



**HAL**  
open science

# Continuation dans les problèmes à frontières libres de type bifurcations plastiques

Abdelmajid El Koulani

► **To cite this version:**

Abdelmajid El Koulani. Continuation dans les problèmes à frontières libres de type bifurcations plastiques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1996. Français. NNT : 1996METZ029S . tel-01777140

**HAL Id: tel-01777140**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777140v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ**

**SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES**

par

**Abdelmajid EL KOULANI**

Directeur de thèse : Michel POTIER-FERRY

-----

**CONTINUATION DANS LES PROBLÈMES À FRONTIÈRES  
LIBRES DE TYPE BIFURCATIONS PLASTIQUES**

-----

**Soutenue le 30 Octobre 1996 devant la commission d'examen :**

-----

<b>H. D. BUI</b>	Professeur, École Polytechnique, PALAISEAU
<b>A. CIMETIÈRE</b>	Professeur, Université de POITIERS
<b>N. DAMIL</b>	Professeur, Université Hassan II, CASABLANCA
<b>A. LÉGER</b>	Ingénieur de recherche, EDF-DER, CLAMART
<b>Q. S. NGUYEN</b>	Professeur, École Polytechnique, PALAISEAU
<b>M. POTIER-FERRY</b>	Professeur, Université de METZ

# THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE METZ**

**SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES**

par

**Abdelmajid EL KOULANI**

Directeur de thèse : Michel POTIER-FERRY

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19960585
Cote	S/M <sub>3</sub> 96/29
Loc	Magasin

-----

**CONTINUATION DANS LES PROBLÈMES À FRONTIÈRES  
LIBRES DE TYPE BIFURCATIONS PLASTIQUES**

-----

**Soutenue le 30 Octobre 1996 devant la commission d'examen :**

-----

- |                        |   |
|------------------------|---|
| <b>H. D. BUI</b>       | <b>Professeur, École Polytechnique, PALAISEAU</b>   |
| <b>A. CIMETIÈRE</b>    | <b>Professeur, Université de POITIERS</b>           |
| <b>N. DAMIL</b>        | <b>Professeur, Université Hassan II, CASABLANCA</b> |
| <b>A. LÉGER</b>        | <b>Ingénieur de recherche, EDF-DER, CLAMART</b>     |
| <b>Q. S. NGUYEN</b>    | <b>Professeur, École Polytechnique, PALAISEAU</b>   |
| <b>M. POTIER-FERRY</b> | <b>Professeur, Université de METZ</b>               |

## AVANT-PROPOS

Cette thèse a été effectuée au sein du Département Mécanique et Modèles Numériques de la Direction des Études et Recherches - Site de Clamart d'EDF.

Je remercie vivement Messieurs A. JAMI (Chef du Département MMN), S. ANDRIEUX (Chef-Adjoint de MMN) et F. VOLDOIRE (Chef du Groupe Mécanique Théorique et Applications). Je leur suis très reconnaissant de m'avoir permis d'effectuer ce travail dans d'excellentes conditions et de bénéficier d'un environnement de recherche de qualité. J'apprécie en eux le souci constant de maintenir un haut niveau scientifique à ce laboratoire en milieu industriel bien reconnu par le monde de la recherche.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur H. D. BUI, qui a accepté, malgré ses multiples occupations, de participer au jury de cette thèse. C'est avec une vive émotion que je le remercie ici pour cet inestimable honneur.

Ma plus vive gratitude s'adresse également à Monsieur A. CIMETIÈRE pour l'intérêt qu'il a témoigné pour ce travail. Sa collaboration m'était très précieuse tant de vive voix que par l'intermédiaire d'informations intéressantes que j'ai puisées dans ses publications. Je l'en remercie sincèrement.

Mes remerciements vont naturellement à Monsieur N. DAMIL qui a accepté la lourde tâche de porter un jugement sur ce travail en tant que rapporteur. J'ai beaucoup d'estime pour sa compétence scientifique et je le remercie de me faire profiter de sa vaste expérience.

Monsieur A. LÉGER m'a fait découvrir les beaux problèmes de la bifurcation plastique. Il m'a conseillé et m'a apporté toute son expérience sans relâche durant toute la durée de la thèse. Sa disponibilité et son amabilité m'ont beaucoup touché et ont permis des discussions fructueuses et très intéressantes. C'est avec beaucoup d'émotion que je le remercie d'avoir transformé une simple collaboration en une amitié.

Monsieur Q. S. NGUYEN a eu l'extrême gentillesse d'accepter la difficile tâche de rapporteur. Le fait qu'il ait bien voulu porter un jugement sur ce travail a été pour moi une grande satisfaction. L'intérêt qu'il a porté à mon travail et les discussions que j'ai eues avec lui m'ont permis d'avoir un regard critique sur mes conclusions. Conscient de la lourdeur du travail que je lui ai demandé je tiens à lui exprimer ici ma profonde gratitude.

C'est avec enthousiasme que j'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur M. POTIER-FERRY qui a bien voulu m'accueillir au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz. Ces travaux représentent pour moi ce que la puissance des Mathématiques peut apporter à la mécanique. Je suis très honoré de sa présence dans le jury et je le remercie de sa gentillesse et de son amabilité.

# TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.....	6
CHAPITRE 1 .....	13
1.1. Introduction.....	15
1.2. Un peu d'histoire .....	15
1.3. Premiers résultats significatifs .....	17
1.4. Développements récents.....	23
CHAPITRE 2 .....	29
2.1. Introduction.....	31
2.2. Le modèle étudié et les équations du problème .....	32
2.3. Solutions élastiques .....	34
2.3.1 Le système parfait.....	34
2.3.2 Le système perturbé.....	36
2.4. Solutions plastiques du modèle parfait : $\bar{\theta} = 0$ .....	37
2.4.1 Solution fondamentale .....	37
2.4.2 Notations et transformation des équations .....	39
2.4.3 Vitesses initiales et points de bifurcation.....	41
2.4.4 Construction des branches bifurquées.....	42
2.4.5 Régularité des solutions.....	46
2.5. Sensibilité aux imperfections.....	49
2.5.1 Solution élastique.....	50
2.5.2 Solution plastique en charge.....	51
2.5.3 Solution plastique en présence de décharge .....	54
2.6. Résultats numériques.....	56
2.7. Discussion .....	60

<b>CHAPITRE3 .....</b>	<b>61</b>
<b>Introduction et orientation .....</b>	<b>63</b>
<b>3.1. Position du problème .....</b>	<b>66</b>
3.1.1. Description du système.....	66
3.1.2. Équations d'équilibre .....	67
3.1.3. Une autre formulation.....	68
3.1.4. Étude des fonctions $P_i$ , $Q_i$ et $R_i$ .....	72
<b>3.2. Analyse des zones de décharge.....</b>	<b>76</b>
3.2.1. Topologie des zones de décharge pour $\dot{\lambda} = 0$ .....	76
3.2.2. Topologie des zones de décharge pour $\dot{\lambda} \neq 0$ .....	81
3.2.3. Classification des zones de décharge.....	82
3.2.4. Régularité des zones de décharge.....	84
<b>3.3. Vitesses initiales et points de bifurcation.....</b>	<b>87</b>
3.3.1. Solution fondamentale et points de bifurcation.....	89
3.3.2. Existence de vitesses initiales pour $\lambda_T < \lambda < \lambda_R$ .....	95
3.3.2.1. Position du problème.....	95
3.3.2.2. Problème en $R$ .....	97
3.3.2.3. Un résultat de symétrie .....	100
3.3.2.4. Problème en $R_0$ .....	103
3.3.2.5. Un résultat d'existence .....	106
3.3.3. Un résultat d'unicité.....	112
3.3.4. Récapitulatif.....	115
3.3.5. Exploration de l'ensemble des points de bifurcation...116	
<b>3.4. Construction de branches bifurquées .....</b>	<b>121</b>
3.4.1. Rappel des équations et position du problème .....	122
3.4.2. Le problème en $R$ .....	124
3.4.3. Le problème en $R_0$ .....	126
3.4.4. Le problème de Cauchy.....	132
3.4.5. Propriétés des branches de solutions bifurquées.....136	
3.4.5.1. Régularité des branches de solutions bifurquées.....	136
3.4.5.2. Monotonie des branches de solutions bifurquées.....	137
3.4.5.3. Comportement asymptotique des branches de solutions bifurquées.....	138
<b>3.5. La sensibilité aux imperfections.....</b>	<b>140</b>
3.5.1. Position du problème.....	140
3.5.2. La solution élastique .....	144
3.5.3. La solution en charge.....	145

**ANNEXES.....153**  
    **Annexe 1..... 154**  
    **Annexe 2..... 160**  
**BIBLIOGRAPHIE.....164**

# INTRODUCTION

# INTRODUCTION

Malgré des progrès récents, nombre de problèmes relatifs au flambage élastoplastique restent ouverts. On se propose de revenir sur l'ensemble de ces problèmes tant sur le plan qualitatif que quantitatif. On s'intéresse à l'étude des points de bifurcation puis du comportement post-critique pour des systèmes présentant à la fois des non linéarités géométriques et matérielles. On donnera quelques éléments de réponses, d'une part en utilisant un modèle simple, pour lequel les résultats seront assez complets, et d'autre part en détaillant l'obtention du diagramme de bifurcation d'un exemple de structure continue.

L'équilibre des structures plastiques se présente naturellement sous la forme d'un problème aux limites. En l'absence de non linéarités géométriques et sous certaines conditions concernant la loi de comportement plastique on est assuré de l'unicité de l'évolution quasi-statique du système [SUQ 1982]. Ce résultat a été obtenu justement en étudiant ce problème aux limites. En présence de non linéarités géométriques, l'étude du problème aux limites s'avère difficile. A la différence de ces travaux on exploite ici pleinement le caractère incrémental de la plasticité jusqu'à obtenir l'équation des branches de solutions sous forme de problèmes de Cauchy, ce qui s'avère adapté à la démonstration de l'existence des branches dans le cas de non unicité et permet la continuation de ces branches.

Le problème du flambage et du post-flambage est abordé dans le cadre de la théorie des bifurcations. Cela veut dire ici que l'on cherche à déterminer la structure de l'ensemble des solutions plastiquement et cinématiquement admissibles.

Puisque l'évolution quasi-statique n'est pas unique une question importante concerne l'existence des points critiques et surtout les points de bifurcation. La recherche de ces points de bifurcation revient généralement à résoudre des problèmes de valeurs propres souvent non linéaires, c'est à dire à faire une **analyse spectrale**.

Au voisinage du premier point de bifurcation certains auteurs [HUT 1974], [LEG 1988] ont donné une expression de la branche post-critique sous forme d'un développement asymptotique formel sans donner pour autant l'étendue de validité d'un tel développement. En particulier ces développements ne permettent pas de résoudre la question, importante pour les applications pratiques, de l'estimation rigoureuse de la charge maximale supportable par la structure.

Des résultats de **bifurcation globale** sont donc nécessaires. Cela veut dire que l'on donne des résultats d'existence de branches bifurquées puis l'allure de ces branches pour de grandes déflexions et finalement leur comportement asymptotique.

Comme le suggère le titre de ce travail notre objectif principal est la continuation des branches de solutions, aussi appelée problème de **suivi de courbes**. Dans le cadre de la plasticité il est crucial que la méthode de continuation tienne compte de l'existence de frontières libres entre des zones de comportement différent, ici charge plastique et décharge élastique. On montre de plus comment la détermination de ces frontières permet aussi de fournir une démonstration constructive de l'existence des branches de solutions.

Un autre aspect important de la théorie des bifurcations est le problème de la **sensibilité aux imperfections**. Ce problème est traité en effectuant des perturbations purement géométriques.

Les résultats principaux présentés ici sont donc essentiellement de quatre types:

- **Analyse spectrale**

Depuis les travaux de Hill il est admis que la détermination de la charge critique correspondant au premier point de bifurcation revient à résoudre un problème aux valeurs propres non linéaire issu de la formulation d'une condition suffisante d'unicité connue sous le nom de critère de Hill.

Signalons que ce critère établit qu'il n'y a pas de décharge à la plus petite valeur propre. On démontre ici que la décharge intervient non seulement dans le calcul de la branche bifurquée mais aussi dans la détermination des points de bifurcation. En tenant compte de la possibilité de décharge initiale on met ainsi en évidence l'existence de plusieurs continua de points de bifurcation et on construit les vitesses initiales correspondantes.

L'existence de ces continua semble être caractéristique du flambage plastique et provient certainement de la faculté de la structure à ajuster sa rigidité en fonction du chargement en jouant sur la répartition entre la zone de charge plastique et la zone de décharge.

On donne donc une exploration complète de l'ensemble des points de bifurcation permettant ainsi, en particulier, de montrer une différence importante par rapport au flambage élastique pour lequel le spectre est discret. Notons finalement que l'existence d'un continuum de points de bifurcation a été mise en évidence pour la première fois par Cimetière A. [CIM 1984] au cours des années quatre-vingt pour des plaques élastoplastiques.

### • Bifurcation globale

Les travaux de Hutchinson dans les années soixante-dix furent pionniers pour le calcul de la branche bifurquée issue de la première charge critique dite du module tangent. Cependant cette analyse concerne uniquement le voisinage immédiat de cette charge critique et se présente sous forme de développements asymptotiques formels. La première justification théorique de la validité de ces développements a été donnée par Cimetière A., Elkoulani A., Léger A. [CIM 1994] dans le cadre de l'étude d'un modèle simple. On reprend cette étude et on donne une démonstration différente des résultats de régularité des branches de solutions.

Il a été communément admis qu'un des faits caractéristiques du post-flambage plastique est l'existence d'un maximum pour la branche bifurquée représentée dans un diagramme charge-déflexion. On exhibe un contre exemple en prouvant l'existence de branches strictement monotones et on donne la structure de l'ensemble des solutions, fournissant ainsi le diagramme de bifurcation complet de la structure étudiée. On étudie en particulier l'allure de ces branches ainsi que leur comportement asymptotique pour des grandes déflexions.

### • Suivi de courbes

Comme on va le voir dans l'état des lieux il y avait jusqu'à présent deux manières de traiter le problème du post-flambage en plasticité et qui ont chacune eu leurs limites.

la première consiste à exprimer le post-flambage immédiat sous forme de développements asymptotiques formels exprimant l'incrément de charge en fonction de la projection de la solution sur le mode de flambage. Ces développements sont donnés uniquement pour la branche issue de la première charge critique et sont valables seulement au voisinage immédiat de celle-ci. De plus ces développements asymptotiques font intervenir systématiquement des puissances fractionnaires. L'obtention de termes d'ordre élevé, même du second terme non linéaire, s'avère très difficile.

La seconde se formule dans le cadre des matériaux standards généralisés et exprime le problème en vitesse sous forme d'inéquations variationnelles définies sur un cône convexe. La recherche du premier point de bifurcation est alors ramenée à la recherche du premier point où l'opérateur intervenant dans l'inéquation variationnelle perd sa coercivité. Les résultats mathématiques concernant les inéquations variationnelles avec opérateur non coercif sont rares et souvent incomplets ou inapplicables. D'où la difficulté de l'exploitation d'une telle formulation, pourtant très élégante. La seule exploitation qui en ait été faite pour l'étude du post-flambage a été de la coupler à des méthodes asymptotiques, ce qui pose des problèmes théoriques difficiles liés au problème de dérivabilité dans des inéquations variationnelles.

On exploite alors l'aspect frontières libres du problème et le caractère incrémental de la plasticité. Grâce à une étude de la topologie des zones de décharge on élimine celles-ci en les exprimant en fonction de l'état actuel où se trouve la structure. La résolution du problème en vitesse permet alors de caractériser les branches de solutions par des problèmes de Cauchy standards. La continuation d'une branche s'effectue simplement en résolvant un problème de Cauchy à partir d'une solution connue.

#### • **Sensibilité aux imperfections**

On étudie l'effet d'une perturbation sur la réponse du système. La perturbation est choisie sous la forme d'un défaut géométrique initial. On observe alors la disparition du continuum de points de bifurcation et on montre que les ingrédients techniques mis en oeuvre afin de construire la branche perturbée sont similaires à ceux utilisés pour l'exploration du diagramme de bifurcation de la structure parfaite.

Intuitivement le flambage est une instabilité survenant au sein de la structure. On n'étudie ici que le flambage produit par bifurcation. L'exploration du diagramme de bifurcation permet alors de connaître les positions d'équilibre possibles dans une évolution quasi-statique. L'étude de la stabilité de ces positions d'équilibre pourrait alors nous donner une indication sur le chemin réellement suivi par la structure.

Dans ce travail on se limite à une étude de bifurcation et on n'aborde donc pas les questions de stabilité qui sont certainement très difficiles pour des systèmes non conservatifs, mais qui sont surtout, à notre avis, théoriquement très différentes.

Ce document se divise en trois chapitres de volumes inégaux dont voici les intitulés :

1. État des lieux
2. Étude d'un modèle simple
3. Flambage et post-flambage des poutres élastoplastiques

Présentons rapidement le contenu de ces chapitres.

## 1. État des lieux

Ce chapitre se divise en deux parties :

### A. Premiers résultats :

Cette partie résume les principaux résultats obtenus jusqu'à la fin des années soixante-dix. On discute le critère de charge croissante de Shanley F. R. [SHA 1947] ainsi que le critère de non bifurcation de Hill R. [HIL 1958]. On évoque ensuite la méthode de développements asymptotiques présentée par Hutchinson J. W. [HUT 1973].

### B. Développements récents :

On revoie ici des résultats obtenus dans les années quatre-vingt. Il s'agit en particulier des résultats obtenus par Potier-Ferry M. et Léger A. [LEG 1988] qui proposèrent une méthode de perturbation permettant de calculer le post-flambage immédiat pour des systèmes à pré-flambage hétérogène.

On rappelle également un résultat assez général concernant l'existence des vitesses initiales pour des plaques élastoplastiques obtenu par Cimetière A. [CIM 1984]. Puis on évoque brièvement le modèle de Triantafyllidis N. [TRI 1983] qui permis de mettre en évidence des bifurcations tangentes. Le cadre mathématique des bifurcations élastoplastiques proposé par Nguyen Q.S. [NGU 1981], [NGU 1984] pour les matériaux standards généralisés est également discuté.

## **2. Étude d'un modèle simple**

On propose une nouvelle méthode pour le calcul du flambage et du post-flambage, même lointain, des structures élastoplastiques. Le but de ce chapitre est de présenter cette nouvelle méthode grâce à un modèle simple bien connu dans l'histoire du flambage plastique. Ce modèle, malgré sa simplicité, a le mérite de contenir les difficultés essentielles que l'on rencontre dans l'étude de ce problème. Ce chapitre a donc un caractère prioritairement didactique. Insistons cependant sur le fait que, bien que les résultats de ce chapitre soient obtenus pour un modèle simple, ils permettent une avancée conséquente dans la compréhension du phénomène.

Le chapitre comporte une description du modèle ainsi que son origine. On déroule ensuite la nouvelle méthode permettant d'explorer complètement le diagramme de bifurcation et d'obtenir des résultats de régularité des solutions, puis on déduit une méthode numérique pour calculer effectivement ces branches. On présente finalement l'étude de l'influence des imperfections de type géométrique.

## **3. Flambage et post-flambage des poutres élastoplastiques**

La poutre comprimée reste sans doute la structure la plus étudiée dans l'histoire du flambage et ce sur les plans théorique et expérimental. Cependant les résultats importants dans le cas de l'élastoplasticité sont très récents et très incomplets. Les poutres étudiées dans ce chapitre sont supposées vérifier l'approximation de Navier-Bernoulli et le flambage a lieu en flexion. Sous ces hypothèses, couramment utilisées, on présente des résultats permettant de résoudre le problème de flambage et post-flambage des poutres élastoplastiques en grandes flexions et leur sensibilité aux imperfections.

# CHAPITRE 1

# ÉTAT DES LIEUX

## 1.1. Introduction

Le but de ce chapitre est de présenter un bref état des lieux à propos du flambage et du post flambage plastiques. Il n'a nullement la prétention d'être exhaustif, mais simplement de distinguer les grandes étapes qui ont marqué l'histoire de cette discipline. Cela permet en particulier de situer le présent travail par rapport aux résultats antérieurs.

Dans un premier temps on présente quelques points d'histoire concernant à la fois le flambage élastique et plastique dans le but de montrer la disparité des résultats obtenus au cours de l'évolution de ces deux disciplines.

Ensuite on s'intéresse plus spécifiquement au flambage plastique, et on distingue alors deux grandes étapes :

La première, qui s'étend des années quarante aux années soixante-dix, a vu la publication des premiers résultats importants. Cette période a été marquée successivement par les travaux de Shanley F. R., Hill R. et Hutchinson J. W..

La seconde concerne des résultats plus récents obtenus au cours des années quatre-vingt et quatre-vingt-dix. Parmi les acteurs de cette période on peut citer sans être exhaustif : Cimetière A., Léger A., Nguyen Q.S., Potier-Ferry M., Triantafyllidis N..

## 1.2. Un peu d'histoire

Quoique largement décrites dans une littérature abondante quelques étapes de la théorie du flambage élastique sont utiles à rappeler même très brièvement.

Le flambage d'Euler est connu depuis plus de deux siècles et demi et consiste à caractériser le premier point de perte d'unicité de la solution d'équilibre d'une structure élastique comprimée grâce à un problème de valeurs propres.

La description du post-flambage a été fournie au milieu des années quarante par les travaux de Koiter T. [KOI 1945] qui proposa en particulier une manière d'obtenir la branche bifurquée sous forme d'un développement en série entière. Ces travaux ont été repris dans les années soixante-dix et une synthèse, faisant le

point sur les calculs de flambage, post-flambage, et stabilité élastiques, a été publiée par Budiansky B. [BUD 1974]. On trouve également un exposé du flambage des structures élastiques dans les livres de Timoshenko S. P. [TIM 1966], de Thomson J. M. T. et Hunt G. W. [THO 1973] puis de Brush D. O. et Almroth B. O. [BRU 1975].

Les apports suivants à l'étude des bifurcations élastiques sont essentiellement de trois ordres : approfondissements théoriques, applications particulières, méthodes numériques.

Sur le plan théorique, les travaux de Koiter T. ont largement été revus et complétés. Citons par exemple Berger M. qui a repris mathématiquement le problème du flambage des plaques de Von Karman à la lumière des apports récents de la théorie des bifurcations [BER 1973]. Parallèlement à l'étude des bifurcations, les questions de stabilité recevaient à cette époque de solides bases mathématiques [SAT 1973], [POT 1978].

Plus récemment, des développements ont été proposés liés à des applications particulières, structures présentant de très grands rapports d'aspects par exemple [POT 1985] ou nouveaux matériaux comme l'étude du microflambage des composites [FER 1991], [MAR 1993].

L'équilibre des structures élastiques conduisant à des non linéarités régulières, il est apparu rapidement que les méthodes de continuation issues de l'analyse numérique des problèmes de bifurcation étaient applicables à la construction des branches [KEL 1977], [RIK 1979]. Citons cependant dans ce domaine un développement récent consistant en une nouvelle méthode de suivi de courbes proposée par Cochelin B., Damil N. et Potier-Ferry M. [COC 1994]. Cette méthode combine des idées issues des méthodes de continuation antérieures et des développements asymptotiques selon des paramètres bien choisis.

On va voir que la situation est bien différente et beaucoup moins avancée en plasticité. Les premiers résultats remontent à la fin du dix-neuvième siècle. Ils concernent essentiellement la détermination de la valeur de la charge critique pour une poutre comprimée. Un débat important s'était engagé à cette période à propos de la charge critique en plasticité. Les principaux acteurs en sont Engesser [ENG 1889], [ENG 1895], Considère [CON 1891] et Von Karman [VON 1910].

Le résultat de ce débat était alors une alternance de résultats justes puis faux sur la valeur de la charge critique de la poutre comprimée : la valeur donnée était soit celle dite du module tangent mais obtenue en négligeant la possibilité de décharge, pourtant spécifique de la plasticité, soit celle dite du module réduit, obtenue en prenant en compte la possibilité de décharge mais en supposant, comme dans la méthode de l'équilibre adjacent issue de l'élasticité, que le flambage avait lieu à charge constante. Ce qui fait que l'on a vu se succéder des résultats faux dont les justifications pouvaient être en partie correctes, et des résultats justes mais dont les justifications étaient incorrectes. Il est intéressant d'observer que seul le comportement distinguait ce problème, en apparence très simple, de celui d'Euler, alors résolu correctement depuis un siècle et demi. Et cette situation n'a pas évolué jusqu'au milieu du vingtième siècle environ.

### 1.3. Premiers résultats significatifs

Le débat concernant la détermination de la charge critique de la poutre comprimée à comportement élastoplastique n'a reçu de réponse définitive, dans le sens réponse juste et bien justifiée, qu'au milieu du vingtième siècle avec les travaux de Shanley F. R. [SHA 1947].

En 1947 Shanley, afin de simuler le comportement de la section d'une poutre, proposa un système à deux ressorts de comportement élastoplastique supportant deux barres rigides soumises à une force  $\lambda$  ( cf. Fig.1.1 ).

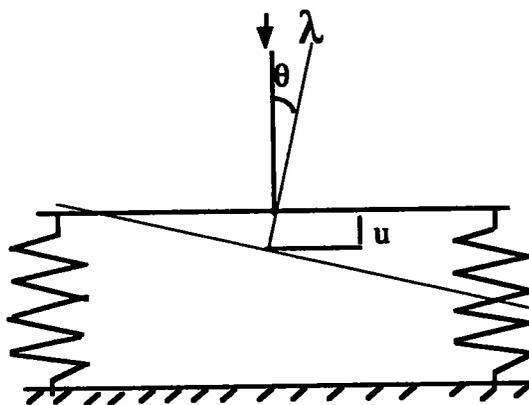


Fig.1.1 : Le système de Shanley

Ce système à deux degrés de liberté, à savoir le déplacement vertical  $u$  et la déflexion latérale  $\theta$ , est connu dans la littérature sous le nom de colonne de Shanley. Il a été déterminant dans l'établissement de la valeur correcte de la charge critique.

En effet Shanley montra pour ce système qu'après une phase de compression uniforme une bifurcation de positions d'équilibre sous un chargement  $\lambda$  strictement croissant est possible. L'un des deux ressorts est alors en charge neutre et la valeur correspondante du chargement  $\lambda$  est la charge critique du module tangent. Cette valeur étant plus petite que la charge critique du module réduit, Shanley établit ainsi définitivement que la vraie valeur de la charge critique est celle du module tangent. La généralisation de ce critère à une structure continue exige que la bifurcation se produise à charge croissante et avec l'apparition d'un point de charge neutre dans la structure. La justification de la valeur de la charge critique obtenue avec l'application de ce critère a été reprise récemment [LEG 1993a].

Ce résultat, qui a été donc donné seulement pour un modèle très simple et concerne uniquement la charge critique, fut considéré comme une avancée significative dans la compréhension du flambage plastique. Il est intéressant de noter qu'à la même époque Koiter venait, pour des structures générales, de donner les moyens de calculer complètement le post-flambage et la sensibilité aux imperfections en élasticité. On observe ainsi la disparité des résultats obtenus pour le flambage élastique et plastique.

Les développements suivants se sont globalement orientés vers deux axes :

- Le premier axe traite du problème, bien connu aujourd'hui, qui est un écart important apparu entre les résultats théoriques et expérimentaux.

Par analogie avec l'élasticité on attribua d'abord cet écart aux imperfections inévitables expérimentalement ou à la mauvaise prise en compte des conditions aux limites. Un paradoxe était en effet apparu, à savoir que la loi de déformation, qui ne permet pourtant pas de décharge, fournissait des résultats plus proches de l'expérience que la loi plastique incrémentale qui est considérée plus réaliste [DRU 1949].

Ce paradoxe causa un débat d'une part à propos de la représentation de la loi de comportement et son rôle dans le flambage [BIJ 1949], et d'autre part à propos du rôle effectif des imperfections [CIC 1950], [ONA 1953], [GER 1957].

Les explications fournies sur ces points divergent. Pour des systèmes élastiques sous-critiques on sait que l'effet d'une imperfection est la diminution de la valeur de la charge critique. En conjecturant que qualitativement le même effet se produisait en plasticité incrémentale on donnait ainsi une explication de la surestimation de la charge critique. Mais ce rôle des imperfections était remis en cause par d'autres auteurs et, après de nombreuses phases de débat, on s'orienta aussi vers une étude de l'effet possible sur la valeur des charges critiques de la modélisation choisie pour le comportement. Un résumé très intéressant de cette période, et de ce débat, a été publié par Hutchinson J. W. [HUT 1974].

- Le deuxième axe développe les fondements mathématiques qui sont de deux ordres :

- formulation d'un critère d'unicité et premiers résultats de stabilité [HIL 1950], [HIL 1957], [HIL 1958], [HIL 1959].

- le calcul du post-flambage immédiat au voisinage de la charge critique [HUT 1972], [HUT 1973], [HUT 1974].

Hill, dont les résultats essentiels sont contenus dans la référence [HIL 1958], proposa, dans le cadre des matériaux à comportement irréversible obéissant au principe de dissipation maximale et pour des conditions assez générales, un critère garantissant l'unicité de la réponse du système. Ce critère utilise la notion de "solide élastique de comparaison" qui est un matériau fictif dont le comportement est identique à celui de la loi plastique tant que le matériau est en charge, mais dans lequel a été supprimée toute possibilité de décharge irréversible. Le critère assure l'unicité de la réponse en vitesse du solide élastoplastique après comparaison avec ce matériau fictif. C'est donc un critère de non bifurcation transverse.

Sans entrer dans les détails, insistons sur le fait que ce critère est bien une condition suffisante d'unicité, et non une condition de bifurcation. Ajoutons de plus que ce critère ne prend pas en compte les possibilités de bifurcation tangentes, alors qu'il a été montré plus récemment [TRI 1983] que cela était possible. De plus dans certains cas particuliers, l'unicité peut être assurée jusqu'à des valeurs très supérieures à celle données par ce critère [CIM 1989].

En même temps que son critère d'unicité, Hill proposa une condition suffisante de stabilité. Ce critère de stabilité est exprimé de la même manière que la condition suffisante d'unicité mais avec une différence importante concernant l'ensemble des vitesses admissibles : espace vectoriel pour l'unicité, cône convexe pour la stabilité. Il reste important de garder à l'esprit ces résultats de Hill, à savoir que les notions de stabilité et de bifurcation ne sont pas synonymes, et les critères correspondants n'ont pas a priori de raison de fournir la même valeur en plasticité, comme ils le font pour la première bifurcation en élasticité.

On arrive aux années soixante-dix marquées essentiellement sur ces points par les travaux de Hutchinson J. W.. Après plusieurs publications il proposa une synthèse en 1974 [HUT 1974]. La nouveauté principale de ces travaux concerne le calcul de la branche post-critique au voisinage de la charge critique obtenue grâce au critère de Hill et en supposant que le flambage a lieu à partir d'un état pré-bifurqué homogène. Cette analyse est difficile et très technique. On se limite ici à en rappeler les principaux résultats et à en discuter les conclusions qualitatives. Ces conclusions ont été considérées depuis comme fixant des caractéristiques du flambage élastoplastique.

Il est d'usage en théorie des bifurcations de représenter les résultats sous forme de diagrammes tracés dans un plan où l'axe des ordonnées est le paramètre de bifurcation ( dans le cas où celui-ci est scalaire ) et où l'axe des abscisses porte une grandeur scalaire donnant certaines informations sur l'amplitude de la solution.

Dans le cas du flambage, et précisément dans l'analyse de Hutchinson, le paramètre de bifurcation est la valeur de la charge  $\lambda$ . La solution est représentée par une grandeur scalaire positive  $\xi$  qui est la projection de la solution sur le mode de flambage obtenu comme vecteur propre du problème aux valeurs propres qui fournit la charge critique. La réponse post-critique est alors exprimée sous forme d'une courbe charge  $\lambda$  en fonction de cette mesure du déplacement  $\xi$ .

Le résultat principal de Hutchinson consiste à exprimer cette réponse sous la forme d'un développement asymptotique écrit de la manière suivante:

$$\lambda = \lambda_T + \lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi^{1+\beta} + \dots$$

Dans cette expression  $\lambda_T$  est la valeur de la charge critique obtenue grâce au critère de Hill. C'est la charge critique du module tangent.  $\lambda_1$  est la pente de la branche  $\lambda = \lambda(\xi)$  au point  $\{\lambda = \lambda_T, \xi = 0\}$ .  $\lambda_1$  est dans ce résultat strictement positif. La bifurcation est donc à charge croissante et la charge maximale est donc sans doute au-delà de  $\lambda_T$ .

Le coefficient  $\lambda_2$  du premier terme non linéaire est toujours négatif. L'exposant de ce terme comprend un nombre réel  $\beta$  strictement compris entre 0 et 1. Techniquement obtenu comme quotient de deux entiers,  $\beta$  est en fait un rationnel. Sa valeur précise dépend de la structure. Pour les plaques, coques, poutres de section circulaire flambant à partir d'un état homogène,  $\beta$  vaut  $1/3$ . Pour des poutres il prend des valeurs différentes dépendant principalement de la forme de la section. De même il sera établi plus tard que sa valeur est modifiée si l'état pré-bifurqué est hétérogène.

Les termes qui suivent le premier terme non linéaire n'ont, à notre connaissance, jamais été calculés pour un problème continu. Ils ont toutefois été donnés par Hutchinson pour un modèle simple [HUT 1973]. Aucun résultat n'existe à cette période quant à la convergence de ce développement, à l'étendue de sa validité, à l'existence des branches ainsi construites.

les propriétés de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\beta$  qu'on vient d'évoquer permettent d'obtenir l'allure suivante de la branche bifurquée obtenue en tronquant le développement au delà du premier terme non linéaire.

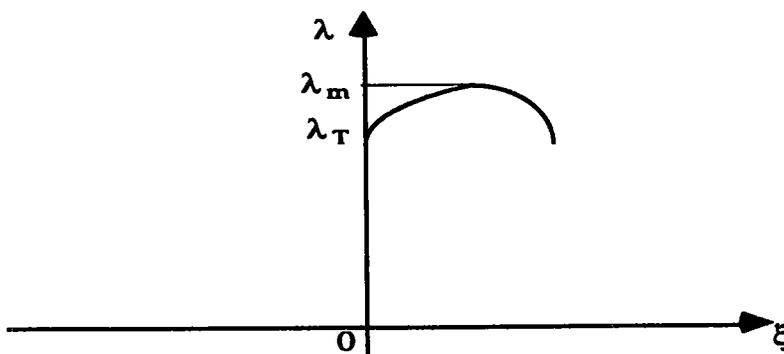


Fig.1.2. Courbe charge-déflexion

L'allure de la branche bifurquée a conduit alors à des résultats qualitatifs sur le flambage élastoplastique largement acceptés depuis :

- Dans le diagramme  $\{\lambda, \xi\}$  la courbure de la branche est vers le bas.
- La branche est non monotone et conduit à une charge maximale  $\lambda_m$  généralement proche de  $\lambda_T$ .

Ces conclusions restaient valables quelle que soit la non linéarité géométrique choisie, et l'on concluait alors que dans le cas de la plasticité la non linéarité matérielle l'emportait sur la non linéarité géométrique. L'allure, représentée figure Fig.1.2, du diagramme de bifurcation pouvait donc être donnée comme caractéristique générale du flambage plastique. La compétition entre non linéarités matérielles et géométriques a été discutée dans des travaux très récents [LEG 1995].

Avec les mêmes ingrédients Hutchinson J. W. [HUT 1973] a étudié l'influence de petites perturbations sur le flambage. Il démontra que, de la même manière que pour les systèmes parfaits, après une phase de charge stricte il y a apparition d'un point de charge neutre dans la structure. La valeur de la charge à ce moment est inférieure à la charge critique fournie par le critère de Hill pour le système non perturbé. Autour de ce point de charge neutre se développe alors une zone de décharge et la branche est fournie sous forme d'un développement asymptotique. Tronquer ce développement après le premier terme non linéaire permet alors d'avoir une estimation de la charge maximale supportable par la structure.

Une conclusion immédiate, découlant de cette estimation, est que l'effet d'une perturbation en flambage plastique est l'abaissement de la charge maximale. Plus précisément le rapport de la charge maximale du système perturbé à celle du système parfait est du même ordre de grandeur que le rapport entre la charge où apparaît le premier point de charge neutre pour la structure imparfaite et la charge critique du module tangent pour le système parfait.

Cette conclusion est depuis, et jusqu'à très récemment, parmi les acquis admis en ce qui concerne le flambage plastique. Dans ce travail on revient sur cette question importante. On détaille l'obtention de l'existence et la construction de branches perturbées. On fournit en particulier un exemple de structure continue où cette conclusion est remise en cause.

Insistons, finalement, sur le fait que les développements asymptotiques proposés par Hutchinson sont formels et ne constituent aucunement une démonstration rigoureuse de l'existence effective de la branche bifurquée. Cette démonstration n'a été obtenue, même pour un modèle très simple, que très récemment [CIM 1994].

## 1.4. Développements récents

De nombreux travaux se sont succédés ensuite, appliquant essentiellement les résultats de Hutchinson. Sans être exhaustif citons dans ce cadre : Needleman et Tvergaard [TVE 1975a] pour l'étude du post-flambage de poutres avec des sections non symétriques, puis [TVE 1977] pour l'analyse du post-flambage des plaques et des coques, des structures avec raidisseurs,...

En même temps, le problème de l'écart entre les valeurs théorique et expérimentale de la charge critique est repris [BUS 1974]. Hutchinson et Christoffersen [HUT 1979] reviennent sur cette question en proposant une analyse du comportement qui prenne en compte la formation de coins sur la surface seuil. Sans entrer dans les détails signalons simplement que cette loi est issue de l'étude du mécanisme de la déformation plastique au sein du polycristal.

La question de savoir si cet apport à la description du comportement règle le débat sur l'écart entre les résultats théoriques antérieurs et l'expérience en ce qui concerne le flambage n'est d'ailleurs pas réglée actuellement. Elle a motivé des travaux récents tels que ceux de Ben Bagdad K. [BEN 1992] et de Potier-Ferry M. et Cimetière A. [POT 1993] qui proposèrent un critère de bifurcation pour la loi phénoménologique dite du " $J_2$  avec coin" de Christoffersen et Hutchinson. Pour ce critère et cette loi Ben Bagdad trouva une valeur de la charge critique plus faible que celle donnée par la théorie de la déformation et donc susceptible de coïncider avec les résultats expérimentaux.

Rappelons d'autre part que le critère de Hill est basé sur l'existence de deux vitesses distinctes. Il a été démontré que le flambage se produit bien de cette manière lorsque l'état prébifurqué est homogène entièrement plastique, et pour des chargements pas trop complexes.

Cependant, il a été établi qu'un critère de bifurcation pouvait être satisfait bien qu'il y ait unicité de la réponse en vitesse. Plus précisément Triantafyllidis [TRI 1983] a proposé un modèle simple ( cf. Fig.1.3.) qui a mis en évidence l'existence de bifurcations tangentes, et a donné, pour ce modèle simple, une expression de la branche bifurquée sous forme d'un développement asymptotique. Selon le même auteur ce genre de bifurcation peut se produire aussi fréquemment que la bifurcation transverse. Repris plus tard, il a en tout cas été considéré comme une des singularités possibles en plasticité [LEG 1993b]. Dans le présent travail on n'étudie que des systèmes à pré-flambage homogène et pour lesquels on démontre qu'il n'y a pas de bifurcations tangentes.

Un aspect important des développements récents a été l'intervention des mathématiques dans ce domaine. Les premiers travaux étudiant le flambage plastique d'un point de vue mathématique avaient utilisé une loi de comportement régularisée, par exemple [DO 1980]. Mais cela s'est rapidement transformé.

Rappelons que les inéquations variationnelles, introduites dans les années soixante [FIC 1964], [LIO 1969], ont rapidement eu des applications en mécanique. On s'est aperçu que la plasticité pouvait justement se mettre sous cette forme [MOR 1970], [DUV 1972]. Dès lors le cadre mathématique et le formalisme global ont été revus. Après une réécriture des lois de comportement dissipatives, fournissant en particulier un cadre très élégant à la théorie de la plasticité la plus communément adoptée (cadre des matériaux standard généralisés) [HAL 1975], Nguyen Q.S. proposa un cadre général pour les problèmes de bifurcation des systèmes obéissant au principe de dissipation maximale [NGU 1981], [NGU 1984]. Celui-ci est directement issu des résultats mathématiques sur les inéquations variationnelles. C'est ainsi qu'une théorie unifiée a été proposée pour des mécanismes dissipatifs en apparence très différents tels que la plasticité, le frottement, l'endommagement ou la rupture.

Elle consiste d'abord à éliminer le déplacement grâce à l'équilibre. Le problème se formule ensuite uniquement en vitesse de variables internes. Celle-ci doit appartenir au cône des normales extérieures au convexe des états admissibles au point caractérisant l'état actuel du système.

C'est à partir de ce cadre qu'a d'abord commencé à être reprise également l'étude du post-flambage.

Parallèlement, et dans le cadre des matériaux standard généralisés, Cimetière A. [CIM 1984] a proposé un modèle de plaques élastoplastiques subissant de fortes flexions. A la différence de Nguyen Q. S. il a donné une formulation mixte du problème en gardant comme inconnue principale le couple composé du déplacement et de la variable interne. Grâce à cette formulation il a repris le problème de bifurcation en s'intéressant principalement au problème du flambage naissant. Il a démontré ainsi que toutes les valeurs du chargement comprises à l'intérieur d'un certain intervalle sont des valeurs de bifurcation.

L'extrémité inférieure de cet intervalle est la valeur fournie par le critère de Hill, l'extrémité supérieure est celle qu'obtenait Engesser ou Considère à la fin du dix-neuvième siècle et qui est également associée au nom de Katchanov [KAC 1975] sous le nom de charge critique du module réduit. Moyennant quelques hypothèses sur l'état fondamental il a obtenu le résultat grâce à la minimisation d'une fonctionnelle issue directement de la formulation en inéquation variationnelle. C'est ainsi que Cimetière A. [CIM 1984] a mis en évidence l'existence d'un continuum de points de bifurcation pour une structure continue à comportement élastoplastique.

Notre étude confirme ce résultat. On montre de plus, pour une structure continue, que tout l'intervalle allant de la charge critique du module tangent à la charge critique d'Euler est rempli de points de bifurcation et qu'il existe plusieurs continua de points de bifurcation pouvant se chevaucher ou non.

Notons ici que sur le plan mathématique l'existence d'un continuum de points de bifurcation n'est nullement surprenante. La recherche des points de bifurcation en plasticité revient à résoudre un problème de valeurs propres non linéaire pour une inéquation variationnelle définie sur un cône convexe et non pour une équation variationnelle définie sur un espace vectoriel. L'existence d'un spectre continu pour de tels problèmes était alors admise par plusieurs mathématiciens [MIE 1983], [QUI 1985]. Cependant la théorie concernant ce genre de problème ne comprend jusqu'à nos jours que peu de résultats généraux pouvant s'appliquer en particulier à la plasticité. Insistons sur le fait que, dans notre étude, l'existence de continua de points de bifurcation a été obtenue en étudiant directement les équations locales et non la formulation en inéquation variationnelle. Cela permet en particulier, certes dans le cas d'une poutre, de construire explicitement les vitesses initiales correspondantes et d'en connaître le nombre exact.

D'autre part et dans le cadre du formalisme des matériaux standard généralisés Nguyen Q. S. [NGU 1984] a proposé, par analogie avec le principe de la seconde variation issu de l'élasticité, un critère de stabilité basé sur la minimisation d'une fonctionnelle représentant en quelque sorte un potentiel plastique. Grâce à ce critère de stabilité Nguyen Q. S. montra alors que toutes les branches éventuelles issues des points de bifurcation compris entre la charge critique du module tangent et celle du module réduit sont stables.

On a vu tout au long de ce chapitre que maints travaux sur le flambage plastique étaient motivés ou suggérés par leurs analogues en élasticité. Dans le cadre des développements mathématiques faisant suite à la théorie de Koiter Potier-Ferry M. avait développé une classification des catastrophes en élasticité. Techniquement cette classification était basée sur l'étude de la nullité ou non, et sur le signe des premiers termes intervenant dans un développement en série entière de la branche bifurquée. Par analogie avec les résultats issus de l'étude de la stabilité élastique et en utilisant à la fois le cadre des matériaux standard généralisés et des résultats récents de théorie des catastrophes [THO 1972], Potier-Ferry M. proposa une première classification des catastrophes pour des systèmes à comportement irréversible et à nombre fini de degrés de liberté [POT 1985].

Cette idée de classification des singularités en plasticité a été reprise plus tard par Léger A. et Potier-Ferry M. [LEG 1988], [LEG 1993b]. Après un retour sur le critère de Shanley F. R., dont ils proposèrent une nouvelle justification même pour des cas à pré-flambage hétérogène, ils reformulèrent le critère de Hill grâce à une nouvelle écriture du problème de l'équilibre quasi-statique d'une structure élastoplastique. Cette écriture est une variante de celle proposée par Nguyen Q. S. semblable à celle utilisée par Cimetière A. pour les plaques plastiques. L'inconnue principale est le couple formé par le déplacement et le multiplicateur plastique.

La question qui s'est posée ensuite était en quelque sorte la réciproque du critère de Hill. Si celui-ci est vérifié a-t-on effectivement l'existence d'une vitesse initiale bifurquée ou d'une branche bifurquée ? La réponse à cette question a amené Léger A. et Potier-Ferry M. à distinguer plusieurs cas selon que le mode de flambage s'annule ou non au bord du domaine plastique et selon la position du point initial de charge neutre dans la zone plastique. Ils ont pu alors mettre en évidence trois types de bifurcations génériques.

Les deux premières sont des bifurcations transverses au sens où existe effectivement une vitesse initiale bifurquée. Celle-ci est construite comme la somme de la solution fondamentale et d'un terme proportionnel au mode. La constante de proportionnalité est alors calculée pour tenir compte de deux conditions : la positivité du multiplicateur plastique et l'existence d'un point de charge neutre dans la structure. Lorsque le mode s'annule au bord de la zone plastique il existe effectivement une constante vérifiant ces conditions. Son calcul diffère selon que le point de charge neutre est strictement à l'intérieur de la zone plastique ou se trouve à la frontière de celle-ci et l'on a ainsi les deux premiers cas génériques.

Le troisième bifurcation générique correspond au cas où le mode ne s'annule pas en un point du bord du domaine plastique. Léger A. et Potier-Ferry M. aboutirent alors au fait que la constante de proportionnalité est nécessairement nulle. Il y a alors unicité donc de la réponse en vitesse. La bifurcation ne peut être dans ce cas que tangente et des exemples ont montré que ce cas existe bien.

Rappelons en effet que Triantafyllidis [TRI 1983] a construit une branche bifurquée tangente à la branche fondamentale pour un modèle simple. Il y a quelques années Ben Bagdad K. [BEN 1992] a exhibé un cas de bifurcation tangente pour une structure continue et pour la loi dite " $J_2$  avec coins" de Christoffersen et Hutchinson et a donné un début de développement asymptotique de la branche bifurquée.

En même temps et dans le cadre des mêmes travaux, Léger A. et Potier-Ferry M. ont proposé une méthode différente pour calculer le post-flambage immédiat au voisinage de la charge critique du module tangent.

Sans s'attarder sur les détails signalons simplement que c'est une méthode proposant de décrire la branche bifurquée avec un développement asymptotique semblable à celui donné par Hutchinson J. W.. Elle est basée sur une méthode de perturbation et de ce fait les résultats obtenus ne sont valables qu'au voisinage de la charge critique.

Cette méthode a été introduite afin de rendre systématique et rigoureux le calcul post-critique proche. Une des nouveautés à l'époque était l'application de cette méthode à des cas où le pré-flambage est inhomogène. Ce cas n'était jusqu'alors pas traité dans la littérature. Léger A. et Potier-Ferry M. ont exhibé en

particulier un cas générique de bifurcation pour lequel le point de charge neutre apparaît au bord de la zone plastique. Ils ont montré par exemple comment dans ce cas l'évolution de la frontière entre la zone élastique et la zone plastique, qui existait avant le flambage, est modifiée par l'apparition et l'évolution d'une zone de décharge.

Signalons dans le cadre des développements asymptotiques les travaux de Camotim D. R. [CAM 1992] qui a étudié l'influence des contraintes résiduelles sur les premiers termes de ces développements.

Insistons sur le fait que pendant toute cette période et jusqu'à très récemment on ne disposait d'aucun résultat ni d'existence des branches bifurquées ni de convergence des développements asymptotiques. Ceux-ci ont été présentés plutôt comme des méthodes de calcul et non comme de véritables preuves d'existence. Le seul début d'exploration du spectre a été proposé par Cimetière A. pour le problème des vitesses initiales pour des plaques élastoplastiques.

La compréhension du problème a évolué rapidement au cours des dernières années. D'abord Cimetière A. et Léger A. [CIM 1996] pour un modèle simple, en effectuant non plus un calcul asymptotique mais une intégration numérique directe, ont observé que les résultats asymptotiques sont apparemment bons pour de très petits voisinages de la charge critique du module tangent et de la solution fondamentale; mais que ceux-ci s'écartent rapidement du calcul direct dès que se développe une déflexion. Cet écart amène à conclure que, bien que les premiers termes du développement asymptotique soient justes, la charge maximale qui en est déduite en tronquant le développement après le premier terme non linéaire est fautive. De plus la branche issue de la charge critique du module tangent est strictement monotone et tend vers la charge critique du module réduit.

Les résultats plus récents sont contenus dans le travail qui suit. Bien que certains aient partiellement été publiés récemment [CIM 1994], [ELK 1996], on en détaille ici l'exposition, voire on en propose une autre démonstration.

## CHAPITRE 2

ÉTUDE D'UN MODÈLE  
SIMPLE

## 2.1. Introduction

Dans ce chapitre on explore le comportement d'un modèle simple avant d'aborder dans le chapitre suivant l'étude d'un cas plus complexe. Nous allons voir que cette exploration conduit à nombre de résultats qualitatifs spécifiques du flambage plastique tant sur les propriétés spectrales que sur le comportement post-critique lointain.

Le modèle étudié ici est représenté par la figure Fig.2.1. Il a un demi-siècle d'histoire. Il a été introduit pour la première fois par Von Karman T. [KAR 1940] pour étudier le flambage des structures élastiques.

Il a été repris ensuite par Shanley F. R. [SHA 1947] pour simuler le comportement des poutres élastoplastiques. Ce dernier a pu, grâce à ce modèle, montrer correctement que le flambage se produit à la charge critique du module tangent. Hutchinson J. W. [HUT 1974] a proposé une généralisation de ce modèle pour exposer une méthode de développement asymptotique de la branche bifurquée au voisinage du premier point critique.

Une version plus complexe du modèle, permettant des états prébifurqués hétérogènes, a été le sujet d'investigation de Triantafyllidis N. [TRI 1983] qui mit en évidence l'existence de bifurcations tangentes. Ensuite, Léger A. et Potier-Ferry M. [LEG 1988] ont utilisé ce modèle pour illustrer une nouvelle méthode de calcul du post-flambage des poutres élastoplastiques. Dans ce chapitre on étudie le modèle dans la version proposée par Hutchinson afin d'introduire une nouvelle méthode de calcul du post-flambage, même lointain, des poutres élastoplastiques.

On donne des résultats d'existence des branches bifurquées permettant ainsi d'explorer complètement le diagramme de bifurcation de ce modèle. Le problème du calcul de la charge maximale supportable par la structure, qui est un des buts de l'analyse post-critique, est résolu simplement comme corollaire immédiat de ces résultats.

## 2.2. Le modèle étudié et les équations du problème

Dans ce paragraphe, on présente le modèle étudié.

Il s'agit de deux barres rigides, rigidement liées entre elles et disposées en té. Ces deux barres reposent sur un tapis de ressorts élastoplastiques occupant continûment l'intervalle  $[0,2]$  de l'axe  $(Ox)$  (voir figure Fig.2.1). Chaque ressort est fait de ressorts élastiques et d'un patin constituant donc, comme représenté sur la figure Fig.2.3, un modèle simple de ressort élastoplastique avec écrouissage cinématique. Tous les ressorts sont supposés identiques. Leur extrémité inférieure est attachée au support alors que leur extrémité supérieure est attachée à la barre horizontale.

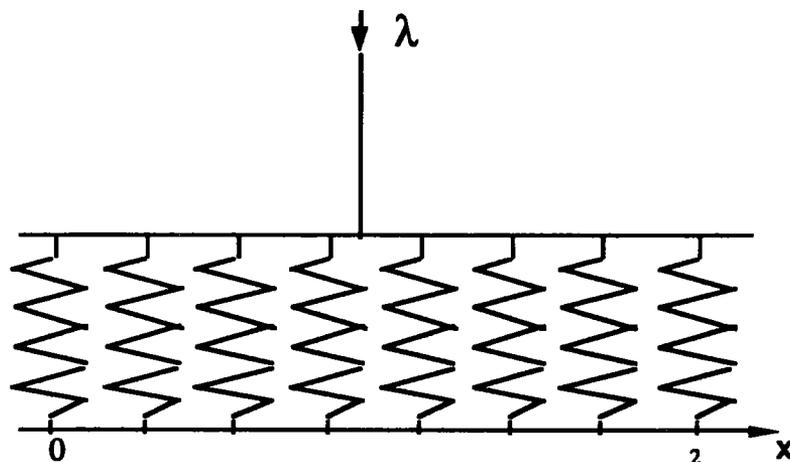


Fig.2.1 : Le modèle simple

Les deux degrés de liberté sont le déplacement vertical  $u$  et la déflexion latérale  $\theta$ . Les orientations sont spécifiées sur la figure Fig.2.2.

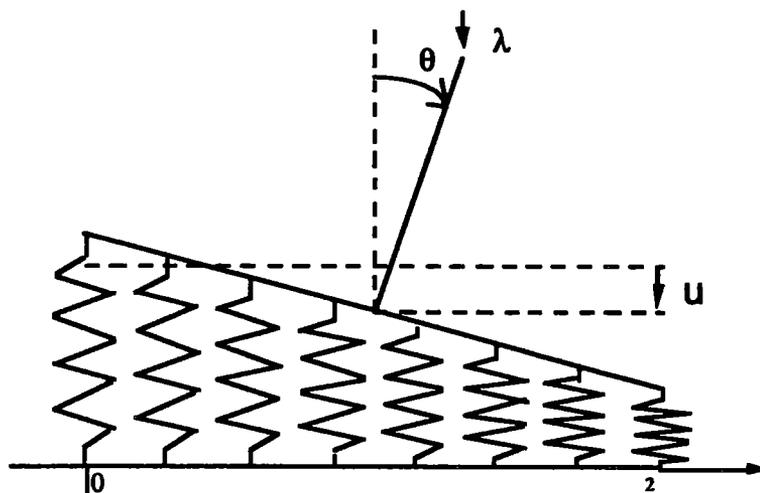


Fig.2.2 : Le modèle simple en position fléchie

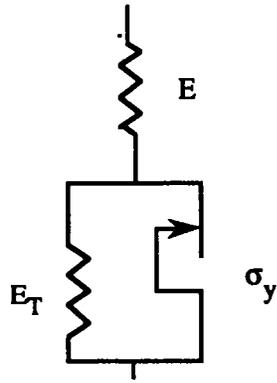


Fig.2.3 : Modèle rhéologique de chaque ressort élastoplastique

**Remarque :**

Puisque les barres sont rigides, ce modèle ne possède que deux degrés de liberté. Le problème sera donc non seulement discret mais de petite dimension. Il permettra cependant de voir varier continûment l'état de déformation dans les ressorts. Comme noté précédemment, il est simple, mais garde quelques ingrédients décisifs d'un vrai problème continu.

Ce système est en équilibre mécanique sous l'action d'une charge morte verticale  $\lambda$ . On suppose de plus qu'il y a une petite déflexion initiale  $\bar{\theta}$ . Celle-ci joue le rôle d'imperfection. Elle est supposée positive et pour des raisons de symétrie il est inutile d'étudier le cas  $\bar{\theta} < 0$ .

Le problème de flambage est traité dans le cadre de petites rotations. Dans ce cadre la déformation totale du ressort d'abscisse  $x$  s'exprime en fonction du déplacement  $(u, \theta)$  comme suit :

$$\boxed{\varepsilon(x) = u + (x - 1) \theta}$$

On note  $\sigma(x)$  la contrainte au sein du même ressort et  $\alpha(x)$  sa déformation plastique. La loi de Hooke s'exprime alors :

$$\boxed{\sigma = E(\varepsilon - \alpha)}$$

Pour le comportement du matériau constituant les ressorts on prend une loi de plasticité avec un écrouissage cinématique linéaire et strictement positif. Cette loi de comportement, qui traduit le système à ressorts et patins de la figure Fig.2.3, est représentée figure Fig.2.4.

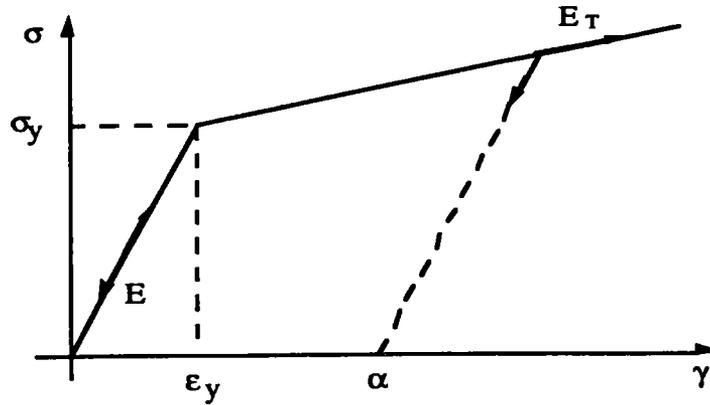


Fig.2.4 : Loi de comportement

Le comportement s'écrit alors de manière incrémentale sous la forme :

- $\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}$  en charge élastique ou en décharge,
- $\dot{\sigma} = E_T \dot{\epsilon}$  en charge plastique.

D'autre part, l'équilibre de la résultante des forces et des moments aboutit aux deux équations suivantes :

$\lambda = \int_0^2 \sigma(x) dx \tag{2.1.a}$	(2.1)
$\lambda L(\theta + \bar{\theta}) = \int_0^2 (x-1) \sigma(x) dx \tag{2.1.b}$	

## 2.3. Solutions élastiques

Pour un chargement peu élevé la structure se comporte élastiquement. L'objet de ce paragraphe est de rappeler le diagramme de bifurcation de cette structure en supposant les ressorts élastiques et identiques.

### 2.3.1. Le système parfait

On suppose ici que l'imperfection  $\bar{\theta}$  est nulle. L'état initial est parfaitement symétrique. La déformation plastique  $\alpha$  est nulle. Les équations d'équilibre (2.1.a) et (2.1.b) se réécrivent :

$\lambda = \int_0^2 \sigma(x) dx \tag{2.2.a}$	(2.2)
$\lambda L\theta = \int_0^2 (x-1) \sigma(x) dx \tag{2.2.b}$	

En tenant compte de la loi de comportement  $\sigma = E \varepsilon$  et de l'expression de la déformation  $\varepsilon(x) = u + (x - 1) \theta$  les équations (2.2.a) et (2.2.b) deviennent :

$u = \frac{\lambda}{2E}$	(2.3.a)	
$(\lambda - \lambda_E)\theta = 0$	(2.3.b)	(2.3)
$\lambda_E = \frac{2E}{3L}$	(2.3.c)	

$\lambda_E$  est la charge critique élastique.

Il est alors facile de voir que dans le plan  $(\theta, \lambda)$  les seules solutions sont les branches  $(\theta = 0, \lambda \in \mathbb{R}^+)$  et  $(\theta \in \mathbb{R}, \lambda = \lambda_E)$ . Elles se rencontrent au point  $(\theta = 0, \lambda = \lambda_E)$  qui est donc le seul point de bifurcation. On obtient donc le diagramme de bifurcation représenté par la figure Fig.2.5.

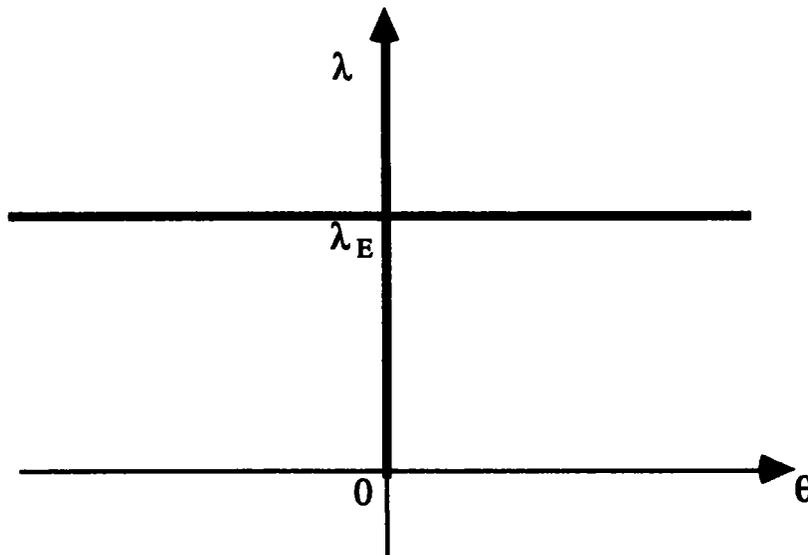


Fig.2.5. Branches de solutions en régime élastique (Lignes épaisses)

Ce diagramme est analogue à celui de la poutre d'Euler autour de chaque valeur propre. Ceci explique combien le modèle étudié ici est représentatif du comportement de poutres élastiques.

On verra par la suite qu'on aboutit aux mêmes conclusions dans le cas des poutres élastoplastiques.

### 2.3.2. Le système perturbé

On suppose maintenant que  $\bar{\theta} > 0$ . L'effet de cette imperfection est de supprimer le point de bifurcation.

Dans le plan  $(\theta, \lambda)$  on obtient deux branches de solutions qui ne s'intersectent pas dont l'une démarre à l'origine  $\left(\theta \geq 0, \lambda = \lambda_E \frac{\theta}{\theta + \bar{\theta}}\right)$  et l'autre n'est pas atteignable à partir de l'origine  $\left(\theta \leq 0, \lambda = \lambda_E \frac{\theta}{\theta + \bar{\theta}}\right)$ .

Ceci est représenté sur la figure Fig.2.6.

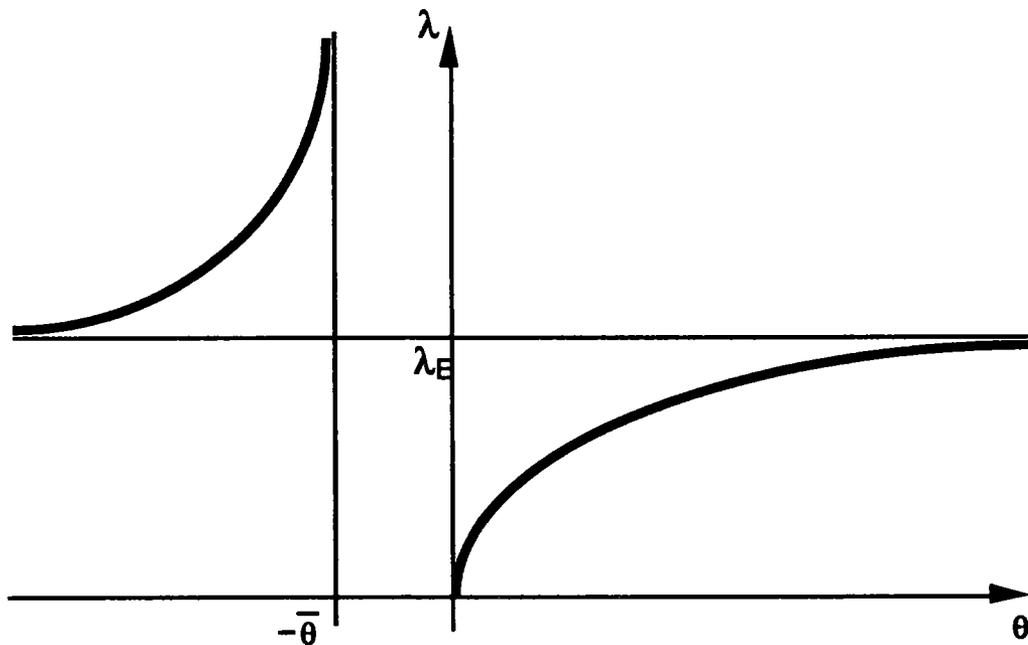


Fig.2.6. : Branches de solutions perturbées en régime élastique (Traits épais)

Utilisant la terminologie classique en théorie des bifurcations, on remarque en particulier que cette structure est insensible aux imperfections de ce type. Cela veut dire que la charge maximale supportable par la structure parfaite est la même que pour la structure perturbée.

## 2.4. Solutions plastiques du modèle parfait : $\bar{\theta} = 0$

On revient maintenant à la plasticité et l'on explore l'ensemble des solutions d'équilibre du modèle étudié sans perturbation.

On définit dans un premier temps la notion de solution fondamentale qui nous permet de préciser le problème des vitesses initiales caractérisant les points de bifurcation. On démontre ensuite l'existence de branches bifurquées partant de ces points de bifurcation avec les vitesses initiales correspondantes.

Le résultat principal de ce paragraphe est d'abord l'existence d'un continuum de points de bifurcation remplissant entièrement l'intervalle compris entre la charge critique du module tangent et la charge critique d'Euler, puis l'existence, la régularité et le comportement asymptotique des branches.

### 2.4.1. Solution fondamentale

Qualifier une branche de solutions de fondamentale semble un jugement subjectif. Cependant certaines solutions ont des propriétés particulières qui les distinguent sans ambiguïté des autres solutions.

Généralement dans le cas d'une structure présentant certaines symétries on définit la solution fondamentale comme une solution qui préserve les symétries initiales. La bifurcation peut se produire alors par rupture de symétrie. Cette remarque est confirmée par notre étude.

Dans notre cas, il est facile de voir que la branche définie comme suit est bien une branche de solutions:

$$* 0 \leq \lambda \leq \lambda_p$$

$$\bullet u(\lambda) = \frac{\lambda}{2E}$$

$$\bullet \theta(\lambda) = 0$$

$$\bullet \alpha(\lambda) = 0$$

$$* \lambda \geq \lambda_p$$

$$\bullet u(\lambda) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\lambda - \lambda_p}{E_T} + \frac{\lambda_p}{E} \right]$$

$$\bullet \theta(\lambda) = 0$$

$$\bullet \alpha(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{E - E_T}{EE_T} (\lambda - \lambda_p)$$

où  $\lambda_p = 2\sigma_y$  désigne ici la charge de plastification de la structure,  $\sigma_y$  étant (cf Fig.2.4) la limite d'élasticité.

Cette branche conserve la symétrie du système. On l'appelle dans la suite solution fondamentale. On constate par ailleurs qu'elle est en charge stricte partout dans la structure. On peut se demander alors s'il existe une vitesse transverse à la solution fondamentale et qui soit en charge partout.

Cela signifie simplement que la loi de comportement s'écrit maintenant en tout point de la structure comme suit :

$$\dot{\sigma} = E_T \dot{\epsilon}.$$

On reporte alors dans les équations (2.2.a) et (2.2.b) après dérivation et on obtient en mettant  $\theta = 0$  :

$\dot{u} = \frac{\dot{\lambda}}{2 E} \quad (2.4.a)$	(2.4)
$\left( \lambda - \frac{2E_T}{3L} \right) \dot{\theta} = 0 \quad (2.4.b)$	

Il est facile de voir que si  $\dot{\theta} = 0$  on obtient la vitesse correspondant à la solution fondamentale.

Donc pour trouver une vitesse bifurquée, il est nécessaire que  $\dot{\theta}$  soit non nulle. Ceci n'est possible que si :

$$\lambda = \lambda_T = \frac{2E_T}{3L}$$

$\lambda_T$  est appelée charge critique du module tangent et coïncide évidemment avec la charge donnée par l'analyse de Shanley [SHA 1947]. Lorsque  $\lambda = \lambda_T$ ,  $\dot{\theta}$  est quelconque.

Il a été redémontré dans une référence récente [LEG 1988] qu'à la charge critique du module tangent il y a un point de charge neutre dans la structure, ce qui confirme en particulier le critère de Shanley [SHA 1947]. Or, dans une évolution continue un point de charge neutre ne peut apparaître qu'aux extrémités du segment [0,2]. Ceci donne naissance aux deux vitesses transverses suivantes au point  $(\theta = 0, \lambda = \lambda_T)$  :

$$\begin{array}{l}
\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{\lambda}}{2E} \quad \dot{\theta}_2 = -\frac{\dot{\lambda}}{2E} \\
\dot{\alpha}_1 = \dot{\lambda} \frac{E - E_T}{2E^2} x \quad \dot{\alpha}_2 = \dot{\lambda} \frac{E - E_T}{2E^2} (x - 2) \\
\dot{\sigma}_1 = \dot{\lambda} \frac{1}{2} \frac{E_T}{E} x \quad \dot{\sigma}_2 = \dot{\lambda} \frac{E_T}{2E} (x - 2)
\end{array}$$

Il est aisé de voir que le point  $(\theta = 0, \lambda = \lambda_T)$  est le seul point où il existe des vitesses transverses en charge partout. On conclut donc que pour chercher d'autres vitesses transverses il est obligatoire d'envisager l'existence de toute une zone de décharge. Cette analyse nécessite l'introduction de nouvelles notations, qui feront l'objet du sous-paragraphe suivant. Grâce à quoi on reformule le problème afin de déterminer explicitement toutes les vitesses transverses à la solution fondamentale.

#### 2.4.2. Notations et transformation des équations

On suppose que le système est dans un état  $(u, \theta)$  sous un chargement  $\lambda$ . Cet état n'est pas nécessairement sur la branche fondamentale. On note  $Y \in [0, 2]$  un éventuel point de charge neutre séparant une zone de décharge d'une zone de charge plastique. Ce point  $Y$  est unique. En effet la vitesse de déformation  $\epsilon(x)$  est une fonction affine de  $x$ . Elle s'annule donc au plus une fois. Or  $Y$  est justement le point où la vitesse de déformation s'annule d'où son unicité s'il existe. On peut envisager deux cas : ou bien la décharge s'effectue dans l'intervalle  $[0, Y]$  ou bien dans  $[Y, 2]$ . On va réécrire les équations du problème dans le cas où la décharge s'effectue dans  $[0, Y]$ . Le deuxième cas s'obtient de manière similaire.

Les équations d'équilibre sous forme incrémentale s'écrivent :

$$\dot{\lambda} = \int_0^2 \dot{\sigma}(x) dx \quad (2.5.a)$$

$$\dot{\lambda} L \theta + \lambda L \dot{\theta} = \int_0^2 (x - 1) \dot{\sigma}(x) dx \quad (2.5.b)$$

(2.5)

La loi de comportement s'écrit simplement ici :

- dans  $[0, Y]$   $\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}$
- dans  $[Y, 2]$   $\dot{\sigma} = E_T \dot{\epsilon}$

avec •  $\dot{\epsilon}(Y) = 0$

On reporte alors ces expressions dans les équations (2.5.a) et (2.5.b) et on aboutit au système suivant :

$$P(Y)\dot{\theta} + \dot{\lambda} = 0 \quad (2.6.a)$$

$$Q(Y)\dot{\theta} - \lambda\dot{\theta} - \dot{\lambda}\theta = 0 \quad (2.6.b)$$

(2.6)

où P et Q sont des polynômes définis comme suit :

$$P(Y) = 2E_T \left[ \frac{E - E_T}{4E_T} Y^2 + Y - 1 \right]$$

$$Q(Y) = \frac{E - E_T}{L} \left[ -\frac{Y^3}{6} + \frac{Y^2}{2} + \frac{2E_T}{3(E - E_T)} \right]$$

Ces deux polynômes jouent un rôle très important dans cette étude. Ils jouissent en particulier des propriétés suivantes très utiles dans la suite : P(Y) est une fonction strictement croissante sur [0,2] avec un zéro en  $Y_R \in ]0,1[$ . La fonction Q(Y) quant à elle est positive et strictement croissante dans [0,2] et varie de  $Q(0) = \lambda_T$  à  $Q(2) = \lambda_E$ ;  $\lambda_T$  et  $\lambda_E$  étant justement les charges critiques du module tangent et du module d'Young déjà citées  $\lambda_T = \frac{2E_T}{3L}$  et  $\lambda_E = \frac{2E}{3L}$ .

Ces deux polynômes sont représentés par les deux graphes suivants :

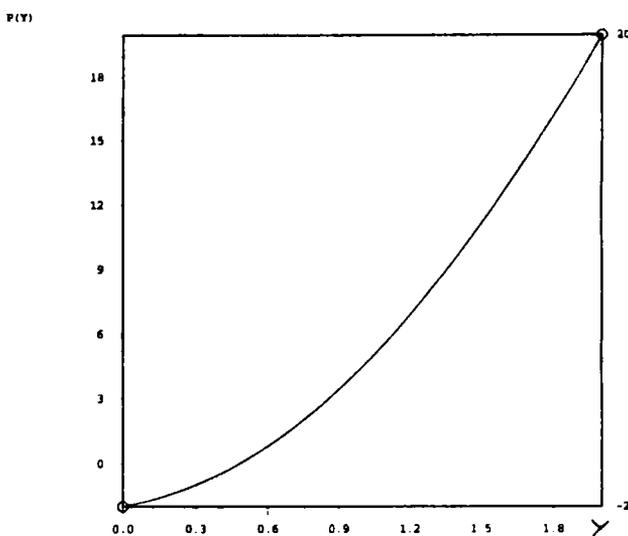


Fig.2.7.a. : graphe de P(Y)

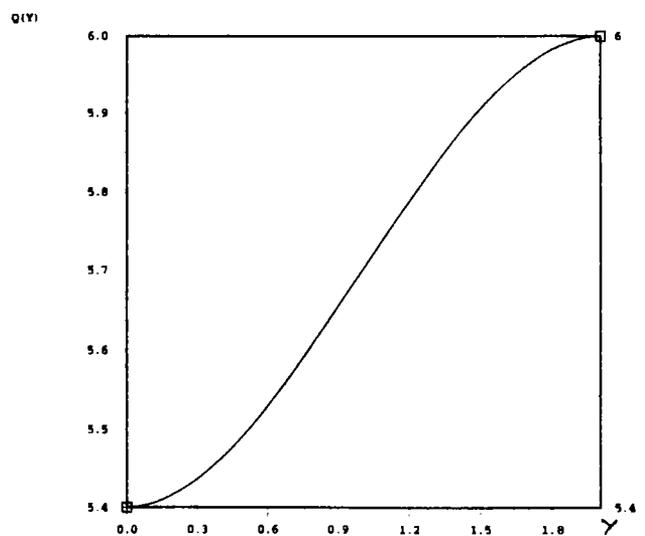


Fig.2.7.b. : graphe de Q(Y)

**Remarque :**

$Y_R$  étant le zéro dans  $[0, 2]$  de  $P(Y)$ ,  $Q(Y_R) = \lambda_R = \frac{2 E_R}{3 L}$  est justement la charge connue sous le nom de charge critique du module réduit donnée par le calcul, formellement élastique, d'équilibre adjacent [KAT 1975], d'où l'indexation par la lettre R.

Lorsque  $\dot{\theta} \neq 0$  le système devient, en injectant l'équation (2.6.a) dans (2.6.b) :

$P(Y)\dot{\theta} + \dot{\lambda} = 0$	(2.7.a)
$P(Y)\theta + Q(Y) - \lambda = 0$	(2.7.b)

(2.7)

C'est l'étude de ce dernier système qui nous permettra, dans les paragraphes suivants, de détecter les points de bifurcation, ainsi que de construire les branches bifurquées.

### 2.4.3. Vitesses initiales et points de bifurcation

Puisque l'on s'intéresse aux bifurcations plastiques, il est naturel de supposer que la charge de plastification  $\lambda_p$  est plus petite que la charge de bifurcation élastique  $\lambda_E$ . On en déduit donc que la solution élastique, et par suite la solution élastoplastique, est unique jusqu'à  $\lambda_p$ .

D'autre part, on suppose que  $\lambda_p$  est inférieure également à la charge critique du module tangent  $\lambda_T$ . Cela veut dire que le flambage intervient dans un régime plastique établi.

Le problème des vitesses initiales consiste alors à chercher à partir de  $\lambda_p$  l'existence de vitesses cinématiquement et plastiquement admissibles, solutions du problème d'équilibre incrémental, autres que celle correspondant à la solution fondamentale. Les points de bifurcation sont donc pour l'instant définis comme points pour lesquels existent au moins deux réponses différentes en vitesse, et pas encore par l'existence de branches qui s'intersectent effectivement.

On a vu dans la section 2.4.1 que sur la solution fondamentale le seul point de bifurcation, ainsi défini, avec une vitesse transverse en charge partout est le point  $(\theta, \lambda) = (0, \lambda_T)$ .

Pour les autres points de bifurcation, s'ils existent, il y a une zone de décharge. La frontière de cette zone  $Y$  vérifie alors, en faisant  $\theta = 0$  dans (2.7.b) :

$$\boxed{Q(Y) = \lambda}$$

Comme indiqué plus haut le polynôme  $Q$  est une fonction croissante de  $Q(0) = \lambda_T$  à  $Q(2) = \lambda_E$ . Il est alors facile de construire des vitesses transverses  $\dot{\theta}$  grâce à l'équation (2.7.a) pour  $\lambda \in [\lambda_T, \lambda_E]$  en faisant varier  $Y$  dans  $[0,2]$ . On déduit que tous les points de la solution fondamentale  $(\theta, \lambda) = (0, \lambda)$  où  $\lambda \in [\lambda_T, \lambda_E]$  sont des points de bifurcation et ce sont les seuls.

Dans la section suivante, on démontre qu'il existe effectivement des branches de solutions bifurquées partant de ces points de bifurcation.

#### 2.4.4. Construction de branches bifurquées

Le raisonnement rapide précédent met en évidence un continuum de points de bifurcation situés sur la branche fondamentale au sens où en ces points existent au moins deux vitesses différentes. Cette définition de la bifurcation transverse est moins restrictive que celle communément utilisée en théorie de la bifurcation, pour laquelle un point d'une branche de solution est un point de bifurcation si tout voisinage de ce point comprend au moins une solution n'appartenant pas à cette branche [RAB 1973].

Nous allons maintenant démontrer que dans notre cas les deux définitions coïncident au sens où les points de bifurcation définis par la réponse en vitesse sont en fait des points par lesquels passent effectivement deux branches distinctes. Cela signifie que l'on va démontrer l'existence de branches bifurquées de solutions issues des points  $(\theta, \lambda) = (0, \lambda)$  avec  $\lambda \in [\lambda_T, \lambda_E]$ .

L'usage dans les études antérieures est de chercher la solution post-critique sous la forme d'une courbe charge-déflexion, c'est-à-dire  $\lambda$  en fonction de  $\theta$ . Cependant l'analyse des équations (2.7.a) et (2.7.b) nous suggère de prendre la taille de la zone de décharge, à savoir  $Y$ , comme paramètre.

Ce choix s'avère considérablement simplificateur et sera d'ailleurs décisif dans le cas plus complexe et plus technique de la poutre comprimée. Notons que dans un travail récent effectué avec Cimetière A. et Léger A. [CIM 1994], nous avons cependant gardé l'approche  $\lambda = \lambda(\theta)$  pour l'étude du présent modèle simple.

On cherche dans la suite des courbes  $\lambda(Y)$  et  $\theta(Y)$ , paramétrées donc par la taille de la zone de décharge, celle-ci débutant au point  $Y = Y_0 \in [0, 2], \theta = 0$  et  $\lambda = Q(Y_0)$ . Les fonctions  $\lambda(Y)$  et  $\theta(Y)$  doivent vérifier, évidemment, les équations (2.7.a) et (2.7.b).

Le résultat le plus important de ce chapitre, est le suivant :

**Théorème 2.1 :**

- i) Pour toute condition initiale  $\theta(Y_0) = 0, \lambda(Y_0) = Q(Y_0)$  avec  $Y_0 \in [0, Y_R[$ , il existe une branche de solutions  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  analytique monotone strictement croissante, et définie pour  $Y \in [Y_0, Y_R[$ . De plus,  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  tendent respectivement vers l'infini et  $\lambda_R$  lorsque  $Y$  tend vers  $Y_R$ .*
- ii) Pour toute condition initiale  $\theta(Y_0) = 0, \lambda(Y_0) = Q(Y_0)$  avec  $Y_0 \in ]Y_R, 2]$ , il existe une branche de solutions  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  analytique, monotone strictement décroissante, et définie pour  $Y \in ]Y_R, Y_0]$ . De plus  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  tendent respectivement vers l'infini et  $\lambda_R$  lorsque  $Y$  tend vers  $Y_R$ .*

**Démonstration :**

Il suffit de démontrer le i). Le ii) s'obtient de manière analogue. On reprend les équations (2.7.a) et (2.7.b). Puis on dérive l'équation (2.7.b) par rapport à  $Y$ . On obtient alors le système (2.8) :

$2P(Y)\dot{\theta} + \frac{\partial P}{\partial Y}\theta + \frac{\partial Q}{\partial Y} = 0$	(2.8.a)	(2.8)
$P(Y)\theta + Q(Y) - \lambda = 0$	(2.8.b)	

En considérant l'équation (2.8.a) et en lui adjoignant la condition initiale  $\theta(Y_0) = 0$ , on aboutit au problème de Cauchy suivant :

$\dot{\theta} = -\frac{\frac{\partial P}{\partial Y}}{2P(Y)}\theta - \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}}{2P(Y)}$ $\theta(Y_0) = 0$
---

C'est une équation différentielle ordinaire linéaire, sa résolution est ramenée à une quadrature. Dans le cas  $Y_0 \in [0, Y_R[$ , on obtient facilement les expressions suivantes :

$$\theta(Y) = \frac{\int_{Y_0}^Y \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}(u)}{2\sqrt{-P(u)}} du}{\sqrt{-P(Y)}}.$$

$$Y \in [Y_0, Y_R[$$

$$\lambda(Y) = \sqrt{-P(Y)} \int_{Y_0}^Y \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}(u)}{2\sqrt{-P(u)}} du + Q(Y)$$

$$Y \in [Y_0, Y_R[$$

On a ainsi démontré l'existence d'une branche de solutions avec la condition initiale donnée.

Pour l'analyticité, il suffit de remarquer que pour  $Y_0 \in [0, Y_R[$  on a :  $P(Y_0) \neq 0$  et donc, vu l'expression de  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$ , celles-ci sont évidemment analytiques dans  $[Y_0, Y_R[$ .

La monotonie se déduit des propriétés des polynômes  $P$  et  $Q$ . En effet,  $P(Y)$  est négatif pour  $Y \in [0, Y_R[$ . De plus,  $P$  et  $Q$  sont croissants, donc  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  sont positives et  $\theta$  est croissante.

Le comportement asymptotique de  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  lorsque  $Y$  tend vers  $Y_R$  résulte simplement du fait que  $Y_R$  est racine simple de  $P$  et donc que l'intégrale :

$$\int_{Y_0}^Y \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}(u)}{2\sqrt{-P(u)}} du$$

est convergente. Cela donne le comportement de  $\theta$  et les résultats concernant  $\lambda(Y)$  sont déduits trivialement de son expression.

### Remarques :

1) L'intégrale intervenant dans l'expression de  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  est une intégrale elliptique avec un polynôme de degré deux sous la racine. Elle est donc calculable explicitement. Ce calcul, quoique sans importance pour l'établissement de résultats qualitatifs, exprime explicitement la relation entre l'incrément de chargement et l'étendue de la zone de décharge. Cette relation n'était exprimée dans la littérature que par des comparaisons d'ordres de grandeurs issus de développements asymptotiques formels pour la seule branche issue de  $\lambda_T$  et au voisinage de  $\lambda_T$ . On obtient l'expression suivante dans le cas  $Y_0 = 0$ .

$$\mu = \lambda - \lambda_T = -\frac{1}{2L} \left( \frac{Y}{2} - \frac{2E + E_T}{E - E_T} \right) P(Y) - \frac{3EE_T \sqrt{-P(Y)} \operatorname{Arctg} \left[ \frac{-\frac{\partial P}{\partial Y} \sqrt{-P(Y)}}{\sqrt{2} \sqrt{E - E_T} P(Y)} \right]}{\sqrt{2} \sqrt{E - E_T} (E - E_T) L} + Q(Y)$$

- 2) Il apparaît qu'il est judicieux de choisir l'étendue de la zone de décharge comme paramètre de contrôle. Ce choix prouvera encore plus toute son efficacité lors de la résolution du problème de post-flambage des poutres élastoplastiques et qui fait l'objet du chapitre 3.
- 3) Les développements asymptotiques évoqués plus haut étaient obtenus de manière formelle et on se contentait de calculer le premier terme non linéaire sans pour autant avoir de renseignements sur le comportement du reste de la série.

La première justification théorique rigoureuse de ces développements asymptotiques a été obtenue en 1994 par Cimetière, Elkoulani, Léger [CIM 1994] dans le cadre justement de l'étude du modèle simple qui nous préoccupe. Cette justification a été obtenue grâce à une méthode semblable à celle de Lyapunov-Schmidt par des changements de variables adéquats, les calculs correspondants étant toutefois plus lourds et plus techniques que ceux présentés ici.

On reprend dans la section suivante cette étude de régularité à la lumière des conclusions du théorème 2.1.

## 2.4.5. Régularité des solutions

Le théorème 2.1 nous apprend que les solutions  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  sont analytiques au voisinage de 0. Cela prouve que les solutions obtenues sont très régulières. Cependant, il est d'usage, en post-flambage plastique, de présenter les résultats sous forme de diagrammes charge-déflexion. Le but de cette section est de traiter de l'existence de ces courbes force-déplacement ainsi que de leur régularité. Ces résultats sont résumés par le théorème suivant :

### Théorème 2.2 :

*i) Pour toute condition initiale  $\lambda(0) = \lambda_0 \in ]\lambda_T, \lambda_E[$  il existe une branche  $\lambda(\theta)$  analytique au voisinage de 0. Toutes ces courbes sont monotones croissantes pour  $\lambda_0 \in ]\lambda_T, \lambda_R[$ , décroissantes pour  $\lambda_0 \in ]\lambda_R, \lambda_E[$  et tendent vers une limite commune  $\lambda_R = Q(Y_R)$  lorsque  $\theta$  tend vers l'infini. En particulier, dans le diagramme force-déflexion, la droite  $\{\lambda = \lambda_R, \theta \in \mathbb{R}\}$  est trivialement une branche de solutions.*

*ii) Pour la condition initiale  $\lambda(0) = \lambda_T$  il existe une branche de solutions  $\lambda(\theta)$  définie pour  $\theta \neq 0$ . Cette branche est monotone croissante et tend vers  $\lambda_R$  quand  $\theta$  tend vers l'infini. De plus, cette branche est analytique en  $\sqrt{\theta}$  au voisinage de 0. On a un résultat analogue pour la condition initiale  $\lambda(0) = \lambda_E$ .*

### Démonstration :

On rappelle l'expression des branches  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  :

$$\theta(Y) = \frac{\int_{Y_0}^Y \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}(u)}{2\sqrt{-P(u)}} du}{\sqrt{-P(Y)}} ; \lambda(Y) = \sqrt{-P(Y)} \int_{Y_0}^Y \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}(u)}{2\sqrt{-P(u)}} du + Q(Y)$$

Or, pour tout  $\lambda_0 \in ]\lambda_T, \lambda_E[$  il existe un  $Y_0$  unique tel que  $\lambda_0 = Q(Y_0)$ .

De plus,  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  ont la même monotonie. En éliminant  $Y$  on déduit l'existence, la monotonie et le comportement à l'infini des branches  $\lambda(Y)$  correspondant aux bonnes conditions initiales.

Pour les questions d'analycité on distingue les deux cas :

i)  $Y_0 \in ]0, Y_R[$  donc  $\lambda_0 \in ]\lambda_T, \lambda_R[$ . La fonction  $\frac{1}{\sqrt{-P(Y)}}$  est analytique au voisinage de  $Y_0$  avec un rayon de convergence égal à  $Y_R - Y_0$ . De plus,  $\frac{1}{\sqrt{-P(Y)}}$  est positif. La fonction de  $Y$  :

$$\int_{Y_0}^Y \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}(u)}{2\sqrt{-P(u)}} du$$

admet un zéro simple en  $Y_0$ . Elle est de plus analytique au voisinage de  $Y_0$  avec un rayon de convergence égal à  $-Y_0 + Y_R$ . On conclut que  $\theta$  s'écrit sous la forme :

$$\theta(Y) = (Y - Y_0)g(Y - Y_0)$$

où  $g$  est une fonction analytique au voisinage de 0 et  $g(0) > 0$ .

On en déduit alors que  $Y$  peut être exprimé grâce au théorème des fonctions implicites comme une fonction analytique de  $\theta$  au voisinage de 0.

L'analycité de  $\lambda$  en fonction de  $\theta$  au voisinage de 0 découle alors simplement de l'équation (2.8.b).

ii) Le cas  $Y_0 = 0$  et donc  $\lambda_0 = \lambda_T$ .

La fonction :

$$\int_{Y_0}^Y \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}(u)}{2\sqrt{-P(u)}} du$$

admet maintenant un zéro d'ordre 2 en  $Y = Y_0 = 0$ .

$\theta(Y)$  s'écrit donc sous la forme :

$$\theta(Y) = (Y - Y_0)^2 g(Y - Y_0)$$

où  $g$  est une fonction analytique au voisinage de 0, telle que  $g(0) > 0$  et  $g \geq 0$ .

On obtient alors :

$$\sqrt{\theta} = (Y - Y_0)\sqrt{g(Y - Y_0)}.$$

On en déduit que  $Y$  s'exprime comme fonction analytique de  $\sqrt{\theta}$  au voisinage de 0. L'analyticité de  $\lambda$  en fonction de  $\sqrt{\theta}$  au voisinage de 0 est déduite immédiatement à partir de l'équation (2.8.b).

**Commentaires :**

- 1) On vient de donner une justification théorique du développement asymptotique obtenu pour le présent modèle simple par plusieurs auteurs. Ce développement représente donc bien la solution au voisinage du point critique. Le calcul du premier terme non linéaire est donc suffisant pour une bonne approximation de la branche dans un petit voisinage du premier point critique.
- 2) Il a longtemps été écrit que la présence des exposants fractionnaires dans les développements asymptotiques en flambage plastique est étroitement liée à la présence et au développement d'une zone de décharge. Or les résultats des deux théorèmes précédents nous montrent que les branches démarrant des points  $(\lambda, \theta) = (\lambda_0, 0)$  avec  $\lambda_0 \in ]\lambda_T, \lambda_E[$  sont analytiques malgré l'évolution de la zone de décharge. En fait l'explication de ces exposants fractionnaires vient maintenant naturellement. Pour cela rappelons les équations (2.7.a) et (2.7.b) :

$P(Y)\dot{\theta} + \dot{\lambda} = 0$	(2.7.a)	(2.7)
$P(Y)\theta + Q(Y) - \lambda = 0$	(2.7.b)	

De l'équation (2.7.b) on peut exprimer  $Y$  en fonction de  $\theta$  et  $\lambda$  grâce au théorème des fonctions implicites. Ceci n'est possible que si  $\frac{\partial P}{\partial Y}\theta + \frac{\partial Q}{\partial Y} \neq 0$ . Or sur la solution fondamentale ( $\theta = 0$ ), les points où la quantité  $\frac{\partial P}{\partial Y}\theta + \frac{\partial Q}{\partial Y}$  s'annule correspondent justement à  $Y = 0$  et  $Y = 2$ . Ce résultat de perte d'inversibilité locale de l'équation (2.7.b) au voisinage du point critique ( $Y = 0, \theta = 0, \lambda = \lambda_T$ ) entraîne nécessairement une perte de régularité de la solution au voisinage de ce point.

Insistons cependant sur le fait que la régularité de la solution dépend crucialement du paramètre choisi pour décrire l'évolution du système.

## 2.5. Sensibilité aux imperfections

Les structures réelles présentent souvent des défauts, géométriques ou de comportement, qui les éloignent des structures parfaites généralement calculées. Il est donc très utile, du point de vue en particulier des ingénieurs, de savoir si de telles imperfections modifient de manière sensible ou pas les résultats obtenus pour les systèmes "parfaits". Ce problème est bien connu, et s'est constitué en une branche de la théorie des bifurcations sous le terme de sensibilité aux imperfections [GOL 1979], [IOO 1990].

Dans le cas des problèmes de flambage l'effet d'une imperfection se traduit classiquement par :

- La persistance, ou non, des points de bifurcation.
- La modification, ou non, du comportement asymptotique et en particulier l'abaissement des charges maximales supportables par la structure.

Dans la pratique les systèmes parfaits présentent certaines symétries initiales. La bifurcation peut se produire alors par une destruction d'au moins une symétrie. Il apparaît alors naturel d'étudier le comportement du système après avoir perturbé légèrement cette symétrie. Dans le cas qui nous préoccupe dans ce chapitre, on suppose que le modèle est initialement en équilibre avec une légère déflexion  $\bar{\theta}$  comme indiqué sur la figure Fig.2.8

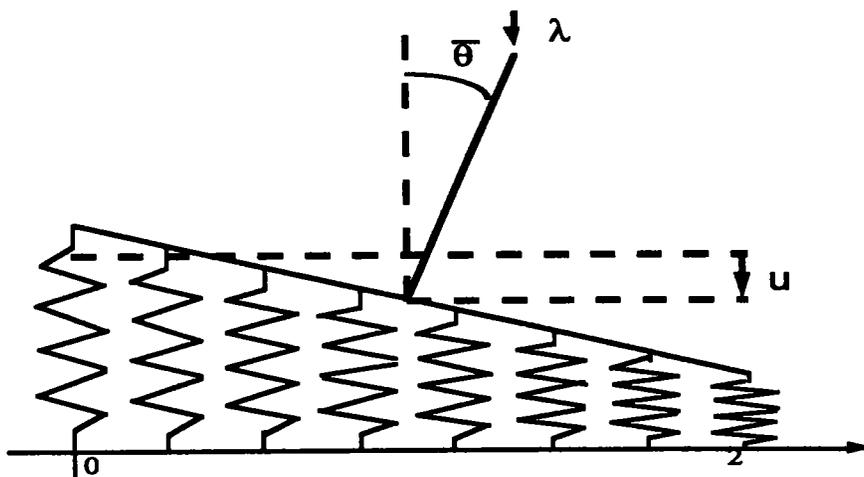


Fig.2.8. : perturbation initiale

A la lumière des résultats de l'étude du modèle parfait, l'étude du modèle perturbé va se décomposer en trois étapes :

**1<sup>re</sup> étape :**

Calculer la solution élastique et le premier point de plastification.

**2<sup>e</sup> étape :**

Calculer une solution en charge partout et le premier point de décharge.

**3<sup>e</sup> étape :**

Calculer la solution comportant une zone de décharge.

Ces trois étapes sont détaillées dans les trois sections suivantes.

**2.5.1. Solution élastique**

Cette solution a déjà été calculée au paragraphe (2.3.2). Pour cause de symétrie il suffit d'étudier le cas  $\bar{\theta} > 0$  et on rappelle que dans le plan  $(\lambda, \theta)$  la seule branche démarrant de l'origine s'écrit :

$$\lambda = \lambda_E \frac{\theta}{\theta + \bar{\theta}} ; \theta \geq 0..$$

Cette solution s'écrit complètement comme suit :

$\begin{aligned} \cdot \quad u &= \frac{\lambda}{2E} \quad ; \quad \cdot \quad \theta = \frac{\lambda}{\lambda_E - \lambda} \bar{\theta} \\ \cdot \quad \alpha &= 0 \quad ; \quad \cdot \quad \sigma = E \left[ \frac{\lambda}{2E} + (x-1) \frac{\lambda}{\lambda_E - \lambda} \bar{\theta} \right] \end{aligned}$
--

Lorsque le paramètre de charge  $\lambda$  varie, on note  $\lambda_p$  la plus petite valeur où le seuil de plasticité est atteint en au moins un point.

Pour  $\lambda$  fixé, la contrainte  $\sigma = E \left[ \frac{\lambda}{2E} + (x-1) \frac{\lambda}{\lambda_E - \lambda} \bar{\theta} \right]$  est minimale pour  $x = 0$  et maximale pour  $x = 2$ . Or,  $|\sigma(2, \lambda)| > |\sigma(0, \lambda)|$  donc la plastification va débiter en  $x = 2$  et on a :

$$\frac{\lambda}{2} + E \frac{\lambda}{\lambda_E - \lambda} \bar{\theta} = \sigma_Y.$$

On suppose que les paramètres du problème sont tels que cette équation a des solutions et dans ce cas, on a :

$$\lambda_p = \left( \frac{\lambda_E}{2} + E\bar{\theta} + \sigma_Y \right) - \sqrt{\left( \frac{\lambda_E}{2} + E\bar{\theta} + \sigma_Y \right)^2 - 2\sigma_Y\lambda_E}$$

**Remarque :**

On suppose comme noté précédemment que  $\lambda_p < \lambda_T$  pour éviter une discussion plus complexe.

### 2.5.2. Solution plastique en charge

A partir de  $\lambda_p$  et en augmentant  $\lambda$  on cherche une solution cinématiquement et plastiquement admissible et qui est en charge stricte partout dans la structure. Cette solution est valable jusqu'à l'occurrence d'un point de décharge. Notons  $\hat{\lambda}$  le niveau de charge correspondant à cette occurrence.

La plastification débutant en  $x = 2$ , et en l'absence de décharge, une zone plastique se développe dans la structure. On note  $X$  la frontière entre la zone plastique et la zone élastique. La loi de comportement s'écrit simplement :

- $\sigma = E\varepsilon$  dans la zone élastique,
- $\sigma = E(\varepsilon - \alpha)$  dans la zone plastique.

On a donc  $|\varepsilon| = \frac{\sigma_Y}{E}$  en  $x = X$ , soit  $|u + (x-1)\theta| = \frac{\sigma_Y}{E}$  et donc :

$$X = \left[ \frac{\sigma_Y}{E} - u \right] \frac{1}{\theta} + 1$$

On déduit en particulier que cette frontière est unique et que dans  $[0, X[$  la structure est élastique et dans  $[X, 2]$  elle est plastique.

On reprend alors l'équilibre de la résultante et des moments (2.1.a) et (2.1.b).

$$\lambda = \int_0^2 \sigma(x) dx \quad (2.1.a)$$

$$\lambda L(\theta + \bar{\theta}) = \int_0^2 (x-1)\sigma(x) dx \quad (2.1.b)$$

et après quelques calculs élémentaires on aboutit aux deux équations suivantes :

$$\lambda - \lambda_p^0 + P(X)\theta = 0 \quad (2.9.a)$$

$$[\lambda - Q(X)]\theta + \lambda\bar{\theta} = 0 \quad (2.9.b)$$

(2.9)

où :

-  $\lambda_p^0 = 2\sigma_y$  désigne la charge de plastification du modèle parfait.

- P et Q sont les mêmes polynômes que ceux qui interviennent dans les équations (2.6.a) et (2.6.b) et que l'on rappelle ici :

$$P(Y) = 2E_T \left[ \frac{E - E_T}{4E_T} Y^2 + Y - 1 \right]$$

$$Q(Y) = \frac{E - E_T}{L} \left[ -\frac{Y^3}{6} + \frac{Y^2}{2} + \frac{2E_T}{3(E - E_T)} \right]$$

Pour résoudre ce problème, on remarque qu'avant l'occurrence d'une décharge dans la structure, la frontière X ne peut varier que d'une manière monotone décroissante car la zone plastique ne peut que croître. On prend alors X comme variable et on cherche cette portion de la branche de solution sous la forme  $\theta(X), \lambda(X)$ .

Pour cela, remplaçons dans (2.9.b)  $\lambda$  par sa valeur déduite de l'équation (2.9.a). On obtient :

$$P(X)\theta^2 + (-\lambda_p^0 + Q(X) + P(X)\bar{\theta})\theta - \lambda_p^0\bar{\theta} = 0 \quad (2.10)$$

C'est une équation du second degré dont le discriminant est :

$$\Delta = (P(X)\bar{\theta} + Q(X) - \lambda_p^0)^2 + 4\lambda_p^0 P(X)\bar{\theta}.$$

On a supposé que  $\lambda_p^0$  est strictement inférieur à  $Q(0) = \lambda_T$ . On peut donc affirmer que pour  $\bar{\theta}$  assez petit le discriminant  $\Delta$  est positif quel que soit  $X \in [0, 2]$ . On peut ainsi construire une portion de branche de solutions  $\lambda(X), \theta(X)$  en pilotant par X qui variera de 2 à 0. La solution  $\theta(X), \lambda(X)$  s'exprime alors explicitement comme suit :

$$\bullet \quad \theta(X) = \frac{-(P(X)\bar{\theta} + Q(X) - \lambda_p^0) + \sqrt{(P(X)\bar{\theta} + Q(X) - \lambda_p^0)^2 + 4\lambda_p^0 P(X)\bar{\theta}}}{2P(X)}$$

$$\bullet \quad \lambda(X) = \lambda_p^0 + \frac{1}{2} \left[ (P(X)\bar{\theta} + Q(X) - \lambda_p^0) - \sqrt{(P(X)\bar{\theta} + Q(X) - \lambda_p^0)^2 + 4\lambda_p^0 P(X)\bar{\theta}} \right]$$

Une fois que la frontière X a atteint l'abscisse  $x = 0$ , toute la structure est plastique et l'on cherche, pour la continuation de la branche, une solution en charge plastique stricte à partir du point correspondant à  $X = 0$  que l'on note  $(\tilde{\lambda}, \bar{\theta})$ .

La loi de comportement s'écrit maintenant sur toute la structure :

$$\dot{\sigma} = E_T \dot{\epsilon}.$$

En remplaçant dans les équations d'équilibre (2.1.a) et (2.1.b) on obtient alors après dérivation :

$$\begin{array}{l} \dot{\lambda} = 2E_T \dot{u} \quad (2.11.a) \\ \dot{\theta}(\lambda_T - \lambda) = \dot{\lambda}(\theta + \bar{\theta}) \quad (2.11.b) \end{array} \quad (2.11)$$

Ce système se résout de façon élémentaire sous la forme d'une courbe  $\lambda(\theta)$  comme suit :

$$\lambda = \lambda_T - (\lambda_T - \tilde{\lambda}) \frac{\bar{\theta} + \bar{\theta}}{\theta + \bar{\theta}}$$

Cette solution est évidemment valable uniquement jusqu'à l'apparition d'une décharge dans la structure.

Pour la même raison que précédemment ( les barres sont rigides ) la décharge commence par l'apparition d'un point de charge neutre en  $x = 0$ .

Cherchons les valeurs  $\lambda = \hat{\lambda}$  et  $\theta = \hat{\theta}$  où cela se produit. En  $x = 0$  la relation  $\dot{\epsilon}(0) = 0$  donne  $\dot{u} = \dot{\theta}$  et par suite, d'après (2.11.a) et (2.11.b), on obtient :

$$\begin{array}{l} \dot{\lambda} - 2E_T \dot{\theta} = 0 \quad (2.12.a) \\ \dot{\lambda}(\theta + \bar{\theta}) + (\lambda - \lambda_T) \dot{\theta} = 0 \quad (2.12.b) \end{array}$$

Pour qu'un tel système admette une autre solution que la solution triviale, il faut que :  $\lambda = \lambda_T - 2 E_T (\theta + \bar{\theta})$ .

Puisqu'on est sur une branche de solutions, on a de plus

$$\lambda = \lambda_T - (\lambda_T - \tilde{\lambda}) \frac{\bar{\theta} + \bar{\theta}}{\theta + \bar{\theta}}$$

On obtient alors facilement les expressions de  $\hat{\lambda}$  et  $\hat{\theta}$  :

$$\hat{\lambda} = \lambda_T - \sqrt{2 E_T (\lambda_T - \tilde{\lambda}) (\bar{\theta} - \bar{\theta})}$$

$$\hat{\theta} = -\bar{\theta} + \sqrt{\frac{1}{2 E_T} (\lambda_T - \tilde{\lambda}) (\bar{\theta} - \bar{\theta})}$$

A la fin de cette deuxième étape récapitulons les différents stades de la construction de cette branche de solutions perturbées, dont l'unicité est évidente. Après une phase élastique de  $\lambda = 0$  à  $\lambda = \lambda_p$ , le seuil de plasticité est atteint en  $x = 2$  et une zone plastique se développe jusqu'à envahir toute la structure. On atteint alors la valeur  $\lambda = \tilde{\lambda}$  du chargement. Ensuite la structure reste en charge plastique jusqu'à l'apparition d'un point de charge neutre en  $x = 0$ , ce qui se produit pour  $\lambda = \hat{\lambda}$ . Après  $\hat{\lambda}$ , la solution en charge plastique n'est plus plastiquement admissible et il y a une zone de décharge qui se développe, ce qu'on va étudier dans la 3<sup>e</sup> étape.

### 2.5.3. Solution plastique en présence de décharge

Commençons tout d'abord par signaler qu'on a supposé que la décharge intervient une fois que toute la structure est plastifiée. Cette hypothèse a été faite pour simplifier l'exposé. Dans un cas plus général, il faudra tenir compte de la présence de deux frontières. Cependant cela ne complique guère la résolution du problème, tout au moins dans le cas du modèle simple.

On cherche donc une portion de branche avec une zone de décharge de frontière Y. Les équations d'équilibre s'écrivent maintenant :

$$\dot{\lambda} + P(Y)\dot{\theta} = 0 \quad (2.13.a)$$

$$\dot{\lambda}(\theta + \bar{\theta}) + [\lambda - Q(Y)]\dot{\theta} = 0 \quad (2.13.b)$$
(2.13)

d'où l'on déduit :

$$\dot{\lambda} + P(Y)\dot{\theta} = 0 \quad (2.14.a)$$

$$P(Y)(\theta + \bar{\theta}) + Q(Y) - \lambda = 0 \quad (2.14.b)$$
(2.14)

Le système (2.14) est analogue au système (2.7) obtenu pour le modèle parfait. Sa résolution se fait donc de la même manière et on a le théorème suivant :

### **Théorème 2.3 :**

Il existe une branche de solutions  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  analytique monotone croissante, et définie pour  $Y \in [0, Y_R[$ . Cette branche est issue de  $\theta(0) = \hat{\theta}$  et  $\lambda(0) = \hat{\lambda}$ . De plus,  $\theta(Y)$  et  $\lambda(Y)$  tendent respectivement vers l'infini et  $\lambda_R$  lorsque  $Y$  tend vers  $Y_R$ .

### **Démonstration :**

La démonstration est similaire à celle du théorème 2.1. En effet en effectuant le changement de variable  $\theta \rightarrow \theta - \bar{\theta}$  on obtient exactement le système (2.7).

### **Commentaire :**

De la même manière que pour le système élastique on peut construire une deuxième branche de solutions non atteignable à partir de l'origine. Dans le plan  $(\lambda, \theta)$  le diagramme de l'ensemble des solutions aura alors l'allure représentée par la figure Fig.2.9. Cependant, et bien que cette deuxième branche soit plastiquement admissible, le fait que dans un processus quasi-statique cette branche n'est pas accessible lui ôte une partie de son intérêt physique. En effet avant d'atteindre de telles positions d'équilibre des effets dynamiques, dont il faudrait tenir compte, se seraient certainement produits et auraient pu mener la structure à sa ruine.

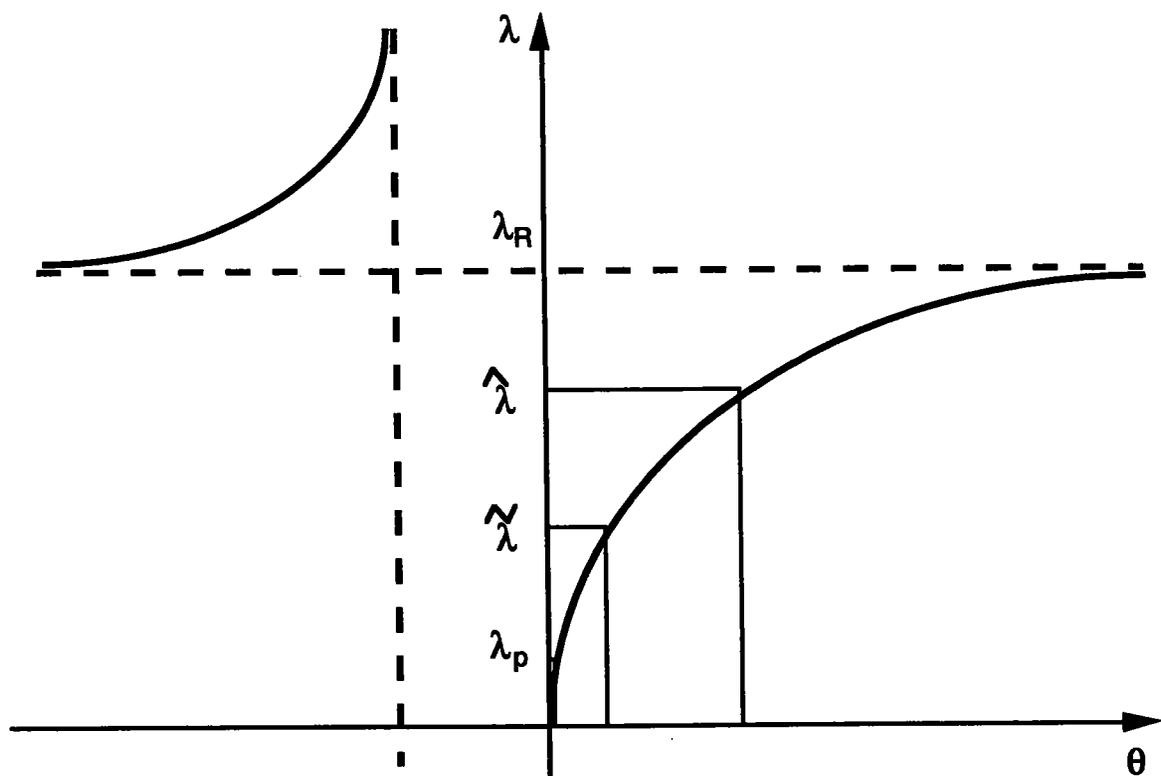


Fig.2.9. : Allure de l'ensemble des solutions du système perturbé

## 2.6. Résultats numériques

Nous avons prouvé dans les paragraphes précédents l'existence de branches bifurquées issues de tous les points  $(\lambda, \theta) = (\lambda, 0)$  avec  $\lambda \in [\lambda_T, \lambda_E]$ . Ces branches sont décrites grâce à un paramètre  $Y$  qui mesure la taille de la zone de décharge. L'utilisation de ce paramètre permet non seulement de prouver l'existence de ces branches mais aussi de les construire numériquement.

Rappelons les expressions des fonctions  $\lambda(Y)$  et  $\theta(Y)$  :

$$\theta(Y) = \frac{\int_{Y_0}^Y \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}(u)}{2\sqrt{-P(u)}} du}{\sqrt{-P(Y)}} \quad \text{et} \quad \lambda(Y) = \sqrt{-P(Y)} \int_{Y_0}^Y \frac{\frac{\partial Q}{\partial Y}(u)}{2\sqrt{-P(u)}} du + Q(Y)$$

$Y \in [Y_0, Y_R[$

Grâce à une quadrature numérique réalisée par un logiciel de calcul formel on obtient aisément les trois courbes  $\lambda(Y)$ ,  $\theta(Y)$  et  $\lambda(\theta)$  pour différentes valeurs initiales  $Y_0$  dans l'intervalle  $[0, 2]$ . Ces courbes sont représentées sur les figures Fig.2.10.a, Fig.2.10.b et Fig.2.10.c.

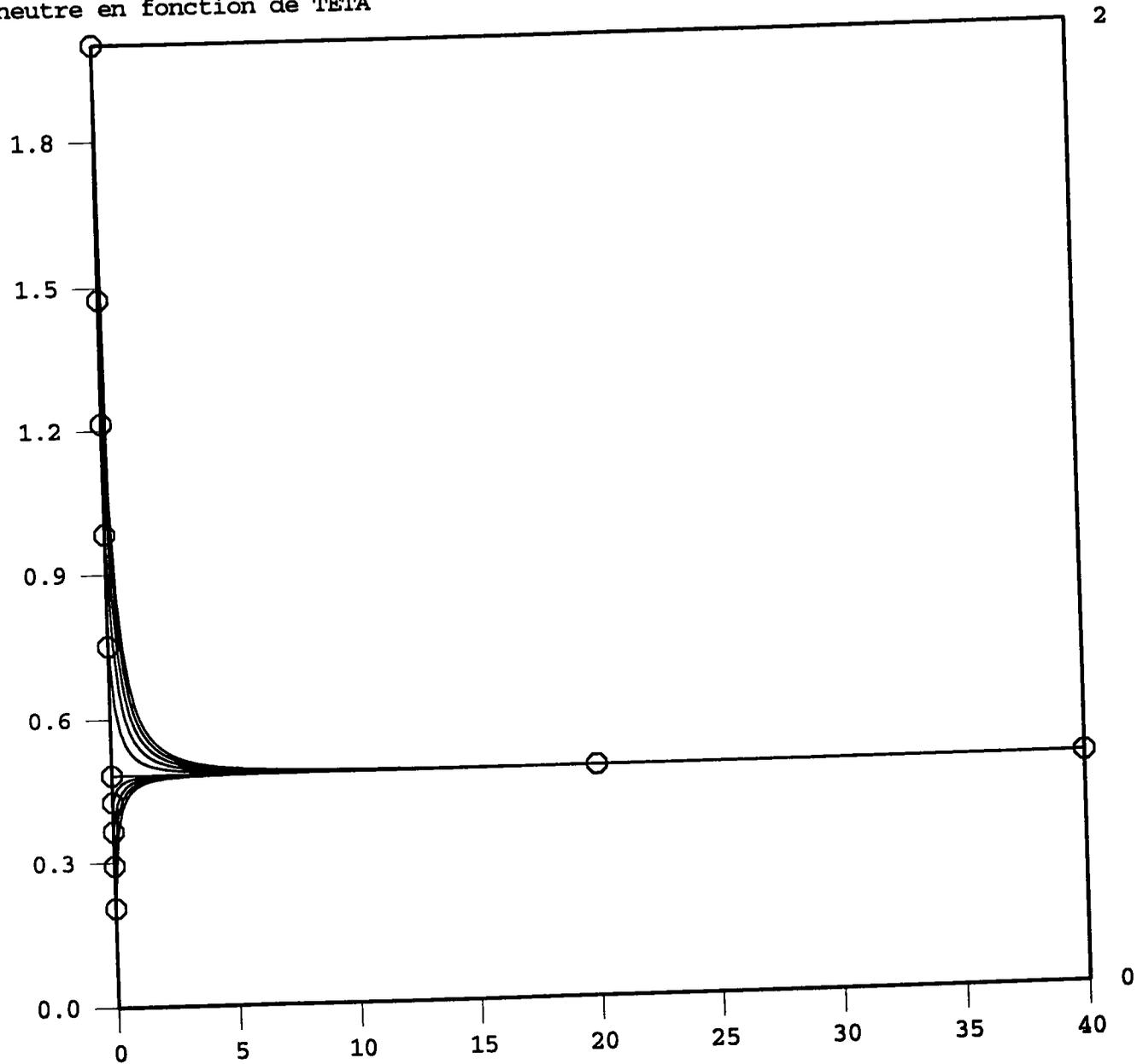
### Commentaires :

1. Sur la figure Fig.2.10.c on vérifie bien la monotonie des courbes  $\lambda = \lambda(\theta)$  annoncée au théorème 2.2. On observe de plus que le système peut basculer considérablement pour un petit incrément de charge quand on s'approche de la charge critique du module réduit. Ceci confirme le fait que les systèmes élastoplastiques supportent encore des incréments de charge une fois atteinte la charge critique du module tangent. Gardons cependant à l'esprit que ce résultat est obtenu en linéarisant la déformation et que de grandes déflexions n'ont pas de sens physique.

2. La position de  $\lambda_R$  par rapport à  $\lambda_T$  dépend du rapport entre le module d'Young et le module tangent. Pour notre cas  $\left(\frac{E}{E_T} = 10\right)$  on remarque que  $\lambda_R$  n'est guère éloignée de  $\lambda_T$ . Pour certains matériaux réels les deux valeurs  $\lambda_R$  et  $\lambda_T$  sont très proches et donc la structure risque un flambage brutal une fois atteinte la charge critique du module tangent.

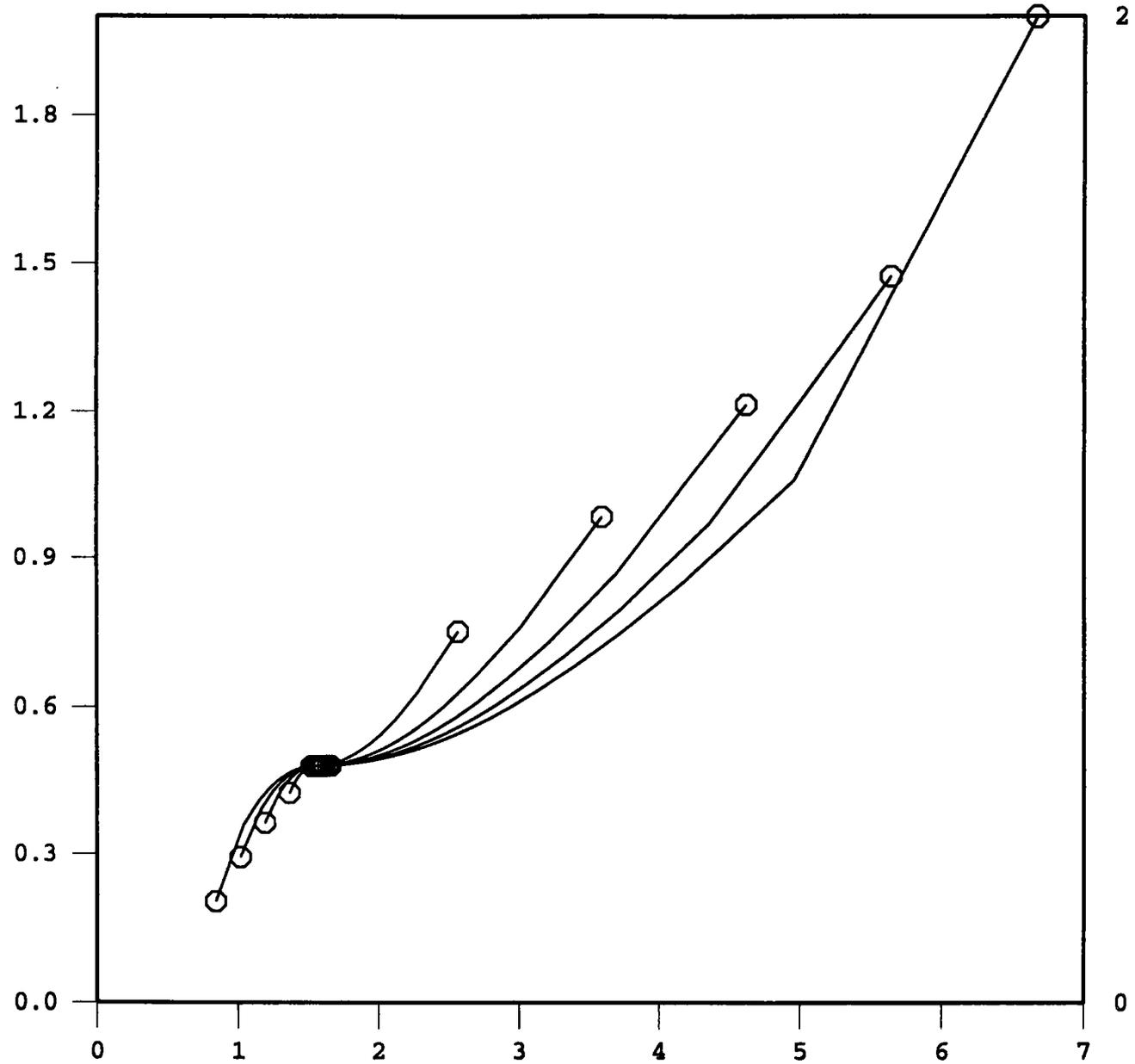
frontiere neutre en fonction de TETA

courbes traduisant la  
frontiere neutre en  
fonction de TETA



frontiere neutre en fonction de LAMBDA .

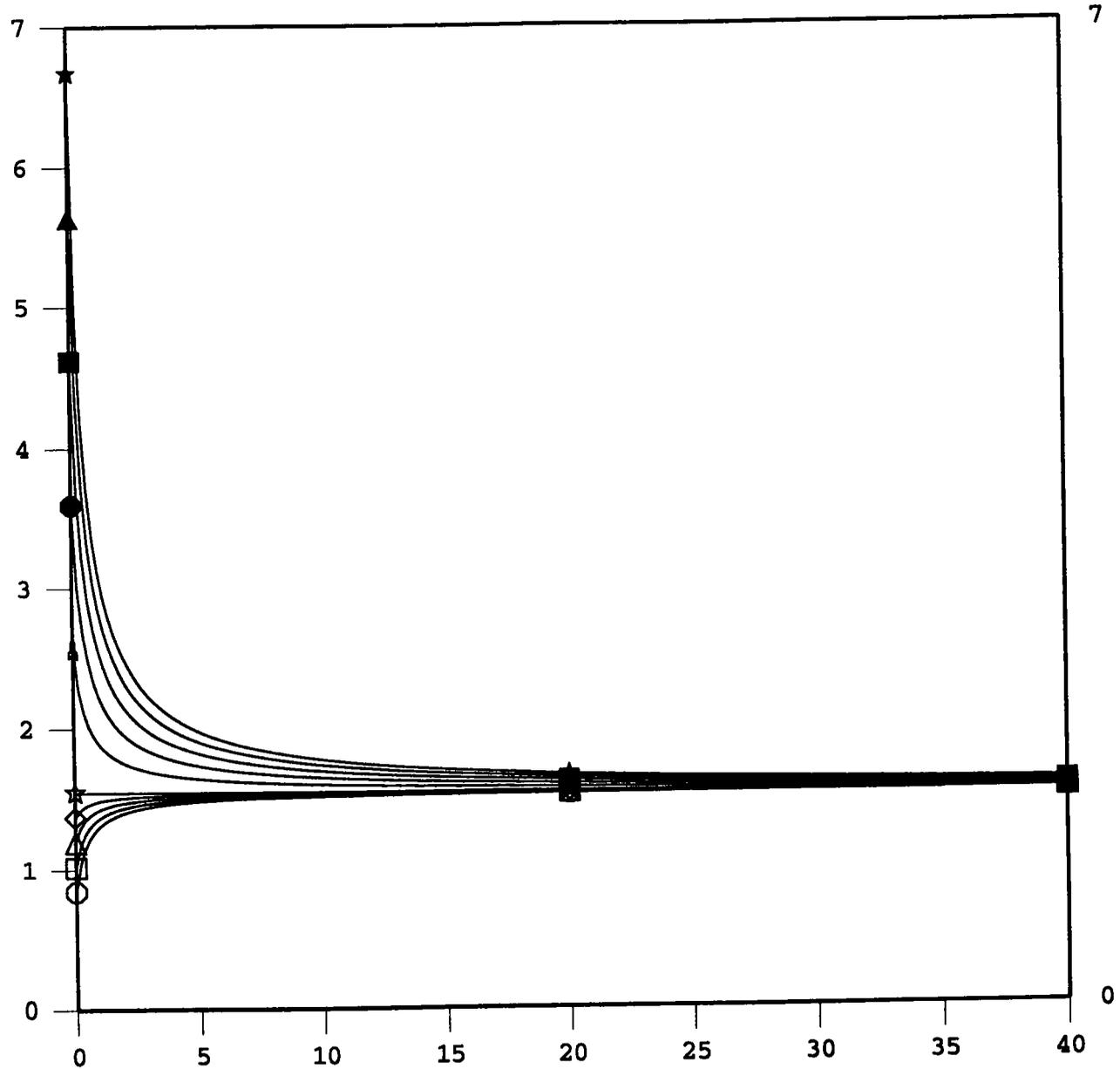
courbes traduisant la  
frontiere neutre en  
fonction du chargement lambda



LAMBDA en fonction de TETA

Branches bifurquees  
d'un modele simple

Les courbes representent  
le chargement lambda en  
fonction de la deflexion  
teta



## 2.7. Discussion

Le but de l'étude du modèle simple est d'introduire une méthodologie de résolution que l'on va appliquer pour résoudre le problème du post-flambage des poutres élastoplastiques. Cependant on peut d'ores et déjà dégager quelques résultats qualitatifs.

- Il est bien connu depuis les travaux de Hutchinson qu'en plasticité le post-flambage fait intervenir de manière cruciale l'apparition puis le développement d'une zone de décharge. Notre étude montre comment la taille de cette zone pilote la construction des branches bifurquées mettant ainsi en évidence le rôle central de la décharge dans le calcul du post-flambage. On donne en particulier une relation liant explicitement l'incrément de charge à la taille de la zone de décharge sur les branches bifurquées. Cette relation n'était donnée dans la littérature que par des comparaisons d'ordre de grandeurs issues de développements asymptotiques formels.

- L'existence d'un continuum de points de bifurcation en plasticité a été mise en évidence d'abord par Cimetière [CIM 1984]. Cette propriété s'avère spécifique du comportement plastique. Ce continuum de points de bifurcation est lié à la possibilité de décharge qui permet à la structure d'augmenter sa rigidité globale en ajustant la taille de la zone de décharge. Ce gain de rigidité permet à la structure de supporter un incrément de charge.

- La description de l'ensemble des solutions permet en particulier de résoudre le problème du calcul de la charge maximale supportable par la structure. Dans notre cas c'est simplement la charge critique du module réduit. Cette conclusion est confirmée par l'étude des imperfections qui montre que le système est insensible aux petites perturbations au sens où les charges maximales supportables par les systèmes parfait et perturbé sont les mêmes. Cette propriété ne semble pas caractéristique du flambage plastique et est due à l'absence de non des linéarités géométriques.

## CHAPITRE 3

**FLAMBAGE ET POST-  
FLAMBAGE DES POUTRES  
ÉLASTOPLASTIQUES**

## Introduction et orientation

Comme il a été noté auparavant, le modèle à deux degrés de liberté étudié au chapitre précédent a été introduit afin de simuler le comportement d'une section de poutre. Le but de ce chapitre est d'étendre les résultats concernant ce modèle simple au cas d'une poutre élastoplastique subissant un flambage en flexion.

Ce cas est certes académique mais permet néanmoins de comprendre la réponse d'une structure continue. La difficulté majeure rencontrée ici, par rapport au modèle de Hutchinson, est le fait que la frontière neutre est maintenant une fonction de l'abscisse  $x$ . Sa détermination ne nécessite plus la résolution d'un problème algébrique mais d'un problème différentiel.

En effet, cette frontière neutre va être caractérisée par une équation différentielle ordinaire du second ordre. Sa détermination va permettre de résoudre deux problèmes principaux.

Le premier concerne l'exploration de l'ensemble des points de bifurcation situés sur la branche fondamentale. On montre alors qu'il y a plusieurs continua de points de bifurcation pouvant se chevaucher ou non. Chaque vitesse transverse, c'est-à-dire chaque vitesse autre que celle qui conduit à rester sur la solution fondamentale, est liée bi-univoquement à un paramètre scalaire  $R_0$  caractérisant la taille de la zone de décharge.

Cette relation est donnée sous la forme :

$$\lambda = G(R_0)$$

où  $\lambda$  est l'incrément de chargement,  $G$  une fonction connue explicitement et  $R_0$  un paramètre dont l'expression précise va apparaître plus loin.

Le second problème est celui de l'existence de branches de solutions bifurquées issues des points de bifurcation situés sur la branche fondamentale et tangentes aux vitesses transverses correspondantes. L'ingrédient essentiel, ici, est la transformation du problème d'équilibre quasi-statique de la structure en un problème de Cauchy standard qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{U} = F(U, R_0) \\ U(R_{00}) = U_0 \end{cases}$$

où  $U = (U, \lambda)$ ,  $U$  étant le déplacement et  $\lambda$  le chargement.  $R_0$  est un paramètre lié à la taille de la zone de décharge et  $R_{00}$  sa valeur initiale. Le point est une dérivée par rapport à  $R_0$  et  $F$  une fonction continue.

La résolution de ce problème permet ainsi de construire le diagramme de bifurcation pour cette structure et de déduire une méthode de continuation pour construire les branches de solutions.

Ce chapitre se décompose en cinq parties. Dans la première on décrit le problème mécanique à étudier. On introduit ensuite des notations spécifiques qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

Ces notations tiennent compte, en particulier, de l'existence éventuelle d'une zone de décharge au sein de la structure. On transforme alors le problème initial afin de lui donner une forme adaptée à la discussion de l'existence des vitesses initiales bifurquées et des branches de solutions.

Vu l'importance des zones de décharge dans cette étude, la seconde partie est consacrée à l'analyse de leur topologie et de leur régularité spatiale. Ceci nous amène à classer les zones de décharge en quatre classes. L'étude de l'une de ces quatre classes de zones de décharge est suffisante pour déduire les résultats concernant les autres, et ce grâce à des raisonnements de symétrie ou d'analogie.

On est amené, en particulier, à distinguer le cas du chargement constant ( $\dot{\lambda} = 0$ ) et celui du chargement non constant ( $\dot{\lambda} \neq 0$ ). Rappelons simplement ici, que l'hypothèse du chargement constant était à la base du calcul de la charge critique du module réduit. Dans notre cas, cette hypothèse apparaît dans un sens qu'on précisera ultérieurement, comme un état limite.

Dans la troisième partie, on aborde la question de l'existence des vitesses initiales bifurquées. Cela veut dire que l'on montre l'existence de solutions du problème en vitesse, écrit sur l'état fondamental, et qui tendent à écarter le système de cet état fondamental. Pour ce faire, on construit un problème aux valeurs propres du type :

$$\begin{array}{l} V''(x) + \lambda \rho(x) V(x) = 0 \\ V(0) = V(\ell) = 0 \end{array}$$

où  $\rho(x) > 0$  est une fonction continue,  $\lambda$  la valeur propre et  $V$  le vecteur propre défini sur l'intervalle  $[0, \ell]$ .

Un tel problème est étudié par exemple dans [COU 1953]. Grâce à ce problème, on dénombre les composantes connexes de la partie de la poutre en décharge, et que l'on appellera génériquement zones de décharge.

On montre, en particulier, qu'il existe des vitesses initiales bifurquées avec n'importe quel nombre de zones de décharge et qu'il suffit de comprendre comment construire celles avec une seule zone de décharge pour pouvoir construire toutes les autres.

Le reste de ce paragraphe est alors consacré à la transformation du problème différentiel caractérisant la zone de décharge en un problème algébrique.

On montre ensuite que ce problème algébrique admet une solution unique et qu'il fournit une méthode de calcul des vitesses initiales bifurquées simplement grâce à une quadrature. Cependant, dans cette méthode de calcul, on trouve déjà les ingrédients nécessaires à la méthode de continuation permettant la construction des branches de solutions correspondantes.

On aborde alors logiquement la quatrième partie qui traite de la preuve théorique de l'existence de ces branches bifurquées. On procède de la même manière que pour les vitesses initiales bifurquées et l'on aboutit au résultat grâce aux théorèmes généraux sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre et qui sont rappelés en annexe.

On ne peut clore ce chapitre sans parler de la question importante de la sensibilité aux imperfections. Ceci est l'objet de la cinquième partie. On se limite à une imperfection proportionnelle au premier mode. On montre alors que la structure, telle qu'elle est modélisée ici est insensible à ce type d'imperfection.

### 3.1. Position du problème

#### 3.1.1. Description du système

Il s'agit de modéliser le flambage en flexion des poutres à comportement élastoplastique. Comme cas représentatif, on étudie une poutre droite de section quelconque mais constante ( cf. Fig.3.1 ). Pour des raisons de simplicité de l'exposé la section sera supposée symétrique par rapport à son axe médian. Cette poutre est en appui simple et subit une compression simple représentée par la force  $\lambda$ . Chaque point de la poutre a alors deux degrés de liberté qui sont le déplacement longitudinal selon l'axe (Ox) qui est l'axe de la poutre et le déplacement transversal selon l'axe (Oy). On note  $u(x)$  et  $v(x)$  le déplacement de la fibre moyenne. On adopte ensuite les hypothèses et simplifications couramment utilisées de rotations modérées pour ce problème nous conduisant ainsi à supposer que la contrainte  $\sigma$  et la déformation  $\gamma$  sont uniaxiales et que cette dernière s'écrit, après avoir négligé certains termes quadratiques, de la manière suivante [WAS 1974]:

$$\gamma = u' + \frac{v'^2}{2} - y v''.$$

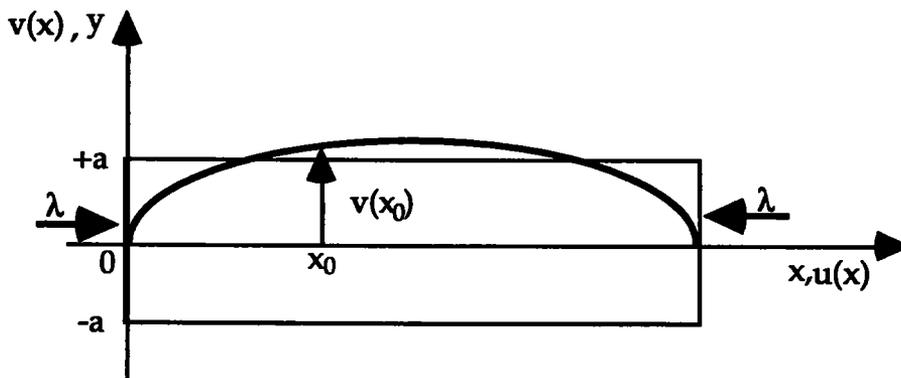


Fig.3.1. : Dimensions de la poutre en position initiale (Traits fins )  
et position fléchie ( Trait épais )

Quant à la loi de comportement, on suppose que le matériau constituant la poutre obéit à une loi de Prandtl-Reuss avec un écrouissage cinématique linéaire strictement positif identique à celle utilisée dans l'étude du modèle simple. La déformation permanente est notée  $\alpha$  ( $\alpha = \alpha(x, y)$ ).  $E$  et  $E_T$  représentent respectivement le module d'Young et le module tangent supposés constants.

On note la limite élastique par  $\sigma_Y$ . La courbe de traction uniaxiale reliant la contrainte  $\sigma$  à la déformation  $\gamma$  est représentée sur la figure Fig.3.2.

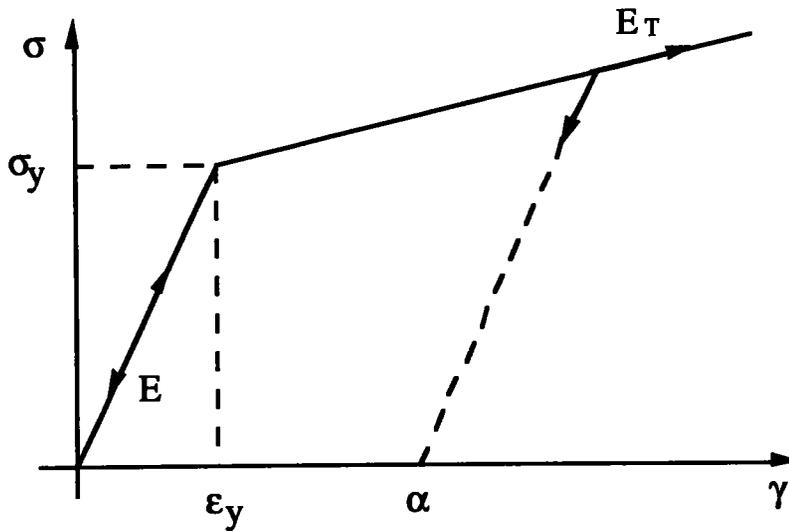


Fig. 3.2 : Courbe de traction

Cette loi est certes simple; elle comporte cependant les non-linéarités essentielles des lois plastiques. Elle est choisie afin de pouvoir pousser les calculs analytiques le plus loin possible.

On peut exprimer simplement cette loi comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= E_T \dot{\gamma} \text{ en charge plastique} \\ \dot{\sigma} &= E \dot{\gamma} \text{ en charge élastique ou en décharge} \end{aligned}$$

où le point désigne la dérivée par rapport à un paramètre cinématique caractérisant l'évolution quasi-statique.

### 3.1.2. Équations d'équilibre

L'équilibre de la résultante des forces et des moments s'écrit, en tenant compte des conditions d'appui simple, comme suit :

$$\begin{aligned} \cdot \quad -\lambda &= \iint_{S(x)} \sigma(x, y) \, dy \, dz & (3.1.a) \\ \cdot \quad \lambda v &= \iint_{S(x)} y \sigma(x, y) \, dy \, dz & (3.1.b) \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $S(x)$  est la section de la poutre d'abscisse  $x$ , ici uniforme.

La loi de comportement étant incrémentale, il est utile d'écrire les équations d'équilibre sous la forme suivante, obtenue en dérivant le système (3.1) :

$$\begin{aligned} \cdot \quad -\dot{\lambda} &= \iint_{S(x)} \dot{\sigma}(x, y) \, dy \, dz & (3.2.a) \\ \cdot \quad \dot{\lambda} v + \lambda \dot{v} &= \iint_{S(x)} y \dot{\sigma}(x, y) \, dy \, dz & (3.2.b) \end{aligned} \quad (3.2)$$

A l'image du modèle simple, ce problème possède une solution triviale. En effet, on peut construire une solution telle qu'après une phase élastique la poutre plastifie uniformément et reste en charge stricte. Cette solution a une flèche nulle ( $v(\lambda, x) = 0$ ) pour toute valeur du chargement  $\lambda$ .

Elle s'exprime de la manière suivante :

<p>. <b>1<sup>re</sup> phase</b> : <math>0 \leq \lambda \leq \lambda_p</math> : phase élastique :</p> <p>. <math>u(x) = -\frac{\lambda x}{ES}</math> ; . <math>v(x) = 0</math></p> <p>. <math>\alpha(x, y) = 0</math> ; . <math>\gamma(x, y) = -\frac{\lambda}{ES}</math></p> <p>. <b>2<sup>e</sup> phase</b> : <math>\lambda_p \leq \lambda</math> : phase plastique :</p> <p>. <math>u(x) = \frac{x}{S} \left[ \frac{\lambda_p - \lambda}{E_T} - \frac{\lambda_p}{E} \right]</math> ; . <math>v(x) = 0</math></p> <p>. <math>\alpha(x, y) = \left( \frac{1}{E_T} - \frac{1}{E} \right) \frac{1}{S} (\lambda_p - \lambda)</math></p>
---

Où  $\lambda_p$ , charge de plastification de la poutre, est simplement  $\sigma_y S$ .

Dans la section suivante, on transforme les équations d'équilibre afin de tenir compte de l'existence éventuelle d'une zone de décharge.

### 3.1.3. Une autre formulation

Il a été souligné dans l'état des lieux que l'évolution post-critique fait intervenir de manière inévitable l'évolution d'une zone de décharge. La frontière de cette dernière est constituée de points en charge neutre. En effet, on a le résultat suivant :

**Lemme 3.1 :**

*Si dans une section donnée indiquée par  $x \in [0, \ell]$  il y a une partie en charge et une autre en décharge alors il existe un unique point de charge neutre séparant ces deux parties et noté  $aY(x)$  avec  $Y(x)$  compris entre - 1 et 1. De plus, on a l'équation :*

$\ddot{u}' + v' \dot{v}' - a Y(x) \dot{v}'' = 0.$
---

(3.3)

### Démonstration :

Supposons qu'il y ait une partie en charge et une autre en décharge. On note  $aY$  un point séparant ces deux parties pour une section donnée. Alors la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}$  est de signe différent de part et d'autre de  $aY$ . Or, pour  $x$  fixé,  $\dot{\gamma}$  est une fonction affine de  $y$ . Elle s'annule donc en  $aY$  et ce point est bien un point de charge neutre. D'autre part, s'il y a deux points de charge neutre alors nécessairement  $\dot{\gamma}$  est nulle sur toute la section puisque  $\dot{\gamma}$  est affine en  $y$ . La section est alors entièrement en charge neutre. Ceci contredit l'hypothèse qu'il y ait une partie en charge.

L'équation (3.3) veut dire simplement que  $\dot{\gamma}(x, aY) = 0$ . D'où le résultat.

Ce résultat d'unicité du point de charge neutre dans une section donnée permet d'introduire une fonction  $Y(x)$  qui caractérise la frontière neutre de la zone de décharge. Cette fonction  $Y(x)$  est notre principale inconnue.

D'autre part, il existe deux sortes de points constituant la frontière neutre. Dans le premier cas la zone de décharge est au-dessus du point de charge neutre. Celui-ci sera dit du type 1. Dans le deuxième cas, c'est l'inverse qui se produit et le point de charge neutre sera dit de type 2.

Le but de ce qui suit est alors de réécrire les équations d'équilibre, à savoir les équations (3.2), en tenant compte de la loi de comportement et en introduisant la fonction  $Y(x)$ . Pour ce faire, on introduit quelques notations utiles dans la suite. Il s'agit essentiellement d'introduire quelques fonctions de  $Y$  considérée comme variable.

### Notations :

On note  $K(y)$  l'épaisseur de la poutre selon l'axe  $z$  pour  $y$  donnée,  $S$  l'aire de la section et  $I$  son moment d'inertie.

On pose alors :

$$\begin{aligned} S_1(Y) &= \int_{-a}^{aY} K(y) dy & ; & \quad S_2(Y) = S - S_1(Y) \\ M_1(Y) &= \int_{-a}^{aY} y K(y) dy & ; & \quad M_2(Y) = -M_1(Y) \\ I_1(Y) &= \int_{-a}^{aY} y^2 K(y) dy & ; & \quad I_2(Y) = I - I_1(Y) \end{aligned}$$

Ces fonctions servent à définir les fonctions  $P_i$  et  $Q_i$  qui suivent.

Afin d'éviter des discussions trop lourdes, on fait une hypothèse de régularité de la section :

### Hypothèse :

On suppose que l'épaisseur de la poutre  $K(y)$  est une fonction continue de  $y$  dans  $[-a, a]$ .

L'écriture des équations d'équilibre se simplifie beaucoup en introduisant les fonctions suivantes ( $i$  valant 1 ou 2), qui apparaissent à la suite d'intégrations dans (3.2.a) et (3.2.b) :

$P_i(Y) = (E - E_T) \left[ M_i(Y) - a Y S_i(Y) + \frac{a E}{E - E_T} S Y \right] \quad (3.4.a)$	(3.4)
$Q_i(Y) = (E - E_T) \left[ a Y M_i(Y) - I_1(Y) + \frac{E}{E - E_T} I \right] \quad (3.4.b)$	
$R_i(Y) = \frac{Q_i(Y)}{P_i(Y)} \quad (3.4.c)$	

Ces notations permettent de réécrire les équations d'équilibre (3.2.a) et (3.2.b) comme suit :

$\dot{u}' + v' \dot{v}' - a Y \dot{v}'' = 0 \quad (3.5.a)$	(3.5)
$P_i(Y) \dot{v}'' + \dot{\lambda} = 0 \quad (3.5.b)$	
$Q_i(Y) \dot{v}'' + \lambda \dot{v} + \dot{\lambda} v = 0 \quad (3.5.c)$	

Ces équations sont valables dans la cas où il existe un point de charge neutre de type  $i$  ( $i$  valant 1 ou 2) dans la section et sont obtenues grâce à l'équation (3.3)

Ce même système d'équations se transforme après quelques manipulations élémentaires qui consistent en l'élimination de  $\dot{v}''$  de (3.5.c) grâce à (3.5.b), et on obtient :

$\dot{v} = [R_i(Y) - v] \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \quad (3.6.a)$	(3.6)
$\dot{\lambda} \left( [R_i(Y)]'' + \frac{\lambda}{P_i(Y)} - v'' \right) = 0 \quad (3.6.b)$	

Évidemment, ces deux dernières équations ne sont valables que si  $P_i(Y)$  est non nulle. La signification de cette condition apparaîtra naturellement dans le paragraphe suivant.

D'autres cas de figure peuvent se produire. En effet, une section peut être entièrement en charge, entièrement en décharge ou entièrement en charge neutre.

On s'intéresse donc d'abord à ces cas-là et on propose un récapitulatif des équations d'équilibre intervenant dans chaque type de comportement de la section. Ces équations sont obtenues en explicitant les intégrales intervenant dans le problème (3.2).

On distingue alors les quatre cas suivants :

**1<sup>er</sup> cas : section en charge plastique**

Dans ce cas, on a  $\dot{\sigma} = E_T \dot{\gamma}$  sur toute la section, soit après intégration et substitution dans (3.2) :

$\dot{u}' + v' \dot{v}' + \frac{\dot{\lambda}}{E_T S} = 0 \quad (3.7.a)$	(3.7)
$\dot{v}'' + \frac{\lambda}{E_T I} \dot{v} + \frac{\dot{\lambda}}{E_T I} v = 0 \quad (3.7.b)$	

**2<sup>e</sup> cas : section en charge élastique ou en décharge**

Ici la loi de comportement s'écrit  $\dot{\sigma} = E \dot{\gamma}$ . Le problème (3.2) se transforme comme suit :

$\dot{u}' + v' \dot{v}' + \frac{\dot{\lambda}}{E S} = 0 \quad (3.8.a)$	(3.8)
$\dot{v}'' + \frac{\lambda}{E I} \dot{v} + \frac{\dot{\lambda}}{E I} v = 0 \quad (3.8.b)$	

**3<sup>e</sup> cas : section en charge neutre**

Cela signifie simplement que  $\dot{\gamma} = 0$  sur toute la section et l'on a donc trivialement

$\dot{\lambda} = 0 \quad (3.9.a)$	(3.9)
$\dot{v} = 0 \quad (3.9.b)$	
$\dot{v}'' = 0 \quad (3.9.c)$	
$\dot{u}' + v' \dot{v}' = 0 \quad (3.9.d)$	

**4<sup>e</sup> cas : présence dans la section d'un point de charge neutre de type i**

Ce cas a été discuté auparavant et on le résume ici, en associant les systèmes (3.5) et (3.6) :

· $\dot{u}' + v' \dot{v}' - a Y \dot{v}'' = 0$	(3.10.a)	
· $P_i(Y) \dot{v}'' + \dot{\lambda} = 0$	(3.10.b)	
· $Q_i(Y) \dot{v}'' + \dot{\lambda} v + \lambda \dot{v} = 0$	(3.10.c)	
· $\dot{v} = [R_i(Y) - v] \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$	(3.10.d)	(3.10)
· $\left( [R_i(Y)]'' + \frac{\lambda}{P_i(Y)} - v'' \right) \dot{\lambda} = 0$	(3.10.e)	

Finalement, la résolution du problème consiste donc à chercher une solution globale vérifiant les systèmes (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10) respectivement dans les zones concernées, ces dernières étant inconnues.

Avant de continuer dans l'analyse de ce problème, on décrit quelques propriétés importantes des fonctions  $P_i$ ,  $Q_i$  et  $R_i$  introduites par les équations (3.4), propriétés qui sont indispensables pour comprendre la suite de cette étude. Ceci fait l'objet de la section suivante.

**3.1.4. Étude des fonctions  $P_i$ ,  $Q_i$  et  $R_i$**

On commence tout d'abord par une remarque concernant une poutre de section rectangulaire. Dans ce cas on trouve que les fonctions  $P_1$  et  $Q_1$  sont respectivement des polynômes de degré deux et trois dont l'expression explicite est, en notant  $2b$  l'épaisseur de la poutre selon l'axe des  $z$  :

$P_1(Y) = a^2 b (E - E_T) \left[ -Y^2 + 2 \frac{E + E_T}{E - E_T} Y - 1 \right]$ $Q_1(Y) = \frac{a^3 b}{3} (E - E_T) \left[ Y^3 - 3 Y + 2 \frac{E + E_T}{E - E_T} \right]$
--

A un facteur multiplicatif global et à un changement de variable près, on retrouve les mêmes expressions que dans le cas du modèle à deux degrés de liberté étudié au chapitre 2 ce qui, en particulier, prouve à quel point ce modèle était effectivement représentatif du comportement d'une poutre élastoplastique. De plus, on obtient pour le sens de variation des propriétés analogues à celles trouvées pour le modèle simple.

On a en effet les propriétés suivantes des fonctions  $P_i, Q_i$  et  $R_i$  dont la démonstration est élémentaire :

- $P_1(Y)$  est une fonction strictement croissante de  $P_1(-1) = -E$  a S à  $P_1(1) = E_T$  a S. Elle a donc un zéro unique dans  $[-1, 1]$  noté  $Y_R^1$ . De plus,  $Y_R^1$  est strictement positif ;
- $P_2(Y)$  est une fonction strictement croissante de  $P_2(-1) = -E_T$  a S à  $P_2(1) = E$  a S. Elle s'annule alors en un unique point noté  $Y_R^2$  strictement négatif ;
- $Q_1(Y)$  est une fonction strictement positive et strictement décroissante de  $Q_1(-1) = EI$  à  $Q_1(+1) = E_T I$  ;
- $Q_2(Y)$  est une fonction strictement positive et strictement croissante de  $Q_2(-1) = E_T I$  à  $Q_2(1) = EI$  ;
- $R_1(Y)$  a une asymptote verticale en  $Y_R^1$ . Elle décroît strictement de  $R_1(-1) = -\frac{I}{aS}$  à  $-\infty$  sur l'intervalle  $[-1, Y_R^1[$ . Sa restriction à cet intervalle est donc bijective et on note  $g_1$  sa réciproque qui est donc définie de  $]-\infty, -\frac{I}{aS}]$  vers  $[-1, Y_R^1[$ .  
De même  $R_1(Y)$  décroît strictement de  $+\infty$  à  $\frac{I}{aS}$  sur l'intervalle  $]Y_R^1, 1]$ . Sa restriction à  $]Y_R^1, 1]$  est donc bijective et on définit de la même manière que  $g_1$  la réciproque  $f_1$  définie de  $[\frac{I}{aS}, +\infty[$  vers  $]Y_R^1, 1]$  ;
- $R_2(Y)$  a une asymptote verticale en  $Y_R^2$ . Elle décroît strictement de  $-\frac{I}{aS}$  à  $-\infty$  sur l'intervalle  $[-1, Y_R^2[$ . Sa restriction sur cet intervalle est donc bijective et on note  $g_2$  sa réciproque définie de  $]-\infty, -\frac{I}{aS}]$  vers  $[-1, Y_R^2[$ . De même  $R_2(Y)$  décroît strictement de  $+\infty$  à  $\frac{I}{aS}$  sur l'intervalle  $]Y_R^2, +1]$ . On note  $f_2$  sa fonction réciproque qui est, ainsi, définie de  $[\frac{I}{aS}, +\infty[$  vers  $]Y_R^2, +1]$ .

De plus, on a les relations suivantes :

$$\begin{array}{l} \cdot P_1(Y) = -P_2(-Y) \\ \cdot Q_1(Y) = Q_2(-Y) \\ \cdot Y_R^2 = -Y_R^1 \\ \cdot Q_1(Y_R^1) = Q_2(Y_R^2) \end{array}$$

Dans cette étude, on aura besoin uniquement de ces propriétés et chaque fois que l'on parlera des propriétés des fonctions  $P_i$ ,  $Q_i$  ou  $R_i$ , c'est de ces propriétés-là qu'il s'agira.

Ces propriétés des fonctions  $P_i$  et  $Q_i$  vont nous permettre d'avoir, en particulier, des résultats quant à la topologie et la régularité des zones de décharge. Grâce à ces propriétés, on va d'abord faire une certaine classification de ces zones afin de n'en étudier qu'un nombre réduit. C'est l'objet du paragraphe suivant.

## 3.2. Analyse des zones de décharge

La détermination des zones de décharge est, comme il a été dit auparavant, d'une grande importance dans cette étude. Dans ce paragraphe, on tente d'avoir une classification de ces zones selon leur topologie. Cette topologie est différente selon que l'on est en chargement constant ( $\dot{\lambda} = 0$ ) ou non. Dans un premier temps, on étudie le cas  $\dot{\lambda} = 0$ .

### 3.2.1. Topologie des zones de décharge pour $\dot{\lambda} = 0$

Dans cette section, on présente les conditions sur la zone de décharge associées à un chargement constant ( $\dot{\lambda} = 0$ ). Réciproquement, on analyse les conséquences de l'hypothèse  $\dot{\lambda} = 0$  sur la topologie de ces zones.

Ces résultats sont résumés par le théorème suivant :

#### **Théorème 3.1 :**

*On a les affirmations suivantes :*

- 1. Si une section comporte plus d'un point de charge neutre ( cf. Fig.3.4. ) alors  $\dot{\lambda} = 0$ .*
- 2. Si la frontière neutre rencontre la droite  $Y = Y_R^1$  en un point de charge neutre de type 1 ou la droite  $Y = Y_R^2$  en un point de charge neutre de type 2 alors  $\dot{\lambda} = 0$ .*
- 3. Si l'un des points  $x = 0$  ou  $x = \ell$  appartient à la frontière neutre alors  $\dot{\lambda} = 0$ .*

*Réciproquement :*

- 4. Si  $\dot{\lambda} = 0$  alors il n'y a pas de section entièrement en charge ou entièrement en décharge stricte.*
- 5. Si  $\dot{\lambda} = 0$ , alors chaque section est ou bien entièrement en charge neutre, ou bien comporte un seul point de charge neutre. De plus si ce point de charge neutre est de type 1 alors  $Y = Y_R^1$  et s'il est de type 2 alors  $Y = Y_R^2$ .*

Démonstration :

1. Cette situation est représentée, pour quelques cas, par la figure ci-après :

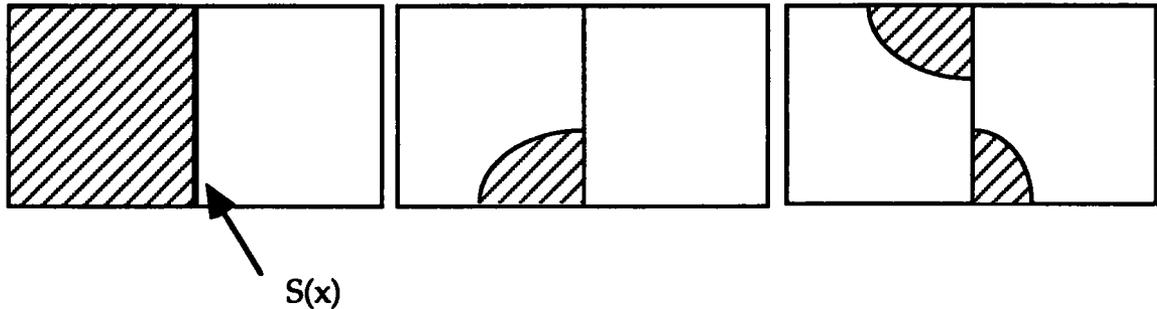


Fig.3.4. : Quelques situations impossibles de topologie des zones de décharge.

De part et d'autre de la section  $S(x)$  on a respectivement  $\dot{\sigma} = E_T \dot{\gamma}$  et  $\dot{\sigma} = E \dot{\gamma}$  sur une partie de mesure non nulle. Or la composante du vecteur contrainte normale à cette section est continue et donc la déformation  $\dot{\gamma}$  est nulle sur une partie de mesure non nulle. Comme on l'a déjà utilisé, la déformation  $\dot{\gamma}$  est une fonction affine de la coordonnée  $y$  pour  $x$  fixé. Cela entraîne que la vitesse  $\dot{\gamma}$  est nulle sur toute la section considérée ou en d'autres termes que la section est entièrement en charge neutre. Ce qui implique trivialement que  $\dot{\lambda} = 0$ .

2. Dans ce cas, l'équation (3.10.b) est valable :

$$P_1(Y) \dot{v}'' + \dot{\lambda} = 0 \quad (3.10.b)$$

$Y_R^1$  et  $Y_R^2$  sont les racines de  $P_1$  et  $P_2$  et donc on obtient immédiatement le résultat.

3. D'après les conditions aux limites et l'équation (3.10.c), on a :  $\dot{v}''(0) = \dot{v}''(\ell) = 0$  et donc, d'après l'équation (3.10.b), on a  $\dot{\lambda} = 0$ .
4. On suppose que  $\dot{\lambda} = 0$ . Si toute la section était en charge plastique ou en décharge élastique alors, d'après les équations (3.7.a) et (3.8.a), on aurait  $\dot{u}' + v' \dot{v}' = 0$  et donc  $\dot{\gamma} = -y \dot{v}''$ . Ceci est absurde car  $\dot{\gamma}$  ne peut pas changer de signe sur la section si celle-ci est entièrement en charge ou entièrement en décharge.

5. Le point 4 précédent indique en particulier que si  $\dot{\lambda} = 0$  la section ne peut pas être complètement en charge plastique ou complètement en décharge et donc la section est ou bien en charge neutre ou bien comporte un point de charge neutre séparant une partie en charge et une autre en décharge.

Supposons que la section n'est pas en charge neutre. Alors deux cas peuvent se produire et ce à cause de l'équation (3.10.b).

- $\dot{v}'' = 0$  : ceci est impossible car si tel était le cas la déformation  $\dot{\gamma}$ , qui est affine en  $y$ , s'annulerait en a Y (point de charge neutre) et aurait une pente nulle ( $-\dot{v}''$ ). Elle s'annulerait donc sur toute la section et celle-ci serait donc en charge neutre.
- l'équation (3.10.b) montre alors que Y est racine de  $P_i$  si le point de charge neutre est de type  $i$ . D'où le résultat, puisque  $Y_R^i$  annule  $P_i$  ( $i$  valant 1 ou 2).

On peut ajouter le corollaire suivant :

**Corollaire 3.1 :**

*Lorsque  $\dot{\lambda} = 0$ , on ne peut avoir qu'un nombre fini de sections entièrement en charge neutre. De plus, cela ne peut se produire que pour des valeurs discrètes de  $\lambda$  notées  $\lambda_R^n$ .*

**Démonstration :**

D'après le théorème précédent il n'y a que trois possibilités pour chaque section lorsque  $\dot{\lambda}$  est égal à zéro. Ou bien la section est en chargement neutre, ou bien il y a un point de charge neutre de type 1 ou bien il y a un point de charge neutre de type 2. Dans ces deux derniers cas la vitesse  $\dot{v}$  vérifie l'une des deux équations :

$$\dot{v}'' + \frac{\lambda}{Q_1(Y_R^1)} \dot{v} = 0$$

ou

$$\dot{v}'' + \frac{\lambda}{Q_2(Y_R^2)} \dot{v} = 0$$

selon que le point de charge neutre est de type 1 ou 2.

Ces deux équations ne sont autres que l'équation (3.10.c) dans laquelle on a mis  $\dot{\lambda} = 0$ . Elles sont évidemment vérifiées quand la section est en charge neutre car dans ce cas :  $\dot{v} = \dot{v}'' = 0$ .

D'autre part, et d'après les propriétés des fonctions  $Q_i$  on a :

$$Q_1(Y_R^1) = Q_2(Y_R^2) \text{ car } Y_R^1 = -Y_R^2, \text{ de plus } Q_1(Y_R^1) > 0.$$

On obtient donc un problème aux valeurs propres vérifié par  $\dot{v}$  sur toute la longueur de la poutre et qui s'écrit comme suit :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{v}'' + \frac{\lambda}{Q_1(Y_R^1)} \dot{v} &= 0 & (3.11.a) \\ \dot{v}(0) = \dot{v}(\ell) &= 0 & (3.11.b) \end{aligned}} \quad (3.11)$$

Un tel problème est résolu trivialement. Il admet en particulier une suite dénombrable, rangée dans l'ordre croissant, de valeurs propres indexées par  $n \geq 1$  et notées  $\lambda_R^n$  avec :

$$\boxed{\lambda_R^n = n^2 \frac{\pi^2 Q_1(Y_R^1)}{\ell^2}} \quad (3.12)$$

De plus, le vecteur propre correspondant à la valeur propre  $\lambda_R^n$  s'annule exactement aux  $n+1$  points  $x_k = \frac{k}{n} \ell$  avec  $0 \leq k \leq n$ . Or là où la section est en charge neutre,  $\dot{v}$  s'annule. D'où le résultat.

**Remarque :**

La construction du problème aux valeurs propres (3.11) a été obtenue grâce à la condition  $\dot{\lambda} = 0$ . On note en particulier que la flèche  $v$  est quelconque et les résultats ainsi obtenus sont valables sur toute branche de solutions. Cependant on va utiliser une construction analogue pour déterminer les vitesses initiales bifurquées à partir de la solution fondamentale en profitant cette fois de la condition  $v = 0$ .

En conclusion, lorsque  $\dot{\lambda} = 0$  :

- $\lambda$  est l'une des valeurs  $\lambda_R^n$ ,
- La fonction  $Y(x)$  est constante par morceaux,
- Les points de discontinuités sont les zéros des modes propres associés à  $\lambda_R^n$ .

Les situations possibles lorsque  $\dot{\lambda} = 0$  pour quelques valeurs de  $n$  sont représentées sur la figure ci-après.

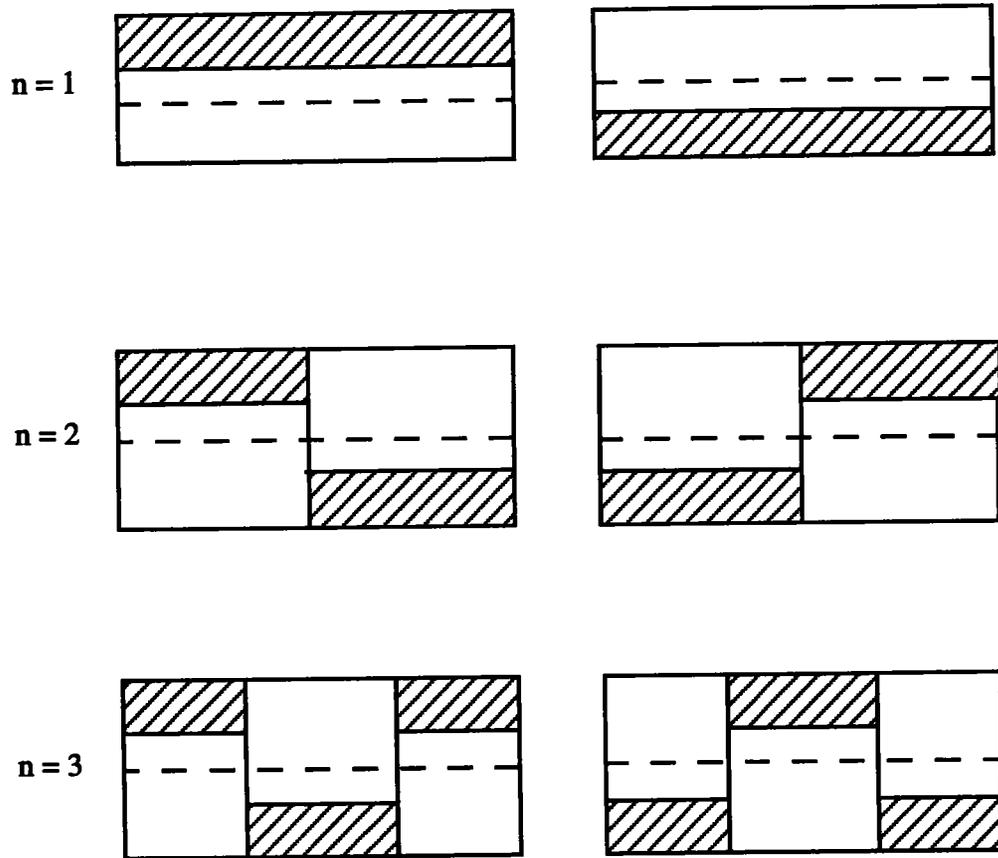


Fig. 3.5 : Exemples de zones de décharge (hachures) dans le cas  $\dot{\lambda} = 0$

### 3.2.2. Topologie des zones de décharge pour $\dot{\lambda} \neq 0$

L'étude de ce cas est facilitée par l'étude de la section précédente. En effet, on peut déduire les assertions suivantes.

Si  $\dot{\lambda} \neq 0$  alors :

- Les points  $x = 0$  et  $x = \ell$  ne peuvent appartenir à la frontière neutre.
- la frontière neutre ne peut rencontrer la droite  $Y = Y_R^1$  en un point de charge neutre de type 1, ni la droite  $Y = Y_R^2$  en un point de charge neutre de type 2.
- chaque frontière neutre arrive jusqu'aux bords  $Y = -1$  ou  $Y = +1$ . En effet si tel n'était pas le cas et en vertu de la continuité de la composante normale du vecteur contrainte, la section où cette frontière s'arrêterait serait entièrement en charge neutre.
- comme la frontière neutre ne peut couper la droite  $Y = Y_R^1$  dans le cas où elle est formée de points de charge neutre de type 1, ni la droite  $Y = Y_R^2$  si elle est constituée de points de charge neutre de type 2, alors nécessairement les deux extrémités de cette frontière sont ou bien en  $Y = +1$  ou bien en  $Y = -1$ .

Finalement on déduit de ces remarques le résultat suivant.

#### **Théorème 3.2 :**

*Lorsque  $\dot{\lambda} \neq 0$  on a les deux cas :*

- 1. La frontière neutre est formée de points de charge neutre de type 1 et on a ou bien  $Y_R^1 < Y(x) \leq +1$  ou bien  $-1 \leq Y(x) < Y_R^1$ .*
- 2. La frontière neutre est formée de points de charge neutre de type 2 et on a ou bien  $Y_R^2 < Y(x) \leq +1$  ou bien  $-1 \leq Y(x) < Y_R^2$ .*

La démonstration de ce théorème est évidente à partir des remarques précédentes.

Dans la section suivante et grâce à ce théorème, on donne une classification des zones de décharge.

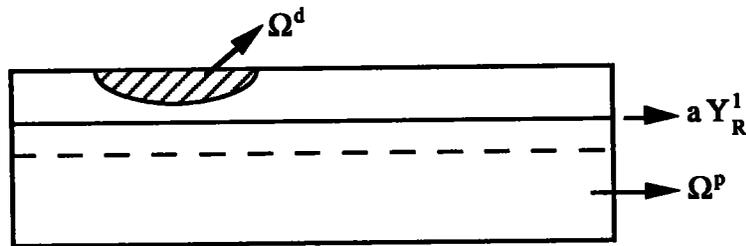
### 3.2.3. Classification des zones de décharge

A la lumière de ce qui précède, on peut classer les zones de décharge en 4 types : I, I.bis, II et II.bis. Les types I et I.bis ont la particularité d'être constitués uniquement de points de charge neutre de type 1 et les types II et II.bis sont formés de points neutres de type 2.

Rappelons que les points de charge neutre de type 1 se trouvent en dessous de la zone de décharge et ceux de type 2 sont au-dessus de celle-ci. On envisage alors les quatre cas suivants pour lesquels on ne représente qu'une portion de la poutre.

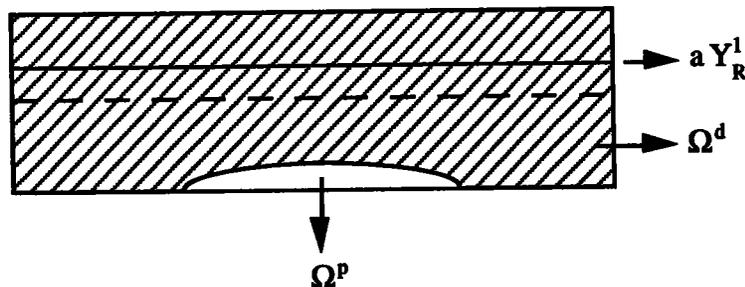
#### 1<sup>er</sup> cas : zone de décharge de type I

C'est une zone de décharge dont la frontière neutre est formée de points de charge neutre de type 1 et vérifiant :  $Y_R^1 < Y(x) \leq +1$ . Elle est représentée par la partie hachurée du dessin.



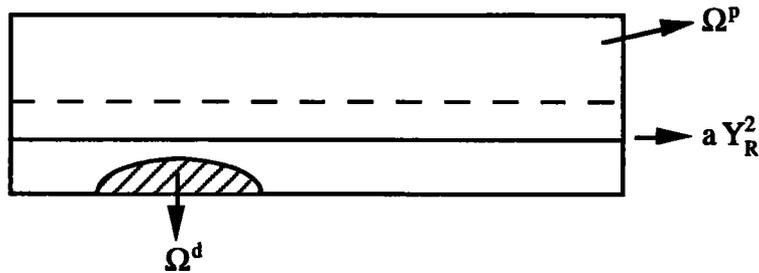
#### 2<sup>e</sup> cas : zone de décharge de type I.bis

Comme dans le premier cas, la frontière neutre est formée de points de charge neutre de type I mais vérifiant maintenant  $-1 \leq Y(x) < Y_R^1$ .



### 3<sup>e</sup> cas : zone de décharge de type II

C'est une zone de décharge dont la frontière neutre est formée de points de charge neutre de type II et qui est comprise dans l'intervalle  $-1 \leq Y(x) < Y_R^2$ .

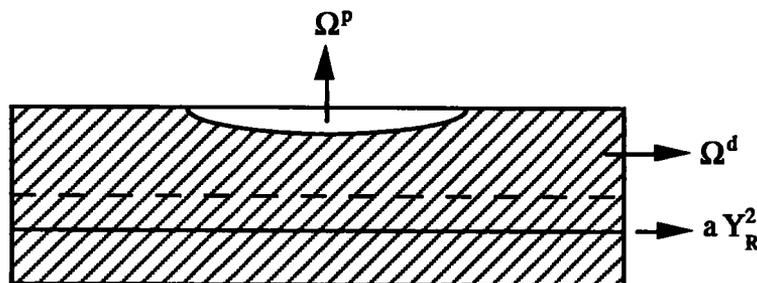


#### Remarque :

Ces zones peuvent être déduites du premier cas par symétrie par rapport à la droite  $y = 0$ .

### 4<sup>e</sup> cas : zone de décharge de type II.bis

C'est une zone de décharge dont la frontière neutre est formée de points de charge neutre de type II et qui est comprise dans l'intervalle  $Y_R^2 < Y(x) \leq +1$ .



#### Remarque :

Lorsque  $\lambda \neq 0$ , certains de ces types de zones ne peuvent coexister avec d'autres types. Par exemple, le type I ne peut coexister avec le type I.bis, ni le type II.bis. On a en effet le résultat suivant :

#### Lemme 3.2. :

*Lorsque  $\lambda \neq 0$  le type I ne peut coexister qu'avec le type II, et le type I.bis ne peut coexister qu'avec le type II.bis.*

Démonstration :

Cela provient uniquement du fait que si l'on considère toute autre combinaison que I et II ou I.bis et II.bis il y aura nécessairement une section en charge neutre, ce qui est exclu par la condition  $\lambda \neq 0$ .

Après cette classification, l'objet de la section suivante est d'écrire les problèmes vérifiés par ces différents types de zones de décharge ce qui va nous permettre en particulier de déduire leur régularité spatiale.

### 3.2.4. Régularité des zones de décharge

Rappelons tout d'abord que si  $\dot{\lambda} = 0$  alors la frontière neutre est constante par morceaux et les points de discontinuité correspondent aux sections entièrement en charge neutre. Dans la suite, on suppose donc que  $\dot{\lambda} \neq 0$  et l'on a le résultat de régularité suivant.

#### Théorème 3.3 :

*Lorsque  $\dot{\lambda} \neq 0$ , la frontière  $Y(x)$  de chaque zone de décharge est continue et est au moins une fois dérivable. De plus, plus la fonction  $K(y)$ , qui mesure l'épaisseur de la section selon l'axe  $z$ , est régulière, plus  $Y(x)$  est régulière.*

#### Démonstration :

Tout d'abord  $Y(x)$  est continue. En effet si tel n'était pas le cas la section de discontinuité serait entièrement en charge neutre, ce qui est exclu par  $\dot{\lambda} \neq 0$ . Rappelons d'autre part, que  $Y(x)$  atteint le bord  $Y = +1$  à ses deux extrémités dans le cas d'une zone de décharge de type I et II.bis ; et le bord  $Y = -1$  pour une zone de décharge de type I.bis et II.

Donc chaque zone de décharge est caractérisée par une frontière neutre  $Y(x)$  définie de la manière suivante :

*Il existe deux nombres  $\tau_1$  et  $\tau_2$  tels que  $0 < \tau_1 < \tau_2 < l$ . La fonction  $Y(x)$  est alors définie dans l'intervalle  $[\tau_1, \tau_2]$  et vérifie, selon le type de zone de décharge, l'un des problèmes suivants :*

#### Zone de décharge de type I :

Dans ce cas, la frontière neutre  $Y(x)$  vérifie  $Y_R^1 < Y \leq +1$  et l'équation (3.10.e) soit :

$$[R_1(Y(x))]'' + \frac{\lambda}{P_1(Y(x))} - v'' = 0.$$

Rappelons d'autre part que  $R_1(Y)$  est bijective sur l'intervalle  $]Y_R^1, +1]$  et la fonction réciproque de sa restriction à cet intervalle est notée  $f_1$ .

On peut alors écrire le problème vérifié par  $Y(x)$  grâce à la fonction  $f_1$  comme suit :

$Y : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow ]Y_R^1, +1]$	(3.13.a)	
$[R_1(Y(x))]'' + \frac{\lambda}{P_1(f_1(R_1(Y(x))))} - v''(x) = 0$	(3.13.b)	(3.13)
$Y(\tau_1) = +1 ; Y(\tau_2) = +1$	(3.13.c)	

Dans cette formulation, on a remplacé  $Y$  dans l'équation (3.10.e) par  $f_1(R_1(Y)) = Y$ . On obtient ainsi une équation différentielle du second ordre où l'inconnue est la fonction  $R_1(Y(x))$  que l'on continuera à noter  $R_1(x)$  et qui est alors deux fois dérivable. La fonction  $Y(x)$  est obtenue par  $Y(x) = f_1(R_1(x))$  et donc la régularité de  $Y$  dépend de celle de  $f_1$ , dépendant elle même de la régularité de la section. Cependant, quelle que soit la section, la fonction  $f_1$  est au moins une fois dérivable par morceaux.

Donc  $Y(x)$  est au moins une fois dérivable par morceaux et plus la fonction  $f_1$  est régulière, plus  $Y(x)$  est régulière.

De la même manière, on construit des problèmes analogues pour les autres types de zones de décharge que l'on énumère comme suit :

**Zone de décharge de type I.bis**

$Y : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow [-1, Y_R^1[$	(3.14.a)	
$[R_1(Y(x))]'' + \frac{\lambda}{P_1(g_1(R_1(Y(x))))} - v''(x) = 0$	(3.14.b)	(3.14)
$Y(\tau_1) = -1 ; Y(\tau_2) = -1$	(3.14.c)	

**Zone de décharge de type II**

$Y : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow [-1, Y_R^2[$	(3.15.a)	
$[R_2(Y(x))]'' + \frac{\lambda}{P_2(f_2(R_2(Y(x))))} - v''(x) = 0$	(3.15.b)	(3.15)
$Y(\tau_1) = -1 ; Y(\tau_2) = -1$	(3.15.c)	

**Zone de décharge de type II.bis**

$$Y : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow ]Y_R^2, +1] \quad (3.16.a)$$

$$\left[ R_2(Y(x)) \right]'' + \frac{\lambda}{P_2(g_2(R_2(Y(x))))} - v''(x) = 0 \quad (3.16.b) \quad (3.16)$$

$$Y(\tau_1) = +1 ; Y(\tau_2) = +1 \quad (3.16.c)$$

Les fonctions  $f_i$  et  $g_i$  ( $i = 1$  ou  $i = 2$ ) ont été définies au paragraphe 3.1.4. On procède alors pour les 3 derniers cas de la même manière que pour le premier et on obtient ainsi le résultat.

### 3.3. Vitesses initiales et points de bifurcation

Dans ce paragraphe, on reprend la notion de solution fondamentale. La recherche de vitesses autres que celles nous conduisant à rester sur cette solution fondamentale est une idée naturelle pour caractériser les points de bifurcation.

Une définition des points de bifurcation, adaptée à notre propos, est alors proposée. La démonstration de l'équivalence, dans notre cas, de cette définition et de la définition habituelle est l'objet du paragraphe suivant.

Le résultat principal de ce paragraphe peut s'énoncer comme suit :

#### **Théorème 3.4 :**

*Il existe 3 suites de nombres réels rangées dans l'ordre croissant et notées  $\lambda_T^n$ ,  $\lambda_R^n$  et  $\lambda_E^n$  ( $n \geq 1$ ) telles que :*

- $\lambda_T^n < \lambda_R^n < \lambda_E^n$ ;
- *Toutes les valeurs de  $\lambda$  vérifiant  $\lambda_T^n \leq \lambda \leq \lambda_E^n$ , et uniquement celles-là, correspondent à des points de bifurcation;*
- *Pour  $\lambda_T^n \leq \lambda \leq \lambda_R^n$ , il existe deux vitesses initiales transverses et seulement deux comportant exactement  $n$  zones de décharge. Ces zones de décharge sont de type I et II. L'une de ces vitesses est déduite de l'autre par la transformation  $y \rightarrow -y$ ;*
- *Pour  $\lambda_R^n < \lambda < \lambda_E^n$ , il existe deux vitesses initiales transverses, et deux seulement, comportant exactement  $n$  zones de décharge. Ces zones de décharge sont de type I.Bis et II.Bis. On déduit l'une de ces vitesses à partir de l'autre par la symétrie  $y \rightarrow -y$ ;*
- *On a les trois assertions suivantes :*
  - *si  $\lambda_T^n \leq \lambda < \lambda_R^n$ , la bifurcation est à charge croissante,*
  - *si  $\lambda = \lambda_R^n$ , la bifurcation est à charge constante,*
  - *si  $\lambda_R^n < \lambda \leq \lambda_E^n$ , la bifurcation est à charge décroissante;*
- *Pour  $\lambda_T^1 \leq \lambda < \lambda_R^1$ , il existe une unique vitesse initiale transverse comportant une unique zone de décharge de type I. La frontière  $Y(x)$  de cette zone de décharge présente un unique minimum  $Y_0$ . Ce minimum  $Y_0$  dépend du niveau de chargement  $\lambda$  et on a la relation explicite et biunivoque suivante :*

$$\lambda = \left[ \frac{2}{\ell} \sqrt{E_T I} \left( \frac{X(R_0)}{\sqrt{E_T I}} + \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{E_T I}}{I} \sqrt{2 \int_{\frac{I}{aS}}^{R_0} \frac{d\eta}{P_1(f_1(\eta))}} \right) \right) \right]^2$$

où :

- $R_0 = R_1(Y_0) = \frac{Q_1(Y_0)}{P_1(Y_0)}$ ,
- $X(R_0) = \int_{\frac{I}{aS}}^{R_0} \frac{du}{\sqrt{2 \int_u^{R_0} \frac{1}{P_1(f_1(\eta))}}}$ .

La démonstration de ce théorème est longue et technique. Elle se décompose en trois parties :

Dans un premier temps, on construit un problème aux valeurs propres dont les solutions sont les éventuels points de bifurcation.

On se restreint alors à l'étude d'un intervalle  $\lambda \in [\lambda_T, \lambda_R]$  pour lequel les vitesses initiales bifurquées comportent une zone de décharge et une seule.

On généralise enfin à tous les autres points de bifurcation le résultat précédent par symétrie ou analogie.

### 3.3.1. Solution fondamentale et points de bifurcation

On a déjà évoqué au chapitre précédent la notion de solution fondamentale. Il s'agit, en effet, d'une solution qui préserve les symétries initiales et qui démarre de l'origine de la chronologie. Dans notre cas, on la construit trivialement de la manière suivante.

Après une phase de compression uniforme, la structure atteint sa limite d'élasticité  $\sigma_Y$  à la charge  $\lambda_p = \sigma_Y S$  et plastifie entièrement.

#### Remarques :

1. On s'intéresse, ici, au flambage plastique. On suppose donc que la charge de plastification  $\lambda_p$  est inférieure à la charge de flambement d'Euler notée  $\lambda_E$ .
2. La position de  $\lambda_p$  par rapport aux valeurs  $\lambda_T^n$ ,  $\lambda_R^n$  et  $\lambda_E^n$  a une influence sur le flambage. Cependant, afin de simplifier l'exposé, on suppose que le flambage a lieu en régime plastique établi, c'est-à-dire que  $\lambda_p$  est plus petite que la plus petite de ces valeurs  $\lambda_T^n$ .

Après la plastification complète de la poutre, celle-ci reste en charge stricte partout et on obtient trivialement l'expression donnée au paragraphe 3.1.2.

On rappelle que sur une branche de solutions, un point est dit point de bifurcation si dans tout voisinage de ce point existe au moins une solution n'appartenant pas à cette branche de solutions. Si ce point appartient à une branche tangente à la branche fondamentale au point de bifurcation, alors la bifurcation est dite tangente. Dans le cas contraire, elle est dite transverse. Avec ces définitions, on a le résultat suivant.

#### Lemme 3.2:

*Tous les points de bifurcation situés sur la branche fondamentale sont des points de bifurcation transverse.*

#### Démonstration :

Le flambage de la poutre comprimée a été étudié par plusieurs auteurs, et ce lemme a été démontré, par exemple, dans la référence [LEG 1993b].

Ce lemme nous permet d'énoncer la définition suivante :

**Définition :**

*Sur la branche fondamentale, un point est dit point de bifurcation si et seulement si il existe une autre solution du problème en vitesse que celle conduisant à rester sur cette branche fondamentale. Cette deuxième vitesse est appelée vitesse initiale bifurquée,*

**Remarque :**

Évidemment, cette définition est moins restrictive que la définition habituelle qui exige l'existence d'une branche bifurquée. Cependant, dans notre cas, et comme on va le voir dans le paragraphe suivant, ces deux définitions sont équivalentes. L'introduction de cette définition a pour unique but de permettre d'utiliser le terme point de bifurcation pour désigner des points où il existe au moins deux vitesses différentes.

On va maintenant caractériser ces points de bifurcation. La solution fondamentale présente une flèche nulle quel que soit le niveau de chargement  $\lambda$  (c'est à dire  $v(x, \lambda) = 0$ ).

Évidemment, la vitesse  $\dot{v}(x, \lambda)$  est aussi nulle sur cette branche. On a le lemme suivant.

**Lemme 3.3 :**

*Sur la branche fondamentale, les points de bifurcation sont caractérisés par l'existence d'une vitesse  $\dot{v}$  non identiquement nulle.*

**Démonstration :**

Si  $\dot{v}(x) = 0 \quad \forall x \in [0, \ell]$ , alors il est facile de voir, d'après les équations (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10), que le problème en vitesse admet une solution unique.

Réciproquement, si le problème en vitesse admet une solution  $\dot{v}$  non identiquement nulle alors ce point est un point de bifurcation puisqu'il existe une vitesse transverse.

Ce lemme réduit donc la recherche des points de bifurcation à la recherche de solutions  $\dot{v}$  non triviales en des points  $\{v(x) \equiv 0, \lambda\}$  de la branche fondamentale.

Les équations d'équilibre (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10) se réécrivent sur l'état fondamental comme suit :

**1<sup>er</sup> cas : section en charge plastique**

$$\begin{array}{l} \cdot \dot{u}' + \frac{\dot{\lambda}}{E_T S} = 0 \quad (3.17.a) \\ \cdot \dot{v}'' + \frac{\dot{\lambda}}{E_T I} \dot{v} = 0 \quad (3.17.b) \end{array} \quad (3.17)$$

**2<sup>e</sup> cas : section en charge élastique ou en décharge**

$$\begin{array}{l} \cdot \dot{u}' + \frac{\dot{\lambda}}{E S} = 0 \quad (3.18.a) \\ \cdot \dot{v}'' + \frac{\dot{\lambda}}{E I} \dot{v} = 0 \quad (3.18.b) \end{array} \quad (3.18)$$

**3<sup>e</sup> cas : section en charge neutre**

$$\begin{array}{l} \cdot \dot{\lambda} = 0 \quad (3.19.a) \\ \cdot \dot{v} = 0 \quad (3.19.b) \\ \cdot \dot{v}'' = 0 \quad (3.19.c) \\ \cdot \dot{u}' = 0 \quad (3.19.d) \end{array} \quad (3.19)$$

**4<sup>e</sup> cas : présence dans la section d'un point de charge neutre de type i**

$$\begin{array}{l} \cdot \dot{u}' - a Y \dot{v}'' = 0 \quad (3.20.a) \\ \cdot P_i(Y) \dot{v}'' + \dot{\lambda} = 0 \quad (3.20.b) \\ \cdot Q_i(Y) \dot{v}'' + \lambda \dot{v} = 0 \quad (3.20.c) \\ \cdot \dot{v} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} R_i(Y) \quad (3.20.d) \\ \cdot \left( [R_i(Y)]'' + \frac{\lambda}{P_i(Y)} \right) \dot{\lambda} = 0 \quad (3.20.e) \end{array} \quad (3.20)$$

Les équations (3.17.b), (3.18.b) et (3.20.c) suggèrent de construire un problème vérifié par  $\dot{v}$  sur toute la longueur de la poutre. C'est l'objet du résultat suivant :

**Théorème 3.5 :**

Il existe une fonction  $q(x)$  définie sur  $[0, \ell]$  strictement positive et vérifiant  $E_T I \leq q(x) \leq E I$  telle que la vitesse  $\dot{v}$  vérifie le problème aux valeurs propres noté  $P_q$  suivant :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{v}'' + \frac{\lambda}{q(x)} \dot{v} = 0 \\ \dot{v}(0) = \dot{v}(\ell) = 0 \end{array}} \quad (P_q)$$

**Démonstration :**

On définit la fonction  $q$  de la manière suivante :

- $q(x) = Q_i(Y(x))$  dans le cas d'une section en décharge partielle avec un point de charge neutre de type  $i$ ,
- $q(x) = E_T I$  dans le cas d'une section en charge plastique,
- $q(x) = E I$  dans le cas d'une section en charge élastique ou en décharge.

Vu les propriétés des fonctions  $Q_i$ , il est évident que la fonction  $q$  est continue et vérifie :  $E_T I \leq q(x) \leq E I$ . La construction du problème  $(P_q)$  est alors immédiate grâce aux équations (3.17.b), (3.18.b) et (3.20.c).

Un problème de type  $(P_q)$  a été étudié en détails dans [COU 1953] par exemple. Quelques résultats sont rappelés en annexe. On encadre ce problème par 3 problèmes notés  $(P_T)$ ,  $(P_R)$  et  $(P_E)$ , dont l'utilité va apparaître dans les corollaires qui suivent. Les trois problèmes  $(P_T)$ ,  $(P_R)$  et  $(P_E)$  sont définis comme suit :

$$\boxed{\begin{array}{l} V'' + \frac{\lambda}{E_T I} V = 0 \\ V(0) = V(\ell) = 0 \end{array}} \quad (P_T)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} V'' + \frac{\lambda}{E_R I} V = 0 \\ V(0) = V(\ell) = 0 \end{array}} \quad (P_R)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} V'' + \frac{\lambda}{E I} V = 0 \\ V(0) = V(\ell) = 0 \end{array}} \quad (P_E)$$

où  $E_R$  est défini par :

$$\boxed{E_R I = Q_1(Y_R^1) = Q_2(Y_R^2)} \quad (3.21)$$

Ces trois problèmes admettent chacun une suite de valeurs propres, strictement positives et tendant vers l'infini, que l'on note  $\lambda_T^n$ ,  $\lambda_R^n$  et  $\lambda_E^n$  respectivement. On suppose que ces valeurs propres sont rangées dans l'ordre croissant.

De plus, on a la relation :  $\lambda_T^n < \lambda_R^n < \lambda_E^n$ .

$\lambda_T^n$ ,  $\lambda_R^n$  et  $\lambda_E^n$  sont données par les expressions :

$\lambda_T^n = \frac{n^2 \pi^2 E_T I}{\ell^2} \quad (3.22.a)$	(3.22)
$\lambda_R^n = \frac{n^2 \pi^2 E_R I}{\ell^2} \quad (3.22.b)$	
$\lambda_E^n = \frac{n^2 \pi^2 E I}{\ell^2} \quad (3.22.c)$	

Ces valeurs  $\lambda_T^n$ ,  $\lambda_R^n$  et  $\lambda_E^n$  vont nous permettre de définir des intervalles de points de bifurcation grâce aux corollaires suivants.

**Corollaire 3.2 :**

*Les éventuels points de bifurcation  $\lambda$  vérifient l'une des conditions  $\lambda_T^n \leq \lambda \leq \lambda_E^n$ . De plus, si la vitesse initiale correspondante ne contient que des zones de décharge de type I et II (resp. I.Bis et II.Bis) alors on a :  $\lambda_T^n \leq \lambda \leq \lambda_R^n$  (resp.  $\lambda_R^n \leq \lambda \leq \lambda_E^n$ ).*

**Démonstration :**

Si  $\lambda$  est un point de bifurcation, alors il existe une solution non triviale au problème  $(P_q)$ . Donc  $\lambda$  est valeur propre pour ce problème. Or pour une fonction  $q(x)$  donnée, il existe une suite dénombrable  $\lambda_q^n (n \geq 1)$  classée dans l'ordre croissant et tendant vers l'infini [COU 1953] telle que  $(P_q)$  admette une solution non triviale pour  $\lambda = \lambda_q^n$  et que l'on note  $V_q^n$ . De plus, on a :  $E_T I \leq q(x) \leq E I$ .

Donc d'après la même référence [COU 1953], les valeurs  $\lambda_q^n$  vérifient  $\lambda_T^n \leq \lambda_q^n \leq \lambda_E^n$ . On conclut que les seuls points de bifurcation éventuels se trouvent dans l'un des intervalles  $[\lambda_T^n, \lambda_E^n]$ .

D'autre part, on rappelle que les vitesses initiales correspondantes ne peuvent contenir simultanément que des zones de décharge de type I et II (resp. I.Bis et II.Bis).

Si la zone de décharge est de type I alors on a :  $Y_R^1 < Y(x) < 1$  et  $q(x) = Q_1(Y_1(x))$ .  
D'où  $E_T I \leq q(x) \leq E_R I = Q_1(Y_R^1)$ .

De même si la zone de décharge est de type II on a :  $E_T I \leq q(x) < E_R I$ . Sur le reste de la poutre on a :  $q(x) = E_T I$ . On conclut donc que, pour ce type de vitesses initiales, on a :  $\lambda_T^n \leq \lambda \leq \lambda_R^n$  d'après [COU 1953].

Le résultat pour les zones de décharge de type I.Bis et II.Bis s'obtient de manière analogue.

Le corollaire suivant donne un résultat de dénombrement des zones de décharge.

**Corollaire 3.3:**

*Si pour  $\lambda$  donnée, il y a une solution  $\dot{v}$  non identiquement nulle, alors  $\lambda$  est valeur propre du problème  $(P_q)$ . De plus, si  $\lambda$  est la nième valeur propre de  $(P_q)$  alors la vitesse initiale correspondante comporte au plus  $n$  zones de décharge tous types confondus.*

**Démonstration :**

On suppose que  $\lambda$  est la nième valeur propre de  $(P_q)$ . La vitesse  $\dot{v}$  s'annule alors en exactement  $n + 1$  points dans  $[0, \ell]$  d'après [COU 1953], et  $\dot{v}$  s'annule en exactement  $n$  points situés entre les zéros de  $\dot{v}$ .

D'autre part, d'après l'équation (3.20.e),  $R_i' = -\frac{\lambda}{P_i(Y)}$  garde un signe constant, et  $R_i$  a la même valeur aux deux extrémités de la zone de décharge (ou bien  $\frac{I}{aS}$  ou bien  $-\frac{I}{aS}$ ). Donc la dérivée  $R_i'$  s'annule une et une seule fois pour chaque zone de décharge. L'équation (3.20.d) nous permet alors de conclure que la dérivée  $\dot{v}$  de la vitesse s'annule une fois pour chaque zone de décharge. Le résultat suit immédiatement.

De cette partie, il faut retenir qu'il existe des intervalles  $[\lambda_T^n, \lambda_R^n]$  et  $[\lambda_R^n, \lambda_E^n]$  contenant les éventuels points de bifurcation. L'objet de la section suivante est de montrer que tous les points de l'intervalle  $[\lambda_T^1, \lambda_R^1]$  sont effectivement des points de bifurcation. La généralisation aux autres intervalles sera faite ensuite.

On s'affranchit donc d'abord de l'exposant 1 de  $\lambda_T^1$  et  $\lambda_R^1$  et on note :

$$\lambda_T = \lambda_T^1 \text{ et } \lambda_R = \lambda_R^1.$$

### 3.3.2. Existence de vitesses initiales pour $\lambda_T < \lambda < \lambda_R$

L'objet de cette section est de démontrer que pour  $\lambda_T < \lambda < \lambda_R$  il existe au moins deux vitesses initiales bifurquées. On donne la répartition entre les zones en charge et les zones en décharge et on propose une méthode pour calculer effectivement ces vitesses.

#### 3.3.2.1. Position du problème

On a  $\lambda_T < \lambda < \lambda_R$  donc d'après la section précédente une éventuelle vitesse initiale bifurquée comporte exactement une zone de décharge. De plus cette zone de décharge est ou bien de type I ou bien de type II.

D'autre part, et d'après les propriétés des fonctions  $P_i$ ,  $Q_i$  et  $R_i$ , il est facile de voir que si l'on construit une vitesse initiale avec une zone de décharge de type I, celle comportant une zone de type II est obtenue trivialement par la symétrie  $y \rightarrow -y$ .

Ces deux situations sont schématisées par la figure fig. 3.6 où l'on a représenté toute la longueur de la poutre.

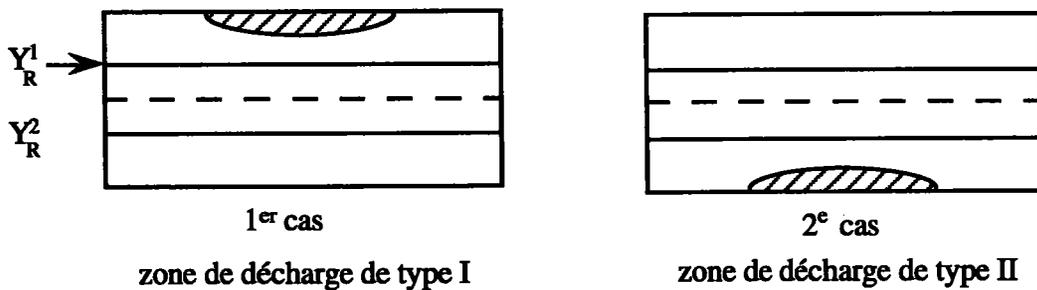


Fig. 3.6 : Vitesses initiales bifurquées pour  $\lambda_T < \lambda < \lambda_R$ .

Dans la suite on se restreint à une zone de décharge de type I. Pour une telle zone il existe trois nombres  $x_0, \tau_1$  et  $\tau_2$  vérifiant  $0 < \tau_1 \leq x_0 \leq \tau_2 < l$  tels que la frontière neutre  $Y(x)$  atteint son minimum au point  $x_0$  et le bord de la poutre  $Y = +1$  aux points  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . La valeur minimum de  $Y(x)$  est notée  $Y_0$ . Ces notations sont reportées sur la figure fig.3.7 qui représente toute la longueur de la poutre.

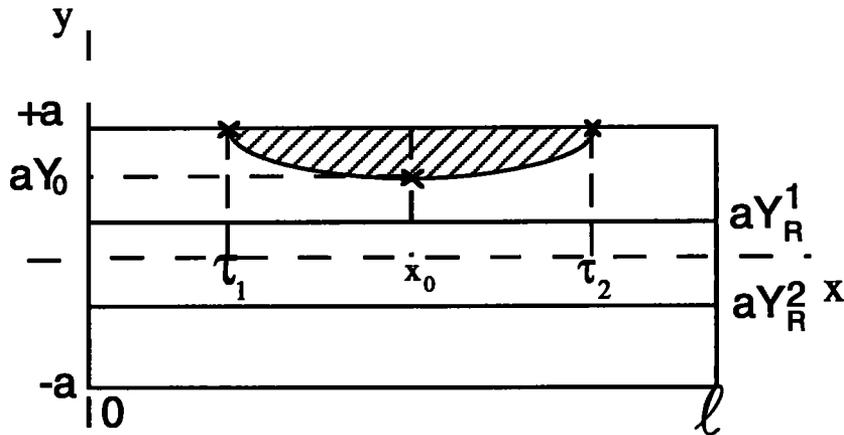


Fig. 3.7 Dimensions de la zone de décharge.

On rappelle les équations vérifiées par la vitesse  $\dot{v}$  dans chacune des parties de la poutre :

- Dans  $[\tau_1, \tau_2]$  :

D'après les équations : (3.20.d) et (3.20.e) on a :

$$\dot{v} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} R_1(Y(x)) \quad (3.23.a)$$

$$[R_1(Y(x))]'' + \frac{\lambda}{P_1(Y(x))} = 0 \quad (3.23.b)$$

(3.23)

(car  $\dot{\lambda} \neq 0$ )

En particulier on a :

$$\dot{v}(\tau_1) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \frac{I}{aS} \quad (3.24.a)$$

$$\dot{v}(\tau_2) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \frac{I}{aS} \quad (3.24.b)$$

(3.24)

Il est naturel de chercher des solutions continues. La continuité de  $\dot{v}$  aux points  $\tau_1$  et  $\tau_2$ , conduit alors aux deux problèmes suivants :

- Dans  $[0, \tau_1]$  :

$$\dot{v}'' + \frac{\lambda}{E_T I} \dot{v} = 0 \quad (3.25.a)$$

$$\dot{v}(0) = 0; \dot{v}(\tau_1) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \frac{I}{aS} \quad (3.25.b)$$

(3.25)

- Dans  $[\tau_2, \ell]$  :

$$\begin{aligned} \cdot \quad \dot{v}'' + \frac{\lambda}{E_T I} \dot{v} &= 0 & (3.26.a) \\ \cdot \quad \dot{v}(\tau_2) &= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \frac{I}{aS} ; \dot{v}(\ell) = 0 & (3.26.b) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le but de la suite est de démontrer l'existence d'une solution unique au problème ainsi posé dans  $[0, \ell]$ . Dans un premier temps on construit, grâce à un changement de variable, un problème équivalent portant uniquement sur la frontière neutre  $Y(x)$ . C'est le problème en  $R$  présenté ci-après.

### 3.3.2.2. Problème en $R$

On a construit trois problèmes vérifiés par  $\dot{v}$  dans les 3 intervalles  $[0, \tau_1]$ ,  $[\tau_1, \tau_2]$  et  $[\tau_2, \ell]$ . Dans l'écriture des problèmes (3.25) et (3.26) on a tenu compte de la continuité de  $\dot{v}$  aux points  $\tau_1$  et  $\tau_2$ . On exploite maintenant la continuité de la dérivée  $\dot{v}'$  aux points  $\tau_1$  et  $\tau_2$ .

Les problèmes (3.25) et (3.26) s'intègrent de manière élémentaire et l'on obtient en particulier :

$$\begin{aligned} \dot{v}'(\tau_1) &= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \frac{I}{aS} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau_1 \right) & (3.27.a) \\ \dot{v}'(\tau_2) &= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \frac{I}{aS} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} (\ell - \tau_2) \right) & (3.27.b) \end{aligned} \quad (3.27)$$

De l'équation (3.23.a) on déduit :

$$\begin{aligned} [R_1(Y(x))]'(\tau_1) &= \frac{I}{aS} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau_1 \right) & (3.28.a) \\ [R_1(Y(x))]'(\tau_2) &= -\frac{I}{aS} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} (\ell - \tau_2) \right) & (3.28.b) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Avant de poursuivre dans cette analyse on rappelle que la fonction  $R_1(Y)$  considérée comme fonction de  $Y$  est bijective de  $]Y_R^1, 1]$  vers  $[\frac{I}{aS}, +\infty[$  et admet une fonction réciproque notée  $f_1 : [\frac{I}{aS}, +\infty[ \rightarrow ]Y_R^1, +1]$ .

On a donc  $Y = f_1(R_1(Y))$  pour  $Y$  dans  $]Y_R^1, +1]$ .

*Dorénavant la fonction composée  $R_1(Y(x))$  sera considérée comme une fonction de  $x$  et sera notée  $R(x)$  qui devient notre inconnue principale. La frontière neutre  $Y(x)$  sera ensuite obtenue par :  $Y(x) = f_1(R(x))$ .*

Il est clair que la connaissance de la fonction  $R(x)$  permet de construire la vitesse  $\dot{v}$  et par suite de résoudre entièrement le problème. On rassemble maintenant toutes les conditions relatives à la fonction  $R(x)$  pour construire ainsi le problème en  $R$ .

Afin d'alléger la notation on ignore l'indice 1 des fonctions  $P_1, Q_1$  et  $f_1$  qui deviennent  $P, Q$  et  $f$  respectivement.

On dispose donc de l'équation différentielle (3.23.b) et des deux conditions de continuité (3.28.a) et (3.28.b). D'autre part la frontière neutre arrive effectivement jusqu'au bord  $Y = +1$  et l'on a donc :

$R(\tau_1) = \frac{I}{aS}$	(3.29.a)	(3.29)
$R(\tau_2) = \frac{I}{aS}$	(3.29.b)	

A ces conditions, on ajoute des conditions sur le signe de la dérivée  $R'$  aux points  $\tau_1$  et  $\tau_2$  et qui proviennent du fait que la zone de décharge est incluse dans le domaine occupé par la poutre. Ces conditions s'écrivent :

$R'(\tau_1) > 0$	(3.30.a)	(3.30)
$R'(\tau_2) < 0$	(3.30.b)	

Finalement, le problème en R se formule comme suit :

Trouver une fonction  $R(x)$  et deux nombres  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ell$  tels que R soit définie de  $[\tau_1, \tau_2]$  vers  $\left[\frac{I}{aS}, +\infty\right)$  et vérifie :

$$\bullet R'' + \frac{\lambda}{P(f(R))} = 0 \quad (3.31.a)$$

$$\bullet R(\tau_1) = \frac{I}{aS} \quad (3.31.b)$$

$$\bullet R(\tau_2) = \frac{I}{aS} \quad (3.31.c)$$

$$\bullet R'(\tau_1) = \frac{I}{aS} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau_1 \right) \quad (3.31.d)$$

$$\bullet R'(\tau_1) > 0 \quad (3.31.e)$$

$$\bullet R'(\tau_2) = -\frac{I}{aS} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} (\ell - \tau_2) \right) \quad (3.31.f)$$

$$\bullet R'(\tau_2) < 0 \quad (3.31.g)$$

(3.31)

Le domaine de définition du couple  $(x, R)$  est le domaine hachuré de la figure Fig.3.8.

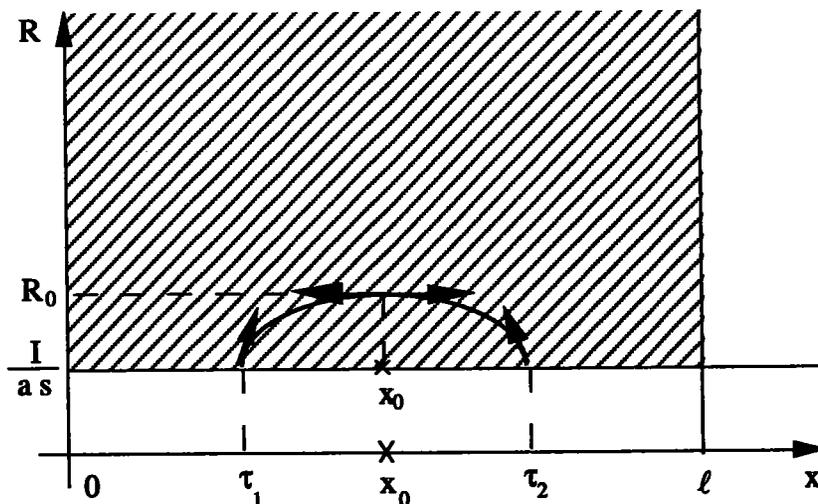


Fig.. 3.8 : Domaine de définition du problème en R

### Commentaires :

- 1) Si on considère les équations (3.31.a), (3.31.b) et (3.31.c), on est alors en présence d'un problème aux limites du second ordre. Les conditions (3.31.d), (3.31.e), (3.31.f) et (3.31.g) apparaissent comme des conditions supplémentaires à un problème qui semble être bien posé. Il est alors fort légitime d'avoir des doutes sur l'existence d'une solution à ce problème. Cependant il faut garder à l'esprit que les bornes  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont aussi des inconnues du problème et l'on démontre dans la suite de ce paragraphe que ce problème est bien posé et qu'il admet effectivement une solution unique.
- 2) On rappelle que la frontière neutre  $Y(x)$  admet un minimum unique  $Y_0$  atteint en un point  $x_0 \in [\tau_1, \tau_2]$ . Vu le sens de variation de  $R_1(Y)$  dans  $\left] Y_R^1, +1 \right]$  la fonction  $R$  admet un extremum unique en  $x_0$ . C'est un maximum et sa valeur est  $R_0 = R_1(Y_0)$ . Dans la suite on va réduire la résolution du problème en  $R$  à la recherche de  $R_0$ . A cet effet on construit une fonction reliant implicitement cette valeur  $R_0$  au chargement  $\lambda$ . Une étude directe de cette fonction nous donnera l'existence d'une solution.
- 3) Le système étudié ici présente deux symétries géométriques initiales : la première est celle par rapport au plan  $y = 0$ , la seconde est par rapport au plan  $x = \frac{\ell}{2}$ . On a vu que toutes les bifurcations à partir de l'état fondamental s'effectuent par destruction de la première symétrie. On peut penser alors que, au moins pour la première bifurcation, la seconde symétrie est préservée. Cela se traduit par le fait que  $x_0 = \frac{\ell}{2}$  et  $\tau_2 = \ell - \tau_1$ . Dans notre cas on démontre que, pour  $\lambda_T < \lambda < \lambda_R$ , cette symétrie est effectivement préservée et l'on réduit l'étude à la moitié de la poutre.

### **3.3.2.3. Un résultat de symétrie**

On a le résultat de symétrie suivant pour les vitesses initiales bifurquées.

#### **Théorème 3.6:**

*S'il existe une solution non triviale à du problème en vitesse Pour  $\lambda_T < \lambda < \lambda_R$  alors nécessairement cette solution est symétrique par rapport au plan  $x = \frac{\ell}{2}$ .*

Démonstration :

On rappelle que la vitesse  $\dot{v}$ , et par suite  $R(x)$ , admet un extremum en  $x_0 \in ]0, \ell[$ . Dire que la vitesse  $\dot{v}$  est non symétrique par rapport au plan  $x = \frac{\ell}{2}$  revient simplement à dire que  $x_0$  est différent de  $\frac{\ell}{2}$  ce qui est impossible. Dans un raisonnement par l'absurde, supposons en effet que  $0 < x_0 < \frac{\ell}{2}$ .

La vitesse  $\dot{v}$  vérifie sur toute la longueur de la poutre le problème  $(P_q)$  qui s'écrit comme suit :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{v}'' + \frac{\lambda}{q(x)} \dot{v} &= 0 \\ \dot{v}(0) = 0, \dot{v}(\ell) &= 0 \end{aligned}} \quad (P_q)$$

où la fonction  $q(x)$  est définie par le théorème 3.5.

A partir de  $\dot{v}$  on construit une autre fonction  $\bar{\dot{v}}$  de la manière suivante :

- dans  $[0, x_0]$  :  $\bar{\dot{v}}(x) = \dot{v}(x)$
- dans  $[x_0, 2x_0]$  :  $\bar{\dot{v}}(x) = \dot{v}(2x_0 - x)$ .

De manière évidente  $\bar{\dot{v}}$  vérifie le problème  $(\bar{P}_q)$  dans  $[0, 2x_0]$  :

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\dot{v}}'' + \frac{\lambda}{q(x)} \bar{\dot{v}} &= 0 \\ \bar{\dot{v}}(0) = 0, \bar{\dot{v}}(2x_0) &= 0 \end{aligned}} \quad (\bar{P}_q)$$

Évidemment c'est la même fonction  $q(x)$  qui intervient dans les deux problèmes  $(P_q)$  et  $(\bar{P}_q)$  car  $q(x)$  est symétrique par rapport au point  $x = x_0$ .

On conclut donc que  $\lambda$  est valeur propre des deux problèmes  $(P_q)$  et  $(\bar{P}_q)$ . Ceux-ci sont définis sur deux intervalles dont l'un est strictement inclus dans l'autre et avec la même équation différentielle. On sait que ceci est impossible [COU 1953].

Ce résultat de symétrie nous permet donc de transformer le problème en R en un problème défini uniquement sur l'intervalle  $\left[0, \frac{\ell}{2}\right]$  et que l'on appellera toujours le problème en R. Il s'explicité comme suit en remplaçant  $\tau_1$  par  $\tau$  :

Chercher une fonction  $R$ , un réel  $R_0$  et un réel  $\tau$  tels que  $R$  soit définie de  $\left[ \tau, \frac{\ell}{2} \right]$

vers  $\left[ \frac{I}{aS}, +\infty \right[$  et vérifie :

$$\bullet R'' + \frac{\lambda}{P(f(R))} = 0 \quad (3.32.a)$$

$$\bullet R(\tau) = \frac{I}{aS} \quad (3.32.b)$$

$$\bullet R'(\tau) = \frac{I}{aS} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \quad (3.32.c)$$

$$\bullet R'(\tau) > 0 \quad (3.32.d)$$

$$\bullet R\left(\frac{\ell}{2}\right) = R_0 \quad (3.32.e)$$

$$\bullet R'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad (3.32.f)$$

(3.32)

Ce problème est défini dans le domaine hachuré de la figure Fig.3.9.

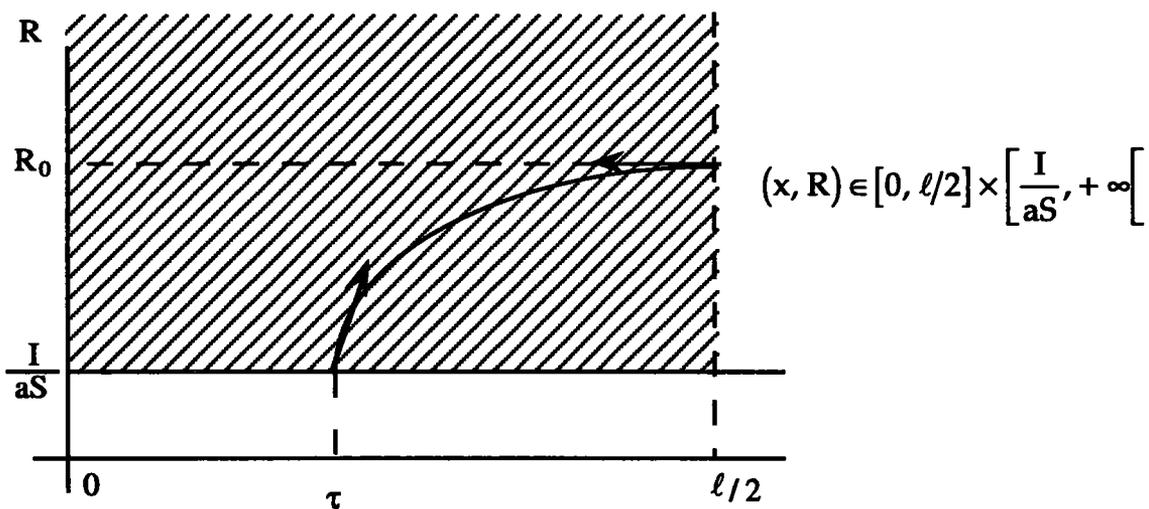


Fig.3.9 : Domaine de définition du problème en  $R$

### 3.3.2.4. Problème en $R_0$

Dans cette section on prend comme inconnue principale la valeur  $R_0$  de l'extremum de la fonction  $R(x)$ .

On remarque tout d'abord que pour  $R_0$  fixé on sait déterminer entièrement la fonction  $R(x)$  ainsi que la valeur de  $\tau$ . Considérons en effet les équations (3.32.a) (3.32.f) et (3.32.g). On obtient alors le problème de Cauchy suivant :

$R'' + \frac{\lambda}{P(f(R))} = 0$	(3.33.a)	
$R(\ell/2) = R_0$	(3.33.b)	(3.33)
$R'(\ell/2) = 0$	(3.33.c)	

$R$  étant définie dans  $[\tau, \ell/2]$ .

Vu les hypothèses de régularité sur la section faites auparavant, le problème (3.33) admet une solution unique  $R(x)$  pour tout  $R_0$  fixé dans  $\left[\frac{I}{aS}, +\infty\right]$ .

De plus  $R'' = -\frac{\lambda}{P(f(R))} < 0$  et donc la solution  $R(x)$  atteint le bord  $R = \frac{I}{aS}$  comme indiqué sur la figure Fig.3.9.

La condition (3.32.b) impose alors que soit pris pour  $\tau$  l'extrémité de l'intervalle maximal de définition de la solution du problème (3.33). Le résultat technique intermédiaire suivant est alors nécessaire :

**Lemme 3.4 :**

On a les deux assertions :

- 1) L'extrémité  $\tau$  de l'intervalle maximal de définition de la solution du problème (3.33) est donnée par l'expression :

$\tau = \frac{\ell}{2} - \frac{\chi(R_0)}{\sqrt{\lambda}}$	(3.34.a)	
avec $\chi(R_0) = \int_{\frac{I}{aS}}^{R_0} \frac{du}{\sqrt{2 \int_u^{R_0} \frac{d\eta}{P(f(\eta))}}}$	(3.34.b)	(3.34)

2) La dérivée à l'extrémité  $\tau$  de la solution du problème (3.33) s'exprime comme suit :

$$\boxed{R'(\tau) = \sqrt{2 \int_{\frac{I}{aS}}^{R_0} \frac{\lambda}{P(f(\eta))} d\eta}} \quad (3.35)$$

Démonstration :

On rappelle que le problème (3.33) est défini dans le domaine hachuré de la figure Fig.3.9. L'équation (3.33.a) étant une équation différentielle autonome du second ordre, on construit facilement la solution  $R(x)$  en la multipliant par  $R'$ . On décrit, ici, brièvement les étapes de cette construction.

Pour  $R \in \left[ \frac{I}{aS}, R_0 \right]$  considérée comme variable, on étudie la fonction :

$$\varphi(R) = 2 \int_{R_0}^R \frac{-\lambda}{P(f(\eta))} d\eta.$$

On constate alors que  $R_0$  est une racine simple de  $\varphi$  et que, par suite, l'intégrale  $\int_{R_0}^R \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}}$  est convergente, ce qui donne un sens à l'expression :

$$\psi(R) = \frac{\ell}{2} + \int_{R_0}^R \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} \text{ pour } R \in \left[ \frac{I}{aS}, R_0 \right].$$

Cette fonction  $\psi$  est strictement croissante dans  $\left[ \frac{I}{aS}, R_0 \right]$  car  $\frac{d\psi}{dR} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(R)}} > 0$  dans l'intervalle  $\left[ \frac{I}{aS}, R_0 \right]$ .

On déduit donc que  $\psi$  est une bijection de  $\left[ \frac{I}{aS}, R_0 \right]$  vers  $\psi\left(\left[ \frac{I}{aS}, R_0 \right]\right)$ . D'autre part  $\psi(R_0) = \frac{\ell}{2}$  et l'on note  $\tau = \psi\left(\frac{I}{aS}\right)$ . La fonction réciproque  $\psi^{-1}$  est définie de  $[\tau, \ell/2]$  vers  $\left[ \frac{I}{aS}, R_0 \right]$ . De plus :

$$\tau = \psi\left(\frac{I}{aS}\right) = \frac{\ell}{2} - \int_{\frac{I}{aS}}^{R_0} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} = \frac{\ell}{2} - \frac{\chi(R_0)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Il est alors facile de vérifier que  $\psi^{-1}$  est solution du problème (33).

$\tau$  est donc bien l'extrémité de l'intervalle maximal de définition de la solution du problème (3.33). Pour trouver l'expression de la dérivée  $R'(\tau)$  il suffit de multiplier l'équation (3.33.a) par  $R'(x)$  et d'intégrer de  $x$  à  $\frac{\ell}{2}$ . On obtient :

$$\frac{1}{2}[R'(x)]^2 = \int_{R(x)}^{R_0} \frac{\lambda}{P(f(\eta))} d\eta.$$

or 
$$R''(x) = -\frac{\lambda}{P(f(\eta))} < 0 \quad \text{et} \quad R'(\ell/2) = 0$$

Donc  $R'(x)$  est positive ou nulle et par suite  $R'(x) = \sqrt{2 \int_{R(x)}^{R_0} \frac{\lambda}{P(f(\eta))} d\eta}$ .

L'application de cette formule pour  $x = \tau$  donne l'équation (3.35) puisque  $R(\tau) = \frac{I}{aS}$ .

On peut maintenant énoncer le théorème suivant qui donne une relation implicite entre la valeur  $R_0$  et le chargement  $\lambda$ .

**Théorème 3.7 :**

*L'extremum  $R_0$  de la fonction  $R(x)$  satisfait le problème en  $R_0$  suivant :*

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>0 &lt; \tau = \frac{\ell}{2} - \frac{\chi(R_0)}{\sqrt{\lambda}} &lt; \ell/2</math> <span style="float: right;">(3.36.a)</span></li> <li>• <math>\Phi(\lambda, R_0) = 0</math> <span style="float: right;">(3.36.b)</span></li> <li>• <math>\Phi \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{I}{aS} \sqrt{\frac{1}{E_T I}} \cotg \left[ \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \frac{\ell}{2} - \frac{\chi(R_0)}{\sqrt{E_T I}} \right] - \sqrt{2 \int_{\frac{I}{aS}}^{R_0} \frac{d\eta}{P(f(\eta))}}</math> <span style="float: right;">(3.36.c)</span></li> </ul>	(3.36)
---	--------

**Démonstration :**

L'équation (3.36.c) est la définition de la fonction  $\Phi$ . (3.36.a) traduit le fait que la solution  $R(x)$  du problème (3.33) atteint le bord  $R = \frac{I}{aS}$ . Finalement l'équation (3.36.b) n'est autre que l'égalité entre les deux expressions donnant  $R'(\tau)$ , soit l'équation (3.35) et l'équation (3.32.c).

### 3.3.2.5. Un résultat d'existence

Pour s'orienter, rappelons que l'on veut démontrer l'existence de vitesses initiales pour  $\lambda$  dans l'intervalle  $]\lambda_T, \lambda_R[$ . Pour cet intervalle de chargement, d'éventuelles vitesses initiales bifurquées comportent exactement une zone de décharge connexe. Cette zone de décharge a une frontière  $Y(x)$  présentant un extremum noté  $Y_0$  en  $\frac{\ell}{2}$ . Après une transformation  $Y \rightarrow R(Y) = \frac{Q(Y)}{P(Y)}$ , et donc

$R_0 = R(Y_0)$ , on construit un problème caractérisant cette nouvelle inconnue  $R$ . C'est le problème en  $R$  (3.32). La résolution de ce problème différentiel fournit la frontière neutre  $Y(x)$  et par conséquent, grâce aux équations d'équilibre (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20), on construit effectivement la vitesse initiale transverse correspondante.

En poussant l'analyse plus loin, et grâce à ce problème en  $R$ , on arrive à construire un problème algébrique portant uniquement sur le sommet  $R_0$  de la fonction  $R$ . Ce problème algébrique est le problème en  $R_0$ . Sa résolution permet, trivialement, de construire une solution au problème en  $R$  (3.31), et par suite de démontrer l'existence d'une vitesse initiale bifurquée.

Le but de ce qui suit est de démontrer réciproquement que pour chaque  $\lambda \in ]\lambda_T, \lambda_R[$  il existe une solution au problème en  $R_0$  (3.36) et donc une vitesse initiale transverse.

Pour cela un autre résultat technique est nécessaire, concernant la fonction  $\chi(R_0)$  :

#### Lemme 3.5 :

La fonction  $\chi(R_0)$  est continue sur  $\left[\frac{I}{aS}, +\infty\right[$ . Elle admet une limite  $\chi_\infty$  lorsque  $R_0$  tend vers l'infini et on a de plus :

$$\boxed{\chi_\infty = \sqrt{\lambda_R} \frac{\ell}{2}} \quad (3.37)$$

#### Démonstration :

On rappelle que  $\chi(R_0)$  est définie par l'intégrale convergente :

$$\chi(R_0) = \int_{\frac{I}{aS}}^{R_0} \frac{du}{\sqrt{2 \int_u^{R_0} \frac{d\eta}{P(f(\eta))}}}$$

On s'intéresse tout d'abord à la continuité de  $\chi$ .

En écrivant :

$$\frac{1}{\sqrt{2 \int_u^{R_0} \frac{d\eta}{P(f(\eta))}}} = -P(f(u)) \frac{\frac{2}{P(f(u))}}{2 \sqrt{2 \int_u^{R_0} \frac{1}{P(f(\eta))} d\eta}}$$

et en intégrant par parties on trouve l'expression suivante de  $\chi(R_0)$  :

$$\chi(R_0) = P\left(f\left(\frac{1}{aS}\right)\right) \sqrt{2 \int_{\frac{1}{aS}}^{R_0} \frac{d\eta}{P(f(\eta))}} + \int_{\frac{1}{aS}}^{R_0} \frac{\partial}{\partial u} [P(f(u))] \sqrt{2 \int_u^{R_0} \frac{d\eta}{P(f(\eta))}} du$$

L'intégrale intervenant dans cette expression est évidemment convergente et l'on démontre de plus que la fonction  $\frac{\partial}{\partial u} [P(f(u))]$  est bornée. On a en effet :

$$\frac{\partial(P \circ f)}{\partial u}(u) = \frac{\frac{\partial P}{\partial Y}(f(u))}{\frac{\partial R}{\partial Y}(f(u))}$$

puisque R est la fonction réciproque de f, et donc :

$$\frac{\partial(P \circ f)}{\partial u}(u) = \frac{P^2 \frac{\partial P}{\partial Y}}{\frac{\partial Q}{\partial Y} P - Q \frac{\partial P}{\partial Y}}(f(u))$$

Lorsque u varie dans  $\left[\frac{1}{aS}, +\infty\right]$ , f(u) varie dans  $]Y_R^1, 1]$  et il suffit donc de

démontrer que la fonction  $Y \rightarrow \frac{\frac{\partial P}{\partial Y}(Y)}{\frac{\partial Q}{\partial Y}(Y) P(Y) - Q(Y) \frac{\partial P}{\partial Y}(Y)}$  est bornée dans  $]Y_R^1, 1]$ .

Une étude élémentaire de cette fonction montre qu'elle est continue décroissante de  $-\frac{1}{Q(Y_R^1)}$  à  $-\frac{1}{Q(1)}$  sur  $]Y_R^1, 1]$ . Elle est ainsi bornée.

Le résultat de continuité de  $\chi$  en découle immédiatement.

Etudions maintenant sa limite quand  $R_0$  tend vers l'infini. Pour trouver cette limite on encadre  $\chi(R_0)$  par deux fonctions  $\chi_1(R_0)$  et  $\chi_2(R_0)$  qui ont même limite quand  $R_0$  tend vers l'infini. On remarque tout d'abord que :

$$\frac{1}{P(f(\eta))} = \frac{\eta}{Q(f(\eta))}$$

et l'on sait que lorsque  $\eta$  varie dans  $[u, R_0]$ ,  $f(\eta)$  varie dans  $[f(u), f(R_0)]$ , et par suite on a :

$$Q(f(u)) \leq Q(f(\eta)) \leq Q(f(R_0)).$$

En substituant dans l'expression de  $\chi(R_0)$  on obtient l'encadrement suivant de  $\chi(R_0)$  :

$$\chi_1(R_0) = \int_{\frac{1}{aS}}^{R_0} \sqrt{\frac{Q(f(u))}{R_0^2 - u^2}} du \leq \chi(R_0) \leq \int_{\frac{1}{aS}}^{R_0} \sqrt{\frac{Q(f(R_0))}{R_0^2 - u^2}} du = \chi_2(R_0).$$

La fonction  $\chi_2$  se calcule explicitement comme suit :

$$\chi_2(R_0) = \sqrt{Q(f(R_0))} \left[ \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin} \left( \frac{1}{aS} \cdot \frac{1}{R_0} \right) \right]$$

et l'on déduit donc :

$$\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} \chi_2(R_0) = \frac{\pi}{2} \sqrt{Q(Y_R^1)} = \frac{\ell}{2} \sqrt{\lambda_R}$$

car :

$$\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} f(R_0) = Y_R^1 \quad \text{et} \quad \lambda_R = \frac{\pi^2 Q(Y_R^1)}{\ell^2}.$$

Pour obtenir la limite de  $\chi_1$  on procède tout d'abord par une intégration par parties qui conduit à :

$$\begin{aligned} \chi_1(R_0) = & \left[ \frac{\pi}{2} \sqrt{Q(f(R_0))} - \text{Arc sin} \left( \frac{1}{aS} \cdot \frac{1}{R_0} \right) \sqrt{Q \left( f \left( \frac{1}{aS} \right) \right)} \right] \\ & - \int_{\frac{1}{aS}}^{R_0} \left[ \frac{\partial}{\partial u} \left( \sqrt{Q(f(u))} \right) \text{Arc sin} \left( \frac{u}{R_0} \right) \right] du. \end{aligned}$$

Montrons d'abord que :

$$\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{aS}}^{R_0} \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{Q(f(u))}) \operatorname{Arc sin} \left( \frac{u}{R_0} \right) du = 0.$$

Pour cela considérons la suite de fonctions  $f_n$  définie pour  $u \in \left[ \frac{1}{aS}, +\infty \right[$  comme suit :

$$\begin{cases} f_n(u) = \frac{\partial}{\partial u} \left[ (\sqrt{Q(f(u))}) \operatorname{Arc sin} \left( \frac{u}{n} \right) \right] & \text{si } \frac{1}{aS} \leq u \leq n \\ f_n(u) = 0 & \text{si } u > n \end{cases}$$

Les fonctions  $f_n$  sont intégrables au sens de Lebesgue et convergent presque partout vers la fonction nulle sur  $\left[ \frac{1}{aS}, +\infty \right[$ . Rappelons d'autre part que  $\varphi$  est décroissante, et que  $f$  est décroissante, ce qui implique en particulier que :

$$\frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{Q(f(u))}) \geq 0$$

et donc :

$$|f_n(u)| \leq \frac{\pi}{2} \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{Q(f(u))})$$

Or la quantité  $\int_{\frac{1}{aS}}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{Q(f(u))}) du = \sqrt{Q(Y_R^1)} - \sqrt{Q\left(f\left(\frac{1}{aS}\right)\right)}$  est finie; on conclut d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{aS}}^{+\infty} f_n(u) du = 0.$$

$$\text{Soit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{aS}}^n \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{Q(f(u))}) \operatorname{Arc sin} \left( \frac{u}{n} \right) du = 0.$$

$$\text{et l'on a donc : } \lim_{R_0 \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{aS}}^{R_0} \frac{\partial}{\partial u} (\sqrt{Q(f(u))}) \operatorname{Arc sin} \left( \frac{u}{R_0} \right) du = 0.$$

On déduit ensuite facilement :

$$\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} \chi_1(R_0) = \frac{\pi}{2} \sqrt{Q(Y_R^1)} = \frac{\ell}{2} \sqrt{\lambda_R}$$

et vu l'encadrement de  $\chi$  par  $\chi_1$  et  $\chi_2$  on a :

$$\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} \chi(R_0) = \frac{\ell}{2} \sqrt{\lambda_R} = \chi_\infty.$$

Cela achève la démonstration du lemme.

Ce lemme permet de résoudre le problème en  $R_0$  (3.36) et l'on peut énoncer :

**Théorème 3.8:**

*Pour  $\lambda \in ]\lambda_T, \lambda_R[$  il existe une solution  $R_0$  au problème (3.36).*

**Démonstration :**

On fixe  $\lambda \in ]\lambda_T, \lambda_R[$ .

D'après le lemme précédent on a :  $\chi\left(\left[\frac{I}{aS}, +\infty\right]\right) = [0, \chi_\infty[$

or

$$0 < \sqrt{\lambda} \frac{\ell}{2} < \sqrt{\lambda_R} \frac{\ell}{2} = \chi_\infty \quad \text{et} \quad 0 < \sqrt{\lambda} \frac{\ell}{2} - \sqrt{\lambda_T} \frac{\ell}{2} < \sqrt{\lambda_R} \frac{\ell}{2} = \chi_\infty.$$

On déduit donc qu'il existe deux valeurs  $R_{01}$  et  $R_{02}$  dans  $\left[\frac{I}{aS}, +\infty\right[$  et telles que :

$$\chi(R_{01}) = \sqrt{\lambda} \frac{\ell}{2} - \sqrt{\lambda_T} \frac{\ell}{2} \quad \text{et} \quad \chi(R_{02}) = \sqrt{\lambda} \frac{\ell}{2}.$$

De l'expression de  $\Phi$  (3.36.c) on conclut que :

$$\Phi(\lambda, R_{01}) = - \sqrt{2 \int_{\frac{I}{aS}}^{R_{01}} \frac{\lambda}{P(f(\eta))} du} < 0$$

et

$$\lim_{R_0 \rightarrow R_{02}} \Phi(\lambda, R_0) = +\infty.$$

Pour  $\lambda$  fixée, la fonction  $\Phi(\lambda, R_0)$  s'annule nécessairement dans l'intervalle  $]R_{01}, R_{02}[$  grâce à la continuité de  $\chi$ .

D'autre part on vient de voir que la valeur  $R_0$  qui annule  $\Phi$  vérifie :

$$\sqrt{\lambda} \frac{\ell}{2} - \sqrt{\lambda_T} \frac{\ell}{2} < \chi(R_0) < \sqrt{\lambda} \frac{\ell}{2}$$

ce qui implique :

$$0 < \frac{\ell}{2} - \frac{\chi(R_0)}{\sqrt{\lambda}} < \sqrt{\frac{\lambda_T}{\lambda}} \frac{\ell}{2} < \frac{\ell}{2}$$

d'où l'équation (3.36.a).

### **Corollaire 3.4:**

Pour  $\lambda \in ]\lambda_T, \lambda_R[$  il existe une vitesse initiale transverse comportant une zone de décharge de type I.

Cette vitesse initiale est nécessairement à charge croissante ( $\dot{\lambda} > 0$ )

### **Démonstration :**

Le théorème précédent assure l'existence d'une solution au problème en  $R_0$  (3.36). Grâce au problème en  $R$  (3.32) on peut donc construire une frontière neutre d'une zone de décharge de type I,  $Y(x)$ , et donc  $Y_R^1 < Y(x) \leq 1$ .

Les équations d'équilibre (3.17) et (3.20) permettent alors de construire une solution en déplacement en tenant compte des conditions aux limites. Pour que la vitesse ainsi construite soit plastiquement admissible il faut vérifier la positivité du multiplicateur plastique. Dans notre cas il suffit de vérifier que les zones en décharge le sont effectivement ( $\dot{\gamma} > 0$ ) et que les zones en charge vérifient bien  $\dot{\gamma} < 0$ . L'expression de la déformation est donnée par :

$$\dot{\gamma} = \dot{u}' - y\dot{v}'' \quad (\text{car } v = 0).$$

Dans une section atteinte par la décharge on a d'après les équations (3.20.a) et (3.20.b) :

$$\dot{\gamma} = \frac{y - aY}{P(Y)} \dot{\lambda}.$$

Puisque la zone de décharge est de type I, on a :  $y - aY > 0$ . De plus  $Y_R^1 < Y(x) \leq +1$  donc  $P(Y) > 0$ . Il faut donc que  $\dot{\lambda} > 0$ .

Dans la partie en charge de la section on a :  $y - aY < 0$  et donc  $\dot{\gamma} < 0$ . On conclut que la solution construite est à charge croissante.

### 3.3.3. Un résultat d'unicité

On a démontré dans la section précédente qu'il existe une vitesse initiale bifurquée comportant une zone de décharge de type I. En fait il n'existe pas d'autres vitesses initiales bifurquées de ce type. Pour le prouver rappelons que la détermination de ces vitesses initiales revient à résoudre le problème en R (3.33).

En raisonnant par l'absurde supposons qu'il y ait deux solutions à ce problème, notées R et  $\tilde{R}$ , définies dans les intervalles maximaux  $[\tau, \frac{\ell}{2}]$  et  $[\tilde{\tau}, \frac{\ell}{2}]$  et ayant, respectivement, des extrema  $R_0$  et  $\tilde{R}_0$ . Pour se fixer les idées supposons que  $R_0 > \tilde{R}_0$ . On a d'abord le lemme suivant :

**Lemme 3.6 :**

Si  $R_0 > \tilde{R}_0$  alors  $\tau < \tilde{\tau}$  et  $\forall x \in [\tilde{\tau}, \frac{\ell}{2}]$  on a  $R(x) > \tilde{R}(x)$ .

Démonstration :

Dans un premier temps on démontre que les deux courbes R et  $\tilde{R}$  se coupent en au plus un point. Par l'absurde supposons que R et  $\tilde{R}$  se rencontrent en deux points  $x_1 < x_2$  dans l'intervalle  $[0, \ell/2]$ . Il est toujours possible de supposer que dans  $[x_1, \ell/2]$  les deux courbes R et  $\tilde{R}$  ne se coupent pas en un autre point que  $x_2$ . Cette situation est représentée par la figure ci-après.

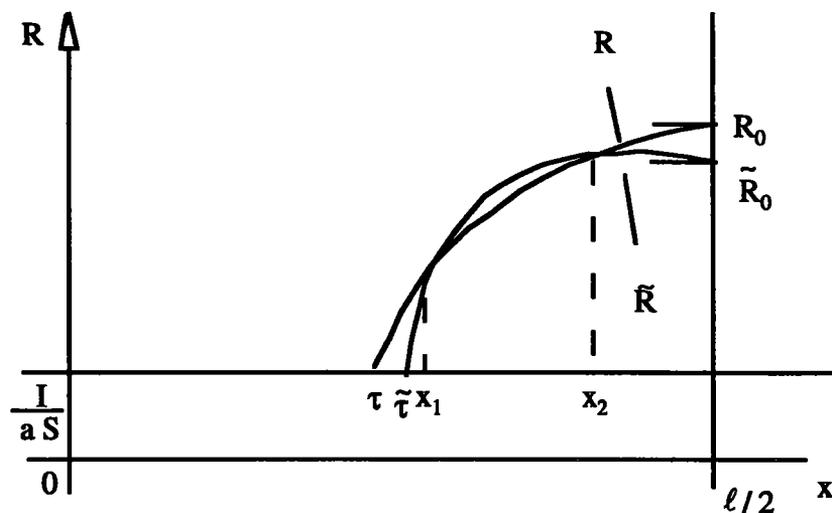


Fig.3.10. : Deux solutions éventuelles du problème en R.

On remarque en particulier que la pente de  $\tilde{R}$  est supérieure à celle de  $R$  au point  $x_1$ . C'est-à-dire  $R'(x_1) < \tilde{R}'(x_1)$ . D'autre part  $R$  et  $\tilde{R}$  sont solutions de l'équation différentielle (3.33.a). En multipliant cette équation par  $R'$  on aboutit facilement aux expressions suivantes de  $R'(x_1)$  et  $\tilde{R}'(x_1)$  :

$$R'(x_1) = \sqrt{2 \int_{R(x_1)}^{R_0} \frac{\lambda}{P(f(\eta))} d\eta} \quad \text{et} \quad \tilde{R}'(x_1) = \sqrt{2 \int_{\tilde{R}(x_1)}^{\tilde{R}_0} \frac{\lambda}{P(f(\eta))} d\eta}$$

or  $R(x_1) = \tilde{R}(x_1)$  et  $R_0 > \tilde{R}_0$ . Donc  $R'(x_1) > \tilde{R}'(x_1)$  ce qui est absurde. On conclut donc qu'il y a au plus un point d'intersection des courbes  $R$  et  $\tilde{R}$ . Observons maintenant que la conclusion  $R(x) > \tilde{R}(x)$  implique qu'il n'y a en fait pas d'intersection de  $R$  et  $\tilde{R}$ . Supposons en effet que les deux courbes  $R$  et  $\tilde{R}$  se coupent en un seul point. Cette situation est représentée par la figure ci-après :

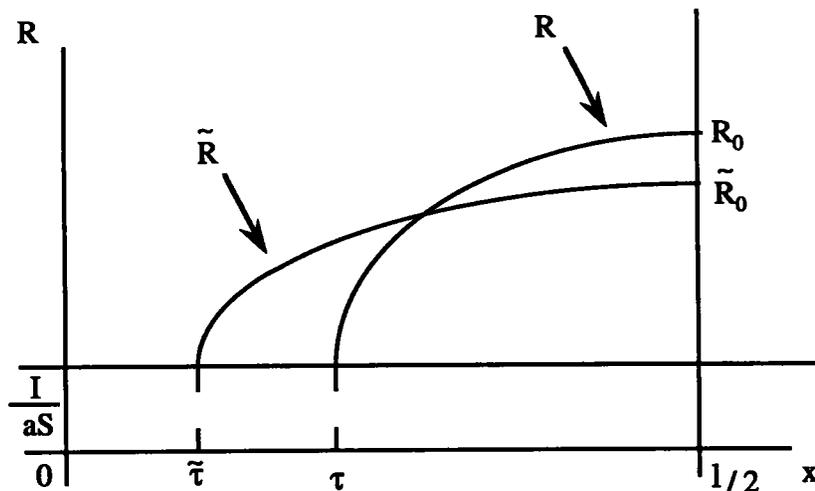


Fig.3.11. : Deux solutions du problème en  $R$  se coupant en un point.

Les deux fonctions  $R$  et  $\tilde{R}$  sont solutions de l'équation (3.33.a). Comme précédemment on multiplie cette équation par  $R'$  et on aboutit aux expressions suivantes de  $R'(\tau)$  et  $\tilde{R}'(\tilde{\tau})$  :

$$R'(\tau) = \sqrt{2 \int_{\frac{I}{aS}}^{R_0} \frac{\lambda}{P(f(\eta))} d\eta} \quad \text{et} \quad \tilde{R}'(\tilde{\tau}) = \sqrt{2 \int_{\frac{I}{aS}}^{\tilde{R}_0} \frac{\lambda}{P(f(\eta))} d\eta}$$

et l'on déduit donc que  $R'(\tau) > \tilde{R}'(\tilde{\tau})$ . D'autre part et comme  $R$  et  $\tilde{R}$  sont solutions du problème en  $R$  (3.33) on a :

$$R'(\tau) = \frac{I}{aS} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right)$$

$$\text{et } \tilde{R}'(\tilde{\tau}) = \frac{I}{aS} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tilde{\tau} \right).$$

D'où  $R'(\tau) < \tilde{R}'(\tilde{\tau})$  ce qui est absurde.

On déduit donc que les deux courbes ne se coupent pas et comme  $R_0 > \tilde{R}_0$  on a nécessairement  $R(x) > \tilde{R}(x)$ . Le fait que  $\tau < \tilde{\tau}$  en découle immédiatement et le lemme est ainsi démontré.

On démontre maintenant le résultat d'unicité. On rappelle que l'existence d'une telle vitesse équivaut à l'existence d'une vitesse de déplacement  $\dot{v}$  non triviale. La vitesse  $\dot{v}$  vérifie, en particulier, le problème (Pq) suivant qui est défini par le théorème n° 3.5 du paragraphe (3.1) :

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{v}'' + \frac{\lambda}{q(x)} \dot{v} &= 0 \\ \dot{v}(0) = \dot{v}(\ell) &= 0 \end{aligned}} \quad (\text{Pq})$$

Dans notre cas, si  $R$  est solution du problème en  $R$  (3.33) alors  $R$  est définie dans l'intervalle  $[\tau, \ell - \tau]$  et on peut la prolonger par continuité par  $\frac{I}{aS}$  dans les intervalles  $[0, \tau]$  et  $[\ell - \tau, \ell]$ . Ainsi la fonction  $q(x)$  s'écrit :

$$q(x) = Q(f(R(x))).$$

De la même manière, pour une solution  $\tilde{R}$  du problème en  $R$  (3.33), on construit une vitesse de déplacement  $\tilde{v}$  vérifiant le problème (P $\tilde{q}$ ) :

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{v}'' + \frac{\lambda}{\tilde{q}(x)} \tilde{v} &= 0 \\ \tilde{v}(0) = \tilde{v}(\ell) &= 0 \end{aligned}} \quad (\text{P}\tilde{q})$$

où  $\tilde{q}(x) = Q(f(\tilde{R}(x)))$ .

On voit donc que s'il y a deux solutions du problème en vitesse alors  $\lambda$  est valeur propre des deux problèmes (Pq) et (P $\tilde{q}$ ). Or le lemme précédent énonce que

si l'on suppose  $R_0 > \tilde{R}_0$  alors  $R(x) > \tilde{R}(x)$  pour  $x \in \left[ \tilde{\tau}, \frac{\ell}{2} \right]$ . Par symétrie on a également  $R(x) > \tilde{R}(x)$  pour tout  $x$  dans  $[\tilde{\tau}, \ell - \tilde{\tau}]$ . On déduit facilement des variations des fonctions  $Q$  et  $f$  que :

$q(x) \geq \tilde{q}(x)$  pour  $x \in [0, \ell]$  et  $q(x) > \tilde{q}(x)$  pour  $x \in [\tilde{\tau}, \ell - \tilde{\tau}]$ . Ceci implique, d'après [COU 1953], que  $\lambda$  ne peut être valeur propre des deux problèmes (Pq) et (P $\tilde{q}$ ). On a ainsi démontré le théorème :

**Théorème 3.9 :**

*Pour  $\lambda \in ]\lambda_T, \lambda_R[$  il existe une unique vitesse initiale bifurquée comportant une zone de décharge de type I.*

**3.3.4. Récapitulatif**

On résume les résultats précédents en énonçant le théorème suivant :

**Théorème 3.9 :**

- 1) *Pour tout  $\lambda$  tel que  $\lambda_T \leq \lambda < \lambda_R$  il existe une vitesse initiale et une seule comportant une zone de décharge de type I. Cette vitesse est nécessairement à charge croissante. Le chargement est de plus explicitement relié au sommet  $Y_0$  de la zone de décharge par l'expression suivante :*

$$\lambda = \left[ \frac{2}{\ell} \sqrt{E_T I} \left( \frac{\chi(R_0)}{\sqrt{E_T I}} + \text{Arccotg} \left( \frac{\sqrt{E_T I}}{I} \sqrt{2 \int_{\frac{I}{aS}}^{R_0} \frac{d\eta}{P(f(\eta))}} \right) \right) \right]^2 \quad (3.38)$$

où :

$$\begin{aligned} \cdot R_0 &= \frac{Q(Y_0)}{P(Y_0)} \\ \cdot \chi(R_0) &= \int_{\frac{I}{aS}}^{R_0} \frac{du}{\sqrt{2 \int_u^{R_0} \frac{d\eta}{P(f(\eta))}}} \end{aligned}$$

2) Pour  $\lambda = \lambda_R$  il existe une vitesse initiale et une seule comportant une zone de décharge de type I. Cette vitesse est à charge constante ( $\dot{\lambda} = 0$ ). La frontière neutre est réduite à la droite  $Y = Y_R^1 = Y_0$ . La formule (3.38) s'applique alors avec la valeur  $R_0 = +\infty$ .

Démonstration :

Le cas  $\lambda \in ]\lambda_T, \lambda_R[$  a déjà été démontré auparavant.

1) On considère le cas  $\lambda = \lambda_T$

Il est bien connu dans la littérature, c'est le critère de Shanley, que la zone de décharge pour  $\lambda = \lambda_T$  est réduite à un point qui est  $\left(x = \frac{\ell}{2}, y = +a\right)$ , ce qui signifie ici  $Y_0 = +1$  et  $R_0 = \frac{I}{aS}$ . En reportant cette valeur de  $R_0$  dans l'équation (3.38) on retrouve bien la valeur  $\lambda = \lambda_T$ . La construction d'une vitesse initiale pour  $\lambda = \lambda_T$  est immédiate.

2) Le cas  $\lambda = \lambda_R$

Le résultat concernant ce cas découle de l'analyse des zones de décharge lorsque  $\dot{\lambda} = 0$ , faite dans la section 3.2.1. On sait en particulier que la frontière neutre est une droite ( $Y = Y_R^1$ ). En remplaçant  $R_0$  par  $+\infty$  dans (3.38) et grâce au lemme 3.5 on retrouve facilement la valeur  $\lambda = \lambda_R$ .

On achève, ainsi, la démonstration de ce résultat de bifurcation.

### 3.3.5. Exploration de l'ensemble des points de bifurcation

Dans ce paragraphe on étend les résultats précédents obtenus pour l'intervalle  $\lambda_T \leq \lambda \leq \lambda_R$  à d'autres valeurs du chargement et d'autres types de vitesses initiales.

On a tout d'abord le résultat de symétrisation suivant :

**Lemme 3.7 :**

*Si pour une valeur  $\lambda$  donnée du chargement il existe une vitesse initiale bifurquée, alors on peut en construire une seconde en procédant de la manière suivante :*

- 1) *remplacer  $\dot{v}$  par  $-\dot{v}$  et garder  $\dot{u}$  inchangé,*
- 2) *remplacer la frontière neutre  $Y(x)$  par  $-Y(x)$ ,*
- 3) *les zones de décharge de type I deviennent de type II et vice versa,*
- 4) *les zones de décharge de type I.bis deviennent de type II.bis et vice versa.*

**Démonstration :**

La démonstration de ce théorème repose sur les propriétés des fonctions  $P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1$  et  $R_2$ . Rappelons à cet effet les propriétés suivantes :

$\cdot P_1(Y) = -P_2(-Y)$
$\cdot Q_1(Y) = Q_2(-Y)$
$\cdot R_1(Y) = -R_2(-Y)$

Rappelons d'autre part que dans les équations (3.10) l'indice 1 désigne des zones de décharge de type I et I.bis alors que l'indice 2 intervient pour des zones de décharge de type II ou II.bis. Les équations (3.10) restent donc vérifiées après avoir effectué les quatre manipulations décrites par le lemme précédent. Les équations (3.7), (3.8) et (3.9) sont trivialement vérifiées. On a ainsi vérifié toutes les équations du problème et démontré le résultat.

Cela permet d'affirmer, par exemple, que pour  $\lambda_T \leq \lambda \leq \lambda_R$  il existe une unique vitesse initiale bifurquée comportant une zone de décharge de type II. Donc tous les points de l'intervalle  $[\lambda_T, \lambda_R]$  sont des points de bifurcation où il existe exactement trois vitesses initiales. On verra par la suite qu'il existe d'autres points de bifurcation où peuvent exister plus de trois vitesses initiales. On a en effet le résultat d'existence suivant :

**Théorème 3.10 :**

*On a les assertions suivantes :*

- 1) *Pour  $\lambda \in [\lambda_T^n, \lambda_R^n]$  il existe deux vitesses initiales comportant exactement  $n$  zones de décharge exclusivement de type I et II.*
- 2) *Pour  $\lambda \in [\lambda_R^n, \lambda_E^n]$  il existe deux vitesses initiales comportant exactement  $n$  zones de décharge de type I.bis ou II.bis.*

Démonstration :

1) On fait la démonstration uniquement dans le cas  $n = 2$ . Pour  $n$  quelconque la construction d'une vitesse initiale se fait de manière analogue. L'idée de la démonstration est de construire grâce à ce qui précède, une vitesse initiale sur les deux portions  $\left[0, \frac{\ell}{2}\right]$  et  $\left[\frac{\ell}{2}, \ell\right]$  de la poutre et vérifier que ces deux solutions se raccordent bien en  $\frac{\ell}{2}$  pour former une solution globale pour la poutre  $[0, \ell]$ . On remarque en effet que la charge critique du module tangent et celle du module réduit, pour une poutre de longueur  $\frac{\ell}{2}$ , sont respectivement  $\lambda_T^2$  et  $\lambda_R^2$ . On déduit donc qu'on peut construire, pour cette "demi-poutre", une vitesse initiale comportant une zone de décharge de type I et une deuxième avec une zone de décharge de type II.

On construit alors une solution globale en considérant que dans  $\left[0, \frac{\ell}{2}\right]$  il y a une zone de décharge de type I et dans  $\left[\frac{\ell}{2}, \ell\right]$  il y a une zone de décharge de type II.

Les équations (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10) sont ainsi vérifiées.

Remarque :

Si on construit une solution globale avec deux zones de décharge de même type alors  $\dot{v}'$  ne sera pas défini en  $\frac{\ell}{2}$ .

Évidemment une symétrie fournit une deuxième vitesse initiale bifurquée.

Les répartitions entre charge et décharge pour ces deux vitesses sont schématiquement représentées par la figure suivante :

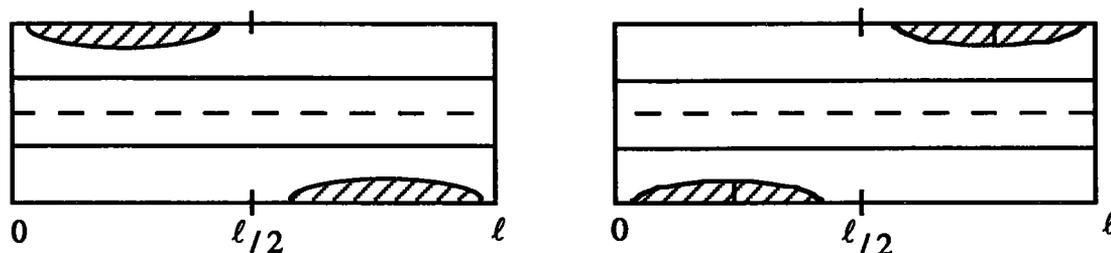


Fig.3.12. : Vitesses initiales pour  $n = 2$  (hachures = zones de décharge)

La construction de vitesses initiales bifurquées pour  $n > 2$  s'effectue de manière analogue. On considère les points  $x_k = k \frac{\ell}{n}$  ( $0 \leq k \leq n$ ). Pour chaque portion  $[x_k, x_{k+1}]$  il y a deux solutions, une avec une zone de décharge de type I et l'autre avec une zone de type II. On alterne alors ces deux solutions sur toute la poutre ce qui construit une solution globale sur  $[0, \ell]$ .

2) Ce résultat s'obtient par analogie. En effet il est facile de voir qu'on peut refaire les mêmes raisonnements que dans les sections (3.2), (3.3) et (3.4) lorsque  $\lambda_R < \lambda < \lambda_E$  pour une zone de décharge de type I.bis. La généralisation à  $n$  quelconque s'effectue pareillement que 1). On peut schématiser les résultats de ce théorème par la figure Fig.3.13. :

### Commentaires :

- 1) Le théorème précédent nous permet d'affirmer donc que toutes les valeurs de  $\lambda$  comprises dans l'un des intervalles  $[\lambda_T^n, \lambda_E^n]$  sont des points de bifurcation et qu'il n'y a pas de points de bifurcation strictement en dehors de ces intervalles. Pour ces points de bifurcation on a construit des vitesses initiales bifurquées. La démonstration du fait que ce sont les seules vitesses possibles se base sur des arguments de symétrie. Elle est très proche de ce que l'on a fait précédemment pour établir la symétrie par rapport à  $\frac{\ell}{2}$  de la vitesse initiale correspondant à  $\lambda \in [\lambda_T, \lambda_R[$ , mais exige la discussion d'un grand nombre de cas. On ne la présente donc pas ici pour ne pas alourdir l'exposé.
- 2) Quelque soit la valeur du module d'Young et du module tangent il existe un entier  $n$  tel que les deux intervalles  $[\lambda_T^{n-1}, \lambda_E^{n-1}]$  et  $[\lambda_T^n, \lambda_E^n]$  s'intersectent. Dans ce cas les points de l'intersection sont des points de bifurcation où le nombre des vitesses initiales bifurquées correspondantes est supérieur à trois.

Ceci ne peut se produire pour les points de l'intervalle  $[\lambda_T, \lambda_R]$  (cf. Annexe 3). Pour ces points il existe donc exactement deux vitesses initiales bifurquées

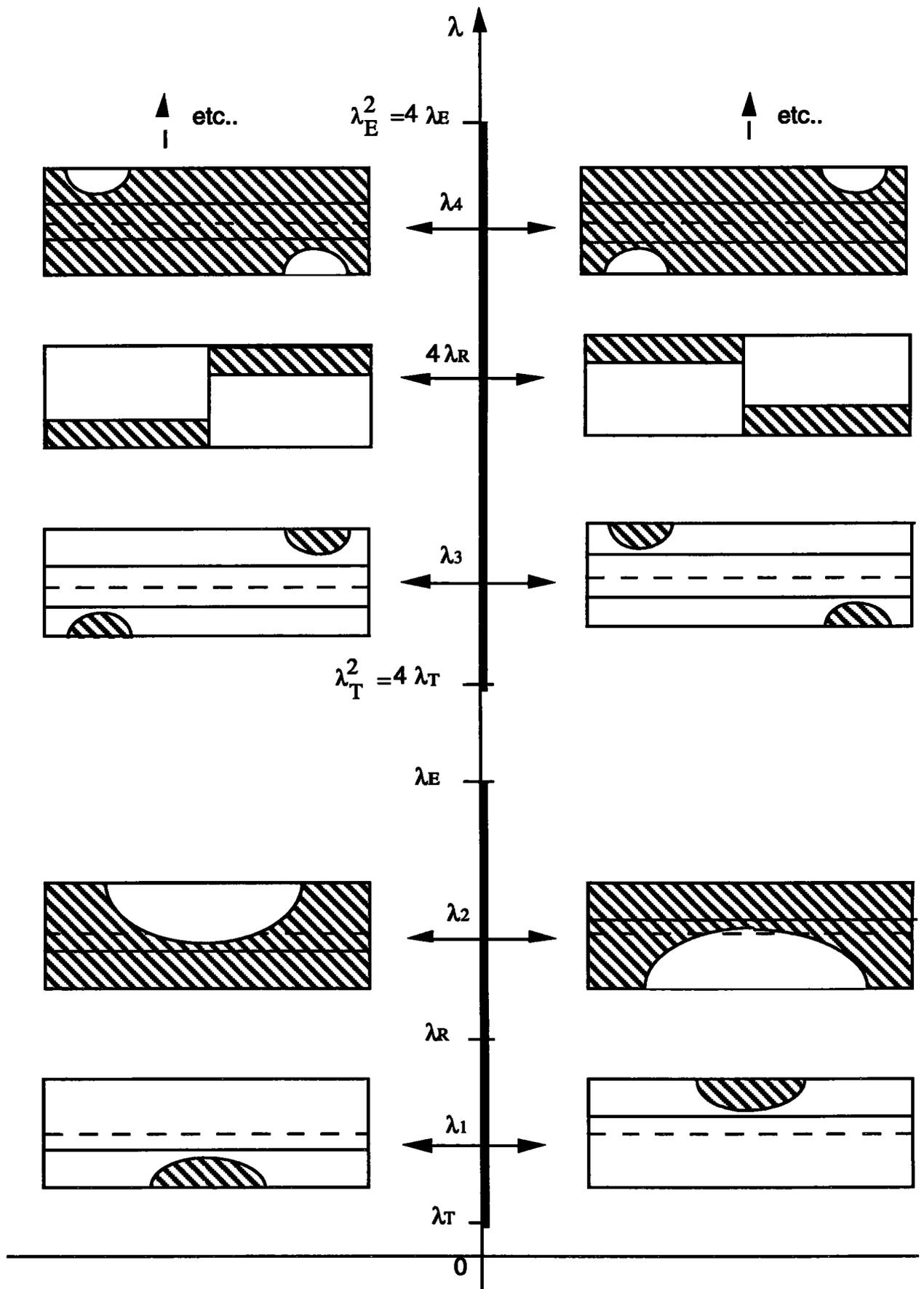


Fig.3.13. : Allure des zones de décharge

### 3.4. Construction de branches bifurquées

Dans cette partie on introduit la notion de branches bifurquées. Comme pour les vitesses initiales on ne construira qu'une classe de ces branches bifurquées. Le diagramme de bifurcation complet s'en déduira par symétrie ou par analogie. Le résultat principal de cette partie peut s'énoncer comme suit :

#### Théorème 3.12 :

*Pour chaque point de bifurcation situé sur la branche fondamentale, et pour chaque vitesse initiale bifurquée il existe une branche de solutions issue de ce point et tangente à la vitesse initiale considérée.*

Ce théorème établit donc que tous les points de bifurcation situés sur la branche fondamentale sont des points de bifurcation au sens habituel du terme c'est-à-dire que chaque voisinage du point de bifurcation contient au moins un point solution qui n'appartient pas à la branche fondamentale.

La démonstration de ce théorème sera faite uniquement pour les points de bifurcation tels que  $\lambda_T \leq \lambda < \lambda_R$  et les vitesses initiales comportant une zone de décharge de type I. Ces vitesses initiales étant symétriques par rapport au plan  $x = \frac{\ell}{2}$ , on cherchera des branches qui gardent cette symétrie et on pose donc le problème uniquement sur la moitié de la poutre. Comme pour les vitesses initiales on construit un problème en  $R$  permettant de caractériser la frontière neutre, puis un problème en  $R_0$ . Celui-ci sera maintenant de la forme :

$$\boxed{\Phi(\lambda, v, R_0) = 0} \quad (3.39.a) \quad (3.39)$$

où  $\Phi$  est une fonction dérivable par rapport à ses arguments.

Grâce aux équations d'équilibre on construit la vitesse  $\dot{v}$  comme fonction de l'état actuel  $(v, \lambda)$  et du paramètre  $R_0$ ,  $R_0$  étant défini de la même manière que pour les vitesses initiales. Cette relation est écrite sous la forme :

$$\boxed{\dot{v} = \Psi(\lambda, v, R_0)} \quad (3.39.b) \quad (3.39)$$

Une idée naturelle est alors d'éliminer le paramètre  $R_0$  de l'équation (3.39.b) grâce à l'équation (3.39.a) par une inversion de celle-ci. Mais on s'aperçoit qu'il est difficile d'être assuré que l'équation (3.39.a) est effectivement inversible. On s'inspire alors de l'étude du modèle simple du chapitre II et l'on décrit la branche bifurquée grâce au paramètre  $R_0$  qui caractérise la taille de la zone de décharge.

On cherche donc la branche bifurquée sous forme d'une courbe paramétrée  $(v(R_0), \lambda(R_0))$  dans le plan  $(v, \lambda)$ . Pour cela on dérive l'équation (3.39.a) par rapport à  $R_0$  ce qui conduit à un problème différentiel de la forme :

• $\dot{\lambda} = \Theta(\lambda, v, R_0)$	(3.40.a)
• $\dot{v} = \Psi(\lambda, v, R_0)$	(3.40.b)

(3.40)

En adjoignant à ce système des conditions initiales appropriées on obtient un problème de Cauchy standard. C'est la résolution de ce problème de Cauchy qui fournira les branches de solutions bifurquées.

Pour résoudre le problème (3.40) il faut définir l'espace de définition de  $v$  et la norme choisie dans cet espace. Implicitement on avait déjà utilisé des conditions de continuité de  $v$  et de  $v'$  au point  $\tau$ . D'autre part les équations d'équilibre font intervenir la dérivée seconde  $v''$ . Il est alors naturel de considérer l'espace  $C^2\left(\left[0, \frac{\ell}{2}\right]\right)$  ensemble des fonctions réelles deux fois dérivables (au sens classique)

muni par exemple de la norme infini  $\left\|v\right\|_{\infty} = \sup_{x \in \left[0, \frac{\ell}{2}\right]} |v(x)|$ . Le problème (3.40) sera défini sur un sous ensemble de cet espace qui est le suivant :

$$\mathfrak{X} = \left\{ w \in C^2\left(\left[0, \frac{\ell}{2}\right]\right) \text{ tel que } w(0) = 0, w'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0, w(x) \geq 0, w''(x) \leq 0 \right\}$$

Cet ensemble muni de la norme infini est un fermé.

### 3.4.1. Rappel des équations et position du problème

Dans ce paragraphe on tente de construire des branches de solutions bifurquées issues des points de bifurcation  $(v, \lambda) = (0, \lambda)$  tels que  $\lambda \in [\lambda_T, \lambda_R[$  et qui soient tangentes aux vitesses initiales correspondantes comportant une zone de décharge. On suppose que les vitesses sur ces branches bifurquées comportent une zone de décharge et une seule et que celle-ci est de type I. De plus, vu la symétrie de l'état initial  $(v, \lambda)$  et de la vitesse initiale, on suppose que la branche bifurquée préserve cette symétrie, à savoir la symétrie par rapport au plan  $x = \frac{\ell}{2}$ . Ces hypothèses ne sont pas restrictives puisque l'on ne cherche qu'à construire des branches bifurquées.

On considère donc un état  $(v, \lambda)$  situé sur la branche et l'on cherche à construire une vitesse à partir de cet état. Vu l'hypothèse de symétrie on ne considère que la moitié  $[0, \ell/2]$  de la poutre. On rappelle qu'une zone de décharge de type I a une frontière neutre  $Y(x)$  vérifiant  $Y_R^1 < Y(x) \leq +1$ . De plus, dans notre cas,  $Y(x)$  atteint son minimum noté  $Y_0$  en  $x = \frac{\ell}{2}$  et le bord  $Y = +1$  en un point  $\tau \in ]0, \ell/2]$ . Ces notations sont portées sur la figure suivante :

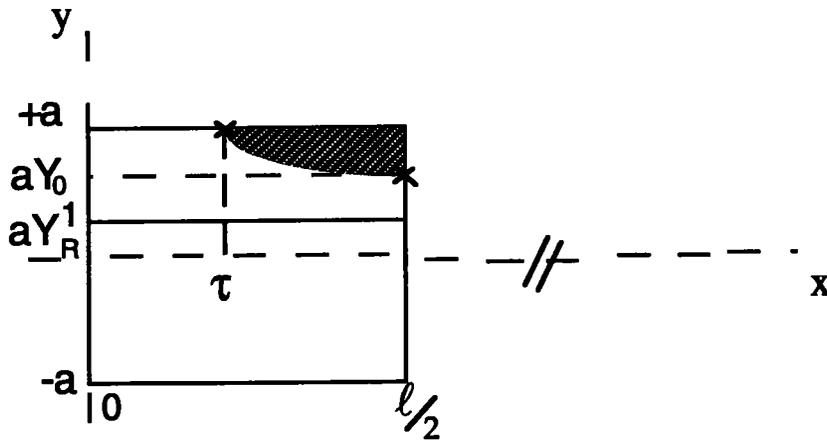


Fig.3.14. Description de la zone de décharge ( zone hachurée ).

On rappelle les équations vérifiées par la vitesse  $\dot{v}$  dans chacune des parties de la demi-poutre.

- Dans  $[\tau, \ell/2]$  :

D'après les équations (3.10.d) et (3.10.e) on a :

$$\dot{v} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} [R_1(Y(x)) - v] \quad (3.41.a) \quad (3.41)$$

$$[R_1(Y(x))]'' + \frac{\lambda}{P_1(Y(x))} - v''(x) = 0 \quad (3.41.b)$$

On déduit en particulier que :

$$\dot{v}(\tau) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \quad (3.42)$$

Or  $\dot{v}$  est continue en  $\tau$ . On aboutit alors à l'autre partie du problème dans la demi-poutre :

- Dans  $[0, \tau]$  :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \dot{v}'' + \frac{\lambda}{E_T I} \dot{v} + \frac{\dot{\lambda}}{E_T I} v &= 0 & (3.43.a) \\ \bullet \quad \dot{v}(0) = 0; \quad \dot{v}(\tau) &= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] & (3.43.b) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Le but de ce qui suit est de résoudre le problème ainsi posé. Pour cela, on construit dans un premier temps, exactement de la même manière que pour les vitesses initiales, un problème équivalent portant uniquement sur la frontière neutre. Ce problème sera encore appelé le problème en R.

### 3.4.2. Le problème en R

Le problème (3.43) a été obtenu grâce à la continuité de  $\dot{v}$  en  $\tau$ . On exploite maintenant la continuité de la dérivée  $\dot{v}'$  en  $\tau$ . Pour cela on constate que le problème (3.43) s'intègre de manière élémentaire et l'on a en particulier :

$$\dot{v}'(\tau) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} \left[ \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right) - \frac{\lambda}{E_T I} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \eta d\eta}{\sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau} \right] \quad (3.44)$$

On déduit de l'équation (3.41.a) :

$$\left[ R_1(Y(x)) \right]'(\tau) = v'(\tau) + \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right) - \frac{\lambda}{E_T I} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \eta d\eta}{\sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau} \quad (3.45)$$

Comme pour les vitesses initiales on omet l'indice 1 et, de la même manière que dans la section (3.3.2.2), on formule un problème en R qui s'écrit :

Chercher une fonction  $R$ , un réel  $R_0$  et un réel  $\tau$ , tels que  $R$  soit définie de  $\left[ \tau, \frac{\ell}{2} \right]$

vers  $\left[ \frac{I}{aS}, +\infty \right[$  et vérifie :

$$\bullet \quad R'' + \frac{\lambda}{P(f(R))} - v'' = 0 \quad (3.46.a)$$

$$\bullet \quad R(\tau) = \frac{I}{aS} \quad (3.46.b)$$

$$\bullet \quad R'(\tau) = v'(\tau) + \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right) - \frac{\lambda}{E_T I} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \eta d\eta}{\sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau} \quad (3.46.c)$$

$$\bullet \quad R'(\tau) > 0 \quad (3.46.d) \quad (3.46)$$

$$\bullet \quad R\left(\frac{\ell}{2}\right) = R_0 \quad (3.46.e)$$

$$\bullet \quad R'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0 \quad (3.46.f)$$

Ce problème est défini dans le domaine hachuré de la figure suivante :

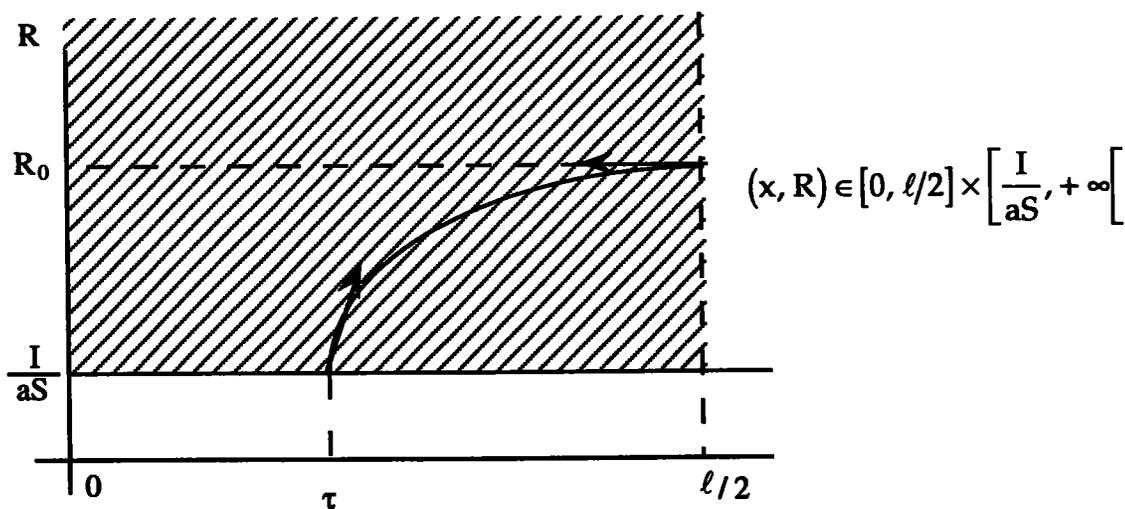


Fig.3.15 : Domaine de définition du problème en  $R$

### 3.4.3. Le problème en $R_0$

Pour un état  $(v, \lambda)$  donné le problème (3.46) comporte trois inconnues :  $R(x)$ ,  $R_0$  et  $\tau$ . Dans cette partie on élimine les inconnues  $R(x)$  et  $\tau$  qu'on exprime en fonction de  $\lambda, v$  et  $R_0$ . Pour cela on considère le problème (3.47) constitué des équations (3.46.a), (3.46.e) et (3.46.f) :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>R'' + \frac{\lambda}{P(f(R))} - v'' = 0</math> (3.47.a)</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>R\left(\frac{\ell}{2}\right) = R_0</math> (3.47.b)</li> </ul>	(3.47)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>R'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0</math> (3.47.c)</li> </ul>	

Ce problème est un problème de Cauchy standard. Il admet, pour  $R_0$  fixé et vu les hypothèses de régularité du bord de la section, une solution maximale unique  $R(x)$  définie dans un intervalle maximal  $[\tau, \ell/2]$ . De plus lorsque  $\frac{\ell}{2} \geq \tau > 0$  on a :  

$$R(\tau) = \frac{I}{aS}.$$

Par abus de notation, et pour rappeler la dépendance par rapport au triplet  $(\lambda, v, R_0)$ , on note cette solution maximale  $R(x) = R(x, \lambda, v, R_0)$ ; et l'extrémité de l'intervalle maximal de définition de cette solution est notée  $\tau = \tau(\lambda, v, R_0)$ . Il reste donc à tenir compte des conditions (3.46.b) et (3.46.c), la condition (3.46.d) étant satisfaite automatiquement. On obtient alors le problème suivant, qui est le problème en  $R_0$  :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>R(\tau, \lambda, v, R_0) = \frac{I}{aS}</math> (3.48.a)</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Phi(\lambda, v, R_0) = 0</math> (3.48.b)</li> </ul>	(3.48)
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Phi(\lambda, v, R_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right) - \frac{\lambda}{E_T I} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \eta d\eta}{\sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau} + v'(\tau) - R'(\tau, \lambda, v, R_0)</math> (3.48.c)</li> </ul>	

**Remarque :**

Quand on écrit  $R(x) = R(x, \lambda, v, R_0)$  et  $\tau = \tau(\lambda, v, R_0)$  cela veut dire en particulier que  $R$  et  $\tau$  dépendent de  $v$  en tant que fonction définie sur  $[0, \ell]$  et non de la valeur  $v(x)$  de  $v$  au point  $x$ .

Le reste de ce paragraphe est consacré à étudier ce problème en  $R_0$  et à en dégager quelques résultats utiles pour la suite. Ces résultats concernent la dépendance de la fonction  $R(x, \lambda, v, R_0)$  et sa dérivée  $R'(x, \lambda, v, R_0)$  vis à vis des paramètres  $\lambda, v, \text{ et } R_0$ .

**Lemme 3.8 :**

1) • *Le fonction  $R(x, \lambda, v, R_0)$  est, pour  $x$  fixé, une fonction de classe  $C^1$  du triplet  $(\lambda, v, R_0)$  appartenant à l'ensemble  $[\lambda_T, \lambda_R] \times C^2([0, \ell]) \times \left[ \frac{1}{aS}, +\infty \right]$ .*

• *Si la fonction  $K(y)$  (qui représente l'épaisseur de la poutre selon l'axe des  $z$ ) est de classe  $C^k$  alors la fonction  $R(x, \lambda, v, R_0)$ , est, pour  $x$  fixé, une fonction de classe  $C^{k+1}$  du triplet  $(\lambda, v, R_0)$  appartenant à l'ensemble  $[\lambda_T, \lambda_R] \times C^2([0, \ell]) \times \left[ \frac{1}{aS}, +\infty \right]$ .*

• *Si la fonction  $K(y)$  est analytique alors la fonction  $R(x, \lambda, v, R_0)$ , est, pour  $x$  fixé, une fonction analytique du triplet  $(\lambda, v, R_0)$  appartenant à l'ensemble  $[\lambda_T, \lambda_R] \times C^2([0, \ell]) \times \left[ \frac{1}{aS}, +\infty \right]$*

2) *On a le même résultat pour la fonction  $R'(x, \lambda, v, R_0)$ .*

**Démonstration :**

La fonction  $R \rightarrow \frac{\lambda}{P(f(R))}$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\left[ \frac{1}{aS}, +\infty \right]$  d'après l'hypothèse de régularité faite à propos du bord de la section de la poutre (c'est à dire la continuité de  $K(y)$ ). On en déduit que la fonction  $(x, R, \lambda, v) \rightarrow \frac{\lambda}{P(f(R))} - v''$  est de classe  $C^1$  sur l'ensemble  $[0, \ell] \times \left[ \frac{1}{aS}, +\infty \right] \times [\lambda_T, \lambda_R] \times C^2([0, \ell])$ . Les fonctions  $R(x, \lambda, v, R_0)$  et  $R'(x, \lambda, v, R_0)$  sont alors des fonctions de classe  $C^1$  du triplet  $(\lambda, v, R_0)$  sur l'ensemble  $[\lambda_T, \lambda_R] \times C^2([0, \ell]) \times \left[ \frac{1}{aS}, +\infty \right]$  d'après les théorèmes rappelés en annexe 1. Si  $K(y)$  est de classe  $C^k$  ou analytique on aboutit au résultat de la même manière.

**Remarque :**

On a un résultat similaire concernant la fonction  $\tau(\lambda, v, R_0)$ .

On donne maintenant les expressions explicites des dérivées de  $R'(x, \lambda, v, R_0)$  par rapport à leurs arguments  $\lambda$ ,  $v$  et  $R_0$ . Pour simplifier l'écriture de ces dérivées on introduit d'abord les expressions suivantes :

$$\bullet \quad \omega(x) = \int_x^{\ell/2} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\lambda}{P(f(R(\eta, \lambda, v, R_0)))} \right] \right\} d\eta \quad (3.49.a)$$

$$\bullet \quad \Omega_1(x) = \int_x^{\ell/2} \left\{ \frac{\sin(\sqrt{(\ell/2 - \eta)\omega(\eta)})}{(\sqrt{(\ell/2 - \eta)\omega(\eta)})} \left[ \frac{(\ell/2 - \eta)}{P(f(R(\eta, \lambda, v, R_0)))} \right] \right\} d\eta \quad (3.49.b)$$

$$\bullet \quad \Omega_2(x) = \int_x^{\ell/2} \left\{ \cos(\sqrt{(\ell/2 - \eta)\omega(\eta)}) \left[ \frac{1}{P(f(R(\eta, \lambda, v, R_0)))} \right] \right\} d\eta \quad (3.49.c)$$

$$\bullet \quad L_1(x) : C^2([0, \ell]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow [L_1(x)](w) = - \int_x^{\ell/2} \left\{ \frac{\sin(\sqrt{(\ell/2 - \eta)\omega(\eta)})}{(\sqrt{(\ell/2 - \eta)\omega(\eta)})} w''(\eta) \right\} d\eta \quad (3.49.d)$$

$$\bullet \quad L_2(x) : C^2([0, \ell]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow [L_2(x)](w) = - \int_x^{\ell/2} \left\{ \cos(\sqrt{(\ell/2 - \eta)\omega(\eta)}) w''(\eta) \right\} d\eta \quad (3.49.e)$$

Dans (3.49.a) la dérivée partielle  $\frac{\partial}{\partial R}$  signifie que c'est la dérivée par rapport à  $R$  considérée comme variable de la fonction :  $R \rightarrow \frac{\lambda}{P(f(R))}$  et  $C^2([0, \ell])$  désigne l'ensemble des fonctions réelles deux fois dérivables.

**Lemme 3.9 :**

$R$  et  $R'$  sont dérivables par rapport à la condition initiale  $R_0$  et on a :

$\bullet \frac{\partial R}{\partial R_0}(x, \lambda, v, R_0) = \cos\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right) \quad (3.50.a)$	(3.50)
$\bullet \frac{\partial R'}{\partial R_0}(x, \lambda, v, R_0) = \frac{\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}} \omega(x) \quad (3.50.b)$	

**Démonstration :**

La démonstration de ce lemme se trouve en annexe 1.

**Lemme 3.10 :**

$R$  et  $R'$  sont dérivables par rapport au paramètre  $\lambda$  et on a :

$\bullet \frac{\partial R}{\partial \lambda}(x, \lambda, v, R_0) = \cos\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right) \Omega_1(x)$ $+ \frac{\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right)} \left(x - \frac{\ell}{2}\right) \Omega_2(x) \quad (3.51.a)$	(3.51)
$\bullet \frac{\partial R'}{\partial \lambda}(x, \lambda, v, R_0) = \cos\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right) \Omega_2(x)$ $+ \frac{\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right)} \omega(x) \Omega_1(x) \quad (3.51.b)$	

Démonstration :

La démonstration de ce lemme se trouve en annexe 1.

Lemme 3.11 :

$R$  et  $R'$  sont dérivables par rapport au paramètre  $v$  et on a :

<ul style="list-style-type: none"><li>● <math display="block">\frac{\partial R}{\partial v}(x, \lambda, v, R_0) = \cos\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right) L_1(x) + \frac{\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right)} \left(x - \frac{\ell}{2}\right) L_2(x) \tag{3.52.a}</math></li> <li>● <math display="block">\frac{\partial R'}{\partial v}(x, \lambda, v, R_0) = \cos\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right) L_2(x) + \frac{\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right)}{\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2} - x\right)\omega(x)}\right)} \omega(x) L_1(x) \tag{3.52.b}</math></li></ul>	(3.52)
---	--------

Démonstration :

La démonstration de ce lemme se trouve en annexe 1.

En anticipant sur ce qui suit énonçons également le lemme suivant :

Lemme 3.12 :

Les dérivées  $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial R_0}$ , où la fonction  $\Phi$  est définie par l'équation (3.48.c), s'expriment respectivement comme suit :

$$\begin{aligned}
\bullet \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = & \left\{ -\frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}}} \left[ \frac{1}{aS} - v(\tau) \right] \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \tau \right) - \left[ \frac{1}{aS} - v(\tau) \right] \frac{1}{2} \frac{1}{E_{T1}} \tau \right. \\
& \left. - \frac{\lambda}{E_{T1}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}}} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \eta \cos \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \eta d\eta}{\sin \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \tau \right)} \right\} \\
& + \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \tau \right) \frac{\partial R}{\partial \lambda} (\tau, \lambda, v, R_0) - \frac{\partial R'}{\partial \lambda} (\tau, \lambda, v, R_0) \right\} \quad (3.53.a)
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} : C^2([0, \ell]) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
w \quad \rightarrow & -\sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} w(\tau) \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \tau \right) - \frac{\lambda}{E_{T1}} \frac{\int_0^\tau w(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \eta d\eta}{\sin \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \tau \right)} \\
& + \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \tau \right) \frac{\partial R}{\partial v} (\tau, \lambda, v, R_0) - \frac{\partial R'}{\partial v} (\tau, \lambda, v, R_0) \quad (3.53.b)
\end{aligned}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial \Phi}{\partial R_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{T1}}} \tau \right) \frac{\partial R}{\partial R_0} (\tau, \lambda, v, R_0) - \frac{\partial R'}{\partial R_0} (\tau, \lambda, v, R_0) \quad (3.53.c) \quad (3.53)$$

Démonstration :

La démonstration de ce lemme se trouve dans l'annexe 2.

### 3.4.4. Le problème de Cauchy

Il est clair que si on résout le problème en  $R_0$  (3.48), on construit effectivement une solution au problème en vitesse grâce à toutes les équations du problème. Mais cela s'avère insuffisant pour notre objectif. Rappelons en effet que le but est, comme il a été annoncé dans l'introduction, de transformer le problème quasi-statique en un problème de Cauchy. Cela nécessite de démontrer que pour un état de flèche  $v$  et de charge  $\lambda$  donné il existe une unique solution au problème en vitesse. Il faudrait donc démontrer que le problème en  $R_0$  (3.48) admet, pour  $v$  et  $\lambda$  donnés, une solution  $R_0$  unique. Il est aisé de démontrer que le problème en  $R_0$  (3.48) admet une solution (on le fera pas). Cependant il est assez difficile de prouver l'unicité d'une telle solution.

Cette difficulté est contournée grâce à un artifice mathématique inspiré de l'étude du modèle simple. On rappelle que pour décrire les branches bifurquées du modèle simple nous avons utilisé la taille de la zone de décharge comme paramètre de contrôle. Les branches bifurquées sont alors simplement des courbes paramétrées par ce paramètre dans un espace déflexion-charge.

Pour la poutre comprimée on choisit comme paramètre de contrôle la valeur  $R_0$ , celle-ci caractérisant la taille ( ou la profondeur ) de la zone de décharge. On cherche alors les branches bifurquées sous forme de courbes paramétrées par  $R_0$ , en l'occurrence  $(v(R_0), \lambda(R_0))$ , dans un espace déflexion-charge. On note  $U = (v, \lambda)$ , et donc  $U = U(R_0)$ , et l'on caractérise ces branches de solutions par un problème de Cauchy qui s'écrit formellement comme suit :

$$\begin{array}{l} \dot{U} = F(U, R_0) \\ U(R_{00}) = U_0 \end{array}$$

où  $F$  sera obtenue en dérivant l'équation (3.48.b) par rapport à  $R_0$  et  $R_{00}$  sera la valeur initiale de  $R_0$  qui varie de  $\frac{I}{aS}$  à  $+\infty$ . On obtient ainsi toutes les branches bifurquées issues des points  $U_0 = (0, \lambda_0)$  avec  $\lambda_0 \in [\lambda_T, \lambda_R[$  et comportant une zone de décharge de type I.

Ce problème de Cauchy, bien posé, est obtenu en ne cherchant qu'une classe de solutions. On a supposé en effet que les solutions sur la branche recherchée sont symétriques par rapport au plan  $(x = \ell/2)$  et que les vitesses sur cette branche comportent une seule zone de décharge de type I.

Rappelons qu'on a construit un problème en  $R$  permettant de caractériser la frontière neutre et on a abouti à un problème en  $R_0$  qui relie le paramètre  $R_0$  à l'état actuel  $U = (v, \lambda)$  dans lequel se trouve le système. Ce problème s'écrit sous la forme d'une relation :

$$\boxed{\Phi(\lambda, v, R_0) = 0}$$

où  $\Phi$  est définie par l'équation (3.48.c).

D'autre part on a le lemme suivant :

**Lemme 3.13 :**

Il existe une fonction  $\aleph$  du triplet  $(\lambda, v, R_0)$  telle que :

$$\boxed{\dot{v} = \dot{\lambda} \aleph(\lambda, v, R_0)} \quad (3.54)$$

**Démonstration :**

Grâce au système (3.47) et aux équations (3.41.a), (3.43.a) et (3.43.b) on peut construire la quantité  $\frac{\dot{v}}{\dot{\lambda}}$  si on suppose  $\lambda, v$  et  $R_0$  donnés. Cette construction qui donne la fonction  $\aleph$  s'effectue de la manière suivante :

- Grâce au système (3.47) on calcule la fonction  $R(x)$  et l'extrémité  $\tau$  de l'intervalle maximal de définition de cette fonction  $R$ .
- Dans l'intervalle  $[\tau, \ell/2]$  l'équation (3.41.a) permet de calculer  $\frac{\dot{v}}{\dot{\lambda}}$  dans cet intervalle.
- Dans l'intervalle  $[0, \tau]$  le système (3.43) s'intègre de manière élémentaire et donne  $\frac{\dot{v}}{\dot{\lambda}}$  dans cet intervalle.

**Remarque :**

$\aleph$  a, par construction, la même régularité que la fonction  $R(x, \lambda, v, R_0)$  par rapport au triplet  $(\lambda, v, R_0)$

Énonçons le résultat technique suivant :

**Lemme 3.14 :**

Il existe deux fonctions  $\Theta$  et  $\Psi$  des arguments  $\lambda, v$  et  $R_0$  et telles que :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dot{v} = \Psi(\lambda, v, R_0) & (3.40.a) \\ \dot{\lambda} = \Theta(\lambda, v, R_0) & (3.40.b) \end{array}} \quad (3.40)$$

où  $\Theta$  et  $\Psi$  sont des fonctions continues.

Démonstration :

Commençons d'abord par l'existence de  $\Theta$ . L'équation (3.40.b) est obtenue en dérivant l'équation (3.48.b) par rapport à  $R_0$  et en s'apercevant que le terme en facteur de  $\dot{\lambda}$  est non nul.

La dérivation de l'équation (3.48.b) est technique. On l'obtient grâce aux théorèmes généraux sur les équations différentielles, et essentiellement grâce aux résultats sur la dépendance de la solution d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre par rapport à la condition initiale et aux paramètres dont dépend cette équation différentielle. Elle utilise pleinement les lemmes 3.8, 3.9, 3.10 et 3.11. Ces théorèmes se trouvent dans tous les traités d'équations différentielles et un bref rappel des résultats nécessaires se trouve dans l'annexe 1.

Remarque :

Afin d'appliquer ces théorèmes on a besoin d'une certaine régularité des fonctions  $P$  et  $f$ . Rappelons que cette régularité dépend essentiellement de la variation de l'épaisseur de la section selon l'axe des  $z$ . Cependant le cas de la poutre comprimée est lui même académique, le but de ce travail n'est pas d'envisager tous les cas possibles mais seulement de montrer une exploration du diagramme de bifurcation pour une structure continue. Dans cette optique on suppose que les fonctions  $P$  et  $f$  vérifient les régularités nécessaires. Ajoutons simplement que des cas tels que les sections rectangulaire et circulaire vérifient trivialement ces conditions de régularité.

Afin d'effectuer la dérivation de l'équation (3.48.b) on a besoin d'effectuer d'abord la dérivée de la fonction  $\Phi$  par rapport à ses arguments  $\lambda$ ,  $v$  et  $R_0$  que l'on note respectivement  $\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}$ ,  $\frac{\partial\Phi}{\partial v}$  et  $\frac{\partial\Phi}{\partial R_0}$ . Cela est possible grâce au lemmes (3.12).

La dérivée de l'équation (3.48.b) donne alors :

$$\boxed{\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\dot{\lambda} + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\dot{v} + \frac{\partial\Phi}{\partial R_0}\dot{R}_0 = 0} \quad (3.55)$$

En remplaçant  $\dot{R}_0$  par 1 et en utilisant l'équation (3.54) on obtient :

$$\boxed{\left[ \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} + \frac{\partial\Phi}{\partial v} \kappa(\lambda, v, R_0) \right] \dot{\lambda} = - \frac{\partial\Phi}{\partial R_0}} \quad (3.56)$$

Il s'agit maintenant de vérifier que le coefficient de  $\dot{\lambda}$  est non nul. Pour cela on démontre que les deux termes constituant ce coefficient sont négatifs et l'un l'est strictement. Ceci fait l'objet de l'annexe 3. On obtient donc :

<ul style="list-style-type: none"> <li style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <span style="flex: 1;">• <math>\Theta(\lambda, \mathbf{v}, R_0) = - \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial R_0}}{\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}}} \aleph(\lambda, \mathbf{v}, R_0)</math></span> <span style="white-space: nowrap;">(3.57.a)</span> </li> <li style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center; margin-top: 10px;"> <span style="flex: 1;">• <math>\Psi(\lambda, \mathbf{v}, R_0) = \Theta(\lambda, \mathbf{v}, R_0) \aleph(\lambda, \mathbf{v}, R_0)</math></span> <span style="white-space: nowrap;">(3.57.b)</span> </li> </ul>	(3.57)
---	--------

Les fonctions  $R(x, \lambda, \mathbf{v}, R_0)$ ,  $R'(x, \lambda, \mathbf{v}, R_0)$  et  $\aleph(\lambda, \mathbf{v}, R_0)$  sont au moins une fois continûment dérivables par rapport au triplet  $(\lambda, \mathbf{v}, R_0)$ .  $\Phi(\lambda, \mathbf{v}, R_0)$  est alors au moins une fois continûment dérivable. La continuité de  $\Theta$  et  $\Psi$  s'en déduit immédiatement.

On achève ainsi la démonstration du lemme 3.12.

On a à présent tous les ingrédients pour formuler le problème de Cauchy recherché et de le résoudre.

**Théorème 3.13 :**

*Pour chaque point de bifurcation  $U_0 = (0, \lambda_0)$  avec  $\lambda_0 \in [\lambda_T, \lambda_R[$  il existe une branche de solutions  $U = U(R_0) = (\mathbf{v}(R_0), \lambda(R_0))$  issue de ce point et tangente à la vitesse initiale qui comporte une zone de décharge de type I. Il existe de plus un réel  $R_{00} \in \left[ \frac{1}{aS}, +\infty \right[$  tel que cette branche de solution vérifie le problème de Cauchy suivant :*

<ul style="list-style-type: none"> <li style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <span style="flex: 1;">• <math>\dot{U} = F(U, R_0)</math></span> <span style="white-space: nowrap;">(3.58.a)</span> </li> <li style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center; margin-top: 10px;"> <span style="flex: 1;">• <math>U(R_{00}) = U_0 = (0, \lambda_0)</math></span> <span style="white-space: nowrap;">(3.58.b)</span> </li> </ul>	(3.58)
---	--------

Avec

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad F(U, R_0) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} (\Psi(\lambda, v, R_0), \Theta(\lambda, v, R_0)) \\
 & \bullet \quad R_{00} \in \left[ \frac{I}{aS}, +\infty \right[ \\
 & \bullet \quad \lambda_0 = \left[ \frac{2}{\ell} \sqrt{E_T I} \left( \frac{X(R_{00})}{\sqrt{E_T I}} + \operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{E_T I}}{\frac{I}{aS}} \sqrt{2 \int_{\frac{I}{aS}}^{R_{00}} \frac{d\eta}{P(f(\eta))}} \right) \right) \right]^2 \\
 & \bullet \quad X(R_{00}) = \int_{\frac{I}{aS}}^{R_{00}} \frac{du}{\sqrt{2 \int_u^{R_{00}} \frac{1}{P(f(\eta))}}}
 \end{aligned}$$

D\u00e9monstration :

S'il existe une branche de solutions alors d'apr\u00e8s le lemme 3.12 cette branche doit v\u00e9rifier l'\u00e9quation (3.58.a). La condition initiale (3.58.b) traduit simplement le fait que la branche est tangente \u00e0 la vitesse initiale qui comporte une zone de d\u00e9charge de type I et qui est donn\u00e9e par le th\u00e9or\u00e8me 3.9.

Remarque :

On peut \u00e9videmment g\u00e9n\u00e9raliser ce r\u00e9sultat \u00e0 tous les points de bifurcation et \u00e0 toutes les vitesses initiales correspondantes.

### 3.4.5. Propri\u00e9t\u00e9s des branches de solutions bifurqu\u00e9es

On va maintenant \u00e9tudier quelques propri\u00e9t\u00e9s des branches obtenues par le th\u00e9or\u00e8me 3.13.

#### 3.4.5.1. R\u00e9gularit\u00e9 des branches de solutions bifurqu\u00e9es

On s'int\u00e9resse ici \u00e0 la r\u00e9gularit\u00e9 des branches bifurqu\u00e9es. Cette r\u00e9gularit\u00e9 d\u00e9pend essentiellement de la r\u00e9gularit\u00e9 de la fonction  $K(y)$  qui mesure l'\u00e9paisseur de la poutre selon l'axe des  $z$ .

**Théorème 3.14 :**

Si la fonction  $K(y)$  est de classe  $C^k$  ( respectivement analytique ) alors les branches de solutions obtenues par le théorème 3.13 sont de classe  $C^{k+1}$  ( respectivement analytiques ).

**Démonstration :**

D'après le lemme 3.8 si la fonction  $K(y)$  est de classe  $C^k$  alors les fonctions  $R(x, \lambda, v, R_0)$ ,  $R'(x, \lambda, v, R_0)$  et  $\aleph(\lambda, v, R_0)$  sont de classe  $C^{k+1}$  et donc les fonctions  $\Theta$  et  $\Psi$  sont de classe  $C^k$ . Les solutions du problème de Cauchy (3.58) sont donc de classe  $C^{k+1}$ . L'analyticité s'obtient de la même manière.

**3.4.5.2. Monotonie des branches de solutions bifurquées**

On s'intéresse à la monotonie et on énonce le théorème suivant :

**Théorème 3.15 :**

Pour  $x$  fixé dans  $]0, \ell[$  et pour toute condition initiale  $U_0 = U(R_{00}) = (v(R_{00}), \lambda(R_{00})) = (0, \lambda_0)$ , où  $\lambda_0$  est donnée par le théorème 3.13, Les courbes  $\lambda(R_0)$  et  $v(x, R_0)$  sont monotones strictement croissantes.

**Démonstration :**

On démontre d'abord que la valeur  $v(\tau, R_0)$  n'atteint jamais la valeur  $\frac{I}{aS}$  sur la branche bifurquée. En effet rappelons qu'un état donné sur une branche bifurquée vérifie le problème en  $R_0$  (3.48) :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>R(\tau, \lambda, v, R_0) = \frac{I}{aS}</math> <span style="float: right;">(3.48.a)</span></li> <li>• <math>\Phi(\lambda, v, R_0) = 0</math> <span style="float: right;">(3.48.b)</span></li> <li>• <math>\Phi(\lambda, v, R_0) \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right)</math></li> </ul>	(3.48)
$- \frac{\lambda}{E_T I} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \eta d\eta}{\sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau} + v'(\tau) - R'(\tau, \lambda, v, R_0)$	(3.48.c)

$$\text{Si } v(\tau, R_0) = \frac{I}{aS} \text{ alors } -\frac{\lambda}{E_T I} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \eta d\eta}{\sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau} + v'(\tau) - R'(\tau, \lambda, v, R_0) = 0.$$

Ceci est impossible car les trois termes du membre de gauche sont négatifs et l'un en particulier,  $R'(\tau)$ , l'est strictement.

D'autre part d'après l'équation (3.41.b) on a :  $(R-v)'' = -\frac{\lambda}{P(Y)} < 0$  et donc  $(R-v)'$  est décroissante. Or  $(R-v)'(\frac{\ell}{2}) = 0$  et donc  $(R-v)$  est croissante sur  $[\tau, \frac{\ell}{2}]$ . On vient de démontrer que  $[\frac{I}{aS} - v(\tau)]$  est strictement positif et on en déduit que  $(R-v)$  est strictement positif sur  $[\tau, \frac{\ell}{2}]$ . L'équation (3.41.a) nous permet alors d'affirmer que  $\dot{v}$  et  $\dot{\lambda}$  ont le même signe. Or  $\dot{\lambda}$  ne s'annule pas sur la branche bifurquée et est positive à l'état initial. Donc  $\dot{v}$  et  $\dot{\lambda}$  sont positifs et même strictement positifs pour  $x \in ]0, \frac{\ell}{2}[$ .

D'où le résultat.

### 3.4.5.3. Comportement asymptotique des branches de solutions bifurquées

On étudie maintenant le comportement des branches bifurquées  $\lambda(R_0)$  et  $v(R_0)$  lorsque  $R_0$  tend vers l'infini.

#### **Théorème 3.16 :**

On a les deux limites suivantes :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} \lambda(R_0) = \lambda_R</math></li> <li>• <math>\lim_{R_0 \rightarrow +\infty} v(R_0) = +\infty</math></li> </ul>
--

Démonstration :

• Lorsque  $R_0$  tend vers l'infini alors l'équation (3.5.b) appliquée pour  $x = \ell/2$  implique que  $\dot{\lambda}$  est nulle. Or d'après l'analyse de la topologie des zones de décharge la frontière neutre est dans ce cas constante sur toute la longueur de la poutre et est égale au zéro  $Y_R$  de la fonction  $P(Y)$ . De plus la valeur du chargement  $\lambda$  est la charge critique du module réduit  $\lambda_R$  d'après l'équation (3.5.c).

• Pour  $R_0$  fini, l'équation (3.41.a) appliquée pour  $x = \ell/2$  nous donne  $\dot{\lambda} v = \dot{\lambda} R_0$ . On se fixe maintenant un  $R_{01} \in \left[ \frac{I}{aS}, +\infty \right[$  et on intègre cette équation précédente par rapport à  $R_0$  dans l'intervalle  $[R_{00}, R_{01}]$ . On obtient :

$$\int_{R_{00}}^{R_{01}} \dot{\lambda} v \, dR_0 = \int_{R_{00}}^{R_{01}} \dot{\lambda} R_0 \, dR_0. \text{ Soit } v(R_{01}) = \frac{\int_{R_{00}}^{R_{01}} \dot{\lambda} R_0 \, dR_0}{\lambda(R_{01})}.$$

Or  $\dot{\lambda}$  est une fonction continue qui tend vers zéro lorsque  $R_0$  tend vers l'infini. Elle est donc bornée sur  $\left[ \frac{I}{aS}, +\infty \right[$ . On obtient alors la majoration suivante :

$$v(R_{01}) \geq \text{constante} \frac{[R_{01}]^2 - [R_{00}]^2}{\lambda(R_{01})}.$$

D'où le résultat.

### 3.5. La sensibilité aux imperfections

On a vu dans le chapitre II que le modèle simple était insensible à des imperfections géométriques. Ce paragraphe est une généralisation des résultats obtenus pour le modèle simple dans le cas de la poutre comprimée.

#### 3.5.1. Position du problème

On considère toujours la même poutre comprimée mais supposée légèrement fléchie dans sa configuration initiale ( cf. Fig.3.17. ). La configuration de référence est la position de la poutre sans déflexion initiale (cf. Fig.3.16. ).

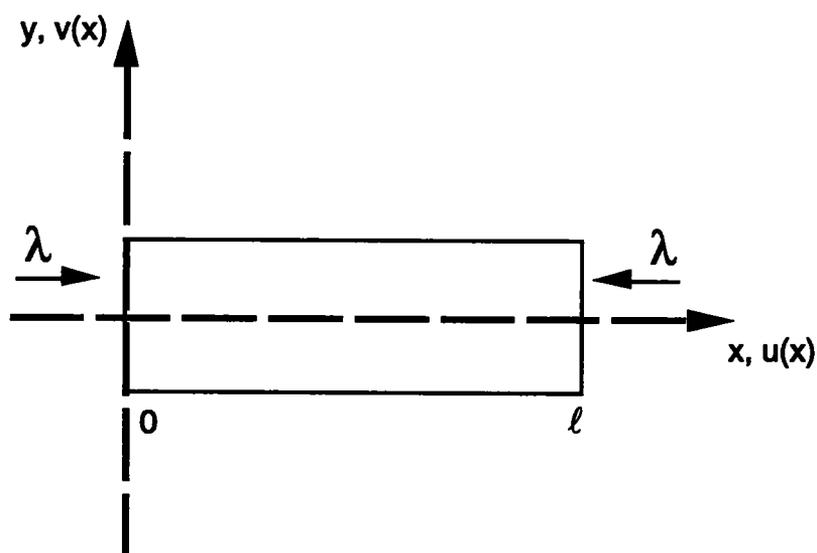


Fig.3.16. : Configuration de référence

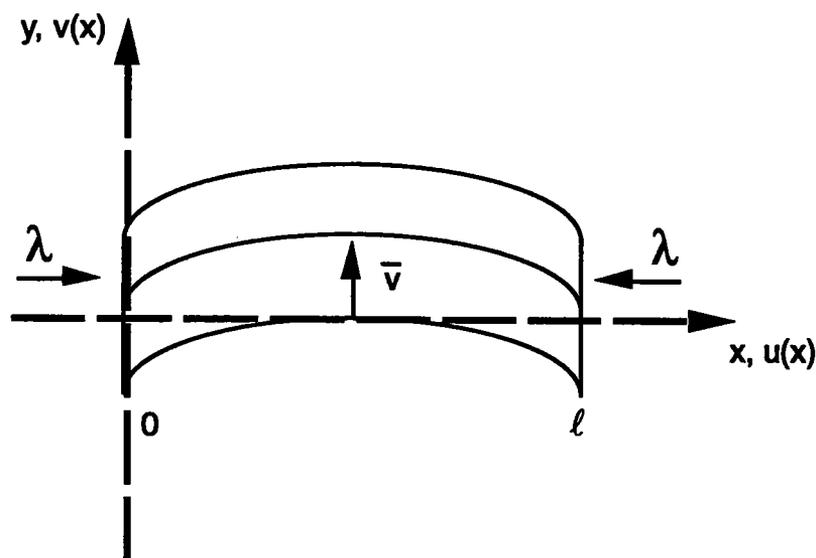


Fig.3.17. : Configuration initiale

On se place dans le cadre de la cinématique des poutres de Navier-Bernoulli. La déformation s'écrit grâce au déplacement de la fibre moyenne par rapport à la position initiale dans une approche lagrangienne comme suit :

$$\gamma(x, y) = u' + \frac{v'^2}{2} + v\bar{v}' - yv''$$

Rappelons que les conditions aux limites sont :

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad v(\ell) = 0; \quad v''(0) = 0; \quad v''(\ell) = 0.$$

Les équations d'équilibre s'écrivent, après une intégration sur la section, comme suit :

$\iint_{S(x)} \sigma(x, y) \, dy \, dz = -\lambda \quad (3.59.a)$	(3.59)
$\iint_{S(x)} y \sigma(x, y) \, dy \, dz = \lambda(v + \bar{v}) \quad (3.59.b)$	

où  $S(x)$  est la section de la poutre d'abscisse  $x$ , ici uniforme.

La loi de comportement est la même que celle utilisée pour le système parfait. On peut exprimer simplement cette loi comme suit :

- $\sigma = E(\gamma - \alpha)$
- $\dot{\sigma} = E_T \dot{\gamma}$  en charge plastique
- $\dot{\sigma} = E \dot{\gamma}$  en charge élastique ou en décharge

où le point désigne la dérivée par rapport à un paramètre cinématique caractérisant l'évolution quasi-statique.

La loi de comportement étant incrémentale, il est utile d'écrire les équations d'équilibre sous la forme suivante, obtenue en dérivant le système (3.59) :

$\iint_{S(x)} \dot{\sigma}(x, y) \, dy \, dz = -\dot{\lambda} \quad (3.60.a)$	(3.60)
$\iint_{S(x)} y \dot{\sigma}(x, y) \, dy \, dz = \dot{\lambda}(v + \bar{v}) + \lambda \dot{v} \quad (3.60.b)$	

Pour résoudre le problème on procède de la même manière que pour le modèle simple. Dans un premier temps on calcule la solution élastique et le premier point de plastification. On calcule ensuite une portion de branche de solutions en charge jusqu'à l'apparition du premier point de charge neutre. Le reste de la branche est calculé en tenant compte de l'existence d'une zone de décharge.

En anticipant sur ce qui va suivre on décrit qualitativement ces différentes étapes de la construction de la branche perturbée et les mouvements des deux frontières libres à savoir la frontière entre la zone élastique et la zone plastique en charge puis celle séparant la zone plastique de la zone de décharge.

**1ère étape :**  $0 \leq \lambda \leq \lambda_p$

C'est la phase où la structure se comporte élastiquement.  $\lambda_p$  est la charge où un point de la structure atteint le seuil de plasticité. C'est le point  $(x = \ell/2, y = -a)$ .

**2ème étape :**  $\lambda_p \leq \lambda \leq \bar{\lambda}_p$

La zone plastique envahit progressivement la poutre. On suppose que les paramètres du problème permettent une plastification complète de la structure avant l'apparition d'un point de décharge.  $\bar{\lambda}_p$  est alors la charge où toute la poutre est plastifiée. Dans cette étape il y a un point particulier qui correspond à la charge de plastification de la poutre droite  $\lambda_p^0$ . La zone plastique occupe alors une bande et la frontière de cette zone est un segment de droite.

**3ème étape :**  $\bar{\lambda}_p \leq \lambda \leq \hat{\lambda}$

C'est une phase de charge stricte jusqu'à l'apparition d'un point de décharge. C'est le point  $(x = \ell/2, y = +a)$  et la charge correspondante est notée  $\hat{\lambda}$ .

**4ème étape :**  $\hat{\lambda} \leq \lambda < \lambda_R$

Une zone de décharge se développe et l'on obtient une asymptote pour  $\lambda = \lambda_R$  où  $\lambda_R$  est la charge critique du module réduit définie précédemment.

Ces différentes étapes sont schématisées sur la figure Fig.3.18

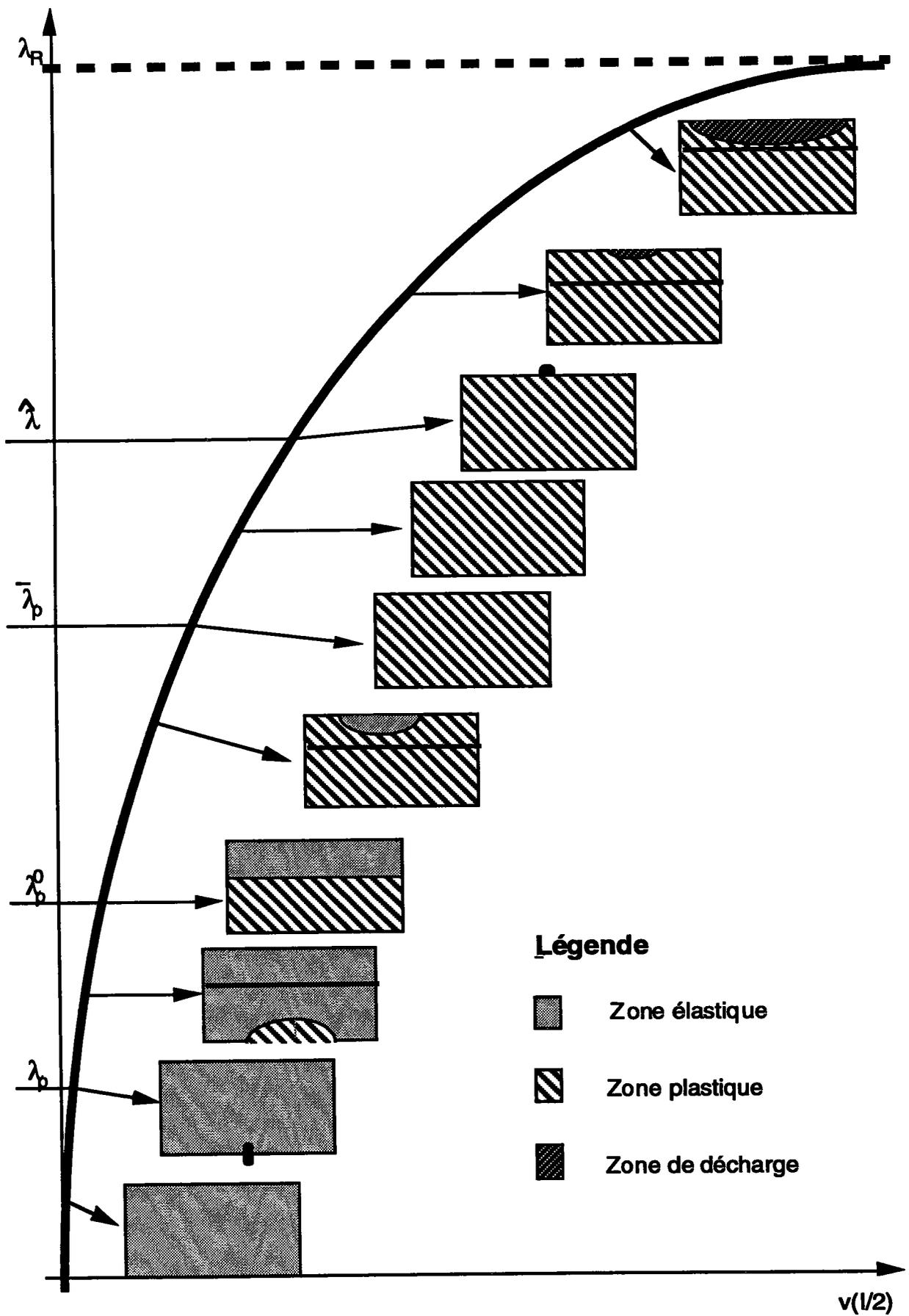


Fig.3.18. : Évolution des frontières libres en fonction du chargement

### 3.5.2. La solution élastique

On cherche ici la solution élastique et donc  $\alpha = 0$ . En effectuant les intégrations dans les équations d'équilibre et en tenant compte de la loi de comportement on obtient facilement le problème suivant :

• $u' = -\frac{v'^2}{2} - v\bar{v}' - \frac{\lambda}{ES}$	(3.61.a)	
• $u(0) = 0$	(3.61.b)	
• $v'' + \frac{\lambda}{EI}v + \frac{\lambda}{EI}\bar{v} = 0$	(3.61.c)	(3.61)
• $v(0) = 0, \quad v(\ell) = 0$	(3.61.d)	

Le problème formé des équations (3.61.c) et (3.61.d) se résout de manière élémentaire et on obtient l'expression suivante pour  $v$  :

$v(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{EI}} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{EI}}x\right) \left\{ \int_x^\ell \bar{v}(\eta) \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{EI}}\eta\right) d\eta \right\}$ $+ \sqrt{\frac{\lambda}{EI}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{EI}}x\right) \left\{ \int_x^\ell \bar{v}(\eta) \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{EI}}\eta\right) d\eta - \cot g\left(\sqrt{\frac{\lambda}{EI}}\ell\right) \int_0^\ell \bar{v}(\eta) \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{EI}}\eta\right) d\eta \right\}$	(3.62)
--	--------

Dans la suite et pour simplifier l'exposé on prend une perturbation  $\bar{v}$  proportionnelle au mode de flambage. Elle est de la forme :

$\bar{v}(x) = \bar{\xi} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_T}{E_T I}}x\right)$
---

avec  $\lambda_T = \frac{\pi^2 E_T I}{\ell^2}$  et  $\bar{\xi} > 0$ .

La solution élastique est alors proportionnelle à la perturbation :

$$v(x) = \xi \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_T}{E_T I}} x\right)$$

et on obtient donc en remplaçant dans l'équation (3.61.c) :

$$\xi = \frac{\lambda E_T}{\lambda_T E - \lambda E_T} \bar{\xi}$$

et

$$v = \frac{\lambda E_T}{\lambda_T E - \lambda E_T} \bar{v}$$

u s'obtient ensuite par une quadrature grâce à l'équation (3.61.a).

Cherchons maintenant la charge  $\lambda_p$  où apparaît pour la première fois la plastification :

$$\sigma = E\gamma = E\left[-\frac{\lambda}{ES} - yv''\right] = -\frac{\lambda}{S} + y \frac{\lambda_T}{E_T I} \frac{\lambda E_T}{\lambda_T E - \lambda E_T} \bar{\xi} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_T}{E_T I}} x\right)$$

$\sigma$  est maximale en valeur absolue pour  $x = \ell/2$  et  $y = -a$ . La charge de première plastification est donc donnée par l'équation :

$$\frac{\lambda_p}{S} + a \frac{\lambda_T}{E_T I} \frac{\lambda_p E_T}{\lambda_T E - \lambda_p E_T} \bar{\xi} = 0 \quad (3.63)$$

### Remarques :

- Pour  $\bar{\xi}$  assez petit il y a toujours une solution à cette équation.
- $\lambda_p \leq \lambda_p^0 = \sigma_Y S$ .  $\lambda_p^0$  est la charge de plastification de la poutre droite.

### 3.5.3. La solution en charge

A partir de  $\lambda_p$  on cherche une solution élastoplastique en charge partout. On a donc :

- Dans la zone élastique :  $\sigma = E\gamma$
- Dans la zone plastique :  $\sigma = E(\gamma - \alpha)$ .

Pour une section donnée indiquée par  $x$  on note  $aX(x) + \bar{v}(x)$  une éventuelle frontière séparant la zone élastique de la zone plastique. Reprenons les équations d'équilibre (3.59) et effectuons les intégrales correspondantes en tenant compte de l'existence de cette frontière. Après quelques calculs élémentaires on aboutit aux deux équations suivantes :

$P(X)v'' + \lambda - \lambda_p^0 = 0 \quad (3.64.a)$	(3.64)
$Q(X)v'' + \lambda v + \lambda \bar{v} = 0 \quad (3.64.b)$	

$P$  et  $Q$  sont respectivement les fonctions  $P_1$  et  $Q_1$  définis dans le paragraphe 3.1. On définit de même la fonction  $R$  comme suit :  $R = \frac{Q}{P}$ .

Dans le cas d'une section en charge élastique (respectivement en charge plastique) il suffit de remplacer dans la seconde équation (3.64.b)  $Q(X)$  par  $EI$  (respectivement  $E_T I$ ).

On constate dans les équations (3.64) une grande analogie avec le système d'équations (3.5) obtenu pour la poutre non perturbée lorsque la décharge apparaît. La résolution sera inspirée de la démarche adoptée pour le calcul des branches bifurquées du système parfait. Cependant on ne présente ici qu'une résolution simplifiée et l'on cherche dans la suite des solutions symétriques par rapport à  $\frac{\ell}{2}$ . On ne considérera donc que la moitié de la poutre  $[0, \frac{\ell}{2}]$ .

Dans un premier temps on caractérise la frontière entre la zone élastique et la zone plastique par une équation différentielle ordinaire du second ordre. Ceci permet de construire un problème en  $R$ , puis un problème en  $R_0$  de la forme  $\Phi(\lambda, R_0) = 0$ . La résolution de ce problème permet de construire cette portion de la branche de solutions perturbée.

Avant de construire le problème en  $R$  constatons d'abord que l'équation (3.64.a) permet de faire une analyse de la topologie de la zone plastique, semblable à celle faite dans le paragraphe 3.2 à propos des zones de décharge. Signalons simplement que si  $\lambda = \lambda_p^0$  alors la frontière  $X(x)$  est une constante égale au zéro de la fonction  $P(X)$  qui est noté, rappelons le,  $Y_R$ . Réciproquement si la frontière de la zone plastique touche la droite  $X = Y_R$  ou les bords de la poutre alors  $\lambda = \lambda_p^0$ . On déduit donc que la frontière de la zone de décharge est entièrement confondue avec la droite  $X = Y_R$  ou alors elle est entièrement d'un côté ou de l'autre de cette droite. On distingue trois types de zones plastiques représentés sur la figure Fig.3.19.

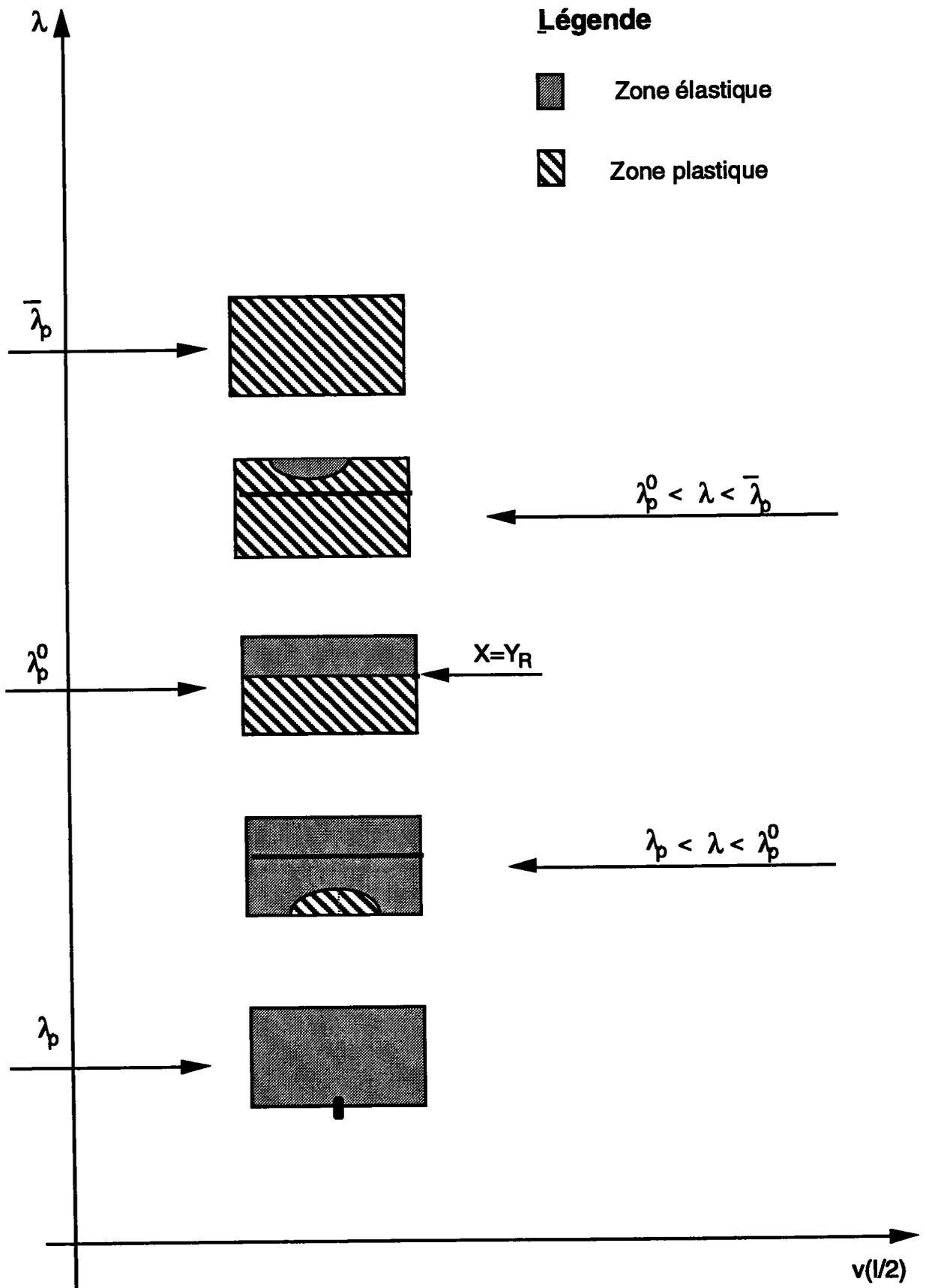


Fig.3.19. : trois types de zones plastiques

On caractérise maintenant ces frontières des zones plastiques. Après quelques manipulations le système (3.64) devient :

$$R = \frac{\lambda - \lambda_p^0}{\lambda} (v + \bar{v}) \quad (3.65.a)$$

$$R'' + \frac{\lambda}{P(X)} + \frac{\lambda}{\lambda_p^0 - \lambda} \bar{v}'' = 0 \quad (3.65.b)$$

(3.65)

On définit la frontière de la zone plastique de la même manière qu'on avait défini les frontières neutres des zones de décharge dans le cas de la poutre droite (paragraphe 3.2) comme suit :

*Il existe deux nombres  $\tau_1$  et  $\tau_2$  tels que  $0 < \tau_1 < \tau_2 < l$ . La fonction  $X(x)$  est alors définie dans l'intervalle  $[\tau_1, \tau_2]$  et vérifie, selon la valeur du chargement, l'un des problèmes suivants :*

- $\lambda_p < \lambda < \lambda_p^0$

Dans ce cas, la frontière de la zone plastique  $X(x)$  vérifie  $-1 < X(x) \leq Y_R$  et l'équation (3.65.b) soit :

$$[R(X(x))]'' + \frac{\lambda}{P(X(x))} + \frac{\lambda}{\lambda_p^0 - \lambda} \bar{v}'' = 0.$$

Rappelons d'autre part que  $R(X)$  est bijective sur l'intervalle  $[-1, Y_R[$  et la fonction réciproque de sa restriction à cet intervalle est notée  $g_1$  (que l'on va noter simplement  $g$  dans la suite).

On peut alors écrire le problème vérifié par  $Y(x)$  grâce à la fonction  $g$  comme suit :

$$X : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow [-1, Y_R[ \quad (3.66.a)$$

$$[R(X(x))]'' + \frac{\lambda}{P(g(R(X(x))))} + \frac{\lambda}{\lambda_p^0 - \lambda} \bar{v}''(x) = 0 \quad (3.66.b)$$

$$X(\tau_1) = -1 ; X(\tau_2) = -1 \quad (3.66.c)$$

(3.66)

Dans cette formulation, on a remplacé  $X$  dans l'équation (3.65.b) par  $g(R(X)) = X$ .

On obtient ainsi une équation différentielle du second ordre où l'inconnue est la fonction  $R(X(x))$  que l'on notera par la suite  $R(x)$  et qui est alors deux fois dérivable. La fonction  $X(x)$  est obtenue par  $X(x) = g(R(x))$ . Le domaine de définition de l'équation différentielle est représenté par la figure Fig.3.20.

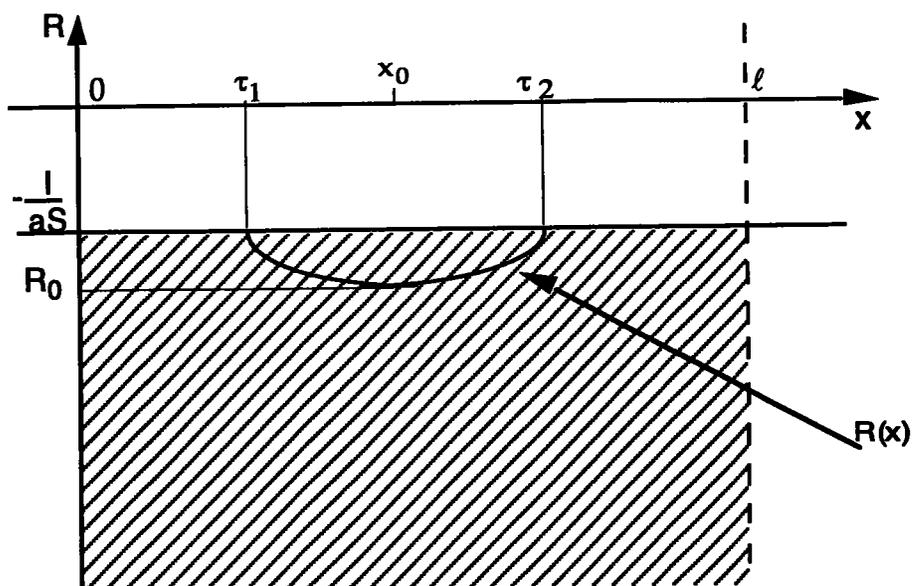


Fig.. 3.20. : Domaine de définition de la fonction  $R(x)$

- $\lambda_p^0 < \lambda < \bar{\lambda}_p$

Maintenant la frontière de la zone plastique  $X(x)$  est telle que  $Y_R < X(x) \leq +1$  et vérifie le problème suivant :

$X: [\tau_1, \tau_2] \rightarrow ]Y_R, +1]$	(3.67.a)	
$[R(X(x))]'' + \frac{\lambda}{P(f(R(X(x))))} + \frac{\lambda}{\lambda_p^0 - \lambda} \bar{v}''(x) = 0$	(3.67.b)	(3.67)
$X(\tau_1) = +1 ; X(\tau_2) = +1$	(3.67.c)	

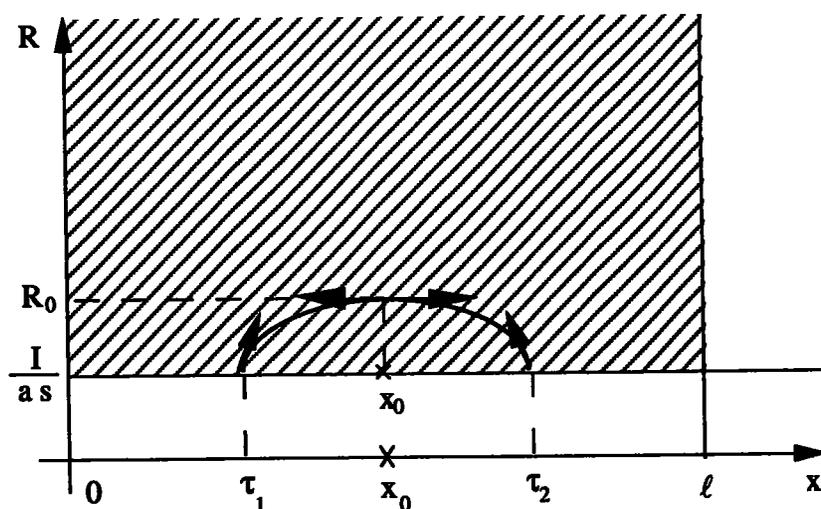


Fig.. 3.21. : Domaine de définition de la fonction  $R$

Les fonctions  $f_i$  et  $g_i$  ( $i = 1$  ou  $i = 2$ ) ( et en l'occurrence  $f$  et  $g$  ) ont été définies au paragraphe 3.1.4.

Considérons d'abord le cas  $\lambda_p < \lambda < \lambda_p^0$ . La construction du problème en R se fait exactement comme pour les branches bifurquées en tenant compte de la continuité de  $v$  au point  $\tau$ . Le problème en  $R_0$  s'obtient alors grâce à la continuité de la dérivée de  $v$  au point  $\tau$ . Afin d'alléger l'exposer on ne présente pas ces deux constructions et on donne simplement le problème en  $R_0$  sans le résoudre :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>R_0 \in \left] -\infty, -\frac{I}{aS} \right]</math></li> </ul>	(3.68.a)	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\lambda \in [\lambda_p, \lambda_p^0]</math></li> </ul>	(3.68.b)	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Phi(\lambda, R_0) = 0</math></li> </ul>	(3.68.c)	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\Phi(\lambda, R_0) = \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \left[ \frac{\lambda}{\lambda_p^0 - \lambda} \frac{I}{aS} - \bar{v}(\tau) \right] \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right)</math></li> </ul>	(3.68.d)	
$-\frac{\lambda}{E_T I} \frac{\int_0^\tau \bar{v}(\eta) \sin \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \eta \right) d\eta}{\sin \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right)} + \bar{v}'(\tau) - \frac{\lambda}{\lambda_p^0 - \lambda} R'(\tau)$		(3.68)

**Remarque :**

Le cas  $\lambda_p^0 < \lambda < \bar{\lambda}_p$  se traite de manière analogue.

La zone plastique progresse jusqu'à envahir toute la poutre à la charge  $\bar{\lambda}_p$ . A  $\bar{\lambda}_p$  on a  $\frac{\bar{\lambda}_p - \lambda_p^0}{\bar{\lambda}_p} \left[ v\left(\frac{\ell}{2}\right) + \bar{v}\left(\frac{\ell}{2}\right) \right] = \frac{I}{aS}$ . D'autre part  $v$  vérifie le problème :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>E_T I v'' + \lambda v + \lambda \bar{v} = 0</math></li> <li>• <math>v(0) = v(\ell) = 0</math></li> </ul>
---

Ce problème se résout de manière élémentaire en cherchant une solution  $v$  proportionnelle à la perturbation, c'est à dire :

$$v = \xi \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_T}{E_T I}} x\right)$$

et on obtient facilement

$$\xi = \frac{\lambda}{\lambda_T - \lambda} \bar{\xi}.$$

$\bar{\lambda}_p$  vérifie donc la relation :

$$\boxed{\frac{\bar{\lambda}_p - \lambda_p^0}{\bar{\lambda}_p} \left[ \frac{\bar{\lambda}_p}{\lambda_T - \bar{\lambda}_p} + 1 \right] \bar{\xi} = \frac{I}{aS}}$$

**Remarque :**

Comme noté précédemment, on peut trouver une solution  $\bar{\lambda}_p$  à cette équation en jouant sur les paramètres du problème.

A partir de  $\bar{\lambda}_p$  il y a effectivement une solution en charge partout dont la composante  $v$  est donnée par :  $v = \xi \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda_T}{E_T I}} x\right)$  avec  $\xi = \frac{\lambda}{\lambda_T - \lambda} \bar{\xi}$ . Cette solution est valable jusqu'au premier point de décharge noté  $\hat{\lambda}$ . Celui ci va apparaître en  $\left(x = \frac{\ell}{2}, y = a\right)$ .

Cherchons  $\hat{\lambda}$ . Pour cela on calcule  $\dot{v}''\left(\frac{\ell}{2}\right)$  de deux manières différentes. D'abord on a :  $\dot{\gamma} = 0$  et donc  $\dot{u}' + (v' + \bar{v}')\dot{v}' - a\dot{v}'' = 0$ . Or  $\dot{u}' + (v' + \bar{v}')\dot{v}' = -\frac{\dot{\lambda}}{E_T S}$ . Donc

$$\dot{v}''\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{\dot{\lambda}}{E_T a S}.$$

D'autre part en utilisant l'expression de  $v$  on obtient  $\dot{v}''\left(\frac{\ell}{2}\right) = -\frac{\lambda_T}{(\lambda_T - \lambda)^2} \bar{\xi} \frac{\lambda_T}{E_T I} \dot{\lambda}$ . La comparaison des deux expressions de  $\dot{v}''\left(\frac{\ell}{2}\right)$  conduit à l'équation suivante :

$$\boxed{\frac{\lambda_T^2}{(\lambda_T - \hat{\lambda})^2} \bar{\xi} = \frac{I}{aS}}$$

A partir de  $\hat{\lambda}$  on cherche donc une solution avec une zone de décharge. Soit  $aY(x) + \bar{v}(x)$  une éventuelle frontière entre zone de charge et zone de décharge.

En écrivant les équations d'équilibre sous forme incrémentale et en utilisant la relation  $\dot{\gamma}(x, aY(x) + \bar{v}(x)) = 0$  on aboutit facilement aux deux équations suivantes:

$P(Y)\dot{v}'' + \dot{\lambda} = 0$	(3.69.a)	(3.69)
$Q(Y)\dot{v}'' + \lambda\dot{v} + \dot{\lambda}v = 0$	(3.69.b)	

Et l'on déduit :

$\dot{v} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}[R - v - \bar{v}]$	(3.70.a)	(3.70)
$R'' + \frac{\lambda}{P(Y)} - v'' - \bar{v}'' = 0$	(3.70.b)	

En faisant le changement de variable  $w = v + \bar{v}$ , ce problème se résout de la même manière que les branches bifurquées de la poutre droite et on aboutit aux mêmes conclusions quant à la régularité, à la monotonie et au comportement asymptotique.

# ANNEXES

## ANNEXE 1

Dans cette annexe on démontre les lemmes 3.8, 3.9 et 3.10. On rappelle pour cela les deux théorèmes ci-dessous qu'on peut trouver dans la référence [CAR 1977].

### **Théorème A1.1 :**

Soit  $h(t,x)$  une application continue d'un ouvert  $U \subset \mathbb{R} \times E$  à valeurs dans  $E$ ; supposons que la dérivée partielle  $h'_x(t,x)$  existe et soit continue. Soit  $(t_0, x_0) \in U$ , et soit  $I \ni t_0$  un intervalle compact dans lequel l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = h(t,x)$$

admet une solution  $x = \varphi(t, x_0)$  telle que  $x_0 = \varphi(t_0, x_0)$ . Puisque  $h$  est localement lipschitzienne en  $x$  l'équation différentielle admet dans  $I$  une solution  $x = \varphi(t, u)$  telle que  $\varphi(t_0, u) = u$  pourvu que  $u$  soit assez voisin de  $x_0$ . Alors  $\varphi(t, u)$ , comme fonction de ses deux arguments est une fonction de classe  $C^1$ ; en outre la dérivée  $\varphi'_u(t, u)$  est dérivable par rapport à  $t$  et on a :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} h(t, \varphi(t, u))}$$

c'est-à-dire que  $\varphi'_u(t, u)$  est la solution  $Y(t)$  de l'équation différentielle linéaire :

$$\frac{dY}{dt} = A(t, u) \circ Y(t) \quad Y(t_0) = 1_E$$

où l'on a posé

$$A(t, u) = h'_x(t, \varphi(t, u)).$$

**Théorème A1.2:**

Soit une équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = h(t, x, \Lambda)$$

où  $\Lambda$  varie dans un espace de Banach  $B$ ; on suppose que  $h$  est une application continue d'un ouvert  $U \subset \mathbb{R} \times E \times B$  à valeurs dans  $E$ ; supposons que les dérivées partielles  $h'_x(t, x, \Lambda)$  et  $h'_\Lambda(t, x, \Lambda)$  existent et sont continues. Soit  $(t_0, x_0, \Lambda_0) \in U$ , et soit  $I \ni t_0$  un intervalle compact dans lequel l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = h(t, x, \Lambda_0)$$

admet une solution  $x = \varphi(t, x_0, \Lambda_0)$  telle que  $x_0 = \varphi(t_0, x_0, \Lambda_0)$ . Alors, pour  $u$  assez voisin de  $x_0$  et  $\Lambda$  assez voisin  $\Lambda_0$  l'équation différentielle admet dans  $I$  une solution  $x = \varphi(t, u, \Lambda)$  telle que  $\varphi(t_0, u, \Lambda) = u$ . Alors  $\varphi(t, u, \Lambda)$  comme fonction de ses trois arguments est une fonction de classe  $C^1$ ; en outre les dérivées  $\varphi'_u(t, u, \Lambda)$  et  $\varphi'_\Lambda(t, u, \Lambda)$  sont dérivables par rapport à  $t$  et on a :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial t}} \text{ et } \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial \Lambda} = \frac{\partial}{\partial \Lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial t}}$$

En particulier  $\varphi'_\Lambda(t, u, \Lambda)$  est la solution  $Z(t)$  de l'équation différentielle linéaire :

$$\frac{dZ}{dt} = C(t) \circ Z(t) + D(t)$$

telle que  $Z(t_0) = 0$ , où l'on a posé

$$C(t) = h'_x(t, \varphi(t, u, \Lambda), \Lambda).$$

$$D(t) = h'_\Lambda(t, \varphi(t, u, \Lambda), \Lambda)$$

Pour démontrer les lemmes et pour appliquer le théorème précédent on introduit les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
 z &= (z_1, z_2); \quad z_1 = R; \quad z_2 = R'; \quad z_0 = (R_0, 0); \quad x_0 = \frac{\ell}{2}; \quad u = (u_1, u_2) \\
 \hbar_1(z_1, z_2) &= z_2; \quad \hbar_2(z_1, z_2) = -\frac{\lambda}{P(f(z_1))} + v'' \\
 \hbar &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\
 (z_1, z_2) &\mapsto \hbar(z_1, z_2) = \hbar(z) = (\hbar_1(z), \hbar_2(z)) \\
 \hbar'_z &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \left( -\frac{\lambda}{P(f(z_1))} + v'' \right) & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

R est la solution maximale du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned}
 R'' + \frac{\lambda}{P(f(R))} - v'' &= 0 \\
 R\left(\frac{\ell}{2}\right) &= R_0 \\
 R'\left(\frac{\ell}{2}\right) &= 0
 \end{aligned}$$

Grâce aux notations définies plus haut ce problème est équivalent au problème suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dx} &= \hbar(x, z) \\
 z(x_0) &= z_0
 \end{aligned}$$

Considérons le problème plus général suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dx} &= \hbar(x, z) \\
 z(x_0) &= u
 \end{aligned}$$

et regardons comment varie la solution z en fonction de la condition initiale u et

des paramètres  $\lambda$  et v. D'après les théorèmes précédents les dérivées  $\frac{dz}{du}$ ,  $\frac{dz}{d\lambda}$  et  $\frac{dz}{dv}$  vérifient les problèmes différentiels linéaires respectifs

$(P_u)$ ,  $(P_\lambda)$  et  $(P_v)$  suivants :

$$\bullet \frac{d}{dx} \left[ \frac{dz}{du} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \left( -\frac{\lambda}{P(f(z_1(\eta)))} + v'' \right) & 0 \end{bmatrix} \circ \frac{dz}{du}$$

$$\bullet \frac{dz}{du}(\ell/2) = 1_{\mathbb{R}^2}$$

(P<sub>u</sub>)

avec

$$\frac{dz}{du} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial u_1} & \frac{\partial z_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial u_1} & \frac{\partial z_2}{\partial u_2} \end{bmatrix}$$

et  $1_{\mathbb{R}^2}$  représente l'identité de  $\mathbb{R}^2$ .

$$\bullet \frac{d}{dx} \left[ \frac{dz}{d\lambda} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \left( -\frac{\lambda}{P(f(z_1))} + v'' \right) & 0 \end{bmatrix} \frac{dz}{d\lambda} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{P(f(z_1))} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \frac{dz}{d\lambda}(\ell/2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(P<sub>λ</sub>)

avec

$$\frac{dz}{d\lambda} = \begin{bmatrix} \frac{dz_1}{d\lambda} \\ \frac{dz_2}{d\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \frac{d}{dx} \left[ \frac{dz}{dv} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \left( -\frac{\lambda}{P(f(z_1))} + v'' \right) & 0 \end{bmatrix} \frac{dz}{dv} + \begin{bmatrix} 0 \\ L(x) \end{bmatrix}$$

$$\bullet \frac{dz}{dv} \left( \frac{\ell}{2} \right) = 0$$

(P<sub>v</sub>)

avec

$$\frac{dz}{dv} = \begin{bmatrix} \frac{dz_1}{dv} \\ \frac{dz_2}{dv} \end{bmatrix}$$

$$L(x) : H^2([0, \ell]) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$w \longrightarrow [L(x)](w) = w''(x)$$

On se limite à la démonstration du lemme 3.8. Les deux autres lemmes s'obtiennent de manière similaire.

Le problème (P<sub>u</sub>) se résout sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial u_1} & \frac{\partial z_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial u_1} & \frac{\partial z_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = e^{\int_0^x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \left( -\frac{\lambda}{P(f(z_1(\eta)))} \right) & 0 \end{bmatrix} d\eta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

avec le symbole  $\mathbf{e}$  représentant l'exponentielle d'une matrice.

On obtient facilement :

$$e^{\int_{\ell/2}^x \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} \left( -\frac{\lambda}{P(f(z_1(\eta)))} \right) & 0 \end{bmatrix} d\eta} = \cos\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\omega(x)}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\sin\left(\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\omega(x)}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}-x\right)\omega(x)}} \begin{bmatrix} 0 & x-\frac{\ell}{2} \\ \omega(x) & 0 \end{bmatrix}$$

Le résultat s'en déduit immédiatement.

On a donc en particulier :

$$\frac{\partial R}{\partial R_0}(x) = \cos\left(\sqrt{\int_x^{\ell/2} \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\lambda}{P(f(R(\eta)))} \right) \left( \frac{\ell}{2} - x \right) d\eta}\right)$$

## ANNEXE 2

On présente ici la démonstration du lemme 3.12.

Rappelons l'expression de  $\Phi$  :

$$\Phi(\lambda, v, R_0) = \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right) - \frac{\lambda}{E_T I} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \eta d\eta}{\sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau} + v'(\tau) - R'(\tau, \lambda, v, R_0)$$

et considérons un état  $(v, \lambda)$  sur la branche de solutions. On a donc en particulier  $\Phi(\lambda, v, R_0) = 0$ . Effectuons maintenant la dérivée de  $\Phi$  par rapport à  $R_0$ .

• Calcul de  $\frac{\partial \Phi}{\partial R_0}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial R_0} = & \left\{ - \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \frac{\lambda}{E_T I} \left( 1 + \cot g^2 \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right) \right) - v'(\tau) \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right) - \frac{\lambda}{E_T I} v(\tau) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{E_T I} \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \frac{\cos \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right) \int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \eta d\eta}{\sin^2 \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right)} + v''(\tau) \right\} \frac{\partial \tau}{\partial R_0} \\ & - \frac{\partial R'}{\partial R_0}(\tau, \lambda, v, R_0) - R''(\tau, \lambda, v, R_0) \frac{\partial \tau}{\partial R_0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{\lambda}{E_T I} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \eta d\eta}{\sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau} &= \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau \right) \\ &+ v'(\tau) - R'(\tau, \lambda, v, R_0) \end{aligned}$$

$$\text{et } R''(\tau, \lambda, \nu, R_0) = -\frac{\lambda}{E_T aS} + v''(\tau).$$

On remplace donc dans l'expression précédente et on obtient :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R_0} = -\sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g\left(\sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau\right) R'(\tau, \lambda, \nu, R_0) \frac{\partial \tau}{\partial R_0} - \frac{\partial R'}{\partial R_0}(\tau, \lambda, \nu, R_0).$$

D'autre part on sait que  $R(\tau, \lambda, \nu, R_0) = \frac{I}{aS}$  et en dérivant par rapport à  $R_0$  on obtient  $\frac{\partial R}{\partial R_0}(\tau, \lambda, \nu, R_0) + R'(\tau, \lambda, \nu, R_0) \frac{\partial \tau}{\partial R_0} = 0$ . On aboutit finalement à

l'expression suivante de la dérivée de  $\Phi$  par rapport à  $R_0$  :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R_0} = \sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \cot g\left(\sqrt{\frac{\lambda}{E_T I}} \tau\right) \frac{\partial R}{\partial R_0}(\tau, \lambda, \nu, R_0) - \frac{\partial R'}{\partial R_0}(\tau, \lambda, \nu, R_0).$$

• Calcul de  $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}$  :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial R_0} = & \left\{ \frac{1}{E_{TI}} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] - \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \left( 1 + \cot g^2 \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right) \right) \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}}} \frac{1}{E_{TI}} \tau \right. \\
 & - \frac{1}{E_{TI}} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \eta d\eta}{\sin \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right)} - \frac{\lambda}{E_{TI}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}}} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \eta \cos \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \eta d\eta}{\sin \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right)} \\
 & \left. + \frac{\lambda}{E_{TI}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}}} \tau \frac{\cos \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right) \int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \eta d\eta}{\sin^2 \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right)} \right\} \\
 & + \left\{ \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \frac{\lambda}{E_{TI}} \left( 1 + \cot g^2 \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right) \right) - v'(\tau) \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right) - \frac{\lambda}{E_{TI}} v(\tau) \right. \\
 & \left. + \frac{\lambda}{E_{TI}} \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \frac{\cos \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right) \int_0^\tau v(\eta) \sin \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \eta d\eta}{\sin^2 \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right)} + v''(\tau) \right\} \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} \\
 & + \left\{ -\frac{\partial R'}{\partial \lambda}(\tau, \lambda, v, R_0) - R''(\tau, \lambda, v, R_0) \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} \right\}.
 \end{aligned}$$

La première accolade se simplifie beaucoup en utilisant la relation  $\Phi(\lambda, v, R_0) = 0$ .

Les deux autres accolades se calculent de la même manière que pour  $\frac{\partial \Phi}{\partial R_0}$ . On

obtient après simplification :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = \left\{ -\frac{1}{E_{TI}} \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right) - \left[ \frac{I}{aS} - v(\tau) \right] \frac{1}{2} \frac{1}{E_{TI}} \tau \right. \\ \left. - \frac{\lambda}{E_{TI}} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}}} \frac{\int_0^\tau v(\eta) \eta \cos \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \eta d\eta}{\sin \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right)} \right\} \\ + \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \cot g \left( \sqrt{\frac{\lambda}{E_{TI}}} \tau \right) \frac{\partial R}{\partial \lambda} (\tau, \lambda, v, R_0) - \frac{\partial R'}{\partial \lambda} (\tau, \lambda, v, R_0) \right\}.$$

• Calcul de  $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$  :

Ce calcul se fait de manière similaire.

# BIBLIOGRAPHIE

## BIBLIOGRAPHIE

- [AKE 1987] **Akel S.**, *Flambage élastoplastique des structures* (Thèse de l'E.N.P.C., Paris, 1987)
- [BEN 1992] **Benbagdad K.**, *Critères de flambage plastique avec lois de comportement complexes sur l'exemple de l'éprouvette cruciforme* (Thèse Université de Metz, 1992).
- [BER 1973] **Berger M. S.**, *Application of global analysis to specific nonlinear eigenvalue problems* (The Rocky Mountain J. of Maths, 3, 1973, p. 319-354).
- [BIJ 1949] **Bijlaard P.**, *Theory and tests on the plastic buckling of plates and Shells* (J. Aeronaut. Sci., Vol 16, 1949, p. 529-541).
- [BRE 1973] **Brezis H.**, *Opérateur maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert* (Mathematics studies, North-Holland, Amsterdam, 1973).
- [BRU 1975] **Brush D. O. et Almroth B. O.**, *Buckling of bars, plates and shells* (MacGraw Hill Book Company, New York, 1975).
- [BUD 1974] **Budiansky. B.**, *Theory of buckling and postbuckling behavior of elastic structures* (Advances in Appl. Mech., vol 14, 1974, p. 1-65).
- [BUS 1974] **Bushnell D. et Galletly G. D.**, *Comparisons of test and theory for nonsymmetric elastic-plastic buckling of shells of revolution* (Int. J. Solids Struct., vol 10, 1974, p. 1271-1286)
- [BUS 1985] **Bushnell D.**, *Computerized Buckling Analysis of Shells* (Nijhoff, Leiden, 1985).
- [CAM 1992] **Camotim D. and Roorda J.**, *Plastic buckling with residual stress, postbifurcation behavior* (Dynamics and Stability of Systems, vol. 8, 1992, p. 219-251).
- [CAR 1977] **Cartan H.**, *Cours de calcul différentiel* (Collection Méthodes, Hermann éd. des sci. et des arts, Paris, 1977)
- [CIC 1950] **Cicala P.**, *On the plastic buckling of a compressed strip* (J. Aeronaut. Sci., vol. 17, 1950, p. 378-379).

- [CIM 1984] **Cimetièrè A.**, *Flambage naissant des plaques élastoplastiques minces* (C.R. Acad. Sci. Paris, t. 298, série II, 1984, p. 157-161).
- [CIM 1987] **Cimetièrè A.**, *Flambage élastoplastique des plaques* (Thèse de Doctorat d'état, Université de Poitiers, 1987).
- [CIM 1989] **Cimetièrè A.**, *Condition suffisante de non bifurcation pour les structures élastoplastiques soumises à des chargements complexes critère de Hill généralisé* (9<sup>ième</sup> Congrès Français de Mécanique 5-8 septembre 1989, Metz).
- [CIM 1993] **Cimetièrè A. et Potier-Ferry M.**, *Flambage plastique naissant de la poutre cruciforme avec loi de comportement complexe* (XI<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Lille, 1993).
- [CIM 1994] **Cimetièrè A., Elkoulani A. et Léger A.**, *Flambage naissant et post-flambage d'un modèle simple en élastoplasticité* (C.R. Acad. Sci., Paris, t. 319, série II, 1994, p. 1263-1269).
- [CIM 1996] **Cimetièrè A. et Léger A.**, *Some problems about elastic-plastic post-buckling* (Int. J. Solids Struct., vol. 33, 1996, p. 1519-1533).
- [CHO 1975] **Chow S.-N., Hale J.-K., Mallet-Paret J.**, *Applications of generic bifurcations* (I Arch. Rat. Mech. Anal., 59, 1975, 159-188, II id. 62, 1976, 209-235).
- [COC 1994] **Cochelin , Damil N. et Potier-Ferry M.**, *Asymptotic-Numerical methods and pade approximants for nonlinear elastic structure* (Int. J. for Num. Methods in Eng., vol. 37, 1993, p. 1187-1213).
- [CON 1891] **Considère A.**, *Résistance des pièces comprimées* (Congrès Int. Proc. Construction 3, Librairie Polytechnique, Paris, 1891, p. 371).
- [COU 1953] **Courant R. et Hilbert D.**, *Methods of mathematical physics* (Interscience Publishers, New York, 1953).
- [DO 1980] **Do C.**, *Flambement élastoplastique d'une plaque mince* (C.R. Acad. Sci., Paris, t. 290, série B, 1980, p. 143-146).
- [DRU 1949] **Drucker D. C.**, *A Discussion of theories of plasticity* (J. Aeronaut. Sci., vol. 16, 1949, p. 567-568).
- [DUV 1972] **Duvaut G. et Lions J.-L.**, *Equations et inéquations en mécanique et en physique* (Dunod, Paris, 1972).
- [ELK 1996] **Elkoulani A. et Léger A.**, *Solution bifurquées du problème en vitesses initiales pour une poutre élastoplastique* (C.R. Acad. Sci. Paris, t. 322, série I, 1996, p. 1007-1013).

- [ENG 1889] Engesser F., *Ueber die knickfestigkeit gerader stäbe* (Z. Arcitektur Ing., vol 35, 1889, p. 455).
- [ENG 1895] Engesser F., *Ueber knickfragen* (Schweizerische Bauzeitung, vol. 26, 1895, p. 24).
- [FIC 1964] Fichera G., *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali* (Mem. Accad. Naz. Lincei, 7, ser. 8, 1964, p. 91-140).
- [GER 1957] Gerard G. et Becker H., *Handbook of structural stability, I, buckling of flat plates* (Nat. Adv. Comm. Aeronaut. Tech., Note 3781, 1957)
- [GOL 1979] Golubitsky M. et Schaeffer D. G., *A theory of imperfect bifurcation via singularity theory* (Comm. Pure Appl. Math, vol. 32, 1979, p. 21-98).
- [FER 1991] Ferron G., Gardin C., Grandidier J. C. et Potier-Ferry M., *Compression dans les stratifiés à fibres longues expériences et théorie* (X<sup>ième</sup> Congrès Français de Mécanique, 2-6 septembre 1991).
- [HAL 1975] Halphen B. et Nguyen Q.S., *Sur les matériaux standard généralisés* (J. Méc., vol. 14, 1975, p. 39-63).
- [HIL 1950] Hill R., *The mathematical theory of plasticity* (Clarendon Press, Oxford, 1950).
- [HIL 1957] Hill R., *Stability of rigid-plastic solids* (J., Mech., Phys., Solids, vol. 6, 1957, p. 1-8).
- [HIL 1958] Hill R., *A General theory of uniqueness and stability of elastic plastic solids* (J. Mech. Phys. Solids, vol. 6, 1958, p. 236-249).
- [HIL 1959] Hill R., *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time* (J. Mech. Phys. Solids, vol. 7, 1959, p. 209-225).
- [HUT 1972] Hutchinson J. W., *On the postbuckling behavior of imperfection sensitive structures in the plastic range* (J. Appl. Mech., vol. 39, 1, 1972, p. 155-162).
- [HUT 1973a] Hutchinson J. W., *Postbifurcation behavior in the plastic range* (J. Mech. Phys. Solids, vol. 21, 1973, p. 163-190).
- [HUT 1973b] Hutchinson J. W., *Imperfection sensitivity in the plastic range* (J. Mech. Phys. Solids, vol. 21, 1973, p. 191-204).
- [HUT 1974] Hutchinson J. W., *Plastic buckling* (Adv. Appl. Mech., vol. 14, 1974, p. 67-144).

- [IOO 1990] **Iooss G. et Joseph D. D.**, *Elementary stability and bifurcation theory* (Second ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, 1990)
- [KAT 1975] **Katchanov L.**, *Eléments de la théorie de la plasticité* (Traduction française, Mir éd., Moscou, 1975).
- [KEL 1977] **Keller H. D.**, *Numerical solutions of bifurcation and nonlinear eigenvalue problem* (in *Applications of Bifurcation Theory*, ed. P. H. Rabinowitz, Academic Press, 1977, p. 359-384).
- [KOI 1945] **Koiter W. T.**, *On the stability of Elastic Equilibrium*, Thesis, Delft, 1945, English translation NASA Techn. Trans. F-10, 833, 1967.
- [LEG 1986] **Léger A. et Potier-Ferry M.**, *Bifurcations plastiques à partir d'un état inhomogène* (C. R. Acad. Sci. Paris, t. 303, série II, 1986, p. 111-114).
- [LEG 1987] **Léger A. et Potier-Ferry M.**, *Une nouvelle méthode pour calculer le post-flambage des poutres élastoplastiques* (C. R. Acad. Sci. Paris, t. 304, série II, 1987, p. 597-600).
- [LEG 1988] **Léger A. et Potier-Ferry M.**, *Plastic post-buckling* (J. Méc. Théo. Appl., 7, 1988, p. 819-857).
- [LEG 1993a] **Léger A. et Potier-Ferry M.**, *Elastic-plastic post-buckling from a heterogenous state* (J. Mech. Phys. Solids, vol. 41, 1993, p. 783-807).
- [LEG 1993b] **Léger A. et Potier-Ferry M.**, *Generic singularities for plastic instability problems* (in *Bifurcation and Stability of Dissipative Systems*, p. 153-220, Nguyen Q. S. éditeur, CISM courses and Lectures n° 327, Springer Verlag, Wien, 1993).
- [LEG 1995] **Léger A.**, *Quelques problèmes de bifurcation en mécanique des solides et des structures* (Diplôme d'Hab. à Dir. des Rech., Université P. M. Curie, Paris, 1995)
- [LIO 1967] **Lions J.-L. et Stampacchia G.**, *Variational Inequalities* (Comm. Pure Appl. Math., vol. 20, 1967, p. 493-519).
- [MAR 1993] **Marigo J. J., Krasucki F. et Abdelmoula R.**, *Microbuckling analysis of unidirectional fibred composite* (Séminaire international Mécatmat Micromechanics of Materials, collection EDF-DER, Eyrolles, Paris, 1993, p. 303-314)
- [MIE 1983] **Mierseman E.**, *On higher eigenvalues of variational inequalities* (Comment. Math. Univ. carolinae, vol 24, 1983, p. 657-665)
- [MOR 1970] **Moreau J.-J.**, *Sur les lois de frottement, de viscosité et de plasticité* (C. R. Acad. Sci. Paris, t. 271, 1970, p. 608-611).

- [NEE 1976] **Needleman A. et Tvergaard V.**, *An analysis of the imperfection sensitivity of square elastic-plastic plates under axial compression* (Int. J. Solids Structures, 12, 185, 1976).
- [NEE 1982] **Needleman A. et Tvergaard V.**, *Aspects of plastic postbuckling behavior* (in R. Hill 60th Anniversary Volume, H. G. Hopkins and M. J. Sewell éd., Pergamon Press, Oxford, 1982, p. 453-498).
- [NGU 1981] **Nguyen Q. S.**, *Bifurcation et stabilité en rupture et en plasticité* (C. R. Acad. Sci. Paris, t. 292, série II, 1981, p. 817-821).
- [NGU 1984] **Nguyen Q. S.**, *Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale* (J. Méc. Théo. Appl., vol. 3, 1984, p. 41-61).
- [NGU 1987] **Nguyen Q. S.**, *Bifurcation and postbifurcation analysis in plasticity and brittle fracture* (J. Mech. Phys. Solids, vol. 33, 1987, p. 303-324).
- [ONA 1953] **Onat E. T. and Drucker D. C.**, *Inelastic instability and incremental theories of plasticity* (J. Aero. Sci., 20, 1953, p. 181-186).
- [POT 1982] **Potier-Ferry M.**, *On the Mathematical foundations of elastic stability theory* (Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 78, 1982, p. 301-320).
- [POT 1985] **Potier-Ferry M.**, *Towards a catastrophe theory for the mechanics of plasticity and fracture* (Int. J. Eng. Sci., 23, 1985, p. 821-837).
- [POT 1986] **Potier-Ferry M.**, *Foundations of elastic post-buckling theory* (in Buckling and post-buckling, Lectures Notes in Physics, 288, Springer Verlag, 1986).
- [QUI 1986] **Quittner P.**, *Spectral analysis of variational inequalities* (Comment. Math. Univ. Carolinae, vol 27, 1986, p. 605-629)
- [RAB 1973] **Rabinowitz P. H.**, *Some aspects of non linear eigenvalue problems* (The Rocky Mountain J. of Maths, 3, 1973, p. 161-202).
- [RIK 1979] **Riks E.**, *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems* (Int. J. Solids and Structures, vol. 15, p. 649-670, 1979).
- [SAT 1973] **Sattinger D.**, *Topics in stability and bifurcation theory* (Lecture Notes in Mathematics, N° 309, Springer Verlag, 1973).
- [SEW 1972] **Sewell M. J.**, *A survey of plastic buckling, in stability* (H. Leipholz éd., Univ. Waterloo Press, Ontario, 1972, p. 85-197).
- [SHA 1947] **Shanley F. R.**, *Inelastic column theory* (J. Aeronaut. Sci., vol. 14, 1947, p. 261-267).

- [STO 1984] **Stolz C.**, *Analyse du problème en vitesse pour les matériaux à configuration physique* (C. R. Acad. Sci. Paris, t. 299, série II, 1984, p. 1153-1155).
- [SUQ 1982] **Suquet P.**, *Plasticité et homogénéisation* (Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. Pierre et Marie Curie, 1982)
- [THO 1972] **Thom R.**, *Stabilité structurelle et morphogénèse* (Benjamin, 1972).
- [THO 1973] **Thomson J. M. T. and Hunt G. W.**, *A general theory of elastic stability* (Wiley, London, 1973).
- [TIM 1966] **Timoshenko S. P.**, *Théorie de la stabilité élastique* (Traduction Française, Deuxième éd., Dunod, Paris, 1966)
- [TRI 1983] **Triantafyllidis N.**, *On the bifurcation and postbifurcation analysis of elastic-plastic solids under general prebifurcation conditions* (J. Mech. Phys. Solids, vol. 31, 1983, p. 499-510).
- [TVE 1975a] **Tvergaard V. et Needleman A.**, *On the buckling of elastic-plastic columns with asymmetric cross sections* (Int. J. Mech. Sci., vol. 11, 1975, p. 647-663)
- [TVE 1975b] **Tvergaard V. et Needleman A.**, *Buckling of eccentrically stiffened elastic-plastic panels on two simple supports or multiply supported* (Int. J. Solids Struct., vol. 11, 1975, p. 647-663).
- [TVE 1977] **Tvergaard V.**, *Buckling behavior of plate and shell structures* (in Proc. 14th IUTAM Congress, W. T. Koiter éd., North Holland, Amsterdam, 1977, p. 233-247).
- [TVE 1982] **Tvergaard V. et Needleman A.**, *On the foundations of plastic buckling, in developments in thin-walled structures* (vol. 1, J. Rhodes et A. C. Walker éd., Elsevier Appl. Sci. Publishers, London, 1982, p. 205-233).
- [VON 1910] **Von Karman T.**, *Untersuchungen über knickfestigkeit mitteilungen über forschungarbeiten* (V.D.I. Forschungsh., vol. 81, 1910).
- [WAS 1982] **Washizu K.**, *Variational methods in elasticity and plasticity* (3rd éd., Pergamon Press, Oxford, 1982).