Prévision de la résistance en compression des composites à fibres longues : approche structurelle du microflambage plastique

Sylvain Drapier

▶ **To cite this version:**

Sylvain Drapier. Prévision de la résistance en compression des composites à fibres longues : approche structurelle du microflambage plastique. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1996. Français. NNT : 1996METZ024S . tel-01777136

HAL Id: tel-01777136
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777136

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à

UNIVERSITE DE METZ

PAR

Sylvain DRAPIER

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : Science de l'Ingénieur
OPTION : Mécanique

PRÉVISION DE LA RÉSISTANCE EN COMPRESSION DES COMPOSITES À FIBRES LONGUES : APPROCHE STRUCTURELLE DU MICROFLAMBAGE PLASTIQUE

soutenue le 20 Septembre 1996 devant le jury composé de :

P. DAVIES	(IFREMER)
J.C. GRANDIDIER	(L.P.M.M. Université de Metz)
D. GUÉDRA-DEGEORGES	(Aérospatiale)
J.J. MARIGO	(L.P.T.M. Université Paris-Nord)
M. POTIER-FERRY	(L.P.M.M. Université de Metz)
P. SIGETY	(O.N.E.R.A.)
A. VAUTRIN	Rapporteur (École des mines de St.-Étienne)
M.R. WISNOM	Rapporteur (University of Bristol)

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, U.R.A. C.N.R.S. 1215
I.S.G.M.P., Île du Saulcy, 57045 METZ Cédex 01

b 1φ2244

~~S/Mz 96/44~~

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

THESE

Présentée à

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
- METZ

N° inv	1996048S
Cote	S/Mz 96/24
Loc	Magasin

UNIVERSITE DE METZ

PAR

Sylvain DRAPIER

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : Science de l'Ingénieur
OPTION : Mécanique

PRÉVISION DE LA RÉSISTANCE EN COMPRESSION DES COMPOSITES À FIBRES LONGUES : APPROCHE STRUCTURELLE DU MICROFLAMBAGE PLASTIQUE

soutenue le 20 Septembre 1996 devant le jury composé de :

P. DAVIES	(IFREMER)
J.C. GRANDIDIER	(L.P.M.M. Université de Metz)
D. GUÉDRA-DEGEORGES	(Aérospatiale)
J.J. MARIGO	(L.P.T.M. Université Paris-Nord)
M. POTIER-FERRY	(L.P.M.M. Université de Metz)
P. SIGETY	(O.N.E.R.A.)
A. VAUTRIN	Rapporteur (École des mines de St.-Étienne)
M.R. WISNOM	Rapporteur (University of Bristol)

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, U.R.A. C.N.R.S. 1215
I.S.G.M.P., Île du Saulcy, 57045 METZ Cédex 01

REMERCIEMENTS

Ce document présente l'aboutissement de 3 années de thèse passées au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux. Je souhaite, dans cette trop courte page, remercier l'ensemble des personnes qui m'ont permis, par leur aide et leur écoute, de mener à bien ce travail.

C'est dans l'équipe de Monsieur Michel POTIER-FERRY que Monsieur Jean-Claude GRANDIDIER a accepté, et je lui en suis infiniment reconnaissant, la (lourde ?) responsabilité de m'encadrer.

C'est donc tout naturellement à Michel et Jean-Claude que va en premier lieu ma plus profonde gratitude. Tout au long des 4 années passées à leurs côtés, ils m'ont initié à la recherche par leur savoir, mais également par l'enthousiasme qu'ils ont su me communiquer. Je les remercie vivement pour leur gentillesse, leurs conseils avisés, et l'attention qu'ils ont toujours porté à ce travail.

Messieurs Alain VAUTRIN et Michael R. WISNOM ont accepté la responsabilité de lire, commenter, et juger ce volumineux mémoire, qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance. Je les remercie également pour l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux.

Monsieur Jean-Jacques MARIGO m'a fait l'honneur de présider ce jury, je lui en suis extrêmement reconnaissant.

Messieurs Peter DAVIES, Didier GUÉDRA-DEGEORGES et Pierre SIGETY ont accepté de représenter la partie "industriels" de ce jury, c'était pour moi un point essentiel. Je les remercie de leur participation ainsi que de l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux.

Je tiens également à remercier mes collègues et amis du laboratoire, particulièrement les thésards et maîtres de conférence, pour les discussions, parfois non académiques, qui m'ont permis de progresser dans la bonne humeur. Que mes collègues du groupe "Calcul des Structures" soient également remerciés pour les fructueuses discussions que nous avons eu régulièrement. Enfin, j'adresse à l'ensemble du personnel du laboratoire mes remerciements pour les nombreux services qu'ils m'ont aimablement rendus.

Je profite de ces quelques lignes pour exprimer à mon épouse ma profonde reconnaissance pour sa patience et son soutien. J'associe également à ce travail mes parents pour leurs encouragements permanents.

PLAN DE LA THÈSE

INTRODUCTION ---------- 0

PARTIE A. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE DU COMPORTEMENT EN COMPRESSION DES COMPOSITES À FIBRES LONGUES ---------- 4

1. LES MATÉRIAUX COMPOSITES ---------- 5

2. MODÉLISATION ET CARACTÉRISATION DES STRATIFIÉS ---------- 15

3. ÉTUDE DU COMPORTEMENT EN COMPRESSION ---------- 20

4. DISCUSSION ---------- 61

PARTIE B. FORMULATION LOCALE DU PROBLÈME DE MICROFLAMBAGE PLASTIQUE AVEC DÉFAUT ---------- 63

1. FORMULATION DU PROBLÈME DE MICROFLAMBAGE AVEC DÉFAUT DES FIBRES ET LOI DE COMPORTEMENT NON LINÉAIRE ---------- 64

2. CINÉMATIQUE À DOUBLE ÉCHELLE ---------- 69

3. PRISE EN COMPTE DE LA LOI DE COMPORTEMENT NON LINÉAIRE DE LA MATRICE ---------- 78

4. SYNTHÈSE DE LA MODÉLISATION ---------- 93

PARTIE C. DESCRIPTION DE LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE ET MISE EN ŒUVRE DANS UN CODE SPÉCIFIQUE ---------- 96

1. DÉFINITION DE LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE ---------- 97

2. APPROXIMATION DU DÉPLACEMENT - PROBLÈME DISCRÉTISÉ ---------- 116

3. PROBLÈME DISCRÉTISÉ - IMPLÉMENTATION ---------- 122

4. SYNTHÈSE DE LA DESCRIPTION NUMÉRIQUE ---------- 129

PARTIE D. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE ---------- 130

1. MAILLAGE ---------- 131

2. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DU MÉCANISME DE MICROFLAMBAGE ---------- 136

3. EFFET DES PARAMÈTRES STRUCTURAUX SUR LA RÉSISTANCE EN COMPRESSION ---------- 165

4. COMPARAISON DE NOS PRÉVISIONS AVEC LES EXPÉRIENCES---------- 191

5. CONCLUSION ---------- 206

CONCLUSIONS ---------- 209

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES ---------- 213

ANNEXES ---------- 220

INTRODUCTION

INTRODUCTION

L'utilisation des matériaux composites est aujourd'hui très répandue dans les applications de pointe où leurs caractéristiques spécifiques élevées sont les plus propices à réaliser des économies. En particulier dans le domaine de l'aéronautique ou dans les transports en général, les stratifiés à fibres longues sont largement utilisés. Employés sous forme de stratifiés obtenus par empilement de plis UniDirectionnels, les méthodes de conception et de fabrication qu'ils requièrent sont maintenant bien maîtrisées. Malheureusement, lorsque ces matériaux sont sollicités en compression dans la direction des fibres, ils présentent une faible résistance qui ne permet pas de tirer pleinement partie de leurs bonnes performances en traction sans cesse améliorées ces dernières années. Actuellement cette faiblesse est un paramètre de dimensionnement pénalisant, dont la compréhension et la prévision sont un passage obligé vers une conception optimale des structures à base de composites.

Depuis plus de 30 ans, l'étude du comportement en compression des composites à fibres longues a fait l'objet de nombreux travaux, tant sur le plan expérimental que théorique. La plupart des modèles existants sont des modèles micromécaniques dans lesquels les couples fibre-matrice constituant le composite sont représentés par un empilement infini de poutres sur fondations. À partir d'un modèle de ce type, ROSEN (1964) a montré dans un cadre élastique 2D que la rupture intervient par apparition d'une instabilité géométrique des fibres (microflambage), pour une contrainte de l'ordre du module de cisaillement du composite. Les prévisions obtenues avec ce modèle sont bien plus élevées que les mesures expérimentales, ce qui a conduit ARGON (1972) puis BUDIANSKY (1983) à reconsidérer le problème en associant la rupture à un mécanisme de pliage et en y introduisant le comportement non linéaire de la matrice et la présence d'un défaut initial d'ondulation des fibres. Ces modèles fournissent des prévisions assez proches des valeurs à rupture observées sur des essais de compression directe. Par la suite, de nombreuses modélisations microscopiques, aussi bien analytiques (STEIFF, 1990) que par élément fini (EFFENDI, 1992; WISNOM, 1994), ont permis d'affiner la compréhension de ce mécanisme qui conduit à la rupture.

Depuis quelques années, des expériences réalisées avec des **montages de flexion** ont montré que la résistance en compression des plis UniDirectionnels à fibres longues est au moins égale à

celle observée en traction (GRANDIDIER, 1991; GRANDSIRE-VINÇON, 1993; WISNOM, 1993). Les résistances élevées atteintes avec ces montages montrent clairement que la valeur à rupture en compression ne peut être dissociée du type de chargement appliqué au pli, ou plus précisément du gradient de chargement dans l'épaisseur du pli. La séquence d'empilement du stratifié et l'épaisseur des plis UD influent également sur la résistance mesurée expérimentalement. L'effet de ces 3 paramètres : gradient de chargement dans l'épaisseur du pli, épaisseur et séquence d'empilement , est généralement regroupé sous le terme générique d'**effet de structure**.

Au vu de ces résultats, la notion de résistance intrinsèque au matériau doit être abandonnée. En conséquence les approches locales classiques ne sont plus valides car elles sont indépendantes des données structurelles. Dans leur approche à l'échelle du pli, SCHAFFERS (1977), GRANDIDIER (1991), puis SWANSON (1992) ont introduit la notion de longueur caractéristique transverse à la direction des fibres en recherchant la solution du problème de microflambage comme une fonction de l'épaisseur donnée à priori. La contrainte de microflambage correspondante est alors une fonction explicite de l'épaisseur du pli et de sa position dans la séquence d'empilement, prise en compte par une hauteur fictive dépendant de l'orientation des plis adjacents au pli UD étudié. Ces modèles offrent une approche tout à fait intéressante mais l'évolution du déplacement dans l'épaisseur, qui joue un rôle primordial, est posée à priori alors qu'elle dépend des données structurelles.

GARDIN, GRANDIDIER & POTIER-FERRY (1996 part I) ont reconsidéré le problème à sa base en déterminant les modes de microflambage élastiques à l'aide d'une discrétisation complète d'un pli 2D. À partir de ces résultats une cinématique particulière à l'échelle du pli a été proposée, elle a été validée par une étude asymptotique mésoscopique (GARDIN & POTIER-FERRY, 1992). Elle se base sur une cinématique 2D classique pour la matrice associée à une cinématique de type Bernouilli pour les fibres. Un modèle homogénéisé bidimensionnel en a été déduit (GARDIN, GRANDIDIER & POTIER-FERRY part II, 1996), dans lequel le comportement de la microstructure peut être vu comme un milieu homogène équivalent sur lequel est répartie la flexion des fibres. Dans un cadre élastique linéaire, une étude paramétrique a clairement établi l'effet des paramètres structuraux sur les modes de microflambage de plis UD et de stratifiés.

Le sujet de cette thèse s'inscrit comme la continuité des recherches développées par GARDIN, GRANDIDIER & POTIER-FERRY. Dans le but de prévoir quantitativement la rupture des composites, le modèle homogénéisé de microflambage doit être complété. La nouvelle formulation que nous proposons prend en compte les éléments clés du mécanisme de microflambage, à savoir le défaut des fibres et le comportement plastique de la matrice. L'approche numérique spécifique que nous associons à cette formulation nous permet de mener une étude paramétrique très complète du problème de microflambage plastique structurel.

L'ensemble de cette étude se compose de 4 parties.

1ère partie

Cette partie est consacrée aux travaux portant sur la compression des composites à fibres longues, et plus spécifiquement à ceux qui ont permis de mettre en évidence l'effet de structure. Les matériaux composites étudiés dans ce travail sont d'abord présentés dans un cadre général. Ensuite les principaux moyens expérimentaux utilisés pour la caractérisation de la compression sont exposés. La comparaison des résultats obtenus avec des montages de compression pure et avec des montages de flexion introduit l'influence de l'effet des paramètres structuraux sur la résistance en compression. Les modèles classiques de microflambage sont ensuite présentés, suivis des modèles capables de prendre en compte l'effet de structure. Cette partie se termine par la présentation du modèle homogénéisé bidimensionnel de microflambage qui est établi dans un cadre parfait, et sur lequel se base le reste de cette étude.

2ième partie

Dans cette partie nous construisons le problème de microflambage plastique à partir du modèle homogénéisé élastique. Nous complétons tout d'abord le modèle élastique pour pouvoir prendre en compte les défauts d'ondulation qui sont primordiaux dans le mécanisme de microflambage plastique. Pour des raisons de coûts de calculs que nous souhaitons les plus bas possibles, le problème de microflambage est ensuite reformulé à l'échelle mésoscopique à l'aide d'une cinématique à double échelle. Enfin, nous explicitons la prise en compte de la plasticité de

la matrice qui requiert, en plus des opérations classiquement mises en œuvre pour un matériau non linéaire, des opérations de localisation - homogénéisation liées au caractère homogénéisé du modèle utilisé.

3ième partie

Le problème de microflambage plastique étant non linéaire matériau et géométrique, seule une résolution numérique du problème est envisageable. En conséquence, le problème est d'abord linéarisé par un développement de NEWTON, puis un pilotage à "longueur d'arc" est mis en place. Afin de conserver des temps de calculs raisonnables, la solution de notre problème posé en déplacement est recherchée de manière particulière. Le déplacement est approximé par une combinaison d'élément finis dans l'épaisseur du pli en produit avec des harmoniques dans la directions des fibres. Enfin, le problème discrétisé est posé, puis la mise en oeuvre de l'implémentation est rapidement décrite.

4ième partie

À l'aide de l'outil numérique mis en place, nous étudions d'abord le mécanisme de microflambage plastique à l'échelle des constituants. Puis nous traitons de l'influence des paramètres structuraux sur la résistance en compression de différents plis UD. Enfin, des stratifiés sont étudiés, ils nous permettent de comparer les prévisions de notre approche numérique avec les résultats des essais présentés dans la 1ère partie qui ont mis en évidence l'effet de structure.

PARTIE A

Revue Bibliographique du Comportement en Compression des Composites à Fibres Longues

1. LES MATÉRIAUX COMPOSITES ---- 6

1.1 Quels composites pour quels besoins ? ---- 6
1.1.1 Les composites GD ---- 7
1.1.2 Les composites HP ---- 8
1.2 Quelques types courants de fibre et de matrice ---- 11
1.2.2 Matrices polymères ---- 13
1.3 Utilisation des composites sous forme de stratifiés ---- 14

2. MODÉLISATION ET CARACTÉRISATION DES STRATIFIÉS ---- 15

2.1 Modélisation des stratifiés ---- 15
2.2 Prévision de la rupture ---- 16
2.3 Caractérisation ---- 18

3. ÉTUDE DU COMPORTEMENT EN COMPRESSION ---- 20

3.1 Comportement et caractérisation des constituants ---- 20
3.1.1 La résine ---- 20
3.1.2 Les fibres ---- 20
3.2 Caractérisation des composites en compression ---- 22
3.2.1 Essais de compression directe ---- 23
3.2.2 Essais de flexion / flambage rotulé / flexion - compression ---- 25
3.3 Discussion ---- 28
3.4 Modélisation ---- 30
3.4.1 Modèles de microflambage ---- 30
3.4.2 Modèles de "kinking" ---- 34
3.4.3 Modes de rupture ---- 37
3.4.4 Défaut d'ondulation des fibres ---- 39
3.4.5 Modèles hétérogènes / Modèles homogénéisés ---- 41
3.4.6 Effet de structure ---- 48
3.4.7 Caractérisation des modes élastiques de microflambage ---- 53
3.4.8 Un modèle homogénéisé avec effet de structure ---- 58

4. DISCUSSION ---- 61

1. LES MATÉRIAUX COMPOSITES

Les matériaux composites modernes ont été introduits comme une alternative aux matériaux métalliques par souci d'économie de poids, et dans l'optique d'optimiser certaines caractéristiques spécifiques. Les composites sont obtenus par "assemblage" de 2 ou plusieurs matériaux, combinés de manière à obtenir des propriétés du composite qui sont différentes, et généralement meilleures, que celles des constituants pris séparément. Grâce à la diversité des matériaux constitutifs, l'utilisation des matériaux composites offre une nouvelle dimension au concepteur. Le choix des constituants, de leur fraction volumique respective et de la manière de les assembler devient un moyen efficace de cibler au mieux le rapport "caractéristique souhaitée / poids". C'est cette richesse associée à la difficulté de les maîtriser qui a fait des matériaux microhétérogènes un domaine de recherche qui n'a cessé de se développer depuis plus de 30 ans. On peut trouver ces matériaux dans des domaines d'application aussi divers que les transports, les loisirs, les biens d'équipement, la construction mécanique ou encore le BTP. Pourtant, c'est dans le domaine des transports, privilégiant le gain de poids, que l'emploi de ces matériaux trouve tout son sens.

1.1 Quels composites pour quels besoins ?

Les composites les plus répandus sont constitués de 2 matériaux distincts. Ils sont conçus tels que les chargements appliqués sont principalement supportés par le renfort. Le liant (ou matrice) donne une cohésion à l'ensemble et sert à transmettre les efforts et à protéger les renforts des agressions extérieures. Les constituants sont généralement choisis pour leurs propriétés mécaniques ou thermomécaniques, mais le prix de revient ou la tenue aux agressions chimiques peuvent également être des critères de sélection. La seule limitation des combinaisons liant - renforts reste leur compatibilité physico chimique. Les 3 grandes familles de composites se caractérisent par le type de matrice utilisé.

Les **Composites à Matrice Métallique** sont utilisés comme des métaux et sont constitués d'une matrice à base métallique. Les renforts sont présents sous forme de particules de quelques µm ou également sous forme de fibres. Les CMM sont recommandés pour des applications dans lesquelles les déformations plastiques doivent être très minimes même pour des températures de service élevées. Ils possèdent généralement une très bonne tenue au fluage.

Les **Composites à Matrice Céramique** relativement fragiles sont utilisés pour leur rigidité et leur résistance élevées aux hautes températures (1000°C). La matrice possède généralement une rigidité proche des renforts auxquels elle est associée. Les CMC nécessitent des températures d'élaboration élevées, ce qui pose des problèmes de compatibilité renfort - matrice.

Les **Composites à Matrice Organique** représentent la majorité des composites utilisés actuellement. La matrice est de type polymère, plus communément appelée "plastique". Les renforts utilisés sont majoritairement des fibres de carbone, de verre ou d'aramide sous forme courte (<50 mm) ou longue (>50 mm). Les résines organiques possèdent des caractéristiques thermomécaniques inférieures à la plupart des matrices métalliques et céramiques, mais elles sont suffisantes dans de très nombreux cas. Grâce à la diversité des moyens de fabrication et aux nombreux renforts et matrices disponibles, les CMO couvrent un vaste champ d'application qui va des pièces d'habillage produites en très grande série à des pièces structurales à exemplaire unique fabriquées manuellement. Les CMO utilisés dans ces 2 grandes familles d'application sont très différents et sont désignés respectivement par les composites Grande Diffusion et les composites Haute Performance.

1.1.1 Les composites GD

Les composites GD possèdent des caractéristiques mécaniques souvent inférieures à celle des matériaux de référence tels que l'acier. Ils sont utilisés pour leur prix de revient global (matière + mise en œuvre) attrayant et leur faible poids. De plus, les techniques d'obtention (injection, pultrusion, ...) utilisées permettent d'obtenir des pièces de formes complexes en une seule opération. Ce type de matériau, généralement à base de fibres de verre, convient parfaitement aux grandes séries telles que celles rencontrées dans l'industrie automobile (**Figure A 1**) ou encore dans les biens d'équipement.

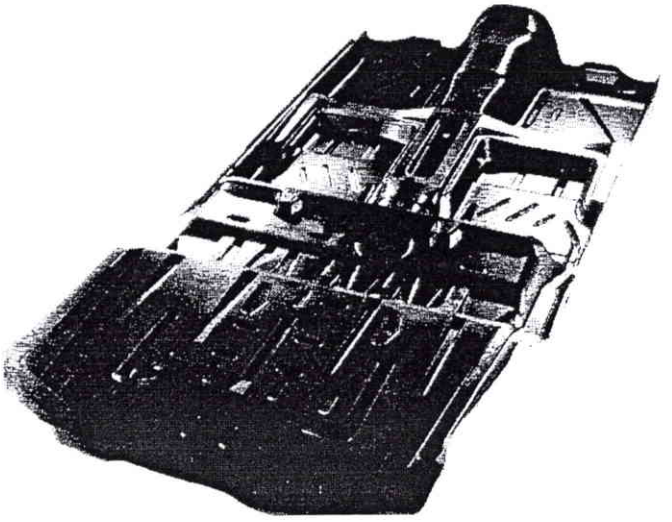


Figure A 1 : Projet Mosaic, plancher de Clio Renault d'une superficie d'environ 4 m² en fibre de verre et résine polyuréthanne. Les mats de verre sont préformés à chaud sous presse, la résine est ensuite injectée dans un moule fermé (BT Renault Décembre 1994).

1.1.2 Les composites HP

De caractéristiques mécaniques plus élevées que les composites GD, les composites HP sont d'un coût global plus important en raison du prix des matériaux utilisés et des moyens de fabrication associés (moulage en sac, autoclaves, RTM). Les CMO HP sont utilisés en lieu et place des métaux et sont la plupart du temps des applications structurales à base de fibres longues dont la fabrication nécessite une attention particulière. On retrouve ces matériaux dans les applications de pointe telles que la Formule 1, l'aéronautique (**Figure A 2**), les bateaux de compétition, les loisirs... Actuellement leur utilisation s'étend de plus en plus en raison des techniques afférentes mieux maîtrisées, mais aussi grâce à l'évolution des techniques de conception propres à ces matériaux. Par exemple ces dernières années est apparue la conception dite "intégrale" qui vise à minimiser le nombre de sous ensembles en utilisant comme phase d'assemblage la phase de cuisson nécessaire pour les CMO. Pour plus de détails voir par exemple 'Proceedings of SAMPE 94'.

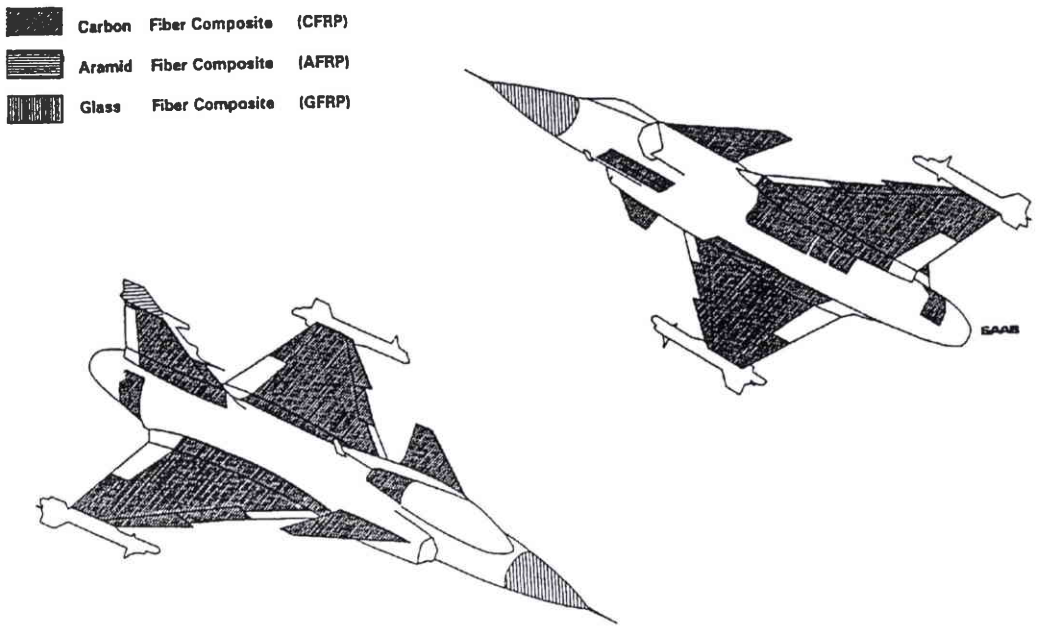


Figure A 2 : Répartition et types de composite utilisés sur l'avion militaire SAAB Gripen.

Les composites HP présentent un grand intérêt pour le domaine des transports en général et pour l'aéronautique en particulier (**Figure A 3**). C'est dans ce secteur que le prix élevé des composites introduits progressivement est le mieux rentabilisé par les économies de carburant réalisées et par le nombre de passagers supplémentaires transportés. Qui plus est, les dimensions importantes des structures rencontrées placent ce secteur en tête des utilisateurs des composites. Dans ce domaine comme ailleurs, ce sont les CMO qui sont les plus représentés, mais exclusivement les composites HP en raison du rôle qui leur est attribué. En effet, après avoir donné satisfaction ces dernières années sur des parties externes moyennement sollicitées, les CMO HP sont aujourd'hui introduits dans les structures fortement chargées. L'intérêt suscité par ces matériaux ne se dément pas, et dans les travaux présentés ici nous nous limiterons à ces composites haute performance à matrice organique, que nous désignerons simplement par le terme "composites". Dans le paragraphe qui suit, les fibres les plus courantes (verre, carbone, aramide) ainsi que les résines utilisées le plus fréquemment (polymère) dans ces matériaux sont présentées.

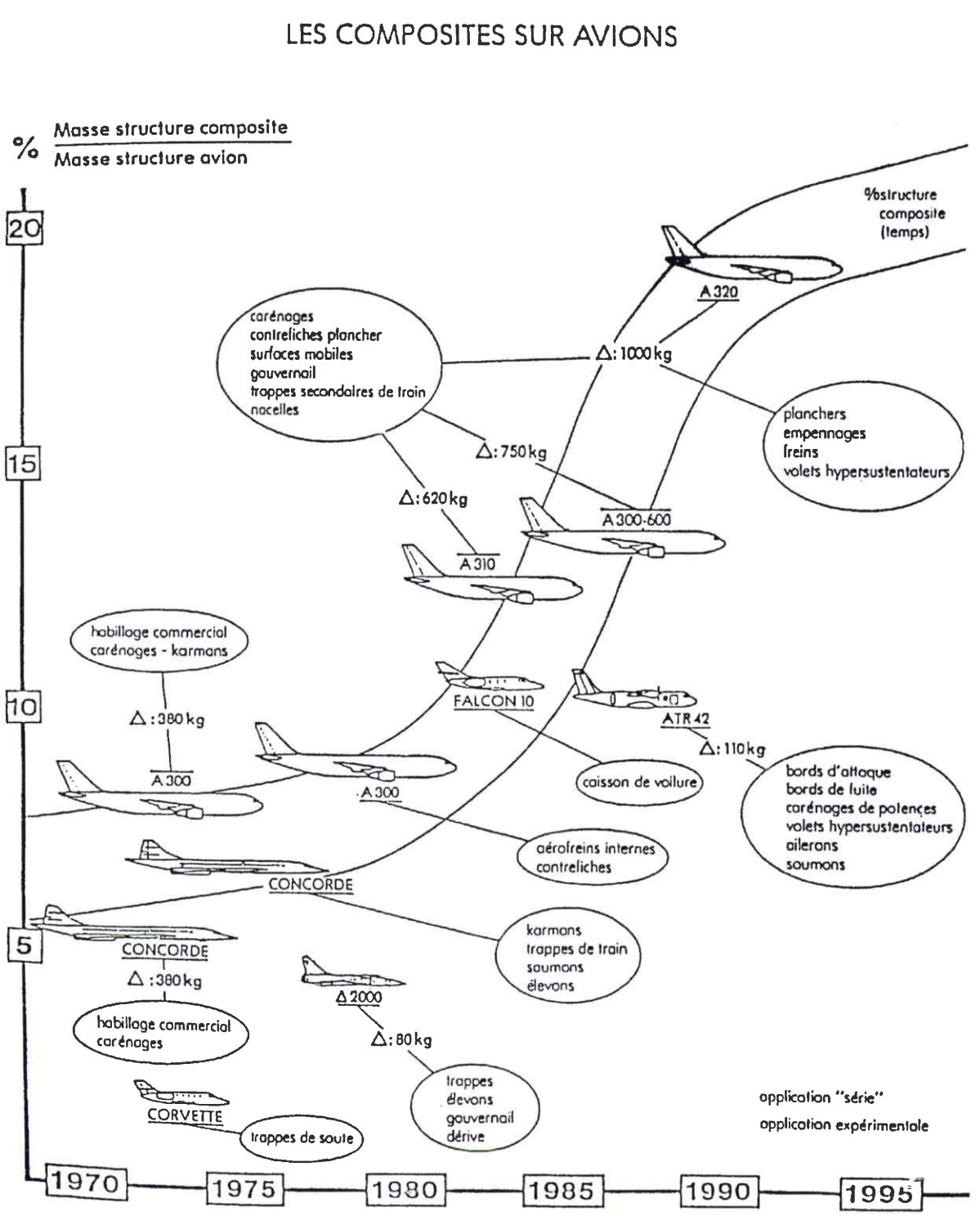


Figure A 3 : Évolution de l'utilisation des composites HP dans les structures aéronautiques civiles. (fourni par P.SIGETY, ONERA)

1.2 Quelques types courants de fibre et de matrice

Sur la **Figure A 4**, les caractéristiques spécifiques (caractéristiques rapportées à la masse volumique) des fibres les plus courantes sont comparées aux matériaux standards.

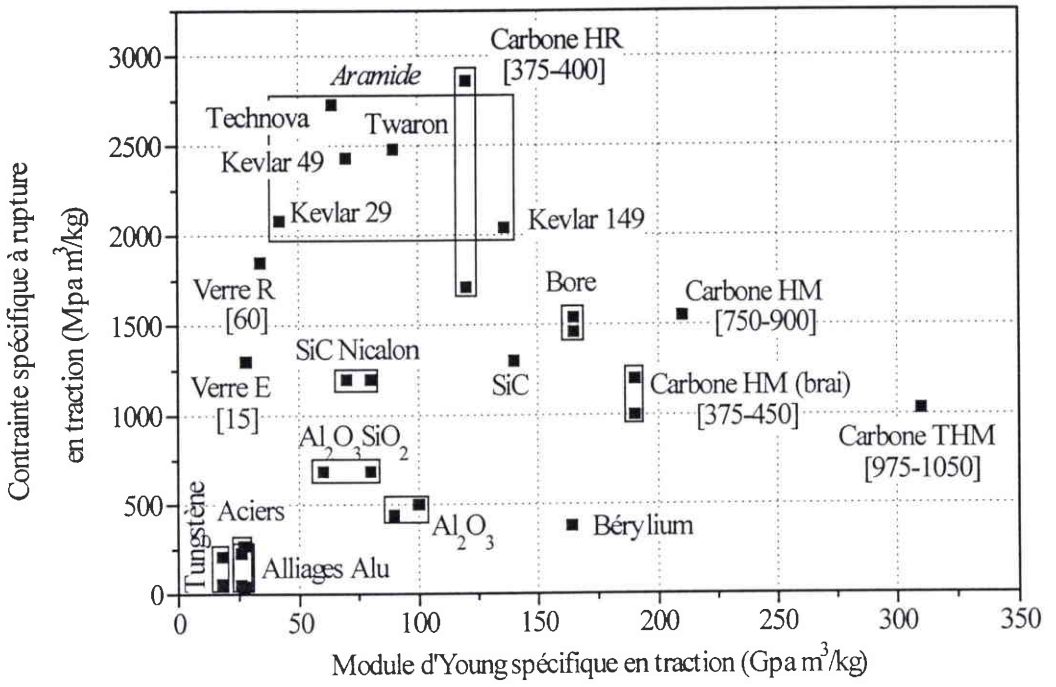


Figure A 4 : Caractéristiques spécifiques de divers fibres. Les [] indiquent les prix en F/kg pour certaines fibres en 1991 (d'après BERTHELOT, 1992).

1.2.1.1 Fibres de verre

Obtenues par fibrage à partir d'un verre fondu à 1250°C, les fibres de verre sont en général à base de SiO_2 à environ 50-60 %, accompagné d'autres oxydes telles que ceux de calcium, de bore, d'aluminium, de fer,... . En nuançant les composants, on obtient plusieurs types de fibres possédant chacun une caractéristique prépondérante. Afin de pouvoir les utiliser, il est nécessaire de traiter les fibres par une opération d'ensimage qui consiste à déposer une solution destinée à nuancer ou parfaire certaines caractéristiques et à améliorer l'interfaçage avec la matrice. D'un très bon rapport performance/prix, les fibres de verre possèdent un module spécifique proche de celui des aciers, mais leur résistance est beaucoup plus grande. Elles sont utilisées en grande quantité dans les applications GD, mais également dans les composites HP. On peut s'étonner des caractéristiques élevées obtenues à partir de verre, mais la résistance relativement élevée de ces

fibres peut s'expliquer par les dimensions faibles (∅ 5 - 15 μm) qui les rend beaucoup moins sensible à la fissuration que le verre pris sous une forme massive. On distingue plusieurs types de verre :

Verre E : il constitue pratiquement la totalité des fibres de verre utilisées en raison de son coût faible et de ses performances suffisantes dans de nombreuses applications.

Verre D : il possède de hautes propriétés diélectriques

Verre C : il possède une bonne résistance aux agressions chimiques

Verre R, S : de caractéristiques mécaniques supérieures à celles du verre E, son prix est également plus élevé (≈ 4 fois).

1.2.1.2 Fibres de carbone

De taille similaires aux fibres de verres, les fibres de carbone possèdent des caractéristiques mécaniques plus élevées car elles exploitent la structure hexagonale compacte du carbone. Les liaisons entre les atomes d'un même plan sont très fortes en raison de la compacité de l'arrangement hexagonal. Des études théoriques de ces liaisons prévoient un module d'Young de 1 200 Gpa et une résistance à la rupture de 200 000 Mpa. Bien évidemment, les défauts présents dans les fibres ne permettent pas d'atteindre ces valeurs extrêmes. Néanmoins, les caractéristiques obtenues font des fibres de carbone les fibres les plus utilisées dans les applications structurales.

Les fibres de carbone sont obtenues à partir d'un précurseur oxydé puis carbonisé. Le précurseur peut être du polyacrylonitrile (PAN) en fibres, ou obtenu en filant un déchet de raffinage de pétrole appelé BRAI. Ensuite, les fibres Haute Résistance (HR) sont obtenues par oxydation ménagée dans le cas du précurseur PAN et par pyrolyse dans le cas du précurseur brai. Leur résistance à rupture respective est de 3 000 à 5 000 Mpa et de 2 000 à 2 400 Mpa. Dans le cas du précurseur PAN, une opération de graphitation permet d'obtenir, selon le taux de graphitation, des fibre Haut Module (HM) ou des fibres à Très Haut Module (THM) dont le module peut atteindre 600 Gpa.

De prix plus élevé que les fibres de verre, les fibres de carbone sont réservées aux applications des composites HP. Toutefois, le faible prix des fibres à précurseur brai devrait leur permettre de pénétrer des domaines tels que l'automobile.

1.2.1.3 Fibres aramide

La plus connue de ces fibres est celle commercialisée par Dupont de Nemours sous l'appellation Kevlar, mais on peut citer également les fibres Twaron ou Technova. Ce sont des fibres polyamides obtenues par synthèse à -10°C puis traitées thermiquement. Elles possèdent une résistance spécifique de l'ordre de celle des carbones HR, pour un prix de 3 à 5 fois moindre. Elles sont utilisées dans de nombreuses applications industrielles où leur bonne résistance au choc et à l'impact sont indispensables (protection contre les tirs de projectile), ou pour lesquelles leur prix est compétitif (articles de sport). Toutefois, les fibres aramides présentent des caractéristiques en compression assez faibles (inférieures à celles du verre) souvent attribuées à une mauvaise adhérence à la matrice.

1.2.2 Matrices polymères

Dans les polymères, on rencontre 2 familles de résine qui sont les thermodurcissables et les thermoplastiques. La différence, d'origine chimique, est liée à la phase de cuisson durant laquelle les macromolécules pré polymérisées s'assemblent sous l'action de la chaleur et en présence d'un catalyseur. Dans le cas des thermodurcissables, la structure chimique résultante est un réseau tridimensionnel qui ne peut être détruit que par un apport important de chaleur. Ainsi les résines thermodurcissables possèdent des caractéristiques mécaniques plus élevées que les thermoplastiques, mais ne peuvent être mises en forme qu'une seule fois. Elles sont de plus assez sensibles à la fissuration. En revanche les résines thermoplastiques sont constituées de longues chaînes obtenues par polymérisation qui peuvent se présenter sous une phase amorphe ou semi-cristalline. Elles sont moins onéreuses que les thermodurcissables et elles peuvent être mises en forme plusieurs fois. Pour la plupart d'entre elles, elles sont recyclables mais généralement les caractéristiques mécaniques obtenues avec ces résines sont modestes.

Parmi les thermodurcissables, les époxydes sont les résines organiques les plus répandues dans les applications HP. Elles présentent des caractéristiques mécaniques intéressantes et peuvent supporter des températures moyennes souvent suffisantes, de l'ordre de 120°C pour une époxyde 180 par exemple. En contrepartie, les temps de réticulation sont très longs et la mise en œuvre requiert des précautions particulières. On trouve également des résines thermodurcissables

dont les température de service sont élevées mais elles sont très fragiles et très onéreuses. On peut citer les bismaleimides (BMI) et les polyimides dont la température de service peut atteindre respectivement 200 - 220°C et 300 - 350°C.

Les thermoplastiques (PEEK) quant à elles nécessitent des températures de polymérisation plus élevées, mais elles peuvent supporter des températures de service proches de 300°C. Comme leur mise en œuvre est relativement simple, leur coût global est suffisamment faible pour les utiliser à grande échelle dans les applications GD. La possibilité de recyclage est intéressante pour l'industrie automobile qui est confrontée à des normes de plus en plus sévères sur ce point. Ces résines présentent des propriétés intéressantes pour l'aéronautique, notamment une bonne tenue aux impacts, des températures de fonctionnement élevées, et la possibilité de réparer simplement des zones endommagées. Cependant, les hautes températures de transformation des thermoplastiques ne leur permettent pas toujours d'être concurrentielles, par exemple pour des problèmes liés à la dilatation thermique d'inserts métalliques.

1.3 Utilisation des composites sous forme de stratifiés

Qu'ils soient utilisés en peaux (composite sandwich) ou dans des parties monolithiques, les composites sont généralement obtenus à partir d'un empilement de plis préimprégnés de matrice. Ces plis ont une épaisseur de quelques dizaines de microns et peuvent être UniDirectionnels (1D) ou se présenter sous la forme de tissus (2D - 3D). Dans le cas des UD, les fibres sont toutes orientées dans la même direction, alors que dans le cas des tissus elles forment un réseau dont les mailles peuvent être plus ou moins complexes. On rencontre parfois des structures élaborées uniquement à partir d'UD d'orientation identique, comme par exemple les lames de ressort en verre/époxyde du véhicule utilitaire Trafic de chez Renault. Mais de manière plus générale, on forme un stratifié résultant d'un empilement de plis orientés différemment par rapport à un axe commun (**Figure A 5**). En fonction du chargement que le stratifié devra supporter en service, on oriente les plis de façon à tirer parti au mieux de la résistance et du module spécifiques de traction élevés dans le sens des fibres. Cette opération dite de drappage doit également tenir compte des contraintes liées à la formabilité des plis élémentaires, à la cuisson, ou encore au maintien des plis fortement chargés. Pour des pièces de révolution, il est souvent plus simple de procéder par enroulement filamentaire autour d'un mandrin. L'orientation des plis est alors contrôlée en inclinant l'axe d'enroulement par rapport à l'axe du mandrin.

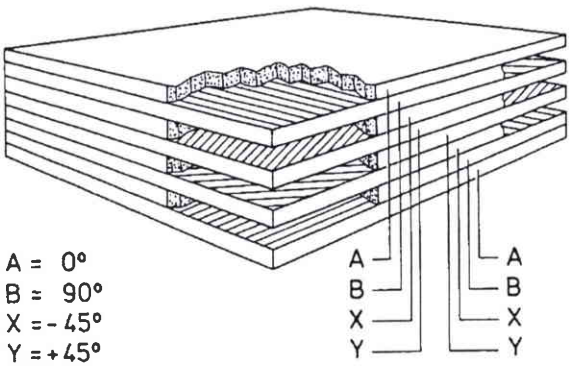


Figure A 5 : Stratifié symétrique $[0,90,-45,+45]_S$

Une fois le drappage réalisé, la structure composite subit la phase de cuisson qui est une phase importante pour l'obtention des caractéristiques mécaniques souhaitées. Ce sont d'ailleurs les moyens mis en œuvre pour cette opération qui justifient partiellement les prix élevés des composites. Durant la cuisson, la matrice polymérise, ou réticule, et donne à la structure sa morphologie définitive après refroidissement. Cette phase délicate est réalisée sous vide avec un cycle de température et de pression défini principalement par le type de matrice utilisé. Le vide créé autour de la structure en composite permet d'évacuer les bulles d'air et d'obtenir une répartition la plus homogène possible de la matrice. C'est en partie au cours de cette opération qu'apparaissent les défauts des fibres qui sont à l'origine de la faiblesse en compression des composites à fibres longues dont nous abordons la modélisation dans ce travail.

2. MODÉLISATION ET CARACTÉRISATION DES STRATIFIÉS

2.1 Modélisation des stratifiés

Comme nous venons de le voir, les structures construites à partir de stratifiés résultent de l'assemblage de plis UD, eux mêmes constitués de fibres et de matrice. On distingue dans ce cas 3 échelles d'observation, l'échelle de la structure est dite macroscopique, l'échelle des constituants de base est dite microscopique, et l'échelle du pli est dite mésoscopique. Dans les modélisations mécaniques, l'échelle du pli est la plus souvent utilisée car elle permet de faire le lien entre le comportement des constituants et le comportement effectif macroscopique. En effet,

par des techniques de changement d'échelle, il est possible à partir du comportement des plis de connaître le comportement de toute la structure, mais aussi de déterminer les sollicitations au niveau des constituants. Citons par exemple les techniques d'homogénéisation périodique (LÉNÉ, 1984), ou self-consistante (CHERKAOUI et al., 1995) qui établissent le lien entre les comportements microscopiques (fibre - matrice) et le comportement mésoscopique d'un pli. La microstructure est alors représentée par un milieu homogène équivalent anisotrope ou non suivant l'arrangement des constituants (tissu, unidirectionnel, fibres courtes disposées aléatoirement).

L'étape suivante complémentaire est le passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique. Grâce à la théorie des stratifiés les composites sont modélisés par des plaques ou des coques dans lesquels le matériau est homogène anisotrope avec un couplage membrane-flexion possible.

En résumé le comportement macroscopique de la microstructure est modélisé par la théorie des plaques et coques anisotropes dont les caractéristiques sont fonction de celles de la fibre et de la matrice. Mais en plus, à partir de la connaissance du champ des contraintes généralisées dans la plaque, il est possible d'estimer les contraintes dans chaque pli et d'en déduire les contraintes dans chaque constituant en un point donné de la structure par les techniques de localisation associées à celles d'homogénéisation.

2.2 Prévision de la rupture

Les techniques succinctement résumées dans le chapitre précédent permettent de prévoir aisément le comportement élastique d'une structure constituée de matériaux composites. Mais pour les mettre en oeuvre, il faut connaître le comportement de chaque constituant. De plus du fait de l'hétérogénéité, les mécanismes d'endommagement et de rupture y sont complexes. Il est important de modéliser ces mécanismes et de les prendre en compte lors de la phase de conception des produits afin d'améliorer l'optimisation.

La prévision de la rupture peut s'effectuer à diverses échelles : rupture des constituants, rupture des plis, rupture des interfaces entre plis (délaminage) ou rupture de la structure (**Figure A 6**). Les critères couramment utilisés sont de type phénoménologique ou bien prévisionnel au sens de la mécanique de la rupture. Ils peuvent être construits à l'échelle de la structure, du pli, ou

des constituants. Le but est de prédire en fonction du chargement imposé la rupture de la structure, qu'elle soit le résultat de dégradations successives ou de ruptures, tant au niveau local que global.

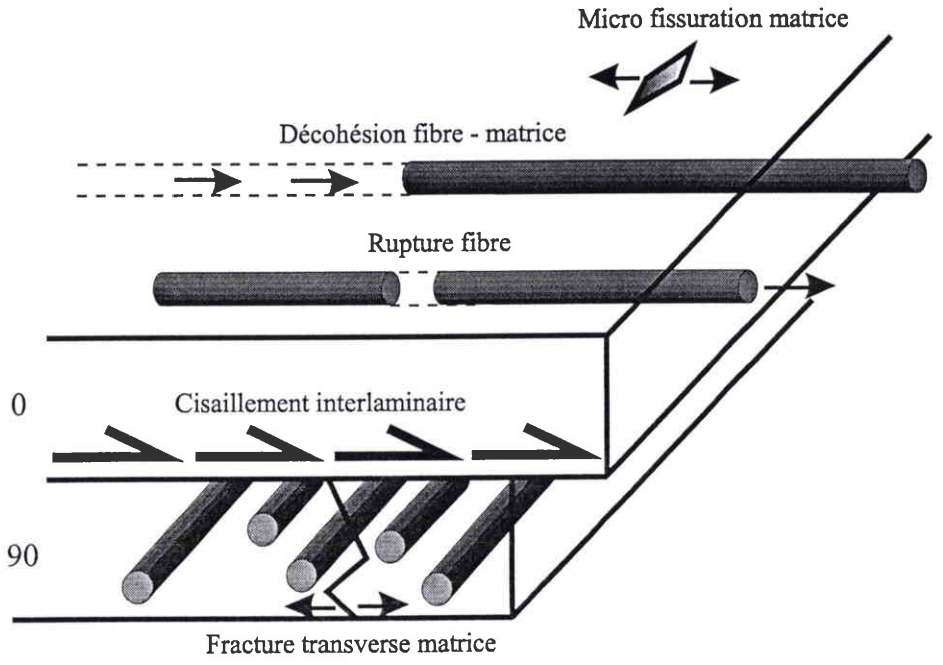


Figure A 6 : Quelques modes de rupture en traction d'un pli UD.

Les critères phénoménologiques extrapolent le comportement observé au cours d'une série d'essais particuliers à la prévision du comportement de la structure réelle, via l'identification de paramètres utilisés dans une modélisation spécifique. Dans le cadre des stratifiés l'utilisation d'un critère de rupture phénoménologique à l'échelle macroscopique de la structure entière est inconcevable, sauf pour des configurations simples. A l'échelle mésoscopique, les critères phénoménologiques quadratiques par exemple (Tsai-Hill) donnent de bons résultats mais ils nécessitent un travail expérimental important et difficile à mettre en oeuvre. Une autre façon de procéder est de construire des modèles décrivant la rupture comme le résultat d'un processus de dégradation intervenant à l'échelle des plis ou des constituants. ALLIX et al. proposent des modèles d'endommagement mésoscopiques capables de rendre compte de la dégradation de l'interface entre plis conduisant au délaminage (1992), des décohésions fibre - matrice, et de la micro fissuration de la matrice (1990). Plus précisément dans ces modèles l'interface entre les plis est vue comme un élément à part entière, d'épaisseur nulle avec un comportement qui peut être non linéaire fragile, alors que l'évolution de la micro fissuration et de la décohésion des

fibres affectant un pli UD sont chacune prises en compte par une variable d'endommagement scalaire. Le comportement en compression et en traction du pli est différencié par un module distinct, prenant en compte l'activation des endommagements en traction et leur désactivation en compression. Dans le même cadre, AUSSEDAT et al. (1995) proposent un modèle qui s'appuie sur un seul potentiel énergétique, ce qui permet un "passage" continu entre le comportement en compression et celui en traction du milieu endommagé.

L'autre approche possible de la rupture est basée sur l'utilisation de critères généralement locaux appliqués aux constituants eux-mêmes. Bien entendu, l'utilisation de ces critères s'accompagne de techniques d'homogénéisation qui permettent de décrire le comportement du milieu homogène équivalent au pli réel. Par exemple, à partir de travaux sur l'homogénéisation de matériaux présentant des dégradations, MARIGO et al. (1995) établissent un modèle homogénéisé équivalent à un pli ayant subi des décohésions de fibres. L'intérêt de ces différents modèles d'endommagement est de prévoir un comportement post micro rupture. Cette connaissance est importante puisque le composite est encore capable de supporter de fortes sollicitations même après que quelques ruptures soient apparues à l'échelle microscopique ou mésoscopique.

2.3 Caractérisation

Les essais sur les composites sont mis en œuvre sur des plis UD et des stratifiés. La panoplie classique d'essais est utilisée pour caractériser ces matériaux, ce sont aussi bien des tests sous sollicitation dynamique (MAISON, 1994; WAHAB et al., 1995), que quasi-statique ou encore des tests de tenue dans le temps (DAVIES et al., 1996). Dans les essais quasi-statiques, les sollicitations sont de type traction, compression, cisaillement, traction biaxiale, ou encore torsion. Les essais de traction, qu'ils soient réalisés sur des mèches de fibres ou sur des plis, sont bien maîtrisés aujourd'hui. Il en est de même pour les essais de cisaillement (PIERRON et al., 1994, 1996) ou de torsion, même s'ils sont plus délicats à mettre en œuvre. La principale difficulté se résume à des problèmes locaux aux voisinages des mors qui sont dus à l'hétérogénéité du matériau. En revanche, les essais de compression posent de nombreux problèmes de part le caractère instable de la sollicitation, mais également du fait de l'hétérogénéité intrinsèque aux matériaux composites. Comme les stratifiés sont souvent minces, sous une sollicitation de compression les éprouvettes sont instables. Pour éviter le flambage on

réduit la longueur utile au minimum ce qui a pour effet d'inhiber la zone de compression pure du fait de la proximité des deux mors. Il en résulte une ambiguïté sur les mesures de résistance.

Les prévisions fournies par les modélisations de l'endommagement ou de la rupture sont généralement en bon accord avec les essais. Il subsiste néanmoins des interrogations sur l'initiation des endommagements et sur la rupture en compression des plis unidirectionnels dans le sens des fibres. La difficulté à cerner le problème de la compression des composites à fibres longues est liée d'une part à la mise en œuvre difficile des essais, et d'autre part au mécanisme de rupture brutal (microflambage) qui est influencé par de nombreux paramètres. On constate que les valeurs à rupture obtenues par des essais de compression pure sont systématiquement inférieures à celles obtenues en traction (**Figure A 7**), cette différence s'est encore accentuée avec l'apparition de fibres de plus en plus performantes en traction. Par conséquent le concepteur est amené à surdimensionner les zones fortement comprimées afin de palier cette faiblesse apparente en compression, ce qui augmente d'autant le prix de revient de la structure. Il est donc primordial, pour pouvoir utiliser de manière optimale les matériaux composites, de cerner le problème du comportement en compression des composites à fibres longues. C'est d'abord en analysant les résultats expérimentaux, puis en les confrontant avec les modèles théoriques de base, que des modélisations plus fines peuvent être mises en place.

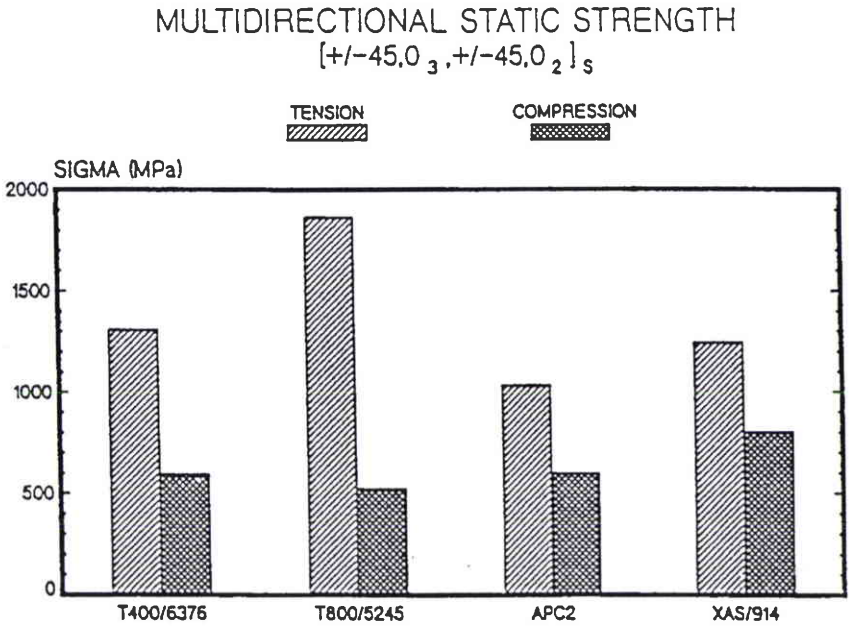


Figure A 7 : Comparaison des résistances en traction et en compression de composites carbone/résine organique sur des empilements multidirectionnels (SIGETY et al., 1990).

3. ÉTUDE DU COMPORTEMENT EN COMPRESSION

Dans cette partie, nous décrivons les principaux résultats obtenus depuis près de 30 ans sur la résistance en compression des composites à fibres longues. Le problème de la compression est d'abord introduit brièvement par une analyse du comportement des constituants de base sous cette sollicitation. Puis les méthodes d'essais les plus fréquemment utilisées sont décrites. L'analyse des résultats expérimentaux fait apparaître l'influence de données structurelles sur les valeurs à rupture. La seconde partie est consacrée à la modélisation associée à la rupture compressive des stratifiés, ou plus fréquemment des plis UD. Les différents modèles présentés permettent de dégager les paramètres matériaux essentiels à prendre en compte pour prévoir la rupture par apparition d'une instabilité des fibres en compression. Il apparaît également que la majorité des modèles est incapable de prendre en compte l'effet des paramètres structuraux qui est pourtant un des éléments clefs du comportement en compression. Enfin, nous décrivons un modèle homogénéisé capable de prendre en compte aussi bien les aspects microscopiques que mésoscopiques du matériau, et qui permettra d'évoluer vers un outil numérique très complet développé dans ce travail.

3.1 Comportement et caractérisation des constituants

3.1.1 La résine

Les essais de compression sur les **résines** indiquent 2 types de comportement. Si la résine est fragile, elle périt par formation de bandes de cisaillement. Mais si elle de type ductile, comme la plupart des résines industrielles, elle périt par écoulement plastique suivi de fissurations.

3.1.2 Les fibres

La mise en œuvre des essais de compression, ou même de flexion, sur des **fibres** seules est extrêmement délicate du fait de leur faible diamètre et de leur élancement. Comme il ne semble pas concevable d'obtenir la courbe d'écrouissage d'une fibre seule, son comportement ne peut donc être déduit que des essais de compression sur des plis UD. Toutefois, ces essais font intervenir au sein des plis des mécanismes complexes, comme nous le verrons par la suite, qui ne permettent pas d'isoler de manière indiscutable le comportement des fibres seules. Il faut donc se borner à déterminer la limite à rupture, notamment la résistance en compression, qui ne peut être observée qu'indirectement en enrobant la fibre ou bien en la soumettant à un chargement

stabilisant. Parmi les essais employés, on peut citer le test de boucle (GREENWOOD et al., 1974) qui permet de déduire la résistance en compression à partir des mesures sous microscope des rayons de la boucle formée par la fibre (**Figure A 8**).

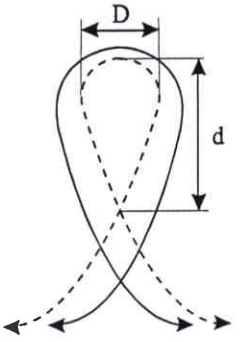


Figure A 8 : Principe du test de la boucle.

Un autre test utilisé est l'essai dit de fragmentation qui permet de déterminer la contrainte à rupture à partir des longueurs des fragments résultant de la rupture en compression. Il existe également un test dit de "retour", dans lequel la rupture de la fibre est provoquée par le retour d'une onde élastique, mais ce dispositif semble peu fiable (CINQUIN, 1993). Ces divers dispositifs présentés ont permis de déterminer les modes de rupture des fibres qui sont fonctions à la fois de leur résistance et de leur rigidité. Les fibres à haute résistance périssent par cisaillement, les fibres Haut Module par dislocation et les fibres Très Haut Module par compression (fibre crushing).

CINQUIN (1993) obtient avec le test de boucle des valeurs à rupture en compression de l'ordre de celles de traction. Malheureusement, dés que les fibres sont utilisées dans un composite ces propriétés intéressantes chutent de manière catastrophique (**Figure A 9**). LEBLANC et al. (1994) parviennent à la même conclusion en observant sous MEB la compression directe de mèches composées de 1 à 12 000 fibres de carbone T300 noyées dans de la résine. Les déformations à rupture en compression d'un monofilament sont de l'ordre de 4.5%, alors qu'une mèche de 12 000 fibres rompt à moins de 1%. Les auteurs notent une transition dans le comportement de la mèche en fonction du nombre de fibres qu'elle contient. Dans le cas où la mèche est composée de quelques dizaines de fibres, la rupture se produit par cisaillement en cascade des fibres dans un plan incliné d'environ 45° par rapport à l'axe longitudinal. Par contre, si la mèche contient plusieurs milliers de fibres, la rupture se produit par pliage coopératif de

toutes les fibres, ou bien par délaminage longitudinal dans la mèche suite à la rupture d'une fibre. D'après les auteurs, ce changement de comportement est directement lié à l'**effet composite** : quand le nombre de fibres est élevé, sous une sollicitation de compression les interactions entre fibres jouent un rôle plus déterminant que leurs caractéristiques propres. Il est toutefois précisé l'importance que peut jouer la masse de résine entourant la mèche. Cette masse devient faible quand le nombre de fibres est grand, par contre son support n'est certainement pas négligeable dans le cas où la mèche n'est composée que de quelques dizaines de fibres.

3.2 Caractérisation des composites en compression

D'après ces résultats, il semble qu'il existe effectivement une limite à rupture intrinsèque à chaque couple fibre-matrice donné, mais il ne paraît pas possible d'extrapoler simplement à un pli complet les résultats obtenus sur une fibre seule. Il est pourtant essentiel de pouvoir déterminer l'origine de la rupture en compression de **plis complets** si on souhaite pouvoir fournir aux utilisateurs de matériaux composites un outil de prévision du comportement en situation réelle. La compréhension de ce phénomène complexe passe donc nécessairement par l'observation des résultats des essais menés sur des composites, avant de pouvoir envisager une phase de modélisation.

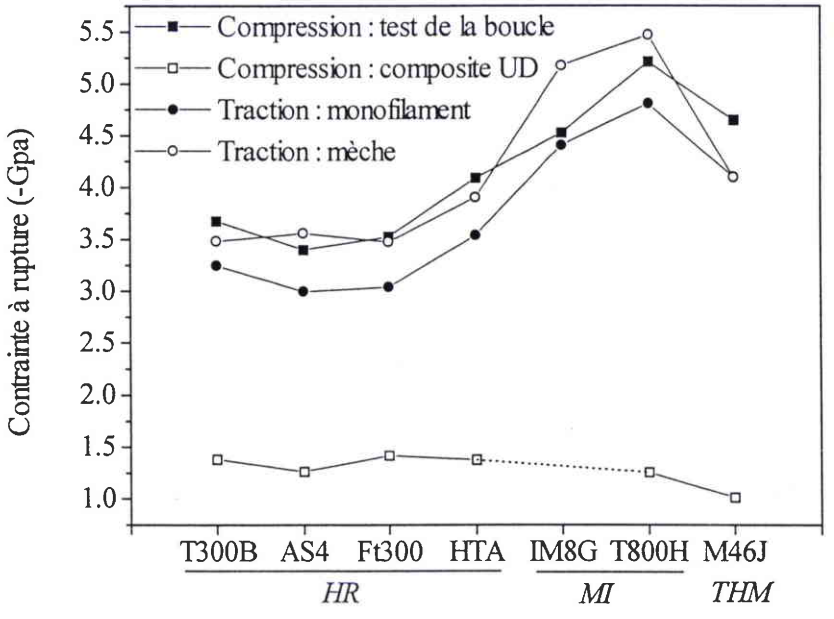


Figure A 9 : Contraintes à rupture en compression et en traction, en fonction du type de fibre (Haute Résistance, Module Intermédiaire, Très Haut Module), déterminées avec plusieurs méthodes d'essais (d'après CINQUIN, 1993).

3.2.1 Essais de compression directe

Les montages de compression directe sont très répandus et sont utilisés depuis de nombreuses années. Ils sont souvent simples à mettre en œuvre car ils s'adaptent facilement aux machines de traction classiques. On peut citer les plus fréquemment rencontrés qui se distinguent par la forme de l'éprouvette utilisée ou bien par le moyen utilisé pour lui transmettre la sollicitation : Celanese, IITRI, Aérospatiale,... (**Figure A 10**)

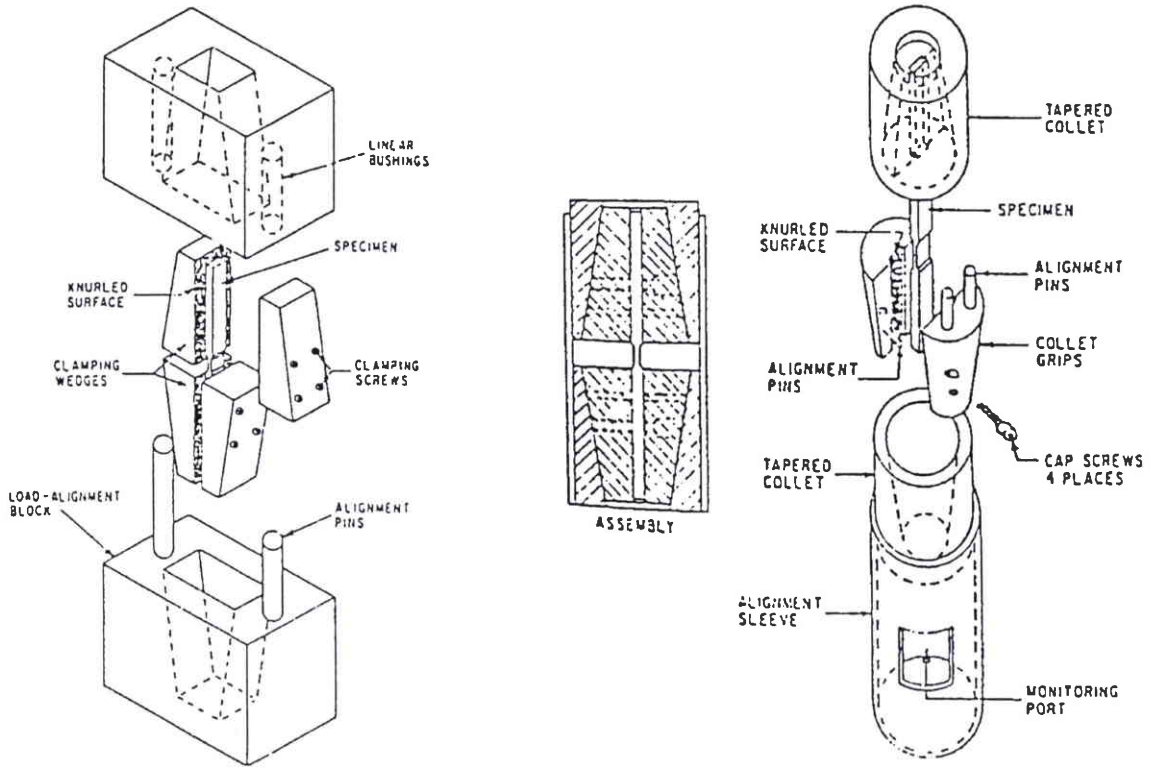


Figure A 10 : Montages IITRI (Illinois Institute of Technology and Research Insitute) et Celanese (Corporation).

Dans certains montages le chargement de compression est transmis à l'éprouvette par contact avec ses extrémités ("end loaded"). L'éprouvette ne nécessite aucune préparation particulière, mais ce type de montage engendre de fortes concentrations de contraintes aux extrémités de l'éprouvette et requiert un contact parfaitement plan entre l'éprouvette et le plateau de compression. De plus, l'éprouvette doit souvent être maintenue sur toute sa circonférence pour éviter les risques de flambage (HA et al. 1992, HÄBERLE et al. 1993) ce qui modifie considérablement l'état de contraintes au sein du matériau. On préfère généralement introduire le chargement par cisaillement au travers de talons de protection adaptés sur les flans de

l'éprouvette. Malheureusement ces parties rapportées sont souvent à l'origine de ruptures prématurées. ODOM et al. (1990) établissent que le type de matériau utilisé pour les talons, leur géométrie ou encore leur adhérence à l'éprouvette affectent énormément le mode de rupture et dans certains cas la résistance. WISNOM (1990 a) montre que la zone comprise entre la fin des talons et la longueur utile de l'éprouvette, i.e. le bord libre du talon et de l'éprouvette, est le siège de surcontraintes de cisaillement qui initient la rupture (**Figure A 11**). L'état de contrainte dans la partie centrale est d'autant plus hétérogène que la longueur utile doit rester faible afin de réduire les risques de flambage de l'éprouvette. Très récemment, ANTHOINE et al. (1996), ont défini une géométrie de talon qui donne un état de contraintes très homogène dans l'ensemble de l'éprouvette et offre ainsi des perspectives intéressantes.

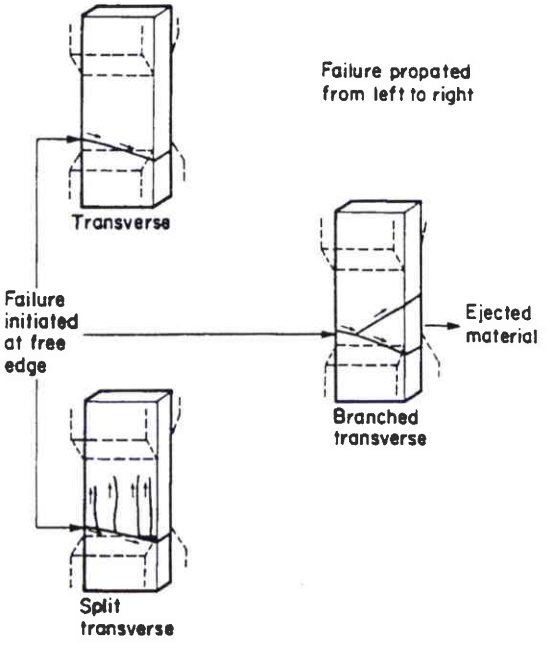


Figure A 11 : Modes de rupture pour un AS4/3501-6 sur montage IITRI (ODOM et al., 1990).

Un autre problème délicat à résoudre sur ce type de montage est de veiller à aligner précisément l'axe de l'éprouvette et l'axe de compression. Un écart angulaire même très faible est susceptible d'induire un cisaillement parasite qui abaisse considérablement la résistance et peut aller jusqu'à provoquer le flambage de l'éprouvette si son maintien est insuffisant. WOOLSTENCROFT et al. (1981) et WISNOM (1990 b) montrent qu'un désaxement de l'ordre d'un degré suffit à abaisser d'environ 40% la contrainte théorique à rupture d'un UD carbone -

époxyde XAS/914. Ces mauvais alignements qui sont d'origine multiple ne peuvent pas toujours être maîtrisés, notamment lorsqu'ils se situent au niveau du matériau lui même.

Les effets cumulés des talons et de l'alignement de l'éprouvette sur la résistance en compression font que les essais de compression pure sont peu reproductibles. WOOLTSENCROFT et al. (1981) utilisant plusieurs montages observent des écarts importants sur les valeurs à rupture obtenues pour un même matériau. De plus, les essais réalisés sur un même montage donnent pour un matériau identique des contraintes à rupture qui fluctuent et dont l'écart peut atteindre 30 % de la valeur maximale.

3.2.2 Essais de flexion / flambage rotulé / flexion - compression

Les essais de flexion sont développés principalement pour éviter les contraintes parasites induites dans les essais de compression. Mais ils permettent également une comparaison directe, i.e. sur la même éprouvette, entre les caractéristiques en traction et en compression d'un matériau. Le premier montage de ce type utilisé est un essai de flexion 3 points, mais qui engendre fréquemment une rupture du matériau au droit de l'appui central qui transmet l'effort. Pour palier à cet inconvénient, VITTECOQ (1991) propose un montage de flexion 4 points qui assure une meilleure répartition des efforts (**Figure A 12**). Les têtes du montage sont réalisées à partir d'éléments déformables afin de n'imposer que le déplacement vertical à l'éprouvette, son déplacement horizontal étant libre. Les résistances obtenues en compression pour des UD carbone - époxyde T300/914 sont de l'ordre de 1.3 % avec rupture simultanée sur les 2 faces du pli. Les stratifiés quant à eux rompent par dégradation de la face comprimée pour des taux de chargements similaires à ceux des UD. À titre de comparaison, la résistance d'un UD identique testé sur un montage de compression pure est de l'ordre de 0.9 %.

FUKUDA (1989) présente un dispositif qui permet de provoquer le flambage systématique de l'éprouvette en décalant son axe longitudinal du centre de rotation des rotules fixées à ses extrémités. Cet essai appelé flambage rotulé nécessite peu de préparation (GRANDSIRE-VINÇON 1993) et assure la rupture au centre de l'éprouvette. WISNOM (1992) utilisant cette technique constate que toutes les éprouvettes UD carbone - époxyde XAS/913 testées périssent soit par rupture de la face en tension suivie de délaminage (**Figure A 13**), soit par délaminage à partir des extrémités, mais la ruine n'est jamais initiée sur la face en compression. **Ces ruptures interviennent à des niveaux de déformation plus de 2 fois supérieurs à ceux obtenus avec**

un essai de compression pure. Des déformations de 2,5 % sont mesurées sur la face en compression de certaines éprouvettes sans qu'aucun dommage ne soit visible. Ces résultats suggèrent que la limite à rupture en compression de ce type de matériau est certainement supérieure à 2,5% de déformation.

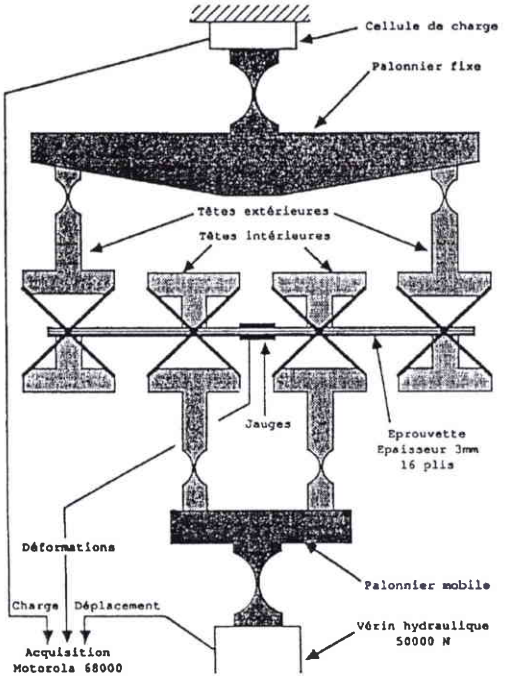


Figure A 12 : Montage de flexion 4 points (VITTECOQ 1991, ALLIX et al. 1988).

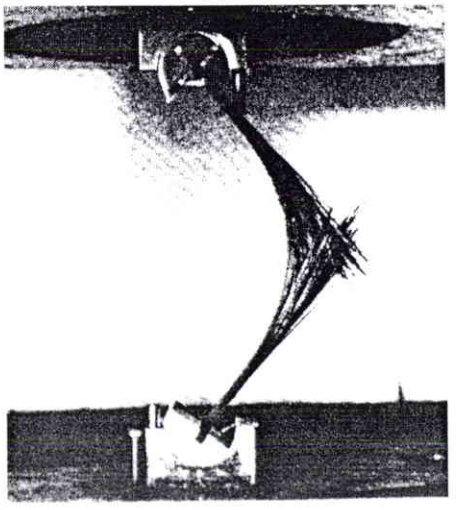


Figure A 13 : Rupture de la face en tension d'un UD XAS/913 sur un montage de flambage rotulé (WISNOM, 1992).

Les montages de flexion semblent plus stables que les dispositifs de compression pure, ce qui se traduit directement par des résistances à rupture en compression plus élevées. Mais cette amélioration des résultats soulève une interrogation : est-ce simplement le changement de chargement qui fait apparaître cette différence? Pour répondre à cette question, GRANDIDIER (1991) propose un montage combinant de façon modulable des chargements de flexion et de compression. Par un système de biellettes le mouvement de traction de la machine d'essai est transformé en un moment de flexion M et un effort normal N dont le rapport dépend de la position et de l'arrangement des biellettes (**Figure A 14**). Ce rapport peut varier de -18 mm à -0.5 mm, ce qui correspond respectivement à un chargement de flexion et de compression.

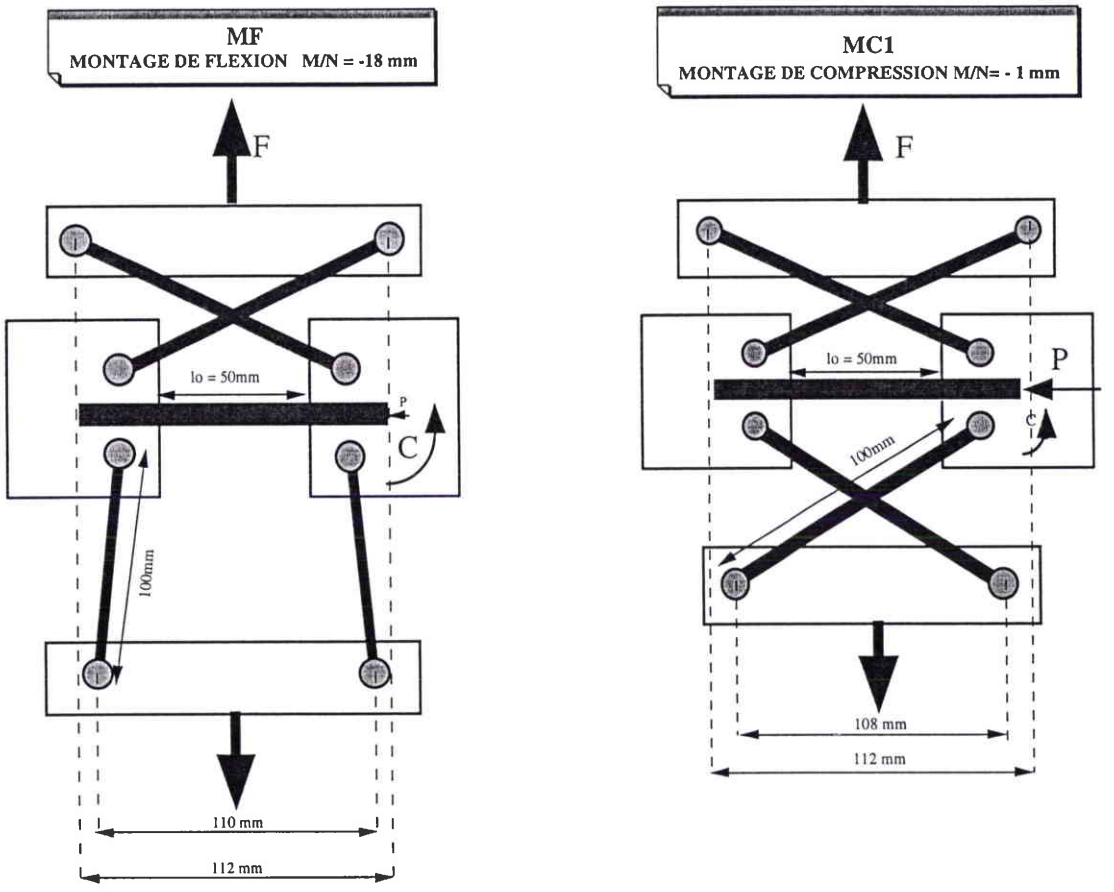


Figure A 14 : Montage de flexion - compression, configurations de flexion et de compression (GRANDIDIER, 1991).

Les essais réalisés (GRANDIDIER, 1991; GRANDIDIER et al., 1993) avec un chargement de flexion permettent d'atteindre des déformations à rupture de l'ordre de celles obtenues avec le montage de flambage rotulé : 2.08 % pour un UD carbone - époxyde T300/914 et 2.48 % pour un UD carbone - époxyde T800/5245. La ruine de l'éprouvette est provoquée par la rupture des

fibres en tension suivie de délaminage ou bien par la rupture brutale de toutes les couches. Lorsque la part de compression dans le chargement augmente, les déformations à rupture restent sensiblement les mêmes, puisque la résistance est limitée par les fibres en tension. Enfin, si la compression est prépondérante, le montage devient instable, mais les déformations obtenues sont au moins du même ordre que celles obtenues avec des essais de compression classiques. Cette évolution de la résistance avec le changement de chargement se retrouve également sur des matériaux différents tels que les verre - époxyde (**Figure A 15**). Il semble donc que plus la part de flexion dans le chargement est élevée, plus la résistance en compression d'un matériau est grande.

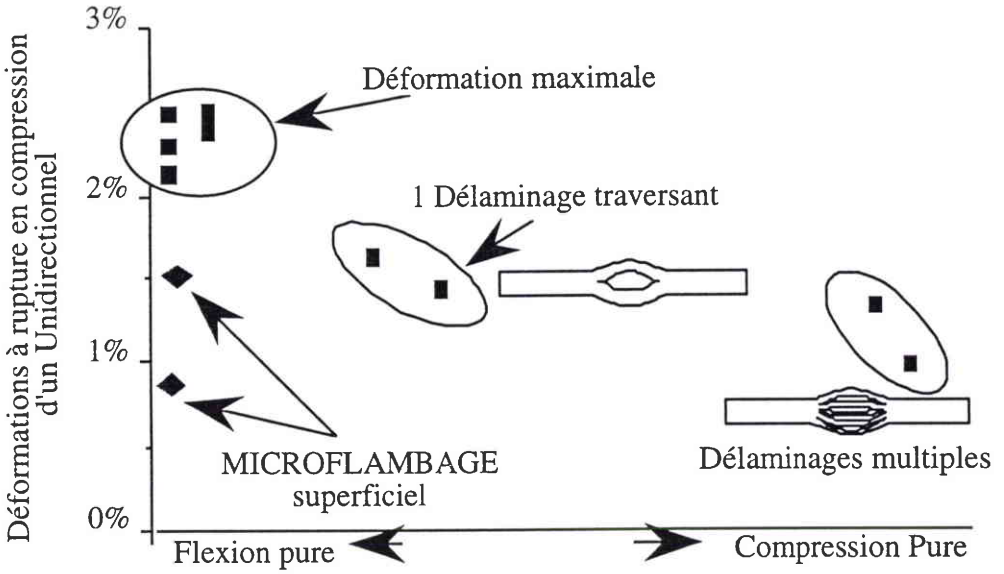


Figure A 15 : Valeurs de déformations à rupture en compression d'un unidirectionnel (Verre - Époxyde) dans le sens des fibres sous diverses sollicitations (d'après GRANDIDIER et al., 1992).

3.3 Discussion

Si on compare les résultats obtenus avec un même montage et pour des éprouvettes de géométrie identique, on constate que les valeurs à rupture dépendent du matériau testé. Il paraît raisonnable de suggérer que le comportement en compression des composites à fibres longues est directement lié aux caractéristiques intrinsèques de la fibre et de la matrice, comme dans le cas de la traction par exemple.

Mais en comparant les résultats obtenus avec différentes techniques d'essai (compression ou flexion), l'influence du chargement sur la résistance de plis UD est clairement mise en évidence. Si on teste différents stratifiés avec ces montages (**Figure A 16**), on constate que la résistance en compression du pli unidirectionnel dépend également de la séquence d'empilement des éprouvettes. La faiblesse en compression des plis UD semble atténuée par la présence de plis croisés adjacents, ce qui est probablement causé par le blocage des déplacements latéraux qui limite l'apparition d'instabilités parasites. On rejoint ici les observation de LEBLANC et al. (1994) qui concluent leur étude de compression sur mèche en suggérant que la tenue en compression des plis est certainement liée au maintien éventuel de plis adjacents.

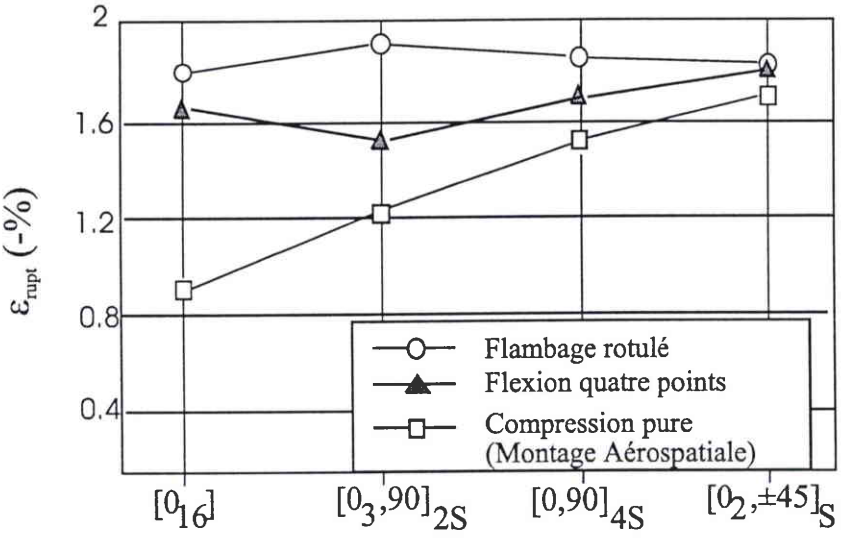


Figure A 16 : Déformation à rupture en compression d'un pli UD dans la direction des fibres, pour un carbone - époxyde T400/6376, en fonction de la séquence d'empilement et du montage utilisé (d'après GRANDSIRE-VINÇON, 1993).

Ces divers effets dans la direction transverse au stratifié incitent à analyser l'influence de l'épaisseur sur la résistance. WISNOM (1991) teste des UD carbone - époxyde XAS/913 sur un montage de flexion 4 points et un montage de flambage rotulé, pour des épaisseurs allant de 3.125 mm à 13.28 mm. Les résistances mesurées avec ces 2 montages sont respectivement de 1.85 % et 1.91 % pour les plis fins, et 1.35 % pour les plis épais. Quand les plis sont fins, la rupture de type "brosse" (cf **Figure A 13**) est initiée par la cassure progressive des fibres en tension. Quand les plis sont plus épais, la rupture en compression apparaît de manière soudaine. Plus le pli est fin, plus le comportement semble stable, ce qui confère au pli une résistance

élevée. Par contre, les plis épais semblent plus instables, certainement parce que le gradient de déformation dans l'épaisseur est faible, ce qui rend l'essai plus sensible aux imperfections comme dans le cas de la compression pure.

En résumé, les essais établissent clairement l'influence sur la résistance en compression des plis UD, non seulement des caractéristiques des matériaux de base, mais également du chargement, de la séquence d'empilement des stratifiés et de l'épaisseur du pli, ce qu'on rassemble généralement sous le terme générique d'**effet de structure**. Pour expliquer les mécanismes qui sont à la source de la rupture en compression, des études théoriques ont été menées. Dans le paragraphe suivant une revue bibliographique portant sur les modélisations est présentée. Une attention particulière est portée sur la comparaison entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux pré-cités.

3.4 Modélisation

Les modèles de rupture en compression des composites à fibres longues développés dans la littérature depuis plus de 30 ans sont très nombreux. Bien évidemment il n'est pas possible de les décrire tous, c'est pourquoi nous chercherons plutôt à présenter l'évolution des modèles proposés et notamment les paramètres essentiels qu'ils ont permis de mettre en évidence.

3.4.1 Modèles de microflambage

La plupart des modèles proposés dans la littérature s'apparentent au modèle de microflambage établit par ROSEN en 1964. Cet auteur représente le pli UD par un milieu bidimensionnel infini constitué de l'empilement de couches raides et souples représentant respectivement les fibres et la matrice. Les fibres étant suffisamment élancées, l'auteur adopte une cinématique de poutre en appui sur une fondation **élastique** figurant la matrice. En référence à l'ondulation sinusoïdale observée pour une fibre noyée dans de la résine, l'auteur caractérise une instabilité des fibres en compression appelée microflambage. Sous une contrainte de compression imposée, la charge limite que peut supporter le matériau est déterminée par l'apparition du microflambage des fibres qui peut se produire en phase ou en opposition (**Figure A 17**).

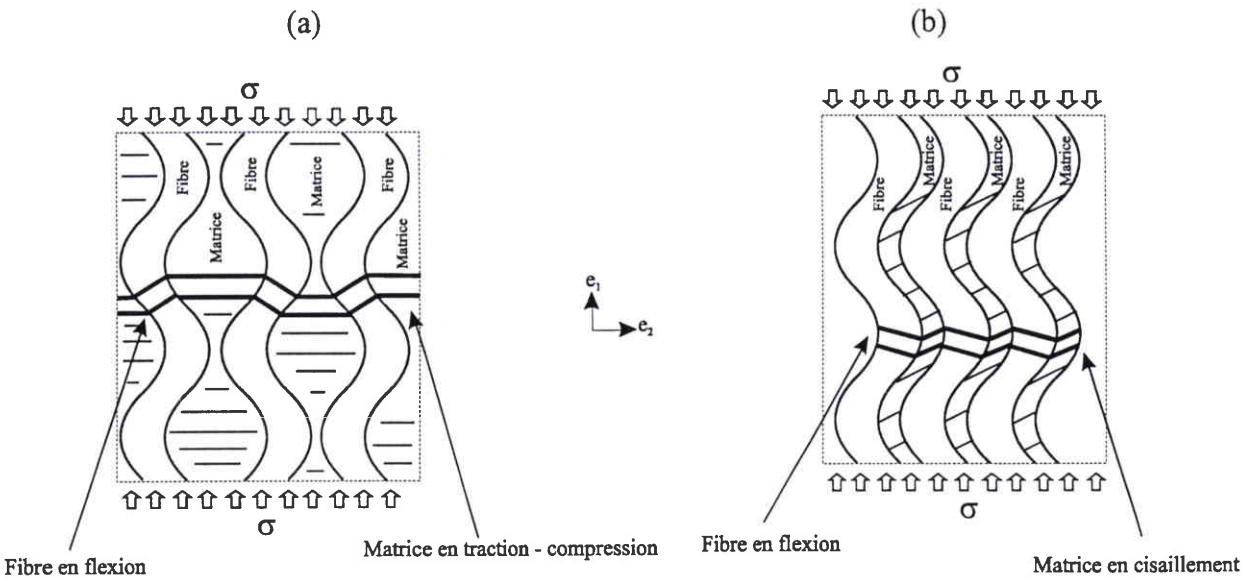


Figure A 17 : Modèle bidimensionnel de microflambage : (a) mode en (phase) extension et (b) mode en (opposition) cisaillement (ROSEN, 1964)

Pour les 2 modes de microflambage l'équilibre de la poutre sur fondation élastique s'écrit de manière classique. Soit en termes de déplacement :

$$E_f I_f \frac{\partial^4 v(x_1)}{\partial x_1^4} + \sigma_f S_f \frac{\partial^2 v(x_1)}{\partial x_1^2} - F = 0 \qquad \text{(A 1)}$$

avec E_f le module d'Young longitudinal de la fibre, I_f son moment quadratique, v la composante du déplacement suivant $\mathbf{e_2}$, σ_f la contrainte de compression appliquée à la fibre, S_f la section de la fibre et F la réaction suivant $\mathbf{e_2}$ de la fondation élastique. La différence entre l'équilibre des 2 modes se situe au niveau de la réponse de la matrice qui dans le mode en opposition est sollicitée en traction - compression, alors que dans le mode en phase elle est principalement sollicitée en cisaillement. À partir de l'équilibre, les charges critiques sont déterminées en recherchant le déplacement latéral solution sous forme d'une harmonique dont la longueur d'onde est la longueur de la fibre. L'expression des charges critiques se simplifie en tenant compte des rigidités respectives des constituants et en supposant que la fibre est de longueur infinie. Finalement la contrainte critique d'apparition du microflambage pour le mode en extension est :

$$\sigma_E \approx \frac{2}{\sqrt{3}} f \sqrt{\frac{f}{(1-f)} E_m E_f} \qquad \text{(A 2)}$$

avec f la fraction volumique de fibres et E_m le module d'Young de la matrice. Pour le mode en cisaillement, la contrainte est de l'ordre du module de cisaillement du composite et s'écrit:

$$\boxed{\sigma_C \approx \frac{G_m}{(1-f)}} \qquad \text{(A 3)}$$

avec G_m le module de cisaillement de la matrice.

Dans certains composites où la différence de rigidité des constituants et l'élancement des fibres ne sont pas aussi marqués, l'analyse de ROSEN n'est plus valide. ABDELMOULA et al. (1994) proposent un modèle utilisant une approche homogénéisée de matériaux périodiques dans lequel aucune hypothèse simplificatrice n'est émise. Dans le cas de matériaux faiblement hétérogènes, il est montré que des charges critiques inférieures à celles obtenues par ROSEN existent.

Dans le cas des composites étudiés par ROSEN, l'apparition d'un mode plutôt que l'autre dépend essentiellement du taux de fibres dans le composite et du rapport des rigidités des constituants (SCHUERCH, 1966). Sur la **Figure A 18** il apparaît clairement que pour les composites couramment utilisés ($f \geq 50$ %), c'est le mode en cisaillement qui survient plutôt que le mode en extension.

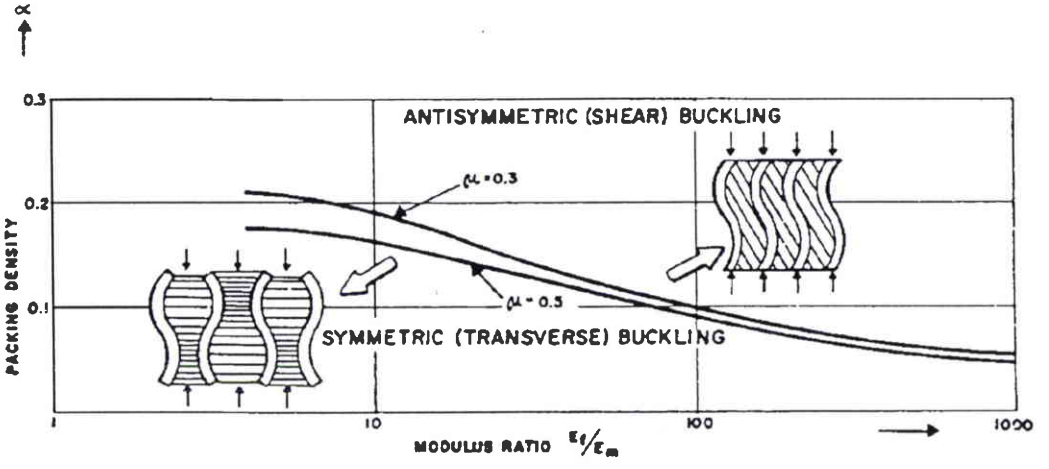


Figure A 18 : Modes de microflambages en fonction de la fraction volumique de fibres et du rapport des rigidités des constituants (SCHUERCH, 1966).

L'approche de la rupture par apparition d'une instabilité reflète bien le caractère brutal de la rupture en compression observée expérimentalement, malheureusement les contraintes critiques théoriques prévues par ces relations sont bien plus élevées que les valeurs mesurées expérimentalement. Par exemple, pour un carbone - époxyde T300/914 (E_m = 4500 Mpa, ν_m = 0.4, f = 60 %), la contrainte critique est proche de 4000 Mpa alors qu'expérimentalement elle est de l'ordre de 1300 Mpa en compression pure. De nombreux auteurs ont cherché à améliorer ce modèle afin de ramener les contraintes théoriques à des niveaux plus raisonnables.

Dans le cas de composites à matrice métallique, SCHUERCH (1966) utilise un modèle identique à celui de ROSEN et suggère que le microflambage se produit alors que la matrice a déjà dépassé sa limite élastique, ce qui paraît raisonnable pour ce type de matériau. Les essais étant réalisés sur des composites possédant une fraction volumique de fibres supérieure à 50%, il propose d'utiliser l'équation A 3 de ROSEN, mais en prenant pour la matrice le **module de cisaillement tangent** au lieu du module initial :

$$\sigma_C \approx \frac{\overline{G_m(\varepsilon)}}{(1 - f)} \qquad \text{(A 4)}$$

Le module tangent est déterminé en supposant que la matrice reste isotrope dans sa phase plastique, il se déduit alors simplement de la courbe d'écrouissage en traction. Les prévisions du modèle correspondent assez bien aux valeurs obtenues avec des essais de compression pure sur des composites boron/titane, boron/magnésium ou encore boron/aluminium. Mais l'auteur constate que pour des matrices dont la limite élastique est plus élevée que celle des matrices métalliques, comme par exemple les résines époxydes, le microflambage se produit en théorie dans le domaine élastique. Finalement quand le volume de fibres est élevé, i.e. pour le mode en cisaillement, les modèles de ROSEN et de SCHUERCH sont équivalents pour des composites à matrices organiques.

Afin de réduire les écarts entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales, LAGER et al. (1969) proposent de corriger la théorie de SCHUERCH en ne prenant pas un écrouissage isotrope pour la matrice, mais plutôt des caractéristiques proportionnelles aux caractéristiques initiales. Des essais sont menés sur des composites boron - époxyde possédant une fraction volumique de fibres variant de 5 à 46 %. Les résultats montrent que les valeurs à rupture obtenues sont, à un coefficient multiplicateur prés, celles prévues par la théorie de ROSEN, aussi

bien pour le mode en extension que pour le mode en cisaillement. Les modules sont corrigés, notamment le module de cisaillement utilisé dans la relation (A 4) de SCHUERCH :

$$\overline{G_m} = 0{,}63\ G_m \qquad \text{(A 5)}$$

Ces résultats permettent de prévoir correctement la rupture en compression des boron - époxyde, mais la correction apportée s'applique uniquement à ce type de matériaux. Cette étude offre l'intérêt de montrer qu'avec un coefficient correcteur de 0,63, les prévisions des modèles bidimensionnels semblent tout de même bien éloignées des valeurs expérimentales.

Pour se rapprocher du composite réel, HERMANN et al. (1967) proposent un modèle tridimensionnel de poutre sur fondation, la fibre étant affectée d'un défaut initial harmonique. Les modes et longueurs d'ondes de flambage sont établis dans le cas sans défaut pour une rigidité donnée de la fondation, en fonction des rigidités de la matrice et des fibres. Ensuite la rigidité effective du composite est évaluée pour des défauts correspondant aux longueurs d'onde critiques. La rigidité du composite chute quand le défaut augmente, et pour un défaut d'amplitude 0,5 fois le rayon de la fibre, le module effectif de compression du composite est égal à 65 % du module du composite sans défaut, ce qui correspond à 72 % du module effectif calculé en tension. Mais les auteurs se limitent au cas où le taux de fibres est suffisamment faible pour pouvoir négliger les interactions entre fibres, ce qui ne correspond pas aux composites beaucoup plus denses utilisés en général.

3.4.2 Modèles de "kinking"

Si les modèles de microflambage élastiques sont incapables de prévoir la rupture en compression des composites à fibres longues, les études que nous venons de présenter ont montré que le comportement plastique de la matrice aussi bien que la présence d'un défaut des fibres peuvent abaisser considérablement la tenue en compression. Partant d'un faciès de rupture (**Figure A 19**), ARGON (1972) propose un modèle bidimensionnel original incluant ces 2 effets.

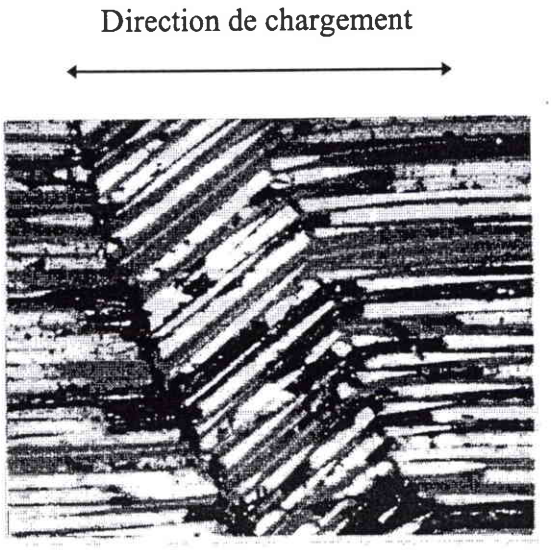


Figure A 19 : Rupture en compression d'un AS4 / PEEK, grossissement 400 x (EFFENDI, 1993).

Dans ce modèle, un ensemble de fibres est soumis à de la compression. Sous l'action du chargement, des bandes de cisaillement se forment et donnent une bande pliée ("kink band") inclinée par rapport à l'axe de compression. Ensuite cette bande subit des déformations sous l'action du chargement croissant (**Figure A 20**).

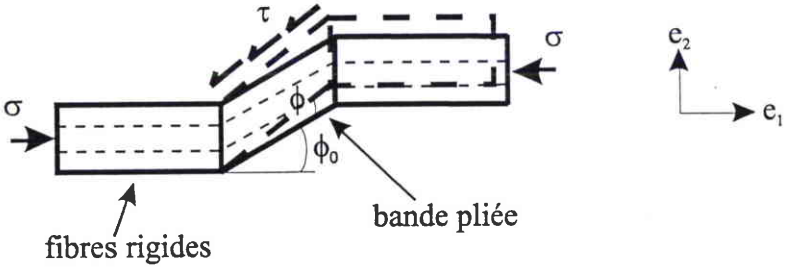


Figure A 20 : Modélisation du kinking proposée par ARGON (1972).

La bande pliée qui ne possède pas de rigidité de flexion est en équilibre sous l'action des efforts de compression et des efforts de cisaillement induits par le décalage ϕ_0 angulaire de la bande. Dans le cas d'une matrice rigide parfaitement plastique, la contrainte nécessaire pour augmenter le défaut est donnée par :

$$\sigma_c = \frac{\tau_y}{\phi_0} \qquad \text{(A 6)}$$

τ_y étant la contrainte limite en cisaillement du composite. Cette expression simple permet de rendre compte de la baisse de la contrainte critique lorsque le défaut augmente.

Par la suite, BUDIANSKY (1983) améliore ce modèle en considérant pour la matrice une loi élastique parfaitement plastique. Un analyse similaire à celle d'ARGON conduit à l'expression de la contrainte critique :

$$\sigma_c = \frac{G}{1 + \frac{\phi_0}{\gamma_y}} \qquad \text{(A 7)}$$

où G est le module de cisaillement du composite et γ_y sa limite élastique en cisaillement. Cette relation assez simple regroupe les caractéristiques principales déjà évoquées dans les modèles de microflambage, à savoir le **défaut des fibres** et le comportement **plastique de la matrice**. Toutefois le faciès de rupture présenté sur la **Figure A 19** montre que la bande pliée ne se raccorde pas au reste des fibres selon un plan normal à l'axe de compression, mais présente un angle qui est typiquement de l'ordre de 20 - 30°. Dans une étude ultérieure, BUDIANSKY et al. (1993) introduisent 2 paramètres supplémentaires pour décrire la géométrie de la bande pliée : l'angle d'inclinaison β du plan de raccord bande pliée / fibres intactes et la largeur de la bande pliée notée w (**Figure A 21**).

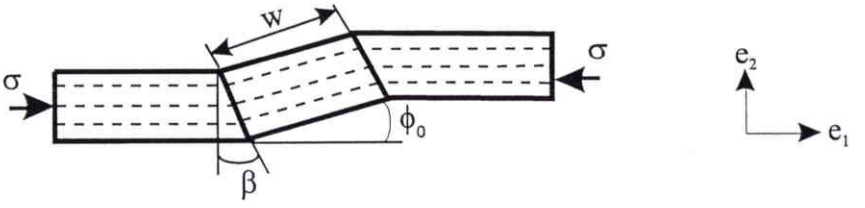


Figure A 21 : Modélisation du kinking proposée par BUDIANSKY et al. (1993).

Dans cette étude, l'écrouissage de la matrice est introduit sous la forme d'une loi de RAMBERG-OSGOOD à 3 paramètres, et une loi de comportement spécifique de la bande pliée en est déduite. Pour β fixé, les auteurs recherchent les couples $\frac{\gamma_y}{\phi_0}$ correspondant qui permettent de recouper les résultats expérimentaux issus de la littérature. On peut toutefois s'interroger sur

l'opportunité de "caler" ce rapport sur les valeurs expérimentales existantes, la limite élastique et l'angle initial étant des données plus ou moins facilement quantifiables.

La modélisation de la rupture en compression par microflambage ou par kinking des composites à fibres longues soulève de nombreuses difficultés. On peut également se demander si l'approche de la rupture est valide : la rupture en compression est un phénomène si brutal qu'il est impossible d'observer les mécanismes de dégradation. Il est essentiel d'envisager d'autres mécanismes susceptibles de provoquer la rupture de ces matériaux.

3.4.3 Modes de rupture

GREZCZUCK (1973) teste des composites à base de fibres ductiles (acier inoxydable, aluminium) et fragiles (graphite) de quelques millimètres de diamètre associées à des matrices époxydes de rigidité plus ou moins grande. Pour les fibres ductiles, 2 modes de rupture sont mis en évidence. Dans le cas d'une résine à bas module, la rupture survient brutalement et les contraintes à rupture sont proches de celles prévues par ROSEN, l'auteur suggère que la rupture a lieu après apparition du microflambage élastique. Pour une résine à haut module, la réponse du matériau montre que les fibres se déforment plastiquement puis le microflambage apparaît. Pour les fibres fragiles la même transition est observée, mais dans le cas des résines haut module les fibres ne supportent pas la déformation de compression. Il existe un module de transition G_m^* tel que si $G_m < G_m^*$ il y a rupture déclenchée par microflambage, et si $G_m > G_m^*$ il y a rupture par écrasement des fibres.

DAVIS (1975) teste en compression des composites boron - époxyde dans lesquels il mesure les défauts des fibres. Un modèle micromécanique incluant ce défaut et un comportement non linéaire de la matrice est couplé à une résolution numérique. Il est établi que le mode de microflambage en cisaillement apparaît avant que la décohésion fibre - matrice ne se soit produite. C'est également ce mode de rupture qui est envisagé par JELF et al. (1992) qui comparent le microflambage élastique, l'écrasement des fibres, la rupture matrice et le microflambage plastique. Les auteurs utilisent des matériaux qui "caricaturent" l'hétérogénéité des constituants employés dans les composites réels : cire, plomb, plastique pour la matrice, et bois, spaghetti, cuivre, verre pour les fibres. Ils montrent ainsi les paramètres influant sur la rupture des différents couples de matériaux. Certains composites à base de fibres fragiles, telles que les fibres à très haut module, peuvent périr par écrasement des fibres, dans ce cas la règle des

mélanges fournit une bonne approximation des valeurs à rupture. La comparaison essais - modèle établit que la rupture des composites communément employés (de type AS4/PEEK) se produit par **microflambage plastique, en présence de défaut des fibres**.

Dans une étude en 2 parties, STEIFF (part I et II, 1990) étudie le processus complet de la formation des kink-bands. L'auteur propose 2 modèles micromécaniques où la matrice possède un comportement élasto-plastique, l'un étant un modèle de microflambage en présence de défaut, l'autre un modèle de kinking. Il est établit que la déformation nécessaire pour **rompre les fibres en tension aux points d'inflexion** des ondulations de flexion est supérieure à celle nécessaire pour propager une bande pliée de fibres cassées. L'auteur suggère que la rupture des fibres est l'étape nécessaire à l'apparition des bandes de cisaillement et propose le scénario suivant (**Figure A 22**) : (a) un paquet de fibres possédant un défaut de rectitude (angle ϕ_0 , ½ longueur d'onde L_0) est soumis à de la compression; (b) les fibres fléchissent jusqu'à rompre aux points d'inflexion; (c) la bande pliée tourne sous l'action du chargement de compression et atteint sa configuration finale; ensuite les conditions sont atteintes, et même dépassées, pour que la bande puisse se propager aux fibres adjacentes (voir également EVANS et al., 1978). Dans ce cas, la flexion négligée dans le modèles de kinking n'est plus négligeable puisque la largeur de bande dépend directement de la longueur d'onde de flambage et donc de la rigidité de flexion.

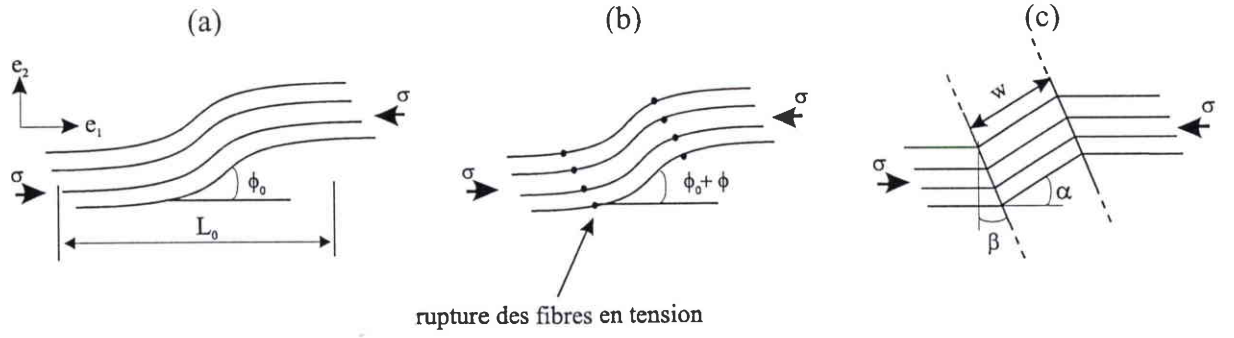


Figure A 22 : Initiation de la bande pliée (d'après STEIFF part I et II, 1990).

FLECK et al. (1995 a) utilisant le même scénario introduisent la flexion de fibres dans le modèle de kinking. La largeur de bande prévue par le modèle est proche de la réalité, mais l'angle β reste un paramètre libre. Cette modélisation de kinking rejoint finalement l'analyse de STEIFF. Toutefois l'expression de BUDIANSKY (A 7), même si elle considère $\beta = 0$, semble plus simple

à utiliser comme critère de rupture et donne des résultats corrects pour $\frac{\gamma_v}{\phi_0}$ choisi parmi les valeurs établies dans BUDIANSKY et al. (1993). Pour des valeurs typiques de ce rapport comprises entre 2 et 4, la contrainte correspond à une diminution entre 65 et 80 % de la valeur critique de ROSEN.

Parmi les 2 paramètres reconnus comme essentiels par la plupart des auteurs présentés, la limite élastique de la matrice est le facteur le plus aisé à évaluer. Par contre le défaut des fibres (qui pourrait être d'origine thermique) est difficile à quantifier et même à mesurer, nous abordons ce problème dans le paragraphe suivant.

3.4.4 Défaut d'ondulation des fibres

L'étude du défaut de rectitude des fibres est essentiel pour pouvoir disposer de données réalistes. Il est également nécessaire d'en déterminer l'origine et de quantifier précisément son influence sur le comportement à rupture.

Pour réaliser ses essais de compression pure GRANDSIRE-VINÇON (1993) fabrique des éprouvettes monofilamentaires carbone - époxyde. Une observation sous lumière polarisée montre que dans certaines éprouvettes la fibre est rompue ou possède une ondulation initiale (**Figure A 23**), tandis que d'autres sont parfaitement rectilignes. Il semble qu'au moment de la réticulation la matrice se contracte fortement et exerce ainsi un chargement sur la fibre qui microflambe. Ce phénomène assez complexe dépend également du cycle de cuisson du composite, et peut-être aussi du maintien des plis adjacents, comme dans le cas de la compression sur mèche (cf LEBLANC et al., 1994). Une étude dans ce sens est en cours au LPMM (JOCHUM et al., 1996).

Une mesure des défauts a été proposée par FROST (1992) ou encore YURGARTIS (1987). Dans le premier cas, une méthode semi-empirique permet d'estimer la courbure des fibres en comparant les contraintes à ruptures expérimentales et théoriques, mais les résultats dépendent du modèle théorique utilisé. YURGARTIS quant à lui procède à des coupes transverses d'UD, les fibres apparaissent alors comme des ellipses dont le grand axe indique le désalignement local des fibres par rapport à l'axe théorique, moyennant une hypothèse de circularité de leur section. PALUCH (1994) propose un démarche plus systématique qui consiste à recréer la filiation des

fibres en déterminant le centre de leur section dans chacune des 50 coupes transverses réalisées à intervalle de 20 µm. Cette procédure n'est rendue possible que par l'utilisation d'un système d'analyse d'image suivie d'une analyse statistique permettant de traiter les données. Les résultats obtenus pour 4 types de fibres indiquent qu'elles sont bien affectées d'un défaut sinusoïdal pour une proportion variant de 85 % des AS4 et T800 à 60 % des T300 et 45 % des GY70, mais une seule sinusoïde ne suffit pas toujours à modéliser le défaut. Il faut par contre renoncer à l'idée que les fibres ondulent en phase et parallèlement entre elles. L'amplitude du défaut dépend du type de fibre, il est compris entre 0.05 et 6.2 µm. La longueur d'onde du défaut est mesurée aux alentours de 900 µm, et sa corrélation avec l'amplitude est faible (0,4 pour les T800).

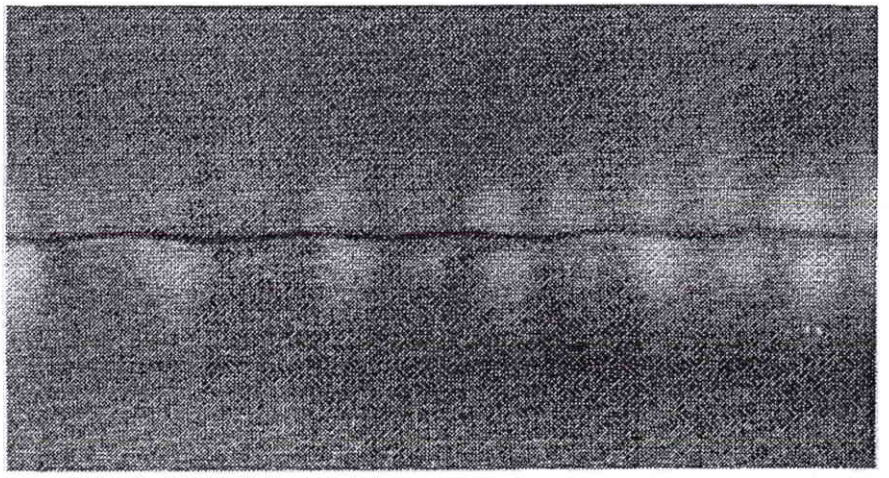


Figure A 23 : Éprouvette monofilamentaire non sollicitée, sous lumière polarisée. Fibre en microflambage (GRANDSIRE-VINÇON, 1993).

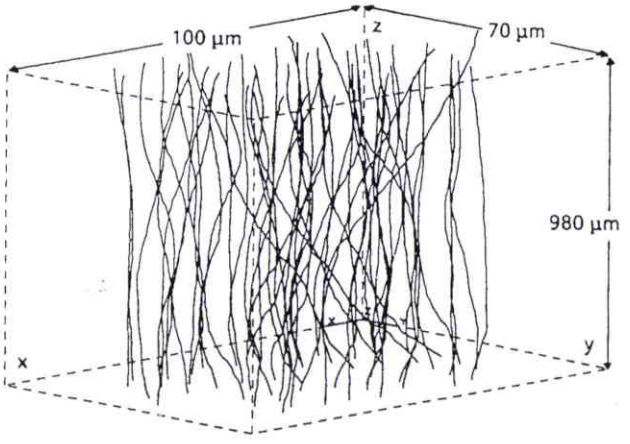


Figure A 24 : Reconstitution pour un UD T300/914 de la filiation des fibres dans le volume d'observation (PALUCH, 1994).

Il ne fait plus aucun doute que le défaut abaisse considérablement la résistance en compression. Des études expérimentales telles que MRSE et al. (1990) ou WISNOM et al. (1993) ont clairement établi la corrélation entre la présence de défaut dans les fibres et les faibles performances en compression. Il reste à déterminer exactement quels sont les paramètres influants : longueur d'onde, amplitude, distribution, variation de l'amplitude dans l'épaisseur du pli, ... Ce type d'étude n'est possible qu'en utilisant des outils numériques, c'est à dire dans la plupart des cas une modélisation par éléments finis. La modélisation du pli UD peut se faire de 2 manières distinctes, soit le pli UD est entièrement discrétisé ce qui est très coûteux en temps de calcul, ou bien on fait appel à un modélisation équivalente au pli réel beaucoup plus économique mais moins triviale.

3.4.5 Modèles hétérogènes / Modèles homogénéisés

Grâce à la puissance croissante des moyens de calculs, ces dernières années des modélisations hétérogènes par éléments finis ont été réalisées. Ces études permettent notamment d'établir définitivement le processus conduisant à la rupture des composites en compression. L'influence du défaut et de la plasticité de la matrice sont établis de manière précise, ce qui permet d'étudier d'autres paramètres dont l'influence n'est pas toujours négligeable. Les modélisations hétérogènes sont très coûteuses en temps de calcul, même si généralement elles sont bidimensionnelles et qu'une seule partie du composite est maillée pour des raisons de symétrie. Pour minimiser les coûts et pouvoir mener facilement des études paramétriques, certains auteurs proposent des modèles plus économiques où le pli réel est représenté par un milieu homogène.

Diverses modélisations ont permis d'établir plus clairement pourquoi le couplage du défaut des fibres avec le comportement non linaire de la matrice est l'élément clef de la rupture en compression. Ce sont notamment les modélisations hétérogènes qui ont permis d'observer finement l'évolution de l'état de contraintes avec le chargement (ANQUEZ 1990; GUYNN et al. 1992 a; GUYNN et al. part I et II, 1992; EFFENDI, 1993; CM/Del 1994; KYRIAKIDES et al. 1995). A l'aide de ce type d'approche, il est possible de déterminer l'historique complète de la rupture. Le processus de rupture est similaire à celui proposé par STEIFF (1990 part I et II), avec en plus la localisation des déformations plastiques de la matrice dans certaines zones. C'est à l'endroit où l'angle du défaut est maximum (ϕ_0^{max}) que la matrice est la plus sollicitée en cisaillement, ce qui tend à l'entraîner dans sa phase plastique (**Figure A 25 a**). La matrice étant fortement non linéaire, le support qu'elle offre à la fibre diminue. La fibre, sous l'action du

chargement, fléchit plus rapidement, ce qui augmente encore l'angle ϕ^{max} (**Figure A 25 b**). Le processus catastrophique ainsi amorcé conduit finalement à la rupture des fibres et ensuite à la formation de bandes de cisaillement (**Figure A 25 c**).

Un exemple tiré de KYRIAKIDES et al. (1995) montre la simulation du comportement en compression d'un tube (**Figure A 26**), et l'évolution du maillage (½ longueur d'onde d'un pli, 18341 noeuds) associée en fonction du chargement (**Figure A 27**). L'essai a été réalisé sur une éprouvette cylindrique à base d'UD APC2 (carbone - époxyde AS4/PEEK). La simulation correspond à un défaut identique dans toute l'épaisseur, de longueur d'onde 150 fois le diamètre h des fibres et d'amplitude égale à 2 h. Les points sur la courbe simulée indiquent les étapes essentielles : jusqu'au point limite 2 le comportement est élastique, puis la matrice est fortement sollicitée en cisaillement ce qui provoque une localisation des déformations et induit un relâchement élastique ("cusp - lisp") des déformations loin de ces bandes de cisaillement (étapes 3 à 6). Ensuite la rupture survient au delà du point 6 où les fibres ont atteint leur limite à rupture.

Dans cette simulation la répartition des moments de flexion maximum dans les fibres (**Figure A 27**) suggère que la largeur des kink - band n'est pas ¼ de la longueur d'onde du défaut initial. À cause de la localisation des déformations plastiques de la matrice, la rupture des fibres se produit à proximité des ventres de l'ondulation, et non au point de courbure maximale comme il est observé pour une fibre seule (GRANDSIRE-VINÇON, 1993). On peut par conséquent simplement supposer que la largeur des bandes de pliage observées expérimentalement est un sous multiple de la longueur d'onde du défaut initial (EFFENDI, 1993).

Dans un cadre élastique, CM/Del (1994) comparent les contraintes de flambage élastiques obtenues avec une modélisation 2D et une modélisation 3D. Conformément au modèle de ROSEN, les contraintes sont de l'ordre du module de cisaillement qui est différent en 2D et en 3D. Nous reviendrons ultérieurement sur ce point dans les travaux présentés ici. Il est essentiel de tenir compte de cette différence, les résultats pouvant varier de 50 % selon la modélisation utilisée. Pourtant une modélisation 3D de la microstructure reste inaccessible car elle génère des coûts de calculs prohibitifs quand on y introduit les paramètres nécessaires pour prévoir la rupture en compression. Dans le cas d'un UD T300/914, le rapport des contraintes de flambage (en Mpa) en 2D et 3D est :

$$\frac{\sigma_c^{3D}}{\sigma_c^{2D}} = \frac{5500}{3600} \approx 1.53$$

Ce travail établi également que le défaut joue sur le comportement en compression par l'angle maximal entre la fibre et l'axe théorique, et l'influence de la matrice est caractérisée par sa limite élastique.

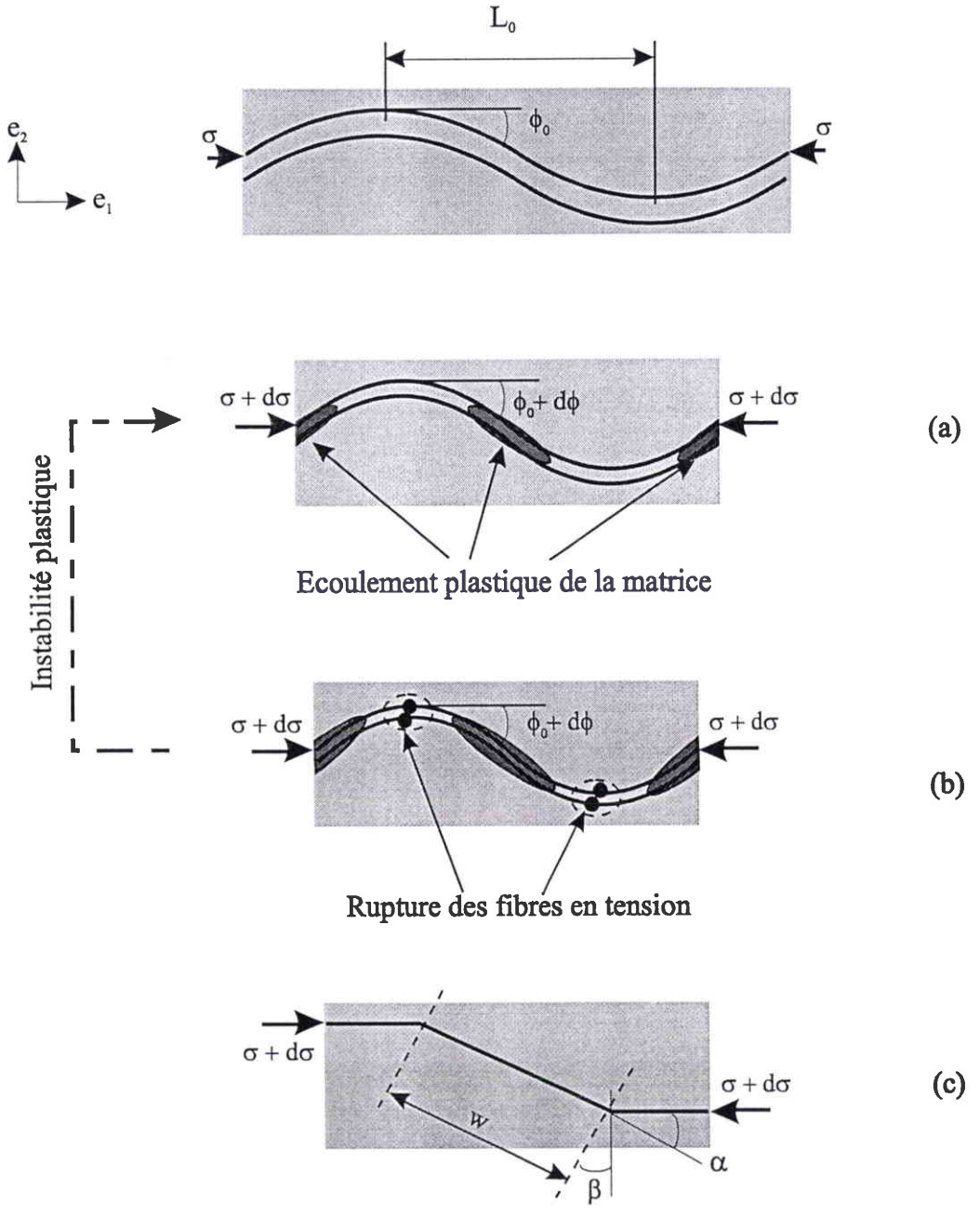


Figure A 25 : Processus de rupture en compression schématisé pour 2 fibres seules.

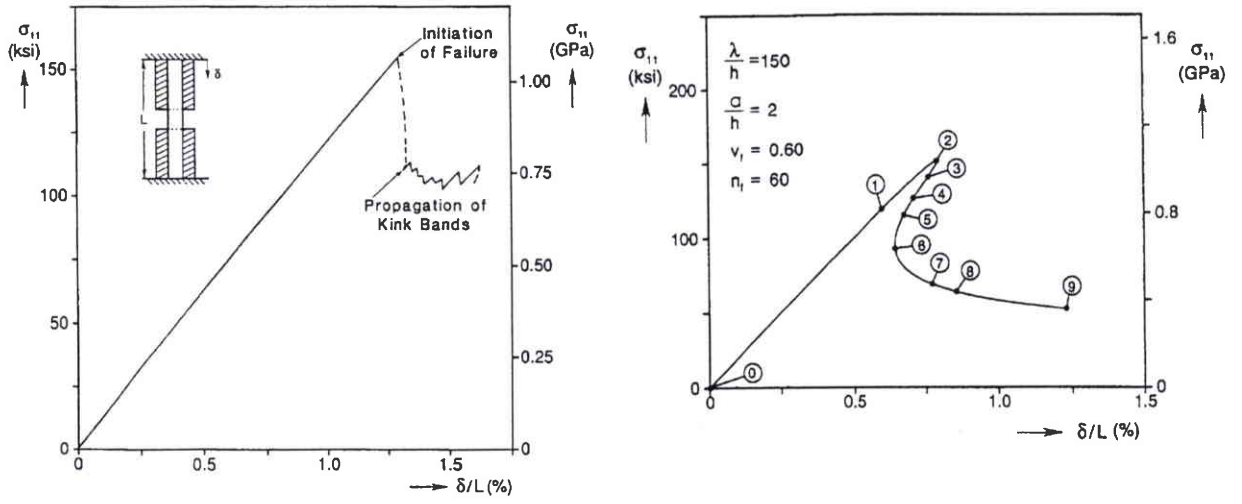


Figure A 26 : Comparaison de la réponse réelle (contrainte - raccourcissement) et de la simulation du comportement en compression d'une éprouvette cylindrique en APC2. Description des étapes conduisant à la rupture (KYRIAKIDES et al., 1995).

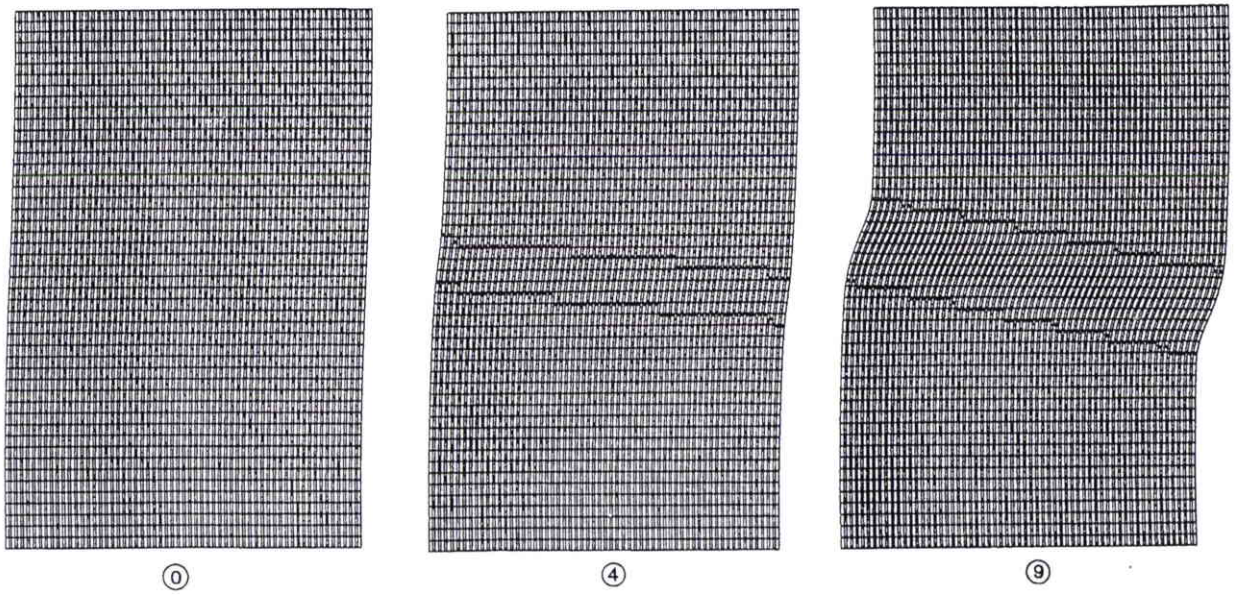


Figure A 27 : Maillages bidimensionnels d'une ½ longueur d'onde du pli UD. Étapes 0, 4 et 9 de la courbe obtenue par la modélisation ci-dessus. Les points noircis figurent les endroits où le moment de flexion dans les fibres est maximum (KYRIAKIDES et al., 1995).

EFFENDI (1993) modélise en 2D un pli UD et étudie l'influence du défaut sur sa tenue en compression. Si le défaut est très faible, la tenue du matériau est directement liée à la résistance des fibres en compression qui périssent par écrasement. Si le défaut est plus important, les fibres à faible résistance sont susceptibles de rompre en compression, tandis que pour les fibres classiques la rupture dépend des imperfections géométriques initiales et de la limite élastique de la résine. Dans tous les cas il semble que le défaut le plus pénalisant est un défaut harmonique constant dans toute l'épaisseur du composite. KYRIAKIDES et al. (1995) étudient l'influence de l'amplitude et de la longueur d'onde du défaut sur le comportement en compression d'un pli UD. Les résultats montrent que si la longueur d'onde du défaut est grande, la rigidité et la résistance augmentent, mais si l'amplitude croît la rigidité et la résistance diminuent. La répartition du défaut est également étudiée, mais son influence n'est marquée que si le gradient de défaut s'accompagne de zones plus riches en résine. Ce dernier résultat recoupe les calculs de CHUNG et al. (1995) et les expériences de GUYNN et al. part II (1992) qui montrent que la concentration de la résine dans certaines régions abaisse considérablement la résistance du pli. En effet, les composites réels ne possèdent pas une répartition homogène des fibres, certaines zones sont pauvres en résine, ce qui les rend d'autant plus sensibles au gradient de cisaillement qui pilote le processus de rupture.

Pour des raisons de coûts de calculs (modélisation KYRIAKIDES et al., **Figure A 27** = 36682 ddl), il est intéressant de pouvoir modéliser le pli réel par un milieu homogène équivalent. Ce type de modélisation est encore pour l'instant peu répandue pour l'étude du comportement en compression. Ces modèles distinguent en général le comportement de la fibre qui est sollicitée en flexion, tandis que la matrice supporte le cisaillement et les déformations transverses. La cinématique correspondante peut être établie à partir de considérations physiques (WISNOM, 1993, 1994; FLECK et al., 1995 b) ou démontrée mathématiquement (GRANDIDIER et al. part I et II, 1996; GARDIN et al., 1992).

À partir d'une cinématique telle que celle présentée, FLECK et al. (1995 b) identifient la rotation des fibres à la rotation de la cinématique d'un milieu de COSSERAT[1]. La rigidité de

[1] Milieu dans lequel il existe une micro-rotation répartie à laquelle est associé un micro-moment réparti. Dans un cas bidimensionnel, cette approche se traduit par une cinématique particulière où une rotation indépendante hors plan se superpose à la cinématique d'un milieu classique.

flexion des fibres correspondant à cette rotation est répartie sur le domaine et la loi de comportement spécifique établie dans les modèles de kinking précédents est employée pour la matrice. Une étude numérique basée sur ce modèle est ensuite utilisée pour prévoir la propagation d'un défaut à partir des données des modèles de kinking ($\frac{\gamma_V}{\phi_0}$, β). La simulation numérique est assez lourde, le maillage d'une demi éprouvette comporte 1985 éléments pour 12198 ddl. Mais sans l'utilisation d'un milieu homogénéisé, cette étude n'aurait pas été possible du tout.

WISNOM réduit les temps de calcul associés à une simulation classique en utilisant un milieu homogène équivalent "reconstitué" à partir d'éléments finis disponibles dans ABAQUS©. Pour chaque modélisation, le maillage est réalisé à partir de "pseudo - éléments" obtenus par assemblage d'un élément de poutre sans cisaillement (B23) qui supporte l'effort de compression et d'un élément de plaque qui supporte le cisaillement et les déformation transverses (CPS4) (**Figure A 28**). Les déplacements de la poutre selon $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$, respectivement u et v, sont contraints à être identiques à ceux de la plaque. Par contre la rotation θ est laissée libre, ce qui implique que la maillage utilisé doit être suffisamment fin pour éviter le flambage des fibres sur un élément et prévenir les risque de pénétration des poutres dans la plaque. La loi de comportement non linéaire d'un pli UD mesurée pendant un essai de compression est appliquée au matériau homogène équivalent

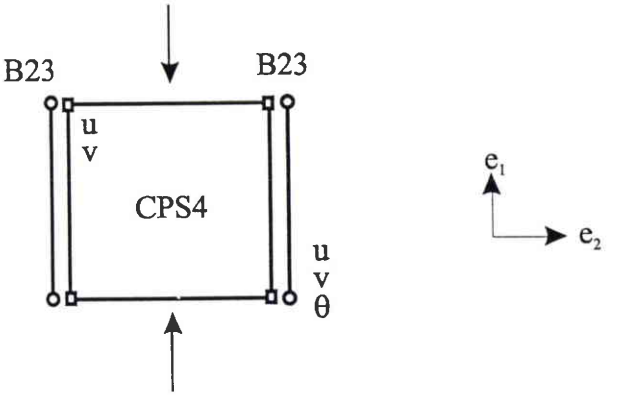


Figure A 28 : Pseudo - élément utilisé par WISNOM (1993, 1994)

© Hibbitt, Karlsson and Sorensen

Grâce à cet élément peu coûteux, l'auteur étudie une ½ longueur d'onde d'un pli. L'auteur établit l'influence de l'angle du défaut que fait la fibre par rapport à son axe théorique, sur le comportement en compression du pli (WISNOM, 1993). Lorsque l'amplitude du défaut angulaire augmente la résistance chute, mais lorsque sa longueur d'onde diminue la résistance augmente. WISNOM justifie ce dernier résultat en invoquant la résistance en flexion offerte par les fibres adjacentes qui augmente lorsque la longueur d'onde diminue. Comme KYRIAKIDES et al. (1995), l'auteur parvient à la conclusion que la largeur de la bande pliée est invariante quelque soit le défaut initial, ce qui rejoint les résultats de FLECK et al. (1995 a). De plus, le défaut le plus pénalisant est un défaut harmonique constant dans l'épaisseur de la bande de composite modélisée (voir également EFFENDI, 1993).

Les modélisations par éléments finis présentent de nombreux avantages par rapport aux modèles micromécaniques introduits précédemment, mais en contrepartie ils sont généralement beaucoup plus coûteux en temps de calcul, dans le cadre d'une étude paramétrique par exemple. Les résultats obtenus avec ce type d'études sont proches des valeurs expérimentales caractérisées sous un chargement de compression pure. Mais on peut se demander dans quelle mesure la combinaison d'un modèle bidimensionnel et d'un défaut trop idéalisé qui abaissent excessivement la résistance, ne conduit pas inévitablement à des résultats proches de ceux fournis par des essais de compression pure, eux mêmes peu efficaces. D'ailleurs la plupart des auteurs proposent des résultats qu'ils qualifient de qualitatifs. D'un autre côté, les contraintes à rupture théoriques obtenues par divers auteurs correspondent assez bien à la plage des valeurs expérimentales obtenues en compression, qui sont comprises par exemple entre 1100 Mpa et 1800 Mpa dans le cas de carbone - époxyde XAS/914 (WOOLTSENCROFT et al., 1981). Mais la plage des contraintes à rupture théoriques est obtenue principalement en faisant varier l'angle du défaut initial, alors que les essais sont réalisés sur des éprouvettes possédant à priori les mêmes défauts. Cette variation de la résistance n'est donc pas imputable au seul défaut des fibres, mais plutôt à des paramètres macroscopiques dépendant de l'essai, plus explicitement il s'agit de l'effet de structure. On voit dans les modélisations par E.F. présentés ci-dessus, que quelque soient l'épaisseur du pli ou sa séquence d'empilement, la géométrie et les conditions aux limites du pli n'apparaissent pas car les coûts de calcul limitent le domaine étudié à une partie restreinte du pli.

On touche ici aux principales limites des modélisations présentées dans ce chapitre, aussi bien les modèles micromécaniques que les approches E.F. : **ils sont incomplets et ne peuvent en**

aucun cas rendre compte de l'effet de structure. Dans le cas des modèles micromécaniques présentés, ils ne peuvent intrinsèquement pas prendre en compte les effets du chargement, de l'épaisseur du pli ou de sa séquence d'empilement puisque ce sont des modèles exclusivement locaux. Pour les modélisations E.F., le problème se pose en termes de coûts de calcul qui ne permettent pas d'envisager une telle modélisation. Pourtant nous avons vu au § 3.3 que l'effet de structure est un des éléments clefs de la rupture en compression au même titre que le défaut des fibres et la plasticité de la matrice. Nous proposons dans le chapitre suivant d'analyser les quelques modèles capables de prendre en compte l'effet de structure.

3.4.6 Effet de structure

SCHAFFERS (1977) étudie des courroies en caoutchouc renforcées par des fils d'acier soumises à un chargement de flexion (**Figure A 29**). L'auteur observe que sous ce chargement, les fils à l'intérieur de la courbure du pli ondulent en phase, alors que les fils sur la face externe sont en tension. L'idée novatrice introduite est de considérer que le déplacement des fibres dépend de leur position dans l'épaisseur du pli.

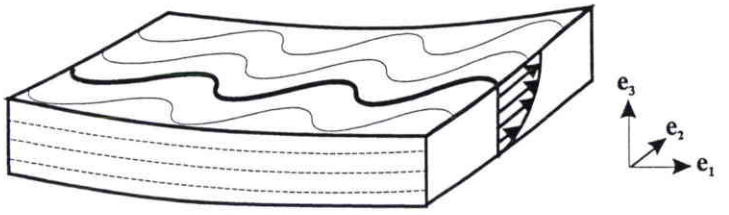


Figure A 29 : Gradient de déplacement v dans la hauteur du pli en flexion.

Le pli est modélisé comme la superposition de plans ($\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$) contenant une fibre dans leur épaisseur. Chaque plan est un milieu dans lequel le microflambage des fibres se produit en phase, sous l'action d'un chargement dépendant de l'altitude courante. Entre 2 plans d'altitude voisine, les fibres sont soumises à un chargement différent et n'ont donc pas la même flèche v. Ce gradient de flèche par rapport à l'épaisseur se traduit par un cisaillement ε_{23} dans la matrice ("interlayer shear"), qui peut s'exprimer en fonction du déplacement des fibres des plans contigus. Finalement l'équilibre d'une fibre est caractérisé par sa rigidité de flexion, par son interaction avec les fibres voisines appartenant au même plan ("intralayer shear") et par le support de la matrice reliant cette fibre aux plans adjacents ("interlayer shear"). La résolution analytique dans le cas de fibres rectangulaires s'effectue en tenant compte de l'épaisseur du pli,

des conditions de bords libres, du chargement, et du nombre de plans. La formulation nécessite la résolution simultanée de l'équilibre de toutes les fibres appartenant à la même verticale. À raison d'une équation différentielle par fibre dans l'épaisseur, la taille du problème peut être considérable. La solution est recherchée, pour chaque fibre, comme le produit d'une harmonique dans le sens des fibres et d'une fonction de l'altitude :

$$v(x_1,x_3) = V(x_3)\, e^{(i\,k\,x1)} \qquad \text{(A 8)}$$

où V est la fonction recherchée et k est le nombre d'ondes dans la direction des fibres. Les résultats montrent que la résistance et la longueur d'onde de l'instabilité dépendent des propriétés des matériaux, mais aussi de l'épaisseur du pli qui est prise en compte grâce au champ de déplacement particulier.

Sur le même principe, GRANDIDIER (1991) et SWANSON (1992) modélisent un pli élastique appartenant à un stratifié. Les plis dans l'axe du chargement sont les seuls dans lesquels le microflambage est susceptible de se produire, l'influence des autres plis étant représentée par des conditions aux limites imposées sur le déplacement résultant du microflambage (**Figure A 30**).

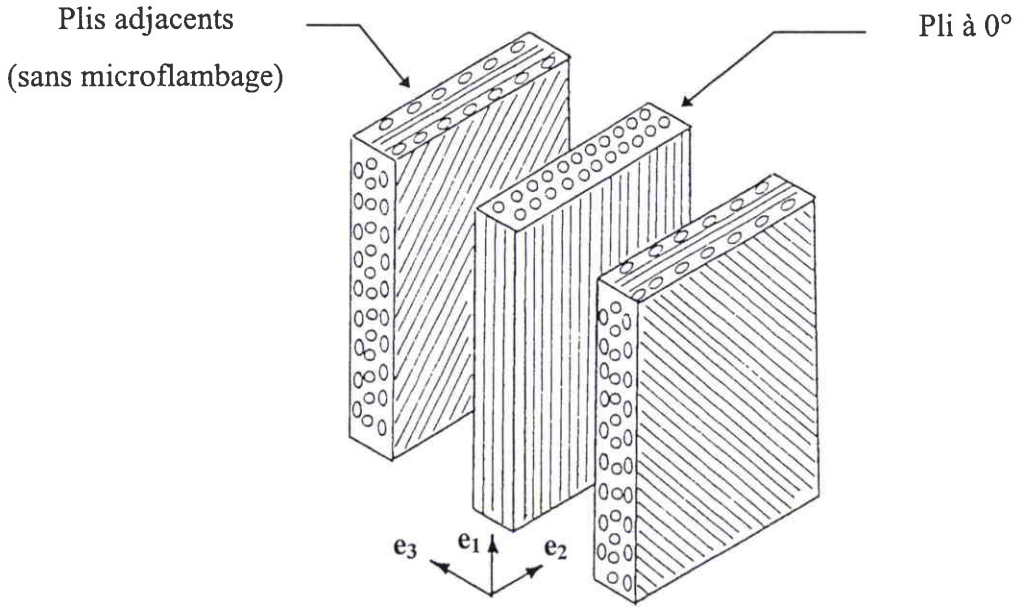
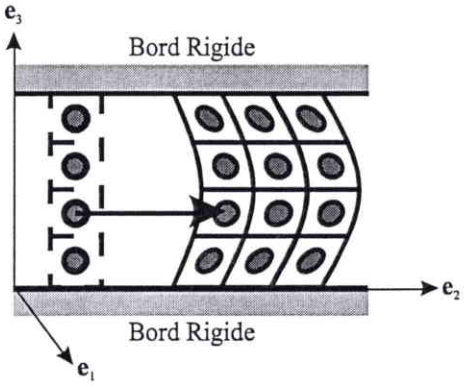


Figure A 30 : Pli axial maintenu par les plis transverses adjacents (SWANSON, 1992)

GRANDIDIER (1991) reprend le principe d'un cisaillement entre les fibres de plans superposés. L'étude a pour but de répartir cette déformation ε_{23} à l'échelle du pli, de façon à obtenir une grandeur directement utilisable dans l'équation d'équilibre d'une poutre sur fondation similaire à A 1. Le cisaillement ne doit plus s'écrire comme la différence des déplacements de fibres adjacentes, mais plutôt comme un effort dont l'intensité dépend à la fois de la microstructure (fibre - matrice) et du déplacement de la fibre courante. Dans ce modèle, les fibres microflambent dans le plan $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ et le champ de déplacement est choisi conformément à la **Figure A 31**.



$$v(x_1,x_3) = V(x_3)\sin(k\,x_1)$$

Figure A 31 : Champ de déplacement associé au modèle de GRANDIDIER (1991).

Une analyse dimensionnelle permet à GRANDIDIER et al. (1990, 1991) de proposer une expression de la force de rappel équivalente au cisaillement ε_{23} et qui s'exerce selon $\mathbf{e}_2$:

$$F = C\,E_m\,S_f\frac{\partial^2 v(x_1,x_3)}{\partial\,x_3^{\,2}} \qquad \text{(A 9)}$$

où C est un coefficient sans dimension, calculé par une technique d'homogénéisation périodique, qui dépend du coefficient de Poisson de la matrice et de la forme de la cellule de base. Finalement, en tenant compte du cisaillement ε_{12}, l'équilibre en termes de déplacement s'écrit :

$$E_f\,I_f\frac{\partial^4 v}{\partial x_1^{\,4}} - \left(\frac{G_m}{f(1-f)} - \sigma_f\right) S_f\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^{\,2}} - C\,S_f\,E_m\frac{\partial^2 v}{\partial x_3^{\,2}} = 0 \qquad \text{(A 10)}$$

Pour résoudre cette équation, il faut préciser la forme de l'amplitude $V(x_3)$. Les auteurs introduisent une grandeur H associée au pli qui caractérise l'effet sur l'amplitude des conditions en déplacement imposées aux bords du pli :

$$V(x_3) = \sin\left(\frac{\pi x_3}{H}\right) \qquad \text{(A 11)}$$

Sur la **Figure A 32** sont représentées quelques configurations du pli UD chargé en compression, la valeur H correspondante a été obtenue en analysant l'interaction entre les plis.

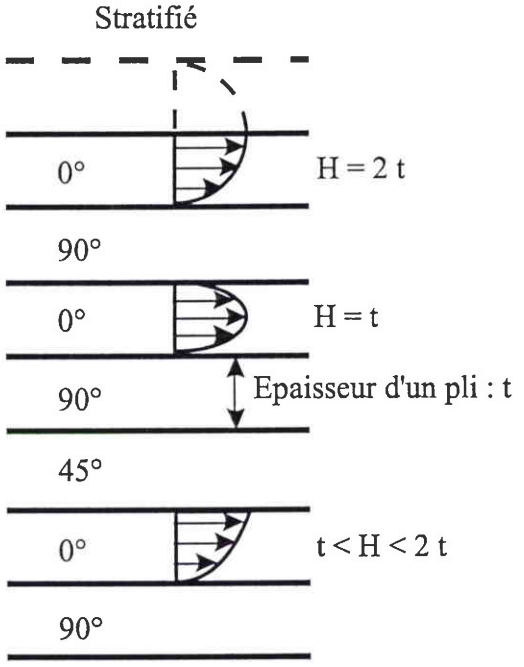


Figure A 32 : Valeurs du paramètre H en fonction de la position du pli (GRANDIDIER, 1991).

L'expression du champ de déplacement conduit à la solution analytique de l'équilibre A 10 et donne le nombre d'ondes critique et la contrainte correspondante :

$$k = \sqrt[4]{C\frac{E_m}{E_f}}\sqrt{\frac{\pi}{H\, r_{gf}}}$$

$$\sigma_f = \frac{G_m}{f(1-f)} + 2\, r_{gf}\sqrt{C\, E_m\, E_f}\left(\frac{\pi}{H}\right) \qquad \text{(A 12)}$$

où $r_{gf} = \sqrt{\frac{I_f}{S_f}}$. Grâce à l'expression A 9 de la force de rappel, l'instabilité est caractérisée comme une fonction explicite des caractéristiques de la microstructure, mais également de la géométrie du pli et de la séquence d'empilement. Les résultats montrent que la solution obtenue est plus élevée que celle de ROSEN, mais le but de cette étude est avant tout d'obtenir une expression simple de toutes les interactions et de prendre en compte les effets géométriques tant au niveau des constituants qu'au niveau du pli. Les résultats sont qualitatifs et sont la base d'un modèle plus complet dont le développement est détaillé dans la suite.

SWANSON (1992) étudie l'équilibre d'un pli UD chargé en compression maintenu entre 2 plis adjacents. Partant de l'équilibre d'une poutre possédant un défaut initial v_0, les réactions de la matrice sur la fibre sont exprimées en intégrant les déformations de cisaillement ε_{12} et ε_{23} sur la circonférence d'une fibre. Le champ de déplacement est introduit sous une forme similaire à celle utilisée par GRANDIDIER et SCHAFFERS, la variation de l'amplitude suivant l'épaisseur étant choisie quadratique. Le déplacement total s'écrit :

$$v - v_0 = (f - f_0) \sin(k x_1) g(x_3) \qquad \text{(A 13)}$$

où f et f_0 sont respectivement les amplitudes de la flèche et du défaut. La fonction d'amplitude est proposée sous la forme :

$$g(x_3) = \left[1 - (1 - \alpha) \left(\frac{x_3}{t} \right)^2 \right] \qquad \text{(A 14)}$$

où α est un coefficient à déterminer. Ce champ de déplacement est introduit dans l'expression de l'énergie potentielle définie à partir de l'équilibre de la poutre. En minimisant l'énergie potentielle par rapport à f et α un système d'équations non linéaire est obtenu, il est résolu numériquement en calculant α pour f fixé. Le déplacement est reconstitué pour pouvoir calculer les déformations de cisaillement qui définissent la charge critique par un critère de déformation limite appliqué à la fibre et à la matrice. SWANSON et al. (1993) améliorent le modèle en ajoutant un défaut selon $\mathbf{e_3}$, et prennent en compte la flèche selon cet axe. Cette méthode, beaucoup moins rapide que celle proposée par GRANDIDIER, donne d'assez bons résultats et permet aux auteurs d'étudier les effets de l'interface fibre - matrice sur la rupture en compression.

Il est clair que dans ces modèles capables de rendre compte de l'effet de structure, la longueur caractéristique transverse joue un rôle majeur. Elle est prise en compte par le biais de la solution qui est recherchée comme une fonction de l'altitude. Or cette évolution du mode qui dépend de données structurelles est donnée à priori, de façon empirique. GRANDIDIER et al. part I et II (1996) ont reconsidéré le problème à sa base en caractérisant correctement les modes de microflambage élastiques à l'échelle des plis. Cette étude en 2 parties aboutit à un modèle homogénéisé bidimensionnel qui permet à ce stade de rendre compte qualitativement de l'effet des paramètres structuraux sur la résistance du pli. Dans la première partie de l'étude, les modes sont déterminés par une discrétisation complète du pli dans un cadre élastique linéaire sans défaut. Un modèle homogénéisé est ensuite établi à partir de ces résultats, puis il est validé grâce à une étude asymptotique (GARDIN et al., 1992).

3.4.7 Caractérisation des modes élastiques de microflambage

Comme dans les travaux précédents de GRANDIDIER et al., le déplacement des fibres est une fonction de la position dans l'épaisseur du pli, ce qui est essentiel pour pouvoir prendre en compte l'effet de structure. Le microflambage pouvant intervenir dans les 2 directions normales à la direction des fibres (SWANSON et al., 1993), DRAPIER et al. (1996) supposent que l'instabilité survient dans l'épaisseur du pli. Un modèle bidimensionnel suffit alors à prendre en compte l'interaction des fibres et à rendre compte de l'influence des paramètres à l'échelle du pli. Le stratifié est réduit à un domaine plan noté Ω auquel est associé un référentiel cartésien $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ **(Figure A 33)**.

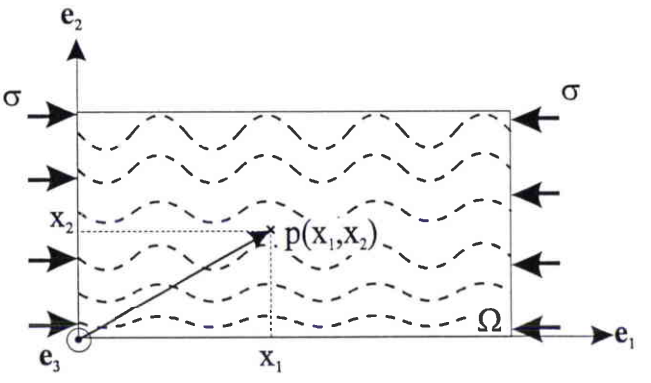


Figure A 33 : Définition du domaine plan.

Les vecteurs du référentiel sont définis tels que $\mathbf{e}_1$ est colinéaire à la direction des fibres, $\mathbf{e}_2$ est colinéaire à la direction transverse au pli, et la normale au plan peut être définie par $\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$. La position d'un point matériel dans Ω est repérée par **x**, et son déplacement dans le plan est noté **u**. Les composantes respectives de ces vecteurs sont définies par :

$$\mathbf{x} = x_i\,\mathbf{e}_i \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = u\,\mathbf{e}_1+v\,\mathbf{e}_2 \tag{A 15}$$

Dans cette première partie, aucune hypothèse n'est faite quant à la cinématique du milieu, le stratifié est discrétisé complètement. Les plis à 0° sont représentés par un empilement de couches raides et souples dont les dimensions sont telles que la fraction volumique et les dimensions des constituants sont respectées. Les plis à 45° et à 90° sont quant à eux représentés par un milieu homogène équivalent dont les caractéristiques mécaniques sont calculées par la loi des mélanges (**Figure A 34**). Comme sur la **Figure A 32**, la position du pli dans le stratifié est prise en compte par les conditions aux limites imposées sur ses faces.

Les matériaux utilisés sont supposés élastiques linéaires orthotropes, d'axe d'orthotropie $\mathbf{e}_1$,$\mathbf{e}_2$. Dans l'hypothèse où le pré flambage est linéaire, la partie quadratique de l'énergie potentielle du milieu élastique bidimensionnel s'écrit :

$$P_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \varepsilon_1\,\mathbf{L}\,\varepsilon_1\,d\Omega - \lambda\int_{\Omega} \gamma_2\,\Sigma_0(x_2)\,d\Omega \tag{A 16}$$

avec ε_1 la partie linéaire du tenseur des déformation de Green-Lagrange, $\mathbf{L}(x_2)$ la loi de comportement élastique linéaire, λ le paramètre de charge qui fixe la fraction du chargement imposé et γ_2 la partie non linéaire du tenseur des déformations. Enfin, $\Sigma_0(x_2)$ est le tenseur des contraintes de pré-chargement qui peut représenter un état de compression ou de flexion, et s'exprime en fonction de la déformation $\varepsilon_0(x_2)$ correspondante.

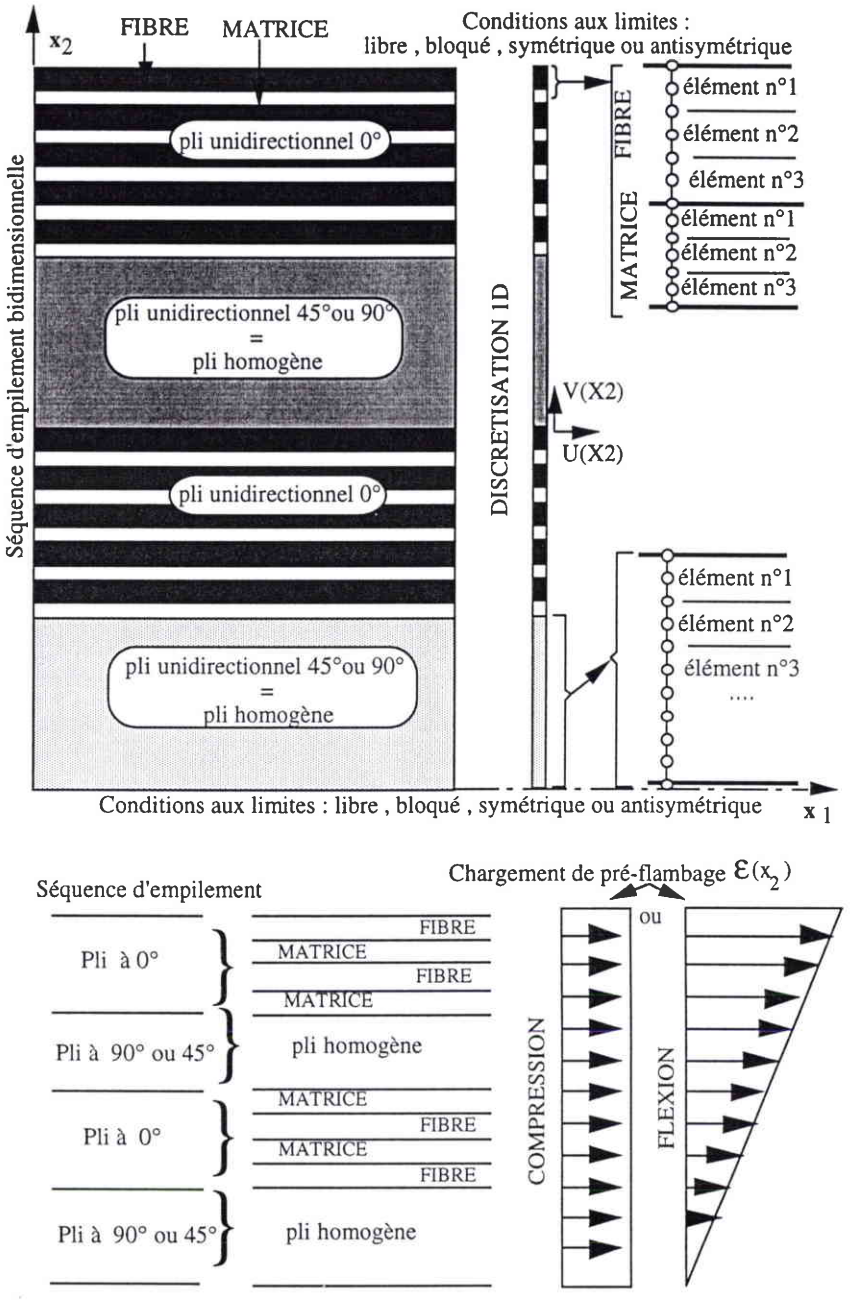


Figure A 34 : Modélisation et discrétisation de la microstructure. Chargement de pré-flambage. (GRANDIDIER et al., 1993, 1996)

L'élancement des fibres, ou plus généralement du pli, laisse supposer que le problème entre dans le cadre des instabilités cellulaires. Cette hypothèse est justifiée pour un domaine infini dans le sens des fibres et pour un problème invariant par translation. Il est vérifié expérimentalement dans GRANDIDIER et al. (1992) que la longueur d'onde de microflambage observée est petite devant les dimensions des éprouvettes testées. Cette considération permet de rechercher les modes sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} u(x_1,x_2) &= U(x_2)\cos(k\,x_1) \\ v(x_1,x_2) &= V(x_2)\sin(k\,x_1) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A 17)}$$

où k est le nombre d'ondes dans la direction des fibres et $U(x_2)$, $V(x_2)$ sont les amplitudes du champ de déplacement.

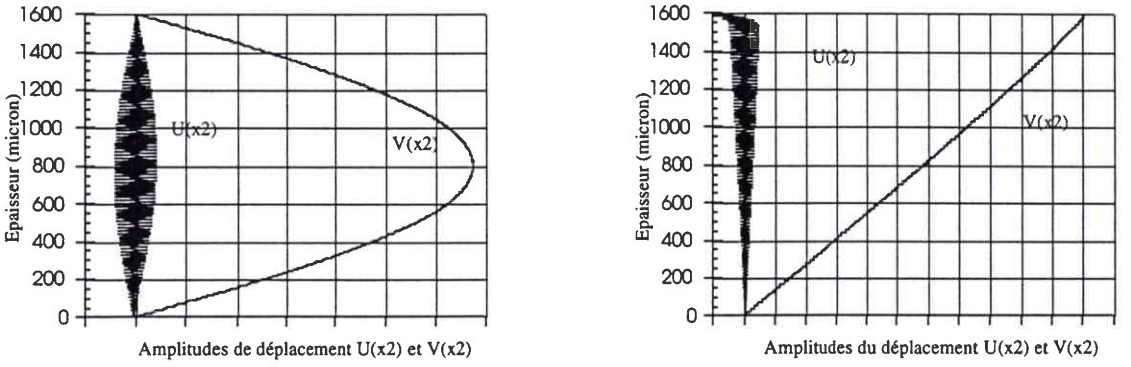
En utilisant le critère de bifurcation classique $\delta P_2=0$, on définit un problème aux valeurs propres unidimensionnel résolu avec un élément fini 1D spécifique (**Figure A 34**). En faisant varier k, on obtient la courbe de stabilité neutre $\lambda(k)$ dont le minimum définit la déformation et le nombre d'ondes critiques.

Quelques résultats sont présentés pour un unidirectionnel sous un chargement de compression pure (**Figure A 35**), ses caractéristiques mécaniques sont recensées dans le Tableau 1. La **Figure A 35 b** représente les modes d'un pli dont la face inférieure est bloquée et la face supérieure est libre. On remarque près du bord libre la présence d'une couche limite qui devrait se traduire par des surcontraintes dans cette région. Cette zone est également présente dans le cas de stratifiés. En comparant plusieurs configurations, l'influence de l'épaisseur du pli, des conditions aux limites et du chargement sur l'instabilité élastique est clairement établie (**Figure A 36**).

Matrice isotrope	Fibre anisotrope	
$E_M = 4.5$ Gpa	E_{1f} =240 GPa, E_{2f} = 15 GPa	fraction volumique: f = 0.625
$G_M = 1.6$ Gpa	$G_f = 92$ Gpa	diamètre de la fibre : $\phi f = 10$ µm
$\nu_M = 0.4$	$\nu_f = 0.3$	

Tableau 1 : Caractéristiques mécaniques utilisées pour les calculs sur un carbone/époxyde T300/914.

Une analyse des déformations dans les constituants pour diverses épaisseurs de pli, montre la nécessité de caractériser le microflambage quand les plis deviennent peu épais. En effet, dans le cas des plis épais l'examen des modes montre que la matrice est principalement soumise à du cisaillement, comme prévu par ROSEN (1964). En revanche, pour les composites plus fins, la déformation transverse ε_{22} et le cisaillement ε_{12} dans la matrice sont du même ordre de grandeur et les déformations critiques sont beaucoup plus élevées.



(a) (b)

Figure A 35 : Amplitudes modales dans le cas d'un unidirectionnel. Chargement de compression, épaisseur du pli 1600µm. Conditions aux limites : face inférieure bloquée, face supérieure (a) bloquée (b) libre.

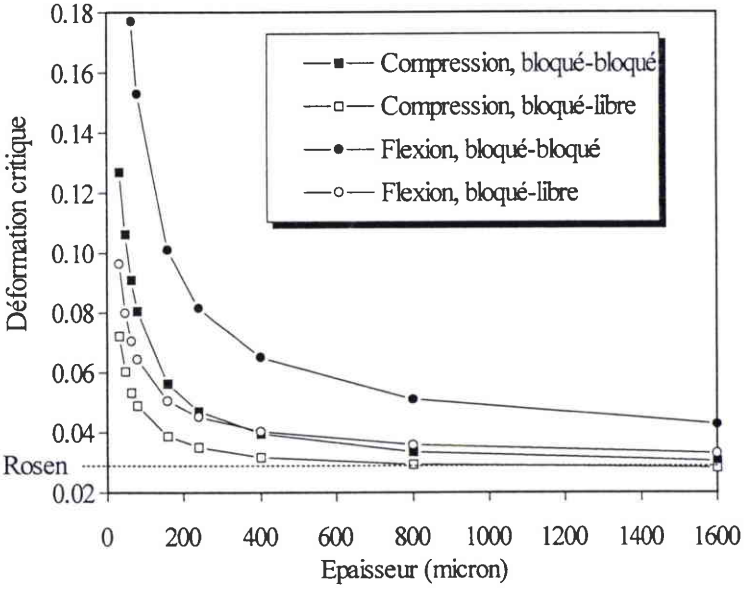


Figure A 36 : Déformations critiques en fonction de l'épaisseur du pli, du chargement et des conditions aux limites imposées sur ses faces inférieure et supérieure.

Grâce à cette approche, il serait possible d'aborder le problème de microflambage plus général incluant le défaut des fibres et la plasticité de la matrice. Mais il ne semble toutefois pas raisonnable de conserver une discrétisation complète si l'on désire mener une étude paramétrique ou construire un outil rapide de prédiction de la rupture en vue de son utilisation dans les milieux industriels.

3.4.8 Un modèle homogénéisé avec effet de structure

Il est appréciable, en termes de coûts de calculs, de pouvoir utiliser un modèle où la microstructure est représentée par un milieu homogène. Grâce à la périodicité dans la direction transverse, il est possible de définir un tel modèle mésoscopique dont la réponse au microflambage est identique à celle du pli réel. La cinématique de ce milieu est choisie conforme aux résultats de la discrétisation complète (**Figure A 37**). L'analyse des déformations suggère que la cinématique de la matrice est celle d'un milieu 2D non linéaire tandis que celle de la fibre est de type Bernouilli. Ces hypothèses sur la cinématique sont confirmées par une étude asymptotique d'un empilement de couches raides et souples représentant les constituants (GARDIN et al., 1992).

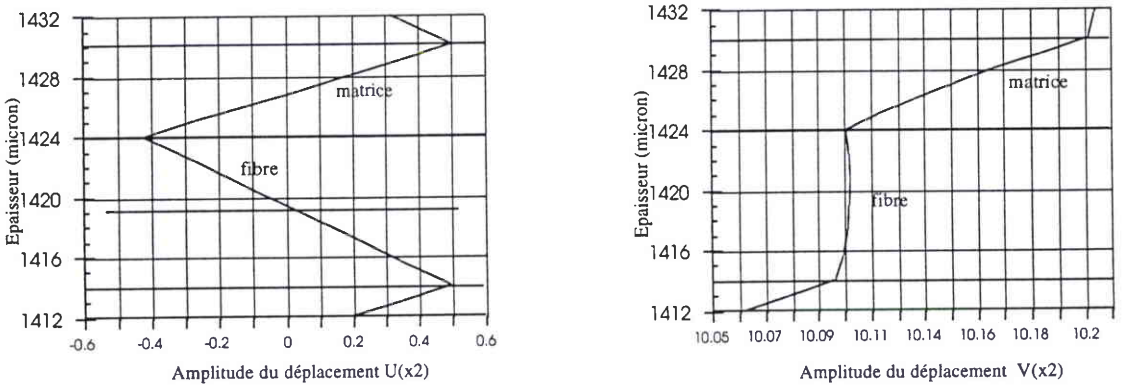


Figure A 37 : Zoom des amplitudes modales $U(x_2)$ et $V(x_2)$. Discrétisation complète, chargement de compression, épaisseur du pli 1600 µm. Conditions aux limites : face inférieure bloquée, face supérieure libre.

À partir des résultats de la discrétisation complète, on peut poser les hypothèses nécessaires pour construire le modèle. Le cisaillement S_{12} (**S** désigne les contraintes microscopiques) dans la fibre peut être négligé devant la contrainte longitudinale S_{11}. Il est alors classique de scinder l'énergie de déformation de la fibre en une partie de membrane et une partie de flexion :

$$W^{Fibre} = \frac{1}{2}\int_{\Omega} E_f S_f \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega + W^{flexion} \qquad \text{(A 18)}$$

Les déformations sont quasiment constantes dans la matrice et dans la fibre (part de membrane uniquement). Dans la fibre on néglige les déformations transverse ε_{12} et de cisaillement ε_{22} devant les autres déformations (**Figure A 37**). Par continuité à l'interface des constituants, les déformation longitudinales sont identiques dans la fibre et dans la matrice. Les déformations mésoscopiques sont définies comme les moyennes (notées <.>) des déformations microscopiques qui sont supposées constantes dans les constituants. La déformation mésoscopique ε_{11} est identique à celle de la matrice et de la fibre. Les déformations transverse et de cisaillement dans le milieu homogène sont dues essentiellement aux déformations correspondantes de la matrice. Ces déformations mésoscopiques ε_{11} et ε_{12} sont donc égales aux mêmes déformations dans la matrice, mais prises au prorata de la fraction volumique de matrice :

$$\left.\begin{aligned} &* \ \varepsilon_{11}^{\text{Fibre}} = \varepsilon_{11}^{\text{Matrice}} = \langle\varepsilon_{11}\rangle = \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ &* \ \varepsilon_{\alpha 2}^{\text{Fibre}} = 0 \ (\alpha = 1,2) \\ &* \ \langle\varepsilon_{\alpha 2}\rangle = \varepsilon_{\alpha 2}^{\text{Matrice}} (1-f) \\ &\text{avec } \langle\varepsilon_{22}\rangle = \frac{\partial v}{\partial x_2} \text{ et } \langle\varepsilon_{12}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A 19)}$$

La loi de comportement du milieu homogène équivalent est établie en calculant les moyennes des contraintes microscopiques. Ces dernières sont reliées aux déformations microscopiques par les lois de comportement des constituants. Pour la fibre la loi de comportement est uniaxiale et se limite au module d'Young longitudinal, la matrice est quant à elle orthotrope en contraintes planes. Tous calculs faits le tenseur de rigidité de membrane **L** s'écrit, en termes de vecteurs contraintes et déformations :

$$\begin{bmatrix} \langle S_{11}\rangle \\ \langle S_{22}\rangle \\ \langle S_{12}\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f E_f + (1-f)\dfrac{E_m}{1-\nu_M^2} & \dfrac{E_m \nu_m}{1-\nu_M^2} & 0 \\ \dfrac{E_m \nu_m}{1-\nu_M^2} & \dfrac{E_m}{(1-f)(1-\nu_m^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{G_m}{1-f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle\varepsilon_{11}\rangle \\ \langle\varepsilon_{22}\rangle \\ \langle\varepsilon_{12}\rangle \end{bmatrix} \qquad \text{(A 20)}$$

Finalement, l'énergie de flexion des fibres est répartie sur le domaine. Dans l'hypothèse de pré flambage linéaire, la partie quadratique de l'énergie potentielle est :

$$P_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} <\varepsilon> \mathbf{L} <\varepsilon> d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\Omega} f E_f r_{gf}^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)^2 d\Omega - \frac{1}{2}\int_{\Omega} \lambda \Sigma_0(x_2) \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2 d\Omega \qquad \text{(A 21)}$$

La démarche pour la recherche de la déformation et de la longueur d'onde critiques du problème unidimensionnel est similaire à celle utilisée pour la discrétisation complète. De plus, pour les cas de plis unidirectionnels en compression, la solution peut être déterminée de manière analytique.

Les résultats obtenus avec le modèle homogénéisé sont en excellent accord avec ceux de la discrétisation complète, aussi bien pour les modes (**Figure A 38**) que pour les déformations critiques. Qui plus est, une solution analytique confirme les résultats numériques et valide l'influence de l'effet de l'épaisseur et des conditions aux limites sur les déformations et les longueurs d'ondes critiques (**Figure A 39**).

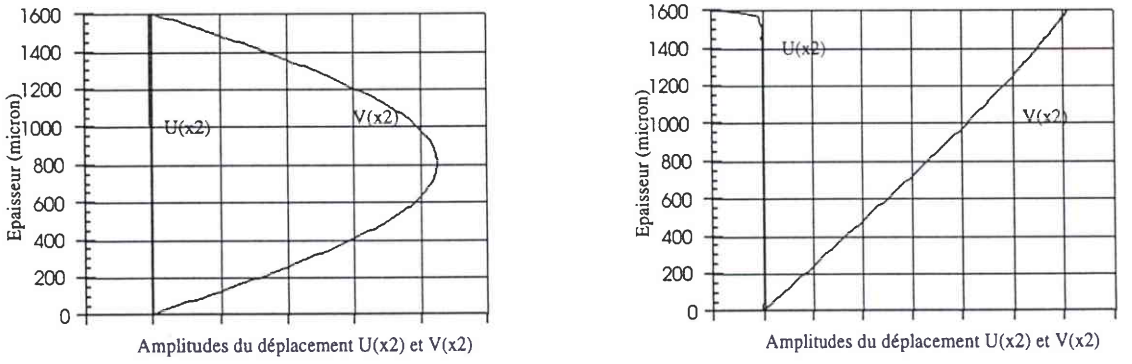


Figure A 38 : Modes déterminés avec le modèle homogénéisé, pour une configuration identique aux résultats présentés **Figure A 35** : chargement de compression, épaisseur du pli 1600µm.,face inférieure bloquée, face supérieure (a) bloquée (b) libre.

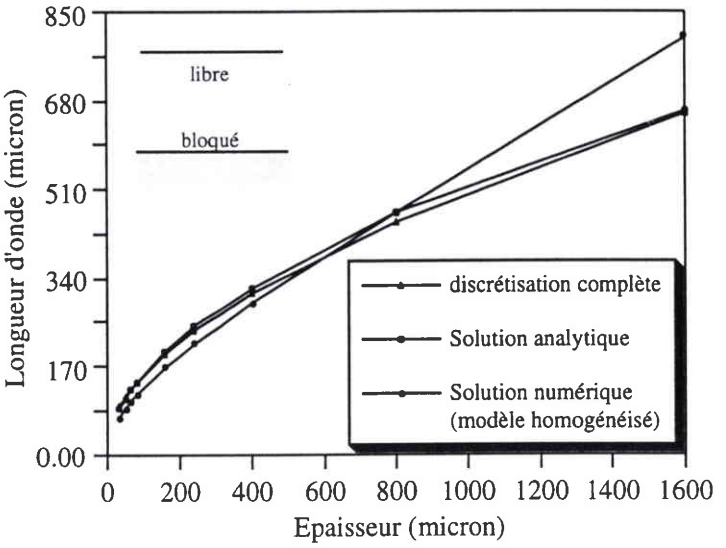


Figure A 39 : Comparaison des longueurs d'onde critiques calculées par la discrétisation complète, la solution analytique et le modèle homogénéisé. Le pli de 32 à 1600 µm est chargé en compression, la face inférieure est bloquée et la face supérieure est libre.

4. DISCUSSION

Tout d'abord, nous avons vu que les essais font apparaître une variation de la résistance en compression des plis UD qui dépend du type de **chargement** appliqué au pli, de son **épaisseur** et de la **séquence d'empilement** du stratifié, ce qu'on rassemble sous le terme d'**effet de structure**. La résistance varie également avec les caractéristiques de la microstructure, notamment avec le couplage du **défaut des fibres** et du **comportement non linéaire de la matrice**.

Les modélisations micromécaniques et les études par éléments finis, ont confirmé l'importance des défauts dans les constituants sur la faible tenue en compression. Les modélisations par E.F. apportent des précisions quant au phénomène de localisation des déformations plastiques qui engendre des bandes de fibres pliées caractéristiques de la phase finale de la rupture. Mais les approches les plus classiques ne considèrent pas l'effet de structure, qui est pourtant un des éléments déterminant la résistance en compression des plis UD.

La plupart des modèles capables de prendre en compte l'effet de structure sont très lourds, et donc peu adéquats pour mener une étude paramétrique. Par contre le modèle proposé par GRANDIDIER et al. (1991) permet de déterminer simplement la contrainte de microflambage en prenant en compte l'épaisseur du pli et sa position au sein du stratifié. Grâce à une formulation

spécifique, WISNOM peut étudier à moindre coût de calcul l'influence du chargement sur la résistance en compression, il conclut que chaque pli doit être vu comme une microstructure à part entière. En fait un pli s'apparente à un assemblage de couples fibre - matrice interagissant entre eux et potentiellement instables sous un chargement de compression. L'approche classique de ROSEN du microflambage n'est plus adaptée à ce type de structure.

L'instabilité des fibres sous un chargement de compression est une **instabilité structurelle**, au même titre que le flambage des plaques ou des coques, et qui dépend donc des dimensions du pli et des conditions de chargement et de déplacement imposées à ses frontières. Ce concept étant tout à fait original, GRANDIDIER et al. ont tout d'abord caractérisé les modes élastiques de microflambage à l'échelle mésoscopique en discrétisant toute la microstructure. Sur la base de ces résultats, ils ont développé un modèle homogénéisé bidimensionnel permettant de déterminer les modes de microflambage élastiques à très faibles coûts de calcul. En effet, dans le but de mener une étude paramétrique et en vue de l'intégration dans un code de calcul, il est souhaitable de posséder un modèle très économique en temps de calcul : un modèle homogénéisé semble le plus propice à ce genre d'application. Dans le cadre élastique sans défaut, l'influence sur la résistance de l'épaisseur du pli, du type de chargement et des conditions aux limites est clairement établie. Mais nous avons vu que le phénomène de microflambage est affecté par la présence de défauts dans les constituants.

Le modèle homogénéisé étant capable de rendre compte de l'effet de structure dans un cadre parfait, le **défaut des fibres** et le **comportement non linéaire de la matrice** vont y être introduits afin de prévoir de manière **quantitative** la rupture des composites à fibres longues. Une nouvelle formulation du problème sera nécessaire, d'une part pour y introduire les défauts, et d'autre part pour conserver au modèle homogénéisé ses bonnes **performances en termes de coûts de calcul**. Grâce à l'outil numérique développé à partir de cette nouvelle formulation, les répercussions des défauts et des paramètres structuraux sur le comportement en compression seront qualitativement et quantitativement étudiées.

PARTIE B

Formulation Locale du Problème de Microflambage Plastique avec Défaut

1. FORMULATION DU PROBLÈME DE MICROFLAMBAGE AVEC DÉFAUT DES FIBRES ET LOI DE COMPORTEMENT NON LINÉAIRE ---- 64

1.1 Principe des Puissances Virtuelles ---- 64
1.2 Tenseur des déformations ---- 66
1.3 Lois de comportement ---- 68
1.4 Équilibre de la structure ---- 68

2. CINÉMATIQUE À DOUBLE ÉCHELLE ---- 69

2.1 Justification expérimentale ---- 69
2.2 Équilibre de la structure ---- 71
2.3 Formulation mésoscopique du problème de microflambage ---- 72
2.3.1 Équilibre global de la structure ---- 72
2.3.2 Équilibre local du microflambage ---- 73
2.4 Chargement imposé ---- 77

3. PRISE EN COMPTE DE LA LOI DE COMPORTEMENT NON LINÉAIRE DE LA MATRICE ---- 78

3.1 Élasticité non linéaire de la matrice ---- 78
3.2 Loi de comportement de type 'J_2 déformation'. ---- 79
3.2.1 Lois de comportement sécante et tangente ---- 80
3.2.2 Inversion des lois en contraintes planes ---- 81
3.3 Fonction d'écrouissage ---- 83
3.4 Prise en compte de la loi de comportement de la matrice ---- 86
3.4.1 Localisation ---- 87
3.4.2 Application de la loi de comportement à la matrice ---- 88
3.4.3 Homogénéisation ---- 88
3.5 Correction 2D - 3D du module de cisaillement de la matrice ---- 91
3.6 Synopsis ---- 93

4. SYNTHÈSE DE LA MODÉLISATION ---- 93

Sur les fondements du modèle homogénéisé GARDIN - GRANDIDIER - POTIER-FERRY présenté précédemment, nous nous proposons de construire un outil numérique capable de simuler l'évolution non linéaire du microflambage. Tout d'abord le modèle homogénéisé doit être complété afin d'y introduire le défaut initial d'ondulation des fibres et le comportement non linéaire de la matrice. Afin de ne pas perdre les bénéfices apportés en terme de coûts de calcul par le modèle homogénéisé, le problème est ensuite formulé à l'échelle mésoscopique. Pour ce faire, le champ de déplacement généré par l'apparition du microflambage est représenté par une perturbation se superposant localement à la solution d'un problème classique défini à l'échelle globale de la structure. Enfin, une loi de comportement non linéaire de la matrice est introduite dans le modèle. Mais le processus numérique classique mis en place pour prendre en compte cette loi doit s'accompagner d'opérations de localisation - homogénéisation spécifiques à la formulation homogénéisée du problème.

1. FORMULATION DU PROBLÈME DE MICROFLAMBAGE AVEC DÉFAUT DES FIBRES ET LOI DE COMPORTEMENT NON LINÉAIRE

Nous souhaitons décrire l'**évolution non linéaire du microflambage** et le comportement post instabilité. Dans ce cadre non linéaire géométrique et matériau, l'équilibre se caractérise classiquement par le Principe de Puissance Virtuelles.

1.1 Principe des Puissances Virtuelles

Pour cette étude, on se place dans le cadre général d'un problème bidimensionnel en contraintes planes exprimé en configuration Lagrangienne. Les notations utilisées dans la partie A pour le référentiel, les vecteurs position et déplacement sont conservées (**Figure A 33**, **Équations A 15**). Les contraintes sont représentées comme précédemment à l'aide du 2nd tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff noté **S**. Pour les déformations nous utilisons le tenseur de Green-Lagrange, noté γ, dans l'hypothèse des petites déformations et pour des rotations modérées. Le champ de déplacement virtuel est noté $\delta\mathbf{u}$, on lui associe le tenseur des déformations virtuelles $\delta\gamma(\mathbf{u})$.

Dans le modèle homogénéisé proposé par GRANDIDIER et al. (1996), le comportement de la microstructure est représenté par un milieu homogène bidimensionnel classique sur lequel sont

distribués les effets dus à la flexion des fibres. Dans ce cadre, les efforts intérieurs mis en jeu se séparent en deux parties : les contraintes contenues dans tout le milieu homogène (**S**) et les moments de flexion présents dans les fibres. La puissance virtuelle développée par les contraintes bidimensionnelles induites dans le milieu homogène équivalent s'exprime sous la forme classique :

$$P_{int}^{2D}(\delta \mathbf{u}) = -\int_{\Omega} \mathbf{S}.\delta\gamma \, d\Omega \qquad \text{(B 1)}$$

En revanche, les moments de flexion présents dans la fibre développent une puissance uniquement dans un champ virtuel de courbure $\delta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right)$ définit en chaque point du domaine. Lorsqu'on prend soin de répartir cette puissance virtuelle sur le milieu 2D, elle s'exprime sous la forme :

$$P_{int}^{Flex}(\delta \mathbf{u}) = -\int_{\Omega} f\, m_f\, \delta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}\right) d\Omega \qquad \text{(B 2)}$$

où f est la fraction volumique de fibres et m_f représente les moments de flexion répartis.

Nous supposons que les efforts extérieurs appliqués sur le domaine entrent dans le cadre général des efforts conservatifs, alors la puissance virtuelle des efforts extérieurs est une forme linéaire en **u** dont l'expression est celle d'un problème classique :

$$P_{ext}(\delta \mathbf{u}) = \langle \mathbf{F}, \delta \mathbf{u} \rangle \qquad \text{(B 3)}$$

où le vecteur **F** représente l'ensemble des efforts appliqués sur la structure.

1.2 Tenseur des déformations

Pour un problème bidimensionnel classique sans défaut, le tenseur des déformations de Green-Lagrange est donné sous sa forme générale par :

$$\gamma(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u}) + \gamma^{NL}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^{t}\nabla\mathbf{u}) + \frac{1}{2}({}^{t}\nabla\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}) \text{ ou encore}$$

$$\gamma(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) & \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)^2\right) \end{pmatrix} \quad \text{(B 4)}$$

Le tenseur tel qu'il est présenté ci-dessus est complet, mais pour le problème que nous traitons, la partie non linéaire peut se réduire à la seule composante 11, nécessaire pour prendre en compte l'apparition de l'instabilité. D'autre part, du fait du rapport des rigidités axiale et transverse, la variation de la flèche par rapport à x_1 est beaucoup plus importante que la variation du déplacement longitudinal :

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} >> \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad \text{(B 5)}$$

En conséquence le terme de déformation non linéaire 11 se limite au terme de rotation modérée seul :

$$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2\right) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x_1}^2\right) \quad \text{(B 6)}$$

Comme nous l'avons vu dans la partie A, la microstructure peut être affectée d'un défaut d'ondulation des fibres. On suppose ici que l'amplitude de l'ondulation est faible. Dans notre problème, on représente l'état initial des fibres par la fonction $v_0(\mathbf{x})$ qui caractérise la répartition dans le domaine 2D des amplitudes d'ondulation des fibres. Par analogie avec les problèmes de poutres et de plaques, on sait que la présence d'un défaut amplifie l'effet de la non linéarité géométrique. Suite à cette remarque, le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'exprime de la façon suivante :

$$\gamma(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u})+\gamma^{NL}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\right)^2+\dfrac{\partial v}{\partial x_1}\dfrac{\partial v_0}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(B 7)}$$

On peut remarquer que seul le terme de rotation modérée est affecté par la présence du défaut. Dans l'expression B 7, v est **maintenant** le déplacement transversal des fibres à partir de la position initiale v_0 (**Figure B 1**) :

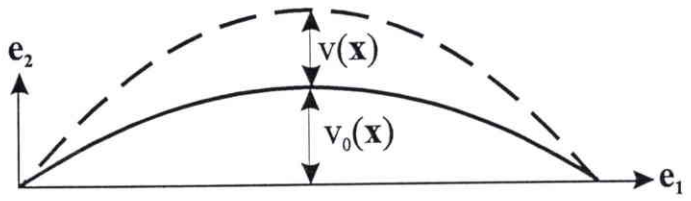


Figure B 1 : Déplacement transverse par rapport au défaut initial.

Pour alléger les expressions, dans la suite les dérivées suivant la direction des fibres sont notées:

$()' = \dfrac{\partial}{\partial x_1}$ et $()'' = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}$.

Sous une forme plus concise le tenseur des déformations s'écrit :

$$\gamma(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u}) + \gamma_{11}^{NL}(\mathbf{u})\ \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \qquad \text{(B 8)}$$

et les déformations virtuelles correspondantes sont données par :

$$\delta\gamma(\mathbf{u}) = \delta\varepsilon(\mathbf{u}) + \delta\gamma_{11}^{NL}(\mathbf{u})\ \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \qquad \text{(B 9)}$$

avec $\delta\gamma_{11}^{NL}(\mathbf{u}) = (v'+v_0')\ \delta v'\ \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1$

1.3 Lois de comportement

La plasticité apparaît uniquement dans la matrice pour les matériaux qui nous intéressent dans cette étude. Mais la non linéarité du comportement peut être prise en compte dans la modélisation, à deux échelles différentes : directement au niveau microscopique des constituants ou à l'échelle mésoscopique en définissant le milieu homogène équivalent de façon adéquate. Le choix retenu, ainsi que la forme de la loi de comportement utilisée, seront précisés ultérieurement au § 3. Dans un premier temps, la non linéarité matériau est introduite de manière tout à fait générale par une relation non linéaire entre la contrainte et la déformation homogénéisées :

$$\mathbf{S}(\gamma) = \mathbf{L}(\gamma).\gamma \qquad \text{(B 10)}$$

où **L**, la loi de comportement du milieu homogène équivalent, dépend des déformations.

Le comportement des fibres est quant à lui supposé élastique linéaire et identique en traction et en compression. On peut émettre quelques réserves concernant cette hypothèse, mais les rares données matérielles relatives au comportement en compression des fibres sont déduites d'essais sur des plis entiers et peuvent par conséquent être sujettes à discussion. Avec cette loi la répartition de moment de flexion est reliée aux courbures par la relation classique suivante:

$$m_f = E_f r_{gf}^2 v'' \qquad \text{(B 11)}$$

où nous rappelons que le rayon de giration est $r_{gf} = \sqrt{\frac{I_f}{S_f}}$ avec I_f le moment quadratique de la fibre et S_f sa surface transverse.

1.4 Équilibre de la structure

Finalement, l'équilibre en présence de défaut initial des fibres et pour une résine non linéaire s'exprime de la façon suivante :

$$-\int_\Omega \{ f E_f r_{gf}^2 v'' \delta v'' + \mathbf{S}(\gamma).\delta\varepsilon + S_{11}(\gamma)\, \delta\gamma_{11}^{NL} \}\, d\Omega + \langle \mathbf{F}, \delta\mathbf{u} \rangle = 0, \forall\, \delta\mathbf{u} \qquad \text{(B 12)}$$

Sur la base de cette première formulation du problème, il est possible de caractériser l'évolution du microflambage. Toutefois, comme nous allons le voir, cette instabilité est un phénomène à courte longueur d'onde en comparaison des dimensions macroscopiques, et la discrétisation du problème tel qu'il est présenté ci-dessus (B 12) nécessiterait un nombre de degrés de liberté très important. Comme nous souhaitons disposer d'un outil numérique performant qui permette de mener une étude paramétrique et qui soit par la suite adapté dans un code de calcul, nous avons choisi de formuler le problème de microflambage à **l'échelle mésoscopique** en introduisant une cinématique à double échelle.

2. CINÉMATIQUE À DOUBLE ÉCHELLE

2.1 Justification expérimentale

La cinématique à double échelle que nous employons se justifie par le **caractère local de l'instabilité de microflambage**. Au cours d'expériences réalisées avec leur montage de flexion-compression, GRANDIDIER (1991) et GRANDIDIER et al. (1992) observent le microflambage de paquets de fibres en surface de l'éprouvette (**Figure B 2**). La longueur d'onde du phénomène est dans ce cas très inférieure aux dimensions de l'éprouvette testée.

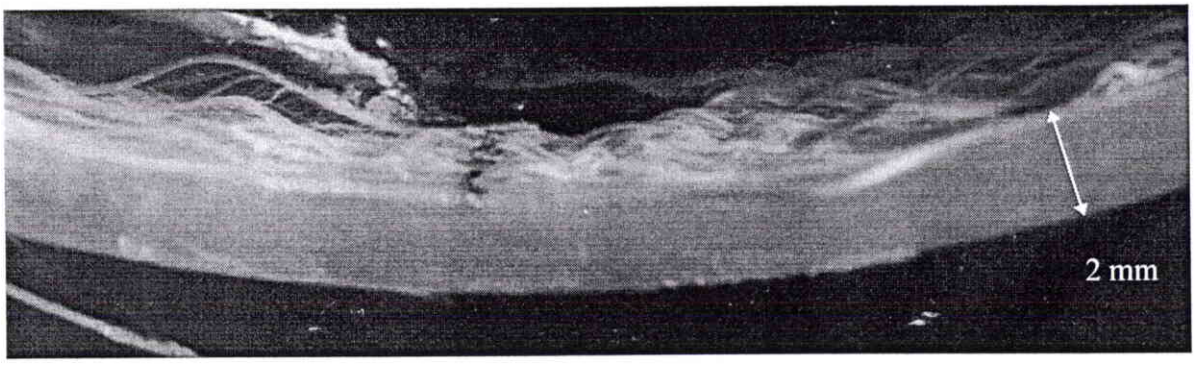


Figure B 2 : Microflambage superficiel sur la zone centrale d'un UD Verre - Époxyde d'épaisseur 2 mm sous un chargement de flexion pure, d'après GRANDIDIER (1991).

La vérification expérimentale de la longueur caractéristique de l'instabilité à l'intérieur des plis ne semble pas possible compte-tenu de la rupture catastrophique qui suit immédiatement l'apparition du phénomène. Pourtant, on peut raisonnablement supposer que le microflambage superficiel de quelques fibres est révélateur du phénomène général de microflambage qui devient visible dans ce cas particulier où un des bords du pli UD est libre. D'autre part, la largeur des bandes de pliage, qui caractérisent la rupture initiée par microflambage, donne un ordre d'idée de la longueur d'onde de l'instabilité. Elle est mesurée aux alentours de 100 - 250 µm pour des carbone-époxydes classiques (EFFENDI, 1993).

Finalement, la longueur caractéristique de l'instabilité est suffisamment petite devant les dimensions de la structure pour pouvoir supposer que les déplacements dans les plis sont composés d'une part des déplacements macroscopiques résultants des chargements sur la structure et d'autre part des déplacements mésoscopiques générés par l'apparition de l'instabilité dans les plis. En conséquence, la solution du problème de microflambage sera recherchée sous la forme d'un champ de déplacement évoluant à l'échelle de la structure (noté $\mathbf{u}_G$), **modulé très localement** par un champ évoluant à l'échelle du pli (noté $\mathbf{u}_L$) (**Figure B 3**) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_G(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_L(\mathbf{x}) \qquad \text{(B 13)}$$

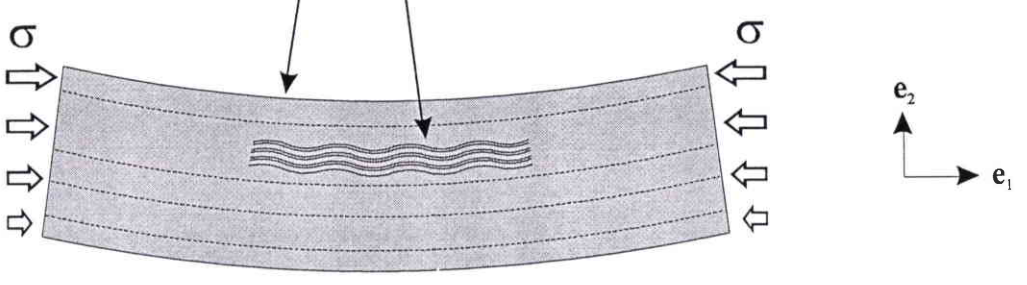


Figure B 3: Schématisation du microflambage dans un UD en flexion, et champ de déplacement associé.

2.2 Équilibre de la structure

L'équilibre du domaine doit être reformulé avec le champ de déplacement particulier B 13. En introduisant ce champ de déplacement dans l'expression B 8, on obtient une nouvelle forme du tenseur des déformations:

$$\gamma(\mathbf{u}) = \varepsilon(\mathbf{u}_G) + \varepsilon(\mathbf{u}_L) + \gamma_{11}^{NL}(\mathbf{u}_G+\mathbf{u}_L)\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \qquad \text{(B 14)}$$

avec les indices "G" et "L" qui indiquent respectivement les grandeurs globales évoluant à l'échelle de la structure et les grandeurs locales évoluant à l'échelle du pli. Les déformations virtuelles issues de B 9 se présentent sous la forme :

$$\delta\gamma(\mathbf{u}) = \delta\varepsilon(\mathbf{u}) + (v_G'+v_L'+v_0')\, \delta v'\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \qquad \text{(B 15)}$$

où v_0 est le défaut initial de la flèche totale.

Alors l'équilibre de la structure entière s'écrit de manière équivalente à B 12 en terme de Principe des Puissances Virtuelles :

$$\int_\Omega \{f\, E_f\, r_{gf}^2\, v_G''\, \delta v'' + f\, E_f\, r_{gf}^2\, v_L''\, \delta v'' + \mathbf{S}(\gamma).\delta\varepsilon + S_{11}(\gamma)\,(v_G'+v_L'+v_0')\,\delta v'\}\, d\Omega$$
$$- \langle \mathbf{F}, \delta\mathbf{u}\rangle = 0,\ \forall\ \delta\mathbf{u} \qquad \text{(B 16)}$$

Le champ de déplacement que nous avons introduit va permettre de différencier les phénomènes directement liés au microflambage des phénomènes qui surviennent à l'échelle de la structure. Le problème mésoscopique de microflambage va être défini à partir de cette nouvelle forme de l'équilibre de la structure.

2.3 Formulation mésoscopique du problème de microflambage

Pour séparer les phénomènes de microflambage de ceux survenant à l'échelle de la structure, il faut préciser les caractéristiques du défaut initial ($v_0(\mathbf{x})$) afin d'établir son influence sur le mécanisme.

Les soins apportés à la fabrication des composites suggèrent que les défauts à l'échelle de la structure sont très rares. Si malgré tout de tels défauts existent, nous supposons qu'ils restent suffisamment faibles pour ne pas modifier l'équilibre macroscopique de la structure. De plus, ces défauts macroscopiques sont quasiment constants à l'échelle locale et par conséquent n'influent pas sur l'instabilité intervenant à cette échelle. D'autre part, comme cela a été montré expérimentalement par PALUCH (1994), la longueur d'onde des défauts d'ondulation des fibres est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur des plis. Il semble raisonnable de supposer que ce défaut local ne peut pas influer de manière significative sur l'équilibre macroscopique. En revanche il joue un rôle important dans le développement du microflambage à l'échelle mésoscopique. Finalement les seuls défauts présents dans notre problème sont les défauts locaux d'ondulation des fibres, pris en compte uniquement dans la formulation locale associée au microflambage, et notés simplement $v_0(\mathbf{x})$.

2.3.1 Équilibre global de la structure

En tenant compte de la remarque précédente sur les défauts, nous proposons la formulation de l'équilibre global du composite sans défaut macroscopique, en terme de Principe des Puissances Virtuelles (B 12). Remarquons que dans ce problème seul le champ global apparaît :

$$\int_{\Omega} \{f\, E_f\, r_{gf}^2\, v_G''\, \delta v'' + \mathbf{S}(\gamma(\mathbf{u}_G)).\delta\varepsilon + S_{11}(\gamma(\mathbf{u}_G))\, v_G'\, \delta v'\}\, d\Omega - \langle \mathbf{F}, \delta\mathbf{u} \rangle = 0,\ \forall\ \delta\mathbf{u} \qquad \text{(B 17)}$$

Le premier terme de cette expression représente la puissance virtuelle des moments de flexion des fibres générés par un champ de déplacement évoluant à l'échelle globale. Dans les théories courantes des stratifiés, le champ de déplacement est uniquement bidimensionnel (u,v). On pourrait envisager de construire un modèle de milieu continu dans lequel la rotation des sections droites des fibres serait prise en compte. Mais la puissance développée par la flexion des renforts dans un champ de déplacement évoluant à l'échelle globale est négligeable en comparaison des

puissances développées par les contraintes classiques de tension et de cisaillement. En tenant compte de cette remarque dans la formulation B 17, on obtient un problème classique que l'on sait résoudre.

2.3.2 Équilibre local du microflambage

Grâce à l'expression B 16, l'équilibre de la structure en présence de microflambage des fibres est caractérisé. De manière similaire, si on suppose que l'équilibre global de la structure est vérifié (B 17), il suffit de rechercher le champ de déplacement local à superposer à la solution globale pour vérifier l'équilibre de la structure.

La formulation mésoscopique du problème de microflambage se définit comme la différence entre la configuration de la structure lorsque l'instabilité est présente (caractérisée par B 16), et la configuration où l'instabilité n'est pas encore apparue (B 17). Dans ce dernier cas, l'équilibre est caractérisé par le champ de déplacement global seul. On définit ainsi l'équilibre local dont le champ de déplacement local est solution :

$$\int_{\Omega} \{ f E_f r_{gf}^2 v_L'' \delta v'' + [S(\gamma) - S(\gamma_G)].\delta\varepsilon + [S_{11}(\gamma)(v_G'+v_L'+v_0') - S_{11}(\gamma_G) v_G'] \delta v' \} d\Omega = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \tag{B 18}$$

Cette égalité est obtenue en effectuant la différence B 16 - B 17, qui sont respectivement les états d'équilibre de la structure en présence de microflambage et sans microflambage (problème global).

Pour des raisons de clarté dans l'utilisation des grandeurs associées à cette formulation, nous introduisons les notations suivantes : pour les déformations correspondant au déplacement global et local :

$$\left.\begin{aligned} \gamma(\mathbf{u}_G) &= \gamma_G(\mathbf{u}_G) \\ \gamma(\mathbf{u}_L) &= \gamma_L(\mathbf{u}_L) \end{aligned}\right\} \tag{B 19}$$

On définit la contrainte associée au problème local de microflambage (notée S_L) comme la différence entre la **contrainte totale** ($S(\gamma)$) et la contrainte correspondant à la solution du problème d'équilibre **global** $S(\gamma_G)$.

$$S_L(\gamma,\gamma_G) = S(\gamma) - S(\gamma_G) \qquad \text{(B 20)}$$

En utilisant la définition des contraintes locales, la dernière partie de B 18 peut s'écrire sous une forme équivalente :

$$S_{11}(\gamma)\,(v_G'+v_L'+v_0') - S_{11}(\gamma_G)\,v_G' = S_{L11}(\gamma,\gamma_G)\,v_G' + S_{11}(\gamma)\,(v_L'+v_0') \qquad \text{(B 21)}$$

En inversant la relation B 20, la contrainte totale s'exprime en fonction de la contrainte locale et de la contrainte globale. En injectant cette relation inverse dans B 21 on obtient :

$$\begin{aligned} S_{L11}(\gamma,\gamma_G)\,(v_G') + S_{11}(\gamma)\,(v_L'+v_0') &= S_{L11}(\gamma,\gamma_G)\,v_G' + [S_{L11}(\gamma,\gamma_G) + S_{11}(\gamma_G)]\,(v_L'+v_0') \\ \text{ou encore} \qquad &= S_{11}(\gamma_G)\,(v_L'+v_0') + S_{L11}(\gamma,\gamma_G)\,(v_G' + v_L' + v'_0) \end{aligned} \qquad \text{(B 22)}$$

Alors l'équilibre local B 18 s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \{f\,E_f\,r_{gf}^2\,v_L''\,\delta v'' + S_L(\gamma,\gamma_G).\delta\varepsilon \\ &+ [S_{11}(\gamma_G)\,(v_L'+v_0') + S_{L11}(\gamma,\gamma_G)\,(v_G'+v_L'+v_0')]\,\delta v'\}\,d\Omega = 0,\ \forall\ \delta\mathbf{u} \end{aligned} \qquad \text{(B 23)}$$

Hypothèse :

Notre étude se situe à l'échelle mésoscopique. À cette échelle la flèche globale varie beaucoup plus lentement que la flèche locale ou même que le défaut initial d'ondulation. Cette différence est visible par exemple sur la **Figure B 2** ou encore sur la **Figure B 3**. Ces hypothèses se traduisent par les inégalités suivantes entre les variations du champ de déplacement global, du champ de déplacement local et du défaut :

$$\left.\begin{array}{l} v_L' >> v_G' \\ v_0' >> v_G' \end{array}\right\} \qquad \text{(B 24)}$$

Alors l'effet non linéaire de la contrainte longitudinale locale peut être approximé par :

$$S_{L11}(\gamma,\gamma_G)\,(v'_G + v'_L + v'_0) \approx S_{L11}(\gamma,\gamma_G)\,(v'_L + v'_0) \qquad \text{(B 25)}$$

Grâce aux hypothèses B 24 , on peut également simplifier la partie non linéaire de l'expression B 14 du tenseur des déformations :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{u}) &= \varepsilon(\mathbf{u}_G + \mathbf{u}_L) + \left[\left(\frac{v_G' + v_L'}{2}\right)^2 + (v_G' + v_L')\, v_0'\right] \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ &\approx \varepsilon(\mathbf{u}_G) + \varepsilon(\mathbf{u}_L) + \left[\left(\frac{v_G'^2}{2}\right) + \left(\frac{v_L'^2}{2} + v_L'\, v_0'\right)\right] \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \end{aligned} \qquad \text{(B 26)}$$

que l'on réécrit sous la forme **découplée** suivante:

$$\gamma(\mathbf{u}) = \gamma_G(\mathbf{u}_G) + \gamma_L(\mathbf{u}_L)$$

avec

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_G(\mathbf{u}_G) = \varepsilon(\mathbf{u}_G) + \gamma_G^{NL}(\mathbf{u}_G), \text{ où } \gamma_G^{NL}(\mathbf{u}_G) = \dfrac{v_G'^2}{2}\, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ \gamma_L(\mathbf{u}_L) = \varepsilon(\mathbf{u}_L) + \gamma_L^{NL}(\mathbf{u}_L), \text{ où } \gamma_L^{NL}(\mathbf{u}_L) = \left(\dfrac{v_L'^2}{2} + v_L'\, v_0'\right) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \end{array}\right\} \qquad \text{(B 27)}$$

En conséquence la contrainte locale est directement fonction des déformations locales et globales :

$$S_L(\gamma_L,\gamma_G) = S(\gamma) - S(\gamma_G) \qquad \text{(B 28)}$$

Pour la suite, le champ de déplacement virtuel est choisi comme la variation du champ de déplacement local ($\delta\mathbf{u}(\mathbf{x})$ est noté $\delta\mathbf{u}_L(\mathbf{x})$). De manière similaire à B 27, les déformations virtuelles sont données par :

$$\delta\gamma(\mathbf{u}) = \delta\gamma_G(\mathbf{u}_G) + \delta\gamma_L(\mathbf{u}_L)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} &\delta\gamma_G(\mathbf{u}_G) = \delta\varepsilon(\mathbf{u}_G) + \delta\gamma_G^{NL}(\mathbf{u}_G), \text{ où } \delta\gamma_G^{NL}(\mathbf{u}_G) = \delta v_G' \, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \\ &\delta\gamma_L(\mathbf{u}_L) = \delta\varepsilon(\mathbf{u}_L) + \delta\gamma_L^{NL}(\mathbf{u}_L), \text{ où } \delta\gamma_L^{NL}(\mathbf{u}_L) = (v_L' + v_0')\, \delta v_L' \, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \end{aligned}\right\} \quad \text{(B 29)}$$

En utilisant les relations B 27, les termes de contraintes locales dans l'équilibre mésoscopique B 24 se regroupent comme suit :

$$\mathbf{S}_L(\gamma,\gamma_G).\delta\varepsilon_L + S_{L11}(\gamma,\gamma_G)\,(v_L'+v_0')\,\delta v'_L = \mathbf{S}_L(\gamma).\delta\gamma_L \quad \text{(B 30)}$$

En introduisant ces notations dans l'équilibre local B 23, le problème de microflambage à résoudre s'exprime finalement sous la forme :

$$\int_\Omega \{f\, E_f\, r_{gf}^2\, v_L''\, \delta v_L'' + \mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L).\delta\gamma_L + S_{11}(\gamma_G)\,(v_L'+v_0')\,\delta v_L'\}\, d\Omega = 0, \ \forall\ \delta\mathbf{u}_L \text{ C.A.(0)}$$

où **L** est la loi de comportement du milieu homogène équivalent établie au §A.3.4.8. La loi de comportement associée au problème local est définie par les 2 égalités : (B 31)

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{S}(\gamma) = \mathbf{L}(\gamma).\gamma \\ &\mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L) = \mathbf{S}(\gamma_G+\gamma_L) - \mathbf{S}(\gamma_G) \end{aligned}\right\}$$

Les premier et second termes de cette expression correspondent respectivement à la flexion locale des fibres et à la déformation locale du milieu homogène équivalent. Le chargement extérieur n'apparaît plus dans cette expression, il est introduit par la contrainte longitudinale issue

de l'équilibre global de la structure. Cette contrainte traduit l'interaction entre les 2 échelles d'observation de l'instabilité, ou plus précisément le fait que le domaine homogénéisé appartient à la structure et donc qu'il subit l'état de contrainte qui y règne. La forme de cette contrainte est explicitée dans le paragraphe suivant.

2.4 Chargement imposé

Le chargement est imposé sur le domaine mésoscopique par la contrainte longitudinale issue de l'équilibre global. Il est possible également d'introduire le chargement avec une déformation correspondant à la solution de l'équilibre global. Nous retiendrons cette solution car au cours des essais sur les matériaux réels, ce sont bien les déformations qui sont mesurées, les contraintes n'en sont déduites que par des relations comportementales spécifiques. Le chargement se présente sous la forme :

$$\mathbf{S}(\gamma_G^d) = \mathbf{L}(\gamma_G^d).\gamma_G^d \qquad \text{(B 32)}$$

D'après la loi de comportement du milieu homogène équivalent (A 20), le terme de chargement dépend des déformations globales 11 et 22 :

$$S_{11}(\gamma_G) = \mathbf{L}(\gamma_G).\gamma_G\, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = L_{1111}(\gamma_G)\, \gamma_{G11} + L_{1122}(\gamma_G)\, \gamma_{G22} \qquad \text{(B 33)}$$

Mais pour un matériau classique, tel que le carbone-époxyde T300/914 présenté dans le tableau A 1, la contrainte longitudinale dépend principalement de la déformation longitudinale. En effet, pour ce matériau le rapport des rigidités intervenant dans l'expression de la contrainte longitudinale est :

$$\frac{L_{1111}}{L_{1122}} \approx 83.5$$

De plus, dans les cas les plus couramment étudiés, les plis subissent un chargement de compression ou de flexion, la déformation longitudinale est donc prépondérante par rapport aux autres termes de déformation. Par conséquent, le tenseur des déformations globales peut être réduit à la seule composante 11. Cette simplification ne modifie pas de manière significative la

contrainte longitudinale, et elle nous permet de représenter simplement un état de compression , ou de flexion si la déformation dépend de l'altitude :

$$\boxed{\begin{array}{c}\gamma_G = \gamma_{11}^{d}(x_2)\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ \Rightarrow S_{11}(\gamma_G) = L_{1111}(\gamma_G)\ \gamma_{11}^{d}(x_2)\end{array}} \qquad \text{(B 34)}$$

Le problème mésoscopique avec défaut est clairement formulé, mais il faut encore préciser la loi de comportement non linéaire de la matrice. Outre son expression propre, il faut définir comment elle s'intègre dans notre approche à 2 champs de déplacement, et à quelle échelle elle est introduite. De plus nous savons que dans une formulation bidimensionnelle les déformations microscopiques peuvent être mal approximées du fait de la représentation géométrique de la structure. Pour mieux prendre en compte l'effet de la répartition tridimensionnelle des fibres, le comportement de la matrice doit être corrigé.

3. PRISE EN COMPTE DE LA LOI DE COMPORTEMENT NON LINÉAIRE DE LA MATRICE

3.1 Élasticité non linéaire de la matrice

Les résines généralement utilisées ont un comportement élasto-plastique. Dans les problèmes de flexion plastique des poutres ou des coques, on considère généralement le phénomène de décharge élastique. Mais dans notre cas, les fibres en flexion sont supposées élastiques, et seule la matrice qui est sollicitée principalement en cisaillement possède un comportement non linéaire. C'est pourquoi nous supposons qu'il n'y a pas de décharge élastique au cours du processus. Par conséquent, une loi de comportement élastique non linéaire suffit à modéliser le comportement plastique de la matrice. Son utilisation est simple à mettre en œuvre et beaucoup moins coûteuse en temps de calcul qu'une loi élasto-plastique classique. Le bénéfice est d'autant plus élevé que l'expression de la loi de comportement utilisée est simple, tout en restant bien sûr suffisamment complète. On vérifiera à posteriori l'hypothèse de non décharge.

L'évolution des caractéristiques mécaniques de la matrice peut être prise en compte à deux échelles différentes, celle du pli ou celle de la microstructure. La première solution s'applique aux grandeurs homogénéisées connues, mais la loi de comportement doit être établie sur un pli unidirectionnel orthotrope. L'évolution de la rigidité du pli entier ne peut être déterminée que par des essais de caractérisation. D'une part ce travail expérimental s'avère délicat puisque, comme nous l'avons vu dans la partie A, les conditions d'essais mais également la géométrie de l'éprouvette influent sur les résultats obtenus. D'autre part, il est nécessaire de caractériser le comportement de chaque couple fibre-matrice étudié. Dans le cadre d'une étude paramétrique, l'influence des caractéristiques mécaniques des constituants sur la réponse va être étudiée. Il ne semble pas concevable de procéder à la caractérisation systématique de tous les matériaux simulés.

En revanche si la loi de comportement est introduite uniquement au niveau de la matrice, l'évolution du milieu homogène équivalent est prise en compte de manière naturelle. En effet, lorsque les caractéristiques mécaniques de la matrice évoluent, la loi de comportement du milieu homogène équivalent, qui dépend explicitement de celles-ci, évolue en conséquence. Si de plus, la matrice est supposée isotrope, elle peut être modélisée par une loi de comportement simple. En contrepartie, les déformations de la matrice, qui doivent être connues pour appliquer la loi de comportement, sont déterminées par une opération supplémentaire de localisation, et le comportement du milieu homogène équivalent doit ensuite être actualisé à chaque fois que les caractéristiques mécaniques de la matrice changent.

Cette dernière solution semble matériellement la plus simple à mettre en œuvre, et si nous voulons que la modélisation numérique proposée soit adaptable dans un code de calcul, il est préférable qu'elle ne s'appuie que sur des données disponibles dans la littérature, ce qui est le cas pour les caractéristiques mécaniques des résines. De plus, en vue d'une étude paramétrique il est intéressant de pouvoir changer les caractéristiques des constituants sans opérations supplémentaires.

3.2 Loi de comportement de type 'J_2 déformation'.

Pour représenter le comportement plastique de la matrice dans ce problème de microflambage, nous utilisons une loi de comportement élastique non linéaire qui donne de très bons résultats pour les problèmes de flambage plastique sans décharge (BEN BAGDAD, 1992). Cette loi dite

'J_2 déformation' est la plus simple de lois plastiques appelées 'total strain theory' (HUTCHINSON, 1974). Dans ces théories élastiques non linéaires, la déformation totale est décomposée (B 35) en une part élastique et une part plastique qui est déterminée en fonction de l'état de contrainte courant sans tenir compte du trajet de chargement.

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{e} + \gamma_{ij}^{p} \qquad \text{(B 35)}$$

La déformation élastique est obtenue par une relation Hookéenne linéaire reliant la déformation à la contrainte. La déformation plastique s'exprime en fonction de l'état de contrainte représenté par J_2 le second invariant du tenseur déviateur des contraintes. Ces grandeurs sont respectivement définies par :

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij}^{dev} S_{ij}^{dev} \quad \text{et} \quad S_{ij}^{dev} = S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij} \qquad \text{(B 36)}$$

La formulation à l'aide de J_2 est à rapprocher du critère d'écoulement plastique de VON-MISES, l'écrouissage est isotrope et la déformation plastique est invariante par pression hydrostatique.

Pour construire le modèle numérique, il faut établir les lois de comportement sécante et tangente inverses. Dans les paragraphes suivants, les résultats importants sont présentés, le détail des calculs conduisant à ces expressions est reporté en Annexe 1.

3.2.1 Lois de comportement sécante et tangente

La loi de comportement sécante reliant la déformation courante à la contrainte correspondante, peut se mettre sous une forme où seules les contraintes apparaissent :

$$\boxed{\gamma_{ij} = \frac{1 + \nu + h_2(J_2)}{E} S_{ij} - \frac{3\nu + h_2(J_2)}{3E} S_{kk} \delta_{ij}} \qquad \text{(B 37)}$$

$h_2(J_2)$ est la fonction d'écrouissage dont l'expression peut être déterminée à partir d'un essai de traction simple. Elle s'écrit en fonction du module sécant (E_s) qui est la variable définissant l'état courant du matériau :

$$h_2(J_2) = \frac{3}{2}\left(\frac{E}{E_S} - 1\right) \qquad \text{(B 38)}$$

Remarque : si on calcule J_2 pour la traction uniaxiale, on obtient :

$$J_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4\sigma^2}{9} + \frac{\sigma^2}{9} + \frac{\sigma^2}{9}\right) = \frac{\sigma^2}{3} \qquad \text{soit} \qquad \sigma = \sqrt{3\,J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}\,S_{ij}^{dev}\,S_{ij}^{dev}} \qquad \text{(B 39)}$$

Dans ce cas particulier, on retrouve la contrainte équivalente au sens de VON-MISES.

La loi de comportement tangente est également utilisée dans le processus de résolution numérique. Elle se déduit de la loi sécante en exprimant l'incrément de déformation $d\gamma$ en fonction de l'incréments de contrainte dS. Tous calculs faits, l'expression de cette loi est :

$$d\gamma_{ij} = \frac{1 + \nu + h_2(J_2)}{E}\,dS_{ij} - \frac{3\,\nu + h_2(J_2)}{3E}\,dS_{pp}\,\delta_{ij} + \frac{h_2'(J_2)}{E}S_{ij}^{dev}\,S_{kl}^{dev}\,dS_{kl} \qquad \text{(B 40)}$$

$h_2'(J_2)$ la dérivée de la fonction d'écrouissage est déterminée de manière similaire à $h_2(J_2)$, par un essai de traction uniaxiale. Elle s'écrit en fonction des 3 modules, initial, sécant et tangent :

$$h_2'(J_2) = \frac{9}{4\sigma^2}\left(\frac{E}{E_t} - \frac{E}{E_s}\right) \qquad \text{(B 41)}$$

3.2.2 Inversion des lois en contraintes planes

Comme cela est présenté ci-dessus, on donne généralement les lois de comportement 'J_2 déformation' dans le sens : déformation = f (contraintes). Or la résolution numérique par élément fini du problème de microflambage (B 31) ne peut se faire que sur la base d'une formulation **en déplacement**. Par conséquent il faut relier les contraintes aux déformations afin d'exprimer l'équilibre **uniquement** en termes de déplacements. Remarquons que le problème de

microflambage est écrit en contraintes planes (i.e. $S_{33} = S_{23} = S_{13} = 0$), les lois de comportement utilisées doivent être écrites pour cette configuration.

Comme nous allons passer ensuite à une résolution numérique du problème, les lois de comportement sont exprimées sous forme matricielle et non plus tensorielle. Les calculs analytiques conduisent à la relation inverse suivante :

$$\{\mathbf{S}\} = [\mathbf{L(S)}]\ \{\gamma\} \tag{B 42}$$

$$\text{où} \qquad \{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\mathbf{S}\} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} \tag{B 43}$$

et

$$[\mathbf{L(S)}] = \begin{bmatrix} (3 + 2\,h_2(J_2))\,\Delta & (3\nu + h_2(J_2))\,\Delta & 0 \\ (3\nu + h_2(J_2))\,\Delta & (3 + 2\,h_2(J_2))\,\Delta & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{E + 2\,h_2(J_2)}{E\,G} \end{bmatrix} \tag{B 44}$$

$$\text{avec } \Delta = \frac{E}{(3 - 3\nu + h_2(J_2))\,(1 + \nu + h_2(J_2))}$$

Dans ces notations vectorielles, γ_{12} désigne le cisaillement au sens de l'ingénieur, tel que :

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \tag{B 45}$$

Pour la loi de comportement tangente, la présence du produit tensoriel des déviateurs des contraintes rend l'inversion difficile. Si on écrit cette loi de comportement, on retrouve une partie similaire à la loi sécante, et une partie supplémentaire due à l'expression de la différentielle de J_2. À partir de sa définition (B 40), on exprime cette loi tangente sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} d\gamma_{11} \\ d\gamma_{22} \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} = \left([\mathbf{M(S)}] + \frac{h'_2(J_2)}{E} \begin{bmatrix} S_{11}^{dev\,2} & S_{11}^{dev} S_{22}^{dev} & 2\, S_{11}^{dev} S_{12}^{dev} \\ S_{22}^{dev} S_{11}^{dev} & S_{22}^{dev\,2} & 2\, S_{22}^{dev} S_{12}^{dev} \\ 2\, S_{12}^{dev} S_{11}^{dev} & 2\, S_{12}^{dev} S_{22}^{dev} & 4\, S_{12}^{dev\,2} \end{bmatrix} \right) . \begin{Bmatrix} dS_{11} \\ dS_{22} \\ dS_{12} \end{Bmatrix} \qquad \text{(B 46)}$$

où [**M(S)**] est la loi sécante de compliance du matériau, définie par B 37. L'opération d'inversion assez longue peut être réalisée manuellement, mais dans la résolution numérique du problème de microflambage nous aurons besoin des sources de programme correspondant à la matrice de rigidité tangente [$\mathbf{L}^T$**(S)**] du matériau. Nous choisissons de réaliser l'inversion avec un code de calcul formel (Maple V) qui permet d'obtenir directement les sources, dans le langage de programmation spécifié.

Les lois de comportement sont exprimées en fonction des caractéristiques élastiques (E, ν) du matériau, mais aussi en fonction de l'écrouissage ($h_2(J_2)$). Dans le paragraphe suivant, les fonctions d'écrouissage utilisées dans le modèle numérique sont présentées.

3.3 Fonction d'écrouissage

L'écrouissage étant supposé isotrope, la seule connaissance de la réponse du matériau sous une sollicitation simple, suffit pour représenter l'évolution de la plasticité dans un cas tridimensionnel plus complexe. Pour y parvenir, il suffit d'établir la fonction d'écrouissage pour le cas particulier de la traction uniaxiale par exemple, et de l'appliquer au cas général en utilisant la notion de contrainte équivalente à l'état de contraintes courant. Plus précisément, dans une situation donnée on calcule la contrainte équivalente à J_2 et on lui fait correspondre sur la courbe de traction uniaxiale le point qui est dans le **même état** de contrainte.

On trouve dans la littérature de nombreuses lois de comportement plus ou moins représentatives du comportement des matériaux réels. Dans notre cas, nous souhaitons étudier l'influence de l'écrouissage sur le microflambage et pour cela nous choisissons une fonction d'écrouissage permettant d'obtenir une grande variété de forme d'évolution de l'écoulement plastique. De plus nous nous donnons la possibilité de traiter directement les courbes d'écrouissage expérimentales introduites sous forme de fichier de couples (σ,γ). L'intérêt est de pouvoir effectuer des calculs quantitatifs à partir de la réponse expérimentale de la résine pure utilisée dans le composite.

Deux lois d'écrouissage analytiques sont retenues. La première est dite 'loi à 2 pentes' et la seconde est une loi puissance de type RAMBERG-OSGOOD à 3 paramètres, ce sont toutes deux des lois à seuil. Le comportement est élastique linéaire jusqu'au seuil (σ_y , γ_y), appelé aussi limite élastique, puis il devient élastique linéaire avec un module plus faible dans le premier cas (**Figure B 4 a**) et élastique non linéaire dans le second cas (**Figure B 4 b**). Les expressions de ces lois sont données ci-dessous (B 47).

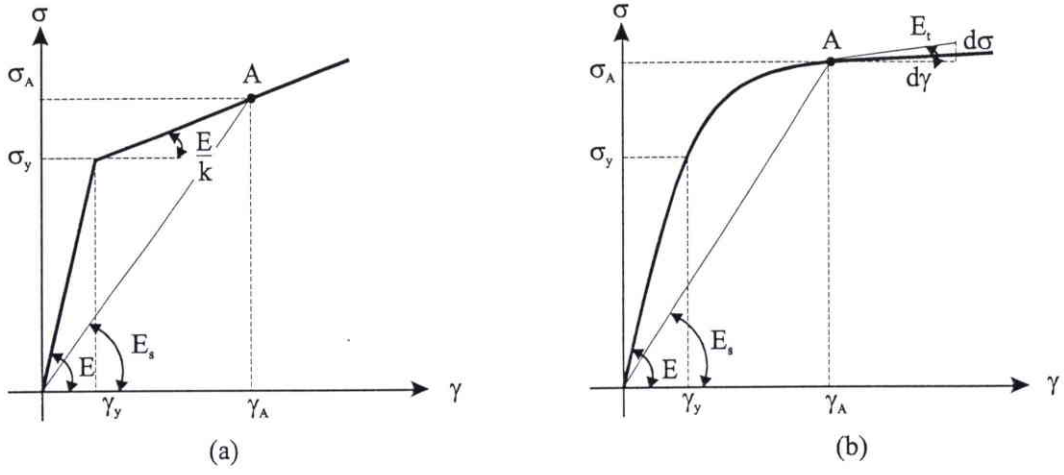


Figure B 4 : Lois de comportement (a) à 2 pentes et (b) de RAMBERG-OSGOOD.

	$\sigma < \sigma_y$	$\sigma \geq \sigma_y$
Loi à 2 pentes	$\gamma = \frac{\sigma}{E}$	$\gamma = \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma - \sigma_y}{E} k$
RAMBERG-OSGOOD	$\gamma = \frac{\sigma}{E}$	$\gamma = \frac{\sigma_y}{E\,n}\left(n - 1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right)^n\right)$ $d\gamma = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma}{\sigma_y}\right)^{n-1} d\sigma$

(B 47)

où k est le rapport entre les modules de la loi à 2 pentes, et n est le coefficient d'écrouissage de la loi de RAMBERG-OSGOOD.

Dans les 2 lois, les modules sécant et tangent sont égaux au module initial avant le seuil. Après la limite élastique, le module sécant est exprimé en égalant la déformation définie à partir du module sécant et la déformation définie par la loi de comportement. Le module tangent est quant à lui défini de manière similaire avec les incréments de contraintes et de déformations :

$$\frac{\sigma}{E_s} = \gamma = \begin{cases} \dfrac{\sigma_y}{E} + \dfrac{\sigma - \sigma_y}{E} k \\ \dfrac{\sigma_y}{n\,E}\left(n - 1 + \left(\dfrac{\sigma}{\sigma_y}\right)^n\right) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\sigma}{E_t} = d\gamma = \begin{cases} \dfrac{d\sigma}{E} k \\ \dfrac{d\sigma}{E}\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_y}\right)^{n-1} \end{cases} \tag{B 48}$$

Après la limite élastique, les modules sécant et tangent s'expriment de la façon suivante :

	E_s	E_t
Loi à 2 pentes	$\dfrac{\sigma\,E}{\sigma_y + (\sigma - \sigma_y)\,k}$	$\dfrac{E}{k}$
RAMBERG-OSGOOD	$\dfrac{\sigma\,n\,E}{\sigma_y\left(n - 1 + \left(\dfrac{\sigma}{\sigma_y}\right)^n\right)}$	$E\left(\dfrac{\sigma}{\sigma_y}\right)^{(n-1)^{-1}}$

(B 49)

À partir de ces expressions de traction uniaxiale, on généralise au comportement tridimensionnel en supposant que la contrainte équivalente ($\sigma_{eq} = \sigma$ en traction uniaxiale) vérifie les lois B 47. Cette contrainte équivalente est reliée à J_2 par la relation B 39 : $\sigma_{eq} = \sqrt{3\,J_2}$. En conséquence, pour un J_2 donné , E_s et E_t sont calculés à l'aide des relations suivantes :

	E_s	E_t
Rappel	$h_2(J_2) = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{E}{E_S} - 1\right)$	$h_2'(J_2) = \dfrac{3}{4\,J_2}\left(\dfrac{E}{E_t} - \dfrac{E}{E_s}\right)$
Loi à 2 pentes	$\dfrac{\sqrt{3\,J_2}\,E}{\sigma_y + (\sqrt{3\,J_2} - \sigma_y)\,k}$	$\dfrac{E}{k}$
RAMBERG-OSGOOD	$\dfrac{\sqrt{3\,J_2}\,n\,E}{\sigma_y\left(n - 1 + \left(\dfrac{\sqrt{3\,J_2}}{\sigma_y}\right)^n\right)}$	$E\left(\dfrac{\sqrt{3\,J_2}}{\sigma_y}\right)^{(n-1)^{-1}}$

(B 50)

La fonction d'écrouissage $h_2(J_2)$ et sa dérivée $h'_2(J_2)$ peuvent ainsi être déterminées à partir de leur définition rappelée ci-dessus. Dans le cas où un courbe expérimentale est utilisée, les modules sont déterminés sur le même principe, grâce à la déformation interpolée correspondant à la contrainte σ_{eq}.

3.4 Prise en compte de la loi de comportement de la matrice

Durant le processus de résolution, les caractéristiques mécaniques de la matrice doivent être évaluées à chaque fois que la loi de comportement du milieu homogène équivalent est utilisée. Un algorithme spécifique (**Figure B 5**) est mis en œuvre pour prendre en compte l'évolution du comportement de la matrice. D'abord une opération de localisation donne les déformations dans la matrice en fonction du chargement et des déformations correspondant à la solution courante. Ensuite un processus de résolution non linéaire permet de déterminer le J_2 correspondant à l'état de déformation courant. Connaissant J_2, la fonction d'écrouissage $h_2(J_2)$ est déterminée, alors les caractéristiques mécaniques de la matrice sont calculées grâce aux lois de comportement établies dans le paragraphe précédent. À partir des lois de comportement sécante et tangente de la matrice ($[\mathbf{L}_{Mat}]$,$[\mathbf{L}^T_{Mat}]$) et de la fibre ($[\mathbf{L}_{Fib}]$,$[\mathbf{L}^T_{Fib}]$) un calcul d'homogénéisation permet d'obtenir les nouvelles lois de comportement du milieu homogène équivalent ($[\mathbf{L}]$,$[\mathbf{L}^T]$).

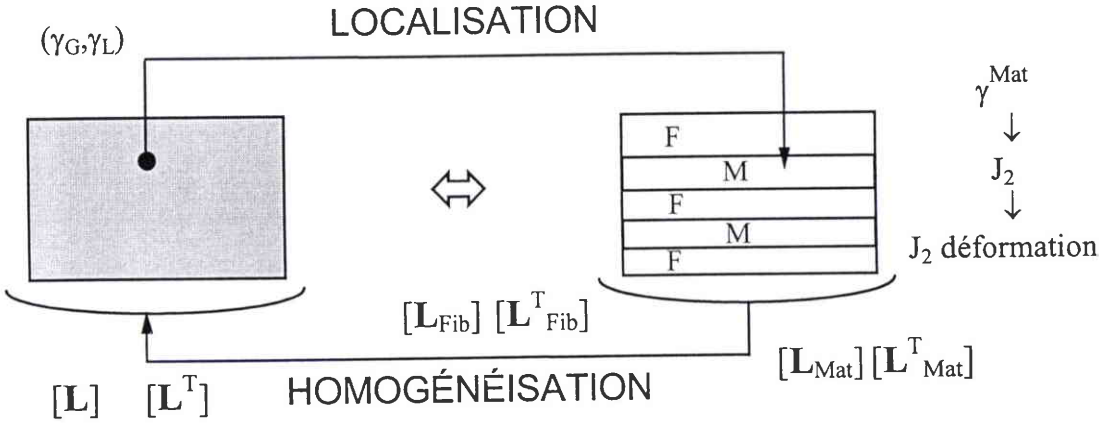


Figure B 5 : Prise en compte de la loi de comportement de la matrice.

3.4.1 Localisation

La localisation s'effectue sur la base des hypothèses portant sur le champ de déformation microscopique du modèle homogénéisé. Connaissant le champ de déformation totale, on peut déterminer le champ microscopique dans chaque constituant. Dans notre cas, le champ de déformation complet est construit à partir des champs mésoscopique et macroscopique.

Les déformations microscopiques dans la fibre et dans la matrice sont respectivement désignées par les exposant M et F, et sont reliées aux déformations totales par les relations A 19 que l'on rappelle ci-dessous :

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{11} &= \gamma_{11}^{M} = \gamma_{11}^{F} \\ \gamma_{22} &= (1 - f)\,\gamma_{22}^{M} \\ \gamma_{12} &= (1 - f)\,\gamma_{12}^{M} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B 51)}$$

D'autre part, nous avons montré que les déformations totales dans le milieu homogénéisé sont la somme des déformations globales et locales (B 27), les déformations globales étant limitées à la seule composante 11 (B 34). Les déformations totales sont :

$$\gamma(\mathbf{u}) = \gamma_{11}^{d}(x_2)\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \gamma_L(\mathbf{u}_L) \qquad \text{(B 52)}$$

Connaissant les déformations locales correspondant à la solution du problème de microflambage, les déformations totales sont reconstituées grâce à B 52. Par conséquent, les déformations microscopiques dans la matrice sont connues à partir de B 51 , et s'écrivent finalement :

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{11}^{M} &= \gamma_{11}^{d}(x_2) + \gamma_{L11} \\ \gamma_{22}^{M} &= \frac{\gamma_{L22}}{1-f} \\ \gamma_{12}^{M} &= \frac{\gamma_{L12}}{1-f} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B 53)}$$

Ces relations simples permettent de déterminer l'état de déformation dans la matrice en fonction de la déformation imposée sur le domaine et des déformations correspondant à la solution du problème mésoscopique.

3.4.2 Application de la loi de comportement à la matrice

À ce stade, l'état de déformation dans la matrice est connu par localisation. Afin de déterminer les caractéristiques mécaniques correspondantes, il est nécessaire de calculer la fonction d'écrouissage h_2. Par conséquent J_2 doit être déterminé à partir des déformations correspondant à un état de contraintes planes. En utilisant la loi de comportement sécante B 37, J_2 s'exprime en fonction du second invariant des déformations qui peut être déduit de l'état de contraintes planes. Les calculs détaillés dans l'Annexe 2 donnent l'expression de cette relation non linéaire dont la résolution permet de connaître le J_2 correspondant à l'état courant de **déformation** :

$$I_2(J_2) - \left(\frac{1 + \nu + h_2(J_2)}{E}\right)^2 J_2 = 0 \qquad \text{(B 54)}$$

avec $I_2(J_2)$ calculé d'après l'état de déformation courant grâce à B 55.

$$I_2(J_2) = \frac{1}{2}\left[\left(\gamma_{11} - \frac{1+\beta(J_2)}{3}(\gamma_{11}+\gamma_{22})\right)^2 + \left(\gamma_{22} - \frac{1+\beta(J_2)}{3}(\gamma_{11}+\gamma_{22})\right)^2 + \frac{\gamma_{12}^2}{2} + \left(\left(\frac{2\,\beta(J_2) - 1}{3}\right)(\gamma_{11}+\gamma_{22})\right)^2\right] \qquad \text{(B 55)}$$

où $\beta(J_2) = -\dfrac{3\,\nu + h_2(J_2)}{3\,(1 - \nu) + h_2(J_2)}$

Ce problème non linéaire est résolu par un schéma numérique intégré dans la technique de résolution du problème de microflambage dont la mise en œuvre est détaillée dans la partie C.

3.4.3 Homogénéisation

À cette étape de calcul, on a déterminé J_2, et la fonction d'écrouissage est connue. On peut alors déterminer les caractéristiques mécaniques de la loi de comportement sécante B 44 en fonction des caractéristiques initiales et de $h_2(J_2)$. Pour avoir la loi de comportement tangente (B 46), il est nécessaire de connaître le déviateur des contraintes. Les contraintes sont d'abord déterminées par la loi sécante inverse en fonction de l'état de déformation courant, puis le déviateur des contraintes en est déduit (B 36). La loi de comportement tangente peut alors être calculée. Enfin, il reste à actualiser la loi de comportement du milieu homogène équivalent.

La loi sécante du milieu homogénéisé possède une forme similaire à celle proposée par GRANDIDIER et al. (A 20). Mais dans notre problème de microflambage plastique, les caractéristiques mécaniques sécantes de la matrice remplacent les caractéristiques élastiques utilisées dans cette étude. Par conséquent, la loi sécante du milieu homogénéisé s'exprime sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f E_f + (1-f)\, a(\mathbf{S}) & b(\mathbf{S}) & 0 \\ b(\mathbf{S}) & \dfrac{c(\mathbf{S})}{(1-f)} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{d(\mathbf{S})}{(1-f)} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \qquad \text{(B 56)}$$

avec la loi de comportement sécante de la matrice telle qu'elle est définie par B 44 , et que l'on écrit sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a(\mathbf{S}) & b(\mathbf{S}) & 0 \\ b(\mathbf{S}) & c(\mathbf{S}) & 0 \\ 0 & 0 & d(\mathbf{S}) \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

En ce qui concerne la loi tangente, il est nécessaire de l'expliciter. Pour ce faire, nous reprenons la démarche utilisée par GRANDIDIER et al. pour déterminer la loi sécante en termes de vecteurs, mais cette fois il faut utiliser les lois de comportement tangentes microscopiques, élastique linéaire pour la fibre et élastique non linéaire pour la matrice. Nous avons vu dans le § 3.4.1 concernant la localisation, la relation qui existe entre les déformations microscopiques et moyennes. Ces relations sont rappelées dans (1), (2) et (3) de B 57. Quant aux contraintes, la continuité à l'interface des constituants nous conduit aux relations (4) et (5) de B 57.

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \gamma_{11} = \gamma_{11}^{M} = \gamma_{11}^{F} \\ (2) & \gamma_{22} = (1-f)\, \gamma_{22}^{M} \\ (3) & \gamma_{12} = (1-f)\, \gamma_{12}^{M} \\ (4) & S_{22} = S_{22}^{M} = S_{22}^{F} \\ (5) & S_{12} = S_{12}^{M} = S_{12}^{F} \end{array}\right\} \qquad \text{(B 57)}$$

À partir de (1), (4) et (5), les contraintes mésoscopiques incrémentales s'expriment de la façon suivante :

$$\left.\begin{aligned} dS_{11} &= \langle dS_{11}\rangle = f\, dS_{11}^{F} + (1-f)\, dS_{11}^{M} \\ dS_{22} &= \langle dS_{22}\rangle = dS_{22}^{M} = dS_{22}^{F} \\ dS_{12} &= \langle dS_{12}\rangle = dS_{12}^{M} = dS_{12}^{F} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B 58)}$$

Rappelons que les lois de comportement tangentes microscopiques se présentent sous la forme :

$$\begin{aligned} dS_{11}^{F} &= E_f\, d\gamma_{11}^{F} \\ dS^{M} &= [\mathbf{L}_{Mat}^{T}(\mathbf{S})].d\gamma^{M} \\ &= \begin{bmatrix} A(\mathbf{S}) & B(\mathbf{S}) & C(\mathbf{S}) \\ B(\mathbf{S}) & D(\mathbf{S}) & E(\mathbf{S}) \\ C(\mathbf{S}) & E(\mathbf{S}) & F(\mathbf{S}) \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} d\gamma_{11}^{M} \\ d\gamma_{22}^{M} \\ d\gamma_{12}^{M} \end{Bmatrix} \end{aligned} \qquad \text{(B 59)}$$

En injectant ces lois de comportement microscopiques dans les expressions des contraintes incrémentales mésoscopiques (B 58) on obtient :

$$\left.\begin{aligned} dS_{11} &= f\, E_f\, d\gamma_{11}^{F} + (1-f)\,(A(\mathbf{S})\, d\gamma_{11}^{M} + B(\mathbf{S})\, d\gamma_{22}^{M} + C(\mathbf{S})\, d\gamma_{12}^{M}) \\ dS_{22} &= B(\mathbf{S})\, d\gamma_{11}^{M} + D(\mathbf{S})\, d\gamma_{22}^{M} + E(\mathbf{S})\, d\gamma_{12}^{M} \\ dS_{12} &= C(\mathbf{S})\, d\gamma_{11}^{M} + E(\mathbf{S})\, d\gamma_{22}^{M} + F(\mathbf{S})\, d\gamma_{12}^{M} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B 60)}$$

D'après (1), (2) et (3) de B 57, on connaît les déformations mésoscopiques en fonction des déformations microscopiques, on introduit ces relations dans les expressions B 60 des contraintes mésoscopiques incrémentales :

$$\left.\begin{aligned} dS_{11} &= f\, E_f\, d\gamma_{11} + (1-f)\, A(\mathbf{S})\, d\gamma_{11} + (1-f)\, B(\mathbf{S})\, \frac{d\gamma_{22}}{(1-f)} + (1-f)\, C(\mathbf{S})\, \frac{d\gamma_{12}}{(1-f)} \\ dS_{22} &= B(\mathbf{S})\, d\gamma_{11} + D(\mathbf{S})\, \frac{d\gamma_{22}}{(1-f)} + E(\mathbf{S})\, \frac{d\gamma_{12}}{(1-f)} \\ dS_{12} &= C(\mathbf{S})\, d\gamma_{11} + E(\mathbf{S})\, \frac{d\gamma_{22}}{(1-f)} + F(\mathbf{S})\, \frac{d\gamma_{12}}{(1-f)} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B 61)}$$

Finalement, la loi de comportement tangente du milieu homogène équivalent est donnée par :

$$\begin{Bmatrix} dS_{11} \\ dS_{22} \\ dS_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f E_f + (1-f) A(\mathbf{S}) & B(\mathbf{S}) & C(\mathbf{S}) \\ B(\mathbf{S}) & \dfrac{D(\mathbf{S})}{(1-f)} & \dfrac{E(\mathbf{S})}{(1-f)} \\ C(\mathbf{S}) & \dfrac{E(\mathbf{S})}{(1-f)} & \dfrac{F(\mathbf{S})}{(1-f)} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} d\gamma_{11} \\ d\gamma_{22} \\ d\gamma_{12} \end{Bmatrix} \qquad \text{(B 62)}$$

où les A(**S**) ... E(**S**) sont calculés par les relations mises en place pour l'élasticité non linéaire de la matrice (B 46). Les lois de comportement sécante et tangente du milieu homogène sont calculées en utilisant B 56 et B 62 après chaque actualisation des caractéristiques mécaniques de la matrice.

3.5 Correction 2D - 3D du module de cisaillement de la matrice

Le modèle homogénéisé de microflambage est bidimensionnel, comme la plupart des modèles existants. Les hypothèses de répartition 2D des contraintes ou des déformations ne posent généralement pas de problèmes particuliers. Toutefois du point de vue géométrique, l'approche 2D peut engendrer des erreurs sur l'évaluation des déformations microscopiques. En effet, si on choisit en 2D la taille des constituants en fonction de la fraction volumique, quand on compare ces dimensions avec une géométrie 3D, on constate aisément les erreurs commises sur les distances entre les fibres par exemple (**Figure B 6**). Dans notre modèle nous avons vu que le cisaillement pilote le comportement en compression , et à fraction volumique de fibres égale la déformation de cisaillement n'est pas le même selon qu'on considère une répartition 2D ou 3D des fibres. Une des conséquences est la différence des modules de cisaillement dans le plan homogénéisé obtenus par la loi des mélanges dans le cas particulier d'une répartition 2D et par homogénéisation périodique dans le cas 3D.

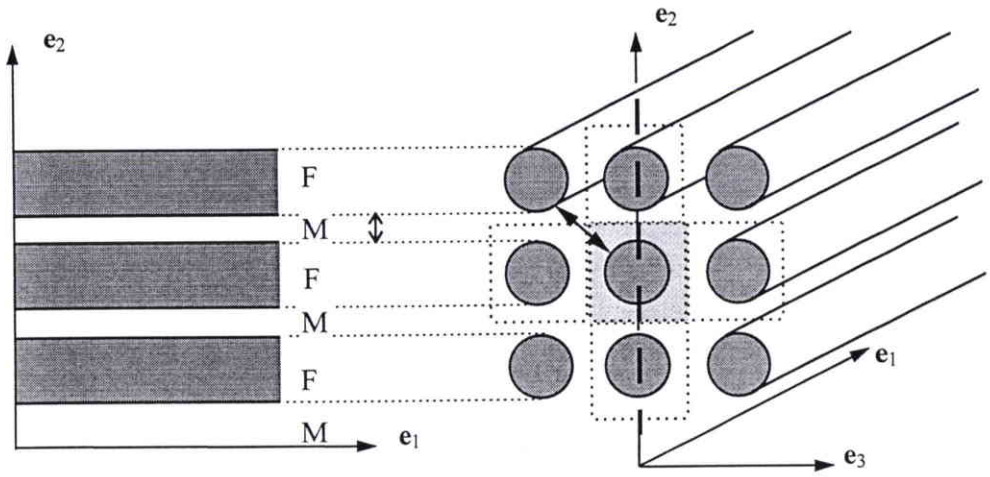


Figure B 6 : Modélisation 2D et 3D : influence géométrique sur la répartition de la matrice.

LÉNÉ (1984) a réalisé des calculs d'homogénéisation sur des UD verre-époxydes. La cellule de base est carrée (cf **Figure B 6**), et les caractéristiques mécaniques sont les suivantes : $E_f = 84$ Gpa, $\nu_f = 0.22$, $E_m = 4$ Gpa, $\nu_m = 0.34$. Le module effectif du composite est calculé pour des fractions volumiques des fibres variant de 0.5 à 0.76. Sur la figure ci-dessous (**Figure B 7**) le rapport des valeurs extraites des calculs de LÉNÉ (1984) et du module de cisaillement calculé en 2D est exprimé en fonction de la fraction volumique de fibres.

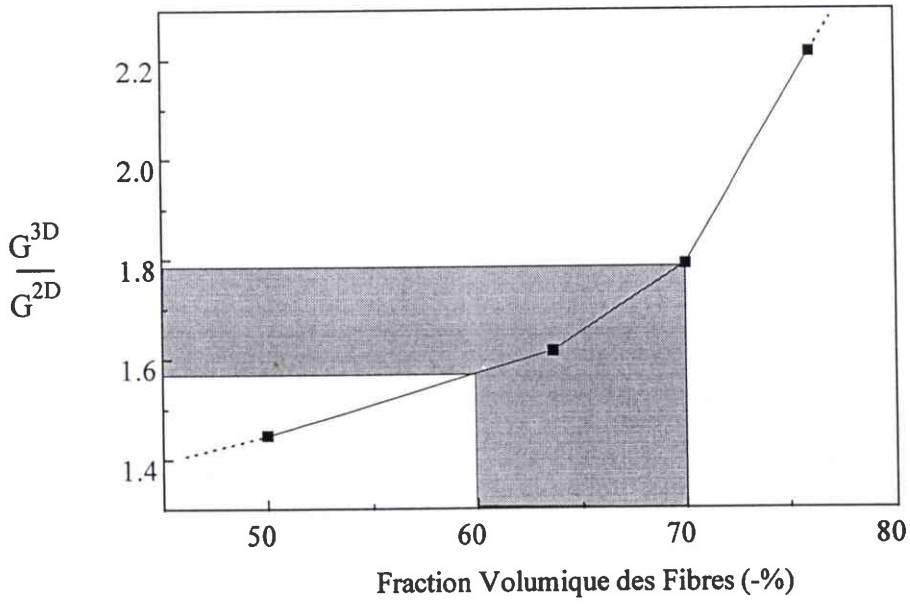


Figure B 7 : Évolution du rapport des cisaillements 3D/2D en fonction de la fraction volumique des fibres, d'après LÉNÉ (1984).

Nous pourrions inclure dans la résolution de notre problème des calculs similaires afin de prendre en compte la répartition 3D des fibres, mais ces calculs seraient très coûteux et pénaliseraient notre approche qui se veut performante en terme de coûts de calculs. On peut remarquer que pour des fractions volumiques courantes (60 - 70 %), le rapport présenté ci-dessous (**Figure B 7**) est de 1.6 et 1.8 environ. Ce rapport est confirmé par des calculs de CM/Del (1994) sur des carbone-époxydes à 60 % de fibres dont la contrainte de microflambage en 3D est 1.53 fois supérieure à celle calculée en 2D. D'autres calculs d'homogénéisation conduisent à des résultats proches (MARIGO et al., 1987; ANQUEZ, 1990).

En conclusion, l'effet de la répartition tridimensionnelle des fibres peut être pris en compte dans les modèles 2D, en corrigeant le module de cisaillement effectif du composite. Comme dans notre cas, seule la matrice contribue à cette rigidité de cisaillement, le module de cisaillement de la matrice est majoré de 50 %, conformément aux résultats ci-dessus, avant d'être utilisé dans les lois de comportement du milieu homogène équivalent.

3.6 Synopsis

Les opérations mises en œuvre pour la prise en compte du comportement non linéaire de la matrice avec la 'J_2 déformation' sont représentées schématiquement sur la figure ci-dessous (**Figure B 8**, page 95). On retrouve d'une part les opérations propres à la formulation homogénéisée du matériau, et d'autre part les opérations plus classiques correspondant à la prise en compte de la loi élastique non linéaire.

4. SYNTHÈSE DE LA MODÉLISATION

Partant du modèle homogénéisé bidimensionnel de GRANDIDIER et al. (1996), nous avons formulé le problème de microflambage plastique avec défaut initial. Afin de ne pas étudier toute la structure lorsqu'on utilise ce modèle, le problème a été défini à l'**échelle mésoscopique** grâce à un champ de déplacement à double échelle. Dans cette cinématique, le microflambage des fibres est considéré comme une **perturbation** qui vient se **superposer localement** à la **solution de l'équilibre global** de la structure. La structure étant en équilibre avant et après l'apparition locale du microflambage des fibres, l'équilibre mésoscopique lié à l'instabilité est directement exprimé comme la différence entre ces 2 configurations de la structure. Le problème ainsi défini a pour

solution la composante locale du champ de déplacement, et le chargement sur le domaine mésoscopique est une déformation répartie qui correspond à la solution de l'équilibre global supposé réalisé.

Dans ce problème de microflambage plastique sans décharge élastique, le comportement plastique de la matrice est pris en compte par une **loi élastique non linéaire** de type **'J_2 déformation'** appliquée à la matrice seule. La matrice étant "intégrée" au milieu homogène équivalent, la prise en compte de son comportement requiert des opérations spécifiques en plus de celles développées classiquement. L'état de déformation dans la matrice est connu par **localisation** en fonction du chargement et de la solution de l'équilibre local. Ensuite le 2nd invariant des déformations de la matrice est calculé, il permet via un processus de résolution non linéaire de déterminer le 2nd invariant des contraintes qui donne la valeur de la fonction d'écrouissage et de sa dérivée. La loi de comportement sécante peut être calculée, elle permet également de déterminer l'état de contraintes et donc le déviateur des contraintes nécessaire au calcul de la loi de comportement tangente. Après avoir corrigé le cisaillement pour tenir compte de la répartition tridimensionnelle des fibres dans le composite réel, les lois de comportement des constituants sont assemblées (**homogénéisation**), ce qui donne les lois de comportement du milieu homogène équivalent.

Il est clair que le problème de microflambage plastique est non linéaire géométrique et matériau, par conséquent il n'est pas envisageable de le résoudre de manière analytique, la résolution ne pourra être que numérique. La recherche de la solution du problème en déplacement et la prise en compte de la non linéarité matrice requièrent des algorithmes numériques à préciser. Ces schémas de résolution, ainsi que les opérations propres à l'approche numérique, sont intégrés dans un code de calcul spécifique dont la mise en œuvre et les fonctionnalités sont décrites dans le chapitre suivant.

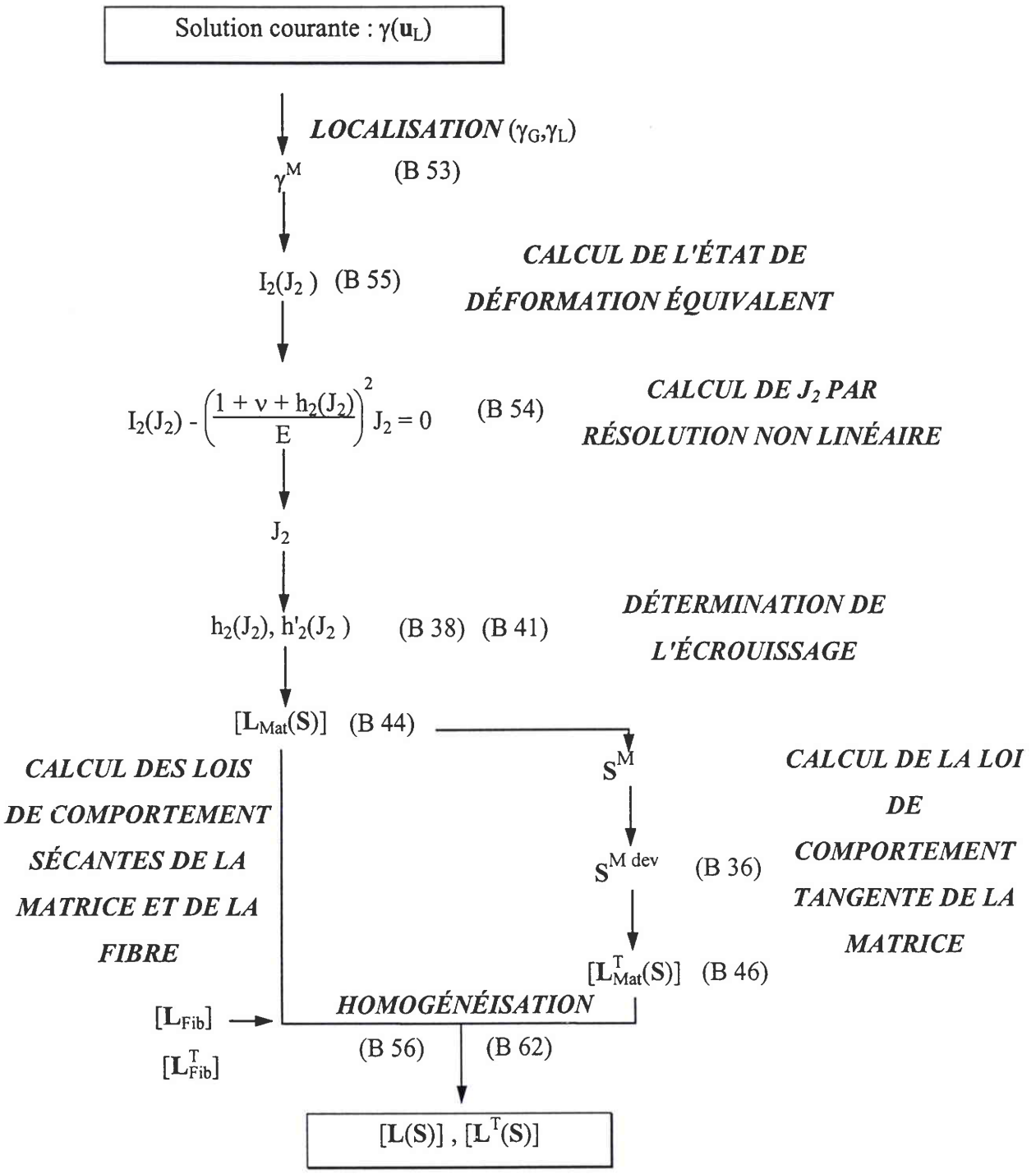


Figure B 8 : Prise en compte de la loi de comportement de la matrice : opérations et références.

PARTIE C

Description de la Résolution Numérique et Mise en Œuvre dans un Code Spécifique

1. DÉFINITION DE LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE ---------- 97

1.1 Introduction sur les méthodes numériques de résolution des problèmes non linéaires ---------- 97

1.2 Formulation incrémentale du problème de microflambage ---------- 100

1.2.1 Simplification de la matrice de rigidité tangente ---------- 102

1.2.2 Développement du second membre ---------- 103

1.2.3 Formulation en déplacement ---------- 105

1.3 Pilotage en 'longueur d'arc' de la résolution numérique ---------- 106

1.3.1 Méthode de RAMM ---------- 108

1.3.2 Prédiction ---------- 109

1.3.3 Correction ---------- 110

1.3.4 Synopsis ---------- 113

1.4 Opérations numériques associées à la plasticité ---------- 113

2. APPROXIMATION DU DÉPLACEMENT - PROBLÈME DISCRÉTISÉ ---------- 116

2.1 Première solution ---------- 116

2.2 Instabilités cellulaires ---------- 117

2.3 Champ de déplacement ---------- 118

2.4 Défaut ---------- 121

3. PROBLÈME DISCRÉTISÉ - IMPLÉMENTATION ---------- 122

3.1 Grandeurs élémentaires ---------- 122

3.2 Intégration numérique ---------- 124

3.3 Assemblage - Résolution ---------- 126

3.4 Entrées - Sorties ---------- 128

4. SYNTHÈSE DE LA DESCRIPTION NUMÉRIQUE ---------- 129

En vue d'une résolution numérique, le problème non linéaire de microflambage doit être paramétré puis formulé de manière incrémentale. Le pilotage associé à cette résolution est choisi de façon à pouvoir traiter l'apparition de l'instabilité plastique. La prise en compte du comportement plastique de la matrice requiert également une résolution numérique de l'équation non linéaire reliant J_2 à l'état de déformation dans la matrice. Le problème étant posé, nous choisissons de rechercher la solution du problème local de microflambage à l'aide d'une approximation de type élément fini originale qui permet de réduire la taille du problème à traiter. La résolution du problème discrétisé est réalisée grâce aux techniques numériques classiques pour une problème de structure. Ces schémas de résolution sont intégrés dans un code spécifique dont les fonctionnalités sont rapidement exposées.

1. DÉFINITION DE LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

1.1 Introduction sur les méthodes numériques de résolution des problèmes non linéaires

La solution de l'équilibre mésoscopique du problème de microflambage (B 31) doit vérifier, ou au moins minimiser, cette expression pour que l'erreur commise en utilisant une solution approchée soit admissible au sens du *critère de convergence* choisi. De manière générale, la résolution d'un problème non linéaire de structure tel que le problème de microflambage se résume à la minimisation d'un *résidu*, noté Ψ, qui est l'expression de l'équilibre du système :

$$\mathbf{u(x)} \,/\, \Psi(\mathbf{u};\delta\mathbf{u}) = 0 \qquad \text{(C 1)}$$

$$\text{avec} \quad \Psi(\mathbf{u};\delta\mathbf{u}) = \mathbf{k}(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}).\mathbf{u} - \langle \mathbf{f},\delta\mathbf{u} \rangle$$

où **k** est la rigidité du système, **f** représente les efforts extérieurs appliqués, **u** est le champ de déplacement et $\delta\mathbf{u}$ est un champ virtuel cinématiquement admissible quelconque.

Lorsqu'on résout un problème linéaire, la solution est déterminée directement en fonction du chargement imposé. Par contre pour un problème non linéaire, ce type d'approche n'est plus valide et la solution doit être déterminée à partir de sous problèmes linéarisés. Comme le champ de déplacement est la solution recherchée, seuls les efforts extérieurs peuvent être utilisés pour

subdiviser l'intervalle d'étude. Le chargement imposé (déplacement, force, déformation, contrainte) est traduit en termes d'efforts extérieurs **f** appliqués par paliers, ce qui définit une succession de problèmes supposés linéaires dont la résolution est classique (**Figure C 1**). Ce type de résolution est appelé schéma *incrémental.*

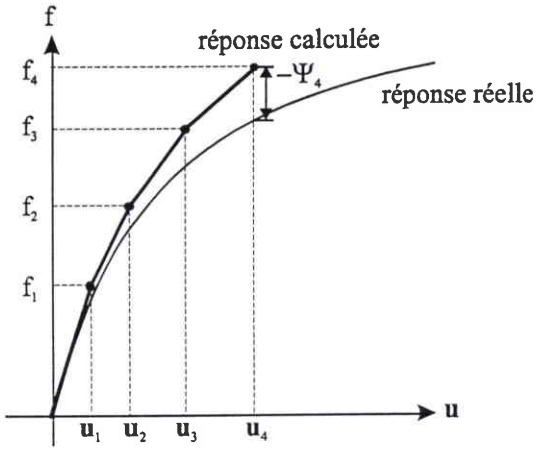


Figure C 1 : Résolution d'un problème non linéaire $\Psi(\mathbf{u};\delta\mathbf{u}) = 0$ par un schéma incrémental.

Classiquement cette subdivision du chargement est prise en compte par un terme appelé *facteur de charge*, noté λ, qui détermine la fraction des efforts extérieurs prise en compte dans la résolution courante. Alors le résidu dépend de **u** et de λ, et une équation supplémentaire est nécessaire pour caractériser cette variable libre :

$$\left.\begin{aligned} &\Psi(\mathbf{u},\lambda;\delta\mathbf{u}) = \mathbf{k}(\mathbf{u},\delta\mathbf{u}) - \lambda \langle \mathbf{f},\delta\mathbf{u}\rangle = 0 \\ &f(\mathbf{u},\lambda) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C 2)}$$

Cette 2nde équation, dite auxiliaire, est utilisée dans le *pilotage* de la résolution pour préciser la relation entre le(s) *paramètre(s) de contrôle* et le facteur de charge (I.P.S.I. - cours n°5 FAFARD et al, 1995).

Mais on peut remarquer que la technique incrémentale est très limitée car la qualité de la solution dépend de la taille des incréments de charge et la réponse calculée risque de diverger totalement de la réponse réelle de la structure, surtout pour des problèmes fortement non

linéaires. Pour palier à ces problèmes on adopte généralement des techniques dites de *prédiction / correction*. Le pas de prédiction fournit une première solution qui est ensuite corrigée par des itérations successives pour aboutir à une solution admissible. Le choix du prédicteur est dans ce cas crucial puisque de sa qualité dépendent le nombre de corrections nécessaires pour obtenir la solution, et donc le nombre et la taille des pas de prédictions à répéter pour parvenir au niveau de chargement final.

Les prédicteurs généralement employés sont robustes et de bonne qualité car ils sont basés sur la tangente à la courbe $(\mathbf{u},\lambda)$ qui est en fait la rigidité tangente du système. La technique dite de NEWTON permet de linéariser le problème à partir d'une solution connue (**Figure C 2**), elle s'apparente à un développement de TAYLOR à l'ordre 1 autour de l'équilibre courant. On passe d'un état d'équilibre au pas 'p' défini par $(\mathbf{u}_p,\lambda_p)$, à un état d'équilibre voisin $(\mathbf{u}_{p+1},\lambda_{p+1})$ par la relation suivante :

$$\Psi(\mathbf{u}_{p+1},\lambda_{p+1};\delta\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}) + \frac{\partial\Psi(\mathbf{u},\lambda;\delta\mathbf{u})}{\partial u}\Big|_p.\Delta\mathbf{u} + \frac{\partial\Psi(\mathbf{u},\lambda;\delta\mathbf{u})}{\partial\lambda}\Big|_p \Delta\lambda + \acute{O}(\Delta\mathbf{u}^2,\Delta\lambda^2) \qquad \text{(C 3)}$$

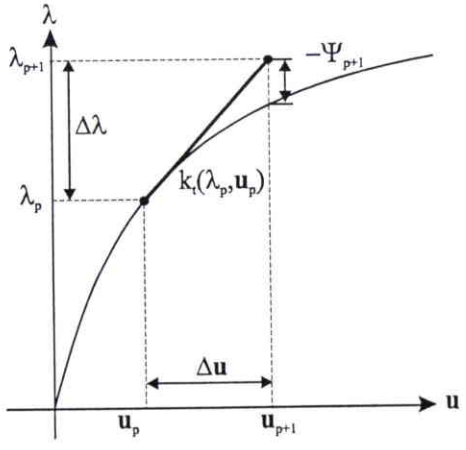


Figure C 2 : Linéarisation de NEWTON.

Dans le cas des problèmes de structure, on note respectivement la rigidité tangente, et le second membre du problème incrémental conformément à l'expression du résidu (C 2), sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(\mathbf{u},\lambda;\delta\mathbf{u})}{\partial u}\Big|_p &= \mathbf{k}_t(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}) \\ \frac{\partial \Psi(\mathbf{u},\lambda;\delta\mathbf{u})}{\partial \lambda}\Big|_p &= \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_p;\delta\mathbf{u}) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(C 4)}$$

En tronquant le développement limité C 3 à l'ordre 1, et en adoptant les notations ci-dessus, la linéarisation du résidu de notre problème devient :

$$\Psi(\mathbf{u}_{p+1},\lambda_{p+1};\delta\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}) + \mathbf{k}_t(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}_p + \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_p;\delta\mathbf{u})\,\Delta\lambda_p \qquad \text{(C 5)}$$

Cette technique de linéarisation est très largement utilisée. Elle est souvent associée à un schéma incrémental qui permet de fixer les niveaux de chargement successifs, les prédictions et les corrections étant assurées grâce à la résolution des problèmes linéarisés par NEWTON. Les méthodes de ce type se différencient principalement par le choix du paramètre de contrôle et le type de pilotage utilisé. Mais de manière générale la méthode de NEWTON s'applique à tout problème non linéaire que l'on linéarise en vue d'une résolution numérique. Nous explicitons dans la suite la formulation linéarisée de notre problème de microflambage en utilisant cette méthode.

1.2 Formulation incrémentale du problème de microflambage

Comme nous l'avons présenté précédemment, nous introduisons dans notre problème le facteur de charge (C 2). Nous avons justifié au § B.2.4, que le chargement extérieur est contrôlé par la déformation longitudinale globale (B 34), d'où l'expression du chargement sur le domaine mésoscopique :

$$\gamma_G = \lambda\,\gamma^d_{11}(x_2)\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \rightarrow S_{11}(\gamma_G) = \lambda\,L_{1111}(\gamma_G)\,\gamma^d_{11}(x_2) = \lambda\,\gamma^d_{11}(x_2)\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \qquad \text{(C 6)}$$

Alors l'équilibre de notre problème (B 31), ou résidu, dont le champ de déplacement local est solution s'écrit :

$$\Psi(\mathbf{u}_L,\lambda) = \int_\Omega \{f\, E_f\, r_{gf}^2\, v_L''\, \delta v_L'' + \mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L).\delta\gamma_L\}\, d\Omega +$$

$$\lambda \int_\Omega \{\gamma_{11}^d(x_2)\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\, (v_L'+v_0')\, \delta v_L'\}\, d\Omega = 0, \qquad \forall\, \delta\mathbf{u}_L \text{ C.A.(0)} \tag{C 7}$$

avec la loi de comportement :

$$\begin{cases} \mathbf{S}(\gamma) = \mathbf{L}(\gamma).\gamma \\ \mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L) = \mathbf{S}(\gamma_G+\gamma_L) - \mathbf{S}(\gamma_G) \end{cases}$$

Conformément à la linéarisation de NEWTON (C 5), nous calculons les termes du développement. Dans notre cas, le déplacement global est fixé, en conséquence seul le déplacement local peut varier, i.e. $\Delta\gamma_G = 0$. Le terme de chargement qui s'écrit en fonction de la déformation globale a pour variation :

$$\Delta(\lambda\, \gamma_{11}^d(x_2).\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\, (v'_L + v'_0)\, \delta\, v'_L) = \lambda\, \Delta v'_L\, \gamma_{11}^d(x_2)\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\, \delta v'_L \tag{C 8}$$

En utilisant les formes générales C 4, la rigidité tangente et le second membre de notre problème se mettent sous la forme :

$$\mathbf{k}_t(\mathbf{u}_L,\lambda;\delta\mathbf{u}_L).\Delta\mathbf{u}_L$$

$$= \int_\Omega \{f\, E_f\, r_{gf}^2\, \Delta v_L''\, \delta v_L'' + \Delta[\mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L)].\delta\gamma_L + \mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L).\Delta(\delta\gamma_L) + \lambda\, \Delta v'_L\, \gamma_{11}^d(x_2)\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\, \delta v'_L\}\, d\Omega \tag{C 9}$$

$$\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_L;\delta\mathbf{u}_L) = \int_\Omega \{\frac{\partial \mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L)}{\partial\lambda}.\delta\gamma_L + \frac{\partial(\lambda\, \gamma_{11}^d(x_2)\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)}{\partial\lambda}\, (v_L'+v_0')\, \delta v_L'\}\, d\Omega \tag{C 10}$$

1.2.1 Simplification de la matrice de rigidité tangente

Si dans l'expression de la rigidité tangente (C 9), le terme de flexion et le terme de chargement sont explicités, les 2 autres termes doivent être développés. L'incrément de contrainte locale est obtenu en différenciant sa définition (B 28) :

$$\begin{aligned}\Delta[\mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L)] &= \Delta[\mathbf{S}(\gamma_G+\gamma_L) - \mathbf{S}(\gamma_G)] \\ &= \frac{\partial \mathbf{S}(\gamma_G+\gamma_L)}{\partial \gamma}.\Delta\gamma_L + \frac{\partial \mathbf{S}(\gamma_G)}{\partial \gamma_G}.\Delta\gamma_G\end{aligned} \qquad \text{(C 11)}$$

Comme la variation du déplacement global est nulle, l'incrément de contrainte locale s'exprime uniquement en fonction de la loi de comportement tangente :

$$\Delta[\mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L)] = \mathbf{L}^T(\gamma_G+\gamma_L).\Delta\gamma_L \qquad \text{(C 12)}$$

où l'on note $\mathbf{L}^T(\gamma)$ la loi de comportement tangente du milieu homogène équivalent définie de manière classique :

$$\mathbf{L}^T(\gamma) = \frac{\partial \mathbf{S}(\gamma)}{\partial \gamma(\mathbf{u})} \qquad \text{(C 13)}$$

Pour expliciter le terme de contrainte locale, l'incrément du champ de déformation virtuelle locale s'exprime avec la relation suivante :

$$\Delta(\delta\gamma_L) = \Delta(\delta\varepsilon_L + \delta\gamma_L^{NL}) = \Delta(\delta\gamma_L^{NL}) \qquad \text{(C 14)}$$

et d'après la définition des déformations virtuelles locales (B 29) on obtient :

$$\Delta(\delta\gamma_L) = \Delta v'_L\, \delta v'_L\, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \qquad \text{(C 15)}$$

D'où la nouvelle expression de $\mathbf{k}_t$:

$$\mathbf{k_t}(\mathbf{u_L},\lambda;\delta\mathbf{u_L}).\Delta\mathbf{u_L} =$$

$$\int_\Omega \{\Delta v_L'' \, f \, E_f \, r_{gf}^2 \, \delta v_L'' + \Delta\gamma_L.\mathbf{L}^T(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L + \Delta v'_L \, \gamma_L.\mathbf{L}(\gamma_G+\gamma_L).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \, \delta v'_L\} d\Omega \qquad \text{(C 16)}$$

$$+ \lambda \int_\Omega \Delta v'_L \, \gamma_{11}^d(x_2) \, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \, \delta v'_L d\Omega$$

1.2.2 Développement du second membre

Les termes du second membre (C 10) doivent également être explicités. Le premier terme s'exprime en fonction des déplacements local et global. En introduisant la définition B 28 de la contrainte locale on a:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L)}{\partial\lambda} = \frac{\partial \mathbf{S}\,(\gamma_G+\gamma_L)}{\partial\lambda} - \frac{\partial \mathbf{S}(\gamma_G)}{\partial\lambda} \qquad \text{(C 17)}$$

L'utilisation de la loi de comportement du milieu homogène équivalent permet de remplacer les contraintes par les déformations qui dépendent de λ. La dérivée de la contrainte locale par rapport au facteur de charge est une dérivée composée où seule la déformation globale définie par (B 34) dépend de λ :

$$\frac{\partial \mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L)}{\partial\lambda} = \frac{\partial \mathbf{L}(\gamma)}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial\gamma}{\partial\lambda} - \frac{\partial \mathbf{L}(\gamma_G)}{\partial\gamma_G}\cdot\frac{\partial\gamma_G}{\partial\lambda}$$

$$= \frac{\partial \mathbf{L}(\gamma)}{\partial\gamma}\cdot\frac{\partial(\lambda\,\gamma_{11}^d(x_2)\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1+\gamma_L)}{\partial\lambda} - \frac{\partial \mathbf{L}(\gamma_G)}{\partial\gamma_G}\cdot\frac{\partial(\lambda\,\gamma_{11}^d(x_2)\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)}{\partial\lambda} \qquad \text{(C 18)}$$

On retrouve dans C 18 l'expression de la loi de comportement tangente C 13, ce qui permet d'écrire la relation suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L)}{\partial\lambda} = \gamma_{11}^d(x_2)\,[\mathbf{L}^T(\gamma_G+\gamma_L) - \mathbf{L}^T(\gamma_G)].\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \qquad \text{(C 19)}$$

Le terme de chargement dans le second membre ne dépend que de la déformation imposée. Pour clarifier les calculs de la dérivée, il est plus simple d'exprimer le chargement avec la

contrainte (B 34). Sous cette forme la loi de comportement tangente apparaît alors plus directement :

$$\frac{\partial(\lambda\, \gamma_{11}^{d}(x_2)\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)}{\partial\lambda} = \frac{\partial S_{11}(\gamma_G)}{\partial\lambda} = \frac{\partial S_{11}(\gamma_G)}{\partial\gamma_G}.\frac{\partial(\lambda\, \gamma_{11}^{d}(x_2)\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1)}{\partial\lambda}$$
$$= \gamma_{11}^{d}(x_2)\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}^{T}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \qquad \text{(C 20)}$$

Si on exprime le second membre en prenant en compte les calculs des dérivées (C 19) (C 20):

$$\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_L;\delta\mathbf{u}_L) =$$
$$\int_\Omega \gamma_{11}^{d}(x_2)\, \{\delta\gamma_L.[\mathbf{L}^{T}(\gamma_G+\gamma_L) - \mathbf{L}^{T}(\gamma_G)].\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}^{T}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\, (v'_L + v'_0)\, \delta v'_L\}\, d\Omega \qquad \text{(C 21)}$$

D'après (B 29), nous savons que la déformation virtuelle locale est :

$$\delta\gamma_L(\mathbf{u}_L) = \delta\varepsilon(\mathbf{u}_L) + (v_L' + v_0')\, \delta v_L'\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \qquad \text{(C 22)}$$

En introduisant cette relation dans le second membre, il s'écrit :

$$\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_L;\delta\mathbf{u}_L) = \int_\Omega \gamma_{11}^{d}(x_2)\, \{\delta\gamma_L.\mathbf{L}^{T}(\gamma_G+\gamma_L).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1$$
$$- (\delta\varepsilon_L + (v_L' + v_0')\, \delta v_L'\, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1).\mathbf{L}^{T}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1) + \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}^{T}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\, (v'_L + v'_0)\, \delta v'_L\}\, d\Omega \qquad \text{(C 23)}$$

Les termes non linéaires des déformation virtuelles s'éliminent, et seule la partie linéaire reste en produit avec la loi de comportement tangente correspondant à l'équilibre global :

$$\boxed{\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_L;\delta\mathbf{u}_L) = \int_\Omega \{\gamma_{11}^{d}(x_2)\, [\mathbf{L}^{T}(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L - \mathbf{L}^{T}(\gamma_G).\delta\varepsilon_L].\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\}\, d\Omega} \qquad \text{(C 24)}$$

1.2.3 Formulation en déplacement

Nous introduisons dans les expressions du résidu Ψ, de la rigidité tangente $\mathbf{k}_t$ et du second membre $\mathbf{f}_\lambda$, la loi de comportement du milieu homogène équivalent pour obtenir une formulation en déplacement. Comme la définition de la contrainte locale n'est pas classique, les calculs sont détaillés ci-dessous :

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}_L(\gamma_G,\gamma_L).\delta\gamma_L \\ &= (\mathbf{S}(\gamma_G+\gamma_L) - \mathbf{S}(\gamma_G)).\delta\gamma_L \end{aligned} \qquad \text{(C 25)}$$

Dans le résidu (C 7), l'introduction des lois de comportement, associée à la définition de la contrainte locale, fait apparaître une simplification des termes non linéaires des déformations virtuelles, similaire à la simplification C 23 du second membre vue précédemment:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{u}_L,\lambda)/_\Omega &= f\,E_f\,r_{gf}^2\,v_L''\,\delta v_L'' + (\gamma_G+\gamma_L).\mathbf{L}(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L - \gamma_G.\mathbf{L}(\gamma_G).\delta\gamma_L \\ &\quad + \lambda\,\gamma_{11}^d(x_2)\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1(v_L'+v_0')\,\delta v_L' \end{aligned} \qquad \text{(C 26)}$$

$$\begin{aligned} &= f\,E_f\,r_{gf}^2\,v_L''\,\delta v_L'' + \gamma_L.\mathbf{L}\,(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L + \lambda\,\gamma_{11}^d(x_2)\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L \\ &\quad -\lambda\,\gamma_{11}^d(x_2)\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).(\delta\varepsilon_L + (v_L'+v_0')\,\delta v_L'\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1) \\ &\quad + \lambda\,\gamma_{11}^d(x_2)\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\,(v_L'+v_0')\,\delta v_L' \end{aligned}$$

$$\Psi(\mathbf{u}_L,\lambda)/_\Omega = f\,E_f\,r_{gf}^2\,v_L''\,\delta v_L'' + \gamma_L.\mathbf{L}(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L + \lambda\,\gamma_{11}^d(x_2)\,\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.[\mathbf{L}(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L - \mathbf{L}(\gamma_G).\delta\varepsilon_L]$$

Finalement, le résidu, la rigidité tangente et la second membre associés à la résolution du problème de microflambage se présentent sous la forme :

(C 27)

$$\Psi(\mathbf{u}_L,\lambda;\delta\mathbf{u}_L) = \int_\Omega \{f\,E_f\,r_{gf}^2\,v_L''\,\delta v_L'' + \gamma_L.\mathbf{L}(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L\}\,d\Omega$$

$$+\lambda \int_\Omega \gamma_{11}^d(x_2)\,[\mathbf{L}(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L - \mathbf{L}(\gamma_G).\delta\varepsilon_L].\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1\,d\Omega$$

$$\mathbf{k_t}(\mathbf{u_L},\lambda;\delta\mathbf{u_L}).\Delta\mathbf{u_L} =$$

$$\int_{\Omega} \{\Delta v_L'' \; f \, E_f \, r_{gf}^2 \, \delta v_L'' + \Delta\gamma_L.\mathbf{L}^T(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L + \Delta v'_L \, \gamma_L.\mathbf{L}(\gamma_G+\gamma_L).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \, \delta v'_L\} d\Omega$$

$$+ \lambda \int_{\Omega} \Delta v'_L \, \gamma_{11}^d(x_2) \, \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1.\mathbf{L}(\gamma_G).\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \, \delta v'_L d\Omega$$

$$\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u_L};\delta\mathbf{u_L}) \, \Delta\lambda = \Delta\lambda \int_{\Omega} \gamma_{11}^d(x_2) \, [\mathbf{L}^T(\gamma_G+\gamma_L).\delta\gamma_L - \mathbf{L}^T(\gamma_G).\delta\varepsilon_L].\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 \, d\Omega$$

Le problème est complètement formulé en vue de sa résolution numérique. Pour le résoudre, il faut mettre en œuvre la linéarisation de NEWTON dans un schéma de prédictions / corrections associé à un schéma incrémental. La "coordination" de l'ensemble des opérations destinées à résoudre le problème est appelée pilotage, il est choisi en fonction des particularités de la réponse de la structure étudiée.

1.3 Pilotage en 'longueur d'arc' de la résolution numérique

Nous savons que dans la résolution des problème non linéaires, il est nécessaire de subdiviser l'intervalle d'étude, ceci est obtenu en contrôlant les efforts extérieurs avec le facteur de charge. Mais ce scalaire n'a aucune existence physique, il doit être contrôlé tout au long de la résolution. Grâce à l'équation auxiliaire introduite dans C 2, le facteur de charge est évalué directement, ou indirectement, en fonction du *paramètre de contrôle* qui peut être le déplacement, la charge ou une combinaison de ces deux grandeurs. C'est le choix du paramètre de contrôle qui fixe en grande partie les possibilités, la rapidité, la précision et la robustesse du pilotage.

Afin de maîtriser le facteur de charge, on peut intuitivement le choisir comme paramètre de contrôle. Le pilotage est dit à *charge imposée*, mais cette technique ne permet pas de passer les points limites en charge (**Figure C 3 a**). On peut également imposer un déplacement en un certains nombre de points de la structure, le pilotage est dit à *déplacement imposé*, il ne permet

pas de passer les points limites en déplacement (**Figure C 3 b**). Dans ce type de pilotage, l'incrément de charge doit être évalué par rapport au déplacement imposé à l'aide de résolutions intermédiaires.

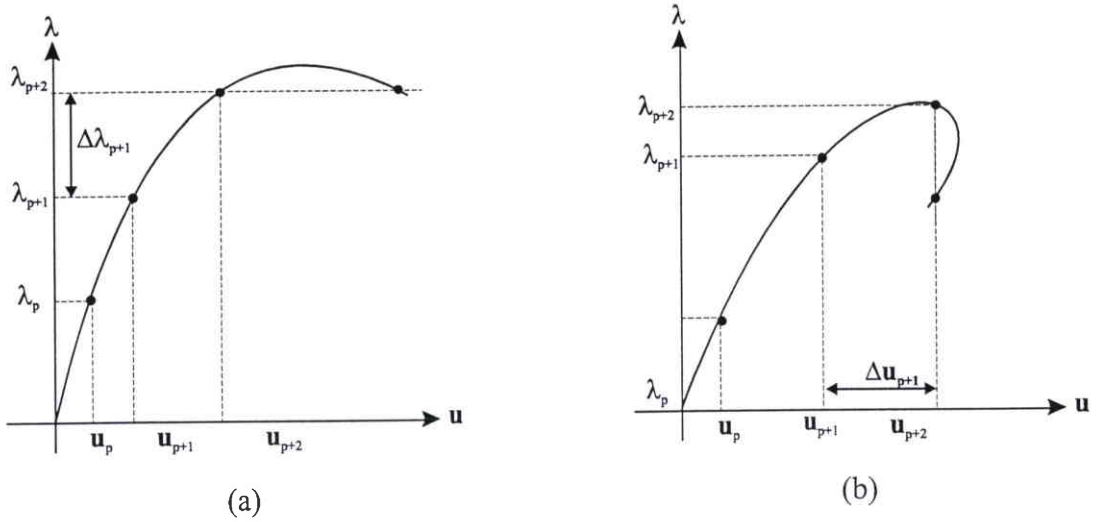


Figure C 3 : Pilotage (a) en chargement et (b) en déplacement.

Sur la **Figure A 26**, KYRIAKIDES et al. (1995) calculent la réponse en compression d'un UD carbone-époxyde. Il apparaît clairement un point de rebroussement en charge et en déplacement que les auteurs nomment 'cusp-lisp et qui correspond à l'apparition de l'instabilité plastique. Il faut donc que le pilotage utilisé dans notre résolution soit en mesure de traiter de tels cas. On peut dans certaines situations passer d'un pilotage en charge à un pilotage en déplacement pour passer des points limites en charge, et inversement pour les points limites en déplacement. Mais dans les cas particuliers des points de rebroussement, seule une méthode contrôlant à la fois de déplacement et le chargement permet de passer de tels points. C'est pourquoi nous choisissons un pilotage à *longueur d'arc imposée* dont le paramètre de contrôle est la longueur d'un arc de la courbe charge - déplacement entre 2 pas de prédictions. Ce type de pilotage introduit par RIKS [1] permet de passer automatiquement des points limites sans modifier l'algorithme de résolution car le paramètre de contrôle est construit sur la dualité charge - déplacement.

[1] Dans ce paragraphe, les noms de RIKS, RAMM et CRISFIELD sont utilisés pour nommer les méthodes proposées par ces auteurs, sans référence précise à une publication.

1.3.1 Méthode de RAMM

Cette variante du pilotage à longueur d'arc utilise 2 équations auxiliaires différentes pour la prédiction et pour la correction. Pour le pas de prédiction, une équation quadratique en $(\Delta\lambda_p,\Delta\mathbf{u}_p)$ détermine la solution qui se trouve sur une hypersphère de rayon s, s étant la longueur imposée de l'arc, (**Figure C 4**) définie par :

$$f(\mathbf{u};\lambda) = \Delta\mathbf{u}_p\,\Delta\mathbf{u}_p + \Delta\lambda_p^2 = s^2 \qquad \text{(C 28)}$$

où $\Delta\mathbf{u}_p$ est l'accroissement du déplacement au pas de prédiction 'p' et $\Delta\lambda$ l'accroissement de charge correspondant.

Pour la correction, un critère de degré un est choisi, la convergence se fait selon un hyperplan orthogonal au pas de prédiction (**Figure C 4**):

$$f(\mathbf{u};\lambda) = \Delta\mathbf{u}_p\,\Delta\mathbf{u}_p^i + \Delta\lambda_p\,\Delta\lambda_p^i = 0 \qquad \text{(C 29)}$$

où $\Delta\mathbf{u}_p^i$ est l'incrément de déplacement au pas 'p' pour la correction 'i', et où $\Delta\lambda_p^i$ est l'incrément de charge correspondant.

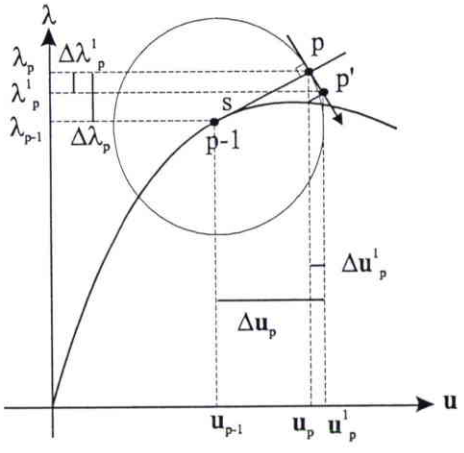


Figure C 4 : Convergence de la prédiction et de la correction pour la méthode de RAMM.

1.3.2 Prédiction

Grâce à la linéarisation de NEWTON (C 5), on passe d'un équilibre 'p-1' à l'équilibre voisin 'p' par la relation suivante :

$$\Psi(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}_{p-1},\lambda_{p-1};\delta\mathbf{u}) + \mathbf{k}_t(\mathbf{u}_{p-1},\lambda_{p-1};\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}_p + \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_{p-1};\delta\mathbf{u})\,\Delta\lambda_P \qquad \text{(C 30)}$$

En supposant que le point 'p-1' est solution, le point 'p' est également solution si le résidu correspondant est nul, soit :

$$\mathbf{k}_t(\mathbf{u}_{p-1},\lambda_{p-1};\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}_p = -\,\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_{p-1};\delta\mathbf{u})\,\Delta\lambda_P \qquad \text{(C 31)}$$

Au début du pas de prédiction, ni l'incrément de déplacement, ni l'incrément de charge ne sont connus. On peut toutefois connaître la solution d'un problème dont l'incrément de charge est unitaire.

$$\mathbf{k}_t(\mathbf{u}_{p-1},\lambda_{p-1};\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}_p^u = -\,\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_{p-1};\delta\mathbf{u}) \qquad \text{(C 32)}$$

En utilisant une méthode classique, on calcule la solution $\Delta\mathbf{u}_p^u$ de ce problème unitaire supposé linéaire. On en déduit aisément l'incrément de déplacement du pas courant qui est proportionnel à l'incrément de charge :

$$\boxed{\Delta\mathbf{u}_p = \Delta\lambda_P\,\Delta\mathbf{u}_p^u} \qquad \text{(C 33)}$$

En utilisant cette solution de l'équilibre unitaire, on peut exprimer l'équation auxiliaire C 28 :

$$\Delta\mathbf{u}_p\,\Delta\mathbf{u}_p + \Delta\lambda_p^{\,2} = (\Delta\lambda_P\,\Delta\mathbf{u}_p^u)^2 + \Delta\lambda_p^{\,2} = \Delta\lambda_p^{\,2}\,(1+\Delta\mathbf{u}_p^u\,\Delta\mathbf{u}_p^u)\;(=s^2) \qquad \text{(C 34)}$$

Finalement on connaît au signe près l'incrément de charge qui vérifie l'équation auxiliaire :

$$\Delta\lambda_p = \frac{\pm s}{\sqrt{1+\Delta \mathbf{u}_p^u \, \Delta \mathbf{u}_p^u}} \qquad \text{(C 35)}$$

Le choix du signe de cet incrément de charge se base sur le produit scalaire (noté A) du vecteur formé par les solutions au pas 'p-1' et 'p' et du vecteur associé à la solution du pas de prédiction. Si le produit scalaire est positif l'incrément de chargement est pris positif, dans le cas contraire l'incrément de charge est négatif (**Figure C 5**).

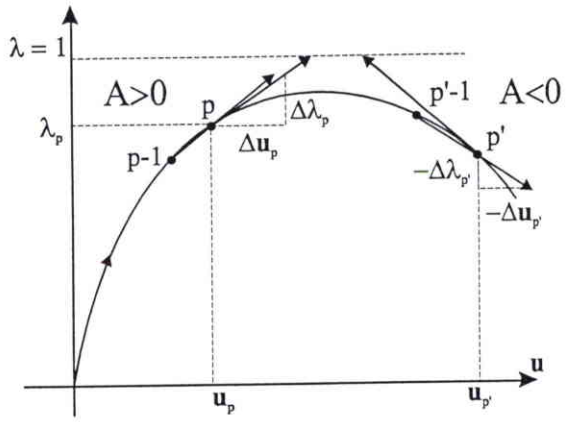


Figure C 5 : Choix du sens de parcours de la courbe charge - déplacement .

Remarque : au 1er pas de prédiction, le vecteur formé par les solutions des pas 'p-1' et 'p' n'existe pas. Le produit scalaire ne peut pas être calculé, et le signe de l'incrément de chargement est indéterminé. Généralement, on impose à ce pas un incrément de charge fixé. Dans notre cas, le déplacement croît avec le chargement avant l'apparition de l'instabilité et le 1er pas est réduit afin d'initialiser les grandeurs intervenant dans la prise en compte de la plasticité. Pour ces 2 raisons, nous supposerons que l'incrément de charge est positif.

1.3.3 Correction

Le pas de prédiction est terminé, mais si la solution n'est pas atteinte, il faut corriger l'état courant $(\mathbf{u}_p,\lambda_p)$. Dans ce cas le résidu n'est pas nul, et pour trouver une nouvelle solution qui vérifie l'équilibre, il faut annuler le résidu correspondant :

$$\Psi(\mathbf{u}_p^1,\lambda_p^1;\delta\mathbf{u}) = \Psi(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}) + \mathbf{k}_t(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}_p^1 + \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_p;\delta\mathbf{u})\,\Delta\lambda_p^1 = 0 \qquad \text{(C 36)}$$

où l'exposant 1 désigne la première correction. Comme le résidu du pas 'p' est connu, on obtient l'expression suivante :

$$\mathbf{k_t}(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}_p^1 = -\,\Psi(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}) - \mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_p;\delta\mathbf{u})\,\Delta\lambda_p^1 \qquad \text{(C 37)}$$

Ce problème est supposé linéaire, il peut être résolu par 2 sous problèmes ayant chacun comme second membre un des 2 termes du second membre de l'expression C 37. Le problème portant sur le terme de chargement est résolu avec un incrément de charge unitaire comme dans le cas de la prédiction :

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{k_t}(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}^{1\,R}_p &= -\,\Psi(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u})\\ \mathbf{k_t}(\mathbf{u}_p,\lambda_p;\delta\mathbf{u}).\Delta\mathbf{u}^{1\,u}_p &= -\,\mathbf{f}_\lambda(\mathbf{u}_p;\delta\mathbf{u})\end{aligned}\right\} \qquad \text{(C 38)}$$

Remarque : C'est lors de la résolution de ces problèmes qu'on peut ou non réactualiser la rigidité tangente et le second membre par rapport aux mêmes quantités calculées dans le pas de prédiction. Cette opération accélère la convergence mais nécessite des calculs supplémentaires, son utilisation dépend de la taille du problème et de son degré de non linéarité.

La solution du problème de correction est la somme des solutions des 2 problèmes C 38 supposés linéaires :

$$\Delta\mathbf{u}_p^1 = \Delta\mathbf{u}^{1\,R}_p + \Delta\mathbf{u}^{1\,u}_p\,\Delta\lambda_p^1 \qquad \text{(C 39)}$$

Comme dans le pas de prédiction, l'équation auxiliaire est nécessaire pour résoudre le problème. Cette fois, on souhaite que la solution soit orthogonale au pas de prédiction. Cette condition de degré 1 est plus simple à remplir que la convergence sur l'hypersphère (méthode de CRISFIELD) et elle évite la recherche du signe de la solution.

Le vecteur directeur du pas de prédiction est défini par la solution ($\Delta\mathbf{u}_p$, $\Delta\lambda_p$) et une normale est définie par la solution recherchée ($\Delta\mathbf{u}_p^1$, $\Delta\lambda_p^1$). L'équation auxiliaire nous donne :

$$\Delta\mathbf{u}_p\,\Delta\mathbf{u}_p^1 + \Delta\lambda_p\,\Delta\lambda_p^1 = 0 \qquad \text{(C 40)}$$

En utilisant la solution C 39 obtenue à partir des 2 sous problèmes, l'équation auxiliaire s'écrit :

$$\Delta \mathbf{u}_p \, (\Delta \mathbf{u}^{l\,R}_p + \Delta \mathbf{u}^{l\,u}_p \, \Delta\lambda^l_p) + \Delta\lambda_p \, \Delta\lambda^l_p = 0 \qquad \text{(C 41)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \mathbf{u}_p \, \Delta \mathbf{u}^{l\,R}_p + \Delta\lambda^l_p \, (\Delta \mathbf{u}_p \, \Delta \mathbf{u}^{l\,u}_p + \Delta\lambda_p) = 0$$

d'où on déduit l'expression de l'incrément de charge :

$$\Delta\lambda^l_p = \frac{\Delta \mathbf{u}_p \, \Delta \mathbf{u}^{l\,R}_p}{\Delta \mathbf{u}_p \, \Delta \mathbf{u}^{l\,u}_p + \Delta\lambda_p} \qquad \text{(C 42)}$$

De manière générale, la correction 'i' a pour solution l'incrément de chargement et l'incrément de déplacement correspondant définis par :

$$\Delta\lambda^i_p = \frac{\Delta \mathbf{u}_p \, \Delta \mathbf{u}^{i\,R}_p}{\Delta \mathbf{u}_p \, \Delta \mathbf{u}^{i\,u}_p + \Delta\lambda_p} \qquad \text{(C 43)}$$

$$\Delta \mathbf{u}^i_p = \Delta \mathbf{u}^{i\,R}_p + \Delta \mathbf{u}^{i\,u}_p \, \Delta\lambda^i_p$$

La correction peut être mise à jour en prenant comme déplacement de référence dans C 43 le vecteur formé par les déplacements solution $[(\mathbf{u}^i_p,\lambda^i_p);(\mathbf{u}_p,\lambda_p)]$.

Le pilotage à longueur d'arc peut être modifié par exemple par l'utilisation de fonctions auxiliaires simplifiées (CRISFIELD, RAMM) où l'incrément de charge n'apparaît plus. Il existe également diverses techniques d'actualisation de la rigidité, de mise à jour de l'hyperplan. Dans notre cas, l'utilisation de ces techniques n'apporte pas d'amélioration significative, ni au niveau de la rapidité, ni au niveau de la convergence de la solution. Notre problème étant de taille réduite, nous employons le pilotage à longueur d'arc en actualisant la rigidité, afin de minimiser le nombre de corrections conduisant à la solution. L'hyperplan n'est pas mis à jour car la convergence obtenue en actualisant la rigidité est suffisante. Le critère de convergence que nous utilisons porte sur le l'incrément de déplacement courant normalisé par le déplacement courant :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}^i_p\|}{\|\mathbf{u}_p\|} < \varepsilon \quad \text{avec } \|\mathbf{x}\| = \max_n |\mathbf{x}_n| \qquad \text{(C 44)}$$

où la norme peut être prise au sens classique pour un vecteur, tant que le problème n'est pas discret. La tolérance ε donnée est généralement de l'ordre de 10^{-3} - 10^{-4}.

1.3.4 Synopsis

L'algorithme de résolution correspondant au pilotage en longueur d'arc de type RAMM est schématisé sur la **Figure C 6** (page suivante).

1.4 Opérations numériques associées à la plasticité

Comme nous l'avons vu dans la partie B, la prise en compte du comportement de la matrice requiert la résolution numérique de l'équation non linéaire reliant J_2 à l'état de déformation courant. La solution de cette équation est recherchée par un schéma de type prédiction / correction à l'aide d'un développement de NEWTON, qui cette fois ne concerne qu'une seule variable. Comme dans le cas du problème de structure présenté dans le paragraphe précédent, la résolution de l'équation non linéaire B 54 consiste à déterminer J_2 qui minimise le résidu :

$$\Psi(J_2) = I_2(J_2) - f(J_2)\, J_2$$

avec (C 45)

$$f(J_2) = \left(\frac{1 + \nu + h_2(J_2)}{E} \right)^2$$

Prédiction :

On recherche la valeur J_2^n solution de C 45 qui se déduit de J_2^d, la valeur initiale, par une linéarisation de type NEWTON du résidu, tronquée à l'ordre 1 (C 3) :

$$\Psi(J_2^n) = \Psi(J_2^d) + \frac{\partial \Psi(J_2)}{\partial J_2}\Big|_d \Delta J_2 \qquad \text{(C 46)}$$

où ΔJ_2 est un incrément de l'inconnue du problème.

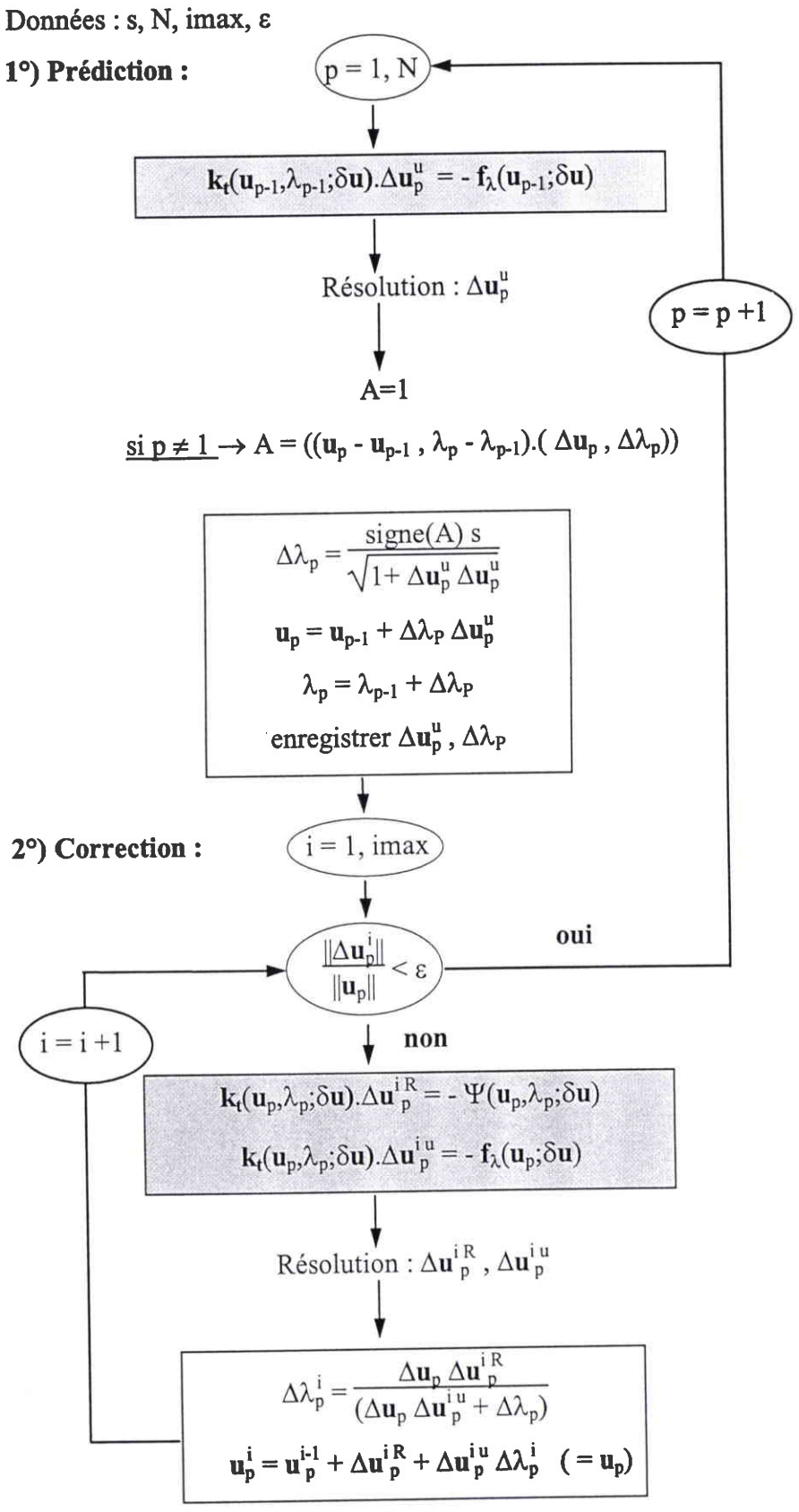


Figure C 6 : Synopsis des opérations associées au pilotage de RAMM.

Pour que J_2^n soit solution, il faut que le résidu correspondant soit nul. Par conséquent l'incrément est déterminé par:

$$\Delta J_2 = - \frac{\Psi(J_2^d)}{\frac{\partial \Psi(J_2)}{\partial J_2}\Big|_d} \qquad \text{(C 47)}$$

Avec l'expression du résidu C 45, le dénominateur de la fraction C 47 s'écrit:

$$\frac{\Psi(J_2)}{\partial J_2}\Big|_d = \frac{\partial I_2(J_2)}{\partial J_2}\Big|_d - \frac{\partial f(J_2)}{\partial J_2}\Big|_d - f(J_2^d) \qquad \text{(C 48)}$$

d'où l'incrément de J_2 pour le pas de prédiction :

$$\Delta J_2^d = \frac{I_2(J_2^d) - f(J_2^d)\, J_2^d}{\frac{\partial I_2(J_2)}{\partial J_2}\Big|_d - \frac{\partial f(J_2)}{\partial J_2}\Big|_d - f(J_2^d)} \quad \text{et} \quad J_2^n = J_2^d + \Delta J_2^d \qquad \text{(C 49)}$$

Correction :

Généralement l'étape de prédiction ne suffit pas pour obtenir la solution, il est nécessaire de corriger J_2^n. On recherche la nouvelle solution de manière similaire au pas de prédiction, mais le résidu du pas de prédiction doit être pris en compte. Pour que la correction apportée fournisse la solution, il faut vérifier :

$$\Psi(J^{n+1}_2) = 0 = \Psi(J_2^n) + \frac{\partial \Psi(J_2)}{\partial J_2}\Big|_n \Delta J_2^n \qquad \text{(C 50)}$$

L'incrément de correction s'écrit :

$$\Delta J_2^n = \frac{\Psi(J_2^n)}{\frac{\partial I_2(J_2)}{\partial J_2}\Big|_n - \frac{\partial f(J_2)}{\partial J_2}\Big|_n - f(J_2^n)} \quad \text{et} \quad J^{n+1}_2 = J_2^n + \Delta J_2^n \qquad \text{(C 51)}$$

La dérivée du résidu, utilisée dans les expressions des incréments (C 49)(C 51), s'exprime en fonction de $h_2(J_2)$. Finalement, après calculs (voir Annexe 3) la dérivée en 'n' de J_2 et celle de I_2 sont données par les expressions suivantes :

$$\frac{\partial f(J_2)}{\partial J_2}\Big|_n = 2\left(\frac{1+\nu+h_2(J_2^n)}{E^2}\right)h'_2(J_2^n) \qquad \text{(C 52)}$$

$$\frac{\partial I_2(J_2)}{\partial J_2}\Big|_n = \frac{h'_2(J_2^n)\,(1-2\nu)}{3\,(1-\nu)+h_2(J_2^n)}(\gamma_{11}+\gamma_{22})^2\left(1-2\frac{3\,\nu+h_2(J_2^n)}{3\,(1-\nu)+h_2(J_2^n)}\right) \qquad \text{(C 53)}$$

La résolution est classique, après le pas de prédiction quelques itérations conduisent à la solution. La convergence est accrue en prenant une valeur de départ proche de la solution, ceci est pris en compte dans le processus de résolution du problème de microflambage. Comme dans le cas du pilotage à longueur d'arc, la convergence est testée, mais ici il s'agit simplement de vérifier que le résidu est inférieur à une valeur donnée ($\sim 10^{-8}$ - 10^{-10}).

2. APPROXIMATION DU DÉPLACEMENT - PROBLÈME DISCRÉTISÉ

Pour résoudre le problème de microflambage posé en déplacement, nous choisissons une méthode de type élément fini. L'approximation du déplacement utilisée dans cette résolution doit être précisée. Le problème étant bidimensionnel, il paraît naturel d'utiliser des éléments finis 2D pour sa résolution. Mais le modèle qui a été construit est particulier puisqu'un terme de flexion des fibres se superpose au milieu bidimensionnel classique. Par conséquent, l'approximation du déplacement doit tenir compte de cette originalité.

2.1 Première solution

Dans une approche bidimensionnelle la continuité des termes de flexion (courbure suivant $\mathbf{e}_1$) nécessite des fonctions C^1 que l'on interpole classiquement avec des polynômes du type HERMITE. En revanche, au sein du milieu homogène équivalent, la continuité de la contrainte

est assurée par des fonctions C^0 uniquement. Ce genre d'élément n'est pas classique et pose de nombreux problèmes fondamentaux. Un travail théorique important est nécessaire pour formuler un tel élément qui doit vérifier au préalable des tests de convergence (Patch-Test). De plus, comme le microflambage est un phénomène à faible longueur d'onde, une discrétisation 2D nécessite un maillage très fin.

Un autre point essentiel porte sur les conditions à imposer aux limites du milieu mésoscopique. Si dans la hauteur du pli ces conditions sont définies par l'orientation des plis adjacents, elles sont par contre indéterminées dans la direction des fibres. Ces conditions sont certainement des conditions de raccord entre le domaine mésoscopique et la structure, mais les déterminer semble peu aisé compte tenu de la cinématique de notre problème. Dans le paragraphe suivant une autre façon de procéder est proposée.

2.2 Instabilités cellulaires

Nous avons remarqué au § B.2.1 que la longueur d'onde de microflambage est très petite devant les dimensions des pièces composites réelles (voir **Figure B 2**). Les fibres étant très élancées, il est raisonnable de penser que le phénomène de microflambage entre dans le cadre des instabilités cellulaires. Cette hypothèse est classique pour les phénomènes de grande étendue dans la direction du chargement et invariants par translation. Dans le cas des longues plaques minces en compression (**Figure C 7**), par exemple, on constate théoriquement et expérimentalement que les conditions imposées aux limites de la structure changent peu la longueur d'onde du phénomène, mais influent surtout sur la modulation de l'amplitude, appelée aussi enveloppe (DAMIL, 1990).

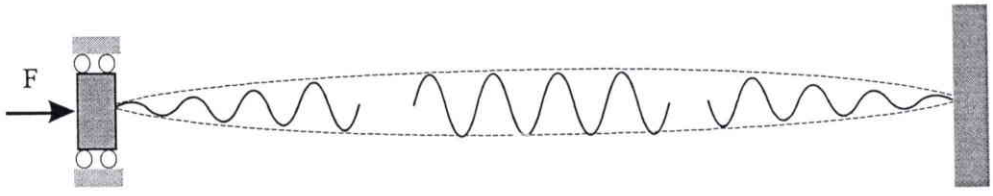


Figure C 7 : Schématisation du flambage cellulaire d'une longue plaque encastrée à ses deux extrémités.

Dans le cas des composites à fibres longues, les longueurs d'onde calculées par GRANDIDIER et al. (1996) sont comprises entre 200 et 700 μm, ce qui est en accord avec l'hypothèse des instabilités cellulaires. Les longueurs d'onde du phénomène en présence de défauts sont peut-être différentes de celles obtenues dans un cadre parfait, mais elles doivent à priori rester du même ordre de grandeur. Comme il a d'ailleurs été remarqué précédemment au § B.2.1, les largeurs des bandes de pliage mesurées suggèrent des longueurs d'onde de l'ordre de 500 μm pour les matériaux qui nous intéressent.

Le microflambage étant une instabilité cellulaire, nous nous plaçons suffisamment loin des bords pour que l'influence des conditions aux limites ne soit plus ressentie. De plus, le problème étant invariant par translation, le domaine d'étude est limité à une longueur d'onde du phénomène (**Figure C 8**).

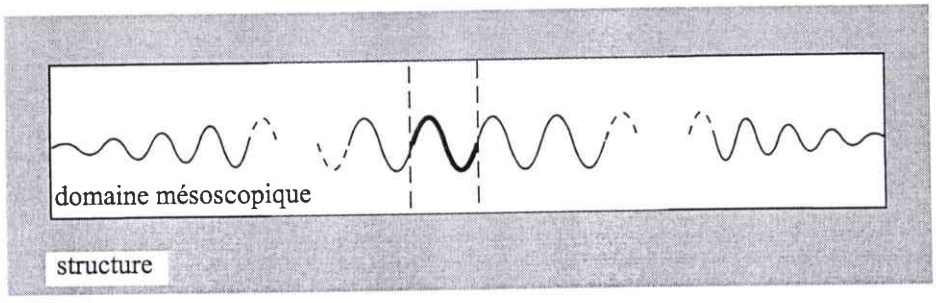


Figure C 8 : Instabilité cellulaire des fibres et domaine mésoscopique réduit.

Enfin, du fait de la périodicité de l'instabilité, le champ de déplacement est pris sous une forme similaire à celle utilisée dans les calculs élastiques linéaires de GRANDIDIER et al. (1996). Le déplacement va être recherché comme la combinaison d'amplitudes dans l'épaisseur du pli en produit avec des harmoniques dans la direction des fibres. Ce choix renforce l'efficacité numérique de notre approche.

2.3 Champ de déplacement

Nous recherchons la solution d'une instabilité dans un cadre plastique avec défaut géométrique. Comme dans de nombreux phénomènes physiques, la réponse de ce problème devrait être proche de celle établie dans un cadre parfait, mais modulée par les défauts introduits. L'approximation du champ de déplacement solution de ce problème avec défaut doit être de

forme similaire à celle utilisée pour le problème parfait, complétée pour pouvoir rendre compte des effets des non linéarités géométrique et matériau.

GRANDIDIER et al. (1996) utilisent dans les calculs de valeurs propres le champ de déplacement suivant :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} U(x_2)\cos(k\,x_1) \\ V(x_2)\sin(k\,x_1) \end{cases} \qquad \text{(C 54)}$$

où k est le nombre d'ondes et U et V sont les amplitudes dans l'épaisseur du pli, discrétisées par élément fini. Dans notre cas, cette base doit être complétée, mais sans toutefois être trop riche, afin de conserver des temps de calculs raisonnables.

Les modélisations présentées dans la partie A ont montré que le composite peut en première approximation être représenté comme une poutre sur fondation. Il est classique que dans de tels solides la contrainte longitudinale soit constante pendant le flambage. Cette hypothèse se retrouve dans tous les problèmes d'instabilité des structures élancées. Dans l'expression de l'équilibre du problème, la contrainte longitudinale est prépondérante, si elle est mal évaluée par l'approximation retenue, des problèmes numériques sont à craindre. En conséquence, nous recherchons un base de fonctions de RITZ qui contienne à la fois les harmoniques simples utilisées dans les calculs élastiques, et des fonctions qui permettent de vérifier que la contrainte est constante pendant le microflambage. Si on considère la déformation de membrane d'une poutre dans l'hypothèse des petites déformations et en rotations modérées, la contrainte correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma &= E\left(u' + \frac{v'^2}{2}\right) \\ \Rightarrow \sigma' &= E\,(u'' + v'\,v'') = 0 \end{aligned} \qquad \text{(C 55)}$$

Mais pour que les harmoniques puissent s'annuler, il faut qu'elles soient en phase. La composante u du champ de déplacement C 54 est paire, donc u'' est paire également. Par contre v est impaire, donc v' est paire, v'' est impaire et v' v'' est impaire. On ne peut obtenir une contrainte constante avec cette base. Comme le déplacement v traduit la flexion des fibres, en plus du cisaillement et

de la déformation transverse du pli, nous choisissons d'affiner l'approximation sur cet axe. Nous ajoutons selon $\mathbf{e}_2$ une harmonique impaire avec un nombre d'onde assez élevé et une harmonique paire selon $\mathbf{e}_1$ afin d'annuler la dérivée de la contrainte (C 55). Finalement, l'approximation du déplacement se présente sous la forme :

$$\mathbf{u(x)} = \begin{cases} U_1(x_2)\cos(k\,x_1) + U_2(x_2)\sin(2k\,x_1) \\ \\ V_1(x_2)\sin(k\,x_1) + V_2(x_2)\sin(3k\,x_1) \end{cases} \qquad \text{(C 56)}$$

où k est le nombre d'ondes et les $U_i(x_2)$, $V_i(x_2)$ sont les amplitudes du champ de déplacement qui sont discrétisées grâce à un élément fini spécifique à 3 noeuds. Dans l'approximation classique par élément fini des amplitudes, les déplacements s'écrivent en fonction des déplacements nodaux et des fonctions d'interpolation :

$$\begin{cases} U_i(x_2) = N_1(x_2)\,q_{1i} + N_2(x_2)\,q_{3i} + N_3(x_2)\,q_{5i} \\ V_i(x_2) = N_1(x_2)\,q_{2i} + N_2(x_2)\,q_{4i} + N_3(x_2)\,q_{6i} \end{cases} \qquad \text{(C 57)}$$

où les q_{ji} sont les déplacements nodaux que l'on définit sur la **Figure C 9**. Les fonctions $N_j(x_2)$ sont les fonctions d'interpolation en déplacement de type Lagrange dépendant de l'altitude.

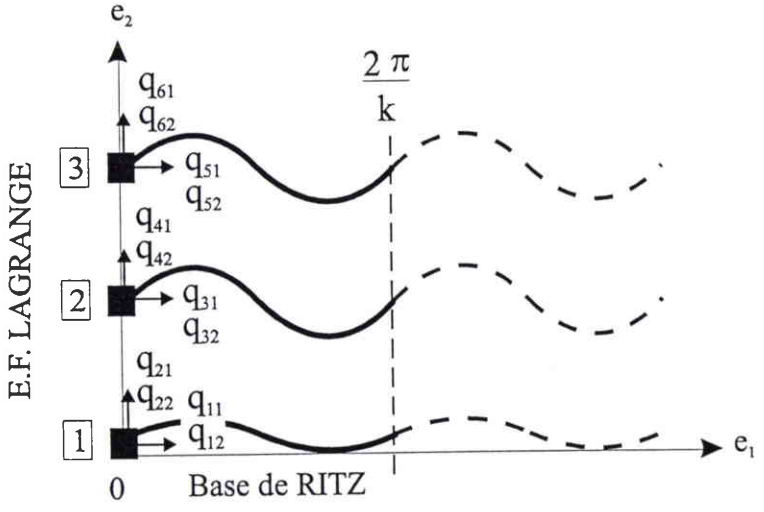


Figure C 9 : Approximation du champ de déplacement sur le domaine réduit.

Les fonctions d'interpolation en déplacement sont déterminées par les conditions qu'elles doivent vérifier aux noeuds de l'élément. De plus, nous utilisons un élément de référence qui permet de ne plus faire intervenir directement les coordonnées des noeuds, ce qui simplifie les expressions des quantités intervenant dans la résolution. Les fonctions d'interpolation géométriques sont linéaires dans l'espace bidimensionnel de référence définit par les variables r et s, respectivement les coordonnées sur l'axe unitaire dans la direction des fibres et dans la direction transverse :

$$N_1^*(s) = \frac{1 - s}{2} \qquad N_2^*(s) = \frac{s + 1}{2}$$

$$x_2(s) = \frac{x_2^i + x_2^s}{2} + \frac{x_2^s - x_2^i}{2} s \,, \quad \text{et} \quad x_1(r) = \frac{x_1^i + x_1^s}{2} + \frac{x_1^s - x_1^i}{2} r \qquad \text{(C 58)}$$

Alors que l'interpolation en déplacement est quadratique uniquement dans l'épaisseur :

$$N_1(s) = \frac{s}{2}(s - 1) \qquad N_2(s) = (1 - s)(1 + s) \qquad N_3(s) = \frac{s}{2}(s + 1)$$

$$\begin{cases} U_i(s) = \frac{s}{2}(s - 1)\, q_{1i} + (1 - s)(1 + s)\, q_{3i} + \frac{s}{2}(s + 1)\, q_{5i} \\ V_i(s) = \frac{s}{2}(s - 1)\, q_{2i} + (1 - s)(1 + s)\, q_{4i} + \frac{s}{2}(s + 1)\, q_{6i} \end{cases} \qquad \text{(C 59)}$$

2.4 Défaut

La flèche initiale des fibres doit également être approximée pour être introduite dans la résolution numérique. PALUCH (1994) établit que les défauts mesurés sur des composites UD peuvent être assimilés à des sinusoïdes simples pour un pourcentage allant de 45 à 85 % des fibres selon leur type (voir **Figure A 24)**. Qui plus est, toutes les fibres sont affectées d'un défaut qui pourrait être représenté par une combinaison de quelques sinusoïdes dont la porteuse (le plus petit nombre d'onde) possède la longueur d'onde mesurée. Dans notre cas, le défaut est représenté par la combinaison de 2 sinusoïdes de nombres d'onde k et 2 k, dont l'amplitude peut varier dans l'épaisseur du pli :

$$v_0(\mathbf{x}) = V_{01}(x_2)\sin(k\,x_1) + V_{02}(x_2)\sin(2k\,x_1) \qquad \text{(C 60)}$$

où V_{01} et V_{02} sont les amplitudes données. **Le nombre d'ondes de notre problème est donné par le défaut. En conséquence, la solution est recherchée dans le spectre correspondant au défaut.**

3. PROBLÈME DISCRÉTISÉ - IMPLÉMENTATION

3.1 Grandeurs élémentaires

L'approximation du champ de déplacement élémentaire dépend des variables nodales, il peut s'écrire, par exemple, sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}^e = \left(\begin{bmatrix} \cos kx_1\,[N_u] & 0 \\ \sin kx_1\,[N_v] & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sin 2\,kx_1\,[N_u] \\ 0 & \sin 3\,kx_1\,[N_v] \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} q_{11} \\ q_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{61} \\ q_{12} \\ q_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{62} \end{Bmatrix} \qquad \text{(C 61)}$$

$$\{\mathbf{u}\}^e = [\mathbf{N}^{\#}(r,s)].\{q\}^e$$

où $\{q\}^e$ est le vecteur élémentaire des déplacements nodaux et $[N_u(s)]$ et $[N_v(s)]$ sont définis par :

$$[N_u(s)] = [N_1(s),0,N_2(s),0,N_3(s),0] \qquad \text{(C 62)}$$
$$[N_v(s)] = [0,N_1(s),0,N_2(s),0,N_3(s)]$$

Les grandeurs associées à la résolution numérique (Ψ, $\mathbf{k}_t$, $\mathbf{f}_\lambda$) ont été établies de façon littérale (C 27). Il est donc possible, en introduisant l'approximation élémentaire du champ de déplacement, de définir les grandeurs élémentaires qui s'expriment en fonction des déplacements nodaux. Toutefois, le champ de déplacement est particulier, et le terme de flexion doit être pris

en compte séparément dans les écritures vectorielles. Expliciter les expressions de Ψ^e, $\mathbf{k}_t^e$, $\mathbf{f}_\lambda^e$ n'a de sens que si la taille des matrices et des vecteurs élémentaires est suffisamment faible pour pourvoir les simplifier analytiquement, ou bien si l'on souhaite dissocier les parties élastiques, non linéaires géométriques, ... Le champ de déplacement est complexe dans notre cas, et de plus les 12 degrés de liberté de l'élément conduisent à des matrices et vecteurs de taille conséquente. La matrice de rigidité tangente, qui correspond à une forme bilinéaire symétrique, est symétrique et elle se "réduit" à 78 termes. Les vecteurs résidu et second membre possèdent 12 termes chacun. De plus, si nous explicitons ces grandeurs, leur transcription en source de programme réclameront un travail trop conséquent.

Nous choisissons d'introduire l'approximation du champ de déplacement dans Ψ, $\mathbf{k}_t$, et $\mathbf{f}_\lambda$ avec le code de calcul formel MAPLE V qui permet de générer ensuite les sources de programme correspondantes(**Figure C 10**). En premier lieu, l'approximation du champ de déplacement est exprimée en fonction des coordonnées et des déplacements nodaux. Les expressions de Ψ, $\mathbf{k}_t$, et $\mathbf{f}_\lambda$ sont exprimées en fonction des déplacements $\gamma(\mathbf{u})$, v'', $\delta\gamma(\mathbf{u})$, $\delta v''$, $\Delta\gamma(\mathbf{u})$, $\Delta v''$ et de λ. En introduisant les déplacements et les coordonnées dans Ψ, $\mathbf{k}_t$, et $\mathbf{f}_\lambda$, on obtient 3 formes à factoriser par rapport aux déplacements nodaux virtuels $\delta\{q\}$, et puis par rapport à $\Delta\{q\}$ pour avoir la rigidité tangente. Enfin, les sources de programme correspondantes sont générées, elles représentent plus de 700 lignes de FORTRAN.

Nous possédons les grandeurs élémentaires par élément de surface, il faut intégrer ces expressions sur la surface des éléments pour obtenir les grandeurs qui seront assemblées et donneront Ψ, $\mathbf{k}_t$, et $\mathbf{f}_\lambda$ du système entier.

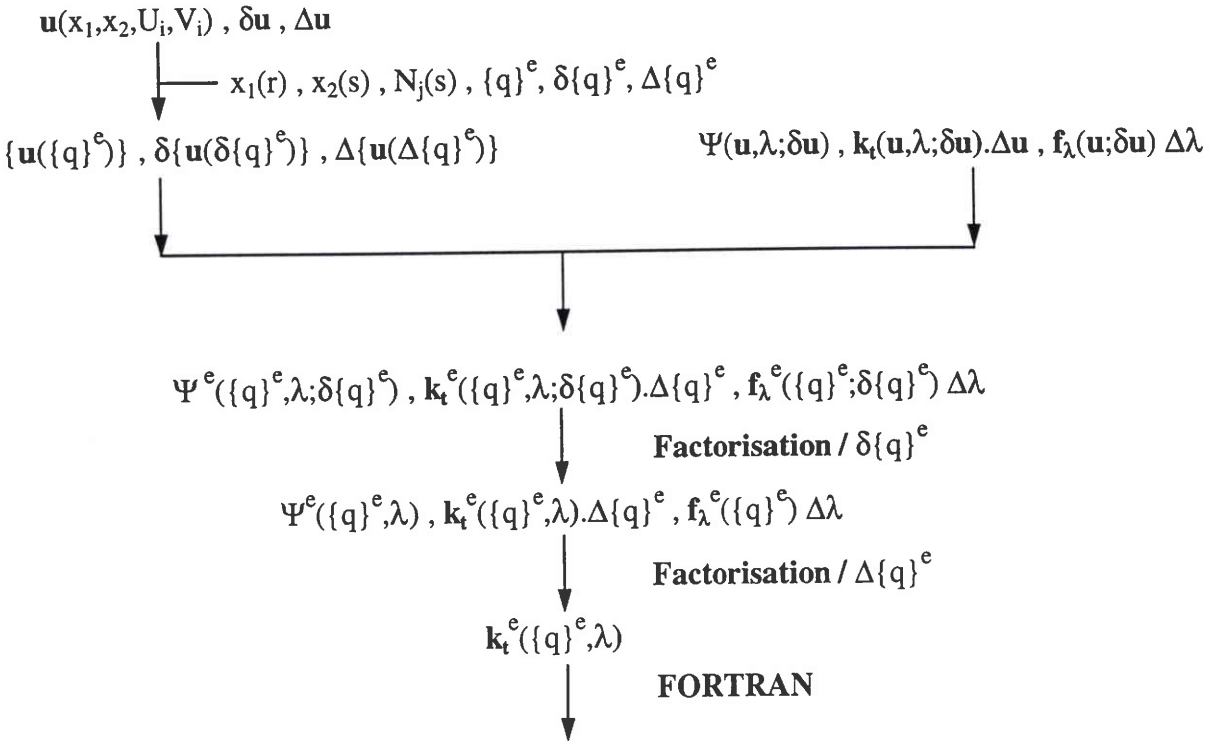


Figure C 10 : Obtention des grandeurs élémentaires avec MAPLE V.

3.2 Intégration numérique

De part l'originalité du champ de déplacement que nous avons établi, nous pouvons envisager une intégration analytique dans la direction des fibres. Dans un cadre uniquement non linéaire géométrique, cette intégration réalisée avec MAPLE donne d'excellents résultats du point de vue des temps de calcul qui sont très faibles.

Mais dans le cadre que nous traitons, l'écoulement plastique de la matrice se produit différemment dans tout le domaine 2D. Il faut pouvoir quantifier en chaque point l'évolution de l'écoulement plastique, qui est très localisé comme nous l'avons vu dans la partie A. Il est nécessaire de procéder à une **intégration bidimensionnelle** des grandeurs élémentaires. Pour réaliser cette intégration, nous utilisons une méthode de GAUSS à 2 * 2 points. Avec l'utilisation de l'élément de référence, l'expression de cette intégrale est classique. Partant de l'intégrale à calculer sur un élément défini par ses coordonnées, on passe à l'intégrale sur l'élément de référence en introduisant l'interpolation géométrique C 58 :

$$\int_{x_1^i}^{x_1^s}\int_{x_2^i}^{x_2^s} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(r,s)\, \det(J)\, dr\, ds \qquad \text{(C 63)}$$

avec J le jacobien de la transformation qui s'exprime à l'aide des fonctions d'interpolation géométriques :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(r)}{\partial r} & \frac{\partial x_2(s)}{\partial r} \\ \frac{\partial x_1(r)}{\partial s} & \frac{\partial x_2(s)}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^s - x_1^i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{x_2^s - x_2^i}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{(C 64)}$$

Le principe de l'intégration de GAUSS consiste à remplacer l'intégrale continue d'une fonction par la somme de valeurs discrètes de cette fonction prises en des points précis, ces valeurs étant pondérées. Les coordonnées de ces points, appelés points de GAUSS, ainsi que les poids, sont tabulés pour une intégrale sur l'intervalle -1 , 1. Nous choisissons une méthode à 2 * 2 points, classique en 2D. Dans ce cas les poids sont égaux à l'unité, et les points de GAUSS sont définis par :

$$(r\ ,\ s) = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{(C 65)}$$

Finalement l'intégrale s'écrit :

$$\int_{x_1^i}^{x_1^s}\int_{x_2^i}^{x_2^s} f(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 = (x_1^s - x_1^i)\,(x_2^s - x_2^i) \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} f(r_i, s_j)\, dr\, ds \qquad \text{(C 66)}$$

Pour pouvoir intégrer les grandeurs élémentaires sur le domaine 2D étudié, on procède à un découpage régulier suivant les 2 directions $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$. Le découpage unidimensionnel dans l'épaisseur du pli est le maillage naturel du problème. Le découpage dans la direction des fibres, introduit pour prendre en compte l'aspect bidimensionnel du problème, donne l'apparence d'un maillage bidimensionnel. Mais les seuls degrés de liberté dans ce problème sont ceux de l'élément fini (voir **Figure C 9**). Les autres points dans la direction des fibres n'ont pas d'origine physique, ce sont des points fictifs que nous appelons 'pseudo noeuds', et où sont extrapolées les variables de sortie afin d'améliorer la présentation des résultats (**Figure C 11**).

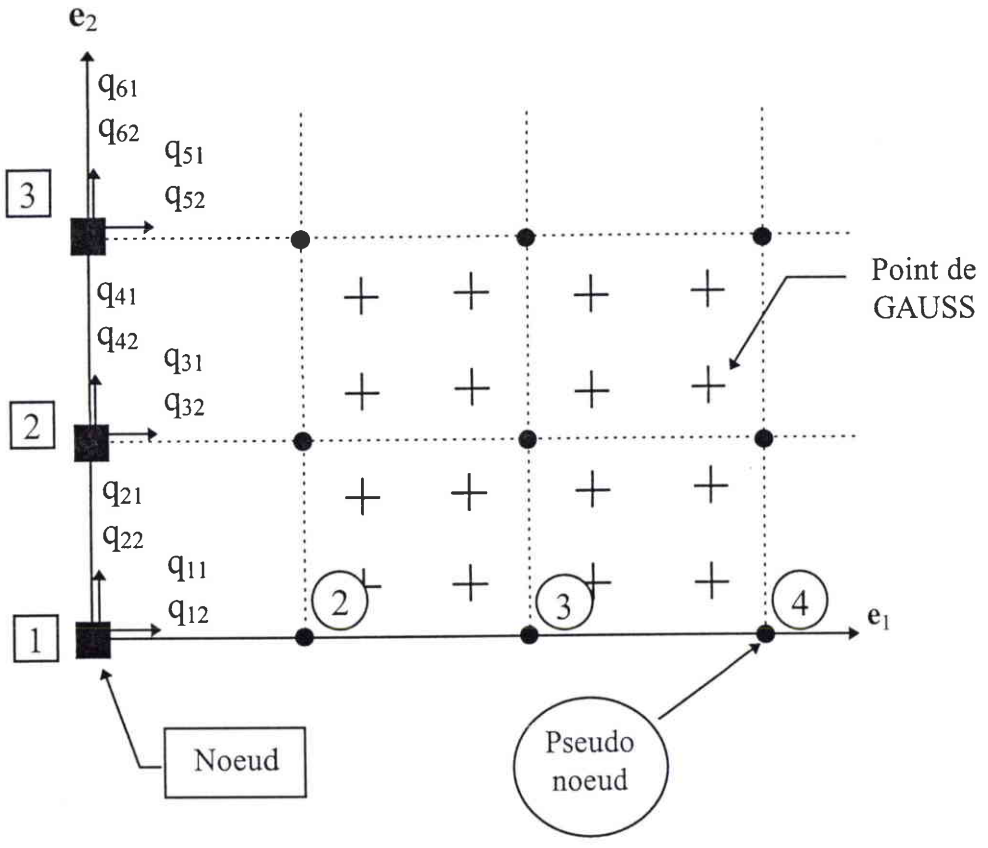


Figure C 11 : Élément fini de microflambage et découpage correspondant dans le sens des fibres.

3.3 Assemblage - Résolution

Les grandeurs élémentaires sont calculées pour chaque élément, en tenant compte du découpage dans la direction des fibres. La plasticité de la matrice est prise en compte à chaque point de GAUSS, mais les résultats des intégrations ne sont que la somme de toutes les

intégrations réalisées aux points de GAUSS de chaque découpage dans la direction des fibres. Lorsque ces grandeurs élémentaires sont calculées, elles sont assemblées à l'aide de la table des connectivité établie au début du traitement du problème. L'inconnue du problème discrétisé est le vecteur de toutes les inconnues nodales, noté {Q}.

Les grandeurs sont calculées par rapport aux déplacements nodaux. Un noeud pouvant appartenir à plusieurs éléments, la table des connectivité permet de répartir les intégrales sur les degrés de liberté correspondant. Dans notre cas, la table des connectivités est triviale puisque les éléments sont répartis dans une seule direction. Les matrices une fois assemblées sont stockées en ligne de ciel afin de minimiser l'espace occupé par la matrice de rigidité du système.

Pendant le pilotage, de nombreux systèmes doivent être résolus, ils sont par exemple du type :

$$[\mathbf{K_T}\{Q\}].\Delta\{Q\} = \mathbf{F}_\lambda(\{Q\}) \qquad \text{(C 67)}$$

Dans un problème classique, ce système ne peut être résolu car la matrice n'est pas définie positive, elle n'est donc pas inversible. Les vecteurs propres de la matrice correspondent physiquement à des mouvement de corps rigide de la structure. La matrice de rigidité devient inversible seulement après que les conditions aux limites aient été prises en compte. Dans notre problème, l'approximation du champ de déplacement est périodique et s'annule sur la longueur du domaine, les mouvements de corps rigide sont donc naturellement supprimés sans conditions aux limites. Pour la résolution du système la matrice de rigidité du système est décomposée par une factorisation de DOOLITTLE-CROUT sous la forme :

$$[\mathbf{K_T}\{Q\}] = {}^t[L]\,[D]\,[L] \qquad \text{(C 68)}$$

où [L] est une matrice triangulaire inférieure, et [D] est une matrice diagonale. Sous cette forme le système C 67 est résolu par un algorithme de remontée (back substitution) de CHOLESKI.

3.4 Entrées - Sorties

Le code développé en FORTRAN est commandé par un fichier d'entrée dans lequel sont spécifiés aussi bien les caractéristiques mécaniques et géométriques du problème étudié que les opérations de sortie demandées et les paramètres du pilotage. Ce fichier type est décrit succinctement en Annexe 4.

Les fichiers de sortie sont au nombre de 5, ils contiennent des données qui permettent en post-traitement de suivre la réponse du pli, de visualiser l'état de contraintes ou de déformations, ou encore de suivre l'évolution des variables au cours du chargement :

Fichier *.sta : contient les statistiques sur les calculs. À chaque pas de prédiction sont indiqués le nombre de corrections, le produit scalaire calculé pour déterminer le sens de parcours de la courbe charge - déplacement , le déterminant de la matrice de rigidité tangente du système, le chargement imposé sur la face supérieure du pli, les contraintes, déformations et déplacements de certains pseudo-noeuds particuliers.

Fichier *.out : contient pour chaque solution ayant convergé les déplacements nodaux. Pour chaque correction le test de convergence et le nombre de pivots positifs de la matrice de rigidité tangente sont indiqués.

Fichier *.dat : contient pour chaque solution ayant convergé, le chargement et les variables choisies dans le fichier input sont sorties.

Fichier *.dep : généré pour chaque pas de prédiction correspondant aux indications des fréquences donnée dans le fichier input, contient la déformée du pseudo-maillage.

Fichier *.TEC : fréquence des sorties identique au fichier précédent. Contient toutes les variables pour tous les pseudo noeuds et la table des connectivités du pseudo maillage en vue de l'utilisation avec un post processeur. Les valeurs maximales et minimales, et la localisation correspondante sont sorties pour chaque variable.

4. SYNTHÈSE DE LA DESCRIPTION NUMÉRIQUE

Le problème de microflambage formulé à l'échelle locale est non linéaire, il doit être résolu numériquement. De manière classique, il est résolu à partir de sous problèmes linéarisés par une technique dite de NEWTON. La déformation globale, représentant le chargement dans notre problème, est contrôlée par le paramètre de charge (λ) qui permet d'appliquer par fractions le chargement total. La **linéarisation** du problème posé en déplacement nous a conduit à expliciter la rigidité tangente ($\mathbf{k}_t$), le second membre ($\mathbf{f}_\lambda$) et le résidu (Ψ) en fonction de λ, des déplacements $\mathbf{u}$, et des incréments $\delta\mathbf{u}$ et $\Delta\mathbf{u}$. Afin de coordonner les résolution intermédiaires, un **pilotage de type longueur d'arc** a été choisi, il permet de traiter les points limites en charge et en déplacement qui caractérisent l'apparition de l'instabilité plastique. La prise en compte de la plasticité de la matrice requiert également la mise en œuvre numérique de la résolution d'une équation non linéaire reliant l'état de déformation à J_2. En utilisant le principe de la linéarisation de NEWTON, cette résolution a été posée.

Pour résoudre numériquement le problème de microflambage, le déplacement local qui est l'inconnue de notre problème a été approximé. En remarquant que le microflambage entre dans le cadre des instabilités cellulaires, le champ de déplacement local est recherché comme la **combinaison d'harmoniques dans la direction des fibres** et d'**approximations éléments finis dans l'épaisseur du pli**. La base des fonctions de RITZ utilisée par GRANDIDIER et al. (1996) dans un cadre parfait, a été enrichie pour prendre en compte l'aspect non linéaire géométrique de notre problème de microflambage plastique. L'approximation du déplacement élémentaire a ensuite été introduite dans les expressions de $\mathbf{k}_t$, $\mathbf{f}_\lambda$ et Ψ à l'aide d'un code de calcul formel qui permet de générer les sources de programme correspondant aux grandeurs élémentaires vectorielles $\mathbf{k}_t^e$, $\mathbf{f}_\lambda^e$ et Ψ^e.

Connaissant les grandeurs élémentaires, l'intégration numérique a été définie. La prise en compte de l'hétérogénéité de l'écoulement plastique nécessite une **intégration bidimensionnelle** du domaine étudié. Les opérations directement liées à l'implémentation (assemblage, résolution, ..) ont été ensuite rapidement décrites.

Le code spécifique mis en place est très complet et va nous permettre de mener une étude paramétrique du problème de microflambage plastique structurel.

PARTIE D

Étude Paramétrique

1. MAILLAGE ---- 131

1.1 Conditions aux limites et chargement ---- 131
1.2 Raffinement du maillage ---- 132

2. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DU MÉCANISME DE MICROFLAMBAGE ---- 136

2.1 Réponse et rupture du pli par microflambage plastique ---- 136
2.2 Mécanisme de microflambage plastique ---- 140
2.2.1 Rupture du pli par instabilité ---- 140
2.2.2 Rupture du pli par charge limite ---- 143
2.2.3 En résumé ---- 144
2.3 Influence du défaut ---- 145
2.3.1 Amplitude du défaut angulaire ---- 145
2.3.2 Forme du défaut ---- 150
2.4 Influence des caractéristiques mécaniques des constituants ---- 151
2.4.1 Les fibres : ---- 151
2.4.2 Matrice ---- 157
2.5 Synthèse ---- 164

3. EFFET DES PARAMÈTRES STRUCTURAUX SUR LA RÉSISTANCE EN COMPRESSION ---- 165

3.1 Effet des conditions aux limites ---- 165
3.2 Effet du chargement ---- 172
3.3 Comparaison compression / flexion-compression ---- 177
3.4 Effet de l'épaisseur du pli ---- 179
3.4.1 Influence des conditions aux limites quand l'épaisseur du pli varie ---- 179
3.4.2 Effet du chargement quand l'épaisseur du pli varie ---- 184
3.5 Répartition du défaut dans l'épaisseur du pli ---- 185
3.6 Effet d'un endommagement local de la matrice ---- 186
3.7 Synthèse de l'effet de structure ---- 189

4. COMPARAISON DE NOS PRÉVISIONS AVEC LES EXPÉRIENCES ---- 191

4.1 Validité de notre représentation d'un pli transverse ---- 191
4.2 Simulations d'expériences ---- 196

5. CONCLUSION ---- 206

L'outil numérique mis en place dans les parties B et C est capable de rendre compte de l'effet sur le comportement en compression, à la fois des défauts classiques (plasticité de la matrice, ondulation des fibres) et des paramètres structuraux. L'étude paramétrique présentée dans cette partie porte d'abord sur le mécanisme de microflambage plastique seul. La compréhension du phénomène permet ensuite de détailler l'effet des paramètres structuraux sur le comportement en compression. Les calculs sont également élargis aux stratifiés et à des composites endommagés. Une comparaison avec des résultats expérimentaux conclut ce travail.

1. MAILLAGE

1.1 Conditions aux limites et chargement

Comme dans le calcul des modes élastiques (§ A.3.4), l'influence des plis adjacents sur le pli étudié est prise en compte par les conditions cinématiques imposées sur ses faces. Deux conditions aux limites sont envisagées : libre ou bloqué. Si le pli est en surface, il apparaît évident de supposer que la face externe est libre de tout déplacement. En revanche, la présence d'un pli voisin transverse influence sans conteste le champ de déplacement dans le pli UD. On suppose dans un premier temps que le pli transverse voisin bloque les déplacements transverses. Dans la direction des fibres, comme le pli voisin subit le même déplacement global que le pli étudié, le déplacement local dans cette direction doit s'annuler pour vérifier la continuité des déplacements à l'interface (**Figure D 1**). Toutefois, dans l'approximation de la composante longitudinale du champ de déplacement les harmoniques s'annulent dans la direction des fibres, en des points espacés de $\frac{\pi}{2k}$. Pour cette raison, les calculs effectués en laissant le déplacement longitudinal libre ou en l'annulant donnent des résultats qui diffèrent de moins de 1 %. Dans le § 4, on s'affranchit de ces conditions aux limites avec une discrétisation du stratifié en entier.

Le chargement quant à lui peut varier dans l'épaisseur du pli, et représente un chargement de compression pure, de flexion - compression ou de flexion pure. Remarquons que sous une sollicitation de flexion pure, ou flexion-compression, le domaine d'étude est réduit à la zone en compression. De plus, on suppose qu'à la fibre neutre le déplacement **local** est toujours bloqué, ce qui semble être une hypothèse raisonnable (**Figure D 1**).

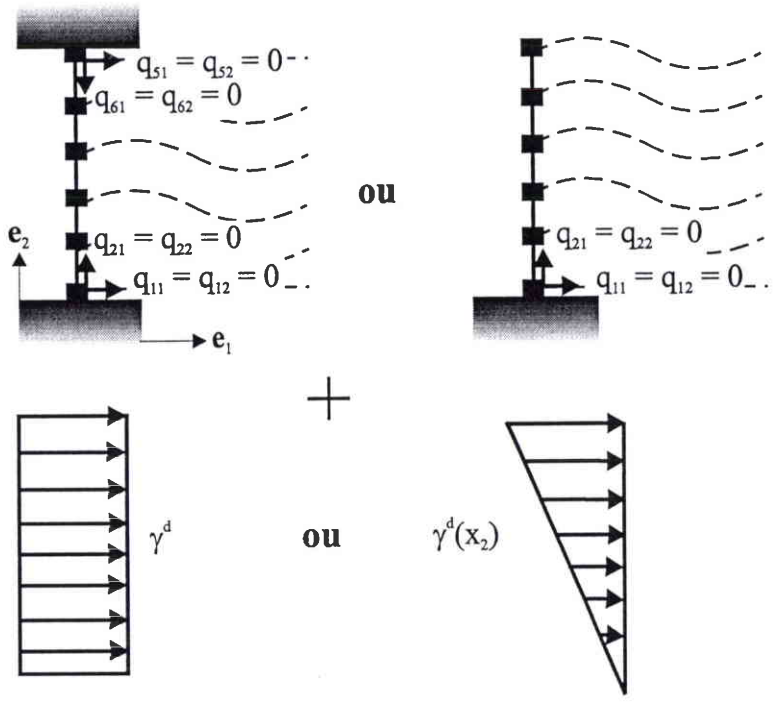


Figure D 1 : Conditions aux limites et chargement imposés sur le pli étudié.

1.2 Raffinement du maillage

Le domaine bidimensionnel étudié doit être subdivisé dans les 2 directions pour réaliser les intégrations numériques par la méthode de Gauss à 2*2 points. Ce découpage doit être suffisamment fin pour rendre compte de l'hétérogénéité de l'écoulement plastique, mais ne doit pas toutefois induire des coûts de calculs trop élevés. Remarquons que le maillage du milieu homogénéisé n'est pas lié à la taille des constituants du matériaux. Dans toutes les configurations étudiées, nous utiliserons un maillage dont la validité est établie sur une configuration regroupant les principales difficultés.

Dans la direction des fibres, le découpage doit être assez fin pour que l'intégration numérique des harmoniques constituants la base de RITZ soit précise. Sachant que la plus petite période dans cette base est donnée par le déplacement v, le terme de plus petite période dans les expressions C 29 du problème est le produit des déformation non linéaires :

$$\gamma_{11}^{NL}\,\delta\gamma_{11}^{NL} = \frac{v'^{2}_{L}}{2}\,v'_{L}\,\delta v'_{L} \qquad \text{(D 1)}$$

Ce terme correspond d'ailleurs à la contrainte longitudinale qui, comme nous l'avons fait remarquer au § C 2.3, doit être intégrée très précisément pour éviter des problèmes numériques. En utilisant la définition du champ déplacement (C 58), l'expression précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} v_L &= V_1(x_2)\sin(k\,x_1) + V_2(x_2)\sin(3k\,x_1) \\ \Rightarrow \frac{v'^{2}_{L}}{2} &= f(\cos(2k\,x_1), \cos(4k\,x_1), \cos(6k\,x_1)) \end{aligned} \qquad \text{(D 2)}$$

Donc le terme D 1 est de période 12 k :

$$\gamma_{11}^{NL}\,\delta\gamma_{11}^{NL} = f(...., \cos(12k\,x_1)) \qquad \text{(D 3)}$$

Le découpage dans la direction des fibres doit être au minimum de 12 subdivisions, de façon à intégrer une période de la contrainte longitudinale avec 2 points de GAUSS. Ce choix est validé dans la suite par une étude de convergence avec différents maillages.

Dans l'épaisseur du pli, le nombre d'éléments doit être suffisamment élevé pour pouvoir rendre compte de l'hétérogénéité de l'écoulement plastique. Ceci est particulièrement important dans le cas d'un bord libre au voisinage duquel apparaît une couche limite, comme le suggèrent les modes élastiques obtenus par GRANDIDIER et al. part I et II (1996). Le maillage doit être d'autant plus fin que la taille de la couche limite devient proportionnellement très faible quand l'épaisseur augmente.

Des calculs sont effectués sur un UD dont les caractéristiques mécaniques reportées dans le Tableau D 2 correspondent à un matériau test qui s'apparente à un carbone époxyde T300/914. Le pli est chargé en compression et ses faces inférieure et supérieure sont respectivement bloquée et libre. Divers maillages sont testés pour des épaisseurs allant de 400 à 3200 μm. Les réponses pour l'épaisseur de 3200 μm sont reportées sur la **Figure D 2**.

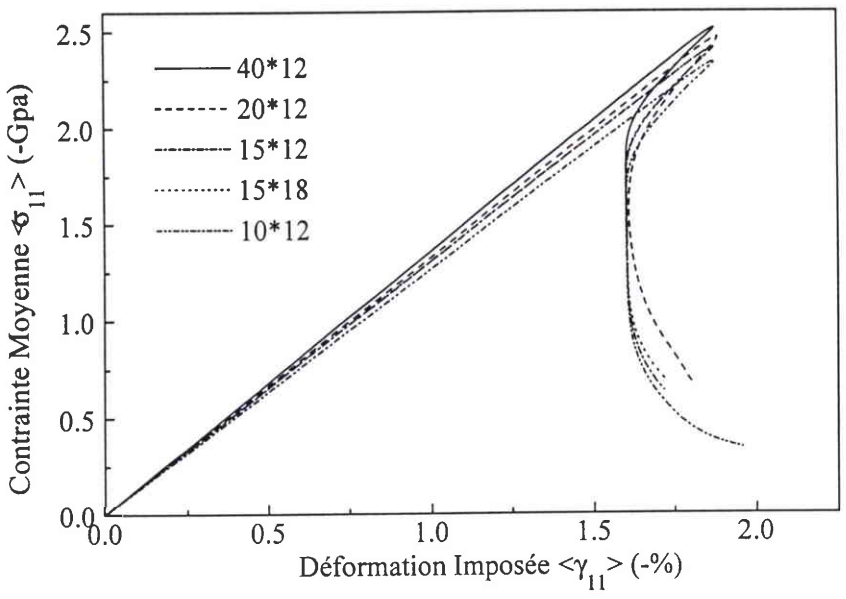


Figure D 2 : Réponses calculées pour différents maillages (nombre d'éléments selon $\mathbf{e}_2$ * nombre de divisions sur $\mathbf{e}_1$) d'un pli UD T300/914 de 3200 μm bloqué-libre en compression.

Les différents maillages conduisent à des contraintes et déformations maximales, correspondant à la perte de stabilité du pli, très proches. Notamment les maillages 15*12 et 15*18 donnent exactement les mêmes résultats. Quand le maillage s'affine, la rigidité augmente car l'effet de la couche limite est plus finement appréhendé, les déformations restent très proches mais ce sont les contraintes qui augmentent. Par rapport à la déformation maximale obtenue avec le maillage le plus fin, toutes les autres déformations maximales sont plus faibles, et l'écart relatif est inférieur à 0.05 %. Toujours par rapport aux valeurs calculées avec le maillage 40*12, les contraintes moyennes maximales sont quant à elles inférieures de 7 % pour le maillage le plus grossier, 4 % pour le maillage 15*12/15*18 et 1.9 % pour le maillage 20*12. En utilisant le maillage de 15 éléments dans l'épaisseur et 12 divisions dans la direction des fibres, les résultats semblent satisfaisants. Toutefois, nous menons une étude paramétrique où il est nécessaire d'assurer un bonne approximation de tous les phénomènes dans diverses situations. Par conséquent, le maillage retenu est composé de 20 éléments et de 12 divisions dans le sens des fibres (**Figure D 3**), il comporte 41 noeuds, soit **164 ddl** seulement et 273 pseudo - noeuds.

Avec le maillage retenu, les temps de calcul sont légèrement supérieurs à ceux mesurés avec le maillage 15*12, mais ils restent largement en deçà des temps associés aux modélisations hétérogènes classiques (Tableau D 1) :

Maillage	**Rupture**	**Réponse complète** (400 pas)
15*12	~ 1 mn	10 - 12 mn
20*12	~ 1.5 - 2 mn	12 - 15 mn
40*12	~ 5 mn	25 mn

Tableau D 1 : Temps CPU usuels pour les maillages envisagés, sur une station de travail HP 9400 avec 128 Mo de RAM et des indices de performance de 139.4 SPECint92 et 222.5 SPECfp92.

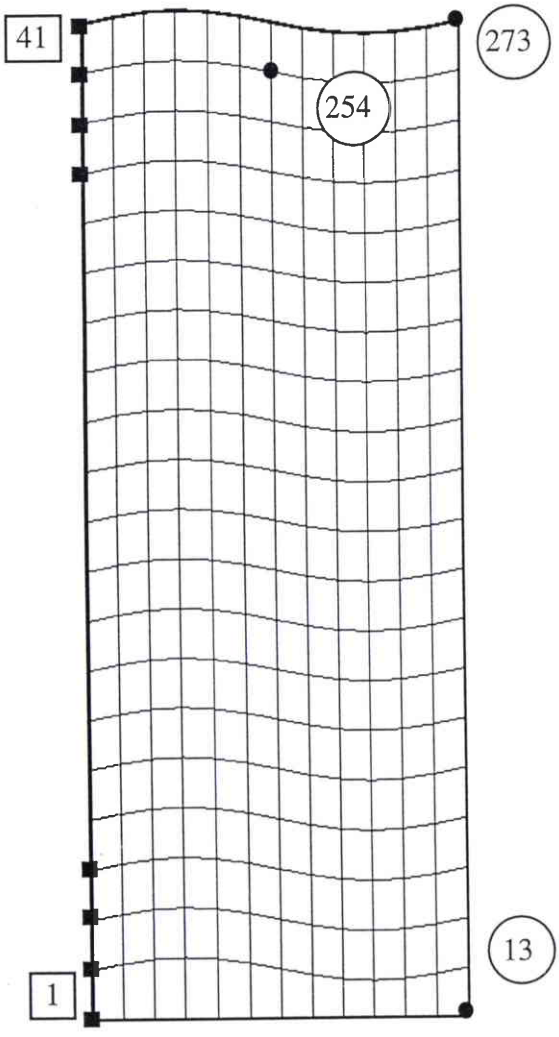


Figure D 3 : Maillage de 20 éléments et 12 divisions. Le défaut v_{01} de 1 µm constant dans l'épaisseur est amplifié par 10 pour être visible sur ce pli de 1600 µm bloqué-libre.

2. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE DU MÉCANISME DE MICROFLAMBAGE

Dans cette première partie, nous étudions un unidirectionnel suffisamment épais (5000 μm) pour ne pas subir l'influence des conditions cinématiques imposées sur ses bords. Les déplacements sont supposés bloqués sur ses faces et le défaut est constant dans l'épaisseur, ainsi le mécanisme de microflambage est présent dans toute la zone centrale de ce pli. Le matériau étudié s'apparente à un carbone - époxyde de type T300/914, et le comportement de la matrice est modélisé par une loi de type RAMBERG-OSGOOD, ce qui nous permet de maîtriser la limite élastique et la forme de l'écrouissage. Pour ces calculs, les caractéristiques adoptées par défaut sont reportées dans le Tableau D 2 :

Fibre	Matrice	Écrouissage	Défaut
$E_f = 230$ Gpa	$E_m = 4500$ Mpa	$n = 3$	$\lambda_0 = 200\ \pi$ μm
$r_f = 3.5$ μm	$\nu_m = 0.4$	$\gamma_y = 2\ \%$ ($\sigma_y = 90$ Mpa)	$v_{01} = 1$ μm
	($G_m = 1600$ Mpa)		$v_{02} = 0$

Tableau D 2 : Caractéristiques utilisées pour l'étude du mécanisme microflambage.

2.1 Réponse et rupture du pli par microflambage plastique

Contrairement au flambage élastique, lorsque le comportement est élasto-plastique, l'apparition d'une bifurcation ne correspond pas systématiquement à la perte de la stabilité de la structure. Il peut exister une charge maximale que la structure supporte, et qui est supérieure à la charge d'apparition de la bifurcation. De plus, lorsqu'un défaut est introduit, les charges de bifurcation ne peuvent plus être atteintes ni en élasticité, ni dans un cadre plastique. La solution du problème s'éloigne de la solution fondamentale au fur et à mesure que le défaut initial est augmenté. Ce phénomène est visible sur la **Figure D 4**, où le déplacement transverse d'un point du pli étudié est reporté en fonction de la déformation imposée, pour 2 défauts représentatifs.

Sur cette figure, les réponses du pli montrent qu'au début du chargement, le comportement du pli est purement élastique puis la plasticité apparaît et la rigidité diminue. Si le défaut est faible (**A**), on atteint une déformation maximale (γ_M) et l'instabilité géométrique survient. Dans ce cas,

le comportement devient instable si le chargement ne diminue pas. Par contre, si le défaut est suffisamment important (**B**), le pli est stable lorsque le chargement croît. Dans la réponse **A**, le "retard" qui existe entre le point où le chargement imposé est maximum (γ_M) et l'apparition de l'instabilité, augmente avec le défaut initial. Lorsque le défaut initial devient trop important, la déformation maximale n'existe plus, le système reste stable par rapport à la déformation imposée (**B**). Dans ce cas la rigidité du pli ne s'annule pas, l'instabilité n'est plus détectable numériquement par le changement de signe d'un des pivots de la matrice de rigidité du système.

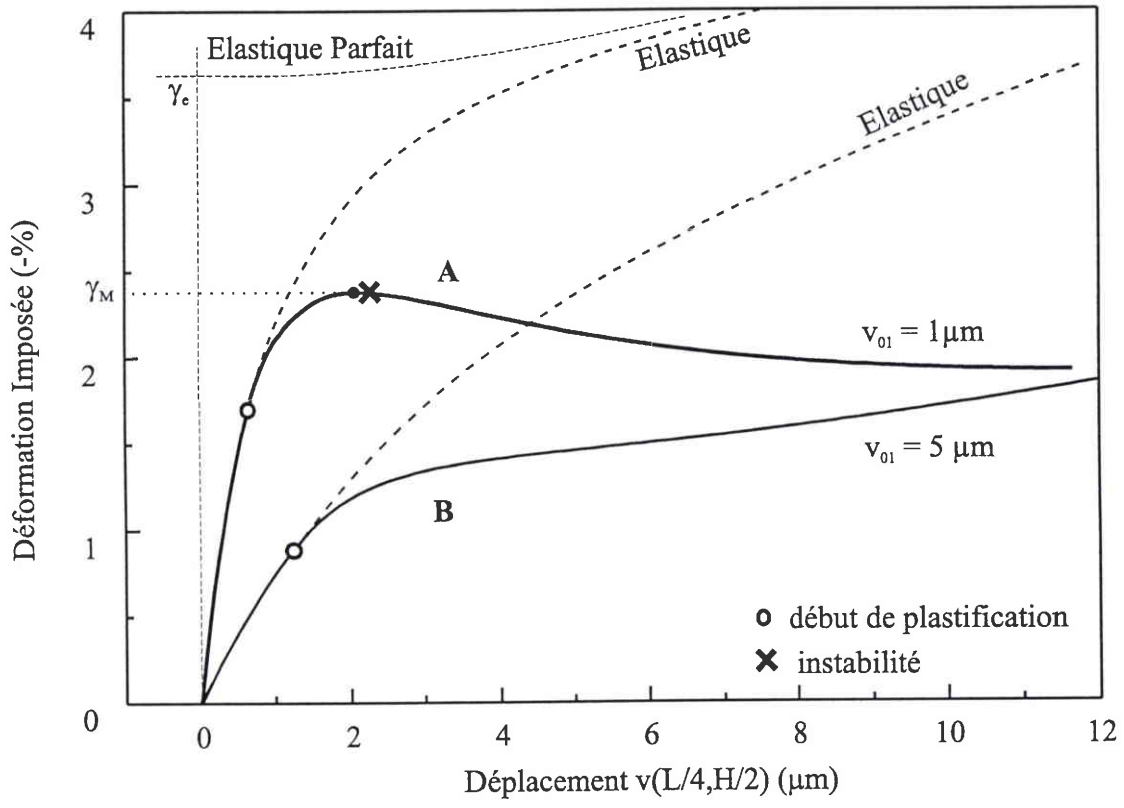


Figure D 4 : Courbes charge - déplacement du pli calculées pour 2 amplitudes de défaut. γ_M est la déformation maximale supportée par le pli. γ_e est la déformation élastique critique, les asymptotes sont reportées à titre indicatif.

La réponse correspondant au comportement décrit ci-dessus est présentée sur la **Figure D 5**. On peut différencier les effets du défaut géométrique et ceux du comportement non linéaire de la matrice. On distingue clairement les réponses instables et stables vis à vis de la déformation imposée, respectivement lorsque le défaut est faible et lorsqu'il est plus élevé. De plus, pour les 2 défauts le comportement présente un point limite en charge.

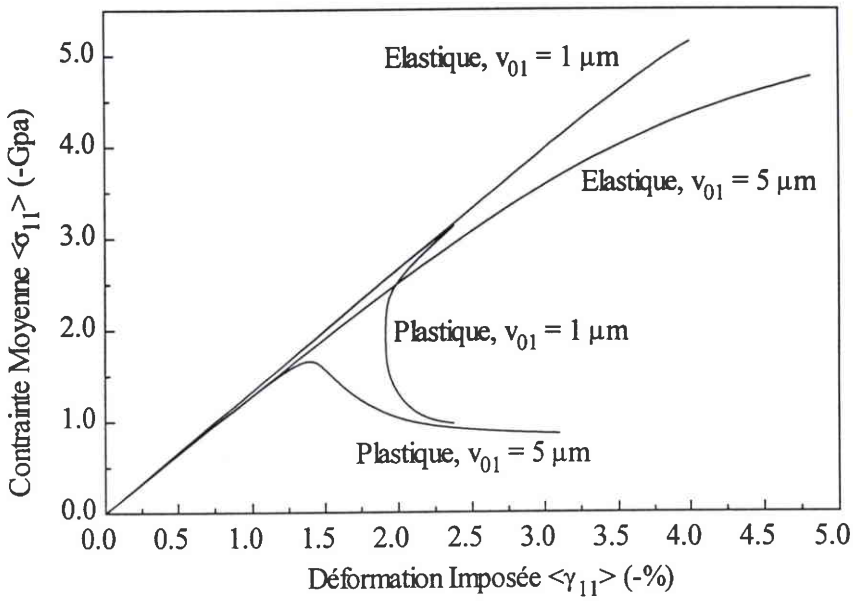


Figure D 5 : Réponse élastique et plastique du pli pour les défauts de 1 et 5 µm.

Le passage du comportement **A** au comportement **B** représenté sur la **Figure D 4** se fait continûment. En prenant un défaut dont l'amplitude varie de 0.5 à 5 µm, on obtient la réponse du pli représentée ci-dessous où l'on distingue nettement la limite entre les réponses instables ($v_{01} \leq$ 3 µm) et les réponses stables vis à vis du chargement (v_{01}>3 µm) (**Figure D 6**).

Sur cette figure, on observe que la chute de rigidité du pli survient pour tous les défauts, elle provient en partie de l'apparition de la plasticité, mais surtout de l'augmentation, plus ou moins brutale, de la flèche des fibres. Par contre l'allongement relatif du pli n'est présent que lorsque que l'instabilité géométrique apparaît, il provient du couplage des non linéarités géométriques et matérielles. En effet lorsque l'instabilité géométrique se produit, la matrice est dans un état plastique. Il en résulte une telle chute de la rigidité que l'état de contrainte courant ne peut satisfaire l'équilibre et seule une diminution du chargement de compression imposé permet de revenir à un état stable.

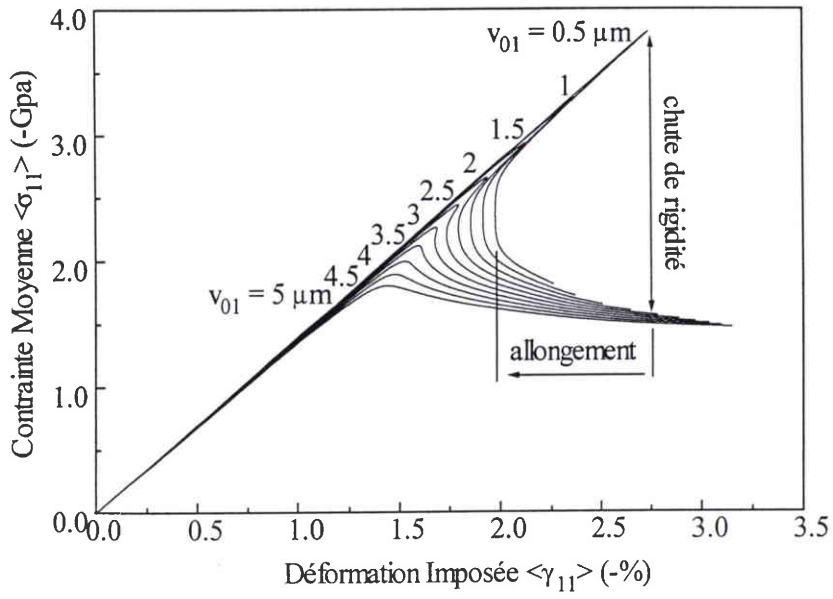


Figure D 6 : Réponse du pli entier en fonction de l'amplitude du défaut.

D'après TVERGAARD et al. (1980), le type de comportement correspondant à la **Figure D 4** est propre aux structures dont la réponse est caractérisée par un point limite en charge (**Figure D 6**). Dans ces structures on observe une localisation des déformations plastiques après que la charge maximale ait été atteinte. Or, pour notre problème de microflambage plastique, la solution est recherchée sur une longueur d'onde dans un espace de solutions défini par la base d'harmoniques que nous avons volontairement réduite. Par conséquent nous ne pouvons pas rendre compte de cet aspect de localisation du mode de microflambage plastique. C'est pourquoi les résultats correspondant au comportement post-critique doivent être pris qualitativement. Mais jusqu'à l'instabilité, c'est à dire jusqu'à la rupture du pli, notre approximation est tout à fait en mesure de caractériser quantitativement le comportement du pli.

Expérimentalement, l'apparition de l'instabilité plastique conduit à la ruine du composite car ni le contrôle en force ni celui en déplacement ne permettent de maîtriser le comportement du pli après ce point (voir **Figure A 26**). Dans le cas des défauts suffisamment importants, la réponse possède seulement un point limite en charge. Il semble qu'un tel comportement soit stable expérimentalement si on contrôle le déplacement, mais lorsque le pli est utilisé in-situ la rupture se produit si la charge limite est atteinte. En conséquence, le point de contrainte maximum, présent dans la réponse du pli quelque soit le défaut initial, peut être associé à la rupture du

composite et permet de définir la déformation et la contrainte à rupture, notées respectivement γ_r et σ_r .

Une réserve peut toutefois être émise, car dans notre approche nous supposons que les fibres ne rompent pas. Dans le processus d'évolution non linéaire si des ruptures de fibres apparaissent, la réponse du pli en sera fortement affectée.

2.2 Mécanisme de microflambage plastique

Pour des caractéristiques mécaniques identiques, la différence entre les réponses lorsque le défaut est faible ou lorsqu'il est plus important, se situe principalement au niveau du rapport et de la distribution des contraintes qui conduisent la matrice dans son état plastique.

Le comportement du pli peut être instable ou posséder un point limite en charge, selon que le défaut initial est faible ou plus important. Mais quel que soit ce défaut initial, les zones où la contrainte de VON MISES dans la matrice est maximale se localisent là où la contrainte de cisaillement est la plus élevée (**Figure D 7**). C'est à cet endroit que l'angle entre la fibre et son axe théorique est maximum. On retrouve bien ici la corrélation défaut - cisaillement - plasticité mise en évidence dans les différents modèles micromécaniques présentés dans la partie A. Dans les 2 paragraphes suivants, le mécanisme de microflambage plastique est décrit en détail dans le cas d'une instabilité et dans le cas d'un point limite en charge.

2.2.1 Rupture du pli par instabilité

L'évolution des contraintes (**Figure D 8**) dans la matrice et dans la fibre, aux pseudo-noeuds repérés **1** et **2** sur la **Figure D 7**, confirme la dualité flexion des fibres - cisaillement de la matrice. On peut voir que lorsque la contrainte de flexion augmente en **1**, le cisaillement augmente en **2**. Au début du chargement, les défauts étant faibles ($v_{01} \leq 3$ µm dans notre cas), les fibres sollicitent peu la matrice en cisaillement. En conséquence la contrainte longitudinale de compression correspondant au chargement imposé est prépondérante, elle conduit la matrice dans sa phase plastique (à ~ 1.7 %). Lorsque la rigidité de la matrice a suffisamment chuté, la rigidité de flexion des fibres devient déterminante, ce qui induit l'apparition de l'instabilité géométrique. Ceci se traduit par l'augmentation brutale des contraintes de flexion dans les fibres en **1** et de la contrainte de cisaillement dans la matrice en **2**, tandis que la contrainte longitudinale de compression chute en ces 2 points. La contrainte transverse reste toujours faible et de plus elle

chute quand l'instabilité apparaît. Après l'instabilité, les contraintes évoluent selon ces mêmes tendances, et la rigidité étant très faible, le comportement du pli est instable si le chargement ne diminue pas.

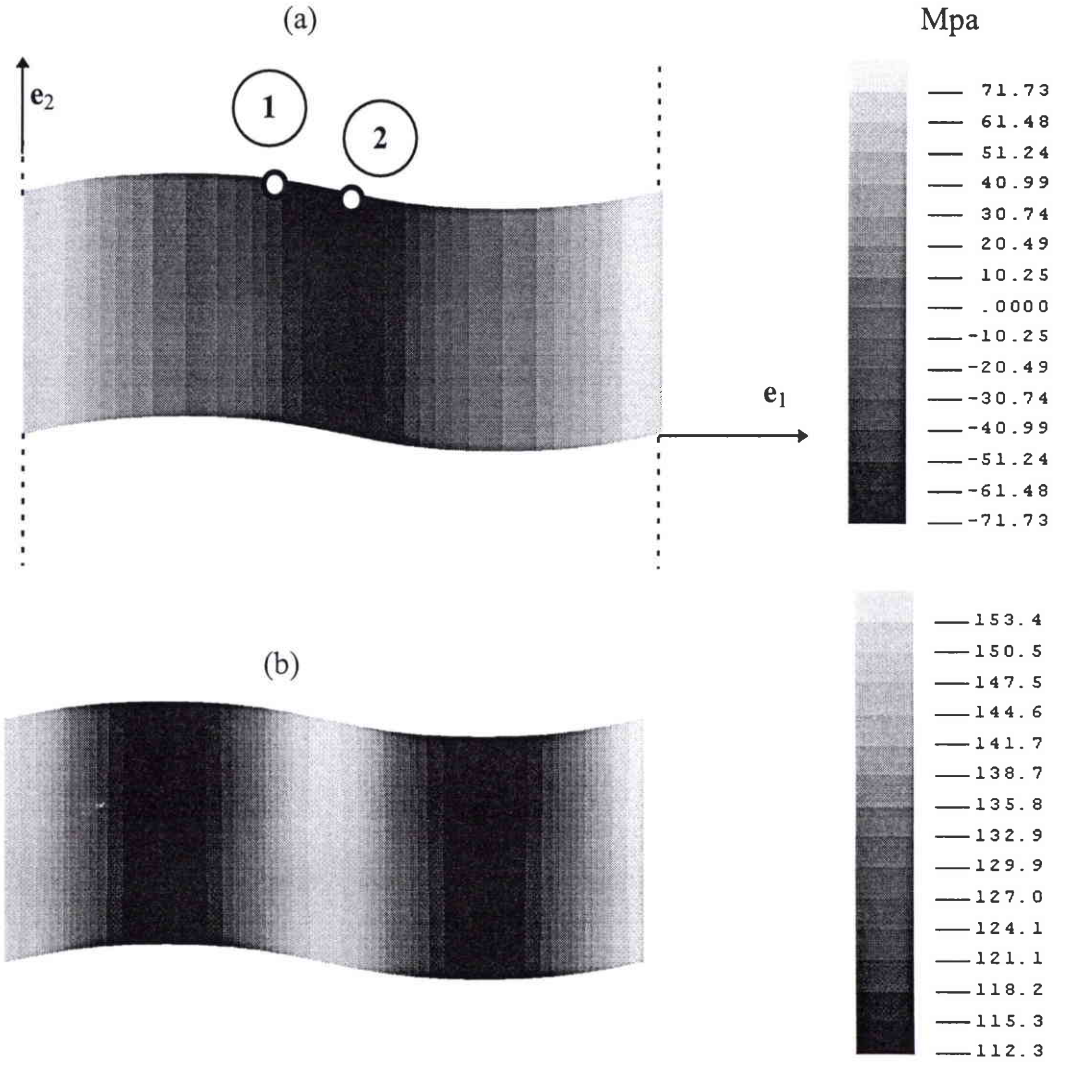


Figure D 7: Distribution des contraintes dans la matrice à mi-hauteur du pli affecté d'un défaut v_{01} = 1 µm, pour un chargement correspondant à la charge maximum (-1.89 % soit -2463 Mpa) : (a) cisaillement (b) VON-MISES.

La diminution des contraintes longitudinales au voisinage de l'instabilité est due à la localisation des déformations plastiques induites par le cisaillement, au détriment des déformations longitudinales et transverses. À l'instabilité, le profil des contraintes dans le sens longitudinal du pli (**Figure D 9**) montre clairement que la plasticité de la matrice est due principalement à la contrainte de compression, modulée localement par la contrainte de

cisaillement. On remarque qu'en tous points la limite plastique a été dépassée, l'instabilité géométrique apparaît d'autant plus brutalement ce qui donne une réponse du pli très marquée.

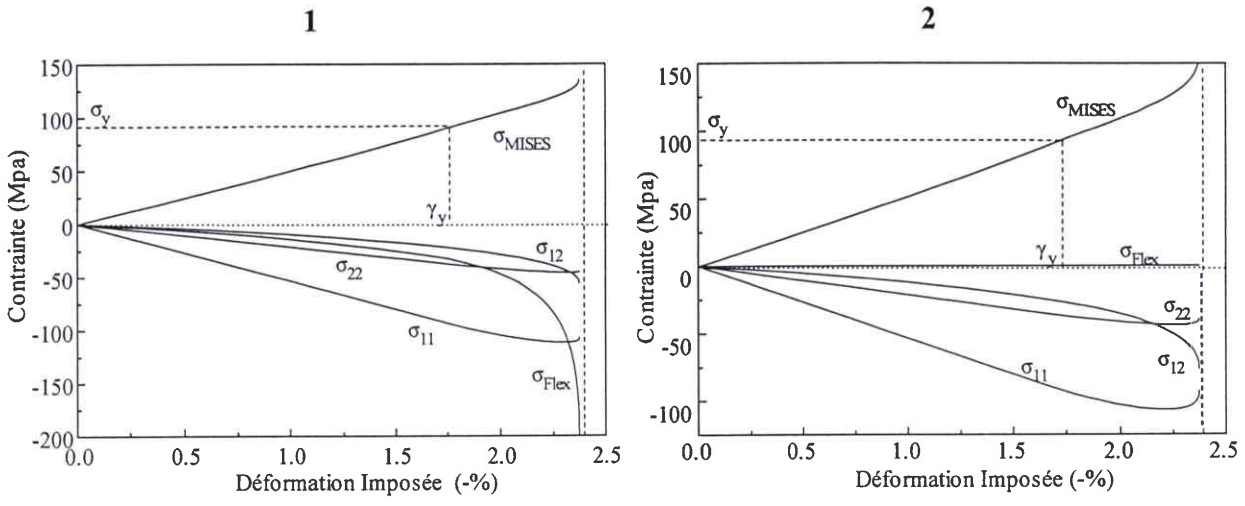


Figure D 8 : Évolution des contraintes aux pseudo-noeuds **1** et **2** jusqu'à l'instabilité : contraintes longitudinales (σ_{11}), de cisaillement (σ_{12}), transverse (σ_{22}), de MISES (σ_{Mises}) dans la matrice et de flexion (σ_{Flex}) dans la fibre. Le défaut initial v_{01} est de 1 µm.

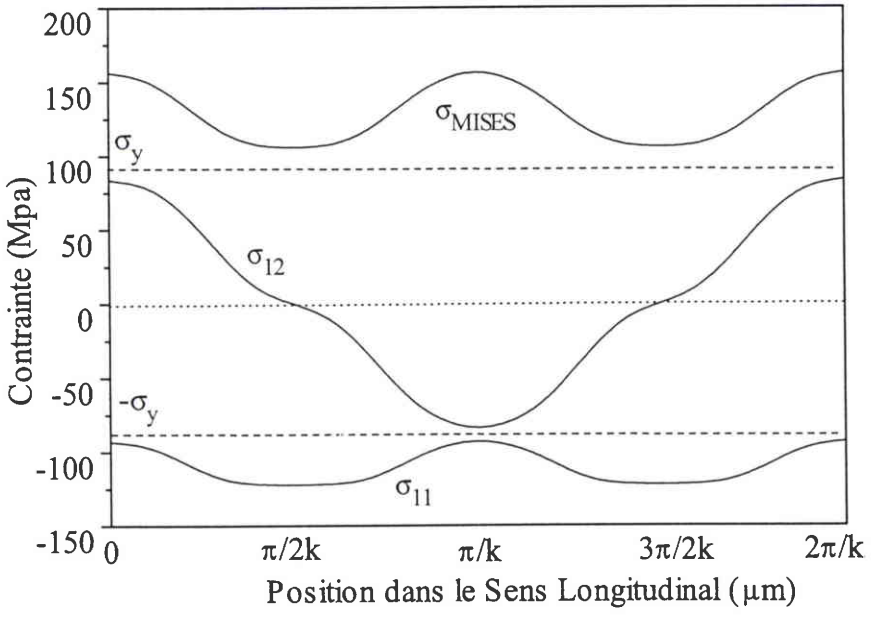


Figure D 9 : Profil des contraintes matrice dans la largeur du pli pour un chargement correspondant à l'apparition de l'instabilité (- 2.37 %). Contraintes longitudinale, de cisaillement et de VON-MISES. Le défaut initial v_{01} est de 1 µm.

2.2.2 Rupture du pli par charge limite

Lorsque le défaut est élevé (v_{01} > 3 µm dans notre cas), le mécanisme d'apparition du microflambage est similaire à celui décrit ci-dessus, mais ici la matrice contenue entre les fibres ondulées est immédiatement sollicitée en cisaillement. Par rapport au cas précédent la matrice est moins comprimée, comme on peut s'en rendre compte sur la **Figure D 10**. En conséquence, la limite élastique est plus vite atteinte (~ 0.9%) en certains points particuliers du domaine. Plus précisément, les déformations plastiques sont localisées aux points où l'angle que fait la fibre avec son axe théorique est maximum. La flèche augmente très progressivement jusqu'à la charge maximale où apparaît une augmentation relativement rapide du déplacement, similaire à l'apparition d'une instabilité géométrique de faible amplitude.

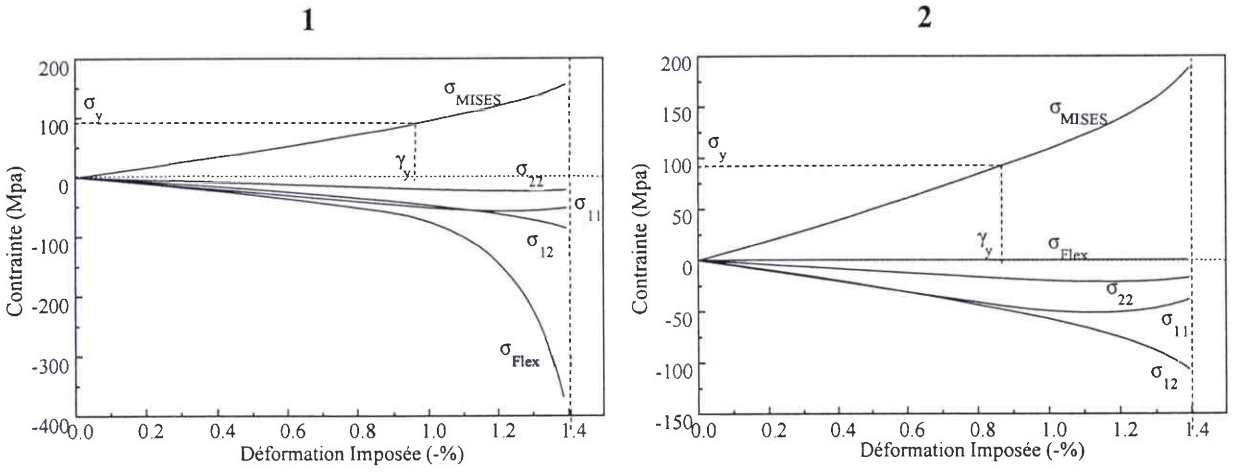


Figure D 10 : Évolution des contraintes aux pseudo-noeuds **1** et **2,** le défaut initial v_{01} est de 5 µm.

On peut voir ci-dessous le profil des contraintes dans la direction longitudinale au point de charge limite (**Figure D 11**). Il apparaît clairement que l'intensité de la contrainte longitudinale est plus faible que dans le cas précédent (**Figure D 8**). En revanche les contraintes de cisaillement sont plus élevées, ce qui confirme l'importance du défaut qui fixe la répartition et le rapport des contraintes dés le début du chargement. De plus, le profil de la contrainte de VON-MISES montre que la limite élastique n'est pas atteinte en tous les points, ceci explique que l'instabilité géométrique n'apparaît pas aussi clairement que lorsque le défaut est faible, elle n'est donc pas détectable numériquement. Il se produit plutôt une augmentation progressive de la flèche, similaire au problème élastique où la réponse du pli se caractérise également par un point limite maximum en contrainte. Après le point limite, la localisation des déformations plastiques

s'accompagne très localement d'une légère diminution des contraintes de cisaillement qui sont prépondérantes ici. Mais cette baisse a lieu uniquement aux endroits où elles étaient déjà les plus faibles et qui correspondaient aux points où la limite élastique n'était pas dépassée. Notre hypothèse de non décharge élastique justifiant l'utilisation d'une loi élastique non linéaire pour simuler le comportement plastique de la matrice (§ B 3.1) est par conséquent fondée.

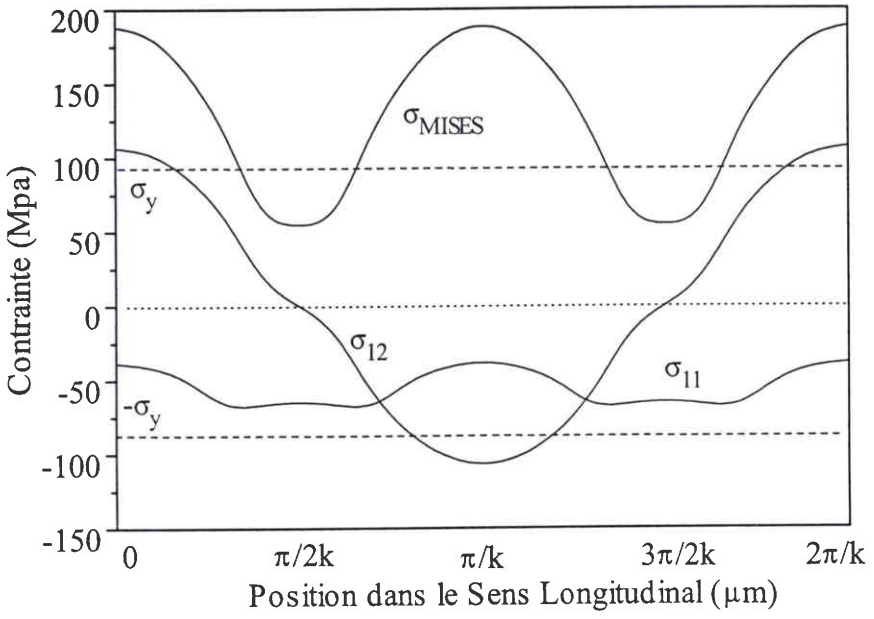


Figure D 11 : Profil des contraintes matrice dans la largeur du pli pour un chargement correspondant point de charge maximum (-1.40 %). Contraintes longitudinale, de cisaillement et de VON-MISES. Le défaut initial v_{01} est de 5 μm.

2.2.3 En résumé

Le mécanisme d'apparition du microflambage plastique dépend essentiellement du rapport de la rigidité de flexion des fibres et de la rigidité de son support élasto-plastique. Deux régimes se distinguent selon l'amplitude du défaut initial. Lorsque le défaut est faible, la plasticité de la matrice apparaît de façon homogène dans le pli sous l'action de la contrainte de compression, et l'instabilité géométrique survient ensuite. Quand le défaut est plus important, la plasticité apparaît très vite de manière hétérogène sous l'action du cisaillement induit par le défaut initial. L'ondulation des fibres augmente progressivement et un point limite en charge est atteint.

Comme la rigidité de flexion ne change pas puisque les fibres sont supposées élastiques linéaires, la résistance du pli dépend essentiellement du défaut et des caractéristiques mécaniques de la matrice. On retrouve bien les paramètres essentiels isolés par BUDIANSKY (1983) dont la formule (A 7) regroupe ces termes prépondérants dans le mécanisme de "kinking". Il semble pourtant nécessaire d'une part de préciser l'influence du défaut et d'autre part d'étudier l'effet de tous les paramètres du problème de microflambage plastique local.

2.3 Influence du défaut

2.3.1 Amplitude du défaut angulaire

Lorsque l'approximation du champ de déplacement a été établie (§ C 2.3.), il nous a paru naturel de choisir la forme du défaut d'ondulation des fibres similaire à celle du déplacement v. Mais il apparaît que si la variation de l'amplitude du défaut donne une baisse graduelle de la résistance à rupture du pli (voir **Figure D 6** par exemple), en revanche la variation de sa longueur d'onde donne un changement plus complexe de la réponse et de la résistance.

En observant les déformations à rupture obtenues en faisant varier l'amplitude du défaut et sa longueur d'onde, on retrouve des similitudes entre les séries de calcul. La déformation à rupture du pli dépend en fait de la courbure normalisée du défaut, ou de manière équivalente de l'angle maximum que fait la fibre avec son axe théorique (Tableau D 3). On retrouve dans ces résultats la notion **d'angle maximum du défaut** qui correspond au point où l'écoulement plastique de la matrice est le plus important, et qui est reconnu par de nombreux auteurs comme le paramètre clé pour représenter l'effet du défaut (WISNOM, STEIF, GUYNN, EFFENDI,....). On retrouve également dans la relation de BUDIANSKY (A 7) le paramètre essentiel qui est le couplage entre l'angle des fibres pliées et la limite élastique de la matrice.

L'angle du défaut initial peut être obtenu en prenant différentes combinaisons d'amplitudes et de longueur d'onde. Les calculs montrent que lorsque la longueur d'onde devient très grande (> 3 mm), la résistance à rupture augmente pour un défaut angulaire donné. Quand la longueur d'onde diminue, la résistance décroît, puis augmente de nouveau pour les petites longueurs d'onde (< 0.2 mm) en même temps que la rigidité s'accroît légèrement. Sur la **Figure D 12**, on peut aussi vérifier que lorsque le défaut angulaire augmente, la résistance diminue quelle que soit la longueur d'onde. Il semble de plus qu'il existe une longueur d'onde "critique" pour laquelle les

déformations à rupture sont les plus faibles et restent constantes pour les longueurs d'ondes voisines. Il est intéressant de remarquer que cette longueur d'onde critique est proche de la longueur d'onde du mode élastique de microflambage.

k	0.005		0.0075		0.01		0.015		0.02	
v_{01}	γ_r	ϕ_0	γ_r	ϕ_0	γ_r	ϕ_0	γ_r	ϕ_0	γ_r	ϕ_0
0.5	3.02	0.14	2.86	0.21	2.74	0.29	2.57	0.43	2.46	0.57
1	2.75	0.29	2.53	0.43	2.37	0.57	2.16	0.86	2.03	1.15
1.5	2.54	0.43	2.29	0.64	2.13	0.86	1.90	1.29	1.79	1.72
2	3.38	0.57	2.11	0.86	1.94	1.15	1.73	1.72	1.61	2.29
2.5	2.24	0.72	1.97	1.07	1.80	1.43	1.58	2.15	1.50	2.86
3	2.13	0.86	1.85	1.29	1.69	1.72	1.48	2.58	1.43	3.44
3.5	2.03	1.00	1.76	1.50	1.59	2.01	1.41	3.01	1.38	4.01
4	1.94	1.15	1.68	1.72	1.51	2.29	1.36	3.44	1.35	4.58
4.5	1.87	1.29	1.49	1.93	1.44	2.58	1.32	3.87	1.34	5.16
5	1.80	1.43	1.54	2.15	1.40	2.86	1.29	4.30	1.35	5.73
5.5	1.74	1.58	1.48	2.36	1.35	3.15	1.27	4.73	1.37	6.30
6	1.69	1.72	1.44	2.58	1.32	3.44	1.28	5.16	1.38	6.88
6.5	1.63	1.86	1.41	2.79	1.29	3.72	1.2	5.59	1.41	7.45

Tableau D 3 : Déformations à rupture (en - %) du pli et angle du défaut (en °) en fonction de l'amplitude du défaut et du nombre d'ondes. Les zones grisées représentent la rupture du pli par point limite. Suivre par exemple γ_r pour $\phi_0 = 1.72°$

Les défauts mesurés par PALUCH (1994) sont reportés ci-dessous (Tableau D 4). On observe que les longueurs d'onde correspondant à ces mesures sont dans notre cas réparties de part et d'autre de la longueur d'onde "critique" située aux alentours de 600 - 800 µm, pour laquelle les déformations à rupture sont quasiment constantes (Tableau D 5). Cette zone est repérée sur la **Figure D 12** par les lignes discontinues dans le plan de projection et par la zone grisée dans le Tableau D 5 correspondant. On note que dans tous les calculs effectués sur ce pli "test", la transition entre la rupture par instabilité et par point limite se fait toujours pour les mêmes défauts (Tableau D 5).

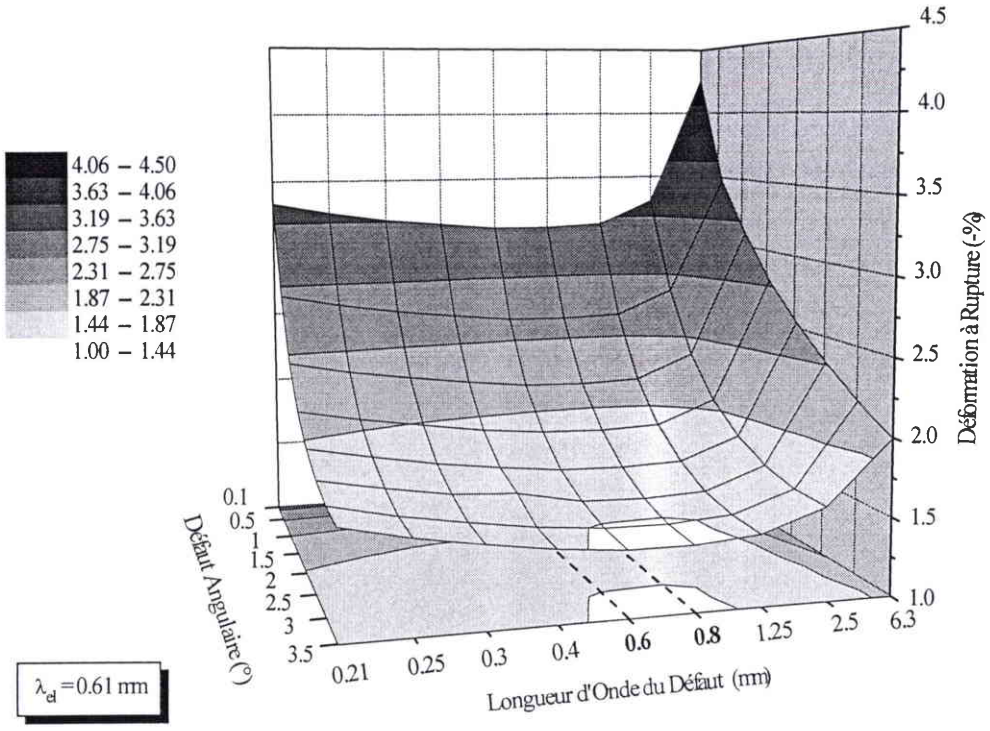


Figure D 12 : Évolution des déformations à rupture du pli, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde.

Fibre	ϕ_0 (°)		λ (μm)			
	ϕ_{moyen}	Écart type	λ_{mini}	λ_{maxi}	λ_{moyen}	Écart type
AS4 (/PEEK)	0.270	0.986	430	840	720	100
GY70 (/5208)	0.378	2.14	435	1050	714	163
T800 (/5245)	0.108	0.718	260	1140	841	176
T300 (/914)	0.165	1.358	620	1160	900	135

Tableau D 4 : Défauts mesurés par PALUCH (1994) dans différentes matériaux carbone-époxyde.

ϕ_0 / λ	0.001 (6283µm)	0.0025 (2513µm)	0.005 (1257µm)	0.0075 (838µm)	0.01 (628µm)	0.015 (419µm)	0.02 (314µm)	0.025 (251µm)	0.03 (210µm)
0.1	4.26	3.31	3.13	3.11	3.12	3.16	3.20	3.25	3.33
0.5	3.47	2.63	2.46	2.44	2.46	2.49	2.54	2.61	2.68
1	3.10	2.19	2.03	2.01	2.02	2.07	2.12	2.18	2.26
1.5	2.79*	1.93*	1.77*	1.75*	1.76*	1.81*	1.86*	1.92*	1.99*
2	2.54*	1.76*	1.61*	1.59*	1.60*	1.64*	1.67*	1.76*	1.84*
2.5	2.33	1.65	1.49	1.48	1.49	1.57	1.59	1.66	1.74
3	2.15	1.60	1.46	1.42	1.43	1.47	1.52	1.60	1.69
3.5	1.99	1.59	1.45	1.41	1.42	1.45	1.51	1.58	1.67

Tableau D 5 : Données correspondant à la **Figure D 12**. Les * correspondent à la transition entre une rupture du pli par instabilité et une rupture par charge limite.

Remarquons que dans la plage correspondant aux défauts mesurés, la résistance est indépendante de la longueur d'onde et le paramètre important dans ce cas est l'angle. Toutefois pour les différentes longueurs d'onde, les réponses du pli dans la partie post-microflambage diffèrent légèrement (**Figure D 13**). Concernant les mesures de l'angle du défaut données par PALUCH (1994), il faut noter que les résultats sont très dispersés (Tableau D 4). Toutefois, l'utilisation de la loi de WEIBULL donnée par l'auteur permet de quantifier cette grandeur dont l'influence sur la rupture est de toute première importance (**Figure D 14**).

À la suite de ces remarques, en fixant l'angle du défaut initial et sa longueur d'onde, nous pouvons étudier l'influence des seules caractéristiques des constituants. Deux défauts sont envisagés, ils sont caractérisés par des angles de 1° et 2.5° afin de pouvoir, le cas échéant, distinguer l'influence d'un paramètre matériau sur les 2 types de rupture du pli (instabilité ou point limite). Les nombres d'ondes sont pris égaux à 0.01, ce qui correspond à une longueur d'onde de 0.63 mm. Cette longueur d'onde correspond approximativement à la longueur d'onde "critique", compte tenu de la loi de comportement idéalisée de la matrice qui est volontairement choisie faiblement non linéaire en comparaison de la loi de comportement de la résine 914.

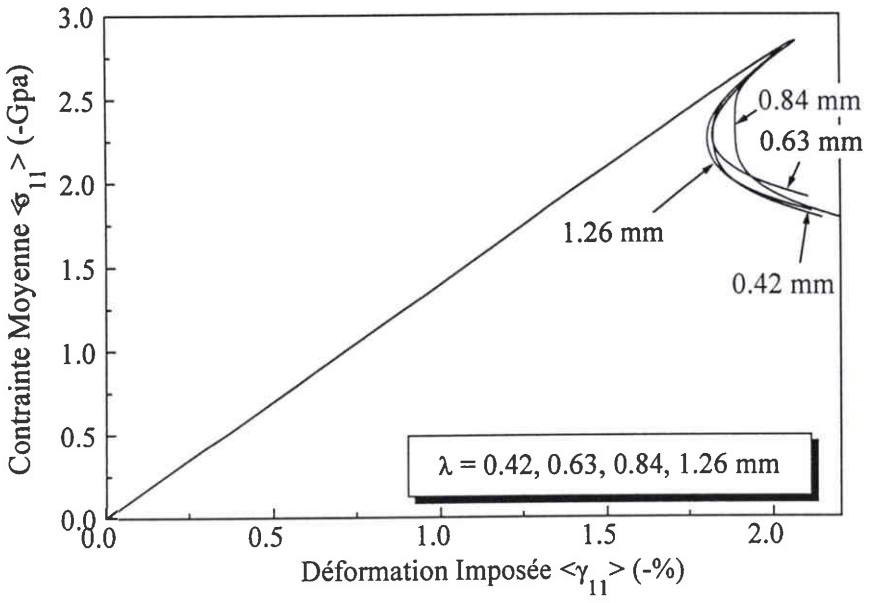


Figure D 13 : Réponse du pli pour un défaut initial de 1° obtenu avec différentes nombre d'ondes en faisant varier v_{01}.

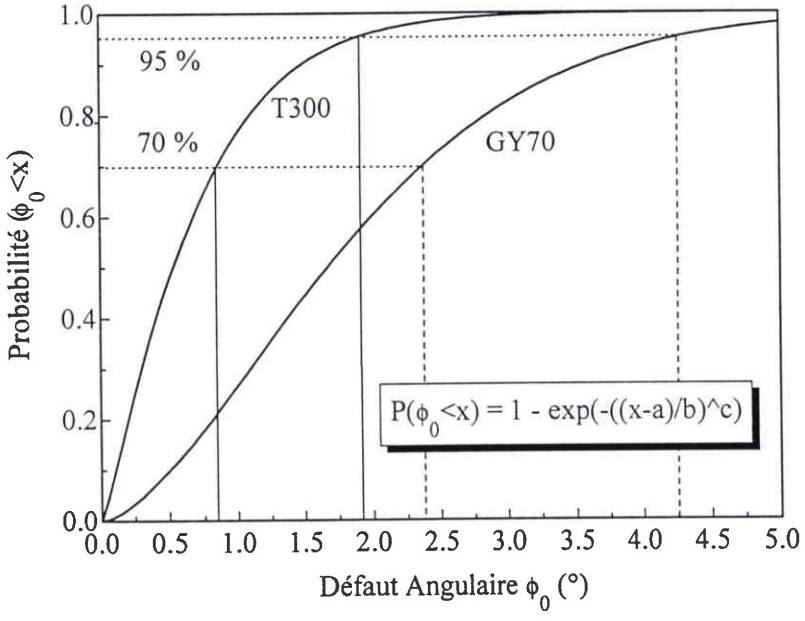


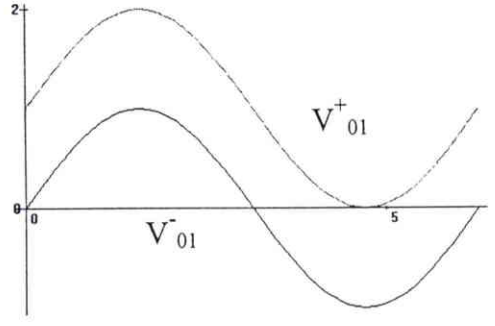
Figure D 14 : Loi de WEIBULL du défaut angulaire pour les fibre T300 et GY70, d'après PALUCH (1994). Les paramètres de la loi sont pour les T300 : a=0, b=0.73 et c=1.17, et pour les GY70 : a=0, b=2.11 et c=1.57.

2.3.2 Forme du défaut

La forme de l'ondulation initiale des fibres est également importante, puisque le cisaillement de la matrice qui pilote le comportement est distribué différemment selon l'arrangement des fibres. La réponse du pli reste identique quand la forme du défaut change, seules les valeurs à rupture varient (Tableau D 6), et il apparaît clairement que le cas le plus pénalisant est l'ondulation en phase des fibres, comme prévu par ROSEN (1964) (**Figure D 15**). En effet, si les fibres possèdent un défaut en phase, le cisaillement dans la matrice est maximum. Par contre si le défaut d'une fibre est déphasé par rapport à celui des fibres voisines, certaines parties de la matrice peuvent être sollicitées en traction - compression plutôt qu'en cisaillement et la résistance s'en trouve accrue.

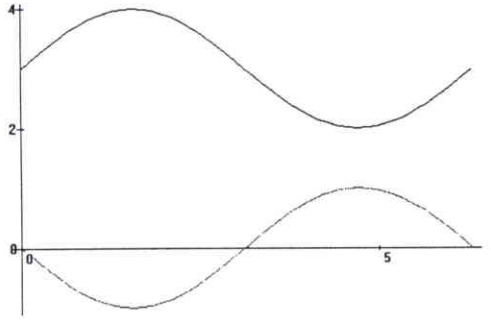
(a)

$V^{+}_{01} = 1, V^{-}_{01} = 1$



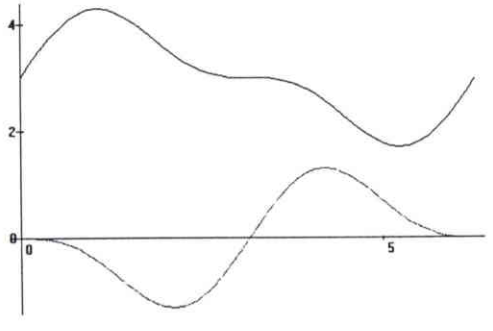
(b)

$V^{+}_{01} = 1, V^{-}_{01} = -1$



(c)

$V^{+}_{01} = 1, V^{-}_{01} = -1$ et $V^{+}_{02} = 0.5, V^{-}_{02} = 0.5$



(d)

$V^{+}_{01} = 1, V^{-}_{01} = -1$ et $V^{+}_{02} = 0.5, V^{-}_{02} = -0.5$

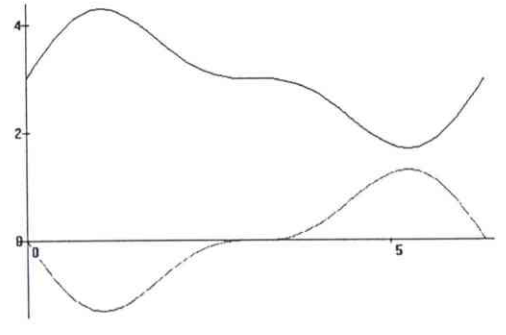


Figure D 15 : Formes du défaut initial, obtenues en combinant les amplitudes V_{01} et V_{02} (en µm).

Cas (D 14 a)	$\gamma_r = 2.37\ \%$
Cas (D 14 b)	$\gamma_r = 2.91\ \%$
Cas (D 14 c)	$\gamma_r = 2.77\ \%$
Cas (D 14 d)	$\gamma_r = 2.45\ \%$

Tableau D 6 : Déformations à rupture calculées pour les défauts représentés sur la **Figure D 15**.

2.4 Influence des caractéristiques mécaniques des constituants

2.4.1 Les fibres :

Les études présentées dans la partie A montrent clairement l'importance sur la rupture du composite, du couplage de la loi de comportement plastique de la matrice avec le défaut des fibres. Les caractéristiques intrinsèques des fibres jouent également un rôle significatif dans le comportement en compression. En effet, avant l'apparition de l'instabilité, la rigidité du pli dépend principalement du module des fibres (**Figure D 16**). Ceci est prévisible puisque dans la zone élastique la flèche des fibres est encore négligeable, et le module effectif du composite est proportionnel au module des fibres en première approximation :

$$\bar{E} = f E_f + (1 - f) E_m(\gamma) \sim f E_f \qquad \text{car } E_f >> E_m(\gamma) \tag{D 4}$$

Dans le Tableau D 7 sont reportées les contraintes et déformations caractéristiques de la zone de microflambage (voir **Figure D 7**) lorsque le point de charge maximum est atteint. Les données longitudinales sont les moyennes sur cette zone, les autres données dans les constituants sont les valeurs maximales.

D'après ces résultats, on constate que pour les 3 modules de fibres considérés, l'instabilité apparaît pour une contrainte équivalente dans la matrice qui est quasiment constante pour un défaut donné. On note que les déformations de flexion dans la fibre au point limite sont également constantes pour les 3 modules. Comme c'est cette déformation qui fixe le cisaillement dans la matrice, il varie très peu lui aussi.

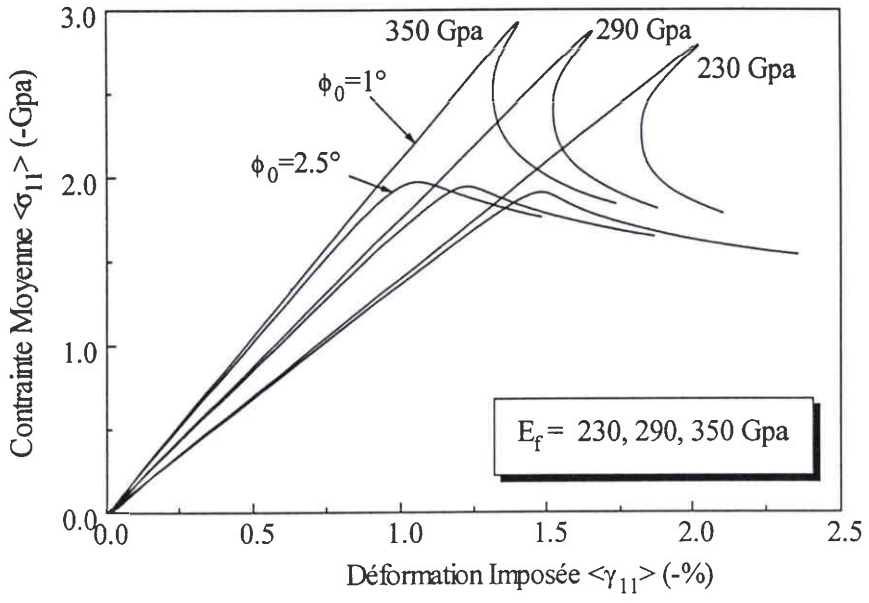


Figure D 16 : Réponse du pli affecté de 2 défauts caractéristiques pour des modules de fibre différents.

E_f (Gpa)	ϕ_0 (°)	σ_{11}^M (- Mpa)	σ_{12}^M (± Mpa)	σ_{eq}^M (Mpa)	γ_{11}^M (- %)	γ_{12}^M (± %)	γ_{flex}^F (± %)	σ_r (- Mpa)	γ_r (- %)
230	1	83	90.4	168.7	1.97	8.77	0.111	2786	2.023
290	1	73.5	89.1	163.4	1.62	8.28	0.113	2864	1.658
350	1	63	88.2	159.7	1.36	7.97	0.112	2914	1.407
230	2.5	54.5	115.1	202.3	1.28	14.62	0.214	1915	1.488
290	2.5	44	115.1	201.3	1.02	14.51	0.209	1948	1.228
350	2.5	36	116.5	202.7	0.85	14.83	0.209	1975	1.058

Tableau D 7 : Contraintes et déformations dans les constituants et pour le pli entier en fonction du défaut et du module de la fibre. Le chargement correspond au point de charge maximum.

Conformément aux conclusions du § 2.3, la rupture du pli survient pour un rapport constant entre la flexion des fibres (γ_{flex}^F) et l'état plastique de la matrice (σ_{eq}^M). Ceci implique que lorsque le module des fibres augmente, la contrainte dans la fibre nécessaire pour induire la déformation limite de flexion, augmente également. Toutefois cette variation de la contrainte reste faible (~

4%) en comparaison de la variation de la déformation à rupture du pli. En effet, on constate que la contrainte à rupture reste quasiment constante, si ce n'est la faible variation décrite ci-dessus. En conséquence, lorsque le module des fibres augmente, la rigidité du pli augmente également, et la contrainte à rupture est atteinte pour un chargement moindre, i.e. pour une déformation longitudinale imposée plus faible. Dans ce cas la variation de la déformation à rupture est très importante, elle est directement proportionnelle à la variation du module des fibres (**Figure D 17**). Relativement à la déformation à rupture calculée pour un module de fibre de 230 Gpa (γ_r^1 = -2.023 % pour $\phi_0 = 1°$, et $\gamma_r^{2.5}$ = -1.488 % pour $\phi_0 = 2.5°$), la déformation à rupture varie de 35 % environ quand le module des fibres augmente de 50 % (**Figure D 17**), ce qui est significatif. Toutefois il faut prendre quelques précautions afin de comparer ces résultats aux valeurs expérimentales car la fibre possède un comportement non linéaire et cet effet n'est pas pris en compte dans notre modèle.

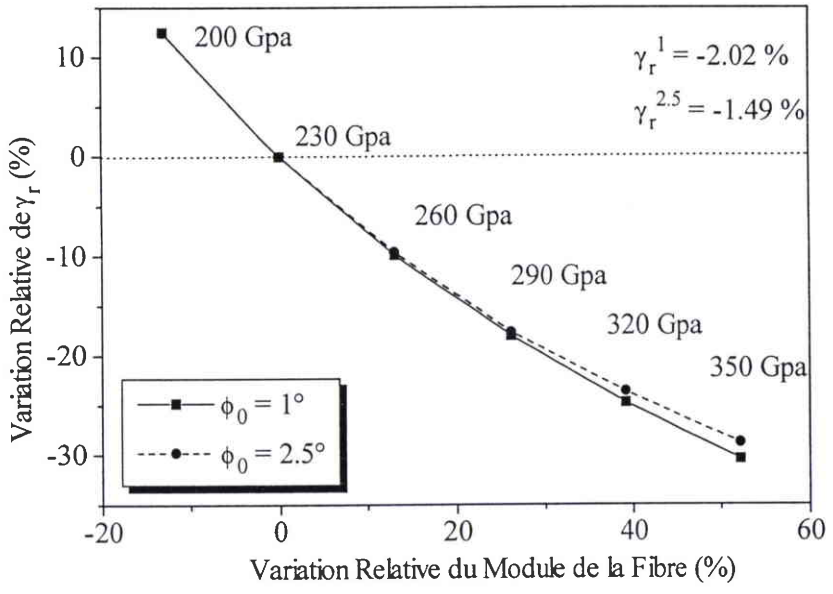


Figure D 17 : Influence relative de la variation du module de la fibre sur la déformation à rupture.

Si la variation des déformations à rupture est grande quand le module des fibres varie, en revanche la variation de contrainte est faible. Cette légère modulation peut être attribuée à la variation de la rigidité de flexion des fibres. Le rôle de la flexion des fibres sur le comportement du pli peut être clairement mis en évidence en faisant varier le rayon des fibres, et par conséquent uniquement leur rigidité de flexion. Dans ce cas, la réponse du pli change essentiellement au

voisinage de la charge limite, et surtout pour les longueurs d'onde inférieures ou proches de la longueur d'onde élastique (**Figure D 18**).

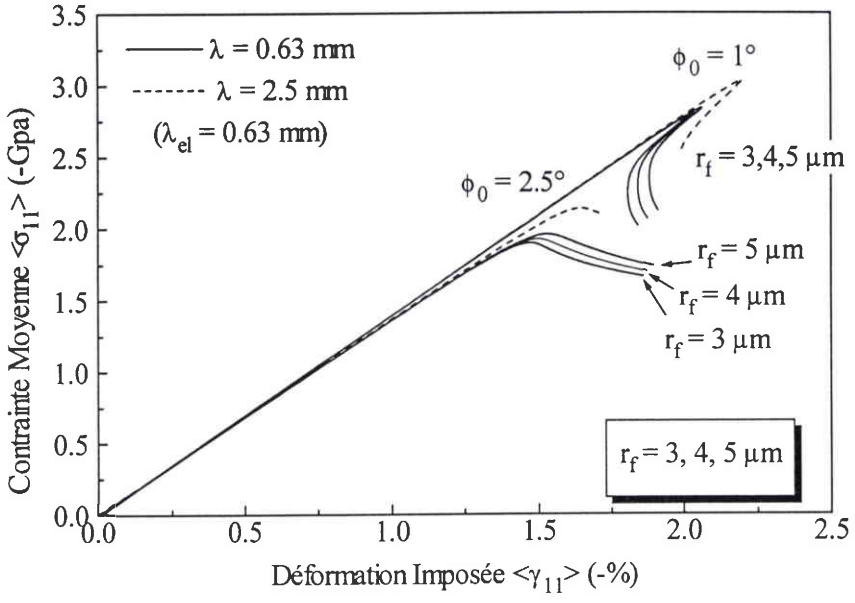


Figure D 18 : Réponse du pli affecté de 2 défauts caractéristiques pour différents rayon de fibres.

Précédemment, nous avons établi que lorsque les longueurs d'onde du défaut sont inférieures à la longueur d'onde élastique, la résistance du pli augmente (voir **Figure D 12**). Ceci peut être attribué à la rigidité de flexion qui devient plus importante pour les petites longueurs d'onde. Ces résultats confirment les conclusions de WISNOM (1993), qui attribue au maintien en flexion des fibres voisines, l'augmentation de résistance du pli lorsque les longueurs d'onde sont faibles. Les calculs (**Figure D 19**) montrent que l'effet du rayon des fibres sur la déformation à rupture est faible, mais non négligeable pour les longueurs d'onde qui nous intéressent. De plus, la rigidité de flexion est essentielle pour les grands défauts où la flèche des fibres augmente progressivement, mais elle est moins primordiale pour les faibles défauts où la compression longitudinale domine l'apparition de l'instabilité.

Dans les matériaux composites industriels, il est aussi possible de moduler la fraction volumique de fibre. C'est un paramètre important comme l'ont écrit de nombreux auteurs. Sur la **Figure D 20**, il apparaît clairement que lorsque la fraction volumique des fibres augmente, la rigidité du pli augmente également. Cet effet est similaire au cas précédent où le module des fibres variait (**Figure D 16**).

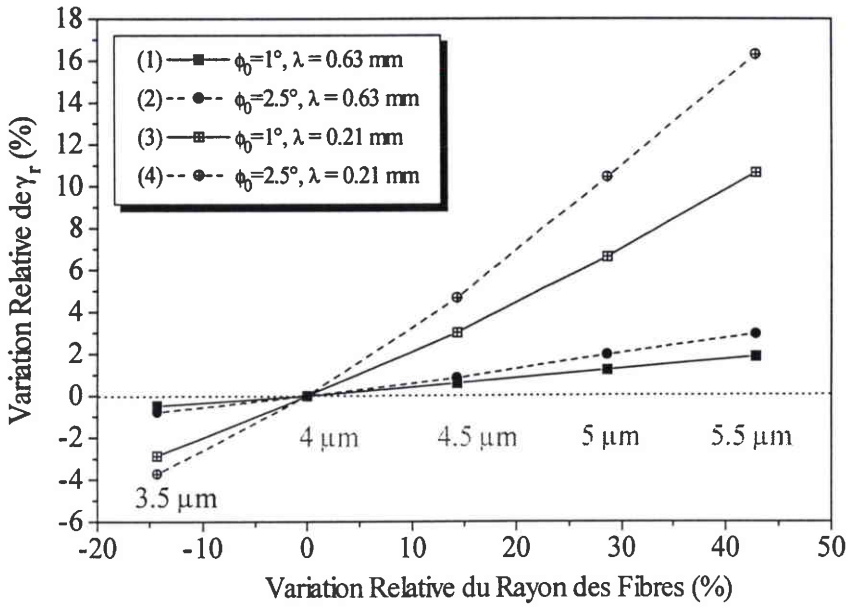


Figure D 19 : Influence de la variation du rayon des fibres sur la déformation à rupture du pli, pour 2 défauts obtenus avec 2 longueurs d'onde différentes.
Les déformations correspondant à r_f = 3.5 µm sont -2.02, -1.49, -2.26, -1.73 % respectivement pour les cas (1), (2) (3) et (4).

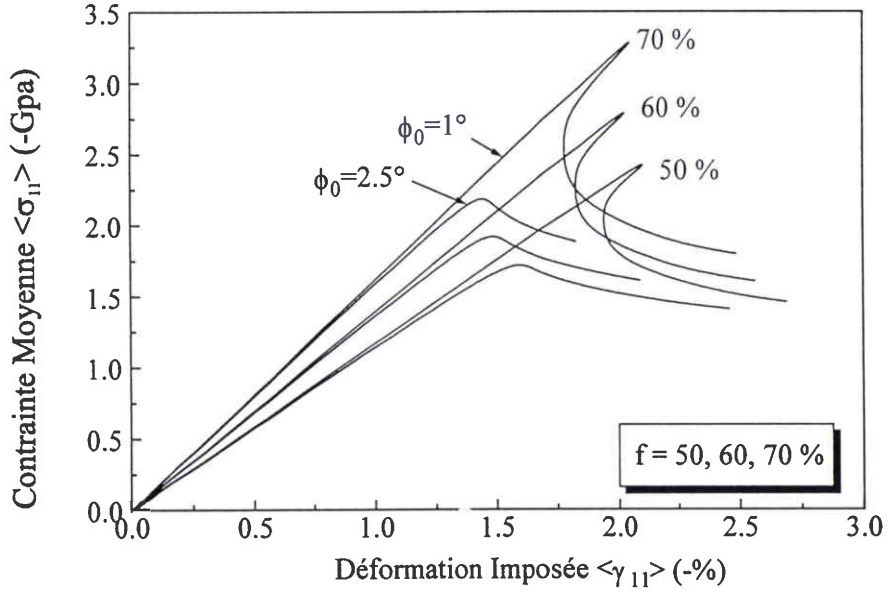


Figure D 20 : Réponse du pli affecté de 2 défauts caractéristiques pour différentes fractions volumiques de fibres.

Proportionnellement à cette augmentation de la fraction volumique de fibres, la fraction de matrice diminue, en conséquence à chargement égal elle est plus fortement sollicitée en cisaillement. Dans le Tableau D 8 sont reportées les contraintes et déformations correspondant à la charge limite. Conformément aux résultats de l'étude du mécanisme de microflambage (§2.2), les déformations de cisaillement sont prépondérantes, on constate qu'elles varient de manière significative lorsque la fraction volumique change. La rupture du pli se produit lorsque le chargement imposé est tel que la plasticité de la matrice apparaît. Par conséquent, quand la fraction de fibre augmente, la résistance est moindre car le cisaillement dans la résine est plus élevé. Toutefois les déformations à rupture ne varient pas de manière significative (**Figure D 21**), mais les contraintes varient assez fortement, en proportion de la rigidité du pli (Tableau D 8).

f (%)	ϕ_0 (°)	σ_{11} (- Mpa)	σ_{12} (± Mpa)	σ_{eq} (Mpa)	γ_{11} (- %)	γ_{12} (± %)	σ_r (- Mpa)	γ_r (- %)
50	1	92.5	85.1	162.2	2.034	7.84	2419	2.094
60	1	83	90.4	168.7	1.97	8.77	2786	2.023
70	1	87.5	95.4	175.9	2.00	9.81	3279	2.044
50	2.5	58.5	108.5	191.7	1.37	12.67	1714	1.597
60	2.5	54.5	115.1	202.3	1.28	14.62	1915	1.488
70	2.5	51.5	124.3	216.9	1.26	17.65	2181	1.443

Tableau D 8 : Contraintes et déformations dans la matrice et pour le pli entier en fonction du défaut et de la fraction volumique de fibres. Le chargement correspond au point de charge maximum.

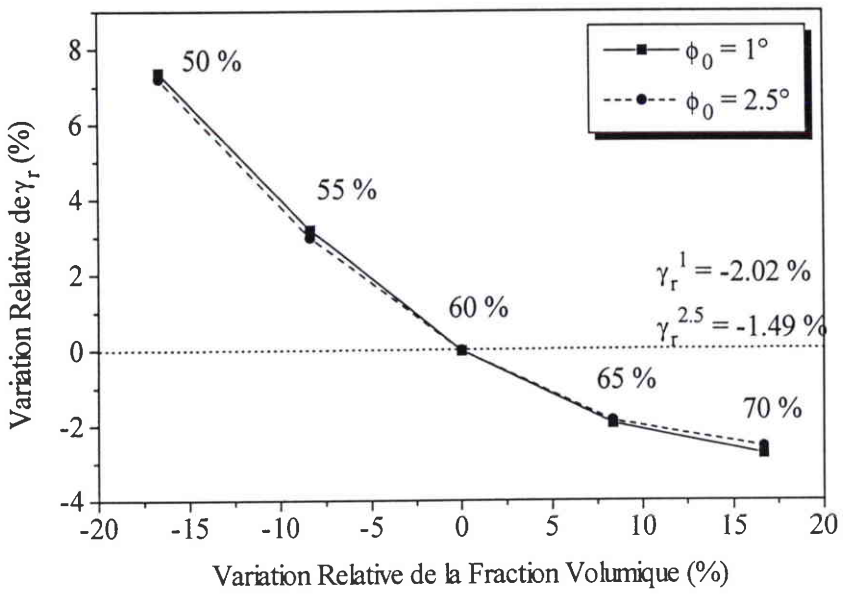


Figure D 21 : Influence de la variation de la fraction volumique sur la déformation à rupture.

2.4.2 Matrice

La loi de comportement non linéaire de la matrice joue un rôle essentiel dans le mécanisme de microflambage plastique, comme le montrent les réponses de la **Figure D 8** et de la **Figure D 10**.

En premier lieu, la forme de la réponse de la matrice (**Figure D 22**) influe assez peu sur la déformation à rupture, mais plutôt sur la façon dont progresse l'instabilité géométrique (ou l'augmentation de la flèche des fibres). L'exposant d'écrouissage indique le degré de non linéarité de la réponse de la matrice, et donc la rapidité avec laquelle chutent ses caractéristiques mécaniques lorsque l'état de contrainte augmente. Nous avons vu (§ 2.2.3) que le mécanisme d'apparition du microflambage dépend du rapport de la flexion des fibres et de la rigidité de la matrice. En conséquence, lorsque la matrice est fortement non linéaire la déformation à rupture intervient pour des chargements plus faibles. Sur la **Figure D 23**, on peut constater que les plis affectés d'un défaut de 2.5° sont beaucoup plus sensibles au changement du comportement non linéaire de la matrice que les plis avec un défaut de 1°. Ceci est directement lié à la distribution des déformations plastiques au moment où le contrainte maximale est atteinte. Dans le cas où le défaut est important, nous avons vu que les déformations plastiques sont dues aux déformations de cisaillement au point de pente maximum des fibres. Tandis que pour des défauts faibles, l'état de déformation plastique est atteint simultanément dans toute la largeur du pli. En conséquence,

dans le cas de la rupture par point limite, la résistance du pli est fortement dépendante de l'évolution des déformations plastiques localisées, et donc de l'évolution de la réponse de la matrice. Au contraire dans le cas de la rupture par instabilité, l'état de déformation plastique est plus homogène, l'instabilité apparaît brutalement et dépend beaucoup moins de l'évolution de la loi de comportement de la matrice (**Figure D 24**). Pour des coefficients d'écrouissage supérieurs à 6, la déformation à rupture change très peu et tend vers une valeur finie (**Figure D 23,** Tableau D 9) correspondant à une matrice dont le comportement est élastique puis parfaitement plastique. Dans ce cas la réponse du pli après l'instabilité est caractérisée par un retour le long de la branche élastique (**Figure D 24**) qui s'explique par l'effondrement conséquent de la rigidité de la matrice.

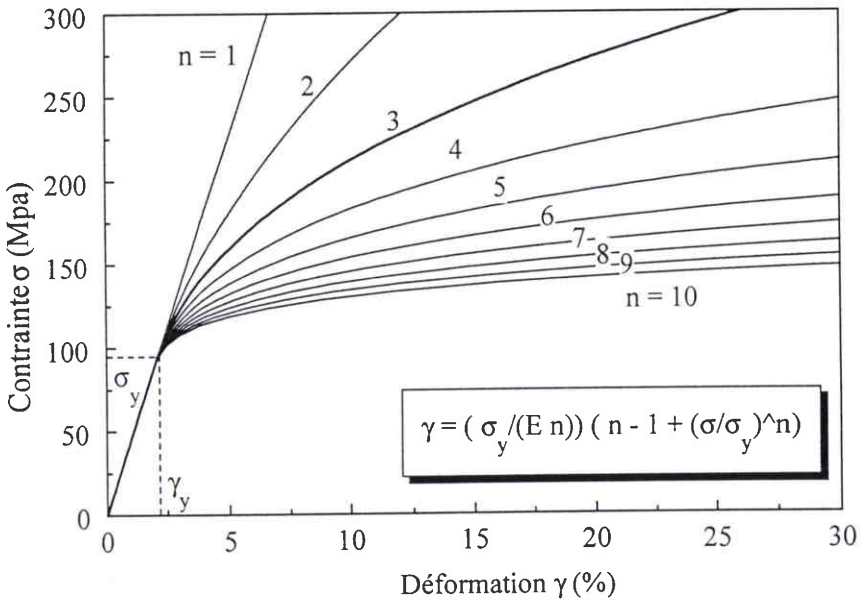


Figure D 22 : Variation de la réponse de la matrice en fonction du coefficient d'écrouissage de la loi de RAMBERG-OSGOOD.

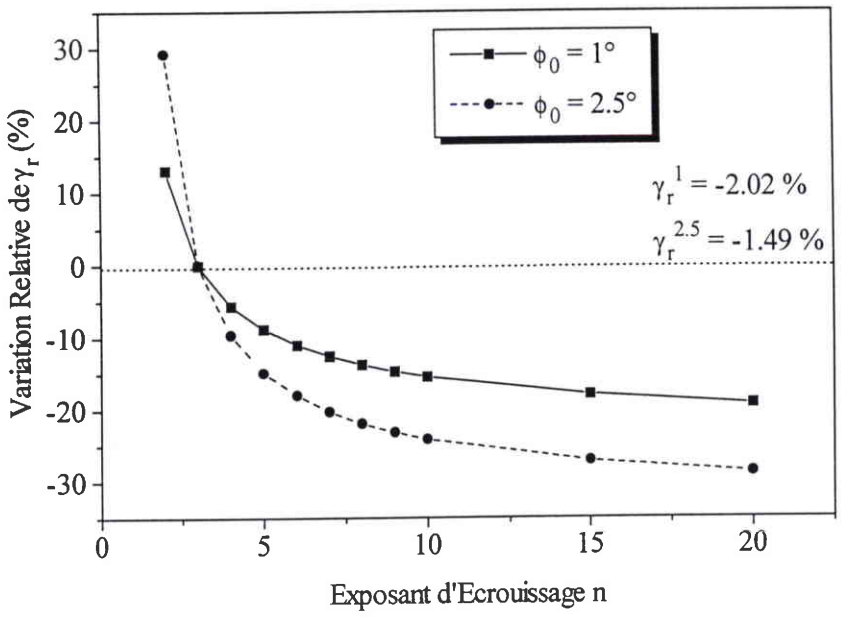


Figure D 23 : Influence du coefficient d'écrouissage de la loi de RAMBERG-OSGOOD de la matrice sur la déformation à rupture du pli.

n	ϕ_0 (°)	σ_{11} (- Mpa)	σ_{12} (± Mpa)	σ_{eq} (Mpa)	γ_{11} (- %)	γ_{12} (± %)	σ_r (- Mpa)	γ_r (- %)
2	1	99	126.7	231.2	2.19	11.92	3127	2.286
3	1	73.5	89.1	163.4	1.97	8.83	2786	2.023
4	1	90	76.9	145.8	1.91	7.45	2363	1.909
5	1	82	69.4	133.5	1.81	6.36	2549	1.843
6	1	80	65.62	126.8	1.77	6.31	2491	1.801

Tableau D 9 : Contraintes et déformations dans la matrice et pour le pli entier en fonction du coefficient d'écrouissage. Le chargement correspond au point de charge maximum.

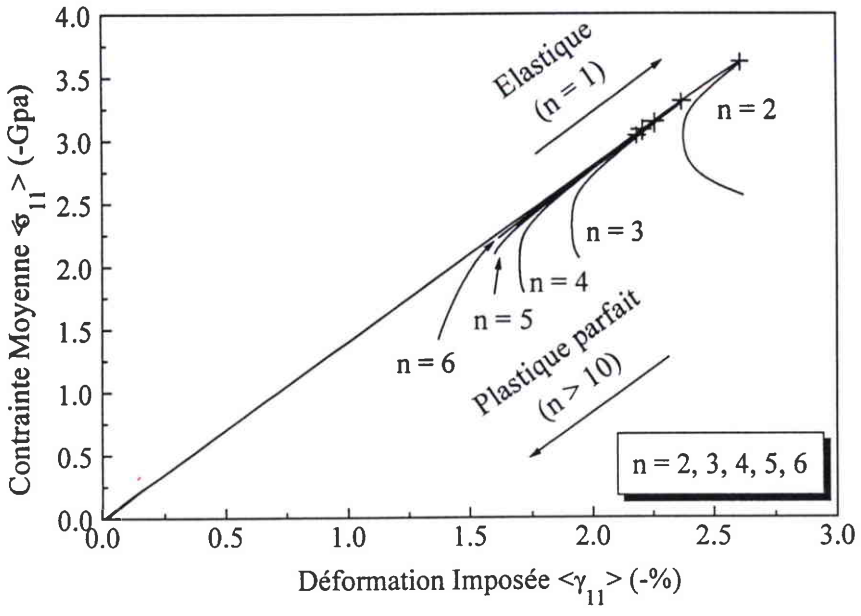


Figure D 24 : Réponse du pli affecté d'un défaut de 1° (λ=0.63 mm) pour différents exposants d'écrouissage de la loi de RAMBERG-OSGOOD.

La limite élastique de la matrice quant à elle joue un rôle essentiel dans le processus. En effet, l'apparition de l'instabilité plastique ou du point limite, qui conduit à la rupture du pli, est liée à la chute de rigidité de la matrice qui ne survient que lorsque la limite élastique est dépassée. Si la limite élastique augmente, le cisaillement nécessaire pour que la plasticité apparaisse augmente (Tableau D 10). Par conséquent, au cours de l'évolution du chargement de compression, l'apparition de la plasticité est retardée, il en résulte une amélioration de la tenue du pli (**Figure D 25**). Quelque soit le défaut, cette tendance est vérifiée comme on peut le voir sur la **Figure D26** où la variation relative de la déformation à rupture est sensiblement identique pour les défauts faibles et importants. Cette déformation semble tendre vers une limite lorsque γ_y devient grand (> 3.5 %) (**Figure D26**).

γ_y (%)	ϕ_0 (°)	σ_{11} (- Mpa)	σ_{12} (± Mpa)	σ_{eq} (Mpa)	γ_{11} (- %)	γ_{12} (± %)	σ_r (- Mpa)	γ_r (- %)
1	1	44	55.1	101.4	1.4	7.03	1982	1.442
2	1	83	90.4	168.7	1.97	8.77	2786	2.023
3	1	170.8	120	225.2	2.35	10.08	3333	2.423
1	2.5	72.4	71.7	125.2	0.86	13.08	1307	1.035
2	2.5	54.5	115.1	202.3	1.28	14.62	1915	1.488
3	2.5	77	152	269.1	1.59	16.14	2360	1.828

Tableau D 10 : Contraintes et déformations dans la matrice et pour le pli entier en fonction du défaut et de la limite élastique de la matrice.

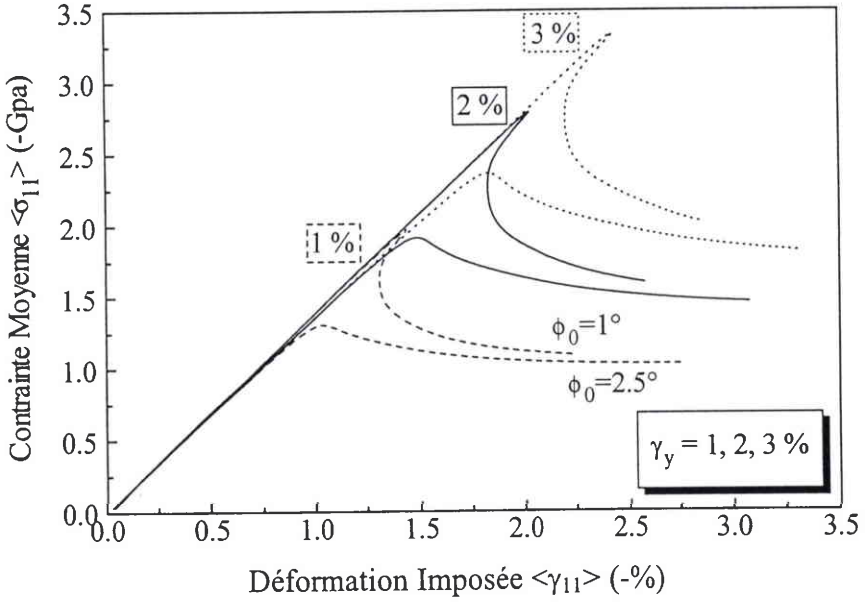


Figure D 25 : Réponse du pli affecté de 2 défauts caractéristiques pour différentes limites élastiques de la matrice.

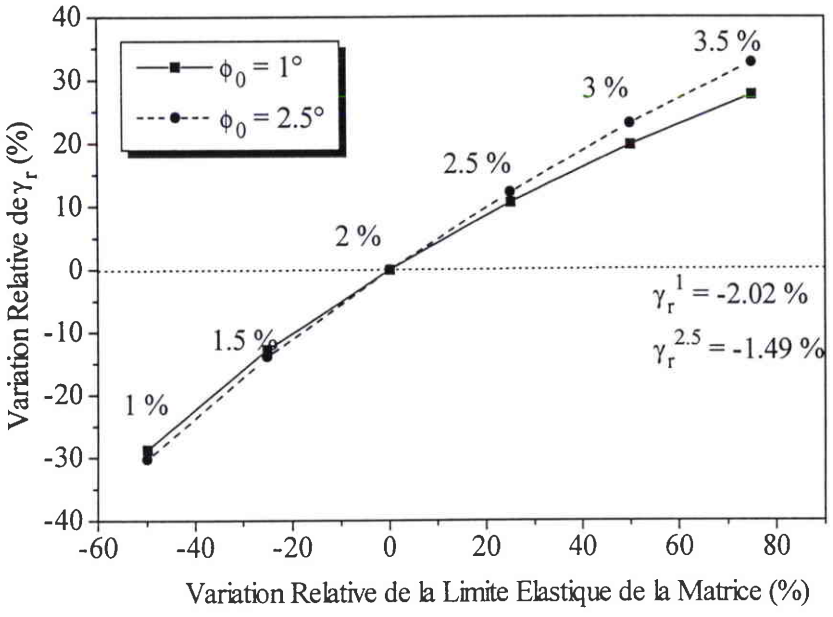


Figure D26 : Influence de la variation de la limite élastique de la matrice sur la déformation à rupture du pli.

Lorsque le module d'Young de la matrice varie (**Figure D 27**), on retrouve un effet similaire à celui de la limite élastique (Tableau D 11, **Figure D 28**), puisque la rigidité de la matrice en dépend directement. Si le module longitudinal augmente, d'une part la rigidité longitudinale est accrue, et d'autre part le module de cisaillement augmente. Par conséquent la résistance du pli est plus élevée à la fois pour les petits et les grands défauts (**Figure D 28**). La déformation à rupture varie quasiment linéairement en fonction de la variation du module de la matrice (**Figure D 29**).

E_m (Mpa)	ϕ_0 (°)	σ_{11} (- Mpa)	σ_{12} (± Mpa)	σ_{eq} (Mpa)	γ_{11} (- %)	γ_{12} (± %)	σ_r (- Mpa)	γ_r (- %)
3500	1	61.5	69.7	127.1	1.58	8.31	2239	1.635
4500	1	83	90.4	168.7	1.97	8.77	2786	2.023
5500	1	124.5	110.9	211.1	2.34	9.07	3319	2.399
3500	2.5	32.5	89.7	156.5	1.00	14.49	1521	1.211
4500	2.5	54.5	115.16	202.3	1.28	14.62	1915	1.488
5500	2.5	137.5	140.4	247.5	1.56	14.57	2310	1.763

Tableau D 11 : Contraintes et déformations dans la matrice et pour le pli entier en fonction du défaut et du module d'Young de la matrice.

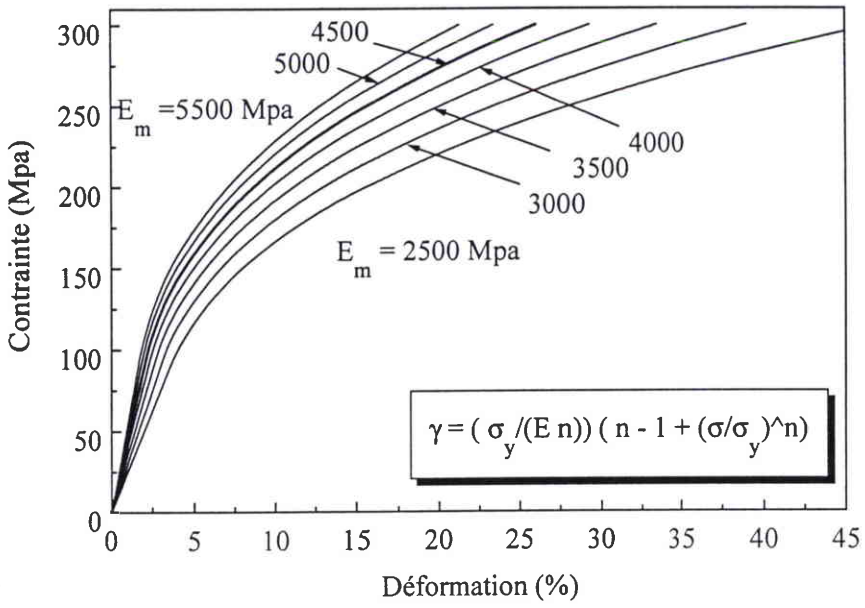


Figure D 27 : Variation de la réponse de la matrice en fonction du module d'Young de la loi de RAMBERG-OSGOOD.

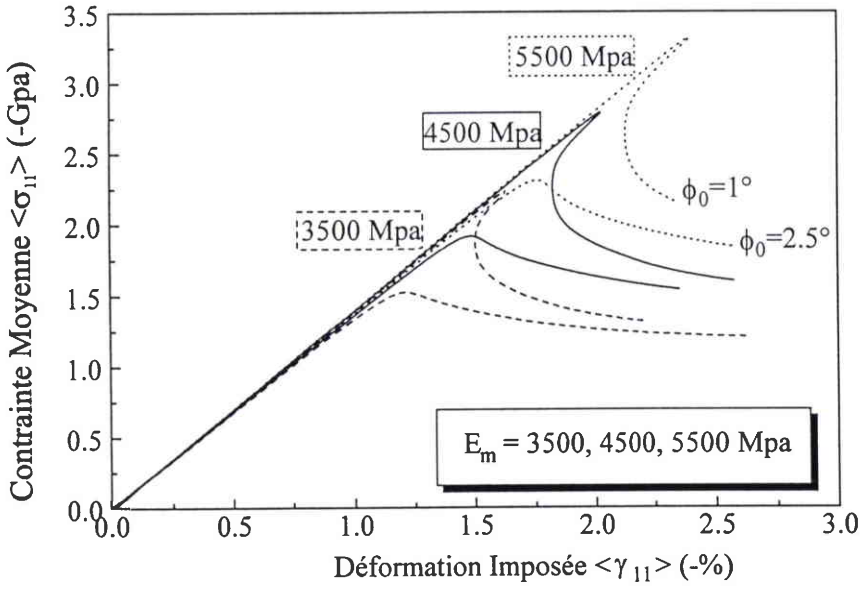


Figure D 28 : Réponse du pli affecté de 2 défauts caractéristiques pour différents modules de la matrice.

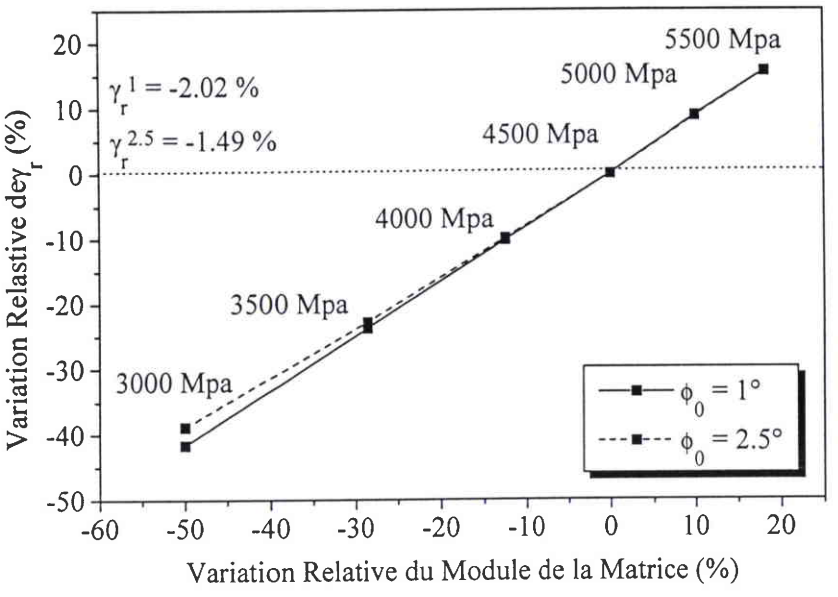


Figure D 29 : Influence de la variation du module de la matrice sur la déformation à rupture du pli.

En résumé, la variation relative de la déformation à rupture par rapport aux différents paramètres montre que la matrice joue un rôle essentiel, notamment la limite élastique, et de manière équivalente le module. Mais la fibre représente également un paramètre important d'une part parce que son module fixe la rigidité du pli et également sa résistance, et d'autre part parce que la rigidité de flexion n'a pas la même influence quand la longueur d'onde du défaut varie.

2.5 Synthèse

Le mécanisme de rupture en compression est caractérisé par 2 régimes différents selon que le défaut est faible ou plus important. Mais dans les 2 cas **l'équilibre entre la rigidité de flexion des fibres et la rigidité de la matrice est à la base de l'apparition du microflambage plastique**, c'est la façon dont la matrice atteint sa phase plastique qui diffère. Pour les défauts faibles, la contrainte de compression est en grande partie à l'origine de l'apparition de la plasticité, et pour les défauts plus importants, il s'agit du cisaillement induit par l'ondulation des fibres.

Le défaut initial des fibres est un paramètre clef de la rupture par microflambage plastique. Il peut être caractérisé par l'angle maximum que fait la fibre avec son axe théorique et où se produit la localisation des déformations plastiques qui conduit à la rupture du pli. Toutefois, cette

simplification du défaut n'est valable que dans une plage de longueurs d'onde pour lesquelles les déformations à rupture sont minimales et restent quasiment constantes pour un angle du défaut initial donné. La notion de longueur d'onde "critique" représentant cette plage de longueurs d'ondes privilégiées doit encore être précisée et définie en fonction des paramètres structuraux et mécaniques.

L'étude paramétrique des constituants valide l'approche de nombreux auteurs pour lesquels le couplage du défaut des fibres avec la plasticité de la matrice est un paramètre central de la rupture par microflambage plastique. L'influence de la limite élastique et du module de la matrice sur la résistance est confirmée. La rigidité du pli est quant à elle directement liée au module des fibres qui agit également sur la résistance à rupture. L'influence de la flexion des fibres quant à elle justifie la résistance accrue lorsque la longueur d'onde du défaut initial devient petite.

Le mécanisme de microflambage plastique étant clairement établi, l'effet des paramètres structuraux sur la rupture doit être envisagé. Nous souhaitons établir le lien entre la notion de longueur d'onde critique et l'effet de structure sur la rupture du pli.

3. EFFET DES PARAMÈTRES STRUCTURAUX SUR LA RÉSISTANCE EN COMPRESSION

Pour ces calculs quantitatifs, nous utilisons la réponse expérimentale d'une résine 914, donnée par WISNOM (1993) (**Figure D 30**). Les autres données mécaniques sont identiques à celles utilisées jusqu'à présent.

3.1 Effet des conditions aux limites

La position du pli au sein du stratifié peut être prise en compte via les conditions de déplacement imposées sur ses faces comme cela a été développé au §1.1 (voir **Figure D 1**). Dans ce paragraphe 3 cas différents sont envisagés pour un pli UD de 1.6 mm d'épaisseur soumis à de la compression. La combinaison des conditions aux limites donne en premier lieu un pli dont les 2 faces sont libres, puis un pli dont la face inférieure est bloquée et la face supérieure est libre et enfin un pli dont les 2 faces sont bloquées.

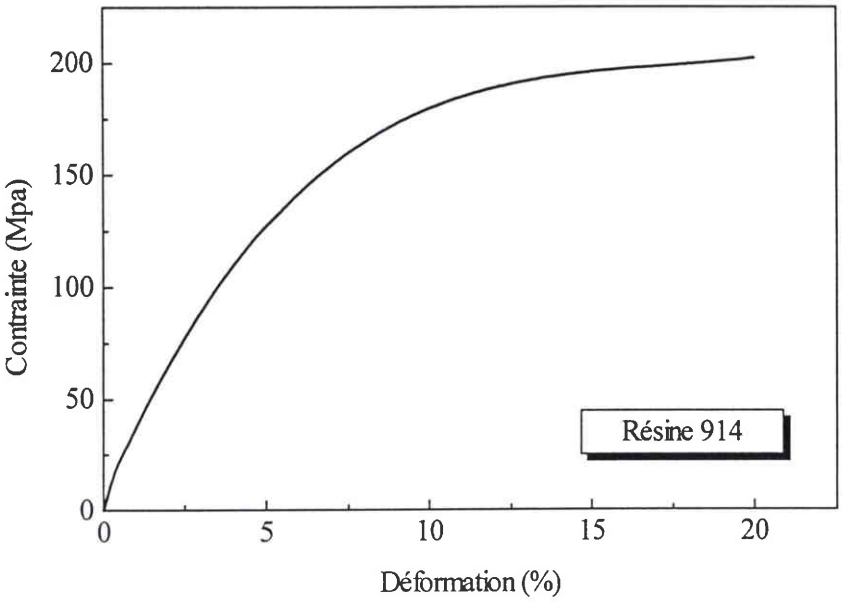


Figure D 30 : Courbe d'écrouissage en traction de la résine 914, d'après WISNOM (1993).

L'observation de la répartition des déformations prés des bords montre qu'au voisinage d'une face bloquée les déformations sont faibles et homogènes. La contrainte la plus élevée au voisinage du bord est dans ce cas la contrainte S_{22} due au déplacement transverse d'une partie des fibres vers le bord bloqué. En revanche prés d'un bord libre, une couche limite est visible comme le laissaient prévoir les calculs des modes élastiques de GRANDIDIER et al. (1996). Ces deux conditions pilotent la répartition des déformations et des contraintes dans tout le pli.

Si les 2 faces du pli sont bloquées le mécanisme de microflambage se développe au centre du pli, là où le gradient de déformation est maximum. Ce résultat est visible sur la **Figure D 32 a** où la distribution des contraintes de VON-MISES est représentée pour cette configuration. En revanche dans le cas bloqué-libre la distribution des contraintes dans l'épaisseur du pli est totalement différente. Une couche limite se développe sous le bord libre, le mécanisme de microflambage apparaît dans cette zone fortement chargée (**Figure D 32 b**). La présence de la couche limite entraîne la localisation des déformations plastiques, ce qui induit une baisse prématurée de la rigidité du pli entier. Dans le cas où les 2 bords du pli sont libres, le comportement du pli est similaire au cas bloqué-libre, la distribution des contraintes de VON-MISES montre clairement la présence d'une couche limite sous chacune des 2 faces (**Figure D 31**). La baisse de la résistance associée à la présence d'un bord libre apparaît clairement sur la

Figure D 33 où sont reportées les réponses du pli pour les 3 cas de conditions aux limites envisagés.

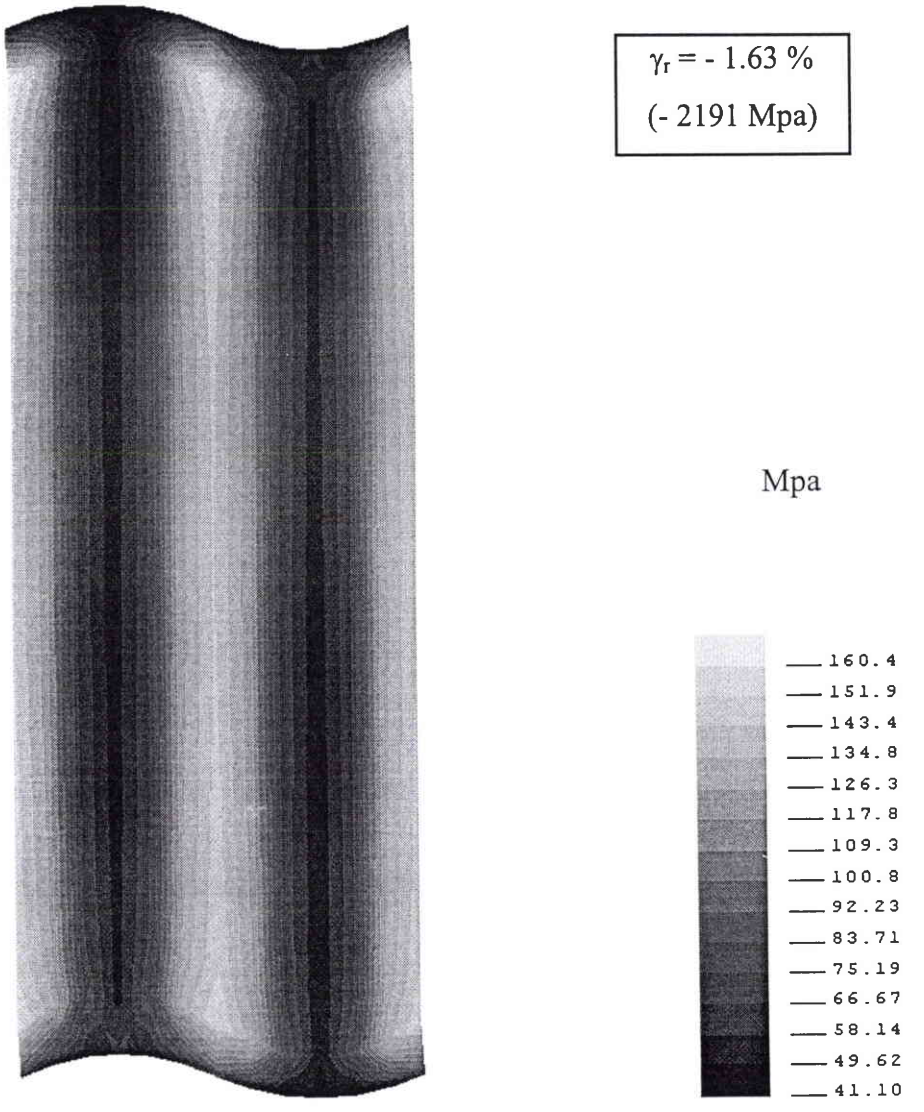


Figure D 31 : Distribution des contraintes de VON-MISES dans la matrice pour un pli de 1.6 mm en compression, libre - libre. Le défaut est de 1°, sa longueur d'onde est λ = 0.63 mm. Le chargement correspond à la déformation à rupture.

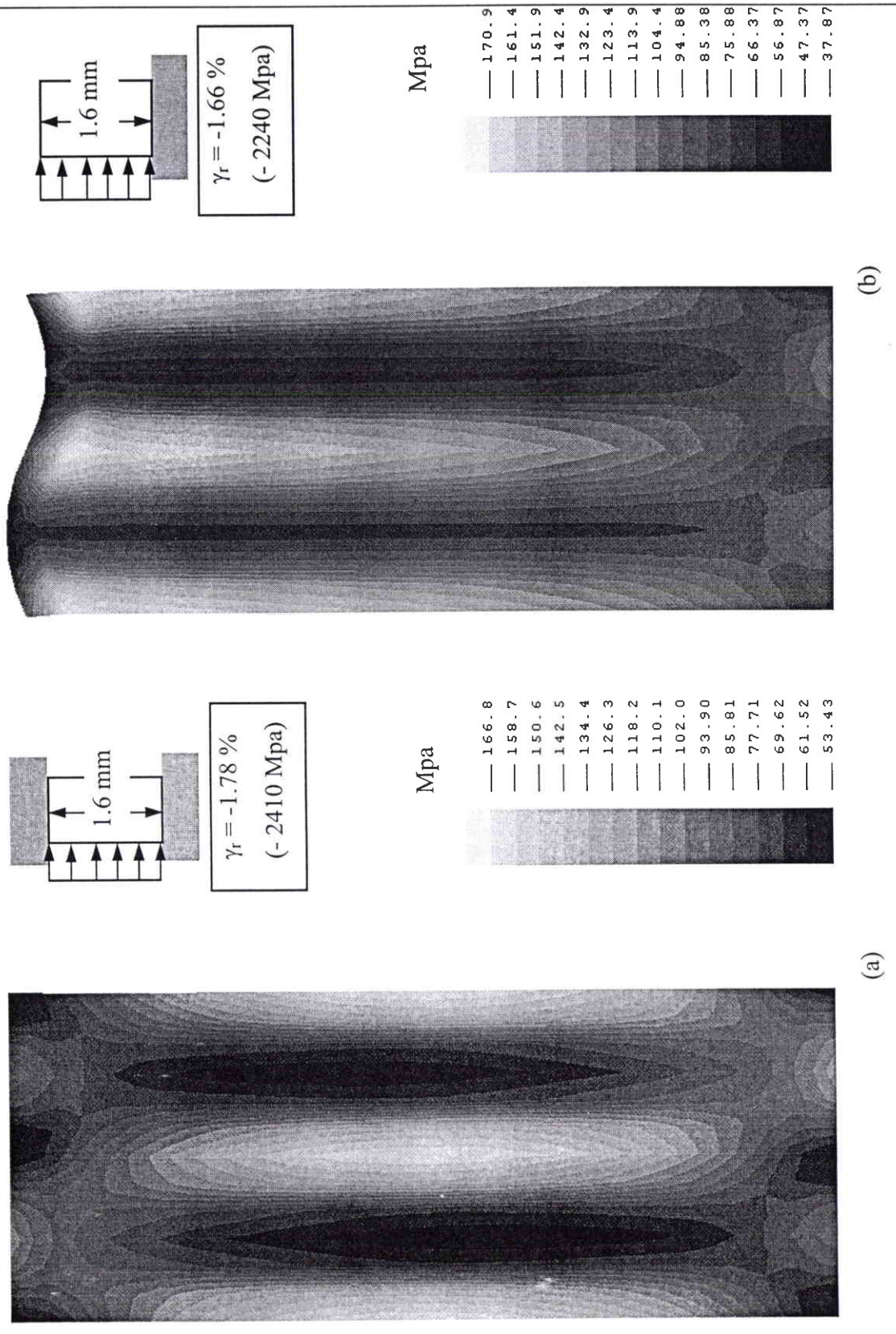


Figure D 32 : Distribution des contraintes de VON-MISES dans la matrice, pour un pli UD de 1.6 mm d'épaisseur en compression. Le défaut est de 1° et sa longueur d'onde λ = 0.63 mm (déformée * 10).

Le chargement correspond à la déformation à rupture et les conditions aux limites sont (a) bloqué - bloqué , (b) bloqué - libre.

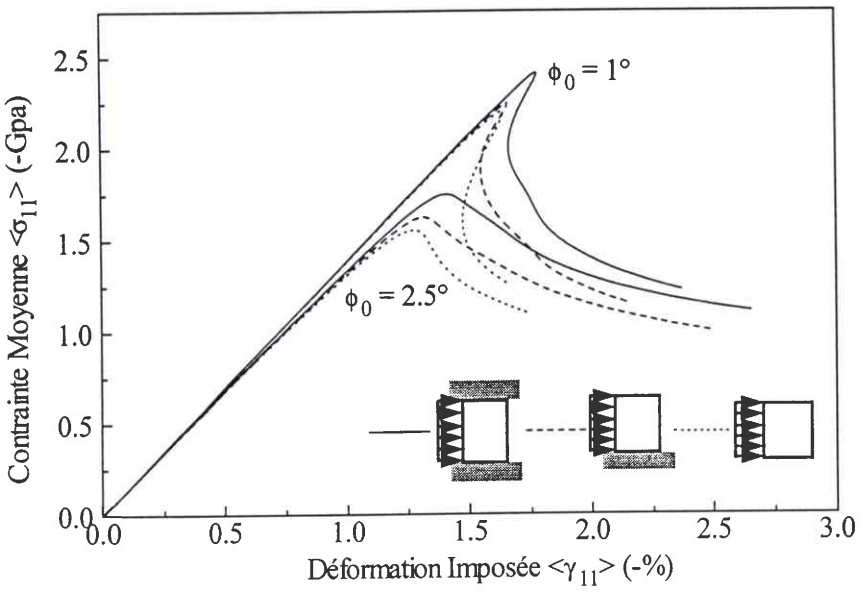


Figure D 33 : Réponses du pli UD de 1.6 mm d'épaisseur en compression, pour des conditions aux limites bloqué-bloqué, bloqué-libre et libre-libre.
Les défauts sont de 1° et 2.5° avec $\lambda = 0.63$ mm.

Pour les 2 défauts considérés sur la **Figure D 33**, on observe une différence de résistance significative entre le pli bloqué-bloqué et le pli bloqué-libre. Le comportement du pli libre-libre est assez proche de celui du pli bloqué-libre, ils diffèrent légèrement pour les défauts importants où l'effet des 2 couches limites devient très pénalisant. Mais cette faible différence de comportement se traduit essentiellement par une baisse de la contrainte supportée par le pli, la déformation à rupture reste sensiblement inchangée puisque l'écart est inférieur à 0.02 % pour les défaut considérés. Pour ces 2 cas, il semble que la présence d'une couche limite suffit à abaisser de manière similaire la résistance. Par contre la différence entre la résistance obtenue avec un pli bloqué-bloqué et bloqué-libre est plus marquée, la déformation à rupture est plus élevée d'environ 0.15 % lorsque les 2 bords du pli sont bloqués. A défaut angulaire constant, pour les deux conditions aux limites (bloqué-bloqué et bloqué-libre) il apparaît que lorsque la longueur d'onde du défaut diminue, la résistance du pli évolue et devient minimum pour une longueur d'onde identique à celle calculée dans le cas élastique, puis augmente de nouveau pour les très petites longueur d'onde. On retrouve la tendance mise en évidence sur le pli épais (§2.3.1), mais qui cette fois est plus ou moins marquée suivant les conditions aux limites envisagées. À longueur d'onde identique, dans tous les cas la configuration bloqué-bloqué est plus résistante que le cas bloqué-libre, et cette différence varie avec la longueur d'onde. Cette tendance est

visible sur l'évolution des déformations à rupture reportées en fonction de l'amplitude du défaut angulaire et de sa longueur d'onde (**Figure D 34**, **Figure D 35**). Ces courbes sont représentées à la même échelle pour les 2 cas.

En revanche, pour le cas libre-libre, si la résistance augmente bien quand la longueur d'onde diminue, il n'existe pas de longueur d'onde pour laquelle les déformations à rupture sont minimales. Cette tendance peut être observée sur la **Figure D 36** (page 172) où est reportée l'évolution de la déformation à rupture en fonction de l'angle et de la longueur d'onde du défaut. Ce comportement est spécifique au cas où les 2 faces du pli en compression sont libres, il a été déjà exposé dans GRANDIDIER et al. (1993). Lorsque la longueur d'onde devient de grandeur comparable à la taille du pli, le mode se rapproche de celui d'un mode de flambage global. En parcourant la courbe de stabilité neutre du pli à partir des grandes longueurs d'onde, les modes montrent clairement le passage continu de l'état de flambage global à l'état de microflambage. Ce cas particulier d'un pli libre-libre présente un certain intérêt puisque cette configuration correspond aux essais de compression directe réalisés sur des éprouvettes unidirectionnelles. Toutefois, il faut être prudent dans l'explication des résultats du cas libre-libre, car dans notre approche la longueur d'onde caractéristique fixant le flambage global n'est pas prise en compte à l'échelle mésoscopique. Le flambage global est définit par les conditions aux limites appliquées sur la structure. Cet effet est pris en compte dans le champ de déplacement du problème global (flexion ou compression). Si une instabilité globale apparaît il faut appliquer à l'échelle mésoscopique un chargement de flexion-compression.

En conclusion, les conditions aux limites du pli fixent la distribution des contraintes dans l'épaisseur du pli. Un bord libre induit une couche limite dans laquelle se localisent les déformations plastiques de microflambage, tandis qu'un bord bloqué fournit un maintien latéral qui augmente la résistance. En conséquence, un pli en surface du stratifié possède une résistance moindre due à la présence de la couche limite, tandis qu'un pli situé dans le stratifié a une résistance accrue. On observe d'ailleurs expérimentalement des déformations à rupture élevées sous sollicitation de compression pure avec des éprouvettes où les plis UD sont maintenus entre des plis croisés transverses. Dans le cas où les déplacements sur les 2 faces du pli sont laissés libre, la résistance du pli est de l'ordre de celle obtenue dans le cas bloqué-libre, avec la particularité de l'apparition du flambage global pour les grandes longueurs d'onde lorsque le chargement est de la compression pure.

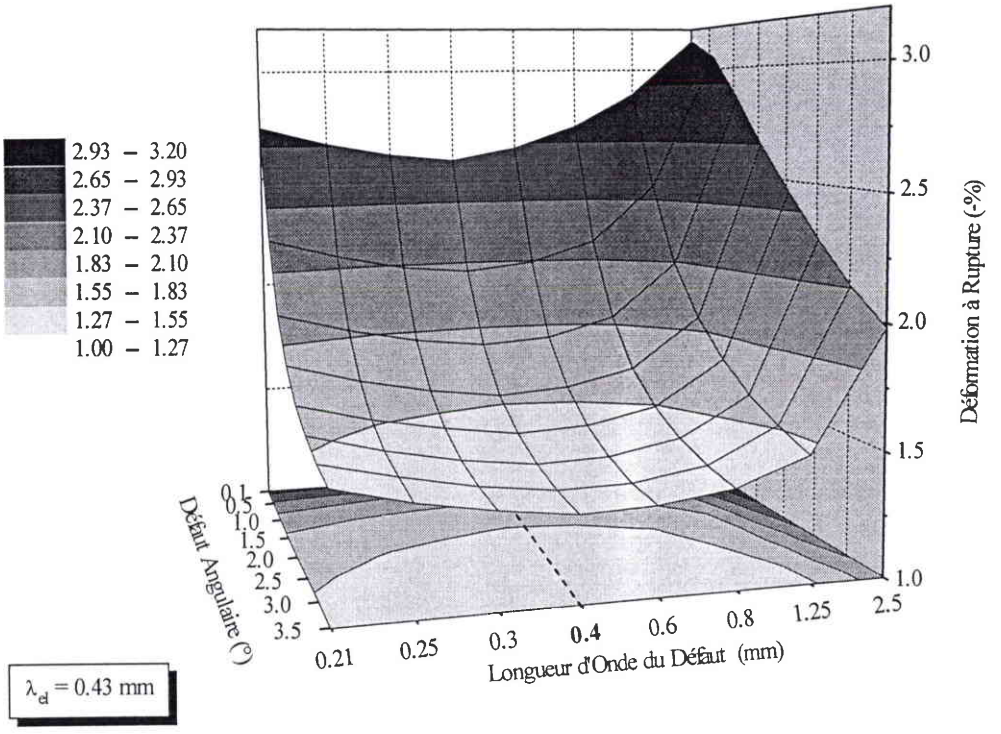


Figure D 34 : Évolution des déformations à rupture du pli, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde. Pli de 1.6 mm en compression, bloqué-bloqué.

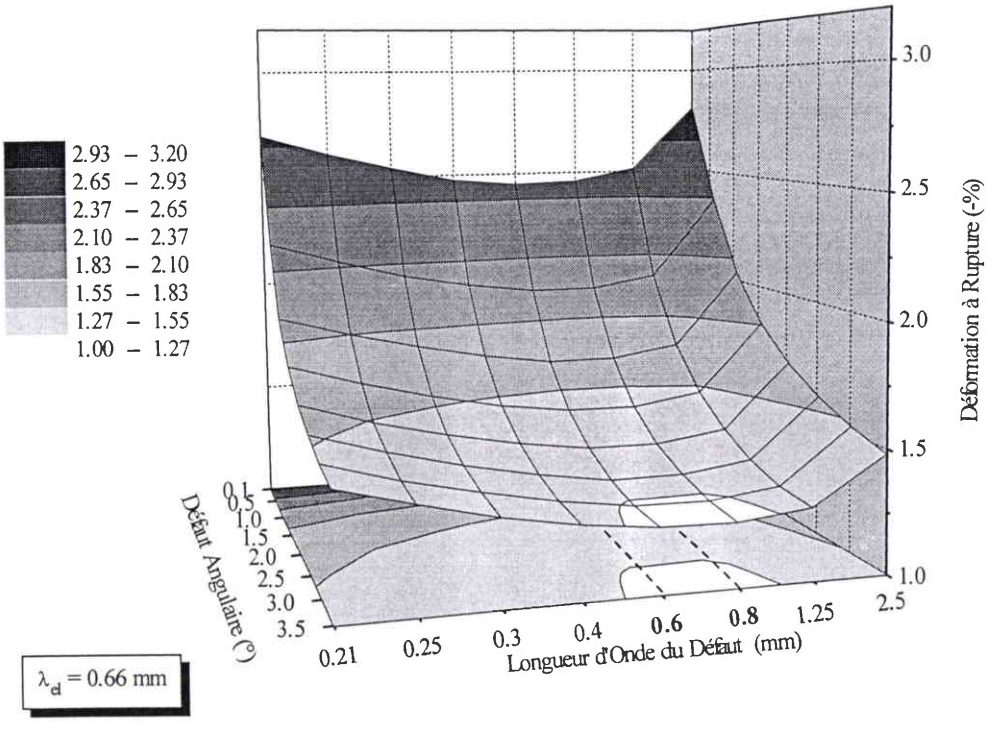


Figure D 35 : Évolution des déformations à rupture du pli, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde. Pli de 1.6 mm en compression, bloqué-libre.

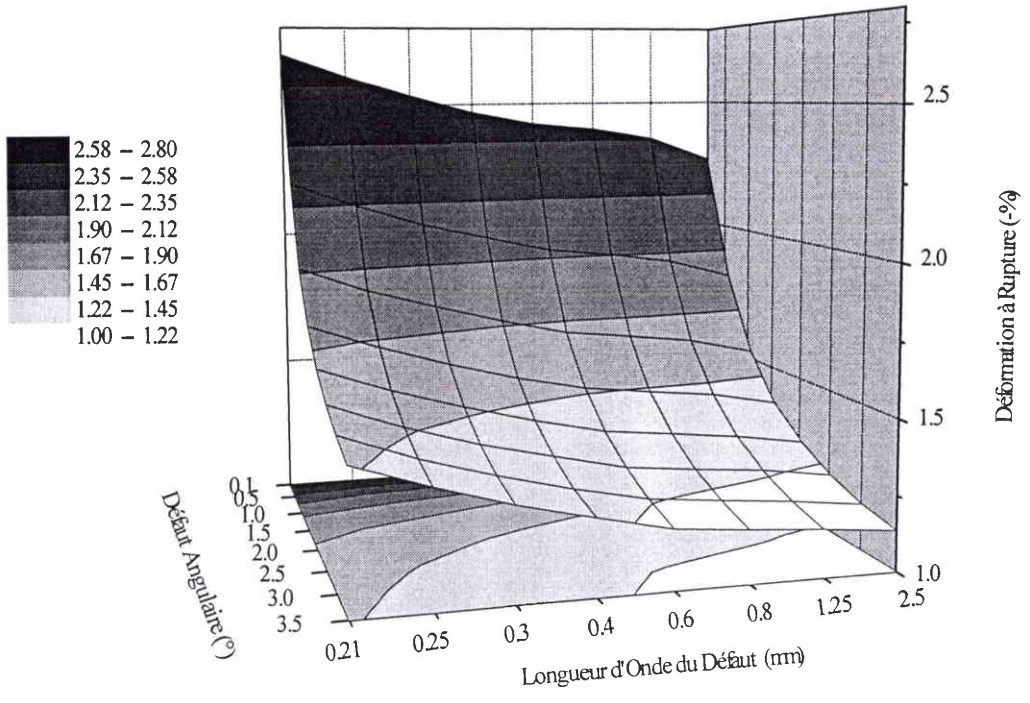


Figure D 36 : Évolution des déformations à rupture du pli, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde. Pli de 1.6 mm en compression, libre-libre.

3.2 Effet du chargement

Dans le cas d'un chargement de flexion, seule la zone en compression est modélisée. On suppose que la face inférieure est bloquée et que le chargement imposé y est toujours nul. La face externe quant à elle supporte la déformation appliquée maximale, cette face est soit libre soit bloquée. Pour les 2 conditions aux limites, le gradient de déformation appliquée a pour effet d'augmenter la contrainte dans la partie supérieure tout en soulageant la partie inférieure du pli. Mais la distribution des contraintes dans la partie supérieure du pli fortement sollicitée dépend étroitement des conditions cinématiques imposées sur la face correspondante. Si la face externe est libre (**Figure D 37 b**), le microflambage se développe dans la couche limite **dont l'effet est amplifié** par le chargement. Si au contraire le bord est bloqué (**Figure D 37 a**), le mécanisme de microflambage se développe dans la partie supérieure du pli où le gradient de déplacement est le plus élevé, et des surcontraintes S_{22} apparaissent dues au déplacement transverse d'une partie des fibres prés du bord bloqué.

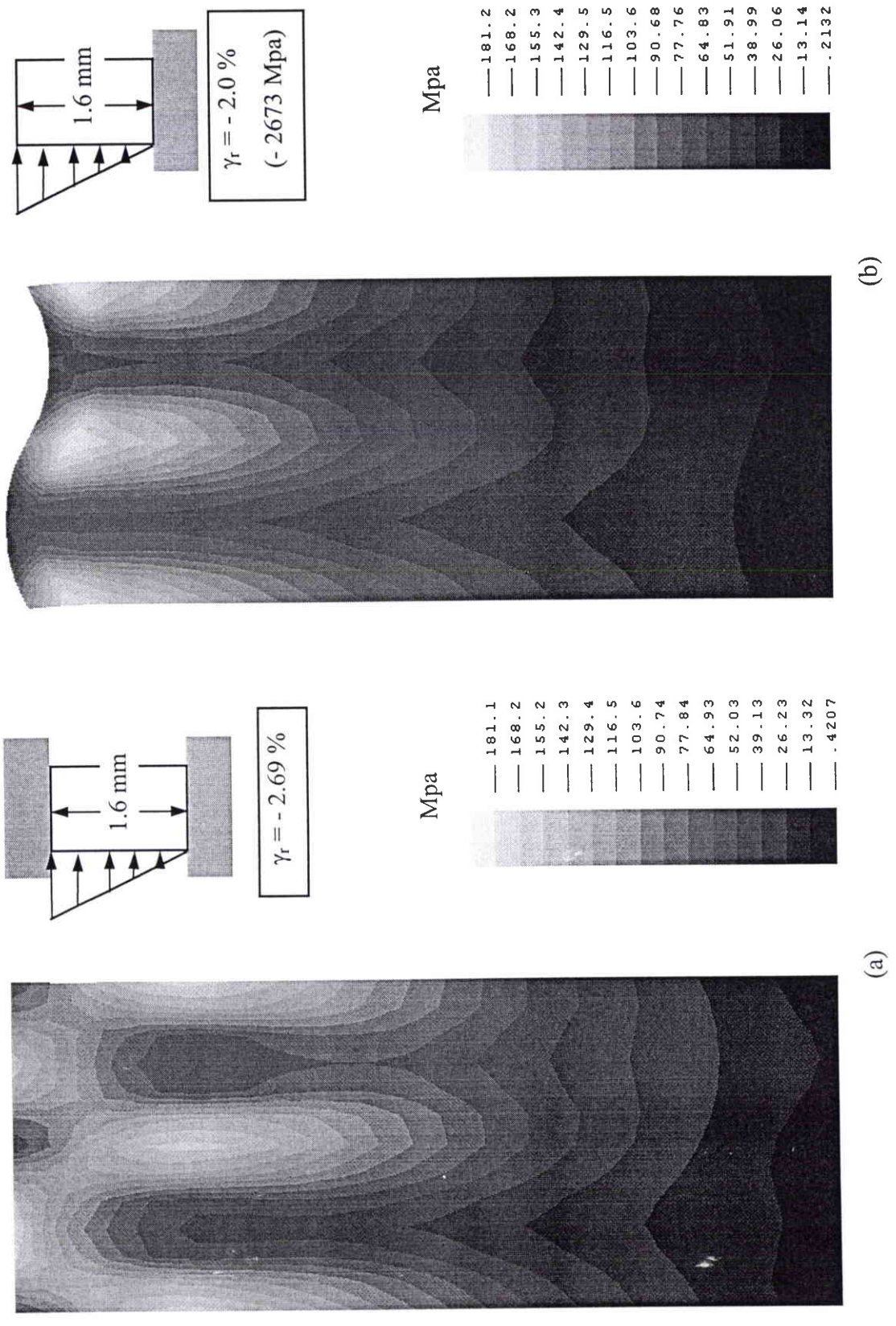


Figure D 37 : Distribution des contraintes de VON-MISES dans la matrice, pour un pli UD de 1.6 mm d'épaisseur en flexion - compression affecté d'un défaut de 1° pour λ = 0.63 mm (déformée * 10).

Le chargement correspond à la déformation à rupture et les conditions aux limites sont (a) bloqué - bloqué , (b) bloqué - libre

Dans le cas d'un bord libre, sous une sollicitation de compression et de flexion on observe une diminution de la contrainte longitudinale qui règne sur la face externe alors que la contrainte moyenne augmente toujours. Ce processus apparaît juste avant la rupture, il se développe jusqu'à affecter la contrainte moyenne qui chute à son tour, ce qui conduit à l'apparition de l'instabilité. Dans ce scénario, la rupture est caractérisée par la chute de contrainte sur la face externe. Ce processus se retrouve expérimentalement dans les essais de flexion. En effet la chute de contrainte sur la face externe peut être associée à l'apparition du microflambage superficiel (voir **Figure B2)** qui n'affecte pas la rigidité du pli puisque dans ce cas le chargement appliqué sur l'éprouvette peut être augmenté. En revanche dans les essais de compression pure, la chute de la contrainte superficielle conduit très rapidement à la diminution de la contrainte moyenne et donc à l'instabilité.

Sous un chargement de flexion, ce phénomène de la chute locale de la contrainte longitudinale est observé également lorsque le bord en compression est bloqué. En effet dans ce cas le chargement supporté est élevé, il induit un gradient de déplacement près du bord du même ordre de grandeur que dans le cas d'une couche limite (voir contraintes **Figure D 37**). Sur la **Figure D 38 a**, l'évolution de la contrainte longitudinale est tracée pour différents pas de calculs. Il apparaît que ni la contrainte sur la face supérieure, ni la contrainte moyenne ne chutent lorsque le chargement augmente. Toutefois on observe **localement** une baisse de la contrainte longitudinale à l'altitude de 1200 µm (**Figure D 38 b**), qui conduit généralement pour un chargement très élevé à la chute de la contrainte qui règne sur la face supérieure. Ce type de comportement apparaît lorsque la longueur d'onde du défaut est très proche de la longueur d'onde élastique, et il se produit pour des défauts de moins en moins importants lorsque la longueur d'onde diminue encore. La chute de résistance observée classiquement avec l'augmentation de l'amplitude du défaut n'est plus systématique. Il paraît raisonnable de supposer que la rupture du pli se produit expérimentalement lorsque la moindre faiblesse apparaît. Par conséquent, dans le cas de la flexion d'un pli dont les 2 bords sont bloqués, nous considérerons comme déformation à rupture la déformation imposée correspondant à la chute de contrainte sous le bord bloqué, même si la contrainte moyenne ne diminue pas. Ces situations sont repérées par des points sur la **Figure D 39**.

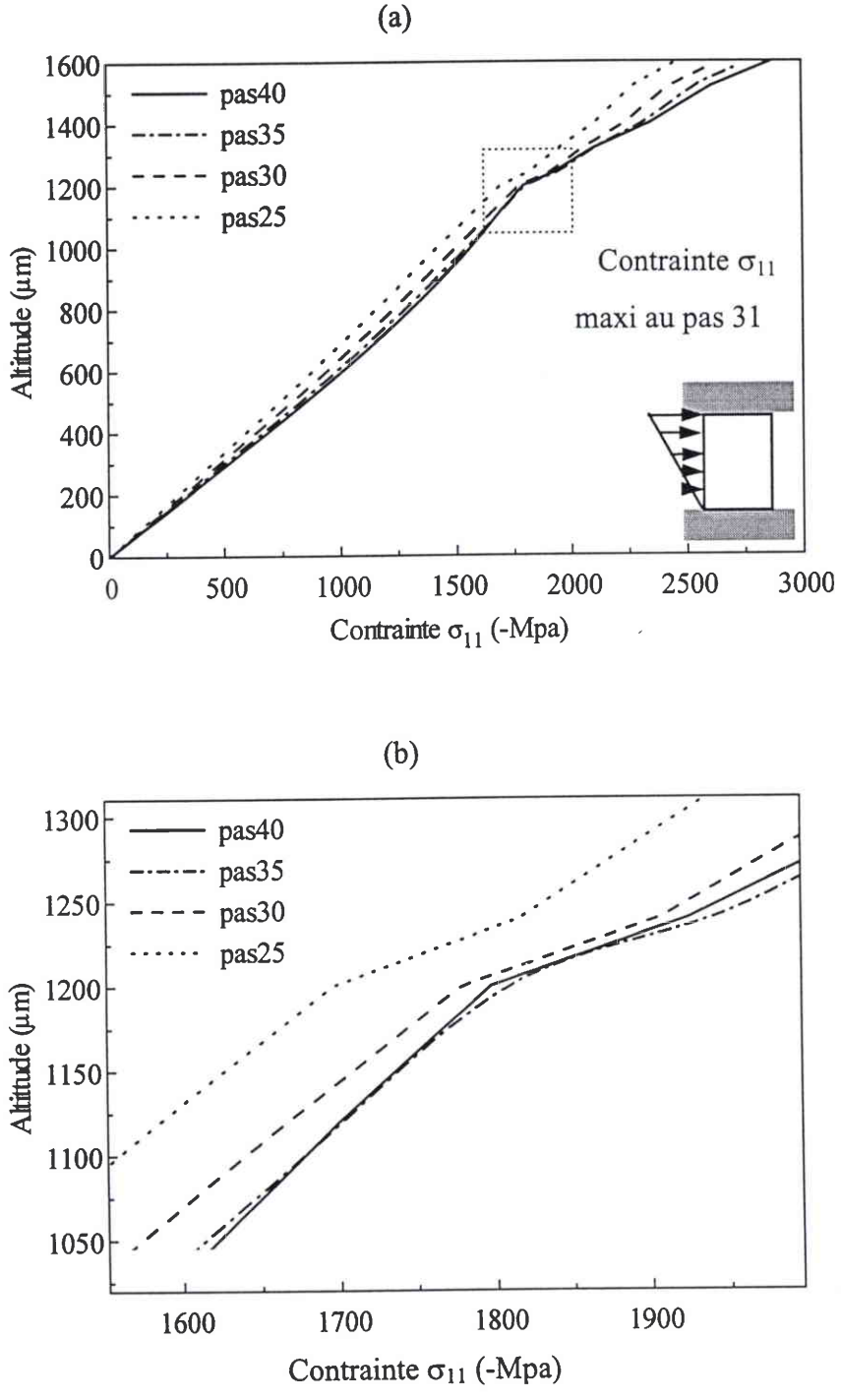


Figure D 38 : Contrainte longitudinale dans l'épaisseur du pli, à différents pas du chargement, pour un UD de 1.6 mm en flexion-compression, bloqué-bloqué (**Figure D 39**).

Le défaut est de 2° et $\lambda = 0.125$ mm. La figure (b) est un détail de la figure (a).

Comme dans le cas de la compression, sous une sollicitation de flexion-compression la résistance du pli dépend de la longueur d'onde du défaut, et elle est minimale pour la longueur d'onde élastique. Le chargement de flexion augmente l'effet des conditions aux limites imposées sur le bord supérieur, la différence est nettement visible en comparant la **Figure D 39** avec la **Figure D 40** où sont reportées les déformations à rupture en fonction de l'angle du défaut et de sa longueur d'onde. Dans le cas bloqué-bloqué, les déformations sont de l'ordre de 2.5 - 3.5% tandis que lorsque le bord supérieur du pli est libre, elles sont plutôt comprises entre 2 et 2.5%.

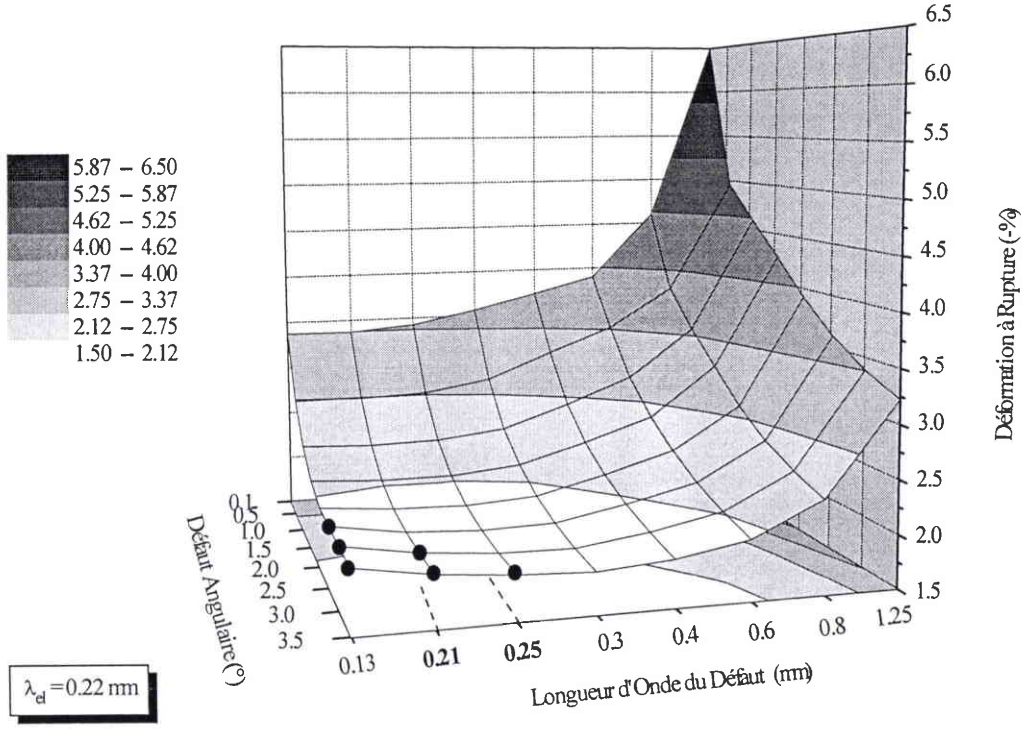


Figure D 39 : Évolution des déformations à rupture du pli, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde. Pli de 1.6 mm en flexion-compression, bloqué-bloqué.

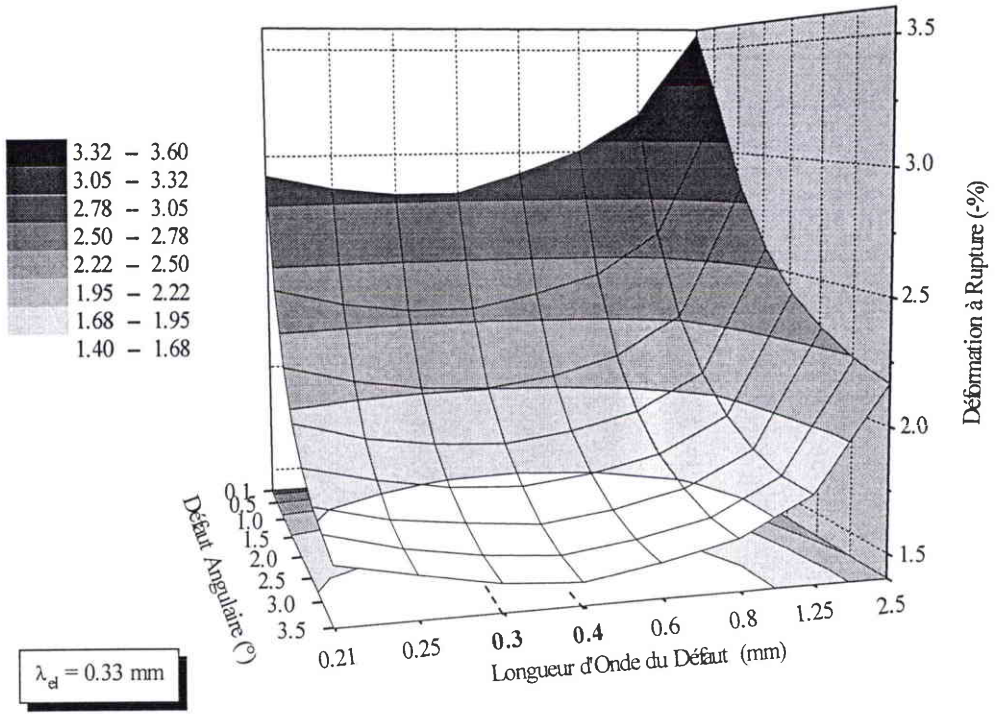


Figure D 40 : Évolution des déformations à rupture du pli, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde. Pli de 1.6 mm en flexion-compression, bloqué-libre.

3.3 Comparaison compression / flexion-compression

Comme nous l'avons vu dans la partie A, les essais de flexion permettent d'atteindre des valeurs à rupture bien supérieures à celles obtenues en compression pure. En comparant la répartition de contraintes de la **Figure D 32** (compression) et de la **Figure D 37** (flexion-compression), on peut expliquer les observations expérimentales. Le gradient de chargement dans l'épaisseur du pli engendre une faible sollicitation de la partie inférieure du pli. En conséquence, une faible épaisseur , localisée dans la partie supérieure, supporte le chargement de compression imposé par la flexion. Il en résulte une résistance accrue en flexion-compression. Cet effet du chargement couplé avec les conditions aux limites est quantifié en comparant les réponses de plis de 1600 µm soumis aux 2 types de chargement avec différentes conditions aux limites.

La comparaison de la réponse en compression et en flexion est possible lorsqu'un des bords est libre car la contrainte qui règne sur la face supérieure dépend dans les 2 cas de la même

déformation imposée. Mais lorsque les 2 bords sont bloqués cette contrainte n'est plus représentative, pas plus que la contrainte moyenne dans le pli. On peut toutefois comparer les déformations à rupture obtenues pour les 2 chargements, combinés avec les 2 types de conditions aux limites, en fixant la longueur d'onde du défaut (**Figure D 41**). On peut observer que quel que soit le défaut et pour une épaisseur constante du pli, la résistance varie de manière similaire pour les 4 cas envisagés, avec toutefois une sensibilité au défaut plus grande pour la flexion bloqué-bloqué. La flexion donne une résistance à rupture plus élevée que la compression grâce à l'effet du gradient de déformation dans l'épaisseur du pli. Mais la présence d'un bord libre est accentuée par ce chargement. En conséquence, la résistance est maximale pour un pli en flexion bloqué-bloqué, et minimale pour un pli en compression bloqué-libre. On retrouve les tendances décrites dans les essais en partie A qui montrent que les essais de flexion donnent des résistances à rupture plus élevées qu'en compression pure.

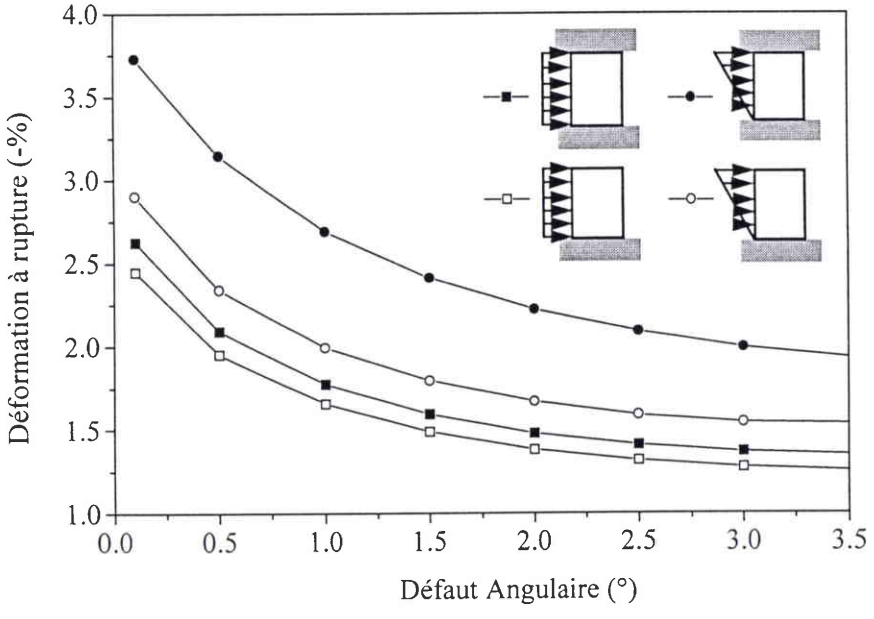


Figure D 41 : Déformation à rupture en fonction du défaut angulaire pour les 2 chargements appliqués au pli de 1.6 mm qui peut être bloqué-bloqué ou bloqué-libre. La longueur d'onde du défaut est de 0.63 mm.

L'effet des conditions aux limites et du chargement sur le comportement en compression du pli est clairement établi. Dans la partie A, nous avons vu aussi que la taille des plis testés est également un paramètre qui est significatif dans certains essais, notamment en flexion (WISNOM, 1993). L'introduction de ce paramètre supplémentaire nécessite de reconsidérer

l'effet des conditions aux limites et du chargement qui varie lorsque l'épaisseur du pli est modifiée.

3.4 Effet de l'épaisseur du pli

Comme l'a montré WISNOM (1993), la résistance en compression dépend de l'épaisseur des plis unidirectionnels. Dans ce paragraphe, différentes simulations sont menées sur des plis d'épaisseurs diverses. L'interaction avec le chargement et les conditions aux limites appliquées au pli est également envisagée.

3.4.1 Influence des conditions aux limites quand l'épaisseur du pli varie

La variation de l'épaisseur du pli a pour effet de modifier le gradient de déplacement transverse dans cette direction. En conséquence, la distribution des contraintes dans la hauteur du pli est affectée d'une part par les conditions aux limites et le chargement, comme nous venons de le voir, mais d'autre part par son épaisseur.

Sur la **Figure D 43** sont reportées les distributions des contraintes de VON-MISES pour des plis de 0.8 mm et 0.4 mm d'épaisseur en compression, bloqué-bloqué et bloqué-libre. On peut noter que la taille de la couche limite présente dans le cas d'un bord libre reste relativement constante (~ 0.2 mm) pour les 2 épaisseurs considérées (**Figure D 43 (b1) (b2)**, page 181). En revanche lorsque les 2 bords sont bloqués, la zone centrale dans laquelle apparaît habituellement le microflambage pour les plis plus épais (voir **Figure D 32**), n'est plus présente pour le pli à 0.4 mm. Ce sont les contraintes transverses près des bords bloqués qui prédominent dans la distribution de l'écoulement plastique de la matrice (**Figure D 43 (a2)**). Dans ce cas, l'état de contrainte est très homogène et la résistance augmente fortement lorsque l'épaisseur du pli diminue.

En résumé, la résistance du pli augmente quand son épaisseur diminue, mais dans le cas d'un bord libre le gradient de déplacement dans l'épaisseur reste élevé (couche limite), il ne permet pas une augmentation de la résistance aussi importante que lorsque les 2 bords sont bloqués (**Figure D 42**).

Sur la **Figure D 42**, on peut de plus remarquer que lorsque le pli devient fin, sa résistance augmente fortement pour les faibles défauts, surtout pour les plis dont les 2 faces sont bloquées. La variation de la résistance du pli en fonction du défaut est dans ce cas (**Figure D 44**) plus prononcée que pour un pli bloqué-libre (**Figure D 45**), notamment sa sensibilité à l'amplitude du défaut angulaire reste forte quelle que soit la longueur d'onde qui est également un paramètre très influent. Les déformations à rupture sont dans le cas bloqué-bloqué de l'ordre de 2 - 3% et dans le cas bloqué-libre de l'ordre de 1.5 - 2.5 %, en notant que les longueurs d'onde pour lesquelles le pli bloqué-bloqué est le plus résistant (> 0.8 mm) ne sont pas reportées sur la **Figure D 44** car elles paraissent peu représentatives du comportement réel. Cette sensibilité aux défauts dans le cas bloqué-bloqué est également visible sur la réponse d'un pli en compression présentée sur la **Figure D 46** et peut être directement reliée au faible gradient de déplacement dans l'épaisseur du pli qui ne permet pas à l'instabilité géométrique de se développer de manière progressive. Il en résulte une rupture du pli par instabilité même pour des amplitudes de défaut assez importantes (2.5 ° pour un pli de 0.4 mm sur la **Figure D 46**) ce qui indique une résistance accrue. On note que pour une longueur d'onde du défaut égale à la longueur d'onde élastique, le comportement est similaire à celui présenté pour les plis plus épais et la résistance est minimale, mais elle reste de tout de même plus élevée que pour le cas bloqué-libre.

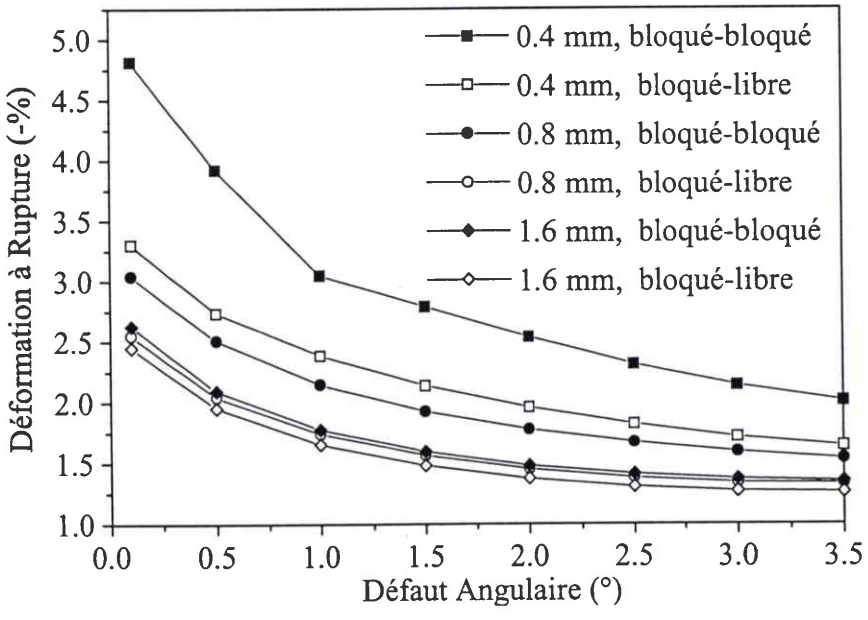


Figure D 42 : Évolution de la déformation à rupture en fonction de l'amplitude du défaut angulaire, de longueur d'onde $\lambda = 0.63$ mm.

Les conditions aux limites sur les faces des plis en compression, de 3 épaisseurs différentes, sont bloqué-bloqué ou bloqué-libre.

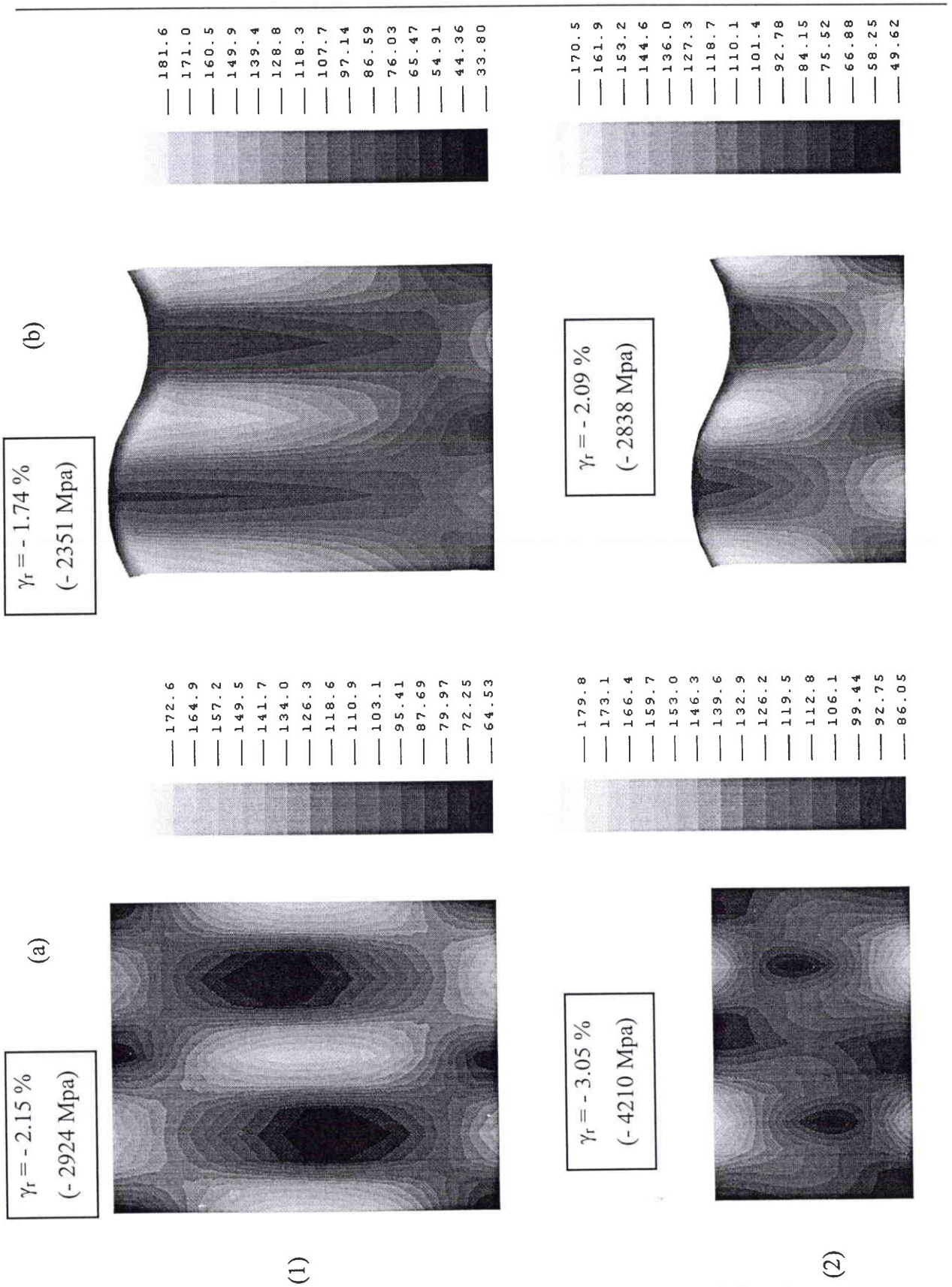


Figure D 43 : Distribution des contraintes de VON-MISES (en Mpa) dans la matrice, pour des plis UD de (1) 0.8 et (2) 0.4 mm d'épaisseur en compression affectés d'un défaut de 1° pour λ = 0.63 mm (déformée * 10).

Le chargement correspond à la déformation à rupture et les conditions aux limites sont (a) bloqué - bloqué , (b) bloqué - libre.

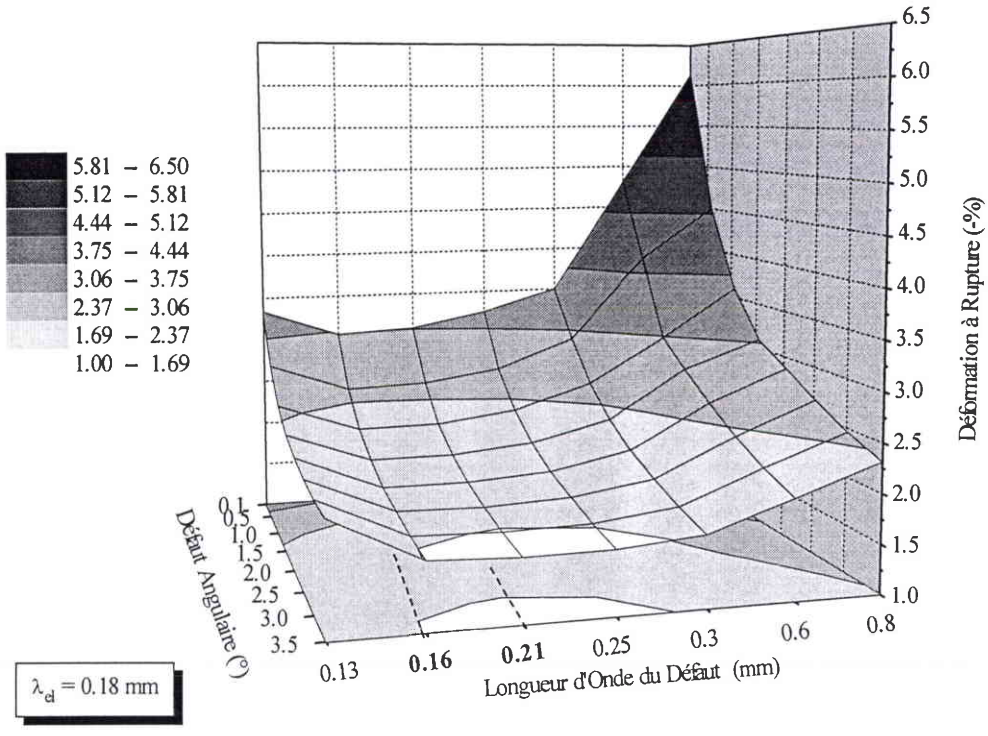


Figure D 44 : Évolution des déformations à rupture du pli, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde. Pli de 0.4 mm en compression, bloqué-bloqué.

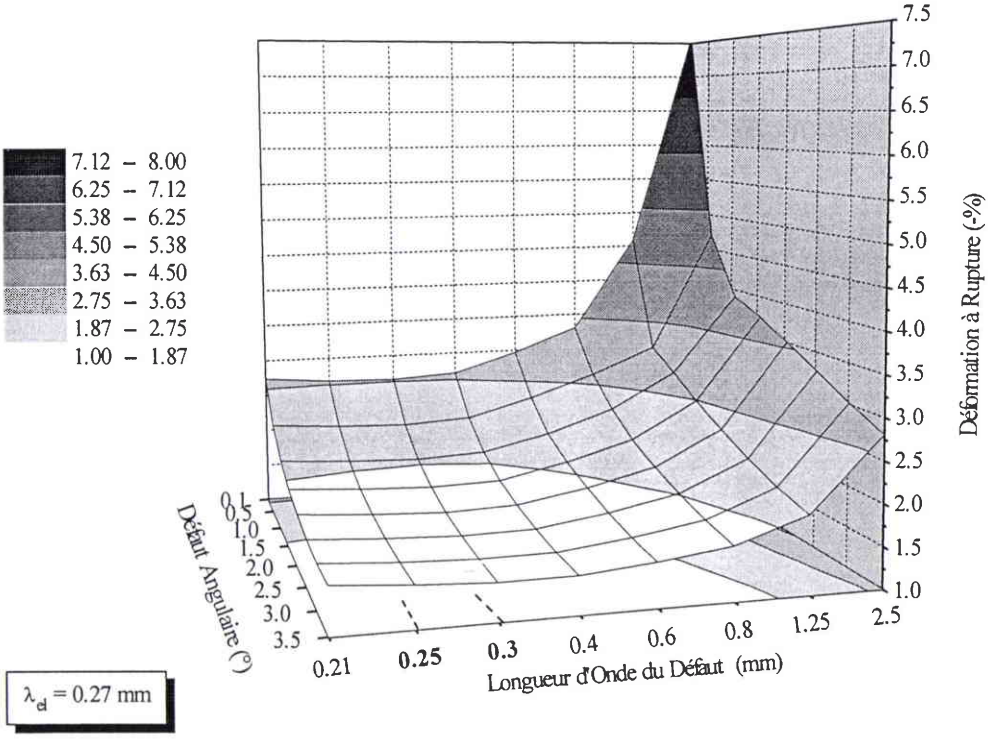


Figure D 45 : Évolution des déformations à rupture du pli, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde. Pli de 0.4 mm en compression, bloqué-libre.

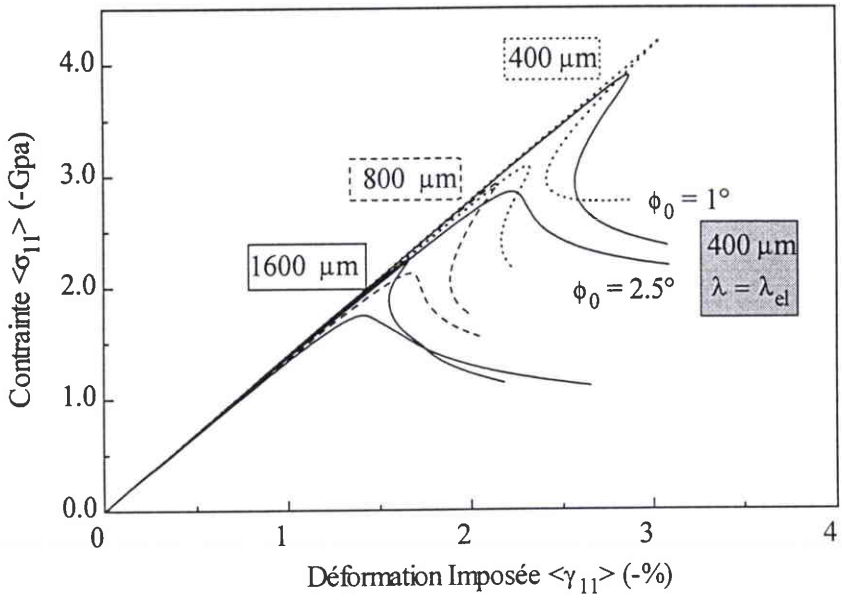


Figure D 46 : Réponse d'un pli UD en compression, bloqué-bloqué, pour différentes épaisseurs et 2 défauts angulaires de longueur d'onde 0.63 mm (si non indiquée).

Lorsque l'épaisseur du pli devient trop faible (inférieure à la taille de la couche limite), la couche limite près du bord libre n'apparaît plus. Il en résulte un état de contrainte très homogène pour les 2 types de conditions aux limites, ce qui confère au pli une résistance très élevée (**Figure D 47**). Toutefois, le modèle homogénéisé est construit en considérant une répartition suffisante de cellule de base dans l'épaisseur du pli (~ 8 - 10). De part les dimensions d'une cellule de base dont la hauteur est $\frac{r_f}{f}$, soit environ 5.8 µm dans notre cas, la taille minimale d'un pli doit être de l'ordre 60 µm. De plus la taille d'un pli préimprégné utilisé en drappage par exemple est de l'ordre de 120 µm. Les composites industriels utilisent rarement des plis unidirectionnels de cette épaisseur seuls. D'après ces 2 remarques, il ne semble pas réaliste d'obtenir des résultats quantitatifs pour des plis dont la taille est inférieure à 200 µm environ.

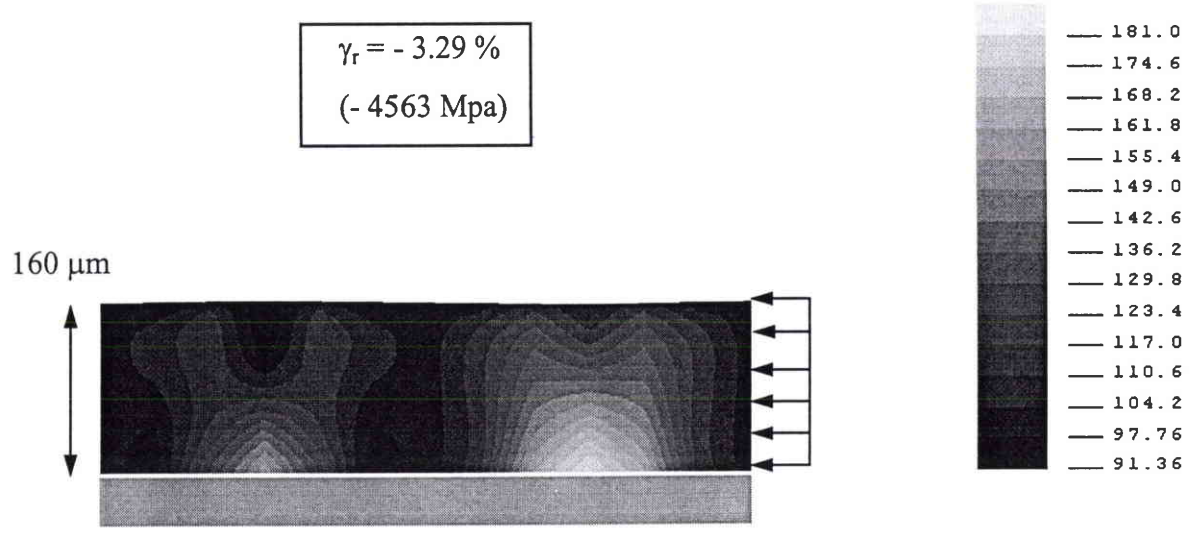


Figure D 47 : Distribution des contraintes de VON-MISES (en Mpa) dans un pli de 160 µm bloqué-libre affecté d'un défaut de 1° pour λ = 0.63 mm.
Le chargement correspondant à la charge maximale supportée par le pli.

Finalement, la combinaison de l'épaisseur du pli et des conditions en déplacement imposées sur ses faces déterminent la forme et l'amplitude du gradient de déplacement transverse dans l'épaisseur du pli, et par conséquent la distribution des contraintes dans cette direction. La résistance du pli augmente quand son épaisseur diminue, et la différence de résistance qui existe entre les cas bloqué-bloqué et bloqué-libre augmente proportionnellement. En effet, tandis que la couche limite près d'un bord libre est présente même dans les plis fins, la zone centrale dans laquelle se produit le microflambage dans le cas bloqué-bloqué n'apparaît plus quand le pli est trop fin. De plus dans le cas des plis dont la taille est inférieure à celle de la couche limite, l'utilisation du modèle homogénéisé n'est plus justifiée.

3.4.2 Effet du chargement quand l'épaisseur du pli varie

Nous avons vu au § 3.2 que pour une épaisseur constante, le chargement de flexion améliore la résistance du pli et augmente l'effet des conditions aux limites . Quand l'épaisseur du pli diminue, le gradient de chargement augmente. En conséquence, une plus petite partie du pli est sollicitée, ce qui tend à amplifier un peu plus la différence de résistance observée entre le chargement de compression et celui de flexion-compression. De plus les effets des conditions aux limites sont augmentés. À l'opposé, quand l'épaisseur devient grande, la résistance sous une

sollicitation de flexion tend vers celle caractérisée par un chargement de compression pure et l'effet des conditions aux limites devient moins déterminant.

3.5 Répartition du défaut dans l'épaisseur du pli

Dans les paragraphes précédents, l'effet de la longueur d'onde du défaut et de son amplitude a été clairement établi, mais sa répartition dans l'épaisseur était supposée constante. Dans cette partie, l'outil numérique est utilisé pour quantifier l'effet de la répartition du défaut dans l'épaisseur. Actuellement, nous n'avons aucune information concernant cette distribution car la mesure de l'amplitude et de la longueur d'onde du défaut est déjà un exploit en soi. À ce stade de notre travail, on perçoit bien l'intérêt de comprendre et de modéliser le processus d'apparition de ces défauts qui sont déterminants dans le mécanisme de l'instabilité plastique.

Au vu des résultats obtenus en faisant varier la longueur d'onde, le défaut qui conduit à la plus faible résistance est celui dont la longueur d'onde est proche de celle calculée dans un cadre élastique. Afin de parfaire cette remarque, il faut tester l'influence de la répartition du défaut en vérifiant que la résistance à rupture minimale est obtenue avec un défaut dont l'amplitude varie selon le mode de microflambage élastique. Prenons le cas d'un UD de 1.6 mm d'épaisseur bloqué-libre en compression. Le défaut angulaire possède une amplitude de 1° et sa longueur d'onde est de 0.42 mm, 2 répartitions sont envisagées : constante ou sur le mode élastique. Sur la **Figure D 48**, les réponses obtenues pour les 2 cas montrent qu'une répartition de défaut identique à celle du mode élastique est susceptible d'abaisser encore la résistance du pli. Toutefois la réduction est faible puisque la déformation à rupture passe de 1.74 % à 1.70 % et la contrainte évolue de 2335 Mpa à 2298 Mpa. Remarquons qu'il est classique, comme nous l'avons fait observer au § C 2.3, que les phénomènes physiques perturbés dépendent de la solution du même problème traité dans un cas parfait. Dans notre cas, le défaut, s'il est initialement réparti sur le mode, facilite l'apparition de l'instabilité plastique dans la couche limite, mais son influence demeure tout de même faible.

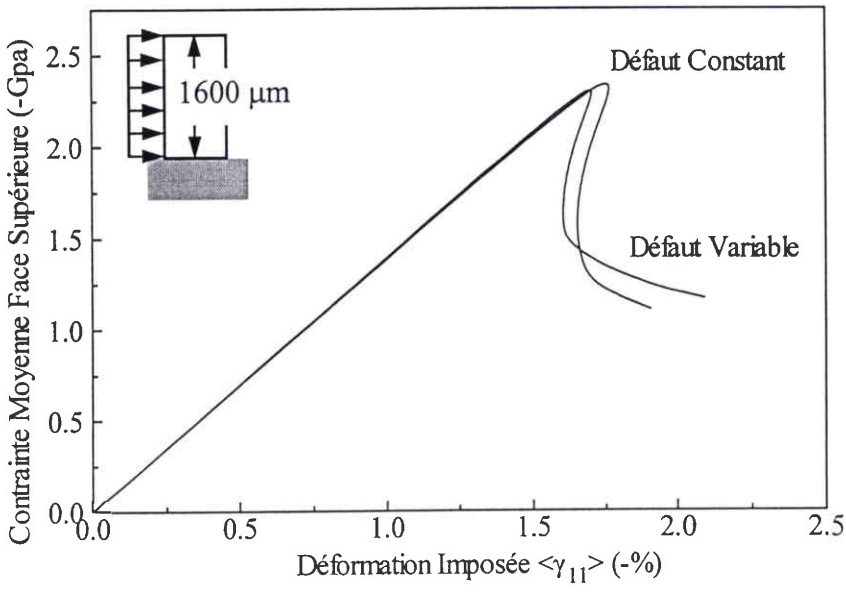


Figure D 48 : Réponse d'un pli UD bloqué-libre en compression de 1.6 mm. Le défaut de 1° peut varier dans l'épaisseur ou être constant, sa longueur d'onde est de 0.42 mm.

3.6 Effet d'un endommagement local de la matrice

Actuellement dans les secteurs utilisant les composites Hautes Performances, de nombreuses études sont menées pour prévoir le comportement des stratifiés ayant subit des chocs (voir par exemple WAHAB et al., 1995; MAISON et al., 1994). Ces chocs se traduisent généralement par des décollements locaux interlaminaires, ou bien encore par des endommagements à l'intérieur des plis. Nous décrivons brièvement ci-dessous une étude où l'endommagement localisé d'un pli UD est envisagée avec notre modèle.

L'endommagement est pris en compte en fixant les caractéristiques mécaniques de la matrice égales à 1% de leur valeur habituelle dans une zone de 80 µm d'épaisseur (1 élément). Deux configurations sont étudiées : dans la première, la zone endommagée est située entre 1.4 et 1.48 mm prés du bord supérieur, et dans la seconde elle est localisée entre 0.16 et 0.24 mm près du bord inférieur. Le pli est soumis à un chargement de compression pure et les conditions aux limites sont bloqué-libre. En observant la distribution des contraintes de VON-MISES pour les 2 cas traités, on constate que lorsque la partie endommagée est située dans la couche limite (**Figure D 50 a**, page 188), les déformations plastiques sont localisées dans la zone de plus faible rigidité.

Les contraintes de VON-MISES sont proportionnelles aux caractéristiques mécaniques correspondantes et sont par conséquent faibles. En revanche les déformations de cisaillement dans la matrice sont très élevées. Le même phénomène est observé lorsque la partie inférieure est endommagée (**Figure D 50 b**), mais cette fois la distribution des contraintes dans l'épaisseur du pli est totalement changée. La partie endommagée agit comme un bord libre et l'effet de la condition cinématique est inhibé par la présence de la zone endommagée dans laquelle la flexion des fibres, et donc le cisaillement dans la matrice, est très élevée. Du point de vue de la répartition des contraintes, on se rapproche d'une configuration libre-libre telle que celle présentée au § 3.1 (voir **Figure D 31**).

Les réponses du pli sain et des 2 plis endommagés sont reportées sur la **Figure D 49**. De manière inattendue, la présence de défauts dans le pli augmente sa résistance. Il se produit un transfert de charge entre la partie saine et la partie endommagée dans laquelle se localise la plus grande partie du chargement supporté par le pli, ce qui entraîne une baisse de la rigidité du pli entier. Les conditions aux limites étant identiques, l'effet de la couche limite est augmenté par la présence de la zone endommagée, en revanche la résistance est accrue lorsque la partie inférieure du pli bloqué est endommagée, à condition toutefois que les fibres puissent supporter les fortes déformations induites par la flexion dans cette région et que la matrice ne se fissure pas. Or ces 2 phénomènes ne sont pas pris en compte dans notre approche.

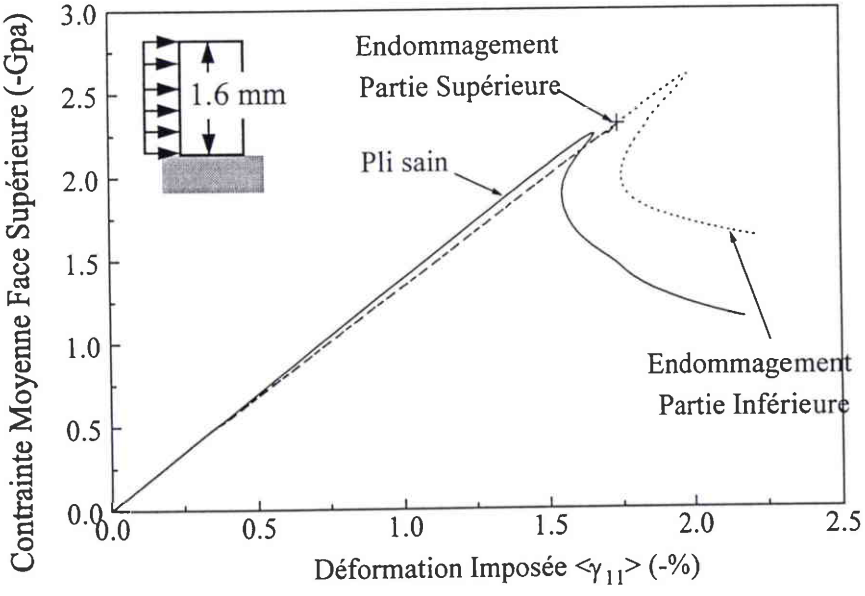


Figure D 49 : Réponse du pli de 1.6 mm endommagé ,en compression, bloqué-libre. Le défaut est de 1° (λ = 0.63 mm).

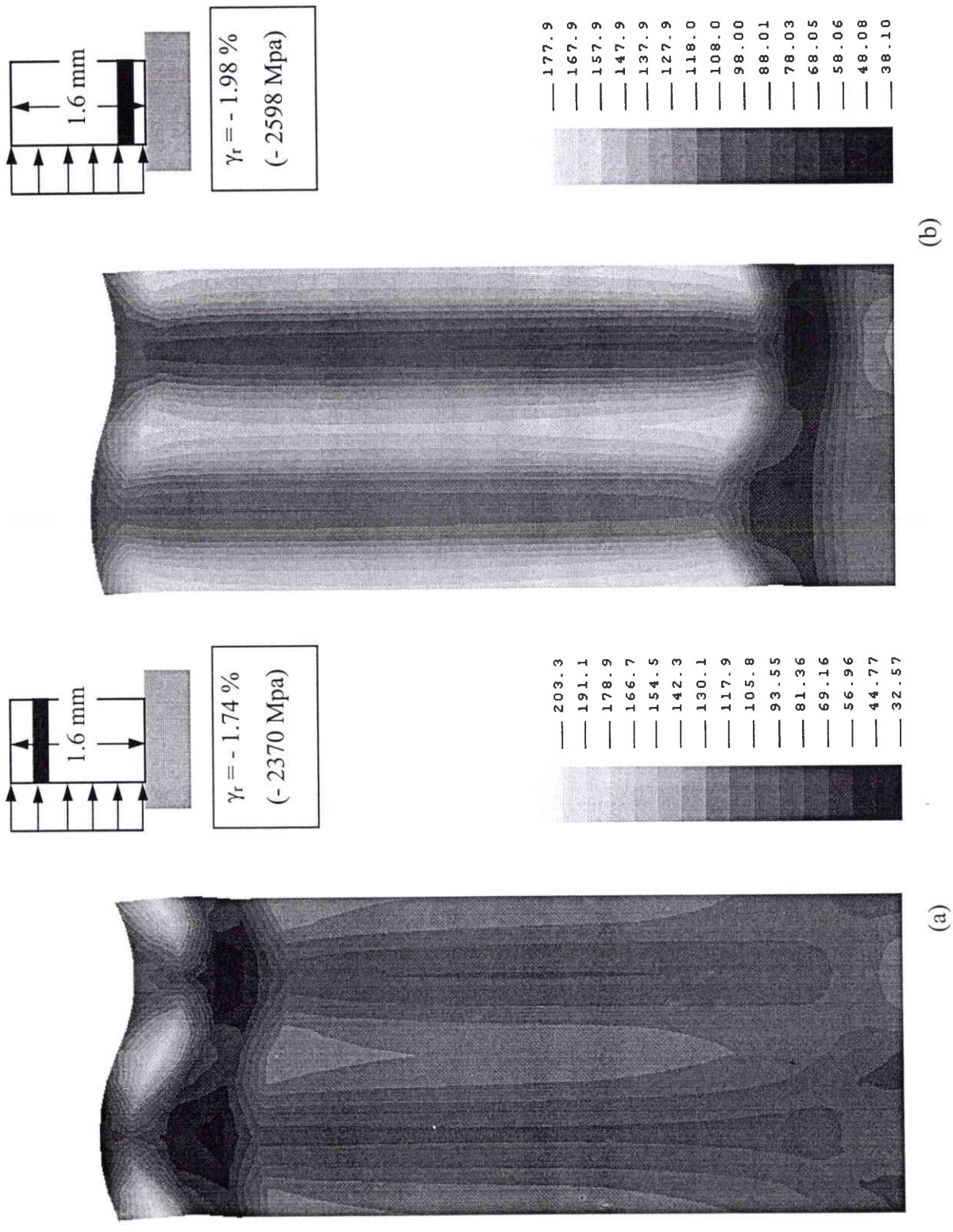


Figure D 50 : Distribution des contraintes de VON-MISES (en Mpa) dans la matrice, pour des plis UD bloqué-libres de 1.6 mm d'épaisseur en compression pure, endommagés localement ((a) partie supérieure, (b) partie inférieure).

Le défaut dans la partie saine est de 1° pour λ = 0.63 mm (déformée *10). Le chargement correspond à la déformation à rupture.

3.7 Synthèse de l'effet de structure

Le phénomène de microflambage se développe par la flexion des fibres combinée au cisaillement de la matrice. En conséquence l'instabilité apparaît dans les zones les plus propices au développement des déformations plastiques, c'est à dire là où le gradient du déplacement transverse dans l'épaisseur du pli est le plus élevé. Ce sont les conditions cinématiques imposées sur les faces du pli qui fixent la distribution de ce gradient dans l'épaisseur.

Plus précisément, la présence d'un bord libre induit une couche limite dans laquelle les déplacements sont élevés, et où se localisent les déformations de cisaillement plastiques caractérisant le microflambage plastique. En revanche, lorsque le pli est bloqué les déplacements près des bords sont faibles, et la contrainte transverse résultant du mouvement des fibres vers le bord bloqué est prépondérante. En conséquence, la résistance est maximale pour un pli dont les 2 faces sont bloquées, et elle est minimale quand au moins un des bords est libre.

La répartition du champ de déformation dans l'épaisseur est aussi influencée par le chargement appliqué. En effet, le gradient de chargement dans l'épaisseur, qui caractérise un état de flexion, sollicite uniquement la partie supérieure du pli alors que la partie inférieure est très faiblement mise à contribution. Il en résulte que quelles que soient les conditions aux limites envisagées, la résistance sous une sollicitation de flexion-compression est plus élevée que celle obtenue sous un chargement de compression pure.

Il a été montré que l'épaisseur du pli, aussi appelée en partie A longueur caractéristique transverse, est un des paramètres essentiels de l'approche structurelle. Lorsque l'épaisseur du pli diminue, le gradient de déplacement dans cette direction est plus faible. L'état de contrainte qui en découle est plus homogène au fur et à mesure que les plis deviennent fins et la résistance s'en trouve accrue. De plus, lorsque l'épaisseur du pli diminue, la différence entre les résistances obtenues pour un pli bloqué-bloqué et bloqué-libre augmente. Ceci est dû à l'effet des bords bloqués qui induisent une répartition des contraintes plus homogène que dans le cas d'un bord libre où l'effet de la couche limite est encore perceptible pour des plis de 0.4 mm. La variation de l'épaisseur du pli modifie également le gradient du chargement dans la direction transverse qui

caractérise un état de flexion-compression. La partie supérieure fortement sollicitée devient de moins en moins étendue, et la résistance est accrue par rapport au même pli sollicité en compression. À l'opposé, quand les plis deviennent plus épais, l'effet des conditions aux limites et du chargement sont atténués, la résistance devient assez proche dans tous les cas. Ces tendances sont clairement visibles sur la **Figure D 51** où sont reportées les déformations à rupture d'un pli UD pour diverses épaisseurs et pour des conditions aux limites et des chargement différents, le défaut étant fixé à 2° pour une longueur d'onde de 0.63 mm.

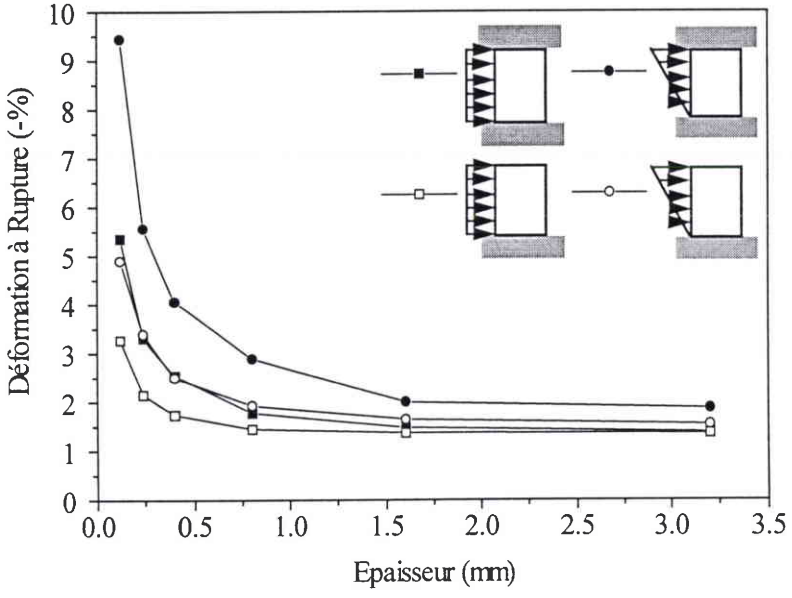


Figure D 51 : Évolution de la déformation à rupture en fonction des conditions aux limites et du chargement appliqués sur un pli UD.
Le défaut angulaire est de 2°, sa longueur d'onde est $\lambda = 0.63$ mm

Les simulations font aussi apparaître l'influence de la répartition du défaut dans l'épaisseur du pli et l'effet de l'endommagement localisé. Pour améliorer les conclusions concernant ces 2 paramètres, un travail complémentaire doit être fourni aussi bien au niveau des mesures des défauts que de notre modélisation.

4. COMPARAISON DE NOS PRÉVISIONS AVEC LES EXPÉRIENCES

Jusqu'à présent, les cas que nous avons étudié concernaient essentiellement des plis unidirectionnels, dont la position dans le stratifié est prise en compte par les conditions cinématiques imposées sur les faces. En étudiant des plis stratifiés, nous allons dans un premier temps vérifier si notre représentation de l'influence d'un pli transverse est correcte. Ensuite nos résultats seront comparés avec certains essais aussi bien de compression pure que de flexion.

4.1 Validité de notre représentation d'un pli transverse

La présence d'un pli transverse adjacent au domaine 2D est prise en compte dans notre approche par des conditions de déplacement nul imposées à l'interface entre les 2 plis (voir **Figure D 1**). Afin de vérifier la validité de cette représentation, nous étudions un pli stratifié de 3.2 mm bloqué-libre chargé en compression pure dont la séquence d'empilement peut être [0,90] ou [90,0].

Dans notre modèle bidimensionnel nous supposons que la flexion des fibres n'apparaît que dans le pli UD. Le pli transverse agit donc comme un milieu 2D classique que nous simulons en attribuant à la matrice les caractéristiques mécaniques transverses. La fraction volumique des fibres est choisie nulle afin d'éliminer l'effet de la flexion et l'effet de membrane simultanément. Les caractéristiques mécaniques du pli transverse sont calculées à partir d'expressions données par BERTHELOT (1992) et sont pour le module d'Young $\bar{E}_T$ = 10.8 Gpa et pour le module de cisaillement $\bar{G}_T$ = 3.98 Gpa. On suppose de plus que ce pli peut se plastifier, l'écrouissage est similaire à celui de la matrice.

Les premiers calculs portent sur la séquence d'empilement [90,0], la distribution des contraintes de VON-MISES correspondante est reportée sur la **Figure D 53 a**. On constate que les contraintes dans le pli transverse sont très faibles et homogènes, la seule variation de contrainte se situe au raccord entre les 2 plis. Ceci était d'ailleurs prévisible puisque les modes élastiques montrent la présence d'une zone de transition à cet endroit, dans laquelle le déplacement longitudinal évolue localement dans l'épaisseur. Mais les déformations dans cette région restent faibles si on considère la rigidité élevée du pli transverse, les surcontraintes agissent surtout sur le pli à 0°. Mise à part la présence de cette zone de transition entre les 2 plis,

la distribution des contraintes tend à valider notre choix de représenter le pli transverse en bloquant les déplacements à l'interface. Les réponses obtenues pour ce stratifié [90,0] et pour un pli UD de 1.6 mm bloqué-libre en compression sont reportées sur la **Figure D 52**. D'un point de vue quantitatif les résultats sont en excellente corrélation. Nous pouvons comparer les déformations à rupture obtenues avec ces 2 modélisations du pli transverse, à partir des **Figure D 34** et **Figure D 54** où sont reportées respectivement l'évolution de la résistance en fonction de l'angle du défaut et de sa longueur d'onde pour le pli UD de 1.6 mm, et pour le stratifié [90,0] étudié. La comparaison des déformations à rupture obtenues avec ces 2 représentations du pli transverse donne une différence relative de l'ordre de 5 % pour les longueurs d'onde courantes des défauts (0.5 - 1 mm) (**Figure D 55**). La différence est plus importante (15 %) pour les grandes longueurs d'onde (> 1.5 mm), rarement évoquées dans la littérature.

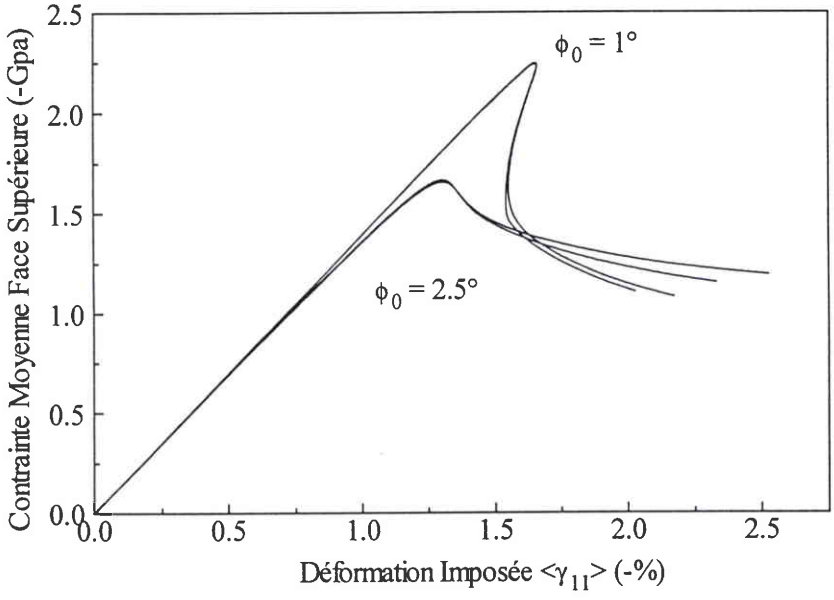


Figure D 52 : Réponse d'un pli UD de 1.6 mm bloqué-libre en compression et d'un stratifié [90,0] de 3.2 mm bloqué-libre en compression.
Le défaut est identique, de longueur d'onde $\lambda = 0.63$ mm.

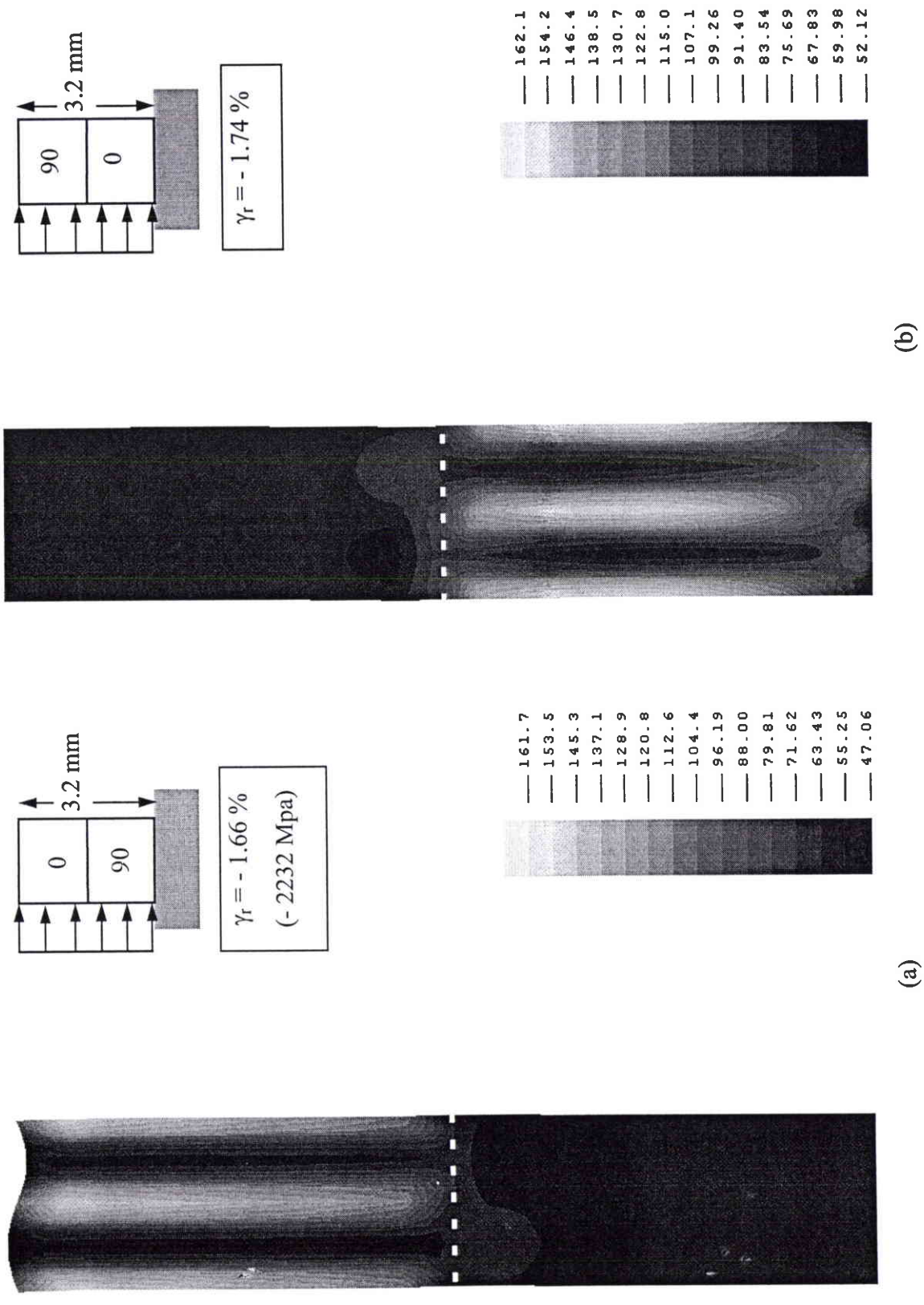


Figure D 53 : Distribution des contraintes de VON-MISES (en Mpa) dans la matrice, pour un stratifié de 3.2 mm en compression, bloqué-libre : (a) [90,0] et (b) [0,90].
Le défaut dans le pli à 0° est de 1° pour λ = 0.63 mm (déformée *10). Le chargement correspond à la déformation à rupture.

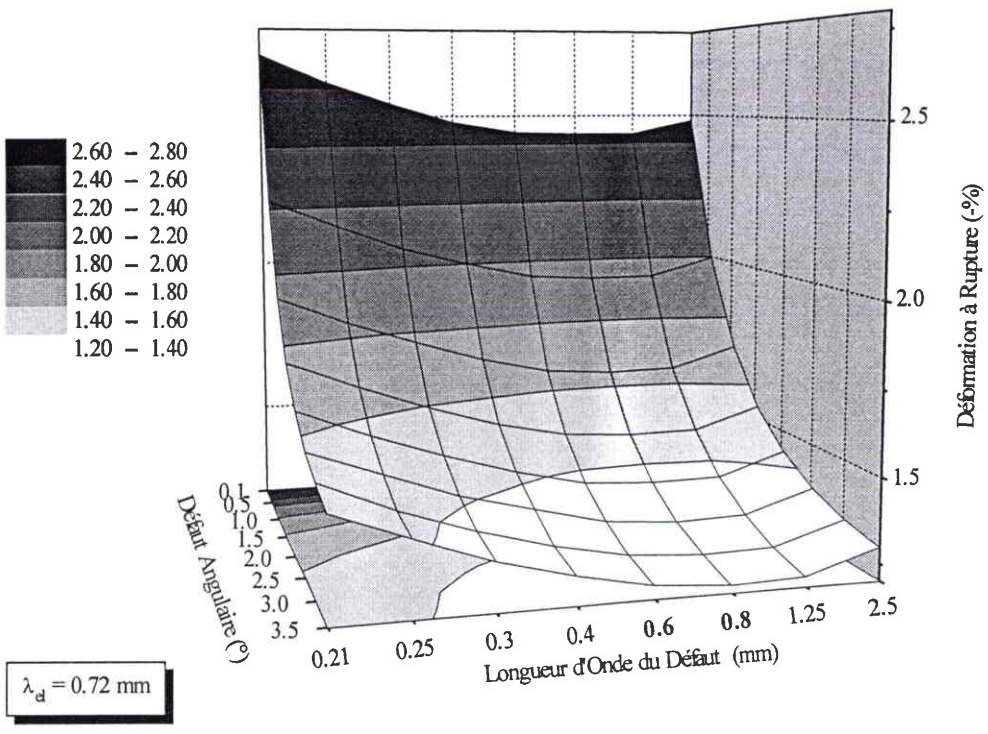


Figure D 54 : Évolution des déformations à rupture du stratifié [90,0] de 3.2 mm bloqué-libre en compression, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde.

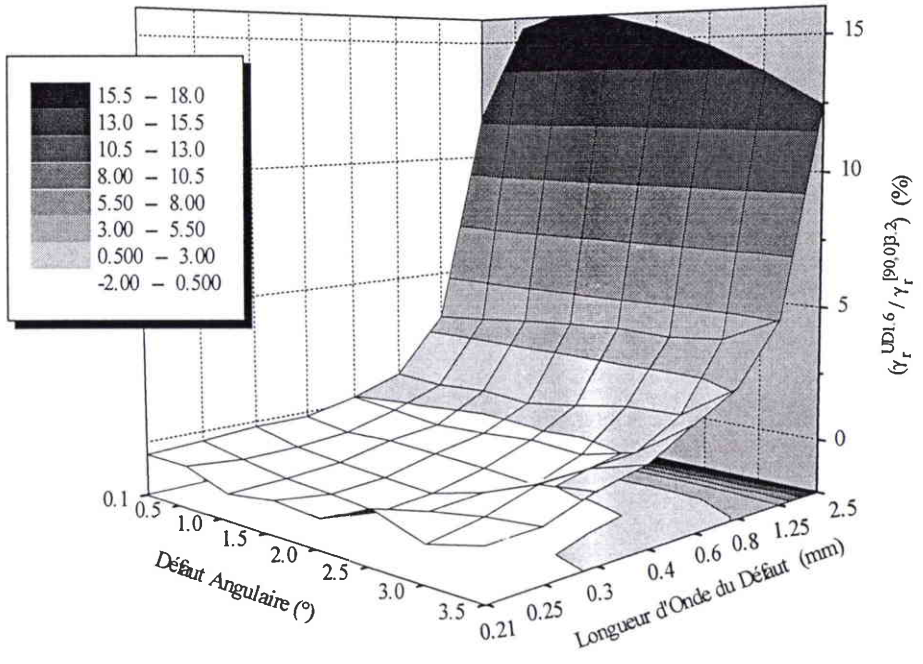


Figure D 55 : Évolution de la différence relative des déformations à rupture correspondant à un pli UD de 1.6 mm et un stratifié [90,0] de 3.2 mm, en fonction du défaut initial obtenu avec différentes longueurs d'onde.

Une autre séquence d'empilement est également étudiée, il s'agit d'un stratifié [0,90] de 3.2 mm bloqué-libre soumis à de la compression pure. Ce calcul permet de comparer directement l'effet d'un bord bloqué avec l'effet d'un pli à 90°. Sur la **Figure D 53 b** (page 193), la distribution des contraintes de VON-MISES montre un léger décalage de la zone centrale du pli à 0° où se produit le microflambage, vers le bord adjacent au pli transverse. Cela traduit la souplesse du pli transverse qui subit l'influence des déplacements du pli UD à l'interface entre les 2 plis. Toutefois cette différence entre les effets du pli transverse idéalisé (bord bloqué) ou modélisé entièrement reste faible. En termes de déformation à rupture la différence relative est légèrement plus élevée que dans le cas précédent (**Figure D 55**), mais reste inférieure à 5 % pour les longueurs d'onde courantes (**Figure D 56**).

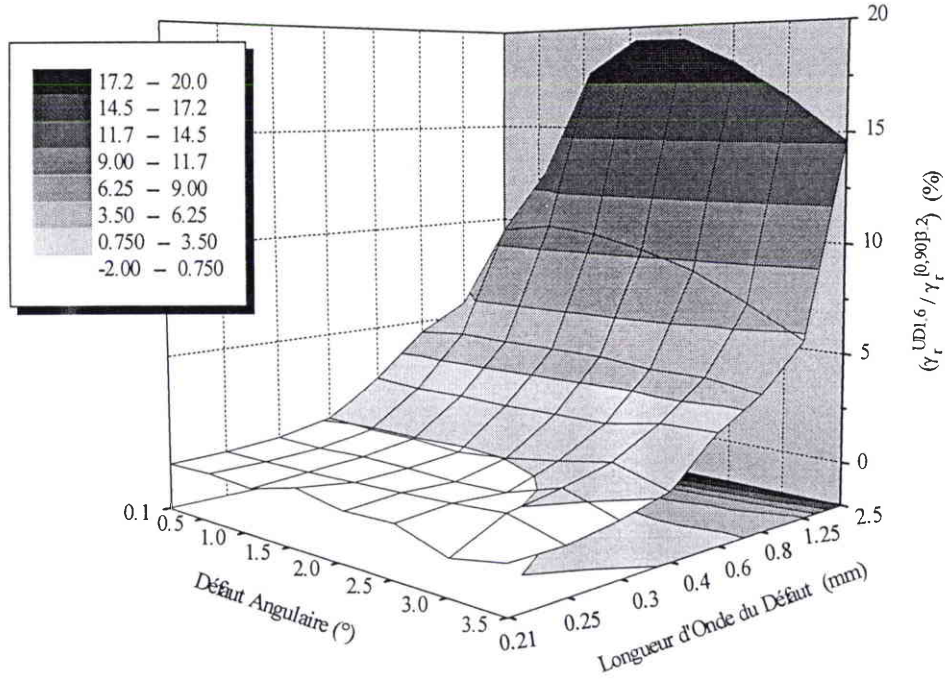


Figure D 56 : Évolution de la différence relative entre les déformations à rupture correspondant à un pli UD de 1.6 mm bloqué-bloqué et un stratifié [0,90] bloqué-libre de 3.2 mm, en fonction du défaut initial obtenu avec différentes longueurs d'onde.

En conclusion, le choix qui consiste à bloquer les déplacements au bord d'un pli afin de représenter l'effet d'un pli transverse adjacent est validé par ces calculs où des stratifiés sont entièrement modélisés. La concordance des résultats obtenus par les 2 approches de cet effet de blocage sont en excellente corrélation. Il convient pourtant de noter que le coefficient correcteur

appliqué au cisaillement de la matrice afin de prendre en compte une répartition 3D des fibres n'influe pas sur les résultats puisqu'ici le pli transverse agit très peu en cisaillement, il est essentiellement sollicité en traction - compression dans les directions longitudinales et transverse. Mais l'approche que nous proposons pourrait être complétée par une étude plus fine des divers paramètres tel que l'orientation des plis adjacents ou de leur rigidité.

4.2 Simulations d'expériences

Grâce à l'outil numérique dont nous disposons, il est possible de proposer une comparaison avec les résultats expérimentaux obtenus non seulement sur des plis UD, mais également pour des stratifiés que nous pouvons modéliser entièrement. Bien évidemment, avant de comparer de manière quantitative nos prévisions avec les résultats expérimentaux, il convient d'émettre quelques réserves. D'une part les caractéristiques mécaniques des constituants que nous utilisons sont mesurées sur des matériaux standards. D'autre part, les données concernant le défaut sont rares et très dispersées. Le but n'est pas ici de déterminer le défaut ou la loi d'écrouissage tels que nos prévisions soient en adéquation avec les expériences, mais plutôt d'utiliser les seules informations dont nous disposons actuellement pour tester la validité de notre approche.

D'après les données de PALUCH (1994) reportées dans le Tableau D 4, la longueur d'onde moyenne du défaut est de 0.9 mm et l'angle peut être estimé, d'après la loi de WEIBUL donnée par l'auteur (**Figure D 14**), aux environ de 1.5° pour des fibres T300. Ce qui correspond à une probabilité pour que 90 % des T300 possèdent un défaut inférieur à 1.5°. Pour les comparaisons avec les résultats expérimentaux, nous choisissons une longueur d'onde comprise entre 0.42 et 1.25 mm et des défauts angulaires de 1 à 2°.

Dans un premier temps, nous comparons nos résultats avec les expériences de flexion de WISNOM (1991). L'auteur teste des plis UD carbone-époxyde XAS/913 à 60 % de fibres. Ces plis sont à base de préimprégnés de 0.125 mm d'épaisseur, ils ont respectivement 25, 50 et 100 couches soit des épaisseurs mesurées à 3.175, 6.35 et 13.28 mm. Les constituants possèdent des caractéristiques mécaniques proches de celles que nous utilisons ici : le module des fibres XAS est de 230 Gpa, et la résine 913 possède des caractéristiques voisines de celles de la 914. Les déformations à rupture sont mesurées en tension et en compression avec un montage de flambage rotulé et un montage de flexion 4 points. Comme tous les résultats obtenus avec le flambage

rotulé ne sont pas donnés, nous considérons ici les mesures effectuées uniquement sur le montage de flexion 4 points. Pour cette comparaison, nous ne prenons en compte que les ruptures survenues en compression, car les ruptures initiées sur la face en tension surviennent pour des déformations légèrement différentes de celles de compression dans les cas des 2 plis les plus épais. Dans notre modélisation, un pli en flexion pure de 3.2 mm est représenté par un pli de 1.6 mm en flexion-compression bloqué-libre. Les valeurs calculées pour les 3 plis, correspondant aux angles et aux longueurs d'onde que nous avons choisi d'examiner, sont reportées ci-dessous :

(a)

ϕ_0 / λ	**0.42 mm**	**0.63 mm**	**0.82 mm**	**1.25 mm**
1°	2.24	2.07	1.99	1.95
1.5°	2.02	1.87	1.79	1.76
2°	1.89	1.74	1.67	1.64

(b)

ϕ_0 / λ	**0.42 mm**	**0.63 mm**	**0.82 mm**	**1.25 mm**
1°	1.95	1.87	1.85	1.86
1.5°	1.76	1.69	1.66	1.67
2°	1.63	1.56	1.54	1.55

(c)

ϕ_0 / λ	**0.42 mm**	**0.63 mm**	**0.82 mm**	**1.25 mm**
1°	1.82	1.79	1.79	1.84
1.5°	1.64	1.61	1.61	1.66
2°	1.53	1.51	1.51	1.56

Tableau D 12 : : Déformations à rupture calculées (en - %) pour un pli de (a) 1.6 mm, (b) 3.2 mm, (c) 6.4 mm en flexion-compression bloqué-libre, en fonction de la longueur d'onde du défaut et de son amplitude.

Le défaut varie de 1 à 2° et sa longueur d'onde de 0.42 à 1.25 mm

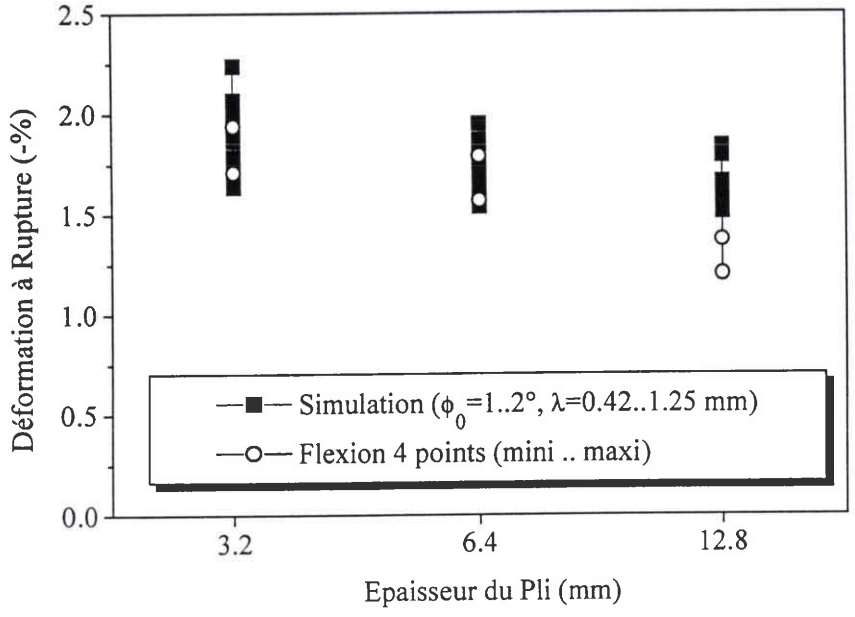


Figure D 57 : Déformations à rupture calculées et mesurées expérimentalement en fonction de l'épaisseur du pli UD testé. L'amplitude du défaut et sa longueur d'onde varient dans l'intervalle fixé ci-dessus.

Sur la **Figure D 57**, il apparaît clairement que la corrélation de nos prévisions avec les résultats expérimentaux est assez bonne, au moins pour les 2 plis les plus fins pour lesquels l'effet du gradient de chargement dans l'épaisseur est le plus prononcé. En n'oubliant pas toutefois que nous sommes obligés de balayer une plage de défauts car les données expérimentales concernant ce paramètre sont très rares. La simulation est capable de rendre compte de l'effet de l'épaisseur d'un pli UD sur sa résistance, nous désirons vérifier que notre outil numérique est capable de rendre compte de l'effet des autres paramètres structuraux sur la résistance du pli. Dans une seconde partie, nous comparons nos prévisions avec les essais de GRANDSIRE-VINÇON (1993) qui mettent en évidence l'influence de la séquence d'empilement et du chargement sur la résistance en compression des plis UD. Nous simulons le cas d'une éprouvette de 3.2 mm d'épaisseur soumise à de la compression et à de la flexion. L'éprouvette est soit un UD, soit un stratifié de séquence d'empilement symétrique [0,90]s ou $[0,90]_2$s, nommé dans la suite STRA1 et STRA2. Comme ci-dessus le chargement de flexion est représenté par un chargement de flexion-compression appliqué à un ½ pli, dans ce cas les stratifiés STRA1 et STRA2 sont respectivement des empilements [90,0] et $[90,0]_2$. La séquence d'empilement du stratifié est complètement discrétisée.

Lorsque le nombre de plis transverses dans le stratifié augmente, l'épaisseur des plis à 0° diminue proportionnellement, et comme nous l'avons vu précédemment leur résistance augmente. Mais surtout les plis transverses supportent beaucoup mieux la compression que les plis à 0°, d'une part parce que leur module longitudinal est élevé, et d'autre part parce qu'aucun défaut ne peut être amplifié dans la direction du chargement. Par conséquent leur rigidité et leur résistance restent intactes au cours du chargement. En comparant l'évolution de la résistance sous un chargement de compression du pli UD avec le pli STRA2, cette augmentation de la résistance est visible (**Figure D 59**, **Figure D 60**)[1]. Dans les 2 cas les tendances restent similaires, mais pour le stratifié la déformation à rupture moyenne augmente, surtout pour les grandes longueurs d'onde. La distribution des contraintes pour ces 2 plis est reportée sur la **Figure D 58** (page suivante).

Sous un chargement de flexion, la distribution des contraintes est quasiment identique pour STRA1 (**Figure D 61 a**, page 202) et STRA2 (**Figure D 61 b**). On constate très clairement que l'effet de la séquence d'empilement est inhibé par le gradient de chargement dans l'épaisseur du pli. L'évolution de la résistance est également très proche pour les 2 stratifiés sous un chargement de flexion-compression (**Figure D 62**, **Figure D 63**, page203).

[1] Les résultats des calculs pour les différents cas traités ici sont reportés de façon complète en Annexe 5.

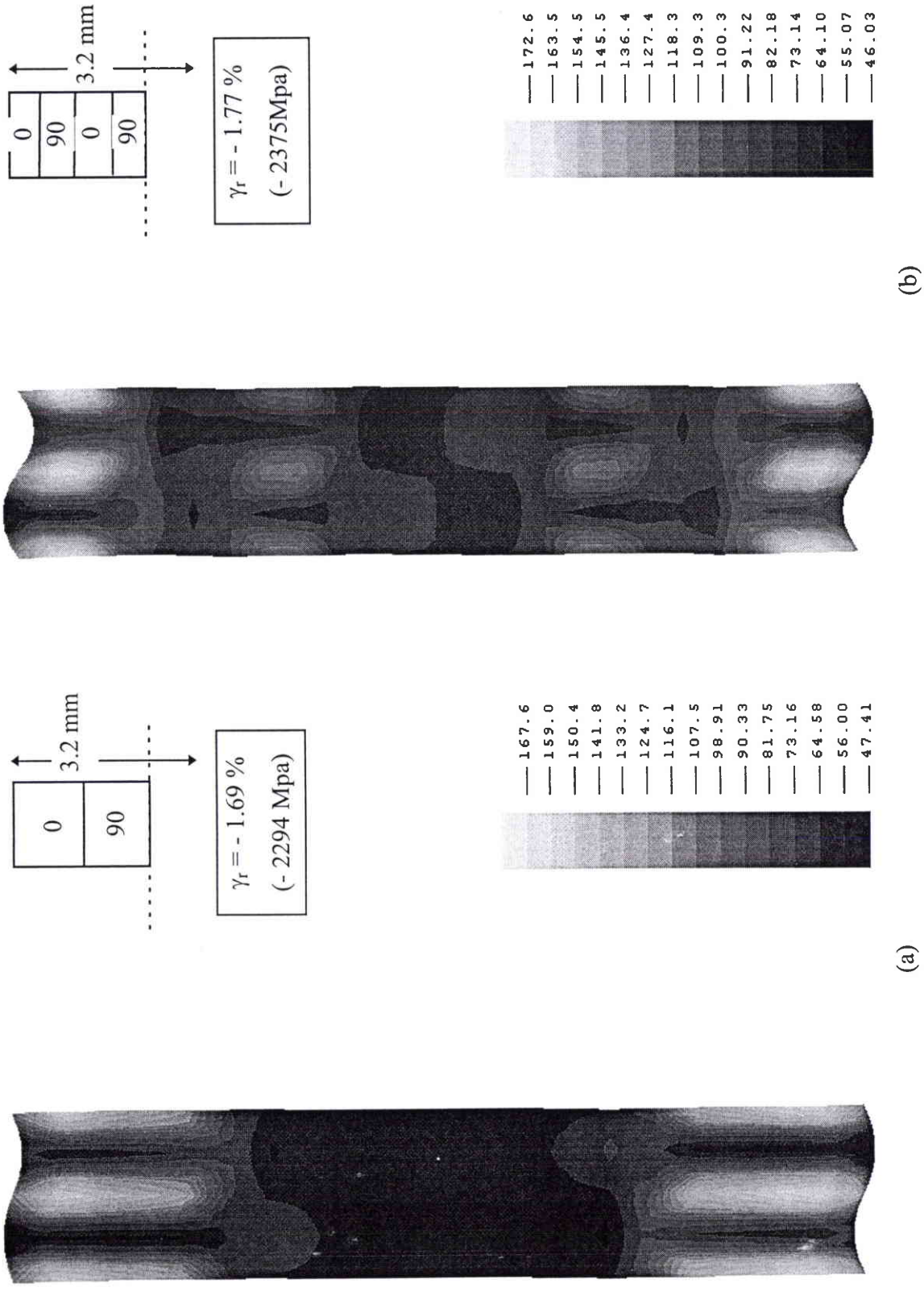


Figure D 58 : Distribution des contraintes de VON-MISES (en Mpa) dans la matrice, pour les stratifiés STRA1 et STRA2 en compression.

Le défaut dans les plis à 0° est de 1° pour λ = 0.63 mm (déformée *10). Le chargement correspond à la déformation à rupture.

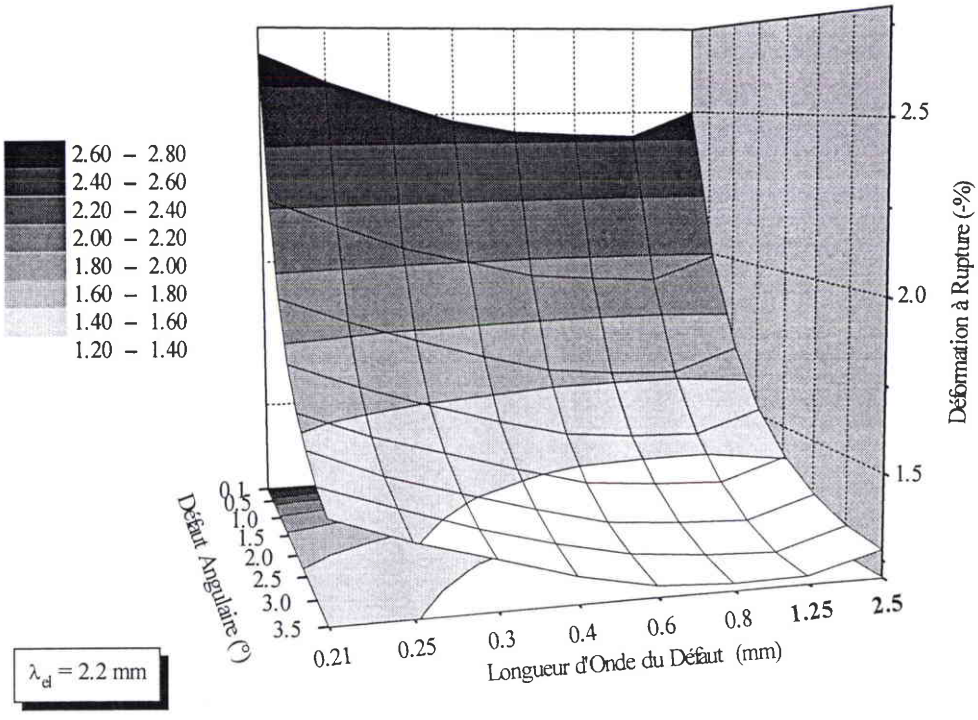


Figure D 59 : Évolution des déformations à rupture d'un UD de 3.2 mm libre-libre en compression, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde.

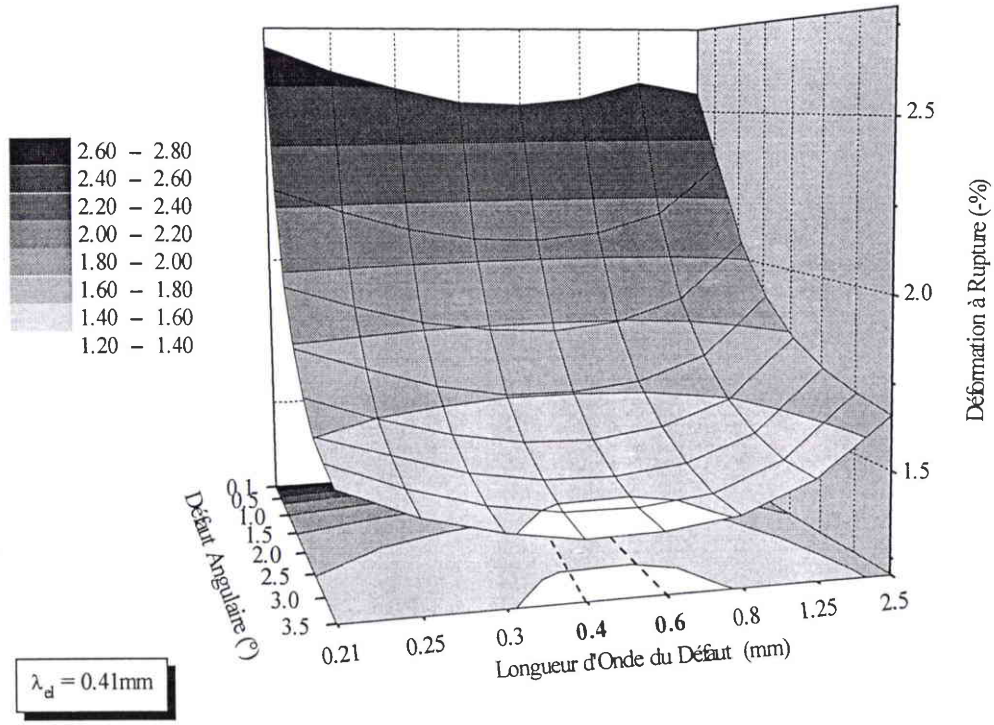


Figure D 60 : Évolution des déformations à rupture d'un stratifié $[0,90]_{2s}$ de 3.2 mm libre-libre en compression, en fonction du défaut angulaire initial obtenu avec différentes longueurs d'onde.

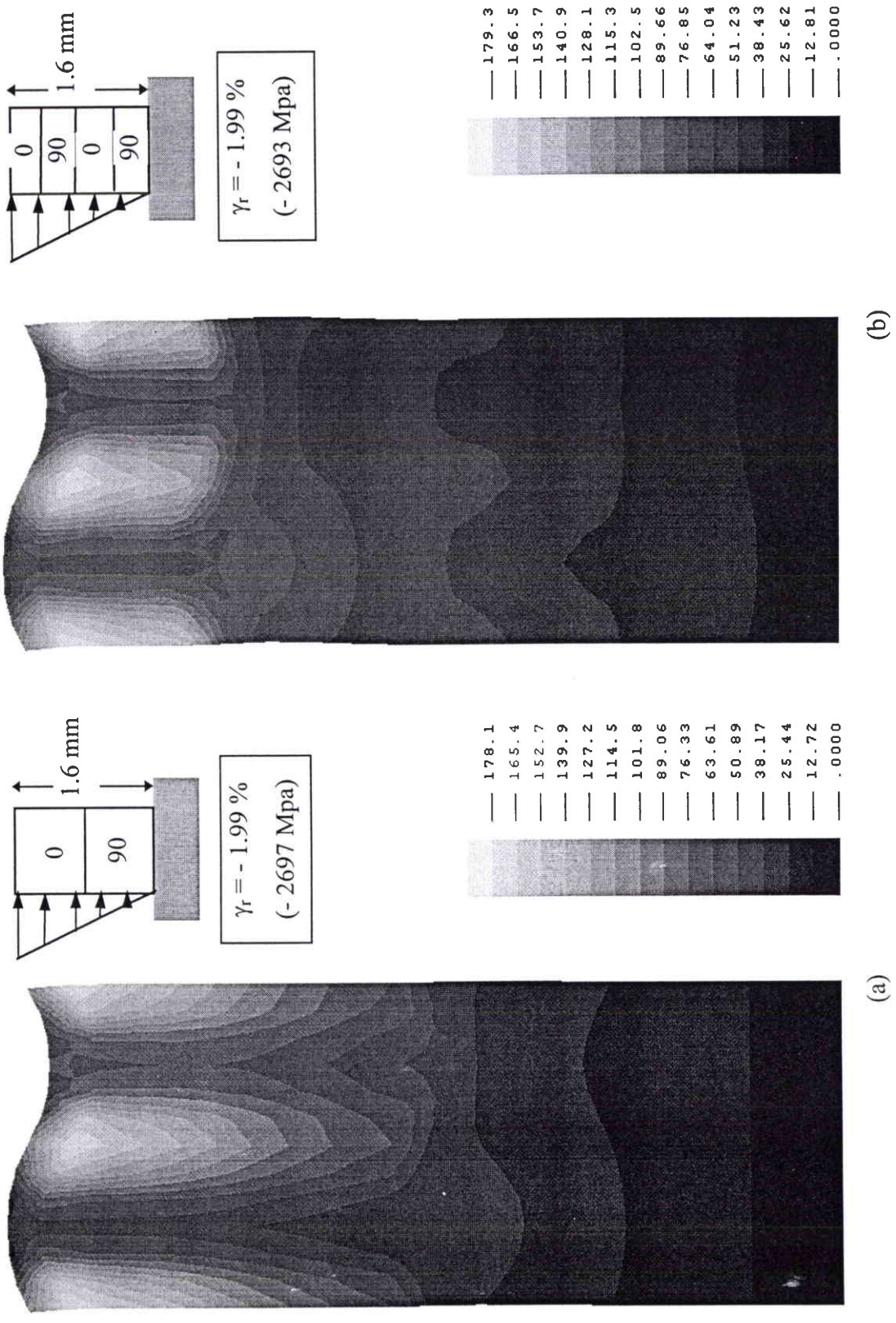


Figure D 61 : Distribution des contraintes de VON-MISES (en Mpa) dans la matrice, pour les stratifiés STRA1 et STRA2 en flexion-compression.

Le défaut dans les plis à 0° est de 1° pour λ = 0.63 mm (déformée *10). Le chargement correspond à la déformation à rupture.

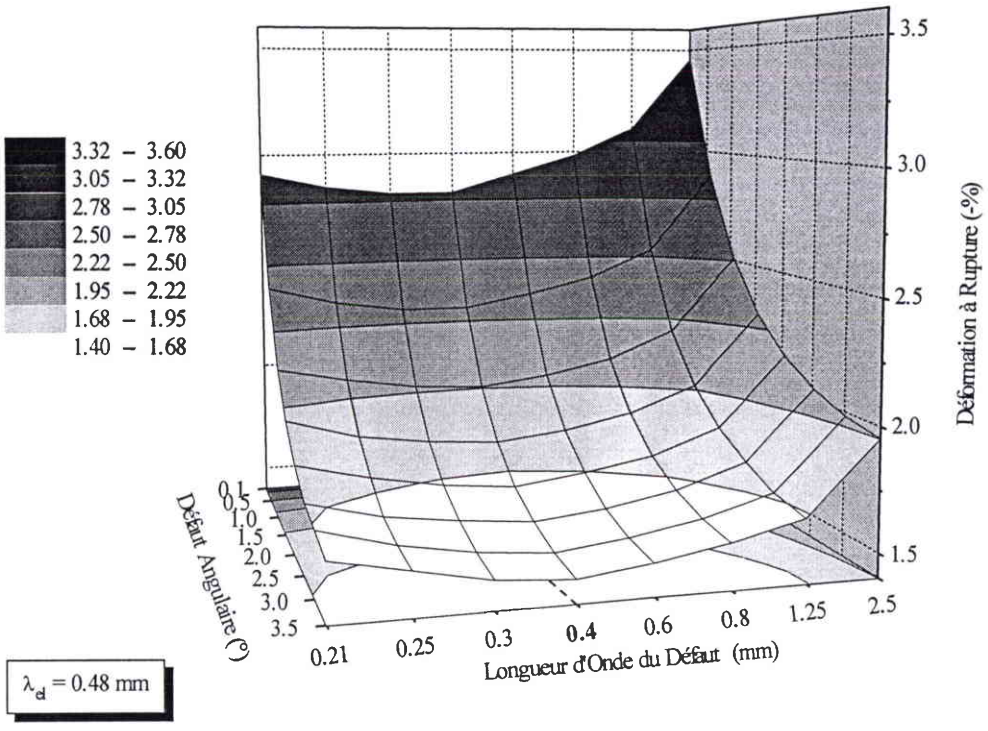


Figure D 62: Évolution des déformations à rupture d'un stratifié [90,0] de 1.6 mm bloqué-libre en flexion-compression, en fonction du défaut angulaire obtenu avec différentes longueurs d'onde.

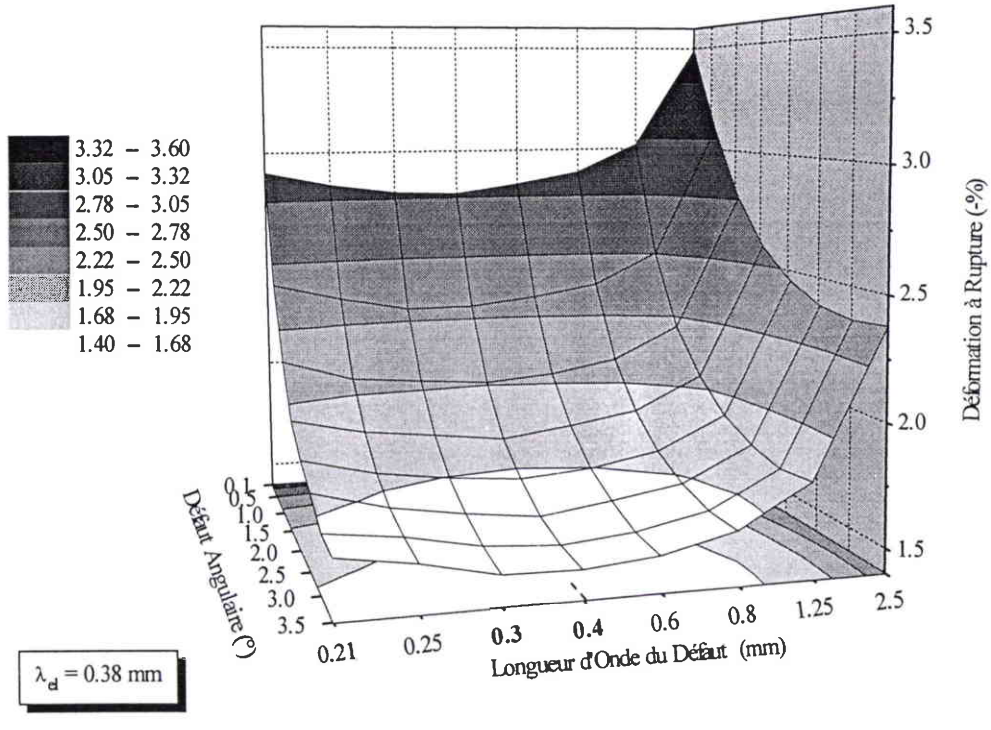


Figure D 63 : Évolution des déformations à rupture d'un stratifié $[90,0]_2$ de 1.6 mm bloqué-libre en flexion-compression, en fonction du défaut initial obtenu avec différentes longueurs d'onde.

Sur la **Figure D 64** sont reportées les déformations à rupture correspondant à la chute de contrainte en surface du pli UD externe, pour les 3 séquences d'empilement sollicitées avec les 2 chargements. L'angle du défaut est pris constant (ϕ_0=2°). Il apparaît clairement que sous un chargement de flexion, la séquence d'empilement a très peu d'influence sur la résistance des plis UD, ce qui corrobore les conclusions déduites de l'observation de la distribution des contraintes de VON-MISES dans les 2 stratifiés. En revanche, le chargement de compression donne une résistance plus élevée quand la proportion de plis transverses augmente, comme nous l'avons évoqué plus tôt.

Lorsque la longueur d'onde du défaut augmente, les déformations à rupture augmentent de manière sensiblement identique pour les 3 séquences d'empilement chargées en flexion-compression. Cette augmentation est nettement plus marquée pour les grandes longueurs d'onde. Concernant le chargement de compression, pour les petites longueurs d'onde la déformation à rupture varie peu quand la séquence d'empilement change. En revanche, quand la longueur d'onde augmente, le pli UD perd de sa résistance, tandis que celle des stratifiés augmente de manière significative.

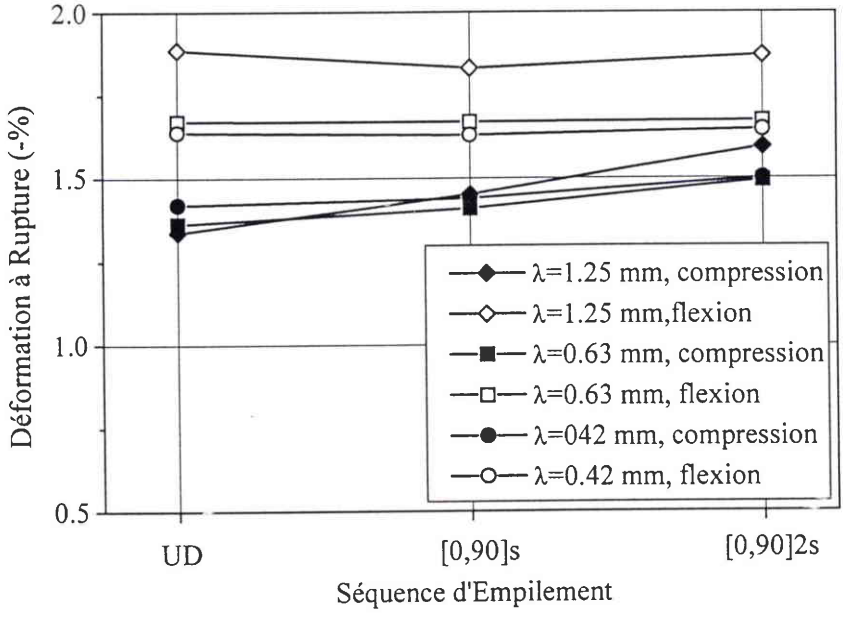


Figure D 64 : Influence de la longueur d'onde du défaut sur la résistance de stratifiés sous diverses sollicitations et pour différentes séquences d'empilement.
L'amplitude angulaire du défaut est fixée à 2°.

Sur la **Figure D 65**, les déformations à rupture pour les 6 cas envisagés sont reportées. La longueur d'onde est fixée à 1.25 mm et l'amplitude du défaut angulaire est variable. On observe clairement que lorsque l'amplitude du défaut angulaire augmente, la résistance des plis diminue pour tous les cas. Une fois encore l'importance du défaut est mise en évidence dans ces calculs.

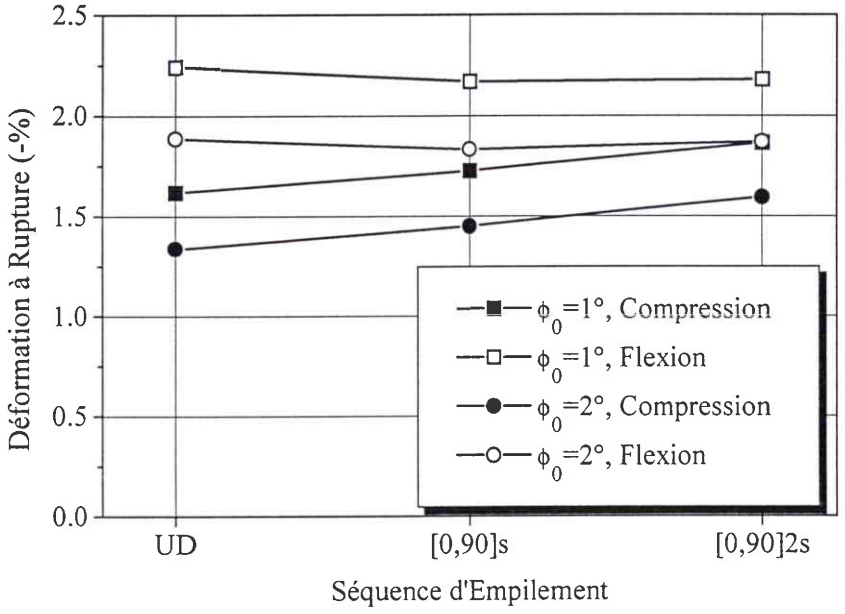


Figure D 65 : Influence du défaut angulaire sur la résistance de stratifiés sous diverses sollicitations et pour différentes séquences d'empilement.
La longueur d'onde du défaut est λ = 1.25 mm.

La **Figure A 16** (dupliquée ci-dessous) représente les résultats des essais de GRANDSIRE-VINÇON (1993). Il apparaît clairement lorsqu'on compare cette figure avec la **Figure D 65** ci-dessus, que notre modélisation numérique est parfaitement capable de fournir des prévisions quantitatives, à condition bien sûr de disposer de données concernant le défaut. Toutefois, la comparaison de nos prédictions avec les résultats expérimentaux de GRANDSIRE-VINÇON ne peut être totalement objective. D'une part l'auteur teste des carbone-époxydes T400/6376, et nous modélisons des T300/914, la différence doit toutefois être minime. D'autre part les plis utilisés pour les expériences sont sensiblement plus fins (2 mm) que ceux que nous modélisons, mais surtout les défauts que nous introduisons dans notre modèle ne sont que des estimations assez dispersées.

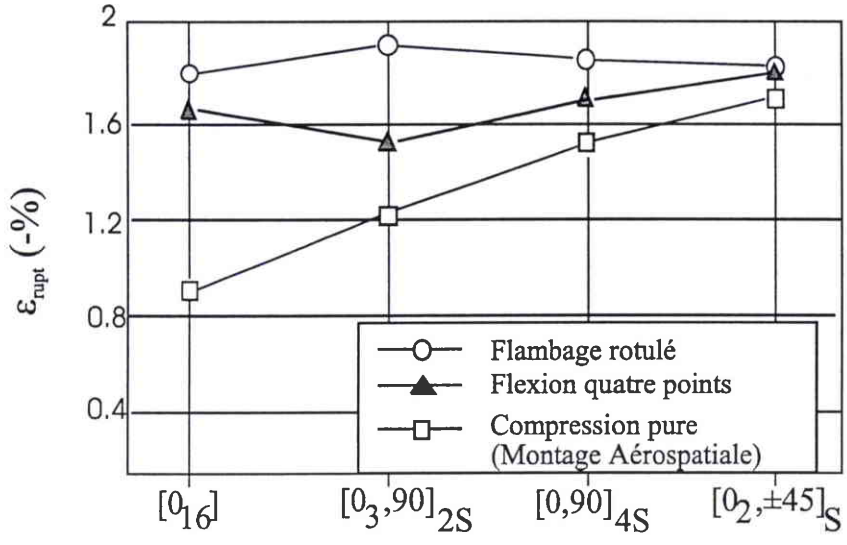


Figure A 16 : Déformation à rupture en compression d'un pli UD dans la direction des fibres, pour un carbone - époxyde T400/6376, en fonction de la séquence d'empilement et du montage utilisé (d'après GRANDSIRE-VINÇON, 1993).

Mais à l'opposé, il ne faut pas non plus négliger les défauts inévitablement introduits dans les expériences qui sont toujours délicates à mettre en œuvre sur ce genre de matériau. Contrairement à la modélisation numérique, la rupture observée expérimentalement peut dépendre de facteurs extérieurs tels que les défauts macroscopiques que nous ne prenons pas en compte dans notre modèle, notamment dans le cas des essais de compression directe qui sont très sensibles aux imperfections.

5. CONCLUSION

L'étude du mécanisme de microflambage à l'échelle des constituants nous a permis de mettre en évidence la dualité qui existe entre **la rigidité de flexion des fibres** et le support qui leur est offert par la **rigidité de cisaillement de la matrice**. Suivant le défaut initial des fibres, la matrice est plus ou moins sollicitée en compression longitudinale ou en cisaillement, ce qui conduit à 2 types de rupture distinctes: par **instabilité plastique** lorsque le défaut est faible, ou bien par **point limite** si le défaut est plus important. Pour les longueurs d'onde voisines de la longueur élastique, ce défaut peut être caractérisé simplement par l'angle que fait la fibre à l'état initial avec l'axe théorique de l'UD. Sinon l'angle du défaut est indissociable de la longueur d'onde.

L'effet des caractéristiques mécaniques des constituants a également été montré. Les résultats établissent que d'une part les caractéristiques de la matrice jouent un rôle essentiel sur la tenue en compression du pli, plus précisément le module et la limite élastique ont une influence très forte sur la résistance à rupture. D'autre part la rigidité du pli dépend des fibres, et leur rigidité de flexion intervient dans la phase précédent l'apparition de l'instabilité géométrique, ce rôle est encore augmenté pour les petites longueurs d'onde.

L'effet de structure a ensuite été étudié. Tout d'abord nous avons montré que les conditions aux limites imposées sur les bords du pli fixent le **gradient de déplacement transverse dans l'épaisseur**. Si un **bord** est **bloqué**, dans son voisinage l'**état de déformation** est **homogène** et peu élevé. Si ce **bord** est **libre**, les déformations plastiques se localisent dans une **couche limite** qui se développe sous la face libre. Dans ce cas le pli entier est affecté par la présence de la couche limite, sa résistance est moindre. Dans le cas d'un chargement de **flexion-compression,** le chargement imposé sur le pli est caractérisé par le **gradient de chargement dans l'épaisseur**, et dans ce cas seule la partie supérieure du pli est sollicitée. Il en résulte une résistance accrue du pli et une amplification de l'effet des conditions aux limites imposées sur le bord supérieur. Lorsque l'**épaisseur du pli diminue**, le gradient de déplacement transverse dans l'épaisseur baisse également, en conséquence la **résistance du pli augmente**. Dans ce cas, les conditions aux limites ont une influence plus importante sur la résistance du pli, et le gradient de chargement dans le cas de la flexion-compression devient très élevé, il en résulte aussi une augmentation de la résistance. À l'opposé, lorsque la taille des plis croît, le gradient de déplacement transverse devient quasiment nul, l'effet des conditions aux limites et du chargement n'est plus ressenti, les déformations à rupture tendent alors vers une valeur constante.

La validité de notre **représentation** de l'effet **d'un pli adjacent transverse** sur la résistance d'un pli UD a été établie à l'aide de calculs sur des stratifiés complètement discrétisés. Ensuite, une confrontation entre nos prévisions et les résultats expérimentaux a été proposée. Il est apparu que notre outil numérique performant en temps de calcul est **en mesure de fournir des prévisions quantitatives de la rupture** comparables aux mesures expérimentales. Toutefois, une différence entre les prévisions et les mesures est inévitable, d'une part parce que les essais présentent certainement des imperfections, et d'autre part parce que notre modèle pourrait être complété par exemple en prenant en compte la rupture des fibres, ou encore l'hétérogénéité de la répartition de la matrice. Quoi qu'il en soit, la **modélisation de stratifiés complets** introduite ici

ouvre la voie à des études plus générales, mais le problème de la caractérisation du défaut reste posé. Son influence sur la résistance à rupture n'est plus à démontrer, pourtant très peu de données sur ce sujet sont disponibles. Comme dans toute modélisation, nos résultats sont en grande partie assujettis aux mesures expérimentales qui sont parfois très rares ou difficiles à obtenir. Il serait intéressant d'étudier ultérieurement de façon plus précise l'effet de l'endommagement ainsi que l'effet des défauts localisés de fortes amplitudes dans les composites épais.

CONCLUSIONS

CONCLUSIONS

Dans ce travail, une approche structurelle du microflambage plastique a été proposée. L'objectif était de construire un modèle capable de rendre compte de l'effet des paramètres classiques (défaut, plasticité) sur l'instabilité, mais aussi de l'effet de la structure (séquence d'empilement, chargement, épaisseur) sur le développement du microflambage.

En ce qui concerne l'effet de la structure sur les modes élastiques, GRANDIDIER et al. (1996) ont proposé un modèle homogénéisé bidimensionnel de microflambage capable de rendre compte de l'influence de la séquence d'empilement, du chargement et de l'épaisseur sur la résistance. Dans le travail présenté ici, le modèle a été complété en y introduisant le défaut des fibres et une loi de comportement élastique non linéaire appliquée uniquement à la matrice. Pour des raisons de coûts de calculs, le problème a été reformulé à l'échelle mésoscopique. Cette approche particulière s'appuie sur le fait que la longueur caractéristique de l'instabilité est très faible devant les dimensions de la structure. En conséquence le champ de déplacement dû au microflambage peut être vu comme une perturbation se superposant localement à la solution de l'équilibre de la structure. En introduisant ce champ dans le modèle homogénéisé, et en remarquant que la structure doit être en équilibre avant et après que le microflambage apparaisse, le problème à l'échelle mésoscopique a été posé. Ensuite, la résolution numérique du problème de microflambage plastique local a été mise en place. Comme le microflambage est une instabilité cellulaire, le champ de déplacement solution a été posé sous la forme d'amplitudes dans l'épaisseur du pli et d'harmoniques dans la direction des fibres, ce qui augmente encore l'efficacité de l'outil numérique.

En premier lieu, le mécanisme d'apparition de l'instabilité a été étudié dans le cas d'un pli UD épais. Il apparaît que le microflambage dépend principalement du rapport de la rigidité de flexion des fibres et de la rigidité de cisaillement de la matrice. Deux types de rupture du pli ont été mis en évidence, ils diffèrent essentiellement par le rapport des contraintes longitudinale et de cisaillement qui conduisent la matrice dans sa phase plastique. Pour les faibles défauts la rupture est pilotée par la rigidité axiale et en cisaillement, et survient par apparition d'une instabilité plastique. Pour les défauts plus importants, la rupture dépend essentiellement de la rigidité de

cisaillement et se produit lorsqu'un point limite en contraintes a été atteint. Les calculs nous ont également permis de vérifier la très forte influence sur la résistance de différents paramètres tels que : la limite élastique de la matrice, son module d'Young, et la rigidité des fibres. Des simulations ont montré le rôle de la flexion des fibres lorsque le microflambage plastique apparaît, cet effet devient plus important lorsque la longueur d'onde du défaut est faible. L'influence de l'ondulation initiale sur la résistance a été approfondie par rapport à la littérature. Nous avons montré que le défaut initial peut être caractérisé uniquement par l'angle que fait la fibre avec l'axe du pli UD si sa longueur d'onde est proche de la longueur d'onde élastique. En revanche pour des longueurs d'onde différentes, l'angle maximum et sa longueur d'onde sont tous les 2 des paramètres qui influent indépendamment sur la résistance.

Le résultat le plus important concerne les paramètres structuraux dont le rôle a été pour la première fois quantifié. Des conditions de déplacement imposées au bord du pli nous ont permis de tester l'influence des plis adjacents et d'un bord libre sur l'instabilité. Plus précisément ce sont ces conditions sur les faces du pli qui fixent le gradient de déplacement transverse dans l'épaisseur, et par conséquent elles induisent la distribution des déformations plastiques qui sont à l'origine de l'apparition du microflambage. Lorsqu'un bord est libre, une couche limite apparaît sous cette face, ce qui induit une baisse significative de la résistance moyenne de tout le pli. Par contre si ce bord est bloqué, la résistance du pli est accrue. Si le pli est soumis à un chargement de flexion-compression, le gradient de chargement suivant l'épaisseur entraîne la sollicitation de la partie supérieure du pli uniquement, il en résulte une résistance plus élevée que sous un chargement de compression pure, et une amplification de l'effet des conditions cinématiques imposées sur le bord correspondant. Il est également apparu que l'épaisseur du pli influence la résistance en compression, plus précisément lorsque l'épaisseur du pli diminue, la résistance augmente, et l'effet des conditions aux limites et du chargement est plus marqué. À l'opposé, quand l'épaisseur augmente, la résistance tend vers une valeur finie commune à toutes les conditions aux limites et aux différents chargements.

Pour conclure ce travail des stratifiés entiers ont été modélisés. Nous avons montré que la représentation de l'effet d'un pli adjacent transverse par une condition de déplacement imposé nul était raisonnable. Ensuite la résistance d'une éprouvette UD et de deux éprouvettes stratifiées soumises à des chargements de compression et de flexion-compression ont été calculées puis comparées avec l'expérience. D'un point de vue quantitatif, les résultats concordent avec les

mesures expérimentales pour la plage de défauts qui a été envisagée. Toutefois, une incertitude subsiste car l'influence du défaut sur la résistance à rupture est très forte, et nous ne disposons que de peu de données concernant ce paramètre.

Ce point essentiel pour nous soulève un problème plus général rencontré dés qu'on souhaite confronter des résultats expérimentaux à des prévisions. Il montre que des efforts importants de recherche doivent être fournis autant du point de vue de la modélisation que du point de vue de la caractérisation, afin d'améliorer d'une part la finesse des modèles et d'autre part la qualité des mesures.

Du point de vue du modèle, il est important pour confronter ses prévisions aux expériences de prendre en compte par exemple le comportement non linéaire des fibres en compression, mais là encore les données sont rares car très difficiles à appréhender. Il serait également intéressant d'introduire l'effet de l'endommagement dans la matrice et de vérifier tout au long du processus si la résistance des fibres n'est pas dépassée. Ces améliorations sont envisageables à court terme ainsi que l'utilisation de ce modèle pour des composites tels que des tissus soumis à de la compression.

Du point de vue des expériences, il apparaît que les essais de compression pure doivent être étudiés avec une attention particulière afin de s'assurer de la représentativité des valeurs de résistances mesurées. Il est également important d'approfondir nos connaissances concernant les défauts en améliorant leurs mesures mais aussi en recherchant plus finement l'origine de leur apparition.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

50 Years of Advanced Materials" or "Back to the Future", Proceedings of the 15th International European Chapter Conference of the Society for the Advancement of Material and Process Engineering, Toulouse, France, 8-10 Juin 1994. J. Hognat, R. Pinzelli, E. Gillard, ISBN 3-9520477-1-6.

ABDELMOULA R., KRASUCKI F., MARIGO J.J., 1994
Détermination de la Charge Critique de Microflambage dans un Composite, JNC9, 22-24 Novembre 1994, Tome 2, pp 731 - 740.

ALLIX O., LADEVÈZE P., VITTECOQ E., GIRARD H., 1988
Composite 2D Fibres Haute Résistance: Caractérisation du Comportement En Compression, JNC6, Paris, 11-13 Octobre 1988, AMAC, Paris, pp 512 - 526.

ALLIX O., LADEVÈZE P., LEDANTEC E., 1990
Modélisation de l'endommagement du pli élémentaire des composites stratifiés, JNC7, Lyon 6-8 Novembre 1990, pp 715-724.

ALLIX O., LADEVÈZE P., CARIGLIANO A., 1992
Modélisation et prévision du délaminage dans les composites stratifiés, JNC8, Palaiseau 16-18 Novembre 1992, pp 763-774.

ANQUEZ L. , 1990
La Rupture en Compression des matériaux Composites à Fibres Longues, AMD-BA Note De Structure N°26935, Dret 87.34.544.

ANTHOINE O., GRANDIDIER J.C., 1996
Essais de compression pure sur matériaux composites à fibres longues, accepté aux JNC10, Paris 16-18 Novembre 1996

ARGON A.S., 1972
Fracture of Composites, Treatise of Materials Science and Technology, Academic Press - New-York, Vol.1, 1972.

AUSSEDAT E.,THIONNET A., RENARD J., 1995
Comportement en Compression des Composites par une Définition du Mode de Sollicitation en Mécanique de l'Endommagement, Compte-Rendu de l'Académie des Sciences de Paris, Mécanique des Solides, Tome 321, Série IIb, 1995, pp 167 - 174.

BEN BAGDAD K., 1992
Critères de flambage plastique avec lois de comportement complexes sur l'exemple de l'éprouvette cruciforme, Thèse de Doctorat de l'Université de Metz en Mathématiques appliquées - Mécanique, le 9 Décembre 1992.

BERTHELOT J.M.
Matériaux Composites : comportement mécanique et analyse des structures, collection Enseignement de la Physique, Ed. Masson 1992, ISBN 2-225-82588-2.

BUDIANSKY B., 1983
Micromechanics, Computers and Structures, Vol. 16, N° 1, 1983, pp 3 - 12.

BUDIANSKY B. , FLECK N.A., 1993
Compressive Failure of Fiber Composites , Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 41, N° 1, 1993, pp 183 - 211.

Bulletin Technique édité par RENAULT, Décembre 1994, N° 73.

CHAWLA K. K.
Composite Materials, collection Materials Research and Engineering, Ed. B. Ilschner and N.J. Grant, Springer-Verlag, ISBN 0-387-96478-9.

CHERKAOUI M., SABAR M., BERVEILLER M., 1995
Elastic composites with coated reinforcements : a micromechanical approach for nonhomotetic topology, International Journal of Engineering Science, Vol. 33, N°6, pp 829 - 843.

CHUNG I., WEITSMAN Y., 1995
On the Buckling/kinking Compressive Failure of Fibrous Composites, International Journal of Solids and Structures, Vol. 23, N°16, 1995, pp 2329 - 2344.

CINQUIN J., 1993
Mise au point d'un test de mesure des propriétés en compression des fibres de carbone, Contrat DRET 91.34.376.

CM/Del, Dassault Aviation, 1994
Étude Numérique de la Rupture en Compression des Matériaux Composites, Dret 92.34.325.

DAMIL N., 1990
De la théorie de la bifurcation au calcul des structures, Thèse de Doctorat d'état ès Sciences Physiques - Mécanique - de l'Université Hassan II, Casablanca, 20 juin 1990

DAVIS J.G., 1975
Compressive strength of fiber-reinforced composite materials, Composite Reliability, American Society for Testing and Materials STP 580, 1975, pp 367 - 377.

DAVIES P., CRAVEUR L., 1996
Prediction of long term behaviour of sandwich structures, ECCM7, Londres, 14-16 Mai 1996, pp 367 - 373 Vol. 2.

DRAPIER S., GARDIN C., GRANDIDIER J.C., POTIER-FERRY M; 1996
Structure Effect and Microbuckling, Numéro Spécial JNC9 de Composite Science and Technology, Vol. 56

EFFENDI R-RIESDAM, 1993
Analyse des Mécanismes de Dégradation en Compression des Composites Unidirectionnels Fibres de Carbone-Matrice Organique et Modélisation Associée, Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 17 Novembre 1993.

EVANS A.G., ADLER W.F., 1978
Kinking as a model of structural degradation in carbon fiber composites, Acta Metallurgica, Vol. 26, 1978, pp 725 - 738.

FLECK N.A., DENG L., BUDIANSKY B., 1995 a
Prediction of Kink Width in Fiber Composites, Journal of Applied Mechanics , Vol 62, 1995, pp 329-337.

FLECK N.A., SHU J.Y, 1995 b
Microbuckle Initiation in Fibre Composites : A Finite Element Study, Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 43, N°12, pp 1887 - 1918.

FROST S.R., 1992
Compressive Behaviour of Long-Fibre Unidirectional Composites, Journal of Composite Materials, Vol. 26, N°8/1992 , pp1151 - 1172.

FUKUDA H., 1989
A new bending test method of advanced composites, Experimental mechanics, Septembre 1989, pp 330 - 335.

GARDIN C., POTIER-FERRY M., 1992
Microflambage des Fibres dans un Matériau Composite à Fibres Longues : Analyse Asymptotique 2-D, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 315, Série II, 1992, pp 1159 - 1164.

GARDIN C., GRANDIDIER J.-C., POTIER-FERRY M., 1996
Influence of structural effects on compressive failure of composite materials part I - a microbuckling analysis, soumis.

GARDIN C., GRANDIDIER J.-C., POTIER-FERRY M., 1996
Influence of structural effects on compressive failure of composite materials part II - an homogenized model, soumis.

GAY D.
Matériaux Composites 2nde édidtion, collection Traité des Nouvelles Technologies, série mécanique, Ed. Hermès, ISBN 2-86601-116-3.

GRANDIDIER J.-C. , POTIER-FERRY M., 1990
Microflambage des Fibres dans un Matériau Composite à Fibres Longues, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 310, Série II, 1990, pp 1 - 6.

GRANDIDIER J.-C., 1991
Compression et Microflambage dans les Matériaux Composites à Fibres Longues, Thèse de Doctorat de l'Université de Metz, le 13 Février 1991.

GRANDIDIER J.-C. , POTIER-FERRY M., 1991
Microbuckling and Homogenization for Long Fiber Composites, Z. Angew. Math. Mec., Vol. 71, N° 4, 1991, pp 371 - 374.

GRANDIDIER J.-C., GARDIN C., POTIER-FERRY M., 1993
Effets de structure et résistance en compression des composites à fibres longues, rapport de contrat DRET 91-178.

GRANDIDIER J.-C., FERRON G. , POTIER-FERRY M., 1992
Microbuckling and Strength in Long-fiber Composites : Theory and Experiments, International Journal of Solids and Structures, Vol. 29, N°14/15, 1992, pp 753 - 1761.

GRANDSIRE-VINÇON I., 1993
Compression des Composites Unidirectionnels : Méthodes d'Essais et Approche Micromécanique, Thèse de Doctorat de l'ENS Cachan, le 9 Avril 1993.

GREENWOOD J.H., ROSE P.G., 1974
Compressive Behaviour of Kevlar 49 Fibres and Composites, Journal of Materials Science, Vol. 9, 1974, pp 1809 - 1814.

GREZCZUCK L.B., 1973
Compressive Strength and Failure Modes of Unidirectional Composites, Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites - American Society for Testing and Materials STP 521, 1973, pp 192 - 217.

GUYNN E.G, OCHOA O.O., BRADLEY W.L., 1992 a
Analysis of Fiber Microbuckling in Thermoplastics Composites, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 27, N°6, 1992, pp 1039 - 1047.

GUYNN E.G, OCHOA O.O., BRADLEY W.L., 1992
A Parametric Study of Variables that Affect Microbuckling Initiation in Composite Laminates : Part I - Analyses, Journal of Composite Materials , Vol. 26, N°11/1992, pp 1594 - 1616.

GUYNN E.G, OCHOA O.O., BRADLEY W.L., 1992
A Parametric Study of Variables that Affect Microbuckling Initiation in Composite Laminates : Part II - Experiments, Journal of Composite Materials, Vol. 26, N°11/1992, pp 1617 - 1643.

HA J.B., HAIRN J.A., 1992
Compression Failure Mechanisms of Single Ply Unidirectional Carbon-Fiber Composites, SAMPE Quarterly , Vol. 23, N°3, 1992, pp 29 - 36.

HÄBERLE J.G., MATTHEWS F.L., 1993
The influence of test method on the compressive strength of several fiber-reinforced plastics, Journal of Advanced Materials, Vol. 25, N°1, October 1993, pp 35-45.

HERMANN L.R., MASON W.E., CHAN S.T.K., 1967
Response of reinforcing wires to compressive states of stress, Journal of Composite Materials, Vol. 1, 1967, pp 212 - 226.

HUTCHINSON J.W., 1974
Plastic Buckling, in Advances in Applied Mechanics, Vol. 14, Chia-Shun Yih Edt., pp 67 - 144, Academic Press, New-York.

I.P.S.I., G CAILLETAUD, J.-Y. COGNARD, C. CORNUAULT, G. DHATT, 1995
Mécanique Non-Linéaire des Solides et des Structures : Cours de l'Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, Paris du 19 au 22 Septembre 1995.

JELF P.M., FLECK N.A. 1992
Compression Failure in Unidirectional Composites, Journal of Composite Materials, Vol. 26, n°18/1992, pp 2706 - 2723.

JOCHUM C., GRANDIDIER J.C., 1996
Prévision et mesure des défauts dans les plis unidirectionnels à fibres longues, accepté aux JNC0, Paris 16-18 Novembre 1996.

KYRIAKIDES S., ARSECULERATNE R.,PERRY E.J., LIECHTI K.M., 1995
On the Compressive Failure of Fiber Reinforced Composites, International Journal of Solids and Structures, Vol. 32, N°6/7, 1995, pp 689 - 738.

LAGER J.R., JUNE R.R., 1968
Compressive Strength of Boron-Epoxy Composites , Journal of Composite Materials , Vol. 3, January 1968 , pp 48 - 56.

LEBLANC E., PINNA C., SIGETY P., VINÇON I., 1994
Approche multi-échelle du problème de la résistance en compression des composites carbone/résine, JNC9 St-Étienne 16-18 Novembre 1994, pp 751-760.

LÉNÉ F., 1984
Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement, Thèse de Doctorat ès sciences de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI.

MAISON S., GUEDRA-DEGEORGES D., 1994
Comportement à l'impact faible vitesse - faible énergie des matériaux composites à matrice organique : mise au point de méthode d'essai et d'outil numérique de prévision des dégradations, Comptes-Rendus des 9° Journées Nationales sur les Composites, 22-24 Novembre 1994, Vol. 2, pp 855 - 863.

MARIGO J.J., BEREHILI Y., 1995
Comportement effectif des matériaux composites à fibres décollées, Annales des composites: Micromécanique et mécanisme de l'endommagement des composites, ENSAM Paris 30-31 Mai 1995, pp 203-212.

MRSE A., PIGOTT M.R., 1990
Relation Between Fibre Divagation and Compressive Properties of Fibre Composites, 35th International SAMPE Symposium, April 2-5 1990 , pp 2236 - 2244.

ODOM E.M., ADAMS D.F.,1990
Failure Modes of Unidirectional Carbon/Epoxy Composite Compression Specimens, Composites, Vol. 21, N°4, July 1990, pp 289 - 296.

PALUCH B., 1994
Analyse Des Imperfections Géomètriques Affectant Les Fibres Dans Un Matériau Composite À Renfort Unidirectionel, La Recherche Aéronautique, Vol 6, 1994, pp431 - 448.

PIDERI C., MARIGO J.J., 1987
Decohesion Criteria in Fibred Composites and Reinforced Beams or Plates. Proceedings of the European Mechanics Colloqium 227, St-Étienne, France, 31st August - 2 September 1987.

PIERRON F. , VAUTRIN A. 1994
Analyse de la rupture d'éprouvettes IOSIPESCU : application à la mesure de la résistance en cisaillement, JNC9, 22-24 Novembre 1994, Vol. 2, pp 709 - 718.

PIERRON F. , VAUTRIN A. 1996
A new methodology for composite shear strength measurement using 10° off axis tensile test, ECCM7, Londres, 14-16 Mai 1996, Vol. 2, pp 119 - 124

ROSEN B.W., 1964
Mechanics of Composite Strengthening, Fiber Composite Materials (American Society Metals Seminar), Chapter 3, pp 37 -75.

SCHAFFERS W.J., 1977
Buckling in Fiber Reinforced Elastomer, Textile Research Journal, July 1977, pp 502 - 512.

SCHUERCH H., 1966
Prediction of Compressive Strength in Uniaxial Boron - Fiber Metal Composite Materials, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol. 4, N° 1, January 1966 , pp 102 - 106.

SIGETY P., BOOKHOLT H., BROKOPF C., CURTIS P.T., T' HART W.G.J., KROBER I. ,1990
The Investigation and Understanding of Improved CFRP composite Materials, ECCM4, Stuttgart, September 25-28, 1990, pp 599 - 604.

STEIFF P.S., 1990
A Model for Kinking in Fiber Composites - I : Fiber Breakage Via Microbuckling, International Journal of Solids and Structures, Vol. 26, N°5/6, 1990, pp 549 - 561.

STEIF P.S., 1990
A Model for Kinking in Fiber Composites - II : Kink Band Formation, International Journal of Solids and Structures, Vol. 26, N°5/6, 1990, pp 563 - 569.

SWANSON S.R., 1992
A Micro-mechanics Model for In-situ Compression Strength of Fiber Composite Laminates, Journal of Engineering Materials and Technology , Transactions of the ASME, Vol. 114 , January 1992, pp8 - 12.

SWANSON S.R., COLVIN G.E., 1993
Compression Failure in Reduced Adhesion Fiber Laminates, Journal of Engineering Materials and Technology, Transactions of the ASME, Vol. 115, April 1993, pp 187 - 192.

TVERGAARD V., NEEDLEMANN A., 1980
On the Localization of Buckling Patterns, Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, 1980, pp 613 - 619.

VITTECOQ E., 1991
Sur le Comportement en Compression des Composites Stratifiés Carbone - Epoxy, Thèse de Doctorat Université Pierre et marie Curie, 15 Février 1991

WAHAB A., DAVIES P., DEROECK Y.H., PREVOSTO M., LATAILLADE J.L., 1995
Réponse dynamique d'une plaque sandwich en matériau composite à l'impact d'un sphère rigide, 2° Colloque Nationale en Calcul des Structures, GIENS, 16-19 Mai 1995, pp 379 - 384, Vol. 1 .

WISNOM M.R., 1990 a
Effect of Shear Stress in Indirect Compression Tests of UD Carbon Fibre/epoxy, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol 29, N°10, 1990, pp 1692 - 1697.

WISNOM M.R., 1990 b
The Effect of Fibre Misalignment on the Compressive Strength of Unidirectional Carbon Fibre/Epoxy, Composites, Vol. 21, N° 5, September 1990, pp 403 - 407

WISNOM M.R., 1991
The Effect of the Specimen Size on the Bending Strength of Unidirectional Carbon Fibre-Epoxy, Composite Structures, Vol. 18, 1991, pp 47 - 63.

WISNOM M.R., 1992
On the High Compressive Strain Achieved in Bending Tests on Unidirectional Carbon-fibre/Epoxy, Composite Science and Technology, Vol. 43, 1992, pp 229 - 235.

WISNOM M.R., ATKINSON J.W., 1996
Compressive Failure Due to Shear Instability : Experimental Investigation of Waviness and Correlation With Analysis, Journal of Reinforced Plastics and Composites,Vol. 15, April 1996, pp 420 - 439.

WISNOM M.R., 1993
Analysis of Shear Instability in Compression due to Fibre Waviness, Journal of Reinforced Plastics and Composites, Vol 12, N°11, 1993, pp 1171-1189.

WISNOM M.R., 1994
The Effect of Fibre Waviness on the Relationship Between Compressive & Flexural Strengths of UD, Journal of Composite Materials, Vol. 28, 1994, pp 66 - 76.

WOOLSTENCROFT, CURTIS A.R., HARESCEUGH R.I., 1981
A Comparison of Test Techniques used for the Evaluation of the unidirectional Compressive Strength of Carbon Fibre-Reinforced Plastics, Composites, October 1981, pp 275 - 280.

YURGARTIS S.W., 1987
Measurement of Small Angle Fiber Misalignment in Continuous Fiber Composites, Composite Science and Technology, Vol. 30, 1987, pp 279 - 293.

Annexes

Annexe 1

Loi de Comportement Inverse 'J2 Déformation' en Contrainte Planes

1. LOIS 'J2 DÉFORMATION' SÉCANTE ET TANGENTE ---------- 222

1.1 Loi de comportement sécante---------- ---------- 222

1.2 Loi de comportement tangente ---------- ---------- 223

2. INVERSION DE LA 'J_2 DÉFORMATION' SÉCANTE EN CONTRAINTES PLANES ---------- ---------- ---------- ---- 226

1. LOIS 'J2 DÉFORMATION' SÉCANTE ET TANGENTE

1.1 Loi de comportement sécante

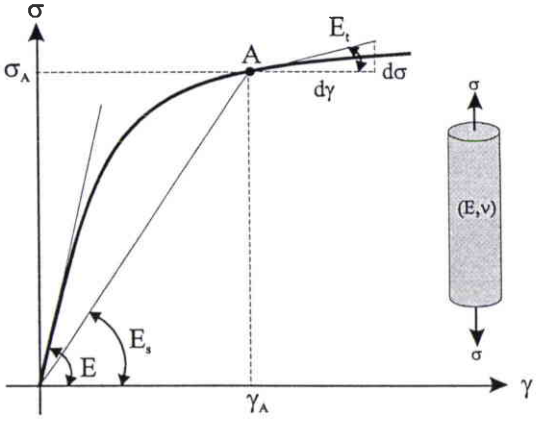
La matrice possède un comportement isotrope, la loi sécante de la 'J_2 déformation' se présente alors sous la forme :

$$\gamma_{ij} = \frac{1+\nu}{E} S_{ij} - \frac{\nu}{E} S_{kk}\,\delta_{ij} + \frac{h_2(J_2)}{E} S_{ij}^{dev} \qquad \text{(An 1)}$$

où $h_2(J_2)$ est la fonction d'écrouissage. De manière équivalente, en introduisant la définition du déviateur des contraintes, cette loi s'écrit :

$$\gamma_{ij} = \frac{1+\nu+h_2(J_2)}{E} S_{ij} - \frac{3\nu+h_2(J_2)}{3E} S_{kk}\,\delta_{ij} \qquad \text{(An 2)}$$

La fonction d'écrouissage donne l'évolution des caractéristiques mécaniques du matériau avec le chargement, ici en fonction de J_2. Elle est déterminée à l'aide d'un essai de traction uniaxiale au cours duquel seule la contrainte longitudinale est non nulle (**Figure An 1**). La fonction doit être telle que la déformation longitudinale déterminée par la loi de comportement (An 1) dans ce cas particulier soit équivalente à la même déformation mesurée au cours de l'essai.



$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_{ij}^{dev} = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{3} \end{pmatrix}$$

Figure An 1 : Essai de traction uniaxiale et tenseurs associés.

D'après (An 1), la déformation longitudinale notée γ s'écrit :

$$\gamma = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}\sigma + \frac{h_2(J_2)}{E}\frac{2\sigma}{3} \qquad \text{(An 3)}$$

Au cours de l'essai, la déformation mesurée est reliée à la contrainte courante par le module d'Young sécant (voir **Figure An 1**) :

$$\gamma = \frac{\sigma}{E_s} \qquad \text{(An 4)}$$

Finalement, les expressions de la déformation longitudinale doivent être équivalentes. En éliminant la contrainte σ et en simplifiant l'expression précédente, on a :

$$\frac{1}{E_s} = \frac{1}{E}\left(1 + h_2(J_2)\frac{2}{3}\right) \qquad \text{(An 5)}$$

Pour vérifier cette égalité pendant tout l'essai, la fonction d'écrouissage s'exprime en fonction de la variable qui définit l'état courant du matériau (E_s) :

$$\boxed{h_2(J_2) = \frac{3}{2}\left(\frac{E}{E_S} - 1\right)} \qquad \text{(An 6)}$$

1.2 Loi de comportement tangente

La loi de comportement tangente est également utilisée dans le processus de résolution numérique. Elle se déduit de An 1 en exprimant l'incrément de déformation $d\gamma$ en fonction de l'incréments de contrainte dS :

$$d\gamma_{ij} = \frac{1+\nu}{E}dS_{ij} - \frac{\nu}{E}dS_{kk}\,\delta_{ij} + d\left(\frac{h_2(J_2)}{E}S_{ij}^{dev}\right) \qquad \text{(An 7)}$$

L'incrément de déformation plastique doit être explicité, notamment la différentielle de la fonction d'écrouissage. La loi de comportement étant non linéaire, un incrément de déformation plastique dépend à la fois de l'incrément de contrainte appliqué et de l'évolution de la fonction d'écrouissage :

$$\begin{aligned} d(h_2(J_2)\, S_{ij}^{dev}) &= dh_2(J_2)\, S_{ij}^{dev} + h_2(J_2)\, dS_{ij}^{dev} \\ &= \frac{dh_2(J_2)}{dJ_2} dJ_2\, S_{ij}^{dev} + h_2(J_2)\, dS_{ij}^{dev} \end{aligned} \qquad \text{(An 8)}$$

où $\frac{dh_2(J_2)}{dJ_2}$ sera noté dans la suite $h'_2(J_2)$.

Le second terme de cette expression s'exprime de manière triviale en fonction des contraintes d'après An 1:

$$dS_{ij}^{dev} = dS_{ij} - \frac{1}{3} dS_{kk}\, \delta_{ij} \qquad \text{(An 9)}$$

Par contre, pour expliciter le premier terme de An 8, il faut revenir à l'expression de J_2 et calculer sa différentielle :

$$\begin{aligned} dJ_2 &= d\left(\frac{1}{2} S_{ij}^{dev}\, S_{ij}^{dev}\right) \\ &= dS_{ij}^{dev}\, S_{ij}^{dev} \text{ , en introduisant An 9 la différentielle du déviateur des contraintes} \\ &= \left(dS_{ij} - \frac{1}{3} dS_{kk}\, \delta_{ij}\right) S_{ij}^{dev} \qquad \text{(An 10)} \\ &= dS_{ij}\, S_{ij}^{dev} - \frac{1}{3} dS_{kk}\, S_{pp}^{dev} \text{ , or par définition, la trace du déviateur est nulle} \end{aligned}$$

Finalement

$$dJ_2 = dS_{ij}\, S_{ij}^{dev} \qquad \text{(An 11)}$$

En remplaçant dans le 1er terme de An 8 le déviateur des contraintes par son expression en fonction des contraintes, la loi de comportement tangente s'écrit :

$$d\gamma_{ij} = \frac{1+\nu+h_2(J_2)}{E} dS_{ij} - \frac{3\nu+h_2(J_2)}{3E} dS_{pp}\,\delta_{ij} + \frac{h'_2(J_2)}{E} S^{dev}_{ij}\, S^{dev}_{kl}\, dS_{kl} \qquad \text{(An 12)}$$

La dérivée de la fonction d'écrouissage est déterminée de manière similaire à la fonction, par un essai de traction uniaxiale. Ici l'incrément de contrainte est relié à l'incrément de déformation par le module tangent (voir **Figure An 1**) :

$$d\gamma = \frac{d\sigma}{E_t} \qquad \text{(An 13)}$$

Comme précédemment, l'expression de la déformation doit être équivalente dans le modèle et dans l'essai :

$$\frac{d\sigma}{E_t} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu+h_2(J_2))\,d\sigma - \left(\nu+\frac{h_2(J_2)}{3}\right)d\sigma + h'_2(J_2)\frac{2\sigma}{3}\frac{2\sigma}{3}d\sigma\right] \qquad \text{(An 14)}$$

en introduisant l'expression An 6 de $h_2(J_2)$ et en simplifiant par $d\sigma$ on a :

$$\frac{E}{E_t} = 1+\nu+\frac{3}{2}\left(\frac{E}{E_S}-1\right) - \nu - \frac{1}{2}\left(\frac{E}{E_S}-1\right) + h'_2(J_2)\frac{4\sigma^2}{9} \qquad \text{(An 15)}$$

tous calculs faits, la dérivée de la fonction d'écrouissage s'écrit :

$$h'_2(J_2) = \frac{9}{4\sigma^2}\left(\frac{E}{E_t} - \frac{E}{E_s}\right) \qquad \text{(An 16)}$$

2. INVERSION DE LA 'J_2 DÉFORMATION' SÉCANTE EN CONTRAINTES PLANES

Dans notre problème exprimé en contraintes planes, nous avons besoin de connaître les lois inverses qui permettent de poser les expressions en déplacement. De plus, les grandeurs vectorielles sont utilisées pour la résolution numérique. Les grandeurs sont définies de manière classique pour un problème bidimensionnel en contraintes planes :

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{S\} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} \qquad \text{(An 17)}$$

où γ_{12} désigne le cisaillement au sens de l'ingénieur, tel que :

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \qquad \text{(An 18)}$$

En contraintes planes (i.e. $S_{33} = S_{23} = S_{13} = 0$), la loi de comportement An 2 qui s'écrit uniquement en fonction des contraintes, a la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{1+\nu+h_2(J_2)}{E} S_{11} - \frac{3\nu+h_2(J_2)}{3E}(S_{11}+S_{22}) \\ \gamma_{22} &= \frac{1+\nu+h_2(J_2)}{E} S_{22} - \frac{3\nu+h_2(J_2)}{3E}(S_{11}+S_{22}) \\ \gamma_{12} &= 2\,\frac{1+\nu+h_2(J_2)}{E} S_{12} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(An 19)}$$

Le terme de cisaillement peut aussi s'écrire en fonction du module de cisaillement G :

$$\gamma_{12} = \left(\frac{1}{G} + \frac{2\,h_2(J_2)}{E}\right) S_{12} \qquad \text{(An 20)}$$

avec $G = \dfrac{E}{2\,(1+\nu)}$

Après simplification, la loi de comportement élastique non linéaire en contraintes planes s'écrit :

$$\{\gamma\} = [\mathbf{M(S)}] \,.\, \{\mathbf{S}\}$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3 + 2\,h_2(J_2)}{3E} & -\frac{3\nu + h_2(J_2)}{3E} & 0 \\ -\frac{3\nu + h_2(J_2)}{3E} & \frac{3 + 2\,h_2(J_2)}{3E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E + 2\,h_2(J_2)}{E\,G} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} \qquad \text{(An 21)}$$

Il faut inverser cette loi, c'est à dire inverser la matrice de comportement [**M(S)**]. L'inversion de la matrice se limite à la sous-matrice définie par les 4 premières composantes et le terme relatif au cisaillement s'inverse de manière triviale :

$$[\mathbf{M(S)}]^{-1} = \begin{bmatrix} M_{cp}[1,1] & M_{cp}[1,2] & 0 \\ M_{cp}[2,1] & M_{cp}[2,2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{E + 2\,h_2(J_2)}{E\,G}\right)^{-1} \end{bmatrix} \qquad \text{(An 22)}$$

En inversant de manière classique cette matrice, la matrice de comportement inverse est donnée par :

$$[\mathbf{L(S)}] = \begin{bmatrix} (3 + 2\,h_2(J_2))\,\Delta & (3\nu + h_2(J_2))\,\Delta & 0 \\ (3\nu + h_2(J_2))\,\Delta & (3 + 2\,h_2(J_2))\,\Delta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E + 2\,h_2(J_2)}{E\,G} \end{bmatrix} \qquad \text{(An 23)}$$

$$\text{avec } \Delta = \frac{E}{(3 - 3\nu + h_2(J_2))\,(1 + \nu + h_2(J_2))}$$

Annexe 2

Calcul du Second Invariant du Tenseur des Déformations en Contrainte Planes

Tenseur déviateur des déformations

Calculons le second invariant du tenseur déviateur des déformations défini par :

$$I_2 = \frac{1}{2} \gamma_{ij}^{dev} \gamma_{ij}^{dev} \text{ avec } \gamma_{ij}^{dev} = \gamma_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{(An 24)}$$

Avec la loi de comportement sécante An 2, on peut exprimer les déformations en fonction des contraintes. La trace du tenseur des déformations s'écrit :

$$\gamma_{kk} = \frac{1 + \nu + h_2(J_2)}{E} S_{kk} - \frac{3\nu + h_2(J_2)}{3E} S_{pp} \delta_{kk}, \quad \text{avec } \delta_{kk} = 3 \quad \text{(An 25)}$$

$$= \frac{1 - 2\nu}{E} S_{kk}$$

d'où l'expression du déviateur des déformations An 24 :

$$\gamma_{ij}^{dev} = \frac{1 + \nu + h_2(J_2)}{E} S_{ij} - \frac{3\nu + h_2(J_2)}{3E} S_{kk} \delta_{ij} - \frac{1}{3} \frac{1 - 2\nu}{E} S_{kk} \delta_{ij} \quad \text{(An 26)}$$

$$= \frac{1 + \nu + h_2(J_2)}{E} S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{1 + \nu + h_2(J_2)}{E} S_{kk} \delta_{ij}$$

En regroupant les termes, on reconnaît l'expression du déviateur des contraintes, et finalement le déviateur des déformations est relié au déviateur des contraintes par la relation suivante :

$$\gamma_{ij}^{dev} = \frac{1 + \nu + h_2(J_2)}{E} S_{ij}^{dev} \quad \text{(An 27)}$$

Dans cette expression, on connaît le déviateur des déformations, mais le déviateur des contraintes est inconnu et nous recherchons J_2. À partir de An 27, le second invariant des déformations peut être calculé, il s'exprime en fonction de l'inconnue :

$$I_2 - \left(\frac{1 + \nu + h_2(J_2)}{E}\right)^2 J_2 = 0 \qquad \text{(An 28)}$$

Il reste à exprimer I_2 à partir de l'expression générale du déviateur des déformations. En effet, même si le problème est posé en contraintes planes, il faut prendre en compte la déformation 33 qui n'est pas nulle et qui intervient dans le déviateur des déformations. Nous allons exprimer cette déformation hors plan en fonction des autres déformations grâce à la condition de nullité de la contrainte 33. Mais il faut au préalable inverser la loi de comportement An 2. Connaissant γ, γ^{dev} et S^{dev} on peut exprimer le tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} S_{ij} &= S^{dev}_{ij} + \frac{1}{3} S_{kk}\, \delta_{ij}\,, \qquad \text{en utilisant l'inverse de An 27} \\ &= \gamma^{dev}_{ij} \frac{E}{1 + \nu + h_2(J_2)} + \frac{1}{3} S_{kk}\, \delta_{ij} \quad , \text{ puis la définition de } \gamma^{dev}_{ij} \text{ (An 24)} \\ &= \left(\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{kk}\, \delta_{ij}\right) \frac{E}{1 + \nu + h_2(J_2)} + \frac{1}{3} S_{kk}\, \delta_{ij} \end{aligned} \qquad \text{(An 29)}$$

On connaît la trace du déviateur des contraintes en inversant An 25, alors le tenseur des contraintes est donné par :

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \left(\gamma_{ij} - \frac{1}{3}\gamma_{kk}\, \delta_{ij}\right) \frac{E}{1 + \nu + h_2(J_2)} + \frac{1}{3} \frac{E}{1 - 2\nu} \gamma_{kk}\, \delta_{ij} \\ &= \frac{E}{1 + \nu + h_2(J_2)} \gamma_{ij} + \frac{1}{3}\left(\frac{E}{1 + \nu + h_2(J_2)} - \frac{E}{1 - 2\nu}\right) \gamma_{kk}\, \delta_{ij} \end{aligned} \qquad \text{(An 30)}$$

Tous calculs faits, les contraintes s'expriment en fonction des déformations :

$$S_{ij} = \frac{E}{1 + \nu + h_2(J_2)} \gamma_{ij} + \frac{E\,(3\,\nu + h_2(J_2))}{3\,(1 - 2\,\nu)\,(1 + \nu + h_2(J_2))} \gamma_{kk}\, \delta_{ij} \qquad \text{(An 31)}$$

Remarque : dans un cadre élastique linéaire, la fonction d'écrouissage est nulle et on retrouve bien l'expression classique d'une loi élastique en contraintes planes :

$$S_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\gamma_{ij} + \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)}\gamma_{kk}\,\delta_{ij} \qquad \text{(An 32)}$$

Second invariant du tenseur des déformations

Avec cette relation (An 31), on exprime la contrainte S_{33} :

$$S_{33} = 0 = \frac{E}{1+\nu+h_2(J_2)}\gamma_{33} + \frac{E\,(3\nu + h_2(J_2))}{3\,(1-2\nu)\,(1+\nu+h_2(J_2))}(\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}) \qquad \text{(An 33)}$$

Tous calculs faits, l'expression de la déformation hors plan est donnée par:

$$\gamma_{33} = -\frac{3\nu + h_2(J_2)}{3\,(1-\nu)+h_2(J_2)}(\gamma_{11}+\gamma_{22}) \qquad \text{(An 34)}$$

ou encore

$$\gamma_{33} = \beta(J_2)\,(\gamma_{11}+\gamma_{22}) \qquad \text{(An 35)}$$

avec la fonction $\beta(J_2) = -\dfrac{3\nu + h_2(J_2)}{3\,(1-\nu)+h_2(J_2)}$

Par définition (An 24), le déviateur des déformations s'écrit en fonction des déformations :

$$\gamma^{dev} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} - \dfrac{1+\beta(J_2)}{3}(\gamma_{11}+\gamma_{22}) & \dfrac{\gamma_{12}}{2} & 0 \\ \dfrac{\gamma_{12}}{2} & \gamma_{22} - \dfrac{1+\beta(J_2)}{3}(\gamma_{11}+\gamma_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\dfrac{2\,\beta(J_2)-1}{3}\right)(\gamma_{11}+\gamma_{22}) \end{pmatrix} \qquad \text{(An 36)}$$

où les termes de cisaillement γ_{12} sont les cisaillements au sens de l'ingénieur utilisés dans les écritures vectorielles. De cette forme du tenseur des déformations, on tire le second invariant des déformations :

$$I_2(J_2) = \frac{1}{2}\left[\left(\gamma_{11}-\frac{1+\beta(J_2)}{3}(\gamma_{11}+\gamma_{22})\right)^2+\left(\gamma_{22}-\frac{1+\beta(J_2)}{3}(\gamma_{11}+\gamma_{22})\right)^2+\frac{\gamma_{12}^2}{2}+\left(\left(\frac{2\,\beta(J_2)-1}{3}\right)(\gamma_{11}+\gamma_{22})\right)^2\right] \quad \text{(An 37)}$$

Finalement, le problème à résoudre pour connaître le J_2 correspondant à l'état courant de déformation est donné par les relations An 28 et An 37 :

$$I_2(J_2) - \left(\frac{1+\nu+h_2(J_2)}{E}\right)^2 J_2 = 0 \quad \text{(An 38)}$$

avec $I_2(J_2)$ calculé d'après l'état de déformation courant grâce à An 37 .

Annexe 3

Dérivée de la Relation Non Linéaire $I_2(J_2)$ - $f(J_2)$

La dérivée du résidu, utilisée dans les expressions des incréments, s'exprime en fonction de $h_2(J_2)$. À partir de la définition de f (§ C 1.4), sa dérivée par rapport à J_2 s'écrit :

$$\frac{\partial f(J_2)}{\partial J_2}\Big|_n = \frac{\partial}{\partial J_2}\left(\frac{1+\nu+h_2(J_2)}{E}\right)^2 = 2\left(\frac{1+\nu+h_2(J_2^n)}{E^2}\right)h'_2(J_2^n) \qquad \text{(An 39)}$$

En partant de l'expression An 24 de I_2 et de An 37, on a sa dérivée :

$$\frac{\partial I_2(J_2)}{\partial J_2} = \frac{\partial I_2}{\partial h_2(J_2)}h'_2(J_2) \qquad \text{(An 40)}$$

$$= -\frac{\partial\beta(J_2)}{\partial J_2}\frac{\gamma_{11}+\gamma_{22}}{3}\left[\left(\gamma_{11}-\frac{1+\beta(J_2)}{3}(\gamma_{11}+\gamma_{22})\right)+\left(\gamma_{22}-\frac{1+\beta(J_2)}{3}(\gamma_{11}+\gamma_{22})\right)-2\left(\frac{2\,\beta(J_2)-1}{3}\right)(\gamma_{11}+\gamma_{22})\right]$$

$$= -\frac{\partial\beta(J_2)}{\partial J_2}\frac{\gamma_{11}+\gamma_{22}}{3}\left[\gamma_{11}+\gamma_{22}-2\left(\frac{1+\beta(J_2)}{3}+\frac{2\,\beta(J_2)-1}{3}\right)(\gamma_{11}+\gamma_{22})\right]$$

$$= -\frac{\partial\beta(J_2)}{\partial J_2}\frac{(\gamma_{11}+\gamma_{22})^2}{3}[\,1-2\,\beta(J_2)]$$

La dérivée de $\beta(J_2)$, posée pour simplifier l'écriture, s'exprime à partir de An 35 :

$$\frac{\partial\beta(J_2)}{\partial J_2} = \frac{\partial}{\partial J_2}\left(-\frac{3\,\nu+h_2(J_2)}{3\,(1-\nu)+h_2(J_2)}\right)$$

$$= \frac{h'_2(J_2)\,(3(1-\nu)+h_2(J_2))-(3\,\nu+h_2(J_2))\,h'_2(J_2)}{(3\,(1-\nu)+h_2(J_2))^2} \qquad \text{(An 41)}$$

$$= -\,3\,\frac{h'_2(J_2)\,(1-2\,\nu)}{(3\,(1-\nu)+h_2(J_2))^2}$$

Finalement, la dérivée de I_2 en 'n' est donnée par :

$$\frac{\partial I_2(J_2)}{\partial J_2}\Big|_n = \frac{h'_2(J_2^n)\,(1-2\,\nu)}{3\,(1-\nu)+h_2(J_2^n)}(\gamma_{11}+\gamma_{22})^2\left(1-2\,\frac{3\,\nu+h_2(J_2^n)}{3\,(1-\nu)+h_2(J_2^n)}\right) \qquad \text{(An 42)}$$

Annexe 4

Description du Fichier de Commande

***DEFINITION** Titre

Defaut=0.1,c1=-0.01,c2=-0.01,Ecr=Resine914.ecr,defaut constant,H=1600

***GEOMETRIE** Définition de la taille et du découpage du domaine

Hauteur h (en Micron)

1600.

Nbre de divisions sur x

12

Nbre elements sur y

20

Nbre d'onde k

0.01

***DONNEES DU PROBLEME**

Chargement : C1=def face sup,C2=def face inf Déformation imposée

-0.01,-0.01

Nbre de Pas Longueur d'Arc Pilotage

1 0.05

100 0.4

Nbre maxi increments de correction Si convergence non réalisée, longueur d'arc réduite (1)

5

Valeur initialle de Lambda Utilisée quand pré flambage linéaire

0.

Epsilon - mesure de la convergence Précision minimum au sens du critère choisi

1E-3

Dim. Arclen,Augm. Arclen,maxinc_arclen (1) Voir explication ci-dessous

5.,1.2,3

***PLASTICITE (2)** Loi de comportement choisie et paramètres associés

Type ecrouissage: fichier ou loi (1..3)

Resine914.ecr

Parametres Loi

4.5E-3,0.015,3

***ARRET (0=non, 1 =instabilite, 2 = charge maxi)** Arrêt des calculs si nécessaire

1

***SORTIES (3)** Fréquence des sorties pour post-traitement, et suivi de certaines variables

100 (voir ci-dessous)

12,5,11

152,12,19

***CARACTERISTIQUES MECANIQUES DES ELEMENTS (en N/micron^2)**

1 230E-3 3.5 .6 4.5E-3 0.4 Caractéristiques pour chaque élément du maillage :

2 230E-3 3.5 .6 4.5E-3 0.4 N° élément, E_f, r_f, f, E_m, ν_m

.....

.....

.....

19 230E-3 3.5 .6 4.5E-3 0.4

20 230E-3 3.5 .6 4.5E-3 0.4

***DEPLACEMENTS INITIAUX (en MICRON)**

1 0.1 .0 Défaut initial pour chaque noeud : v_{01}, v_{02}

2 0.1 .0

.....

.....

40 0.1 .0

41 0.1 .0

***DESCRIPTION DES CONDITIONS AUX LIMITES**

0 0 0 0 Ddl des noeuds inférieur et supérieur (U_1, V_1, U_2, V_2): 0 = bloqué, 1 = libre

1 1 1 1

==========

(1)

Diminution Arclen -> diviser arclen par ce coeff si non convergence en nbcorr_maxi iterations

Augmentation Arclen -> multiplier arclen si convergence en

nbcorrections<nbcorr_maxi/maxinc_arclen

(2)

***PLASTICITE**

Type ecrouissage: nom fichier ou loi (1=ss ecrou,2=2pentes,3=Ramb-Osg)

Resine914.ecr Chiffre de 1 à 3 selon la loi, ou nom de fichier

Parametres Loi(2pentes=Ecr-eps_lim-rapport,R-OS=Ecr-eps_lim-n)

4.5E-3,0.05,6 Paramètres de la loi : module, limite élastique, exposant écrouissage

(3)

***SORTIES**

5 = frequence de sorties des contraintes, deformations et deformee (*.dep, *.TEC)

10,1,16 : ecrire les variables de 1 a 16 pour le pseudo-noeud 10 a chaque pas (*.dat)

Variables : Variables connues pour chaque pseudo-noeud

1	x
2	y
3	u
4	v
5	Sxx
6	Syy
7	Sxy
8	Smises
9	Sf+
10	Sf-
11	Sflex
12	Sxx_hom
13	Syy_hom
14	Sxy_hom
15	Exx_el
16	Eyy_el
17	Exy_el
18	Ezz_el
19	Exx_nl
20	Eyy_nl
21	Exy_nl
22	Ezz_nl
23	Exx
24	Eyy
25	Exy
26	Ezz
27	Ef+
28	Ef-
29	Eflex

Annexe 5

Déformations à Rupture pour les Plis utilisés dans la Simulation de Essais de GRANDSIRE-VINÇON

ϕ_0 / λ	**2.5** (k=0.0025)	**1.26** (k=0.005)	**0.84** (k=0.075)	**0.63** (k=0.01)	**0.42** (k=0.015)	**0.31** (k=0.02)	**0.25** (k=0.025)	**0.21** (k=0.03)
0.1	2.501	2.417	2.424	2.437	2.476	2.544	2.617	2.713
0.5	1.992	1.915	1.926	1.944	1.999	2.053	2.135	2.223
1	1.693	1.619	1.627	1.648	1.704	1.769	1.839	1.922
1.5	1.517	1.448	1.455	1.474	1.528	1.594	1.662	1.746
2	1.405	1.338	1.345	1.364	1.422	1.486	1.550	1.636
2.5	1.335	1.269	1.278	1.296	1.351	1.413	1.480	1.570
3	1.294	1.230	1.239	1.260	1.307	1.367	1.440	1.516
3.5	1.282	1.223	1.219	1.231	1.276	1.342	1.405	1.484

Tableau An 1 : Déformation à rupture calculée en fonction de l'amplitude du défaut angulaire (°) et de sa longueur d'onde (mm), pour un UD de 3.2 mm en compression libre-libre (λ_{el} = 2.2 mm)

ϕ_0 / λ	**2.5** (k=0.0025)	**1.26** (k=0.005)	**0.84** (k=0.075)	**0.63** (k=0.01)	**0.42** (k=0.015)	**0.31** (k=0.02)	**0.25** (k=0.025)	**0.21** (k=0.03)
0.1	2.600	2.494	2.473	2.470	2.495	2.556	2.628	2.718
0.5	2.146	2.013	1.986	1.986	2.021	2.074	2.148	2.236
1	1.871	1.727	1.695	1.694	1.731	1.786	1.855	1.937
1.5	1.709	1.559	1.526	1.524	1.554	1.612	1.679	1.770
2	1.604	1.451	1.419	1.414	1.442	1.504	1.577	1.663
2.5	1.537	1.379	1.343	1.341	1.377	1.431	1.508	1.586
3	1.492	1.334	1.298	1.298	1.332	1.394	1.469	1.548
3.5	1.470	1.309	1.274	1.272	1.309	1.369	1.435	1.517

Tableau An 2 : Déformation à rupture calculée en fonction de l'amplitude du défaut angulaire (°) et de sa longueur d'onde (mm), pour un stratifié [0,90]s de 3.2 mm en compression libre-libre (λ_{el} = 0.62 mm)

ϕ_0 / λ	**2.5** (k=0.0025)	**1.26** (k=0.005)	**0.84** (k=0.075)	**0.63** (k=0.01)	**0.42** (k=0.015)	**0.31** (k=0.02)	**0.25** (k=0.025)	**0.21** (k=0.03)
0.1	2.566	2.606	2.550	2.532	2.541	2.591	2.651	2.736
0.5	2.315	2.143	2.081	2.063	2.074	2.112	2.177	2.255
1	2.051	1.865	1.796	1.774	1.788	1.822	1.882	1.954
1.5	1.889	1.702	1.626	1.606	1.607	1.647	1.714	1.788
2	1.785	1.595	1.522	1.493	1.500	1.536	1.597	1.674
2.5	1.720	1.532	1.454	1.427	1.432	1.467	1.534	1.602
3	1.683	1.497	1.413	1.387	1.390	1.425	1.488	1.573
3.5	1.658	1.492	1.404	1.375	1.370	1.405	1.461	1.555

Tableau An 3 : Déformation à rupture calculée en fonction de l'amplitude du défaut angulaire (°) et de sa longueur d'onde (mm), pour un stratifié $[0,90]_{2s}$ de 3.2 mm en compression libre-libre (λ_{el} = 0.41 mm)

ϕ_0 / λ	**2.5** (k=0.0025)	**1.26** (k=0.005)	**0.84** (k=0.075)	**0.63** (k=0.01)	**0.42** (k=0.015)	**0.31** (k=0.02)	**0.25** (k=0.025)	**0.21** (k=0.03)
0.1	3.573	3.179	3.003	2.901	2.810	2.812	2.844	2.910
0.5	3.226	2.610	2.423	2.339	2.281	2.284	2.324	2.400
1	2.843	2.243	2.070	1.994	1.953	1.969	2.015	2.093
1.5	2.585	2.024	1.867	1.797	1.759	1.777	1.818	1.903
2	2.412	1.886	1.735	1.672	1.639	1.655	1.706	1.777
2.5	2.297	1.800	1.655	1.589	1.552	1.579	1.616	1.691
3	2.216	1.757	1.609	1.545	1.506	1.531	1.581	1.662
3.5	2.165	1.753	1.604	1.536	1.486	1.508	1.568	1.629

Tableau An 4 : Déformation à rupture calculée en fonction de l'amplitude du défaut angulaire (°) et de sa longueur d'onde (mm), pour un UD de 1.6 mm en flexion-compression bloqué-libre (λ_{el} = 0.33 mm)

ϕ_0 / λ	**2.5** (k=0.0025)	**1.26** (k=0.005)	**0.84** (k=0.075)	**0.63** (k=0.01)	**0.42** (k=0.015)	**0.31** (k=0.02)	**0.25** (k=0.025)	**0.21** (k=0.03)
0.1	3.453	3.110	2.982	2.896	2.810	2.812	2.844	2.910
0.5	2.887	2.530	2.405	2.335	2.281	2.285	2.324	2.400
1	2.510	2.173	2.054	1.992	1.955	1.970	2.016	2.074
1.5	2.283	1.964	1.854	1.795	1.761	1.779	1.820	1.905
2	2.136	1.832	1.725	1.671	1.631	1.658	1.710	1.780
2.5	2.042	1.745	1.646	1.590	1.556	1.584	1.621	1.696
3	1.981	1.687	1.601	1.547	1.512	1.537	1.588	1.668
3.5	1.952	1.660	1.586	1.531	1.493	1.516	1.575	1.637

Tableau An 5 : Déformation à rupture calculée en fonction de l'amplitude du défaut angulaire (°) et de sa longueur d'onde (mm), pour une stratifié [90,0] de 1.6 mm en flexion-compression, bloqué-libre (λ_{el} = 0.48 mm)

ϕ_0 / λ	**2.5** (k=0.0025)	**1.26** (k=0.005)	**0.84** (k=0.075)	**0.63** (k=0.01)	**0.42** (k=0.015)	**0.31** (k=0.02)	**0.25** (k=0.025)	**0.21** (k=0.03)
0.1	3.490	3.022	2.889	2.836	2.793	2.804	2.846	2.906
0.5	3.099	2.501	2.361	2.310	2.278	2.276	2.332	2.406
1	2.781	2.182	2.041	1.986	1.961	1.982	2.007	2.099
1.5	2.581	1.994	1.852	1.800	1.759	1.793	1.826	1.892
2	2.455	1.871	1.729	1.673	1.647	1.671	1.712	1.785
2.5	2.384	1.803	1.656	1.604	1.561	1.594	1.641	1.722
3	2.362	1.768	1.616	1.553	1.524	1.546	1.603	1.641
3.5	2.379	1.784	1.615	1.541	1.514	1.521	1.588	1.634

Tableau An 6 : Déformation à rupture calculée en fonction de l'amplitude du défaut angulaire (°) et de sa longueur d'onde (mm), pour une stratifié $[90,0]_2$ de 1.6 mm en flexion-compression, bloqué-libre (λ_{el} = 0.38 mm)