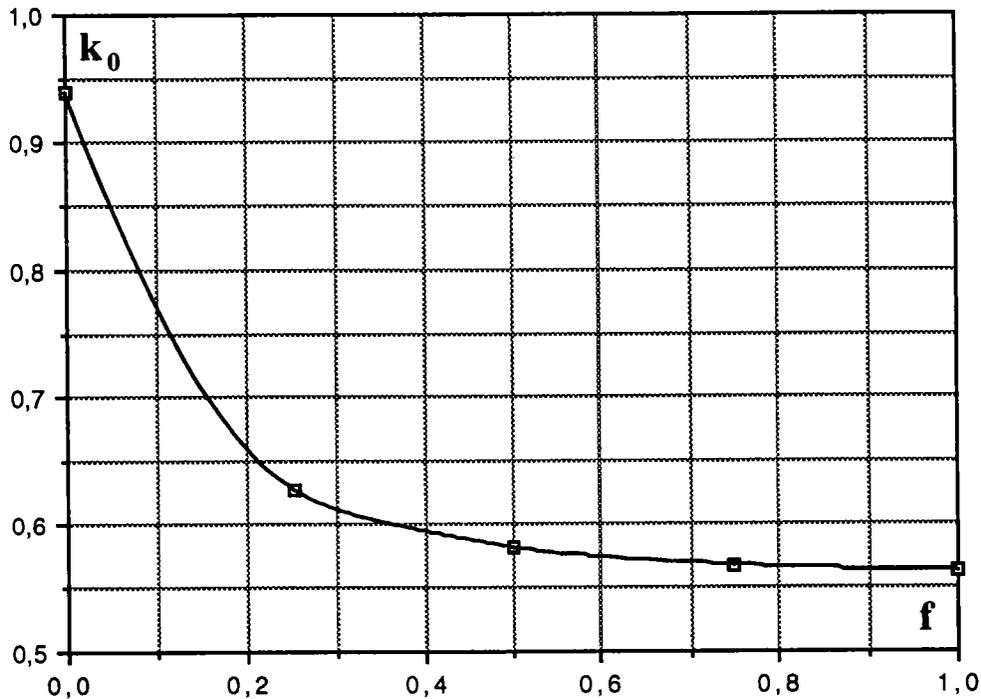


Figure 8.5-d à 8.5-f: Variation de la contrainte horizontale en fonction de la contrainte verticale pour des coefficients de frottement intergranulaire différents (suite).

D'autre part, on trouve que si le coefficient de frottement  $f$  augmente, la valeur de  $k_0$  diminue et tend asymptotiquement vers une limite voisine de 0,55 (Fig. 8.6).



*Figure 8.6: Variation du coefficient de la pression latérale au repos ( $k_0$ ) en fonction du coefficient de frottement intergranulaire*

### 8.3 Coefficients de pression latérale extrêmes ( $k_a, k_p$ )

Le rapport  $\sigma_h/\sigma_v$ , suivant la déformation, est compris entre deux valeurs extrêmes:

-la valeur minimale correspondant à la poussée: elle est appelée coefficient de poussée et notée  $k_a$ .

$$k_a = (\sigma_2/\sigma_1)_{\min} \quad (8.8)$$

-la valeur maximale correspondant à la butée: elle est appelée coefficient de butée et notée  $k_p$ .

$$k_p = (\sigma_2/\sigma_1)_{\max} \quad (8.9)$$

#### 8.3.1 Détermination de $k_a$ (essai de poussée)

L'échantillon utilisé pour le coefficient  $k_0$  est utilisé également pour déterminer les coefficients  $k_a$  et  $k_p$ . Le coefficient de frottement intergranulaire pour les billes (rouleaux) de verre est pris égal à  $f=0,1$  [99].

Dans l'essai qui permet de déterminer  $k_0$ , dès que la contrainte  $\sigma_1$  arrive à une valeur moyenne (point A de la figure

8.2), on fixe  $\sigma_1$  et on impose un déplacement horizontal pour les parois verticales de l'échantillon pour qu'elles s'éloignent (Fig. 8.7). A cause de ce déplacement,  $\sigma_2$  diminue. On continue le chargement jusqu'à la valeur minimale de  $\sigma_2$  (point C de la figure 8.2). Ce point est la rupture par poussée. La figure 8.8 montre la variation du coefficient de poussée ( $k_a$ ) avec:

$$k_a = (\sigma_2/\sigma_1)_{\min} = 0,37$$

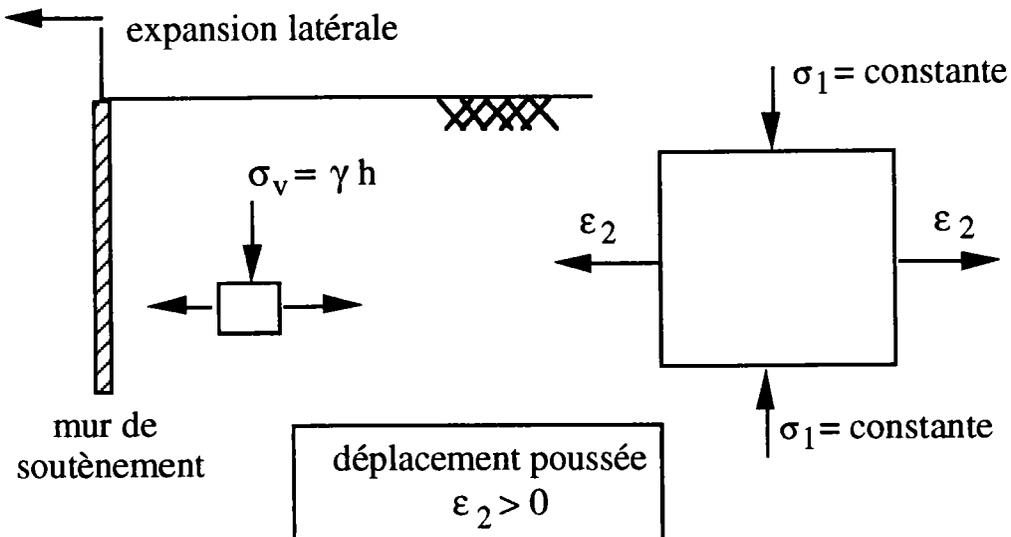


Figure 8.7: Simulation de l'échantillon de calcul pour  $k_a$

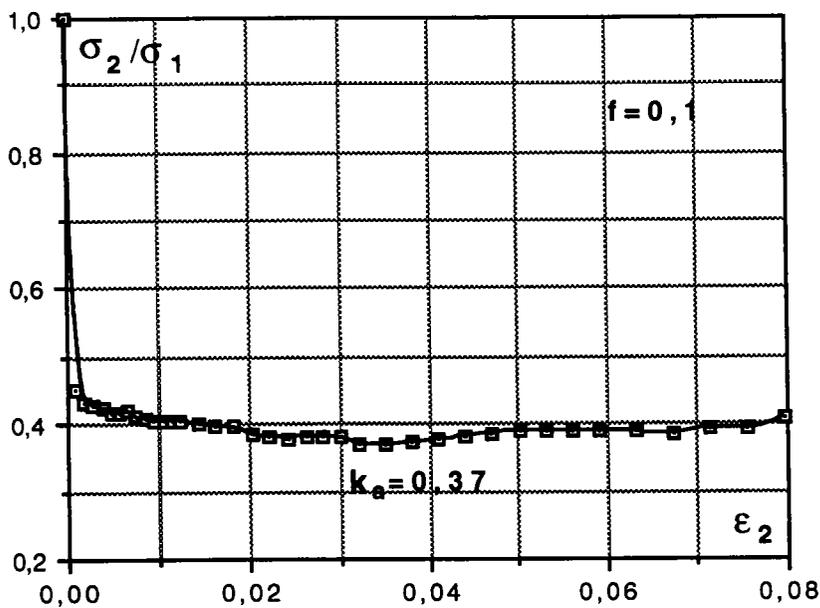


Figure 8.8: Variation du rapport de la contrainte horizontale sur la contrainte verticale en fonction de la déformation latérale (Poussée)

L'essai a été effectué pour des valeurs différentes du coefficient de frottement ( $f$ ). La figure 8.9 représente la variation du coefficient de poussée ( $k_a$ ) en fonction du coefficient de

frottement intergranulaire ( $f$ ). On constate que si le coefficient de frottement  $f$  augmente, la valeur de  $k_a$  diminue et la courbe de  $k_a$  tend vers une valeur limite voisine de 0,2.

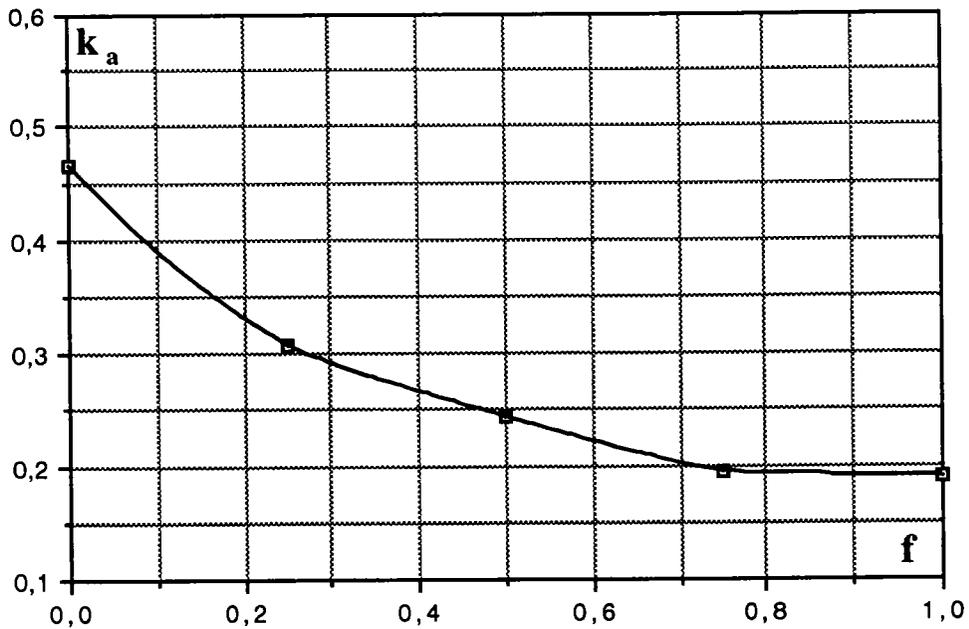


Figure 8.9: Variation du coefficient de poussée( $k_a$ ) en fonction du coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ )

### 8.3.2 Détermination de $k_p$ (essai de butée)

Dans l'essai  $k_0$  une fois que  $\sigma_1$  atteint une valeur moyenne (point A de la figure 8.2), on fixe  $\sigma_1$  et on impose un déplacement horizontal pour que les parois verticales de l'échantillon se rapprochent (Fig. 8.10).

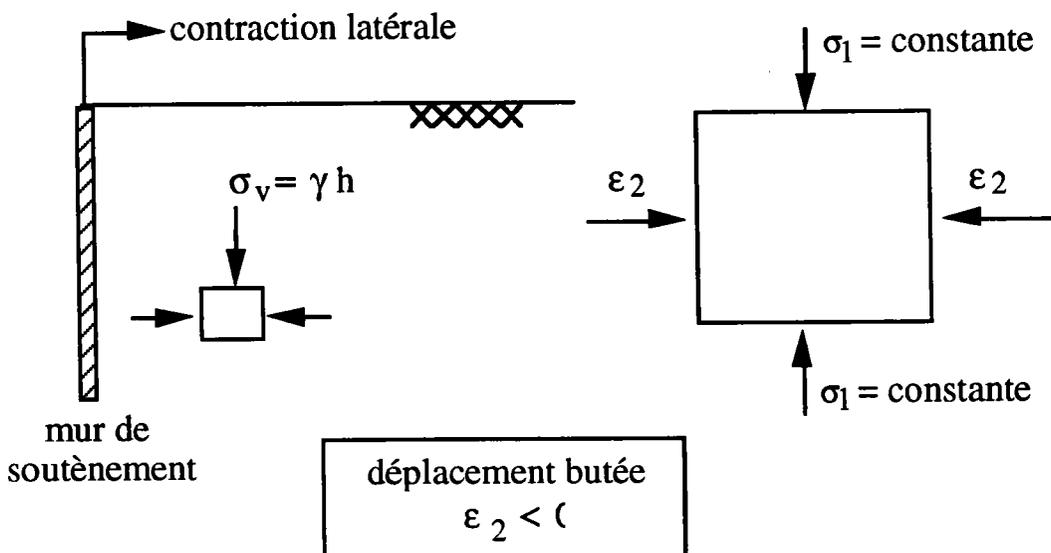
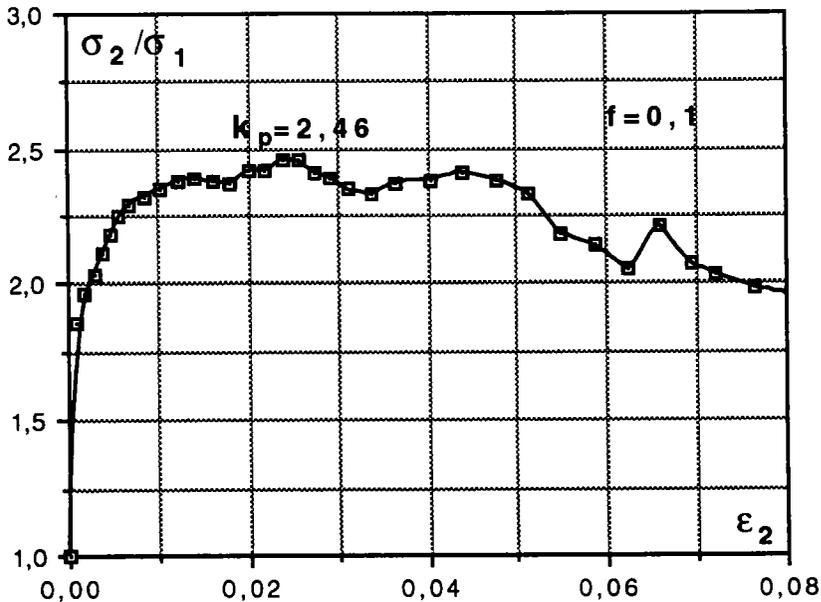


Figure 8.10: Simulation de l'échantillon de calcul pour  $k_p$

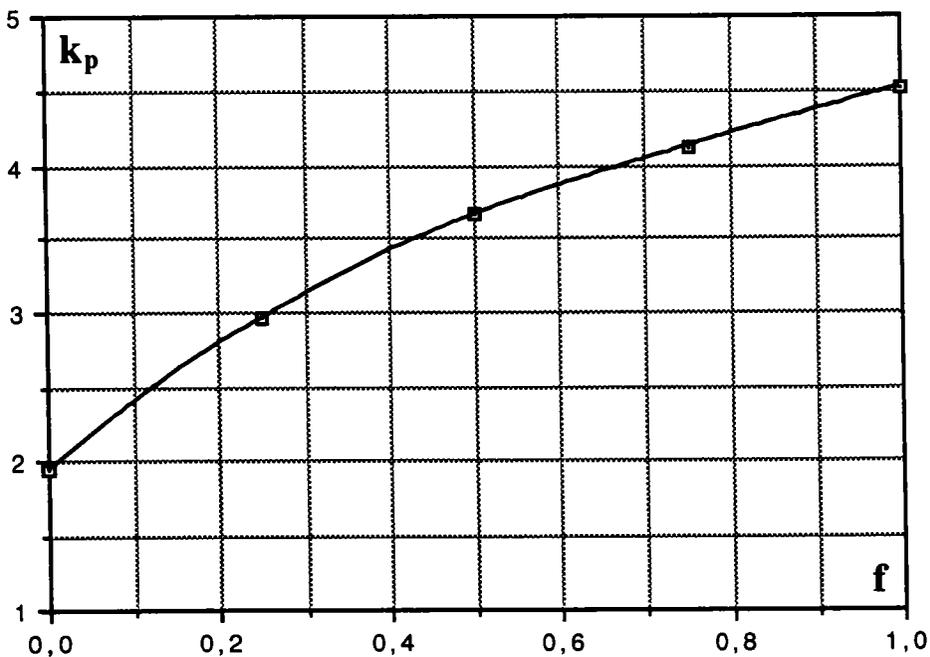
A cause de ce déplacement  $\sigma_2$  augmente et dépasse  $\sigma_1$ . On continue le chargement jusqu'à la valeur maximale de  $\sigma_2$  (point D de la figure 8.2). Ce point caractérise la rupture par butée. La figure 8.11 montre la variation du coefficient de butée  $k_p$  avec:

$$k_p = \sigma_{2\max}/\sigma_1 = 2,46$$

La figure 8.12 représente les valeurs de  $k_p$  pour différentes valeurs de  $f$ . On constate que si le coefficient de frottement  $f$  augmente, la valeur de  $k_p$  augmente et la courbe de  $k_p$  tend vers une asymptote moins marquée que la courbe de  $k_a$  (Fig. 8.9).



*Figure 8.11: Variation du rapport de la contrainte horizontale sur la contrainte verticale en fonction de la déformation latérale (Butée)*



*Figure 8.12: Variation du coefficient de butée ( $k_p$ ) en fonction du coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ )*

## 8.4 Comparaison des résultats numériques et analytiques

Avec un angle de frottement interne égal à  $25^\circ$ , la valeur du coefficient  $k_0$  est égal à 0,58, d'après la formule de Jaky. Pour cette valeur de  $k_0$  (tableau 8.1) le coefficient de frottement local  $f=0,5$ , est proche du coefficient de frottement global de notre matériau.

En utilisant TRUBAL, avec un coefficient  $f=0,5$ , on trouve  $k_0=0,58$ . Donc on peut en déduire que: pour calculer  $k_0$  avec TRUBAL, en choisissant un coefficient de frottement local ( $f$ ) égal au coefficient de frottement global ( $\tan \phi$ ), les résultats numériques de TRUBAL et empiriques de Jaky sont concordants.

Méthode	T	R	U	B	A	L	Empirique ou Analytique
$f$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,50	0,75	$\phi=25^\circ$
$k_0$	0,76	0,71	0,66	0,63	<b>0,58</b>	0,57	0,58
$k_a$	<b>0,37</b>	0,36	0,33	0,31	0,25	0,20	0,41
$k_p$	<b>2,46</b>	2,55	2,75	3,0	3,66	4,10	2,46

Tableau 8.1: Valeurs des coefficients  $k_0$ ,  $k_a$  et  $k_p$

Pour  $k_a$  et  $k_p$ , le tableau 8.1 montre que: dans TRUBAL, en utilisant un coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) égal à 0,1, les résultats numériques et analytiques sont bien concordants.

Le tableau 8.2 résume la comparaison des résultats de TRUBAL avec les résultats des formules analytique et empirique de Jaky.

Coefficient	Frottement intergranulaire ( $f$ )	Méthode Numérique (TRUBAL)	Formules Empirique ou Analytique
$k_0$	$\tan 25^\circ=0,47$	0,58	0,58
$k_a$	0,1	0,37	0,41
$k_p$	0,1	2,46	2,46

Tableau 8.2: Comparaison des résultats de TRUBAL avec les résultats des formules empirique ou analytique

La figure 8.13 représente le chemin des contraintes étudiées. Ce chemin varie entre deux droites extrêmes ( $k_a$  et  $k_p$ ).

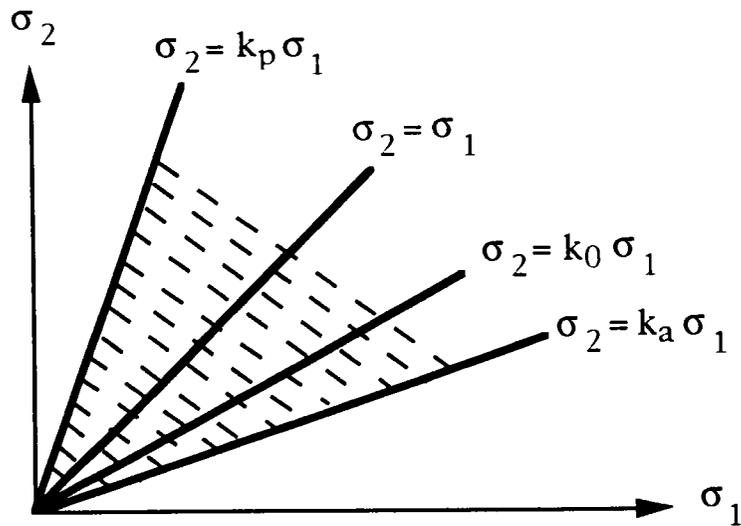


Figure 8.13: Chemin des contraintes étudiés

## 8.5 Coefficient de pression latérale dans les silos

### 8.5.1 Position du problème

Le matériau est stocké dans un état d'équilibre limite qui est un état intermédiaire entre l'état actif et l'état passif. Les états de transition entre ces deux états se font évidemment par contraction et expansion latérale du matériau, car la contrainte normale sur un élément considéré ne varie pas. On peut étudier les contraintes à l'intérieur du matériau. Soient deux petits éléments de matériaux pulvérulents, un pris le long d'une paroi et un autre pris sur l'axe du silo (Fig. 8.14).

Sur l'élément pris au centre (élément A), il n'y a pas de cisaillement, à cause de la symétrie et  $\sigma_z$  et  $\sigma_x$  sont des contraintes principales. Sur l'élément près de la paroi (élément B), s'exercent les contraintes  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$  et  $\tau$ . Les contraintes principales correspondantes sont données par  $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  qui s'exercent dans les direction  $\theta$  et  $90^\circ + \theta$  par rapport à l'horizontale (Fig. 8.15).

Notre objectif est de déterminer le coefficient de pression latérale ( $k$ ) dans les silos. Le coefficient de pression  $k$  est déterminé à partir de la contrainte horizontale  $\sigma_x$ , et la contrainte verticale calculée par la formule de Janssen.

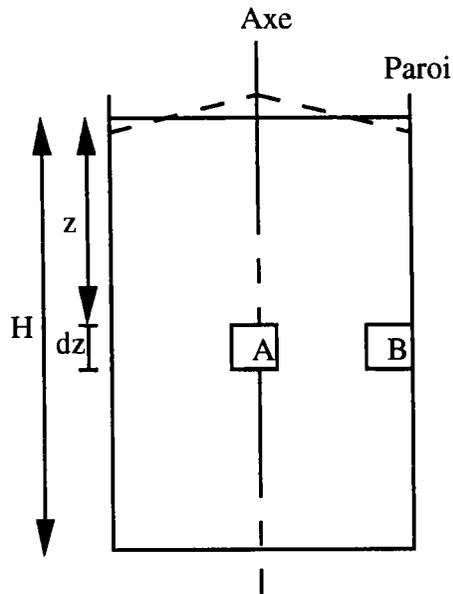


Figure 8.14: La position des éléments du matériau dans un silo

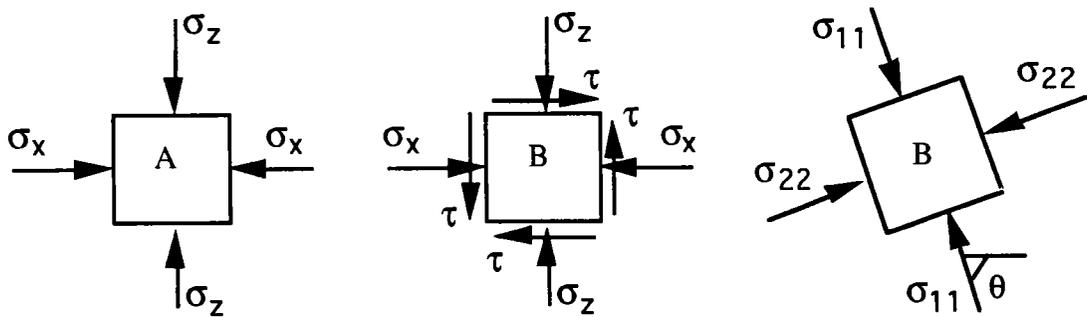


Figure 8.15: Etat de contrainte sur l'élément de matériau

### 8.5.2 Théorie analytique

La contrainte verticale est calculée par la formule de Janssen:

$$\sigma_z = \frac{\gamma R_h}{\mu k} (1 - \exp(-\frac{\mu k}{R_h} z)) \quad (8.10)$$

$\sigma_z$ : contrainte verticale

$\gamma$ : poids volumique de la matière ensilée

$R_h$ : rayon hydraulique du silo =  $A/C$

$A$ : aire de la section transversale du silo

$C$ : périmètre du silo

$\mu$ : coefficient de frottement matériau-paroi

$k$ : rapport de la contrainte horizontale à la contrainte verticale

Selon Janssen le rapport de la contrainte horizontale à la contrainte verticale ( $k$ ) et le coefficient de frottement matériau-paroi ( $\mu$ ) sont constants, et il suppose que  $\sigma_x$  et  $\sigma_z$  ne dépendent que de  $z$  et sont des contraintes principales. A l'aide du cercle de Mohr on détermine:

$$k = \frac{\sigma_x}{\sigma_z} = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} \quad (8.11)$$

$\sigma_x$ : contrainte horizontale

$\phi$ : angle de frottement interne du matériau

La contrainte de cisaillement à la paroi ( $\tau$ ) est liée à la contrainte horizontale ( $\sigma_x$ ) par:

$$\tau = \mu \sigma_x = \operatorname{tg} \delta \sigma_x \quad (8.12)$$

$\tau$ : contrainte de cisaillement

$\delta$ : angle de frottement en paroi.

On remarque que dans la formule de Janssen, quand  $z$  tend vers l'infini,  $\sigma_z$  tend vers une valeur asymptotique:

$$\sigma_z(\infty) = \frac{\gamma R_h}{\mu k} \quad (8.13)$$

Pour calculer la contrainte verticale dans un silo de diamètre 8 m et hauteur 25 m, on a utilisé les valeurs suivantes dans la formule de Janssen pour les rouleaux de verre avec le coefficient de frottement intergranulaire égal à 0,1:

$$\gamma = 15 \text{ KN/m}^3$$

$$R_h = A/C = 2 \text{ m}$$

$$\mu = 0,25$$

$$\phi = 26,5^\circ$$

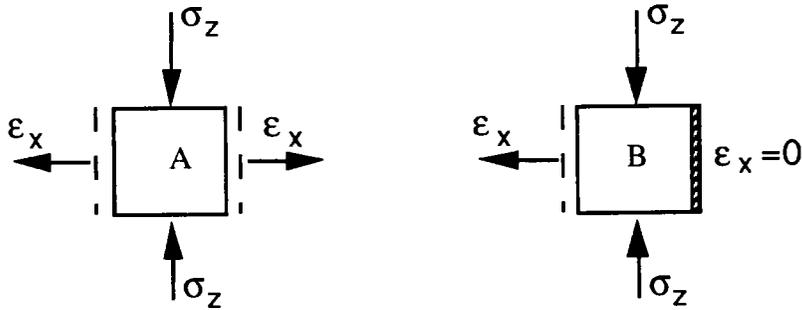
$$k = 0,383$$

### 8.5.3 Calcul numérique

On calcule la contrainte horizontale en utilisant la méthode numérique à partir de la contrainte verticale.

La contrainte horizontale ( $\sigma_x$ ) est fonction de la déformation latérale de matériau ( $\epsilon_x$ ). Pour un élément sur l'axe (élément A),  $\epsilon_x$

est maximum, mais elle est nulle juste à côté de la paroi (élément B) (Fig. 8.16). Donc la contrainte  $\sigma_x$  varie entre un minimum sur l'axe vers un maximum à la paroi. Pour calculer  $\sigma_x$ , il nous apparait préférable de prendre la valeur moyenne de la déformation latérale. Cette valeur donne une valeur plus grande pour k, que l'on appelle  $k_{\text{modifié}}$ .



**Figure 8.16:** Déformation latérale de l'élément

Notre objectif est de déterminer le coefficient de pression latérale (k) dans les silos. Le coefficient de pression k est déterminé à partir de la contrainte horizontale  $\sigma_x$ , calculée par la méthode numérique.

Le tableau 8.3 et la figure 8.17 présentent les valeurs du coefficient k en fonction de la hauteur sans dimension du silo ( $z/H$ ).

$z/H$	$\sigma_z$	$\sigma_x$	$\sigma_x(\text{modifiée})$	k	$k_{\text{modifié}}$
0,4	119,4	44,1	47,8	0,369	0,400
0,6	161	63	68,1	0,391	0,423
0,8	193,7	78,2	84,5	0,404	0,436
1,0	216	88,5	96,1	0,410	0,445

**Tableau 8.3:** Les valeurs du coefficient de pression latérale

Les valeurs numériques de k augmentent avec l'augmentation de la profondeur du silo (maximum 10% au fond du silo). Nous avons également regroupés les valeurs expérimentales de k pour un silo de diamètre 6 m et hauteur 8 m, citées par Khelil [88].

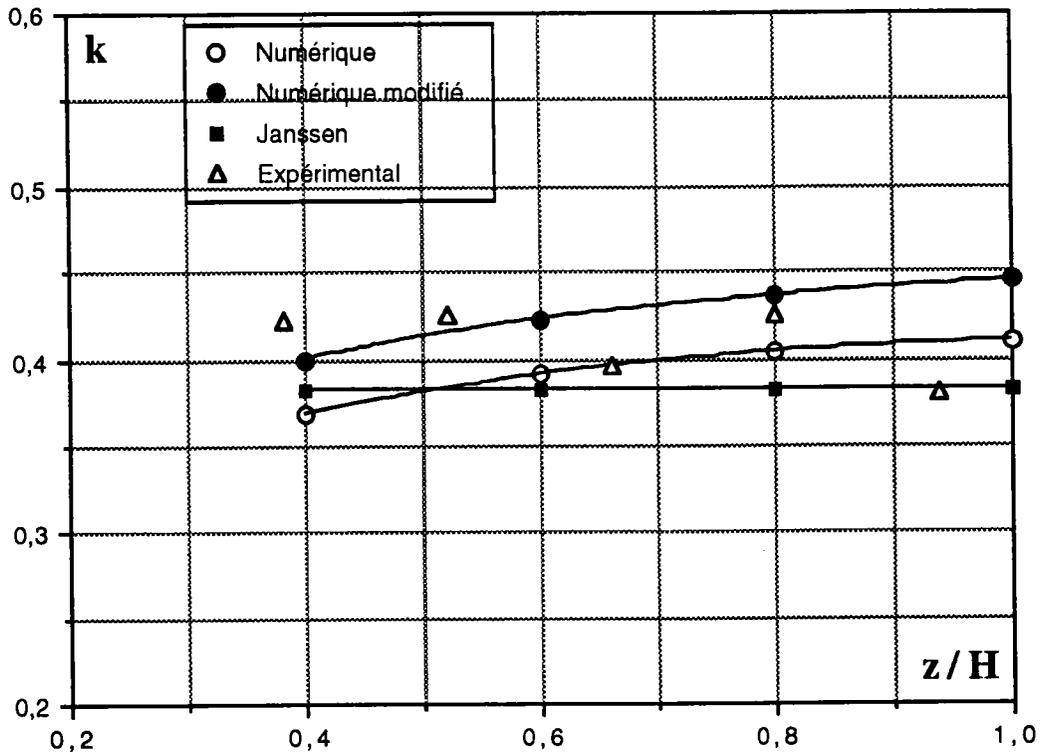


Figure 8.17: Coefficient de pression latérale en fonction de la hauteur sans dimension

Le tableau 8.4 montre les valeurs moyennes et maximales du  $k$  à partir des méthodes différentes.

Méthode	$k_{\text{moyen}}$	$k_{\text{max}}$
Numérique	0,393	0,410
Numérique modifiée	0,426	0,445
Janssen	0,383	0,383
Expérimentale	0,410	0,425

Tableau 8.4: Les valeurs moyennes et maximales de  $k$

## 8.6 Conclusion

L'essentiel de ce chapitre est l'exploitation de la méthode des éléments distincts appliquée à la mécanique des milieux granulaires par le programme TRUBAL. Nous avons simulé les phénomènes de poussée et de butée, ainsi que le cas intermédiaire et la pression latérale dans le silo. La simulation numérique bidimensionnelle a été effectuée sur un échantillon constitué de disques (ou rouleaux) de verre de diamètre 0,26 à 0,42 mm avec un indice des vides initial égal à 0,19.

Nous avons calculé les coefficients de pression latérale extrême ( $k_a$  et  $k_p$  appelés respectivement coefficient de poussée et de butée), le coefficient de pression latérale au repos ( $k_0$ ) et le coefficient de pression latérale sur la paroi de silo.

Les résultats de la simulation montrent que le coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) a un effet important sur les valeurs de  $k_0$ ,  $k_a$  et  $k_p$ . Dans les formules empirique et analytique cette dépendance intervient par l'angle de frottement global ( $\phi$ ) qui est directement lié au coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ).

Dans cette étude on a constaté que l'augmentation du coefficient  $f$ , provoque une augmentation du coefficient de butée ( $k_p$ ) et une diminution du coefficient au repos ( $k_0$ ) et celui de poussée ( $k_a$ ). Par ailleurs le coefficient de pression latérale sur la paroi de silo augmente avec l'augmentation de la hauteur du silo (maximum 10% au fond du silo).

La comparaison des résultats de la simulation avec les résultats empirique et analytique, nous oblige à bien choisir la valeur du coefficient  $f$ . Pour avoir des résultats comparables avec l'expérience nous avons pris pour les phénomènes de poussée et de butée  $f=0,1$  (la valeur réelle du coefficient de frottement intergranulaire pour des billes de verre) et pour le cas intermédiaire  $f=0,5$ . Dans ces conditions on constate un bon accord entre les résultats numériques et expérimentaux.

## CONCLUSION GENERALE

Les milieux granulaires ne peuvent répondre strictement aux hypothèses des milieux continus et il est donc nécessaire de tenir compte de leur nature discrète. Pour ceci nous avons étudié la modélisation du comportement d'assemblage de particules (disques ou sphères) par utilisation de la méthode des éléments distincts avec le programme TRUBAL.

Une partie de ce travail a consisté à étudier le fonctionnement et la validité des résultats numériques de TRUBAL

Nous avons analysés les paramètres significatifs du comportement discret du milieu au niveaux d'un nombre fini de grains, et déduit que la méthode des éléments distincts et le programme TRUBAL peuvent être appliqués pour la simulation des essais de caractérisation des milieux granulaires.

Dans ce travail trois essais sont modélisés: compression biaxiale, compression triaxiale et cisaillement simple. Les phénomènes de poussée et butée sont également étudiés en vue de la simulation du comportement des matières ensilés. Les résultats de TRUBAL sont comparés aux résultats expérimentaux. Cette comparaison montre que le programme TRUBAL est efficace pour le comportement mécanique d'assemblage de disques ou de sphères.

Les principaux résultats obtenus concernent:

- le coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ) et la densité des matériaux qui ont un effet très important sur l'angle de frottement interne. Cette relation montre que plus l'angle de frottement local est grand, plus l'angle de frottement global est élevé tendant vers une asymptote. D'autre part l'angle de frottement global croît avec la densité des matériaux.

- la simulation de la compression biaxiale avec les rouleaux de P.V.C. validée par les résultats expérimentaux. La valeur de l'angle de frottement global présente un écart inférieur à 6% avec les mesures expérimentales.

- la simulation de la compression triaxiale avec des billes de verre, comparés avec les essais expérimentaux. L'indice des vides initial des échantillon des essais numériques et expérimentaux sont égaux. Les courbes de contrainte-déformation, les lignes caractéristiques et limite de rupture sont en accord pour  $f=1,0$ . La variation de volume est plus importante dans la simulation numérique que dans les mesures expérimentales.

- l'essai de cisaillement simple sur les rouleaux de verre et ils montrent que l'angle de frottement global du matériaux dépend de l'angle de frottement local, ce qui est confirmé par plusieurs essais, mais il ne dépend pas de la contrainte normale appliquée.

- l'observation des phénomènes de dilatance et l'évolution de la localisation, ainsi que l'effet de la bande de cisaillement dans les milieux granulaires.

- l'application de la méthode numérique et la valorisation du programme TRUBAL pour l'étude de la pression latérale sur la paroi de silo et de la poussée et de la butée. Les résultats de la simulation montrent que: le coefficient de pression latérale sur la paroi de silo augmente avec l'augmentation de l'hauteur de silo; le coefficient de pression latérale au repos ( $k_0$ ) et le coefficient de poussée ( $k_a$ ) diminuent avec l'augmentation du coefficient de frottement intergranulaire ( $f$ ). Par contre le coefficient de butée ( $k_p$ ) augmente avec l'augmentation de ce dernier.

Tout ceci confirme notre démarche et nous permet d'envisager le développement de notre travail par:

- l'utilisation des particules elliptiques et angulaires (hexagonales,...)
- l'étude de l'effet de la granulométrie (géométrie, taille, ...) sur l'angle de frottement global;
- l'étude de l'effet de la gravité sur le comportement;
- la simulation des autres essais: essai de cisaillement direct et essai œdométrique (unidimensionnel).

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] CUNDALL P.A. and STRACK O.D.L. "The distinct element method as a tool for research in granular media" ( part I ), Report to the national science foundation concerning NSF grant ENG76-20711, Nov. 1978, Dept. of Civil and Mineral Eng., Institute of technology, University of Minnesota
- [2] CUNDALL P.A. and STRACK O.D.L. "The distinct element method as a tool for research in granular media" ( part II), Report to the national science foundation concerning NSF grant ENG76-20711 ,Oct. 1979, Dept. of Civil and Mineral Eng., Institute of technology, University of Minnesota
- [3] CUNDALL P.A. and STRACK O.D.L. "A discrete numerical model for granular assemblies", *Géotechnique* 29, No. 1, 47-65, 1979
- [4] CUNDALL P.A. "Distinct element models of rock and soil structure", *Analytical and computational methods in Engineering Rock Mechanics*, Ed. E. T. Brown pub. London 129-163, 1987
- [5] CUNDALL P.A., DRESCHER A. and STRACK O.D.L. "Numerical experiments on granular assemblies, Measurements and Observations", IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials /Delft /31 Aug.-3 Sept. 1982
- [6] CUNDALL P.A. and STRACK O.D.L. "Modeling of Microscopic Mechanisms in Granular Material", *Mechanics of Granular Materials: New Models and Constitutive Relations*, edited by J.T. Jenkins and M. Satake, 1983, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.
- [7] CUNDALL P.A. and professor CHARLES FAIRHURST "Correlation of discontinuum models physical observations an approach to the estimation of rock mass behaviour", *Felsbau* 4, 1986, Nr. 4
- [8] CUNDALL P.A. "Numerical experiments on localization in frictional materials", *Ingenieur-Archiv* 59, 148-159, 1989
- [9] CUNDALL P. A. "Guide d'Utilisation de TRUBAL", 1989.
- [10] STRACK O. D. L. and CUNDALL P. A. "Fundamental Studies of Fabric in Granular Materials" Interim Report concerning NSF Grant CEE-8310729, Sept. 15, 1984

- [11] CUNDALL P.A. "Computer simulations of dense sphere assemblies", *Micromechanics of Granular Materials*, edited by M. Satake and J.T. Jenkins, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1988.
- [12] OUWERKERK C. E. D. "A micro-mechanical connection between the single-particle strength and the bulk strength of random packings of spherical particles", *Powder Technology*, 65, 125-138, 1991
- [13] BAGSTER D.F., "The Development of a Microscopic Model of Granular Material Behaviour in a Heap", *Third International Conference on Bulk Materials, Storage, Handling and Transportation*, Newcastle 27-29 June 1989
- [14] CAMBOU B. "Mécanique des matériaux granulaires; l'approche microstructurale", *Manuel de Rhéologie des Géomatériaux* Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées, 1987
- [15] GHERBI M., GOURVES R. & REYMOND M.C. "Analyse acoustique de la rupture intergranulaire dans les matériaux pulvérulents" *Rhéologie des Matériaux du Genie Civil*, 25<sup>o</sup> colloque du G.F.R, Grenoble 28-30 Nov. 1990
- [16] DELYON, F., DUFRESNE D. & LEVY Y.E. "Sables renforcés: Micromécanique de l'interface inclusion-matrice", *Rhéologie des Matériaux du Genie Civil*, 25<sup>o</sup> colloque du G.F.R, Grenoble 28-30 nov. 1990
- [17] OGER Luc "Analyse et Caractérisation de la Géométrie de Milieux Granulaires Denses", *GRECO GEOMATERIAUX Rapport scientifique* 1991
- [18] GOURVES R. & ABRIAK N. "Micromécanique des milieux granulaires, Etat des possibilités offertes au plan expérimental" *GRECO GEOMATERIAUX Rapport scientifique* 1991
- [19] CAMBOU B. "Modélisation micromécanique des matériaux granulaires; Eléments de base", *GRECO GEOMATERIAUX, Rapport scientifique* 1991
- [20] BIAREZ J.- MEFTAH W. "De l'Ordre au "désordre" dans les milieux granulaires bidimensionnels", *GRECO GEOMATERIAUX Rapport scientifique* 1991

- [21] CAILLERIE DENIS "Tenseur des contraintes dans un milieu granulaire" GRECO GEOMATERIAUX Rapport scientifique 1991
- [22] CAMBOU B.- SIDOROFF F.& MAHBOUBI A. "Milieux Continus- Milieux Granulaires, Comparaison des distributions des variables statiques, conséquences sur le comportement, GRECO GEOMATERIAUX Rapport scientifique 1991
- [23] ROUX STEPHANE "Structure du squelette d'un milieu granulaire modèle", GRECO GEOMATERIAUX, Rapport scientifique 1991
- [24] CAMBOU B., "Analyses du comportement des milieux granulaires basées sur leur nature discontinue", Revue Française de Géotechnique N° 14
- [25] JRAD Monia "Etude expérimentale du comportement mécanique de granulats calcaires", Thèse de doctorat de l'INPL, Oct. 1993
- [26] SCHLOSSER François "Mécanique des Sols", Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées
- [27] THORNTON C. and RANDALL C.W. "Applications of theoretical contact mechanics to solid particle system simulation", Micromechanics of Granular Materials, edited by M. Satake and J.T. Jenkins, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1988.
- [28] BOLTON M. D. & WILSON J. M. R. "Soil stiffness and dampig", Structural Dynamics, Kratzig et al. (eds) 1990 Balkema, Rotterdam.
- [29] CHOI S. K. & MUHLHAUS H-B. "Distinct Elements vs Cosserat theory: A comparison for the case of an infinite shear layer", Computer Method and Advances in Geomechanics, Beer, Booker & Carter (eds) 1991 Balkema, Rotterdam.
- [30] MUHLHAUS H. B. & DE BORST R. & AIFANTIS E.C "Constitutive models and numerical analyses for inelastic materials with microstructure", Computer Method and Advances in Geomechanics, Beer, Booker & Carter (eds) 1991 Balkema, Rotterdam.
- [31] HAKUNO M. & YAMAMOTO T. "Simulation analysis of dynamic nonlinear behavior of underground structures by the

extended distinct element method", Computer Method and Advances in Geomechanics, Beer, Booker & Carter(eds)1991 Balkema, Rotterdam.

- [32] MASUYA H. & KAJIKAWA Y. "Numerical analysis of the collision between a falling rock and a cushion by distinct element method", Computer Method and Advances in Geomechanics, Beer, Booker & Carter (eds)1991 Balkema, Rotterdam.
- [33] SAWADA Sumio, PRADHAN Tej B.S.& IWASAKI Yoshinori "Simple shear simulations of sand using D.E.M.", Computer Method and Advances in Geomechanics, Beer, Booker & Carter (eds) 1991 Balkema, Rotterdam.
- [34] CHEN Yao-Chung & HUNG Hsiu-Yen "Evolution of shear modulus and fabric during shear deformation", Computer Method and Advances in Geomechanics, Beer, Booker & Carter (eds) 1991 Balkema, Rotterdam.
- [35] MINDLIN R. D. & DERESIEWICZ H. "Elastic Spheres in Contact Under Varying Oblique Forces", New York, N. Y. Journal of applied mechanics (sep. 1953)
- [36] KENNETH W. WINKLER "Contact Stiffness in Granular Porous Materials: Comparison between Theory and Experiment", Geophysical Research Letters, vol. 10, NO. 11, pages 1073-1076, NOV. 1983
- [37] VARDOULAKIS I. "Shear-banding and liquefaction in granular materials on the basis of a Casserat continuum theory", Ing. Arch. 59 (1989) 106-113.
- [38] MOHKAM Mohsen "Contribution à l'étude expérimentale et théorique du comportement des sables sous chargement cycliques", Thèse de doctorat de l'université de Grenoble (INPG), Avril 1983
- [39] DUTHILLEUL Bertrand "Rupture progressive: simulation physique et numérique", Thèse de Doctorat de l'université de Grenoble (INPG), Dec. 1983
- [40] CHEN Yao-Chung "Effect of Inter-Particle Friction and Initial Fabric on Fabric Evolution", Journal of the Chinese Institute of Engineering. vol. 13, No. 2, pp. 147-156, 1990

- [41] THOMPSON P.A. and GREY G.S. "Granular Flow: Friction and the Dilatancy Transition", Physical Review Letters, volume 67, No. 13, 23 Sep. 1991
- [42] MEZGHANI Fathi "Milieux Granulaires, Analyse Statistique de l'état de Contrainte Macroscopique au sein d'un Milieu Analogique", Thèse de Doctorat de l'Université de Clermont II, Fév. 1987
- [43] SCHLOSSER F. "Influence des déformations des grains dans les milieux granulaires", Bull. liaison labo. P. et Ch.- 69, jan.-fév. 1974-Réf. 1418
- [44] TRIANTAFYLIDIS N. & AIFANTIS E. C. "A gradient approach to localization of deformation", I. Hyperelastic materials. J. Elasticity 16 (1986) 225-237.
- [45] JEAN M. "Simulation Numérique des Matériaux Granulaires", LMGC CNRS Montpellier, 29 mai 1993
- [46] YEMMAS Rachida "Simulation Numériques des Matériaux Granulaires", Thèse de Doctorat de l'université Montpellier II, Dec. 1993
- [47] OGER L. "Résumé de ma participation au GRECO GEOMATERIAUX" GRECO GEOMATERIAUX Rapport scientifique 1993?
- [48] GHERBI M., GOURVES R. & OUDJEHANE F. "Distribution of the contact forces inside a granular material", Laboratoire de Génie Civil, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France
- [49] UEMURA Daisuke and HAKUNO Motohiko "Granular Assembly Simulation with Cundall's Model for the Dynamic Collapse of the Structural Foundation", Structural Eng. / Earthquake Eng. Vol. 4. NO. 1, s- s. April 1987 Japan Society of Civil Engineers (Proc. of JSCE No. 380 / I-7)
- [50] Gili A. & Alonso E.E. "Discontinuous numerical model for partially saturated soils at low saturation", Numerical Methods in Geomechanics (Innsbruck 1988), Swwoboda (ed.) 1988 Balkema, Rotterdam.
- [51] GOURVES Roland & MEZGHANI Fathi "Micromécanique des milieux granulaires approche expérimentale utilisant le modèle de Schneebeli", Revue Française de Géotechnique N° 42

- [52] BASHIR Y. M. and GODDARD J. D. "A novel simulation method for the quasi-static mechanics of granular assemblages", by The Society of Rheology, Inc. *J. Rheol* 35(5), July 1991
- [53] THORNTON C. & BARNES D.J. "On the mechanics of granular material", IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Materials /Delft /31 Aug.-3 Sept. 1982
- [54] BARDET J.P. & PROUBET J. "Application of micromechanics to incrementally nonlinear constitutive equations for granular media", *Powders and Grains*, Biarez & Gourvès (eds), (1989) Balkema, Rotterdam.
- [55] JENKINS J.T., CUNDALL P.A. & ISHIBASHI I. "Micromechanical modeling of granular materials with the assistance of experiments and numerical simulations", *Powders and Grains*, Biarez & Gourvès (eds), (1989) Balkema, Rotterdam.
- [56] CUNDALL P.A., JENKINS J.T. & ISHIBASHI I. "Evolution of elastic moduli in a deforming granular assembly", *Powders and Grains*, Biarez & Gourvès (eds), (1989) Balkema, Rotterdam.
- [57] CHEN Yao-Chung & HWANG Gwo-Chung "Studies of the behavior of granular material and its fabric evolution", *Powders & Grains* 93, Thomton(ed.) 1993 Balkema, Rotterdam.
- [58] KAWAMURA M., HAJOUTA H. & OHASHI Y. "Three dimensional analysis for effect of particle arrangement on cyclic deformation of a granular material", *Powders & Grains* 93, Thomton(ed.) 1993 Balkema, Rotterdam.
- [59] ROTHENBURG L., BATHURST R.J. and BERLIN A.A. "Micromechanical response of simulated granular materials under principal stress rotations", *Powders & Grains* 93, Thomton(ed.) 1993 Balkema, Rotterdam.
- [60] THORNTON C. "Computer-Simulated Experiments on Particulate Materials"
- [61] THORNTON C. & SUN G. "Axisymmetric compression of 3D polydisperse systems of spheres", *Powders and Grains* 93, Thornton(eds), 1993 Balkema, Rotterdam.

- [62] ISHIBASHI Isao and CHEN Yao-Chung "Dynamic Shear Moduli and Their Relationship to Fabric of Granular Materials", *Micromechanics of Granular Materials*, edited by M. Satake and J.T. Jenkins, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1988.
- [63] CUNDALL P. A, "Formulation of a Three-dimensional Distinct Element Model- Part I. A Scheme to Detect and Represent Contacts in a System Composed of Many Blocks", *Int. J. Rock Meck. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* Vol. 25, No. 3, pp. 107-116, 1988.
- [64] HART R., CUNDALL P. A., LEMOS J., "Formulation of a Three-dimensional Distinct Element Model-Part II. A Scheme to Detect and Represent Contacts in a System Composed of Many Blocks", *Int. J. Rock Meck. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* Vol. 25, No. 3, pp. 117-125, 1988.
- [65] JENKINS James T. "Volume Change Small Strain Axisymmetric Deformations of A Granular Material", *Micromechanics of Granular Materials*, edited by M. Satake and J.T. Jenkins, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1988.
- [66] ODA M., KONISHI J. and NEMAT-NASSER S. "some experimentally based fundamental results on the mechanical behaviour of granular materials", 1980, *Géotechnique* 30, No. 4, 479-495
- [67] DESRUES Jacques "La Localisation de la Déformation dans les Matériaux Granulaires", Thèse de Doctorat de l'université de Grenoble(INPG), Juin 1984
- [68] CAMPBELL CHARLES S. "Boundary Interaction for Two-dimensional Granular Flows: Asymmetric Stresses and Couple Stresses" *Micromechanics of Granular Materials*, edited by M. Satake and J.T. Jenkins, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1988.
- [69] THORNTON C. and YIN K. K. "Impact of elastic spheres with and without adhesion", *Powder Technology*, 65, 153-166, 1991.
- [70] KOLYMBAS D. and WU W. "Recent Results of Triaxial Tests with Granular Materials", *Powder Technology*, 60, 99- 119, 1990.

- [71] NGUYEN CHANH "Etude Expérimentale de la Poussée et de la Butée des Terres", publication N° 68-5 dans le N° IV de 1968 des Annales des Ponts et Chaussées.
- [72] DESRUES J. "Naissance des Bandes de Cisaillement dans les Milieux Granulaires: Expérience et Théorie", Manuel de Rhéologie des Géomatériaux , Presses de l'école nationale des Ponts et Chaussées 1987.
- [73] CHAMBON R. & DESRUES J. "Bifurcation par Localisation et Non Linéarité Incrementale: Un Exemple Heuristique d'Analyse Complete", Institut de Mécanique de Grenoble, France.
- [74] "Etude de Deux Types de Bifurcation sur des Sables, Effets Géométriques et Matériels", 5ème Symposium Franco-Polonais de Mécanique, Rydzyna, Juin 1984.
- [75] BARDET J.P. "Observations on the effects of particle rotations on the failure of idealized granular materials", *Mechanics of Materials* 18, 159-182 Elsevier, 1994.
- [76] LUONG Minh Phong "Flowability Index of Stored Bulk Food Products", CNRS 317, Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau, France.
- [77] LUONG Minh Phong "Phénomènes Cycliques dans les Sols Pulvérulents", *Revue Française de Géotechnique* Numéro 10.
- [78] CORDARY Daniel " Mécanique des Sols", Lavoisier-Tec & Doc, 1994.
- [79] OYENUGA D. "Comportement de l'Interface Sol Pulverulent /Acier", Thèse, Institut National Polytechnique de Lorraine Nancy, 1989.
- [80] VARDOULAKIS I. "Bifurcation Analysis of the Triaxial Test on Sand Samples", *Acta Mechanica* 32, pp. 35-54, 1979.
- [81] VARDOULAKIS I., GOLDSCHIEDER M. and GUDEHUS G. "Formation of Shear Bands in Sand Bodies as a Bifurcation Problem", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.* 2, pp. 99-128, 1978.
- [82] HANSEN BENT "Line Rupture Regarded as Narrow Rupture Zones", *Comptes Rendus de la Conférence sur les Problèmes de Poussée des Terres, Bruxelles*, Tome 1 pp. 39-49, 1958.

- [83] VARDOULAKIS I. "Shear Band Inclinaison and Shear Modulus of Sand in Biaxial Tests.", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.* 4, pp. 103-109, 1980.
- [84] ARTHUR I.R.F., DUNSTAN T., AL-ANI Q.A.J.L., ASSADI A. "Plastic Deformation and Failure in Granular Media", *Geotechnique* 27, pp. 53-74, 1977.
- [85] ABRIAK Nor-Edine "Ecoulement d'un Matériau Granulaire a travers un Orifice: Effet de Paroi", Thèse de l'Université des Sciences et Techniques de Lille-Flandres-Artois, 1991.
- [86] ABRIAK Nor-Edine "Etude Cinématique et Statique des Matériaux Granulaires", Habilitation à Diriger des Recherches, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1993.
- [87] KISHINO Y. "Computer analysis of dissipation mechanism in granular media", *Powders and Grains*, Biarez & Gourvès (eds), Balkema, Rotterdam, 1989
- [88] KHELIL Abdelouahab "Etude du champ de vitesses et de contraintes dans les silos métalliques", Thèse de doctorat de l'I.N.P.L, Nancy, 1989.
- [89] LANIER J., BONNET P.C. & REYNAUD M. "Etude des Mécanismes de Déformation d'un Milieu Granulaire Bidimensionnel", *Geo* 94, 1994, Laboratoire 3S, BP 53, 38041- Grenoble Cedex 9.
- [90] LANIER J. "Essai de Compression GCV1", Laboratoire 3S, BP 53, 38041- Grenoble Cedex 9.
- [91] HAMMAD Walid Ismail "Modélisation non linéaire et étude expérimentale des bandes de cisaillement dans les sables", Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I, 1991.
- [92] ROSCOE K. H. "The Influence of Strain in Soil Mechanics", *Geotechnique* 20, No. 2, pp. 129-170, 1970.
- [93] HAMMAD W. "Localisation de la Déformation au Biaxial", Mémoire de D.E.A. I.N.P. Grenoble, 1987.
- [94] TATSUOKA F., NAKAMURA S., HUANG C. C. et TANI K. "Strength Anisotropy and Shear Band Direction in Plane Strain Tests of Sand", *Soil and Foundations*, vol. 30, No. 1, pp. 35-54, 1990.

- [95] HABIB P. et LUONG M.P. "Sols Pulvérulents sous Chargement Cyclique", matériaux et structure sous chargement cyclique, Palaiseau, 28 et 29 Septembre 1978, Association Amicale des Ingénieurs Anciens Elèves de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.
- [96] HABIB Pierre "Précis de Géotechnique", Applications de la Mécanique des Sols et des Roches, 1982, 1<sup>ère</sup> édition 1973.
- [97] SCARPELLI G. et WOOD D. M. "Experimental Observations of Shear Band Patterns in Direct Shear Tests", IUTAM, Conf. def. fail. gran. mat., pp. 485-491, Delft, 1982.
- [98] VARDOULAKIS I. & GRAF B. "Calibration of Constitutive Models for Granular Materials with Data from Biaxial Experiments", Géotechnique 35, No. 3, pp. 299-317, 1985.
- [99] CAMBOU B. "Approche du comportement d'un sol considéré comme un milieu non continu", Thèse de doctorat, Lyon, 1979.
- [100] ABRIAK N. E. et MAHBOUBI A. "Influence du frottement local sur le frottement global", Rapport scientifique, GRECO GEOMATERIAUX, 23-27 Nov. 1992.
- [101] ABRIAK N. E. "Local friction effect on the global behaviour of granular media", GRECO GEOMATERIAUX, 2<sup>ème</sup> Contact Mechanics International Symposium, Carry-le-Rouet, France, Sep. 19-23, 1994.
- [102] KHATI S. et ABRIAK N. E. "Micromécanique des matériaux granulaires: Analyse expérimentale de la localisation", 2<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique, Casablanca, 10-14 Avril 1995, Maroc.
- [103] GANIOU F. et ABRIAK N. E. "Mechanical behaviour and geometry disorder of geomaterials", First forum of young european researchs, from microscopic to macroscopic in mechanics of material, 18-23 July, Liège, Belgique, 1994.
- [104] Oda M., Nemat-Nasser S. and Mehrabadi M. M. "A statistical study of fabric in a random assembly of spherical granules", Int. J. Num. Anal. Meth. Geomechanics 6 (1982) 77-94.
- [105] CAQUOT A. et KERISEL J. "Traité de mécanique des sols" 4<sup>ème</sup> Edition, 1966.