



**HAL**  
open science

## Maintenance prédictive : une approche stochastique

Philippe Wolff

► **To cite this version:**

Philippe Wolff. Maintenance prédictive : une approche stochastique. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1996. Français. NNT : 1996METZ025S . tel-01777137

**HAL Id: tel-01777137**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777137v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

5 102241

~~S/M3 96/45~~

n° d'ordre :

# THESE

présentée à

## L'UNIVERSITE DE METZ

FACULTE DES SCIENCES

UFR MATHEMATIQUES, INFORMATIQUE, MECANIQUE

pour l'obtention du titre de

### DOCTEUR

Spécialité :

**SCIENCES DE L'INGENIEUR  
(Mention : AUTOMATIQUE)**

par

**Philippe WOLFF**

Sujet de la thèse :

## MAINTENANCE PREDICTIVE : UNE APPROCHE STOCHASTIQUE

Soutenue le 20 septembre 1996 devant le jury composé de :

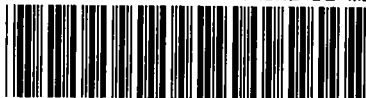
M. Claude LAURENT, Président

MM. Pierre BAPTISTE

Bernard MITTEI

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ

I, Rapporteurs



022 420594 4

08 NOV. 1996

Jean-Marie PROTH,

Examineurs

*A Maman, Papa,*

*Hélène et Philippe<sup>2</sup>*

# REMERCIEMENTS

Cette thèse a été préparée au sein du projet *SAGEP* de l'*INRIA* (Metz) ainsi qu'au *CIM-lab* de l'*Institute for Systems Research* (USA) sous la direction scientifique de Monsieur **Jean-Marie PROTH**, Directeur de Recherche à l'*INRIA*. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour la confiance qu'il m'a accordée tout au long de cette thèse, ainsi que pour ses précieux conseils qui m'ont permis de progresser dans mon travail.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur **Claude LAURENT** (Metz) de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude aux Professeurs **Pierre BAPTISTE** (*ENSMM*, Besançon), **Bernard MUTEL** (*ENSAIS*, Strasbourg) et **Marcel STAROSWIECKI** (Lille) qui ont accepté la charge d'évaluer, en qualité de rapporteur et membre du jury, ce travail.

Je tiens à remercier le Professeur **Ioannis MINIS** (*University of Maryland, USA*), qui m'a accueilli pendant quinze mois au sein de son laboratoire aux Etats-Unis et qui a accepté d'être membre de ce jury.

J'adresse enfin mes plus vifs remerciements au Professeur **Chengbin CHU** (*Université de Technologie de Troyes*) pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de ce travail, pour ses conseils qui ont joué un rôle déterminant dans le développement de ce travail, ainsi que pour sa participation à ce jury.

J'exprime également toute ma sympathie à toute l'équipe du projet *SAGEP* et à celle du *CIM-Lab* pour l'aide et la bonne humeur dont ils font preuve quotidiennement.

# TABLE DES MATIERES

<b>Notations</b> .....	4
<b>Introduction</b> .....	5
<b>Chapitre 1 : Etat de l'art</b> .....	7
1.1 Introduction .....	8
1.2 Maintenance : Présentation générale .....	8
1.2.1 Maintenance corrective .....	8
1.2.2 Maintenance préventive systématique .....	9
1.2.3 Maintenance préventive conditionnelle .....	10
1.2.4 Aspect économique de la maintenance .....	11
1.3 Méthodes pour l'étude de la maintenance préventive .....	12
1.3.1 Analyse des signaux .....	12
1.3.2 Analyse des données, modèles cognitifs .....	13
1.3.3 Processus stochastiques .....	15
1.4 Modèles de détérioration graduelle .....	19
1.4.1 Remarques préliminaires .....	19
1.4.2 Systèmes à une unité .....	20
1.4.3 Systèmes multi-unités .....	21
1.5 Conclusion .....	23
<b>Chapitre 2 : Optimisation d'une politique de     maintenance paramétrique</b> .....	25
2.1 Introduction .....	26
2.2 Exemple de système à une unité .....	26
2.2.1 Modèle .....	26
2.2.2 Politique de maintenance paramétrique .....	27

## Table des Matières

2.2.3	Optimisation de la politique de maintenance .....	28
2.2.3.1	Densité de probabilité de l'état .....	29
2.2.3.2	Politique optimale .....	31
2.2.4	Analyse et comparaison .....	35
2.3	Exemple de système à deux unités .....	38
2.3.1	Introduction .....	38
2.3.2	Cas général .....	38
2.3.3	Cas du remplacement complet systématique .....	41
2.3.3.1	Politique de maintenance .....	41
2.3.3.2	Densité de probabilité de l'état .....	43
2.3.3.3	Expression du coût de maintenance .....	51
2.3.3.4	Comparaison de différentes politiques .....	52
2.4	Conclusion .....	55
<b>Chapitre 3 : Modèle général de maintenance .....</b>		<b>57</b>
3.1	Introduction .....	58
3.2	Processus de détérioration graduelle .....	59
3.3	Modèle de remplacement sur horizon fini .....	60
3.3.1	Description de la politique .....	61
3.3.2	Présentation du modèle .....	63
3.3.3	Propriétés de la politique optimale .....	65
3.3.4	Exemple numérique .....	70
3.4	Modèle général de maintenance système à une unité .....	71
3.4.1	Description de la politique .....	71
3.4.2	Présentation du modèle .....	74
3.4.3	Propriétés de la politique optimale .....	75
3.4.4	Exemple numérique .....	83
3.4.5	Remarques .....	85
3.5	Modèle général de maintenance : système à deux unités .....	86

## Table des Matières

3.5.1	Présentation du modèle général .....	86
3.5.2	Propriétés de la politique optimale dans le cas du remplacement .....	88
3.5.4	Exemple numérique .....	92
3.6	Conclusion .....	95
<b>Chapitre 4 : Calcul de la politique optimale de maintenance .....</b>		<b>97</b>
4.1	Introduction .....	98
4.2	Méthodes de calcul .....	98
4.2.1	Programmation dynamique .....	98
4.2.2	Simulation .....	100
4.3	Application : développement de fissures .....	101
4.3.1	Modèle stochastique de croissance des fissures .....	101
4.3.2	Calcul de la politique optimale .....	104
4.3.3	Comparaison .....	108
4.4	Conclusion .....	109
<b>Conclusion .....</b>		<b>111</b>
<b>Annexe 1 .....</b>		<b>113</b>
<b>Annexe 2 .....</b>		<b>121</b>
<b>Bibliographie .....</b>		<b>127</b>



# NOTATIONS

$\delta(x)$	fonction binaire indiquant si le système est en fonctionnement ( $\delta(x)=1$ ) ou en panne ( $\delta(x)=0$ ).
$d(x)$	politique de maintenance.
$d^*(x)$	politique optimale de maintenance.
ID	ensemble des politiques de maintenance stationnaires $d(x)$ .
$f(u,x)$	fonction de transition en un instant de l'état $x$ à l'état $u$ ; en règle générale, on suppose que le support de $f(.,x)$ est $[h(x), +\infty[$ , $h$ étant une fonction non-décroissante en $x$ .
$g_d(x)$	coût en $x$ sur une période de la politique $d$ donnée.
$I^N_d(x)$	coût optimal moyen estimé sur un horizon $N$ de la politique de maintenance.
$I^N_d(x)$	coût moyen estimé sur un horizon $N$ de la politique de maintenance $d$ .
$I(x)$	coût optimal moyen estimé à long terme de la politique de maintenance.
$J^N(x)$	coût optimal cumulé estimé sur un horizon $N$ de la politique de maintenance.
$J^N_d(x)$	coût cumulé estimé sur un horizon $N$ de la politique de maintenance $d$ .
$\lambda, \lambda_x, \lambda_y$	limite de maintenance du système, de l'unité 1, de l'unité 2.
$\lambda^*$	limite optimale de maintenance.
$L, L_x, L_y$	limite de panne du système, de l'unité 1, de l'unité 2.
$M_x$	ensemble des états atteignables par une maintenance sachant que l'état du système est $x$ .
$p_d(x)$	probabilité que l'état du système soit en $x$ sachant que la politique de maintenance est $d(x)$ .
$R(x)$	coût de remplacement après une panne.
$\sigma_x, \sigma_y$	limite de maintenance conditionnelle de l'unité 1, de l'unité 2.
$r(v,x) [v \leq x]$	coût de maintenance pour ramener l'état du système en $v$ sachant qu'il était en $x$ ; $r(x,x)=0$ .
$w_i(x)$	fonction "travail à effectuer" : l'état du système après une maintenance de type $i$ est égal à $x-w_i(x)$ .
$X_i, X, Y_i, Y$	état de détérioration du système (variable aléatoire)
$x, y$	observation de l'état de détérioration du système (scalaire).

# INTRODUCTION

Cette thèse a pour but l'étude de la **maintenance prédictive**, laquelle consiste à décider ou non d'une maintenance en fonction de l'état du système considéré. La maintenance prédictive ne doit être confondue ni avec la maintenance corrective qui se contente de réagir lorsqu'un dysfonctionnement survient, ni avec la maintenance préventive classique, qui est appliquée périodiquement, quel que soit l'état du système.

Le **chapitre 1** introduit ces différents types de maintenances, rappelle les modèles et méthodes utilisés, et introduit l'objet du présent travail, à savoir les systèmes dont l'état se dégrade en suivant un processus stochastique. La thèse se limite aux systèmes à une et deux unités, c'est-à-dire aux systèmes dont l'état peut être décrit par la valeur prise par une ou deux variables aléatoires.

Le **chapitre 2** s'attache à l'étude d'une politique de maintenance paramétrique pour les deux systèmes retenus dans le cas particulier où la transition d'un état au suivant est gouvernée par des lois exponentielles négatives. La solution optimale est fournie pour le système à une unité et pour le système à deux unités lorsqu'un remplacement complet est effectué à chaque maintenance.

Le **chapitre 3** propose une approche globale du problème de politique optimale de maintenance. L'approche proposée est basée sur la programmation dynamique. L'intérêt de ce chapitre réside dans la possibilité d'appliquer une maintenance de différents niveaux de complexité, et dans la caractérisation de la politique optimale.

Enfin, le **chapitre 4** propose une application du modèle général de maintenance introduit au chapitre précédent.

L'**annexe 1** donne la preuve que l'hypothèse du régime permanent faite dans le chapitre 2 est valide dans le cas de lois exponentielles négatives.

L'**annexe 2** étudie le cas général du problème à deux unités et précise les problèmes qui restent ouverts.

Le schéma proposé ci-après donne l'articulation entre chapitres et annexes.

## Chapitre 1 : Introduction et état de l'art

Types de Maintenance :

- corrective
- préventive
- prédictive

Méthodes d'étude :

- analyse des signaux
- analyse des données
- processus stochastiques

Modèles à  
détérioration  
graduelle

*Exemple : Lois  
exponentielles*

## Chapitre 2 : Optimisation d'une politique de maintenance paramétrique dans le cas de lois exponentielles

Systeme à une unité

Systeme à deux unités

*régime  
permanent*

Annexe 1 :  
Calcul du coût moyen

*cas général*

Annexe 2 :  
Cas général à 2  
unités

*Généralisation*

## Chapitre 3 : Modèle Général de maintenance

Modèle de remplacement  
sur horizon fini

Modèle général de  
maintenance pour systèmes à  
une unité :

- 1) politique de maintenance
- 2) modèle de maintenance
- 3) caractérisation de la  
politique optimale

Modèle général de  
maintenance pour  
systèmes à deux unités

*Application*

## Chapitre 4 : Exemple d'application

Modèle de développement de  
fissures

# **CHAPITRE 1**

## **Etat de l'art**

### **1.1 INTRODUCTION**

### **1.2 MAINTENANCE : PRESENTATION GENERALE**

**1.2.1 Maintenance corrective**

**1.2.2 Maintenance préventive systématique**

**1.2.3 Maintenance préventive conditionnelle**

**1.2.4 Aspect économique de la maintenance**

### **1.3 METHODES POUR L'ETUDE DE LA MAINTENANCE PREVENTIVE**

**1.3.1 Analyse des signaux**

**1.3.2 Analyse des données, modèles cognitifs**

**1.3.3 Processus stochastiques**

### **1.4 MODELES DE DETERIORATION GRADUELLE**

**1.4.1 Remarques préliminaires**

**1.4.2 Systèmes à une unité**

**1.4.3 Systèmes multi-unités**

### **1.5 CONCLUSION**

## 1.1 INTRODUCTION

La maintenance est définie comme étant l'ensemble des techniques et actions de gestion associées ayant pour but de maintenir ou de rétablir un équipement dans un état lui permettant de réaliser sa fonction (BS [15]).

Cependant, au delà de cet objectif purement technique, la maintenance - tout particulièrement dans le cas des systèmes de production - a pour but de diminuer les coûts de production et/ou d'utilisation des équipements.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la présentation générale de la maintenance dans le cadre des systèmes de production. Elle est suivie d'une revue des différentes méthodes utilisées pour l'étude des politiques de maintenance. Nous nous intéressons ensuite plus particulièrement aux travaux basés sur les processus stochastiques.

## 1.2 MAINTENANCE : PRESENTATION GENERALE

Le coût de la maintenance représente, selon les types d'industries, entre 15% (agro-alimentaire) et 40% (sidérurgie) du coût des biens produits (MOBLEY [27]). Pour les Etats-Unis, ceci correspond à plus de 200 milliards de dollars. Un tel enjeu économique a suscité beaucoup d'efforts pour minimiser cette charge financière. L'Association Française de Normalisation classe ces différentes approches en trois catégories : la maintenance corrective, la maintenance préventive systématique et la maintenance préventive conditionnelle (AFNOR [01][02]).

### 1.2.1 Maintenance corrective

La maintenance corrective, encore appelée maintenance palliative ou curative, est effectuée après une défaillance du système. Son but est de remettre l'équipement en état de fonctionner.

Le principal intérêt de cette méthode est qu'aucun suivi des équipements n'est nécessaire. En contrepartie, il faut toujours être prêt à faire face à une panne : il est donc nécessaire d'avoir sur place du personnel qualifié ainsi qu'un nombre

suffisant de pièces de rechanges. Ceci entraîne un coût supplémentaire qui vient s'ajouter à la perte financière due au manque de productivité causée par les pannes.

Seul type de maintenance existant jusque dans les années 50, la maintenance corrective reste encore adaptée aux équipements :

- de grande fiabilité,
- non vitaux pour l'ensemble d'un système de production,
- à coût de remise en état de fonctionnement faible comparé à celui de la maintenance préventive ou prédictive,
- redondants.

En dehors de ces cas, il est apparu qu'il était possible de réduire de manière significative le coût de maintenance en intervenant sur le système avant la panne, i.e. de manière préventive.

### 1.2.2 Maintenance préventive systématique

Les actions de maintenance préventive systématique sont effectuées en fonction d'un critère simple qui reflète l'état de l'équipement : temps d'utilisation, nombre d'opérations, kilométrage, etc... Quand la valeur de ce critère dépasse un seuil donné, une maintenance est réalisée. Ce seuil est déterminé préalablement grâce à un historique des pannes de l'équipement ou d'un équipement similaire, ou bien en utilisant la théorie de la fiabilité (exemple : révision des automobiles tous les 10000 kilomètres) .

La maintenance préventive systématique implique donc un système de gestion. Celui-ci a pour but de planifier les actions de maintenance en fonction de la disponibilité de l'équipement, de celle du personnel chargé de ces interventions et du stock de pièces détachées nécessaires.

La maintenance préventive systématique permet en principe de réduire le coût de la maintenance, d'augmenter la disponibilité des équipements et, dans les cas où les défaillances sont dangereuses pour l'environnement, d'améliorer la sécurité.

Cependant, le critère utilisé pour la planification des actions de maintenance ne reflète pas toujours l'état dans lequel se trouve l'équipement (ainsi l'état d'une voiture n'est pas le même après 100 km sur autoroute ou 100 km sur des

chemins de campagne). Ceci peut entraîner les conséquences suivantes :

- maintenance inutile car l'équipement n'en nécessite pas, le seuil de maintenance ayant été estimé de façon pessimiste,
- défaillance de l'équipement avant l'action de maintenance préventive systématique, nécessitant une maintenance corrective en raison d'un seuil estimé de façon optimiste.

En suivant l'évolution de l'état de l'équipement, on peut espérer réaliser les maintenances uniquement à bon escient. C'est l'objet de la maintenance préventive conditionnelle.

### 1.2.3 Maintenance préventive conditionnelle

La maintenance préventive conditionnelle, quelquefois aussi appelée maintenance prédictive, consiste à mesurer, de manière périodique ou en continu, des paramètres décrivant au mieux l'état de l'équipement afin de déterminer le moment où il faudra effectuer la maintenance. Contrairement à la maintenance préventive systématique, cette décision n'est pas basée sur des données statistiques ou historiques, mais sur les données réelles et actuelles de l'équipement.

Ces mesures sont généralement réalisées par :

- inspection visuelle
- analyse de l'évolution des paramètres du processus
- analyse des vibrations (exemple : machines tournantes)
- thermographie (exemple : contacteurs électriques)
- analyse des huiles (exemple : roulements)
- analyses ultrasonore (exemple : fissures)

En comparant ces mesures à celles effectuées sur l'équipement neuf ou sur un équipement de référence, il est possible de détecter les fonctionnements anormaux de l'ensemble du système ou d'une de ses composantes. On peut alors estimer l'état de l'équipement et prévoir le type de défaillance vers lequel il se dirige, ainsi que le moment d'intervention.

Cependant, la maintenance préventive conditionnelle nécessite des investissements en matériel de mesure et un personnel qualifié pour leur

utilisation et l'interprétation des résultats. En outre, elle ne permet d'identifier que les modes de défaillance les plus courants. Enfin, la majorité des recherches dans ce domaine s'étant jusqu'à présent limitées essentiellement aux équipements mécaniques, son application à d'autres types de systèmes reste délicate.

#### 1.2.4 Aspects économiques de la maintenance

On distingue quatre types de coûts associés aux actions de maintenance (NIEBEL [30]):

- les coûts directs des opérations permettant de maintenir l'équipement en état de fonctionner. Selon le type de maintenance adopté, on a :
  - le coût de maintenances corrective (*pour les maintenances corrective et préventives*),
  - le coût de maintenance préventive (*pour les maintenances préventives*),
  - le coût de suivi comprenant le coût des inspections, des mesures, etc... (*pour la maintenance préventive conditionnelle*).
- les coûts "fixes" dus à l'entretien d'équipements redondants (*pour les maintenances préventives*) et au maintien d'un stock de pièces détachées.
- les coûts de perte de production ou d'indisponibilité de l'équipement.
- les coûts de dégradation dus à la détérioration de l'équipement suite à une action de maintenance inadaptée.

Dans le cas de la maintenance prédictive, il faut y ajouter l'amortissement de l'investissement initial en appareils de mesures, les dépenses de formation du personnel, etc...

Parmi les travaux les mieux documentés sur les coûts de maintenance figurent ceux du Monitoring and Diagnostic Center de l'Electrical Power Research Institute (EPRI) concernant une centrale électrique à combustible fossile de la compagnie PECO (Pennsylvania Electrical Company) (COLSHER et al [19]).

Leurs résultats sont les suivants :

- maintenance corrective : 12 à 13 \$/kW
- maintenance préventive systématique : 8 à 9 \$/kW
- maintenance préventive conditionnelle : 5 à 6 \$/kW (estimation)

Les maintenances préventives permettent donc dans ce cas une diminution très significative des dépenses. De plus, la disponibilité de la centrale est accrue de 2%,



ce qui permet une meilleure réponse aux besoins énergétiques locaux.

### 1.3 METHODES POUR L'ETUDE DE LA MAINTENANCE PREVENTIVE

Les approches proposées pour l'étude générale des problèmes de maintenance préventive des systèmes industriels sont fondées soit sur l'analyse des signaux, soit sur l'analyse des données, soit sur l'étude de processus stochastiques. Leur point commun est de supposer que la défaillance est due à un changement dans l'état, i.e. dans les caractéristiques de fonctionnement du système.

#### 1.3.1 Analyse des signaux

Cette approche est basée sur la comparaison entre les signaux mesurés sur le système réel et ceux issus d'un modèle théorique afin de détecter les modifications de fonctionnement.

Elle comporte deux étapes (BASSEVILLE [07]):

- (i) génération du signal "résiduel" indiquant un éventuel changement dans les caractéristiques de fonctionnement du système.
- (ii) prise de décision basée sur l'analyse de ce signal.

La première phase consiste à modéliser le système. Ceci peut se faire à l'aide des techniques classiques de l'automatique ou en utilisant des données statistiques. Le signal "résiduel" est alors obtenu en faisant la différence entre les signaux de sortie du modèle et ceux du système (fig. 1.3.1a).

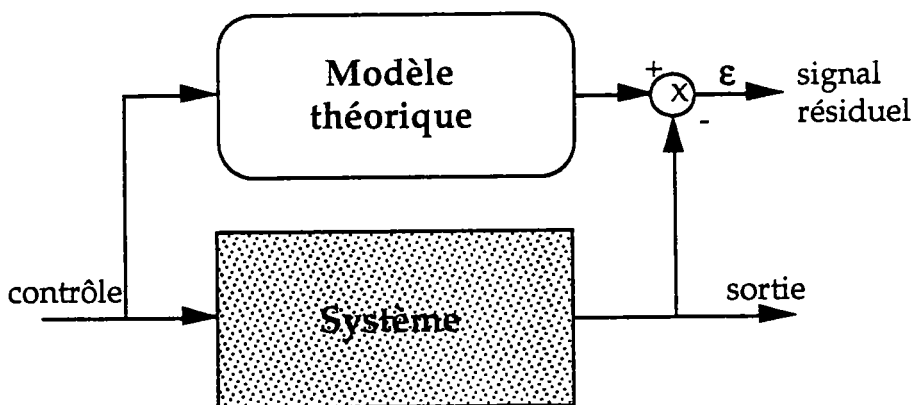


Figure 1.3.1a : Génération du signal résiduel

Dans le cas idéal, le signal "résiduel" est nul quand aucun changement ne s'est produit. L'étape (ii) est donc immédiate : une intervention sur le système est nécessaire uniquement quand le signal devient non-nul. En règle générale, il est nécessaire d'utiliser des méthodes statistiques pour déterminer si les déviations enregistrées reflètent ou non un changement dans les caractéristiques du système (fig. 1.3.1b). On peut utiliser pour cela les tests d'hypothèses sur les modifications de la moyenne, de la variance ou de toute autre propriété spectrale du signal.

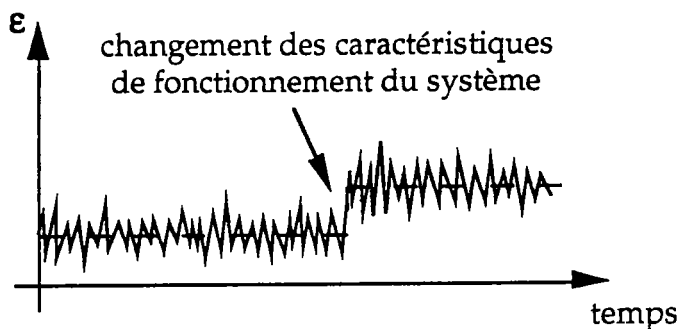


Figure 1.3.1b: Analyse du signal résiduel

Cette approche permet donc de détecter les changements dans les caractéristiques de fonctionnement du système et d'effectuer alors une maintenance prédictive conditionnelle. Elle présente cependant l'inconvénient de nécessiter une modélisation, ce qui est souvent difficile quand on s'intéresse à des systèmes dynamiques complexes. Dans certains cas, comme l'ont montré BASSEVILLE et al. [08], il est cependant possible d'obtenir de bon résultats en utilisant un modèle réduit ou une identification biaisée voire même une méthode de Monte-Carlo. Enfin, il faut remarquer que cette méthode permet de connaître à quel moment un changement intervient dans les caractéristiques de fonctionnement, mais n'indique pas quand il est souhaitable d'effectuer une maintenance. Par exemple, dans le cas de phénomènes lents comme les processus d'usure, un changement dans les caractéristiques du système n'est pas synonyme de proximité de la panne. Il n'est alors pas nécessaire d'effectuer immédiatement une maintenance.

### 1.3.2 Analyse des données

Ces méthodes consistent à utiliser les données issues d'un historique du fonctionnement du système afin de déterminer les caractéristiques qui différencient le fonctionnement normal d'un fonctionnement proche d'une

défaillance (fig. 1.3.2a).

CHU et PROTH [17] ont utilisé l'analyse des données pour un problème de percée en coulée continue dans l'industrie sidérurgique. L'historique utilisé était constitué de deux ensembles de données, l'un représentant le fonctionnement normal, l'autre celui amenant à une défaillance.

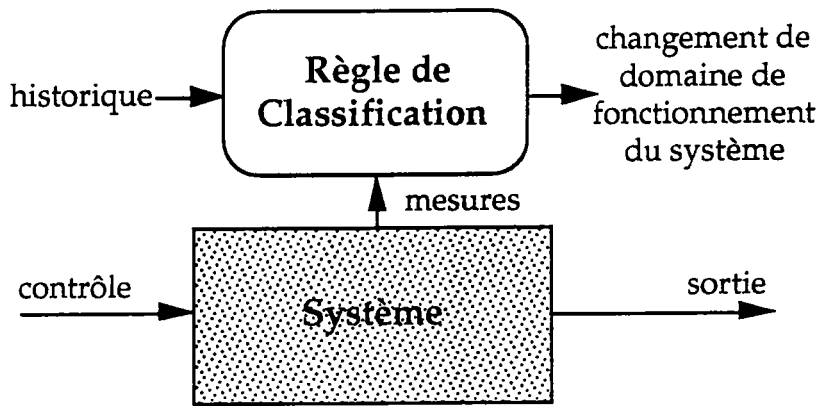


Figure 1.3.2a : Utilisation de l'analyse des données ou des réseaux de neurones pour la maintenance préventive

Dans un premier temps, les caractéristiques principales de chaque ensemble sont extraites grâce à l'analyse en composante principale. Puis une règle de classification entre les deux ensembles est établie en utilisant l'analyse discriminante. Cette règle permet alors d'associer à toute nouvelle mesure effectuée sur le système l'un des deux ensembles de fonctionnement. On peut ainsi prédire l'évolution du système et même, si on dispose de données représentatives des différents modes de défaillance, le type de panne vers laquelle il se dirige (fig. 1.3.2b).

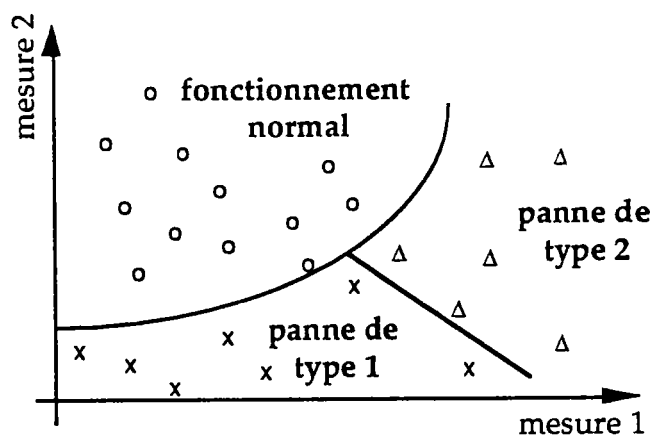


Figure 1.3.2b : Exemple d'analyse des données de fonctionnement



optimale de maintenance qui minimise le coût global de maintenance. Cette politique est une règle de décision qui associe à chaque valeur de l'état du système une action donnée, laquelle consiste à effectuer une maintenance ou non. Il s'agit donc de trouver le juste compromis entre maintenance préventive et maintenance corrective.

De nombreuses variantes sont possibles à partir de ce modèle (voir les revues des modèles de maintenance de système à une unité de VALDEZ-FLORES et R.M. FELDMAN [39] et multi-unités de CHO et PARLAR [16]):

- nombre fini ou infini de valeurs que peut prendre l'état,
- connaissance de l'état du système en temps discret ou en continu,
- connaissance exacte ou incertaine de la valeur de l'état,
- possibilité d'effectuer une maintenance à tout moment ou uniquement à des instants donnés,
- durée des maintenances négligeable ou non,
- coûts de maintenance constants, fonctions de l'état ou aléatoires,
- optimisation de la politique de maintenance sur une période de temps finie ou infinie,
- etc ...

En se basant sur le type d'information disponible pour établir la politique de maintenance, GERTSBACKH [22] propose une classification en deux groupes des travaux utilisant les processus stochastiques :

**(groupe A)** les informations issues du système permettent uniquement de faire la distinction entre deux états : "en fonctionnement" et "en panne". La politique de maintenance est alors basée sur la densité de probabilité de panne et sur la période de fonctionnement du système depuis la dernière maintenance. Son objectif est de déterminer d'une part à quel moment le système doit être inspecté et d'autre part s'il faut ou non réaliser une maintenance.

**(groupe B)** les informations issues du système permettent de définir un nombre fini ( $>2$ ) ou infini de valeurs possibles de la variable état, entre "système neuf" et "système en panne". La politique de maintenance est alors basée sur les probabilités de transition d'une valeur de l'état à une autre. Son objectif est de déterminer pour quelles valeurs de l'état il est optimal de réaliser une maintenance.

Le premier groupe a fait l'objet de très nombreux travaux issus de la théorie de la fiabilité (voir notamment LUSS [25] et NAGAKAWA et al. [28] pour les systèmes à une unité et ASSAF et al. [04] pour les systèmes à plusieurs éléments). Le principal avantage de ces techniques est qu'elles ne nécessitent, pour être mises en oeuvre, que des données relatives à l'instant de panne qui permettent de calculer la densité de probabilité de panne.

Suite à la généralisation de la supervision numérique des équipements industriels, il est aujourd'hui possible de collecter une quantité bien plus importante de données. L'utilisation de ces informations supplémentaires sur le comportement du système doit permettre d'affiner les résultats obtenus par le premier groupe de modèles stochastiques. Ceci a entraîné la généralisation des techniques du groupe A, débouchant ainsi sur le développement de travaux du groupe B. Cette nouvelle classe de modèles, quelquefois appelés modèles à détérioration graduelle, est l'objet de ce travail et est détaillée dans la section qui suit.

Le tableau suivant résume les principales caractéristiques des 3 types d'approches que nous venons de voir.

## Méthodes pour la maintenance prédictive : récapitulatif

	Analyse des signaux	Analyse des données	Processus stochastique
<b>Technique utilisée</b>	Comparaison entre le signal mesuré sur le système et celui provenant d'un modèle	Détermination des zones de fonctionnement ou de pannes du système à partir d'un historique	Calcul de seuils de maintenance à partir des caractéristiques stochastiques du système et des coûts de maintenance
<b>Avantages</b>	Maintenance effectuée uniquement si l'état du système la justifie	Maintenance si le système évolue vers une zone statistiquement de défaillance	Optimisation de la politique de maintenance en fonction des probabilités de panne et des coûts
<b>Inconvénients</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Peu adaptée aux phénomènes lents</li> <li>- Ne donne pas de seuil de maintenance (=&gt; prise de risque)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Ne prend pas en compte les coûts de maintenance et de remplacement</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Peu adaptée aux systèmes suivant une loi à forte variance</li> </ul>
<b>Difficultés de mise en œuvre</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Modélisation du système</li> <li>- Problèmes liés au traitement des signaux</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Obtention d'un historique représentatif des modes de panne et de fonctionnement normal</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Détermination des caractéristiques stochastiques du système</li> </ul>
<b>Etat des recherches</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Nombreuses applications (maintenance conditionnelle)</li> <li>- Relativement peu de travaux théoriques</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Peu de travaux et d'applications</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Assez grand nombre de travaux théoriques</li> <li>- Peu d'applications (pas d'application pour les modèles à détérioration graduelle)</li> </ul>

## 1.4 MODELES A DETERIORATION GRADUELLE

### 1.4.1 Remarques préliminaires

- L'utilisation des modèles à détérioration graduelle implique la possibilité de suivre l'évolution de l'état du système. Ceci suppose que (GERTSBACKH [22]) :

(a) l'état -réel- du système puisse être caractérisé par une variable aléatoire  $x(t)$  évoluant dans le temps.

(b)  $x(t)$ , l'observation de l'état du système (appelé pour simplifier par la suite état du système) soit connu de manière continue ou discrète.

(c) la défaillance soit un événement aléatoire ou non dépendant de la valeur de  $x(t)$ .

(d) les lois de probabilités qui régissent l'évolution de  $x(t)$  soient connues. De plus, si la panne est stochastiquement reliée à  $x(t)$ , la relation entre  $x(t)$  et la probabilité de panne doit être connue.

Dans la pratique, les hypothèses (a), (b) et (c) sont souvent vérifiées. Il n'en est pas de même de la connaissance du comportement stochastique du système, supposée en (d). En effet, la quantité de données disponibles est rarement suffisante pour permettre d'estimer les différentes lois de probabilité de manière précise. Ceci explique qu'aucune application de cette théorie à des systèmes réels ne figure dans la littérature.

- La plupart des travaux effectués sur les modèles à détérioration graduelle s'intéressent à un type de maintenance particulier : le remplacement. Quand un élément du système tombe en panne ou quand on décide de le maintenir, il est remplacé par un système neuf de même comportement que le précédent. Le coût de cette action est supposé plus élevé après une panne.

- Les travaux utilisant les modèles à détérioration graduelle font souvent appel à des connaissances approfondies sur les processus stochastiques (chaîne de Markov, processus markoviens, renouvellement, etc...). On trouvera une bonne introduction à ces théories dans ÇINLAR [18].



### 1.4.2 Systèmes à une unité

La dernière revue sur les modèles de maintenance de systèmes stochastiques constitués d'une seule unité (i.e. l'état du système est décrit par un scalaire) a été effectuée en 1989 par VALDEZ-FLORES et FELDMAN. Parmi les 129 articles répertoriés pour la période 1975 à 1988, près d'une cinquantaine concernent les modèles à détérioration graduelle.

L'un des premiers travaux est dû à TAYLOR [38] en 1975. Le système subit des chocs (d'où l'appellation anglaise de "shock model" pour ce type de modèle) dont les instants d'arrivée suivent un processus de Poisson. Les dommages infligés au système par chaque choc sont des variables aléatoires indépendantes de densité exponentielle négative. A chaque choc, le système peut tomber en panne avec une probabilité qui dépend de la quantité de dommages accumulés. Les coûts de maintenance et de réparation sont supposés constants. TAYLOR montre que la politique optimale qui minimise le coût moyen estimé est une politique de type limite de contrôle (PLC): il existe une valeur  $x^*$  de l'état  $x$  telle que, quel que soit  $x$  supérieur à  $x^*$ , il est optimal d'effectuer un remplacement préventif et, quelque soit  $x$  inférieure à  $x^*$ , il est optimal de ne pas intervenir sur le système.

BERGMAN [12] présente un modèle à détérioration graduelle plus général. Il suppose que le processus de détérioration est non-décroissant et que les coûts de maintenance sont constants. Il démontre que la politique qui minimise le coût moyen estimé de maintenance est une PLC.

AVEN et al. [05] s'intéressent quant à eux au cas discret : les chocs ne peuvent arriver qu'à certains instants. En prenant des coûts de maintenance constants, la politique optimale est une PLC.

Les modèles précédents supposaient que le processus de détérioration est non-décroissant. POSNER et al. [32] étudient un système où la somme des dommages est réduite par une fonction de restauration donnée. PERRY et al. [31] obtiennent l'expression analytique de la limite de contrôle dans le cas d'une PLC.

D'autres travaux s'intéressent à des variantes sur les coûts ou le critère utilisés pour établir la politique optimale. YAMADA [41] utilise un coût de maintenance préventive qui est fonction de la somme des dommages subis par le système et de l'intervalle de temps depuis le dernier remplacement. Il montre que sous certaines hypothèses, il est possible de déterminer explicitement l'instant de maintenance. TAYLOR [38] propose quant à lui non pas de minimiser le coût de maintenance mais de maximiser le profit moyen généré par le système. Ce profit est une fonction décroissante de la somme des dommages subis par le système. ZUCKERMAN [42] généralise ce modèle et donne les conditions pour lesquelles

la politique optimale est une PLC.

L'ensemble de ces travaux n'envisageaient que la possibilité d'effectuer un remplacement préventif du système. Certaines recherches proposent d'effectuer une maintenance en continu et non plus uniquement un remplacement. L'état du système peut alors être ramené à une valeur plus faible, c'est-à-dire à un niveau de dommage moindre. Dans le modèle proposé par ZUCKERMAN [44],  $M$  types de maintenance peuvent être réalisées. Pour une maintenance  $m$  donnée, la somme des dommages subis par le système décroît à un taux  $r_m$  moyennant un coût par unité de temps  $C(m)$  ( $r_m$  et  $C(m)$  sont croissants en  $m$ ). ZUCKERMAN montre que la politique optimale consiste à utiliser une maintenance  $m$  croissante avec la détérioration du système. Il s'agit donc non plus à proprement parler d'un modèle de maintenance mais plutôt d'un modèle d'entretien.

### 1.4.3 Systèmes multi-unités

Dans le cas d'un système constitué d'un seul élément, la politique de maintenance ne comportait que trois types d'"actions" : ne pas intervenir, effectuer une maintenance préventive (en règle générale un remplacement) ou bien réaliser une maintenance corrective après une panne. Pour un système multi-unités, c'est-à-dire constitué de plusieurs éléments, il existe de nombreuses autres possibilités : une maintenance préventive peut être réalisée sur un ou plusieurs éléments à la fois, ou encore elle peut être combinée avec une maintenance corrective effectuée sur un élément défaillant.

L'intérêt de ces actions simultanées sur le système vient de la dépendance économique qui existe entre les éléments : la maintenance d'une unité peut coûter moins cher si elle est réalisée en conjonction avec celle d'un autre élément. Ceci est particulièrement vrai quand du personnel qualifié doit spécialement se déplacer, ou quand le système doit être arrêté et démonté.

DREYFUS [21] et plus récemment SCRIBAN [37] proposent un exemple numérique basé sur la programmation dynamique pour déterminer la politique optimale de remplacement d'un système composé de deux ou trois éléments identiques dont le taux de panne augmente avec l'âge.

BERG [09][10] propose une politique de remplacement préventif basée sur l'âge pour un système constitué de deux éléments identiques en série. Cette politique consiste à remplacer de manière préventive un élément si son âge dépasse une

limite prédéterminée  $L$  et si le second tombe en panne. Plus tard, BERG [11] généralise ce modèle à des éléments non-identiques. Les deux unités sont remplacées simultanément soit quand l'une d'entre elles tombe en panne et que l'âge de la seconde est supérieur à  $L$ , soit quand l'âge d'une des deux unités dépasse une valeur  $S$ . Ces résultats sont développés dans le cas où la distribution de probabilité de fonctionnement normal suit une loi de Erlang et le coût de fonctionnement est linéairement croissant.

NAKAGAWA et al. [28] s'intéressent à un système à deux unités dans lequel la défaillance de l'unité 1 entraîne une quantité aléatoire de dommages à l'unité 2. Quand la somme de ces dommages dépasse une valeur limite donnée, l'unité 2 tombe en panne. Le système est complètement remplacé à la défaillance de l'unité 2 ou bien à la  $N$ ième défaillance de l'unité 1,  $N$  étant un nombre à déterminer.

VAN DER DUYN SCHOUTEN et al. [40] étudient quant à eux un système composé de  $M$  machines identiques dont l'état suit un processus stochastique à quatre valeurs : bon, douteux, à maintenir et en panne. Ils proposent deux politiques de maintenance basée sur le nombre de machines en état "douteux". Elles consistent à réaliser un remplacement de l'ensemble du système si au moins  $K$  machines sont en état "douteux" soit avant soit après qu'un élément ait atteint l'état "à maintenir" ou "en panne".

En résumé, que ce soit pour les systèmes à une unité ou multi-unités, les recherches se sont concentrées sur :

- des modèles très théoriques où la variable d'état ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et est connue de manière continue dans le temps,
- des politiques de maintenance donnant uniquement le choix entre non-intervention et remplacement.

## 1.5 CONCLUSION

Nous avons passé en revue dans ce chapitre les différentes méthodes utilisées pour l'étude de la maintenance.

L'analyse des signaux permet de détecter les changements abrupts dans l'état d'un système afin de déclencher une maintenance prédictive. Cependant, elle n'est pas adaptée aux processus lents tels que ceux d'usure et de vieillissement.

L'analyse des données quant à elle, présente l'avantage de ne pas avoir recours à une modélisation, mais nécessite en contrepartie un historique très complet des modes de fonctionnement et de panne du système.

Certains chercheurs ont proposé l'utilisation de processus stochastiques pour modéliser les défaillances. En particulier, les modèles à détérioration graduelle paraissent particulièrement bien adaptés à l'étude des problèmes de maintenance. Cependant, les travaux effectués jusqu'à présent sont souvent très restrictifs et éloignés de la réalité des systèmes de production modernes.

Dans le chapitre suivant, nous allons étudier l'optimisation d'une politique de maintenance paramétrique appliquée à deux exemples particuliers de modèles à détérioration graduelle.

# CHAPITRE 2

## Optimisation d'une politique de maintenance paramétrique

### 2.1 INTRODUCTION

### 2.2 EXEMPLE DE SYSTEME A UNE UNITE

#### 2.2.1 Modèle

#### 2.2.2 Politique de maintenance paramétrique

#### 2.2.3 Optimisation de la politique de maintenance

##### 2.2.3.1 Densité de probabilité de l'état

##### 2.2.3.2 Politique optimale

#### 2.2.4 Analyse et comparaison

### 2.3 EXEMPLE DE SYSTEME A DEUX UNITES

#### 2.3.1 Introduction

#### 2.3.2 Cas général

#### 2.3.3 Cas du remplacement complet systématique

##### 2.3.3.1 Politique de maintenance

##### 2.3.3.2 Densité de probabilité de l'état

##### 2.3.3.3 Expression du coût de maintenance

##### 2.3.3.4 Comparaison de différentes politiques

### 2.4 CONCLUSION

Le paramètre  $\mu$  représente la rapidité d'évolution du processus de vieillissement : plus  $\mu$  est petit, plus le système se détériore rapidement.

### 2.2.2 Politique de maintenance paramétrique

On considère la politique de maintenance suivante :

- quand le système tombe en panne (i.e.  $X_i > L$ ), il doit être remplacé par un système neuf équivalent, à un coût  $R$ . L'état  $X_i$  du système est alors instantanément remis à 0.
- quand l'état du système est supérieur à une limite de maintenance  $\lambda$  donnée ( $0 < \lambda \leq L$ ), le système subit une maintenance complète qui ramène instantanément son état de vieillissement à 0. Le coût de cette maintenance préventive est  $r < R$ .
- quand l'état du système est inférieur ou égal à la limite de maintenance  $\lambda$ , aucune intervention n'est effectuée sur le système. Aucun coût n'est alors pris en compte.

$\lambda$  est donc le paramètre de cette politique de maintenance.

La figure 2.2.2a donne un exemple d'évolution du système.

Note : L'hypothèse que le remplacement ou la maintenance sont instantanés n'est pas restrictive. L'arrêt du système a pour conséquence une perte de production dont le coût peut être intégré à  $R$  ou  $r$ , suivant qu'il s'agisse d'un arrêt pour maintenance ou un remplacement.

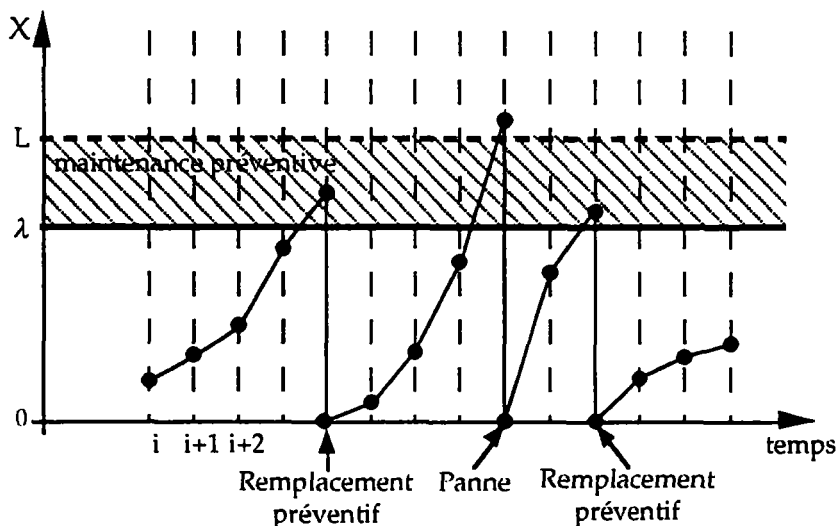


Figure 2.2.2a : Exemple d'évolution de l'état de vieillissement  $X$  du système sous une politique de maintenance de paramètre  $\lambda$

## Chapitre 2 - Politique paramétrique

En régime permanent, i.e. lorsque la probabilité que l'état prenne une valeur A quelconque est indépendante du temps, les variables aléatoires  $X_i$  suivent la même densité de probabilité quel que soit  $i$ . On peut donc désigner ces variables aléatoires par une même variable aléatoire  $X$ .

Le coût moyen de la politique de maintenance s'écrit alors :

$$I(\lambda) = r \Pr[\lambda < X \leq L] + R \Pr[X > L] \quad (2.2)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (2.2) représente le coût moyen de la maintenance préventive tandis que le second est le coût moyen de remplacement du système après une panne.

Si  $\lambda$  devient petit, le coût entraîné par la maintenance préventive s'accroît. A l'opposé, quand  $\lambda$  croît, le système tombe plus souvent en panne.

On cherche donc la valeur optimale  $\lambda^*$  de  $\lambda$  qui minimise le coût moyen, i.e. qui vérifie :

$$I(\lambda^*) = \underset{\lambda \in (0, L]}{\text{Min}} (I(\lambda)) \quad (2.3)$$

Si on appelle  $\alpha$  le ratio  $R/r$  ( $\alpha > 1$ ), en divisant les deux membres de l'équation (2.2) par  $r$ , on obtient l'expression du coût moyen normalisé  $\varphi(\lambda) = \frac{I(\lambda)}{r}$  :

$$\varphi(\lambda) = \Pr[\lambda < X \leq L] + \alpha \Pr[X > L] \quad (2.4)$$

Le problème (2.3) s'écrit alors :

$$\varphi(\lambda^*) = \underset{\lambda \in (0, L]}{\text{Min}} (\Pr[\lambda < X \leq L] + \alpha \Pr[X > L]) \quad (2.5)$$

Note : Le cas plus général pour lequel on ne fait pas l'hypothèse que le système atteint un régime permanent est traité dans l'Annexe 1. On aboutit au même résultat que ci-dessous (cf résultat A1.2).

### 2.2.3 Optimisation de la politique de maintenance

L'état de vieillissement  $X$  du système soumis à une politique de maintenance de paramètre  $\lambda$  est une variable aléatoire dont la loi est inconnue. Afin de trouver la limite de maintenance optimale  $\lambda^*$  qui vérifie l'équation (2.5), il est donc

nécessaire, dans un premier temps, de calculer la densité de probabilité  $p(x)$  de l'état de vieillissement du système en régime permanent.

### 2.2.3.1 Densité de probabilité de l'état de vieillissement

**Résultat 2.1 :** En régime permanent, la densité de probabilité  $p(x)$  de se trouver dans un état de vieillissement  $X=x$  est constante pour  $x$  inférieur ou égal à la limite de maintenance  $\lambda$  et décroît exponentiellement pour  $x$  supérieur à  $\lambda$ .

Elle est donnée par l'équation suivante :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\mu}{1 + \mu\lambda} & \text{pour } x \leq \lambda \\ \frac{\mu e^{-\mu(x-\lambda)}}{1 + \mu\lambda} & \text{pour } x > \lambda \end{cases}$$

*Démonstration :*

Le processus de vieillissement étant markovien, la valeur de l'état  $X_i$  à l'instant  $i$  ne dépend que de celle de  $X_{i-1}$  à l'instant  $i-1$ . On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} p(x)dx &= \Pr(x \leq X_i < x + dx) \\ &= \Pr(x \leq X_i < x + dx \wedge (X_{i-1} \leq \lambda \vee X_{i-1} > \lambda)) \\ &= \Pr(x \leq X_i < x + dx \wedge X_{i-1} \leq \lambda) + \Pr(x \leq X_i < x + dx \wedge X_{i-1} > \lambda) \end{aligned} \quad (2.6)$$

où  $\wedge$  représente l'opérateur logique "ET" et  $\vee$  l'opérateur logique "OU".

$\Pr(x \leq X_i < x + dx \wedge X_{i-1} \leq \lambda)$  est la probabilité d'atteindre la valeur  $x$  de l'état sans qu'il y ait eu maintenance ou remplacement à l'instant précédent. Le système subissant un processus de vieillissement, on sait qu'à l'instant précédent l'arrivée en  $x$  la valeur de l'état était inférieure ou égale à  $x$  et à  $\lambda$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \Pr(x \leq X_i < x + dx \wedge X_{i-1} \leq \lambda) &= \int_{0^+}^{\text{Min}(x,\lambda)} \Pr(x \leq X_i < x + dx \wedge z \leq X_{i-1} < z + dz) \\ &= \int_{0^+}^{\text{Min}(x,\lambda)} \Pr(x \leq X_i < x + dx / X_{i-1} = z) \Pr(z \leq X_{i-1} < z + dz) \end{aligned} \quad (2.7)$$



## Chapitre 2 - Politique paramétrique

Le deuxième terme du membre de droite de l'équation (2.6),  $\Pr(x \leq X_i < x + dx \wedge X_{i-1} > \lambda)$ , est la probabilité d'atteindre  $x$  après une panne ou une maintenance, i.e. après un passage instantané en 0. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \Pr(x \leq X_i < x + dx \wedge X_{i-1} > \lambda) &= \int_{\lambda}^{+\infty} \Pr(x \leq X_i < x + dx \wedge z \leq X_{i-1} < z + dz) \\ &= \int_{\lambda}^{+\infty} \Pr(x \leq X_i < x + dx / X_{i-1} = 0) \Pr(z \leq X_{i-1} < z + dz) \end{aligned} \quad (2.8)$$

En utilisant les équations (2.7) et (2.8), la relation (2.6) peut être réécrite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} p(x)dx &= \Pr(x \leq X_i < x + dx) \\ &= \int_{0^+}^{\text{Min}(x,\lambda)} \Pr(x \leq X_i < x + dx / X_{i-1} = z) p(z) dz \\ &\quad + \int_{\lambda}^{+\infty} \Pr(x \leq X_i < x + dx / X_{i-1} = 0) p(z) dz \end{aligned}$$

En introduisant la densité de probabilité  $f(x,z)$  définie par l'équation (2.1), on obtient alors :

$$p(x) = \int_{0^+}^{\text{Min}(x,\lambda)} f(x,z) p(z) dz + \int_{\lambda}^{+\infty} f(x,0) p(z) dz$$

La densité de probabilité de l'état du système en régime permanent vérifie donc l'équation intégrale suivante :

$$p(x) = \int_{0^+}^{\text{Min}(x,\lambda)} \mu e^{-\mu(x-z)} p(z) dz + \int_{\lambda}^{+\infty} \mu e^{-\mu x} p(z) dz \quad (2.9)$$

Pour  $x \leq \lambda$ , en dérivant l'égalité (2.9) par rapport à  $x$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dp(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ \int_{0^+}^x \mu e^{-\mu(x-z)} p(z) dz + \int_{\lambda}^{+\infty} \mu e^{-\mu x} p(z) dz \right] \\ &= -\mu \int_{0^+}^x \mu e^{-\mu(x-z)} p(z) dz + \mu p(x) - \mu \int_{\lambda}^{+\infty} \mu e^{-\mu x} p(z) dz = \mu p(x) - \mu p(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc  $p(x)$  est constant par rapport à  $x$  pour  $x \leq \lambda$ . Appelons  $C$  cette constante.

## Chapitre 2 - Politique paramétrique

Pour  $x \geq \lambda$ , l'équation (2.9) s'écrit alors :

$$p(x) = \int_{0^+}^{\lambda} \mu e^{-\mu(x-z)} C dz + \mu e^{-\mu x} \int_{\lambda}^{+\infty} p(z) dz$$

Soit  $P_0 = \int_{\lambda}^{+\infty} p(z) dz$ .  $P_0$  représente la probabilité d'effectuer une maintenance ou un remplacement. En utilisant cette notation, on obtient :

$$p(x) = \int_{0^+}^{\lambda} \mu e^{-\mu(x-z)} C dz + \mu e^{-\mu x} P_0 = \mu e^{-\mu x} \left( \frac{C}{\mu} (e^{\mu \lambda} - 1) + P_0 \right)$$

En remplaçant  $p(x)$  par cette expression dans  $P_0$ , on aboutit à :  $P_0 = \frac{C}{\mu}$

De plus, la somme des probabilités étant égale à 1,  $\Pr(0 < X < \lambda) + \Pr(X \geq \lambda) = 1$ , on a :

$$\int_{0^+}^{\lambda} C dz + P_0 = 1 \quad \text{et donc} \quad C = \frac{\mu}{1 + \mu \lambda} \quad \text{et} \quad P_0 = \frac{1}{1 + \mu \lambda}$$

Finalement, on obtient l'expression de la densité de probabilité de  $x$  en régime permanent :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\mu}{1 + \mu \lambda} & \text{pour } x \leq \lambda \\ \frac{\mu e^{-\mu(x-\lambda)}}{1 + \mu \lambda} & \text{pour } x > \lambda \end{cases} \quad (2.10)$$

□

### 2.2.3.2 Politique optimale

Connaissant l'expression de la densité  $p(x)$ , on peut alors expliciter la fonction coût.

**Résultat 2.2 :** Le coût normalisé moyen en régime permanent s'écrit :

$$\varphi(\lambda) = \frac{(\alpha - 1)e^{-\mu(L-\lambda)} + 1}{1 + \mu \lambda}$$

*Démonstration :*

En utilisant le **résultat 2.1**, il devient possible de calculer le coût normalisé moyen en régime permanent  $\varphi(\lambda) = \Pr(\lambda < X \leq L) + \alpha \Pr(X > L)$  ((2.4)).

On a :

$$\begin{aligned} \Pr(\lambda < X_t \leq L) &= P(X_t > \lambda \wedge X_{t-1} \leq \lambda) - P(X_t > L \wedge X_{t-1} \leq \lambda) \\ &= P_0 - P(X_t > L \wedge X_{t-1} \leq \lambda) = \frac{1 - e^{-\mu(L-\lambda)}}{1 + \mu\lambda} \end{aligned}$$

et

$$\Pr(X > L) = \int_L^{+\infty} \left( \mu e^{-\mu x_i} P_0 + \int_{0^+}^{\lambda} C \mu e^{-\mu(x_i - x_{i-1})} dx_{i-1} \right) dx_i = \frac{e^{-\mu(L-\lambda)}}{1 + \mu\lambda}$$

Donc le coût normalisé moyen s'écrit :

$$\varphi(\lambda) = \frac{(\alpha - 1)e^{-\mu(L-\lambda)} + 1}{1 + \mu\lambda} \quad (2.11)$$

□

Ceci permet de caractériser la valeur optimale de la limite de maintenance :

**Résultat 2.3 :** La fonction  $\varphi$  est convexe. Elle n'admet qu'un seul minimum  $\lambda^*$ . La valeur  $\lambda^*$  de la limite de maintenance qui minimise le coût de la politique de maintenance vérifie :

$$\lambda^* e^{\mu\lambda^*} = \frac{1}{\mu A} \quad \text{avec } A = (\alpha - 1)e^{-\mu L}$$

*Démonstration :*

On recherche la valeur  $\lambda^*$  de  $\lambda$  qui vérifie :

$$\varphi(\lambda^*) = \underset{\lambda \in \mathbb{R}^+}{\text{Min}} (\varphi(x))$$

En posant  $A = (\alpha - 1)e^{-\mu L}$ , l'égalité (2.11) devient :

$$\varphi(\lambda) = \frac{Ae^{\mu\lambda} + 1}{1 + \mu\lambda}$$

On a :

$$\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\mu^2 A \lambda e^{\mu\lambda} - \mu}{(1 + \mu\lambda)^2}$$

$$\frac{d^2\varphi(\lambda)}{d\lambda^2} = \frac{\mu^2(2 + A e^{\mu\lambda} + A \mu^2 \lambda^2 e^{\mu\lambda})}{(1 + \mu\lambda)^3} \geq 0$$

La fonction  $\varphi(\lambda)$  est donc convexe.

$\lambda^*$  est donc la solution de l'équation  $\frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = 0$  si cette solution appartient à  $(0, L)$ .

La condition sur  $\lambda^*$  pour que  $\varphi(\lambda^*)$  soit minimal est donc :

$$\lambda^* e^{\mu\lambda^*} = \frac{1}{\mu A} \quad (2.12)$$

Si cette équation n'admet pas de solution sur  $(0, L)$ , il n'est alors jamais optimal d'effectuer une maintenance préventive.  $\lambda e^{\mu\lambda}$  étant une fonction strictement croissante en  $\lambda$  et convexe,  $\lambda^*$  est supérieur à  $L$  quand :

$$\mu L e^{2\mu L} < \frac{1}{\alpha - 1}$$

Le membre de gauche de cette inéquation étant strictement croissant et convexe en  $\mu$  et celui de droite étant constant, on peut affirmer que :

- quand  $\alpha$  tend vers 1, i.e. la différence entre le coût de remplacement et le coût de maintenance tend vers 0, l'inéquation est vérifiée quelle que soit la valeur de  $\mu$ . Il n'est donc jamais optimal d'effectuer une maintenance.
- quand  $\alpha$  tend vers l'infini, i.e. le coût de remplacement croît par rapport au coût de maintenance, il n'y a pas de valeur de  $\mu$  supérieure à 0 qui vérifie l'inéquation. Il existe donc une valeur de  $\lambda^*$  inférieure à  $L$  telle que le coût de maintenance est minimal.

Malheureusement, l'équation (2.12) n'admet pas de solution analytique. Cependant étant donné la convexité de  $\varphi$ , il est facile de trouver la valeur optimale  $\lambda^*$  de  $\lambda$  en utilisant une méthode du type gradient, ou plus simplement une dichotomie.

□

Les figures 2.2.3a et 2.2.3b donnent une représentation de  $\varphi(\lambda)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\mu$ .

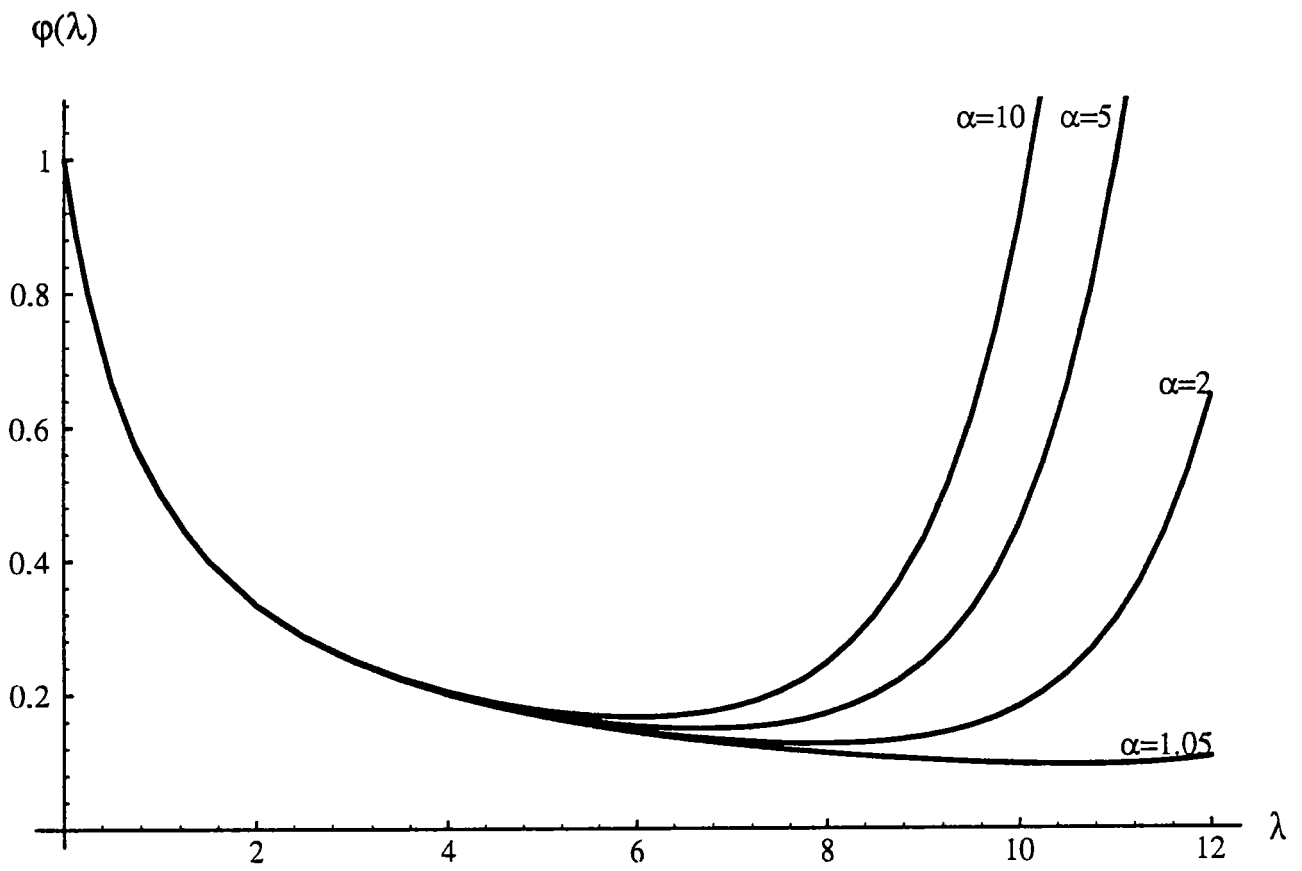


Figure 2.2.3a : Variation de  $\varphi(\lambda)$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  avec  $L=10$  et  $\mu=1$

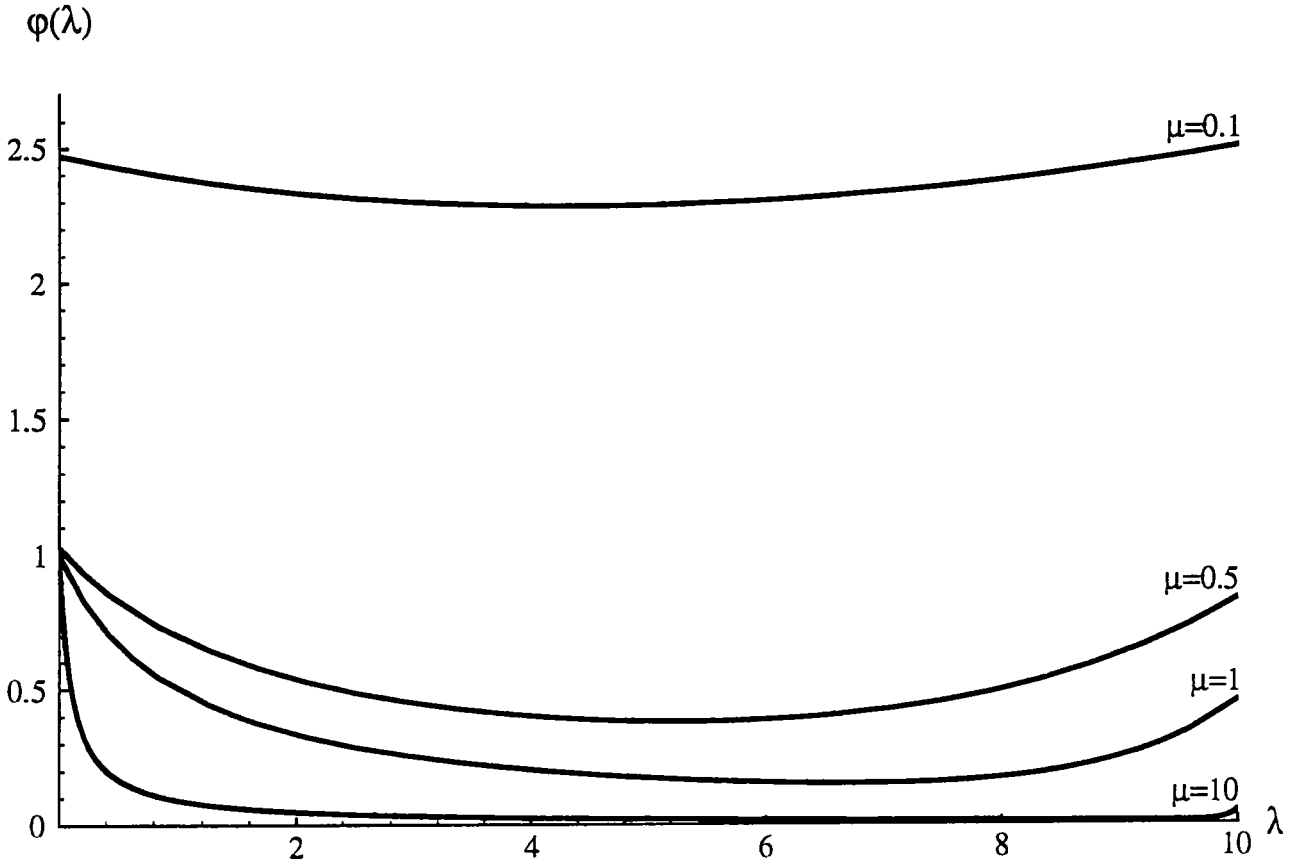


Figure 2.2.3b : Variation de  $\varphi(\lambda)$  pour différentes valeurs de  $\mu$  avec  $L=10$  et  $\alpha=5$

## 2.2.4 Analyse et comparaison

Le coût moyen de maintenance est fonction du paramètre  $\lambda$  et de  $A = (\alpha - 1)e^{-\mu L}$ . D'après le résultat 2.3,  $\lambda e^{\mu\lambda}$  étant une fonction strictement croissante en  $\lambda$  et convexe, la valeur de  $\lambda^*$  qui minimise le coût de maintenance est une fonction décroissante de  $A$ .

Pour les valeurs élevées  $A$  (i.e.  $A \gg 1$ ),  $\lambda^*$  tend donc vers 0. En effet  $A$  grand signifie que :

- le coût d'une maintenance préventive est très faible par rapport à celui d'un remplacement ( $\alpha$  grand) (cf figure 2.2.3a)
- ou/et
- le processus de vieillissement est très rapide ( $\mu$  faible) (cf figure 2.2.3b)
- ou/et
- la limite de panne  $L$  est très petite.

Dans ces cas, la politique optimale est de réaliser très souvent une maintenance préventive afin de minimiser la probabilité de panne.

A l'inverse, si  $A$  tend vers 0, la limite optimale de maintenance  $\lambda^*$  croît et peut même dépasser  $L$ . Ceci est le cas quand :

- le coût de maintenance est proche de celui d'un remplacement ( $\alpha \rightarrow 1$ ) (cf figure 2.2.3a)
- ou/et
- le système vieillit lentement ( $\mu$  grand) (cf figure 2.2.3b)
- ou/et
- $L$  est très grand

La probabilité de panne est alors faible et le système ne nécessite pas de maintenance préventive fréquente voire même aucune maintenance préventive.

En particulier, dans le cas limite où  $A$  est nul, i.e.  $r=R$ , on a :

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{1 + \mu\lambda}$$

Cette fonction est strictement décroissante en  $\lambda$ . La politique optimale est alors de ne jamais effectuer de maintenance préventive.

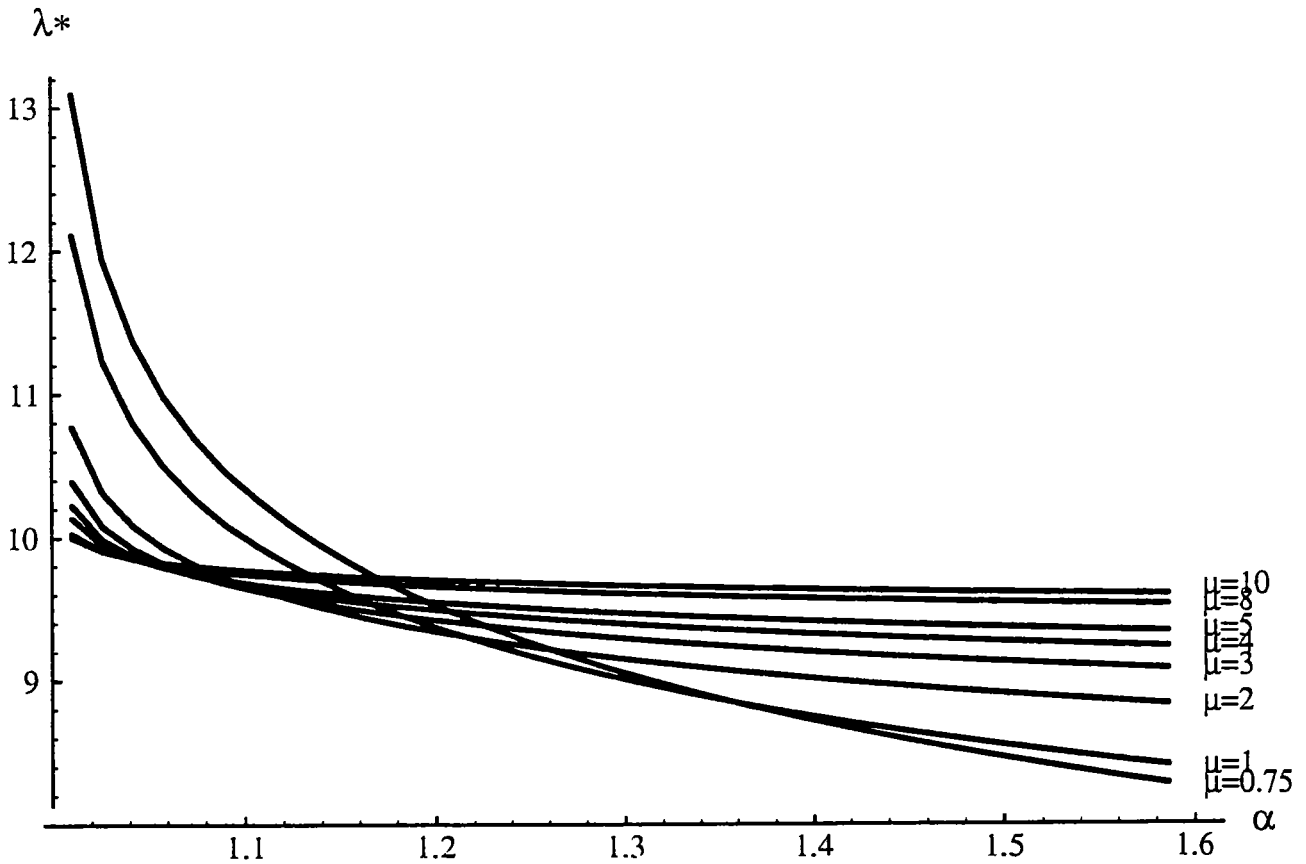


Figure 2.2.4a : Evolution de la limite optimale de maintenance  $\lambda^*$  en fonction de  $\alpha$  et de  $\mu$  pour  $L=10$

La figure 2.2.4a donne l'évolution de la limite optimale de maintenance  $\lambda^*$  en fonction du rapport des coûts  $\alpha$  et du paramètre  $\mu$  de la densité de probabilité de transition  $f$ , lorsque  $L=10$ .

Afin de vérifier l'intérêt de cette maintenance prédictive, elle est comparée à deux autres politiques pour un exemple numérique :

- la maintenance corrective : il n'y a pas d'action préventive. En utilisant l'expression de la densité de probabilité de  $x$  pour  $\lambda=L$  donnée par le résultat 2.1, on obtient le coût de cette politique :

$$\varphi_{\text{corrective}} = R \Pr(x > L) = R \left( 1 - \int_{0^+}^L \frac{\mu}{1 + \mu L} dx \right) = \frac{R}{1 + \mu L}$$

- la maintenance préventive "classique" : on minimise le coût de maintenance en se basant uniquement sur l'âge du système et la distribution de l'instant de panne. Sachant que la distribution de l'instant de panne suit une loi de Poisson de paramètre  $\mu L$ , il faut trouver l'instant optimal de maintenance  $T^*$  qui minimise :

$$\varphi_{\text{classique}}(T) = \frac{1}{r} \frac{r \Pr(t_{\text{panne}} \geq T) + R \Pr(t_{\text{panne}} < T)}{E[\text{Min}(t_{\text{panne}}, T)]}$$

ce qui donne après simplification :

$$\varphi_{\text{classique}}(T) = \frac{1 + (\alpha - 1) \sum_{k=0}^{T-1} \frac{(\mu L)^k}{k!} e^{-\mu L}}{T \left( 1 - \sum_{k=0}^{T-1} \frac{(\mu L)^k}{k!} e^{-\mu L} \right) + \sum_{k=0}^{T-1} k \frac{(\mu L)^k}{k!} e^{-\mu L}}$$

Pour  $L=10$ ,  $\mu=1$ ,  $R=5$  et  $r=1$  ( $\alpha=5$ ), on obtient les résultats suivants :

	Corrective		Préventive		Prédictive	
	L	Coût min	$T^*$	Coût min	$\lambda^*$	Coût min
$\mu=0.5$	10	0.83	3	0.53	6.12	0.22
$\mu=1$	10	0.45	6	0.22	6.71	0.15
$\mu=10$	10	0.05	79	0.013	9.41	0.011

Tableau 2.2.4a : Comparaison de différentes politiques de maintenance



On constate donc que pour cet exemple, la maintenance prédictive permet une réduction très importante du coût moyen de la maintenance par rapport aux politiques de maintenance corrective (par facteur 3 à 4.5) ou préventive "classique" (par un facteur 1.2 à 2.4).

Un exemple pratique plus détaillé est développé au chapitre 4.

## 2.3 EXEMPLE DE SYSTEME A DEUX UNITES

### 2.3.1 Introduction

Dans cet exemple, deux unités, l'unité 1 et l'unité 2, ayant les mêmes caractéristiques que celle étudiée au paragraphe 2.2, sont mises en série. Le système ainsi constitué fonctionne si aucune des unités n'est en panne.

L'état de vieillissement de la première (respectivement deuxième) unité est une variable aléatoire notée  $X$  (resp.  $Y$ ) et sa limite de panne est donnée par  $L_x$  (resp.  $L_y$ ). Le processus de vieillissement de la première (respectivement deuxième) unité suit une loi exponentielle négative de paramètre  $\mu_x$  (resp.  $\mu_y$ ).

L'état du système à l'instant  $i$  est donc donné par le vecteur  $S_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ .

Les deux unités étant stochastiquement indépendantes, la loi d'évolution du système est égale au produit des lois d'évolution de chaque unité :

$$f(S_i / S_{i-1}) = \begin{cases} \mu_x \mu_y e^{-\mu_x(x_i - x_{i-1}) - \mu_y(y_i - y_{i-1})} & \text{si } x_i \geq x_{i-1} \text{ et } y_i \geq y_{i-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13)$$

### 2.3.2 Cas général

La politique paramétrique de maintenance est définie de la manière suivante :

- Quand l'état d'une unité dépasse sa limite de panne  $L_x$  ou  $L_y$ , l'unité est remplacée.
- Pour chaque unité, on définit une limite de maintenance appelée  $\lambda_x$  pour la première et  $\lambda_y$  pour la seconde. Quand l'état d'une unité dépasse sa limite de maintenance, une maintenance préventive est effectuée.

## Chapitre 2 - Politique paramétrique

- Afin de réduire le nombre d'interventions sur le système, il pourrait être utile, lors d'une maintenance ou d'un remplacement d'une unité, d'effectuer la maintenance de la seconde unité si son état de vieillissement n'est pas trop éloigné de sa limite de maintenance. On définit donc une limite  $\sigma_x$  (respectivement  $\sigma_y$ ) telle que si  $Y > \lambda_y$  et  $X > \sigma_x$  (resp.  $X > \lambda_x$  et  $Y > \sigma_y$ ), l'unité 1 (resp. 2) subit une maintenance préventive.

Le système est donc contrôlé à l'aide des 4 limites  $\sigma_x, \lambda_x, \sigma_y, \lambda_y$  (avec  $0 < \sigma_x < \lambda_x$  et  $0 < \sigma_y < \lambda_y$ ). Les règles de contrôle sont les suivantes :

- pour  $X \leq \lambda_x$  et  $Y \leq \lambda_y$ , aucune intervention n'est effectuée.
- pour  $X > \lambda_x$  et  $Y \leq \sigma_y$ , l'état de l'unité 1 est remis à 0.
- pour  $X \leq \sigma_x$  et  $Y > \lambda_y$ , l'état de l'unité 2 est remis à 0.
- pour  $X > \lambda_x$  et  $Y > \sigma_y$ , l'état de l'unité 1 et celui de l'unité 2 sont remis à 0.
- pour  $X > \sigma_x$  et  $Y > \lambda_y$ , l'état de l'unité 1 et celui de l'unité 2 sont remis à 0.

Remarque : les transitions de l'état suite à l'activation d'une de ces règles sont supposées instantanées. Par exemple, si à l'instant  $i$ , l'état du système a pour valeur  $(x_i, y_i)$  avec  $x_i \leq \sigma_x$  and  $y_i > \lambda_y$ , la densité de probabilité de transition à l'instant suivant sera alors  $f(x_{i+1}, y_{i+1} / x_i, y_i) = f(x_{i+1}, y_{i+1} / x_i, 0)$ .

En fonction du signe des différences  $X - \sigma_x, X - \lambda_x, Y - \sigma_y, Y - \lambda_y$ , l'état du système appartient à l'un des 9 domaines représentés sur la figure 2.3.2a.

L'objectif de cette étude est de trouver les valeurs optimales de  $\sigma_x, \lambda_x, \sigma_y, \lambda_y$  qui minimisent le coût de maintenance. Ce coût est obtenu en effectuant la somme des produits du coût lié aux opérations de maintenance/remplacement par la probabilité d'atteindre cet état.

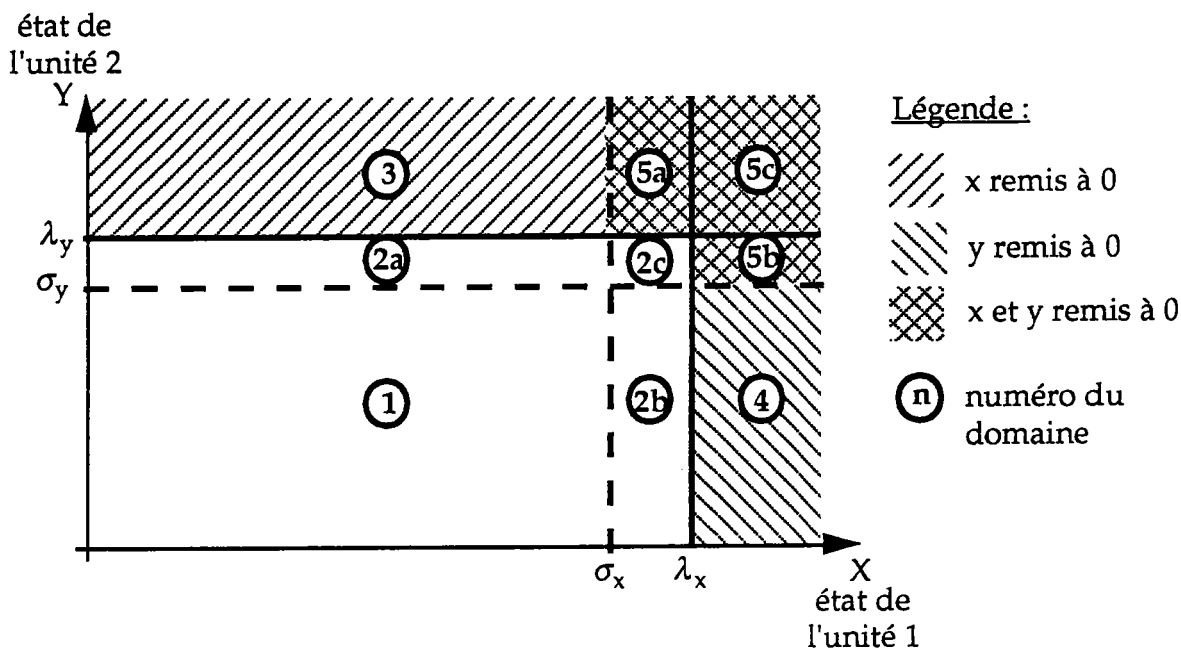


Figure 2.3.2a : Exemple d'évolution de l'état du système

Il est donc nécessaire dans un premier temps de calculer la densité de probabilité de l'état vieillissement du système soumis à la politique de maintenance.

Cette densité s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 p(x, y) = & \mu_x \mu_y \left( \int_{0^+}^{\min(x, \lambda_x)} \int_{0^+}^{\min(y, \lambda_y)} p(u, v) e^{-\mu_x(x-u) - \mu_y(y-v)} dv du \right. \\
 & + \int_{0^+}^{\min(x, \sigma_x) + \infty} \int_{\lambda_y} p(u, v) e^{-\mu_x(x-u) - \mu_y y} dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{0^+}^{\min(y, \sigma_y)} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y(y-v)} dv du \\
 & + \int_{\sigma_x}^{\lambda_x + \infty} \int_{\lambda_y} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du + \int_x^{+\infty} \int_{\sigma_y}^{\lambda_y} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du \\
 & \left. + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{\lambda_y} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du \right) \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

sous la contrainte :  $\int_{0^+}^{+\infty} \int_{0^+}^{+\infty} p(u, v) du dv = 1$  et  $p(u, v) \geq 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (2.14) représente la probabilité d'atteindre en une transition l'état (x,y) depuis un état de

## Chapitre 2 - Politique paramétrique

$(0, \lambda_x] \times (0, \lambda_y]$ , i.e. depuis les domaines 1, 2a, 2b, ou 2c de la figure 2.3.2a. L'opérateur Min de la borne de l'intégrale est dû à la définition (2.13) du processus de vieillissement.

Le second (respectivement troisième) terme donne la probabilité d'atteindre en une transition l'état  $(x, y)$  depuis un état de  $(0, \sigma_x] \times (\lambda_y, +\infty)$ , i.e. depuis le domaine 3 (resp.  $(\lambda_x, +\infty) \times (0, \sigma_y]$ , i.e. depuis le domaine 4).

La dernière ligne de l'équation (2.14) représente la probabilité d'atteindre  $(x, y)$  depuis l'état  $(0, 0)$  en une transition. Les interventions de maintenance ou de remplacement du systèmes étant instantanées, la probabilité au point  $(0, 0)$  est égale à la somme des probabilités d'atteindre les domaines 5a, 5b ou 5c.

Enfin, la contrainte exprime le fait que  $p$  est une densité de probabilité bi-dimensionnelle.

Il n'est malheureusement pas possible de trouver de solution analytique à l'équation intégrale (2.14) (cf Annexe 2). L'optimisation du coût de cette politique de maintenance ne peut donc pas être étudié de manière théorique.

Nous avons donc restreint le problème à des cas particuliers plus simples.

### 2.3.3 Cas du remplacement complet systématique

#### 2.3.3.1 Politique de maintenance

La politique de maintenance à laquelle nous nous intéressons ici est équivalente à celle décrite dans le cas général quand les limites  $\sigma_x$  et  $\sigma_y$  sont prises égales à 0.

Elle est donc définie comme suit :

- Lorsque l'état des deux unités dépasse leur limite de panne, les deux unités sont remplacées.
- Si l'état d'une unité dépasse sa limite de panne, cette unité est remplacée tandis que la seconde est maintenue préventivement.
- Lorsque l'état de la première (respectivement deuxième) unité dépasse son seuil de maintenance  $\lambda_x$  (resp.  $\lambda_y$ ) tout en restant inférieur à la limite de panne, une maintenance préventive est effectuée sur les deux unités.

## Chapitre 2 - Politique paramétrique

A chaque intervention sur le système, l'état des deux unités est donc systématiquement ramené en 0 soit par une maintenance, soit par un remplacement. Ces interventions étant instantanées, l'état du système devient immédiatement égal à  $S_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ce type de politique est intéressant lorsque le prix de remplacement des unités est très faible par rapport au coût d'intervention sur le système. C'est notamment le cas des gros équipements industriels dont l'arrêt entraîne une importante perte de production.

Dans cet exemple, par souci de simplicité, les coûts sont supposés indépendants de l'unité ou de la valeur de l'état :

- M : coût de la maintenance préventive des deux unités.
- N : coût de la maintenance préventive d'une unité et de la réparation de la seconde.
- R : coût de réparation des deux unités.

Bien entendu, on a :  $M < N < R$ .

La figure 2.3.3.1a montre les 5 différents domaines d'intervention et leurs coûts associés.

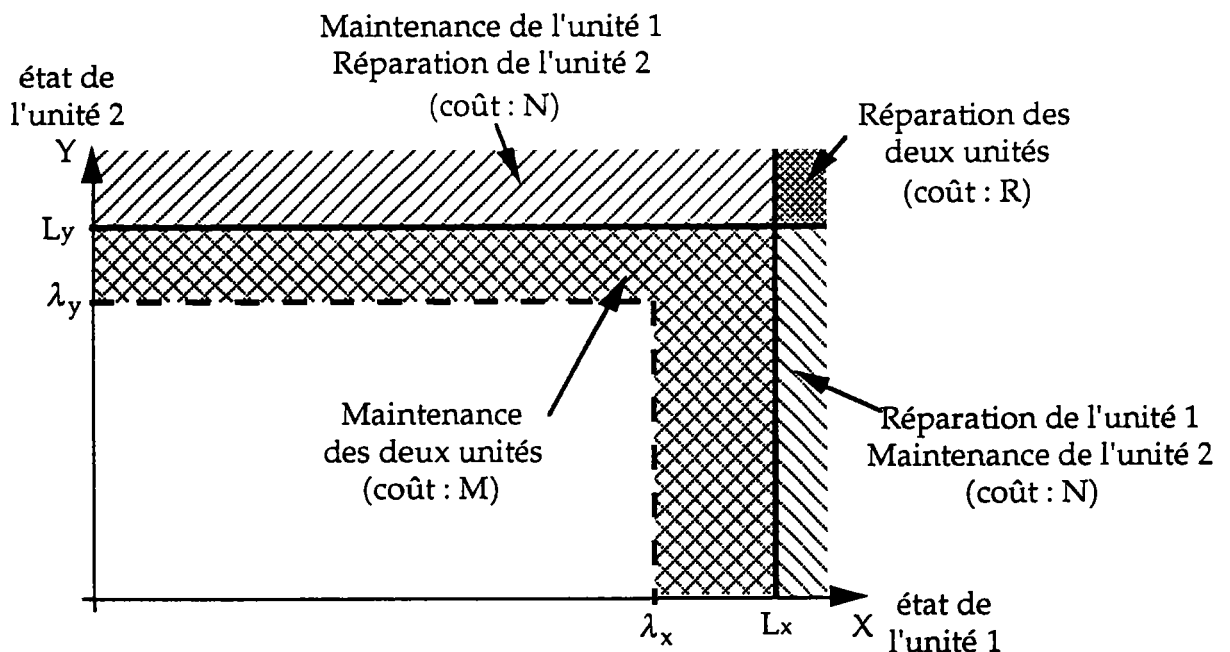


Figure 2.3.3.1a : Domaines de maintenance/réparation et coûts associés

Comme nous l'avons vu précédemment, le coût estimé moyen à long terme est égal à la somme du produit du coût de chaque type d'intervention par la probabilité de devoir l'effectuer.

Il est donc nécessaire dans un premier temps de calculer la densité de probabilité de l'état du système en régime permanent.

### 2.3.3.2 Densité de probabilité de l'état

Soit  $A = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  deux vecteurs représentant l'état du système à deux instants successifs. Il existe deux possibilités de transition de A vers B :

- A est dans le domaine de fonctionnement normal, i.e.  $u \leq \lambda_x$  et  $v \leq \lambda_y$ .

Etant donné que le processus considéré est un processus de vieillissement, B, successeur de A, est alors tel que  $x \geq u$  et  $y \geq v$ . La probabilité de transition de A en B est alors :

$$\mu_x \mu_y p(u, v) e^{-\mu_x(x-u) - \mu_y(y-v)} du dv$$

- A est dans un domaine de réparation ou de maintenance d'une ou des deux unités ( $u > \lambda_x$  ou/et  $v > \lambda_y$ ). La politique de maintenance impose alors de remettre immédiatement l'état du système à l'origine. La probabilité de transition de A en B est alors :

$$\mu_x \mu_y p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} du dv$$

La densité de probabilité de l'état est donc donnée par l'équation intégrale suivante :

$$p(x, y) = \mu_x \mu_y \left( \int_{0^+}^{\min(x, \lambda_x)} \int_{0^+}^{\min(y, \lambda_y)} p(u, v) e^{-\mu_x(x-u) - \mu_y(y-v)} dv du \right. \\ \left. + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du \right. \\ \left. + \int_0^{\lambda_x} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_0^{\lambda_y} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du \right) \quad (2.15)$$

avec comme contraintes :

$$\int_{0^+}^{+\infty} \int_{0^+}^{+\infty} p(u, v) du dv = 1 \text{ et } p(u, v) \geq 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

Résultat 2.4 : En régime permanent, la densité de probabilité  $p(x,y)$  que l'état de vieillissement soit  $(x,y)$  est donnée par l'équation suivante :

$$\left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y x y)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y} \text{ pour } 0 < x \leq \lambda_x \text{ et } 0 < y \leq \lambda_y \quad (2.16)$$

$$\left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_y x)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y} \text{ pour } 0 < x \leq \lambda_x \text{ et } y > \lambda_y \quad (2.17)$$

$$\left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x y)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y} \text{ pour } x > \lambda_x \text{ et } 0 < y \leq \lambda_y \quad (2.18)$$

$$\left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x \lambda_y)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y} \text{ pour } x > \lambda_x \text{ et } y > \lambda_y \quad (2.19)$$

$$\text{avec } C(\lambda_x, \lambda_y) = \frac{\mu_x \mu_y}{1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left( 1 - e^{-\mu_x \lambda_x} \sum_{r=0}^i \frac{(\mu_x \lambda_x)^r}{r!} \right) \left( 1 - e^{-\mu_y \lambda_y} \sum_{r=0}^i \frac{(\mu_y \lambda_y)^r}{r!} \right)}$$

Démonstration :

Etant donné l'opérateur Min situé dans le premier terme de l'équation (2.15), il est nécessaire de distinguer 4 cas :

1°)  $0 < x \leq \lambda_x$  et  $0 < y \leq \lambda_y$ , le système fonctionne normalement. L'équation (2.15) s'écrit alors :

$$p(x,y) = \mu_x \mu_y \left( \int_{0^+}^x \int_{0^+}^y p(u,v) e^{-\mu_x(x-u) - \mu_y(y-v)} dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u,v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du \right. \\ \left. + \int_0^{\lambda_x} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u,v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_0^{\lambda_y} p(u,v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du \right)$$

En notant  $C(\lambda_x, \lambda_y)$  la partie constante par rapport à  $x$  et  $y$  du membre de droite de cette équation, i.e. :

$$C(\lambda_x, \lambda_y) = \mu_x \mu_y \left( \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u,v) dv du + \int_0^{\lambda_x} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u,v) dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_0^{\lambda_y} p(u,v) dv du \right),$$

## Chapitre 2 - Politique paramétrique

l'égalité peut alors être réécrite :

$$p(x, y) = \mu_x \mu_y \int_{0^+}^x \int_{0^+}^y p(u, v) e^{-\mu_x(x-u) - \mu_y(y-v)} dv du + C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y}$$

ou encore :

$$p(x, y) e^{\mu_x x + \mu_y y} = \mu_x \mu_y \int_{0^+}^x \int_{0^+}^y p(u, v) e^{\mu_x u + \mu_y v} dv du + C(\lambda_x, \lambda_y)$$

En posant  $q(x, y) = p(x, y) e^{\mu_x x + \mu_y y}$ , on obtient :

$$q(x, y) = \mu_x \mu_y \int_{0^+}^x \int_{0^+}^y q(u, v) dv du + C(\lambda_x, \lambda_y)$$

Cette équation admet une solution unique sur le compact  $C^1((0, \lambda_x) \times (0, \lambda_y))$ . Cette solution est obtenue en utilisant la méthode itérative de Picard-Lindelöf :

$$q_0 = C(\lambda_x, \lambda_y)$$

$$q_1 = (\mu_x \mu_y xy + 1) C(\lambda_x, \lambda_y)$$

$$q_2 = \left( \frac{(\mu_x \mu_y xy)^2}{4} + \mu_x \mu_y xy + 1 \right) C(\lambda_x, \lambda_y)$$

...

$$q_n = \left( \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_x \mu_y xy)^i}{(i!)^2} + 1 \right) C(\lambda_x, \lambda_y) = \left( \sum_{i=0}^n \frac{(\mu_x \mu_y xy)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y)$$

$q_n$  converge uniformément vers la solution  $q(x, y)$  sur  $C^1((0, \lambda_x) \times (0, \lambda_y))$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

Donc, pour  $0 < x \leq \lambda_x$  and  $0 < y \leq \lambda_y$ , on a :

$$p(x, y) = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y xy)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y} \quad (2.16)$$

2°)  $x > \lambda_x$  et  $y > \lambda_y$ , les deux unités étant tombées en panne, le système doit être totalement remplacé. La densité de probabilité pour ce domaine est alors donnée par l'équation suivante :



## Chapitre 2 - Politique paramétrique

$$\begin{aligned}
 p(x, y) = & \mu_x \mu_y \left( \int_{0^+}^{\lambda_x} \int_{0^+}^{\lambda_y} p(u, v) e^{-\mu_x(x-u) - \mu_y(y-v)} dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du \right) \\
 & + \int_0^{\lambda_x + \infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_0^{+\infty} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du
 \end{aligned}$$

En utilisant les notations définies pour le domaine de fonctionnement normal, on obtient :

$$p(x, y) = \mu_x \mu_y \int_{0^+}^{\lambda_x} \int_{0^+}^{\lambda_y} p(u, v) e^{-\mu_x(x-u) - \mu_y(y-v)} dv du + C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y}$$

En remplaçant  $p(u, v)$  pour  $0 < u \leq \lambda_x$  et  $0 < v \leq \lambda_y$  par son expression donnée par l'équation (2.16), on a :

$$p(x, y) = \left( \mu_x \mu_y \int_{0^+}^{\lambda_x} \int_{0^+}^{\lambda_y} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y u v)^i}{(i!)^2} \right) dv du \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y}$$

Donc pour  $x > \lambda_x$  et  $y > \lambda_y$ ,  $p(x, y)$  s'écrit :

$$p(x, y) = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x \lambda_y)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y} \tag{2.17}$$

3°)  $0 < x \leq \lambda_x$  et  $y > \lambda_y$ , l'unité tombée en panne est remplacée tandis que l'autre subit une maintenance préventive. On a :

$$\begin{aligned}
 p(x, y) = & \mu_x \mu_y \left( \int_{0^+}^x \int_{0^+}^{\lambda_y} p(u, v) e^{-\mu_x(x-u) - \mu_y(y-v)} dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du \right) \\
 & + \int_0^{\lambda_x + \infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_0^{+\infty} p(u, v) e^{-\mu_x x - \mu_y y} dv du
 \end{aligned}$$

Avec les notations utilisées précédemment, on obtient :

$$p(x, y) = \mu_x \mu_y \int_{0^+}^x \int_{0^+}^{\lambda_y} p(u, v) e^{-\mu_x(x-u) - \mu_y(y-v)} dv du + C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y}$$

Pour  $0 < x \leq \lambda_x$  et  $y \geq \lambda_y$ ,  $p(x,y)$  s'écrit donc :

$$p(x,y) = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_y x)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y} \quad (2.18)$$

4°)  $x > \lambda_x$  et  $0 < y \leq \lambda_y$ , cas symétrique du précédent :

$$p(x,y) = \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x y)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x x - \mu_y y} \quad (2.19)$$

Pour obtenir l'expression de  $p(x,y)$ , il faut maintenant calculer  $C(\lambda_x, \lambda_y)$ .

$C(\lambda_x, \lambda_y)$  est donnée par l'équation suivante :

$$C(\lambda_x, \lambda_y) = \mu_x \mu_y \left( \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u,v) dv du + \int_0^{\lambda_x} \int_{\lambda_y}^{+\infty} p(u,v) dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_0^{\lambda_y} p(u,v) dv du \right)$$

$C(\lambda_x, \lambda_y)$  représente donc la probabilité d'effectuer un remplacement ou une maintenance préventive.

La contrainte définie avec l'équation (2.15) permet d'écrire :

$$\int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} p(u,v) du dv + \frac{C(\lambda_x, \lambda_y)}{\mu_x \mu_y} = 1$$

En remplaçant  $p(x,y)$  pour  $0 \leq x < \lambda_x$  et  $0 \leq y < \lambda_y$  par son expression donnée par l'équation (2.16), on a :

$$\int_0^{\lambda_x} \int_0^{\lambda_y} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y uv)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x u - \mu_y v} du dv + \frac{C(\lambda_x, \lambda_y)}{\mu_x \mu_y} = 1$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{\mu_x \mu_y}{C(\lambda_x, \lambda_y)} = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(i!)^2} \left( \int_0^{\mu_x \lambda_x} u^i e^{-u} du \cdot \int_0^{\mu_y \lambda_y} v^i e^{-v} dv \right)$$

## Chapitre 2 - Politique paramétrique

En introduisant la fonction Gamma d'Euler  $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$  ainsi que la fonction Gamma incomplète  $\Gamma(a, z) = \int_z^{+\infty} t^{a-1} e^{-t} dt$ , l'équation précédente se ramène à :

$$\frac{\mu_x \mu_y}{C(\lambda_x, \lambda_y)} = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(i!)^2} (\Gamma(i+1) - \Gamma(i+1, \mu_x \lambda_x)) (\Gamma(i+1) - \Gamma(i+1, \mu_y \lambda_y))$$

Or on sait que si le paramètre  $a$  est un entier positif,  $\Gamma(a, z) = (a-1)! e^{-z} \sum_{r=0}^{a-1} \frac{z^r}{r!}$ .

Donc :

$$\frac{\mu_x \mu_y}{C(\lambda_x, \lambda_y)} = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left( 1 - e^{-\mu_x \lambda_x} \sum_{r=0}^i \frac{(\mu_x \lambda_x)^r}{r!} \right) \left( 1 - e^{-\mu_y \lambda_y} \sum_{r=0}^i \frac{(\mu_y \lambda_y)^r}{r!} \right)$$

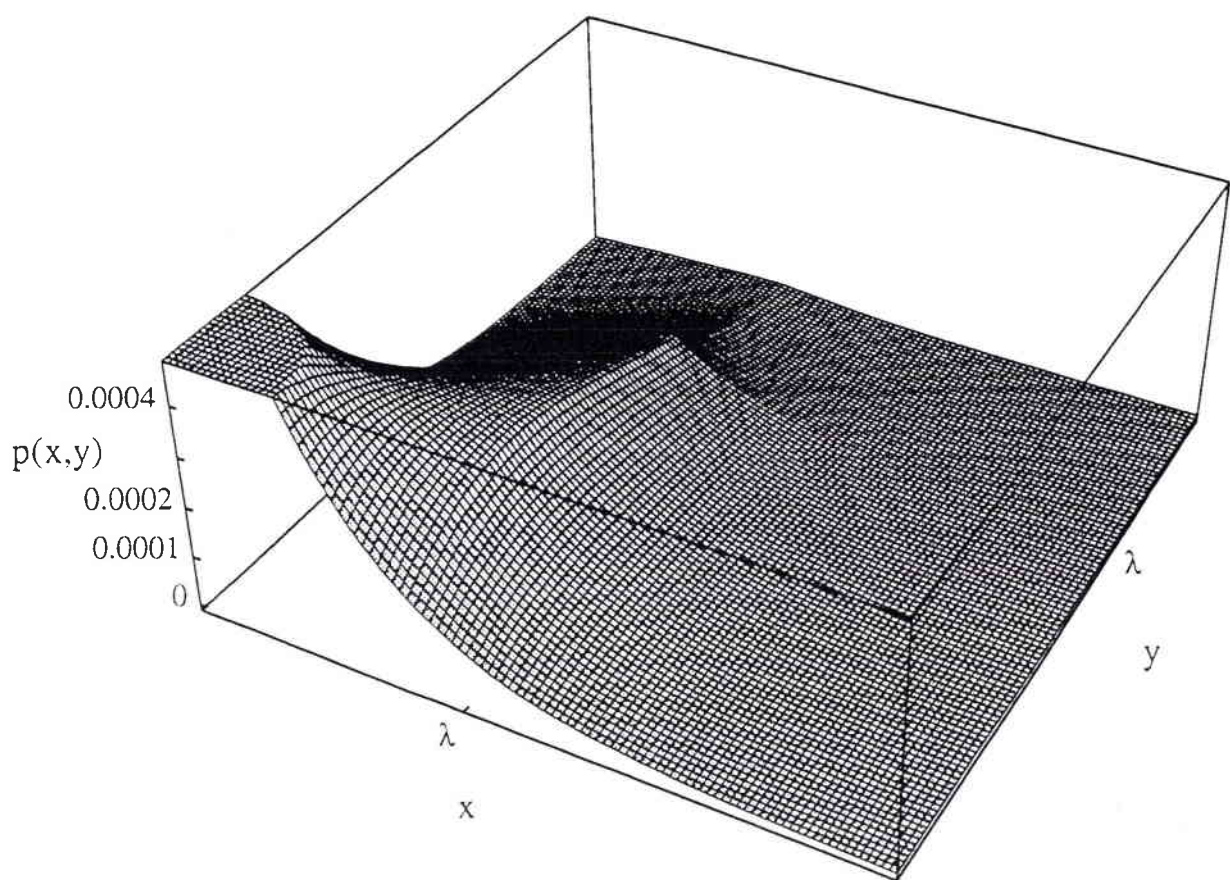
et finalement :

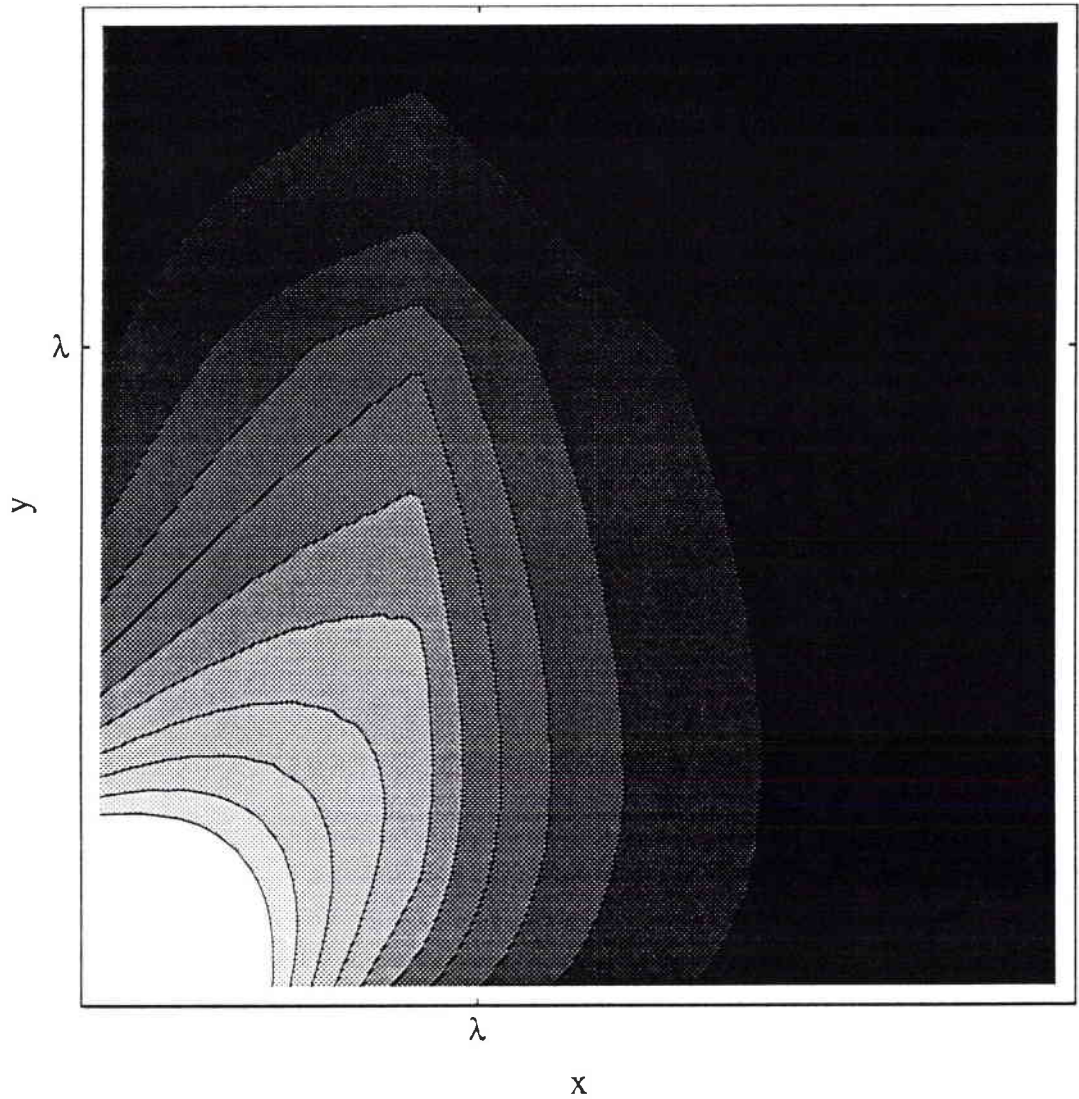
$$C(\lambda_x, \lambda_y) = \frac{\mu_x \mu_y}{1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left( 1 - e^{-\mu_x \lambda_x} \sum_{r=0}^i \frac{(\mu_x \lambda_x)^r}{r!} \right) \left( 1 - e^{-\mu_y \lambda_y} \sum_{r=0}^i \frac{(\mu_y \lambda_y)^r}{r!} \right)} \quad (2.20)$$

□

Une représentation tri-dimensionnelle ainsi qu'un graphe de niveau de la fonction  $p(x, y)$  obtenue par simulation sont donnés pages suivantes. Le système simulé a pour caractéristiques :

$$\mu_x = \mu_y = 1 \quad \lambda_x = 2.5 \quad \lambda_y = 4.13 \quad L_x = 5 \quad L_y = 7$$





Graphe de niveau représentant  $p(x,y)$   
pour  $\mu_x = \mu_y = 1$ ,  $\lambda_x = 2.5$  et  $\lambda_y = 4.13$   
(légende : noir  $\rightarrow$  0, blanc  $\rightarrow$  1)

2.3.3.3 Expression du coût de maintenance

En régime permanent, le coût moyen estimé à long terme est uniquement fonction des limites de maintenance  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  et s'écrit :

$$I(\lambda_x, \lambda_y) = M \left( \int_0^{\lambda_x} \int_{\lambda_y}^{L_y} p(u, v) dv du + \int_{\lambda_x}^{L_x} \int_0^{\lambda_y} p(u, v) dv du + \int_{\lambda_x}^{L_x} \int_{\lambda_y}^{L_y} p(u, v) dv du \right) \\ + N \left( \int_{\lambda_x}^{L_x} \int_{L_y}^{+\infty} p(u, v) dv du + \int_{L_x}^{+\infty} \int_{\lambda_y}^{L_y} p(u, v) dv du + \int_0^{\lambda_x} \int_{L_y}^{+\infty} p(u, v) dv du + \int_{L_x}^{+\infty} \int_0^{\lambda_y} p(u, v) dv du \right) \\ + R \int_{L_x}^{+\infty} \int_{L_y}^{+\infty} p(u, v) dv du$$

En utilisant les équations (2.16)-(2.19) du résultat 2.4, l'équation précédente se transforme en :

$$I(\lambda_x, \lambda_y) = M \left( \int_0^{\lambda_x} \int_{\lambda_y}^{L_y} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_y u)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x u - \mu_y v} dv du \right. \\ \left. + \int_{\lambda_x}^{L_x} \int_0^{\lambda_y} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x v)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x u - \mu_y v} dv du \right. \\ \left. + \int_{\lambda_x}^{L_x} \int_{\lambda_y}^{L_y} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x \lambda_y)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x u - \mu_y v} dv du \right) \\ + N \left( \int_{\lambda_x}^{L_x} \int_{L_y}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x \lambda_y)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x u - \mu_y v} dv du \right. \\ \left. + \int_{L_x}^{+\infty} \int_{L_y}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x \lambda_y)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x u - \mu_y v} dv du \right. \\ \left. + \int_0^{\lambda_x} \int_{L_y}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_y u)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x u - \mu_y v} dv du \right. \\ \left. + \int_{L_x}^{+\infty} \int_0^{\lambda_y} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x v)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x u - \mu_y v} dv du \right) \\ + R \int_{L_x}^{+\infty} \int_{L_y}^{+\infty} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x \lambda_y)^i}{(i!)^2} \right) C(\lambda_x, \lambda_y) e^{-\mu_x u - \mu_y v} dv du$$

La résolution de cette équation intégrale permet d'obtenir l'expression analytique du coût :

**Résultat 2.5 : Le coût moyen estimé à long terme de la politique de maintenance s'écrit :**

$$\begin{aligned}
 I(\lambda_x, \lambda_y) = & \frac{1}{1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left( 1 - e^{-\mu_x \lambda_x} \sum_{r=0}^i \frac{(\mu_x \lambda_x)^r}{r!} \right) \left( 1 - e^{-\mu_y \lambda_y} \sum_{r=0}^i \frac{(\mu_y \lambda_y)^r}{r!} \right)} \\
 & \left\{ \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \mu_y \lambda_x \lambda_y)^i}{(i!)^2} \right) \left[ M(e^{-\mu_x \lambda_x} - e^{-\mu_x L_x}) (e^{-\mu_y \lambda_y} - e^{-\mu_y L_y}) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + N \left( (e^{-\mu_x \lambda_x} - e^{-\mu_x L_x}) e^{-\mu_y L_y} + (e^{-\mu_y \lambda_y} - e^{-\mu_y L_y}) e^{-\mu_x L_x} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + R(e^{-\mu_x L_x - \mu_y L_y}) \right] \right. \\
 & \left. + \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_y \lambda_y)^i}{i!} \left( 1 - e^{-\mu_x \lambda_x} \sum_{r=0}^i \frac{(\mu_x \lambda_x)^r}{r!} \right) \right) \left[ N e^{-\mu_y L_y} + M(e^{-\mu_y \lambda_y} - e^{-\mu_y L_y}) \right] \right. \\
 & \left. + \left( \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(\mu_x \lambda_x)^i}{i!} \left( 1 - e^{-\mu_y \lambda_y} \sum_{r=0}^i \frac{(\mu_y \lambda_y)^r}{r!} \right) \right) \left[ N e^{-\mu_x L_x} + M(e^{-\mu_x \lambda_x} - e^{-\mu_x L_x}) \right] \right\} \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

Etant donné la complexité de cette expression, il n'est pas possible d'optimiser la fonction  $I$  de manière analytique. En effet, il a été impossible de montrer que  $I(\lambda_x, \lambda_y)$  est convexe. Il est cependant possible de trouver un optimum local en utilisant une méthode de type gradient.

#### 2.3.3.4 Comparaison de différentes politiques

Nous allons comparer la politique présentée ci-dessus avec deux politiques de maintenance : la maintenance corrective et la maintenance préventive "classique".

En plus des coûts définis au §2.3.3.1, nous allons avoir besoin des deux coûts suivants:

- $M_1$  : coût de la maintenance préventive d'une unité.
- $R_1$  : coût de la réparation d'une unité.

**Maintenance corrective :**

Cette politique consiste à ne jamais effectuer de maintenance préventive.

Dans ce cas, les deux unités peuvent être considérées comme stochastiquement indépendantes.

A partir du résultat 2.1, on peut écrire :

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{\mu_x \mu_y e^{-\mu_x(x-L_x)}}{(1 + \mu_x L_x)(1 + \mu_y L_y)} & \text{pour } x > L_x \text{ et } y \leq L_y \\ \frac{\mu_x \mu_y e^{-\mu_y(y-L_y)}}{(1 + \mu_x L_x)(1 + \mu_y L_y)} & \text{pour } x \leq L_x \text{ et } y > L_y \\ \frac{\mu_x \mu_y e^{-\mu_x(x-L_x) - \mu_y(y-L_y)}}{(1 + \mu_x L_x)(1 + \mu_y L_y)} & \text{pour } x > L_x \text{ et } y > L_y \end{cases}$$

La première et la deuxième ligne de la formule précédente donnent la densité de probabilité pour les domaines où une seule unité est tombée en panne. La dernière ligne correspond au cas où les deux unités tombent en panne simultanément.

Le coût moyen de cette politique ne dépend que des limites de panne  $L_x$  et  $L_y$  :

$$I_{\text{corrective}} = R_1 \left( \int_{L_x}^{+\infty} \int_{0^+}^{L_y} p(x, y) dy dx + \int_{0^+}^{L_x} \int_{L_y}^{+\infty} p(x, y) dy dx \right) + R \int_{L_x}^{+\infty} \int_{L_y}^{+\infty} p(x, y) dy dx$$

et donc :

$$I_{\text{corrective}} = \frac{R_1 (\mu_x L_x + \mu_y L_y) + R}{(1 + \mu_x L_x)(1 + \mu_y L_y)}$$

**Maintenance préventive "classique" :**

Pour cette politique, il existe une limite de maintenance pour chaque unité. Cependant, la maintenance ou le remplacement d'une unité n'entraîne pas la maintenance de l'autre. Les deux unités sont donc stochastiquement indépendantes.

Le coût de cette politique s'écrit alors :



## Chapitre 2 - Politique paramétrique

$$\begin{aligned}
 I_{\text{classique}}(\lambda_x, \lambda_y) &= M_1 \left( \Pr(\lambda_x < X \leq L_x) \Pr(Y \leq \lambda_y) + \Pr(\lambda_y < Y \leq L_y) \Pr(X \leq \lambda_x) \right) \\
 &\quad + M \left( \Pr(\lambda_x < X \leq L_x) \Pr(\lambda_y < Y \leq L_y) \right) \\
 &\quad + R_1 \left( \Pr(X > L_x) \Pr(Y \leq \lambda_y) + \Pr(Y > L_y) \Pr(X \leq \lambda_x) \right) \\
 &\quad + N \left( \Pr(\lambda_x < X \leq L_x) \Pr(Y > L_y) + \Pr(\lambda_y < Y \leq L_y) \Pr(X > L_x) \right) \\
 &\quad + R \left( \Pr(X > L_x) \Pr(Y > L_y) \right)
 \end{aligned}$$

D'après le **résultat 2.1**, on a :

$$\Pr(Z \leq \lambda) = \frac{\mu\lambda}{(1+\mu\lambda)}, \quad \Pr(\lambda < Z \leq L) = \frac{1-e^{-\mu(L-\lambda)}}{1+\mu\lambda}, \quad \Pr(Z > L) = \frac{e^{-\mu(L-\lambda)}}{1+\mu\lambda}$$

et donc :

$$\begin{aligned}
 I_{\text{classique}}(\lambda_x, \lambda_y) &= \frac{1}{(1+\mu_x\lambda_x)(1+\mu_y\lambda_y)} \left( M_1 \left( \mu_y\lambda_y \left( 1 - e^{-\mu_x(L_x-\lambda_x)} \right) + \mu_x\lambda_x \left( 1 - e^{-\mu_y(L_y-\lambda_y)} \right) \right) \right) \\
 &\quad + M \left( \left( 1 - e^{-\mu_x(L_x-\lambda_x)} \right) \left( 1 - e^{-\mu_y(L_y-\lambda_y)} \right) \right) \\
 &\quad + R_1 \left( \mu_y\lambda_y e^{-\mu_x(L_x-\lambda_x)} + \mu_x\lambda_x e^{-\mu_y(L_y-\lambda_y)} \right) \\
 &\quad + N \left( \left( 1 - e^{-\mu_y(L_y-\lambda_y)} \right) e^{-\mu_x(L_x-\lambda_x)} + \left( 1 - e^{-\mu_x(L_x-\lambda_x)} \right) e^{-\mu_y(L_y-\lambda_y)} \right) \\
 &\quad + R \left( e^{-\mu_x(L_x-\lambda_x) - \mu_y(L_y-\lambda_y)} \right)
 \end{aligned}$$

### Comparaison des politiques de maintenance :

Pour cet exemple numérique, les valeurs suivantes des paramètres du système sont utilisées :

$$\mu_x=1 \qquad \mu_y=1 \qquad L_x=5 \qquad L_y=7$$

Le nombre moyen d'inspections avant une panne est donc 5 pour la première unité et 7 pour la seconde.

Le coût de l'intervention sur le système est de 20 unités de coût (u.c.). Le coût de la maintenance d'une unité est de 0.5 u.c. tandis que celui d'une réparation est de 100 u.c. On a donc les valeurs suivantes pour les coûts :

$$M_1=20.5 \text{ u.c.} \quad M=21 \text{ u.c.} \quad N=120.5 \text{ u.c.} \quad R_1=120 \text{ u.c.} \quad R=220 \text{ u.c.}$$

	Corrective	Préventive	Prédictive
$\lambda_x$ optimal	( $L_x=5$ )	2.34	2.5
$\lambda_y$ optimal	( $L_y=7$ )	3.75	4.13
Coût minimum	34.58	12.09	9.45

Tableau 2.3.3.4a : Exemple numérique

Les valeurs des limites de maintenance  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  qui minimisent la fonction coût ont été calculées en utilisant l'analyse des perturbations (cf Tableau 2.3.3.4a). On constate que pour cet exemple la maintenance prédictive permet une réduction du coût moyen de maintenance de plus de 21% par rapport à la maintenance préventive "classique".

## 2.4 CONCLUSION

Les modèles paramétriques permettent de minimiser le coût d'une politique de maintenance donnée. Cependant, cette optimisation ne peut être faite analytiquement que dans les cas où la fonction de transition de l'état du système est très simple. En effet, on se heurte rapidement à des problèmes mathématiques, en particulier à des équations aux dérivées partielles, qu'il n'est souvent pas possible de résoudre analytiquement.

De plus, rien ne garantit que la politique considérée soit optimale vis à vis de la minimisation du coût de maintenance.

Il est donc nécessaire de développer une nouvelle approche qui permette de caractériser et de calculer la politique optimale de maintenance. C'est ce que nous présentons dans le chapitre suivant.

# CHAPITRE 3

## Modèle général de maintenance

### 3.1 INTRODUCTION

### 3.2 PROCESSUS DE DETERIORATION GRADUELLE

### 3.3 MODELE DE REMPLACEMENT SUR HORIZON FINI

3.3.1 Description de la politique

3.3.2 Présentation du modèle

3.3.3 Propriétés de la politique optimale

### 3.4 MODELE GENERAL DE MAINTENANCE SYSTEME A UNE UNITE

3.4.1 Description de la politique

3.4.2 Présentation du modèle

3.4.3 Propriétés de la politique optimale

3.4.4 Exemple numérique

3.4.5 Remarques

### 3.5 MODELE GENERAL DE MAINTENANCE : SYSTEME A DEUX UNITES

3.5.1 Présentation du modèle général

3.5.2 Propriétés de la politique optimale dans le cas  
du remplacement

3.5.3 Exemple numérique

### 3.6. CONCLUSION

### 3.1 INTRODUCTION

Le but de ce chapitre est de présenter un modèle optimal de maintenance suffisamment complet et simple pour permettre son utilisation afin d'optimiser la politique de maintenance de systèmes constitués d'une seule ou de deux unités.

Comme nous l'avons vu au Chapitre 1, les modèles développés dans la littérature présentent deux principaux types d'inconvénients :

- l'état du système est supposé connu en continu et ne peut prendre qu'un nombre limité de valeurs. Dans la réalité, les méthodes de suivi aussi bien numérique que manuelle des équipements permettent de connaître l'état du système uniquement à des instant précis (périodique de période éventuellement très faible dans le cas de la supervision numérique). De plus, cet état peut prendre un très grand nombre de valeurs différentes, nombre uniquement limité par la précision du dispositif de mesure.
- les possibilités d'actions sur le système sont limitées au seul remplacement préventif de l'équipement. Il est cependant souvent également possible dans la réalité d'effectuer, à un coût moindre, une maintenance qui permet de diminuer l'état de détérioration du système. Ceci est particulièrement vrai pour les systèmes complexes et coûteux pour lesquels l'optimisation de la politique de maintenance est extrêmement importante.

Il est donc souhaitable que le modèle de maintenance soit un modèle à temps discret et à espace d'état infini qui permettent de prendre en compte des actions de maintenance ou de remplacement partiel, et qui ne soit pas limité à des systèmes composés d'une seule unité.

Dans la seconde partie de ce chapitre, le processus de détérioration graduelle est présenté. Les caractéristiques de ce processus sont utilisées dans la troisième partie afin de développer un modèle limité au cas du remplacement. Ce modèle permet d'introduire les concepts à partir desquels est élaboré le modèle général de maintenance présenté dans le quatrième chapitre. Celui-ci est ensuite étendu au cas où le système est constitué deux unités.

### 3.2 PROCESSUS DE DETERIORATION GRADUELLE

Le système considéré est soumis à un processus stochastique de détérioration graduelle. L'état de détérioration du système -appelé par la suite état du système-, est une variable aléatoire notée  $X_i$  observée de manière périodique. Sans perte de généralité, la période d'observation peut-être considérée comme unitaire. L'observation de l'état de détérioration du système à l'instant  $i$ , noté  $x_i$ , est une valeur scalaire réelle positive connue de manière certaine.

On suppose que l'état du système à l'instant  $i+1$ , noté  $X_{i+1}$ , ne dépend que de son état à l'instant  $i$ . Le processus  $(X_i, i=1,2,\dots)$  est donc markovien à temps discret et à espace d'état infini. La probabilité de transition d'une valeur  $x_i$  de l'état  $X_i$  à une valeur  $x_{i+1}$  de l'état  $X_{i+1}$  est donnée par une densité de probabilité connue, notée  $f(x_{i+1}, x_i)$ . L'état de détérioration  $X_i$  a pour valeur 0 lorsque l'équipement est neuf. Plus la valeur de  $X_i$  est grande, plus le système est détérioré.

Dans ce qui suit, on appellera  $x$  l'observation de l'état de détérioration  $X_i$  à un instant  $i$  quelconque.

Les hypothèses suivantes sont faites sur  $f(u,x)$  :

- $f(u,x)$  est intégrable par rapport à  $u$  sur l'ensemble de son support,
- soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ . Il existe au plus un point  $v$  vérifiant :

$$f(v,a) = f(v,b)$$

$$\text{et } f(v^+, a) < f(v^+, b)$$

$$\text{et } \forall x < v \quad f(x,a) \geq f(x,b)$$

$$\text{et } \forall x > v \quad f(x,a) \leq f(x,b)$$

(avec  $v^+ = v + \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  réel positif non nul aussi petit que l'on voudra)

Un exemple où  $v$  existe est donné par la figure 3.2a.

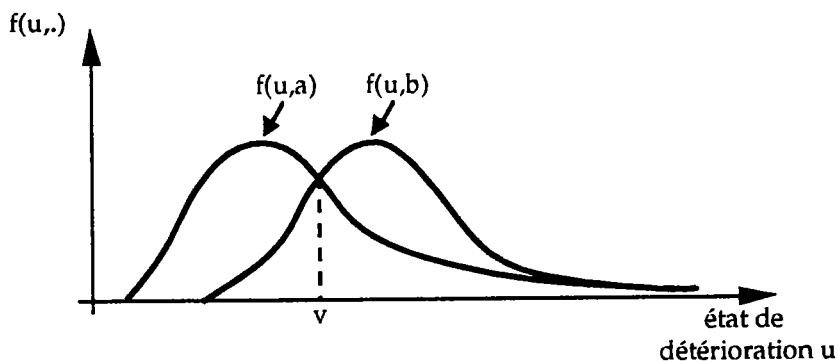


Figure 3.2a : Exemple de fonctions  $f(u,x)$

Ces hypothèses ne sont pas très restrictives, la plupart des densités de probabilité communes les respectant.

Le système tombe en panne ( $\delta(x) = 0$ ) quand son état de détérioration dépasse une limite  $L$  connue, appelée limite de panne. Il est alors immédiatement remplacé par un équipement neuf identique. L'état du nouveau système est donc égal à 0 et subit le même processus stochastique de détérioration graduelle. Le temps de remplacement étant considéré comme négligeable par rapport à la période d'observation, si le système tombe en panne à l'instant  $i$ , son état  $x$  devient instantanément égal à 0 (fig. 3.2b). Le coût de ce remplacement est  $R(x)$ .

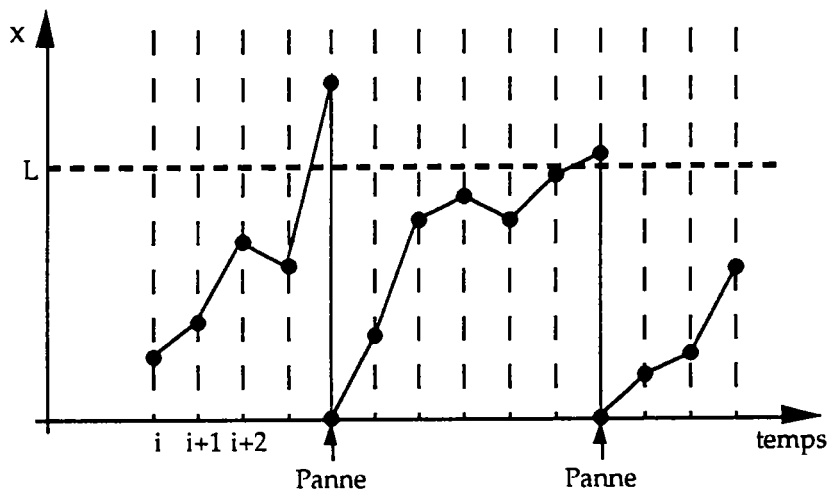


Figure 3.2b : Exemple d'évolution de l'état de détérioration du système

Quand le système est en fonctionnement ( $\delta(x) = 1$ ), il est possible de décider d'effectuer une intervention afin de diminuer son état de détérioration et d'éviter ainsi une panne coûteuse. Nous allons, dans un premier temps, étudier le cas où seul un remplacement est possible, puis celui plus général où plusieurs niveaux de maintenance sont permis.

### 3.3 MODELE DE REMPLACEMENT SUR HORIZON FINI

Pour certains équipements, il est moins coûteux et plus facile de les remplacer par un équipement identique plutôt que d'effectuer une maintenance préventive ou une réparation (exemple : cartes électroniques).

Après une présentation de la politique de remplacement, un modèle mathématique sera développé et les propriétés de la politique optimale seront établies.

### 3.3.1 Description de la politique

Si le système est en fonctionnement, la décision quant à l'action à effectuer est de ne pas intervenir ou bien de remplacer préventivement l'équipement :

- **Pas d'intervention** : ceci entraîne un coût de fonctionnement par unité de temps noté  $c(x)$  dépendant de l'état  $x$  dans lequel se trouve le système. Ce coût est lié aux opérations permettant de ne pas accélérer le processus de détérioration graduelle. Il est non-décroissant en  $x$ .
- **Remplacement préventif** : le système est remplacé par un équipement neuf identique subissant le même processus stochastique de détérioration graduelle. Cette action permet donc de ramener l'état de détérioration du système à 0. Le temps de cette action étant considéré comme négligeable par rapport à la période d'observation, s'il est décidé de remplacer préventivement le système à l'instant  $i$ , son état de détérioration devient instantanément égal à 0 (cf fig. 3.3.1a). Cette intervention entraîne un coût constant  $r$ .

Pour simplifier les calculs, le coût de remplacement après panne est supposé constant en  $x$  et supérieur au coût de remplacement préventif  $r$ :

$$R(x)=R \quad \forall x > L \text{ et } R > r$$

On souhaite déterminer la fonction de décision  $d(x)$  qui associe à l'état  $x$  du système, la décision "pas d'intervention", i.e. le système reste dans son état actuel  $x$ , ou "remplacement préventif", i.e. l'état du système est ramené en 0. Cette fonction, appelée "politique de maintenance", est définie comme suit :

$$d(x) = \begin{cases} x & \text{si on décide de ne pas intervenir} \\ 0 & \text{si on décide d'effectuer un remplacement} \end{cases}$$

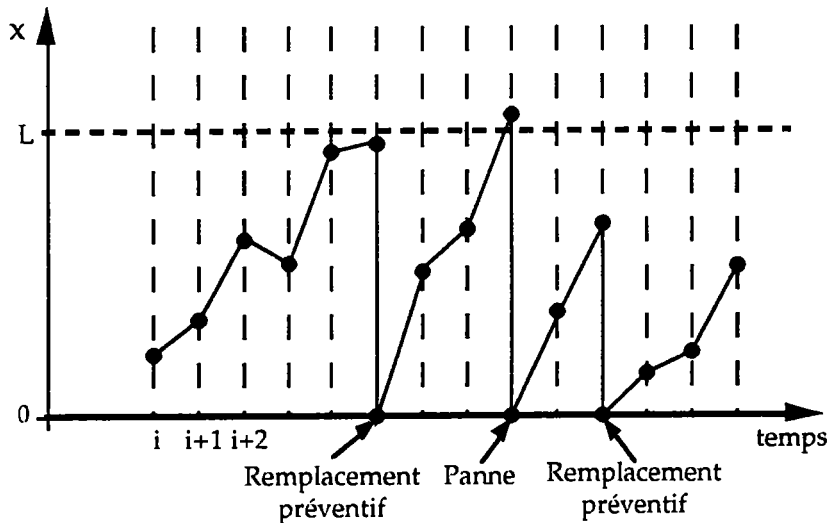


Figure 3.3.1a : Exemple d'évolution de l'état de détérioration du système avec politique de remplacement

L'état de détérioration du système suit donc un processus stochastique markovien de renouvellement dépendant de la politique  $d$ .

Si le remplacement préventif est peu employé, le coût de la politique de maintenance sera affecté par un important nombre de pannes. A l'inverse, si le système est souvent remplacé préventivement, la probabilité de panne deviendra faible mais ces remplacements augmenteront le coût de la politique de maintenance.

Le critère choisi pour déterminer  $d(x)$  est donc le coût cumulé estimé de la politique de maintenance sur un horizon de longueur finie  $N$ , l'état initial étant  $x_0$ . Ce coût, noté  $J_d^N(x_0)$ , représente la somme totale estimée qu'il faudra dépenser pendant  $N$  périodes en appliquant une politique de maintenance  $d$ .

L'optimisation de cette politique consiste donc à déterminer la fonction  $d^*(x)$  qui minimise :

$$J_d^N(x_0) = \mathbf{E} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} g_d(x_k) \right] \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{E}$  est l'espérance mathématique et  $g_d(x_k)$  est le coût d'une politique  $d$  pour la  $k$ -ième période de longueur 1 :



$$g_d(x_i) = \begin{cases} c(x_i) & \text{si } \delta(x_i) = 1 \text{ et } d(x_i) = x_i \\ c(0) + r & \text{si } \delta(x_i) = 1 \text{ et } d(x_i) = 0 \\ c(0) + R & \text{si } \delta(x_i) = 0, \text{ quel que soit } d(x_i) \end{cases} \quad (3.2)$$

La valeur de  $g_d(x_i)$  provient du fait que l'état  $x_i$  du système passe instantanément de sa valeur originelle à 0. Il faut donc ajouter au coût de remplacement  $R$  ou  $r$  le coût de fonctionnement en 0.

Bien entendu, on a :

$$J_d^1(x_k) = g_d(x_k).$$

Etant donné que l'espace d'état du système est infini, il existe une infinité de politiques possibles. Il est donc nécessaire, pour résoudre ce problème, de développer un modèle mathématique de la politique optimale de remplacement d'un système à une unité.

### 3.3.2 Présentation du modèle

Soit  $J^N(x_0)$  le coût cumulé estimé minimal de maintenance sur un horizon  $N$  sachant que le système est dans un état  $x_0$  à l'instant 0. Soit  $ID$  l'ensemble des politiques stationnaires, i.e. l'ensemble des politiques de maintenance sur un horizon  $N$  donné qui ne dépendent pas du temps.

D'après l'équation (3.1), on a :

$$J^N(x_0) = \text{Min}_{d \in ID} \left\{ E \left[ \sum_{k=0}^{N-1} g_d(x_k) \right] \right\} \quad (3.3)$$

A l'instant 0, l'état du système est connu. Si le système est en fonctionnement, i.e. si  $\delta(x_0)=1$ , on a le choix entre la non-intervention, ce qui entraîne un coût  $c(x_0)$ , et le remplacement préventif avec un coût pour la période 0 de  $r+c(0)$ . Par contre, si le système est en panne, i.e. si  $\delta(x_0)=0$ , il est nécessaire de le remplacer pour un coût  $R+c(0)$ . Bien entendu, l'état du système à l'instant 1 dépendra du type d'intervention effectuée et donc de l'état  $x_0$  à la fin de la période 0.

On peut donc réécrire l'équation (3.3) de la manière suivante :

• si  $\delta(x_0)=1$  :

$$J^N(x_0) = \text{Min} \left\{ c(x_0) + \text{Min}_{d \in \text{ID}} \left\{ \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) / x_0 \right] \right\}, r + c(0) + \text{Min}_{d \in \text{ID}} \left\{ \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) / x_0 = 0 \right] \right\} \right\} \quad (3.4)$$

• si  $\delta(x_0)=0$  :

$$J^N(x_0) = R + c(0) + \text{Min}_{d \in \text{ID}} \left\{ \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) / x_0 = 0 \right] \right\} \quad (3.5)$$

L'espérance conditionnelle  $\mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) / x_0 \right]$  peut être exprimée en fonction de

la densité de probabilité de transition du processus de détérioration  $f(.,x_0)$ . Si  $f(.,x_0)$  a pour support l'ensemble  $D_{x_0}$ , et si elle est intégrable sur  $D_{x_0}$ , l'espérance conditionnelle s'écrit :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) / x_0 \right] = \int_{D_{x_0}} \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) \right] f(x_1, x_0) dx_1$$

En particulier, étant donné l'équation (3.1), on a :

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) / x_0 \right] = \int_{D_{x_0}} J_d^{N-1}(x_1) f(x_1, x_0) dx_1$$

Par définition,  $J^{N-1}(x_1) \leq J_d^{N-1}(x_1) \quad \forall x_1$  et  $\forall d \in \text{ID}$ . Il est donc possible, quand on cherche le minimum sur ID de l'expression précédente, de faire passer l'opérateur Minimum sous l'intégrale. On obtient donc :

$$\text{Min}_{d \in \text{ID}} \left\{ \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) / x_0 \right] \right\} = \int_{D_{x_0}} J^{N-1}(x_1) f(x_1, x_0) dx_1 \quad (3.6)$$

En simplifiant l'écriture, les équations (3.4) et (3.5) peuvent alors se mettre sous la forme suivante :

$$J^N(x) = \begin{cases} \text{Min} \left( \begin{array}{l} c(x) + \int_{D_x} J^{N-1}(v) f(v, x) dv, \\ r + c(0) + \int_{D_0} J^{N-1}(v) f(v, 0) dv \end{array} \right) & \text{si } \delta(x) = 1 \\ R + c(0) + \int_{D_0} f(v, 0) J^{N-1}(v) dv & \text{si } \delta(x) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

avec comme condition de bord  $J^N(x) = 0$  pour  $N \leq 0$ .

Les équations (3.7) correspondent à un problème de programmation dynamique non "discounté" à horizon fini et à espace d'état infini (BERTSEKAS [13]).

### 3.3.3 Propriétés de la politique optimale

On suppose la fonction  $f(u, x)$  définie sur un intervalle  $D_x = [h(x), +\infty)$ ,  $h(x)$  étant une fonction non-décroissante en  $x$ . De plus, on suppose  $f(u, x)$  intégrable par rapport à  $u$  sur  $D_x$ .

En supposant qu'aucun remplacement ne peut être effectué sur un système neuf (i.e. quand  $x=0$ ), le problème (3.7) peut s'écrire :

$$J^N(x) = \begin{cases} \text{Min} \left( \begin{array}{l} c(x) + \int_{h(x)}^{+\infty} J^{N-1}(v) f(v, x) dv, \\ r + J^N(0) \end{array} \right) & \text{si } x \leq L \\ R + J^N(0) & \text{si } x > L \end{cases} \quad (3.8)$$

avec  $J^N(0) = c(0) + \int_{h(0)}^{+\infty} J^{N-1}(v) f(v, 0) dv$

et la condition de bord  $J^N(x) = 0$  pour  $N \leq 0$ .

Comme nous l'avons vu au §3.3.1, les coûts possèdent les caractéristiques suivantes :

- le coût de fonctionnement  $c(x)$  est positif et non-décroissant,
- le coût de remplacement après panne  $R$  est supérieur au coût de remplacement préventif  $r$ .

Le lemme suivant va nous être utile pour prouver certaines propriétés de la politique optimale.

**Lemme 3.1 :**

Soit  $f(u,x)$  une densité de probabilité ayant les propriétés suivantes :

- (i) pour tout  $x \in [0, +\infty)$ ,  $f(u,x)$  est définie pour tout  $u \in [h(x), +\infty)$ , avec  $h(x)$  fonction non-décroissante en  $x$ ,
- (ii) pour tout  $x \in [0, +\infty)$ ,  $f(u,x)$  est intégrable par rapport à  $u$  sur  $[h(x), +\infty)$ ,
- (iii) si  $a$  et  $b$  sont deux réels tels que  $a < b$ , alors il existe au plus un point  $v$  de  $(h(x), +\infty)$  tel que :

$$f(v,a) = f(v,b)$$

$$\text{et } f(v^+,a) < f(v^+,b)$$

$$\text{et } \forall x < v \quad f(x,a) \geq f(x,b)$$

$$\text{et } \forall x > v \quad f(x,a) \leq f(x,b)$$

(avec  $v^+ = v + \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  réel positif non nul aussi petit que l'on voudra)

Si  $t(x)$  est une fonction non décroissante, intégrable et non-négative sur  $[h(x), +\infty)$ , pour tout  $x \in [0, +\infty)$  alors

$$\int_{h(x)}^{+\infty} f(u,x)t(u)du \text{ est non-décroissante.}$$

*Démonstration :*

Notons  $B(x)$  l'intégrale  $\int_{h(x)}^{+\infty} f(u,x)t(u)du$ .

Soit  $x_1$  et  $x_0$  deux réels quelconques vérifiant la relation  $x_1 > x_0$ .

On a :

$$\begin{aligned} B(x_1) - B(x_0) &= \int_{h(x_1)}^{+\infty} f(u,x_1)t(u)du - \int_{h(x_0)}^{+\infty} f(u,x_0)t(u)du \\ &= \int_{h(x_1)}^{+\infty} (f(u,x_1) - f(u,x_0))t(u)du - \int_{h(x_0)}^{h(x_1)} f(u,x_0)t(u)du \end{aligned}$$

Soit  $A(x_0, x_1)$  le point tel que  $f(A(x_0, x_1), x_0) = f(A(x_0, x_1), x_1)$ . Si  $A(x_0, x_1)$  n'existe pas, on pose  $A(x_0, x_1) = h(x_1)$ .

Notons  $C(x_0, x_1)$  l'intégrale  $\int_{h(x_0)}^{h(x_1)} f(u, x_0) t(u) du$ .

On obtient donc :

$$\begin{aligned} B(x_1) - B(x_0) &= \int_{h(x_1)}^{+\infty} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) t(u) du - C(x_0, x_1) \\ &= \int_{h(x_1)}^{A(x_0, x_1)} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) t(u) du + \int_{A(x_0, x_1)}^{+\infty} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) t(u) du - C(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Etant donné (iii), le premier terme de l'équation précédente est négatif ou nul tandis que le second est positif.

Sachant que  $t(u)$  est une fonction non-décroissante, si on note  $t(A(x_0, x_1)) = K$ , on peut écrire :

$$B(x_1) - B(x_0) \geq \int_{h(x_1)}^{A(x_0, x_1)} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) t(u) du + K \int_{A(x_0, x_1)}^{+\infty} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) du - C(x_0, x_1)$$

On note  $\Lambda(x_0, x_1)$  le membre de droite de l'inégalité précédente.

En utilisant le théorème généralisé de la valeur moyenne, on obtient:

$$\Lambda(x_0, x_1) = \alpha \int_{h(x_1)}^{A(x_0, x_1)} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) du + K \int_{A(x_0, x_1)}^{+\infty} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) du - C(x_0, x_1)$$

avec  $t(h(x_1)) \leq \alpha \leq t(A(x_0, x_1))$ , c'est-à-dire  $t(h(x_1)) \leq \alpha \leq K$

$f(u, x)$  étant une densité de probabilité définie sur  $[h(x), +\infty[$ , on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \Lambda(x_0, x_1) &= \alpha \int_{h(x_1)}^{A(x_0, x_1)} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) du \\ &\quad + K \left[ 1 - \int_{h(x_1)}^{A(x_0, x_1)} f(u, x_1) du - 1 + \int_{h(x_0)}^{A(x_0, x_1)} f(u, x_0) du \right] - C(x_0, x_1) \\ &= \alpha \int_{h(x_1)}^{A(x_0, x_1)} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) du \\ &\quad + K \left[ - \int_{h(x_1)}^{A(x_0, x_1)} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) du + \int_{h(x_0)}^{h(x_1)} f(u, x_0) du \right] - C(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\Lambda(x_0, x_1) = (\alpha - K) \int_{h(x_1)}^{A(x_0, x_1)} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) du + K \int_{h(x_0)}^{h(x_1)} f(u, x_0) du - C(x_0, x_1)$$

Or  $(\alpha - K) \int_{h(x_1)}^{A(x_0, x_1)} (f(u, x_1) - f(u, x_0)) du$  est positif car  $f(u, x_1) \leq f(u, x_0)$  sur  $[h(x_1), A(x_0, x_1)]$  et  $\alpha \leq K$ .

$$\text{De plus, on a: } K \int_{h(x_0)}^{h(x_1)} f(u, x_0) du - C(x_0, x_1) = K \int_{h(x_0)}^{h(x_1)} f(u, x_0) du - \int_{h(x_0)}^{h(x_1)} f(u, x_0) t(u) du$$

ce qui peut s'écrire en utilisant le théorème généralisé de la valeur moyenne avec  $t(h(x_0)) \leq \beta \leq t(h(x_1)) \leq K$  :

$$K \int_{h(x_0)}^{h(x_1)} f(u, x_0) du - C(x_0, x_1) = (K - \beta) \int_{h(x_0)}^{h(x_1)} f(u, x_0) du \geq 0$$

Finalement on obtient :  $0 \leq \Lambda(x_0, x_1) \leq B(x_1) - B(x_0) \quad \forall x_1 > x_0$

$B(x)$  est donc non-décroissante.

□

Nous allons tout d'abord démontrer la monotonie de la fonction coût estimé de maintenance.

**Théorème 3.2 :** Dans le cas d'une politique de remplacement à coûts constants, le coût cumulé estimé sur un horizon  $N$ ,  $J^N(x)$ , est une fonction non-décroissante de l'état initial  $x$ .

*Démonstration :*

En raison de l'expression même de  $J^N(x)$  pour  $x$  supérieur à  $L$  (cf (3.8)),  $J^N(x)$  est constante par rapport à  $x$ .

Pour  $x$  inférieur ou égal à  $L$ , le second membre du Min étant constant,  $J^N(x)$  est non-décroissante si :

$$c(x) + \int_{h(x)}^{+\infty} f(v, x) J^{N-1}(v) dv \text{ est non-décroissante.}$$

D'après le **lemme 3.1** et étant donné que  $c(x)$  est une fonction non-négative et non-décroissante en  $x$ , une condition suffisante pour que  $J^N(x)$  soit non-décroissante est que  $J^{N-1}(x)$  le soit aussi. De même,  $J^{N-1}(x)$  est non-décroissante si  $J^{N-2}(x)$  l'est aussi.

En poursuivant cette récurrence, on obtient finalement :  $J^2(x)$  est non-décroissante si  $J^1(x)$  l'est aussi.

Or,  $J^1(x)$  est le coût de maintenance sur une période lorsqu'une politique optimale est appliquée. On a donc :

$$J^1(x) = g_{d^*}(x) = \begin{cases} \text{Min}\{c(x), c(0) + r\} & \text{si } x \leq L \\ c(0) + R & \text{si } x > L \end{cases}$$

Donc  $J^1(x)$  est non-décroissante. De même,  $J^2(x), \dots, J^{N-2}(x), J^{N-1}(x)$  et  $J^N(x)$  sont non-décroissantes.

□

Ceci nous permet d'établir que la politique de remplacement optimale est une politique de type "limite de contrôle" (PLC) :

**Théorème 3.3 :** Dans le cas d'une politique sur un horizon  $N$  de remplacement à coûts constants, il existe une valeur  $\lambda_N^*$  telle que quel que soit  $0 < \lambda_N^* \leq x$ ,  $d^*(x) = 0$  et quelque soit  $x < \lambda_N^*$ ,  $d^*(x) = x$ . La politique  $d^*$  ainsi définie est optimale.

*Démonstration:*

Le premier membre du Min de l'équation (3.8) définissant le coût de la politique optimale étant non-décroissant (cf **théorème 3.2**) et le second membre étant constant, il existe bien un  $\lambda_N^*$  vérifiant ce théorème.

Cette limite de remplacement  $\lambda_N^*$ , limite encore appelée limite de contrôle dans la littérature, est fonction de  $N$  et est définie comme suit :

$$\lambda_N^* = \text{Min}_{\lambda \in ]0, +\infty[} \left( \lambda / c(\lambda) + \int_{h(\lambda)}^{+\infty} f(v, \lambda) J^{N-1}(v) dv \geq r + J^N(0) \right)$$

Remarque :  $\lambda_N^*$  peut être supérieur L. Dans ce cas la politique optimale est de ne jamais intervenir préventivement sur le système.

□

### 3.3.4 Exemple numérique

L'exemple suivant permet d'illustrer le **théorème 3.3**.

Le système considéré a une limite de panne L égale à 10.

Le processus de détérioration graduelle auquel ce système est soumis suit une loi exponentielle négative  $f(u,x)$  de paramètre  $\mu = 1$  :

$$f(u,x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu(u-x)} & \text{si } u > x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \mu = 1$$

Les coûts sont définis de la manière suivante :

- coût de fonctionnement :

$$c(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & \text{si } x < 7.5 \\ \frac{x}{4} & \text{sinon} \end{cases}$$

- coût de maintenance préventive en 0:

$$r=1.5$$

- coût de maintenance corrective :

$$R=5$$

En appliquant la programmation dynamique (3.8), on obtient l'évolution du coût moyen estimé optimal de la politique de maintenance  $I^N(0)$  et de la limite de maintenance  $\lambda_N^*$  en fonction de la longueur N de l'horizon considéré :

	N=10	N=20	N=50	N=100
$\lambda_N^*$	3.92	3.95	3.95	3.95
$I^N(0)$	0.37	0.44	0.48	0.49

Tableau 3.3.4a : Evolution de la limite  $\lambda_N^*$  et du coût moyen de maintenance en fonction de la longueur N de l'horizon



On constate que la valeur des limites de maintenance  $\lambda_N^*$  sont très faible par rapport à la limite de panne  $L$ . Ceci est dû à la forme parabolique de la fonction coût de fonctionnement  $c(x)$ .

La figure 3.3.4b donne un exemple d'évolution de l'état de détérioration du système.

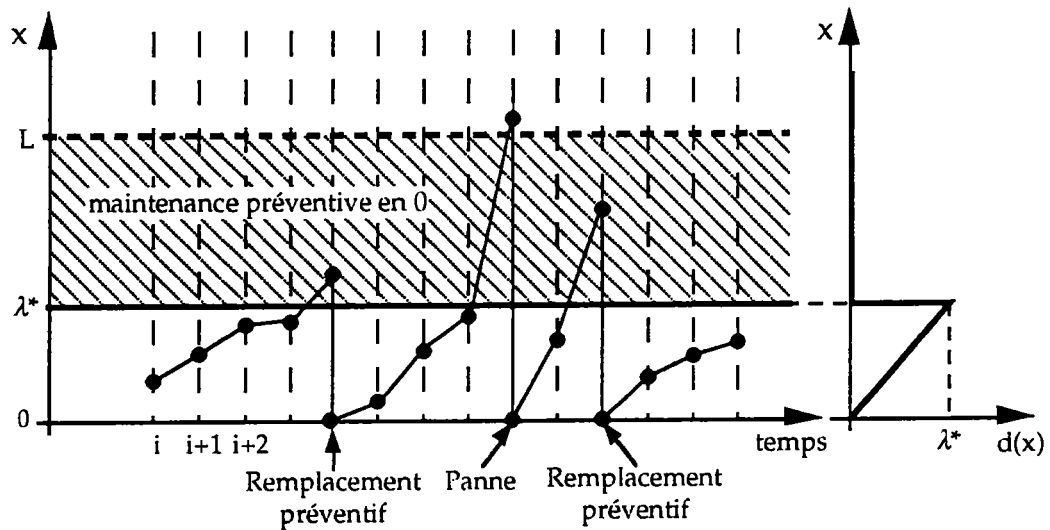


Figure 3.3.4b : Exemple d'évolution de l'état de détérioration du système avec politique de remplacement optimale

### 3.4 MODELE GENERAL DE MAINTENANCE : SYSTEME A UNE UNITE

Le modèle général de maintenance est une extension du modèle de remplacement que nous venons de voir. Comme précédemment, après la description des différentes possibilités de politique de maintenance, un modèle mathématique sera développé. A partir de ce modèle, les propriétés de la politique optimale de maintenance seront établies.

#### 3.4.1 Description de la politique

Comme dans le cas du remplacement, il existe deux décisions possibles quand le système est en fonctionnement :

- **Pas d'intervention** : ceci entraîne un coût de fonctionnement par unité de temps noté  $c(x)$  dépendant de l'état  $x$  dans lequel se trouve le système. Ce coût est lié aux opérations permettant de ne pas accélérer le processus de détérioration graduelle.

- **Maintenance préventive** : cette action permet de ramener l'état du système à un état de détérioration inférieur, noté  $u$ . Dans le cas où plusieurs types de maintenances sont possibles (remplacement par un équipement neuf, remplacement par un équipement d'occasion, réparation partielle, etc...) - i.e. il existe différentes valeurs possibles pour  $u$  - il faut aussi choisir laquelle appliquer. La durée de la maintenance étant considérée comme négligeable par rapport à la période d'observation, si le système est maintenu à l'instant  $i$ , son état  $x$  devient instantanément égal à  $u$ . Cette intervention entraîne un coût  $r(u,x)$  (coût de maintenance pour ramener l'état du système en  $u$  sachant qu'il était en  $x$ ). Bien entendu, on a  $r(x,x)=0 \forall x$ .

A chaque type de maintenance préventive est associée une fonction appelée "travail à effectuer". Cette fonction, notée  $w_i(x)$ , permet de connaître dans quel état le système se retrouvera après une maintenance de type  $i$  sachant que son état de détérioration actuel est  $x$  :

$$u=x-w_i(x)$$

En fonction de l'expression de  $w_i(x)$ , l'état  $u$  peut donc être une constante ou bien une fonction  $x$ . Par exemple, une maintenance peut permettre de ramener l'état du système à une valeur  $A$  donnée et une autre de diminuer son état de détérioration de 20%.

On note  $M_x$  l'ensemble des états pouvant être atteints par une maintenance sachant que l'état du système est  $x$ .  $M_x$  est supposé fini. Si  $m$  est le nombre de types de maintenances possibles, les états atteignables après maintenance devant être inférieurs à  $x$ , on a :

$$M_x = \{x - w_i(x) / x > w_i(x), i = 1, \dots, m\}$$

Par exemple, pour un système pour lequel on peut choisir entre une remise dans un état de détérioration  $A$  ou un remplacement par un équipement neuf (cf fig 3.4.1a), on aura :

$$w_1(x) = x - A$$

$$w_2(x) = x$$

$$M_x = \{A, 0\} \text{ si } x > A \text{ et } M_x = \{0\} \text{ si } x \leq A$$

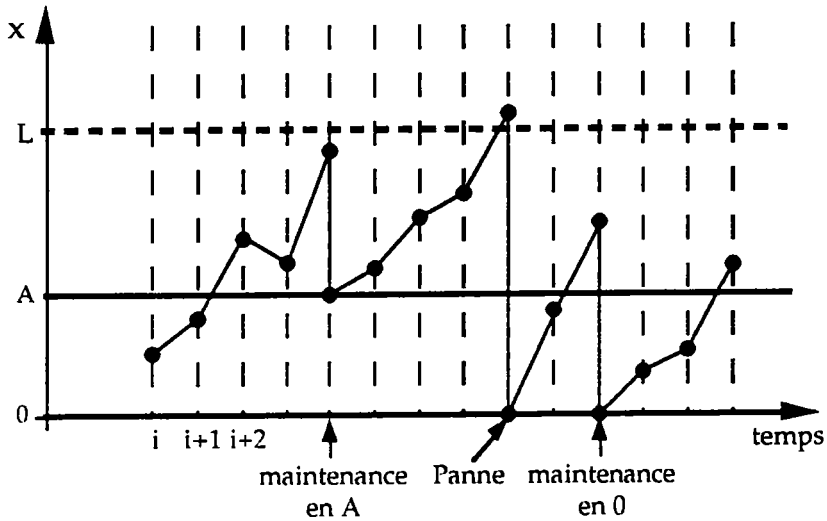


Figure 3.4.1a : Exemple d'évolution de l'état de détérioration du système avec politique de maintenance

La fonction de décision, ou politique de maintenance,  $d(x)$  est donc définie de la manière suivante :

$$d(x) = \begin{cases} x & \text{si on décide de ne pas intervenir} \\ u \in M_x & \text{si on décide d'effectuer une maintenance} \\ & \text{ramenant l'état du système de } x \text{ en } u \end{cases}$$

$d$  étant indépendante du temps, cette politique est dite stationnaire.

La fonction  $d$  permet donc de transformer l'espace d'état du processus markovien de détérioration graduelle en un espace d'action à effectuer sur le système. C'est pour cette raison que ce type de processus est appelé "processus de décision markovien" (ROSS [34]).

L'état de détérioration du système suit alors un processus stochastique markovien de renouvellement dépendant de la politique  $d$ .

Si on souhaite optimiser la politique de maintenance du système sur un horizon  $N$  avec  $N$  très grand, voire infini, il n'est plus possible d'utiliser l'équation (3.1). En effet, en règle générale, les valeurs de  $J_d^N(x_0)$  seraient infinies quelle que soit la politique  $d$  adoptée et quel que soit l'état initial  $x_0$ . Par contre la limite suivante est finie si les coûts sont finis :

$$I_d(x_0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} E \left[ \sum_{k=0}^{N-1} g_d(x_k) \right] \quad (3.9)$$

avec  $g_d(x_i)$  coût de la politique pour une période :

$$g_d(x_i) = \begin{cases} r(d(x_i), x_i) + c(d(x_i)) & \text{si } \delta(x_i) = 1 \\ R(x_i) + c(0) & \text{si } \delta(x_i) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

$I_d(x_0)$  est le coût moyen estimé à long terme de la politique de maintenance  $d$  sachant que l'état initial est  $x_0$ . Ce coût représente la somme moyenne qu'il faut dépenser par unité de temps afin de maintenir le système en état de fonctionner.

### 3.4.2 Présentation du modèle

D'après l'équation (3.9), en appelant à nouveau ID l'ensemble des politiques stationnaires possibles, le coût optimal moyen estimé à long terme  $I(x_0)$  s'écrit:

$$I^*(x_0) = \text{Min}_{d \in \text{ID}} \left\{ \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{N} E \left[ \sum_{k=0}^{N-1} g_d(x_k) \right] \right) \right\}$$

Malheureusement, il n'existe pas de méthode ni analytique ni numérique permettant de résoudre ce problème. On se limite donc au problème suivant qui paraît le plus approprié pour caractériser la politique de maintenance:

$$I(x_0) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \text{Min}_{d \in \text{ID}} \left\{ \frac{1}{N} E \left[ \sum_{k=0}^{N-1} g_d(x_k) \right] \right\} \right) \quad (3.11)$$

Il faut noter qu'en règle générale, les deux équations précédentes ne sont pas équivalentes. BERTSEKAS [14] donne une condition suffisante pour que  $I(x_0)$  soit égal à  $I^*(x_0)$  (Chapitre 9 "The Infinite Horizon Borel Models", Proposition 9.17) .

Il apparaît donc que l'on peut traiter le problème à horizon infini (3.11) comme la limite d'un problème à horizon fini lorsque  $N$  tend vers l'infini.

Soit  $I^N(x_0)$  le coût optimal moyen estimé sur un horizon de longueur  $N$  :

$$I^N(x_0) = \text{Min}_{d \in \text{ID}} \left\{ \frac{1}{N} \mathbf{E} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} g_d(x_k) \right] \right\} \quad (3.12)$$

En appliquant le même raisonnement qu'au §3.3.2 et en tenant compte de l'équation du coût de maintenance par période (3.10), il vient :

• si  $\delta(x_0)=1$  :

$$I^N(x_0) = \frac{1}{N} \text{Min}_{d \in \text{ID}} \left\{ r(d(x_0), x_0) + c(d(x_0)) + \mathbf{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) / d(x_0) \right] \right\}$$

• si  $\delta(x_0)=0$  :

$$I^N(x_0) = \frac{1}{N} \left\{ R(x_0) + c(0) + \text{Min}_{d \in \text{ID}} \left\{ \mathbf{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) / x_0 = 0 \right] \right\} \right\}$$

En remarquant que  $I^N(x_0) = \frac{J^N(x_0)}{N}$ , on peut transformer l'équation (3.6) en :

$$\text{Min}_{d \in \text{ID}} \left\{ \mathbf{E} \left[ \sum_{k=1}^{N-1} g_d(x_k) / x_0 \right] \right\} = (N-1) \int_{D_{x_0}} I^{N-1}(x_1) f(x_1, x_0) dx_1$$

On obtient donc l'équivalent du problème de programmation dynamique (3.7) pour le coût moyen :

$$I^N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \text{Min}_{d \in \text{ID}} \left( r(d(x), x) + c(d(x)) + (N-1) \int_{D_{d(x)}} f(v, d(x)) I^{N-1}(v) dv \right) & \text{si } \delta(x) = 1 \\ \frac{1}{N} \left( R(x) + c(0) + (N-1) \int_{D_0} f(v, 0) I^{N-1}(v) dv \right) & \text{si } \delta(x) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

avec comme condition de bord  $I^N(x) = 0$  pour  $N \leq 0$ .

### 3.4.3 Propriétés de la politique optimale

En supposant comme au §3.2.3 qu'aucune maintenance ne peut être effectuée sur un système neuf (i.e. quand  $x=0$ ), le problème (3.13) peut s'écrire :

$$I^N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \text{Min}_{d \in \mathbb{D}} \left( r(d(x), x) + c(d(x)) + (N-1) \int_{h(d(x))}^{+\infty} f(v, d(x)) I^{N-1}(v) dv \right) & \text{si } x \leq L \\ \frac{1}{N} (R(x) + N I^N(0)) & \text{si } x > L \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\text{avec } I^N(0) = \frac{1}{N} \left( c(0) + (N-1) \int_{h(0)}^{+\infty} f(v, 0) I^{N-1}(v) dv \right)$$

et la condition de bord  $I^N(x) = 0$  pour  $N \leq 0$ .

Les hypothèses suivantes sont faites sur les différents coûts et fonctions "travail à effectuer" :

- **(h1)** : le coût de fonctionnement en  $x$ ,  $c(x)$ , est une fonction positive non-décroissante de l'état  $x$  :

$$\frac{dc(x)}{dx} \geq 0$$

Ceci reflète le fait que le coût de fonctionnement du système pour remplir la même fonction croît en même temps que son état de détérioration.

- **(h2)** : le coût de maintenance  $r(u, x)$  est une fonction positive non-décroissante de l'état initial  $x$ , et non-croissante de l'état après maintenance  $u$  :

$$\left. \frac{\partial r(u, x)}{\partial x} \right|_{u < x} \geq 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial r(u, x)}{\partial u} \right|_{u < x} \leq 0$$

De plus, comme cela a été précédemment indiqué,  $r(x, x) = 0$ .

Le coût de la maintenance de  $x$  en  $u$  est naturellement fonction de la "distance" entre l'état de détérioration initial et celui atteint après maintenance : le coût est une fonction croissante de l'amélioration de l'état du système obtenue par l'action de la maintenance.

- **(h3)** : le coût de remplacement par un équipement neuf après une panne est une fonction positive constante ou croissante de l'état  $x$  de panne :

$$\frac{dR(x)}{dx} \geq 0$$

$R(x)$  croissant permet de prendre en compte les cas où la panne entraîne des dommages à l'environnement (détérioration des produits en cours de fabrication, de l'atelier, etc...) qui sont des fonctions croissantes de l'état de détérioration du système.

De plus, le coût de remplacement par un équipement neuf après une panne est toujours supérieur ou égal au coût de maintenance ou au coût de fonctionnement :

$$R(x) \geq r(u, y) \quad \forall u \leq y \leq L < x$$

$$R(x) \geq c(y) \quad \forall y \leq L < x$$

- (h4) : les fonctions "travail à effectuer"  $w_i(x)$  sont telles que :

$$0 < w_1(x) < w_2(x) < \dots < w_m(x) \quad \forall x$$

$$\text{et } x - w_i(x) \text{ est non-décroissante, i.e. } \frac{dw_i(x)}{dx} \leq 1 \quad \forall i, x$$

Ceci signifie qu'un état  $u_1$  donné ne peut être atteint après une maintenance de type  $i$  qu'à partir d'un unique état  $x_1$ . De plus, pour toutes les valeurs de l'état supérieures à  $x_1$  une maintenance de type  $i$  ramène dans un état supérieur à  $u_1$ .

Il faut noter que ces hypothèses ne sont pas très restrictives et sont donc vérifiées pour la plupart des systèmes physiques.

Nous allons démontrer que la politique de maintenance optimale est une politique de type "limite de contrôle" multiple si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (c1) : quand  $x$  augmente, le coût de fonctionnement s'accroît plus rapidement que le coût de maintenance, i.e. :

$$\frac{dc(x)}{dx} \geq \left. \frac{\partial r(u, x)}{\partial x} \right|_{u < x} \quad \forall u$$

Cette condition montre qu'il devient de moins en moins avantageux de conserver le système en l'état lorsque celui-ci se détériore.

- (c2) : soit  $A_1$  et  $A_2$  deux éléments de  $M_x$  tels que  $A_1 > A_2$ . Quand  $x$  augmente, le coût de maintenance pour atteindre  $A_1$ ,  $r(A_1, x)$ , croît au moins aussi rapidement que le coût de maintenance pour atteindre  $A_2$ ,  $r(A_2, x)$ .

$$\frac{\partial^2 r(u,x)}{\partial x \partial u} \Big|_{u < x} \geq 0$$

Ceci reflète la possibilité de réaliser des économies d'échelle pour certains équipements : dans ce cas, plus le système est détérioré moins le coût de maintenance dépend de la "distance"  $x-u$ . (fig. 3.4a)

Entre autres, les fonctions  $r(u,x)$  linéaires en  $u$  ou en  $x$  vérifient cette condition.

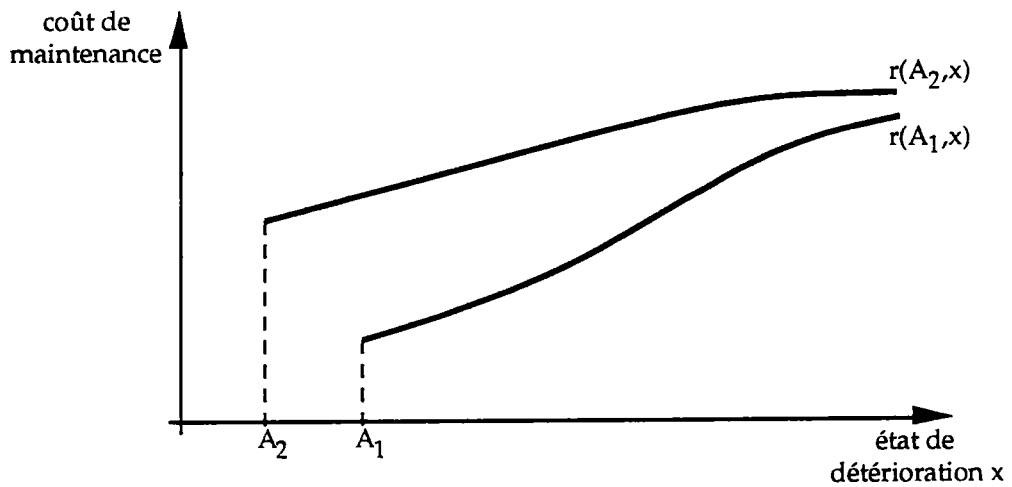


Figure 3.4a : Exemple de fonction coût de maintenance vérifiant la condition c2



**Théorème 3.4 :** Sous les hypothèses h1, h2, h3 et h4, le coût moyen estimé sur un horizon N,  $I^N(x)$  est une fonction non-décroissante de l'état initial x.

*Démonstration :*

Si pour un x donné il existe k types différents de maintenances, le problème (3.14) peut s'écrire :

$$I^N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \text{Min} \left( \begin{array}{l} c(x) + (N-1) \int_{h(x)}^{+\infty} f(v, x) I^{N-1}(v) dv, \\ r(x - w_1(x), x) + c(x - w_1(x)) + (N-1) \int_{h(x-w_1(x))}^{+\infty} f(v, x - w_1(x)) I^{N-1}(v) dv, \\ \vdots \\ r(x - w_k(x), x) + c(x - w_k(x)) + (N-1) \int_{h(x-w_k(x))}^{+\infty} f(v, x - w_k(x)) I^{N-1}(v) dv \end{array} \right) & \text{si } x \leq L \\ \frac{1}{N} (R(x) + NI^N(0)) & \text{si } x > L \end{cases}$$

$$\text{avec } I^N(0) = \frac{1}{N} \left( c(0) + (N-1) \int_{h(0)}^{+\infty} f(v, 0) I^{N-1}(v) dv \right)$$

Pour N=1, étant donné la condition de bord  $I^N(x) = 0$  pour  $N \leq 0$ , on a donc :

$$I^1(x) = \begin{cases} \text{Min} \left( \begin{array}{l} c(x), \\ r(x - w_1(x), x) + c(x - w_1(x)), \\ \vdots \\ r(x - w_k(x), x) + c(x - w_k(x)) \end{array} \right) & \text{si } x \leq L \\ R(x) + c(0) & \text{si } x > L \end{cases}$$

$c(x)$ ,  $r(u,v)$ ,  $R(x)$  et  $x-w_i(x)$  étant non-décroissantes (hypothèses h1, h2, h3, h4), chacune des lignes du Min ainsi que celle correspondant au cas où x est supérieur à L sont non décroissantes.  $I^1(x)$  est donc aussi non décroissante.

Pour  $N=2$ , on a :

$$I^2(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \text{Min} \left( \begin{array}{l} c(x) + \int_{h(x)}^{+\infty} f(v,x) I^1(v) dv, \\ r(x - w_1(x), x) + c(x - w_1(x)) + \int_{h(x-w_1(x))}^{+\infty} f(v, x - w_1(x)) I^1(v) dv, \\ \vdots \\ r(x - w_k(x), x) + c(x - w_k(x)) + \int_{h(x-w_k(x))}^{+\infty} f(v, x - w_k(x)) I^1(v) dv \end{array} \right) & \text{si } x \leq L \\ \frac{1}{2} (R(x) + 2I^2(0)) & \text{si } x > L \end{cases}$$

$I^1(x)$  étant non décroissante et positive (tous les coûts étant positifs), le lemme 3.1 et l'hypothèse h4 permettent d'établir que :

$$\int_{h(x)}^{+\infty} f(v,x) I^1(v) dv \text{ et } \int_{h(x-w_i(x))}^{+\infty} f(v, x - w_i(x)) I^1(v) dv \text{ sont non-décroissantes.}$$

$I^2(x)$  est donc non-décroissante.

Par récursivité, on peut affirmer que  $I^3(x), \dots, I^N(x)$  sont non-décroissantes.

□

Ceci nous permet d'établir le théorème suivant :

**Théorème 3.5 :** Sous les hypothèses h1, h2, h3, h4 et les conditions c1 et c2, quand les niveaux de maintenance sont constants (i.e.  $x - w_i(x) = A_i = \text{constante}$ ), la politique optimale de maintenance avec  $m$  types différents de maintenances possibles  $d^*(x)$  est définie comme suit :

Il existe une limite  $\lambda^*$  telle que :

$$\text{si } x \leq \lambda^* \quad d^*(x) = x$$

$$\text{si } x > \lambda^* \quad \text{il existe un } i(x) \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ tel que:}$$

$$d^*(x) = A_{i(x)}$$

$$\text{et } \forall x_1 > x_2 \geq \lambda^*, d^*(x_1) \leq d^*(x_2)$$

Démonstration :

D'après le problème (3.14), le coût moyen estimé  $I^N(x)$  pour  $x \leq L$  s'écrit :

$$I^N(x) = \frac{1}{N} \text{Min}_{d \in \text{ID}} \left( r(d(x), x) + c(d(x)) + (N-1) \int_{h(d(x))}^{+\infty} f(v, d(x)) I^{N-1}(v) dv \right)$$

$$= \frac{1}{N} \text{Min} \left( \begin{array}{l} c(x) + (N-1) \int_{h(x)}^{+\infty} f(v, x) I^{N-1}(v) dv, \\ r(A_1, x) + N \bar{I}^N(A_1), \\ \vdots \\ r(A_m, x) + N \bar{I}^N(A_m) \end{array} \right)$$

où  $\bar{I}^N(x)$  est le coût moyen estimé sur  $N$  périodes sachant qu'à la première période il n'y a pas de maintenance, i.e. :

$$\bar{I}^N(x) = \frac{1}{N} \left( c(x) + (N-1) \int_{h(x)}^{+\infty} f(v, x) I^{N-1}(v) dv \right)$$

Etant donné la condition **c1**, quand  $x$  croît le coût moyen associé à la non-intervention (premier argument du Min) va augmenter plus rapidement que celui associé à une décision de maintenance (2-ième à  $m+1$ -ième argument du Min).

Il peut donc exister une limite  $\lambda^*$  ( $\lambda^* \leq L$ ) telle que :

- si  $x \leq \lambda^*$  la décision optimale est de ne pas intervenir ( $d^*(x)=x$ )
- si  $x > \lambda^*$  la décision optimale est d'effectuer une maintenance

Si cette limite n'existe pas, il n'est alors jamais optimal d'effectuer une maintenance.

D'après l'hypothèse **h4**,  $A_1 > A_2 > \dots > A_m$ .

De plus, d'après la condition **c2**, si une maintenance  $A_i$  est optimale pour un  $x$  donné, la différence du coût moyen estimé associé à cette maintenance et des coûts moyens associés aux maintenance  $A_j$  avec  $j > i$  diminue quand  $x$  croît.

En effet,  $I^N(x)$  - et donc  $\bar{I}^N(x)$  - étant croissant en  $x$  (cf **théorème 3.4**), on a pour  $j > i$  :  $\bar{I}^N(A_i) \geq \bar{I}^N(A_j)$  car  $A_i > A_j$

Par contre, d'après l'hypothèse **h2**,  $r(A_i, x) \leq r(A_j, x)$ .

$\bar{I}^N(A_i)$  et  $\bar{I}^N(A_j)$  étant des constantes par rapport à  $x$ , en utilisant la condition c2, on obtient :

$$\frac{d}{dx} [r(A_i, x) + N\bar{I}^N(A_i)] \geq \frac{d}{dx} [r(A_j, x) + N\bar{I}^N(A_j)]$$

Donc, si pour un  $x$  donné, le coût d'une maintenance en  $A_i$ , i.e.  $r(A_i, x) + N\bar{I}^N(A_i)$ , est le coût minimal, il peut exister une valeur  $z > x$  telle que le coût d'une maintenance en  $A_j$  ( $j > i$ ), i.e.  $r(A_j, z) + N\bar{I}^N(A_j)$ , devienne le plus faible des coûts en  $z$ .

Finalement, s'il existe un  $\lambda^*$  tel qu'une maintenance  $A_i$  est optimale, il peut donc y avoir une limite  $\xi^*$  telle que :

$$\begin{aligned} \text{si } \lambda^* < x \leq \xi^* & \quad d^*(x) = A_i \\ \text{si } x > \xi^* & \quad d^*(x) = A_j \text{ avec } j > i \end{aligned}$$

Plus généralement, quels que soient  $x_1 > x_2 \geq \lambda^*$ , on aura :  $d^*(x_1) \leq d^*(x_2)$ .

La politique optimale de maintenance est donc du type "limites de contrôle multiples".

□

**Corollaire 3.6 :** Sous les hypothèses h1, h2, h3, h4 et la condition c1, si :

les niveaux de maintenance sont constants (i.e.  $x - w_i(x) = A_i = \text{constante}$ ) et

$\left. \frac{\partial^2 r(u, x)}{\partial x \partial u} \right|_{u < x} < 0$ , la politique optimale de maintenance avec  $m$  types différents de

maintenances possibles  $d^*(x)$  est alors définie comme suit :

Il existe une limite  $\lambda^*$  telle que :

$$\begin{aligned} \text{si } x \leq \lambda^* & \quad d^*(x) = x \\ \text{si } x > \lambda^* & \quad d^*(x) = A_i \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \end{aligned}$$

*Démonstration :*

Comme pour le théorème 3.5, il peut exister une limite  $\lambda^*$  ( $\lambda^* \leq L$ ) telle que :

$$\begin{aligned} \text{si } x < \lambda^* & \quad \text{la décision optimale est de ne pas intervenir (} d^*(x) = x \text{)} \\ \text{si } x \geq \lambda^* & \quad \text{la décision optimale est d'effectuer une maintenance} \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'hypothèse h2 et le théorème 3.4 permettent d'écrire :

$$r(A_i, x) \leq r(A_j, x) \text{ et } \bar{I}^N(A_i) \geq \bar{I}^N(A_j).$$

Cependant, étant donné la condition  $\left. \frac{\partial^2 r(u, x)}{\partial x \partial u} \right|_{u < x} < 0$ , on a :

$$\frac{d}{dx} [r(A_i, x) + N\bar{I}^N(A_i)] < \frac{d}{dx} [r(A_j, x) + N\bar{I}^N(A_j)]$$

Donc, si pour un  $x$  donné le coût d'une maintenance en  $A_i$ , i.e.  $r(A_i, x) + N\bar{I}^N(A_i)$ , est le coût minimal, ce type de maintenance reste optimal quel que soit  $z > x$ .

S'il existe  $\lambda^* = \text{Min}\{x / d^*(x) \neq x\}$  et si  $d^*(\lambda^*) = A_i$ , la politique optimale est alors définie comme suit :

$$\begin{array}{ll} \text{si } x < \lambda^* & d^*(x) = x \\ \text{si } x \geq \lambda^* & d^*(x) = A_j \text{ avec } j > i \end{array}$$

La politique ainsi définie est donc une politique de type "limite de contrôle" (cf fig. 3.3.4b).

□

### 3.4.4 Exemple numérique

Cet exemple, qui est une extension de celui présenté au §3.3.4, permet d'illustrer le théorème 3.5.

Le système considéré a une limite de panne  $L$  égale à 15. Il existe deux possibilités de maintenance préventive : un remplacement par un système neuf (l'état est ramené à 0) ou bien une maintenance en 5.

Le processus de détérioration graduelle auquel ce système est soumis suit une loi exponentielle négative  $f(u, x)$  de paramètre  $\mu = 1$  :

$$f(u, x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu(u-x)} & \text{si } u > x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \mu = 1$$

Le système tombe en panne lorsque son état devient supérieur à la limite de panne  $L = 10$ . Il existe deux types de maintenances : une maintenance en 0 (remplacement préventif) et une maintenance en  $A$ .

Les coûts sont définis de la manière suivante :

- coût de fonctionnement :

$$c(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & \text{si } x < 7.5 \\ \frac{x}{4} & \text{sinon} \end{cases}$$

- coût de maintenance préventive :

maintenance en 0 :  $r(0,x)=1.5$

maintenance en A :  $r(A,x) = \frac{x}{20} + 0.5$

- coût de maintenance corrective :

$R(x)=5$

Le coût moyen estimé optimal à long terme de la politique maintenance  $I^*$ , la limite de maintenance en 0, notée  $\lambda^*$ , et la limite de maintenance en A, notée  $\xi^*$ , sont donnés dans le tableau 3.3.4a.

	A=0.8	A=1.0	A=1.2	A=1.4	A=1.6
$\lambda^*$	/	9.99	7.6	5.15	3.95
$\xi^*$	2.89	3.11	3.33	3.6	/
$I^*$	0.41	0.44	0.47	0.50	0.50

Tableau 3.3.4a : Evolution des limites et du coût de maintenance en fonction du niveau de maintenance A

On constate donc que, quand le niveau de maintenance A se rapproche de 0, le coût de la maintenance en A étant beaucoup plus faible que celui du remplacement préventif, il devient de moins en moins intéressant d'effectuer une maintenance en 0. La limite  $\lambda^*$  tend alors vers L et le coût moyen diminue. Inversement, lorsque A prend des valeurs élevées, le faible coût de la maintenance en A ne compense plus le coût moyen élevé de la maintenance à partir de ce point ; ceci est dû à une plus grande probabilité de panne. La limite  $\xi^*$  augmente alors jusqu'à ce que la maintenance en A ne présente plus d'intérêt par rapport au remplacement préventif. Ceci engendre une augmentation du coût moyen de maintenance.

La figure 3.4.4b donne un exemple d'évolution de l'état de détérioration du système dans le cas où les limites de maintenance  $\lambda^*$  et  $\xi^*$  sont définies.

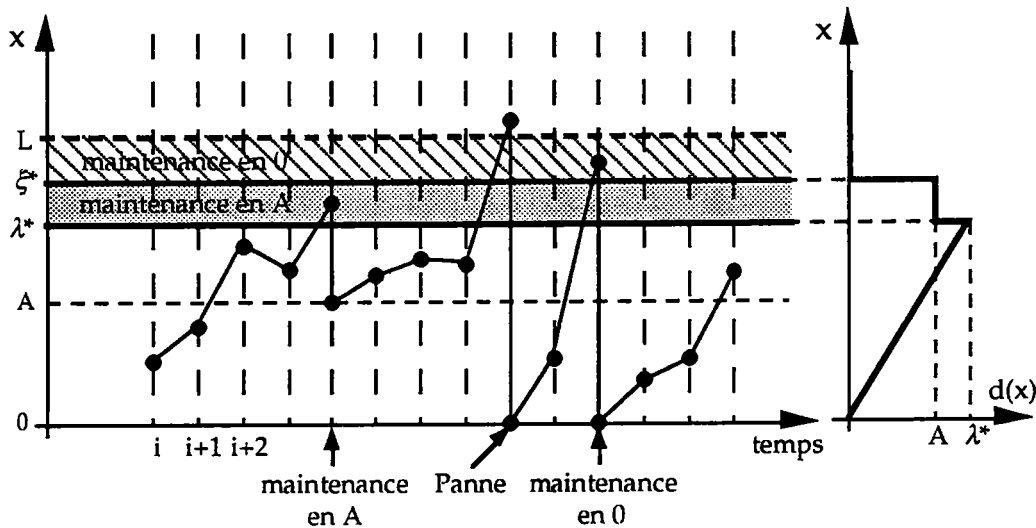


Figure 3.4.4b : Exemple d'évolution de l'état de détérioration du système avec politique optimale de maintenance

### 3.4.5 Remarques

- Les conditions  $c1$  et  $c2$  sont des conditions suffisantes mais pas nécessaires.
- Les propriétés de la politique optimale mises en évidence au §3.4.3 dépendent uniquement de la structure des différents coûts de fonctionnement et de maintenance préventive (conditions  $c1$  et  $c2$ ).

Il est donc possible de caractériser la politique optimale de maintenance sans avoir une connaissance précise du processus de détérioration  $f(u,x)$ . Ceci est particulièrement intéressant car l'obtention de l'expression de  $f(u,x)$  demande une grande quantité de données (cf Chapitre 1) et il est donc souvent nécessaire de réaliser des approximations.

Par contre, le fait de ne pas prendre en compte les caractéristiques du processus de détérioration  $f(u,x)$  entraîne une perte de précision quand aux propriétés de la maintenance optimale. Par exemple, grâce à la connaissance de  $f(u,x)$ , il pourrait être possible, dans certains cas, de rendre les conditions  $c1$  et  $c2$  moins contraignantes tout en gardant la propriété de limite de contrôle.

- Un certain nombre de travaux (voir par exemple ZUCKERMAN [43]) considèrent que la panne intervient selon une probabilité  $1-p(x)$  où  $p(x)$  est la fonction de survie du système. Cette fonction décroissante en  $x$  représente la probabilité que le système soit en état de fonctionner en  $x$ .

L'hypothèse que nous avons faite de l'existence d'une limite  $L$  telle que le système est en panne quand  $x$  devient supérieur à  $L$  est équivalente, quand le coût de panne  $R$  est constant, à définir une fonction de survie suivante :

$$p(x) = \int_L^{+\infty} f(u, x) du$$

D'après les hypothèses faites sur  $f(u, x)$ ,  $p(x)$  est également croissante en  $x$ .

• Le temps de maintenance ou de réparation était considéré jusqu'à présent comme négligeable par rapport à la période d'observation (prise égale à l'unité). Dans le cas où une maintenance préventive nécessite  $t_m-1$  unités de temps et une réparation  $t_r-1$  unités de temps (avec  $t_m$  et  $t_r$  entiers positifs), le problème général de maintenance (3.13) peut alors être reformulé de la manière suivante :

$$I^N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \text{Min} \left( \begin{array}{l} c(x) + (N-1) \int_{D_x} f(v, d(x)) I^{N-1}(v) dv , \\ \text{Min}_{u \in M_x} \left( r(u, x) + c(u) + (N-1) \int_{D_u} f(v, u) I^{N-t_m}(v) dv \right) \end{array} \right) & \text{si } \delta(x) = 1 \\ \frac{1}{N} \left( R(x) + c(0) + (N-1) \int_{D_0} f(v, 0) I^{N-t_r}(v) dv \right) & \text{si } \delta(x) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

avec comme condition de bord  $I^N(x) = 0$  pour  $N \leq 0$ .

Les propriétés de la politique optimale restent valables.

## 3.5 MODELE GENERAL DE MAINTENANCE : SYSTEME A DEUX UNITES

### 3.5.1 Présentation du modèle général

Le modèle présenté au §3.4.2 peut être étendu au cas où le système est constitué de deux unités stochastiquement indépendantes mais économiquement dépendantes.

L'état de détérioration de la première (respectivement seconde) unité est donné par une variable aléatoire  $X$  (resp.  $Y$ ) dont l'observation est notée  $x$  (resp.  $y$ ).  $X$  et  $Y$  suivent des lois de probabilités indépendantes. Le système tombe en panne si



l'état de la première unité devient supérieur à une limite  $L_x$  ou si celui de la seconde dépasse une limite  $L_y$ .

On utilise les notations suivantes :

- $d_x, d_y$  : politique de maintenance pour l'unité 1, pour l'unité 2.
- $r_x, r_y, r$  : coût de maintenance préventive de l'unité 1, de l'unité 2, du système.
- $R_x, R_y, R$  : coût de remplacement après panne de l'unité 1, de l'unité 2, du système.

Le coût moyen estimé sur un horizon de longueur  $N$  est alors donné par le problème de programmation dynamique suivant :

$$I^N \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} \frac{1}{N} \underset{\left( \begin{smallmatrix} d_x \\ d_y \end{smallmatrix} \right) \in ID_x \times ID_y}{\text{Min}} \left\{ \begin{array}{l} N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right), \\ r_x(d_x(x), x) + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} d_x(x) \\ y \end{pmatrix} \right), \\ r_y(d_y(y), y) + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} x \\ d_y(y) \end{pmatrix} \right), \\ r \left( \begin{pmatrix} d_x(x) \\ d_y(y) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} d_x(x) \\ d_y(y) \end{pmatrix} \right) \end{array} \right\} & \text{si } \begin{array}{l} x \leq L_x \\ y \leq L_y \end{array} \\ \frac{1}{N} \left[ R_x(x) + \underset{d_y \in ID_y}{\text{Min}} \left\{ N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right), r_y(d_y(y), y) + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ d_y(y) \end{pmatrix} \right) \right\} \right] & \text{si } \begin{array}{l} x > L_x \\ y \leq L_y \end{array} \\ \frac{1}{N} \left[ R_y(y) + \underset{d_x \in ID_x}{\text{Min}} \left\{ N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right), r_x(d_x(x), x) + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} d_x(x) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\} \right] & \text{si } \begin{array}{l} x \leq L_x \\ y > L_y \end{array} \\ \frac{1}{N} \left[ R \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] & \text{si } \begin{array}{l} x > L_x \\ y > L_y \end{array} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\text{avec } \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{N} \left[ c \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + (N-1) \int_{h(x)}^{+\infty} \int_{h(y)}^{+\infty} f \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) I^{N-1} \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) dv du \right]$$

et la condition de bord  $I^N \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0$  pour  $N \leq 0$ .

La politique optimale de maintenance peut donc être décomposée en 9 domaines différents en fonction du type d'intervention qui y est effectué :

- Domaine 1 : pas d'intervention sur le système.
- Domaine 2a : maintenance sur l'unité 1, pas d'intervention sur l'unité 2.
- Domaine 2b : pas d'intervention sur l'unité 1, maintenance sur l'unité 2.
- Domaine 3 : maintenance conjointe de l'unité 1 et de l'unité 2.
- Domaine 4a : réparation de l'unité 1 ( $x > L_x$ ), pas d'intervention sur l'unité 2.
- Domaine 5a : réparation de l'unité 1 ( $x > L_x$ ), maintenance de l'unité 2.
- Domaine 4b : pas d'intervention sur l'unité 1, réparation de l'unité 2 ( $y > L_y$ ).
- Domaine 5b : maintenance de l'unité 1, réparation de l'unité 2 ( $y > L_y$ ).
- Domaine 6 : réparation conjointe de l'unité 1 ( $x > L_x$ ) et de l'unité 2 ( $y > L_y$ ).

Le coût engendré par les états des domaines 1 à 3 est donné par la première ligne du membre de droite de l'équation (3.16) ; celui des domaines 4a et 5a (respectivement 4b et 5b) par la seconde (resp. troisième) ligne ; celui du domaine 6 par la dernière ligne.

### **3.5.2 Propriétés de la politique optimale dans le cas du remplacement préventif**

Si on se limite à une politique de maintenance pour un système où seul le remplacement préventif est possible, le problème (3.16) s'écrit :

$$I^N \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} \frac{1}{N} \text{Min} \left\{ \begin{array}{l} N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right), \\ r_x + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right), \\ r_y + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right), \\ r + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right\} & \text{si } \begin{array}{l} x \leq L_x \\ y \leq L_y \end{array} \\ \frac{1}{N} \left[ R_x(x) + \text{Min}_{d_y \in ID_y} \left\{ N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right), r_y + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\} \right] & \text{si } \begin{array}{l} x > L_x \\ y \leq L_y \end{array} \\ \frac{1}{N} \left[ R_y(y) + \text{Min}_{d_x \in ID_x} \left\{ N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right), r_x + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right\} \right] & \text{si } \begin{array}{l} x \leq L_x \\ y > L_y \end{array} \\ \frac{1}{N} \left[ R \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + N \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] & \text{si } \begin{array}{l} x > L_x \\ y > L_y \end{array} \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\text{avec } \bar{I}^N \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{N} \left[ c \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + (N-1) \int_{h(x)}^{+\infty} \int_{h(y)}^{+\infty} f \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) I^{N-1} \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) dv du \right]$$

et la condition de bord  $I^N \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = 0$  pour  $N \leq 0$ .

Note : Dans ce qui suit on suppose que le système vérifie les hypothèses et conditions données pour le problème à une dimension au §3.4.3 étendues au cas à deux dimensions en changeant les dérivées en dérivées partielles (par exemple, l'hypothèse h1 devient :  $\frac{\partial c(x,y)}{\partial x} \geq 0$  et  $\frac{\partial c(x,y)}{\partial y} \geq 0 \forall x,y$ ). De plus, on suppose que

la fonction  $f \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$  est telle que  $\int_{h(x)}^{+\infty} \int_{h(y)}^{+\infty} f \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) t \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) dv du$  est non-

décroissante en x et y si t est non-décroissante en x et y. Ceci est notamment vrai dans le cas où on a  $f \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = f \left( \begin{pmatrix} u-x \\ v-y \end{pmatrix} \right)$  et  $h(x)=x, h(y)=y$ .  $I^N \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$  est alors non-décroissante.

Dans le cas où les coûts de maintenance ou de remplacement conjoints des unités sont égaux à la somme des coûts de maintenance ou de remplacement de

chaque unité, i.e.  $r = r_x + r_y$  ou  $R\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = R_x(x) + R_x(y)$ , le système se comporte comme si les deux unités étaient économiquement indépendantes. La politique optimale est alors de type "limite de contrôle" (cf théorème 3.5).

Dans le cas où l'intervention conjointe sur deux unités est moins coûteuse que deux interventions effectuées indépendamment, il peut être intéressant de retarder ou d'avancer une maintenance sur une unité pour la combiner avec une intervention sur la seconde unité.

La politique optimale est alors caractérisée par les propriétés suivantes :

**Propriété 3.7 :** La politique optimale de maintenance lorsqu'une des deux unités doit être remplacée, i.e. quand  $x > L_x$  ou  $y > L_y$ , est de type "limite de contrôle" : il existe une limite  $\lambda_x$  (respectivement  $\lambda_y$ ) telle que, quel que soit  $x > \lambda_x$  (resp.  $y > \lambda_y$ ), il est optimal d'effectuer conjointement avec la réparation de l'unité 2 (resp. l'unité 1) une maintenance sur l'unité 1 (resp. l'unité 2).

*Démonstration :*

Pour les domaines 4 à 6, i.e. pour  $x > L_x$  ou  $y > L_y$ , le problème de minimisation (3.16) à résoudre n'est fonction que d'une seule variable. Par exemple, pour les domaines 4a et 4b ( $x > L_x$  et  $y \leq L_y$ ), l'optimisation se fait avec  $x$  fixé à 0. Il n'y a donc plus de couplage entre l'état de détérioration de l'unité 1 et celui de l'unité 2. Ceci revient donc à résoudre le problème à une dimension, dont on sait que la solution est de type "limite de contrôle" (cf théorème 3.5).

□

Le résultat précédent donne une caractérisation des domaines 4a, 4b, 5a, 5b et 6. La propriété suivante permet de caractériser le domaine 3.

**Propriété 3.8 :** Le domaine de maintenance combinée des unités 1 et 2 (domaine 3) est connexe. De plus, si  $(x_1, y_1)$  est un point de ce domaine alors tout point  $(x_2, y_2)$  tel que  $x_1 < x_2 \leq L_x$  et  $y_1 < y_2 \leq L_y$  appartient également au domaine 3.

*Démonstration :*

Soit  $(x_1, y_1)$  un point appartenant au domaine 3. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
 & r + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (N-1) \int_{h(0)}^{+\infty} \int_{h(0)}^{+\infty} f \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) I^{N-1} \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) dv du \\
 & < c \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (N-1) \int_{h(x_1)}^{+\infty} \int_{h(y_1)}^{+\infty} f \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) I^{N-1} \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) dv du \\
 & < r_x + c \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} + (N-1) \int_{h(0)}^{+\infty} \int_{h(y_1)}^{+\infty} f \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix} \right) I^{N-1} \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) dv du \\
 & < r_y + c \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + (N-1) \int_{h(x_1)}^{+\infty} \int_{h(0)}^{+\infty} f \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) I^{N-1} \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) dv du
 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse **h1** étendue au cas à 2 dimensions,  $c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est non-

décroissante en  $x$  et en  $y$ . De plus,  $\bar{I}^N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est une fonction non-décroissante en  $x$

et  $y$ . La première ligne de l'inégalité précédente étant constante, cette inégalité est donc également vérifiée pour tout  $x_2, y_2$  tels que  $x_1 < x_2 \leq L_x$  et  $y_1 < y_2 \leq L_y$ . Le point  $(x_1, x_2)$  appartient donc au domaine 3 qui est alors nécessairement connexe.

□

**Propriété 3.9 :** La frontière entre le domaine 3 et le domaines 2a est donnée par l'équation  $y=\text{constante}$ .

*Démonstration :*

Un point  $(x_1, y_1)$  appartient au domaine 3 si le coût moyen estimé de la politique sachant que l'on effectue immédiatement une maintenance des deux unités est le plus faible. On a donc entre autre :

$$r + N \bar{I}^N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} < r_x + N \bar{I}^N \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Par contre, pour un point  $(x_2, y_2)$  appartenant au domaine 2a, on a :

$$r + N \bar{I}^N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} > r_x + N \bar{I}^N \begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Or  $r + N \bar{I}^N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  étant constant et  $\bar{I}^N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  étant une fonction non-décroissante

en  $x$  et  $y$ , il existe au plus une valeur  $a$  de  $y$  telle que l'on ait :

$$r + N \bar{I}^N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = r_x + N \bar{I}^N \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

### Chapitre 3 - Modèle général

La frontière entre le domaine 2a et le domaine 3 est donc indépendante de  $x$  et  $a$  alors pour équation  $y=a$ .

□

**Propriété 3.10 :** La frontière entre le domaine 3 et le domaines 2b est donnée par l'équation  $x=\text{constante}$ .

*Démonstration :*

Cas symétrique de la propriété 3.9.

□

Il n'est malheureusement pas possible de caractériser les domaines 1, 2a et 2b dans le cas général du remplacement préventif. La figure 3.5.2a donne une idée de leur forme dans le cas d'un système constitué de deux unités identiques subissant un processus de détérioration exponentiel négatif de paramètre égal à 1. Les caractéristiques de ce systèmes sont les suivantes :

$$L_x=L_y=1 \quad r_x=r_y=2 \quad r=3 \quad R_x=R_y=5 \quad R=9.5 \quad c\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)=0$$

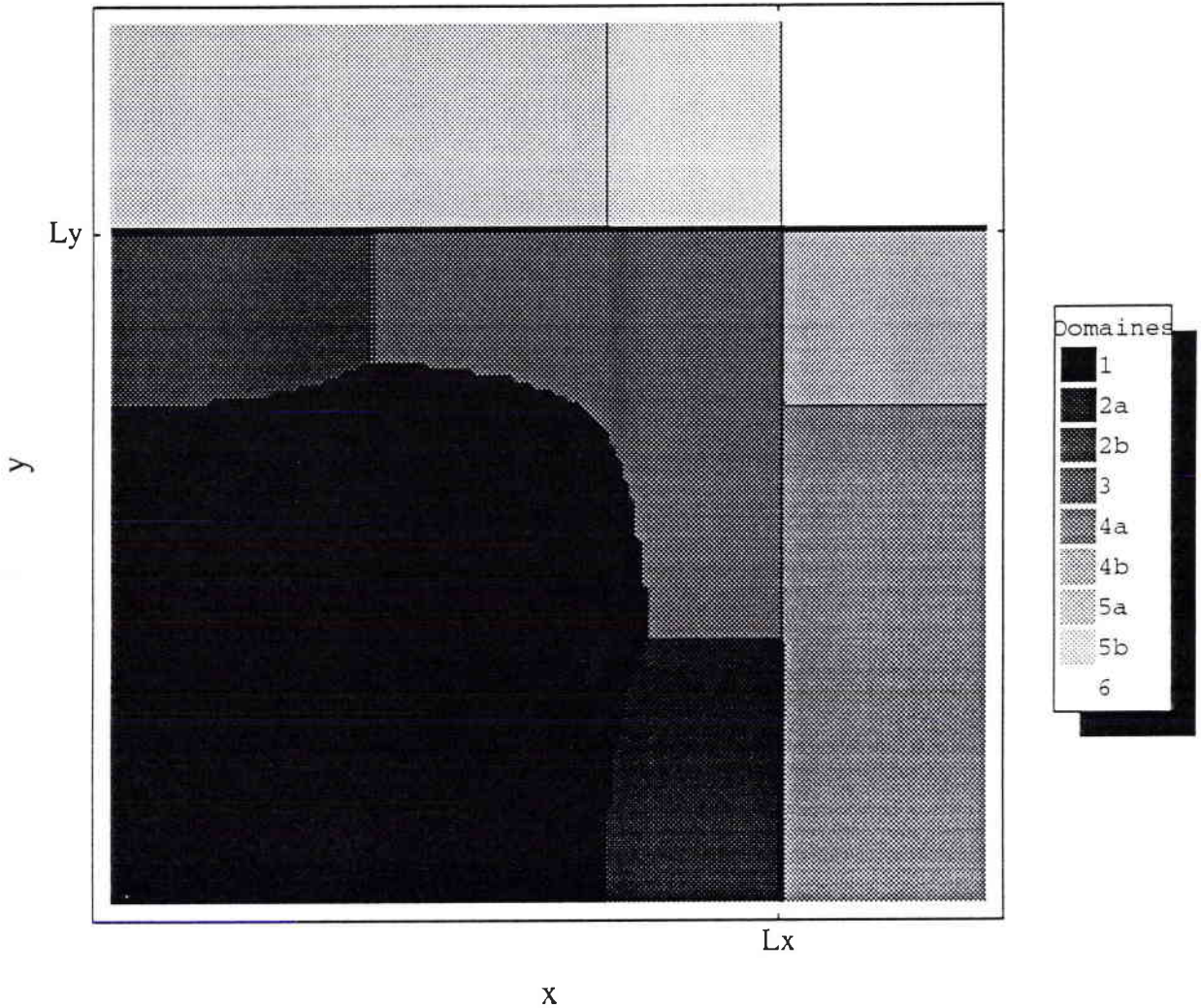


Figure 3.5.2a : Politique optimale de maintenance pour un système à deux unités : forme des domaines de maintenance

### 3.5.3 Exemple numérique

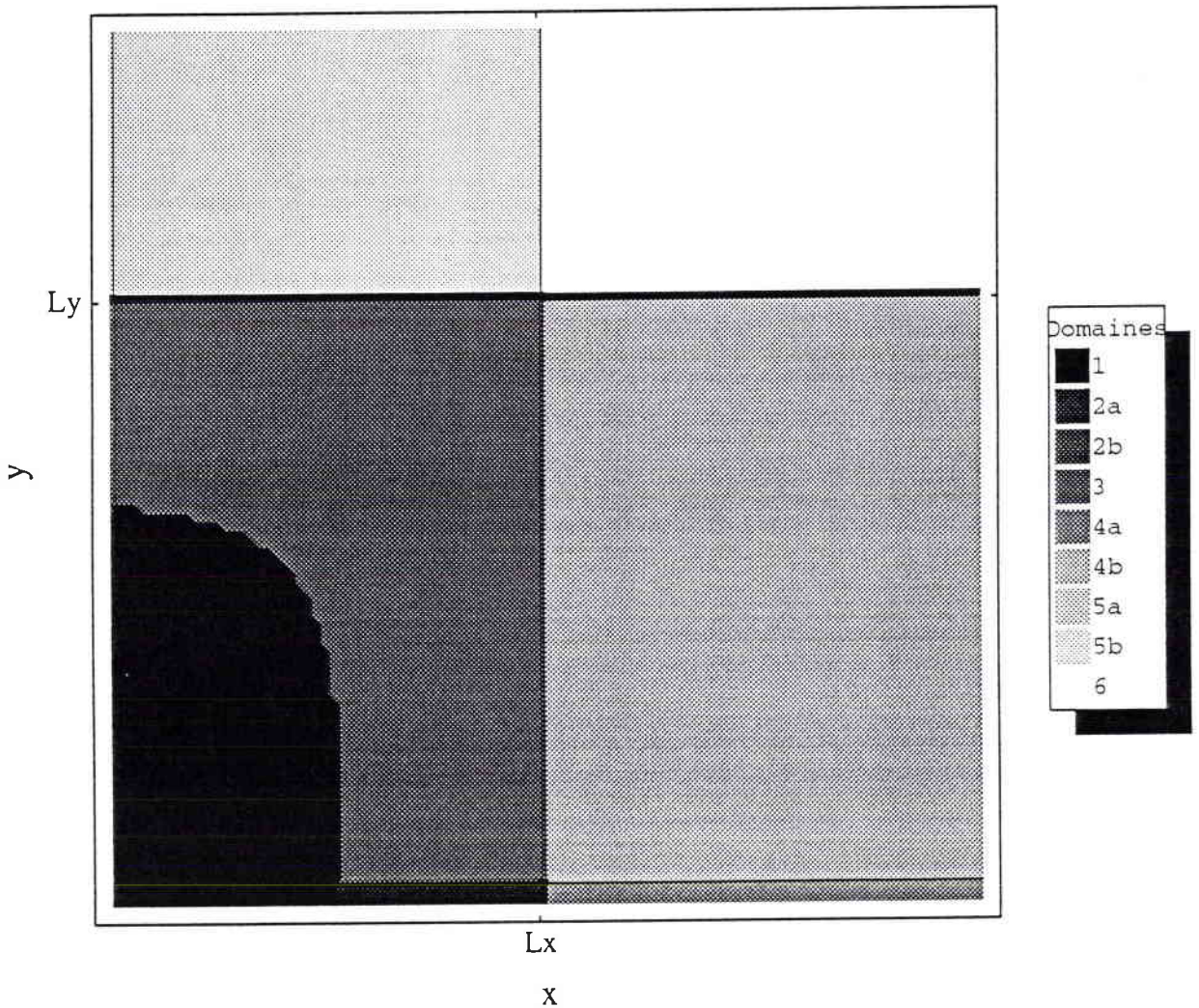
Au §2.3.3.4, un exemple numérique d'optimisation d'une politique de maintenance paramétrique a été donné. Le système considéré était constitué de deux unités en série subissant un processus stochastique de détérioration suivant une loi exponentielle négative. Ses caractéristiques étaient les suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_x=1 & \mu_y=1 & L_x=5 & L_y=7 & & & \\ M_1=20.5 & M=21 & N=120.5 & R_1=120 & R=220 & & \end{array}$$

Le coût optimal de la politique paramétrique dans le cas du remplacement complet systématique était alors égal à 9.45 avec pour limites de maintenance  $\lambda_x=2.5$  et  $\lambda_y=4.13$ .

### Chapitre 3 - Modèle général

Le modèle général de maintenance pour système à deux unités permet d'obtenir la politique optimale pour ce système (figure 3.5.2b). Le coût de cette politique est de 8.87 soit 6% de moins que celui obtenu avec celle proposée au Chapitre 2.



Si on se limite au cas du remplacement complet systématique, le gain de la politique optimale (présentée par la figure 3.5.2c) par rapport à celle proposée au chapitre 2 n'est que de 5% (8.93 au lieu de 9.45). La forme de la politique optimale est en effet très proche d'une politique de type limites de contrôle.



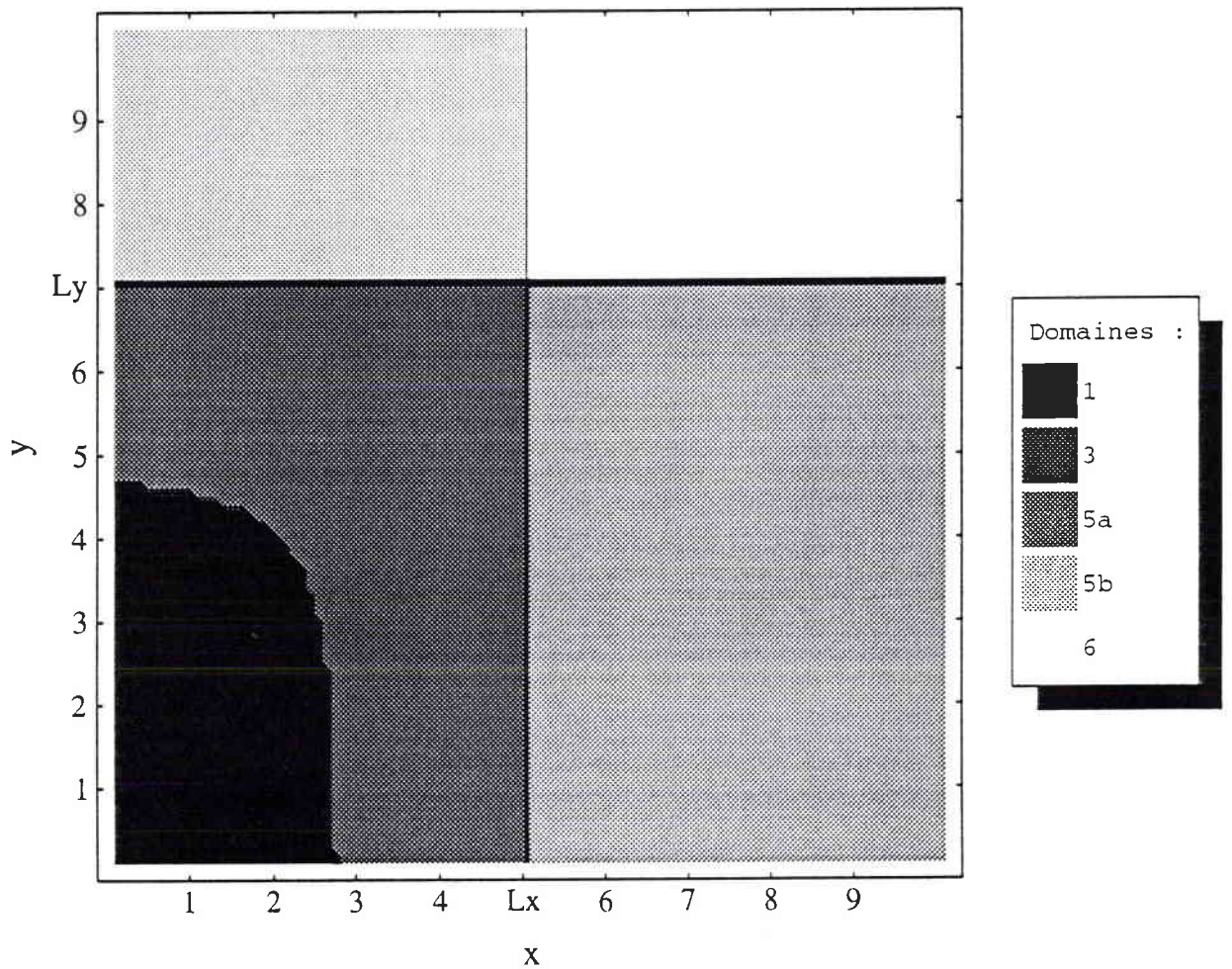


Figure 3.5.2c : Politique optimale de maintenance dans le cas du remplacement complet systématique (exemple du §2.3.3.4)

Enfin, pour un exemple plus général tel que celui représenté sur la figure 3.5.2a (processus de détérioration exponentiel négatif avec  $\mu_x = \mu_y = 1$ ,  $L_x = L_y = 10$ ,  $M_1 = 4$ ,  $M = 6$ ,  $N = 14$ ,  $R_1 = 10$ ,  $R = 18$ ), le coût de la politique optimale est de 20% inférieur à celui d'une politique paramétrique avec deux limites de maintenance (valeur optimale de ces limites :  $\lambda_x = \lambda_y = 7.49$ , pour un coût minimal de la politique paramétrique de 1.033).

### 3.6 CONCLUSION

Un modèle général de maintenance pour système à une unité a été présenté dans ce chapitre. Ce modèle basé sur la méthode de la programmation dynamique permet d'optimiser le coût moyen estimé à long terme de la politique de maintenance dans le cas où plusieurs types d'intervention sont possibles sur le système. Il a été démontré que, sous certaines conditions sur les coûts, la politique optimale est de type limites de contrôle multiples. Ce modèle peut être étendu au cas où le système est composé de deux unités. Il est alors également possible de donner des propriétés de la politique optimale.

Nous allons maintenant appliquer le modèle général de maintenance à un exemple concret de processus de détérioration.

# CHAPITRE 4

## Calcul de la politique optimale de maintenance

### 4.1 INTRODUCTION

### 4.2 METHODES DE CALCUL DE LA POLITIQUE OPTIMALE

#### 4.2.1 Programmation dynamique

#### 4.2.2 Simulation

### 4.3 APPLICATION : DEVELOPPEMENT DE FISSURES

#### 4.3.1 Modèle stochastique d'évolution de la taille d'une fissure

#### 4.3.2 Politique optimale

#### 4.3.3 Comparaison

### 4.4 CONCLUSION

## 4.1 INTRODUCTION

La mise en œuvre d'une politique de maintenance prédictive nécessite d'évaluer son coût et de connaître précisément quelles actions de maintenance doivent être effectuées en fonction de l'état du système.

La première partie de ce chapitre est consacrée aux différentes méthodes qui permettent de déterminer la politique optimale.

Une application de la maintenance prédictive au développement de fissures sur les ailes d'avion est ensuite étudiée.

## 4.2 METHODES DE CALCUL DE LA POLITIQUE OPTIMALE

Deux approches différentes sont utilisables pour déterminer la politique optimale de maintenance. La première s'inspire directement de la formulation du modèle général de maintenance pour déterminer la forme et le coût moyen de la politique. La seconde, quant à elle, utilise les propriétés précédemment établies pour calculer directement le coût moyen.

### 4.2.1 Programmation dynamique

On peut directement essayer de résoudre le problème de programmation dynamique tel que celui donné par l'équation (3.14) pour le cas à une dimension. Dans ce cas, le résultat, i.e. le coût moyen de maintenance  $I^N(x)$ , ne peut être connu pour un  $N$  donné qu'en un nombre discret de points.

Or, la résolution du problème de programmation dynamique nécessite le calcul de l'intégrale suivante :

$$S_N(x) = \int_{h(x)}^{+\infty} f(v,x) I^{N-1}(v) dv$$

$I^{N-1}(v)$  n'étant connu que de manière discrète, il n'est donc possible de calculer qu'une approximation de  $S_N(x)$ , en utilisant une méthode d'intégration numérique :

$$\tilde{S}_N(x) = \int_{h(x)}^{+\infty} f(v,x) \hat{I}^{N-1}(v) dv$$

#### Chapitre 4 - Exemple d'application

où  $\hat{I}^{N-1}(v)$  est une fonction qui approxime  $I^{N-1}(v)$ . Etant donné la non-linéarité de  $I^{N-1}(v)$ , tout du moins pour les  $N$  faibles, il est très difficile de trouver une bonne approximation  $\hat{I}^{N-1}(v)$ .

Deux cas défavorables peuvent alors se présenter :

- si l'on a tendance à sous-estimer l'intégrale ( $\tilde{S}_N(x) < S_N(x)$ ) : le coût moyen diverge.
- si l'on a tendance à sur-estimer l'intégrale ( $\tilde{S}_N(x) > S_N(x)$ ) : le coût moyen converge vers 0.

Cette méthode n'est donc pas utilisable dans la pratique pour calculer le coût moyen optimal ou la forme de la politique optimale.

Le problème provenant du fait que le coût n'est connu que de manière discrète, une solution consiste à discrétiser également la densité de transition  $f(v,x)$ . L'intégrale  $S_N(x)$  est alors transformée en :

$$\ddot{S}_N(x_i) = \sum_{j=1}^M p_{ji} \ddot{I}^{N-1}(x_j)$$

où la valeur du coût moyen est connue aux points  $x_i, i=1, \dots, M$ , et  $p_{ji}$  est la probabilité de transition en un instant de  $x_i$  à  $x_j$ .  $p_{ji}$  s'obtient en intégrant la densité de transition  $f(v,x)$ . Bien entendu, on doit avoir :

$$\sum_{j=1}^M p_{ji} = 1.$$

Si le nombre  $M$  de points est suffisamment grand, on obtient une bonne approximation du coût moyen optimal. En effet, on a :

$$\ddot{S}_N(x) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} S_N(x) \text{ et donc } \ddot{I}^N(x) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} I^N(x).$$

Cependant la complexité est alors  $O(N.M^2)$  pour les problèmes à une unité et  $O(N.M^4)$  pour ceux à deux unités. Ceci entraîne des temps de calcul qui peuvent devenir très importants. De plus, l'obtention des  $p_{ji}$  peut entraîner, dans le cas où  $f(u,x)$  n'est pas intégrable analytiquement, une augmentation notoire de la complexité.

Les exemples numériques ont montré qu'en utilisant la programmation dynamique "discrète", la forme de la politique converge beaucoup plus rapidement que la valeur du coût moyen. En effet, le coût est une valeur réelle, tandis que la politique ne peut prendre qu'un nombre limité de valeurs (e.g. : pas

d'intervention, maintenance de l'unité 1, etc...). Cette vitesse de convergence est bien entendu fonction du nombre  $M$  de points de discrétisation.

Il faut noter que les caractéristiques de la politique optimale obtenues à partir de la formulation du problème de programmation dynamique en "continu" restent valables lorsqu'on discrétise le problème. Par contre, la réciproque est en règle générale fausse.

### 4.2.2 Simulation

Dans le cas de systèmes à une unité, il a été démontré (cf. §3.4) que, sous certaines conditions, la politique optimale est de type limite de contrôle. Il suffit alors de déterminer la valeur des différentes limites de maintenance pour connaître cette politique. Par exemple, quand il existe deux possibilités de maintenance, en 0 ou  $A_1$ , il faut déterminer la limite de maintenance  $\lambda^*$  correspondant au remplacement préventif et  $\xi^*$  correspondant à la maintenance en  $A_1$ .

Ceci peut-être fait en répétant les deux étapes suivantes :

- (i) Simulation de l'évolution du système avec des limites de maintenance données ; calcul du coût moyen.
- (ii) Modification des limites de maintenance dans le but d'améliorer le coût.

Les systèmes considérés étant à temps discret, la première étape est une simple simulation de type Monte-Carlo.

La modification des bornes, quant à elle, peut se faire en utilisant une méthode du gradient ou bien l'analyse des perturbations. Si le coût moyen est convexe par rapport aux limites de maintenance (ou plus généralement s'il n'existe qu'un seul point tel que la dérivée du coût par rapport aux limites est nulle), ces techniques permettent alors d'atteindre le coût optimal. Quand cette condition n'est pas vérifiée, on atteint un minimum local du coût. On peut essayer d'améliorer le résultat en utilisant un algorithme de type recuit simulé.

Cette technique est très facile à mettre en œuvre et permet de déterminer avec précision la politique de maintenance. Cependant, dans le cas de processus de détérioration lents, le nombre de simulations à réaliser devient très important et

ralentit donc l'obtention de la solution. De plus, cette technique n'est pas utilisable pour les systèmes constitués de plus d'une unité : il faut alors déterminer non pas des valeurs de limites de maintenance mais les équations des frontières entre les différents domaines de maintenance.

### 4.3 APPLICATION : DEVELOPPEMENT DE FISSURES

L'inspection et la maintenance des structures d'avion est une activité essentielle au maintien de la sécurité des vols.

En effet les éléments de la structure des appareils, et particulièrement leurs ailes, sont soumis à de fortes contraintes mécaniques qui entraînent le développement de fissures autour des attaches (par exemples rivets) qui les fixent à leur support.

Il est donc nécessaire de déterminer une politique de maintenance optimale qui permette de minimiser les risques - et donc le coût - encourus.

#### 4.3.1 Modèle stochastique de développement de fissures

Les tests expérimentaux, de même que les mesures effectuées au cours d'inspections, montrent que le développement de fissures est extrêmement variable statistiquement. Cette variabilité de l'évolution de la taille des fissures dans le temps est due à plusieurs paramètres :

- type de matériaux,
- type et amplitude de la fatigue subie,
- conditions expérimentales,
- etc...

Etant donné la complexité du problème, il est difficile de donner une description détaillée du processus physique qui entraîne le développement de ces fissures. De plus, le modèle doit prendre en compte la grande variabilité du phénomène.

Plusieurs études ont donc été réalisées afin de modéliser l'évolution de la taille des fissures sous la forme d'un processus stochastique. Parmi celles-ci, les recherches de J.N. YANG, S.D. MANNING, W.H. HSI et J.L. RUDD présentées dans PROVAN [33] (Chapitre 4, "Stochastic crack growth models for application to aircraft structures") semblent donner une bonne corrélation entre le modèle proposé et la réalité.



## Chapitre 4 - Exemple d'application

Le problème considéré est celui des fissures qui se propagent à partir des fixations d'éléments en aluminium 7075-T7651 d'ailes d'avions de chasse.

Si on appelle  $a_n$  la taille de la fissure à la  $n$ -ième inspection, l'accroissement entre la  $n$ -ième et la  $(n+1)$ -ième inspection, noté  $\Delta a_n$ , est fonction de la fatigue subie et de la taille  $a_n$ . Cet accroissement est donné par :

$$\Delta a_n = Q a_n^b \quad (4.1)$$

où  $Q$  et  $b$  sont des constantes dépendant des caractéristiques du matériau et des contraintes subies.

L'équation (4.1) est une équation déterministe. Afin de prendre en compte la variabilité du phénomène, un processus stochastique positif, noté  $X_n$ , est introduit. On obtient alors :

$$\Delta a_n = X_n Q a_n^b \quad (4.2)$$

SALIVAR et al. [36] ont montré que le processus stochastique le plus approprié est un processus lognormal de moyenne 1.

Si on prend son logarithme, l'équation (4.2) s'écrit :

$$Y_n = bU_n + q + Z_n$$

avec :  $Y_n = \text{Ln}(\Delta a_n)$      $U_n = \text{Ln}(a)$      $q = \text{Ln}(Q)$      $Z_n = \text{Ln}(X_n)$

$X_n$  étant une variable aléatoire lognormale,  $Z_n$  est donc une variable aléatoire gaussienne et  $Y_n$  est également gaussienne. La moyenne de  $Y_n$ , notée  $\mu_y$ , et son écart-type, noté  $\sigma_y$ , sont donnés par les équations suivantes :

$$\mu_y = bU_n + q$$

$$\sigma_y = \sigma_z, \quad \sigma_z \text{ étant l'écart-type de } Z_n.$$

L'accroissement de la taille de la fissure  $\Delta a_n$  est donc une variable aléatoire, notée  $\Omega_n$ , qui suit une loi lognormale dont la moyenne  $E[\Omega_n]$  et la variance  $V[\Omega_n]$  sont reliés à  $\mu_y$  et  $\sigma_y$  par (SAPORTA [35]) :

$$E[\Omega_n] = e^{\left(\mu_y + \frac{\sigma_y^2}{2}\right)}$$

$$V[\Omega_n] = e^{(2\mu_y + \sigma_y^2)} \left( e^{(\sigma_y^2)} - 1 \right)$$



#### Chapitre 4 - Exemple d'application

La densité de probabilité d'atteindre une longueur de fissure  $a_n + \Delta a_n$ , sachant qu'elle était égale à  $a_n$  lors de l'inspection précédente est alors :

$$f(a_n + \Delta a_n, a_n) = \frac{1}{\sigma_{a_n} \sqrt{2\pi\Delta a_n}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\text{Ln}(\Delta a_n) - \mu_{a_n}}{\sigma_{a_n}} \right)^2} \quad (4.3)$$

Ce modèle présente les avantages suivants (PROVAN [33]) :

- très bonne corrélation avec les données expérimentales,
- flexibilité d'utilisation (il peut être utilisé pour d'autres types de fissures).

La figure 4.3.1a donne la représentation de 50 simulations de l'évolution de la taille d'une fissure.

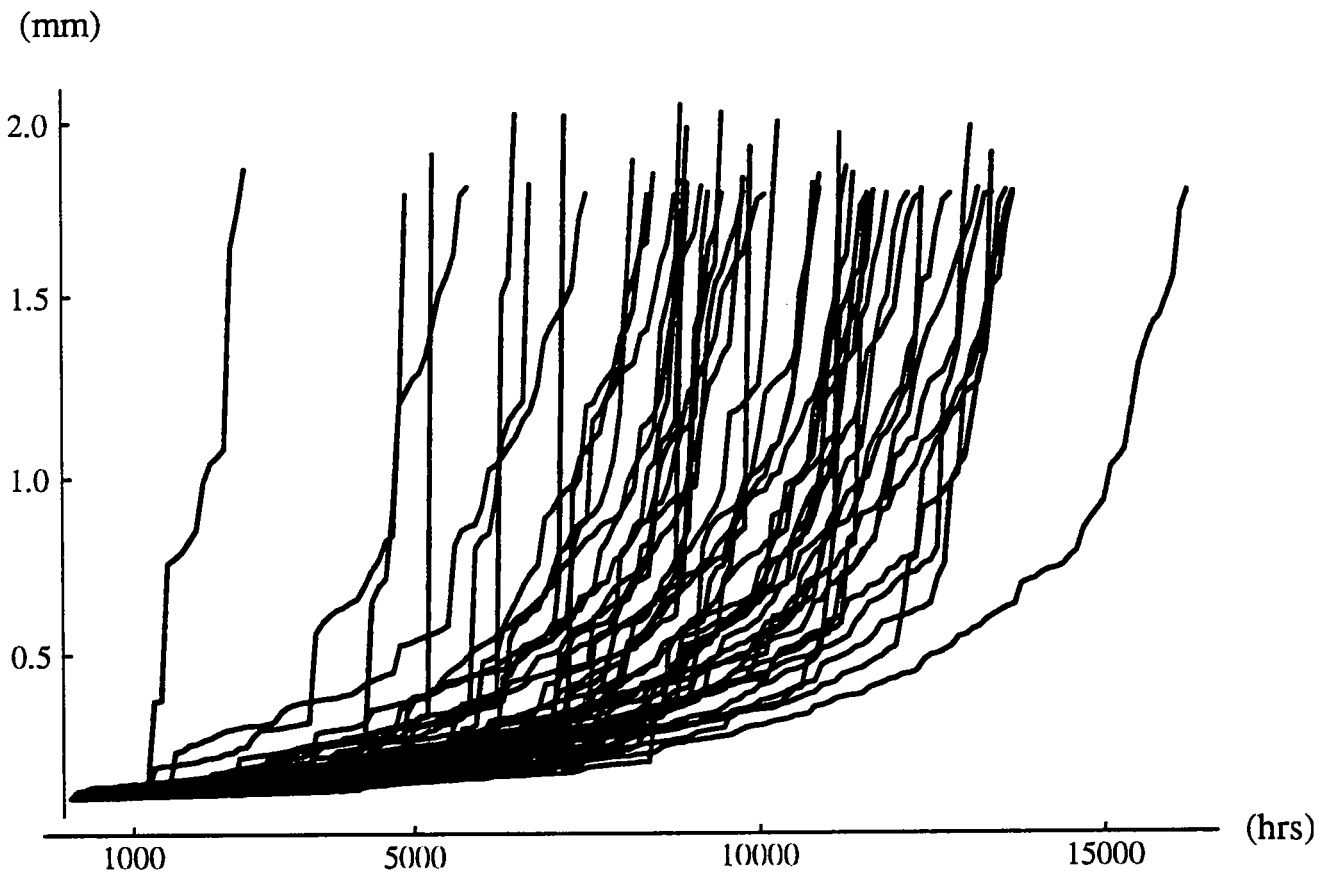


Figure 4.3.1a : Evolution de la taille des fissures en fonction du nombre d'heures de vol

### 4.3.2 Politique optimale

Des expériences sur la résistance des matériaux permettent de déterminer un seuil  $L$  au dessus duquel l'intégrité structurelle de l'appareil n'est plus garantie. On suppose que  $L$  est tel que la probabilité que l'avion perde son aile en vol avant la prochaine inspection peut-être considérée comme nulle.

Si la fissure sur l'élément supervisé dépasse ce seuil, il est nécessaire de le remplacer immédiatement à un coût  $R$ .  $R$  peut notamment prendre en compte, en plus du coût de remplacement, une estimation du coût associé au risque encouru par le dépassement de  $L$ .

Il est également possible de réaliser une maintenance préventive de l'élément à un coût  $r$  égal au prix de la pièce et de son changement. Ce coût est fixé à  $r=100$ .

De plus, chaque inspection entraîne un coût proportionnel à la taille de la fissure et égal à  $c(a_n)=a_n/100+0.001$ .

Le but de cette étude est de déterminer pour quelles valeurs de la taille de la fissure cette maintenance préventive est souhaitable.

Afin de simplifier les notations, on suppose que la variable aléatoire  $\Omega_n$  qui représente l'accroissement de la taille de la fissure entre deux inspections, suit une loi lognormale dont la moyenne et l'écart-type sont donnés par :

$$E[\Omega_n] = C_1 a_n^{C_2} + C_3$$

$$V[\Omega_n] = C_4 a_n^{C_5} + C_6$$

où  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  sont des constantes qui dépendent des caractéristiques du matériaux et des contraintes subies. Elles ont pour valeur :

$$C_1=1.0 \quad C_2=1.8 \quad C_3=5 \cdot 10^{-5}$$

$$C_4=10^{-4} \quad C_5=3.6 \quad C_6=0.0$$

Pour  $L=1.778$  mm, le temps moyen pour atteindre la limite  $L$  est alors de l'ordre de 10000 heures.

Si on souhaite déterminer la politique optimale en utilisant la programmation dynamique, il est nécessaire de discrétiser la densité de transition (4.3). Il faut donc calculer les  $p_{ji}$  définis par (quand le pas de discrétisation est égal à l'unité) :

$$P_{ji} = \int_i^{i+1} \int_j^{j+1} \frac{1}{\sigma_u \sqrt{2\pi(v-u)}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln(v-u) - \mu_u}{\sigma_u} \right)^2} dv du$$

#### Chapitre 4 - Exemple d'application

Cette intégrale n'étant pas calculable analytiquement, il est nécessaire de réaliser une intégration numérique. Si  $M$  est le nombre de points de discrétisation, le processus de détérioration étant un processus de vieillissement, il faut donc réaliser  $M(M+1)/2$  intégrations. Dans le cas qui nous intéresse, le processus est très lent, et il est donc nécessaire afin de garder une bonne précision de prendre un  $M$  très élevé. Ceci induit une vitesse très lente de convergence de la forme de la politique ou du coût.

L'utilisation de la méthode de simulation décrite au §4.2.2 paraît donc plus avantageuse. Du fait de la lenteur du processus et de sa très grande variance, le nombre d'itérations par simulation, i.e. le nombre d'heures simulées, doit cependant être très important. Il faut noter que même un nombre aussi important d'heures simulées ne garantit pas que la méthode du gradient puisse aboutir au minimum global (cf. figure 4.3.2a).

cout moyen

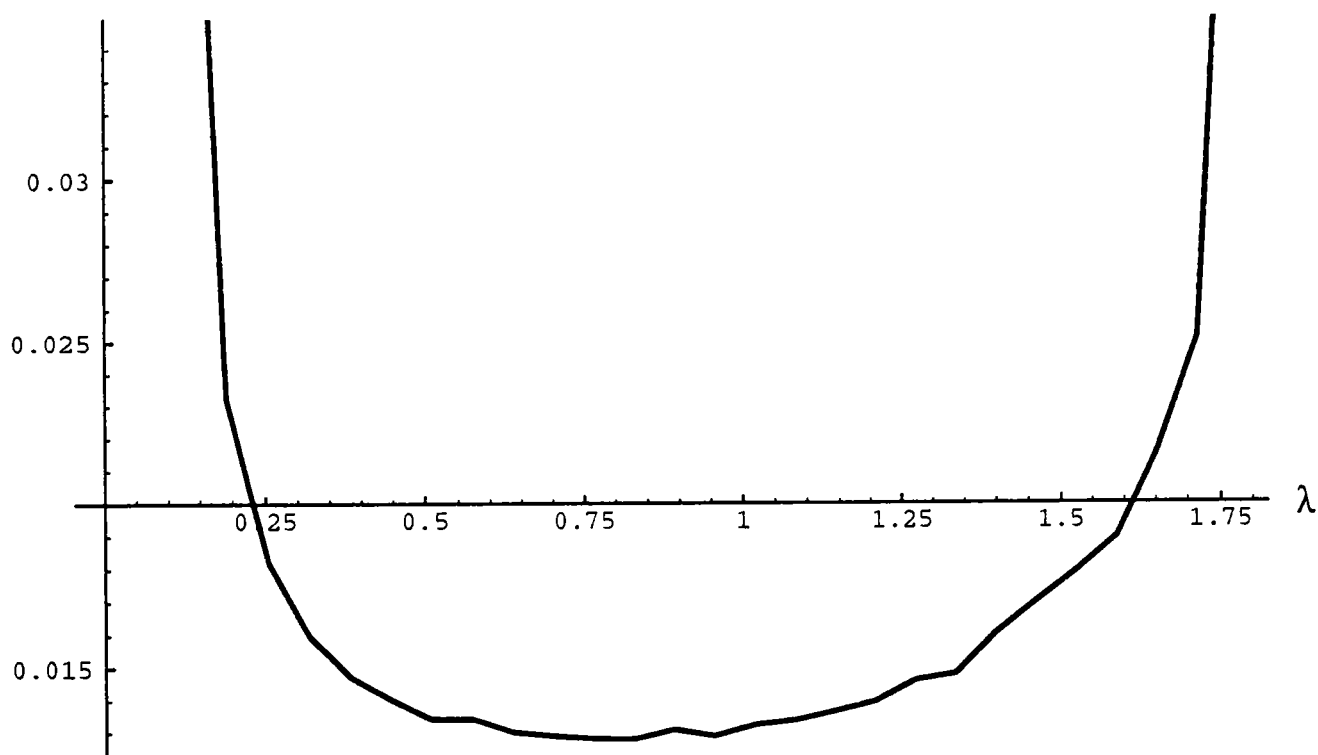


Figure 4.3.2a : Exemple d'évolution du coût moyen  
(50 millions d'heures simulées,  $R/r=500$ )

#### Chapitre 4 - Exemple d'application

Les résultats présentés ci-dessous ont été obtenus avec 20 millions d'heures simulées, ce qui représente un nombre moyen de 2000 développements différents de fissures jusqu'à une longueur supérieure à  $L$ . L'algorithme du gradient utilisé nécessitant en moyenne une douzaine de simulations pour atteindre un minimum, le temps de calcul nécessaire à la détermination de la politique optimale de maintenance est de plus de sept heures sur une station de travail SUN SPARC 20. Malgré cela, la précision des résultats n'est pas suffisante pour éviter les minima locaux.

Les figure 4.3.2b et 4.3.2c donnent l'évolution du coût moyen optimal  $I^*$  et de la limite optimale de maintenance  $\lambda^*$  en fonction du ratio coût de remplacement sur coût de maintenance préventive.

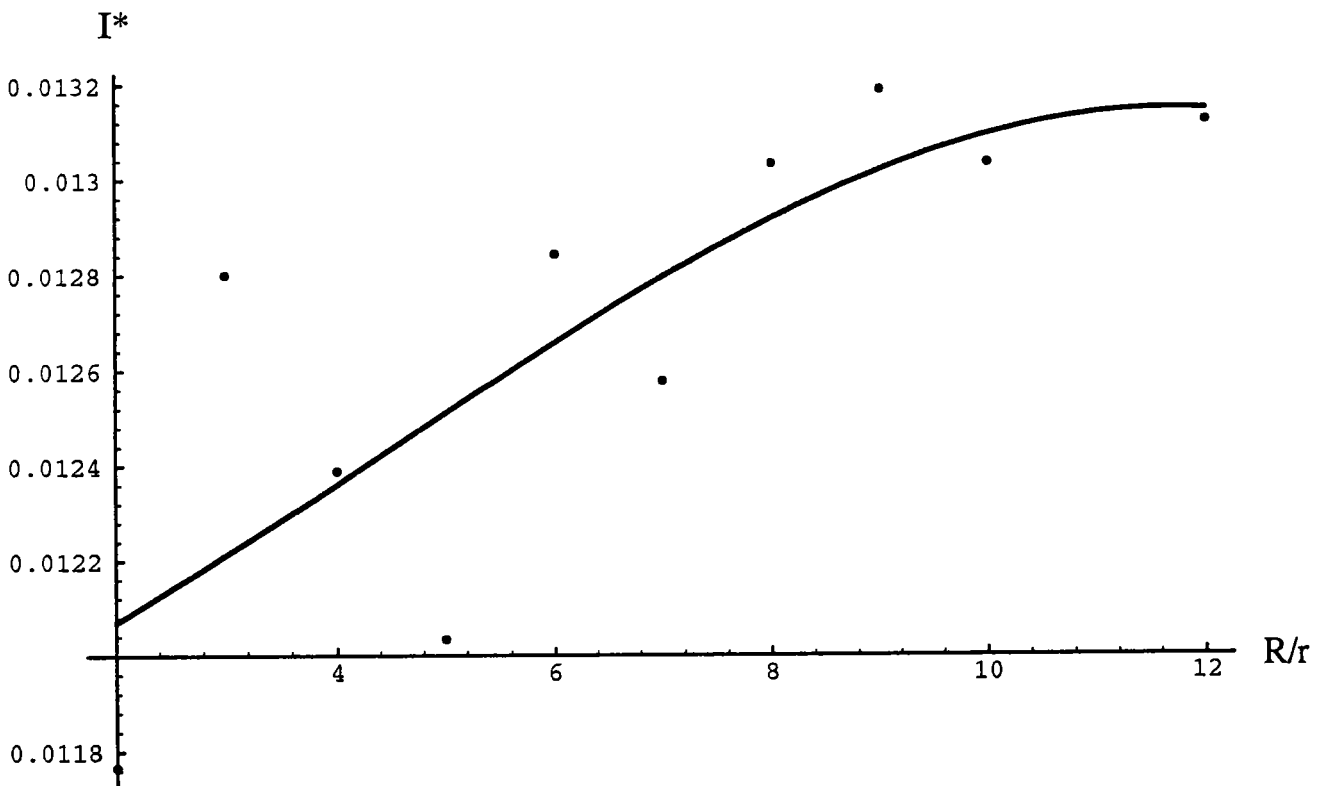


Figure 4.3.2b : Evolution du coût moyen optimal  $I^*$  en fonction de  $R/r$

#### Chapitre 4 - Exemple d'application

On constate que le coût moyen de même que la limite de maintenance ont tendance à se stabiliser quand  $R/r$  devient grand.

Ceci est dû au fait que, le processus considéré étant très lent, la probabilité pour la fissure la dépasser la limite  $L$  est très faible. L'augmentation du coût de remplacement  $R$  n'est donc appliquée qu'à cette faible probabilité et n'entraîne donc qu'une très petite modification du coût moyen. En effet, alors que  $R$  est multiplié par un facteur 6,  $I^*$  n'est multiplié que par 1.09.

Les limites optimales de maintenance trouvées sont cependant à un niveau très faible par rapport à la limite  $L$  : elles évoluent entre 60 et 35% de  $L$ . Ceci s'explique par la très grande variance du processus d'augmentation de la taille de la fissure. Afin d'éviter le plus possible les dépassements précoces, la limite de maintenance doit donc être placée très bas.

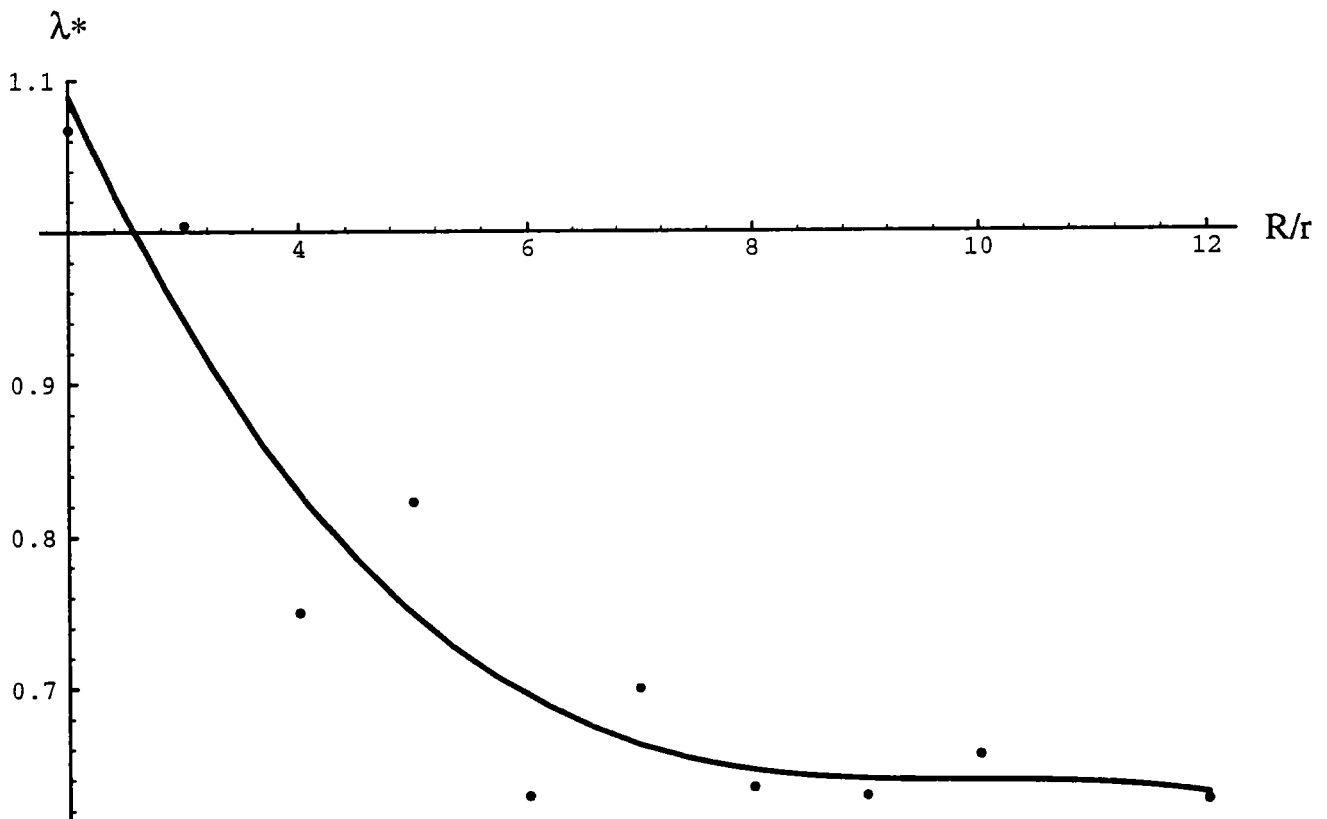


Figure 4.3.2c : Evolution de la limite optimale de maintenance  $\lambda^*$  en fonction de  $R/r$

### 4.3.3 Comparaison

Etant donné la complexité de la densité de probabilité (4.3) d'accroissement de la taille des fissures, il n'est pas possible de trouver l'expression analytique de la distribution du moment de dépassement de la limite  $L$ . Or cette expression est nécessaire à la détermination d'une politique de maintenance préventive "classique". De plus, le fait qu'un coût  $c(a_n)$  proportionnel à la taille de la fissure est perçu à chaque période, rend tout développement analytique impossible.

Il faut donc recourir à la simulation afin de déterminer aussi bien le coût moyen de la maintenance préventive "classique" que celui de la maintenance corrective. Pour un coût de remplacement  $R$  égal à 500 (i.e.  $R/r=5$ ), on obtient alors les résultats suivants avec des simulations de 2 millions d'heures de vol :

- maintenance corrective :  $I = 0.032$
- maintenance préventive :  $I^* = 0.019$                        $T^* = 6725$  heures
- maintenance prédictive :  $I^* = 0.012$                        $\lambda^* = 0.81$  mm

On constate donc que la maintenance prédictive est beaucoup plus avantageuse que la maintenance préventive "classique" (réduction de 36%).

Remarque : Nous avons fait l'hypothèse que le développement de la fissure est supervisé d'heure en heure. Ceci n'est en règle générale pas réalisable dans la pratique. En effet, les révisions approfondies ont lieu uniquement toutes les  $T$  heures de vol (généralement  $T=1000$ ), et c'est à ces occasions qu'il est possible d'analyser la surface des ailes avec un appareillage capable de détecter et de mesurer les fissures (par exemple un appareil à ultrasons). Etant donné qu'on ne connaît pas la loi de probabilité suivie par une somme de lois normales non-indépendantes, il n'est pas possible de calculer la densité d'accroissement de la fissure entre deux inspections espacées de  $T$  heures. Il n'est donc alors pas possible de déterminer la politique de maintenance optimale. Cependant, il pourrait être avantageux de combiner les informations données par les maintenances préventive et prédictive. En effet, à  $t=6000$  heures (i.e. à la révision approfondie la plus proche de  $T^*$  tout en étant inférieure à  $T^*$ ), la taille de la fissure est mesurée. Si elle est nettement inférieure à  $\lambda^*$ , il n'est pas nécessaire d'effectuer immédiatement un remplacement. On peut alors évaluer dans combien de révisions il sera nécessaire d'effectuer ce remplacement en utilisant par exemple le modèle simplifié d'accroissement à variable lognormale proposé par PROVAN [33].

### 4.3 CONCLUSION

L'exemple d'application développé dans ce chapitre montre les difficultés à calculer la politique optimale qui peuvent exister pour certains types de système. En effet, lorsque le processus de détérioration est très lent, la programmation dynamique de même que les méthodes de simulation nécessitent des temps de calculs très importants. Il faut remarquer que ceci pose un problème non pas au niveau même de la maintenance - la politique de maintenance n'est pas à calculer en temps réel -, mais plutôt au niveau de l'occupation des ressources de calcul.

Cependant, l'économie réalisée par la mise en place d'une politique de maintenance optimale justifie cette démarche.

# CONCLUSION

Le travail présenté dans cette thèse concerne la maintenance prédictive de systèmes constitués de une ou deux unités subissant un processus stochastique de détérioration. L'état de ces systèmes est connu de manière discrète dans le temps et peut prendre une infinité de valeurs.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés à l'optimisation de politiques de maintenance paramétriques. Il s'agit de déterminer la valeur du ou des paramètres de la politique qui permettent de minimiser le coût moyen de maintenance. Dans deux cas particuliers, pour des systèmes à une et deux unités subissant un processus de détérioration exponentiel négatif, il a été possible d'aboutir à une expression analytique du coût moyen. La comparaison du coût optimal de la maintenance paramétrique et de ceux des maintenances corrective et préventive "classique" montre l'intérêt de la technique proposée. Cependant, cette approche ne permet pas dans le cas général d'aboutir à une expression analytique du coût. De plus, rien ne garantit que la politique paramétrique ainsi pré-définie soit la meilleure parmi toutes les politiques possibles.

Nous avons alors proposé un modèle général de maintenance. Ce modèle, beaucoup plus complet que ceux existants dans la littérature, est basé sur l'utilisation de la programmation dynamique. Il permet de déterminer la politique optimale de maintenance pour des systèmes constitués de une ou deux unités et pour lesquels plusieurs seuils de maintenance peuvent exister. Sous certaines conditions, il a été démontré que la politique optimale est d'effectuer une maintenance uniquement quand l'état de détérioration du système excède une limite donnée. Cette propriété permet alors de calculer facilement le coût moyen optimal de maintenance.

Plusieurs axes de recherche peuvent être développés à partir de ce travail :

(i) Mise en évidence des conditions nécessaires pour que la politique optimale soit de type limite de contrôle : les conditions que nous avons établies sont en effet des conditions suffisantes qui portent uniquement sur la structure des coûts. Ceci permet de caractériser la forme de la politique



### Conclusion

optimale même si la densité de probabilité de transition du processus de détérioration n'est pas connue de manière précise. Cependant, dans le cas où cette densité est connue, il serait intéressant de trouver des conditions plus restrictives qui lient sa forme à celle de la politique optimale.

(ii) Caractérisation de la politique optimale pour les systèmes à plus d'une unité : il est quelquefois difficile de représenter l'évolution de l'état d'un système complexe par une seule variable. Il est donc nécessaire d'approfondir les propriétés de la politique optimale pour les systèmes à deux unités et d'étendre le modèle général de maintenance au cas à  $n$  unités.

(iii) Amélioration des algorithmes de calcul de la politique optimale : la détermination de la politique de maintenance optimale n'est pas un problème à résoudre en temps réel. Cependant, étant donné les temps de calcul très importants nécessaires - tout particulièrement pour les systèmes à plus d'une unité -, il serait utile de développer des algorithmes rapides qui pourraient ainsi être facilement utilisables dès la phase de conception des systèmes.

# ANNEXE 1

## Calcul du coût moyen estimé à long terme de la politique de maintenance

Le coût moyen estimé à long terme de la politique de maintenance présentée au §2.2.2 peut s'écrire :

$$I = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E[C_T]}{T}$$

où  $C_T$  est le coût cumulé de maintenance sur une période  $T$ .

D'après le théorème de Stolz, si  $\lim_{T \rightarrow +\infty} (E[C_T] - E[C_{T-1}])$  existe, alors:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E[C_T]}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} (E[C_T] - E[C_{T-1}]).$$

Nous allons donc exprimer l'espérance du coût cumulé sur une période  $T$ ,  $E[C_T]$ .

### Notation :

$p_1(s)$ : probabilité que le système soit en fonctionnement pendant  $s$  unités de temps consécutives sans opération de maintenance ou de remplacement :

$$p_1(s) = \sum_{i=s}^{+\infty} \frac{(\mu\lambda)^i}{i!} e^{-\mu\lambda}$$

Bien entendu, on a  $p_1(0) = 1$ .

$p_2(s)$ : probabilité que l'état  $x$  atteigne une valeur appartenant à  $[\lambda, L)$ ,  $s$  unités de temps après une opération de maintenance ou de remplacement :

$$p_2(s) = \frac{(\mu\lambda)^{s-1}}{(s-1)!} [e^{-\mu\lambda} - e^{-\mu L}]$$

$p_3(s)$ : probabilité que l'état  $x$  excède  $L$ ,  $s$  unités de temps après une opération de maintenance ou de remplacement :

Annexe 1

$$p_3(s) = \frac{(\mu\lambda)^{s-1}}{(s-1)!} e^{-\mu L}$$

$v_i$  : variable binaire définie comme suit :

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i^{\text{ième}} \text{ intervention est une maintenance} \\ 0 & \text{si la } i^{\text{ième}} \text{ intervention est un remplacement} \end{cases}$$

où intervention signifie "maintenance ou remplacement".

Soit  $t_i$  le nombre d'unités de temps entre la  $(i-1)^{\text{ième}}$  et la  $i^{\text{ième}}$  intervention sur le système. Si  $n$  est le nombre d'interventions, on a :

$$E[C_T] = \sum_{n=1}^T \sum_{s=0}^{T-n} p_1(s) \sum_{v_1=0}^1 \dots \sum_{v_n=0}^1 \sum_{t_1=1}^{T-s-n+1} \sum_{t_2=1}^{T-s-n-t_1+2} \dots \sum_{t_{n-1}=1}^{T-s-1-\sum_{i=1}^{n-2} t_i} \left\{ \sum_{j=1}^n [(1-v_j)\alpha + v_j] \right\} \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} [(1-v_j)p_3(t_j) + v_j p_2(t_j)] \right\} \\ * \left[ (1-v_n)p_3\left(T-s-\sum_{i=1}^{n-1} t_i\right) + v_n p_2\left(T-s-\sum_{i=1}^{n-1} t_i\right) \right]$$

Etant donné l'égalité :

$$(1-v_j)p_3(t_j) + v_j p_2(t_j) = \frac{(\mu\lambda)^{t_j-1}}{(t_j-1)!} \left[ (1-v_j)e^{-\mu L} + v_j(e^{-\mu\lambda} - e^{-\mu L}) \right]$$

on obtient :

$$E[C_T] = \sum_{n=1}^T \sum_{s=0}^{T-n} p_1(s) \sum_{v_1=0}^1 \dots \sum_{v_n=0}^1 \left\{ \sum_{j=1}^n [(1-v_j)\alpha + v_j] \right\} \\ \left\{ \prod_{j=1}^n [(1-v_j)e^{-\mu L} + v_j(e^{-\mu\lambda} - e^{-\mu L})] \right\} \\ * \left[ \sum_{t_1=1}^{T-s-n+1} \sum_{t_2=1}^{T-s-n-t_1+2} \dots \sum_{t_{n-1}=1}^{T-s-1-\sum_{i=1}^{n-2} t_i} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \frac{(\mu\lambda)^{t_j-1}}{(t_j-1)!} \right) \frac{(\mu\lambda)^{T-s-1-\sum_{i=1}^{n-1} t_i}}{\left(T-s-1-\sum_{i=1}^{n-1} t_i\right)!} \right]$$

Notons  $S$  la somme dans le dernier crochet. Elle peut être réécrite :

Annexe 1

$$\begin{aligned}
 S &= (\mu\lambda)^{T-s-n} \sum_{t_1=1}^{T-s-n+1} \sum_{t_2=1}^{T-s-n-t_1+2} \dots \sum_{t_{n-1}=1}^{T-s-1-\sum_{i=1}^{n-2} t_i} \left( \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{(t_j-1)!} \right) \frac{1}{\left( T-s-1-\sum_{i=1}^{n-1} t_i \right)!} \\
 &= (\mu\lambda)^{T-s-n} \sum_{t_1=1}^{T-s-n+1} \frac{1}{(t_1-1)!} \sum_{t_2=1}^{T-s-n-t_1+2} \frac{1}{(t_2-1)!} \dots \sum_{t_{n-1}=1}^{T-s-1-\sum_{i=1}^{n-2} t_i} \frac{1}{(t_{n-1}-1)! \left( T-s-1-\sum_{i=1}^{n-1} t_i \right)!}
 \end{aligned}$$

En appliquant (n-1) fois à l'équation précédente la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^k \frac{m^{i-1}}{(i-1)!(k-i)!} = \frac{(m+1)^{k-1}}{(k-1)!}$$

S se simplifie en :

$$S = \frac{(n\mu\lambda)^{T-s-n}}{(T-s-n)!}$$

Donc  $E[C_T]$  devient :

$$\begin{aligned}
 E[C_T] &= \sum_{n=1}^T \sum_{s=0}^{T-n} p_1(s) \frac{(n\mu\lambda)^{T-s-n}}{(T-s-n)!} \sum_{v_1=0}^1 \dots \\
 &\quad \dots \sum_{v_n=0}^1 \left\{ \sum_{j=1}^n [(1-v_j)\alpha + v_j] \right\} \prod_{j=1}^n [(1-v_j)e^{-\mu L} + v_j(e^{-\mu\lambda} - e^{-\mu L})]
 \end{aligned}$$

Soit k le nombre d'indices j tels que  $v_j = 1$ . L'égalité précédente s'écrit alors :

$$E[C_T] = \sum_{n=1}^T \sum_{s=0}^{T-n} p_1(s) \frac{(n\mu\lambda)^{T-s-n}}{(T-s-n)!} \sum_{k=0}^n \left[ [k + (n-k)\alpha] C_n^k (e^{-\mu\lambda} - e^{-\mu L})^k (e^{-\mu L})^{n-k} \right] \quad (A1)$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n [k + (n-k)\alpha] C_n^k a^k b^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k C_n^k a^k b^{n-k} + \alpha \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) C_n^k a^k b^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n n C_{n-1}^{k-1} a^k b^{n-k} + \alpha \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^k a^k b^{n-k} \\
 &= n a \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} a^{k-1} b^{n-k} + \alpha n b \sum_{k=0}^{n-1} n C_{n-1}^k a^k b^{n-k-1} \\
 &= n a (a+b)^{n-1} + \alpha n b (a+b)^{n-1} \\
 &= n(a + \alpha b)(a+b)^{n-1}
 \end{aligned}$$

L'équation (A1) devient :

$$\begin{aligned}
E[C_T] &= \sum_{n=1}^T \sum_{s=0}^{T-n} p_1(s) \frac{(n\mu\lambda)^{T-s-n} \cdot n}{(T-s-n)!} e^{-(n-1)\mu\lambda} \left[ e^{-\mu\lambda} + (\alpha-1)e^{-\mu L} \right] \\
&= \left[ e^{-\mu(L-\lambda)}(\alpha-1) + 1 \right] \sum_{n=1}^T \sum_{s=0}^{T-n} \frac{(n\mu\lambda)^{T-s-n} \cdot n}{(T-s-n)!} e^{-n\mu\lambda} p_1(s) \\
&= \left[ e^{-\mu(L-\lambda)}(\alpha-1) + 1 \right] \sum_{n=1}^T \sum_{j=0}^{T-n} \frac{(n\mu\lambda)^j \cdot n}{j!} e^{-n\mu\lambda} p_1(T-n-j) \tag{A2}
\end{aligned}$$

Donc pour une période de longueur T-1, on a :

$$E[C_{T-1}] = \left[ e^{-\mu(L-\lambda)}(\alpha-1) + 1 \right] \sum_{n=1}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-n-1} \frac{(n\mu\lambda)^j \cdot n}{j!} e^{-n\mu\lambda} p_1(T-n-j-1)$$

En se basant sur le deuxième membre de droite de l'égalité (A2), on peut également écrire  $E[C_T]$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
E[C_T] &= \left[ e^{-\mu(L-\lambda)}(\alpha-1) + 1 \right] \\
&\quad * \left\{ \sum_{n=1}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-n-1} \frac{(n\mu\lambda)^j \cdot n}{j!} e^{-n\mu\lambda} p_1(T-n-j) + \sum_{n=1}^T \frac{(n\mu\lambda)^{T-n} \cdot n}{(T-n)!} e^{-n\mu\lambda} p_1(0) \right\}
\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
E[C_T] - E[C_{T-1}] &= \left[ (\alpha-1) e^{-\mu(L-\lambda)} + 1 \right] \\
&\quad * \left\{ \sum_{n=1}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-n-1} \frac{(n\mu\lambda)^j \cdot n}{j!} e^{-n\mu\lambda} [p_1(T-n-j) - p_1(T-n-j-1)] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^T \frac{(n\mu\lambda)^{T-n} \cdot n}{(T-n)!} p_1(0) e^{-n\mu\lambda} \right\} \\
&= \left[ (\alpha-1) e^{-\mu(L-\lambda)} + 1 \right] \\
&\quad * \left\{ - \sum_{n=1}^{T-1} \sum_{j=0}^{T-n-1} \frac{(n\mu\lambda)^j \cdot n}{j!} e^{-(n+1)\mu\lambda} \frac{(\mu\lambda)^{T-n-1-j}}{(T-n-1-j)!} + \sum_{n=1}^T \frac{(n\mu\lambda)^{T-n} \cdot n}{(T-n)!} e^{-n\mu\lambda} \right\} \\
&= \left[ (\alpha-1) e^{-\mu(L-\lambda)} + 1 \right] \\
&\quad * \left\{ + \sum_{n=1}^T \frac{(n\mu\lambda)^{T-n} \cdot n}{(T-n)!} e^{-n\mu\lambda} - \sum_{n=1}^{T-1} \frac{[(n+1)\mu\lambda]^{T-n-1} \cdot n}{(T-n-1)!} e^{-(n+1)\mu\lambda} \right\} \\
&= \left[ (\alpha-1) e^{-\mu(L-\lambda)} + 1 \right] \\
&\quad * \left\{ + \sum_{n=1}^T \frac{(n\mu\lambda)^{T-n} \cdot n}{(T-n)!} e^{-n\mu\lambda} - \sum_{j=1}^T \frac{(j-1)(j\mu\lambda)^{T-j}}{(T-j)!} e^{-j\mu\lambda} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \left[ (\alpha - 1) e^{-\mu(L-\lambda)} + 1 \right] \sum_{n=1}^T \frac{(n\mu\lambda)^{T-n}}{(T-n)!} e^{-n\mu\lambda}$$

En passant à la limite, on obtient finalement :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} (E[C_T] - E[C_{T-1}]) = \left[ (\alpha - 1) e^{-\mu(L-\lambda)} + 1 \right] \cdot \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^T \frac{(n\mu\lambda)^{T-n}}{(T-n)!} e^{-n\mu\lambda} \quad (\text{A3})$$

**Lemme A1.1 :** La relation suivante est vérifiée :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^T \frac{(n\mu\lambda)^{T-n}}{(T-n)!} e^{-n\mu\lambda} = \frac{1}{1 + \mu\lambda}$$

*Démonstration :*

Considérons la fonction complexe  $f$  :

$$f(z) = \frac{1}{1 - z e^{\beta(z-1)}} - \frac{1}{(1-z)(1+\beta)}$$

où  $z$  est un nombre complexe et  $\beta$  réel positif.  $f(z)$  peut s'écrire :

$$f(z) = \frac{\beta(1-z) + z(e^{\beta(z-1)} - 1)}{(1 - z e^{\beta(z-1)})(1-z)(1+\beta)}$$

Nous allons démontrer que  $f(z)$  est une fonction holomorphe sur un disque de rayon strictement supérieur à 1. Pour cela, nous allons tout d'abord montrer que  $f(z)$  a un pôle unique  $z=1$  sur le disque unité et que ce pôle est virtuel.

Les pôles de  $f(z)$  sont solutions de l'équation suivante :

$$(1 - z e^{\beta(z-1)})(1-z) = 0$$

Le premier pôle est  $z = 1$ . Les autres pôles sont solutions de :

$$(1 - z e^{\beta(z-1)}) = 0 \quad (\text{A4})$$

Nous voulons montrer que toute solution de l'équation (A4) est telle que  $|z| > 1$  ou  $z = 1$ .

Annexe 1

Supposons qu'il existe une solution  $z$  telle que  $|z| \leq 1$  et  $z \neq 1$ . Par définition, on a :

$$|z e^{\beta(z-1)}| = 1$$

En posant  $z = a + ib$ , on obtient :

$$|z e^{\beta(z-1)}| = \sqrt{a^2 + b^2} e^{\beta(a-1)}$$

$|z|$  étant inférieure ou égale à 1, on a :

$$a^2 + b^2 \leq 1 \text{ et } |z e^{\beta(z-1)}| \leq e^{\beta(a-1)}.$$

Cependant, étant donné que  $|z| \leq 1$  et  $z \neq 1$ , on a également :

$$a < 1 \text{ et } e^{\beta(a-1)} < 1$$

et donc :

$$|z e^{\beta(z-1)}| < 1$$

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse de départ  $|z e^{\beta(z-1)}| = 1$ .

Nous avons donc démontré que  $f(z)$  admet un pôle unique  $z=1$  sur un disque unité compact. Pour démontrer qu'il est virtuel, nous allons utiliser le théorème de l'Hospital :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-\beta + e^{\beta(z-1)} - 1 + \beta z e^{\beta(z-1)}}{(1+\beta) \left[ z e^{\beta(z-1)} - 1 - e^{\beta(z-1)}(1+\beta z)(1-z) \right]} \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^{\beta(z-1)}(2+\beta z)}{(1+\beta) \left[ 2 e^{\beta(z-1)}(1+\beta z) - \beta e^{\beta(z-1)}(2+\beta z)(1-z) \right]} \\ &= \frac{2+\beta}{2(1+\beta)^2} \end{aligned}$$

La fonction  $f(z)$  est donc holomorphe sur un disque de rayon strictement supérieur à 1. Sur ce disque,  $f(z)$  peut être développé en une série de Taylor qui converge en  $z=1$ .

Quel que soit  $n \geq 1$ , on a :

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{(1 - z e^{\beta(z-1)})^{n+1}} \sum_{i=1}^n \beta^{n-i} e^{i\beta(z-1)} \sum_{j=0}^i (\lambda z)^j \left[ C_n^{i-j} \sum_{k=0}^j (i-k)^{n+j-i} \frac{(i-k)!}{(j-k)!} C_{n+1}^k (-1)^k \right] - \frac{n!}{(1-z)^{n+1}(1+\beta)}$$

et donc :

$$f^{(n)}(0) = \sum_{i=1}^n \beta^{n-i} e^{-i\beta} C_n^i i^{n-i} i! - \frac{n!}{1+\beta} = n! \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(i\beta)^{n-i}}{(n-i)!} e^{-i\beta} - \frac{1}{1+\beta} \right]$$

Puisque le développement de Taylor de  $f(z)$  converge en  $z=1$ , on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{i=1}^n \frac{(i\beta)^{n-i}}{(n-i)!} e^{-i\beta} - \frac{1}{1+\beta} \right| = 0$$

ce qui est équivalent à :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{(i\beta)^{n-i}}{(n-i)!} e^{-i\beta} = \frac{1}{1+\beta}$$

Ceci entraîne alors l'égalité suivante :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^T \frac{(n\mu\lambda)^{T-n}}{(T-n)!} e^{-n\mu\lambda} = \frac{1}{1+\mu\lambda}$$

□

En utilisant le Lemme A1.1 et le théorème de Stolz, l'équation (A3) devient :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{E[C_T]}{T} = \frac{(\alpha - 1) e^{-\mu(L-\lambda)} + 1}{1 + \mu\lambda}$$

Ce résultat est le même que celui obtenu au §2.2.3.2. On a donc :

**Résultat A1.2 :** L'expression du coût moyen estimé à long terme est identique que l'hypothèse de l'existence du régime permanent soit faite ou non.



## ANNEXE 2

### Dérivation par domaine de la densité de probabilité de l'état du système $p(x,y)$ dans le cas général

En posant  $p(x,y) e^{x+y} = q(x,y)$ , l'équation (14) du chapitre 2 lorsque  $\mu_x = \mu_y = 1$  devient :

$$q(x,y) = \int_{0^+}^{\text{Min}(x,\lambda_x)} \int_{0^+}^{\text{Min}(y,\lambda_y)} q(u,v) dv du + \int_{0^+}^{\text{Min}(x,\sigma_x)+\infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} q(u,v) e^{-v} dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{0^+}^{\text{Min}(y,\sigma_y)} q(u,v) e^{-u} dv du + K$$

avec :

$$K = \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} q(u,v) e^{-u-v} dv du + \int_{\sigma_x}^{\lambda_x+\infty} \int_{\lambda_y}^{+\infty} q(u,v) e^{-u-v} dv du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} \int_{\sigma_y}^{+\infty} q(u,v) e^{-u-v} dv du$$

$$\text{et } \int_{0^+}^{+\infty} \int_{0^+}^{+\infty} q(u,v) e^{-u-v} du dv = 1$$

Dans ce qui suit,  $q_i(x,y)$  désigne l'expression de la fonction  $q(x,y)$  pour le domaine  $i$  (cf figure 2.3.2a).

En dérivant domaine par domaine, on obtient :

- **Domaine 1** :  $x \leq \sigma_x, y \leq \sigma_y$

$$\frac{\partial q_1(x, y)}{\partial x} = \int_{0^+}^y q_1(x, v) du + \int_{\lambda_y}^{+\infty} q_3(x, v) e^{-v} dv$$

$$\frac{\partial q_1(x, y)}{\partial y} = \int_{0^+}^x q_1(u, y) du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} q_4(u, y) e^{-u} du$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 q_1(x, y)}{\partial x \partial y} = q_1(x, y)$$

- **Domaine 2a** :  $x \leq \sigma_x, \sigma_y < y \leq \lambda_y$

$$\frac{\partial q_{2a}(x, y)}{\partial x} = \int_{0^+}^{\sigma_y} q_1(x, v) dv + \int_{\sigma_y}^y q_{2a}(x, v) dv + \int_{\lambda_y}^{+\infty} q_3(x, v) e^{-v} dv$$

$$\frac{\partial q_{2a}(x, y)}{\partial y} = \int_{0^+}^x q_{2a}(u, y) du$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 q_{2a}(x, y)}{\partial x \partial y} = q_{2a}(x, y)$$

- **Domaine 2b** :  $\sigma_x < x \leq \lambda_x, y \leq \lambda_y$

(symétrique de 2a)

$$\frac{\partial q_{2b}(x, y)}{\partial x} = \int_{0^+}^y q_{2b}(x, v) dv$$

$$\frac{\partial q_{2b}(x, y)}{\partial y} = \int_{0^+}^{\sigma_x} q_1(u, y) du + \int_{\sigma_x}^x q_{2b}(u, y) du + \int_{\lambda_x}^{+\infty} q_4(u, y) e^{-u} du$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 q_{2b}(x, y)}{\partial x \partial y} = q_{2b}(x, y)$$

- **Domaine 2c** :  $\sigma_x < x \leq \lambda_x$ ,  $\sigma_y < y \leq \lambda_y$

$$\frac{\partial q_{2c}(x,y)}{\partial x} = \int_{0^+}^{\sigma_y} q_{2b}(x,v)dv + \int_{\sigma_y}^y q_{2c}(x,v)dv$$

$$\frac{\partial q_{2c}(x,y)}{\partial y} = \int_{0^+}^{\sigma_x} q_{2a}(u,y)du + \int_{\sigma_x}^x q_{2c}(u,y)du$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 q_{2c}(x,y)}{\partial x \partial y} = q_{2c}(x,y)$$

- **Domaine 3** :  $x \leq \sigma_x$ ,  $y > \lambda_y$

$$\frac{\partial q_3(x,y)}{\partial x} = \int_{0^+}^{\sigma_y} q_1(x,v)dv + \int_{\sigma_y}^{\lambda_y} q_{2a}(x,v)dv + \int_{\lambda_y}^{+\infty} q_3(x,v)e^{-v}dv$$

$$\frac{\partial q_3(x,y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow q_3(x,y) = g_3(x) \quad g_3(x) \text{ fonction à déterminer}$$

- **Domaine 4** :  $x > \lambda_x$ ,  $y \leq \sigma_y$

(symétrique de 3)

$$q_4(x,y) = h_4(y) \quad h_4(y) \text{ fonction à déterminer}$$

- **Domaine 5b** :  $x > \lambda_x$ ,  $\sigma_y < y \leq \lambda_y$

$$\frac{\partial q_{5b}(x,y)}{\partial x} = 0 \Rightarrow q_{5b}(x,y) = h_{5b}(y) \quad h_{5b}(y) \text{ fonction à déterminer}$$

$$\frac{\partial q_{5b}(x,y)}{\partial y} = \int_{0^+}^{\sigma_x} q_{2a}(u,y)du + \int_{\sigma_x}^{\lambda_x} q_{2c}(u,y)du$$

- **Domaine 5a** :  $\sigma_x < x \leq \lambda_x$ ,  $y > \lambda_y$

(symétrique de 5b)

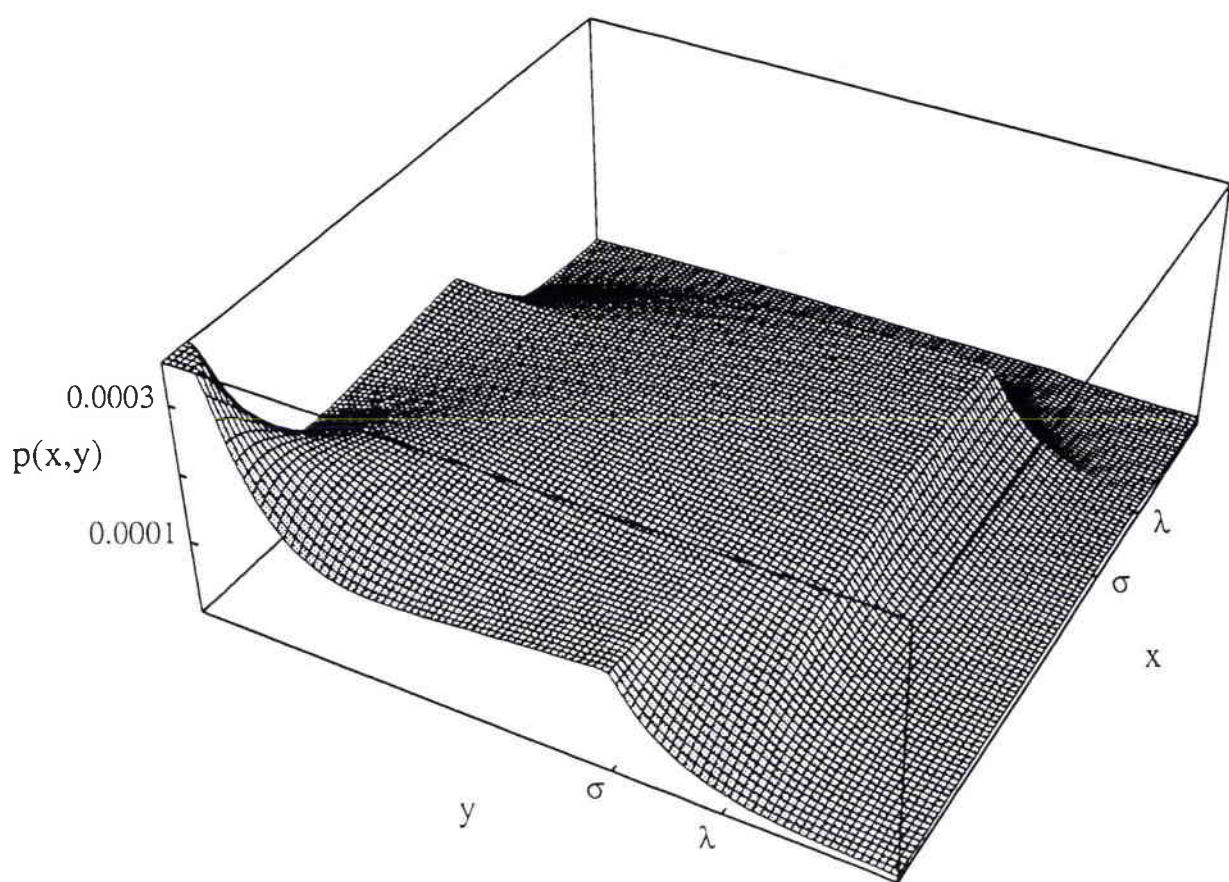
$$q_{5a}(x,y) = g_{5a}(x) \quad g_{5a}(x) \text{ fonction à déterminer}$$

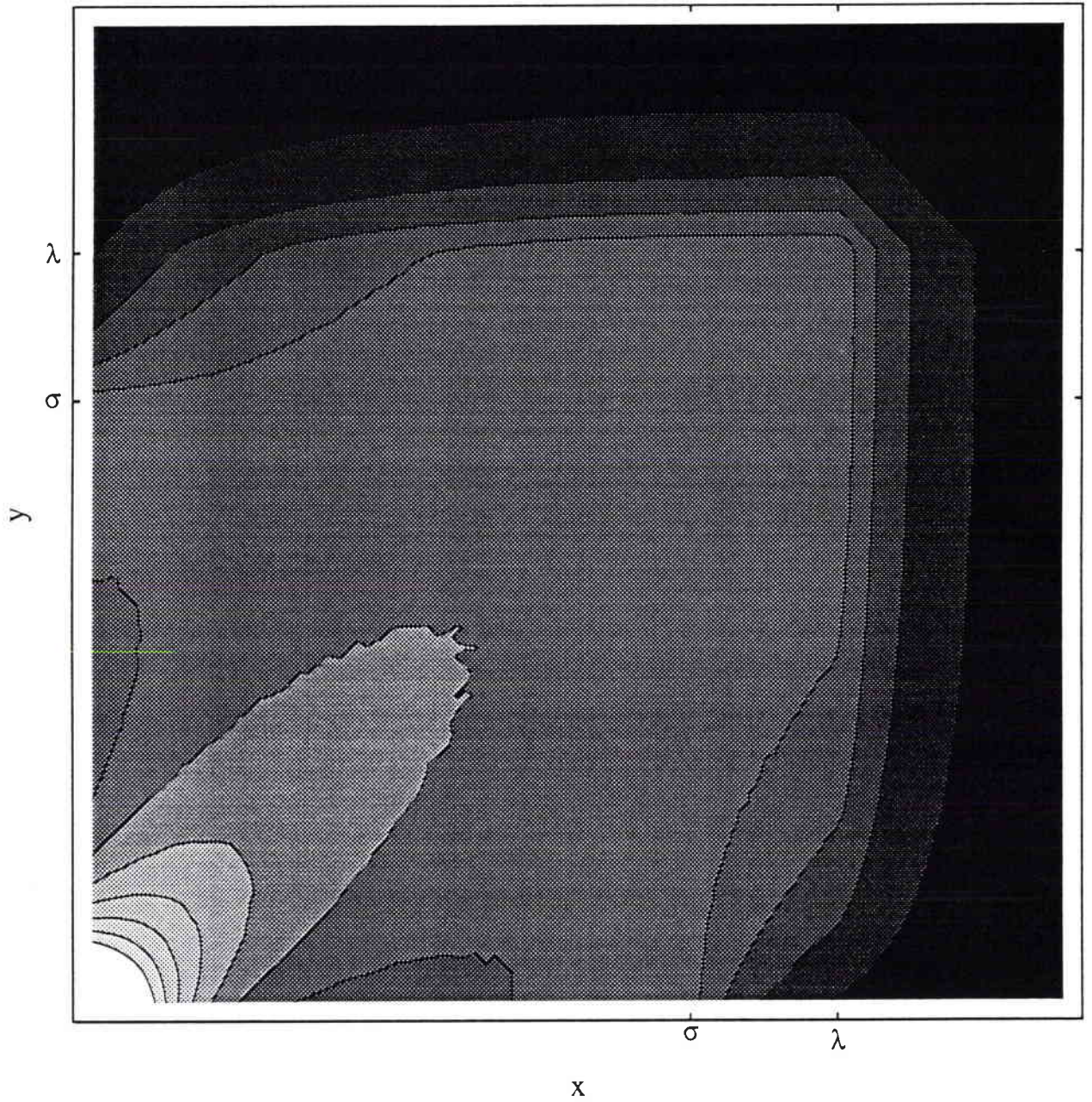
- **Domaine 5c** :  $x > \lambda_x, y > \lambda_y$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial q_{5c}(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial q_{5c}(x,y)}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow q_{5c}(x,y) = C_1 \quad C_1 \text{ constante à déterminer}$$

Les équations qui régissent les domaines 1, 2a, 2b et 2c sont du type "équation des ondes non-homogènes". Malheureusement, les conditions aux bords ne sont pas connues, ce qui rend leur résolution impossible. En effet, le système se comporte comme s'il évoluait dans un espace refermé sur lui-même (par exemple sphérique) : tout ce qui dépasse  $\lambda_x$  ou  $\lambda_y$  se retrouve en  $x=0$  ou/et  $y=0$ . Il n'est donc pas possible de connaître a priori les valeurs de la fonction sur les axes.

Une représentation tri-dimensionnelle ainsi qu'un graphe de niveau de la fonction  $p(x,y)$  obtenu par simulation d'un système symétrique ( $\mu_x = \mu_y = 1$ ,  $\sigma_x = \sigma_y = 8$  et  $\lambda_x = \lambda_y = 10$ ) sont donnés pages suivantes.





Graphe de niveau représentant  $p(x,y)$   
pour  $\mu_x = \mu_y = 1$ ,  $\sigma_x = \sigma_y = 8$  et  $\lambda_x = \lambda_y = 10$   
(légende : noir  $\rightarrow$  0, blanc  $\rightarrow$  1)

# BIBLIOGRAPHIE

- [01] AFNOR norme X 60 010
- [02] AFNOR norme X 60 011
- [03] A. ARAPOSTATHIS, V.S. BORKAR, E. FERNANDEZ-GAUCHERAND, M.K. GHOSH, S.I. MARCUS, "Discrete-Time Controlled Markov Processes with Average Cost Criterion: a survey", *SIAM Journal of Control and Optimization*, vol. 31, pp. 282-344, 1993.
- [04] D. ASSAF, J.G. SHANTHIKUMAR, "Optimal Group Maintenance Policies with Continuous and Periodic Inspections", *Management Science*, vol. 33, pp. 1440-1452, 1987.
- [05] T. AVEN, S. GAARDER, "Optimal Replacement in a Shock Model : Discrete Time", *Journal of Applied Probability*, vol. 24, pp. 281-287, 1987.
- [06] R.E. BARLOW, L.C. HUNTER, "Optimum Preventive Maintenance Policies", *Operations Research*, vol.8, pp. 90-100, 1960.
- [07] M. BASSEVILLE, "Detecting Changes in Signals and Systems - A Survey", *Automatica*, vol. 24, no. 3, pp. 309-326, 1988.
- [08] M. BASSEVILLE, A. BENVENISTE, Q. ZHANG, "Early Warning of Slight Changes in Systems and Plants with Application to Condition Based Maintenance", *Rapports de Recherche INRIA* , no.1750, 1992.
- [09] M. BERG, "Optimal Replacement Policies for Two-Unit Machines with Running Cost - I", *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 4, pp. 89-106, 1976.
- [10] M. BERG, "Optimal Replacement Policies for Two-Unit Machines with Running Cost - II", *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 5, pp. 315-322, 1977.

## Bibliographie

- [11] M. BERG, "General Trigger-Off Replacement Procedures for Two-Units Systems", *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 25, pp. 15-29, 1978.
- [12] B. BERGMAN, "Optimal Replacement under a General Failure Model", *Advances in Applied Probability*, vol. 10, pp. 431-451, 1978.
- [13] B. BERTSEKAS, *Dynamic Programming and Stochastic Control*, ed. Academic Press, 1976.
- [14] B. BERTSEKAS, *Stochastic Optimal Control: the Discrete Time Case*, ed. Academic Press, 1978.
- [15] BS 3811:1984, "British Standard Glossary of Maintenance Management Terms in Terotechnology", British Standards Institution, 1984.
- [16] D.I. CHO, M. PARLAR, "A Survey of Maintenance Models for Multi-Unit Systems", *European Journal of Operational Research*, vol. 51, pp. 1-23, 1991.
- [17] C. CHU, J.M. PROTH, "Predictive Maintenance: A Method Based on Data Analysis Techniques", in *Proceedings of the Workshop on Quality, Maintenance and Reliability Management*, Bruxelles, 1992.
- [18] E. ÇINLAR, *Introduction To Stochastic Processes*, ed. Prentice-Hall Inc., 1975.
- [19] R. COLSHER, R. FRANK, W. LEONARD, "Benefits of a Predictive Maintenance Program", in *Proceedings of the 46th Meeting of the Mechanical Failures Prevention Group*, ed. Vibration Institute, 1992.
- [20] A. DAVIES, P.R. DRAKE, J.H. WILLIAMS, *Condition-Based Maintenance and Machine Diagnosis*, ed. Chapman & Hall, 1994.
- [21] S.E. DREYFUS, "A Note on an Industrial Replacement Process", *Operation Research Quarterly*, vol. 8, pp. 190-193, 1957.



## Bibliographie

- [22] I.B. GERTSBAKH, *Models of Preventive Maintenance*, ed. North-Holland Publishing Co., 1977.
- [23] D. HAMMERSTROM, "Neural Networks at Work", *IEEE Spectrum*, pp 26-32, June 1993.
- [24] D.W. JORGENSON, J.J. McCALL, R. RADNER, *Optimal Replacement Policy*, ed. North-Holland Publishing Co., 1967.
- [25] H. LUSS, "Inspection Policies for a System which is Inoperative During Inspection", *AIIE Transactions*, vol. 9, pp.189-194, 1977.
- [26] S.D. MANNING, J.N. YANG, "Aircraft Fleet Maintenance Based on Structural Reliability Analysis", *Journal of Aircraft*, vol. 51, pp. 419-425, 1994.
- [27] R.K. MOBLEY, *An Introduction to Predictive Maintenance*, ed. Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [28] T. NAGAKAWA, K. YASUI, "Approximate Calculation of Optimal Inspection Times", *Journal of the Operation Research Society*, vol. 31, pp. 851-853, 1980.
- [29] T. NAGAKAWA, P. MURTHY, "Optimal Replacement Policies for a Two-Unit System with Failure Interaction", *Recherche Opérationnelle/Operations Research*, vol. 27, n° 4, pp. 427-438, 1993.
- [30] B.W. NIEBEL, *Engineering Maintenance Management*, ed. Marcel Dekker Inc., 1994.
- [31] D. PERRY, M.J.M. POSNER, "Determining the Control Limit Policy in a Replacement Model with Linear Restoration", *Operations Research Letters*, vol. 10, pp. 335-341, 1991.
- [32] M.J.M. POSNER, D. ZUCKERMAN, "A Replacement Model for an Additive Damage Model with Restoration", *Operations Research Letters*, vol. 3, pp. 141-148, 1984.

## Bibliographie

- [33] J.W. PROVAN, *Probabilistic Fracture Mechanics and Reliability*, ed. J.W. PROVAN, Martinus Nijhoff Publishers, 1987.
- [34] S.M. ROSS, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, ed. Holden-Day, 1970.
- [35] G. SAPORTA, *Probabilités et Analyse des Données et Statistique*, ed. Editions Technip, 1990.
- [36] G.C. SALIVAR, C.G. ANNIS Jr., J.N. YANG , "Statistical Modeling of Fatigue-Crack Growth in a Nickel-Base Superalloy", *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 18, pp 257-270, 1983.
- [37] M. SCRIABIN, R.C. VERGIN, "Maintenance Scheduling for Multicomponent Equipment", *AIEE Transactions*, vol. 9, pp 297-305, 1977.
- [38] H.M. TAYLOR, "Optimal Replacement Under Additive Damage and Other Failure Models", *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 22, pp. 1-18, 1975.
- [39] C. VALDEZ-FLORES, R.M. FELDMAN, "A Survey of Preventive Models for Stochastically Deteriorating Single-Unit Systems", *Naval Research Logistics*, vol. 36, pp. 417-446, 1989.
- [40] F.A. VAN DER DUYN SCHOUTEN, S.G. VANNESTE, "Two Simple Control Policies for a Multicomponent Maintenance System", *Operations Research*, vol. 41, n° 6, pp. 1125-1136, 1993.
- [41] K. YAMADA "Explicit Formula of Optimal Replacement under Additive Shock Processes", *Stochastic Processes and their Applications*, vol. 7, pp. 193-208, 1980.
- [42] D. ZUCKERMAN, "Replacement Models Under Additive Damage", *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 24, pp. 549-558, 1977.
- [43] D. ZUCKERMAN, "Inspection and Replacement Policies", *Journal of Applied Probabilities*, vol. 17, pp. 168-177, 1980.

### Bibliographie

- [44] D. ZUCKERMAN, "Optimal Maintenance Policy for Stochastically Failing Equipment: a Diffusion Approach", *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 33, pp. 469-477, 1986.