



HAL
open science

Groupes de Lie-Poisson

Véronique Chloup-Arnould

► **To cite this version:**

Véronique Chloup-Arnould. Groupes de Lie-Poisson. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1996. Français. NNT : 1996METZ019S . tel-01777130

HAL Id: tel-01777130

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777130>

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

Présentée par

Véronique CHLOUP-ARNOULD

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

Spécialité : Mathématiques

GROUPES DE LIE-POISSON

Soutenue le 6 septembre 1996 à l'université de Metz devant le jury composé de :

Moshé FLATO

Président

Jean-Paul DUFOUR

Rapporteur

John RAWNSLEY

Rapporteur

Didier ARNAL

Examineur

André ROUX

Examineur

Simone GUTT

Directeur de thèse

THÈSE

Présentée par

Véronique CHLOUP-ARNOULD

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ

Spécialité : Mathématiques

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19960385
Cote	S/M ₃ 96/19
Loc	Magasin

GROUPES DE LIE-POISSON

Soutenue le 6 septembre 1996 à l'université de Metz devant le jury composé de :

Moshé FLATO

Président

Jean-Paul DUFOUR
John RAWNSLEY

Rapporteur
Rapporteur

Didier ARNAL
André ROUX

Examineur
Examineur

Simone GUTT

Directeur de thèse

Remerciements

Tout d'abord, j'aimerais remercier Simone Gutt pour toute l'aide qu'elle m'a apportée pendant ces trois années. Ce travail n'aurait jamais été possible sans ses conseils et ses remarques. J'ai beaucoup apprécié les accueils chaleureux que toute sa famille m'a réservés lors de mes visites à Bruxelles.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à toutes les personnes qui m'ont aidé à mener à bien ce travail, je cite en particulier Monsieur Rhin qui m'a appris à utiliser le calcul formel, Monsieur Arnal qui m'a introduit à la linéarisation formelle et qui a accepté d'être examinateur, et Michel Cahen pour ses critiques constructives.

Je voudrais remercier les autres membres du jury, en particulier MM Dufour et Rawnsley d'avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse, Monsieur Flato qui me fait l'honneur d'être président du jury et Monsieur Roux qui a accepté de faire partie de ce jury.

Enfin j'aimerais remercier toutes les personnes que j'ai côtoyées ces dernières années et qui m'ont supportée dans les moments plus difficiles par leur gentillesse. Je ne cite que quelques noms (que les autres me pardonnent): Denise, Jean-Marc, Nicolas, Pierre, Madame Guemert et Sylvie.

Et pour finir, j'ai une pensée toute particulière pour Fabien..., ainsi que pour mes parents, mon frère et mes soeurs.

Table des matières

1	Introduction	2
1	Classification	3
1.1	Structures de Poisson	3
1.2	Groupe de Lie-Poisson	4
1.3	Bigèbre de Lie et équation de Yang-Baxter	4
1.4	Triples de Manin	6
2	Linéarisation	7
2	Structures de bigèbre sur une algèbre de Lie réelle semi-simple	12
1	Algèbres de Manin	13
1.1	Généralités sur les algèbres de Manin	13
1.2	Classification des algèbres de Manin sur une algèbre semi-simple réelle	16
2	Structures de bigèbres liées à une équation de Yang-Baxter modifiée	23
2.1	Existence d'une solution	28
2.2	Recherche de toutes les solutions	33
3	Remarques dans le cas simple non absolument simple	45
3	Linéarisation	51
1	Première approche	54
1.1	Linéarisation dans le cas nilpotent	54
1.2	Propriétés	58
2	Deuxième approche	66
2.1	Linéarisation formelle d'un champ de vecteur	66
2.2	Méthode générale pour les tenseurs de Poisson	68
2.3	Structure de Lie-Poisson dont l'algèbre duale est un produit direct avec un facteur semi-simple	70
2.4	Linéarisation analytique	76
2.5	Calcul du $H^2(\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}, \rho, V)$	79
2.6	Généralisation aux structures de Poisson	80
3	Non linéarisabilité pour des Q particuliers	83
A	Calcul détaillé de linéarisation dans le cas nilpotent	90

Chapitre 1

Introduction

Dans cette thèse j'étudie les structures de Lie-Poisson. De manière plus précise deux thèmes sont abordés.

Le premier est de nature classificatoire. Un groupe de Lie-Poisson connexe et simplement connexe peut être caractérisé par un objet algébrique (Drinfeld [12]) appelé une bigèbre de Lie. Une bigèbre de Lie est elle-même équivalente à un triple de Manin. Un triple de Manin $\tau = (\mathfrak{L}, \mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-)$ est un triplet d'algèbres de Lie tel que \mathfrak{L} soit munie d'une forme bilinéaire symétrique invariante non dégénérée β et telle que \mathfrak{g}^+ et \mathfrak{g}^- soient deux sous-algèbres supplémentaires de \mathfrak{L} , isotropes pour β . Je donne une description complète des algèbres \mathfrak{L} des triples de Manin pour lesquels \mathfrak{g}^+ est une algèbre de Lie réelle semi-simple. Ceci généralise un résultat de Cahen, Gutt et Rawnsley [3].

Belavin et Drinfeld ont donné une classification complète des bigèbres de Lie sur une algèbre de Lie simple complexe correspondant aux solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée. On trouve dans Cahen, Gutt et Rawnsley [3] et dans Soibelman [32] une classification dans certains cas réels. J'étends ces résultats au cas réel semi-simple pour les solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard.

Le deuxième thème est celui de la linéarisation locale d'une structure de Lie-Poisson.

J. Conn [7] a montré que, sur toute variété symplectique M , toute structure de Poisson analytique qui s'annule en un point x et telle que la linéarisée de P définisse une structure d'algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{h} , est analytiquement linéarisable dans un voisinage de x .

Je montre que si (G, P) est un groupe de Lie-Poisson, et si l'algèbre duale (le \mathfrak{g}^- du triple de Manin $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g}^+, \mathfrak{g}^-)$ correspondant à (G, P)) est la somme directe d'un idéal semi-simple et d'un idéal abélien, alors P est analytiquement linéarisable dans un voisinage de l'identité. Dans le cadre d'une structure de Poisson générale cette proposition peut-être mise en défaut. Je montre par ailleurs que toute structure de Lie-Poisson exacte sur un groupe de Lie nilpotent de pas 2 est linéaire, sur un groupe de Lie nilpotent de pas 3 et de dimension inférieure ou égale à 6 est linéarisable et qu'il existe des structures de Lie-Poisson exactes sur un groupe de Lie nilpotent de pas 4 et de dimension 5 qui ne sont pas linéarisables. Je montre également que la linéarisabilité d'une structure de Lie-Poisson n'est pas toujours liée à la classe d'isomorphisme de l'algèbre \mathfrak{L} du triple de Manin correspondant.

Je commence par rappeler les différentes notions et résultats classiques nécessaires à la formulation précise des problèmes étudiés dans ma thèse.

1. Classification

Les notions rappelées ci-dessous se trouvent, par exemple, dans l'article de Lu et Weinstein [27] ou le livre de Chari et Pressley [5].

1.1. Structures de Poisson

On appelle **structure de Poisson sur** une variété de classe C^∞ , M , une structure d'algèbre de Lie sur $C^\infty(M, \mathbb{R})$, notée $\{ , \}$, vérifiant la règle de Leibnitz, c'est-à-dire telle que

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\} \quad \forall f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

Une variété M munie d'une telle structure est appelée **une variété de Poisson**, et $\{ , \}$ est appelé **un crochet de Poisson**.

Dans une carte locale, un tel crochet peut s'écrire

$$\{f, g\} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Lambda^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} \quad \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

où les fonctions Λ^{ij} sont les composantes d'un tenseur deux fois contravariant antisymétrique Λ .

Le crochet de Schouten (Lichnerowicz [26], Koszul [25]) définit une application bilinéaire $[,] : \Lambda^r(M) \otimes \Lambda^s(M) \rightarrow \Lambda^{r+s-1}(M)$ qui étend de manière naturelle la notion de crochet de Lie de champs de vecteurs ($\Lambda^r(M)$ désigne l'espace des r -tenseurs contravariants antisymétriques).

Si $r = s = 2$, on a:

$$[X \wedge Y, Z \wedge T] = [X, Z] \wedge Y \wedge T - [X, T] \wedge Y \wedge Z - [Y, Z] \wedge X \wedge T + [Y, T] \wedge X \wedge Z$$

où X, Y, Z, T sont des champs de vecteurs sur M .

Le crochet de Schouten permet d'exprimer simplement l'identité de Jacobi de l'algèbre de Lie $C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Si $\{f, g\} = \Lambda(df, dg)$ alors $\{ , \}$ satisfait l'identité de Jacobi si et seulement si $[\Lambda, \Lambda] = 0$. Un **tenseur de Poisson** sur M est un tenseur deux fois contravariant antisymétrique Λ sur M tel que $[\Lambda, \Lambda] = 0$.

Une application C^∞ , φ , de la variété de Poisson (M, Λ) dans la variété de Poisson (M', Λ') , est une **application de Poisson** si $\varphi_{*x}(\Lambda_x) = \Lambda'_{\varphi(x)}$, $\forall x \in M$.

Il est équivalent de demander que:

$$\{f_1 \circ \varphi, f_2 \circ \varphi\} = \{f_1, f_2\} \circ \varphi, \quad \forall f_1, f_2 \in C^\infty(M', \mathbb{R}).$$

Si (M_1, Λ_1) et (M_2, Λ_2) sont deux variétés de Poisson, la variété $M_1 \times M_2$ est naturellement munie d'une structure de Poisson Λ définie par

$$\Lambda_{(x,y)} = i_{1*x}^y \Lambda_{1x} + i_{2*y}^x \Lambda_{2y}$$

(où i_1^y (resp. i_2^x) désigne l'injection de M_1 (resp. M_2) dans $M_1 \otimes \{y\}$ (resp. $\{x\} \otimes M_2$)), appelée **structure de Poisson produit**.

1.2. Groupe de Lie-Poisson

La notion de groupe de Lie-Poisson a été introduite par Drinfeld [12]. Un groupe de Lie G est appelé **groupe de Lie Poisson** si c'est une variété de Poisson, de champ de tenseurs Λ , telle que la multiplication $m : G \times G \rightarrow G$ soit une application de Poisson, quand $G \times G$ est muni de la structure de Poisson produit.

Cela signifie que la structure de Poisson est **multiplicative** i.e.

$$\Lambda(gh) = l_{g*}\Lambda(h) + r_{h*}\Lambda(g) \quad \forall g, h \in G$$

où l_g (resp. r_g) désigne la multiplication à gauche (resp. à droite) par g dans G . Dans ce cas la structure Λ est appelée **structure de Lie-Poisson**. Ces structures tiennent une place importante en mécanique et on les étudie depuis une vingtaine d'années maintenant (cf. Lichnerowicz [26], Weinstein [37]).

Soit Λ un champ de tenseurs deux fois contravariants antisymétriques tel que $\Lambda(e) = 0$. **La dérivée intrinsèque** de Λ en e , notée $p = d_e\Lambda$, est l'application $p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ définie par $X \mapsto \left(\mathcal{L}_{\overline{X}}\Lambda \right)(e)$ où \overline{X} peut être n'importe quel champ de vecteurs sur G tel que $\overline{X}(e) = X$.

L'application duale de $p = d_e\Lambda$ est notée $[\ , \]_\Lambda : \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ et est donnée par

$$\langle X, [\alpha, \beta]_\Lambda \rangle = \langle d_e\Lambda(X), (\alpha, \beta) \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathfrak{g}^*.$$

Drinfeld [12] a démontré que si Λ un champ de tenseurs deux fois contravariants antisymétriques sur un groupe de Lie G tel que $\Lambda(e) = 0$, alors

1) si Λ est multiplicatif, $p = d_e\Lambda : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ est un 1-cocycle relativement à la représentation adjointe de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$;

inversement, si G est connexe et simplement connexe, et si $p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ est un 1-cocycle, il existe un unique champ de tenseurs deux fois contravariants antisymétriques et multiplicatif Λ sur G tel que $p = d_e\Lambda$;

2) si Λ est un tenseur de Poisson, le crochet $[\ , \]_\Lambda : \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ sur \mathfrak{g}^* induit par p satisfait l'identité de Jacobi, et donc définit un crochet de Lie sur \mathfrak{g}^* . Quand G est connexe, un champ de tenseurs deux fois contravariants, antisymétriques et multiplicatif Λ est un tenseur de Poisson si et seulement si sa dérivée en e définit un crochet de Lie $[\ , \]_\Lambda$ sur \mathfrak{g}^* .

1.3. Bigèbre de Lie et équation de Yang-Baxter

Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie et si \mathfrak{g}^* désigne le vectoriel dual, on dira que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ forme une **bigèbre de Lie** s'il existe sur \mathfrak{g}^* une structure d'algèbre de Lie telle que l'application duale $p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, donnée par

$$\langle p(X), \alpha \wedge \gamma \rangle = \langle X, [\alpha, \gamma]_* \rangle$$

soit un 1-cocycle sur \mathfrak{g} relativement à la représentation adjointe de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$.

La bigèbre $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ sera aussi notée (\mathfrak{g}, p) .

Si (G, Λ) est un groupe de Lie Poisson, le crochet $[\ , \]_\Lambda$ définit une structure d'algèbre de Lie sur \mathfrak{g}^* telle que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ forme une bigèbre de Lie appelée la **bigèbre de Lie tangente** à (G, Λ) .

Inversement si G est connexe et simplement connexe, toute structure de bigèbre de Lie sur $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ définit une unique structure de Poisson multiplicative Λ sur G telle que $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ soit la bigèbre de Lie tangente au groupe de Lie Poisson (G, Λ) .

Ainsi l'étude des structures de Lie-Poisson est équivalente à l'étude des structures de bigèbres de Lie.

Ces deux notions ont été étudiées par Drinfeld [13], [14] et entre autres, par Semenov-Tian-Shansky [29], [30], [31]. On en trouvera des exposés dans la conférence de Kosmann-Schwarzbach [22], dans l'exposé de Verdier [35] au séminaire Bourbaki, dans l'article de Dazord et Sondaz [9] du séminaire Sud-Rhodanien et dans celui de Lu et Weinstein [27]. Toute algèbre de Lie \mathfrak{g} admet une structure de bigèbre de Lie (\mathfrak{g}, p) avec $p \neq 0$ (De Smedt [10]).

La structure de bigèbre (\mathfrak{g}, p) est dite **exacte** si $p = \partial Q$ où $Q \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ et ∂ désigne l'opérateur de cobord de Chevalley; et $(\mathfrak{g}, \partial Q)$ est une bigèbre de Lie si et seulement si le trois tenseur $[Q, Q]$ est *ad*-invariant i.e. $[Q, Q] \in (\Lambda^3 \mathfrak{g})^{inv}$.

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple et β sa forme de Killing; on désignera par $\beta^{(p)}$ la forme bilinéaire symétrique sur $\Lambda^p(\mathfrak{g})$ étendant naturellement β .

L'application linéaire $\rho : (S^2 \mathfrak{g}^*)^{inv} \rightarrow (\Lambda^3 \mathfrak{g})^{inv}$ définie par $\beta^{(3)}(\rho B, X \wedge Y \wedge Z) = B([X, Y], Z)$ pour $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ est un isomorphisme linéaire [18].

Comme toute structure de bigèbre sur une algèbre de Lie semi-simple est nécessairement exacte, elle est définie par un deux tenseur $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ tel que $[Q, Q] = \rho B$ où $B \in (S^2 \mathfrak{g}^*)^{inv}$. La deux forme invariante B est de la forme $B(X, Y) = \beta(MX, Y)$ où M est une application linéaire de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} qui commute avec *ad* Z pour tout $Z \in \mathfrak{g}$.

D'autre part le deux tenseur Q détermine une application linéaire $\tilde{Q} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ définie par

$$\beta(\tilde{Q}(Y), X) = \beta^{(2)}(Q, X \wedge Y) = Q(\hat{\beta}(X), \hat{\beta}(Y))$$

où $\hat{\beta} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ est donnée par $\langle \hat{\beta}(X), Y \rangle = \beta(X, Y)$.

De plus on a la relation $[Q, Q](\alpha, u, \gamma) = 2 \sum_{\alpha, \nu, \gamma} S_{\alpha, \nu, \gamma} \langle \gamma, [(\tilde{Q} \circ \hat{\beta}^{-1})(\alpha), (\tilde{Q} \circ \hat{\beta}^{-1})(u)] \rangle$ où $S_{\alpha, \nu, \gamma}$ désigne la somme sur les permutation cycliques sur α, ν et γ .

Le fait que $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ et que $[Q, Q] \in (\Lambda^3(\mathfrak{g}))^{inv}$ se traduit sur \tilde{Q} par

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = 1/2M[X, Y] \text{ pour } X, Y \in \mathfrak{g} \end{cases}$$

appelées **équation de Yang-Baxter modifiée**.

Si G est un groupe de Lie connexe et semi-simple, toute structure de Poisson multiplicative Λ sur G est de la forme $\Lambda(g) = -r_{g_*} Q + l_{g_*} Q \forall g \in G$ où le deux tenseur $Q \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ est tel que le trois tenseur $[Q, Q]$ soit *ad*-invariant par la représentation adjointe de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$.

L'étude des structures de Lie-Poisson se ramène, dans ce cas, à l'étude des structures de bigèbres de Lie exactes, c'est-à-dire à l'étude des solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée.

De telles équations ont été étudiées par Semenov-Tian-Shansky [29], [30], [31], par Takhtajan [34] et par Kosmann-Schwarzbach [22],[23].

On regarde le cas $M = 2\lambda Id$ où λ est une constante. (Une application linéaire M de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} qui commute avec *ad* Z pour tout $Z \in \mathfrak{g}$ est bien entendu automatiquement donnée par $M = \lambda Id$ si \mathfrak{g} est simple et n'a pas de structure complexe.)

On obtient alors l'équation de Yang-Baxter modifiée standard:

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = \lambda[X, Y] \text{ pour } X, Y \in \mathfrak{g} \end{cases}$$

Dans le cas d'une algèbre de Lie semi-simple complexe, les solutions de cette équation ont été décrites par Belavin et Drinfeld [1]. Je me suis intéressée au cas réel semi-simple. Les conditions d'existence de solutions dans le cas réel semi-simple avec $\lambda < 0$ ont été étudiées par Cahen, Gutt et Rawnsley [3]. Dans le cas réel semi-simple avec $\lambda > 0$, j'obtiens:

Proposition 1.1 *Soit \mathfrak{g}_0 une algèbre de Lie réelle semi-simple. Il existe toujours une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard avec $\lambda > 0$ sur \mathfrak{g}_0 .*

La démonstration se base sur la construction faite par Belavin et Drinfeld [1]. Soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de \mathfrak{g}_0 , soit \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 telle que \mathfrak{h}_0 contienne un tore maximal \mathfrak{t} de \mathfrak{k} , soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$. Soit $X \in \mathfrak{t}$ tel que $\alpha(X) \neq 0 \forall \alpha \in \Delta$ et soit $\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \mid i\alpha(X) > 0\}$. Une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard est donnée par:

$$\tilde{Q}(X) = \begin{cases} aX & \text{si } X \in \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{\alpha} \\ 0 & \text{si } X \in \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}} \\ -aX & \text{si } X \in \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{-\alpha} \end{cases}$$

où a vérifie $a^2 = -\lambda$.

J'ai déterminé toutes les solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard sur une algèbre de Lie réelle semi-simple \mathfrak{g}_0 , en utilisant le théorème de Belavin et Drinfeld [1] qui décrit les solutions dans le cas complexe. Une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard sur \mathfrak{g}_0 correspond à une solution \tilde{Q} de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ vérifiant $\overline{\tilde{Q}(X)} = \tilde{Q}(\overline{X})$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$.

Je fais également une étude partielle des solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée sur une algèbre de Lie réelle simple non absolument simple (c'est-à-dire telle que $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ ne soit pas simple). Dans ce cas, l'endomorphisme M sur \mathfrak{g} est donné par $M = a + bJ$ où J est une structure complexe sur \mathfrak{g}_0 . Je démontre qu'il n'existe pas de solutions purement "croisées" et que la solution la plus simple de Belavin et Drinfeld (de la forme ci-dessus) permet de construire une solution dans ce cas plus général.

1.4. Triples de Manin

Un **triple de Manin** est constitué d'un triplet d'algèbres de Lie $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$ et d'un produit scalaire bilinéaire, symétrique, invariant, non dégénéré \ll, \gg sur \mathfrak{L} tel que:

- (1) \mathfrak{g}_+ et \mathfrak{g}_- sont deux sous-algèbres de Lie de \mathfrak{L} ,
- (2) $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ en tant qu'espace vectoriel,

(3) \mathfrak{g}_+ et \mathfrak{g}_- sont isotropes pour le produit scalaire sur \mathfrak{L} .

\mathfrak{L} est appelée l'**algèbre de Manin** du triple de $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-)$. Drinfeld [13] a montré qu'il y a une correspondance biunivoque entre les bigèbres de Lie et les triples de Manin.

Une **paire de Manin** est composée d'une paire d'algèbres de Lie $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g})$ et d'une forme bilinéaire, symétrique, invariante, non dégénérée \ll , \gg sur \mathfrak{L} telles que \mathfrak{g} soit une sous-algèbre de \mathfrak{L} , isotrope pour \ll , \gg .

Une paire de Manin $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g})$ définit un triple de Manin $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ si et seulement si il existe un sous-espace isotrope supplémentaire à \mathfrak{g} dans \mathfrak{L} qui soit une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{L} . Remarquons que via \ll , \gg on peut toujours identifier un sous-espace isotrope supplémentaire à \mathfrak{g} dans \mathfrak{L} à \mathfrak{g}^* , l'espace dual de \mathfrak{g} .

Une première approche pour classifier les structures de Lie-Poisson sur un groupe de Lie connexe et simplement connexe G est de classifier les algèbres \mathfrak{L} possibles dans le triple de Manin $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$. On parlera d'algèbre de Manin \mathfrak{L} associée à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Deux **algèbres de Manin** \mathfrak{L} et \mathfrak{L}' associée à une algèbre de Lie donnée \mathfrak{g} sont dites **isomorphes** si et seulement si il existe une application $\phi : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}'$ qui

- soit un isomorphisme d'algèbres de Lie,
- envoie \mathfrak{g} vers \mathfrak{g} ,
- soit une homothétie de \mathfrak{L} vers \mathfrak{L}' , i.e. $\ll \phi(X), \phi(Y) \gg' = s \ll X, Y \gg, \forall X, Y \in \mathfrak{L}$ pour un réel non nul s .

J'obtiens une classification si l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est réelle semi-simple:

Théorème 1.2 *A isomorphisme près l'algèbre de Manin \mathfrak{L} associée à une algèbre de Lie réelle semi-simple \mathfrak{g}_0 qui s'écrit $\mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} \mathfrak{J}_k$ où les \mathfrak{J}_k sont des idéaux simples de \mathfrak{g}_0 , est nécessairement de la forme $\mathfrak{L} = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} \mathfrak{L}_k$ où \mathfrak{L}_k appartient à la liste suivante:*

- $\mathfrak{L}_k = \text{Lie}(D_k)$ où $D_k = T^*(I_k)$ est le fibré cotangent d'un groupe de Lie I_k dont l'algèbre de Lie est \mathfrak{J}_k ,
- $\mathfrak{L}_k = (\mathfrak{J}_k)^\mathbb{C}$,
- $\mathfrak{L}_k = \mathfrak{J}_k \oplus \mathfrak{J}_k$.

2. Linéarisation

La notion de structures de Poisson apparaît naturellement en mécanique dans l'étude des systèmes Hamiltoniens et généralise la notion de structure symplectique. Si le rang de Λ (tenseur de Poisson) est constant et égal à la dimension de la variété M alors Λ est inversible et son inverse définit une structure symplectique sur M . Le théorème de Darboux affirme que deux variétés symplectiques de même dimension sont localement isomorphes. On peut se demander si un résultat similaire est vrai pour les structures de Poisson générales, i.e. si deux structures de Poisson de même rang en un point donné sont localement isomorphes. La réponse à cette question est non et c'est précisément cela qui rend intéressante l'étude du comportement local de ces structures.

L'étude locale des structures de Poisson se fait de la façon suivante: on utilise d'abord le théorème de décomposition de Weinstein [36] pour décomposer localement une variété de Poisson (M, Λ) en un produit d'une variété symplectique et d'une variété avec une structure de Poisson nulle en un point. Un tel produit est un produit de Poisson. En utilisant cette décomposition on se ramène à l'étude des structures de Poisson nulles en un point. Remarquons que pour les structures de Lie-Poisson c'est toujours le cas puisqu'elles s'annulent en ϵ .

Si Λ s'annule en e , dans des coordonnées locales quelconques (x^1, \dots, x^n) centrées en e , on peut écrire

$$\{f, g\} = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Lambda^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j}$$

et

$$\Lambda^{ij}(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k + R^{ij}(x)$$

où les R^{ij} représentent les termes non linéaires dans le développement en série de Taylor de Λ^{ij} et où les C_k^{ij} sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie \mathfrak{h} appelée la **linéarisée de la structure** (Weinstein [36]).

La structure de Poisson Λ sera dite **linéarisable** si on peut trouver des nouvelles coordonnées locales (y^1, \dots, y^n) dans lesquelles Λ s'écrit

$$\Lambda^{ij}(y) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} y^k$$

V. Arnold a montré le premier que toute structure de Poisson dont la linéarisée est l'algèbre de Lie non triviale de dimension deux est linéarisable.

La question de la linéarisation de structures de Poisson telles que \mathfrak{h} soit semi-simple a été soulevée dans Weinstein [36]; si la linéarisée d'une structure de Poisson est une algèbre de Lie semi-simple, alors Λ est formellement linéarisable. De plus, J. Conn [7] a démontré que si Λ est analytique, la linéarisation est analytique. Dufour [15] a démontré que la semi-simplicité n'est pas nécessaire en exhibant une algèbre résoluble de dimension 3 vérifiant la même propriété. Si la structure de Poisson est C^∞ , la linéarisation est C^∞ si la linéarisée \mathfrak{h} est semi-simple de type compact (cf. Conn [8], Desolneux-Moulis [11]). Weinstein [37] a exhibé des exemples de structures de Poisson C^∞ ayant pour linéarisée une algèbre de Lie semi-simple, de type non compact et de rang réel au moins deux, qui ne sont pas linéarisables par un changement de coordonnées C^∞ .

La linéarisation formelle se traduit en un problème de cohomologie.

Notons $\Lambda^{ij}(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k + \Lambda_{(k)}^{ij}(x) + \Lambda_{(k+1)}^{ij}(x) + \dots$ le développement de Λ^{ij} en série formelle où $\Lambda_{(k)}^{ij}(x)$ est le terme homogène de degré k en les x^1, \dots, x^n ($k \geq 2$).

L'idée de la linéarisation formelle est de repousser les termes de degré k en des termes de degré supérieur par un changement de coordonnées locales de degré k .

Posons donc $y^i = x^i + f^i(x)$ où les f^i sont des polynômes homogènes de degré k .

On peut alors considérer $\Lambda_{(k)} : \mathfrak{h} \wedge \mathfrak{h} \rightarrow S^k(\mathfrak{h})$ ($x^i \wedge x^j \mapsto \Lambda_{(k)}^{ij}$).

La relation $[\Lambda, \Lambda] = 0$ se traduit à l'ordre k par $\partial_2 \Lambda_{(k)} = 0$ où ∂_2 est l'opérateur de cohomologie de Chevalley de \mathfrak{h} associé à la représentation adjointe de \mathfrak{h} sur $S(\mathfrak{h})$. Donc $\Lambda_{(k)}$ est un 2-cocycle.

Considérons $f_{(k)} : \mathfrak{h} \rightarrow S^k(\mathfrak{h})$ $x^i \mapsto f_{(k)}^i$. Alors $\left(\{y^i, y^j\} - \sum_k C_k^{ij} y^k\right)$ est d'ordre strictement supérieur à k si et seulement si $\left(\Lambda_{(k)} + \partial_1 f_{(k)}\right)(x^i, x^j) = 0$.

Ainsi, si le 2-cocycle $\Lambda_{(k)}$ est un cobord, on repousse les termes de degré k en des termes de degré $k + 1$.

En itérant le processus on obtient une suite $\{x_\nu^i\}$ qui détermine un système de coordonnées formelles limite

$$x_\infty^i = x^i + g_\infty^i(x)$$

dans lequel Λ s'écrit:

$$\Lambda = \sum_{i < j, 1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x_\infty^k \frac{\partial}{\partial x_\infty^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_\infty^j}.$$

Ce qui signifie que Λ est formellement linéarisable.

En particulier, Λ est formellement linéarisable si $H^2(\mathfrak{h}, S(\mathfrak{h})) = 0$. C'est le cas si \mathfrak{h} est semi-simple ou si par exemple $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathbb{R}$ où \mathfrak{g}_1 est semi-simple (dans ce cas, la linéarisation est même analytique cf. Molinier [28]).

La deuxième partie de mon travail concerne la linéarisation des tenseurs de Lie-Poisson qui, de par leur caractère multiplicatif, ont une structure plus rigide.

Si (G, P) est un groupe de Lie-Poisson et si \mathfrak{g} désigne l'algèbre de Lie de groupe de Lie G et si $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ désigne le bigèbre de Lie associée, la linéarisée de la structure de Poisson P est l'algèbre de Lie \mathfrak{g}^* . La linéarisation des structures de Lie-Poisson est un cas particulier de la linéarisation locale d'une structure de Poisson. Le cadre Lie-Poisson dans cette étude se justifie d'une part par le fait que la structure de Lie-Poisson est automatiquement analytique réelle. D'autre part, sur le groupe \mathbb{R}^n , toute structure de Lie-Poisson est linéarisable alors que certaines structures de Poisson générales ne le sont pas. Ceci justifie mon intérêt pour le rôle de la condition Lie-Poisson dans le problème général de linéarisation.

M. Cahen, S. Gutt et J. Rawnsley [3] ont montré qu'une structure de Lie-Poisson n'est pas toujours linéarisable. J'étudie ce que le caractère Lie-Poisson apporte au problème de linéarisation.

J'aborde le problème de déterminer si une structure de Lie-Poisson sur un groupe de Lie G est linéarisable ou non, de deux manières différentes.

La première approche consiste à prendre comme point de départ l'algèbre de Lie $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^*$ linéarisée de la structure. La deuxième approche consiste à travailler avec le groupe de Lie G directement.

Par la première approche, je généralise le résultat obtenu par J. Conn [7] en m'intéressant au cas où \mathfrak{g}^* est le produit direct d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g}_1 et d'un idéal abélien \mathfrak{A} :

Théorème 2.1 *Soit G un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit P un tenseur de Lie-Poisson sur G tel que \mathfrak{g}^* , le dual de \mathfrak{g} , s'écrive $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A}$ en produit direct où \mathfrak{A} est un idéal abélien et où \mathfrak{g}_1 est une algèbre de Lie semi-simple. Alors P est analytiquement linéarisable.*

Ce théorème n'est pas vérifié pour certains tenseurs de Poisson généraux (non Lie-Poisson) ayant la même linéarisée $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{R}$. J'exhibe de tels tenseurs pour lesquels la dimension maximale des feuilles symplectiques est strictement supérieure à la dimension maximale des feuilles symplectiques associées au tenseur linéaire, et qui ne sont donc pas linéarisables.

Cependant je calcule le deuxième espace de cohomologie de Chevalley d'une algèbre $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}$ produit semi-direct d'une sous-algèbre \mathfrak{g}_1 semi-simple et d'un idéal \mathfrak{R} , pour une représentation ρ de dimension finie sur V .

Proposition 2.2 $H^2(\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}, \rho, V) = H_{\mathfrak{g}_1\text{-equivariant}}^2(\mathfrak{R}, \rho_2, V)$.

Ce résultat est un cas particulier des résultats de cohomologie d'algèbres de Lie obtenus par Hochschild et Serre [21].

En particulier j'obtiens:

Proposition 2.3 Soit Λ une structure de Poisson sur une variété M , s'annulant en un point z et telle que la linéarisée en z soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}$ le produit semi-direct d'une sous-algèbre de Lie semi-simple de dimension n et d'un idéal de dimension r .

Alors il existe des coordonnées formelles $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^r)$ au voisinage de z telles que, dans ces coordonnées, on ait:

$$\begin{aligned} \{x^i, x^j\} &= \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k \\ \{x^i, y^\alpha\} &= \sum_{1 \leq \gamma \leq r} C_\gamma^{i\alpha} y^\gamma \\ \{y^\alpha, y^\gamma\} &= \sum_{1 \leq \nu \leq r} C_\nu^{\alpha\gamma} y^\nu + R^{\alpha\gamma}(x, y) \end{aligned}$$

où les C_k^{ij} sont les constantes de structure de \mathfrak{h} et où les $R^{\alpha\gamma}$ sont des séries en x et y d'ordre supérieur à deux.

Ce résultat est également obtenu par Dufour et Wade, qui obtiennent des linéarisation analytiques dans certains cas.

L'autre approche consiste à prendre comme point de départ l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe de Lie G . Si le groupe G est abélien, tout tenseur de Lie-Poisson sur G est linéaire.

J'étudie le cas d'un tenseur de Lie-Poisson exact sur un groupe de Lie nilpotent. Il est défini par $\Lambda(g) = -r_{g_*}Q + l_{g_*}Q \quad \forall g \in G$ où $Q \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ est tel que le trois tenseur $[Q, Q]$ soit ad -invariant par la représentation adjointe de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$. J'obtiens les résultats suivants:

Proposition 2.4 Tout tenseur de Lie-Poisson exact sur un groupe de Lie nilpotent de pas 2 est linéaire.

Proposition 2.5 Tout tenseur de Lie-Poisson exact sur un groupe de Lie nilpotent de pas 3 et de dimension inférieure à 6 est linéarisable.

Proposition 2.6 Il existe des tenseurs de Lie-Poisson exacts sur le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie nilpotente de pas 4 et de dimension 5. L_4 qui ne sont pas linéarisables.

Proposition 2.7 *Il existe des tenseurs de Lie-Poisson exacts P sur le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie nilpotente de pas 4 et de dimension 5, L_A , donné par $P(x) = L_{x*}Q - R_{x*}Q$ tels que*

$$\begin{cases} [Q, Q] = 0 \text{ et } P \text{ est linéarisable;} \\ [Q, Q] = 0 \text{ et } P \text{ est non linéarisable;} \\ [Q, Q] \text{ ad- invariant et } P \text{ est linéarisable.} \end{cases}$$

En particulier, la linéarisabilité d'une structure de Lie-Poisson n'est pas toujours liée à la classe d'isomorphisme de l'algèbre de Manin \mathfrak{L} du triple de Manin correspondant. J'exhibe un tenseur de Lie-Poisson P exact qui n'est pas linéarisable, mais tel que la dimension maximale des feuilles symplectiques de P coïncide avec la dimension maximale des feuilles symplectiques de sa linéarisée.

Chapitre 2

Structures de bigèbre sur une algèbre de Lie réelle semi-simple

Nous donnons quelques résultats sur la classification des structures de bigèbre de Lie sur une algèbre de Lie réelle semi-simple. Dans un premier temps nous décrivons les algèbres de Manin (c'est-à-dire les "grandes" algèbres d'un triple de Manin) associées à de telles structures. Ensuite nous étudions les structures de bigèbre sur une algèbre de Lie semi-simple réelle, liées aux solutions de l'équation de Yang-Baxter standard modifiée non nulle. Pour ce faire, nous adaptons au cas réel les résultats de Belavin et Drinfeld [1] décrivant les solutions de cette équation sur une algèbre semi-simple complexe. Nous donnons ainsi les solutions générales de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard non nulle sur une algèbre de Lie réelle semi-simple. Enfin nous regardons le cas d'une algèbre de Lie réelle simple telle que sa complexifiée ne soit pas simple et nous donnons des résultats partiels concernant les structures de bigèbre liées aux solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée non standard.

1. Algèbres de Manin

Nous voulons voir à quelles conditions deux structures de bigèbre sur une algèbre de Lie donnée \mathfrak{g} donnent des algèbres de Lie \mathfrak{L} isomorphes dans le triple de Manin correspondant. Pour voir cela nous considérons un ensemble plus grand d'algèbres de Lie contenant \mathfrak{g} comme sous algèbre: l'ensemble des paires de Manin $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g})$ (Drinfeld [14]). Nous complétons ainsi l'étude effectuée par Cahen, Gutt et Rawnsley [3].

Dans le premier paragraphe nous rappellerons les différents notions utilisées.

Dans le second paragraphe nous donnerons la classification des algèbres \mathfrak{L} apparaissant dans un triple de Manin correspondant à une structure de bigèbre de Lie sur une algèbre de Lie réelle semi-simple.

1.1. Généralités sur les algèbres de Manin

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de dimension n . Considérons un espace vectoriel \mathfrak{L} de dimension $2n$, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée \ll , \gg et une application bilinéaire antisymétrique $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}$ telles que

- (i) \mathfrak{L} contienne \mathfrak{g} ,
- (ii) le crochet restreint à $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ soit le crochet de Lie de \mathfrak{g} .
- (iii) \mathfrak{g} soit isotrope pour \ll , \gg ,
- (iv) \ll , \gg soit invariante: $\ll [X, Y], Z \gg + \ll Y, [X, Z] \gg = 0, \forall X, Y, Z \in \mathfrak{L}$.

Alors, en choisissant un sous espace supplémentaire à \mathfrak{g} dans \mathfrak{L} et en l'identifiant à \mathfrak{g}^* via \ll , \gg , on a $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ en tant qu'espaces vectoriels et de plus :

- (1) $\ll (X, \alpha), (Y, \nu) \gg = \langle \alpha, Y \rangle + \langle \nu, X \rangle$, (où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne la dualité entre \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^*),
- (2) $[(X, \alpha), (Y, \nu)] = ([X, Y] + C_1(\alpha, Y) - C_1(\nu, X) + \bar{S}(\alpha, \nu), C_2(X, \nu) - C_2(Y, \alpha) + T(\alpha, \nu))$.

La condition d'invariance devient:

- (3) $S(\alpha, \nu, \gamma) = \langle \gamma, \bar{S}(\alpha, \nu) \rangle$ est totalement antisymétrique.
- (4) $\langle T(\alpha, \nu), Z \rangle = \langle \alpha, C_1(\nu, Z) \rangle$,
- (5) $C_2(X, \nu) = ad_X^* \nu$.

Le crochet défini sur \mathfrak{L} est alors un crochet de Lie (i.e. satisfait l'identité de Jacobi) si et seulement si :

- (6) $\partial p = 0$ où $p = {}^t T : \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}$ et où ∂ est le cobord de Chevalley de \mathfrak{g} pour la représentation adjointe de \mathfrak{g} sur $\Lambda^2 \mathfrak{g}$,
- (7) $[X, S](\alpha, \nu, \gamma) + \langle \sum_{\alpha\nu\gamma} T(T(\alpha, \nu), \gamma), X \rangle = 0$ où $\sum_{\alpha\nu\gamma}$ désigne la somme sur les permutations cycliques,

$$(8) \quad \underset{\alpha\eta\gamma}{S} \left(S(T(\alpha, \eta), \gamma, \nu) + S(T(\alpha, \nu), \eta, \gamma) \right) = 0.$$

Notation 1.1 Désignons par $\mathfrak{L}_{S,p}$ l'algèbre $\mathfrak{L} = \mathfrak{g} + \mathfrak{g}^*$ avec \llcorner, \lrcorner et $[\cdot, \cdot]$ définis par 1 et 2 vérifiant en plus les conditions 3,4 et 5 et où $p = {}^tT$.

Définition 1.1 [14] Une **paire de Manin** est une paire d'algèbres de Lie $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g})$ et une forme bilinéaire symétrique non dégénérée \llcorner, \lrcorner sur \mathfrak{L} telles que les conditions i).ii).iii).iv) soient satisfaites.

Une **quasi bigèbre de Lie** est un triplet (\mathfrak{g}, p, S) où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie, $p : \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}$ est un cocycle et $S \in \Lambda^3 \mathfrak{g}$ vérifie les équations 6,7 et 8.

Lemme 1.1 [14] Si $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g})$ est une paire de Manin, alors pour un choix d'un sous espace isotrope dans \mathfrak{L} supplémentaire à \mathfrak{g} on peut identifier \mathfrak{L} avec une algèbre de Lie $\mathfrak{L}_{S,p}$ telle que (\mathfrak{g}, p, S) soit une quasi bigèbre de Lie. Réciproquement, toute quasi bigèbre de Lie (\mathfrak{g}, p, S) donne une paire de Manin $(\mathfrak{L}_{S,p}, \mathfrak{g})$.

Une application $\phi : \mathfrak{L}_{S,p} \rightarrow \mathfrak{L}_{S',p'}$ qui est linéaire, envoie \mathfrak{g} vers \mathfrak{g} et préserve \llcorner, \lrcorner est nécessairement de la forme

$$\phi(X, \alpha) = \left(A(X + \underline{Q}(\alpha)), {}^tA^{-1}(\alpha) \right)$$

où $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est linéaire et bijective et où $\underline{Q} : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}$ est induit par un élément $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ par $\langle \nu, \underline{Q}(\alpha) \rangle = Q(\alpha, \nu)$.

Alors $\phi \left([(X, \alpha), (Y, \nu)]_{S,p} \right) = [\phi(X, \alpha), \phi(Y, \nu)]_{S',p'}$ si et seulement si

(i) A est un automorphisme de Lie \mathfrak{g} ,

(ii) $A^{-1} \cdot p' - p = -\partial Q$,

(iii) $(A^{-1} \cdot S' - S)(\alpha, \nu, \gamma) = \underset{\alpha\nu\gamma}{S} \left(Q(T(\alpha, \nu), \gamma) + \langle \alpha, [Q(\nu), Q(\gamma)] \rangle \right)$

$$= 1/2[Q, Q](\alpha, \nu, \gamma) + \underset{\alpha\nu\gamma}{S} Q(T(\alpha, \nu), \gamma),$$

où $(A \cdot p')_X(\alpha, \nu) = p'_{A^{-1}(X)}({}^tA\alpha, {}^tA\nu)$ et $(A \cdot S)(\alpha, \nu, \gamma) = S({}^tA\alpha, {}^tA\nu, {}^tA\gamma)$.

Nous dirons alors que $\mathfrak{L}_{S,p}$ et $\mathfrak{L}_{S',p'}$ sont **isomorphes sous ϕ** .

Remarque 1.2 Une paire de Manin $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g})$ donne un triple de Manin $(\mathfrak{L}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ si et seulement si il existe un sous espace isotrope supplémentaire à \mathfrak{g} dans \mathfrak{L} qui soit une sous algèbre de \mathfrak{L} . Ainsi une structure de bigèbre sur \mathfrak{g} admet pour algèbre de Manin correspondante une algèbre $\mathfrak{L}_{S,p'}$ qui est isomorphe à une algèbre de Lie $\mathfrak{L}_{0,p}$ et vice versa. On dit dans ce cas que \mathfrak{L} est une **algèbre de Manin**.

Remarque 1.3 $\mathfrak{L}_{S,0}$ est une algèbre de Lie si et seulement si $S \in (\Lambda^3 \mathfrak{g})^{inv}$. De plus $\mathfrak{L}_{S,0}$ est isomorphe à $\mathfrak{L}_{S',-\partial Q}$ pour tout $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ avec $S' = S + 1/2[Q, Q]$.

En particulier $\mathfrak{L}_{0,\partial Q}$ est isomorphe à $\mathfrak{L}_{-1/2[Q,Q],0}$ et est une algèbre de Lie si et seulement si $[Q, Q] \in \Lambda^3 \mathfrak{g}$ est invariant sous l'action adjointe de \mathfrak{g} .

Lemme 1.4 [18] Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie (réelle ou complexe) semi-simple et β sa forme de Killing, l'application linéaire $\rho : (S^2\mathfrak{g}^*)^{inv} \rightarrow (\Lambda^3\mathfrak{g})^{inv}$ définie par $\beta^{(3)}(\rho B, X \wedge Y \wedge Z) = B([X, Y], Z)$ pour $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ est un isomorphisme linéaire.

Ainsi toute structure de bigèbre (qui est nécessairement exacte sur \mathfrak{g} semi-simple) est définie par $Q \in \Lambda^2\mathfrak{g}$ tel que $[Q, Q] = \rho B$ où $B \in (S^2\mathfrak{g}^*)^{inv}$. De plus, B est de la forme $B(X, Y) = \beta(MX, Y)$ où M est une application linéaire de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} qui commute avec $adZ \forall Z \in \mathfrak{g}$.

Rappelons que si $A = \sum_{i,j,k} A_{ijk} e^i \otimes e^j \otimes e^k$ où les A_{ijk} sont antisymétriques, on définit $\beta^{(3)}$ par

$$\beta^{(3)}(A, X \wedge Y \wedge Z) = \sum_{i,j,k} A_{ijk} \beta(e^i, X) \beta(e^j, Y) \beta(e^k, Z).$$

Remarque 1.5 Si \mathfrak{g}_0 est une algèbre de Lie réelle semi-simple telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ soit simple alors $(\Lambda^3\mathfrak{g}_0)^{inv}$ est de dimension 1. Ainsi toute structure de bigèbre de Lie (qui est donc exacte) sur \mathfrak{g}_0 est de la forme (\mathfrak{g}_0, p) où $p = \partial Q$ avec $Q \in \Lambda^2\mathfrak{g}_0$ et $[Q, Q] = \lambda\Omega$ tel que

$$\beta^{(3)}(X \wedge Y \wedge Z, \Omega) = \beta(X, [Y, Z]).$$

Définition 1.2 Nous dirons que deux algèbres de Manin \mathfrak{L} et \mathfrak{L}' sur une algèbre de Lie donnée \mathfrak{g} sont **isomorphes** si et seulement si il existe une application $\phi : \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{L}'$ qui

- soit un isomorphisme d'algèbres de Lie,
- envoie \mathfrak{g} vers \mathfrak{g} ,
- soit une homothétie de \mathfrak{L} vers \mathfrak{L}' , i.e. $\ll \phi(X), \phi(Y) \gg' = s \ll X, Y \gg, \forall X, Y \in \mathfrak{L}$ pour un réel non nul s .

Lemme 1.6 [3] Deux structures de bigèbre de Lie sur \mathfrak{g} , (\mathfrak{g}, p) et (\mathfrak{g}, p') donnent des algèbres de Manin isomorphes si et seulement si il existe $Q \in \Lambda^2\mathfrak{g}$, A un automorphisme de \mathfrak{g} et s un réel non nul tels que

$$(*) \quad \begin{cases} p' = A(sp - \partial Q); \\ 1/2[Q, Q](\alpha, \nu, \gamma) + s S_{\alpha\nu\gamma} Q(\phi(\alpha), \nu), \gamma) = 0. \end{cases}$$

En particulier, deux structures de bigèbre de Lie exactes sur \mathfrak{g} , $(\mathfrak{g}, \partial Q)$ et $(\mathfrak{g}, \partial Q')$ donnent des algèbres de Manin isomorphes si et seulement si $[Q', Q'] = s^2 A[Q, Q]$ pour un automorphisme A de \mathfrak{g} et un $s \neq 0 \in \mathbb{R}$.

PREUVE

Une algèbre de Manin est une algèbre de Lie \mathfrak{L} munie d'un produit scalaire \ll , \gg symétrique invariant non dégénéré tel que \mathfrak{g} soit une sous algèbre de Lie isotrope de \mathfrak{L} et telle qu'il existe une sous algèbre de Lie \mathfrak{g}^* de \mathfrak{L} isotrope et supplémentaire à \mathfrak{g} . C'est donc une algèbre de Lie $\mathfrak{L}_{S,p}$ qui est isomorphe à $\mathfrak{L}_{0,p'}$. En d'autres termes c'est une classe de $\mathfrak{L}_{S,p}$ qui contient $\mathfrak{L}_{0,p'}$. On se donne \mathfrak{L} et \mathfrak{g} , mais on ne se donne pas le supplémentaire de \mathfrak{g} .

Observons que $\chi : \mathfrak{L}_{S,p} \rightarrow \mathfrak{L}_{s^2 S, sp}(X, \alpha) \mapsto (X, s^{-1}\alpha)$ est un isomorphisme d'algèbre de Lie car :

$$\begin{aligned} \chi\left([(X, \alpha), (Y, \nu)]\right) &= \chi\left([X, Y] + ad_\alpha^* Y - ad_\nu^* X + \overline{S}(\alpha, \nu), ad_X^* \nu - ad_Y^* \alpha + [\alpha, \nu]\right) \\ &= \left([X, Y] + ad_\alpha^* Y - ad_\nu^* X + \overline{S}(\alpha, \nu), s^{-1}(ad_X^* \nu - ad_Y^* \alpha + [\alpha, \nu])\right) \\ &= [(X, s^{-1}\alpha), (Y, s^{-1}\nu)]_{\mathfrak{L}_{s^2 S, sp}}. \end{aligned}$$

De plus $\chi(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}$ et $\ll \chi(X, \alpha), \chi(Y, \nu) \gg = s^{-1} \ll (X, \alpha), (Y, \nu) \gg$. Donc les algèbres de Manin $\mathfrak{L}_{S,p}$ et $\mathfrak{L}_{s^2 S, sp}$ sont isomorphes, en particulier $\mathfrak{L}_{0,p}$ et $\mathfrak{L}_{0,sp}$ sont isomorphes.

Supposons que $\Psi : \mathfrak{L}_1 \approx \mathfrak{L}_{0,p} \rightarrow \mathfrak{L}_2 \approx \mathfrak{L}_{0,p'}$ soit un isomorphisme d'algèbres de Manin tel que $\ll \Psi(u), \Psi(v) \gg_2 = s^{-1} \ll u, v \gg_1$.

Alors, pour $S = 0$, $\Psi \circ \chi^{-1} : \mathfrak{L}_{0,sp} \rightarrow \mathfrak{L}_{0,p'}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{L}_{S,p}$ algèbres et est donc déterminé par $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ et $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ tels que

- (i) A soit un automorphisme de Lie de \mathfrak{g} ;
- (ii) $p' = A(sp - \partial Q)$;
- (iii) $1/2A([Q, Q](\alpha, \nu, \gamma)) + \sum_{\alpha\nu\gamma} A(Q(T[\alpha, \nu], \gamma)) = 0$ où $T = s^t p$.

Nous voyons donc que deux bigèbres donnent des algèbres de Manin isomorphes si et seulement si il existe A automorphisme de Lie de \mathfrak{g} , $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$, $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tels que (*) soit vérifiée.

Regardons ce qui se passe pour des structures exactes.

Notons \mathfrak{L}_1 (resp. \mathfrak{L}_2) l'algèbre de Manin associée à $(\mathfrak{g}, \partial Q)$ (resp. $(\mathfrak{g}', \partial Q')$), alors $\mathfrak{L}_1 \approx \mathfrak{L}_{0, \partial Q} \approx \mathfrak{L}_{-\frac{1}{2}[Q, Q], 0}$ et $\mathfrak{L}_2 \approx \mathfrak{L}_{0, \partial Q'} \approx \mathfrak{L}_{-\frac{1}{2}[Q', Q'], 0}$. Elles sont donc isomorphes si et seulement si $[Q', Q'] = s^2 A[Q, Q]$ pour un automorphisme A de \mathfrak{g} et un $s \neq 0 \in \mathbb{R}$. \square

Corollaire 1.7 *Lorsque nous cherchons les algèbres de Manin associées à des structures de bigèbre de Lie (\mathfrak{g}_0, p) où \mathfrak{g}_0 est une algèbre de Lie réelle semi-simple telle que $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ soit simple, comme $p = \partial Q$ pour $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}_0$ tel que $[Q, Q] = \lambda \Omega$ avec $\beta^{(3)}(X \wedge Y \wedge Z, \Omega) = \beta(X, [Y, Z])$, il n'y a que trois cas à envisager à isomorphisme près:*

- $\lambda = 0$,
- $\lambda > 0$,
- $\lambda < 0$.

1.2. Classification des algèbres de Manin sur une algèbre semi-simple réelle

Nous considérons une algèbre de Lie semi-simple réelle \mathfrak{g}_0 et une structure de bigèbre de Lie (\mathfrak{g}_0, p) sur \mathfrak{g}_0 où p satisfait $p = \partial Q$ et $[Q, Q] = \rho B$ où $B \in (S^2 \mathfrak{g}^*)^{inv}$ est de la forme $B(X, Y) = \beta(MX, Y)$ (cf. lemme 1.4).

Nous voulons savoir quelle est l'algèbre de Manin associée à une telle structure.

Remarquons que $M \circ adX = adX \circ M \quad \forall X \in \mathfrak{g}_0$ et que $\beta^{(3)}([Q, Q], X \wedge Y \wedge Z) = \beta(M[X, Y], Z)$.

Le résultat que nous avons obtenu est le suivant:

Théorème 1.8 *A isomorphisme près l'algèbre de Manin \mathfrak{L} associée à une bigèbre de Lie sur une algèbre de Lie réelle semi-simple \mathfrak{g}_0 qui s'écrit $\mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} \mathfrak{I}_k$ où les \mathfrak{I}_k sont des idéaux simples de \mathfrak{g}_0 , est nécessairement de la forme $\mathfrak{L} = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} \mathfrak{L}_k$ où \mathfrak{L}_k appartient à la liste suivante:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_k &= Lie(T^*(I_k)) \text{ où } I_k \text{ est un groupe de Lie associé à l'algèbre de Lie } \mathfrak{I}_k, \\ \mathfrak{L}_k &= (\mathfrak{I}_k)^\mathbb{C}, \\ \mathfrak{L}_k &= \mathfrak{I}_k \oplus \mathfrak{I}_k. \end{aligned}$$

Remarque 1.9 • l'algèbre de Manin du type $\mathfrak{L}_k = Lie(T^*(I_k))$ existe toujours. il suffit de prendre $Q = 0$,

- l'algèbre de Manin du type $\mathfrak{L}_k = (\mathfrak{I}_k)^\mathbb{C}$ existe toujours (cf. proposition 1.24),
- l'algèbre de Manin du type $\mathfrak{L}_k = \mathfrak{I}_k \oplus \mathfrak{I}_k$ n'existe pas toujours (cf. théorème 1.3).

Le reste de ce paragraphe consiste en une preuve de ce résultat.

Une telle algèbre de Manin est donnée par $\mathfrak{L}_{0, \partial Q}$ qui est isomorphe à $\mathfrak{L}_{-1/2[Q, Q], 0} = \mathfrak{L}$.
Donc $\mathfrak{L} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_0^*$ en tant qu'espace vectoriel
avec la dualité $\ll (X, \alpha), (Y, \nu) \gg_M = \langle \alpha, Y \rangle + \langle \nu, X \rangle$
et le crochet:

$$[(X, \alpha), (Y, \nu)]_M = ([X, Y] + \bar{S}(\alpha, \nu), ad_X^* \nu - ad_Y^* \alpha) \quad (2.1)$$

où $S = -1/2[Q, Q] = -1/2\rho B$ avec $S(\alpha, \nu\gamma) = \langle \gamma, \bar{S}(\alpha, \nu) \rangle$.

Proposition 1.10 *Supposons que \mathfrak{g} soit une algèbre de Lie réelle simple et que $S=0$ alors l'algèbre de Manin associée à \mathfrak{g}_0 est donnée par $\mathfrak{L} = Lie(T^*G)$.*

PREUVE

- Rappelons d'abord la structure de groupe sur T^*G . Nous identifions d'abord T^*G à $G \times \mathfrak{g}^*$:

soit $\alpha \in T^*G$ alors $\alpha_g \in (T_g G)^*$ et $L_g^* \alpha_g = \tilde{\alpha} \in (T_e G)^* = \mathfrak{g}^*$, donc $\alpha_g = L_{g^{-1}}^* \tilde{\alpha} \in (T_g G)^*$.

Ainsi, à α_g nous associons le couple $(g, \tilde{\alpha})$ et inversement.

Nous définissons la structure de groupe sur T^*G :

posons

$$\alpha_g \cdot \nu_{g'} = (R_{g', -1}^* \alpha_g + L_{g^{-1}}^* \nu_{g'}) \in (T_{gg'} G)^*,$$

ainsi $(g, \tilde{\alpha}) \cdot (g', \tilde{\nu}) = (gg', \tilde{\gamma})$ où $\tilde{\gamma}$ vérifie $R_{g', -1}^* \alpha_g + L_{g^{-1}}^* \nu_{g'} = L_{(gg')^{-1}}^* (\tilde{\gamma})$.

Nous obtenons

$$\tilde{\gamma} = L_{g'}^* \circ R_{g', -1}^* \tilde{\alpha} + \tilde{\nu} = Ad_{g', -1}^* \tilde{\alpha} + \tilde{\nu}.$$

D'où

$$(g, \tilde{\alpha}) \cdot (g', \tilde{\nu}) = (gg', Ad_{g',-1}^* \tilde{\alpha} + \tilde{\nu}).$$

Remarquons que $(g, \tilde{\alpha})^{-1} = (g^{-1}, -Ad_g^* \tilde{\alpha})$.

- Nous cherchons le crochet sur $Lie(T^*G)$:

$$\begin{aligned} c(g, \tilde{\alpha}) : T^*G &\rightarrow T^*G \\ (g', \tilde{\nu}) &\mapsto (g, \tilde{\alpha})(g', \tilde{\nu})(g, \tilde{\alpha})^{-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$c(g, \tilde{\alpha})((g', \tilde{\nu})) = (gg'g^{-1}, Ad_g^* \circ Ad_{g',-1}^* \tilde{\alpha} + Ad_g^* \tilde{\nu} - Ad_g^* \tilde{\alpha}).$$

Et $Ad(g, \tilde{\alpha}) = c(g, \tilde{\alpha})_{*(\epsilon, 0)} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ est alors donné par

$$\begin{aligned} Ad(g, \tilde{\alpha})((Y, \tilde{\nu})) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 c(g, \tilde{\alpha})(\text{expt} Y, t\tilde{\nu}) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 (g \text{expt} Y g^{-1}, Ad_g^* \circ Ad_{\text{expt} Y}^* \tilde{\alpha} + Ad_g^* t\tilde{\nu} - Ad_g^* \tilde{\alpha}) \\ &= (Ad_g Y, Ad_g^* (-ad_Y^* \tilde{\alpha}) + Ad_g^* \tilde{\nu}). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{ad} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$ donné par $\text{ad} = Ad_{*(\epsilon, 0)}$ vérifie

$$\begin{aligned} \text{ad}(X, \tilde{\alpha}) \cdot (Y, \tilde{\nu}) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 (Ad(\text{expt} X, t\tilde{\alpha}) \cdot (Y, \tilde{\nu})) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_0 (Ad_{\text{expt} X} Y, Ad_{\text{expt} X}^* (-ad_Y^* t\tilde{\alpha}) + Ad_{\text{expt} X}^* \tilde{\nu}) \\ &= ([X, Y], -ad_Y^* \tilde{\alpha} + ad_X^* \tilde{\nu}) \end{aligned}$$

ce qui est le crochet 2.1 quand $S \equiv 0$.

□

Nous supposons dans la suite que $S \neq 0$ et nous identifierons \mathfrak{L} à $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_0$.

Nous identifions $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_0^*$ à $\mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_0$ par $(X, \alpha) \mapsto (X, \hat{\beta}^{-1}(\alpha))$ où $\hat{\beta} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ est définie par $\langle \hat{\beta}(X), Y \rangle = \beta(X, Y)$.

Alors la dualité est donnée par:

$$\ll (X, A), (Y, B) \gg_M = \langle \hat{\beta}(A), Y \rangle + \langle \hat{\beta}(B), X \rangle = \beta(A, Y) + \beta(B, X).$$

Et d'après 2.1 le crochet est donné par:

$$[(X, A), (Y, B)]_M = ([X, Y] + \tilde{S}(\hat{\beta}(A), \hat{\beta}(B)), \hat{\beta}^{-1}(ad_X^* \hat{\beta}(B)) - \hat{\beta}^{-1}(ad_Y^* \hat{\beta}(A))).$$

- Déterminons $\bar{S}(\hat{\beta}(A), \hat{\beta}(B))$:

On a que $S(\alpha, \nu, \gamma) = \langle \gamma, \bar{S}(\alpha, \nu) \rangle$

d'où

$$\begin{aligned} \beta(C, \bar{S}(\hat{\beta}(A), \hat{\beta}(B))) &= S(\hat{\beta}(A), \hat{\beta}(B), \hat{\beta}(C)) \\ &= \beta^{(3)}(S, A \wedge B \wedge C) \\ &= -1/2\beta(M[A, B], C) \\ \text{ainsi } \bar{S}(\hat{\beta}(A), \hat{\beta}(B)) &= -1/2M[A, B]. \end{aligned}$$

- Déterminons $\hat{\beta}^{-1}(ad_X^* \hat{\beta}(B))$:

On a que

$$\begin{aligned} \beta(\hat{\beta}^{-1}(ad_X^* \hat{\beta}(B)), Y) &= \langle ad_X^* \hat{\beta}(B), Y \rangle \\ &= -\langle \hat{\beta}(B), ad_X Y \rangle \\ &= -\beta(B, [X, Y]) \\ &= \beta(Y, [X, B]) \text{ car } \beta \text{ est invariante} \\ \text{d'où } \hat{\beta}^{-1}(ad_X^* \hat{\beta}(B)) &= [X, B]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$[(X, A), (Y, B)]_M = ([X, Y] - 1/2M[A, B], [X, B] - [Y, A]) \quad (2.2)$$

Proposition 1.11 Comme $\mathfrak{g}_0 = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} \mathfrak{J}_k$ tout $X \in \mathfrak{g}$ est de la forme $X = \sum_{1 \leq k \leq p} X_k$ donc le crochet s'écrit:

$$[(X, A), (Y, B)]_M = \sum_{1 \leq k \leq p} ([X_k, Y_k] - 1/2M_k[A_k, B_k], [X_k, B_k] - [Y_k, A_k]).$$

PREUVE La somme des \mathfrak{J}_k étant directe on a que

$$\begin{cases} [\mathfrak{J}_k, \mathfrak{J}_l] = \{0\} \text{ pour } l \neq k \\ [\mathfrak{J}_k, \mathfrak{J}_k] = \mathfrak{J}_k. \end{cases}$$

De plus $M[X_k, Y_k] = M \circ ad_{X_k}(Y_k) = ad_{X_k} \circ M(Y_k)$. Ainsi M envoie \mathfrak{J}_k sur \mathfrak{J}_k lui-même. nous noterons donc $M = \sum_{1 \leq k \leq p} M_k$ où $M_k = M|_{\mathfrak{J}_k}$. Alors

$$\begin{aligned} [(X, A), (Y, B)]_M &= \left[\left(\sum_{1 \leq k \leq p} X_k, \sum_{1 \leq l \leq p} A_l \right), \left(\sum_{1 \leq k' \leq p} Y_{k'}, \sum_{1 \leq l' \leq p} B_{l'} \right) \right]_M \\ &= \left(\sum_{1 \leq k \leq p} [X_k, Y_k] - \sum_{1 \leq l \leq p} 1/2M_l[A_l, B_l], \sum_{1 \leq k \leq p} [X_k, B_k] - \sum_{1 \leq l \leq p} [Y_l, A_l] \right) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq p} ([X_k, Y_k] - 1/2M_k[A_k, B_k], [X_k, B_k] - [Y_k, A_k]). \end{aligned}$$

□

Ainsi nous devons seulement étudier l'algèbre de Manin \mathcal{L} associée à une algèbre de Lie réelle simple.

Dans la suite \mathfrak{g}_0 sera donc une algèbre de Lie réelle simple.

Remarque 1.12 Si \mathfrak{g}_0 est une algèbre de Lie réelle simple, alors $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ est

- soit simple et alors $M = \lambda Id$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$,
- soit non simple et alors $M = a + bJ$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et où J est tel que $J^2 = -Id$ et $J \circ adX = adX \circ J \forall X \in \mathfrak{g}_0$.

Proposition 1.13 Supposons qu'il existe $N : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0$ tel que

1. N soit un isomorphisme linéaire,
2. $N^2 = 1/2M$,
3. $N \circ adX = adX \circ N \forall X \in \mathfrak{g}_0$.

Alors

$$\mathcal{L} \approx \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} \text{ en tant qu'algèbre de Lie et } \mathfrak{g}_0 \approx \{(X, 0) \in \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}\}$$

et la dualité est donnée par:

$$\ll (X, A), (Y, B) \gg_M = \beta(X, N^{-1}B) + \beta(N^{-1}A, Y).$$

Remarque 1.14 On note $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = \{(X, Y) \mid X, Y \in \mathfrak{g}_0\}$ muni du crochet $[\cdot, \cdot]_{\mathbb{C}}$ défini par:

$$[(X, A), (Y, B)]_{\mathbb{C}} = ([X, Y] - [A, B], [X, B] - [Y, A]).$$

PREUVE

Définissons

$$\Psi : \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{L} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_0 \quad (X, A) \mapsto (X, N^{-1}A).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi\left([\Psi^{-1}(X, A), \Psi^{-1}(Y, B)]_{\mathbb{C}}\right) &= \Psi\left([(X, NA), (Y, NB)]_{\mathbb{C}}\right) \\ &= \left([X, Y] - 1/2M[A, B], [X, B] - [Y, A]\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\Psi : \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{L}$ est un isomorphisme de Lie.

La dualité est donnée par

$$\begin{aligned} \ll (X, A), (Y, B) \gg_M &= \ll \Psi(X, A), \Psi(Y, B) \gg_{\mathcal{L}} \\ &= \ll (X, N^{-1}A), (Y, N^{-1}B) \gg_{\mathcal{L}} \\ &= \beta(X, N^{-1}B) + \beta(N^{-1}A, Y). \end{aligned}$$

On a, par conséquent, que $(\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}, \{(X, 0) \in \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}\}, \ll, \gg_M)$ est une paire de Manin. □

Corollaire 1.15 Si $M = \lambda Id$ avec $\lambda > 0$ on obtient la paire de Manin $(\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_0)$ où la dualité est donnée par:

$$\ll (X, A), (Y, B) \gg = \beta(A, Y) + \beta(B, X).$$

PREUVE

En effet il suffit de prendre alors $N = \frac{1}{\sqrt{2}}rId$ où $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est donné par $\lambda = r^2$. \square

Corollaire 1.16 Si $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ n'est pas simple alors $\mathfrak{L} \approx \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$.

PREUVE

Si $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ n'est pas simple alors $M = a + bJ$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a^2 + b^2 \neq 0$ alors il suffit de prendre $N = c + dJ$ avec $(c + id)^2 = a + ib$ dans \mathbb{C} . \square

Remarque 1.17 Si $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ est simple et $M = \lambda Id$ avec $\lambda < 0$ il n'existe pas de N .

Proposition 1.18 Si $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ est simple et $M = \lambda Id$ avec $\lambda < 0$ alors $\mathfrak{L} \approx \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$.
 $\mathfrak{g}_0 \approx \Delta \mathfrak{g}_0 = \{(X, X) \mid X \in \mathfrak{g}_0\}$ et la dualité est donnée par:

$$\ll (X, Y), (X', Y') \gg = 1/2\beta(X, X') - 1/2\beta(Y, Y').$$

Remarquons qu'une telle algèbre de Manin n'existe pas toujours (cf. théorème 1.3).

Remarque 1.19 $\mathfrak{L}' = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$ est une algèbre de Lie comme somme directe de deux algèbres de Lie et le crochet sur \mathfrak{L}' est donné par:

$$[(X, Y), (X', Y')] = ([X, X'], [Y, Y']).$$

PREUVE

D'après la formule 2.2 on sait que le crochet sur \mathfrak{L} est donné par:

$$[(X, Y), (X', Y')] = ([X, X'] - \lambda[Y, Y'], [X, Y'] + [Y, X'])$$

en remplaçant M par 2λ .

On peut supposer que $\lambda = -1$ car lorsque $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ est simple les structures sont isomorphes à multiplication par une constante positive près. Le crochet vaut alors

$$[(X, Y), (X', Y')] = ([X, X'] + [Y, Y'], [X, Y'] + [Y, X']).$$

Considérons

$$\phi : \mathfrak{L} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{L}' \quad (X, Y) \mapsto (X + Y, X - Y).$$

On a

$$\begin{aligned} \phi^{-1}([\phi(X, Y), \phi(X', Y')]') &= \phi^{-1}([(X + Y, X - Y), (X' + Y', X' - Y')]') \\ &= \phi^{-1}([X + Y, X' + Y'], [X - Y, X' - Y']) \\ &= \phi^{-1}([X, X'] + [Y, Y'] + [X, Y'] + [Y, X'], \\ &\quad [X, X'] + [Y, Y'] - [X, Y'] - [Y, X']) \\ &= ([X, X'] + [Y, Y'], [X, Y'] + [Y, X']). \end{aligned}$$

Ainsi ϕ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Regardons la dualité:

$$\begin{aligned}
\ll (X, Y), X', Y' \gg' &= \ll \phi^{-1}(X, Y), \phi^{-1}(X', Y') \gg_{\mathfrak{g}} \\
&= \ll \left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2} \right), \left(\frac{X'+Y'}{2}, \frac{X'-Y'}{2} \right) \gg_{\mathfrak{g}} \\
&= \beta \left(\frac{X+Y}{2}, \frac{X'-Y'}{2} \right) + \beta \left(\frac{X-Y}{2}, \frac{X'+Y'}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\beta(X, X') - \beta(Y, Y')).
\end{aligned}$$

Ainsi $(\mathfrak{L} \approx \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0, \Delta \mathfrak{g}_0)$ est une paire de Manin.

Remarquons que dans ce cas $\Delta' \mathfrak{g}_0 = \{(X, -X) \mid X \in \mathfrak{g}_0\}$ est une sous algèbre isotrope de \mathfrak{L} . \square

Corollaire 1.20 *Si $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ est simple alors*

- si $\lambda > 0$, $\mathfrak{L} \approx \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ (et \mathfrak{L} existe toujours cf. proposition 1.24).
- si $\lambda < 0$, $\mathfrak{L} \approx \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$ (et \mathfrak{L} n'existe pas toujours cf. théorème 1.3).

Remarque 1.21 $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} \approx \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0$ si et seulement si $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ n'est pas simple.

En effet dans ce cas l'application $\phi : \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_0 \quad X \mapsto \left(\frac{X+iJX}{2}, \frac{X-iJX}{2} \right)$ est un isomorphisme de Lie car

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}([\phi(X), \phi(A)]) &= \phi^{-1} \left(\left[\left(\frac{X+iJX}{2}, \frac{X-iJX}{2} \right), \left(\frac{A+iJA}{2}, \frac{A-iJA}{2} \right) \right] \right) \\
&= \phi^{-1} \left(\left[\frac{X+iJX}{2}, \frac{A+iJA}{2} \right], \left[\frac{X-iJX}{2}, \frac{A-iJA}{2} \right] \right) \\
&= \phi^{-1} \left(\frac{[X, A]}{2} + iJ \frac{[X, A]}{2}, \frac{[X, A]}{2} - iJ \frac{[X, A]}{2} \right) \\
&= [X, A].
\end{aligned}$$

2. Structures de bigèbres liées à une équation de Yang-Baxter modifiée

Dans tout ce paragraphe nous travaillons sur une algèbre de Lie semi-simple réelle \mathfrak{g}_0 . Nous savons que toute structure de bigèbre sur \mathfrak{g}_0 est exacte et est définie par $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}_0$ tel que $[Q, Q] = \rho B$ où ρ est l'isomorphisme linéaire $\rho : (S^2 \mathfrak{g}^*)^{inv} \rightarrow (\Lambda^3 \mathfrak{g})^{inv}$ défini par $\beta^{(3)}(\rho B, X \wedge Y \wedge Z) = B([X, Y], Z)$ pour $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ (cf. lemme 1.4).

De plus B est de la forme $B(X, Y) = \beta(MX, Y)$ où M est une application linéaire de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} qui commute avec adZ pour tout $Z \in \mathfrak{g}$.

Définissons l'endomorphisme $\tilde{Q} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ par

$$\langle \alpha, \tilde{Q}(X) \rangle = \beta(Q(\alpha), X)$$

ou de manière équivalente

$$\beta(\tilde{Q}(Y), X) = \beta^{(2)}(Q, X \wedge Y) = Q(\hat{\beta}(X), \hat{\beta}(Y)) \quad (2.3)$$

où $\hat{\beta} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$ est tel que $\langle \hat{\beta}(X), Y \rangle = \beta(X, Y)$.

En utilisant $[Q, Q](\alpha, u, \gamma) = 2 \sum_{\alpha\nu\gamma} \langle \gamma, [(\tilde{Q} \circ \hat{\beta}^{-1})(\alpha), (\tilde{Q} \circ \hat{\beta}^{-1})(\nu)] \rangle$ où $\sum_{\alpha\nu\gamma}$ désigne la somme sur les permutations cycliques sur α, β, γ , nous obtenons:

$$\begin{aligned} \beta^{(3)}([Q, Q], X \wedge Y \wedge Z) &= \beta(M[X, Y], Z) \\ &= [Q, Q](\hat{\beta}X, \hat{\beta}Y, \hat{\beta}Z) \\ &= 2 \sum_{X, Y, Z} \langle \hat{\beta}Z, [\tilde{Q}(X), \tilde{Q}(Y)] \rangle \\ &= 2 \sum_{X, Y, Z} \beta(Z, [\tilde{Q}(X), \tilde{Q}(Y)]) \end{aligned}$$

Or $\beta(X, [\tilde{Q}(Y), \tilde{Q}(Z)]) = \beta(\tilde{Q}(Z), [X, \tilde{Q}(Y)])$ par invariance.

Ainsi les conditions sur Q pour que $(\mathfrak{g}_0, \partial Q)$ soit une bigèbre de Lie, se traduisent sur \tilde{Q} par:

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = 1/2M[X, Y] \text{ pour } X, Y \in \mathfrak{g}_0 \end{cases}$$

appelées l'équation de Yang-Baxter modifiée.

(L'équation de Yang-Baxter classique correspond au cas $M = 0$. Quand $M \neq 0$. on parle de l'équation de Yang-Baxter modifiée non nulle).

En général M peut être relativement compliqué, nous regardons ici le cas $M = 2\lambda Id$ avec $\lambda \neq 0$. On parle alors de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard:

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = \lambda[X, Y] \text{ pour } X, Y \in \mathfrak{g}_0 \end{cases}$$

Belavin et Drinfeld [1] ont décrit toutes les solutions de cette équation sur une algèbre de Lie semi-simple complexe. Nous nous intéressons à utiliser ce résultat pour résoudre le problème dans le cas réel. Nous étudions les conditions d'existence de solutions, puis nous donnons toutes les solutions de cette équation.

Remarque 2.1 • Lorsque \mathfrak{g}_0 est simple absolument simple ceci nous donne toutes les solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée non nulle.

- Trouver les solutions de l'équation de Yang-Baxter dans le cas $\lambda = 0$ est un problème ouvert.

Nous commençons par rappeler le théorème de Belavin et Drinfeld ainsi que sa démonstration.

Théorème 2.2 (Belavin et Drinfeld [1]) Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple complexe et soit $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ satisfaisant

$$\beta^{(3)}([Q, Q], X \wedge Y \wedge Z) = \beta(\lambda[X, Y], Z).$$

Alors il existe une sous algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} , un système de racines positives Δ^+ de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, deux sous ensembles Γ_+ et Γ_- de l'ensemble Φ des racines simples correspondant à Δ^+ et une application $\tau : \Gamma_+ \rightarrow \Gamma_-$ satisfaisant

$$(1) \quad \langle \tau(\alpha), \tau(\nu) \rangle = \langle \alpha, \nu \rangle, \quad \forall \alpha, \nu \in \Gamma_+,$$

(2) $\forall \alpha \in \Gamma_+$, il existe un entier positif k tels que $\tau^l(\alpha) \in \Gamma_+$, $\forall l < k$ et $\tau^k(\alpha) \notin \Gamma_+$ tels que, pour un choix d'une base de Weyl E_α dans \mathfrak{g}^α avec $\beta(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$, on ait:

$$Q = Q_0 + a \left(\sum_{\alpha \in \Delta^+} E_{-\alpha} \wedge E_\alpha + 2 \sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_+, \alpha < \nu} E_{-\nu} \wedge E_\alpha \right)$$

où $a^2 = -\lambda$ et $Q_0 \in \Lambda^2 \mathfrak{h}$ est déterminé par $Q(\alpha, \nu)$, $\forall \alpha, \nu \in \Phi$, devant vérifier:

$$(3) \quad Q(\tau(\alpha), \nu) = Q(\alpha, \nu) - a \left(\langle \alpha, \nu \rangle + \langle \tau(\alpha), \nu \rangle \right), \quad \forall \alpha \in \Gamma_+, \quad \forall \nu \in \Phi;$$

où $\hat{\Gamma}_+$ est l'ensemble des racines positives qui peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients entiers des racines simples de Γ_+ ;

où $\langle \alpha, \nu \rangle = \beta(H_\alpha, H_\nu)$;

où la notation $\nu > \alpha$ pour $\alpha \in \hat{\Gamma}_+$ signifie qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\tau^k(\alpha) = \nu$.

PREUVE Nous donnons ici la preuve de ce théorème ainsi qu'elle est exposée par Cahen, Gutt et Rawnsley dans [3].

Q vérifie

$$\beta^{(3)}([Q, Q], X \wedge Y \wedge Z) = \beta(\lambda[X, Y], Z) \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$$

si et seulement si \tilde{Q} vérifie

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = \lambda[X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Pour tout nombre complexe μ soit \mathfrak{g}_μ l'espace propre généralisé donné par

$$\mathfrak{g}_\mu = \{X \in \mathfrak{g} \mid (\tilde{Q} - \mu)^k X = 0, \text{ pour un entier positif } k\}.$$

La deuxième équation de 2.4 peut alors s'écrire, pour tout $\mu, \rho \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} [(\tilde{Q} - \mu)X, (\tilde{Q} - \rho)Y] & - (\tilde{Q} - \rho)[(\tilde{Q} - \mu)X, Y] - (\tilde{Q} - \mu)[X, (\tilde{Q} - \rho)Y] \\ & = (\lambda - \mu\rho)[X, Y] + (\mu + \rho)\tilde{Q}[X, Y]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

De 2.5 nous obtenons les résultats suivants:

1. Si $\mu \neq -\rho$, $[\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{g}_\rho] \subset \mathfrak{g}_\sigma$, pour $\sigma = \frac{\rho\mu - \lambda}{\rho + \mu}$, et $\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{g}_\rho$ sont orthogonaux par rapport à β ,
(car sur \mathfrak{g}_μ , $\hat{Q}_{-\rho}$ est inversible, donc pour $X \in \mathfrak{g}_\mu$ et $Y \in \mathfrak{g}_\rho$ on a $\beta((\hat{Q}-\mu)^k X, Y) = 0 = -\beta(X, (\hat{Q}-\mu)^k Y) = -\beta(X, Z)$ pour $Z \in \mathfrak{g}_\rho$)
2. $[\mathfrak{g}_\mu, \mathfrak{g}_{-\mu}] = 0$ si $\mu^2 \neq -\lambda$.

Soit $a^2 = -\lambda$, alors nous avons:

- \mathfrak{g}_a et \mathfrak{g}_{-a} sont des sous algèbres de Lie de \mathfrak{g} isotropes relativement à β ;
- $\mathfrak{g}' = \sum_{\mu \neq \pm a} \mathfrak{g}_\mu$ est une sous algèbre;
- $\mathfrak{g}_{\pm a} + \mathfrak{g}'$ sont des sous algèbres de Lie dans lesquelles $\mathfrak{g}_{\pm a}$ sont des idéaux.

Posons $Q^\pm = \hat{Q} \pm a$. Alors Q^\pm est inversible sur $\mathfrak{g}_{\pm a} + \mathfrak{g}'$. Et de 2.5, nous obtenons:

$$Q^+[Q^-X, Q^-Y] = Q^-[Q^+X, Q^+Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (2.6)$$

Ainsi, $\Psi = Q^+_{|\mathfrak{g}'}} \circ (Q^-_{|\mathfrak{g}'})^{-1}$ est un automorphisme de \mathfrak{g}' (car Q^\pm sont inversibles) et Ψ n'admet pas 1 comme valeur propre (car si $\Psi X = X$ alors $Q^+X = Q^-X$ donc $2aX = 0$ et $X = 0$).

Lemme 2.3 (Belavin et Drinfeld [1]) *Si Ψ est un automorphisme d'une algèbre de Lie de dimension finie alors 1 est une valeur propre de Ψ . Si Ψ est un automorphisme d'une algèbre de Lie n'ayant pas 1 pour valeur propre, alors l'algèbre de Lie est résoluble.*

Lemme 2.4 (Cartan [2]) *Si ρ est une représentation fidèle d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur un espace vectoriel de dimension finie, la trace de ρ est non dégénéré sur \mathfrak{g} . Il découle de ceci que toute sous-algèbre de Lie semi-simple isotrope relativement à la forme de Killing est résoluble.*

Corollaire 2.5 $\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_{-a}, \mathfrak{g}', \mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}', \mathfrak{g}_{-a} + \mathfrak{g}'$ sont toutes résolubles et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}' + \mathfrak{g}_{-a}$.

PREUVE \mathfrak{g}_a et \mathfrak{g}_{-a} sont résolubles par le lemme 2.4; \mathfrak{g}' est résoluble par le lemme 2.3. De plus comme $\mathfrak{g}_{\pm a}$ sont des idéaux de $\mathfrak{g}_{\pm a} + \mathfrak{g}'$ ceux-ci sont résolubles. \square

Il existe \mathfrak{b}_+ une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} telle que $\mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{b}_+$; et \mathfrak{b}_- une sous-algèbre de Borel de \mathfrak{g} telle que $\mathfrak{g}_{-a} + \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{b}_-$. Et $\mathfrak{g} = \mathfrak{b}_+ + \mathfrak{b}_-$, donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}_+ \cap \mathfrak{b}_-$ est une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Si \mathfrak{n}_\pm désigne le nilradical de \mathfrak{b}_\pm , nous avons $\mathfrak{b}_\pm = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_\pm$ et \mathfrak{n}_+ est l'orthogonal de \mathfrak{b}_+ pour la forme de Killing. Or l'orthogonal de $\mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}'$ pour la forme de Killing est \mathfrak{g}_a donc $\mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{b}_+$ ainsi $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{g}_a$. Alors comme le seul Borel contenant \mathfrak{n}_+ est \mathfrak{b}_+ , on a que \mathfrak{b}_+ est l'unique Borel contenant $\mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}'$. De manière similaire on démontre que \mathfrak{b}_- est l'unique Borel contenant $\mathfrak{g}_{-a} + \mathfrak{g}'$. Et $\mathfrak{h} \supset \mathfrak{g}'$ est déterminé de manière unique par \hat{Q} .

Soit Δ l'ensemble des racines de \mathfrak{g} relativement à \mathfrak{h} . Si $\alpha \in \Delta$ notons \mathfrak{g}^α l'espace radiciel correspondant et nous dirons que $\alpha \in \Delta^+$ si $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{b}_+$ ($\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$). Alors \mathfrak{n}_- correspond aux racines négatives $\mathfrak{n}_- = \oplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$.

Lemme 2.6 ([1]) $\hat{Q}(\mathfrak{b}_\pm) \subset \mathfrak{b}_\pm, \tilde{Q}(\mathfrak{b}_\pm) \subset \mathfrak{n}_\pm, \hat{Q}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$.

PREUVE Considérons $\mathfrak{l} = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{g}_a] \subset \mathfrak{g}_a\}$. Alors $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{g}_a$ implique $[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}_+] \subset \mathfrak{b}_+$. Mais l'algèbre maximale qui vérifie $[\mathfrak{l}, \mathfrak{n}_+] \subset \mathfrak{b}_+$ est \mathfrak{b}_+ elle-même, donc $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{b}_+$. D'autre part $\mathfrak{g}_a \subset \mathfrak{b}_+$ donc $[\mathfrak{b}_+, \mathfrak{g}_a] \subset [c, \mathfrak{b}_+] \subset \mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{g}_a$ donc $\mathfrak{b}_+ \subset \mathfrak{l}$.

Si $Y \in \mathfrak{g}_a$, nous avons $\tilde{Q}Y \in \mathfrak{g}_a$ donc si $X \in \mathfrak{l}$, 2.5 implique (en prenant $\mu = \rho = a$):

$$(\tilde{Q} - a)[(\tilde{Q} - a)X, Y] - [(\tilde{Q} - a)X, (\tilde{Q} - a)Y] \in \mathfrak{g}_a$$

en itérant on obtient:

$$(\tilde{Q} - a)^k [(\tilde{Q} - a)X, Y] - [(\tilde{Q} - a)X, (\tilde{Q} - a)^k Y] \in \mathfrak{g}_a$$

Or comme $Y \in \mathfrak{g}_a$ il existe k tel que $(\tilde{Q} - a)^k Y = 0$, donc $[(\tilde{Q} - a)X, Y] \in \mathfrak{g}_a$. Ainsi $[(\tilde{Q} - a)X, Y] \in \mathfrak{g}_a$ donc $\tilde{Q}\mathfrak{l} \subset \mathfrak{l}$. Nous obtenons ainsi que $\tilde{Q}(\mathfrak{b}_+) \subset \mathfrak{b}_+$ et que $\tilde{Q}(\mathfrak{n}_+) \subset \mathfrak{n}_+$ car \tilde{Q} est antisymétrique et $\mathfrak{b}_+^\perp = \mathfrak{n}_+$. De manière similaire on obtient que $\tilde{Q}(\mathfrak{b}_-) \subset \mathfrak{b}_-$ et que $\tilde{Q}(\mathfrak{n}_-) \subset \mathfrak{n}_-$. Donc $\tilde{Q}(\mathfrak{h}) = \tilde{Q}(\mathfrak{b}_+ \cap \mathfrak{b}_-) \subset \mathfrak{b}_+ \cap \mathfrak{b}_- = \mathfrak{h}$. \square

Notons $\mathfrak{c}_\pm = \text{Im} \tilde{Q}^\pm$. De 2.5 on obtient que \mathfrak{c}_\pm sont des sous-algèbres de Lie de \mathfrak{g} et que $\mathfrak{g}_{\pm a} + \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{c}_\pm$ donc $\mathfrak{n}_\pm \subset \mathfrak{c}_\pm$. Alors (cf. Cahen, Gutt et Rawnsley [3] appendice) ceci implique que $\mathfrak{h} + \mathfrak{c}_\pm$ est une sous-algèbre parabolique de \mathfrak{g} contenant \mathfrak{b}_\pm .

Ainsi nous pouvons écrire $\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{c}_+$. Il existe donc $\Gamma_+ \subset \Phi$ tel que

$$\begin{aligned} \mathfrak{h} + \mathfrak{c}_+ &= \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha \oplus \sum_{\gamma \in \hat{\Gamma}_+} \mathfrak{g}^{-\gamma} \\ &= \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \hat{\Gamma}_+} \mathfrak{g}^\alpha \oplus \sum_{\gamma \in \hat{\Gamma}_+} (\mathfrak{g}^\gamma + \mathfrak{g}^{-\gamma}) \end{aligned}$$

où $\hat{\Gamma}_+$ est l'ensemble des racines positives qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de racines simples de Γ_+ .

De plus $\forall \alpha \in \hat{\Gamma}_+ [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}] = \mathbb{C}H_\alpha \subset \mathfrak{h}$.

Donc

$$\mathfrak{h} + \mathfrak{c}_+ = \left(\sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_\pm} H_\alpha \right)^{\perp \beta} + \mathfrak{n}_{\Gamma_+} \oplus \sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_+} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]).$$

Le même raisonnement appliqué à \mathfrak{c}_- donne:

il existe deux sous-ensembles Γ_+ et Γ_- de l'ensemble des racines simple Φ dans Δ^+ tel que

$$\begin{aligned} \mathfrak{c}_+ &= \text{Im}(\tilde{Q} + a) = \mathfrak{n}_{\Gamma_+} \oplus \sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_+} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]) \oplus V^+ \\ \mathfrak{c}_- &= \text{Im}(\tilde{Q} - a) = \mathfrak{n}_{\Gamma_-} \oplus \sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_-} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]) \oplus V^- \end{aligned}$$

où

- $\hat{\Gamma}_+$ (resp. $\hat{\Gamma}_-$) est l'ensemble des racines positives qui peuvent s'écrire comme combinaisons linéaires de racines simples de Γ_+ (resp. Γ_-);
- $\mathfrak{n}_{\Gamma_+} = \sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \hat{\Gamma}_+} \mathfrak{g}^\alpha$, $\mathfrak{n}_{\Gamma_-} = \sum_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \hat{\Gamma}_-} \mathfrak{g}^{-\alpha}$;
- V^\pm est une sous-algèbre de \mathfrak{h} dans $\left(\sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_\pm} H_\alpha \right)^{\perp \beta}$ telle que $(V^\pm)^\perp \subset V^\pm$.

En effet $\sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_-} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}])^\perp = \{0\}$ et $Im(\tilde{Q} + a)^\perp = Ker(\tilde{Q} - a) \subset Im(\tilde{Q} + a)$.

Donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{-a} \supset Ker(\tilde{Q} + a) &= Im(\tilde{Q} - a)^\perp = \mathfrak{n}_{\Gamma_-} + (V^-)^\perp \\ \mathfrak{g}_a \supset Ker(\tilde{Q} - a) &= Im(\tilde{Q} + a)^\perp = \mathfrak{n}_{\Gamma_+} + (V^+)^\perp \end{aligned}$$

De plus d'après la relation 2.6, nous obtenons que $(\tilde{Q} - a)(\tilde{Q} + a)^{-1}$ induit un isomorphisme d'algèbres de Lie, en effet

$$\begin{aligned} &\tilde{Q} + a : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{c}_+ \\ \text{induit } &\overline{\tilde{Q} + a} : \mathfrak{g}/Ker(\tilde{Q} + a) \rightarrow \mathfrak{c}_+ \\ \text{ainsi } &\overline{(\tilde{Q} - a)(\tilde{Q} + a)^{-1}} : \mathfrak{c}_+ / (\mathfrak{c}_+)^\perp \rightarrow \mathfrak{c}_- / (\mathfrak{c}_-)^\perp. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc:

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{c}_+ / (\mathfrak{c}_+)^\perp &= \sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_+} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]) + V^+ / (V^+)^\perp \\ &\rightarrow \mathfrak{c}_- / (\mathfrak{c}_-)^\perp = \sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_-} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]) + V^- / (V^-)^\perp. \end{aligned}$$

Cet isomorphisme induit une application $\tau : \Gamma_+ \rightarrow \Gamma_-$ telle que

$$(\tau(\alpha), \tau(\gamma)) = (\alpha, \gamma), \quad \forall \alpha, \gamma \in \Gamma_+. \quad (2.7)$$

En effet la partie semi-simple de $\mathfrak{c}_+ / (\mathfrak{c}_+)^\perp$ est $\sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_+} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}])$ et celle de $\mathfrak{c}_- / (\mathfrak{c}_-)^\perp$ est $\sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_-} (\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}])$ et θ envoie la partie semi-simple sur la partie semi-simple.

En choisissant des bases de Weyl compatibles, on obtient $\forall \alpha \in \Gamma_+$:

$$\begin{aligned} \theta(H_\alpha) &= H_{\tau(\alpha)} \\ \theta(E_\alpha) &= E_{\tau(\alpha)} \end{aligned}$$

Observons que $(\tilde{Q} + a) : \mathfrak{n}_+ \rightarrow \mathfrak{n}_+$ est une bijection. En effet $\tilde{Q}, (\tilde{Q} + a)$ et $(\tilde{Q} - a)$ envoient \mathfrak{n}_+ dans \mathfrak{n}_+ et \mathfrak{h} dans \mathfrak{h} ; et $Ker(\tilde{Q} + a) \cap \mathfrak{n}_+ = \{0\}$, $Im(\tilde{Q} + a) \supset \mathfrak{n}_+$. De plus on peut écrire:

$$\begin{aligned} \Psi = (\tilde{Q} - a)(\tilde{Q} + a)^{-1} : \mathfrak{n}_+ \rightarrow \mathfrak{n}_+ : &E_\alpha \rightarrow E_{\tau(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \Gamma_+; \\ &E_\gamma \rightarrow 0 \quad \forall \gamma \in \Delta^+ \setminus \hat{\Gamma}_+. \end{aligned}$$

Ans sur \mathfrak{n}_+ , $(1 - \Psi)\tilde{Q} = a(\Psi + 1)$. Et $(1 - \Psi) = 2a(\tilde{Q} + a)^{-1}$ est une application inversible sur \mathfrak{n}_+ .

Lemme 2.7 (Belavin et Drinfeld [1]) *(1 - \Psi) est inversible sur \mathfrak{n}_+ si et seulement si, pour tout $\alpha \in \Gamma_+$, il existe un entier positif k tel que:*

$$\alpha, \tau(\alpha), \dots, \tau^{k-1}(\alpha) \in \Gamma_+ \text{ et } \tau^k(\alpha) \notin \Gamma_+. \quad (2.8)$$

Alors \tilde{Q} sur $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ est obtenu à partir de τ satisfaisant 2.7 et 2.8 par:

$\tilde{Q} = a(1 - \Psi)^{-1}(\Psi + 1) = a(1 + \Psi + \Psi^2 + \dots + \Psi^k + \dots)(1 + \Psi)$ tel que

$$\begin{cases} \tilde{Q}(E_\gamma) = aE_\gamma \quad \forall \gamma \in \Delta^+ \setminus \hat{\Gamma}_+; \\ \tilde{Q}(E_\alpha) = a(E_\alpha + 2 \sum_{\delta > \alpha} E_\delta) \quad \forall \alpha \in \hat{\Gamma}_+ \end{cases}$$

où $\delta > \alpha$ pour $\alpha \in \hat{\Gamma}_+$ signifie qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\tau^k(\alpha) = \delta$.

Finalement \tilde{Q} est complètement déterminé sur \mathfrak{n}_- par

$$\beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y)$$

car \mathfrak{n}_+ et \mathfrak{n}_- sont en dualité. De plus $\tilde{Q}|_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}$ doit vérifier:

$$\beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{h};$$

$$(\tilde{Q} - a)H_\alpha = (\tilde{Q} + a)H_{\tau(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \Gamma_+.$$

En effet $\theta(H_\alpha) = H_{\tau(\alpha)}$ donc si x vérifie $(\tilde{Q} + a)x = H_\alpha$ on a $\theta(H_\alpha) = (\tilde{Q} - a)x + y$ où $y \in \text{Ker}(\tilde{Q} + a)$. Donc $(\tilde{Q} - a)H_\alpha = (\tilde{Q} - a)(\tilde{Q} + a)x = (\tilde{Q} + a)H_{\tau(\alpha)}$. \square

2.1. Existence d'une solution

Dans [3], Cahen, Gutt et Rawnsley ont utilisé l'étude de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard faite par Belavin et Drinfeld [1] pour une algèbre complexe pour obtenir:

Théorème 2.8 *Il existe une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard avec $\lambda < 0$ sur une algèbre de Lie réelle semi-simple \mathfrak{g}_0 si et seulement si \mathfrak{g}_0 est la somme d'idéaux simples qui sont déployés ou complexes ou appartiennent à la liste suivante (cf [19] pour les notations):*

(i) $SU(p, p), SU(p, p + 1),$

(ii) $SO(p, p + 2),$

(iii) $E_{II}.$

Nous nous intéressons au cas $\lambda > 0$ et nous regardons les conditions d'existence des solutions de:

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = \lambda[X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}_0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Proposition 2.9 *Il existe une solution $\tilde{Q} \in \text{End}(\mathfrak{g}_0)$ de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard avec $\lambda > 0$ sur toute algèbre de Lie réelle semi-simple \mathfrak{g}_0 .*

Remarque 2.10 Soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de \mathfrak{g}_0 , soit \mathfrak{h}_0 une sous-algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 telle que \mathfrak{h}_0 contienne un tore maximal \mathfrak{t} de \mathfrak{k} , soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ et

$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$. Soit $X \in \mathfrak{t}$ tel que $\alpha(X) \neq 0 \forall \alpha \in \Delta$ et soit $\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \mid i\alpha(X) > 0\}$. Une solution de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard est donnée par:

$$\tilde{Q}(X) = \begin{cases} aX & \text{si } X \in \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha \\ 0 & \text{si } X \in \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}} \\ -aX & \text{si } X \in \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}; \end{cases} \quad (2.10)$$

où $a^2 = -\lambda$.

Le reste de ce paragraphe est une preuve de la proposition ci-dessus.

PREUVE

Pour obtenir ce résultat nous travaillons sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$, nous étendons \tilde{Q} \mathbb{C} -linéairement à \mathfrak{g} . L'équation vérifiée par \tilde{Q} sur \mathfrak{g} est:

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = \lambda[X, Y], \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Nous utilisons alors l'étude de cette équation par Belavin et Drinfeld [1] qui est reproduite dans la preuve du théorème 2.2

Comme $a^2 = -\lambda$, a est imaginaire pur; \mathfrak{g}_a et \mathfrak{g}_{-a} sont des sous algèbres de \mathfrak{g} qui sont isotropes relativement à β et de plus $\mathfrak{g}_{-a} = \overline{\mathfrak{g}_a}$.

Du reste $\mathfrak{g}' = \sum_{\mu \neq \pm a} \mathfrak{g}_\mu$ est une sous algèbre et $\overline{\mathfrak{g}'} = \mathfrak{g}'$. De plus $\mathfrak{g}_a, \mathfrak{g}_{-a}, \mathfrak{g}', \mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}_{-a} + \mathfrak{g}'$ sont toutes résolubles et $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}' + \mathfrak{g}_{-a}$.

Alors comme $\mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}'$ et $\mathfrak{g}_{-a} + \mathfrak{g}'$ sont résolubles, elles sont contenues dans une sous algèbre de Borel \mathfrak{b}_+ et \mathfrak{b}_- respectivement.

Il existe, donc, une sous algèbre de Borel \mathfrak{b}_+ de \mathfrak{g} telle que $\mathfrak{g}_a + \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{b}_+$ et $\mathfrak{b}_- = \overline{\mathfrak{b}_+}$ est elle aussi une sous algèbre de borel de \mathfrak{g} telle que $\mathfrak{g}_{-a} + \mathfrak{g}' \subset \mathfrak{b}_-$. De plus $\mathfrak{h} = \mathfrak{b}_+ \cap \mathfrak{b}_-$ est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} telle que $\overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$ donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$ où \mathfrak{h}_0 est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 .

Soit $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de \mathfrak{g}_0 compatible avec \mathfrak{h}_0 et soit $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t} + \mathfrak{a}$ la décomposition de \mathfrak{h}_0 correspondante i.e. $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ et $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$.

Notons Δ^+ l'ensemble des racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ telles que les sous espaces radiciels correspondants soient dans \mathfrak{b}_+ .

Notons α' la restriction de $\alpha \in \Delta$ à \mathfrak{h}_0 .

Si $\alpha \in \Delta^+$ alors $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{b}_+$ et $\overline{\mathfrak{g}^\alpha} \subset \overline{\mathfrak{b}_+} = \mathfrak{b}_-$, notons $\mathfrak{g}^{-\tilde{\alpha}} = \overline{\mathfrak{g}^\alpha}$, alors si $H \in \mathfrak{h}_0$ on a que

$$\begin{aligned} \overline{[H, X^\alpha]} &= [\overline{H}, \overline{X^\alpha}] = [H, \overline{X^\alpha}] = -\hat{\alpha}(H)\overline{X^\alpha} \\ &= \frac{\overline{[H, X^\alpha]}}{\alpha(H)X^\alpha} = \overline{\alpha(H)X^\alpha} = \overline{\alpha(H)}\overline{X^\alpha} \text{ pour } X^\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{si } \alpha \in \Delta^+, \overline{\mathfrak{g}^\alpha} = \mathfrak{g}^{-\tilde{\alpha}} \text{ où } -\tilde{\alpha}' = \overline{\alpha'} \text{ et } \tilde{\alpha} \in \Delta^+.$$

Comme $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t} + \mathfrak{a}$ on écrit $\alpha' = \alpha'_{|\mathfrak{t}} + \alpha'_{|\mathfrak{a}}$ ainsi $\overline{\alpha'} = -\alpha'_{|\mathfrak{t}} + \alpha'_{|\mathfrak{a}}$ car sur \mathfrak{t} les racines sont imaginaires pures et sur \mathfrak{a} elles sont réelles.

Du reste $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{k} + i\mathfrak{p}$ est une sous algèbre compacte de \mathfrak{g} et $\mathfrak{t}'' = \mathfrak{t} + i\mathfrak{a}$ est un tore maximal de \mathfrak{g}'' , donc $\alpha \in \Delta^+$ si et seulement si $\exists X \in i\mathfrak{t}''$ tel que $\alpha(X) > 0$. Or un $X \in i\mathfrak{t}''$ s'écrit $X = iZ + Y$ avec $Z \in \mathfrak{t}$ et $Y \in \mathfrak{a}$, donc

$$\alpha(X) = i\alpha(Z) + \alpha(Y) = i\alpha'(Z) + \alpha'(Y) > 0;$$

en conjuguant on obtient:

$$-\bar{\alpha}(X) = -i\alpha(Z) + \alpha(Y) < 0.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{cases} i\alpha'(Z) + \alpha'(Y) > 0 \\ -i\alpha'(Z) + \alpha'(Y) < 0. \end{cases}$$

Il faut donc qu'il existe $Z \in \mathfrak{t}$ tel que $\alpha(Z) \neq 0 \forall \alpha \in \Delta$.

Réciproquement supposons qu'il existe $X \in \mathfrak{t}$ tel que $\alpha(X) \neq 0 \forall \alpha \in \Delta$ alors posons

$$\Delta^+ = \{\alpha \in \Delta \mid i\alpha(X) > 0\}.$$

Soit $b_+ = (\mathfrak{h}_0)^{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$.

Observons que

$$\overline{\sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$$

En effet

$$\begin{aligned} \overline{[X, X^\alpha]} &= [\overline{X}, \overline{X^\alpha}] = [X, \overline{X^\alpha}] \\ &= \overline{\alpha(X)} \overline{X^\alpha} = -\alpha(X) \overline{X^\alpha} \text{ pour } X^\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha \oplus \overline{\sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha}.$$

Posons

$$\tilde{Q}(X) = \begin{cases} aX & \text{si } X \in \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha \\ 0 & \text{si } X \in \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}} \\ -aX & \text{si } X \in \overline{\sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Tout $Z \in \mathfrak{g}$ s'écrit $Z = Z_0 + Z_+ + Z_-$ où $Z_0 \in \mathfrak{h}$, $Z_+ \in \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$, $Z_- \in \overline{\sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha}$.

Du reste

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\overline{Z}) &= \tilde{Q}(\overline{Z_0 + Z_+ + Z_-}) = -a\overline{Z_+} + a\overline{Z_-} \\ \overline{Q(Z)} &= \overline{\tilde{Q}(Z_0 + Z_+ + Z_-)} = a\overline{Z_+} - a\overline{Z_-} \\ &= -a\overline{Z_+} + a\overline{Z_-} \text{ car } a \in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi ce \tilde{Q} défini sur \mathfrak{g} induit un $\tilde{Q} : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0$ linéaire.

Nous voulons voir que \tilde{Q} sur \mathfrak{g}_0 vérifie 2.9.

Remarquons qu'il suffit que \tilde{Q} sur \mathfrak{g} vérifie 2.11 car

$$\beta_{|\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}^{\mathfrak{g}} = \beta^{\mathfrak{g}_0}.$$

Calculons

$$\begin{aligned} \beta(\tilde{Q}X, Y) &= \beta(\tilde{Q}(X_0 + X_+ + X_-), Y_0 + Y_+ + Y_-) \\ &= \beta(aX_+ - aX_-, Y_0 + Y_+ + Y_-) \\ &= a\beta(X_+, Y_-) - a\beta(X_-, Y_+) \\ &= -(\beta(X_+, -aY_-) + \beta(X_-, aY_+)) \\ &= -\beta(X_0 + X_+ + X_-, aY_+ - aY_-) \\ &= -\beta(X, \tilde{Q}(Y)). \end{aligned}$$

La deuxième relation donne:

$$\begin{aligned} & [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] \\ &= [\tilde{Q}(X_0 + X_+ + X_-), \tilde{Q}(Y_0 + Y_+ + Y_-)] - \tilde{Q}[\tilde{Q}(X_0 + X_+ + X_-), Y_0 + Y_+ + Y_-] \\ &\quad - \tilde{Q}[X_0 + X_+ + X_-, \tilde{Q}(Y_0 + Y_+ + Y_-)] \\ &= [aX_0 - aX_-, aY_+ - aY_-] - \tilde{Q}[aX_+ - aX_-, Y_0 + Y_+ + Y_-] \\ &\quad - \tilde{Q}[X_0 + X_+ + X_-, aY_+ - aY_-] \\ &= a^2([X_+, Y_+] - [X_+, Y_-] - [X_-, Y_+] + [X_-, Y_-]) \\ &\quad - a\tilde{Q}([X_+, Y_0] + [X_+, Y_+] + [X_+, Y_-] - [X_-, Y_0] - [X_-, Y_+] - [X_-, Y_-]) \\ &\quad - a\tilde{Q}([X_0, Y_+] - [X_0, Y_-] + [X_+, Y_+] - [X_+, Y_-] + [X_-, Y_+] - [X_-, Y_-]) \\ &= a^2([X_+, Y_+] - [X_+, Y_-] - [X_-, Y_+] + [X_-, Y_-] \\ &\quad - [X_+, Y_0] - [X_+, Y_+] - [X_-, Y_0] - [X_-, Y_-] \\ &\quad - [X_0, Y_+] - [X_0, Y_-] - [X_+, Y_+] - [X_-, Y_-]) \\ &= -a^2([X_0 + X_+ + X_-, Y_0 + Y_+ + Y_-]) \\ &= \lambda[X, Y]. \end{aligned}$$

Nous venons donc de démontrer:

Lemme 2.11 *Il existe une solution de 2.9 si et seulement si il existe $X \in \mathfrak{t}$ tel que $\alpha(X) \neq 0 \forall \alpha \in \Delta$. Et dans ce cas une solution de 2.9 est donnée par 2.10.*

Remarquons que nous pouvons écrire

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\gamma \in P(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})} \mathfrak{k}^{\gamma}$$

avec $\mathfrak{k}^{\gamma} = \{X \in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \mid [t, X] = \gamma(t)X \forall t \in \mathfrak{t}^{\mathbb{C}}\}$.

Soit $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ comme $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} + \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$ tout $X^{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$ peut s'écrire $X^{\alpha} = X_{\mathfrak{k}}^{\alpha} + X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}$.
Soient $t \in \mathfrak{t}$, $b \in \mathfrak{a}$.

Alors

$$[t + b, X^{\alpha}] = \alpha(t + b)X^{\alpha} = \alpha(t + b)(X_{\mathfrak{k}}^{\alpha} + X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}), \quad (2.13)$$

mais

$$[t + b, X^{\alpha}] = [t + b, X_{\mathfrak{k}}^{\alpha} + X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}] = [t, X_{\mathfrak{k}}^{\alpha}] + [t, X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}] + [b, X_{\mathfrak{k}}^{\alpha}] + [b, X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}].$$

Or on a que $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$
d'où

$$[t + b, X^{\alpha}] = \underbrace{[t, X_{\mathfrak{k}}^{\alpha}] + [b, X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}]}_{\in \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}} + \underbrace{[t, X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}] + [b, X_{\mathfrak{k}}^{\alpha}]}_{\in \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}}. \quad (2.14)$$

En identifiant les termes de 2.13 et 2.14 on obtient:

$$\begin{cases} \alpha(t + b)X_{\mathfrak{k}}^{\alpha} = [t, X_{\mathfrak{k}}^{\alpha}] + [b, X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}] \quad \forall t \in \mathfrak{t}, \forall b \in \mathfrak{a} \\ \alpha(t + b)X_{\mathfrak{p}}^{\alpha} = [t, X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}] + [b, X_{\mathfrak{k}}^{\alpha}] \quad \forall t \in \mathfrak{t}, \forall b \in \mathfrak{a}. \end{cases}$$

En particulier pour $b=0$ on trouve:

$$\alpha(t)X_{\mathfrak{k}}^{\alpha} = [t, X_{\mathfrak{k}}^{\alpha}] \quad \forall t \in \mathfrak{t}, \quad (2.15)$$

donc si $X_{\mathfrak{k}}^{\alpha} \neq 0$, $\alpha|_{\mathfrak{t}} \in P(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{t}^{\mathbb{C}})$.

En outre si $X_{\mathfrak{k}}^{\alpha} = 0$ on obtient:

$$[b, X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}] = 0 \quad \forall b \in \mathfrak{a}, \quad (2.16)$$

ce qui signifie que $\alpha|_{\mathfrak{a}} \equiv 0$.

D'autre part on a:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} + \mathfrak{p}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{a}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathbb{C}X_{\mathfrak{k}}^{\alpha} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathbb{C}X_{\mathfrak{p}}^{\alpha}.$$

Donc

$$\mathfrak{a}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathbb{C}X_{\mathfrak{p}}^{\alpha} = \mathfrak{p}^{\mathbb{C}}$$

et

$$\mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathbb{C}X_{\mathfrak{k}}^{\alpha} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}.$$

Lemme 2.12 (Il existe $X \in \mathfrak{t}$ tel que $\alpha(X) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$) est équivalent au fait que \mathfrak{t} est un tore maximal de \mathfrak{k} .

PREUVE

Avoir un $X \in \mathfrak{t}$ tel que $\alpha(X) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta$ implique que \mathfrak{t} est un tore maximal de \mathfrak{k} .

En effet on a $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{t}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \mathbb{C}X_{\mathfrak{k}}^{\alpha}$ et $[t, X_{\mathfrak{k}}^{\alpha}] = \alpha(t)X_{\mathfrak{k}}^{\alpha}$, donc le centralisateur de X dans $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ est égal à $\mathfrak{t}^{\mathbb{C}}$.

Réciproquement si \mathfrak{t} est un tore maximal de \mathfrak{k} . Soit $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ tel que $\alpha|_{\mathfrak{t}} \equiv 0$ alors par le même calcul 2.15 que ci-dessus, on obtient:

$$X_{\mathfrak{t}}^{\alpha} = 0 \quad \forall X^{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha},$$

donc $\alpha|_{\mathfrak{a}} \equiv 0$ d'après 2.16, mais ceci est impossible car $\alpha|_{\mathfrak{h}} \neq 0$. Donc il n'existe aucune racine qui s'annule identiquement sur \mathfrak{t} .

De plus pour tout $\alpha \in \Delta$, $\alpha|_{\mathfrak{t}}$ est une application linéaire non identiquement nulle $\alpha|_{\mathfrak{t}} : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{C}$ et le noyau de $\alpha|_{\mathfrak{t}}$ est un hyperplan de \mathfrak{t} . L'intersection de tous ces hyperplans lorsque α parcourt Δ est une intersection finie d'hyperplans, il existe donc des points de \mathfrak{t} où tous les $\alpha \in \Delta$ ne s'annulent pas.

Donc si \mathfrak{t} est un tore maximal de \mathfrak{k} , il existe $X \in \mathfrak{t}$ tel que $\alpha(X) \neq 0 \quad \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$. \square

Ceci nous donne le résultat cité au début. \square

Remarque 2.13 Si \mathfrak{t} est un tore maximal alors \mathfrak{t} contient le centre de \mathfrak{k} .

Remarque 2.14 Il est toujours possible de considérer une sous algèbre de Cartan \mathfrak{h}_0 de \mathfrak{g}_0 qui contient un tore maximal \mathfrak{t} de \mathfrak{k} où $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de \mathfrak{g}_0 .

En effet on prend \mathfrak{t} un tore maximal de \mathfrak{k} donc \mathfrak{t} est une sous algèbre abélienne maximale de \mathfrak{g}_0 et si $X \in \mathfrak{t}$ alors X est ad semi-simple; de plus $[\mathfrak{t}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}$ et $[\mathfrak{t}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}$. On complète \mathfrak{t} en une sous algèbre de Cartan \mathfrak{h}_0 de \mathfrak{g}_0 donnée par $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{t} + \mathfrak{a}$ où \mathfrak{a} est une sous algèbre abélienne de \mathfrak{p} .

2.2. Recherche de toutes les solutions

Nous cherchons toutes les solutions de l'équation:

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = \lambda[X, Y] \text{ avec } \lambda \neq 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

pour $X, Y \in \mathfrak{g}_0$, $\tilde{Q} \in \text{End}(\mathfrak{g}_0)$ lorsque \mathfrak{g}_0 est une algèbre de Lie semi-simple réelle.

Pour trouver toutes ces solutions nous travaillons sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$, nous étendons \tilde{Q} \mathbb{C} -linéairement à \mathfrak{g} . L'équation vérifiée par \tilde{Q} sur \mathfrak{g} est:

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = \lambda[X, Y] \text{ avec } \lambda \neq 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

Alors les solutions de 2.17 sont les solutions \tilde{Q} de 2.18 telles que $\tilde{Q} \in \text{End}(\mathfrak{g}_0)$ c'est à dire que $\overline{\tilde{Q}(X)} = \tilde{Q}(\overline{X}) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$.

Nous considérons donc les solutions complexes obtenues par Belavin et Drinfeld théorème 2.2 telles que $\overline{\tilde{Q}(X)} = \tilde{Q}(\overline{X}) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$.

Cas $\lambda > 0$

Nous cherchons toutes les solutions de 2.17 avec $\lambda > 0$.

Lemme 2.15 Dans le cas $\lambda > 0$, la sous-algèbre de Cartan et les autres objets $(\Delta^+, \Gamma_+, \Gamma_-, \tau)$ intervenant dans le théorème 2.2, peuvent être choisis tels que:

1. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$, où \mathfrak{h}_0 est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g}_0 contenant un tore maximal de \mathfrak{k} où $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de \mathfrak{g}_0 ,
2. $\overline{\mathfrak{g}^\alpha} = \mathfrak{g}^{-\tilde{\alpha}}$ où $-\tilde{\alpha}|_{\mathfrak{h}_0} = \bar{\alpha}|_{\mathfrak{h}_0}$ ainsi $\overline{E_\alpha} = \lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}}$,
3. $\Gamma_- = \{\tilde{\alpha} \text{ quand } \alpha \in \Gamma_+\}$,
4. $\overline{H_\alpha} = -H_{\tilde{\alpha}}$ pour $\alpha \in \Delta$,
5. $\tilde{Q}(E_{-\alpha}) = -aE_{-\alpha} - 2a \sum_{\nu < \alpha} E_{-\nu}$.

PREUVE Nous considérons les solutions du théorème 2.2 et vérifiant $\overline{\tilde{Q}(X)} = \tilde{Q}(\overline{X})$ $\forall X \in \mathfrak{g}$.

- Les points 1 et 2 résultent de la démonstration de la proposition 2.9 qui reprend la construction de \mathfrak{h} de Belavin et Drinfeld [1] (voir preuve du théorème 2.2).
- pour 3: on rappelle que dans la preuve du théorème 2.2, $c_+ = \text{Im}(\tilde{Q} + a)$ et $c_- = \text{Im}(\tilde{Q} - a)$. Or ici $c_- = \overline{c_+}$ donc $\hat{\Gamma}_+ = \hat{\Gamma}_-$ c'est à dire que $\hat{\Gamma}_- = \{\tilde{\alpha} \text{ quand } \alpha \in \Gamma_+\}$, ainsi $\hat{\Gamma}_-$ est déterminé à partir de $\hat{\Gamma}_+$ et $\Gamma_- = \{\tilde{\alpha} \text{ quand } \alpha \in \Gamma_+\}$.

- pour 4:

comme $\beta(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ on a: $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$

ainsi

$$\begin{aligned} \overline{[E_\alpha, E_{-\alpha}]} &= \overline{H_\alpha} \quad \forall \alpha \in \Delta \\ \parallel \\ \overline{[E_\alpha, E_{-\alpha}]} &= [\lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}}, \lambda_{-\alpha} E_{\tilde{\alpha}}] \\ &= \lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} [E_{-\tilde{\alpha}}, E_{\tilde{\alpha}}] \\ &= -\lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} H_{\tilde{\alpha}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\overline{H_\alpha} = -\lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} H_{\tilde{\alpha}}.$$

De plus $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$

donc

$$\begin{aligned} \overline{[H, E_\alpha]} &= \overline{\alpha(H)E_\alpha} \\ &= \overline{\alpha(H)E_\alpha} \\ &= \alpha(H)\lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}} \\ \parallel \\ \overline{[H, E_\alpha]} &= [\overline{H}, \lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}}] \\ &= -\lambda_\alpha \tilde{\alpha}(\overline{H})E_{-\tilde{\alpha}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\overline{\alpha(H)} = -\tilde{\alpha}(\overline{H}).$$

Alors comme $\beta(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ et que β sur \mathfrak{g} est l'extension \mathbb{C} -linéaire de β sur \mathfrak{g}_0 on a:

$$\begin{aligned} \overline{\beta(H_\alpha, H)} &= \overline{\alpha(H)} \\ &= -\tilde{\alpha}(\overline{H}) \\ &\parallel \\ \beta(\overline{H_\alpha}, \overline{H}) &= -\lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} \beta(H_\alpha, \overline{H}) \\ &= -\lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} \tilde{\alpha}(\overline{H}). \end{aligned}$$

On obtient donc que $\lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} = 1$

ainsi

$$\overline{H_\alpha} = -H_\alpha \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

- pour 5:

$$\text{On a } \beta(\tilde{Q}(Y), X) = Q(\hat{\beta}(X), \hat{\beta}(Y))$$

d'où pour $\gamma \in \Delta^+$

$$\begin{aligned} \beta(\tilde{Q}(E_\gamma), E_{-\gamma}) &= Q(-\gamma, \gamma) \\ &= a \left(\sum_{\alpha \in \Delta^+} E_{-\alpha} \wedge E_\alpha + 2 \sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_+, \alpha < \nu} E_{-\nu} \wedge E_\alpha \right) (-\gamma, \gamma) \text{ cf 2.2} \\ &= a + 2a \sum_{\gamma < \nu} \langle -\gamma, E_\nu \rangle \\ &= a \left(\beta(E_\gamma, E_{-\gamma}) + 2 \sum_{\gamma < \nu} \beta(E_{-\gamma}, E_\nu) \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\tilde{Q}(E_\gamma) = a(E_\gamma + 2 \sum_{\gamma < \nu} E_\nu) \quad \forall \gamma \in \Delta_+$$

où $\sum_{\nu > \gamma} E_\nu = 0$ si $\gamma \in \Delta_+ \setminus \hat{\Gamma}_+$.

Nous déterminons \tilde{Q} sur $\mathfrak{n}_- = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ en utilisant $\beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y)$.

Si $\alpha \in \Delta^+$, $\gamma \in \Delta^+$

$$\begin{aligned} \beta(\tilde{Q}E_{-\alpha}, E_\gamma) &= -\beta(E_{-\alpha}, \tilde{Q}E_\gamma) \\ &= -\beta(E_{-\alpha}, a(E_\gamma + 2 \sum_{\nu > \gamma} E_\nu)) \\ &= \begin{cases} -a\delta_{\gamma, \alpha} \\ -2a\delta_{\alpha, \nu} \text{ où } \nu > \gamma. \end{cases} \end{aligned}$$

De plus on sait que $\tilde{Q}\mathfrak{n}_- \subset \mathfrak{n}_-$

donc

$$\tilde{Q}E_{-\alpha} = \sum_{\eta \in \Delta^+} b_\eta E_{-\eta}$$

c'est à dire $\beta(\tilde{Q}E_{-\alpha}, E_\gamma) = b_\gamma$.

Alors

$$\tilde{Q}E_{-\alpha} = -aE_{-\alpha} - 2a \sum_{\nu < \alpha} E_{-\nu}$$

où $\sum_{\nu < \alpha} E_{-\nu}$ n'a de sens que pour $\nu \in \hat{\Gamma}_+$.

□

Remarque 2.16 Le point 5 est un résultat général qui ne dépend pas du signe de λ .

Toutes les solutions sont données par le théorème suivant:

Théorème 2.17 Soit \mathfrak{g}_0 une algèbre de Lie réelle semi-simple et soit $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}_0$ satisfaisant

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = \lambda[X, Y] \text{ avec } \lambda > 0. \end{cases}$$

Alors, il existe une sous algèbre de Cartan \mathfrak{h}_0 de \mathfrak{g}_0 qui contient un tore maximal de \mathfrak{k} où $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de \mathfrak{g}_0 , un système de racines positives Δ^+ de $(\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}})$ tel que $\overline{\mathfrak{g}^\alpha} = \mathfrak{g}^{-\tilde{\alpha}}$ où $\tilde{\alpha} \in \Delta^+$ si $\alpha \in \Delta^+$, un sous-ensemble Γ_+ de l'ensemble Φ des racines simples correspondant à Δ^+ et une application $\tau : \Gamma_+ \rightarrow \Gamma_- = \{\tilde{\alpha} \text{ quand } \alpha \in \Gamma_+ \text{ avec } -\tilde{\alpha}|_{\mathfrak{h}_0} = \bar{\alpha}|_{\mathfrak{h}_0}\}$ satisfaisant à:

$$(1) \langle \tau(\alpha), \tau(\nu) \rangle = \langle \alpha, \nu \rangle, \forall \alpha, \nu \in \Gamma_+,$$

$$(2) \forall \alpha \in \Gamma_+, \text{ il existe un entier positif } k \text{ tel que } \tau^l(\alpha) \in \Gamma_+, \forall l < k \text{ and } \tau^k(\alpha) \notin \Gamma_+,$$

$$(3) \tau(\alpha) = \tilde{\nu} \Rightarrow \tau(\nu) = \tilde{\alpha} \forall \alpha \in \Gamma_+,$$

et tels que, pour un choix d'une base de Weyl E_α dans \mathfrak{g}^α satisfaisant $\beta(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ et $\overline{E_\alpha} = \lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}}$ en posant

$$(4) \lambda_{\tau(\alpha)} = \lambda_\alpha \forall \alpha \in \Gamma_+$$

on ait:

$$Q = Q_0 + a \left(\sum_{\alpha \in \Delta^+} E_{-\alpha} \wedge E_\alpha + 2 \sum_{\alpha \in \hat{\Gamma}_+, \alpha < \nu} E_{-\nu} \wedge E_\alpha \right)$$

où $a^2 = -\lambda$ et $Q_0 \in \Lambda^2 \mathfrak{h}_0$ est déterminé par $Q(\alpha, \nu)$, $\forall \alpha, \nu \in \Phi$ et celui-ci doit vérifier:

$$(5) Q(\tau(\alpha), \nu) = Q(\alpha, \nu) - a(\langle \alpha, \nu \rangle + \langle \tau(\alpha), \nu \rangle), \forall \alpha \in \Gamma_+, \forall \nu \in \Phi,$$

$$(6) \tilde{Q}(H_{\tilde{\alpha}}) = -\overline{\tilde{Q}(H_\alpha)} \forall \alpha.$$

PREUVE

On veut qu'un \tilde{Q} solution du théorème 2.2 satisfasse $\tilde{Q}(\overline{X}) = \overline{\tilde{Q}(X)} \forall X \in \mathfrak{g}$
En particulier pour $X = E_\alpha$ on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\overline{E_\alpha}) &= \tilde{Q}(\lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}}) \\ &= \lambda_\alpha \tilde{Q}(E_{-\tilde{\alpha}}) \\ &= -a\lambda_\alpha \left(E_{-\tilde{\alpha}} + 2 \sum_{\gamma < \tilde{\alpha}} E_{-\gamma} \right) \\ &= \overline{\tilde{Q}(E_\alpha)}. \end{aligned}$$

- 1^{ier} cas:

Si $\alpha \in \hat{\Gamma}_+$ et $\tau(\alpha) = \tilde{\nu} \in \hat{\Gamma}_-$, $\tilde{\nu} \notin \hat{\Gamma}_+$ alors

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{Q}(E_\alpha)} &= \overline{a(E_\alpha + 2E_{\tilde{\nu}})} \\ &= -a(\overline{E_\alpha} + 2\overline{E_{\tilde{\nu}}}) \quad (\tilde{\nu} = \tau(\alpha)) \\ &= -a(\lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}} + 2\lambda_{\tau(\alpha)} E_{-\tilde{\nu}}) \\ \text{et } \tilde{Q}(\overline{E_\alpha}) &= -a\lambda_\alpha \left(E_{-\tilde{\alpha}} + 2 \sum_{\gamma < \tilde{\alpha}} E_{-\gamma} \right). \end{aligned}$$

Il faut et il suffit que

$$\lambda_{\tau(\alpha)} = \lambda_\alpha \text{ et que } \tau(\nu) = \tilde{\alpha}.$$

- 2^{ième} cas:

Nous faisons une récurrence: supposons que

$\forall \alpha \in \hat{\Gamma}_+$ tel que $\tau^l(\alpha) \in \hat{\Gamma}_+$ $l = 1, \dots, k-1$, $\tau^k(\alpha) \notin \hat{\Gamma}_+$, $\tau^k(\alpha) = \tilde{\nu} \in \hat{\Gamma}_-$ on ait:

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \lambda_{\tau(\alpha)} = \dots = \lambda_{\tau^k(\alpha)} \\ \text{et } \tau^p(\nu) &= (\tau^{k-p}(\alpha))^\sim \quad p = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Nous démontrons cela à l'ordre $k+1$:

soit $\alpha \in \hat{\Gamma}_+$ tel que $\tau^l(\alpha) \in \hat{\Gamma}_+$ $l = 1, \dots, k$ et $\tau^{k+1}(\alpha) = \tilde{\nu} \notin \hat{\Gamma}_+$.

On applique l'hypothèse de récurrence à $\tau(\alpha)$

on a alors:

$$\begin{aligned} \lambda_{\tau(\alpha)} = \dots = \lambda_{\tau^{k+1}(\alpha)} \text{ et } \tau^p(\nu) &= (\tau^{k-p}(\tau\alpha))^\sim \quad p = 1, \dots, k \\ &= (\tau^{k+1-p}(\alpha))^\sim \quad p = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\overline{\tilde{Q}(E_\alpha)} &= \overline{a(E_\alpha + 2E_{\tau(\alpha)} + \cdots + 2E_{\tau^{k+1}(\alpha)})} \\
&= -a(\lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}} + 2\lambda_{\tau(\alpha)} E_{(\tau(\alpha))^\sim} + \cdots + 2\lambda_{\tau^{k+1}(\alpha)} E_{(\tau^{k+1}(\alpha))^\sim}) \\
&= -a(\lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}} + 2\lambda_{\tau(\alpha)} E_{-\tau^k(\nu)} + \cdots + 2\lambda_{\tau^{k+1}(\alpha)} E_{-\nu}) \\
\tilde{Q}(\overline{E_\alpha}) &= \lambda_\alpha \tilde{Q}(E_{-\tilde{\alpha}}) \\
&= -a\lambda_\alpha (E_{-\tilde{\alpha}} + 2 \sum_{\gamma < \tilde{\alpha}} E_{-\gamma}).
\end{aligned}$$

Pour avoir l'égalité il faut et il suffit que:

$$\lambda_\alpha = \lambda_{\tau(\alpha)} = \cdots = \lambda_{\tau^{k+1}(\alpha)} \text{ et que } \tau(\tau^k(\nu)) = \tilde{\alpha} \text{ c'est à dire } \tau^{k+1}(\nu) = \tilde{\alpha}.$$

Ainsi on obtient toujours que si $\tau(\alpha) = \tilde{\nu}$ alors $\tau(\nu) = \tilde{\alpha}$ et $\lambda_{\tau(\alpha)} = \lambda_\alpha$.

On veut aussi que $\tilde{Q}(\overline{X}) = \overline{\tilde{Q}(X)} \forall X \in \mathfrak{h}$. Ceci donne

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}(\overline{H_\alpha}) &= \overline{\tilde{Q}(H_\alpha)} \\
&\parallel \\
&= -\tilde{Q}(H_{\tilde{\alpha}}).
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc les trois conditions citées.

Comme $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ forme une base de \mathfrak{h} et que $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+\}$ forme une base de $\sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$ les conditions sont suffisantes pour que $\tilde{Q}(\overline{X}) = \overline{\tilde{Q}(X)} \forall X \in \mathfrak{g}$. \square

Remarque 2.18 Si $\tau(\alpha) = \tilde{\alpha}$ alors $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$.

En effet on a

$$\begin{aligned}
\overline{E_\alpha} &= \lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}} \\
\overline{E_{\tilde{\alpha}}} &= \lambda_{\tilde{\alpha}} E_{-\alpha} = \lambda_\alpha E_{-\alpha} \\
\text{de plus } \beta(E_\alpha, E_{-\alpha}) &= 1 = \beta\left(\overline{\lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}}}, \frac{1}{\lambda_\alpha} \overline{E_{\tilde{\alpha}}}\right) \\
&= \frac{\overline{\lambda_\alpha}}{\lambda_\alpha} \beta(E_{-\tilde{\alpha}}, E_{\tilde{\alpha}}) = \frac{\overline{\lambda_\alpha}}{\lambda_\alpha}.
\end{aligned}$$

Donc $\overline{\lambda_\alpha} = \lambda_\alpha$ ainsi $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.19 Si $\tau(\alpha) = \tilde{\nu}$ et $\tau(\nu) = \tilde{\alpha}$ alors $\lambda_{\tilde{\alpha}} = \overline{\lambda_\alpha}$ et $\lambda_{\tilde{\nu}} = \overline{\lambda_\nu}$.

En effet on a déjà que $\lambda_{\tilde{\nu}} = \lambda_\alpha$ et $\lambda_\nu = \lambda_{\tilde{\alpha}}$, en plus comme $\overline{E_\alpha} = \lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}}$ et $\overline{E_{\tilde{\alpha}}} = \lambda_{\tilde{\alpha}} E_{-\alpha}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\beta(E_\alpha, E_{-\alpha}) &= 1 = \beta\left(\overline{\lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}}}, \frac{1}{\lambda_\nu} \overline{E_{\tilde{\alpha}}}\right) \\
&= \frac{\overline{\lambda_\alpha}}{\lambda_\nu}.
\end{aligned}$$

Donc $\bar{\lambda}_\alpha = \lambda_\nu$.

De même

$$\begin{aligned}\beta(E_\nu, E_{-\nu}) &= 1 = \beta\left(\overline{\lambda_\nu E_{-\tilde{\nu}}}, \frac{1}{\lambda_\alpha} \overline{E_{\tilde{\nu}}}\right) \\ &= \frac{\bar{\lambda}_\nu}{\lambda_\alpha}.\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda_{\tilde{\nu}} = \lambda_\alpha = \bar{\lambda}_\nu$ et $\lambda_{\tilde{\alpha}} = \lambda_\nu = \bar{\lambda}_\alpha$.

Remarque 2.20 Si $\tau(\alpha) = \tilde{\alpha}$ alors $\tilde{Q}(H_\alpha - aH_\alpha) \in i\Lambda^2\mathfrak{h}_0$.

En effet d'après le théorème 2.2 Q sur \mathfrak{h} est déterminé par:

$$Q(\tau(\alpha), \nu) = Q(\alpha, \nu) - a\left(\langle \alpha, \nu \rangle + \langle \tau(\alpha), \nu \rangle\right) \quad \forall \alpha \in \Gamma_+, \quad \forall \nu \in \Phi. \quad (2.19)$$

Or $\langle \alpha, \nu \rangle = \beta(H_\alpha, H_\nu)$.

On obtient pour 2.19:

$$\begin{aligned}Q(\tau(\alpha), \nu) &= Q(\alpha, \nu) - a\left(\beta(H_\alpha, H_\nu) + \beta(H_{\tau(\alpha)}, H_\nu)\right) \\ &= Q(\alpha, \nu) - a\left(\langle \hat{\beta}(H_\alpha), H_\nu \rangle + \langle \hat{\beta}(H_{\tau(\alpha)}), H_\nu \rangle\right).\end{aligned} \quad (2.20)$$

Calculons $\hat{\beta}(H_\alpha)$:

$$\langle \hat{\beta}(H_\alpha), X \rangle = \beta(H_\alpha, X) = \langle \alpha, X \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{h}.$$

Ainsi $\hat{\beta}(H_\alpha) = \alpha$ sur \mathfrak{h} .

D'où

$$\begin{aligned}Q(\tau(\alpha), \nu) &= Q\left(\hat{\beta}(H_{\tau(\alpha)}), \hat{\beta}(H_\nu)\right) \\ &= \beta\left(\tilde{Q}(H_{\tau(\alpha)}), H_\nu\right) \text{ d'après 2.3.}\end{aligned}$$

On obtient alors pour 2.20:

$$\beta\left(\tilde{Q}(H_{\tau(\alpha)}), H_\nu\right) = \beta\left(\tilde{Q}(H_\alpha), H_\nu\right) - a\left(\beta(H_\alpha, H_\nu) + \beta(H_{\tau(\alpha)}, H_\nu)\right).$$

C'est à dire:

$$\tilde{Q}(H_{\tau(\alpha)}) = \tilde{Q}(H_\alpha) - a(H_\alpha + H_{\tau(\alpha)}).$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(H_\alpha) - aH_\alpha - aH_{\tau(\alpha)} &= \tilde{Q}(H_{\tilde{\alpha}}) \text{ car } \tilde{\alpha} = \tau(\alpha) \\ &= -\overline{\tilde{Q}(H_\alpha)} \text{ car } \tilde{Q}(H_{\tilde{\alpha}}) = -\overline{\tilde{Q}(H_\alpha)}.\end{aligned}$$

de plus comme $H_{\tau(\alpha)} = H_{\tilde{\alpha}} = -\overline{H_\alpha}$

on obtient:

$$\begin{aligned}\overline{\tilde{Q}(H_\alpha)} + a\overline{H_\alpha} &= aH_\alpha - \tilde{Q}(H_\alpha) \\ \overline{\tilde{Q}(H_\alpha)} - aH_\alpha &= -(\tilde{Q}(H_\alpha) - aH_\alpha).\end{aligned}$$

Ainsi $\tilde{Q}(H_\alpha) - aH_\alpha \in i\Lambda^2\mathfrak{h}_0$.

Cas $\lambda < 0$

Nous cherchons toutes les solutions de 2.17 avec $\lambda < 0$.

Ces solutions sont les solutions du théorème 2.2 et qui vérifient en plus $\overline{\tilde{Q}(X)} = \tilde{Q}(\overline{X})$
 $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Lemme 2.21 *Quand $\lambda < 0$, s'il existe une solution, les choix de $\mathfrak{h}, \Delta^+, \Gamma_+, \Gamma_-, \tau$ peuvent être faits tels que :*

1. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$,
2. $\overline{\mathfrak{g}^\alpha} = \mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}}$ où $\tilde{\alpha}|_{\mathfrak{h}_0} = \overline{\alpha}|_{\mathfrak{h}_0}$ ainsi $\overline{E_\alpha} = \lambda_\alpha E_{\tilde{\alpha}}$,
3. $\overline{H_\alpha} = H_{\tilde{\alpha}}$ pour $\alpha \in \Delta$,
4. $\tilde{Q}(E_{-\alpha}) = -aE_{-\alpha} - 2a \sum_{\nu < \alpha} E_{-\nu}$.

PREUVE Nous utilisons la preuve du théorème 2.2 de Belavin et Drinfeld [1].

- pour 1:

$\lambda < 0$ donc comme $a^2 = -\lambda$, a est réel, ainsi

$$\mathfrak{g}_a = (\mathfrak{g}_a^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{g}_{-a} = (\mathfrak{g}_{-a}^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{g}' = (\mathfrak{g}'^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{b}_+ = (\mathfrak{b}_+^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}, \quad \mathfrak{b}_- = (\mathfrak{b}_-^{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$$

de plus $\mathfrak{b}_+ = \overline{\mathfrak{b}_+}$ et $\mathfrak{b}_- = \overline{\mathfrak{b}_-}$

donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}}$.

- pour 2:

Si $\alpha \in \Delta^+$ alors $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{b}_+$ et $\overline{\mathfrak{g}^\alpha} \subset \overline{\mathfrak{b}_+} = \mathfrak{b}_+$ du reste si $H \in \mathfrak{h}_0$ on a que

$$\begin{aligned} \overline{[H, X_\alpha]} &= \overline{[H, X_\alpha]} \\ &= [H, \overline{X_\alpha}] \\ &= \tilde{\alpha}(H) X_\alpha \\ \parallel \\ \overline{\alpha(H) X_\alpha} &= \overline{\alpha(H)} \overline{X_\alpha} \text{ pour } X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi $\overline{\mathfrak{g}^\alpha} = \mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}}$ où $\tilde{\alpha}|_{\mathfrak{h}_0} = \overline{\alpha}|_{\mathfrak{h}_0}$ et $\tilde{\alpha} \in \Delta^+$ c'est à dire $\overline{E_\alpha} = \lambda_\alpha E_{\tilde{\alpha}}$.

- pour 3:

comme $\beta(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ on a $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$

ainsi

$$\begin{aligned} \overline{[E_\alpha, E_{-\alpha}]} &= \overline{H_\alpha} \quad \forall \alpha \in \Delta \\ \parallel \\ \overline{[E_\alpha, E_{-\alpha}]} &= [\lambda_\alpha E_{\tilde{\alpha}}, \lambda_{-\alpha} E_{-\tilde{\alpha}}] \\ &= \lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} [E_{\tilde{\alpha}}, E_{-\tilde{\alpha}}] \\ &= \lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} H_{\tilde{\alpha}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\overline{H_\alpha} = \lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} H_{\tilde{\alpha}}.$$

De plus $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$

donc

$$\begin{aligned} \overline{[H, E_\alpha]} &= \overline{\alpha(H)E_\alpha} \\ &= \overline{\alpha(H)\overline{E_\alpha}} \\ &= \overline{\alpha(H)\lambda_\alpha E_{\tilde{\alpha}}} \\ &\parallel \\ \overline{[H, E_\alpha]} &= [\overline{H}, \lambda_\alpha \overline{E_{\tilde{\alpha}}}] \\ &= \lambda_\alpha \tilde{\alpha}(\overline{H}) \overline{E_{\tilde{\alpha}}}. \end{aligned}$$

D'où

$$\overline{\alpha(H)} = \tilde{\alpha}(\overline{H}).$$

Alors comme $\beta(H_\alpha, H) = \alpha(H)$ et que β sur \mathfrak{g} est l'extension \mathbb{C} -linéaire de β sur \mathfrak{g}_0 on a:

$$\begin{aligned} \overline{\beta(H_\alpha, H)} &= \overline{\alpha(H)} \\ &= \tilde{\alpha}(\overline{H}) \\ &\parallel \\ \beta(\overline{H_\alpha}, \overline{H}) &= \lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} \beta(H_{\tilde{\alpha}}, \overline{H}) \\ &= \lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} \tilde{\alpha}(\overline{H}). \end{aligned}$$

On obtient donc que $\lambda_\alpha \lambda_{-\alpha} = 1$

ainsi

$$\overline{H_\alpha} = H_{\tilde{\alpha}} \quad \forall \alpha \in \Delta.$$

- pour 4 voir la remarque 2.16.

□

Toutes les solutions sont données par le théorème suivant:

Théorème 2.22 *Soit \mathfrak{g}_0 une algèbre de Lie réelle semi-simple de la forme du théorème 2.8 et soit $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}_0$ satisfaisant*

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = \lambda[X, Y] \text{ avec } \lambda < 0. \end{cases}$$

Alors, il existe une sous algèbre de Cartan \mathfrak{h}_0 de \mathfrak{g}_0 , un système de racines positives Δ^+ de $(\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_0^{\mathbb{C}})$, deux sous-ensembles Γ_+ et Γ_- de l'ensemble Φ des racines simples correspondant à Δ^+ et une application $\tau : \Gamma_+ \rightarrow \Gamma_-$, satisfaisant

- (1) $\langle \tau(\alpha), \tau(\nu) \rangle = \langle \alpha, \nu \rangle, \quad \forall \alpha, \nu \in \Gamma_+,$
- (2) $\forall \alpha \in \Gamma_+, \text{ il existe un entier positif } k \text{ tel que } \tau^l(\alpha) \in \Gamma_+, \quad \forall l < k \text{ and } \tau^k(\alpha) \notin \Gamma_+,$
- (3) $\tau^k(\alpha) \in \Gamma_+ \iff \tau^k(\tilde{\alpha}) \in \Gamma_+,$

$$(4) \quad \tau(\tilde{\alpha}) = \widetilde{\tau(\alpha)} \quad \forall \alpha \in \Gamma_+,$$

tels que, pour un choix d'une base de Weyl E_α dans \mathfrak{g}^α satisfaisant $\beta(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ et $\overline{E_\alpha} = \lambda_\alpha E_{-\tilde{\alpha}}$ en posant

$$(5) \quad \lambda_{\tau(\alpha)} = \lambda_\alpha \quad \forall \alpha \in \Gamma_+.$$

on ait:

$$Q = Q_0 + a \left(\sum_{\alpha \in \Delta^+} E_{-\alpha} \wedge E_\alpha + 2 \sum_{\alpha \in \Gamma_+, \alpha < \nu} E_{-\nu} \wedge E_\alpha \right)$$

où $a^2 = -\lambda$ et $Q_0 \in \Lambda^2 \mathfrak{h}_0$ est déterminé par $Q(\alpha, \nu)$, $\forall \alpha, \nu \in \Phi$ et celui-ci doit vérifier:

$$(6) \quad Q(\tau(\alpha), \nu) = Q(\alpha, \nu) - a(\langle \alpha, \nu \rangle + \langle \tau(\alpha), \nu \rangle), \quad \forall \alpha \in \Gamma_+, \quad \forall \nu \in \Phi.$$

$$(7) \quad \tilde{Q}(H_{\tilde{\alpha}}) = -\overline{\tilde{Q}(H_\alpha)} \quad \forall \alpha.$$

PREUVE

On veut qu'un \tilde{Q} solution du théorème 2.2 satisfasse $\tilde{Q}(\overline{X}) = \overline{\tilde{Q}(X)} \quad \forall X \in \mathfrak{g}$
En particulier pour $X = E_\alpha$ on obtient:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\overline{E_\alpha}) &= \tilde{Q}(\lambda_\alpha E_{\tilde{\alpha}}) \\ &= \lambda_\alpha \tilde{Q}(E_{\tilde{\alpha}}) \\ &= a \lambda_\alpha \left(E_{\tilde{\alpha}} + 2 \sum_{\gamma > \tilde{\alpha}} E_\gamma \right) \\ &= \overline{\tilde{Q}(E_\alpha)} \\ &= \overline{\left(a E_\alpha + 2a \sum_{\nu > \alpha} E_\nu \right)} \\ &= a \overline{E_\alpha} + 2a \sum_{\nu > \alpha} \overline{E_\nu} \\ &= a \lambda_\alpha E_{\tilde{\alpha}} + 2a \sum_{\nu > \alpha} \lambda_\nu E_{\tilde{\nu}}. \end{aligned}$$

Supposons que

$$\begin{aligned} \tau^k(\tilde{\alpha}) &\in \Gamma_+ \text{ pour } k = 1, \dots, l-1 \text{ et } \tau^l(\tilde{\alpha}) \notin \Gamma_+ \\ \text{et que } \tau^i(\alpha) &\in \Gamma_+ \text{ pour } i = 1, \dots, j-1 \text{ et } \tau^j(\alpha) \notin \Gamma_+. \end{aligned}$$

On obtient:

$$\begin{aligned} a \lambda_\alpha E_{\tilde{\alpha}} + 2a \lambda_\alpha E_{\tau(\tilde{\alpha})} + \dots + 2a \lambda_\alpha E_{\tau^l(\tilde{\alpha})} = \\ a \lambda_\alpha E_{\tilde{\alpha}} + 2a \lambda_{\tau(\alpha)} E_{\widetilde{\tau(\alpha)}} + \dots + 2a \lambda_{\tau^j(\alpha)} E_{\widetilde{\tau^j(\alpha)}}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Une telle égalité ne peut avoir lieu que si $j=1$, ceci nous donne 3.

Nous faisons une démonstration par récurrence sur l pour obtenir 4 et 5.

- 1^{ier} pas: pour $l=1$

Si $\alpha \in \Gamma_+$ et $\tau(\alpha) \notin \Gamma_+$, alors par 3 on sait que $\tilde{\alpha} \in \Gamma_+$ et $\tau(\tilde{\alpha}) \notin \Gamma_+$.

L'égalité 2.21 s'écrit:

$$\lambda_\alpha E_{\tau(\tilde{\alpha})} = \lambda_{\tau(\alpha)} E_{\tau(\tilde{\alpha})}.$$

Pour avoir cela il faut et il suffit que

$$\lambda_{\tau(\alpha)} = \lambda_\alpha \text{ et que } \tau(\tilde{\alpha}) = \tau(\tilde{\alpha}).$$

- 2^{ième} pas: supposons que

$$\left(\forall \alpha \in \Gamma_+ \text{ tel que } \tau^k(\alpha) \in \Gamma_+ \text{ pour } k = 1, \dots, l' - 1 \text{ et } \tau^{l'}(\alpha) \notin \Gamma_+ \right. \\ \left. \text{on ait: } \lambda_\alpha = \lambda_{\tau(\alpha)} \text{ et } \tau(\tilde{\alpha}) = \tau(\tilde{\alpha}) \right) \quad \text{pour tout } l' \leq l.$$

Nous passons à l'ordre $l+1$:

soit $\alpha \in \Gamma_+$ tel que $\tau^k(\alpha) \in \Gamma_+$ pour $k = 1, \dots, l$ et $\tau^{l+1}(\alpha) \notin \Gamma_+$.

Nous écrivons ce que donne 2.21:

$$\lambda_\alpha E_{\tau(\tilde{\alpha})} + \dots + \lambda_\alpha E_{\tau^{l+1}(\tilde{\alpha})} = \lambda_{\tau(\alpha)} E_{\tau(\tilde{\alpha})} + \dots + \lambda_{\tau^{l+1}(\alpha)} E_{\tau^{l+1}(\tilde{\alpha})}.$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à $\tau^l(\alpha)$ pour $l'=1$, on obtient:

$$\tau(\tau^l(\tilde{\alpha})) = \tau^{l+1}(\tilde{\alpha}) \text{ et } \lambda_{\tau^l(\alpha)} = \lambda_{\tau^{l+1}(\alpha)}.$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à $\tau^{l-1}(\alpha)$ pour $l'=2$, on obtient:

$$\tau\left(\tau^{l-1}(\tilde{\alpha})\right) = \tau^l(\tilde{\alpha}) \text{ et } \lambda_{\tau^{l-1}(\alpha)} = \lambda_{\tau^l(\alpha)}.$$

Appliquons l'hypothèse de récurrence à $\tau^{l-2}(\alpha)$ pour $l'=3$, on obtient:

$$\tau\left(\tau^{l-2}(\tilde{\alpha})\right) = \tau\left(\tau^{l-1}(\tilde{\alpha})\right) \text{ et } \lambda_{\tau^{l-2}(\alpha)} = \lambda_{\tau^{l-1}(\alpha)}.$$

et ainsi de suite jusqu'à $\tau(\alpha)$ pour $l'=l$ ce qui donne:

$$\tau(\tau(\tilde{\alpha})) = \tau^2(\tilde{\alpha}) \text{ et } \lambda_{\tau(\alpha)} = \lambda_{\tau^2(\alpha)}.$$

On obtient ainsi:

$$\left(\tau^{l+1}(\tilde{\alpha})\right) = \tau^l(\tau(\tilde{\alpha})) \text{ et } \lambda_{\tau^{l+1}(\alpha)} = \dots = \lambda_{\tau(\alpha)}.$$

L'égalité se réécrit alors:

$$\lambda_\alpha E_{\tau(\tilde{\alpha})} + \dots + \lambda_\alpha E_{\tau^{l+1}(\tilde{\alpha})} = \lambda_{\tau(\alpha)} E_{\tau(\tilde{\alpha})} + \dots + \lambda_{\tau(\alpha)} E_{\tau^l(\tau(\tilde{\alpha}))}.$$

Il y a égalité si et seulement si:

$$\lambda_\alpha = \lambda_{\tau(\alpha)} \text{ et } \tau(\tilde{\alpha}) = \tau(\tilde{\alpha}).$$

Ainsi on obtient toujours que $\tau(\tilde{\alpha}) = \tau(\tilde{\alpha})$ et $\lambda_{\tau(\alpha)} = \lambda_\alpha$, ce sont 4 et 5.

On veut aussi que $\tilde{Q}(\overline{X}) = \overline{\tilde{Q}(X)} \forall X \in \mathfrak{h}$. Ceci donne

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\overline{H_\alpha}) &= \overline{\tilde{Q}(H_\alpha)} \\ &\parallel \\ &\tilde{Q}(H_{\tilde{\alpha}}). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc 7.

Comme $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$ forme une base de \mathfrak{h} et que $\{X_\alpha \mid \alpha \in \Delta^+\}$ forme une base de $\sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$ les conditions sont suffisantes pour que $\tilde{Q}(\overline{X}) = \overline{\tilde{Q}(X)} \forall X \in \mathfrak{g}$. \square

Remarque 2.23 Si $\alpha = \tilde{\alpha}$ alors $\tau(\alpha) = \tau(\tilde{\alpha})$ et $\overline{H_\alpha} = H_\alpha$.

Remarque 2.24 $\tau(\alpha) \neq \tilde{\alpha}$.

En effet si $\tau(\alpha) = \tilde{\alpha}$ cela signifie que $\alpha \in \Gamma_+$, donc $\tilde{\alpha} \in \Gamma_+$, de plus

$$\tau(\tilde{\alpha}) = \tau(\tilde{\alpha}) = \alpha.$$

Ainsi on a $\tau : \alpha \mapsto \tau(\alpha) = \tilde{\alpha}$ et $\tau : \tilde{\alpha} \mapsto \tau(\tilde{\alpha}) = \alpha$ ceci est impossible d'après le théorème 2.2.

3. Remarques dans le cas simple non absolument simple

Nous faisons une étude partielle des structures de bigèbres de Lie sur une algèbre de Lie \mathfrak{g}_0 réelle simple telle que $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ ne soit pas simple.

Nous commençons par citer des résultats standards sur une telle algèbre.

Lemme 3.1 *Si $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ n'est pas simple et \mathfrak{g}_0 est simple, alors $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = I \oplus \bar{I}$ où I est un idéal simple de $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$. Nous noterons $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = I_1 \oplus I_2$.*

Rappelons qu'une structure complexe sur \mathfrak{g}_0 est la donnée d'un endomorphisme linéaire $J : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0$ tel que

$$\begin{aligned} J^2 &= -Id \\ J \circ adX &= adX \circ J \quad \forall X \in \mathfrak{g}_0. \end{aligned}$$

Lemme 3.2 *Si \mathfrak{g}_0 est une algèbre de Lie simple telle que $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ ne soit pas simple, alors $J = iId_{I_1} - iId_{I_2}$ définit une structure complexe sur \mathfrak{g}_0 .*

Nous savons que l'équation de Yang Baxter modifiée sur \mathfrak{g}_0 est

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = M[X, Y] \end{cases}$$

où $M : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0$ vérifie $M \circ adX = adX \circ M \quad \forall X \in \mathfrak{g}_0$.

Notons encore M l'extension \mathbb{C} -linéaire à $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$.

Sur $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$, M est diagonalisable, mais comme $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = I_1 \oplus I_2$ où I_1 et I_2 sont des idéaux simples on a que $M = \alpha_{I_1} + \gamma_{I_2}$, de plus comme $M : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathfrak{g}_0$ on a que $\bar{\alpha} = \gamma$, donc si $\alpha = u + iv$ ($u, v \in \mathbb{R}$) M s'écrit

$$M = uId_{I_1} + uId_{I_2} + ivId_{I_1} - ivId_{I_2} = uId + vJ.$$

Ainsi nous avons:

Proposition 3.3 *L'équation de Yang Baxter non nulle modifiée sur une algèbre de Lie simple \mathfrak{g}_0 telle que $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ ne soit pas simple, s'écrit:*

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = (uId + vJ)[X, Y], \\ \forall X, Y \in \mathfrak{g} \text{ avec } u^2 + v^2 \neq 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

Nous étudions les solutions de 2.22

Nous noterons encore \tilde{Q} l'extension \mathbb{C} -linéaire de \tilde{Q} à $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$.

Nous étendons l'équation précédente \mathbb{C} -linéairement à $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$, ceci donne:

$$\begin{cases} \beta(\tilde{Q}X, Y) = -\beta(X, \tilde{Q}Y) \\ [\tilde{Q}X, \tilde{Q}Y] - \tilde{Q}[\tilde{Q}X, Y] - \tilde{Q}[X, \tilde{Q}Y] = (uId + vJ)[X, Y], \\ \forall X, Y \in \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} \text{ avec } u^2 + v^2 \neq 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

$\tilde{Q} : \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = I_1 \oplus I_2 \rightarrow \mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = I_1 \oplus I_2$ est linéaire donc on peut le voir comme

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_1 & \widetilde{Q}_{12} \\ \widetilde{Q}_{21} & \widetilde{Q}_2 \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_1 &: I_1 \rightarrow I_1 \text{ est linéaire,} \\ \widetilde{Q}_2 &: I_2 \rightarrow I_2 \text{ est linéaire,} \\ \widetilde{Q}_{12} &: I_2 \rightarrow I_1 \text{ est linéaire,} \\ \widetilde{Q}_{21} &: I_1 \rightarrow I_2 \text{ est linéaire.} \end{aligned}$$

Remarque 3.4 \tilde{Q} envoie \mathfrak{g}_0 dans \mathfrak{g}_0 donc $\tilde{Q}(\overline{X}) = \overline{\tilde{Q}(X)}$.

Ainsi si (Z_1, \dots, Z_n) est une base de I_1 , $(\overline{Z}_1, \dots, \overline{Z}_n)$ est une base de I_2 et on a que $\tilde{Q}(\overline{Z}_j) = \overline{\tilde{Q}(Z_j)}$ pour $j=1, \dots, n$.

On obtient alors que $\widetilde{Q}_2(X) = \overline{\widetilde{Q}_1(\overline{X})}$ et $\widetilde{Q}_{12}(X) = \overline{\widetilde{Q}_{21}(\overline{X})}$.

Nous noterons $[\cdot, \cdot]_1$ le crochet sur I_1 .

Si $X, Y \in I_1$ la deuxième équation de 2.23 s'écrit:

$$\begin{aligned} &[\widetilde{Q}_1 X, \widetilde{Q}_1 Y]_1 + [\widetilde{Q}_{21} X, \widetilde{Q}_{21} Y]_2 - \widetilde{Q}_1[\widetilde{Q}_1 X, Y]_1 \\ &- \widetilde{Q}_{21}[\widetilde{Q}_1 X, Y]_1 - \widetilde{Q}_1[X, \widetilde{Q}_1 Y]_1 - \widetilde{Q}_{21}[X, \widetilde{Q}_1 Y]_1 = (u + iv)[X, Y]_1. \end{aligned}$$

En projetant sur I_1 et I_2 nous obtenons:

$$\begin{cases} [\widetilde{Q}_1 X, \widetilde{Q}_1 Y] - \widetilde{Q}_1[\widetilde{Q}_1 X, Y] - \widetilde{Q}_1[X, \widetilde{Q}_1 Y] = (u + iv)[X, Y] \\ [\widetilde{Q}_{21} X, \widetilde{Q}_{21} Y] - \widetilde{Q}_{21}[\widetilde{Q}_1 X, Y] - \widetilde{Q}_{21}[X, \widetilde{Q}_1 Y] = 0 \quad \forall X, Y \in I_1. \end{cases}$$

Si $X \in I_1$ et $Y \in I_2$ la deuxième équation de 2.23 s'écrit:

$$\begin{aligned} &[\widetilde{Q}_1 X, \widetilde{Q}_{12} Y]_1 + [\widetilde{Q}_{21} X, \widetilde{Q}_2 Y]_2 - \widetilde{Q}_2[\widetilde{Q}_{21} X, Y]_2 \\ &- \widetilde{Q}_{12}[\widetilde{Q}_{21} X, Y]_2 - \widetilde{Q}_1[X, \widetilde{Q}_{12} Y]_1 - \widetilde{Q}_{21}[X, \widetilde{Q}_{12} Y]_1 = 0. \end{aligned}$$

En projetant sur I_1 et I_2 nous obtenons:

$$\begin{cases} [\widetilde{Q}_1 X, \widetilde{Q}_{12} Y] - \widetilde{Q}_{12}[\widetilde{Q}_{21} X, Y] - \widetilde{Q}_1[X, \widetilde{Q}_{12} Y] = 0 \\ [\widetilde{Q}_{21} X, \widetilde{Q}_2 Y] - \widetilde{Q}_2[\widetilde{Q}_{21} X, Y] - \widetilde{Q}_{21}[X, \widetilde{Q}_{12} Y] = 0 \quad \forall X \in I_1, \forall Y \in I_2. \end{cases}$$

Or ces deux équations sont les conjuguées l'une de l'autre.

Remarque 3.5 Pour $X, Y \in I_2$, nous obtenons l'équation:

$$[\widetilde{Q}_2 X, \widetilde{Q}_2 Y] - \widetilde{Q}_2[\widetilde{Q}_2 X, Y] - \widetilde{Q}_2[X, \widetilde{Q}_2 Y] = (u - iv)[X, Y]$$

qui est la conjuguée de l'équation obtenue sur I_1 .

Nous obtenons donc les équations suivantes:

$$[\widetilde{Q}_1 X, \widetilde{Q}_1 Y] - \widetilde{Q}_1[\widetilde{Q}_1 X, Y] - \widetilde{Q}_1[X, \widetilde{Q}_1 Y] = (u + iv)[X, Y] \quad \forall X, Y \in I_1, \quad (2.24)$$

$$[\widetilde{Q}_{21} X, \widetilde{Q}_{21} Y] - \widetilde{Q}_{21}[\widetilde{Q}_1 X, Y] - \widetilde{Q}_{21}[X, \widetilde{Q}_1 Y] = 0 \quad \forall X, Y \in I_1, \quad (2.25)$$

$$[\widetilde{Q}_1 X, \widetilde{Q}_{12} Y] - \widetilde{Q}_{12}[\widetilde{Q}_{21} X, Y] - \widetilde{Q}_1[X, \widetilde{Q}_{12} Y] = 0 \quad \forall X \in I_1, \quad \forall Y \in I_2. \quad (2.26)$$

Nous ferons seulement une étude partielle.

- 1^{er} cas: Supposons que $\widetilde{Q}_{12} = \widetilde{Q}_{21} = 0$ c'est à dire

$$\begin{aligned} \widetilde{Q} : I_1 &\rightarrow I_1 \\ I_2 &\rightarrow I_2. \end{aligned}$$

On obtient $\forall X, Y \in I_1$

$$\begin{cases} \beta(\widetilde{Q}_1 X, Y) = -\beta(X, \widetilde{Q}_1 Y) \\ [\widetilde{Q}_1 X, \widetilde{Q}_1 Y] - \widetilde{Q}_1[\widetilde{Q}_1 X, Y] - \widetilde{Q}_1[X, \widetilde{Q}_1 Y] = (u + iv)[X, Y]. \end{cases} \quad (2.27)$$

Nous sommes donc amenés à résoudre:

$$\begin{cases} \beta(\widetilde{Q} X, Y) = -\beta(X, \widetilde{Q} Y) \\ [\widetilde{Q} X, \widetilde{Q} Y] - \widetilde{Q}[\widetilde{Q} X, Y] - \widetilde{Q}[X, \widetilde{Q} Y] = \lambda[X, Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \end{cases}$$

où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semi-simple complexe et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Nous employons le même théorème 2.2 mais cette fois-ci avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Nous obtenons donc les solutions sur I_1 .

Remarque 3.6 En conjuguant 2.27 on obtient l'équation sur I_2 avec $\lambda = u - iv$ sur I_2 , ainsi les solutions de 2.27 nous donnent les solutions pour \widetilde{Q}_2 . Les constantes obtenues sur I_1 et I_2 sont conjuguées l'un de l'autre.

Remarque 3.7 Dans ce cas les solutions \widetilde{Q} de 2.23 sont données par les solutions de 2.27 sur I_1 et les expressions conjuguées de ces solutions. Ainsi les solutions de 2.23 vérifient $\widetilde{Q}(\overline{X}) = \overline{\widetilde{Q}(X)}$, ce sont donc des solutions de 2.22.

Nous avons démontré:

Théorème 3.8 Sur une algèbre de Lie réelle simple \mathfrak{g}_0 telle que $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ ne soit pas simple, il existe des solutions $\widetilde{Q} \in \text{End}(\mathfrak{g}_0)$, de l'équation de Yang-Baxter modifiée non standard (de second membre donné par $u[X, Y] + vJ[X, Y]$), dont l'extension \mathbb{C} -linéaire à $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ préserve chaque idéal de $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$. Ces solutions sont en bijection avec les solutions (décrites par Belavin et Drinfeld) de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard sur un idéal de $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ correspondant à $\lambda = u + iv$.

- 2^{ème} cas: Supposons que $\widetilde{Q}_1 = \widetilde{Q}_2 = 0$.

Si $X, Y \in I_1$ l'équation 2.24 s'écrit:

$$(u + iv)[X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in I_1.$$

Ceci n'est possible que pour $u+iv=0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous obtenons:

Théorème 3.9 *Sur une algèbre de Lie réelle simple \mathfrak{g}_0 telle que $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ ne soit pas simple, il n'existe pas de solution $\widetilde{Q} \in \text{End}(\mathfrak{g}_0)$ de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard telle que l'extension \mathbb{C} -linéaire de \widetilde{Q} à $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ permute les deux idéaux de $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$.*

- 3^{ème} cas: Cas général

Remarque 3.10 L'équation 2.25 dit que $\widetilde{Q}_{21}(I_1)$ est une sous algèbre de I_2 .

Remarque 3.11 Quelque soit \widetilde{Q}_1 satisfaisant 2.24, la solution triviale $\widetilde{Q}_{21} \equiv 0$ satisfait 2.25 et 2.26.

Nous savons qu'une solution de 2.24 sur I_1 est donnée par théorème 2.2.

Ainsi pour un choix d'une sous algèbre de Cartan \mathfrak{h}_1 de I_1 et d'un système de racines positives Δ^+ de (I_1, \mathfrak{h}_1) tel que si on note $\mathfrak{n}_{1\pm} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} (I_1)^{\pm\alpha}$, une solution

de 2.24 est donnée par:

$$\widetilde{Q}_1(X) = \begin{cases} aX & \text{si } X \in \mathfrak{n}_{1+} \\ 0 & \text{si } X \in \mathfrak{h}_1 \\ -aX & \text{si } X \in \mathfrak{n}_{1-}; \end{cases} \quad (2.28)$$

où $a^2 = -(u + iv)$.

Remarque 3.12 Comme $I_2 = \overline{I_1}$, $\mathfrak{h}_2 = \overline{\mathfrak{h}_1}$ et une sous algèbre de Cartan de I_2 .

Théorème 3.13 *Sur une algèbre de Lie réelle simple \mathfrak{g}_0 telle que $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}} = I_1 \oplus \overline{I_1}$, une solution $\widetilde{Q} \in \text{End}(\mathfrak{g}_0)$ de l'équation de Yang-Baxter modifiée non standard (de second membre donné par $u[X, Y] + vJ[X, Y]$) est définie par son extension \mathbb{C} -linéaire \widetilde{Q} à $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ définie par:*

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} \widetilde{Q}_1 & \widetilde{Q}_{12} \\ \widetilde{Q}_{21} & \widetilde{Q}_2 \end{pmatrix}$$

De plus une solution sur $\mathfrak{g}_0^{\mathbb{C}}$ donnée par

$$\widetilde{Q}_1(X) = \begin{cases} aX & \text{si } X \in \mathfrak{n}_{1+} \\ 0 & \text{si } X \in \mathfrak{h}_1 \\ -aX & \text{si } X \in \mathfrak{n}_{1-}; \end{cases}$$

et

$$\widetilde{Q}_{21}(X) = \begin{cases} a\overline{X} & \text{si } X \in \mathfrak{h}_1 \\ 0 & \text{ailleurs;} \end{cases} \quad (2.29)$$

où $a^2 = -(u + iv)$, définit une solution sur \mathfrak{g}_0 .

PREUVE

On écrit tout élément $X \in I_1$ de la façon suivante $X = X_+ + X_0 + X_-$ où $X_+ \in \mathfrak{n}_{1+}$, $X_0 \in \mathfrak{h}_1$, $X_- \in \mathfrak{n}_{1-}$.

Réécrivons l'équation 2.25:

$$\begin{aligned} [\widetilde{Q}_{21}X_0, \widetilde{Q}_{21}Y_0] &= 0 \text{ car } \mathfrak{h}_2 \text{ est abélienne} \\ &= \widetilde{Q}_{21}(a[X_+, Y] - a[X_-, Y] + a[X, Y_+] - a[X, Y_-]) \\ &= a\widetilde{Q}_{21}([X_+, Y_0] - [X_-, Y_0] + [X_0, Y_+] - [X_0, Y_-]) \\ &= a\widetilde{Q}_{21}(Z) \text{ où } Z \notin \mathfrak{h}_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi 2.25 est satisfaite.

Réécrivons l'équation 2.26:

$$\begin{aligned} a^2[X_+, Y_0] - a^2[X_-, Y_0] &= \overline{a\widetilde{Q}_{21}[X_0, Y]} - a\widetilde{Q}_{21}[X, Y_0] \\ &= a^2[X_+, Y_0] - a^2[X_-, Y_0] - a^2[X_+, Y_0] + a^2[X_-, Y_0] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi 2.26 est satisfaite.

Les équations conjuguées sont aussi satisfaites car $\overline{a^2} = -(\overline{u + iv})$ Cette solution vérifie $\widetilde{Q}(\overline{X}) = \overline{\widetilde{Q}(X)} \forall X \in \mathfrak{g}$, c'est donc une solution sur \mathfrak{g}_0 .

□

Proposition 3.14 *On a les résultats suivants:*

1. $\widetilde{Q}_{21}|_{\mathfrak{h}_1} \neq 0$ si on veut que $\widetilde{Q}_{21} \neq 0$,
2. $\widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{h}_1)$ est une sous algèbre abélienne de I_2 ,
3. $[\widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1+}), \widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1+})] \subset \widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1+})$,
4. $[\widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1-}), \widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1-})] \subset \widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1-})$,
5. $\widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1+})$, $\widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1-})$ sont des sous algèbres résolubles de I_2 ,
6. $[\widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1\pm}), \widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{h}_1)] \subset \widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1\pm})$.

PREUVE

Pour $X \in I_1$ écrivons $X = X_+ + X_0 + X_-$ où $X_+ \in \mathfrak{n}_{1+}$, $X_0 \in \mathfrak{h}_1$, $X_- \in \mathfrak{n}_{1-}$, alors l'équation 2.25 nous donne:

$$\begin{aligned}
& [\widetilde{Q}_{21}X_+, \widetilde{Q}_{21}Y_+] + [\widetilde{Q}_{21}X_+, \widetilde{Q}_{21}Y_0] + [\widetilde{Q}_{21}X_+, \widetilde{Q}_{21}Y_-] \\
+ & [\widetilde{Q}_{21}X_0, \widetilde{Q}_{21}Y_+] + [\widetilde{Q}_{21}X_0, \widetilde{Q}_{21}Y_0] + [\widetilde{Q}_{21}X_0, \widetilde{Q}_{21}Y_-] \\
+ & [\widetilde{Q}_{21}X_-, \widetilde{Q}_{21}Y_+] + [\widetilde{Q}_{21}X_-, \widetilde{Q}_{21}Y_0] + [\widetilde{Q}_{21}X_-, \widetilde{Q}_{21}Y_-] \\
- & \widetilde{Q}_{21} \left([\widetilde{Q}_1X_+, Y_+] + [\widetilde{Q}_1X_+, Y_0] + [\widetilde{Q}_1X_+, Y_-] \right. \\
& \quad + [\widetilde{Q}_1X_0, Y_+] + [\widetilde{Q}_1X_0, Y_0] + [\widetilde{Q}_1X_0, Y_-] \\
& \quad + [\widetilde{Q}_1X_-, Y_+] + [\widetilde{Q}_1X_-, Y_0] + [\widetilde{Q}_1X_-, Y_-] \\
& \quad + [X_+, \widetilde{Q}_1Y_+] + [X_+, \widetilde{Q}_1Y_0] + [X_+, \widetilde{Q}_1Y_-] \\
& \quad + [X_0, \widetilde{Q}_1Y_+] + [X_0, \widetilde{Q}_1Y_0] + [X_0, \widetilde{Q}_1Y_-] \\
& \quad \left. + [X_-, \widetilde{Q}_1Y_+] + [X_-, \widetilde{Q}_1Y_0] + [X_-, \widetilde{Q}_1Y_-] \right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

De plus nous savons que $\widetilde{Q}_1(\mathfrak{h}_1) \subset \mathfrak{h}_1$ et $\widetilde{Q}_1(\mathfrak{n}_{1\pm}) \subset \mathfrak{n}_{1\pm}$.

1. supposons que $\widetilde{Q}_{21}|_{\mathfrak{h}_1} \equiv 0$, prenons $X = X_+$ et $Y = Y_0$, l'équation 2.30 donne:

$$-\widetilde{Q}_{21} \left(\underbrace{[\widetilde{Q}_1X_+, Y_0]}_{\in \mathfrak{n}_{1+}} + \underbrace{[X_+, \widetilde{Q}_1Y_0]}_{\in \mathfrak{n}_{1+}} \right) = 0.$$

donc $\widetilde{Q}_{21}\mathfrak{n}_{1+} \equiv 0$.

De même en prenant $X = X_-$ et $Y = Y_0$ on obtient $\widetilde{Q}_{21}(\mathfrak{n}_{1-}) \equiv 0$.

D'où $\widetilde{Q}_{21} \equiv 0$.

2. si $X = X_0$ et $Y = Y_0$, l'équation 2.30 donne:

$$[\widetilde{Q}_{21}X_0, \widetilde{Q}_{21}Y_0] - \widetilde{Q}_{21} \left(\underbrace{[\widetilde{Q}_1X_0, Y_0]}_{=0} + \underbrace{[X_0, \widetilde{Q}_1Y_0]}_{=0} \right) = 0.$$

3. si $X = X_+$ et $Y = Y_+$, l'équation 2.30 donne:

$$[\widetilde{Q}_{21}X_+, \widetilde{Q}_{21}Y_+] = \widetilde{Q}_{21} \left(\underbrace{[\widetilde{Q}_1X_+, Y_+]_{\in \mathfrak{n}_{1+}}}_{\in \mathfrak{n}_{1+}} - \underbrace{[X_+, \widetilde{Q}_1Y_+]_{\in \mathfrak{n}_{1+}}}_{\in \mathfrak{n}_{1+}} \right).$$

4. on prend $X = X_-$ et $Y = Y_-$ dans l'équation 2.30.

5. ceci provient de 3 et du fait que $\mathfrak{n}_{1\pm}$ sont elles-mêmes des sous algèbres résolubles de I_0 .

6. si $X = X_+$ et $Y = Y_0$, l'équation 2.30 donne:

$$[\widetilde{Q}_{21}X_+, \widetilde{Q}_{21}Y_0] - \widetilde{Q}_{21} \left(\underbrace{[\widetilde{Q}_1X_+, Y_0] + [X_+, \widetilde{Q}_1Y_0]}_{\in \mathfrak{n}_{1+}} \right) = 0.$$

□

Chapitre 3

Linéarisation

Si (G, P) est un groupe de Lie-Poisson, alors \mathfrak{g}^* le dual de son algèbre de Lie \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de constantes de structure $C_k^{ij} = \partial_k P^{ij}|_e$. Dès lors $(\mathfrak{g}^*)^* = \mathfrak{g}$ est munie d'une structure de Poisson Λ donnée par $\Lambda^{ij}(\xi) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} \xi^k$.

Linéariser la structure de Poisson P en e cela signifie trouver un voisinage V de e dans G , un voisinage U de 0 dans \mathfrak{g} et un difféomorphisme Φ de U sur V tel que $\Phi_* P = \Lambda$.

Dans un premier temps nous allons écrire ce problème en coordonnées locales. Soit $x \in G$, on veut que $\Phi_{*x} P_x = \Lambda_{\Phi(x)}$.

Si $f, g \in C^\infty(G, \mathbb{R})$, cela s'écrit:

$$\begin{aligned} \Phi_{*x} P_x(df_{\Phi(x)}, dg_{\Phi(x)}) &= P_x(\Phi^* df_{\Phi(x)}, \Phi^* dg_{\Phi(x)}) \\ &= P_x(d(\Phi^* f)_x, d(\Phi^* g)_x) \\ &= P_x(d(f \circ \Phi)_x, d(g \circ \Phi)_x) \\ &= \{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}_P \\ \Lambda_{\Phi(x)}(df_{\Phi(x)}, dg_{\Phi(x)}) &= \{f, g\}_\Lambda \circ \Phi. \end{aligned}$$

Si (x^1, \dots, x^n) sont les coordonnées locales sur G , alors $P = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Si on met les coordonnées (ξ^1, \dots, ξ^n) sur \mathfrak{g} , alors $\Lambda = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Lambda^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \wedge \frac{\partial}{\partial \xi^j}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \{f, g\}_\Lambda &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Lambda^{ij} \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \frac{\partial g}{\partial \xi^j} \\ \{f, g\}_\Lambda \circ \Phi &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Lambda^{ij} \circ \Phi \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \Big|_{\Phi(\cdot)} \frac{\partial g}{\partial \xi^j} \Big|_{\Phi(\cdot)} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial P^{ij}}{\partial x^k} \Big|_e \Phi^k \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \Big|_{\Phi(\cdot)} \frac{\partial g}{\partial \xi^j} \Big|_{\Phi(\cdot)}. \\ \{f \circ \Phi, g \circ \Phi\}_P &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} P^{ij} \frac{\partial(f \circ \Phi)}{\partial x^i} \frac{\partial(g \circ \Phi)}{\partial x^j} \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} P^{ij} \sum_{1 \leq l, k \leq n} \frac{\partial f}{\partial \xi^k} \Big|_{\Phi(\cdot)} \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial \xi^l} \Big|_{\Phi(\cdot)} \frac{\partial \Phi^l}{\partial x^j}. \end{aligned}$$

Ainsi il faut résoudre le système:

$$\boxed{\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial P^{ij}}{\partial x^k} \Big|_e \Phi^k = \sum_{1 \leq l, k \leq n} P^{kl} \frac{\partial \Phi^i}{\partial x^k} \frac{\partial \Phi^j}{\partial x^l}}$$

Nous avons suivi deux approches différentes pour résoudre le problème de linéarisation d'une structure de Lie-Poisson.

Remarquons que sur le groupe de Lie abélien \mathbb{R}^n tout tenseur de Lie-Poisson est linéaire, donc linéarisable. La première approche consiste à essayer de généraliser ce résultat. On part d'un groupe de Lie G et on étudie la linéarisabilité des structures de Lie-Poisson sur ce groupe. Nous avons obtenu, dans ce cadre, des résultats de linéarisabilité et de non linéarisabilité pour des structures de Lie-Poisson exactes sur des groupes de Lie nilpotents G .

Nous avons observé qu'une telle structure sur un groupe de Lie nilpotent de pas deux est linéaire, qu'elle est linéarisable si l'algèbre de Lie \mathfrak{g} du groupe de Lie G est nilpotente de pas trois et de dimension inférieure ou égale à six, et qu'il existe des structures de Lie-Poisson exactes sur des groupes nilpotents de pas quatre et de dimension cinq qui ne sont pas linéarisables.

Par ailleurs nous avons démontré que la linéarisabilité d'une structure de Lie-Poisson exacte n'est pas toujours liée à la classe d'isomorphisme de l'algèbre de Manin correspondante.

La deuxième approche, plus classique, de ce problème consiste à partir de \mathfrak{g}^* l'algèbre de Lie duale de \mathfrak{g} . Nous avons alors étendu les résultats connus (J. Conn [7], J.P. Dufour [15]) de linéarisations au cas où l'algèbre de Lie \mathfrak{g}^* est la somme directe d'un idéal semi-simple et d'un idéal abélien. Nous montrons que tout tenseur de Lie-Poisson correspondant à un tel \mathfrak{g}^* est analytiquement linéarisable; par contre, il existe des tenseurs de Poisson s'annulant en un point e et dont la linéarisée donne un tel \mathfrak{g}^* , mais qui ne sont pas linéarisables.

Cependant nous calculons le deuxième espace de cohomologie de Chevalley d'une algèbre $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{A}$, produit semi-direct d'une sous-algèbre \mathfrak{g}_1 semi-simple et d'un idéal \mathfrak{A} pour une représentation ρ de dimension finie sur V .

En particulier nous montrons que pour toute structure de Poisson sur une variété M , s'annulant en un point z et telle que la linéarisée en z soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{A}$ le produit semi-direct d'une sous-algèbre de Lie semi-simple de dimension n et d'un idéal de dimension r , il existe des coordonnées formelles $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^r)$ au voisinage de z telles que, dans ces coordonnées, on ait:

$$\begin{aligned} \{x^i, x^j\} &= \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k \\ \{x^i, y^\alpha\} &= \sum_{1 \leq \gamma \leq r} C_\gamma^{i\alpha} y^\gamma \\ \{y^\alpha, y^\gamma\} &= \sum_{1 \leq \nu \leq r} C_\nu^{\alpha\gamma} y^\nu + R^{\alpha\gamma}(x, y) \end{aligned}$$

où les C_k^{ij} sont les constantes de structure de \mathfrak{h} et où les $R^{\alpha\gamma}$ sont des séries en x et en y d'ordre supérieur à deux.

Ce résultat est également obtenu par Dufour et Wade, qui obtiennent des linéarisations analytiques dans certains cas.

Enfin nous donnons un exemple de tenseur de Lie-Poisson non linéarisable.

Pour démontrer qu'une structure n'est pas linéarisable, on peut regarder la dimension maximale des feuilles symplectiques. Si la structure est linéarisable on passe de la structure non linéaire à la structure linéaire par un changement de coordonnées locales, donc la dimension maximale des feuilles symplectiques ne change pas d'une structure à l'autre. Ainsi pour savoir qu'une structure n'est pas linéarisable il suffit de voir que la dimension maximale des feuilles symplectiques change lorsque l'on considère les structures linéaire et non linéaire.

Nous exhibons également un exemple de structure de Lie-Poisson exact non linéarisable, mais tel que la dimension des feuilles symplectiques de cette structure coïncide avec la dimension maximale des feuilles symplectiques de la structure linéaire.

1. Première approche

Pour une structure de Lie-Poisson exacte sur un groupe de Lie G , le tenseur P est donné par la formule $P_x = L_{x*}Q - R_{x*}Q$ ($x \in G$) où le deux tenseur $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ est tel que le trois tenseur $[Q, Q]$ soit ad -invariant.

Soit $\{X_1, \dots, X_n\}$ une base de \mathfrak{g} . Ecrivons:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} X_k \wedge X_l.$$

Nous allons écrire P dans la carte logarithmique où les coordonnées locales sont notées $\{a^1, \dots, a^n\}$ ($n = \dim \mathfrak{g}$).

Ainsi le point de coordonnées (a^1, \dots, a^n) représente $x = \exp(a^1 X_1 + \dots + a^n X_n)$.

Nous voulons écrire $L_{\exp X_*} Q = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} L_{\exp X_*} X_k \wedge L_{\exp X_*} X_l$ dans la base des $\{\frac{\partial}{\partial a^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial a^n}\}$ et faire de même pour $R_{\exp X_*} Q$.

Comme $L_{\exp X_*} X_k = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\delta_i^k + \frac{1}{2} [X, X_k]^i + \frac{1}{12} [X, [X, X_k]]^i + \dots \right) \frac{\partial}{\partial a^i}$, on voit que

$$\begin{aligned} L_{\exp X_*} Q &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\delta_i^k + \frac{1}{2} [X, X_k]^i + \frac{1}{12} [X, [X, X_k]]^i + \dots \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \\ &\wedge \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\delta_j^l + \frac{1}{2} [X, X_l]^j + \frac{1}{12} [X, [X, X_l]]^j + \dots \right) \frac{\partial}{\partial a^j}. \end{aligned}$$

En procédant de même pour $R_{\exp X_*} Q$, nous voyons que dans cette carte logarithmique P s'écrit:

$$\begin{aligned} P_{\exp X} &= \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left(\delta_i^k (ad X X_l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} (ad X X^k)^i (ad^2 X X_l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} + \dots \right\} \end{aligned}$$

Nous nous sommes intéressées au cas d'un groupe de Lie nilpotent; dans ce cas la formule ci-dessus donne des composantes polynomiales pour P .

Nous avons étudié ce qui se passait aux différents pas.

1.1. Linéarisation dans le cas nilpotent

Définition 1.1 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente. Définissons $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}]$ avec la convention $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$. Nous dirons que \mathfrak{g} est une algèbre de pas m si $\mathfrak{g}^m = 0$.

Remarque 1.1 Nous pouvons remarquer que dans le cas d'une structure exacte sur une algèbre de Lie nilpotente, le tenseur de Poisson, dans la carte logarithmique, a des composantes qui sont des polynômes constitués uniquement de termes de degré impair.

Définition 1.2 Si $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} C_\alpha x^\alpha$, nous noterons $\pi_q(f) = \sum_{|\alpha| \leq q} C_\alpha x^\alpha$, l'élément f tronqué à ses termes de degré inférieur ou égal à q . Nous dirons que $\text{ordre}(f) \geq q$ si $\pi_{q-1}(f) = 0$.

Dans la carte logarithmique, P comporte des termes linéaires que nous noterons $P_{(1)}$, des termes homogènes de degré 3 notés $P_{(3)}$, des termes homogènes de degré k notés $P_{(k)}$, etc... Nous noterons R les termes non linéaires de P . Ainsi localement nous pouvons écrire $P^{ij} = \frac{\partial P^{ij}}{\partial a^k} \Big|_e a^k + R^{ij}$.

L'idée de la linéarisation est de repousser les termes homogènes de degré 3, $P_{(3)}$, en des termes d'ordre supérieur par un changement de coordonnées locales. Nous cherchons donc des nouvelles coordonnées locales y^i qui sont données à partir des a^i par la relation $y^i = a^i + f^i(a)$ où les $f^i(a)$ sont des polynômes homogènes de degré trois en les a^i , telles que $\{y^i, y^j\} - \sum_k C_k^{ij} y^k$ soient d'ordre strictement supérieur à trois.

Notons P' le tenseur P exprimé dans les nouvelles coordonnées locales y^i .

Nous obtenons alors:

$$P'^{ij}_y = P^{ij}_{a(y)} + \sum_k (P^{kj} \partial_k f^i + P^{ik} \partial_k f^j) + \sum_{k,l} P^{kl} \partial_k f^i \partial_l f^j.$$

Ainsi pour repousser les termes homogènes de degré 3 en des termes d'ordre supérieur, il suffit de trouver des polynômes homogènes de degré 3 en les $\{a^i\}$ qui sont solutions de:

$$P^{ij}_{(3)}(a) + \sum_{1 \leq k, l \leq n} \left(\frac{\partial P^{ik}}{\partial a^l} a^l \frac{\partial f^j}{\partial a^k} - \frac{\partial P^{jk}}{\partial a^l} a^l \frac{\partial f^i}{\partial a^k} \right) - \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial P^{ij}}{\partial a^k} f^k(a) = 0 \quad (3.1)$$

Les nouveaux termes d'ordre supérieur ou égal à cinq obtenus, sont donnés par

$$\dot{R}^{ij} = \sum_{1 \leq k \leq n} (R^{ik} \partial_k f^j - R^{jk} \partial_k f^i) + \sum_{1 \leq k, l \leq n} \left(\sum_{1 \leq q \leq n} \partial_q P^{kl} \Big|_e x^q + R^{kl} \right) \partial_k f^i \partial_l f^j.$$

Nous pouvons alors essayer de les éliminer en recommençant le même procédé à l'ordre cinq et ainsi de suite.

Ceci nous amène aux résultats suivants:

Proposition 1.2 *Tout tenseur de Lie-Poisson exact sur un groupe de Lie de pas deux est linéaire.*

PREUVE Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de pas 2, alors $\mathfrak{g}^2 = 0$, c'est-à-dire

$$ad^2 X = 0 \quad \forall X \in G.$$

Donc

$$P_{exp X} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\delta_i^k (ad X X_l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j}.$$

Ainsi P n'a que des termes de degré 1 en les $\{a^i\}$, il est déjà linéaire. \square

Proposition 1.3 *Tout tenseur de Lie-Poisson exact sur un groupe de Lie de pas trois et de dimension inférieure ou égale à six est linéarisable.*

PREUVE Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie de pas 3, alors $\mathfrak{g}^3 = 0$, c'est-à-dire

$$ad^3 X = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Donc

$$P_{exp X} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left(\delta_i^k (ad X X_l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} + \frac{1}{12} (ad X X_k)^i (ad^2 X X_l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\}.$$

Nous voyons que P possède des termes de degré un et trois.

Nous allons donner ici le calcul explicite pour l'algèbre n_6^{12} selon la classification de Goze[17].

La totalité de ces calculs se trouve dans l'appendice A.

L'algèbre n_6^{12} est donnée par les crochets:

$$[X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_4] = X_6.$$

Nous commençons par regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant.

$$[X, [Q, Q]] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \begin{cases} Q^{12} = 0 \\ Q^{24} = 0 \\ Q^{14} Q^{23} = 0 \\ Q^{13} Q^{23} = 0 \\ Q^{13} (Q^{13} + Q^{14}) = 0 \\ Q^{14} (Q^{13} + Q^{14}) = 0 \\ Q^{16} (Q^{13} + Q^{14}) - Q^{14} Q^{25} = 0 \\ Q^{34} (Q^{13} + Q^{14}) - Q^{13} Q^{25} + Q^{23} Q^{15} = 0 \\ Q^{31} Q^{26} + Q^{23} Q^{16} = 0. \end{cases}$$

Nous calculons les termes de degré trois de P .

$$P_{(3)exp X} = \frac{1}{12} \left\{ (a^2)^2 a^1 Q^{13} - (a^1)^2 a^2 Q^{23} \right\} \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6}.$$

Donc pour que P ne soit pas linéaire il faut supposer $(Q^{13}, Q^{23}) \neq (0, 0)$.

Nous allons maintenant calculer $P_{(1)expX}$.

$$\begin{aligned}
P_{(1)expX} &= (a^1Q^{13} + a^1Q^{14})\frac{\partial}{\partial a^1} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + a^2Q^{14}\frac{\partial}{\partial a^1} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + a^1Q^{23}\frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^2Q^{13} - a^1Q^{23})\frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\
&\quad + (a^3Q^{13} + a^1Q^{34} + a^4Q^{13})\frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^4Q^{23} + a^2Q^{34})\frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + (a^3Q^{14} - a^1Q^{34} + a^4Q^{14} - a^2Q^{15} + a^1Q^{25})\frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^1Q^{26} - a^2Q^{16})\frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + (a^4Q^{25} - a^2Q^{45} - a^3Q^{16} + a^1Q^{36} + a^1Q^{46} - a^4Q^{16})\frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6}.
\end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant une solution de 3.1. En supposant que $f^1, f^2, f^3, f^4 = 0$ et que f^5, f^6 sont des fonctions de a^1, a^2 seulement, 3.1 s'écrit pour $i = 5, j = 6$:

$$\frac{1}{12} \left(a^1(a^2)^2 Q^{13} - (a^1)^2 a^2 Q^{23} \right) + a^2 Q^{14} \frac{\partial f^5}{\partial a^1} - (a^1 Q^{13} + a^1 Q^{14}) \frac{\partial f^6}{\partial a^1} - a^1 Q^{23} \frac{\partial f^6}{\partial a^2} = 0$$

Cas 1. $Q^{23} \neq 0$, alors $\begin{cases} Q^{13} = 0 \\ Q^{14} = 0 \\ Q^{15} = 0 \\ Q^{16} = 0. \end{cases}$

Une solution est donnée par

$$\begin{aligned}
f^1 &= 0 \\
f^2 &= 0 \\
f^3 &= 0 \\
f^4 &= 0 \\
f^5 &= 0 \\
f^6 &= -\frac{1}{12} a^1 (a^2)^2
\end{aligned}$$

Cas 2. $Q^{23} = 0$, alors $\begin{cases} Q^{13} \neq 0 \\ Q^{14} = -Q^{13} \\ Q^{25} = 0 \\ Q^{26} = 0. \end{cases}$

Une solution est donnée par

$$\begin{array}{l}
 f^1 = 0 \\
 f^2 = 0 \\
 f^3 = 0 \\
 f^4 = 0 \\
 f^5 = \frac{1}{12}(a^1)^2 a^2 \\
 f^6 = 0
 \end{array}$$

Dans tous les cas, quelque soient i et j , on a que $\tilde{R}^{ij} = 0$

Donc P est linéarisable.

En faisant le calcul explicite (voir appendice A) pour chacune des algèbres de dimension inférieure ou égale à 6 et de pas 3, nous avons démontré que P est linéarisable.

□

Proposition 1.4 *Il existe des structures de Lie-Poisson exactes sur un groupe de Lie de pas quatre et de dimension cinq qui ne sont pas linéarisables.*

PREUVE Dans la partie 1.2 ci-dessous on trouvera un exemple d'une algèbre de Lie de pas quatre et de dimension cinq sur laquelle est défini un tenseur de Lie-Poisson non linéarisable.

□

1.2. Propriétés

Nous considérons ici l'algèbre filiforme suivante:

$\mathfrak{g} = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle$ où les crochets non nuls sont donnés par

$$[X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5.$$

C'est l'algèbre L_4 (voir la partie 3), qui est une algèbre nilpotente de dimension cinq et de pas quatre

Nous allons étudier la linéarisabilité des structures de Lie-Poisson exactes sur cette algèbre.

Commençons par regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant:

$$[X, [Q, Q]] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \iff \begin{cases} Q^{12} = 0 & (1) \\ Q^{13} = 0 & (2) \\ Q^{14} = 0 & (3) \\ Q^{15} Q^{23} = 0 & (4) \end{cases}$$

Observons que:

$$ad^2 X X_1 = -a^2 X_3 - a^3 X_4 - a^4 X_5; \quad ad^2 X X_2 = a^1 X_3; \quad ad^2 X X_3 = a^1 X_4; \quad ad^2 X X_4 = a^1 X_5;$$

$$ad^2 X X_5 = 0$$

$$ad^3 X X_1 = -a^1 a^2 X_4 - a^1 a^3 X_5; \quad ad^3 X X_2 = (a^1)^2 X_4; \quad ad^3 X X_3 = (a^1)^2 X_5;$$

$$ad^3 X X_4 = 0; \quad ad^3 X X_5 = 0$$

$$ad^4 X X_1 = -(a^1)^2 a^2 X_5; \quad ad^4 X X_2 = (a^1)^3 X_5; \quad ad^4 X X_3 = 0; \quad ad^4 X X_4 = 0;$$

$$ad^3 X X_5 = 0.$$

Les termes homogènes de degré 3 sont donnés par:

$$\begin{aligned} P_{(3)expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 5} \sum_{1 \leq j \leq 5} \frac{1}{12} (adX_k)_i (ad^2 X X_l)_j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= \frac{1}{12} \sum_{1 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \left\{ (a^1 \delta_2^k - a^2 \delta_1^k) (-a^1 a^2 \delta_1^l + (a^1)^2 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \right. \\ &\quad + (a^1 \delta_2^k - a^2 \delta_1^k) (-a^1 a^3 \delta_1^l + (a^1)^2 \delta_3^l) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\ &\quad + (-a^3 \delta_1^k + a^1 \delta_3^k) (-a^1 a^3 \delta_1^l + (a^1)^2 \delta_3^l) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\ &\quad \left. + (-a^4 \delta_1^k + a^1 \delta_4^k) (-a^1 a^2 \delta_1^l + (a^1)^2 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \right\} \\ &= \frac{1}{12} (a^1)^3 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} + \frac{1}{12} (a^1)^3 Q^{24} \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5}. \end{aligned}$$

Donc P n'est pas linéaire a priori.

Remarquons que comme \mathfrak{g} est une algèbre de pas 4, P possède aussi des termes de degré 5, nous allons les calculer.

$$\begin{aligned} P_{(5)expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 5} \sum_{1 \leq j \leq 5} \left\{ \frac{1}{72} (ad^2 X X_k)_i (ad^3 X X_l)_j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\ &= \frac{1}{72} \sum_{1 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} (-a^1 a^2 \delta_1^k + (a^1)^2 \delta_2^k) (-a^1)^2 a^2 \delta_1^l + (a^1)^3 \delta_2^l \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les termes de degré 5 de P sont nuls. Nous voyons donc que si $Q^{23} = Q^{24} = 0$ alors P est linéaire.

Nous supposons dans la suite que $(Q^{23}, Q^{24}) \neq (0, 0)$.

Nous allons maintenant calculer $P_{(1)expX}$.

$$\begin{aligned} P_{(1)expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 5} \sum_{1 \leq j \leq 5} \left\{ \left(\delta_i^k (adX X_l)_j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{1 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \frac{\partial}{\partial a^k} \right\} \wedge \left\{ (-a^2 \delta_1^l + a^1 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^3} + \right. \\ &\quad \left. (-a^3 \delta_1^l + a^1 \delta_3^l) \frac{\partial}{\partial a^4} + (-a^4 \delta_1^l + a^1 \delta_4^l) \frac{\partial}{\partial a^5} \right\} \\ &= a^1 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\ &\quad + a^1 Q^{24} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\ &\quad + a^1 Q^{24} \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\ &\quad + (a^1 Q^{25} + a^1 Q^{34} - a^2 Q^{15}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\ &\quad + (a^1 Q^{35} - a^3 Q^{15}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5}. \end{aligned}$$

Pour démontrer que P n'est pas linéarisable, nous allons regarder la dimension des feuilles symplectiques.

Les feuilles symplectiques sont engendrées par les champs hamiltoniens, c'est-à-dire les X_f pour $f \in C^\infty(G, \mathbb{R})$.

Or $X_f(g) = \{f, g\}$. Ainsi la dimension de la feuille symplectique passant par x est le rang de la matrice antisymétrique suivante:

$$F = (P^{ij}(x))$$

Il est donc pair.

Or si la structure est linéarisable on passe de la structure non linéaire à la structure linéaire par un changement de coordonnées locales, donc la dimension maximale des feuilles symplectiques ne change pas d'une structure à l'autre. Ainsi pour savoir si la structure n'est pas linéarisable il suffit de regarder si la dimension maximale des feuilles symplectiques diminue lorsque l'on considère les structures linéaire et non linéaire.

Nous obtenons ici:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P^{24} & P^{25} \\ 0 & 0 & 0 & P^{34} & P^{35} \\ 0 & -P^{24} & -P^{34} & 0 & P^{45} \\ 0 & -P^{25} & -P^{35} & -P^{45} & 0 \end{pmatrix}$$

Et $D = \det F = 0$. La dimension des feuilles symplectiques vaut 0, 2 ou 4.

Regardons si cette dimension vaut 4.

$$\begin{aligned} D_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & P^{24} & P^{25} \\ 0 & 0 & P^{34} & P^{35} \\ -P^{24} & -P^{34} & 0 & P^{45} \\ -P^{25} & -P^{35} & -P^{45} & 0 \end{vmatrix} = (P^{24}P^{35} - P^{25}P^{34})^2 \\ &= \left\{ a^1 Q^{23} \left((a^1 Q^{25} + a^1 Q^{34} - a^2 Q^{15}) + \frac{1}{12} (a^1)^3 Q^{23} \right) \right. \\ &\quad \left. - (a^1 Q^{24})^2 \right\}^2 \\ &= \left\{ (a^1)^2 \left(Q^{23}(Q^{25} + Q^{34}) - (Q^{24})^2 \right) + \frac{1}{12} (a^1)^4 (Q^{23})^2 \right\}^2. \end{aligned}$$

Ainsi si

$$\begin{cases} (Q^{24})^2 = Q^{23}(Q^{25} + Q^{34}) \\ Q^{23} \neq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

nous voyons que $D_4 \neq 0$ et que les termes non linéaires de P^{35} interviennent dans le calcul de D_4 . Remarquons que, sous les mêmes hypothèses 3.2 pour Q , si on effectue le même calcul sans les termes de degré trois le déterminant est nul.

En conclusion, nous voyons dans un cas particulier de Q , à savoir si Q vérifie les conditions 3.2, la dimension maximale des feuilles symplectiques pour la structure non linéaire vaut 4, alors que pour la structure linéaire elle vaut 0 ou 2. Donc on ne peut pas linéariser P pour ce Q particulier.

Remarque 1.5 Nous avons $[Q, Q] = 0 \iff [Q, Q] \text{ ad-invariant et } Q^{15}Q^{24} = 0$.

Remarque 1.6 Si le deux tenseur Q vérifie la condition $Q^{23} \neq 0$ et est ad -invariant, alors $Q^{15} = 0$. Donc un tel deux tenseur vérifie en fait $[Q, Q] = 0$. C'est le cas s'il vérifie les conditions 3.2.

Regardons ce qui se passe si on ne se place pas dans les conditions 3.2.

Nous cherchons alors une solution de 3.1.

Nous supposons que $f^1, f^2, f^4 = 0$ et que f^3, f^5 sont des fonctions de a^1, a^2, a^3 seulement.

Alors 3.1 s'écrit pour $i = 3, j = 4$:

$$-a^1 Q^{24} \frac{\partial f^3}{\partial a^3} - a^1 Q^{23} \frac{\partial f^3}{\partial a^2} = 0$$

pour $i = 3, j = 5$:

$$-\frac{1}{12}(a^1)^3 Q^{23} - a^1 Q^{24} \frac{\partial f^3}{\partial a^2} - a^1 (Q^{25} + Q^{34} - a^2 Q^{15}) \frac{\partial f^3}{\partial a^3} = 0$$

pour $i = 4, j = 5$:

$$-\frac{1}{6}(a^1)^3 Q^{24} - a^1 Q^{23} \frac{\partial f^5}{\partial a^2} - a^1 Q^{24} \frac{\partial f^5}{\partial a^3} = 0.$$

1. Si $Q^{23} \neq 0$ alors $Q^{15} = 0$ ($[Q, Q] = 0$):

- Si $Q^{24} = 0$: alors comme 3.2 n'est pas vérifiée on a que $Q^{25} + Q^{34} \neq 0$. Une solution est donnée par

$$\begin{array}{l} f^1 = 0 \\ f^2 = 0 \\ f^3 = \frac{1}{12} \frac{Q^{23}}{Q^{25} + Q^{34}} (a^1)^2 a^3 = \frac{R^{35}}{a^1(Q^{25} + Q^{34})} a^3 \\ f^4 = 0 \\ f^5 = 0 \end{array}$$

Mais dans ce cas $\tilde{R}^{ij} \neq 0$.

En fait

$$\tilde{R}^{35} = R^{35} \frac{\partial f^3}{\partial a^3} = \frac{(R^{35})^2}{a^1(Q^{25} + Q^{34})}.$$

c'est donc un polynôme homogène de degré 5 en a^1 .

Si nous essayons de repousser ces termes d'ordre 5 en des termes d'ordre supérieur, alors le même phénomène se reproduit à chaque étape car la solution est toujours du même type à savoir $f^1 = f^2 = f^4 = f^5 = 0$ et f^3 est un polynôme en a^1 et a^3 .

On obtient donc une suite de coordonnées formelles qui permet de repousser l'ordre de R , le problème étant de savoir si cette suite converge.

Notons $a_1^i = y^i = a^i + f^i(a) = a_0^i + f^i(a_0)$.

Lorsque l'on veut repousser les termes d'ordre 5 en des termes d'ordre supérieur, l'équation à résoudre est:

$$\tilde{R}^{ij} + \sum_{1 \leq k, l \leq n} \left(\frac{\partial P_{(1)}^{il}}{\partial a_1^k} a_1^k \frac{\partial f_2^j}{\partial a_1^l} - \frac{\partial P_{(1)}^{jl}}{\partial a_1^k} a_1^k \frac{\partial f_2^i}{\partial a_1^l} \right) - \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial P_{(1)}^{ij}}{\partial a_1^k} f_2^k = 0$$

en notant $a_2^i = a_1^i + f_2^i(a_1)$.

Et une solution est donnée par

$$\begin{aligned} f_2^1 &= 0 = f_2^2 = f_2^4 = f_2^5 \\ \text{et } f_2^3 &= \left(\frac{1}{12} \frac{Q^{23}}{Q^{25} + Q^{34}} (a^1)^2 \right)^2 a^3 = \frac{(R^{35})^2}{\left(a^1 (Q^{25} + Q^{34}) \right)^2} a^3. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons:

$$\begin{aligned} a_2^3 &= a_1^3 + f_2^3(a_1) \\ &= a_0^3 + \frac{R^{35}}{a_0^1 (Q^{25} + Q^{34})} a_0^3 + \frac{(R^{35})^2}{\left(a_0^1 (Q^{25} + Q^{34}) \right)^2} a_0^3 \\ &\quad + \frac{(R^{35})^2}{\left(a_0^1 (Q^{25} + Q^{34}) \right)^2} \frac{R^{35}}{a_0^1 (Q^{25} + Q^{34})} a_0^3 \\ &= a_0^3 + \frac{R^{35}}{a_0^1 (Q^{25} + Q^{34})} a_0^3 + \frac{(R^{35})^2}{\left(a_0^1 (Q^{25} + Q^{34}) \right)^2} a_0^3 + \frac{(R^{35})^3}{\left(a_0^1 (Q^{25} + Q^{34}) \right)^3} a_0^3. \end{aligned}$$

Et

$$\tilde{R}^{35} = \frac{\hat{R}^{35} * \tilde{R}^{35}}{a^1 (Q^{25} + Q^{34})} = \frac{(R^{35})^4}{\left(a_0^1 (Q^{25} + Q^{34}) \right)^3}.$$

Si on recommence le processus on obtient:

$$f_3^3 = \frac{(R^{35})^4}{\left(a_0^1 (Q^{25} + Q^{34}) \right)^4} a^3.$$

On obtient, donc, que $a_n^3 = \sum_{0 \leq k \leq 2^n - 1} u^k(a)$ où

$$u^k(a) = \frac{(R^{35})^k}{\left(a_0^1 (Q^{25} + Q^{34}) \right)^k} a_0^3 = \left(\frac{1}{12} \frac{Q^{23}}{Q^{25} + Q^{34}} (a_0^1)^2 \right)^k a_0^3.$$

or cette série est absolument convergente pour a suffisamment petit, à savoir

$$|a| < \left| 12 \frac{Q^{25} + Q^{34}}{Q^{23}} \right|^{\frac{1}{2}}.$$

Donc P est linéarisable.

- Si $Q^{24} \neq 0$, une solution est donnée par

$$\begin{aligned}
 f^1 &= 0 \\
 f^2 &= 0 \\
 f^3 &= \frac{\frac{1}{12}}{(Q^{25}+Q^{34})Q^{23}-(Q^{24})^2} \left\{ Q^{23}Q^{24}(a^1)^2 a^2 - (Q^{23})^2(a^1)^2 a^3 \right\} \\
 &= \frac{Q^{23}R^{35}}{a^1 \left((Q^{25}+Q^{34})Q^{23}-(Q^{24})^2 \right)} \left(a^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a^2 \right) \\
 f^4 &= 0 \\
 f^5 &= \frac{1}{12}(a^2)^2 a^3
 \end{aligned}$$

Il se produit le même phénomène que ci-dessus puisque f^3 est un polynome en a^3 .

En effet $\tilde{R}^{ij} \neq 0$ et on a:

$$\tilde{R}^{35} = R^{35} \frac{\partial f^3}{\partial a^3} = R^{35} \frac{Q^{23}R^{35}}{a^1 \left((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2 \right)}.$$

Notons à nouveau $a_2^i = a_1^i + f_2^i(a_1)$.

Lorsque l'on essaie de repousser ces termes de degré 5 en des termes de degré supérieur, le système à résoudre est:

$$Q^{24} \frac{\partial f_2^3}{\partial a_1^3} + Q^{23} \frac{\partial f_2^3}{\partial a_1^2} = 0$$

$$\tilde{R}^{35} - a_1^1 Q^{24} \frac{\partial f_2^3}{\partial a_1^2} - a_1^1 (Q^{25} + Q^{34}) \frac{\partial f_2^3}{\partial a_1^3} = 0.$$

On obtient:

$$\frac{\partial f_2^3}{\partial a_1^2} = -\frac{Q^{24}}{Q^{23}} \frac{\partial f_2^3}{\partial a_1^3}.$$

Et

$$\frac{\partial f_2^3}{\partial a_1^3} = \frac{Q^{23} \tilde{R}^{35}}{a_1^1 \left((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2 \right)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
 f_2^3 &= \frac{Q^{23} \tilde{R}^{35}}{a_1^1 \left((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2 \right)} \left(a_1^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a_1^2 \right) \\
 &= \left(R^{35} \frac{Q^{23}}{a_1^1 \left((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2 \right)} \right)^2 \left(a_1^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a_1^2 \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
a_2^3 &= a_1^3 + f_2^3(a_1) \\
&= a_0^3 + \frac{Q^{23}R^{35}}{a_0^1((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2)} \left(a_0^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a_0^2 \right) \\
&\quad + \left(R^{35} \frac{Q^{23}}{a_0^1((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2)} \right)^2 \left(a_0^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a_0^2 \right) \\
&\quad + \left(R^{35} \frac{Q^{23}}{a_0^1((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2)} \right)^2 \\
&\quad \quad \frac{Q^{23}R^{35}}{a_0^1((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2)} \left(a_0^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a_0^2 \right) \\
&= a_0^3 + \frac{Q^{23}R^{35}}{a_0^1((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2)} \left(a_0^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a_0^2 \right) \\
&\quad + \left(R^{35} \frac{Q^{23}}{a_0^1((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2)} \right)^2 \left(a_0^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a_0^2 \right) \\
&\quad + \left(R^{35} \frac{Q^{23}}{a_0^1((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2)} \right)^3 \left(a_0^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a_0^2 \right).
\end{aligned}$$

On obtient, donc, que $a_n^3 = \sum_{0 \leq k \leq 2^n - 1} u^k(a)$ où

$$\begin{aligned}
u^k(a) &= \left(\frac{Q^{23}R^{35}}{a_0^1((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2)} \right)^k \left(a_0^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a_0^2 \right) \\
&= \left(\frac{1}{12} \frac{(Q^{23})^2}{((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2)} (a_0^1)^2 \right)^k \left(a_0^3 - \frac{Q^{24}}{Q^{23}} a_0^2 \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons:

$$\frac{|u^{k+1}|}{|u^k|} = \left| \frac{1}{12} \frac{(Q^{23})^2}{((Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2)} (a_0^1)^2 \right|.$$

Donc cette série est absolument convergente pour a suffisamment petit, à savoir

$$|a| < \frac{\left(12|(Q^{25} + Q^{34})Q^{23} - (Q^{24})^2| \right)^{\frac{1}{2}}}{|Q^{23}|}.$$

Donc P est linéarisable.

2. Si $Q^{23} = 0$: alors $Q^{24} \neq 0$, et une solution est donnée par

$$\begin{aligned} f^1 &= 0 \\ f^2 &= 0 \\ f^3 &= 0 \\ f^4 &= 0 \\ f^5 &= -\frac{1}{12}(a^2)^2 a^3 \end{aligned}$$

Dans ce cas $\check{R}^{ij} = 0$. Donc P est linéarisable.

Remarque 1.7 Dans ce cas $[Q, Q] \neq 0$ et P est linéarisable.

Remarque 1.8 Dans ce cas cette solution est aussi une solution pour $[Q, Q] = 0$ car alors $Q^{15} = 0$ ce qui ne change pas le résultat.

Ainsi lorsque l'on n'est pas dans les conditions 3.2, P est linéarisable.

Lien avec l'algèbre de Manin

Pour un groupe de Lie-Poisson exact les propriétés de linéarisation ne sont pas toujours liées à la classe d'isomorphisme de l'algèbre de Manin correspondante.

De manière précise on a:

Proposition 1.9 *Sur le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbres de Lie de pas quatre L_4 , il existe des structures de Lie-Poisson exactes (G, P) où P est donné par $P(x) = L_{x*}Q - R_{x*}Q$ telles que*

$$\begin{cases} [Q, Q] = 0 \text{ et } P \text{ linéarisable;} \\ [Q, Q] = 0 \text{ et } P \text{ non linéarisable;} \\ [Q, Q] \text{ ad- invariant et } P \text{ linéarisable.} \end{cases}$$

PREUVE

1. $[Q, Q] = 0$ et P linéarisable:
c'est l'exemple ci-dessus voir la remarque 1.8;
2. $[Q, Q] = 0$ et P non linéarisable:
c'est l'exemple ci-dessus voir la remarque 1.6;
3. $[Q, Q]$ ad- invariant et P linéarisable:
c'est l'exemple ci-dessus voir la remarque 1.7.

□

2. Deuxième approche

Nous abordons maintenant le problème de linéarisation en partant de \mathfrak{g}^* (la linéarisée de la structure).

2.1. Linéarisation formelle d'un champ de vecteur

Nous allons rappeler une technique de linéarisation formelle des champs de vecteurs.

Soit X un champ de vecteurs sur une variété M qui s'annule en un point e de M . Linéariser le champ de vecteurs X revient, dans ce cas, à trouver une carte locale de M centrée en x dans laquelle les composantes de X sont linéaires. Il s'agit d'un problème local et on peut donc supposer travailler sur un ouvert de \mathbb{R}^n . On notera $\{x^1, \dots, x^n\}$ les coordonnées locales.

Soit ainsi

$$X_x = \sum_{1 \leq k \leq n} X^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_x$$

tel que $X^k(e) = 0$.

On cherche des nouvelles coordonnées locales $\{y^1, \dots, y^n\}$ telles que

$$X_y = \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\sum_{1 \leq l \leq n} a_l^k y^l \right) \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_y$$

où les a_l^k sont des constantes.

On veut donc résoudre:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} X^k(x) \frac{\partial y^l}{\partial x^k} = \sum_{1 \leq r \leq n} a_r^l y^r(x) \quad (3.3)$$

On développe les X^k en série:

$$X^k(x) = 0 + \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \Big|_0 x^j + \dots$$

et on note X_2^k la partie homogène de degré 2 de X^k dans les coordonnées x .

L'idée est de trouver un premier changement de coordonnées $x_2 = x + y_2(x)$ où y_2 est un polynôme homogène de degré 2 en les x permettant de "repousser" les termes d'ordre 2, c'est-à-dire tel que dans les coordonnées x_2 , X ait une partie linéaire et des termes d'ordre au moins 3. On cherche ensuite $x_3 = x_2 + y_3(x_2)$ où y_3 est un polynôme homogène de degré 3 en les x_2 permettant de "repousser" les termes d'ordre 3, etc. . . .

On parle alors de linéarisation formelle de X .

En première étape, on veut donc trouver une solution de

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq r \leq n} a_r^l y_2^r(x) &= X_2^l(x) + \sum_{1 \leq k \leq n} X_1^k(x) \frac{\partial y_2^l}{\partial x^k} \\ &= X_2^l(x) + \sum_{1 \leq k, r \leq n} a_r^k x^r \frac{\partial y_2^l}{\partial x^k}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nous noterons A la matrice des $(a_l^k)_{1 \leq k, l \leq n}$, $E = \mathbb{R}^n$ et e_1, \dots, e_n la base canonique de \mathbb{R}^n .

Comme les composantes de y_2 sont des polynômes homogènes de degré 2 on peut voir y_2 comme un élément de $E^* \otimes^s E^* \otimes E$ en posant

$$y_2 = \sum_{1 \leq i, j, k \leq n} \frac{\partial^2 y_2^k}{\partial x^i \partial x^j} e_*^i \otimes^s e_*^j \otimes e_k.$$

La matrice A définit une application linéaire:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_A &: E^* \otimes^s E^* \otimes E \rightarrow E^* \otimes^s E^* \otimes E \text{ par} \\ (\mathfrak{L}_A \psi)(u, v) &= -\psi(Au, v) - \psi(u, Av) + A\psi(u, v). \end{aligned}$$

L'équation 3.4 s'écrit:

$$\mathfrak{L}_A y_2 = X_2.$$

Si A possède n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, les valeurs propres de \mathfrak{L}_A sont $\lambda_k - \lambda_i - \lambda_j$. Ainsi si λ_k n'est jamais égal à $\lambda_i + \lambda_j$, \mathfrak{L}_A est inversible sur $E^* \otimes^s E^* \otimes E$ et une solution est donnée par $y_2 = \mathfrak{L}_A^{-1} X_2$.

On procède ainsi étape par étape. Supposons qu'on ait trouvé des coordonnées x_k , obtenus comme polynômes de degré inférieur à k en les x de départ, dans lesquelles le champ de vecteurs X s'écrit:

$$X_y = \sum_{1 \leq l \leq n} X^l(y) \frac{\partial}{\partial x_k^l|_y}$$

avec $X^l(y) = \sum_{1 \leq s \leq n} a_s^l x_k^s + X_{k+1}^l(y) +$ termes d'ordre supérieur où X_{k+1}^l est un polynôme de degré homogène $(k+1)$ en les x_k , qu'on regarde comme un élément de $S^k(E^*) \otimes E$. On cherche ensuite $x_{k+1} = x_k + y_{k+1}(x_k)$ où y_{k+1} est un polynôme homogène de degré $k+1$ en les x_k permettant de "repousser" les termes d'ordre $k+1$ de X .

On regarde y_{k+1} comme étant un élément de $S^{(k+1)}(E^*) \otimes E$.

On veut résoudre:

$$\sum_{1 \leq r \leq n} a_r^l y_{k+1}^r = X_{k+1}^l + \sum_{1 \leq s, r \leq n} a_r^s x_k^r \frac{\partial y_{k+1}^l}{\partial x_k^s}.$$

En introduisant, comme précédemment, l'opérateur \mathfrak{L}_A sur $S^{k+1}(E^*) \otimes E$, cela s'écrit:

$$\mathfrak{L}_A y_{k+1} = X_{k+1}.$$

Les valeurs propres de \mathfrak{L}_A sur $S^{k+1}(E^*) \otimes E$ sont données par $\lambda_k - \lambda_{i_1} - \dots - \lambda_{i_{k+1}}$. On peut donc inverser \mathfrak{L}_A quand aucune de ces sommes n'est nulle.

En conclusion, on peut procéder par récurrence, et ainsi avoir une linéarisation formelle de X si l'on n'a jamais

$$\lambda_k = \sum_i n_i \lambda_i \text{ avec } \sum_i n_i \geq 2.$$

C'est ce qu'on appelle la condition de résonance. Ainsi si A est non résonnante, X est formellement linéarisable.

2.2. Méthode générale pour les tenseurs de Poisson

Soit P un tenseur de Poisson sur une variété M qui s'annule en un point e de M . Nous noterons $\{x^1, \dots, x^n\}$ des coordonnées locales centrées en e . Localement nous pouvons écrire

$$P_x = \sum_{i,j} P^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_x$$

et nous pouvons développer P^{ij} en série:

$$P^{ij}(x) = \underbrace{P^{ij}(e)}_{=0} + \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k + \sum_{k,l} \frac{\partial^2 P^{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \Big|_0 x^k x^l + \dots$$

où les $C_k^{ij} = \frac{\partial P^{ij}}{\partial x^k} \Big|_0$ sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie \mathfrak{h} appelée la linéarisée de la structure. Notons P_2 les termes homogènes de degré 2 de P en x . On cherche de nouvelles coordonnées locales $\{y^1, \dots, y^n\}$ centrées en e telles que

$$P_y = \sum_{i,j,k} C_k^{ij} y^k \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_y \wedge \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_y.$$

On veut donc résoudre:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} y^k(x) = \sum_{1 \leq r,s \leq n} P^{rs}(x) \frac{\partial y^i}{\partial x^r} \frac{\partial y^j}{\partial x^s}.$$

La linéarisation formelle consiste à procéder étape par étape.

Dans un premier temps, on cherche $x_2 = x + y_2(x)$ où $y_2(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en x tel que dans la carte définie par les coordonnées x_2 , P contienne des termes linéaires et des termes d'ordre supérieur ou égal à 3. On veut, donc, résoudre

$$\sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} y_2^k = P_2^{ij}(x) + \sum_{1 \leq r,s \leq n} \left(C_s^{ir} x^s \frac{\partial y_2^j}{\partial x^r}(x) + C_s^{rj} x^s \frac{\partial y_2^i}{\partial x^r}(x) \right) \quad (3.5)$$

On introduit $\{e^1, \dots, e^n\}$ une base de \mathfrak{h} et $\{f_1^*, \dots, f_n^*\}$ la base duale de \mathfrak{h}^* . On considère P_2 comme un élément de $\mathfrak{h} \otimes^s \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}^* \wedge \mathfrak{h}^*$:

$$P_2 = \sum_{1 \leq i,j,k,l \leq n} \frac{\partial^2 P_2^{ij}}{\partial x^k \partial x^l} \Big|_0 e^l \otimes e^k \otimes f_i^* \wedge f_j^*$$

et y_2 comme un élément de $\mathfrak{h} \otimes^s \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}^*$:

$$y_2 = \sum_{1 \leq i,j,k \leq n} \frac{\partial^2 y_2^k}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_0 e^i \otimes e^j \otimes f_k^*.$$

Remarquons que si l'on considère la "matrice" $A = (C_k^{ij})_{1 \leq i,j,k \leq n}$, on définit l'opérateur $\mathfrak{L}_A : \mathfrak{h} \otimes^s \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h} \otimes^s \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}^* \wedge \mathfrak{h}^*$ par:

$$(\mathfrak{L}_A \psi)(u, v) = [u, \psi(v)] - [v, (\psi(u)) - \psi([u, v])]$$

où $[,]$ désigne le crochet dans \mathfrak{h} , en ayant identifié un élément de $\mathfrak{h} \otimes^s \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}^*$ à une application de \mathfrak{h} dans $\mathfrak{h} \otimes^s \mathfrak{h}$ et de même en ayant identifié un élément de $\mathfrak{h} \otimes^s \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}^* \wedge \mathfrak{h}^*$ à une application antisymétrique de $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{h} \otimes^s \mathfrak{h}$.

En notation plus classique, $\mathfrak{L}_A \psi = \partial \psi$ où ∂ est le cobord de Chevalley de l'algèbre de Lie \mathfrak{h} pour la représentation dans $S^2(\mathfrak{h})$, obtenue par extension de la représentation adjointe en posant $adx^i f = \sum_k C_k^{ij} x^k \frac{\partial f}{\partial x^j}$.

L'équation 3.5 s'écrit alors:

$$\partial y_2 = -P_2$$

Remarquons que la condition $[P, P] = 0$ se traduit par $\partial_2 P_2 = 0$ où $\partial_2 : \mathfrak{h} \otimes^s \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}^* \wedge \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h} \otimes^s \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}^* \wedge \mathfrak{h}^* \wedge \mathfrak{h}^*$ est défini par

$$(\partial_2(f))(x \wedge y \wedge z) = \sum_{x,y,z} \left(ad(x)f(x \wedge y) + f(x, [y, z]) \right).$$

Ainsi P_2 est un cocycle et l'équation 3.5 admet une solution si c'est un cobord.

On procède ainsi étape par étape. Supposons qu'on ait trouvé des coordonnées x_k obtenues comme polynômes de degré inférieur à k en les x de départ et dans lesquelles le tenseur de Poisson s'écrit:

$$P_y = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P^{ij}(y) \frac{\partial}{\partial x_k^i|_y} \wedge \frac{\partial}{\partial x_k^j|_y}$$

avec $P^{ij} = \sum_{1 \leq l \leq n} C_l^{ij} x_k^l + P_{k+1}^{ij} +$ termes d'ordre supérieur où P_{k+1}^{ij} est un polynôme homogène de degré $k+1$ en les x_k permettant de "repousser" les termes P_{k+1} d'ordre $k+1$ dans P .

On veut résoudre:

$$\sum_{1 \leq l \leq n} C_l^{ij} y_{k+1}^l(x_k) = P_{k+1}^{ij} + \sum_{1 \leq r, s \leq n} \left(C_s^{ir} x_k^s \frac{\partial y_{k+1}^j}{\partial x_k^r} + C_s^{rj} x_k^s \frac{\partial y_{k+1}^i}{\partial x_k^r} \right). \quad (3.6)$$

On considère P_{k+1} comme un élément de $S^{k+1}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h}^* \wedge \mathfrak{h}^*$ ou encore comme une application bilinéaire antisymétrique de $\mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h}$ dans $S^{k+1}(\mathfrak{h})$ et y_{k+1} comme un élément de $S^{k+1}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h}^*$ ou encore comme une application linéaire de \mathfrak{h} dans $S^{k+1}(\mathfrak{h})$.

L'équation 3.6 s'écrit alors:

$$\partial y_{k+1} = -P_{k+1}.$$

Remarquons que la condition $[P, P] = 0$ se traduit par $\partial_2 P_{k+1} = 0$ où $\partial_2 : S^{k+1}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h}^* \wedge \mathfrak{h}^* \rightarrow S^{k+1}(\mathfrak{h}) \otimes \mathfrak{h}^* \wedge \mathfrak{h}^* \wedge \mathfrak{h}^*$ est défini par

$$(\partial_2(f))(x \wedge y \wedge z) = \sum_{x,y,z} \left(ad(x)f(x \wedge y) + f(x, [y, z]) \right).$$

Ainsi nous voyons que P_{k+1} est un 2-cocycle et que l'on "repousse" les termes d'ordre $k+1$ si c'est un cobord.

En particulier si $H^2(\mathfrak{h}, S^k(\mathfrak{h})) = 0$, pour tout entier $k \geq 2$, on peut trouver des y_k à chaque étape et le tenseur P est formellement linéarisable.

C'est bien entendu le cas si \mathfrak{h} est semi-simple.

En fait J.F Conn [7] a montré que si P est analytique, et \mathfrak{h} est semi-simple la linéarisation est non seulement formelle mais analytique, ce qui veut dire que le changement de coordonnées est analytique.

De manière précise:

Théorème 2.1 [7] *Soit P une structure de Poisson analytique définie sur un voisinage de l'origine dans \mathbb{R}^n ou \mathbb{C}^n . Supposons que $P(0) = 0$ et écrivons*

$$P(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n; 1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{1 \leq k \leq n} R^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$$

dans un voisinage de 0. Supposons que l'algèbre de Lie \mathfrak{h} pour laquelle les $\{C_k^{ij}\}$ sont les constantes de structure soit semi-simple. Alors P est analytiquement linéarisable.

Remarquons que si l'on considère un tenseur de Lie-Poisson P sur un groupe de Lie G alors l'algèbre de Lie \mathfrak{h} est égale à \mathfrak{g}^* où $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ est la bigèbre de Lie associée au groupe de Lie-Poisson (G, P) .

Corollaire 2.2 *Tout tenseur de Lie-Poisson sur un groupe de Lie G tel que \mathfrak{g}^* soit semi-simple est analytiquement linéarisable.*

Nous avons généralisé le résultat ci-dessus au cas où \mathfrak{g}^* est le produit direct d'une sous-algèbre semi-simple et d'un idéal abélien dans le cas de structures de Lie-Poisson.

Remarquons tout d'abord que si $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathbb{R}$ en somme directe avec \mathfrak{g}_1 semi-simple, alors $H^2(\mathfrak{h}, V) = 0$ pour toute représentation ρ de \mathfrak{h} sur V qui s'annule sur \mathbb{R} .

En particulier $H^2(\mathfrak{h}, S^k(\mathfrak{h})) = \{0\} \forall k$ et la linéarisation est formelle. En fait Molinier [28] a montré que la linéarisation est analytique:

Théorème 2.3 [28] *Toute structure de Poisson d'algèbre de Lie associée du type $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathbb{R}$ où \mathfrak{g}_1 est semi-simple, est formellement et analytiquement linéarisable.*

Théorème 2.4 *Soit G est un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Tout tenseur de Lie-Poisson P sur G tel que \mathfrak{g}^* , le dual de \mathfrak{g} , s'écrive $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A}$ en produit direct où \mathfrak{A} est un idéal abélien et où \mathfrak{g}_1 est une algèbre de Lie semi-simple, est analytiquement linéarisable.*

La démonstration de ce théorème se trouve dans le paragraphe 2.4.

2.3. Structure de Lie-Poisson dont l'algèbre duale est un produit direct avec un facteur semi-simple

Nous nous plaçons sur un groupe de Lie G muni d'une structure de Lie-Poisson telle que \mathfrak{g}^* s'écrive $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A}$ en produit direct où \mathfrak{g}_1 est une algèbre de Lie semi-simple. Nous allons déterminer la structure de Lie-Poisson associée.

Etude de la bigèbre de Lie

Nous commençons par étudier la bigèbre de Lie (\mathfrak{g}, p) associée.

$(\mathfrak{g}, p) = (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ est une bigèbre de Lie si et seulement si $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}^*, q)$ est un bigèbre de Lie. Nous étudions, donc la bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}^*, q)$. Nous avons ainsi un 1-cocycle $q : \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ pour la représentation adjointe de \mathfrak{g}^* sur $\Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ qui est tel que q^* soit le crochet de Lie sur \mathfrak{g} .

Lemme 2.5 *Considérons $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}$ le produit semi-direct de \mathfrak{g}_1 semi-simple et d'un idéal \mathfrak{R} . Soit (ρ, V) une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}$. Tout 1-cocycle (de Chevalley) sur $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}$ à valeurs dans V s'écrit:*

$$q(X, a) = \rho(X, a)Q + \tilde{q}(a) \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1 \quad \forall a \in \mathfrak{R}$$

où $Q \in V$ et où $\tilde{q} : \mathfrak{R} \rightarrow V$ est un 1-cocycle de Chevalley sur \mathfrak{R} à valeurs dans V qui entrelace les représentations de \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{R} sur V .

PREUVE Soit $q_1 = q|_{\mathfrak{g}_1}$, c'est-à-dire $q_1 : \mathfrak{g}_1 \rightarrow V$. Alors q_1 est un 1-cocycle de Chevalley: \mathfrak{g}_1 étant semi-simple, c'est un cobord. Donc il existe $Q \in V$ tel que $q(X) = \rho(x)Q$.

Posons $q(X, a) = \rho((X, a))Q + \tilde{q}(a)$.

Alors \tilde{q} est un 1-cocycle de Chevalley sur $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}$ à valeurs dans V qui s'annule sur \mathfrak{g}_1 . Ainsi

$$\rho(X)\tilde{q}(a) - \tilde{q}([X, a]) = 0 \quad (3.7)$$

$$\rho(a)\tilde{q}(b) - \rho(b)\tilde{q}(a) - \tilde{q}([a, b]) = 0. \quad (3.8)$$

□

Lemme 2.6 *Si \mathfrak{g}_1 est une algèbre de Lie semi-simple, alors $(\Lambda^2 \mathfrak{g}_1)^{inv \mathfrak{g}_1} = 0$.*

PREUVE

Soit $q_{11} \in (\Lambda^2 \mathfrak{g}_1)^{inv \mathfrak{g}_1}$ c'est-à-dire $[X, q_{11}] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1$.

Notons β la forme de Killing de \mathfrak{g}_1 , elle est non dégénérée car \mathfrak{g}_1 est semi-simple, elle définit donc une application linéaire $\hat{\beta} : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1^*$ par $\langle \hat{\beta}(X), Y \rangle = \beta(X, Y)$. De même $q_{11} \in (\Lambda^2 \mathfrak{g}_1)^{inv \mathfrak{g}_1}$ définit $\hat{q}_{11} : \mathfrak{g}_1^* \rightarrow \mathfrak{g}_1$ par $\langle \hat{q}_{11}(\alpha), \gamma \rangle = \langle q_{11}, \alpha \wedge \gamma \rangle$. Alors on peut définir une application linéaire $\tilde{q}_{11} : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_1$ par $\tilde{q}_{11} = -\hat{q}_{11} \circ \hat{\beta}$ c'est-à-dire

$$\langle \tilde{q}_{11}(X), \alpha \rangle = - \langle q_{11}, \hat{\beta}(X) \wedge \alpha \rangle = \beta(X, \hat{q}_{11}(\alpha)).$$

Alors

$$\begin{aligned} q_{11} \in (\Lambda^2 \mathfrak{g}_1)^{inv \mathfrak{g}_1} &\Leftrightarrow [X, q_{11}] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1 \\ &\Leftrightarrow \langle [X, q_{11}], \alpha \wedge \gamma \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1 \quad \forall \alpha, \gamma \in \mathfrak{g}_1^* \\ &\Leftrightarrow - \langle q_{11}, ad_X^* \alpha \wedge \gamma \rangle - \langle q_{11}, \alpha \wedge ad_X^* \gamma \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle \hat{q}_{11}(\gamma), ad_X^* \alpha \rangle - \langle \hat{q}_{11}(\alpha), ad_X^* \gamma \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow - \langle [X, \hat{q}_{11}(\gamma)], \alpha \rangle + \langle [X, \hat{q}_{11}(\alpha)], \gamma \rangle = 0. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle \tilde{q}_{11} \circ ad_X(Y), \alpha \rangle &= - \langle \hat{q}_{11} \circ \hat{\beta}[X, Y], \alpha \rangle \\ &= \langle \hat{\beta}[X, Y], \hat{q}_{11}(\alpha) \rangle \\ &= \beta([X, Y], \hat{q}_{11}(\alpha)) \\ &= -\beta(Y, [X, \hat{q}_{11}(\alpha)]) \text{ car } \beta \text{ est invariante} \\ &= \langle -\hat{\beta}(Y), [X, \hat{q}_{11}(\alpha)] \rangle \\ &= - \langle \alpha, [X, \hat{q}_{11}(\hat{\beta}(Y))] \rangle \text{ d'après l'égalité ci-dessus} \\ &= \langle \alpha, [X, \tilde{q}_{11}(Y)] \rangle \\ &= \langle \alpha, ad_X \circ \tilde{q}_{11}(Y) \rangle. \end{aligned}$$

D'où

$$adX \circ q_{11} = q_{11} \circ adX \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1.$$

Alors si $\mathfrak{g}_1 = \bigoplus_{1 \leq k \leq q} J_k$ où les J_k sont des idéaux simples de \mathfrak{g}_1 , nous avons que $q_{11}(J_k) \subset J_k$, ainsi si nous notons $q_{11k} = q_{11}|_{J_k}$ nous avons

1. $q_{11k} = \lambda_k id|_{J_k}$ si J_k est absolument simple
2. $q_{11k} = \lambda_k C|_{J_k}$ où $C|_{J_k}$ est une structure complexe sur J_k sinon.

Écrivons que q_{11} est antisymétrique:
dans le premier cas on a

$$\begin{aligned} \langle q_{11}, \hat{\beta}(X), \hat{\beta}(X) \rangle &= 0 \\ &= -\lambda \langle X, \hat{\beta}(X) \rangle \\ &= -\lambda \beta(X, X) \neq 0. \end{aligned}$$

dans le second cas on a

$$\begin{aligned} \langle q_{11}, \hat{\beta}(X) \wedge \hat{\beta}(JY) \rangle &= -\lambda \beta(x, J^2Y) = \lambda \beta(X, Y) \\ &= -\langle q_{11}, \hat{\beta}(JY) \wedge \hat{\beta}(X) \rangle \\ &= \lambda \beta(JY, JX) = -\lambda \beta(Y, X). \end{aligned}$$

Ces deux solutions ne sont pas antisymétriques. Donc $q_{11} = 0$. □

Proposition 2.7 *Considérons une structure de bigèbre de Lie (\mathfrak{g}, p) telle que \mathfrak{g}^* soit le produit direct d'un idéal \mathfrak{g}_1 semi-simple et d'un idéal \mathfrak{R} . Alors la structure de bigèbre de Lie duale $(\mathfrak{g}^*, q) = (\mathfrak{g}^*, q)$ vérifie:*

$$q(X, a) = [(X, a), Q] + \tilde{q}(a) \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1 \quad \forall a \in \mathfrak{R}$$

où $Q \in \Lambda^2(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{R})$ et où $\tilde{q} : \mathfrak{R} \rightarrow \Lambda^2(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{R})$ est un 1-cocycle de Chevalley sur \mathfrak{R} à valeurs dans $\Lambda^2(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{R})^{inv_{\mathfrak{g}_1}}$.

En notant Q^{11} (resp. \tilde{q}^{11}) la partie de Q (resp. \tilde{q}) située dans $\Lambda^2 \mathfrak{g}_1$, Q^{12} (resp. \tilde{q}^{12}) la partie de Q (resp. \tilde{q}) située dans $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{R}$ et Q^{22} (resp. \tilde{q}^{22}) la partie de Q (resp. \tilde{q}) située dans $\Lambda^2 \mathfrak{R}$, on obtient:

- $\tilde{q}^{11} = 0$;
- $\tilde{q}^{12} : \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{R} \rightarrow \Lambda^2(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{R})$ est un 1-cocycle;
- $\tilde{q}^{22} : \Lambda^2 \mathfrak{R} \rightarrow \Lambda^2(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{R})$ est un 1-cocycle;
- $[X, \tilde{q}^{12}(b)] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1 \quad \forall b \in \mathfrak{R}$;
- $[[X, Q^{12}], b] + [X, [b, Q^{12}]] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1 \quad \forall b \in \mathfrak{R}$.

PREUVE Nous étudions la bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}^*, q)$. Nous avons ainsi un 1-cocycle $q : \mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}^*$ pour la représentation adjointe de \mathfrak{g}^* sur $\Lambda^2 \mathfrak{g}^*$. En vertu du lemme 2.5 on écrit:

$$q(X, a) = [(X, a), Q] + \tilde{q}(a) \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1 \quad \forall a \in \mathfrak{A}$$

où $Q \in \Lambda^2(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A})$ et où $\tilde{q} : \mathfrak{A} \rightarrow V$ est un 1-cocycle de Chevalley sur \mathfrak{A} à valeurs dans $\Lambda^2(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A})^{inv \mathfrak{g}_1}$.

D'après 3.7, nous avons $[X, \tilde{q}^{11}] = 0$, donc $\tilde{q}^{11} = 0$ par le lemme 2.6. D'autre part comme \tilde{q} est un 1-cocycle, nous obtenons que \tilde{q}^{12} et \tilde{q}^{22} sont deux cocycles d'après 3.8 et que $[X, \tilde{q}^{12}] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1$ d'après 3.7.

Ecrivons maintenant que q est un cocycle:

$$[(X, a), q(Y, b)] - [(Y, b), q(X, a)] = q([(X, a), (Y, b)]) \quad X, Y \in \mathfrak{g}_1, \quad a, b \in \mathfrak{A}.$$

Pour $a = b = 0$ cette équation nous donne l'existence de Q .

Pour $a = 0$ et $Y = 0$ on obtient:

$$[X, q(b)] - [b, q(X)] = q([X, b]) \quad X \in \mathfrak{g}_1, \quad b \in \mathfrak{A}. \quad (3.9)$$

La projection sur $\Lambda^2 \mathfrak{g}_1$ nous donne que \tilde{q}^{11} est invariant.

La projection sur $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A}$ nous donne:

$$[X, \tilde{q}^{12}(b)] + [[X, Q^{12}], b] + [X, [b, Q^{12}]] = 0$$

La projection sur $\Lambda^2 \mathfrak{A}$ ne nous donne rien.

Pour $X = Y = 0$ on obtient que \tilde{q} est un 1-cocycle. □

Corollaire 2.8 *Considérons une structure de bigèbre de Lie (\mathfrak{g}, p) telle que \mathfrak{g}^* soit le produit direct d'un idéal \mathfrak{g}_1 semi-simple et d'un idéal \mathfrak{A} . Ecrivons $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{S}$ (somme directe d'espaces vectoriels) où $\mathfrak{k} = \{U \in \mathfrak{g} \mid \langle U, a \rangle = 0 \quad \forall a \in \mathfrak{A}\}$ et $\mathfrak{S} = \{s \in \mathfrak{g} \mid \langle s, X \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1\}$.*

Alors \mathfrak{k} et \mathfrak{S} sont des sous-algèbres de Lie de \mathfrak{g} .

PREUVE

\mathfrak{S} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} car

$$\langle [r_1, r_2], X \rangle = \langle r_1 \wedge r_2, q(X) \rangle = \langle r_1 \wedge r_2, [X, Q] \rangle = 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathfrak{S} \quad \text{et} \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1$$

puisque \mathfrak{g}_1 est un idéal.

Remarquons que \mathfrak{k} est une sous-algèbre de Lie si et seulement si

$$\langle [U, V], a \rangle = \langle U \wedge V, \tilde{q}(a) \rangle = \langle U \wedge V, \tilde{q}^{11}(a) \rangle = 0 \quad \forall a \in \mathfrak{A}, \quad \forall U, V \in \mathfrak{k}.$$

Cette propriété est vérifiée car $\tilde{q}^{11}(a) \in (\Lambda^2(\mathfrak{g}_1))^{inv \mathfrak{g}_1} = 0$. □

Lemme 2.9 *Lorsque \mathfrak{A} est abélien on obtient $\tilde{q}^{12} \equiv 0$.*

PREUVE

Lorsque \mathfrak{A} est abélien, on obtient $[X, \tilde{q}^{12}] = 0 \forall X \in \mathfrak{g}_1$.

Or $\tilde{q}^{12}(s) \in \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{A}$ donc si X_1, \dots, X_n est une base de \mathfrak{g}_1 et a_1, \dots, a_r une base de \mathfrak{A} ,

on peut écrire $\tilde{q}^{12}(s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r w^{ij}(s) X_i \otimes a_j$

Ainsi

$$\begin{aligned} [X, \tilde{q}^{12}] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r w^{ij} [X, X_i] \otimes a_j \\ &= \sum_{j=1}^r \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n w^{ij} [X, X_i] \right)}_{\in \mathfrak{g}_1} \otimes \underbrace{a_j}_{\in \mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

Comme les a_i forment une base de \mathfrak{A} , on obtient $\sum_{i=1}^n w^{ij} [X, X_i] = 0 \forall X \in \mathfrak{g}_1$.

D'où $\sum_{i=1}^n w^{ij} X_i \in Z(\mathfrak{g}_1) = \{0\}$ car \mathfrak{g}_1 est semi-simple, ainsi $\tilde{q}^{12} = 0$. Donc $\tilde{q} = \tilde{q}^{22}$.

Ainsi nous avons que

$$\begin{aligned} q(X, a) &= [(X, a)Q] + \tilde{q}(a) \text{ pour } Q \in \Lambda^2(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A}) \\ \text{et } \tilde{q}(a) &= \tilde{q}^{22}(a) \text{ où } \tilde{q}^{22} : \mathfrak{A} \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{A} \end{aligned}$$

□

Observons que le cocycle p sur \mathfrak{g} , $p : \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{G} \rightarrow \Lambda^2(\mathfrak{k} \oplus \mathfrak{G})$ défini par, $p = {}^t [\ ,]_{\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A}}$ nous donne:

$$\begin{aligned} \langle p(U, s), (X, a) \wedge (Y, b) \rangle &= \langle (U, s), [(X, a), (Y, b)] \rangle \quad X, Y \in \mathfrak{g}_1, a, b \in \mathfrak{A}, U \in \mathfrak{k}, s \in \mathfrak{G} \\ &= \langle (U, s), [X, Y] + [a, b] \rangle \\ &= \langle U, [X, Y] \rangle + \langle s, [a, b] \rangle. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Ainsi

$$p(\mathfrak{k}) \subset \Lambda^2 \mathfrak{k} \text{ et } p(\mathfrak{G}) \subset \Lambda^2 \mathfrak{G}.$$

Etude du tenseur de Lie-Poisson associé à la bigèbre

Nous savons (cf Drinfeld [13]) que si le groupe de Lie G est connexe et simplement connexe, toute structure de bigèbre de Lie (\mathfrak{g}, p) définit une unique structure de Poisson multiplicative P sur G telle que (\mathfrak{g}, p) soit la bigèbre de Lie tangente au groupe de Lie Poisson (G, P) . Ainsi nous pouvons maintenant déterminer le tenseur de Lie-Poisson P sur G à partir de la bigèbre de Lie (\mathfrak{g}, p) .

Lemme 2.10 *La structure de Poisson sur G est obtenue à partir de p par*

$$P(\exp X) = r_{\exp X *} \frac{e^{adX} - 1}{adX} \cdot p(X).$$

PREUVE En effet, si P est un tenseur de Lie-Poisson, alors $P_r(g) = r_g^{-1} P(g)$ est un 1-cocycle sur G relativement à la représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$. En différentiant P_r en ϵ , nous obtenons $p = P_{r*\epsilon} = d_\epsilon P$ un 1-cocycle sur \mathfrak{g} relatif à la représentation adjointe de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$. Et réciproquement si G est connexe et simplement connexe, pour tout 1-cocycle $p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ sur \mathfrak{g} relatif à la représentation adjointe de \mathfrak{g} sur $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, il existe un unique champ de tenseur deux fois contravariant antisymétrique et multiplicatif P tel que $p = d_\epsilon P$ ([27]). De plus un tel champ de tenseur est un tenseur de Poisson si et seulement si l'application duale de p est un crochet de Lie sur \mathfrak{g}^* . Nous devons donc "intégrer" le cocycle p sur \mathfrak{g} pour obtenir un cocycle P_r sur le groupe de Lie G .

Nous avons la relation $p(X) = \frac{d}{dt}|_0 P_r(\text{exp}tX)$.

D'autre part P_r est un cocycle pour la représentation adjointe de G sur $\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ donc

$$P_r(\text{exp}(s+t)X) = P_r(\text{exp}sX) + \text{Ad}(\text{exp}sX)P_r(\text{exp}tX).$$

Ainsi

$$\frac{d}{dt}|_s P_r(\text{exp}tX) = \frac{d}{dt}|_0 P_r(\text{exp}(s+t)X) = \text{Ad}(\text{exp}sX)p(X).$$

Et $P_r(\epsilon) = 0$.

Nous obtenons $P_r(\text{exp}X) = \frac{e^{\text{ad}X} - 1}{\text{ad}X} \cdot p(X)$. □

Reprenons le cas d'une structure de Lie-Poisson P telle que \mathfrak{g}^* s'écrive $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A}$ en produit direct où \mathfrak{g}_1 est une algèbre de Lie semi-simple.

Nous avons $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{S}$ comme espaces vectoriels (d'après le corollaire 2.8), donc localement près de e dans G , un élément $g \in G$ s'écrit $g = \text{exp}U \text{exp}s$ où $U \in \mathfrak{k}$ et $s \in \mathfrak{S}$.

Ainsi si U_1, \dots, U_n est une base de \mathfrak{k} et si s_1, \dots, s_r est une base de \mathfrak{S} , nous prendrons pour coordonnées locales de sur G ($x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+r}$) si

$$g = \text{exp}\left(\sum_{1 \leq i \leq n} x^i U_i\right) \text{exp}\left(\sum_{1 \leq i \leq r} x^{n+i} s_i\right).$$

De plus P est multiplicatif, donc $P(hg) = l_{h*}P(g) + r_{g*}P(h) \forall h, g \in G$.

Ainsi

$$\begin{aligned} P(g) &= l_{\text{exp}U*}P(\text{exp}s) + r_{\text{exp}s*}P(\text{exp}U) \\ &= l_{\text{exp}U*}r_{\text{exp}s*}P_r(\text{exp}s) + r_{\text{exp}s*}r_{\text{exp}U*}P_r(\text{exp}U) \\ &= \underbrace{l_{\text{exp}U*}r_{\text{exp}s*} \frac{e^{\text{ads}} - 1}{\text{ads}} \cdot p(s)}_{=P_{\mathfrak{S}}} + \underbrace{r_{\text{exp}s*}r_{\text{exp}U*} \frac{e^{\text{ad}U} - 1}{\text{ad}U} \cdot p(U)}_{=P_{\mathfrak{k}}} \end{aligned}$$

Lemme 2.11

$$P_{\mathfrak{k}} = r_{\text{exp}s*}r_{\text{exp}U*} \frac{e^{\text{ad}U} - 1}{\text{ad}U} \cdot p(U) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\text{exp}U \text{exp}s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}|_{\text{exp}U \text{exp}s}$$

et P^{ij} ne dépend que des x^k pour $k = 1, \dots, n$

PREUVE \mathfrak{k} est un sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} donc

$$\frac{e^{adU} - 1}{adU} \cdot p(U) \in \Lambda^2 \mathfrak{k}$$

Pour $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} r_{\exp U_*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e &= \sum_{1 \leq k \leq n+r} b_k^i \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\exp U} \quad \text{où} \\ b_k^i &= r_{\exp U_*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e (x^k) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 x^k \left(\exp t U_i \exp U \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 x^k \left(\exp(t U_i + U + CBH(t U_i, U)) \right) \end{aligned}$$

où CBH représente les terme non linéaires dans la formule de Campbell, Baker et Hausdorff. Ainsi

$$r_{\exp U_*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e = \sum_{1 \leq k \leq n} b_k^i \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\exp U} \quad \text{et } b_k^i \text{ ne dépend que des } x^j \text{ pour } j = 1, \dots, n$$

Alors

$$\begin{aligned} r_{\exp U_*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\exp U} &= \sum_{1 \leq k \leq n+r} d_k^i \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\exp U \exp s} \quad \text{où} \\ d_k^i &= r_{\exp U_*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\exp U} (x^k) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 x^k \left(\exp(U + t U_i) \exp s \right) \\ &= \delta_k^i \end{aligned}$$

Ainsi nous voyons que pour $i = 1, \dots, n$

$$r_{\exp U_*} r_{\exp U_*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e = \sum_{1 \leq k \leq n} b_k^i \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\exp U \exp s} \quad \text{et } b_k^i \text{ ne dépend que des } x^j \text{ pour } j = 1, \dots, n.$$

□

2.4. Linéarisation analytique

Dans ce paragraphe nous démontrons le théorème 2.4 que nous rappelons:

Soit G est un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Tout tenseur de Lie-Poisson P sur G tel que \mathfrak{g}^ , le dual de \mathfrak{g} , s'écrive $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A}$ en produit direct où \mathfrak{A} est un idéal abélien et où \mathfrak{g}_1 est une algèbre de Lie semi-simple, est analytiquement linéarisable.*

PREUVE

Nous nous plaçons sur $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{A}$ en produit direct et avec \mathfrak{A} abélien. Dans ce cas $\rho(\mathfrak{G}) = \{0\}$ d'après 3.10 et le lemme 2.11 nous dit que

$$P(\exp U \exp s) = r_{\exp U_*} r_{\exp U_*} \frac{e^{adU} - 1}{adU} \cdot p(U) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\exp U \exp s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\exp U \exp s}$$

et P^{ij} ne dépend que des x^k pour $k = 1, \dots, n$.

Donc $P^{ij} = 0$ pour les indices i ou $j \in \{n+1, \dots, n+r\}$, il ne reste que $P^{ij} : G \rightarrow S(\mathfrak{g}^*)$ avec i et $j \in \{1, \dots, n\}$.

De plus les P^{ij} sont des fonctions analytiques en les coordonnées x^k pour $k = 1, \dots, n$.

Notons $P' = \sum_{1 \leq i, j \leq n} P^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ vu comme tenseur de Poisson sur \mathbb{R}^n .

Alors $P'(0) = 0$, et les $C_k^{ij} = \frac{\partial P^{ij}}{\partial x^k} \Big|_0$ sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_1 qui est semi-simple. Donc P' est analytiquement linéarisable d'après Conn [7]. Ceci veut dire qu'il existe un des nouvelles de coordonnées y^1, \dots, y^n sur un ouvert de \mathbb{R}^n dans lesquelles P' s'écrit $P'^{ij}(y) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} y^k$.

Dans les coordonnées $(y^1, \dots, y^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+r})$, P s'écrit: $P^{ij} = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} y^k$.

Donc P est analytiquement linéarisable. \square

Remarque 2.12 Nous allons voir (cf. paragraphe 2.6) que ce résultat peut être mis en défaut pour certaines structures de Poisson.

Proposition 2.13 Soit G est un groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Tout tenseur de Lie-Poisson P sur G tel que \mathfrak{g}^* , le dual de \mathfrak{g} , s'écrit $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{R}$ en produit direct où \mathfrak{g}_1 est une algèbre de Lie semi-simple, est linéarisable si et seulement si la structure de Poisson induite par P sur $\mathfrak{S} = \{s \in \mathfrak{g} \mid \langle X, s \rangle = 0 \forall X \in \mathfrak{g}_1\}$ est linéarisable.

PREUVE Nous nous plaçons maintenant sur $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{R}$ en produit direct où \mathfrak{g}_1 est semi-simple. Alors $p(\mathfrak{S}) \subset \Lambda^2 \mathfrak{S}$ et

$$P(\exp U \exp s) = r_{\exp s_*} r_{\exp U_*} \frac{e^{adU} - 1}{adU} \cdot p(U) + l_{\exp U_*} r_{\exp s_*} \frac{e^{ads} - 1}{ads} \cdot p(s)$$

Remarque 2.14 D'après la démonstration ci-dessus, nous avons vu que par un changement de coordonnées locales qui ne fait intervenir que les x^k pour $k = 1, \dots, n$, nous pouvons toujours linéariser la partie de $P_{\mathfrak{k}}$ de P .

Dans la suite nous supposons donc que cette partie est déjà linéaire et nous allons regarder comment linéariser la partie $P_{\mathfrak{S}}$ de P .

Lemme 2.15 Soit $g \in G$ s'écrivant $g = \exp U \exp s$ avec $U \in \mathfrak{k}$ et $s \in \mathfrak{S}$. alors

$$P_{\mathfrak{S}}(g) = l_{\exp U_*} r_{\exp s_*} \frac{e^{ads} - 1}{ads} \cdot p(s) = \sum_{n+1 \leq i, j \leq n+r} T^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\exp U \exp s} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_{\exp U \exp s}$$

et T^{ij} ne dépend que des x^k pour $k = n+1, \dots, n+r$.

PREUVE Comme \mathfrak{S} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g}

$$\frac{e^{ads} - 1}{ads} \cdot p(s) \in \Lambda^2 \mathfrak{S}.$$

Il faut donc calculer

$$l_{\exp U_*} r_{\exp s_*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e \text{ pour } i = n+1, \dots, n+r.$$

Pour $i = n + 1, \dots, n + r$

$$\begin{aligned} r_{\text{exps}*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e &= \sum_{1 \leq k \leq n+r} b_k^i \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\text{exps}} \quad \text{où} \\ b_k^i &= r_{\text{exps}*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e (x^k) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 x^k \left(\text{expts}_i \text{exps} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 x^k \left(\exp(ts_i + s + CBH(ts_i, s)) \right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$r_{\text{exps}*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e = \sum_{1 \leq k \leq n+r} b_k^i \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\text{exps}} \quad \text{et } b_k^i \text{ ne dépend que des } x^j \text{ pour } j = n + 1, \dots, n + r.$$

Alors

$$\begin{aligned} l_{\text{expU}*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\text{exps}} &= \sum_{1 \leq k \leq n+r} d_k^i \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\text{expUexps}} \quad \text{où} \\ d_k^i &= l_{\text{expU}*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\text{exps}} (x^k) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 x^k \left(\text{expUexp}(s + ts_i) \right) \\ &= \delta_k^i. \end{aligned}$$

Ainsi nous voyons que pour $i = n + 1, \dots, n + r$

$$l_{\text{expU}*} r_{\text{exps}*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e = \sum_{n+1 \leq k \leq n+r} b_k^i \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\text{expUexps}}$$

et b_k^i ne dépend que des x^j pour $j = n + 1, \dots, n + r$ □

Nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} P^{ij}(x) &= \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k \quad \text{pour } i \text{ et } j \in \{1, \dots, n\} \\ P^{ij}(x) &= T^{ij}(x^{n+1}, \dots, x^{n+r}) \quad \text{pour } i \text{ et } j \in \{n + 1, \dots, n + r\}. \end{aligned}$$

Alors P est un tenseur de Poisson sur $G \iff [P, P] = 0$ et cela se traduit par

$$P = L \oplus T$$

où L est le tenseur de Lie-Poisson linéaire donné par les C_k^{ij} qui sont les constantes de structure de \mathfrak{g}_1 et $T = \sum_{n+1 \leq i, j \leq n+r} T^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$ est un tenseur de Poisson.

Si on note H le sous groupe de Lie connexe de G d'algèbre de Lie \mathfrak{h} et Σ le sous groupe de Lie connexe de G d'algèbre de Lie \mathfrak{S} , alors L définit un tenseur de Lie-Poisson linéaire sur H et T définit un tenseur de Poisson sur Σ . Donc linéariser P revient à linéariser le tenseur T sur Σ . □

2.5. Calcul du $H^2(\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}, \rho, V)$

Dans le processus de linéarisation formelle d'une structure de Poisson c'est $H^2(\mathfrak{h}, ad, S(\mathfrak{h}))$ qui intervient, où \mathfrak{h} est la linéarisée de la structure.

Nous décrivons $H^2(\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}, \rho, V)$ où (ρ, V) est une représentation de dimension finie de $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}$ sur V ; $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}$ désigne le produit semi-direct de \mathfrak{g}_1 semi-simple et d'un idéal \mathfrak{R} .

Une 2-cochaine c est une application antisymétrique

$$c : \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R} \times \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R} \rightarrow V.$$

Notons c_1 la restriction de c à $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, $c_1 : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \rightarrow V$ est antisymétrique.

Alors c est un 2-cocycle si

$$S_{1,2,3} \left(\rho(X_1, a_1)c((X_2, a_2), (X_3, a_3)) - c([(X_1, a_1), (X_2, a_2)], (X_3, a_3)) \right) = 0$$

$\forall a_i \in \mathfrak{R}; \forall X_i \in \mathfrak{g}_1$; pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Notons ρ_1 (resp. ρ_2) la restriction de ρ à \mathfrak{g}_1 (resp. \mathfrak{R}).

Pour $a_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, on obtient:

$$S_{1,2,3} \left(\rho_1(X_1)c_1(X_2, X_3) - c_1([X_1, X_2], X_3) \right) = 0.$$

Cette équation nous dit que c_1 est un 2-cocycle pour (ρ_1, V) et \mathfrak{g}_1 est semi-simple, donc c_1 est un cobord; il existe $D_1 : \mathfrak{g}_1 \rightarrow V$ tel que $c_1 = \partial D_1$

Définissons $D : \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R} \rightarrow V$ en posant $D|_{\mathfrak{g}_1} = D_1$ et $D|_{\mathfrak{R}} = 0$.

Nous pouvons considérer $c' = c - \partial D$. Alors $c' : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \rightarrow V$ est un 2-cocycle vérifiant $c'|_{\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1} = 0$.

Notons t la restriction de c' à $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{R}$, $t : \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{R} \rightarrow V$.

La condition de cocycle pour t s'écrit:

$$\rho_1(X_2)t(X_3, a_1) - \rho_1(X_3)t(X_2, a_1) - t([X_2, X_3], a_1) + t(X_2, [X_3, a_1]) - t(X_3, [X_2, a_1]) = 0.$$

Définissons $\hat{t} : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{R}^* \otimes V$ par $\hat{t}(X)(a) = t(X, a)$. Alors

$$\left((\partial \hat{t})(X, Y) \right)(a) = \left(\hat{\rho}(X)\hat{t}(Y) - \hat{\rho}(Y)\hat{t}(X) - \hat{t}([X, Y]) \right)(a)$$

où $\hat{\rho} : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \text{End}(\mathfrak{R}^* \otimes V)$ est défini par

$$(\hat{\rho}(X), \alpha \odot v)(a) = \rho(X)v \langle \alpha, a \rangle - \langle [X, a], \alpha \rangle v \quad \forall X \in \mathfrak{g}_1, \forall \alpha \in \mathfrak{R}^*, \forall a \in \mathfrak{R}, \forall v \in V.$$

Ainsi \hat{t} est un cocycle et \mathfrak{g}_1 est semi-simple, donc \hat{t} est un cobord: il existe $\hat{U} \in \mathfrak{R}^* \otimes V$ tel que $\hat{t} = \partial \hat{U}$. On définit alors $U : \mathfrak{R} \rightarrow V$ à partir de \hat{U} en posant $(\hat{U}, a) = U(a)$.

Alors $\hat{t}(X) = \hat{\rho}(X)\hat{U}$. Ce qui s'écrit:

$$(\hat{t}(X), a) = t(X, a) = \rho(X)(U(a)) - U([X, a]) = (\partial U)(X, a).$$

Définissons $U' : \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R} \rightarrow V$ par $U'|_{\mathfrak{R}} = U$ et $U'|_{\mathfrak{g}_1} = 0$.

Alors $c'' = c' - \partial U' = c - \partial D - \partial U'$ est un 2-cocycle et $c''|_{\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1} \equiv 0$ et $c''|_{\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{R}} \equiv 0$.

Notons c_2 la restriction de c'' à $\mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$, $c_2 : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R} \rightarrow V$.

Alors c_2 est un 2-cocycle pour ρ_2 et il vérifie en plus

$$\rho_1(X_1)c_2(a_2, a_3) - c_2([X_1, a_2], a_3) - c_2([a_3, X_1], a_2) = 0.$$

Donc c_2 entrelace l'action de \mathfrak{g}_1 .

De plus si c'' est un 2-cobord pour \mathfrak{h} , alors on peut écrire $c'' = \partial d$ où $d : \mathfrak{X} \rightarrow V$ entrelace l'action de \mathfrak{g}_1 . Nous obtenons le résultat:

Proposition 2.16 $H^2(\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{X}, \rho, V) = H^2_{\mathfrak{g}_1\text{-equivariant}}(\mathfrak{X}, \rho_2, V)$.

Ce résultat est un cas particulier des résultats de cohomologie d'algèbres de Lie obtenus par Hochschild et Serre [21].

2.6. Généralisation aux structures de Poisson

Nous allons démontrer maintenant qu'une structure de Poisson P sur une variété M , s'annulant en un point $y \in M$ et telle que la linéarisée corresponde à $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{X}$ en somme directe avec \mathfrak{g}_1 semi-simple et \mathfrak{X} abélien, n'est pas forcément linéarisable. Ceci montre l'utilité de la condition Lie-Poisson dans le théorème 2.4.

Si on considère une structure de Poisson P telle que $P(y) = 0$, alors nous savons que $[P, P] = 0$ et $[\cdot, \cdot]_P$ est un crochet de Lie sur \mathfrak{h} , mais nous n'avons plus de condition de cocyclicité, le tenseur de Poisson n'étant plus multiplicatif.

Soit P un tenseur de Poisson sur \mathbb{R}^{n+r} (où $n = \dim \mathfrak{g}_1$ et $r = \dim \mathfrak{X}$) s'annulant en 0 tel que la linéarisée corresponde à $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{X}$ et s'écrivant

$$P^{ij}(x) = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k + R^{ij}$$

où les C_k^{ij} sont les constantes de structure de $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{X}$ dans une base $\{e_1, \dots, e_{n+r}\}$ où $e_i \in \mathfrak{g}_1 \forall i \leq n$ et $e_j \in \mathfrak{X} \forall j > n$; et où R^{ij} représentent les termes non linéaires de P^{ij} , et on suppose que $R^{ij} = 0$ pour i ou $j \leq n$.

Nous allons regarder la dimension maximale des feuilles symplectiques pour démontrer qu'un tel tenseur de Poisson n'est pas linéarisable si R est non nul.

La dimension de la feuille symplectique passant par le point de coordonnées x , pour la structure linéaire est le rang de la matrice suivante:

$$\left. \begin{array}{c|c} \sum_k C_k^{ij} x^k & 0 \\ \hline \underbrace{0}_{\mathfrak{g}_1} & \underbrace{0}_{\mathfrak{X}} \end{array} \right\} \mathfrak{X}$$

La dimension de la feuille symplectique passant par le point de coordonnées z , pour la structure non linéaire est le rang de la matrice

$$\left. \begin{array}{c|c} \sum_k C_k^{ij} z^k & 0 \\ \hline \underbrace{0}_{\mathfrak{g}_1} & \underbrace{R(z)}_{\mathfrak{X}} \end{array} \right\} \mathfrak{X}$$

Donc les deux dimensions maximales des feuilles symplectiques ne sont pas les mêmes et P n'est pas linéarisable si R est non nul.

D'autre part le calcul du deuxième espace de cohomologie de Chevalley fait au paragraphe 2.5, nous donne:

Proposition 2.17 *Soit Λ une structure de Poisson sur une variété M , s'annulant en un point x et telle que la linéarisée en x soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}$ le produit semi-direct d'une sous-algèbre de Lie semi-simple de dimension n et d'un idéal de dimension r .*

Alors il existe des coordonnées formelles $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+r})$ au voisinage de x telles que, dans ces coordonnées, on ait:

$$\{x^i, x^j\} = \sum_{1 \leq k \leq n} C_k^{ij} x^k \text{ pour } i \text{ et } j \leq n$$

$$\{x^i, x^j\} = \sum_{n+1 \leq k \leq n+r} C_k^{ij} x^k \text{ pour } i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } j \in \{n+1, \dots, n+r\}$$

$$\{x^i, x^j\} = \sum_{n+1 \leq k \leq n+r} C_k^{ij} x^k + R^{ij}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^{n+r}) \text{ pour } i \text{ et } j \in \{n+1, \dots, n+r\}$$

où les C_k^{ij} sont les constantes de structure de $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{R}$.

PREUVE Nous utiliserons les mêmes notations que dans le paragraphe 2.2.

Supposons que dans des coordonnées $\{x_k\}$, Λ s'écrive:

$$\Lambda^{ij} = \sum_{1 \leq l \leq n+r} C_l^{ij} x_k^l + \Lambda_{k+1}^{ij} + \text{termes d'ordre supérieur.}$$

Nous savons que Λ_{k+1} est un cocycle, $\Lambda_{k+1} : \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \rightarrow S^{k+1}(\mathfrak{h})$. En utilisant le calcul de cohomologie effectué au paragraphe 2.5, nous savons que par des changements de coordonnées formelles successifs qui ne font intervenir que les x^i pour $i \in \{1, \dots, n\}$, nous pouvons nous ramener au cas où Λ^{ij} est linéaire pour i et $j \in \{1, \dots, n\}$.

En utilisant à nouveau ce calcul de cohomologie, par un changement de coordonnées formelles faisant intervenir cette fois-ci tous les x^i , nous pouvons nous ramener au cas où Λ^{ij} est linéaire pour i ou $j \in \{1, \dots, n\}$.

En fait cela signifie que les seuls termes non linéaires de Λ sont obtenus pour i et $j \in \{n+1, \dots, n+r\}$.

□

3. Non linéarisabilité pour des Q particuliers

Nous considérons des structures qui lorsque l'on calcule la dimension maximale de leurs feuilles symplectiques, paraissent linéarisables, et qui pourtant pour certains Q ne sont pas linéarisables.

Nous allons travailler sur des algèbres filiformes.

Définition 3.1 (Goze[17]) Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotent de dimension n , \mathfrak{g} est dite filiforme si

$$\dim \mathfrak{g}^k = n - k$$

Définition 3.2 [17] Nous appellerons R_n l'algèbre de Lie de dimension $n + 1$ définie dans la base (X_0, X_1, \dots, X_n) par

$$\begin{aligned} [X_0, X_i] &= X_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ [X_1, X_i] &= X_{i+2} \quad i = 2, \dots, n-2 \end{aligned}$$

Proposition 3.1 Il existe des tenseurs de Lie-Poisson exacts sur R_5 qui ne sont pas linéarisables pour certains Q .

PREUVE Observons que l'on a :

$$\begin{aligned} ad^0 X X_0 &= -a^1 X_2 - a^2 X_3 - a^3 X_4 - a^4 X_5; \quad ad^0 X X_1 = a^0 X_2 - a^2 X_4 - a^3 X_5; \\ ad^0 X X_2 &= a^0 X_3 + a^1 X_4; \quad ad^0 X X_3 = a^0 X_4 + a^1 X_5; \quad ad^0 X X_4 = a^0 X_5; \quad ad^0 X X_5 = 0 \\ ad^1 X X_0 &= -a^0 a^1 X_3 - a^0 a^2 X_4 - a^1 a^2 X_5 - (a^1)^2 X_4 - a^3 a^0 X_5; \\ ad^1 X X_1 &= (a^0)^2 X_3 + a^0 a^1 X_4 - a^0 a^2 X_5; \quad ad^1 X X_2 = (a^0)^2 X_4 + 2a^0 a^1 X_5; \\ ad^1 X X_3 &= (a^0)^2 X_5; \quad ad^1 X X_4 = 0; \quad ad^1 X X_5 = 0 \\ ad^2 X X_0 &= -(a^0)^2 a^1 X_4 - a^0 (a^1)^2 X_5 - (a^0)^2 a^2 X_5 - a^0 (a^1)^2 X_5; \\ ad^2 X X_1 &= (a^0)^3 X_4 + 2(a^0)^2 a^1 X_5; \quad ad^2 X X_2 = (a^0)^3 X_5; \quad ad^2 X X_3 = 0; \quad ad^2 X X_4 = 0; \\ ad^2 X X_5 &= 0 \\ ad^3 X X_0 &= -(a^0)^3 a^1 X_5; \quad ad^3 X X_1 = (a^0)^4 X_5; \quad ad^3 X X_2 =; \quad ad^3 X X_3 = 0; \\ ad^3 X X_4 &= 0; \quad ad^3 X X_5 = 0; \quad ad^3 X X_5 = 0. \end{aligned}$$

Ainsi cette algèbre est de pas 5.

Nous commençons par regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant.

$$[X, [Q, Q]] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \iff \begin{cases} Q^{01} = 0 & (1) \\ Q^{02} = 0 & (2) \\ Q^{03} = 0 & (3) \\ Q^{04} = 0 & (4) \\ Q^{12} = 0 & (5) \\ Q^{13} = 0 & (6) \\ Q^{14}(Q^{05} - Q^{23}) + Q^{05}Q^{23} = 0 & (7) \end{cases}$$

Il vient alors que le terme homogène de degré trois de P est donné par:

$$\begin{aligned}
P_{(3)expX} &= \sum_{0 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \sum_{0 \leq i \leq 5} \sum_{0 \leq j \leq 5} \frac{1}{12} (adX_k)^i (ad^2 X X_l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\
&= \sum_{0 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \left\{ \frac{1}{12} \left((-a^1 \delta_0^k + a^0 \delta_1^k) \frac{\partial}{\partial a^2} + (-a^2 \delta_0^k + a^0 \delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^3} \right. \right. \\
&\quad + \left. \left. (-a^3 \delta_0^k + a^0 \delta_3^k - a^2 \delta_1^k + a^1 \delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^4} + (-a^4 \delta_0^k + a^0 \delta_4^k - a^3 \delta_1^k + a^1 \delta_3^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right) \wedge \right. \\
&\quad \left(\left((a^0)^2 \delta_1^l - a^0 a^1 \delta_0^l \right) \frac{\partial}{\partial a^3} + \left((a^0)^2 \delta_2^l + a^0 a^1 \delta_1^l + (-a^1)^2 - a^0 a^2 \right) \delta_0^l \frac{\partial}{\partial a^4} \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(-a^0 a^2 \delta_1^l + 2a^0 a^1 \delta_2^l + (a^0)^2 \delta_3^l + (-a^1 a^2 - a^0 a^3) \delta_0^l \right) \frac{\partial}{\partial a^5} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{12} \left\{ \left(Q^{14} (a^0)^3 + Q^{23} (a^0)^3 \right) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \right. \\
&\quad \left. + \left(Q^{14} (a^0)^2 a^1 + Q^{24} (a^0)^3 \right) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \right\}.
\end{aligned}$$

Donc P n'est pas linéaire a priori et les termes homogènes de degré trois de P sont $P_{(3)}^{35}$ et $P_{(3)}^{45}$.

Nous allons maintenant calculer $P_{(1)expX}$, la partie linéaire de P .

$$\begin{aligned}
P_{(1)expX} &= \sum_{0 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \sum_{0 \leq i \leq 5} \sum_{0 \leq j \leq 5} \left\{ \left(\delta_i^k (adX X_l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{0 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \frac{\partial}{\partial a^k} \right\} \wedge \left\{ (-a^1 \delta_0^l + a^0 \delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^2} + (-a^2 \delta_0^l + a^0 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^3} \right. \\
&\quad \left. + (-a^3 \delta_0^l + a^0 \delta_3^l - a^2 \delta_1^l + a^1 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^4} \right. \\
&\quad \left. + (-a^4 \delta_0^l + a^0 \delta_4^l - a^3 \delta_1^l + a^1 \delta_3^l) \frac{\partial}{\partial a^5} \right\} \\
&= a^0 Q^{14} \frac{\partial}{\partial a^1} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^0 Q^{14} + a^0 Q^{23}) \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\
&\quad + (-a^1 Q^{05} + a^0 Q^{15} + a^1 Q^{23} + a^0 Q^{24}) \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (-a^1 Q^{23} + a^0 Q^{24}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\
&\quad + (-a^1 Q^{05} + a^0 Q^{25} + a^0 Q^{34}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^3 Q^{14} + a^0 Q^{35} - a^2 Q^{15} - a^3 Q^{05} + a^1 Q^{25} - a^1 Q^{34}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant regarder la dimension des feuilles symplectiques de P .

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P^{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P^{24} & P^{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P^{34} & P^{35} \\ 0 & 0 & -P^{24} & -P^{34} & 0 & P^{45} \\ 0 & -P^{15} & -P^{25} & -P^{35} & -P^{45} & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\det F = 0$. La dimension des feuilles symplectiques vaut 0, 2 ou 4.

Nous allons regarder tous les déterminants d'ordre 4 de F , nous noterons D le sous-déterminant de F privé de la première ligne et de la première colonne et D_{ij} le sous-déterminant de D où on a enlevé les lignes i et les colonnes j .

$$\begin{aligned} D_{11} &= (P^{25} P^{34} - P^{24} P^{35})^2 \\ D_{12} &= P^{15} P^{34} (P^{25} P^{34} - P^{24} P^{35}) \\ D_{13} &= P^{15} P^{24} (P^{25} P^{34} - P^{24} P^{35}) \\ D_{14} &= P^{15} P^{24} (P^{25} P^{34} - P^{24} P^{35}) \\ D_{15} &= 0 \\ D_{22} &= (P^{15})^2 (P^{34})^2 \\ D_{23} &= P^{15} P^{24} P^{15} P^{34} \\ D_{24} &= 0 \\ D_{25} &= 0 \\ D_{33} &= (P^{15})^2 (P^{24})^2 \\ D_{34} &= 0 \\ D_{35} &= 0 \\ D_{44} &= 0 \\ D_{45} &= 0 \\ D_{55} &= 0. \end{aligned}$$

Nous allons essayer d'annuler les déterminants où n'apparaissent pas les termes non linéaires. On obtient alors

$$\begin{cases} D_{22} = 0 \\ D_{23} = 0 \\ D_{33} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Q^{14} Q^{24} = 0 & (1) \\ Q^{14} Q^{23} = 0 & (2) \\ Q^{14} (Q^{23} + Q^{14}) = 0 & (3) \end{cases}$$

Les déterminants où les termes non linéaires apparaissent sont $D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}$, et c'est le terme en P^{35} qui intervient.

Nous voulons donc que $P_{(3)}^{35} \neq 0 \iff (Q^{14}, Q^{23}) \neq (0, 0)$ (4)

Si $Q^{23} = 0$ alors d'après (3), $Q^{14} = 0$, ceci contredit (4), donc $Q^{23} \neq 0$ et $Q^{14} = 0$.

Alors $P_{(1)}^{15} = 0$ et la condition $[Q, Q]$ ad-invariant donne $Q^{05} = 0$.

Dans $D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{14}$, nous allons essayer d'éliminer la partie linéaire sans éliminer la partie non linéaire.

Comme $P^{15} = 0$, on a que $D_{12} = D_{13} = D_{14} = 0$. Il reste donc uniquement D_{11} .

$$\begin{aligned} D_{11(1)} &= (P^{25}P^{34} - P^{24}P^{35})^2 \\ &= \left\{ (a^0Q^{15} + a^1Q^{23} + a^0Q^{24})(-a^1Q^{23} + a^0Q^{24}) - (a^0Q^{23})(a^0Q^{25} + a^0Q^{34}) \right\}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$D_{11(1)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Q^{24}(Q^{24} + Q^{15}) - Q^{23}(Q^{34} + Q^{25}) = 0 \\ -Q^{23}(Q^{24} + Q^{15}) + Q^{24}Q^{23} = 0 \\ Q^{23}Q^{23} = 0. \end{cases}$$

Nous voyons que cela est impossible car $Q^{23} \neq 0$.

Ainsi les termes non linéaires ne font pas chuter la dimension des feuilles symplectiques pour les déterminants d'ordre 4.

Il est possible d'annuler tous les déterminants d'ordre 4, en prenant

$$\begin{aligned} Q^{14} &= 0 \\ Q^{05} &= 0 \\ Q^{23} &= 0 \\ Q^{24}(Q^{24} + Q^{15}) &= 0. \end{aligned}$$

Mais alors $P_{(3)}^{35} = 0$ et le seul terme non linéaire de P est

$$P_{(3)}^{45} = \frac{1}{6}Q^{15}(a^0)^3 + (O - \frac{1}{6})Q^{24}(a^0)^3.$$

Dans la suite nous supposons, donc $(Q^{15}, Q^{24}) \neq (0, 0)$.

Alors le nouveau déterminant à considérer est

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & P^{25} \\ 0 & 0 & P^{34} & P^{35} \\ 0 & -P^{34} & 0 & P^{45} \\ -P^{25} & -P^{35} & -P^{45} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Nous allons regarder tous les déterminants d'ordre 2 de D .

Nous noterons D_{ijkl} le sous déterminant de D constitué des ligne i et j et des colonnes

k et l .

$$\begin{aligned}
D_{1212} &= 0 \\
D_{1213} &= 0 \\
D_{1223} &= 0 \\
D_{1214} &= 0 \\
D_{1224} &= 0 \\
D_{1234} &= P^{25} P^{34} \\
D_{1313} &= 0 \\
D_{1323} &= 0 \\
D_{1314} &= 0 \\
D_{1324} &= P^{25} P^{34} \\
D_{1334} &= 0 \\
D_{2323} &= (P^{34})^2 \\
D_{2314} &= 0 \\
D_{2324} &= P^{35} P^{34} \\
D_{2334} &= P^{45} P^{34} \\
D_{1414} &= (P^{25})^2 \\
D_{1424} &= P^{25} P^{35} \\
D_{1434} &= P^{45} P^{25} \\
D_{2424} &= (P^{35})^2 \\
D_{2434} &= P^{35} P^{45} \\
D_{3434} &= (P^{45})^2.
\end{aligned}$$

Est-il possible d'annuler tous les déterminants où P^{45} n'intervient pas?
En termes d'équation cela s'écrit

$$\begin{aligned}
D_{2323} = (P^{34})^2 = 0 &\Leftrightarrow (Q^{24})^2 = 0 \\
D_{1414} = (P^{25})^2 = 0 &\Leftrightarrow Q^{24} + Q^{15} = 0 \\
D_{2424} = (P^{35})^2 = 0 &\Leftrightarrow Q^{34} + Q^{25} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $Q^{24} = 0$ et $Q^{15} = 0$, donc P est linéaire.

En conclusion nous voyons que les termes non linéaires ne font jamais chuter la dimension maximale des feuilles symplectiques.

Or lorsqu'on regarde le système 3.1 à résoudre pour linéariser la structure, on obtient pour $i = 3, j = 5$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{12}(a^0)^3 Q^{23} + \frac{1}{12}(a^0)^3 Q^{14} + (a^0 Q^{24} - a^1 Q^{23}) \frac{\partial f^5}{\partial a^4} + (a^0 Q^{34} - a^2 Q^{05} + a^0 Q^{25}) \frac{\partial f^5}{\partial a^5} \\
&+ a^0 Q^{14} \frac{\partial f^3}{\partial a^1} + (a^1 Q^{23} + a^0 Q^{24} - a^1 Q^{05} + a^0 Q^{15}) \frac{\partial f^3}{\partial a^2} + (a^0 Q^{34} - a^2 Q^{05} + a^0 Q^{25}) \frac{\partial f^3}{\partial a^3} \\
&+ (a^3 Q^{14} - a^1 Q^{34} - a^3 Q^{05} - a^2 Q^{15} + a^1 Q^{25} + a^0 Q^{35}) \frac{\partial f^3}{\partial a^4} - Q^{34} f^0 + Q^{05} f^2 - Q^{25} f^0 = 0.
\end{aligned}$$

Supposons que $Q^{23} \neq 0$ et $Q^{ij} = 0$ pour $i, j \neq 2, 3$, alors l'équation précédente s'écrit:

$$\frac{1}{12}(a^0)^3 - a^1 \frac{\partial f^5}{\partial a^4} + a^1 \frac{\partial f^3}{\partial a^2} = 0.$$

Cette équation n'a pas de solution car f^3, f^5 sont des polynômes homogènes de degré 3 en les $\{a^i\}$

Remarquons que $Q = Q^{23} X_2 \wedge X_3$ est un élément ad -invariant de $\Lambda^2 \mathfrak{g}$. Ainsi pour ce Q il n'existe pas de fonctions f^i permettant d'éliminer les termes de degré 3 de P , donc on ne peut pas linéariser P pour ce Q particulier.

Regardons ce qui se passe au niveau de la dimension des feuilles symplectiques pour un tel P .

$$P_{expX} = Q^{23} \left\{ a^0 \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} + a^1 \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} - a^1 \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} + \frac{1}{12}(a^0)^3 \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \right\}.$$

Donc

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P^{24} & P^{25} \\ 0 & 0 & 0 & P^{34} & P^{35} \\ 0 & -P^{24} & -P^{34} & 0 & 0 \\ 0 & -P^{25} & -P^{35} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Et $\det F = 0$

Si on note D le sous déterminant de F où on a enlevé la première ligne et la première colonne, on obtient:

$$\begin{aligned} D &= (P^{24} P^{35} - P^{25} P^{34})^2 \\ &= \left\{ Q^{23} \left(\frac{1}{12}(a^0)^4 - (a^1)^2 \right) \right\}^2. \end{aligned}$$

Donc les termes non linéaire ne font pas chuter la dimension maximale des feuilles symplectiques qui vaut 4. La dimension maximale des feuilles symplectiques ne diminue donc pas lorsque l'on considère les structures linéaires et non linéaires et pourtant P n'est pas linéarisable pour ce Q particulier qui vérifie $[Q, Q] = 0$. \square

Conclusion

Nous voyons grâce aux exemples présentés ici que même sur une classe restreinte d'algèbres de Lie à savoir des algèbres nilpotentes de dimension inférieure à six et de pas inférieur à cinq, nous obtenons toutes les pathologies possibles, à savoir:

- certaines structures de Lie-Poisson exactes sont linéaires;

- certaines structures de Lie-Poisson exactes sont linéarisables;
- certaines structures de Lie-Poisson exactes ne sont pas linéarisables et ceci se voit à la dimension des feuilles symplectiques;
- certaines structures de Lie-Poisson exactes ne sont pas linéarisables alors que leurs feuilles symplectiques ont la même dimension que celle de la structure linéaire correspondante;
- certaines structures de Lie-Poisson exactes sont linéarisables grâce à un changement infini de coordonnées locales;
- certaines structures de Lie-Poisson exactes données par $P(x) = L_{x*}Q - R_{x*}Q$ sont linéarisables et $[Q, Q] = 0$;
- certaines structures de Lie-Poisson exactes données par $P(x) = L_{x*}Q - R_{x*}Q$ sont linéarisables et $[Q, Q]$ est *ad*-invariant;
- certaines structures de Lie-Poisson exactes données par $P(x) = L_{x*}Q - R_{x*}Q$ ne sont pas linéarisables et $[Q, Q] \neq 0$.

Appendice A

Calcul détaillé de linéarisation dans le cas nilpotent

J'expose dans cet appendice le détail des calculs de la linéarisation des structures de Lie-Poisson exactes sur un groupe de Lie nilpotent de pas trois et de dimension inférieure à six.

Je me place sur un groupe de Lie G nilpotent ayant une structure de Lie-Poisson exacte P . Donc $P_x = L_{x*}Q - R_{x*}Q$ pour $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ où \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie de G et où $[Q, Q]$ est ad -invariant.

Nous rappelons:

Définition 0.3 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie nilpotente. Définissons $\mathfrak{g}^{i+1} = [\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}]$ avec la convention $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$. Nous dirons que \mathfrak{g} est une algèbre de pas m si $\mathfrak{g}^m = 0$.

Formule de CBH

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de pas quatre, nous allons déterminer les coefficients des termes d'ordre 2 et 3 dans l'équation de Campbell-Baker-Hausdorff.

Nous avons que $\exp X \exp Y = \exp \mu(X, Y)$. Je ne calculerai que les termes où n 'apparaît qu'une seule fois Y .

$$\text{Où } \mu(X, Y) = X + \int_0^1 \psi \left((Exp ad X)(Expt ad Y) \right) Y dt$$

$$\text{Où } \psi(z) = \frac{z \log z}{z-1} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) (z-1)^n + 1 = 1 + \frac{1}{2}(z-1) - \frac{1}{6}(z-1)^2 + \frac{1}{12}(z-1)^3 + \dots$$

Comme \mathfrak{g} est de pas quatre, on a $ad^4 X = 0 \forall X \in \mathfrak{g}$.

$$\text{Rappelons que } Exp(ad X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ad X)^n}{n!}$$

Pour l'utilisation que nous ferons de cette formule nous ne gaderons dans ψ que les termes où n 'apparaît pas Y .

$$\text{Ainsi } \psi \left((Exp ad X)(Expt ad Y) \right) = \psi(Exp ad X) = 1 + \frac{1}{2}(ad X + \frac{1}{2}ad^2 X + \frac{1}{6}ad^3 X) - \frac{1}{6}(ad^2 X + ad^3 X) + \frac{1}{12}(ad^3 X)$$

Ainsi

$$\exp X \exp Y = \exp \left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \dots \right)$$

où les points de suspension désignent des termes dont je ne ferai pas usage.

Dans la suite, nous prendrons $O = \frac{1}{12}$.

Soit $\{X^1, \dots, X^n\}$ une base de \mathfrak{g} .

Dans la carte logarithmique où les coordonnées locales sont notées $\{a^1, \dots, a^n\}$ ($n = \dim \mathfrak{g}$). $Q \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$ s'écrit:

$$Q = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} X^k \wedge X^l$$

Regardons la condition $[Q, Q]$ ad -invariant lorsque c_{ij}^k représentent les constantes de structure de \mathfrak{g} .

On a

$$\begin{aligned} [Q, Q] &= \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} Q^{ij} Q^{kl} [X_i \wedge X_j, X_k \wedge X_l] \\ &= \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq n} Q^{ij} Q^{kl} \left(X_i \wedge [X_j, X_k] \wedge X_l - X_i \wedge [X_j, X_l] \wedge X_k \right. \\ &\quad \left. - X_j \wedge [X_i, X_k] \wedge X_l + X_j \wedge [X_i, X_l] \wedge X_k \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j, k, l, m \leq n} Q^{ij} Q^{kl} \left(c_{jk}^m X_i \wedge X_m \wedge X_l - c_{jl}^m X_i \wedge X_m \wedge X_k \right. \\ &\quad \left. - c_{ik}^m X_j \wedge X_m \wedge X_l + c_{ij}^m X_j \wedge X_m \wedge X_k \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq r, s, t \leq n} \left(\sum_{1 \leq p, q \leq n} Q^{rp} Q^{qt} c_{pq}^s \right) X_r \wedge X_s \wedge X_t \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'équation:

$$\boxed{[Q, Q] = 2 \sum_{1 \leq r, s, t \leq n} \left(\sum_{1 \leq p, q \leq n} Q^{rp} Q^{qt} c_{pq}^s \right) X_r \wedge X_s \wedge X_t} \quad (\text{A.1})$$

Pour étudier la condition $[Q, Q]$ ad -invariant, à partir de A.1 on écrit $[X, [Q, Q]] = 0$ pour chaque X élément de la base de \mathfrak{g} .

Nous allons écrire P dans cette carte.

$L_{\exp X_*} Q = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} L_{\exp X_*} X^k \wedge L_{\exp X_*} X^l$ et nous voulons l'écrire dans la base des $\left\{ \frac{\partial}{\partial a^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial a^n} \right\}$.

On a $L_{\exp X_*} X^k = \sum_{1 \leq i \leq n} d_i^k \frac{\partial}{\partial a^i}$ où

$$\begin{aligned} d_i^k &= \frac{d}{dt} \left(a^i(\exp X \exp t X^k) \right) \Big|_0 \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \left(a^i \exp \left(X + t X^k + \frac{t}{2} [X, X^k] + t O[X, [X, X^k]] + t^2 \dots \right) \right) \\ &= \delta_i^k + \frac{1}{2} [X, X^k]^i + O[X, [X, X^k]]^i + \dots \end{aligned}$$

Donc $L_{\exp X_*} X^k = \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\delta_i^k + \frac{1}{2} [X, X^k]^i + O[X, [X, X^k]]^i + \dots \right) \frac{\partial}{\partial a^i}$

Et

$$L_{expX_*}Q = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq n} \left(\delta_i^k + \frac{1}{2}[X, X^k]^i + O[X, [X, X^k]]^i + \dots \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \\ \wedge \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\delta_j^l + \frac{1}{2}[X, X^l]^j + O[X, [X, X^l]]^j + \dots \right) \frac{\partial}{\partial a^j}$$

D'où

$$P_{expX} = L_{expX_*}Q - R_{expX_*}Q \\ = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left(\delta_i^k + \frac{1}{2}[X, X^k]^i + O[X, [X, X^k]]^i + \dots \right) \right. \\ \left. \left(\delta_j^l + \frac{1}{2}[X, X^l]^j + O[X, [X, X^l]]^j + \dots \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right. \\ \left. - \left(\delta_i^k - \frac{1}{2}[X, X^k]^i + O[X, [X, X^k]]^i + \dots \right) \right. \\ \left. \left(\delta_j^l - \frac{1}{2}[X, X^l]^j + O[X, [X, X^l]]^j + \dots \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\ = \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left(\frac{1}{2}(\delta_i^k [X, X^l]^j + \delta_j^l [X, X^k]^i) \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} O([X, X^k]^i [X, [X, X^l]]^j + [X, X^l]^j [X, [X, X^k]]^i) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} + \dots \right\} \\ = \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left(\delta_i^k [X, X^l]^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right. \\ \left. + O([X, X^k]^i [X, [X, X^l]]^j) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} + \dots \right\}$$

Ainsi

$$P_{expX} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left(\delta_i^k (adX X^l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right. \\ \left. + O(adX X^k)^i (ad^2 X X^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} + \dots \right\}$$

Remarque 0.2 Nous pouvons remarquer que dans le cas d'une structure exacte sur une algèbre de Lie nilpotente, le tenseur de Poisson n'admet que des termes de degré impair.

Donc, P comporte des termes linéaires que nous noterons $P_{(1)}$, des termes homogènes de degré 3 notés $P_{(3)}$, etc. Nous noterons R et des termes d'ordre supérieur degré à 3. Nous cherchons des polynômes homogènes d'ordre supérieur à 3 en les $\{a^i\}$ qui sont solution de:

$$P_{(3)}^{ij} + \sum_{1 \leq k, l \leq n} \left(\frac{\partial P_{(1)}^{il}}{\partial a^k} a^k \frac{\partial f^j}{\partial a^l} - \frac{\partial P_{(1)}^{jl}}{\partial a^k} a^k \frac{\partial f^i}{\partial a^l} \right) - \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\partial P_{(1)}^{ij}}{\partial a^k} f^k = 0 \quad (A.2)$$

Alors nous pouvons recalculer

$$\begin{aligned}
\{y^i, y^j\} - \sum_k C_k^{ij} y^k &= \sum_{k,l} P^{kl} \partial_k \wedge \partial_l (y^i \wedge y^j) - \sum_k \partial_k P^{ij}|_e y^k \\
&= R^{ij} + \sum_{1 \leq k, l \leq n} \left(\partial_k P_{(1)}^{il} x^k \partial_l f^j - \partial_k P_{(1)}^{jl} x^k \partial_l f^i \right) - \sum_{1 \leq k \leq n} \partial_k P_{(1)}^{ij}|_e f^k \\
&\quad + \sum_{1 \leq k \leq n} (R^{ik} \partial_k f^j - R^{jk} \partial_k f^i) + \sum_{1 \leq k, l \leq n} \left(\sum_{1 \leq q \leq n} \partial_q P^{kl}|_e x^q + R^{kl} \right) \partial_k f^i \partial_l f^j \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n} (R^{ik} \partial_k f^j - R^{jk} \partial_k f^i) + \sum_{1 \leq k, l \leq n} \left(\sum_{1 \leq q \leq n} \partial_q P^{kl}|_e x^q + R^{kl} \right) \partial_k f^i \partial_l f^j
\end{aligned}$$

Les termes d'ordre supérieur à 5 sont obtenus en calculant $\{y^i, y^j\} - \sum_k C_k^{ij} y^k$.

Nous noterons donc

$$\hat{R}^{ij} = \sum_{1 \leq k \leq n} (R^{ik} \partial_k f^j - R^{jk} \partial_k f^i) + \sum_{1 \leq k, l \leq n} \left(\sum_{1 \leq q \leq n} \partial_q P^{kl}|_e x^q + R^{kl} \right) \partial_k f^i \partial_l f^j$$

Nous allons regarder le cas des algèbres de dimension inférieure à 6 et de pas 3.

Proposition 0.3 *Les structures de Lie-Poisson sur les groupes de Lie dont les algèbres de Lie sont des algèbres nilpotentes de pas 3 de dimension inférieure à 6 sont linéarisables.*

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de pas 3, $ad^3 X = 0 \forall X \in G$. Donc

$$P_{exp X} = \sum_{1 \leq k, l \leq n} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \left\{ \left(\delta_i^k (ad X X^l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} + O(ad X X^k)^i (ad^2 X X^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\}$$

Nous allons commencer par donner la liste des algèbres nilpotentes de dimension inférieure à 6. (Goze [17])

Nous notons $\{X_1, \dots, X_n\}$ une base de \mathfrak{g} de dimension $n \leq 6$, on donne le crochet $[X_i, X_j]$ pour $i < j$ si ce crochet n'est pas nul.

- **Dimension 1**

n_1^1 = l'algèbre abélienne de dimension 1

- **Dimension 2**

n_2^1 = l'algèbre abélienne de dimension 2 = $(n_1^1)^2$

- **Dimension 3**

n_3^1 = l'algèbre abélienne de dimension 3 = $(n_1^1)^3$

n_3^2 = l'algèbre de Heisenberg définie par $[X_1, X_3] = X_2$

- **Dimension 4**

n_4^1 : $[X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4$

n_4^2 = l'algèbre abélienne de dimension 4 = $(n_1^1)^4$

$n_4^3 = n_3^2 \times n_1^1$

• Dimension 5

$$n_5^1 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_5$$

$$n_5^2 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5$$

$$n_5^3 : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_5$$

$$n_5^4 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_2, X_3] = X_5$$

$$n_5^5 : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5$$

$$n_5^6 : [X_1, X_2] = X_5; [X_3, X_4] = X_5$$

$$n_5^7 = \text{l'algèbre abélienne de dimension } 5 = (n_1^1)^5$$

$$n_5^8 = n_3^2 \times (n_1^1)^2$$

$$n_5^9 = n_4^1 \times n_1^1$$

• Dimension 6

$$n_6^1 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_5; [X_2, X_5] = X_6; \\ [X_3, X_4] = -X_6$$

$$n_6^2 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_5] = X_6; [X_3, X_4] = -X_6$$

$$n_6^3 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_1, X_5] = X_6; [X_2, X_3] = X_5; \\ [X_2, X_4] = X_6$$

$$n_6^4 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_1, X_5] = X_6; [X_2, X_3] = X_6$$

$$n_6^5 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_1, X_5] = X_6$$

$$n_6^6 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_2, X_3] = X_5; [X_1, X_4] = X_6; [X_2, X_5] = X_6$$

$$n_6^7 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_2, X_3] = X_5; [X_1, X_4] = X_6; [X_2, X_5] = -X_6$$

$$n_6^8 : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_6$$

$$n_6^9 : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_2, X_4] = X_5; [X_2, X_5] = X_6; [X_3, X_4] = X_6$$

$$n_6^{10} : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_1, X_5] = X_6; [X_2, X_3] = X_6; [X_2, X_4] = X_6$$

$$n_6^{11} : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_1, X_5] = X_6; [X_2, X_3] = X_6$$

$$n_6^{12} : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_4] = X_6$$

$$n_6^{13} : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_5; [X_1, X_4] = X_6; [X_2, X_3] = X_6$$

$$n_6^{14} : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_4] = -X_6; [X_1, X_3] = X_5; [X_2, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_6$$

$$n_6^{15} : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_2, X_4] = X_6; [X_3, X_5] = X_6$$

$$n_6^{16} : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_2, X_4] = X_6; [X_3, X_5] = -X_6$$

$$n_6^{17} : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_1, X_5] = X_6; [X_2, X_4] = X_6$$

$$n_6^{18} : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_2, X_4] = X_6$$

$$n_6^{19} : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_6; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_4] = X_6$$

$$n_6^{20} : [X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_4] = X_6; [X_1, X_3] = X_5$$

$$n_6^{21} : [X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_2, X_3] = X_6$$

$$n_6^{22} : [X_1, X_2] = X_5; [X_1, X_5] = X_6; [X_3, X_4] = X_6$$

$$n_6^{23} : [X_1, X_2] = X_5; [X_1, X_4] = X_6; [X_2, X_3] = X_6; [X_3, X_4] = X_5$$

$$n_6^{24} : [X_1, X_2] = X_5; [X_1, X_3] = X_6; [X_2, X_4] = X_6$$

$$n_6^{25} = \text{l'algèbre abélienne de dimension } 6 = (n_1^1)^6$$

$$n_6^{26} = n_3^2 \times (n_1^1)^3$$

$$n_6^{27} = n_4^1 \times (n_1^1)^2$$

$$n_6^{28} = n_5^1 \times n_1^1$$

$$n_6^{29} = n_5^2 \times n_1^1$$

$$n_6^{30} = n_5^3 \times n_1^1$$

$$n_6^{31} = n_5^4 \times n_1^1$$

$$n_6^{32} = n_5^5 \times n_1^1$$

$$n_6^{33} = n_5^6 \times n_1^1$$

Nous allons maintenant démontrer la proposition.

Nous savons déjà que pour les algèbres abélienne et de pas deux il n'y a rien à faire.

Pour n_2^1 qui est abélienne, il n'y a rien à faire.

Pour n_3^1 qui est abélienne, il n'y a rien à faire.

Pour n_3^2 qui est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Pour n_4^1 : $[X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4$

$$adX X_1 = -a^2 X_3 - a^3 X_4; adX X_2 = a^1 X_3; adX X_3 = a^1 X_4; adX X_4 = 0;$$

$$ad^2 X X_1 = -a^2 a^1 X_4; ad^2 X X_2 = (a^1)^2 X_4; adX^2 X_3 = 0; adX X_4 = 0;$$

Et alors

$$\begin{aligned} R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 4} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 4} \sum_{1 \leq j \leq 4} O(adX X^k)^i (ad^2 X X^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= O \sum_{1 \leq k, l \leq 4} Q^{kl} \left\{ (-a^2 \delta_1^k + a^1 \delta_2^k) (-a^1 a^2 \delta_1^l + (a^1)^2 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^2} \right\} \\ &= O \left(- (a^1)^2 a^2 Q^{12} - (a^1)^2 a^2 Q^{21} \right) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc P est linéaire.

Pour n_4^2 qui est abélienne, il n'y a rien à faire.

Pour n_4^3 qui est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Pour n_5^1 : $[X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_5.$

Cette algèbre est de pas 4.

Pour n_5^2 : $[X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_4; [X_1, X_4] = X_5.$ Cette algèbre est de pas 4.

Pour n_5^3 : $[X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_3] = X_5.$ Cette algèbre est de pas 3.

$$adX X_1 = -a^2 X_4 - a^4 X_5; adX X_2 = a^1 X_4 + a^3 X_5; adX X_3 = a^2 X_5;$$

$$adX X_4 = a^1 X_5; adX X_5 = 0$$

$$adX^2 X_1 = -a^1 a^2 X_5; ad^2 X X_2 = (a^1)^2 X_5; ad^2 X X_3 = 0; ad^2 X X_4 = 0; ad^2 X X_5 = 0$$

Et alors

$$\begin{aligned}
R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 5} \sum_{1 \leq j \leq 5} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\
&= O \sum_{1 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \left\{ (-a^2\delta_1^k + a^1\delta_2^k) ((a^1)^2\delta_2^l - a^1a^2\delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \right\} \\
&= O \left((a^1)^2 a^1 Q^{12} - (a^1)^2 a^1 Q^{21} \right) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc P est linéaire.

Pour n_5^4 : $[X_1, X_2] = X_3$; $[X_1, X_3] = X_4$; $[X_2, X_3] = X_5$.

Cette algèbre est de pas trois.

$adXX_1 = -a^2X_3 - a^3X_4$; $adXX_2 = a^1X_3 - a^3X_5$; $adXX_3 = a^1X_4 + a^2X_5$;

$adXX_4 = 0$; $adXX_5 = 0$;

$ad^2XX_1 = -a^1a^2X_4 - (a^2)^2X_5$; $adX^2X_2 = (a^1)^2X_4 + a^1a^2X_5$; $adX^2X_3 = 0$; $adX^2X_4 = 0$; $ad^2XX_5 = 0$

Et alors

$$\begin{aligned}
R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 5} \sum_{1 \leq j \leq 5} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\
&= O \sum_{1 \leq k, l \leq 5} Q^{kl} \left\{ (-a^2\delta_1^k + a^1\delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^3} + (-a^3\delta_1^k + a^1\delta_3^k) \frac{\partial}{\partial a^4} + (-a^3\delta_2^k + a^2\delta_3^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right\} \\
&\quad \wedge \left\{ ((a^1)^2\delta_2^l - a^1a^2\delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^4} + (a^1a^2\delta_2^l - (a^2)^2\delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^5} \right\} \\
&= O \left\{ \left(- (a^1)^2 a^1 Q^{12} - (a^1)^2 a^2 Q^{21} \right) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \right. \\
&\quad + \left(- (a^2)^2 a^1 Q^{12} - (a^2)^1 a^5 Q^{21} \right) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + \left(- a^1 a^2 a^3 Q^{12} + (a^1)^2 a^2 Q^{32} - (a^2)^2 a^1 Q^{31} \right) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad \left. + \left(a^1 a^2 a^3 Q^{21} + (a^1)^2 a^2 Q^{32} - (a^2)^2 a^1 Q^{31} \right) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc P est linéaire.

Pour n_5^5 : qui est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Pour n_5^6 : qui est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Pour n_5^7 : qui est abélienne, il n'y a rien à faire.

Pour n_5^8 : qui est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Pour n_5^9 : $= n_4^1 \times n_1^1$.

La structure de Poisson sur n_4^1 est linéaire, donc la structure sur n_5^9 reste linéaire.

Pour n_6^1 : Cette algèbre est de pas 5.

Pour n_6^2 : Cette algèbre est de pas 5.

Pour n_6^3 : Cette algèbre est de pas 5.

Pour n_6^4 : Cette algèbre est de pas 5.

Pour n_6^5 : Cette algèbre est de pas 5.

Pour n_6^6 : Cette algèbre est de pas 4.

Pour n_6^7 : Cette algèbre est de pas 4.

Pour n_6^8 : Cette algèbre est de pas 4.

Pour n_6^9 : Cette algèbre est de pas 4.

Pour n_6^{10} : Cette algèbre est de pas 4.

Pour n_6^{11} : Cette algèbre est de pas 4.

Pour n_6^{12} : $[X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_4] = X_6$.

Cette algèbre est de pas trois.

$adXX_1 = -a^2X_4 - a^3X_5 - a^4X_5; adXX_2 = a^1X_4 - a^4X_6; adXX_3 = a^1X_5;$

$adXX_4 = a^1X_5 + a^2X_6; adXX_5 = 0; adXX_6 = 0$

$ad^2XX_1 = -a^1a^2X_5 - (a^2)^2X_6; ad^2XX_2 = (a^1)^2X_5 + a^1a^2X_6; ad^2XX_3 = 0;$

$ad^2XX_4 = 0; ad^2XX_5 = 0; ad^2XX_6 = 0$

Et alors

$$\begin{aligned}
R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 4} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 4} \sum_{1 \leq j \leq 4} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\
&= O \sum_{1 \leq k, l \leq 4} Q^{kl} \left\{ (-a^2\delta_1^k + a^1\delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^4} + (-a^3\delta_1^k + a^1\delta_3^k - a^4\delta_1^k + a^1\delta_4^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right. \\
&\quad \left. + (-a^4\delta_2^k + a^2\delta_4^k) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \wedge \left\{ ((a^1)^2\delta_2^l - a^1a^2\delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^5} + (a^1a^2\delta_2^l - (a^2)^2\delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\
&= O \left\{ \left(-a^1a^2a^3Q^{12} + (a^2)^2a^1Q^{13} - (a^1)^2a^2Q^{23} \right) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \right\}
\end{aligned}$$

Donc P n'est pas linéaire.

Nous devons maintenant regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant.

Nous allons expliquer comment le calcul est effectué: à partir de l'équation (A), nous pouvons écrire $[Q, Q]$ dans une base de $\Lambda^3\mathfrak{g}$.

le coefficient de $X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$ est 0

le coefficient de $X_1 \wedge X_2 \wedge X_4$ est $(Q^{12})^2$, nous devons maintenant étudier $[X, X_1 \wedge X_2 \wedge X_4]$ pour chaque X élément de la base de \mathfrak{g} .

Pour $X = X_1$, $[X_1, X_1 \wedge X_2 \wedge X_4] = X_1 \wedge X_2 \wedge X_5$, il faut alors savoir si cet élément peut être obtenu à partir d'un autre crochet avec X_1 , c'est la cas précisément car $[X_1, X_1 \wedge X_2 \wedge X_3] = X_1 \wedge X_2 \wedge X_5$, mais $X_1 \wedge X_2 \wedge X_3$ n'admet pas de coefficient, donc l'équation n'est pas modifiée. Alors nous obtenons comme première équation $Q^{12} = 0$

le coefficient de $X_1 \wedge X_2 \wedge X_5$ est $Q^{12}Q^{13} + Q^{12}Q^{14}$, ceci ne nous dit rien de plus car on a déjà $Q^{12} = 0$.

le coefficient de $X_1 \wedge X_2 \wedge X_6$ est $Q^{12}Q^{42}$. ceci ne nous dit rien de plus car on a déjà $Q^{12} = 0$.

le coefficient de $X_1 \wedge X_3 \wedge X_4$ est $Q^{12}Q^{13}$, ceci ne nous dit rien de plus car on a déjà $Q^{12} = 0$.

le coefficient de $X_1 \wedge X_3 \wedge X_5$ est $Q^{13^2} + Q^{13}Q^{14}$.

le crochet avec X_1 ne donne rien.

Le crochet avec X_2 donne $X_4 \wedge X_3 \wedge X_5$ qui ne peut être obtenu à partir d'un autre crochet avec X_2 donc nous obtenons $Q^{13^2} + Q^{13}Q^{14} = 0$.

le coefficient de $X_1 \wedge X_3 \wedge X_6$ est $Q^{14}Q^{23}$.

le crochet avec X_1 donne $X_1 \wedge X_5 \wedge X_6$ qui peut être obtenu à partir de $X_1 \wedge X_4 \wedge X_6$.

le crochet avec X_2 donne $X_4 \wedge X_3 \wedge X_6$ qui peut être obtenu à partir de $X_4 \wedge X_3 \wedge X_4 = 0$, donc nous obtenons $Q^{14}Q^{23} = 0$.

le coefficient de $X_1 \wedge X_4 \wedge X_5$ est $Q^{14^2} + Q^{13}Q^{14}$.

le crochet avec X_1 ne donne rien.

Le crochet avec X_2 donne $X_1 \wedge X_6 \wedge X_5$ qui ne peut être obtenu à partir d'un autre crochet avec X_2 donc nous obtenons $Q^{14^2} + Q^{13}Q^{14}$.

le coefficient de $X_1 \wedge X_4 \wedge X_6$ est $Q^{14}Q^{23}$.

Le crochet avec X_3 donne $X_4 \wedge X_5 \wedge X_6$ qui ne peut être obtenu à partir d'un autre crochet avec X_3 donc nous obtenons $Q^{14}Q^{23}$.

ETC ...

Ainsi

$$[X, [Q, Q]] = 0 \forall X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \begin{cases} Q^{12} = 0 \\ Q^{24} = 0 \\ Q^{14}Q^{23} = 0 \\ Q^{13}Q^{23} = 0 \\ Q^{13}(Q^{13} + Q^{14}) = 0 \\ Q^{14}(Q^{13} + Q^{14}) = 0 \\ Q^{16}(Q^{13} + Q^{14}) - Q^{14}Q^{25} = 0 \\ Q^{34}(Q^{13} + Q^{14}) - Q^{13}Q^{25} + Q^{23}Q^{15} = 0 \\ Q^{31}Q^{26} + Q^{23}Q^{16} = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$R_{expX} = O \left\{ (a^2)^2 a^1 Q^{13} - (a^1)^2 a^2 Q^{23} \right\} \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6}$$

Donc pour que P ne soit pas linéaire il faut supposer $(Q^{13}, Q^{23}) \neq (0, 0)$.

Nous allons maintenant calculer $P_{(1)expX}$

$$\begin{aligned}
P_{(1)expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} \left\{ \left(\delta_i^k (ad X X^l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \frac{\partial}{\partial a^k} \right\} \wedge \left\{ (-a^2 \delta_1^l + a^1 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^4} + \right. \\
&\quad \left. (-a^3 \delta_1^l + a^1 \delta_3^l + a^1 \delta_4^l - a^4 \delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^5} + (-a^4 \delta_2^l + a^2 \delta_4^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\
&= (a^1 Q^{13} + a^1 Q^{14}) \frac{\partial}{\partial a^1} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + a^2 Q^{14} \frac{\partial}{\partial a^1} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + a^1 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^2 Q^{13} - a^1 Q^{23}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\
&\quad + (a^3 Q^{13} + a^1 Q^{34} + a^4 Q^{13}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^4 Q^{23} + a^2 Q^{34}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + (a^3 Q^{14} - a^1 Q^{34} + a^4 Q^{14} - a^2 Q^{15} + a^1 Q^{25}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^1 Q^{26} - a^2 Q^{16}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + (a^4 Q^{25} - a^2 Q^{45} - a^3 Q^{16} + a^1 Q^{36} + a^1 Q^{46} - a^4 Q^{16}) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6}
\end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant une solution de l'équation A.2. En supposant que $f^1, f^2, f^3, f^4 = 0$ et que f^5, f^6 sont des fonctions de a^1, a^2 seulement, l'équation A.2 s'écrit pour $i = 5, j = 6$:

$$O\left(a^1(a^2)^2 Q^{13} - (a^1)^2 a^2 Q^{23}\right) + a^2 Q^{14} \frac{\partial f^5}{\partial a^1} - (a^1 Q^{13} + a^1 Q^{14}) \frac{\partial f^6}{\partial a^1} - a^1 Q^{23} \frac{\partial f^6}{\partial a^2} = 0$$

Cas 1. $Q^{23} \neq 0$. Alors
$$\begin{cases} Q^{13} = 0 \\ Q^{14} = 0 \\ Q^{15} = 0 \\ Q^{16} = 0 \end{cases}$$

Une solution est donnée par

$$\begin{aligned}
f^1 &= 0 \\
f^2 &= 0 \\
f^3 &= 0 \\
f^4 &= 0 \\
f^5 &= 0 \\
f^6 &= -\frac{1}{2} O a^1 (a^2)^2
\end{aligned}$$

Cas 2. $Q^{23} = 0$. Alors $\begin{cases} Q^{13} \neq 0 \\ Q^{14} = -Q^{13} \\ Q^{25} = 0 \\ Q^{26} = 0 \end{cases}$

Une solution est donnée par

$$\begin{cases} f^1 = 0 \\ f^2 = 0 \\ f^3 = 0 \\ f^4 = 0 \\ f^5 = O(a^1)^2 a^2 \\ f^6 = 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas, quelque soient i et j , on a que $\tilde{R}^{ij} = 0$
Donc P est linéarisable.

Pour n_6^{13} : $[X_1, X_2] = X_3$; $[X_1, X_3] = X_5$; $[X_1, X_4] = X_6$; $[X_2, X_3] = X_6$.

Cette algèbre est de pas trois.

$$adXX_1 = -a^2X_3 - a^3X_5 - a^4X_6; \quad adXX_2 = a^1X_3 - a^3X_6; \quad adXX_3 = a^1X_5 + a^2X_6;$$

$$adXX_4 = a^1X_6; \quad adXX_5 = 0; \quad adXX_6 = 0$$

$$ad^2XX_1 = -a^1a^2X_5 - (a^2)^2X_6; \quad ad^2XX_2 = (a^1)^2X_5 + a^1a^2X_6; \quad ad^2XX_3 = 0;$$

$$ad^2XX_4 = 0; \quad ad^2XX_5 = 0; \quad ad^2XX_6 = 0$$

Et alors

$$\begin{aligned} R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 4} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 4} \sum_{1 \leq j \leq 4} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= O \sum_{1 \leq k, l \leq 4} Q^{kl} \left\{ (-a^2\delta_1^k + a^1\delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^3} + (-a^3\delta_1^k + a^1\delta_3^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right. \\ &\quad \left. + (-a^4\delta_1^k - a^3\delta_2^k + a^2\delta_3^k + a^1\delta_4^k) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\ &\wedge \left\{ ((a^1)^2\delta_2^l - a^1a^2\delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^5} + (a^1a^2\delta_2^l - (a^2)^2\delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\ &= O \left\{ \left(-(a^1)^2 a^4 Q^{12} - (a^1)^2 a^2 Q^{14} + (a^1)^3 Q^{24} \right) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \end{aligned}$$

Donc P n'est pas linéaire.

Nous devons maintenant regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant.

$$[X, [Q, Q]] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \begin{cases} Q^{12} = 0 \\ Q^{13} = 0 \\ Q^{14} = 0 \\ Q^{23} = 0 \\ Q^{15}Q^{24} = 0 \\ Q^{24}Q^{16} = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$R_{expX} = O(a^1)^3 Q^{24} \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6}$$

Donc pour que P ne soit pas linéaire il faut supposer $Q^{24} \neq 0$.
Alors $Q^{15} = 0$ et $Q^{16} = 0$.

Nous allons maintenant calculer $P_{(1)expX}$

$$\begin{aligned}
P_{(1)expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} \left\{ \left(\delta_i^k (adX X^l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \frac{\partial}{\partial a^k} \right\} \wedge \left\{ (-a^2 \delta_1^l + a^1 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^3} + \right. \\
&\quad \left. (-a^3 \delta_1^l + a^1 \delta_3^l) \frac{\partial}{\partial a^5} + (-a^4 \delta_1^l - a^3 \delta_2^l + a^2 \delta_3^l + a^1 \delta_4^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\
&= a^1 Q^{24} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + a^1 Q^{24} \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\
&\quad + a^1 Q^{25} \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^1 Q^{34} + a^1 Q^{26}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad - a^1 Q^{34} \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^3 Q^{24} - a^2 Q^{34}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + (a^3 Q^{25} - a^2 Q^{35} - a^1 Q^{45} + a^1 Q^{36}) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6}
\end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant une solution de l'équation A.2. Nous supposons que $f^1, f^2, f^3, f^4, f^6 = 0$ et que f^5 est une fonction de a^1, a^2 seulement, alors l'équation A.2 s'écrit pour $i = 5, j = 6$:

$$O(a^1)^3 Q^{24} + a^1 Q^{24} \frac{\partial f^5}{\partial a^2} = 0$$

Une solution est donnée par

$ \begin{aligned} f^1 &= 0 \\ f^2 &= 0 \\ f^3 &= 0 \\ f^4 &= 0 \\ f^5 &= -Oa^2(a^1)^2 \\ f^6 &= 0 \end{aligned} $

Quelque soient i et j , on a que $\tilde{R}^{ij} = 0$

Donc P est linéarisable.

Pour n_6^{14} : $[X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_4] = -X_6; [X_1, X_3] = X_5; [X_2, X_4] = X_5;$
 $[X_2, X_3] = X_6$. Cette algèbre est de pas trois.

Nous commençons par regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant, ce qui facilite le calcul de B .

$$[X, [Q, Q]] = 0 \forall X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q^{12} = 0 \quad (1) \\ (Q^{13})^2 + Q^{14}Q^{23} = 0 \quad (2) \\ (Q^{14})^2 - Q^{13}Q^{24} = 0 \quad (3) \\ Q^{14}(Q^{24} + Q^{13}) = 0 \quad (4) \\ Q^{14}Q^{13} - Q^{13}Q^{23} = 0 \quad (5) \\ Q^{23}(Q^{24} + Q^{13}) = 0 \quad (6) \\ (Q^{23})^2 - Q^{24}Q^{13} = 0 \quad (7) \\ (Q^{24})^2 + Q^{23}Q^{14} = 0 \quad (8) \\ Q^{24}(Q^{14} + Q^{23}) = 0 \quad (9) \\ -Q^{14}Q^{25} + Q^{24}Q^{15} - Q^{34}Q^{23} - Q^{13}Q^{34} = 0 \quad (10) \\ -Q^{14}Q^{26} + Q^{24}Q^{16} + Q^{34}Q^{14} - Q^{23}Q^{34} = 0 \quad (11) \\ Q^{14}(Q^{26} + Q^{15}) + Q^{13}(Q^{16} + Q^{25}) = 0 \quad (12) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} adXX_1 &= -a^2X_3 - a^3X_5 + a^4X_6; \quad adXX_2 = a^1X_3 - a^4X_5 - a^3X_6; \\ adXX_3 &= a^2X_6 + a^1X_5; \quad adXX_4 = a^2X_5 - a^1X_6; \quad adXX_5 = 0; \quad adXX_6 = 0 \\ ad^2XX_1 &= -(a^2)^2X_6 - a^1a^2X_5; \quad ad^2XX_2 = a^1a^2X_6 + (a^1)^2X_5; \quad ad^2XX_3 = 0; \\ ad^2XX_4 &= 0; \quad ad^2XX_5 = 0; \quad ad^2XX_6 = 0 \end{aligned}$$

Et alors

$$\begin{aligned} R_{\epsilon, \rho, X} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= O \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \left\{ (-a^2\delta_1^k + a^1\delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^3} + (-a^3\delta_1^k - a^4\delta_2^k + a^1\delta_4^k + a^2\delta_3^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right. \\ &\quad \left. + (a^4\delta_1^k - a^3\delta_2^k + a^2\delta_3^k - a^1\delta_4^k) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\ &\wedge \left\{ ((a^1)^2\delta_2^l - a^1a^2\delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^5} + (a^1a^2\delta_2^l - (a^2)^2\delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\ &= O \left\{ \left((a^2)^3 + (a^1)^2a^2 \right) Q^{14} - \left((a^1)^3 - a^1(a^2)^2 \right) Q^{24} \right\} \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \end{aligned}$$

Donc pour que P ne soit pas linéaire il faut supposer $(Q^{14}, Q^{24}) \neq (0, 0)$.

Alors si $Q^{14} \neq 0$, l'équation (4) nous dit que $Q^{24} = -Q^{13}$ et en reportant dans (3), on obtient $(Q^{14})^2 = -(Q^{13})^2$ ceci est impossible pour $Q^{14} \neq 0$. Ainsi $Q^{14} = 0$ alors $Q^{24} \neq 0$ et en reportant dans l'équation (8) on obtient $Q^{24} = 0$.

Donc P est linéaire.

En conclusion sur cette algèbre il n'existe pas de tenseur de Lie-Poisson exact non linéaire.

Pour n_6^{15} : $[X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_2, X_4] = X_6; [X_3, X_5] = X_6$.

Cette algèbre est de pas trois.

Nous commençons par regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant.

$$[X, [Q, Q]] = 0 \forall X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q^{12} = 0 \quad (1) \\ Q^{13} = 0 \quad (2) \\ Q^{14}Q^{23} = 0 \quad (3) \\ Q^{15}Q^{23} = 0 \quad (4) \\ Q^{13}Q^{25} - Q^{15}Q^{23} = 0 \quad (5) \\ Q^{14}Q^{24} + Q^{15}Q^{34} = 0 \quad (6) \\ -Q^{13}Q^{16} + Q^{14}Q^{25} + Q^{15}Q^{35} = 0 \quad (7) \\ Q^{23}(Q^{25} + Q^{35}) = 0 \quad (8) \\ Q^{23}Q^{16} - Q^{24}Q^{25} - Q^{25}Q^{35} - Q^{34}Q^{24} - Q^{35}Q^{34} = 0 \quad (9) \end{array} \right.$$

$$adXX_1 = -a^2X_4 - a^3X_5; \quad adXX_2 = a^1X_4 - a^4X_6; \quad adXX_3 = a^1X_5 - a^5X_6;$$

$$adXX_4 = a^2X_6; \quad adXX_5 = a^3X_6; \quad adXX_6 = 0$$

$$ad^2XX_1 = -(a^2)^2X_6 - (a^3)^2X_6; \quad ad^2XX_2 = a^1a^2X_6; \quad ad^2XX_3 = a^1a^3X_6;$$

$$ad^2XX_4 = 0; \quad ad^2XX_5 = 0; \quad ad^2XX_6 = 0$$

Et alors

$$\begin{aligned} R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= O \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \left\{ (-a^2\delta_1^k + a^1\delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^4} + (-a^3\delta_1^k + a^1\delta_3^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right\} \\ &\wedge \left\{ (-(a^2)^2 - (a^3)^2)\delta_1^l + a^1a^2\delta_2^l + a^1a^3\delta_3^l \right\} \frac{\partial}{\partial a^6} \\ &= O \left\{ (a^1)^2 a^3 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} - (a^1)^2 a^2 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \end{aligned}$$

Pour que P ne soit pas linéaire il faut supposer $Q^{23} \neq 0$.

Alors $Q^{14} = 0, Q^{15} = 0$ et $Q^{25} + Q^{35} = 0$.

Nous allons maintenant calculer $P_{(1)expX}$

$$\begin{aligned}
P_{(1)expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} \left\{ \left(\delta_i^k (adX X^l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \frac{\partial}{\partial a^k} \right\} \wedge \left\{ (-a^2 \delta_1^l + a^1 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^4} + \right. \\
&\quad \left. (-a^3 \delta_1^l + a^1 \delta_3^l) \frac{\partial}{\partial a^5} + (-a^4 \delta_2^l - a^5 \delta_3^l + a^2 \delta_4^l + a^3 \delta_5^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\
&= a^1 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (-a^5 Q^{23} + a^2 Q^{24} + a^3 Q^{25}) \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad - a^1 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\
&\quad + (a^4 Q^{23} + a^2 Q^{34} + a^3 Q^{35}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad (a^1 Q^{25} - a^1 Q^{34}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^4 Q^{24} + a^5 Q^{34} + a^3 Q^{45} - a^2 Q^{16} + a^1 Q^{26}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + (a^4 Q^{25} + a^5 Q^{35} - a^2 Q^{45} - a^3 Q^{16} + a^1 Q^{16}) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6}
\end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant une solution de l'équation A.2.

Nous supposons que $f^1, f^2, f^3, f^4, f^5 = 0$ et que f^6 est une fonction de a^1, a^2, a^3 seulement.

Alors l'équation A.2 s'écrit pour $i = 4, j = 6$:

$$O(a^1)2a^3Q^{23} + a^1Q^{23}\frac{\partial f^6}{\partial a^3} = 0$$

pour $i = 5, j = 6$:

$$-O(a^1)^2a^2Q^{23} - a^1Q^{23}\frac{\partial f^6}{\partial a^2} = 0$$

Une solution est donnée par

$ \begin{aligned} f^1 &= 0 \\ f^2 &= 0 \\ f^3 &= 0 \\ f^4 &= 0 \\ f^5 &= 0 \\ f^6 &= -\frac{1}{2}O\left(a^1(a^3)^2 + a^1(a^2)^2\right) \end{aligned} $
--

Quelque soient i et j , on a que $\hat{R}^{ij} = 0$

Donc P est linéarisable.

Pour n_6^{16} : $[X_1, X_2] = X_4$; $[X_1, X_3] = X_5$; $[X_2, X_4] = X_6$; $[X_3, X_5] = -X_6$.

Cette algèbre est de pas trois.

Nous commençons par regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant.

$$[X, [Q, Q]] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q^{12} = 0 \quad (1) \\ Q^{13} = 0 \quad (2) \\ Q^{14}Q^{23} = 0 \quad (3) \\ Q^{15}Q^{23} = 0 \quad (4) \\ Q^{13}Q^{25} + Q^{15}Q^{23} = 0 \quad (5) \\ Q^{14}Q^{24} - Q^{15}Q^{34} = 0 \quad (6) \\ -Q^{13}Q^{16} + Q^{14}Q^{25} - Q^{15}Q^{35} = 0 \quad (7) \\ Q^{23}(Q^{25} - Q^{35}) = 0 \quad (8) \\ Q^{23}Q^{16} - Q^{24}Q^{25} + Q^{25}Q^{35} - Q^{34}Q^{24} + Q^{35}Q^{34} = 0 \quad (9) \end{array} \right.$$

$$adXX_1 = -a^2X_4 - a^3X_5; \quad adXX_2 = a^1X_4 - a^4X_6; \quad adXX_3 = a^1X_5 + a^5X_6;$$

$$adXX_4 = a^2X_6; \quad adXX_5 = -a^3X_6; \quad adXX_6 = 0$$

$$ad^2XX_1 = -(a^2)^2X_6 + (a^3)^2X_6; \quad ad^2XX_2 = a^1a^2X_6; \quad ad^2XX_3 = -a^1a^3X_6;$$

$$ad^2XX_4 = 0; \quad ad^2XX_5 = 0; \quad ad^2XX_6 = 0$$

Et alors

$$\begin{aligned} R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= O \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \left\{ (-a^2\delta_1^k + a^1\delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^4} + (-a^3\delta_1^k + a^1\delta_3^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right\} \\ &\quad \wedge \left\{ (-(a^2)^2 + (a^3)^2)\delta_1^l + a^1a^2\delta_2^l - a^1a^3\delta_3^l \right\} \frac{\partial}{\partial a^6} \\ &= O \left\{ -(a^1)^2 a^3 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} - (a^1)^2 a^2 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \end{aligned}$$

Donc pour que P ne soit pas linéaire il faut supposer $Q^{23} \neq 0$.

Alors $Q^{14} = 0, Q^{15} = 0$ et $Q^{25} + Q^{35} = 0$.

Nous allons maintenant calculer $P_{(1)expX}$

$$\begin{aligned}
P_{(1)expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} \left\{ \left(\delta_i^k (adX X^l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \frac{\partial}{\partial a^k} \right\} \wedge \left\{ (-a^2 \delta_1^l + a^1 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^4} + \right. \\
&\quad \left. (-a^3 \delta_1^l + a^1 \delta_3^l) \frac{\partial}{\partial a^5} + (-a^4 \delta_2^l + a^5 \delta_3^l + a^2 \delta_4^l - a^3 \delta_5^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\
&= a^1 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^5 Q^{23} + a^2 Q^{24} - a^3 Q^{25}) \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad - a^1 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\
&\quad + (a^4 Q^{23} + a^2 Q^{34} - a^3 Q^{35}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad (a^1 Q^{25} - a^1 Q^{34}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^4 Q^{24} - a^5 Q^{34} - a^3 Q^{45} - a^2 Q^{16} + a^1 Q^{26}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + (a^4 Q^{25} - a^5 Q^{25} - a^2 Q^{45} - a^3 Q^{16} + a^1 Q^{16}) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \Big\}
\end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant une solution de l'équation A.2.

Nous supposons que $f^1, f^2, f^3, f^4, f^5 = 0$ et que f^6 est une fonction de a^1, a^2, a^3 seulement.

Alors l'équation A.2 s'écrit:

pour $i = 4, j = 6$:

$$-O(a^1)^3 Q^{23} + a^1 Q^{23} \frac{\partial f^6}{\partial a^3} = 0$$

pour $i = 5, j = 6$:

$$-O(a^1)^2 a^2 Q^{23} - a^1 Q^{23} \frac{\partial f^6}{\partial a^2} = 0$$

Une solution est donnée par

$$\begin{aligned}
f^1 &= 0 \\
f^2 &= 0 \\
f^3 &= 0 \\
f^4 &= 0 \\
f^5 &= 0 \\
f^6 &= \frac{1}{2} O\left(a^1(a^3)^2 - a^1(a^2)^2\right)
\end{aligned}$$

Quelque soient i et j , on a que $\tilde{R}^{ij} = 0$

Donc P est linéarisable.

Pour n_6^{17} : $[X_1, X_2] = X_4$; $[X_1, X_3] = X_5$; $[X_1, X_5] = X_6$; $[X_2, X_4] = X_6$.

Cette algèbre est de pas trois.

Nous commençons par regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant.

$$[X, [Q, Q]] = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \begin{cases} Q^{12} = 0 & (1) \\ Q^{13} = 0 & (2) \\ Q^{14}Q^{23} = 0 & (3) \\ Q^{14}(Q^{15} + Q^{24}) = 0 & (4) \\ (Q^{15})^2 + Q^{14}Q^{25} = 0 & (5) \\ Q^{23}Q^{24} = 0 & (6) \\ Q^{23}Q^{15} = 0 & (7) \\ Q^{23}Q^{16} = 0 & (8) \end{cases}$$

$$adXX_1 = -a^2X_4 - a^3X_5 - a^5X_6; \quad adXX_2 = a^1X_4 - a^4X_6; \quad adXX_3 = a^1X_5;$$

$$adXX_4 = a^2X_6; \quad adXX_5 = a^1X_6; \quad adXX_6 = 0$$

$$ad^2XX_1 = -(a^2)^2X_6 - a^1a^3X_6; \quad ad^2XX_2 = a^1a^2X_6; \quad ad^2XX_3 = (a^1)^2X_6;$$

$$ad^2XX_4 = 0; \quad ad^2XX_5 = 0; \quad ad^2XX_6 = 0$$

Et alors

$$\begin{aligned} R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= O \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \left\{ (-a^2\delta_1^k + a^1\delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^4} + (-a^3\delta_1^k + a^1\delta_3^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right\} \\ &\quad \wedge \left\{ (-(a^2)^2 + a^1a^3)\delta_1^l + a^1a^2\delta_2^l + (a^1)^2\delta_3^l \right\} \frac{\partial}{\partial a^6} \\ &= O \left\{ (a^1)^3 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} - (a^1)^2 a^2 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \end{aligned}$$

Donc pour que P ne soit pas linéaire il faut supposer $Q^{23} \neq 0$.

Alors $Q^{14} = 0, Q^{15} = 0, Q^{16} = 0$ et $Q^{24} = 0$.

Nous allons maintenant calculer $P_{(1)expX}$

$$\begin{aligned}
P_{(1)expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} \left\{ \left(\delta_i^k (adX X^l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \frac{\partial}{\partial a^k} \right\} \wedge \left\{ (-a^2 \delta_1^l + a^1 \delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^4} \right. \\
&\quad \left. + (-a^3 \delta_1^l + a^1 \delta_3^l) \frac{\partial}{\partial a^5} + (-a^5 \delta_1^l - a^4 \delta_2^l + a^2 \delta_4^l + a^1 \delta_5^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\
&= a^1 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + a^1 Q^{25} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad - a^1 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\
&\quad + (a^4 Q^{23} + a^2 Q^{34} + a^1 Q^{35}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + (a^1 Q^{25} - a^1 Q^{34}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\
&\quad + (a^1 Q^{45} + a^1 Q^{26}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\
&\quad + (a^4 Q^{25} - a^2 Q^{45} + a^1 Q^{36}) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6}
\end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant une solution de l'équation A.2.

Nous supposons que $f^1, f^2, f^3, f^4, f^5 = 0$ et que f^6 est une fonction de a^1, a^2, a^3 seulement.

Alors l'équation A.2 s'écrit:

pour $i = 4, j = 6$:

$$O(a^1)^3 Q^{23} + a^1 Q^{23} \frac{\partial f^6}{\partial a^3} = 0$$

pour $i = 5, j = 6$:

$$-O(a^1)^2 a^2 Q^{23} - a^1 Q^{23} \frac{\partial f^6}{\partial a^2} = 0$$

Une solution est donnée par

$ \begin{aligned} f^1 &= 0 \\ f^2 &= 0 \\ f^3 &= 0 \\ f^4 &= 0 \\ f^5 &= 0 \\ f^6 &= -O\left((a^1)^2 a^3 + \frac{1}{2} a^1 (a^2)^2\right) \end{aligned} $

Quelque soient i et j , on a que $\tilde{R}^{ij} = 0$

Donc P est linéarisable.

Pour n_6^{18} : $[X_1, X_2] = X_4$; $[X_1, X_3] = X_5$; $[X_2, X_4] = X_6$.
Cette algèbre est de pas trois.

Nous commençons par regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant.

$$[X, [Q, Q]] = 0 \forall X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \begin{cases} Q^{12} = 0 & (1) \\ Q^{13} = 0 & (2) \\ Q^{24} = 0 & (3) \\ Q^{14}Q^{23} = 0 & (4) \\ Q^{14}Q^{25} = 0 & (5) \\ Q^{23}Q^{15} = 0 & (6) \end{cases}$$

$adXX_1 = -a^2X_4 - a^3X_5$; $adXX_2 = a^1X_4 - a^4X_6$; $adXX_3 = a^1X_5$; $adXX_4 = a^2X_6$;
 $adXX_5 = 0$; $adXX_6 = 0$ $ad^2XX_1 = -(a^2)^2X_6$; $ad^2XX_2 = a^1a^2X_6$; $ad^2XX_3 = 0$;
 $ad^2XX_4 = 0$; $ad^2XX_5 = 0$; $ad^2XX_6 = 0$

Et alors

$$\begin{aligned} R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= O \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \left\{ (-a^2\delta_1^k + a^1\delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^4} + (-a^3\delta_1^k + a^1\delta_3^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right\} \\ &\quad \wedge \left\{ (-(a^2)^2\delta_1^l + a^1a^2\delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\ &= O \left\{ -(a^1)^2 a^2 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \end{aligned}$$

Pour que P ne soit pas linéaire il faut supposer $Q^{23} \neq 0$.

Alors $Q^{14} = 0, Q^{15} = 0$.

Nous allons maintenant calculer $P_{(1)expX}$

$$\begin{aligned} P_{(1)expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} \left\{ \left(\delta_i^k (adXX^l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \frac{\partial}{\partial a^k} \right\} \wedge \left\{ (-a^2\delta_1^l + a^1\delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^4} + \right. \\ &\quad \left. (-a^3\delta_1^l + a^1\delta_3^l) \frac{\partial}{\partial a^5} + (-a^4\delta_2^l + a^2\delta_4^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\ &= a^1 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\ &\quad - a^1 Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\ &\quad + (a^4 Q^{23} + a^2 Q^{34}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\ &\quad + (a^1 Q^{25} - a^1 Q^{34}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\ &\quad + (a^4 Q^{24} - a^2 Q^{16} + a^1 Q^{26}) \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\ &\quad + (a^4 Q^{25} - a^2 Q^{45} - a^3 Q^{16} + a^1 Q^{36}) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant une solution de l'équation A.2.

Nous supposons que $f^1, f^2, f^3, f^4, f^5 = 0$ et que f^6 est une fonction de a^1, a^2 seulement.

Alors l'équation A.2 s'écrit:

pour $i = 5, j = 6$:

$$-O(a^1)^2 a^2 Q^{23} - a^1 Q^{23} \frac{\partial f^6}{\partial a^2} = 0$$

Une solution est donnée par

$$\begin{array}{l} f^1 = 0 \\ f^2 = 0 \\ f^3 = 0 \\ f^4 = 0 \\ f^5 = 0 \\ f^6 = -\frac{1}{2} O a^1 (a^2)^2 \end{array}$$

Quelque soient i et j , on a que $\tilde{R}^{ij} = 0$

Donc P est linéarisable.

Pour n_6^{19} : $[X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_3] = X_6; [X_1, X_4] = X_5; [X_2, X_4] = X_6$.

Cette algèbre est de pas trois.

Nous commençons par regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant.

$$[X, [Q, Q]] = 0 \forall X \in \mathfrak{g} \Rightarrow \begin{cases} Q^{12} = 0 & (1) \\ Q^{14} = 0 & (2) \\ Q^{24} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$adXX_1 = -a^2 X_3 - a^3 X_6 - a^4 X_5; adXX_2 = a^1 X_3 - a^4 X_6; adXX_3 = a^1 X_6;$$

$$adXX_4 = a^1 X_5 + a^2 X_6; adXX_5 = 0; adXX_6 = 0$$

$$ad^2XX_1 = -a^1 a^2 X_6; ad^2XX_2 = (a^1)^2 X_6; ad^2XX_3 = 0; ad^2XX_4 = 0;$$

$$ad^2XX_5 = 0; ad^2XX_6 = 0$$

Et alors

$$\begin{aligned} R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= O \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \left\{ (-a^2 \delta_1^k + a^1 \delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^3} + (-a^4 \delta_1^k + a^1 \delta_4^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right. \\ &\quad \left. \wedge \left\{ \left((a^1)^2 \delta_2^l - a^1 a^2 \delta_1^l \right) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc P est linéaire.

Pour n_6^{20} : $[X_1, X_2] = X_3; [X_1, X_4] = X_6; [X_1, X_3] = X_5$. Cette algèbre est de pas trois.

Nous commençons par regarder la condition $[Q, Q]$ ad -invariant.

$$[X, [Q, Q]] = 0 \forall X \in \mathfrak{g} \Leftrightarrow \begin{cases} Q^{12} = 0 & (1) \\ Q^{13} = 0 & (2) \\ Q^{14} = 0 & (3) \\ Q^{16}Q^{23} - 2Q^{24}Q^{15} = 0 & (4) \\ Q^{16}Q^{24} = 0 & (5) \end{cases}$$

$$adXX_1 = -a^2X_3 - a^3X_5 - a^4X_6; \quad adXX_2 = a^1X_3; \quad adXX_3 = a^1X_5; \quad adXX_4 = a^1X_6;$$

$$adXX_5 = 0; \quad adXX_6 = 0$$

$$ad^2XX_1 = -a^1a^2X_5; \quad ad^2XX_2 = (a^1)^2X_5; \quad ad^2XX_3 = 0; \quad ad^2XX_4 = 0;$$

$$ad^2XX_5 = 0; \quad ad^2XX_6 = 0$$

Et alors

$$\begin{aligned} R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} O(adXX^k)^i (ad^2XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= O \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \left\{ (-a^2\delta_1^k + a^1\delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^3} + (-a^4\delta_1^k + a^1\delta_4^k) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\ &\quad \wedge \left\{ ((a^1)^2\delta_2^l - a^1a^2\delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^5} \right\} \\ &= O \left\{ (a^1)^3 Q^{24} \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \end{aligned}$$

Pour que P ne soit pas linéaire il faut supposer $Q^{24} \neq 0$.

Alors $Q^{16} = 0, Q^{15} = 0$.

Nous allons maintenant calculer $P_{(1)expX}$

$$\begin{aligned} P_{(1)expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} \left\{ \left(\delta_i^k (adXX^l)^j \right) \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \frac{\partial}{\partial a^k} \right\} \wedge \left\{ (-a^2\delta_1^l + a^1\delta_2^l) \frac{\partial}{\partial a^3} + \right. \\ &\quad \left. (-a^3\delta_1^l + a^1\delta_3^l) \frac{\partial}{\partial a^5} + (-a^4\delta_1^l + a^1\delta_4^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \\ &= a^1Q^{23} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\ &\quad + a^1Q^{24} \frac{\partial}{\partial a^2} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\ &\quad + a^1Q^{24} \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^4} \\ &\quad + a^1Q^{25} \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\ &\quad + (a^1Q^{36} + a^1Q^{26}) \frac{\partial}{\partial a^3} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \\ &\quad - a^1Q^{34} \frac{\partial}{\partial a^4} \wedge \frac{\partial}{\partial a^5} \\ &\quad + (-a^1Q^{45} + a^1Q^{36}) \frac{\partial}{\partial a^5} \wedge \frac{\partial}{\partial a^6} \end{aligned}$$

Nous cherchons maintenant une solution de l'équation A.2.

Nous supposons que $f^1, f^2, f^3, f^4, f^6 = 0$ et que f^5 est une fonction de a^1, a^2 seulement.

Alors l'équation A.2 s'écrit:

pour $i = 5, j = 6$:

$$O(a^1)^3 Q^{24} + a^1 Q^{24} \frac{\partial f^5}{\partial a^2} = 0$$

Une solution est donnée par

$$\begin{array}{l} f^1 = 0 \\ f^2 = 0 \\ f^3 = 0 \\ f^4 = 0 \\ f^5 = -O(a^1)^2 a^2 \\ f^6 = 0 \end{array}$$

Quelque soient i et j , on a que $\tilde{R}^{ij} = 0$

Donc P est linéarisable.

Pour n_6^{21} : $[X_1, X_2] = X_4; [X_1, X_3] = X_5; [X_2, X_3] = X_6$. Cette algèbre est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Pour n_6^{22} : $[X_1, X_2] = X_5; [X_1, X_5] = X_6; [X_3, X_4] = X_6$. Cette algèbre est de pas trois.

$adXX_1 = -a^2 X_5 - a^5 X_6; adXX_2 = a^1 X_5; adXX_3 = a^1 X_5; adXX_4 = a^1 X_6;$

$adXX_5 = a^1 X_6; adXX_6 = 0$

$ad^2 XX_1 = -a^1 a^2 X_6; ad^2 XX_2 = (a^1)^2 X_6; ad^2 XX_3 = 0; ad^2 XX_4 = 0; ad^2 XX_5 = 0;$

$ad^2 XX_6 = 0$

Et alors

$$\begin{aligned} R_{expX} &= \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \sum_{1 \leq i \leq 6} \sum_{1 \leq j \leq 6} O(adXX^k)^i (ad^2 XX^l)^j \frac{\partial}{\partial a^i} \wedge \frac{\partial}{\partial a^j} \\ &= O \sum_{1 \leq k, l \leq 6} Q^{kl} \left\{ (-a^2 \delta_1^k + a^1 \delta_2^k) \frac{\partial}{\partial a^5} \right. \\ &\quad \left. \wedge \left\{ ((a^1)^2 \delta_2^l - a^1 a^2 \delta_1^l) \frac{\partial}{\partial a^6} \right\} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc P est linéaire.

Pour n_6^{23} : $[X_1, X_2] = X_5; [X_1, X_4] = X_6; [X_2, X_3] = X_6; [X_3, X_4] = X_5$. Cette algèbre est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Pour n_6^{24} : $[X_1, X_2] = X_5; [X_1, X_3] = X_6; [X_2, X_4] = X_6$. Cette algèbre est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Pour n_6^{25} qui est abélienne, il n'y a rien à faire.

Pour n_6^{26} qui est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Pour n_6^{27} qui est de pas trois, il n'y a rien à faire car on sait déjà que la structure de Poisson sur n_4^1 est linéarisable.

Pour n_6^{28} : Cette algèbre est de pas quatre.

Pour n_6^{29} : Cette algèbre est de pas quatre.

Pour n_6^{30} qui est de pas trois, il n'y a rien à faire car on sait déjà que la structure de Poisson sur n_5^3 est linéarisable.

Pour n_6^{31} qui est de pas trois, il n'y a rien à faire car on sait déjà que la structure de Poisson sur n_5^4 est linéarisable.

Pour n_6^{32} qui est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Pour n_6^{33} qui est de pas deux, il n'y a rien à faire.

Ainsi nous venons de démontrer que les structures de Lie-Poisson sur les groupes de Lie dont les algèbres de Lie sont nilpotentes de pas 3 et de dimension inférieure à 6 sont linéarisables.

Bibliographie

- [1] A. BELAVIN & V. DRINFELD, *The triangle equations and simple Lie algebras*, Preprint of Inst. Theor. Phys 18 (1982).
- [2] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris 1960-1975.
- [3] M. CAHEN, S. GUTT & J. RAWNSLEY, *Some remarks on the classification of Poisson Lie groups*, Proc. of the 1993 Taniguchi symposium on geometry, Contemporary Mathematics A.M.S.
- [4] M. CAHEN, S. GUTT et J. RAWNSLEY, *Non linearizability of the Iwasawa Poisson-Lie structure*, Lett. Math. Phys. 24 (1992) p 79-83.
- [5] V. CHARI & A.N. PRESSLEY, *A guide to Quantum groups*, Cambridge University Press (1995).
- [6] V. CHLOUP, *Bialgebra structures on a real semisimple Lie algebra*, Bull. Belg. Math. Soc 2 (1995), p265-278.
- [7] J.F. CONN, *Normals forms for analytic Poisson structures*, Ann. of Mathematics 119 (1984) p 577-601.
- [8] J.F. CONN, *Normals forms for smooth Poisson structures* Ann. of Math. 121 (1985) (3) p. 565-593.
- [9] P. DAZORD et D. SONDAZ, *Variétés de Poisson-Algébroides de Lie*, Séminaire Sud-Rhodanien, 1ère partie, Publ. Département Math., Université Claude Bernard Lyon I, (1988).
- [10] V. DE SMEDT, *Existence of Lie bialgebra structure on every Lie algebra*, Lett. Math. Phys. 31 (1994) (3) p.225-234.
- [11] N. DESOLNEUX MOULIS, *Linéarisation de certaines structures de Poisson*, Pub. Dep. Math. Nouvelle Série B 86-4, Univ. Claude Bernard Lyon (1986).
- [12] V.G. DRINFELD, *Hamiltonian structure on Lie groups and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equation*, Soc. Math. Dokl. 27 (1) (1983), 68-71.
- [13] V. DRINFELD, *Quantum groups*, Proc. ICM Berkeley 1986, AMS 1 (1987), 789-820.
- [14] V. DRINFELD, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. 1 (1990), 1419-1457.

- [15] J.P. DUFOUR, *Linéarisation de certaines structures de Poisson*, J. Diff. Géo. 32 (5) (1990) p 415-428.
- [16] M. FLATO, G. PINCZON & J. SIMON, *Non linear representation of Lie groups*, Anal. ENS (1977).
- [17] M. GOZE & Y. KHAKIMDJANOV, *Algèbres de Lie nilpotentes complexes*, Prep. Pub. I.R.M.A. 21 (1993).
- [18] GREUB, HALPERIN et VANSTONE, *Connections, curvature, and cohomology III*, Academic Press (1976).
- [19] S. HELGASON, *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*, Academic Press, (1978).
- [20] R. HERMANN, *The formal linearization of a semisimple Lie algebra of vector field about a singular point*, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968) p 105-109.
- [21] G. HOCHSCHILD et J-P. SERRE, *Cohomology of Lie algebras*, Annales of Mathematics 57 (3) (1953) p 591-603.
- [22] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH, *Poisson Drinfeld groups*, in Topics in Soliton theory and exactly solvable non linear equations, M. Ablowitz. B. Fuchssteiner et M. Krustal, eds., World Scientific, Singapour (1987).
- [23] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH, *Quantum and classical Yang-Baxter equations*, Modern Physics Letters 5 (13) (1990) p 981-990.
- [24] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH et F. MAGRI, *Poisson-Lie groups and complete integrability, I. Drinfeld bialgebras, dual extensions and their representations*, Ann. Inst. Henri Poincaré (1988), 49, (4), p.433-460.
- [25] J.L. KOSZUL, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Soc. Math. France Asrérique hors série (1985) p 257-271.
- [26] A. LICHNEROWICZ, *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Differential Geometry 12 (1977) p 253-300.
- [27] J.H. LU & A. WEINSTEIN, *Poisson-Lie groups, dressing transformations and Bruhat decompositions*, J. Differential Geom. 31 (1990), 501.
- [28] MOLINIER, *Linéarisation de structures de Poisson*, thèse de l'université de Montpellier II (1993).
- [29] M.A. SEMENOV-TIAN-SHANSKY, *What is a classical r-matrix?*, Func. Anal. Appl. 17 (4) (1983) p 259-272.
- [30] M.A. SEMENOV-TIAN-SHANSKY, *Dressing transformations and Poisson-Lie group actions*, Pub. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University 21 (1985) p 1237-1260.
- [31] M.A. SEMENOV-TIAN-SHANSKY, *Classical r-matrix, Lax equations, Poisson-Lie groups and dressing transformations*, Lecture Notes in Physics 280, Springer-Verlag, Berlin (1987), p.174-214.

- [32] Y. SOIBELMAN, *Algebras of functions on quantum group $SU(n)$ and Schubert cells*, Russian Doklady 307 (1989).
- [33] M. SUGIURA, *Conjugate classes of Cartan subalgebras in real semisimple Lie algebras*, J. Math. Soc. Jap. 11 (4) (1959).
- [34] L.A. TAKHTAJAN, *Lectures on quantum groups.*, M. L. Ge & B. H. Zhao (eds), World Scientific, Singapor (1992), 69-71
- [35] J.L. VERDIER, *Groupes quantiques.*, Séminaire Bourbaki (Juin 1987), Astérisque P. 152-153, Soc. Math. France 1987.
- [36] A. WEINSTEIN, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Differential Geometry 18 (1983) p 523-557.
- [37] A. WEINSTEIN, *Poisson geometry of the principal series and nonlinearizable structures*. J. Differential Geometry 25 (1987) p 55-73.

Résumé:

Dans cette thèse nous étudions les structures de Lie-Poisson. De manière plus précise deux thèmes sont abordés. Le premier est de nature classificatoire. Nous donnons une description complète des algèbres de Manin (c'est-à-dire les "grandes" algèbres d'un triple de Manin) associées à des structures de bigèbre de Lie sur une algèbre de Lie réelle semi-simple. Ensuite, en adaptant au cas réel les résultats de Belavin et Drinfeld décrivant les solutions de l'équation de Yang-Baxter standard modifiée non nulle sur une algèbre de Lie semi-simple complexe, nous donnons les solutions générales de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard non nulle sur une algèbre de Lie réelle semi-simple. Enfin nous donnons des résultats partiels concernant les structures de bigèbre liées aux solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée non standard sur une algèbre de Lie réelle simple telle que sa complexifiée ne soit pas simple. Le deuxième thème est celui de la linéarisation locale d'une structure de Lie-Poisson. Nous montrons, en utilisant le théorème de linéarisation analytique dans le cas d'une structure de Poisson de J. Conn, que si (G,P) est un groupe de Lie-Poisson, et si l'algèbre duale est la somme directe d'un idéal semi-simple et d'un idéal abélien, alors P est analytiquement linéarisable dans un voisinage de l'identité. Dans le cadre d'une structure de Poisson générale cette proposition peut-être mise en défaut. Nous montrons par ailleurs que toute structure de Lie-Poisson exacte sur un groupe de Lie nilpotent de pas deux est linéaire, sur un groupe de Lie nilpotent de pas trois et de dimension inférieure ou égale à six est linéarisable et qu'il existe des structures de Lie-Poisson exactes sur un groupe de Lie nilpotent de pas quatre et de dimension cinq qui ne sont pas linéarisables.

Mots clés: *groupe de Lie-Poisson, bigèbre de Lie, triple de Manin, équation de Yang-Baxter, linéarisation formelle, linéarisation analytique.*

Véronique CHLOUP-ARNOULD

Département de Mathématiques

Université de Metz

Ile du Saulcy

F-57045 Metz Cedex France

E-mail: chloup@poncelet.univ-metz.fr

Résumé:

Dans cette thèse nous étudions les structures de Lie-Poisson. De manière plus précise deux thèmes sont abordés. Le premier est de nature classificatoire. Nous donnons une description complète des algèbres de Manin (c'est-à-dire les "grandes" algèbres d'un triple de Manin) associées à des structures de bigèbre de Lie sur une algèbre de Lie réelle semi-simple. Ensuite, en adaptant au cas réel les résultats de Belavin et Drinfeld décrivant les solutions de l'équation de Yang-Baxter standard modifiée non nulle sur une algèbre de Lie semi-simple complexe, nous donnons les solutions générales de l'équation de Yang-Baxter modifiée standard non nulle sur une algèbre de Lie réelle semi-simple. Enfin nous donnons des résultats partiels concernant les structures de bigèbre liées aux solutions de l'équation de Yang-Baxter modifiée non standard sur une algèbre de Lie réelle simple telle que sa complexifiée ne soit pas simple. Le deuxième thème est celui de la linéarisation locale d'une structure de Lie-Poisson. Nous montrons, en utilisant le théorème de linéarisation analytique dans le cas d'une structure de Poisson de J. Conn, que si (G,P) est un groupe de Lie-Poisson, et si l'algèbre duale est la somme directe d'un idéal semi-simple et d'un idéal abélien, alors P est analytiquement linéarisable dans un voisinage de l'identité. Dans le cadre d'une structure de Poisson générale cette proposition peut-être mise en défaut. Nous montrons par ailleurs que toute structure de Lie-Poisson exacte sur un groupe de Lie nilpotent de pas deux est linéaire, sur un groupe de Lie nilpotent de pas trois et de dimension inférieure ou égale à six est linéarisable et qu'il existe des structures de Lie-Poisson exactes sur un groupe de Lie nilpotent de pas quatre et de dimension cinq qui ne sont pas linéarisables.

Mots clés: *groupe de Lie-Poisson, bigèbre de Lie, triple de Manin, équation de Yang-Baxter, linéarisation formelle, linéarisation analytique.*

Véronique CHLOUP-ARNOULD
Département de Mathématiques
Université de Metz
Ile du Saulcy
F-57045 Metz Cedex France
E-mail: chloup@poncelet.univ-metz.fr

