



**HAL**  
open science

## Actions exponentielles et idéaux premiers

Catherine Braun Molitor

► **To cite this version:**

Catherine Braun Molitor. Actions exponentielles et idéaux premiers. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1996. Français. NNT : 1996METZ020S . tel-01777131

**HAL Id: tel-01777131**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777131v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

~~S/172~~ 96122



# **THESE**

présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ**

**UFR M.I.M.**

**SPECIALITE MATHEMATIQUES**

par

**Catherine BRAUN, épouse MOLITOR**

## **ACTIONS EXPONENTIELLES ET IDEAUX PREMIERS**

D. Arnal

B. Bekka

J.L. Clerc

E. Kaniuth

J. Ludwig

D. Poguntke

A. Roux

Examineur

Examineur

Examineur

Rapporteur

Directeur de Recherche

Président

Rapporteur

Examineur



DB 108 545

S/M 3 96/22



# THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE METZ

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE METZ**

**UFR M.I.M.**

**SPECIALITE MATHEMATIQUES**

par

**Catherine BRAUN, épouse MOLITOR**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19960405
Cote	S/M 3 96/20
Loc	Magasin

## **ACTIONS EXPONENTIELLES ET IDEAUX PREMIERS**

D. Arnal  
B. Bekka  
J.L. Clerc  
E. Kaniuth  
J. Ludwig  
  
D. Poguntke  
A. Roux

Examineur  
Examineur  
Examineur  
Rapporteur  
Directeur de Recherche  
Président  
Rapporteur  
Examineur

## **Remerciements**

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Jean Ludwig qui m'a dirigée dans mes recherches avec beaucoup de compétence, d'enthousiasme et de disponibilité.

Messieurs les professeurs Eberhard Kaniuth et Detlev Poguntke ont spontanément accepté de mettre leur compétence au service du jury et d'être rapporteurs de ma thèse. Leur accord m'honore et je les en remercie vivement.

Un grand merci revient finalement à Messieurs les Professeurs Didier Arnal, Bachir Bekka, Jean-Louis Clerc et André Roux, membres du jury, pour l'intérêt qu'ils ont montré pour mon travail.

*A mon mari Roger*

*A mes enfants Françoise et Paul*

# Introduction

Le but du présent travail consiste à étendre certaines propriétés de l'algèbre  $L^1(G)$  qui ont joué un rôle important en analyse harmonique classique (caractérisation des idéaux maximaux, propriété de Wiener, problèmes de synthèse spectrale, caractérisation des idéaux premiers). Ces questions ont évidemment d'abord été étudiées sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^n$ , ensuite sur les groupes localement compacts abéliens, avant d'être étendues à diverses classes de groupes.

Revenons d'abord aux groupes localement compacts abéliens. La propriété de Wiener qui dit que tout idéal fermé propre de  $L^1(G)$  est contenu dans le noyau d'une représentation unitaire irréductible (identifiée à un caractère du groupe si celui-ci est abélien) a sans doute été la plus étudiée. Citons à ce sujet les travaux de Wiener ([Wie. 1], 1932; [Wie. 2], 1933) pour le groupe  $\mathbb{R}$  et ceux de Godement ([God. 1], 1946; [God. 2], 1947) et Segal ([Se.], 1947) pour les groupes localement compacts abéliens. Les problèmes de synthèse spectrale sont beaucoup plus complexes. On dit que la synthèse spectrale est possible si tout idéal fermé propre de  $L^1(G)$  est l'intersection des noyaux des représentations unitaires irréductibles qui le contiennent. Un ensemble de classes de représentations unitaires irréductibles  $\{\pi_i \in \hat{G} \mid i \in I\} \subset \hat{G}$  (identifié à un ensemble de caractères dans le cas abélien) est appelé ensemble de synthèse si  $\bigcap_{i \in I} \text{Ker } \pi_i$  est le seul idéal fermé de  $L^1(G)$  ayant comme enveloppe  $\{\pi_i \in \hat{G} \mid i \in I\}$ . En particulier les singletons  $\{\pi\}$  sont des ensembles de synthèse si  $G = \mathbb{R}$  ([Se.], 1947) ou si  $G$  est un groupe abélien localement compact quelconque ([Ri.], 1953 et [Kap.], 1949). Citons également les travaux de Agmon et Mandelbrojt ([A.M.], 1950), Helson ([Hel.], 1951) et Reiter ([Rei.], 1952) concernant la synthèse spectrale. Finalement les travaux de Schwartz ([Sch. 1], 1948) pour



$G = \mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 3$  et Malliavin ([Mal.], 1959) pour les groupes abéliens non compacts montrent que la synthèse spectrale n'est pas toujours possible.

La généralisation à des groupes non abéliens s'est effectuée dans diverses directions. Dans la suite nous nous intéresserons essentiellement aux groupes de Lie nilpotents. La propriété de Wiener pour l'algèbre  $L^1(G)$  d'un groupe de Lie connexe nilpotent est due à Lep-tin ([Lep.], 1976), tandis qu'une propriété analogue a été établie par Ludwig ([Lud. 7], 1987) pour l'algèbre de Schwartz  $\mathcal{S}(G)$  d'un groupe de Lie nilpotent. Dans ce cas, même les propriétés les plus simples de synthèse spectrale ne sont plus vérifiées. Après avoir montré l'existence d'un idéal minimal  $j(C)$  de  $\mathcal{S}(G)$ , resp.  $\tilde{j}(C)$  fermé de  $L^1(G)$ , d'enveloppe  $C$ , si  $C$  est un fermé de  $\hat{G}$ , Ludwig prouve que pour tout  $\pi \in \hat{G}$ , il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $(\text{Ker } \pi / \tilde{j}(\pi))^M = \{0\}$  ([Lud. 5], 1983). Remarquons que ceci est une généralisation de la synthèse spectrale obtenue si on pouvait prendre  $M = 1$  (ce qui n'est pas le cas en général). Des questions similaires ont entre autres été étudiées par Poguntke ([Pog. 1], 1983; [Pog. 2], 1984; [Pog. 3], 1987). Dans le cas non abélien, une autre classe d'idéaux, celle des idéaux premiers, devient importante. (Dans le cas abélien idéaux premiers, idéaux maximaux et noyaux des représentations unitaires irréductibles coïncident). Rappelons qu'un idéal  $I$  est premier si quels que soient les idéaux  $I_1$  et  $I_2$  tels que  $I_1 \cdot I_2 \subset I$ ,  $I_1 \subset I$  ou  $I_2 \subset I$ . Dans ([Lud. 5], 1983) Ludwig montre que dans les groupes de Lie nilpotents connexes simplement connexes, les idéaux premiers fermés de  $L^1(G)$  coïncident encore avec les noyaux des représentations unitaires irréductibles.

On pourrait penser ensuite à généraliser les propriétés en question aux groupes de Lie exponentiels. Or il s'est avéré bien vite que dans le cas des groupes exponentiels on ne peut pas espérer avoir des résultats comparables. En effet, la propriété de Wiener par exemple est vraie pour certains groupes exponentiels comme le groupe affine (produit semi-direct de groupes abéliens, [Lep.]) et fautive pour d'autres tels le groupe  $G_{4,9}(0)$  ([Lep. Pog.], 1979). D'où l'idée d'étudier en détail une étape intermédiaire entre les groupes nilpotents et les groupes exponentiels.

L'idée de cette étape intermédiaire est suggérée par le résultat suivant de Poguntke ([Pog. 1], 1983) : Soit  $G = \exp \mathfrak{g}$  un groupe de Lie ex-

ponentiel connexe, simplement connexe. Notons par  $\mathfrak{n}$  le radical nilpotent de  $\mathfrak{g}$  et soit  $N = \exp \mathfrak{n}$  le sous-groupe de Lie correspondant. On a une action naturelle de  $G$ , resp.  $\mathfrak{g}$  sur  $N, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}^*$ . Pour tout  $\ell \in \mathfrak{n}^*$  on peut alors définir la  $G$ -orbite de  $\ell$  dans  $\mathfrak{n}^*$  par  $G \cdot \ell = \{\text{Ad}^*(g)\ell \mid g \in G\}$ . Le résultat de Poguntke dit que si  $T$  est une représentation algébriquement irréductible de  $L^1(G)$ , il existe  $\ell \in \mathfrak{n}^*$  tel que  $\text{Ker}(T|_{L^1(N)}) = \text{Ker}(G \cdot \ell)$ , le noyau de l'orbite  $G \cdot \ell$  étant par définition l'intersection des noyaux des représentations unitaires irréductibles correspondant aux points de l'orbite. On voit facilement que  $\text{Ker}(T|_{L^1(N)})$  est en fait un idéal  $G$ -premier de  $L^1(N)$ , c'est-à-dire si  $I_1, I_2$  sont des idéaux  $G$ -invariants de  $L^1(N)$  tels que  $I_1 \cdot I_2 \subset \text{Ker}(T|_{L^1(N)})$ , alors  $I_1 \subset \text{Ker}(T|_{L^1(N)})$  ou  $I_2 \subset \text{Ker}(T|_{L^1(N)})$ . Le résultat de Poguntke suggère donc l'idée de définir une action exponentielle sur un groupe de Lie nilpotent et d'étudier les idéaux premiers par rapport à cette action. D'où la démarche de ce travail.

Soit  $G = \exp \mathfrak{g}$  un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe. Soit  $\mathfrak{d}$  une algèbre exponentielle de dérivations de  $\mathfrak{g}$ , contenant  $\text{ad } \mathfrak{g}$  et faisant de  $\mathfrak{g}$  un  $\mathfrak{d}$ -module exponentiel. Le groupe  $\mathfrak{D} = \exp \mathfrak{d}$  agit de façon naturelle sur  $\mathfrak{g}, G, L^1(G), \mathcal{S}(G), \hat{G}$  et  $\mathfrak{g}^*$ . Soit  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell \in \hat{G}$  avec  $\ell \in \mathfrak{g}^*$ . Les points de la  $\mathfrak{D}$ -orbite  $\Omega_\ell = \{D^* \cdot \ell \mid D \in \mathfrak{D}\}$  correspondent aux représentations  ${}^D\pi$ , étant donné que  ${}^D\pi$  est unitairement équivalent à  $\text{ind}_H^G \chi_{D^* \cdot \ell}$ . D'où la définition du noyau de l'orbite

$$\text{Ker } \Omega_\ell = \{f \in L^1(G) \mid {}^D\pi(f) = 0 \quad \forall D \in \mathfrak{D}\}.$$

Grâce à ces définitions nous pouvons alors caractériser les idéaux  $\mathfrak{D}$ -maximaux de  $L^1(G)$  et  $\mathcal{S}(G)$  (chapitre 8) et les idéaux  $\mathfrak{D}$ -premiers fermés de  $L^1(G)$  et  $\mathcal{S}(G)$  (chapitre 9) à l'aide des orbites. Nous montrons l'équivalent de la propriété de Wiener pour les idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants de  $L^1(G)$  et  $\mathcal{S}(G)$  (chapitre 8) et, pour les orbites  $\Omega$  fermées, nous obtenons le caractère nilpotent de l'algèbre  $\text{Ker } \Omega / \tilde{\mathcal{J}}(\Omega)$  (chapitre 7). Nous constatons qu'il faut faire une distinction entre orbites fermées et orbites non fermées (voir le chapitre 10 pour des exemples d'orbites non fermées).

Deux propriétés des orbites jouent un rôle important dans les résultats précédents : L'adhérence de toute orbite contient une orbite fermée

(chapitre 7). Si l'orbite  $\Omega$  est fermée,  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  est dense dans  $\text{Ker } \Omega$  (chapitre 7).

Les techniques de démonstration sont diverses. La caractérisation des idéaux  $\mathfrak{D}$ -maximaux et la propriété de Wiener (chapitre 8) sont des conséquences des propriétés correspondantes des groupes nilpotents sans action extérieure et de la présence d'une orbite fermée dans l'adhérence de toute orbite. La caractérisation des idéaux  $\mathfrak{D}$ -premiers (chapitre 9) se fait d'abord pour l'algèbre de Schwartz  $\mathcal{S}(G)$ . Il s'agit d'une démonstration par récurrence sur  $\dim \mathfrak{d} + \dim \mathfrak{g}$ , traitant en détail les différents cas qui peuvent se présenter pour les idéaux minimaux  $\mathfrak{d}$ -invariants de  $\mathfrak{g}$ . Selon les cas, la récurrence porte sur  $\dim \mathfrak{d}$  ou sur  $\dim \mathfrak{g}$ . Le passage à  $L^1(G)$  se fait grâce à une relation entre  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  et  $\text{Ker } \Omega$ .

Pour étudier la relation entre  $\text{Ker } \Omega$  et  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  (chapitre 7), on se base sur les constatations suivantes : Pour tout  $\pi \in \hat{G}$  et tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ ,  $\pi(f)$  est un opérateur à noyau. Sous l'action de  $D \in \mathfrak{D}$ , il en est donc de même de  ${}^D\pi(f) = \pi(f^D)$ , le noyau correspondant  $F(D, \cdot, \cdot)$  pouvant également être considéré comme une fonction de  $D$ . Les calculs sur la fonction  $f$  sont alors, sous certaines conditions, remplacés par un raisonnement sur les noyaux. Ceci est possible puisque tout  $F$  dans un certain espace  $ES$  de fonctions ( $\mathcal{S}$  pour Schwartz,  $E$  pour décroissance exponentielle) convenablement choisi possède un rétracte  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  ${}^D\pi(f)$  ait pour noyau  $F(D, \cdot, \cdot)$  pour tout  $D$ . L'existence d'un tel rétracte est en fait démontrée dans le cadre plus général d'une action exponentielle sur un groupe exponentiel de la forme  $G = \exp \mathfrak{g}$  avec  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$  (dans ce cas la représentation  ${}^D\pi$  est remplacée par une représentation unitairement équivalente  $\zeta_D$ ) au chapitre 5, avant d'être précisée pour les groupes nilpotents au chapitre 6. A nouveau, la démonstration fort technique se fait par récurrence, le rétracte étant construit cas par cas.

Les quatre premiers chapitres préparent le terrain pour les raisonnements ultérieurs. Aux chapitres 1 et 2 nous faisons certains rappels et introduisons les actions exponentielles, au chapitre 3 nous étudions en détail les différents cas qui peuvent se présenter lors de la récurrence et au chapitre 4 nous définissons les différents espaces  $ES$ .

Le chapitre 10 tire les conclusions de ce travail. Nous y comparons les cas des groupes nilpotents sans action extérieure et des groupes

nilpotents soumis à une action exponentielle, ainsi que certains résultats connus pour les groupes exponentiels eux-mêmes. Nous terminons en mentionnant un certain nombre de questions ouvertes.

# Chapitre 1

## Groupes exponentiels et leurs représentations

1.1. Intuitivement on peut dire que les groupes exponentiels constituent la classe de groupes de Lie la plus vaste pour laquelle il existe un difféomorphisme entre le groupe et son algèbre de Lie. Cette classe de groupes se situe entre les groupes de Lie nilpotents et les groupes de Lie résolubles. Les groupes exponentiels ont été introduits par Dixmier ([Dix. 1]). L'adaptation aux groupes exponentiels de la théorie de Kirillov pour les représentations unitaires irréductibles est entre autres due à Pukanszky ([Puk. 1]), grâce à sa condition nécessaire et suffisante sur les polarisations. La caractérisation topologique de l'espace  $\hat{G}$  finalement est assez récente et est due à Leptin et Ludwig ([Lep. Lud.]).

1.2. **Convention :** Dans la suite de ce travail  $G$  désignera un groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . L'application exponentielle de  $\mathfrak{g}$  dans  $G$  sera notée par  $\exp$ . Les éléments de l'algèbre seront notés par des majuscules  $X, Y, \dots$  et les éléments du groupe par des minuscules  $x, y, \dots$ .

1.3. **Définition :** ([Dix. 1])

Un groupe exponentiel est un groupe de Lie connexe simplement connexe résoluble  $G$  vérifiant une des trois conditions équivalentes suivantes :

(i) L'application exponentielle  $\exp$  est un difféomorphisme entre  $\mathfrak{g}$  et  $G$ .

(ii) Quel que soit  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\text{ad } X$  n'a pas de valeur propre non nulle imaginaire pure.

(iii) Les racines de  $\mathfrak{g}$  (dans l'algèbre complexifiée  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ) ont la forme  $\varphi(X)(1 + i\omega)$ , où  $\omega \in \mathbb{R}$  et  $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ .

1.4. Les représentations unitaires irréductibles de  $G$  exponentiel sont obtenues de la manière suivante :

(i) Soit  $\ell \in \mathfrak{g}^*$ . On appelle *polarisation* au point  $\ell$  toute sous-algèbre  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  qui est en même temps un sous-espace totalement isotrope maximal, c'est-à-dire telle que

$$\begin{cases} \langle \ell, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \rangle \equiv 0 \\ \dim \mathfrak{h} = \frac{1}{2}(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}(\ell)) \end{cases}$$

où

$$\mathfrak{g}(\ell) = \{X \in \mathfrak{g} \mid \langle \ell, [X, Y] \rangle = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

(ii) On dit que la polarisation  $\mathfrak{h}$  vérifie le *critère de Pukanszky* si

$$\ell + \mathfrak{h}^{\perp} = \{\text{Ad}^*(h)\ell \mid h \in H\} = \text{Ad}^* H(\ell)$$

où

$$\mathfrak{h}^{\perp} = \{k \in \mathfrak{g}^* \mid \langle k, \mathfrak{h} \rangle \equiv 0\}.$$

D'ailleurs le signe  $\equiv$  peut être remplacé par le signe  $\subset$ , l'autre inclusion étant toujours vérifiée.

(iii) On obtient un caractère unitaire de  $H = \exp \mathfrak{h}$  par

$$\begin{aligned} \chi_{\ell} : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ h &\longmapsto \chi_{\ell}(h) = e^{-i\langle \ell, \log h \rangle}. \end{aligned}$$

(iv) Notons par  $\Delta_G$ , resp.  $\Delta_H$  les fonctions modulaires sur  $G$ , resp.  $H$ . Soit  $\Delta$  un homomorphisme de  $G$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  tel que

$$\Delta|_H = \frac{\Delta_H}{\Delta_G|_H}$$

en notant par  $\Delta|_H$  et  $\Delta_G|_H$  les restrictions de  $\Delta$  et  $\Delta_G$  à  $H$ . Alors il existe une mesure semi-invariante unique  $d\dot{y}$  sur l'espace  $G/H$  telle que

$$\int_{G/H} \varphi(x^{-1}\dot{y})d\dot{y} = \Delta(x) \int_{G/H} \varphi(\dot{y})d\dot{y}$$

pour toute fonction  $\varphi$  continue à support compact dans  $G/H$  ([B.C. et al]).

(v) On note par  $\mathcal{H}_\pi$  l'espace de Hilbert obtenu par complétion à partir de l'espace des fonctions continues de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant

$$\xi(x \cdot h) = e^{i(\ell, \log h)} \xi(x) = \overline{\chi_\ell(h)} \xi(x) \quad \forall x \in G, h \in H$$

$$\int_{G/H} |\xi(x)|^2 dx < +\infty.$$

On définit la représentation  $\pi$  de  $G$  sur  $\mathcal{H}_\pi$  par

$$(\pi(x)\xi)(y) = \Delta^{-1/2}(x)\xi(x^{-1}y).$$

On note  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell = \pi(\ell, \mathfrak{h})$  et on l'appelle *représentation induite* par  $\chi_\ell$  sur  $G$ .

(vi) La représentation induite  $\pi$  est irréductible si et seulement si  $\mathfrak{h}$  est une polarisation vérifiant le critère de Pukanszky et toutes les représentations unitaires irréductibles de  $G$  sont obtenues de cette manière.

(vii) Pour tout  $\ell \in \mathfrak{g}^*$  il existe des polarisations vérifiant le critère de Pukanszky.

(viii) La théorie des représentations induites des groupes de Lie exponentiels est équivalente à la théorie de Dixmier ([Dix. 4]) des représentations induites pour les algèbres résolubles exponentielles et leurs algèbres enveloppantes ([Mol. 3]).

1.5. L'espace  $\hat{G}$  de toutes les classes de représentations unitaires irréductibles de  $G$  est caractérisé grâce aux résultats suivants :

(i) Tout  $\pi \in \hat{G}$  est obtenu comme en 1.4., et est indépendant de la polarisation de Pukanszky choisie. Par abus de notation,  $\pi$  désignera à la fois une représentation et sa classe dans  $\hat{G}$ .

(ii) Pour tout  $a \in G$ ,  $\pi(\ell, \mathfrak{h})$  et  $\pi((\text{Ad}^* a)(\ell), (\text{Ad} a)(\mathfrak{h}))$  sont unitairement équivalents. Donc la classe d'équivalence de  $\pi(\ell, \mathfrak{h})$  dépend uniquement de l'orbite

$$\mathcal{O}(\ell) := \{(\text{Ad}^* a)(\ell) \mid a \in G\}$$

dans  $\mathfrak{g}^*$ . On notera pour simplifier  $\pi(\ell)$  au lieu de  $\pi(\ell, \mathfrak{h})$ .

(iii) L'application de Kirillov

$$K : \mathcal{O}(\ell) \longmapsto \pi(\ell)$$

est une bijection entre l'espace des orbites, identifié à  $\mathfrak{g}^*/\text{Ad}^*G$ , et l'espace  $\hat{G}$ .

(iv) La topologie de  $\hat{G}$  est déduite de manière naturelle de la topologie de Jacobson de l'espace  $\text{Prim } C^*(G)$  des idéaux primitifs de  $C^*(G)$ . L'espace  $\mathfrak{g}^*/\text{Ad}^*G$  est muni de la topologie quotient. Dans ce cas l'application de Kirillov pour les groupes exponentiels est un homéomorphisme entre  $\mathfrak{g}^*/\text{Ad}^*G$  et  $\hat{G}$  ([Lep. Lud.]).

(v) Lorsque le groupe  $G$  est nilpotent (ou, de manière plus générale,  $*$ -régulier), la topologie de  $\hat{G}$  peut même être déduite de la topologie de Jacobson de l'espace  $\text{Prim}_*L^1(G)$  des noyaux dans  $L^1(G)$  des représentations unitaires irréductibles de  $L^1(G)$ , puisque dans ce cas il y a homéomorphisme entre  $\text{Prim } C^*(G)$  et  $\text{Prim}_*L^1(G)$  ([Boi.]).

### 1.6. Bases coexponentielles

(i) Soit  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ . Alors il existe une base  $\mathfrak{B} = \{B_1, \dots, B_r\}$  supplémentaire à  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$  telle que les applications

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^r \times \exp \mathfrak{h} &\longrightarrow G \\ (t_1, \dots, t_r; h) &\longmapsto \exp t_r B_r \dots \exp t_2 B_2 \cdot \exp t_1 B_1 \cdot h \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^r \times \exp \mathfrak{h} &\longrightarrow G \\ (t_1, \dots, t_r; h) &\longmapsto h \cdot \exp t_1 B_1 \cdot \exp t_2 B_2 \dots \exp t_r B_r \end{aligned}$$

soient des difféomorphismes. Une telle base est appelée base coexponentielle à  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ .

(ii) La construction des bases coexponentielles peut être effectuée de la manière suivante :

a) Si  $\mathfrak{h}$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}$  et si  $B \in \mathfrak{g}$  est un élément quelconque tel que  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{h}$ , alors  $\{B\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ .

b) Si  $\mathfrak{h}$  est une sous-algèbre et non un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}$ , soit  $\mathfrak{n}$  le radical nilpotent de  $\mathfrak{g}$  et soit  $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{h}$ . Alors  $\dim \mathfrak{n}/\mathfrak{n}_0 = 1$  et tout  $B \in \mathfrak{n}$  vérifiant  $\mathfrak{n} = \mathbb{R}B \oplus \mathfrak{n}_0$  est tel que  $\{B\}$  soit une base coexponentielle à  $\mathfrak{n}_0$  dans  $\mathfrak{n}$  et une base coexponentielle à  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ .

c) Si  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  est un quotient irréductible de dimension 2 pour l'action



de  $\text{ad } \mathfrak{g}$ , alors  $\dim \mathfrak{n}/\mathfrak{n}_0 = 2$  et il existe  $B, B' \in \mathfrak{n}$  tels que

$$(\text{ad } X) \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} = \varphi(X) \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ B' \end{pmatrix} \text{ mod } \mathfrak{h}$$

pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ , pour un certain  $\omega \in \mathbb{R}^*$  et  $\varphi \in \mathfrak{g}^*$ . Dans ce cas  $\{B, B'\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{n}_0$  dans  $\mathfrak{n}$  et une base coexponentielle à  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ .

d) A l'aide des étapes précédentes on peut construire une base coexponentielle à toute sous-algèbre  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  ([Puk. 2]).

1.7. Grâce aux bases coexponentielles, l'espace  $\mathcal{H}_\pi$  de 1.4. peut être identifié à un espace de fonctions sur  $\mathbb{R}^r$ .

**1.8. Noyau d'une représentation unitaire irréductible**

(i) Soit  $\pi \in \hat{G}$ . Pour  $f \in C_c^\infty(G)$ , définissons

$$\pi(f) = \int_G f(x)\pi(x)dx.$$

Alors  $\pi(f)$  est un opérateur à noyau, dont le noyau  $f_\pi$  est donné par

$$f_\pi(x, y) = \Delta^{-1/2}(x)\Delta_G^{-1}(y)\Delta^{-1/2}(y) \int_H \Delta^{-1/2}(h)f(xhy^{-1})\chi_\ell(h)dh,$$

$\Delta_G$  désignant la fonction modulaire de  $G$  et  $\pi$  s'écrivant  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$ . Le noyau  $f_\pi$  est  $C^\infty$  et vérifie

$$f_\pi(xh, x'h') = \overline{\chi_\ell(h)}\chi_\ell(h')f_\pi(x, x')$$

pour  $x, x' \in G, h, h' \in H$  ([Lud. 4]).

(ii) Une base coexponentielle à  $\mathfrak{h}$  étant fixée, le noyau  $f_\pi$  peut donc être identifié à une fonction de  $C^\infty(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r)$ .

## Chapitre 2

# Actions exponentielles et leurs orbites

**2.1.** Soit  $G$  un groupe exponentiel et soit  $N = \exp \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{n}$  désignant le radical nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . Dans ce cas  $\mathfrak{g}$  agit sur  $\mathfrak{n}$  et  $G$  agit sur  $\mathfrak{n}$  et  $N$  par  $\text{ad } X|_{\mathfrak{n}}$ ,  $\text{Ad}(\exp X)|_{\mathfrak{n}}$ , resp. par conjugaison d'un élément de  $N$  par un élément de  $G$ . D'ailleurs on peut définir de manière plus générale l'action d'un groupe sur un sous-groupe normal. Cette constatation nous amène à définir une action exponentielle sur un groupe exponentiel. Remarquons que certaines propriétés de groupes soumis à des actions extérieures ont entre autres été étudiées par Ludwig ([Lud. 4]) et Poguntke ([Pog. 1]).

**2.2. Définition :** Soit  $G$  un groupe exponentiel d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\mathfrak{d}$  une algèbre de dérivations de  $\mathfrak{g}$  et posons  $\mathcal{D} = \exp \mathfrak{d}$ . Nous disons que  $\mathfrak{d}$  (resp.  $\mathcal{D}$ ) agit exponentiellement sur  $\mathfrak{g}$  (resp.  $G$ ) si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (i)  $\mathfrak{d}$  est une algèbre de Lie exponentielle
- (ii)  $\text{ad } \mathfrak{g} \subset \mathfrak{d}$
- (iii)  $\mathfrak{g}$  est un  $\mathfrak{d}$ -module de type exponentiel, à savoir les poids pour l'action de  $\mathfrak{d}$  dans  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  ont la forme

$$d \longmapsto \varphi(d)(1 + i\omega)$$

avec  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in \mathfrak{d}^*$ . Cela signifie qu'il existe une suite de Jordan-Hölder d'idéaux de  $\mathfrak{g}$

$$0 = \mathfrak{g}_n \triangleleft \mathfrak{g}_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft \mathfrak{g}_1 \triangleleft \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$$

pour l'action de  $\mathfrak{d}$  vérifiant une des deux conditions suivantes :

- $\dim \mathfrak{g}_k / \mathfrak{g}_{k+1} = 1$  et il existe  $X_k \in \mathfrak{g}_k \setminus \mathfrak{g}_{k+1}$  tel que

$$d(X_k) = \varphi_k(d)X_k \pmod{\mathfrak{g}_{k+1}}$$

pour tout  $d \in \mathfrak{d}$ , avec  $\varphi_k \in \mathfrak{d}^*$ .

- $\dim \mathfrak{g}_k / \mathfrak{g}_{k+1} = 2$  et il existe  $X_k, X'_k \in \mathfrak{g}_k \setminus \mathfrak{g}_{k+1}$  tels que

$$d \begin{pmatrix} X_k \\ X'_k \end{pmatrix} = \varphi_k(d) \begin{pmatrix} 1 & -\omega_k \\ \omega_k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ X'_k \end{pmatrix} \pmod{\mathfrak{g}_{k+1}}$$

pour tout  $d \in \mathfrak{d}$ , avec  $\varphi_k \in \mathfrak{d}^*$ ,  $\omega_k \in \mathbb{R}^*$ .

L'action de  $\mathfrak{D}$  sur  $G$  qu'on en déduit est expliquée en 2.4.

**2.3. Lemme :** Pour toute action exponentielle,  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$  est un idéal  $\mathfrak{d}$ -invariant contenu dans le radical nilpotent  $\mathfrak{n}$  de  $\mathfrak{g}$  et contenant  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .

Démonstration : Puisque les éléments de  $\mathfrak{d}$  sont des dérivations,

$$(\text{ad } d(X))(Y) = [d, \text{ad } X](Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall d \in \mathfrak{d}$$

où  $[d, \text{ad } X] = d \circ \text{ad } X - \text{ad } X \circ d$ . L'algèbre  $\mathfrak{d}$  étant exponentielle, donc résoluble, l'opérateur  $[d, \text{ad } X]$  est nilpotent. Il en est donc de même de l'opérateur  $\text{ad } d(X)$ . Ceci prouve que  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$  est une sous-algèbre nilpotente de  $\mathfrak{g}$ , donc que  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$ . Puisque  $\text{ad } \mathfrak{g} \subset \mathfrak{d}$  par hypothèse,  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ .

**2.4.** L'action exponentielle permet de définir les actions suivantes :

(i) Pour  $d \in \mathfrak{d}$ , notons  $D = \exp d \in \mathfrak{D}$ , c'est-à-dire

$$D(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^k(X) \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{g}.$$

(ii) Pour  $x = \exp X \in G$  posons

$${}^D x = {}^D(\exp X) = \exp(D(X)).$$

Cette notation garantit que

$$({}^{D_1 D_2}) x = {}^{D_1}({}^{D_2} x)$$

quels que soient  $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ ,  $x \in G$ .

(iii) Pour tout  $f \in L^1(G)$  définissons  $f^D$  par

$$f^D(x) = \delta(D)f(Dx)$$

où  $\delta$  désigne la fonction modulaire telle que

$$\int f^D(x)dx = \int f(x)dx.$$

Quels que soient  $f \in L^1(G)$ ,  $D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$ ,

$$f^{(D_1 D_2)} = (f^{D_1})^{D_2}.$$

(iv) Pour  $\pi \in \hat{G}$  on définit  ${}^D\pi$  par

$$({}^D\pi)(x) = \pi(D^{-1}x) \quad \forall D \in \mathfrak{D}, x \in G.$$

On vérifie facilement que

$$({}^{D_1 D_2})\pi = {}^{D_1}({}^{D_2}\pi) \quad \forall D_1, D_2 \in \mathfrak{D}$$

et

$$\pi(f^D) = ({}^D\pi)(f) \quad \forall D \in \mathfrak{D}, \forall f \in L^1(G).$$

(v) L'action coadjointe sur  $\mathfrak{g}^*$  est définie de manière habituelle par

$$\begin{aligned} \langle d^* \cdot \ell, X \rangle &= \langle \ell, -d(X) \rangle \\ \langle D^* \cdot \ell, X \rangle &= \langle \ell, D^{-1}(X) \rangle \end{aligned} \quad \begin{aligned} \forall \ell \in \mathfrak{g}^*, X \in \mathfrak{g}, \\ d \in \mathfrak{d}, D \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

**2.5.** Si  $G$  est un groupe de Lie nilpotent, on peut définir son algèbre de Schwartz  $\mathcal{S}(G)$ . Nous renvoyons à ([Lud. Mol. 1]) pour la définition de  $\mathcal{S}(G)$  et des différentes normes engendrant la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ . L'action exponentielle de  $\mathfrak{D}$  sur  $G$  définit alors également une action de  $\mathfrak{D}$  sur  $\mathcal{S}(G)$  par  $f^D(x) = \delta(D)f(Dx)$ . Un certain nombre de propriétés de continuité et de transformations concernant cette action ont été démontrées dans ([Lud. Mol. 1]) et seront utilisées dans la suite. Revenons à présent aux groupes exponentiels.

**2.6. Lemme :** Soient  $\pi = \pi(\ell, \mathfrak{h})$  et  $D \in \mathfrak{D}$ . Alors  $D\mathfrak{h}$  est une polarisation pour  $D^*\ell$  et les représentations  ${}^D\pi$  et  $\pi_D = \pi(D^*\ell, D\mathfrak{h})$  sont unitairement équivalentes.

Démonstration : L'équivalence unitaire

$$\mathcal{U} : \mathcal{H}_{D\pi} \cong \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_D}$$

est donnée par

$$(\mathcal{U}\xi)(x) = \xi(D^{-1}x)$$

à condition de prendre sur  $G/\exp D\mathfrak{h}$  la mesure semi-invariante correspondant au caractère  $\Delta \circ D^{-1}$  et définie par

$$\eta \longmapsto \int_{G/\exp D\mathfrak{h}} \eta(x) dx = \int_{G/\exp \mathfrak{h}} \eta \circ D(y) dy.$$

**2.7.** Soit  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell \in \hat{G}$  et soit  $D \in \mathfrak{D}$ . Sous quelle condition  $\pi$  et  ${}^D\pi$  sont-ils unitairement équivalents ? D'après 2.6.,  ${}^D\pi$  est unitairement équivalent à  $\pi_D = \pi(D^*\ell, D\mathfrak{h})$ . D'après 1.5.,  $\pi(D^*\ell, D\mathfrak{h})$  est unitairement équivalent à  $\pi(\ell, \mathfrak{h})$  si et seulement si

$$D^*\ell \in \mathcal{O}(\ell) = (\text{Ad}^* G)(\ell).$$

Or remarquons que

$$\begin{aligned} & D^*\ell \in (\text{Ad}^* G)(\ell) \\ \iff & \text{Ad}^* G(D^*\ell) \subset (\text{Ad}^* G)(\ell) \\ \iff & D^*((\text{Ad}^* G)(\ell)) \subset (\text{Ad}^* G)(\ell) \\ \iff & D^* \cdot \mathcal{O}(\ell) \subset \mathcal{O}(\ell) \\ \iff & D^* \cdot \mathcal{O}(\ell) = \mathcal{O}(\ell) \end{aligned}$$

c'est-à-dire si et seulement si  $D^*$  laisse l'orbite  $\mathcal{O}(\ell)$  invariante, puisque  $\text{Ad}^* G$  est un sous-groupe normal de  $\mathfrak{D}^*$ . Ce résultat nous amène aux définitions suivantes.

**2.8. Définition :** Soit  $\ell \in \mathfrak{g}^*$ .

(i) L'annihilateur  $\mathfrak{d}_\ell$  de  $\ell$  est défini par

$$\mathfrak{d}_\ell = \{d \in \mathfrak{d} \mid d^* \cdot \ell = 0\}.$$

Le stabilisateur  $\mathfrak{D}_\ell$  de  $\ell$  est défini par

$$\mathfrak{D}_\ell = \exp \mathfrak{d}_\ell = \{D \in \mathfrak{D} \mid D^* \cdot \ell = \ell\}.$$

(ii) Le stabilisateur  $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)}$  de l'orbite est défini par

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} &= \{D \in \mathfrak{D} \mid D^* \cdot \mathcal{O}(\ell) \subset \mathcal{O}(\ell)\} \\ &= \{D \in \mathfrak{D} \mid D^* \cdot \mathcal{O}(\ell) = \mathcal{O}(\ell)\} \\ &= \{D \in \mathfrak{D} \mid {}^D\pi \text{ et } \pi \text{ sont unitairement équivalents} \\ &\quad \text{si } \pi = \pi(\ell, \mathfrak{h})\}. \end{aligned}$$

De plus on notera

$$\mathfrak{d}_{\mathcal{O}(\ell)} = \ln \mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} = \{d \in \mathfrak{d} \mid \exp d \in \mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)}\}.$$

Si  $\pi = \pi(\ell, \mathfrak{h})$  on notera encore  $\mathfrak{d}_\pi$  et  $\mathfrak{D}_\pi$  au lieu de  $\mathfrak{d}_{\mathcal{O}(\ell)}$  resp.  $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)}$ .

**2.9. Proposition :** Le stabilisateur  $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)}$  de l'orbite est un sous-groupe connexe de  $\mathfrak{D}$ , contenant  $\text{Ad } G$  et vérifiant  $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} = \text{Ad } G \cdot \mathfrak{D}_\ell$ .

Démonstration : La relation  $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} = \text{Ad } G \cdot \mathfrak{D}_\ell$  découle de l'équivalence

$$D \in \mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} \iff D^* \cdot \ell \in (\text{Ad}^* G)(\ell) \quad (2.7.)$$

La connexité de  $\mathfrak{D}_\ell$  découle de ([B.C. et al], I.3.3.).

Puisqu'en plus  $\text{Ad } G$  est connexe par arcs, donc connexe, on en déduit la connexité de  $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)} = \mathfrak{D}_\pi$ .

**2.10. Définition :** On appelle *orbite généralisée* de  $\ell$  le sous-ensemble de  $\mathfrak{g}^*$  défini par

$$\Omega_\ell = \{D^* \cdot \ell \mid D = \exp d \in \mathfrak{D}\}.$$

Si aucune confusion n'est possible, l'orbite généralisée sera simplement appelée orbite. Elle jouera un rôle essentiel dans la suite de ce travail.

**2.11.** Certains raisonnements se feront par récurrence sur  $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$ . On construira alors une base coexponentielle  $\{d_1, \dots, d_n\}$  à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ . Une fonction sur  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$  sera identifiée à une fonction sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$F(\exp t_n d_n \cdot \exp t_{n-1} d_{n-1} \dots \exp t_1 d_1 \cdot \mathfrak{D}_\pi) \equiv F(t_1, \dots, t_n).$$

Si  $D = \exp t_n d_n \dots \exp t_1 d_1 \text{ mod } \mathfrak{D}_\pi$ , on notera indistinctement  $F(D)$  et  $F(t_1, \dots, t_n)$ .

## Chapitre 3

# Différentes étapes d'une démonstration par récurrence

**3.1.** Soit  $\ell \in \mathfrak{g}^*$  et soit  $\pi = \pi(\ell)$ . Les démonstrations concernant certaines propriétés de  $\pi$  (fonctions qui sont noyaux des représentations  $D\pi$ ; idéaux  $\mathfrak{D}$ -premiers contenus dans  $\text{Ker } \pi$ ) se feront par récurrence. Dans ce chapitre nous analyserons les différentes étapes nécessaires à une telle récurrence. Nous nous baserons essentiellement sur les travaux de Ludwig ([Lud. 4]). Soulignons pour commencer les différences avec les résultats de Ludwig.

(i) Ludwig se limite aux algèbres de dérivations  $\mathfrak{d}$  telles que  $d^*(\ell) = 0$  pour tout  $d \in \mathfrak{d} \setminus \text{ad } \mathfrak{g}$ , alors que nous étudierons des algèbres  $\mathfrak{d}$  plus générales. Cela aura entre autres comme conséquence que nos polarisations ne seront plus  $\mathfrak{d}$ -invariantes.

(ii) En contrepartie nous nous limiterons à des algèbres de Lie de la forme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{n}$  désignant le radical nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . Cette hypothèse simplifiera un certain nombre de calculs. D'autre part, lors de l'étude des orbites sous l'action de  $\text{Ad}^*G$ , une telle restriction semble être sans conséquences pour nos problèmes. En effet, soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre exponentielle plus générale. Posons  $\mathfrak{m}(\ell) = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ . Dans ce cas l'orbite de  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}^*$  pour l'action de  $\text{Ad}^*G$  est saturée pour  $\mathfrak{m}(\ell)$ , c'est-à-dire  $\mathcal{O}(\ell) + \mathfrak{m}(\ell)^\perp = \mathcal{O}(\ell)$ .

(iii) Finalement, Ludwig fait une récurrence sur  $\dim \mathfrak{g}$ , alors que notre

réurrence se fera sur  $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$ . Cependant, remarquons que si  $d^*(\ell) = 0$  pour tout  $d \in \mathfrak{d} \setminus \text{ad } \mathfrak{g}$ , alors  $\mathfrak{d} \equiv \mathfrak{d}_\pi$ . Donc notre récurrence se ramène à celle de Ludwig.

(iv) Soulignons en fin de compte la différence de notations. Nous supposons d'office  $\text{ad } \mathfrak{g} \subset \mathfrak{d}$ , alors que Ludwig note  $\mathfrak{d} + \text{ad } \mathfrak{g}$  pour tenir compte de cette hypothèse.

Lorsque nos démonstrations ressemblent considérablement à celles de Ludwig ([Lud. 4]), nous nous contenterons de donner de brèves indications.

**3.2. Proposition :** Soit  $G = \exp \mathfrak{g}$  un groupe exponentiel muni d'une action exponentielle donnée par  $\mathfrak{D} = \exp \mathfrak{d}$ . Soit  $\ell \neq 0 \in \mathfrak{g}^*$ . Alors au moins un des cas suivants se présente :

1er cas : On a  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \equiv 0$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{g}$  est une algèbre abélienne ne subissant aucune action extérieure.

2me cas : Il existe un idéal non nul  $\mathfrak{a}$ ,  $\mathfrak{d}$ -invariant, annulé par  $\ell$  et contenu dans le radical nilpotent  $\mathfrak{n}$ .

3me cas : Il existe  $Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$  et  $\varphi \in \mathfrak{d}^*$ ,  $\varphi \neq 0$ , tels que

$$\begin{aligned} d(Y) &= \varphi(d) \cdot Y \quad \forall d \in \mathfrak{d}^* \\ \langle \ell, Y \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Si  $\mathfrak{g}$  est de la forme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ , alors  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$  et  $Y$  est central dans  $\mathfrak{g}$ .

4me cas : Il existe  $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$ ,  $\varphi \in \mathfrak{d}^*$ ,  $\varphi \neq 0$  et  $\omega \in \mathbb{R}^*$  tels que

$$\begin{aligned} d \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &= \varphi(d) \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad \forall d \in \mathfrak{d}^* \\ |\langle \ell, Y_1 \rangle| + |\langle \ell, Y_2 \rangle| &\neq 0. \end{aligned}$$

Si  $\mathfrak{g}$  est de la forme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ , alors  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$  et  $Y_1, Y_2$  sont centraux dans  $\mathfrak{g}$ .

5me cas : Il existe  $U, Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$  et  $\alpha, \beta \in \mathfrak{d}^*$  tels que

$$\begin{aligned} d(Y) &= 0 \quad \forall d \in \mathfrak{d}, \text{ donc, en particulier, } Y \text{ est central dans } \mathfrak{g} \\ d(U) &= \alpha(d)U + \beta(d)Y \quad \forall d \in \mathfrak{d} \\ \langle \ell, U \rangle &= 0 \text{ et } \langle \ell, Y \rangle = 1 \\ \alpha, \beta &\text{ sont indépendants, donc non nuls.} \end{aligned}$$

6me cas : Il existe  $Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$ ,  $U \in \mathfrak{g}$ ,  $\beta \in \mathfrak{d}^*$ ,  $\beta \neq 0$  tels que

$$\begin{aligned} d(Y) &= 0 \quad \forall d \in \mathfrak{d}, \text{ donc, en particulier, } Y \text{ est central dans } \mathfrak{g} \\ d(U) &= \beta(d)Y \quad \forall d \in \mathfrak{d} \\ \langle \ell, U \rangle &= 0 \text{ et } \langle \ell, Y \rangle = 1. \end{aligned}$$



Si  $\mathfrak{g}$  est de la forme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ , on peut choisir  $U \in \mathfrak{n}$ .

7me cas : Il existe  $U, V, Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n}$ ,  $\varphi, \alpha, \beta \in \mathfrak{d}^*$  tels que

$d(Y) = 0 \quad \forall d \in \mathfrak{d}$ , donc, en particulier,  $Y$  est central dans  $\mathfrak{g}$

$$d \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \varphi(d) \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(d) \\ \beta(d) \end{pmatrix} Y \quad \forall d \in \mathfrak{d}$$

$$[U, V] = 0$$

$$\langle \ell, U \rangle = \langle \ell, V \rangle = 0 \text{ et } \langle \ell, Y \rangle = 1$$

$\varphi, \alpha, \beta$  sont indépendants, donc non nuls.

Démonstration : Si on n'est pas en présence des cas 1) ou 2) on fait le raisonnement suivant : Puisque l'action est exponentielle, les idéaux minimaux  $\mathfrak{d}$ -invariants (contenus dans  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$  si  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \neq 0$ ) sont de dimension 1 ou 2. On a donc les cas

$$a) \quad d(Y) = \varphi(d)Y \quad \forall d \in \mathfrak{d}^*, \quad \langle \ell, Y \rangle = 1, \quad Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$$

ou

$$b) \quad d \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \varphi(d) \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \quad \forall d \in \mathfrak{d}^*, \quad Y_1, Y_2 \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$$

$$|\langle \ell, Y_1 \rangle| + |\langle \ell, Y_2 \rangle| \neq 0.$$

Dans b) on peut supposer  $\varphi \neq 0$  car sinon on se ramène à a). Dans a) il faut distinguer  $\varphi \neq 0$  et  $\varphi \equiv 0$ .

Pour étudier a) avec  $\varphi \equiv 0$ , supposons d'abord  $\mathfrak{d}^2(\mathfrak{g}) \neq 0$ . En particulier  $\mathbb{R}Y \subsetneq \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ . Considérons les idéaux minimaux  $\mathfrak{d}$ -invariants de  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g})$  contenant strictement  $\mathbb{R}Y$ . Ils sont de dimension 2 ou 3. On trouve donc les cas 5), 6) ou 7) avec  $U, V, Y \in \mathfrak{d}(\mathfrak{g})$ . Dans le 5me cas et le 6me cas, on peut supposer  $\langle \ell, U \rangle = 0$  (en ajoutant, si nécessaire, un multiple de  $Y$  à  $U$ ). Dans les cas 5) et 6) on peut supposer  $\beta \neq 0$  (sinon on est dans le 2me cas avec  $\alpha = \mathbb{R}U$ ). Si  $\beta = k\alpha$  dans le 5me cas, on retrouverait le 3me cas pour  $Y' = \frac{1}{k}(U + kY)$ . Donc on peut supposer  $\alpha$  et  $\beta$  indépendants dans le 5me cas. Dans le 7me cas on peut supposer  $\langle \ell, U \rangle = \langle \ell, V \rangle = 0$  (en ajoutant, si nécessaire, un multiple de  $Y$  à  $U$ , resp.  $V$ ). On a  $\varphi \neq 0$ , car sinon  $\mathbb{R}U + \mathbb{R}V + \mathbb{R}Y$  ne serait pas minimal. L'indépendance de  $\varphi, \alpha, \beta$  se démontre par la méthode utilisée par Ludwig ([Lud. 4]) pour montrer l'indépendance de  $\varphi', \psi'_1, \psi'_2$ . Le calcul de  $[U, U]$  et  $[U, V]$  montre que  $0 = d([U, V]) =$

$2\varphi(d)[U, V]$ . Puisque  $\varphi \neq 0$  on en déduit que  $[U, V] = 0$ .

Considérons ensuite le cas  $\mathfrak{d}^2(\mathfrak{g}) \equiv 0$ . Pour exclure le 2me cas on peut supposer que  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}Y$ . On cherche alors les idéaux minimaux  $\mathfrak{d}$ -invariants de  $\mathfrak{g}$  contenant strictement  $\mathbb{R}Y$ . Puisqu'en plus  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}Y$ , seul le 6me cas se présente avec  $U \in \mathfrak{g}$ . Si  $\mathfrak{d}(\mathfrak{n}) \neq 0$ ,  $\mathfrak{d}(\mathfrak{n}) = \mathbb{R}Y$  et on peut chercher les idéaux minimaux  $\mathfrak{d}$ -invariants contenant strictement  $\mathbb{R}Y$  dans  $\mathfrak{n}$ , c'est-à-dire on peut supposer  $U \in \mathfrak{n}$ . Si, par contre,  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = \mathbb{R}Y$  et  $\mathfrak{d}(\mathfrak{n}) = 0$ , on a  $\mathfrak{n} = \mathbb{R}Y$  (sinon on retrouverait le 2me cas). Il faut alors distinguer deux cas :  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$  et  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}Y$ . Si  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ ,  $\mathfrak{g}$  est abélien et  $U \in \mathfrak{n} = \mathfrak{g}$ . Le cas  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathbb{R}Y$  est exclu lorsque  $\mathfrak{g}$  est de la forme  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathbb{R}Y$ . Pour les algèbres de cette forme, on peut donc toujours supposer  $U \in \mathfrak{n}$  dans le 6me cas.

Remarquons que dans les cas 3) et 4) on a  $\varphi(\text{ad } \mathfrak{n}) \equiv \varphi(\text{ad } \mathfrak{g}(\ell)) \equiv 0$ .

**3.3.** Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ . Nous remarquerons que les cas 5), 6) et 7) doivent être séparés en différents sous-cas. Finalement, nous montrerons comment, dans un raisonnement par récurrence, il faut construire la polarisation  $\mathfrak{h}$  pour  $\ell$ , la représentation irréductible  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$  et les bases coexponentielles  $\mathfrak{B}$  à  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{C}$  à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ .

**3.4. Début de la récurrence :**  $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) = 1$ .

On a  $\dim \mathfrak{g} = 1$ , c'est-à-dire  $\mathfrak{g} \equiv \mathbb{R}$  et  $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_\pi = \{0\}$ . En effet une dérivation non nulle ne peut laisser stable l'orbite  $\mathcal{O}(\ell) = \text{Ad}^* G \cdot \ell = \{\ell\}$ . En particulier  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) = \{0\}$  et ceci est un cas particulier du 1er cas.

**3.5. 1er cas :**  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \equiv 0$ .

L'algèbre  $\mathfrak{g}$  est abélienne, toute polarisation coïncide avec  $\mathfrak{g}$ ,  $\pi$  est le caractère  $\chi_\ell$ ,  $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_\pi$  et les bases coexponentielles  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{C}$  sont vides.

**3.6. 2me cas :** Toute polarisation  $\mathfrak{h}$  pour  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}$  doit contenir l'idéal  $\mathfrak{a}$ , par maximalité, puisque  $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$  est encore une sous-algèbre subordonnée à  $\ell$ . Dans le raisonnement par récurrence on passe au quotient  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{a}$  sur lequel on définit

$$\begin{aligned} \tilde{d}(X + \mathfrak{a}) &= d(X) + \mathfrak{a} \quad \forall d \in \mathfrak{d}, \forall X \in \mathfrak{g} \\ \langle \tilde{\ell}, X + \mathfrak{a} \rangle &= \langle \ell, X \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Soit  $P$  la projection canonique de  $\mathfrak{g}$  dans  $\tilde{\mathfrak{g}}$ .

Soit  $\tilde{\mathfrak{h}}$  une polarisation de Pukanszky de  $\tilde{\ell}$  dans  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Alors  $\mathfrak{h} = P^{-1}(\tilde{\mathfrak{h}})$  est

une polarisation de Pukanszky de  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}$ . De plus, si  $\tilde{\mathfrak{B}} = \{\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_r\}$  est une base coexponentielle à  $\tilde{\mathfrak{h}}$  dans  $\tilde{\mathfrak{g}}$  construite comme en 1.6. par exemple et si  $P(B_i) = \tilde{B}_i$  pour tout  $i$ , alors  $\mathfrak{B} = \{B_1, \dots, B_r\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Dans  $\tilde{G}$  définissons  $\tilde{\pi} = \text{ind}_{\tilde{H}}^{\tilde{G}} \chi_{\tilde{\ell}}$ . On a  $\pi = \tilde{\pi} \circ P$ . Alors  $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) = \dim(\tilde{\mathfrak{d}}/\tilde{\mathfrak{d}}_{\tilde{\pi}})$  et  $\dim \tilde{\mathfrak{g}} < \dim \mathfrak{g}$ . Donc la récurrence se fait sur  $\dim \mathfrak{g}$  en passant de  $\mathfrak{g}$  à  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Finalement, si  $\tilde{\mathfrak{C}} = \{\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_n\}$  est une base coexponentielle à  $\tilde{\mathfrak{d}}_{\tilde{\pi}}$  dans  $\tilde{\mathfrak{d}}$ , on peut poser  $d_i = \tilde{d}_i \circ P$  pour tout  $i$  et  $\mathfrak{C} = \{d_1, \dots, d_n\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ .

**3.7. 3me cas :** Puisque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{d}_0 = \text{Ker } \varphi = \{d \in \mathfrak{d} \mid \varphi(d) = 0\}$  est un idéal de codimension 1 de  $\mathfrak{d}$ , contenant  $\text{ad } \mathfrak{g}$ . Il existe  $d_1 \in \mathfrak{d}$  tel que  $\varphi(d_1) = 1$ . Alors  $\{d_1\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_0$  dans  $\mathfrak{d}$ , l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_0 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ (d_0, t) &\longmapsto \exp td_1 \cdot \exp d_0 \end{aligned}$$

étant un difféomorphisme. Pour  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$  on trouve

$$\pi(\exp yY) = e^{-i\langle \ell, yY \rangle} = e^{-iy}$$

$$(\exp td_1 \cdot \exp d_0) \pi(\exp yY) = \pi(\exp(e^{-t}yY)) = e^{-ie^{-t}y}.$$

De plus,  $\mathfrak{d}_\pi \subset \mathfrak{d}_0$ . Donc  $(\mathfrak{d}_0)_\pi = \mathfrak{d}_\pi$  et  $\dim(\mathfrak{d}_0/(\mathfrak{d}_0)_\pi) < \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$ . La récurrence se fait sur  $\dim \mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi$ , en remplaçant  $\mathfrak{d}$  par  $\mathfrak{d}_0$  et en gardant l'algèbre  $\mathfrak{g}$  (donc également  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{B}$ ) inchangée. Si  $\mathfrak{C}_0$  est la base coexponentielle à  $(\mathfrak{d}_0)_\pi$  dans  $\mathfrak{d}_0$ , alors  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \cup \{d_1\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ .

**3.8. 4me cas :** Il s'agit de l'analogie complexe du 3me cas. En effet, les relations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} d(Y_1 + iY_2) &= \varphi(d)(1 + i\omega)(Y_1 + iY_2) & \forall d \in \mathfrak{d} \\ \exp(-td)(Y_1 + iY_2) &= e^{-t\varphi(d)(1+i\omega)}(Y_1 + iY_2) & \forall d \in \mathfrak{d}. \end{aligned}$$

En notant par

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

la matrice de la rotation d'angle  $\theta$  et en identifiant l'élément  $r_1 Y_1 + r_2 Y_2 \in \mathfrak{g}$  avec  $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ , on obtient

$$\exp(-td) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = e^{-t\varphi(d)} K(-t\varphi(d)\omega) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\exp(-td) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = e^{-t\varphi(d)} K(t\varphi(d)\omega) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Comme dans le 3me cas,  $\mathfrak{d}_0 = \text{Ker } \varphi$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{d}$ , contenant  $\text{ad } \mathfrak{g}$ . Il existe  $d_1 \in \mathfrak{d}$  tel que  $\varphi(d_1) = 1$  et  $\{d_1\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_0$  dans  $\mathfrak{d}$ . Les calculs montrent que, pour  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$ ,

$$\begin{aligned} \pi(\exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2) &= \pi(\exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)) = e^{-i\langle \ell, r_1 Y_1 + r_2 Y_2 \rangle} \\ (\exp t d_1 \cdot \exp d_0) \pi(\exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)) &= \pi\left(\exp\left[(Y_1 Y_2) e^{-t} K(t\omega) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}\right]\right) \\ &= e^{-ie^{-t}\langle \ell, [(Y_1 Y_2) K(t\omega) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}] \rangle}. \end{aligned}$$

Comme dans le 3me cas,  $\mathfrak{d}_\pi \subset \mathfrak{d}_0$  et  $\dim(\mathfrak{d}_0/(\mathfrak{d}_0)_\pi) < \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$ . On a les mêmes conclusions concernant la récurrence.

**3.9. 5me cas :** (i) Le calcul

$$[d, d_1](U) = (\alpha(d_1)\beta(d) - \alpha(d)\beta(d_1))Y$$

montre que  $\text{Ker } \alpha$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{d}$  et  $\text{Ker } \beta$  une sous-algèbre de codimension 1 dans  $\mathfrak{d}$ . Puisque  $\alpha$  et  $\beta$  sont indépendants,  $\text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } \beta$  est un idéal de codimension 2 dans  $\mathfrak{d}$ .

(ii) Il existe  $d_1, d_2 \in \mathfrak{d}$  tels que

$$\begin{aligned} \alpha(d_1) &= 1 & \beta(d_1) &= 0 \\ \alpha(d_2) &= 0 & \beta(d_2) &= 1. \end{aligned}$$

(iii) En remplaçant  $d_2$  par  $[d_2, d_1]$ , on peut supposer que  $d_2$  est dans le radical nilpotent de  $\mathfrak{d}$  et que les applications

$$\begin{aligned} \text{Ker } \beta \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{D} & \text{Ker } \beta \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ & & \text{et} & \\ (d_0, s) &\longmapsto \exp s d_2 \cdot \exp d_0 & (d_0, s) &\longmapsto \exp d_0 \cdot \exp s d_2 \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes analytiques par 1.6.

(iv) Il faudra dans la suite distinguer les cas  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$  et  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ .

**3.10. Cas 5a) :**  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$ .

(i) On sait que  $\mathfrak{d}_0 = \text{Ker } \beta$  est une sous-algèbre de codimension 1 dans  $\mathfrak{d}$  et que  $\{d_2\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_0$  dans  $\mathfrak{d}$ .

(ii) Toute polarisation  $\mathfrak{h}$  pour  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}$  doit contenir  $U$ , par maximalité, puisque  $\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h} + \mathbb{R}U$  est encore une sous-algèbre subordonnée à  $\ell$ .

(iii) Pour  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$  on trouve

$$\pi(\exp yY) = e^{-i\langle \ell, yY \rangle} = e^{-iy}$$

$$\pi(\exp uU) = 1$$

$$({}^{\exp d} \pi)(\exp uU) = e^{iu\beta(d) \cdot \frac{e^{-\alpha(d)} - 1}{-\alpha(d)}}$$

$$(\exp sd_2 \cdot \exp d_0) \pi(\exp yY) = e^{-iy}$$

$$(\exp sd_2 \cdot \exp d_0) \pi(\exp uU) = e^{isu}.$$

En effet, on se base sur les calculs

$$\exp(-uU) \exp X = \exp X \cdot \exp(-ue^{-\alpha(\text{ad } X)}U) \quad \forall X \in \mathfrak{g}$$

$$(\exp d)(U) = e^{\alpha(d)}U + \beta(d) \cdot \frac{e^{\alpha(d)} - 1}{\alpha(d)}Y$$

$$\exp(-d_0) (\exp(-sd_2))(uU) = e^{-\alpha(d_0)}uU - suY.$$

(iv) La relation

$$({}^{\exp d} \pi)(\exp uU) = e^{iu\beta(d) \cdot \frac{e^{-\alpha(d)} - 1}{-\alpha(d)}}$$

entraîne que  $\mathfrak{d}_\pi \subset \mathfrak{d}_0 = \text{Ker } \beta$ . A nouveau,  $(\mathfrak{d}_0)_\pi = \mathfrak{d}_\pi$  et  $\dim(\mathfrak{d}_0/(\mathfrak{d}_0)_\pi) < \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$ . La récurrence se fait sur  $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$ , en remplaçant  $\mathfrak{d}$  par  $\mathfrak{d}_0$  et en gardant l'algèbre  $\mathfrak{g}$  (donc également  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{B}$ ) inchangée. Si  $\mathcal{C}_0$  est la base coexponentielle à  $(\mathfrak{d}_0)_\pi = \mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}_0$ , alors  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0 \cup \{d_2\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ .

**3.11. Cas 5b) :**  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ .

(i) Il existe  $X \in \mathfrak{n}$  tel que  $[X, U] = Y$ . En effet, comme  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ ,  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}(\ell)} \equiv 0$  et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ , on peut choisir  $X \in \mathfrak{n}$  tel que  $\beta(\text{ad } X) = 1$ .

Puisque  $\text{ad } X$  est nilpotent,  $\alpha(\text{ad } X) = 0$ .

(ii) Dans la suite nous écrirons, par abus de notations  $\text{Ker } \alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} = \text{Ker}(\alpha \circ \text{ad})$  et  $\text{Ker } \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} = \text{Ker}(\beta \circ \text{ad})$ . Posons  $\mathfrak{g}_1 = \text{Ker } \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ ,  $\mathfrak{g}_2 = \text{Ker } \alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \cap \text{Ker } \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ ,  $G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$ ,  $G_2 = \exp \mathfrak{g}_2$ ,  $\mathfrak{d}_0 = \text{Ker } \beta$ ,  $\mathfrak{D}_0 = \exp \mathfrak{d}_0$ . On a

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}_1 \quad \text{et} \quad U, Y \in \mathfrak{g}_2.$$

La relation

$$[d, d_1](U) = (\alpha(d_1)\beta(d) - \alpha(d)\beta(d_1))Y$$

montre encore que  $\mathfrak{g}_1$  est une sous-algèbre de codimension 1 de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}_2$  un idéal de  $\mathfrak{g}$ . Notons que  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n} \subset \text{Ker } \alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ . De plus, l'évaluation de  $d([W, U])$  pour  $W \in \mathfrak{g}$  montre que  $\mathfrak{g}_1$  est  $\mathfrak{d}_0$ -invariant et  $\mathfrak{g}_2$  est  $\mathfrak{d}$ -invariant. Posons encore  $\ell_1 = \ell|_{\mathfrak{g}_1}$ .

(iii) Par 1.6.  $\{X\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{n}$  dans  $\mathfrak{n}$  et à  $\mathfrak{g}_1$  dans  $\mathfrak{g}$ .

(iv) Par 3.9. l'application

$$\begin{aligned} \text{Ker } \beta \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ (d_0, a) &\longmapsto \exp d_0 \cdot \exp a \text{ad } X \end{aligned}$$

est un difféomorphisme analytique.

(v) Le calcul de

$$(\exp d_0 \cdot \exp a \text{ad } X)\pi = \pi(\exp(-aX)) \cdot (\exp d_0)\pi \cdot \pi(\exp aX)$$

montre que  $(\exp d_0 \cdot \exp a \text{ad } X)\pi$  et  $(\exp d_0)\pi$  sont unitairement équivalents.

(vi) Soit  $\mathfrak{h}_1$  une polarisation de Pukanszky pour  $\ell_1$  dans  $\mathfrak{g}_1$ . Alors  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$  est également une polarisation de Pukanszky pour  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}$ . En effet le fait que  $\mathfrak{g}(\ell) \subset \mathfrak{g}_1(\ell_1)$ ,  $U \in \mathfrak{g}_1(\ell_1)$ ,  $U \notin \mathfrak{g}(\ell)$  montre que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$  est une sous-algèbre subordonnée à  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}$  ayant la dimension correcte. La vérification du critère de Pukanszky est due aux observations suivantes : Soit  $k \in \mathfrak{h}^\perp$  et posons  $k_1 = k|_{\mathfrak{g}_1} \in \mathfrak{h}_1^\perp$ . Par hypothèse de récurrence il existe  $W_1 \in \mathfrak{h}_1$  tel que  $\ell_1 + k_1 = \text{Ad}^*(\exp W_1)(\ell_1)$ .

On montre que

$$\ell_1 + k_1 = \text{Ad}^*(\exp(W_1 + \lambda U))(\ell_1) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$\ell + k = \text{Ad}^*(\exp(W_1 + \lambda U))(\ell) \text{ sur } \mathfrak{g}_1.$$

D'autre part,

$$\langle \text{Ad}^*(\exp(W_1 + \lambda U))(\ell), X \rangle = \langle \text{Ad}^*(\exp W_1)(\ell), X \rangle + \lambda \cdot \frac{e^{\alpha(\text{ad } W_1)} - 1}{\alpha(\text{ad } W_1)}.$$

Lorsque  $\lambda$  parcourt  $\mathbb{R}$ , on peut donc choisir  $\lambda$  tel que

$$\langle \text{Ad}^*(\exp(W_1 + \lambda U))(\ell), X \rangle = \langle \ell, X \rangle + \langle k, X \rangle.$$

Puisque  $W_1 + \lambda U \in \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$ ,  $\ell + \mathfrak{h}^\perp \subset \text{Ad}^*(H)(\ell)$ , c'est-à-dire la polarisation  $\mathfrak{h}$  vérifie également le critère de Pukanszky.

(vii) Soit  $D_0 = \exp d_0 \in \mathcal{D}_0 = \exp \mathfrak{d}_0$ . L'évaluation de

$$0 = d_0([X, U]) = [d_0(X), U] + [X, d_0(U)]$$

donne

$$\begin{aligned} d_0(X) &= -\alpha(d_0)X \quad \text{mod } \mathfrak{g}_2 \\ \Rightarrow D_0^{-1}(X) &= e^{\alpha(d_0)}X \quad \text{mod } \mathfrak{g}_2 \\ \Rightarrow D_0^{-1}(\exp rX) &= \exp(re^{\alpha(d_0)}X) \quad \text{mod } G_2 \text{ avec } G_2 \subset G_1 \\ \Rightarrow D_0^{-1}(\exp rX \exp W_1) &= \exp(re^{\alpha(d_0)}X) \quad \text{mod } G_1 \quad \forall r \in \mathbb{R}, W_1 \in \mathfrak{g}_1. \end{aligned}$$

(viii) Soit  $\pi_1 \in \hat{G}_1$  (par exemple  $\pi_1 = \text{ind}_{H_1}^{G_1} \chi_{\ell_1}$ ) et étudions  $\pi = \text{ind}_{G_1}^G \pi_1 \equiv \text{ind}_{H_1}^G \chi_\ell$ , si  $\ell$  est obtenu en prolongeant  $\ell_1$  par 0 hors de  $\mathfrak{g}_1$ . Identifions  $G/G_1 \equiv \mathbb{R}$  et  $d\dot{g} \equiv dr$  (mesure semi-invariante sur  $G/G_1$ ). La représentation  $\pi = \text{ind}_{G_1}^G \pi_1$  est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\pi &= \left\{ \xi : G \rightarrow \mathcal{H}_{\pi_1} \mid \xi(g \cdot g_1) = \pi_1(g_1)^* \xi(g) \quad \forall g_1 \in G_1 \text{ et} \right. \\ &\quad \left. \int_{G/G_1} \|\xi(g)\|_{\mathcal{H}_{\pi_1}}^2 dg < \infty \right\} \\ &\equiv L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}_{\pi_1}) \\ &\equiv L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{k-1})) \\ \pi(g')\xi(g) &= \Delta^{-1/2}(g')\xi(g'^{-1} \cdot g) \\ \|\pi(g')\xi\|_{L^2(G/G_1)} &= \|\xi\|_{L^2(G/G_1)} \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_\pi, \forall g' \in G. \end{aligned}$$

(ix) Etudions l'action de  $\mathfrak{D}_0$  sur la représentation  $\pi$ . On a :

$$\begin{aligned} \int_{G/G_1} \varphi(D_0^{-1}g)dg &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(D_0^{-1}(\exp rX \cdot \exp W_1))dr \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(\exp(re^{\alpha(d_0)}X))dr \\ &= e^{-\alpha(d_0)} \int_{G/G_1} \varphi(g)dg \end{aligned}$$

pour tout  $\varphi \in L^1(G/G_1)$ . Alors le calcul

$$\begin{aligned} \|\xi\|_{L^2(G/G_1)}^2 &= \|\pi(D_0^{-1}g')\xi\|_{L^2(G/G_1)}^2 \\ &= \Delta(D_0^{-1}g')^{-1} \int_{G/G_1} \left| \xi \left( D_0^{-1} \left( g'^{-1} D_0(\exp rX \cdot \exp W_1) \right) \right) \right|^2 dr \\ &= \Delta(D_0^{-1}g')^{-1} \int_{G/G_1} \left| \xi \left( D_0^{-1} \left( g'^{-1} \exp(re^{-\alpha(d_0)}X) \right) \right) \right|^2 dr \\ &= \Delta(D_0^{-1}g')^{-1} \Delta(g') \|\xi\|_{L^2(G/G_1)}^2 \end{aligned}$$

donne

$$\Delta(D_0^{-1}g') = \Delta(g') \quad \forall g' \in G.$$

Rappelons finalement que  $D_0\pi(g) = \pi(D_0^{-1}g)$ , donc que

$$\mathcal{H}_{D_0\pi} \equiv \mathcal{H}_\pi \equiv L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{k-1})).$$

(x) Définissons ensuite  $D_0\pi_1(g_1) = \pi_1(D_0^{-1}g_1)$ ,  $g_1 \in G_1$ , et

$$\pi_{D_0} = \text{ind}_{G_1}^G(D_0\pi_1).$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\pi_{D_0}} &= \left\{ \xi : G \rightarrow \mathcal{H}_{D_0\pi_1} \equiv \mathcal{H}_{\pi_1} \mid \xi(g \cdot g_1) = D_0\pi_1(g_1)^* \xi(g) \quad \forall g_1 \in G_1 \right. \\ &\quad \left. \text{et } \int_{G/G_1} \|\xi(g)\|_{\mathcal{H}_{D_0\pi_1}}^2 dg < \infty \right\} \\ &\equiv L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^{k-1})). \end{aligned}$$



On a  $\Delta_\pi = \Delta_{\pi_{D_0}} = \Delta$ , puisque ces fonctions modulaires sont toutes définies à partir de la mesure semi-invariante sur  $G/G_1$ .

(xi) Les représentations  ${}^{D_0}\pi$  et  $\pi_{D_0}$  sont unitairement équivalentes, l'équivalence unitaire étant donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \mathcal{U}(D_0) : \mathcal{H}_{D_0\pi} &\longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_{D_0}} \\ (\mathcal{U}\xi)(g) &= e^{\alpha(d_0)/2}\xi({}^{D_0^{-1}}g) \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{D_0\pi}, \forall g \in G. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que

$$\mathcal{U}\xi \in \mathcal{H}_{\pi_{D_0}}, \|\mathcal{U}\xi\|_{\mathcal{H}_{\pi_{D_0}}} = \|\xi\|_{\mathcal{H}_{D_0\pi}} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{U} \circ {}^{D_0}\pi = \pi_{D_0} \circ \mathcal{U}.$$

(xii) Comme  $Y$  est central et  $\mathfrak{D}$ -invariant,

$$\begin{aligned} \pi(\exp yY) &= \pi_1(\exp yY) = e^{-i\langle \ell, yY \rangle} = e^{-iy} \\ {}^D\pi(\exp yY) &= {}^{D_0}\pi_1(\exp yY) = e^{-iy} \\ {}^{D_0}\pi(\exp yY) &= \pi_{D_0}(\exp yY) = e^{-iy}. \end{aligned}$$

Si  $\alpha|_{\mathfrak{ad} \mathfrak{g}} \equiv 0$ ,  $U$  est central dans  $\mathfrak{g}_1 = \ker \beta|_{\mathfrak{ad} \mathfrak{g}}$ . Donc

$$\pi_1(\exp uU) = e^{-i\langle \ell_1, uU \rangle} = 1.$$

De plus, pour  $d_0 \in \mathfrak{d}_0 = \ker \beta$ ,  $D_0 = \exp d_0$ ,

$${}^{D_0}\pi_1(\exp uU) = \pi_1({}^{D_0^{-1}}(\exp uU)) = \pi_1(\exp ue^{-\alpha(d_0)}U) = 1.$$

Par contre, si  $\alpha|_{\mathfrak{ad} \mathfrak{g}} \not\equiv 0$ , remarquons que  $U$  appartient à toute polarisation  $\mathfrak{h}_1$  de  $\ell_1 = \ell|_{\mathfrak{g}_1}$  dans  $\mathfrak{g}_1$ . En effet, si  $\mathfrak{h}_1$  est une telle polarisation,  $\mathfrak{h}'_1 = \mathfrak{h}_1 + \mathbb{R}U$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}_1$  subordonnée à  $\ell_1$ , donc  $\mathfrak{h}'_1 = \mathfrak{h}_1$  par maximalité. Donc, pour  $W_1 \in \mathfrak{g}_1$ ,

$$\begin{aligned} (\pi_1(\exp uU)\xi)(\exp W_1) &= \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU)\xi(\exp(-uU) \cdot \exp W_1) \\ &= \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU)\xi(\exp W_1 \cdot \exp(-ue^{-\alpha(\mathfrak{ad} W_1)}U)) \\ &= \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU)\xi(\exp W_1). \end{aligned}$$

Puisque  $\pi_1$  est unitaire,  $\Delta_{\pi_1}(\exp uU) = 1$  et  $\pi_1(\exp uU) = 1$ . Comme précédemment,  ${}^{D_0}\pi_1(\exp uU) = 1$ . Finalement,

$$\begin{aligned} & (\pi_{D_0}(\exp uU)\xi)(\exp rX \cdot \exp W_1) \\ &= \Delta_{\pi_{D_0}}^{-1/2}(\exp uU)\xi(\exp(-uU) \cdot \exp rX \cdot \exp W_1) \\ &= \Delta_{\pi_{D_0}}^{-1/2}(\exp uU)\xi(\exp rX \cdot \exp W_1 \cdot \exp(-ue^{-\alpha(W_1)}U) \cdot \exp ruY) \\ &= \Delta_{\pi_{D_0}}^{-1/2}(\exp uU)e^{iru}\xi(\exp rX \exp W_1). \end{aligned}$$

Puisque  $\pi_{D_0}(\exp uU)$  est unitaire,  $\Delta_{\pi_{D_0}}(\exp uU) = 1$  et

$$(\pi_{D_0}(\exp uU)\xi)(\exp rX \cdot \exp W_1) = e^{iru}\xi(\exp rX \cdot \exp W_1).$$

(xii) Supposons  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ . Alors il existe  $T \in \mathfrak{g}$  tel que  $\alpha(\text{ad } T) = 1$ . Puisque  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{n}} \equiv 0$ , on peut supposer  $T \in \mathfrak{g}(\ell)$  (en ajoutant, si nécessaire, un élément de  $\mathfrak{n}$ ) et  $\beta(\text{ad } T) = 0$ , comme  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}(\ell)} \equiv 0$ . Donc

$$[T, U] = U \text{ et } \text{Ad}(\exp tT)(rU) = e^t rU.$$

Plus tard on montrera qu'on peut en fait choisir  $T$  dans une sous-algèbre nilpotente  $\mathfrak{g}_0$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{n}$ . Les calculs montrent que

$$\alpha(\text{ad}[X, T]) = 0 \text{ et } \beta(\text{ad}[X, T]) = 1$$

c'est-à-dire, en remplaçant  $X$  par  $[X, T]$ , on peut supposer que  $X \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{n}$ , si  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ . D'autre part, puisque

$$[[T, X], U] = -[X, U]$$

on a

$$[T, X] = -X \text{ mod } \mathfrak{g}_2.$$

(xiii) Notons  $\mathfrak{g}_3 = \mathbb{R}X \oplus \mathfrak{g}_2$  et  $G_3 = \exp \mathfrak{g}_3$ . Puisque

$$\begin{aligned} [tT, xX + g_2] &= -txX \text{ mod } \mathfrak{g}_2 \\ &= 0 \text{ mod } \mathfrak{g}_3, \end{aligned}$$

$\mathfrak{g}_3$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}$  et  $\{T\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{g}_3$  dans  $\mathfrak{g}$ . D'autre part,  $\mathfrak{g}_2$  est un idéal de codimension 1

dans  $\mathfrak{g}_3$  et  $\{X\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{g}_2$  dans  $\mathfrak{g}_3$ . Ceci prouve que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}_2 &\longrightarrow G \\ (t, x, g_2) &\longmapsto \exp tT \cdot \exp xX \cdot g_2 \end{aligned}$$

est un difféomorphisme.

(xiv) Rappelons que  $\mathfrak{d} = \mathbb{R} \operatorname{ad} X + \mathfrak{d}_0$ ,  $\operatorname{ad} X \in \mathfrak{d}_\pi$ . Donc  $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) = \dim(\mathfrak{d}_0/(\mathfrak{d}_0)_\pi)$ . D'autre part  $\dim \mathfrak{g}_1 < \dim \mathfrak{g}$ . La récurrence va donc se faire sur  $\dim \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}$  étant remplacé par  $\mathfrak{g}_1$ , et  $\mathfrak{d}$  par  $\mathfrak{d}_0$ . Une base coexponentielle  $\mathfrak{C}_0$  à  $(\mathfrak{d}_0)_\pi$  dans  $\mathfrak{d}_0$ , est également base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ . Si  $\mathfrak{h}_1$  est une polarisation de Pukanszky pour  $\ell_1$  dans  $\mathfrak{g}_1$ , il en est de même de  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$  pour  $\ell$  et  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathfrak{B}_1$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{h}_1$  dans  $\mathfrak{g}_1$ ,

$$\mathfrak{B} = \{X\} \cup \mathfrak{B}_1$$

est une base coexponentielle à  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Remarquons pour terminer que puisque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1(\ell_1) + \mathfrak{n}_1$  et  $\mathfrak{d}_0(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{n}_1$ ,  $\mathfrak{n}_1$  désignant le radical nilpotent de  $\mathfrak{g}_1$ . En effet, nous savons que  $\mathfrak{g}(\ell) \subset \mathfrak{g}_1(\ell_1)$ , donc

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &= \mathfrak{g}_1 \cap (\mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}) \\ &\subset \mathfrak{g}_1(\ell_1) + \mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{n} \\ &\subset \mathfrak{g}_1(\ell_1) + \mathfrak{n}_1 \end{aligned}$$

et  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1(\ell_1) + \mathfrak{n}_1$ .

**3.12. 6me cas :** C'est un cas particulier du 5me cas avec  $\alpha \equiv 0$  et  $\alpha|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}} \equiv 0$ . Les résultats précédents restent valables.

**3.13. 7me cas :** (i) Il s'agit de l'analogie complexe du 5me cas. En effet, les relations peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} d(U + iV) &= \varphi(d)(1 + i\omega)(U + iV) + (\alpha(d) + i\beta(d))Y \\ (\exp d)(U + iV) &= e^{\varphi(d)(1+i\omega)}(U + iV) \\ &\quad + \frac{1}{\varphi(d)(1 + i\omega)} \cdot (e^{\varphi(d)(1+i\omega)} - 1) \cdot (\alpha(d) + i\beta(d))Y. \end{aligned}$$

(ii) Nous montrerons que le 7<sup>me</sup> cas se réduit à trois possibilités :

- a)  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv \alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$
- b)  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$ ,  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  sont indépendants
- c)  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ ,  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  sont indépendants.

(iii) Supposons d'abord  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$  et  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ . Il existe

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{g} \quad \text{tel que} \quad \varphi(\text{ad } X) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha(\text{ad } X) \neq 0 \\ d \in \mathfrak{d} \quad \text{tel que} \quad \varphi(d) = 1, \quad \alpha(d) = \beta(d) = 0. \end{aligned}$$

Supposons  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} = k \cdot \alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ . En développant les relations

$$\begin{aligned} d([X, U]) &= [d(X), U] + [X, d(U)] \\ d([X, V]) &= [d(X), V] + [X, d(V)] \end{aligned}$$

on trouve une contradiction. De même si  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ . Par conséquent  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$ ,  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$  ou  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$  entraîne  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  indépendants.

(iv) Supposons ensuite  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ . Supposons  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$ . Il existe

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{g} \quad \text{tel que} \quad \varphi(\text{ad } X) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha(\text{ad } X) = \beta(\text{ad } X) = 0 \\ d \in \mathfrak{d} \quad \text{tel que} \quad \varphi(d) = 0 \quad \text{et} \quad \alpha(d) = 1. \end{aligned}$$

De plus  $\mathfrak{d}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{n} \subset \text{Ker } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ . L'évaluation des mêmes relations qu'en (iii) donne une contradiction. Donc  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$  entraîne  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$  ou  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ .

(v) Remarquons que  $\mathfrak{g}(\mathfrak{l}) \subset \text{Ker } \alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \cap \text{Ker } \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ . Supposons  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$  et  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} = k \cdot \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ . Puisque  $\mathfrak{n} \subset \text{Ker } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $\mathfrak{g}(\mathfrak{l}) \subset \text{Ker } \alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} = \text{Ker } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ ,  $\mathfrak{g} \subset \text{Ker } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  contrairement à l'hypothèse  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ . Ainsi  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  sont indépendants. On fait un raisonnement analogue pour  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  si  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ .

(vi) Supposons  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ . Par (v) on peut supposer par exemple que

$\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  sont indépendants. Donc il existe

$$X, X' \in \mathfrak{g} \text{ tels que } \begin{aligned} \varphi(\text{ad } X) &= 1 & \alpha(\text{ad } X) &= 0 \\ \varphi(\text{ad } X') &= 0 & \alpha(\text{ad } X') &= 1. \end{aligned}$$

Supposons en plus

$$\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} = r\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} + r_1\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}}.$$

L'évaluation de  $[[X, X'], U]$ ,  $[[X, X'], V]$  et  $\beta(\text{ad}[X, X'])$  conduit à une contradiction. Donc  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ ,  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  sont indépendants.

De (iii) à (vi) on vient de montrer que a), b), c) sont les seuls cas possibles.

(vii) Vu l'indépendance de  $\varphi, \alpha, \beta$ , il existe  $d_1, d_2, d_3 \in \mathfrak{d}$  tels que

$$\begin{aligned} \varphi(d_1) &= 1, & \alpha(d_1) &= 0, & \beta(d_1) &= 0 \\ \varphi(d_2) &= 0, & \alpha(d_2) &= 1, & \beta(d_2) &= 0 \\ \varphi(d_3) &= 0, & \alpha(d_3) &= 0, & \beta(d_3) &= 1. \end{aligned}$$

En remplaçant  $d_2$  et  $d_3$  par  $\frac{1}{1+\omega^2}([d_2, d_1] - \omega[d_3, d_1])$ , resp.  $\frac{1}{1+\omega^2}(\omega[d_2, d_1] + [d_3, d_1])$ , on peut supposer que  $d_2$  et  $d_3$  appartiennent au radical nilpotent de  $\mathfrak{d}$ . Donc les applications

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \varphi \cap \text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } \beta) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ (d_0, t_1, t_2, t_3) &\longmapsto \exp d_0 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp t_2 d_2 \cdot \exp t_3 d_3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \varphi \cap \text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } \beta) \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathfrak{D} \\ (d_0, t_1, t_2, t_3) &\longmapsto \exp t_3 d_3 \cdot \exp t_2 d_2 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0 \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes analytiques par 1.6.

**3.14. Cas 7a) :**  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv \alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$ .

(i) Posons  $\mathfrak{v}_1 = \ker \alpha \cap \ker \beta$ , sous-algèbre de codimension 2 dans  $\mathfrak{d}$ . Alors, vu la décomposition 3.13. (vii),  $\{d_2, d_3\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{v}_1$  dans  $\mathfrak{d}$ .

(ii) Puisque  $U, V, Y$  sont centraux, ils appartiennent à toute polarisation.

(iii) Pour  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$  on trouve

$$\begin{aligned} D\pi(\exp yY) &= \pi(\exp yY) = e^{-iy} \\ \pi(\exp uU) &= \pi(\exp vV) = 1 \end{aligned}$$

$$(\exp t_3 d_3 \cdot \exp t_2 d_2 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0) \pi(\exp uU \cdot \exp vV) = e^{i(t_2 u + t_3 v)}.$$

En effet, on se base sur le calcul

$$\begin{aligned} &\exp(-d_0) \exp(-t_1 d_1) \exp(-t_2 d_2) \exp(-t_3 d_3) (uU + vV) \\ &= e^{-t_1} \left( (\cos t_1 \omega) u - (\sin t_1 \omega) v \right) U + e^{-t_1} \left( (\sin t_1 \omega) u + (\cos t_1 \omega) v \right) V \\ &\quad - (t_2 u + t_3 v) Y. \end{aligned}$$

(iv) La relation

$$(\exp t_3 d_3 \cdot \exp t_2 d_2 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0) \pi(\exp uU \cdot \exp vV) = e^{i(t_2 u + t_3 v)}$$

entraîne que  $\mathfrak{d}_\pi \subset \mathfrak{d}_1$ . En effet

$$D = \exp d = \exp t_3 d_3 \cdot \exp t_2 d_2 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0 \in \exp \mathfrak{d}_\pi$$

entraîne que  $t_2 = t_3 = 0$ . Donc

$$D = \exp d = \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0$$

et

$$\begin{aligned} \exp d(U + iV) &= e^{\varphi(d)(1+i\omega)} (U + iV) + \frac{e^{\varphi(d)(1+i\omega)} - 1}{\varphi(d)(1+i\omega)} (\alpha(d) + i\beta(d)) Y \\ &= e^{t_1(1+i\omega)} (U + iV) \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\alpha(d) = \beta(d) = 0$ .

(v) Puisque  $\mathfrak{d}_\pi \subset \mathfrak{d}_1$ ,  $(\mathfrak{d}_1)_\pi = \mathfrak{d}_\pi$  et  $\dim(\mathfrak{d}_1/(\mathfrak{d}_1)_\pi) < \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$ . La récurrence se fait sur  $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$ , en remplaçant  $\mathfrak{d}$  par  $\mathfrak{d}_1$  et en gardant l'algèbre  $\mathfrak{g}$  (donc également  $\mathfrak{h}$  et  $\mathfrak{B}$ ) inchangée. Si  $\mathfrak{C}_1$  est la base coexponentielle à  $(\mathfrak{d}_1)_\pi = \mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}_1$ , alors  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \cup \{d_2, d_3\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ .

**3.15. Cas 7b) et 7c) :** Ces deux cas peuvent être traités en partie simultanément.

(i) Comme  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $\beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  sont indépendants, il existe  $X_2, X_3$  tels que  $\alpha(\text{ad } X_2) = \beta(\text{ad } X_3) = 1$ ,  $\alpha(\text{ad } X_3) = \beta(\text{ad } X_2) = 0$ . Puisque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ , que  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}(\ell)} \equiv \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}(\ell)} \equiv 0$ , on peut supposer  $X_2, X_3 \in \mathfrak{n}$  (en ajoutant, si nécessaire, un élément de  $\mathfrak{g}(\ell)$ ). De plus  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{n}} \equiv 0$  et  $\varphi(\text{ad } X_2) = \varphi(\text{ad } X_3) = 0$ . Dans le cas c) on peut choisir  $X_1 \in \mathfrak{g}(\ell)$  (en ajoutant, si nécessaire, un élément de  $\mathfrak{n}$ ) tel que  $\varphi(\text{ad } X_1) = 1$ ,  $\alpha(\text{ad } X_1) = \beta(\text{ad } X_1) = 0$ .

(ii) Dans le cas c) on peut même supposer  $X_2, X_3 \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . En effet, dans ce cas il suffit de remplacer  $X_2, X_3$  par  $X'_2, X'_3$  donnés par

$$\begin{aligned} X'_2 &= \frac{1}{1 + \omega^2} (-[X_1, X_2] + \omega[X_1, X_3]) \\ X'_3 &= \frac{1}{1 + \omega^2} (-\omega[X_1, X_2] - [X_1, X_3]). \end{aligned}$$

Plus tard on verra qu'il est permis de choisir  $X_1$  dans une sous-algèbre nilpotente  $\mathfrak{g}_0$  de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{n}$ .

(iii) Posons

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}_1 &= \text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } \beta \\ \mathfrak{g}_1 &= \text{Ker } \alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \cap \text{Ker } \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \\ \mathfrak{g}_2 &= \text{Ker } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \cap \text{Ker } \alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \cap \text{Ker } \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}. \end{aligned}$$

On a :

$$U, V, Y \in \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_1$$

et  $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1$  dans le cas b). En calculant  $d_1([W_1, U])$  et  $d_1([W_1, V])$  pour  $W_1 \in \mathfrak{g}_1$  et  $d_1 \in \mathfrak{d}_1$ , on voit que

$$\mathfrak{d}_1(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_1.$$

Donc  $\mathfrak{g}_1$  est une sous-algèbre  $\mathfrak{d}_1$ -invariante de  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}_2$  est un idéal  $\mathfrak{d}$ -invariant de  $\mathfrak{g}$ .

(iv) En évaluant  $d([X_2, U]), d([X_2, V]), d([X_3, U]), d([X_3, V])$  on voit que

$$d \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = -\varphi(d) \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \text{ mod } \mathfrak{g}_2, \text{ mod } (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}).$$

De plus, le calcul de  $[[X_2, X_3], U] = [[X_2, X_3], V] = 0$  montre que  $[X_2, X_3] \in \mathfrak{g}_2$ .

(v) Par 1.6.,  $\{X_2, X_3\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{n}$  dans  $\mathfrak{n}$  et à  $\mathfrak{g}_1$  dans  $\mathfrak{g}$ . De plus, puisque

$$\text{Ker } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} = \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_3 \oplus \mathfrak{g}_2$$

$\{X_2, X_3\}$  est également une base coexponentielle à  $\mathfrak{g}_2$  dans  $\text{Ker } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$ . Dans le cas 7b),  $\text{Ker } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ . Dans le cas 7c),  $\text{Ker } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  est un idéal de codimension 1 dans  $\mathfrak{g}$  et  $\{X_1\}$  est une base coexponentielle à  $\text{Ker } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Donc les applications

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}_2 &\longrightarrow G \\ (r_2, r_3, W_2) &\longmapsto \exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3 \cdot \exp W_2 \\ &\text{dans le cas 7b)} \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{g}_2 &\longrightarrow G \\ (r_1, r_2, r_3, W_2) &\longmapsto \exp r_1 X_1 \cdot \exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3 \cdot \exp W_2 \\ &\text{dans le cas 7c)} \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes analytiques. De plus, puisque

$$\exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3 = \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \cdot [\exp(-r_2 X_2 - r_3 X_3) \exp r_2 X_2 \exp r_3 X_3],$$

que  $\text{ad } X_2, \text{ad } X_3$  sont nilpotents, que  $[X_2, X_3] \in \mathfrak{g}_2$ ,

$$\log[\exp(-r_2 X_2 - r_3 X_3) \exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3] \in \mathfrak{g}_2$$

et les applications

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}_2 &\longrightarrow G \\ (r_2, r_3, W_2) &\longmapsto \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \cdot \exp W_2 \\ &\text{dans le cas 7b)} \end{aligned}$$



resp.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathfrak{g}_2 &\longrightarrow G \\ (r_1, r_2, r_3, W_2) &\longmapsto \exp r_1 X_1 \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \cdot \exp W_2 \\ &\text{dans le cas 7c)} \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes analytiques. De même, puisque  $\{X_2, X_3\}$  est également une base coexponentielle à  $\mathfrak{g}_1$  dans  $\mathfrak{g}$ , les applications

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}_1 &\longrightarrow G \\ (r_2, r_3, W_1) &\longmapsto \exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3 \cdot \exp W_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{g}_1 &\longrightarrow G \\ (r_2, r_3, W_1) &\longmapsto \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \cdot \exp W_1 \end{aligned}$$

sont des difféomorphismes analytiques.

(vi) Puisque  $\mathfrak{g}_2$  et  $\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}$  sont  $\mathfrak{d}_1$ -invariants, la relation obtenue en (iv) donne

$$\begin{aligned} d_1(X_2 + iX_3) &= -\varphi(d_1)(1 - i\omega)(X_2 + iX_3) \bmod(\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n})^{\mathbb{C}} \\ \exp d_1(X_2 + iX_3) &= e^{-\varphi(d_1)} [\cos(\varphi(d_1)\omega) + i \sin(\varphi(d_1)\omega)] \\ &\quad (X_2 + iX_3) \bmod(\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n})^{\mathbb{C}} \\ \exp d_1 \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} &= e^{-\varphi(d_1)} K(\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \bmod(\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}) \\ \exp d_1(r_2 X_2 + r_3 X_3) &= \exp d_1 \left[ (X_2 \ X_3) \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= (X_2 \ X_3) \cdot e^{-\varphi(d_1)} K(-\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \\ &\quad \bmod(\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}) \\ {}^{D_1} \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) &= \exp \left[ (X_2 \ X_3) e^{-\varphi(d_1)} K(-\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \right] \\ &\quad \bmod G_2 \end{aligned}$$

et, puisque tout élément de  $G$  s'écrit sous la forme  $\exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \cdot \exp W_1$  on a pour l'action de  $\mathfrak{D}_1$  sur  $G$ ,

$$D_1[\exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \exp W_1] = \exp \left[ (X_2 \ X_3) e^{-\varphi(d_1)} K(-\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \right] \text{ mod } G_1.$$

(vii) Soit  $\ell_1 = \ell|_{\mathfrak{g}_1}$  et soit  $\mathfrak{h}_1$  une polarisation de Pukanszky pour  $\ell_1$  dans  $\mathfrak{g}_1$ . Par maximalité,  $U, V, Y \in \mathfrak{h}_1$ . Alors  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$  est également une polarisation de Pukanszky pour  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}$ . En effet, le fait que  $\mathfrak{g}(\ell) \subset \mathfrak{g}_1(\ell_1)$ ,  $U, V \in \mathfrak{g}_1(\ell_1)$  et  $U, V \notin \mathfrak{g}(\ell)$  montre que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$  est une sous-algèbre subordonnée à  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}$  ayant la dimension correcte. La vérification du critère de Pukanszky est due aux observations suivantes : Soit  $k \in \mathfrak{h}^\perp$  et posons  $k_1 = k|_{\mathfrak{g}_1} \in \mathfrak{h}_1^\perp$ . Par hypothèse de récurrence il existe  $W_1 \in \mathfrak{h}_1$  tel que

$$\ell_1 + k_1 = \text{Ad}^*(\exp W_1)(\ell_1).$$

On montre que

$$\ell_1 + k_1 = \text{Ad}^*(\exp(W_1 + \lambda U + \mu V))(\ell_1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$\ell + k = \text{Ad}^*(\exp(W_1 + \lambda U + \mu V))(\ell) \text{ sur } \mathfrak{g}_1.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & \langle \text{Ad}^*(\exp(W_1 + \lambda U + \mu V))(\ell), X_2 + iX_3 \rangle \\ &= \langle \text{Ad}^*(\exp W_1)(\ell), X_2 + iX_3 \rangle + \frac{e^{\varphi(\text{ad } W_1)(1-i\omega)} - 1}{(1-i\omega)\varphi(\text{ad } W_1)}(\lambda + i\mu). \end{aligned}$$

Lorsque  $\lambda + i\mu$  parcourt  $\mathbb{C}$ , on obtient  $\mathbb{C}$  tout entier, donc on peut choisir  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$\begin{aligned} & \langle \text{Ad}^*(\exp(W_1 + \lambda U + \mu V))(\ell), X_2 + iX_3 \rangle = \\ & \langle \ell, X_2 + iX_3 \rangle + \langle k, X_2 + iX_3 \rangle. \end{aligned}$$

Puisque  $W_1 + \lambda U + \mu V \in \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}$ ,  $\ell + \mathfrak{h}^\perp \subset \text{Ad}^*(H)(\ell)$ , c'est-à-dire la polarisation  $\mathfrak{h}$  vérifie également le critère de Pukanszky.

(viii) Sur  $G/G_1$  nous définissons la mesure semi-invariante par

$$\begin{aligned} & \int_{G/G_1} \xi(\exp W) d \exp \dot{W} \quad W \in \mathfrak{g} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \xi(\exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \cdot \exp W_1) dr_2 dr_3 \quad W_1 \in \mathfrak{g}_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \xi(\exp(r_2 X_2 + r_3 X_3)) dr_2 dr_3, \end{aligned}$$

$\xi$  étant une fonction constante sur les classes modulo  $G_1$ . L'homomorphisme  $\Delta$  tel que

$$\int_{G/G_1} \xi((\exp W')^{-1} \exp W) d \exp \dot{W} = \Delta(\exp W') \int_{G/G_1} \xi(\exp W) d \exp \dot{W}$$

vérifie

$$\begin{aligned} & \int_{G/G_1} \xi(\exp(-W_2) \exp W) d \exp \dot{W} \\ &= \int_{G/G_1} \xi(\exp W [\exp(-W) \exp(-W_2) \exp W]) d \exp \dot{W} \\ &= \int_{G/G_1} \xi(\exp W) d \exp \dot{W} \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\Delta(\exp W_2) \equiv 1$  pour  $W_2 \in \mathfrak{g}_2$ .

$$\begin{aligned} & \int_{G/G_1} \xi(\exp(-s_3 X_3) \exp W) d \exp \dot{W} \\ &= \int_{G/G_1} \xi(\exp(-s_3 X_3) \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \exp W_1) dr_2 dr_3 \\ &= \int_{G/G_1} \xi(\exp(r_2 X_2 + (r_3 - s_3) X_3) \exp W_1) dr_2 dr_3 \\ &= \int_{G/G_1} \xi(\exp(r_2 X_2 + r_3 X_3)) dr_2 dr_3 \\ &= \int_{G/G_1} \xi(\exp W) d \exp \dot{W} \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\Delta(\exp s_3 X_3) \equiv 1$ .

De même  $\Delta(\exp s_2 X_2) \equiv 1$ . Ainsi  $\Delta \equiv 1$  dans le cas 7b). Pour  $D_1 =$

$\exp d_1$  avec  $d_1 \in \mathfrak{d}_1$ ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{G/G_1} \xi\left({}^{D_1^{-1}}(\exp W)\right) d \exp \dot{W} \\
 &= \int_{G/G_1} \xi\left({}^{D_1^{-1}}(\exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \cdot {}^{D_1^{-1}} \exp W_1)\right) dr_2 dr_3 \\
 &= \int_{G/G_1} \xi\left(\exp\left[(X_2 X_3) e^{\varphi(d_1)} K(\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}\right]\right) dr_2 dr_3 \\
 &= e^{-2\varphi(d_1)} \int_{G/G_1} \xi(\exp(u_2 X_2 + u_3 X_3)) du_2 du_3 \\
 &= e^{-2\varphi(d_1)} \int_{G/G_1} \xi(\exp W) d \exp \dot{W}.
 \end{aligned}$$

D'où, dans le cas 7c),

$$\begin{aligned}
 & \int_{G/G_1} \xi(\exp(-s_1 X_1) \exp W) d \exp \dot{W} \\
 &= \int_{G/G_1} \xi\left(\exp \operatorname{ad}(-s_1 X_1) \exp W \cdot \exp(-s_1 X_1)\right) d \exp \dot{W} \\
 &= \int_{G/G_1} \xi\left(\exp \operatorname{ad}(-s_1 X_1) \exp W\right) d \exp \dot{W} \\
 &= e^{-2s_1} \int_{G/G_1} \xi(\exp W) d \exp \dot{W}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\Delta(\exp s_1 X_1) = e^{-2s_1}$ .

Comme dans le cas 5b) on montre que

$$\Delta({}^{D_1^{-1}} \exp W) = \Delta(\exp W) \quad \forall W \in \mathfrak{g}, \forall D_1 \in \exp \mathfrak{d}_1.$$

(ix) Soit  $\ell_1 = \ell|_{\mathfrak{g}_1}$  et soit  $\mathfrak{h}_1$  une polarisation de Pukanszky pour  $\ell_1$  dans  $\mathfrak{g}_1$ . Alors  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1$  est une polarisation de Pukanszky pour  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}$  et

$$\pi = \operatorname{ind}_H^G \chi_\ell \cong \operatorname{ind}_{G_1}^G \left( \operatorname{ind}_{H_1}^{G_1} \chi_{\ell_1} \right) = \operatorname{ind}_{G_1}^G \pi_1$$

en posant  $\pi_1 = \operatorname{ind}_{H_1}^{G_1} \chi_{\ell_1}$ . Posons  $\pi_{D_1} = \operatorname{ind}_{G_1}^G ({}^{D_1} \pi_1)$  et montrons que  ${}^{D_1} \pi$  et  $\pi_{D_1}$  sont unitairement équivalents pour  $D_1 \in \exp \mathfrak{d}_1$ . On a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{D_1 \pi_1} &= \mathcal{H}_{\pi_1} \cong L^2(\mathbb{R}^{k-2}) \text{ et} \\
 \mathcal{H}_{D_1 \pi} &= \mathcal{H}_\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \xi : G \rightarrow \mathcal{H}_{\pi_1} \mid \xi(\exp W \cdot \exp W_1) = \pi_1(\exp W_1)^* \xi(\exp W) \right. \\
 &\quad \left. \forall W_1 \in \mathfrak{g}_1 \text{ et } \int_{G/G_1} \|\xi(\exp W)\|_{\mathcal{H}_{\pi_1}}^2 d \exp \dot{W} < +\infty \right\} \\
 &\equiv L^2(\mathbb{R}^2, L^2(\mathbb{R}^{k-2})) \\
 \mathcal{H}_{\pi_{D_1}} &= \left\{ \xi : G \rightarrow \mathcal{H}_{D_1 \pi_1} \equiv \mathcal{H}_{\pi_1} \mid \xi(\exp W \cdot \exp W_1) \right. \\
 &\quad = ({}^{D_1} \pi_1)(\exp W_1)^* \xi(\exp W) \\
 &\quad \left. \forall W_1 \in \mathfrak{g}_1 \text{ et } \int_{G/G_1} \|\xi(\exp W)\|_{\mathcal{H}_{\pi_1}}^2 d \exp \dot{W} < +\infty \right\} \\
 &\equiv L^2(\mathbb{R}^2, L^2(\mathbb{R}^{k-2})).
 \end{aligned}$$

On a  $\Delta_\pi = \Delta_{\pi_{D_1}} = \Delta$ , puisque ces fonctions modulaires sont toutes définies à partir de la mesure semi-invariante sur  $G/G_1$ . L'équivalence unitaire entre  ${}^{D_1} \pi$  et  $\pi_{D_1}$  est alors donnée par

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} &= \mathcal{U}(D_1) : \mathcal{H}_{D_1 \pi} \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_{D_1}} \\
 (\mathcal{U}\xi)(g) &= e^{\varphi(d_1)} \xi({}^{D_1^{-1}}(g)) \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_{D_1 \pi}, \forall g \in G.
 \end{aligned}$$

On vérifie facilement que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}\xi \in \mathcal{H}_{\pi_{D_1}}, \|\mathcal{U}\xi\|_{\mathcal{H}_{\pi_{D_1}}} &= \|\xi\|_{\mathcal{H}_{D_1 \pi}} \text{ et} \\
 \mathcal{U} \circ {}^{D_1} \pi &= \pi_{D_1} \circ \mathcal{U}.
 \end{aligned}$$

(x) Comme  $Y$  est central et  $\mathfrak{D}$ -invariant

$$\begin{aligned}
 \pi(\exp yY) &= \pi_1(\exp yY) = e^{-iy} \\
 {}^D \pi(\exp yY) &= {}^{D_1} \pi(\exp yY) = {}^{D_1} \pi_1(\exp yY) = \pi_{D_1}(\exp yY) = e^{-iy}.
 \end{aligned}$$

Pour  $d_1 \in \mathfrak{d}_1$  on a

$$\begin{aligned}
 d_1(U + iV) &= \varphi(d_1)(1 + i\omega)(U + iV) \\
 \exp d_1(U + iV) &= e^{\varphi(d_1)} (\cos(\varphi(d_1)\omega) + i \sin(\varphi(d_1)\omega))(U + iV) \\
 \exp d_1 \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} &= e^{\varphi(d_1)} K(\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \\
 \exp d_1(uU + vV) &= (U \ V) e^{\varphi(d_1)} K(-\varphi(d_1)\omega) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ceci a lieu en particulier pour  $d_1 = \text{ad } W_1$  avec  $W_1 \in \mathfrak{g}_1$ . D'où

$$\begin{aligned}
& (\pi_1(\exp uU \cdot \exp vV)\xi)(\exp W_1) \\
&= \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU \cdot \exp vV)\xi(\exp(-uU - vV)\exp W_1) \\
&= \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU \cdot \exp vV)\xi\left(\exp W_1 \cdot \exp\left[(U \ V)e^{-\varphi(\text{ad } W_1)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. K(\varphi(\text{ad } W_1)\omega)\begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}\right]\right) \\
&= \Delta_{\pi_1}^{-1/2}(\exp uU \cdot \exp vV)\xi(\exp W_1) \\
&= \xi(\exp W_1)
\end{aligned}$$

puisque  $\pi_1$  est unitaire. D'où

$$\pi_1(\exp uU \cdot \exp vV) = \pi_1(\exp(uU + vV)) = 1 \quad \forall u, v$$

et

$${}^{D_1}\pi_1(\exp(uU + vV)) = \pi_1\left((U \ V)e^{-\varphi(d_1)}K(\varphi(d_1)\omega)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right) = 1.$$

Finalement

$$\begin{aligned}
& \pi_{D_1}(\exp uU \exp vV)\xi(\exp r_3X_3 \cdot \exp r_2X_2 \exp W_1) \\
&= \Delta^{-1/2}(\exp uU \exp vV)\xi(\exp(-vV)\exp(-uU)\exp r_3X_3 \\
&\quad \exp r_2X_2 \exp W_1) \\
&= \xi(\exp r_3X_3 \cdot [\exp \text{ad}(-r_3X_3)\exp(-vV)]\exp r_2X_2 \\
&\quad \cdot [\exp \text{ad}(-r_2X_2)\exp(-uU)] \cdot \exp W_1) \\
&= \xi(\exp r_3X_3 \cdot \exp r_2X_2 \cdot \exp(-uU - vV)\exp W_1 \exp(r_2u + r_3v)Y) \\
&= e^{i(r_2u + r_3v)}\xi\left(\exp r_3X_3 \exp r_2X_2 \exp W_1 \exp\left[(U \ V)e^{-\varphi(\text{ad } W_1)}\right.\right. \\
&\quad \left.\left. K(\varphi(\text{ad } W_1)\omega)\begin{pmatrix} -u \\ -v \end{pmatrix}\right]\right) \\
&= e^{i(r_2u + r_3v)}\xi(\exp r_3X_3 \exp r_2X_2 \exp W_1).
\end{aligned}$$

(xi) Dans le cas 7b) on a pour  $D = \exp d_0 \cdot \exp s_1d_1 \cdot \exp(s_2 \text{ad } X_2) \cdot \exp(s_3 \text{ad } X_3)$ ,

$$\begin{aligned} & \exp d_0 \cdot \exp s_1 d_1 \cdot \exp(s_2 \operatorname{ad} X_2) \cdot \exp(s_3 \operatorname{ad} X_3) \pi \\ = & \pi(\exp(-s_3 X_3)) \pi(\exp(-s_2 X_2)) (\exp d_0 \cdot \exp s_1 d_1 \pi) \cdot \pi(\exp s_2 X_2) \cdot \\ & \pi(\exp s_3 X_3). \end{aligned}$$

Donc  $(\exp d_0 \cdot \exp s_1 d_1 \cdot \exp(s_2 \operatorname{ad} X_2) \cdot \exp(s_3 \operatorname{ad} X_3) \pi)$  et  $(\exp d_0 \cdot \exp s_1 d_1 \pi)$  sont unitairement équivalents, avec  $d_0 \in \operatorname{Ker} \varphi \cap \operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta$ .

De même, dans le cas 7c),  $(\exp d_0 \cdot \exp s_1 \operatorname{ad} X_1 \cdot \exp(s_2 \operatorname{ad} X_2) \exp(s_3 \operatorname{ad} X_3) \pi)$  et  $(\exp d_0 \pi)$  sont unitairement équivalents.

(xii) Rappelons que  $\mathfrak{d} = \mathbb{R} \operatorname{ad} X_2 + \mathbb{R} \operatorname{ad} X_3 + \mathfrak{d}_1$ ,  $\operatorname{ad} X_2 \in \mathfrak{d}_\pi$ ,  $\operatorname{ad} X_3 \in \mathfrak{d}_\pi$ . Donc  $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) = \dim(\mathfrak{d}_1/(\mathfrak{d}_1)_\pi)$ . D'autre part,  $\dim \mathfrak{g}_1 < \dim \mathfrak{g}$ . La récurrence se fait sur  $\dim \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}$  étant remplacé par  $\mathfrak{g}_1$  et  $\mathfrak{d}$  par  $\mathfrak{d}_1$ . Une base coexponentielle  $\mathfrak{C}_1$  à  $(\mathfrak{d}_1)_\pi$  dans  $\mathfrak{d}_1$ , est également une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ . Si  $\mathfrak{h}_1$  est une polarisation de Pukanszky pour  $\ell_1$  dans  $\mathfrak{g}_1$ , il en est de même de  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1, \ell$  et  $\mathfrak{g}$ . Si  $\mathfrak{B}_1$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{h}_1$  dans  $\mathfrak{g}_1$ ,

$$\mathfrak{B} = \{X_2, X_3\} \cup \mathfrak{B}_1$$

est une base coexponentielle à  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Remarquons pour terminer que puisque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1(\ell_1) + \mathfrak{n}_1$  et  $\mathfrak{d}_1(\mathfrak{g}_1) \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{n}_1$ ,  $\mathfrak{n}_1$  désignant le radical nilpotent de  $\mathfrak{g}_1$ . Le raisonnement est analogue à celui du cas 5b).

# Chapitre 4

## Les espaces $ES$

4.1. D'après 1.8. l'opérateur  $\pi(f)$ ,  $\pi \in \hat{G}$ , est un opérateur à noyau dont le noyau  $f_\pi$  est défini sur  $G \times G$  et vérifie une certaine propriété de covariance. Vu notre action exponentielle, nous pouvons considérer le noyau de  $({}^D\pi)(f) = \pi(f^D)$ , c'est-à-dire nous pouvons regarder la fonction noyau comme une fonction de  $D$ . Cependant, puisque  ${}^D\pi$  et  $\pi$  sont unitairement équivalents si  $D \in \mathfrak{D}_\pi$ , la fonction noyau sera seulement considérée comme une fonction sur  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$ . Etant donné la base coexponentielle  $\mathfrak{C} = \{d_1, \dots, d_n\}$  à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$  construite en 3. par récurrence, tout élément de  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$  sera identifié à un élément de  $\mathbb{R}^n$  par

$$(\exp s_n d_n) \cdot \dots (\exp s_2 d_2) \cdot (\exp s_1 d_1) \cdot \mathfrak{D}_\pi \equiv (s_1, \dots, s_n).$$

D'autre part, puisque nous ne travaillerons qu'à équivalence unitaire près, les espaces des représentations ne seront pas déterminés univoquement. Pour cette raison nous avons pris l'option de faire agir toutes nos représentations sur  $L^2(\mathbb{R}^k)$  où  $k = \dim(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ ,  $\mathfrak{h}$  étant la polarisation associée à  $\ell$  si  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$ . Cela nous amène à introduire l'espace de fonctions  $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ , fonctions qui seront noyaux des opérateurs  $\zeta_D(f)$ , où  $(\zeta_D)_D$ ,  $D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$ , est une famille d'opérateurs sur  $L^2(\mathbb{R}^k)$  unitairement équivalents à  ${}^D\pi$ . La lettre  $N$  indique que, pour des raisons techniques, nous devons introduire  $N$  paramètres supplémentaires. La lettre  $S$  dans  $ES$  suggère qu'il s'agit d'un analogue des fonctions de Schwartz et la lettre  $E$  indique qu'il faut exiger une décroissance exponentielle dans certaines directions.



Dans ([Lud. 4]), Ludwig introduit les espaces  $ES$  dans un contexte légèrement différent. Contrairement à Ludwig nous n'avons pas besoin d'introduire des transformations de Fourier partielles dans la définition de  $ES$ . Cela est dû à la forme particulière  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$  de notre algèbre de Lie. En effet, grâce à cette forme particulière les noyaux considérés seront des fonctions de Schwartz dans les directions correspondant à  $G/H$ . Chez Ludwig par contre, les noyaux ne dépendent pas de l'action. Cela provient du fait que son algèbre de dérivations extérieures vérifie  $\mathfrak{d}^*(\ell) = 0$ . Elle est donc contenue dans  $\mathfrak{d}_\pi$ . Dans ([Lep. Lud.]) on travaille avec un espace de fonctions légèrement différent.

**4.2. Définition :** L'espace  $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  est l'ensemble des applications  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  dans  $\mathbb{C}$  telles que quels que soient  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $S = (s_1, \dots, s_n)$ ,  $T = (t_1, \dots, t_k)$  et  $T' = (t'_1, \dots, t'_k)$

$$(1) \quad \|F\|_{\alpha, P} = \int \left| e^{(\alpha, S)} P\left(\bar{x}; S, T, T'; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T'}\right) F(\bar{x}; S; T; T') \right| d\bar{x} dS dT dT' < +\infty$$

pour tout  $P$ , où  $\langle \alpha, S \rangle = \alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n$  et où  $P$  désigne une expression polynomiale en les variables  $\bar{x}, S, T, T'$  et leurs dérivées partielles. On munit l'espace  $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  de la topologie engendrée par les semi-normes  $\|F\|_{\alpha, P}$ .

**4.3.** La condition (1) est équivalente à chacune des conditions suivantes :

$$(2) \quad \int \left| e^{|\langle \alpha, S \rangle|} P\left(\bar{x}; S, T, T'; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T'}\right) F(\bar{x}; S; T; T') \right| d\bar{x} dS dT dT' < +\infty$$

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \forall P,$$

$$(3) \quad \sup_{\bar{x}, S, T, T'} \left| e^{(\alpha, S)} P\left(\bar{x}; S, T, T'; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T'}\right) F(\bar{x}; S; T; T') \right| < +\infty$$

$$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \forall P.$$

Ces expressions forment également une famille de semi-normes pour la

topologie de  $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ .

$$(4) \quad \sup_{\bar{x}, S, T, T'} \left| e^{|\langle \alpha, S \rangle|} P\left(\bar{x}; S, T, T'; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial T'}\right) F(\bar{x}; S; T; T') \right| < +\infty$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \forall P$ .

(5) L'application

$$\begin{aligned} & (\bar{x}; s_1, \dots, s_n; t_1, \dots, t_k; t'_1, \dots, t'_k) \\ & \longmapsto e^{\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n} F(\bar{x}; s_1, \dots, s_n; t_1, \dots, t_k; t'_1, \dots, t'_k) \end{aligned}$$

est une fonction de Schwartz pour tout  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Remarquons simplement que l'équivalence de (1) et (2) resp. de (3) et (4), est obtenue en divisant le domaine d'intégration en deux domaines, à savoir celui où  $\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n \geq 0$  et celui où  $\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_n s_n < 0$ . L'équivalence de (1) et (3) découle des propriétés des fonctions de Schwartz.

**4.4.** Soit  $R \in \mathfrak{g}$  un élément tel que  $\varphi(R) \neq 0$  pour toute racine  $\varphi$  non nulle pour l'action de  $\text{ad } \mathfrak{g}$ . Alors  $R$  est un élément générique et  $\mathfrak{g}_0$  défini par

$$\mathfrak{g}_0 = \{W \in \mathfrak{g} \mid \exists m : (\text{ad } R)^m(W) = 0\}$$

est une sous-algèbre nilpotente de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{n}$  ([Dix. 4], 1.9.9). Dans la suite  $\mathfrak{g}_0$  désignera une sous-algèbre nilpotente quelconque de  $\mathfrak{g}$  telle que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{n}$ .

**4.5.** Soit  $(C_1, \dots, C_m)$  une base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{n}$  ([Lep. Lud.], p. 2) et soit  $(B_1, \dots, B_r)$  une base coexponentielle à  $\mathfrak{n}$  dans  $\mathfrak{g}$  choisie dans  $\mathfrak{g}_0$  (toute base supplémentaire à  $\mathfrak{n}$  choisie dans  $\mathfrak{g}_0$  convient). On obtient une base de Malcev de  $\mathfrak{g}$  par réunion de ces deux bases et la mesure de Haar de  $\mathfrak{g}$  coïncide alors avec la mesure de Lebesgue pour les fonctions  $\tilde{f}$  définies comme dans la suite ([Lep. Lud.], p. 9). Nous appellerons bases *n-spéciales* les bases construites de cette manière ([Lep. Lud.], p. 72). Pour toute fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^N \times G$ , définissons la fonction  $\tilde{f}$  sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{r+m}$  par

$$\tilde{f}(\bar{x}; s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_m) = f(\bar{x}, \exp s_r B_r \dots \exp s_1 B_1 \cdot \exp t_m C_m \dots \exp t_1 C_1).$$

**4.6. Définition :** L'espace  $ES(N, G)$  est l'ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $\mathbb{R}^N \times G$  telles que les fonctions  $\tilde{f}$  correspondantes soient des applications  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{r+m}$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant

$$(1) \quad \|f\|_{\alpha, P} = \int e^{(\alpha, S)} \left| P(\bar{x}; S, T; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}) \tilde{f}(\bar{x}; S; T) \right| d\bar{x} dS dT < +\infty$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r, \forall P$ ,  
où  $S = (s_1, \dots, s_r), T = (t_1, \dots, t_m)$  et  $P$  désigne une expression polynomiale en les variables  $\bar{x}, S, T$  et leurs dérivées partielles. On munit  $ES(N, G)$  de la topologie engendrée par les semi-normes  $\|f\|_{\alpha, P}$ .

**4.7. Remarques :** (i) D'après ([Lep. Lud.], p. 73), la définition précédente est indépendante de l'algèbre nilpotente  $\mathfrak{g}_0$  et de la base  $n$ -spéciale choisies.

(ii) Dans ([Lep. Lud.], p. 72) on fait une construction analogue pour une base coexponentielle à une sous-algèbre  $\mathfrak{p}$  de  $\mathfrak{g}$  donnée.

(iii) La condition (1) est équivalente à chacune des conditions suivantes :

$$(2) \quad \int e^{(\alpha, S)} \left| P(\bar{x}; S, T; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}) \tilde{f}(\bar{x}; S; T) \right| d\bar{x} dS dT < +\infty$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r, \forall P$ .

$$(3) \quad \sup_{\bar{x}, S, T} \left| e^{(\alpha, S)} P(\bar{x}; S, T; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}) \tilde{f}(\bar{x}; S; T) \right| < +\infty$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r, \forall P$ .

$$(4) \quad \sup_{\bar{x}, S, T} \left| e^{(\alpha, S)} P(\bar{x}; S, T; \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial T}) \tilde{f}(\bar{x}; S; T) \right| < +\infty$$

$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r, \forall P$ .

(5) L'application

$$(\bar{x}; s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_m) \longmapsto e^{\alpha_1 s_1 + \dots + \alpha_r s_r} \tilde{f}(\bar{x}; s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_m)$$

est une fonction de Schwartz  $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r$ .

(iv) Afin de simplifier les notations on identifiera  $f$  et  $\tilde{f}$  dans la suite.

**4.8.** Dans les différents cas à considérer dans la récurrence, on choisira les bases de manière plus particulière et on modifiera légèrement la forme de  $f$ , resp.  $\tilde{f}$ .

- (i) 1er cas : Puisque  $\mathfrak{g}$  est abélien, le choix de la base est arbitraire.
- (ii) 2me cas : Comme  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$  et que  $\mathfrak{a}$  est un idéal, on peut choisir les premiers vecteurs de base de  $\mathfrak{n}$  dans  $\mathfrak{a}$  et les suivants dans un supplémentaire à  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{n}$ .
- (iii) 3me cas : Puisque  $Y$  est central dans  $\mathfrak{g}$ , on prend  $C_1 = Y$ .
- (iv) 4me cas : Puisque  $Y_1$  et  $Y_2$  sont centraux dans  $\mathfrak{g}$ , on prend  $c_1 = Y_1$  et  $c_2 = Y_2$ .
- (v) 5me cas :

a) Cas 5a) : Par minimalité de l'idéal  $\mathbb{R}U + \mathbb{R}Y$ , on peut choisir  $c_1 = Y$  et  $c_2 = U$ .

b) Cas 5b) : Puisque  $\text{ad } X$  est nilpotent,  $\{X\}$  est une base co-exponentielle à  $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{n}$  dans  $\mathfrak{n}$  et on peut choisir  $C_1 = Y$ ,  $C_2 = U$ ,  $C_m = X$ . Choisissons  $C_1, \dots, C_{m-1}$  dans  $\text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \cap \mathfrak{n}$ . Alors  $\langle C_1, \dots, C_{m-1} \rangle$  est un idéal. Montrons ensuite que si  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ , on peut choisir  $\mathfrak{g}_0$  de manière à avoir  $T \in \mathfrak{g}_0$ . Dans ce cas on pourra donc prendre  $B_r = T$ . En effet supposons que  $aT + bX + W_2$  avec  $W_2 \in \mathfrak{g}_2$  soit un élément générique. Puisque l'addition d'un élément nilpotent ne change pas le caractère générique,  $aT + W_2$  est également générique. Alors nécessairement  $a \neq 0$ , puisque  $[W_2, U] = 0$ , c'est-à-dire que  $W_2$  annule la racine  $\alpha$ . D'où, en remplaçant  $T$  par  $T + \frac{1}{a}W_2$ , on trouve un élément générique tel que  $[T + \frac{1}{a}W_2, U] = U$ . Dans la suite nous supposons  $T$  générique tel que  $[T, U] = U$ . Alors

$$T \in \mathfrak{g}_0 = \{W \in \mathfrak{g} \mid \exists m : (\text{ad } T)^m(W) = 0\}$$

et on peut choisir  $B_r = T$ . Dans ce cas on peut modifier légèrement l'ordre des vecteurs de base, c'est-à-dire  $f \in \text{ES}(N, G)$  si et seulement si la fonction

$$\begin{aligned} & \tilde{f}(\bar{x}, s_1, \dots, s_{r-1}, \lambda; t_1, \dots, t_{m-1}, \mu) \\ &= f(\bar{x}; \exp \lambda T \exp \mu X \exp s_{r-1} B_{r-1} \dots \exp s_1 B_1 \exp t_{m-1} C_{m-1} \\ & \quad \dots \exp t_1 C_1) \end{aligned}$$

vérifie les conditions équivalentes (1) à (5) de 4.6. et 4.7. On notera simplement  $f(\bar{x}; \exp \lambda T \exp \mu X \cdot w \cdot \exp t_2 U \exp t_1 Y)$  avec

$w = \exp s_{r-1}B_{r-1} \dots \exp s_1B_1 \exp t_{m-1}C_{m-1} \dots \exp t_3C_3$ . En effet, il suffit de remarquer que

$$\exp(-s_1B_1) \dots \exp(-s_{r-1}B_{r-1}) \exp \mu X \exp s_{r-1}B_{r-1} \dots \exp s_1B_1$$

peut s'écrire sous la forme

$$\exp[\mu F_1(s_1, \dots, s_{r-1})C_1 + \dots + \mu F_m(s_1, \dots, s_{r-1})C_m]$$

où les  $F_i$  sont des fonctions  $C^\infty$  à croissance bornée exponentiellement, de même que leurs dérivées, par ([Lep. Lud.], p. 69). Donc

$$\begin{aligned} & \exp \lambda T \exp \mu X \exp s_{r-1}B_{r-1} \dots \exp s_1B_1 \exp t_{m-1}C_{m-1} \dots \exp t_1C_1 \\ = & \exp \lambda T \exp s_{r-1}B_{r-1} \dots \exp s_1B_1 \exp Q_m X \exp Q_{m-1}C_{m-1} \dots \exp Q_1C_1 \end{aligned}$$

où les  $Q_i$  sont des fonctions  $C^\infty$ , polynomiales en  $t_1, \dots, t_{m-1}, \mu$  et à croissance bornée exponentiellement en  $s_1, \dots, s_{r-1}$ , de même que leurs dérivées, par la formule de Campbell-Baker-Hausdorff qui est polynomiale pour l'algèbre nilpotente  $\mathfrak{n}$ . Réciproquement,

$$\begin{aligned} & \exp \lambda T \exp s_{r-1}B_{r-1} \dots \exp s_1B_1 \exp \mu X \exp t_{m-1}C_{m-1} \dots \exp t_1C_1 \\ = & \exp \lambda T [\exp s_{r-1}B_{r-1} \dots \exp s_1B_1 \exp \mu X \exp(-s_1B_1) \\ & \dots \exp(-s_{r-1}B_{r-1})] \cdot \exp s_{r-1}B_{r-1} \dots \exp s_1B_1 \exp t_{m-1}C_{m-1} \dots \exp t_1C_1 \\ = & \exp \lambda T \exp Q'_m X \exp Q'_{m-1}C_{m-1} \dots \exp Q'_1C_1 \exp s_{r-1}B_{r-1} \dots \exp s_1B_1 \\ & \cdot \exp t_{m-1}C_{m-1} \dots \exp t_1C_1 \\ = & \exp \lambda T \exp Q'_m X \exp s_{r-1}B_{r-1} \dots \exp s_1B_1 \exp Q''_{m-1}C_{m-1} \dots \exp Q''_1C_1 \end{aligned}$$

où  $Q'_i$  sont des fonctions  $C^\infty$ , polynomiales en  $\mu$ , à croissance bornée exponentiellement en  $s_1, \dots, s_{r-1}$ , de même que leurs dérivées, par ([Lep. Lud.], p. 69). De même, les  $Q''_i$  sont des fonctions  $C^\infty$ , polynomiales en  $t_1, \dots, t_{m-1}, \mu$ , à croissance bornée exponentiellement en  $s_1, \dots, s_{r-1}$ , de même que leurs dérivées. En effet, on fait un raisonnement analogue à celui effectué précédemment en on utilise le fait que  $\langle C_1, \dots, C_{m-1} \rangle$  est un idéal. D'où la conclusion. Lorsque  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$ , le facteur  $\exp \lambda T$  manque dans les expressions précédentes. Il est important de remarquer que dans ces raisonnements, les coefficients de  $B_1, \dots, B_{r-1}, T$  restent inchangés. Remarquons aussi qu'avec le nouvel ordre des vecteurs de

base, on a toujours une base de Malcev, donc que la mesure de Haar coïncide avec la mesure de Lebesgue.

(vi) 6me cas : Ceci est un cas particulier du 5me cas.

(vii) 7me cas :

a) Cas 7a) : Puisque  $U, V, Y$  sont centraux, on peut choisir  $C_1 = Y$ ,  $C_2 = V$ ,  $C_3 = U$ .

b) Cas 7b) : La base de Jordan-Hölder dans  $\mathfrak{n}$  peut être choisie de manière à ce que  $C_1 = Y$ ,  $C_2 = V$ ,  $C_3 = U$ ,  $C_{m-1} = X_2$ ,  $C_m = X_3$ . En effet,  $\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n}$  est un idéal dans  $\mathfrak{n}$ ,  $[X_2, X_3] \in \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}_2$  et  $\mathfrak{n} = \mathbb{R}X_2 \oplus \mathbb{R}X_3 \oplus (\mathfrak{g}_2 \cap \mathfrak{n})$ . De plus,  $f \in ES(N, G)$  si et seulement si la fonction

$$\begin{aligned} & \tilde{f}(\bar{x}; s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_m) \\ &= f(\bar{x}, \exp s_r B_r \dots \exp s_1 B_1 \exp(t_{m-1} C_{m-1} + t_m C_m) \exp t_{m-2} C_{m-2} \\ & \quad \dots \exp t_1 C_1) \end{aligned}$$

vérifie les conditions équivalentes (1) à (5) de 4.6. et 4.7.

En effet,

$$\begin{aligned} & \exp(t_{m-1} C_{m-1} + t_m C_m) \exp t_{m-2} C_{m-2} \dots \exp t_1 C_1 \\ &= \exp t'_m C_m \exp t'_{m-1} C_{m-1} \exp t'_{m-2} C_{m-2} \dots \exp t'_1 C_1, \end{aligned}$$

les  $t'_i$  étant des fonctions polynomiales des  $t_j$  et réciproquement, par nilpotence. Par un raisonnement analogue à celui effectué dans le cas 5b), on montre qu'on peut faire passer le facteur  $\exp(t_{m-1} C_{m-1} + t_m C_m)$  en tête de la décomposition. On notera simplement, après changement du nom de certaines coordonnées,

$$f(\bar{x}, \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp u U \exp v V \exp y Y)$$

avec  $w = \exp s_r B_r \dots \exp s_1 B_1 \exp t_{m-2} C_{m-2} \dots \exp t_4 C_4$ . De plus, la mesure de Haar coïncide toujours avec la mesure de Lebesgue pour les coordonnées "mitigées" considérées.

c) Cas 7c) : Comme dans le cas 7b), la base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{n}$  est choisie telle que  $C_1 = Y$ ,  $C_2 = V$ ,  $C_3 = U$ ,  $C_{m-1} = X_2$ ,  $C_m = X_3$ . Comme dans le cas 5b) on remarque qu'on peut choisir  $X_1 \in \mathfrak{g}_0$  ( $X_1$  générique) tel que

$$\text{ad } X_1 \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}.$$

Donc on peut poser  $B_r = X_1$ . Un raisonnement analogue à celui du cas 7b) montre alors qu'il suffit de considérer les expressions de la forme

$$f(\bar{x}; \exp t_1 X_1 \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp vV \cdot \exp yY)$$

avec  $w = \exp s_{r-1} B_{r-1} \dots \exp s_1 B_1 \cdot \exp t_{m-2} C_{m-2} \dots \exp t_4 C_4$ , la décroissance exponentielle étant exigée pour les coordonnées  $t_1, s_1, \dots, s_{r-1}$ . De plus, la mesure de Haar coïncide toujours avec la mesure de Lebesgue pour les coordonnées "mitigées" considérées.

# Chapitre 5

## Les fonctions de $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ comme noyaux

**5.1.** Dans ce chapitre nous démontrerons que les fonctions de  $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  peuvent être considérées comme noyaux d'opérateurs  $\zeta_D(f)$ ,  $D \in \mathcal{D}$ ,  $\zeta_D$  étant unitairement équivalent à  ${}^D\pi$ . Comme précédemment, nous supposerons  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\ell) + \mathfrak{n}$  exponentiel,  $\ell \in \mathfrak{g}^*$  et  $G = \exp \mathfrak{g}$  groupe de Lie exponentiel connexe, simplement connexe associé. De plus, nous supposerons que  $\mathcal{D} = \exp \mathfrak{d}$  agit exponentiellement sur  $G$ . Nos démonstrations s'inspireront de celles de Ludwig. Les différences avec le cas étudié par Ludwig ([Lud. 4]) ont déjà été soulevées en 4.1. Le théorème étudié est un résultat très technique. La démonstration se base sur les différents cas de récurrence étudiés précédemment et utilise de façon primordiale le théorème d'inversion de Fourier. Soient  $\ell \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{h}$  la polarisation de Pukanszky pour  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}$  construite en 3.,  $H = \exp \mathfrak{h}$  et  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$ . Nous identifierons  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$  à  $\mathbb{R}^n$  grâce à une base coexponentielle  $\{\vec{d}_1, \dots, \vec{d}_n\}$  à  $\mathcal{D}_\pi$  dans  $\mathcal{D}$  construite comme en 3. Nous supposerons cette base coexponentielle fixée une fois pour toutes.

**5.2. Théorème :** Pour tout  $D \in \mathcal{D}$  il existe une représentation unitaire  $\zeta_D$  de  $G$  sur  $L^2(\mathbb{R}^k)$ , unitairement équivalente à  ${}^D\pi$ , vérifiant les propriétés suivantes :

Pour tout  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  il existe  $f \in ES(N, G)$  tel que :



(i)  $\zeta_D(f)$  a pour noyau  $F$ , ce qui signifie que si  $D = \exp a_n \tilde{d}_n \dots \exp a_1 \tilde{d}_1 \pmod{\mathfrak{D}_\pi}$ , alors

$$\zeta_D(f(\bar{x}; \cdot)) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) = \int_{\mathbb{R}^k} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_k; s_1, \dots, s_k) \tilde{\xi}(s_1, \dots, s_k) ds_1 \dots ds_k$$

quels que soient  $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ ,  $\tilde{\xi} \in L^2(\mathbb{R}^k)$ .

(ii) Si  $F(\bar{x}_0; \cdot; \cdot; \cdot) \equiv 0$  pour un certain  $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ , alors  $f(\bar{x}_0; \cdot) \equiv 0$ .

(iii) Si, pour une certaine fonction  $q$  sur  $\mathbb{R}^N$ ,  $q \cdot F \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ , alors  $q \cdot f \in ES(N, G)$ .

Démonstration : La récurrence se fait sur  $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$ . Le début de la récurrence est obtenu pour  $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) = 1$ , c'est-à-dire pour  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$  et  $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi = 0$ . Il s'agit d'une situation particulière du 1er cas étudié dans la suite. Pour  $D \in \mathfrak{D}$ , nous noterons  $\mathcal{U}(D)$  l'opérateur unitaire tel que  $\mathcal{U}(D) \circ D \pi = \zeta_D \circ \mathcal{U}(D)$ . Nous traiterons assez rapidement les raisonnements analogues à ceux de Ludwig ([Lud. 4]).

**5.3. Etude du 1er cas** : Puisque  $\mathfrak{g}$  est abélien, on peut supposer  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m$  et  $\mathfrak{d} = \{0\}$ . On a  $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  et  $ES(N, G) \equiv \mathcal{S}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m)$ . La représentation  $\pi$  coïncide avec le caractère  $\chi_\ell$ , c'est-à-dire  $\pi(f)$  peut être identifié à la transformée de Fourier en  $-\ell$ . Soit  $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ . Choisissons  $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$  tel que  $\hat{v}(-\ell) = 1$ , la transformée de Fourier d'une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$  étant définie par  $\hat{f}(\ell) = \int f(x) e^{i(x, \ell)} dx$  pour  $x, \ell \in \mathbb{R}^m$ . Posons  $f(\bar{x}; x) = F(\bar{x})v(x)$ . Alors  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m)$  et  $\pi(f(\bar{x}; \cdot)) \equiv F(\bar{x})$  (multiplication par  $F(\bar{x})$ ). Il n'y a pas d'action à considérer dans ce cas.

**5.4. Etude du 2me cas** : Puisque  $G/H \equiv \tilde{G}/\tilde{H}$  et  $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi \equiv \tilde{\mathfrak{d}}/\tilde{\mathfrak{d}}_\pi$ , les espaces  $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  sont les mêmes pour  $G$  et pour  $\tilde{G}$ . Soit  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ . Par hypothèse de récurrence il existe  $\tilde{\zeta}_{\tilde{D}}$  représentation unitaire de  $\tilde{G}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^k)$  et  $g \in ES(N, \tilde{G})$  tels que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}(\tilde{D}) \circ \tilde{D} \tilde{\pi} &= \tilde{\zeta}_{\tilde{D}} \circ \tilde{\mathcal{U}}(\tilde{D}) \\ \tilde{\zeta}_{\tilde{D}}(g(\bar{x}, \cdot)) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) & \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} F(\bar{x}, a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_k; s_1, \dots, s_k) \tilde{\xi}(s_1, \dots, s_k) ds_1 \dots ds_k \end{aligned}$$

si  $\tilde{D} = \exp a_n \tilde{d}_n \dots \exp a_1 \tilde{d}_1 \text{ mod } \tilde{\mathfrak{D}}_\pi$ . Soit  $A = \exp \mathfrak{a}$  et soit  $k \in C_c^\infty(A)$  tel que  $\int_A k(x) dx = 1$ . La base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{n}$  est choisie de manière à ce que  $C_1, \dots, C_s \in \mathfrak{a}$  et  $C_{s+1}, \dots, C_m \in \mathfrak{n} \setminus \mathfrak{a}$ . Définissons  $f \in ES(N, G)$  par

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}; \exp t_r B_r \dots \exp t_1 B_1 \exp s_m C_m \dots \exp s_{s+1} C_{s+1} \cdot \exp s_s C_s \\ & \quad \dots \exp s_1 C_1) \\ = & g(\bar{x}; \exp t_r B_r \dots \exp t_1 B_1 \exp s_m C_m \dots \exp s_{s+1} C_{s+1}) \cdot k(\exp s_s C_s \\ & \quad \dots \exp s_1 C_1). \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $D$  tel que  $D = \exp a_n \tilde{d}_n \dots \exp a_1 \tilde{d}_1 \text{ mod } \mathfrak{D}_\pi$ , posons  $\tilde{D}$  tel que  $\tilde{D} \circ P = P \circ D$ ,  $\mathcal{U}(D) = \mathcal{U}(\tilde{D})$  et  $\zeta_D = \tilde{\zeta}_{\tilde{D}} \circ P$ ,  $P$  désignant la projection canonique de  $G$  sur  $\tilde{G}$ . En particulier,  $\zeta_D(\exp a) = 1$  pour tout  $a \in \mathfrak{a}$ . Alors  ${}^D\pi(f(\bar{x}, \cdot)) = \tilde{D}\tilde{\pi}(g(\bar{x}, \cdot))$ ,  $\mathcal{U}(D) \circ {}^D\pi = \zeta_D \circ \mathcal{U}(D)$  et  $\zeta_D(f)$  a pour noyau  $F(\bar{x}; a_1, \dots, a_n; \cdot; \cdot)$ .

**5.5. Etude du 3me cas :** Posons  $D = \exp td_1 \cdot \exp d_0 = \exp td_1 \cdot D_0$  et notons les éléments de  $G$  par  $g = w \cdot \exp rY$ . On montre que

$$\begin{aligned} & \left[ {}^D\pi(f(\bar{x}; \cdot))\xi \right](\exp X) \\ = & e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-t} \int_{G/\exp \mathbb{R}Y} \int_{\mathbb{R}} f(\bar{x}, (\exp td_1 w) \\ & \quad \cdot \exp rY) \pi({}^{D_0^{-1}} w) \cdot e^{-ire^{-t}} \xi(\exp X) dr dw. \end{aligned}$$

Rappelons que dans la base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ ,  $\tilde{d}_n = d_1$ . Donc

$$D = \exp td_1 \cdot D_0 = \exp td_1 \cdot \exp a_{n-1} \tilde{d}_{n-1} \dots \exp a_1 \tilde{d}_1 \text{ mod } \mathfrak{D}_\pi$$

avec

$$D_0 = \exp a_{n-1} \tilde{d}_{n-1} \dots \exp a_1 \tilde{d}_1 \text{ mod } \mathfrak{D}_\pi.$$

Soit  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  et définissons  $F_1 \in ES(N+1, \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  par

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(\bar{x}, t; a_1, \dots, a_{n-1}; \cdot; \cdot) = 2\pi \cdot t^{-\operatorname{tr} d_1} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_{n-1}, \ln t; \cdot; \cdot) \\ \quad \text{pour } t > 0 \\ F_1(\bar{x}, t; a_1, \dots, a_{n-1}; \cdot; \cdot) = 0 \\ \quad \text{pour } t \leq 0. \end{array} \right.$$

Puisque

$$e^{\beta u} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_{n-1}, u; \cdot; \cdot) \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) \quad \forall \beta \in \mathbb{Z},$$

$$t^\beta F_1(\bar{x}, t; a_1, \dots, a_{n-1}; \cdot; \cdot) \in ES(N+1, \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) \quad \forall \beta \in \mathbb{Z}.$$

Par hypothèse de récurrence il existe une représentation  $\zeta_{D_0}$  de  $G$  sur  $L^2(\mathbb{R}^k)$ , unitairement équivalente à  ${}^{D_0}\pi$  pour tout  $D_0 \in \mathcal{D}_0$  et il existe  $g \in ES(N+1, G)$  tels que

$$\begin{aligned} & \left[ \zeta_{D_0}(g(\bar{x}, t; \cdot)) \tilde{\xi} \right](s_1, \dots, s_k) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} F_1(\bar{x}, t; a_1, \dots, a_{n-1}; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

De plus, comme  $F_1(\bar{x}, t; \cdot; \cdot; \cdot) \equiv 0$  pour  $t \leq 0$ , l'hypothèse de récurrence donne  $g(\bar{x}, t; \cdot) \equiv 0$  pour  $t \leq 0$ .

Soit  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(D_0)$  l'opérateur unitaire tel que

$$\mathcal{U}(D_0) \circ {}^{D_0}\pi = \zeta_{D_0} \circ \mathcal{U}(D_0).$$

Le passage de  $\mathcal{D}_0$  à  $\mathcal{D}$  se fait en posant, pour  $D = \exp td_1 \cdot D_0$ ,  $\mathcal{H}_{D\pi} \equiv \mathcal{H}_\pi \equiv \mathcal{H}_{D_0\pi}$ ,  $\mathcal{U}(D) = \mathcal{U}(D_0)$  et  $\zeta_D = \mathcal{U}(D) \circ {}^D\pi \circ \mathcal{U}^{-1}(D)$ . De plus, définissons

$$g_1(\bar{x}, t; \exp X) = \int g(\bar{x}, t; \exp X \cdot \exp rY) e^{-ir} dr$$

et

$$\begin{aligned} f(\bar{x}; \exp X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\bar{x}, e^u; \exp(-ud_1)(\exp X)) du \\ &= \int_0^{+\infty} g_1(\bar{x}, s; \exp(-\ln sd_1)(\exp X)) \cdot \frac{1}{s} ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\bar{x}, s; \exp(-\ln sd_1)(\exp X)) \cdot \frac{1}{s} ds \end{aligned}$$

puisque  $g_1(\bar{x}, s; \cdot) \equiv 0$  pour  $s \leq 0$ . Les calculs montrent que

$$\begin{aligned} f(\bar{x}; w \cdot \exp rY) &= \int_{\mathbb{R}} g_1(\bar{x}, e^u; \exp(-ud_1)w) e^{ire^{-u}} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_1\left(\bar{x}, \frac{1}{s}; \exp(\ln sd_1)w\right) e^{irs} \cdot \frac{1}{s} ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \left[ {}^D\pi(f(\bar{x}; \cdot))\xi \right](\exp X) \\
 = & e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-t} \int_{G/\exp \mathbb{R}Y} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_1(\bar{x}, e^u; \exp(t-u)d_1 w) e^{ire^{-u}} e^{-ire^{-t}} \pi(D_0^{-1} w) \\
 & \quad \xi(\exp X) du dr d\dot{w} \\
 = & e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-t} \int_{G/\exp \mathbb{R}Y} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g_1\left(\bar{x}, \frac{1}{s}; \exp(t+\ln|s|)d_1 w\right) \cdot e^{irs} \\
 & \quad \cdot e^{-ire^{-t}} \pi(D_0^{-1} w) \xi(\exp X) \cdot \frac{1}{s} ds dr d\dot{w} \\
 = & \frac{1}{2\pi} e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-t} \int_{G/\exp \mathbb{R}Y} g_1(\bar{x}, e^t; w) \pi(D_0^{-1} w) \xi(\exp X) \cdot e^t d\dot{w} \\
 = & \frac{1}{2\pi} e^{t \operatorname{tr} d_1} D_0 \pi(g(\bar{x}, e^t; \cdot)) \xi(\exp X).
 \end{aligned}$$

Finalement, en posant  $\tilde{\xi} = \mathcal{U}(D)\xi$ ,

$$\begin{aligned}
 & \left[ \zeta_D(f(\bar{x}; \cdot))\tilde{\xi} \right](s_1, \dots, s_k) \\
 = & \left[ \mathcal{U}(D) \circ {}^D\pi(f(\bar{x}, \cdot))\xi \right](s_1, \dots, s_k) \\
 = & \frac{1}{2\pi} e^{t \operatorname{tr} d_1} \left[ \mathcal{U}(D_0) \circ D_0 \pi(g(\bar{x}, e^t; \cdot))\xi \right](s_1, \dots, s_k) \\
 = & \frac{1}{2\pi} e^{t \operatorname{tr} d_1} \left[ \zeta_{D_0}(g(\bar{x}, e^t; \cdot))\tilde{\xi} \right](s_1, \dots, s_k) \\
 = & \frac{1}{2\pi} e^{t \operatorname{tr} d_1} \int_{\mathbb{R}^k} F_1(\bar{x}, e^t; a_1, \dots, a_{n-1}; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \\
 & \quad \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \\
 = & \int_{\mathbb{R}^k} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_{n-1}, t; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k.
 \end{aligned}$$

Nous avons déjà remarqué qu'on a bien  $F_1 \in ES(N+1, \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ . De plus, puisqu'il en est de même de la fonction  $t^\beta \cdot F_1$  pour tout  $\beta \in \mathbb{Z}$ , on sait, par hypothèse de récurrence, que  $t^\beta \cdot g \in ES(N+1, G)$ , donc  $t^\beta \cdot g_1 \in ES(N+1, G/\exp \mathbb{R}Y)$ . Remarquons ensuite que la fonction  $g_2$  définie par

$$\begin{aligned}
 g_2(\bar{x}, s; w) &= g_1\left(\bar{x}, \frac{1}{s}; \exp(\ln s d_1) w\right) \cdot \frac{1}{s} \quad \text{pour } s > 0 \\
 g_2(\bar{x}, s; w) &= 0 \quad \text{pour } s \leq 0
 \end{aligned}$$

est une fonction de  $ES(N + 1; G/\exp \mathbb{R}Y)$ . Par conséquent, la fonction  $f(\bar{x}; w \cdot \exp rY)$  est dans  $ES(N; G)$ , comme transformée de Fourier partielle de la fonction  $g_2$ . Pour les justifications détaillées, il faut se baser sur le fait que

$$\begin{aligned} \exp(\ln sd_1)(\exp t_i B_i) &= \exp\left(t_i B_i + \sum_1^{\infty} \frac{1}{k!} (\ln s)^k d_1^k(t_i B_i)\right) \\ &= \exp\left(t_i B_i + N_i(s, t_i)\right) \end{aligned}$$

avec  $N_i(s, t_i) \in \mathfrak{n}$ , linéaire en  $t_i$ , à croissance bornée exponentiellement en  $|\ln s|$ , de même que ses dérivées. De plus

$$\exp(\ln sd_1)(\exp t_i B_i) = \exp t_i B_i \cdot \exp N'_i(s, t_i)$$

avec  $N'_i(s, t_i) \in \mathfrak{n}$ , à croissance bornée exponentiellement en  $t_i$  et  $|\ln s|$ , par ([Lep. Lud.], p. 69). Raisonement comparable pour  $\exp(\ln sd_1)(\exp t_i C_i)$ . Il faut ensuite utiliser ([Lep. Lud.], p. 69) pour écrire les termes dans l'ordre correct. On voit alors que les coordonnées qui nécessitent la présence d'une exponentielle dans la définition de  $ES$  ne sont pas modifiées par  $\exp(\ln sd_1)$ . Puisque  $t^\beta \cdot g_1 \in ES(N + 1, G/\exp \mathbb{R}Y)$  pour tout  $\beta \in \mathbb{Z}$ , on en déduit alors que  $g_2 \in ES(N + 1; G/\exp \mathbb{R}Y)$ . Ceci termine la récurrence dans le 3me cas.

**5.6. Etude du 4me cas :** Posons  $\mathfrak{a} = \mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2$  et  $A = \exp \mathfrak{a} = \exp \mathbb{R}Y_1 \cdot \exp \mathbb{R}Y_2$ . Les éléments de  $G$  seront notés  $g = w \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2) = w \cdot \exp r_1 Y_1 \cdot \exp r_2 Y_2$  et les éléments de  $\mathfrak{D}$  seront notés  $D = \exp t d_1 \cdot \exp d_0 = \exp t d_1 \cdot D_0$ . Comme dans le 3me cas,  $\tilde{d}_n = d_1$ . De plus on a la même décomposition de  $D$  dans une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$ . Soit  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  et définissons  $F_1 \in ES(N + 1, \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  par

$$\begin{aligned} F_1(\bar{x}, t; a_1, \dots, a_{n-1}; \cdot; \cdot) &= (2\pi)^2 \cdot t^{-\text{tr } d_1} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_{n-1}, \ln t; \cdot; \cdot) \\ &\text{pour } t > 0 \\ F_1(\bar{x}, t; a_1, \dots, a_{n-1}; \cdot; \cdot) &= 0 \\ &\text{pour } t \leq 0. \end{aligned}$$

Comme dans le 3me cas,

$$t^\beta F_1(\bar{x}, t; a_1, \dots, a_{n-1}; \cdot; \cdot) \in ES(N + 1, \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) \quad \forall \beta \in \mathbb{Z}.$$

On montre que

$$\begin{aligned} [{}^D\pi(f(\bar{x}; \cdot))\xi](\exp X) &= e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-2t} \cdot \int_{G/A} \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{x}; \exp t d_1 w \\ &\quad \cdot \exp(s_1 Y_1 + s_2 Y_2)) \cdot {}^{D_0}\pi(w) e^{-i \cdot e^{-t} \left\langle \ell, K(tw) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \right\rangle} \xi(\exp X) ds_1 ds_2 d\dot{w}. \end{aligned}$$

Par récurrence on trouve  $\zeta_{D_0}, g, \mathcal{U} = \mathcal{U}(D_0)$  comme dans le troisième cas. De façon analogue, le passage de  $\mathfrak{D}_0$  à  $\mathfrak{D}$  se fait en posant, pour  $D = \exp t d_1 \cdot D_0$ ,  $\mathcal{H}_D \pi \equiv \mathcal{H}_\pi \equiv \mathcal{H}_{D_0 \pi}$ ,  $\mathcal{U}(D) = \mathcal{U}(D_0)$  et  $\zeta_D = \mathcal{U}(D) \circ {}^D\pi \circ \mathcal{U}(D)^{-1}$ . La définition de  $g_1$  et  $f$  est légèrement différente :

$$g_1 : \mathbb{R}^{N+1} \times G \times \mathfrak{a}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$g_1(\bar{x}, t; \exp X; Y^*) = \int_A g(\bar{x}, t; \exp X \exp(y_1 Y_1 + y_2 Y_2)) e^{-i \langle Y^*, y_1 Y_1 + y_2 Y_2 \rangle} dy_1 dy_2.$$

En particulier,  $g_1(\bar{x}, t; \cdot, \cdot) \equiv 0$  pour  $t \leq 0$  et

$$\begin{aligned} g_1(\bar{x}, t; \exp X \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2); Y^*) \\ = e^{i \langle Y^*, r_1 Y_1 + r_2 Y_2 \rangle} g_1(\bar{x}, t; \exp X; Y^*). \end{aligned}$$

On définit

$$\begin{aligned} f(\bar{x}; \exp X) &= \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\bar{x}, e^u; \exp(-u d_1)(\exp X); K(r)(\ell|_{\mathfrak{a}})) du dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} g_1(\bar{x}, s; \exp(-\ln s d_1)(\exp X); K(r)(\ell|_{\mathfrak{a}})) \frac{1}{s} ds dr \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_1(\bar{x}, s; \exp(-\ln s d_1)(\exp X); K(r)(\ell|_{\mathfrak{a}})) \frac{1}{s} ds dr \end{aligned}$$

puisque  $g_1(\bar{x}, s; \cdot) \equiv 0$  pour  $s \leq 0$ . Les calculs montrent que

$$\begin{aligned} f(\bar{x}; w \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)) \\ = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_1(\bar{x}, e^u; \exp(-u d_1) w; K(r)(\ell|_{\mathfrak{a}})) e^{i \left\langle e^{-u} K(r - uw)(\ell|_{\mathfrak{a}}), \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right\rangle} du dr \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & [{}^D\pi(f(\bar{x}; \cdot))\xi](\exp X) \\
 = & e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-2t} \int_{G/A} \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} g_1(\bar{x}, e^u; \exp(t-u)d_1 w; K(r)(\ell|_{\mathfrak{a}})) \\
 & \cdot e^{i \langle e^{-u} K(r-u\omega)(\ell|_{\mathfrak{a}}), \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \rangle} \cdot ({}^{D_0}\pi)(w) \cdot e^{-ie^{-t} \langle \ell, K(t\omega) \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \rangle} \\
 & \xi(\exp X) du dr ds_1 ds_2 d\dot{w} \\
 = & e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-2t} \int_{G/A} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} g_1\left(\bar{x}, \frac{1}{\|a\|}; \exp(t+\ln \|a\|)d_1 w; \right. \\
 & \left. K(-\ln \|a\|\omega) \cdot \frac{1}{\|a\|} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) \cdot e^{-i \langle e^{-t} K(-t\omega)\ell, \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \rangle} \\
 & \cdot e^{i \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \rangle} \cdot {}^{D_0}\pi(w) \xi(\exp X) \cdot \frac{1}{\|a\|^2} da_1 da_2 ds_1 ds_2 d\dot{w}
 \end{aligned}$$

en effectuant le changement de paramètres

$$e^{-u} K(r - u\omega)(\ell|_{\mathfrak{a}}) = e^{-u} K(r - u\omega)(\ell_1 Y_1^* + \ell_2 Y_2^*) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

et à condition de supposer que  $\ell_1^2 + \ell_2^2 = 1$ .

Donc

$$\begin{aligned}
 & [{}^D\pi(f(\bar{x}; \cdot))\xi](\exp X) \\
 = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 e^{t \operatorname{tr} d_1} \cdot e^{-2t} \int_{G/A} g_1(\bar{x}, e^t; w; K(t\omega) \cdot e^t \cdot e^{-t} K(-t\omega)(\ell|_{\mathfrak{a}})) \\
 & {}^{D_0}\pi(w) \xi(\exp X) \cdot e^{2t} d\dot{w} \\
 & \text{par le théorème d'inversion de Fourier} \\
 = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot e^{t \operatorname{tr} d_1} \int_{G/A} \int_A g(\bar{x}, e^t; w \cdot \exp(y_1 Y_1 + y_2 Y_2)) \\
 & e^{-i \langle \ell|_{\mathfrak{a}}, y_1 Y_1 + y_2 Y_2 \rangle} {}^{D_0}\pi(w) \xi(\exp X) dy_1 dy_2 d\dot{w} \\
 = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot e^{t \operatorname{tr} d_1} {}^{D_0}\pi(g(\bar{x}, e^t; \cdot)) \xi(\exp X).
 \end{aligned}$$

Finalement, en posant  $\tilde{\xi} = \mathcal{U}(D)\xi$ ,

$$\begin{aligned}
 & [\zeta_D(f(\bar{x}; \cdot))\tilde{\xi}](s_1, \dots, s_k) \\
 = & [\mathcal{U}(D) \circ {}^D\pi(f(\bar{x}; \cdot))\xi](s_1, \dots, s_k) \\
 = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot e^{t \operatorname{tr} d_1} [\mathcal{U}(D_0) \circ {}^{D_0}\pi(g(\bar{x}, e^t; \cdot))\xi](s_1, \dots, s_k) \\
 = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot e^{t \operatorname{tr} d_1} [\zeta_{D_0}(g(\bar{x}, e^t; \cdot))\tilde{\xi}](s_1, \dots, s_k) \\
 = & \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \cdot e^{t \operatorname{tr} d_1} \int_{\mathbb{R}^k} F_1(\bar{x}, e^t; a_1, \dots, a_{n-1}; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \\
 & \quad \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \\
 = & \int_{\mathbb{R}^k} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_{n-1}, t; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k.
 \end{aligned}$$

Comme dans le 3me cas,  $t^\beta F_1 \in ES(N + 1, \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ , donc  $t^\beta \cdot g \in ES(N + 1, G)$ . Alors  $t^\beta \cdot g_1 \in ES(N + 1, G/A, \mathfrak{a}^*)$  comme transformée de Fourier partielle de  $t^\beta \cdot g$ . De plus, en effectuant dans l'expression de  $f$  le même changement de variables que celui utilisé dans le calcul de  ${}^D\pi(f(\bar{x}; \cdot))$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
 & f(\bar{x}; w \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2)) \\
 = & \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} g_1\left(\bar{x}, \frac{1}{\|a\|}; \exp(\ln \|a\| d_1) w; \frac{1}{\|a\|} K(-\ln \|a\| \omega) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) \\
 & \cdot \frac{1}{\|a\|^2} e^{i \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right\rangle} da_1 da_2
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $f(\bar{x}; w \cdot \exp(r_1 Y_1 + r_2 Y_2))$  est la transformée de Fourier partielle en  $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$  de la fonction

$$g_2(\bar{x}; a_1, a_2; w) = \begin{cases} g_1\left(\bar{x}, \frac{1}{\|a\|}; \exp(\ln \|a\| d_1) w; \frac{1}{\|a\|} K(-\ln \|a\| \omega) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) \\ \quad \cdot \frac{1}{\|a\|^2} & \text{pour } \|a\| \neq 0 \\ 0 & \text{pour } \|a\| = 0. \end{cases}$$

Vu les propriétés de  $g_1$ , on peut montrer par un raisonnement analogue à celui du 3me cas que  $g_2 \in ES(N + 2, G/A)$ . Par conséquent  $f \in ES(N, G)$ .



**5.7. Etude du cas 5a) :** Posons  $D = \exp td_2 \cdot \exp d_0 = \exp td_2 \cdot D_0$  et notons les éléments de  $G$  par  $g = w \cdot \exp uU \cdot \exp yY$ . Posons  $\mathfrak{a} = \mathbb{R}U + \mathbb{R}Y$  et  $A = \exp \mathfrak{a} = \exp(\mathbb{R}U + \mathbb{R}Y) = \exp \mathbb{R}U \cdot \exp \mathbb{R}Y$ . On montre que

$$\begin{aligned} & \left[ {}^D\pi(f(\bar{x}, \cdot))\xi \right](\exp X) \\ &= e^{t \operatorname{tr} d_2} \int_{G/A} \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{x}, \exp td_2 w \cdot \exp uU \cdot \exp yY) {}^{D_0}\pi(w) \\ & \quad \cdot e^{-iy} e^{iut} \xi(\exp X) du dy dw. \end{aligned}$$

Rappelons que dans la base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ ,  $\tilde{d}_n = d_2$ . Donc

$$D = \exp td_2 \cdot D_0 = \exp td_2 \cdot \exp a_{n-1} \tilde{d}_{n-1} \dots \exp a_1 \tilde{d}_1 \quad \text{mod } \mathfrak{D}_\pi$$

avec

$$D_0 = \exp a_{n-1} \tilde{d}_{n-1} \dots \exp a_1 \tilde{d}_1 \quad \text{mod } \mathfrak{D}_\pi.$$

Soit  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  et définissons  $F_1 \in ES(N+1, \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  par

$$F_1(\bar{x}, t; a_1, \dots, a_{n-1}; \cdot; \cdot) = 2\pi \cdot e^{-t \operatorname{tr} d_2} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_{n-1}, t; \cdot; \cdot).$$

Par hypothèse de récurrence il existe une représentation  $\zeta_{D_0}$  de  $G$  sur  $L^2(\mathbb{R}^k)$ , unitairement équivalente à  ${}^{D_0}\pi$  pour tout  $D_0 \in \mathfrak{D}_0$  et il existe  $g \in ES(N+1, G)$  tels que

$$\begin{aligned} & \left[ \zeta_{D_0}(g(\bar{x}, t; \cdot)) \tilde{\xi} \right](s_1, \dots, s_k) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} F_1(\bar{x}, t; a_1, \dots, a_{n-1}; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(D_0)$  l'opérateur unitaire tel que

$$\mathcal{U}(D_0) \circ {}^{D_0}\pi = \zeta_{D_0} \circ \mathcal{U}(D_0).$$

Le passage de  $\mathfrak{D}_0$  à  $\mathfrak{D}$  se fait en posant, pour  $D = \exp td_2 \cdot D_0$ ,

$$\mathcal{H}_{D\pi} \equiv \mathcal{H}_\pi \equiv \mathcal{H}_{D_0\pi}, \mathcal{U}(D) = \mathcal{U}(D_0) \text{ et } \zeta_D = \mathcal{U}(D) \circ {}^D\pi \circ \mathcal{U}^{-1}(D).$$

De plus, définissons

$$g_1(\bar{x}, t; w) = \int_{\mathbb{R}^2} g(\bar{x}, t; w \cdot \exp rU \cdot \exp r'Y) e^{-ir'} dr dr'.$$

On a

$$g_1(\bar{x}, t; w \cdot \exp uU \exp yY) = e^{iy} g_1(\bar{x}, t; w)$$

et

$$g_1(\bar{x}, t; \exp(-sd_2)(w \cdot \exp uU \exp yY)) = e^{iy} \cdot e^{-isu} g_1(\bar{x}, t; \exp(-sd_2)w).$$

Soit alors  $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{a}(-1) = 1$  et posons, dans la base fixe de  $\mathfrak{g}$ ,

$$f(\bar{x}; w \exp uU \exp yY) = \int g_1(\bar{x}, s; \exp(-sd_2)w) e^{-ius} ds \cdot a(y).$$

En décomposant

$$\exp td_2 w = w_t \cdot \exp u_t U \cdot \exp y_t Y$$

dans la base en question on trouve

$$\begin{aligned} & \left[ {}^D \pi(f(\bar{x}, \cdot)) \xi \right](\exp X) \\ &= e^{t \operatorname{tr} d_2} \int_{G/A} \int_{\mathbb{R}^2} f(\bar{x}; w_t \cdot \exp(u + u_t)U \exp(y + y_t)Y) {}^{D_0} \pi(w) \\ & \quad \cdot e^{-iy} \cdot e^{iut} \xi(\exp X) du dy d\dot{w} \\ &= e^{t \operatorname{tr} d_2} \int_{G/A} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}} g_1(\bar{x}, s; \exp(t-s)d_2 w) e^{-iy} \cdot e^{-ius} ds \\ & \quad a(y + y_t) {}^{D_0} \pi(w) \cdot e^{-iy} \cdot e^{iut} \xi(\exp X) du dy d\dot{w} \\ &= e^{t \operatorname{tr} d_2} \hat{a}(-1) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{G/A} g_1(\bar{x}, t; w) {}^{D_0} \pi(w) \xi(\exp X) d\dot{w} \\ & \quad (\text{théorème d'inversion de Fourier}) \\ &= e^{t \operatorname{tr} d_2} \cdot \frac{1}{2\pi} {}^{D_0} \pi(g(\bar{x}, t; \cdot)) \xi(\exp X). \end{aligned}$$

Finalement, en posant  $\tilde{\xi} = \mathcal{U}(D)\xi$ ,

$$\begin{aligned} & \left[ \zeta_D(f(\bar{x}, \cdot)) \tilde{\xi} \right](s_1, \dots, s_k) \\ &= \left[ \mathcal{U}(D) \circ {}^D \pi(f(\bar{x}, \cdot)) \xi \right](s_1, \dots, s_k) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{t \operatorname{tr} d_2} \left[ \mathcal{U}(D_0) \circ {}^{D_0} \pi(g(\bar{x}, t; \cdot)) \xi \right](s_1, \dots, s_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} e^{t \operatorname{tr} d_2} \left[ \zeta_{D_0} \left( g(\bar{x}, t; \cdot) \right) \tilde{\xi} \right] (s_1, \dots, s_k) \\
 &= \frac{1}{2\pi} e^{t \operatorname{tr} d_2} \int_{\mathbb{R}^k} F_1(\bar{x}, t; a_1, \dots, a_{n-1}; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \\
 &= \int F(\bar{x}; a_1, \dots, a_{n-1}, t; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k.
 \end{aligned}$$

Vu les propriétés de  $F$ , on a bien  $e^{\mu t} \cdot F_1 \in ES(N+1, \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  pour tout  $\mu \in \mathbb{Z}$ . Par hypothèse de récurrence,  $e^{t\mu} \cdot g \in ES(N+1, G)$ . Donc  $e^{t\mu} \cdot g_1 \in ES(N+1, G/A)$  pour tout  $\mu \in \mathbb{Z}$ . La fonction  $g_2$  définie par

$$g_2(\bar{x}, s, y; w) = g_1(\bar{x}, s; \exp(-sd_2)w) \cdot a(y)$$

est une fonction de  $ES(N+2, G/A)$ . Donc  $f \in ES(N, G)$  par transformée de Fourier partielle de  $g_2$ . En effet, un raisonnement analogue à celui fait dans le 3me cas permet de décomposer  $\exp(-sd_2)w$  dans la base utilisée, les coordonnées le long des vecteurs de base  $B_i$  étant inchangées, les coordonnées le long des vecteurs de base  $C_i$  étant des fonctions à croissance exponentielle en  $s$  et en les coordonnées le long des  $B_i$ , à croissance polynomiale en les coordonnées de  $w$  le long des  $C_i$ . On utilise alors le fait que  $e^{\beta s} \cdot g_1(\bar{x}, s; \cdot) \in ES(N+1, G/A)$ .

**5.8. Etude du cas 5b) :** Rappelons d'abord un résultat au sujet des représentations induites : Si  $\pi_1$  et  $\zeta_1$  sont deux représentations unitaires de  $G_1$ , sous-groupe de  $G$ , unitairement équivalentes, alors  $\pi = \operatorname{ind}_{G_1}^G \pi_1$  et  $\zeta = \operatorname{ind}_{G_1}^G \zeta_1$  le sont aussi. En effet, soit  $\mathcal{U}_1$  l'isométrie unitaire de  $\mathcal{H}_{\pi_1}$  dans  $\mathcal{H}_{\zeta_1}$  telle que  $\mathcal{U}_1 \circ \pi_1 = \zeta_1 \circ \mathcal{U}_1$ . Alors l'isométrie unitaire  $\tilde{\mathcal{U}}_1$  de  $\mathcal{H}_\pi$  dans  $\mathcal{H}_\zeta$  définie par

$$\tilde{\mathcal{U}}_1 \xi = \tilde{\xi} \iff \forall g \in G : \mathcal{U}_1[\xi(g)] = \tilde{\xi}(g)$$

vérifie  $\tilde{\mathcal{U}}_1 \circ \pi = \zeta \circ \tilde{\mathcal{U}}_1$ . Rappelons également que  $(D_0 \cdot \exp a \operatorname{ad} X)_\pi$  et  $D_0 \pi$  sont unitairement équivalents et que  $D_0 \pi$  et  $\pi_{D_0} = \operatorname{ind}_{G_1}^G (D_0 \pi_1)$  avec  $\pi_1 = \operatorname{ind}_{H_1}^{G_1} \chi_\ell$  le sont également (3.11.).

a) Etudions d'abord le cas  $\alpha|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}} \neq 0$ . Il existe  $T \in \mathfrak{g}_0$  (sous-algèbre nilpotente) tel que  $[T, U] = U$ . L'étude de la mesure semi-invariante sur  $G/G_1$  montre que  $\Delta(\exp tT \cdot \exp xX \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY) = e^{-t}$ . On vérifie que

$$\begin{aligned}
 & \left[ \pi_{D_0}(f(\bar{x}; \cdot)) \xi \right] (\exp sX) \\
 = & \int f(\bar{x}, \exp tT \cdot \exp xX \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY)^{D_0} \pi_1(\exp tT \cdot [\exp(-tT) \\
 & \exp(-sX) \exp tT \exp(e^t s X)] \cdot [\exp(-e^t s + x)X \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY \\
 & \exp(e^t s - x)X]) \xi(\exp(e^t s - x)X) e^{t/2} dt dx d\dot{w} du dy \\
 = & \int f(\bar{x}, \exp tT \cdot \exp(e^t s - \mu)X \cdot \exp \mu X \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY \\
 & \cdot \exp(-\mu X))^{D_0} \pi_1(\exp tT \cdot [\exp(-tT) \exp(-sX) \exp tT \\
 & \cdot \exp(e^t s X)] \cdot [w \cdot \exp uU \cdot \exp yY]) \xi(\exp \mu X) e^{t/2} dt d\mu d\dot{w} du dy
 \end{aligned}$$

en posant  $\mu = e^t s - x$ . En multipliant les éléments de  $G_2$  à gauche par  $\exp(-e^t s X) \exp(-tT) \exp sX \exp tT$  on trouve

$$\begin{aligned}
 & \left[ \pi_{D_0}(f(\bar{x}; \cdot)) \xi \right] (\exp sX) \\
 = & \int f(\bar{x}, \exp tT \cdot \exp(e^t s - \mu)X \exp \mu X \exp(-e^t s X) \exp(-tT) \exp sX \\
 & \exp tT \cdot w \cdot \exp uU \exp yY \exp(-\mu X))^{D_0} \pi_1(\exp tT \cdot w \exp uU \exp yY) \\
 & \xi(\exp \mu X) e^{t/2} dt d\mu d\dot{w} du dy.
 \end{aligned}$$

Grâce à la définition

$$Q(\lambda, \mu, s) = \exp(-\mu X) \exp(-\lambda T) \exp sX \exp \lambda T \exp(\mu - e^\lambda s)X \in G_2 \cap N$$

pour  $\lambda, \mu, s \in \mathbb{R}$

on trouve

$$\begin{aligned}
 & \left[ \pi_{D_0}(f(\bar{x}; \cdot)) \xi \right] (\exp sX) \\
 = & \int f(\bar{x}, \exp tT \exp(e^t s - \mu)X \cdot Q(t, -\mu + e^t s, s) \cdot \exp \mu X w \cdot \\
 & \exp uU \exp yY)^{D_0} \pi_1(\exp tT \cdot w) e^{-iy} e^{i\mu u} \xi(\exp \mu X) e^{t/2} \\
 & dt d\mu d\dot{w} du dy.
 \end{aligned}$$

Rappelons que  $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi \equiv \mathfrak{d}_0/(\mathfrak{d}_0)_\pi$  et écrivons

$$\begin{aligned}
 D &= \exp a_n \tilde{d}_n \dots \exp a_1 \tilde{d}_1 \quad \text{mod } \mathfrak{D}_\pi \\
 &= D_0 \quad \text{mod } \mathfrak{D}_\pi = \text{mod}(\mathfrak{D}_0)_\pi.
 \end{aligned}$$

Soit  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  et définissons  $F_1 \in ES(N+2, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{k-1})$  par

$$\begin{aligned} & F_1(\bar{x}, x_1, x_2; a_1, \dots, a_n; s_1, \dots, s_{k-1}; t_1, \dots, t_{k-1}) \\ &= 2\pi F(\bar{x}; a_1, \dots, a_n; s_1, \dots, s_{k-1}, x_1; t_1, \dots, t_{k-1}, x_2). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence il existe une représentation  $\zeta_{1, D_0}$  de  $G_1$  sur  $L^2(\mathbb{R}^{k-1})$ , unitairement équivalente à  ${}^{D_0}\pi_1$  pour tout  $D_0 \in \mathcal{D}_0$  et il existe  $g \in ES(N+2, G_1)$  tels que

$$\begin{aligned} & [\zeta_{1, D_0}(g(\bar{x}, x_1, x_2; \cdot))\tilde{\xi}](s_1, \dots, s_{k-1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} F_1(\bar{x}, x_1, x_2; a_1, \dots, a_n; s_1, \dots, s_{k-1}; t_1, \dots, t_{k-1}) \\ & \quad \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_{k-1}) dt_1 \dots dt_{k-1}. \end{aligned}$$

Définissons  $g_1$  par

$$g_1(\bar{x}, x_1, x_2; k_1) = \int g(\bar{x}, x_1, x_2; k_1 \cdot \exp uU \exp yY) e^{-iy} du dy$$

pour  $k_1 \in G_1$  quelconque. Soit  $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{k}(-1) = 1$ . La fonction  $f \in ES(N, G)$  est alors définie par

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}, \exp \lambda T \exp \mu X \cdot w \cdot \exp uU \exp yY) \\ &= e^{-\lambda/2} \left\{ \int g_1(\bar{x}, e^{-\lambda}(\mu + v), v; \exp \lambda T \cdot [\exp(-vX)Q(\lambda, \mu, e^{-\lambda}(v + \mu))]^{-1} \right. \\ & \quad \left. \cdot \exp(-vX)w) e^{-iuv} dv \right\} k(y). \end{aligned}$$

On pose  $Q(t, -\mu + e^t s, s) \cdot (\exp \mu X w) = w_R \cdot \exp r_1 U \exp r_2 Y \in G_2$  et on vérifie que

$$\begin{aligned} & [\pi_{D_0}(f(\bar{x}, \cdot))\xi](\exp sX) \\ &= \hat{k}(-1) \int \int e^{ir_2} \cdot e^{-i\mu r_1} g_1(\bar{x}, e^{-t}(e^t s - \mu + v), v; \exp tT \cdot \\ & \quad [\exp(-vX)Q(t, e^t s - \mu, e^{-t}(v + e^t s - \mu))]^{-1} \cdot \exp(-vX)w_R) \\ & \quad {}^{D_0}\pi_1(\exp tT \cdot w) e^{-iuv} \cdot e^{i\mu u} \xi(\exp \mu X) dv dt d\mu dw du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{ir_2} e^{-i\mu r_1} g_1(\bar{x}, s, \mu; \exp tT [\exp(-\mu X)Q(t, e^{ts} - \mu, s)]^{-1} \\ & \quad \exp(-\mu X)w_R) {}^{D_0}\pi_1(\exp tT \cdot w) \xi(\exp \mu X) dt d\mu dw \\ & \quad \text{(théorème d'inversion de Fourier)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int \int e^{ir_2} e^{-i\mu r_1} g(\bar{x}, s, \mu; \exp tT \cdot w \cdot \exp(u - r_1)U \cdot \\
 &\quad \exp(y - r_2 + \mu r_1)Y) e^{-iy} {}^{D_0}\pi_1(\exp tT \cdot w) \xi(\exp \mu X) \\
 &\quad \quad \quad dt d\mu d\dot{w} du dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int \int g(\bar{x}, s, \mu; \exp tT \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY) e^{-iy} {}^{D_0}\pi_1(\exp tT \cdot w) \\
 &\quad \quad \quad \xi(\exp \mu X) dt d\mu d\dot{w} du dy \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int {}^{D_0}\pi_1(g(\bar{x}, s, \mu; \cdot)) \xi(\exp \mu X) d\mu.
 \end{aligned}$$

On sait que  $\zeta_{1, D_0}$  est unitairement équivalent à  ${}^{D_0}\pi_1$ . Soit  $\mathcal{U}_1$  tel que  $\mathcal{U}_1 \circ {}^{D_0}\pi_1 = \zeta_{1, D_0} \circ \mathcal{U}_1$ . Posons  $\tilde{\zeta}_{D_0} = \text{ind}_{G_1}^G \zeta_{1, D_0}$ . Donc  $\tilde{\zeta}_{D_0}$  est unitairement équivalent à  $\pi_{D_0} = \text{ind}_{G_1}^G {}^{D_0}\pi_1$ . Notons par  $\tilde{\mathcal{U}}_1$  l'opérateur unitaire de  $\mathcal{H}_{\pi_{D_0}}$  dans  $\mathcal{H}_{\tilde{\zeta}_{D_0}}$  tel que  $\tilde{\zeta}_{D_0} \circ \tilde{\mathcal{U}}_1 = \tilde{\mathcal{U}}_1 \circ \pi_{D_0}$ . Définissons ensuite la représentation  $\zeta_{D_0}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^k)$  par

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{U}}_2 : \mathcal{H}_{\tilde{\zeta}_{D_0}} &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^k) \text{ défini par} \\
 \tilde{\mathcal{U}}_2 \tilde{\xi} = \tilde{\xi} &\iff \tilde{\xi}(s_1, \dots, s_k) = \tilde{\xi}(\exp s_k X)(s_1, \dots, s_{k-1})
 \end{aligned}$$

et

$$[\zeta_{D_0}(p) \tilde{\xi}](s_1, \dots, s_k) = [\tilde{\zeta}_{D_0}(p)(\tilde{\xi})(\exp s_k X)](s_1, \dots, s_{k-1}).$$

Alors

$$\zeta_{D_0} \circ \tilde{\mathcal{U}}_2 = \tilde{\mathcal{U}}_2 \circ \tilde{\zeta}_{D_0}$$

et, pour tout  $\tilde{\xi} \in L^2(\mathbb{R}^k)$ ,

$$\begin{aligned}
 &[\zeta_{D_0}(f(\bar{x}, \cdot)) \tilde{\xi}](s_1, \dots, s_k) \\
 &= \int f(\bar{x}, p) [\tilde{\zeta}_{D_0}(p)(\tilde{\xi})(\exp s_k X)](s_1, \dots, s_{k-1}) dp \\
 &= \int f(\bar{x}, p) [\tilde{\mathcal{U}}_1 \circ \pi_{D_0}(p)(\xi)(\exp s_k X)](s_1, \dots, s_{k-1}) dp \\
 &= \int f(\bar{x}, p) [\mathcal{U}_1[\pi_{D_0}(p)(\xi)(\exp s_k X)]](s_1, \dots, s_{k-1}) dp \\
 &= \mathcal{U}_1(\pi_{D_0}(f(\bar{x}, \cdot))(\xi)(\exp s_k X))(s_1, \dots, s_{k-1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int \mathcal{U}_1 \circ D_0 \pi_1 (g(\bar{x}, s_k, \mu; \cdot)) \xi(\exp \mu X) d\mu \right\} (s_1, \dots, s_{k-1}) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int \int F_1(\bar{x}, s_k, \mu; a_1, \dots, a_n; s_1, \dots, s_{k-1}; t_1, \dots, t_{k-1}) [\mathcal{U}_1 \xi(\exp \mu X)] \\
 &\quad (t_1, \dots, t_{k-1}) dt_1 \dots dt_{k-1} d\mu \\
 &= \int \int F(\bar{x}; a_1, \dots, a_n; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_{k-1}, \mu) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_{k-1}, \mu) dt_1 \dots dt_{k-1} d\mu
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\zeta_{D_0}(f(\bar{x}, \cdot))$  a bien  $F(\bar{x}; \cdot; \cdot; \cdot)$  pour noyau. Pour les justifications, remarquons que

$$Q(\lambda, \mu, s) = \exp(-\mu X) [\exp(-\lambda T) \exp sX \exp \lambda T] \exp(\mu - e^\lambda s) X$$

est un élément de  $G_2 \cap N$  dont les coordonnées dans toute base de Jordan-Hölder de  $\mathfrak{n}$  sont des fonctions  $C^\infty$ , à croissance bornée exponentiellement en  $\lambda$ , à croissance polynomiale en  $\mu$  et  $s$ , de même que les dérivées de ces coordonnées ([Lep. Lud.], p. 69). Il en est de même des coordonnées de  $[\exp(-vX) Q(\lambda, \mu, e^{-\lambda}(v + \mu))]^{-1}$  et de leurs dérivées. D'autre part, l'étude de  $\exp(-vX)w$  se fait de manière analogue à l'étude de  $\exp(\ln s d_1)w$  dans le troisième cas. Notons alors que par hypothèse  $g \in ES(N + 2, G)$ , donc  $g_1 \in ES(N + 2, G/\exp(\mathbb{R}U + \mathbb{R}Y))$ . Par conséquent la fonction

$$\begin{aligned}
 &(\bar{x}; \exp \lambda T \exp \mu X \cdot w \cdot \exp vU) \\
 &\longmapsto e^{-\lambda/2} g_1 \left( \bar{x}, e^{-\lambda}(\mu + v), v; \exp \lambda T \cdot \left[ \exp(-vX) Q(\lambda, \mu, \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. e^{-\lambda}(v + \mu) \right]^{-1} \exp(-vX) w \right)
 \end{aligned}$$

appartient à  $ES(N, G/\exp \mathbb{R}Y)$ . On en déduit que  $f \in ES(N, G)$ .

b) Le cas  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$  est une version simplifiée de ce qui précède. Dans ce cas,  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2$  est un idéal dans  $\mathfrak{g}$  et les éléments de  $G$  se décomposent en  $\exp xX \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY$ . Pour tout  $f \in ES(N, G)$ , on trouve

$$\begin{aligned}
 &[\pi_{D_0}(f(\bar{x}, \cdot)) \xi](\exp sX) \\
 &= \int f(\bar{x}, \exp xX \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY) D_0 \pi_1(\exp(x - s)X \cdot w \cdot \\
 &\quad \exp uU \cdot \exp yY \exp(s - x)X) \xi(\exp(s - x)X) dx dw du dy
 \end{aligned}$$

$$= \int f(\bar{x}, \exp(s - \mu)X \cdot \exp \mu X w \cdot \exp uU \cdot \exp yY) {}^{D_0}\pi_1(w) \cdot e^{-iy} \cdot e^{i\mu} \xi(\exp \mu X) d\mu dw du dy.$$

La définition de  $F_1$  est analogue à celle du cas  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$ . Les fonctions  $g, g_1$  et la représentation  $\zeta_{1, D_0}$  sont obtenues comme précédemment. La fonction  $f$  est donnée par

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}, \exp \mu X \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp yY) \\ &= \int g_1(\bar{x}, \mu + v, v; \exp(-vX)w) e^{-iuv} dv \cdot k(y). \end{aligned}$$

On montre que

$$[\pi_{D_0}(f)\xi](\exp sX) = \frac{1}{2\pi} \int {}^{D_0}\pi_1(g(\bar{x}, s, \mu; \cdot)) \xi(\exp \mu X) d\mu$$

et on termine comme précédemment.

Pour faire les détails des justifications on peut dans les deux cas utiliser les résultats ([Lep. Lud.], p. 69).

**5.9. Etude du 6me cas :** C'est un cas particulier des cas 5a) et 5b).

**5.10. Etude du cas 7a) :** Posons

$$D = \exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 \cdot \exp t_1 d_1 \cdot \exp d_0 = \exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 \cdot D'_0$$

avec  $D'_0 \in \exp(\mathbb{R}d_1 + \mathfrak{d}_0) = \mathfrak{D}_1 = \exp \mathfrak{d}_1$  et notons les éléments de  $G$  par  $g = w \cdot \exp uU \cdot \exp vV \cdot \exp yY$ . On montre que

$$\begin{aligned} & [{}^D\pi(f(\bar{x}, \cdot))\xi](\exp X) \\ &= e^{r_2 \text{tr } d_2} \cdot e^{r_3 \text{tr } d_3} \int f(\bar{x}, \exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY) \\ & \quad {}^{D'_0}\pi(w) e^{-iy} e^{ir_2 u} e^{ir_3 v} \xi(\exp X) dw du dv dy. \end{aligned}$$

Rappelons que dans la base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$ ,  $\tilde{d}_{n-1} = d_2$ ,  $\tilde{d}_n = d_3$ . Donc

$$\begin{aligned} D &= \exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 \cdot \exp a_{n-2} \tilde{d}_{n-2} \dots \exp a_1 \tilde{d}_1 \pmod{\mathfrak{D}_\pi} \\ &= \exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 \cdot D'_0 \pmod{\mathfrak{D}_\pi}. \end{aligned}$$



Soit  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  et définissons  $F_1 \in ES(N+2, \mathbb{R}^{n-2}, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  par

$$\begin{aligned} & F_1(\bar{x}, r_2, r_3; a_1, \dots, a_{n-2}; \cdot; \cdot) \\ &= (2\pi)^2 e^{-r_2 \operatorname{tr} d_2} e^{-r_3 \operatorname{tr} d_3} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_{n-2}, r_2, r_3; \cdot; \cdot). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence il existe une représentation  $\zeta_{D'_0}$  de  $G$  sur  $L^2(\mathbb{R}^k)$ , unitairement équivalente à  ${}^{D'_0}\pi$  pour tout  $D'_0 \in \mathfrak{D}_1$ , et il existe  $g \in ES(N+2, G)$  tels que

$$\begin{aligned} & [\zeta_{D'_0}(g(\bar{x}, r_2, r_3; \cdot)) \tilde{\xi}](s_1, \dots, s_k) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} F_1(\bar{x}, r_2, r_3; a_1, \dots, a_{n-2}; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(D'_0)$  l'opérateur unitaire tel que

$$\mathcal{U}(D'_0) \circ {}^{D'_0}\pi = \zeta_{D'_0} \circ \mathcal{U}(D'_0).$$

Le passage de  $\mathfrak{D}_1$  à  $\mathfrak{D}$  se fait en posant, pour

$$D = \exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 \cdot D'_0, \quad \mathcal{H}_{D\pi} \equiv \mathcal{H}_\pi \equiv \mathcal{H}_{D'_0\pi}, \quad \mathcal{U}(D) = \mathcal{U}(D'_0)$$

et  $\zeta_D = \mathcal{U}(D) \circ {}^D\pi \circ \mathcal{U}(D)^{-1}$ . De plus, définissons

$$\begin{aligned} g_1(\bar{x}, s_2, s_3; \exp X) &= \int g(\bar{x}, s_2, s_3; \exp X \cdot \exp u'U \exp v'V \exp y'Y) \\ & \quad e^{-iy'} du' dv' dy'. \end{aligned}$$

On a

$$g_1(\bar{x}, s_2, s_3; \exp xX \exp uU \exp vV \exp yY) = e^{iy} g_1(\bar{x}, s_2, s_3; \exp X).$$

Rappelons que la base de  $\mathfrak{n}$  est choisie telle que  $C_m = Y$ ,  $C_{m-1} = V$ ,  $C_{m-2} = U$ . Soit  $a \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{a}(-1) = 1$ . Posons

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}; w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY) \\ &= \int g_1(\bar{x}, s_2, s_3; \exp(-s_2 d_2) \exp(-s_3 d_3) w) e^{-is_2 u} \cdot e^{-is_3 v} ds_2 ds_3 \cdot a(y). \end{aligned}$$

Décomposons

$$\exp r_3 d_3 \cdot \exp r_2 d_2 w = w' \cdot \exp u'U \cdot \exp v'V \cdot \exp y'Y.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
 & \left[ {}^D\pi(f(\bar{x}, \cdot))\xi \right](\exp X) \\
 = & e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} \cdot e^{r_3 \operatorname{tr} d_3} \cdot \int f(\bar{x}; w' \cdot \exp(u + u')U \exp(v + v')V \exp(y + y')Y) \\
 & {}^{D'_0}\pi(w) e^{-iy} e^{ir_2 u} e^{ir_3 v} \xi(\exp X) d\dot{w} du dv dy \\
 = & e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} \cdot e^{r_3 \operatorname{tr} d_3} \int \int g_1(\bar{x}, s_2, s_3; \exp(-s_2 d_2) \exp(-s_3 d_3) \exp r_3 d_3 \exp r_2 d_2 w) \\
 & \cdot \exp(-s_2 d_2) \exp(-s_3 d_3) \left( \exp(-u'U) \exp(-v'V) \exp(-y'Y) \right) \\
 & e^{-is_2(u+u')} e^{-is_3(v+v')} ds_2 ds_3 a(y + y') {}^{D'_0}\pi(w) \\
 & e^{-iy} e^{ir_2 u} e^{ir_3 v} \xi(\exp X) d\dot{w} du dv dy \\
 = & e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} e^{r_3 \operatorname{tr} d_3} \int \int g_1(\bar{x}, s_2, s_3; \exp(-s_2 d_2) \exp(-s_3 d_3) \exp r_3 d_3 \exp r_2 d_2 w) \\
 & e^{-iy'} \cdot e^{-is_2 u} \cdot e^{-is_3 v} ds_2 ds_3 a(y + y') {}^{D'_0}\pi(w) e^{-iy} \\
 & e^{ir_2 u} \cdot e^{ir_3 v} \xi(\exp X) d\dot{w} du dv dy \\
 = & \hat{a}(-1) \cdot e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} e^{r_3 \operatorname{tr} d_3} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int g_1(\bar{x}, r_2, r_3; w) {}^{D'_0}\pi(w) \xi(\exp X) d\dot{w} \\
 = & e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} \cdot e^{r_3 \operatorname{tr} d_3} \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 {}^{D'_0}\pi(g(\bar{x}, r_2, r_3; \cdot)) \xi(\exp X).
 \end{aligned}$$

Finalement, en posant  $\tilde{\xi} = \mathcal{U}\xi$ ,

$$\begin{aligned}
 & \left[ \zeta_D(f(\bar{x}; \cdot))\tilde{\xi} \right](s_1, \dots, s_k) \\
 = & \left[ \mathcal{U}(D) \circ {}^D\pi(f(\bar{x}; \cdot))\xi \right](s_1, \dots, s_k) \\
 = & e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} \cdot e^{r_3 \operatorname{tr} d_3} \cdot \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \left[ \mathcal{U}(D'_0) \circ {}^{D'_0}\pi(g(\bar{x}, r_2, r_3; \cdot))(\xi) \right](s_1, \dots, s_k) \\
 = & e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} e^{r_3 \operatorname{tr} d_3} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \left[ \zeta_{D'_0}(g(\bar{x}, r_2, r_3; \cdot))(\tilde{\xi}) \right](s_1, \dots, s_k) \\
 = & e^{r_2 \operatorname{tr} d_2} e^{r_3 \operatorname{tr} d_3} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^k} F_1(\bar{x}, r_2, r_3; a_1, \dots, a_{n-2}; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \\
 & \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k \\
 = & \int_{\mathbb{R}^k} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_{n-2}, r_2, r_3; s_1, \dots, s_k; t_1, \dots, t_k) \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_k) dt_1 \dots dt_k.
 \end{aligned}$$

Les justifications sont analogues à celles du cas 5a).

**5.11. Etude du cas 7b) :** Il s'agit de l'équivalent complexe du cas 5b) où  $\alpha|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}} \equiv 0$ . Rappelons que  $\mathfrak{d}_1 = \operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta$ ,  $\mathfrak{g}_1 = \operatorname{Ker} \alpha|_{\operatorname{ad} \mathfrak{g}} \cap$

$\text{Ker } \beta|_{\text{ad } \mathfrak{g}}, G_1 = \exp \mathfrak{g}_1$ . Les éléments de  $G$  se décomposent

$$\begin{aligned} g &= \exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3 \pmod{G_1} \\ &= \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \pmod{G_1}. \end{aligned}$$

Les éléments de  $\mathfrak{D}$  s'écrivent  $D = D_1 \cdot \exp s_2 \text{ ad } X_2 \cdot \exp s_3 \text{ ad } X_3$  avec  $D_1 \in \mathfrak{D}_1 = \exp \mathfrak{d}_1$  et

$$D_\pi = D_1 (\exp s_2 \text{ ad } X_2 \cdot \exp s_3 \text{ ad } X_3 \pi)$$

est unitairement équivalent à  $D_1 \pi$ . Rappelons que  $D_1 \pi$  et  $\pi_{D_1} = \text{ind}_{G_1}^{D_1} \pi_1$  avec  $\pi_1 = \text{ind}_H^{G_1} \chi_\ell$  sont également unitairement équivalents (3.15.). Pour  $f \in ES(N, G)$ , évaluons

$$\begin{aligned} & \left[ \pi_{D_1} (f(\bar{x}, \cdot)) \xi \right] (\exp(s_2 X_2 + s_3 X_3)) \\ &= \int f(\bar{x}, \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY) \\ & \quad \left[ \pi_{D_1} (\exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY) \xi \right] \\ & \quad (\exp(s_2 X_2 + s_3 X_3)) dt_2 dt_3 d\bar{w} du dv dy \\ &= \int f(\bar{x}, \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) w \exp uU \exp vV \exp yY) \xi(\exp(-yY) \\ & \quad \exp(-vV) \exp(-uU) w^{-1} \exp \left[ (X_2 \ X_3) \left( - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \right]) \\ & \quad \left[ \exp \left( -(X_2 \ X_3) \cdot \left( - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \right) \exp(-t_2 X_2 - t_3 X_3) \right. \\ & \quad \left. \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \right] dt_2 dt_3 d\bar{w} du dv dy \end{aligned}$$

avec  $\exp \left[ -(X_2 \ X_3) \left( - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \right] \exp(-t_2 X_2 - t_3 X_3) \cdot \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \in G_1$ . Alors

$$\begin{aligned} & \left[ \pi_{D_1} (f(\bar{x}, \cdot)) \xi \right] (\exp(s_2 X_2 + s_3 X_3)) \\ &= \int f(\bar{x}, \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \cdot w \cdot \exp \left( -(X_2 \ X_3) \left( - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \right) \\ & \quad \exp uU \exp vV \exp(y + (s_2 - t_2)u + (s_3 - t_3)v)Y) \pi_1(w \cdot \exp uU \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \exp vV \exp yY) \xi \left( \exp \left( (X_2 \ X_3) \left( - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \right) \right) \\
 & \quad dt_2 dt_3 d\tilde{w} du dv dy \\
 & = \int f(\bar{x}, \exp \left( (X_2 \ X_3) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \exp(-b_2 X_2 - b_3 X_3) \exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)_w \\
 & \quad \exp uU \exp vV \exp yY) {}^{D_1} \pi_1(w) e^{-iy} e^{i(b_2 u + b_3 v)} \xi \left( \exp(b_2 X_2 + b_3 X_3) \right) \\
 & \quad db_2 db_3 d\tilde{w} du dv dy
 \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variables

$$\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \equiv \mathfrak{D}_1/(\mathfrak{D}_1)_\pi$  et écrivons

$$\begin{aligned}
 D & = \exp a_n \tilde{d}_n \dots \exp a_1 \tilde{d}_1 \quad \text{mod } \mathfrak{D}_\pi \\
 & = D_1 \quad \text{mod } \mathfrak{D}_\pi = \text{mod}(\mathfrak{D}_1)_\pi.
 \end{aligned}$$

Soit  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  et définissons  $F_1 \in ES(N+4, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{k-2} \times \mathbb{R}^{k-2})$  par

$$\begin{aligned}
 & F_1(\bar{x}, x_2, x_3, x'_2, x'_3; a_1, \dots, a_n; s_1, \dots, s_{k-2}; t_1, \dots, t_{k-2}) \\
 & = (2\pi)^2 F(\bar{x}; a_1, \dots, a_n; s_1, \dots, s_{k-2}, x_2, x_3; t_1, \dots, t_{k-2}, x'_2, x'_3).
 \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence il existe une représentation  $\zeta_{1, D_1}$  de  $G_1$  sur  $L^2(\mathbb{R}^{k-2})$ , unitairement équivalente à  ${}^{D_1} \pi_1$  pour tout  $D_1 \in \mathfrak{D}_1$  et il existe  $g \in ES(N+4, G_1)$  tels que

$$\begin{aligned}
 & \left[ \zeta_{1, D_1} \left( g(\bar{x}, x_2, x_3, x'_2, x'_3; \cdot) \tilde{\xi} \right) \right] (s_1, \dots, s_{k-2}) \\
 & = \int_{\mathbb{R}^{k-2}} F_1(\bar{x}, x_2, x_3, x'_2, x'_3; a_1, \dots, a_n; s_1, \dots, s_{k-2}; t_1, \dots, t_{k-2}) \\
 & \quad \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_{k-2}) dt_1 \dots dt_{k-2}.
 \end{aligned}$$

Définissons  $g_1$  par

$$g_1(\bar{x}, x_2, x_3, x'_2, x'_3; k_1) = \int g(\bar{x}, x_2, x_3, x'_2, x'_3; k_1 \exp uU \exp vV \exp yY) e^{-iy} du dv dy$$

pour  $k_1 \in G_1$  quelconque. Soit  $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{k}(-1) = 1$ . La fonction  $f \in ES(N, G)$  est alors définie par

$$\begin{aligned}
 & f(\bar{x}, \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY) \\
 = & \left( \int g_1 \left( \bar{x}, t_2 + v_2, t_3 + v_3, v_2, v_3; \left\{ \exp(-v_2 X_2 - v_3 X_3) \left[ \exp \left( -(X_2 \ X_3) \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left( \begin{array}{c} t_2 \\ t_3 \end{array} \right) \right) \exp \left( (X_2 \ X_3) \left( \left( \begin{array}{c} t_2 \\ t_3 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \end{array} \right) \right) \right) \exp \left( -(X_2 \ X_3) \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \left( \begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \end{array} \right) \right) \right] \right\}^{-1} \exp(-v_2 X_2 - v_3 X_3) w \right) \cdot e^{-i(uv_2 + vv_3)} dv_2 dv_3 \right) \cdot k(y).
 \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\begin{aligned}
 & \left[ \pi_{D_1} (f(\bar{x}, \cdot)) \xi \right] (\exp(s_2 X_2 + s_3 X_3)) \\
 = & \int f \left( \bar{x}, \exp \left( (X_2 \ X_3) \left( - \left( \begin{array}{c} b_2 \\ b_3 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} s_2 \\ s_3 \end{array} \right) \right) \right) \cdot \left[ \exp \left( -(X_2 \ X_3) \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left( - \left( \begin{array}{c} b_2 \\ b_3 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} s_2 \\ s_3 \end{array} \right) \right) \right) \cdot \exp \left( (X_2 \ X_3) \left( \begin{array}{c} s_2 \\ s_3 \end{array} \right) \right) \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \cdot \exp(-b_2 X_2 - b_3 X_3) \cdot \exp(b_2 X_2 + b_3 X_3) w \right] \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left. \cdot \exp uU \exp vV \exp yY \right) \right]^{D_1} \pi_1(w) e^{-iy} e^{i(b_2 u + b_3 v)} \\
 & \xi \left( \exp(b_2 X_2 + b_3 X_3) \right) db_2 db_3 d\dot{w} du dv dy \\
 = & \int \left( \int g_1 \left( \bar{x}, -b_2 + s_2 + v_2, -b_3 + s_3 + v_3, v_2, v_3; \right. \right. \\
 & \left. \left. \exp \left( -(X_2 \ X_3) \left( - \left( \begin{array}{c} b_2 \\ b_3 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} s_2 \\ s_3 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \end{array} \right) \right) \right) \right) \right. \\
 & \left. \left. \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \cdot w \cdot \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \exp(-b_2 X_2 - b_3 X_3) \exp(v_2 X_2 + v_3 X_3) \right) e^{-iuv_2} e^{-ivv_3} dv_2 dv_3 \right) \\
 & k(y) \left]^{D_1} \pi_1(w) e^{-iy} e^{i(b_2 u + b_3 v)} \right. \\
 & \left. \xi \left( \exp(b_2 X_2 + b_3 X_3) \right) db_2 db_3 d\dot{w} du dv dy \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \hat{k}(-1) \cdot \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int g_1(\bar{x}, s_2, s_3, b_2, b_3; w) {}^{D_1}\pi_1(w) \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) \\
 &\quad db_2 db_3 dw \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int {}^{D_1}\pi_1(g(\bar{x}, s_2, s_3, b_2, b_3; \cdot)) \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) db_2 db_3.
 \end{aligned}$$

On sait que  $\zeta_{1, D_1}$  est unitairement équivalent à  ${}^{D_1}\pi_1$ . Soit  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_1(D_1)$  que  $\mathcal{U}_1 \circ {}^{D_1}\pi_1 = \zeta_{1, D_1} \circ \mathcal{U}_1$ . Posons  $\tilde{\zeta}_{D_1} = \text{ind}_{G_1}^G \zeta_{1, D_1}$ . Donc  $\tilde{\zeta}_{D_1}$  est unitairement équivalent à  $\pi_{D_1} = \text{ind}_{G_1}^G {}^{D_1}\pi_1$ . Notons par  $\mathcal{U}$  l'opérateur unitaire de  $\mathcal{H}_{\pi_{D_1}}$  dans  $\mathcal{H}_{\tilde{\zeta}_{D_1}}$  tel que  $\tilde{\zeta}_{D_1} \circ \mathcal{U} = \mathcal{U} \circ \pi_{D_1}$ . Définissons ensuite la représentation  $\zeta_{D_1}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^k)$  par

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathcal{U}} : \mathcal{H}_{\tilde{\zeta}_{D_1}} &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^k) \text{ défini par} \\
 \tilde{\mathcal{U}}\tilde{\xi} = \tilde{\xi} &\iff \tilde{\xi}(s_1, \dots, s_k) = \tilde{\xi}(\exp(s_{k-1} X_2 + s_k X_3))(s_1, \dots, s_{k-2})
 \end{aligned}$$

et

$$[\zeta_{D_1}(g)\tilde{\xi}](s_1, \dots, s_k) = [\tilde{\zeta}_{D_1}(g)(\tilde{\xi})(\exp(s_{k-1} X_2 + s_k X_3))](s_1, \dots, s_{k-2}).$$

Alors

$$\zeta_{D_1} \circ \tilde{\mathcal{U}} = \tilde{\mathcal{U}} \circ \tilde{\zeta}_{D_1}$$

et, pour tout  $\tilde{\xi} \in L^2(\mathbb{R}^k)$ ,

$$\begin{aligned}
 &[\zeta_{D_1}(f(\bar{x}, \cdot))\tilde{\xi}](s_1, \dots, s_k) \\
 &= \int f(\bar{x}, p) [(\tilde{\zeta}_{D_1}(p)\tilde{\xi})(\exp(s_{k-1} X_2 + s_k X_3))](s_1, \dots, s_{k-2}) dp \\
 &= \int f(\bar{x}, p) [(\mathcal{U} \circ \pi_{D_1}(p)\xi)(\exp(s_{k-1} X_2 + s_k X_3))](s_1, \dots, s_{k-2}) dp \\
 &= \int f(\bar{x}, p) \left[ \mathcal{U}_1 [\pi_{D_1}(p)(\xi)(\exp(s_{k-1} X_2 + s_k X_3))] \right] (s_1, \dots, s_{k-2}) dp \\
 &= \mathcal{U}_1 \left( \pi_{D_1}(f(\bar{x}, \cdot))(\xi)(\exp(s_{k-1} X_2 + s_k X_3)) \right) (s_1, \dots, s_{k-2}) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left\{ \int \mathcal{U}_1 \circ {}^{D_1}\pi_1(g(\bar{x}, s_{k-1}, s_k, b_2, b_3; \cdot)) \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) \right. \\
 &\quad \left. db_2 db_3 \right\} (s_1, \dots, s_{k-2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left\{ \int \zeta_{1, D_1} \left( g(\bar{x}, s_{k-1}, s_k, b_2, b_3; \cdot) \right) \left( \mathcal{U}_1 \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) \right) \right. \\
 &\quad \left. db_2 db_3 \right\} (s_1, \dots, s_{k-2}) \\
 &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int F_1(\bar{x}, s_{k-1}, s_k, b_2, b_3; a_1, \dots, a_n; s_1, \dots, s_{k-2}; t_1, \dots, t_{k-2}) \\
 &\quad \left( \mathcal{U}_1 \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) \right) (t_1, \dots, t_{k-2}) dt_1 \dots dt_{k-2} db_2 db_3 \\
 &= \int F(\bar{x}; a_1, \dots, a_n; s_1, \dots, s_{k-2}, s_{k-1}, s_k; t_1, \dots, t_{k-2}, b_2, b_3) \\
 &\quad \tilde{\xi}(t_1, \dots, t_{k-2}, b_2, b_3) dt_1 \dots dt_{k-2} db_2 db_3
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\zeta_{D_1}(f(\bar{x}, \cdot))$  a bien  $F(\bar{x}; \cdot; \cdot; \cdot)$  pour noyau.

Les justifications se font de manière analogue à celles du cas 5b).

**5.12. Etude du cas 7c) :** Les raisonnements sont analogues à ceux du cas 7b), mais plus complexes. Les définitions de  $\mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{g}_1$  sont les mêmes. Les éléments de  $G$  se décomposent

$$\begin{aligned}
 g &= \exp r_1 X_1 \cdot \exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3 \quad \text{mod } G_2 \\
 &= \exp r_1 X_1 \cdot \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \quad \text{mod } G_2 \\
 &= \exp r_1 X_1 \cdot \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp vV \cdot \exp yY.
 \end{aligned}$$

Les éléments de  $\mathfrak{D}$  s'écrivent

$$D = D_0 \cdot \exp s_1 \text{ ad } X_1 \cdot \exp s_2 \text{ ad } X_2 \cdot \exp s_3 \text{ ad } X_3$$

avec  $D_0 \in \mathfrak{D}_0 = \exp(\text{Ker } \varphi \cap \text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } \beta)$  et

$D_\pi = D_0(\exp s_1 \text{ ad } X_1 \cdot \exp s_2 \text{ ad } X_2 \cdot \exp s_3 \text{ ad } X_3 \pi)$  est unitairement équivalent à  $D_0 \pi$ . Comme dans le cas 7b) il suffit d'ailleurs d'écrire

$$D = D_1 \cdot \exp s_2 \text{ ad } X_2 \cdot \exp s_3 \text{ ad } X_3$$

avec  $D_1 \in \mathfrak{D}_1 = \exp(\text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } \beta)$ . Les définitions de  $\pi_1, \pi_{D_1}, \zeta_{1, D_1}, \tilde{\zeta}_{D_1}, \zeta_{D_1}$  ainsi que les équivalences unitaires sont les mêmes que dans le cas 7b). Pour  $f \in ES(N, G)$ , évaluons

$$\begin{aligned}
 &\left[ \pi_{D_1} \left( f(\bar{x}, \cdot) \right) \xi \right] \left( \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \right) \\
 &= \int f(\bar{x}, \exp t_1 X_1 \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \cdot \exp vV \cdot \exp yY) e^{t_1}
 \end{aligned}$$

$$\xi \left( \exp(-yY) \exp(-vV) \exp(-uU) \cdot w^{-1} \exp(-t_2 X_2 - t_3 X_3) \cdot \right. \\ \left. \exp(-t_1 X_1) \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \exp t_1 X_1 \right) dt_1 dt_2 dt_3 \\ d\dot{w} du dv dy.$$

Posons

$$\exp(-t_1 X_1) \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \exp t_1 X_1 \\ = \exp \left[ (X_2 \ X_3) e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right] \cdot \left( \exp \left[ -(X_2 \ X_3) e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right] \right) \\ \cdot \exp(-t_1 X_1) \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \exp t_1 X_1$$

avec  $\exp \left[ -(X_2 \ X_3) e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right] \cdot \exp(-t_1 X_1) \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \\ \cdot \exp t_1 X_1 \in G_2$  et

$$\exp \left( -(X_2 \ X_3) \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \exp \left( (X_2 \ X_3) e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \\ = \exp \left[ (X_2 \ X_3) \left( - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \right] \cdot g_2(t_1, t_2, t_3, s_2, s_3)$$

avec  $g_2 \in G_2$  puisque  $[X_2, X_3] \in \mathfrak{g}_2$ . D'où

$$\left[ \pi_{D_1}(f(\bar{x}, \cdot)) \xi \right] \left( \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \right) \\ = \int f(\bar{x}, \exp t_1 X_1 \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY) \cdot e^{t_1} \cdot \\ D_1 \pi_1 \left( \exp t_1 X_1 \cdot \left[ \exp(-t_1 X_1) \exp(-s_2 X_2 - s_3 X_3) \exp t_1 X_1 \right. \right. \\ \left. \left. \exp \left( (X_2 \ X_3) e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \right] \cdot g_2(t_1, t_2, t_3, s_2, s_3)^{-1} \right. \\ \left. \cdot \left[ \exp \left( -(X_2 \ X_3) \left( - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \right) \right] \cdot w \cdot \exp uU \right. \\ \left. \exp vV \exp yY \cdot \exp \left( (X_2 \ X_3) \left( - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \right) \right] \right) \\ \left. \xi \left( \exp \left( (X_2 \ X_3) \left( - \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right) \right) \right) \right] \\ dt_1 dt_2 dt_3 d\dot{w} du dv dy.$$



Effectuons le changement de variables

$$\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

avec

$$-\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} & [\pi_{D_1}(f(\bar{x}, \cdot))\xi](\exp(s_2 X_2 + s_3 X_3)) \\ = & \int f\left(\bar{x}, \exp t_1 X_1 \exp\left((X_2 \ X_3) \left(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right)\right)\right) \\ & \exp(b_2 X_2 + b_3 X_3) \left[ \exp(-b_2 X_2 - b_3 X_3) \exp\left(- (X_2 \ X_3) \left(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right)\right)\right) \exp\left((X_2 \ X_3) e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right)\right] \\ & \left[ \exp\left(- (X_2 \ X_3) e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right) \exp(-t_1 X_1) \right. \\ & \left. \exp(s_2 X_2 + s_3 X_3) \exp t_1 X_1 \right] \cdot w \cdot \exp(-b_2 X_2 - b_3 X_3) \exp u U \\ & \exp v V \exp(y + u b_2 + v b_3) Y \Big) e^{t_1} \cdot {}^{D_1} \pi_1(\exp t_1 X_1 \cdot w \cdot \exp u U \\ & \cdot \exp v V \cdot \exp y Y) \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) dt_1 db_2 db_3 d\omega du dv dy. \end{aligned}$$

Grâce à la définition

$$\begin{aligned} & Q\left(t_1, \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right) \\ = & \exp\left((X_2 \ X_3) \left(-\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right)\right) \left\{ \left[ \exp\left(- (X_2 \ X_3) \left(-\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \right.\right.\right. \right. \\ & \left.\left.\left. + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right)\right)\right) \cdot \exp\left(- (X_2 \ X_3) \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}\right) \right. \\ & \left. \left. \exp\left((X_2 \ X_3) e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right)\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\left[ \exp\left(-\begin{pmatrix} X_2 & X_3 \end{pmatrix} e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right) \exp(-t_1 X_1) \right. \\ \left. \exp\left(\begin{pmatrix} X_2 & X_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right) \exp t_1 X_1 \right]$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \left[ \pi_{D_1}(f(\bar{x}, \cdot)) \xi \right] (\exp(s_2 X_2 + s_3 X_3)) \\ = & \int f\left(\bar{x}, \exp t_1 X_1 \exp\left(\begin{pmatrix} X_2 & X_3 \end{pmatrix} \left(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right)\right)\right) \cdot \\ & Q\left(t_1, -\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right) \cdot \exp(b_2 X_2 + b_3 X_3) w \cdot \\ & \exp uU \exp vV \exp yY \Big) e^{t_1} \cdot D_1 \pi_1(\exp t_1 X_1 \cdot w) \cdot e^{-iy} e^{i(b_2 u + b_3 v)} \\ & \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) dt_1 db_2 db_3 d\omega du dv dy. \end{aligned}$$

Comme dans le cas 7b),  $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi = \mathfrak{d}_1/(\mathfrak{d}_1)_\pi$ . Pour tout  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ , la définition de  $F_1$ , l'existence de  $g, g_1, \zeta_1, D_1$  sont obtenues comme dans le cas 7b). Soit ensuite  $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{k}(-1) = 1$ . La définition de  $f \in ES(N, G)$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} & f(\bar{x}, \exp t_1 X_1 \exp(t_2 X_2 + t_3 X_3) \cdot w \cdot \exp uU \exp vV \exp yY) \\ = & e^{-t_1} \left\{ \int g_1\left(\bar{x}, e^{-t_1} K(-t_1 \omega) \left(\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right), \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \exp t_1 X_1 \cdot \right. \right. \\ & \left. \left[ \exp(-v_2 X_2 - v_3 X_3) Q\left(t_1, \begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}, e^{-t_1} K(-t_1 \omega) \left(\begin{pmatrix} t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)\right) \right]^{-1} \right. \\ & \left. \left. \exp(-v_2 X_2 - v_3 X_3) w \right) \cdot e^{-i(uv_2 + vv_3)} dv_2 dv_3 \right\} k(y). \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} & Q\left(t_1, -\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right) \cdot \exp(b_2 X_2 + b_3 X_3) w \\ = & w_R \cdot \exp r_1 U \cdot \exp r_2 V \cdot \exp r_3 Y \in G_2 \end{aligned}$$

et on vérifie que

$$\begin{aligned}
 & [\pi_{D_1}(f(\bar{x}, \cdot))\xi](\exp(s_2 X_2 + s_3 X_3)) \\
 = & \int f\left(\bar{x}, \exp t_1 X_1 \cdot \exp\left((X_2 \ X_3)\left(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right)\right)\right) \cdot \\
 & Q\left(t_1, -\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right) \cdot \exp(b_2 X_2 + b_3 X_3) \omega \cdot \\
 & \exp u U \exp v V \exp y Y \Big) e^{t_1} \cdot {}^{D_1} \pi_1(\exp t_1 X_1 \cdot \omega) e^{-iy} e^{i(b_2 u + b_3 v)} \\
 & \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) dt_1 db_2 db_3 d\omega du dv dy \\
 = & \int e^{-t_1} \left\{ \int g_1\left(\bar{x}, e^{-t_1} K(-t_1 \omega) \left(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \right.\right.\right. \\
 & \left.\left.\left. + \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)\right), \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \right. \\
 & \exp t_1 X_1 \left[ \begin{array}{c} \exp(-v_2 X_2 - v_3 X_3) \\ Q\left(t_1, -\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. e^{-t_1} K(-t_1 \omega) \left(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)\right) \Big]^{-1} \\
 & \left. \cdot \exp(-v_2 X_2 - v_3 X_3) \omega_R \right) \\
 & e^{-i(u+r_1)v_2} \cdot e^{-i(v+r_2)v_3} dv_2 dv_3 \Big\} k(y+r_3) e^{t_1} \cdot {}^{D_1} \pi_1(\exp t_1 X_1 \cdot \omega) \\
 & e^{-iy} e^{i(b_2 u + b_3 v)} \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) dt_1 db_2 db_3 d\omega du dv dy \\
 = & \hat{k}(-1) \int \left\{ \int g_1\left(\bar{x}, e^{-t_1} K(-t_1 \omega) \left(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)\right), \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}; \exp t_1 X_1 \left[ \begin{array}{c} \exp(-v_2 X_2 - v_3 X_3) \\ Q\left(t_1, -\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. e^{-t_1} K(-t_1 \omega) \left(-\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right)\right) \Big]^{-1} \cdot \right. \\
 & \left. \exp(-v_2 X_2 - v_3 X_3) Q\left(t_1, -\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + e^{t_1} K(t_1 \omega) \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}\right) \right\} \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \exp(-v_2 X_2 - v_3 X_3) \exp(b_2 X_2 + b_3 X_3) w \right) e^{-iu v_2} e^{-iv v_3} dv_2 dv_3 \Big\} \\
 & \cdot {}^{D_1} \pi_1(\exp t_1 X_1 \cdot w) e^{i(b_2 u + b_3 v)} \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) dt_1 db_2 db_3 d\dot{w} du dv \\
 = & \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int \int g_1 \left( \bar{x}, \begin{pmatrix} s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}; \exp t_1 X_1 \cdot w \right) {}^{D_1} \pi_1(\exp t_1 X_1 \cdot w) \\
 & \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) dt_1 db_2 db_3 d\dot{w} \\
 = & \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \int {}^{D_1} \pi_1(g(\bar{x}, s_2, s_3, b_2, b_3; \cdot)) \xi(\exp(b_2 X_2 + b_3 X_3)) db_2 db_3.
 \end{aligned}$$

La démonstration se termine alors comme dans le cas 7b). Les justifications se font comme dans le cas 5b).

**5.13.** A chaque étape de la récurrence on vérifie facilement que la construction de la fonction  $f$  respecte les propriétés (ii) et (iii) de 5.2. Ceci prouve donc le théorème en question.

**5.14. Proposition :** L'application

$$\begin{aligned}
 R : ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) & \longrightarrow ES(N, G) \\
 F & \longmapsto f
 \end{aligned}$$

est une application linéaire continue vérifiant

$$R(q \cdot F) = q \cdot R(F)$$

pour toute fonction  $q$  sur  $\mathbb{R}^N$ . Elle est appelée rétracte.

Démonstration : Il suffit de remarquer que la construction de  $f$  respecte la topologie des espaces  $ES$ .

# Chapitre 6

## Actions exponentielles sur un groupe nilpotent

6.1. Les résultats du chapitre 5 ont pour désavantage de ne fournir qu'une représentation  $\zeta_D$  unitairement équivalente à  ${}^D\pi$ , et non  ${}^D\pi$  elle-même. Cet inconvénient va disparaître lorsque  $G = \exp \mathfrak{g}$  est un groupe de Lie nilpotent, connexe, simplement connexe, soumis à une action exponentielle. Sauf mention explicite du contraire, nous nous placerons toujours dans ce cas dans la suite. Il faudra alors se limiter aux noyaux qui sont à support compact en  $D \in \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$ . Cette restriction sera sans conséquences pour nos résultats ultérieurs.

6.2. Nous identifierons  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$  à  $\mathbb{R}^n$  à l'aide de la base coexponentielle fixée une fois pour toutes. Pour simplifier, les éléments de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$  seront parfois notés par  $D$ . De plus, il nous faudra travailler explicitement avec la base coexponentielle de  $\mathfrak{g}$  à la polarisation  $\mathfrak{h}$ . Les vecteurs de cette base  $\mathfrak{B}$  sont obtenus de la manière suivante : Ils sont obtenus par les cas 5b) avec  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$  ( $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \not\equiv 0$  est impossible dans le cas nilpotent) et 7b) (le cas 7c) est exclu pour les groupes nilpotents). Remarquons que dans ces deux cas,  $\mathfrak{g}_1$  est un idéal dans  $\mathfrak{g}$ . Après changement de notations on trouve donc une suite de sous-algèbres  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \supset \mathfrak{g}_{p-1} \supset \dots \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{h}$  telles que  $\mathfrak{g}_i$  soit un idéal dans  $\mathfrak{g}_{i+1}$  pour tout  $i$ . De plus, si  $\dim(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}) = 1$ ,  $\{C_i\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{g}_{i-1}$  dans  $\mathfrak{g}_i$ , où  $C_i$  est l'élément  $X$  obtenu dans le cas 5b). Les éléments de  $G_i = \exp \mathfrak{g}_i$  s'écrivent alors sous la forme  $(\exp t_i C_i) \cdot g_{i-1}$  où  $g_{i-1} \in$

$G_{i-1}$ . Si  $\dim(\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i-1}) = 2$ ,  $\{C'_i, C''_i\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{g}_{i-1}$  dans  $\mathfrak{g}_i$ , où  $C'_i$  et  $C''_i$  sont les éléments  $X_2, X_3$  obtenus dans le cas 7b). Les éléments de  $G_i$  s'écrivent alors  $\exp(t'_i C'_i + t''_i C''_i) \cdot g_{i-1}$  avec  $g_{i-1} \in G_{i-1}$ . Posons  $T_i = (t_i)$ , resp.  $T_i = (t'_i, t''_i)$  et  $g_i(T_i) = \exp t_i C_i$ , resp.  $g_i(T_i) = \exp(t'_i C'_i + t''_i C''_i)$ . Les éléments de  $G$  s'écrivent donc

$$g_p(T_p) \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \cdot h$$

avec  $h \in H = \exp \mathfrak{h}$ .

**6.3. Définition :** L'espace  $ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$  est l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times G \times G$  dans  $\mathbb{C}$ , vérifiant la propriété de covariance

$$F(\bar{x}; a_1, \dots, a_n; g \cdot h; g' \cdot h') = e^{i\langle \ell, \ln h \rangle} \cdot e^{-i\langle \ell, \ln h' \rangle} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_n; g; g')$$

quels que soient  $h, h' \in H$  et telles que la fonction

$$\begin{aligned} & (\bar{x}; a_1, \dots, a_n; S_1, \dots, S_p; T_1, \dots, T_p) \\ & \longmapsto e^{\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n} F(\bar{x}; a_1, \dots, a_n; g_p(S_p) \dots g_1(S_1); g_p(T_p) \dots g_1(T_1)), \end{aligned}$$

soit une fonction de Schwartz sur  $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$  (si  $S_1, \dots, S_p$  se composent de  $k$  coordonnées) quels que soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ .

Au chapitre suivant, nous identifierons les espaces  $ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$  et  $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  en posant, pour tout  $F_1 \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ ,

$$\begin{aligned} & F(\bar{x}; D; g_p(S_p) \dots g_1(S_1) \cdot h; g_p(T_p) \dots g_1(T_1) \cdot h') \\ & = e^{i\langle \ell, \ln h \rangle} \cdot e^{-i\langle \ell, \ln h' \rangle} F_1(\bar{x}; D; S_1, \dots, S_p; T_1, \dots, T_p). \end{aligned}$$

De plus, l'espace  $ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$  sera muni de la topologie de  $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ .

**6.4.** Soit  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$  et soit  $\mathcal{H}_\pi$  l'espace de représentation de  $\pi$ . Pour tout  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$ , notons  $A_F(\bar{x}, D)$  l'opérateur sur  $\mathcal{H}_\pi$  admettant  $F(\bar{x}; D; \cdot; \cdot)$  comme noyau, à savoir l'opérateur défini par

$$(A_F(\bar{x}, D)\xi)(g) = \int_{G/H} F(\bar{x}; D; g; g') \xi(g') dg' \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_\pi.$$

Vu les propriétés de covariance de  $F$  et de  $\xi$ , cette intégrale sur  $G/H$  a un sens et fournit bien un élément de  $\mathcal{H}_\pi$ .

De même, pour tout  $\tilde{F} \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ , notons  $\tilde{A}_{\tilde{F}}(\bar{x}, D)$  l'opérateur sur  $L^2(\mathbb{R}^k)$  admettant  $\tilde{F}(\bar{x}; D; \cdot; \cdot)$  comme noyau, à savoir l'opérateur défini par

$$(\tilde{A}_{\tilde{F}}(\bar{x}, D)\tilde{\xi})(S_1, \dots, S_p) = \int_{\mathbb{R}^k} \tilde{F}(\bar{x}; D; S_1, \dots, S_p; T_1, \dots, T_p) \tilde{\xi}(T_1, \dots, T_p) dT$$

pour tout  $\tilde{\xi} \in L^2(\mathbb{R}^k)$ .

Dans la suite,  $\mathcal{U}(D)$  désignera l'opérateur unitaire construit dans la démonstration de 5.2. On obtient le résultat suivant :

**6.5. Proposition :** Pour tout  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$  à support compact en  $D \in \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi \cong \mathbb{R}^n$ , il existe  $\tilde{F} \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  à support compact en  $D$  tel que

$$A_F(\bar{x}, D)\xi = \mathcal{U}(D)^{-1} \circ \tilde{A}_{\tilde{F}}(\bar{x}, D) \circ \mathcal{U}(D)\xi \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_\pi.$$

De plus, si  $F$  est à support compact en une ou plusieurs coordonnées du paramètre  $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ , il en est de même de  $\tilde{F}$ .

Démonstration : La démonstration se fait en analysant les différents cas de la récurrence sur  $\dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi) + \dim \mathfrak{g}$ .

Cas 1) et début de la récurrence :  $\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi = \{0\}$ ,  $G/H = \{0\}$  et  $\mathcal{U} = \text{id}$ . Il suffit de prendre  $\tilde{F} = F \in S(\mathbb{R}^N)$  (fonction dépendant seulement du paramètre).

Cas 2) : Tandis que  $\dim \mathfrak{g}$  diminue,  $G/H \cong \tilde{G}/\tilde{H}$ ,  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$  reste inchangé et  $ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell) \cong ES(N, \mathbb{R}^n, \tilde{G}/\tilde{H} \times \tilde{G}/\tilde{H}, \tilde{\ell})$ . L'existence de  $\tilde{F}$  est donnée pour  $\tilde{G} = G/A$  par récurrence, donc également pour  $G$ .

Cas 3) : On a  $D = \exp t d_1 \cdot D_0$ ,  $\dim \mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi$  diminue,  $\mathfrak{g}$  reste inchangé,  $\mathcal{U}(D) = \mathcal{U}(D_0)$ . Posons

$$F_1(\bar{x}, t; D_0; \cdot; \cdot) = F(\bar{x}; D_0, t; \cdot; \cdot) = F(\bar{x}; D; \cdot; \cdot).$$

Puisque  $F$  est à support compact en  $D$ , donc en particulier en  $t$ ,  $F_1 \in ES(N + 1, \mathbb{R}^{n-1}, G/H \times G/H, \ell)$  et, par hypothèse de récurrence, il

existe  $\tilde{F}_1 \in ES(N+1, \mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ , à support compact en  $D_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$  et en  $t$  tel que

$$\begin{aligned} & \mathcal{U}(D_0) \int F_1(\bar{x}, t; D_0; \cdot; g_p(T_p) \dots g_1(T_1)) \xi(g_p(T_p) \dots g_1(T_1)) dT \\ &= \int \tilde{F}_1(\bar{x}, t; D_0; \cdot; T_1, \dots, T_p) (\mathcal{U}(D_0)\xi)(T_1, \dots, T_p) dT. \end{aligned}$$

Alors la fonction  $\tilde{F}$  définie par

$$\tilde{F}(\bar{x}; D; \cdot; \cdot) = \tilde{F}(\bar{x}; D_0, t; \cdot; \cdot) = \tilde{F}_1(\bar{x}, t; D_0; \cdot; \cdot)$$

convient.

Les cas 4), 5a), 6a) et 7a) sont traités de même.

Les cas 5b) avec  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0$  et 7c) ne se présentent pas pour les groupes nilpotents.

Cas 5b) avec  $\alpha|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$  : Puisque  $D = D_0 \cdot \exp a \text{ ad } X$ ,  $D = D_0 \text{ mod } \mathfrak{D}_\pi$  et il suffit de travailler avec  $D_0$ . Pour commencer, rappelons la décomposition de l'isométrie  $\mathcal{U}(D)$  en modifiant les notations de 5.8. Posons  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$ ,  $\tilde{\pi} = \text{ind}_{G_1}^G (\text{ind}_H^{G_1} \chi_\ell)$  et

$$\mathcal{V}_1 : \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_{\tilde{\pi}}$$

avec  $\mathcal{V}_1 \xi = \tilde{\xi}$  signifiant  $\tilde{\xi}(g)(g_1) = (\mathcal{V}_1 \xi)(g)(g_1) = \xi(g \cdot g_1)$ .

De même :  $\mathcal{V}_1 : \mathcal{H}_{D_0 \pi} \equiv \mathcal{H}_\pi \longrightarrow \mathcal{H}_{D_0 \tilde{\pi}} \equiv \mathcal{H}_{\tilde{\pi}}$ .

Posons  $\pi_1 = \text{ind}_H^{G_1} \chi_\ell$ ,  $\pi_{D_0} = \text{ind}_{G_1}^G ({}^{D_0} \pi_1)$  et

$$\mathcal{V}_2 : \mathcal{H}_{D_0 \tilde{\pi}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\pi_{D_0}}$$

avec  $(\mathcal{V}_2 \xi)(g)(g_1) = e^{\alpha(d_0)/2} \xi({}^{D_0^{-1}} g)(g_1)$ .

Par hypothèse de récurrence, on trouve une équivalence unitaire  $\mathcal{V}'_3 = \mathcal{U}_1$  entre  ${}^{D_0} \pi_1$  et  $\zeta_{1, D_0}$ . On en déduit

$$\mathcal{V}_3 : \mathcal{H}_{\pi_{D_0}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\tilde{\zeta}_{D_0}}$$

où  $\tilde{\zeta}_{D_0} = \text{ind}_{G_1}^G \zeta_{1, D_0}$ , par

$$[(\mathcal{V}_3 \xi)(g)](S_1, \dots, S_{p-1}) = [\mathcal{V}'_3(\xi(g))](S_1, \dots, S_{p-1}).$$



Finalement on définit

$$\mathcal{V}_4 : \mathcal{H}_{\zeta_{D_0}} \longrightarrow \mathcal{H}_{\zeta_{D_0}} = L^2(\mathbb{R}^k)$$

par

$$(\mathcal{V}_4 \xi)(S_1, \dots, S_{p-1}, s) = \xi(\exp sX)(S_1, \dots, S_{p-1}).$$

On a alors  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(D_0) = \mathcal{V}_4 \circ \mathcal{V}_3 \circ \mathcal{V}_2 \circ \mathcal{V}_1$ , l'isométrie  $\mathcal{V}_2$  dépendant de  $D_0$ .

Soit  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$  à support compact en  $D_0$ . Définissons  $F_1 \in ES(N+2, \mathbb{R}^n, G_1/H \times G_1/H, \ell_1)$  avec  $\ell_1 = \ell|_{\mathfrak{g}_1}$  par

$$\begin{aligned} & F_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; g_1, g'_1) \\ &= e^{\alpha(d_0)} F(\bar{x}; D_0; D_0^{-1}(\exp sX) \cdot g_1; D_0^{-1}(\exp \mu X) \cdot g'_1). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe  $\tilde{F}_1 \in ES(N+2, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{k-1})$  tel que

$$\begin{aligned} & \mathcal{V}'_3 \left( \int F_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; \cdot; g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \xi_1(g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) dT \right) \\ &= \int \tilde{F}_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; \cdot; T_1, \dots, T_{p-1}) (\mathcal{V}'_3 \xi_1)(T_1, \dots, T_{p-1}) dT \end{aligned}$$

pour tout  $\xi_1 \in \mathcal{H}_{\pi_1}$ . Définissons  $\tilde{F} \in ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  par

$$\begin{aligned} & \tilde{F}(\bar{x}; D_0; S_1, \dots, S_{p-1}, s; T_1, \dots, T_{p-1}, \mu) \\ &= \tilde{F}_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; S_1, \dots, S_{p-1}; T_1, \dots, T_{p-1}). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (1) \mathcal{U}(D_0) & \left( \int \int F(\bar{x}; D_0; \cdot; \exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \right. \\ & \left. \xi(\exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) dT d\mu \right) (S_1, \dots, S_{p-1}, s) \\ &= \mathcal{V}_3 \circ \mathcal{V}_2 \circ \mathcal{V}_1 \left( \int \int F(\bar{x}; D_0; \cdot; \exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \right. \\ & \left. \xi(\exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) dT d\mu \right) (\exp sX)(S_1, \dots, S_{p-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{V}'_3 \left[ (\mathcal{V}_2 \circ \mathcal{V}_1) \left( \int \int F(\bar{x}; D_0; \cdot; \exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \xi(\exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) dT d\mu \right) (\exp sX) \right] (S_1, \dots, S_{p-1}) \\
 &= \mathcal{V}'_3 \left[ e^{\alpha(d_0)/2} \mathcal{V}_1 \left( \int \int F(\bar{x}; D_0; \cdot; \exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \xi(\exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) dT d\mu \right) \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp sX) \right) \right] \\
 &\quad (S_1, \dots, S_{p-1}). \tag{2}
 \end{aligned}$$

Dans l'intégrale, effectuons le changement de variables défini par

$$\begin{aligned}
 &\exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \\
 &= {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu' X) g_{p-1}(T'_{p-1}) \dots g_1(T'_1) \cdot h'(D_0, \mu, T).
 \end{aligned}$$

Le détail de ce changement de variables, ainsi que son Jacobien  $e^{\alpha(d_0)}$  et les justifications nécessaires seront donnés dans la suite. On trouve alors

$$\begin{aligned}
 (2) &= \mathcal{V}'_3 \left[ e^{\alpha(d_0)/2} \mathcal{V}_1 \left( \int \int F(\bar{x}; D_0; \cdot; {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu' X) g_{p-1}(T'_{p-1}) \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. g_1(T'_1)) \cdot e^{-i(\ell, \ln h')} \cdot \xi \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu' X) g_{p-1}(T'_{p-1}) \dots \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. g_1(T'_1) \right) e^{i(\ell, \ln h')} \cdot e^{\alpha(d_0)} dT' d\mu' \right) \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp sX) \right) \right] (S_1, \dots, S_{p-1}) \\
 &= \mathcal{V}'_3 \left[ e^{\alpha(d_0)/2} \mathcal{V}_1 \left( \int \int F(\bar{x}; D_0; \cdot; {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu X) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. g_1(T_1) \right) \xi \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu X) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \right) e^{\alpha(d_0)} dT d\mu \right) \\
 &\quad \left. \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp sX) \right) \right] (S_1, \dots, S_{p-1}) \tag{3}
 \end{aligned}$$

en laissant tomber les '. Or, quels que soient  $R_1, \dots, R_{p-1}$ ,

$$\begin{aligned}
 & e^{\alpha(d_0)/2} \mathcal{V}_1 \left( \int \int F(\bar{x}; D_0; \cdot; {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu X) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \right. \\
 & \quad \left. \xi \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu X) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \right) e^{\alpha(d_0)} dT d\mu \right) \\
 & \quad \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp sX) \right) (g_{p-1}(R_{p-1}) \dots g_1(R_1)) \\
 & = e^{\alpha(d_0)/2} \int \int F(\bar{x}; D_0; \cdot; {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu X) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \\
 & \quad \xi \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu X) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \right) e^{\alpha(d_0)} dT d\mu \\
 & \quad \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp sX) g_{p-1}(R_{p-1}) \dots g_1(R_1) \right) \\
 & = e^{\alpha(d_0)/2} \int \int F(\bar{x}; D_0; {}^{D_0^{-1}}(\exp sX) g_{p-1}(R_{p-1}) \dots g_1(R_1); \\
 & \quad {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu X) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \\
 & \quad \xi \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu X) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \right) e^{\alpha(d_0)} dT d\mu \\
 & = e^{\alpha(d_0)/2} \int \left( \int F_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; g_{p-1}(R_{p-1}) \dots g_1(R_1); \right. \\
 & \quad \left. g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \right. \\
 & \quad \left. (\mathcal{V}_1 \xi) \left( {}^{D_0^{-1}}(\exp \mu X) \right) (g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) dT d\mu \right) \\
 & = \int \left( \int F_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; g_{p-1}(R_{p-1}) \dots g_1(R_1); g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \right. \\
 & \quad \left. (\mathcal{V}_2 \circ \mathcal{V}_1 \xi) (\exp \mu X) (g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) dT \right) d\mu \\
 & = \int \left( \int F_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; \cdot; g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \right. \\
 & \quad \left. (\mathcal{V}_2 \circ \mathcal{V}_1 \xi) (\exp \mu X) (g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) dT \right) d\mu \\
 & \quad (g_{p-1}(R_{p-1}) \dots g_1(R_1)).
 \end{aligned}$$

Donc

$$(3) = \mathcal{V}_3 \left[ \int \left( \int F_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; \cdot; g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & (\mathcal{V}_2 \circ \mathcal{V}_1 \xi)(\exp \mu X) \left( g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \right) dT \Big|_{(S_1, \dots, S_{p-1})} \\
 = & \left( \int \int \tilde{F}_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; \cdot; T_1, \dots, T_{p-1}) \mathcal{V}'_3 [(\mathcal{V}_2 \circ \mathcal{V}_1 \xi)(\exp \mu X)] \right. \\
 & \left. (T_1, \dots, T_{p-1}) dT d\mu \right) (S_1, \dots, S_{p-1}) \\
 = & \left( \int \int \tilde{F}_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; \cdot; T_1, \dots, T_{p-1}) (\mathcal{V}_3 \circ \mathcal{V}_2 \circ \mathcal{V}_1 \xi)(\exp \mu X) \right. \\
 & \left. (T_1, \dots, T_{p-1}) dT d\mu \right) (S_1, \dots, S_{p-1}) \\
 = & \int \int \tilde{F}_1(\bar{x}, s, \mu; D_0; \cdot; S_1, \dots, S_{p-1}; T_1, \dots, T_{p-1}) (\mathcal{V}_4 \circ \mathcal{V}_3 \circ \mathcal{V}_2 \circ \mathcal{V}_1 \xi) \\
 & (T_1, \dots, T_{p-1}, \mu) dT d\mu \\
 = & \int \int \tilde{F}(\bar{x}; D_0; S_1, \dots, S_{p-1}, s; T_1, \dots, T_{p-1}, \mu) (\mathcal{U}(D_0) \xi) \\
 & (T_1, \dots, T_{p-1}, \mu) dT d\mu \\
 = & \left( \int \int \tilde{F}(\bar{x}; D_0; \cdot; T_1, \dots, T_{p-1}, \mu) (\mathcal{U}(D_0) \xi) (T_1, \dots, \right. \\
 & \left. T_{p-1}, \mu) dT d\mu \right) (S_1, \dots, S_{p-1}, s). \tag{4}
 \end{aligned}$$

Comme (1) = (4), le cas 5b) est démontré, à condition d'examiner de plus près le changement de variables. Or

$$\begin{aligned}
 & \exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \\
 = & {}^{D_0^{-1}} ({}^{D_0} \exp \mu X) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \\
 = & {}^{D_0^{-1}} \left( (\exp \mu e^{-\alpha(d_0)} X) \cdot g(\mu, D_0) \right) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \\
 & \text{avec } g(\mu, D_0) \in G_{p-1} \\
 = & {}^{D_0^{-1}} (\exp \mu e^{-\alpha(d_0)} X) \cdot g'(\mu, D_0) g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \\
 & \text{avec } g'(\mu, D_0) = {}^{D_0^{-1}} g(\mu, D_0) \in G_{p-1} \text{ car } G_{p-1} \text{ est} \\
 & \mathfrak{D}_0\text{-invariant.}
 \end{aligned}$$

Décomposons  $g'(\mu, D_0)$  dans la base coexponentielle :

$$g'(\mu, D_0) = g_{p-1}(R_{p-1}) \dots g_1(R_1) \cdot h(\mu, D_0)$$

les coordonnées  $R_i$  dépendant de  $\mu, D_0$ . D'où

$$\exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1)$$

$$\begin{aligned}
 &= D_0^{-1}(\exp \mu e^{-\alpha(d_0)} X) g_{p-1}(R_{p-1}) \dots g_1(R_1) \cdot h(\mu, D_0) g_{p-1}(T_{p-1}) \\
 &\quad \dots g_1(T_1) \\
 &= D_0^{-1}(\exp \mu e^{-\alpha(d_0)} X) [g_{p-1}(R_{p-1}) \cdot g_{p-1}(T_{p-1})] \cdot [g_{p-1}(-T_{p-1}) \\
 &\quad \cdot g_{p-2}(R_{p-2}) \dots g_1(R_1) \cdot h(\mu, D_0) \cdot g_{p-1}(T_{p-1})] \\
 &\quad \cdot g_{p-2}(T_{p-2}) \dots g_1(T_1).
 \end{aligned}$$

Si  $\dim(\mathfrak{g}_{p-1}/\mathfrak{g}_{p-2}) = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 g_{p-1}(R_{p-1}) \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) &= \exp(r_{p-1} C_{p-1}) \cdot \exp(t_{p-1} C_{p-1}) \\
 &= \exp((r_{p-1} + t_{p-1}) C_{p-1}) = g_{p-1}(R_{p-1} + T_{p-1}).
 \end{aligned}$$

Si  $\dim(\mathfrak{g}_{p-1}/\mathfrak{g}_{p-2}) = 2$ ,

$$\begin{aligned}
 g_{p-1}(R_{p-1}) \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) &= \exp(r'_{p-1} C'_{p-1} + r''_{p-1} C''_{p-1}) \\
 &\quad \cdot \exp(t'_{p-1} C'_{p-1} + t''_{p-1} C''_{p-1}) \\
 &= \exp((r'_{p-1} + t'_{p-1}) C'_{p-1} + (r''_{p-1} + t''_{p-1}) C''_{p-1}) \\
 &\quad \cdot k(R_{p-1}, T_{p-1}) \\
 &= g_{p-1}(R_{p-1} + T_{p-1}) \cdot k(R_{p-1}, T_{p-1})
 \end{aligned}$$

avec  $k(R_{p-1}, T_{p-1}) \in G_{p-2}$ . Donc

$$\begin{aligned}
 &\exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \\
 &= D_0^{-1}(\exp \mu e^{-\alpha(d_0)} X) \cdot g_{p-1}(R_{p-1} + T_{p-1}) \cdot [k(R_{p-1}, T_{p-1}) \\
 &\quad \cdot g_{p-1}(-T_{p-1}) \cdot g_{p-2}(R_{p-2}) \dots g_1(R_1) \cdot h(\mu, D_0) \cdot g_{p-1}(T_{p-1})] \\
 &\quad \cdot g_{p-2}(T_{p-2}) \dots g_1(T_1)
 \end{aligned}$$

$k$  étant l'unité du groupe si  $\dim \mathfrak{g}_{p-1}/\mathfrak{g}_{p-2} = 1$ . On décompose alors

$$\begin{aligned}
 &k(R_{p-1}, T_{p-1}) \cdot g_{p-1}(-T_{p-1}) \cdot g_{p-2}(R_{p-2}) \dots g_1(R_1) \cdot h(\mu, D_0) \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \\
 &= g_{p-2}(R'_{p-2}) \dots g_1(R'_1) \cdot h'
 \end{aligned}$$

avec  $R'_i$  et  $h'$  dépendant de  $\mu, T_{p-1}, D_0$ .

On continue ainsi de proche en proche et on trouve une relation de la forme

$$\begin{aligned}
 &\exp \mu X \cdot g_{p-1}(T_{p-1}) \dots g_1(T_1) \\
 &= D_0^{-1}(\exp \mu e^{-\alpha(d_0)} X) \cdot g_{p-1}(Q_{p-1} + T_{p-1}) \cdot g_{p-2}(Q_{p-2} + T_{p-2}) \\
 &\quad \dots g_1(Q_1 + T_1) \cdot h''
 \end{aligned}$$

où  $Q_j$  dépend de  $D_0, \mu, T_{p-1}, \dots, T_{j+1}$  et où  $h'' \in H$  dépend de  $D_0, \mu, T_{p-1}, \dots, T_1$ . En faisant le changement de variables :

$$\begin{aligned}\mu' &= \mu e^{-\alpha(d_0)} \\ T'_j &= Q_j + T_j\end{aligned}$$

on trouve donc un Jacobien de la forme

$$\frac{\partial(\mu', T')}{\partial(\mu, T)} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha(d_0)} & * & \dots & * \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(en prenant l'ordre  $\mu', T'_{p-1}, \dots, T'_1$ ) et, en effectuant le changement de variables dans l'intégrale, on trouve

$$d\mu dT = e^{\alpha(d_0)} d\mu' dT'.$$

Ceci termine le cas 5b).

Le cas 7b) se traite de la même manière, en remplaçant  $D_0^{-1}(\exp sX)$ , resp.  $D_0^{-1}(\exp \mu X)$  par  $D_0^{-1}(\exp(a_2 X_2 + a_3 X_3))$ , resp.  $D_0^{-1}(\exp(\mu_2 X_2 + \mu_3 X_3))$ . De plus, remarquons que

$$\begin{aligned}& D_0 \exp(\mu_2 X_2 + \mu_3 X_3) \\ &= \exp \left[ (X_2 \ X_3) e^{-\varphi(d_0)} K(-\varphi(d_0)\omega) \begin{pmatrix} \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \right] \text{ mod } G_{p-1},\end{aligned}$$

ce qui fournira un Jacobien de la forme

$$\frac{\partial(\mu'_2, \mu'_3, T')}{\partial(\mu_2, \mu_3, T)} = \begin{pmatrix} e^{-\varphi(d_0)} K(-\varphi(d_0)\omega) & * & \dots & * \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$d\mu_2 d\mu_3 dT = e^{2\varphi(d_0)} d\mu'_2 d\mu'_3 dT'.$$

Il faut faire les changements correspondants dans les définitions de  $F_1$  et  $\tilde{F}_1$ .

**6.6. Proposition :** Soit  $K$  un compact fixe de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi \equiv \mathbb{R}^n$ . Notons par  $ES(N, K, G/H \times G/H, \ell) = \mathcal{D}(K, \mathcal{S}(N, G/H \times G/H, \ell))$  et  $ES(N, K, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) = \mathcal{D}(K, \mathcal{S}(N, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k))$  les sous-espaces topologiques de  $ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$  et  $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  formés des fonctions  $F$  dont le support en  $D \in \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi \equiv \mathbb{R}^n$  est contenu dans  $K$ . Alors l'application

$$\begin{aligned} ES(N, K, G/H \times G/H, \ell) &\longrightarrow ES(N, K, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) \\ F &\longmapsto \tilde{F} \end{aligned}$$

est linéaire continue.

Démonstration : Afin d'appliquer le théorème du graphe fermé, supposons que  $F_k \mapsto F$  et  $\tilde{F}_k \mapsto \tilde{G}$  dans les espaces  $ES$  respectifs. On montre que pour tout  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ , Schwartz en  $G/H$ , et quels que soient  $\bar{x}, D$ ,

$$\begin{aligned} &\int F_k(\bar{x}; D; \cdot; g_p(T_p) \dots g_1(T_1)) \xi(g_p(T_p) \dots g_1(T_1)) dT \\ &\longmapsto \int F(\bar{x}; D; \cdot; g_p(T_p) \dots g_1(T_1)) \xi(g_p(T_p) \dots g_1(T_1)) dT \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int \tilde{F}_k(\bar{x}; D; \cdot; T_1, \dots, T_p) (\mathcal{U}(D)\xi)(T_1, \dots, T_p) dT \\ &\longmapsto \int \tilde{G}(\bar{x}; D; \cdot; T_1, \dots, T_p) (\mathcal{U}(D)\xi)(T_1, \dots, T_p) dT \end{aligned}$$

dans  $L^1(G/H)$ ,  $L^\infty(G/H)$ ,  $L^2(G/H)$ , respectivement  $L^1(\mathbb{R}^k)$ ,  $L^\infty(\mathbb{R}^k)$  et  $L^2(\mathbb{R}^k)$ . Puisque

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}(D) \int F_k(\bar{x}; D; \cdot; g_p(T_p) \dots g_1(T_1)) \xi(g_p(T_p) \dots g_1(T_1)) dT \\ &= \int \tilde{F}_k(\bar{x}; D; \cdot; T_1, \dots, T_p) (\mathcal{U}(D)\xi)(T_1, \dots, T_p) dT \end{aligned}$$

et que  $\mathcal{U}(D)$  est une isométrie pour  $L^2$ , on a

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}(D) \int F(\bar{x}; D; \cdot; g_p(T_p) \dots g_1(T_1)) \xi(g_p(T_p) \dots g_1(T_1)) dT \\ &= \int \tilde{G}(\bar{x}; D; \cdot; T_1, \dots, T_p) (\mathcal{U}(D)\xi)(T_1, \dots, T_p) dT \end{aligned}$$

pour tout  $\xi$  et  $\tilde{F} = \tilde{G}$ . Ceci prouve la continuité.

**6.7. Proposition :** Pour tout  $F \in ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$  à support compact en  $D \in \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi \equiv \mathbb{R}^n$ , il existe  $f \in \mathcal{S}(N, G)$  tel que

$${}^D\pi(f(\bar{x}, \cdot))\xi = A_F(\bar{x}, D)\xi \quad \forall \xi \in \mathcal{H}_\pi.$$

Démonstration : Construisons  $\tilde{F}$  comme en 6.5. Par 5.2., il existe  $f \in \mathcal{S}(N, G) \equiv ES(N, G)$  ( $G$  étant nilpotent) et une famille de représentations  $\zeta_D$  telles que

$$\begin{aligned} (\zeta_D(f(\bar{x}, \cdot))\tilde{\xi})(S_1, \dots, S_p) &= \left( \int \tilde{F}(\bar{x}; D; \dots; T_1, \dots, T_p) \right. \\ &\quad \left. \tilde{\xi}(T_1, \dots, T_p) dT \right)(S_1, \dots, S_p) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{U}(D) \circ {}^D\pi = \zeta_D \circ \mathcal{U}(D).$$

En posant  $\tilde{\xi} = \mathcal{U}(D)\xi$ , on a le résultat annoncé.

**6.8. Corollaire :** Soit  $K$  un compact fixe de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi \equiv \mathbb{R}^n$ . Alors l'application

$$\begin{aligned} ES(N, K, G/H \times G/H, \ell) &\longrightarrow \mathcal{S}(N, G) \\ F &\longmapsto f \end{aligned}$$

telle que  $F$  et  $f$  vérifient 6.7., est une application linéaire continue.

Démonstration : Par 6.6., l'application  $F \rightarrow \tilde{F}$  est continue. Par 5.14., l'application  $\tilde{F} \mapsto f$  est continue.

**6.9. Remarques :** a) Pour un compact fixe  $K$  on a évidemment

$$ES(N, K, G/H \times G/H, \ell) = \mathcal{S}(N, K, G/H \times G/H, \ell)$$

et

$$ES(N, K, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) = \mathcal{S}(N, K, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k),$$

espaces de Schwartz.

b) D'après R. Howe ([Ho.]), l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(N, G) &\longrightarrow \mathcal{S}(N, G/H \times G/H, \ell) \\ f &\longmapsto f_\pi \end{aligned}$$



où  $f_\pi$  indique le noyau de l'opérateur  $\pi(f)$ , est une surjection continue ouverte. D'après ([Lud. Mol. 1], 9.7.), l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi &\longrightarrow \mathcal{S}(N, G) \\ D &\longmapsto f^D \end{aligned}$$

est continue,  $f \in \mathcal{S}(N, G)$  étant fixé. Par conséquent, puisque  ${}^D\pi(f) = \pi(f^D)$ , l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi &\longrightarrow \mathcal{S}(N, G/H \times G/H, \ell) \\ D &\longmapsto F(.; D; .; .) \end{aligned}$$

où  $F(.; D; .; .)$  est le noyau de l'opérateur  ${}^D\pi(f)$ , est continue. En particulier, quels que soient  $\bar{x}, S_1, \dots, S_p, T_1, \dots, T_p$ ,  $F(\bar{x}; D; g_p(S_p)\dots g_1(S_1); g_p(T_p)\dots g_1(T_1))$  dépend continûment de  $D$ . De plus, on voit facilement que la relation  ${}^D\pi(f) = \pi(f^D)$  entraîne que le noyau  $F(.; D; .; .)$  est même  $C^\infty$  en  $D$  si  $f \in \mathcal{S}(N, G)$ . On a le même résultat pour le noyau  $F'(.; D; .; .)$  de l'opérateur  ${}^D\pi(f)$  si  $D$  parcourt  $\mathcal{D}$  (au lieu de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$ ).

c) Finalement, si  $|||.|||$  désigne une norme de Schwartz quelconque sur  $\mathcal{S}(G/H \times G/H, \ell)$ , l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi &\longrightarrow \mathbb{R} \\ D &\longmapsto |||F(\bar{x}; D; .; .)|||, \end{aligned}$$

$\bar{x}$  étant un paramètre fixé, est continue.

# Chapitre 7

## Etude des orbites

**7.1.** Dans ([B.C. et al]), N. Conze étudie l'orbite d'une représentation de type exponentiel d'un groupe exponentiel et montre qu'une telle orbite est ouverte dans son adhérence. Nous utiliserons cette étude pour montrer que lors d'une action exponentielle, toute orbite (généralisée, au sens de 2.10.) contient une orbite fermée dans son adhérence. De plus nous montrerons que si l'action exponentielle se fait sur un groupe nilpotent et si l'orbite  $\Omega$  est fermée, alors  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  est dense dans  $\text{Ker } \Omega$  pour la topologie de  $L^1(G)$ . Ce résultat sera utilisé pour étudier la croissance de  $\text{Ker } \Omega / \tilde{\mathfrak{J}}(\Omega)$ ,  $\tilde{\mathfrak{J}}(\Omega)$  désignant l'idéal minimal fermé associé à  $\Omega$  dans  $L^1(G)$ . Pour ce faire, nous utiliserons les travaux de J. Ludwig ([Lud. 3], [Lud. 5]) qui démontre un résultat analogue pour un singleton  $\{\pi\}$ .

**7.2.** Dans ce paragraphe nous adapterons les résultats de N. Conze ([B.C. et al]) aux actions exponentielles et aux notations utilisées dans ce contexte. Pour plus de détails et de justifications, nous renvoyons au travail de N. Conze.

L'action exponentielle induit une décomposition de  $\mathfrak{g}^*$  de la forme

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1^* \supset \mathfrak{g}_2^* \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n^* = \{0\},$$

les  $\mathfrak{g}_i^*$  étant des sous-espaces vectoriels  $\mathfrak{d}$ -invariants et l'action sur  $\mathfrak{g}_i^* / \mathfrak{g}_{i+1}^*$  étant irréductible. Soit  $\ell \in \mathfrak{g}^*$  fixé. Pour simplifier les notations, nous noterons l'action de  $\mathfrak{d}$  sur  $\mathfrak{g}^*$  par  $d(\ell)$  au lieu de  $d^*(\ell)$  dans les sections

7.2. à 7.4. Définissons

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}(\ell) &= \{d \in \mathfrak{d} \mid d(\ell) = 0\} \\ \mathfrak{d}_i(\ell) &= \{d \in \mathfrak{d} \mid d(\ell) \in \mathfrak{g}_i^*\}.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1(\ell) \supset \mathfrak{d}_2(\ell) \dots \supset \mathfrak{d}_n(\ell) = \mathfrak{d}(\ell).$$

Si  $\mathfrak{d}_{i-1}(\ell) = \mathfrak{d}_i(\ell)$ , la base coexponentielle de  $\mathfrak{d}$  par rapport à  $\mathfrak{d}_{i-1}(\ell)$  et à  $\mathfrak{d}_i(\ell)$  est la même. Il n'y a pas de paramètre supplémentaire qui s'introduit dans la description de l'orbite. L'ensemble des indices pour  $\ell$  est

$$\{i_1, \dots, i_r, \dots, i_s\} = \{i \mid 1 \leq i \leq n-1 \text{ et } \mathfrak{d}_i(\ell) \neq \mathfrak{d}_{i+1}(\ell)\}.$$

Pour ces indices il faut distinguer plusieurs cas :

1)  $\mathfrak{d}_i(\ell) \neq \mathfrak{d}_{i+1}(\ell)$  et  $\dim(\mathfrak{g}_i^*/\mathfrak{g}_{i+1}^*) = 1$ .

a) Si  $\ell \in \mathfrak{g}_i^*$ , il existe  $d_i \in \mathfrak{d} = \mathfrak{d}_i(\ell)$  tel que  $\{d_i\}$  soit une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_{i+1}(\ell)$  dans  $\mathfrak{d}_i(\ell)$  et tel que

$$d_i(\ell) = \ell \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{i+1}^*$$

$$(\exp t_i d_i)(\ell) = e^{t_i} \ell = \ell + t_i \frac{e^{t_i} - 1}{t_i} \cdot \ell = \ell + t_i F(t_i) \cdot \ell \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{i+1}^*$$

en notant par  $F$  la fonction  $F(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ .

b) Si  $\ell \notin \mathfrak{g}_i^*$ , il existe  $e_i \in \mathfrak{g}_i^*$ ,  $\lambda, \gamma \in \mathfrak{d}_i(\ell)^*$  tels que

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_i^* &= \mathbb{R}e_i \oplus \mathfrak{g}_{i+1}^* \\ d(\ell) &= \lambda(d)e_i \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{i+1}^*, \forall d \in \mathfrak{d}_i(\ell) \\ d(e_i) &= \gamma(d)e_i \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{i+1}^*, \forall d \in \mathfrak{d}_i(\ell).\end{aligned}$$

(i) Si  $\lambda$  et  $\gamma$  sont proportionnels, il existe  $d_i \in \mathfrak{d}_i(\ell)$  et  $a \in \mathbb{R}$  tels que  $\gamma = a \cdot \lambda$ ,  $\lambda(d_i) = 1$  et  $\gamma(d_i) = a$ . Donc

$$\begin{aligned}(\exp t_i d_i)(\ell) &= \ell + t_i \cdot \frac{e^{at_i} - 1}{at_i} \cdot e_i \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{i+1}^*, \text{ si } a \neq 0 \\ &= \ell + t_i F(at_i) \cdot e_i \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{i+1}^*\end{aligned}$$

$\{d_i\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_{i+1}(\ell)$  dans  $\mathfrak{d}_i(\ell)$ .

(ii) Si  $\lambda$  et  $\gamma$  ne sont pas proportionnels, il existe  $d_i \in \mathfrak{d}_i(\ell)$  tel que

$$\begin{aligned}\lambda(d_i) &= 1, \gamma(d_i) = 0 \\ (\exp t_i d_i)(\ell) &= \ell + t_i e_i \quad \text{mod } \mathfrak{g}_{i+1}^*\end{aligned}$$

$\{d_i\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_{i+1}(\ell)$  dans  $\mathfrak{d}_i(\ell)$ .

2)  $\mathfrak{d}_i(\ell) \neq \mathfrak{d}_{i+1}(\ell)$  et  $\dim(\mathfrak{g}_i^*/\mathfrak{g}_{i+1}^*) = 2$ .

Il existe  $\psi \in \mathfrak{d}_i(\ell)^*$ ,  $e'_i, e''_i \in \mathfrak{g}_i^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tels que

$$d(e'_i + ie''_i) = \psi(d)(1 + i\alpha)(e'_i + ie''_i) \pmod{(\mathfrak{g}_{i+1}^*)^{\mathbb{C}}} \quad \forall d \in \mathfrak{d}_i(\ell).$$

a) Si  $\ell \in \mathfrak{g}_i^*$ , on peut supposer  $\ell = \text{Re}(e'_i + ie''_i)$ . Il existe  $d_i \in \mathfrak{d}_i(\ell)$  tel que  $\psi(d_i) = 1$ ,

$$(\exp t_i d_i)(\ell) = \text{Re}\{e^{t_i(1+i\alpha)}(e'_i + ie''_i)\} \pmod{\mathfrak{g}_{i+1}^*}.$$

De plus,  $\{d_i\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_{i+1}(\ell)$  dans  $\mathfrak{d}_i(\ell)$ .

b) Si  $\ell \notin \mathfrak{g}_i^*$ , il existe  $\gamma', \gamma'' \in \mathfrak{d}_i(\ell)^*$  tels que

$$d(\ell) = \text{Re}[(\gamma' + i\gamma'')(d)(e'_i + ie''_i)] \pmod{\mathfrak{g}_{i+1}^*}, \quad \forall d \in \mathfrak{d}_i(\ell).$$

(i) Si  $\text{rg}(\gamma', \gamma'', \psi) = 3$ , il existe  $d'_i, d''_i \in \mathfrak{d}_i(\ell) \setminus \mathfrak{d}_{i+1}(\ell)$  tels que

$$\begin{aligned} \psi(d'_i) &= 0, & \gamma'(d'_i) &= 1, & \gamma''(d'_i) &= 0 \\ \psi(d''_i) &= 0, & \gamma'(d''_i) &= 0, & \gamma''(d''_i) &= 1. \end{aligned}$$

On voit que  $\{d'_i, d''_i\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_{i+1}(\ell)$  dans  $\mathfrak{d}_i(\ell)$  et que

$$(\exp t'_i d'_i)(\exp t''_i d''_i)(\ell) = \ell + t'_i e'_i - t''_i e''_i \pmod{\mathfrak{g}_{i+1}^*}.$$

(ii) Si  $\text{rg}(\gamma', \gamma'', \psi) = 2$ , on a les mêmes conclusions (voir [B.C. et all]).

(iii) Si  $\text{rg}(\gamma', \gamma'', \psi) = 1$ , il existe  $\gamma \in \mathfrak{d}_i(\ell)^*$ ,  $a \in \mathbb{C}^*$ ,  $c \in \mathbb{R}$  tels que  $\gamma' + i\gamma'' = a\gamma$ ,  $\psi = c\gamma$ . En remplaçant  $a(e'_i + ie''_i)$  par  $e'_i + ie''_i$ , on trouve

$$\begin{aligned} d(\ell) &= \gamma(d) \text{Re}(e'_i + ie''_i) \pmod{\mathfrak{g}_{i+1}^*} \\ d(e'_i + ie''_i) &= c\gamma(d)(1 + i\alpha)(e'_i + ie''_i) \pmod{(\mathfrak{g}_{i+1}^*)^{\mathbb{C}}}. \end{aligned}$$

Il existe alors  $d_i \in \mathfrak{d}_i(\ell)$  tel que  $\gamma(d_i) = 1$ . D'où  $\{d_i\}$  est une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_{i+1}(\ell)$  dans  $\mathfrak{d}_i(\ell)$  et

$$\begin{aligned} (\exp t_i d_i)(\ell) &= \ell + t_i e'_i \pmod{\mathfrak{g}_{i+1}^*} \text{ si } c = 0 \\ &= \ell + \text{Re}\{t_i F(c(1 + i\alpha)t_i)(e'_i + ie''_i)\} \\ &\pmod{\mathfrak{g}_{i+1}^*} \text{ si } c \neq 0. \end{aligned}$$

**7.3.** Dans ce qui précède, notons  $T_{i_k} = (t_{i_k})$ , resp.  $T_{i_k} = (t'_{i_k}, t''_{i_k})$ ,  $g_{i_k}(T_{i_k}) = \exp t_{i_k} d_{i_k}$ , resp.  $g_{i_k}(T_{i_k}) = (\exp t'_{i_k} d'_{i_k})(\exp t''_{i_k} d''_{i_k})$  selon les cas. Notons  $g(T) = g_{i_1}(T_{i_1})g_{i_2}(T_{i_2})\dots g_{i_d}(T_{i_d})$  si  $d$  est le nombre d'indices. De plus, complétons la suite des  $e_{i_k}$ , resp.  $e'_{i_k}$  et  $e''_{i_k}$  en une base de  $\mathfrak{g}^*$  adaptée à la décomposition  $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}_1^* \supset \mathfrak{g}_2^* \supset \dots \supset \mathfrak{g}_n^* = \{0\}$ .

**7.4. Proposition :** Pour une action exponentielle, l'adhérence de toute orbite contient une orbite fermée.

Démonstration : Supposons  $\Omega_\ell$  non fermée et soit  $q \in \bar{\Omega}_\ell \setminus \Omega_\ell$ . Alors il existe une suite de  $T$  telle que  $g(T)(\ell)$  converge vers  $q$ . Comme  $q \notin \Omega_\ell$ , au moins une des coordonnées de  $T$  tend vers l'infini. Soit  $n$  le premier entier tel que  $t_{i_n}$ , resp.  $t'_{i_n}$  ou  $t''_{i_n}$  tende vers l'infini. Supposons en plus que  $q$  soit choisi de manière à ce que  $n$  soit minimal. Donc, pour  $r < n$ ,  $t_{i_r}$ , resp.  $t'_{i_r}$  et  $t''_{i_r}$  tendent vers  $t_{i_r}^0$ , resp.  $t'_{i_r}{}^0$  et  $t''_{i_r}{}^0$ . Puisque les  $(i_n - 1)$  premières coordonnées de  $q$  dépendent uniquement de  $T_{i_1}^0, \dots, T_{i_{n-1}}^0$  ([B.C. et al], p. 10) et que  $q = \lim_T [g(T)\ell]$ , on peut poser

$$\begin{aligned} q_1 &= [g_{i_{n-1}}(-T_{i_{n-1}}^0) \dots g_{i_1}(-T_{i_1}^0)]q \\ &= \lim_T [g_{i_n}(T_{i_n}) \dots g_{i_d}(T_{i_d}) (\ell)] \\ &\in \Omega_q \subset \bar{\Omega}_\ell \setminus \Omega_\ell \end{aligned}$$

et remarquer que les  $(i_n - 1)$  premières coordonnées de  $q_1$  et  $\ell$  coïncident. En remplaçant  $q$  par  $q_1$  on peut donc supposer que les  $(i_n - 1)$  premières coordonnées de  $q$  ( $\equiv q_1$ ) et  $\ell$  coïncident et que les  $t_i$  correspondants sont nuls. En particulier,  $\ell = q \bmod \mathfrak{g}_{i_n}^*$ ,  $\mathfrak{d}_j(\ell) = \mathfrak{d}_j(q)$  pour  $j \leq i_n$  et, si on note par  $j_r$  les indices pour  $q$ , les indices de  $q$  et  $\ell$  correspondant aux  $i_n - 1$  premières coordonnées coïncident, c'est-à-dire  $i_1 = j_1, \dots, i_{n-1} = j_{n-1}$  (si  $n \neq 1$ ). Puisque  $t_{i_n}$ , resp.  $t'_{i_n}$  ou  $t''_{i_n}$  tendent vers l'infini tout en laissant la coordonnée correspondante finie, seuls les cas 1a), 1b)(i), 2a), 2b)(iii) peuvent se présenter (même désignation des cas que dans 7.2.). Remarquons d'ailleurs que

$$g_{i_n}(T_{i_n})g_{i_{n+1}}(T_{i_{n+1}}) \dots g_{i_d}(T_{i_d})(\ell) = g_{i_n}(T_{i_n})(\ell) \bmod \mathfrak{g}_{i_{n+1}}^*.$$

Il suffit donc d'étudier :

$$\begin{aligned} 1a) \quad (\exp t_{i_n} d_{i_n})(\ell) &= e^{t_{i_n}} \ell \bmod \mathfrak{g}_{i_{n+1}}^* \\ &\rightarrow 0 \bmod \mathfrak{g}_{i_{n+1}}^* \text{ pour } t_{i_n} \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Donc  $q = 0 \bmod \mathfrak{g}_{i_{n+1}}^*$ , c'est-à-dire  $q \in \mathfrak{g}_{i_{n+1}}^*$  et  $\mathfrak{d}_{i_1}(q) = \dots = \mathfrak{d}_{i_n}(q) = \mathfrak{d}_{i_{n+1}}(q) = \mathfrak{d}$ . On n'a donc pas d'indice pour  $q$  jusqu'à  $i_n$ , c'est-à-dire les indices pour  $q$  vérifient  $i_n < j_1 \leq j_n$ . Si  $n \neq 1$ , ceci est une

contradiction au fait que  $i_1 = j_1$ . On peut donc supposer  $n = 1$  et  $i_1 < j_1$ . La suite du raisonnement est commune aux autres cas.

1b)(i) avec  $a \neq 0$

$$\begin{aligned} (\exp t_{i_n} d_{i_n})(\ell) &= \ell + \frac{1}{a}(e^{at_{i_n}} - 1)e_{i_n} \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^* \\ &\rightarrow \ell - \frac{1}{a}e_{i_n} \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^* \text{ pour } t_{i_n} \rightarrow -\infty \text{ si} \end{aligned}$$

$a > 0$  et pour  $t_{i_n} \rightarrow +\infty$  si  $a < 0$ . Donc

$$q = \ell - \frac{1}{a}e_{i_n} \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^*$$

et, pour tout  $d \in \mathfrak{d}_{i_n}(\ell) = \mathfrak{d}_{i_n}(q)$ ,

$$\begin{aligned} d(q) &= d(\ell) - \frac{1}{a}d(e_{i_n}) \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^* \\ &= \lambda(d)e_{i_n} - \frac{1}{a}\lambda(d)e_{i_n} \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^* \\ &= 0 \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^*. \end{aligned}$$

Ainsi  $\mathfrak{d}_{i_n}(q) = \mathfrak{d}_{i_n}(\ell) \subset \mathfrak{d}_{i_n+1}(q)$  et  $\mathfrak{d}_{i_n}(q) = \mathfrak{d}_{i_n+1}(q)$ . Donc le  $n^{\text{ième}}$  indice  $j_n$  pour  $q$  vérifie  $i_n < j_n$ .

$$2a) (\exp t_{i_n} d_{i_n})(\ell) = \operatorname{Re}\{e^{t_{i_n}(1+i\alpha)}(e'_{i_n} + ie''_{i_n})\} \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^*$$

$$\rightarrow 0 \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^* \text{ pour } t_{i_n} \rightarrow -\infty.$$

On continue comme dans le cas 1a) et on trouve  $n = 1$  et  $i_1 < j_1$ .

2b)(iii) avec  $c \neq 0$

$$\begin{aligned} (\exp t_{i_n} d_{i_n})(\ell) &= \ell + \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{c(1+i\alpha)}[e^{c(1+i\alpha)t_{i_n}} - 1](e'_{i_n} + ie''_{i_n})\right\} \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^* \\ &\rightarrow \ell - \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{c(1+i\alpha)}(e'_{i_n} + ie''_{i_n})\right\} \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^* \end{aligned}$$

pour  $t \rightarrow -\infty$  si  $c > 0$  et pour  $t \rightarrow +\infty$  si  $c < 0$ . Donc

$$q = \ell - \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{c(1+i\alpha)}(e'_{i_n} + ie''_{i_n})\right\} \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^*$$

et, pour tout  $d \in \mathfrak{d}_{i_n}(\ell) = \mathfrak{d}_{i_n}(q)$ ,

$$\begin{aligned} d(q) &= d(\ell) - \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{c(1+i\alpha)} d(e'_{i_n} + ie''_{i_n}) \right\} \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^* \\ &= \gamma(d) \operatorname{Re}(e'_{i_n} + ie''_{i_n}) - \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{c(1+i\alpha)} c\gamma(d)(1+i\alpha)(e'_{i_n} + ie''_{i_n}) \right\} \\ &\qquad \qquad \qquad \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^* \\ &= 0 \qquad \bmod \mathfrak{g}_{i_n+1}^*. \end{aligned}$$

Comme en 1b)(i) on en déduit que  $i_n < j_n$ .

Dans tous les cas on trouve donc  $i_n < j_n$ . Si  $\Omega_q$  est fermé, la proposition est démontrée. Sinon, on choisit  $q_1 \in \bar{\Omega}_q \setminus \Omega_q \subset \bar{\Omega}_\ell \setminus \Omega_\ell$ , selon le même procédé que précédemment. Puisque  $\ell = q \bmod \mathfrak{g}_{i_n}^*$  et que  $\mathfrak{d}_j(\ell) = \mathfrak{d}_j(q)$  pour  $j \leq i_n$ , on peut supposer que les débuts des bases coexponentielles de  $\mathfrak{d}$ , construites pour  $q$  et  $\ell$ , coïncident. Notons par  $f_i$ , resp.  $f'_i$  et  $f''_i$  la base de  $\mathfrak{d}$  construite pour  $q$ . On peut donc supposer  $f_{i_r} = d_{i_r}$ , resp.  $f'_{i_r} = d'_{i_r}$  et  $f''_{i_r} = d''_{i_r}$  pour  $r < n$ . Soit  $j_m$  le premier indice pour  $q$  tel que le paramètre correspondant tende vers l'infini lorsque  $g(T)(q)$  tend vers  $q_1$ . Comme précédemment nous pouvons supposer que les  $j_m - 1$  premières coordonnées de  $q$  et  $q_1$  coïncident et que les paramètres  $T$  correspondants sont nuls. Puisque  $q_1 \in \bar{\Omega}_q \subset \bar{\Omega}_\ell$ ,  $q_1$  est limite d'éléments de  $\Omega_\ell$ . Supposons à présent  $m < n$ . Donc  $j_m = i_m < i_n$ . Alors les débuts des bases coexponentielles coïncident et les  $j_m - 1$  premières coordonnées de  $\ell$ ,  $q$  et  $q_1$  coïncident, les paramètres correspondants pouvant être choisis nuls. Lorsque  $q_1$  s'écrit comme limite de  $g(S)(\ell)$ , on peut alors supposer que le paramètre correspondant à  $j_m$  tend vers l'infini, car sinon les  $j_m$  premières coordonnées de  $q_1$  coïncideraient avec les  $j_m$  premières coordonnées d'un élément de l'orbite de  $\ell$ , donc aussi avec les  $j_m$  premières coordonnées d'un élément de l'orbite de  $q$  (puisque  $j_m < i_n$ ), ce qui n'est pas le cas. Ceci contredit le caractère minimal de  $n$ . Cette contradiction implique  $m \geq n$ ,  $i_n < j_n \leq j_m$ . Soit à présent  $k_1, k_2, \dots$  les indices pour  $q_1$ . Un raisonnement analogue à celui qui précède montre que  $j_1 = k_1, \dots, j_{m-1} = k_{m-1}$  et  $j_m < k_m$ . Puisque tous les indices sont bornés par la dimension de  $\mathfrak{g}^*$  par exemple, le raisonnement précédent doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire on doit trouver une orbite fermée dans l'adhérence.

**7.5.** Remarquons que le résultat précédent reste vrai dans le cas étudié

par N. Conze, c'est-à-dire pour une représentation de type exponentiel d'un groupe exponentiel. Il est en particulier vrai pour une action exponentielle sur un groupe nilpotent.

**7.6.** Soit une action exponentielle sur un groupe exponentiel. Soit  $\ell \in \mathfrak{g}^*$  et désignons par  $\Omega_\ell$  l'orbite (généralisée) de  $\ell$ . D'après ([Lep. Lud.]),  $\hat{G}$  est homéomorphe à  $\mathfrak{g}^*/\text{Ad}^* G$ . De plus, la projection  $p : \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*/\text{Ad}^* G$  est une surjection continue ouverte. Puisque  $\Omega_\ell$  est un sous-espace saturé de  $\mathfrak{g}^*$  pour l'action de  $\text{Ad}^* G$ , on peut construire  $\Omega_\ell/\text{Ad}^* G$ . D'une part, cet espace peut être considéré comme sous-espace de  $\mathfrak{g}^*/\text{Ad}^* G$ . D'autre part, il peut être muni de la topologie d'espace quotient de  $\Omega_\ell$  par  $\text{Ad}^* G$ . Il est facile à voir que ces deux topologies coïncident. De plus, puisque la projection  $p$  est une surjection continue ouverte,  $\mathfrak{g}^*/\text{Ad}^* G$  et  $\Omega_\ell/\text{Ad}^* G$  sont des espaces localement compacts. En ce qui concerne  $\Omega_\ell/\text{Ad}^* G$ , on utilise encore le fait que  $\Omega_\ell$  est ouvert dans son adhérence, donc localement compact. De plus,  $\mathcal{D}$  agit sur  $\mathfrak{g}^*/\text{Ad}^* G$  par  $D^* \cdot (\text{Ad}^* G \cdot \ell) = \text{Ad}^* G \cdot (D^* \cdot \ell)$  puisque  $\text{Ad} G$  est un sous-groupe normal de  $\mathcal{D}$ .

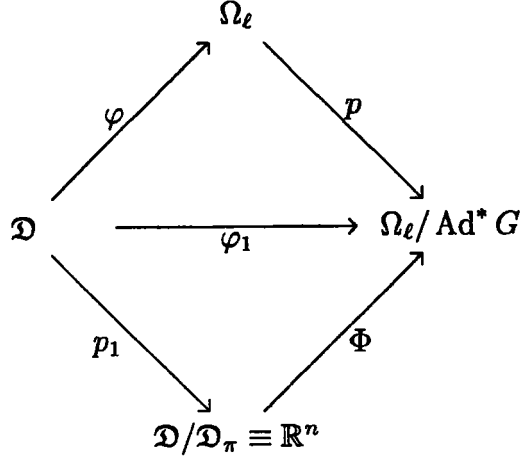
**7.7. Proposition :** Les espaces  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$  et  $\Omega_\ell/\text{Ad}^* G$  sont homéomorphes entre eux et homéomorphes à un espace  $\mathbb{R}^n$ . En particulier, l'espace  $\Omega_\ell/\text{Ad}^* G$  est séparé localement compact.

Démonstration : Remarquons d'abord que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D} &\longrightarrow \Omega_\ell \\ D &\longmapsto D^* \cdot \ell \end{aligned}$$

est continue. L'application  $\varphi$  est une surjection par construction et est ouverte grâce à un résultat de Hochschild ([Hoch.], I.2.5.). Munissons  $\mathfrak{d}$  d'une base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$ , complétée par une base de  $\mathfrak{d}_\pi$ . Grâce à cette base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  (fixée une fois pour toute), on voit que  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$  est homéomorphe à un espace  $\mathbb{R}^n$ . Considérons le schéma suivant :





On sait déjà que  $\varphi$  et  $p$  sont des surjections continues ouvertes. Il en est donc de même de  $\varphi_1 = p \circ \varphi$  et de  $p_1$ , projection de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$ . De plus, remarquons que

$$\begin{aligned} \text{Ker } \varphi_1 &= \{D \in \mathcal{D} \mid \text{Ad}^* G \cdot D^* \cdot \ell = D^* \cdot (\text{Ad}^* G \cdot \ell) = \text{Ad}^* G \cdot \ell\} \\ &= \mathcal{D}_\pi. \end{aligned}$$

Donc il existe une bijection  $\Phi$  unique qui rend le diagramme précédent commutatif. De plus,  $\Phi$  est une bijection continue ouverte, c'est-à-dire un homéomorphisme.

7.8. Pour  $f \in L^1(G)$ , définissons  $\text{supp } \hat{f}$  par

$$\text{supp } \hat{f} = \overline{\{\pi \in \hat{G} \mid \pi(f) \neq 0\}}^{\hat{G}}.$$

Supposons à présent  $\text{supp } \hat{f}$  compact et supposons l'orbite  $\Omega_\ell$  fermée. Puisque  $\Omega_\ell$  est saturé,  $\Omega_\ell/\text{Ad}^* G$  est fermé dans  $\mathfrak{g}^*/\text{Ad}^* G \cong \hat{G}$ . Donc  $\text{supp } \hat{f} \cap \Omega_\ell/\text{Ad}^* G$  est un compact fermé de  $\hat{G}$  et de  $\Omega_\ell/\text{Ad}^* G \cong \mathbb{R}^n$ . Finalement

$$\begin{aligned} \overline{\{D \in \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi \mid D\pi(f) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n} &= \overline{\{D \in \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi \mid D\pi(f) \neq 0\}}^{\Omega_\ell/\text{Ad}^* G} \\ &\subset \text{supp } \hat{f} \cap \Omega_\ell/\text{Ad}^* G \\ &\subset \Omega_\ell/\text{Ad}^* G \cong \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

et  $\overline{\{D \in \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi \mid D\pi(f) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n}$  est un compact fermé de  $\mathbb{R}^n$  (identifié à  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$  et à  $\Omega_\ell/\text{Ad}^* G$ ).

**7.9.** Dans la suite de ce chapitre, le groupe  $G$  sera supposé nilpotent. Dans ce cas, il existe dans  $\mathcal{S}(G)$  une unité approchée  $(g_\nu)_\nu$ , obtenue par calcul fonctionnel, telle que  $\text{supp } \hat{g}_\nu$  soit compact.

En effet, il existe une base de voisinages compacts  $K$  du neutre  $e$  de  $G$  tels que  $(K^n)_{K \downarrow 0, n \uparrow +\infty}$  soit encore une base de voisinages compacts de  $e$ . Soit alors  $f_K = f_K^* \in \mathcal{S}(G)$ ,  $f_K \geq 0$ ,  $\int f_K(x) dx = 1$ , tel que  $\text{supp } f_K \subset K$  et donc  $\text{supp } f_K^{*n} \subset K^n$ . On a  $\lim_{n, K} f_K^n * g = g$  dans  $\mathcal{S}(G)$ , pour tout  $g \in \mathcal{S}(G)$  ([Lud. Mol. 1]). Soit alors  $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $\varphi_n \equiv 0$  dans un petit voisinage de 0 et tel que  $\sup_{t \in C_n} |(\varphi_n(t) - t^n)^{(j)}| < \varepsilon_n$  pour  $j = 0, 1, \dots, (n-1)$  et  $\varepsilon_n$  tendant vers 0,  $C_n$  désignant un compact de  $\mathbb{R}$  admettant 0 comme point intérieur. D'après le calcul fonctionnel de Dixmier ([Dix. 2]) et Hulanicki ([Hu.]),  $\varphi_n\{f_K\} * g - f_K^n * g$  tend vers 0 dans  $\mathcal{S}(G)$  pour  $(n, K) \rightarrow (+\infty, 0)$ . Donc  $\varphi_n\{f_K\} * g$  tend vers  $g$  dans  $\mathcal{S}(G)$ . De plus, pour tout  $\pi \in \hat{G}$ ,

$$\pi(\varphi_n\{f_K\}) = \varphi_n(\pi(f_K)).$$

D'autre part, soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\varphi_n \equiv 0$  sur  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ . Par ([Dix. 3], 3.3.7.), il existe un compact  $C$  dans  $\hat{G}$  tel que  $\|\pi(f_K)\|_{\text{op}} < \varepsilon$  pour tout  $\pi$  hors de  $C$ . On en déduit alors que  $\pi(\varphi_n\{f_K\}) = \varphi_n(\pi(f_K)) = 0$  pour tout  $\pi$  hors de  $C$ , c'est-à-dire  $\text{supp } \widehat{\varphi_n\{f_K\}}$  est compact. Les  $\varphi_n\{f_K\}$  conviennent comme unité approchée  $(g_\nu)_\nu$ . Par 6.8., notons  $G_\nu(D, \cdot, \cdot)$  le noyau de l'opérateur  ${}^D\pi(g_\nu)$ . On sait que ce noyau est continu en  $D$ . Alors

$$\begin{aligned} & \overline{\{D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \mid G_\nu(D, \cdot, \cdot) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n} \\ &= \overline{\{D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \mid {}^D\pi(g_\nu) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

est un compact fermé de  $\mathbb{R}^n$  (identifié à  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$  et à  $\Omega_\ell/\text{Ad}^* G$ ), si l'orbite  $\Omega_\ell$  est fermée.

**7.10.** En complétant la base coexponentielle à  $\mathfrak{d}_\pi$  dans  $\mathfrak{d}$  par une base de  $\mathfrak{d}_\pi$ , nous pouvons identifier  $\mathfrak{D}$  à un espace  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$  à un sous-espace  $\mathbb{R}^n$  de  $\mathbb{R}^p$ . Pour éviter les confusions nous noterons dans la suite par  $F(D; \cdot, \cdot)$  le noyau de  ${}^D\pi(f)$  si  $D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \cong \mathbb{R}^n$  et par  $\tilde{F}(D; \cdot, \cdot)$  le noyau de  ${}^D\pi(f)$  si  $D \in \mathfrak{D} \cong \mathbb{R}^p$ . Pour des raisons techniques ultérieures, nous devons effectuer les modifications suivantes : Soit  $\psi$

une fonction  $C^\infty$  à support compact  $\mathcal{K}$  dans  $\mathbb{R}^p$  telle que

$$\psi \geq 0, \quad \psi(0) > 0, \quad \int_{\mathfrak{D}} \psi(D) dD = 1,$$

l'espace  $\mathfrak{D}$  identifié à  $\mathbb{R}^p$  étant muni de la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^p$ . Pour tout  $f \in L^1(G)$ , définissons

$$f_1 = \int_{\mathfrak{D}} f^{D'} \psi(D') dD'.$$

Si  $f \in \mathcal{S}(G)$ , soit  $\tilde{F}$  le noyau de  ${}^D\pi(f)$ ,  $D \in \mathfrak{D}$ , et évaluons le noyau de  ${}^D\pi(f_1)$  :

$$\begin{aligned} {}^D\pi(f_1) &= \int_{\mathfrak{D}} \pi(f^{D'D}) \psi(D') dD' \\ &= \int_{\mathfrak{D}} {}^{D''}\pi(f) \psi(D''D^{-1}) \delta(D, D'') dD'', \end{aligned}$$

$\delta(D, D'')$  désignant le Jacobien du changement de variables  $D'' = D'D$ . Donc  ${}^D\pi(f_1)$  a pour noyau

$$\int_{\mathfrak{D}} \tilde{F}(D''; \cdot; \cdot) \psi(D''D^{-1}) \delta(D, D'') dD'' = \tilde{F}_1(D; \cdot; \cdot).$$

Si on se limite à  $D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \cong \mathbb{R}^n$ , le noyau

$$F_1(D; \cdot; \cdot) = \tilde{F}_1|_{\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi}(D; \cdot; \cdot)$$

est à support compact en  $D$ , si tel est le cas pour  $F$ . En effet, si le support (en  $D$ ) de  $F$  est contenu dans le compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$ , alors le support (en  $D$ ) de  $\tilde{F}$  est contenu dans  $K \cdot \mathfrak{D}_\pi$ . Si de plus le support de  $\psi$  est contenu dans le compact  $\mathcal{K}$  de  $\mathfrak{D} \cong \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \cdot \mathfrak{D}_\pi$ , on voit facilement que le support de  $F_1$  est contenu dans  $\mathcal{K}^{-1} \cdot K \text{ mod } \mathfrak{D}_\pi$ . Or, puisque  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \cong \mathbb{R}^n$  est identifié à un sous-espace fermé de  $\mathfrak{D} \cong \mathbb{R}^p$ ,  $\mathcal{K}$ ,  $K$  et  $\mathcal{K}^{-1} \cdot K$  sont des compacts de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathcal{K}^{-1} \cdot K \text{ mod } \mathfrak{D}_\pi$  est un compact de  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \cong \mathbb{R}^n$ .

7.11. Soit  $K$  un compact fixe de  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \cong \mathbb{R}^n$  et définissons

$$\mathcal{I}_K = \left\{ f \in \mathcal{S}(G) \mid \overline{\{D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \mid {}^D\pi(f) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n} \subset K \right\}$$

et

$$\mathcal{I} = \left\{ f \in \mathcal{S}(G) \mid \overline{\{D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \mid {}^D\pi(f) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n} \text{ est compact} \right\}.$$

Donc  $\mathcal{I} = \bigcup_K \mathcal{I}_K$ . On vérifie facilement que  $\mathcal{I}$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ . En effet, si par exemple  $f \in \mathcal{I}_K$ , alors

$$\begin{aligned} {}^D\pi(f^{D_0}) \neq 0 &\Rightarrow D_0 \cdot D \in K \cdot \mathfrak{D}_\pi \\ &\Rightarrow D \in D_0^{-1} \cdot K \bmod \mathfrak{D}_\pi \end{aligned}$$

ce qui est un compact de  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$  par continuité de l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi &\longrightarrow \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \\ D \bmod \mathfrak{D}_\pi &\longmapsto D_0^{-1} \cdot D \bmod \mathfrak{D}_\pi. \end{aligned}$$

D'où  $f^{D_0} \in \mathcal{I}$ .

Remarquons en plus que  $\mathcal{I} \not\subset \text{Ker } \pi$ . En effet, il suffit de prendre  $F \in \mathcal{ES}(\mathbb{R}^n, G/H \times G/H)$  à support compact en  $D \in \mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi \cong \mathbb{R}^n$  et tel que  $F(0; \cdot, \cdot) \neq 0$ . Par (6.7.), il existe  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  ${}^D\pi(f)$  ait  $F(D; \cdot, \cdot)$  comme noyau pour tout  $D$ . Par construction,  $f \in \mathcal{I}$  et  $f \notin \text{Ker } \pi$ .

**7.12. Proposition :** Soit un groupe de Lie nilpotent muni d'une action exponentielle. Soit  $\pi \in \hat{G}$  et soit  $\Omega$  l'orbite (généralisée) de  $\mathfrak{g}^*$  associée à  $\pi$ . Notons par

$$\text{Ker } \Omega = \{f \in L^1(G) \mid {}^D\pi(f) = 0, \quad \forall D \in \mathfrak{D}\}$$

(en identifiant l'orbite avec les représentations correspondantes). On a

$$\mathcal{I} \cdot \mathcal{I} \cdot \text{Ker } \Omega \cdot \mathcal{I} \cdot \mathcal{I} \subset \overline{\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)}.$$

Démonstration : Soit  $\varphi \in L^\infty(G)$  tel que  $\langle \varphi, \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G) \rangle = 0$  et soit  $K$  un compact fixe de  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$ . Par Hahn-Banach il suffit de montrer que

$$\langle \varphi, \mathcal{I}_K \cdot \mathcal{I}_K \cdot \text{Ker } \Omega \cdot \mathcal{I}_K \cdot \mathcal{I}_K \rangle = 0.$$

Soient  $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathcal{I}_K$  et  $f \in \mathcal{S}(G)$ . Notons par  $G_1, G_2, G_3, G_4, F$ , resp. par  $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \tilde{G}_3, \tilde{G}_4, \tilde{F}$  les noyaux de  $g_1, g_2, g_3, g_4, f$  pour  ${}^D\pi$  avec

$D \in \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$ , resp.  $D \in \mathcal{D}$ . Le noyau de  $g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4$  est alors donné par  $G_1 \circ G_2 \circ F \circ G_3 \circ G_4$ , resp.  $\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3 \circ \tilde{G}_4$  avec, par exemple,

$$\begin{aligned} & G_1 \circ G_2 \circ F \circ G_3 \circ G_4(D, x, y) \\ = & \int G_1(D, x, x_1)G_2(D, x_1, x_2)F(D, x_2, x_3)G_3(D, x_3, x_4)G_4(D, x_4, y) \\ & dx_1 dx_2 dx_3 dx_4. \end{aligned}$$

De même pour  $\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3 \circ \tilde{G}_4$ . On a donc

$$\text{supp}(G_1 \circ G_2 \circ F \circ G_3 \circ G_4) \subset K \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k,$$

resp.

$$\text{supp}(\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3 \circ \tilde{G}_4) \subset (K \cdot \mathcal{D}_\pi) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$$

puisque'il en est ainsi des  $G_i$ , resp.  $\tilde{G}_i$ . Soit à présent  $\psi$  comme en 7.10. et effectuons la construction de 7.10. pour la fonction  $g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4$ . Donc  $({}^D\pi)((g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4)_1)$  a pour noyau

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}} \tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3 \circ \tilde{G}_4(D''; \cdot, \cdot) \psi(D'' D^{-1}) \delta(D, D'') dD'' \\ & = (\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3 \circ \tilde{G}_4)_1(D) \end{aligned}$$

et la restriction de ce noyau à  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$  est à support dans un compact fixe  $K_1$  de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi \cong \mathbb{R}^n$ . Puisque  $\psi$  est une fonction  $C^\infty$ , la restriction de ce noyau à  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$  est un élément de  $\mathcal{S}(K_1; \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k) = \mathcal{D}(K_1, \mathcal{S}(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k))$ . On définit une forme linéaire continue  $\mu$  sur  $\mathcal{S}(K_1; \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  par : Soit  $F \in \mathcal{S}(K_1; \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$  et soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  un rétracte quelconque de  $F$  dans  $\mathcal{S}(G)$ , c'est-à-dire tel que  ${}^D\pi(f)$  ait pour noyau  $F(D; \cdot, \cdot)$  pour tout  $D \in \mathcal{D}/\mathcal{D}_\pi$ . On définit  $\mu$  par  $\langle \mu, F \rangle = \langle \varphi, f \rangle$ . La forme linéaire  $\mu$  est bien définie par 6.7. et 6.3. et par le fait que si  $f_1$  et  $f_2$  ont même noyau,  $f_1 - f_2 \in \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  et  $\langle \varphi, f_1 - f_2 \rangle = 0$ . La continuité résulte de 6.8. et du fait que la convergence dans  $\mathcal{S}(G)$  entraîne la convergence pour la topologie de  $L^1(G)$ . Par caractérisation des formes linéaires continues sur  $\mathcal{S}(K_1; \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ ,  $\mu$  est de la forme ([Sch. 2], p. 239)

$$\langle \mu, F \rangle = \sum_{\text{finie}} \int_{K_1 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \tau(D, x, y) D_{D, x, y} F(D, x, y) dD dx dy$$

où les  $\tau$  sont des fonctions continues à croissance modérée et où  $D_{D,x,y}$  est de la forme  $\left(\frac{\partial}{\partial D}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\gamma$ .

Définissons à présent une nouvelle forme linéaire sur  $L^1(G)$  par

$$\langle \varphi_1, f \rangle = \langle \varphi, (g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4)_1 \rangle.$$

Si  $f \in \mathcal{S}(G)$ , on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1, f \rangle &= \langle \mu, (\tilde{G}_1 \circ \tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3 \circ \tilde{G}_4)_1 \Big|_{\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi} \rangle \\ &= \sum_{\text{finie}} \int_{K_1 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \tau(D, x, y) D_{D,x,y} \int_{K_2} \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \tilde{G}_1(D'', x, x') \\ &\quad \tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3(D'', x', y') \tilde{G}_4(D'', y', y) \psi(D'' D^{-1}) \delta(D, D'') \\ &\quad dx' dy' dD'' dx dy dD. \end{aligned}$$

En effet, l'intégrale en  $D''$  peut se limiter à un compact  $K_2$  de  $\mathfrak{D}$ , puisque  $\psi$  est à support compact dans  $\mathfrak{D}$  et que  $D$  parcourt le compact  $K_1$  de  $\mathfrak{D}/\mathfrak{D}_\pi$  (identifié à un sous-espace fermé de  $\mathfrak{D}$  grâce à une base coexponentielle). Montrons qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$|\langle \varphi_1, f \rangle| \leq C \cdot \sup_{D \in K_2} \|\pi(D)\|_{\text{op}} \leq C \|f\|_1, \forall f \in \mathcal{S}(G).$$

En effet,

$$\begin{aligned} &|\langle \varphi_1, f \rangle| \\ &\leq \sum \int_{K_2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left[ \int_{K_1 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} |\tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3(D'', x', y')| \cdot \left| \tau(D, x, y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{\partial}{\partial D}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\gamma \psi(D'' D^{-1}) \delta(D, D'') \tilde{G}_1(D'', x, x') \tilde{G}_4(D'', y', y) \right| \right. \\ &\quad \left. dD dx dy \right] dD'' dx' dy' \\ &\leq \|\tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3(D'', x', y')\|_{2(D'', x', y')} \\ &\quad \cdot \sum \left\{ \int_{K_2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left[ \int_{K_1 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} |\tau(D, x, y)| \left( \left(\frac{\partial}{\partial D}\right)^\alpha \psi(D'' D^{-1}) \delta(D, D'') \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\gamma \tilde{G}_1(D'', x, x') \tilde{G}_4(D'', y', y) \right] dD dx dy \right\}^2 dD'' dx' dy' \Big|^{1/2}. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
 & \int_{K_2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left[ \int_{K_1 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left| \tau(D, x, y) \left( \left( \frac{\partial}{\partial D} \right)^\alpha \psi(D'' D^{-1}) \delta(D, D'') \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\gamma \tilde{G}_1(D'', x, x') \tilde{G}_4(D'', y', y) \right| dD dx dy \right]^2 dD'' dx' dy' \\
 & \leq \sup_{(D'', x', y') \in K_2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left[ \int_{K_1 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left| \tau(D, x, y) \left( \left( \frac{\partial}{\partial D} \right)^\alpha \psi(D'' D^{-1}) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \delta(D, D'') \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\gamma \tilde{G}_1(D'', x, x') \tilde{G}_4(D'', y', y) \right| dD dx dy \right] \\
 & \quad \cdot \text{mes } K_2 \cdot \text{mes } K_1 \cdot \sup_{D \in K_1, D'' \in K_2} \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left| \tau(D, x, y) \right. \\
 & \quad \left. \left( \left( \frac{\partial}{\partial D} \right)^\alpha \psi(D'' D^{-1}) \delta(D, D'') \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\gamma \tilde{G}_1(D'', x, x') \right. \\
 & \quad \left. \tilde{G}_4(D'', y', y) \right| dx dy dx' dy'.
 \end{aligned}$$

Par 6.9., l'application

$$\begin{aligned}
 (D, D'') & \longmapsto \left| \left( \frac{\partial}{\partial D} \right)^\alpha \psi(D'' D^{-1}) \delta(D, D'') \right| \cdot \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left| \tau(D, x, y) \right. \\
 & \quad \left. \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\gamma \tilde{G}_1(D'', x, x') \tilde{G}_4(D'', y', y) \right| dx dy dx' dy'
 \end{aligned}$$

est continue en  $D \times D''$ , donc bornée sur  $K_1 \times K_2$ . D'autre part,

$$\begin{aligned}
 & \sup_{(D'', x', y') \in K_2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left[ \int_{K_1 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left| \tau(D, x, y) \left( \left( \frac{\partial}{\partial D} \right)^\alpha \psi(D'' D^{-1}) \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \delta(D, D'') \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\gamma \tilde{G}_1(D'', x, x') \tilde{G}_4(D'', y', y) \right| dD dx dy \right] \\
 & \leq \text{mes } K_1 \sup_{D \in K_1, D'' \in K_2} \sup_{(x', y') \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left[ \left| \left( \frac{\partial}{\partial D} \right)^\alpha \psi(D'' D^{-1}) \delta(D, D'') \right| \right. \\
 & \quad \cdot \int_{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k} \left| \tau(D, x, y) (1 + \|x\|^2)^M (1 + \|y\|^2)^M \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^\beta \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^\gamma \right. \\
 & \quad \left. \left[ \tilde{G}_1(D'', x, x') \tilde{G}_4(D'', y', y) \right] \right| \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^M} \frac{1}{(1 + \|y\|^2)^M} dx dy \left. \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_1 \cdot \sup_{D, D''} \sup_{x, x', y, y'} \left| \tau(D, x, y) (1 + \|x\|^2)^M (1 + \|y\|^2)^M \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\gamma \right. \\ &\quad \left. \tilde{G}_1(D'', x, x') \tilde{G}_4(D'', y', y) \right| \\ &\leq C_2 \end{aligned}$$

par 6.9., puisque  $D$  et  $D''$  parcourent des compacts. Donc

$$\begin{aligned} |\langle \varphi_1, f \rangle| &\leq C_3 \cdot \|\tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3(D'', x', y')\|_{2(D'', x', y')} \\ &\leq C_3 \cdot \text{mes } K_2 \cdot \sup_{D'' \in K_2} \|\tilde{G}_2 \circ \tilde{F} \circ \tilde{G}_3(D'', x', y')\|_{2(x', y')} \\ &= C_3 \cdot \text{mes } K_2 \cdot \sup_{D'' \in K_2} \|\|^{D''} \pi(g_2) \|^{D''} \pi(f) \|^{D''} \pi(g_3)\|_{\text{HS}} \end{aligned}$$

puisque la norme de Hilbert-Schmidt d'un opérateur coïncide avec la norme  $L^2$  de son noyau. Dans les calculs précédents nous avons mis entre parenthèses les coordonnées sur lesquelles portent les normes  $L^2$ . Finalement,

$$|\langle \varphi_1, f \rangle| \leq C_4 \cdot \sup_{D'' \in K_2} [\|\|^{D''} \pi(g_2)\|_{\text{HS}} \|\|^{D''} \pi(g_3)\|_{\text{HS}}] \cdot \sup_{D'' \in K_2} \|\|^{D''} \pi(f)\|_{\text{op}}.$$

Comme  $\|\|^{D''} \pi(g_2)\|_{\text{HS}} = \|\tilde{G}_2(D'', \dots)\|_2$  et que cette norme est bornée par 6.9. pour  $D \in K_2$ , de même que pour  $g_3$ , on trouve bien une majoration de la forme

$$|\langle \varphi_1, f \rangle| \leq C \cdot \sup_{D \in K_2} \|\|^{D} \pi(f)\|_{\text{op}} \leq C \cdot \|f\|_1$$

pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ . Puisque  $\mathcal{S}(G)$  est dense dans  $L^1(G)$  et que la forme linéaire  $\varphi_1$  est définie et continue sur  $L^1(G)$ , l'inégalité précédente reste vraie pour tout  $f \in L^1(G)$ . En particulier,  $f \in \text{Ker } \Omega$  entraîne  $\|^{D} \pi(f) = 0$  pour tout  $D$ , donc  $\langle \varphi_1, f \rangle = 0$ .

Pour tout  $f \in \text{Ker } \Omega$  on a donc

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \varphi_1, f \rangle \\ &= \langle \varphi, (g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4)_1 \rangle \\ &= \int_{\mathcal{K}} \int_G \varphi(x) (g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4)^D(x) \psi(D) dx dD. \end{aligned}$$

Par continuité de l'application

$$D \longmapsto \int_G \varphi(x) (g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4)^D(x) dx,$$



([Lud. Mol. 1], 9.7. et densité de  $\mathcal{S}(G)$  dans  $L^1(G)$ ), on en déduit, en choisissant des fonctions  $\psi$  dont les supports deviennent de plus en plus petits autour de l'origine, que

$$\int_G \varphi(x)(g_1 * g_2 * f * g_3 * g_4)(x)dx = 0.$$

Ceci prouve la proposition.

**7.13. Corollaire :** Sous les mêmes hypothèses qu'en 7.12.

$$\bar{\mathcal{I}} \cdot \bar{\mathcal{I}} \cdot \text{Ker } \Omega \cdot \bar{\mathcal{I}} \cdot \bar{\mathcal{I}} \subset \overline{\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)}$$

les adhérences étant prises dans  $L^1(G)$ .

**7.14. Théorème :** Soit une action exponentielle sur un groupe de Lie nilpotent. Soit  $\Omega$  une orbite (généralisée) fermée dans  $\mathfrak{g}^*$ . Alors

$$\overline{\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} = \text{Ker } \Omega.$$

Démonstration : Par 7.9., il suffit de faire parcourir par  $g_\nu \in \mathcal{S}(G)$  une unité approchée telle que  $\text{supp } \hat{g}_\nu$  soit compact dans  $\hat{G}$ . Alors  $g_\nu \in \mathcal{I}$  et, pour tout  $f \in \text{Ker } \Omega$ ,

$$g_\nu * g_\nu * f * g_\nu * g_\nu \in \mathcal{I} \cdot \mathcal{I} \cdot \text{Ker } \Omega \cdot \mathcal{I} \cdot \mathcal{I} \subset \overline{\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)}.$$

Il suffit alors de passer à la limite en  $\nu$ .

**7.15.** Soit  $\Omega$  une orbite (généralisée) fermée dans  $\mathfrak{g}^*$ . Donc  $\Omega / \text{Ad}^* G$  est fermé dans  $\hat{G} \equiv \mathfrak{g}^* / \text{Ad}^* G \equiv \text{Prim}_* L^1(G) \equiv \text{Prim } \mathcal{S}(G)$  ([Lud. 7]). Alors il existe un idéal minimal  $j(\Omega)$  dans  $\mathcal{S}(G)$  et un idéal minimal fermé  $\tilde{j}(\Omega)$  dans  $L^1(G)$  tels que  $h(j(\Omega)) = h(\tilde{j}(\Omega)) = \Omega$  et tels que  $j(\Omega)$ , resp.  $\tilde{j}(\Omega)$ , soit contenu dans tout idéal  $I$  de  $\mathcal{S}(G)$ , resp.  $L^1(G)$  vérifiant  $h(I) \subset \Omega$ . D'après ([Lud. 7]) et ([Lud. Ro. Sa.]),  $j(\Omega)$ , resp.  $\tilde{j}(\Omega)$  est engendré dans  $\mathcal{S}(G)$ , resp.  $L^1(G)$  par l'ensemble des fonctions  $\varphi\{f\}$  où  $f = f^* \in \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$ ,  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  identiquement nul dans un voisinage de 0 et où  $\varphi\{f\}$  est obtenu par le calcul fonctionnel de Dixmier ([Dix. 2] et [Hu.]). En particulier,  $j(\Omega) \subset \tilde{j}(\Omega)$  et  $\overline{L^1(G) * j(\Omega) * L^1(G)}^{L^1(G)} \subset \tilde{j}(\Omega)$ . D'autre part, puisque  $\overline{L^1(G) * j(\Omega) * L^1(G)}^{L^1(G)}$  est un idéal fermé de  $L^1(G)$  tel que  $h(\overline{L^1(G) * j(\Omega) * L^1(G)}^{L^1(G)}) = \Omega$ , on a nécessairement

$$\tilde{j}(\Omega) = \overline{L^1(G) * j(\Omega) * L^1(G)}^{L^1(G)}.$$

**7.16. Théorème :** Soit une action exponentielle sur un groupe de Lie nilpotent. Soit  $\Omega$  une orbite fermée dans  $\mathfrak{g}^*$ . Alors il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que

$$\left(\text{Ker } \Omega / \tilde{j}(\Omega)\right)^M = \{0\}$$

c'est-à-dire l'algèbre  $\text{Ker } \Omega / \tilde{j}(\Omega)$  est nilpotente.

Démonstration : Par ([Lud. 7]) il existe, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  un  $M \in \mathbb{N}$  tel que

$$\left(\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)\right)^M \subset \overline{j(\Omega)}^N \subset \overline{j(\Omega)}^{L^1(G)} \subset \tilde{j}(\Omega).$$

Ici  $-N$  désigne l'adhérence pour la norme

$$\|f\|_{N,N} = \sum_{|\alpha| \leq N} \int_G |D^\alpha * f(x)| \omega(x)^N dx$$

(voir [Lud. 7]). D'où, puisque  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  est dense dans  $\text{Ker } \Omega$  et que  $\tilde{j}(\Omega)$  est fermé, on a  $(\text{Ker } \Omega)^M \subset \tilde{j}(\Omega)$  et  $(\text{Ker } \Omega / \tilde{j}(\Omega))^M = \{0\}$ .

**7.17. Remarques :** a) Dans ([Lud. 5]) Ludwig démontre un résultat analogue pour  $\text{Ker } \pi$ ,  $\pi$  désignant une représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie nilpotent.

b) Les résultats de cette partie dépendent fortement de l'application du calcul fonctionnel de Dixmier dans le cas des groupes de Lie nilpotents.

c) En fait le dernier résultat est une généralisation de la propriété de synthèse spectrale.

d) D. Poguntke a établi des résultats analogues pour d'autres groupes et d'autres actions : Dans ([Pog. 1]) il démontre le résultat pour une orbite d'une action nilpotente sur un groupe nilpotent. Dans ([Pog. 2]) il s'agit de l'action d'un groupe de la forme  $T \rtimes M$ , où  $T$  est compact abélien et  $M$  un groupe de Lie nilpotent connexe, simplement connexe, sur un groupe de Lie nilpotent connexe.

# Chapitre 8

## Idéaux $\mathfrak{D}$ -invariants maximaux et propriété de Wiener

**8.1.** Soit  $G$  un groupe de Lie nilpotent. D'après Leptin ([Lep.]) et Ludwig ([Lud. 7]) les algèbres  $L^1(G)$  et  $\mathcal{S}(G)$  possèdent la propriété de Wiener, c'est-à-dire tout idéal fermé propre est contenu dans le noyau d'une représentation unitaire irréductible. De plus ces noyaux coïncident avec les idéaux maximaux de l'algèbre. Supposons à présent le groupe de Lie nilpotent  $G$  soumis à une action exponentielle et considérons uniquement les idéaux invariants sous cette action. Dans ce chapitre nous déterminerons les idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants maximaux et nous démontrerons l'équivalent de la propriété de Wiener, à la fois pour l'algèbre  $L^1(G)$  et pour l'algèbre  $\mathcal{S}(G)$ . Rappelons que dans notre cas les espaces topologiques  $\mathfrak{g}^*/\text{Ad}^* G$ ,  $\hat{G}$ ,  $\text{Prim}_* L^1(G)$  et  $\text{Prim } \mathcal{S}(G)$  sont homéomorphes et peuvent être identifiés. On en déduit les propositions suivantes :

**8.2. Proposition :** Soit  $\Omega$  une orbite généralisée pour l'action de  $\mathfrak{D}$  sur  $\mathfrak{g}^*$ . Alors  $\text{Ker } \Omega = \text{Ker } \bar{\Omega}$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant fermé propre de  $L^1(G)$ .

Démonstration : Evident.

**8.3. Proposition :** Soit  $\pi = \pi_\ell \in \hat{G}$  tel que  $\text{Ker } \Omega \subset \text{Ker } \pi_\ell$ . Alors  $\ell \in \bar{\Omega}$ .

Démonstration : Evident.

**8.4. Définition** : Soit  $I$  un idéal de  $L^1(G)$ , resp.  $\mathcal{S}(G)$ . On dit que  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant si  $f \in I$  et  $D \in \mathfrak{D}$  entraîne  $f^D \in I$ .

**8.5. Théorème** : Les idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants maximaux de  $L^1(G)$  coïncident avec les noyaux  $\text{Ker } \Omega$  correspondant aux orbites généralisées fermées  $\Omega$  de  $\mathfrak{g}^*$ .

Démonstration : Supposons l'orbite  $\Omega = \bar{\Omega}$  fermée et soit  $M$  un idéal fermé propre  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $L^1(G)$  tel que  $\text{Ker } \Omega \subset M$ . Par la propriété de Wiener, il existe  $\pi = \pi_\ell \in \hat{G}$  tel que  $\text{Ker } \Omega \subset M \subset \text{Ker } \pi_\ell$ . Par 8.3.,  $\ell \in \bar{\Omega} = \Omega$  et  $\Omega = \Omega_\ell$ . D'autre part, puisque  $M$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant,

$$\text{Ker } \Omega \subset M \subset \bigcap_{D \in \mathfrak{D}} (\text{Ker } \pi_\ell)^D = \bigcap_{D \in \mathfrak{D}} (\text{Ker } {}^D \pi_\ell) = \text{Ker } \Omega_\ell = \text{Ker } \Omega.$$

Par conséquent,  $M = \text{Ker } \Omega$ . Donc  $\text{Ker } \Omega$  est maximal. Réciproquement, soit  $M$  un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant maximal. Par le même raisonnement que précédemment, il existe  $\pi = \pi_\ell \in \hat{G}$  tel que

$$M \subset \bigcap_{D \in \mathfrak{D}} (\text{Ker } {}^D \pi_\ell) = \text{Ker } \Omega_\ell$$

c'est-à-dire tel que  $M = \text{Ker } \Omega_\ell$  par maximalité. Supposons  $\Omega_\ell$  non fermé. D'après 7.4. il existe  $p \in \bar{\Omega}_\ell \setminus \Omega_\ell$  tel que l'orbite correspondante  $\Omega_p \subset \bar{\Omega}_\ell$  soit fermée. Donc  $M = \text{Ker } \Omega_\ell \subset \text{Ker } \Omega_p$  et, par maximalité,  $\text{Ker } \Omega_\ell = \text{Ker } \Omega_p$ . Par 8.3.,  $\ell \in \bar{\Omega}_p = \Omega_p$  et  $\Omega_\ell = \Omega_p$  contrairement à l'hypothèse  $p \in \bar{\Omega}_\ell \setminus \Omega_\ell$ . Donc  $\Omega_\ell$  est fermé.

**8.6. Théorème** : Tout idéal fermé propre  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $L^1(G)$  est contenu dans un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant maximal de  $L^1(G)$ .

Démonstration : Soit  $I$  un idéal fermé propre  $\mathfrak{D}$ -invariant. Par la propriété de Wiener, il existe  $\pi = \pi_\ell \in \hat{G}$  tel que  $I \subset \text{Ker } \pi_\ell$  et même  $I \subset \bigcap_{D \in \mathfrak{D}} \text{Ker } ({}^D \pi_\ell) = \text{Ker } \Omega_\ell$ . Si  $\Omega_\ell$  n'est pas fermé, on prend, par 7.4.,  $p \in \bar{\Omega}_\ell \setminus \Omega_\ell$  tel que  $\Omega_p$  soit fermé, c'est-à-dire tel que  $\text{Ker } \Omega_p$  soit maximal. Alors  $I \subset \text{Ker } \Omega_\ell = \text{Ker } \bar{\Omega}_\ell \subset \text{Ker } \Omega_p$ .

**8.7. Théorème** : Les idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants maximaux de  $\mathcal{S}(G)$  coïncident avec les noyaux  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  correspondant aux orbites généralisées fermées  $\Omega$  de  $\mathfrak{g}^*$ . En particulier, ils sont obtenus par restriction à  $\mathcal{S}(G)$  des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants maximaux de  $L^1(G)$ .

Démonstration : Soit  $I$  un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant maximal de  $\mathcal{S}(G)$ . En particulier,  $I$  est fermé propre dans  $\mathcal{S}(G)$ . Soit  $J = \bar{I}^{L^1(G)}$  l'idéal fermé  $\mathfrak{D}$ -invariant engendré par  $I$  dans  $L^1(G)$ . Par la propriété de Wiener pour  $\mathcal{S}(G)$  ([Lud. 7]), il existe  $\pi = \pi_p \in \hat{G}$  tel que  $I \subset \text{Ker } \pi_p \cap \mathcal{S}(G)$ . Donc

$$J = \bar{I}^{L^1(G)} \subset \overline{(\text{Ker } \pi_p \cap \mathcal{S}(G))}^{L^1(G)} \subset \text{Ker } \pi_p \neq L^1(G)$$

et  $J$  est propre. Par 8.6., il existe  $\Omega_\ell$  fermé dans  $\mathfrak{g}^*$  tel que  $J \subset \text{Ker } \Omega_\ell$ . Alors  $I \subset (\text{Ker } \Omega_\ell \cap \mathcal{S}(G))$  et même  $I = (\text{Ker } \Omega_\ell \cap \mathcal{S}(G))$  par maximalité de  $I$ .

Réciproquement, soit  $\Omega_p$  fermé et supposons qu'il existe un idéal  $I$  fermé propre  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$  tel que  $(\text{Ker } \Omega_p \cap \mathcal{S}(G)) \subset I$ . Par le raisonnement de la première partie, il existe  $\Omega_\ell$  fermé tel que

$$\text{Ker } \Omega_p \cap \mathcal{S}(G) \subset I \subset \text{Ker } \Omega_\ell \cap \mathcal{S}(G).$$

D'où

$$\text{Ker } \Omega_p = \overline{\text{Ker } \Omega_p \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} \subset \overline{\text{Ker } \Omega_\ell \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} = \text{Ker } \Omega_\ell,$$

par 7.14., les orbites  $\Omega_p$  et  $\Omega_\ell$  étant fermées. Par maximalité de  $\text{Ker } \Omega_p$  (8.5.) dans  $L^1(G)$ ,  $\text{Ker } \Omega_p = \text{Ker } \Omega_\ell$  et  $(\text{Ker } \Omega_p \cap \mathcal{S}(G)) = I$ . Ceci prouve que  $(\text{Ker } \Omega_p \cap \mathcal{S}(G))$  est maximal si  $\Omega_p$  est fermé.

**8.8. Proposition** : Les applications

$$\Omega \longmapsto \text{Ker } \Omega, \quad \text{resp.} \quad \Omega \longmapsto \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$$

sont des bijections entre l'ensemble des orbites fermées de  $\mathfrak{g}^*$  et l'ensemble des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants maximaux de  $L^1(G)$ , resp.  $\mathcal{S}(G)$ .

Démonstration : Vu 8.5. et 8.7., il suffit de démontrer l'injectivité. Supposons

$$\text{Ker } \Omega_\ell \cap \mathcal{S}(G) = \text{Ker } \Omega_p \cap \mathcal{S}(G).$$

Puisque  $\Omega_\ell$  et  $\Omega_p$  sont des orbites fermées, par hypothèse, on a par 7.14.

$$\text{Ker } \Omega_\ell = \overline{\text{Ker } \Omega_\ell \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} = \overline{\text{Ker } \Omega_p \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} = \text{Ker } \Omega_p.$$

Par 8.3.,  $p \in \bar{\Omega}_\ell = \Omega_\ell$  et  $\Omega_p = \Omega_\ell$ . Ceci prouve l'injectivité.

**8.9. Théorème :** Tout idéal fermé propre  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$  est contenu dans un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant maximal de  $\mathcal{S}(G)$ .

Démonstration : La première partie de la démonstration de 8.7. convient. Il suffit de remplacer l'égalité  $I = \text{Ker } \Omega_\ell \cap \mathcal{S}(G)$  par une inclusion.

**8.10. Remarque :** Le raisonnement de 8.7. pour montrer que  $J = \bar{I}^{L^1(G)}$  est propre dans  $L^1(G)$ , prouve également que si  $I$  est un idéal de  $\mathcal{S}(G)$  dense dans  $L^1(G)$  (pour la topologie de  $L^1(G)$ ), alors  $I$  est également dense dans  $\mathcal{S}(G)$  pour la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ .

# Chapitre 9

## Idéaux $\mathfrak{D}$ -premiers

**9.1.** Dans ([Lud. 5]) J. Ludwig rappelle la définition des idéaux premiers et montre que si  $G$  est nilpotent, les idéaux fermés premiers de  $L^1(G)$  coïncident avec les noyaux des représentations unitaires irréductibles. Dans ce chapitre nous supposons que le groupe nilpotent  $G$  est soumis à une action exponentielle et nous introduisons les idéaux  $\mathfrak{D}$ -premiers (en travaillant avec des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants). Nous montrons que les idéaux  $\mathfrak{D}$ -premiers de  $L^1(G)$  coïncident avec les noyaux  $\text{Ker } \Omega$ ,  $\Omega$  désignant une orbite (non nécessairement fermée) dans  $\mathfrak{g}^*$ . Le résultat pour  $L^1(G)$  découle du résultat correspondant pour  $\mathcal{S}(G)$ .

**9.2. Définition :** Un idéal propre  $\mathfrak{D}$ -invariant  $I$  de  $L^1(G)$ , resp.  $\mathcal{S}(G)$ , est appelé  *$\mathfrak{D}$ -premier* si et seulement si quels que soient les idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants  $I_1$  et  $I_2$  de  $L^1(G)$ , resp.  $\mathcal{S}(G)$ ,

$$I_1 \cdot I_2 \subset I \Rightarrow I_1 \subset I \text{ ou } I_2 \subset I.$$

**9.3. Proposition :** Pour toute orbite  $\Omega$  dans  $\mathfrak{g}^*$ ,  $\text{Ker } \Omega$  est un idéal fermé  $\mathfrak{D}$ -premier de  $L^1(G)$ .

Démonstration : Il est évident que  $\text{Ker } \Omega$  est un idéal fermé  $\mathfrak{D}$ -invariant. Posons  $\Omega = \Omega_\ell$  et soit  $\pi = \pi_\ell$  la représentation irréductible correspondante. Soient  $I_1$  et  $I_2$  des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants tels que  $I_1 \not\subset \text{Ker } \Omega$  et  $I_2 \not\subset \text{Ker } \Omega$ . Puisque  ${}^D\pi(f) = \pi(f^D)$  et que  $I_1$  et  $I_2$  sont  $\mathfrak{D}$ -invariants, il existe  $f_1 \in I_1$  et  $f_2 \in I_2$  tels que  $\pi(f_1) \neq 0$  et  $\pi(f_2) \neq 0$ . Il existe donc  $\xi \in \mathcal{H}_\pi$  tel que  $\pi(f_2)\xi \neq 0$ . Puisque  $\pi$  est irréductible,  $\pi(L^1(G))\pi(f_2)\xi$  est dense dans  $\mathcal{H}_\pi$  et  $\pi(f_1)\pi(L^1(G))\pi(f_2)\xi \neq 0$ . Donc

il existe  $g \in L^1(G)$  tel que  $\pi(f_1)\pi(g * f_2) = \pi(f_1 * g * f_2) \neq 0$ . Comme  $g * f_2 \in I_2$ ,  $I_1 \cdot I_2 \not\subset \text{Ker } \pi$  et donc  $I_1 \cdot I_2 \not\subset \text{Ker } \Omega$ . D'où la conclusion.

**9.4. Proposition :** Pour toute orbite  $\Omega$  dans  $\mathfrak{g}^*$ ,  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  est un idéal fermé  $\mathfrak{D}$ -premier de  $\mathcal{S}(G)$ .

Démonstration : Soient  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2$  des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants de  $\mathcal{S}(G)$  tels que  $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 \subset \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$ . Alors  $I_1 = \bar{\mathcal{I}}_1^{L^1(G)}$  et  $I_2 = \bar{\mathcal{I}}_2^{L^1(G)}$  sont des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants de  $L^1(G)$  tels que  $I_1 \cdot I_2 \subset \text{Ker } \Omega$ . En effet, les éléments de  $I_1 \cdot I_2$  peuvent être approchés par des produits  $f_\nu * g_\mu \in \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 \subset \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G) \subset \text{Ker } \Omega$  et  $\text{Ker } \Omega$  est fermé. Par 9.3.  $I_1 \subset \text{Ker } \Omega$  ou  $I_2 \subset \text{Ker } \Omega$  et, par conséquent,  $\mathcal{I}_1 \subset \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  ou  $\mathcal{I}_2 \subset \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$ .

**9.5.** Afin de garantir le passage de  $\mathcal{S}(G)$  à  $L^1(G)$  nous avons besoin du résultat suivant :

**Lemme :** Pour tout idéal fermé  $I$  de  $L^1(G)$ ,

$$h(I) = h(I \cap \mathcal{S}(G)),$$

à condition d'identifier  $\text{Prim } \mathcal{S}(G)$  et  $\text{Prim}_* L^1(G)$  et de noter par  $h(I)$  et  $h(I \cap \mathcal{S}(G))$  l'enveloppe de  $I$ , resp.  $I \cap \mathcal{S}(G)$ .

Démonstration : L'identification de  $\text{Prim}_* L^1(G)$  et  $\text{Prim } \mathcal{S}(G)$  se fait par  $\text{Ker } \pi \longmapsto \text{Ker } \pi \cap \mathcal{S}(G)$  ([Lud. 7] et [Boi.]). D'où

$$\begin{aligned} \text{Ker } \pi \in h(I) &\Rightarrow I \subset \text{Ker } \pi \Rightarrow I \cap \mathcal{S}(G) \subset \text{Ker } \pi \cap \mathcal{S}(G) \\ &\Rightarrow \text{Ker } \pi \cap \mathcal{S}(G) \in h(I \cap \mathcal{S}(G)) \end{aligned}$$

et  $h(I) \subset h(I \cap \mathcal{S}(G))$ .

Réciproquement, notons par  $j(h(I))$  et  $\tilde{j}(h(I))$  les idéaux minimaux (fermé dans le cas de  $L^1(G)$ ) de  $\mathcal{S}(G)$ , resp.  $L^1(G)$  associés à  $h(I)$ . Le raisonnement de 7.15. montre que  $\tilde{j}(h(I)) = \overline{L^1(G) * j(h(I)) * L^1(G)}^{L^1(G)}$ . D'où, puisque  $\tilde{j}(h(I)) \subset I$  et que  $L^1(G)$  admet des unités approchées,  $j(h(I)) \subset I \cap \mathcal{S}(G)$ . Par conséquent,

$$\text{Ker } \pi \cap \mathcal{S}(G) \in h(I \cap \mathcal{S}(G)) \Rightarrow I \cap \mathcal{S}(G) \subset \text{Ker } \pi$$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow j(h(I)) \subset \text{Ker } \pi \\ &\Rightarrow \bar{j}(h(I)) \subset \text{Ker } \pi \\ &\Rightarrow \text{Ker } \pi \in h(I) \end{aligned}$$

et  $h(I \cap \mathcal{S}(G)) \subset h(I)$ .

**9.6.** Nous montrerons dans la suite (9.8. et suivants) que si  $I_S$  est un idéal propre  $\mathfrak{D}$ -premier de  $\mathcal{S}(G)$ , fermé dans la topologie induite par une norme continue quelconque de  $\mathcal{S}(G)$ , alors il existe une orbite  $\Omega$  dans  $\mathfrak{g}^*$  telle que  $I_S = \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$ . D'où :

**Théorème :** Soit  $I$  un idéal fermé propre  $\mathfrak{D}$ -premier de  $L^1(G)$ . Alors il existe une orbite  $\Omega$  dans  $\mathfrak{g}^*$  telle que  $I = \text{Ker } \Omega$ .

Démonstration : Considérons  $I_S = I \cap \mathcal{S}(G)$ , idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ , fermé dans la norme  $\|\cdot\|_1$  (qui est une norme de Schwartz particulière). Montrons que  $I_S$  est  $\mathfrak{D}$ -premier. Soient  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants de  $\mathcal{S}(G)$  tels que  $\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2 \subset I_S$ . Posons  $I_1 = \overline{\mathcal{I}_1}^{L^1(G)}$  et  $I_2 = \overline{\mathcal{I}_2}^{L^1(G)}$ , idéaux fermés  $\mathfrak{D}$ -invariants de  $L^1(G)$ . On a

$$I_1 \cdot I_2 \subset \overline{\mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{I}_2}^{L^1(G)} \subset \overline{I_S}^{L^1(G)} \subset I$$

puisque  $I$  est fermé dans  $L^1(G)$ . Comme  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier,  $I_1 \subset I$  ou  $I_2 \subset I$ . Donc  $\mathcal{I}_1 \subset I_1 \cap \mathcal{S}(G) \subset I \cap \mathcal{S}(G) = I_S$  ou  $\mathcal{I}_2 \subset I_2 \cap \mathcal{S}(G) \subset I \cap \mathcal{S}(G) = I_S$  et  $I_S$  est  $\mathfrak{D}$ -premier. Par 9.8. et suivants, il existe une orbite  $\Omega$  telle que  $I_S = \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$ . D'où, par 9.5.,

$$h(I) = h(I_S) = h(\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)) = h(\text{Ker } \Omega) = \bar{\Omega}$$

et

$$I \subset \text{Ker } \bar{\Omega} = \text{Ker } \Omega \subset \text{Ker } \pi$$

si  $\pi = \pi_\ell$  et  $\Omega = \Omega_\ell$ . Montrons qu'en fait  $I = \text{Ker } \Omega$ . Reprenons les notations de 7.11. Par 7.13.

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{I}}^{L^1(G)} \cdot \bar{\mathcal{I}}^{L^1(G)} \cdot \text{Ker } \Omega \cdot \bar{\mathcal{I}}^{L^1(G)} \cdot \bar{\mathcal{I}}^{L^1(G)} &\subset \overline{\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} \\ &= \overline{I \cap \mathcal{S}(G)}^{L^1(G)} \subset I. \end{aligned}$$

Par 7.11.,  $\mathcal{I}$  et donc  $\bar{\mathcal{I}}^{L^1(G)}$  sont des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants de  $\mathcal{S}(G)$ , resp.  $L^1(G)$ . Comme  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier et que  $\mathcal{I} \not\subset \text{Ker } \pi$  (7.11), donc  $\mathcal{I} \not\subset I$ ,  $\text{Ker } \Omega \subset I$  et  $I = \text{Ker } \Omega$ .

**9.7. Proposition :** L'application

$$\Omega \longrightarrow \text{Ker } \Omega$$

est une bijection entre l'ensemble des orbites et l'ensemble des idéaux fermés propres  $\mathfrak{D}$ -premiers de  $L^1(G)$ .

Démonstration : Vu 9.3. et 9.6., il reste uniquement à montrer l'injectivité. Soient  $\Omega_1, \Omega_2$  deux orbites telles que  $\text{Ker } \Omega_1 = \text{Ker } \Omega_2$ . Par 8.3.,  $\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_2$ . Supposons  $\Omega_1 \neq \Omega_2$ . Alors  $\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_2$  et  $\Omega_2 \subset \bar{\Omega}_1 \setminus \Omega_1$ . En effet, pour des orbites,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$  entraîne  $\Omega_1 = \Omega_2$ . Or toute orbite d'une action exponentielle est ouverte dans son adhérence ([B.C. et al], p. 11). On en déduit que  $\bar{\Omega}_1 \setminus \Omega_1$  et  $\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_2$  sont des fermés et que, par conséquent,  $\bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_2$  et  $\bar{\Omega}_2 \subset \bar{\Omega}_1 \setminus \Omega_1$ . D'où

$$\Omega_1 \subset \bar{\Omega}_1 \subset \bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_2 \subset \bar{\Omega}_2 \subset \bar{\Omega}_1 \setminus \Omega_1$$

ce qui est une contradiction. Ainsi  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

**9.8. Théorème :** Soit  $I$  un idéal propre  $\mathfrak{D}$ -premier de  $\mathcal{S}(G)$ , fermé dans la topologie induite par une norme continue quelconque de  $\mathcal{S}(G)$ . Alors il existe une orbite  $\Omega$  dans  $\mathfrak{g}^*$  telle que  $I = \text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$ .

Démonstration : La démonstration se fait par récurrence sur  $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{d}$ . Si  $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{d} = 1$ ,  $\mathfrak{g} = \mathbb{R}$  et l'action est nulle. Il suffit alors de renvoyer au résultat de Ludwig ([Lud. 5]), tout en remarquant qu'un idéal fermé dans  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||)$  est nécessairement invariant sous l'action de l'algèbre enveloppante ([Lud. Mol. 1], 6.3.) et que les points sont des ensembles de synthèse pour  $L^1(\mathbb{R})$ . Dans le cas général, il existe  $\pi \in \hat{G}$  tel que  $I \subset \text{Ker } \pi \cap \mathcal{S}(G)$  par ([Lud. 7]). Posons  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$  avec  $\ell \in \mathfrak{g}^*$ . Par  $\mathfrak{D}$ -invariance de  $I$ ,  $I \subset \text{Ker } \Omega_\ell \cap \mathcal{S}(G)$ . L'action étant exponentielle, les idéaux minimaux  $\mathfrak{d}$ -invariants de  $\mathfrak{g}$  sont de dimension 1 ou 2 et il faut distinguer les cas suivants :

a) Il existe  $Z \in \mathfrak{g}$  non nul et  $\varphi \in \mathfrak{d}^*$  tels que  $d(Z) = \varphi(d)Z$  pour tout  $d \in \mathfrak{d}$ . Comme  $\mathfrak{g}$  est nilpotent,  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$  et  $Z$  est central. On considère

les sous-cas :

a<sub>1</sub>)  $\varphi \not\equiv 0$  et  $\langle \ell, Z \rangle = -\lambda_0 \neq 0$

a<sub>2</sub>)  $\varphi \not\equiv 0$  et  $\langle \ell, Z \rangle = 0$

a<sub>3</sub>)  $\varphi \equiv 0$ , c'est-à-dire  $d(Z) = 0$  pour tout  $d \in \mathfrak{d}$  et  $\langle \ell, Z \rangle = -\lambda_0 \neq 0$

- a<sub>4</sub>)  $\varphi \equiv 0$ , c'est-à-dire  $d(Z) = 0$  pour tout  $d \in \mathfrak{d}$  et  $\langle \ell, Z \rangle = 0$ .  
 b) Il existe  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{g}$  non nuls,  $\varphi \in \mathfrak{d}^*$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^*$  tels que

$$d \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \varphi(d) \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \text{ pour tout } d \in \mathfrak{d}.$$

Puisque  $\mathfrak{g}$  est nilpotent,  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$  et  $Z_1$  et  $Z_2$  sont centraux. Il faut distinguer les sous-cas :

- b<sub>1</sub>)  $\varphi \neq 0$  et  $|\langle \ell, Z_1 \rangle| + |\langle \ell, Z_2 \rangle| \neq 0$   
 b<sub>2</sub>)  $\varphi \neq 0$  et  $|\langle \ell, Z_1 \rangle| + |\langle \ell, Z_2 \rangle| = 0$ .

Il ne faut pas considérer  $\varphi \equiv 0$ , puisqu'alors on retrouve a<sub>3</sub>) et a<sub>4</sub>). Le cas b) est l'analogue complexe du cas a). Remarquons l'analogie avec le chapitre 3. En particulier, les calculs complexes de 3.8. et suivants restent valables. Cependant ici la récurrence se faisait sur  $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{d}$ , alors que dans le chapitre 5 elle se faisait sur  $\dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{d}/\mathfrak{d}_\pi)$ .

Vu la complexité des raisonnements, nous allons traiter les différents cas dans des paragraphes séparés. Nous utiliserons fortement les résultats de ([Lud. Mol. 1]) sur l'algèbre  $\mathcal{S}(G)$ . Puisque tous les idéaux considérés seront des idéaux de  $\mathcal{S}(G)$ , nous simplifierons les notations en écrivant  $I$ ,  $\text{Ker } \Omega$  au lieu de  $I \cap \mathcal{S}(G)$ ,  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$ . Lorsqu'une fonction  $f$  dépend de plusieurs variables, nous noterons  $\hat{f}^i$  la transformée de Fourier partielle par rapport à la  $i$ -ème variable. De plus, lors de la présence de plusieurs groupes  $G, \tilde{G}, \dots$ , nous noterons par  $*_G, *_{\tilde{G}}, \dots$  le produit de convolution dans le groupe correspondant, s'il y a risque de confusion.

### 9.9. Cas a<sub>2</sub>) et a<sub>4</sub>) :

#### 9.9.1. Définissons

$$K = \left\{ f \in \mathcal{S}(G) \mid \hat{f}^2(x, 0) = \int_{\mathbb{R}} f(x \exp rZ) dr = 0 \quad \forall x \in G \right\}.$$

Puisque  $\hat{f}^2(x \exp aZ, 0) = \hat{f}^2(x, 0)$ , on peut se limiter à choisir  $x \in \tilde{G} = G/\exp \mathbb{R}Z$ . On vérifie facilement que  $K$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ .

#### 9.9.2. Supposons à présent $K \subset I$ .

- a) Définissons la projection

$$\begin{aligned} p : \mathcal{S}(G) &\longrightarrow \mathcal{S}(\tilde{G}) \\ f &\longmapsto p(f) = \tilde{f} \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{f}(x) = \int f(x \exp rZ) dr = \tilde{f}^2(x, 0).$$

Remarquons que  $\text{Ker } p = K$  et définissons  $\tilde{I} = p(I)$ . La projection  $p$  est un homomorphisme surjectif d'algèbres, la surjectivité découlant de la construction suivante d'un rétracte. Donc  $\tilde{I}$  est un idéal de  $\mathcal{S}(\tilde{G})$ .

b) Nous pouvons supposer que la norme  $||| \cdot |||$  est de la forme

$$|||f||| = \sum_{\text{finie}} \int_{\tilde{G}} \int_{\mathbb{R}} |x^a D_x^p r^c D_r^q f(x \exp rZ)| dr dx$$

puisque les normes de cette forme engendrent la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ . Supposons les coordonnées dans  $\tilde{G}$  données dans une base coexponentielle à  $\mathbb{R}Z$  fixée une fois pour toutes. Choisissons  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $u \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}} u(r) dr = 1$  et  $\int_{\mathbb{R}} |r^c D_r^q u(r)| dr \leq k$  pour chaque terme de la somme finie précédente. Pour tout  $\tilde{f} \in \mathcal{S}(\tilde{G})$ , définissons  $R(\tilde{f}) = f \in \mathcal{S}(G)$  par

$$f(x \exp rZ) = \tilde{f}(x)u(r),$$

$x \exp rZ$  désignant la décomposition de l'élément du groupe dans la base fixée. Alors  $p(f) = \tilde{f}$  et la projection  $p$  est surjective. De plus  $p \circ R = \text{id}_{\mathcal{S}(\tilde{G})}$ , c'est-à-dire  $R$  est un rétracte. Si on munit  $\mathcal{S}(\tilde{G})$  de la norme de Schwartz

$$|||\tilde{f}||| \sim = \sum_{\text{finie}} \int_{\tilde{G}} |x^a D_x^p \tilde{f}(x)| dx,$$

on trouve  $|||R(\tilde{f})||| \leq k |||\tilde{f}||| \sim$  et le rétracte est continu.

c) Remarquons que  $p(I) = \tilde{I} = R^{-1}(I)$ . En effet, pour  $\tilde{f} \in \tilde{I}$  il existe  $f \in I$  tel que  $p(f) = \tilde{f} = p(R(\tilde{f}))$ . Donc  $R(\tilde{f}) - f \in K \subset I$  et  $R(\tilde{f}) \in I$ . Ainsi  $\tilde{I} \subset R^{-1}(I)$ . L'autre inclusion est évidente. Par continuité de  $R$ , on en déduit que  $\tilde{I}$  est un idéal fermé de  $(\mathcal{S}(\tilde{G}), ||| \cdot ||| \sim)$ . De plus, remarquons que pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\tilde{f} \in \tilde{I}$ ,  $f \in I$  étant donné que  $K \subset I$  entraîne que  $I = p^{-1}(\tilde{I})$ .

d) Etant donné que  $\exp(\mathbb{R}Z)$  et  $K$  sont  $\mathfrak{D}$ -invariants, on peut définir l'action sur  $\tilde{G}$  et  $\mathcal{S}(\tilde{G})$ . Il suffit de poser

${}^D(x \bmod \exp \mathbb{R}Z) = ({}^Dx) \bmod \exp \mathbb{R}Z$ . On vérifie alors facilement que  $(\tilde{f})^D = (f^D) \sim$  pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ , la fonction modulaire pour  $\tilde{G}$  étant

donnée par  $\delta_1(D) = \delta(D)e^{-\varphi(d)}$ . La  $\mathfrak{D}$ -invariance de  $I$  entraîne alors la  $\mathfrak{D}$ -invariance de  $\tilde{I}$ .

e) Montrons que l'idéal  $\tilde{I}$  est  $\mathfrak{D}$ -premier dans  $\mathcal{S}(\tilde{G})$ . Soient  $\tilde{I}_1$  et  $\tilde{I}_2$  deux idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants de  $\mathcal{S}(\tilde{G})$  tels que  $\tilde{I}_1 \cdot \tilde{I}_2 \subset \tilde{I}$ . Posons  $I_1 = p^{-1}(\tilde{I}_1)$  et  $I_2 = p^{-1}(\tilde{I}_2)$ . Alors  $I_1$  et  $I_2$  sont des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants de  $\mathcal{S}(G)$ . Soient  $f_1 \in I_1$  et  $f_2 \in I_2$ . Puisque  $p$  est un homomorphisme, on a

$$p(f_1 *_G f_2) = p(f_1) *_G p(f_2) \in \tilde{I}_1 \cdot \tilde{I}_2 \subset \tilde{I}$$

et  $f_1 *_G f_2 \in p^{-1}(\tilde{I}) = I$ . Donc  $I_1 \cdot I_2 \subset I$ . Puisque  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier,  $I_1 \subset I$  ou  $I_2 \subset I$ . Ainsi  $\tilde{I}_1 \subset \tilde{I}$  ou  $\tilde{I}_2 \subset \tilde{I}$ .

f) Par application de l'hypothèse de récurrence à  $(\mathcal{S}(\tilde{G}), \mathfrak{D}, \tilde{I})$ , il existe  $\tilde{\pi} \in \tilde{G}$ ,  $\tilde{\Omega}$  étant l'orbite de  $\tilde{\pi}$ , tel que  $\text{Ker } \tilde{\Omega} = \tilde{I}$ . Posons  $\pi = \tilde{\pi} \circ p$ . Alors  $\pi \in \hat{G}$  et, en notant  $\Omega$  l'orbite de  $\pi$ ,

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker } \Omega &\iff \pi(f^D) = {}^D\pi(f) = 0 \quad \forall D \in \mathfrak{D} \\ &\iff \tilde{\pi}((f^D)^\sim) = \tilde{\pi}(\tilde{f}^D) = {}^D\tilde{\pi}(\tilde{f}) = 0 \quad \forall D \in \mathfrak{D} \\ &\iff \tilde{f} \in \text{Ker } \tilde{\Omega} = \tilde{I} \\ &\iff f \in I = p^{-1}(\tilde{I}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire,  $I = \text{Ker } \Omega$ .

**9.9.3.** a) Supposons à présent que  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$  tel que  $I \subset \text{Ker } \pi$  entraîne  $\langle \ell, Z \rangle = 0$  et  $\pi(\exp rZ) = 1$  pour tout  $r \in \mathbb{R}$ . Par conséquent

$$\pi(f) = \int_{\tilde{G}} \pi(x) \int_{\mathbb{R}} f(x \exp rZ) dr dx$$

et  $K \subset \text{Ker } \pi$ . Donc  $h(I) \subset h(K)$  et  $j(h(K)) \subset I$ . D'après ([Lud. 7]), il existe  $M_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\left( \text{Ker}(h(K)) \right)^{M_1} \subset \overline{j(h(K))} \subset \tilde{I} = I.$$

En effet, les normes  $||| \cdot |||_{M,M}$  de Ludwig engendrent la topologie de  $\mathcal{S}(G)$  et une telle norme peut donc majorer notre norme  $||| \cdot |||$ . Puisque  $K$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant, il en est de même de  $h(K)$  et de  $\text{Ker}(h(K))$ . Étant donné que  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier, on en déduit alors que  $\text{Ker}(h(K)) \subset I$  et  $K \subset \text{Ker}(h(K)) \subset I$ . Par 9.9.2., on conclut que  $I = \text{Ker } \Omega$ .

b) Si, pour tout  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell \in \hat{G}$  tel que  $I \subset \text{Ker } \pi$  on est dans les cas  $a_2)$  ou  $a_4)$  ( $\langle \ell, Z \rangle = 0$ ), le raisonnement précédent prouve que  $I = \text{Ker } \Omega$ . Si, par contre, il existe  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell \in \hat{G}$  tel que  $I \subset \text{Ker } \pi$  et  $\langle \ell, Z \rangle \neq 0$ , on est dans les cas  $a_1)$  ou  $a_3)$  qui seront traités ultérieurement.

**9.10. Cas  $a_1)$  :**

**9.10.1. a)** Supposons que  $d(Z) = \varphi(d)Z$  pour tout  $d \in \mathfrak{d}$  et  $\langle \ell, Z \rangle = -\lambda_0$  avec  $\lambda_0 > 0$  (sinon il suffit de remplacer  $Z$  par  $-Z$ ). Soit  $d_1 \in \mathfrak{d}$  tel que  $\varphi(d_1) = 1$ . Comme  $\text{Ker } \varphi$  est un idéal de  $\mathfrak{d}$ , les éléments de  $\mathfrak{D}$  s'écrivent de manière unique sous la forme  $D = \exp t d_1 \cdot D_0$  avec  $D_0 \in \exp(\text{Ker } \varphi)$ . Donc  $D(Z) = e^t \cdot Z$ . Notons simplement  $f^t = f^{\exp t d_1}$ .

b) Posons

$$I_0 = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \int_{\mathbb{R}} f(x \exp r Z) e^{ir\lambda} dr = \hat{f}^2(x, \lambda) = 0 \quad \forall x \in G, \forall \lambda \geq 0\}.$$

Par continuité, il suffit d'exiger  $\lambda > 0$  dans la définition de  $I_0$ . Dans cette définition on peut d'ailleurs se limiter à  $x \in \tilde{G} = G/\exp \mathbb{R}Z$ . Puisque  $(f *_G g)^{\wedge 2}(x, \lambda) = [\hat{f}^2(\cdot, \lambda) *_{\tilde{G}} \hat{g}^2(\cdot, \lambda)](x)$  et que  $(f^D)^{\wedge 2}(x, \lambda) = \delta(D) e^{-\varphi(d)} \hat{f}^2(Dx, e^{-\varphi(d)} \lambda)$  pour  $D = \exp d$ , on voit que  $I_0$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ . Afin de montrer que  $I_0 \subset I$ , définissons l'idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant,

$$I'_0 = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \hat{f}^2(x, \lambda) = 0 \quad \forall x \in G, \forall \lambda \leq 0\}$$

et remarquons que  $I_0 \cdot I'_0 = \{0\} \subset I$ . Puisque  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant,  $I_0 \subset I$  ou  $I'_0 \subset I$ . Or  $I'_0 \subset I$  est impossible. En effet, soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\pi(f) \neq 0$  et  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{u}(\lambda_0) = 1$  et  $\hat{u} \equiv 0$  sur  $\mathbb{R}_-$ . Posons  $g = f * u$ . Alors  $\pi(g) = \pi(f) \neq 0$ , c'est-à-dire  $g \notin \text{Ker } \pi$  et  $g \notin I$ . Cependant  $\hat{g}^2(x, \lambda) = \hat{f}^2(x, \lambda) \hat{u}(\lambda) \equiv 0$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}_-$ , c'est-à-dire  $g \in I'_0$ . Donc  $I_0 \subset I$ .

**9.10.2. a) Définitions :** Pour  $f \in \mathcal{S}(G)$ , définissons  $\tilde{f}^2$  par

$$\tilde{f}^2(x, t) = \int f^t(x \exp r Z) e^{ir} dr$$

et, pour  $\alpha \in \mathcal{ES}(\mathbb{R}^2)$  (décroissance exponentielle de  $\alpha$  et de ses dérivées sur la première variable) et  $f \in \mathcal{S}(G)$ , posons

$$\alpha(f) = \int \int (f_b)^s \alpha(s, b) ds db \quad \text{avec } f_b(x) = f(x \exp b Z)$$

([Lud. Mol. 1], 9.8.).

b) On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \tilde{f}^2(x, t) &= (\hat{f}^2)^t(x, e^{-t}) = \delta(t)e^{-t} \cdot \hat{f}^2(t, x, e^{-t}) \\ \tilde{f}^2(x \exp aZ, t) &= e^{-ia} \tilde{f}^2(x, t) \\ (f *_G g)^{\sim 2}(x, t) &= [\tilde{f}^2(\cdot, t) *_G \tilde{g}^2(\cdot, t)](x) \\ (f^a)^{\sim 2}(x, t) &= \tilde{f}^2(x, t + a) \\ (f^{D_0})^{\sim 2}(x, t) &= (\tilde{f}^2)^{(t^{-1} \cdot D_0 \cdot t)}(x, t) \text{ pour } D_0 \in \exp(\text{Ker } \varphi) \\ &\text{donc } t^{-1} D_0 t \in \exp(\text{Ker } \varphi) \\ (\tilde{f}^2)^{D_0}(x, t) &= (f^{(t \cdot D_0 \cdot t^{-1})})^{\sim 2}(x, t) \\ \widetilde{\alpha(f)^2}(x, t) &= \int \tilde{f}^2(x, s) \hat{\alpha}^2(s - t, -e^{-s}) ds. \end{aligned}$$

c) Finalement

$$\begin{aligned} \tilde{f}^2(x, t) &= \tilde{g}^2(x, t) && \forall x \in G, \forall t \in \mathbb{R} \\ \iff \hat{f}^2(t, x, e^{-t}) &= \hat{g}^2(t, x, e^{-t}) && \forall x \in G, \forall t \in \mathbb{R} \\ \iff \hat{f}^2(x, \lambda) &= \hat{g}^2(x, \lambda) && \forall x \in G, \forall \lambda > 0 \\ \iff f &= g \text{ mod } I_0. \end{aligned}$$

**9.10.3. Projecteurs :** a) Soient  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  et  $\psi \in ES(\mathbb{R})$ . Par ([Lud. Mol. 1], 9.14.) il existe  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)$  tel que

$$\hat{\alpha}^2(s - t, -e^{-s}) = \psi(t)\varphi(s).$$

Il suffit de supposer  $\hat{\alpha}^2(u, v) = 0$  pour  $v \geq 0$  et de prendre

$$\alpha(u, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \psi(-\ln(-v) - u) \varphi(-\ln(-v)) e^{-iuv} dv.$$

On a alors ([Lud. Mol. 1], 9.14.)

$$\widetilde{\alpha(f)^2}(x, t) = \psi(t) \int \tilde{f}^2(x, s) \varphi(s) ds = \psi(t) f_1(x).$$

b) Supposons en plus  $\beta \in ES(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\hat{\beta}^2(s - t, -e^{-s}) = \psi_1(t)\varphi_1(s)$ . Alors

$$\begin{aligned} \widetilde{\beta(\alpha(f))^2}(x, t) &= \psi_1(t) \cdot \int \widetilde{\alpha(f)^2}(x, s) \varphi_1(s) ds \\ &= \psi_1(t) \cdot \left( \int \psi(s) \varphi_1(s) ds \right) \cdot f_1(x) \end{aligned}$$

avec  $f_1(x) = \int \tilde{f}^2(x, u)\varphi(u)du$ .

c) On montre facilement que

$$\begin{aligned} & \alpha(\beta(f))(x \exp rZ) \\ &= \int \left[ \int \alpha(s-t, e^{-t}b - e^{-t}a)\beta(t, a)e^{-t} dt da \right] (f_b)^s(x \exp rZ) ds db \\ &= \int \alpha \otimes \beta(s, b)(f_b)^s(x \exp rZ) ds db \end{aligned}$$

où  $\otimes$  désigne le produit de convolution dans le groupe  $(ax + b)$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant considérés comme des fonctions sur  $(ax + b)$ .

d) Par ([Lud. Mol. 1], 9.12.), on a  $\alpha(I) \subset I$ .

**9.10.4. Espace  $\mathcal{S}(G)_1$  :** a) **Définition :** L'espace  $\mathcal{S}(G)_1$  est l'ensemble des fonctions  $f_1$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$f_1(x \exp aZ) = e^{-ia} f_1(x) \quad \forall x \in G, \forall a \in \mathbb{R}$$

et que  $f_1$  soit Schwartz en  $x \in \tilde{G} = G/\exp \mathbb{R}Z$  (pour une base coexponentielle fixée par exemple).

b) Pour  $t$  fixé,  $\tilde{f}^2(\cdot, t) \in \mathcal{S}(G)_1$ . En particulier, si  $\tilde{f}^2(x, t) = u(t)f_1(x)$ , respectivement si  $\widetilde{\alpha(f)}^2 = \psi(t)f_1(x)$ , alors  $f_1 \in \mathcal{S}(G)_1$ .

c) Construisons un rétracte particulier.

Remarquons d'abord que

$$\tilde{f}^2(x, t) = \delta(t)e^{-t} \hat{f}^2(t, x, e^{-t})$$

entraîne

$$\hat{f}^2(x, u) = \delta(-\ln u)^{-1} \cdot \frac{1}{u} \cdot \tilde{f}^2(\ln u x, -\ln u) \text{ pour } u > 0.$$

Soit alors  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Pour  $f_1 \in \mathcal{S}(G)_1$  donné, recherchons  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\tilde{f}^2 = \varphi \otimes f_1$ . Il suffit de construire  $f$  tel que

$$\hat{f}^2(x, u) = \begin{cases} \delta(-\ln u)^{-1} \cdot \frac{1}{u} \cdot \varphi(-\ln u) f_1(\ln u x) & \text{pour } u > 0 \\ 0 & \text{pour } u \leq 0. \end{cases}$$

Puisque  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}^2(x, u)$  s'annule dans un voisinage de  $u = 0$  et  $\hat{f}^2(x, u)$  est une fonction de Schwartz en  $u$ . La fonction  $f$  se calcule par transformée de Fourier inverse

$$f(x \exp rZ) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \delta(-\ln u)^{-1} \cdot \frac{1}{u} \cdot \varphi(-\ln u) f_1(\ln u x) e^{-iru} du$$



et est une fonction de Schwartz. Ceci nous définit un rétracte

$$\begin{aligned} R : \mathcal{S}(G)_1 &\longrightarrow \mathcal{S}(G) \\ f_1 &\longmapsto R(f_1) = f, \end{aligned}$$

$f$  étant calculé comme précédemment.

d) Nous allons munir  $\mathcal{S}(G)_1$  d'une norme de Schwartz de manière à rendre le rétracte  $R$  continu. Notons par  $E_1, \dots, E_{n-1}$  la base coexponentielle à  $\mathbb{R}Z$  dans  $\mathfrak{g}$  et notons les éléments de  $G$  par

$$\begin{aligned} \tilde{x} \exp rZ &= \exp(\tilde{x}_1 E_1 + \dots + \tilde{x}_{n-1} E_{n-1}) \exp rZ \\ &= \exp(\tilde{x}_1 E_1 + \dots + \tilde{x}_{n-1} E_{n-1} + rZ). \end{aligned}$$

Par ([Lud. Mol. 1]),  $|||f|||$  admet une majoration de la forme

$$\begin{aligned} |||f||| &\leq \sum_{\text{finie}} \int \int |\tilde{x}^a r^b D_{\tilde{x}}^{\tilde{p}} D_r^q f(\tilde{x} \exp rZ)| d\tilde{x} dr \\ &= \sum_{\text{finie}} \int \int \frac{1}{1+r^2} |\tilde{x}^a r^b (1+r^2) D_{\tilde{x}}^{\tilde{p}} D_r^q f(\tilde{x} \exp rZ)| d\tilde{x} dr \\ &= \sum_{\text{finie}} \frac{1}{2\pi} \int \int \frac{1}{1+r^2} \left| \int_0^{+\infty} \tilde{x}^a D_{\tilde{x}}^{\tilde{p}} (D_u^b (1 - D_u^2) u^q \delta(-\ln u))^{-1} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{1}{u} \cdot \varphi(-\ln u) f_1(\ln u \tilde{x}) \right| e^{-iru} du | d\tilde{x} dr \\ &\leq C \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\tilde{G}} \int_0^{+\infty} |\tilde{x}^a D_{\tilde{x}}^{\tilde{p}} (D_u^b (1 - D_u^2) \psi(u) f_1(\ln u \tilde{x}))| du d\tilde{x} \\ &\quad \text{en posant } \psi(u) = u^q \delta(-\ln u)^{-1} \cdot \frac{1}{u} \cdot \varphi(-\ln u) \\ &\leq C_1 \cdot \sum_{\text{finie}} \sum_{\gamma \leq b+2} \int_{\tilde{G}} \int_K |\tilde{x}^a D_{\tilde{x}}^{\tilde{p}} D_u^\gamma f_1(\ln u \tilde{x})| du d\tilde{x} \end{aligned}$$

où  $K = \text{supp } \psi$  est un compact dans  $]0, +\infty[$ . En effet, il suffit d'effectuer les dérivées du produit  $\psi(u) f_1(\ln u \tilde{x})$  par rapport à  $u$  et de majorer les différentes dérivées de  $\psi$  par une constante. Notons par  $A_u$  la matrice de l'opérateur  $\exp \ln u d_1 \equiv \ln u$  pour la base en question et notons

$$\ln u \tilde{x} \equiv A_u \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_{n-1} \\ \tilde{x}'_n \end{pmatrix}.$$

En particulier,  $\tilde{x}'_n = (A_u)_{n,1}\tilde{x}_1 + \dots + (A_u)_{n,n-1}\tilde{x}_{n-1}$  et

$$f_1(\ln^u \tilde{x}) = e^{-i\tilde{x}'_n} f_1(\exp(\tilde{x}'_1 E_1 + \dots + \tilde{x}'_{n-1} E_{n-1})).$$

Notons par  $A'_u$  la matrice obtenue en supprimant la  $n$ -ième ligne et la  $n$ -ième colonne dans  $A_u$ . On a

$$f_1(\ln^u \tilde{x}) = e^{-i[(A_u)_{n,1}\tilde{x}_1 + \dots + (A_u)_{n,n-1}\tilde{x}_{n-1}]} \cdot f_1\left(\exp\left[(E_1 \dots E_{n-1}) A'_u \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1} \end{pmatrix}\right]\right).$$

Par conséquent,  $D_{\tilde{x}}^{\bar{p}} D_u^\gamma f_1(\ln^u \tilde{x})$  est une combinaison linéaire de produits de polynômes en les  $\tilde{x}_j$  et les  $(A_u)_{i,k}$  multipliés par des dérivées des  $(A_u)_{i,k}$  par rapport à  $u$ , par des dérivées de  $f_1$  évaluées en  $\exp\left[(E_1 \dots$

$$E_{n-1}) A'_u \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1} \end{pmatrix}\right]$$
 et par l'exponentielle  $e^{-i[(A_u)_{n,1}\tilde{x}_1 + \dots + (A_u)_{n,n-1}\tilde{x}_{n-1}]}$ .

Puisque toutes les fonctions sont  $C^\infty$  en  $u$  et que  $u$  parcourt un compact de  $\mathbb{R}_+^*$ , on a donc une majoration de la forme

$$\left| D_{\tilde{x}}^{\bar{p}} D_u^\gamma f_1(\ln^u \tilde{x}) \right| \leq \sum_{\text{finie}} \left| P(\tilde{x}) (D^\beta f_1) \left( \exp \left[ (E_1, \dots, E_{n-1}) \cdot A'_u \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1} \end{pmatrix} \right] \right) \right|$$

où  $P(\tilde{x})$  désigne une fonction polynomiale et  $D^\beta f_1$  une dérivée de  $f_1$  par rapport aux différentes coordonnées de  $f_1$ . D'où une majoration du type

$$\| \| f \| \| \leq C_2 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_K \left| P_1(\tilde{x}) (D^\beta f_1) \left( \exp \left[ (E_1, \dots, E_{n-1}) \cdot A'_u \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1} \end{pmatrix} \right] \right) \right| d\tilde{x} du$$

où  $P_1$  désigne une nouvelle fonction polynomiale pour tenir compte des facteurs  $\tilde{x}^\alpha$ . Remarquons que  $A'_u$  est inversible. En effet,  $A_u$  est

inversible comme étant la matrice de  $\exp(\ln u d_1)$  et  $(A_u)^{-1}$  est la matrice de  $\exp(-\ln u d_1) = \exp(\ln(u^{-1})d_1)$ , c'est-à-dire  $(A_u)^{-1} = A_{u^{-1}}$ . En particulier  $\det(A_u) \neq 0$ . Remarquons en plus que

$$\begin{aligned} (A_u)Z &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln u)^k}{k!} d_1^k(Z) \\ &= e^{\ln u} \cdot Z \quad \text{puisque } d_1(Z) = Z \\ &= u \cdot Z. \end{aligned}$$

Donc la dernière colonne de  $A_u$  est égale à  $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$  avec  $u \neq 0$  puisque  $u$  parcourt le compact  $K$  de  $\mathbb{R}_+^*$ . D'où

$$\det A_u = u \cdot \det A'_u$$

et  $\det A'_u \neq 0$  pour tout  $u \in K$ . Les coefficients de  $(A'_u)^{-1}$  sont également des fonctions continues de  $u$  et sont donc majorés si  $u$  parcourt le compact  $K$ . Effectuons le changement de variables

$$A'_u \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{aligned} |P_1(\tilde{x})| &= \left| P_1 \left( (A'_u)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_{n-1} \end{pmatrix} \right) \right| \\ &\leq \sum_{\text{finie}} |Q(\tilde{x}')| \end{aligned}$$

où  $Q$  désigne une fonction polynôme indépendante de  $u$ , puisque tous les coefficients de  $(A'_u)^{-1}$  sont bornés. Finalement on trouve une majoration du type

$$\begin{aligned} |||f||| &\leq C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Q(\tilde{x}')| (D^\beta f_1)(\exp[\tilde{x}'_1 E_1 + \dots + \tilde{x}'_{n-1} E_{n-1}]) \\ &\quad d\tilde{x}'_1 \dots d\tilde{x}'_{n-1}. \end{aligned}$$

Le membre de droite représente une norme  $|||\cdot|||_1$  sur  $\mathcal{S}(G)_1$  et puisque, par construction,  $|||f||| \leq |||f_1|||_1$ , le rétracte  $R$  est une fonction continue de  $(\mathcal{S}(G)_1, |||\cdot|||_1)$  dans  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||)$ .

**9.10.5. Idéal  $I_1$  de  $\mathcal{S}(G)_1$  : a) Définissons**

$$I_1 = \{f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 \mid \exists f \in I, \exists u \in ES(\mathbb{R}) : \tilde{f}^2 = u \otimes f_1\}.$$

Soit à présent  $v \in ES(\mathbb{R})$  fixé. Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $\int u(s)\varphi(s)ds = 1$  et construisons  $\alpha$  tel que  $\hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s}) = v(t)\varphi(s)$ . Pour  $f_1 \in I_1$  et  $f \in I$  correspondant, on a alors  $\alpha(f) \in I$  et  $\widetilde{\alpha(f)}^2 = v \otimes f_1$ . Ceci prouve que  $I_1$  peut être défini à partir de  $v \in ES(\mathbb{R})$  fixe, mais quelconque, c'est-à-dire que

$$I_1 = \{f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 \mid \exists f \in I : \tilde{f}^2 = v \otimes f_1\}.$$

b) Puisque  $v$  peut être fixé,  $I_1$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{S}(G)_1$ . De plus, pour  $f_1 \in I_1$  et  $g_1 \in \mathcal{S}(G)_1$ , il existe  $f \in I$  tel que  $\tilde{f}^2 = v \otimes f_1$  et  $g = R(g_1) \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\tilde{g}^2 = \varphi \otimes g_1$ . Alors  $g * f \in I$  et  $\widetilde{g * f}^2(x, t) = \varphi(t)v(t)g_1 *_{\tilde{c}} f_1(x)$ . D'où  $g_1 *_{\tilde{c}} f_1 \in I_1$ . De même pour  $f_1 *_{\tilde{c}} g_1$  et  $I_1$  est un idéal de  $\mathcal{S}(G)_1$ .

c) Soit  $f_1 \in I_1$  et soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\tilde{f}^2 = w \otimes f_1$  avec  $w \in ES(\mathbb{R})$ . Par a) il existe  $g \in I$  tel que  $\tilde{g}^2 = w \otimes f_1 = \tilde{f}^2$ . Donc  $f - g \in I_0 \subset I$  et  $f \in I$ , puisque  $g \in I$ . En particulier, si  $f_1 \in I_1$  et si  $R(f_1)$  est le rétracte construit en 9.10.4., alors  $R(f_1) \in I$  et  $I_1 = R^{-1}(I)$ . Donc l'idéal  $I_1$  est fermé dans  $(\mathcal{S}(G)_1, |||\cdot|||_1)$ , puisque  $I$  est fermé et le rétracte continu.

d) Soient  $t \in \mathbb{R}$  fixé et  $\psi \in ES(\mathbb{R})$  tel que  $\psi(t) = 1$ . Soient  $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tels que  $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$ ,  $\int \varphi_\varepsilon(s)ds = 1$  et  $\varphi_\varepsilon \geq 0$ . Construisons la famille  $(\alpha_\varepsilon)_\varepsilon$  telle que  $\hat{\alpha}_\varepsilon(s-u, -e^{-s}) = \psi(u)\varphi_\varepsilon(s)$ . Donc

$$\widetilde{\alpha_\varepsilon(f)}^2(x, t) = \int \tilde{f}^2(x, s)\varphi_\varepsilon(s)ds.$$

Montrons que  $\widetilde{\alpha_\varepsilon(f)}^2(., t)$  converge vers  $\tilde{f}^2(., t)$  dans  $(\mathcal{S}(G)_1, |||\cdot|||_1)$ . En effet

$$\begin{aligned} & |||\widetilde{\alpha_\varepsilon(f)}^2(., t) - \tilde{f}^2(., t)|||_1 \\ &= C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Q(\tilde{x})D_{\tilde{x}}^\beta [\widetilde{\alpha_\varepsilon(f)}^2(\tilde{x}, t) - \tilde{f}^2(\tilde{x}, t)]| d\tilde{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Q(\tilde{x}) D_{\tilde{x}}^\beta [\int (\tilde{f}^2(\tilde{x}, s) - \tilde{f}^2(\tilde{x}, t)) \varphi_\varepsilon(s) ds]| d\tilde{x} \\
 &\leq \int ||| \tilde{f}^2(\cdot, s) - \tilde{f}^2(\cdot, t) |||_1 \varphi_\varepsilon(s) ds \\
 &= \int \left( C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Q(\tilde{x}) D_{\tilde{x}}^\beta [\int [f^s(\tilde{x} \exp rZ) - f^t(\tilde{x} \exp rZ)] \right. \\
 &\quad \left. e^{ir} dr | d\tilde{x} \right) \varphi_\varepsilon(s) ds \\
 &\leq \int \left( C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^n} |Q(\tilde{x}) D_{\tilde{x}}^\beta [f^s(\tilde{x} \exp rZ) - f^t(\tilde{x} \exp rZ)] | \right. \\
 &\quad \left. dr d\tilde{x} \right) \varphi_\varepsilon(s) ds \\
 &= \int ||| f^s - f^t |||_2 \varphi_\varepsilon(s) ds
 \end{aligned}$$

où  $|||\cdot|||_2$  désigne une nouvelle norme de Schwartz sur  $\mathcal{S}(G)$ . Par continuité de l'action pour toute norme de Schwartz ([Lud. Mol. 1], 9.5.) et par hypothèse sur les fonctions  $\varphi_\varepsilon$ , cette dernière expression tend vers 0.

e) Pour  $t \in \mathbb{R}$  fixé, définissons

$$\tilde{I}_t = \{ \tilde{f}^2(\cdot, t) \mid f \in I \} \subset \mathcal{S}(G)_1$$

et montrons que  $I_1 = \tilde{I}_t$  pour tout  $t$ . En effet, pour  $f_1 \in I_1$  il existe  $u \in \mathcal{ES}(\mathbb{R})$  avec  $u(t) = 1$  et  $f \in I$  tels que  $\tilde{f}^2 = u \otimes f_1$ . Donc  $f_1 = \tilde{f}^2(\cdot, t) \in \tilde{I}_t$  et  $I_1 \subset \tilde{I}_t$ . Réciproquement, soit  $\tilde{f}^2(\cdot, t) \in \tilde{I}_t$  avec  $f \in I$ . On a  $\alpha_\varepsilon(f) \in I$  ( $\alpha_\varepsilon$  comme en d)) et  $\widetilde{\alpha_\varepsilon(f)}^2(\cdot, t) = \psi(t) f_\varepsilon = f_\varepsilon \in I_1$  où  $f_\varepsilon = \int \tilde{f}^2(\cdot, s) \varphi_\varepsilon(s) ds$ . Puisque  $\lim_\varepsilon \widetilde{\alpha_\varepsilon(f)}^2(\cdot, t) = \tilde{f}^2(\cdot, t)$  et que  $I_1$  est fermé,  $\tilde{f}^2(\cdot, t) \in I_1$  et  $\tilde{I}_t \subset I_1$ .

f) L'idéal  $I_1 = \tilde{I}_t$  est  $\mathfrak{D}_0$ -invariant, où  $\mathfrak{D}_0 = \exp(\text{Ker } \varphi)$ . En effet, soit  $\tilde{f}^2(\cdot, t) \in \tilde{I}_t$ ,  $f \in I$ . Alors  $f^{(t \cdot \mathfrak{D}_0 \cdot t^{-1})} \in I$  et  $(\tilde{f}^2)^{\mathfrak{D}_0}(\cdot, t) = \widetilde{f^{(t \cdot \mathfrak{D}_0 \cdot t^{-1})}}^2(\cdot, t) \in \tilde{I}_t$ .

**9.10.6. Projection et idéal  $\mathcal{I}_0$  :** a) Soit la projection

$$\begin{aligned}
 p : \mathcal{S}(G) &\longrightarrow \mathcal{S}(G)_1 \\
 f &\longmapsto p(f)
 \end{aligned}$$

tel que  $p(f)(x) = \tilde{f}^2(x, 0) = \hat{f}^2(x, 1)$ . Munissons  $\mathcal{S}(G)$  d'une nouvelle norme de Schwartz  $|||\cdot|||_3$  telle que  $p$  soit une application continue de  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||_3)$  dans  $(\mathcal{S}(G)_1, |||\cdot|||_1)$ . En effet,

$$\begin{aligned} |||p(f)|||_1 &= C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Q(\tilde{x})(D_{\tilde{x}}^\beta p(f))(\tilde{x})| d\tilde{x} \\ &\leq C_3 \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} |Q(\tilde{x}) D_{\tilde{x}}^\beta f(\tilde{x} \exp rZ) e^{tr}| dr d\tilde{x} \\ &= C_3 \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^n} |Q(\tilde{x})(D_{\tilde{x}}^\beta f)(\tilde{x} \exp rZ)| dr d\tilde{x} \\ &= |||f|||_3 \quad \text{par définition.} \end{aligned}$$

b) Définissons

$$\mathcal{I}_0 = p^{-1}(I_1) = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \tilde{f}^2(\cdot, 0) \in I_1\}.$$

Alors  $\mathcal{I}_0$  est un idéal de  $\mathcal{S}(G)$ , fermé dans  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||_3)$ . De plus,  $\mathcal{I}_0$  est  $\mathfrak{D}_0$ -invariant car  $\widetilde{f^{D_0}}^2(\cdot, 0) = (\tilde{f}^2)^{D_0}(\cdot, 0)$ . Donc, puisque  $I_1$  est  $\mathfrak{D}_0$ -invariant,

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{I}_0 &\Rightarrow \tilde{f}^2(\cdot, 0) \in I_1 \Rightarrow (\tilde{f}^2)^{D_0}(\cdot, 0) = \widetilde{f^{D_0}}^2(\cdot, 0) \in I_1 \\ &\Rightarrow f^{D_0} \in \mathcal{I}_0. \end{aligned}$$

9.10.7. Idéal  $\mathcal{I}_1$  de  $\mathcal{S}(G)$  : a) Définissons

$$\mathcal{I}_1 = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \tilde{f}^2(\cdot, t) \in I_1 \forall t\}.$$

Alors  $\mathcal{I}_1$  est un idéal de  $\mathcal{S}(G)$  tel que  $I \subset \mathcal{I}_1$ , puisque  $f \in I$  entraîne  $\tilde{f}^2(\cdot, t) \in \tilde{I}_t = I_1$  pour tout  $t$ . De plus, l'idéal  $\mathcal{I}_1$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant, puisque

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{I}_1 &\Rightarrow \tilde{f}^2(\cdot, t) \in I_1 \forall t \Rightarrow \tilde{f}^{a^2}(\cdot, t) = \tilde{f}^2(\cdot, t+a) \in I_1 \forall t \\ &\Rightarrow f^a \in \mathcal{I}_1 \\ f \in \mathcal{I}_1 &\Rightarrow \tilde{f}^2(\cdot, t) \in I_1 \forall t \Rightarrow \widetilde{f^{D_0}}^2(\cdot, t) = (\tilde{f}^2)^{(t^{-1} \cdot D_0 \cdot t)}(\cdot, t) \in I_1 \forall t \\ &\Rightarrow f^{D_0} \in \mathcal{I}_1 \quad \text{puisque } t^{-1} \cdot D_0 \cdot t \in \mathfrak{D}_0. \end{aligned}$$

b) Munissons  $\mathcal{S}(G)$  d'une nouvelle norme  $||| \cdot |||_4$  telle que  $\mathcal{I}_1$  soit fermé dans cette norme. En effet, pour  $f \in \mathcal{S}(G)$  on a

$$\begin{aligned} |||\tilde{f}^2(\cdot, t)|||_1 &= C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Q(\tilde{x})(D^\beta \tilde{f}^2(\tilde{x}, t))| d\tilde{x} \\ &= C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Q(\tilde{x}) D_{\tilde{x}}^\beta \int f^t(\tilde{x} \exp rZ) e^{tr} dr| d\tilde{x} \\ &\leq C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^n} |Q(\tilde{x}) D_{\tilde{x}}^\beta (f^t)(\tilde{x} \exp rZ)| dr d\tilde{x}. \end{aligned}$$

Cette dernière expression désigne une norme de Schwartz sur  $\mathcal{S}(G)$ , évaluée en  $f^t$ . D'après ([Lud. Mol. 1], 9.2.), il existe  $C \in \mathbb{R}^*$ ,  $M \in \mathbb{N}$  et une nouvelle norme de Schwartz  $||| \cdot |||_4$  sur  $\mathcal{S}(G)$  telle que l'expression soit majorée par  $C \cdot e^{M|t|} |||f|||_4$ , c'est-à-dire

$$|||\tilde{f}^2(\cdot, t)|||_1 \leq C \cdot e^{M|t|} |||f|||_4.$$

Donc si  $f_\nu \in \mathcal{I}_1$  et  $f_\nu \rightarrow f$  dans  $||| \cdot |||_4$ , alors  $\tilde{f}_\nu^2(\cdot, t) \in I_1$  et  $\tilde{f}_\nu^2(\cdot, t) \rightarrow \tilde{f}^2(\cdot, t)$  pour tout  $t$  dans  $||| \cdot |||_1$ . Par conséquent  $\tilde{f}^2(\cdot, t) \in I_1$  pour tout  $t$  et  $f \in \mathcal{I}_1$  qui est fermé dans  $||| \cdot |||_4$ .

c) Par ([Lud. Mol. 1], 9.12.),  $\alpha(\mathcal{I}_1) \subset \mathcal{I}_1$  pour tout  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)$ .

d) Définissons

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \exists u \in ES(\mathbb{R}), f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 : \tilde{f}^2 = u \otimes f_1\}.$$

Remarquons que  $\mathcal{S} \cap I = \mathcal{S} \cap \mathcal{I}_1$ . En effet,  $I \subset \mathcal{I}_1$  entraîne  $\mathcal{S} \cap I \subset \mathcal{S} \cap \mathcal{I}_1$ . D'autre part, soit  $f \in \mathcal{S} \cap \mathcal{I}_1$ , c'est-à-dire  $\tilde{f}^2(\cdot, t) = u(t)f_1(\cdot) \in I_1$  pour tout  $t$ . Donc  $f_1 \in I_1$  et  $f \in I$  par 9.10.5.c). Ainsi  $\mathcal{S} \cap \mathcal{I}_1 \subset \mathcal{S} \cap I$ .

e) Notre but est de montrer que, sauf cas exceptionnel à traiter séparément,  $\mathcal{I}_1 = I$ . Cela se fera en considérant  $\mathcal{I}_1 \cap K$ , l'ensemble  $K$  étant défini comme en 9.9.1.

**9.10.8. Approximation des éléments de  $K^M$  :** a) Soient  $K$  l'ensemble défini en 9.9.1. et  $ES(\mathbb{R}^2)$  comme précédemment. Définissons  $ES(\mathbb{R}^2)_0 = \{\alpha \in ES(\mathbb{R}^2) \mid \int_{\mathbb{R}} \alpha(s, b) db \equiv 0\}$ . Soit  $\alpha$  comme en 9.10.3. définissant un projecteur. En particulier,  $\hat{\alpha}^2(s - t, -e^{-s}) = \psi(t)\varphi(s)$ ,  $\hat{\alpha}^2(u, v) = 0$  pour  $v \geq 0$  et

$$\int_{\mathbb{R}} \alpha(s, b) db = \hat{\alpha}^2(s, 0) = 0.$$

Donc  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)_0$ .

D'autre part, soit  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)_0$  et soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  quelconque. Alors

$$\begin{aligned} \int \alpha(f)(x \exp rZ) dr &= \int \int \int \alpha(s, b)(f_b)^s(x \exp rZ) ds db dr \\ &= \int \int \left[ \int \alpha(s, b) db \right] \delta(s) e^{-s} f({}^s x \exp rZ) ds dr \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc  $\alpha(f) \in K$ . En particulier, un élément  $f$  qui n'appartient pas à  $K$ , ne peut pas être approché par des combinaisons linéaires de  $\alpha(f)$  avec  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)_0$ .

b) Soit  $(\beta_j)_j$  une unité approchée dans  $ES(\mathbb{R}^2)$ . Il suffit de prendre pour  $\beta$  une fonction  $C^\infty$  positive, à support dans  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , telle que  $\int \int \beta(s, b) ds db = 1$  et de poser  $\beta_\varepsilon(s, b) = \frac{1}{\varepsilon^2} \beta\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{b}{\varepsilon}\right)$ . Alors  $\int \int \beta_\varepsilon(s, b) ds db = 1$ ,  $\text{supp } \beta_\varepsilon \subset [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$  et, pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ ,

$$\begin{aligned} |||\beta_\varepsilon(f) - f||| &\leq \sum_{\text{finie}} \int \int |\tilde{x}^a r^b D_{\tilde{x}}^{\tilde{p}} D_r^q [\beta_\varepsilon(f)(\tilde{x} \exp rZ) \\ &\quad - f(\tilde{x} \exp rZ)]| d\tilde{x} dr \\ &\leq \sum_{\text{finie}} \int \int \beta_\varepsilon(s, b) \int \int |\tilde{x}^a r^b D_{\tilde{x}}^{\tilde{p}} D_r^q [(f_b)^s(\tilde{x} \exp rZ) \\ &\quad - f(\tilde{x} \exp rZ)]| d\tilde{x} dr ds db \\ &= \int \beta_\varepsilon(s, b) |||(f_b)^s - f||| ds db, \end{aligned}$$

$|||\cdot|||'$  désignant une nouvelle norme de Schwartz. Par ([Lud. Mol. 1], 9.5.),  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |||\beta_\varepsilon(f) - f||| = 0$ .

c) Soit à présent  $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\mu \geq 0$ ,  $\mu(-u) = \mu(u)$  pour tout  $u$ ,  $\hat{\mu}(0) = \int \mu(u) du = 1$  et  $\text{supp } \hat{\mu} \subset [-1, 1]$ . Définissons  $\mu_\varepsilon$  par  $\mu_\varepsilon(u) = \varepsilon \cdot \mu(\varepsilon u)$ . On en déduit que  $\mu_\varepsilon \geq 0$ ,  $\mu_\varepsilon(-u) = \mu_\varepsilon(u)$ ,  $\hat{\mu}_\varepsilon(0) = 1$ ,  $\hat{\mu}_\varepsilon(\lambda) = \hat{\mu}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)$  et  $\text{supp } \hat{\mu}_\varepsilon \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ .

d) Montrons que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |||\mu_\varepsilon * f||| = 0$  si  $f$  est de la forme  $f_1 * f_2 * \dots * f_M$  avec  $f_i \in K$  pour tout  $i$  et  $M$  suffisamment élevé. En effet, par application de la transformée de Fourier inverse, on a (dans la suite on notera  $x$  au lieu de  $\tilde{x}$ ) :

$$|x^a D_x^p (1 + r^2)^c D_r^q \mu_\varepsilon * f(x \exp rZ)|$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int [x^\alpha D_x^p (1 - D_\lambda^2) D_\lambda^c \lambda^q \widehat{\mu_\varepsilon} * f^2(x, \lambda)] e^{-ir\lambda} d\lambda \right| \\
 &\leq C_1 \cdot \sup_{\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |x^\alpha D_x^p (1 + \lambda^2) (1 - D_\lambda^2) D_\lambda^c \lambda^q \hat{\mu}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \hat{f}^2(x, \lambda)|
 \end{aligned}$$

où  $C_1 = \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$ . Donc

$$\begin{aligned}
 |||\mu_\varepsilon * f||| &\leq \sum_{\text{finie}} \int |x^\alpha D_x^p r^c D_r^q \mu_\varepsilon * f(x \exp rZ)| dx dr \\
 &\leq C_2 \cdot (1 + \varepsilon^2) \sum_{\text{finie}} \sup_{\substack{\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ x \in \tilde{G}}} |(1 + \|x\|^2)^k x^\alpha D_x^p \cdot \\
 &\quad (1 - D_\lambda^2) D_\lambda^c \lambda^q \hat{\mu}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \hat{f}^2(x, \lambda)|
 \end{aligned}$$

où

$$C_2 = C_1 \cdot \int_{\tilde{G}} \frac{dx}{(1 + \|x\|^2)^k} \cdot \int \frac{dr}{1 + r^2}$$

et où l'entier  $k$  est suffisamment élevé. Remplaçons  $f$  par  $f_1 * f_2 * \dots * f_M$  avec  $f_i \in K$  pour tout  $i$ . Alors

$$\hat{f}^2(x, \lambda) = \hat{f}_1^2(\cdot, \lambda) *_{\tilde{G}} \hat{f}_2^2(\cdot, \lambda) *_{\tilde{G}} \dots *_{\tilde{G}} \hat{f}_M^2(\cdot, \lambda)(x).$$

Remarquons en plus que

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_j^2(x, \lambda) &= \int_0^\lambda (D_t \hat{f}_j^2)(x, t) dt + \hat{f}_j^2(x, 0) \\
 &= \lambda \int_0^1 (D_u \hat{f}_j^2)(x, u) \Big|_{u=\lambda s} ds \quad \text{car } f_j \in K
 \end{aligned}$$

et

$$|\hat{f}_j^2(x, \lambda)| \leq |\lambda| \sup_{v \in [0, \lambda]} |D_u \hat{f}_j^2(x, u) \Big|_{u=v}|.$$

Pour  $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ , on a

$$|\hat{f}_j^2(x, \lambda)| \leq \varepsilon \cdot \sup_{v \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |D_u \hat{f}_j^2(x, u) \Big|_{u=v}|.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 &D_\lambda^c \left[ \lambda^q \hat{\mu}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \hat{f}_1^2(\cdot, \lambda) *_{\tilde{G}} \dots *_{\tilde{G}} \hat{f}_M^2(\cdot, \lambda) \right] \\
 &= \sum_{\substack{\alpha + \beta + \gamma = c \\ \alpha \leq q}} C_{\alpha, \beta, \gamma} [D_\lambda^\alpha \lambda^q] \cdot [D_\lambda^\beta \hat{\mu}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)] [D_\lambda^\gamma (\hat{f}_1^2(\cdot, \lambda) *_{\tilde{G}} \dots \\
 &\quad *_{\tilde{G}} \hat{f}_M^2(\cdot, \lambda))]
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} D_\lambda^\alpha \lambda^q &= q \cdot (q-1) \dots (q-\alpha+1) \lambda^{q-\alpha} \\ D_\lambda^\beta \hat{\mu} \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) &= \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^\beta (\hat{\mu})^{(\beta)} \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \\ D_\lambda^\gamma (\hat{f}_1^2(\cdot, \lambda) *_{\bar{G}} \dots *_{\bar{G}} \hat{f}_M^2(\cdot, \lambda)) \\ &= \sum_{M-\gamma \leq r_j \leq M} C_j \lambda^{r_j} \sum_{\text{finie}} g_{1,j}(\cdot, \lambda) *_{\bar{G}} \dots *_{\bar{G}} g_{M,j}(\cdot, \lambda) \end{aligned}$$

avec

$$g_{i,j}(\cdot, \lambda) = D_\lambda^{a_{i,j}} \hat{f}_i^2(\cdot, \lambda), \quad a_{i,j} \leq \gamma$$

soit

$$g_{i,j}(\cdot, \lambda) = \int_0^1 (D_u \hat{f}_i^2)(\cdot, u) |_{u=\lambda s} ds$$

selon que l'on fait agir  $D_\lambda^\gamma$  sur  $\hat{f}_i^2$  ou non. D'où

$$\begin{aligned} & D_\lambda^c \left[ \lambda^q \hat{\mu} \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \hat{f}_1^2(\cdot, \lambda) *_{\bar{G}} \dots *_{\bar{G}} \hat{f}_M^2(\cdot, \lambda) \right] \\ &= \sum_{\substack{\alpha+\beta+\gamma=c \\ \alpha \leq q}} \sum_{M-c+\alpha+\beta \leq r_j \leq M} C_{\alpha,\beta,\gamma} \cdot C_j \cdot q(q-1) \dots (q-\alpha+1) \cdot \\ & \quad \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^\beta (\hat{\mu})^{(\beta)} \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \lambda^{q-\alpha+r_j} \sum_{\text{finie}} g_{1,j}(\cdot, \lambda) *_{\bar{G}} \dots *_{\bar{G}} g_{M,j}(\cdot, \lambda) \end{aligned}$$

avec  $q-\alpha+r_j \geq q-\alpha+M-c+\alpha+\beta = q+M-c+\beta \geq q+M-c$ .  
On a des relations analogues pour  $D_\lambda^{c+2}$  au lieu de  $D_\lambda^c$ . De plus

$$\begin{aligned} q \cdot (q-1) \dots (q-\alpha+1) &\leq q! \\ \sup_{\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]} \left| (\hat{\mu})^{(\beta)} \left( \frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \right| &\leq \sup \{ \| (\hat{\mu})^{(\beta)} \|_\infty \mid 0 \leq \beta \leq C+2 \} \\ &\leq C_3 \\ \sup_{\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |\lambda^{q-\alpha+r_j}| \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^\beta &\leq \varepsilon^{q-\alpha-\beta+r_j} \end{aligned}$$

avec  $q-\alpha-\beta+r_j \geq q+M-c \geq q+M-c-2 > 0$  pour  $M$  suffisamment élevé. Enfin

$$\sup_{\substack{\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ x \in \bar{G}}} \left| (1 + \|x\|^2)^k x^\alpha D_x^p \cdot \sum_{\text{finie}} g_{1,j} *_{\bar{G}} \dots *_{\bar{G}} g_{M,j}(x, \lambda) \right| \leq K_j$$

constante, puisque toutes ces fonctions sont des fonctions de Schwartz en  $x$ ,  $C^\infty$  en  $\lambda$ , construites d'après des règles bien précises à partir de  $f$ , la construction étant fixée par  $c$  et  $q$ . On trouve finalement

$$|||\mu_\varepsilon * f||| \leq C \cdot (1 + \varepsilon^2) \cdot \sum_{\substack{\text{finie} \\ c, q}} (\varepsilon^{q+M-c} + \varepsilon^{q+M-c-2}).$$

Donc, pour  $M$  suffisamment élevé,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |||\mu_\varepsilon * f||| = 0$ .

e) Posons  $\mu_i = \mu_\varepsilon$  pour  $\varepsilon = \frac{1}{i}$  et  $k_{i,j} = \beta_j - \beta_j * \mu_i$ . On vérifie facilement que

$$k_{i,j}(f) = \beta_j(f) - (\beta_j * \mu_i)(f) = \beta_j(f) - \beta_j(\mu_i * f),$$

puisque  $\mu_i(-u) = \mu_i(u)$ . On en déduit alors que

$$\lim_{i,j} |||k_{i,j}(f) - f||| = 0$$

pour au moins une sous-suite de  $k_{i,j}$ , si  $f \in K^M$ . Il suffit d'écrire

$$|||k_{i,j}(f) - f||| \leq |||\beta_j(f) - f||| + |||\beta_j(\mu_i * f) - \mu_i * f||| + |||\mu_i * f|||$$

et d'appliquer les différentes limites.

f) On a  $k_{i,j} \in ES(\mathbb{R}^2)_0$ , puisque

$$\widehat{k_{i,j}}^2(u, 0) = \widehat{\beta_j}^2(u, 0) - \widehat{\beta_j}^2(u, 0) \cdot \widehat{\mu_i}(0) = 0$$

étant donné que  $\widehat{\mu_i}(0) = 1$ . Donc, pour  $M$  suffisamment élevé, tout  $f \in K^M$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $\alpha(f)$  avec  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)_0$ .

**9.10.9. Modification de la fonction  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)_0$  :** a) D'après ([Lud. Mol. 1], 9.9.) il existe une norme  $|||\cdot|||^\approx$  sur  $ES(\mathbb{R}^2)$  et une norme de Schwartz  $|||\cdot|||^\sim$  sur  $\mathcal{S}(G)$  telles que

$$|||\alpha(f)||| \leq |||\alpha|||^\approx \cdot |||f|||^\sim$$

quels que soient  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)_0$  et  $f \in \mathcal{S}(G)$ . De plus,

$$\begin{aligned} |||\alpha|||^\approx &= \sum_i \int \int |\alpha(s, b) e^{M_i |s|} \omega^{N_i}(b)| ds db \\ &\leq C \cdot \int \int |\alpha(s, b)| e^{M_0 \cdot |s|} \cdot (2 + b^2)^N ds db \end{aligned}$$

(voir ([Lud. Mol. 1], 3.5.) pour la définition et la majoration de  $\omega^N(b)$ ). On peut donc également identifier cette dernière expression à  $|||\alpha|||^\approx$ .

b) Tout  $f \in K^M$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $\alpha(f)$  avec  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)_0$  vérifiant  $D_\lambda^k \hat{\alpha}^2(s, \lambda)|_{\lambda=0} \equiv 0$  pour tout  $k \leq k_0$ ,  $k_0$  étant fixé arbitrairement.

En effet, remplaçons  $\alpha$  par  $\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_{k_0+1}$ , la convolution ayant lieu dans le groupe  $(ax + b)$ . Par 9.10.3.

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_{k_0+1}(f) = \alpha_1[\alpha_2[\dots\alpha_{k_0+1}(f)]\dots]$$

et

$$\begin{aligned} & |||\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_{k_0+1}(f) - f||| \\ \leq & |||\alpha_1[\alpha_2[\dots\alpha_{k_0+1}(f)]\dots] - \alpha_2[\dots\alpha_{k_0+1}(f)]\dots||| \\ & + |||\alpha_2[\alpha_3[\dots\alpha_{k_0+1}(f)]\dots] - \alpha_3[\dots\alpha_{k_0+1}(f)]\dots||| \\ & + \dots \\ & + |||\alpha_{k_0+1}(f) - f|||. \end{aligned}$$

Par 9.10.8., les  $\alpha_i$  peuvent être choisis successivement dans  $ES(\mathbb{R}^2)_0$  de manière à rendre l'expression arbitrairement petite. Montrons que  $\alpha = \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_{k_0+1}$  convient. En effet, par 9.10.3.,

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2(t, a) = \int \int \alpha_1(t - s, e^{-s}a - e^{-s}b)\alpha_2(s, b)e^{-s} ds db$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha_1 \otimes \alpha_2}^2(t, \lambda) &= \int \widehat{\alpha_1}^2(t - s, e^s \lambda) \widehat{\alpha_2}^2(s, \lambda) ds, \\ (\alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_{k_0+1})^{\wedge 2}(t, \lambda) \\ &= \int \dots \int \widehat{\alpha_1}^2(t - s_2, e^{s_2} \lambda) \widehat{\alpha_2}^2(s_2 - s_3, e^{s_3} \lambda) \dots \\ & \quad \widehat{\alpha_{k_0+1}}^2(s_{k_0+1}, \lambda) ds_2 ds_3 \dots ds_{k_0+1}. \end{aligned}$$

En prenant la dérivée  $D_\lambda^k$  avec  $k \leq k_0$ , une des fonctions au moins n'est pas dérivée. En évaluant en  $\lambda = 0$ , cette fonction annule l'expression toute entière.

c) Toutes les fonctions  $\alpha$  construites jusqu'à présent peuvent être supposées à support compact en la première variable, puisque tel est le cas pour les  $\beta_j$ .

d) Tout  $f \in K^M$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $\gamma(f)$  avec  $\gamma \in ES(\mathbb{R}^2)_0$  tels que  $\hat{\gamma}^2(\cdot, t) \equiv 0$  pour tout  $t$  dans un voisinage de 0.

En effet, pour  $\alpha, \gamma \in ES(\mathbb{R}^2)_0$ , on a

$$\begin{aligned} |||\alpha - \gamma||| &\approx \sum_{k=0}^N C \cdot C_k^N \int \int |\alpha(s, b) - \gamma(s, b)| e^{M_0|s|} \cdot 2^{N-k} b^{2k} ds db \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^N C \cdot C_k^N \cdot 2^{N-k} \int \int \frac{1}{1+b^2} \left| \int \{ (1 - D_\lambda^2) D_\lambda^{2k} \right. \\ &\quad \left. [\hat{\alpha}^2(s, \lambda) - \hat{\gamma}^2(s, \lambda)] \} e^{-i\lambda b} d\lambda \right| e^{M_0|s|} ds db \\ &\leq C_1 \sum_{k=0}^N \int e^{M_0|s|} \int |(1 - D_\lambda^2) D_\lambda^{2k} [\hat{\alpha}^2(s, \lambda) - \hat{\gamma}^2(s, \lambda)]| d\lambda ds. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon > 0$  donné, choisissons  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)_0$  à support compact  $K_1$  en la première variable, tel que  $|||\alpha(f) - f||| < \varepsilon/2$  et  $D_\lambda^k \hat{\alpha}^2(s, \lambda)|_{\lambda=0} \equiv 0$  pour tout  $k \leq 2N+1$ . Soit  $q \in C^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $0 \leq q \leq 1$ ,  $q(\lambda) \equiv 1$  pour  $|\lambda| \geq 1$ ,  $q(\lambda) \equiv 0$  dans un voisinage de  $\lambda = 0$ . Posons  $q_\varepsilon(\lambda) = q(\frac{\lambda}{\varepsilon})$ . Alors  $0 \leq q_\varepsilon \leq 1$ ,  $q_\varepsilon(\lambda) \equiv 1$  pour  $|\lambda| \geq \varepsilon$ ,  $q_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$  dans un voisinage de  $\lambda = 0$ . Définissons

$$\hat{\gamma}^2(s, \lambda) = \hat{\alpha}^2(s, \lambda) \cdot q_\varepsilon(\lambda)$$

et

$$\gamma(s, b) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{\alpha}^2(s, \lambda) q_\varepsilon(\lambda) e^{-i\lambda b} d\lambda.$$

On a  $D_\lambda^p q_\varepsilon(\lambda) = (\frac{1}{\varepsilon})^p q^{(p)}(\frac{\lambda}{\varepsilon})$  et, puisque  $D_\lambda^k \hat{\alpha}^2(s, \lambda)|_{\lambda=0} = 0$  pour  $k \leq 2N+1$ ,  $\hat{\alpha}^2(s, \lambda) = \lambda^{2N+2} \Phi(s, \lambda)$  où  $\Phi$  est une fonction  $C^\infty$ , à support compact  $K_1$  en  $s$ . Alors

$$\begin{aligned} |||\alpha - \gamma||| &\approx \leq C_1 \cdot \sum_{k=0}^N \int e^{M_0|s|} \cdot \int |(1 - D_\lambda^2) D_\lambda^{2k} [\lambda^{2N+2} \Phi(s, \lambda) \\ &\quad (1 - q_\varepsilon(\lambda))]| d\lambda ds \end{aligned}$$

où  $s$  parcourt un compact  $K_1$  de  $\mathbb{R}$ . Posons

$$C_2 = \int_{K_1} e^{M_0|s|} ds$$

$$C_3 = \sup_{\substack{0 \leq r \leq 2N+2 \\ \lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ s \in K_1}} |D_\lambda^r \Phi(s, \lambda)|$$

$$C_4 = \sup_{\substack{0 \leq r \leq 2N+2 \\ \lambda \in [-1, 1]}} \{1 - q_\varepsilon(\lambda), D_\lambda^r q(\lambda)\}.$$

Notons encore que l'intégrale en  $\lambda$  porte sur  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ , puisque  $1 - q_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$  pour  $|\lambda| \geq \varepsilon$ . D'où

$$\begin{aligned} & \left| (1 - D_\lambda^2) D_\lambda^{2k} [\lambda^{2N+2} \Phi(s, \lambda) (1 - q_\varepsilon(\lambda))] \right| \\ \leq & \sum_{a+b+c=2k} C_{a,b,c} \left| (D_\lambda^a \lambda^{2N+2}) (D_\lambda^b \Phi(s, \lambda)) (D_\lambda^c (1 - q_\varepsilon(\lambda))) \right| \\ & + \sum_{a+b+c=2k+2} C'_{a,b,c} \left| (D_\lambda^a \lambda^{2N+2}) (D_\lambda^b \Phi(s, \lambda)) (D_\lambda^c (1 - q_\varepsilon(\lambda))) \right| \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} |D_\lambda^a \lambda^{2N+2}| & \leq (2N+2)! \cdot |\lambda|^{2N+2-a} \leq (2N+2)! \cdot \varepsilon^{2N+2-a} \\ & \text{pour } |\lambda| \leq \varepsilon < 1 \\ |D_\lambda^b \Phi(s, \lambda)| & \leq C_3 \quad \text{pour } |\lambda| \leq \varepsilon, s \in K_1 \\ |D_\lambda^c (1 - q_\varepsilon(\lambda))| & \leq C_4 \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^c. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \left| (D_\lambda^a \cdot \lambda^{2N+2}) (D_\lambda^b \Phi(s, \lambda)) (D_\lambda^c (1 - q_\varepsilon(\lambda))) \right| \\ & \leq (2N+2)! \cdot C_3 \cdot C_4 \cdot \varepsilon^{2N+2-a-c} \\ & \leq C_5 \quad \text{car } a+c \leq 2N+2 \end{aligned}$$

et

$$|||\alpha - \gamma||| \approx \leq C \cdot \varepsilon, C \text{ étant une constante,}$$

en remplaçant  $\int_{-\varepsilon}^\varepsilon d\lambda$  par  $2\varepsilon$ . Donc on peut rendre  $|||\alpha(f) - \gamma(f)|||$  arbitrairement petit. De plus, puisque  $q_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$  dans un voisinage de  $\lambda = 0$ , il en est de même de  $\hat{\gamma}^2(s, \lambda)$ .

e) Tout  $f \in K^M$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $\beta(f)$  avec  $\beta \in ES(\mathbb{R}^2)_0$  tels que  $\hat{\beta}^2(\cdot, t) \equiv 0$  pour tout  $t$  dans un voisinage de 0 et tels que  $\hat{\beta}^2(u, v)$  soit à support compact en  $u$  et  $v$ . Refaisons le raisonnement de d) avec une autre fonction  $q$  : Soit  $q \in$

$C^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $0 \leq q \leq 1$ ,  $q(\lambda) \equiv 1$  pour  $-1 \leq \lambda \leq 1$ ,  $\text{supp } q \subset [-2, 2]$ . Soit

$$M_1 = \sup\{\|q^{(k)}\|_\infty \mid 0 \leq k \leq 2N + 2\}$$

et posons  $q_\varepsilon(\lambda) = q(\varepsilon\lambda)$ . Donc  $0 \leq q_\varepsilon \leq 1$ ,  $\text{supp } q_\varepsilon$  est compact,  $q_\varepsilon(\lambda) \equiv 1$  pour  $-\frac{1}{\varepsilon} \leq \lambda \leq \frac{1}{\varepsilon}$ ,  $D_\lambda^k q_\varepsilon(\lambda) = \varepsilon^k q^{(k)}(\varepsilon\lambda)$ ,  $|D_\lambda^k q_\varepsilon(\lambda)| \leq \varepsilon^k \cdot M_1$  pour  $0 \leq k \leq 2N + 2$ . Ainsi, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit,  $|D_\lambda^k q_\varepsilon(\lambda)| \leq 1$  pour  $0 \leq k \leq 2N + 2$  et  $|1 - q_\varepsilon(\lambda)| \leq 1$ . Posons  $\hat{\beta}^2(s, \lambda) = \hat{\gamma}^2(s, \lambda)q_\varepsilon(\lambda)$ ,  $\beta$  étant obtenu par transformée de Fourier inverse. Alors  $\beta$  vérifie les conditions imposées et

$$\|\|\gamma - \beta\|\| \approx \leq C_1 \cdot \sum_{k=0}^N \int e^{M_0|s|} \int |(1 - D_\lambda^2) D_\lambda^{2k} [\hat{\gamma}^2(s, \lambda)(1 - q_\varepsilon(\lambda))]| d\lambda ds.$$

Or

$$\begin{aligned} (1 - D_\lambda^2) D_\lambda^{2k} [\hat{\gamma}^2(s, \lambda)(1 - q_\varepsilon(\lambda))] &= \sum_{a+b=2k} C_{a,b} [D_\lambda^a \hat{\gamma}^2(s, \lambda)] [D_\lambda^b (1 - q_\varepsilon(\lambda))] \\ &+ \sum_{a+b=2k+2} C'_{a,b} [D_\lambda^a \hat{\gamma}^2(s, \lambda)] [D_\lambda^b (1 - q_\varepsilon(\lambda))] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\|\gamma - \beta\|\| \approx &\leq C_1 \cdot \sum_{k=0}^N \cdot C_2 \cdot \left[ \sum_{a+b=2k} C_{a,b} \int_{K_1} \int_{|\lambda| \geq 1/\varepsilon} |D_\lambda^a \hat{\gamma}^2(s, \lambda)| d\lambda ds \right. \\ &+ \left. \sum_{a+b=2k+2} C'_{a,b} \int_{K_1} \int_{|\lambda| \geq 1/\varepsilon} |D_\lambda^a \hat{\gamma}^2(s, \lambda)| d\lambda ds \right] \end{aligned}$$

où  $C_2 = \sup_{s \in K_1} e^{M_0|s|}$ . Puisque  $1/\varepsilon \rightarrow +\infty$  et que  $\hat{\gamma}^2 \in ES(\mathbb{R}^2)$ , cette dernière expression tend vers 0, de même que  $\|\|\gamma(f) - \beta(f)\|\|$ , ce qui prouve notre affirmation.

**9.10.10. Approximation par des combinaisons linéaires de projecteurs :** a) Soit  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)_0$  tel que  $\hat{\alpha}^2(u, v)$  soit à support compact en  $u$  et  $v$  et tel que  $\hat{\alpha}^2(\cdot, v) \equiv 0$  dans un voisinage de  $v = 0$ . On en déduit que l'application

$$\beta : (s, t) \longmapsto \beta(s, t) = \hat{\alpha}^2(s - t, -e^{-s})$$

est  $C^\infty$  à support compact. Nous allons approcher  $\alpha$  en  $||| \cdot |||^\approx$  par une fonction  $k$  telle que

$$\begin{aligned} \hat{k}^2(s-t, -e^{-s}) &= \sum_{i,j} c_{ij} \varphi_i(t) \psi_j(s) \quad (\text{somme finie}) \\ &= \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) \theta(t) h_j(s) \theta_1(s) \end{aligned}$$

où  $h_i, h_j$  sont des fonctions d'Hermite,  $\theta$  et  $\theta_1$  des fonctions  $C^\infty$  à support compact. Remarquons d'abord qu'en regroupant les termes de la majoration de  $||| \cdot |||^\approx$  autrement et qu'en majorant toutes les constantes, on a une inégalité de la forme

$$|||\alpha|||^\approx \leq C \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int e^{M_0|u|} \int |D_\lambda^r \hat{\alpha}^2(u, \lambda)| d\lambda du$$

(9.10.9.d)).

b) Déterminons  $\theta$  et  $\theta_1$  : Supposons  $\text{supp } \beta(s, t) \subset K_1 \times K_2$  compact. Soient  $K_3$  un voisinage compact de  $K_1$  et  $K_4$  un voisinage compact de  $K_2$ . Soient  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\theta(s) \equiv 1$  pour  $s \in K_2$ ,  $\text{supp } \theta \subset K_4$  et  $\theta_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\theta_1(s) \equiv 1$  pour  $s \in K_1$ ,  $\text{supp } \theta_1 \subset K_3$ . Supposons en plus que  $0 \leq \theta \leq 1$  et  $0 \leq \theta_1 \leq 1$ . Posons

$$\begin{aligned} A &= \sup\{\|D^r \theta\|_\infty \mid 0 \leq r \leq 2N+2\} \\ \text{et } A_1 &= \sup\{\|D^r \theta_1\|_\infty \mid 0 \leq r \leq 2N+2\}. \end{aligned}$$

Les fonctions d'Hermite seront déterminées ultérieurement.

c) Supposons  $\hat{k}^2(s-t, -e^{-s})$  déterminé. Alors  $k$  est obtenu par transformée de Fourier inverse de la fonction

$$\hat{k}^2(u, \lambda) = \begin{cases} \sum_{i,j} c_{ij} h_i(-\ln(-\lambda) - u) \theta(-\ln(-\lambda) - u) h_j(-\ln(-\lambda)) \\ \quad \theta_1(-\ln(-\lambda)) & \text{si } \lambda < 0 \\ 0 & \text{si } \lambda \geq 0 \end{cases}$$

ce qui est possible, puisque  $\hat{k}^2(u, \lambda)$  est à support compact.

d) Evaluons

$$|||\alpha - k|||^\approx \leq C \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int e^{M_0|u|} \int |D_\lambda^r [\hat{\alpha}^2(u, \lambda) - \hat{k}^2(u, \lambda)]| d\lambda du.$$



Effectuons le changement de variables

$$\begin{cases} s - t = u \\ -e^{-s} = \lambda. \end{cases}$$

On montre par récurrence que  $D_\lambda = e^s(D_s + D_t)$  et que  $D_\lambda^n$  est de la forme  $D_\lambda^n = e^{ns} \cdot \sum_{a+b \leq n} C_{a,b} D_s^a D_t^b$  pour tout  $n$ . On trouve alors

$$\begin{aligned} |||\alpha - k|||^\approx &\leq C \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int e^{M_0|s-t|} \int |e^{rs} \cdot \sum_{a+b \leq r} C_{a,b} D_s^a D_t^b \\ &\quad [\hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s}) - \hat{k}^2(s-t, -e^{-s})]| e^{-s} ds dt \\ &\leq C \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int_{K_4} e^{M_0|t|} \int_{K_3} e^{M_0|s|} \cdot e^{(r-1)s} \cdot \\ &\quad \left| \sum_{a+b \leq r} C_{a,b} D_s^a D_t^b [\hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) \theta(t) h_j(s) \theta_1(s) \right| ds dt \\ &\leq C' \cdot \sum_{a+b \leq 2N+2} \int_{K_4} \int_{K_3} |D_s^a D_t^b [\hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s}) \\ &\quad - \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) \theta(t) h_j(s) \theta_1(s)]| ds dt \end{aligned}$$

en majorant les  $e^{M_0|t|}$ ,  $e^{M_0|s|}$  et  $e^{(r-1)s}$  sur les compacts  $K_4$  et  $K_3$  et en regroupant les termes de même dérivée. En tenant compte des supports,

$$\begin{aligned} |||\alpha - k|||^\approx &\leq C' \cdot \sum_{a+b \leq 2N+2} \int \int_{K_1 \times K_2} |D_s^a D_t^b [\hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s}) \\ &\quad - \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) h_j(s)]| ds dt \\ &\quad + C' \cdot \sum_{a+b \leq 2N+2} \int \int_{(K_3 \times K_4) \setminus (K_1 \times K_2)} |D_s^a D_t^b \left[ \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) \right. \\ &\quad \left. \theta(t) h_j(s) \theta_1(s) \right]| ds dt \end{aligned}$$

puisque  $\theta_1 \otimes \theta \equiv 1$  sur  $K_1 \times K_2$ . Remarquons que

$$D_s^a D_t^b \left( \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) \theta(t) h_j(s) \theta_1(s) \right)$$

$$= \sum_{ij} c_{ij} \sum_{p=0}^a \sum_{q=0}^b C_p^a C_q^b (D_t^q h_i(t)) (D_t^{b-q} \theta(t)) (D_s^p h_j(s)) (D_s^{a-p} \theta_1(s)).$$

En modifiant l'ordre des sommations, en majorant toutes les dérivées de  $\theta$  et  $\theta_1$  par une même constante, en regroupant les termes de mêmes dérivées pour  $h_i$  et  $h_j$  et en mettant en évidence le sup de toutes les constantes, on trouve

$$\begin{aligned} |||\alpha - k|||^\approx &\leq C' \cdot \sum_{a+b \leq 2N+2} \int \int_{K_1 \times K_2} |D_s^a D_t^b [\hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s}) \\ &\quad - \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) h_j(s)]| ds dt \\ &+ C'' \cdot \sum_{a+b \leq 2N+2} \int \int_{(K_3 \times K_4) \setminus K_1 \times K_2} |D_s^a D_t^b [\sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) \\ &\quad h_j(s)]| ds dt. \end{aligned}$$

Puisque  $\text{supp } \beta(s, t) \subset K_1 \times K_2$ , on peut finalement écrire

$$\begin{aligned} |||\alpha - k|||^\approx &\leq C''' \sum_{a+b \leq 2N+2} \int \int |D_s^a D_t^b [\hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s}) \\ &\quad - \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) h_j(s)]| ds dt \end{aligned}$$

où  $C''' = C' + C''$ . Cette dernière expression est une norme de Schwartz et dans cette norme la fonction de Schwartz  $\beta(s, t) = \hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s})$  peut effectivement être approchée arbitrairement par des combinaisons linéaires de fonctions d'Hermite ([Sch. 2], p. 262). Ceci détermine  $\sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) h_j(s)$  et prouve l'énoncé de a).

e) Finalement, tout  $f \in K^M$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $k(f)$  avec  $\hat{k}^2(s-t, -e^{-s}) = \sum_{i,j} c_{ij} \varphi_i(t) \psi_j(s)$ , les fonctions  $\varphi_i, \psi_j$  étant  $C^\infty$  à support compact. Ceci découle de 9.10.8., 9.10.9., 9.10.10.

**9.10.11. Comparaison des idéaux  $\mathcal{I}_1$  et  $I$  :** Vu les propriétés de  $K$  et  $\mathcal{I}_1$ ,  $K \cap \mathcal{I}_1$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ . Par 9.10.10., tout élément  $f$  de  $(K \cap \mathcal{I}_1)^M$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $\alpha(f)$  où  $\hat{\alpha}^2(s-t, -e^{-s}) = \sum_{i,j} c_{ij} \varphi_i(t) \psi_j(s)$  avec  $\varphi_i, \psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

Soit  $\alpha_{ij}$  défini par  $\widehat{\alpha_{ij}}^2(s-t, -e^{-s}) = \varphi_i(t)\psi_j(s)$ . Alors  $\alpha_{ij} \in ES(\mathbb{R}^2)_0$  (9.10.8. a)) et, pour tout  $f \in (K \cap \mathcal{I}_1)^M$ ,  $\alpha_{ij}(f) \in K \cap \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{S} = K \cap I \cap \mathcal{S} \subset I$  par 9.10.8.a), 9.10.7.c) et 9.10.7.d). Donc  $\alpha(f) \in I$  et  $f \in I$  puisque  $I$  est fermé et que  $f$  peut être approché arbitrairement par des  $\alpha(f)$ . On vient donc de montrer que  $(K \cap \mathcal{I}_1)^M \subset I$  et, puisque  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier,

$$K \cdot \mathcal{I}_1 \subset K \cap \mathcal{I}_1 \subset I.$$

Ceci entraîne  $K \subset I$  ou  $\mathcal{I}_1 \subset I$ . Le cas  $K \subset I$  a été traité en 9.9.2. Nous pouvons donc supposer à présent que  $\mathcal{I}_1 \subset I$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{I}_1 = I$ .

**9.10.12. Idéaux  $\mathfrak{D}_0$ -premiers :** a) L'idéal  $I_1 = \tilde{I}_t$  de  $\mathcal{S}(G)_1$  est  $\mathfrak{D}_0$ -premier. En effet, soient  $J_1, K_1$  des idéaux  $\mathfrak{D}_0$ -invariants de  $\mathcal{S}(G)_1$  tels que  $J_1 \cdot K_1 \subset I_1$ . Définissons

$$\mathcal{J}_1 = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \tilde{f}^2(., t) \in J_1 \forall t\}$$

et

$$\mathcal{K}_1 = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \tilde{f}^2(., t) \in K_1 \forall t\}.$$

Alors  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{K}_1$  sont des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants de  $\mathcal{S}(G)$ . La  $\mathfrak{D}$ -invariance découle des relations  $\tilde{f}^{a^2}(., t) = \tilde{f}^2(., t + a)$  et  $\tilde{f}^{\mathfrak{D}_0^2}(., t) = (\tilde{f}^2)^{(t^{-1} \cdot \mathfrak{D}_0 \cdot t)}(., t)$  avec  $t^{-1} \cdot \mathfrak{D}_0 \cdot t \in \mathfrak{D}_0$ . De plus,  $\mathcal{J}_1 \cdot \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{I}_1 = I$  puisque  $J_1 \cdot K_1 \subset I_1$ . D'où, puisque  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier,  $\mathcal{J}_1 \subset I$  ou  $\mathcal{K}_1 \subset I$ . On en déduit que  $J_1 \subset I_1$  ou  $K_1 \subset I_1$ . En effet, supposons par exemple  $\mathcal{J}_1 \subset I$  et soit  $f_1 \in J_1$ . Alors  $f = R(f_1) \in \mathcal{J}_1 \subset I$  et  $f_1 \in I_1$ .

b) L'idéal  $\mathcal{I}_0$  de  $\mathcal{S}(G)$  est  $\mathfrak{D}_0$ -premier (et fermé dans  $(\mathcal{S}(G), ||| \cdot |||_3)$ ). En effet, soient  $J, K$  des idéaux  $\mathfrak{D}_0$ -invariants de  $\mathcal{S}(G)$  tels que  $J \cdot K \subset \mathcal{I}_0$  et définissons  $J_1 = p(J)$  et  $K_1 = p(K)$  (9.10.6.). Alors  $J_1$  et  $K_1$  sont des idéaux  $\mathfrak{D}_0$ -invariants de  $\mathcal{S}(G)_1$ . La  $\mathfrak{D}_0$ -invariance découle de la relation  $(\tilde{f}^2)^{\mathfrak{D}_0}(., 0) = \tilde{f}^{\mathfrak{D}_0^2}(., 0)$ . De plus, puisque  $J \cdot K \subset \mathcal{I}_0 = p^{-1}(I_1)$ ,  $J_1 \cdot K_1 \subset p[p^{-1}(I_1)] = I_1$ . Par a),  $J_1 \subset I_1$  ou  $K_1 \subset I_1$ . Donc  $J \subset p^{-1}(J_1) \subset p^{-1}(I_1) = \mathcal{I}_0$  ou  $K \subset p^{-1}(K_1) \subset p^{-1}(I_1) = \mathcal{I}_0$ .

**9.10.13. Raisonnement par récurrence :** a) Puisque  $\mathcal{I}_0$  est un idéal  $\mathfrak{D}_0$ -premier, fermé propre dans  $(\mathcal{S}(G), ||| \cdot |||_3)$  et que  $\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{d}_0 < \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{d}$ , il existe, par hypothèse de récurrence, une  $\mathfrak{D}_0$ -orbite  $\Omega_0$  dans  $\mathfrak{g}^*$  (associée à une représentation unitaire irréductible  $\pi$ ) telle que  $\mathcal{I}_0 = \text{Ker } \Omega_0$ .

b) Montrons que

$$\bigcap_t (\text{Ker } \Omega_0)^t = \text{Ker } \Omega,$$

$\Omega$  désignant la  $\mathfrak{D}$ -orbite correspondante. En effet,

$$\begin{aligned} f \in \bigcap_t (\text{Ker } \Omega_0)^t &\iff f^t \in \text{Ker } \Omega_0 \quad \forall t \\ &\iff (D_0 \pi)(f^t) = 0 \quad \forall t, \forall D_0 \\ &\iff (\exp t d_1 \cdot D_0 \pi)(f) = 0 \quad \forall t, \forall D_0 \\ &\iff f \in \text{Ker } \Omega. \end{aligned}$$

c) Montrons de même que

$$\bigcap_t (\mathcal{I}_0)^t = \mathcal{I}_1 = I.$$

En effet,

$$\begin{aligned} f \in \bigcap_t (\mathcal{I}_0)^t &\iff f^t \in \mathcal{I}_0 \quad \forall t \\ &\iff \tilde{f}^2(\cdot, t) = \tilde{f}^2(\cdot, 0) \in \mathcal{I}_1 \quad \forall t \\ &\iff f \in \mathcal{I}_1 = I. \end{aligned}$$

d) On vient donc de prouver que  $I = \text{Ker } \Omega$  dans le cas  $a_1$ ).

### 9.11. Différentes possibilités pour le cas $a_3$ :

9.11.1. a) Supposons  $d(Z) = 0$  pour tout  $d$ ,  $I \subset \text{Ker } \pi$  avec  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$ ,  $\langle \ell, Z \rangle = -\lambda_0 \neq 0$ . Définissons

$$I_0 = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \int f(x \exp rZ) e^{ir\lambda_0} dr = \hat{f}^2(x, \lambda_0) = 0 \quad \forall x \in G\}.$$

Puisque  $\int f(x \exp aZ \exp rZ) e^{ir\lambda_0} dr = e^{-ia\lambda_0} \int f(x \exp rZ) e^{ir\lambda_0} dr$ , on peut se limiter à  $x \in \tilde{G} = G/\exp(\mathbb{R}Z)$  dans la définition de  $I_0$ . De plus  $I_0$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant, puisque

$$\int (f^D)(x \exp rZ) e^{ir\lambda_0} dr = \delta(D) \int f(Dx \cdot \exp rZ) e^{ir\lambda_0} dr$$

(étant donné que  $d(Z) = 0$  pour tout  $d$ ). Nous allons montrer que  $I_0 \subset I$ .

b) Soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\hat{f}^2(\cdot, \lambda) \equiv 0$  pour tout  $\lambda$  dans un voisinage compact  $\mathcal{K}$  quelconque de  $\lambda_0$ . Alors  $f \in I$ .

En effet, soit  $J$  l'idéal fermé dans la topologie de  $\mathcal{S}(G)$  (et non nécessairement pour  $|||\cdot|||$ ),  $\mathfrak{D}$ -invariant engendré par  $f$ , c'est-à-dire

$$J = \left\langle \bigcup_{D \in \mathfrak{D}} \mathcal{S}(G) * f^D * \mathcal{S}(G) \right\rangle^{-\mathcal{S}(G)}.$$

Puisque

$$\widehat{f^D}^2(x, \lambda) = \delta(D) \int f(Dx \cdot \exp rZ) e^{i\lambda r} dr$$

on a également  $\widehat{f^D}^2(\cdot, \lambda) \equiv 0$  pour tout  $\lambda \in \mathcal{K}$  et  $\hat{g}^2(\cdot, \lambda) \equiv 0$  pour tout  $\lambda \in K$  et tout  $g \in J$ . Soit à présent  $F \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\pi(F) \neq 0$ . Donc  $F \notin I$ . Soit  $\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{\nu}(\lambda_0) = 1$  et  $\hat{\nu} \equiv 0$  sur  $\mathbb{R} \setminus K$ . Posons  $\tilde{F} = F * \nu$ . Alors

$$\pi(\tilde{F}) = \pi(F)\hat{\nu}(\lambda_0) = \pi(F) \neq 0$$

et  $\tilde{F} \notin I$ . De plus

$$\widehat{\tilde{F}}^2(x, \cdot) = \hat{F}^2(x, \cdot)\hat{\nu}(\cdot) \equiv 0 \text{ dans } \mathbb{R} \setminus K, \text{ pour tout } x.$$

Soit  $J_1$  l'idéal fermé dans la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ ,  $\mathfrak{D}$ -invariant engendré par  $\tilde{F}$ , c'est-à-dire

$$J_1 = \left\langle \bigcup_{D \in \mathfrak{D}} \mathcal{S}(G) * \tilde{F}^D * \mathcal{S}(G) \right\rangle^{-\mathcal{S}(G)}.$$

Par un raisonnement analogue à celui fait pour  $J$ , on voit que  $\hat{g}_1^2(\cdot, \lambda) \equiv 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus K$  et tout  $g_1 \in J_1$ . Puisque  $\widehat{g *_{\mathfrak{G}} g_1}^2(\cdot, \lambda) = \hat{g}^2(\cdot, \lambda) *_{\mathfrak{G}} \hat{g}_1^2(\cdot, \lambda)$ , on voit que  $J \cdot J_1 = \{0\} \subset I$ . Puisque  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier,  $J \subset I$  ou  $J_1 \subset I$ . Or  $\tilde{F} \in J_1$  et  $\tilde{F} \notin I$ . Donc  $J \subset I$  et  $f \in I$ .

c) Soit  $I$  fermé pour la norme

$$|||f||| = \sum_{\text{finie}} \int \int |x^a D_x^p r^b D_r^q f(x \exp rZ)| dr dx.$$

Il existe alors  $M \in \mathbb{N}$  tel que si  $f \in \mathcal{S}(G)$  et si

$$\hat{f}^2(x, \lambda_0) = D_\lambda \hat{f}^2(x, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \dots = D_\lambda^M \hat{f}^2(x, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} = 0,$$

alors  $f \in I$ .

En effet, montrons qu'un tel  $f$  peut être approché dans  $||| \cdot |||$  par des  $g \in \mathcal{S}(G)$  tels que  $\hat{g}^2(\cdot, \lambda) \equiv 0$  pour tout  $\lambda$  dans un voisinage compact de  $\lambda_0$ . Par b) on a alors  $g \in I$  et  $f \in I$ , puisque  $I$  est fermé. Il suffit donc de montrer cette approximation. On a

$$\begin{aligned} |||f - g||| &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\text{finie}} \int \int \frac{1}{1+r^2} |x^\alpha D_x^p \int \{(1 - D_\lambda^2) D_\lambda^b \lambda^q [\hat{f}^2(x, \lambda) \\ &\quad - \hat{g}^2(x, \lambda)]\} e^{-i\lambda r} d\lambda| dr dx \\ &\leq C \cdot \sum_{\text{finie}} \int \int |x^\alpha D_x^p (1 - D_\lambda^2) D_\lambda^b \lambda^q [\hat{f}^2(x, \lambda) - \hat{g}^2(x, \lambda)]| \\ &\quad d\lambda dx. \end{aligned}$$

Soit  $q \in C^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $0 \leq q \leq 1$ ,  $q(\lambda) \equiv 1$  pour  $|\lambda| \geq 1$ ,  $q(\lambda) \equiv 0$  dans un voisinage de  $\lambda = 0$ .

Posons  $q_\varepsilon(\lambda) = q\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\varepsilon}\right)$ . Alors  $0 \leq q_\varepsilon \leq 1$ ,  $q_\varepsilon(\lambda) \equiv 1$  pour  $|\lambda - \lambda_0| \geq \varepsilon$ ,  $q_\varepsilon(\lambda) \equiv 0$  dans un voisinage de  $\lambda_0$  et  $D_\lambda^s q_\varepsilon(\lambda) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^s q^{(s)}\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\varepsilon}\right)$ . Définissons ensuite

$$\widehat{g}_\varepsilon^2(x, \lambda) = \hat{f}^2(x, \lambda) \cdot q_\varepsilon(\lambda)$$

et

$$g_\varepsilon(x \exp rZ) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g}_\varepsilon^2(x, \lambda) q_\varepsilon(\lambda) e^{-ir\lambda} d\lambda.$$

De plus, par hypothèse sur  $f$ , il existe  $\Phi(x, \lambda)$ , Schwartz en  $x$  et  $C^\infty$  en  $\lambda$ , telle que

$$\hat{f}^2(x, \lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{M+1} \Phi(x, \lambda).$$

D'où

$$\begin{aligned} |||f - g_\varepsilon||| &\leq C \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\tilde{G}} \int_{\lambda_0 - \varepsilon}^{\lambda_0 + \varepsilon} |x^\alpha D_x^p (1 - D_\lambda^2) D_\lambda^b [\lambda^q (\lambda - \lambda_0)^{M+1} \cdot \\ &\quad \Phi(x, \lambda) (1 - q_\varepsilon(\lambda))]| d\lambda dx \\ &\leq C_1 \cdot \sum_{\text{finie}} \sum_{k=0}^{b+2} \int_{\tilde{G}} \int_{\lambda_0 - \varepsilon}^{\lambda_0 + \varepsilon} |x^\alpha D_x^p D_\lambda^k [\lambda^q (\lambda - \lambda_0)^{M+1} \cdot \\ &\quad \Phi(x, \lambda) (1 - q_\varepsilon(\lambda))]| d\lambda dx. \end{aligned}$$

En remarquant que  $\lambda^q = [(\lambda - \lambda_0) + \lambda_0]^q = \sum_{j=0}^q (\lambda - \lambda_0)^j \lambda_0^{q-j}$ , on a encore une majoration de la forme

$$\|f - g_\varepsilon\| \leq C_2 \sum_{\text{finie}} \sum_{k=0}^{b+2} \sum_{j=0}^q \int_{\tilde{G}} \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0+\varepsilon} |x^\alpha D_x^p D_\lambda^k [(\lambda - \lambda_0)^{j+M+1} \Phi(x, \lambda)(1 - q_\varepsilon(\lambda))]| d\lambda dx. \quad (*)$$

Comme  $\Phi$  est Schwartz en  $x$  et  $C^\infty$  en  $\lambda$  et que

$$\left| D_\lambda^s (1 - q_\varepsilon(\lambda)) \right| = \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^s \left| q^{(s)} \left( \frac{\lambda - \lambda_0}{\varepsilon} \right) \right|$$

on voit que l'expression de droite de (\*) tend vers 0 avec  $\varepsilon$  si  $M$  est suffisamment élevé. Il suffit de faire un raisonnement analogue à celui effectué en 9.10.9.d) par exemple. Les fonctions  $g_\varepsilon$  conviennent donc pour l'approximation.

d) On a  $I_0 \subset I$ . En effet, montrons d'abord que  $I_0^{M+1} \subset I$ . Soient  $f_1, \dots, f_{M+1} \in I_0$ . Alors  $f = f_1 * \dots * f_{M+1}$  vérifie les hypothèses de c) et  $f_1 * \dots * f_{M+1} \in I$ . Puisque  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier,  $I_0 \subset I$ .

e) Supposons en plus  $I \subset \text{Ker } \pi_1$  avec  $\pi_1 = \text{ind}_{H_1}^G \chi_{\ell_1}$ . Si  $\langle \ell_1, Z \rangle = -\lambda_1$  avec  $\lambda_1 \neq \lambda_0$ , il existe  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{u}(\lambda_0) = 0$  et  $\hat{u}(\lambda_1) = 1$ . Pour  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\pi_1(f) \neq 0$ , posons  $g = f *_{\exp(\mathbb{R}Z)} u$ . Alors  $g \in I_0 \subset I$ . D'autre part,  $\pi_1(g) = \pi_1(f) \neq 0$  et  $g \notin \text{Ker } \pi_1$ . Ceci contredit le fait que  $I \subset \text{Ker } \pi_1$ . Dans le cas  $a_3$ ) on a donc  $\langle \ell_1, Z \rangle = -\lambda_0$  pour tout  $\ell_1$  et tout  $\pi_1 = \text{ind}_{H_1}^G \chi_{\ell_1}$  tels que  $I \subset \text{Ker } \pi_1$ .

**9.11.2.** Effectuons à présent une forme simplifiée de la discussion du chapitre 3 pour préciser davantage les différentes possibilités dans le cas  $a_3$ ). Considérons les idéaux minimaux  $\mathfrak{d}$ -invariants de  $\mathfrak{g}$ , contenant strictement  $\mathbb{R}Z$ . Il faut distinguer deux grands cas :

(I)  $\exists Y \in \mathfrak{g}, \varphi, \psi \in \mathfrak{d}^*$  :

$$\begin{aligned} d(Y) &= \varphi(d)Y + \psi(d)Z \quad \forall d \in \mathfrak{d} \\ d(Z) &= 0 \\ \langle \ell, Y \rangle &= 0 \text{ et } \langle \ell, Z \rangle = -\lambda_0 \neq 0 \\ \psi &\neq 0 \end{aligned}$$

(II)  $\exists Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}, \varphi, \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{d}^*, \omega \in \mathbb{R}^*$  :

$$d \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \varphi(d) \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1(d) \\ \psi_2(d) \end{pmatrix} Z \quad \forall d \in \mathfrak{d}$$

$$\begin{aligned} d(Z) &= 0 \\ \langle \ell, Y_1 \rangle &= \langle \ell, Y_2 \rangle = 0 \text{ et } \langle \ell, Z \rangle = -\lambda_0 \neq 0 \\ \varphi &\neq 0, \psi_1 \neq 0 \text{ ou } \psi_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Dans le cas (I) on peut supposer  $\langle \ell, Y \rangle = 0$ . En effet, si tel n'est pas le cas il suffit d'ajouter un multiple convenable de  $Z$  à  $Y$ . On peut supposer  $\psi \neq 0$ . En effet, supposons  $\psi \equiv 0$ , c'est-à-dire  $d(Y) = \varphi(d)Y$  pour tout  $d \in \mathfrak{d}$  et  $\langle \ell, Y \rangle = 0$ . Si on a  $\langle \ell_1, Y \rangle = 0$  quels que soient  $\ell_1$  et  $\pi_1 = \text{ind}_{H_1}^G \chi_{\ell_1}$  tels que  $I \subset \text{Ker } \pi_1$ , on est dans la situation traitée en 9.9. Supposons donc qu'il existe  $\pi_1 = \text{ind}_{H_1}^G \chi_{\ell_1}$  avec  $I \subset \text{Ker } \pi_1$  et  $\langle \ell_1, Y \rangle \neq 0$ . Si  $\varphi \neq 0$ , on est dans le cas  $a_1$ ) traité en 9.10. Si  $\varphi \equiv 0$ , on est dans le cas  $a_3$ ) pour le vecteur  $Y$ . Par 9.11.1.e) appliqué à  $Y$ , il faudrait alors que  $\langle \ell, Y \rangle = \langle \ell_1, Y \rangle \neq 0$ , puisque  $I \subset \text{Ker } \pi$  et que  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$ . Or on sait que  $\langle \ell, Y \rangle = 0$ . Cette contradiction montre qu'il faut exclure le cas  $\varphi \equiv 0$ . Par conséquent, si  $\psi \equiv 0$  on trouve des cas déjà traités et on peut donc supposer  $\psi \neq 0$  dans la suite.

De même, on peut supposer  $\langle \ell, Y_1 \rangle = \langle \ell, Y_2 \rangle = 0$  dans le cas (II). On peut aussi supposer  $\varphi \neq 0$ , car sinon on retrouve le cas (I). De plus, on peut admettre que  $\psi_1 \neq 0$  ou  $\psi_2 \neq 0$ , car sinon on retrouve le cas b) traité dans la suite.

Remarquons encore que puisque  $\mathfrak{g}$  est nilpotent,  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$  dans les deux cas. Pour simplifier les notations, nous noterons dans la suite  $\psi(X)$  au lieu de  $\psi(\text{ad } X)$  si  $X \in \mathfrak{g}$ . De même pour  $\psi_1$  et  $\psi_2$ . Considérons un peu plus en détail les deux cas.

**9.11.3.** Dans le cas (I), on a soit  $\varphi \equiv 0$ , soit  $\varphi$  et  $\psi$  indépendants (3.2.). De toute façon, il existe  $d_1 \in \mathfrak{d}$  (pouvant coïncider avec un  $\text{ad } X$ ) tel que  $d_1(Y) = Z$ . On a les deux possibilités :

$$\begin{aligned} a_{3,1}) \quad & \text{(I) avec } \psi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0 \\ a_{3,2}) \quad & \text{(I) avec } \psi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \neq 0. \end{aligned}$$

**9.11.4.** Dans le cas (II), le raisonnement de (3.2.) montre que  $[Y_1, Y_2] = 0$  et que  $\varphi, \psi_1, \psi_2$  sont indépendants. Puisque  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$ , le raisonnement de (3.13.) montre qu'il reste les deux possibilités :

$$\begin{aligned} a_{3,3}) \quad & \text{(II) et } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv \psi_1|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv \psi_2|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0 \\ a_{3,4}) \quad & \text{(II) et } \varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0, \psi_1|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \text{ et } \psi_2|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \text{ indépendants.} \end{aligned}$$



9.12. Cas  $a_{3,1}$  :

9.12.1. En remplaçant  $Z$  par un multiple de  $Z$  nous pouvons supposer  $\langle \ell, Z \rangle = -1$ . Dans ce cas,  $Y$  et  $Z$  sont centraux. De plus, il existe  $d_1 \in \mathfrak{d}$ ,  $d_1 \notin \text{ad } \mathfrak{g}$ , tel que  $d_1(Y) = Z$ . Notons simplement  $t$  au lieu de  $\exp td_1$  et remarquons que

$$\begin{aligned} {}^t(rY) &= \exp td_1(rY) = rY + trZ \\ {}^t(rZ) &= \exp td_1(rZ) = rZ. \end{aligned}$$

Notons encore  $\mathfrak{d}_0 = \text{Ker } \psi$ ,  $\mathfrak{D}_0 = \exp \mathfrak{d}_0$  et remarquons que dans ce cas,  $\mathfrak{d}_0$  n'est pas nécessairement un idéal de  $\mathfrak{d}$ ; donc  $\mathfrak{D}_0$  n'est pas un sous-groupe distingué de  $\mathfrak{D}$  en général.

9.12.2. a) Définitions : Pour  $f \in \mathcal{S}(G)$ , définissons  $\tilde{f}^2$  par

$$\tilde{f}^2(x, t) = \int \int f^t(x \exp rY \exp sZ) e^{is} ds dr$$

et pour  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)$  et  $f \in \mathcal{S}(G)$  posons

$$\alpha(f) = \int \int \alpha(s, b) \cdot (f_{\exp bY})^s ds db \quad ([\text{Lud.Mol. 1}], 9.8.)$$

b) On vérifie facilement que

$$\tilde{f}^2(x, t) = (\hat{f}^{2,3})^t(x, -t, 1) = \delta(t) \hat{f}^{2,3}({}^t x, -t, 1)$$

$$\tilde{f}^2(x \exp aY \exp bZ, t) = e^{-ib} \tilde{f}^2(x, t)$$

$$\widetilde{f *_{\tilde{G}} g}^2(x, t) = [\tilde{f}^2(\cdot, t) *_{\tilde{G}} \tilde{g}^2(\cdot, t)](x) \text{ avec } \tilde{G} = G / \exp(\mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z)$$

$$\tilde{f}^{a^2}(x, t) = \tilde{f}^2(x, t + a)$$

$$\widetilde{f^{(t \cdot D_0 \cdot t^{-1})}}^2(x, t) = (\tilde{f}^2)^{D_0}(x, t)$$

$$\widetilde{\alpha(f)}^2(x, t) = \int \tilde{f}^2(x, s) \hat{\alpha}^2(s - t, s) ds.$$

c) Finalement

$$\begin{aligned} &\tilde{f}^2(x, t) = 0 && \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in G \\ \iff &\hat{f}^{2,3}({}^t x, -t, 1) = 0 && \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in G \\ \iff &\hat{f}^{2,3}(x, -t, 1) = 0 && \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in G \\ \iff &\hat{f}^3(x \exp rY, 1) = 0 && \forall x \in G, \forall r \in \mathbb{R} \\ \iff &f \in I_0 \\ \text{et} &\hat{f}^2(x, t) = \tilde{g}^2(x, t) && \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in G \\ \iff &f = g \text{ mod } I_0 && (\text{pour } \lambda_0 = 1). \end{aligned}$$

**9.12.3. Projecteurs :** a) Soient  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  et  $\psi \in ES(\mathbb{R})$ . Il existe  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)$  tel que

$$\hat{\alpha}^2(s-t, s) = \psi(t)\varphi(s).$$

Il suffit de prendre

$$\alpha(u, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v-u)\varphi(v)e^{-ivw} dv.$$

On a alors

$$\widetilde{\alpha(f)^2}(x, t) = \psi(t) \int \tilde{f}^2(x, s)\varphi(s)ds = \psi(t)f_1(x).$$

b) Par ([Lud. Mol. 1], 9.12.), on a  $\alpha(I) \subset I$ .

**9.12.4. Espace  $\mathcal{S}(G)_1$  :** a) **Définition :** L'espace  $\mathcal{S}(G)_1$  est l'ensemble des fonctions  $f_1$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$f_1(x \exp aY \exp bZ) = e^{-ib} f_1(x) \quad \forall x \in G, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$f_1$  est Schwartz en  $x \in \tilde{G} = G/\exp(\mathbb{R}Y + \mathbb{R}Z)$  (pour une base coexponentielle fixée par exemple).

b) Pour  $t$  fixé,  $\tilde{f}^2(\cdot, t) \in \mathcal{S}(G)_1$ . En particulier, si  $\tilde{f}^2(x, t) = u(t)f_1(x)$  respectivement si  $\widetilde{\alpha(f)^2}(x, t) = \psi(t)f_1(x)$ , alors  $f_1 \in \mathcal{S}(G)_1$ .

c) Construisons un rétracte particulier. Remarquons d'abord que

$$\tilde{f}^2(x, t) = \delta(t)\hat{f}^{2,3}({}^t x, -t, 1)$$

entraîne

$$\hat{f}^{2,3}(x, -t, 1) = \delta(t)^{-1} \tilde{f}^2(-{}^t x, t).$$

Soit alors  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Pour  $f_1 \in \mathcal{S}(G)_1$  donné, recherchons  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\tilde{f}^2 = \varphi \otimes f_1$ . Fixons  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{h}(1) = 1$ . On prend alors  $f$  tel que

$$f(x \exp rY \exp sZ) = \frac{1}{2\pi} \left( \int \delta(t)^{-1} \cdot \varphi(t) f_1(-{}^t x) e^{irt} dt \right) \cdot h(s).$$

Ceci nous définit un rétracte

$$\begin{aligned} R: \mathcal{S}(G)_1 &\longrightarrow \mathcal{S}(G) \\ f_1 &\longmapsto R(f_1) = f, \end{aligned}$$

$f$  étant calculé comme précédemment.

d) Comme en 9.10.4., on munit  $\mathcal{S}(G)_1$  d'une norme de Schwartz de manière à rendre le rétracte  $R$  continu. On écrit les éléments de  $G$  sous la forme

$$\tilde{x} \exp rY \exp sZ = \exp(\tilde{x}_1 E_1 + \dots + \tilde{x}_{n-2} E_{n-2} + rY + sZ)$$

et on montre que  $|||f|||$  admet une majoration

$$\begin{aligned} |||f||| &\leq \sum_{\text{finie}} \int \int \int |\tilde{x}^a r^b s^c D_{\tilde{x}}^{\beta} D_r^{\alpha} D_s^{\ell} f(\tilde{x} \exp rY \exp sZ)| \\ &\qquad\qquad\qquad d\tilde{x} dr ds \\ &\leq C \cdot \sum_{\text{finie}} \sum_{\gamma \leq b+2} \int_{\tilde{G}} \int_K |\tilde{x}^a D_{\tilde{x}}^{\beta} D_t^{\gamma} f_1(-{}^t\tilde{x})| dt d\tilde{x} \end{aligned}$$

où  $K = \text{supp } \varphi$ . Il suffit de faire un calcul analogue à celui de 9.10.4. De plus, notons par  $A_{-t}$  la matrice de l'opérateur  $\exp(-td_1) \equiv -t$ . Pour la base en question on note

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_{n-2} \\ \tilde{x}'_{n-1} \\ \tilde{x}'_n \end{pmatrix} \equiv -{}^t\tilde{x} \equiv A_{-t} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ A'_{-t} & \vdots & \vdots \\ \hline & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ \hline & -t & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puisque  $(A_{-t})Z = Z$  et  $(A_{-t})Y = Y - tZ$ . Puisque  $A_{-t}$  est inversible, il en est de même de  $A'_{-t}$ . On écrit

$$\begin{aligned} f_1(-{}^t\tilde{x}) &= e^{-i[(A_{-t})_{n,1}\tilde{x}_1 + \dots + (A_{-t})_{n,n-2}\tilde{x}_{n-2}]} \\ &\qquad f_1 \left( \exp \left[ (E_1 \dots E_{n-2}) A'_{-t} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-2} \end{pmatrix} \right] \right) \end{aligned}$$

et on termine le raisonnement comme en 9.10.4. On trouve une majoration de la forme

$$|||f||| \leq C \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |Q(\tilde{x})(D_{\tilde{x}}^{\beta} f_1)(\exp[\tilde{x}_1 E_1 + \dots + \tilde{x}_{n-2} E_{n-2}])| d\tilde{x}$$

où  $Q$  désigne une fonction polynôme. Le membre de droite représente la norme  $|||\cdot|||_1$ . Dans la suite on notera  $x$  au lieu de  $\tilde{x}$ .

**9.12.5. Idéal  $I_1$  de  $\mathcal{S}(G)_1$  :** On procède comme en 9.10.5. et on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \{f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 \mid \exists f \in I, \exists u \in ES(\mathbb{R}) : \tilde{f}^2 = u \otimes f_1\} \\ &= \{f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 \mid \exists f \in I : \tilde{f}^2 = v \otimes f_1\} \end{aligned}$$

où  $v$  est un élément non nul fixé de  $ES(\mathbb{R})$ . Comme dans le cas  $a_1$ ),  $I_1$  est un idéal fermé de  $(\mathcal{S}(G)_1, |||\cdot|||_1)$  tel que  $R^{-1}(I) = I_1$ . On montre que pour  $t$  fixé, il existe  $(\alpha_\varepsilon)$  dans  $ES(\mathbb{R}^2)$  tels que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |||\widetilde{\alpha_\varepsilon(f)}(\cdot, t) - \tilde{f}^2(\cdot, t)|||_1 = 0$$

et on en déduit que

$$I_1 = \tilde{I}_t = \{\tilde{f}^2(\cdot, t) \mid f \in I\} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

est un idéal  $\mathfrak{D}_0$ -invariant (9.10.5.).

**9.12.6. Projection et idéal  $\mathcal{I}_0$  :** a) Soit la projection

$$\begin{aligned} p : \mathcal{S}(G) &\longrightarrow \mathcal{S}(G)_1 \\ f &\longmapsto p(f) \end{aligned}$$

tel que  $p(f)(x) = \tilde{f}^2(x, 0) = \tilde{f}^{2,3}(x, 0, 1)$ . Munissons  $\mathcal{S}(G)$  d'une nouvelle norme de Schwartz  $|||\cdot|||_3$  telle que  $p$  soit une application continue de  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||_3)$  dans  $(\mathcal{S}(G)_1, |||\cdot|||_1)$ . En effet,

$$\begin{aligned} |||p(f)|||_1 &\leq C \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |Q(x)(D_x^\beta p(f))(x)| dx \\ &\leq C \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^n} |Q(x)(D_x^\beta f)(x \exp rY \exp sZ)| dx dr ds \\ &= |||f|||_3. \end{aligned}$$

b) Définissons

$$\mathcal{I}_0 = p^{-1}(I_1) = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \tilde{f}^2(\cdot, 0) \in I_1\}.$$

Alors  $\mathcal{I}_0$  est un idéal  $\mathfrak{D}_0$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ , fermé dans  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||_3)$ .

**9.12.7. Idéal  $\mathcal{I}_1$  de  $\mathcal{S}(G)$  :** La définition de  $\mathcal{I}_1$  est la même que dans le cas  $a_1$ ). Alors  $\mathcal{I}_1$  est un idéal  $\exp \mathbb{R}d_1$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ . Cependant à présent nous ne pouvons pas encore affirmer que l'idéal  $\mathcal{I}_1$  est  $\mathfrak{D}_0$ -invariant (en effet, à la fin du raisonnement on verra que  $\mathcal{I}_1$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant !), puisque  $\mathfrak{D}_0$  n'est plus un sous-groupe distingué de  $\mathfrak{D}$ . Comme en 9.10.7., on voit qu'il existe une norme de Schwartz  $||| \cdot |||_4$  sur  $\mathcal{S}(G)$  et  $M \in \mathbb{N}$ ,  $C \in \mathbb{R}^*$  tels que

$$||| \tilde{f}^2(\cdot, t) |||_1 \leq C \cdot e^{M|t|} \cdot ||| f |||_4 \text{ pour tout } t.$$

On en déduit que l'idéal  $\mathcal{I}_1$  est fermé dans  $(\mathcal{S}(G), ||| \cdot |||_4)$ . Par ([Lud. Mol. 1], 9.12.), on voit que  $\alpha(\mathcal{I}_1) \subset \mathcal{I}_1$  pour tout  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)$  et, en définissant  $\mathcal{S}$  comme en 9.10.7., on a  $\mathcal{S} \cap \mathcal{I}_1 = \mathcal{S} \cap I$  et  $I \subset \mathcal{I}_1$ .

**9.12.8. Approximation des éléments de  $\mathcal{S}(G)$  :** a) Les raisonnements suivants sont beaucoup plus simples que dans le cas  $a_1$ ). Soit  $(\beta_j)_j$  une unité approchée dans  $ES(\mathbb{R}^2)$ . Comme en 9.10.8.b), on montre que

$$\lim_j ||| \beta_j(f) - f ||| = 0 \text{ pour tout } f \in \mathcal{S}(G).$$

On peut supposer que  $\beta_j$  est à support compact en la première variable.

b) Comme en 9.10.9.a), on a une norme  $||| \cdot |||^\approx$  sur  $ES(\mathbb{R}^2)$  et une norme  $||| \cdot |||^\sim$  sur  $\mathcal{S}(G)$  telles que

$$||| \alpha(f) ||| \leq ||| \alpha |||^\approx ||| f |||^\sim$$

quels que soient  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2)$  et  $f \in \mathcal{S}(G)$ . De plus,

$$||| \alpha |||^\approx \leq C \cdot \int \int |\alpha(s, b)| \cdot e^{M_0 |s|} \cdot (2 + b^2)^N ds db.$$

c) On peut approcher les  $\beta_j$  par des  $\gamma_j \in ES(\mathbb{R}^2)$  tels que  $\hat{\gamma}_j^2$  soit à support compact. La démonstration de 9.10.9.e) reste valable. Donc tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  peut être approché arbitrairement par des  $\gamma(f)$  tels que  $\hat{\gamma}^2$  soit à support compact.

d) L'application

$$\beta : (u, t) \longmapsto \hat{\gamma}^2(u - t, u)$$

est une fonction de Schwartz à support compact contenu dans un compact de la forme  $K_1 \times K_2$ . Nous allons approcher  $\gamma$  en  $|||\cdot|||^\approx$  par une fonction  $k$  telle que

$$\begin{aligned} \hat{k}^2(u-t, u) &= \sum_{i,j} c_{ij} \psi_i(t) \varphi_j(u) \quad (\text{somme finie}) \\ &= \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) \theta(t) h_j(u) \theta_1(u) \end{aligned}$$

où  $h_i, h_j$  sont des fonctions d'Hermite et où  $\theta, \theta_1$  sont des fonctions  $C^\infty$  à support compact déterminées comme en 9.10.10. La fonction  $k$  sera alors obtenue par

$$k(v, w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,j} c_{ij} \int h_i(u-v) \theta(u-v) h_j(u) \theta_1(u) e^{-iuv} du.$$

Comme en 9.10.10., on a la majoration

$$|||\gamma - k|||^\approx \leq C \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int \int e^{M \cdot |s|} |D_v^r [\hat{\gamma}^2(s, v) - \hat{k}^2(s, v)]| dv ds.$$

Effectuons le changement de variables

$$\begin{cases} u-t = s \\ u = v \end{cases} \iff \begin{cases} u = v \\ t = v - s. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} |||\gamma - k|||^\approx &\leq C \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int \int e^{M \cdot |u-t|} |(D_u + D_t)^r \\ &\quad [\hat{\gamma}^2(u-t, u) - \hat{k}^2(u-t, u)]| du dt \\ &\leq C \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int \int_{K_1 \times K_2} e^{M \cdot |u|} \cdot e^{M|t|} |(D_u + D_t)^r \\ &\quad [\hat{\gamma}^2(u-t, u) - \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) h_j(u)]| du dt \\ &+ C \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int \int_{(K_3 \times K_4) \setminus (K_1 \times K_2)} e^{M|u|} \cdot e^{M|t|} |(D_u + D_t)^r \\ &\quad [\sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) \theta(t) h_j(u) \theta_1(u)]| du dt. \end{aligned}$$

On peut majorer  $e^{M \cdot |u|}$  et  $e^{M \cdot |t|}$  par des constantes sur les compacts  $K_3$  et  $K_4$ . De même, toutes les dérivées de  $\theta(t)\theta_1(u)$  peuvent être majorées. Donc, en écrivant

$$\begin{aligned} & (D_u + D_t)^r \left[ \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) \theta(t) h_j(u) \theta_1(u) \right] \\ &= \sum_{p=0}^r C_p^r \left[ \sum_{i,j} c_{ij} (D_u + D_t)^p (h_i(t) h_j(u)) (D_u + D_t)^{r-p} (\theta(t) \theta_1(u)) \right] \end{aligned}$$

en regroupant les termes et en effectuant les majorations nécessaires, on trouve une expression de la forme

$$\begin{aligned} |||\gamma - k||| \approx & \leq C' \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int \int_{K_1 \times K_2} \left| (D_u + D_t)^r \left[ \hat{\gamma}^2(u-t, u) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) h_j(u) \right] \right| du dt \\ & + C'' \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int \int_{(K_3 \times K_4) \setminus (K_1 \times K_2)} \left| (D_u + D_t)^r \right. \\ & \left. \left[ \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) h_j(u) \right] \right| du dt \\ & \leq C''' \cdot \sum_{r=0}^{2N+2} \int \int \left| (D_u + D_t)^r \left[ \hat{\gamma}^2(u-t, u) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{i,j} c_{ij} h_i(t) h_j(u) \right] \right| du dt \end{aligned}$$

puisque  $\hat{\gamma}^2(u-t, u)$  s'annule sur  $(K_3 \times K_4) \setminus (K_1 \times K_2)$  et qu'on peut majorer les intégrales sur les ensembles bornés par des intégrales sur  $\mathbb{R}^2$  tout entier. La dernière expression est une nouvelle norme de Schwartz et dans cette nouvelle norme la fonction de Schwartz  $\beta(u, t) = \hat{\gamma}^2(u-t, u)$  peut être approchée arbitrairement par des combinaisons linéaires de fonctions d'Hermite. Ceci détermine les  $h_i, h_j$  ([Sch. 2], p. 262).

e) Finalement, tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $k(f)$  avec  $\hat{k}^2(u-t, u) = \sum_{i,j} c_{ij} \psi_i(t) \varphi_j(u)$ , les fonctions  $\psi_i, \varphi_j$  étant  $C^\infty$  à support compact.

**9.12.9. Comparaison des idéaux  $\mathcal{I}_1$  et  $I$  :** Tout  $f \in \mathcal{I}_1$  peut être approché par des  $k(f)$  avec  $\hat{k}^2(u-t, u) = \sum_{i,j} c_{ij} \psi_i(t) \varphi_j(u)$ . Posons  $\widehat{\alpha_{ij}}^2(u-t, u) = \psi_i(t) \varphi_j(u)$ . Alors  $\alpha_{ij}$  existe dans  $ES(\mathbb{R}^2)$  et, pour tout  $f \in \mathcal{I}_1$ ,

$$\alpha_{ij}(f) \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{S} = I \cap \mathcal{S} \subset I.$$

D'où  $k(f) = \sum_{i,j} c_{ij} \alpha_{ij}(f) \in I$  et  $f \in I$  puisque  $I$  est fermé. Ainsi  $\mathcal{I}_1 = I$ .

**9.12.10. Idéal  $\mathfrak{D}_0$ -premier :** a) Il faut modifier le raisonnement du cas  $a_1$ ), car ici  $\mathfrak{D}_0$  n'est pas un sous-groupe normal de  $\mathfrak{D}$ . Nous allons montrer que l'idéal  $\mathcal{I}_0$  est  $\mathfrak{D}_0$ -premier, sans passer par  $I_1$ .

b) Comme en 9.10.13., on a  $\bigcap_t (\mathcal{I}_0)^t = \mathcal{I}_1 = I$ .

c) Soit  $J$  un idéal  $\mathfrak{D}_0$ -invariant quelconque de  $\mathcal{S}(G)$ . Alors

$$\mathcal{J}_1 = \bigcap_t J^t = \bigcap_{D \in \mathfrak{D}} J^D$$

est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ .

d) Montrons à présent que l'idéal  $\mathcal{I}_0$  est  $\mathfrak{D}_0$ -premier. En effet, soient  $J, K$  deux idéaux  $\mathfrak{D}_0$ -invariants de  $\mathcal{S}(G)$  tels que  $J \cdot K \subset \mathcal{I}_0$ . Puisque  $\text{Ker } p$  est un idéal  $\mathfrak{D}_0$ -invariant et que  $\text{Ker } p \subset \mathcal{I}_0 = p^{-1}(I_1)$ , on a également

$$(J + \text{Ker } p) \cdot (K + \text{Ker } p) \subset \mathcal{I}_0,$$

où  $J + \text{Ker } p$  et  $K + \text{Ker } p$  sont des idéaux  $\mathfrak{D}_0$ -invariants. De plus, si on réussit à montrer par exemple  $J + \text{Ker } p \subset \mathcal{I}_0$ , on a également  $J \subset \mathcal{I}_0$ . Nous pouvons donc supposer dans la suite que  $\text{Ker } p \subset J$  et  $\text{Ker } p \subset K$  (en remplaçant si nécessaire  $J$  par  $J + \text{Ker } p$  par exemple). Donc  $J = p^{-1}(p(J))$  et  $K = p^{-1}(p(K))$ .

Les idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants

$$\mathcal{J}_1 = \bigcap_t J^t \quad \text{et} \quad \mathcal{K}_1 = \bigcap_t K^t$$

vérifient

$$\mathcal{J}_1 \cdot \mathcal{K}_1 \subset J \cdot K \subset \mathcal{I}_0,$$

donc, par  $\mathfrak{D}$ -invariance de  $\mathcal{J}_1 \cdot \mathcal{K}_1$ ,

$$\mathcal{J}_1 \cdot \mathcal{K}_1 \subset \bigcap_t (\mathcal{I}_0)^t = I.$$



Puisque  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier,  $\mathcal{J}_1 \subset I$  ou  $\mathcal{K}_1 \subset I$ . Supposons par exemple  $\mathcal{J}_1 \subset I = \mathcal{I}_1$ . Alors

$$\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}_1 + \text{Ker } p = p^{-1}(p(\mathcal{J}_1)) \subset p^{-1}(p(I)) = p^{-1}(\tilde{I}_0) = p^{-1}(I_1) = \mathcal{I}_0.$$

Il reste alors à montrer que  $J \subset \mathcal{J}_1 + \text{Ker } p$ . A cet effet, remarquons d'abord que  $\mathcal{J}_1 = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \tilde{f}^2(\cdot, t) \in J_1 \forall t\}$  où  $J_1 = p(J)$ . En effet,

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{J}_1 &\iff f^t \in J = p^{-1}(p(J)) \quad \forall t \\ &\iff p(f^t) = \tilde{f}^{t^2}(\cdot, 0) = \tilde{f}^2(\cdot, t) \in p(J) = J_1 \quad \forall t. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que  $J \subset \mathcal{J}_1 + \text{Ker } p$ . En effet

$$f \in J \Rightarrow p(f) = \tilde{f}^2(\cdot, 0) \in J_1.$$

Soit alors  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $\varphi(0) = 1$  et soit  $g = R(\tilde{f}^2(\cdot, 0)) \in \mathcal{S}(G)$  le rétracte construit comme en 9.12.4., c'est-à-dire tel que  $\tilde{g}^2(x, t) = \varphi(t)\tilde{f}^2(x, 0)$  quels que soient  $x, t$ . Puisque  $J_1$  est un idéal de  $\mathcal{S}(G)_1$ ,  $\tilde{g}^2(\cdot, t) \in J_1$  pour tout  $t$  et  $g \in \mathcal{J}_1$ . D'autre part,  $p(g) = \tilde{g}^2(\cdot, 0) = \tilde{f}^2(\cdot, 0) = p(f)$ . Donc  $f - g \in \text{Ker } p$  et

$$f \in g + \text{Ker } p \subset \mathcal{J}_1 + \text{Ker } p,$$

c'est-à-dire  $J \subset \mathcal{J}_1 + \text{Ker } p \subset \mathcal{I}_0$ . Ceci prouve que  $\mathcal{I}_0$  est  $\mathfrak{D}_0$ -premier.

**9.12.11. Raisonement par récurrence :** Le même raisonnement qu'en 9.10.13. montre que  $I = \text{Ker } \Omega$ .

**9.13. Cas  $a_{3,2}$ ) :**

**9.13.1.** Comme dans le cas  $a_{3,1}$ ), nous pouvons supposer que  $\langle \ell, Z \rangle = -1$ . Puisque  $\psi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \not\equiv 0$ , il existe  $X \in \mathfrak{g}$  tel que  $\psi(X) = 1$  et  $\varphi(X) = 0$ , c'est-à-dire  $[X, Y] = Z$ . Posons  $\mathfrak{d}_0 = \text{Ker } \psi$  et  $\mathfrak{D}_0 = \exp \mathfrak{d}_0$ ,  $\mathfrak{h}_0 = \text{Ker } \psi|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $H_0 = \exp \mathfrak{h}_0$ . Puisque  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$ ,  $\mathfrak{h}_0$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  et  $H_0$  un sous-groupe normal de  $G$ . On vérifie facilement que  $\mathfrak{h}_0$  est  $\mathfrak{d}_0$ -invariant et donc également  $\mathfrak{d}$ -invariant (puisque  $\mathfrak{d} = \mathbb{R} \text{ad } X \oplus \mathfrak{d}_0$ ). Ainsi  $H_0$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant. Remarquons que  $Y$  est central dans  $\mathfrak{h}_0$ .

**9.13.2.** On pourrait faire une démonstration à l'aide de projecteurs dans ce cas-ci également. Cependant cette démonstration serait plus complexe, étant donné qu'ici la récurrence doit se faire sur  $\dim \mathfrak{g}$ , c'est-à-dire que le groupe  $G$  doit être modifié. Pour cette raison nous préférons faire une démonstration se basant sur la théorie des idéaux invariants développée dans ([Lud. Mol. 2]).

**9.13.3.** Soit  $\zeta \in \hat{G}$  tel que  $\zeta|_{H_0} \equiv 1$ . Comme  $G = \exp \mathbb{R}X \cdot H_0$ ,  $\zeta$  agit seulement sur  $\exp \mathbb{R}X$  et  $\zeta(\exp rX \cdot h) = \zeta(\exp rX) = e^{icr} = \chi_c(\exp rX)$  pour un certain  $c \in \mathbb{R}$ , c'est-à-dire  $\zeta$  est un caractère. De plus, quels que soient  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_c$ ,  $(\zeta(\cdot)\xi_1 | \xi_2) = k \cdot \chi_c$  est un multiple du caractère en question. Soit  $I$  un idéal fermé pour  $|||\cdot|||$ ,  $\mathfrak{D}$ -premier. Alors

$$\begin{aligned} f \in I &\Rightarrow f^{\exp(cY)} \in I \quad \text{avec} \\ &f^{\exp(cY)}(\exp tX \cdot h \cdot \exp rY \cdot \exp sZ) \\ &= f(\exp cY \cdot \exp tX \cdot h \cdot \exp rY \cdot \exp sZ \cdot \exp(-cY)) \\ &= f(\exp tX \cdot h \cdot \exp rY \cdot \exp(s - ct)Z). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} &\int [\chi_c \cdot f - f^{\exp(cY)}](\exp tX \cdot h \cdot \exp rY \cdot \exp sZ) e^{is} ds \\ &= e^{ict} \int f(\exp tX \cdot h \cdot \exp rY \cdot \exp sZ) e^{is} ds - \int f(\exp tX \cdot h \\ &\quad \cdot \exp rY \cdot \exp(s - ct)Z) e^{is} ds \\ &= 0 \\ &\Rightarrow \chi_c \cdot f - f^{\exp(cY)} \in I_0 \subset I \\ &\Rightarrow \chi_c \cdot f \in I \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'idéal  $I$  est invariant par multiplication par les  $(\zeta(\cdot)\xi_1 | \xi_2)$  avec  $\zeta|_{H_0} = \text{id}$ .

Remarquons de plus que, puisque  $I$  est fermé pour la norme de Schwartz  $|||\cdot|||$ ,  $I$  est fermé dans  $\mathcal{S}(G)$  pour la topologie de Schwartz.

**9.13.4.** Par ([Lud. Mol. 2], 1.8.),  $I_{H_0} = \{f|_{H_0} \mid f \in I\}$  est un idéal fermé (pour la topologie de Schwartz),  $G$ -invariant de  $\mathcal{S}(H_0)$  et

$$I = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid ({}_g f)|_{H_0} \in I_{H_0} \quad \forall g \in G\}.$$

De plus, puisque  $(f|_{H_0})^{D_0} = \frac{\delta_{H_0}(D_0)}{\delta_G(D_0)}(f^{D_0})|_{H_0}$  et que  $I$  est  $\mathfrak{D}_0$ -invariant,  $I_{H_0}$  est  $\mathfrak{D}_0$ -invariant et donc également  $\mathfrak{D}$ -invariant, puisque  $I_{H_0}$  est  $G$ -invariant.

**9.13.5.** Construisons un rétracte particulier : Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\varphi(0) = 1$ . Définissons  $R : \mathcal{S}(H_0) \rightarrow \mathcal{S}(G)$  par  $R(f_0) = \varphi \otimes f_0$ , c'est-à-dire  $R(f_0)(\exp tX \cdot h) = \varphi(t)f_0(h)$ . On peut munir  $\mathcal{S}(H_0)$  d'une norme  $|||\cdot|||_0$  rendant le rétracte  $R$  continu. En effet,

$$\begin{aligned} |||R(f_0)||| &\leq \sum_{\text{finie}} \int |t^a D_t^b h^p D_h^q R(f_0)(\exp tX \cdot h)| dt dh \\ &= \sum_{\text{finie}} \left( \int |t^a D_t^b \varphi(t)| dt \right) \cdot \left( \int |h^p D_h^q f_0(h)| dh \right) \\ &\leq C \cdot \sum_{\text{finie}} \int |h^p D_h^q f_0(h)| dh \\ &= |||f_0|||_0 \end{aligned}$$

par définition de  $|||\cdot|||_0$ .

**9.13.6.** On a  $I_{H_0} = R^{-1}(I)$ .

En effet, soit  $f_0 \in R^{-1}(I)$ , c'est-à-dire  $R(f_0) = \varphi \otimes f_0 \in I$ . Donc  $f_0 = \varphi \otimes f_0|_{H_0} \in I_{H_0}$  et  $R^{-1}(I) \subset I_{H_0}$ . Réciproquement, soit  $f_0 \in I_{H_0}$  et montrons que  $R(f_0) = \varphi \otimes f_0 \in I$ . Par 9.13.4., il suffit de montrer que  $(g(\varphi \otimes f_0))|_{H_0} \in I_{H_0}$  pour tout  $g \in G$ . Or

$$\begin{aligned} g(\varphi \otimes f_0)(h) &= \varphi \otimes f_0(h_1^{-1} \cdot \exp(-t_1 X) \cdot h) \quad \text{pour } g = \exp t_1 X \cdot h_1 \\ &= \varphi \otimes f_0(\exp(-t_1 X) \cdot [\exp t_1 X \cdot h_1^{-1} \cdot \exp(-t_1 X) \cdot h]) \\ &= \varphi(-t_1) \left( (\exp t_1 X \cdot h_1 \cdot \exp(-t_1 X)) f_0 \right)(h) \\ &\in I_{H_0} \end{aligned}$$

puisque  $\exp t_1 X \cdot h_1 \cdot \exp(-t_1 X) \in H_0$ , donc  $(\exp t_1 X \cdot h_1 \cdot \exp(-t_1 X)) f_0 \in I_{H_0}$  pour tout  $g = \exp t_1 X \cdot h_1 \in G$ . Par conséquent,  $\varphi \otimes f_0 \in I$  et  $f_0 \in R^{-1}(I)$ , c'est-à-dire  $I_{H_0} \subset R^{-1}(I)$ .

Par 9.13.5., on en déduit que  $I_{H_0}$  est fermé dans  $(\mathcal{S}(H_0), |||\cdot|||_0)$ .

**9.13.7.** L'idéal  $I_{H_0}$  est  $\mathfrak{D}$ -premier.

En effet, soient  $J_1, J_2$  deux idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants de  $\mathcal{S}(H_0)$  tels que  $J_1 *_{H_0} J_2 \subset I_{H_0}$ . Posons

$$\mathcal{J}_1 = \overline{\langle \mathcal{S}(G) *_{H_0} J_1 \rangle}^{\mathcal{S}(G)} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_2 = \overline{\langle J_2 *_{H_0} \mathcal{S}(G) \rangle}^{\mathcal{S}(G)}$$

l'adhérence étant prise dans la topologie de Schwartz de  $\mathcal{S}(G)$ . Puisque, pour tout  $a \in G$ ,

$${}_a(f *_{H_0} f_0) = ({}_a f) *_{H_0} f_0 \quad \text{et} \quad (f *_{H_0} f_0)_a = (f_a) *_{H_0} (f_0^a)$$

où  $f_0^a(h) = f_0(aha^{-1})$ , on voit que  $\mathcal{S}(G) *_{H_0} J_1$  et  $\mathcal{J}_1$  sont invariants par translations ([Lud. Mol. 1], 9.5.). Donc  $\mathcal{J}_1$  est un idéal de  $\mathcal{S}(G)$  ([Lud. Mol. 1], 6.2.), fermé dans la topologie de Schwartz, mais non nécessairement dans la topologie définie par  $||| \cdot |||$ . De même pour  $\mathcal{J}_2$ . Pour tout  $D \in \mathfrak{D}$ ,  $(f *_{H_0} f_0)^D = (f^D) *_{H_0} (f_0^D)$  entraîne que  $\mathcal{S}(G) *_{H_0} J_1$  et  $\mathcal{J}_1$  ([Lud. Mol. 1], 9.3.) sont  $\mathfrak{D}$ -invariants, puisqu'il en est ainsi de  $J_1$ . De même pour  $\mathcal{J}_2$ . Pour montrer que  $\mathcal{J}_1 *_{\mathcal{G}} \mathcal{J}_2 \subset I$ , il suffit de montrer que quel que soit  $g \in G$ , quels que soient  $f, f' \in \mathcal{S}(G)$ ,  $f_1 \in J_1$ ,  $f_2 \in J_2$ ,

$${}_g[(f *_{H_0} f_1) *_{\mathcal{G}} (f_2 *_{H_0} f')] \Big|_{H_0} = (({}_g f) *_{H_0} f_1) *_{\mathcal{G}} (f_2 *_{H_0} f') \Big|_{H_0} \in I_{H_0}.$$

En remplaçant  ${}_g f$  par  $f$ , il suffit en fait de montrer que

$$(f *_{H_0} f_1) *_{\mathcal{G}} (f_2 *_{H_0} f') \Big|_{H_0} \in I_{H_0}.$$

Or

$$\begin{aligned} & (f *_{H_0} f_1) *_{\mathcal{G}} (f_2 *_{H_0} f')(h_0) \\ &= \int \int \int \int f(h_0 h^{-1} \exp(-tX) h'^{-1}) f_1(h') f_2(h'') f'(h''^{-1} \exp tX \cdot h) \\ & \quad dh dt dh' dh'' \\ &= \int \int \int \int f(h_0 h'^{-1} h^{-1} \exp(-tX)) f_1^{(\exp tX \cdot h)}(h') f_2(h'') \\ & \quad f'(h''^{-1} \exp tX \cdot h) dh dt dh' dh'' \\ &= \int \int \int \int f(h'^{-1} h^{-1} \exp(-tX)) f_1^{(\exp tX \cdot h)}(h' h_0) f_2(h'') \\ & \quad f'(h''^{-1} \cdot \exp tX \cdot h) dh dt dh' dh'' \\ &= \int \int \int \int f(h^{-1} \exp(-tX)) f_1^{(\exp tX \cdot h)}(h_0 h') f_2(h'') \\ & \quad f'(h''^{-1} \cdot \exp tX \cdot h h'^{-1}) dh dt dh' dh'' \\ &= \int \int \int \int f(h^{-1} \cdot \exp(-tX)) f_1^{(\exp tX \cdot h)}(h_0 h') f_2^{(\exp tX \cdot h)}(h'') \\ & \quad f'(\exp tX \cdot h \cdot h''^{-1} \cdot h'^{-1}) dh dt dh' dh'' \\ &= \int \int \int \int f(h^{-1} \cdot \exp(-tX)) f_1^{(\exp tX \cdot h)}(h_0 h'^{-1}) (f_2^{(\exp tX \cdot h)})_{h''}(h') \\ & \quad f'(\exp tX \cdot h \cdot h''^{-1}) dh dt dh' dh'' \\ &= \int \int \int f(h^{-1} \cdot \exp(-tX)) f_1^{(\exp tX \cdot h)} *_{H_0} (f_2^{(\exp tX \cdot h)})_{h''}(h_0) \\ & \quad f'(\exp tX \cdot h \cdot h''^{-1}) dh dt dh''. \end{aligned}$$

Comme  $J_1, J_2$  sont des idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants (donc en particulier  $G$ -invariants) de  $\mathcal{S}(H_0)$ ,

$$f_1^{(\exp tX \cdot h)} *_{H_0} (f_2^{(\exp tX \cdot h)})_{h'} \in J_1 *_{H_0} \bar{J}_2^{\mathcal{S}(H_0)} \subset I_{H_0}.$$

Puisque  $I_{H_0}$  est fermé dans la topologie de Schwartz, on en déduit alors que l'expression toute entière est dans  $I_{H_0}$ , c'est-à-dire que  $(f *_{H_0} f_1) *_{\mathfrak{G}} (f_2 *_{H_0} f') \Big|_{H_0} \in I_{H_0}$  et  $\mathcal{J}_1 *_{\mathfrak{G}} \mathcal{J}_2 \subset I$ .

Comme  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant,  $\mathcal{J}_1 \subset I$  ou  $\mathcal{J}_2 \subset I$ . Supposons par exemple  $\mathcal{J}_1 = \overline{\mathcal{S}(G) *_{H_0} J_1}^{\mathcal{S}(G)} \subset I$ . Soit  $(\varphi_\varepsilon)$  une unité approchée dans  $\mathcal{S}(H_0)$  et soit  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $u(0) = 1$ . Posons  $\psi_\varepsilon = u \otimes \varphi_\varepsilon$ . Soit  $f_1 \in J_1$ . On a  $\psi_\varepsilon *_{H_0} f_1 \in I$ ,  $\psi_\varepsilon *_{H_0} f_1 \Big|_{H_0} \in I_{H_0}$  et

$$\psi_\varepsilon *_{H_0} f_1 \Big|_{H_0} = \varphi_\varepsilon *_{H_0} f_1 \xrightarrow{\mathcal{S}(H_0)} f_1.$$

Puisque  $I_{H_0}$  est fermé dans  $\mathcal{S}(H_0)$ ,  $f_1 \in I_{H_0}$  et  $J_1 \subset I_{H_0}$ . Ceci prouve que  $I_{H_0}$  est  $\mathfrak{D}$ -premier.

**9.13.8. Raisonnement par récurrence :** Puisque  $\dim \mathfrak{h}_0 + \dim \mathfrak{d} < \dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{d}$ , il existe, par hypothèse de récurrence, une orbite  $\Omega_0$  associée à  $\pi_0 = \text{ind}_H^{H_0} \chi_{\ell_0} \in \hat{H}_0$  telle que

$$I_{H_0} = \text{Ker } \Omega_0 = \bigcap_D \text{Ker } {}^D \pi_0.$$

Posons  $\tilde{\pi}_0 = \text{ind}_{H_0}^G \pi_0$  et  $\text{Ker } \Omega = \bigcap_D \text{Ker } {}^D \tilde{\pi}_0$ . Alors

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker } \Omega &\iff \tilde{\pi}_0(f^D) = 0 && \forall D \in \mathfrak{D} \\ &\iff \left[ ({}_g(f^D)) \Big|_{H_0} \right]^{g'} \in \text{Ker } \pi_0 && \forall D \in \mathfrak{D} \text{ ([Lud. 1])} \\ &&& \forall g, g' \in G \\ &\iff \left[ ({}^D g)f \Big|_{H_0} \right]^D \in \text{Ker } {}^{g'} \pi_0 && \forall D \in \mathfrak{D} \\ &&& \forall g, g' \in G \\ &\iff \left[ ({}_g f) \Big|_{H_0} \right] \in \text{Ker } {}^{D \cdot g'} \pi_0 && \forall D \in \mathfrak{D} \\ &&& \forall g, g' \in G \end{aligned}$$

en remplaçant  ${}^D g$  par  $g$  quelconque

$$\iff \left[ ({}_g f) \Big|_{H_0} \right] \in \text{Ker } {}^D \pi_0 \quad \forall D \in \mathfrak{D}, \forall g \in G$$

en remplaçant  $D \cdot g'$  par  $D$  quelconque

$$\begin{aligned} &\iff [(gf)|_{H_0}] \in \text{Ker } \Omega_0 = I_{H_0} \\ &\iff f \in I \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $I = \text{Ker } \Omega$ .

Il reste à remarquer que  $\tilde{\pi}_0$  peut être supposé irréductible. Supposons d'abord  $\langle \ell_0, Z \rangle = 0$ . Alors  $\pi_0(\exp rZ) = \text{id}$  et  $\tilde{\pi}_0(\exp rZ) = \text{id}$  pour tout  $r \in \mathbb{R}$ . Rappelons en plus que  $I \subset \text{Ker } \pi$  où  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$  avec  $\langle \ell, Z \rangle = -1$ . Soit  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{u}(0) = 0$  et  $\hat{u}(1) = 1$ . Soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\pi(f) \neq 0$ . Posons  $g = f *_{\exp(\mathbb{R}Z)} u$ . Alors  $\pi(g) = \pi(f) \neq 0$ . D'autre part  ${}^D\tilde{\pi}_0(g) = 0$  pour tout  $D$ . Ceci contredit le fait que  $I = \text{Ker } \Omega \subset \text{Ker } \pi$ . Supposons donc  $\langle \ell_0, Z \rangle \neq 0$ . D'après 3.11., si  $\mathfrak{h}$  est une polarisation de Pukanszky pour  $\ell_0$  dans  $\mathfrak{h}_0$ , alors  $\mathfrak{h}$  est aussi une polarisation de Pukanszky pour  $\ell_0$  (prolongé par 0 sur  $\mathbb{R}X$ ) dans  $\mathfrak{g}$  et  $\tilde{\pi}_0 \equiv \text{ind}_H^G \chi_{\ell_0}$  est irréductible.

**9.14. Cas  $a_{3,3}$  :**

**9.14.1.** Comme dans les cas  $a_{3,1}$  et  $a_{3,2}$ , supposons  $\langle \ell, Z \rangle = -1$ . Par hypothèse dans ce cas,  $Y_1, Y_2$  et  $Z$  sont centraux. Puisque  $\varphi, \psi_1$  et  $\psi_2$  sont indépendants, il existe  $d_1, d_2, d_3 \in \mathfrak{d}$  tels que  $\varphi(d_1) = 1, \psi_1(d_1) = \psi_2(d_1) = 0, \psi_1(d_2) = 1, \varphi(d_2) = \psi_2(d_2) = 0, \psi_2(d_3) = 1, \varphi(d_3) = \psi_1(d_3) = 0$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} d_1 \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \\ d_2(Y_1) &= Z \text{ et } d_2(Y_2) = 0 \\ d_3(Y_1) &= 0 \text{ et } d_3(Y_2) = Z. \end{aligned}$$

En remplaçant  $Y_1$  et  $Y_2$  par  $-\frac{1}{1+\omega^2}Y_1 - \frac{\omega}{1+\omega^2}Y_2$  et  $\frac{\omega}{1+\omega^2}Y_1 - \frac{1}{1+\omega^2}Y_2$  et  $d_2, d_3$  par  $[d_1, d_2]$  et  $[d_1, d_3]$ , on voit qu'on peut supposer que  $d_2, d_3 \in [\mathfrak{d}, \mathfrak{d}]$ , donc que  $d_2$  et  $d_3$  appartiennent au radical nilpotent de  $\mathfrak{d}$ . Les grandes lignes de la démonstration seront les mêmes que dans le cas  $a_{3,1}$ ). Cependant, puisque  $d_2$  et  $d_3$  ne commutent pas nécessairement, il faudra introduire certaines astuces.

**9.14.2.** Posons  $\mathfrak{d}_0 = \text{Ker } \psi_1 \cap \text{Ker } \psi_2$  et  $\mathfrak{D}_0 = \exp \mathfrak{d}_0$ . Alors  $\mathfrak{d}_0$  est une sous-algèbre de  $\mathfrak{d}$ . Soit  $\mathfrak{D}_1$  le sous-groupe de  $\mathfrak{D}$  engendré par

$\{\exp sd_2, \exp td_3 \mid s, t \in \mathbb{R}\}$  et soit  $\mathfrak{D}'_1$  le commutant de  $\mathfrak{D}_1$ . On sait que  $\mathfrak{D}'_1$  est un sous-groupe normal de  $\mathfrak{D}_1$  et que  $\mathfrak{D}_1/\mathfrak{D}'_1$  est abélien. On vérifie facilement que  $\mathfrak{D}'_1 \subset \exp[\text{Ker } \varphi \cap \text{Ker } \psi_1 \cap \text{Ker } \psi_2]$ , c'est-à-dire que

$$D'(\exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2 \exp sZ) = \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2 \exp sZ$$

quel que soit  $D' \in \mathfrak{D}'_1$ . En particulier,  $\mathfrak{D}'_1 \subset \mathfrak{D}_0$ . Soient  $\mathfrak{d}_1$  et  $\mathfrak{d}'_1$  les sous-algèbres de  $\mathfrak{d}$  telles que  $\mathfrak{D}_1 = \exp \mathfrak{d}_1$  et  $\mathfrak{D}'_1 = \exp \mathfrak{d}'_1$ . Remarquons de plus que  $\mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{D}'_1$  sont des groupes nilpotents par choix de  $d_2$  et  $d_3$ .

**9.14.3. a) Définition :** Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ , définissons

$$\tilde{f}^2(x, t, s) = \int \int \int f^{\exp td_2 \cdot \exp sd_3}(x \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2 \exp uZ) e^{iu} du dr_1 dr_2.$$

b) En posant  $\delta_2(t) = \delta(\exp td_2)$  et  $\delta_3(s) = \delta(\exp sd_3)$  on a

$$\tilde{f}^2(x, t, s) = \delta_2(t)\delta_3(s) \hat{f}^{2,3,4}(\exp td_2 \cdot \exp sd_3 x, -t, -s, 1).$$

De plus,

$$\tilde{f}^2(x \exp aY_1 \exp bY_2 \exp cZ, t, s) = e^{-ic} \tilde{f}^2(x, t, s)$$

$$\widetilde{f *_{\tilde{G}} g}^2(x, t, s) = (\tilde{f}^2 *_{\tilde{G}} \tilde{g}^2)(x, t, s) \text{ avec } \tilde{G} = G / \exp(\mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2 + \mathbb{R}Z).$$

Pour  $d_0 \in \mathfrak{d}_0$  et  $D_0 = \exp d_0$  on a

$$D_0 \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = e^{\varphi(d_0)} K(\varphi(d_0)\omega) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

avec  $K(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  (voir calculs de 3.8.). On en déduit que

$$\begin{aligned} & [f^{\exp td_2 \exp sd_3} \cdot D_0 \cdot (\exp td_2 \exp sd_3)^{-1}]^{\sim 2}(x, t, s) \\ &= \delta(D_0) e^{-2\varphi(d_0)} \tilde{f}^2(D_0 x, t, s) \\ &= (\tilde{f}^2)^{D_0}(x, t, s). \end{aligned}$$

c)  $\tilde{f}^2(x, t, s) = 0, \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in G$

$$\iff \hat{f}^{2,3,4}(\exp td_2 \cdot \exp sd_3 x, -t, -s, 1) = 0 \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in G$$

$$\iff \hat{f}^{2,3,4}(x, -t, -s, 1) = 0 \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in G$$

$$\iff \hat{f}^4(x \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2, 1) = 0 \quad \forall x \in G, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

$$\iff f \in I_0$$

$$\text{et } \tilde{f}^2(x, t, s) = \tilde{g}^2(x, t, s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in G$$

$$\iff f = g \pmod{I_0}.$$

d) Remarquons qu'on n'a plus d'équivalent de la propriété  $\tilde{f}^{a^2}(x, t) = \tilde{f}^2(x, t + a)$  de 9.12.2. Pour tenir compte de ce phénomène et de ses conséquences, il faut modifier la définition de  $\alpha(f)$ .

**9.14.4. a) Définitions :** Munissons  $\mathfrak{D}'_1$  d'une base de Malcev  $\{d'_1, d'_2, \dots, d'_k\}$ , identifions  $\mathfrak{D}'_1$  et  $\mathbb{R}^k$ , ainsi que la mesure de Haar sur  $\mathfrak{D}'_1$  et la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^k$ . Alors on définit  $ES(\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}'_1 \times \mathbb{R}^2) \equiv ES(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2)$  comme étant l'ensemble des fonctions  $\alpha$ ,  $C^\infty$  de  $\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}'_1 \times \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$(a_2, a_3; D_1; b_1, b_2) \equiv (a_2, a_3; t_1, \dots, t_k; b_1, b_2) \\ \longmapsto e^{k_2 a_2 + k_3 a_3} \cdot e^{M_1 t_1 + \dots + M_k t_k} \alpha(a_2, a_3; t_1, \dots, t_k; b_1, b_2)$$

soit une fonction de Schwartz quels que soient  $k_2, k_3; M_1, \dots, M_k \in \mathbb{R}$  à condition d'avoir  $D_1 = \exp t_k d'_k \dots \exp t_1 d'_1$ .

Pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  on définit alors

$$\alpha(f) = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathfrak{D}'_1} \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(a_2, a_3; D_1; b_1, b_2) (f_{\exp b_1 Y_1 \cdot \exp b_2 Y_2})^{D_1 \cdot \exp a_2 d_2 \cdot \exp a_3 d_3} \\ da_2 da_3 dD_1 db_1 db_2.$$

b) Evaluons

$$\widetilde{\alpha(f)^2}(x, t, s) \\ = \delta_2(t) \delta_3(s) \int \alpha(f) (\exp td_2 \cdot \exp sd_3 x \cdot \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2) \exp(u + tr_1 \\ + sr_2) Z e^{iu} du dr_1 dr_2 \\ = \delta_2(t) \delta_3(s) \int \int \alpha(a_2, a_3; D_1; b_1, b_2) (f_{\exp b_1 Y_1 \cdot \exp b_2 Y_2})^{D_1 \cdot \exp a_2 d_2 \cdot \exp a_3 d_3}$$



$$\begin{aligned}
 & (\exp td_2 \exp sd_3 x \cdot \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2) \exp(u + tr_1 + sr_2) Z) \\
 & e^{iu} da_2 da_3 dD_1 db_1 db_2 du dr_1 dr_2 \\
 = & \delta_2(t) \delta_3(s) \int \int \alpha(a_2, a_3; D_1; b_1, b_2) \cdot \delta_2(a_2) \delta_3(a_3) \\
 & f({}^{D_1} \exp a_2 d_2 \exp a_3 d_3 \exp td_2 \exp sd_3 x \cdot \exp(r_1 + b_1) Y_1 \exp(r_2 + b_2) Y_2 \\
 & \exp(u + tr_1 + sr_2 + a_2 r_1 + a_3 r_2) Z) e^{iu} da_2 da_3 dD_1 db_1 db_2 \\
 & du dr_1 dr_2
 \end{aligned}$$

car  $\delta \equiv 1$  sur  $\mathfrak{D}'_1$ . De plus,

$$\begin{aligned}
 & D_1 \cdot \exp a_2 d_2 \exp a_3 d_3 \exp td_2 \exp sd_3 \\
 = & \exp a_2 d_2 \exp a_3 d_3 \exp td_2 \exp sd_3 \cdot [\exp(-sd_3) \exp(-td_2) \\
 & \exp(-a_3 d_3) \exp(-a_2 d_2) \cdot D_1 \cdot \exp a_2 d_2 \exp a_3 d_3 \exp td_2 \exp sd_3].
 \end{aligned}$$

Dans  $\mathfrak{D}'_1$ , effectuons le changement de variables

$$\begin{aligned}
 D_1 \mapsto & \exp a_2 d_2 \exp a_3 d_3 \exp td_2 \exp sd_3 \cdot D_1 \cdot \exp(-sd_3) \exp(-td_2) \\
 & \cdot \exp(-a_3 d_3) \exp(-a_2 d_2).
 \end{aligned}$$

Puisque  $d_2, d_3$  sont nilpotents, on a

$$\begin{aligned}
 & \widetilde{\alpha(f)}^2(x, t, s) \\
 = & \delta_2(t) \delta_3(s) \int \int \alpha(a_2, a_3; \exp a_2 d_2 \exp a_3 d_3 \exp td_2 \exp sd_3 \cdot D_1 \\
 & \cdot \exp(-sd_3) \exp(-td_2) \exp(-a_3 d_3) \exp(-a_2 d_2); b_1, b_2) \\
 & \delta_2(a_2) \delta_3(a_3) f(\exp a_2 d_2 \exp a_3 d_3 \exp td_2 \exp sd_3 \cdot D_1 x \cdot \exp(r_1 + b_1) Y_1 \\
 & \exp(r_2 + b_2) Y_2 \exp(u + tr_1 + sr_2 + a_2 r_1 + a_3 r_2) Z) e^{iu} \\
 & da_2 da_3 dD_1 db_1 db_2 du dr_1 dr_2.
 \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
 & \exp a_2 d_2 \exp a_3 d_3 \exp td_2 \exp sd_3 \cdot D_1 \\
 = & \exp(a_2 + t) d_2 \exp(a_3 + s) d_3 \exp(-a_3 - s) d_3 \exp(-a_2 - t) d_2 \\
 & \cdot \exp a_2 d_2 \exp a_3 d_3 \exp td_2 \exp sd_3 \cdot D_1 \\
 = & \exp(a_2 + t) d_2 \exp(a_3 + s) d_3 \cdot \{\exp(-sd_3) \cdot \exp(-a_3 d_3) \\
 & \exp(-td_2) \exp a_3 d_3 \exp td_2\} \exp sd_3 \cdot D_1.
 \end{aligned}$$

Dans  $\mathfrak{D}'_1$  effectuons le changement de variables

$$D_1 \rightarrow \{\exp(-sd_3) \cdot [\exp(-td_2) \exp(-a_3d_3) \exp td_2 \exp a_3d_3] \exp sd_3\} \cdot D_1.$$

D'où

$$\begin{aligned} & \widetilde{\alpha(f)}^2(x, t, s) \\ = & \delta_2(t) \delta_3(s) \int \int \alpha(a_2, a_3; \exp(a_2 + t)d_2 \cdot \exp(a_3 + s)d_3 \cdot D_1 \\ & \cdot \exp(-sd_3) \exp(-td_2) \exp(-a_3d_3) \exp(-a_2d_2); b_1, b_2) \cdot \delta_2(a_2) \delta_3(a_3) \\ & f(\exp(a_2+t)d_2 \cdot \exp(a_3+s)d_3 \cdot D_1 x \cdot \exp(r_1 + b_1)Y_1 \exp(r_2 + b_2)Y_2 \\ & \exp(u + tr_1 + sr_2 + a_2r_1 + a_3r_2)Z) e^{iu} da_2 da_3 dD_1 db_1 db_2 \\ & du dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables

$$\begin{cases} a_2 \mapsto a_2 - t \\ a_3 \mapsto a_3 - s \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 \mapsto r_1 - b_1 \\ r_2 \mapsto r_2 - b_2. \end{cases}$$

On obtient

$$\begin{aligned} & \widetilde{\alpha(f)}^2(x, t, s) \\ = & \int \int \alpha(a_2 - t, a_3 - s; \exp a_2d_2 \exp a_3d_3 \cdot D_1 \cdot \exp(-sd_3) \exp(-td_2) \cdot \\ & \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp(-(a_2 - t)d_2); b_1, b_2) \cdot \delta_2(a_2) \delta_3(a_3) \\ & f(\exp a_2d_2 \cdot \exp a_3d_3 \cdot D_1 x \cdot \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2 \exp(u + a_2r_1 + a_3r_2 \\ & - a_2b_1 - a_3b_2)Z) e^{iu} da_2 da_3 dD_1 db_1 db_2 du dr_1 dr_2 \\ = & \int \int \alpha(a_2 - t, a_3 - s; (\exp(a_2 - t)d_2 \exp(a_3 - s)d_3 \exp td_2 \cdot \\ & \exp sd_3) \cdot \{\exp(-sd_3)[\exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp td_2 \cdot \\ & \exp(a_3 - s)d_3] \exp sd_3\} \cdot D_1 \cdot (\exp(-sd_3) \exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \cdot \\ & \exp(-(a_2 - t)d_2)); b_1, b_2) \delta_2(a_2) \delta_3(a_3) f(\exp a_2d_2 \cdot \exp a_3d_3 \cdot D_1 x \cdot \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2 \cdot \\ & \exp(u + a_2r_1 + a_3r_2)Z) \cdot e^{iu} \cdot e^{ia_2b_1} \cdot e^{ia_3b_2} da_2 da_3 dD_1 db_1 db_2 du dr_1 dr_2 \\ = & \int \hat{\alpha}^{4,5}(a_2 - t; a_3 - s; (\exp(a_2 - t)d_2 \exp(a_3 - s)d_3 \exp td_2 \cdot \\ & \exp sd_3) \cdot \{\exp(-sd_3)[\exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp td_2 \cdot \\ & \exp(a_3 - s)d_3] \exp sd_3\} \cdot D_1 \cdot (\exp(-sd_3) \exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \cdot \\ & \exp(-(a_2 - t)d_2)); a_2, a_3) \hat{f}^2({}^{D_1}x, a_2, a_3) da_2 da_3 dD_1. \end{aligned}$$

9.14.5. a) Supposons qu'il existe  $\varphi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $\chi \in C_c^\infty(\mathfrak{D}'_1)$  tels que

$$\begin{aligned} & \hat{\alpha}^{4,5}(a_2 - t, a_3 - s; (\exp(a_2 - t)d_2 \exp(a_3 - s)d_3 \exp td_2 \exp sd_3 \\ & \cdot \{\exp(-sd_3)[\exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp td_2 \exp(a_3 - s)d_3] \\ & \cdot \exp sd_3\} \cdot D_1 \cdot (\exp(-sd_3) \exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \\ & \qquad \qquad \qquad \exp(-(a_2 - t)d_2)); a_2, a_3) \\ & = \varphi(a_2, a_3) \cdot \psi(t, s) \cdot \chi(D_1). \end{aligned}$$

Alors

$$\widetilde{\alpha}(f)^2(x, t, s) = \psi(t, s) \cdot f_1(x)$$

avec

$$f_1(x) = \int \varphi(a_2, a_3) \chi(D_1) \tilde{f}^2({}^{D_1}x, a_2, a_3) da_2 da_3 dD_1.$$

Remarquons que cette dernière intégrale existe, puisque  $\varphi$  et  $\chi$  sont à support compact, toutes les fonctions étant continues.

b)  $f_1(x \cdot \exp v_1 Y_1 \cdot \exp v_2 Y_2 \cdot \exp w Z)$

$$\begin{aligned} & = \int \varphi(a_2, a_3) \chi(D_1) \tilde{f}^2({}^{D_1}x \exp v_1 Y_1 \exp v_2 Y_2 \exp w Z; a_2, a_3) \\ & \qquad \qquad \qquad da_2 da_3 dD_1 \quad \text{car } \mathfrak{D}'_1 \text{ n'agit pas sur } Y_1, Y_2, Z \\ & = e^{-iw} f_1(x). \end{aligned}$$

En utilisant ([Lud. Mol. 1], 9.2.), on voit facilement que  $f_1$  est une fonction de Schwartz en  $x \in G/\exp(\mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2 + \mathbb{R}Z)$ .

c) Montrons l'existence de  $\alpha$  pour  $\varphi, \psi, \chi$  donnés. On a

$$\begin{aligned} & \hat{\alpha}^{4,5}(a_2 - t, a_3 - s; (\exp(a_2 - t)d_2 \exp(a_3 - s)d_3 \exp td_2 \cdot \\ & \exp sd_3) \cdot \{\exp(-sd_3)[\exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp td_2 \cdot \\ & \exp(a_3 - s)d_3] \exp sd_3\} \cdot D_1 \cdot (\exp(-sd_3) \exp(-td_2) \cdot \\ & \qquad \qquad \qquad \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp(-(a_2 - t)d_2)); a_2, a_3) \\ & = \varphi(a_2, a_3) \cdot \psi(t, s) \cdot \chi(D_1) \\ \iff & \hat{\alpha}^{4,5}(c_2, c_3; (\exp c_2 d_2 \exp c_3 d_3 \cdot \\ & \exp(a_2 - c_2)d_2 \exp(a_3 - c_3)d_3) \cdot \{\exp(-(a_3 - c_3)d_3) \cdot \\ & [\exp(-(a_2 - c_2)d_2) \exp(-c_3 d_3) \exp(a_2 - c_2)d_2 \exp c_3 d_3] \cdot \\ & \exp(a_3 - c_3)d_3\} \cdot D_1 \cdot (\exp(-(a_3 - c_3)d_3) \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \exp(-(a_2 - c_2)d_2) \exp(-c_3d_3) \exp(-c_2d_2); a_2, a_3) \\
 &= \varphi(a_2, a_3) \cdot \psi(a_2 - c_2, a_3 - c_3) \chi(D_1) \\
 \iff & \hat{\alpha}^{4,5}(c_2, c_3; D_1; a_2, a_3) \\
 &= \varphi(a_2, a_3) \cdot \psi(a_2 - c_2, a_3 - c_3) \chi(\{\exp(-(a_3 - c_3)d_3) \cdot \\
 & [\exp(-c_3d_3) \exp(-(a_2 - c_2)d_2) \exp c_3d_3 \exp(a_2 - c_2)d_2] \cdot \\
 & \exp(a_3 - c_3)d_3\} \cdot \exp(-(a_3 - c_3)d_3) \exp(-(a_2 - c_2)d_2) \cdot \\
 & \exp(-c_3d_3) \exp(-c_2d_2)) \cdot D_1 \cdot (\exp c_2d_2 \exp c_3d_3 \cdot \\
 & \exp(a_2 - c_2)d_2 \exp(a_3 - c_3)d_3)).
 \end{aligned}$$

Puisque  $\varphi, \psi, \chi$  sont des fonctions  $C^\infty$  à support compact, il en est de même de  $\hat{\alpha}^{4,5}$ . Donc  $\alpha$  est obtenu par transformée de Fourier inverse.

d) En identifiant  $\mathfrak{D}'_1$  à  $\mathbb{R}^k$  via une base de Malcev, nous pouvons appliquer les résultats de [Lud. Mol. 1]. En particulier,  $\alpha(I) \subset I$  pour tout  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2)$ , par ([Lud. Mol. 1], 9.12.). De plus, comme en 9.10.9.a), on voit qu'il existe une norme  $||| \cdot ||| \approx$  sur  $ES(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2)$  et une norme de Schwartz  $||| \cdot ||| \sim$  sur  $\mathcal{S}(G)$  telles que

$$|||\alpha(f)||| \leq |||\alpha||| \approx |||f||| \sim$$

avec

$$\begin{aligned}
 |||\alpha||| \approx & \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^k} \int_{\mathbb{R}^2} |\alpha(a_2, a_3; \exp t_k d'_k \dots \exp t_1 d'_1; b_1, b_2)| \\
 & \cdot e^{M_2|a_2| + M_3|a_3|} \cdot e^{N_1|t_1| + \dots + N_k|t_k|} \cdot P(b_1, b_2) da_2 da_3 dt_1 \dots dt_k \\
 & \cdot db_1 db_2,
 \end{aligned}$$

$P(b_1, b_2)$  désignant un polynôme à coefficients positifs en  $b_1^2$  et  $b_2^2$ .

**9.14.6. Espace  $\mathcal{S}(G)_1$  :** a) **Définition :** L'espace  $\mathcal{S}(G)_1$  est l'ensemble des fonctions  $f_1$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  vérifiant

$$f_1(x \exp v_1 Y_1 \exp v_2 Y_2 \exp w Z) = e^{-iw} f_1(x)$$

$f_1$  est Schwartz en  $x \in \tilde{G} = G / \exp(\mathbb{R}Y_1 + \mathbb{R}Y_2 + \mathbb{R}Z)$  (pour une base coexponentielle fixée par exemple).

b) Quels que soient  $t, s$  fixés,  $\tilde{f}^2(\cdot, t, s) \in \mathcal{S}(G)_1$ . En particulier, si  $\tilde{f}^2(x, t, s) = u(t, s) f_1(x)$ , respectivement si  $\widetilde{\alpha(f)}^2(x, t, s) = u(t, s) f_1(x)$ , alors  $f_1 \in \mathcal{S}(G)_1$ .

c) Construisons un rétracte particulier. Remarquons d'abord que

$$\tilde{f}^2(x, t, s) = \delta_2(t) \delta_3(s) \hat{f}^{2,3,4}(\exp td_2 \cdot \exp sd_3 x, -t, -s, 1)$$

entraîne

$$\hat{f}^{2,3,4}(x, -t, -s, 1) = \delta_2(t)^{-1} \delta_3(s)^{-1} \hat{f}^2(\exp(-sd_3) \exp(-td_2)x, t, s).$$

Soit  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  fixé. Pour  $f_1 \in \mathcal{S}(G)_1$  donné, recherchons  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\hat{f}^2 = \psi \otimes f_1$ . Fixons  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tel que  $\hat{h}(1) = 1$ . On prend alors  $f$  tel que

$$\begin{aligned} & f(x \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2 \exp u Z) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int \delta_2(t)^{-1} \delta_3(s)^{-1} \psi(t, s) f_1(\exp(-sd_3) \exp(-td_2)x) e^{ir_1 t} e^{ir_2 s} dt ds \right) \\ & \quad \cdot h(u). \end{aligned}$$

Ceci nous définit un rétracte

$$\begin{aligned} R : \mathcal{S}(G)_1 &\longrightarrow \mathcal{S}(G) \\ f_1 &\longmapsto R(f_1) = f, \end{aligned}$$

$f$  étant calculé comme précédemment, la base étant fixée.

d) Comme en 9.10.4. et 9.12.4., on munit  $\mathcal{S}(G)_1$  d'une norme de Schwartz de manière à rendre le rétracte  $R$  continu. On écrit les éléments de  $G$  sous la forme

$$\tilde{x} \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2 \exp u Z = \exp(\tilde{x}_1 E_1 + \dots + \tilde{x}_{n-3} E_{n-3} + r_1 Y_1 + r_2 Y_2 + u Z)$$

et on évalue d'abord

$$\begin{aligned} |||f||| &\leq \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\text{finie}} \int \int \int \int |\tilde{x}^a r_1^{b_1} r_2^{b_2} u^c D_{\tilde{x}}^{\tilde{\ell}} D_{r_1}^{p_1} D_{r_2}^{p_2} D_u^q \\ & \quad \int \delta_2(t)^{-1} \delta_3(s)^{-1} \psi(t, s) f_1(\exp(-sd_3) \exp(-td_2)\tilde{x}) e^{ir_1 t} e^{ir_2 s} dt ds \\ & \quad \cdot h(u) | d\tilde{x} dr_1 dr_2 du \\ &\leq \sum_{\text{finie}} \frac{1}{(2\pi)^2} \left( \int |u^c D_u^q h(u)| du \right) \cdot \int \int \frac{1}{1+r_1^2} \cdot \frac{1}{1+r_2^2} \cdot \left| \int \int [\tilde{x}^a D_{\tilde{x}}^{\tilde{\ell}} \right. \\ & \quad (1 - D_t^2) D_t^{b_1} (1 - D_s^2) D_s^{b_2} t^{p_1} s^{p_2} \delta_2(t)^{-1} \delta_3(s)^{-1} \psi(t, s) \\ & \quad \left. f_1(\exp(-sd_3) \exp(-td_2)\tilde{x}) \right] e^{ir_1 t} e^{ir_2 s} dt ds | d\tilde{x} dr_1 dr_2 \\ &\leq C \sum_{\text{finie}} \int \int_{K \subset \mathbb{R}^2} |\tilde{x}^a D_{\tilde{x}}^{\tilde{\ell}} (1 - D_t^2) D_t^{b_1} (1 - D_s^2) D_s^{b_2} \varphi(t, s) \\ & \quad f_1(\exp(-sd_3) \exp(-td_2)\tilde{x}) | d\tilde{x} dt ds \end{aligned}$$

où  $\varphi(t, s) = t^{p_1} s^{p_2} \delta_2(t)^{-1} \delta_3(s)^{-1} \psi(t, s)$  a son support contenu dans un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^2$ , à savoir le support de  $\psi$ , et où la constante  $C$  est obtenue en majorant pour tous les termes de la somme, l'expression

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int |u^c D_u^q h(u)| du \cdot \int \frac{dr_1}{1+r_1^2} \cdot \int \frac{dr_2}{1+r_2^2}.$$

La constante  $C$  et le compact  $K$  dépendent donc uniquement des fonctions  $h$  et  $\psi$ . La fonction  $\varphi$  est définie à partir de  $\psi$ . Puisque  $\varphi$  est à support compact, toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $4 + b_1 + b_2$  sont bornées et on trouve une nouvelle majoration

$$\|f\| \leq C_1 \cdot \sum_{\text{finie}} \sum_{\beta \leq 2+b_1} \sum_{\gamma \leq 2+b_2} \int \int_K |\tilde{x}^\alpha D_{\tilde{x}}^\beta D_t^\beta D_s^\gamma f_1(\exp(-sd_3) \exp(-td_2) \tilde{x})| d\tilde{x} dt ds$$

la constante  $C_1$  et le compact  $K$  dépendant de  $h$  et  $\psi$ . Faisons un raisonnement analogue à celui de 9.10.4. et 9.12.4. Notons par  $A_{-t}$  et  $B_{-s}$  les matrices des opérateurs  $\exp(-td_2)$  et  $\exp(-sd_3)$ . Pour la base en question on note

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_{n-3} \\ \tilde{x}'_{n-2} \\ \tilde{x}'_{n-1} \\ \tilde{x}'_n \end{pmatrix} = B_{-s} A_{-t} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ & & & C_{s,t} & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ D_{s,t} & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & -t & -s & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

puisque

$$\begin{aligned} \exp(-sd_3) \exp(-td_2)(Y_1) &= Y_1 - tZ \\ \exp(-sd_3) \exp(-td_2)(Y_2) &= Y_2 - sZ \\ \exp(-sd_3) \exp(-td_2)(Z) &= Z. \end{aligned}$$

Comme  $B_{-s} A_{-t}$  est inversible, il en est de même de  $C_{s,t}$ . Ceci montre que  $\tilde{x}'_{n-2}$ ,  $\tilde{x}'_{n-1}$  et  $\tilde{x}'_n$  sont des combinaisons linéaires de  $\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_{n-3}$ .

Tous les coefficients des matrices sont des fonctions continues en  $s, t$  et sont donc majorés lorsque  $(t, s)$  parcourt le compact  $K$ . On a

$$f_1(\exp(-sd_3)\exp(-td_2)\tilde{x}) = e^{-i[(D_{s,t})_{n,1}\tilde{x}_1 + \dots + (D_{s,t})_{n,n-3}\tilde{x}_{n-3}]} f_1\left((E_1 \dots E_{n-3})C_{s,t} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-3} \end{pmatrix}\right).$$

En dérivant cette expression par rapport à  $t, s, \tilde{x}_i$ , on trouve donc une somme de coefficients (continus en  $t, s$ , donc bornés sur  $K$ ), multipliés par des puissances des  $\tilde{x}_i$ , par l'exponentielle et par des dérivées de  $f_1$  évaluées en  $(E_1 \dots E_{n-3})C_{s,t} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-3} \end{pmatrix}$ . En effectuant le changement de variables  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-3} \mapsto \tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_{n-3}$ , on trouve alors une majoration de la forme

$$|||f||| \leq C_2 \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-3}} |\tilde{x}'^p(D^q f_1)(\exp[\tilde{x}'_1 E_1 + \dots + \tilde{x}'_{n-3} E_{n-3}])| d\tilde{x}'$$

où la constante  $C_2$  dépend des fonctions  $h$  et  $\psi$ . En effet, il suffit encore de remarquer qu'on a une majoration de la forme

$$|\tilde{x}^a| \leq C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} |\tilde{x}'^p|$$

puisque les  $\tilde{x}_i$  sont des fonctions linéaires des  $\tilde{x}'_j$  et que les coefficients sont bornés sur  $K$ . Posons

$$|||f|||_1 = \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-3}} |\tilde{x}^p(D^q f_1)(\tilde{x})| d\tilde{x}.$$

Par construction, cette expression est indépendante des fonctions  $\psi$  et  $h$ . On a donc

$$|||f||| \leq C(\psi, h) |||f|||_1$$

où  $C(\psi, h)$  est une constante dépendant de  $\psi$  et  $h$ .

e) Notons par  $R_{\psi, h}$  le rétracte construit à partir des fonctions  $\psi$  et  $h$ . On vient de trouver

$$|||R_{\psi, h}(f_1)||| \leq C(\psi, h) |||f|||_1.$$

On voit donc que si on munit  $\mathcal{S}(G)_1$  de la topologie de la norme  $|||\cdot|||_1$ , tous les rétractes sont continus.

f) Soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\tilde{f}^2 = \psi \otimes f_1$  avec  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Alors, pour une fonction  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  fixée,

$$\inf_{g \in I_0} |||f + g||| \leq |||R_{\psi, h}(f_1)||| \leq C(\psi, h)|||f_1|||_1.$$

En effet,

$$\tilde{f}^2 - (R_{\psi, h}(f_1))^{\sim 2} = \psi \otimes f_1 - \psi \otimes f_1 = 0$$

donc

$$f - R_{\psi, h}(f_1) = -g_0 \in I_0$$

et

$$\inf_{g \in I_0} |||f + g||| \leq |||f + g_0||| = |||R_{\psi, h}(f_1)||| \leq C(\psi, h)|||f_1|||_1.$$

**9.14.7. Idéal  $I_1$  de  $\mathcal{S}(G)_1$  :** a) Puisque la définition de  $\alpha(f)$  est plus complexe dans ce cas-ci,  $\alpha$  n'est plus un projecteur modulo  $I_0$ . Cette constatation va compliquer un peu les raisonnements suivants.

b) Soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\tilde{f}^2 = \psi \otimes f_1$  avec  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $f_1 \in \mathcal{S}(G)_1$ . Soient  $\varphi, \psi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\chi \in C_c^\infty(\mathfrak{D}'_1)$  et  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}'_1 \times \mathbb{R}^2)$  vérifiant 9.14.5.a). Alors

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha(f)}^2(x, t, s) &= \psi_1(t, s) \cdot \int \varphi(a_2, a_3) \chi(D_1) \tilde{f}^2({}^{D_1}x, a_2, a_3) da_2 da_3 dD_1 \\ &= \psi_1(t, s) \cdot \left( \int \varphi(a_2, a_3) \psi(a_2, a_3) da_2 da_3 \right) \int \chi(D_1) \\ &\quad f_1({}^{D_1}x) dD_1. \end{aligned}$$

Par choix de  $\varphi$  on peut supposer que  $\int \varphi(a_2, a_3) \psi(a_2, a_3) da_2 da_3 = 1$  et on a donc

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha(f)}^2(x, t, s) &= \psi_1(t, s) \cdot \int \chi(D_1) f_1({}^{D_1}x) dD_1 \\ &= \psi_1(t, s) f_2(x). \end{aligned}$$

c) Choisissons à présent  $\chi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathfrak{D}'_1)$  tels que  $\chi_\varepsilon \geq 0$ ,  $\int \chi_\varepsilon(D_1) dD_1 = 1$  et  $\text{supp } \chi_\varepsilon \subset \{D_1 \in \mathfrak{D}'_1 \mid \|D_1\| \leq \varepsilon\}$ ,  $\|\cdot\|$  désignant par exemple la



norme euclidienne si  $\mathfrak{D}'_1$  est identifié à  $\mathbb{R}^k$ . Grâce à cette identification,  $D_1 = \text{id}$  sera identifié à  $(0, \dots, 0)$  de  $\mathbb{R}^k$ . Posons

$$f_{2,\varepsilon}(x) = \int \chi_\varepsilon(D_1) f_1({}^{D_1}x) dD_1$$

et remarquons que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{2,\varepsilon} = f_1$$

dans  $(\mathcal{S}(G)_1, |||\cdot|||_1)$ . En effet, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} |||f_{2,\varepsilon} - f_1|||_1 &= \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-3}} |\tilde{x}^p D_{\tilde{x}}^q [f_{2,\varepsilon} - f_1](\tilde{x})| d\tilde{x} \\ &\leq \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-3}} \int_{\mathbb{R}^k} \chi_\varepsilon(D_1) |\tilde{x}^p D_{\tilde{x}}^q [f_1({}^{D_1}\tilde{x}) - f_1(\tilde{x})]| dD_1 d\tilde{x} \\ &= \sum_{\text{finie}} \int \chi_\varepsilon(D_1) \int_{\mathbb{R}^{n-3}} |\tilde{x}^p D_{\tilde{x}}^q [f_1({}^{D_1}\tilde{x}) - f_1(\tilde{x})]| d\tilde{x} dD_1. \end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 par ([Lud. Mol. 1], 9.7.), puisque les supports de  $\chi_\varepsilon$  tendent vers 0.

d) **Définition** : Posons

$$I_1 = \{f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 \mid \exists f \in I, \exists \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) : \tilde{f}^2 = \psi \otimes f_1\}.$$

Soit  $\psi_1$  une autre fonction quelconque de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  fixée. Soit  $\chi_\varepsilon$  comme en c). Construisons  $\alpha_\varepsilon$  comme en b). Alors  $\widetilde{\alpha_\varepsilon(f)}^2 = \psi_1 \otimes f_{2,\varepsilon}$ . Si  $f_1 \in I_1$ ,  $f \in I$  et  $\alpha_\varepsilon(f) \in I$  pour tout  $\varepsilon$  par ([Lud. Mol. 1], 9.12.). Soit  $F = R_{\psi_1, h}(f_1)$  le rétracte obtenu pour  $\psi_1, h$  donnés. Donc

$$[\alpha_\varepsilon(f) - F]^{\sim 2} = \psi_1 \otimes f_{2,\varepsilon} - \psi_1 \otimes f_1 = \psi_1 \otimes (f_{2,\varepsilon} - f_1).$$

Par 9.14.6.f),

$$\inf_{g \in I_0} |||\alpha_\varepsilon(f) - F + g||| \leq C(\psi_1, h) |||f_{2,\varepsilon} - f_1|||_1.$$

Comme  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |||f_{2,\varepsilon} - f_1|||_1 = 0$  et que  $\alpha_\varepsilon(f) + g \in I + I_0 \subset I$  pour tout  $g \in I_0$ ,  $F \in I$ ,  $I$  étant fermé. De plus, vu que  $\tilde{F}^2 = \psi_1 \otimes f_1$ , on voit qu'on peut définir  $I_1$  à partir d'une fonction  $\psi_1$  fixée, c'est-à-dire que

$$I_1 = \{f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 \mid \exists f \in I : \tilde{f}^2 = \psi \otimes f_1\}$$

où  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  est fixe (en remplaçant la notation  $\psi_1$  par  $\psi$ ).

e) Soit  $f_1 \in I_1$ . Alors  $R_{\psi,h}(f_1) \in I$  quels que soient  $\psi, h$  fixés. De plus, si  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\tilde{f}^2 = \psi \otimes f_1$  avec  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ , alors  $f \in I$ . En effet, par d),  $R_{\psi,h}(f_1) \in I$ . Donc

$$\begin{aligned} \tilde{f}^2 = R_{\psi,h}(f_1) \sim^2 = \psi \otimes f_1 &\Rightarrow f - R_{\psi,h}(f_1) \in I_0 \subset I \\ &\Rightarrow f \in I. \end{aligned}$$

f) Quels que soient  $\psi, h$  fixés,

$$I_1 = R^{-1}(I)$$

si  $R = R_{\psi,h}$ . Ceci découle de e).

g) L'ensemble  $I_1$  est un idéal fermé de  $\mathcal{S}(G)_1$ , muni de  $\|\cdot\|_1$ . Il s'agit d'un sous-espace vectoriel puisqu'on peut laisser  $\psi$  fixe dans la définition de  $I_1$ . L'espace est fermé par f). Pour  $f_1 \in I_1$  et  $g_1 \in \mathcal{S}(G)_1$  quelconques, soient  $f = R_{\psi,h}(f_1) \in I$  et  $g = R_{\psi,h}(g_1) \in \mathcal{S}(G)$ . Alors  $f * g \in I$  et

$$\widetilde{f * g}^2 = (\psi^2) \otimes (f_1 *_{\bar{G}} g_1)$$

ce qui entraîne que  $f_1 *_{\bar{G}} g_1 \in I_1$ . De même pour  $g_1 *_{\bar{G}} f_1$  et  $I_1$  est un idéal.

h) Pour  $t, s$  fixés dans  $\mathbb{R}$ , il existe une suite  $(\alpha_\varepsilon)_\varepsilon$  dans  $ES(\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}'_1 \times \mathbb{R}^2)$  telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\widetilde{\alpha_\varepsilon(f)}^2(., t, s) - \tilde{f}^2(., t, s)\|_1 = 0$$

pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ .

Démonstration : Soit  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  fixé tel que  $\psi(t, s) = 1$ . Soient  $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $\chi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathfrak{D}'_1)$  tels que  $\varphi_\varepsilon \geq 0$ ,  $\int \varphi_\varepsilon(a_2, a_3) da_2 da_3 = 1$ ,  $\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset ]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \times ]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$ ,  $\chi_\varepsilon \geq 0$ ,  $\int_{\mathfrak{D}'_1} \chi_\varepsilon(D_1) dD_1 = 1$ ,  $\text{supp } \chi_\varepsilon \subset V_\varepsilon = \{D_1 \in \mathfrak{D}'_1 \mid \|D_1\| \leq \varepsilon\}$ . D'où, en définissant  $\alpha_\varepsilon$  comme en 9.14.5. à partir de  $\varphi_\varepsilon, \psi, \chi_\varepsilon$ , on a

$$\begin{aligned} \widetilde{\alpha_\varepsilon(f)}^2(\tilde{x}, t, s) &= \psi(t, s) \cdot \int \int \varphi_\varepsilon(a_2, a_3) \chi_\varepsilon(D_1) \tilde{f}^2({}^{D_1}\tilde{x}; a_2, a_3) \\ &\quad da_2 da_3 dD_1 \\ &= \int \int \varphi_\varepsilon(a_2, a_3) \chi_\varepsilon(D_1) \tilde{f}^2({}^{D_1}\tilde{x}; a_2, a_3) da_2 da_3 dD_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \| \widetilde{|\alpha_\varepsilon(f)|^2}(\cdot, t, s) - \tilde{f}^2(\cdot, t, s) \|_1 \\ &= \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-3}} |\tilde{x}^p D_{\tilde{x}}^q [\widetilde{|\alpha_\varepsilon(f)|^2}(\tilde{x}, t, s) - \tilde{f}^2(\tilde{x}, t, s)]| d\tilde{x} \\ &\leq \sum_{\text{finie}} \int \int \varphi_\varepsilon(a_2, a_3) \chi_\varepsilon(D_1) \int_{\mathbb{R}^{n-3}} |\tilde{x}^p D_{\tilde{x}}^q [\tilde{f}^2(D_1 \tilde{x}; a_2, a_3) - \tilde{f}^2(\tilde{x}, t, s)]| \\ &\qquad\qquad\qquad d\tilde{x} da_2 da_3 dD_1. \end{aligned}$$

Il suffit alors de remarquer que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}'_1 &\longrightarrow (\mathcal{S}(G)_1, \| \cdot \|_1) \\ (a_2, a_3, D_1) &\longmapsto \tilde{f}^2(D_1 x; a_2, a_3) \end{aligned}$$

est continue. Comme

$$\tilde{f}^2(D_1 x; a_2, a_3) = \int \int \int f^{\exp a_2 d_2 \cdot \exp a_3 d_3 \cdot D_1} (x \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2 \exp u Z) e^{iu} du dr_1 dr_2,$$

cette continuité est une conséquence de ([Lud. Mol. 1], 9.7.). D'où notre conclusion.

i) **Définition** : Quels que soient  $t, s \in \mathbb{R}$  fixés, définissons

$$\tilde{I}_{(t,s)} = \{ \tilde{f}^2(\cdot, t, s) \mid f \in I \} \subset \mathcal{S}(G)_1.$$

Comme en 9.10.5., on déduit de h) que  $\tilde{I}_{(t,s)} = I_1$ .

j) L'idéal  $I_1 = \tilde{I}_{(t,s)}$  est  $\mathfrak{D}_0$ -invariant, donc également  $\mathfrak{D}'_1$ -invariant. Comme en 9.10.5., ceci découle de la relation

$$\left( f^{(\exp td_2 \cdot \exp sd_3) \cdot D_0 \cdot (\exp td_2 \cdot \exp sd_3)^{-1}} \right)^{\sim 2}(x, t, s) = (\tilde{f}^2)^{D_0}(x; t, s).$$

**9.14.8. Projection et idéal  $\mathcal{I}_0$**  : a) Soit la projection

$$\begin{aligned} p : \mathcal{S}(G) &\longrightarrow \mathcal{S}(G)_1 \\ f &\longmapsto p(f) \end{aligned}$$

tel que  $p(f)(x) = \tilde{f}^2(x; 0, 0) = \hat{f}^{2,3,4}(x; 0, 0, 1)$ . Munissons  $\mathcal{S}(G)$  d'une nouvelle norme de Schwartz  $||| \cdot |||_3$  telle que  $p$  soit une application continue de  $(\mathcal{S}(G), ||| \cdot |||_3)$  dans  $(\mathcal{S}(G)_1, ||| \cdot |||_1)$ . En effet,

$$\begin{aligned} |||p(f)|||_1 &\leq \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-3}} |\tilde{x}^p(D_{\tilde{x}}^q p(f))(\tilde{x})| d\tilde{x} \\ &\leq \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{x}^p D_{\tilde{x}}^q f(\tilde{x} \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2 \exp uZ)| \\ &\qquad\qquad\qquad d\tilde{x} dr_1 dr_2 du \\ &= |||f|||_3. \end{aligned}$$

b) Définissons

$$\mathcal{I}_0 = p^{-1}(I_1) = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \tilde{f}^2(\cdot; 0, 0) \in I_1\}.$$

Alors  $\mathcal{I}_0$  est un idéal  $\mathfrak{D}_0$ -invariant, fermé dans  $(\mathcal{S}(G), ||| \cdot |||_3)$ .

**9.14.9. Idéal  $\mathcal{I}_1$  de  $\mathcal{S}(G)$  :** a) Posons

$$\mathcal{I}_1 = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \tilde{f}^2(\cdot, t, s) \in I_1 = \tilde{I}_{(t,s)}, \forall t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Alors  $\mathcal{I}_1$  est un idéal de  $\mathcal{S}(G)$ , fermé pour l'action de  $\mathfrak{D}'_1$ ,  $\exp rd_2$  et  $\exp rd_3$ . En effet

$$(f^{\exp rd_2})^{\sim 2}(x, t, s) = \tilde{f}^2(x, t + r, s)$$

entraîne que  $\mathcal{I}_1$  est fermé pour l'action de  $\exp rd_2$ . D'autre part,

$$(f^{\exp rd_3})^{\sim 2}(x, t, s) = \tilde{f}^2(D_1 x; t, s + r) = (\tilde{f}^2)^{D_1}(x; t, s + r)$$

avec  $D_1 = \exp(-sd_3)[\exp(-rd_3) \exp(-td_2) \exp rd_3 \exp td_2] \exp sd_3 \in \mathfrak{D}'_1$ . Puisque  $I_1$  est  $\mathfrak{D}'_1$ -invariant, on en déduit que  $\mathcal{I}_1$  est invariant pour l'action de  $\exp rd_3$ . Finalement, pour tout  $D_1 \in \mathfrak{D}'_1$ ,

$$\widetilde{f^{D_1}}^2(x, t, s) = \tilde{f}^2(D_1 x, t, s) = (\tilde{f}^2)^{D_1}(x, t, s)$$

avec  $D'_1 = \exp(-sd_3) \exp(-td_2) D_1 \exp td_2 \exp sd_3 \in \mathfrak{D}'_1$ . Puisque  $I_1$  est  $\mathfrak{D}'_1$ -invariant, on en déduit que  $\mathcal{I}_1$  est  $\mathfrak{D}'_1$ -invariant.

b) Il existe une norme de Schwartz  $||| \cdot |||_4$  sur  $\mathcal{S}(G)$  et  $C \in \mathbb{R}^*$ ,  $R_2, R_3 \in \mathbb{R}$  tels que

$$|||\tilde{f}^2(\cdot; t, s)|||_1 \leq C \cdot e^{R_2|t||d_2|} \cdot e^{R_3|s||d_3|} |||f|||_4.$$

En effet,

$$\begin{aligned} |||\tilde{f}^2(\cdot; t, s)|||_1 &\leq C_1 \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{x}^p D_{\tilde{x}}^q f^{\exp td_2 \cdot \exp sd_3}(\tilde{x} \exp r_1 Y_1 \exp r_2 Y_2 \\ &\quad \exp uZ)| dr_1 dr_2 du d\tilde{x} \\ &= |||f^{\exp td_2 \cdot \exp sd_3}|||_5 \end{aligned}$$

où  $|||\cdot|||_5$  désigne une norme de Schwartz sur  $\mathcal{S}(G)$ . Il suffit alors d'appliquer deux fois ([Lud. Mol. 1], 9.2.) pour conclure.

c) On en déduit que l'idéal  $\mathcal{I}_1$  est fermé dans  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||_4)$ . Ceci entraîne, par ([Lud. Mol. 1], 9.12.) que  $\alpha(\mathcal{I}_1) \subset \mathcal{I}_1$  pour tout  $\alpha \in ES(\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}'_1 \times \mathbb{R}^2)$ .

d) Définissons

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \exists \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2), \exists f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 : \tilde{f}^2 = \psi \otimes f_1\}.$$

Comme en 9.10.7., on voit que  $\mathcal{S} \cap I = \mathcal{S} \cap \mathcal{I}_1$ .

**9.14.10. Approximation des éléments de  $\mathcal{S}(G)$  :** a) Les raisonnements du cas  $a_{3,1}$ ) restent valables. Soit  $(\beta_j)_j$  une unité approchée de  $ES(\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}'_1 \times \mathbb{R}^2)$  contenue dans  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}'_1 \times \mathbb{R}^2)$ . On montre que

$$\lim_j |||\beta_j(f) - f||| = 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(G).$$

b) On peut approcher les  $\beta_j$  par des  $\gamma_j \in ES(\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}'_1 \times \mathbb{R}^2)$  dans  $|||\cdot|||^\approx$  tels que  $\hat{\gamma}_j^{4,5}$  soit à support compact en toutes les variables.

c) Tout  $f \in \mathcal{S}(G)$  peut donc être approché par des  $\gamma(f)$  dans  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||)$  avec  $\hat{\gamma}^{4,5}$  à support compact en toutes les variables.

d) L'application  $\beta$  définie par

$$\begin{aligned} &\beta(a_2, a_3; D_1; t, s) \\ &= \hat{\gamma}^{4,5}(a_2 - t, a_3 - s; (\exp(a_2 - t)d_2 \exp(a_3 - s)d_3 \exp td_2 \exp sd_3 \cdot \\ &\quad \{\exp(-sd_3)[\exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp td_2 \exp(a_3 - s)d_3] \cdot \\ &\quad \exp sd_3\} \cdot D_1 \cdot (\exp(-sd_3) \exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \cdot \\ &\quad \exp(-(a_2 - t)d_2)); a_2, a_3) \end{aligned}$$

est une fonction  $C^\infty$  à support contenu dans un compact de la forme  $K_1 \times K_2 \times K_3 \times K_4 \times K_5$ . Nous allons approcher  $\gamma$  dans  $|||\cdot|||^\approx$  par une

fonction  $k \in ES(\mathbb{R}^2 \times \mathfrak{D}'_1 \times \mathbb{R}^2)$  telle que

$$\begin{aligned} & \hat{k}^{4,5}(a_2 - t, a_3 - s; (\exp(a_2 - t)d_2 \exp(a_3 - s)d_3 \exp td_2 \exp sd_3 \\ & \cdot \{\exp(-sd_3)[\exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp td_2 \exp(a_3 - s)d_3] \cdot \\ & \exp sd_3\} \cdot D_1 \cdot (\exp(-sd_3) \exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \cdot \\ & \exp(-(a_2 - t)d_2)); a_2, a_3) \\ &= \sum_{i,j,m} c_{ijm} \psi_i(t, s) \varphi_j(a_2, a_3) \chi_m(D_1) \\ &= \sum_{i,j,m} c_{ijm} h_{i,1}(t) h_{i,2}(s) \theta_2(t, s) h_{j,1}(a_2) h_{j,2}(a_3) \theta_1(a_2, a_3) h_m(D_1) \theta_3(D_1) \end{aligned}$$

où  $h_{i,1}, h_{i,2}, h_{j,1}, h_{j,2}, h_m$  sont des fonctions d'Hermite et  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  des fonctions  $C^\infty$  à support compact.

La détermination de  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  se fait de la manière suivante : Soient  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  des voisinages compacts de  $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$  respectivement. On construit  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  fonctions  $C^\infty$  telles que

$$\begin{aligned} \theta_1 &\equiv 1 \text{ sur } K_1 \times K_2, \quad \text{supp } \theta_1 \subset C_1 \times C_2 \quad \text{et } 0 \leq \theta_1 \leq 1 \\ \theta_2 &\equiv 1 \text{ sur } K_4 \times K_5, \quad \text{supp } \theta_2 \subset C_4 \times C_5 \quad \text{et } 0 \leq \theta_2 \leq 1 \\ \theta_3 &\equiv 1 \text{ sur } K_3, \quad \text{supp } \theta_3 \subset C_3 \quad \text{et } 0 \leq \theta_3 \leq 1. \end{aligned}$$

La détermination des fonctions d'Hermite se fera ultérieurement. Evaluons

$$\begin{aligned} |||\gamma - k|||^\approx &\leq C \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2} e^{M_2|a_2| + M_3|a_3|} \cdot e^{N_1|t_1| + \dots + N_k|t_k|} \\ & |P(b_1, b_2)[\gamma - k](a_2, a_3; \exp t_k d'_k \dots \exp t_1 d'_1; b_1, b_2)| \\ & da_2 da_3 dt db_1 db_2 \\ &\leq C' \sum_{\substack{0 \leq p \leq P \\ 0 \leq q \leq Q}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2} e^{M_2|a_2| + M_3|a_3|} \cdot e^{N_1|t_1| + \dots + N_k|t_k|} \\ & \cdot \frac{1}{1 + b_1^2} \cdot \frac{1}{1 + b_2^2} |b_1^p b_2^q [\gamma - k](a_2, a_3; \exp t_k d'_k \dots \exp t_1 d'_1; \\ & b_1, b_2)| da_2 da_3 dt db_1 db_2 \\ &\leq C'' \cdot \sum_{\substack{0 \leq p \leq P \\ 0 \leq q \leq Q}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2} e^{M_2|a_2| + M_3|a_3|} \cdot e^{N_1|t_1| + \dots + N_k|t_k|} \\ & |D_{u_1}^p D_{u_2}^q [\hat{\gamma}^{4,5} - \hat{k}^{4,5}](a_2, a_3; \exp t_k d'_k \dots \exp t_1 d'_1; \\ & u_1, u_2)| da_2 da_3 dt du_1 du_2. \end{aligned}$$

Posons  $M = \sup\{\|D_{u_1}^p D_{u_2}^q \theta_2(u_1, u_2)\|_\infty \mid 0 \leq p \leq P, 0 \leq q \leq Q\}$  et effectuons le changement de variables

$$\begin{cases} u_1 \mapsto a'_2 \\ u_2 \mapsto a'_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 \mapsto a'_2 - t \\ a_3 \mapsto a'_3 - s \end{cases}$$

et notons de nouveau  $a_2, a_3$  à la place de  $a'_2, a'_3$ . On trouve

$$\begin{aligned} \|\gamma - k\|^\approx &\leq C'' \cdot \sum_{\substack{0 \leq p \leq P \\ 0 \leq q \leq Q}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2} e^{M_2|a_2-t|+M_3|a_3-s|} \\ &\cdot e^{N_1|t_1|+\dots+N_k|t_k|} |(D_{a_2} + D_t)^p (D_{a_3} + D_s)^q \\ &[\hat{\gamma}^{4,5} - \hat{k}^{4,5}](a_2 - t, a_3 - s; \exp t_k d'_k \dots \exp t_1 d'_1; a_2, a_3) \\ &dt ds da_2 da_3 dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variables

$$t_1, \dots, t_k \mapsto t'_1, \dots, t'_k$$

avec

$$\begin{aligned} &\exp t_k d'_k \dots \exp t_1 d'_1 \\ &= (\exp(a_2 - t) d_2 \exp(a_3 - s) d_3 \exp t d_2 \exp s d_3 \cdot \{\exp(-s d_3) \cdot \\ &[\exp(-t d_2) \exp(-(a_3 - s) d_3) \exp t d_2 \exp(a_3 - s) d_3] \exp s d_3\} \cdot \\ &\exp t'_k d'_k \dots \exp t'_1 d'_1 \cdot (\exp(-s d_3) \exp(-t d_2) \exp(-(a_3 - s) d_3) \cdot \\ &\exp(-(a_2 - t) d_2)). \end{aligned}$$

Alors  $t'_1, \dots, t'_k$  sont des fonctions polynômes de  $t_1, \dots, t_k, t, s, a_2, a_3$  et réciproquement. Par choix des supports de  $\hat{\gamma}^{4,5}, \theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$ , on a

$$(a_2, a_3) \in C_1 \times C_2, (t'_1, \dots, t'_k) \in C_3, (t, s) \in C_4 \times C_5.$$

Donc toutes les exponentielles intervenant dans l'évaluation de  $\|\gamma - k\|^\approx$  sont bornées par une constante. De plus  $(D_{a_2} + D_t)^p (D_{a_3} + D_s)^q$  multiplié par le jacobien de la transformation va s'écrire sous une forme

$$\sum_n P_n(a_2, a_3, t', t, s) D_{a_2}^{\alpha_n} D_{a_3}^{\beta_n} D_{t'}^{\gamma_n} D_t^{\lambda_n} D_s^{\mu_n}$$

où  $P_n$  sont des polynômes, tous majorés par une constante sur  $C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4 \times C_5$ . On a alors une majoration de la forme

$$\begin{aligned} & |||\gamma - k||| \approx \\ & \leq C''' \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2} |(D_{a_2}^{\alpha_n} D_{a_3}^{\beta_n} D_{t'}^{\gamma_n} D_t^{\lambda_n} D_s^{\mu_n}) \\ & [\hat{\gamma}^{4,5} - \hat{k}^{4,5}](a_2 - t, a_3 - s; (\exp(a_2 - t)d_2 \exp(a_3 - s)d_3 \exp td_2 \cdot \\ & \exp sd_3 \cdot \{\exp(-sd_3)[\exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp td_2 \\ & \cdot \exp(a_3 - s)d_3] \exp sd_3\} \cdot \exp t'_k d'_k \dots \exp t'_1 d'_1 \cdot (\exp(-sd_3) \exp(-td_2) \\ & \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp(-(a_2 - t)d_2)); a_2, a_3) | dt ds da_2 da_3 dt'. \end{aligned}$$

On peut faire porter cette somme sur tous les  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \lambda_n, \mu_n$  tels que  $|\alpha_n| \leq A, |\beta_n| \leq B, |\gamma_n| \leq C, |\lambda_n| \leq D, |\mu_n| \leq E$  où  $A, B, C, D, E$  sont des constantes.

Il suffit alors de terminer comme en 9.12.8., pour trouver finalement une majoration de la forme

$$\begin{aligned} & |||\gamma - k||| \approx \\ & \leq C'''' \cdot \sum_{\substack{|\alpha_n| \leq A, |\beta_n| \leq B, |\gamma_n| \leq C \\ |\lambda_n| \leq D, |\mu_n| \leq E}} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2} |(D_{a_2}^{\alpha_n} D_{a_3}^{\beta_n} D_{t'}^{\gamma_n} D_t^{\lambda_n} D_s^{\mu_n}) \\ & [\hat{\gamma}^{4,5}(a_2 - t, a_3 - s; (\exp(a_2 - t)d_2 \exp(a_3 - s)d_3 \exp td_2 \\ & \cdot \exp sd_3 \cdot \{\exp(-sd_3)[\exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp td_2 \cdot \\ & \exp(a_3 - s)d_3] \exp sd_3\} \cdot \exp t'_k d'_k \dots \exp t'_1 d'_1 \cdot (\exp(-sd_3) \\ & \exp(-td_2) \exp(-(a_3 - s)d_3) \exp(-(a_2 - t)d_2)); a_2, a_3) - \\ & \sum_{i,j,m} c_{ijm} h_{i,1}(t) h_{i,2}(s) h_{j,1}(a_2) h_{j,2}(a_3) h_m(t'_1, \dots, t'_k) | dt ds dt' da_2 da_3. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est une nouvelle norme de Schwartz et dans cette nouvelle norme de Schwartz  $\hat{\gamma}^{4,5}(\cdot)$  peut être approché arbitrairement par des combinaisons linéaires de fonctions d'Hermite ([Sch. 2], p. 262). Ceci détermine les constantes  $c_{ijm}$  et les fonctions d'Hermite. La fonction  $k$  est alors obtenue par le théorème d'inversion de Fourier.

e) Notons  $\alpha_{ijm}$  la fonction de  $ES(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^2)$  construite à partir de  $\psi_i(t, s) \varphi_j(a_2, a_3) \chi_m(D_1)$ . Donc  $\alpha_{ijm}(f) \in \mathcal{S}$  pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ . De plus, par ce qui précède,  $f$  peut être approché arbitrairement par des combinaisons linéaires de tels  $\alpha_{ijm}(f)$ .



**9.14.11. Comparaison des idéaux  $\mathcal{I}_1$  et  $I$  :** Comme en 9.12.9., on voit que  $\mathcal{I}_1 = I$ .

**9.14.12. Idéal  $\mathfrak{D}_0$ -premier :** a) Comme en 9.10.13. et 9.12.10.,

$$\mathcal{I}_1 = \bigcap_{t,s} \mathcal{I}_0^{\exp td_2 \cdot \exp sd_3} = \bigcap_{t,s} \mathcal{I}_0^{\exp sd_3 \cdot \exp td_2}.$$

En effet, puisque  $\mathfrak{D}'_1 \subset \mathfrak{D}_0$  et que  $\mathcal{I}_0$  est  $\mathfrak{D}_0$ -invariant,  $\mathcal{I}_0^{\exp td_2 \cdot \exp sd_3} = \mathcal{I}_0^{\exp sd_3 \cdot \exp td_2}$ .

b) Soit  $J$  un idéal  $\mathfrak{D}_0$ -invariant quelconque de  $\mathcal{S}(G)$ . Alors

$$\mathcal{J}_1 = \bigcap_{t,s} J^{\exp td_2 \cdot \exp sd_3} = \bigcap_{t,s} J^{\exp sd_3 \cdot \exp td_2} = \bigcap_D J^D$$

est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ .

c) L'idéal  $\mathcal{I}_0$  est  $\mathfrak{D}_0$ -premier. Le raisonnement est analogue à celui de 9.12.10.

**9.14.13. Raisonnement par récurrence :** Le même raisonnement qu'en 9.10.13. et 9.12.11. montre que  $I = \text{Ker } \Omega$ .

**9.15. Cas  $\mathfrak{a}_{3,4}$  :**

**9.15.1.** Comme précédemment, supposons  $\langle \ell, Z \rangle = -1$ . L'élément  $Z$  est central dans  $\mathfrak{g}$ . Puisque  $\psi_1|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $\psi_2|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  sont indépendants, il existe  $X_2, X_3 \in \mathfrak{g}$  et  $d_1 \in \mathfrak{d}$  tels que

$$d_1 \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} [X_2, Y_1] &= Z & \text{et} & & [X_2, Y_2] &= 0 \\ [X_3, Y_1] &= 0 & \text{et} & & [X_3, Y_2] &= Z. \end{aligned}$$

Posons  $\mathfrak{d}_0 = \text{Ker } \psi_1 \cap \text{Ker } \psi_2$  et  $\mathfrak{D}_0 = \exp \mathfrak{d}_0$ ,  $\mathfrak{h}_0 = \text{Ker } \psi_1|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \cap \text{Ker } \psi_2|_{\text{ad } \mathfrak{g}}$  et  $H_0 = \exp \mathfrak{h}_0$ . Puisque  $\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$ ,  $\mathfrak{h}_0$  est un idéal de  $\mathfrak{g}$  et  $H_0$  est un sous-groupe normal de  $G$ . On a  $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_0 \oplus \mathbb{R} \text{ad } X_2 \oplus \mathbb{R} \text{ad } X_3$ . On vérifie que  $\mathfrak{h}_0$  est  $\mathfrak{d}_0$ -invariant et donc également  $\mathfrak{d}$ -invariant. Ainsi  $H_0$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant. De plus,  $Y_1$  et  $Y_2$  sont centraux dans  $\mathfrak{h}_0$  (puisque

$\varphi|_{\text{ad } \mathfrak{g}} \equiv 0$ ). Le calcul  $[[X_2, X_3], Y_1] = [[X_2, X_3], Y_2] = 0$  montre que  $[X_2, X_3] \in \mathfrak{h}_0$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \exp r_2 X_2 \cdot \exp r_3 X_3 &= \exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \pmod{H_0} \\ &= \exp r_3 X_3 \cdot \exp r_2 X_2 \pmod{H_0} \end{aligned}$$

et  $G/H_0$  est abélien. Pour tout  $d_0 \in \mathfrak{d}_0$ , on a

$$D_0[\exp(r_2 X_2 + r_3 X_3)] = \exp \left[ (X_2 \ X_3) e^{-\varphi(d_0)} K(-\varphi(d_0)\omega) \begin{pmatrix} r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \right] \pmod{H_0}$$

(voir 3.15.). Finalement, tout  $D \in \mathfrak{D}$  peut s'écrire  $D = \exp \text{ad } t_3 X_3 \cdot \exp \text{ad } t_2 X_2 \cdot D_0$  avec  $D_0 \in \mathfrak{D}_0$ .

**9.15.2.** Soit  $\zeta \in \hat{G}$  tel que  $\zeta|_{H_0} \equiv 1$ . Comme  $G = \exp \mathbb{R} X_3 \cdot \exp \mathbb{R} X_2 \cdot H_0 = \exp(\mathbb{R} X_2 + \mathbb{R} X_3) \cdot H_0$  et que  $G/H_0$  est abélien,  $\zeta$  agit comme caractère sur  $G/H_0$ , c'est-à-dire il existe  $c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  tels que

$$\begin{aligned} \zeta(\exp r_3 X_3 \cdot \exp r_2 X_2 \cdot h_0) &= \zeta(\exp(r_2 X_2 + r_3 X_3) \cdot h'_0) \\ &= e^{i(c_2 r_2 + c_3 r_3)} \\ &= \chi_{c_2, c_3}(\exp r_3 X_3 \cdot \exp r_2 X_2) \\ &= \chi_{c_2, c_3}(\exp(r_2 X_2 + r_3 X_3)) \end{aligned}$$

par définition du caractère  $\chi_{c_2, c_3}$ . La suite de la démonstration se fait alors comme en 9.13.

**9.15.3.** Quels que soient  $c_2, c_3$

$$\chi_{c_2, c_3} \cdot f - f^{(\exp c_2 Y_1) \cdot \exp(c_3 Y_2)} \in I_0 \subset I,$$

donc, pour  $f \in I$ ,  $\chi_{c_2, c_3} \cdot f \in I$ , c'est-à-dire  $I$  est invariant par multiplication par les  $\chi_{c_2, c_3}$ , donc par les  $(\zeta(\cdot)\xi_1|\xi_2)$  avec  $\zeta|_{H_0} = \text{id}$ .

**9.15.4.** Comme en 9.13., on montre que  $I_{H_0} = I|_{H_0}$  est un idéal  $G$ -invariant fermé de  $\mathcal{S}(H_0)$ , si  $\mathcal{S}(H_0)$  est muni d'une norme de Schwartz rendant le rétracte continu. La démonstration de 9.13. reste valable pour prouver que  $I_{H_0}$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -premier de  $\mathcal{S}(H_0)$ .

**9.15.5. Raisonement par récurrence :** Le raisonnement de 9.13.8. reste valable. Ceci termine le cas  $a_{3,4}$ .

**9.16. Cas  $b_2$ ) :**

**9.16.1.** Les cas  $b_1$ ) et  $b_2$ ) constituent l'analogie complexe des cas étudiés précédemment. Comme en 3.8., on a

$$\begin{aligned} \exp d \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} &= e^{\varphi(d)} K(\varphi(d)\omega) \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \\ \exp d \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} &= e^{\varphi(d)} K(-\varphi(d)\omega) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si  $r_1 Z_1 + r_2 Z_2$  est identifié à  $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  et si

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Ces formules sont valables dans les cas  $b_1$ ) et  $b_2$ ).

**9.16.2.** Définissons

$$\begin{aligned} p : \mathcal{S}(G) &\longrightarrow \mathcal{S}(\tilde{G}) \quad \text{avec } \tilde{G} = G / \exp(\mathbb{R}Z_1 + \mathbb{R}Z_2) \\ f &\longmapsto p(f) = \tilde{f} \end{aligned}$$

donné par

$$\tilde{f}(x) = \int f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) dr_1 dr_2 = \hat{f}^{2,3}(x, 0, 0)$$

et

$$K = \text{Ker } p = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \int f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) dr_1 dr_2 = 0 \forall x \in G\}.$$

Dans la définition de  $K$  on peut se limiter à  $x \in \tilde{G}$  et on voit que  $K$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ .

**9.16.3.** Le reste du cas  $b_2$ ) se traite exactement comme en 9.9., à condition de supposer  $|\langle \ell, Z_1 \rangle| + |\langle \ell, Z_2 \rangle| = 0$  pour tout  $\ell$  tel que  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell$  et  $I \subset \text{Ker } \pi$ . Sinon on est dans le cas  $b_1$ ).

9.17. Cas  $b_1$ ) : Il s'agit de l'analogue complexe du cas  $a_1$ ).

9.17.1. Posons  $\langle \ell, Z_1 \rangle = -\lambda_1$  et  $\langle \ell, Z_2 \rangle = -\lambda_2$  et supposons  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$  (en multipliant  $Z_1$  et  $Z_2$  par une constante si nécessaire). Il existe  $d_1 \in \mathfrak{d}$  tel que  $\varphi(d_1) = 1$ . Alors  $\mathfrak{d}_0 = \text{Ker } \varphi$  est un idéal de  $\mathfrak{d}$  et les éléments de  $\mathfrak{D}$  s'écrivent de manière unique sous la forme  $D = \exp td_1 \cdot D_0$  avec  $D_0 \in \exp(\text{Ker } \varphi)$ . On a

$$\exp td_1 \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = e^t K(t\omega) \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\exp td_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = e^t K(-t\omega) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

si  $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$  est identifié à  $r_1 Z_1 + r_2 Z_2$ . Notons simplement  $f^t = f^{\exp td_1}$ .

9.17.2. Idéal  $I_0$  : a) Définissons

$$I_0 = \left\{ f \in \mathcal{S}(G) \mid \int_{\mathbb{R}^2} f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) (\exp td_1 \pi) (\exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) dr_1 dr_2 = 0, \quad \forall x \in G, \forall t \right\}.$$

Or

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) (\exp td_1 \pi) (\exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) dr_1 dr_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) \pi \left( \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \end{pmatrix} e^{-t} K(t\omega) \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \right) dr_1 dr_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) e^{i\lambda_1 \cdot e^{-t} (\cos(t\omega)r_1 - \sin(t\omega)r_2)} \\ & \quad \cdot e^{i\lambda_2 \cdot e^{-t} (\sin(t\omega)r_1 + \cos(t\omega)r_2)} dr_1 dr_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) e^{ir_1 \cdot e^{-t} (\cos(t\omega)\lambda_1 + \sin(t\omega)\lambda_2)} \\ & \quad \cdot e^{ir_2 \cdot e^{-t} (-\sin(t\omega)\lambda_1 + \cos(t\omega)\lambda_2)} dr_1 dr_2 \\ &= \hat{f}^{2,3} \left( x, e^{-t} (\cos(t\omega)\lambda_1 + \sin(t\omega)\lambda_2), e^{-t} (-\sin(t\omega)\lambda_1 + \cos(t\omega)\lambda_2) \right) \\ &= \hat{f}^{2,3} \left( x, e^{-t} \cdot K(-t\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Donc

$$I_0 = \left\{ f \in \mathcal{S}(G) \mid \hat{f}^{2,3} \left( x, e^{-t} K(-t\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) = 0, \forall x \in G, \forall t \right\}.$$

Remarquons encore que

$$S = \left\{ e^{-t} K(-t\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

est une spirale de  $\mathbb{R}^2$ , coupant le cercle unité en  $(\lambda_1, \lambda_2)$  et admettant  $(0, 0)$  comme point asymptote.

b) Puisque

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} f(x \exp a_1 Z_1 \exp a_2 Z_2 \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) (\exp td_1 \pi) (\exp r_1 Z_1 \\ & \qquad \qquad \qquad \exp r_2 Z_2) dr_1 dr_2 \\ &= e^{-ia_1 \cdot e^{-t} (\cos(t\omega)\lambda_1 + \sin(t\omega)\lambda_2)} \cdot e^{-ia_2 \cdot e^{-t} (-\sin(t\omega)\lambda_1 + \cos(t\omega)\lambda_2)} \\ & \cdot \int_{\mathbb{R}^2} f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) (\exp td_1 \pi) (\exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) dr_1 dr_2 \end{aligned}$$

on peut se limiter, dans la définition de  $I_0$ , à  $x \in \tilde{G} = G / \exp(\mathbb{R}Z_1 + \mathbb{R}Z_2)$ .

c) L'ensemble  $I_0$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ . Le fait que c'est un idéal résulte de la formule

$$\widehat{f *_{\tilde{G}} g}^{2,3}(x, u, v) = \hat{f}^{2,3}(\cdot, u, v) *_{\tilde{G}} \hat{g}^{2,3}(\cdot, u, v)(x).$$

La  $\mathfrak{D}$ -invariance découle des formules

$$\widehat{f}^{\mathfrak{D}^{2,3}}(x, u, v) = \delta(D) e^{-2\varphi(d)} \hat{f}^{2,3} \left( {}^D x, e^{-\varphi(d)} K(-\varphi(d)\omega) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)$$

et

$$\begin{aligned} & \widehat{f}^{\mathfrak{D}^{2,3}} \left( x, e^{-t} K(-t\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \delta(D) e^{-2\varphi(d)} \hat{f}^{2,3} \left( {}^D x, e^{-(\varphi(d)+t)} \cdot K(-(\varphi(d)+t)\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

où  $D = \exp d$ .

d) Notre but suivant est de montrer que  $I_0 \subset I$ . Cependant la démonstration du cas a<sub>1</sub>) va se compliquer considérablement étant donné qu'ici nous avons à faire à des fonctions qui s'annulent sur une spirale.

**9.17.3.** Soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\hat{f}^{2,3}(x, \cdot, \cdot)$  s'annule sur un voisinage  $\mathfrak{D}$ -invariant de la spirale  $S$ , pour tout  $x$ . Alors  $f \in I$ . Ici l'action de  $\mathfrak{D}$  sur  $\mathbb{R}^2$  est donnée par  $D \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = e^{-\varphi(d)} K(-\varphi(d)\omega) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ .

Démonstration : Soit  $V$  le voisinage  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $S$  en question. Alors  $\mathbb{R}^2 \setminus V$  est également  $\mathfrak{D}$ -invariant. Soit  $J$  l'idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant engendré par  $f$ , fermé dans la topologie de  $\mathcal{S}(G)$  (mais non nécessairement dans  $|||\cdot|||$ ), c'est-à-dire

$$J = \langle \bigcup_{D \in \mathfrak{D}} \mathcal{S}(G) * f^D * \mathcal{S}(G) \rangle^{-\mathcal{S}(G)}.$$

En particulier, puisque  $V$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant,  $g \in J$  entraîne que  $\hat{g}^{2,3}(x, \cdot, \cdot) \equiv 0$  sur  $V$  pour tout  $x$ . Soit  $F \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\pi(F) \neq 0$ . Donc  $F \notin I$ , puisque  $I \subset \text{Ker } \pi$ . Soit  $\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\hat{\nu}(\lambda_1, \lambda_2) = 1$  et tel que  $\hat{\nu} \equiv 0$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus V$ . Posons  $F_1 = F * \nu$ . Donc  $\pi(F_1) = \pi(F) \cdot \hat{\nu}(\lambda_1, \lambda_2) = \pi(F) \neq 0$  et  $F_1 \notin I$ . De plus,

$$\hat{F}_1^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) = \hat{F}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) \cdot \hat{\nu}(\mu_1, \mu_2)$$

et  $\hat{F}_1^{2,3}$  s'annule identiquement pour  $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus V$ . De même,

$$\widehat{(F_1)^D}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) = \widehat{F^D}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) \cdot \widehat{\nu^D}(x, \mu_1, \mu_2)$$

s'annule identiquement pour  $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus V$ , puisque  $(F * \nu)^D = F^D * \nu^D$ , que

$$\widehat{\nu^D}(\mu_1, \mu_2) = \hat{\nu} \left( e^{-\varphi(d)} K(-\varphi(d)\omega) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right)$$

et que  $\hat{\nu} \equiv 0$  sur l'ensemble  $\mathfrak{D}$ -invariant  $\mathbb{R}^2 \setminus V$ . Soit  $J'$  l'idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant engendré par  $F_1$ , fermé dans la topologie de  $\mathcal{S}(G)$ , c'est-à-dire

$$J' = \langle \bigcup_{D \in \mathfrak{D}} \mathcal{S}(G) * F_1^D * \mathcal{S}(G) \rangle^{-\mathcal{S}(G)}.$$

Par construction,  $J \cdot J' = \{0\} \subset I$ . Puisque  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier, que  $F_1 \notin I$ , donc que  $J' \not\subset I$ , on a  $J \subset I$  et  $f \in I$ .

**9.17.4.** On va montrer par étapes successives, que tout  $f \in I_0^{M+1}$ , pour  $M$  suffisamment grand, peut être approché par des fonctions  $f_1$  telles que  $\hat{f}_1^{2,3}(x, \cdot, \cdot)$  s'annule sur un voisinage  $\mathfrak{D}$ -invariant de la spirale  $S$ . Puisque l'idéal  $I$  est fermé, on pourra en conclure que  $I_0^{M+1} \subset I$ . L'approximation va se faire dans la norme donnée qui vérifie une relation de la forme

$$\|f\| \leq \sum_{\text{finie}} C \int |x^a D_x^p r_1^b D_{r_1}^q r_2^c D_{r_2}^s f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2)| dr_1 dr_2 dx.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|f\| &\leq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \sum_{\text{finie}} C \cdot \int \frac{1}{1+r_1^2} \cdot \frac{1}{1+r_2^2} |x^a D_x^p \int \{(1-D_{\mu_1}^2) D_{\mu_1}^b \\ &\quad (1-D_{\mu_2}^2) D_{\mu_2}^c \mu_1^q \mu_2^s \hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2)\} e^{-i\mu_1 r_1} e^{-i\mu_2 r_2} d\mu_1 d\mu_2| \\ &\quad dr_1 dr_2 dx \\ &\leq C_1 \cdot \sum_{\text{finie}} \int |x^a D_x^p D_{\mu_1}^\alpha D_{\mu_2}^\beta \mu_1^q \mu_2^s \hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2)| d\mu_1 d\mu_2 dx \end{aligned}$$

(en modifiant la somme finie et en sommant en particulier sur tous les  $\alpha, \beta$  tels que  $\alpha \leq b+2$  et  $\beta \leq c+2$ ).

**9.17.5.** Soit  $f \in I_0^{M+1}$  (pour  $M$  suffisamment élevé, à déterminer ultérieurement). Donc  $\hat{f}^{2,3}$  ainsi que toutes les dérivées de  $\hat{f}^{2,3}$  jusqu'à l'ordre  $M$  inclus s'annulent sur la spirale  $S$  et sur  $(0, 0)$ , point asymptote de  $S$ . Alors  $f$  peut être approché dans  $\|\cdot\|$  par des  $f_\varepsilon$  tels que  $\hat{f}_\varepsilon^{2,3}$  ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $M$  s'annulent sur  $S$  et dans un voisinage de  $(0, 0)$ . Soit  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi(\lambda) \equiv 1$  pour  $|\lambda| \geq 1$ ,  $\psi(\lambda) \equiv 0$  pour  $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$ . La fonction  $\psi$  ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $M$  sont alors majorées par une constante  $K$ . Définissons  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  par  $\varphi(\mu_1, \mu_2) = \psi(\mu_1^2 + \mu_2^2)$  et  $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  par  $\varphi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2) = \varphi\left(\frac{\mu_1}{\varepsilon}, \frac{\mu_2}{\varepsilon}\right) = \psi\left(\frac{1}{\varepsilon^2}(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right)$ . Donc  $\varphi_\varepsilon \equiv 0$  pour  $(\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$  et  $\varphi_\varepsilon \equiv 1$  pour  $(\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} \geq \varepsilon$ . De plus,  $D_{\mu_1}^{\gamma_1} D_{\mu_2}^{\gamma_2} \varphi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$  s'écrit comme une somme de polynômes de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , multipliés par  $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2\gamma} (D^\gamma \psi)$  évalué en  $\frac{1}{\varepsilon^2}(\mu_1^2 + \mu_2^2)$  avec  $\gamma \leq \gamma_1 + \gamma_2$ . Pour  $0 \leq (\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} \leq \varepsilon$ , tous les polynômes en  $\mu_1, \mu_2$  et les  $(D^\gamma \psi)\left(\frac{1}{\varepsilon^2}(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right)$  sont bornés par une constante. Posons

$$\hat{f}_\varepsilon^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) = \hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) \cdot \varphi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2)$$

et remarquons que cette expression est une fonction de Schwartz, que  $f_\varepsilon$  peut donc être évalué par transformée de Fourier inverse. D'autre part, puisque  $\hat{f}^{2,3}$  et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $M$  s'annulent en  $(0, 0)$ , on a  $\hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) = \sum_{i+j \geq M+1} \mu_1^i \mu_2^j \Phi_{i,j}(x, \mu_1, \mu_2)$ , les fonctions  $\Phi_{i,j}$  étant des fonctions de Schwartz en  $x$ ,  $C^\infty$  en toutes les variables. L'évaluation s'écrit alors

$$\begin{aligned} & |||f - f_\varepsilon||| \\ & \leq C_1 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\bar{G}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left| x^\alpha D_x^p D_{\mu_1}^\alpha D_{\mu_2}^\beta \left( \sum_{i+j \geq M+1} \mu_1^{q+i} \mu_2^{s+j} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \Phi_{i,j}(x, \mu_1, \mu_2)(1 - \varphi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2)) \right) \right| d\mu_1 d\mu_2 dx. \end{aligned}$$

Comme  $D_{\mu_1}^{\gamma_1} D_{\mu_2}^{\gamma_2} (1 - \varphi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2))$  est majoré par une constante, multipliée par  $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{2(\gamma_1 + \gamma_2)}$  sur  $[-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ , que les  $\Phi_{i,j}$  sont des fonctions de Schwartz en  $x$ ,  $C^\infty$  en  $\mu_1, \mu_2$ , il existe une constante  $C_2$  telle que  $|||f - f_\varepsilon||| \leq C_2 \cdot \varepsilon$ , à condition d'avoir pris  $M$  suffisamment élevé. Ceci prouve l'approximation en question.

**9.17.6.** Soit à présent  $f \in \mathcal{S}(G)$ , tel que  $\hat{f}^{2,3}$  ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $M$  s'annulent sur la spirale  $S$  et dans un voisinage de  $(0, 0)$ . Approchons  $f$  par des fonctions  $g_\varepsilon$  telles que  $\hat{g}_\varepsilon^{2,3}$  possèdent les mêmes propriétés que  $\hat{f}^{2,3}$  et soient à support compact en les deux dernières variables. La démonstration est analogue à celle du point précédent. Pour les mêmes fonctions  $\psi$  et  $\varphi$ , posons cette fois-ci  $\psi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2) = 1 - \varphi(\varepsilon\mu_1, \varepsilon\mu_2)$ . Donc  $\psi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2) \equiv 1$  pour  $(\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$  et  $\psi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2) \equiv 0$  pour  $(\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} \geq \frac{1}{\varepsilon}$ . Remarquons que toutes les dérivées de  $\psi_\varepsilon$  s'écrivent comme une somme de produits d'une puissance de  $\varepsilon$ , d'un polynôme en  $\mu_1, \mu_2$  et d'une fonction bornée. Posons

$$\hat{g}_\varepsilon^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) = \hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) \cdot \psi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2),$$

$g_\varepsilon$  étant déterminé par transformée de Fourier inverse. On a

$$\begin{aligned} & |||f - g_\varepsilon||| \\ & \leq C_1 \cdot \sum_{\text{finie}} \int \left| x^\alpha D_x^p D_{\mu_1}^\alpha D_{\mu_2}^\beta \mu_1^q \mu_2^s \hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) (1 - \psi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2)) \right| \\ & \quad d\mu_1 d\mu_2 dx \end{aligned}$$



$$\leq C_2 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\tilde{G}} \int_{(\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}} |x^\alpha D_x^p D_{\mu_1}^{\alpha'} D_{\mu_2}^{\beta'} \mu_1^q \mu_2^{q'} \hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2)| d\mu_1 d\mu_2 dx$$

en effectuant les dérivées du produit  $(\mu_1^q \mu_2^{q'} \hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2)) \cdot (1 - \psi_\varepsilon(\mu_1, \mu_2))$  et en remarquant que les dérivées de la seconde parenthèse s'écrivent comme une somme de produits d'un polynôme en  $\mu_1, \mu_2$  et d'une fonction bornée. Puisque  $\hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2)$  est une fonction de Schwartz et qu'on intègre seulement sur  $\tilde{G} \times \{(\mu_1, \mu_2) \mid (\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\}$ , cette dernière expression tend vers 0. Ceci prouve notre résultat.

9.17.7. Soit à présent  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2)$  ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre  $M$  s'annulent sur la spirale  $S$ , pour  $(\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} \leq \zeta$  et pour  $(\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2} \geq K$ . Approchons  $f$  par des fonctions  $g_\varepsilon$  telles que  $\widehat{g_\varepsilon}^{2,3}$  soit nul dans un voisinage  $\mathfrak{D}$ -invariant de la spirale  $S$ . Notons  $\|(\mu_1, \mu_2)\| = (\mu_1^2 + \mu_2^2)^{1/2}$ . Donc  $\hat{f}^{2,3}$  a son support en  $(\mu_1, \mu_2)$  dans  $\zeta \leq \|(\mu_1, \mu_2)\| \leq K$ . Notons  $\lambda_1 + i\lambda_2 = e^{i\theta_0}$  le point d'intersection de  $S$  avec le cercle unité. On a

$$S \equiv \{e^{-t(1+i\omega)} \cdot e^{i\theta_0} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

D'ailleurs toute autre spirale (orbite pour la même action) est caractérisée par son point d'intersection  $e^{i\alpha}$  avec le cercle unité et s'écrit

$$\{e^{-t(1+i\omega)} \cdot e^{i\alpha} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Remarquons de plus que

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \zeta \leq \|(\mu_1, \mu_2)\| \leq K\} \\ &\equiv \{e^{-t(1+i\omega)} \cdot e^{i\alpha} \in \mathbb{C} \mid A \leq t \leq B \text{ et } \theta_0 - \pi \leq \alpha < \theta_0 + \pi\} \\ &\equiv \{(e^{-t} \cos(\alpha - t\omega), e^{-t} \sin(\alpha - t\omega)) \in \mathbb{R}^2 \mid A \leq t \leq B \text{ et} \\ &\hspace{15em} \theta_0 - \pi \leq \alpha < \theta_0 + \pi\} \end{aligned}$$

où  $A = -\ln K$  et  $B = -\ln \zeta$ . Dans la suite nous utiliserons donc le changement de variables  $(\mu_1, \mu_2) \mapsto (t, \alpha)$  tels que  $\mu_1 = e^{-t} \cos(\alpha - t\omega)$  et  $\mu_2 = e^{-t} \sin(\alpha - t\omega)$ .

Pour des fonctions  $f$  telles que  $\hat{f}^{2,3}$  ait son support en  $(\mu_1, \mu_2)$  dans  $\mathcal{K}$ , on peut encore simplifier la majoration de  $|||f|||$ . En effet, dans ce cas

$$|||f||| \leq C_1 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\tilde{G}} \int_{\mathcal{K}} |x^\alpha D_x^p D_{\mu_1}^\alpha D_{\mu_2}^\beta \mu_1^q \mu_2^s \hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2)| d\mu_1 d\mu_2 dx.$$

Effectuons les dérivées en  $\mu_1, \mu_2$  sur le produit  $(\mu_1^q \mu_2^s \hat{f}^{2,3})$  et majorons les puissances restantes de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  par des constantes sur  $\mathcal{K}$ . On obtient alors une autre majoration de la forme

$$|||f||| \leq C_2 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\tilde{G}} \int_{\mathcal{K}} |x^\alpha D_x^p D_{\mu_1}^b D_{\mu_2}^c \hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2)| d\mu_1 d\mu_2 dx.$$

Effectuons à présent le changement de variables  $(\mu_1, \mu_2) \mapsto (t, \alpha)$  et remarquons que dans une étape intermédiaire on peut passer en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  avec  $r = e^{-t}$  et  $\theta = \alpha - t\omega$ . D'où

$$\begin{pmatrix} D_{\mu_1} \\ D_{\mu_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_r \\ \frac{1}{r} D_\theta \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} D_{\mu_1} &= \cos(\alpha - t\omega)[-e^t D_t - \omega e^t D_\alpha] - e^t \sin(\alpha - t\omega) D_\alpha \\ D_{\mu_2} &= \sin(\alpha - t\omega)[-e^t D_t - \omega e^t D_\alpha] + e^t \cos(\alpha - t\omega) D_\alpha, \end{aligned}$$

vu les expressions de  $D_r, D_\theta$  en fonction de  $D_t, D_\alpha$ . On continue de proche en proche pour remarquer que  $D_{\mu_1}^b \cdot D_{\mu_2}^c$  est une combinaison linéaire d'opérateurs  $D_t^m \cdot D_\alpha^n$  avec  $m+n \leq b+c$ , les coefficients dans la combinaison linéaire étant des fonctions continues en  $t, \alpha$ , donc bornées sur  $\mathcal{K}$ . De plus,  $d\mu_1 d\mu_2 = r dr d\theta = e^{-2t} dt d\alpha$ , le facteur  $e^{-2t}$  étant borné sur  $\mathcal{K}$ . On trouve donc la majoration suivante pour  $|||f|||$  :

$$|||f||| \leq C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\tilde{G}} \int_A^B \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} |x^\alpha D_x^p D_t^m D_\alpha^n \hat{f}^{2,3}(x, e^{-t} \cos(\alpha - t\omega), e^{-t} \sin(\alpha - t\omega))| d\alpha dt dx.$$

Soit à présent  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi(\alpha) \equiv 0$  pour  $|\alpha| \leq 1/2$  et  $\psi(\alpha) \equiv 1$  pour  $|\alpha| \geq 1$ . Remarquons que toutes les dérivées de  $\psi$

jusqu'à l'ordre  $M$  sont bornées par une constante fixe. Supposons  $M$  suffisamment élevé tel que  $p + m + n \leq M$  quels que soient  $p, m, n$  intervenant dans la majoration de la norme. Posons  $\psi_\varepsilon(\alpha) = \psi\left(\frac{\alpha - \theta_0}{\varepsilon}\right)$  et remarquons que  $D_\alpha^q \psi_\varepsilon(\alpha) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^q \cdot \psi^{(q)}\left(\frac{\alpha - \theta_0}{\varepsilon}\right)$ . Notons  $\tilde{f}(x, t, \alpha) = \hat{f}^{2,3}(x, e^{-t} \cos(\alpha - t\omega), e^{-t} \sin(\alpha - t\omega))$  et constatons que  $\tilde{f}$  ainsi que toutes les dérivées de  $\tilde{f}$  jusqu'à l'ordre  $M$  s'annulent identiquement pour  $\alpha = \theta_0$ . En effet, ces dérivées peuvent s'exprimer en fonction des dérivées par rapport à  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , dérivées qui elles s'annulent sur la spirale  $S$  pour la fonction  $\hat{f}^{2,3}$ . Définissons

$$\tilde{g}_\varepsilon(x, t, \alpha) = \tilde{f}(x, t, \alpha) \cdot \psi_\varepsilon(\alpha)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} \hat{g}_\varepsilon^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) &= \hat{g}_\varepsilon^{2,3}(x, e^{-t} \cos(\alpha - t\omega), e^{-t} \sin(\alpha - t\omega)) \\ &= \tilde{g}_\varepsilon(x, t, \alpha) \end{aligned}$$

et déterminons  $g_\varepsilon$  par transformée de Fourier inverse. Ceci est possible, puisque toutes les fonctions considérées sont des fonctions de Schwartz, étant à support compact  $\mathcal{K}$  en les deux dernières variables. Finalement, on a l'approximation

$$\begin{aligned} &|||f - g_\varepsilon||| \\ &\leq C_3 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\tilde{G}} \int_A^B \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} |x^a D_x^p D_t^m D_\alpha^n \tilde{f}(x, t, \alpha) [1 - \psi_\varepsilon(\alpha)]| d\alpha dt dx \end{aligned}$$

avec  $1 - \psi_\varepsilon(\alpha) \equiv 0$  pour  $\left|\frac{\alpha - \theta_0}{\varepsilon}\right| \geq 1$ , c'est-à-dire pour  $|\alpha - \theta_0| \geq \varepsilon$ . Donc  $\int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} d\alpha = \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} d\alpha$ . Remarquons de plus qu'on a pour  $\tilde{f}(x, t, \alpha)$  une expression de la forme  $\tilde{f}(x, t, \alpha) = (\alpha - \theta_0)^{M+1} \Phi(x, t, \alpha)$ ,  $\Phi$  étant une fonction de Schwartz en  $x, t$ ,  $C^\infty$  en toutes les variables, vu les hypothèses sur  $f$ . On montre alors que  $|||f - g_\varepsilon|||$  tend vers 0 par un raisonnement analogue à celui effectué en 9.17.5. et 9.10. par exemple, à condition de choisir  $M$  suffisamment élevé. Puisque  $\tilde{g}_\varepsilon(x, t, \alpha)$  s'annule pour  $|\alpha - \theta_0| \leq \varepsilon/2$ ,  $\hat{g}_\varepsilon^{2,3}(x, e^{-t} \cos(\alpha - t\omega), e^{-t} \sin(\alpha - t\omega))$  s'annule sur le voisinage  $\mathfrak{D}$ -invariant de la spirale  $S$  obtenu pour  $|\alpha - \theta_0| \leq \varepsilon/2$ .

**9.17.8.** Par 9.17.3. à 9.17.7., on voit que pour  $M$  suffisamment élevé,  $I_0^{M+1} \subset I$ . Puisque l'idéal  $I_0$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant et que  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier, on en déduit que  $I_0 \subset I$ .

9.17.9. a) **Définitions** : Pour  $f \in \mathcal{S}(G)$ , définissons  $\tilde{f}^2$  par

$$\tilde{f}^2(x, t) = \int f^t(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) e^{i(\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2)} dr_1 dr_2$$

et pour  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$  (c'est-à-dire  $(s, b_1, b_2) \mapsto e^{ks} \alpha(s, b_1, b_2)$  est une fonction de Schwartz pour tout  $k$ ) et  $f \in \mathcal{S}(G)$  posons

$$\alpha(f) = \int (f_{\exp b_1 Z_1 \exp b_2 Z_2})^s \alpha(s, b_1, b_2) ds db_1 db_2.$$

b) On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \tilde{f}^2(x, t) &= (\hat{f}^{2,3})^t \left( x, e^{-t} K(-t\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \delta(t) e^{-2t} \hat{f}^{2,3} \left( {}^t x, e^{-t} K(-t\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) \\ \widetilde{\alpha(f)}^2(x, t) &= \int \tilde{f}^2(x, s) \hat{\alpha}^{2,3} \left( s - t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) ds \end{aligned}$$

$$\tilde{f}^2(x \exp a_1 Z_1 \exp a_2 Z_2, t) = e^{-i\lambda_1 a_1} e^{-i\lambda_2 a_2} \tilde{f}^2(x, t).$$

Le reste des formules de 9.10.2.b) demeurent valables.

c) Finalement,

$$\begin{aligned} \tilde{f}^2(x, t) \equiv 0 &\iff \hat{f}^{2,3}(x, \cdot, \cdot) \text{ s'annule sur la spirale} \\ &S = \left\{ e^{-t} K(-t\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \forall x \\ &\iff f \in I_0. \end{aligned}$$

D'où

$$\tilde{f}^2 = \tilde{g}^2 \iff f = g \pmod{I_0}.$$

9.17.10. **Projecteurs** : a) Soient  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  et  $\psi \in ES(\mathbb{R})$ . Nous allons montrer dans la suite qu'il existe  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$  tel que

$$\hat{\alpha}^{2,3} \left( s - t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) = \psi(t) \varphi(s).$$

On aura donc

$$\begin{aligned}\widetilde{\alpha(f)^2}(x, t) &= \psi(t) \int \tilde{f}^2(x, s) \varphi(s) ds \\ &= \psi(t) f_1(x)\end{aligned}$$

par définition de  $f_1$ .

b) La relation précédente pour  $\hat{\alpha}^{2,3}$  donne  $\hat{\alpha}^{2,3}$  seulement sur la spirale  $-e^{-s}K(-s\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Afin de définir  $\hat{\alpha}^{2,3}$  partout on peut procéder de la manière suivante : Puisque  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$ , il existe  $\theta_0$  tel que  $\lambda_1 = \cos \theta_0$  et  $\lambda_2 = \sin \theta_0$ . Recherchons  $\alpha$  tel que

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^{2,3} \left( s - t, -e^{-s}K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) &= \psi(t) \varphi(s) \cos(\theta - \theta_0) \\ \iff \hat{\alpha}^{2,3} \left( u, -e^{-s}K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) &= \psi(s - u) \varphi(s) \cos(\theta - \theta_0).\end{aligned}$$

Puisque  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\hat{\alpha}^{2,3}$  va s'annuler dans un voisinage de l'origine des deux dernières coordonnées. En dehors de ce voisinage de l'origine, on peut faire le changement de variables

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} &= -e^{-s}K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \\ \iff s &= -\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2) \text{ et} \\ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2}} K\left(-\frac{\omega}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right) \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(\mu_1, \mu_2) \\ g(\mu_1, \mu_2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions  $C^\infty$ , bornées si on se limite à prendre  $s$  dans le support compact de  $\varphi$ . De même,

$$\cos(\theta - \theta_0) = \cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta = h(\mu_1, \mu_2)$$

où  $h$  est une fonction  $C^\infty$  bornée. Donc

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}^{2,3}(u, \mu_1, \mu_2) &= \psi\left(-\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2) - u\right) \varphi\left(-\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right) \\ &\quad \cdot h(\mu_1, \mu_2),\end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\hat{\alpha}^{2,3}$  est une fonction de Schwartz, à support compact en  $\mu_1, \mu_2$  et on obtient  $\alpha$  par transformée de Fourier inverse.

c) Supposons en plus que  $\beta \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$  tel que

$$\hat{\beta}^{2,3} \left( s - t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) = \psi_1(t) \varphi_1(s).$$

Alors

$$\widetilde{\beta(\alpha(f))}^2(x, t) = \psi_1(t) \cdot \left( \int \psi(s) \varphi_1(s) ds \right) \cdot f_1(x)$$

avec  $f_1(x) = \int \tilde{f}^2(x, u) \varphi(u) du$ .

d) On montre facilement que

$$\begin{aligned} & \alpha(\beta(f))(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) \\ &= \int \left[ \int \alpha \left( s - t, e^{-t} K(t\omega) \left( \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) \right) \beta(t, a_1, a_2) e^{-2t} dt da_1 da_2 \right] \\ & \quad (f_{\exp b_1 Z_1 \exp b_2 Z_2})^s(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) ds db_1 db_2 \\ &= \int \alpha \otimes \beta(s, b_1, b_2) (f_{\exp b_1 Z_1 \exp b_2 Z_2})^s(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) ds db_1 db_2 \\ &= \alpha \otimes \beta(f) \end{aligned}$$

par définition du produit de convolution  $\otimes$ .

e) Par ([Lud. Mol. 1], 9.12.), on a  $\alpha(I) \subset I$  pour tout  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ .

**9.17.11. Espace  $\mathcal{S}(G)_1$  :** a) **Définition :** L'espace  $\mathcal{S}(G)_1$  est l'ensemble des fonctions  $f_1$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$f_1(x \exp a_1 Z_1 \exp a_2 Z_2) = e^{-i\lambda_1 a_1} e^{-i\lambda_2 a_2} f_1(x) \quad \forall x \in G, \forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

$f_1$  est Schwartz en  $x \in \tilde{G} = G / \exp(\mathbb{R}Z_1 + \mathbb{R}Z_2)$  (pour une base coexponentielle fixée).

b) Pour  $t$  fixé,  $\tilde{f}^2(\cdot, t) \in \mathcal{S}(G)_1$ . En particulier, si  $\tilde{f}^2(x, t) = u(t) f_1(x)$ , respectivement si  $\widetilde{\alpha(f)}^2 = \psi(t) f_1(x)$ , alors  $f_1 \in \mathcal{S}(G)_1$ .

c) Construisons un rétracte particulier. Remarquons d'abord que

$$\tilde{f}^2(x, t) = \delta(t) e^{-2t} \hat{f}^{2,3} \left( {}^t x, e^{-t} K(-t\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right)$$

entraîne

$$\hat{f}^{2,3}\left(x, e^{-t}K(-t\omega)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right) = \delta(t)^{-1}e^{2t}\hat{f}^2(-{}^t x, t).$$

Soit alors  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Pour  $f_1 \in \mathcal{S}(G)_1$  donné, recherchons  $f \in \mathcal{S}(G)$  tel que  $\hat{f}^2 = \varphi \otimes f_1$ . Il suffit de construire  $f$  tel que

$$\hat{f}^{2,3}\left(x, e^{-t}K(-t\omega)\begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix}\right) = \delta(t)^{-1}e^{2t}\varphi(t)f_1(-{}^t x).$$

Puisque  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , on doit donc choisir  $f$  tel que  $\hat{f}^{2,3}(x, \dots)$  soit identiquement nul dans un voisinage de  $(0, 0)$  (indépendant de  $x$ ) et on peut faire le même raisonnement qu'en 9.17.10. On pose

$$\hat{f}^{2,3}\left(x, e^{-t}K(-t\omega)\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}\right) = \delta(t)^{-1}e^{2t}\varphi(t)f_1(-{}^t x) \cos(\theta - \theta_0)$$

et on effectue le changement de variables

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = e^{-t}K(-t\omega)\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}.$$

On trouve

$$\begin{aligned} \hat{f}^{2,3}(x, \mu_1, \mu_2) &= \delta\left(-\frac{1}{2}\ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\mu_1^2 + \mu_2^2} \varphi\left(-\frac{1}{2}\ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right) \\ &\quad f_1\left(\frac{1}{2}\ln(\mu_1^2 + \mu_2^2) x\right) h(\mu_1, \mu_2) \end{aligned}$$

où  $h$  est la fonction  $C^\infty$  déterminée en 9.17.10. Puisque  $\varphi$  est à support compact, l'expression précédente s'annule si  $(\mu_1, \mu_2)$  appartient à un voisinage  $V$  de  $(0, 0)$  et  $f$  est obtenu par

$$\begin{aligned} f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus V} \delta\left(-\frac{1}{2}\ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\mu_1^2 + \mu_2^2} \\ &\quad \cdot \varphi\left(-\frac{1}{2}\ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right) f_1\left(\frac{1}{2}\ln(\mu_1^2 + \mu_2^2) x\right) h(\mu_1, \mu_2) \\ &\quad \cdot e^{-ir_1 \mu_1} e^{-ir_2 \mu_2} d\mu_1 d\mu_2. \end{aligned}$$

Ceci nous définit un rétracte

$$\begin{aligned} R : \mathcal{S}(G)_1 &\longrightarrow \mathcal{S}(G) \\ f_1 &\longmapsto R(f_1) = f, \end{aligned}$$

$f$  étant calculé comme précédemment, la base étant fixée.

d) Comme en 9.10.4., nous allons munir  $\mathcal{S}(G)_1$  d'une norme de Schwartz de manière à rendre le rétracte  $R$  continu. Notons par  $E_1, \dots, E_{n-2}$  une base coexponentielle à  $\mathbb{R}Z_1 + \mathbb{R}Z_2$  dans  $\mathfrak{g}$  et notons les éléments de  $G$  par

$$\tilde{x} \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2 = \exp(\tilde{x}_1 E_1 + \dots + \tilde{x}_{n-2} E_{n-2} + r_1 Z_1 + r_2 Z_2).$$

Par ([Lud. Mol. 1]),  $\|f\|$  admet une majoration de la forme

$$\begin{aligned} \|f\| &\leq \sum_{\text{finie}} C \int \int |\tilde{x}^a r_1^{b_1} r_2^{b_2} D_{\tilde{x}}^p D_{r_1}^{q_1} D_{r_2}^{q_2} f(\tilde{x} \exp r_1 Z_1 \\ &\hspace{20em} \exp r_2 Z_2)| d\tilde{x} dr_1 dr_2 \\ &\leq \sum_{\text{finie}} C \int \int \frac{1}{1+r_1^2} \frac{1}{1+r_2^2} \left| \frac{1}{(2\pi)^2} \int [\tilde{x}^a D_{\mu_1}^{b_1} D_{\mu_2}^{b_2} (1-D_{\mu_1}^2)(1-D_{\mu_2}^2) \right. \\ &\quad \left. D_{\tilde{x}}^p \mu_1^{q_1} \mu_2^{q_2} \delta\left(-\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right)^{-1} \cdot \frac{1}{\mu_1^2 + \mu_2^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \varphi\left(-\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\right) f_1\left(\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2) \tilde{x}\right) h(\mu_1, \mu_2) \right] \\ &\quad \left. e^{-ir_1 \mu_1} e^{-ir_2 \mu_2} d\mu_1 d\mu_2 \right| d\tilde{x} dr_1 dr_2 \\ &\leq \sum_{\text{finie}} C_1 \int \int |\tilde{x}^a D_{\tilde{x}}^p D_{\mu_1}^{b_1} (1-D_{\mu_1}^2) D_{\mu_2}^{b_2} (1-D_{\mu_2}^2) \\ &\quad \psi(\mu_1, \mu_2) f_1\left(\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2) \tilde{x}\right)| d\mu_1 d\mu_2 d\tilde{x} \\ &\leq \sum_{\substack{\text{finie} \\ \gamma_1 \leq b_1+2 \\ \gamma_2 \leq b_2+2}} C_2 \int \int_K |\tilde{x}^a D_{\tilde{x}}^p D_{\mu_1}^{\gamma_1} D_{\mu_2}^{\gamma_2} f_1\left(\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2) \tilde{x}\right)| d\mu_1 d\mu_2 d\tilde{x} \end{aligned}$$

en regroupant les fonctions dépendant uniquement de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  en une fonction unique  $\psi$ , en effectuant les dérivées de  $\psi(\mu_1, \mu_2) f_1\left(\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2) \tilde{x}\right)$  par rapport à  $\mu_1$  et  $\mu_2$  et en majorant les fonctions dépendant uniquement de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  par une constante sur le compact  $K$  (ne contenant pas  $(0, 0)$ ), support de  $\psi$  (puisque  $\varphi$  est à support compact). Raisonnons



comme en 9.10.4. Soit  $A$  la matrice de l'opérateur  $\exp\left(\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)d_1\right)$  et notons

$$\exp\left(\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)d_1\right)\tilde{x} \equiv A \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_{n-2} \\ \tilde{x}'_{n-1} \\ \tilde{x}'_n \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$f_1\left(\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\tilde{x}\right) = e^{-i\lambda_1[A_{n-1,1}\tilde{x}_1 + \dots + A_{n-1,n-2}\tilde{x}_{n-2}]} \\ \cdot e^{-i\lambda_2[A_{n,1}\tilde{x}_1 + \dots + A_{n,n-2}\tilde{x}_{n-2}]} f_1\left(\exp\left[(E_1 \dots E_{n-2})A' \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-2} \end{pmatrix}\right]\right)$$

où  $A'$  désigne la matrice obtenue en supprimant dans  $A$  les deux dernières lignes et colonnes. Remarquons que les coefficients de  $A$  et  $A'$  sont des fonctions  $C^\infty$  en  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , donc bornées, puisque  $(\mu_1, \mu_2)$  parcourt le compact  $K$  ne contenant pas  $(0, 0)$ . On obtient donc une majoration de la forme

$$\left| \tilde{x}^\alpha D_{\tilde{x}}^p D_{\mu_1}^{\gamma_1} D_{\mu_2}^{\gamma_2} f_1\left(\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\tilde{x}\right) \right| \\ \leq \sum_{\text{finie}} \left| P(\tilde{x})(D^\gamma f_1)\left(\exp\left[(E_1 \dots E_{n-2})A' \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-2} \end{pmatrix}\right]\right) \right|$$

si  $(\mu_1, \mu_2)$  parcourt  $K$ . Ici  $P(\tilde{x})$  désigne une fonction polynomiale et  $D^\gamma f_1$  désigne une dérivée de  $f_1$  par rapport à ses différentes coordonnées. Le calcul de  $\exp\left(\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)d_1\right) \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}$  montre que

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A' & 0 \\ \hline * & \sqrt{\mu_1^2 + \mu_2^2} \cdot K\left(-\frac{1}{2} \ln(\mu_1^2 + \mu_2^2)\omega\right) \end{array} \right).$$

Donc  $A'$  est inversible, puisqu'il en est ainsi de  $A$  et que  $\det A = (\mu_1^2 + \mu_2^2) \cdot \det A'$ . De plus, les coefficients de  $A'$  sont des fonctions  $C^\infty$ , bornées en  $\mu_1, \mu_2$ , lorsque  $(\mu_1, \mu_2)$  parcourt le compact  $K$ . Effectuons le changement de variables

$$A' \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$|P(\tilde{x})| = \left| P \left( (A')^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}'_{n-2} \end{pmatrix} \right) \right| \leq C_3 \sum_{\text{finie}} |Q(\tilde{x}')|$$

où  $C_3$  désigne une nouvelle constante et  $Q$  désigne une fonction polynôme en  $\tilde{x}'_1, \dots, \tilde{x}'_{n-2}$ , en majorant tous les coefficients qui sont fonction de  $\mu_1, \mu_2$ . Finalement on trouve une majoration de la forme

$$\|f\| \leq C_4 \cdot \sum_{\text{finie}} \int_{\mathbb{R}^{n-2}} |Q(\tilde{x}') (D^\beta f_1)(\exp[\tilde{x}'_1 E_1 + \dots + \tilde{x}'_{n-2} E_{n-2}])| d\tilde{x}'.$$

Le membre de droite représente une norme de Schwartz  $\|\cdot\|_1$  sur  $\mathcal{S}(G)_1$  telle que le rétracte  $R$  soit une fonction continue de  $(\mathcal{S}(G)_1, \|\cdot\|_1)$  dans  $(\mathcal{S}(G), \|\cdot\|)$ .

**9.17.12. Idéal  $I_1$  de  $\mathcal{S}(G)_1$  :** Les raisonnements de 9.10.5. peuvent être repris presque intégralement. Nous nous limitons donc à énoncer les résultats essentiels :

On définit

$$I_1 = \{f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 \mid \exists f \in I, \exists u \in ES(\mathbb{R}) : \tilde{f}^2 = u \otimes f_1\}.$$

Pour  $v \in ES(\mathbb{R})$  fixé, on a également

$$I_1 = \{f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 \mid \exists f \in I : \tilde{f}^2 = v \otimes f_1\}.$$

Alors  $I_1$  est un idéal fermé dans  $(\mathcal{S}(G)_1, \|\cdot\|_1)$  tel que  $I_1 = R^{-1}(I)$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$I_1 = \tilde{I}_t = \{\tilde{f}^2(\cdot, t) \mid f \in I\}.$$

La relation  $(\tilde{f}^2)^{D_0}(\cdot, t) = (f^{(tD_0 t^{-1})})^{\sim 2}(\cdot, t)$  entraîne que  $I_1$  est  $\mathfrak{D}_0$ -invariant, puisque  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -invariant. De plus,  $f_1 \in I_1$  et  $\tilde{f}^2 = w \otimes f_1$  avec  $w \in ES(\mathbb{R})$  entraîne  $f \in I$ .

**9.17.13. Projection et idéal  $\mathcal{I}_0$  :** Comme en 9.10.6., on définit

$$p : \mathcal{S}(G) \longrightarrow \mathcal{S}(G)_1$$

par  $p(f)(x) = \tilde{f}^2(x, 0) = \hat{f}^{2,3}(x, \lambda_1, \lambda_2)$ . On montre qu'il existe une norme de Schwartz  $|||\cdot|||_3$  dans  $\mathcal{S}(G)$  telle que

$$|||p(f)|||_1 \leq |||f|||_3$$

pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ . Donc  $p$  est une application continue de  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||_3)$  dans  $(\mathcal{S}(G)_1, |||\cdot|||_1)$ . On définit

$$\mathcal{I}_0 = p^{-1}(I_1) = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \tilde{f}^2(\cdot, 0) \in I_1\}$$

et on remarque que  $\mathcal{I}_0$  est un idéal,  $\mathfrak{D}_0$ -invariant, fermé de  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||_3)$ .

**9.17.14. Idéal  $\mathcal{I}_1$  de  $\mathcal{S}(G)_1$  :** Le raisonnement est analogue à celui effectué en 9.10.7. On définit

$$\mathcal{I}_1 = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \tilde{f}^2(\cdot, t) \in I_1 \quad \forall t\}.$$

On remarque que  $\mathcal{I}_1$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$  et on munit  $\mathcal{S}(G)$  d'une norme de Schwartz  $|||\cdot|||_4$  vérifiant une relation de la forme

$$|||\tilde{f}^2(\cdot, t)|||_1 \leq C \cdot e^{M|t|} |||f|||_4$$

pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ . On en déduit que  $\mathcal{I}_1$  est fermé dans  $(\mathcal{S}(G), |||\cdot|||_4)$  et que  $\alpha(\mathcal{I}_1) \subset \mathcal{I}_1$  pour tout  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ . On définit

$$\mathcal{S} = \{f \in \mathcal{S}(G) \mid \exists u \in ES(\mathbb{R}), f_1 \in \mathcal{S}(G)_1 : \tilde{f}^2 = u \otimes f_1\}.$$

On montre que  $\mathcal{S} \cap I = \mathcal{S} \cap \mathcal{I}_1$ .

**9.17.15. Approximation des éléments de  $K^M$  :** a) Soit  $K$  l'ensemble défini en 9.16.2. Définissons  $ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  par

$$ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0 = \left\{ \alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2) \mid \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u, b_1, b_2) db_1 db_2 \equiv 0 \right\}.$$

Soit  $\alpha$  vérifiant

$$\hat{\alpha}^{2,3} \left( s - t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right) = \psi(t) \varphi(s)$$

avec  $\psi \in ES(\mathbb{R})$  et  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Alors

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{2,3}(u, 0, 0) &= \lim_{s \rightarrow +\infty} \hat{\alpha}^{2,3}\left(u, -e^{-s}K(-s\omega) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} [\psi(s-u)\varphi(s)] = 0 \end{aligned}$$

et  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$ . D'autre part, soit  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  et soit  $f \in \mathcal{S}(G)$  quelconque. Alors

$$\begin{aligned} &\int \alpha(f)(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) dr_1 dr_2 \\ &= \int \left[ \int \alpha(s, b_1, b_2) db_1 db_2 \right] \delta(s) e^{-2s} f({}^s x \cdot \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2) ds dr_1 dr_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

et  $\alpha(f) \in K$ . En particulier, un élément  $f$  qui n'appartient pas à  $K$  ne peut pas être approché par des combinaisons linéaires de  $\alpha(f)$  avec  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$ .

b) Soit  $(\beta_j)_j$  une unité approchée dans  $ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$  obtenue de la manière suivante : On prend  $\beta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ , positif, tel que  $\text{supp } \beta \subset [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$  et  $\int \beta(s, b_1, b_2) ds db_1 db_2 = 1$ . On pose  $\beta_\varepsilon(s, b_1, b_2) = \frac{1}{\varepsilon^3} \beta\left(\frac{s}{\varepsilon}, \frac{b_1}{\varepsilon}, \frac{b_2}{\varepsilon}\right)$  et on montre comme en 9.10.8. que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |||\beta_\varepsilon(f) - f||| = 0$  pour tout  $f \in \mathcal{S}(G)$ .

c) Soit  $\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$  tel que  $\mu \geq 0$ ,  $\mu(-u, -v) = \mu(u, v)$  quels que soient  $u, v$ ;  $\hat{\mu}(0, 0) = \int \mu(u, v) du dv = 1$  et  $\text{supp } \hat{\mu} \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Posons  $\mu_\varepsilon(u, v) = \varepsilon^2 \mu(\varepsilon u, \varepsilon v)$ . On en déduit que  $\hat{\mu}_\varepsilon(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{\mu}\left(\frac{\lambda_1}{\varepsilon}, \frac{\lambda_2}{\varepsilon}\right)$ ,  $\hat{\mu}_\varepsilon(0, 0) = 1$  et  $\text{supp } \hat{\mu}_\varepsilon \subset [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ . Pour simplifier on peut même supposer que  $\mu = \nu \otimes \nu$  avec  $\nu \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ,  $\nu \geq 0$ ,  $\nu(-u) = \nu(u)$ ,  $\hat{\nu}(0) = 1$  et  $\text{supp } \hat{\nu} \subset [-1, 1]$ .

d) Montrons que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |||\mu_\varepsilon * f||| = 0$  si  $f$  est de la forme  $f_1 * f_2 * \dots * f_M$  avec  $f_i \in K$  pour tout  $i$  et  $M$  suffisamment élevé. Les calculs sont analogues à ceux de 9.10.8.c). En effet, remarquons que pour tout  $f \in K$ ,

$$\begin{aligned} \hat{f}^{2,3}(x, a_1, a_2) &= a_1 a_2 \int_0^1 \int_0^1 (D_u D_v \hat{f}^{2,3})(x, u, v) \Big|_{\substack{u=a_1 \cdot s \\ v=a_2 \cdot t}} ds dt \\ &\quad + a_2 \int_0^1 (D_v \hat{f}^{2,3})(x, 0, v) \Big|_{v=a_2 t} dt \end{aligned}$$

$$+ a_1 \int_0^1 (D_u \hat{f}^{2,3})(x, u, 0) \Big|_{u=a_1 s} ds. \quad (*)$$

Donc, pour  $(a_1, a_2) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ ,

$$|\hat{f}^{2,3}(x, a_1, a_2)| \leq \varepsilon^2 \cdot \sup_{(u,v) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]} |D_u D_v \hat{f}^{2,3}(x, u, v)| \\ + \varepsilon \cdot \sup_{v \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |D_v \hat{f}^{2,3}(x, 0, v)| + \varepsilon \cdot \sup_{u \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |D_u \hat{f}^{2,3}(x, u, 0)|.$$

Evaluons  $|||\mu_\varepsilon * f|||$ . On trouve

$$|||\mu_\varepsilon * f||| \leq \sum_{\text{finie}} \int |x^a D_x^p r_1^{c_1} r_2^{c_2} D_{r_1}^{q_1} D_{r_2}^{q_2} \mu_\varepsilon * f(x \exp r_1 Z_1 \exp r_2 Z_2)| \\ dx dr_1 dr_2 \\ \leq \sum_{\text{finie}} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^k} \frac{1}{1 + r_1^2} \frac{1}{1 + r_2^2} \left| \int [(1 + \|x\|^2)^k x^a D_x^p \right. \\ \left. (1 - D_{a_1}^2) D_{a_1}^{c_1} (1 - D_{a_2}^2) D_{a_2}^{c_2} a_1^{q_1} a_2^{q_2} \widehat{\mu_\varepsilon * f}^{2,3}(x, a_1, a_2)] \right. \\ \left. e^{-ia_1 r_1} e^{-ia_2 r_2} da_1 da_2 \right| dx dr_1 dr_2 \\ \leq C \cdot \sum_{\text{finie}} 4\varepsilon^2 \cdot \sup_{\substack{x \in \tilde{G} \\ (a_1, a_2) \in [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon]}} \left| (1 + \|x\|^2)^k x^a D_x^p (1 - D_{a_1}^2) D_{a_1}^{c_1} \right. \\ \left. (1 - D_{a_2}^2) D_{a_2}^{c_2} a_1^{q_1} a_2^{q_2} \hat{\nu}\left(\frac{a_1}{\varepsilon}\right) \hat{\nu}\left(\frac{a_2}{\varepsilon}\right) \hat{f}^{2,3}(x, a_1, a_2) \right|$$

puisque  $\widehat{\mu_\varepsilon}(a_1, a_2) = \hat{\mu}\left(\frac{a_1}{\varepsilon}, \frac{a_2}{\varepsilon}\right) = \hat{\nu}\left(\frac{a_1}{\varepsilon}\right) \hat{\nu}\left(\frac{a_2}{\varepsilon}\right)$ . Supposons à présent  $f$  de la forme  $f = f_1 * f_2 * \dots * f_M$  avec  $f_i \in K$  pour tout  $i$  et  $M$  suffisamment élevé. Donc

$$\hat{f}^{2,3}(x, a_1, a_2) = \hat{f}_1^{2,3}(\cdot, a_1, a_2) *_{\tilde{G}} \dots *_{\tilde{G}} \hat{f}_M^{2,3}(\cdot, a_1, a_2)(x),$$

la convolution se faisant dans  $\tilde{G} = G / \exp(\mathbb{R}Z_1 + \mathbb{R}Z_2)$ . Remarquons que  $D_a^r \hat{\nu}\left(\frac{a}{\varepsilon}\right) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^r \hat{\nu}^{(r)}\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)$ . De plus, chaque  $\hat{f}_j^{2,3}$  peut s'écrire sous la forme (\*). Toutes les dérivées de  $\hat{\nu}$  et des  $\hat{f}_j^{2,3}$  jusqu'à l'ordre  $p + c_1 + c_2 + 4$  sont évidemment bornées. Les dérivées de  $\hat{\nu}\left(\frac{a_1}{\varepsilon}\right) \hat{\nu}\left(\frac{a_2}{\varepsilon}\right)$  introduisent au plus le facteur  $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{c_1 + c_2 + 4}$ . Donc si  $M$  suffisamment grand ( $M > 2(c_1 + c_2 + 4) + p$  convient certainement), il y a assez

de  $\hat{f}_j^{2,3}$  qui ne seront pas dérivés et qui fourniront un facteur  $\varepsilon$  pour avoir une majoration de la forme  $|||\mu_\varepsilon * f||| \leq \varepsilon \cdot C_1$ , la constante  $C_1$  dépendant de  $f$ , et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |||\mu_\varepsilon * f||| = 0$ .

e) Posons  $\mu_i = \mu_\varepsilon$  avec  $\varepsilon = \frac{1}{i}$  et  $k_{ij} = \beta_j - \beta_j * \mu_i$ . Comme en 9.10.8.,  $\lim_{i,j} |||k_{ij}(f) - f||| = 0$  pour tout  $f \in K^M$  avec  $M$  suffisamment élevé, pour au moins une sous-suite de  $k_{ij}$ .

On se base sur le fait que  $\beta_j(\mu_i * f) = (\beta_j * \mu_i)(f)$ , étant donné que  $\nu(-u) = \nu(u)$  pour tout  $u$ .

f) On a  $k_{ij} \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$ , puisque

$$\widehat{k_{ij}}^{2,3}(u, 0, 0) = \widehat{\beta_j}^{2,3}(u, 0, 0) - \widehat{\beta_j}^{2,3}(u, 0, 0)\widehat{\mu_i}(0, 0) = 0$$

étant donné que  $\widehat{\mu_i}(0, 0) = 1$ . Donc, pour  $M$  suffisamment élevé, tout  $f \in K^M$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $\alpha(f)$  avec  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$ .

**9.17.16. Modification de la fonction  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  :** a) D'après ([Lud. Mol. 1], 9.9.), il existe une norme  $|||\cdot|||^\approx$  sur  $ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$  et une norme de Schwartz  $|||\cdot|||^\sim$  sur  $S(G)$  telles que

$$|||\alpha(f)||| \leq |||\alpha|||^\approx \cdot |||f|||^\sim$$

quels que soient  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  et  $f \in S(G)$ . De plus,

$$|||\alpha|||^\approx \leq C \cdot \int |\alpha(s, b_1, b_2)| e^{M|s|} \cdot (2 + b_1^2 + b_2^2)^N ds db_1 db_2.$$

On peut également identifier cette dernière expression à  $|||\alpha|||^\approx$ .

b) Tout  $f \in K^M$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $\alpha(f)$  avec  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  vérifiant

$$D_{a_1}^{k_1} D_{a_2}^{k_2} \hat{\alpha}^{2,3}(s, a_1, a_2) \Big|_{\substack{a_1=0 \\ a_2=0}} \equiv 0 \text{ quels que soient } k_1, k_2 \text{ tels que } k_1 + k_2 \leq$$

$k_0$ , le nombre  $k_0$  étant fixé arbitrairement. En effet, remplaçons  $\alpha$  par  $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{k_0+1}$ , la convolution  $\otimes$  étant celle définie en 9.17.10. Comme en 9.10.9. on voit que les  $\alpha_i$  peuvent être choisis dans  $ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  tels que

$$|||\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_{k_0+1}(f) - f|||$$

puisse être rendu arbitrairement petit. Par le calcul on démontre que

$$\widehat{\alpha_1 \otimes \alpha_2}^{2,3}(s, a_1, a_2) = \int \widehat{\alpha_1}^{2,3} \left( s - t, e^t K(t\omega) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) \widehat{\alpha_2}^{2,3}(t, a_1, a_2) dt$$

et, successivement,

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \otimes \alpha_2 \otimes \dots \otimes \alpha_{k_0+1}^{2,3}(s, a_1, a_2) \\ &= \int \dots \int \widehat{\alpha_1}^{2,3} \left( s - t_2, e^{t_2} K(t_2\omega) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) \widehat{\alpha_2}^{2,3} \left( t_2 - t_3, \right. \\ & \quad \left. e^{t_3} K(t_3\omega) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) \dots \widehat{\alpha_{k_0+1}}^{2,3}(t_{k_0+1}, a_1, a_2) dt_2 dt_3 \dots dt_{k_0+1}. \end{aligned}$$

En prenant  $D_{a_1}^{k_1} D_{a_2}^{k_2}$  avec  $k_1 + k_2 \leq k_0$ , une des fonctions  $\widehat{\alpha_i}^{2,3}$  au moins n'est pas dérivée et s'annule pour  $(a_1, a_2) = (0, 0)$ . Donc la dérivée de l'expression entière s'annule.

c) Toutes les fonctions  $\alpha$  construites jusqu'à présent peuvent être supposées à support compact en la première variable, puisque tel est le cas pour les  $\beta_j$ .

d) Tout  $f \in K^M$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $\gamma(f)$  avec  $\gamma \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  tels que  $\hat{\gamma}^{2,3}(\cdot, t_1, t_2)$  s'annule pour tout  $(t_1, t_2)$  dans un voisinage de  $(0, 0)$ .

Comme en 9.10.9. on montre qu'on a une majoration du type

$$\begin{aligned} |||\alpha||| &\approx \leq C \cdot \sum_{\text{finie}} \int e^{M|s|} \int |(1 - D_{a_1}^2) D_{a_1}^{k_1} (1 - D_{a_2}^2) D_{a_2}^{k_2} \\ & \quad \hat{\alpha}^{2,3}(s, a_1, a_2)| da_1 da_2 ds \\ &\leq C_1 \cdot \sum_{\substack{\text{finie} \\ p_1 + p_2 \leq N}} \int \int e^{M|s|} |D_{a_1}^{p_1} D_{a_2}^{p_2} \hat{\alpha}^{2,3}(s, a_1, a_2)| da_1 da_2 ds. \end{aligned}$$

Pour  $\varepsilon > 0$  donné, on choisit  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  tel que  $|||\alpha(f) - f||| < \varepsilon/2$  et  $D_{a_1}^{p_1} D_{a_2}^{p_2} \hat{\alpha}^{2,3}(s, a_1, a_2)|_{(a_1, a_2)=(0,0)} \equiv 0$  quels que soient  $p_1, p_2$  tels que  $p_1 + p_2 \leq N_1$  où  $N_1$  est suffisamment élevé. De plus on peut supposer que le support de  $\alpha$  en la première variable est un compact  $K_1$ . Soit alors  $q \in C^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $0 \leq q \leq 1$ ,  $q(a) \equiv 1$  pour  $|a| \geq 1$  et  $q(a) \equiv 0$  pour  $|a| \leq \frac{1}{2}$ . Posons  $q_\varepsilon(a) = q\left(\frac{a}{\varepsilon}\right)$  et

$$\hat{\gamma}_\varepsilon^{2,3}(s, a_1, a_2) = \hat{\alpha}^{2,3}(s, a_1, a_2) q_\varepsilon(a_1) q_\varepsilon(a_2).$$

On détermine alors  $\gamma_\varepsilon$  par transformée de Fourier inverse. Par hypothèse sur  $\alpha$  on a

$$\hat{\alpha}^{2,3}(s, a_1, a_2) = \sum_{i+j \geq N_1+1} a_1^i a_2^j \Phi_{i,j}(s, a_1, a_2)$$

la fonction  $\Phi_{i,j}$  étant  $C^\infty$ , à support compact  $K_1$  en  $s$ . Donc

$$\begin{aligned} \|\alpha - \gamma_\varepsilon\| \approx \leq C_1 \cdot \sum_{p_1+p_2 \leq N} \int_{K_1} \int e^{M|s|} \left| D_{a_1}^{p_1} D_{a_2}^{p_2} \left( \sum_{i+j \geq N_1+1} a_1^i a_2^j \right. \right. \\ \left. \left. \Phi_{i,j}(s, a_1, a_2) \right) (1 - q_\varepsilon(a_1)q_\varepsilon(a_2)) \right| da_1 da_2 ds. \end{aligned}$$

Puisque  $1 - q_\varepsilon(a_1)q_\varepsilon(a_2) \equiv 0$  pour  $|a_1| \geq \varepsilon$  et  $|a_2| \geq \varepsilon$  et  $D_{a_1}^{r_1} D_{a_2}^{r_2} (1 - q_\varepsilon(a_1)q_\varepsilon(a_2)) = -\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{r_1+r_2} q^{(r_1)}\left(\frac{a_1}{\varepsilon}\right) q^{(r_2)}\left(\frac{a_2}{\varepsilon}\right)$ , un raisonnement analogue à celui de 9.10.9. montre que  $\|\alpha - \gamma_\varepsilon\| \approx$  peut être rendu arbitrairement petit, de même que  $\|\alpha(f) - \gamma_\varepsilon(f)\|$ .

e) Tout  $f \in K^M$  peut être approché arbitrairement dans  $\|\cdot\|$  par des  $\beta(f)$  avec  $\beta \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  tels que  $\hat{\beta}^{2,3}(\cdot, t_1, t_2) \equiv 0$  pour tout  $(t_1, t_2)$  dans un voisinage de  $(0, 0)$  et tels que  $\hat{\beta}^{2,3}(s, t_1, t_2)$  soit à support compact en  $(s, t_1, t_2)$ . En effet, le raisonnement de 9.10.9. peut être adapté facilement.

**9.17.17. Approximation par des combinaisons linéaires de projecteurs :** a) Soit  $\alpha \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  tel que  $\hat{\alpha}^{2,3}(u, t_1, t_2)$  soit à support compact en  $(u, t_1, t_2)$  et tel que  $\hat{\alpha}^{2,3}(\cdot, t_1, t_2)$  s'annule identiquement dans un voisinage de  $(0, 0)$ . En particulier,  $\hat{\alpha}^{2,3}(\cdot, t_1, t_2) \neq 0$  entraîne  $\zeta \leq (t_1^2 + t_2^2)^{1/2} \leq \mathcal{K}$ . Alors l'application

$$\begin{aligned} \beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi[ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (s, t, \theta) &\longmapsto \hat{\alpha}^{2,3} \left( s - t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

est une fonction  $C^\infty$ , à support compact en  $s, t$ . En effet

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{2,3} \left( s - t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) &\neq 0 \\ \Rightarrow \zeta \leq e^{-s} &\leq \mathcal{K} \\ \Leftrightarrow -\ln \mathcal{K} \leq s &\leq -\ln \zeta \\ \Leftrightarrow A \leq s \leq B &\quad \text{pour } A = -\ln \mathcal{K} \text{ et } B = -\ln \zeta. \end{aligned}$$



Remarquons que pour  $\theta = \theta_0$ ,  $\begin{pmatrix} \cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ . Nous allons approcher  $\alpha$  en  $|||\cdot|||^\approx$  par une fonction  $k$  telle que

$$\begin{aligned} \hat{k}^{2,3} \left( s-t, -e^{-s}K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) &= \sum_n \sum_{i_n, j_n} c_{i_n j_n} \varphi_{i_n}(t) \psi_{j_n}(s) \nu_n(\theta) \\ &= \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) \zeta(t) h_{j_n}(s) \\ &\quad \zeta_1(s) \nu_n(\theta) \\ &\text{(somme finie)} \end{aligned}$$

où  $h_{i_n}, h_{j_n}$  sont des fonctions d'Hermite,  $\nu_n(\theta) = e^{in(\theta-\theta_0)}$ ,  $\zeta$  et  $\zeta_1$  des fonctions  $C^\infty$  à support compact. L'approximation se fera pour

$$|||\alpha - k|||^\approx \leq C_1 \sum_{p_1+p_2 \leq N} \int e^{M|u|} |D_{a_1}^{p_1} D_{a_2}^{p_2} [\hat{\alpha}^{2,3} - \hat{k}^{2,3}](u, a_1, a_2)| da_1 da_2 du.$$

b) Effectuons le changement de variables

$$\begin{aligned} u &= s-t \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} &= -e^{-s}K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = -e^{-s} \begin{pmatrix} \cos(\theta - s\omega) \\ \sin(\theta - s\omega) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On trouve

$$\begin{cases} D_{a_1} = \cos(\theta - s\omega)[e^s(D_s + D_t) + \omega e^s D_\theta] + e^s \sin(\theta - s\omega) D_\theta \\ D_{a_2} = \sin(\theta - s\omega)[e^s(D_s + D_t) + \omega e^s D_\theta] - e^s \cos(\theta - s\omega) D_\theta. \end{cases}$$

Remarquons encore que le Jacobien vaut  $e^{-2s}$ . On obtient donc une majoration de la forme

$$\begin{aligned} |||\alpha - k|||^\approx &\leq C \cdot \sum_{r_1+r_2+r_3 \leq N} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} e^{M|s|} e^{M|t|} e^{(r_1+r_2+r_3-2)s} \\ &\quad \left| h_{r_1, r_2, r_3}(s, \theta) D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} (\hat{\alpha}^{2,3} - \hat{k}^{2,3}) \left( s-t, -e^{-s}K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) \right| d\theta ds dt \end{aligned}$$

où  $h_{r_1, r_2, r_3}(s, \theta)$  est une fonction  $C^\infty$ , polynôme en  $\cos(\theta - s\omega)$  et  $\sin(\theta - s\omega)$ .

c) Déterminons à présent les fonctions  $\zeta$  et  $\zeta_1$ . On a

$$\hat{\alpha}^{2,3} \left( s - t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) \neq 0 \\ \Rightarrow (s, t) \in K_1 \times K_2 \text{ compact de } \mathbb{R}^2.$$

Soient  $K_3$  un voisinage compact de  $K_1$  et  $K_4$  un voisinage compact de  $K_2$ . Soient  $\zeta, \zeta_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tels que  $\zeta(t) \equiv 1$  pour  $t \in K_2$  et  $\zeta(t) \equiv 0$  pour  $t \in \mathbb{R} \setminus K_4$ ,  $\zeta_1(s) \equiv 1$  pour  $s \in K_1$  et  $\zeta_1(s) \equiv 0$  pour  $s \in \mathbb{R} \setminus K_3$ . Les fonctions  $h_{i_n}, h_{j_n}, \nu_n$  seront déterminées ultérieurement. On trouve donc

$$\| \alpha - k \| \approx \leq C_2 \cdot \sum_{r_1+r_2+r_3 \leq N} \int_{K_4} \int_{K_3} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} \right. \\ \left. \left[ \hat{\alpha}^{2,3} \left( s - t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) h_{j_n}(s) \right. \right. \\ \left. \left. \zeta(t) \zeta_1(s) \nu_n(\theta) \right] \right| d\theta ds dt$$

en majorant toutes les fonctions continues par une constante sur les compacts  $K_4$  et  $K_3$ .

d) On a

$$\| \alpha - k \| \approx \leq C_2 \cdot \sum_{r_1+r_2+r_3 \leq N} \int_{K_1 \times K_2} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} \right. \\ \left. \left[ \hat{\alpha}^{2,3} \left( s - t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) h_{j_n}(s) \nu_n(\theta) \right] \right| d\theta ds dt \\ + C_2 \cdot \sum_{r_1+r_2+r_3 \leq N} \int_{(K_3 \times K_4) \setminus (K_1 \times K_2)} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} \right. \\ \left. \left( \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) h_{j_n}(s) \zeta(t) \zeta_1(s) \nu_n(\theta) \right) \right| d\theta ds dt$$

puisque  $\zeta_1 \otimes \zeta \equiv 1$  sur  $K_1 \times K_2$ . En effectuant  $D_s^{r_1}(h_{j_n}(s)\zeta_1(s))$ ,  $D_t^{r_2}(h_{i_n}(t)\zeta(t))$ , en majorant  $\zeta(t), \zeta_1(s)$  ainsi que toutes les dérivées de  $\zeta_1$  et  $\zeta$  jusqu'à l'ordre  $N$  sur  $K_3 \times K_4$  et en regroupant les termes, on trouve

$$\begin{aligned} |||\alpha - k||| \approx & \leq C_2 \cdot \sum_{r_1+r_2+r_3 \leq N} \int_{K_1 \times K_2} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} \right. \\ & \left[ \hat{\alpha}^{2,3} \left( s-t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) \right. \\ & \left. \left. - \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) h_{j_n}(s) \nu_n(\theta) \right] \right| d\theta ds dt \\ & + C_3 \cdot \sum_{r_1+r_2+r_3 \leq N} \int_{(K_3 \times K_4) \setminus (K_1 \times K_2)} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} \right. \\ & \left. \left( \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) h_{j_n}(s) \nu_n(\theta) \right) \right| d\theta ds dt \\ & \leq C_4 \cdot \sum_{r_1+r_2+r_3 \leq N} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} \right. \\ & \left[ \hat{\alpha}^{2,3} \left( s-t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) \right. \\ & \left. \left. - \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) h_{j_n}(s) \nu_n(\theta) \right] \right| d\theta ds dt. \end{aligned}$$

Il reste à déterminer les fonctions  $h_{i_n}, h_{j_n}, \nu_n$  et les coefficients  $c_{i_n j_n}$ .

e) Posons

$$\begin{aligned} F(s, t, \theta) &= \hat{\alpha}^{2,3} \left( s-t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) \\ f(s, t, n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} F(s, t, \theta) e^{-in(\theta-\theta_0)} d\theta. \end{aligned}$$

Puisque, pour tout entier  $k > 0$ ,

$$\begin{aligned} |n^k f(s, t, n)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_0-\pi}^{\theta_0+\pi} |D_\theta^k F(s, t, \theta)| d\theta \\ &\leq \sup_{\substack{s, t \\ \theta \in [\theta_0-\pi, \theta_0+\pi]}} |D_\theta^k F(s, t, \theta)| \\ &\leq C_k, \end{aligned}$$

$F$  étant  $C^\infty$ , à support compact en  $s, t$ , la série de Fourier converge uniformément et

$$F(s, t, \theta) = \sum_n f(s, t, n) e^{in(\theta - \theta_0)}.$$

Appliquons le même raisonnement à  $D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} F(s, t, \theta)$ , dont les coefficients de Fourier sont  $(in)^{r_3} D_s^{r_1} D_t^{r_2} f(s, t, n)$ . D'où, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un entier  $M$  tel que

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} [F(s, t, \theta) - \sum_{|n| \leq M} f(s, t, n) e^{in(\theta - \theta_0)}] \right| d\theta ds dt \\ & \leq C \cdot \sup_{\substack{s, t \\ \theta \in [\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi]}} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} F(s, t, \theta) - \sum_{|n| \leq M} (in)^{r_3} D_s^{r_1} D_t^{r_2} f(s, t, n) e^{in(\theta - \theta_0)} \right| \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2(N+1)^3} \text{ quels que soient } r_1, r_2, r_3 \leq N \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{r_1 + r_2 + r_3 \leq N} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} [F(s, t, \theta) - \sum_{|n| \leq M} f(s, t, n) e^{in(\theta - \theta_0)}] \right| d\theta ds dt \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'après ([Sch. 2], p. 262) on peut approcher chaque  $f(s, t, n)$  par des  $\sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) h_{j_n}(s)$ , où les  $h$  sont des fonctions d'Hermite, c'est-à-dire, par choix convenable des  $c_{i_n j_n}$ ,  $h_{i_n}$ ,  $h_{j_n}$ , on a

$$\begin{aligned} & \sum_{r_1 + r_2 + r_3 \leq N} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\theta_0 - \pi}^{\theta_0 + \pi} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} D_\theta^{r_3} \left[ f(s, t, n) e^{in(\theta - \theta_0)} - \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) h_{j_n}(s) e^{in(\theta - \theta_0)} \right] \right| d\theta ds dt \\ & \leq 2\pi \sum_{r_1 + r_2 + r_3 \leq N} n^{r_3} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left| D_s^{r_1} D_t^{r_2} \left[ f(s, t, n) - \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) h_{j_n}(s) \right] \right| ds dt \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2(2M+1)}. \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{|n| \leq M} \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} h_{i_n}(t) h_{j_n}(s) e^{in(\theta - \theta_0)}$$

convient pour approcher  $F(s, t, \theta)$  à  $\varepsilon$  près.

**9.17.18. Comparaison des idéaux  $\mathcal{I}_1$  et  $I$  :** On sait que  $K \cap \mathcal{I}_1$  est un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $\mathcal{S}(G)$ . Par 9.17.17., tout élément  $f$  de  $(K \cap \mathcal{I}_1)^M$  peut être approché arbitrairement dans  $|||\cdot|||$  par des  $\alpha(f)$  où

$$\hat{\alpha}^{2,3} \left( s-t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) = \sum_n \sum_{i_n} \sum_{j_n} c_{i_n j_n} \varphi_{i_n}(t) \psi_{j_n}(s) \nu_n(\theta)$$

avec  $\varphi_{i_n}, \psi_{j_n} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  et  $\nu_n(\theta_0) = 1$ . Soit  $\alpha_{i_n j_n}$  défini par

$$\hat{\alpha}_{i_n j_n}^{2,3} \left( s-t, -e^{-s} K(-s\omega) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \right) = \varphi_{i_n}(t) \psi_{j_n}(s) \nu_n(\theta).$$

Alors  $\alpha_{i_n j_n} \in ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$  et, pour tout  $f \in (K \cap \mathcal{I}_1)^M \subset K \cap \mathcal{I}_1$ ,  $\alpha_{i_n j_n}(f) \in K \cap \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{S} = K \cap I \cap \mathcal{S} \subset I$ . Donc  $\alpha(f) \in I$  et  $f \in I$  puisque  $I$  est fermé et que  $f$  peut être approché arbitrairement par des  $\alpha(f)$ . Ainsi  $(K \cap \mathcal{I}_1)^M \subset I$  et, puisque  $I$  est  $\mathfrak{D}$ -premier,  $K \subset I$  ou  $\mathcal{I}_1 \subset I$ . Le cas  $K \subset I$  a été traité en 9.16. et 9.9. Il reste à terminer le cas  $\mathcal{I}_1 = I$ .

**9.17.19. Raisonnement par récurrence :** Les raisonnements de 9.10.12. et 9.10.13. restent valables. Ceci termine le cas  $b_1$ ), ainsi que la démonstration de 9.8.

**9.18. Remarques finales :**

1) Dans ([Lud. 5]), J. Ludwig démontre le résultat correspondant sans action extérieure. Ce raisonnement se fait en deux étapes :

a) Soit  $I$  un idéal fermé, propre, premier de  $L^1(G)$ . On montre qu'il existe  $\pi \in \hat{G}$  tel que  $h(I \cap \mathcal{S}(G)) = \{\pi\}$  et on en déduit que  $h(I) = \{\pi\}$ .

b) La nilpotence de  $\text{Ker } \pi / \tilde{j}(\pi)$  entraîne que  $I = \text{Ker } \pi$ . Dans le cas d'une action exponentielle nous n'avons plus l'équivalent de l'étape b), étant donné que nous ne connaissons la nilpotence de  $\text{Ker } \Omega / \tilde{j}(\Omega)$  que pour les orbites fermées. Nous avons donc dû faire appel à un résultat apparenté (7.13.).

2) Dans ([Pog. 1]), D. Poguntke étudie un cas particulier de notre problème. Il montre que si  $G = \exp \mathfrak{g}$  est un groupe exponentiel agissant sur  $N = \exp \mathfrak{n}$  où  $\mathfrak{n}$  est le radical nilpotent de  $\mathfrak{g}$  et si  $T$  est une représentation algébriquement irréductible de  $L^1(G)$ , alors  $\text{ker}(T|_{L^1(N)})$  est un idéal  $G$ -premier qui coïncide avec le noyau d'une  $G$ -orbite dans

$\hat{N}$ , resp.  $\mathfrak{n}^*$ . Notre résultat, qui est une généralisation du cas étudié par Poguntke, montre qu'il n'existe pas d'autres idéaux  $G$ -premiers que les noyaux des  $G$ -orbites. Poguntke utilise son résultat pour la classification de toutes les représentations algébriquement irréductibles de l'algèbre  $L^1(G)$  d'un groupe exponentiel.

3) Dans ([Pog. 3]), D. Poguntke pose la question suivante : Soit  $N$  un groupe connexe nilpotent soumis à l'action d'un groupe résoluble connexe  $G$ . Est-ce que tout idéal  $G$ -premier dans  $L^1(N)$  est le noyau d'une  $G$ -orbite dans  $\hat{N}$ , resp.  $\mathfrak{n}^*$  ? Nous venons de répondre affirmativement lorsque  $G$  est un groupe exponentiel connexe, simplement connexe.

# Chapitre 10

## Conclusions

**10.1.** En guise de conclusion, comparons encore une fois les différents résultats pour les groupes de Lie nilpotents, les groupes nilpotents avec action exponentielle et les groupes exponentiels. Cette comparaison nous permettra peut-être de jeter un pont vers des travaux ultérieurs.

### **10.2. Groupes de Lie nilpotents sans action extérieure :**

**10.2.1.** Rappelons que nous nous limitons aux groupes connexes simplement connexes.

**10.2.2.** Toutes les orbites (sous l'action de  $\text{Ad}^* G$ ) sont fermées ([B.C. et al]). De plus, si  $\pi = \text{ind}_H^G \chi_\ell \in \hat{G}$ , les représentations unitaires irréductibles correspondant aux éléments de l'orbite de  $\ell$  sont toutes équivalentes à  $\pi$ . Donc le noyau de l'orbite coïncide avec  $\text{Ker } \pi$ .

**10.2.3.** Dans  $L^1(G)$  les idéaux premiers fermés propres, les idéaux maximaux et les noyaux des représentations unitaires irréductibles coïncident. Dans l'algèbre  $\mathcal{S}(G)$  ceci est encore le cas à condition de supposer que les idéaux premiers sont en plus fermés dans la topologie induite par une norme continue quelconque ([Lud. 5]).

**10.2.4.** Les algèbres  $L^1(G)$  et  $\mathcal{S}(G)$  possèdent la propriété de Wiener, c'est-à-dire pour tout idéal fermé propre  $I$  de  $L^1(G)$ , resp.  $\mathcal{S}(G)$ , il existe  $\pi \in \hat{G}$  tel que  $I \subset \text{Ker } \pi$ , resp.  $I \subset \text{Ker } \pi \cap \mathcal{S}(G)$  ([Lep.], [Lud. 7]).

**10.2.5.** L'algèbre  $\text{Ker } \pi / \bar{j}(\pi)$  est nilpotente, c'est-à-dire il existe  $M \in \mathbb{N}$

tel que  $(\text{Ker } \pi / \tilde{\mathfrak{J}}(\pi))^M = \{0\}$ , où  $\tilde{\mathfrak{J}}(\pi)$  désigne l'idéal minimal fermé de  $L^1(G)$  d'enveloppe  $\{\pi\}$  ([Lud. 5]).

**10.3. Groupes de Lie nilpotents soumis à une action exponentielle :**

**10.3.1.** Les orbites (sous l'action exponentielle) ne sont plus nécessairement fermées. Elles restent cependant ouvertes dans leur adhérence ([B.C. et al]). En effet, soit  $G$  le groupe affine (composante connexe) d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \langle X, Y \rangle$  vérifiant  $[X, Y] = Y$ . Donc  $\mathfrak{n} = \mathbb{R}Y$ . Soit  $\ell = Y^*|_{\mathfrak{n}}$ . Alors l'orbite de  $\ell$  sous l'action de  $G$  est  $\mathbb{R}_+^*(Y^*|_{\mathfrak{n}})$ , c'est-à-dire l'orbite de  $Y^*|_{\mathfrak{n}}$  n'est pas fermée. Remarquons à ce sujet que les orbites de  $\mathfrak{g}^*$  pour l'action de  $G$  sont les points de l'axe des  $x$ , le demi-plan ouvert supérieur, le demi-plan ouvert inférieur, donc que l'orbite correspondante de  $\mathfrak{g}^*$  est également non fermée.

D'ailleurs on peut aussi obtenir une orbite non fermée dans  $\mathfrak{n}^*$ ,  $\mathfrak{n}$  désignant le radical nilpotent d'une algèbre exponentielle  $\mathfrak{g}$ , bien que l'orbite correspondante dans  $\mathfrak{g}^*$  soit fermée. A titre d'exemple, considérons l'action du groupe exponentiel  $G_{6,7}$  sur son radical nilpotent. Le groupe  $G_{6,7}$  est le groupe de Lie connexe, simplement connexe dont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{6,7}$  est engendrée par les vecteurs  $E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  vérifiant

$$\begin{aligned} [E_2, E_3] &= E_4, & [E_1, E_2] &= -E_2, & [E_1, E_3] &= E_3, \\ [E_0, E_1] &= E_4, & [E_0, E_5] &= E_5. \end{aligned}$$

On montre que le radical nilpotent  $\mathfrak{n}$  est donné par  $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}_{6,7}, \mathfrak{g}_{6,7}] = \mathbb{R}E_2 + \mathbb{R}E_3 + \mathbb{R}E_4 + \mathbb{R}E_5$ . Soit  $\ell = E_4^* + E_5^* \in \mathfrak{g}_{6,7}^*$  et posons  $\ell_1 = \ell|_{\mathfrak{n}}$ . Dans ce cas, l'orbite de  $\ell_1$  dans  $\mathfrak{n}^*$  sous l'action de  $G_{6,7}$  est donnée par

$$\Omega_{\ell_1} = \mathbb{R}E_2^* + \mathbb{R}E_3^* + E_4^* + \mathbb{R}_+^*E_5^*,$$

c'est-à-dire cette orbite est non fermée.

Remarquons cependant que l'orbite de  $\ell$  dans  $\mathfrak{g}_{6,7}^*$  est obtenue par les équations cartésiennes

$$\begin{cases} x_1 = \ln x_5 + x_2 x_3 \\ x_4 = 1 \\ x_5 \in \mathbb{R}_+^* \\ x_0, x_2, x_3 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$



$x_0E_0^* + x_1E_1^* + x_2E_2^* + x_3E_3^* + x_4E_4^* + x_5E_5^*$  désignant un point de l'orbite. On voit donc que cette orbite dans  $\mathfrak{g}_{6,7}^*$  est fermée ( $E_1^*$  étant une direction asymptotique), alors que sa projection sur  $\mathfrak{n}^*$  ne l'est pas.

**10.3.2.** Revenons au cas d'un groupe de Lie nilpotent  $G$  soumis à une action exponentielle  $\mathfrak{D}$ . Les idéaux  $\mathfrak{D}$ -invariants maximaux de  $L^1(G)$ , resp.  $\mathcal{S}(G)$  coïncident avec les noyaux  $\text{Ker } \Omega$ , resp.  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$ ,  $\Omega$  désignant une orbite fermée dans  $\mathfrak{g}^*$  pour l'action de  $\mathfrak{D}$  (chapitre 8).

**10.3.3.** Les idéaux  $\mathfrak{D}$ -premiers fermés propres de  $L^1(G)$  coïncident avec les noyaux  $\text{Ker } \Omega$ ,  $\Omega$  désignant une orbite quelconque de  $\mathfrak{g}^*$ . Les idéaux  $\mathfrak{D}$ -premiers propres de  $\mathcal{S}(G)$ , fermés dans la topologie induite par une norme continue quelconque, coïncident avec les  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$ , l'orbite  $\Omega$  étant quelconque. De plus, l'application

$$\Omega \longmapsto \text{Ker } \Omega$$

est une bijection entre l'ensemble des orbites dans  $\mathfrak{g}^*$  et l'ensemble des idéaux  $\mathfrak{D}$ -premiers fermés propres de  $L^1(G)$  (chapitre 9).

**10.3.4.** L'équivalent de la propriété de Wiener est vérifié, c'est-à-dire tout idéal fermé propre  $\mathfrak{D}$ -invariant de  $L^1(G)$ , resp.  $\mathcal{S}(G)$ , est contenu dans un idéal  $\mathfrak{D}$ -invariant maximal, c'est-à-dire dans un noyau  $\text{Ker } \Omega$ , resp.  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$ ,  $\Omega$  étant une orbite fermée (chapitre 8).

**10.3.5.** Si l'orbite  $\Omega$  est fermée, l'algèbre  $\text{Ker } \Omega / \tilde{\mathfrak{J}}(\Omega)$  est nilpotente, c'est-à-dire il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $(\text{Ker } \Omega / \tilde{\mathfrak{J}}(\Omega))^M = \{0\}$ ,  $\tilde{\mathfrak{J}}(\Omega)$  désignant l'idéal minimal fermé de  $L^1(G)$  d'enveloppe  $\Omega$  (chapitre 7).

**10.3.6.** Si l'orbite  $\Omega$  est fermée,  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  est dense dans  $\text{Ker } \Omega$  (chapitre 7).

#### 10.4. Groupes exponentiels :

**10.4.1.** Les résultats précédents ne sont plus vrais dans leur généralité.

**10.4.2.** Soit le groupe exponentiel connexe simplement connexe  $G_{4,9}(0)$  (sans action extérieure) d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}_{4,9}(0) = \langle X, Y, Z, T \rangle$  avec

$$[T, X] = -X, \quad [T, Y] = Y, \quad [X, Y] = Z.$$

Soit  $\ell = Z^*$  et soit  $\mathfrak{h} = \langle T, Y, Z \rangle$  une polarisation correspondante. Alors  $G/H \cong \exp \mathbb{R}X$  pour  $H = \exp \mathfrak{h}$ . Notons  $\pi_p = \text{ind}_H^G \chi(\ell, p)$  la

représentation induite du caractère  $\chi_\ell$  sur l'espace  $L^p(\mathbb{R})$  identifié à l'espace des fonctions  $\xi$  de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$\begin{aligned} \xi(x \cdot h) &= \overline{\chi_\ell(h)} \xi(x) = e^{i(\ell, \log h)} \xi(x) \\ \int_{G/H} |\xi(x)|^p dx &< +\infty. \end{aligned}$$

La représentation  $\pi_p$  est définie par

$$(\pi_p(x)\xi)(y) = \Delta(x)^{-1/p} \xi(x^{-1}y)$$

$\Delta$  étant l'homomorphisme intervenant dans la définition de la mesure semi-invariante sur  $G/H$  (1.4.). Alors  $\pi_p$  est une représentation topologiquement irréductible sur  $L^p(\mathbb{R})$  et une représentation algébriquement irréductible de  $L^1(G)$  sur un sous-espace dense de  $L^p(\mathbb{R})$ . Dans l'algèbre enveloppante  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  soient les éléments centraux  $S = TZ - XY$  et  $R = \frac{1}{2}(S + S^*)$ . L'élément  $R$  est auto-adjoint et on vérifie que

$$d\pi_p(R) = i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \cdot \mathbb{1}.$$

Soit  $I$  l'idéal fermé de  $L^1(G)$  engendré par

$$\left\{ g * \left( R - i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \cdot \mathbb{1} \right) * f \mid f, g \in C_c^\infty(G) \right\}.$$

On a  $I \subset \text{Ker } \pi_p$ . Supposons ensuite qu'il existe  $\zeta \in \hat{G}$  tel que  $\zeta(I) = 0$ . En particulier,  $d\zeta(R) = i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) \mathbb{1}$ . Ceci est une contradiction si  $p \neq 2$ , puisque  $\zeta$  est unitaire et que  $R = R^*$ . Donc  $I$  et  $\text{Ker } \pi_p$  ne sont contenus dans aucun noyau d'une représentation unitaire irréductible. La propriété de Wiener n'est plus vérifiée. Remarquons qu'une méthode analogue a été utilisée par Duflo et mentionnée dans ([Lep.]) pour montrer qu'aucun groupe de Lie connexe, semi-simple non compact ne possède la propriété de Wiener.

**10.4.3.** Puisque  $\pi_p$  est irréductible (topologiquement, resp. algébriquement selon l'espace de la représentation),  $\text{Ker } \pi_p$  est un idéal premier (démonstration analogue à celle de 9.3.). Ainsi les idéaux premiers ne coïncident plus avec les noyaux des représentations unitaires irréductibles.

**10.4.4.** D'autres groupes exponentiels non nilpotents par contre possèdent la propriété de Wiener. Ceci est le cas par exemple pour le groupe affine, comme produit semi-direct de deux groupes abéliens ([Lep.]).

**10.4.5.** Il n'existe jusqu'à présent que des résultats partiels pour les groupes exponentiels. Pour ces groupes les représentations unitaires irréductibles ne suffisent plus pour résoudre les problèmes posés. La structure des orbites semble jouer un rôle important.

### 10.5. Questions ouvertes :

**10.5.1.** Pour les actions exponentielles sur un groupe de Lie nilpotent,  $\text{Ker } \Omega \cap \mathcal{S}(G)$  est dense dans  $\text{Ker } \Omega$  à condition que l'orbite  $\Omega$  soit fermée (chapitre 7). Si l'orbite  $\Omega$  n'est pas fermée, on ne sait pas si ce résultat reste valable. Si oui, on pourrait encore en déduire qu'il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que  $(\text{Ker } \bar{\Omega} / \bar{j}(\bar{\Omega}))^M = \{0\}$ .

**10.5.2.** Existe-t-il dans  $\mathcal{S}(G)$  des idéaux fermés  $\mathfrak{D}$ -premiers qui ne sont pas fermés pour la topologie induite par une norme continue particulière ? Si oui, peut-on les caractériser ?

**10.5.3.** Quels sont les groupes exponentiels qui possèdent la propriété de Wiener et quels sont ceux qui ne la possèdent pas ? Qu'en est-il des autres propriétés ?

**10.5.4.** Pourrait-on établir des résultats analogues pour une action (à préciser) d'un groupe résoluble sur un groupe nilpotent ? ([Pog. 3]).

**10.5.5.** Ces quelques questions énumérées à titre d'exemple montrent que dans le domaine étudié dans cette thèse, le travail futur ne manque certainement pas.

## Références bibliographiques

- [A.M.] AGMON, S., MANDELBROJT, S., Une généralisation du théorème taubérien de Wiener, Acta Litt. Sci. Szeged, t. XII, 167-176 (1950).
- [B.C. et al] BERNAT, P., CONZE, N., DUFLO, M., LÉVY-NAHAS, M., RAIS, M., RENOARD, P., VERGNE, M., Représentations des groupes de Lie résolubles, Dunod, Paris (1972).
- [Boi.] BOIDOL, J., Räume primitiver Ideale von Gruppenalgebren, Math. Ann. 236, 1-13 (1978).
- [Dix. 1] DIXMIER, J., L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles, Bull. Soc. Math. France 85, 113-121 (1957).
- [Dix. 2] DIXMIER, J., Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires, Publ. Math. IHES 6, 305-317 (1960).
- [Dix. 3] DIXMIER, J., Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations, Gauthier-Villars, Paris (1969).
- [Dix. 4] DIXMIER, J., Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris (1974).
- [God. 1] GODEMENT, R., Extension à un groupe abélien quelconque des théorèmes taubériens de N. Wiener et d'un théorème de A. Beurling, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A223, 16-18 (1946).

- [God. 2] GODEMENT, R., Théorèmes taubériens et théorie spectrale, *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.* 64, 119-138 (1947).
- [Hel.] HELSON, H., Spectral synthesis of bounded functions, *Ark. Mat.*, t. I, 497-502 (1951).
- [Hoch.] HOCHSCHILD, G., *The structure of Lie Groups*, Holden-Day Inc., San Francisco, London, Amsterdam (1965).
- [How.] HOWE, R., On a Connection between Nilpotent Groups and Oscillatory Integrals associated to Singularities, *Pacific J. of Math.* 73, 2, 329-363 (1977).
- [Hu.] HULANICKI, A., A functional calculus for Rockland operators on nilpotent Lie groups, *Stud. Math.* 78, 253-266 (1984).
- [Kap.] KAPLANSKY, I., Primary ideals in group algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, t. XXXV, 133-136 (1949).
- [Lep.] LEPTIN, H., Ideal Theory in Group Algebras of Locally Compact Groups, *Inventiones math.* 31, 259-278 (1976).
- [Lep. Lud.] LEPTIN, H., LUDWIG, J., Unitary Representation Theory of Exponential Lie groups, *De Gruyter Expositions in Mathematics* 18, De Gruyter, Berlin, New York (1994).
- [Lep. Pog.] LEPTIN, H., POGUNTKE, D., Symmetry and non symmetry for locally compact groups, *J. Funct. Anal.* 33, 119-134 (1979).
- [Lud. 1] LUDWIG, J., Good Ideals in the Group Algebra of a Nilpotent Lie Group, *Math. Z.* 161, 195-210 (1978).
- [Lud. 2] LUDWIG, J., Polynomial Growth and Ideals in Group Algebras, *manuscripta math.* 30, 215-221 (1980).
- [Lud. 3] LUDWIG, J., On the spectral synthesis problem for points in the dual of a nilpotent Lie group, *Arkiv för matematik*, Vol 21 No 1, 127-144 (1983).

- [Lud. 4] LUDWIG, J., Irreducible representations of exponential solvable Lie groups and operators with smooth kernels, *J. reine angew. Math.* 339, 1-26 (1983).
- [Lud. 5] LUDWIG, J., On Primary Ideals in the Group Algebra of a Nilpotent Lie Group, *Math. Ann.* 262, 287-304 (1983).
- [Lud. 6] LUDWIG, J., Prime Ideals in the  $C^*$ -algebra of a Nilpotent Group, *Mh. Math.* 101, 159-165 (1986).
- [Lud. 7] LUDWIG, J., Minimal  $C^*$ -Dense Ideals and Algebraically Irreducible Representations of the Schwartz-Algebra of a Nilpotent Lie group, *Harmonic Analysis, Lecture Notes in Math.* 1359, Springer Verlag, 209-217 (1987).
- [Lud. Mol. 1] LUDWIG, J., MOLITOR-BRAUN, C., Algèbre de Schwartz d'un groupe de Lie nilpotent, *Publications du Centre Universitaire de Luxembourg, Travaux mathématiques VII*, 25-67 (1995).
- [Lud. Mol. 2] LUDWIG, J., MOLITOR-BRAUN, C., A Restriction Theorem for Ideals in the Schwartz Algebra of a Nilpotent Lie Group, à paraître dans *Archiv der Mathematik*.
- [Lud. Ro. Sa.] LUDWIG, J., ROSENBAUM, G., SAMUEL, J., The elements of bounded trace in the  $C^*$ -algebra of a nilpotent Lie group, *Inventiones math.* 83, 167-190 (1986).
- [Mal.] MALLIAVIN, P., Impossibilité de la synthèse spectrale sur les groupes abéliens non compacts, *Inst. hautes études scien.* 2, 61-68 (1959).
- [Mol. 1] MOLITOR-BRAUN, C., La propriété de Wiener, *Publications du Centre Universitaire de Luxembourg, Travaux mathématiques III*, 33-44 (1991).
- [Mol. 2] MOLITOR-BRAUN, C., Les polarisations de Vergne dans une algèbre de Lie exponentielle, *Publications du Centre Universitaire de Luxembourg, Travaux mathématiques IV*, 139-182 (1992).

- [Mol. 3] MOLITOR-BRAUN, C., Représentations induites dans les groupes et algèbres de Lie exponentiels, Publications du Centre Universitaire de Luxembourg, Travaux mathématiques, 113-130 (1993).
- [Pog. 1] POGUNTKE, D., Algebraically Irreducible Representations of  $L^1$ -Algebras of Exponential Lie Groups, Duke Math. J. 50, No 4, 1077-1106 (1983).
- [Pog. 2] POGUNTKE, D., Über das Synthese-Problem für nilpotente Liesche Gruppen, Math. Ann. 269, 431-467 (1984).
- [Pog. 3] POGUNTKE, D., Spectral Synthesis of Orbits of Compact Groups, Harmonic analysis and operator algebras, Mini-conf., Canberra/Aust. 1987, Proc. Cent. Math. Anal. Aust. Natl. Univ. 16, 247-261 (1988).
- [Puk. 1] PUKANSZKY, L., On the theory of exponential groups, Trans. Amer. Math. Soc. 126, 487-507 (1967).
- [Puk. 2] PUKANSZKY, L., On the Unitary Representations of Exponential Groups, J. Funct. Anal. 2, 73-113 (1968).
- [Rei.] REITER, H., Investigations in harmonic analysis, Trans. Amer. Math. Soc., t. LXXIII, 401-427 (1952).
- [Ri.] RISS, J., Eléments de calcul différentiel et théorie des distributions dans les groupes abéliens localement compacts, Acta Mathematica, t. LXXXIX, 45-105 (1953).
- [Sch. 1] SCHWARTZ, L., Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts, C. R. Acad. Sci. Paris 227, 424-426 (1948).
- [Sch. 2] SCHWARTZ, L., Théorie des distributions, Hermann, Paris (1973).
- [Se.] SEGAL, I., The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc., t. LXI, 69-105 (1947).

- [Wie. 1] WIENER, N., Tauberian theorems, *Ann. of Math.* 33, 1-100 (1932).
- [Wie. 2] WIENER, N., *The Fourier Integral and Certain of its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge (1933), Reprinted by Dover Publications, New York (1958).



# Index des notations

$A_F(\bar{x}, D)$	6.4.
$\tilde{A}_{\tilde{F}}(\bar{x}, D)$	6.4.
$\mathfrak{d}$	2.2.
$\mathfrak{D} = \exp \mathfrak{d}$	2.2.
$\mathfrak{d}_\ell$	2.8.
$\mathfrak{D}_\ell$	2.8.
$\mathfrak{D}_{\mathcal{O}(\ell)}$	2.8.
$\mathfrak{d}_{\mathcal{O}(\ell)}$	2.8.
$\mathfrak{d}_\pi$	2.8.
$\mathfrak{D}_\pi$	2.8.
$d(\ell)$	7.2.
$d^* \cdot \ell$	2.4.
$D^* \cdot \ell$	2.4.
$ES(N, G)$	4.6.
$ES(N, K, G/H \times G/H, \ell)$	6.6.
$ES(N, K, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$	6.6.
$ES(N, \mathbb{R}^n, G/H \times G/H, \ell)$	6.3.
$ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$	4.2.
$ES(\mathbb{R}^2)_0$	9.10.8.
$ES(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)_0$	9.17.15.

INDEX DES NOTATIONS

219

$f^D$	2.4.
$f_\pi$	1.8.
$\hat{f}(\ell)$	5.3.
$\hat{f}^i$	9.8.
$\tilde{f}^2$	9.10.2., 9.12.2., 9.14.3., 9.17.9.
$\mathfrak{g}$	1.2.
$G$	1.2.
$\hat{G}$	1.5.
$\mathfrak{g}(\ell)$	1.4.
$g(T)$	7.3.
$\mathfrak{h}$	1.4.
$\mathfrak{h}^\perp$	1.4.
$\mathcal{H}_\pi$	1.4.
$\mathcal{I}_0$	9.10.6., 9.12.6., 9.14.8., 9.17.13.
$I_0$	9.10.1., 9.11.1., 9.17.2.
$\mathcal{I}_1$	9.10.7., 9.12.7., 9.14.9., 9.17.14.
$I_1$	9.10.5., 9.12.5., 9.14.7., 9.17.12.
$\tilde{I}_t$	9.10.5., 9.12.5., 9.17.12.
$\tilde{I}_{(t,s)}$	9.14.7.
$\text{ind}_H^G \chi_\ell$	1.4.
$j(\Omega)$	7.15.
$\tilde{j}(\Omega)$	7.15.
$K(\theta)$	3.8.
$\text{Ker } \alpha _{\text{ad } \mathfrak{g}}$	3.11.
$\mathfrak{m}(\ell)$	3.1.
$\mathfrak{n}$	1.6.

INDEX DES NOTATIONS

220

$\mathcal{O}(\ell)$	1.5.
Prim $C^*(G)$	1.5.
Prim $*$ $L^1(G)$	1.5.
$\mathcal{S}$	9.10.7., 9.12.7., 9.14.9., 9.17.14.
$\mathcal{S}(G)$	2.5.
$\mathcal{S}(G)_1$	9.10.4., 9.12.4., 9.14.6.
supp $\hat{f}$	7.8.
$x, y$	1.2.
$X, Y$	1.2.
$D_x$	2.4.
$\alpha(f)$	9.10.2., 9.12.2., 9.14.4., 9.17.9.
$\delta(D)$	2.4.
$\Delta$	1.4.
$\Delta_G, \Delta_H$	1.4.
$\pi(f)$	1.8.
$\ \cdot\ _{\alpha, P}$	4.2., 4.6.
$D_\pi$	2.4.
$\pi_p$	10.4.2.
$\chi_\ell$	1.4.
$\Omega_\ell$	2.10.
$*G, *\bar{G}$	9.8.
$\otimes$	9.10.3., 9.17.10.

# Index terminologique

action exponentielle	2.2., 2.4.
annihilateur	2.8.
base coexponentielle	1.6.
base $n$ -spéciale	4.5.
critère de Pukanszky	1.4.
groupe exponentiel	1.3.
idéal $\mathfrak{D}$ -invariant	8.4.
idéal $\mathfrak{D}$ -premier	9.2.
idéal minimal	7.15.
orbite (généralisée)	2.10.
polarisation	1.4.
représentation induite	1.4.
rétracte	5.14., 9.9.2., 9.10.4., 9.12.4., 9.13.5., 9.14.6., 9.17.11.
stabilisateur	2.8.

# Table des matières

Introduction	1
Chapitre 1 : Groupes exponentiels et leurs représentations	6
Chapitre 2 : Actions exponentielles et leurs orbites	11
Chapitre 3 : Différentes étapes d'une démonstration par récurrence	16
Chapitre 4 : Les espaces $ES$	41
Chapitre 5 : Les fonctions de $ES(N, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k)$ comme noyaux	49
Chapitre 6 : Actions exponentielles sur un groupe nilpotent	78
Chapitre 7 : Etude des orbites	91
Chapitre 8 : Idéaux $\mathcal{D}$ -invariants maximaux et propriété de Wiener	108
Chapitre 9 : Idéaux $\mathcal{D}$ -premiers	112
Chapitre 10 : Conclusions	208
Références bibliographiques	213
Index des notations	218
Index terminologique	221
Table des matières	222