



**HAL**  
open science

# Méthodes asymptotiques-numériques pour le calcul de bifurcations de Hopf et de solutions périodiques

My El Hassan Ben Saadi

► **To cite this version:**

My El Hassan Ben Saadi. Méthodes asymptotiques-numériques pour le calcul de bifurcations de Hopf et de solutions périodiques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1995. Français. NNT : 1995METZ047S . tel-01777099

**HAL Id: tel-01777099**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777099v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

b 81878

# I S G M P

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

## THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

***M E Hassan BEN SAADJ***

Pour l'obtention du grade de :  
**DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ**

**SPECIALITE : Mathématiques appliquées**  
**OPTION : Mécanique**

### METHODES ASYMPTOTIQUES-NUMERIQUES POUR LE CALCUL DE BIFURCATIONS DE HOPF ET DE SOLUTIONS PERIODIQUES

Soutenu le 30 Mars 1995 devant le Jury composé de :

- |                   |                    |
|-------------------|--------------------|
| J. P. GUIRAUD     | Rapporteur         |
| P. MANNEVILLE     | Rapporteur         |
| B. COCHELIN       | Examineur          |
| C. FRESSENGEAS    | Président          |
| J. PLANCHARD      | Examineur          |
| M. POTIER-FERRY   | Directeur de thèse |
| O. SERO-GUILLAUME | Examineur          |

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE SCIENCES ET TECHNIQUES - METZ -	
N° Inv.	19950975
Cote	S/M3 95/47
Loc.	Magasin
Cat	

**Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux**  
U. R. associée au C.N.R.S., n° 1215  
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01

## REMERCIEMENTS

C'est au sein du laboratoire de Physique et Mécanique de Matériaux de l'Université de Metz que j'ai réalisé ce travail sous la direction de Monsieur Michel POTIER-FERRY.

Je voudrais tout d'abord adresser ma gratitude et ma reconnaissance à Michel POTIER-FERRY. Son enthousiasme, sa compétence scientifique et sa grande disponibilité m'ont beaucoup servi. Je l'en remercie.

Monsieur J. P. GUIRAUD et Monsieur P. MANNEVILLE ont accepté d'examiner et de porter leur jugement sur ce travail. Je tiens à les remercier très vivement.

Je remercie également Monsieur B. COCHELIN, Monsieur C. FRESSENGEAS, Monsieur J. PLANCHARD et Monsieur O. SERO-GUILLAUME pour avoir bien voulu participer au jury de cette thèse. J'en suis particulièrement honoré.

Enfin je remercie, mes parents, mes frères et mes soeurs pour m'avoir continuellement aidé et soutenu.

## TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>1</b>
<b><u>PREMIERE PARTIE: VIBRATIONS NON LINEAIRES</u></b>	
<b>ET CALCULS DE SOLUTIONS PERIODIQUES PAR</b>	
<b>UNE METHODE ASYMPTOTIQUE-NUMERIQUE.....</b>	<b>5</b>
<b>I) RAPPELS SUR LES VIBRATIONS NON LINEAIRES</b>	<b>6</b>
I-1) Introduction.....	6
I-2) Systèmes conservatifs et vibrations libres.....	6
I-3) Méthode de Poincaré-Lindstedt.....	15
I-4) Oscillations simples non linéaires en régime forcé.....	19
I-5) Systèmes dissipatifs et oscillations auto-entretenues.....	22
I-5-1) Généralités.....	22
I-5-2) Oscillateur de Van der Pol.....	24
I-5-3) Un système mécanique gouverné par l'équation de Van der Pol.....	26
I-5-4) Résolution par la méthode des échelles multiples.....	27
I-6) Conclusion.....	30
<b>II) METHODE ASYMPTOTIQUE-NUMERIQUE (M.A.N)</b>	<b>32</b>
II-1) Introduction.....	32
II-2) Présentation de la méthode asymptotique-numérique.....	33
II-2-1) La technique de perturbation.....	33
II-2-2) Résolution par éléments finis.....	35
II-2-3) Calcul de la branche bifurquée.....	36
II-2-4) Calcul de bifurcation perturbée.....	38
II-2-5) Détection des points de bifurcation.....	38

II-3) Exemples d'applications.....	39
II-4) Techniques d'amélioration d'une série.....	41
II-4-1) Généralités sur les approximants de Padé.....	41
II-4-2) Utilisation des approximants de Padé dans les M.A.N..	43
II-4-2-1) Réorganisation de la représentation de la fonction vectorielle $U(a)$ .....	43
II-4-2-2) Réorganisation de la représentation de la fonction scalaire $\lambda(a)$ : technique de projection..	45
II-4-3) Autres techniques.....	47
II-5) Conclusion.....	47

### III) CALCULS DE SOLUTIONS PERIODIQUES

<b>D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINAIRES..</b>	<b>48</b>
III-1) Introduction.....	48
III-2) Cadre de l'étude.....	49
III-3) Application de la méthode asymptotique-numérique aux équations conservatives.....	50
III-3-1) Principe de la méthode.....	50
III-3-2) Représentation par les séries entières.....	51
III-3-3) Une nouvelle représentation utilisant les approximants de Padé.....	54
III-3-3-1) Principe de la représentation.....	54
III-3-3-2) Application des approximants de Padé à l'équation (III-1).....	55
III-3-3-3) Réorganisation de la solution périodique de l'équation (III-2) par les approximants de Padé.....	57
III-3-4) Amélioration de la pulsation de l'équation (III-2) grâce à une technique de projection.....	62

III-3-4-1) Utilisation des approximants de Padé	62
III-3-4-2) Réorganisation de la pulsation à l'aide d'une technique de projection.....	64
III-3-5) Utilisation de la transformation d'Euler.....	66
III-3-5-1) Description de la transformation.....	66
III-3-5-2) Application à la pulsation de l'équation (III-2).....	66
III-4) Application de la méthode asymptotique-numérique l'équation de Van der Pol.....	69
III-4-1) Calcul par le développement asymptotique.....	69
III-4-2) Utilisation des approximants de Padé.....	72
III-4-2-1) Analyse de la pulsation.....	73
III-4-2-2) Analyse de l'amplitude.....	73
III-4-2-3) Analyse de la solution périodique.....	76
III-5) Conclusion.....	81

**DEUXIEME PARTIE: RAPPELS ET CALCULS DES POINTS DE BIFURCATION DE HOPF PAR UNE METHODE ASYMPTOTIQUE-NUMERIQUE**

<b>IV) RAPPELS SUR LA BIFURCATION DE HOPF.....</b>	<b>84</b>
IV-1) Introduction.....	84
IV-2) Théorie de bifurcation de Hopf.....	85
IV-2-1) Un exemple de bifurcation de Hopf.....	85
IV-2-2) Théorème de bifurcation de Hopf et interprétations..	87
IV-2-3) Une application du théorème de Hopf.....	90
IV-3) Stabilité des branches de solutions périodiques.....	92
IV-3-1) Discussion sur l'instabilité et conséquences.....	92
IV-3-2) Exemples d'oscillateurs avec des bifurcations	

de Hopf.....	95
IV-4) Calcul asymptotique de la branche périodique à partir du point de bifurcation de Hopf.....	97
IV-4-1) Rappel.....	97
IV-4-2) Calcul asymptotique du cycle bifurqué.....	99
IV-5) Conclusion.....	103

## **V) DETERMINATION DES POINTS DE BIFURCATION DE HOPF PAR UNE M.A.N.....**

<b>HOPF PAR UNE M.A.N.....</b>	<b>104</b>
V-1) Introduction.....	104
V-2) Une caractérisation des points de bifurcation de Hopf.....	106
V-2-1) Principe de la méthode.....	106
V-2-2) Un algorithme de suivi de valeurs propres?.....	108
V-2-3) Un indicateur de bifurcation de Hopf.....	110
V-2-4) Propriétés de l'indicateur de bifurcation.....	112
V-3) Calcul de l'indicateur de bifurcation par une méthode asymptotique-numérique.....	120
V-3-1) Représentation de l'indicateur par des séries entières.....	120
V-3-2) Représentation de l'indicateur de bifurcation par des approximants de Padé.....	124
V-3-2-1) Principe de la représentation.....	124
V-3-2-2) Une stratégie pour représenter l'indicateur de bifurcation à l'aide d'approximants de Padé.....	125
V-3-3) Quelle stratégie pour un système à grand nombre de degrés de libertés.....	127
V-4) Exemples d'applications.....	128
V-4-1) Premier exemple.....	128
V-4-2) Deuxième exemple.....	130
V-4-3) Troisième exemple.....	133



V-4-4) Quatrième exemple.....	137
V-5) Conclusion.....	139
<b>VI) APPLICATION DE LA M.A.N AUX EQUATIONS DE</b>	
<b>NAVIER-STOKES.....</b>	<b>141</b>
VI-1) Introduction.....	142
VI-2) Formulation du problème de Navier-Stokes.....	143
VI-3) Application de la M.A.N aux équations de Navier-Stokes.	146
VI-3-1) Représentation de l'écoulement stationnaire par des	
séries entières.....	146
VI-3-2) Détection des points de bifurcation de Hopf.....	149
VI-3-3) Représentation de la solution bifurquée par des séries	
entières.....	151
VI-4) Conclusion.....	153
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>154</b>

## **REFERENCES**

## Introduction

Ces dernières décennies l'analyse des phénomènes de stabilité et de bifurcation en mécanique non linéaire a mobilisé un grand nombre de chercheurs aussi bien en mécanique des structures qu'en mécanique des fluides . Cela est dû, à la forte utilisation de ces modèles dans des domaines à caractère industriel.

En statique, le calcul non linéaire des structures minces de type poutres, plaques et coques est dominé par les méthodes de résolution incrémentales-itératives ou méthodes de prédiction-correction, dont la plus populaire est la méthode de Newton-Raphson. La plupart des algorithmes de détection des points de bifurcation, du mode de bifurcation et de branchement sur les solutions bifurquées ont été développés dans cet esprit. Or ces méthodes sont coûteuses en temps de calcul et nécessitent un utilisateur averti pour contrôler le déroulement des calculs. Pour ces raisons, on a étudié à METZ une autre technique qui associe une méthode de perturbation et une technique d'éléments finis (Méthodes Asymptotique-Numériques). Le premier travail significatif de cette association a été proposé par N.Damil et M.Potier-Ferry (1990), ce qui a montré la simplicité et l'efficacité de la méthode. Plus tard, plusieurs applications ont été réalisées pour mettre en évidence les performances de la méthode (L. Azrar, B. Cochelin, N. Damil et M. Potier-Ferry; 1993), (B.Cochelin, N.Damil et M.Potier-Ferry; 1993, 1994), (B.Cochelin, 1993), (E.H.Bouty, B.Cochelin, M.Potier-Ferry, 1994).

En dynamique, des méthodes numériques de calcul des points de bifurcation de Hopf et de solutions périodiques ont été utilisées dans des situations géométriques particulières, soit dans des domaines de révolution (Y. DEMAY et G. IOOSS, 1985) ou dans des bandes infinies (P. LAURE et Y. DEMAY, 1989). Mais on trouve peu de travaux sur des méthodes

numériques applicables dans des situations génériques ( comme la méthode des éléments finis).

Notre objectif dans ce mémoire de thèse est de suivre l'esprit asymptotique-numérique des procédures appliquées en statique (thèse de B.Cochelin, 1994), (thèse de E.H.Boutyour, 1994). Ici, on essaye d'adapter ces procédures au calcul des solutions périodiques de certains problèmes conservatifs ou dissipatifs et à la détection des points de bifurcation de Hopf en vue d'application à des systèmes dissipatifs à grand nombre de degrés de liberté.

Ce document comprend deux parties:

La première partie qui est composée de trois chapitres permettra de tester l'applicabilité des méthodes asymptotiques numériques au calcul des solutions périodiques en temps. Le premier chapitre, fait l'objet d'une étude bibliographique, dans laquelle sont expliquées les particularités et les caractéristiques propres de solutions périodiques de différents modèles dynamiques non linéaires. Ainsi, il y a un rappel détaillé des méthodes analytiques envisageables pour la résolution des problèmes proposés. Il s'agit de la méthode de Poincaré-Lindstedt et de la méthode des échelles multiples. Le deuxième chapitre présente une méthode asymptotique-numérique et les différentes étapes permettant de ramener la résolution d'un problème non linéaire d'équilibre à la résolution d'une succession de problèmes linéaires. Cette résolution nécessite l'inversion d'une seule matrice. Aussi, on rappelle les applications de cette méthode en statique pour les modèles poutres, plaques et coques. Diverses techniques d'accélération de convergence comme les approximants de Padé (thèse de B. COCHELIN, 1994) ou la transformation d'Euler (M.B. DADFAR et J.F.

GEER, 1987) sont également rappelées. Dans le troisième chapitre, on calcule les solutions périodiques à l'aide du système Maple par la méthode de Poincaré- Lindstedt, en choisissant deux équations conservatives simples,

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0; \quad \ddot{x} + x + x^3 = 0 \text{ avec les conditions initiales:}$$
$$x(0) = \varepsilon \text{ et } \dot{x}(0) = 0,$$

et l'équation de Van der Pol,  $\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}$ .

Les séries périodiques de ces équations sont calculées jusqu'à un ordre élevé en utilisant le système de calcul formel Maple, qui nous a permis d'établir des relations de récurrence. Puis, elles sont améliorées par les techniques citées au chapitre II. Ces exemples simples fournissent les premiers tests en vue de l'application des méthodes asymptotiques-numériques aux problèmes dynamiques, ainsi qu'une évaluation de l'efficacité des diverses techniques d'amélioration de la convergence.

Dans la deuxième partie qui est aussi constituée de trois chapitres, on s'intéresse au calcul numérique des bifurcations de Hopf. Le chapitre quatre décrit d'une manière détaillée la théorie de la bifurcation de Hopf qui est illustrée par divers exemples tirés du livre de R. SEYDEL, (1981). Dans le chapitre V, sont présentés des algorithmes de type asymptotiques-numériques pour détecter les points de bifurcation de Hopf. Ils sont comparables à ceux utilisés en statique ( thèse de E.H.BOUTYOUR, 1994). En effet, nous définissons un indicateur de bifurcation dépendant de deux paramètres et qui permet de détecter ces points de bifurcations. Nous proposons aussi des techniques asymptotiques-numériques permettant de le calculer. L'efficacité de ces algorithmes est testée sur des équations différentielles ordinaires à petit nombre de degrés de libertés. Le chapitre

VI fait l'objet d'une description complète des équations aux dérivées partielles de Naviers-Stokes admettant une non linéarité quadratique, en signalant les méthodes asymptotiques-numériques envisageables pour le calcul des solutions stationnaires, la détermination des points de bifurcation de Hopf et des solutions périodiques bifurquées.

**PREMIERE PARTIE**

**VIBRATIONS NON LINEAIRES ET  
CALCULS DE SOLUTIONS PERIODIQUES  
PAR UNE METHODE ASYMPTOTIQUE-NUMERIQUE**

## I) RAPPELS SUR LES VIBRATIONS NON LINÉAIRES

### I-1) Introduction

En sciences pour l'ingénieur, la plupart des problèmes de vibrations sont non linéaires. En effet, les forces de rappel ne sont pas proportionnelles au déplacement, les amortissements ne sont pas proportionnels à la vitesse et la prise en compte exacte de la géométrie conduit à des relations non linéaires. Toutes ces non linéarités font apparaître des bifurcations, des résonances, des mouvements périodiques, non périodiques, chaotiques,.....

Les vibrations non linéaires jouent un rôle très important dans l'analyse de plusieurs problèmes en mécanique, en électromécanique, en mécanique des fluides et en électricité. Ces problèmes concernent des oscillations libres, forcées ou auto-entretenues. C'est pour cela, que ces dernières décennies, on a étendu l'étude de ce domaine, en utilisant de nouvelles méthodes d'approches analytiques, numériques. Nous renvoyons le lecteur à quelques papiers traitant ces problèmes dynamiques non linéaires: L.K.Forbes (1989); S. Talwar et N.N. Sri, (1992).....

Dans ce chapitre, on va rappeler quelques propriétés fondamentales concernant les oscillations libres, forcées ou auto-entretenues, ainsi que les différentes méthodes analytiques d'approximation. On mettra l'accent sur la recherche de solutions périodiques et on se limitera dans ce premier chapitre à des exemples simples à un degré de liberté.

### I-2) Systèmes conservatifs et vibrations libres

Dans cette partie, on se limite aux systèmes conservatifs à un seul degré de liberté, dont les solutions s'expriment sous forme d'intégrales elliptiques.

L'équation différentielle régissant les vibrations libres avec une force de rappel non linéaire s'écrit:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = 0$$

où  $x$  est le déplacement et  $F$  est la force de rappel non linéaire.

Pour les faibles déplacements, on peut approcher la fonction  $F(x)$  par un développement de Taylor:

$$F = Kx \pm K'x^2 \pm K''x^3 \pm \dots$$

En effet, la première approximation de Hooke n'est pas toujours suffisante: souvent le déplacement  $x$  croît plus vite que l'effort  $F$ , puis survient la rupture en  $R$  (fig I-1).

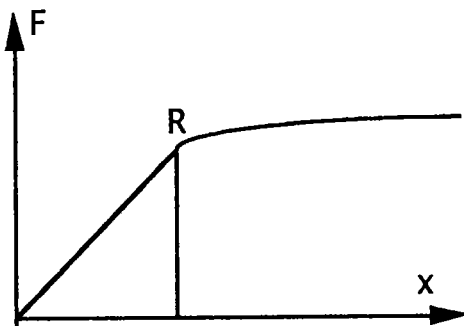


Figure I-1.

Pour mieux comprendre l'influence de la non linéarité, considérons deux modèles conservatifs simples non linéaires dont la solution est classique.

On étudie d'abord les mouvements du pendule simple (figure I-2) relâché sans vitesse à partir d'un angle initial  $\theta_m$ .



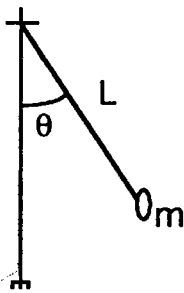


Figure I-2.

Bien entendu, le pendule aura un mouvement périodique,  $\theta(t)$  oscillant entre les valeurs extrêmes  $\pm\theta_m$ . Ce mouvement est décrit par l'équation suivante:

$$J\ddot{\theta} + mgL \sin \theta = 0, \quad (\text{I-1-a})$$

ou pour  $\theta$  assez petit,

$$J\ddot{\theta} + mgL\left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots\right) = 0. \quad (\text{I-1-b})$$

Son énergie potentielle,

$$W_p = mgL(1 - \cos \theta),$$

passé par un maximum lorsque le pendule atteint son amplitude maximale  $\theta = \pi$  (fig I-3).

On trouvera d'autres exemples comparables dans l'étude des vibrations moléculaires, en électricité, en optique, en physique atomique, etc..

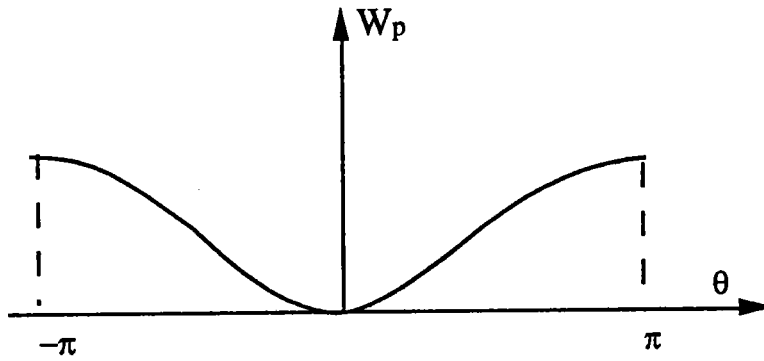


Figure I-3.

Généralement, il y a peu d'équations non linéaires dont on connaisse la solution générale. C'est le cas de l'équation (I-1) qui donne, par intégration :

$$\frac{J}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mgL (\cos \theta - \cos \theta_m).$$

On peut résoudre cette équation en cherchant le temps  $t$  en fonction de  $\theta$  :

$$\sqrt{\frac{mgL}{J}} dt = \frac{2\pi}{T_0} dt = \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_m)}} = \frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{\sin^2 \frac{\theta_m}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}.$$

où  $T_0$  est la période du pendule pour des petites oscillations.

Lorsque  $\theta$  varie entre 0 et  $\theta_m$ , on décrit un quart de la période, on peut donc évaluer la période  $T$  en intégrant cette dernière relation entre 0 et  $\theta_m$ .

Avec les changements de variables  $\varepsilon = \theta_m$  (pour simplifier les notations) et

$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \varphi$ , on obtient:

$$\frac{2\pi T}{T_0} \frac{1}{4} = \int_0^\varepsilon \frac{d\theta}{2\sqrt{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \varphi}}.$$

Cela signifie que la période est inconnue et dépend de l'amplitude  $\varepsilon$ . C'est une loi générale des systèmes non linéaires. On peut déterminer donc une forme analytique approximative de cette période en faisant un développement de

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \varphi}} \text{ au voisinage de } 0. \text{ On aura donc:}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} \sin^4 \frac{\varepsilon}{2} \sin^4 \varphi + \dots \right) d\varphi \\ &= T_0 \left( 1 - \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varepsilon}{2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que  $T$  est une fonction analytique de  $\varepsilon$ .

Pour  $\varepsilon$  assez petit, on obtient une approximation:

$$T(\varepsilon) = T_0 \left( 1 - \frac{1}{16} \varepsilon^2 + \frac{9}{1024} \varepsilon^4 + \dots \right). \quad (I-2)$$

Lorsque, l'amplitude  $\varepsilon$  s'approche des valeurs  $\pm\pi$ , la période  $T(\varepsilon)$  tend vers l'infini ou la pulsation  $\omega(\varepsilon) = 2\pi / T(\varepsilon)$  tend vers zéro. On peut le comprendre en observant la forme des trajectoires dans le plan de phase:

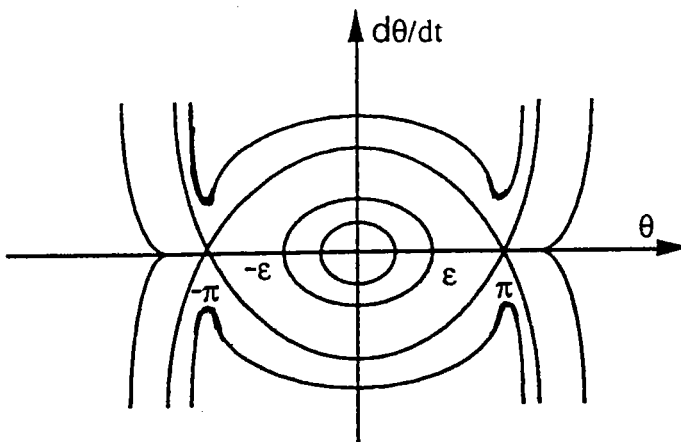


Figure I-4-a: Plan de phase de l'équation (I-1-a)

On remarque d'après la figure (I-4) que les solutions périodiques existent lorsque l'amplitude balaye l'intervalle ouvert  $]-\pi, \pi[$ . Lorsque  $\varepsilon$  tend vers  $\pi$ , la trajectoire périodique s'approche des deux points d'équilibres instables  $\pm\pi$ , ce qui fait tendre la période vers l'infini. On peut se demander si la valeur extrême  $\varepsilon = \pi$  correspond au rayon de convergence de la série entière (I-2) et si cette série donne des valeurs approchées de la période dans tout l'intervalle où la solution périodique existe. On verra au chapitre III que ce n'est pas le cas, mais qu'une bonne approximation peut être obtenue par d'autres techniques.

Considérons toujours l'exemple du pendule simple, mais cette fois-ci, les mouvements sont gouvernés par l'équation approximative de linéarité cubique (I-1-b). Après certains changements de variables, on peut écrire cette équation sous la forme:

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0, \quad (\text{I-3})$$

avec les conditions initiales suivantes:  $x(0) = \varepsilon$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

Dans ce cas, les oscillations périodiques sont données par l'expression:

$$T(\varepsilon) = 4 \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{c + \frac{x^4}{2} - x^2}}, \quad \text{où } c = \varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{2}.$$

*↙ peut être 2c*

Dans le nouveau plan de phase (I-4-b), les mouvements périodiques sont limités par les valeurs  $\pm 1$  au lieu de  $\pm\pi$ . Donc, on peut dire que la période tend vers l'infini ou la pulsation tend vers 0, lorsque  $\varepsilon$  tend vers la valeur 1.

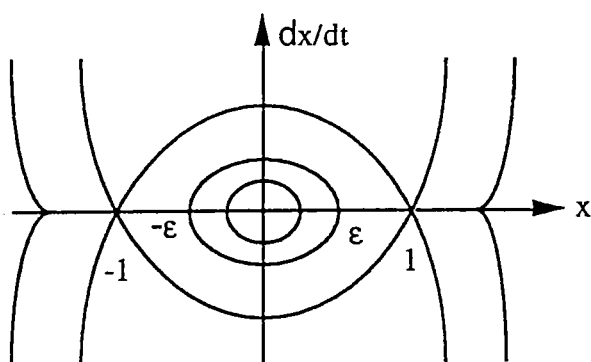


Figure I-4-b: Plan de phase de l'équation (I-3).

Maintenant, on va traiter un autre problème engendrant aussi des oscillations périodiques de période inconnue  $T(\varepsilon)$ : une masse  $m$  est fixée au milieu d'un fil tendu (figure I-5) de tension initiale  $T$  et de longueur  $L$ .

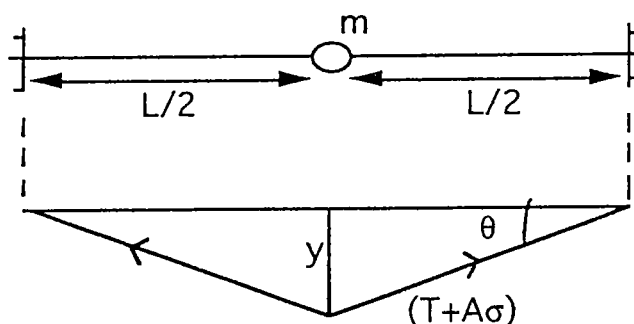


figure I-5.

Pour un déplacement vertical  $y$  de la masse  $m$ , la contrainte  $\sigma$  correspondante dans le fil est:

$$\sigma = E \frac{\sqrt{L^2/4 + y^2} - L/2}{L/2}.$$

Le déplacement  $y$  conduit à une tension variable  $(T+A\sigma)$  du fil, où  $E$  est le module d'élasticité et  $A$  est l'aire de la section transversale. La force de rappel exercée sur la masse  $m$  dans la direction  $y$  est  $2(T+A\sigma)\sin\theta$ , où

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{L^2/4 + y^2}}.$$

Si le déplacement  $y$  est suffisamment petit par rapport à  $L$ , on obtient,

$$\sin \theta = \frac{2y}{L} - \frac{4y^3}{L^2} + O(y^5). \quad (\text{I-4-a})$$

L'équation différentielle du mouvement peut être approchée par:

$$m\ddot{y} + 2y(T + A\sigma)\sin \theta = 0 \quad (\text{I-4-b})$$

En injectant (I-4-a) dans (I-4-b), on obtient:

$$\ddot{y} + \frac{4T}{Lm}y + \frac{8AE}{mL^3}y^3 = 0 \quad (\text{I-5})$$

Avec les transformations suivantes:

$$\omega^2 = \frac{4T}{Lm}, \quad a = \frac{8AE}{mL}, \quad \tau = \omega t, \quad y = \frac{1}{\sqrt{a}}x,$$

l'équation (I-5) s'écrit:

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0 \quad (\text{I-6})$$

Pour définir complètement le mouvement, on a besoin de conditions initiales:

$$x(0) = \varepsilon; \quad \dot{x}(0) = 0$$

Une étude des trajectoires dans le plan de phase montre que l'équation (I-6) admet des solutions périodiques pour tout  $\varepsilon$ .

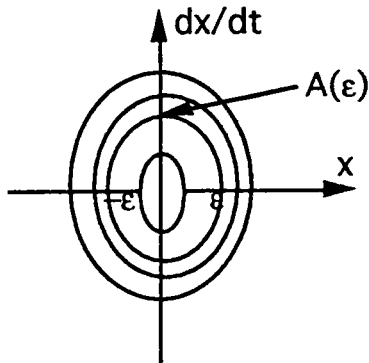


Figure I-6: Plan de phase de l'équation (I-6).

où  $A(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^4 / 2}$  .

La période de ces solutions dépend aussi de l'amplitude , et elle est donnée par l'intégrale inconnue:

$$T(\varepsilon) = 4 \int_0^\varepsilon \frac{dx}{\sqrt{c - x^2 - \frac{x^4}{2}}}, \quad \text{où } c = \frac{\varepsilon^4}{2} + \varepsilon^2.$$

L'étude de deux systèmes conservatifs à un degré de liberté a montré que ces systèmes possèdent des familles continues de solutions périodiques. La période de ces mouvements dépend de l'amplitude, ce qui est caractéristique des systèmes non linéaires. Il est donc intéressant de disposer de techniques pour calculer les solutions périodiques d'équations différentielles et les périodes correspondantes, qui soient aussi applicables pour des systèmes non intégrables. La plus simple de ces techniques est la méthode de Poincaré-Lindstedt, qu'on va présenter maintenant.

### I-3) Méthode de Poincaré-Lindstedt

Considérons l'équation différentielle simple suivante que l'on peut obtenir à partir des deux exemples traités dans le deuxième paragraphe.

$$\ddot{x} + \omega^2_0 x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (\text{I-7})$$

Cette équation peut être résolue d'une manière rigoureuse par l'intermédiaire des intégrales elliptiques, mais si on perturbe ce système, l'analyse exacte serait impossible. On est donc tenté de chercher autres méthodes.

Pour la recherche des solutions périodiques approximatives de ce problème, on peut appliquer la méthode de Poincaré-Lindstedt [34] et [44], qui consiste à chercher les mouvements périodiques de période inconnue et à développer cette période sous forme d'une série entière. En introduisant cette série dans l'équation différentielle (I-7), on détermine par identification les coefficients des différents termes du développement.

Remarque: Cette technique a été appliquée à plusieurs problèmes de physique et de mathématiques. Par exemple, Keller (1968) l'a adaptée à des systèmes d'équations différentielles ordinaires.

On a vu que la période  $T(\varepsilon)$  ou la pulsation  $\omega(\varepsilon) = 2\pi / T(\varepsilon)$  dépendent analytiquement de l'amplitude  $\varepsilon$  (voir paragraphe I-2). L'idée donc est de chercher  $\omega(\varepsilon)$  sous forme polynomiale de  $\varepsilon$ . Également, on développe l'inconnue  $x(t, \varepsilon)$  en série entière de  $\varepsilon$ . On peut visualiser  $\omega(\varepsilon)$  dans l'équation (I-7) au moyen du changement de variable sur le temps  $\tau = \omega(\varepsilon)t$ , qui permet de ramener la période variable à une période fixée,



par exemple  $2\pi$ . Pour qu'on puisse mieux comprendre, on opère ce mécanisme sur cet exemple, qui devient:

$$\omega^2 \ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (\text{I-8})$$

Prenons les conditions initiales  $t=0$ ,  $x = A_0$ ,  $\dot{x} = 0$ .

Supposons  $\varepsilon$  est petit et posons:

$$\begin{aligned} x(\tau, \varepsilon) &= x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + O(\varepsilon^3), \\ \omega^2(\varepsilon) &= \omega^2_0 + \varepsilon \omega_1(A_0) + \varepsilon^2 \omega_2(A_0) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (\text{I-9})$$

où les  $x_i(\tau)$  sont des fonctions de période  $2\pi$  et  $\omega_i$  des coefficients à déterminer.

On reporte (I-9) dans (I-8), on trouve une séquence d'équations différentielles linéaires:

à l'ordre zéro, on obtient :

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0,$$

dont la solution, en tenant compte des conditions initiales s'écrit:

$$x_0(\tau) = A_0 \cos \tau.$$

Les termes contenant  $\varepsilon$  en facteur donnent:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{1}{\omega_0^2} (\omega_1 x_0 + x_0^3). \quad (\text{I-10})$$

En développant le second membre de l'équation (I-10), on arrive à l'équation différentielle suivante:

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\frac{A_0}{\omega_0^2}(\omega_1 + \frac{3}{4}A_0^2)\cos\tau - \frac{A_0^3}{4\omega_0^2}\cos 3\tau, \quad (I-11)$$

qui a pour solution:

$$x_1(\tau) = A_1 \cos(\tau - \varphi_1) - \frac{\tau A_0}{2\omega_0^2}(\omega_1 + \frac{3A_0^2}{4})\cos\tau + \frac{A_0^3}{32\omega_0^2}\cos 3\tau.$$

Les deux conditions initiales  $x_1 = \dot{x}_1 = 0$  pour  $t=0$  donnent: (avec le 3<sup>e</sup> terme nul)

$$A_1 = -\frac{A_0^3}{32\omega_0^2} \text{ et } \varphi_1 = 0.$$

Le second terme de  $x_1(\tau)$  n'est pas périodique, c'est le terme séculaire (initialement, Poincaré avait développé cette méthode pour l'astronomie; les périodes étant très longues à notre échelle humaine, les termes séculaires n'avaient pas la même importance). La suppression de ce terme, revient à l'annulation du terme contenant  $\cos\tau$  en facteur dans le second membre de l'équation (I-11), ce qui implique:

$$\omega_1 = -\frac{3A_0^2}{4}, \text{ par suite } x_1(\tau) = -\frac{A_0^3}{32\omega_0^2}(\cos\tau - \cos 3\tau).$$

En ce qui concerne les termes contenant  $\varepsilon^2$  en facteur on a:

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -\frac{1}{\omega_0^2}(\omega_1\ddot{x}_1 + \omega_2\ddot{x}_0 + 3x_1^2x_0). \quad (I-12)$$

Après développement des formes trigonométriques du deuxième membre de (I-12), la solution obtenue en éliminant le terme séculaire dans l'expression est:

$$x_2 = -\frac{A_0^5}{1024\omega_0^4}(\cos \tau - \cos 5\tau), \quad \omega_2 = -\frac{3A_0^4}{128\omega_0^2}.$$

Donc, la solution approximative générale tronquée à l'ordre 2 s'écrit:

$$x(\tau, \varepsilon) = A_0 \cos \tau - A_0 \frac{\varepsilon A_0^2}{32\omega_0^2}(\cos \tau - \cos 3\tau) - \\ A_0 \frac{\varepsilon^2 A_0^4}{1024\omega_0^4}(\cos \tau - \cos 5\tau) + O(\varepsilon^3),$$

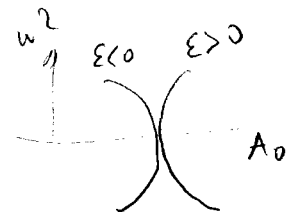
$$\omega^2(\varepsilon) = \omega_0^2 + \frac{3}{4}A_0^2\varepsilon - \frac{3A_0^4}{128\omega_0^2}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

On cherche des solutions périodiques pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, plus précisément pour,

$$\frac{\varepsilon A_0^2}{32\omega_0^2} \ll 1,$$

on peut alors arrêter le calcul à l'ordre 1, ce qui conduit à

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{3A_0^2}{4\omega_0^2}\varepsilon,$$



c'est à dire que

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{1}{1 + \frac{3A_0^2}{4\omega_0^2} \varepsilon}.$$

On en déduit, d'après cette dernière expression, qu'une augmentation d'amplitude entraîne une diminution de la période. Mais, si  $\varepsilon$  est négatif on aura le contraire: la période croît quand l'amplitude croît.

Pour analyser soigneusement la série entière (I-2), on a besoin d'un grand nombre de termes de la série, ce qui n'est pas facile à trouver manuellement. Pour cette raison, on a utilisé le système de calcul formel Maple (voir chapitre III).

#### I-4) Oscillations simples non linéaires en régime forcé

Ici, on s'intéresse à l'étude des oscillations périodiques d'un problème amorti avec une excitation harmonique de pulsation  $\omega$ , de période  $T = 2\pi / \omega$ . L'équation s'écrit alors:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(-c\dot{x} - bx^3 + e \sin \omega t), \quad (\text{I-13})$$

où  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\omega > 0$ ,  $c$ ,  $b$ ,  $\varepsilon$  sont des constantes réelles que nous supposons non nulles et "e" désigne le rapport de l'amplitude de la force d'excitation à la masse de l'oscillateur.

On va étudier les solutions périodiques de (I-13) lorsque  $\omega$  est voisin de un, c'est à dire proche de la fréquence propre de l'équation (I-13) lorsque  $\varepsilon = 0$ . On pose donc

$$\omega^2 = 1 + \varepsilon\beta ,$$

ce qui amène (I-13) sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(-c\dot{x} + \beta x - bx^3 + e \sin \omega t), \quad (\text{I-14})$$

On ramène classiquement [46] l'étude de cette équation différentielle (I-14) à des équations d'amplitude de la forme suivante :

$$\begin{cases} \beta a_1 - ca_2 - \left(\frac{3}{4}\right)ba_1(a_1^2 + a_2^2) = 0 \\ ca_1 + \beta a_2 - \left(\frac{3}{4}\right)ba_2(a_1^2 + a_2^2) = -e \end{cases} \quad (\text{I-15})$$

On montre qu'à toute solution  $(a_1, a_2)$  de (I-15) correspondra, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, une solution T-périodique  $x(t)$  de la forme :

$$x(t) = a_1 \cos \omega t + a_2 \sin \omega t + o(\varepsilon) . \quad (\text{I-16})$$

Pour donner la signification des amplitudes  $a_1$  et  $a_2$ , on introduit l'amplitude  $A > 0$  et sa phase  $\varphi$  telles que,

$$a_1 = A \cos \varphi, \quad a_2 = A \sin \varphi, \quad (\text{I-17})$$

ce qui donne avec (I-15) ,

$$\begin{aligned} \left(\frac{9}{16}\right)b^2 A^6 - \left(\frac{3}{2}\right)b\beta A^4 + \beta^2 A^2 + c^2 A^2 - e^2 &= 0, \\ \text{tg}\varphi &= c^{-1}\left(\beta - \left(\frac{3}{4}\right)bA^2\right). \end{aligned} \quad (\text{I-18})$$

(I-18) fournit que

$$\beta = \left(\frac{3}{4}\right)bA^2 \pm (e^2A^{-2} - c^2)^{1/2}, \quad (I-19)$$

par suite

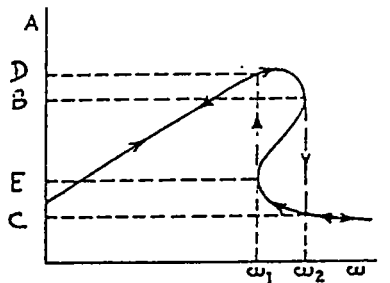
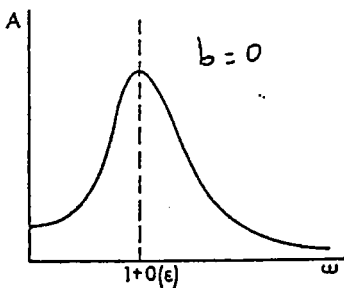
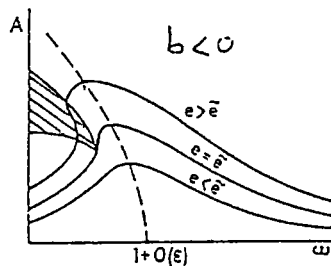
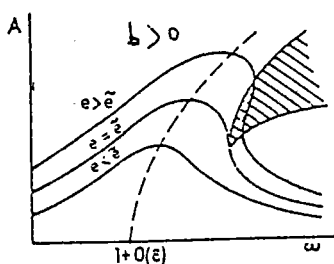
$$\omega(\varepsilon) = 1 + \left(\frac{3}{8}\right)\varepsilon bA^2 \pm 2^{-1}\varepsilon(e^2A^{-2} - c^2)^{1/2} + 0(\varepsilon^2). \quad (I-20)$$

Le graphe de cette fonction dans le plan  $(\omega, A)$  porte le nom de courbe de réponse du système régi par (I-13).

On pose

$$\bar{e} = \left(\frac{4}{3}\right)^{5/4} |c|^{3/2} |b|.$$

D'après les figures (I-7) qui vont suivre, lorsque  $e > \bar{e}$ , il existe des valeurs de  $\omega$  pour lesquelles l'équation (I-20) possède trois solutions T-périodiques, phénomène qui n'a pas son équivalent dans le cas linéaire ( $b=0$ ).



Figures I-7-a, b, c, d.

On remarque que chaque valeur de  $\omega$  comprise entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  correspond à trois valeurs de  $A$ , c'est à dire à trois solutions périodiques. En effet, si on augmente graduellement la pulsation  $\omega$ , l'amplitude  $A$  saute brusquement de  $B$  à  $C$  pour continuer. En diminuant  $\omega$  nous repassons par  $D$ ,  $C$  et  $E$  d'où l'amplitude saute brusquement en  $D$  puis continue à décroître. La branche instable  $BE$  représente des mouvements qui ne peuvent pas se produire.

## I-5) Systèmes dissipatifs et oscillations auto-entretenues

### I-5-1) Généralités

Jusqu'à présent, nous n'avons parlé que de vibrations libres et forcées qui sont le plus couramment rencontrées. Il nous reste à voir une autre catégorie de vibration, que l'on appelle auto-entretenu et dont nous allons commencer par donner la définition et quelques exemples.

Les systèmes oscillants auto-entretenus engendrent des oscillations périodiques de durée illimitée, en empruntant l'énergie nécessaire à des sources d'énergie continue. Ce sont les véritables générateurs d'énergie à variations alternatives, seuls commodément utilisables, avec les machines tournantes. La machine à vapeur est un système alternatif auto-entretenu : en fonctionnant, elle ouvre et elle ferme l'accès de la vapeur dans le cylindre .

Un autre exemple d'oscillations auto-entretenues est donné par la sonnerie électrique (fig I-8). L'oscillateur est une plaquette de fer  $L$  portée par une lame métallique élastique  $AB$  fixée en  $B$  et placée devant le noyau de fer  $N$  d'un électroaimant  $E$ . Dans la position d'équilibre  $O$ , un contact électrique souple existe en  $C$  entre  $L$  et le circuit d'une pile  $P$ . Lorsqu'on ferme l'interrupteur  $I$ , le courant aimante le noyau de  $E$ , qui attire  $L$  et ouvre le circuit .Lorsque  $L$  s'éloigne de  $N$ , rappelé par l'élasticité de  $AB$ , vient toucher  $C$  et, malgré l'attraction de  $N$ , poursuit son chemin vers la droite en

vertu de la vitesse acquise, le courant dans E n'arrive pas aussitôt à sa valeur limite par suite de l'auto-inductance dans E. Lorsque L revient vers la gauche, l'intensité du courant a augmenté : pour une même position  $x$ , l'attraction sur L est plus grande quand L se rapproche de N que lorsqu'elle s'en éloigne. Le travail fourni au vibreur durant une période par la force d'attraction  $F$  est représentée par l'aire intérieure au contour du (fig I-9); il est positif.

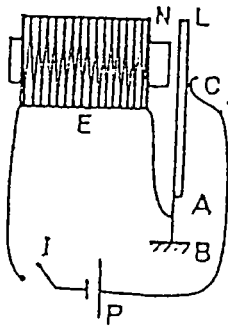


Figure I-8.

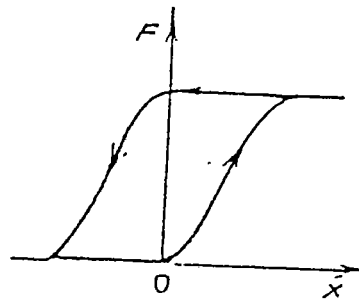


Figure I-9.

Donc, dans une vibration auto-entretenu, la force alternative qui maintient le mouvement est créée par le mouvement lui-même. Quand la vibration cesse, la force alternative disparaît. Par contre, dans une vibration forcée, la force alternative existe indépendamment du mouvement, et elle persiste même si l'on supprime le mouvement vibratoire.

En électricité, les vibrations auto-entretenues sont encore plus importantes qu'en mécanique. Une vibration auto-entretenu sera représentée par le circuit d'une lampe triode en régime oscillatoire. La batterie est la source permanente d'énergie et la résistance négative est appliquée par la grille (figure I-10).



I-5-2) Oscillateur de Van der Pol

Pour répondre à la condition ci-dessus, imposant l'introduction d'une résistance négative, on considère le circuit CLR (figure I-10) branché entre les bornes  $B'_1$  et  $B'_2$  du circuit de plaque d'une triode. L est couplée par induction mutuelle  $M$  avec l'inductance  $L'$ , ce qui produit entre  $B_1$  et  $B_2$  une tension de grille sinusoïdale de pulsation égale à celle du circuit oscillant. On admet que la forme d'une caractéristique  $I_a(V_g)$  de la triode soit celle de la figure(I-11), au voisinage de son point d'inflexion A, que nous supposons être le point de fonctionnement.

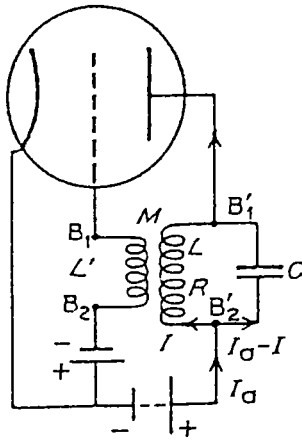


Figure I-10.

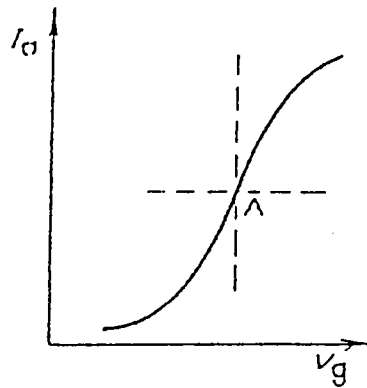


Figure I-11.

Une variation  $\Delta I_a$  du courant s'accompagne d'une variation  $\Delta V_g$  entre  $B'_1$  et  $B'_2$  et d'une variation  $\Delta I$  du courant dans L. L'équation de la triode [33] s'écrit donc:

$$\Delta I_a = \frac{\Delta V_a}{R_i} + \mu \frac{\Delta V_g}{R_i} - a(\Delta V_g)^3,$$

avec  $\Delta V_a = -R\Delta I - L \frac{d}{dt}(\Delta I)$ , tension entre  $B'_1$  et  $B'_2$

$$\Delta V_g = -M \frac{d}{dt}(\Delta I) \quad \text{tension variable de grille entre } B_1 \text{ et } B_2, M$$

l'inductance mutuelle qui couple  $L$  et  $L'$ . Pour comprendre la provenance des autres paramètres, on renvoie le lecteur à [36].

La loi de Kirchohff appliquée au circuit oscillant en tenant compte des équations ci dessus donne:

$$L \frac{d^3}{dt^3}(\Delta I) + \left( (R + \frac{L + \mu M}{cR_i} - 3a \frac{M^3}{c} (\frac{d}{dt}(\Delta I))^2) \frac{d^2}{dt^2}(\Delta I) + \frac{1}{c} (1 + \frac{R}{R_i}) \frac{d}{dt}(\Delta I) \right) = 0.$$

Sous une forme condensée on a:

$$\ddot{u} - A(1 - Bu^2)\dot{u} + \omega^2 u = 0, \quad (\text{I-21})$$

$$\text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{Lc} \left( 1 + \frac{R}{R_i} \right)}, \quad A = -\frac{1}{L} \left( R + \frac{L + \mu M}{cR_i} \right),$$

$$u = \frac{d}{dt}(\Delta I) \quad \text{et} \quad B = \frac{3aM^3}{Ac}.$$

En effectuant le changement de variable  $y = u\sqrt{B}$ , l'équation (I-21) devient

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{A}{\omega^2} (1 - y^2) \frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Avec les variables adimensionnelles  $\tau = \omega t$  et  $A/\omega = \varepsilon$  on réécrit:

$$\ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0. \quad (\text{I-22})$$

L'équation (I-22) porte le nom de Van der Pol (1926). Elle conduit à un exemple très simple de ce qu'on appelle une bifurcation de Hopf, si on le met sous la forme suivante:

$$\ddot{y} + y = \varepsilon \dot{y} - y^2 \dot{y}.$$

Pour  $\varepsilon < 0$ , toutes les trajectoires convergent vers le point d'équilibre  $y=0$  (figure I-12-a): en effet les deux termes du second membre correspondent à des forces dissipatives. Pour  $\varepsilon > 0$ , la force représentée par le terme linéaire  $\varepsilon \dot{y}$  est anti-dissipatif. Dans ce cas, l'équilibre  $y=0$  devient instable et toutes les trajectoires convergent vers le cycle limite (figure I-12-b). C'est cette transition d'une dynamique stationnaire à une dynamique périodique qui est appelée bifurcation de Hopf ( voir aussi chapitre IV).

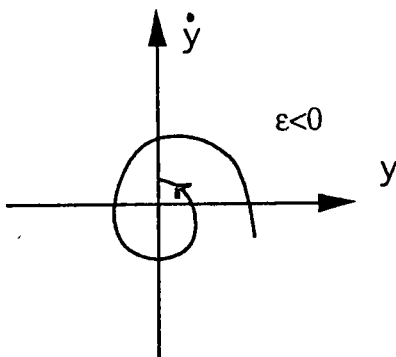


Figure I-12-a.

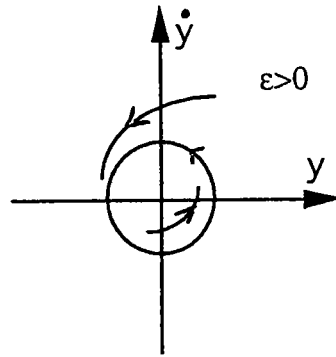


Figure I-12-b.

On rencontre également cette équation dans l'étude de certains problèmes mécaniques, dont on va présenter un exemple.

### I-5-3) Un système mécanique gouverné par l'équation de Van der Pol

Une masse  $m$  est en contact avec une courroie animé d'une vitesse constante  $v$  (figure I-13-a) et elle est retenue par un ressort obéissant aux lois de

l'élasticité linéaire. Elle est en équilibre dans la position  $o$  dans laquelle la force tangentielle de frottement - que nous supposons être une fonction connue de la vitesse de glissement (figure I-13-b)- est opposée à la force de rappel du ressort. Une petite perturbation se produit si à l'instant initial on lâche sans vitesse la masse dans une position, distincte de  $o$ , mais voisine. Si  $x$  est l'abscisse de la masse comptée à partir de sa position d'équilibre,  $t$  le temps, le mouvement est donné par une équation de la forme:

$$m\ddot{x} + kx = -f(\dot{x} + v)$$

$$= -f(v) - \dot{x}f'(v) - \frac{\dot{x}^2}{2}f''(v) - \frac{\dot{x}^3}{6}f'''(v) - \dots$$

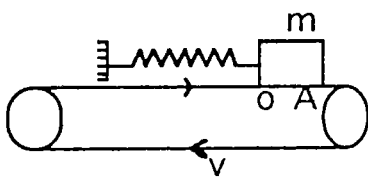


figure I-13-a: système mécanique gouverné par l'équation de Van der Pol

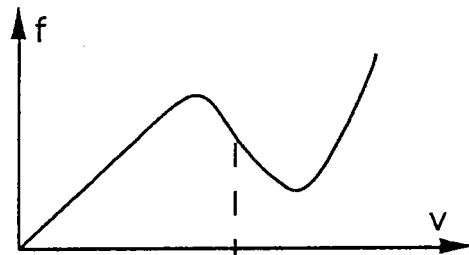


figure I-13-b: force de frottement en fonction de la vitesse de glissement.

Après des approximations et des changements de variables, on obtient l'équation gouvernante de Van der Pol.

#### I-5-4) Résolution par la méthode des échelles multiples

Considérons par exemple le mouvement d'un oscillateur harmonique, avec dissipation visqueuse linéaire. Après changement de variable on obtient le problème:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0; \quad x(0)=1, \dot{x}(0) = 0.$$

Pour  $\varepsilon$  inférieur à 1, la solution exacte est donnée par:

$$x(t) = \exp(-\varepsilon t) \cos\left\{(1 - \varepsilon^2)^{1/2} t\right\}.$$

On constate d'après la solution ci dessus, que le terme  $2\varepsilon x$  a deux effets:

- variation de la pulsation en fonction du paramètre  $\varepsilon$ , mais qui garde sa valeur à l'ordre 1;
- variation de l'amplitude qui se trouve multipliée par  $\exp(-\varepsilon t)$ , facteur dont l'effet ne joue qu'après un temps long de l'ordre  $\varepsilon^{-1}$ .

Le principe de la méthode des échelle multiples est de chercher l'inconnue comme une fonction de deux variables de temps, par exemple le temps  $t$  lui-même et le temps long  $\tau = \varepsilon t$ . Ces deux variables de temps seront considérées comme des variables indépendantes. On peut aussi, introduire d'autres définitions de ces variables pour tenir compte par exemple de l'évolution de la pulsation, en posant:

$$\begin{aligned} \tau &= \varepsilon t && \text{temps long,} \\ \eta &= \omega(\varepsilon)t && \text{temps modifié} \end{aligned}$$

où

$$\omega(\varepsilon) = 1 + \omega_2\varepsilon^2 + \omega_3\varepsilon^3 + \dots \quad (I-23)$$

On cherche la solution  $x(t, \varepsilon)$  sous la forme de séries [40]:

$$x(t, \varepsilon) = x_0(\eta, \tau) + \varepsilon x_1(\eta, \tau) + \dots \quad (I-24)$$

où  $x_p$  sont des fonctions de  $\tau$  et  $\eta$ .

Appliquons cette méthode à l'oscillateur de Van der Pol:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}. \quad (\text{I-25})$$

D'après l'hypothèse d'indépendances des deux variables, la dérivée par rapport à  $t$  suivra la règle suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \omega(\varepsilon) \frac{\partial}{\partial \eta} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Substituons (I-23) et (I-24) dans (I-25), on obtient donc une séquence des équations aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} + x_0 = 0, \quad (\text{I-26-a})$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \eta^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial \eta} + (1 - x_0^2) \frac{\partial x_0}{\partial \eta}, \quad (\text{I-26-b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_2}{\partial \eta^2} + x_2 = & -2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau \partial \eta} - \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} - 2\omega_2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \eta^2} \\ & + (1 - x_0^2) \left( \frac{\partial x_1}{\partial \eta} + \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \right) - 2x_0 x_1 \frac{\partial x_0}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (\text{I-26-c})$$

La solution générale de (I-26-a), s'écrit:

$$x_0 = A_0(\tau) \cos \eta + B_0(\tau) \sin \eta. \quad (\text{I-27})$$

Avec la solution (I-27) et l'équation (I-26-b), l'élimination des termes séculaire nécessitent les conditions suivantes:

$$-2B'_0 + \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4}\right) B_0 = 0, \quad (\text{I-28-a})$$

$$2A'_0 - \left(1 - \frac{A_0^2 + B_0^2}{4}\right) A_0 = 0. \quad (\text{I-28-b})$$

On pose  $\rho = a^2 = A_0^2 + B_0^2$ , et en retranchant (I-28-a) de (I-28-b), on obtient:

$$\rho' - \rho\left(1 - \frac{1}{4}\rho\right) = 0, \quad (\text{I-29})$$

l'intégration de (I-29) donne:

$$a^2 = \frac{4}{1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right)e^{-\tau}},$$

où  $a_0$  est l'amplitude initiale.

D'où le résultat à la première approximation:

$$x(t, \varepsilon) = \frac{2}{\left(1 + \left(\frac{4}{a_0^2} - 1\right)e^{-\varepsilon t}\right)^{1/2}} \cos t + O(\varepsilon).$$

L'interprétation de ce résultat est la suivante:

- si  $a_0 = 2$ , la trajectoire dans le plan de phase  $(x, \dot{x})$  est un cercle de rayon 2 appelé cycle limite;
- si  $a_0 \neq 2$  la trajectoire tend asymptotiquement vers le cycle limite.

## I-6) Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié les solutions périodiques de certains problèmes non linéaires conservatifs ou non conservatifs, en signalant les méthodes approximatives de résolution. Ces méthodes consistent à chercher les

## ChAPITRE 9: rappels sur les vibrations non linéaires

solutions périodiques sous forme de séries entières en fonction d'un certain paramètre. Pour analyser ces séries soigneusement, on a besoin d'un nombre suffisamment grand de termes, ce que nous allons faire au chapitre III, à l'aide du logiciel Maple.



## II) METHODE ASYMPTOTIQUE-NUMÉRIQUE (M.A.N)

### II-1) Introduction

L'idée de la méthode asymptotique-numérique est de coupler des développements en séries entières avec la méthode des éléments finis.

La première initiative significative concernant cette méthode a été celle de N.Damil et M.Potier-Ferry (1990), afin d'analyser le flambage des structures élastiques imparfaites. Cette méthode améliore la théorie classique du postflambage ou de la bifurcation perturbée (Koiter (1945), Thompson and Hunt (1984), Budiansky (1974), et Potier-Ferry (1987)).

D'un point de vue numérique, on peut ainsi calculer un grand nombre de termes de séries entières avec une seule inversion de matrice. La méthode asymptotique-numérique a été appliquée à un nombre croissant de modèles: structures élastiques, mécanique des fluides visqueux, structures plastiques. Au sein du LPMM cette thèse est la première tentative d'applications aux problèmes dynamiques.

Cette procédure transforme la résolution du problème non linéaire en celle d'une succession de systèmes linéaires. Elle rend le calcul plus rapide et plus fiable, contrairement aux méthodes incrémentales-itératives qui sont difficiles à automatiser et sont coûteuses en temps de calcul. Quatre types de problèmes ont été testés pour cette méthode: calcul d'une branche fondamentale quelconque, calcul d'une branche bifurquée, calcul de bifurcation perturbée et détection de points de bifurcation (figure II-1).

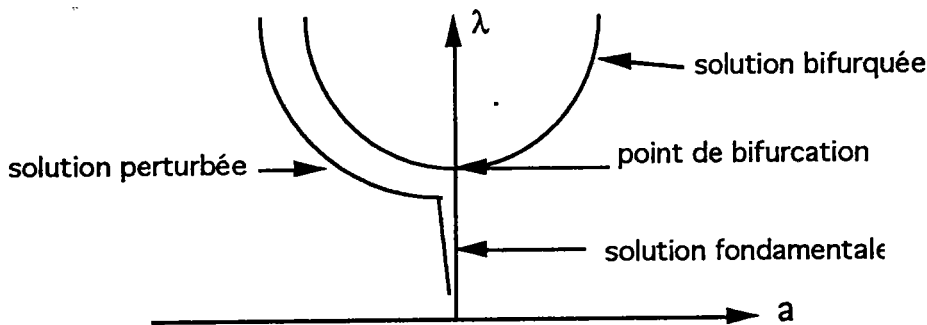


figure II-1.

## II-2) Présentation de la méthode asymptotique-numérique

### II-2-1) La technique de perturbation

En partant de la fonctionnelle mixte d'Hellinger-Reissner (Azrar et al, 1993), on montre que pour une grande classe de modèles, de plaques, de poutres, et de coques, les équations d'équilibre peuvent s'écrire sous forme d'une équation fonctionnelle avec une non linéarité quadratique:

$$LU+Q(U,U)=\lambda F \quad (\text{II-1})$$

où L est un opérateur linéaire, Q un opérateur quadratique, U un vecteur mixte dont les composantes sont le déplacement u et la contrainte  $\sigma$ ,  $\lambda$  est un paramètre de chargement et F un vecteur de force représentant le chargement extérieur.

On suppose que l'on connaît  $U_0$ ,  $\lambda_0$  une solution initiale du problème (II-1), telle que la branche de solution au voisinage de ce point admette une représentation analytique. Cette méthode de perturbation permet de représenter les branches de solutions sous la forme de séries entières par rapport à un paramètre de contrôle "a", que l'on définira par la suite.

$$U(a) = U_0 + aU_1 + a^2U_2 + \dots \quad (\text{II-2-a})$$

$$\lambda(a) = \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + \dots \quad (\text{II-2-b})$$

En reportant ces séries dans le problème (II-1), on obtient une séquence de problèmes linéaires mixtes :

ordre 1:

$$L_t U_1 = \lambda_1 F$$

ordre 2:

$$L_t U_2 = \lambda_2 F - Q(U_1, U_1)$$

ordre 3:

$$L_t U_3 = \lambda_3 F - 2Q(U_1, U_2)$$

ordre n:

$$L_t U_n = \lambda_n F - \sum_{p=1}^{n-1} Q(U_p, U_{n-p})$$

où  $L_t$  est l'opérateur tangent au point  $U_0$ , défini par:

$$L_t(.) = L(.) + 2Q(U_0, .)$$

Tous ces problèmes admettent le même opérateur tangent, sont simples et condensés. Mais il reste à définir le paramètre "a" pour déterminer la représentation des branches de solutions.

Le choix optimal du paramètre "a" dépend du problème à résoudre. Jusqu'à présent, au moins trois possibilités différentes ont été testées.

a) On prend le paramètre "a" comme l'incrément de charge  $\lambda - \lambda_0$ , c'est à dire  $a = \lambda - \lambda_0$ ,

b) on prend "a" comme la projection de l'incrément de déplacement  $u - u_0$  sur le vecteur  $u_1$  (M.Potier-Ferry, 1987),  $a = \langle h(u - u_0), u_1 \rangle$ ,

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire et h est un opérateur de type rigidité.

c) on peut prendre "a" comme somme de la projection définie au b) avec la projection de l'incrément  $\lambda - \lambda_0$  sur  $\lambda_1$ . On a alors,

$$a = \langle u - u_0, u_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1.$$

Ce troisième choix est pratique pour éviter les branches de solutions contenant des points limites en force et en déplacement. Nous renvoyons le lecteur à (B.Cochelin, 1994).

En introduisant les développements asymptotiques (II-2), dans ces définitions, on obtient une suite d'équations scalaires à chaque ordre par une identification croissante des puissances de "a". Pour illustrer notre propos, on considère la dernière définition de "a". Le problème complet à l'ordre n pour n supérieur ou égal à 2 s'écrit alors:

$$L_t U_n = \lambda_n F - \sum_{p=1}^{n-1} Q(U_p, U_{n-p}) \tag{II-4}$$

$$\langle u_n, u_1 \rangle + \lambda_n \lambda_1 = 0$$

### II-2-2) Résolution par éléments finis

On présente la méthode dans le cas le plus simple qui est le calcul d'une branche non linéaire quelconque.

Cette branche s'obtient en déterminant les vecteurs déplacements et les coefficients  $\lambda_p$  des séries (II-2) à partir des équations linéaires mixtes (II-

4). Afin d'utiliser la méthode classique des éléments finis en déplacement (Azrar et Al ,1993), il est commode de retourner à des systèmes en déplacement pur. Donc, chaque problème linéaire mixte est transformé en un problème pur en déplacement  $u_p$ , découplé de l'équation donnant la contrainte  $\sigma_p$ . Après discrétisation, le problème en déplacement s'écrit:

$$\begin{aligned} [K_T(U_0)][u_p] &= \lambda_p [F] + [F_p^{nl}] & (II-5) \\ [u_p]^T [u_1] + \lambda_p \lambda_1 &= 0 \end{aligned}$$

où  $K_T(U_0)$  est la matrice de rigidité tangente au point  $U_0$ ,  $F$  est le vecteur de chargements extérieurs et  $F_p^{nl}$  est un vecteur qui dépend des solutions aux ordres inférieurs  $U_r$ ,  $1 \leq r < p$ . La résolution de (II-5) revient à celle du problème suivant à chaque ordre:

$$[K_T(U_0)][u^{nl}] = [F_p^{nl}]$$

Tous ces problèmes admettent la même matrice de rigidité  $K_T(U_0)$  qui est assemblée et triangulée une fois pour toute.

### II-2-3) Calcul de la branche bifurquée

Le développement asymptotique de la branche bifurquée est effectué au voisinage du point de bifurcation qui est singulier. Tous les problèmes obtenus admettent une matrice de rigidité non-inversible. Dans certains cas particuliers, la branche fondamentale dépend linéairement de  $\lambda$  et on montre que la branche bifurquée est solution de l'équation fonctionnelle suivante avec une non linéarité quadratique (Azrar et Al, 1993):

$$LU + (\lambda - \lambda_c)L'U + Q(U, U) = 0 \tag{II-6}$$

où L et L' sont des opérateurs linéaires, Q est un opérateur bilinéaire symétrique, λ paramètre de chargement et λ<sub>c</sub> la charge de bifurcation.

Les inconnues de l'équation (II-6) au point de bifurcation 0, λ<sub>c</sub> s'écrivent:

$$U = aV_1 + a^2V_2 + \dots \tag{II-7-a}$$

$$\lambda = \lambda_c + ac_1 + a^2c_2 + \dots \tag{II-7-b}$$

où "a" est la projection de U sur le mode de flambage V<sub>1</sub> et les vecteurs V<sub>p</sub> pour p ≥ 2 vérifient la condition d'orthogonalité:

$$\langle V_p, V_1 \rangle = 0 \quad \text{pour tout } p \geq 2 \tag{II-8}$$

En injectant les séries (II-7) dans le problème non linéaire (II-6), en tenant compte de la condition d'orthogonalité, on obtient une succession de systèmes linéaires à chaque ordre de "a", possédant la même matrice non-inversible.

La discrétisation par éléments finis des problèmes linéaires en déplacement  $\bar{V}(p)$  pour chaque p, donne:

$$\begin{aligned} [K_T][\bar{V}(1)] &= [\bar{F}(p)] \\ [V(1)]^T [\bar{V}(p)] &= 0 \end{aligned}$$

où K<sub>T</sub> est la matrice de rigidité au point de bifurcation qui est singulière. On introduit alors le multiplicateur de Lagrange k et on réécrit le problème sous la forme équivalente suivante où la matrice est symétrique et inversible.

$$\begin{bmatrix} K_T & \bar{V}(1) \\ \bar{V}^t(1) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{V}(p) \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}(p) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Maintenant, il suffit d'inverser une seule matrice pour calculer tous les vecteurs.

#### II-2-4) Calculs de bifurcation perturbée

Le premier calcul numérique de branches de bifurcation perturbée par une méthode asymptotique-numérique a été réalisée par N.Damil et M.Potier-Ferry (1990). On sait qu'une structure avec imperfection perd sa stabilité au point limite, ce qui donne une grande importance à la détermination de ce point de flambage. L'utilisation de la méthode asymptotique-numérique pour ce genre de problème avec défaut nécessite l'introduction d'un paramètre supplémentaire dans les développements en séries. Ainsi, la non linéarité de l'équation d'équilibre se ramène à une suite de problèmes linéaires ayant la même matrice de rigidité. Une application de cette technique au flambage des coques cylindriques a été réalisée dans la thèse d'Azrar (1993). L'utilisation d'une discrétisation mixte (élément finis + séries de Fourier) conduit à une algèbre complexe mais gérable qui montre toute la puissance de la méthode asymptotique-numérique. Pour plus de détails sur le calcul numérique de ces développements dépendant de deux paramètres, nous renvoyons le lecteur à la thèse d'Azrar (1993).

#### II-2-5) Détection des points de bifurcation

On détecte ces points sur une branche de solutions linéaire ou non linéaire, en introduisant un indicateur de bifurcation scalaire dépendant du paramètre

de chargement. La méthode asymptotique-numérique permet de déterminer une représentation de cet indicateur et du vecteur déplacement sous forme de séries entières. En injectant ces séries dans l'équation d'équilibre perturbée et linéarisée en un point de la branche fondamentale, on obtient une séquence de problèmes linéaires admettant la même matrice de rigidité. La discrétisation d'équations linéaires en déplacement à chaque ordre permet de déterminer un grand nombre de termes de séries entières. L'indicateur de bifurcation déplacement à chaque ordre permet de déterminer un grand nombre de termes de ces séries entières. L'indicateur de bifurcation s'annule aux points de bifurcation ou aux points limites. On trouvera les détails de cette méthode dans la thèse de E.H.Bouty (1994). Un autre algorithme pour déterminer cette fois-ci les points de bifurcation de Hopf de problèmes dynamiques sera présenté au chapitre V de cette thèse tout en restant dans le cadre de la méthode asymptotique-numérique.

### II-3) Exemples d'applications

Pour mettre en évidence et montrer l'efficacité de la méthode asymptotique-numérique, plusieurs applications ont été réalisées récemment sur des modèles de plaques, de poutres, de coques et des problèmes dynamiques (voir chapitres III et V) . Le comportement asymptotique de ces exemples dépend du choix du paramètre "a". En effet, le rayon de convergence varie d'une manière significative en fonction de "a". A titre d'exemple, la coque cylindrique en appui simple sur deux côtés et chargée au milieu par une force concentrée. Les développements sont effectués au voisinage d'un point choisi au milieu de la courbe (figure II-2). Pour plus de détail sur ce sujet, regardons la thèse de B.Cochelin, (1994).



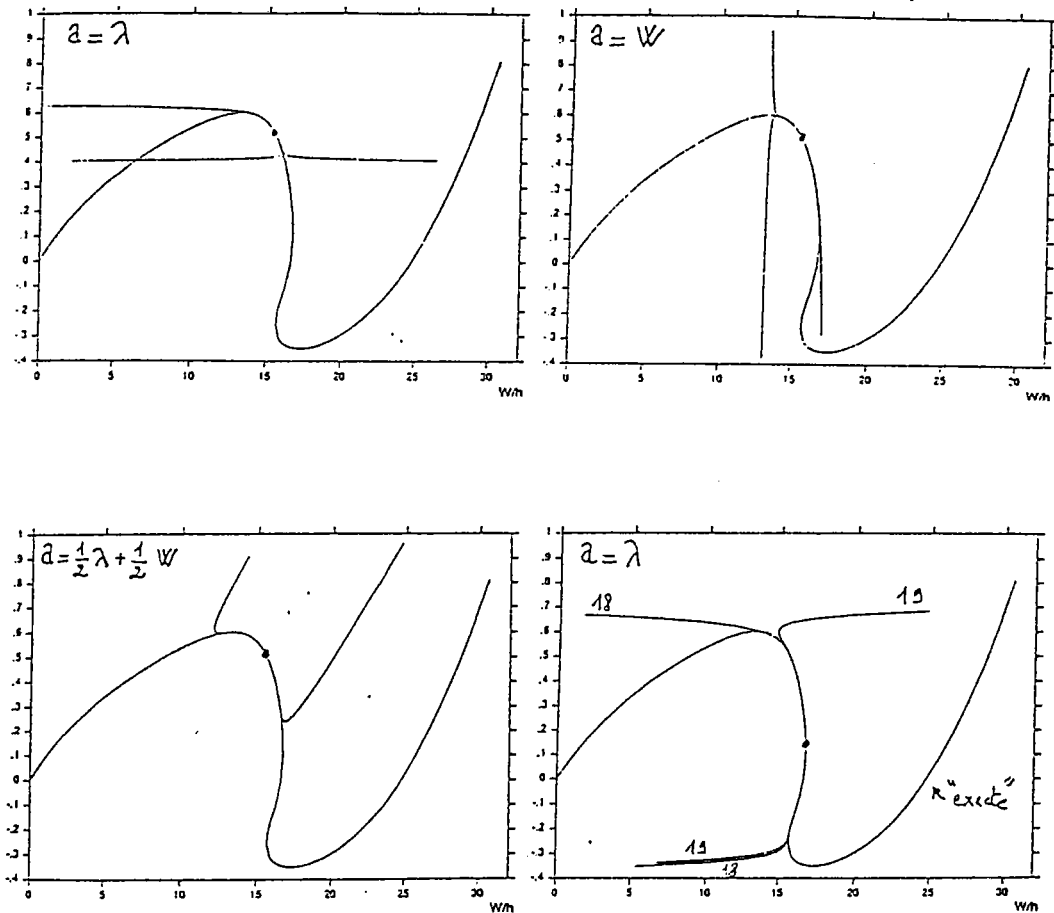


Figure II-2: comportement des solutions asymptotiques pour divers choix du paramètre de développement "a".

Il y a d'autres exemples, qui montrent aussi l'influence forte du paramètre de développement sur le rayon de convergence: une plaque carrée encadrée sur ses quatre côtés et chargée en flexion, nous renvoyons à la thèse de B.Cochelin (1994).

Comme sur la figure II-2, le développement asymptotique en fonction du paramètre "a" diverge toujours au-delà d'une valeur critique de "a". Cette valeur correspond au rayon de convergence de la série et qui est indépendante de l'ordre de la troncature. Cette limitation est fréquente dans les méthodes asymptotiques. Pour cela, on peut utiliser différentes techniques pour accélérer la convergence de séries entières.

## II-4) Techniques d'amélioration d'une série

### II-4-1) Généralités sur les approximants de Padé

L'approximation d'une fonction par une fraction continue a été utilisée depuis les travaux d'Euler. En 1892, H.Padé, avait développé dans sa thèse [42] des études sur les fractions rationnelles sous forme de table, sans indiquer une stratégie automatique et précise. La seule contrainte sur ces approximants, consiste à trouver un dénominateur et un numérateur qui soient premiers entre eux, afin d'éviter les défauts (une racine identique ou presque identique au numérateur et au dénominateur). On trouvera dans (Baker et Graves-Moris, 1981), (Brezinski, 1980) des descriptions détaillées des approximants de Padé et de leur façon d'utilisation. Ces derniers ont un rôle très important dans l'accélération de la convergence de séries entières . De plus, ils donnent des informations sur toutes les singularités existantes. Par définition, l'approximant de Padé d'une fonction est une fraction rationnelle dont le développement de Taylor à un certain ordre coïncide avec celui de la fonction en question. Plus exactement, considérons la fonction  $f(x)$  développable en série entière au voisinage de  $x=0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

où les coefficients  $c_n$  sont connus.

L'approximant de Padé aux ordres  $L$  et  $M$ , noté  $P[L, M]$  est le rapport de deux polynômes:

$$P[L, M] = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_L x^L}{1 + b_1 x + \dots + b_M x^M},$$

en sorte que  $f(x) - P[L, M] = O(x^{L+M+1})$ .

Pour illustrer cette notion, on considère la fonction,

$$f(x) = \text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Le développement de Taylor admet un rayon de convergence égal à 1. l'approximant de Padé associé  $P[2,2]$ , est donné par:

$$P[2,2] = \frac{x + \frac{1}{2}x^2}{1 + x + \frac{1}{6}x^2}$$

Cet exemple nous montre l'efficacité des approximants de Padé qui permettent d'obtenir de bonnes approximations de la fonction bien au delà de rayon de convergence (voir figure II-3).

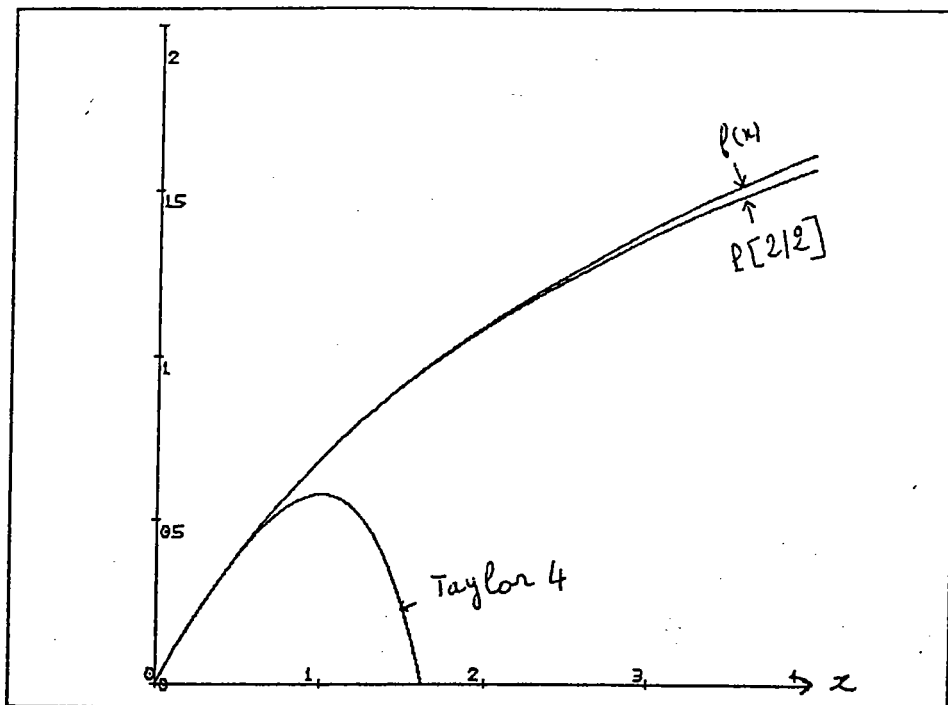


Figure II-3.

## II-4-2) Utilisation des approximants de Padé dans les M.A.N

### II-4-2-1) Réorganisation de la représentation de la fonction vectorielle U(a)

On va discuter comment utiliser les approximants de Padé dans notre méthode asymptotique-numérique. Pour cela, reconsidérons la fonction vectorielle U(a) suivante.

$$U(a) = aV(1) + a^2V(2) + \dots \quad (\text{II-9})$$

Nous proposons d'orthogonaliser les vecteurs V(p) à l'aide de la procédure de Gram-Schmidt. Le principe consiste à construire une base orthogonale V'(p) à l'aide des vecteurs V(p):

$$V(p) = \sum_{k=1}^p \alpha_p^k V'(k)$$

où  $\alpha_p^k = \frac{\langle V(p), V'(k) \rangle}{\langle V'(k), V'(k) \rangle}$  pour  $1 < k < p$

$\alpha_p^p = 1$  et  $\alpha_p^1 = 0$

Dans la base orthogonale construite, l'équation (II-9) devient:

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} a^j f_j(a) V'(j) \quad (\text{II-10})$$

$$f_j(a) = \sum_{i=j}^{\infty} c_i^j a^{i-j}$$

Ensuite, on remplace chaque série scalaire f<sub>j</sub>(a) par son approximant de Padé, qui est:

$$P_j [L_j / M_j](a) = \frac{a_0^j + a_1^j a + \dots + a_{L_j}^j a^{L_j}}{1 + b_1^j a + \dots + b_{M_j}^j a^{M_j}}$$

Les  $M_j + L_j + 1$  coefficients de cette fraction rationnelle se calculent à partir des équations de Padé suivantes (Baker and Graves Morris, 1980).

$$\begin{bmatrix} c_{L-M+1}^j & c_{L-M+2}^j & c_L^j \\ c_{L-M+2}^j & c_{L-M+3}^j & c_{L+1}^j \\ c_L^j & c_{L+1}^j & c_{L+M}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_M^j \\ b_{M-1}^j \\ b_1^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{L+1}^j \\ c_{L+2}^j \\ c_{L+M}^j \end{bmatrix},$$

Par suite, on a:

$$a^j_0 = c^j_0$$

$$a^j_1 = c^j_1 + b^j_1 c^j_0$$

$$a^j_2 = c^j_2 + b^j_1 c^j_1 + b^j_2 c^j_0$$

$$a^j_L = c^j_L + \sum_{i=1}^{\min(L_j, M_j)} b^j_i c^j_{L-i}$$

Alors, l'approximation de la fonction vectorielle  $U(a)$  s'obtient après troncature à un ordre  $N$  fixé à l'avance:

$$U(a) = \sum_{j=1}^N a^j P_j [L_j / M_j](a) V'(j) \tag{II-11}$$

où les  $P_j [L_j / M_j]$  sont des approximants de Padé et les  $V'(j)$  sont les vecteurs orthogonaux définis auparavant.

Pour montrer la performance de ces approximants, on a travaillé sur divers exemples de structures minces (plaques, poutres et coques) avec des

géométries complexes et des chargements divers. Les résultats obtenus par cette technique étaient améliorés par rapport à la série dans la majorité des problèmes de plaques et poutres (voir figure II-5, post flambage d'une plaque). Par contre les fractions rationnelles ont apporté peu d'amélioration au post-flambage des coques cylindriques (figure II-4). Cela est dû à la présence des pôles qui provoquent ce comportement. Ce dernier résultat a été confirmé dans la thèse d'Azrar (1993).

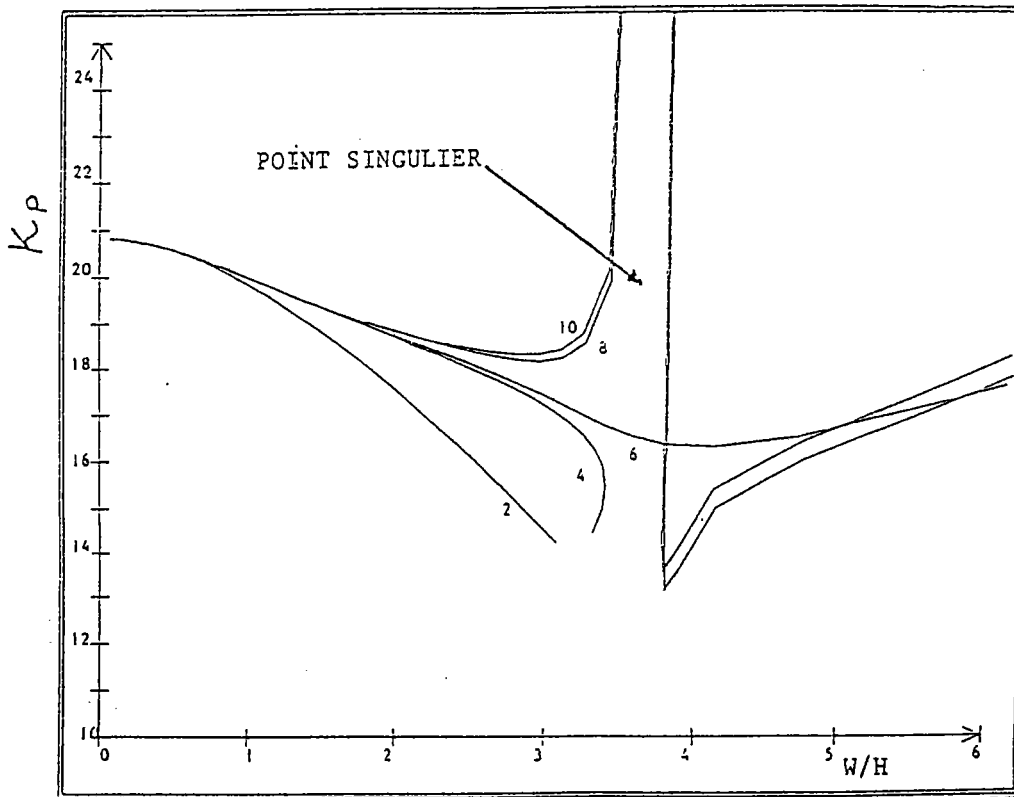


Figure II-4: Représentation de la branche bifurquée par les séries et les approximants de Padé correspondant. L'amélioration n'est pas systématique.

#### II-4-2-2) Réorganisation de la représentation de la fonction scalaire $\lambda(a)$ : technique de projection

Parfois, l'application directe de l'approximant de Padé à la série  $\lambda(a)$  se révèle insuffisant. On utilise donc une nouvelle représentation du paramètre

$\lambda(a)$ , moyennant la projection de l'équation (II-6) suivant une certaine direction choisie par le chercheur, par exemple le mode  $V(1)$ . En tenant compte des formules (II-10) et (II-11), cette reformulation donne souvent d'excellents résultats (N. Damil, M. Potier-Ferry et B. Braikat, 1994), (B.Cochelin, N. Damil and M. Potier-Ferry, 1994) ( voir figure II-5).

$$\lambda(a) - \lambda_c = \frac{\langle Q(U(a), Q(a)), V(1) \rangle}{\langle L'U(a), V(1) \rangle} \quad (II-12)$$

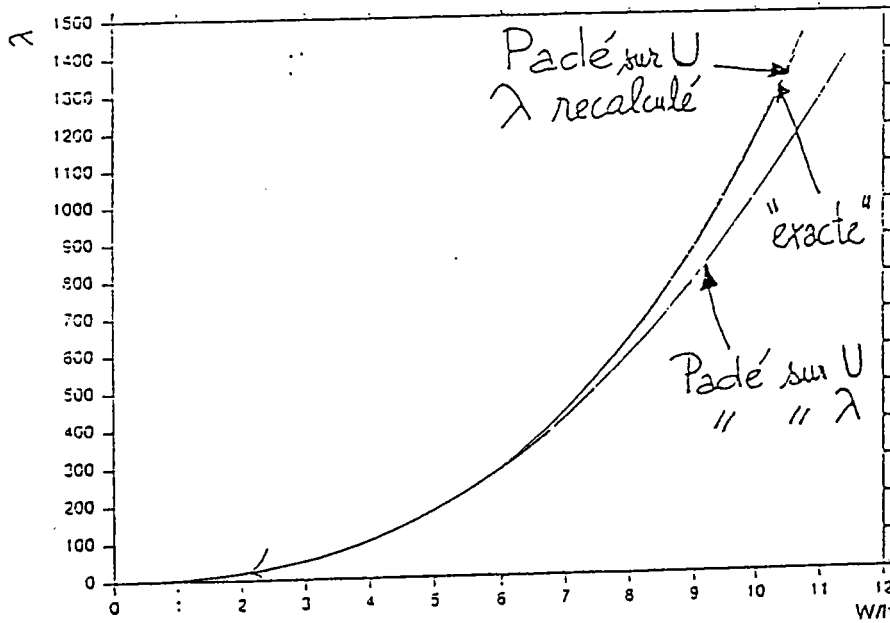


Figure II-5: Amélioration des séries à l'aide d'approximants de Padé et la nouvelle représentation (II-12), pour une plaque en flexion.

Mais, on verra au chapitre III que cette opération est non performante dans certains cas de systèmes dynamiques.

### II-4-3) Autres techniques

Plusieurs techniques sont citées par Milton Van Dyke (1974), pour améliorer les solutions sous forme de séries: transformation d'Euler qui cherche à envoyer les singularités les plus proches de l'origine à l'infini (pour les détails, nous renvoyons le lecteur au chapitre III), complétion de séries (E.M.Anderson and James F Geer, 1982),.....

A notre connaissance, ces techniques d'amélioration n'ont jamais été traitées dans un grand code de calcul par éléments finis. A l'avenir, on pense suivre cette direction de recherche.

### II-5) Conclusion

On a essayé dans ce chapitre de résumer les travaux réalisés au laboratoire dans le cadre des méthodes asymptotiques-numériques. Nous dominons maintenant un grand nombre de techniques, certaines d'entre elles étant immédiatement utilisables dans les grands codes d'éléments finis à usage industriel (thèse de B.Cochelin, 1994).

L'objectif de cette thèse est d'étendre cette méthode à des problèmes dynamiques de vibrations non linéaires et de bifurcations de Hopf.



## III) SOLUTIONS PÉRIODIQUES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

### III-1) Introduction

Dans ce chapitre, on applique une méthode asymptotique-numérique pour calculer les solutions périodiques d'équations différentielles ordinaires. Il s'agit d'adopter les méthodes décrites au chapitre II à une nouvelle classe de problèmes: les oscillations non linéaires des systèmes conservatifs et non conservatifs.

Nous avons rappelé au chapitre deux les principales techniques utilisées au sein de LPMM pour le calcul des positions d'équilibres des structures élastiques. Les méthodes asymptotiques-numériques consistent dans un premier temps à chercher une famille de solutions sous la forme d'une série entière, ou plutôt, d'une série entière tronquée à un certain ordre fixé à l'avance. Le cas échéant, on essaie d'améliorer cette représentation polynomiale, deux techniques ayant été utilisées jusqu'à présent: remplacement des polynômes par des approximants de Padé, utilisation d'une technique de projection.

Notre but dans ce chapitre est de tester ces procédures pour le calcul des solutions périodiques des problèmes de vibrations simples. Les séries entières sont obtenues avec l'aide du logiciel Maple par la méthode classique de Poincaré-Lindstedt [34] et [44]. Il s'agira donc principalement de tester l'efficacité des techniques d'accélération de convergence.

Nous testerons d'abord l'efficacité des deux stratégies qui se sont révélées le plus efficaces en statique des structures: d'une part le remplacement des séries entières par des approximants de Padé, d'autre part la technique précédente améliorée par une méthode de projection. Au paragraphe (III-3-5), nous présenterons de plus un changement de variable destiné à envoyer à l'infini la

singularité la plus proche de l'origine dans le plan complexe: il s'agit de la transformation d'Euler [54] qui a été appliquée récemment à l'équation de Van der Pol [1] et à d'autres équations [14]. Cette technique est la première initiative au sein du LPMM, et on pense l'adopter plus tard dans un contexte de calcul par éléments finis.

Nous considérons ici trois exemples: l'équation de Van der Pol, qui a un seul cycle limite et les deux équations conservatives suivantes:

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0, \quad (\text{III-1})$$

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0, \quad (\text{III-2})$$

avec les conditions initiales:  $x(0)=\varepsilon$  ,  $\dot{x}(0) = 0$ ,

qui possèdent des familles de solutions périodiques paramétrées par la donnée initiale  $\varepsilon$ .

A plus long terme, notre objectif est d'appliquer les meilleurs procédures à des systèmes plus complexes gouvernés par des équations aux dérivées partielles: écoulement fluide-structure. On présentera au chapitre (V) une première tentative en ce sens.

### III-2) Cadre de l'étude

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des mouvements périodiques des équations conservatives (III-1) et (III-2) et du cycle limite de l'équation de Van der Pol. On a vu au chapitre I que ces systèmes engendrent des solutions périodiques de caractéristiques différentes. En effet, l'équation (III-1) admet des solutions périodiques pour  $|\varepsilon|$  inférieure à 1, par contre celles du problème (III-2) existent pour tout  $\varepsilon$  (voir les figures concernées au chapitre I).

L'oscillateur de Van der Pol conduit en définitive à un mouvement périodique indépendamment des conditions initiales, qui est donné par:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}; \quad x(0) = a(\varepsilon), \quad \dot{x}(0) = 0, \quad (\text{III-3})$$

où  $a(\varepsilon)$  est l'amplitude du cycle limite.

On va chercher maintenant ces solutions périodiques sous forme de séries entières par le développement asymptotique de Poincaré-Lindstedt, en utilisant le système de calcul formel Maple, qui va nous permettre de trouver des relations de récurrence. Ensuite, on va améliorer ces séries polynomiales par les techniques citées dans le chapitre II.

### III-3) Application de la méthode asymptotique-numérique aux équations conservatives

#### III-3-1) Principe de la méthode

On a rappelé au chapitre I pourquoi les mouvements périodiques d'un système non linéaire ont une période dépendant de l'amplitude. Pour les équations étudiées ici, cette période  $T$  et la pulsation  $\omega = 2\pi / T$  dépendent du paramètre " $\varepsilon$ " et il est bien connu [46] que la fonction  $\varepsilon \rightarrow T(\varepsilon)$  est une fonction analytique. On cherche donc  $T(\varepsilon)$  sous la forme d'une série entière en " $\varepsilon$ ". L'inconnue  $x(t, \varepsilon)$  peut également être développée en série entière de  $\varepsilon$ , mais il est commode d'effectuer un changement de variable temporelle  $\tau = \omega(\varepsilon)t$  pour se ramener à des fonctions de période fixée. Cette méthode de calcul d'une famille de solutions périodiques est appelée méthode de Poincaré-Lindstedt ( voir les détails au chapitre I). Nous allons maintenant l'appliquer pour obtenir une première représentation numérique en tronquant des séries entières.

### III-3-2) Représentation par les séries entières

En exploitant le changement de variable  $\tau = \omega(\varepsilon)t$ , la nouvelle inconnue  $y(\tau, \varepsilon)$  est de période  $2\pi$  :

$$y(\tau, \varepsilon) = x(t, \varepsilon).$$

Par suite, les équations (III-1) et (III-2) deviennent respectivement:

$$\omega^2(\varepsilon)\ddot{y} + y - y^3 = 0; \quad y(0) = \varepsilon, \quad \dot{y}(0) = 0, \quad (\text{III-4})$$

$$\omega^2(\varepsilon)\ddot{y} + y + y^3 = 0; \quad y(0) = \varepsilon, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (\text{III-5})$$

On cherche les solutions de (III-4) et (III-5) sous forme de séries entières:

$$\omega^2(\varepsilon) = \omega_0^2 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \dots, \quad (\text{III-6-a})$$

$$y(\tau, \varepsilon) = \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \dots, \quad (\text{III-6-b})$$

où les fonctions  $2\pi$ -périodiques  $y_i(\tau)$  et les constantes  $\omega_i$  sont à déterminer.

En injectant les séries (III-6) dans l'équations (III-4), respectivement (III-5), puis, on identifie suivant les puissances de " $\varepsilon$ ", on obtient une séquence de problèmes linéaires en  $y_i$ :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + y_1 = 0 \\ y_1(0) = 1 \\ \dot{y}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-7-a})$$

$$\begin{cases} \ddot{y}_2 + y_2 = -\omega_1 \ddot{y}_1 \\ y_2(0) = 0 \\ \dot{y}_2(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-7-b})$$

pour  $p$  supérieur ou égal à 3,

$$\begin{cases} \ddot{y}_p + y_p = -\sum_{i=0}^{p-1} \omega_i \ddot{y}_{p-1} + rF(y_1, \dots, y_{p-2}) \\ y_p(0) = 0 \\ \dot{y}_p(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-7-c})$$

$$\text{où } F(y_1, \dots, y_{p-2}) = \begin{cases} 3G(y_1, \dots, y_{p-2}) & \text{si } 3 \times p \\ 3G(y_1, \dots, y_{p-2}) - y_{\frac{p}{3}}^3 & \text{si } 3 / p \end{cases}$$

avec  $G$  une fonction à plusieurs variables, donnée par la formule:

$$G(y_1, \dots, y_{p-2}) = \sum_{\substack{(i,j < k)=1 \\ i+j+k=p}}^{p-2} y_i y_j y_k + \sum_{\substack{(i < j)=1 \\ i+2k=p}}^{p-2} y_i y_k^2.$$

$r = \pm 1$  est un nombre d'indication. Si  $r=1$ , les formules (III-7) proviennent de l'équation (III-4) et si  $r=-1$ , sont celles de l'équation (III-5).

Pour déterminer les coefficient  $\omega_i$ , la solution  $y(\tau, \varepsilon)$  doit être  $2\pi$ -périodique. Autrement dit, chaque  $y_i(\tau)$  doit être  $2\pi$ -périodique. Cette condition évite l'apparition du terme  $\tau \cos(\tau)$  appelé terme séculaire, qui lui même provient du terme en  $\cos(\tau)$  existant dans le second membre des

formules (III-7). En tenant compte de ceux-ci, La résolution des problèmes linéaires à l'aide du système Maple donne les formules de récurrence suivantes:

$$\omega_{2i+1}=0 \quad \text{pour } i=0,1,2, \dots$$

et les  $y_i(\tau)$  sont tels que

$$y_{2i}(\tau) = 0 \quad \text{pour } i=1,2, \dots$$

$$y_{2i+1}(\tau) = \sum_{j=0}^i y_{2i+1,j} \cos((2j+1)\tau) \quad \text{pour } i=0,1,2, \dots$$

avec  $y_{2i+1,j}$  des valeurs numériques vérifiant:

$$\sum_{j=0}^i y_{2i+1,j} = 0 \quad \text{pour } i=1,2,3, \dots$$

A travers la manipulation du logiciel Maple, on a déterminé les expressions exactes des deux développements  $\omega^2(\varepsilon)$  et  $y(\tau, \varepsilon)$  jusqu'à l'ordre élevé 32.

Commençons par l'équation (III-4) qui a des solutions périodiques pour  $|\varepsilon|$  inférieure à 1. Les expressions des séries  $\omega^2(\varepsilon)$  et  $y(\tau, \varepsilon)$  de coefficients arithmétiques exacts s'écrivent:

$$\omega^2(\varepsilon) = 1 - \frac{3}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{128}\varepsilon^4 - \frac{9}{512}\varepsilon^6 - \frac{1779}{131072}\varepsilon^8 - \frac{5643}{524288}\varepsilon^{10} - \frac{146661}{16777216}\varepsilon^{12} - \frac{486603}{67108864}\varepsilon^{14} - \frac{841910643}{137438953472}\varepsilon^{16} + O(\varepsilon^{18}),$$

$$y(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \cos(\tau) + \frac{\varepsilon^3}{32}(-\cos(3\tau) + \cos(\tau)) + \varepsilon^5\left(\frac{1}{1024}\cos(5\tau) - \right.$$

$$\frac{3}{128}\cos(3\tau) + \frac{23}{1024}\cos(\tau) + O(\varepsilon^7).$$

On désigne ces séries respectivement par (III-8-a) et (III-8-b).

Passons maintenant à l'équation (III-5) qui a une solution périodique pour toute valeur de la donnée initiale  $\varepsilon$ , les séries  $\omega^2(\varepsilon)$  et  $y(\tau, \varepsilon)$  à un certain ordre s'écrivent:

$$\omega^2(\varepsilon) = 1 + \frac{3}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{128}\varepsilon^4 + \frac{9}{512}\varepsilon^6 - \frac{1779}{131072}\varepsilon^8 + \frac{5643}{524288}\varepsilon^{10} - \frac{146661}{16777216}\varepsilon^{12} + \frac{486603}{67108864}\varepsilon^{14} - \frac{841910643}{137438953472}\varepsilon^{16} + O(\varepsilon^{18}),$$

$$y(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \cos(\tau) + \frac{\varepsilon^3}{32}(\cos(3\tau) - \cos(\tau)) + \varepsilon^5\left(\frac{1}{1024}\cos(5\tau) - \frac{3}{128}\cos(3\tau) + \frac{23}{1024}\cos(\tau)\right) + \varepsilon^7\left(\frac{1}{32768}\cos(7\tau) - \frac{3}{2048}\cos(5\tau) + \frac{297}{16384}\cos(3\tau) - \frac{547}{32768}\cos(\tau)\right) + O(\varepsilon^9).$$

Que l'on désigne aussi par (III-9-a) et (III-9-b).

### III-3-3) Une nouvelle représentation utilisant les approximants de Padé

#### III-3-3-1) Principe de la représentation

C'est une technique qui "accélère la convergence d'une série entière", en la remplaçant par une fraction rationnelle, voir les détails dans le chapitre deux. A titre d'exemple, nous considérons la fonction suivante:

$$f(a) = \sqrt{\frac{1+1/2a}{1+2a}} \tag{III-10}$$

On peut approximer cette fonction par sa série de Taylor tronquée à l'ordre 3,

$$f(a) = 1 - \frac{3}{2}a + \frac{39}{32}a^2 + o(a^3) \quad (\text{III-11})$$

Le rayon de convergence de cette série est égal à 1/2. Mais si on utilise l'approximant de Padé  $P[1/1](a)$  qui est équivalent asymptotiquement à (III-11)

$$f(a) = \frac{1 + 7/8a}{1 + 13/8a} + o(a^3), \quad (\text{III-12})$$

on obtient une bonne approximation au delà du rayon de convergence.

Cet exemple nous montre l'utilité et l'efficacité d'une fraction rationnelle.

Mais dans certains cas, ces approximants de Padé ne sont pas très efficaces (L.Azrar et Al, 1993). Parfois, leur choix ni évident ni arbitraire. En effet, il faut chercher la meilleure stratégie. C'est ce qu'on va discuter maintenant.

On rappelle que les équations (III-4) et (III-1) sont équivalentes, ainsi que les équations (III-5) et (III-2).

### III-3-3-2) Application des approximants de Padé à l'équation (III-1)

D'après la figure (I-4-b) du chapitre un, on voit que les solutions périodiques n'existent que pour des valeurs de  $|\varepsilon|$  comprises entre 0 et 1, et que la période  $T(\varepsilon)$  tend vers l'infini ou la pulsation  $\omega(\varepsilon) = 2\pi / T(\varepsilon)$  tend vers zéro, lorsque  $\varepsilon$  tend vers un. Sur la figure (III-1), on a tracé la série  $\omega^2(\varepsilon)$  (III-8-a), tronquée aux ordres 12, 16, 18, 20, 24 et 28. Il apparaît que le rayon de convergence est proche de 1 ( $R \approx 0.99$ ).



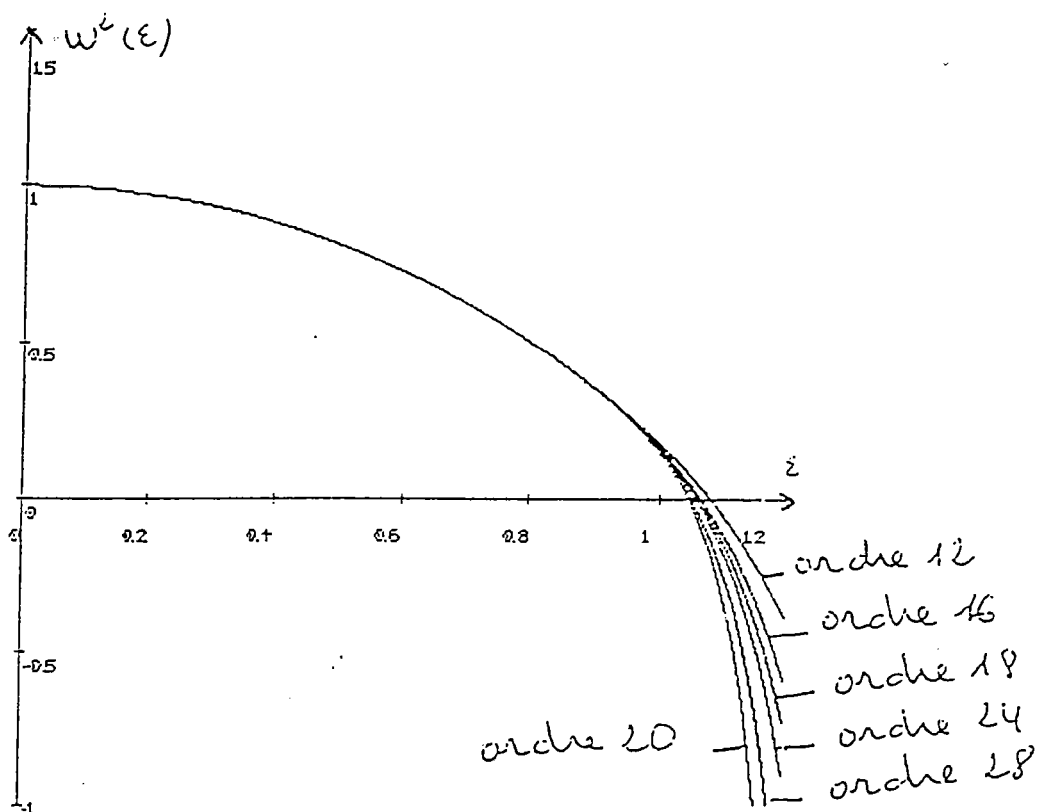


Figure III-1.

Dans ce cas, la représentation par séries entières permet donc d'obtenir la famille de solutions périodiques presque en entier. Il reste seulement à préciser la valeur limite ( $\epsilon = 1$ ) et à montrer que la pulsation tend vers 0 quand  $\epsilon$  tend vers 1. Dans un premier temps, on a cherché les zéros de la série  $w^2(\epsilon)$  tronquée à l'ordre 24, qui s'annule pour une valeur assez éloignée de  $\epsilon = 1$ , exactement égale à 1.15. Puis, on a construit une séquence d'approximants de Padé ayant la forme  $P[N/N](\epsilon)$ , (où  $N$  est un entier qui appartient à l'intervalle  $[6, 16]$ ), à partir de la série de Taylor  $w^2(\epsilon)$ . La valeur  $\epsilon = 1$  est estimée en cherchant les zéros de la séquence d'approximants de Padé. Les résultats sont donnés sur la table 1.

On observe la convergence numérique de ce procédé, l'erreur étant inférieure à 1% pour  $N$  supérieur à 10.

PADES	ZEROS DES PADES
N=6	1.023
N=8	1.014
N=10	1.009
N=12	1.007
N=14	1.005
N=16	1.003

Table 1

### III-3-3-3) Réorganisation de la solution périodique de l'équation (III-2) par les approximants de Padé

On a vu que cette équation admet une solution périodique pour chaque valeur de l'amplitude  $\varepsilon$ . Ceci va nous pousser à approfondir son étude analytique en faisant intervenir les techniques citées au chapitre deux. De plus, on va comparer tous les résultats analytiques avec ceux obtenus numériquement (solutions supposées exactes) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

La série périodique  $y(\tau, \varepsilon)$  (III-9-b) est de période  $2\pi$ . De plus quel que soit l'entier  $i$ , on a  $y_i(\tau + \pi) = -y_i(\tau)$ , donc il suffit d'étudier le comportement de la fonction  $y(\tau, \varepsilon)$  sur l'intervalle  $[0, \pi]$ . Sur ce domaine, le rayon de convergence  $R$  de (III-9-b) ne dépend pas d'une manière significative de la variable  $\tau$ . Il est voisin de  $\varepsilon = 1$ . Ce rayon de convergence est obtenu de deux façons différentes: en traçant la série  $y(\tau, \varepsilon)$  à différents ordres pour différents valeurs numériques de  $\tau$ . A titre d'exemple regardons les figures III-2-a, b. On a obtenu aussi cette invariance du rayon de convergence en

fonction de  $\tau$ , en cherchant les singularités les plus proches de l'origine dans le plan complexe de certains approximants de Padé.

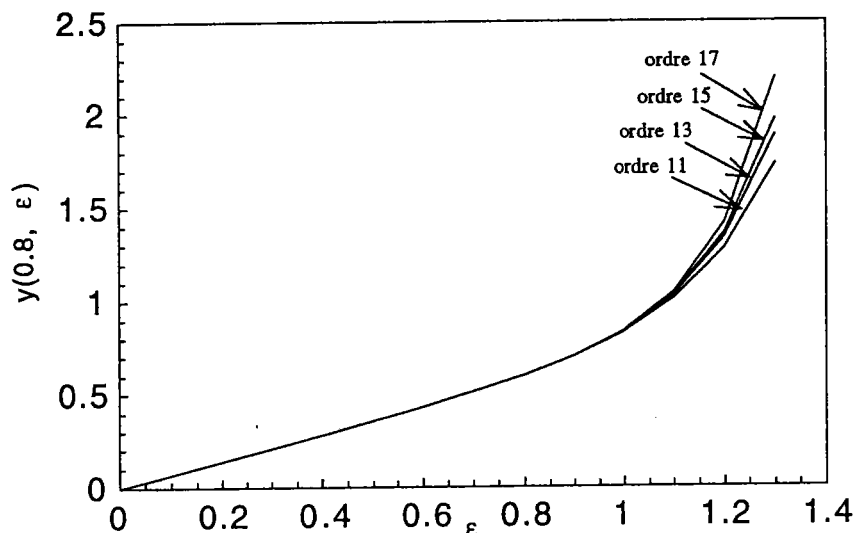


Figure III-2-a: représentation de la série  $y(\tau, \varepsilon)$  aux ordres 11, 13, 15 et 17 pour  $\tau=0.8$ .

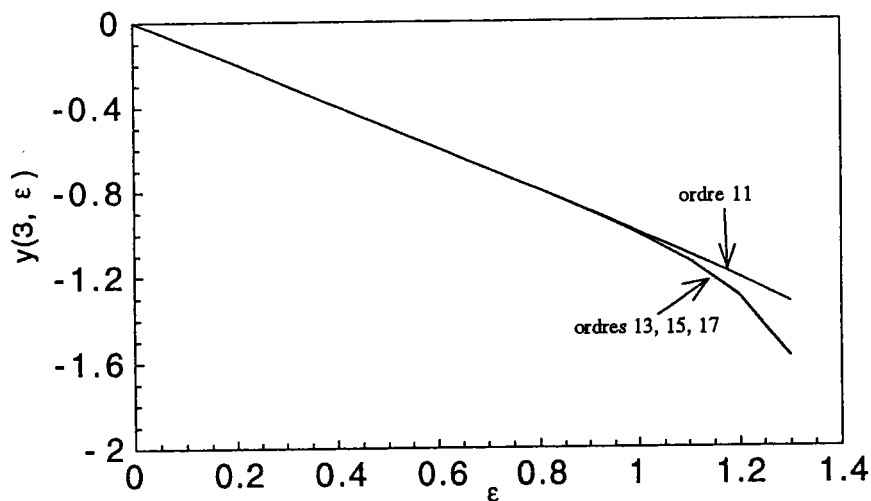


Figure III-2-b: représentation de la série  $y(\tau, \varepsilon)$  aux ordres 11, 13, 15 et 17 pour  $\tau=3$ .

Afin d'améliorer le domaine de validité de la série  $x(t, \varepsilon) = y(\tau, \varepsilon)$ , on adopte la technique des approximants de Padé.

Dans un premier temps, on explicite (III-9-b) dans la base orthogonale  $\{\cos(k\tau), k \in \mathbb{N}^*\}$ :

$$x(t, \varepsilon) = y(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i+1} f_{2i+1}(\varepsilon) \cos((2i+1)\tau) \quad (\text{III-13})$$

où  $f_{2i+1}(\varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} y_{2i+1,j} \varepsilon^j$ , et les  $y_{2i+1,j}$  sont des constantes numériques.

L'orthogonalisation est définie par le produit scalaire des fonctions  $2\pi$ -périodiques:

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) g(\tau) d\tau,$$

où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions  $2\pi$ -périodiques.

Deuxièmement, on remplace chaque série  $f_{2i+1}(\varepsilon)$  par une fraction rationnelle  $P_{2i+1}[L_{2i+1} / M_{2i+1}](\varepsilon)$ . Comme la variable temporelle  $\tau$  dépend de  $\varepsilon$  ( $\tau = \omega(\varepsilon)t$ ), on représente donc la série  $\omega^2(\varepsilon)$  par la fraction rationnelle  $P[L / M](\varepsilon)$ . Par conséquent, la nouvelle représentation de (III-13) obtenue à un certain ordre  $N$  (impair) fixé à l'avance par rapport à  $\varepsilon$  est:

$$x(t, \varepsilon) = y(\tau, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{(N-1)/2} \varepsilon^{2i+1} P_{2i+1}[L_{2i+1} / M_{2i+1}](\varepsilon) \cos((2i+1)\tau) \quad (\text{III-14})$$

où  $\tau = \sqrt{P[L / M](\varepsilon)}t$ .

Les ordres  $L_{2i+1}$ ,  $M_{2i+1}$ ,  $L$  et  $M$  de chaque approximant de Padé doivent être choisis par l'utilisateur. Notre stratégie "optimale" adoptée est la suivante.

Pour  $\varepsilon$  suffisamment grand et  $N=2m+1$ , On a:

$$\varepsilon P_1[m/m](\varepsilon) \text{ est d'ordre } \varepsilon, \quad (\text{III-14-a})$$

$$\varepsilon^3 P_3[m-2/m](\varepsilon) \text{ est d'ordre } \varepsilon, \quad (\text{III-14-b})$$

$$\varepsilon^{m+1} P_{m+1}[0/m](\varepsilon) \text{ est d'ordre } \varepsilon, \quad (\text{III-14-c})$$

$$\text{et le Padé provenant de la pulsation } P[m/m](\varepsilon) \text{ est d'ordre } 1. \quad (\text{III-14-d})$$

Donc on garde que les termes d'ordre inférieur ou égal à  $m+1$  dans la série (III-14), et on supprime les termes d'ordre supérieur.

Avec cette procédure, on a pu augmenter le domaine de convergence  $\varepsilon=1$  de la série  $x(t, \varepsilon)$ , jusqu'à une valeur dans le voisinage de  $\varepsilon=30$ . On voit cette amélioration en comparant pour différentes valeurs de la variable  $t$ , la formule analytique (III-14) avec les valeurs numériques (exactes) obtenues par la méthode de Runge-Kutta (figures III-3-a, b, c, d).

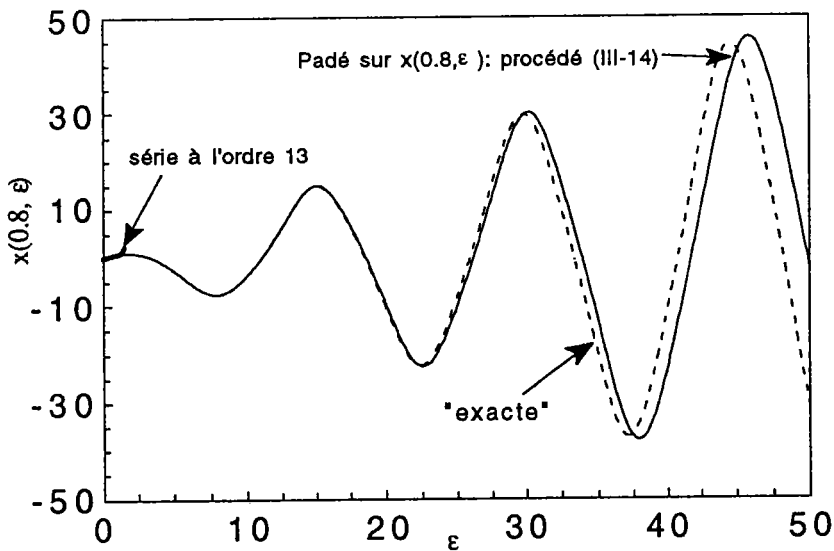


Figure III-3-a: Validité des solutions asymptotiques (série à l'ordre 13, procédé (III-14) avec  $m=6$ ) par comparaison avec une solution numérique ("exacte").  $t=0.8$ .

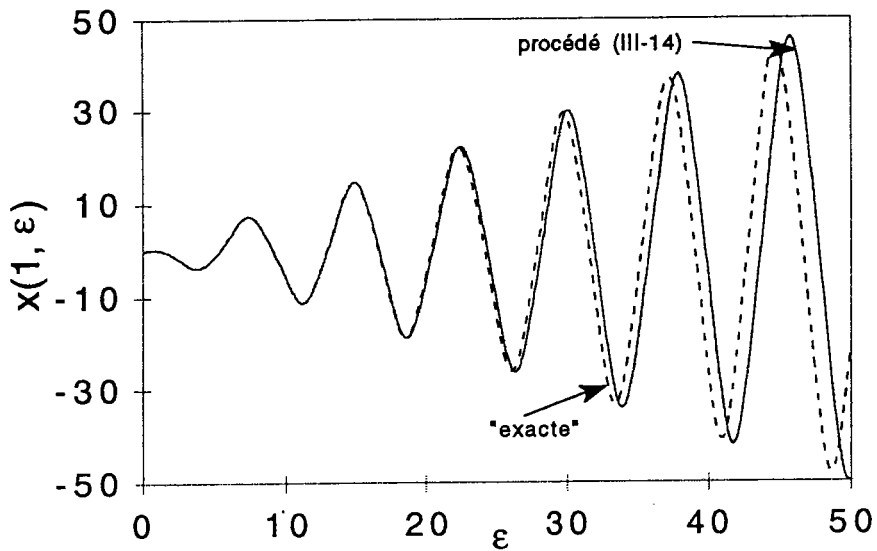


Figure III-3-b: Validité de la solution asymptotique (procédé (III-14) avec  $m=6$ ) par comparaison avec une solution numérique ("exacte").  $t=1$ .

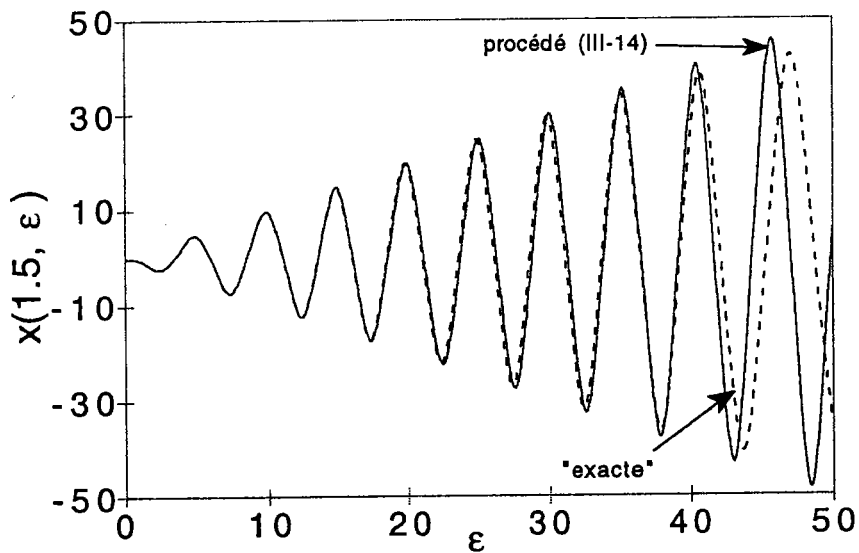


Figure III-3-b: Validité de la solution asymptotique (procédé (III-14) avec  $m=6$ ) par comparaison avec une solution numérique ("exacte").  $t=1.5$ .

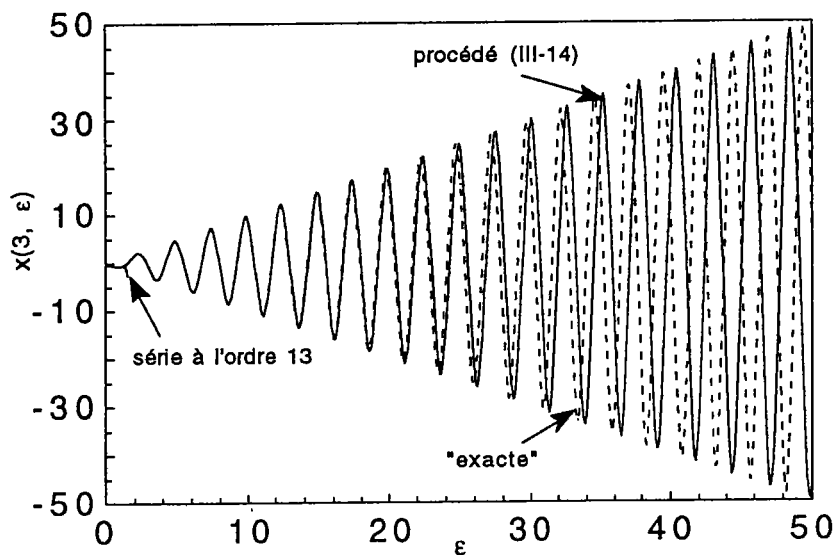


Figure III-3-d: Validité des solutions asymptotiques (série à l'ordre 13, procédé (III-14) avec  $m=6$ ) par comparaison avec une solution numérique ("exacte").  $t=3$ .

Cet exploit est dû peut être à la belle symétrie que présente ce système et à l'uniformité des termes de l'expression (III-14) qui ne présentent pas de déphasage entre eux. Car, on verra par la suite que la présence de ce phénomène de déphasage empêche une telle amélioration.

Vu l'efficacité de cette procédure, on en a essayé d'autres sur cette solution périodique  $x(t, \varepsilon)$  (par exemple, on a choisit les ordres  $L_{2i+1}$ ,  $M_{2i+1}$ ,  $L$  et  $M$  en sorte que toutes les formules (III-14-a, b, c, d) soient équivalentes à 1, lorsque  $\varepsilon$  est assez grand), mais on n'a obtenu aucune amélioration du domaine de validité de la solution.

### III-3-4) Amélioration de la pulsation de l'équation (III-2) grâce à une technique de projection

#### III-3-4-1) Utilisation des approximants de Padé

La détermination du rayon de convergence de la série (III-9-a) est le point primordial pour analyser la pulsation. Ce rayon de convergence apparaît au point de divergence de la série aux ordres 12, 14, 16, 18, 20, 24 et 28. Il est presque égale à la valeur 1 (figure III-4).

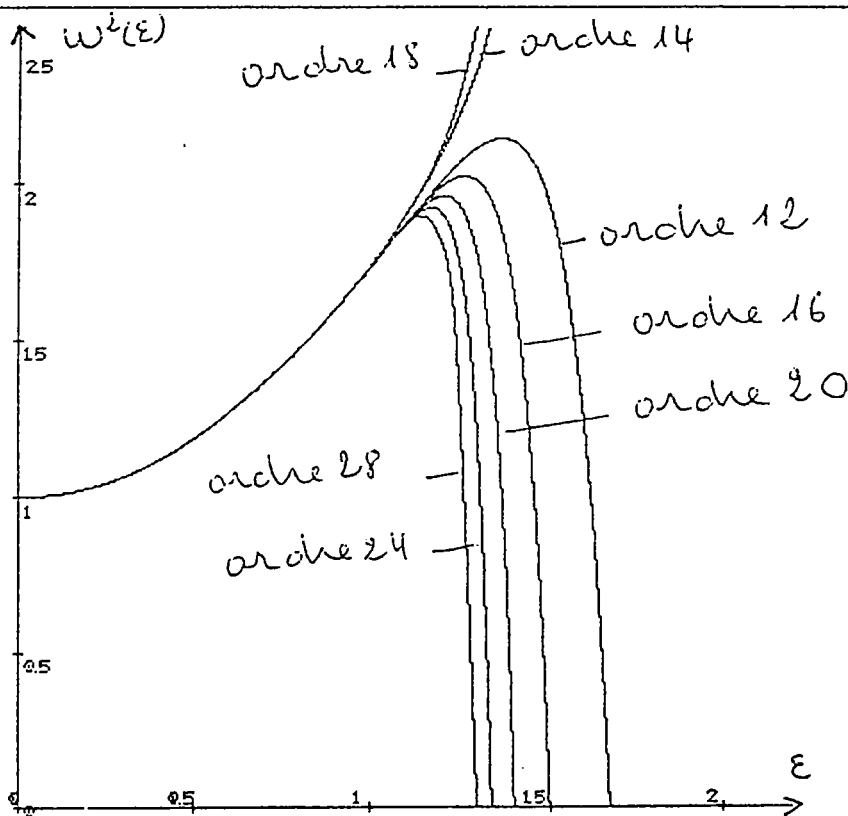


Figure III-4: Comparaison de la série  $\omega^2(\varepsilon)$  aux ordres 12, 14, 16, 18, 20, 24 et 28.

Pour améliorer ce domaine de convergence de longueur 1, dans un premier temps on a pensé aux approximants de Padé. L'utilisation de ces derniers sous la forme  $P[N/N](\varepsilon)$ , où  $N$  est un entier naturel, donne une expression qui coïncide avec les valeurs numériques-exactes de Runge-Kutta au moins jusqu'à  $\varepsilon = 40$ . Regardons, par exemple la figure (III-5).



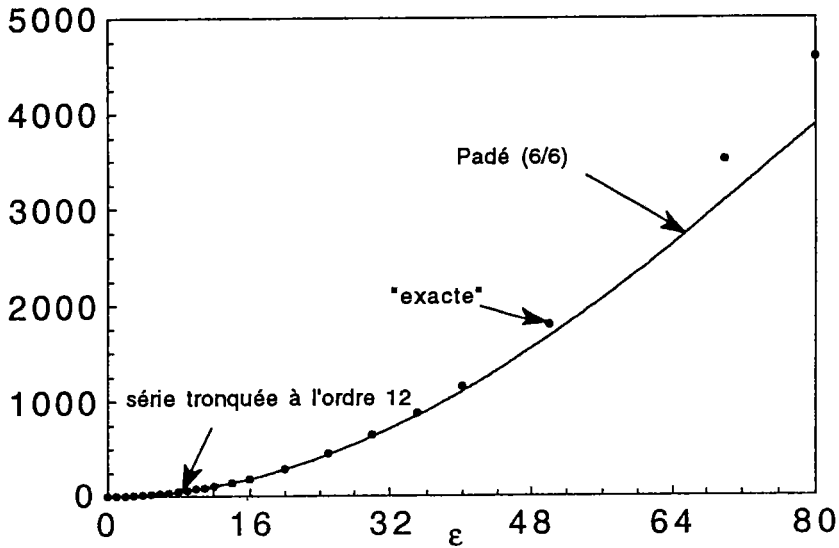


Figure III-5: Comparaison des valeurs numériques "exactes" de  $\omega^2(\epsilon)$ , sa série tronquée à l'ordre 12 et son Padé  $P[6/6](\epsilon)$ .

### III-3-4-2) Réorganisation de la pulsation à l'aide d'une technique de projection

Comme ces approximations rationnelles  $P[N/N](\epsilon)$  adoptées pour la pulsation tendent asymptotiquement vers une constante, lorsque  $N$  tend vers l'infini, il existe certainement une valeur de  $\epsilon$ , pour laquelle ces approximants divergent de la solution "exacte". A cet effet, on redéfinit la pulsation  $\omega(\epsilon)$  en fonction de  $\epsilon$ : on réutilise l'équation (III-5) qu'on projette sur le mode  $\cos(\tau)$  (solution de l'équation pour  $\epsilon=0$ ),

$$\langle \omega^2(\epsilon)\ddot{y} + y + y^3, \cos\tau \rangle = 0 \quad (\text{III-15})$$

où  $\langle \dots \rangle$  est le produit scalaire des fonctions  $2\pi$ -périodiques.

On en déduit, donc que:

$$\omega^2(\varepsilon) = - \frac{\langle y + y^3, \cos \tau \rangle}{\langle \ddot{y}, \cos \tau \rangle}, \quad (\text{III-16})$$

où  $y(\tau)$  est donné par (III-14).

Cette dernière représentation (III-16) augmente encore le domaine de validité de la pulsation par rapport à son approximant de Padé  $P[N/N](\varepsilon)$ . Ceci est peut être dû au fait que la formule (III-16) ne tend plus asymptotiquement vers une constante pour  $\varepsilon$  assez grand. Par exemple, si on tronque la série  $\omega^2(\varepsilon)$  à l'ordre 12, on trouve que le Padé  $P[6/6]$  coïncide avec la solution numérique (exacte) jusqu'à  $\varepsilon \approx 40$  (figure III-5), alors que l'expression (III-16) obtenue par projection, augmente le domaine de coïncidence jusqu'à une valeur infinie (figure III-6).

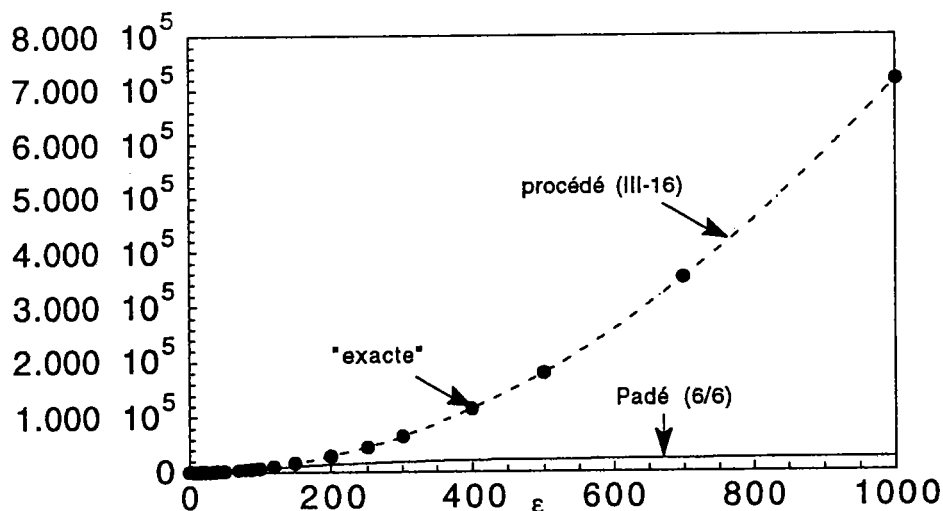


Figure III-6: Comparaison des valeurs numériques de  $\omega^2(\varepsilon)$ , son Padé  $P[6/6](\varepsilon)$  et la formule (III-16) obtenue par le procédé (III-14) et la technique de projection.

Comme dans les études précédentes concernant l'équilibre des structures élastiques, la technique de projection est bien plus efficace que l'application directe des approximants de Padé.

### III-3-5) Utilisation de la transformation d'Euler

#### III-3-5-1) Description de la transformation

Cette technique consiste à chercher la singularité la plus proche de l'origine et à l'envoyer à l'infini. Si on considère que la fonction  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varepsilon^n$  a une singularité en  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , alors en posant  $s = \varepsilon / (\varepsilon - \varepsilon_0)$ , on obtient une nouvelle série en  $s$  qui s'écrit sous la forme  $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n s^n$  et qui converge pour  $\varepsilon$  assez grand.

Généralement, on cherche la singularité la plus proche de l'origine par plusieurs méthodes [24]. Ici on se limitera aux approximants de Padé.

#### III-3-5-2) Application à la pulsation de l'équation (III-2)

On commence notre analyse par la détermination d'une séquence de Padé  $P[N/N](\varepsilon)$  avec  $N=12,14,16$ . la position de la plus proche singularité de l'origine d'une fonction analytique détermine le rayon de convergence de la série. Puisque  $\omega^2(\varepsilon)$  est une fonction réelle de  $\varepsilon$ , toutes les singularités non réelles forment entre elles des paires complexes conjuguées. Pour le Padé  $P[12/12](\varepsilon)$  tous les pôles sont localisés au voisinage de l'axe imaginaire (figure III-7). Par suite le domaine de convergence de la série (III-9-a) est limité par la paire complexe conjuguée:

$$\varepsilon = R e^{\pm i\alpha} \quad \text{où } R=1.014 \text{ et } \alpha = \pi / 2.$$

R désigne la distance entre l'origine et la singularité la plus proche de l'origine, et  $\alpha$  est l'angle entre l'axe réel et cette singularité. On remarque que la valeur de R trouvée à partir du Padé est très proche de celle obtenue en traçant la série (III-9-a) à différents ordres.

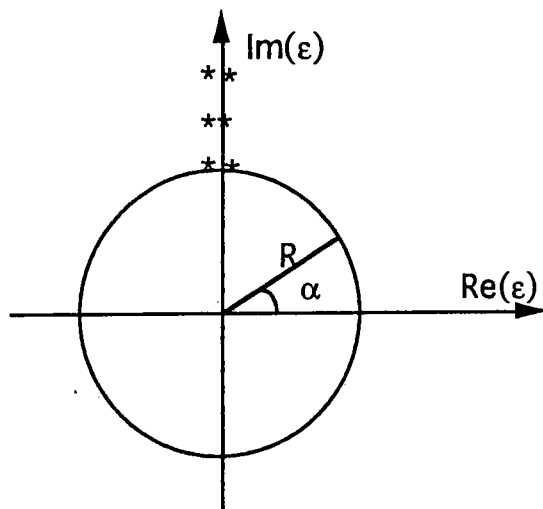


Figure III-7: Les singularités du Padé (12/12)

Connaissant les deux singularités  $\varepsilon = R e^{\pm i\alpha}$ , on pose le changement de variable qui les envoie à l'infini:

$$s(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 - 2R\varepsilon \cos \alpha + \varepsilon^2}}. \quad (\text{III-17})$$

Pour  $\alpha = \pi / 2$ , (III-21) devient,

$$s(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{R^2 + \varepsilon^2}}. \quad (\text{III-18})$$

La formule (III-18) vérifie en plus les deux conditions suivantes:

$s(0)=0$  (l'origine reste fixe) et  $s(\text{infini})=1$ .

En exprimant  $\varepsilon$  en fonction de  $s$  on obtient:

$$\varepsilon = \frac{s^2 R^2}{1 - s^2}.$$

On reporte la formule ci-dessus dans la série  $\omega^2(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{24} \omega_i \varepsilon^i + o(\varepsilon^{25})$  tronquée à l'ordre 24. On trouve, à l'aide du système Maple une nouvelle représentation du carré de la pulsation:

$$\omega^2(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{24} \tilde{\omega}_i s^i + o(s^{25}), \quad (\text{III-19})$$

où les  $\tilde{\omega}_i$  sont les nouveaux coefficients déterminés à partir des  $\omega_i$  d'une manière convenable. Théoriquement, pour que la série initiale converge pour  $\varepsilon$  suffisamment grand, il faut que la nouvelle série (III-19), admette un rayon de convergence proche de 1. Cette condition est réalisée, en effet, puisque le rayon de convergence avec la nouvelle variable  $s$  est  $R \approx 0.99$ . En pratique, la nouvelle série (III-19) augmente un peu le domaine de convergence, voir figure III-8. Mais l'approximant de Padé  $P[12/12](s)$  de cette série coïncide avec la solution exacte jusqu'à  $\varepsilon \approx 300$  (figure III-9), alors que le domaine de validité était limité à  $\varepsilon=40$  sans la transformation d'Euler.

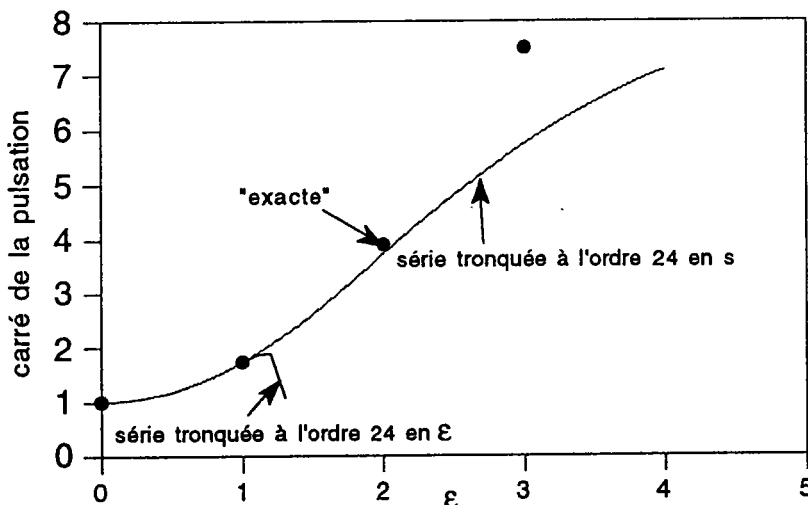


Figure III-8 : Comparaison des valeurs numériques "exactes" de  $\omega^2(\varepsilon)$  et des séries  $\omega^2(\varepsilon)$ ,  $\omega^2(s)$  tronquées à l'ordre 24.

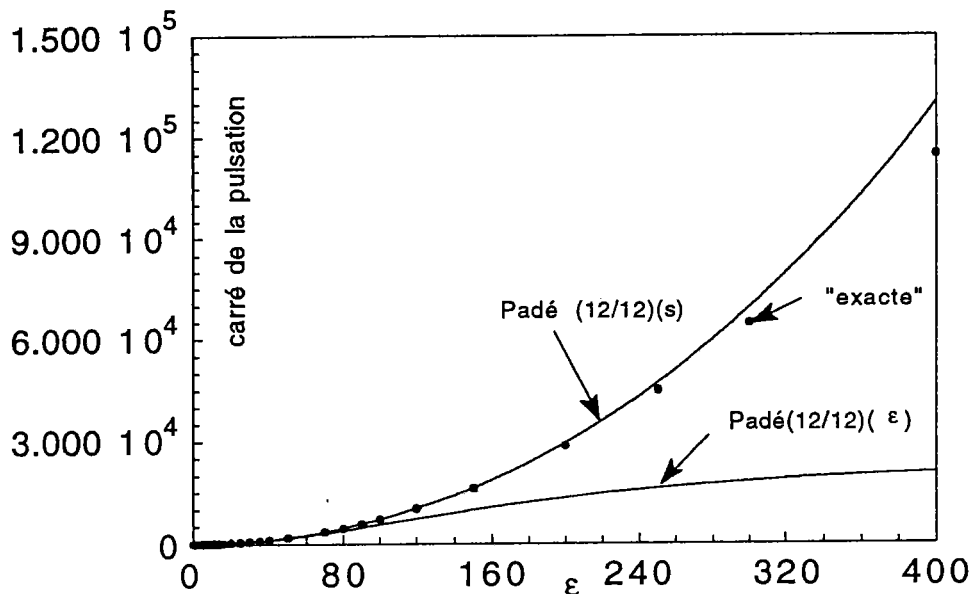


Figure III-9: Représentation des valeurs numériques "exactes" de  $\omega^2(\epsilon)$  et les approximations de Padé correspondant  $P[12 / 12](s)$ ,  $P[12 / 12](\epsilon)$ , où  $\epsilon = s^2 R^2 / (1 - s^2)$ .

### III-4) Application de la méthode asymptotique-numérique à l'équation de Van der Pol

#### III-4-1) Calcul par le développement asymptotique

En adoptant les transformations utilisées précédemment  $\tau = \omega(\epsilon)t$  et  $y(\tau, \epsilon) = x(t, \epsilon)$ , l'équation (III-3) devient :

$$\begin{cases} \omega^2(\epsilon)\ddot{y} + y = \epsilon\omega(1 - y^2)\dot{y} \\ y(0) = a(\epsilon) \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-10})$$

On cherche le cycle limite de (III-10) sous la forme d'une série entière:

$$\begin{cases} \omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots \\ a(\varepsilon) = a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \dots \\ y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \dots \end{cases} \quad (\text{III-11})$$

où  $\omega_i, a_i$  sont des constantes et  $y_i(\tau)$  sont des fonctions  $2\pi$ -périodiques. On reporte (III-11) dans (III-10), on obtient une séquence d'équations différentielles linéaires en  $y_i$ ,

à l'ordre 0

$$\begin{cases} \ddot{y}_0 + y_0 = 0 \\ y_0(0) = a_0 \\ \dot{y}_0(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-12-a})$$

à l'ordre 1

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + y_1 = (1 - y_0^2)\dot{y}_0 - 2\omega_1\ddot{y}_0 \\ y_1(0) = a_1 \\ \dot{y}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-12-b})$$

Pour  $p$  supérieur ou égal à 2, on a la formule de récurrence,

$$\begin{cases} \ddot{y}_p + y_p = (1 - y_0^2)L_{p-1} - \sum_{i=1}^{p-1} B_i L_{p-i-1} - \sum_{i=1}^p C_i y_{p-i} \\ y_p(0) = a_p \\ \dot{y}_p(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III-12-c})$$

telle que  $B_p$ ,  $L_p$  et  $C_p$  vérifient les sommes,

$$\begin{cases} B_p = \sum_{i=0}^p y_i y_{p-i} \\ C_p = \sum_{i=0}^p \omega_i \omega_{p-i} \\ L_p = \sum_{i=0}^p \omega_i \dot{y}_{p-i} \end{cases}$$

Pour déterminer les coefficients constants  $a_i$  et  $\omega_i$ , on élimine les termes séculaires « $\tau \cos(\tau)$ » et « $\tau \sin(\tau)$ » qui proviennent des termes en  $\cos(\tau)$  et  $\sin(\tau)$  de derniers membres de (III-12). De cette façon on a calculé les coefficients exacts des séries (III-11) jusqu'à l'ordre 24 à l'aide du système Maple. On trouve que:

$$\omega_{2i+1} = a_{2i+1} = 0,$$

alors que les  $y_i(\tau)$  sont de la forme:

$$y_{2i}(\tau) = \sum_{j=0}^{2i} y_{2i,j} \cos((2j+1)\tau),$$

$$y_{2i+1} = \sum_{j=0}^{2i+1} y_{2i+1,j} \sin((2j+1)\tau),$$

où  $y_{k,j}$  sont des constantes qui vérifient:

$$\sum_{j=0}^{2i+1} (2j+1) y_{2i+1,j} = 0.$$

Les séries obtenues et choisies à un certain ordre sont données par:



$$\omega(\varepsilon) = 1 - \frac{1}{16}\varepsilon^2 + \frac{17}{3072}\varepsilon^4 + \frac{35}{884736}\varepsilon^6 - \frac{678899}{5096079360}\varepsilon^8 + O(\varepsilon^{10}),$$

$$a(\varepsilon) = 2 + \frac{1}{96}\varepsilon^2 - \frac{1033}{552960}\varepsilon^4 + \frac{1019689}{55738368000}\varepsilon^6 + \frac{9835512276689}{157315969843200000}\varepsilon^8 + O(\varepsilon^{10}),$$

$$y(\tau, \varepsilon) = 2 \cos(\tau) + \varepsilon \left( \frac{3}{4} \sin(\tau) - \frac{1}{4} \sin(3\tau) \right) + \varepsilon^2 \left( -\frac{5}{96} \cos(5\tau) + \frac{3}{16} \cos(3\tau) - \frac{1}{8} \cos(\tau) \right) + O(\varepsilon^3).$$

On caractérise ces séries respectivement par les notations (III-13-a), (III-13-b) et (III-13-c).

### III-4-2) Utilisation des approximants de Padé

Notre objectif est d'améliorer les séries (III-11), en utilisant une procédure d'approximants de Padé comparable à celle établie auparavant. Numériquement, on a évalué le cycle limite  $x(t, \varepsilon)$  par la méthode numérique de Runge-Kutta en prenant les résultats numériques de la période et l'amplitude confirmés par M. Urabe, (1967) et C.W. Clenshaw (1966). Ces résultats ont été trouvés par des méthodes itératives classiques (table 2).

$\varepsilon$	$a(\varepsilon)$	$T(\varepsilon)$
1	2.008619	3.331643
2	2.019891	3.814937
3	2.023304	4.429547
4	2.022962	5.101761
5	2.021508	5.806115
6	2.019830	6.530937
7	2.018215	7.269873
8	2.016747	8.019088
9	2.015440	8.776092
10	2.014285	9.539184
11	2.013264	10.307154
12	2.012359	11.079110

Table 2.

### III-4-2-1) Analyse de la pulsation

Afin d'étudier la période, on cherche la valeur du paramètre  $\varepsilon$  où la série (III-11-a) diverge. Pour cela, on trace (III-11-a) aux ordres 12, 14, 16, 18, 20 et 24 (figure III-10). Par suite, on constate que le rayon de convergence a lieu en  $\varepsilon \approx 1.88$ . Pour augmenter ce domaine de convergence, on calcule la fraction rationnelle  $P[12/12](\varepsilon)$ . Cette dernière coïncide avec les valeurs exactes (Runge-Kutta) jusqu'à  $\varepsilon \approx 6$  (figure III-11).

### III-4-2-2) Analyse de l'amplitude

L'investigation de la série (III-11-b), se fait de la même façon que la pulsation. En effet, on trouve que le rayon de convergence est autour de 1.93 (figure III-12), alors que le Padé  $P[12/12](\varepsilon)$  l'augmente approximativement jusqu'à  $\varepsilon \approx 8$  (figure III-13).

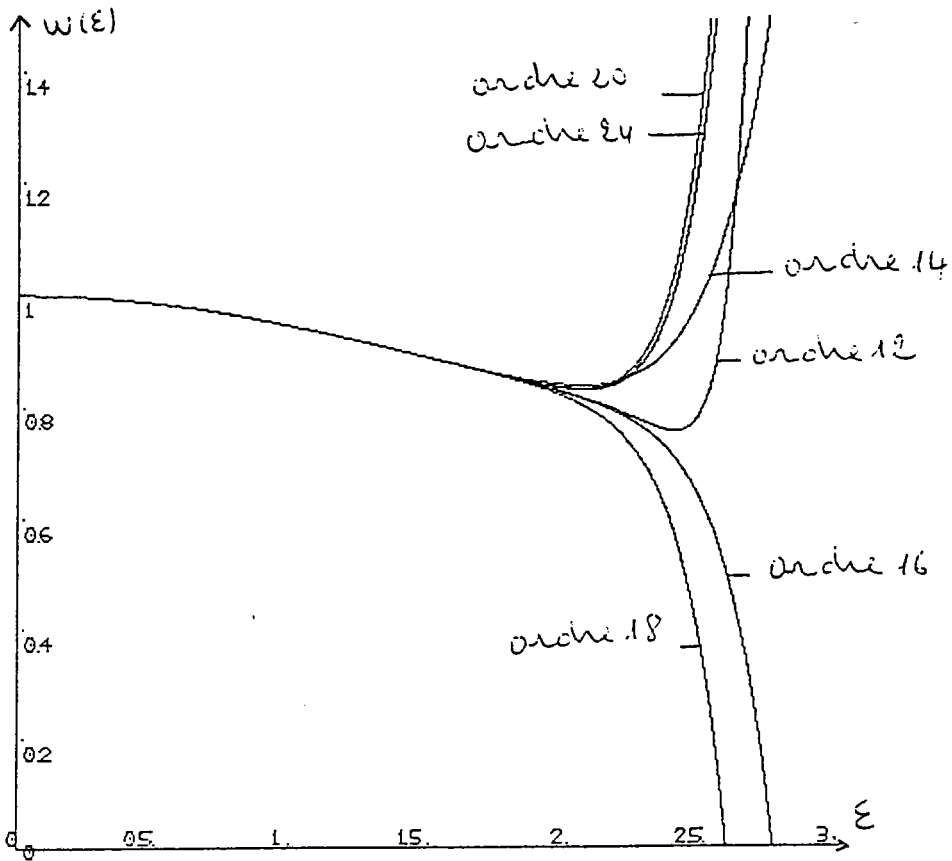


Figure III-10: Comparaison de la série  $\omega(\varepsilon) / 2$  aux ordres 12, 14, 16, 18, 20 et 24.

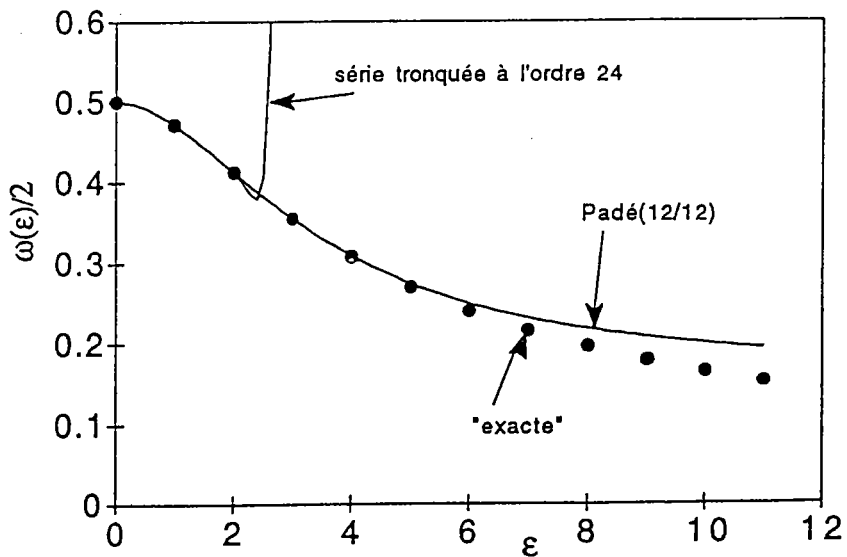


Figure III-11: Comparaison entre les valeurs numériques de  $\omega(\varepsilon) / 2$ , sa série de Taylor d'ordre 24 et son Padé  $P[12 / 12](\varepsilon)$ .

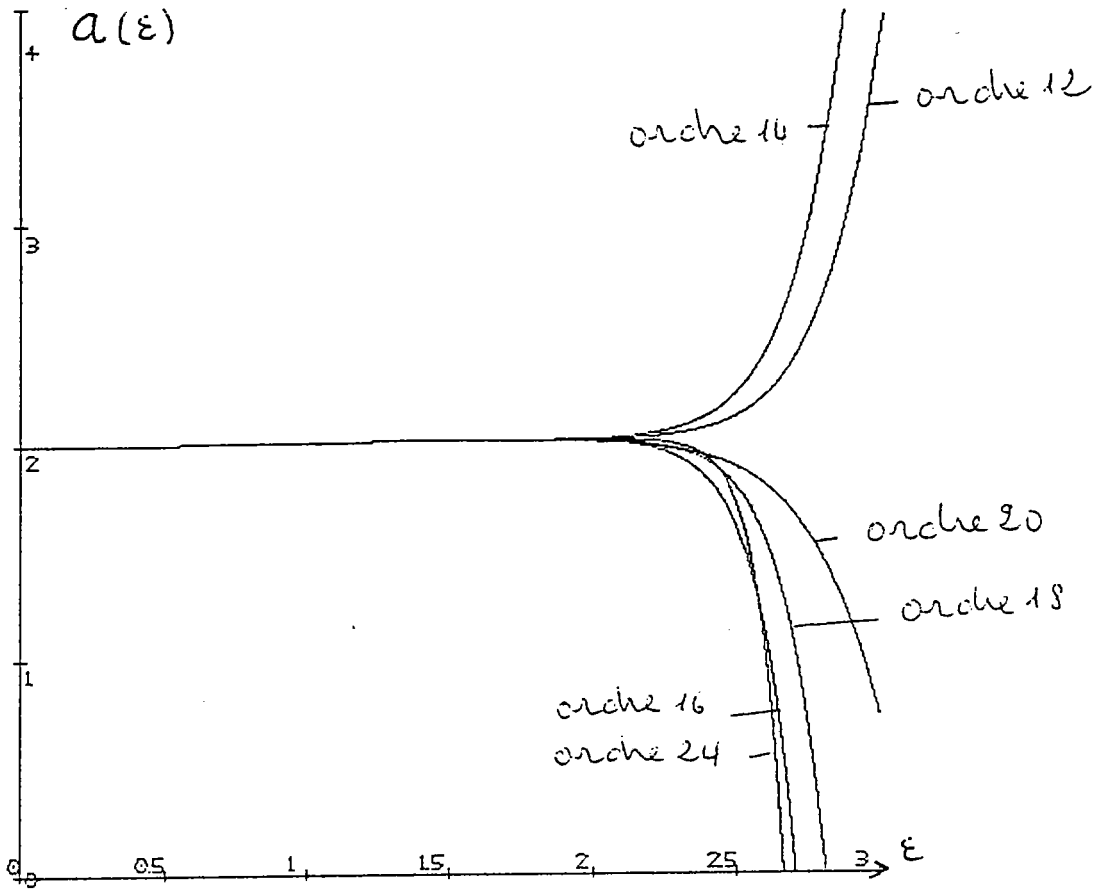


Figure III-12: Comparaison de la série  $a(\varepsilon)$  aux ordres 12, 14, 16, 18, 20 et 24.

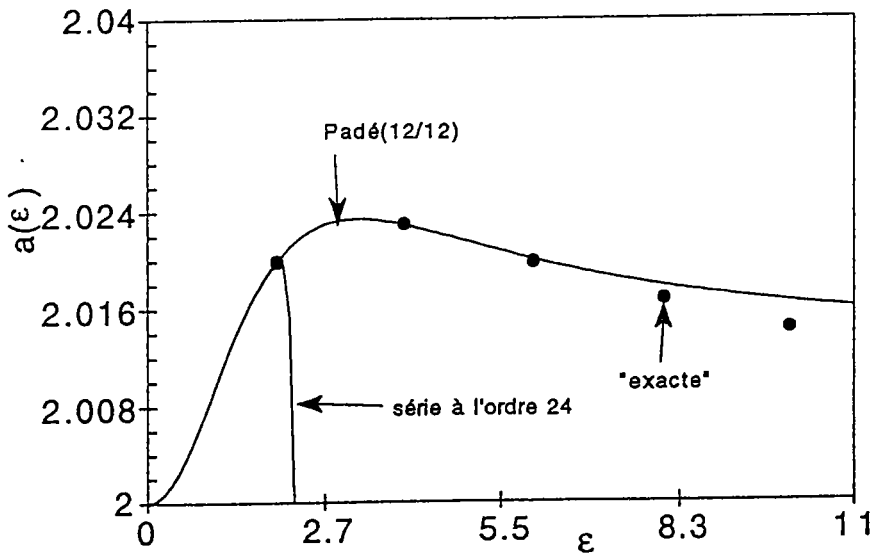


Figure III-13: Comparaison entre les valeurs numériques de  $a(\varepsilon)$ , sa série tronquée à l'ordre 24 et son Padé  $P[12/12](\varepsilon)$ .

### III-6-3) Analyse de la solution périodique

Ici, on propose d'étudier le rayon de convergence de la série (III-13-c) en fonction de la variable  $\tau$ . Comme  $y(\tau, \varepsilon)$  est  $2\pi$ -périodique et vérifie  $y(\tau + \pi, \varepsilon) = -y(\tau)$ , il suffit d'étudier le comportement de la série dans l'intervalle  $[0, \pi]$ . Sur ce domaine, on trouvera à l'aide des approximants de Padé que le rayon de convergence dépend d'une manière significative du temps  $\tau$ . Il varie entre 1.5 et 1.8.

Pour améliorer ce domaine de validité de la série, on applique la même démarche qu'auparavant. On réécrit (III-13-c) dans la base orthogonale  $\{(\cos(k\tau), \sin(k\tau)), k \in \mathbb{N}^*\}$  de la façon suivante:

$$\begin{aligned}
 y(\tau, \varepsilon) = & C_1(\varepsilon)\cos(\tau) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{2i+1}(S_{4i+1}(\varepsilon)\sin((4i+1)\tau) + \\
 & S_{4i+3}(\varepsilon)\sin((4i+3)\tau)) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^{2i}(C_{4i-1}(\varepsilon)\cos((4i-1)\tau) + \\
 & C_{4i+1}(\varepsilon)\cos((4i+1)\tau)), \tag{III-24}
 \end{aligned}$$

où les fonctions  $C_{2i+1}(\varepsilon)$  et  $S_{2i+1}(\varepsilon)$  sont des polynômes en  $\varepsilon$ .

La représentation de (III-24) par des approximants de Padé est définie par la substitution des polynômes  $C_{2i+1}(\varepsilon)$  et  $S_{2i+1}(\varepsilon)$  respectivement par les fractions rationnelles  $P_{2i+1}[L_{2i+1}/M_{2i+1}](\varepsilon)$  et  $P'_{2i+1}[L'_{2i+1}/M'_{2i+1}](\varepsilon)$ .

Puisque, la variable  $\tau$  dépend de  $\varepsilon$  ( $\tau = \omega(\varepsilon)t$ ), on remplace  $\omega(\varepsilon)$  par le Padé  $P[L/M](\varepsilon)$ . L'expression analytique obtenue donc par ces approximants à un certain ordre  $N$  (impair) fixé à l'avance, est donné par:

$$\begin{aligned}
 y(\tau, \varepsilon) = & P_1[L_1/M_1](\varepsilon)\cos(\tau) + \\
 & \sum_{i=1}^{(N-1)/2} \varepsilon^{2i}(P_{4i-1}[L_{4i-1}/M_{4i-1}](\varepsilon)\cos((4i-1)\tau) \\
 & + P_{4i+1}[L_{4i+1}/M_{4i+1}](\varepsilon)\cos((4i+1)\tau)) +
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{(N-1)/2} \varepsilon^{2i+1} (P'_{4i+1} [L'_{4i+1} / M'_{4i+1}] (\varepsilon) \sin((4i+1)\tau) + P'_{4i+3} [L'_{4i+3} / M'_{4i+3}] (\varepsilon) \sin((4i+3)\tau)) \quad (\text{III-25})$$

La complexité de cette formule (III-25) empêche de trouver le bon choix des ordres des Padés en question. Malgré, cette difficulté on a pu sélectionner deux stratégies "optimales", qu'on va présenter maintenant.

### PREMIERE STRATÉGIE

Pour  $\varepsilon$  suffisamment grand et  $N=2m+1$ , on a:

$P_1[m/m](\varepsilon)$  est d'ordre 1,

$\varepsilon P'_1[m/m](\varepsilon)$  et  $\varepsilon P'_3[m/m](\varepsilon)$  sont d'ordre  $\varepsilon$ ,

$\varepsilon^2 P_3[m-2/m-2](\varepsilon)$  et  $\varepsilon^2 P_5[m-2/m-2](\varepsilon)$  sont d'ordre  $\varepsilon^2$ ,

$\varepsilon^3 P'_5[m-2/m](\varepsilon)$  et  $\varepsilon^3 P'_7[m-2/m](\varepsilon)$  sont d'ordre  $\varepsilon$ ,

$\varepsilon^m P_{2m-1}[0/m-2](\varepsilon)$  et  $\varepsilon^m P_{2m+1}[0/m-2](\varepsilon)$  sont d'ordre  $\varepsilon^2$ ,

$\varepsilon^{m+1} P'_{2m+1}[0/m](\varepsilon)$  et  $\varepsilon^{m+1} P'_{2m+3}[0/m](\varepsilon)$  sont d'ordre  $\varepsilon$ ,

et  $P[m/m](\varepsilon)$  est d'ordre 1.

Autrement dit, dans la formule (III-25) les facteurs de  $\cos((2i+1)\tau)$  ( $i=1,2,3,\dots$ ) sont d'ordre  $\varepsilon^2$  et ceux de  $\sin((2i+1)\tau)$  ( $i=0,1,2,\dots$ ) sont d'ordre  $\varepsilon$ . De plus, on tronque le calcul à l'ordre  $m+1$ .

Cette procédure s'est révélée moins efficace relativement à celle adoptée pour l'exemple (III-2). Cela est dû aux fonctions  $\cos((2i+1)\tau)$  et  $\sin((2i+1)\tau)$  qui s'alternent dans l'expression concernée (III-24), et qui provoquent un comportement non uniforme au cycle limite à partir d'une certaine valeur de  $\varepsilon$ . Nous observons ce phénomène dans le plan de phase (figure III-14).

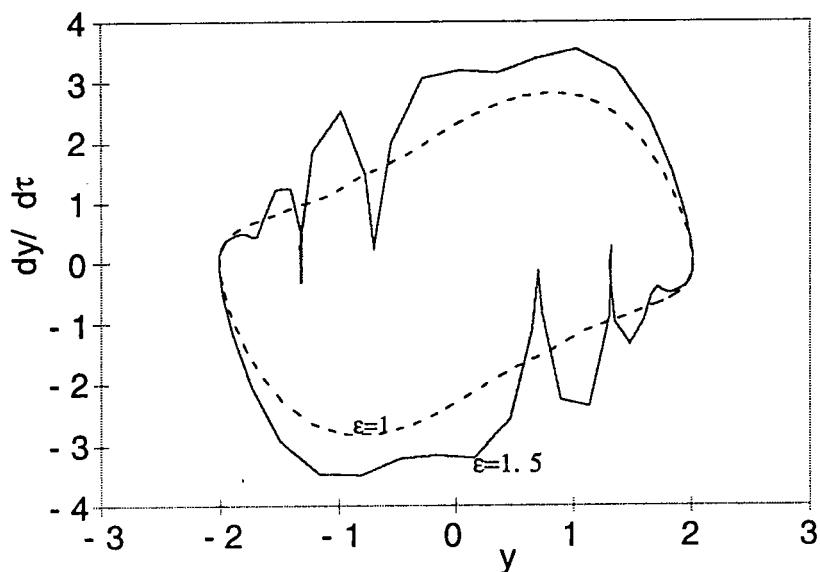


Figure III-14: Le cycle limite  $y(\tau, \varepsilon)$  pour deux valeurs de  $\varepsilon$  dans le plan de phase.

Malgré tout, Cette stratégie double presque le domaine de validité quelle que soit la valeur de la variable  $t$ . A titre d'exemple regardons les figures (III-15-a, b) lorsque  $N=13$ .

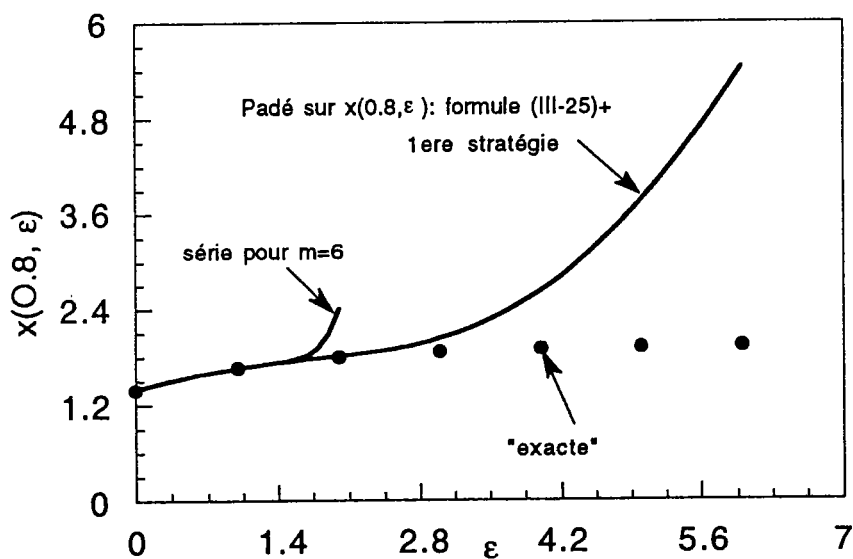


Figure III-15-a: Validité des solutions asymptotiques par comparaison avec une solution numérique "exacte". Pour  $t=0.8$ .

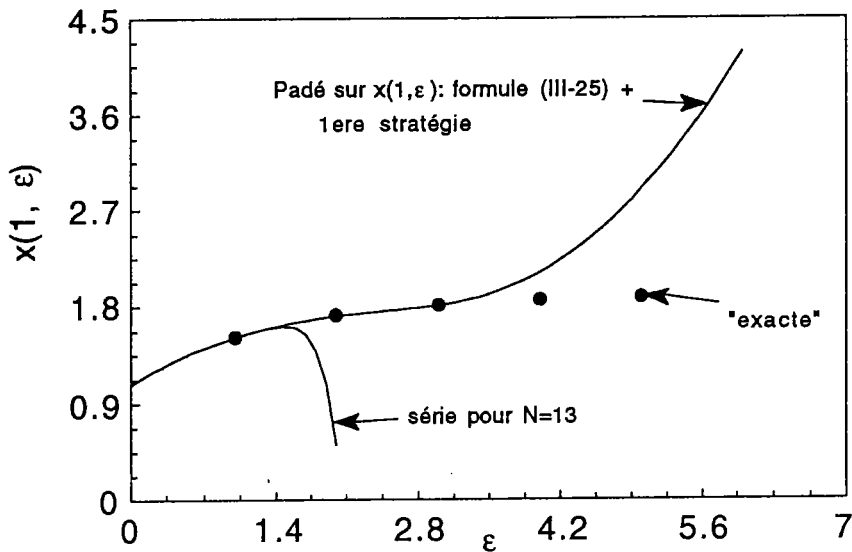


Figure III-15-b: Validité des solutions asymptotiques (série donnée par (III-13-c) à l'ordre 13, la première stratégie de Padé avec  $m=6$ ) par comparaison avec une solution numérique "exacte". Pour  $t=1$ .

Afin de prouver que cette amélioration très réduite par rapport au deuxième exemple conservatif n'est due ni à la stratégie précédente ni à l'ordre de troncature, on propose maintenant une autre procédure générale qu'on va tester sur la formule (III-25) pour  $N=17$ , c'est à dire pour  $m=8$ .

### DEUXIEME STRATÉGIE

Dans ce cas, lorsque  $\varepsilon$  tend vers l'infini et  $N=2m+1$ , les fractions rationnelles vérifient:

$$P_1[m/m](\varepsilon) \rightarrow 1$$

$$\varepsilon P'_1[m/m](\varepsilon) \text{ et } \varepsilon P'_3[m/m](\varepsilon) \rightarrow \varepsilon,$$

$$\varepsilon^2 P_3[m-2/m](\varepsilon) \text{ et } \varepsilon^2 P_5[m-2/m](\varepsilon) \rightarrow 1,$$



$$\varepsilon^3 P'_5[m-2/m](\varepsilon) \text{ et } \varepsilon^3 P'_7[m-2/m](\varepsilon) \rightarrow \varepsilon,$$

$$\varepsilon^m P_{2m-1}[0/m](\varepsilon) \text{ et } \varepsilon^m P_{2m+1}[0/m](\varepsilon) \rightarrow 1,$$

$$\varepsilon^{m+1} P'_{2m+1}[0/m](\varepsilon) \text{ et } \varepsilon^{m+1} P'_{2m+3}[0/m](\varepsilon) \rightarrow \varepsilon,$$

$$\text{et } P[m/m](\varepsilon) \rightarrow 1,$$

en sorte que dans la formule (III-25) tous les coefficients de  $\cos((2i+1)\tau)$  ( $i=0,1,\dots$ ) tendent vers 1 et ceux de  $\sin((2i+1)\tau)$  tendent vers  $\varepsilon$  ( $i=0,1,\dots$ ).

Pour illustrer ce dernier cas, on choisit par exemple  $N=17$  pour deux valeurs de  $t$  (figure III-16-a, b).

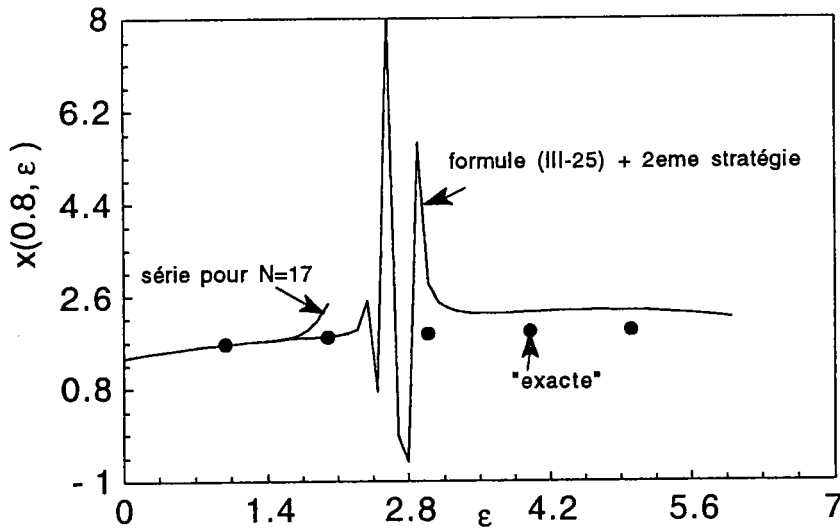


figure III-16-a: Validité des solutions asymptotiques (série donnée par (III-13-c) à l'ordre 17, la première stratégie de Padé avec  $m=8$ ) par comparaison avec une solution numérique "exacte".  $t=0.8$

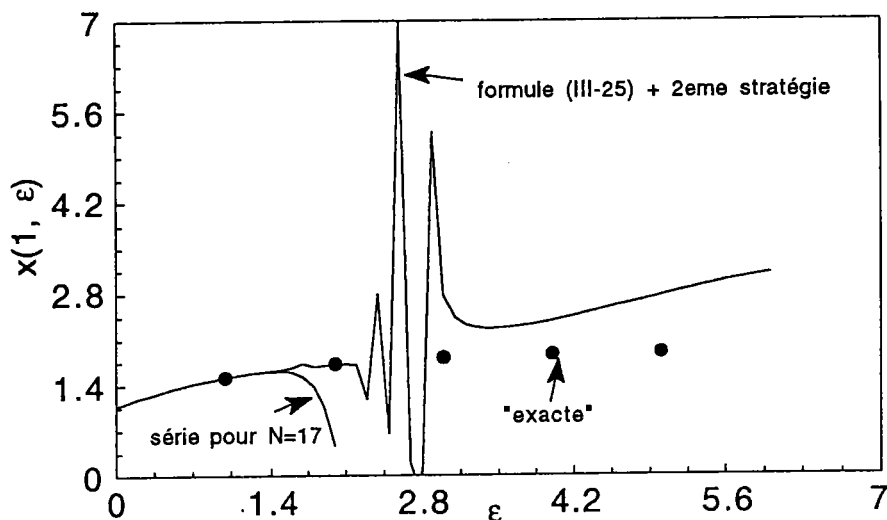


Figure III-16-b: Validité des solutions asymptotiques (série donnée par (III-13-c) à l'ordre 17, la première stratégie de Padé avec  $m=8$ ) par comparaison avec une solution numérique ("exacte").  $t=1$ .

On constate que la première stratégie conduit à une meilleure amélioration relativement à la deuxième.

Finalement, afin d'espérer une bonne amélioration à ce cycle limite on a utilisé la technique de projection sur plusieurs fonctions, mais nous n'avons pas trouvé de moyens d'améliorer les résultats précédents.

### III-5) Conclusion

D'après cette étude, on conclut que ces démarches asymptotiques-numériques donnent de bonnes approximations des solutions périodiques des problèmes dynamiques étudiées. Pour l'équation (III-2), cette procédure est très efficace: on est capable de mener les solutions périodiques jusqu'à une valeur très élevée de  $\varepsilon$ , alors que le rayon de convergence est autour de  $\varepsilon=1$ . On a également remarqué que la transformation d'Euler peut être une

bonne technique d'accélération de convergence. Pour l'équation (III-1), les solutions périodiques existent jusqu'à  $\varepsilon=1$ . On peut obtenir cette valeur limite comme pôle d'un approximant de Padé. Avec l'équation de Van der Pol cette procédure n'est pas très efficace car la transition entre les trajectoires de forme elliptique et les oscillations de relaxation conduit à un grand changement dans la forme de la trajectoire. Néanmoins l'approximant de Padé augmente le domaine de validité au moins d'un facteur deux.

Dans les systèmes pratiques, comme les échangeurs de chaleur, les solutions périodiques apparaissent souvent par une bifurcation de Hopf. C'est pourquoi nous présenterons aux chapitres V et VI des méthodes pour déterminer les points de bifurcation de Hopf et les solutions périodiques qui émergent à partir de ces points.

## **DEUXIEME PARTIE**

### **RAPPELS ET CALCULS DES POINTS DE BIFURCATION DE HOPF PAR UNE METHODE ASYMPTOTIQUE-NUMERIQUE**

## IV) RAPPELS SUR LA BIFURCATION DE HOPF

### IV-1) Introduction

On va aborder maintenant une notion tout à fait fondamentale dans l'étude des systèmes dynamiques. Pour cela nous considérons l'oscillateur de Van der Pol, réécrit de la manière suivante:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \dot{x} - x^2 \dot{x}. \quad (\text{IV-1})$$

Comme on a vu au chapitre I, pour  $\varepsilon < 0$ , l'origine  $x=0$  de cet oscillateur (IV-1) est stable (donc attracteur), mais il devient instable pour  $\varepsilon > 0$  et cède alors la place à un autre attracteur appelé cycle limite (voir figure IV-1). Pour  $\varepsilon = 0$ , l'oscillateur linéarisé est dans un état de stabilité marginale: il n'y a plus à proprement parler d'attracteur dans le plan de phases et chaque condition initiale engendre alors une orbite particulière (figure IV-1).

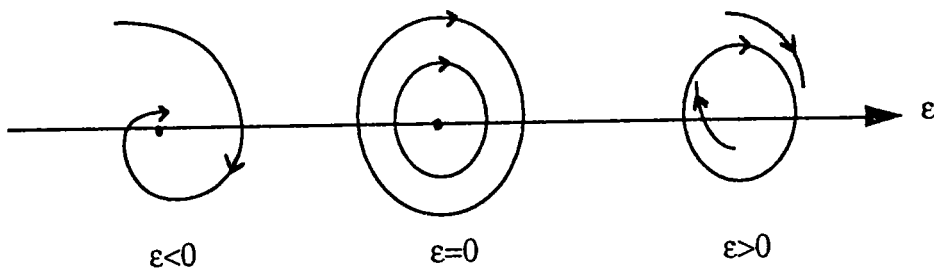


Figure IV-1.

Pour bien faire apparaître ce changement dans la nature de la solution de Van der Pol, on représente une propriété typique, par exemple l'élongation maximale en fonction de  $\varepsilon$  (figure IV-2). Le phénomène essentiel est l'apparition pour  $\varepsilon > 0$  d'une et une seule solution périodique stable, ce qui coïncide avec la perte de stabilité de la solution stationnaire.

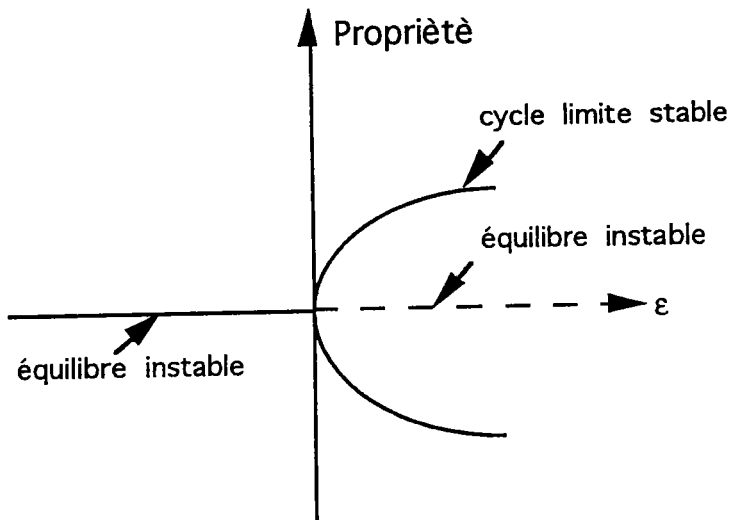


Figure IV-2.

Ce passage d'une dynamique stationnaire à une dynamique périodique se retrouve dans beaucoup de systèmes dissipatifs de dimension quelconque finie ou infinie. C'est ce passage qui se traduit mathématiquement par une bifurcation de Hopf.

Dans ce chapitre, on va rappeler les caractéristiques fondamentales de la bifurcation de Hopf, que l'on illustrera par des exemples à deux ou à trois dimensions. De plus, on va discuter la stabilité des branches de solutions périodiques ou stationnaires qui apparaissent par cette bifurcation de Hopf, ainsi que la méthode analytique de l'Alternative de Fredholm envisageable pour le calcul de ces branches périodiques. Pour plus de détails, on pourra se reporter à (Iooss G. et Joseph D.D., 1980).

## IV-2) Théorie de bifurcation de Hopf

### IV-2-1) Un exemple de bifurcation de Hopf

Le but de ce paragraphe est de confirmer les propriétés fondamentales, d'un très grand intérêt pratique pour identifier une bifurcation de Hopf. Pour cela, on considère l'exemple simple suivant (Seydel R., 1981):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(\varepsilon - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(\varepsilon - x^2 - y^2) \end{aligned} \quad (IV-2)$$

L'étude montre que  $x=y=0$  est la seule solution d'équilibre de (IV-2) (point stationnaire). La matrice Jacobienne

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

a pour valeurs propres  $\varepsilon \pm i$ . L'équilibre est stable pour  $\varepsilon < 0$  et instable pour  $\varepsilon > 0$ , c'est à dire, qu'il y'a un changement de stabilité au point  $\varepsilon = 0$ . Pour construire le cycle limite, on utilise les coordonnées polaires  $\rho, \theta$  avec

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

on les reporte dans l'équation , on obtient:

$$\dot{\rho} \cos \theta - \rho \dot{\theta} \sin \theta = -\rho \sin \theta + \rho \cos \theta (\varepsilon - \rho^2)$$

$$\dot{\rho} \sin \theta + \rho \dot{\theta} \cos \theta = \rho \cos \theta + \rho \sin \theta (\varepsilon - \rho^2).$$

Multiplions la première équation par  $\cos \theta$  et la deuxième équation par  $\sin \theta$  et ajoutons les deux équations différentielles, on obtient:

$$\dot{\rho} = \rho(\varepsilon - \rho^2).$$

De la même manière, en multipliant la première équation par  $\sin \theta$  et la deuxième par  $\cos \theta$ , on trouve  $\dot{\theta} = 1$ .

Pour  $\rho = \sqrt{\varepsilon}$  on a  $\dot{\rho} = 0$ . Donc il y a une orbite périodique pour  $\varepsilon > 0$ , telle que son amplitude croît avec  $\sqrt{\varepsilon}$ . Sa période est ici indépendante du paramètre.

D'une manière générale, le cycle limite obtenu par une bifurcation de Hopf en un point  $\varepsilon_c$  non nul, possède deux propriétés cardinales dans le voisinage de  $\varepsilon_c$ : l'amplitude du cycle limite est proportionnelle à  $|\varepsilon - \varepsilon_c|^{1/2}$ , c'est à dire croît comme la racine carrée de l'écart au point de bifurcation. Par ailleurs, la période des oscillations varie peu au voisinage de la bifurcation.

#### IV-2-2) Théorème de bifurcation de Hopf et interprétations

On va donner maintenant le théorème général de la bifurcation de Hopf qui a été établi en 1942 par E.Hopf, dans le cas d'un espace de dimension n.

##### **Théorème 1**

1- Considérons l'équation différentielle:

$$\frac{dU}{dt} = F(a, U) \tag{IV-3}$$

où  $U \in \mathbb{R}^n$  et "a" paramètre de bifurcation

2- Soit  $U_*(a)$  une branche de solutions stationnaires et soient les valeurs propres de la matrice Jacobienne

$$K(a) = \left\{ \frac{\partial F^i}{\partial x_j}(U_*(a), a) \quad (i, j = 1, \dots, n) \right\}.$$

Classons les en sorte que

$$\text{Re } \lambda_1 \geq \text{Re } \lambda_2 \geq \dots \geq \text{Re } \lambda_n.$$

suite  $\rightarrow$



3- Supposons qu'il existe une valeur  $a_c$  telle que

a-  $\text{Re} \lambda_1(a_c) = 0,$

b-  $\text{Re} \lambda'_1(a_c) \neq 0,$

c-  $\omega_c = \text{Im} \lambda_1(a_c) \neq 0,$

d-  $\text{Re} \lambda_j(a_c) < 0 \quad (j=3, \dots, n).$

Alors,  $a_c$  est un point de bifurcation de Hopf, c'est à dire, il y a naissance de cycles limites en  $(U_*(a_c), a_c)$  et la période initiale (de l'oscillation d'amplitude nulle) est

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

### Commentaires sur le théorème 1

Afin, de comprendre mieux ce théorème, visualisons le mouvement des valeurs propres  $\lambda_i(a)$  dans le plan complexe (rappelons que les  $\lambda_i(a)$ , sont les valeurs propres de la matrice Jacobienne, pour "a" voisin de  $a_c$ ). La condition (a) suppose l'existence d'une paire particulière de valeurs propres simples qui satisfait  $\lambda_1(a_c) = \bar{\lambda}_2(a_c) = i\omega_c$ . D'après la théorie de perturbations des valeurs propres simples (Kato, 1966), il existe pour a assez petit (ici,  $a_c=0$ ) un seul couple de valeurs propres  $\lambda_1(a)$ ,  $\lambda_2(a) = \bar{\lambda}_1(a)$  voisines de  $\pm i\omega_c$ . Si la Jacobienne dépend de a de façon assez régulière (par exemple analytique), la valeur propre  $\lambda_1(a)$  dépend aussi de a de façon assez régulière (par exemple analytique). On notera le développement correspondant de la manière suivante:

$$\lambda_1(a) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \sigma_1 = i\omega_c + a\sigma_1 + O(a^2).$$

Donc le nombre complexe  $\sigma_1$  est égal à  $\lambda'_1(a_c)$ . La condition (b) peut alors s'écrire  $\text{Re } \sigma_1 \neq 0$ .

Elle assure que la valeur propre traverse l'axe imaginaire de façon transversale (voir Figure IV-3). Ce nombre  $\sigma_1$  jouant un rôle important dans l'étude de la bifurcation de Hopf, nous l'identifierons à partir des vecteurs propres.

D'après la condition (d) et le théorème de Liapunov la solution stationnaire est stable quand  $a$  est d'un côté de la valeur critique et elle devient instable quand  $a$  passe de l'autre côté.

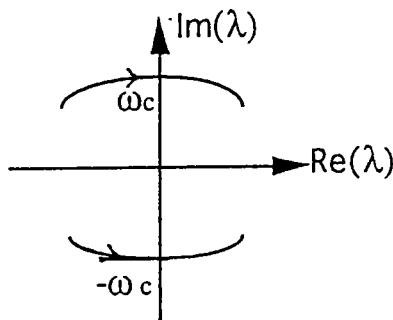


Figure IV-3.

**Calcul de  $\sigma_1$  en fonction des vecteurs propres**

On garde toujours les hypothèses du théorème de Hopf. Pour simplifier le raisonnement, on suppose dans la suite que la solution stationnaire est  $U=0$ , et que la matrice Jacobienne en ce point s'écrit:

$K(a) = K_0 + aK_1 + O(a^2)$ , dans  $\mathfrak{S}(R^n)$  (ensemble des applications linéaires), où  $\pm i\omega_c$  sont valeurs propres simples de  $K_0$ .

Nous commençons par définir les vecteurs propres.

**Notations:**

Dans la suite on désigne par:

- $(U, V)$  est le produit hermitien dans  $C^n$ , c'est à dire,  
 $(\lambda U, V) = \lambda(U, V)$  et  $(U, \lambda V) = \bar{\lambda}(U, V)$  .....

-  $K^*$  est l'adjoint de  $K$  appartient à  $\mathcal{S}(C^n, C^n)$  est définie par :

$$(KU, V) = (U, K^*V)$$

Introduisons les vecteurs propres normalisés  $W_0, W_0^*$  tels que,

$$K_0 W_0 = i\omega_c W_0, \quad K_0^* W_0^* = -i\omega_c W_0^*, \quad (W_0, W_0^*) = 1.$$

La théorie des perturbations prédit un vecteur propre  $W(a)$  tel que,

$$W(a) = W_0 + aW_1 + O(a^2), \quad (W_1, W_0^*) = 0.$$

On reporte la formule ci-dessus dans

$$K(a)W(a) = \sigma(a)W(a),$$

puis on identifie suivant les puissances de "a", On obtient:

$$(K_0 - i\omega_c)W_1 + K_1 W_0 = \sigma_1 W_0.$$

Ce qui donne le nombre complexe  $\sigma_1$  en projetant la formule ci-dessus sur

$W_0^*$ :

$$\sigma_1 = (K_1 W_0, W_0^*).$$

### IV-2-3) Une application du théorème de Hopf

Il s'agit de montrer qu'on peut vérifier "facilement" les conditions du théorème de Hopf.

On considère le modèle de Pontryagin d'une machine à vapeur, dont les détails sont donnés dans le livre de B.D.Hassard et Al, (1981).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = (\sin(x_1) \cos(x_1))x_3^2 - \sin(x_1) - ax_2 \\ \dot{x}_3 = K(\cos(x_1) - \rho) \end{cases} \quad (\text{IV-4})$$

où  $K$ ,  $\rho$ ,  $a$  des paramètres.

On prend " $a$ " comme paramètre de bifurcation.

Si  $K < 0$  et  $0 < \rho \leq 1$ , on a le point stationnaire:

$$X_* = (\arccos(\rho), 0, \frac{1}{\sqrt{\rho}}).$$

La matrice Jacobienne de (IV-3) au point stationnaire  $X_*$  est:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \rho - 1/\rho & -a & 2\sqrt{\rho}(1-\rho^2)^{1/2} \\ k(1-\rho^2)^{1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique de cette matrice s'écrit:

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + \left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)\lambda - 2k\sqrt{\rho}(1-\rho^2) = 0. \quad (\text{IV-5})$$

Pour que la bifurcation de Hopf ait lieu, il faut qu'au point de bifurcation  $a_c$ , (IV-5) admet deux racines complexes conjuguées imaginaires ( $\lambda_{1,2}(a_c) = \pm i\omega_c$ ) et la troisième doit être réelle négative ( $\lambda_3$ ). Le polynôme général cubique qui s'annule en ces points s'écrit:

$$\lambda^3 - \lambda_3\lambda^2 + \omega_c^2\lambda - \lambda_3\omega_c^2 = 0.$$

Par suite, on trouve:

$$a_c = -2k\rho^{3/2}, \lambda_{1,2}(a_c) = \pm i\omega_c = \pm i\left(\frac{1}{\rho} - \rho\right)^{1/2}, \text{ et } \lambda_3(a_c) = -a_c.$$

Le vecteur propre associé à la valeur propre  $\pm i\omega_c$  est  $V_1(a_c) = (1, i\omega_c, ik\rho^{1/2})$ .

La différenciation de (IV-5) donne,

$$\lambda'(a) = -1 / (3 + 2a / \lambda + (\omega_c / \lambda)^2), \text{ et on en déduit que,}$$

$$\lambda_1'(a_c) = \bar{\lambda}_2'(a_c) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1 + ia_c / \omega_c}{1 + (a_c / \omega_c)^2} \right),$$

$$\text{Re}(\lambda_1'(a_c)) = -\frac{1}{2} (1 + (a_c / \omega_c)^2)^{-1} < 0.$$

On conclut que le point  $a=a_c$  est un point de bifurcation de Hopf. En ce point il y a une perte de stabilité. Pour  $a < a_c$ , la solution stationnaire est instable et pour  $a > a_c$ , elle est stable.

### IV-3) Stabilité des branches de solutions périodiques

#### IV-3-1) Discussion sur l'instabilité et conséquences

On a vu qu'un point de bifurcation de Hopf relie la solution stationnaire avec le cycle limite. Ces solutions sont parfois stables ou instables, elles dépendent du problème en question. En particulier, la stabilité de la solution stationnaire dépend de l'hypothèse de Hopf (b) et change au point de bifurcation de Hopf. Dans cette section, on va discuter la stabilité des solutions périodiques. Pour plus ample détail nous renvoyons le lecteur à (R.Seydel, 1981) et à (Iooss G. et Joseph D.D., 1980).

On rappelle que dans la suite, on représente toujours les solutions stables ou instables par une propriété en fonction du paramètre de bifurcation "a". Si on est en dimension n, cette propriété est un scalaire, que l'on choisit convenablement, soit  $x_k(t_0)$  pour un  $t_0$  et un indice  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , soit par l'amplitude de  $x_k(t)$ .

Sauf cas exceptionnel, on ne rencontre que deux cas de bifurcation (figure IV-4): orbites périodiques stables encerclent l'équilibre instable (a), et orbites périodiques instables encerclent l'équilibre stable (b). Par définition le cas (a) est appelé bifurcation sur-critique, alors que (b) est appelé sous-critique. Dans le cas (a) l'échange de stabilité se trouve entre les branches périodiques et stationnaires. En plus l'amplitude croît continûment en augmentant "a". C'est le cas pour l'équation de Van der Pol (voir introduction). Un exemple de bifurcation sous critique peut être obtenu en changeant le signe des termes non-linéaires dans cette équation

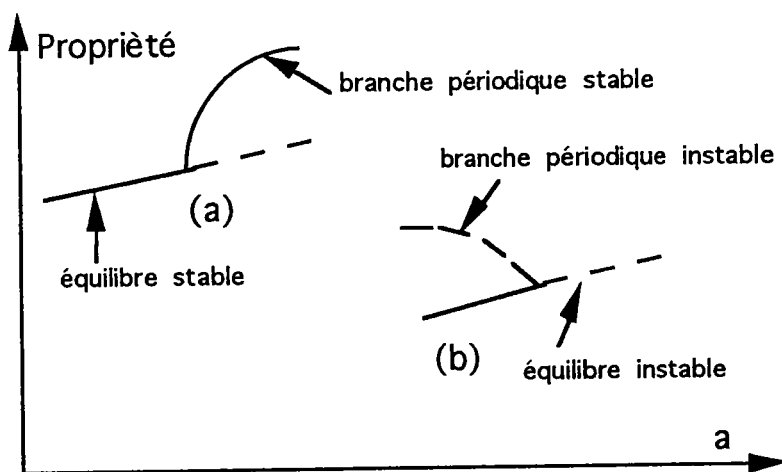


Figure IV-4.

Dans le cas sous-critique, des effets intéressants peuvent apparaître. En effet, il peut conduire à un saut d'amplitude instantané (voir figure IV-5), car, quand "a" dépasse  $a_c$ , brusquement, l'amplitude fait un saut et prend une grande valeur finie. Ce genre de saut à partir de l'équilibre stable à une large valeur de l'amplitude de la solution périodique stable est appelé "perte

brutale de stabilité". De plus pour chaque valeur "a" dans l'intervalle entre  $a'_c$  (point tournant) et  $a_c$  (bifurcation de Hopf), l'orbite périodique instable et l'orbite périodique stable coexistent. En outre, ce cas peut éventuellement impliquer le phénomène d'hystérésis (figure IV-6); Quand on augmente progressivement le paramètre de bifurcation "a", la transition entre point d'équilibre et cycle limite se produit en  $a = a_c$ . La transition inverse, obtenue par diminution de "a", intervient en revanche pour  $a = a'_c$ .

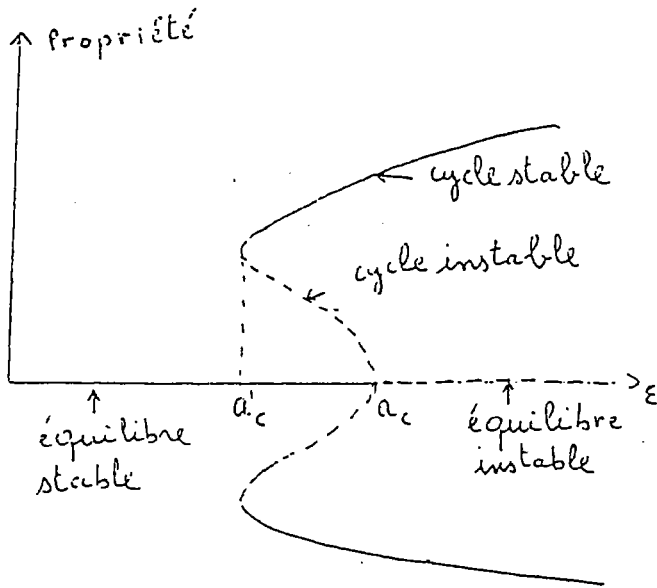


Figure IV-5.

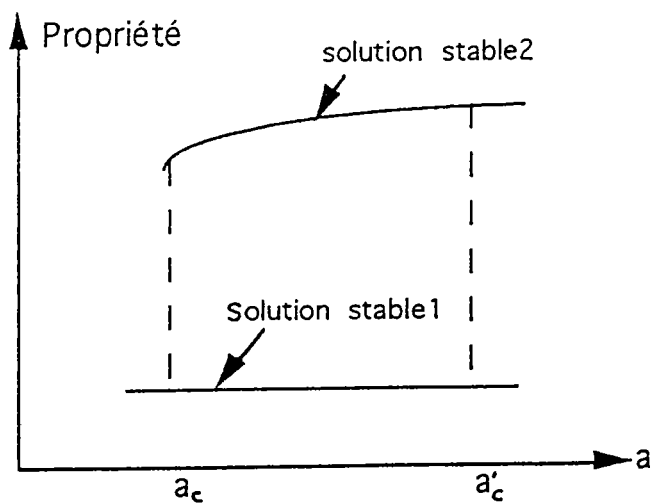


Figure IV-6.

Donc une bifurcation de Hopf sous-critique est qualitativement très différente d'une bifurcation sur-critique. Elle peut conduire à l'apparition d'oscillations d'amplitude finie ou de phénomènes d'hystérésis.

On conclut cette section, par deux exemples à deux dimensions avec d'autres cas de bifurcations de Hopf.

### IV-3-2) Exemples d'oscillateurs avec des bifurcations de Hopf

Ici, on donne deux exemples inspirés du livre de (R.Sydel, 1981):

Le premier est un modèle simple des impulsions des nerfs dû à Fitz Hugh,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 3(x + y - x^3 / 3 + a) \\ \dot{y} &= -(x - 0.7 + 0.8y) / 3\end{aligned}$$

L'analyse de ce modèle donne les courbes de la figure.(IV-7). Elle contient des orbites périodiques (stables et instables), des solutions stationnaires et deux points de bifurcation de Hopf, qui sont sous-critiques avec perte brutale de stabilité. Les deux régions stables sont petites:

$$\begin{aligned}-1.413 \leq a \leq -1.403 \\ -0.346 \leq a \leq -0.336\end{aligned}$$

Lorsque, le paramètre "a" passe le point de bifurcation, l'amplitude atteint immédiatement son niveau maximal. La situation représentée dans la figure (IV-7), où deux points de bifurcation de Hopf sont connectés par des branches d'orbites périodiques, n'est pas rare.



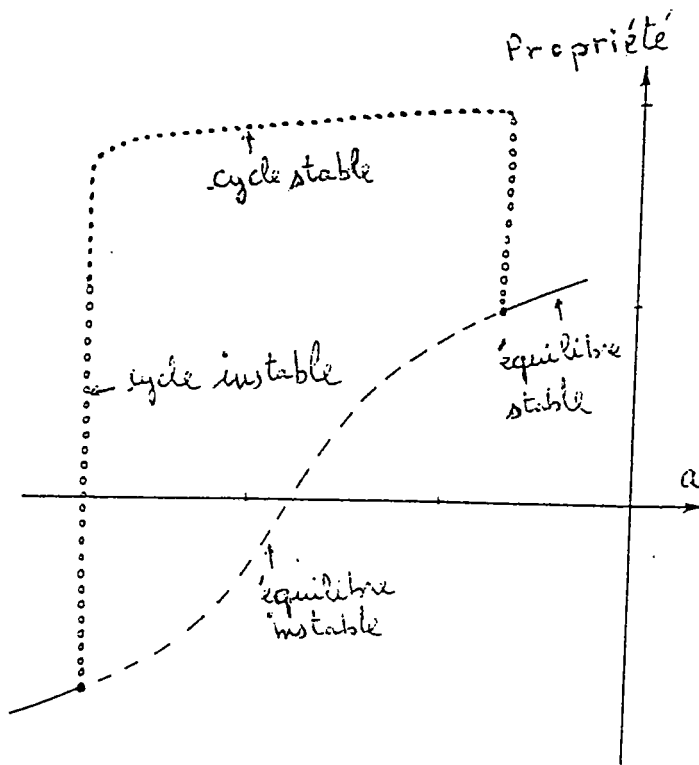


Figure IV-7.

Le deuxième exemple représente le modèle CSTR (Continuous stirred tank reactor),

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + Da(1-x)\exp(y) \\ \dot{y} &= -y + B.Da(1-x)\exp(y) - \beta y'\end{aligned}$$

$Da=a$  nombre de Damkohler.

Dans la figure (IV-8), on voit une branche de solutions stationnaires avec deux points de bifurcation de Hopf. Ici, les deux points sont aussi connectés par une branche d'orbites périodiques. Cet exemple exhibe un point sous-critique et un point sur-critique. A droite au point de Hopf 'la perte de stabilité n'est pas brutale', alors qu'au point de Hopf à gauche 'la perte de stabilité est brutale'. La branche stationnaire admet deux points tournants qui sont proches l'un de l'autre avec une différence en "a" de  $\Delta a = 0.0005$ .

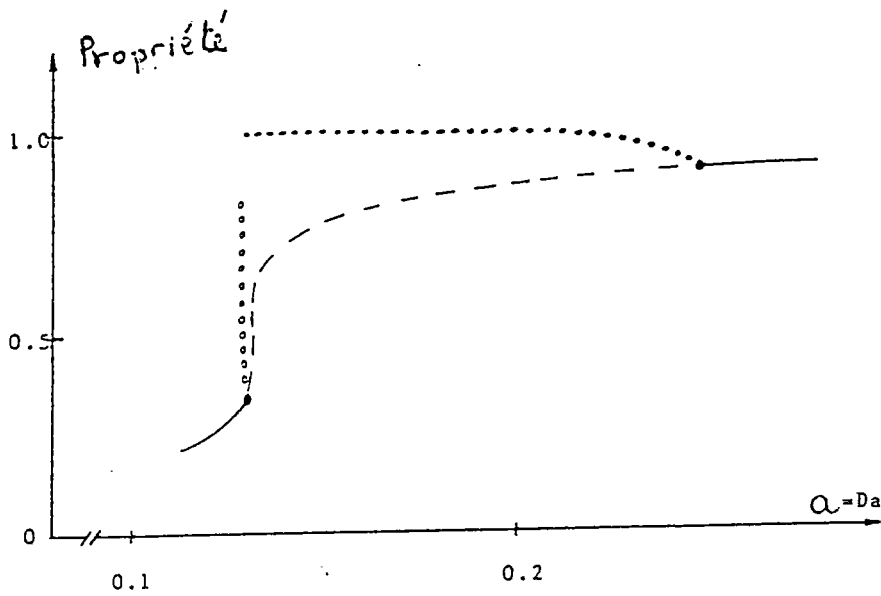


Figure IV-8.

Jusqu'à présent, on s'est intéressé seulement à l'existence des points de bifurcation de Hopf et à la stabilité des solutions périodiques qui apparaissent. Mais, on a pas discuté, comment on les calcule analytiquement. Pour le point de bifurcation de Hopf, une réponse sera donnée dans le chapitre V. En ce qui concerne le calcul des solutions périodiques, on va les traiter tout de suite.

#### IV-4) Calcul asymptotique de la branche périodique à partir du point de bifurcation de Hopf

##### IV-4-1) Rappel

Dans cette partie, on va calculer la branche de solutions périodiques d'une équation différentielle autonome obtenue par bifurcation de Hopf à partir d'une solution stationnaire.

$$\frac{dU}{dt} = F(a, U). \quad (\text{IV-6})$$

Supposons que le spectre de  $D_u F(0,0)$  est constitué des deux valeurs propres simples  $\pm i\omega_c$  et d'autres valeurs de partie réelle négative. Cette hypothèse permet la persistance d'une solution stationnaire pour "a" voisin de 0 (conséquence du théorème des fonctions implicites). Dans la suite on suppose que  $U=0$  est la solution stationnaire, telle que:

(H1)  $F(a,0) = 0$  pour "a" voisin de 0,

(H2) F est analytique aussi au voisinage de zéro, d'où

$$K(a) = D_u F(a, 0) = K_0 + aK_1 + a^2K_2 + \dots$$

Or, par hypothèse  $\pm i\omega_c$  sont deux valeurs propres simples de  $K_0$ . Alors d'après la théorie de perturbations dans  $\mathbb{R}^n$ , la matrice  $K(a)$  admet aussi deux valeurs propres simples  $\sigma(a)$  et  $\bar{\sigma}(a)$ . De plus, elles sont analytiques en "a",

$$\sigma(a) = i\omega_c + \sigma_1 a + \sigma_2 a^2 + \dots,$$

$$W(a) = W_0 + W_1 a + W_2 a^2 + \dots,$$

où  $W(a)$  est le vecteur propre de  $K(a)$  qui, pour  $a=0$  vérifie

$$(K_0 - i\omega_c)W_0 = 0,$$

(H3)  $\frac{d}{da} \text{Re} \sigma(a)_{a=0} = \text{Re} \sigma_1 \neq 0.$

Si  $\text{Re} \sigma_1 > 0$ , alors la solution  $U=0$  est stable pour  $a < 0$  et perd sa stabilité pour  $a > 0$  (a voisin de 0). Si on désigne par  $W_0^*$  le vecteur propre de l'adjoint  $K_0^*$  qui vérifie:

$$(K_0^* + i\omega_c)W_0^* = 0, (W_0, W_0^*) = 1,$$

alors par un calcul simple (paragraphe IV-2-2), on trouve que,

$$\sigma_1 = (K_1 W_0, W_0^*)$$

#### IV-4-2) Calcul asymptotique du cycle bifurqué

Au chapitre III, on a calculé les solutions périodiques de certaines équations différentielles ordinaires par la méthode de Poincaré-Lindstedt. Par contre ici, on propose de calculer la famille de solutions périodiques de l'équation différentielle (IV-6) au voisinage du point de bifurcation de Hopf par un développement asymptotique.

Comme la période est inconnue, on fait donc les changement de variables suivants pour se ramener à une solution périodique de période  $2\pi$ ,

$$s = \omega t \quad \text{et} \quad U(t) = U\left(\frac{s}{\omega}\right) = V(s). \quad (\text{IV-7})$$

Par suite, l'équation (IV-6) devient:

$$\omega \frac{dV}{ds} = F(a, V). \quad (\text{IV-8})$$

Alors on cherche la branche de solution périodique en fonction d'un certain paramètre  $\varepsilon$  par le développement asymptotique suivant:

$$\begin{cases} V(s) = \sum_{p \geq 1} V_p(s) \varepsilon^p \\ \omega - \omega_c = \sum_{p \geq 1} \omega_p \varepsilon^p \\ a = \sum_{p \geq 1} a_p \varepsilon^p \end{cases} \quad (\text{IV-9})$$

où les  $V_p(s)$  sont des fonctions  $2\pi$  périodiques et les  $\omega_p$ ,  $a_p$  sont des constantes à déterminer. On verra bien que le calcul des fonctions  $V_p(s)$  ( $p > 1$ ) et des constantes inconnues ( $p > 0$ ), nécessite l'utilisation des conditions suivantes d'Alternative de Fredholm.

**Théorème 2: Alternative de Fredholm**

On suppose que l'opérateur  $K_0$  admet  $\pm i\omega_c$  comme valeurs propres simples, de vecteurs propres associés  $W_0$ , et  $\bar{W}_0$ , et qu'il est tel que  $\{ki\omega_0, k \in \mathbb{Z} - \{1, -1\}\}$  ne soient pas valeurs propres.

Soient  $T_0 = \omega_c \frac{d}{ds} - K_0$  un opérateur différentiel et  $f$  une fonction continue, périodique. Alors l'équation

$$T_0 V = f, \tag{IV-10}$$

admet une solution périodique  $V$  de classe  $C^1$  si et seulement si

$$\alpha = \beta = 0, \tag{IV-11}$$

$$\text{où } \alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(s), W_0^*) e^{-is} ds, \tag{IV-12}$$

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(s), \bar{W}_0^*) e^{is} ds. \tag{IV-13}$$

Dans ce cas, il existe une solution périodique unique  $V=Qf$  vérifiant (IV-11), où  $f$  est remplacé par  $V$  et  $Q$  est un opérateur linéaire continu.

Si  $f(s)$  est réelle, il suffit d'annuler soit  $\alpha$ , soit  $\beta$  car les deux expressions sont conjuguées (utile pour les calculs explicites).

Maintenant, on reporte (IV-9) dans (IV-8), puis on identifie les puissances de  $\varepsilon$ , en utilisant le développement de Taylor de F:

$$\begin{aligned}
 F(a, V) &= F(a, 0) + D_V F(a, 0)V + D_V^2 F(a, 0) \frac{V^2}{2} + \dots \\
 &= K_0 V + aK_1 V + a^2 K_2 V + \dots \\
 &\quad + F_{02}(V, V) + F_{03}(V, V, V) + \dots \\
 &\quad + aF_{12}(V, V) + \dots
 \end{aligned}$$

On obtient alors une séquence d'équations linéaires admettant le même opérateur différentiel non inversible  $T_0$ :

à l'ordre 1

$$T_0 V_1 = 0, \tag{IV-14-a}$$

à l'ordre 2

$$T_0 V_2 = a_1 K_1 V_1 - \omega_1 \frac{dV_1}{ds} + F_{02}(V_1, V_1), \tag{IV-14-b}$$

à l'ordre 3

$$T_0 V_3 = a_2 K_1 V_1 - \omega_2 \frac{dV_1}{ds} + 2F_{02}(V_1, V_2) + F_{03}(V_1, V_1, V_1), \tag{IV-14-c}$$

à l'ordre n

$$T_0 V_n = a_{n-1} K_1 V_1 - \omega_{n-1} \frac{dV_1}{ds} + R_{n-1}, \tag{IV-14-d}$$

où  $R_{n-1}$  dépend des termes d'ordres inférieurs à n-1.

La solution réelle du système (IV-15-a) simple et elle s'écrit à une constante près:

$$V_1(s) = e^{is}W_0 + e^{-is}\bar{W}_0 \quad (\text{IV-15})$$

En revanche, les équations (IV-14-b, c, d) admettent des solutions si et seulement elles vérifient la condition (IV-11) du théorème 2. En effet,

à l'ordre 2,

en utilisant les conditions exigées par l'Alternative de Fredholm, on trouve que:

$$\begin{aligned} \sigma_1 a_1 - i\omega_1 &= 0, & \text{d'où } a_1 = \omega_1 = 0, \\ V_2(s) &= (2i\omega_c - K_0)^{-1} F_{02}(W_0, W_0) e^{2is} - 2K_0^{-1} F_{02}(W_0, \bar{W}_0) - \\ & \quad (2i\omega_c + K_0)^{-1} F_{02}(\bar{W}_0, \bar{W}_0) e^{-2is}. \end{aligned}$$

Il vaut mieux aussi faire le calcul à l'ordre 3 pour avoir un résultat non trivial pour  $a$  et  $\omega$ ,

à l'ordre 3,

de la même façon, on obtient:

$$\begin{aligned} -a_2 \sigma_1 + i\omega_2 &= \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (2F_{02}(V_1(s), V_2(s)) + F_{03}(V_1(s), V_1(s), V_1(s)), W_0^*) e^{-is} ds \\ &= (-4F_{02}(W_0, K_0^{-1} F_{02}(W_0, \bar{W}_0)) + 3F_{03}(W_0, W_0, \bar{W}_0) \\ & \quad + 2F_{02}(\bar{W}_0, (2i\omega_c - K_0)^{-1} F_{02}(W_0, W_0)), W_0^*). \end{aligned} \quad (\text{IV-16})$$

On continue la détermination de  $\omega_p$ ,  $a_p$ ,  $V_p(s)$  et on montrerait ensuite que  $a_{2p+1} = \omega_{2p+1} = 0$ ,  $\forall p \geq 0$ . Pour plus de détails concernant ce calcul, nous renvoyons le lecteur à (Iooss G. et Joseph D. D., 1981).

On a donc une méthode constructive pour obtenir la branche périodique  $U(t) = V(s)$  de (IV-6) au voisinage du point de bifurcation avec:

$$\begin{cases} V(s) = \varepsilon V_1(s) + \varepsilon^2 V_2(s) + o(\varepsilon^3) \\ a = a_2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^4) \\ \omega = \omega_c + \omega_2 \varepsilon^2 + o(\varepsilon^4) \end{cases}$$

#### IV-5) Conclusion

Les bifurcations de Hopf ont donné lieu à un grand nombre de travaux, motivés par l'étude des systèmes dynamiques et de la transition au chaos. On peut citer le cas d'une bifurcation de Hopf double (deux paires de valeurs propres complexes conjuguées traversant simultanément l'axe imaginaire, ce problème est traité par G.Iooss, 1975) ou l'interaction entre une bifurcation de Hopf et une bifurcation stationnaire (Cette étude a été fait par W.F.Langford, (1979)) ou de bifurcations dégénérées (deux valeurs propres simples traversent l'axe imaginaire, mais non strictement. Par exemple,  $\xi(0) = \xi'(0) = \xi''(0) = 0$ ,  $\xi'''(0) \neq 0$ , où  $\xi$  est la partie réelle de  $\lambda$ , ce problème est traité par H.Kielhofer, 1979), ainsi que de nombreuses applications.

En revanche, il y a peu de travaux sur l'étude des bifurcations de Hopf par des techniques numériques génériques comme la méthode des éléments finis. Pour cela, nous définirons au chapitre V un indicateur de bifurcation de Hopf qui pourra permettre la détection numérique de points de bifurcation de Hopf pour des systèmes à grand nombre de degrés de libertés. Nous proposons aussi des techniques asymptotiques-numériques permettant de le calculer. Puis au chapitre VI, on va présenter un premier pas vers l'application de ces techniques asymptotiques-numériques aux équations aux dérivées partielles de Navier-Stokes.



## V) DÉTERMINATION DES POINTS DE BIFURCATION DE HOPF PAR UNE METHODE ASYMPTOTIQUE-NUMÉRIQUE (M.A.N)

### V-1) Introduction

Nous avons vu au chapitre III que les méthodes asymptotiques-numériques et les approximants de Padé permettent de trouver de bonnes représentations des branches de solutions périodiques. Or ces solutions périodiques apparaissent souvent par une bifurcation de Hopf pour les problèmes dissipatifs: c'est souvent le cas pour les instabilités des écoulements [43] ou pour les problèmes d'interactions fluide-structure [39] dont l'étude va être abordée prochainement au laboratoire. D'un point de vue pratique, il est souvent suffisant de détecter le seuil d'instabilité, l'ingénieur cherchant à éviter les zones post-critiques où la vibration se développe de façon importante.

Notre objectif est de mettre au point des algorithmes pour déterminer des points de bifurcation de Hopf qui soient applicables à des résolutions numériques d'équations aux dérivées partielles. Pour le flambage des structures minces, ces algorithmes existent et sont utilisés dans les grands codes de calculs de structures. Des algorithmes de type asymptotique-numérique ont été proposés au laboratoire (E.H. Boutyou, B. Cochelin, M. Potier-Ferry, 1994), dont nous allons rappeler le principe sur un système à un seul degré de liberté. Considérons l'exemple d'une barre rigide, dont l'extrémité inférieure mobile est retenue par un ressort de torsion élastique  $k$ , et qui est soumise à une force verticale  $\lambda$  exercée sur la partie supérieure de la barre.

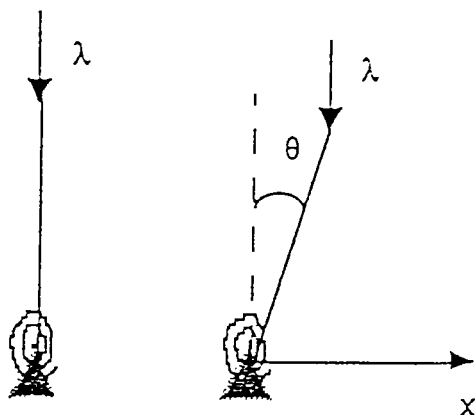


Figure V-1: Modèle à un seul degré de liberté.

L'équation d'équilibre de la barre s'écrit:

$$k\theta - \lambda l \sin \theta = 0$$

Cette équation admet une solution fondamentale  $\theta = 0$  et une solution bifurquée  $\lambda = k\theta / l \sin \theta$  qui se coupent au point de bifurcation ( $\theta = 0$ ,  $\lambda = k/l$ ). Pour caractériser ce point de bifurcation, on cherche à résoudre une équation perturbée et linéarisée autour de  $\theta = 0$ :

$$(k/l - \lambda)\Delta\theta = \Delta\mu$$

où  $\Delta\mu$  représente une force perturbatrice horizontale appliquée à l'extrémité de la barre selon la direction  $x$ , et  $\Delta\theta$  est la réponse en terme d'angle. On détermine donc les points de bifurcation comme les zéros de la fonction  $\Delta\mu(\lambda)$  pour  $\Delta\theta$  fixé. La fonction  $\Delta\mu(\lambda)$  est donc un indicateur de bifurcation, qui représente la rigidité du système en fonction de la charge  $\lambda$ .

Ces travaux ont donc permis d'utiliser un indicateur de bifurcation  $\Delta\mu(\lambda)$  qui s'annule aux points de bifurcation ou aux points limites de systèmes à grand nombre de degrés de libertés. On trouvera dans la thèse de E.H. Boutyour, (1994) la définition de cet indicateur  $\Delta\mu(\lambda)$ , les détails de la méthode asymptotique-numérique permettant de calculer numériquement cette fonction, ainsi que des tests qui montrent l'efficacité de cette démarche. Dans ce chapitre, nous allons proposer une méthode comparable pour la détection de bifurcation de Hopf. Dans ce cas, la pulsation  $\omega$  des vibrations près du seuil d'instabilité est aussi une inconnue. Nous allons donc rechercher l'indicateur de bifurcation comme une fonction de deux variables  $\mu(a, \omega)$ , "a" étant le paramètre initial du problème et  $\omega$  étant la pulsation des petites oscillations. Nous étudierons les propriétés de cette fonction, nous établirons une méthode de calcul de cette fonction et de caractérisation des points de bifurcation. L'efficacité de cette démarche sera testée sur des équations différentielles à petit nombre de degrés de liberté.

## V-2) Une caractérisation des points de bifurcation de Hopf

### V-2-1) Principe de la méthode

On considère l'équation différentielle suivante dans  $\mathbb{R}^n$ :

$$\frac{dU}{dt} = F(U, a), \quad (V-1)$$

où "a" est un paramètre de bifurcation. La stabilité d'une solution stationnaire (par exemple  $U=0$ ) est caractérisé par le problème linéarisé associé qui s'écrit:

$$\frac{dU}{dt} = K(a)U, \quad (V-2)$$

où  $K(a) = \frac{\partial F}{\partial U}(0, a)$ .

Notre objectif est de chercher une valeur critique  $a_c$  telle que toutes les valeurs propres de  $K(a_c)$  ont leur partie réelle négative, sauf deux, qui ont cette partie réelle nulle (voir chapitre IV). Lorsqu'une valeur propre réelle change de signe, il y aura une bifurcation de solutions stationnaires. C'est le cas étudié au laboratoire par E.H.Boutyour (1994). Lorsqu'une paire de valeurs propres imaginaires traverse l'axe imaginaire pur en  $\pm i\omega_c$ , il y apparaît des solutions périodiques dont la pulsation sera au départ voisine de  $\omega_c$ . C'est ce qu'on appelle une bifurcation de Hopf.

Un point de bifurcation de Hopf  $a_c$  pour le système (V-1) est donc caractérisé par l'existence d'un couple de valeurs propres imaginaires pures, soit par l'existence d'une pulsation  $\omega_c$  ( $\omega_c \in \mathbb{R}$ ) et d'un mode propre complexe  $u_c$  ( $u_c \in \mathbb{C}^n$ ) tel que

$$K(a_c)u_c = i\omega_c u_c \quad (V-3)$$

En statique, les grands codes de calculs de structures permettent d'étudier la stabilité des solutions d'équilibres en étudiant la matrice de rigidité tangente ( dans les cas considérés, elle est symétrique). Pratiquement, on cherche le plus petit pivot de cette matrice ou on regarde le signe du déterminant qui s'obtient facilement dans une méthode de décomposition de CROUT. Il n'aurait pas été évident d'appliquer une technique de ce type pour des bifurcations de Hopf parce que la matrice n'est pas symétrique et parce que la caractérisation (V-3) fait apparaître deux paramètres réels  $a_c$  et  $\omega_c$ .

C'est pourquoi nous avons cherché à définir un indicateur de bifurcation de Hopf, comme E.H.Boutyour (1994) a défini un indicateur de bifurcation statique. On introduit donc une force de perturbation harmonique ayant une pulsation donnée  $\omega$ . Le problème perturbé et linéarisé est le suivant:

$$\frac{dU}{dt} = K(a)U - \mu \mathbf{f} e^{i\omega t} \quad (V-4)$$

où  $\mathbf{f}$  est un vecteur de  $C^n$  représentant la forme de la perturbation et  $\mu$  est un nombre réel représentant l'intensité de cette perturbation.

Bien sûr une solution de (V-4) sera harmonique et son amplitude  $u$  ( $U(t) = u e^{i\omega t}$ ) vérifie:

$$K(a)u - i\omega u = \mu \mathbf{f} \quad (V-5)$$

En gros, l'idée sera de chercher l'amplitude de la perturbation  $\mu(a, \omega)$ , puis les zéros de cette fonction  $\mu(a, \omega)$  pour caractériser la bifurcation, comme en statique. On verra néanmoins qu'il faudra modifier l'algorithme statique car la fonction  $\mu(a, \omega)$  est ici une fonction de deux variables  $a$  et  $\omega$ . Donc l'équation  $\mu(a, \omega) = 0$  devrait posséder des branches de racines  $a(\omega)$  ou  $\omega(a)$ . Mais on verra que l'indicateur  $\mu(a, \omega)$  possède des propriétés particulières.

### V-2-2) Un algorithme de suivi de valeurs propres ?

Un point de bifurcation  $a_c$  de Hopf pour le système (V-1) est donc caractérisé par l'existence d'un couple de valeurs propres imaginaires pures, soit par l'existence d'une pulsation  $\omega_c$  ( $\omega_c \in \mathbb{R}$ ) et d'un mode propre complexe  $u_c$  ( $u_c \in C^n$ ) vérifiant (V-3).

Une idée aurait été de suivre numériquement les valeurs propres  $\lambda_1(a)$ ,  $\lambda_2(a)$ , ...,  $\lambda_n(a)$  de la matrice  $K(a)$ , qui obéissent à l'équation

$$K(a)u(a) = \lambda(a)u(a)$$

D'après la théorie des perturbations de valeurs propres (Kato, 1966), les éléments propres  $\lambda(a)$ ,  $U(a)$  dépendent de manière analytique de "a" tant que la valeur propre est simple. Il était donc parfaitement envisageable de suivre ces éléments propres par une technique asymptotique-numérique. Néanmoins, pour un grand système, il était exclu de les suivre toutes. Il aurait également été dangereux de n'en suivre qu'une ou deux, car le mode instable pour  $a=a_c$  ne provient pas forcément de la continuation du mode le moins stable pour  $a < a_c$ .

Mais cette idée de suivre numériquement quelques éléments propres avait un inconvénient plus grave dans un cadre analytique-numérique. En effet, il arrive que des branches de valeurs propres se coupent (figure V-2), ce qui fait apparaître des valeurs propres multiples qui sont au moins d'ordre deux.

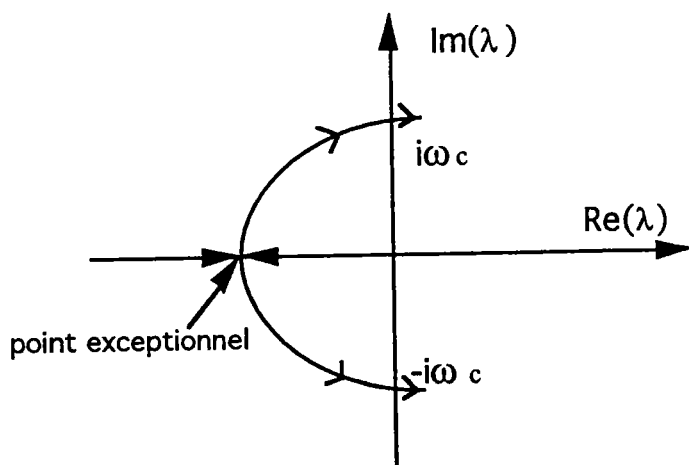


Figure V-2: évolution des valeurs propres complexes.

Le comportement de ces valeurs propres au voisinage de l'un de ces points exceptionnels  $a_E$  est qualifié par des groupes cycliques qui se forment en obéissant à la loi de permutation. Le nombre d'éléments de chaque groupe  $G_P$  s'appelle période et est noté  $P$ . Or les valeurs propres ne sont plus des fonctions analytiques près de  $a_E$ , mais se représentent par des séries entières de  $(a - a_E)^{1/P}$ :

$$\lambda_h(a) = \lambda_E + \alpha_1 \omega^h (a - a_E)^{1/P} + \alpha_2 \omega^{2h} (a - a_E)^{2/P} + \dots, \quad \forall h \in G_P$$

où  $\omega = \exp(2\pi i / P)$ , et  $\lambda_E = \lambda_h(a_E)$

La gestion numérique de ces branches de valeurs propres n'aurait donc pas été facile. C'est pourquoi nous avons choisi de chercher directement la valeur critique, en ignorant l'évolution complexe des valeurs propres avant l'instabilité.

### V-2-3) Un indicateur de bifurcation de Hopf

Commençons par transformer le problème de valeurs propres complexes (V-3) en un problème ne contenant que des nombres et des vecteurs réels. A cet effet, on introduit les parties réelles et imaginaires du mode  $u_c$ :

$$u_c = u_1 + iu_2 \tag{V-6}$$

En reportant (V-6) dans (V-3) on obtient deux systèmes réels en  $u_1$  et  $u_2$

$$K(a_c)u_1 = -\omega_c u_2 \tag{V-6-a}$$

$$K(a_c)u_2 = \omega_c u_1 \tag{V-6-b}$$

que l'on réécrit sous forme matricielle:

$$\Gamma(a_c, \omega_c)V_c = 0, \quad (V-7)$$

où 
$$\Gamma(a, \omega) = \begin{bmatrix} +K(a) & \omega I \\ -\omega I & K(a) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad V_c = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Avec les transformations ci dessus, on est arrivé à caractériser le point de bifurcation de Hopf par un problème réel à deux paramètres dont la dimension  $2n$  est doublée par rapport à (V-1). On cherche à déterminer un couple de nombres réels  $(a_c, \omega_c)$  et un mode  $V_c \in R^{2n}$  vérifiant le système linéaire (V-7).

Ici, on caractérise notre point de bifurcation de Hopf en considérant le problème linéarisé et perturbé suivant:

$$\Gamma(a, \omega)V(a, \omega) = \mu(a, \omega)f, \quad (V-8)$$

où  $f$  un vecteur constant donné dans  $R^{2n}$ , et  $\mu(a, \omega)$  l'intensité de la perturbation, qui dépend des deux paramètres  $a$  et  $\omega$ . Le système (V-8) comporte deux inconnues  $V(a, \omega) \in R^{2n}$  et  $\mu(a, \omega) \in R$ . Pour que (V-8) admette une solution unique, il faut imposer une condition supplémentaire car nous avons  $2n$  équations pour  $2n+1$  inconnues. Une telle condition a souvent été proposée dans les méthodes asymptotiques-numériques. L'utilisateur s'arrange pour trouver la bonne condition qui pourrait mieux réaliser les résultats espérés (voir chapitre II). Notre choix est semblable à celui adaptée en statique. C'est une projection du vecteur inconnu  $V(a, \omega)$  sur la direction  $V(0,0)$  vérifiant l'équation (V-8) en  $a = \omega = 0$ , c'est à dire:



$$\Gamma(0,0)V(0,0) = \mu(0,0)f \quad (V-9)$$

Autrement dit, si la matrice  $\Gamma(0,0)$  est inversible, on pose les relations:

$$\langle V(a,\omega), V(0,0) \rangle = cte = \langle \Gamma(0,0)^{-1}f, V(0,0) \rangle, \quad (V-10)$$

la constante cte étant choisie par exemple en sorte que

$$\mu(0,0) = 1.$$

En résumé, au lieu de chercher à résoudre l'équation (V-3) caractérisant les bifurcations de Hopf, nous définissons un indicateur de bifurcation  $\mu(a,\omega)$  par (V-8) et (V-10), le vecteur  $f \in R^{2n}$  étant choisi arbitrairement. Il reste à voir comment cet indicateur peut permettre de définir le point de bifurcation de Hopf.

#### V-2-4) Propriétés de l'indicateur de bifurcation $\mu(a,\omega)$

Théoriquement, la recherche du couple  $(a_c, \omega_c)$  vérifiant le système (V-3) est équivalent à trouver  $(a_c, \omega_c)$  tel que  $\mu(a_c, \omega_c) = 0$  dans l'équation (V-8). Comme  $\mu(a,\omega)$  est une expression réelle qui dépend de deux paramètres, les solutions  $(a_c, \omega_c)$  ne devrait pas être isolées. Ainsi, pour déterminer le couple  $a$  et  $\omega$  d'une manière unique, il faudrait un système à deux équations en  $a$  et  $\omega$ . Le théorème ci dessous montre comment on peut résoudre cette difficulté.

**Théorème 1:**

Soit  $\Gamma(a, \omega)$  une matrice d'ordre  $2n$  définie par,

$$\Gamma(a, \omega) = \begin{bmatrix} +K(a) & \omega I \\ -\omega I & K(a) \end{bmatrix}$$

où  $K(a)$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ . Soit  $f \in R^{2n}$  tel que

$$cte = \langle \Gamma^{-1}(0, 0)f, V(0, 0) \rangle \neq 0.$$

Alors l'indicateur de bifurcation  $\mu(a, \omega)$  est bien défini, sauf pour des valeurs exceptionnelles de  $a$  et  $\omega$ . C'est une fraction rationnelle de  $\omega$  telle que

$$\mu(a, \omega) = \text{num}(a, \omega) / \text{den}(a, \omega), \quad (V-11)$$

$$\text{num}(a, \omega) = |\det(K(a) - i\omega I)|^2 \geq 0, \quad (V-12)$$

où  $\text{num}(a, \omega)$  et  $\text{den}(a, \omega)$  sont des polynômes en  $\omega$ .

Conséquences du théorème 1 pour la caractérisation des points de bifurcation de Hopf

La formule (V-11) montre que les zéros de l'indicateur  $\mu(a, \omega)$  coïncident avec les zéros de la fonction  $\text{num}(a, \omega)$  - sauf dans les cas exceptionnels où le dénominateur  $\text{den}(a, \omega)$  s'annule en même temps que  $\text{num}(a, \omega)$ -. La formule (V-12) est la propriété essentielle de l'indicateur. En effet le numérateur  $\text{num}(a, \omega)$  est toujours non négatif, car c'est le module au carré

d'un nombre complexe: trouver les zéros revient à annuler la partie réelle et la partie imaginaire de  $\det(K(a) - i\omega I)$ , ce qui fournit bien deux équations pour les deux inconnues  $a$  et  $\omega$ .

Les fonctions à annuler  $\mu(a, \omega)$  ou  $\text{num}(a, \omega)$  n'ont donc que des racines doubles. C'est ce qui explique qu'il est possible de déterminer deux nombres réels, le paramètre  $a$  et la pulsation  $\omega$ , à partir d'une seule équation scalaire  $\mu(a, \omega) = 0$ .

En pratique les valeurs critiques pourraient être caractérisées par les conditions de racine double (figure V-3):

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{num}}{\partial a}(a, \omega) = 0 \\ \frac{\partial \text{num}}{\partial \omega}(a, \omega) = 0 \end{cases} \quad (\text{V-13})$$

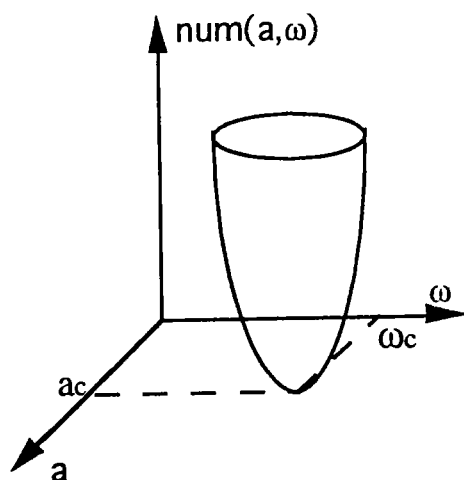


Figure V-3: Un parabolôïde qui illustre les zéros de  $\text{num}(a, \omega)$ .

### Démonstration du théorème 1 et des conséquences:

En partant de l'équation (V-8) et en posant

$$V = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \text{ et } f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \text{ où } U_1, U_2, f_1 \text{ et } f_2 \in \mathbb{R}^n,$$

on arrive aux deux systèmes suivants:

$$\begin{cases} K(a)U_1 + \omega U_2 = \mu f_1 \\ K(a)U_2 - \omega U_1 = \mu f_2 \end{cases} \quad (V-14)$$

Multiplions les équations (V-14) par  $K(a)$ , et substituons l'une dans l'autre. On obtient donc deux problèmes séparés et indépendants dans  $R^n$ .

$$\begin{cases} (K^2(a) + \omega^2 I)U_1 = \mu g_1(a, \omega) \\ (K^2(a) + \omega^2 I)U_2 = \mu g_2(a, \omega) \end{cases} \quad (V-15)$$

où  $g_1(a, \omega) = -\omega f_2 + K(a)f_1$  et  $g_2(a, \omega) = \omega f_1 + K(a)f_2$ .

On désigne par  $U_1^i$  et  $U_2^i$  les composantes des vecteurs  $U_1$  et  $U_2$ .

Alors la résolution des équations (V-15) par la méthode de Cramer donne:

$$U_1^i(a, \omega) = \mu(a, \omega) \frac{\Delta_1^i(a, \omega)}{\det(K^2(a) + \omega^2 I)}, \quad i \in [1, n]$$

$$U_2^i(a, \omega) = \mu(a, \omega) \frac{\Delta_2^i(a, \omega)}{\det(K^2(a) + \omega^2 I)}, \quad i \in [1, n]$$

où  $\Delta_1^i$  et  $\Delta_2^i$  pour  $i \in [1, n]$  sont les déterminant obtenus en résolvant les systèmes (V-15) par la méthode de Cramer. Ils dépendent des deux variables  $a$  et  $\omega$ . Par suite le vecteur solution du système (V-8) s'écrit:

$$V(a, \omega) = \mu(a, \omega) \frac{\Delta(a, \omega)}{\det(K^2(a) + \omega^2 I)},$$

où  $\Delta$  est le vecteur vérifiant,  $\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1^i \\ \Delta_2^i \end{pmatrix}$  avec  $i \in [1, n]$ .

La condition (V-10) implique que,

$$\langle V(a, \omega), V(0, 0) \rangle = \|V(0, 0)\|^2 = \mu(a, \omega) \frac{\langle \Delta(a, \omega), V(0, 0) \rangle}{\det(K^2(a) + \omega^2 I)}.$$

Par suite on en déduit que l'indicateur de bifurcation est une fraction rationnelle en  $\omega$ :

$$\mu(a, \omega) = \|V(0, 0)\|^2 \frac{\det(K^2(a) + \omega^2 I)}{\langle V(0, 0), \Delta(a, \omega) \rangle}. \quad (V-16)$$

On en déduit que,

$$\mu(a, \omega) = 0 \Leftrightarrow \text{num}(a, \omega) = 0$$

sauf si le dénominateur  $\langle \Delta(a, \omega), V(0, 0) \rangle$  est nul.

On remarque par ailleurs que,

$$\begin{aligned} \det(K^2(a) + \omega^2 I) &= \det((K(a) + i\omega I)(K(a) - i\omega I)) \\ &= \det(K(a) + i\omega I) \det(K(a) - i\omega I) \\ &= |\det(K(a) - i\omega I)|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Posons donc

$$\text{num}(a, \omega) = |\det(K(a) - i\omega I)|^2$$

Donc une bifurcation de Hopf se caractérise par un zéro de la fonction  $\text{num}(a, \omega)$ , qui est toujours positive ou nulle. Il s'ensuit que toute valeur  $(a_c, \omega_c)$  qui annule ce numérateur réalise aussi un minimum de la fonction  $\text{num}(a, \omega)$  et satisfait donc les deux équations:

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{num}}{\partial a}(a_c, \omega_c) = 0 \\ \frac{\partial \text{num}}{\partial \omega}(a_c, \omega_c) = 0 \end{cases}$$

**Théorème 2:**

1) La fonction  $\text{num}(a, \omega)$  définie par (V-12) est un polynôme pair de degré  $2n$  en  $\omega$ .

2) Supposons le vecteur  $f$  choisi en sorte que  $f_2=0$  ( on aurait les mêmes résultats si  $f_1=0$ ). Alors le dénominateur  $\text{den}(a, \omega)$  est aussi un polynôme pair de degré  $2n-2$  en  $\omega$

3) Supposons de plus que la matrice  $K(a)$  est une fonction affine du paramètre "a". Alors  $\mu(a, \omega)$  est une fraction rationnelle aussi par rapport au paramètre "a",  $\text{num}(a, \omega)$  et  $\text{den}(a, \omega)$  étant des polynômes en a et en  $\omega$ . Ces polynômes se mettent sous la forme:

$$\text{num}(a, \omega) = \omega^{2n} + P_2(a)\omega^{2n-2} + \dots + P_{2n}(a), \quad (\text{V-17})$$

$$\text{den}(a, \omega) = Q_1(a)\omega^{2n-2} + Q_3(a)\omega^{2n-4} + \dots + Q_{2n-1}(a), \quad (\text{V-18})$$

où  $P_{2i}(a)$  sont des polynômes de degrés  $2i$  en "a" et  $Q_{2i-1}(a)$  sont des polynômes de degrés  $2i-1$  aussi en "a", pour  $i \in [1, n]$ .

**Démonstration**

1) Comme  $\text{num}(a, \omega) = \det(K^2(a) + \omega^2 I)$  et  $K(a)$  est une matrice carré d'ordre  $n$  indépendante de  $\omega$ , on peut remarquer facilement que  $\text{num}(a, \omega)$  est un polynôme pair de degré  $2n$  en  $\omega$ .

2) D'après la démonstration du théorème 1,  $\text{den}(a, \omega)$  est un produit scalaire, que l'on peut écrire comme somme de deux termes:

$$\begin{aligned} \text{den}(a, \omega) &= \langle \Delta(a, \omega), V(0,0) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n (\Delta_1^i(a, \omega) U_1^i(0,0) + \Delta_2^i(a, \omega) U_2^i(0,0)), \quad (\text{V-19}) \end{aligned}$$

où  $U_1^i(0,0)$ ,  $U_2^i(0,0)$  sont les composantes du vecteur  $V(0,0)$  qui dépendent de  $f$ , et où  $\Delta_1^i$ ,  $\Delta_2^i$  sont les déterminants définis dans la démonstration du théorème 1 et qui interviennent dans la solution des équations (V-15)

Si on prend par exemple  $f_2=0$ , on trouve à partir de l'équation (V-15-b) que  $U_2^i(0,0)=0$  pour tout  $i \in [1, n]$ . Par suite,  $\text{den}(a, \omega)$  se réduit à:

$$\text{den}(a, \omega) = \sum_{i=1}^n \Delta_1^i(a, \omega) U_1^i(0,0). \quad (\text{V-20})$$

Il reste donc à chercher le degré en  $\omega$  des déterminants  $\Delta_1^i$ . A cet effet, regardons la forme matricielle détaillée de l'équation (V-15-a),

$$\begin{bmatrix} g_{11}(a) + \omega^2 & g_{12}(a) & g_{1n}(a) \\ g_{22}(a) & g_{22}(a) + \omega^2 & g_{2n}(a) \\ \cdot & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1}(a) & g_{n2}(a) & g_{nn}(a) + \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^1 \\ U_1^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ U_1^n \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} h_1(a) \\ h_2(a) \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n(a) \end{bmatrix}, \quad (\text{V-21})$$

où  $g_{ij}(a)$  et  $h_i(a)$  sont des fonctions en  $a$ , indépendantes de la variable  $\omega$ .

Il est donc clair que les  $\Delta_1^i$  sont des polynômes pairs de degrés inférieurs ou égaux à  $2n-2$  en  $\omega$ . Par conséquent,  $\text{den}(a, \omega)$  est un polynôme pair de degré  $2n-2$  en  $\omega$ .

Si  $f_1 = 0$ , on fait le même raisonnement, et on obtient le même résultat.

3) Supposons en outre que  $K(a)$  dépend linéairement de  $a$ . Dans ce cas, les fonctions  $g_{ij}(a)$  et  $h_i(a)$  sont polynomiales en  $a$ , telles que le degré de chaque  $g_{ij}(a)$  ne dépasse pas 2 et celui des  $h_i(a)$  est égal à 1.

En tenant compte de ces propos et avec une démonstration par récurrence sur la dimension du système matricielle (V-21), on trouve que le num( $a, \omega$ ) et le den( $a, \omega$ ) sont des polynômes en  $a$  et en  $\omega$ , donnés par les formules explicites (V-17) et (V-18) du théorème 2. Par suite,  $\mu(a, \omega)$  est une fraction rationnelle de  $a$  et de  $\omega$ .

### Conséquences fondamentales du théorème 2:

1- En faisant le développement de Taylor au voisinage de  $\omega=0$ , du polynôme (V-17) sur le polynôme (V-18) jusqu'à l'ordre  $4n-2$  (cet ordre est exactement égal à la somme du degré de (V-17) et celui de (V-18) en  $\omega$ ), on obtient l'expression analytique:

$$\begin{aligned} \mu(a, \omega) = & \frac{P_{2n}(a)}{Q_{2n-1}(a)} + \frac{R_{4n-3}(a)}{Q_{2n-1}^2(a)} \omega^2 + \frac{R_{6n-6}(a)}{Q_{2n-1}^3(a)} \omega^4 + \dots \\ & + \frac{R_{4n^2-6n+3}(a)}{Q_{2n-1}^{2n}(a)} \omega^{4n-2} + O_a(\omega^{4n}), \end{aligned} \quad (V-22)$$

où les  $Q_{2n-1}(a)$ ,  $P_{2n}(a)$ ,  $R_{4n-3}(a)$ , ... sont des polynômes de degrés respectivement  $2n-1$ ,  $2n$ ,  $4n-3$ , .... en " $a$ ".

On peut donc remarquer facilement que les coefficients du polynôme (V-22) en  $\omega$ , sont des fractions rationnelles qui sont équivalents respectivement à " $a$ ",  $1/a$ ,  $1/a^3$ , ...,  $1/a^{4n-3}$ , lorsque " $a$ " est suffisamment grand.

2- Dans la suite, on essaiera d'identifier les fraction rationnelles (V-16) et (V-22) à partir d'un polynôme à deux variables lequel aura été obtenu par une technique de perturbation. Il est donc important d'évaluer le nombre de



monômes qui sont nécessaires pour identifier exactement la fraction (V-16). Ce nombre "NM" s'obtient facilement à partir de (V-22) en développant au voisinage de  $a=0$  les facteurs des puissances de la variable  $\omega$ . De plus si  $n$  est la dimension du problème alors,

$$NM=(4n-1)+(8n-5)+(12n-9)+\dots\dots\dots+(8n^2 - 8n + 3) \\ = 2n(4n^2 - 2n + 1).$$

On peut conclure que si la dimension  $n$  du problème est assez grande, on devra calculer un nombre énorme de monômes.

3- Les conséquences 1) et 2) vont nous guider pour la stratégie numérique applicable à une série entière à deux paramètres. Bien entendu, cette stratégie sera construite par une procédure d'approximants de Padé consistant à transformer la série entière à deux paramètres sous forme d'une fraction rationnelle.

Pour ces raisons, on va calculer maintenant l'indicateur de bifurcation par un développement en série entière.

### **V-3) Calcul de l'indicateur de bifurcation par une méthode asymptotique-numérique**

#### **V-3-1) Représentation de l'indicateur par des séries entières**

La résolution du système (V-8) et (V-10) par la méthode de Cramer (voir démonstration du théorème1) a montré que si la matrice  $K(a)$  est une fonction analytique de "a", alors le vecteur  $V(a, \omega)$  et l'indicateur  $\mu(a, \omega)$

sont des fonctions analytiques de  $a$  et  $\omega$ , le plus souvent des fractions rationnelles.

Dans un premier temps, on se propose donc de chercher  $V(a, \omega)$  et  $\mu(a, \omega)$  sous la forme de séries doubles en  $a$  et  $\omega$

$$V(a, \omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a^i \omega^j V(i, j) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i a^{i-j} \omega^j V(i-j, j) \quad (V-23-a)$$

$$\mu(a, \omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a^i \omega^j \mu(i, j) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^i a^{i-j} \omega^j \mu(i-j, j) \quad (V-23-b)$$

Or, puisque  $K(a)$  est une fonction analytique de  $a$ , on peut écrire que

$$K(a) = K_0 + aK_1 + a^2K_2 + \dots$$

où, les  $K_i$  ( $i=0,1,2,\dots$ ) sont des matrices connues. Ce qui donne

$$\Gamma(a, \omega) = \begin{bmatrix} K_0 & 0 \\ 0 & K_0 \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix} + a^2 \begin{bmatrix} K_2 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} + \dots$$

soit

$$\Gamma(a, \omega) = L_0 + \omega M + aL_1 + a^2L_2 + \dots$$

Donc, généralement on peut écrire:

$$\Gamma(a, \omega) = \omega M + \sum_{i=0}^{\infty} a^i L_i$$

$M$  et  $L_i$  étant des matrices indépendantes de  $a$  et  $\omega$ .

**Remarques:**

- "  $K_0$  inversible " est équivalent à "  $L_0$  inversible ".

-Pour balayer l'axe imaginaire, on pourra développer des séries entières au voisinage de  $\omega = \omega_0$  (c'est à dire  $\omega \Leftrightarrow \omega - \omega_0$ ), et on remplacera  $L_0$  par  $L_0 + \omega_0 M$ , figure (V-4).

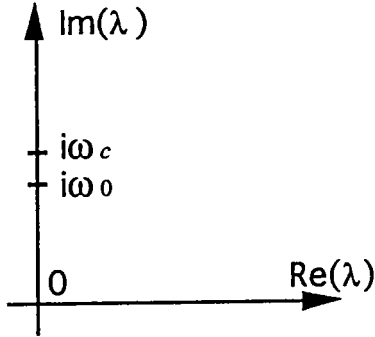


Figure V-4.

Si on reporte (V-23-a) et (V-23-b) dans (V-8), on obtient une séquence d'équations dont la résolution demande l'inversion d'une seule matrice  $L_0$ ;

$$\text{à l'ordre } 0 \quad L_0 V(0,0) = \mu(0,0)f, \quad (\text{V-24-a})$$

$$\text{à l'ordre } a \quad L_0 V(1,0) = \mu(1,0)f - L_1 V(0,0), \quad (\text{V-24-b})$$

$$\text{à l'ordre } \omega \quad L_0 V(0,1) = \mu(0,1)f - MV(0,0), \quad (\text{V-24-c})$$

$$\text{à l'ordre } a\omega \quad L_0 V(1,1) = \mu(1,1)f - MV(1,0) - L_1 V(0,1),$$

à l'ordre  $a^p \omega^q$

$$L_0 V(p,q) = \mu(p,q)f - MV(p,q-1) - \sum_{i=1}^p L_i V(p-i,q), \quad (\text{V-24-d})$$

avec  $V(p,-1) = 0$ .

Pour résoudre ces problèmes, on tient compte de la condition d'orthogonalité qui se réduit à:

$$\langle V(i, j), V(0,0) \rangle = 0, \quad i+j > 0 \quad \text{et} \quad \mu(0,0) = 1.$$

Cette condition va nous permettre de déterminer tous les coefficients  $\mu(i, j)$  pour  $i+j > 0$ . En effet:

à l'ordre 0:  $V(0,0) = L^{-1}of$  (V-25-a)  
 et  $\mu(0,0) = 1,$

à l'ordre a: on trouve successivement

$$\mu(1,0) = \frac{\langle L_1 V(0,0), (L^{-1}_0)^* V(0,0) \rangle}{\|V(0,0)\|^2},$$

$$V(1,0) = \mu(1,0)V(0,0) - L^{-1}_0(L_1 V(0,0)).$$

Pour résoudre les équations à l'ordre  $a^p \omega^q$ , posons:

$$F_{p,q} = MV(p, q-1) + \sum_{i=1}^p L_i V(p-i, q)..$$

Alors (V-24-d) devient

$$L_0 V(p, q) = \mu(p, q)f - F_{p,q}.$$

Tous les termes des séries entières (V-23) sont alors obtenues par les équations (V-25-a) ainsi que par les équations suivantes.

Pour  $p+q > 0$ ,

$$\mu(p, q) = \frac{1}{\|V(0, 0)\|^2} \langle F_{p, q}, (L^{-1}_0)^* V(0, 0) \rangle, \quad (V-25-d)$$

$$V(p, q) = \mu(p, q)V(0, 0) - L^{-1}_0 F_{p, q}.$$

### V-3-2) Représentation de l'indicateur de bifurcation par des approximants de Padé

#### V-3-2-1) Principe de la représentation

On a vu que la fonction  $\mu(a, \omega)$  est une fraction rationnelle des deux variables  $a$  et  $\omega$ . Il est donc tout à fait naturel de retraiter la série (V-23-b) en la remplaçant par un approximant de Padé, comme cela a été fait avec succès pour des bifurcations stationnaires. Jusqu'à présent au laboratoire on n'a utilisé que des approximants de Padé pour des fonctions d'une seule variable. Pour une fonction d'une variable, un approximant de Padé est défini par les degrés des deux polynômes au numérateur et au dénominateur. Même dans ce cas plus simple, ces choix doivent être faits avec soin (B.Cochelin, N.Damil, et M.Potier-Ferry, 1994), (chapitre III de cette thèse). Bien entendu, ce choix est encore plus délicat avec deux variables. En effet il n'y a pas une unique approximation rationnelle pour ces séries doubles. Chaque auteur propose sa propre méthode suivant les conditions et les propriétés imposées par le problème en question. Nous renvoyons le lecteur à (J.S.R.Chislom, 1973). On peut donc utiliser différentes techniques ou en inventer d'autres. A cet effet, on va proposer maintenant une stratégie simple dont on testera l'efficacité pour des exemples à deux ou à trois dimensions.

En gros, notre technique consiste à réécrire la série double (V-23-b) sous la forme suivante:

$$\mu(a, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(a) \omega^j \quad (V-26)$$

où  $f_j(a)$  sont des polynômes de la variable  $a$ .

Après on remplace les fonctions scalaires  $f_j(a)$  par les fractions rationnelles convenables, qu'on note  $P_j[L_j / M_j](a)$ . Ainsi la formule (V-26) devient:

$$\mu(a, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j[L_j / M_j](a) \omega^j. \quad (V-27)$$

On obtient donc un polynôme en  $\omega$  dont les coefficients sont des fractions rationnelles en "a". Par suite, on retransforme (V-27) sous la forme d'un approximant de Padé par rapport à  $\omega$ . On désigne ce nouvel approximant par  $P[L / M](a, \omega)$  où  $L$  et  $M$  sont les degrés respectifs du numérateur et du dénominateur par rapport à la variable  $\omega$ . Le choix des ordres  $L_j$ ,  $M_j$ ,  $L$ , et  $M$  n'est ni évident ni arbitraire, il se fera en tenant compte des résultats énoncés aux conséquences du théorème 2.

### **V-3-2-2) Une stratégie pour représenter l'indicateur de bifurcation à l'aide d'approximants de Padé**

Nous présentons ici une stratégie d'approximants de Padé qui conduit à la solution exacte donnée par (V-16), lorsque la matrice  $K(a)$  est une fonction affine de "a" et le vecteur  $f$  est choisi tel que par exemple la composante  $f_2=0$ . Selon ce choix de  $f$ , on trouve automatiquement à l'aide d'un calcul sur le logiciel Maple que les représentations (V-23) en séries entières sont

paire en  $\omega$  (i.e., tous les coefficients  $\mu(i, j)$  de (V-23-b) sont nuls, lorsque  $j$  est impair). Par conséquent les formules (V-26) et (V-27) deviennent:

$$\mu(a, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} f_{2j}(a) \omega^{2j}, \quad (V-28)$$

$$\mu(a, \omega) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{2j}[L_{2j} / M_{2j}](a) \omega^{2j}. \quad (V-29)$$

En outre, selon les résultats du théorème 2 et ses conséquences, on peut tronquer la série (V-28) à l'ordre  $N=4n-2$  par rapport à  $\omega$  et on choisit les ordres  $L_{2j}$  et  $M_{2j}$  ( $j \in [0, N/2]$ ) de la formule (V-29) de telle façon que pour "a" grand:

$$j=0 \quad P_0[2n / 2n - 1](a) \text{ soit d'ordre "a"}, \quad (V-30-a)$$

$$j=1 \quad P_2[4n - 3 / 4n - 2](a) \text{ soit d'ordre } 1/a, \quad (V-30-b)$$

$$j=2 \quad P_4[6n - 6 / 6n - 3](a) \text{ soit d'ordre } 1/a^3, \quad (V-30-c)$$

$$j=3 \quad P_6[8n - 9 / 8n - 4](a) \text{ soit d'ordre } 1/a^5, \quad (V-30-d)$$

$$j=N/2 \quad P_N[4n^2 - 6n + 3 / 4n^2 - 2n](a) \text{ soit d'ordre } 1/a^{N-1}. \quad (V-30-e)$$

Finalement, on retransforme la formule (V-29) obtenue par la procédure (V-30), sous la forme du nouvel approximant de Padé  $P[L/M](a, \omega)$  vérifiant  $L=2n$  et  $M=2n-2$  par rapport à la variable  $\omega$ . Autrement dit, pour  $\omega$  grand

$$P[2n / 2n - 2](a, \omega) \text{ est d'ordre } \omega^2. \quad (V-31)$$

On verra plus loin dans les exemples à deux ou trois dimensions que cette stratégie conduit toujours la série (V-23) à la fraction rationnelle exacte de l'indicateur de bifurcation (V-16)

### V-3-3) Quelle stratégie pour un système à grand nombre de degrés de libertés?

La stratégie précédente (V-30) et (V-31) est une première application sur des exemples à petits nombres de degrés de libertés. Dans ce cas, elle va se révéler efficace. Mais notre objectif est de la tester à des systèmes à grands nombres de degrés de libertés. Il s'agit des problèmes dissipatifs d'interaction fluides-structures. A priori, l'application directe de cette stratégie ne serait pas automatique et évidente pour ces grands problèmes. En effet, la difficulté apparaîtrait lors de la transformation des séries (V-23) sous forme de fractions rationnelles. Plus exactement, cette stratégie nécessite un grand nombre de termes des séries entières (V-23), c'est à dire, si on est en dimension "n" (n est suffisamment large), la série en a et en  $\omega$  doit comprendre  $2n(4n^2 - 2n + 1)$  coefficients (voir conséquences du théorème 2), ce qui serait délicat à gérer. Pour cela, on va essayer d'adopter d'autres stratégies, dans le but de réduire les ordres exacts  $L_j$ ,  $M_j$ , L, et M des approximants de Padé de la stratégie (V-30) et (V-31). On verra bien que ces stratégies réduites sont aussi efficaces pour les mêmes exemples à deux ou à trois dimensions. En élaborant des programmes en langage Maple, on a pu traiter plusieurs exemples, en utilisant ces nouvelles stratégies.

En résumé, afin de mettre en évidence l'efficacité de ces stratégies réduites pour trouver les points de bifurcation de Hopf, on a traité plusieurs modèles, parmi lesquels on va en présenter quatre exemples à 2 ou 3 dimensions. Le calcul sera fait par trois façons différentes dont deux ont été citées auparavant: d'une manière exacte, on utilise l'indicateur de bifurcation défini par (V-16) ou le  $\text{num}(a, \omega) = \det(K^2(a) + \omega^2 I)$ . Et approximativement, on adopte la représentation de l'indicateur de



bifurcation donnée par les approximations de Padé (autrement dit, par l'application de la stratégie (V-30) et (V-31) ou d'autres plus réduites à la série (V-23-b) de  $\mu(a, \omega)$ . Une fois, que l'on a obtenu  $\mu(a, \omega)$  sous forme d'une fraction rationnelle par l'une ou l'autre méthode, on cherche les points de bifurcation de Hopf à travers la résolution du système (V-13). On rappelle que ce système est obtenu à partir du numérateur de la fraction rationnelle  $\mu(a, \omega)$ .

Tous les calculs qui vont suivre, ont été réalisés au moyen du logiciel Maple.

#### V-4) Exemples d'applications

##### V-4-1) Premier exemple

A titre d'application reconsidérons l'exemple déjà traité au chapitre IV, tel que le cycle limite stable entoure l'équilibre instable avec une amplitude proportionnelle à  $(a - a_c)^{1/2}$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(a - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(a - x^2 - y^2) \end{cases}$$

La matrice Jacobienne au point stationnaire (0,0):

$$K(a) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & +a \end{pmatrix}.$$

Les points critiques :  $a_c = 0$ ,  $\omega_c = \pm 1$

trouvons ces points par les méthodes suivantes citées auparavant. Ici,  $f$  est choisi égal à (1,1,0,0).

### Calcul direct du point de bifurcation de Hopf

Pour calculer ce point, il suffit d'exprimer le numérateur de la fraction rationnelle exacte (V-16),

$$\text{num}(a, \omega) = \omega^4 + 2(a^2 - 1)\omega^2 + (a^2 + 1)^2, \quad (\text{V-32})$$

après, on résout le système (V-13) suivant qui donne simplement le point de bifurcation de Hopf (0,1).

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{num}}{\partial a}(a, \omega) = 4a\omega^2 + 4a(a^2 + 1) = 0 \\ \frac{\partial \text{num}}{\partial \omega}(a, \omega) = 4\omega^3 + 4\omega(a^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

### Utilisation de la stratégie (V-30) et (V-31)

La dimension du problème est deux, on tronque donc la série double (V-23) à l'ordre  $N=4n-2=6$  par rapport à  $\omega$ :

$$\mu(a, \omega) = 1 + a^2 + (-1 + 4a^2 - 4a^4)\omega^2 + (4a^2 - 8a^4 + 12a^6 - 16a^8)\omega^4 + (4a^2 - 12a^4 + 24a^6 - 40a^8 + 60a^{10} - 84a^{12})\omega^6 + o_a(\omega^8). \quad (\text{V-33})$$

On détecte notre point de bifurcation en appliquant la stratégie avec les deux procédures principales (V-30) et (V-31) à la série (V-33). Finalement, on trouve l'approximant de Padé  $P[4/2](a, \omega)$  qui est bien égal à la fraction rationnelle trouvée par le calcul exact, son numérateur étant donné par le polynôme (V-32).

### V-4-2) Deuxième exemple

Ici, nous reprenons l'exemple traité analytiquement dans le chapitre IV:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \sin(x) \cos(x) z^2 - \sin(x) - ay \\ \dot{z} = \frac{-2}{\sqrt{3}} (\cos(x) - 1/2) \end{cases}$$

Le point stationnaire est:  $X_* = (\arccos(1/2), 0, \sqrt{2})$ , et la matrice Jacobienne au point stationnaire  $X_*$ :

$$K(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-3}{2} & -a & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après l'étude analytique faite dans le chapitre IV, cet exemple a pour points critiques:  $a_c = \sqrt{6}/3$ ,  $\omega_c = \sqrt{6}/2$ .

On va essayer donc de trouver ces points critiques, en utilisant la formule exacte (V-16) de  $\mu(a, \omega)$  et sa représentation par les approximants de Padé .

Dans cet exemple, on choisit  $f$ , telque  $f=(1,0,0,0,0,0)$ .

#### Calcul direct du point de bifurcation

En faisant, le calcul de l'expression exacte (V-16) de l'indicateur de bifurcation, on obtient:

$$\mu(a, \omega) = \frac{\text{num}(a, \omega)}{-(3/2)\omega^4 + ((-\sqrt{6}/2)a + 9/4)\omega^2 + 3/2}, \quad (\text{V-34})$$

où  $\text{num}(a, \omega) = \omega^6 + (a^2 - 3)\omega^4 + (-\sqrt{6}a + 9/4)\omega^2 + 3/2$ .

On a vu que les points de bifurcations de Hopf se caractérisent par les deux équations (V-13):

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{num}}{\partial a}(a, \omega) = 2\omega^4 a - \sqrt{6}\omega^2 = 0 \\ \frac{\partial \text{num}}{\partial \omega}(a, \omega) = 6\omega^5 + (4a^2 - 12)\omega^3 + 2(-\sqrt{6}a + 9/4)\omega = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système à l'aide du système Maple donne exactement les points critiques trouvés analytiquement.

### **Remarque importante**

On peut remarquer facilement que si le terme  $Q_{2n-2}(a)$  du dénominateur (V-18) est une constante, c'est à dire, ne dépend pas de "a" (ici,  $Q_{2n-2}(a)=3/2$  et  $n=3$ ), alors les facteurs des puissances de la variable  $\omega$  dans la formule (V-22) ne sont plus des fractions rationnelles, ils deviennent des polynôme en "a". Dans ce cas, l'utilisation de la stratégie ne nécessite pas le passage par la première procédure (V-30). En fait, on passe directement à l'application de la deuxième procédure (V-31); qui est ici égale à  $P[6/4](a, \omega)$ . C'est ce qu'on va voir maintenant.

### **Calcul du point de bifurcation de Hopf par les approximants de Padé**

#### **La stratégie (V-30) et (V-31)**

Ici, on est en dimension  $n=3$ , donc il suffit de tronquer la série double (V-23-b) à l'ordre  $N=4n-2=10$  par rapport à  $\omega$ . Plus exactement, on doit calculer 16 coefficients  $\mu(i, j)$  de la série scalaire (V-23-b). Par suite on a:

$$\mu(a, \omega) = 1 + (-\sqrt{6}a/3)\omega^2 + (-1 + (\sqrt{6}/2)a)\omega^4 + (13/6 - (17\sqrt{6}/12)a + a^2)\omega^6 + Q_8(a)\omega^8 + Q_{10}(a)\omega^{10} + O_a(\omega^{12}), \quad (V-35)$$

où  $Q_8(a) = -17/4 + (241/72)\sqrt{6}a - (13/3)a^2 + (\sqrt{6}/3)a^3,$

$$Q_{10}(a) = 205/24 - (377/48)\sqrt{6}a + (511/36)a^2 - (35/18)\sqrt{6}a^3 + (2/3)a^4.$$

D'après la remarque importante, on ignore la procédure (V-30) et on adopte directement la procédure (V-31) pour la série (V-35). Comme c'était attendu, on retrouve la fraction rationnelle (V-34) obtenue par le calcul direct. En conséquence, on obtient notre point de bifurcation de Hopf cherché  $a_c = \sqrt{6}/3, \omega_c = \sqrt{6}/2.$

### Stratégies réduites

On garde toujours la série (V-35), mais tronquée respectivement aux ordres 8 et 6 par rapport au paramètre  $\omega$ . Ensuite, on remplace successivement la procédure (V-31) d'ordres exacts ( $L=6, M=4$ ) par les Padés d'ordres réduits:  $P[4/4](a, \omega)$  et  $P[4/2](a, \omega)$ . Au moyen des systèmes (V-13), vérifiés respectivement par les numérateurs de ces nouvelles procédures, on trouve toujours le point de bifurcation de Hopf  $a_c = \sqrt{6}/3, \omega_c = \sqrt{6}/2.$  Mais avec le Padé le plus réduit  $P[2/2](a, \omega)$  on ne détecte plus notre point de bifurcation. Pour cette raison, on ne réutilise plus ce genre de Padé dans les exemples qu'on va traiter par la suite. Cette fois ci, pour trouver par exemple l'approximant de Padé d'ordres réduits  $P[4/2](a, \omega)$ , on a calculé seulement 7 coefficients  $\mu(i, j)$  de la série scalaire (V-23-b) au lieu de 16 exigés par la procédure (V-31). Un point très utile en pratique, surtout pour les problèmes à grand nombre de degrés de libertés.

### V-4-3) Troisième exemple

Soit le système de W.F.Langford (voir E.Hopf, 1948):

$$\begin{cases} \dot{x} = (a-1)x - y + xz \\ \dot{y} = x + (a-1)y + yz \\ \dot{z} = az - (x^2 + y^2 + z^2) \end{cases}$$

Les points d'équilibre sont:  $x^0*(0,0,0)$  et  $x^1*(0,0,a)$ .

-La matrice Jacobienne au point  $x^0*$ :

$$K(a) = \begin{pmatrix} a-1 & -1 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

les valeurs propres de la matrice sont:  $\lambda^0_1 = a$  et  $\lambda^0_{2,3} = a-1 \pm i$ .

Puisque  $\frac{\partial}{\partial a}(\text{Re}(\lambda^0_{2,3}(a)))_{a=1} = 1 > 0$ , alors  $x^0*$  est linéairement stable pour  $a < 1$  et linéairement instable pour  $a > 1$  (théorème de Liapunov). Mais pour "a" voisin de 1, il n'y a pas de solution stable car  $\lambda^0_1$  est positif au point  $a=1$ .

- La matrice Jacobienne au point  $x^1*$  s'écrit:

$$K(a) = \begin{pmatrix} 2a-1 & -1 & 0 \\ 1 & 2a-1 & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

et admet les valeurs propres:  $\lambda_1^1(a) = a$  et  $\lambda_{2,3}^1(a) = 2a - 1 \pm i$ .

On a  $\frac{\partial}{\partial a}(\text{Re}(\lambda_{2,3}^1(a)))_{a=1/2} = 2 > 0$ , par suite,  $x^{1*}$  est linéairement stable pour  $0 < a < 1/2$ , mais il est linéairement instable pour  $a < 0$  ou  $a > 1/2$ . Dans ce cas,  $(a_c = 1/2, \omega_c = 1)$  est un point de bifurcation de Hopf.

On peut écrire  $K(a)$  sous la forme:  $K(a) = K_0 + aK_1$ , où

$$K_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme  $K_0$  est singulière, on effectue le changement de variable  $a \rightarrow a - 1$ , qui nous permet de se ramener à une matrice inversible, exigée par la méthode asymptotique-numérique. Nous renvoyons le lecteur au paragraphe (V-3). Avec cette transformation, on obtient la nouvelle représentation matricielle suivante:

$$K(a) = K_0 + aK_1, \text{ où}$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } K_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$K_0$  est non singulière et  $(a_c = -1/2, \omega_c = 1)$  est le nouveau point de bifurcation de Hopf, que l'on va retrouver maintenant. Ici,  $f$  est égal à  $(1,0,0,0,0,0)$ .

### Calcul direct du point de bifurcation de Hopf

On commence toujours par le calcul du numérateur de la fraction rationnelle exacte (V-16):

$$\text{num}(a, \omega) = \omega^6 + (9a^2 + 10a + 1)\omega^4 + (24a^4 + 56a^3 + 56a^2 + 24a + 4)\omega^2 + 16a^6 + 64a^5 + 112a^4 + 112a^3 + 68a^2 + 24a + 4, \quad (\text{V-36})$$

puis, on cherche les solutions du système (V-13), qui donne exactement les point de bifurcation de Hopf cherchés.

### Calcul du point de bifurcation de Hopf par les approximants de Padé

#### Utilisation de la stratégie (V-30) et (V-31)

La dimension du système est trois, on tronque alors la série double (V-23-b) à l'ordre  $N=10$  par rapport à  $\omega$ ; par exemple à l'ordre 8 l'indicateur a pour valeur:

$$\begin{aligned} \mu(a, \omega) = & (1 + a + a^2 - a^3 + a^4) + \left(\frac{3}{2}a - 3a^2 + \frac{5}{2}a^3 + 2a^4 - \frac{21}{2}a^5\right)\omega^2 + \\ & \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}a^2 + \frac{5}{2}a^3 - \frac{37}{4}a^4 + \frac{63}{4}a^5\right)\omega^4 + \left(-\frac{1}{8}a + \frac{3}{4}a^2 - 2a^3 + \right. \\ & \left. 2a^4 + \frac{41}{8}a^5 - \frac{109}{4}a^6 + \frac{245}{4}a^7\right)\omega^6 + O_a(\omega^8). \quad (\text{V-37}) \end{aligned}$$

L'adoption des procédures (V-30) et (V-31) à la série (V-37) tronquée à l'ordre 10 par rapport à  $\omega$  nous permet de ramener cette série en une fraction rationnelle de  $a$  et de  $\omega$  semblable à celle trouvée exactement, et



dont le numérateur est donné par le polynôme (V-36). En outre, on retrouve bien notre point de bifurcation de Hopf ( $a_c = -1/2, \omega_c = 1$ ). Mais, malgré le petit nombre de degrés de libertés de ce système ( $n=3$ ), ces procédures ont exigé le calcul de 186 coefficients  $\mu(i, j)$  de la série scalaire de  $a$  et de  $\omega$  (voir conséquences du théorème 2). C'est pourquoi on va essayer maintenant de réduire les ordres exacts de ces procédures.

### Stratégies réduites

Notre objectif consiste à choisir des ordres plus petits que ceux de la stratégie (V-30) et (V-31), sans modifier le principe de la démarche suivie.

a) Ici, on préserve le comportement asymptotique de la procédure (V-30) ( $a, 1/a, 1/a^3, \dots$ ) tout en réduisant les ordres exacts  $L_j$  et  $M_j$ . Puis, on remplace le couple d'ordres exacts ( $L=6, M=4$ ) de la procédure (V-31) respectivement par les couples d'ordres inférieurs ( $L=4, M=4$ ) et ( $L=4, M=2$ ). Ces changements conduisent à des fractions rationnelles telles que la résolution des systèmes (V-13) donne le point de bifurcation de Hopf ( $a_c = -1/2, \omega_c = 1$ ). Pour trouver par exemple le Padé réduit  $P[4/2](a, \omega)$ , on a calculé seulement 25 scalaires  $\mu(i, j)$  de la série scalaire (V-23-b) au lieu de 186 exigés par les procédures (V-30) et (V-31). Résultat très important au point de vue pratique, surtout pour les systèmes à grand nombre de degrés de libertés.

b) Pour réduire encore le nombre des scalaires  $\mu(i, j)$  calculé au a), on a changé le comportement asymptotique de la procédure (V-30-a, b, c, d, e) par:

$$j=0 \quad P_0[L_0 / M_0](a) \text{ tend vers } a, \quad (\text{V-38-a})$$

$$j=1 \quad P_2[L_2 / M_2](a) \text{ tend vers } 1/a, \quad (\text{V-38-b})$$

$$j=2 \quad P_4[L_4 / M_4](a) \text{ tend vers } 1/a, \quad (\text{V-38-c})$$

$$j=3 \quad P_6[L_6 / M_6](a) \text{ tend vers } 1/a, \quad (\text{V-38-d})$$

$$j=N/2 \quad P_N[L_N / M_N](a) \text{ tend vers } 1/a, \quad (\text{V-38-e})$$

lorsque  $a$  tend vers l'infini.

En quelque sorte, ce choix est inspiré du résultat (V-30); on a gardé le bon comportement asymptotique des deux premiers termes ( $L_0 - M_0 = 1$ ,  $M_2 - L_2 = 1$ ), mais à partir de  $j=2$ , on a modifié ce comportement asymptotique en l'alignant sur le second terme  $j=1$  ( $M_4 - L_4 = 1$  au lieu de 3, etc). Pour la deuxième procédure (V-31), dans un premier temps on remplace les ordres exacts de la fraction rationnelle  $P[6/4](a, \omega)$  par l'approximant de Padé  $P[4/4](a, \omega)$ , ensuite par le Padé  $P[4/2](a, \omega)$ . Ainsi, par cette séquence de procédures, on transforme la série double (V-37), en une fraction rationnelle de deux paramètres, qui donne aussi le point de bifurcation de Hopf, en résolvant le système (V-13). Ici, le nombre de coefficients  $\mu(i, j)$  nécessaire pour recalculer  $P[4/2](a, \omega)$  est strictement inférieur à 25; nombre de coefficients calculés en a).

#### V-4-4) Quatrième exemple

On considère l'exemple suivant à trois dimensions (voir Hassard B.D. and Al, 1981):

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = -y + xy \end{cases}$$

$(0,0,0)$  est le point stationnaire.

La matrice Jacobienne en ce point est:

$$K(a) = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont:  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_{2,3} = a \pm i$ .

Comme  $\frac{\partial}{\partial a}(\text{Re}(\lambda_{2,3}))_{a=0} = 1 > 0$ ,

donc le point d'équilibre est stable pour  $a < 0$ , et instable pour  $a > 0$  (théorème de Liapunov). Par suite,  $(0,1)$  est le point de bifurcation qu'on va essayer de détecter maintenant. Le vecteur  $f$  est choisi comme  $(1,1,1,0,0,0)$ .

### Calcul direct du point de bifurcation de Hopf

On procède de la même manière qu'auparavant; c'est à dire on explicite le num( $a, \omega$ ) de la formule (V-16):

$$\text{num}(a, \omega) = \omega^6 + (2a^2 - 1)\omega^4 + (a^4 + 4a^2 - 1)\omega^2 + a^4 + 2a^2 + 1, \quad (\text{V-39})$$

après, on résout les deux équations de (V-13), ce qui conduit bien aux points cherchés.

### Calcul du point de bifurcation de Hopf par les approximants de Padé

#### Utilisation de la stratégie (V-30) et (V-31)

Le système a pour dimension  $n=3$ , on arrête donc la série double (V-23) à l'ordre  $N=10$  par rapport à  $\omega$ . Par exemple à l'ordre 8 on a:

$$\begin{aligned} \mu(a, \omega) = & 1 + \frac{2}{3}a^2 - \frac{2}{9}a^4 + \frac{2}{27}a^6 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{32}{9}a^2 - \frac{14}{3}a^4 + \frac{436}{81}a^6 - \frac{1394}{243}a^8\right. \\ & \left.)\omega^2 + \left(-\frac{8}{9} + \frac{56}{9}a^2 - \frac{430}{27}a^4 + \frac{7046}{243}a^6 - \frac{10780}{243}a^8 + \right. \\ & \left. \frac{44516}{729}a^{10}\right)\omega^4 + O_a(\omega^6). \end{aligned} \quad (V-40)$$

L'adoption des formules (V-30) et (V-31) de la stratégie à la série (V-40), nous donne une fraction rationnelle dont le numérateur est exactement le polynôme (V-39). Bien entendu, on retrouve facilement le point de bifurcation de Hopf ( $a_c = 0, \omega_c = 1$ ).

### stratégies réduites

Ici, on réutilise les démarches a) et b) du troisième exemple, on retrouve notre point de bifurcation de Hopf ( $a_c = 0, \omega_c = 1$ ).

En résumé, on arrive toujours à détecter le point de bifurcation de Hopf par toutes les méthodes proposées. Mais, avec la stratégie (V-30) et (V-31) on retrouve en plus la fraction rationnelle obtenue par le calcul direct.

### **V-5) Conclusion**

Pour la détection des points de bifurcation de Hopf, on a élaboré une méthode analytique dans le cadre de la méthode asymptotique-numérique, qui s'est montrée efficace pour des exemples à deux ou à trois dimensions. En statique, des méthodes comparables avaient été testées dans un contexte

de calculs par éléments finis sur des exemples avec un préflambage linéaire (une plaque élastique en compression uniaxiale) ou non linéaire (arc circulaire). Dans ce cas, ces méthodes ont été efficaces, peu coûteuses en temps de calcul et d'un emploi très facile. C'est pourquoi nous essayons d'appliquer les techniques de perturbations présentées ici à des problèmes d'écoulement de fluides visqueux discrétisés par éléments finis. Au chapitre VI, on présentera une étude encore incomplète.

## VI) APPLICATION DE LA M.A.N AUX ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

### VI-1) Introduction

L'étude expérimentale d'écoulements de fluides nous montre son évolution variée et désordonnée dans le temps et l'espace. Ces caractéristiques conduisent à des phénomènes complexes, à des bifurcations successives, à des turbulences, au chaos déterministe ou indéterminisme,.....

Les phénomènes d'instabilités qui résultent de ces écoulements peuvent avoir deux caractères différents: les instabilités locales de caractère convectif (Huerre et Monkewitz, 1990) n'ont généralement pas une dynamique propre, elles se comportent en amplificateurs de bruit; c'est ce qu'on observe dans les couches limites et les couches de mélange. Il y a aussi les instabilités absolues, dont certaines ont une dynamique intrinsèque peu sensible au bruit extérieur. Les travaux concernant ces instabilités ont été détaillées par plusieurs auteurs, par exemple Monkewitz (1988), Chomaz et Al (1987).

L'écoulement de sillage autour d'un cylindre est l'exemple le plus typique des écoulement absolument instables. L'étude expérimentale montre que à partir de la valeur 45 du nombre de Reynolds, l'écoulement stationnaire (fig VI-1-a) devient globalement instable, et donne naissance à un régime oscillatoire caractérisé par l'apparition des tourbillons de Von Karman (fig VI-1-b). Ce phénomène oscillatoire a été identifié expérimentalement, comme étant une bifurcation de Hopf (Mathis et Al, 1984) et l'équation de Landau décrit d'une manière satisfaisante l'amplitude des oscillations (Strywski et Streenivasan, 1990). Le seuil d'apparition de l'allée de Von Karman a de plus été relié avec succès à la présence d'une région absolument instable suffisamment grande (Monkewitz, 1988); (Hanneman et

Oertel, 1989). Des résultats similaires ont pu être obtenus pour d'autres écoulements. On trouvera une bibliographie extensive sur ce sujet dans Huerre et Monkewitz (1990).

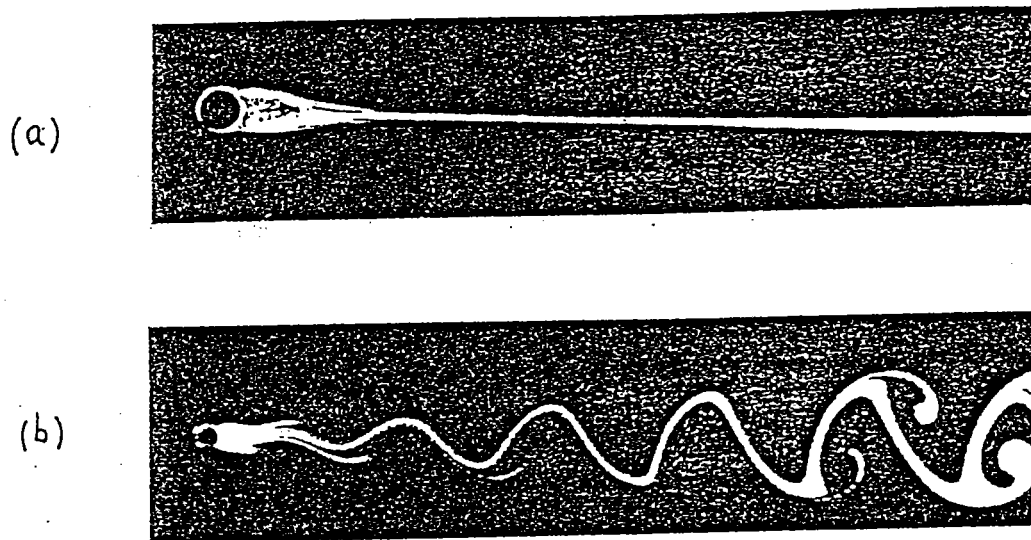


Figure VI-1: Sillage derrière un cylindre dans un écoulement d'huile; (a):  $Re=32$ , écoulement stationnaire, (b):  $Re=65$ , écoulement oscillatoire.

A notre connaissance, on n'a jamais détecté le seuil d'apparition d'écoulement stationnaire instable ou point de bifurcation de Hopf par des méthodes analytiques-numériques pour les équations d'écoulement des fluides visqueux. C'est pourquoi dans ce chapitre on proposera des méthodes asymptotiques-numériques qui soient applicables à la résolution de ce type de problèmes. Dans un premier temps, on présentera le calcul asymptotique d'écoulement stationnaire en développant la vitesse et la pression en série entière par rapport au nombre de Reynolds. Ensuite, on va discuter la détection des points de bifurcation de Hopf existant sur une branche de solution stationnaire et on présentera aussi les aspects théoriques d'un algorithme de calcul. De plus, on parlera du calcul de la solution bifurquée périodique par l'alternative de Fredholm. La détermination numérique des

solutions stationnaires par les méthodes asymptotiques-numériques a été faite avec succès (A. Tri, B. Cochelin et M. Potier-Ferry, 1994) pour les problèmes suivants: écoulement d'un fluide autour d'un cylindre, autour de deux cylindres et autour d'une cavité. Mais, le calcul effectif de points de bifurcation de Hopf n'a pas encore été réalisé à ce jour.

## VI-2) Formulation du problème de Navier-Stokes

Les équations de base d'écoulement d'un fluide visqueux incompressible sont données par l'équation du mouvement, l'équation de continuité, l'équation de conservation de masse et les conditions aux limites. Si on désigne par  $U_i = U_i(x,t)$  la vitesse, la conservation de la quantité de mouvement donne l'équation:

$$\rho \left( \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j U_{i,j} \right) - \tau_{ij,j} = \rho f_i \quad (\text{VI-1})$$

où  $\rho = \rho(x,t)$  et  $f_i$  désignent respectivement la densité et les forces volumiques La contrainte  $\tau_{ij}$  moyennant le symbole de Kronecher  $\delta_{ij}$  s'écrit:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad (\text{VI-2})$$

où  $p$  est la pression,  $\mu$  le coefficient de viscosité et  $d_{ij}$  est le taux de déformation:

$$d_{ij} = (U_{i,j} + U_{j,i}) / 2 \quad (\text{VI-3})$$

A partir de la loi de conservation de la masse, on déduit l'équation de continuité d'un fluide incompressible:



$$U_{i,i} = 0 \quad (VI-4)$$

**Notations:**

- $x_i$  ( $i=1,2,3$ ) sont les coordonnées spatiales et  $t$  le temps.
- $(\cdot)_{,i}$  signifie dérivée partielle par rapport à  $x_i$ .

Par suite, les équations de Navier-Stokes sont obtenues en introduisant (VI-2) et (VI-3) dans (VI-1) en utilisant (VI-4). Après introduction de quantités sans dimension, on obtient:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} - \frac{1}{R_e} U_{i, jj} + U_j U_{i, j} + p_{,i} = f_i \quad (VI-5)$$

où  $R_e$  est appelé nombre de Reynolds.

Pour appliquer la méthode des éléments finis, on projette (VI-5) (respectivement l'équation de continuité (VI-4)) sur les fonctions  $w_i$  nulles sur la frontière  $\Gamma$  (respectivement sur la fonction test  $b$ ). On obtient les formulations variationnelles nécessaires pour la méthode de Galerkin:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U_i}{\partial t} w_i d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R_e} U_{i, jj} + U_j U_{i, j} + p_{,i} \right) w_i d\Omega = \int_{\Omega} f_i w_i d\Omega, \quad (VI-6-a)$$

$$\int_{\Omega} b U_{i,i} d\Omega = 0. \quad (VI-6-b)$$

En appliquant le théorème de Green on arrive à la forme faible des équations de Navier-Stokes.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U_i}{\partial t} w_i d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{1}{R_e} U_{i,j} w_{i,j} + U_j U_{i,j} w_i + p w_{i,i} \right) d\Omega = \int_{\Omega} f_i w_i d\Omega \quad (\text{VI-7-a})$$

$$\int_{\Omega} b U_{i,i} d\Omega = 0 \quad (\text{VI-7-b})$$

On peut écrire ces équations sous les formes condensées suivantes:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + LU + Q(U, U) + D(p) = F \\ S(U) = 0 \end{cases} \quad (\text{VI-8})$$

où  $L(\cdot)$ ,  $D(\cdot)$ ,  $S(\cdot)$  sont des opérateurs linéaires et  $Q(\cdot, \cdot)$  un opérateur quadratique non symétrique tels que:

$$\left\langle \frac{dU}{dt}, w \right\rangle = \int_{\Omega} \frac{\partial U_i}{\partial t} w_i d\Omega,$$

$$\langle L(\cdot), w \rangle = \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} (\cdot)_{i,j} w_{i,j} d\Omega,$$

$$\langle D(\cdot), w \rangle = \int_{\Omega} (\cdot) w_{i,i} d\Omega,$$

$$\langle Q(\cdot, U), w \rangle = \int_{\Omega} U_i (\cdot)_{i,j} w_i d\Omega,$$

$$\langle F, w \rangle = \int_{\Omega} f_i w_i d\Omega,$$

$$\langle S(\cdot), b \rangle = \int_{\Omega} b(\cdot)_{i,i} d\Omega.$$

Le produit scalaire est le produit scalaire au sens de  $L^2(\Omega)$ :

$$\langle V, W \rangle = \int_{\Omega} V_i W_i d\Omega.$$

Si on suppose que  $F=0$  et on impose la condition de Dirichlet sur la frontière  $\Gamma$ :

$$U = \lambda U_d, \tag{VI-9}$$

où  $\lambda$  est un paramètre  $U_d$  une valeur donnée.

On est donc arrivé à chercher la vitesse  $U$  et la pression  $p$  vérifiant le problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + LU + Q(U, U) + D(p) = 0 & \text{dans } L^2(\Omega) \\ S(U) = 0 & \text{dans } L^2(\Omega) \\ U = \lambda U_d & \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{VI-10}$$

### VI-3) Application de la M.A.N aux équations de Naviers-Stokes

#### VI-3-1) Représentation de l'écoulement stationnaire par des séries entières

Maintenant, on va essayer de trouver analytiquement l'écoulement stationnaire du problème d'équilibre associé au problème (VI-10) sous forme d'une série entière.

Soient  $U_0$ ,  $p_0$  et  $\lambda_0$  une solution stationnaire du problème(VI-10).

Les branches de solutions stationnaires passant par ce point s'écrivent:

$$U = U_0 + aU_1 + a^2U_2 + \dots \quad (\text{VI-11-a})$$

$$p = p_0 + ap_1 + a^2p_2 + \dots \quad (\text{VI-11-b})$$

$$\lambda = \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + \dots \quad (\text{VI-11-c})$$

où "a" un paramètre de type longueur d'arc défini par l'équation supplémentaire suivante,

$$\langle U - U_0, U_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0)\lambda_1 = a \quad (\text{VI-12})$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire ordinaire dans  $R^n$  ou dans un espace fonctionnel.

En reportant (VI-11) dans le problème stationnaire correspondant à (VI-10) et dans (VI-12), on obtient une séquence d'équations linéaires:

A l'ordre 1

$$L_t(U_1) + D(p_1) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

$$S(U_1) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

$$U_1 = \lambda_1 U_d \quad \text{sur } \Gamma$$

$$\langle U_1, U_1 \rangle + \lambda_1^2 = 1$$

pour  $n \geq 2$  on a la relation de récurrence

$$L_t(U_n) + D(p_n) = - \sum_{r=1}^{n-1} Q(U_r, U_{n-r}) \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

$$S(U_n) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

$$U_n = \lambda_n U_d \quad \text{sur } \Gamma$$

$$\langle U_n, U_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_n = 0$$

où  $L_t$  est l'opérateur tangent défini par:

$$L_t(\cdot) = L(\cdot) + Q(U_0, \cdot) + Q(\cdot, U_0)$$

Si on pose la transformation  $W_i = U_i - \lambda_i \hat{U}$ ,

où  $\hat{U}$  représente un prolongement de  $U_d$  dans  $\Omega$ , on obtient:

A l'ordre 1

$$L_t(W_1) + D(p_1) = -\lambda_1 L_t(\hat{U}) \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

$$S(W_1) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

$$W_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

$$\langle U_1, U_1 \rangle + \lambda_1^2 = 1$$

A l'ordre  $n \geq 2$ , on a la relation de récurrence:

$$L_t(W_n) + D(p_n) = -\lambda_n L_t(\hat{U}) - \sum_{r=1}^{n-1} Q(W_r + \lambda_r \hat{U}, W_{n-r} + \lambda_{n-r} \hat{U})$$

$$S(W_n) = 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

$$W_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

$$\langle U_n, U_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_n = 0$$

La résolution de ces problèmes linéaires a été faite par la méthode des éléments finis dans une base à divergence nulle proposée par Crouzeix-Raviart (A. Tri, B. Cochelin et M. Potier-Ferry, 1994). Car, tous les problèmes linéaires admettent la même matrice tangente.

Il n'est pas toujours possible d'obtenir toute une branche de solutions stationnaires de la manière définie ci-dessus, même en réorganisant la série grâce à l'introduction d'approximants de Padé. On a donc été amené à introduire une méthode de continuation (voir thèse de B. Cochelin, 1994)

qui permet de réitérer la technique ci-dessus et de définir ainsi la branche de solutions comme une séquence de séries entières. Cette méthode est aussi opérationnelle pour les équations de Navier-Stokes (voir A.Tri, B. Cochelin et M.Potier-Ferry, 1994)

Nous passons maintenant au point de bifurcation de Hopf.

### VI-3-2) Détection des points de bifurcation de Hopf

On a vu au chapitre V, qu'on peut détecter les points de bifurcation de Hopf en cherchant les zéros de l'indicateur de bifurcation du problème linéaire et perturbé suivant:

$$\Gamma(a, \omega)V(a, \omega) = \mu(a, \omega)f,$$

$$\text{où } \Gamma(a, \omega) = \begin{pmatrix} K(a) & \omega I \\ -\omega I & K(a) \end{pmatrix}.$$

Dans notre cas,  $K(a)$  désigne la matrice Jacobienne au point de départ obtenue à partir du problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + LU + Q(U, U) = 0 & \text{dans } L^2(\Omega) \\ U = \lambda U_d & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (\text{VI-13})$$

On suppose connue sous forme de séries la solution stationnaire de (VI-13) qui contient le point de bifurcation de Hopf en question:

$$\begin{cases} U_a^s = \sum_{n=0}^{\infty} a^n U_n^s \\ \lambda_a^s = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \lambda_n^s \\ p_a^s = \sum_{n=0}^{\infty} a^n p_n^s \end{cases}$$

alors  $K(a) = L + Q(U_a^s, \cdot) + Q(\cdot, U_a^s)$ .

Sous ces hypothèses, il suffit d'appliquer les meilleures procédures établies au chapitre V qui permettent de calculer l'indicateur de bifurcation sous forme d'une fraction rationnelle approximative  $\mu(a, \omega) = \text{num}(a, \omega) / \text{den}(a, \omega)$ , ensuite la detection du point de bifurcation de ce problème. L'application numérique de ces techniques à des problèmes d'écoulements est en cours (thèse de A.TRI, en préparation). Un résultat est présenté sur la figure VI-3.

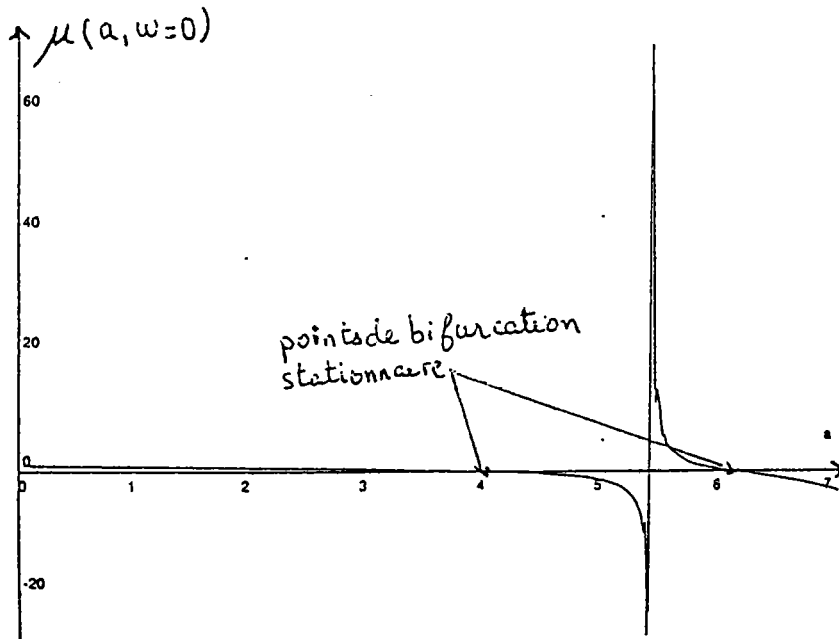


Figure VI-3: Représentation de  $\mu(a, \omega)$  par un approximant de Padé pour  $\omega=0$ . Application au problème de Couette-Taylor.

**VI- 3-3) Représentation de la solution bifurquée par des séries entières**

Dans ce paragraphe, on va présenter une représentation des solutions périodiques de période inconnue des équations (VI-9) et (VI-10) à partir du point de bifurcation de Hopf.

Pour cela, on ramène le problème (VI-10) à un problème de période fixée, en posant les changements de variables suivants:

$$s = \omega t, \quad V(x, s) = U(x, t) - U_a^s(x) \quad \text{et} \quad q(x, s) = p(x, t) - p_a^s(x),$$

où  $x \in \Omega$ ,  $\omega = 2\pi / T$  est la pulsation des mouvements périodiques.

Le problème (VI-10) devient alors,

$$\begin{aligned} \omega \frac{dV}{dt} + K(a)V + Q(V, V) + D(p) &= 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ S(V) &= 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ V &= 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{aligned} \tag{VI-14}$$

où  $K(a)$  est l'opérateur linéaire défini auparavant par:

$$K(a) = L + Q(U_a^s, \cdot) + Q(\cdot, U_a^s).$$

Si  $(a_c, \omega_c)$  désigne le point de bifurcation de Hopf trouvé, alors le développement en séries entières des solutions bifurquées périodiques du problème (VI-13) au voisinage de ce point s'écrit (Iooss G. et JOSEPH D.D, 1980):



$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n \quad (\text{VI-15-a})$$

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n q_n \quad (\text{VI-15-b})$$

$$\omega - \omega_c = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \omega_n \quad (\text{VI-15-c})$$

$$a - a_c = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n a_n \quad (\text{VI-15-d})$$

où  $\omega_c$  et  $a_c$  sont connus. Pour  $i > 0$ , les coefficients  $a_i, \omega_i$  sont des constantes à déterminer, et  $V_i, p_i$  sont des fonctions  $2\pi$ -périodiques à calculer.

Posons  $T_0 = \omega_0 \frac{d}{ds} + K(a_c)$  et  $A_0 = \left. \frac{dK(a)}{da} \right|_{a=a_c}$ .

En reportant (VI-15) dans (VI-14), on obtient une succession d'équations linéaires admettant le même opérateur différentiel  $T_0$  singulière:

A l'ordre 1

$$T_0 V_1 + D(p_1) = 0$$

$$S(V_1) = 0$$

$$V_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

A l'ordre 2

$$T_0 V_2 + D(p_2) = -a_1 A_0 V_1 - \omega_1 \frac{dV_1}{ds} - Q(V_1, V_1)$$

$$S(V_2) = 0$$

$$V_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

A l'ordre  $n$ ,  $n$  supérieur ou égal à 3

$$T_0 V_n + D(p_n) = -a_{n-1} A_0 V_1 - \omega_{n-1} \frac{dV_1}{ds} + R_{n-1}$$

$$S(V_n) = 0$$

$$V_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma$$

où  $R_{n-1}$  dépend des éléments d'ordres inférieurs à  $n-1$ .

Pour la résolution de cette succession de problèmes linéaires, on la projette sur la base à divergence nulle afin de découpler la vitesse  $V$  et la pression  $p$ . Puis, éventuellement on pourrait calculer les coefficients  $a_i$ ,  $\omega_i$  par les équations supplémentaires de l'alternative de Fredholm (Voir chapitre IV) en utilisant un calcul par éléments-finis.

#### VI-4) Conclusion

Dans ce chapitre, on a montré comment les méthodes asymptotiques-numériques sont applicables au calcul de solutions périodiques en temps des équations aux dérivées partielles. Il s'agit des systèmes d'écoulements visqueux incompressibles. La mise en oeuvre numérique de ces méthodes n'était pas prévue dans le cadre de cette thèse, mais elle est en cours au sein du laboratoire.

## CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, nous avons présenté une étude sur les équations différentielles ordinaires admettant des solutions périodiques ou des points de bifurcations de Hopf. Pour cette étude, nous avons appliqué des techniques approximatives dans l'esprit des méthodes asymptotiques-numériques qui n'avaient été appliquées jusqu'à présent qu'en statique. A priori, elles sont faciles à utiliser, puisqu'elles ramènent la résolution du problème non linéaire à celle d'une succession de problèmes linéaires, que nous pouvons résoudre à l'aide du système Maple.

Nous avons commencé notre test sur des équations différentielles conservatives ou dissipatives à un seul degré de liberté. Le domaine de validité d'une représentation en séries entières des solutions périodiques est toujours limité par le rayon de convergence. Grâce aux techniques discutées au chapitre deux, on a pu augmenter ce domaine de validité. En effet, pour le système conservatif (III-2), on a mené les solutions périodiques jusqu'à  $\varepsilon = 40$  en utilisant les approximants de Padé et à une valeur infinie grâce à la technique de projection. La transformation d'Euler a pu augmenter le domaine de validité de ces solutions d'un facteur de  $\varepsilon=320$ . En revanche, avec l'équation de Van der Pol, la procédure n'est pas tellement efficace: elle ne fait que doubler le domaine de validité par rapport à celui des séries. La solution périodique (cycle limite) de l'équation de Van der Pol apparaît par une bifurcation de Hopf au point  $\varepsilon=0$  caractérisant la perte de stabilité de la solution stationnaire  $y=0$ . Généralement, ce point de bifurcation ne peut être obtenu analytiquement pour les problèmes dissipatifs à grand nombre de degrés de liberté. Les écoulements de fluides visqueux ou les instabilités fluide-elastiques observées dans les échangeurs de chaleur fournissent des exemples de bifurcation de Hopf pour des systèmes réels. C'est pourquoi nous nous sommes intéressés dans la deuxième partie à la détection des points de bifurcation de Hopf par des algorithmes attachés à la

méthode asymptotique-numérique. Ces points sont détectés alors au moyen d'un problème linéaire et perturbé dépendant de deux paramètres réels, et qui se prête bien à la résolution par les techniques de développements en séries entières. On introduit un indicateur de bifurcation qui est ensuite calculé par des séries entières de deux variables. Ensuite, nous avons caractérisé les points de bifurcation de Hopf à partir de cet indicateur. On a également montré que l'indicateur est en réalité une fraction rationnelle de ces paramètres. Les séries peuvent donc être remplacées par des approximations de Padé et conduire à la valeur exacte de l'indicateur. On a également montré que des "stratégies réduites", c'est à dire des stratégies qui utilisent moins de termes dans la série, permettraient aussi de déterminer le point de bifurcation de Hopf.

Dans cette thèse, l'efficacité de ces procédures a été testée sur des problèmes à petit nombre de degrés de liberté. Il n'est pas surprenant que nous ayons réussi à reconstruire ainsi l'indicateur: il est en effet bien connu que la procédure de Padé permet de trouver une fraction rationnelle à partir de son développement en séries. Mais il est déjà intéressant d'avoir établi l'intérêt des "stratégies réduites", qui permettent de calculer le point de bifurcation de Hopf à partir d'un nombre réduit de termes de la série.

L'application à des problèmes à grand nombre de liberté fait l'objet d'une autre thèse à METZ, mais il serait prématuré de présenter des conclusions. Il n'est pas impossible qu'il faille adapter les méthodes présentées ici. Quoi qu'il en soit, l'un des prolongements les plus intéressants de cette thèse est l'exploitation des idées présentées ici pour l'étude des bifurcations de Hopf pour les problèmes continus. Mais on peut aussi envisager d'autres prolongements en restant dans le cadre des équations différentielles ordinaires, par exemple en étudiant les itérés d'application ou des bifurcations secondaires à partir de solutions périodiques.....

## REFERENCES

- [1] ANDERSON C.M. and GEER J.F., "Power series expansions for the frequency and period of the limit cycle of Van der Pol equation". SIAM J., Vol. 42, pp. 678-693, 1982.
- [2] AZRAR L., "Etude du comportement post-critique des coques cylindriques par une Méthode Asymptotique-Numérique". Thèse de l'université de Metz, 1993.
- [3] AZRAR L., COCHELIN B., DAMIL N. & POTIER-FERRY M., "An Asymptotique-Numerical Method to compute the post-buckling behaviour of elastic plates and shells". Inter. J. for numerical Methods in Engineering, Vol. 36, pp. 1251-1277, 1993.
- [4] BAKER G.A & GRAVES-MORRIS P. "Padé approximants, Part I: basic theory". Encyclopedia of Mathematics and its applications, Vol. 13, Addison-Wesley Publi. company, 1981.
- [5] BOUTYOUR E.H., "Méthode Asymptotique-Numérique pour le calcul des bifurcations: application aux structures élastiques". Thèse de l'université de Metz, 1994.
- [6] BREZINSKI C., "Padé type approximation and general orthogonal polynomials". Birkhauser verlag, ISNM 50, 1980.
- [7] BUDIANSKY B., "Theory of buckling and post-buckling behaviour of elastic structures". Advances in Applied Mechanics, Vol.14, pp. 1-65, 1974.

- [8] CHISLUM J.S.R., "Rational Approximants defined from double power series". Amer. Mathe. Society, Vol. 27, N. 124, 1973.
- [9] CHOMAZ J.M., "Absolute and convective instabilities in non linear systems". Phys. Rev. Lett. 69, pp. 1931-1934, 1992.
- [10] CLENSHAW C.W., "The solution of Van der Pol's equation Chebyshev series. Numerical solution of non linear differential equation". Wiley New York, pp. 55-63, 1966.
- [11] COCHELIN B., "Méthodes Asymptotiques-Numériques pour le calcul non linéaire géométrique des structures élastiques. Flambage et délaminage dans les composites stratifiés". Habilitation de l'université Metz, 1994.
- [12] COCHELIN B., DAMIL N. & POTIER-FERRY M., "Asymptotic-Numerical-Method and Pade approximants for non linear elastic structures". Inter. J. Numer. Methods Engng., Vol 37, PP. 1187-1213, 1993-a.
- [13] COCHELIN B., DAMIL N. & POTIER-FERRY M., "The asymptotic-numerical method: an efficient perturbation technique for non linear structural mechanics". Revue Européenne des Eléments Finis, Vol. 3, pp. 281-297, 1994.
- [14] DADFAR M.B. & GEER J.F., "Power series solution to a simple pendulum with oscillating support". SIAM J. Appl. Math., Vol. 47, pp. 737-750, 1987.

- [15] DADFAR M.B., GEER J.F & ANDERSON C., "Perturbation analysis of the limit cycle of the free Van der Pol equation". *SIAM J. Appl Math.*, Vol. 44, pp. 881-895, 1984.
- [16] DAMIL N. & POTIER-FERRY M., "A New Method to compute perturbed bifurcations: application to the buckling of imperfect elastic structures". *Inter. J. Engineering Sci.*, Vol. 28, pp. 943-957, 1990.
- [17] DAMIL N., POTIER-FERRY M. & BRAIKAT B., "Une technique de Perturbation pour le calcul des structures avec fortes non-linéarités". *Comptes-Rendus de l'Académie des sciences Paris*, t 318, Série II, pp. 713-719, 1994.
- [18] DEMAY Y. et IOOSS G., "Calcul des solutions bifurquées pour le problème de couette-Taylor avec les deux cylindres en rotation". *J. de Méca. Théorique et appliqué*, Numéro Special, pp. 193-216, 1984.
- [19] FORBES L.K., "A series analysis of forced transverse oscillations in a spring-mass system". *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 49, pp. 704-719, 1989.
- [20] FORBES L.K., "Periodic solutions of high accuracy to the forced Duffing equation: Perturbation series in the forcing amplitude". *J. Austral Math. Soc. Ser. B.*, Vol. 29, pp. 21-38, 1987.
- [21] HASSRAD B.D., KAZARINOFF N.D. & WAN Y.H., "Theory and applications of Hopf bifurcation". *London Math. Society Note Series* 41, 1981.

- [22] HOPF E., "A mathematical example displaying the features of turbulence". *Comm. Pure. Appl. Math.*, Vol. 1, pp. 303-322, 1948.
- [23] HUERRE P. & MONKEWITZ P.A., "Local and global instabilities in spatially developing flows". *Annu. Rev. Fluid Mech.*, Vol 22, pp. 473-537, 1990.
- [24] HUNTER C. & GUERRIERI B., "Deducing the properties of singularities of functions from their Taylor series coefficients". *J.*, Vol. 39, pp. 248-263, 1980.
- [25] IOOSS G., "Direct bifurcation of a steady solution of the Navier-Stokes equations into an invariant torus. In turbulence and Navier-stokes equations". *Lecture Notes in Mathematics*, N 565, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, pp. 69-84, 1975.
- [26] IOOSS G. & JOSEPH D.D, "Elementary stability and bifurcation theory". Springer-Verlag, Paris, 1980.
- [27] KATO T., "Perturbation theory for non linear operators". Springer-Verlag, New York, 1966.
- [28] KIELHOFER H., "Generalised Hopf bifurcation in Hilbert space". *Math. Methods in Applied Sciences*, Vol. 1, pp. 498-513, 1979.
- [29] KIELHOFER H., "Hopf bifurcation at multiple eigenvalues". *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 69, pp. 53-83, 1979.



- [30] KOITER W.T., "On the stability of elastic equilibrium". Thesis, Delft 1945, English translation, NASA techn. Trans., F.10, 883, 1967.
- [31] LANGFORD W.F., "Periodic and steady-state mode interaction lead to tori". SIAM J. App. Math., Vol. 37, N 1, pp. 22-48, 1979.
- [32] LANGFORD W.F. & IOOSS G., "Interaction of Hopf bifurcation and Pitchfork bifurcation". Proceeding of the Workshop on Bifurcation Problems, Vol. 54, pp. 103-134, 1980.
- [34] LINDSTEDT A., "Ueber die integration einer für die störungstheorie wichtigen differentialgleichung". Astron. Nach., 103, pp. 211-220, 1882.
- [35] Maple V: Language reference manual, Springer-Verlag, 698 p., 1991.
- [36] MATHIEU J.P., "Vibrations et phénomènes de propagation". Tome 1. Oscillateurs, 1963.
- [37] MATHIS C., PROVANSAL M. & BOYER L., "The Bénard-Karman instability: an experimental study near the threshold". J. Phys. (Paris) Left., Vol; 45, pp. 483-491, 1984.
- [38] MONKEWITZ P.A., "The absolute and convective nature of instability in two-dimensional wakes at low Reynolds numbers". Phys.Fluids, Vol. 31, pp. 999-1006, 1988.
- [39] MORAND H.J.P. & OHAYON R., "Interactions Fluides-Structures". RMA 23, 1992.

- [40] NAYFEH A.H., "Perturbation Methods". John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1973.
- [41] OHAYON R., "Interaction fluide-structure en milieu borné. Nouvelles formulations symétriques. Tendances Actuelles en calcul des structures". Ed. Pluralis, pp. 435-448, 1985.
- [42] PADE H., "Sur la représentation approchée d'une fonction par des fractions rationnelles". Ann. de l'Ecole Normale sup., 3<sup>o</sup> série, Vol. 9, Supp., pp. 3-93, 1892.
- [43] PAIDOUSSIS M.P., "Flow-induced instabilities of cylindrical structures". Appl. Mech. Rev., Vol 40, N 2, 1987.
- [44] POINCARÉ H., "New Methods of celestial Mechanics". Vol. I-III (English transl.), NASA TTF-450, 1892.
- [45] POTIER-FERRY M., "Foundations of elastic post-buckling theory. In buckling and post-buckling". Lecture notes in physics 288, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [46] ROUCHE N. & MAWHIN J., "Equations différentielles ordinaires; stabilité et solutions périodiques". Tome2, 1973.
- [47] SAADI M.H & POTIER-FERRY M., "Computation of periodic solutions by using Pade approximants". 13 International Conference on non linear oscillations, August 16-20, Hamburg, Germany, 1993.

- [48] SEYDEL R., "From equilibrium to chaos. Practical bifurcation theory and stability analysis". Elsevier, New York, 1981.
- [49] STRYKOWSKI P.J & SREENIVASAN K.R., "On the formation and suppression of Vortex "Shedding" at low Reynolds numbers". J. Fluid Mech., Vol. 218, pp. 71-107, 1990.
- [50] THOMPSON J.M.T & HUNT G.W., "Elastic instability phenomena". John Wiley and Sons, Chichester, 1984.
- [51] TALWAR S. & SRI N.N., "Control of Chaotic systems: application to the Lorenz equations". DE-Vol. 150/AMD-Vol. 144, Non linear vibrations ASME, pp. 47-58, 1992.
- [52] TRI A., COCHELIN B. & POTIER-FERRY M., "Méthode asymptotique-numérique pour le calcul des solutions stationnaires: application aux équations de Navier-Stokes". En préparation.
- [53] URABE M. "Non linear Autonomous oscillations". Academic Press, New York, 1967.
- [54] VAN DYKE M., "Analysis and improvement of perturbation series". Quart. J. Mech. Appl. Math., Vol. 27, pp. 423-450, 1974 .