



**HAL**  
open science

# Etude micromécanique du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme

Denis Entemeyer

► **To cite this version:**

Denis Entemeyer. Etude micromécanique du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1996. Français. NNT : 1996METZ035S . tel-01777144

**HAL Id: tel-01777144**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777144v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

6 105107

~~SM3 96/35~~

# THÈSE

présentée à

**L'UNIVERSITÉ DE METZ**

Pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR EN SCIENCES DE L'INGÉNIEUR  
OPTIONS MÉCANIQUE ET MATÉRIAUX**

par

**Denis ENTEMEYER**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv	19960705
Cote	SM3 96/35
Loc	Magasin

---

## ÉTUDE MICROMÉCANIQUE DU COMPORTEMENT THERMOMÉCANIQUE DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME

---

Soutenue le 20 décembre 1996 devant la commission d'examen:

M. M. Berveiller, Université de Metz, Directeur de thèse  
M. E. Patoor, Université de Metz, Directeur de thèse  
M. Q. S. Nguyen., École Polytechnique Palaiseau, Rapporteur  
M. J. Van Humbeeck, Université de Leuven, Rapporteur  
M. A. Chrysochoos, Université de Montpellier  
M. J. C. Brachet, CEA de Saclay - CEREM/SRMA  
M. A. Eberhardt, Université de Metz  
M. P. Lipinski, Université de Metz

- Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux -  
- (URA CNRS 1215) -
- Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique -  
École Nationale d'Ingénieurs de Metz  
Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 01

# Remerciements

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique de l'Université de Metz au sein de l'équipe du Pr. M. Berveiller.

Je remercie avant tout Monsieur M. Berveiller pour m'avoir témoigné sa confiance en m'accueillant au sein de son équipe et m'avoir donné ainsi l'occasion de vivre une expérience enrichissante.

Je remercie Monsieur E. Patoor pour son suivi, son aide et soutien tout au long de ce travail.

Je remercie également Monsieur A. Eberhardt qui m'a fait bénéficier de sa compétence dans le domaine expérimental.

Je tiens à remercier Messieurs Q. S. Nguyen et J. Van Humbeeck pour avoir accepté de présider ce travail ainsi que Messieurs A. Chrysochoos, J.C. Brachet et P. Lipinski pour leur participation au jury.

Je tiens à remercier le personnel de l'Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique, celui de l'École Nationale d'Ingénieurs de Metz et les étudiant(e)s (Joel, Eric, Xavier, Anne, Isabelle, Seddiq, David, Patrick, Frédéric et Laurent) que j'ai cotoyé tout au long de ces trois années pour leur gentillesse et disponibilité.

Je n'oublie pas ma famille ainsi que mes ami(e)s les plus proches qui ont participé directement ou indirectement à ce travail.

Merci à vous, lecteur, qui témoignez d'un besoin ou de l'intérêt à ce travail.



# Avant-Propos

Certains points liés à la lecture de ce rapport sont ici développés:

- Les références bibliographiques sont placées en fin de chaque chapitre: certaines sont donc répétées si elles sont utilisées dans deux chapitres différents. Elles sont référencées entre crochets par les initiales des trois premiers auteurs de l'article suivies de l'année de parution (ex: [ABC12]).
- Certains rappels ou éléments nécessaires à une lecture fluide sont placés en bas de page, référencés par un chiffre entre parenthèse (ex: (1)).
- Les calculs longs et complexes ou entièrement calqués à partir de la littérature existante sont en annexe. On y fait référence à partir du texte d'une manière directe (ex: ...voir annexe X).

# Sommaire

<b>CHAPITRE I: Introduction</b>	.....Page 6
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES I</b>	.....page 10
<b>CHAPITRE II: Étude bibliographique</b>	....Page 12
<b>II.1 - INTRODUCTION</b>	.....page 14
<b>II.2 - CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME</b>	.....page 14
<b>II.2.1 - RAPPEL SUR LES DIFFÉRENTS COMPORTEMENT DES SOLIDES</b>	.....p. 15
II.2.1.1 - Comportements simples	15
II.2.1.2 - Comportements complexes	15
II.2.1.3 - Comportement liés aux transformations de phase	16
<b>II.2.2 - LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE</b>	.....p. 17
II.2.2.1 - Classification	18
II.2.2.2 - Mécanismes de déformation	24
II.2.2.3 - Diagramme d'état	27
<b>II.2.3 - COMPORTEMENT DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME</b>	.....p. 28
II.2.3.1 - Effet mémoire simple sens	28
II.2.3.2 - Effet mémoire double sens	29
II.2.3.3 - Effet caoutchoutique	30
II.2.3.4 - Pouvoir amortissant	31
II.2.3.5 - Superthermoélasticité	32
<b>II.2.4 - DIFFÉRENTS TYPES D'ALLIAGE ET DOMAINES D'APPLICATION</b>	.....p. 37
<b>II.3 - MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME: LES DIFFÉRENTES APPROCHES</b>	.....page 40
<b>II.3.1 - OBJECTIF</b>	.....p. 40

II.3.2 - LES APPROCHES PHÉNOMÉNOLOGIQUES: LE MODÈLE BOURBON-LEXCELLENT	.....p. 41
II.3.3 - LES APPROCHES PAR TRANSITION D'ÉCHELLE	.....p. 46
II.3.3.1 - L'approche de Sun	47
II.3.3.2 - L'approche utilisée	51
<b>II.4 - CONCLUSION</b>	<b>.....page 55</b>
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES II</b>	<b>.....page 57</b>
<b>CHAPITRE III: Modélisation du fluage anisotherme</b>	
	<b>....Page 65</b>
<b>III.1 - INTRODUCTION</b>	<b>.....page 67</b>
<b>III.2 - LE COMPORTEMENT DU MONOCRISTAL</b>	<b>.....page 68</b>
III.2.1 - CINÉMATIQUE DE LA TRANSFORMATION	.....p. 69
III.2.2 - CRITÈRE DE TRANSFORMATION	.....p. 75
III.2.2.1 - Potentiel thermodynamique	75
III.2.2.2 - Lagrangien réactualisé et forces motrices	80
III.2.2.3 - Pseudo-potentiel de dissipation	82
III.2.3 - LOI DE COMPORTEMENT	.....p. 84
III.2.3.1 - Loi d'évolution	84
III.2.3.2 - Modules tangents thermomécaniques	85
<b>III.3 - LE COMPORTEMENT DU POLYCRISTAL</b>	<b>.....page 87</b>
III.3.1 - DÉFINITION DU PROBLÈME	.....p. 87
III.3.2 - HOMOGENÉISATION ET LOCALISATION	.....p. 89
III.3.3 - APPROCHE AUTOCOHÉRENTE	.....p. 91
III.3.3.1 - Équation intégrale thermomécanique	91
III.3.3.2 - Résolution formelle	98
III.3.3.3 - Approximation autocohérente à un site	101
III.3.4 - REMARQUE	.....p. 105
<b>III.4 - INFLUENCE DE LA VITESSE DE SOLLICITATION</b>	<b>.....page 106</b>
III.4.1 - INTRODUCTION	.....p. 106

III.4.2 - ÉVOLUTION DE LA TEMPÉRATURE DU POLYCRISTAL AVEC LE TAUX DE MARTENSITE	.....p. 108
<b>III.5. - CONCLUSION</b>	<b>.....page 111</b>
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES III</b>	<b>.....page 113</b>
<b>CHAPITRE IV: Résultats expérimentaux pour un alliage CuAlBe</b>	<b>..Page 117</b>
<b>IV.1 - INTRODUCTION</b>	<b>.....page 118</b>
<b>IV.2 - DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL</b>	<b>.....page 119</b>
IV.2.1 - MATÉRIEL D'ESSAI	.....p. 119
IV.2.2 - PRÉPARATION DES ÉPROUVETTES	.....p. 122
IV.2.3 - DIFFÉRENTS TYPES D'ESSAI	.....p. 125
<b>IV.3 - SUPERTHERMOÉLASTICITÉ DES MONOCRITAUX CuAlBe</b>	<b>.....page 126</b>
IV.3.1 - INTRODUCTION	.....p. 126
IV.3.2 - SUPERÉLASTICITÉ	.....p. 127
IV.3.3 - FLUAGE ANISOTHERME	.....p. 132
IV.3.4 - DIAGRAMME D'ÉTAT	.....p. 136
<b>IV.4 - SUPERTHERMOÉLASTICITÉ DES POLYCRISTAUX CuAlBe</b>	<b>.....page 139</b>
IV.4.1 - INTRODUCTION	.....p. 139
IV.4.2 - SUPERÉLASTICITÉ	.....p. 141
IV.4.3 - FLUAGE ANISOTHERME	.....p. 145
IV.4.4 - INFLUENCE DE LA VITESSE DE SOLLICITATION	.....p. 151
<b>IV.5 - CONCLUSION</b>	<b>.....page 152</b>
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES IV</b>	<b>.....page 154</b>
<b>CHAPITRE V: Résultats numériques pour des alliages CuZnAl et CuAlBe</b>	<b>..Page 156</b>
<b>V.1 - INTRODUCTION</b>	<b>.....page 158</b>

<b>V.2 - COMPORTEMENT SUPERTHERMO-ÉLASTIQUE</b>	<b>.....page 159</b>
V.2.1 - CAS DES ALLIAGES DE TYPE CuZnAl	.....p. 159
V.2.1.1 - Données utilisées	159
V.2.1.2 - Résultats	161
V.2.2 - CAS DES ALLIAGES DE TYPE CuAlBe	.....p. 165
V.2.2.1 - Données utilisées	165
V.2.2.2 - Résultats	167
V.2.3 - INFLUENCE DE LA VITESSE DE SOLLICITATION	.....p. 172
V.2.3.1 - Cas des alliages de type CuZnAl	173
V.2.3.2 - Cas des alliages de type CuAlBe	174
V.2.3.3 - Conclusion	176
<b>V.3 - ÉTUDE MICROSTRUCTURALE</b>	<b>.....page 177</b>
V.3.1 - INTRODUCTION	.....p. 177
V.3.2 - CINÉTIQUE ET DÉFORMATION DE TRANSFORMATION	.....p. 178
V.3.2.1 - Cinétique	178
V.3.2.2 - Déformation moyenne de transformation	181
V.3.3 - COMPORTEMENT INTRAGRANULAIRE	.....p. 183
V.3.3.1 - Répartition des contraintes internes	184
V.3.3.2 - Déformation des grains	192
V.3.4 - ÉVOLUTION DE LA MICROSTRUCTURE	.....p. 198
V.3.4.1 - Nombre de grains actifs	198
V.3.4.2 - Nombre de variantes actives	200
V.3.4.3 - Évolution des variantes pendant le chargement	206
V.3.5 - INFLUENCE DE LA MATRICE D'INTERACTION	.....p. 214
V.3.6 - CONCLUSION	.....p. 217
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES V</b>	<b>.....page 219</b>
 <b>CHAPITRE VI: Conclusion</b>	 <b>..Page 221</b>
 <b>ANNEXES</b>	 <b>..Page 224</b>

# CHAPITRE I: - Introduction -

L'effet mémoire de forme est connu depuis les années trente et si cette étonnante propriété fait depuis l'objet d'une constante curiosité, l'usage des alliages à mémoire de forme (AMF) reste encore peu développé. En effet, il aura fallu attendre la fin des années soixante pour voir se concrétiser les premières applications industrielles de cet effet. Ces applications sont alors souvent très pointues, entraînant une production marginale: manchons de raccordement pour tubulures dans l'aéronautique, plots amortissants ou sécurités thermiques pour la surveillance de système de chauffage dans les centrales nucléaires, certaines techniques médicales les emploient également pour des agrafes ou des implants dentaires. Le développement industriel de cette technologie est assez lent et très peu d'applications ont débouché sur une production de masse [B94].

Pourtant, les AMF possèdent des propriétés très particulières qui leur permettraient d'occuper de nouvelles fonctions et ce, dans de nombreux domaines [SS87][F87][PB90]. La plus médiatique de ces propriétés est l'effet mémoire: les AMF sont en effet capables de retrouver leur forme initiale après une déformation mécanique ou thermique largement supérieure à la déformation élastique ou à la dilatation thermique classique des métaux. Les alliages à mémoire de forme sont également superthermoélastiques, c'est à dire qu'ils sont capables de s'allonger de manière réversible (de 3 à 5%, et jusqu'à 10% dans le cas de monocristaux) sous l'effet d'une contrainte mécanique ou d'un refroidissement sous contrainte. L'effet caoutchoutique est une autre de leur propriété: pour certaines conditions de température, lorsqu'un alliage à mémoire de forme subit un étirement, il conserve au relâchement une déformation résiduelle qui augmente si le matériau est de nouveau étiré puis relâché. Les AMF

présentent également d'importantes capacités d'amortissement des chocs ou d'atténuation des vibrations mécaniques.

Toutes ces propriétés sont liées à une transformation de phase à l'état solide [JC92] au cours de laquelle une phase mère (austénite) donne naissance de manière cristallographiquement réversible à une phase appelée martensite [COC79][O90][BP94]. Les mécanismes élémentaires de déformation liés à cette transformation (responsables du comportement macroscopique) ainsi que les propriétés qui en découlent sont rappelés au chapitre II.

On constate que c'est pour l'essentiel la superthermoélasticité qui est à la base des développements industriels liés à l'utilisation des alliages à mémoire de forme [DZ90]. L'orthodontie, l'habillement, la lunetterie, les articles de sport sont autant de secteurs où une ou plusieurs applications ont vu le jour. Pendant longtemps, le prix des alliages, des problèmes métallurgiques et la méconnaissance de leur comportement ont constitué des obstacles à ce développement. De nombreux progrès ont été réalisés depuis le milieu des années 80. L'élaboration et la transformation de ces alliages sont maintenant mieux connues, les prix ont baissé de manière significative et de nombreux aspects de leur comportement sont maintenant modélisés de façon satisfaisante. La complexité des phénomènes physiques à l'origine de ce comportement et la diversité des échelles où ces phénomènes agissent justifient l'emploi des méthodes modernes de transition d'échelle pour modéliser ce comportement. Ces méthodes ont déjà connu de nombreux succès dans la modélisation d'autres classes de comportement et sont particulièrement bien adaptées aux matériaux macrohomogènes et microhétérogènes [BZ84][BZ93]. Le modèle autocohérent s'est montré très bien adapté à la modélisation des trajets de chargement isotherme dans les alliages à mémoire de forme (modélisation du comportement superélastique [PEB94]).

Ce travail s'inscrit dans la poursuite de cette démarche en simulant la réponse obtenue en fluage anisotherme (cycle thermique sous contrainte appliquée constante). Le chapitre III traite de la modélisation du comportement superthermoélastique des alliages à mémoire de forme, et en

particulier du fluage anisotherme. Une approche micromécanique permet de rendre compte du comportement monocristallin. Le comportement du polycristal est obtenu à l'aide de la méthode de transition d'échelle autocohérente. La prise en compte du caractère exothermique (endothermique) de la transformation austénite-martensite (martensite-austénite) permet de prendre en compte l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement superélastique.

Jusqu'au début des années 90, les alliages cuivre-zinc-aluminium (CuZnAl) fournissaient l'essentiel des applications industrielles pour les alliages à base de Cuivre [H92]. Actuellement, l'alliage le plus prometteur dans cette classe de matériaux est l'alliage de type cuivre-aluminium-beryllium (CuAlBe): comportement stable, bonnes caractéristiques mécaniques, sa déformation de transformation atteint 6% pour le polycristal. Un alliage de ce type est caractérisé mécaniquement au chapitre IV. Le Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz a développé une technique originale d'élaboration de fil monocristallin qui permet d'obtenir le même alliage à la fin sous forme de monocristaux et de polycristaux. Cette technique permet une caractérisation mécanique plus complète du matériau qui est très bien adaptée à la validation d'une approche micro-macro.

Les résultats numériques et expérimentaux sont ensuite confrontés et confortent le choix de la modélisation car ils sont en accord sur de nombreux points. Cette comparaison fait l'objet du chapitre V. Dans ce chapitre, d'autres résultats relatifs à la cinétique de la transformation ou au comportement intragranulaire sont également exploités, ce qui fait du schéma de modélisation un outil puissant et très utile à la compréhension des mécanismes de la transformation, parallèlement à l'observation cristallographique.

Le chapitre VI conclue ce travail. On y retrouve les thèmes importants des travaux précédemment décrits, les résultats scientifiques s'y rapportant, les



possibilités d'évolution et une vision future de la continuité des travaux. En effet, si la modélisation du comportement superthermoélastique des alliages à mémoire de forme est une étape essentielle dans le développement de ces matériaux, on pense aussi au problème de l'adaptation des modèles de comportement à l'industrie, par l'introduction dans un code de calcul de structure par exemple [G95]. Parallèlement, l'étude de matériaux tels que les TRIP-steel passe par une connaissance approfondie du comportement des alliages à mémoire de forme [B96].

On trouve en annexes des calculs qui ne sont pas développés dans le corps de ce mémoire et les thèmes liés directement à l'écriture informatique et à ses particularités spécifiques.

## - Références bibliographiques -

- [B94] Borde V., *"Les alliages à mémoire de forme"*, dans Industries et Techniques, n°755 (1994)
- [B96] Bumbieler F., Thèse en cours, Université de Metz (1996)
- [BP94] Berveiller M., Patoor E., *"Propriétés Thermomécaniques des Alliages à Mémoire de Forme"*, dans Technologie des alliages à mémoire de forme, Éd. Hermès, Paris (1994)
- [BZ84] Berveiller M., Zaoui A., *"Modelling of the Plastic Behavior of Inhomogeneous Media"*, J. Eng. Mat. and Tech., 106, pp.295-299 (1984)
- [BZ93] Berveiller M., Zaoui A., *"Modélisation du Comportement Mécanique des Solides Microhétérogènes"*, Ch. de Formation Avancée de Méc. des Polymères, Cluny (1993)
- [COC79] Cohen M., Olson G.B., Clapp P.C., *"On the Classification of Displacive Phase Transformation"*, Proc. ICOMAT'79, Cambridge (MA), MIT, pp.1-11 (1979)
- [DZ90] Duerig T.W., Zadno G.R., *"An Engineer's Perspective of Pseudoelasticity"*, dans Engineering aspects of Shape Memory Alloys, Butterworth Heinemann Pub., Londres, pp.369-393 (1990)  
ISBN 0-750-61009-3
- [F87] Fremond M., *"Matériaux à mémoire de forme"*, C.R. Acad. Sciences, Paris, T304, Série II, 7, pp.239-244 (1987)
- [G95] Gillet Y., *"Dimensionnement d'éléments simples en alliage à mémoire de forme"*, Thèse, Université de Metz (1995)

- [H92] Hornbogen E., *"Alloys with Shape Memory - New Materials for the Technology of the Future ?"*, dans Progress in shape memory alloys, Éd. S. Eucken, Allemagne, pp.3-22 (1992)  
ISBN 3-88355-178-3
- [JC92] Jena A.K., Chaturvedi M.C., dans Phase transformations in Materials, Éd. Prentice Hall, U.S.A. (1992)  
ISBN 0-13-663055-3
- [O90] Otsuka K., *"Crystallography of Martensitic Transformations and Lattice Invariant Shears"*, dans Martensitic transformation II, Éd. by Muddle B.C., pp.393-404 (1990)  
ISBN 0-87849-610-6
- [PB90] Patoor E., Berveiller M., dans Les alliages à mémoire de forme, Éd. Hermès, Paris, 65 pp. (1990)  
ISBN 2-86601-236-4
- [PEB94] Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M., *"Micromechanical Modelling of the Shape Memory Behavior"*, Procs ASME WAM'94, Chicago I.L., AMD-189/PVD-292, pp. 22-37 (1994)
- [SS87] Suzuki Y., Sekiguchi Y., *"Applications of Shape Memory Alloys"*, dans Shape memory alloys, Gordon and Breach Science Publ., 1, pp.176-269 (1987)  
ISBN 2-88124-136-0

## CHAPITRE II: - Étude bibliographique -

II.1 - INTRODUCTION	....Page 14
II.2 - CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME	....Page 14
II.2.1 - RAPPEL SUR LES DIFFÉRENTS COMPORTEMENT DES SOLIDES	.....15
II.2.1.1 - Comportements simples	15
II.2.1.2 - Comportements complexes	16
II.2.1.3 - Comportement liés aux transformations de phase	16
II.2.2 - LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE	.....17
II.2.2.1 - Classification	18
II.2.2.2 - Mécanismes de déformation	24
II.2.2.3 - Diagramme d'état	27
II.2.3 - COMPORTEMENT DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME	.....28
II.2.3.1 - Effet mémoire simple sens	28
II.2.3.2 - Effet mémoire double sens	29
II.2.3.3 - Effet caoutchoutique	30
II.2.3.4 - Pouvoir amortissant	31
II.2.3.5 - Superthermoélasticité	32
II.2.4 - DIFFÉRENTS TYPES D'ALLIAGES ET DOMAINES D'APPLICATION	.....37

II.3 - MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME: LES DIFFÉRENTES APPROCHES	....Page 40
II.3.1 - OBJECTIF	.....40
II.3.2 - LES APPROCHES PHÉNOMÉNOLOGIQUES: LE MODÈLE BOURBON LEXCELLENT	.....41
II.3.3 - LES APPROCHES PAR TRANSITION D'ÉCHELLE	.....46
II.3.3.1 - L'approche de Sun	47
II.3.3.2 - L'approche utilisée	51
II.4 - CONCLUSION	....Page 55
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES II	....Page 57

*Dans ce chapitre, nous abordons en premier lieu les caractéristiques générales des alliages à mémoire de forme et de la transformation martensitique. En second lieu, on discute des différentes approches liées à l'élaboration de modèles de comportement pour ces matériaux.*

## II.1 - INTRODUCTION

Les alliages à mémoire de forme sont des matériaux à vocation industrielle. Ainsi, une norme AFNOR [A91] définit le vocabulaire utilisé pour décrire les divers paramètres décrivant la transformation martensitique dans les AMF. Comme pour tous les matériaux modernes, leur maîtrise passe par la résolution de nombreuses difficultés. Dans le cas des alliages à mémoire de forme, la cristallographie, la métallurgie, la thermodynamique et la mécanique sont autant de domaines que l'on doit pouvoir maîtriser si l'on veut entreprendre la mise en oeuvre de cette nouvelle technologie [H92][PB90]. La première partie de ce chapitre, préalable à toute modélisation du comportement, a pour but:

- de préciser les mécanismes qui sont à la base du comportement des alliages à mémoire de forme.
- de dégager les principales caractéristiques de ce comportement. On s'attardera plus particulièrement sur la propriété qui constitue l'objet de ce mémoire: la superthermoélasticité.

## II.2 - CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME

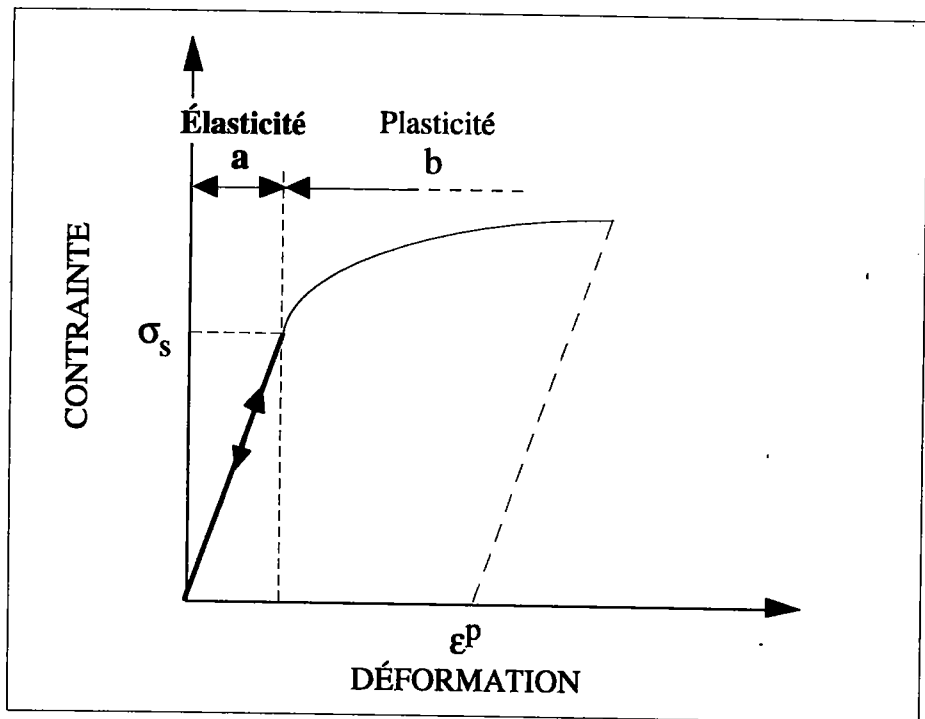
Cette section commence par rappeler les différentes classes de comportement observées dans les solides [LC82]. On aborde ensuite les

mécanismes de déformation liés à la transformation martensitique [N78]. Les différents aspects de ce comportement sont présentés en troisième partie [SS87][BP94].

## II.2.1 - RAPPELS SUR LES DIFFÉRENTS COMPORTEMENTS DES SOLIDES

### II.2.1.1 - Comportements simples

En phase solide, on distingue généralement trois types de comportements simples: l'élasticité, la plasticité et la viscosité.



*Fig. II-1: Courbe de traction élastoplastique d'un matériau solide classique. La limite élastique  $\sigma_s$  sépare l'élasticité (a) de la plasticité (b).*

- (a) Très souvent, l'élasticité se traduit par une relation linéaire entre la contrainte et la déformation. C'est une déformation réversible, après décharge complète aucune déformation résiduelle ne subsiste.
- (b) La plasticité apparaît lorsque la contrainte dépasse un certain seuil  $\sigma_s$  (limite élastique). La déformation qui en résulte n'est plus complètement

réversible, le matériau conserve une déformation permanente  $\epsilon_P$  lorsque la contrainte est relâchée (fig.II-1).

(c) La viscosité est classiquement observée quand le comportement du matériau dépend de la vitesse de déformation  $\dot{\epsilon}$ .

À ces trois comportements, on peut adjoindre la dilatation thermique. Souvent, la relation entre la déformation thermique et la température est proche de la linéarité, on parle alors de thermoélasticité linéaire.

### **II.2.1.2 - Comportements complexes**

La courbe de traction d'un solide présente généralement plusieurs des comportements simples cités précédemment; on parle alors d'un comportement complexe tel l'élastoplasticité (fig.II-1) ou la viscoélastoplasticité. Les problèmes de mise en forme des matériaux (laminage, fluage) imposent une bonne connaissance de ces comportements complexes. Cependant, il faut garder à l'esprit que la majorité des systèmes mécaniques en service dans l'industrie n'utilise que le domaine élastique<sup>(1)</sup>. Cela ne permet pas de déformation réversible supérieure à 0,2% pour les métaux usuels. De même, la dilatation thermique n'excède pas 0,001% de déformation par degré. D'autres comportements plus complexes existent cependant dans les matériaux: ils sont liés aux transformations de phase de l'état solide.

### **II.2.1.3 - Comportements liés aux transformations de phase**

On utilise depuis très longtemps les propriétés obtenues par transformation de phase lors de l'élaboration des matériaux (traitement thermique par exemple) mais le mécanicien ne s'intéresse à ces phénomènes que depuis peu. Ainsi, lorsqu'en 1936, des chercheurs découvrent un alliage capable de changer de forme puis de la retrouver sous l'effet d'une faible variation de température (20 à 30 degrés), on commença à s'intéresser de plus près à une transformation de phase particulière: la transformation martensitique.

---

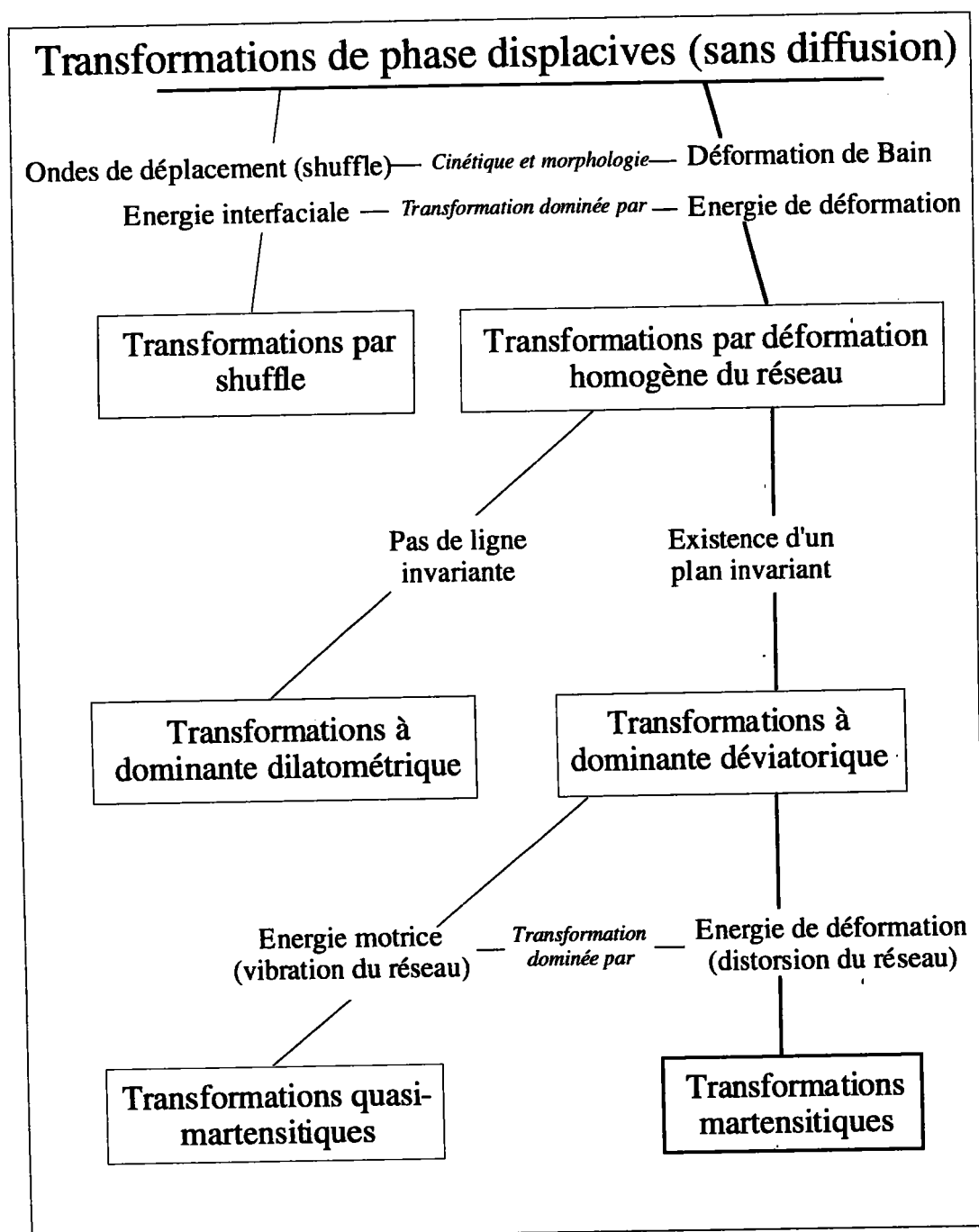
(1) Exemple d'un élément automobile (longeron, portière, capot,...). L'élément est embouti d'une manière complexe afin de lui donner une forme précise tout en conservant les propriétés mécaniques (résistance, dureté). Une fois en service sur le véhicule, une intrusion dans le domaine plastique du matériau endommage irréversiblement l'élément et nécessite son changement ou sa réparation.



Par la suite, cette propriété de changer de forme à certaines températures fut observée sur de nombreux alliages métalliques et on imagina alors l'utilisation des propriétés des transformations de phase pendant l'utilisation de systèmes mécaniques (et non plus seulement lors de l'élaboration des matériaux). Même si cet "effet mémoire" est la plus spectaculaire des propriétés des alliages dits justement à mémoire de forme, il est restrictif de ne considérer que cet aspect. La transformation martensitique est responsable d'autres propriétés qui rendent ces alliages intéressants d'un point de vue industriel [B94][DZ90]: l'effet caoutchoutique, le pouvoir amortissant et la superthermoélasticité. À ce jour, la plupart des applications industrielles utilise cette dernière, sur laquelle nous allons nous attacher plus particulièrement dans ce mémoire.

## II.2.2 - LA TRANSFORMATION MARTENSITIQUE

À l'origine, la transformation martensitique désigne la transformation de phase ayant lieu dans les alliages fer-carbone lors d'un refroidissement rapide après une phase de stabilisation à haute température. Dans ces aciers, on nomme "austénite" la phase stable à haute température et "martensite" (en l'honneur du métallurgiste allemand Adolf Martens) la phase issue de l'austénite par la transformation martensitique, stable à basse température. Par extension, la transformation martensitique a plus été reliée au mécanisme qu'au produit de la transformation lui-même. Ainsi, le terme de transformation martensitique s'est généralisé à de nombreux systèmes dont les transitions de phase possèdent les caractéristiques typiques de celle des aciers. C'est le cas non seulement de certains alliages à base de fer (FeCr, FeNi,...), à base de cuivre (CuZn, CuAl, CuZnAl, CuAlBe...) mais également de certains métaux purs (Co, Ti, Cr,...), de certaines céramiques (ZrO) [K90] et de certains polymères. L'étude de cette transition de phase a permis de dégager un certain nombre de caractéristiques qui la distinguent des autres transformations en phase solide des matériaux. Ces caractéristiques ont servi à établir une classification proposée par Cohen et al. en 1979 [COC79](fig.II-2).



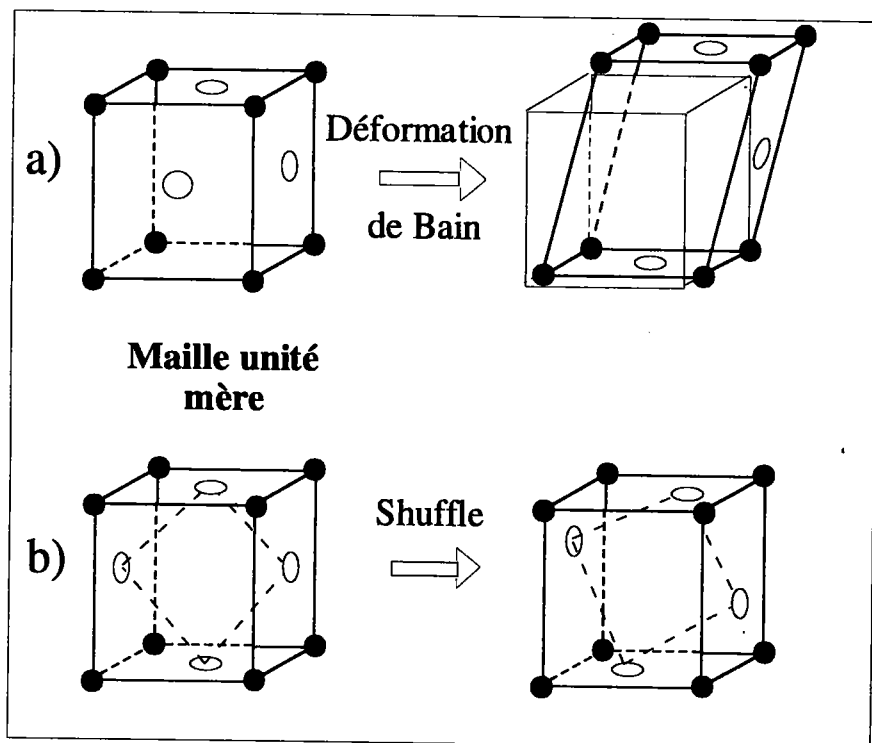
*Fig. II-2: Classification des transformations de phase displacives (sans diffusion) proposée par Cohen, Olson et Clapp [COC79].*

### II.2.2.1 - Classification

La transformation martensitique est une transition de phase à l'état solide qui fait partie des transformations sans diffusion (également appelées displacives). Elle conduit à un changement structural pendant

lequel les atomes se déplacent sur de faibles distances, inférieures à la distance interatomique, et selon un mode coopératif.

Les transformations displacives sont décrites comme une combinaison d'une déformation homogène du réseau (ou déformation de Bain) et de shuffle, terme anglo-saxon désignant le résultat de l'action sur les atomes d'ondes de déplacement (fig.II-3). Le premier mécanisme se définit par un changement de taille et de forme de la maille élémentaire, entraînant une augmentation de l'énergie de déformation élastique (fig.II-3a). Dans le second mécanisme, seule la distribution des atomes à l'intérieur de la maille change et altère la structure et la symétrie du cristal (fig.II-3b). Dans les deux cas, une interface séparant les deux phases (mère et produit) est créée et produit une énergie interfaciale.

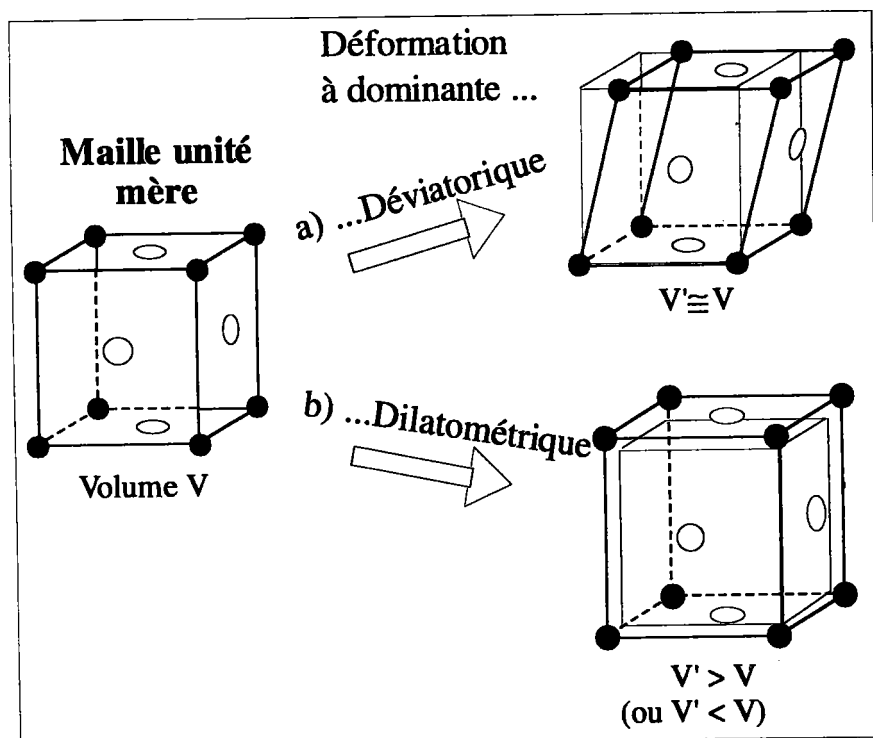


*Fig.II-3: Illustration schématique des deux mécanismes intervenant dans les transformations displacives: (a) Déformation de Bain, (b) Shuffle.*

Les morphologies caractéristiques de la martensite observée expérimentalement sont manifestement associées à l'énergie de

déformation [VDK74][N78] et entraîne que la déformation de Bain est associée à la transformation martensitique.

Parmi ces transformations dominées par une déformation homogène du réseau, il faut distinguer le mode de déformation principal. Dans le cas où la déformation est à dominante dilatométrique (fig.II-4b), il n'est pas possible de trouver un vecteur inchangé par la transformation. Au contraire, le volume obtenu après un cisaillement pur (déformation à dominante déviatorique, fig.II-4a) intersecte le volume original, impliquant l'existence de vecteurs dont la norme reste inchangée pendant la transformation.



**Fig.II-4:** Représentation schématique des contributions déviatorique (a) et dilatométrique (b) d'une déformation de Bain.

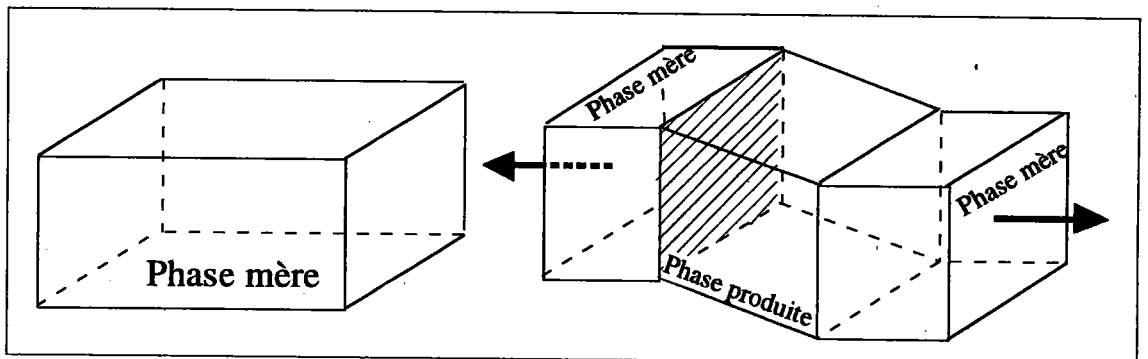
Pendant la transformation martensitique, la variation de volume est généralement faible et il existe une interface commune aux phases mère et martensitique (invariante à l'échelle macroscopique) [JC92]. De ce fait, on classe la transformation martensitique dans les transformations impliquant

une déformation à dominante déviatorique, avec existence d'un plan d'accolement (ou d'habitat) entre les phases mère et produit.

Parmi ces transformations, on peut encore différencier les transformations quasi-martensitiques dont l'amplitude des déplacements due aux vibrations du réseau est grande par rapport à celle induite par la distorsion du réseau.

En résumé, les caractéristiques essentielles de la transformation martensitique sont les suivantes:

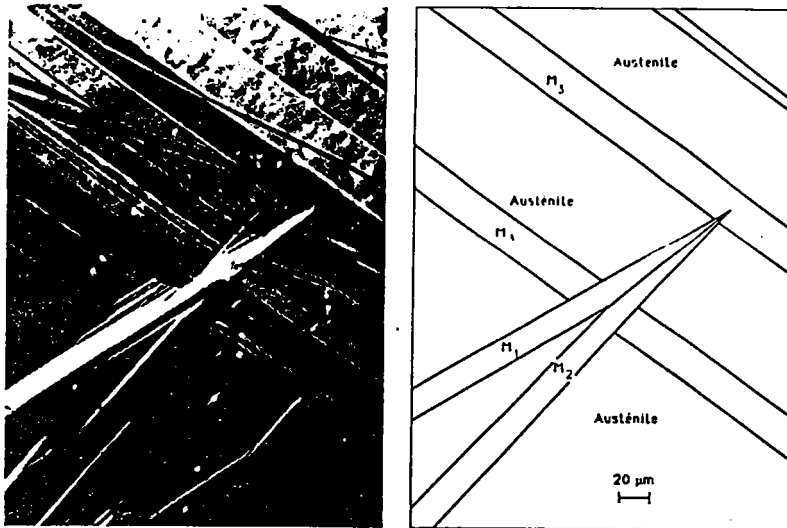
- 1• C'est une transformation sans diffusion. Il n'y a pas de modification de la composition chimique du matériau et elle progresse d'une manière indépendante du temps (le mouvement de l'interface entre la phase mère et la phase produite est simplement limité par la vitesse du son dans le matériau).
- 2• Elle implique une déformation du réseau cristallin qui conduit à un changement de forme macroscopique caractérisé par (fig.II-5):
  - une faible variation de volume (dans les AMF).
  - un cisaillement important selon un plan et une direction bien définis.



*Fig.II-5: Représentation schématique du changement de forme macroscopique associé à l'apparition d'une variante de martensite.*

3• La transformation est associée à une diminution de symétrie: en conséquence, différentes variantes d'orientation équivalente sont formés [VDK74]. Un monocristal de phase mère se transforme en une ou plusieurs variantes séparées par des interfaces (fig.II-6). Afin de minimiser l'énergie d'interaction entre la martensite formée et l'austénite

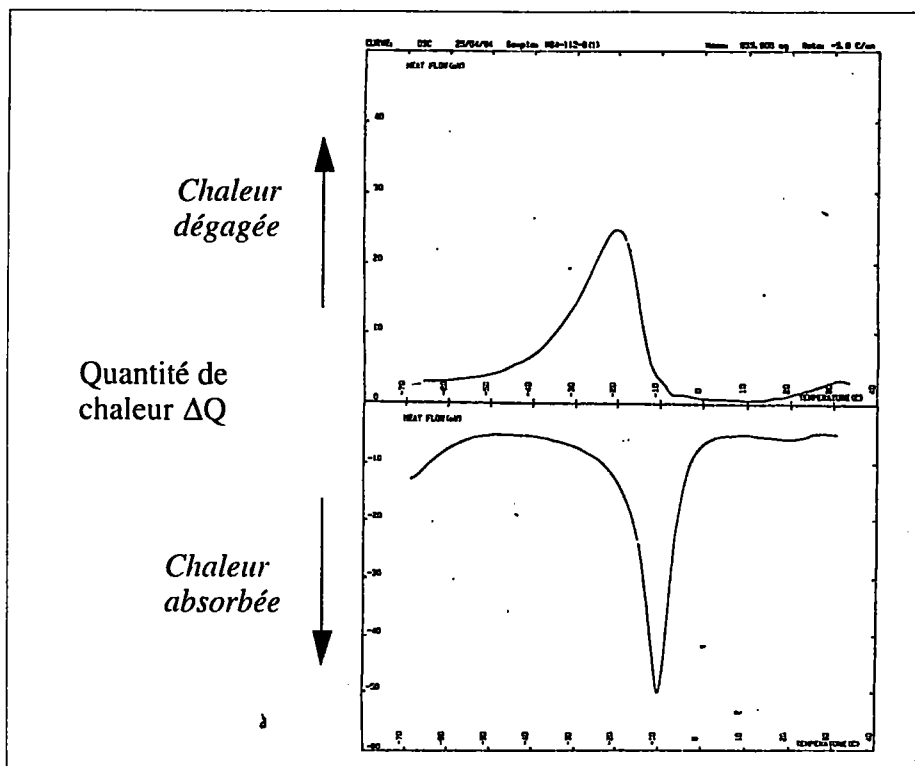
encore présente, ces variantes ont généralement la forme de plaquettes aplaties dont le plan principal est le plan d'habitat ou plan d'accolement. Ce plan et le plan de cisaillement de la martensite sont généralement bien définis pour une classe d'alliage.



*Fig.II-6: Micrographie et représentation schématique d'une transformation polyvariante avec M1, M2, M3 trois variantes de martensite et l'austénite [PB90].*

4• La transformation martensitique démarre ponctuellement par nucléation. La croissance a lieu par déplacement des interfaces qui convertit la phase mère en martensite. Ce déplacement d'interface produit des frictions avec le réseau cristallin qui entraînent une dissipation intrinsèque. Cette dissipation est à l'origine de la différence entre les températures de transformations austénite-martensite (directe) et martensite-austénite (inverse). La transformation martensitique s'accompagne d'un phénomène d'hystérésis.

5• C'est une transition de phase du premier ordre. En conséquence, les transformations directe et inverse sont respectivement accompagnées d'un dégagement de chaleur (transition exothermique) et d'une absorption de chaleur (transition endothermique) (fig.II-7).



*Fig.II-7: Quantité de chaleur  $\Delta Q$  dégagée pendant une transformation martensitique lors d'un cycle thermique à contrainte nulle. Mesure par calorimétrie différentielle à balayage (DSC) obtenue par Hautcoeur A. - LPMM - Université de Metz [H96].*

6• Comme pour tout changement d'état, la contrainte et la température agissent sur la transformation martensitique. Ces deux quantités sont les variables thermodynamiques extérieures qui contrôlent la transformation.

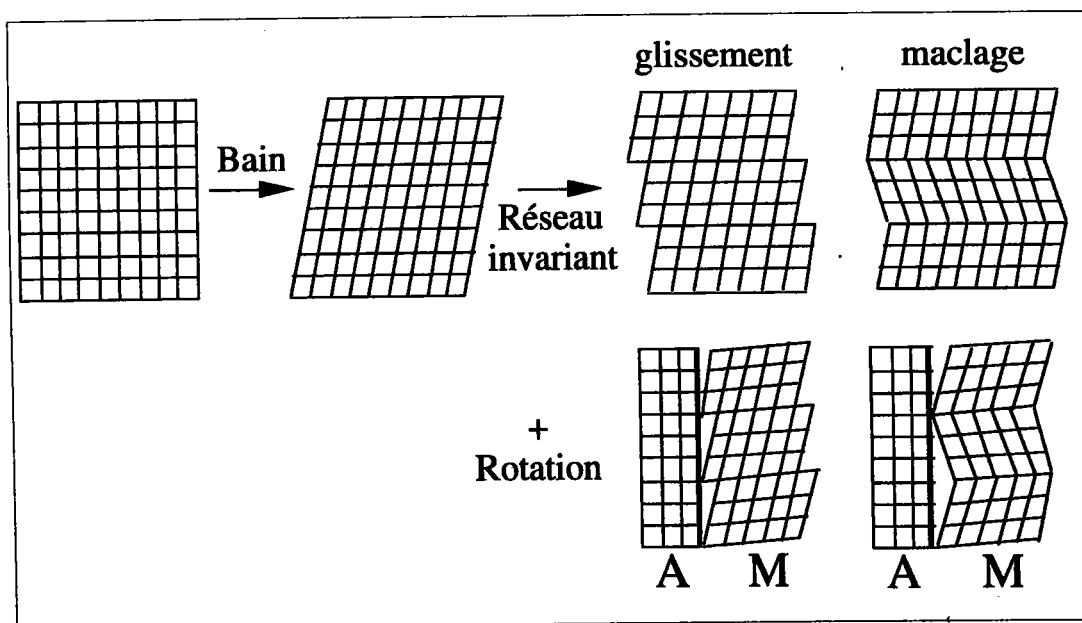
Cependant, la transformation martensitique ne produit pas d'effet mémoire dans tous les matériaux. Pour ceci, il faut que la transformation soit thermoélastique, c'est à dire qu'elle ne mette en jeu que des phénomènes élastiques et ne provoque aucune déformation plastique de la phase mère. Dans ce cas, la transformation inverse se déroule par mouvements inverses des interfaces et non pas par nucléation de l'austénite dans la martensite.

Finalement, c'est une "transformation de phase displacive thermoélastique du premier ordre caractérisée par une déformation homogène du réseau

crystallographique et constituée principalement par un cisaillement" qui est à l'origine du comportement particulier des alliages à mémoire de forme. L'analyse des mécanismes de déformation liés à la croissance des variantes de martensite permet d'en déduire un certain nombre de caractéristiques particulières.

### II.2.2.2 - Mécanismes de déformation

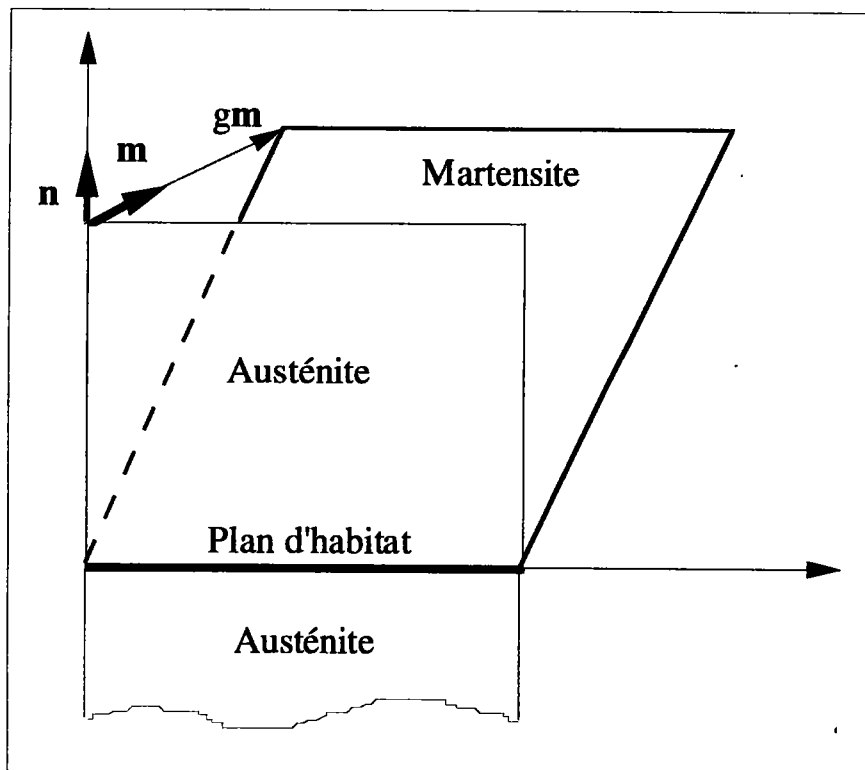
La transformation martensitique constitue un mode de déformation ayant pour origine un changement du réseau cristallin. Ce changement de réseau, appelé déformation de Bain, s'accompagne de contraintes internes très importantes dues à la coexistence des deux phases pendant la transition. Pour relaxer ces contraintes internes, on introduit un mécanisme d'accommodation à réseau invariant. Cette dernière déformation peut être un glissement pur, un maclage ou une combinaison de glissements et de macles pouvant se réaliser soit dans l'austénite, soit dans la martensite. En grandes déformations, l'addition de ces deux déformations n'assure toujours pas l'invariance du plan d'habitat. Une transformation supplémentaire par rotation est donc nécessaire pour décrire totalement la transformation globale (fig.II-8).



**Fig.II-8:** Décomposition de la transformation martensitique en mécanismes de déformation simples: déformation de Bain, déformation à réseau invariant et rotation.



Finalement, la déformation macroscopique qui en résulte se compose d'un glissement parallèle au plan de l'interface et d'une extension perpendiculaire à ce plan (fig.II-9).



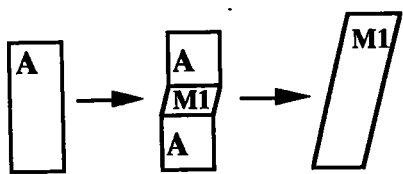
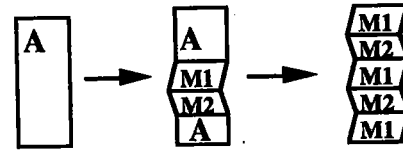
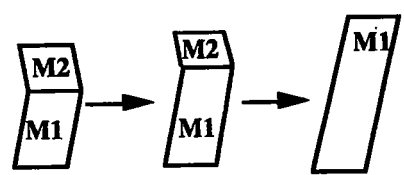
*Fig. II-9: Caractéristiques cristallographiques associées à la formation d'une variante de martensite.*

Ainsi, la théorie phénoménologique de Weschler, Lieberman et Read [WLR53] permet de déterminer à partir des mesures cristallographiques effectuées sur les deux phases et la donnée de la déformation à réseau invariant, les caractéristiques de la transformation qui sont [SWT80]:

- La normale  $n$  au plan d'accolement séparant l'austénite de la martensite
- La direction de transformation  $m$
- L'amplitude de déplacement  $g$  suivant la direction  $m$
- Les relations d'orientation cristallographique entre les deux phases

Ce mécanisme est à la base des différents comportements observés dans les alliages à mémoire de forme. Selon le nombre, la nature et la séquence des cycles de chargement thermomécaniques, on distingue des classes de

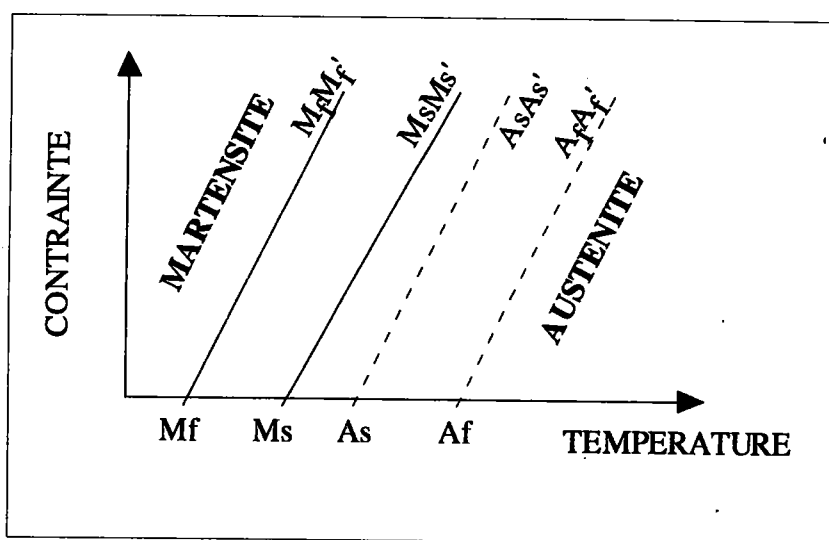
comportement correspondant à des mécanismes physiques différents mais faisant toujours intervenir la transformation martensitique. De nombreuses observations expérimentales [DDA78][G86] ont montré que, dans le cas de la plasticité de transformation pure (transformation martensitique en l'absence de plasticité classique), les mécanismes de déformation sont au nombre de trois: formation de martensite orientée, formation de structures autoaccommodantes et réorientation des variantes (tab.II-10).

<p>(i) Formation (réversible) de martensite orientée par des contraintes internes ou appliquées.</p>	 <p>⇒ Transformation avec déformation macroscopique</p>
<p>(ii) Dans certains systèmes, les variantes s'arrangent de telle manière que les changements de forme s'accommodent mutuellement (lors d'un refroidissement sans contrainte appliquée par exemple).</p>	 <p>⇒ Transformation sans déformation macroscopique</p>
<p>(iii) Réorientation partielle et réversible des variantes par application des contraintes externes.</p>	 <p>⇒ Déformation macroscopique sans transformation</p>

*Tab.II-10: Mécanismes de déformation élémentaires intervenant lors d'une transformation martensitique. A est l'austénite, M1 et M2 deux variantes de martensite.*

100  
**II.2.2.3 - Diagramme d'état**

Un aspect intéressant des transformations martensitiques est le rôle joué par les contraintes externes (hydrostatique ou uniaxiale par exemple). La thermodynamique et l'expérience montrent que les températures de transformation sont affectées par l'application de telles contraintes. Ainsi, un alliage à mémoire de forme monocristallin se caractérise par un diagramme d'état qui indique, selon les valeurs de la contrainte et de la température, l'état microstructural du matériau (fig.II-11).



*Fig.II-11: Diagramme d'état schématisé pour un AMF monocristallin. Les lignes  $M_sM_s'$  ( $A_sA_s'$ ) et  $M_fM_f'$  ( $A_fA_f'$ ) représentent respectivement le début et la fin de la transformation directe austénite-martensite (inverse martensite-austénite).*

Lors du chargement de l'alliage monocristallin<sup>(2)</sup>, la phase martensitique apparaîtra sur la ligne  $M_sM_s'$  et la transformation sera complète au-delà de la ligne  $M_fM_f'$ . Entre ces deux lignes, il y a coexistence des deux phases. À la décharge, la transformation inverse sera effective de  $A_sA_s'$  à  $A_fA_f'$ . La différence entre les températures de transformation directe et inverse représente l'hystérésis de la transformation [S93].

<sup>(2)</sup> Le diagramme d'état pour un polycristal n'est pas aussi simple et évident: les températures de début et de fin de transformation ne sont pas aussi clairement définies (voir ch.IV).

La relation entre la contrainte uniaxiale  $\sigma$  et la température de transformation  $T$  dépend de l'entropie de déformation  $\Delta S$  et de la déformation de transformation  $\epsilon^T$  (liée à la formation d'une variante) dans la direction de la contrainte appliquée [WBR79].

$$\frac{d\sigma}{dT} = -\frac{\Delta S}{\epsilon^T}$$

*Remarque:* La relation entre  $d\sigma$  et  $dT$  est constante expérimentalement, ce qui signifie que la quantité thermodynamique  $\Delta S$  est indépendante de la température et de la contrainte. Connaissant la déformation de transformation, les essais de traction uniaxiale sont très utiles afin de déterminer l'entropie de transformation.

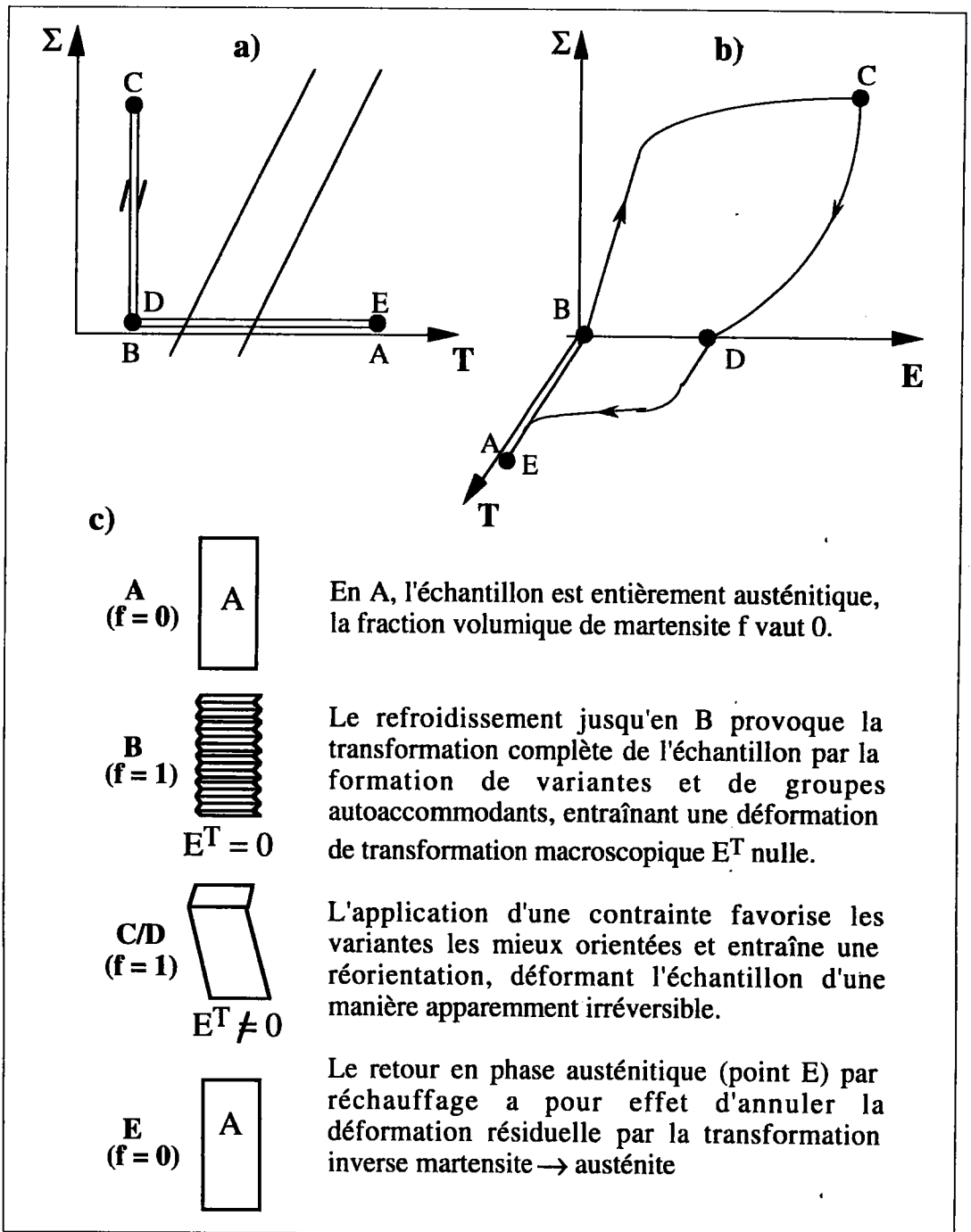
Selon le trajet de chargement dans l'espace des contraintes et de la température, on observe des réponses en déformation tout à fait différentes, traduisant différents comportements ou propriétés que l'on peut regrouper en cinq classes.

### II.2.3 - COMPORTEMENT DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME

Les alliages à mémoire de forme présentent différents types de comportements: effets mémoire simple et double sens, effet caoutchoutique, superthermoélasticité. Ils présentent également un fort pouvoir amortissant.

#### II.2.3.1 - Effet mémoire simple sens

Cet effet est observé lors d'un chargement séquentiel (fig.II-12). Un matériau à l'état martensitique, déformé mécaniquement d'une manière apparemment irréversible, retrouve sa forme initiale s'il est chauffé dans le domaine austénitique.

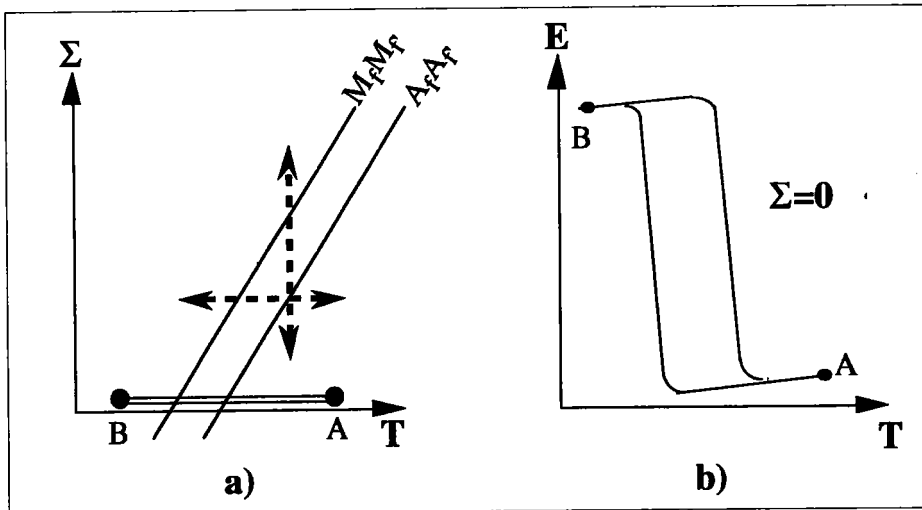


**Fig.II-12:** a) Chargement thermomécanique permettent d'obtenir: b) l'effet mémoire simple sens. c) description des mécanismes.

### II.2.3.2 - Effet mémoire double sens

Cet effet se manifeste lors d'un cycle thermique sans contraintes appliquées après que le matériau ait subi un traitement d'éducation. Cette éducation consiste à modifier l'état interne du matériau (par piégeage de la martensite ou augmentation de la densité de dislocation [RG87][SVD92])

au moyen de traitements thermomécaniques. On obtient ainsi un champ de contraintes internes spécifique qui oriente les variantes et entraîne une déformation macroscopique de transformation lors d'un refroidissement sans contraintes appliquées (fig.II-13).

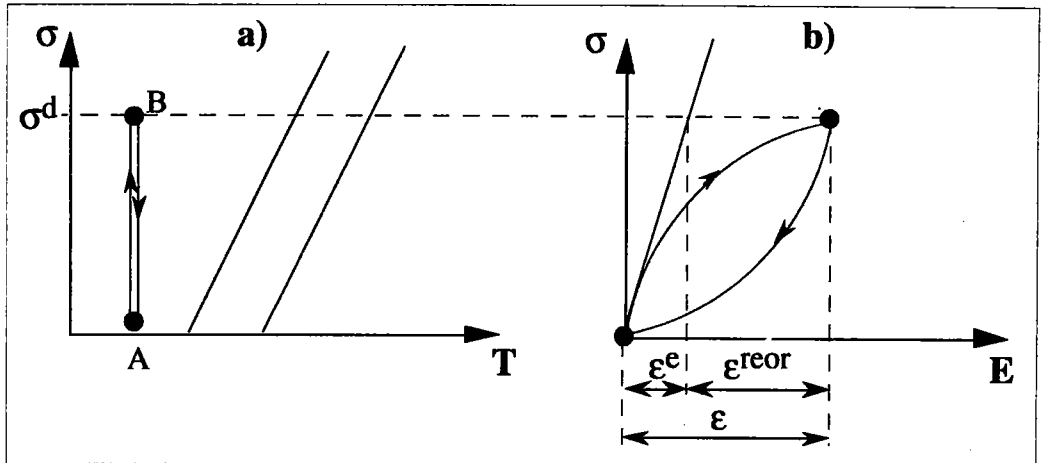


*Fig.II-13: Représentation schématique de l'effet mémoire double sens. a) Exemples de traitements d'éducation (en pointillés gras) et chargement (en trait fin) permettant d'obtenir l'effet mémoire double sens (b).*

Le matériau peut alors prendre deux états stables par simple variation de température.

### II.2.3.3 - Effet caoutchoutique

L'effet caoutchoutique est moins lié à la transformation martensitique elle-même qu'au produit de cette transformation. La phase martensitique se caractérise par l'existence de nombreuses interfaces entre variantes de martensite. Si une contrainte inférieure à un certain seuil est appliquée, le mouvement de ces interfaces possède un caractère réversible. Ceci entraîne que pour une contrainte donnée  $\sigma^d$ , la déformation totale  $\epsilon$  est nettement supérieure à la déformation élastique  $\epsilon^e$  de la martensite (fig.II-14). Cet effet est désigné par effet caoutchoutique ou, dans certains cas, par pseudoélasticité par réorientation.



*Fig.II-14: Représentation schématique de l'effet caoutchoutique. a) Chargement mécanique et b) Résultat.*

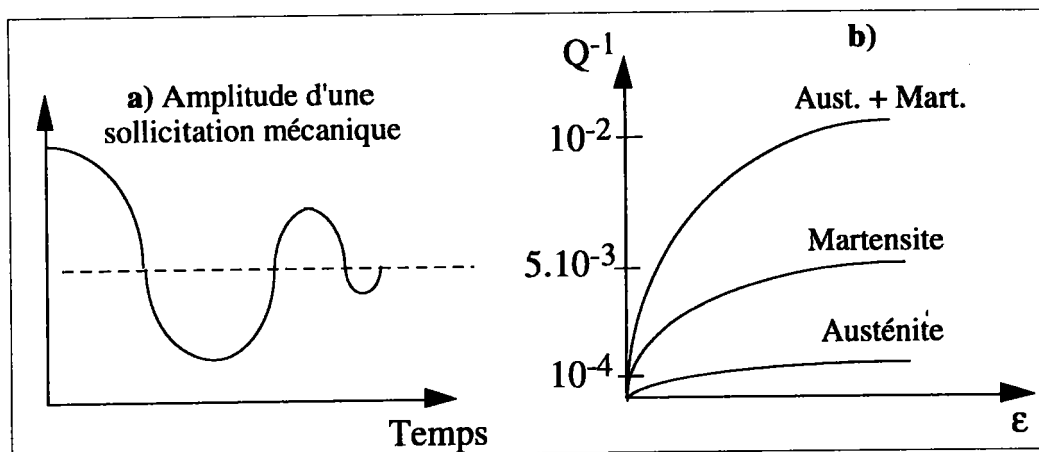
### II.2.3.4 - Pouvoir amortissant

Cet effet est directement relié au mouvement des interfaces austénite/martensite et martensite/martensite. En effet, un échantillon martensitique consiste en un grand nombre de domaines (ou plaquettes) d'orientations cristallographiques différentes qui sont mobiles sous l'action d'une contrainte. La friction associée au mouvement réversible des interfaces entraîne une transformation irréversible d'énergie mécanique en énergie thermique dissipée. Ceci est la cause du fort pouvoir amortissant des alliages à mémoire de forme (fig.II-15).

On observe, par exemple lors d'oscillations mécaniques libres, une diminution de l'amplitude des oscillations en fonction du temps (fig.II-15a). Si  $\Delta W$  est la perte d'énergie par cycle et  $W$  l'énergie mécanique du système, on définit le frottement interne  $F$  par:

$$F = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W}$$

Le facteur de qualité  $Q$  ( $F=Q^{-1}$ ) prend des valeurs très différentes en fonction de l'état cristallographique du matériau: c'est pendant la transformation martensitique qu'il est le plus important car il est associé au mouvement des interfaces entre austénite et martensite (fig.II-15b).



*Fig.II-15: Représentation de l'effet amortissant des alliages à mémoire de forme.*

### II.2.3.5 - Superthermoélasticité

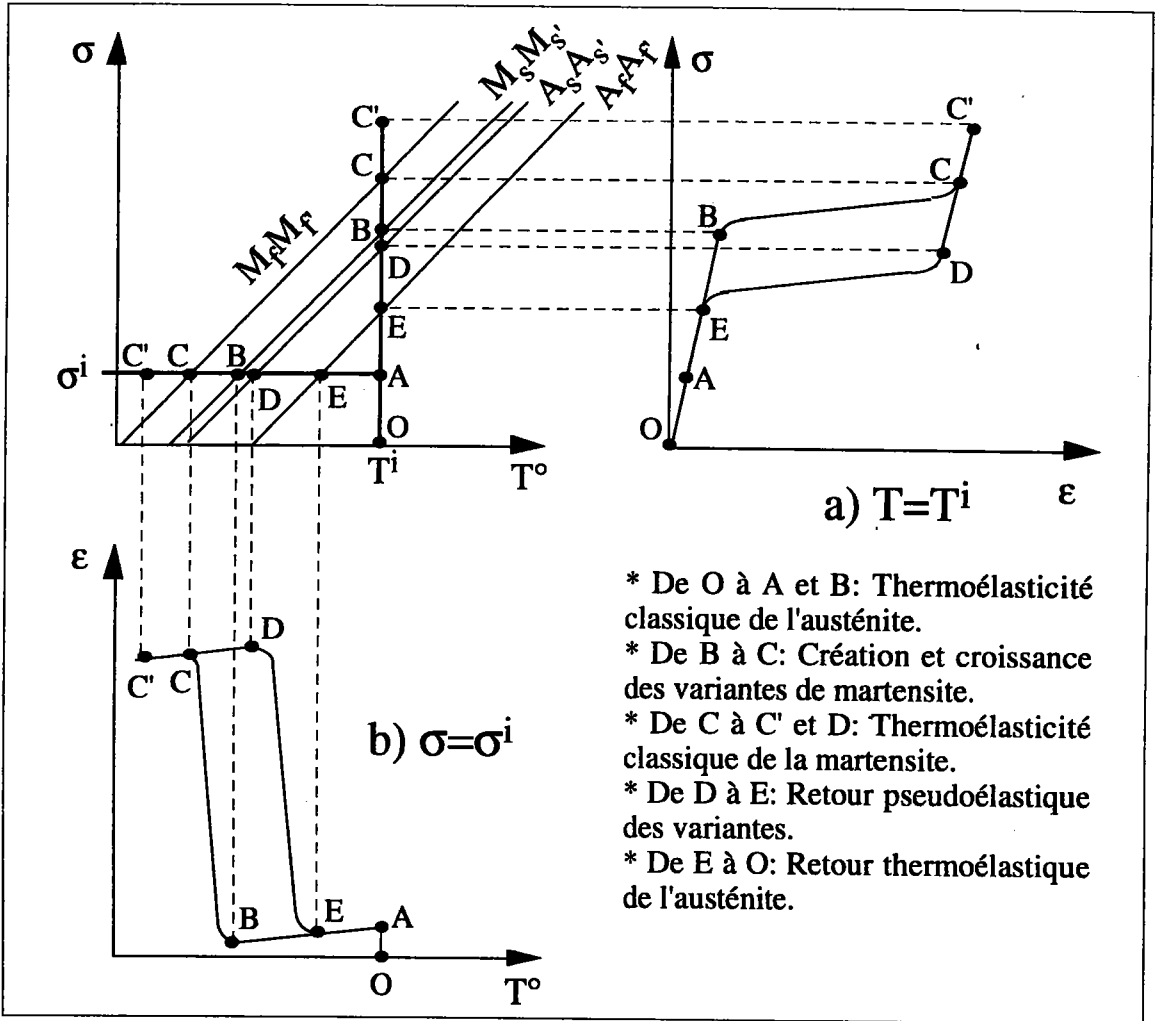
Le comportement superthermoélastique est observé lorsque la transformation est assistée par une contrainte appliquée. Lors d'un essai mécanique (essai superélastique) ou d'un cycle thermique (fluage anisotherme), la transformation martensitique est responsable de déformations de plusieurs ordres de grandeur supérieurs à celles des alliages classiques, et ce, d'une manière recouvrable (fig.II-13).

#### a) Superélasticité:

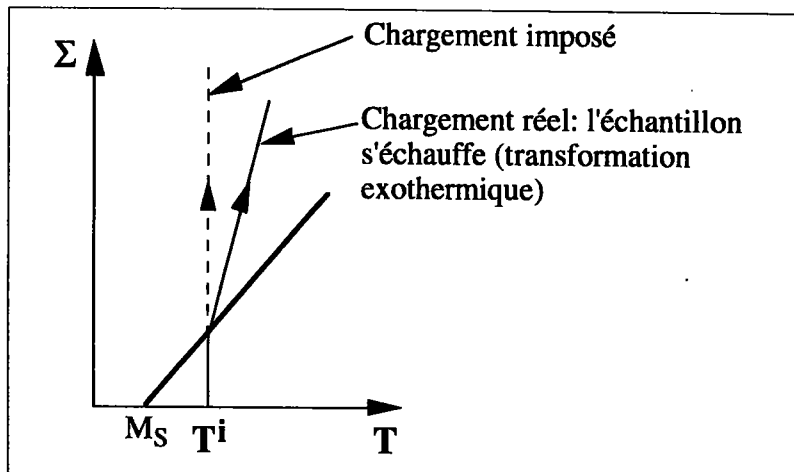
La température de l'essai n'influe pas sur la déformation maximale  $\epsilon^C$  mais sur les contraintes seuils de transformation  $\sigma^B$ ,  $\sigma^C$ ,  $\sigma^D$  et  $\sigma^E$ : plus la température est élevée, plus ces contraintes le sont également.

Bien que la transformation martensitique soit indépendante du temps, la vitesse de déformation possède une forte influence sur le comportement superélastique. Lorsque celle-ci augmente, la contrainte seuil de transformation ( $\sigma^B$ ) et la pente de transformation (ligne BC) augmente également. Au contraire, l'hystérésis de la transformation diminue [DDA78]. Cet effet est lié à la chaleur latente de transformation, responsable d'un couplage thermomécanique (fig.II-14).



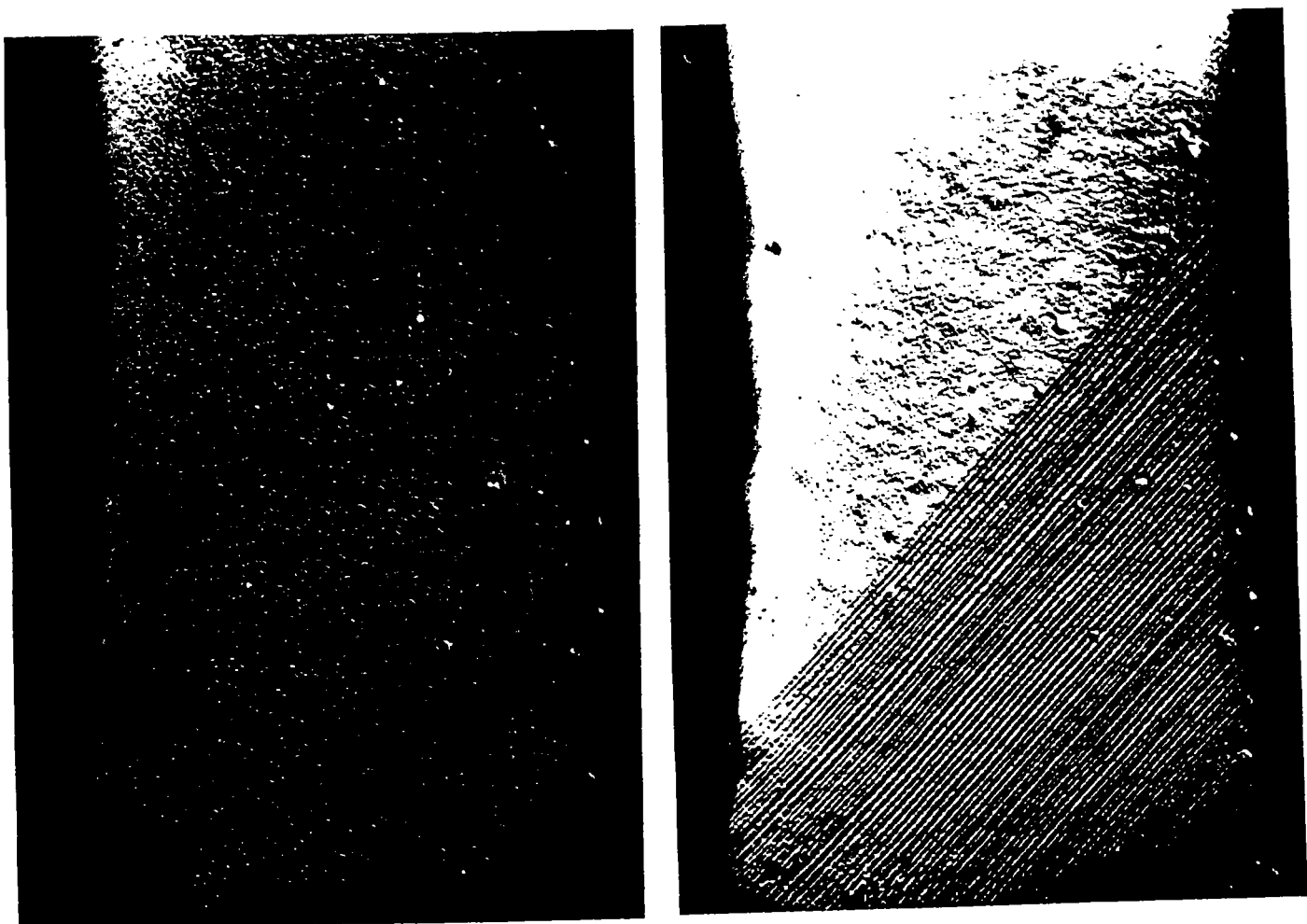


**Fig.II-13:** Représentation de l'effet superthermoélastique dans le cas d'un essai de superélasticité isotherme (a) et d'un essai de fluage anisotherme (b) sur un monocristal.



**Fig.II-14:** Représentation schématique du couplage thermomécanique du à la chaleur latente de transformation.

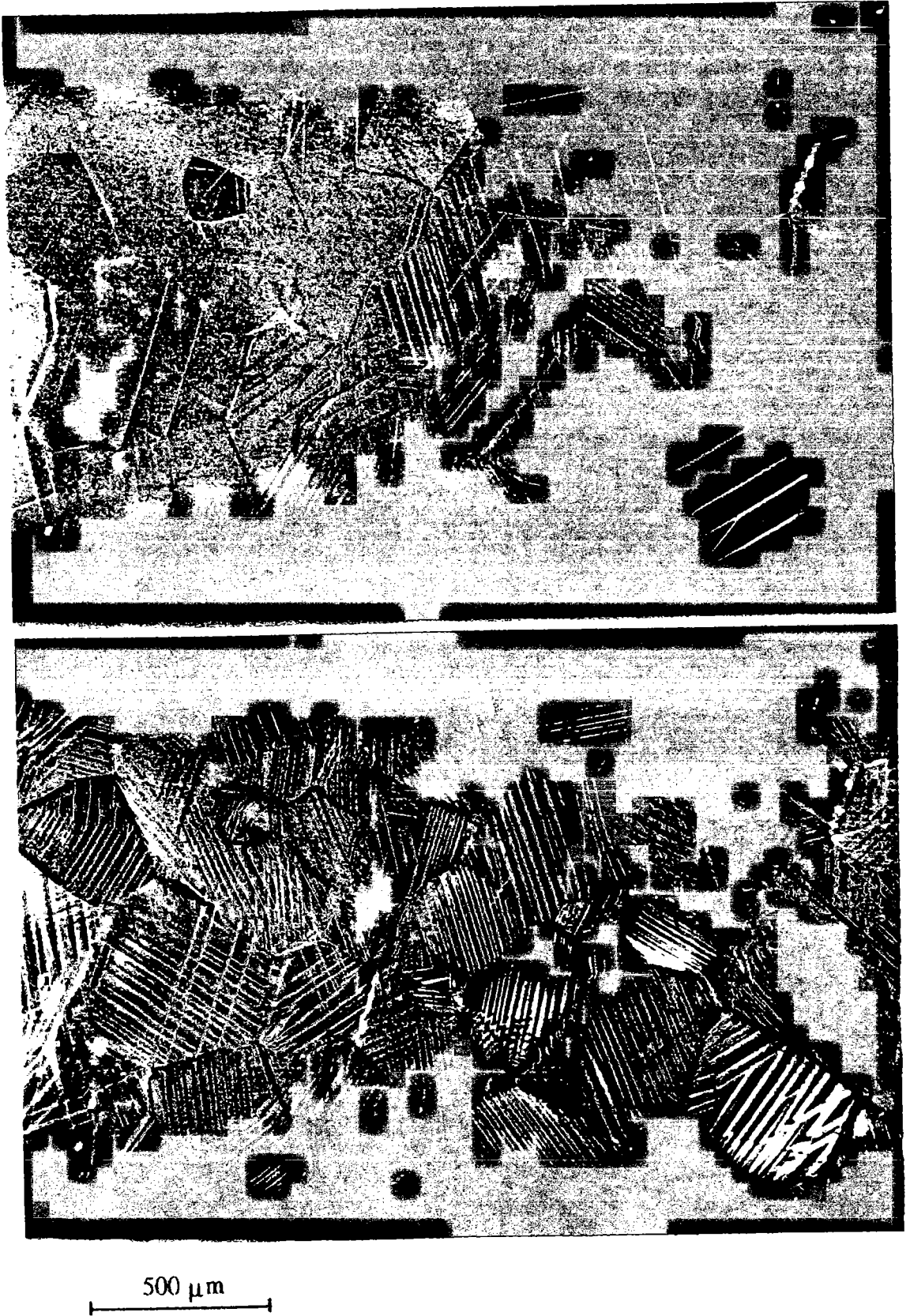
Au niveau microstructural, le comportement est différent en fonction de la nature cristallographique de l'échantillon. S'il s'agit d'un monocristal, un essai de traction occasionne l'apparition d'une unique variante de martensite [DKT74] qui entraîne une déformation réversible pouvant atteindre  $10^{-1}$  (fig.II-15). Au contraire, dans un polycristal, plusieurs variantes apparaissent dans chaque grain, entraînant une déformation de transformation plus faible, pouvant atteindre jusqu'à  $6 \cdot 10^{-2}$  (fig.II-16)<sup>(3)</sup>.



*Fig.II-15: Éprouvette monocristalline avant et après transformation partielle en martensite sous l'effet d'une contrainte (d'après Dominiak S. - LPMM - Université de Metz).*

---

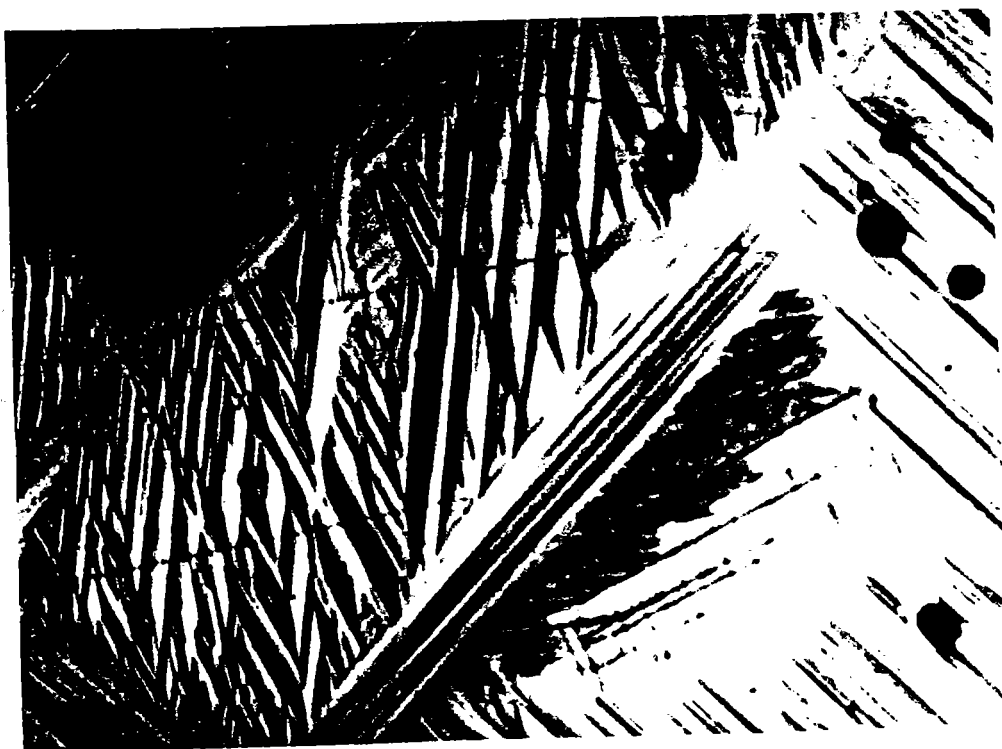
<sup>(3)</sup> Rappel: La thermoélasticité linéaire des aciers ou alliages classiques (§II.2.1.1) représente des déformations réversibles d'environ  $10^{-3}$  pour des chargements isothermes (essai de traction par exemple) ou de  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$  lors de variations de température.



*Fig.II-16: Micrographies montrant la croissance de la phase martensitique dans un polycristal de CuAlBe (d'après A. Eberhardt - LPMM - Université de Metz).*

b) Fluage anisotherme:

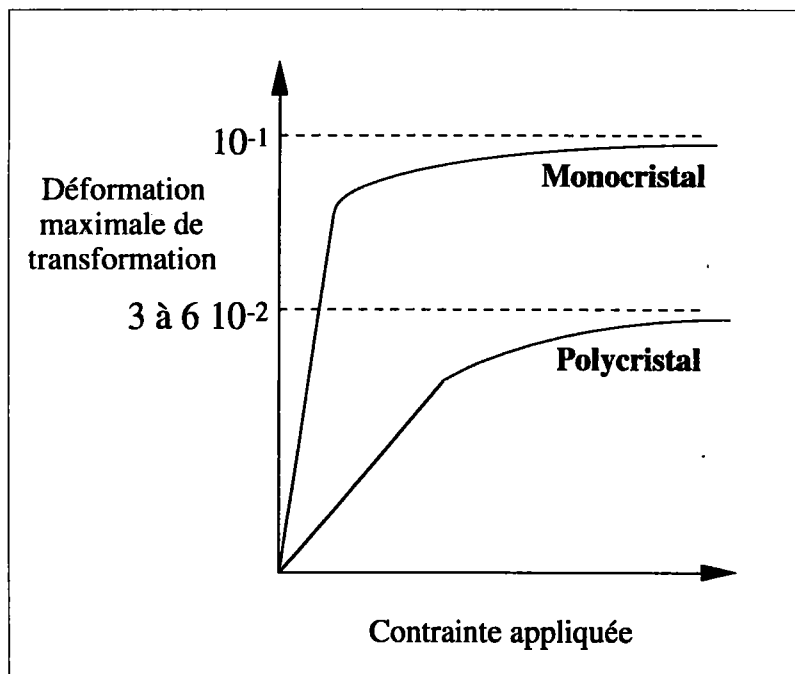
Les températures de transition augmentent lorsque la contrainte appliquée augmente. La déformation maximale de transformation est également fonction de cette contrainte. Pour des contraintes importantes, on obtient une déformation similaire à celle obtenue lors d'essais de superélasticité. Si les contraintes sont faibles, on observe l'apparition de variantes et de groupes autoaccommodants (fig.II-17) qui font chuter la déformation de transformation.



100  $\mu\text{m}$

*Fig.II-17: Formation de groupes de variantes autoaccommodantes lors d'un refroidissement sous contrainte nulle (d'après Dominiak S. - LPMM - Université de Metz).*

Là aussi, le comportement dépend de la nature cristallographique de l'échantillon (fig.II-18).



*Fig.II-18: Représentation schématique de la déformation maximale de transformation lors d'essais de fluage anisotherme pour un mono et un polycristal.*

Les applications industrielles de la superthermoélasticité sont multiples: branches de lunettes, fils et prothèses dentaires...[B94]. Cependant, elles recourent principalement à l'effet superélastique isotherme. Le comportement observé en fluage anisotherme n'est pas encore exploité, le manque de modèles et une certaine méconnaissance du comportement en sont les principaux responsables.

#### II.2.4 - DIFFÉRENTS TYPES D'ALLIAGES ET DOMAINES D'APPLICATION

Historiquement, les alliages de nickel et de titane (NiTi) sont les premiers alliages à mémoire de forme à avoir été utilisés dans l'industrie. La métallurgie de ces alliages est complexe et leur coût reste par conséquent très élevé. Moins onéreux, les alliages cuivreux sont également plus faciles à fabriquer et à mettre en oeuvre. Cependant, ils résistent assez mal à des

températures élevées et à un fonctionnement cyclique. Les alliages cuivre-aluminium-nickel (CuAlNi) ont une meilleure tenue en température (jusqu'à des températures d'environ 200°C) mais sont plus difficiles à élaborer que les CuZnAl (tab.II-19).

		TiNi	CuAlNi	CuZnAl
Densité (kg/m <sup>3</sup> )		6500	7200	7800
Résistivité (10 <sup>-6</sup> Wm)	Austénite	1	0.1	0.07
	Martensite	0.8	0.14	0.12
Chaleur spécifique (J/kg/K)		470-620	400-480	390
Chaleur de transformation (J/kg)		25000	8000	8000
Module d'Young (GPa)		70-98	80-100	70-100
Limite élastique (MPa)	Austénite	150-300		
	Martensite	200-800	150-300	150-300
T° de transformation (°C)		-200/100	-200/170	-200/120
Hystérésis (°C)		20-30	20-30	10-20
Amortissement (%)		15	10	30
Déf. de transformation (%)	Monocristal	10	10	10
	Polycristal	4	2	2

*Tab.II-19: Propriétés thermomécaniques et de transformation des principaux alliages à mémoire de forme [BP94].*

Les alliages de cuivre-aluminium-béryllium (CuAlBe) développés récemment présentent de bonnes caractéristiques mécaniques et une déformation de transformation supérieure aux autres alliages cuivreux, il est actuellement l'alliage le plus prometteur au niveau industriel.

Les domaines d'application des AMF peuvent être classés en quatre classes: actuateur, connecteur, superélastique et amortisseur.

- Les actuateurs électriques ou thermiques servent à la production d'un travail (force et déplacement).

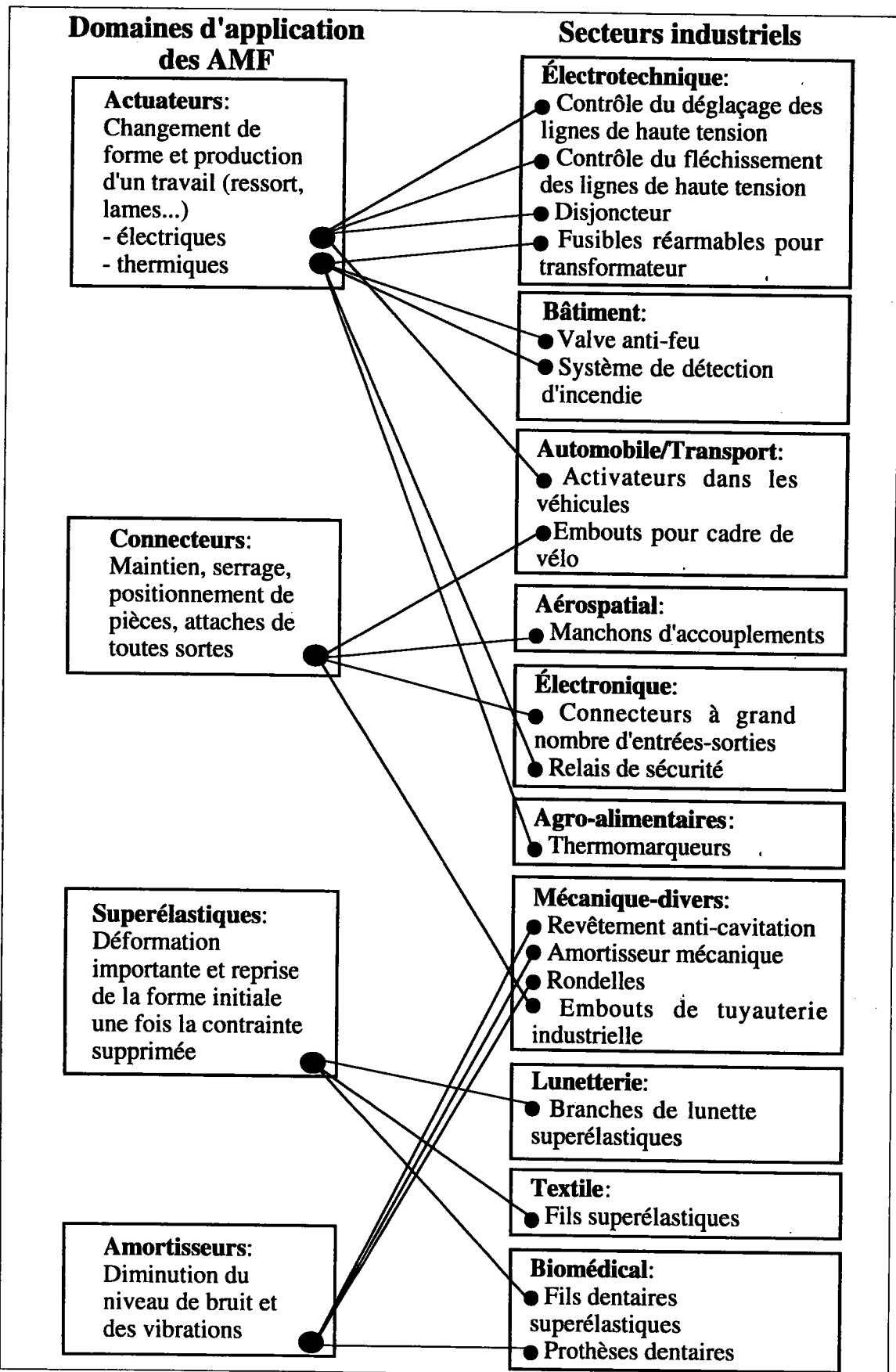


Planche. II-20: Principales applications des alliages à mémoire de forme [B94].

- Les connecteurs utilisent l'effet mémoire double sens et le retour contraint. Le but est de produire une force (de serrage par exemple) importante.
- Les applications de la superélasticité sont liées aux importantes déformations réversibles qu'il est possible d'obtenir.
- Les amortisseurs s'utilisent afin de diminuer les niveaux de vibration et de bruit.

Ces différentes classes de comportement peuvent être utilisées dans tous les secteurs industriels (Planche II-20). Les principaux succès proviennent des applications de la superélasticité dans le secteur du textile (armature de soutien-gorges [T90]), de la lunetterie (branches et pont de lunette superélastiques [M92]) et du biomédical [F92b] (fils dentaires superélastiques [F88][F92a]). Pour les connecteurs, la bague d'étanchéité Raychem [R89] est l'application la plus importante. Les actuateurs sont multiples (brise roches [T92], compteur de cycle,...[A95]) et peuvent être intégrés dans de nombreux mécanismes (thermomarqueur, cafetière électrique, friteuse,...) [B94][T90][I92].

## II.3 - MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DES ALLIAGES À MÉMOIRE DE FORME: LES DIFFÉRENTES APPROCHES

### II.3.1 - OBJECTIF

Le but essentiel du présent travail est de décrire le comportement thermomécanique d'un alliage à mémoire de forme. Cette prédiction, sous forme d'une simulation numérique, doit permettre de déterminer la réponse (principalement la déformation) à un chargement donné (contraintes et température) la plus proche possible de la réalité expérimentale. L'élaboration de modèles de comportement des alliages à mémoire de forme est rendue particulièrement difficile par le caractère non linéaire de



la transformation martensitique. Cependant, de nombreux travaux tels ceux de Saburi T. [SWT80], Berveiller M. [BZ84], Tanaka K. [TKS86], Sun Q.P. [SH94], Patoor E. [PEB94]... ont considérablement fait avancer la recherche dans ce domaine. L'élaboration de lois de comportement du matériau amène à envisager plusieurs types de démarches. Les deux plus courantes sont l'approche phénoménologique globale connue depuis longtemps et l'approche "micro-macro" (microscopique avec transition d'échelle) qui se développe fortement actuellement.

### II.3.2 - LES APPROCHES PHÉNOMÉNOLOGIQUES - LE MODÈLE BOURBON LEXCELLENT

L'approche phénoménologique repose sur une description macroscopique du phénomène à modéliser. Cette méthode permet de traiter le milieu d'une manière homogène à l'aide de lois standards dans lesquelles les phénomènes physiques sont représentés par des variables. Ces dernières sont identifiées à partir d'essais macroscopiques usuels. Les méthodes découlant de cette approche sont très utilisées car elles donnent des résultats rapides et bien adaptés aux cas de chargements monotones et proportionnels. Ces modèles s'intègrent aisément dans un code de calcul de structure. Cependant, dans le cas de chargements plus complexes, les paramètres du modèle sont difficiles à obtenir par l'identification expérimentale. Ils manquent d'une base physique et ne tiennent pas compte explicitement de la microstructure. Par conséquent, il est difficile de prévoir dans quel sens joue la microstructure vis à vis de telle ou telle propriété mécanique globale. Ces modèles souffrent d'un manque de caractère prédictif, ils ne prédisent pas par exemple le comportement dissymétrique des alliages à mémoire de forme observé en traction et en compression: la prise en compte phénoménologique de ce caractère nécessite d'introduire une variable supplémentaire (à identifier).

De nombreuses études phénoménologiques ont servi à la modélisation du comportement des alliages à mémoire de forme, pour les chargements

mécaniques isothermes [TKS86][F87][PEB88a][RL94] ou anisothermes [B92][LBL94][BLL95].

On discute ici d'un modèle de superthermoélasticité qui, pour rendre compte du comportement en fluage anisotherme, considère deux types de martensite: une martensite "autoaccommodée" (ou "thermique") et une martensite "orientée" possédant chacune leur propre fraction volumique bien qu'il n'existe aucune différence cristallographique entre ces deux martensites. Le modèle Bourbon-Lexcellent [B95] s'inscrit dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles. L'énergie libre spécifique du matériau permet, par l'écriture du second principe de la thermodynamique, de définir les critères de début de transformation directe et inverse.

**\* Hypothèses et lois de comportement**

Le système considéré est un système triphasé:

Phase 1: austénite

Phase 2: martensite autoaccommodante. Thermiquement activée, cette martensite ne génère pas de déformation macroscopique.

Phase 3: martensite orientée. Induite par la contrainte, la totalité de la déformation de transformation lui est associée.

Soient  $\varepsilon^\alpha$ ,  $\varepsilon_e^\alpha$ ,  $\varepsilon_f^\alpha$  et  $\varepsilon_T^\alpha$  les déformation totale, élastique, de transformation et thermique de la phase  $\alpha$  ( $\alpha=1, 2$  ou  $3$ ). Les constantes thermoélastiques sont considérées égales dans les trois phases.

$$\varepsilon_e^1 = \varepsilon_e^2 = \varepsilon_e^3 = \varepsilon_e \quad \text{et} \quad \varepsilon_T^1 = \varepsilon_T^2 = \varepsilon_T^3 = \varepsilon_T. \quad (\text{II.1})$$

L'hypothèse qui consiste à différencier deux martensites permet d'écrire:

$$\varepsilon_f^1 = \varepsilon_f^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_f = \varepsilon_f^3 \quad (\text{II.2})$$

En notant  $f$ ,  $f_{\sigma}$  et  $f_T$  les fractions volumiques totale ( $f=f_{\sigma}+f_T$ ), de martensite orientée et de martensite autoaccommodée, la loi d'évolution de la déformation de transformation est donnée par:

$$\dot{\varepsilon}_f = \bar{\varepsilon}^T \dot{f}_{\sigma} \quad (\text{II.3})$$

avec  $\bar{\varepsilon}^T$  la déformation maximale de transformation, mesurée à partir d'un essai de traction. Une première imprécision du modèle provient de l'absence de loi d'évolution pour  $\bar{\varepsilon}^T$ . Cette variable est supposée indépendante du chargement appliqué.

La déformation totale  $\varepsilon$  du matériau triphasé s'écrit:

$$\varepsilon = (1 - f_{\sigma} - f_T)\varepsilon^1 + f_T\varepsilon^2 + f_{\sigma}\varepsilon^3 \quad (\text{II.4})$$

et les lois de comportement s'écrivent alors:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_e} = E\varepsilon_e \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_T + \varepsilon_f \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}_f = \bar{\varepsilon}^T \dot{f}_{\sigma} \quad (\text{II.5})$$

avec  $E$  le module d'Young,  $\rho$  la masse volumique et  $\phi$  l'énergie libre du système.

#### \* Énergie libre du système

L'énergie libre spécifique de chacune des phases  $\alpha$  est composée d'une énergie chimique, d'une énergie élastique et de la chaleur spécifique.

$$\phi^{\alpha}(\varepsilon^{\alpha}, T) = u_0^{*\alpha} - T s_0^{*\alpha} + \frac{E}{2\rho} (\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon_f^{\alpha} - \varepsilon_T^{\alpha})^2 + C_v \left( T - T_0 - T \ln \frac{T}{T_0} \right) \quad (\text{II.6})$$

- $u_0^{*\alpha}$  et  $s_0^{*\alpha}$ : énergie interne et entropie de la phase  $\alpha$  à l'équilibre thermodynamique
- $C_v$ : chaleur spécifique
- $T$  et  $T_0$ : température et température de référence

L'énergie libre du système triphasé est défini de la manière suivante:

$$\phi = (1 - f_{\sigma} - f_T)\phi^1 + f_T \phi^2 + f_{\sigma} \phi^3 + \Delta\phi \quad (\text{II.7})$$

$\Delta\phi$  est un terme d'interaction entre les différentes phases, choisi comme étant donné par la relation:

$$\Delta\phi = (f_{\sigma} + f_T)(1 - f_{\sigma} - f_T)\phi_{it} + f_{\sigma}f_T\hat{\phi}_{it} \quad (\text{II.8})$$

$\phi_{it}$  ( $\hat{\phi}_{it}$ ) représente l'énergie d'interaction entre l'austénite (la martensite orientée) et la martensite (la martensite autoaccommodée).

Le calcul donne pour l'énergie libre du système:

$$\begin{aligned} \phi(\varepsilon, T, f_{\sigma}, f_T) = & \frac{E}{2\rho} \left( \varepsilon - \bar{\varepsilon}^T f_{\sigma} - \varepsilon_T \right)^2 + C \left( T - T_0 - T \ln \frac{T}{T_0} \right) \\ & + u_0^{*1} - T s_0^{*1} - f\Pi_0^f(T) + f(1-f)\phi_{it} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

$$\text{avec: } \Pi_0^f(T) = \left( u_0^{*1} - u_0^{*2} \right) - T \left( s_0^{*1} - s_0^{*2} \right) \quad (\text{II.10})$$

### \* Lois d'évolution

L'inégalité de Clausius-Duhem permet d'écrire les équations d'état et de définir les critères de transition de phase. Bourbon et L'excellent. choisissent de séparer en deux parties cette inégalité, ce qui revient à découpler la martensite "thermique" de la martensite "orientée". Sous forme incrémentale, elles s'écrivent:

$$\Pi_{\sigma}^f(T)\dot{f}_{\sigma} \geq 0 \quad \text{et} \quad \Pi_T^f(T)\dot{f}_T \geq 0 \quad (\text{II.11})$$

où  $\Pi_{\sigma}^f$  et  $\Pi_T^f$  sont les forces motrices associées à l'apparition des martensites orientée et thermique.

$$\Pi_{\sigma}^f = -\frac{\partial\phi}{\partial f_{\sigma}} = \frac{\bar{\varepsilon}^T \sigma}{\rho} - (1 - 2f)\phi_{it} - f_T \hat{\phi}_{it} + \Pi_0^f(T) \quad (\text{II.12})$$

$$\Pi_T^f = -\frac{\partial\phi}{\partial f_T} = -(1 - 2f)\phi_{it} - f_{\sigma} \hat{\phi}_{it} + \Pi_0^f(T) \quad (\text{II.13})$$

Pour préciser les cinétiques de transformation, Bourbon et al. définissent deux fonctions critères  $\Psi^1$  et  $\Psi^2$  pour chacune des deux martensites afin de caractériser les transformation directe et inverse:  $d\Psi_\alpha^1=0$  définit la transformation directe et  $d\Psi_\alpha^2=0$  la transformation inverse ( $\alpha=\sigma$  ou T).

$$\Psi_\alpha^1 = \Pi_\alpha^f - k_\alpha^1(z_\alpha) \quad \text{et} \quad \Psi_\alpha^2 = -\Pi_\alpha^f + k_\alpha^2(z_\alpha) \quad (\text{II.14})$$

Les fonctions k sont prises sous les formes suivantes:

$$k_\sigma^1(f_\sigma) = \frac{-\Delta s^*}{a_\sigma^1} \ln(1 - f_\sigma) + (4\phi_{it} - \hat{\phi}_{it})f_\sigma$$

$$k_T^1(f_T) = \frac{\Delta s^*}{a_T^1} \left[ b_1 e^{(-b'_m(T-M_s^0))} - 2 \right] \ln(1 - f_T) + (4\phi_{it} - \hat{\phi}_{it})f_T$$

$$k_\sigma^2(f_\sigma) = \frac{\Delta s^*}{a_\sigma^2} \ln(f_\sigma) + (4\phi_{it} - \hat{\phi}_{it})(f_\sigma - 1)$$

$$k_T^2(f_T) = \frac{\Delta s^*}{a_T^2} \left[ 2 - b_2 e^{(-b_m(T-A_s^0))} \right] \ln f_T + (4\phi_{it} - \hat{\phi}_{it})(f_T - 1)$$

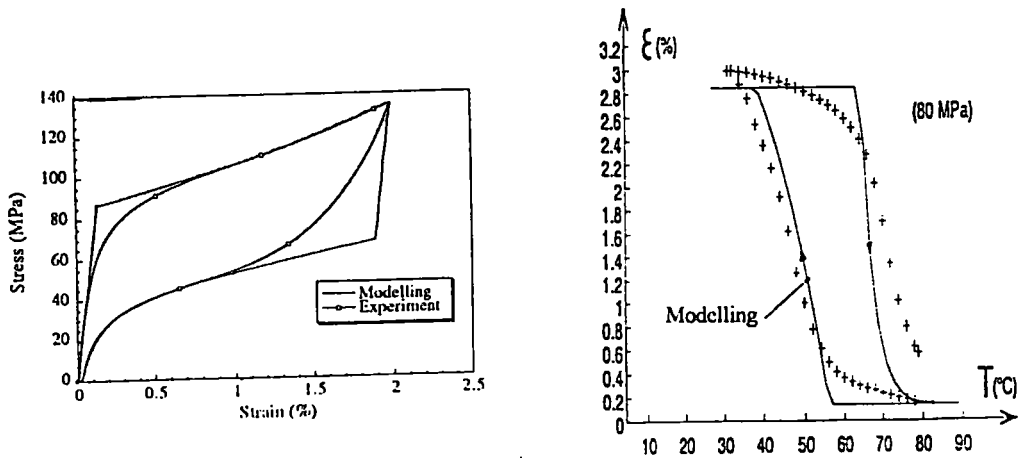
Les critères (II.14) permettent d'obtenir les lois d'évolution de  $f_\sigma$  et  $f_T$ . Cependant, elles doivent encore satisfaire les expressions suivantes:

$$\text{Pour la transformation directe:} \quad \begin{cases} \dot{f}_\sigma = -(1 - f_\sigma)b_1 \dot{T} \\ \dot{f}_T = -(1 - f_T)a_T^1 \dot{T} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

$$\text{Pour la transformation inverse:} \quad \begin{cases} \dot{f}_\sigma = -f_\sigma b_2 \dot{T} \\ \dot{f}_T = -f_T a_T^2 \dot{T} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Les paramètres introduits  $(a_\sigma^1, a_\sigma^2, a_T^1, a_T^2, b_1, b_2, b'_m, b_m)$  sont à déterminer d'une manière phénoménologique par l'étude de résultats expérimentaux. Cette approche permet d'obtenir un bon accord avec les courbes expérimentales de superthermoélasticité (fig.II-21). Ce modèle ignore cependant la réalité physique du mécanisme de déformation associé à la transformation martensitique, en particulier la multiplicité des produits de la transformation (les variantes). Les paramètres de ce modèle n'ont,

pour certains, aucune réalité physique: on leur assigne une valeur qui permet aux résultats de correspondre aux essais expérimentaux.



*Fig. II-21: Confrontation des courbes expérimentales (CuZnAl) et théoriques obtenues par l'approche phénoménologique de Bourbon-Lexcellent [B95]. a) Essai superélastique à  $T = M_s + 16^\circ\text{C}$ . b) Essai de fluage anisotherme sous 80 MPa.*

On choisit dans ce travail une approche micromécanique avec transition d'échelle qui nécessite l'utilisation de variables internes représentant au mieux la microstructure et possédant un sens physique précis.

### II.3.3 - LES APPROCHES PAR TRANSITION D'ÉCHELLE

Ces approches d'homogénéisation, ou micro-macro, utilisent une transition d'échelle qui prend en compte l'influence des paramètres microstructuraux sur le comportement global. Plusieurs approches existent, chacune étant optimale pour une certaine microstructure.

Les méthodes d'homogénéisation périodique [BL76][P87] donnent de bons résultats pour des matériaux de type composite à fibres. La méthode des modules effectifs [P87] est optimale lorsque le milieu présente un faible désordre tandis que les méthodes autocohérentes sont très performantes pour des milieux présentant des microstructures très désordonnées (matériau microhétérogène tel que l'acier et ses alliages). Elles visent à

déduire le comportement d'un milieu hétérogène de celui de ses constituants.

L'utilisation des méthodes autocohérentes nécessite au préalable une bonne description du comportement au niveau microscopique. À ce niveau, les approches peuvent être différentes. On discute dans un premier temps l'approche micromécanique utilisée par Sun [SH93] puis la méthode développée principalement par Berveiller et Zaoui [BZ84][BZ93] qui servira à rendre compte du comportement macroscopique à partir de l'étude du comportement monocristallin (Chapitre III).

### II.3.3.1 - L'approche de Sun [SH93][SH94]

Pour déterminer le comportement superthermoélastique des alliages à mémoire de forme, Sun Q.P. et Hwang K.C. utilisent une approche micromécanique basée sur la thermodynamique de la transformation. Le volume représentatif du comportement global est constitué d'un ensemble de grains pour lesquels il n'existe que deux états microstructuraux possibles: austénitiques et martensitiques. Les grains transformés se comportent comme une inclusion de fraction volumique  $f$  dans une matrice élastique représentée par les grains non transformés (fig.II-22).

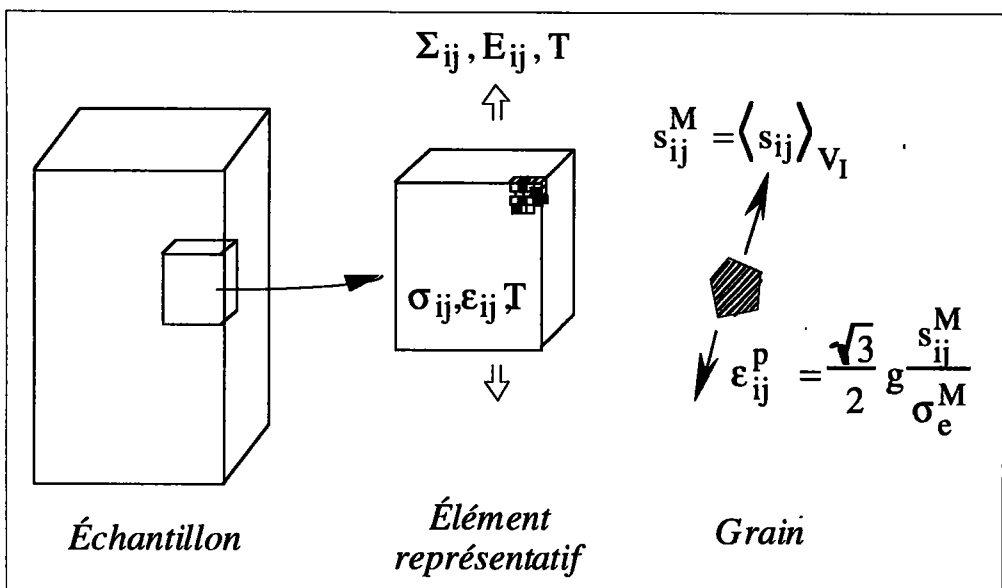


Fig. II-22: Microstructure et modélisation micromécanique de l'élément représentatif.

\* *Étude micromécanique*

Dans l'hypothèse des petites perturbations, la déformation totale macroscopique est donnée par la moyenne volumique des déformations locales élastique  $\epsilon^e$  et inélastique  $\epsilon^p$ .

$$E_{ij} = \langle \epsilon_{ij}^e \rangle_V + \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_V \quad (\text{II.17})$$

Si  $V$ ,  $V_m$ ,  $V_I$  sont les volumes de l'élément représentatif, de la matrice et de l'inclusion ( $V=V_m+V_I$ ) et pour un matériau isotrope et homogène, la déformation macroscopique  $E$  est obtenue par la relation suivante:

$$E_{ij} = E_{ij}^e + E_{ij}^p = M_{ijkl} \Sigma_{kl} + f \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_{V_I} \quad (\text{II.18})$$

D'une manière incrémentale, en supposant la vitesse de déformation moyenne microscopique faible devant la vitesse de déformation totale macroscopique, Sun obtient:

$$\dot{E}_{ij} = M_{ijkl} \dot{\Sigma}_{kl} + f \langle \dot{\epsilon}_{ij}^p \rangle_{dV_I} = M_{ijkl} \dot{\Sigma}_{kl} + \epsilon_{ij}^p \dot{f} \quad (\text{II.19})$$

La déformation inélastique (de transformation) locale  $\epsilon^p$  est dirigée suivant la contrainte moyenne dans la matrice  $s^M$  et est limitée par l'amplitude du cisaillement  $g$  du réseau.

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{s_{ij}^M}{\sqrt{s_{ij}^M s_{ij}^M}} \epsilon_{eq}^p = \frac{\sqrt{3}}{2} g \frac{s_{ij}^M}{\sigma_e^M} \quad (\text{II.20})$$

$$\text{avec: } g = \sqrt{3} \epsilon_{eq}^p \quad (\text{II.21})$$

$$\text{et: } \begin{cases} \sigma_e^M = \frac{3}{2} \sqrt{s_{ij}^M s_{ij}^M} \\ \epsilon_{eq}^p = \frac{2}{3} \sqrt{\epsilon_{ij}^p \epsilon_{ij}^p} \end{cases} \quad (\text{II.22})$$

$s^M$  représente l'effet combiné des contraintes macroscopiques extérieures et des contraintes internes. Selon Eshelby et Tanaka, ce tenseur s'écrit pour une inclusion sphérique:



$$s_{ij}^M = \langle s_{ij} \rangle_{V_I} = S_{ij} - fB_1(T) \langle \varepsilon_{ij}^P \rangle_{V_I} \quad (II.23)$$

$$\text{avec: } B_1(T) = \frac{2\mu(T)(5\nu - 7)}{15(1 - \nu)} \quad (II.24)$$

**\* Étude thermodynamique**

L'énergie complémentaire  $\Psi$  associée à la transformation est fonction des variables de contrôle  $\Sigma$  (contrainte appliquée) et  $T$  (température) et de deux variables internes  $f$  (fraction de martensite) et  $\langle \varepsilon_{ij}^P \rangle_{V_I}$  (déformation moyenne de transformation). Pour un volume unitaire, on a:

$$\Psi \left( \Sigma, T, f, \langle \varepsilon_{ij}^P \rangle_{V_I} \right) = - \left( W_1 + W_2 + W_{\text{sur}} + \Delta G_{\text{ch}} - \Sigma_{ij} E_{ij} \right) \quad (II.25)$$

- $W_1 + W_2$  représente l'énergie de déformation élastique.  
 $W_1 = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} M_{ijkl} \Sigma_{kl}$  est reliée directement à la contrainte macroscopique et  
 $W_2 = -\frac{1}{4} B_1(T) g^2 f + \frac{1}{2} B_1(T) f^2 \langle \varepsilon_{ij}^P \rangle_{V_I} \langle \varepsilon_{ij}^P \rangle_{V_I}$  est la cause des contraintes internes produites par la transformation.
- $W_{\text{sur}} = \frac{6(\gamma_M - \gamma_A) f}{d_0}$  constitue l'énergie surfacique.  $\gamma_M$  et  $\gamma_A$  sont les énergies surfaciques des phases martensite et austénite et  $d_0$  le diamètre du grain.
- $\Delta G_{\text{ch}} = \Delta G^{A \rightarrow M}(T) f$  est l'énergie chimique

Sun et al. décrivent les effets d'hystérésis en introduisant un pseudo potentiel  $W_d$  qui représente l'énergie dissipée pendant la transformation.

$$W_d = D_0 f_{\text{cu}} \quad \text{avec: } f_{\text{cu}} = \int_0^f |df| \text{ la fraction volumique cumulée de martensite et } D_0 \text{ une constante du matériau.}$$

Le comportement de la transformation est décrit par l'équilibre énergétique et le second principe de la thermodynamique, à savoir:

$$\dot{\Psi}_{\Sigma, T} = \frac{\partial \Psi}{\partial f} \dot{f} + \frac{\partial \Psi}{\partial \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{V_I}} \langle \dot{\varepsilon}_{ij}^p \rangle_{V_I} = \dot{W}_d \geq 0 \quad (\text{II.26})$$

On obtient alors pour le critère de transformation  $F_f$ :

$$F_f \left( \Sigma, T, f, \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{V_I} \right) = \frac{g}{\sqrt{3}} J \left( S_{ij} - f B_1(T) \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{V_I} \right) - C_0(T) = 0 \quad (\text{II.27})$$

avec:

$$J \left( S_{ij} - f B_1(T) \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{V_I} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left( S_{ij} - f B_1(T) \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{V_I} \right) \left( S_{ij} - f B_1(T) \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{V_I} \right) \quad (\text{II.28})$$

$$\text{et: } C_0(T) = D_0 + \frac{6(\gamma_M - \gamma_A)}{d_0} + \Delta G^{A \rightarrow M}(T) - \frac{1}{4} B_1(T) g^2 \quad (\text{II.29})$$

Sun et al. propose que  $C_0(T)$  dépend également de la fraction volumique  $f$  et pose:

$$C_0(T, f) = C_0(T) + \alpha(T) f(T) \quad (\text{II.30})$$

où  $\alpha(T)$  est ajustée d'une manière phénoménologique.

**\* Loi de comportement**

L'accroissement de la transformation  $\dot{f}$  en fonction des paramètres extérieurs imposés  $\dot{S}$  et  $\dot{T}$  est obtenue en utilisant la relation de consistance  $\dot{F}_f = 0$ . Le résultat est:

$$\dot{f} = \left\{ \frac{g\sqrt{3}}{2} \frac{s_{ij}^M}{\sigma_e^M} \dot{S}_{ij} - \left[ \frac{d\Delta G^{A \rightarrow M}(T)}{dT} + \left( \frac{g\sqrt{3}}{2} f \frac{s_{ij}^M}{\sigma_e^M} \langle \varepsilon_{ij}^p \rangle_{V_I} \right) \right] \right\}$$

$$\frac{\left. -\frac{g^2}{4} \right) \frac{dB_1(T)}{dT} + \frac{d\alpha(T)}{dT} \left. \right] \dot{T} \Bigg/ \left( \frac{g^2}{2} B_1(T) + \alpha(T) \right) \quad (\text{II.31})$$

La loi de comportement macroscopique est, en utilisant (II.19):

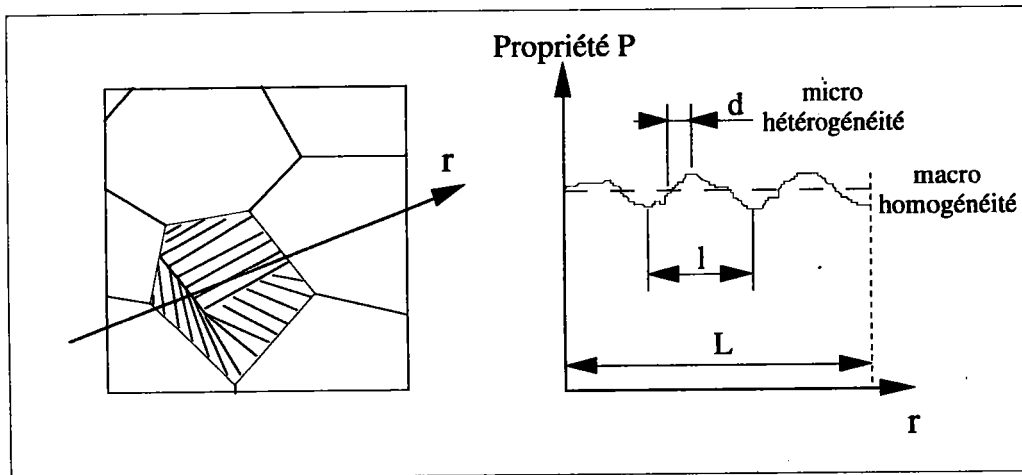
$$\dot{E}_{ij} = M_{ijkl} \dot{\Sigma}_{kl} + \frac{\sqrt{3}g \left( S_{ij} - fB_1(T) \langle \epsilon_{ij}^p \rangle_{V_I} \right)}{2J \left( S_{mn} - fB_1(T) \langle \epsilon_{mn}^p \rangle_{V_I} \right)} \dot{f} \quad (\text{II.32})$$

Dans ce modèle présenté, la déformation de transformation conserve une forme a priori et la réalité physique du mécanisme de déformation associé à la transformation martensitique est toujours ignorée. Le nombre des variables internes est faible: fraction de martensite et déformation moyenne de transformation. Sur un plan théorique, le choix d'un plus grand nombre de variables internes, comme les fractions volumiques des différentes variantes de martensite, se justifie plus facilement. L'échelle locale de description est alors la variante de martensite: cela nécessite la prise en compte des contraintes physiques exercées sur ces variables.

### II.3.3.2 - L'approche utilisée

Nous n'énoncerons ici que les principes généraux de la méthode. Ils seront traduits sous forme mathématique dans le chapitre III consacré à l'élaboration de la solution. Le principe de la méthode repose sur le fait qu'un matériau hétérogène est constitué d'un nombre important de grains ayant un comportement spécifique. Il est donc permis de penser qu'en connaissant le comportement des grains ainsi que les textures cristallographique et morphologique, cette méthode à transition d'échelle permettra de calculer d'une manière déterministe le comportement global du matériau. Cependant, la méthode ne recoure pas à une description statistique et systématique de la structure hétérogène du matériau. Elle est

fondée sur une hypothèse implicite de distribution qui est celle du désordre parfait [K78]. En conséquence, elle requiert, pour avoir un sens, une double condition de macrohomogénéité et de microhétérogénéité (fig.II-23).



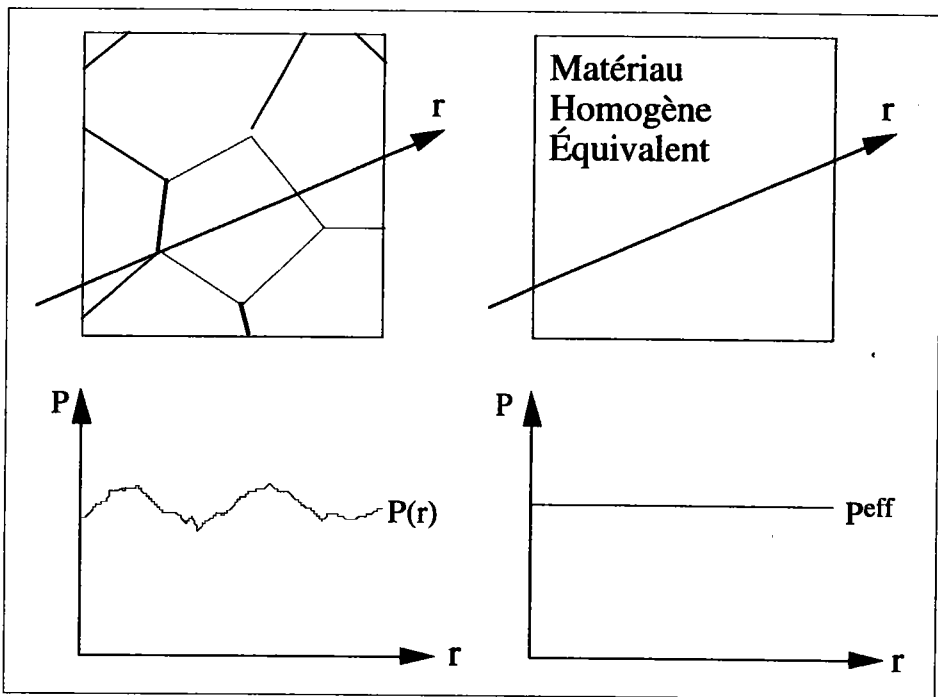
*Fig.II-23: Représentation schématique des conditions de macrohomogénéité et de microhétérogénéité.  $d \ll l$  et  $l \ll L$ .*

Cette méthode est donc particulièrement adaptée à l'étude de la structure polycristalline de l'acier, des alliages courants et des alliages à mémoire de forme. Dans ces alliages, le mécanisme élémentaire de déformation est lié à la formation des plaquettes de martensite dans les grains. On cherche donc à déterminer le comportement local (microscopique) à l'échelle du grain. Les interactions intergranulaires sont prises en compte par transition d'échelle pour déterminer le comportement global (macroscopique).

Ainsi, on cherche à représenter un agrégat hétérogène que constitue un alliage polycristallin par un matériau homogène de même comportement (inconnu bien sur). Nous sommes alors amenés à traiter le problème réel d'une manière simplifiée (fig.II-24).

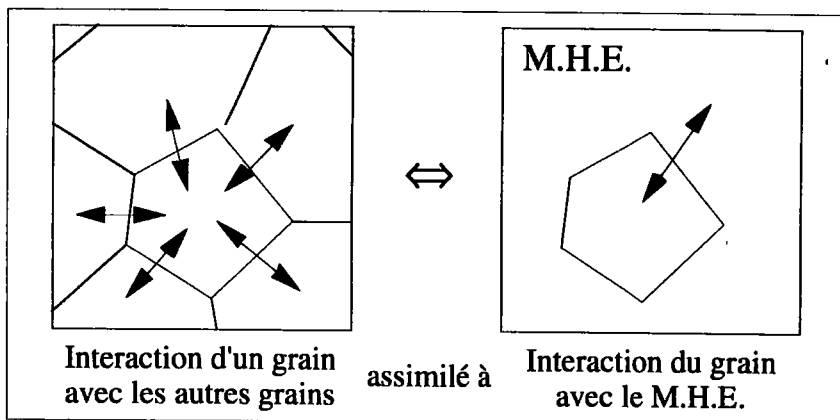
Dans le cas de la méthode autocohérente à un site<sup>(4)</sup>, on assimile les interactions mécaniques entre chaque élément de l'agrégat et l'ensemble de tous les autres aux interactions entre cet élément et le milieu homogène équivalent par lequel on cherche à représenter le milieu hétérogène.

<sup>(4)</sup> Il existe une approche plus précise telle que le modèle autocohérent à n sites développé par Fassi-Fehri [F85]. Il prend en compte les interactions avec le milieu équivalent et avec les n grains voisins.



**Fig.II-24:** Schématisation du principe d'une méthode d'homogénéisation.

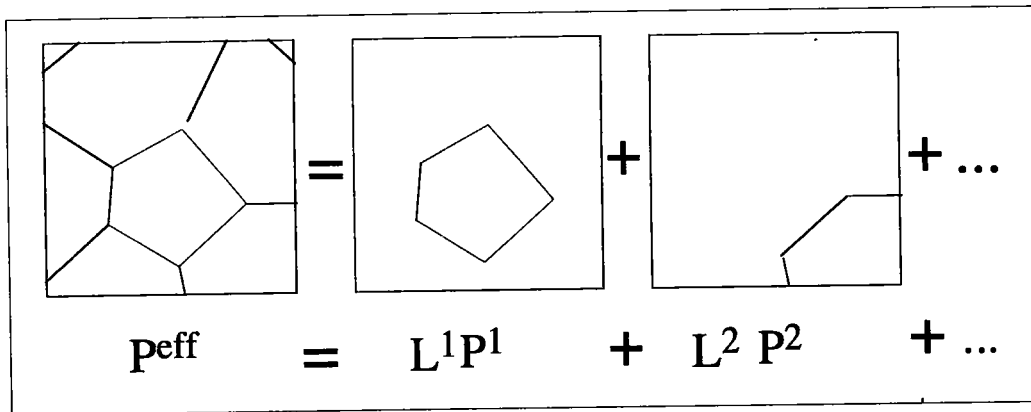
En fait, on remplace le milieu granulaire entourant un certain élément par un milieu homogène de comportement inconnu mais équivalent à celui du milieu initial (fig.II-25).



**Fig.II-25:** Fondements de la méthode autocohérente à un site.

Ce problème se ramène alors à celui de l'interaction entre une inclusion et une matrice infinie (le matériau homogène équivalent), bien connu des mécaniciens, Eshelby l'ayant traité en 1961 [E61]. La solution, explicite

dans un grand nombre de cas, est appliquée successivement pour chaque élément de l'agrégat. Il suffit, pour identifier le comportement du milieu homogène équivalent, de relier les variables globales (celles de l'agrégat) aux variables locales (celles des éléments de l'agrégat) par le biais de relations de localisation (fig.II-26).



*Fig.II-26: Méthode autocohérente appliquée aux alliages à mémoire de forme.  $L^1$  et  $L^2$  représentent des relations de localisation qui permettent de déterminer la propriété du milieu homogène équivalent à partir de celle de chaque constituant.*

On peut noter que le modèle autocohérent prend en compte la forme et l'orientation des grains par rapport au repère macroscopique mais la notion d'infini néglige la répartition spatiale des grains. Cette notion implique également que la taille  $l$  du volume élémentaire représentatif soit très petite face aux dimensions  $L$  de la pièce (fig.II-23).

L'évolution des méthodes autocohérentes a permis de passer de modèles simples, comme ceux de Sachs [S28] ou de Taylor [T38], à des modèles plus complexes développés par Hershey [H54] et Kröner [K58][K61] qui ont été les premiers à formuler des schémas autocohérents appliqués à la mécanique des solides hétérogènes dans le cas de comportement linéaire. Hill [H65] aborda d'une manière plus générale et rigoureuse les équations fondamentales du schéma autocohérent, ce qui conduisit Berveiller et Zaoui [BZ84], puis Lipinski [LB89][L92] à améliorer cette méthode qui fournit actuellement de nombreux modèles satisfaisants pour des comportements non linéaires. Le schéma numérique d'une telle méthode est plus lourd que celui des approches phénoménologiques mais plus

fiables, il peut servir de base pour développer un modèle analytique destiné à être introduit dans un code de calcul de structure [G95]. Concernant les alliages à mémoire de forme, l'approche donne de bons résultats dans le cas de chargement isotherme [PEB88b][PEB94] en l'absence de cyclage. Une nouvelle génération de modèles autocohérents dits à double transition d'échelle est développée depuis peu [M94][L95]. Ces modèles ont une approche plus fine à l'échelle microscopique et permettent de rendre compte plus physiquement du comportement plastique et des phénomènes liés aux dislocations et à leur mouvement (formation des cellules de dislocation).

La méthode autocohérente se caractérise par son adaptabilité à une grande variété de problèmes des mécaniques des matériaux hétérogènes. Sa principale limitation est liée à l'abandon de toute description de la répartition spatiale des grains, du au fait que l'on assimile l'environnement de chaque inclusion (ou grain) à un milieu homogène infini.

## II.4 - CONCLUSION

Dans ce chapitre à caractère bibliographique, nous avons souligné les propriétés de la transformation martensitique: absence de diffusion, déformation caractérisée par une faible variation de volume et un fort cisaillement n'engendrant pas de plasticité, multiplicité des produits de la transformation.

Les mécanismes de déformation impliqués dans le comportement des alliages à mémoire de forme ont également été étudiés: transformation mono et polyvariante, réorientation en phase martensitique, accommodation des variantes.

Le caractère endo et exothermique de la transformation entraînant un dégagement et une absorption de chaleur lors des transformations directe et inverse est également souligné. Ce phénomène est responsable de l'influence de la vitesse de déformation sur le comportement

superélastique, une telle dépendance n'ayant pas de caractère visqueux dans les alliages à mémoire de forme.

Au niveau de la modélisation, l'approche adoptée procède en deux étapes interagissant l'une avec l'autre. Il s'agit dans un premier temps de préciser la forme des relations de comportement local puis d'effectuer la transition d'échelle permettant de relier les grandeurs macroscopiques aux grandeurs microscopiques. Cela va nous permettre d'accéder au comportement superthermoélastique et notamment, par une meilleure prise en compte de la température, au comportement en fluage anisotherme et aux effets de vitesse en superélasticité.



## - Références bibliographiques -

- [A91] Norme Française NF A51-080, "*Alliages à mémoire: vocabulaire et mesures*" (1991)
- [A95] AMT, "*AMT your partner for shape memory solutions*", Dépliant commercial (1995)  
A.M.T. n.v. / Industrieweg 43 / B-3540 Herk-de-Stad (Belgique)  
Tél: +32 (0) 13/553513
- [B92] Brinson L.C., "*Constitutive behavior of Shape Memory Alloy: One dimensional thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable*", *Materials and Devices*, pp.729-742 (1992)
- [B94] Borde V., "*Les alliages à mémoire de forme*", dans *Industries et Techniques*, n°755 (1994)
- [B95] Bourbon L.C., "*Contribution à l'étude isotherme et anisotherme du comportement cyclique des alliages à mémoire de forme*", Thèse, Université de Franche-Comté (1994)
- [BL76] Bourgat J.F., Lauchon H., "*Application of the homogeneization method to composite materials with periodic structure*", Rapport de recherche n°208, IRIA (1976)
- [BLL95] Bourbon G., Lexcellent C., Leclercq S., "*Modelling of the non isothermal cyclic behaviour of a polycrystalline Cu Zn Al Shape Memory Alloy*", Procs ICOMAT'95, Lausanne, Les Éditions de Physique, pp.221-226 (1995)

- [BP94] Berveiller M., Patoor E., "*Propriétés Thermomécaniques des Alliages à Mémoire de Forme*", dans Technologie des alliages à mémoire de forme, Éd. Hermès, Paris (1994)
- [BZ84] Berveiller M., Zaoui A., "*Modelling of the Plastic Behavior of Inhomogeneous Media*", J. Eng. Mat. and Tech., 106, pp.295-299 (1984)
- [BZ93] Berveiller M., Zaoui A., "*Modélisation du Comportement Mécanique des Solides Microhétérogènes*", Ch. de Formation Avancée de Méc. des Polymères, Cluny (1993)
- [COC79] Cohen M., Olson G.B., Clapp P.C., "*On the Classification of Displacive Phase Transformation*", Proc. ICOMAT'79, Cambridge (MA), MIT, pp.1-11 (1979)
- [D82] Duvaut G., "*Effective and homogenized coefficients*", Symp. on Functional Analysis and Differential Equations, Lisboa, Portugal (1982)
- [DDA78] Delaey L., DeVos J., Aernoudt E., "*Shape Memory Effect, Superelasticity and Damping in CuZnAl Alloys*", INCRA Project n°238, Report 78R1, pp.55 (1978)
- [DKT74] Delaey L., Krishnan R.V., Tass H., Warlimont H., "*Thermoplasticity, pseudoelasticity and the memory effect associated with martensitic transformations*", J. Mater. Sci., 9, pp.1536-1544 (1974)
- [DZ90] Duerig T.W., Zadno G.R., "*An Engineer's Perspective of Pseudoelasticity*", dans Engineering aspects of Shape Memory Alloys, Butterworth Heinemann Pub., Londres, pp.369-393 (1990)  
ISBN 0-750-61009-3

- [E61] Eshelby J.D., "*Elastic inclusions and inhomogeneities*", Prog. in Solid Mech., 2, pp.89-140 (1961)
- [F85] Fassi-Fehri O., "*Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice isotrope - application à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité*", Thèse, Université de Metz (1985)
- [F87] Fremond M., "*Matériaux à mémoire de forme*", C.R. Acad. Sciences, Paris, T304, Série II, 7, pp.239-244 (1987)
- [F88] FLEXMEDICS Co., "*Precision Superelastic archwire products developed for optimum results and accuracy in the corrective appliance system*", Dépliant commercial (1988)  
FlexMedics Corporation / 620 Ford Center / 420 North Fifth Street / Minneapolis, Minnesota 55401 (U.S.A.)  
Tél: (612) 338-8265
- [F92a] FURUKAWA ELECTRIC Co., "*Furukawa NT Alloys*", Dépliant commercial (1992)  
The Furukawa Electric Co., LTD / 6-1 Marunouchi 2-chome / Chiyoda-ku / Tokyo (Japan)  
Tél: (03) 286-3211/3219
- [F92b] FLEXMEDICS Co., "*Nickel-Titanium Meniscal Suture Needle Kit*", Dépliant commercial (1992) [F88]
- [G86] Guenin G., "*Alliages à mémoire de forme*", Techniques de l'Ingénieur, M530 (1986)
- [G95] Gillet Y., "*Dimensionnement d'éléments simples en alliage à mémoire de forme*", Thèse, Université de Metz (1995)
- [H54] Hershey A.V., J. Appl. Mech., 21, pp.236 (1954)

- [H65] Hill R., "A self-consistent mechanics of composite materials", *J. Mech. Phys. Solids*, 13, pp.213-222 (1965)
- [H92] Hornbogen E., "Alloys with Shape Memory - New Materials for the Technology of the Future ?", dans Progress in shape memory alloys, Éd. S. Eucken, Allemagne, pp.3-22 (1992)  
ISBN 3-88355-178-3
- [H96] Hautcoeur A., Thèse en cours, LPMM, Université de Metz
- [I92] IMAGO, "Imago: la matière vive", Dépliant commercial (1992)
- [JC92] Jena A.K., Chaturvedi M.C., dans Phase transformations in Materials, Éd. Prentice Hall, U.S.A. (1992)  
ISBN 0-13-663055-3
- [K58] Kröner E., "Kontinuums Theorie das Versetzungen und Eigenspannungen", *Z. Phys.*, 151, pp.504 (1958)
- [K61] Kröner E., "Zur plastischen Verformung des Vielkristalls", *Acta Met.*, 9, pp.155-161 (1961)
- [K78] Kröner E., *J. Phys. F., Metal Phys.*, 8, pp.2261 (1978)
- [K90] Kelly P.M., "Martensitic Transformations in Ceramics", dans Martensitic Transformations I, Éd. by Muddle B.C., pp.335-346 (1990)  
ISBN 0-87849-610-6
- [L92] Lipinski P., "Modélisation du comportement des métaux en transformations élastoplastiques finies à partir des méthodes de transition d'échelle", Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Université de Metz (1992)
- [L95] Lemoine X., "Analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations et conséquences sur le comportement des aciers", Thèse, Université de Metz (1995)

- [LB89] Lipinski P., Berveiller M., "*Elastoplasticity of microinhomogeneous metals at large strains*", Int. J. of Plasticity, 5, pp.149-172 (1989)
- [LBL94] Leclercq S., Bourbon G., L'excellent C., "*Plasticity like model of Martensite Phase Transition in Shape Memory Alloys*", Procs ESOMAT'94, Barcelone, Les Éditions de Physique, pp.513-518 (1994)
- [LC82] J. Lemaitre, J.L. Chaboche, dans Mécanique des matériaux solides, Éd. DUNOD, Paris (1982)
- [M92] MARCHON, "*Flexon: The Metal With a Memory*", Dépliant commercial (1992)  
Marchon® / 35 Hub Drive / Melville / New York 11747 (U.S.A.)  
Tél: (516) 755-2020
- [M94] Muller D., "*Influence de l'écroutissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins*", Thèse, Université de Metz (1994)
- [N78] Z. Nishiyama, dans Martensitic transformation, Academic Press, New York (1978)  
ISBN 0.12.519850-7
- [P87] Pideri C., "*Matériaux composites élastiques. Comparaison de quelques méthodes d'homogénéisation*", Thèse, Université P. et M. Curie, Paris VI (1987)
- [PB90] Patoor E., Berveiller M., dans Les alliages à mémoire de forme, Éd. Hermès, Paris, (1990)  
ISBN 2.86601.236-4

- [PEB88a] Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M., "*Thermomechanical behaviour of shape memory alloys*", Arch. Mech., 40, pp.775-794 (1988)
- [PEB88b] Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M., "*An Integral Equation for the Polycrystalline Thermomechanical Behavior of Shape Memory Alloys*", Procs. MECAMAT, Besançon, France, pp.319-329 (1988)
- [PEB94] Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M., "*Micromechanical Modelling of the Shape Memory Behavior*", Procs ASME WAM'94, Chicago I.L., AMD-189/PVD-292, pp. 22-37 (1994)
- [R89] RAYCHEM, "*TINEL<sup>®</sup> Shape Memory Alloys*", Dépliant commercial (1989)  
Raychem Corporation / Metals Division / 300 Constitution Drive / Menlo Park / CA 94025 (U.S.A.)  
Tél: (415) 361-5895
- [RG87] Rios-Jara D., Guenin G., "*On the Characterization and Origin of the dislocations associated with the Two-Way Memory Effect in Cu-Zn-Al Thermoelastic Alloys*", Acta Met., 35, pp.109-119 et pp.121-126 (1987)
- [RL94] Raniecki B., Lexcellent C., Eur. J. Mech. A/Solids, 13, n°1, pp. 21-50 (1994)
- [S28] Sachs A., "*Zur Ableitung einer Fliessbedingung*", Zeit. Der V.D.I., 72, pp.739-747 (1928)
- [S93] Stoiber J., "*Hysteresis Effects during Martensitic Phase Transformations in Cu-Zn-Al Shape Memory Alloys*", Thèse n°1115, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (1993)

- [SH93] Sun Q.P., Hwang K.C., "*Micromechanics modelling for the Constitutive Behavior of Polycrystalline Shape Memory Alloys*", J. Mech. Phys. Solids, 41, pp.1-17 (1993)
- [SH94] Sun Q.P., Hwang K.C., "*Micromechanics Constitutive Description of Thermoelastic Martensitic Transformations*", Advances in Applied Mechanics, 31, Academic Press, New York, pp. 249-298 (1994)
- [SS87] Suzuki Y., Sekiguchi Y., "*Applications of Shape Memory Alloys*", dans Shape memory alloys, Gordon and Breach Science Publ., 1, pp.176-269 (1987)  
ISBN 2-88124-136-0
- [SVD92] Stalmans R., Van Humbeeck J., Delaey L., "*The Two Way Memory Effect in Copper-Based Shape Memory Alloys - Thermodynamics and Mechanisms*", Acta Met. Mater., 40, n°11, pp.2921-2931 (1992)
- [SWT80] Saburi T., Wayman C.M., Tanaka K., Nenno S., "*The shape memory mechanism in 18R martensitic alloys*", Acta Met., 28, pp.15-32 (1980)
- [T38] Taylor G.Y ., "*Plastic strain in metals*", J. Inst. Metals, 62, pp.307-324 (1938)
- [T90] TOKIN, "*Shape Memory Alloy*", Dépliant commercial (1990)  
Tokin Corporation  
Hazama Bldg. / 5-8 Kita-Aoyama 2-chome / Minato-ku / Tokyo 107 (Japon)  
Tél: (03) 402-6166
- [T92] TOKIN, "*Silent Rock or Concrete Breaker Using Shape Memory Alloy*", Dépliant commercial (1992)

Tokin America Inc. / 155 Nicholson Lane / San Jose /  
CA95134 (U.S.A.)

Tél: 408-432-8020

- [TKS86] Tanaka K., Kobayashi S., Sato Y., "*Thermomechanics of Transformation Pseudoelasticity and Shape Memory Effect in Alloys*", *Int. J. Plasticity*, 2, pp.59-72 (1986)
- [WBR79] Wollants P., de Bonte M., Roos J.R., "*A Thermodynamic Analysis of the Stress-Induced Martensitic Transformation in a Single Crystal*", *Z. Metallkde*, 70, pp.113-117 (1979)
- [VDK74] Warlimont H., Delaey L., Krishnan R.V., Tass H., "*Thermoelasticity, pseudoelasticity and the Memory Effect Associated with Martensitic Transformations*", *J. of Mater. Sci.*, 9, pp.1536 (1974)
- [WLR53] Weschler M.S., Liebermann D.S., Read T.A., "*On the theory of the formation of martensite*", *Trans. AIME*, 197, pp.1503-1515 (1953)



## CHAPITRE III: - Modélisation du fluage anisotherme -

III.1 - INTRODUCTION	....Page 67
III.2 - LE COMPORTEMENT DU MONOCRISTAL	....Page 68
III.2.1 - CINÉMATIQUE DE LA TRANSFORMATION	.....69
III.2.2 - CRITÈRE DE TRANSFORMATION	.....75
III.2.2.1 - Potentiel thermodynamique	75
III.2.2.2 - Lagrangien réactualisé et forces motrices	80
III.2.2.3 - Pseudo-potentiel de dissipation	82
III.2.3 - LOI DE COMPORTEMENT	.....84
III.2.3.1 - Loi d'évolution	84
III.2.3.2 - Modules tangents thermomécaniques	85
III.3 - LE COMPORTEMENT DU POLYCRISTAL	....Page 87
III.3.1 - DÉFINITION DU PROBLÈME	.....87
III.3.2 - HOMOGÉNÉISATION ET LOCALISATION	.....89
III.3.3 - APPROCHE AUTOCOHÉRENTE	.....91
III.3.3.1 - Équation intégrale thermomécanique	91
III.3.3.2 - Résolution formelle	98
III.3.3.3 - Approximation autocohérente à un site	101
III.3.4 - REMARQUE	.....105

<b>III.4 - INFLUENCE DE LA VITESSE DE SOLLICITATION</b>	<b>..Page 106</b>
III.4.1 - INTRODUCTION	.....106
III.4.2 - ÉVOLUTION DE LA TEMPÉRATURE DU POLYCRISTAL AVEC LE TAUX DE MARTENSITE	.....108
<b>III.5 - CONCLUSION</b>	<b>..Page 111</b>
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES III</b>	<b>..Page 113</b>

*Dans ce chapitre, on présente la modélisation adoptée pour décrire le comportement lié aux transformations martensitiques thermoélastiques assistées par un champ de contrainte. On considère la contrainte et la température comme variables de contrôle. Le grain est pris comme élément du volume représentatif et on définit la loi de comportement pour ce volume assimilé à un monocristal. Les effets intergranulaires sont pris en compte par une méthode de transition d'échelle. Nous établissons d'abord le formalisme nécessaire à la localisation et l'homogénéisation dans le cas où la température est une variable. L'équation intégrale thermomécanique ainsi obtenue est résolue en utilisant l'approximation autocohérente à un site.*

### III.1 - INTRODUCTION

Le présent travail porte sur la superthermoélasticité des alliages à mémoire de forme. Ce comportement se caractérise par la formation de plaquettes de martensite orientées par un champ de contrainte appliquée (§II.2.2.2). Deux types de chargement simple sont possibles: soit la contrainte appliquée varie à température imposée constante (comportement superélastique), soit la contrainte macroscopique est imposée et la température varie (fluage anisotherme).

Cette étude fait suite à une série de travaux sur la modélisation des alliages à mémoire de forme réalisés au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz au sein de l'équipe du Pr. M. Berveiller. Un premier modèle simplifié a vu le jour en 1986 [P86][PEB87]. Il considérait une seule variante par grain et permettait d'obtenir des premiers résultats satisfaisants. Suite à ce premier succès et sur la base du modèle développé en plasticité par Lipinski [L92], ~~Bensalah~~ [B92] établit un modèle de comportement pour la transformation austénite-martensite en utilisant une approximation de type [0 1 1] pour décrire l'orientation des variantes de martensite. El Amrani [E94] utilise ensuite une orientation

justifiée par des observations cristallographiques (de type [2 11 12]), ce qui a permis d'expliquer l'origine de la dissymétrie en traction et en compression. Patoor [P95] inclut entre temps les phénomènes d'hystérésis et de décharge (transformation inverse), ce qui permet d'aboutir à un modèle de comportement très performant pour le caractère superélastique (isotherme) des alliages à mémoire de forme. Ces modèles prennent également en compte les contraintes cinématiques liées aux différentes fractions volumiques (de variantes et globale).

Faisant suite à ces travaux, l'objet de cette étude est de considérer la température comme variable de contrôle au même titre que la contrainte. En adoptant une approche micromécanique (à l'échelle du réseau cristallin) qui prend en compte les mécanismes microscopiques physiques qui sont responsables de la transformation martensitique, on caractérise le comportement d'un monocristal (§III.2). Cette étape nécessite de définir un potentiel thermodynamique qui permet de décrire l'équilibre et l'évolution d'un volume d'austénite et de martensite en fonction de variables de contrôle telles que la température et la contrainte. Le comportement du polycristal est ensuite obtenu par l'approche autocohérente (§III.3). L'écriture et la résolution d'une nouvelle équation intégrale sont alors nécessaires: on obtient ainsi une description du fluage anisotherme. On réalise ensuite une étude thermique simplifiée, basée sur les résultats de la thermodynamique classique et les travaux de Chrysochoos [CPM93]. Ceci permet de prendre en compte les variations de température liées aux transformations directe et inverse et de rendre compte de l'effet de la vitesse de déformation sur le comportement.

## III.2 - LE COMPORTEMENT DU MONOCRISTAL

Plusieurs solutions existent quant au choix de l'échelle locale de description. Le volume constitué par un ensemble de grains peut constituer l'élément représentatif [SH94]. Dans ces modèles la fraction de martensite

dans les grains prend les valeurs 0 ou 1 sans possibilité d'obtenir des informations précises sur l'évolution de la microstructure. À l'inverse, les modèles à frontières mobiles décrivent très précisément cette évolution mais sont très lourds numériquement si l'on veut décrire le comportement d'un polycristal constitué de nombreux grains.

On choisit une échelle de description intermédiaire considérant les variantes de martensite dans les grains. Une étude cinématique permet une description précise des mécanismes de déformation. La définition d'un potentiel thermodynamique permet d'établir un critère de transformation pour chaque variante de martensite [PEB88]. On aboutit finalement à la loi de comportement du monocristal [EPE95].

### III.2.1 - CINÉMATIQUE DE LA TRANSFORMATION

Considérons un milieu soumis à l'application d'un chargement thermomécanique<sup>(5)</sup> défini par une contrainte  $\Sigma$  et une température  $T$ .

En un point donné  $r$  du matériau, plusieurs mécanismes participent à la déformation totale locale  $\varepsilon(r)$ :

- l'élasticité  $\varepsilon^e(r)$ ,
- la plasticité  $\varepsilon^p(r)$ ,
- la dilatation thermique  $\varepsilon^{th}(r)$ ,
- la transformation martensitique  $\varepsilon^T(r)$ .

Le comportement engendré par l'ensemble de ces déformations est inélastique, une approche en vitesse de déformation est donc indispensable.

Dans l'hypothèse des déformations infinitésimales, on peut écrire:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(r) = \dot{\varepsilon}_{ij}^e(r) + \dot{\varepsilon}_{ij}^p(r) + \dot{\varepsilon}_{ij}^{th}(r) + \dot{\varepsilon}_{ij}^T(r) \quad (\text{III.1})$$

---

<sup>(5)</sup> On néglige les défauts engendrés par le chargement: l'effet du cyclage n'est donc pas modélisé.

- La déformation élastique est reliée en tout point  $r$  du matériau à la contrainte locale  $\sigma(r)$  par le module des compliances  $s(r)$  du milieu:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e(r) = s_{ijkl}(r) \dot{\sigma}_{kl}(r) \quad (\text{III.2a})$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = c_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}^e(r) \quad (\text{forme duale}) \quad (\text{III.2b})$$

*avec  $c(r)$  module élastique*

- La déformation thermique est donnée par le tenseur des dilatations thermiques  $\alpha(r)$  du matériau. Si  $T(r)$  est la température en chaque point:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{th}(r) = \alpha_{ij}(r) \dot{T}(r) \quad (\text{III.3})$$

- En présence d'une transformation martensitique thermoélastique (cas des alliages à mémoire de forme), les déformations plastiques peuvent être négligées.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p(r) = 0 \quad (\text{III.4})$$

Les quantités globales sont obtenues par la moyenne sur le volume  $V$  des quantités locales correspondantes:

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}(r) dV \quad (\text{III.5})$$

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\sigma}_{ij}(r) dV \quad (\text{III.6})$$

On introduit l'expression de la déformation locale  $\epsilon(r)$ (Éq.III.1) dans l'équation (III.5).

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^e(r) dV + \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^{th}(r) dV + \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^T(r) dV \quad (\text{III.7})$$

Hypothèses:

- Le module de complaisance élastique  $s(r)$  est uniforme et égal dans les deux phases:  $s(r)=s=S$ . Par conséquent, d'après (III.2a) et (III.6):

$$\frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^e(r) dV = \frac{1}{V} s_{ijkl} \int_V \dot{\sigma}_{kl}(r) dV = S_{ijkl} \dot{\Sigma}_{kl} \quad (III.8)$$

- Le module thermique  $\alpha_{ij}$  est de la forme  $\alpha\delta_{ij}$  et la température T est supposée uniforme dans le matériau:

$$\frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^{th}(r) dV = \alpha \dot{T} \delta_{ij} \quad (III.9)$$

Finalement, la déformation totale E du monocristal (III.7) s'écrit:

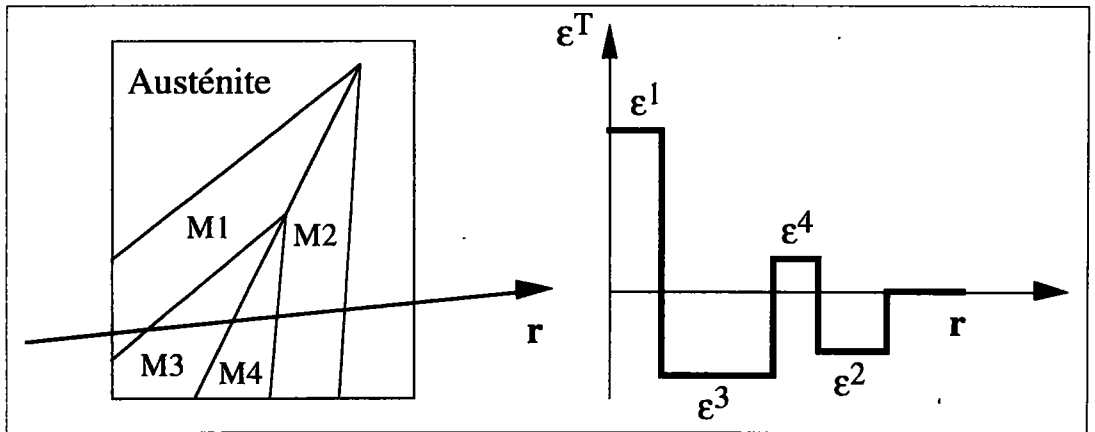
$$\dot{E}_{ij} = \dot{E}_{ij}^e + \dot{E}_{ij}^{th} + \dot{E}_{ij}^T \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{E}_{ij}^e = S_{ijkl} \dot{\Sigma}_{kl} \\ \dot{E}_{ij}^{th} = \alpha \delta_{ij} \dot{T} \\ \dot{E}_{ij}^T = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^T(r) dV \end{array} \right. \quad (III.10)$$

Les contributions élastique et thermique sont obtenues de façon classique à partir des relations de thermoélasticité linéaire pour des matériaux homogènes. Le calcul de la déformation totale du monocristal requiert également la connaissance du champ de déformation de transformation associé au changement de phase. Pour cela, une étude cristallographique de la transformation est nécessaire.

La déformation de transformation est nulle dans l'austénite et on fait l'hypothèse d'une déformation uniforme par morceaux dans la martensite (fig.III-1). En notant  $V_A$  le volume d'austénite,  $V_M$  le volume de martensite ( $V_A + V_M = V$ ) et  $V_n$  les volumes des différentes variantes de martensite, on obtient:

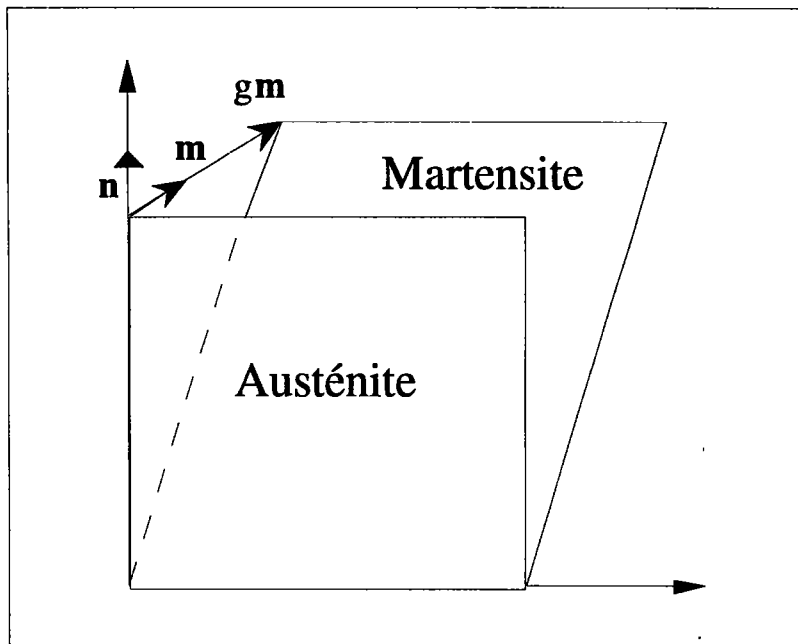
$$\frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^T(r) dV = \frac{1}{V} \int_{V_M} \dot{\epsilon}_{ij}^T(r) dV = \sum_n \epsilon_{ij}^n f^n \quad (III.11)$$

avec  $f^n = V_n/V$  et  $\epsilon^n$  la fraction volumique et la déformation de transformation de la variante n.



*Fig.III-1: Représentation schématique du champ de déformation de transformation (uniforme par morceaux).*

La déformation  $\epsilon^n$  liée à la formation d'une variante de martensite est caractérisée par sa normale  $\mathbf{n}$ , sa direction de transformation  $\mathbf{m}$  et l'amplitude de glissement  $g$  (fig.III-2). Ces caractéristiques sont fonction des paramètres de maille des deux phases et des relations d'orientation liant celles-ci [WLR53].



*Fig.III-2: Transformation d'un élément de volume d'austénite en martensite (formation d'une plaquette).*



D'après ce formalisme, les composantes du vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  d'un point P de coordonnées initiales  $x_i$  s'obtient, en utilisant la convention de l'indice muet:

$$u_i = g x_i n_j m_j \quad (\text{III.12})$$

La déformation intrinsèque  $\epsilon^n$  associée à la transformation de la variante n dérive du déplacement  $\mathbf{u}$ . Dans le cas des déformations infinitésimales, elle est définie par la partie symétrique de ce gradient.

$$\epsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} g (n_i m_j + m_i n_j) = R_{ij}^n g \quad (\text{III.13})$$

$R^n$  est appelé tenseur d'orientation de la variante n.

Cette approche cinématique permet de rendre compte d'une manière simple de la déformabilité des alliages à mémoire de forme. Dans un monocristal monovariant, une variation  $\dot{f}$  de la fraction volumique entraîne une variation  $\dot{\epsilon}^T$  de la déformation définie par:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T = g R_{ij}^n \dot{f} \quad (\text{III.14})$$

Dans le cas où plusieurs variantes se forment, chacune d'elles contribue à la déformation globale avec sa fraction volumique propre  $f^n$  et son tenseur d'orientation  $R^n$ . Par sommation, on obtient:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^T = \sum_n g R_{ij}^n \dot{f}^n \quad (\text{III.15})$$

Cette formulation permet de caractériser et de prendre en compte les différents mécanismes vus précédemment (§II.2.2.2), à savoir:

- La formation de martensite orientée impliquant une déformation de transformation macroscopique:

Exemple: Transformation monovariante ( $R=0,5$ ) complète ( $f=1$ ) avec  $g=0,2$  (valeur courante pour un alliage de cuivre).

$g = 0,23$

$$\Rightarrow \varepsilon^T = g R f$$

$$\Rightarrow \varepsilon^T = 0,2 * 0,5 * 1 = 0,1 \text{ soit } 10\%$$

- La formation de variantes autoaccommodantes entraînant une transformation sans déformation macroscopique:

*Exemple: Transformation équi-volume ( $f^1=f^2=0,5$ ) de 2 variantes avec des tenseurs d'orientation opposés ( $R^1=0,3$  et  $R^2=-0,3$ )*

$$\Rightarrow \varepsilon^T = g (R^1 f^1 + R^2 f^2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon^T = 0,2 * (0,15 - 0,15) = 0$$

- La possibilité de réorientation en phase martensitique permettant une déformation de transformation sans transformation:

*Exemple: Au départ, 2 variantes avec  $f^1=f^2=0,5$ ,  $R^1=0,3$  et  $R^2=0,2$*

$$\Rightarrow \varepsilon^T = g (R^1 f^1 + R^2 f^2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon^T = 0,2 * 0,5 * 0,5 = 0,05 \text{ soit } 5\%$$

*Une contrainte appliquée privilégie la variante 1 ( $f^1=1$ ) aux dépens de la variante 2 ( $f^2=0$ ).*

$$\Rightarrow \varepsilon^T = g R^1 f^1$$

$$\Rightarrow \varepsilon^T = 0,2 * 0,3 * 1 = 0,06 \text{ soit } 6\%$$

*Sans transformation (la fraction totale de martensite est restée égale à 1), la déformation de transformation augmente.*

Comme les paramètres  $g$  et  $R^n$  sont complètement définis par la nature cristallographique de la transformation, la relation (III.15) montre que les fractions volumiques  $f^n$  sont de bons paramètres pour décrire l'évolution de la microstructure et caractériser l'état de déformation du matériau.

Remarque:

- Des limitations physiques évidentes sont imposées aux fractions volumiques des différentes variantes  $n$ ,

$$\forall n, f^n \geq 0 \tag{III.16}$$

- et la fraction volumique totale de martensite  $f$  ne peut excéder l'unité:

$$f = \sum_n f^n \leq 1 \tag{III.17}$$

Finalement:

$$\dot{E}_{ij} = S_{ijkl} \dot{\Sigma}_{kl} + \alpha_{ij} \dot{T} + \sum_n g R_{ij} f^n \quad (III.18)$$

Cette expression nécessite la connaissance de l'évolution des fractions volumiques pendant la transformation. Un potentiel thermodynamique va permettre d'aboutir à ces lois d'évolution.

### III.2.2 - CRITÈRE DE TRANSFORMATION

#### III.2.2.1 - Potentiel thermodynamique

Considérons un cristal de volume de référence  $V$  soumis à un état de déformation  $E$  à la température  $T$ . L'énergie libre d'Helmholtz  $\Phi$  associée à ce volume est composée de plusieurs contributions ayant différentes significations physiques [E61]. Ces composantes sont une énergie élastique  $W_{\text{élas}}$ , une énergie chimique  $\Delta G_{\text{ch}}$  et une énergie interfaciale  $W_{\text{int}}$ .

$$\Phi(E_{ij}, T, f^n) = \Delta G_{\text{ch}} + W_{\text{élas}} + W_{\text{int}} \quad (III.19)$$

La transformation martensitique est provoquée soit par l'accroissement  $d\Sigma$  de la contrainte, soit par un abaissement  $dT$  de la température. Les variables de contrôle étant la contrainte et la température, l'énergie libre complémentaire  $\Psi$  est mieux adaptée à la description du comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme:

$$\Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) = -(\Delta G_{\text{ch}} + W_{\text{élas}} + W_{\text{int}} - \Sigma_{ij} E_{ij}) \quad (III.20)$$

Cette énergie dépend de la contrainte appliquée  $\Sigma$ , de la température  $T$  et de variables qui décrivent l'état microstructural du matériau. Afin de prendre en compte les mécanismes physiques responsables du comportement, les fractions volumiques des différentes variantes de martensite sont choisies comme variables internes.

**- L'Énergie chimique**

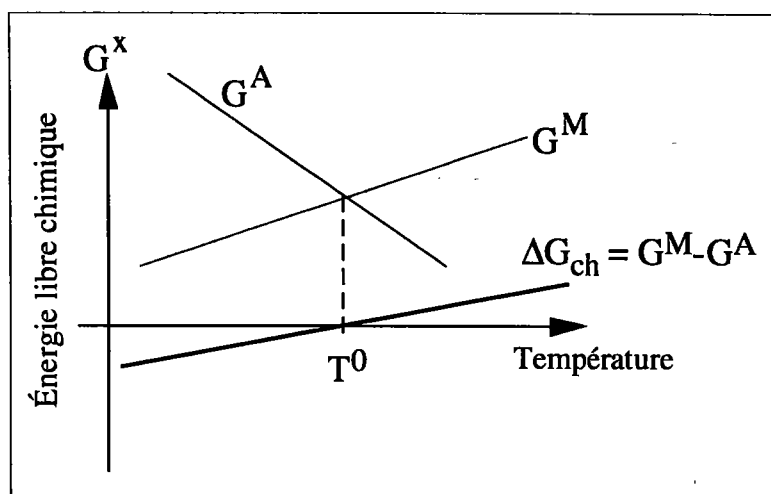
L'énergie chimique est liée à la différence des énergies cristallographiques  $G^x$  des deux phases ( $x=A$  pour l'austénite,  $x=M$  pour la martensite), elle est fonction de la température  $T$ .

$$\Delta G_{ch}(T) = \int_{V_M} [G^M(T) - G^A(T)] dV \quad (III.21)$$

La transformation martensitique ne faisant pas intervenir de changement dans la composition chimique, les phases mère et produit peuvent être traitées comme un système à un seul composant.

Pour les températures proches de la température d'équilibre thermodynamique  $T_0$ , une approximation linéaire de  $G^M(T)-G^A(T)$  est couramment utilisée (fig.III-3).

$$\Delta G_{ch} = B(T - T_0)V_M \quad (III.22)$$



*Fig.III-3: Représentation schématique des énergies libres chimiques de l'austénite et de la martensite.*

Dans l'expression précédente (III.22) le coefficient de proportionnalité  $B$  et la température  $T_0$  sont des constantes du matériau. Elles sont fonction de la composition chimique de l'alliage.

**- L'Énergie interfaciale**

L'énergie interfaciale associée à la formation d'un domaine martensitique

est la sommation sur toutes les interfaces austénite-martensite et martensite-martensite de la densité d'énergie interfaciale  $\gamma(r)$ .

$$W_{\text{int}} = \int_S \gamma(r) dS \quad (\text{III.23})$$

Cette énergie n'est pas directement reliée au volume de ce domaine mais simplement à son ratio volume/surface. La cinétique et la morphologie de la transformation de phase des alliages à mémoire de forme sont caractérisées par une déformation de Bain, qui implique une transformation dominée par l'énergie de déformation. En effet, la martensite se crée sous forme de plaquettes allongées qui font apparaître d'importantes surfaces d'interfaces mais un très faible volume. Cette observation amène à négliger l'énergie interfaciale.

$$W_{\text{int}} \cong 0 \quad (\text{III.24})$$

#### - L'Énergie élastique

L'énergie élastique est le dernier terme qui contribue au potentiel  $\Psi$ . Elle est associée aux déformations élastiques qui sont liées au chargement imposé et aux contraintes internes:

$$W_{\text{élas}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^e dV \quad (\text{III.25})$$

Avec les hypothèses adoptées (température  $T$  et module thermique  $\alpha$  uniformes) le champ de déformation thermique  $\varepsilon^{\text{th}}$  ne produit pas de contraintes internes et est négligé. Dans l'expression (III.25), le champ de déformation élastique s'écrit:

$$\varepsilon_{ij}^e(r) = \varepsilon_{ij}(r) - \varepsilon_{ij}^T(r) \quad (\text{III.26})$$

$$\Rightarrow W_{\text{élas}} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}(r) dV - \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \quad (\text{III.27})$$

- En intégrant la première intégrale par parties:

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}(r) dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) u_{i,j}(r) dV = \frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}(r) u_i(r) n_j dS$$

Or, sur la frontière S:  $\sigma_{ij}(r) = \Sigma_{ij}$

$$\frac{1}{2} \int_S \sigma_{ij}(r) u_i(r) n_j dS = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \int_S u_i(r) n_j dS = \frac{1}{2} \Sigma_{ij} \int_V u_{i,j}(r) dV$$

Finalemment:

$$\frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(r) \varepsilon_{ij}(r) dV = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} E_{ij} \quad (\text{III.28})$$

- Pour le second terme de l'équation (III.27), on décompose le champ de contrainte local  $\sigma(r)$  en un champ de contrainte appliquée  $\Sigma$  et des fluctuations locales  $\tau(r)$ .

$$\sigma_{ij}(r) = \Sigma_{ij} + \tau_{ij}(r) \quad (\text{III.29})$$

$\tau(r)$  définit un champ à valeur moyenne nulle. Il représente le champ de contrainte interne lié aux incompatibilités de déformation des différentes variantes dans le volume représentatif considéré.

L'énergie élastique (III.27) se réécrit alors:

$$W_{\text{élas}} = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} E_{ij} - \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} E_{ij}^T - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV$$

$$W_{\text{élas}} = \frac{1}{2} V \Sigma_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} - \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \quad (\text{III.30})$$

Les différentes contributions énergétiques déterminées (Éqs. III.22, III.23 et III.30), l'énergie libre complémentaire par unité de volume (III.20) devient alors:

$$\begin{aligned} \Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) = & -B(T - T_0) \sum f^n + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} + \alpha \Sigma_{kk} \Delta T + \\ & + \Sigma_{ij} \sum_n \epsilon_{ij}^n f^n + \frac{1}{2V} \int_V \tau_{ij}(r) \epsilon_{ij}^T(r) dV \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Mises à part les variables de contrôle (contrainte appliquée  $\Sigma$  et température  $T$ ) et les variables internes (fractions volumiques  $f^n$ ), les autres paramètres qui apparaissent dans ce potentiel sont connus:  $S$  et  $\alpha$  sont les modules thermoélastiques du matériau,  $T_0$  est la température d'équilibre thermodynamique,  $B$  est une constante chimique du matériau et les déformations de transformation  $\epsilon^n$  sont données cristallographiquement par les tenseurs d'orientation  $R^n$  et l'amplitude de déformation  $g$ . Le dernier terme de l'équation (III.31) reste à déterminer. Ce terme décrit l'énergie élastique associée aux contraintes internes d'incompatibilité de la transformation. Il est lié à la formation de la phase martensitique et aux interactions entre les variantes mais ne se réduit pas facilement à une fonction des variables  $f^n$ . Pour surmonter cette difficulté, une évaluation réaliste est obtenue à partir de considérations physiques sur la croissance des plaquettes de martensite pendant la transformation martensitique. Des analyses micromécaniques réalisées par O. Fassi-Fehri et M.O. Ben Salah [FHB87][B92] permettent d'écrire le terme d'énergie élastique sous la forme d'une matrice d'interaction  $H^{nm}$ . Cette matrice inclue les facteurs de forme et d'orientation de la microstructure, ce qui permet de décrire l'évolution de l'état microstructural pendant la transformation en utilisant les seules variables internes  $f^n$ . Ces analyses reposent sur l'hypothèse suivante, bien vérifiée en superélasticité: croissance de quelques variantes dans des domaines bien délimités du grain. L'annexe 1 détaille les hypothèses qui permettent d'aboutir à l'expression suivante pour l'énergie d'interaction:

$$-\frac{1}{2V} \int_V \tau(r) \epsilon_{ij}^T(r) dV = W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{n,m} H^{nm} f^n f^m \quad (\text{III.32})$$

La matrice obtenue est fortement anisotrope, elle comprend deux types de termes. Un terme faible symbolise l'interaction entre les variantes autoaccommodantes, pour lesquelles il existe une interface commune compatible entre elles, c'est à dire ne nécessitant pas de déformation élastique d'accommodation. Le terme fort relie les variantes incompatibles, l'interface commune s'orientant afin de minimiser (sans l'annuler) l'énergie élastique associée (voir annexe 1).

Le potentiel thermodynamique s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) = & -B(T - T_0) \sum_n f^n + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} + \alpha \Sigma_{kk} \Delta T + \\ & + \Sigma_{ij} \sum_n \epsilon_{ij}^n f^n - \frac{1}{2} \sum_{n,m} H^{nm} f^n f^m \end{aligned} \quad (III.33)$$

Cette équation décrit l'état du système austénite-martensite en l'absence de processus dissipatifs. L'optimisation de cette fonctionnelle permet de définir l'état d'équilibre d'un mélange austénite+martensite soumis à un chargement thermomécanique donné par  $\Sigma$  et  $T$ . Les variables internes  $f^n$  prennent la valeur qui minimise ce potentiel. Toutefois, il faut prendre en compte les limitations physiques (III.16) et (III.17) existantes sur ces quantités. Un lagrangien réactualisé  $L(\Sigma_{ij}, T, f^n)$  permet de résoudre cette difficulté.

### III.2.2.2 - Lagrangien réactualisé et forces motrices

Le lagrangien réactualisé va permettre de réécrire les inégalités relatives aux contraintes s'exerçant sur les variables  $f^n$  et  $f$  sous forme de relations d'égalité, plus exploitables.

Ces variables internes possèdent un sens physique clair:

- les  $n$  fractions volumiques  $f^n$  ne peuvent être négatives: condition III.16
- la fraction volumique totale ne peut être supérieure à 1: condition III.17

$$\begin{cases} f^n \geq 0 \\ f \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow A_i(f^n) \leq B_i \quad (III.34a)$$



$$\text{avec } \begin{cases} A_i(f^n) = -f^n \text{ et } B_i = 0 \text{ pour } i = 1 \text{ à } n \\ A_i(f^n) = f \text{ et } B_i = 1 \text{ pour } i = 0 \end{cases} \quad (\text{III.34b})$$

L'écriture du lagrangien nécessite l'utilisation de  $n+1$  multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i$ , qui ont la particularité d'être toujours positifs ou nuls, ainsi:

$$\lambda_i [A_i(f^n) - B_i] \leq 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -\lambda_i f^n \leq 0 \\ \lambda_i (f - 1) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

Le Lagrangien fonctionnel  $L$  est défini ainsi:

$$L(\Sigma_{ij}, T, f^n) = \Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) - \sum_i \lambda_i [A_i(f^n) - B_i] \quad (\text{III.36})$$

L'état qui minimise cette fonction est obtenu par les conditions optimales de Kuhn-Tucker. Les contraintes (III.16) et (III.17) s'expriment alors:

$$\lambda_i [A_i(f^n) - B_i] = 0 \quad \text{avec} \quad \lambda_i \geq 0 \quad (\text{III.37})$$

La force motrice  $F^n$  qui agit sur la variable interne  $f^n$  est classiquement obtenue par la dérivée du potentiel contraint par rapport à  $f^n$  [R71]:

$$F^n = \frac{\partial L}{\partial f^n} = \frac{\partial \Psi}{\partial f^n} - \sum_i \lambda_i \frac{\partial A_i}{\partial f^n}$$

$$F^n = -B(T - T_0) + \Sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^n - \sum_m H^{nm} f^m + \lambda_n - \lambda_0 \quad (\text{III.38})$$

où  $\lambda_0$  (resp.  $\lambda_n$ ) est le multiplicateur associé à la contrainte d'inégalité  $f \leq 1$  (resp.  $-f^n \leq 0$ ).

À ce stade, le potentiel thermodynamique ne décrit pas entièrement le comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme, il est purement thermoélastique. Un effet d'hystérésis est montré par ces matériaux [DOV88], vraisemblablement dû à de la dissipation causée par les frictions interfaciales et la production de défauts durant la

transformation. On choisit d'introduire un second potentiel afin de rendre compte de ce phénomène. Ce pseudo-potential de dissipation, noté  $W^d$ , prend en compte l'effet d'hystérésis d'une manière phénoménologique.

### III.2.2.3 - Pseudo-potential de dissipation

Ce potentiel est généralement supposé être proportionnel à la fraction volumique cumulée  $f_{cu}$  de martensite [SH93].

$$W^d = F_c \int |df| = F_c f_{cu} \quad (III.39)$$

où  $F_c$  est une constante positive du matériau.

La seconde loi de la thermodynamique et l'équilibre énergétique détermine la loi d'évolution de  $W^d$ .

$$\dot{\Psi}|_{\Sigma, T} = \dot{W}^d \geq 0 \quad (III.40)$$

La force motrice thermodynamique  $F^n$  exercée sur une variante  $n$  a besoin d'atteindre la valeur critique  $F_c^n$  pour produire une croissance de cette variante. Cette valeur critique est liée à l'état microstructural du matériau, on suppose qu'elle peut être décrite uniquement par l'ensemble des variables  $f^n$ . La condition (III.40) permet alors d'obtenir les conditions suivantes pour les transformations austénite→martensite et martensite→austénite.

$$A \rightarrow M: \quad \sum_n F^n \dot{f}^n = F_c \dot{f} \quad (III.41a)$$

$$M \rightarrow A: \quad \sum_n F^n \dot{f}^n = -F_c \dot{f} \quad (III.41b)$$

En supposant que la dissipation s'effectue sans couplage entre les variantes, les conditions (III.41) peuvent s'exprimer d'une manière indépendante sur chaque variante, qui doit alors vérifier le critère de transformation local, défini pour les transformations martensitiques directe (+) et inverse (-):

$$-B(T - T_0) + \sum_{ij} \epsilon_{ij}^n - \sum_m H^{nm} f^m + \lambda_n - \lambda_0 = \pm F_c \quad (\text{III.42})$$

Les conditions cinématiques (III.16) et (III.17) fournissent n+1 relations supplémentaires à satisfaire:

$$\begin{cases} \lambda_n = B(T - T_0) - \sum_{ij} \epsilon_{ij}^n + \sum_m H^{nm} f^m + \lambda_0 \pm F_c \geq 0 \\ \lambda_0 = -B(T - T_0) + \sum_{ij} \epsilon_{ij}^n - \sum_m H^{nm} f^m + \lambda_n \pm F_c \geq 0 \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

Finalement, la relation (III.42) signifie que la variante n peut être active lorsque la contrainte résolue sur cette variante atteint une valeur critique dépendant de la température et de la fraction volumique des autres variantes déjà formées. Elle montre que si le début de la transformation n'est fonction que du mode de sollicitation et de paramètres intrinsèques à la nature de la transition de phase, la fin de la transformation est fortement dépendante de l'état microstructural.

Remarque:

À l'état libre de contrainte, on peut définir les températures de transformation  $M_S$  et  $A_f$  caractérisées par l'absence de martensite ( $f^n=0 \quad \forall n$ ).

$$\Rightarrow \begin{cases} -B(M_S - T_0) = F_c \\ -B(A_f - T_0) = -F_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_S = T_0 - \frac{F_c}{B} \\ A_f = T_0 + \frac{F_c}{B} \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

Ainsi, pour la transformation directe, la frontière initiale s'écrit:

$$\begin{aligned} -B(T - M_S) + \sum_{ij} \epsilon_{ij}^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{ij} R_{ij}^n &= \frac{B}{g} (T - M_S) \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

Cette équation généralise la relation de Patel et Cohen [PC53] qui relie la température de transformation à la contrainte appliquée. Lors d'un chargement mécanique à température constante, la première variante qui apparaît est celle pour laquelle la contrainte résolue  $\Sigma R^n$  est maximale. Aussi, lorsque la contrainte appliquée est nulle, toutes les variantes doivent se former à  $T=M_S$ .

En définitive, tous les paramètres utilisés dans la description de la transformation ( $T_0$ ,  $F_c$ ,  $B$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{g}$ ) peuvent être déterminés expérimentalement ou déduits d'une analyse micromécanique (matrice H). On a vu les conditions d'activation des variantes et donc d'apparition de la martensite, il faut maintenant relier l'évolution des variables internes  $f^n$  aux paramètres du chargement, à savoir la contrainte et la température.

### III.2.3 - LOI DE COMPORTEMENT

#### III.2.3.1 - Loi d'évolution

La démarche thermodynamique précédente nous fournit un critère local de transformation que chaque variante de martensite doit vérifier pour être susceptible de s'activer. Pour ces variantes, leur fraction volumique peut progresser lorsque les paramètres caractérisant le chargement évoluent. Il faut donc trouver une relation entre l'évolution des fractions volumique de chaque variante et ces paramètres (contrainte  $\Sigma$  et température T).

La loi de consistance permet d'écrire:

$$dF^n = \frac{\partial F^n}{\partial \Sigma} d\Sigma + \frac{\partial F^n}{\partial T} dT + \frac{\partial F^n}{\partial f^n} df^n = 0 \quad (\text{III.46})$$

Ce qui revient à écrire, d'après (III.38):

$$\varepsilon_{ij}^n d\Sigma_{ij} - B dT - \sum_m H^{nm} df^m = 0$$

$$\Leftrightarrow df^n = \sum_m \left[ H^{nm} \right]^{-1} \left( \varepsilon_{ij}^n d\Sigma_{ij} - BdT \right) \quad (\text{III.47})$$

Cette équation indique que la progression d'une variante dépend non seulement de l'accroissement de la contrainte réduite sur cette variante, mais aussi de la présence des autres variantes. Lors d'un refroidissement à contrainte constante (fluage anisotherme), la matrice d'interaction H influe sur les progressions des variantes en privilégiant les variantes à interaction faible.

### III.2.3.2 - Modules tangents thermomécaniques

Les modules tangents thermomécaniques  $l(r)$  et  $m(r)$  relient la déformation totale locale à la contrainte locale et à la température:

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = l_{ijkl}(r) \dot{\varepsilon}_{kl}(r) - m_{ij}(r) \dot{T} \quad (\text{III.48})$$

Afin de déterminer ces modules qui représentent le comportement local, nous allons établir une relation du même type  $\dot{\sigma}(r) = f(\dot{\varepsilon}_{kl}(r), \dot{T})$  afin d'identifier les modules  $l(r)$  et  $m(r)$  aux expressions précédentes.

Pour cela, on utilise la loi de Hooke:

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = C_{ijkl}(r) \dot{\varepsilon}_{kl}^e(r) = C_{ijkl}(r) \left[ \dot{\varepsilon}_{kl}(r) - \dot{\varepsilon}_{kl}^{th}(r) - \dot{\varepsilon}_{kl}^T(r) \right] \quad (\text{III.49})$$

Rappel des différentes contributions:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_{kl}^{th}(r) = \alpha \delta_{kl} \dot{T} \\ \dot{\varepsilon}_{kl}^T(r) = \sum_n \varepsilon_{kl}^n \dot{f}^n \end{cases}$$

Le critère est également nécessaire, puisqu'il doit être vérifié pour toute variante n:

$$\varepsilon_{pq}^n \dot{\sigma}_{pq} = B\dot{T} + \sum_m H^{nm} \dot{f}^m \quad (\text{III.50})$$

La loi de comportement (III.49), introduite dans le critère (III.50) donne:

$$\varepsilon_{pq}^n C_{pqrs} \left( \dot{\varepsilon}_{rs}(r) - \alpha \delta_{rs} \dot{T} - \sum_m \varepsilon_{rs}^m \dot{f}^m \right) = B \dot{T} + \sum_m H^{nm} \dot{f}^m$$

$$\Leftrightarrow \sum_m H^{nm} \dot{f}^m + \varepsilon_{pq}^n C_{pqrs} \sum_m \varepsilon_{rs}^m \dot{f}^m = \varepsilon_{pq}^n C_{pqrs} (\dot{\varepsilon}_{rs}(r) - \alpha \delta_{rs} \dot{T}) - B \dot{T}$$

$$\Leftrightarrow \sum_m {}^* H^{nm} \dot{f}^m = \varepsilon_{pq}^n C_{pqrs} \dot{\varepsilon}_{rs}(r) - (B + \varepsilon_{pq}^n C_{pqrs} \alpha \delta_{rs}) \dot{T} \quad (III.51a)$$

$$\text{avec: } {}^* H^{nm} = H^{nm} + \varepsilon_{pq}^n C_{pqrs} \varepsilon_{rs}^m \quad (III.51b)$$

Soit, en inversant l'équation:

$$\dot{f}^n = \sum_m ({}^* H^{nm})^{-1} \left[ \varepsilon_{pq}^n C_{pqrs} \dot{\varepsilon}_{rs}(r) - (B + \varepsilon_{pq}^n C_{pqrs} \alpha \delta_{rs}) \dot{T} \right] \quad (III.52)$$

Cette expression, réintroduite dans la loi de Hooke (III.49), permet d'obtenir la contrainte locale en fonction des variables désirées.

On a:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}(r) = C_{ijkl}(r) & \left\{ \delta_{kr} \delta_{ls} - \sum_{n,m} \varepsilon_{kl}^n ({}^* H^{nm})^{-1} \varepsilon_{pq}^n C_{pqrs}(r) \right\} \dot{\varepsilon}_{rs}(r) \\ & - C_{ijkl}(r) \left\{ \alpha \delta_{kl} - \sum_{n,m} \varepsilon_{kl}^n ({}^* H^{nm})^{-1} (B + \varepsilon_{pq}^n C_{pqrs} \alpha \delta_{rs}) \right\} \dot{T} \end{aligned} \quad (III.53)$$

L'expression des modules thermomécaniques locaux est ainsi déterminée, ils s'expriment:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_{ijkl}(r) = C_{ijkl}(r) - C_{ijrs}(r) \sum_{n,m} \epsilon_{rs}^n \left( {}^*H^{nm} \right)^{-1} \epsilon_{pq}^n C_{pqkl}(r) \\ m_{ij}(r) = C_{ijkl}(r) \alpha \delta_{kl} - C_{ijkl}(r) \sum_{n,m} \epsilon_{kl}^n \left( {}^*H^{nm} \right)^{-1} \left( B + \epsilon_{pq}^n C_{pqrs} \alpha \delta_{rs} \right) \end{array} \right. \quad (\text{III.54})$$

On a établi un critère de transformation permettant de déterminer quelles sont les variantes qui s'activent. D'après ce critère et la connaissance des variantes présentes dans le monocristal, on détermine leurs fractions volumiques en fonction des paramètres de contrôle que sont la contrainte et la température. La connaissance de l'évolution de la transformation dans un monocristal est donc possible, et ce, pour un chargement thermomécanique quelconque ( $d\Sigma$  ou  $dT$ ). Il est ensuite possible de déterminer les propriétés du monocristal qui est l'élément constitutif de l'agrégat polycristallin.

### III.3 - COMPORTEMENT DU POLYCRISTAL

#### III.3.1 - DÉFINITION DU PROBLÈME

Jusqu'à présent, l'étude du comportement intragranulaire nous a permis d'aboutir à la loi de comportement du grain. La microstructure plus complexe du polycristal fait apparaître des difficultés supplémentaires, liées aux interactions entre les différents grains. La méthode de transition d'échelle autocohérente résout cette difficulté en remplaçant le milieu hétérogène entourant un grain par un milieu homogène [BZ84][BZ93]. Les contraintes intergranulaires sont alors celles du grain avec ce milieu homogène (de même comportement que la structure polycristalline). On fait l'hypothèse que la température  $T$  est uniforme dans le polycristal.

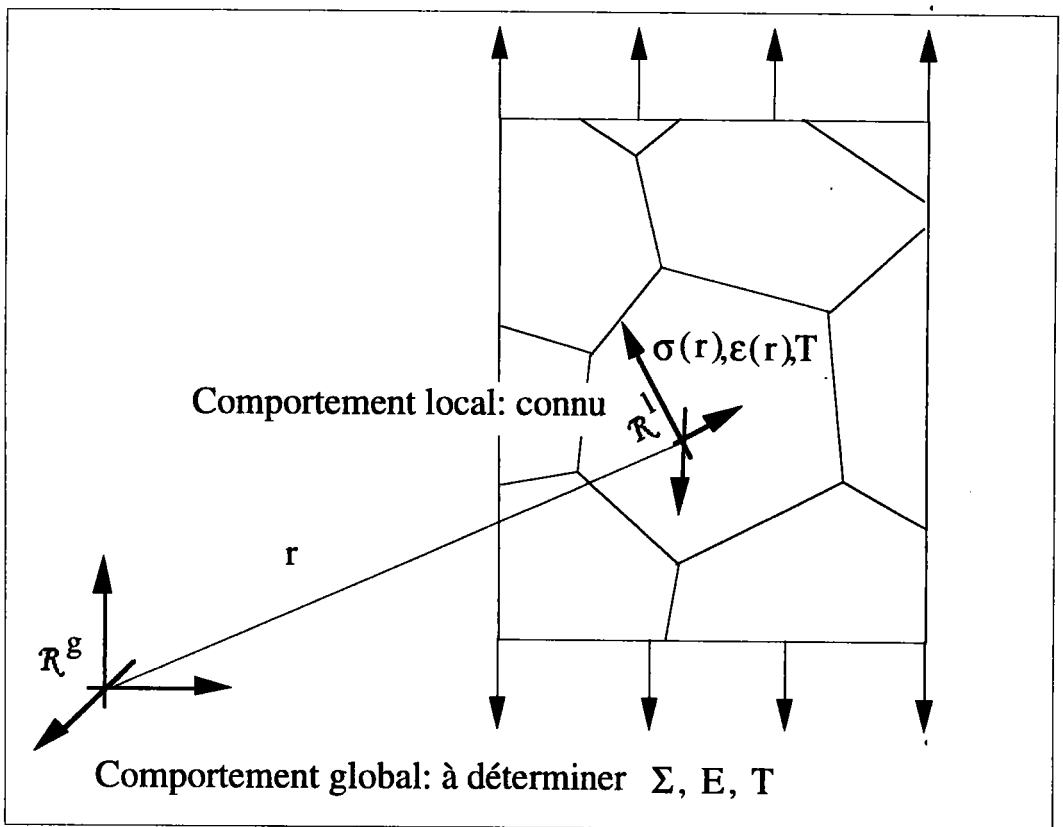
Le comportement local peut être défini de la manière suivante:

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = l_{ijkl}(r)\dot{\epsilon}_{kl}(r) - m_{ij}(r)\dot{T} \quad (\text{III.55})$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}(r) = g_{ijkl}(r)\dot{\sigma}_{kl}(r) + n_{ij}(r)\dot{T} \quad (\text{III.56})$$

Remarque:

$$(\text{III.56}) \rightarrow (\text{III.55}) \Rightarrow \begin{cases} g_{ijkl}(r) = [l_{ijkl}(r)]^{-1} \\ n_{ij}(r) = [l_{ijkl}(r)]^{-1} m_{kl}(r) \end{cases} \quad (\text{III.57})$$



*Fig.III-4: Position du problème et formalisme utilisé. Les variables en minuscules (majuscules) se rapportent au comportement microscopique (macroscopique).*

On suppose que le comportement global (ou effectif) est défini de manière similaire par les relations suivantes:

$$\dot{\Sigma}_{ij} = L_{ijkl}^{eff}\dot{E}_{kl} - M_{ij}^{eff}\dot{T} \quad (\text{III.58})$$



$$\dot{E}_{ij} = G_{ijkl}^{\text{eff}} \dot{\Sigma}_{kl} + N_{ij}^{\text{eff}} \dot{T} \quad (\text{III.59})$$

Remarque:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(III-59)} \rightarrow \text{(III-58)} \Rightarrow \end{array} \right\} \begin{cases} G_{ijkl}^{\text{eff}} = [L_{ijkl}^{\text{eff}}]^{-1} \\ N_{ij}^{\text{eff}} = [L_{ijkl}^{\text{eff}}]^{-1} M_{kl}^{\text{eff}} \end{cases} \quad (\text{III.60})$$

Les modules  $L^{\text{eff}}$  et  $G^{\text{eff}}$  sont les modules mécaniques du comportement macroscopique, ils suffisent pour rendre compte du comportement isotherme des alliages à mémoire de forme [PEB94]. Afin de modéliser le comportement anisotherme de ces alliages, on introduit les modules thermiques effectifs  $M^{\text{eff}}$  et  $N^{\text{eff}}$ .

### III.3.2 - HOMOGENÉISATION ET LOCALISATION

L'objectif étant de décrire le comportement global à partir des relations de comportement local, on introduit deux relations de localisation:

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = B_{ijkl}(r) \dot{\Sigma}_{kl} + b_{ij}(r) \dot{T} \quad (\text{III.61})$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}(r) = A_{ijkl}(r) \dot{E}_{kl} + a_{ij}(r) \dot{T} \quad (\text{III.62})$$

$A(r)$  et  $B(r)$  sont les tenseurs de localisation mécaniques. L'introduction et le calcul des tenseurs de localisation thermique  $a(r)$  et  $b(r)$  sont nécessaires si l'on veut modéliser le comportement en fluage anisotherme. En effet, il est évident qu'une variation de température entraîne une modification des champs locaux de contrainte et de déformation.

Les relations de moyenne usuelles doivent être satisfaites. Le champ de contrainte est statiquement admissible ( $\text{div} \underline{\underline{\sigma}} = 0$ ) et  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$  sur le contour:

$$\dot{\Sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\sigma}_{ij}(r) dV \quad (\text{III.63})$$

Le champ de déformation est cinématiquement admissible ( $\epsilon(r)$  est compatible et dérive d'un champ de déplacement  $u$  vérifiant  $u = E \cdot n$  sur le contour):

$$\dot{E}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}(r) dV \quad (\text{III.64})$$

*Remarque: On peut citer deux propriétés importantes des tenseurs de localisation:*

$$(\text{III.62}) \rightarrow (\text{III.64}) \Rightarrow \frac{1}{V} \int_V A_{ijkl}(r) dV = I_{ijkl} \quad \text{et} \quad \frac{1}{V} \int_V a_{ij}(r) dV = 0$$

$$(\text{III.61}) \rightarrow (\text{III.63}) \Rightarrow \frac{1}{V} \int_V B_{ijkl}(r) dV = I_{ijkl} \quad \text{et} \quad \frac{1}{V} \int_V b_{ij}(r) dV = 0$$

*De plus, on peut éviter de déterminer tous ces tenseurs de localisation, sachant qu'ils sont interdépendants. En effet,*

$$(\text{III.60}) \rightarrow (\text{III.59}) \rightarrow (\text{III.62}) \Rightarrow$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}(r) = A_{ijkl}(r) [L_{klmn}^{\text{eff}}]^{-1} \dot{\Sigma}_{mn} + \left[ A_{ijkl}(r) [L_{klmn}^{\text{eff}}]^{-1} M_{mn}^{\text{eff}} + a_{ij}(r) \right] \dot{T} \quad (\text{III.65})$$

*En introduisant ce résultat dans la loi de comportement locale (III.55) puis en identifiant à (III.61), on obtient:*

$$\begin{cases} B_{ijpq}(r) = l_{ijkl}(r) A_{klmn}(r) [L_{mnpq}^{\text{eff}}]^{-1} \\ b_{ij}(r) = l_{ijkl}(r) \left[ A_{klmn}(r) [L_{mnpq}^{\text{eff}}]^{-1} M_{pq}^{\text{eff}} + a_{kl}(r) \right] - m_{ij}(r) \end{cases} \quad (\text{III.66})$$

*Les tenseurs de localisation étant interdépendants, nous choisissons de calculer  $A(r)$  et  $a(r)$  uniquement.*

Ces considérations faites, on détermine les modules thermomécaniques apparaissant dans les lois de comportement globales. En introduisant (III.62) dans (III.55), on obtient:

$$\dot{\sigma}_{ij}(r) = l_{ijkl}(r) A_{klmn}(r) \dot{E}_{mn} + [l_{ijkl}(r) a_{kl}(r) - m_{ij}(r)] \dot{T}$$

En moyennant cette expression sur tout le volume  $V$  et en identifiant le résultat à la relation (III.58), on aboutit à:

$$\begin{aligned} L_{ijkl}^{eff} &= \frac{1}{V} \int_V l_{ijmn}(r) A_{mnkl}(r) dV \\ M_{ij}^{eff} &= \frac{1}{V} \int_V [m_{ij}(r) - l_{ijkl}(r) a_{kl}(r)] dV \end{aligned} \quad (III.67)$$

La détermination du comportement thermomécanique macroscopique se ramène alors au calcul de  $L^{eff}$  et  $M^{eff}$  à partir des modules thermomécaniques locaux  $l(r)$  et  $m(r)$ , des relations de moyenne (III.63) et (III.64) et des tenseurs de localisation  $A(r)$  et  $a(r)$ . La détermination des tenseurs  $A(r)$  et  $a(r)$  s'obtient par résolution d'une équation intégrale qui relie le comportement local (en l'occurrence le gradient de vitesse du milieu microhétérogène) aux conditions globales cinématiques (imposées sur la frontière du solide macrohomogène). Par rapport aux précédents travaux, cette équation intégrale devient thermomécanique, elle prend en compte le terme température ainsi que les nouveaux tenseurs de localisation introduits  $a(r)$  et  $b(r)$ .

### III.3.3 - APPROCHE AUTOCOHÉRENTE

#### III.3.3.1 - Équation intégrale thermomécanique

L'objectif est d'obtenir une relation liant le comportement local aux conditions globales afin d'identifier les tenseurs de localisation (relation III.62). L'équation intégrale représente le premier pas du calcul qui nous mènera aux coefficients effectifs. Les résultats obtenus dans cette partie seront tout à fait généraux. C'est l'étape suivante, l'approximation

autocoherente à un site, qui nous mènera à la résolution complète et exploitable du problème.

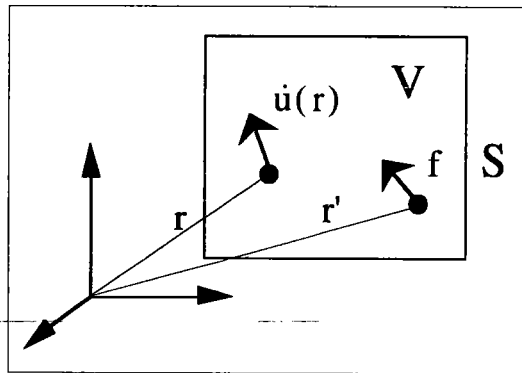
**A) Définitions**

L'écriture de l'équation intégrale repose sur trois équations fondamentales et nécessite une technique de résolution particulière, la méthode du tenseur de Green.

**- Le tenseur de Green**

Dans un volume  $V$  et de frontière  $S$ , une force unitaire  $f$  appliquée en  $r'$  induit un déplacement  $u$  de la particule située en  $r$ . On introduit alors le tenseur de Green  $G(r,r')$  tel que (fig.III-5):

$$u_i(r) = G_{ij}(r, r') f_j(r') \quad (\text{III.68})$$



*Fig.III-5: Définition du tenseur de Green G*

Dans le cas où tout un ensemble de forces s'exerce dans le volume  $dV'$  entourant  $r'$ , on écrit alors:

$$u_i(r) = \int_V G_{ij}(r, r') f_j(r') dV' \quad (\text{III.69})$$

Un milieu infini<sup>(6)</sup> est invariable par translation. La variable représentative est alors l'écart  $r-r'$  et non plus les positions respectives  $r$  et  $r'$ . D'où l'introduction d'un tenseur de Green  $G(r-r')$  adapté à ce milieu.

<sup>(6)</sup> Rappel: La notion d'infini introduite ici équivaut à faire l'hypothèse d'un milieu dont le volume élémentaire (le grain) est caractéristique du milieu.

$$u_i(r) = \int_V G_{ij}(r-r') f_j(r') dV' \quad (III.70)$$

Pour un milieu infini et homogène de module élastique  $L^0$ , le tenseur de Green défini précédemment se calcule comme étant la solution de l'équation de Navier:

$$L_{ijkl}^0 G_{km,lj}(r-r') + \delta_{im} \delta(r-r') = 0 \quad (III.71)$$

avec  $\delta_{im}$ : le symbole de Kronecker,  
 $\delta(r-r')$  la distribution de Dirac,

La résolution de (III.71) est connue et donne l'expression de  $G(r)$ . Elle est complexe et ne fait pas l'objet de ce travail (cette résolution est détaillée en annexe 2). On remarque cependant que par identification avec l'équation de Navier obtenue grâce aux lois classiques de l'élastostatique [B93]

$$L_{ijkl}^0 u_{k,lj} + f_i = 0 \quad (III.72)$$

$G_{km}$  désigne le déplacement au point  $r$  dans la direction  $k$  provoqué par l'application au point  $r'$  du milieu infini de module  $L^0$  d'une force unité  $f_i = \delta_{im} \delta(r-r')$  s'exerçant dans la direction  $m$ .

Le tenseur de Green étant défini, nous pouvons, à partir des équations fondamentales qui régissent le problème, construire l'équation intégrale qui lui est liée.

#### - Relations fondamentales

Soit notre milieu infini macrohomogène et microhétérogène soumis sur sa frontière (de normale  $\mathbf{n}$ ) à un champ de déplacement  $\mathbf{u}^d$  tel que:

$$u_i^d = E_{ij} n_j \quad (III.73)$$

En premier lieu, l'équilibre d'un élément de volume  $dV$  en l'absence de forces de volume impose:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{avec } \underline{\underline{\sigma}} \text{ symétrique} \quad (\text{III.74})$$

Dans le cas des petites perturbations, le champ de déformation vérifie les équations de compatibilité et dérive donc d'un champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ :

$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{r}) = \dot{u}_{i,j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( \dot{u}_{i,j}(\mathbf{r}) + \dot{u}_{j,i}(\mathbf{r}) \right) \quad (\text{III.75})$$

Ces conditions s'appliquent au niveau local pour lequel la loi de comportement (III.55) doit être également vérifiée. En appliquant cette dernière dans la relation d'équilibre (III.74), celle-ci se réécrit:

$$\left[ l_{ijkl}(\mathbf{r}) \dot{\epsilon}_{kl}(\mathbf{r}) - m_{ij}(\mathbf{r}) \dot{T} \right]_{,j} = 0 \quad (\text{III.76})$$

On tient compte de nouveau ici de la température en utilisant l'expression (III.55) qui relie le champ de contrainte local au champ de déformation local et à la température. Cette relation d'équilibre est le point de départ de l'écriture de l'équation intégrale thermomécanique.

### **B) Résolution**

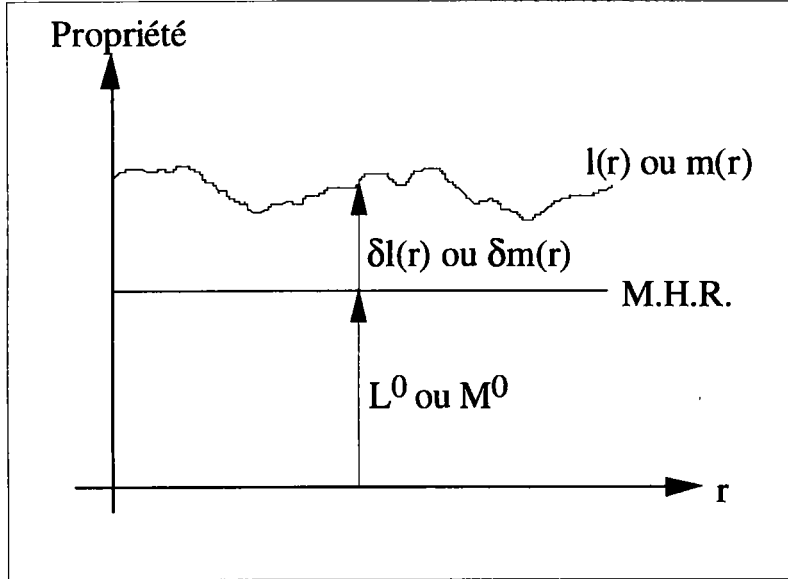
Un des principes de base des méthodes à transition d'échelle est d'introduire un milieu homogène de référence (fig.III-6) de modules thermomécaniques  $L^0$  et  $M^0$  et soumis à une déformation uniforme  $E^0$ , ce qui permet d'exprimer les modules locaux en fonction de leurs parties déviatrices  $\delta l(\mathbf{r})$  et  $\delta m(\mathbf{r})$ :

$$l_{ijkl}(\mathbf{r}) = L_{ijkl}^0 + \delta l_{ijkl}(\mathbf{r}) \quad (\text{III.77})$$

$$m_{ij}(\mathbf{r}) = M_{ij}^0 + \delta m_{ij}(\mathbf{r}) \quad (\text{III.78})$$

Ainsi, la condition (III.76) devient:

$$\left\{ \left[ L_{ijkl}^0 + \delta l_{ijkl}(r) \right] \dot{\epsilon}_{kl}(r) - \left[ M_{ij}^0 + \delta m_{ij}(r) \right] \dot{T} \right\}_{,j} = 0 \quad (\text{III.79})$$



*Fig.III-6: Représentation schématique des propriétés déviatrices du milieu microhétérogène.*

L'hypothèse de l'uniformité de la température dans le matériau conduit à:

$$L_{ijkl}^0 \dot{\epsilon}_{kl,j}(r) + \left[ \delta l_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}(r) - \delta m_{ij}(r) \dot{T} \right]_{,j} = 0 \quad (\text{III.80})$$

Au regard des symétries du module  $L^0$ , cette expression peut se réécrire:

$$L_{ijkl}^0 \dot{u}_{k,lj}(r) + \left[ \delta l_{ijkl}(r) \dot{u}_{k,l}(r) - \delta m_{ij}(r) \dot{T} \right]_{,j} = 0 \quad (\text{III.81})$$

La résolution de ce système d'équations dont les inconnues sont les vitesses de déplacements  $\dot{u}(r)$  fait appel au tenseur de Green pour le milieu infini homogène de module  $L^0$ .

On introduit le concept de forces volumiques fictives  $f_i$ ,

$$f_i = \delta l_{ijkl}(r) \dot{u}_{k,l}(r) - \delta m_{ij}(r) \dot{T} \quad (\text{III.82})$$

ce qui permet de réécrire (III.81) sous la forme:

$$L_{ijkl}^0 \dot{u}_{k,lj}(\mathbf{r}) + f_{i,j} = 0 \quad (\text{III.83})$$

On reconnaît dans cette expression, la forme de l'équation qui définit le tenseur de Green (III.71). Cette écriture va permettre de déterminer les déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  sous la forme d'une équation intégrale. Cette équation ne sera plus seulement mécanique car elle doit prendre en compte les effets de la température.

Les propriétés du tenseur de Krönecker  $\delta_{im}$  et de la distribution de Dirac  $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  permettent d'écrire pour la vitesse de déplacement  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r})$ :

$$\dot{u}_m(\mathbf{r}) = \int_V \dot{u}_i(\mathbf{r}') \delta_{im} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' \quad (\text{III.84})$$

D'après (III.71), cette expression peut se réécrire:

$$\dot{u}_m(\mathbf{r}) = -L_{ijkl}^0 \int_V G_{km,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \dot{u}_i(\mathbf{r}') dV' \quad (\text{III.85})$$

En utilisant les deux propriétés suivantes:

$$G_{km,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \left[ G_{km,(r-r')}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right]_{,j} = -G_{km,l'j} \quad (\text{III.86})$$

et  $G_{km,lj}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -G_{km,l'(r-r')}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')_{,j} = G_{km,l'j}$  (III.87)

on résout en intégrant deux fois par parties. Ainsi, on a:

$$G_{km,l'j} \dot{u}_i(\mathbf{r}') = \left[ G_{km,l'} \dot{u}_i(\mathbf{r}') \right]_{,j} - G_{km,l'} \dot{u}_{i,j}(\mathbf{r}') \quad (\text{III.88})$$

et:

$$G_{km,l'} \dot{u}_{i,j}(\mathbf{r}') = \left[ G_{km} \dot{u}_{i,j}(\mathbf{r}') \right]_{,l'} - G_{km} \dot{u}_{i,j'l'}(\mathbf{r}') \quad (\text{III.89})$$

Finalement, le terme dans l'intégrale de l'expression (III.85) peut s'écrire:

$$G_{km,lj} \dot{u}_i(\mathbf{r}') = \left[ G_{km,l'} \dot{u}_i(\mathbf{r}') \right]_{,j} - \left[ G_{km} \dot{u}_{i,j}(\mathbf{r}') \right]_{,l'} + G_{km} \dot{u}_{i,j'l'}(\mathbf{r}') \quad (\text{III.90})$$



L'intégration des trois membres donne le résultat suivant pour la vitesse de déplacement  $\dot{u}(r)$

$$\dot{u}_m(r) = I_1 + I_2 + I_3 \quad (\text{III.91})$$

• Calcul de  $I_1$ :

$$I_1 = - \int_V L_{ijkl}^0 [G_{km,l} \dot{u}_i(r')]_{,j} dV'$$

Par le théorème d'Ostrogradsky,  $I_1$  peut encore s'écrire:

$$I_1 = - \int_S L_{ijkl}^0 G_{km,l} \dot{u}_i(r') n_j dS'$$

Sur la frontière, cette intégrale est la solution relative à un milieu homogène ayant même géométrie et soumis aux mêmes conditions limites en surface que le solide considéré. Ainsi:

$$I_1 = \dot{u}_m^0(r) \quad (\text{III.91a})$$

• Calcul de  $I_2$ :

Pour  $I_2$ , le résultat est nul car les conditions aux limites appliquées au volume  $V$  sont uniquement des conditions de déplacement imposé (III.73):

$$I_2 = \int_S L_{ijkl}^0 G_{km} \dot{u}_{i,j}(r') n_l dS' = \int_S G_{km} \Sigma_{ij}^d(r') n_l dS' = 0 \quad (\text{III.91b})$$

• Calcul de  $I_3$ :

D'après (III.87),  $I_3$  se réécrit:

$$\begin{aligned} I_3 &= - \int_V L_{ijkl}^0 G_{km} \dot{u}_{i,jl}(r') dV' \\ \Leftrightarrow I_3 &= - \int_V L_{ijkl}^0 [G_{km} \dot{u}_{i,j}(r')]_{,l} dV' - \int_V L_{ijkl}^0 G_{km,l} \dot{u}_{i,j}(r') dV' \\ \Leftrightarrow I_3 &= - \int_S L_{ijkl}^0 G_{km} \dot{u}_{i,j}(r') n_l dS' - \int_V L_{ijkl}^0 G_{km,l} \dot{u}_{i,j}(r') dV' \\ \Leftrightarrow I_3 &= - \int_V G_{km,l} L_{ijkl}^0 \dot{u}_{i,j}(r') dV' = \int_V G_{km,l} f_i dV' \quad (\text{III.91c}) \end{aligned}$$

En définitive, (III.91) se simplifie de la manière suivante:

$$\dot{u}_m(r) = \dot{u}_m^0(r) + \int_V G_{km,l}(r-r') [\delta l_{ijkl}(r') \dot{u}_k(r') - \delta m_{ij}(r') \dot{T}] dV' \quad (III.92)$$

Ou encore, après dérivation et symétrisation:

$$\dot{\epsilon}_{mn}(r) = \dot{E}_{mn}^0 + \int_V \Gamma_{mnij}(r-r') [\delta l_{ijkl}(r') \dot{\epsilon}_{kl}(r') - \delta m_{ij}(r') \dot{T}] dV' \quad (III.93)$$

avec:  $\Gamma_{mnij} = \frac{1}{2} [G_{mi,jn} + G_{ni,jm}]$  le tenseur de Green symétrisé.

La relation obtenue (III.93) constitue une équation intégrale thermomécanique reliant indirectement la vitesse de déformation locale  $\dot{\epsilon}(r)$  au chargement thermomécanique caractérisé par  $\dot{E}^0$  et  $\dot{T}$ . Sa solution permet de calculer les tenseurs de localisation  $A(r)$  et  $a(r)$ . Diverses méthodes existent, comme la méthode de Born par approximations successives ou encore l'approche autocohérente. Cette dernière est utilisée car, bien que moins rigoureuse, elle ne nécessite pas de moyens de calcul trop complexes ou trop performants et est très bien adaptée à nos exigences.

### III.3.3.2 - Résolution formelle

D'après [DZ73], le tenseur de Green symétrisé  $\Gamma(r-r')$  peut être décomposé en une composante locale  $\Gamma^l(r)$  et une composante non locale  $\Gamma^{nl}(r-r')$ .

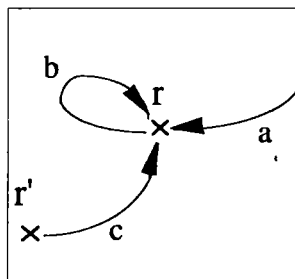
$$\Gamma_{ijkl}(r-r') = \Gamma_{ijkl}^l(r) \delta(r-r') + \Gamma_{ijkl}^{nl}(r-r') \quad (III.94)$$

avec  $\delta(r-r')$  la fonction de Dirac au point  $r'$ . On peut alors réécrire (III.93) sous la forme suivante:

$$\dot{\epsilon}_{mn}(r) = \dot{E}_{mn}^0 + \Gamma_{mnij}^l(r) \left[ \delta l_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}(r) - \delta m_{ij}(r) \dot{T} \right] + \int_V \Gamma_{mnij}^{nl}(r-r') \left[ \delta l_{ijkl}(r') \dot{\epsilon}_{kl}(r') - \delta m_{ij}(r') \dot{T} \right] dV' \quad (III.95)$$

Cette expression montre effectivement que la déformation au point  $r$  résulte de la contribution de plusieurs facteurs, à savoir:

- a) Les conditions limites
- b) L'effet du point  $r$  sur lui-même (effet local)
- c) L'effet des points  $r'$  sur  $r$  (effet à distance)



La difficulté majeure de cette équation est le calcul du terme non local. Dans le but de supprimer ce dernier, cherchons les conditions qui l'annulent, c'est à dire:

$$\begin{aligned} & \int_V \Gamma_{mnij}^{nl}(r-r') \left[ \delta l_{ijkl}(r') \dot{\epsilon}_{kl}(r') - \delta m_{ij}(r') \dot{T} \right] dV' = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_V \left[ l_{ijkl}(r') \dot{\epsilon}_{kl}(r') - L_{ijkl}^0 \dot{\epsilon}_{kl}(r') - m_{ij}(r') \dot{T} + M_{ij}^0 \dot{T} \right] dV' = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_V \left[ l_{ijkl}(r') \dot{\epsilon}_{kl}(r') - m_{ij}(r') \dot{T} \right] dV' - L_{ijkl}^0 \int_V \dot{\epsilon}_{kl}(r') dV' + VM_{ij}^0 \dot{T} = 0 \end{aligned} \quad (III.96)$$

Le premier terme intégré représente la contrainte locale  $\dot{\sigma}(r)$  et en vertu des relations de moyenne (III.63) et (III.64), cette équation est équivalente à:

$$V\dot{\Sigma}_{ij} - VL_{ijkl}^0 \dot{E}_{kl} + VM_{ij}^0 \dot{T} = 0$$

$$\text{Soit } \dot{\Sigma}_{ij} = L_{ijkl}^0 \dot{E}_{kl} - M_{ij}^0 \dot{T} \quad (III.97)$$

On s'aperçoit que la condition qui permet d'annuler le terme non local de l'équation intégrale thermomécanique (III.95) est relative au choix du

milieu homogène de référence. La condition (III.97) est à la base de l'approximation autocohérente: par identification avec (III.58), on déduit que le milieu homogène de référence doit être égal au milieu homogène équivalent que l'on cherche à déterminer, soit:

$$\begin{cases} L_{ijkl}^0 = L_{ijkl}^{eff} \\ M_{ij}^0 = M_{ij}^{eff} \end{cases} \quad (III.98)$$

Dans ces conditions seulement, l'équation intégrale thermomécanique se simplifie:

$$\dot{\epsilon}_{mn}(r) = \dot{E}_{mn}^0 + \Gamma_{mnnj}^l(r) \left[ \delta l_{ijkl}(r) \dot{\epsilon}_{kl}(r) - \delta m_{ij}(r) \dot{T} \right] \quad (III.99)$$

En supposant l'inversion possible, on peut écrire:

$$\dot{\epsilon}_{mn}(r) = \left\{ I_{mnnk} - \Gamma_{klij}^l(r) \delta l_{ijpq}(r) \right\}^{-1} \dot{E}_{mn}^0 - \Gamma_{mnr}^l(r) \delta m_{rs}(r) \dot{T} \quad (III.100)$$

À ce stade, on voit apparaître la forme  $\dot{\epsilon}(r) = f(\dot{E}^0, \dot{T})$  qui va nous permettre l'identification des tenseurs de localisation  $A(r)$  et  $a(r)$ . En effet, (III.62) nous autorise à écrire:

$$\begin{cases} A_{ijkl}(r) = \left[ I_{ijkl} - \Gamma_{ijmn}^l(r) \delta l_{mnnk}(r) \right]^{-1} \\ a_{ij}(r) = A_{ijkl}(r) \Gamma_{klmn}^l(r) \delta m_{mn}(r) \end{cases} \quad (III.101)$$

Un rappel des principaux résultats permet de définir le comportement général de la manière suivante:

**\* Comportement macroscopique**

$$\begin{cases} \dot{\Sigma}_{ij} = L_{ijkl}^{eff} \dot{E}_{kl} - M_{ij}^{eff} \dot{T} \\ \dot{E}_{ij} = G_{ijkl}^{eff} \dot{\Sigma}_{kl} + N_{ij}^{eff} \dot{T} \end{cases} \quad (III.A)$$

**\* Modules thermomécaniques macroscopiques**

$$\begin{cases} L_{ijkl}^{eff} = \frac{1}{V} \int_V l_{ijmn}(r) A_{mnkl}(r) dV \\ M_{ij}^{eff} = \frac{1}{V} \int_V [m_{ij}(r) - l_{ijkl}(r) a_{kl}(r)] dV \end{cases} \quad (III.B)$$

\* *Tenseurs de localisation*

$$\begin{cases} A_{ijkl}(r) = [I_{ijkl} - \Gamma_{ijmn}^l(r) \delta l_{mnkl}(r)]^{-1} \\ a_{ij}(r) = A_{ijkl}(r) \Gamma_{klmn}^l(r) \delta m_{mn}(r) \end{cases} \quad (III.C)$$

\* *Modules thermomécaniques microscopiques*

$$\begin{cases} l_{ijkl}(r) = C_{ijkl}(r) - C_{ijrs}(r) \sum_{n,m} \epsilon_{rs}^n \left( {}^*H^{nm} \right)^{-1} \epsilon_{pq}^n C_{pqkl}(r) \\ m_{ij}(r) = C_{ijkl}(r) \alpha \delta_{kl} - C_{ijkl}(r) \sum_{n,m} \epsilon_{kl}^n \left( {}^*H^{nm} \right)^{-1} \left( B + \epsilon_{pq}^n C_{pqrs} \alpha \delta_{rs} \right) \end{cases} \quad (III.D)$$

$$\text{avec } {}^*H^{nm} = H^{nm} + \epsilon_{pq}^n C_{pqrs} \epsilon_{rs}^m \quad (III.E)$$

Jusqu'à présent, les formulations sont encore formelles et donc trop générales pour permettre une résolution et un calcul simple des différents modules et tenseurs décrivant le comportement macroscopique. En effet, le milieu est considéré comme "continu". Pour simplifier ce problème et permettre une simulation numérique, on suppose dans la suite que les propriétés du milieu sont continues par morceaux.

### III.3.3.3 - Approximation autocohérente à un site

Un polycristal est constitué de grains d'orientations cristallographiques différentes. L'approximation autocohérente consiste à considérer le comportement intragranulaire homogène.

On choisit donc de représenter le milieu granulaire qu'est le polycristal par  $N$  inclusions  $I$  de volume  $V^I$ , dans lesquelles les champs de vitesses de déformation et de contrainte sont uniformes (fig.III-7). Ainsi, si  $H^I(r)$  est la

fonction indicatrice d'Heaviside, les champs  $\dot{\epsilon}(\mathbf{r})$ ,  $\dot{\sigma}(\mathbf{r})$ ,  $\delta l(\mathbf{r})$  et  $\delta m(\mathbf{r})$  du polycristal sont des champs continus par morceaux et ont les formes particulières suivantes:

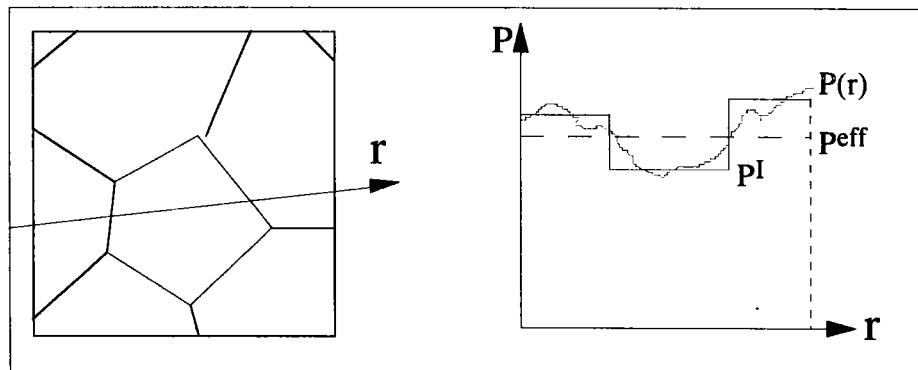
$$\dot{\epsilon}_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_I \dot{\epsilon}^I H^I(\mathbf{r}) \quad (\text{III.102})$$

$$\dot{\sigma}_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_I \dot{\sigma}^I H^I(\mathbf{r}) \quad (\text{III.103})$$

$$\delta l_{ijkl}(\mathbf{r}) = \sum_I \delta l_{ijkl}^I H^I(\mathbf{r}) \quad (\text{III.104})$$

$$\delta m_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_I \delta m_{ij}^I H^I(\mathbf{r}) \quad (\text{III.105})$$

avec:  $H^I(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{r} \in V^I \\ 0 & \text{si } \mathbf{r} \notin V^I \end{cases}$



*Fig.III-7: Approximation autocohérente: Les propriétés sont considérées uniformes dans les grains.*

A priori, cette approximation d'homogénéité intragranulaire peut paraître injustifiée pour l'étude du comportement des alliages à mémoire de forme. Les différentes variantes de martensite qui peuvent apparaître dans le grain ont tendance à s'opposer à cette hypothèse. Cependant, on estime que l'approche micromécanique antérieure permettant la détermination du comportement monocristallin (du grain) est suffisamment réaliste d'un point de vue physique pour justifier cette approximation réalisée à l'échelle supérieure.

Si l'on considère alors une inclusion de volume  $V^I$  et pour  $r \in V^I$ , on peut écrire:

$$\dot{\epsilon}_{ij}(r) = \dot{\epsilon}_{ij}^I \quad \delta l_{ijkl}(r) = \delta l_{ijkl}^I \quad \text{et} \quad \delta m_{ij}(r) = \delta m_{ij}^I$$

L'équation intégrale (III.100) devient alors:

$$\dot{\epsilon}_{mn}(r) = \dot{\epsilon}_{mn}^0 + \int_{V^I} \Gamma_{mnij}^I(r) \left[ \delta l_{ijkl}^I \dot{\epsilon}_{kl}^I - \delta m_{ij}^I \dot{T} \right] dV \quad (\text{III.106})$$

Le champ de déformation dans l'inclusion, en tenant compte des relations de moyenne se calcule comme suit:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^I = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \dot{\epsilon}_{ij}(r) dV \quad (\text{III.107})$$

C'est à dire, d'après (III.106):

$$\dot{\epsilon}_{mn}^I = \dot{\epsilon}_{mn}^0 + \frac{1}{V^I} \left[ \delta l_{ijkl}^I \dot{\epsilon}_{kl}^I - \delta m_{ij}^I \dot{T} \right] \int_{V^I} \int_{V^I} \Gamma_{mnij}^I(r) dV dV' \quad (\text{III.108})$$

Posons:

$$T_{mnij}^{\text{II}} = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^I} \Gamma_{mnij}^I(r) dV dV' \quad (\text{III.109})$$

Le calcul analytique de ce tenseur est assez complexe, il figure en annexe 2. Il représente et décrit les interactions du grain I sur lui-même. Les effets des autres grains sur le grain I ne sont pas directement pris en compte du fait de l'annulation des termes à distance par le choix du milieu homogène de référence. On parle alors d'une approximation autocohérente à un site. Cependant, et c'est là un des atouts de la méthode autocohérente, ils sont tout de même pris en compte au travers de l'interaction entre le grain I et le milieu homogène équivalent (censé représenter aussi fidèlement que possible le comportement du milieu granulaire).

Dans ces conditions (III.108) devient:

$$\dot{\epsilon}_{mn}^I = \dot{\epsilon}_{mn}^0 + T_{mnij}^{II} \delta l_{ijkl}^I \dot{\epsilon}_{kl}^I - T_{mnij}^{II} \delta m_{ij}^I \dot{T} \quad (III.110)$$

Ou bien encore:

$$\dot{\epsilon}_{mn}^I = \left[ I_{mnpq} - T_{mnij}^{II} \delta l_{ijpq}^I \right]^{-1} \dot{\epsilon}_{pq}^0 - \left[ I_{mnpq} - T_{mnij}^{II} \delta l_{ijpq}^I \right]^{-1} T_{pqrs}^{II} \delta m_{rs}^I \dot{T} \quad (III.111)$$

On en déduit donc, par identification avec (III.62); les tenseurs de localisation  $A^I$  et  $a^I$  relatifs au grain I.

$$\begin{cases} A_{mnpq}^I = \left[ I_{mnpq} - T_{mnij}^{II} \delta l_{ijpq}^I \right]^{-1} \\ a_{ij}^I = A_{ijkl}^I T_{klmn}^{II} \delta m_{mn}^I \end{cases} \quad (III.112)$$

D'après les relations de moyenne (III.63) et (III.64) ainsi que la définition de la fonction d'Heaviside, la contrainte macroscopique s'écrit, en notant  $f^I = V^I/V$  la fraction volumique du grain I:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_{ij} &= \frac{1}{V} \int_V \dot{\sigma}_{ij}(r) dV = \frac{V^I}{V} \sum_I \dot{\sigma}_{ij}^I \\ \Leftrightarrow \dot{\Sigma}_{ij} &= f^I \sum_I \left( l_{ijkl}^I \dot{\epsilon}_{kl}^I \right) - f^I \sum_I \left( m_{ij}^I \dot{T} \right) \\ \Leftrightarrow \dot{\Sigma}_{ij} &= f^I \sum_I \left( l_{ijkl}^I A_{klmn}^I \dot{\epsilon}_{mn}^I \right) + f^I \sum_I \left( l_{ijkl}^I a_{kl}^I \dot{T} \right) - f^I \sum_I \left( m_{ij}^I \dot{T} \right) \\ \Leftrightarrow \dot{\Sigma}_{ij} &= \sum_I f^I \left( l_{ijkl}^I A_{klmn}^I \right) \dot{\epsilon}_{mn}^I + \sum_I f^I \left( l_{ijkl}^I a_{kl}^I - m_{ij}^I \right) \dot{T} \quad (III.113) \end{aligned}$$

Finalement, par identification avec (III.58):

$$\begin{cases} L_{ijmn}^{eff} = \sum_I f^I \left( l_{ijkl}^I A_{klmn}^I \right) \\ M_{ij}^{eff} = \sum_I f^I \left( l_{ijkl}^I a_{kl}^I - m_{ij}^I \right) \end{cases} \quad (III.114)$$



Le seul point non résolu est relatif au tenseur d'interaction  $T^{II}$  défini à partir du tenseur de Green  $G(r)$ . Ceci est effectué en annexe 2, d'une manière analytique d'abord puis à l'aide une méthode de résolution numérique élaborée par Lipinski [LCB87], incluse dans le modèle informatique développé pour ce travail. Le point nouveau est le calcul des modules effectifs  $M^{eff}$  et  $N^{eff}$  qui permettent de relier une variation de température à ses conséquences sur les champs de déformation et de contrainte macroscopiques.

### III.3.4 - REMARQUE

- À ce stade, le problème peut être considéré comme résolu, ou tout au moins partiellement dans la mesure où les résultats possèdent une forme implicite. En effet, les tenseurs de localisation dépendent des modules effectifs (III.112) qui, eux même, sont fonction des tenseurs localisations (III.114). Cette difficulté est résolue numériquement par l'utilisation d'une formulation incrémentale. Lors d'un chargement, la détermination des propriétés dans une inclusion (un grain) se réalise en la supposant entourée du matériau homogène équivalent dont les propriétés ont été déterminées au pas précédent. L'annexe 3 aborde ces considérations numériques, on y trouve également les organigrammes, la notion de temps de calcul et certains problèmes particuliers à l'écriture du programme informatique.
- La température n'est pas seulement une variable de contrôle pour la transformation martensitique: certains effets thermiques sont intrinsèques à la transformation. En particulier, on observe un dégagement de chaleur lors de la transformation directe et une absorption lors de la transformation inverse. L'étude suivante permet de prendre en compte ces phénomènes et d'apprécier l'influence de la vitesse de sollicitation sur le comportement mécanique.

## III.4 - INFLUENCE DE LA VITESSE DE SOLLICITATION

### III.4.1 - INTRODUCTION

Le modèle présenté jusqu'ici permet de rendre compte des comportements en superélasticité et fluage anisotherme des alliages à mémoire de forme en présence de variations de température et/ou de contraintes imposées de l'extérieur. La transformation martensitique étant une transition du premier ordre, elle s'accompagne d'un dégagement de chaleur lors du passage austénite → martensite (transformation exothermique) et d'une absorption de chaleur par la transformation inverse martensite → austénite (transformation endothermique). Ces phénomènes modifient localement la température de l'alliage en fonction du sens de la transformation, de la vitesse de formation de la martensite et des conditions d'échange de chaleur du matériau avec l'extérieur (conditions aux limites imposées à l'éprouvette) [VD81]. La prise en compte de ce phénomène interdit de considérer la température  $T$  comme homogène dans l'échantillon et égale à la température extérieure imposée dans l'équation (III.56). Une écriture correcte serait (en notant  $\theta(r)$  le champ de température dans l'échantillon):

$$\varepsilon(r) = g(r)\sigma(r) + n(r)\theta(r)$$

avec  $\Sigma$  et  $T^{\text{ext}}$  les conditions aux limites imposées au système.

Ce phénomène a déjà été l'objet de plusieurs modélisations. Abeyaratne et Knowles [AKK94] ont étudié ce problème dans un barreau soumis à une elongation. La température  $y$  est considérée comme non uniforme et l'équation de la chaleur est résolue en considérant différentes conditions aux limites aux extrémités du barreau. Zanzotto et al. [FZ91] ont étudié le même problème en utilisant une loi de comportement différente pour le matériau. Plus récemment, LExcellent et al. [LGS96] ont étudié ce

phénomène dans un monocristal monovariant. Dans l'approche par transition d'échelle que nous avons choisie, la prise en compte d'un champ de température variable rend impossible les opérations de localisation réalisées au §III.3.3.1.: seules deux solutions sont possibles. Soit le modèle est restreint aux sollicitations suffisamment lentes pour que l'équilibre thermique  $\theta(r)=T^{\text{ext}}$  soit supposé conservé. Cette hypothèse est implicite dans le §III.3.3.1. Une deuxième solution consiste à simplifier le problème à partir de considérations expérimentales. Chrysochoos [CPM93] a montré d'une part que la chaleur de transformation a une influence non négligeable sur la réponse mécanique du matériau (la température s'élève de plusieurs degrés dans l'échantillon) et d'autre part que l'élévation de température se produit de façon assez uniforme dans les échantillons polycristallins. Cette dernière constatation permet de simplifier suffisamment le problème pour rendre possible l'utilisation de la méthode de transition d'échelle du §III.3 tout en conservant le mécanisme à l'origine de la modification de la réponse mécanique (la variation de température).

Dans la suite, on suppose que le champ de température  $\theta(r)$  dans le polycristal est uniforme et de valeur  $T$  différente de la température extérieure  $T^{\text{ext}}$ . On suppose donc que le gradient de température est nul dans le matériau. Cette hypothèse est justifiée d'une part par le fait que l'austénite et la martensite ont des conductivités thermiques très proches. D'autre part, dans un polycristal, la multitude des sites de transformation entraîne une répartition des sources de chaleur relativement homogène dans l'échantillon. Cette hypothèse revient à considérer un matériau à l'intérieur duquel la conduction de la chaleur est infinie ou tout au moins pour lequel les échanges de chaleur se produisent à des vitesses supérieures d'au moins un ordre de grandeur à celles des sollicitations mécaniques.

Dans ce cas, l'approche par transition d'échelle proposée dans ce travail est inchangée. Il est seulement nécessaire d'établir la relation qui existe entre la formation de la martensite (ou sa disparition) et la température  $T$ . Les concepts et résultats de la thermodynamique des processus irréversibles constituent ici le cadre thermodynamique [B68] qui va permettre une prise en compte de ces phénomènes.

### III.4.2 - ÉVOLUTION DE LA TEMPÉRATURE DU POLYCRISTAL AVEC LE TAUX DE MARTENSITE

Dans ce paragraphe, on recherche une relation globale liant le taux de martensite formée (ou résorbée) et la variation de température observée dans l'échantillon. On obtient cette relation en complétant l'analyse thermodynamique réalisée au §III.2.2.1. On considère comme volume élémentaire représentatif un cristal d'austénite.

Le point de départ est l'écriture du second principe de la thermodynamique. Soit  $\Phi$  l'énergie libre d'Helmholtz du système. Cette énergie dépend de la déformation totale  $E$ , de la température  $T$  et des variables internes  $f^n$  choisies pour décrire l'évolution des aspects microstructuraux. L'écriture du second principe conduit à l'inégalité de Clausius-Duhem [G73]:

$$D = \sigma_{ij} \dot{E}_{ij} - \rho \sum_n \frac{\partial \Phi}{\partial f^n} \dot{f}^n - \frac{\vec{q}}{T} \text{grad}(T) \geq 0 \quad (\text{III.115})$$

Dans cette expression de la dissipation  $D$ ,  $\sigma$  est le tenseur des contraintes,  $\rho$  la masse volumique et  $q$  le vecteur courant de chaleur.

Par hypothèse:

$$\text{grad}(T) = 0 \quad (\text{III.116})$$

Cette hypothèse entraîne également la nullité du vecteur courant de chaleur  $q$ . En effet, on suppose que la conduction de chaleur évolue suivant une loi linéaire isotrope de type Fourier, c'est à dire:

$$q = -k \text{grad}(T) \quad (\text{III.117})$$

avec  $k$  la conductivité thermique du matériau (assimilée comme étant infinie puisque la température est la même en tout point de l'échantillon à tout moment). Finalement, l'expression (III.115) se réduit à la dissipation intrinsèque  $D_1$ , qui doit être positive ou nulle.

$$D_1 = \sigma_{ij} \dot{E}_{ij} - \rho \sum_n \frac{\partial \Phi}{\partial f^n} \dot{f}^n \geq 0 \quad (\text{III.118})$$

Dans les conditions expérimentales des essais réalisés (absence de sources volumiques de chaleur), on montre dans Chrysochoos [CD92] que l'équation de la chaleur se simplifie sous la forme:

$$\rho C_f \dot{T} - k \Delta T = D_1 + \rho T \sum_n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T \partial f^n} \dot{f}^n = 0 \quad (\text{III.119})$$

- $\dot{T}$  est la dérivée particulière de la température au point considéré.  
 $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \text{grad}(T) = \frac{\partial T}{\partial t}$  d'après (III.116). De plus,  $\vec{v}$  étant la vitesse de la particule, ce terme est négligeable dans le cas de faibles vitesses de sollicitations sur des matériaux métalliques.
- $\Delta T$  est le laplacien de la température  $T$ . Par hypothèse:  $\Delta T = 0$
- $C_f$  et  $k$  sont respectivement la chaleur spécifique à  $f^n$  constants et le coefficient de conduction isotrope.
- Au second membre, on retrouve la dissipation intrinsèque et les termes de couplage thermomécanique.

Le gradient de température est nul. Chrysochoos [CPM93] a montré que la dissipation intrinsèque  $D_1$  est très faible devant la chaleur latente de transformation de phase. Elle est donc négligée dans ce calcul. En conséquence, l'équation de la chaleur (III.119) se réduit à:

$$\rho C_f \dot{T} = \rho T \sum_n \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T \partial f^n} \dot{f}^n \quad (\text{III.120})$$

À ce stade, il est nécessaire de rappeler la forme du potentiel  $\Phi$ . Son expression est déterminée à partir de l'énergie libre d'Helmholtz par unité de volume  $\Phi_v$  qui décrit la transformation d'un volume soumis à un champ de transformation microscopique  $\epsilon^T(r)$  (et macroscopique  $E^T$ ).

$$\Phi_v(E, T, \varepsilon^T) = \frac{1}{2} (E_{ij} - E_{ij}^T) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^T) - \frac{1}{2V} \int_V \tau_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV + B(T - T_0)f \quad (\text{III.121})$$

Ce potentiel s'écrit alors, pour les fractions volumiques considérées comme variables internes:

$$\Phi_v(E, T, f^n) = \frac{1}{2} (E_{ij} - E_{ij}^T) C_{ijkl} (E_{kl} - E_{kl}^T) + \frac{1}{2} \sum_n H^{nm} f^n f^m + B(T - T_0) \sum_n f^n \quad (\text{III.122})$$

Par unité de masse:  $\Phi = \frac{1}{\rho} \Phi_v$  (III.123)

et l'expression (III.120) se réécrit alors:

$$C_f \dot{T} = T \sum_n \frac{B}{\rho} \dot{f}^n = \frac{BT}{\rho} \dot{f} \quad \text{avec} \quad \dot{f} = \sum_n \dot{f}^n \quad (\text{III.124})$$

On détermine une variation de température proportionnelle à l'accroissement de fraction volumique. On a fait l'hypothèse d'une transmission instantanée de la chaleur dans l'échantillon, on peut donc généraliser ce résultat pour un polycristal, les quantités  $C_f$ ,  $B$ ,  $\rho$  et  $T$  étant supposées homogène. Il vient:

$$\dot{T} = T \frac{B}{\rho C_f} \dot{f} \quad (\text{III.125})$$

Cette équation de couplage est introduite dans le modèle et permet de rendre compte de l'influence de la vitesse de sollicitation sur des alliages à base de Cuivre (§V.2.3). Deux cas extrêmes sont possibles: le cas isotherme pour une vitesse de sollicitation lente et le cas adiabatique (prise en compte de l'équation de couplage III.125) si la vitesse de déformation est rapide. L'étude de vitesses de sollicitation intermédiaires telle que le processus ne

soit ni isotherme ni adiabatique peut être réalisée en introduisant un paramètre phénoménologique d'échange de chaleur avec l'extérieur  $h$  [LGS96]). On réécrit alors l'équation (III.125) sous la forme suivante:

$$\rho C_f \dot{T} + h(T - T^{\text{ext}}) = TB\dot{f} \quad (\text{III.126})$$

Si  $h=0$ , on est en présence d'un cas adiabatique. Si  $h$  est infini, on retrouve le cas isotherme. Les valeurs de  $h$  sont à ajuster dans les cas intermédiaires.

### III.5 - CONCLUSION

Le but de ce chapitre était en premier lieu d'établir les équations littérales relatives au comportement superthermoélastique des alliages à mémoire de forme, en vue de modéliser des essais de fluage anisotherme. En second lieu, une prise en considération des échanges de chaleur pendant les transformations a été effectuée afin de rendre compte de l'influence de la vitesse de sollicitation en superélasticité.

Le cadre théorique développé jusqu'à présent permet de prendre en compte:

- Le comportement local des constituants et notamment la prise en compte des mécanismes élémentaires de déformation, à savoir la formation des différentes variantes de martensite. On a pu aboutir ainsi aux modules thermomécaniques locaux en fonction des différentes variantes activées et de leur fraction volumique respective dans le monocristal.
- L'effet des paramètres de contrôle que sont la contrainte et la température sur la transformation (activation et évolution) des différentes variantes de martensite pouvant être présentes lors de la transformation de phase d'un volume monocristallin.
- Les interactions intergranulaires lors de la détermination du comportement polycristallin à partir des modules thermomécaniques monocristallins qui régissent le comportement des grains.

- La texture cristallographique donnée par les orientations cristallines des différents grains composant le polycristal par rapport au repère macroscopique par le biais des angles d'Euler.
- La texture morphologique (forme et orientation des grains) prise en compte lors de la détermination du tenseur d'interaction.
- L'influence de la vitesse de sollicitation par la prise en compte des échanges thermiques accompagnant la transformation.



## - Références bibliographiques -

- [AKK94] Abeyaratne R., Kim S.J., Knowles J.K., "*Continuum Modelling of Shape Memory Alloys*", dans Mechanics of Phase Transformation and Shape Memory Alloys, Éd. by Brinson L.C and Moran B., AMD, 189, PVP, 292, ASME (1994)
- [B68] Boccara N., dans Les principes de la Thermodynamique Classique, Éd. PUF, Coll. Sup. (1968)
- [B92] Bensalah M.O., "*Contribution à l'étude des comportements thermomécaniques des mono et polycristaux en plasticité de transformation*", Thèse d'État, Université Mohammed V, Rabat, Maroc (1992)
- [B93] Berveiller M., "*Comportement mécanique des matériaux solides microhétérogènes*", Cours de D.E.A., Université de Metz (1993)
- [BZ84] Berveiller M., Zaoui A., "*Modelling of the Plastic Behavior of Inhomogeneous Media*", J. Eng. Mat. and Tech., 106, pp.295-299 (1984)
- [BZ93] Berveiller M., Zaoui A., "*Modélisation du Comportement Mécanique des Solides Microhétérogènes*", Ch. de Formation Avancée de Méc. des Polymères, Cluny (1993)
- [CD92] Chrysochoos A., Dupré J.C., "*An infra-red set-up for Continuum Thermomechanics*", Actes du colloque QIRT, Eurotherm, Seminar 27, Éd. Européennes Thermiques et Industries (1992)
- [CPM93] Chrysochoos A., Pham H., Maisonneuve O., "*Une analyse expérimentale du comportement thermomécanique d'un alliage*

- à mémoire de forme de type Cu-Zn-Al", C.R. Acad. Sci. Paris, 316, Série II, pp.1031-1036 (1993)
- [DOV88] Delaey L., Ortin J., Van Humbeeck J., Procs of Phase transformations'87, Éd. G.W. Lorimes, The Institute of Metals, 60 (1988)
- [DZ73] Dederichs P.H., Zeller R., "*Variational Treatment of the Elastic Constants of Disordered Materials*", Z. Phys., 259, pp.103 (1973)
- [E61] Eshelby J.D., "*Elastic inclusions and inhomogeneities*", Prog. in Solid Mech., 2, pp.89-140 (1961)
- [E94] El Amrani Zirifi M., "*Contributions à l'étude micromécanique des transformations martensitiques thermoélastiques*", Thèse, Université de Metz (1994)
- [EPE95] Entemeyer D., Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M., "*Micromechanical Modelling of the Superthermoelastic Behavior of Materials Undergoing Thermoelastic Phase Transition*", Procs of ICOMAT'95, Lausanne, Les Éditions de Physique, pp.233-238 (1988)
- [FHB87] Fassi Fehri O., Hihl A., Berveiller M., "*Elastic Interactions Between Variants in Pseudoelastic Single Crystals*", Scripta Met., 21, pp.771 (1987)
- [FZ91] Fedelich B., Zanzotto G., "*One-Dimensional Quasistatic Nonisothermal Evolution of Shape Memory Material inside the Hysteresis Loop*", Cont. Mech. and Therm., 3, pp.251-276 (1991)
- [G73] Germain P., dans "*Cours de mécanique des milieux continus*", Éd. Masson, 1, Paris (1973)

- [L92] Lipinski P., *"Modélisation du comportement des métaux en transformations élastoplastiques finies à partir des méthodes de transition d'échelle"*, Thèse d'habilitation, LPMM, ISGMP, Université de Metz (1992)
- [LCB87] Lipinski P., Corvasce F., Berveiller M., *"Effect of morphological texture on the overall elasto-plastic behavior of metallic polycrystals"*, 8<sup>th</sup> RISO Int. Symp., pp.409-414 (1987)
- [LGS96] Lexcelent C., Goo B.C., Sun Q.P., Bernardini J., *"Characterization, Thermomechanical behavior and Micromechanical-based Constitutive Model of Shape Memory Cu-Zn-Al Single Crystals"*, Acta Mater., 44, n°9, pp.3773-3780 (1996)
- [P86] Patoor E., *"Contribution à l'étude de la plasticité de transformation dans les mono et polycristaux métalliques"*, Thèse, Université de Metz (1986)
- [P95] Patoor E., *"Comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme"*, Mémoire d'habilitation, Université de Metz, (1995)
- [PC53] Patel J.R., Cohen M., *"Criterion for the Action of Applied Stress in the Martensitic Transformation"*, Acta Met., 1, pp.531-538 (1953)
- [PEB87] Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M., *"Potentiel pseudoélastique et plasticité de transformation martensitique dans les mono et polycristaux métalliques"*, Acta Met., 35, n°11, pp.2779-2789 (1987)
- [PEB88] Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M., *"Thermomechanical behaviour of shape memory alloys"*, Arch. Mech., 40, pp.775-794 (1988)

- [PEB94] Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M., *"Micromechanical Modelling of the Shape Memory Behavior"*, Procs ASME WAM'94, Chicago I.L., AMD-189/PVD-292, pp. 22-37 (1994)
- [R71] Rice J.R., *"Inelastic constitutive relations for solids: an internal variable theory and its application to metal plasticity"*, J. Mech. Phys. Solids, 19, pp.433-455 (1971)
- [SH93] Sun Q.P., Hwang K.C., *"Micromechanics modelling for the Constitutive Behavior of Polycrystalline Shape Memory Alloys"*, J. Mech. Phys. Solids, 41, pp.1-17 (1993)
- [SH94] Sun Q.P., Hwang K.C., *"Micromechanics Constitutive Description of Thermoelastic Martensitic Transformations"*, Advances in Applied Mechanics, 31, Academic Press, New York, pp. 249-298 (1994)
- [VD81] Van Humbeek J., Delaey L., *"The influence of strain-rate, amplitude and temperature on the hysteresis of a pseudoelastic Cu-Zn-Al single crystal"*, J. de Phys., C5, n°10, 42, pp.1007-1011 (1981)
- [WLR53] Weschler M.S., Liebermann D.S., Read T.A., *"On the theory of the formation of martensite"*, Trans. AIME, 197, pp.1503-1515 (1953)

# CHAPITRE IV: - Résultats expérimentaux pour un alliage CuAlBe -

IV.1 - INTRODUCTION	..Page 118
IV.2 - DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL	..Page 119
IV.2.1 - MATÉRIEL D'ESSAI	.....119
IV.2.2 - PRÉPARATION DES ÉPROUVETTES	.....122
IV.2.3 - DIFFÉRENTS TYPES D'ESSAIS	.....125
IV.3 - SUPERTHERMOÉLASTICITÉ DES MONOCRISTAUX CuAlBe	..Page 126
IV.3.1 - INTRODUCTION	.....126
IV.3.2 - SUPERÉLASTICITÉ	.....127
IV.3.3 - FLUAGE ANISOTHERME	.....132
IV.3.4 - DIAGRAMME D'ÉTAT	.....136
IV.4 - SUPERTHERMOÉLASTICITÉ DES POLYCRISTAUX CuAlBe	..Page 139
IV.4.1 - INTRODUCTION	.....139
IV.4.2 - SUPERÉLASTICITÉ	.....141
IV.4.3 - FLUAGE ANISOTHERME	.....145
IV.4.4 - INFLUENCE DE LA VITESSE DE SOLLICITATION	.....151
IV.5 - CONCLUSION	..Page 152
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES IV	..Page 154

*Ce chapitre décrit des essais de traction isotherme et de fluage anisotherme réalisés sur un alliage à mémoire de forme de type CuAlBe. Ces essais sont réalisés sur des éprouvettes monocristallines et polycristallines de même composition. L'influence de la vitesse de sollicitation sur le comportement superélastique des polycristaux est également étudiée.*

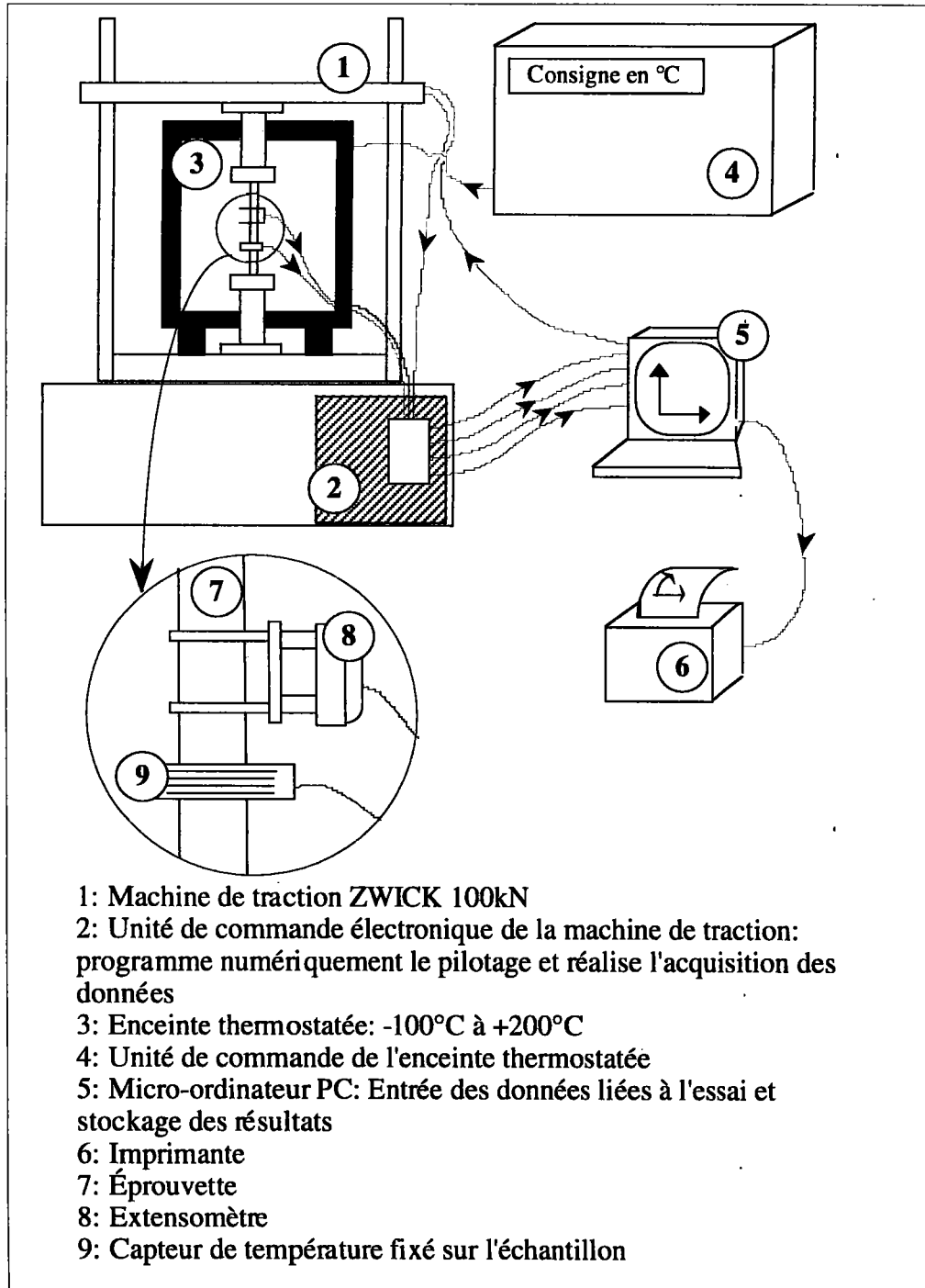
## IV.1 - INTRODUCTION

Les alliages à mémoire de forme de type CuAlBe sont actuellement l'objet de nombreuses études, leurs propriétés en font des alliages très intéressants pour les applications industrielles. Ces alliages présentent une stabilité thermique bien supérieure aux CuZnAl et une mise en oeuvre plus facile que les CuAlNi (absence de précipité  $\gamma$  fragilisant). Les propriétés mécaniques sont également supérieures à celles des CuZnAl [B90][F93]. Le nombre d'études portant sur leur comportement étant encore très faible, cet alliage a été choisi comme support expérimental à cette étude.

Au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'université de Metz, A. Hautcoeur a mis au point une méthode industrielle d'élaboration de fil monocristallin en alliage cuivreux [H96]. Cette méthode présente la particularité de pouvoir réaliser des monocristaux à partir de polycristaux et d'obtenir des éprouvettes mono et polycristallines de même composition, ce qui permet d'effectuer tout un ensemble de mesures originales parfaitement adaptées à la validation d'une approche micro-macro. Rappelons que le modèle utilisé dans ce travail détermine le comportement d'un polycristal à partir du comportement des grains qui le constituent, ces derniers étant considérés comme des monocristaux. Ces essais vont ainsi permettre de valider le modèle et de caractériser le comportement de l'alliage CuAlBe soumis à des contraintes uniaxiales et à des variations de température.

## IV.2 - DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

### IV.2.1 - MATÉRIEL D'ESSAI



*Fig.IV-1: Dispositif expérimental utilisé pour réaliser des essais de traction superélastique à différentes températures et de fluage anisotherme sous différentes contraintes appliquées.*

Deux types d'essais mécaniques sont mis en oeuvre:

- Des essais de traction uniaxiale isotherme: essais de superélasticité.
- Des cycles thermiques à contrainte uniaxiale imposée constante: essais de fluage anisotherme.

Ces différents essais sont réalisés sur une machine de traction ZWICK d'une capacité de 100kN (Photo IV-2), la vitesse de déplacement de la traverse mobile est imposée. La machine est pilotée par un micro-ordinateur qui réalise également l'acquisition des données.

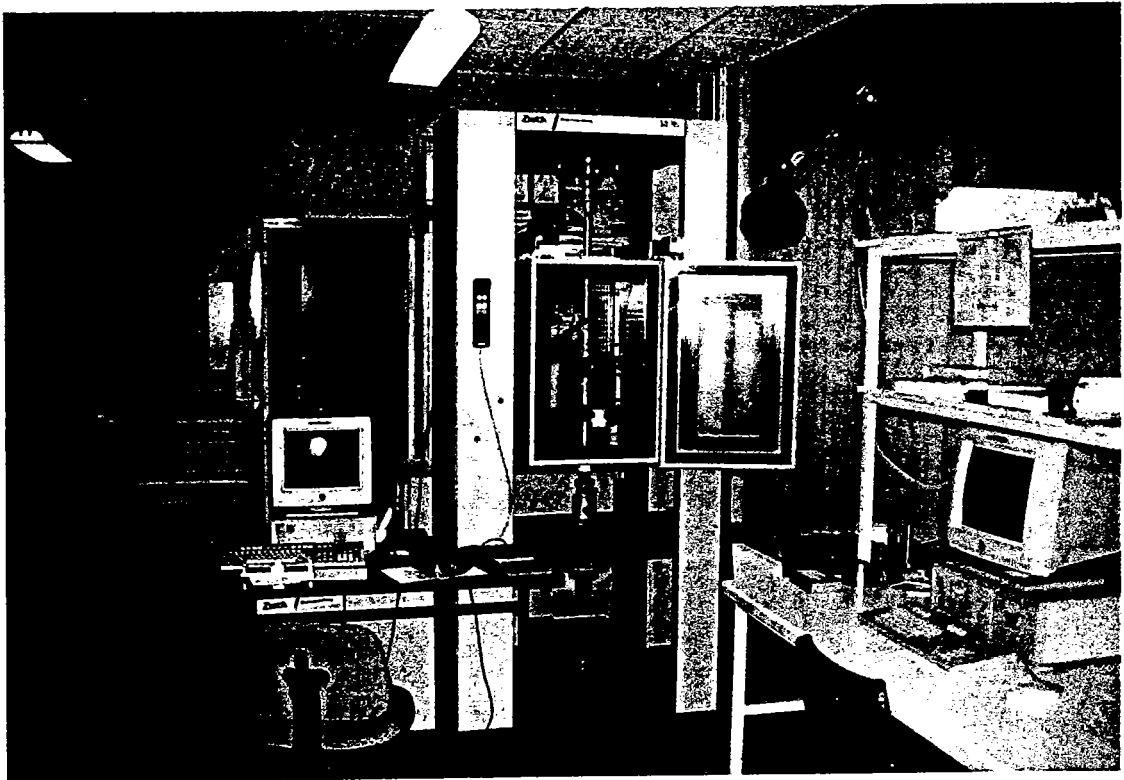
L'éprouvette est placée dans une enceinte thermostatée programmable qui contrôle la température de l'essai. Cette enceinte permet de réaliser les cycles en température dans la plage de -100 à 200°C. Les vitesses nominales de refroidissement et de chauffage sont les suivantes: 3K/min. entre 0 et 100°C., 1K/min entre -100 et 0°C et entre 100 et 200°C. Il n'est pas possible de régler ces paramètres, seules les températures de consigne peuvent être modifiées.

L'éprouvette, une fois fixée dans les mors de la machine de traction, est équipée en son milieu d'un extensomètre pour la mesure des déformations. Une sonde fixée à l'éprouvette permet de mesurer la température en surface. Le système de serrage et de fixation des éprouvettes permet d'éviter la torsion de l'éprouvette lors de la mise en place et pendant l'essai (Photo IV-3).

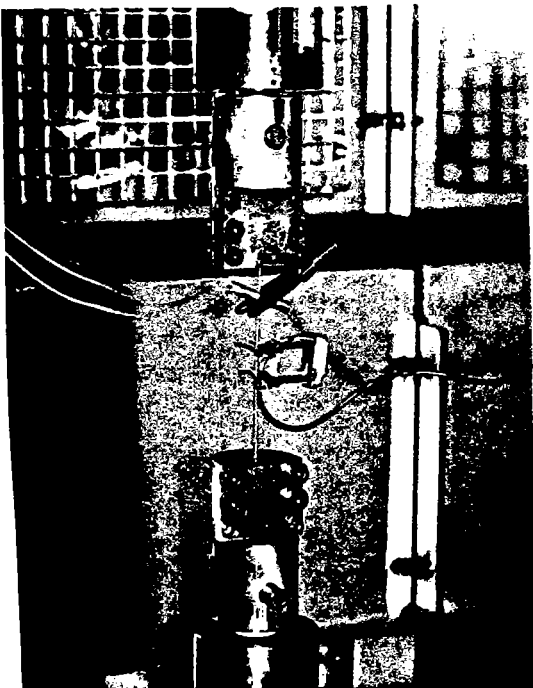
Mise à part la température, qui est imposée indépendamment, l'essai est piloté à partir d'un micro-ordinateur PC équipé du logiciel ZWICK1008 qui permet la commande de l'essai (via l'unité de commande électronique) et l'acquisition des données. Pendant l'essai, cette acquisition se fait selon un incrément imposé par l'utilisateur et concerne cinq paramètres:

- Le temps  $t$  (seconde)
- Le déplacement  $x$  de la traverse (mm)
- L'effort  $F$  appliqué à l'échantillon (N.)
- L'allongement  $\Delta l$  mesuré par l'extensomètre (mm)
- La température  $T$  mesurée au contact de l'échantillon (°C)





*Photo.IV-2: Machine de traction utilisée pour les essais de superélasticité et de fluage anisotherme.*



*Photo.IV-3: Dispositif de serrage et de montage de l'éprouvette. Il permet d'éviter la torsion des éprouvettes au montage et en cours d'essai.*

Au cours des essais, on néglige la variation de section de l'éprouvette. Les déformations  $\varepsilon$  et contraintes  $\sigma$  sont calculées d'après les relations suivantes:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{F}{S_0} \quad \text{avec } l_0 \text{ et } S_0 \text{ la longueur et section initiale.}$$

Un post-traitement des fichiers obtenus permet de tracer les courbes  $\sigma$ - $\varepsilon$  (superélasticité) et  $\varepsilon$ - $T$  (fluage anisotherme). Il permet également de suivre les dérivées éventuelles des paramètres imposés (paramètres supposés constants): température  $T$  en superélasticité ou contrainte  $\sigma$  en fluage anisotherme.

#### IV.2.2 - PRÉPARATION DES ÉPROUVETTES

Les essais ont été effectués sur un alliage CuAlBe de composition (en % massique): 11,6% Al et 0,5% Be.

Les polycristaux sont fournis par la société Tréfinmétaux sous forme de fil de section circulaire d'environ 1,5 mm de diamètre. À partir de ces polycristaux, des monocristaux sont élaborés au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux [H96]. On obtient ainsi des monocristaux d'une longueur de 1 mètre et de section identique à celle des polycristaux. La méthode utilisée permet de conserver la composition de l'alliage.

Les éprouvettes utilisées sont coupées à partir des différents fils, leurs principales caractéristiques sont données dans le tableau IV-4.

	Longueur utile moyenne (mm)	Diamètre moyen (mm)	T° Ms (°C)
Monocristal	100	1,5	≅ 0
Polycr. brut	100	1,46	≅ -40

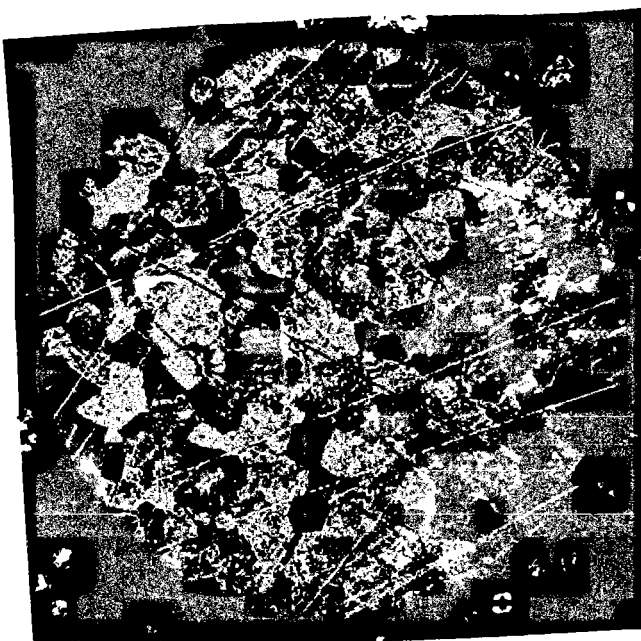
*Tableau IV-4: Caractéristiques des éprouvettes monocristallines et polycristallines brutes de livraison.*

Les échantillons disponibles étant sous forme de fils, la réalisation d'essais de compression est impossible.

On choisit la phase austénitique comme état initial et on recherche un état cristallographique de départ le plus uniforme possible pour toutes les éprouvettes. Pour ces raisons, on effectue un recuit à  $690^{\circ}\text{C}$  commun à l'ensemble des échantillons polycristallins. On réalise le traitement suivant:

- Préchauffage du four à  $690^{\circ}\text{C}$
- Introduction des éprouvettes et maintien à  $690^{\circ}\text{C}$  pendant 5 min.
- Refroidissement à l'air libre.

Ce traitement a pour conséquence d'augmenter la taille des grains [E96]. Sur les échantillons bruts, le diamètre moyen des grains est de  $100\ \mu\text{m}$ . Après traitement, ce diamètre est multiplié par trois environ (fig.IV-5). Un tel résultat est également responsable de modifications au niveau des températures de transformation [H96].



*Fig. IV-5: Micrographies de l'état initial et de l'état recuit (d'après Hautcoeur A. - LPMM - Université de Metz [H96]): Grossissement \*5.*

Pour les monocristaux, aucun traitement thermique n'est nécessaire. Seul une immersion pendant cinq minutes dans de l'acide nitrique dilué à 60% permet de détecter les joints de grain indésirables et de sélectionner les éprouvettes entièrement monocristallines.

On suppose que le comportement de l'alliage monocristallin étudié s'inscrit dans le même type de diagramme de phase métastable que celui précédemment déterminé pour un alliage CuAlBe de composition légèrement différente (fig.IV-6): 11,6% Al et 0,52% Be en % massique [HEP94].

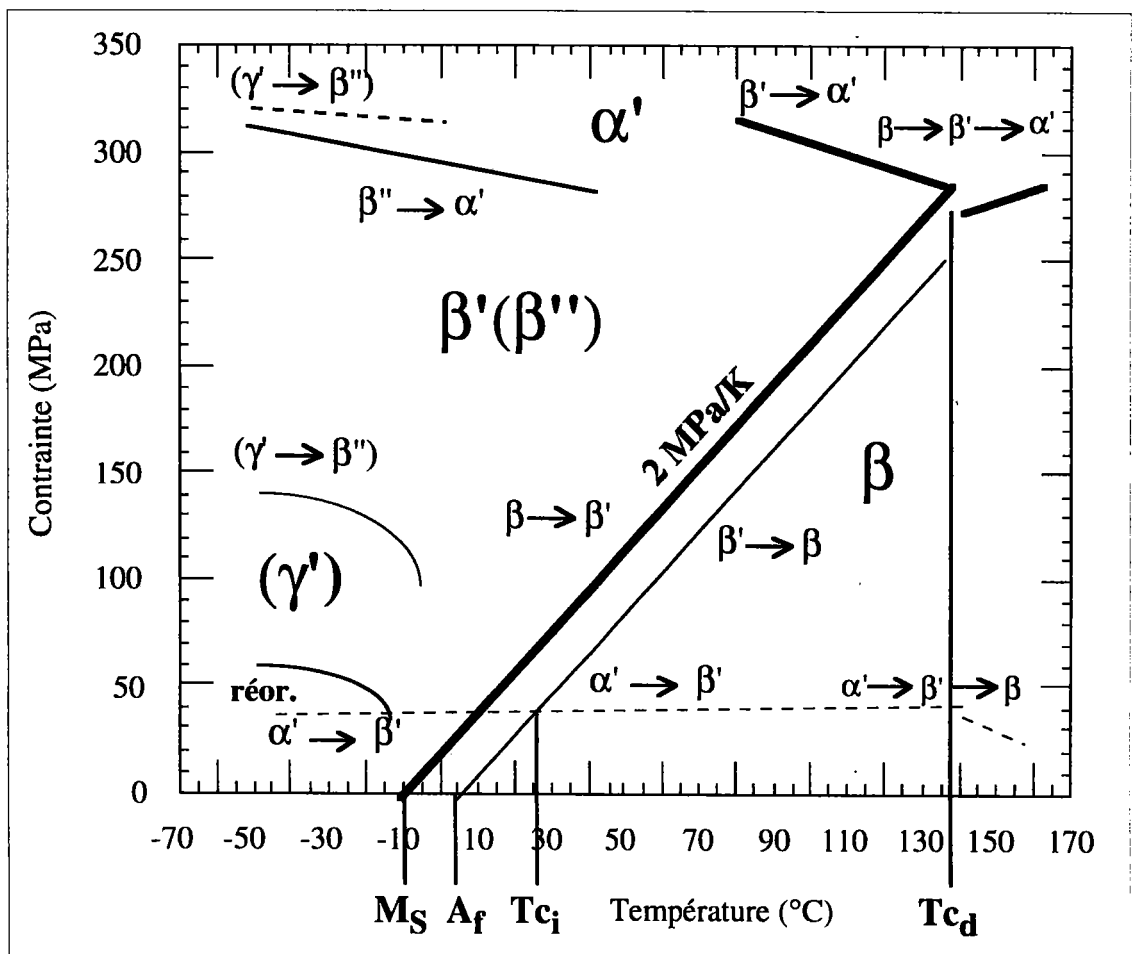


Fig.IV-6: Diagramme d'état métastable obtenu pour un alliage CuAlBe monocristallin ( $M_s = -10^\circ\text{C}$ ) [HEP94].

Comme pour les alliages de type CuAlNi [SSO85], on observe quatre types de martensite:  $\gamma'$ ,  $\beta'$ ,  $\beta''$  et  $\alpha'$ . La phase  $\beta'$  se forme à partir de

l'austénite  $\beta$  et la phase  $\beta''$  à partir de la martensite  $\gamma'$ . Le diagramme laisse apparaître quatre températures caractéristiques:

- $M_S$ , la température de début de la transformation austénite-martensite,
- $A_f$ , la température de fin de la transformation martensite-austénite,
- $T_{c_i}$  est la température critique à laquelle les transformations inverses  $\alpha' \rightarrow \beta'$  et  $\beta' \rightarrow \beta$  ont lieu simultanément.
- $T_{c_d}$  est la température critique à laquelle les transformations directes  $\beta' \rightarrow \beta$  et  $\beta' \rightarrow \alpha'$  ont lieu simultanément.

On s'attachera pendant nos essais à ne caractériser que le comportement lié à la transformation martensitique  $\beta \rightarrow \beta'$ . Au-delà de 250 MPa et de 130°C, le diagramme indique l'apparition de nouvelles phases. On se limite donc au niveau de la contrainte maximale et de la température maximale pour éviter l'apparition de cette seconde transformation de phase. Pour tenir compte de la composition légèrement différente de l'alliage utilisé ici, les contraintes sont limitées à 200 MPa et la température à 100°C.

#### IV.2.3 - DIFFÉRENTS TYPES D'ESSAIS

Trois séries d'essais ont été effectuées pour caractériser le comportement de l'alliage CuAlBe.

- Dans un premier temps, des essais isothermes (traction uniaxiale + décharge) à  $T > M_S$  permettent d'apprécier l'influence de la température sur le comportement superélastique. Ils permettent également de mesurer certains paramètres physiques ou mécaniques indispensables à la modélisation.
- Dans un second temps, des essais de fluage anisotherme ont été effectués. Ces essais permettent de caractériser d'une manière plus complète l'alliage dans le diagramme contrainte-température. Pour les essais anisothermes, on s'aperçoit que le rôle joué par la contrainte appliquée est nettement plus important que celui de la température lors des essais isothermes.

Ces deux séries sont réalisées à la fois sur les éprouvettes monocristallines et polycristallines.

- L'influence de la vitesse de sollicitation sur le comportement superélastique est également étudiée pour le polycristal.

Remarque:

*L'extensomètre est calibré à la longueur initiale  $l_0=9,84$  mm. (environ 10% de la longueur utile des éprouvettes), de façon à éviter les effets de bord dans la zone de mesure. Il est toujours placé au centre de l'éprouvette.*

## IV.3 - SUPERTHERMOÉLASTICITÉ DES MONOCRISTAUX CuAlBe

### IV.3.1 - INTRODUCTION

La réponse mécanique d'un monocristal dépend fortement de son orientation cristallographique [HIM88]. Dans le but de s'affranchir de cet effet, tous les essais sont effectués sur un seul et unique échantillon. Ceci est permis de part le caractère réversible du comportement superthermoélastique.

Cependant, des études ont montré que la fatigue affecte le comportement du monocristal. On observe une diminution de la contrainte seuil de transformation ainsi qu'une augmentation de la pente de transformation [MS94]. Un tel comportement est relié à la production de défauts pendant la transformation martensitique et à l'interaction entre ces défauts et la transformation elle-même [SRA85]. Pour limiter ces effets, on choisit de ne pas effectuer de cyclage pour chaque condition d'essai: de plus, un flash thermique à 200°C permet de restaurer l'échantillon après chaque essai [HEP94].

évolution microscopique ?

Les différents essais sont effectués dans l'ordre donné en fig. IV-7. En premier lieu on réalise des essais isothermes à des températures croissantes: chaque essai est suivi d'un flash thermique. Une première série d'essais anisotherme est ensuite réalisée pour des niveaux de contrainte décroissants. Cette séquence éduque l'échantillon, une déformation de transformation de 4% est obtenue pour un refroidissement sans contrainte. Une seconde série d'essais de même type est effectuée en réalisant cette fois ci un flash thermique après chaque sollicitation. Seuls les résultats de cette deuxième série sont exploités dans la suite.

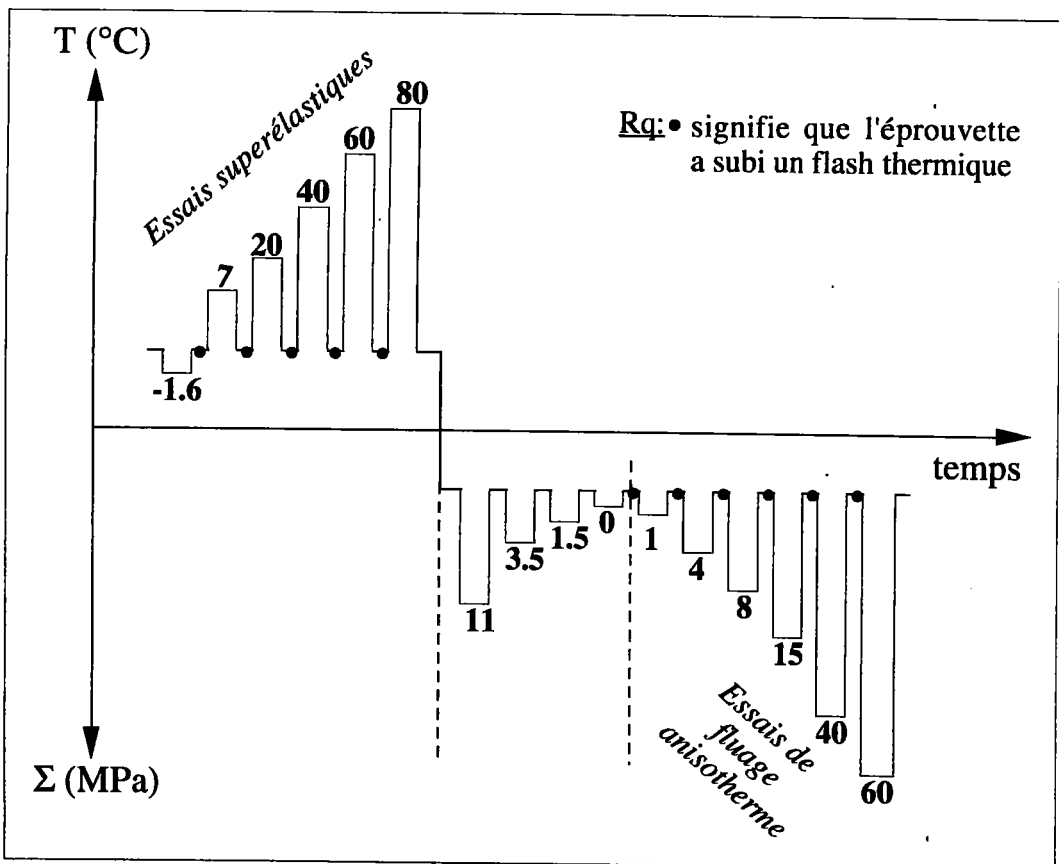


Fig.IV-7: Séquence récapitulative des essais effectués sur le monocristal.

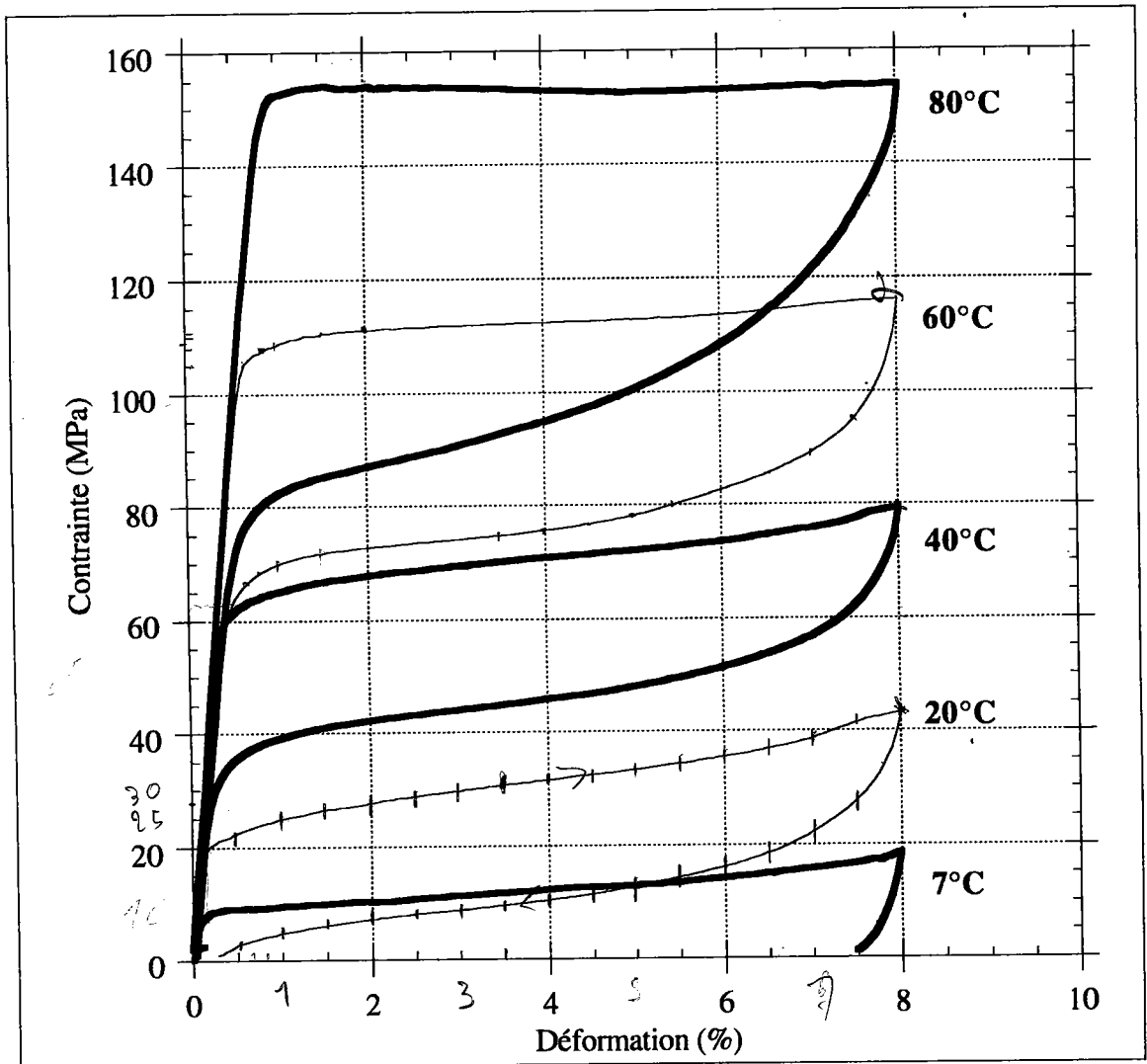
#### IV.3.2 - SUPERÉLASTICITÉ

On choisit la vitesse de traverse suffisamment faible (1mm/min) pour

supposer des conditions de chargement quasi-statique [E96].

Afin de ne pas engendrer de plasticité ou une transformation  $\beta' \rightarrow \alpha'$  (fig.IV-6), le critère de passage de la charge à la décharge est de 8% de déformation mesurée par l'extensomètre. L'arrêt de l'essai intervient lorsque la contrainte s'annule lors de la décharge.

Cinq essais de traction sont effectués pour des températures croissantes comprises entre 7 et 80°C (fig. IV-8).

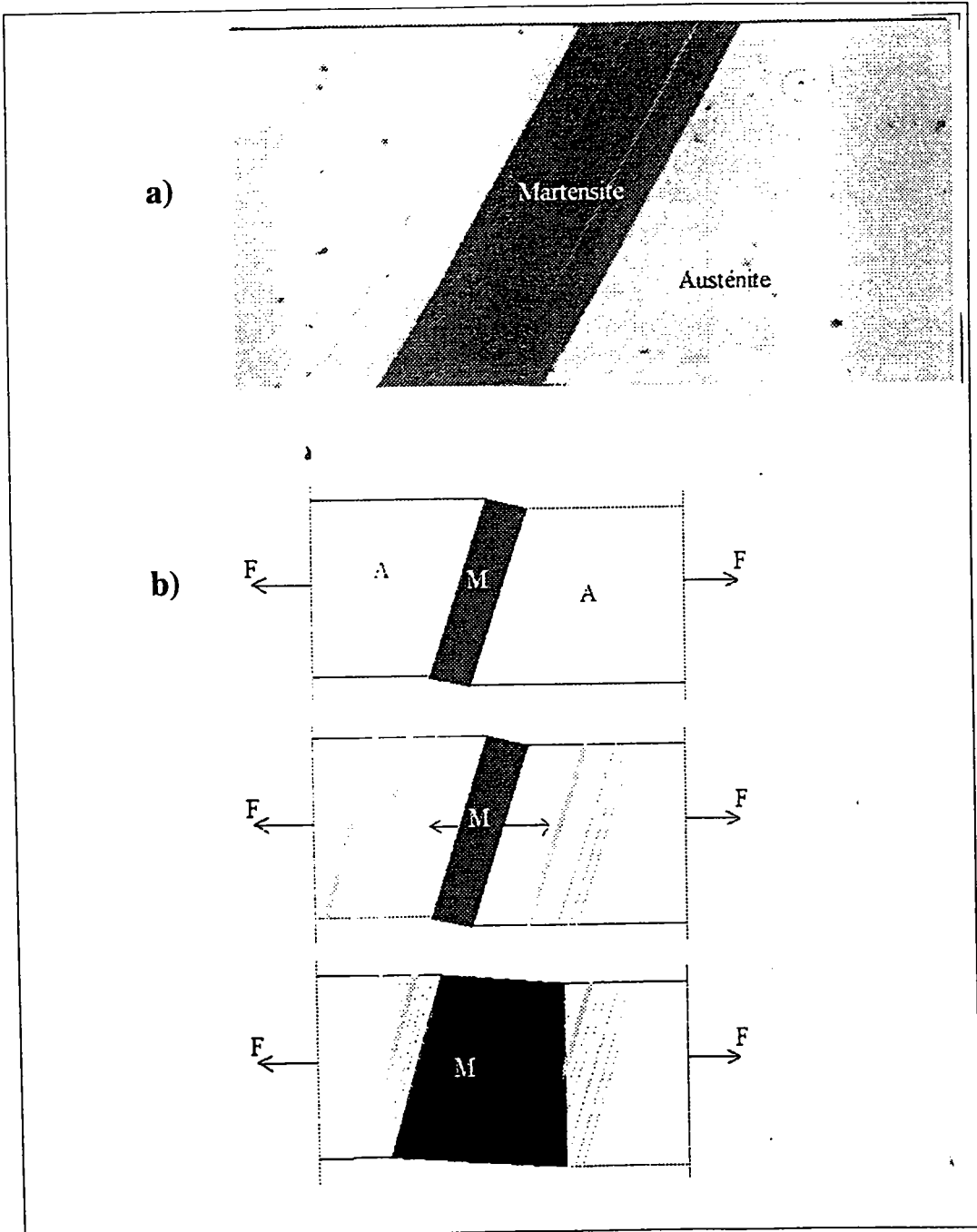


*Fig.IV-8: Courbes de traction superélastique pour le monocristal CuAlBe à différentes températures.*

Le module d'Young, mesuré sur les courbes, donne:  $E \cong 2 \cdot 10^4$  MPa.



On obtient comme prévu des décalages entre les différentes courbes (fig.IV-8). La température de l'essai détermine la contrainte seuil de transformation: la dépendance ainsi obtenue est linéaire.



*Fig.IV-9: a) Photographie du début de la transformation martensitique dans un monocristal CuAlBe (Grossissement: \*50) et b) Schématisation d'après observations expérimentales de la formation de la martensite dans un monocristal [B96].*

En traction uniaxiale, la martensite formée est normalement constituée d'une seule variante [DKT74](fig.IV-9); la mieux orientée par rapport au repère du chargement. La transformation de phase se réalise à contrainte quasi-constante. Le plateau de la transformation est horizontal pour 80°C, il est moins marqué pour les températures plus faibles: 40°, 20° et 7°C. Deux phénomènes distincts peuvent expliquer cette légère pente.

- D'une part, il est possible que les contraintes locales associées à l'apparition de la première variante sont supérieures à la contrainte externe et entraînent ainsi l'apparition d'une seconde variante.
- D'autre part, il est également possible que l'échantillon se transforme d'une manière plus homogène à basse contrainte qu'aux contraintes plus élevées. Dans ce cas, plusieurs sites de transformation sont présents et la transformation a lieu pour une part plus ou moins importante en dehors de la zone de mesure de l'extensomètre. Par rapport à une transformation hétérogène où une variante croît dans la zone de mesure (et pour une même contrainte appliquée), la déformation mesurée sera plus faible.

L'hystérésis augmente sensiblement pour les essais à 60° et 80°C. Elle est d'environ 25 MPa pour les essais à 20 et 40°C (mesurée à 4% de déformation), ce qui correspond à celle obtenue par d'autres expérimentateurs sur des alliages CuAlBe de composition différente [HEP94]. L'augmentation de l'hystérésis aux essais effectués à 60 (36 MPa) et 80°C (58 MPa) provient sûrement d'une seconde transformation martensitique ( $\beta' \rightarrow \alpha'$ ) qui se produit à hautes contraintes. La contrainte seuil de la transformation inverse  $\alpha' \rightarrow \beta'$  de cette seconde martensite ( $\alpha'$ ) étant inférieure à celle de la première ( $\beta'$ ), cela explique l'augmentation de l'hystérésis.

Ces essais sont réalisés à vitesse de traverse imposée. Les vitesses de déformation correspondantes sont déduites des courbes de déformation en fonction du temps (fig.IV-10). La vitesse de déformation pour la partie élastique est égale à  $3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Les vitesses de déformation dans le

domaine de transformation varient suivant la température de l'essai (tab.IV-11). Cependant cette variation ne peut pas être responsable des différences de pente observées lors des essais. En effet, il est connu que l'influence est inverse: plus la vitesse de déformation est importante, plus la pente s'accroît [DDA78].

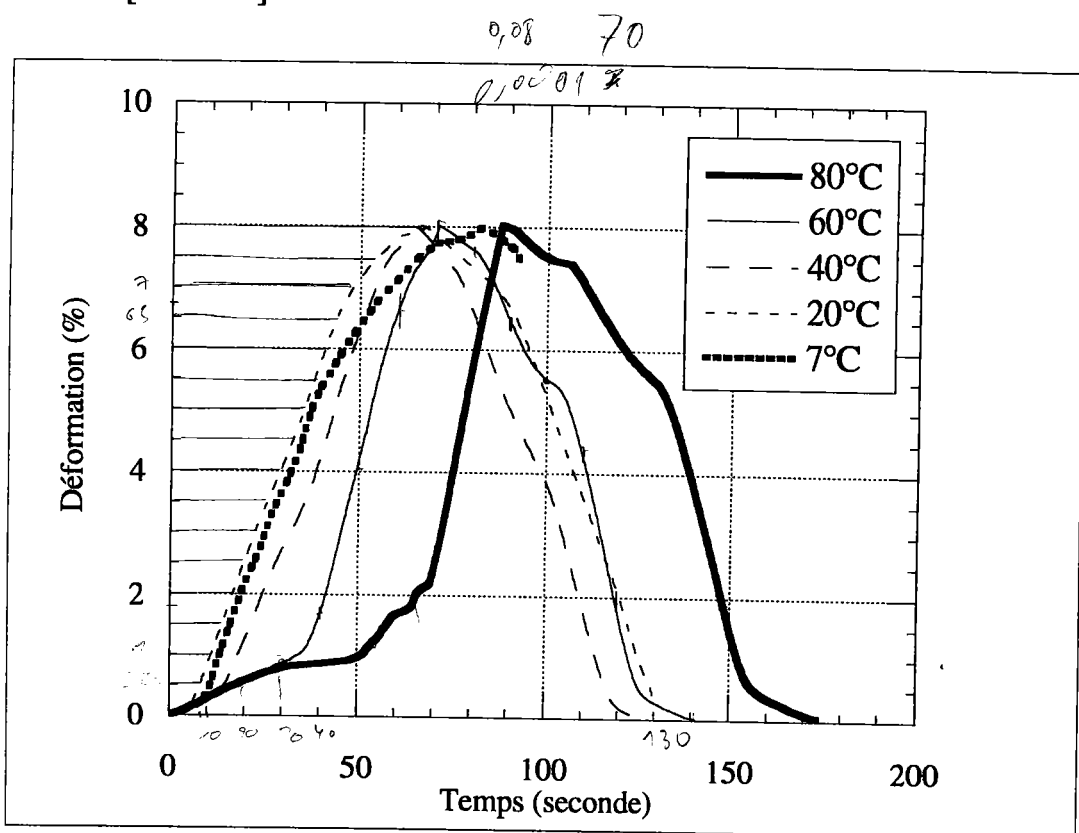


Fig.IV-10: Courbes de déformation en fonction du temps des essais superélastiques à différentes températures pour le monocristal.

L'irrégularité des courbes (notamment à 80°C) provient de déformations ayant lieu en dehors de la zone de mesure de l'extensomètre. La déformation obtenue est alors à caractère plus homogène à travers l'échantillon..

T° de l'essai (°C)	7	20	40	60	80
Vit. de déf. $\dot{\epsilon}^T$ (s <sup>-1</sup> )	1,6 10 <sup>-3</sup>	1,6 10 <sup>-3</sup>	2,1 10 <sup>-3</sup>	2,1 10 <sup>-3</sup>	3,2 10 <sup>-3</sup>

Tab.IV-11: Vitesses de déformation mesurées pour les essais isothermes sur monocristaux à vitesse de traverse imposée constante.

Pour une même vitesse de déplacement de la traverse, on obtient des vitesses de déformation différentes suivant la température de l'essai. Pendant un même incrément de temps et par conséquent un même taux de déformation globale de l'éprouvette, la déformation mesurée à 7°C est deux fois plus faible qu'à 80°C. Aux températures plus faibles, la déformation est moins localisée, il se peut que deux plaquettes de martensite apparaissent et progressent: une dans la zone de mesure et la seconde en dehors de cette zone.

### IV.3.3 - FLUAGE ANISOTHERME

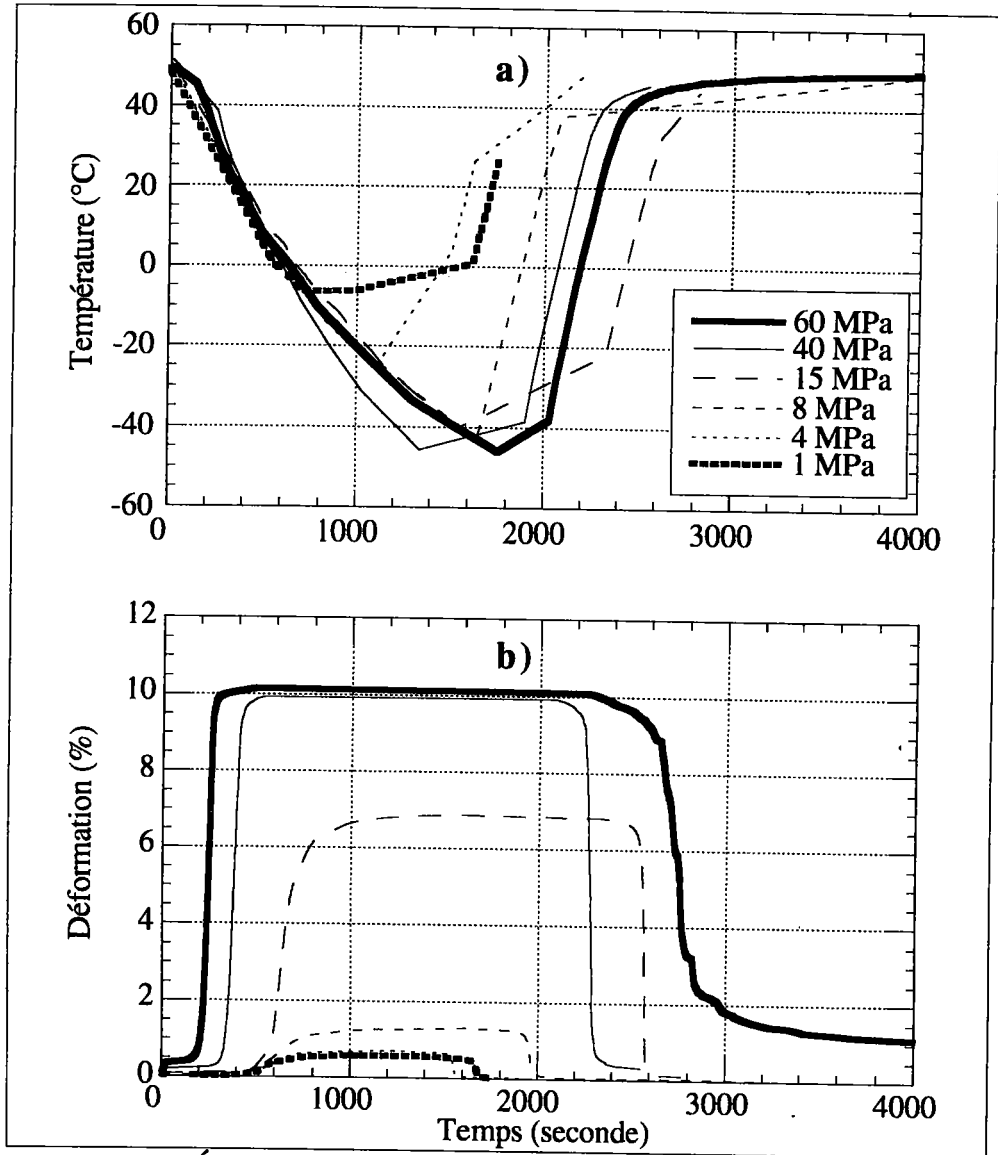
Une fois l'éprouvette mise en place, l'essai démarre par l'application d'une contrainte qui reste ensuite constante pendant tout l'essai. Une température de consigne (dans le domaine martensitique) commande le refroidissement de l'étuve et de l'éprouvette. Le dispositif expérimental ne permet pas d'intervenir au niveau des vitesses de refroidissement et de chauffage et par conséquent, sur les vitesses de déformation (fig.IV-12). La courbe température(temps) permet de mesurer pour le refroidissement les gradients de température suivants:

- -6 K/minute dans le domaine de température [60°, -5°C] et
- -3 K/minute dans le domaine de température [-5°, -60°C].

La vitesse de chauffage est de 12 K/minute.

Les vitesses de déformation sont au maximum de  $\dot{\epsilon}^T \approx 1,65.10^{-4}$  pour l'essai à  $\Sigma_{imp} = 60$  MPa, ce qui correspond à la vitesse minimale lors des essais isothermes. Nous pouvons donc dire que les conditions de chargement sont quasi-statiques pour ces essais.

Les essais sont effectués pour des contraintes croissantes comprises entre 1 et 60 MPa. Les courbes obtenues sont typiques du comportement anisotherme d'un alliage à mémoire de forme (fig.IV-13).



*Fig.IV-12: Évolution de la température (a) et de la déformation (b) en fonction du temps lors des essais de fluage anisotherme du monocristal CuAlBe.*

Les températures de transformation sont fonction de la contrainte appliquée (fig.IV-13). Il faut noter que la déformation maximale de transformation obtenue dépend également du niveau de contrainte (fig.IV-14).

Ce phénomène est en accord avec le mécanisme d'accommodation des variantes de martensite. En l'absence de contraintes ou lorsque celles-ci sont très faibles, les variantes formées ne sont pas orientées (favorisées mécaniquement), elles ont alors tendance à s'accommoder afin de minimiser l'énergie élastique.

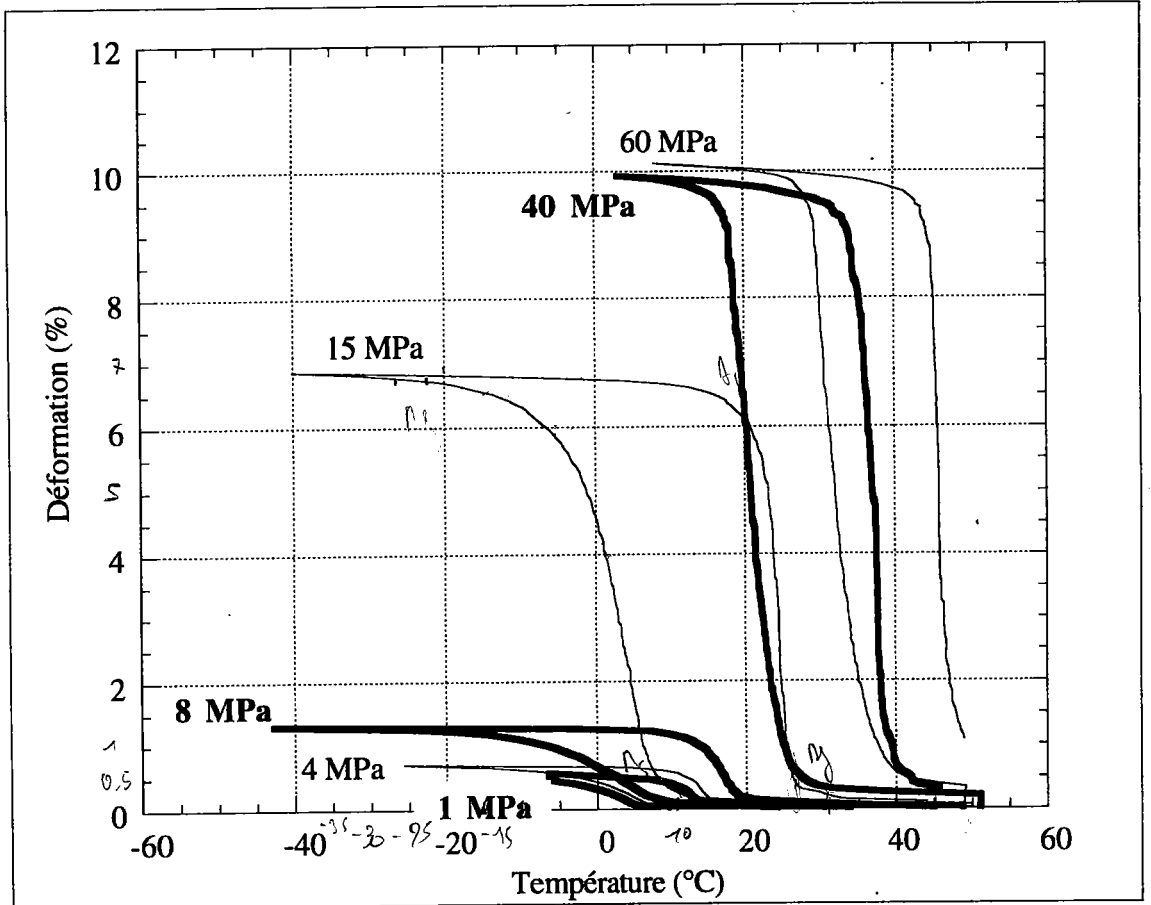


Fig.IV-13: Essais de fluage anisotherme pour un monocristal CuAlBe à différentes contraintes imposées constantes.

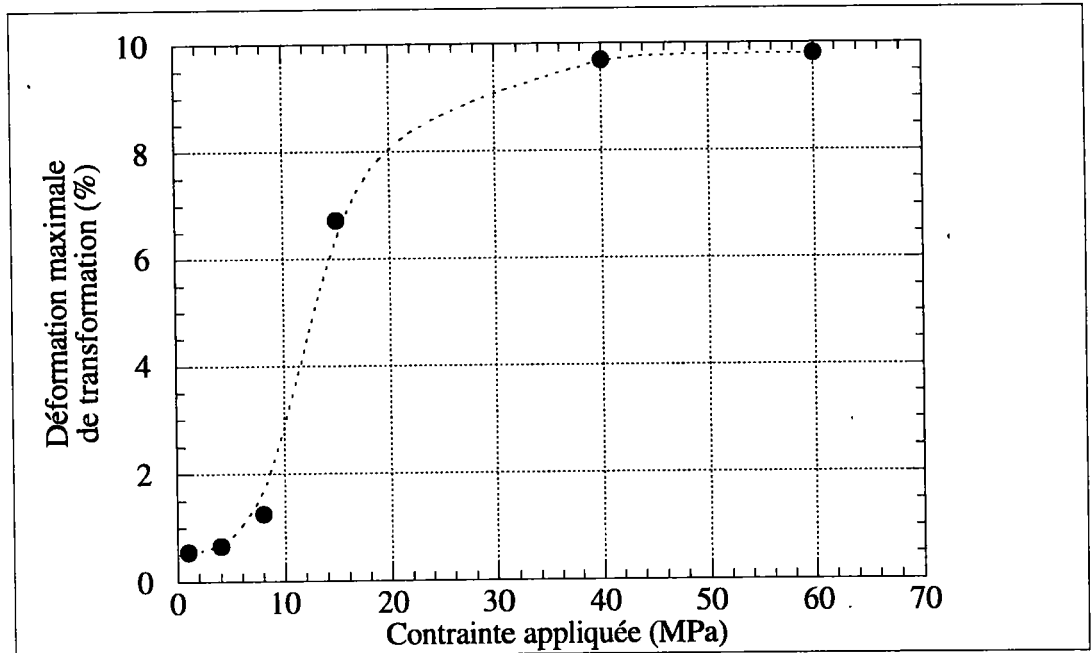


Figure IV-14: Déformation maximale de transformation en fonction de  $\Sigma$  appliquée lors d'essais de fluage anisotherme pour le monocristal CuAlBe.

On peut scinder la courbe IV-14 en trois parties:

- Au-dessus de 20 MPa, la courbe tend à se saturer pour une valeur proche de 10%, valeur obtenue pour une transformation monovariante et pour un chargement superélastique. Ce résultat s'interprète comme l'effet de la contrainte qui oriente et favorise la variante la mieux orientée par rapport au repère du chargement: dans ce cas, la transformation est monovariante.
- Une partie à basse contrainte ( $< 20$  MPa) pour laquelle la déformation décroît fortement avec la contrainte appliquée. Celle-ci, plus assez importante, ne favorise plus une seule variante et permet à plusieurs variantes de s'accommoder en faisant chuter la déformation de transformation globale.
- Pour les très faibles contraintes ( $< 5$  MPa), l'éprouvette semble légèrement éduquée. Idéalement, un fluage anisotherme sans contrainte devrait aboutir à une transformation complète sans déformation macroscopique de transformation.

La courbe IV-14 peut être représenté sur un même graphique que les essais superélastiques (fig.IV-15). On note une très bonne correspondance avec l'essai superélastique à  $7^{\circ}\text{C}$ . Ce type de résultat est attendu par Waram [W90]: pour un essai superélastique à une température égale à  $M_s$ , la courbe de comportement (et principalement la pente de transformation) doit correspondre à la partie linéaire à faible contrainte de la courbe de déformation maximale de transformation obtenue lors d'essais de fluage anisotherme. Le fait que la correspondance soit bonne pour l'essai à  $7^{\circ}\text{C}$  ( $M_s + \text{quelques } ^{\circ}\text{C}$ , voir tab.IV-17) montre que notre échantillon s'est légèrement éduqué lors des essais de fluage anisotherme.

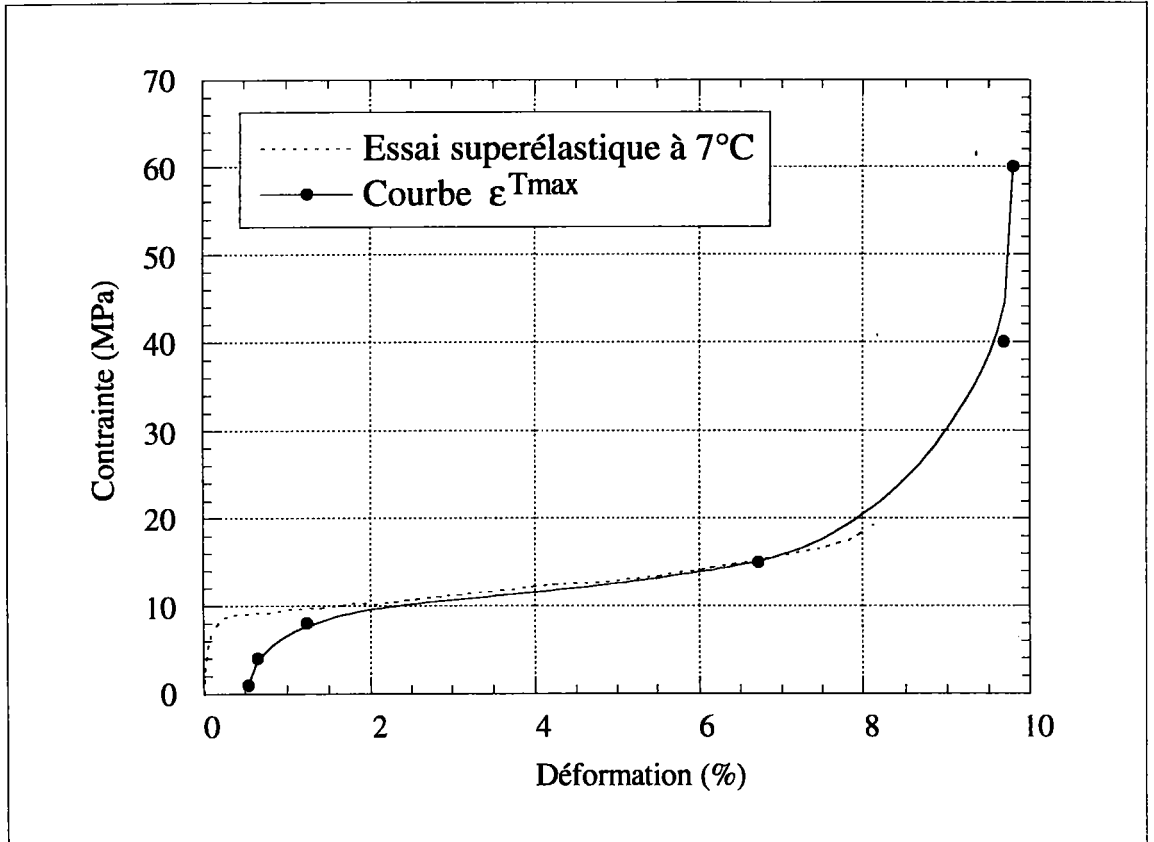


Figure IV-15: Comparaison entre la courbe superélastique à 7°C et la courbe de déformation maximale de transformation  $\epsilon^{Tmax}$  obtenue à partir des essais de fluage anisotherme.

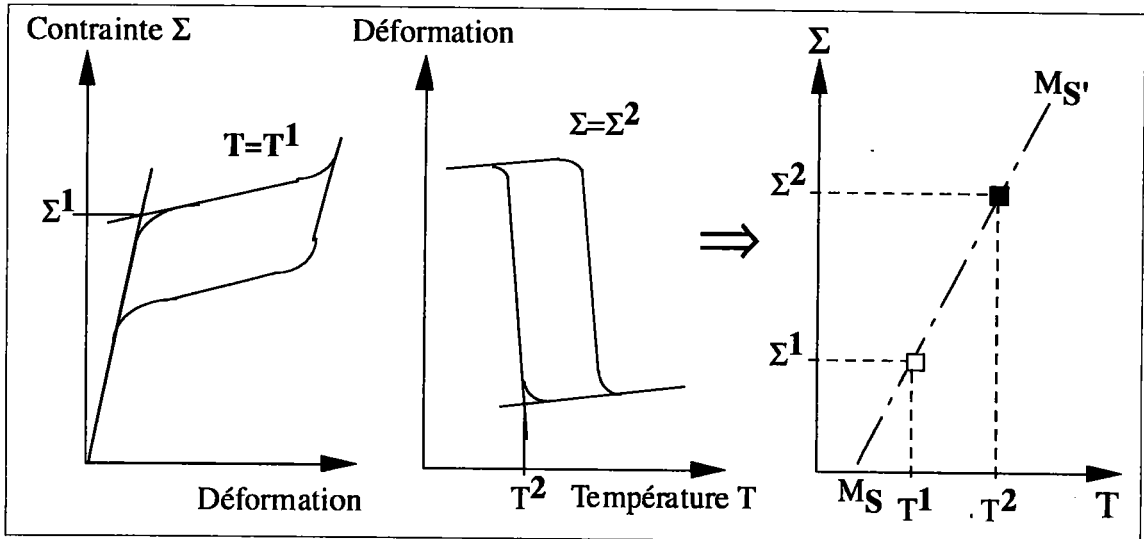
#### IV.3.4 - DIAGRAMME D'ÉTAT

À partir des essais précédents (superélastiques et fluages anisothermes), on déduit le diagramme de phase contrainte-température qui permet de caractériser cristallographiquement et thermomécaniquement l'alliage. C'est une donnée importante pour l'utilisation des alliages à mémoire de forme car il permet de différencier les domaines de stabilité des différentes phases. Par exemple, la droite de début de transformation directe ( $M_S M_S'$ ) représente le départ de la transformation austénite-martensite lors d'un chargement (application d'une contrainte ou refroidissement).

Plusieurs techniques existent quant à sa détermination expérimentale. On utilise une méthode d'intersection des tangentes schématiquement



représentée sur la figure IV-16. La même méthode a été utilisée pour déterminer les lignes  $M_fM_f$ ,  $A_S A_S'$ ,  $A_f A_f$ .

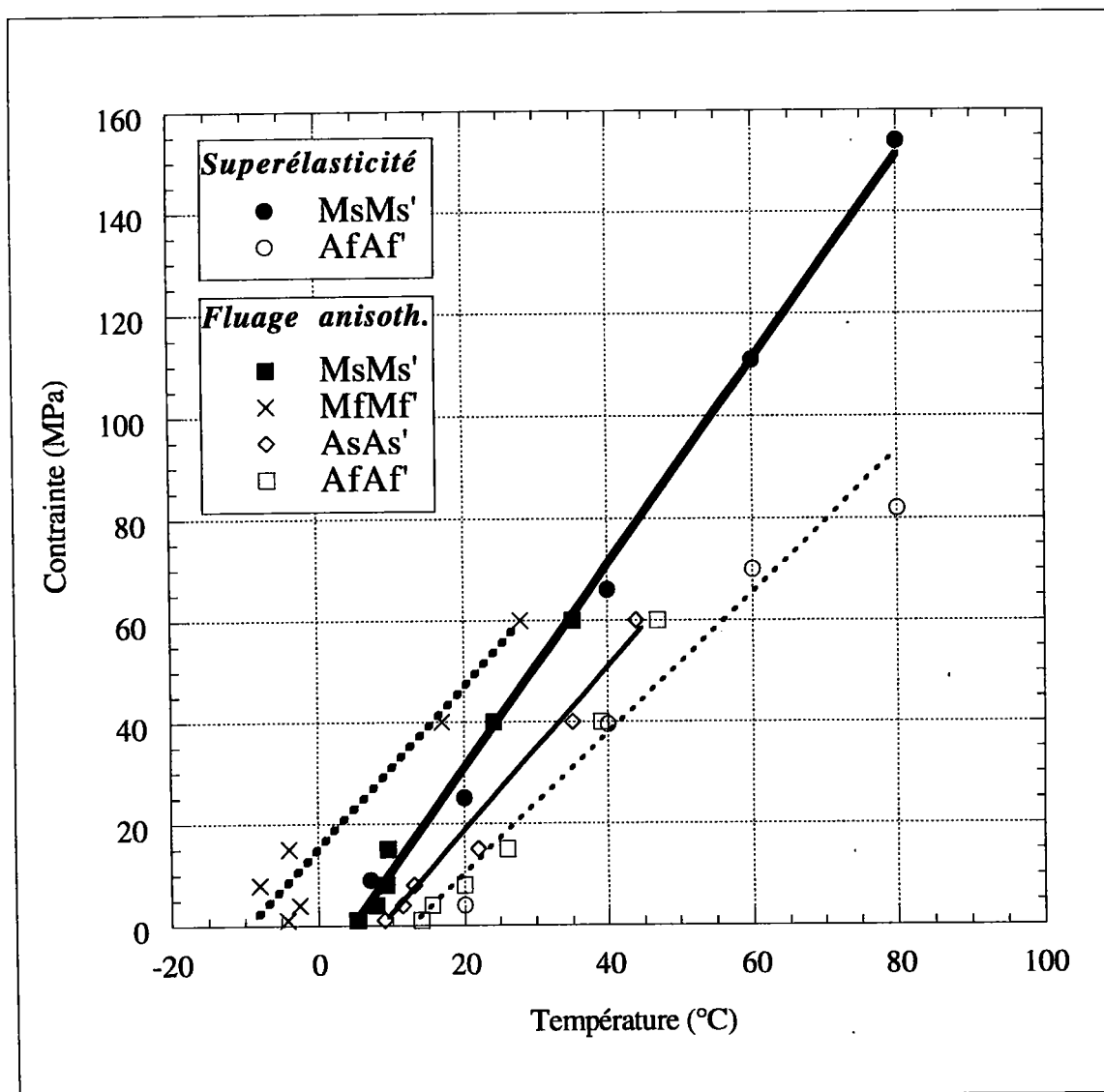


**Fig.IV-16:** Représentation schématique de la méthode de détermination par intersection des tangentes de la ligne de départ de la transformation directe ( $M_S M_S'$ ).

Les différents points représentant chaque essai (isotherme et anisotherme) sont portés dans le diagramme contrainte-température. Les lignes de transformation sont obtenues par interpolation linéaire (fig.IV-18). On en déduit les caractéristiques de la transformation (tab.IV-17).

Ligne de transformation	Équation obtenue par interpolation linéaire	Température de transformation (°C)	Pente $d\Sigma/dT$ (MPa K <sup>-1</sup> )
$M_S M_S'$	<u>Sup</u> : $\Sigma = -11,2 + 2,0 T$	5,5	2
	<u>Flu</u> : $\Sigma = -8,7 + 2,0 T$	4,4	2
	$\Sigma = -9,6 + 2,0 T$	4,8	2
$M_f M_f'$	$\Sigma = 14,5 + 1,6 T$	-9,3	1,6
$A_S A_S'$	$\Sigma = -15,4 + 1,6 T$	9,4	1,6
$A_f A_f'$	<u>Sup</u> : $\Sigma = -17,2 + 1,3 T$	13	1,3
	<u>Flu</u> : $\Sigma = -25,6 + 1,7 T$	14,7	1,7
	$\Sigma = -17,3 + 1,4 T$	12,6	1,4

**Tableau IV-17:** Caractéristiques de la transformation de l'alliage CuAlBe monocristallin. On différencie les résultats obtenus par les essais superélastiques (Sup) et ceux obtenus par fluage anisotherme (Flu).



*Fig.IV-18: Diagramme d'état expérimental pour l'alliage CuAlBe monocristallin.*

Les pentes des droites de transformation représentent des valeurs courantes pour un alliage à base de Cuivre: les valeurs proches de 2 MPa/K sont similaires à celles obtenues par Hautcoeur [HEP94] pour un alliage CuAlBe de composition légèrement différente (1,9 MPa/K).

## IV.4 - SUPERHERMOÉLASTICITÉ DES POLYCRISTAUX CuAlBe

### IV.4.1 - INTRODUCTION

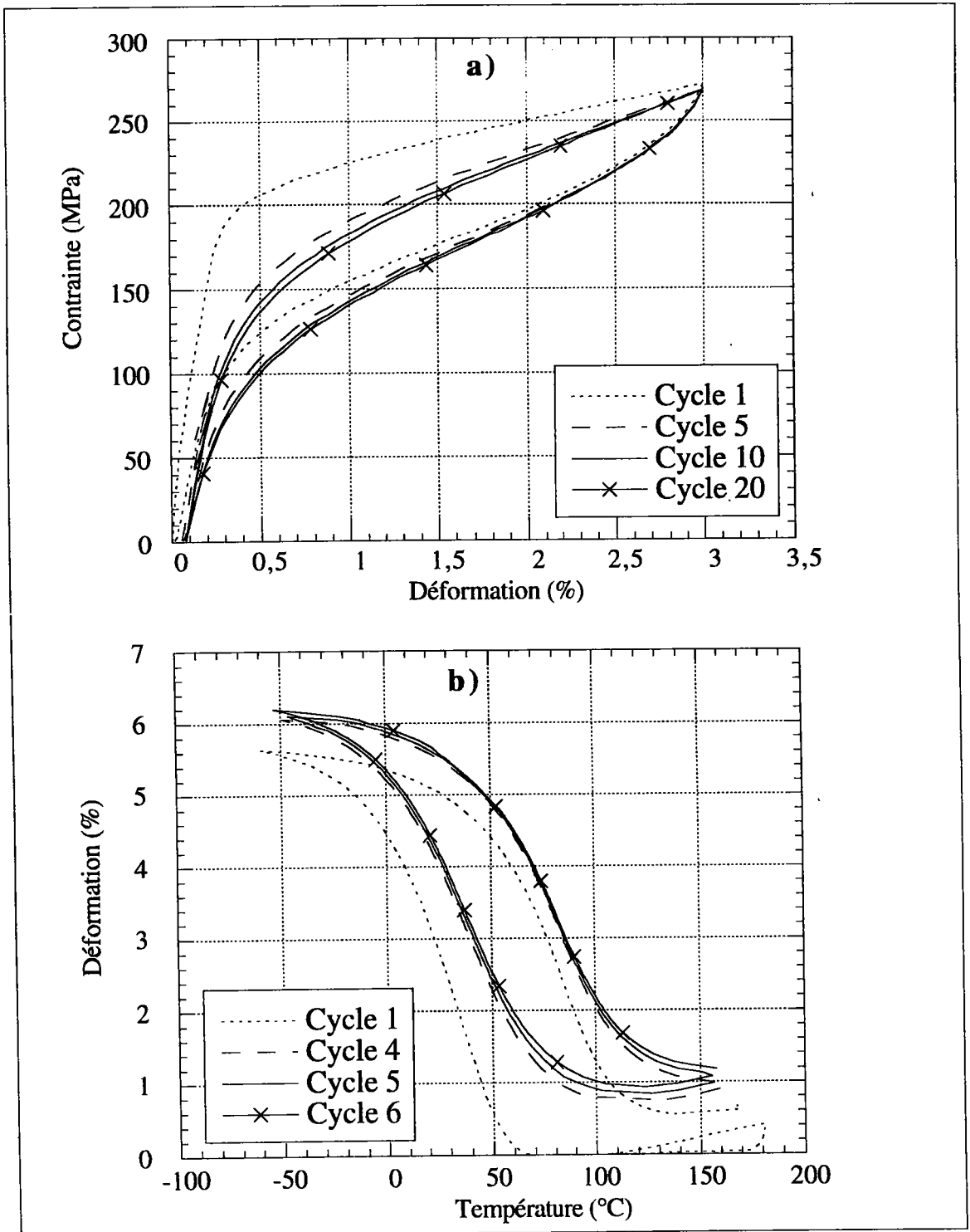
Par rapport au monocristal, les essais sur polycristaux sont plus difficiles à interpréter: microstructure plus complexe et nature polyvariante de la transformation (fig.IV-19), interaction entre les grains, présence de joints de grain font que les transitions sont moins marquées.



*Fig.IV-19: Micrographie représentant les variantes dans un grain d'un polycristal CuAlBe.*

L'effet du cyclage est beaucoup plus important que sur les monocristaux: forte évolution du comportement dès les premiers cycles et restauration incomplète par flash thermique. L'utilisation d'une éprouvette unique est donc impossible: chaque essai est réalisé sur une éprouvette différente. Un

léger cyclage (entre cinq et dix cycles) permet d'obtenir une stabilisation du comportement (fig.IV-20).



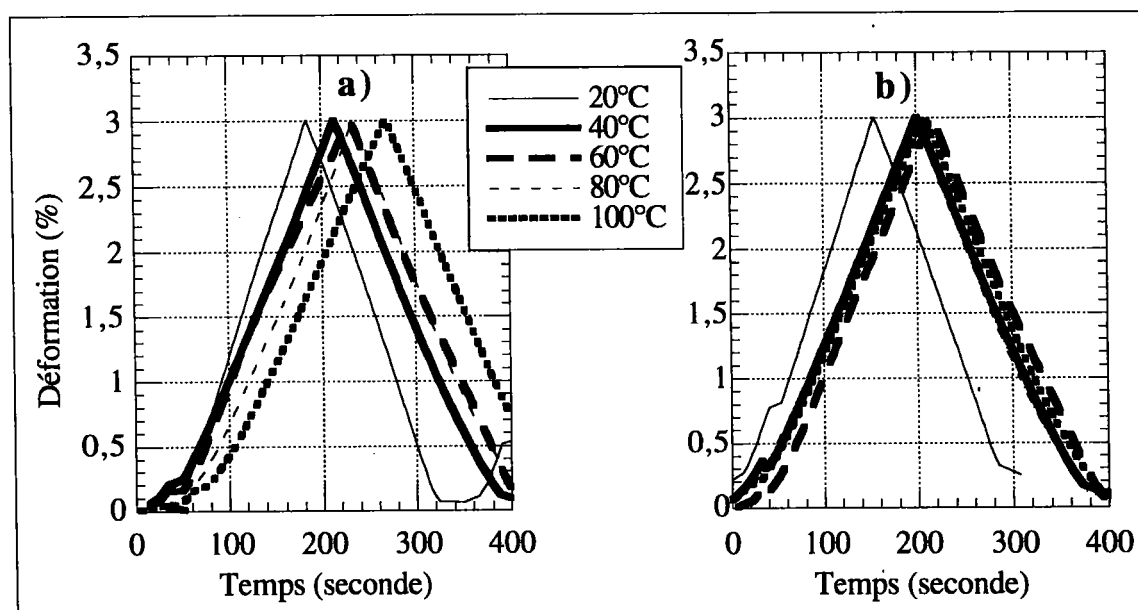
**Fig.IV-20:** a) Cycles superélastiques ( $T=60^{\circ}\text{C}$ ) et b) Fluages anisothermes ( $\Sigma=200\text{ MPa}$ ) sur l'alliage CuAlBe polycristallin : au-delà de quelques cycles, le comportement est stable.

#### IV.4.2 - SUPERÉLASTICITÉ

On s'intéresse principalement au premier et au cinquième cycle.

Le critère de fin de chargement (décharge) est de 3% en déformation mesurée par l'extensomètre. Ce choix résulte d'un compromis: éviter l'apparition de déformations plastiques et faire apparaître clairement les pentes de transformation martensitique.

Comme pour le monocristal, la vitesse de déplacement de la traverse est imposée et égale à 1 mm/min (quasi-statique). Les essais ont été effectués aux températures suivantes: 20, 40, 60, 80 et 100°C. L'évolution de la déformation en fonction du temps est représentée en fig.IV-21, les vitesses de déformation correspondantes calculées sont indiquées dans le tab.IV-22.



*Fig.IV-21: Graphes déformation-temps pour un polycristal CuAlBe: a) Premiers cycles; b) Cinquièmes cycles (rapportés à la même origine).*

La vitesse de déformation moyenne est d'environ  $2 \cdot 10^{-4}$  (tab.IV-22). Pour une même vitesse de déplacement de la traverse, les vitesses étaient d'environ  $2 \cdot 10^{-3}$  pour le monocristal. La transformation du monocristal se déroule par l'apparition et la propagation d'une variante dans tout l'échantillon. Quand l'extensomètre mesure une déformation, on est a peu

près certain qu'en dehors de la zone de mesure, il n'y a pas de transformation. À l'inverse, pour le polycristal, la transformation n'est pas localisée mais se déroule "uniformément" dans toute l'éprouvette. La zone de mesure de l'extensomètre correspondant au dixième de la longueur utile de l'éprouvette, pour un même accroissement de temps et donc un même déplacement de traverse, on mesure environ dix fois moins de déformation pour le polycristal que pour le monocristal.

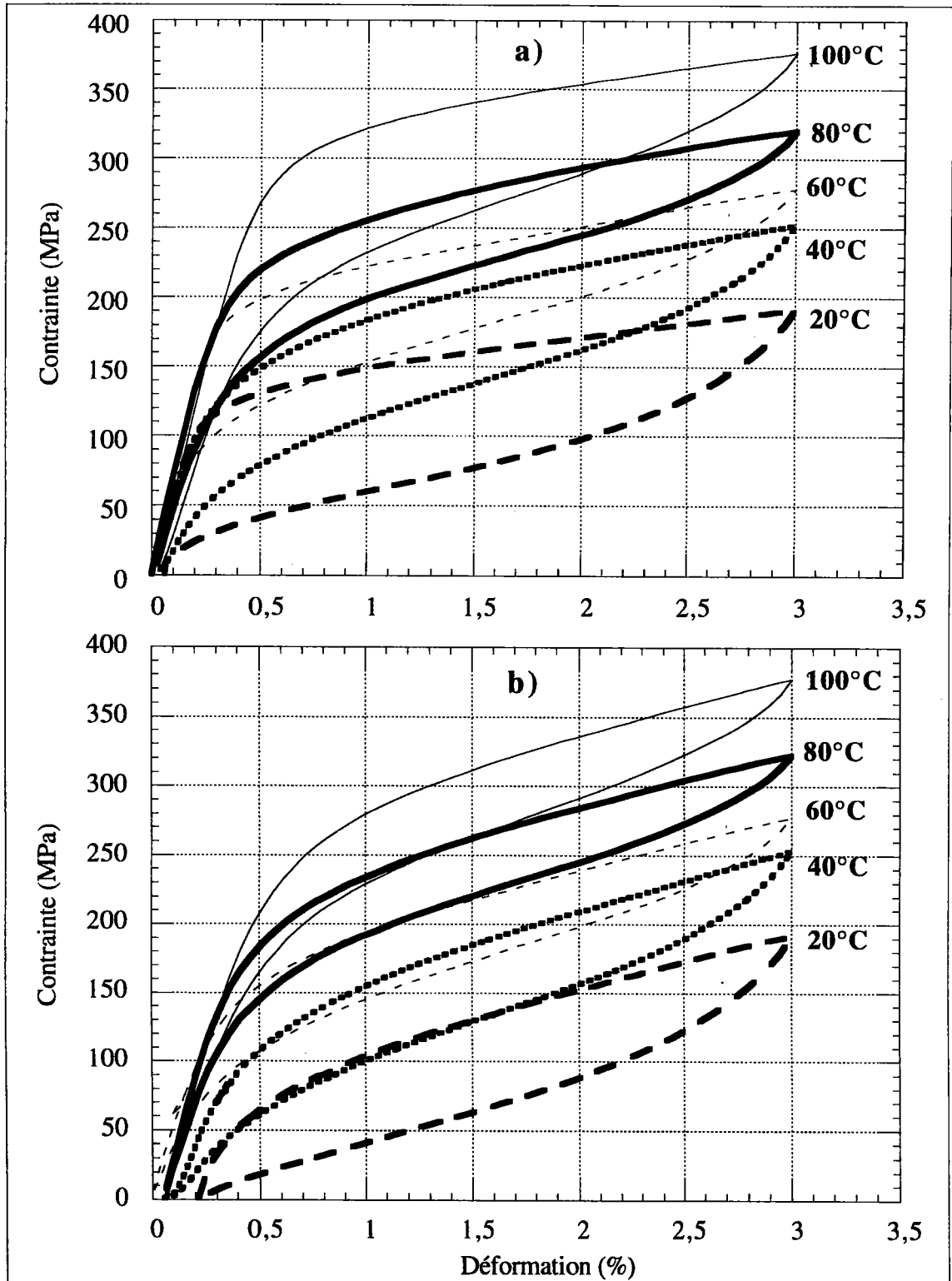
Température de l'essai	Vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ (s <sup>-1</sup> )	
	1 <sup>er</sup> cycle	5 <sup>ème</sup> cycle
20°C	2,1 10 <sup>-4</sup>	2,5 10 <sup>-4</sup>
40°C	1,7 10 <sup>-4</sup>	1,84 10 <sup>-4</sup>
60°C	1,65 10 <sup>-4</sup>	1,75 10 <sup>-4</sup>
80°C	1,65 10 <sup>-4</sup>	1,8 10 <sup>-4</sup>
100°C	1,62 10 <sup>-4</sup>	1,75 10 <sup>-4</sup>

*Fig.IV-22: Vitesses de déformation lors des essais isothermes pour un polycristal CuAlBe.*

Le module d'Young E, d'après les courbes de traction, est d'environ 60 GPa. Si nous choisissons un coefficient de Poisson  $\nu=0,3$ , le module de cisaillement  $\mu$  vaut 23 GPa.

Contrairement au monocristal pour lequel la transformation a lieu pour une contrainte quasiment constante (plateau de transformation), on observe une pente de transformation sur les courbes de superélasticité du polycristal (fig.IV-23). Cette pente est due à la multitude des variantes qui apparaît pendant la transformation et aux interactions intergranulaires. Elles entraînent une déformation moindre qu'une transformation monovariante pour un même accroissement de contrainte.

La déformation qui subsiste lorsque le matériau n'est plus sollicité mécaniquement (fig.IV-23b) est attribuée à une déformation plastique qui se produit localement dans l'échantillon [PS84] (notamment aux joints de grain) et à de la martensite piégée dans l'austénite [C88].

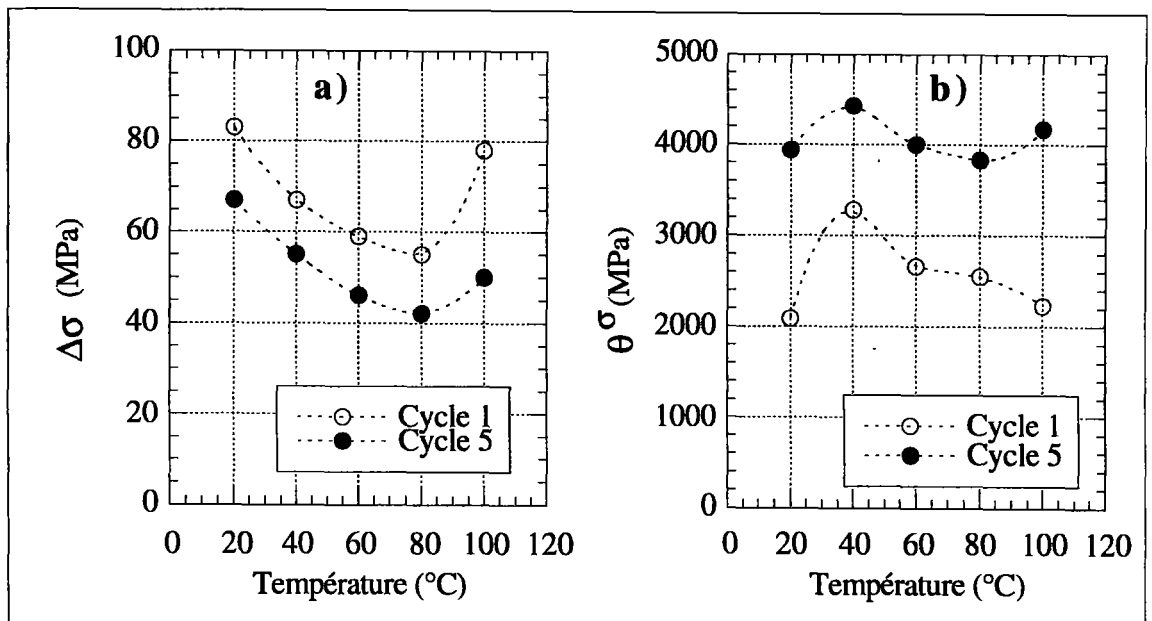


**Fig.IV-23:** Courbes de comportement isotherme pour plusieurs températures de l'alliage CuAlBe polycristallin: a) Premiers cycles. b) Cinquièmes cycles.

L'hystérésis mesurée à 1,5 % de déformation ( $\Delta\sigma$ ), la pente de transformation ( $\theta\sigma$ ) et la contrainte seuil de transformation ( $M_{S\sigma}$ ) sont relevées pour les cycles 1 et 5 dans le tableau IV-24.

Température (°C)		20	40	60	80	100
$\Delta\sigma$ (MPa)	Cycle 1	83	67	59	55	78
	Cycle 5	67	55	46	42	50
$\theta\sigma$ (MPa)	Cycle 1	2085	3285	2657	2543	2228
	Cycle 5	3943	4428	4000	3828	4171
$M_{S\sigma}$ (°C)	Cycle 1	133	170	207	252	322
	Cycle 5	85	142	174	226	278

*Tab.IV-24: Évolution des caractéristiques de la transformation martensitique avec la température en traction uniaxiale pour un alliage CuAlBe polycristallin.*



*Fig.IV-25: Évolution de l'hystérésis  $\Delta\sigma$  (a) et de la pente  $\theta\sigma$  (b) en fonction de la température de l'essai superélastique pour l'alliage CuAlBe polycristallin.*

Il existe un intervalle de température [60-80°C] pour laquelle l'hystérésis de la transformation est minimale, quel que soit le cycle (fig.IV-25a). Pour des essais réalisés à des températures inférieures, l'accroissement de l'hystérésis est dû principalement à de la martensite piégée, visible sur les



courbes de comportement IV-23. Pour l'essai à 100°C, l'accroissement de  $\Delta\sigma$  est attribué à la présence d'une seconde transformation martensitique ( $\beta' \rightarrow \alpha'$ ) lors du chargement. La contrainte seuil de retour à la phase austénitique de  $\alpha'$  étant inférieure à celle de  $\beta'$ , elle provoque l'accroissement de  $\Delta\sigma$ .

La pente de transformation  $\theta^\sigma$  est quasiment constante au cinquième cycle. Un léger cyclage permet donc de stabiliser cette valeur à  $4100 \pm 350$  MPa.

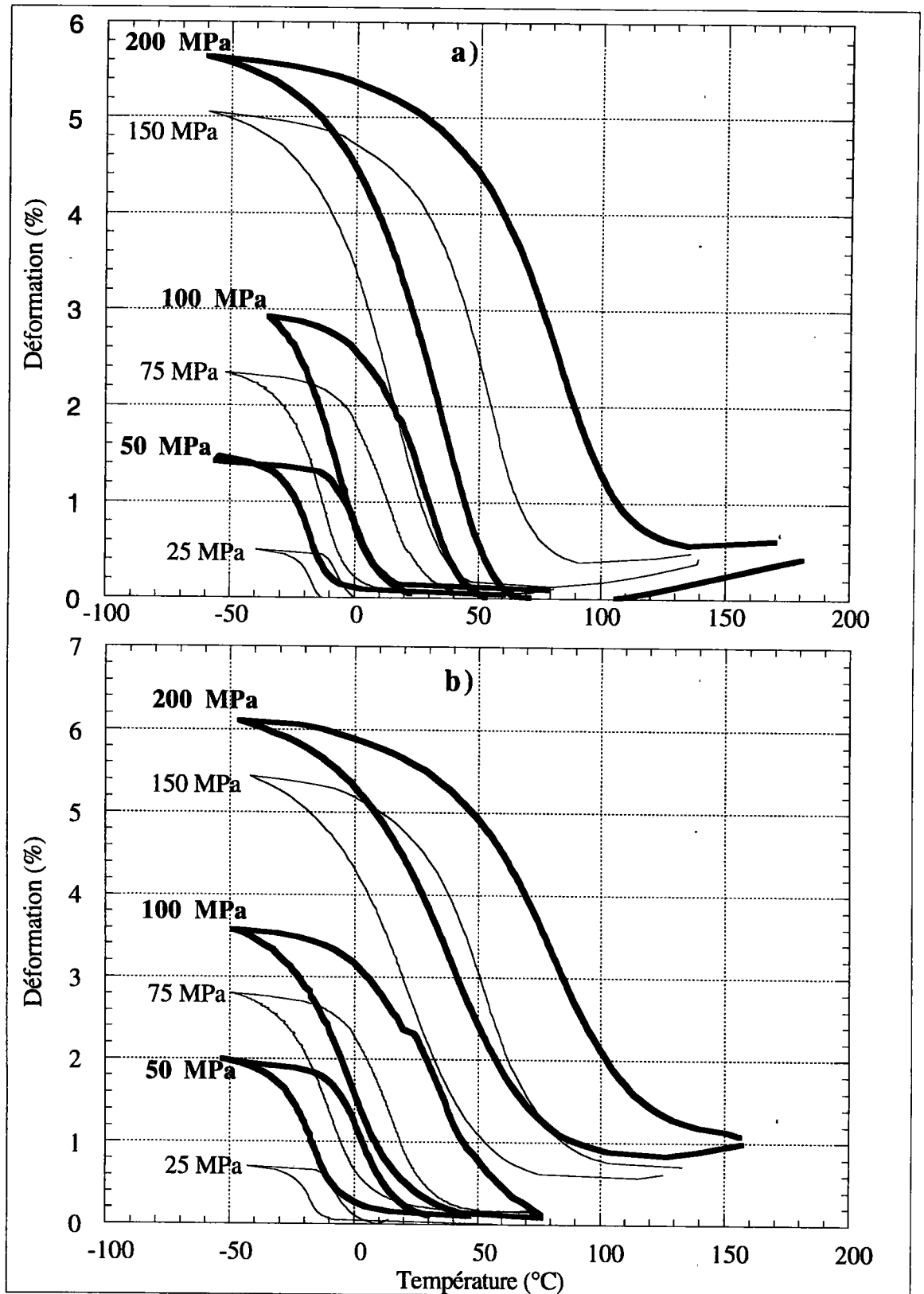
#### IV.4.3 - FLUAGE ANISOTHERME

Les essais de fluage anisotherme ont été réalisés pour les contraintes imposées suivantes: 25, 50, 75, 100, 150 et 200 MPa (fig.IV-27). Après la mise sous contrainte de l'éprouvette, l'essai est programmé par la donnée de deux températures de consigne de part et d'autre du domaine de transformation. Ces températures de consigne sont supposées permettre à l'échantillon de subir des transformations directe et inverse complètes.

Les conséquences de la modification de la contrainte appliquée sont multiples: tout d'abord, au niveau de l'hystérésis  $\Delta T$  (mesurée à mi-transformation) et de la pente  $\theta^T$  ( $|d\epsilon / dT|$ ) (tab.IV-26).

Contrainte appliquée (MPa)	$\Delta T$ (K)		$\theta^T$ (K <sup>-1</sup> )	
	Cycle 1	Cycle 5	Cycle 1	Cycle 5
200	52,5	42	$9,2 \cdot 10^{-4}$	$6,9 \cdot 10^{-4}$
150	39	30,7	$10^{-3}$	$8,2 \cdot 10^{-4}$
100	31,5	34,5	$8,9 \cdot 10^{-4}$	$7,5 \cdot 10^{-4}$
75	24	24	$8,9 \cdot 10^{-4}$	$7,9 \cdot 10^{-4}$
50	19,5	19,5	$7,5 \cdot 10^{-4}$	$7,2 \cdot 10^{-4}$
25	12	11,7	$5,2 \cdot 10^{-4}$	$6,3 \cdot 10^{-4}$

*Tab.IV-26: Propriétés de la transformation lors des essais de fluage anisotherme pour l'alliage CuAlBe polycristallin.*



*Fig.IV-27: Courbes de fluage anisotherme de l'alliage CuAlBe polycristallin. a) Premiers cycles; b) Cinquièmes cycles.*

Pour l'hystérésis de la transformation, la contrainte appliquée joue le même rôle que la température lors des essais isothermes (fig.IV-28): augmentation de l'hystérésis pour une contrainte appliquée plus importante. L'influence du nombre de cycles est cependant moins marquée pour ces essais anisothermes. La pente de transformation se stabilise après cinq cycles: elle est de  $7,0 \cdot 10^{-4} \pm 1,2 \cdot 10^{-4}$ .

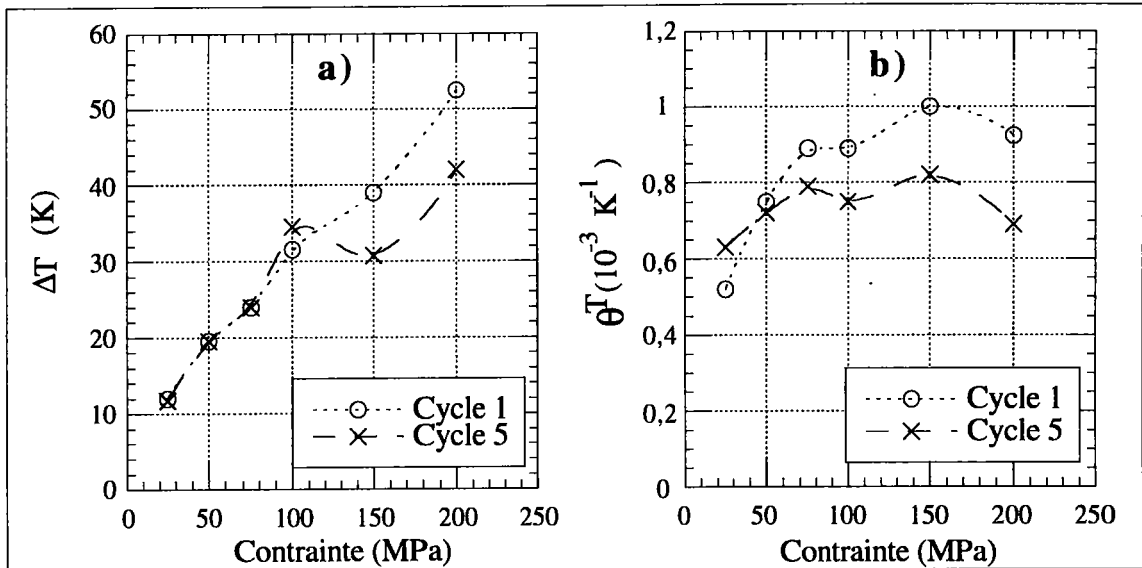
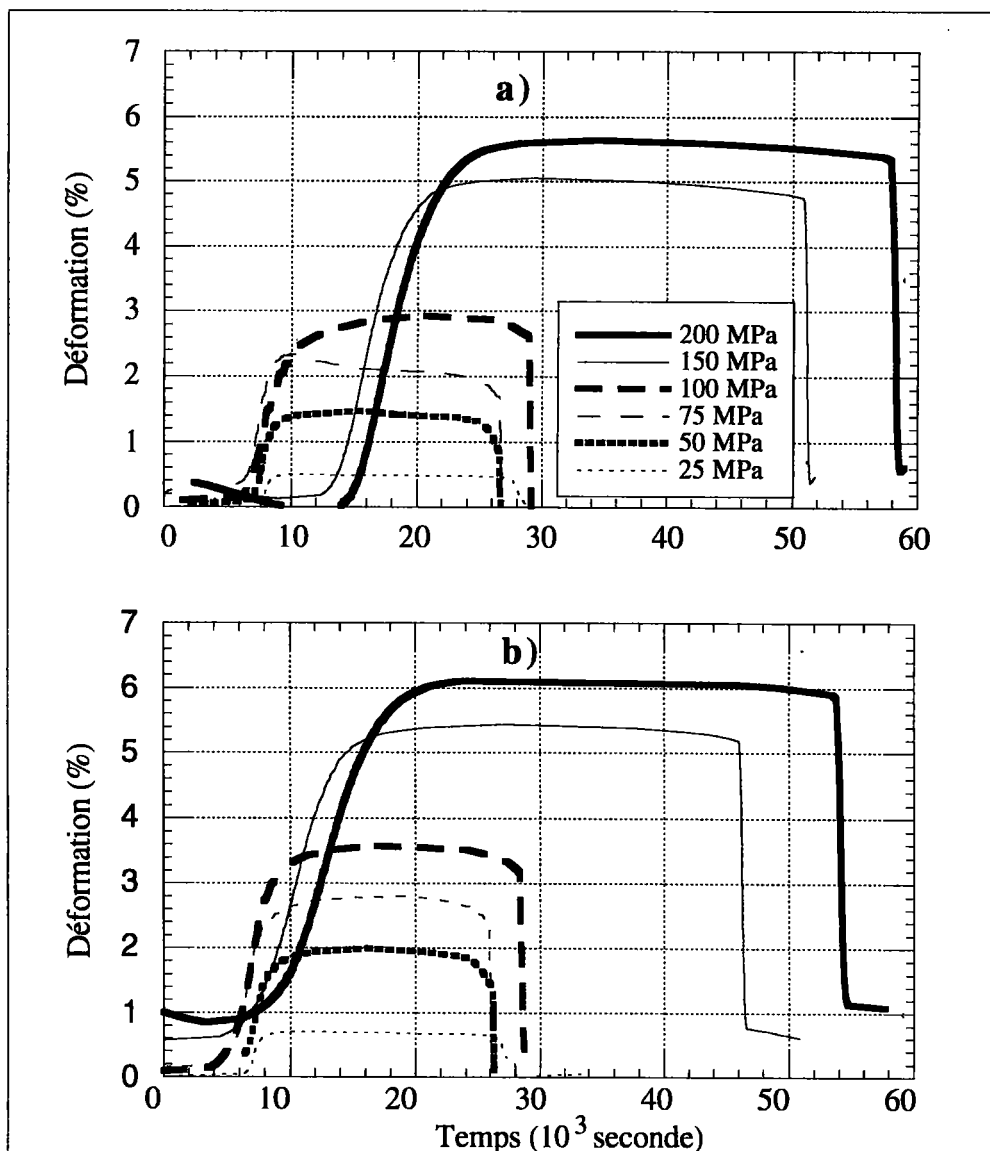


Fig.IV-28: Évolution de l'hystérésis (a) et de la pente (b) en fonction de la contrainte appliquée pendant l'essai de fluage anisotherme.

L'évolution de la déformation en fonction du temps (fig.IV-29) permet le calcul des vitesses de déformations. La vitesse de variation de la température dans l'étuve pour l'essai à 25 MPa conduit à une vitesse de déformation de  $10^{-5}$ . Les autres essais correspondent à des vitesses de déformation encore plus faibles.

La déformation maximale de transformation dépend également fortement de la contrainte appliquée (fig.IV-30). Deux stades sont toujours présents: évolution linéaire puis saturation (comme pour le monocristal), mais la courbe est quantitativement différente. La partie linéaire aux plus faibles contraintes ( $< 150 \text{ MPa}$ ) possède une pente nettement plus faible, tandis que la saturation intervient plus tardivement et pour une valeur plus faible de la déformation: 6%. Cette valeur est la valeur maximale de transformation obtenue pour des essais de superélasticité. Cela montre que, lorsque la

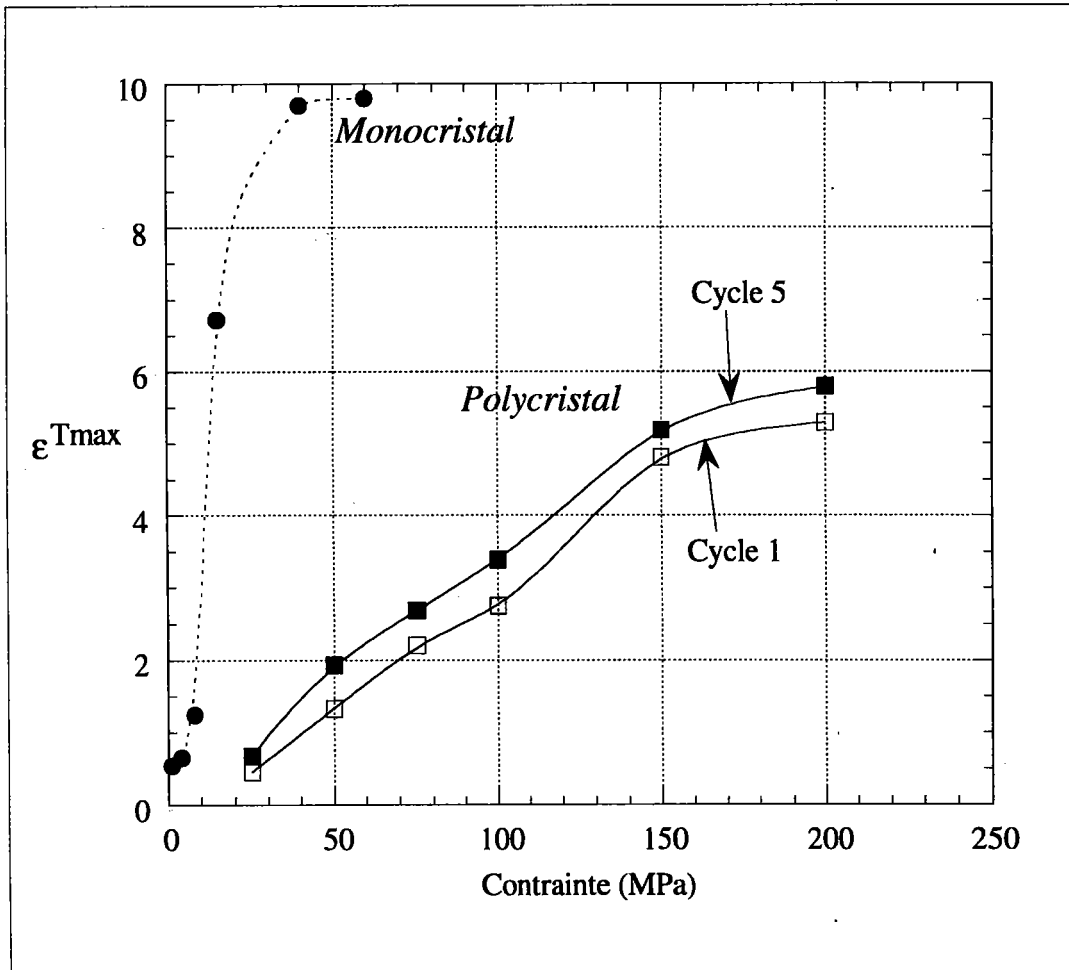
contrainte appliquée est importante lors d'essais de fluage anisotherme, le comportement doit être similaire au comportement superélastique.



*Fig.IV-29: Déformation en fonction du temps lors d'essais de fluage anisotherme pour l'alliage CuAlBe polycristallin: a) 1ers cycles; b) 5èmes cycles (ramenés à la même origine).*

La différence de comportement au niveau de la contrainte maximale de transformation est importante suivant la nature cristallographique de l'alliage (fig.IV-30). Pour le monocristal, de très faibles contraintes suffisent à privilégier la variante la mieux orientée, conduisant à une déformation de transformation importante. Pour le polycristal, bien qu'il existe également des variantes bien orientées dans chaque grain, celles-ci

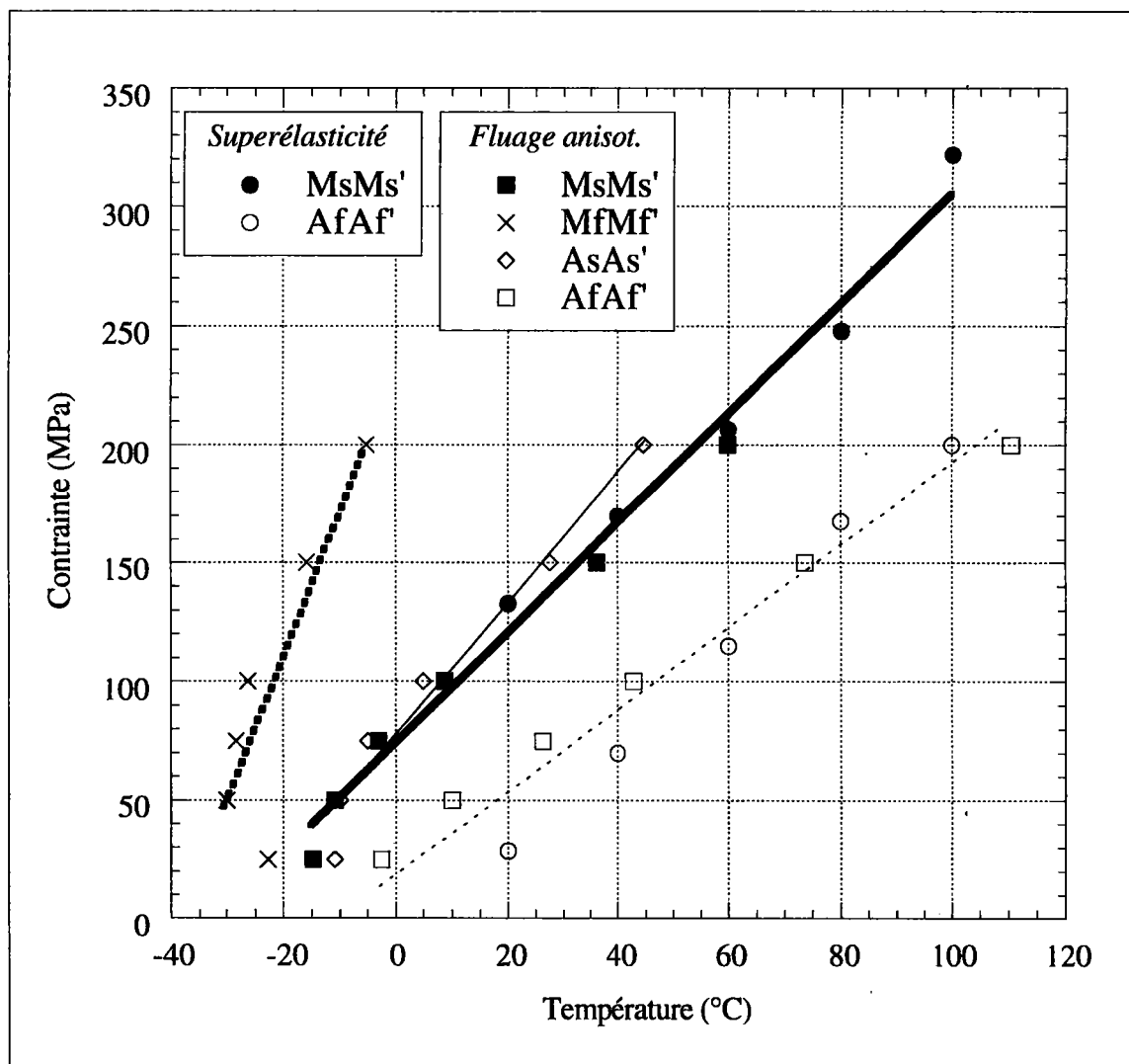
ne réussissent pas à transformer complètement l'échantillon. Gêné par sa structure granulaire, la transformation du polycristal engendre un champ de contrainte interne que d'autres variantes (moins bien orientées) tentent d'accommoder. Cette légère accommodation, interne aux grains du polycristal, réduit la déformation maximale de transformation du polycristal.



*Fig.IV-30: Évolution de la déformation maximale de transformation en fonction de la contrainte appliquée pour l'alliage CuAlBe polycristallin.*

Le diagramme d'état (ligne  $M_S M_S'$ ,  $M_f M_f'$ ,  $A_S A_S'$  et  $A_f A_f'$ ) est tracé pour le polycristal. On différencie les points obtenus par les essais superélastiques et ceux déterminés à partir des essais de fluage anisotherme (fig.IV-31). Les courbes utilisées pour obtenir ce diagramme sont relatives

aux premiers cycles. Les pentes des lignes de transition sont proches de  $2 \text{ MPa K}^{-1}$  (tab.IV-32).



*Fig.IV-31: Diagramme d'état expérimental de l'alliage CuAlBe polycristallin.*

Les lignes de départ des transformations ( $M_S M_S'$  et  $A_S A_S'$ ) sont bien définies quel que soit le type de chargement. L'erreur obtenue en approximant ces lignes de transition par des droites est faible. Les lignes  $M_f M_f'$  et  $A_f A_f'$  ne sont pas aussi nettement définies.

Ligne de transformation	Équation obtenue par interpolation linéaire	Température de transformation (°C)	Pente $\frac{d\Sigma}{dT}$ (MPa K <sup>-1</sup> )
M <sub>S</sub> M <sub>S</sub> '	<u>Sup</u> : $\Sigma = 78,7 + 2,3 T$	-34,5	2,3
	<u>Flu</u> : $\Sigma = 72,3 + 2,2 T$	-33	2,2
	$\Sigma = 73,2 + 2,3 T$	-31,5	2,3
M <sub>F</sub> M <sub>F</sub> '	$\Sigma = 226,8 + 5,9 T$	-38,3	5,9
A <sub>S</sub> A <sub>S</sub> '	$\Sigma = 75,9 + 2,8 T$	-26,9	2,8
A <sub>F</sub> A <sub>F</sub> '	<u>Sup</u> : $\Sigma = -15,7 + 2,2 T$	7,2	2,2
	<u>Flu</u> : $\Sigma = 33,0 + 1,5 T$	-21,4	1,5
	$\Sigma = 20,5 + 1,7 T$	-12,1	1,7

*Tableau IV-32: Caractéristiques de la transformation de l'alliage CuAlBe polycristallin. On différencie les résultats obtenus par les essais superélastiques (Sup) et ceux obtenus par fluage anisotherme (Flu).*

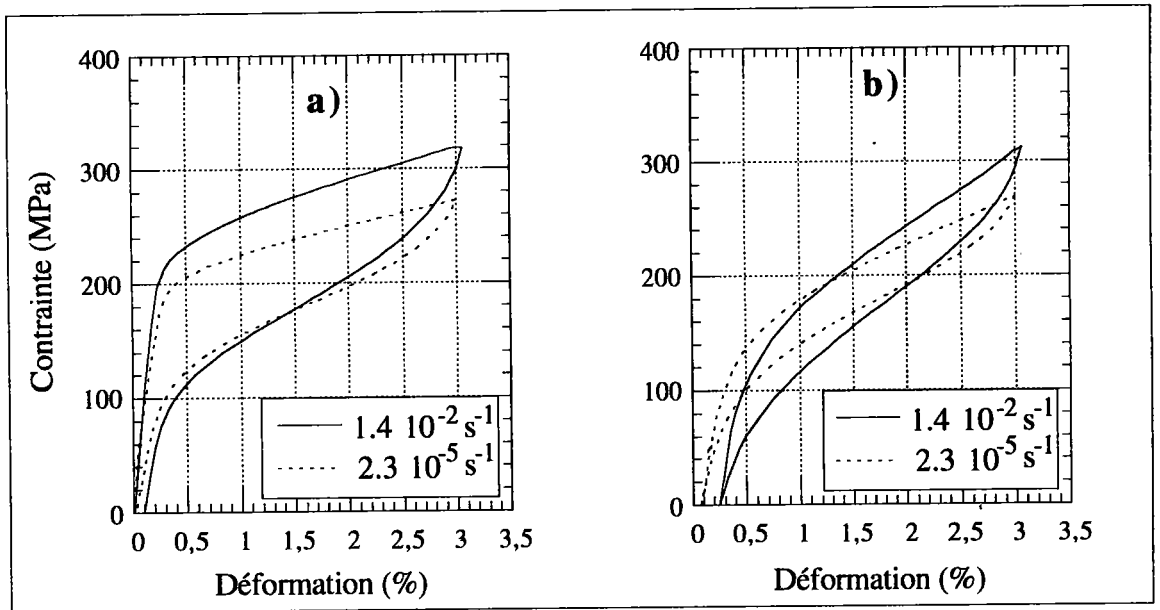
#### IV.4.4 - INFLUENCE DE LA VITESSE DE SOLLICITATION

L'effet de la vitesse de sollicitation a été réalisé sur un polycristal CuAlBe à la température de 60°C (fig.IV-33). Les essais ont été réalisés pour des vitesses d'avances de traverse (et vitesse de déformation correspondante) de 0,1 (2,3 10<sup>-5</sup> s<sup>-1</sup>) et 100 mm/min. (1,4 10<sup>-2</sup> s<sup>-1</sup>).

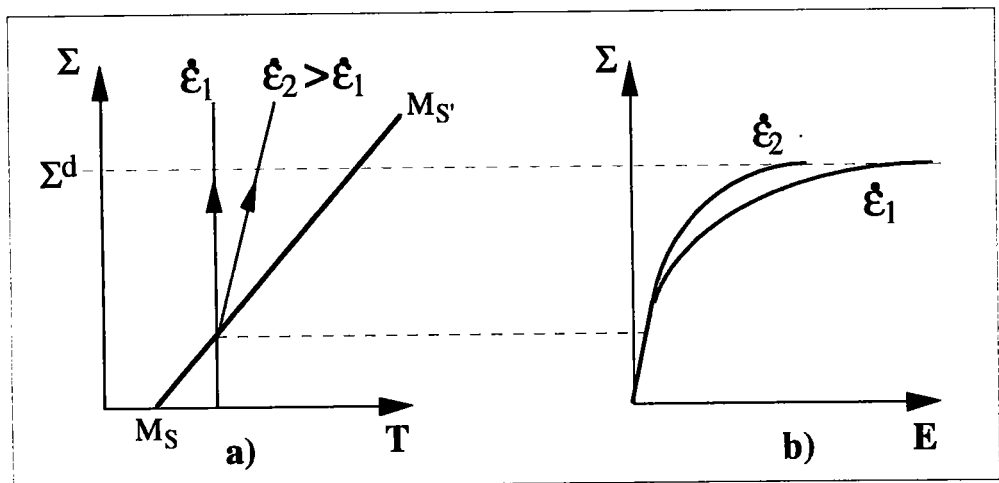
La pente de transformation augmente avec la vitesse de déformation. Ceci semble justifié si l'on considère que plus la vitesse de déformation est importante, plus les échanges de chaleur de l'éprouvette vers l'extérieur sont réduits. En effet la transformation martensitique est accompagnée d'un dégagement de chaleur (effet exothermique) qui est dissipé aisément dans le cas de vitesses faibles. À l'inverse, une vitesse de déformation importante entraîne un accroissement de température dans l'éprouvette, ce qui se représente dans le diagramme d'état contrainte-température par un trajet de chargement différent (fig.IV-34). Ainsi, pour un même niveau de contrainte, la déformation obtenue lors d'un essai à vitesse de sollicitation rapide sera plus faible que pour un essai à vitesse de sollicitation lente.

On note également une augmentation de 27 MPa de la contrainte seuil de transformation pour l'essai à vitesse de déformation importante. Cette

augmentation est supérieure à l'élévation attendue de température dans l'éprouvette (10 degrés au maximum, ce qui correspond à 20 MPa).



*Fig.IV-33: Influence de la vitesse de sollicitation sur l'alliage CuAlBe polycristallin pour un essai à  $T=60^{\circ}\text{C}$ . a) Cycle 1, b) Cycle 15.*



*Fig. IV-34: Représentation schématique de l'influence de la vitesse de sollicitation sur les courbes de comportement superélastiques.*

## IV.5 - CONCLUSION

L'alliage CuAlBe étudié sous sa forme monocristalline et polycristalline permet d'apprécier une partie des propriétés qui font de cet alliage un



produit intéressant pour des applications industrielles. Au niveau de son comportement superthermoélastique, il est capable de subir des déformations réversibles d'environ 5%. Il peut en subir de plus importantes mais il est nécessaire alors d'étudier plus précisément la seconde transformation de phase  $\beta' \rightarrow \alpha'$  qui permet d'obtenir de telles déformations.

Les résultats présentés dans ce chapitre permettent de caractériser certaines données du matériau, qui vont être introduites dans le modèle. Les résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre vont être confrontés aux résultats de la simulation numérique par transition d'échelle appliquée à un tel alliage.

## - Références bibliographiques -

- [B90] Belkahla S., *"Élaboration et caractérisation de nouveaux alliages à mémoire de forme basse température type CuAlBe"*, Thèse n°90 ISAL 0095, Institut National des sciences appliquées de Lyon (1990)
- [B96] Buathier., *"Étude de la fatigue mécanique d'un monocristal CuAlBe - Étude de la transformation martensitique dans un polycristal"*, Rapport de Stage, LPMM, Université de Metz (1996)
- [C88] Contardo L., *"Étude des traitements d'éducation, de la stabilité et de l'origine de l'effet mémoire double sens dans un alliage Cu Zn Al"*, Thèse n°88ISAL0048, I.N.S.A. Lyon (1988)
- [DDA78] Delaey L., DeVos J., Aernoudt E., *"Shape Memory Effect, Superelasticity and Damping in CuZnAl Alloys"*, INCRA Project n°238, Report 78R1, pp.55 (1978)
- [DKT74] Delaey L., Krishnan R.V., Tass H., Warlimont H., *"Thermoplasticity, pseudoelasticity and the memory effect associated with martensitic transformations"*, J. Mater. Sci., **9**, pp.1536-1544 (1974)
- [E96] Eberhardt A., Communication interne (1996)
- [F93] Flores Zuniga H., *"Stabilité thermique de la phase  $\beta$  et de l'effet mémoire double sens d'un alliage à mémoire de forme de type Cu-Al-Be"*, Thèse n°93 ISAL 0107, Institut National des sciences appliquées de Lyon (1993)

- [H96] Hautcoeur A., Thèse en cours, Université de Metz
- [HEP94] Hautcoeur A., Eberhardt A., Patoor E., Berveiller M.,  
*"Thermomechanical Behavior of Monocrystalline Cu-Al-Be  
Shape Memory Alloy and Determination of the Metastable  
Phase Diagram"*, Procs of ESOMAT'94, pp.459-464 (1994)
- [HIM88] Horikawa H., Ichinose S., Morii K., Myazaki S., Otsuka K.,  
Metall. Trans., 19A, pp.915-923 (1988)
- [MS94] Malarria J., Sade M., *"The effect of temperature on  
pseudoelastic cycling of CuZnAl single crystals"*, Scripta Met.  
and Mater., 30, pp.241-246 (1994)
- [PS84] Perkins J., Sponholz R., *"Stress-induced martensite  
transformations cycling and two way shape memory training  
in CuZnAl Alloys"*, Metallurgical Transactions, 15A, pp.313-  
321 (1984)
- [SRA85] Sade M., Rapacioli R., Ahlers M., *"Fatigue in Cu-Zn-Al  
Single Crystals"*, Acta Met., 33, n°3, pp.487-497 (1985)
- [SSO85] Sakamoto H., Shimizu K., Otsuka K., Trans. Jpn. Met., 26,  
pp.638 (1985)
- [W90] Waram T., *"Design Principles for NiTi Actuators"*, dans  
Engineering aspects of Shape Memory Alloys, Butterworth  
Heinemann Pub., Londres, pp.234 (1990)  
ISBN 0-750-61009-3



# CHAPITRE V: - Résultats numériques pour des alliages CuZnAl et CuAlBe -

V.1 - INTRODUCTION	..Page 158
V.2 - COMPORTEMENT SUPER- THERMOÉLASTIQUE	..Page 159
V.2.1 - CAS DES ALLIAGES DE TYPE CuZnAl	.....159
V.2.1.1 - Données utilisées	159
V.2.1.2 - Résultats	161
V.2.2 - CAS DES ALLIAGES DE TYPE CuAlBe	.....165
V.2.2.1 - Données utilisées	165
V.2.2.2 - Résultats	167
V.2.3 - INFLUENCE DE LA VITESSE DE SOLLICITATION	.....172
V.2.3.1 - Cas des alliages de type CuZnAl	173
V.2.3.2 - Cas des alliages de type CuAlBe	174
V.2.3.3 - Conclusion	176
V.3 - ÉTUDE MICROSTRUCTURALE	..Page 177
V.3.1 - INTRODUCTION	.....177
V.3.2 - CINÉTIQUE ET DÉFORMATION DE TRANSFORMATION	.....178
V.3.2.1 - Cinétique	178
V.3.2.2 - Déformation moyenne de transformation	181
V.3.3 - COMPORTEMENT INTRAGRANULAIRE	.....183
V.3.3.1 - Répartition des contraintes internes	184
V.3.3.2 - Déformation des grains	192
V.3.4 - ÉVOLUTION DE LA MICROSTRUCTURE	.....198
V.3.4.1 - Nombre de grains actifs	198
V.3.4.2 - Nombre de variantes actives	200

V.3.4.3 - Évolution des variantes pendant le chargement	206
V.3.5 - INFLUENCE DE LA MATRICE D'INTERACTION ENTRE LES VARIANTES	.....214
V.3.6 - CONCLUSION	.....217
<b>RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES V</b>	<b>..Page 219</b>

*L'objet de ce chapitre est de présenter les résultats numériques obtenus en appliquant le modèle autocohérent à des alliages CuZnAl et CuAlBe. Ces résultats portent sur le comportement macroscopique, la cinétique de la transformation et sur des aspects microstructuraux. L'influence du mode de chargement sur ces paramètres est mis en évidence.*

## V.1 - INTRODUCTION

La modélisation du fluage anisotherme élaborée au chapitre III est à l'origine de l'écriture d'un programme informatique FORTRAN 77. Le programme développé pour le comportement superélastique isotherme a servi de base à ce travail. En annexe 3, on trouve certaines caractéristiques propres à ce programme et les principales difficultés rencontrées. Ce chapitre présente les résultats numériques obtenus.

Le comportement superthermoélastique de deux alliages a été étudié:

- Un alliage de type CuZnAl, dont le comportement superélastique isotherme a fait l'objet de plusieurs études et dont les résultats expérimentaux proviennent de la littérature.
- Un alliage de type CuAlBe, dont la caractérisation du comportement thermomécanique a été présentée au chapitre précédent.

Les résultats obtenus concernent plusieurs échelles de description. Tout d'abord, à l'échelle de l'échantillon, les courbes contrainte-déformation et déformation-température sont définies pour les deux types d'alliages. Les résultats ainsi obtenus sont confrontés aux mesures expérimentales. L'influence de la vitesse de déformation est également étudiée.

À une échelle plus fine, l'évolution de paramètres utilisés comme variables internes dans les approches phénoménologiques est étudiée.

La méthode de modélisation employée permet également d'obtenir des informations microstructurales. On peut ainsi obtenir l'évolution de la contrainte interne, de la déformation, de la fraction de martensite et

l'évolution des différentes variantes dans chaque grain au cours du chargement.

## V.2 -COMPORTEMENT SUPERTHERMOÉLASTIQUE

### V.2.1 - CAS DES ALLIAGES CuZnAl

Pour ce type d'alliage, de nombreux résultats expérimentaux sont disponibles dans la littérature. Les premiers développements du modèle autocohérent appliqué aux alliages à mémoire de forme ont été appliqués avec succès à ce type d'alliage [E94].

#### V.2.1.1 - Données utilisées

Les modules thermoélastiques sont le module de cisaillement  $\mu=30$  GPa, le coefficient de Poisson  $\nu=0,3$  et le coefficient de dilatation thermique  $\alpha=15 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

La structure polycristalline est décrite par 100 grains sphériques, de même volume, dont les orientations cristallographiques sont choisies aléatoirement (afin de ne pas induire d'effet de texture).

Dans ces alliages la normale  $\mathbf{n}$  au plan d'habitat ainsi que la direction de transformation  $\mathbf{m}$  des variantes sont de type  $[2 \ 11 \ 12]$  (tab.V-1). Ces variantes forment six groupes autoaccommodants de quatre variantes. L'amplitude de déplacement  $g$  est de 0,23. Ces caractéristiques cristallographiques sont donnés par DeVos et al. [DAD78].

Le coefficient  $B$  est égal à 0,2 MPa/K [DKT74].

La matrice d'interaction  $H^{nm}$  est constitué de deux types de termes: El Amrani a déterminé les valeurs  $H^1=\mu/1000$  pour les variantes compatibles et  $H^2=\mu/200$  pour les autres [E94].

Les résultats obtenus sont comparés à des essais expérimentaux réalisés par Vacher [V91] en superélasticité et par Leclercq [LBL94] et Bourbon [B94] en fluage anisotherme. L'alliage testé possède la composition suivante (en



% massique): 25,57% Zn et 4,09% Al. Ses températures de transformation, obtenues par mesure de résistivité, sont les suivantes:  $M_S=40^\circ\text{C}$ ,  $A_f=52^\circ\text{C}$  (soit, d'après la relation III.44:  $F_c=1,2\text{ MPa}$ )

Variante	n <sup>1</sup>	n <sup>2</sup>	n <sup>3</sup>	m <sup>1</sup>	m <sup>2</sup>	m <sup>3</sup>
1	-0,182	0,669	0,721	-0,165	-0,737	0,655
2	-0,182	0,721	0,669	-0,165	0,655	-0,737
3	0,182	0,669	0,721	0,165	-0,737	0,655
4	0,182	0,721	0,669	0,165	0,655	-0,737
5	-0,669	-0,182	0,721	0,737	-0,165	0,655
6	-0,721	-0,182	0,669	-0,655	-0,165	-0,737
7	-0,669	0,182	0,721	0,737	0,165	0,655
8	-0,721	0,182	0,669	-0,655	0,165	-0,737
9	-0,182	-0,669	0,721	-0,165	0,737	0,655
10	-0,182	-0,721	0,669	-0,165	-0,655	-0,737
11	0,182	-0,669	0,721	0,165	0,737	0,655
12	0,182	-0,721	0,669	0,165	-0,655	-0,737
13	0,721	-0,182	0,669	0,655	-0,165	-0,737
14	0,669	-0,182	0,721	-0,737	-0,165	0,655
15	0,721	0,182	0,669	0,655	0,165	-0,737
16	0,669	0,182	0,721	-0,737	0,165	0,655
17	0,669	-0,721	0,182	-0,737	-0,655	0,165
18	0,721	-0,669	0,182	0,655	0,737	0,165
19	-0,669	0,721	0,182	0,737	0,655	0,165
20	-0,721	0,669	0,182	-0,655	-0,737	0,165
21	-0,721	-0,669	0,182	-0,655	0,737	0,165
22	-0,669	-0,721	0,182	0,737	-0,655	0,165
23	0,721	0,669	0,182	0,655	-0,737	0,165
24	0,669	0,721	0,182	-0,737	0,655	0,165

*Tableau V-1: Définition des normales aux plans d'habitat et des directions de transformations utilisées pour décrire la cristallographie de la transformation martensitique dans les alliages à mémoire de forme de type CuZnAl [DAD78].*

### V.2.1.2 - Résultats

On compare successivement (planche V-2) un essai en superélasticité à 56°C, des essais de fluage anisotherme à 48, 65, 80, 100 et 124 MPa aux modélisations numériques correspondantes.

On constate que le modèle décrit à la fois la superélasticité et le fluage anisotherme. Les pentes de transformation, seuils de transformation et hystérésis sont décrits correctement pour les deux modes de chargement, sans introduire de paramètre nouveau.

Les résultats superélastiques ayant déjà été largement commentés lors d'études précédentes [E94], on examine plus en détail les résultats de fluage anisotherme.

On détermine expérimentalement et numériquement plusieurs caractéristiques des essais de fluage anisotherme (tab.V-3):

- La pente de transformation  $|d\varepsilon/dT|$  ( $\theta^T$ ) mesurée pour la partie linéaire (entre 1 et 2% de transformation) pour la transformation directe.
- L'hystérésis en température  $\Delta T$  mesurée à 1,5% de déformation.
- La température de transition  $M_S^\sigma$ .
- La déformation maximale de transformation  $\varepsilon^{Tmax}$

Les températures de transition  $M_S^\sigma$  de chaque essai obtenues numériquement sont conformes à celle déterminées expérimentalement: les erreurs en valeur absolue ne dépassent pas 10%.

La valeur absolue de la pente  $d\varepsilon/dT$  est tracée fig.V-4a. On remarque que la valeur obtenue pour l'essai expérimental à 65 MPa ne s'inscrit pas dans la relation décroissante qui apparaît pour les autres essais. Hormis pour cette valeur de 65 MPa, la correspondance numérique est bonne, bien qu'aucune décroissance ne soit observée.

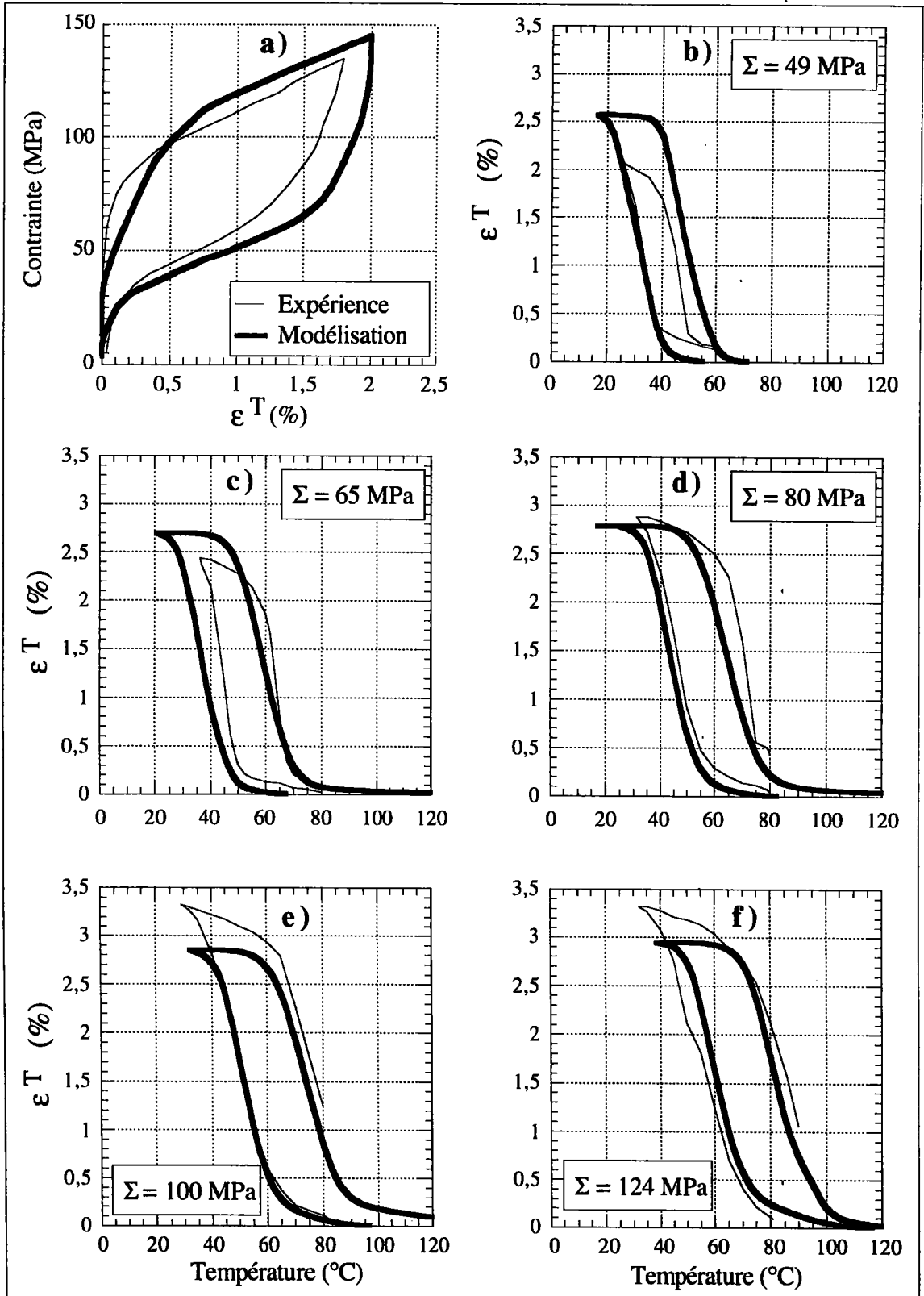


Planche V-2: Confrontation Expérience-Modélisation pour un alliage CuZnAl polycristallin. a) Traction superélastique à  $T = 56^\circ\text{C}$ . et de b) à f) Essais de fluage anisotherme à 49, 65, 80, 100 et 124 MPa.

		48 MPa	65 MPa	80 MPa	100 MPa	124 MPa
$M_S^\sigma$ (°C)	Exp:	38,5	49,4	55,6	61,2	70
	Num:	40,8	45,8	54,6	62,8	72,9
Erreur relative (%)		+6	-7	-2	+3	+4
$\theta^T$ (K <sup>-1</sup> )	Exp:	1,5 10 <sup>-3</sup>	2,1 10 <sup>-3</sup>	1,4 10 <sup>-3</sup>	1,3 10 <sup>-3</sup>	1,1 10 <sup>-3</sup>
	Num:	1,3 10 <sup>-3</sup>	1,3 10 <sup>-3</sup>	1,3 10 <sup>-3</sup>	1,3 10 <sup>-3</sup>	1,3 10 <sup>-3</sup>
Erreur relative (%)		-13	-38	-7		+18
$\Delta T$ (K)	Exp:	10,8	18,6	24,4	25,8	28,8
	Num:	17,3	21,7	20,8	22,4	21,2
Erreur relative (%)		+60	+17	-15	-13	-26
$\epsilon^T_{max}$ (%)	Exp:	2,08	2,44	2,89	3,33	3,32
	Num:	2,57	2,69	2,78	2,84	2,94
Erreur relative (%)		+23,6	+10,2	-3,6	-14,5	-11,6

Tableau V-3: Confrontation Expérience-Modélisation et erreur relative pour les caractéristiques de la transformation de l'alliage CuZnAl polycristallin.

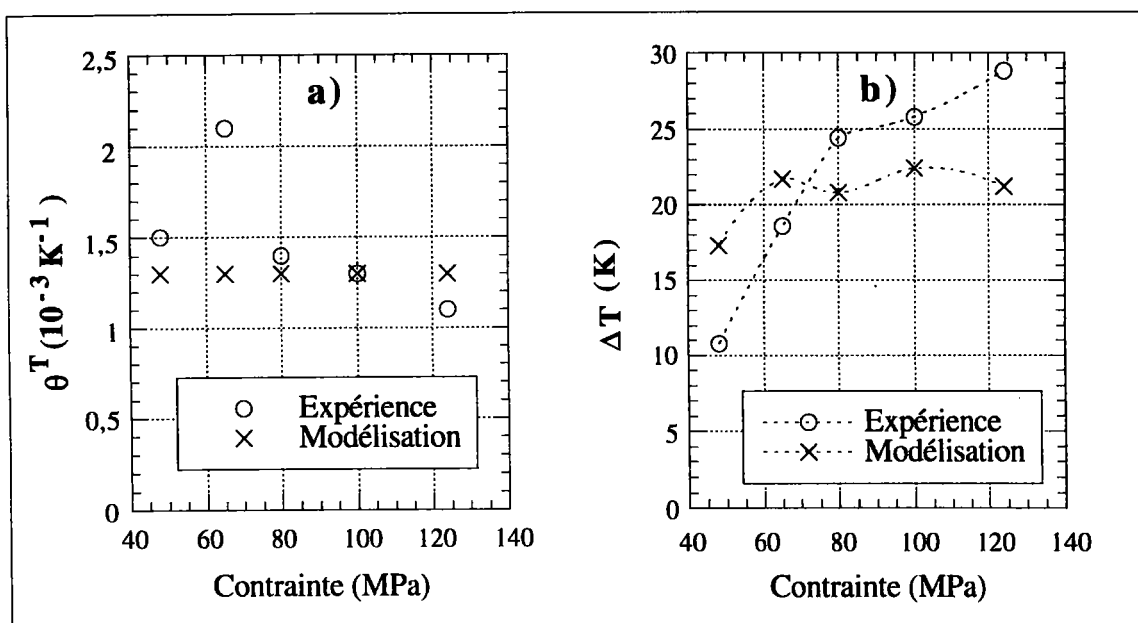
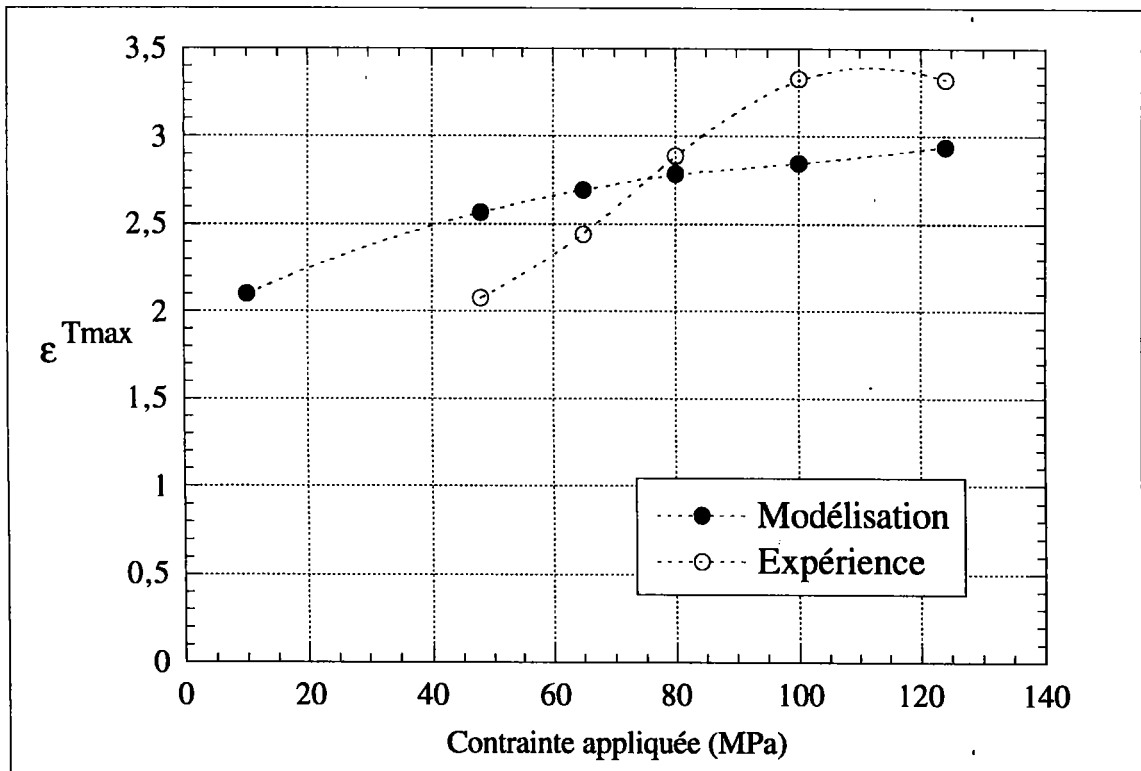


Fig. V-4: Évolutions expérimentale et numérique de a) la pente de transformation et de b) l'hystérésis de la transformation pour un alliage CuZnAl polycristallin lors d'essais de fluage anisotherme.

L'hystérésis mesurée à 1% de déformation croît expérimentalement avec la contrainte appliquée lors du fluage anisotherme (fig.V-4b). Numériquement, cet effet n'est pas très bien modélisé, la tendance étant plutôt une hystérésis constante et donc indépendante de la contrainte appliquée. Cette erreur est très certainement liée à la valeur de la déformation maximale de transformation, elle-même incorrectement modélisée (fig.V-5). Pour cette valeur de  $\epsilon^{Tmax}$ , la tendance expérimentale est analogue à celle déterminée au chapitre précédent sur un alliage CuAlBe, à savoir: une première phase linéaire (pour les contraintes inférieures à 100 MPa) et une saturation de  $\epsilon^{Tmax}$  pour les contraintes plus importantes. Numériquement, la saturation intervient à une valeur plus faible de la déformation et correspond à des valeurs d'hystérésis inférieures aux valeurs expérimentales. Aux faibles niveaux de contrainte ( $\Sigma < 70$ MPa), l'hystérésis mesurée à partir des courbes expérimentales est inférieure à celle obtenue sur les courbes numériques, la déformation de transformation expérimentale est également plus faible.



*Fig. V-5: Évolution expérimentale et numérique de la déformation maximale de transformation avec la contrainte appliquée en fluage anisotherme pour un alliage CuZnAl polycristallin.*

Les écarts entre les valeurs expérimentale et numérique restent néanmoins raisonnables dans l'intervalle de contrainte étudié. La modélisation adoptée représente de façon satisfaisante les grandes tendances du fluage anisotherme. Le même modèle est capable de décrire la superélasticité et le fluage anisotherme sans introduire de variables internes supplémentaires.

## V.2.2 - CAS DES ALLIAGES CuAlBe

L'alliage CuAlBe est un alliage qui se développe fortement actuellement [F93]. Plus stable que l'alliage CuZnAl, il peut développer à l'état polycristallin, une déformation macroscopique de transformation plus importante (jusqu'à 6% au lieu de 2 à 3% pour les CuZnAl). Les données utilisées proviennent de deux sources: les résultats expérimentaux du chapitre précédent et des données cristallographiques déterminées au Laboratoire d'Étude des Textures Appliquées aux Matériaux (LETAM) de l'Université de Metz par F. Moreau [M96].

### V.2.2.1 - Données utilisées

Le comportement thermomécanique de l'alliage CuAlBe utilisé dans cette étude a été caractérisé au chapitre précédent. Les modules thermoélastiques sont le module de cisaillement  $\mu=30\text{GPa}$ , le coefficient de Poisson  $\nu=0,3$  et le coefficient de dilatation thermique  $\alpha=15 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Les températures de transformation obtenues expérimentalement à partir du diagramme d'état (fig.IV-31) sont:  $M_S=-30^\circ\text{C}$ ,  $A_f=-12^\circ\text{C}$ . La force critique  $F_c$  est égale à 1,8 MPa (Éq.III.44). D'après Moreau [MTB94][M96], dans ces alliages la normale  $\mathbf{n}$  au plan d'habitat et la direction de transformation  $\mathbf{m}$  des variantes sont de type  $[1\ 4\ 4]$ (tab.V-6). Comme pour les alliages CuZnAl, les variantes observées dans ces alliages forment six groupes autoaccommodants de quatre variantes. L'amplitude de déplacement  $g$  est de 0,22. Le coefficient  $B$  est égal à 0,2 MPa/K. La matrice d'interaction  $H^{nm}$  est constitué de deux types de termes:  $H^1=\mu/350$  pour les variantes

compatibles et  $H^2 = \mu/70$  pour les autres. La structure polycristalline est décrite comme pour l'alliage précédent par 100 grains sphériques, de même volume et dont les orientations cristallographiques sont choisies aléatoirement (matériau non texturé).

Variante	n <sup>1</sup>	n <sup>2</sup>	n <sup>3</sup>	m <sup>1</sup>	m <sup>2</sup>	m <sup>3</sup>
1	-0,168	0,688	0,705	-0,151	-0,904	0,846
2	-0,168	0,705	0,688	-0,151	0,846	-0,904
3	0,168	0,688	0,705	0,151	-0,904	0,846
4	0,168	0,705	0,688	0,151	0,846	-0,904
5	-0,688	-0,168	0,705	0,904	-0,151	0,846
6	-0,705	-0,168	0,688	-0,846	-0,151	-0,904
7	-0,688	0,168	0,705	0,904	0,151	0,846
8	-0,705	0,168	0,688	-0,846	0,151	-0,904
9	-0,168	-0,688	0,705	-0,151	0,904	0,846
10	-0,168	-0,705	0,688	-0,151	-0,846	-0,904
11	0,168	-0,688	0,705	0,151	0,904	0,846
12	0,168	-0,705	0,688	0,151	-0,846	-0,904
13	0,705	-0,168	0,688	0,846	-0,151	-0,904
14	0,688	-0,168	0,705	-0,904	-0,151	0,846
15	0,705	0,168	0,688	0,846	0,151	-0,904
16	0,688	0,168	0,705	-0,904	0,151	0,846
17	0,688	-0,705	0,168	-0,904	-0,846	0,151
18	0,705	-0,688	0,168	0,846	0,904	0,151
19	-0,688	0,705	0,168	0,904	0,846	0,151
20	-0,705	0,688	0,168	-0,846	-0,904	0,151
21	-0,705	-0,688	0,168	-0,846	0,904	0,151
22	-0,688	-0,705	0,168	0,904	-0,846	0,151
23	0,705	0,688	0,168	0,846	-0,904	0,151
24	0,688	0,705	0,168	-0,904	0,846	0,151

*Tableau V-6: Définition des normales aux plans d'habitat et des directions de transformations utilisées pour décrire la cristallographie de la transformation martensitique dans les alliages à mémoire de forme de type CuAlBe [M96].*

**V.2.2.2 - Résultats**

Aucune étude similaire à l'alliage CuZnAl [E94] n'a été faite sur l'alliage CuAlBe. En conséquence, les résultats obtenus seront détaillés. Tout d'abord, pour le comportement superélastique isotherme: la planche V-8 reprend les premiers cycles des essais superélastiques isothermes réalisés pour des températures de 20, 40, 60, 80 et 100°C. Les caractéristiques de la transformation (expérimentales et numériques) sont comparées dans le tableau V-7.

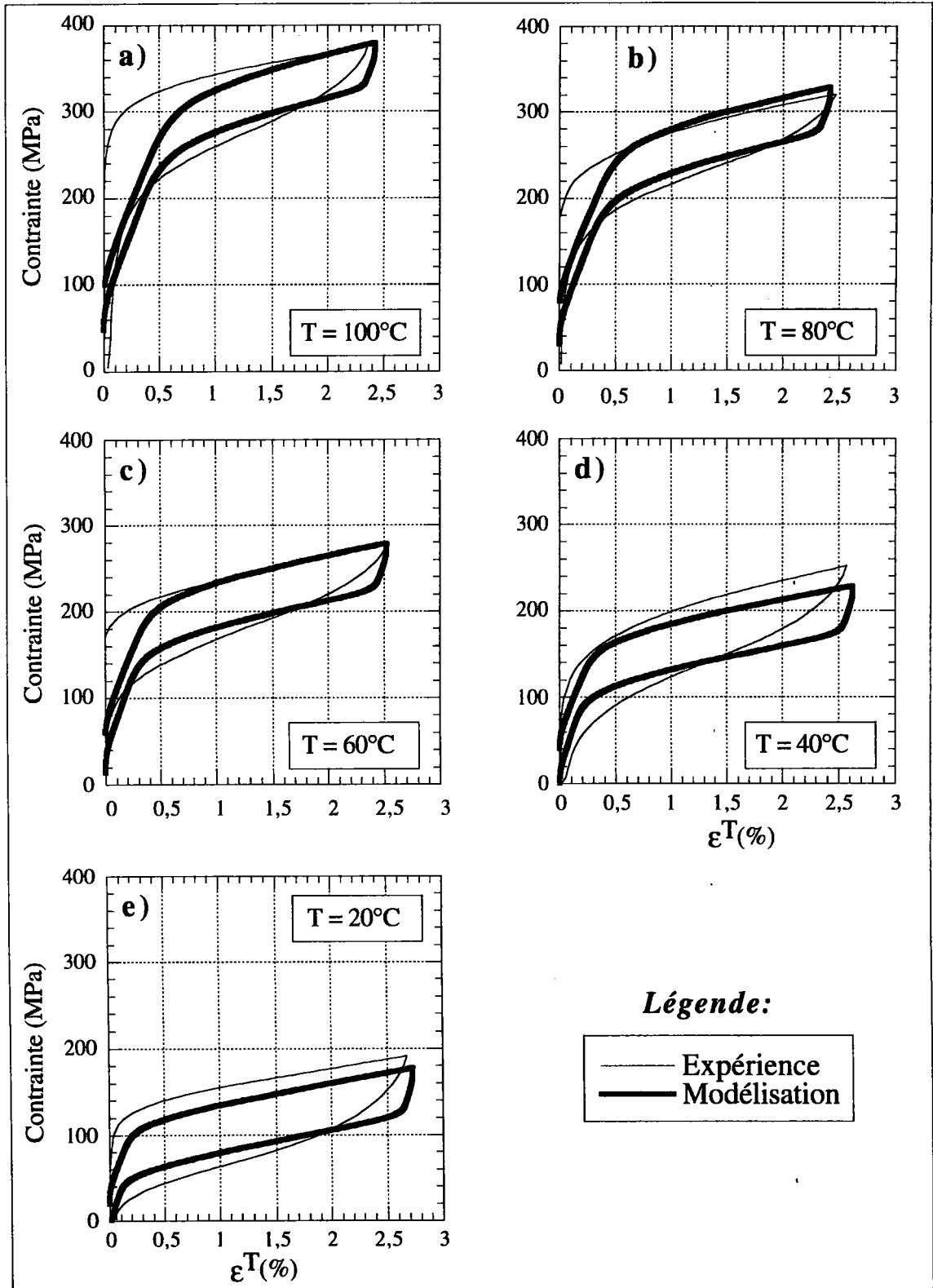
		100 °C	80 °C	60 °C	40 °C	20°C
Pente $\theta^\Sigma$ (MPa)	Exp:	2330	2803	2910	3203	2200
	Num:	3100	2980	2867	2400	2483
Erreur relative (%)		+20,2	+6,3	-1,5	-25,1	+12,9
Hystérésis $\Delta\sigma$ (MPa)	Exp:	78	55	59	67	83
	Num:	50	52,7	51,2	53,8	53,2
Erreur relative (%)		-35,9	-4,2	-13,2	-19,7	-35,9
Contrainte seuil $M_S^\sigma$ (MPa)	Exp:	322	252	207	170	133
	Num:	300	253	207	161	109
Erreur relative (%)		-8	-0,4	0	-5,3	-18

*Tableau V-7: Confrontation Expérience-Modélisation et erreur relative pour trois caractéristiques de la transformation lors d'essais de superélasticité de l'alliage CuAlBe polycristallin.*

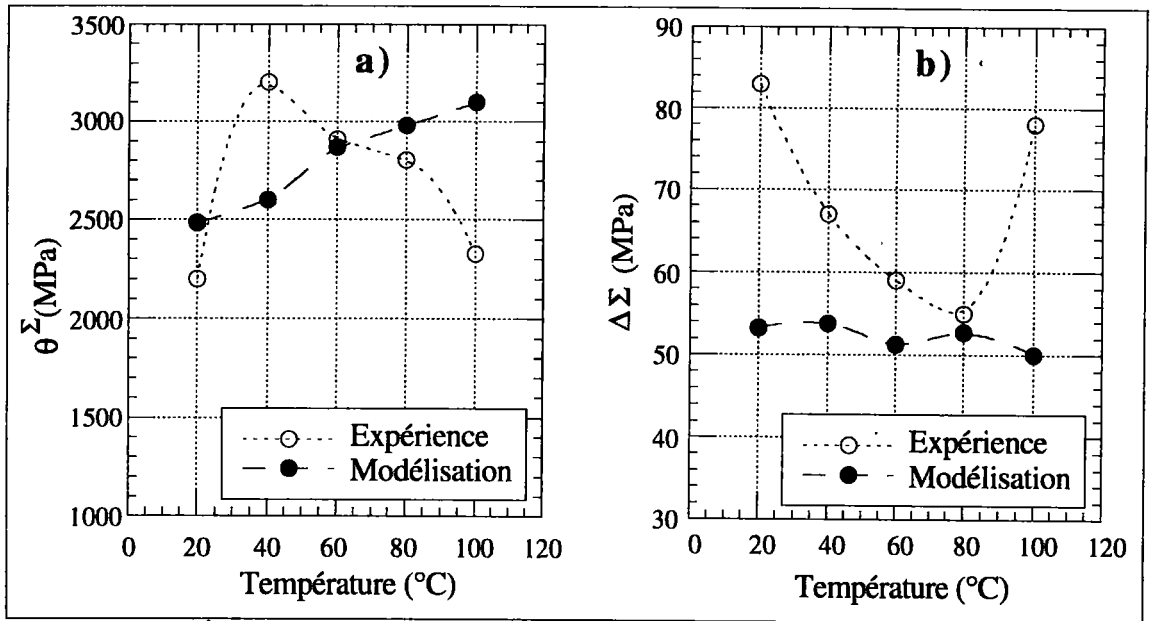
Les contraintes seuils de transformation sont les caractéristiques les mieux représentées numériquement. On s'attardera par la suite sur la possibilité de représenter numériquement un diagramme d'état fidèle à la réalité expérimentale.

On représente les évolutions expérimentale et numérique de la pente et de l'hystérésis (fig.V-9) avec la température de l'essai superélastique. Les écarts sont faibles au niveau de la pente (fig.V-9a) qui, de plus, tend à se stabiliser avec les cycles lors des essais expérimentaux (fig.IV-25).





**Planche V-8: Confrontation Expérience-Modélisation pour un alliage CuAlBe polycristallin. De a) à e) Essais superélastiques à 100, 80, 60, 40 et 20°C.**



*Fig. V-9: Évolutions expérimentale et numérique de a) la pente de transformation et de b) l'hystérésis de la transformation pour un alliage CuAlBe polycristallin lors d'essais de superélasticité.*

Pour l'hystérésis (fig.V-9b) l'erreur la plus importante est obtenue pour les essais extrêmes (20 et 100°C). À ces températures, des phénomènes non pris en compte dans le modèle peuvent intervenir: plasticité et seconde transformation de phase à 100°C, martensite piégée et réorientation à 20°C.

De plus, il existe des marges d'erreur (numérique et expérimentale) non prises en compte ici, qui engloberait probablement les erreurs relatives obtenues ici. En effet, on observe visuellement un très bon accord entre les courbes de comportement expérimentales et numériques (Planche V-8).

On confronte aussi les résultats expérimentaux et les simulations par l'approche autocohérente des essais de fluage anisotherme pour un intervalle de contrainte plus important que dans le cas CuZnAl. Les contraintes uniaxiales appliquées sont de 50, 75, 100, 150 et 200 MPa (Planche V-10). La courbe de déformation globale de transformation (fig.V-10f) montre qu'à nouveau, les résultats de modélisation sont inférieurs aux résultats expérimentaux pour les plus faibles contraintes et supérieurs à hautes contraintes.

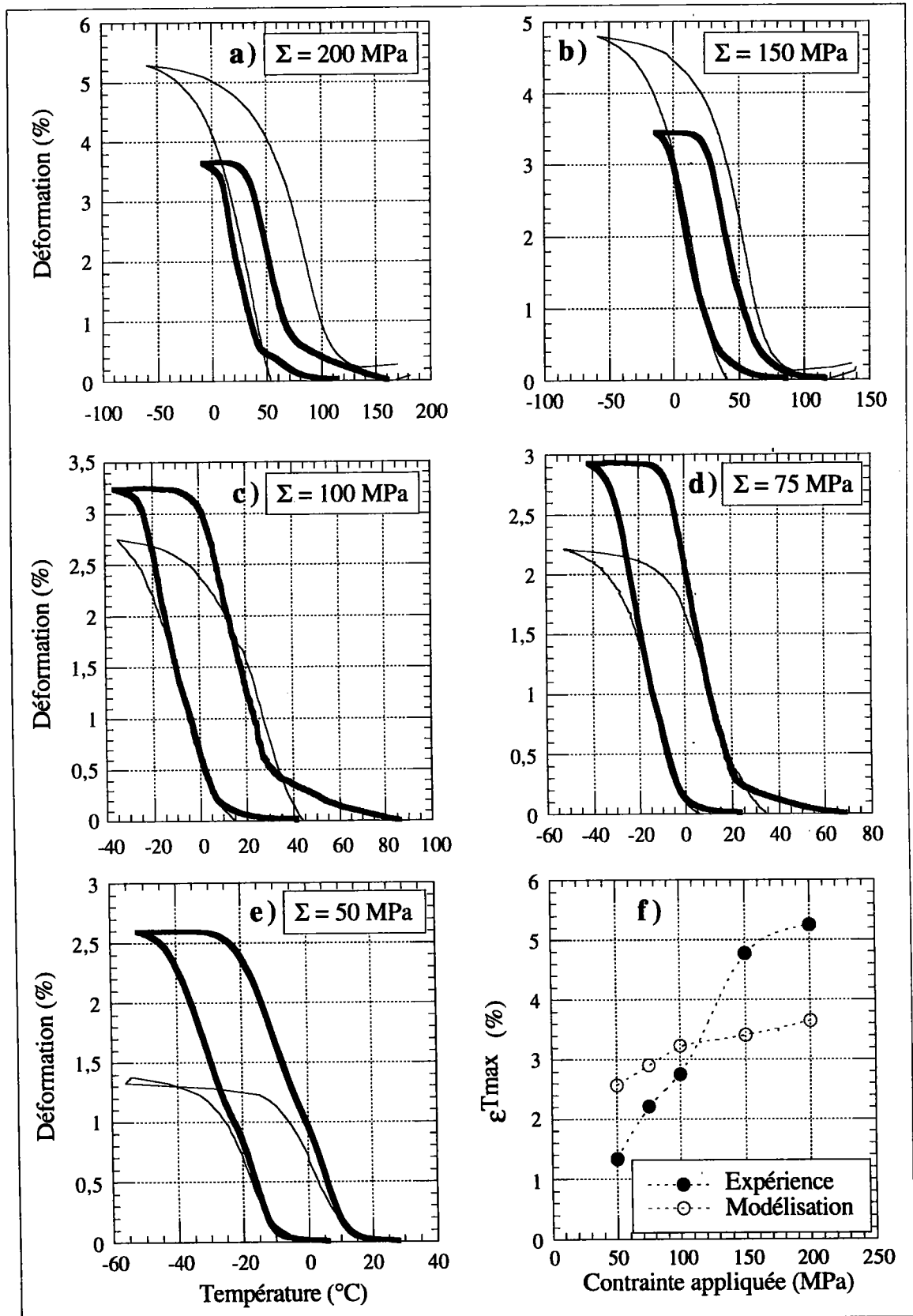


Planche V-10: Comportement en fluage anisotherme: confrontation Expérience-Modélisation pour un alliage CuAlBe polycristallin. a) 200MPa. b) 150MPa. c) 100MPa. d) 75 MPa. e) 50MPa.

		50 MPa	75 MPa	100 MPa	150 MPa	200 MPa
T° de transition M <sub>S</sub> <sup>T</sup> (°C)	Exp:	-10,9	-3,1	8,7	36,2	59,8
	Num:	-11,3	-5,8	2,9	28,6	43,6
	Erreur (°C)	-0,4	-2,7	-5,8	-7,6	-16,2
Pente $\theta^T$ (K <sup>-1</sup> )	Exp:	7,5 10 <sup>-4</sup>	8,9 10 <sup>-4</sup>	8,9 10 <sup>-4</sup>	10 <sup>-3</sup>	9,2 10 <sup>-4</sup>
	Num:	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-3</sup>	10 <sup>-3</sup>	9,9 10 <sup>-4</sup>
	Erreur relative(%)	+33,3	+12,4	+12,4		+37,6
Hystérésis $\Delta T$ (K)	Exp:	19,5	24	31,5	39	52,5
	Num:	21,9	26,2	27,5	30,1	30,8
	Erreur relative(%)	+12,3	+9,2	-12,7	-22,8	-41,3
$\epsilon T_{max}$ (%)	Exp:	1,33	2,21	2,75	4,78	5,25
	Num:	2,57	2,9	3,23	3,41	3,65
	Erreur relative(%)	+93,2	+31,2	+17,4	-28,6	-30,5

Tableau V-11: Confrontation Expérience-Modélisation et erreur relative pour les caractéristiques de la transformation par fluage anisotherme de l'alliage CuZnAl polycristallin.

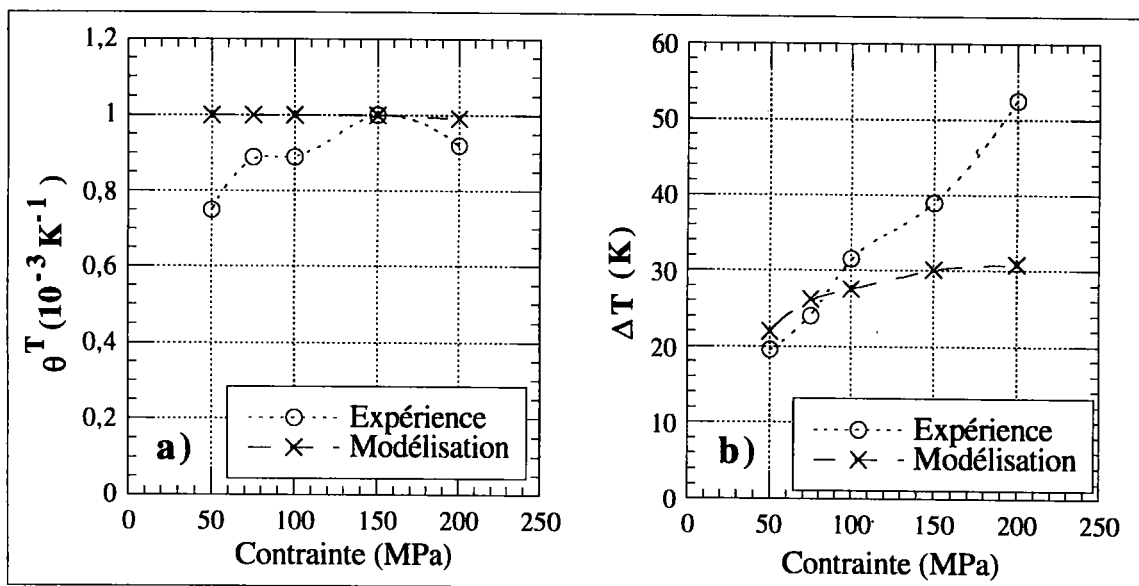


Fig. V-12: Évolutions expérimentale et numérique de a) la pente de transformation et de b) l'hystérésis de la transformation d'un alliage CuAlBe polycristallin par fluage anisotherme.

On compare les caractéristiques de la transformation dans le tableau V-11 et on trace les évolutions de pente et d'hystérésis fig.V-12. Les résultats sont globalement corrects sans l'ajout de paramètres par rapport aux résultats en superélasticité isotherme. Les seuils de transition et les pentes de transformation sont bien définis, l'erreur la plus importante est réalisée au niveau de l'hystérésis et de la déformation obtenue en fin de transformation, et cela, pour des niveaux de contraintes faibles ou importants. Pour ces derniers, il est certain que la plasticité et la seconde transformation martensitique sont en partie responsables des écarts. Pour la simulation numérique, la déformation maximale de transformation obtenue est toujours inférieure à 4%, or elle peut atteindre 5% expérimentalement. On remarque (planche V-10, fig.a et b) que dans ce cas, l'hystérésis expérimental est supérieure à celle obtenue par modélisation alors que dans les autres cas, l'accord est correct. Ce résultat semble indiquer que la transformation  $\beta' \rightarrow \alpha'$  joue un rôle important dans ces alliages. Cette seconde transformation, qui se produit à des contraintes élevées permet d'accroître fortement la déformation des monocristaux (jusqu'à 20%) mais accroît l'hystérésis également. L'étude microstructurale du §V.3 permet d'expliquer l'origine des écarts observés à basse contrainte.

### V.2.3 - INFLUENCE DE LA VITESSE DE SOLLICITATION

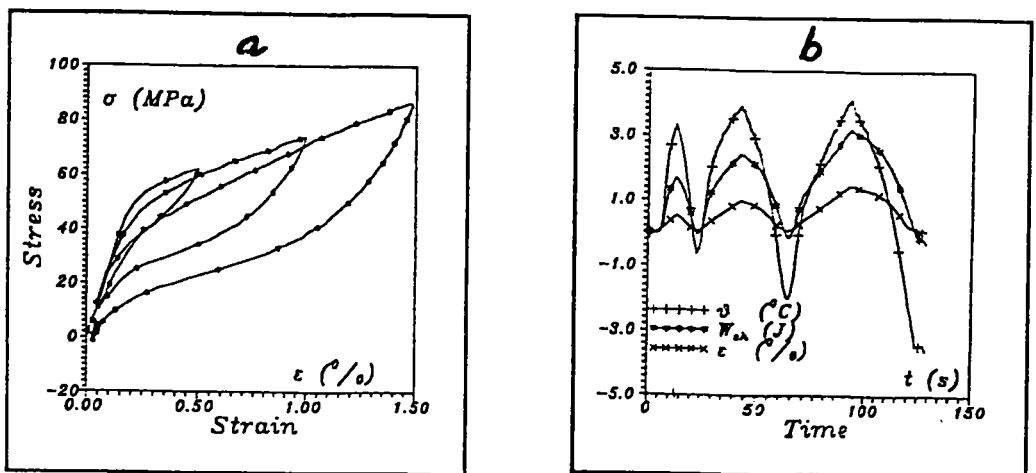
On peut facilement étudier les deux cas extrêmes. Si on considère que la transformation se produit suffisamment lentement pour que la chaleur latente de transformation diffuse hors du matériau, la transformation est isotherme et l'équation de couplage (III.125) n'intervient pas. Les résultats liés à ce type d'hypothèse ont été étudiés jusqu'à présent. À l'inverse, si on considère un processus suffisamment rapide pour qu'aucun échange de chaleur avec l'extérieur puisse se produire, le processus est adiabatique et l'élévation de température qui en résulte est donnée par l'équation de couplage (III.125).

### V.2.3.1 - Cas des alliages CuZnAl

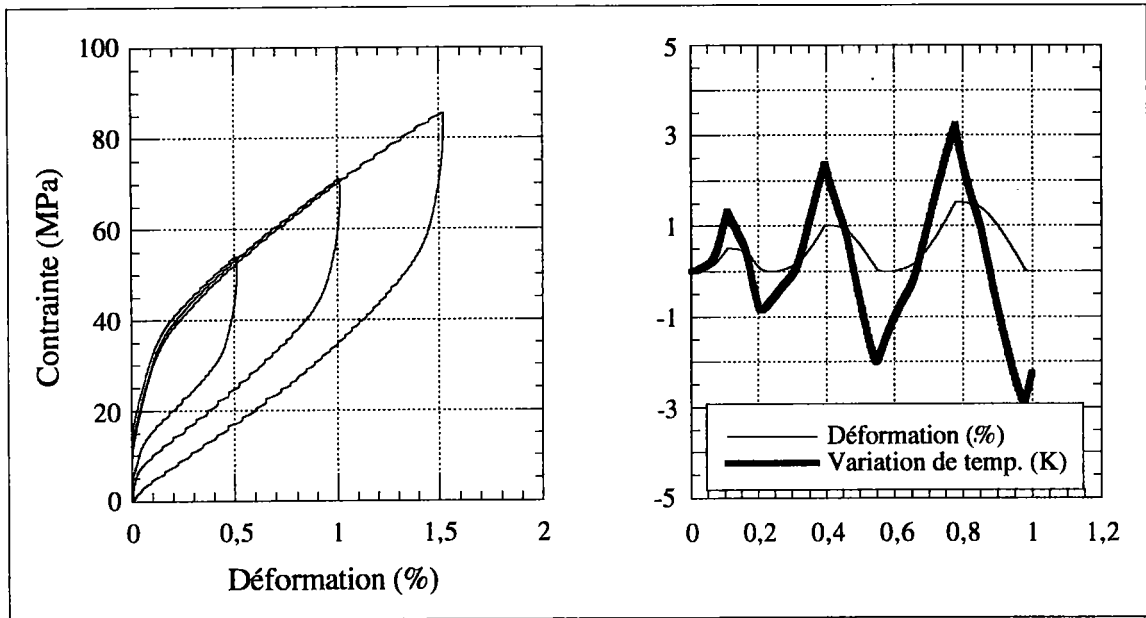
Une première validation consiste en la comparaison du modèle avec des expériences réalisées sur un alliage CuZnAl par Chrysochoos [CPM93]. Le dispositif ainsi que les techniques numériques de traitement des données sont présentés dans [CD92]: un dispositif de thermographie infrarouge permettant une mesure précise du champ de température de l'éprouvette est couplé à une machine de traction.

L'alliage utilisé est caractérisé par les températures de transition suivantes:  $M_s=15^\circ\text{C}$  et  $A_f=19,5^\circ\text{C}$ . La pente des droites de transition est de l'ordre de  $2\text{ MPa/K}$ . Les caractéristiques thermoélastiques sont:  $E=70\text{ GPa}$ ,  $\nu=0,33$ ,  $\alpha=18.10^{-6}\text{ K}^{-1}$ ,  $\rho=7700\text{ kg/m}^3$ ,  $C_f=393\text{ J/kg/K}$ . La température ambiante  $T_0$  est de  $30^\circ\text{C}$ .

Les courbes expérimentales de comportement et d'évolution de la température de l'éprouvette sont présentés sur la figure (V-13). On intègre dans le modèle l'équation de couplage (III.126) qui permet de déterminer les évolutions de température avec l'accroissement de fraction volumique. En ajustant le paramètre phénoménologique  $h$  afin d'obtenir une correspondance entre les courbes de comportement numérique et expérimentale, on obtient une évolution de température en bon accord avec l'expérimentation (V-14). Dans ce cas,  $h=50000\text{ J/m}^3/\text{K}$ .



*Fig. V-13: a) Courbe de comportement et b) Réponse en température pour un essai superélastique sur un alliage CuZnAl polycristallin.*



*Fig. V-14: a) Courbe de comportement et b) Réponse en température pour une simulation d'essai superélastique sur un alliage CuZnAl polycristallin.*

### V.2.3.2 - Cas des alliages CuAlBe

Une deuxième validation de ce type d'essai a été réalisée en utilisant les résultats expérimentaux du paragraphe IV.3. Les caractéristiques supplémentaires à introduire sont la masse volumique  $\rho=7700 \text{ kg/m}^3$  et la chaleur latente de transformation  $C_f=400 \text{ J/kg/K}$  (valeurs moyennes pour des alliages base cuivre). Aucune mesure de température n'a été effectuée mais l'utilisation de deux vitesses de sollicitation différentes permet de visualiser les effets de l'augmentation de température de l'éprouvette sur les courbes de comportement lors d'essais de traction. On retrouve fig.V-15a les résultats d'essais expérimentaux superélastiques à  $60^\circ\text{C}$  (cycle 1) réalisés pour des vitesses d'avance de la traverse de 0,1 et 100 mm/min. Les vitesses de déformation correspondantes sont de  $2,3 \cdot 10^{-5}$  et  $1,4 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ . Numériquement, on simule deux essais (fig.V-15b):

- Un essai pour lequel la température de l'échantillon reste constante. Dans ce cas, on considère que toute la chaleur est dissipée vers l'extérieur. La sollicitation est isotherme et correspond au cas d'une vitesse de sollicitation très lente.
- Un second essai dans lequel on considère que les dégagements et absorptions de chaleur accompagnant les transformations directe et

inverse restent confinés dans le matériau. La température de l'échantillon évolue en conséquence. On est alors en présence d'une sollicitation adiabatique, c'est le cas d'un test à vitesse de sollicitation très rapide où la chaleur n'a pas la possibilité de se dissiper.

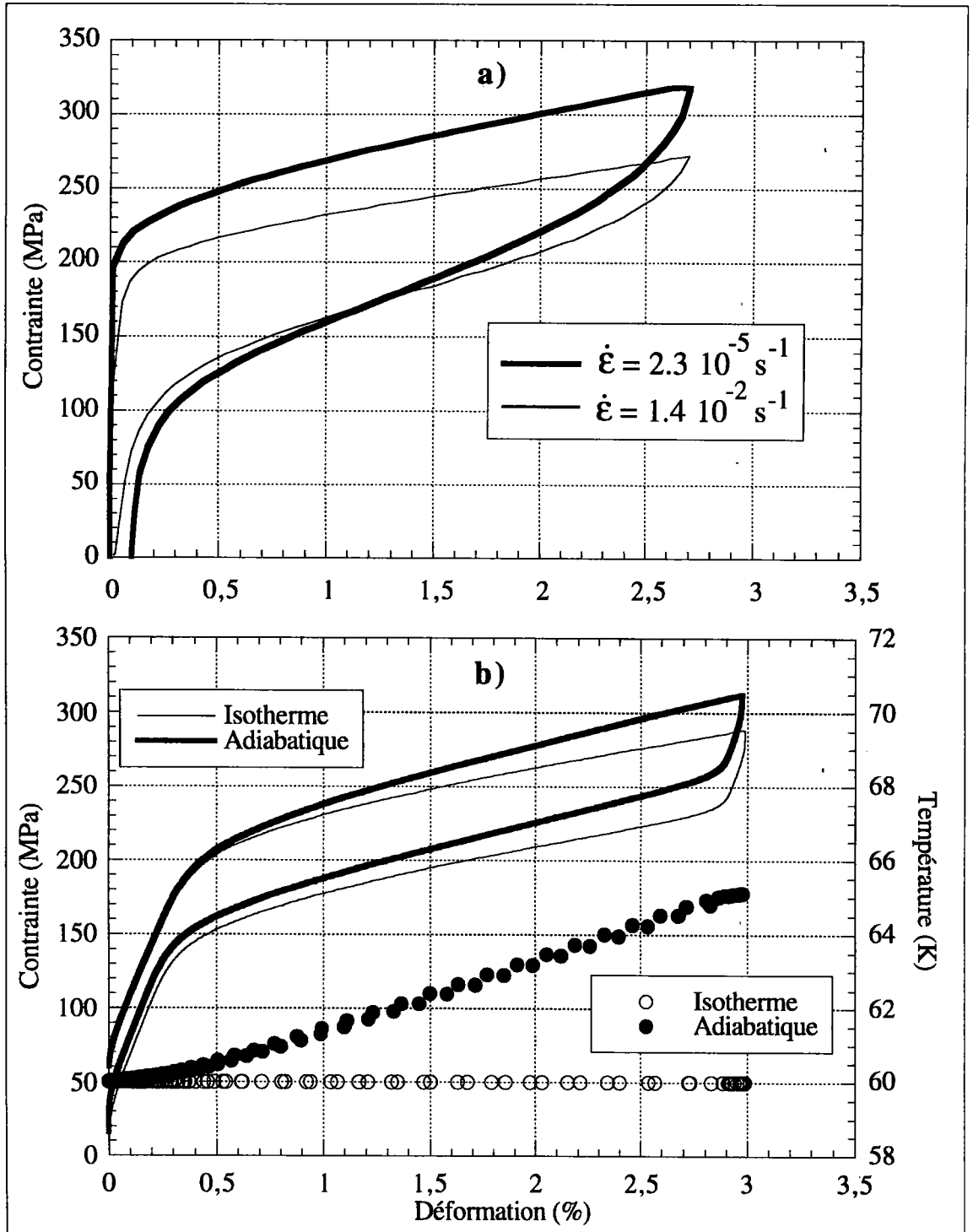


Fig. V-15: a) Influence de la vitesse de sollicitation (expérimentale) et b) Résultats de simulation pour un alliage CuAlBe polycristallin à  $T=60^{\circ}\text{C}$ .



Expérimentalement, la contrainte de transformation augmente de 14%, cet effet n'est pas représenté numériquement (elle est la même pour les deux simulations). De même, l'évolution de la valeur de l'hystérésis n'est pas obtenue: +57% expérimentalement, alors que numériquement celle-ci diminue de 6%. Ce résultat numérique rejoint cependant les travaux réalisés par Delaey et al. [DDA78] qui note (sur un plus grand nombre d'expérience et sur un alliage de CuZnAl) une diminution de l'hystérésis quand la vitesse de déformation augmente.

La pente de transformation évolue dans le bon sens. De plus, quantitativement l'évolution est très proche: +24,7 % expérimentalement et +28,4 % pour la simulation numérique. L'augmentation de température de 5°C dans l'échantillon déterminée numériquement est en accord avec les mesures effectuées sur des alliages CuZnAl. Les caractéristiques des différentes courbes sont reprises dans le tableau V-16.

	Expérience		Modélisation	
	2,3 10 <sup>-5</sup> s <sup>-1</sup>	1,4 10 <sup>-2</sup> s <sup>-1</sup>	Isotherme	Adiabatique
$\theta\sigma$ (MPa)	2286	3086 (+35%)	2571	3657 (+42%)
$\Delta\sigma$ (MPa)	62	96 (+54%)	52,3	51,9 (-0,8%)
$M_{S\sigma}$ (MPa)	210	240	210	207

*Tableau V-16: Confrontation Expérience-Modélisation et erreur relative pour les caractéristiques de la transformation lors d'essais à différentes vitesses de sollicitation.*

### V.2.3.3 - Conclusion

Les grandes tendances de l'influence de la vitesse de déformation sont prises en compte sans paramètres supplémentaires. La description des mécanismes telle qu'elle a été effectuée et modélisée suffit à décrire correctement l'évolution des courbes de comportement isotherme et adiabatique. Pour un cas de sollicitation ni isotherme, ni adiabatique, des vitesses de déformation intermédiaires peuvent être modélisés en

introduisant un paramètre phénoménologique d'échange thermique avec l'extérieur dans le modèle.

## V.3 - ÉTUDE MICROSTRUCTURALE

### V.3.1 - INTRODUCTION

Jusqu'à présent, seuls des résultats concernant le comportement macroscopique ont été présentés. L'atout du modèle développé est que pour obtenir ce comportement, il est nécessaire de déterminer celui de ses constituants, à savoir les grains. Ainsi, tout au long du chargement, il est possible d'enregistrer certaines de leurs caractéristiques et d'avoir alors accès à ce que l'on peut nommer le comportement microscopique.

Dans cette partie, nous étudions sept chargements différents (fig.V-17):

- Trois simulations d'essais superélastiques pour des températures de  $M_S+1^\circ$ ,  $M_S+40^\circ$  et  $M_S+100^\circ\text{C}$ . Le chargement s'arrête lorsque la fraction volumique totale de martensite atteint 75%.
- Quatre simulations d'essais de fluage anisotherme pour des contraintes appliquées variant de 10 MPa à 500 MPa (valeurs intermédiaires: 100 et 250 MPa). La simulation stoppe à 90% de martensite formée.

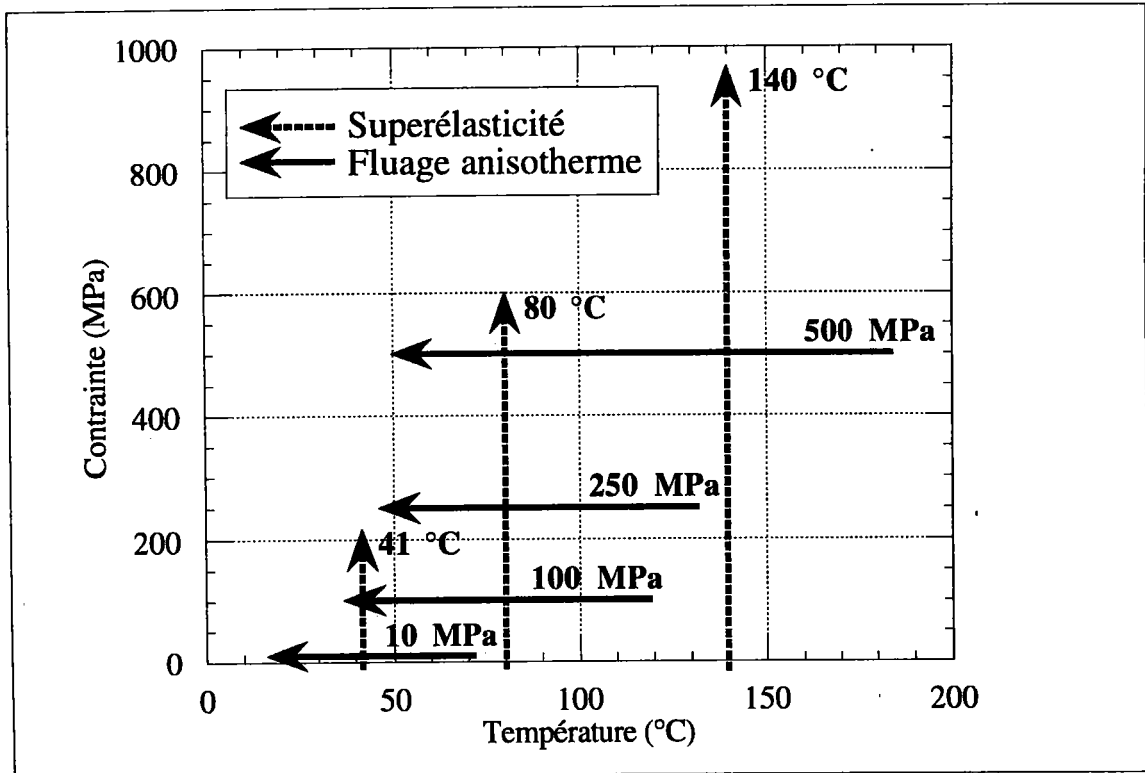
Ils sont appliqués à l'alliage CuZnAl pour lequel le comportement superthermoélastique macroscopique a été étudié (V.2.1.1).

Ces simulations ont pour buts:

- de montrer toutes les capacités du modèle et d'analyser les informations obtenues sur: les contraintes internes, la déformation des grains, l'évolution de la microstructure (nombre de variantes actives)...
- de comparer ces résultats pour des trajets de chargement différents (isotherme et anisotherme) et pour des niveaux de température et de contrainte différents.

- de mettre en évidence les mécanismes de déformation en oeuvre lors de ces différents trajets de chargement.

On s'intéresse dans cette étude uniquement à la transformation directe (austénite-martensite).



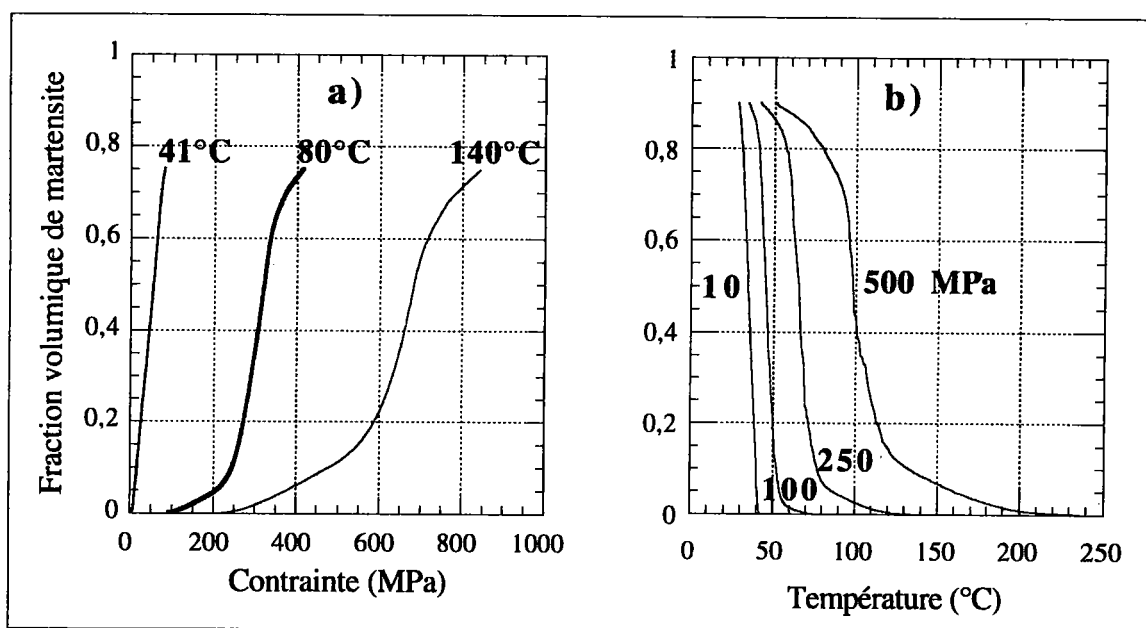
*Fig.V-17: Représentation schématique des différents trajets de chargement simulés.*

### V.3.2 - CINÉTIQUE ET DÉFORMATION DE TRANSFORMATION

L'approche micromécanique utilisée permet d'étudier la cinétique de la transformation. Ceci nous donne des informations supplémentaires sur le comportement et notamment sur des paramètres macroscopiques comme la fraction volumique de martensite et la déformation moyenne de transformation utilisés dans des approches phénoménologiques.

#### V.3.2.1 - Cinétique

L'évolution de la fraction globale de martensite au cours de la transformation laisse apparaître trois stades lors du chargement (fig.V-18):

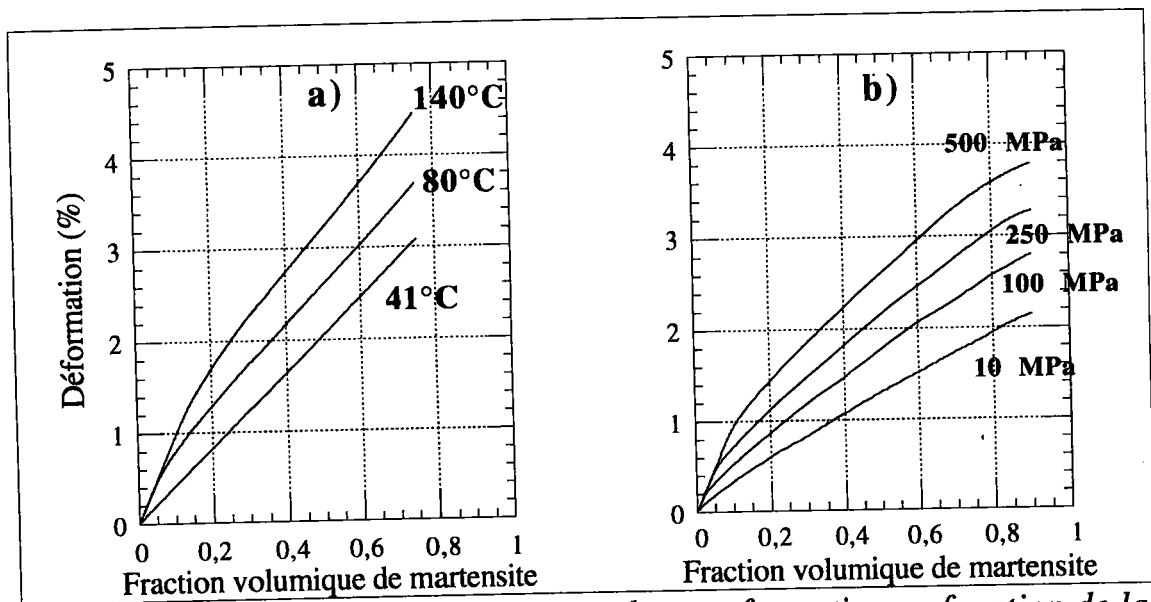


**Fig.V-18:** *Évolution de la fraction volumique totale de martensite au cours du chargement. a) Essais superélastiques; b) Essais de fluage anisotherme.*

- Au départ de la transformation, on observe une croissance progressive des pentes  $df/d\Sigma$  et  $df/dT$ : on parle d'initiation de la transformation, phase pendant laquelle les grains commencent successivement à se transformer. Ce phénomène n'est pas visible pour l'essai isotherme à 41°C et pour l'essai anisotherme sous 10MPa, signifiant que pour ces essais, tous les grains démarrent leur transformation dès le début du chargement.
- La phase linéaire suivante correspond à la pente de transformation: elle correspond à des pentes sur les courbes de comportement contrainte-déformation et déformation-température aux valeurs moyennes suivantes:  $d\Sigma/dE^T=3500\text{MPa}$  et  $dT/dE^T=-750\text{ K}$ .
- Enfin, pour des niveaux de transformation plus importants, un effet de durcissement est observé. Cette dernière observation est liée à des conditions cinématiques particulières: quelques grains sont alors entièrement transformés et ne participent plus qu'élastiquement à la déformation. Cet effet de saturation intervient aux environs de 80% de martensite, cette valeur ayant tendance à diminuer lorsque la contrainte macroscopique augmente. Ce résultat prédit que pour des contraintes

macroscopiques importantes, la contrainte et la température associées à la fin de la transformation ( $M_f$ , soit  $f=1$ ) sont incorrectes et que la transformation martensitique n'est plus le seul mécanisme de déformation inélastique à ce niveau de contrainte.

Il est également intéressant de relier la déformation de transformation à la fraction volumique de martensite (fig.V-19). On voit à nouveau apparaître les étapes de la transformation.



**Fig.V-19:** Évolution de la déformation de transformation en fonction de la fraction volumique globale de martensite: a) Essais de superélasticité; b) Essais de fluages anisothermes.

- La phase d'initiation de la transformation est identique pour tous les chargements. De pente  $d\epsilon/df \cong 10^{-1}$ , elle correspond à l'activation des variantes les mieux orientées par rapport au chargement. Plus la contrainte macroscopique est importante, plus cette phase est longue.
- L'évolution ultérieure est différente suivant le type de chargement. Pour les simulations d'essais superélastiques (fig.V-19a), une seconde phase linéaire poursuit la transformation: c'est donc une transformation homogène, avec des variantes bien établies qui terminent la transformation. Pour les simulations de fluages anisothermes, la pente diminue progressivement tout au long de la transformation. La

contrainte macroscopique n'évoluant pas, l'effet thermique (refroidissement) est de permettre à des variantes d'apparaître tout au long de la transformation en accommodant la transformation.

### V.3.2.2 - Déformation moyenne de transformation

Ces courbes sont plus représentatives de la cinétique de la transformation. Le rapport moyen de la déformation de transformation sur la fraction volumique de martensite (déformation moyenne de transformation) est une variable macroscopique utile pour élaborer des modèles phénoménologiques [P95]. Sa valeur, en l'absence de résultats expérimentaux permettant de la définir, est souvent considérée comme constante. Nous voyons qu'il n'en est rien et que cette variable est au contraire très sensible à la nature du chargement thermomécanique imposé (fig.V-20).

Cette variable macroscopique, notée  $\bar{\epsilon}^T$ , est définie par la relation suivante:

$$\bar{\epsilon}^T = \frac{1}{V_M} \int_{V_M} \epsilon^T(r) dV$$

où  $V_M$  est le volume global de martensite.

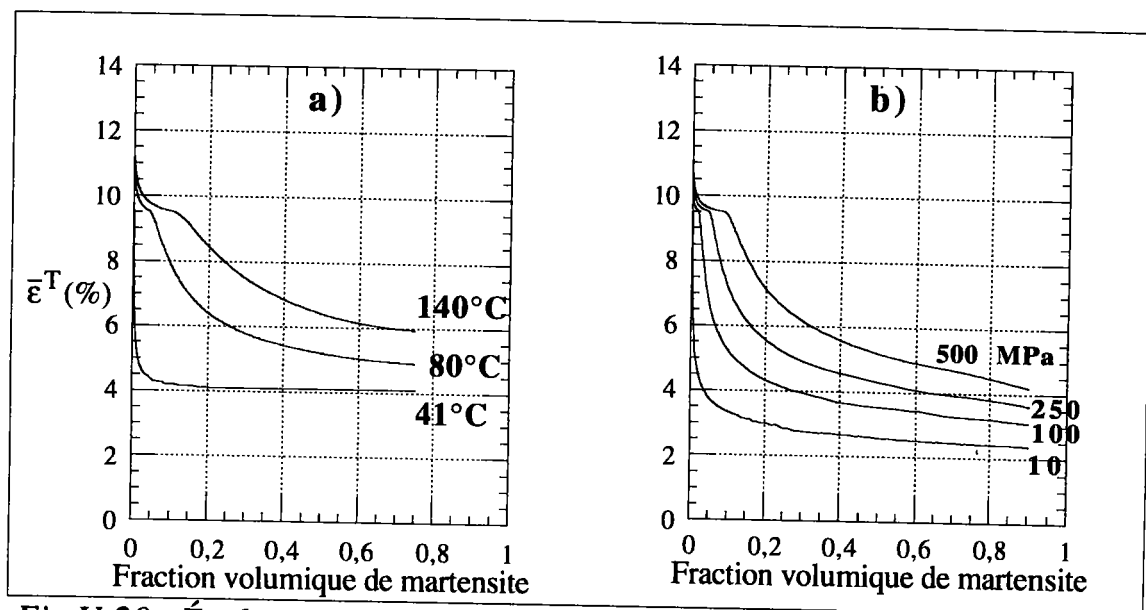


Fig.V-20: Évolution de la déformation moyenne de transformation: a) Essais de superélasticité; b) Essais de fluage anisotherme.

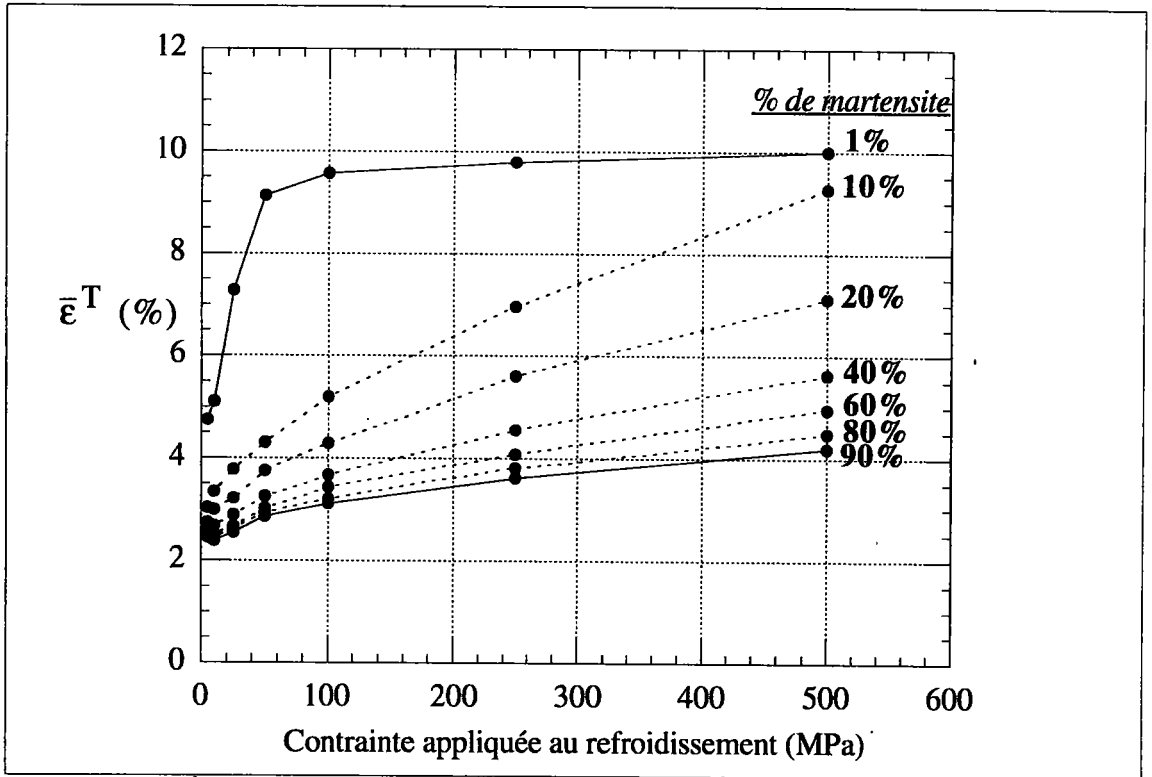
On note une diminution rapide de sa valeur en début de transformation pour finalement obtenir un niveau de saturation plus ou moins marqué qui dépend de la contrainte macroscopique et de la température. Ce type d'évolution, attendu par Raniecki et al. [RLT92], est très importante pour les approches phénoménologiques qui ne peuvent la négliger.

La valeur  $\bar{\epsilon}^T = 11\%$  obtenue pour les fractions volumiques de martensite proches de 0 équivaut à un tenseur d'orientation moyen des variantes activées  $\bar{R}$  égal à 0,48. Ceci montre bien qu'au départ de la transformation, ce sont les variantes les mieux orientées qui se transforment. La chute de cette valeur au cours de la transformation indique que d'autres variantes moins bien orientées apparaissent. La valeur  $\bar{\epsilon}^T = 8,75\%$  est particulière, elle indique la fin de la phase d'initiation et le départ de la transformation des derniers grains dont les variantes sont très mal orientées, entraînant une nouvelle chute brutale de la déformation moyenne de transformation. Cette valeur de 8,75% est proche de celle obtenue en utilisant un modèle statique (contrainte uniforme) pour la transition d'échelle [E94].

Les simulations d'essais superélastiques (fig.V-20a) font ressortir une valeur de saturation fonction de la température. Cette saturation indique que la valeur moyenne du tenseur d'orientation n'évolue plus et qu'il n'y a pas d'apparition tardive de nouvelles variantes. La situation est différente pour les simulations d'essai de fluage anisotherme (fig.V-20b), pour lesquels les courbes diminuent sans se saturer, prouvant qu'il y a bien accommodation des variantes jusqu'à la fin de la transformation.

Cet effet est directement visible sur les courbes d'évolution de la déformation moyenne de transformation en fonction de la contrainte appliquée pour différents taux de transformation (résultats des simulations de fluage anisotherme uniquement: fig.V-21). On s'aperçoit que pour un même taux de transformation, la déformation moyenne de transformation diminue avec la contrainte appliquée. Cette évolution montre que la formation de structures autoaccommodantes est très importante lors des essais de fluage anisotherme sous faible contrainte. Cette évolution dépend

également du taux global de martensite. Les courbes pour 1% et 90% de fraction volumique de martensite sont qualitativement similaires aux courbes de déformations maximales de transformation  $\epsilon^{Tmax}$  obtenues lors des essais expérimentaux sur les alliages mono et polycristallins de CuAlBe (fig.IV-30). En fin de chargement, la déformation moyenne de transformation se rapproche de la courbe  $\epsilon^{Tmax}$  du polycristal. À 1% de transformation, l'évolution se rapproche de la courbe du monocristal. Pour ce taux de transformation, l'ensemble des grains du polycristal a tendance à se comporter comme des monocristaux en ne présentant qu'une variante de martensite en transformation.



*Fig.V-21: Évolution de la déformation moyenne de transformation en fonction de la contrainte appliquée et du taux de martensite pour les simulations de fluage anisotherme.*

### V.3.3 - COMPORTEMENT INTRAGRANULAIRE

L'étude a été réalisée pour 100 grains dont les orientations cristallographiques ont été choisies aléatoirement.



On étudie tout d'abord les contraintes intergranulaires et la déformation des grains. La représentation de ces données dans le triangle standard des orientations cristallographiques permet de donner une image globale de l'hétérogénéité des champs de contrainte et de déformation à l'échelle de l'échantillon. Quelques grains significatifs sont ensuite choisis afin d'étudier leur comportement spécifique en liaison avec leur orientation cristallographique. Dans ce cas, afin de ne pas alourdir les graphiques, seuls les quatre chargements extrêmes sont considérés. On note dans la suite:

- S1 l'essai superélastique à  $T = 140^{\circ}\text{C}$
- S2 l'essai superélastique à  $T = 41^{\circ}\text{C}$
- F1 l'essai de fluage anisotherme avec  $\Sigma = 500 \text{ MPa}$
- F2 l'essai de fluage anisotherme avec  $\Sigma = 10 \text{ MPa}$

### V.3.3.1 - Répartition des contraintes internes

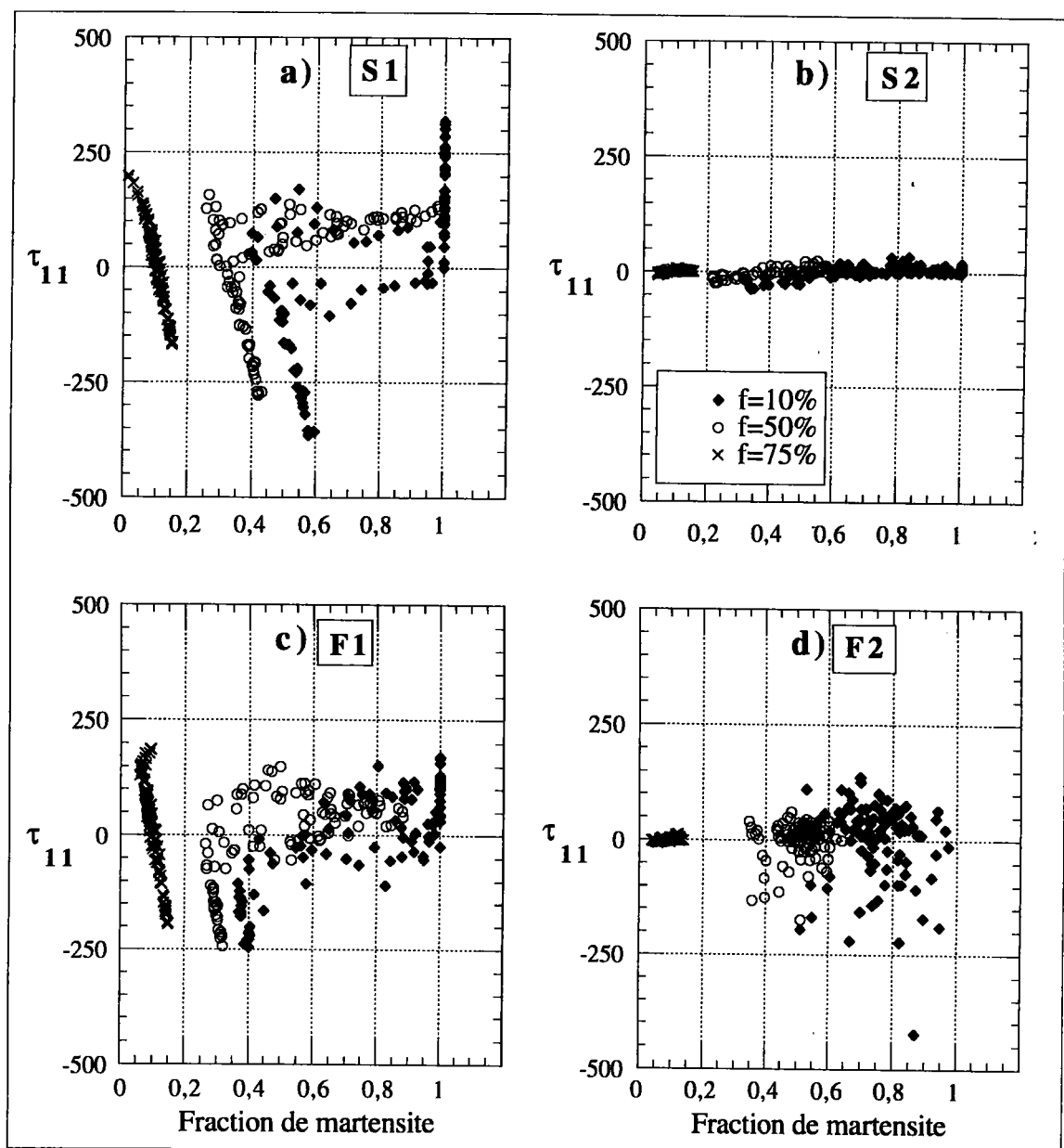
On distingue classiquement plusieurs niveaux de contraintes internes:

- Les contraintes d'ordre I correspondent aux fluctuations de la contrainte globale à l'échelle de l'échantillon. Dans notre cas, la contrainte macroscopique imposée  $\Sigma$  est homogène. En conséquence, les contraintes d'ordre I sont nulles.
- Les contraintes d'ordre II correspondent aux contraintes et interactions entre les grains (intergranulaires). Le modèle à transition d'échelle utilisé permet de les déterminer (équations III.29 et III.53). Ce sont ces contraintes que nous étudions par la suite.
- Enfin, les contraintes d'ordre III correspondent aux interactions entre les différentes variantes à l'intérieur d'un même grain (intragranulaires). Elles sont prises en compte dans la détermination du comportement du grain (§III.2).

Pour toutes nos simulations, la contrainte imposée est une traction uniaxiale d'axe (Ox). On choisit de relier la composante (1,1) du tenseur de contrainte interne à la fraction volumique du grain. L'étude des autres composantes ne fournit pas d'informations intéressantes. Ceci permet

d'obtenir une vue d'ensemble de l'évolution de l'état de contrainte avec l'évolution de la transformation (Planche V-22). On réalise ceci pour trois taux de fraction volumique globale: 10, 50 et 75%. La légende est identique pour tous les graphes.

Dans cette partie, on privilégie l'aspect comparatif des résultats. Ainsi, la même échelle est utilisée pour graduer chaque graphe au détriment de certains résultats quantitatifs.



**Planche V-22: États de contrainte interne pour tous les grains constituant le polycristal en fonction de la fraction volumique de martensite dans le grain: a) Essai S1, b) Essai S2, c) Essai F1, d) Essai F2.**

S1 et F1 sont des simulations pour lesquelles la contrainte macroscopique est importante (500 MPa à 10% de martensite globale). Dans ce cas, la phase d'initiation de la transformation est importante (fig.V-18) et implique la coexistence de grains plus ou moins transformés avec des grains qui se déforment élastiquement. On observe alors une forte hétérogénéité de la contrainte interne des différents grains.

Au contraire, la transformation apparaît très tôt dans tous les grains pour les simulations S2 et F2. En conséquence, les contraintes internes sont homogènes dans les grains (et faibles au début du chargement).

On remarque également que si la transformation se produit sous contrainte macroscopique constante pour les essais de fluage F1 et F2, cela n'est pas le cas pour les différents grains. La contrainte interne évolue fortement en cours de transformation.

S1) On peut classer les grains en trois catégories:

- Les grains qui possèdent une contrainte interne de traction importante ( $>150$  MPa). Ils se transforment peu en début de chargement puis cette tendance s'inverse et ils sont les premiers pour lesquels la fraction volumique de martensite atteint 100%. Pour 75% de martensite globale, la contrainte interne maximale en traction est d'environ 300 MPa et la contrainte macroscopique de 900 MPa. Le rapport  $\tau/\Sigma \approx 1/3$  semble réaliste pour un tel chargement. Ces grains sont placés autour du pôle [111] dans le triangle standard (fig.V-23) et sont donc des grains mal orientés par rapport au repère du chargement.

- À l'inverse, les grains possédant les contraintes internes de compression les plus importantes se transforment rapidement au départ mais ne dépassent pas 60% en fin de chargement (alors que la fraction globale de martensite est de 75%). Ces grains sont bien orientés et proches du pôle [001].

- Les grains intermédiaires ( $|\tau| \cong 100$  MPa) ont des comportements très différents les uns par rapport aux autres, leur transformation varie de

40 à 100% en fin de chargement. En fin de chargement, le rapport moyen  $\tau/\Sigma$  est d'environ 0,12.

S2) Les contraintes internes développées dans les grains sont plus homogènes, le rapport  $\tau/\Sigma$  moyen est de 0,2 fois la contrainte macroscopique (pour  $f=75\%$ ).

F1) Le comportement est similaire à l'essai S1. Des grains se transforment beaucoup en développant des contraintes internes de traction importantes et des grains se transforment peu pour des contraintes internes de compression.

F2) Comportement nettement plus homogène pour les grains. Seuls quelques grains développent une contrainte de compression très importante: -425 MPa pour le grain 12, ce qui représente plus de 40 fois la contrainte macroscopique. Dans ce cas, il semble que la contrainte interne soit largement surestimée. Mis à part quelques grains particuliers, le rapport  $\tau/\Sigma$  moyen en fin de chargement est de 5 fois la contrainte macroscopique.

Afin d'approfondir les remarques précédentes, on représente l'évolution de la contrainte interne en fonction de la fraction de martensite dans le grain pour quatre grains dont le comportement est particulièrement significatif. Leur orientation est définie par les trois angles d'Euler  $\varphi^1$ ,  $\varphi^{\max}$ ,  $\varphi^2$ . Ils sont donnés dans le tableau V-24 et représentés dans le triangle standard (fig.V-23).

	$\varphi^1$	$\varphi^{\max}$	$\varphi^2$
Grain 14	54,49	76,14	69,66
Grain 20	84,15	86,89	199,18
Grain 12	232,37	23,29	294,81
Grain 76	137,53	56,43	159,68

*Tableau V-24: Valeurs des trois angles d'Euler définissant l'orientation des quatre grains dont on étudie l'évolution de la contrainte interne.*

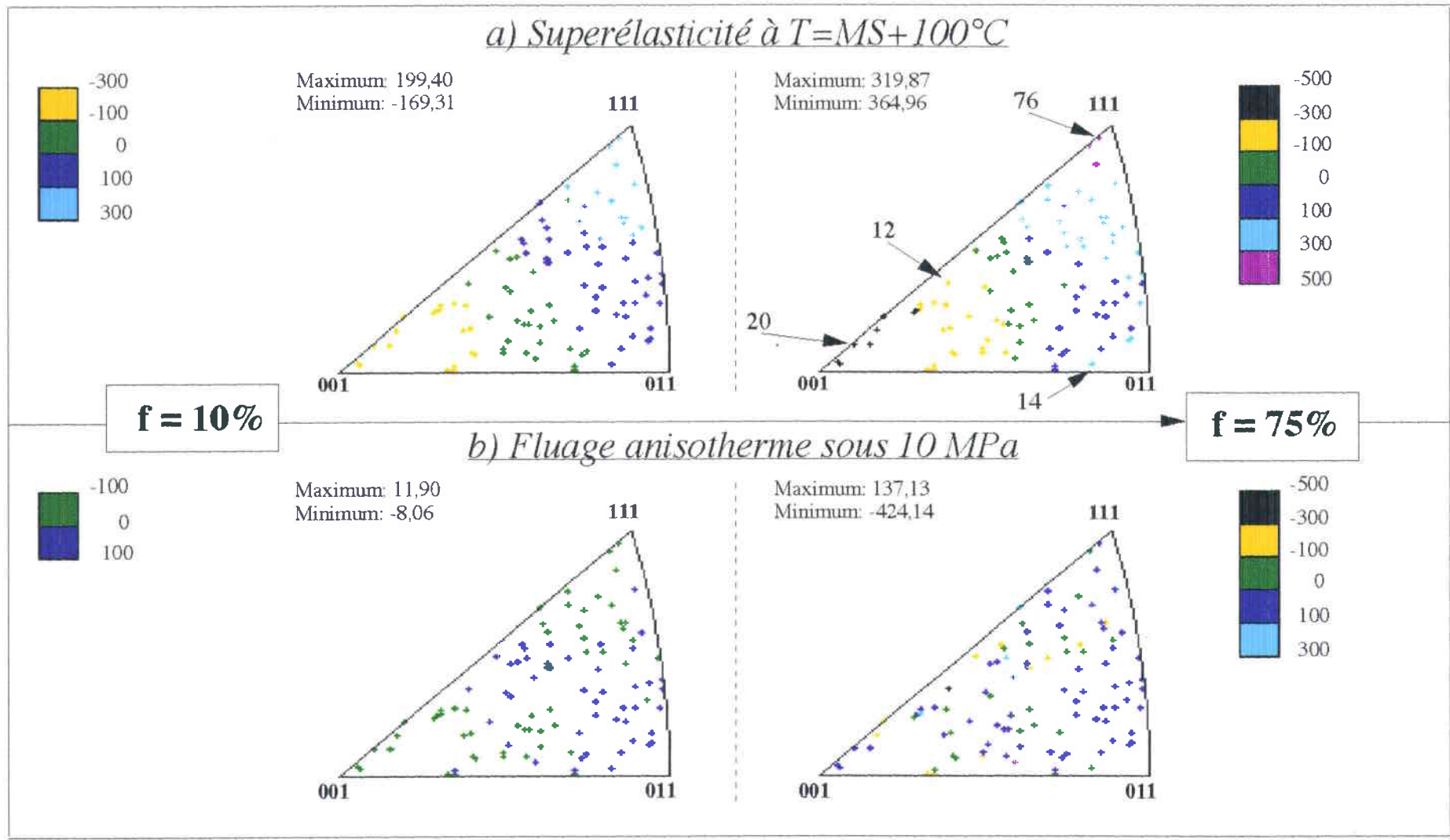
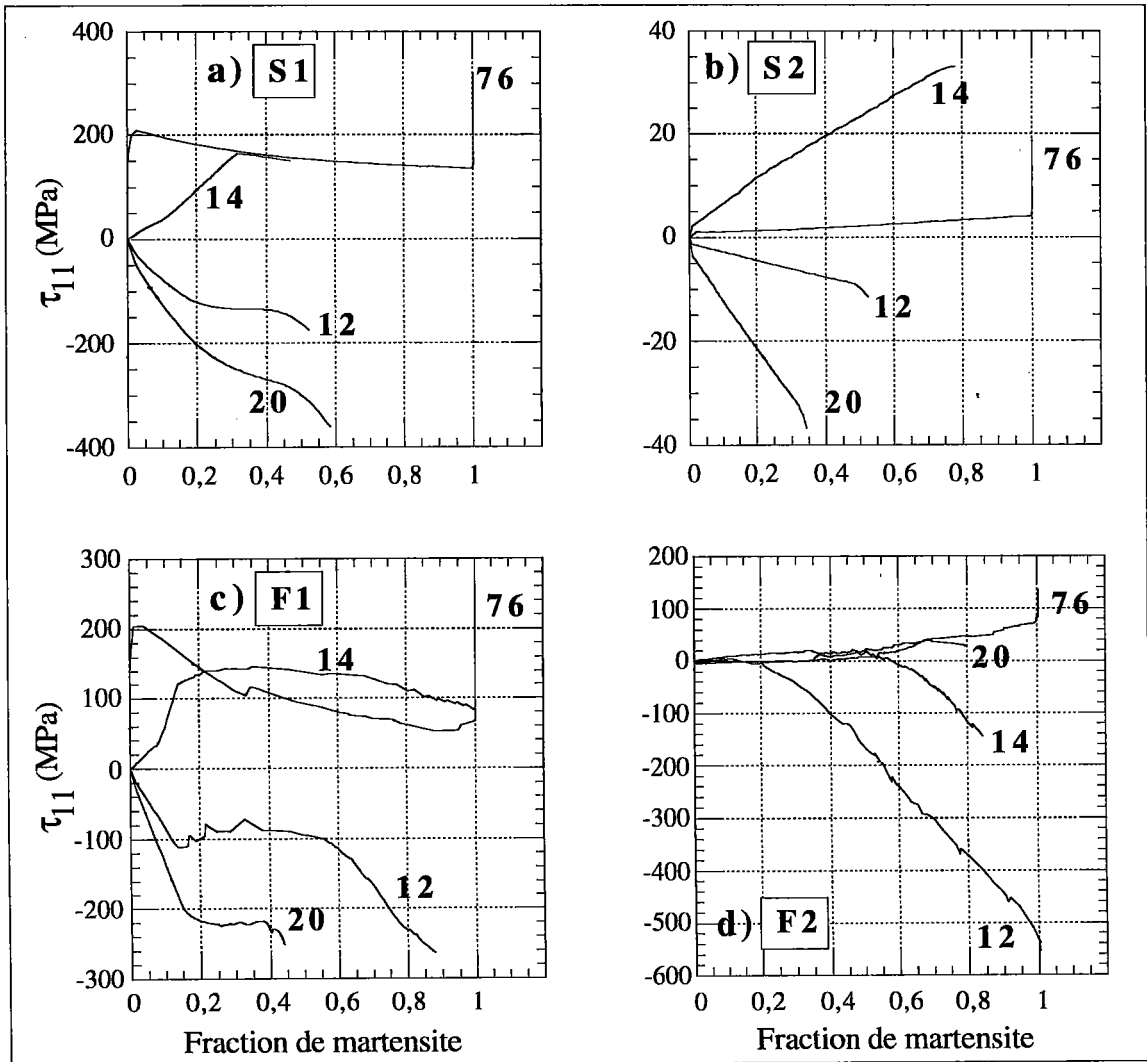


Planche V-23: Représentation dans le triangle standard des niveaux de contrainte interne pour les 100 grains constituant le polycristal et pour deux états de la transformation ( $f=10$  et  $75\%$ ).

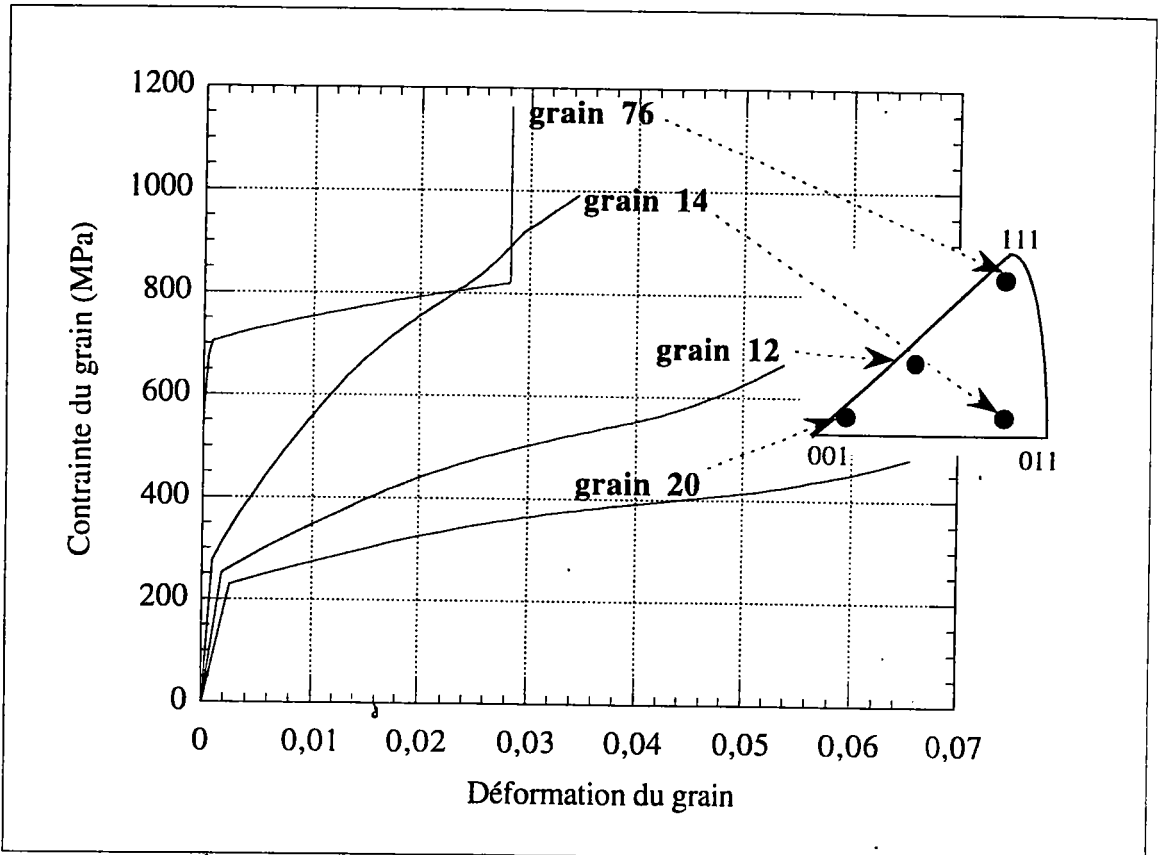


*Planche V-25: Évolution de la contrainte interne au cours du chargement pour les grains 12, 14, 20 et 76. a) Essai S1, b) Essai S2, c) Essai F1, d) Essai F2.*

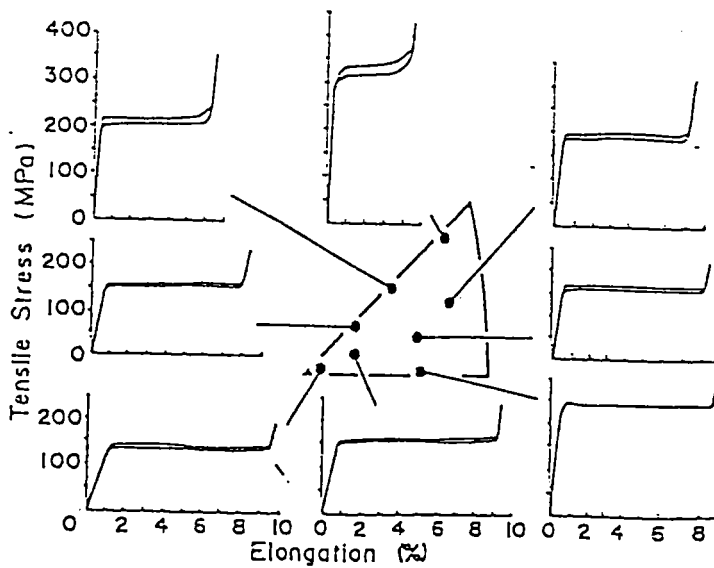
- Le grain 76 est celui qui développe la plus importante contrainte interne de traction dans l'essai S1. Proche du pôle [111], il est très mal orienté et les variantes apparaissent donc tardivement lors du chargement. Cette apparition tardive s'accompagne néanmoins d'une relaxation de la contrainte interne lors des chargements S1 et F1 (fig.V-25a et V-25c). Cette contrainte interne élevée provoque une transformation rapide du grain: il est le premier à atteindre 100% de martensite. Sa contrainte interne augmente alors de façon importante suite aux interactions avec les autres grains qui continuent de se transformer et de se déformer.

- Le grain 20: son comportement est à l'opposé du précédent. Bien orienté (proche du pôle [001]), il démarre rapidement sa transformation. L'interaction avec le milieu environnant (les autres grains non transformés) bloque sa transformation et génère une contrainte interne de compression très importante (figs.V-25a, V-25b et V-25c). Les propriétés de ce grain étant directement reliées à son orientation favorable par rapport à la contrainte appliquée, les particularités de ce grain disparaissent lors de l'essai S2 où il développe une contrainte interne de traction (fig.V-25d).
- Le grain 14 développe une contrainte interne de traction pour les trois premiers chargements et de compression pour l'essai F2. Son comportement est intermédiaire aux deux grains précédents.
- Le grain 12 développe une contrainte interne de compression moyenne pendant les essais de superélasticité. Ce grain génère par contre la plus importante contrainte interne de compression lors des essais de fluage anisotherme (fig.V-25d).

On s'aperçoit à la vue des résultats précédents que l'évolution de la contrainte interne est relativement similaire d'une manière qualitative pour les chargements superélastiques et pour le fluage anisotherme à haute contrainte. Pour ces essais, l'orientation du grain semble primordiale dans le comportement (fig.V-23 et V-26). Ces résultats sont à relier d'une manière qualitative aux essais réalisés par Horikawa et al. [HIM88] sur des monocristaux. Les résultats montrent que la courbe de comportement est fortement dépendante de l'orientation cristalline du monocristal (fig.V-27). Pour une orientation proche de [111], on observe le seuil de transformation le plus élevé et la déformation de transformation la plus faible: ce résultat s'applique également au grain 76 constituant notre polycristal. À l'inverse, les orientations proches de [001] entraînent une transformation plus importante pour un niveau de contrainte plus faible. Le grain 20 du polycristal est dans ce cas. Les grains 12 et 14 sont des cas intermédiaires: la contrainte est cependant plus importante pour le grain 14, dont l'orientation est proche de [011], ce qui est également confirmée par les résultats expérimentaux.



*Fig. V-26: Évolution de la contrainte en fonction de la déformation du grain pour les quatres grains choisis.*



*Fig. V-27: Influence de l'orientation cristalline sur le comportement superélastique [HIM88].*



L'étude de la déformation dans les grains permet de compléter ces résultats en montrant les différents mécanismes en oeuvre dans les différents grains en fonction de leur orientation cristallographique.

### V.3.3.2 - Déformation des grains

On relie pour les 100 grains, la déformation et la fraction de martensite du grain. Ceci est réalisé pour les trois valeurs de la fraction volumique globale précédentes (10, 50 et 75%). On étudie la composante (1,1) du tenseur des déformations (fig.V-28).

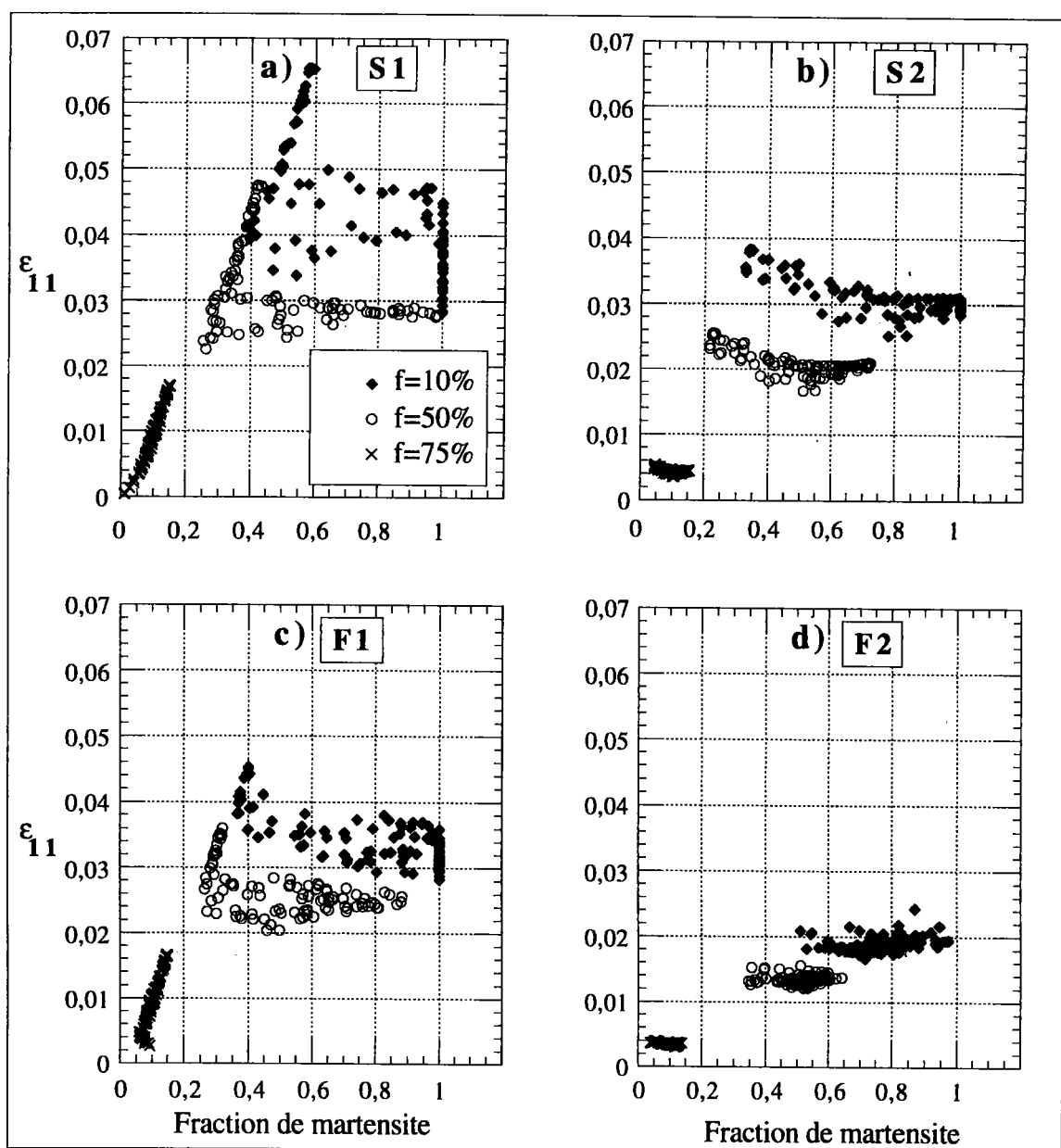
Les comportements sont à nouveau très homogènes pour les simulations n'engendrant pas d'importantes contraintes macroscopiques (S2 et F2). Pour les essais S1 et F1 en début de chargement, des grains se déforment jusqu'à dix fois plus que d'autres. En fin de chargement et pour la simulation F1 (Contrainte macroscopique égale à 900 MPa), on trouve encore un rapport de deux pour les grains les plus et les moins déformés.

S1) On retrouve pour l'essai isotherme à 140°C les deux types de comportement extrêmes:

- Des grains qui tardent à se transformer et qui finalement sont les premiers à être complètement transformés. Ces grains (avec d'importantes contraintes internes de traction) sont ceux qui se déforment le moins. Ils sont proches du pôle [111].

- Les grains avec d'importantes contraintes internes de compression sont ceux qui se déforment le plus. Ils s'alignent selon une pente bien précise qui correspond à la relation déformation-fraction de martensite de la transformation d'un monocristal monovariant. Ils sont proches du pôle [001].

S2) Le comportement de ces grains est intermédiaire: nettement plus homogène en déformation, les grains diffèrent principalement par leur transformation. On note cependant toujours cette caractéristique: plus le grain se transforme, moins il se déforme.



*Planche V-28: États de déformation pour tous les grains constituant le polycristal en fonction de la fraction volumique de martensite dans le grain.*

F1) Comportement similaire à l'essai superélastique à 140°C avec cependant des niveaux de déformation inférieurs pour une même fraction volumique de martensite globale.

F2) Comportement nettement plus homogène pour les 100 grains lors du fluage anisotherme sous 10 MPa. On remarque à nouveau qu'il n'y a pas de relation marquée entre la déformation obtenue et l'orientation du grain.

À partir de ces résultats, une remarque générale peut être établie. Les grains s'inscrivent toujours à l'intérieur d'un cône représentatif. Ce cône est identique pour tous les essais superélastiques mais il évolue lors des essais de fluage anisotherme en fonction de la contrainte appliquée (fig.V-29).

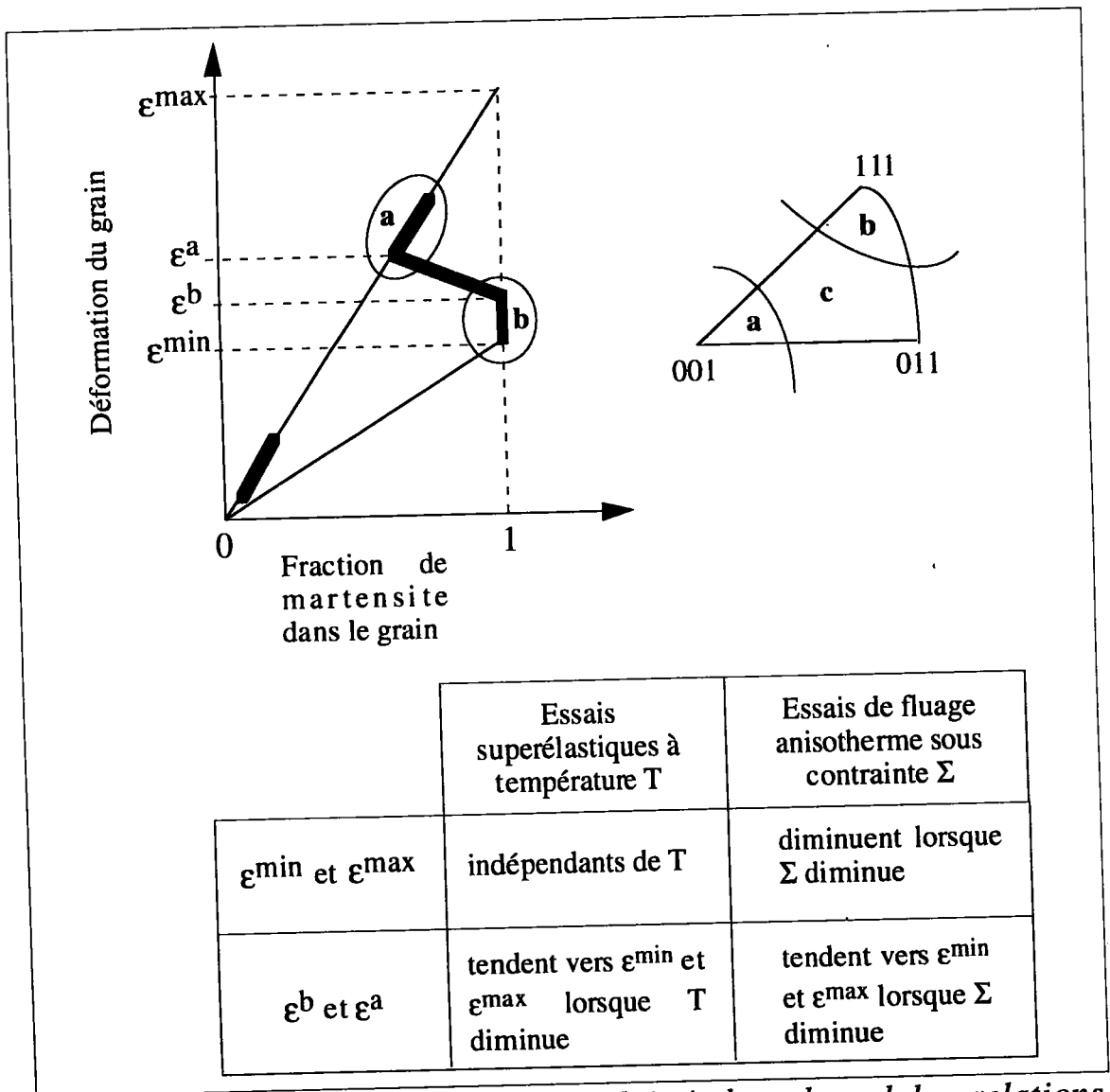


Fig. V-29: Cône et propriétés de celui-ci dans lequel les relations déformation-fraction de martensite des grains s'inscrivent.

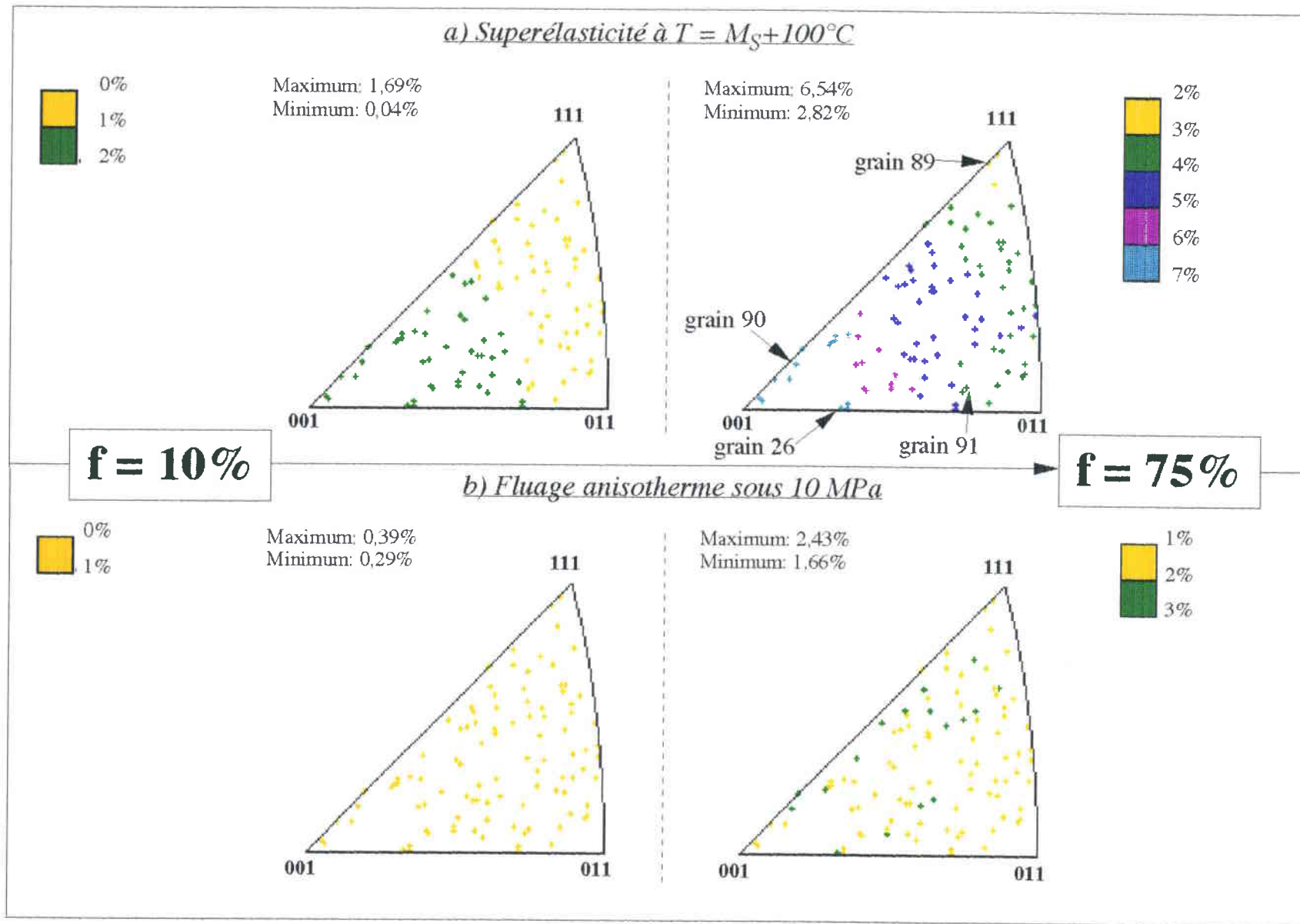
La branche supérieure du cône représente le comportement des grains qui se déforment beaucoup et se transforment peu (zone a). Ils représentent environ 1/3 des grains pour S1. Lors des essais S1, S2 et F1, ces grains présentent un comportement typiquement monocristallin monovariant, ce sont des grains bien orientés. La branche inférieure du cône (zone b) représente les grains mal orientés (1/3 des grains pour F1): apparition tardive de la martensite, accroissement de la contrainte interne (égale à la contrainte macroscopique jusqu'à l'apparition de la première variante) et finalement transformation rapide produisant peu de déformation.

On trace l'évolution de la déformation en fonction de la fraction de martensite dans le grain pour quatre grains particuliers. On choisit les grains les moins et plus transformés (40 et 100%) lors de l'essai S1 (grain 91 et 26). Ces deux grains possèdent la même déformation (4%) pour 75% de martensite globale. On choisit également les grains les moins et plus transformés (50 et 96%) à 75% de martensite pour l'essai de fluage anisotherme S2 (grain 89 et 90). Les angles qui définissent l'orientation de ces grains sont donnés dans le tableau V-30.

	$\varphi^1$	$\varphi^{\max}$	$\varphi^2$
Grain 26	24,37	54,62	113,6
Grain 89	40,33	75,13	302,49
Grain 90	7,04	73,65	259,79
Grain 91	236,81	79,13	338,08

*Tableau V-30: Valeurs des trois angles d'Euler définissant l'orientation des quatre grains dont on étudie l'évolution de la déformation.*

Les grains 89 et 90 sont atypiques: respectivement très mal et très bien orientés, ils conservent leur particularité quel que soit le chargement (déformation mini et maxi). Les grains 26 et 91, de comportement relativement différent lors de l'essai S1, ont des évolutions en déformation et transformation similaires pour les trois autres chargements.



*Planche V-32: Représentation dans le triangle standard des niveaux de déformation pour les 100 grains constituant le polycristal et pour deux états de la transformation ( $f=10$  et  $75\%$ ).*

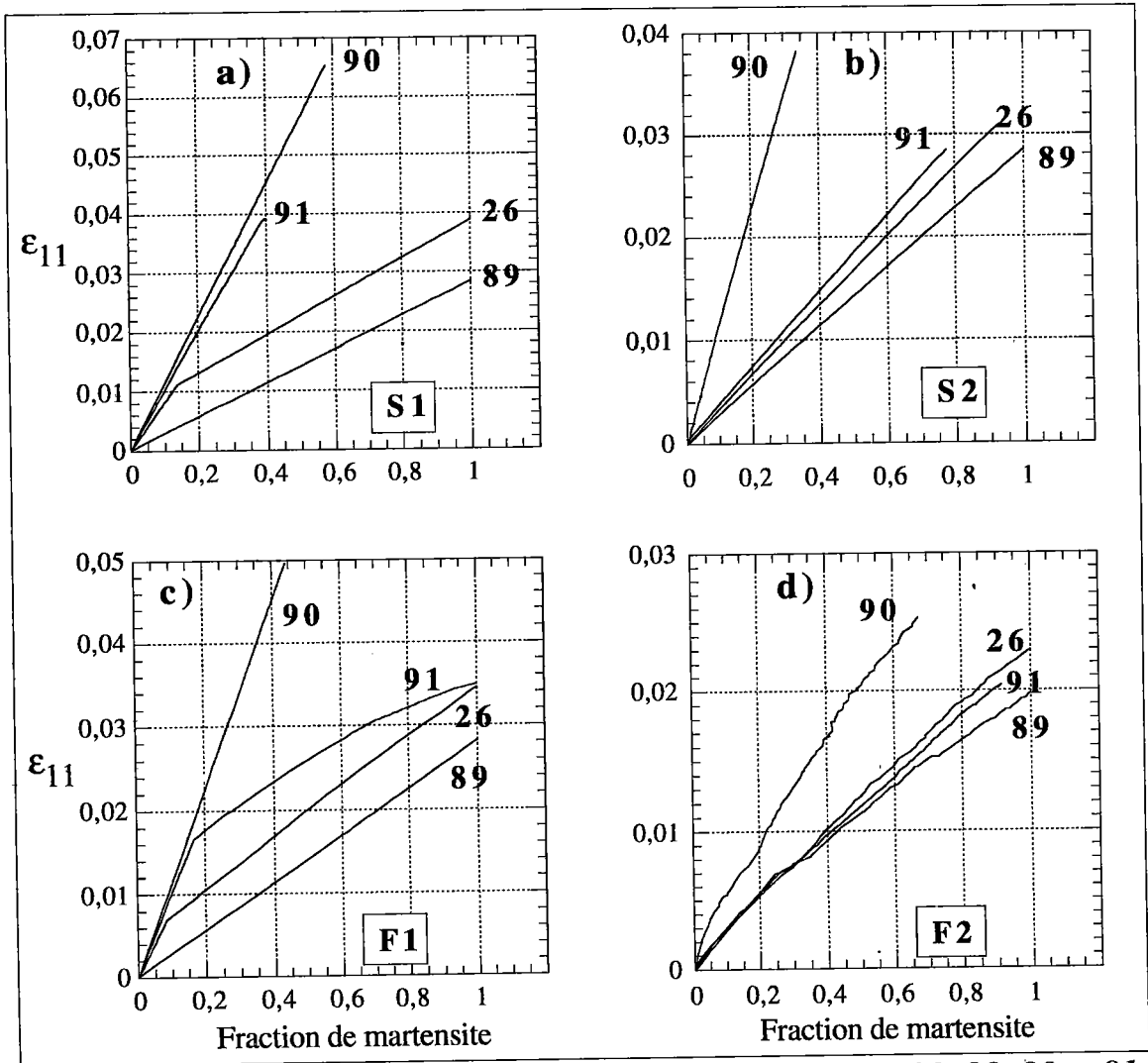


Planche V-31: Évolution de la déformation dans les grains 20, 89, 90 et 91 au cours des chargements: a) S1, b) S2, c) F1 et d) F2.

En définitive, nous pouvons dresser le bilan suivant:

Pour les essais de superélasticité à température constante, on différencie trois types de grains:

- Les grains bien orientés, proche du pôle [001]. Ils sont les premiers à se transformer et développent une contrainte interne de compression importante. Elle est due à l'environnement qui tend à limiter la transformation de ces grains. En fin de chargement, ces grains présentent la plus importante déformation de transformation mais ne sont pas totalement transformés.

- Les grains mal orientés, proche du pôle [111], développent une contrainte interne de traction importante. Ils se transforment totalement mais avec une faible déformation de transformation.
- Un troisième type de grains présente un comportement intermédiaire (zone c sur fig.V-29). À la vue des représentations dans le triangle standard (fig.V-33), on observe cependant une relation certaine entre l'orientation et la contrainte ou la déformation du grain.

Pour les essais de fluage anisotherme à contrainte constante, les conclusions sont plus modérées, surtout à basse contrainte. Lorsque la contrainte appliquée est importante, la relation entre transformation et orientation est identique. Le comportement se rapproche alors d'un comportement superélastique. Lorsque la contrainte appliquée est faible, l'influence de l'orientation des grains n'est plus prépondérante. La contrainte interne et la déformation deviennent plus homogènes sur l'ensemble des grains. L'analyse de l'évolution de la microstructure intragranulaire permet de mettre en évidence certains mécanismes.

### V.3.4 - ÉVOLUTION DE LA MICROSTRUCTURE

On aborde ici les paramètres plus microstructuraux tels que le nombre de grains actifs, de variantes actives ainsi que l'évolution de ces variantes dans les grains pendant le chargement.

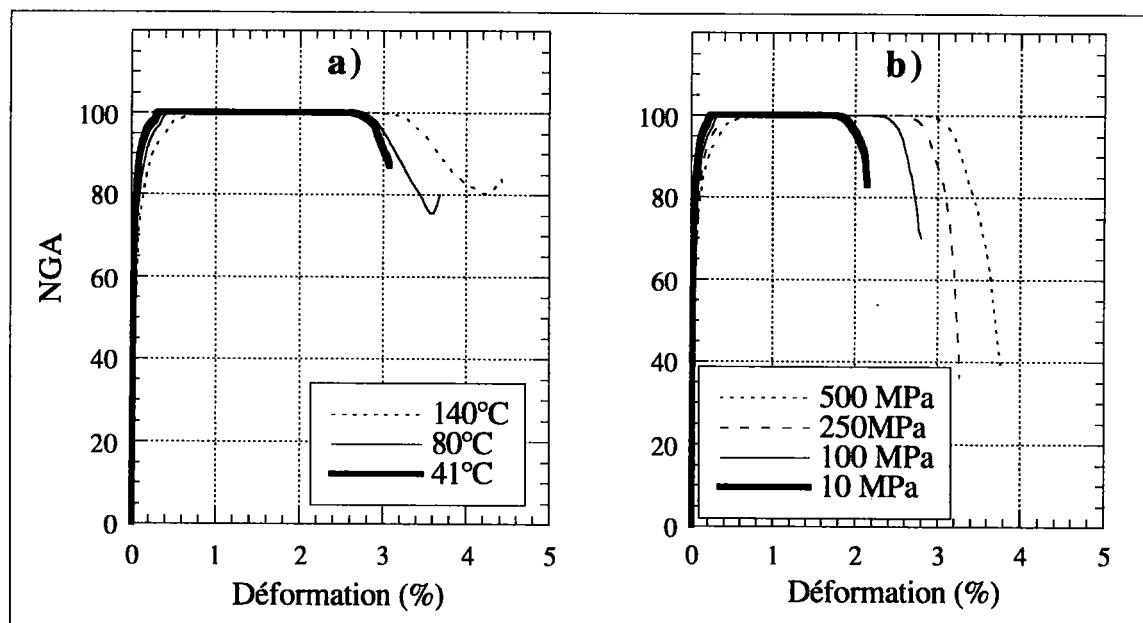
#### V.3.4.1 - Nombre de grains actifs (NGA)

Les courbes d'évolution du nombre de grains actifs NGA (fig.V-33) permettent d'apprécier les trois stades de la transformation:

- a• Initiation de la transformation: le nombre de grains actifs croît jusqu'à sa valeur maximale de 100. Cette phase a est très rapide lorsque la température ou la contrainte diminue. Théoriquement, sans contrainte et pour une température égale à  $M_s$ , toutes les variantes (et tous les grains) doivent s'activer. À des températures et des contraintes plus élevées, l'orientation du grain par rapport au repère du chargement est le

paramètre qui définit le moment du départ de la transformation du grain.

- b• Transformation homogène:  $NGA=100$ . Elle correspond à une faible évolution de la microstructure: les variantes apparues lors de la phase a) croissent sans apparition de nouvelles variantes.
- c• Durcissement ( $NGA < 100$ ): des grains ne sont plus actifs parce qu'ils sont entièrement martensitiques.



*Fig.V-33: Évolution du nombre de grains en transformation au cours du chargement: a) Essais isothermes, b) Essais anisothermes.*

Pour les essais isothermes à 80 et 140°C, on note un renversement de la tendance en fin de transformation. Numériquement, seules deux possibilités sont envisageables: soit une des variantes satisfait le critère de transformation inverse et le grain redevient actif par transformation martensite-austénite, soit une solution énergétiquement plus faible est apparue et une variante accroît sa fraction volumique aux dépens d'une autre variante (dans ce cas, la fraction volumique de martensite dans le grain reste égale à 1).

Les courbes suivantes prouvent que cette dernière hypothèse est justifiée. Alors que la fraction volumique de martensite dans le grain 19 est égale à 1 (fig.V-34a), les variantes 7 et 10 de ce grain, après une phase de



stabilisation pendant laquelle le grain n'est plus actif, se réorientent et prolongent la transformation en réactivant le grain (fig.V-34b). Cette activité est très limitée cependant, la transformation par réorientation représente 2% de la transformation totale.

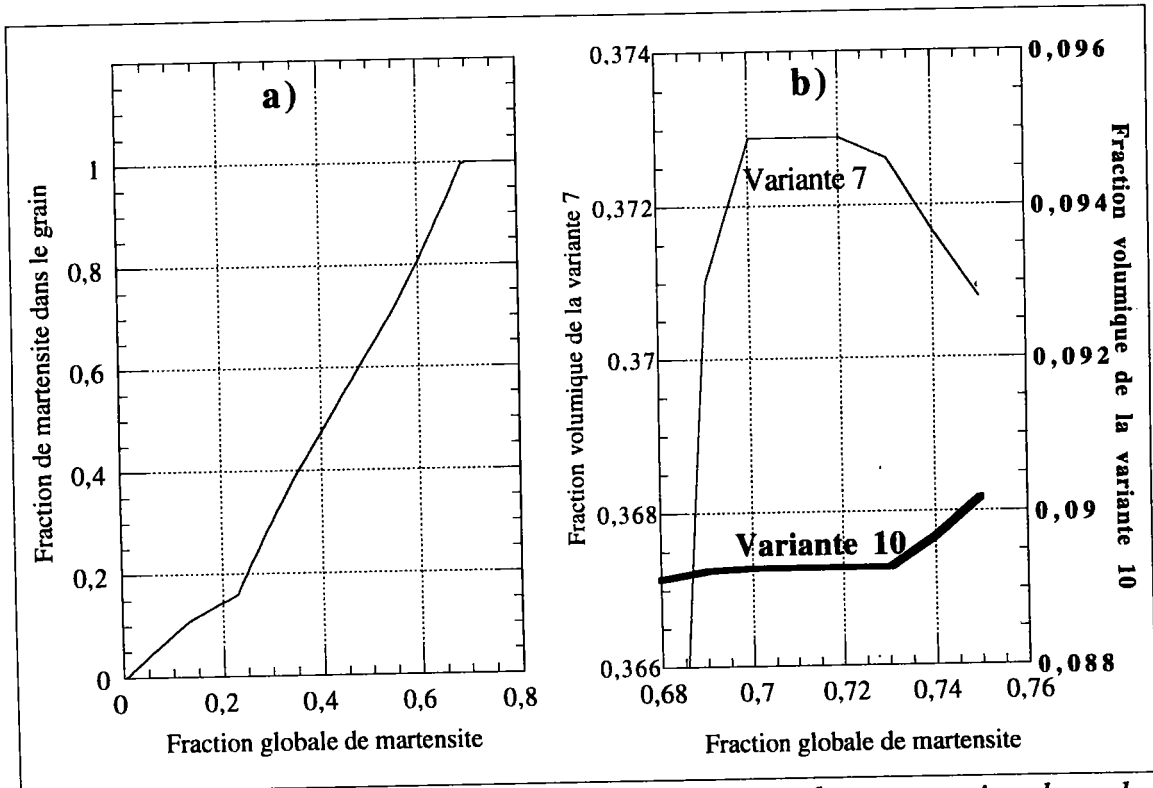


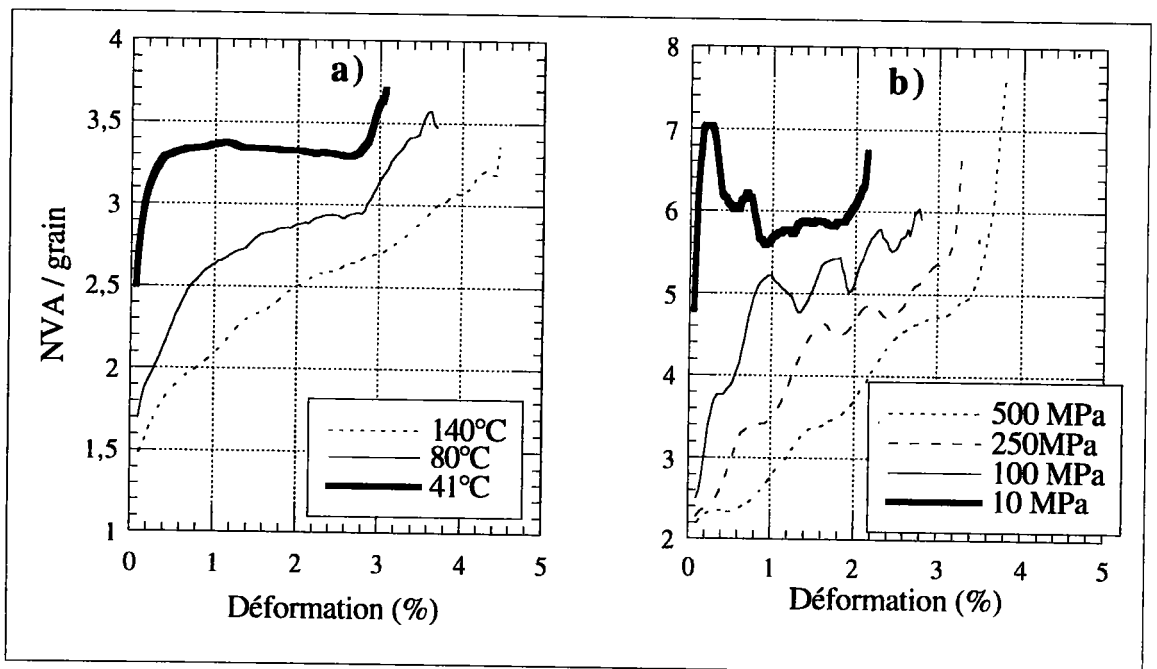
Fig.V-34: a) Évolution de la fraction volumique de martensite dans le grain 19 et b) Évolution des fractions volumiques des variantes 7 et 10 du grain 19 pour l'essai superélastique à 140°C (Essai S1).

### V.3.4.2 - Nombre de variantes actives (NVA)

On distingue variantes actives et variantes activées: une variante dont la fraction volumique est différente de zéro est une variante activée mais elle n'est pas forcément active (exemple des variantes 7 et 10 de la fig.V-34b quand la fraction globale de martensite est comprise entre 0,7 et 0,72). Une variante active est une variante dont la fraction volumique évolue pendant l'incrément de chargement étudié.

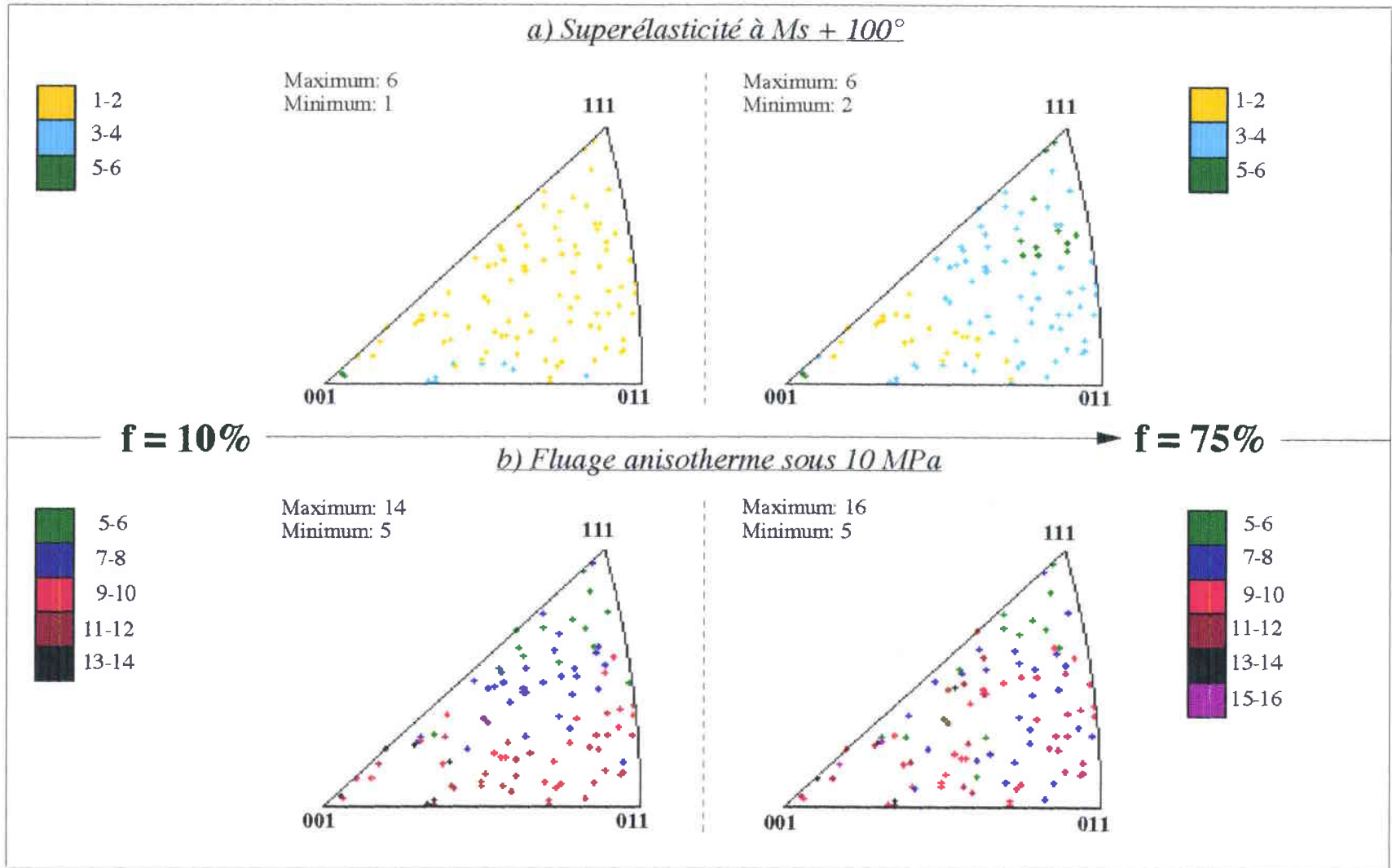
En fonction du chargement, on observe des évolutions différentes du nombre moyen de variantes actives par grain actif (fig.V-35).

- Pour les essais isothermes (fig.V-35a): plus la température de l'essai est importante (et donc la contrainte macroscopique), plus le nombre de variantes actives par grain est faible. Cet effet est directement relié au pouvoir d'orientation de la contrainte macroscopique qui privilégie les variantes les mieux orientées. Pour les essais à 140 et 41°C, la diminution de NVA par grain en fin de chargement correspond à l'augmentation du nombre de grains actifs (fig.V-33).
- En fluage anisotherme (fig.V-35b), la transformation du grain s'accompagne de la formation de nombreuses variantes.



*Fig.V-35: Cinématique de la transformation. Évolution du nombre moyen de variantes actives par grain au cours du chargement: a) Essais isothermes, b) Essais anisothermes.*

Une représentation dans le triangle standard permet de compléter ces observations (fig.V-36). À chaque orientation (grain), on associe le nombre de variantes formées. Le résultat obtenu est totalement différent suivant le type de simulation. Lors de l'essai superélastique à  $T=M_S+100^\circ\text{C}$  (S1) et pour une fraction globale de martensite de 75%, aucun grain n'a produit plus de six variantes. Pour l'essai de fluage anisotherme sous 10 MPa (F2), aucun grain n'en a produit moins de 5.



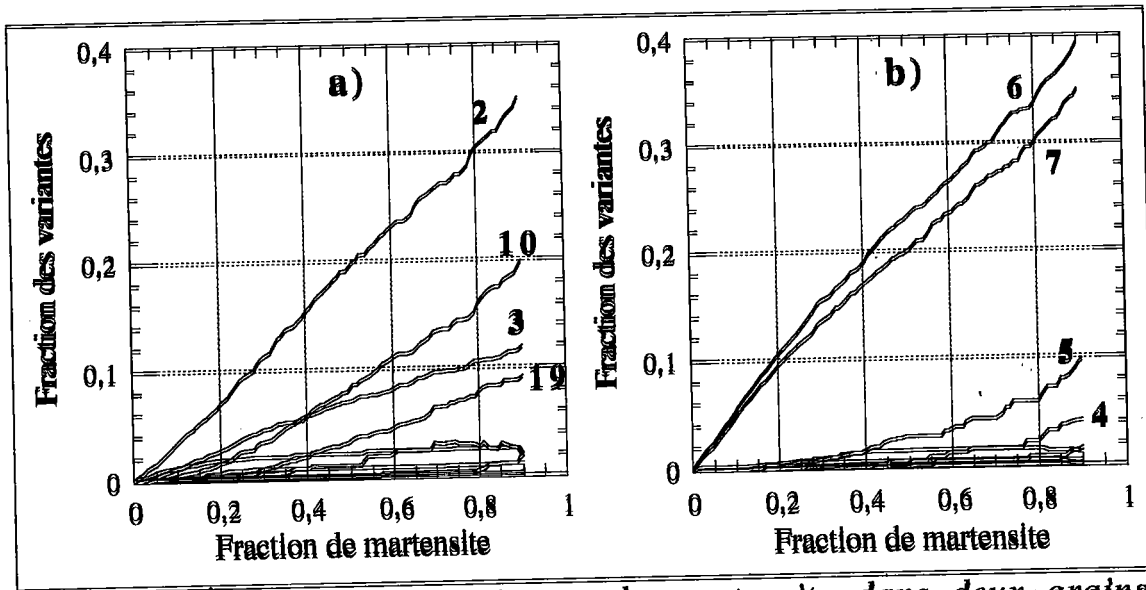
*Planche V-36: Représentation dans le triangle standard du nombre de variantes activées pour les 100 grains constituant le polycristal et pour deux états de la transformation ( $f=10$  et  $75\%$ ).*

Le nombre moyen de variantes activées par grain pour les quatre chargements est de:

- S1 (MS+100°C): 3,51 variantes/grain.
- S2 (MS+1°C): 4,3 variantes/grain.
- F1 (500 MPa): 5,25 variantes/grain.
- F2 (10 MPa): 8,97 variantes/grain.

On remarque que c'est la nature des chargements qui détermine le nombre de variantes activées dans les grains (plutôt que la contrainte macroscopique). Pour les essais de superélasticité, il existe toujours une relation entre le nombre de variantes dans le grain et son orientation. Si on rapproche ces résultats de la fig.V-23, il semble que pour les grains bien et mal orientés (grains dont la valeur absolue de la contrainte interne est importante), le nombre de variantes activées augmente. Pour les essais de fluage anisotherme, la tendance est imprécise, il semble toutefois que le nombre de variantes activées soit plus faible pour les grains proches de [111] (mal orientés).

Cette analyse est affinée en élaborant un critère permettant de discerner les variantes majoritaires. En effet, pour certains grains qui génèrent plus d'une dizaine de variantes, il arrive que la fraction de certaines soient négligeables devant la fraction des variantes les plus importantes. Ainsi, pour un même nombre de variantes activées, il se peut que deux grains aient une évolution de microstructure totalement différente. L'évolution des variantes dans deux grains possédant le même nombre de variantes activées (dix) lors d'un essai de fluage anisotherme sous 10 MPa est représentée fig.V-37. En fin de chargement, le grain 11 (fig.V-37a) a généré quatre variantes principales (2, 10, 3 et 19) tandis que le grain 4 (fig.V-37b) n'en a généré que deux (6 et 7).

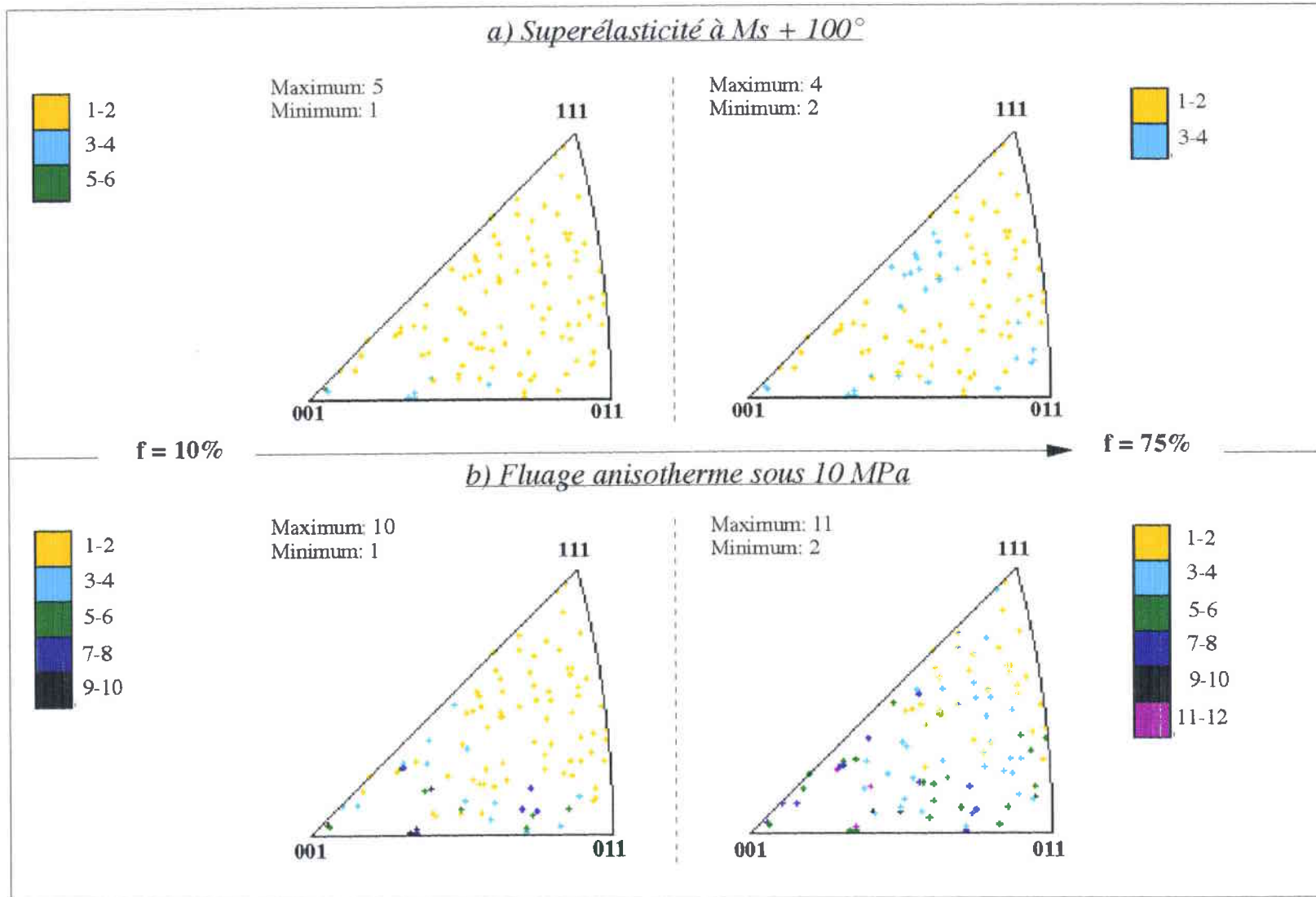


**Fig.V-37:** Évolution des variantes de martensite dans deux grains possédant le même nombre de variantes activées lors d'un essai de fluage anisotherme à 10 MPa: a) Grain 11, b) Grain 4.

Afin de négliger les variantes de plus faibles fractions volumiques qui ne participent que faiblement à la microstructure, on établit un critère de choix qui ne conserve que les variantes majoritaires. Ce critère est le suivant:

Dans un grain qui possède  $n$  variantes activées ( $n > 1$ ),  
 Soit  $f^n$  la fraction volumique de la  $n^{\text{ième}}$  variante, avec  $f^n > f^{n+1}$ .  
 Le minimum de  $n$  tel que  $f^n > 3(f^{n+1})$  est le nombre de variantes majoritaires dans ce grain.

On représente ce nombre dans le triangle standard pour les chargements S1 et F2 (figV-38). On s'aperçoit que le nombre de variantes majoritaires dans les grains, s'il est toujours supérieur lors des essais de fluage anisotherme, minimise tout de même le nombre de variantes qui dominent la transformation. Ce résultat aura son importance en vue de l'amélioration de la description de la microstructure pendant les essais anisothermes (§V.5). Attachons nous maintenant à décrire et comparer l'évolution des variantes de martensite dans les grains suivant le type de chargement imposé.



*Planche V-38: Représentation dans le triangle standard du nombre de variantes majoritaires pour les 100 grains constituant le polycristal et pour deux états de la transformation ( $f=10$  et  $75\%$ ).*

### V.3.4.3 - Évolution des variantes pendant le chargement

Il n'est pas possible de représenter ces évolutions pour tous les grains. À partir des observations précédentes, on détermine trois familles de grains: les grains dont l'orientation est bonne, mauvaise et moyenne. On étudie un grain dans chaque famille. Pour ces grains, on représente la fraction volumique des variantes de martensite qui apparaissent lors des différents chargements. Cela permet de visualiser les différents mécanismes qui entrent en jeu suivant la température ou le niveau de contrainte du chargement.

#### A) Grain 20

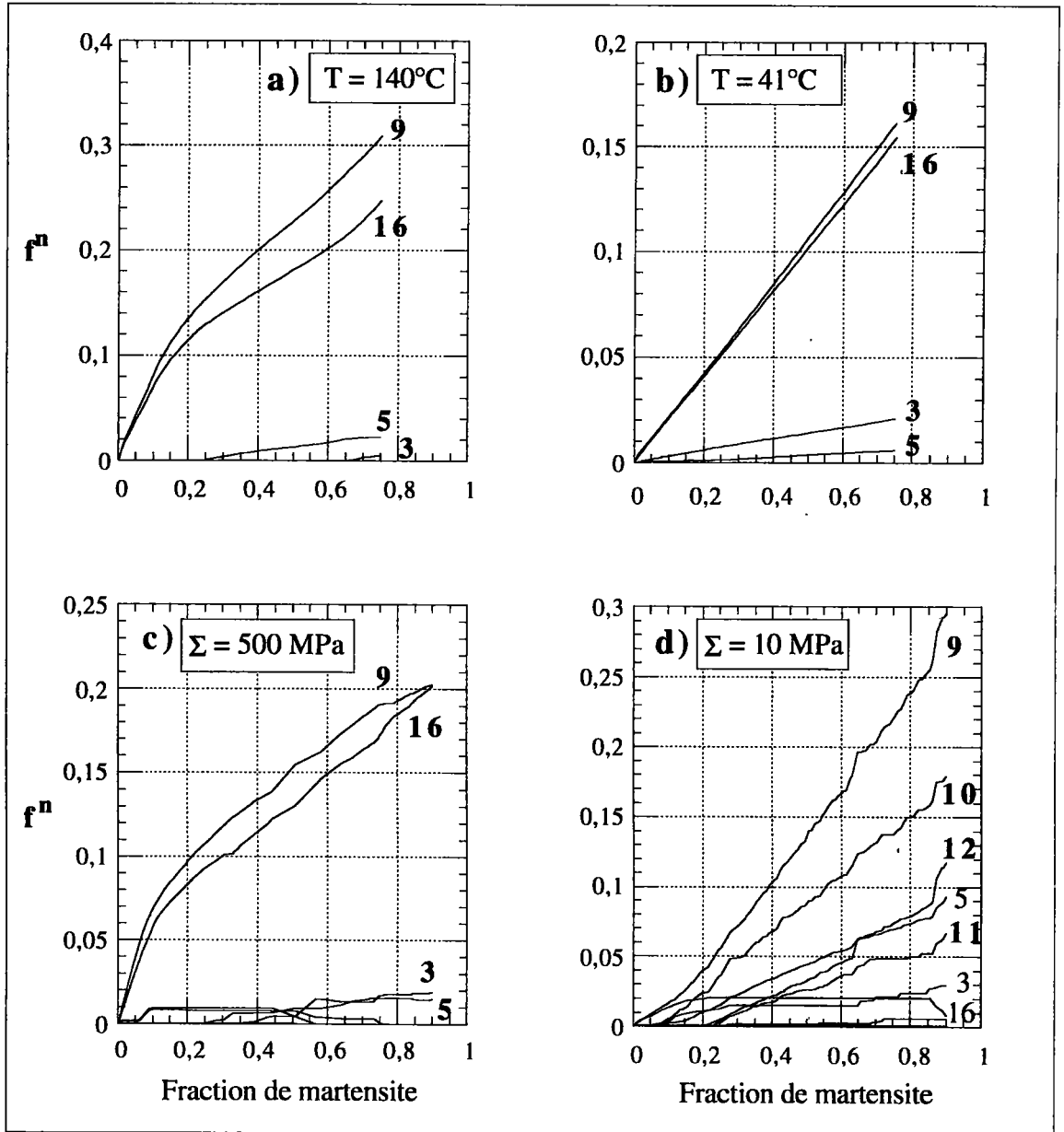
Le grain 20, placé près du pôle [001] dans le triangle standard (fig.V-23), fait partie des grains bien orientés, qui sont les premiers à démarrer leur transformation lors des essais superélastiques ou de fluage anisotherme sous haute contrainte. Ce grain a été choisi car il génère la plus forte contrainte interne de compression et la plus importante déformation de transformation durant ces essais. Il fait partie également des grains les moins transformés en fin de chargement.

Les évolutions observées pendant les essais de superélasticité S1 et S2 et de fluage F1 sont relativement similaires. Il y a formation de quatre variantes (9, 16, 5 et 3) dont deux qui prédominent (9 et 16). Ce type d'évolution entraîne une transformation du grain de 60% pour une déformation de 6,5% en fin de chargement (essai S1).

Pour l'essai de fluage F2, la variante 16 est remplacée par les trois variantes (10, 11 et 12) qui complètent le groupe autoaccommodant de la variante 9 (groupe III). Pour une transformation de 80%, ce grain possède alors une déformation faible proche de 2%. On voit que l'apparition du groupe III (qui occupe près de 90% du volume de martensite formée) entraîne une importante accommodation de la déformation.

On peut noter également que pour chaque essai, les variantes les mieux orientées 9 et 16 sont les premières à s'activer. Malgré cette prédisposition,

la variante 16 évolue très peu lors de l'essai F2. Elle tend même à disparaître en fin de chargement.

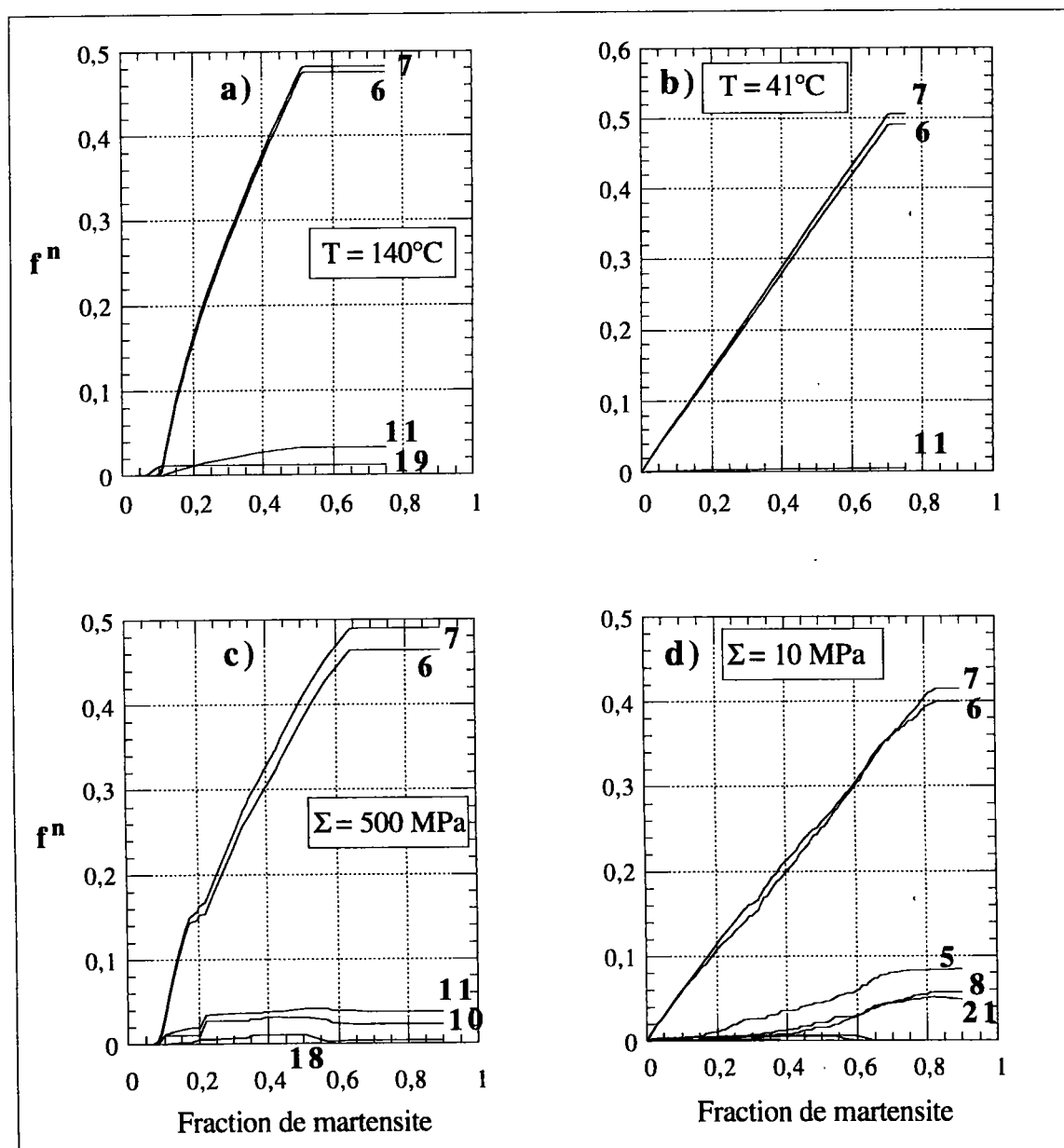


*Planche V-39: Évolution des variantes de martensite dans le grain 20 pour quatres chargements a) Essai superélastique à  $M_S+100^\circ\text{C}$ , b) Essai superélastique à  $M_S+1^\circ\text{C}$ , c) Essai de fluage anisotherme sous 500MPa, d) Essai de fluage anisotherme sous 10MPa.*

### B) Grain 76

À l'inverse du grain 20, le grain 76 possède une orientation défavorable.





*Planche V-40: Évolution de la fraction volumique des variantes de martensite dans le grain 76 pour quatres chargements a) Essai superélastique à  $M_S+100^\circ\text{C}$ , b) Essai superélastique à  $M_S+1^\circ\text{C}$ , c) Essai de fluage anisotherme sous 500MPa, d) Essai de fluage anisotherme sous 10MPa.*

Pour l'essai superélastique à  $140^\circ\text{C}$ , ce grain démarre sa transformation tardivement par l'apparition de la variante 19, la mieux orientée du grain. Cependant, cette variante cède rapidement sa place à deux autres variantes (6 et 7) qui font partie d'un même groupe et qui permettent à la contrainte

interne importante de se relaxer (fig.V-40a). En fin de chargement, ce grain est entièrement transformé avec une déformation de 3%.

Lors de l'essai de fluage anisotherme à faible contrainte, le groupe autoaccommodant II est complété par les variantes 5 et 8, il représente alors plus de 95% de la martensite formée dans le grain (le grain s'est également entièrement transformé). La déformation est réduite à 2%. On peut noter que pour cet essai, la transformation apparaît dès le début du chargement, prouvant que l'orientation du grain a peu d'importance sur le comportement lorsque la contrainte macroscopique est faible.

### C) Grain 14

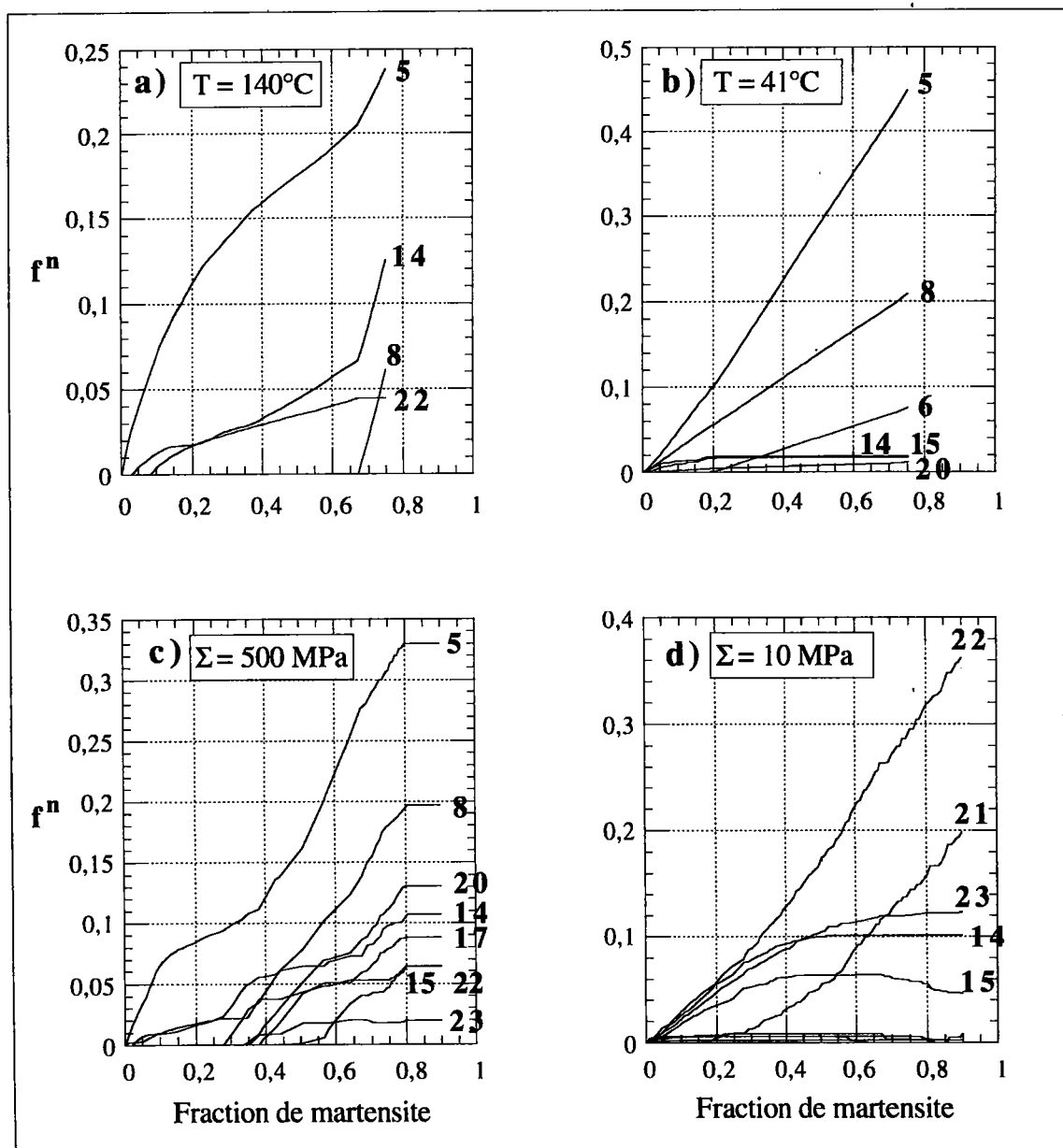
La contrainte interne de ce grain est moyenne lors des différents chargements. Son orientation est proche de [011].

Comme pour les deux grains précédents, quatre variantes apparaissent lors de l'essai isotherme à 140°C. La déformation est de 3,5% et la transformation de 50% en fin de chargement. Les contraintes étant plus faibles dans ce grain, elles ne favorisent pas particulièrement les deux variantes bien orientées de ce grain (5 et 22).

Ce grain développe tout de même une importante contrainte interne pour S2 et se transforme alors à 80%.

Même remarque pour F2, où on voit apparaître deux groupes autoaccommodants incomplets, entraînant la présence de nombreuses variantes majoritaires, qui ne sont pas toutes compatibles entre elles. Le groupe VI (variantes 21, 22 et 23) représente 83% de la transformation, le complément se partage entre les deux variantes du groupe IV (14 et 15).

Ces courbes confirment l'effet de la contrainte appliquée lors de l'évolution des variantes dans les grains. Elle privilégie plus ou moins selon l'orientation du grain les variantes qui apparaissent ainsi que leur évolution. Cet effet est ressenti pour les essais S1, S2 et F1. La simulation F2 amène une remarque attendue expérimentalement: lorsque la contrainte appliquée est faible, le nombre de variantes dans les grains est important et ces variantes ont tendance à former des groupes autoaccommodants.



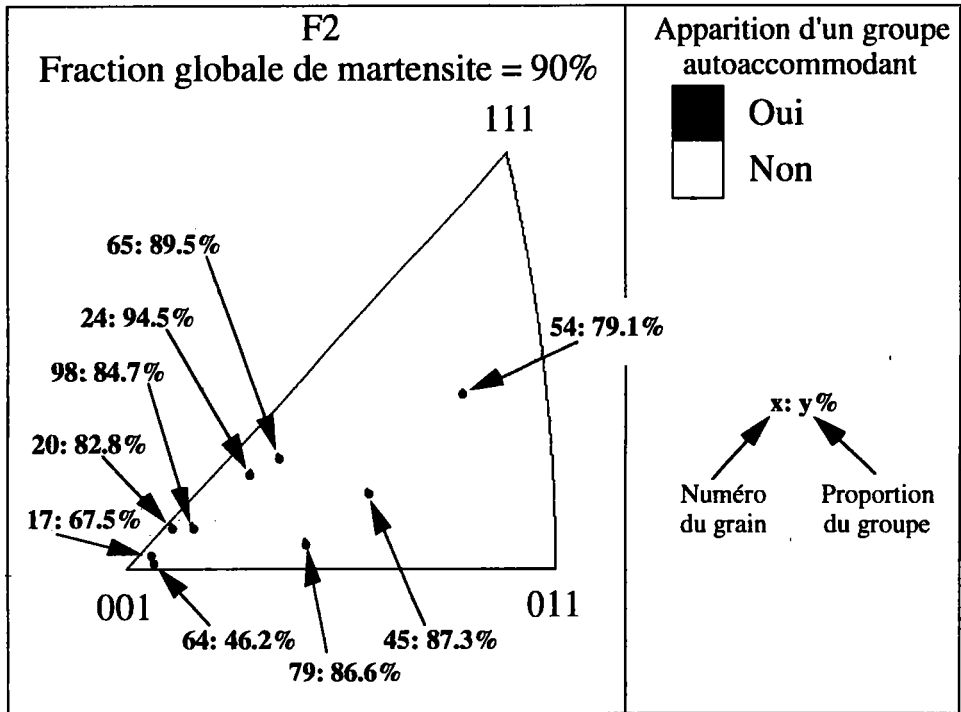
*Planche V-41: Évolution des variantes de martensite dans le grain 14 pour quatre chargements a) Essai superélastique à  $M_S+100^\circ\text{C}$ , b) Essai superélastique à  $M_S+1^\circ\text{C}$ , c) Essai de fluage anisotherme sous 500MPa, d) Essai de fluage anisotherme sous 10MPa.*

## D) Autres résultats

### D1) Groupes autoaccommodants

Parmi les simulations effectuées, seule F2 est génératrice de groupes autoaccommodants complets (parmi les variantes majoritaires). On représente dans le triangle standard les grains qui génèrent de tels groupes

et les fractions de ces groupes par rapport au taux de transformation du grain (fig.V-42).



*Fig. V-42: Représentation des grains et de la proportion du groupe autoaccommodant qui apparaît lors de l'essai F2.*

Les groupes autoaccommodants complets apparaissent dans neuf grains plutôt bien orientés. Pour ceux qui sont vraiment très proches du pôle [001] (grains 17 et 64), leur proportion diminue du fait de l'apparition d'un second groupe incomplet. Pour les neuf grains, on relie la proportion du groupe autoaccommodant à la déformation et à la transformation du grain (fig.V-43). Pour huit grains sur neuf, la déformation grains est inférieure à la déformation macroscopique (fig.V-43b). L'écart est faible car il ne suffit pas de la présence d'un groupe complet pour accommoder la transformation, il faut également que les proportions des quatre variantes dans ce groupe soient similaires. Le grain 64, malgré la présence d'un groupe autoaccommodant complet parmi ses variantes majoritaires, se transforme peu et se déforme beaucoup. Dans ce grain, un second groupe incomplet et d'autres variantes apparaissent (fig.V-44), entraînant de

nombreuses incompatibilités de transformation et une contrainte interne importante ( $\tau = -135$  MPa).

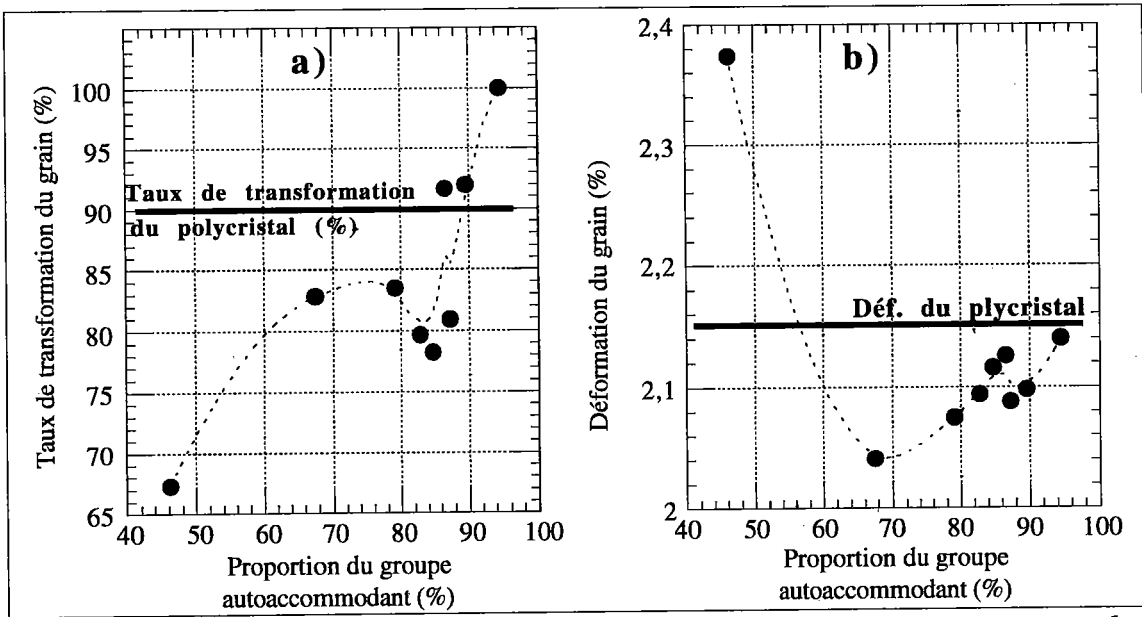


Fig. V-43: Évolution de la transformation et de la déformation avec la proportion du groupe autoaccommodant complet qui apparaît lors de l'essai F2.

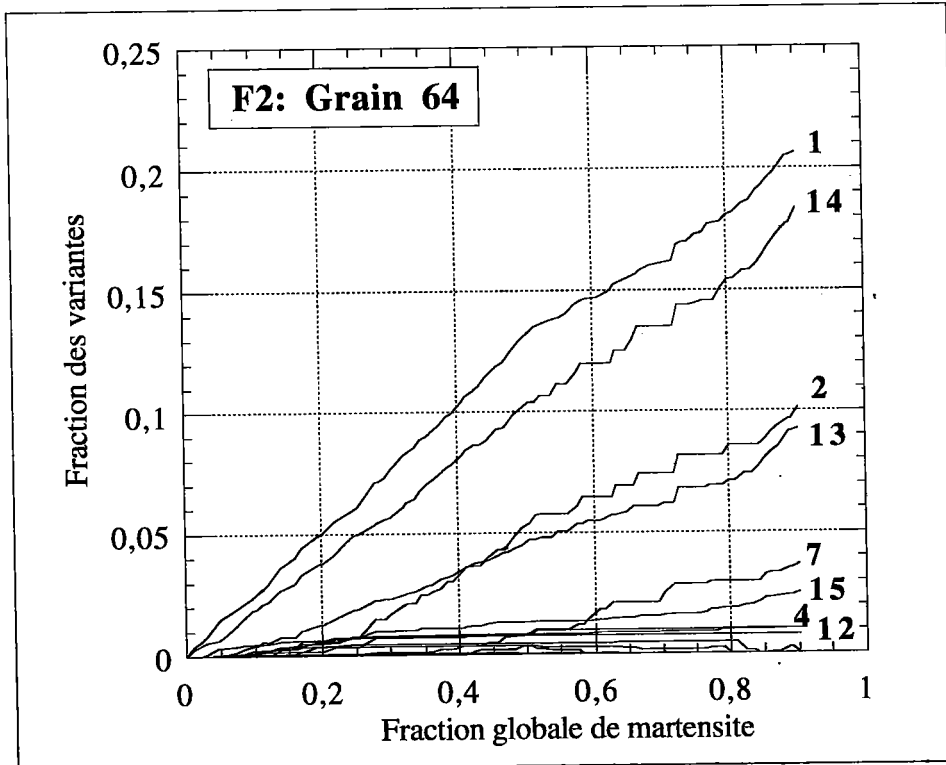
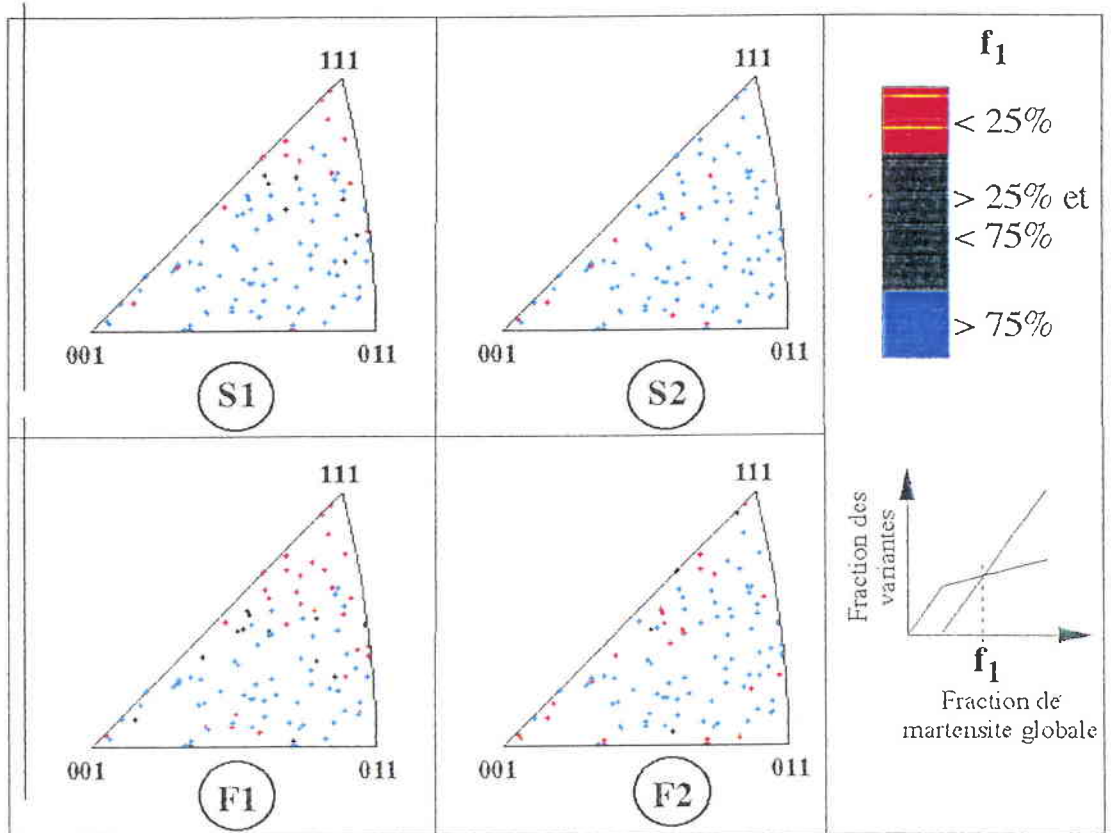


Fig. V-44: Évolution des variantes dans le grain 64 pour l'essai de fluage anisotherme sous 10 MPa.

**D2) Première variante activée**

La première variante activée est toujours la mieux orientée par rapport au repère du chargement (quel que soit le type de chargement). Cependant, elle n'est pas toujours celle qui possède la plus importante fraction volumique en fin de chargement. Elle peut même dans certains cas disparaître totalement de la microstructure (exemple de la variante 19 du grain 76 sur la fig.V-40d).

Soit  $f_1$  la fraction volumique globale de martensite pour laquelle la première variante activée est dépassée par une seconde variante moins bien orientée. On représente  $f_1$  pour les quatres chargements en fonction de l'orientation du grain (fig.V-45).



*Fig. V-45: Représentation pour les quatres chargements S1, S2, F1 et F2 du taux de transformation des grains pour lequel la première variante activée n'est plus la plus importante dans le grain.*

S1) Dans plus de 20% des grains, la première variante activée n'est pas celle qui possède la plus importante fraction volumique en fin de chargement. C'est le cas principalement pour les grains mal orientés qui génèrent des contraintes internes de traction importantes.

F1) Même remarque pour l'essai de fluage anisotherme sous 500 MPa. Le nombre plus important de grains dans lesquels la variante majoritaire change est du au rapport contrainte interne/contrainte macroscopique plus important.

S2 et F2) Les niveaux de contraintes internes sont plus faibles, il n'y a plus de relation entre  $f_1$  et l'orientation du grain.

### V.3.5 - INFLUENCE DE LA MATRICE D'INTERACTION ENTRE LES VARIANTES

On a vu au §V.2 que la déformation maximale de transformation était fonction de la contrainte appliquée lors d'un essai de fluage anisotherme. Idéalement, pour une contrainte appliquée qui tend vers 0 MPa, la déformation globale de transformation tend vers 0 également. Cette propriété est due à l'apparition de groupes autoaccommodants pour lesquels les variantes progressent, mais ne génèrent pas de déformation macroscopique. Au cours de la simulation numérique, l'écart avec les résultats expérimentaux s'accroît lorsque la contrainte appliquée diminue (fig.V-5 et V-10f). On a vu au §V.3.3 que le comportement intragranulaire respecte les observations métallurgiques, en montrant l'apparition de nombreuses variantes et l'apparition de groupes autoaccommodants à faible contrainte: l'étude micromécanique n'est donc pas mise en cause. Au contraire, elle est consolidée dans sa raison d'être par ces résultats. La principale source d'erreurs se situe au niveau de la matrice d'interaction entre les variantes.

Lors de la détermination de la matrice d'interaction, deux hypothèses fortes ont été réalisées (annexe 1):

- L'augmentation de la fraction volumique pour une variante donnée se fait essentiellement par un accroissement du nombre de plaquettes de cette variante dans une région limitée du grain. Ces considérations permettent de représenter la microstructure par une description de type "cluster" dans laquelle le volume occupé par une variante est un domaine bien défini du grain.
- Le nombre de variantes en transformation lors d'un chargement est limité ( $<5$ ).

Ces hypothèses sont justifiées dans le cas d'essais superélastique ou de fluage anisotherme sous haute contrainte. Elles ne le sont plus en fluage basse contrainte.

La formation de groupes autoaccommodants et l'absence d'orientation mécaniquement privilégiée par la contrainte laisse apparaître de nombreuses variantes (expérimentalement et numériquement). Dans ce cas, l'utilisation de la matrice conduit à une surestimation importante de l'énergie associée à cette configuration. La réorientation, qui permettrait à des variantes d'un même groupe de s'accommoder (en évoluant vers la même fraction volumique), est mal décrite: on a vu que seules des infimes réorganisations étaient permises (fig.V-34).

Deux nouvelles matrices d'interaction ont été testées. Elles sont toujours constituées de deux termes, faible et fort (variantes compatibles et incompatible).

La première matrice testée (matrice H1) ne considère comme compatibles que les variantes faisant partie d'un même groupe autoaccommodant. Ainsi, chaque variante est compatible aux trois autres qui constituent le groupe complet et incompatible à toutes les autres.

La seconde matrice (matrice H2) propose une solution intermédiaire. Il existe des groupes autoaccommodants pour lesquels les incompatibilités de déformation sont inférieures aux autres deux à deux (voir tab.A1.5 en annexe 1). Par exemple, entre le groupe I et III, il y a plus de variantes compatibles qu'entre le groupe I et II. On considère alors que les deux groupes I et III sont compatibles entre eux. Ainsi, dans la matrice, chaque



est compatible à sept autres (les trois de son groupe et les quatre du groupe compatible).

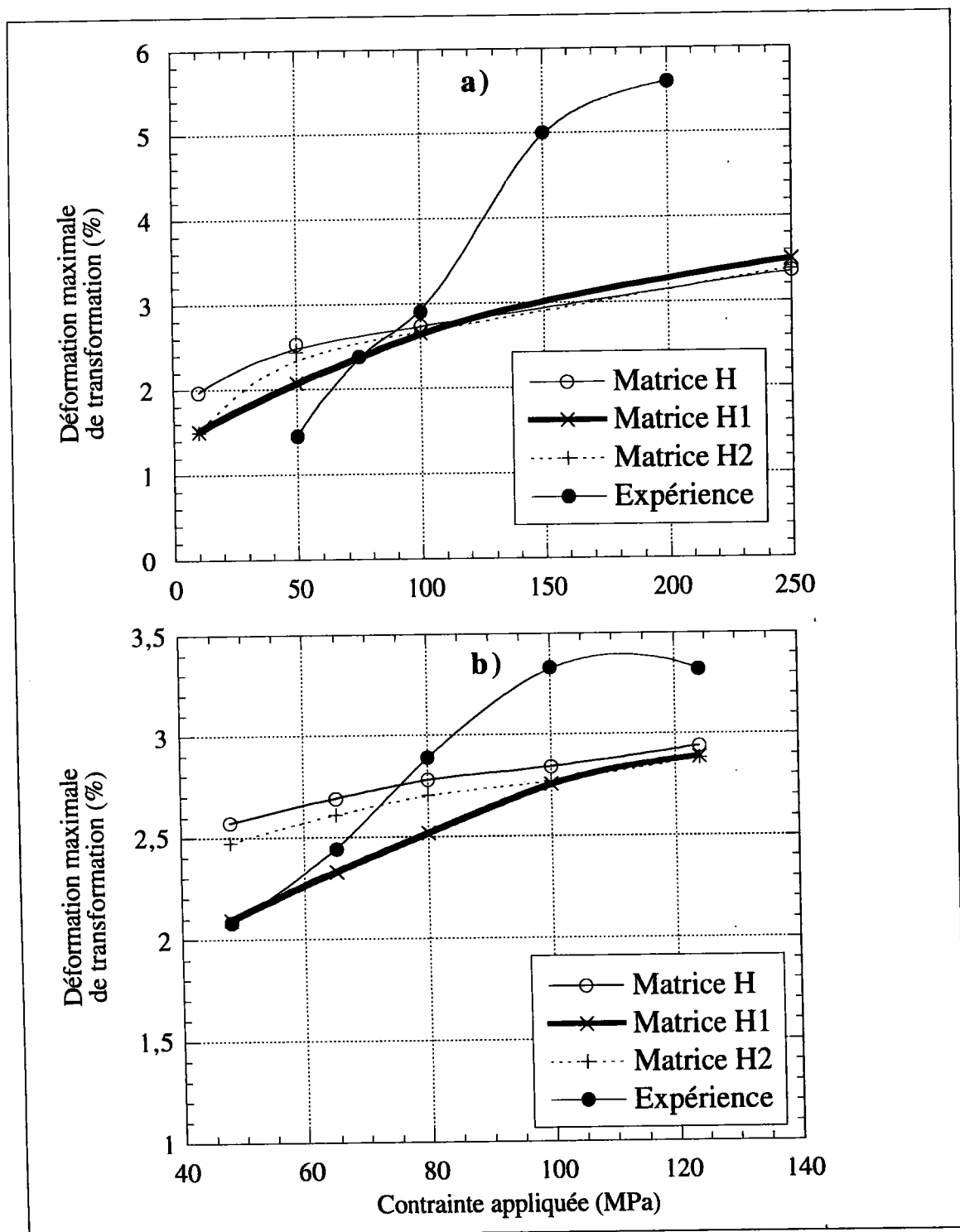


Fig. V-46: Évolution de la déformation maximale de transformation avec la contrainte appliquée et le type de matrice d'interaction H lors d'essais de fluage anisotherme. a) Application à l'alliage CuAlBe. b) Application à l'alliage CuZnAl.

On simule des essais de fluage anisotherme à différentes contraintes pour les trois matrices (fig.V-46). Les données d'entrée sont identiques, y compris les valeurs des termes faible et fort de la matrice. Le seul changement intervient au niveau de la construction de la matrice d'interaction.

La matrice d'interaction H1 fournit le meilleur résultat. Elle permet à la déformation globale de transformation de diminuer plus rapidement lors d'essais de fluage anisotherme à basse contrainte. Ce résultat est logique puisque cette matrice privilégie fortement les variantes d'un même groupe autoaccommodant. Les grains ne développent plus d'autres variantes qui ont pour effet d'augmenter la déformation. À haute contrainte, le résultat est meilleur également (fig.V-46a), en effet, la déformation de transformation est supérieure à celle obtenue par l'utilisation de la matrice classique H. Pour ces niveaux de contrainte, les grains qui se déforment peu sont ceux qui se transforment beaucoup et qui développent une contrainte interne de traction importante. En permettant de diminuer celle-ci (en privilégiant les variantes d'un même groupe), on représente mieux le comportement du fluage à haute contrainte également.

### V.3.6 - CONCLUSION

Les résultats relatifs à l'évolution de la microstructure nous donnent de nombreuses informations sur le comportement microscopique.

- En premier lieu, on a vu que l'évolution de la microstructure dans les grains est très différente suivant le type de chargement: 3 à 5 variantes par grain en moyenne en superélasticité, plus de 8 en fluage anisotherme.
- Les simulations de fluage anisotherme montrent également un comportement différent suivant la contrainte appliquée: si celle-ci est importante, le comportement se rapproche de celui d'un essai superélastique.

On a vu également que les grains se comportent différemment suivant leur orientation par rapport au repère du chargement.

- Les grains bien orientés développent une contrainte interne de compression importante, ils se transforment peu mais se déforment beaucoup.
- Au contraire, les grains mal orientés se déforment peu pour une transformation importante et génèrent des contraintes internes de traction.

Cet effet de l'orientation est très faible pour les essais anisothermes sous faible contrainte appliquée. Le comportement des grains est alors plus homogène, il devient difficile d'établir les raisons qui font que certains se transforment peu ou beaucoup, se déforment ou non... L'évolution microstructurale devient le principal paramètre responsable du comportement. Les contraintes dans les grains sont plus homogènes, seules les interactions entre les différentes variantes et leur nombre influent sur le taux de transformation et, en moindre partie, sur la déformation. Si un groupe autoaccommodant apparaît et occupe plus de 60% du volume de martensite dans un grain, la déformation s'en trouvera accommodée et le grain se transformera aisément (dans ce cas, le nombre de variantes majoritaires sera faible). Au contraire, la présence significative d'un second groupe ou de variantes isolées (extérieures au groupe dominant) entraîne des incompatibilités importantes entre les variantes, une énergie élastique importante et une faible transformation.

Ces derniers grains qui développent beaucoup de variantes pendant leur transformation, sont à l'origine des limites d'application du modèle au fluage anisotherme à faible contrainte. En effet, dans ce cas, les hypothèses qui ont servies à la détermination de la matrice d'interaction ne sont plus vérifiées.

## - Références bibliographiques -

- [B94] Bourbon G., *"Contribution à l'étude isotherme et anisotherme du comportement cyclique des alliages à mémoire de forme"*, Thèse, Université de Franche-Comté (1994)
- [CD92] Chrysochoos A., Dupré J.C., *"An infra-red set-up for Continuum Thermomechanics"*, Actes du colloque QIRT, Eurotherm, Seminar 27, Éd. Européennes Thermiques et Industries (1992)
- [CPM93] Chrysochoos A., Pham H., Maisonneuve O., *"Une analyse expérimentale du comportement thermomécanique d'un alliage à mémoire de forme de type Cu-Zn-Al"*, C.R. Acad. Sci. Paris, 316, Série II, pp.1031-1036 (1993)
- [DAD78] DeVos J., Aernoudt E., Delaey L., *"The Crystallography of the Martensitic Transformation of B.C.C. into 9R a Generalized Mathematical Model"*, Z. Metallkde, 69, H7, pp.438-444 (1978)
- [DDA78] Delaey L., DeVos J., Aernoudt E., *"Shape Memory Effect, Superelasticity and Damping in CuZnAl Alloys"*, INCRA Project n°238, Report 78R1, pp.55 (1978)
- [DKT74] Delaey L., Krishnan R.V., Tass H., Warlimont H., *"Thermoplasticity, pseudoelasticity and the memory effect associated with martensitic transformations"*, J. Mater. Sci., 9, pp.1536-1544 (1974)

- [E94] El Amrani Zirifi M., *"Contributions à l'étude micromécanique des transformations martensitiques thermoélastiques"*, Thèse, Université de Metz (1994)
- [F93] Flores Zuniga H., *"Stabilité thermique de la phase  $\beta$  et de l'effet mémoire double sens d'un alliage à mémoire de forme de type Cu-Al-Be"*, Thèse n°93 ISAL 0107, Institut National des sciences appliquées de Lyon (1993)
- [HIM88] Horikawa H., Ichinose S., Morii K., Myazaki S., Otsuka K., *Metall. Trans.*, 19A, pp.915-923 (1988)
- [LBL94] Leclercq S., Bourbon G., LExcellent C., *"Plasticity Like Model of Martensite Phase Transition in Shape Memory Alloys"*, Procs ESOMAT'94, Barcelone, Les Éditions de Physiques, France, pp.513-518 (1994)
- [M96] Moreau F., LETAM, Université de Metz, Communication interne (1996)
- [MTB94] Moreau F., Tidu A., Barbe P., Eberhardt A., Heizman J.J., *"Study of CuAlBe Shape Memory Alloy by X-Ray diffraction"*, Procs of ESOMAT'94, pp.269-274 (1994)
- [P95] Patoor E., *"Comportement thermomécanique des alliages à mémoire de forme"*, Mémoire d'habilitation, Université de Metz, ISGMP, LPMM, Metz (1995)
- [RLT92] Raniecki B., LExcellent C., Tanaka K., *"Thermodynamic Models of Pseudoelastic Behaviour of Shape Memory Alloys"*, *Arch. of Mech.*, 3 (1992)
- [V91] Vacher P., *"Étude du comportement pseudoélastique d'alliages à mémoire de forme CuZnAl polycristallins"*, Thèse, Université de Franche-Comté, Besançon (1991)

## CHAPITRE VI: - Conclusion -

Ce mémoire comprend une étude à la fois théorique et expérimentale du comportement superthermoélastique des alliages à mémoire de forme. L'approche microthermomécanique adoptée permet d'obtenir à la fois des résultats macroscopiques sur la réponse du matériau à une sollicitation donnée (courbes  $\Sigma$ -E et E-T) et des informations à caractère microstructural (formation des variantes de martensite dans les grains). Dans ce travail, de nombreux résultats nouveaux concernant la modélisation du fluage anisotherme ont été obtenus.

- Les propriétés thermomécaniques locales d'un volume monocristallin soumis à une transformation de phase martensitique sont déterminées en fonction des variables qui contrôlent la transformation et d'un ensemble de variables internes décrivant la microstructure. L'apport de cette étude est la considération de la température en tant que variable de contrôle au même titre que la contrainte macroscopique. La microstructure est décrite par les fractions volumiques des différentes variantes de martensite.
- Les tenseurs de localisation relient les quantités locales aux quantités globales correspondantes. Deux nouveaux tenseurs de localisation thermique sont introduits. Ils relient la contrainte et la déformation locales à la température imposée.
- Le comportement macroscopique est obtenu à partir de la résolution d'une nouvelle équation intégrale. Cette équation thermomécanique est résolue en introduisant les hypothèses simplificatrices appropriées: approximation autocohérente à un site et uniformité de la température dans l'échantillon. Dans l'état, elle peut servir pour toute modélisation du comportement thermomécanique des matériaux microhétérogènes et

macrohomogènes. Elle généralise dans l'espace contrainte-température l'équation obtenue pour les cas de chargements mécaniques isothermes.

- Un schéma de résolution numérique est mis en oeuvre. Il permet de traiter des édifices polycristallins pour les cas de chargement isotherme et anisotherme sans variable supplémentaire. Les variables d'entrée sont obtenues à partir d'observations cristallographiques ou déduites d'étude micromécanique.
- Une étude simplifiée basée sur la thermodynamique des processus irréversibles permet une prise en compte des dégagements et absorptions de chaleur accompagnant les transformations directe et inverse.

Parallèlement à ce travail théorique et numérique, une étude expérimentale permet de caractériser thermomécaniquement un alliage particulier de cuivre-aluminium-béryllium. L'originalité de cette caractérisation est qu'elle a été réalisée avec des monocristaux et polycristaux de même composition.

- Des essais de traction superélastique isotherme à partir du domaine austénitique font apparaître le mécanisme de déformation principal de la transformation martensitique: transformation induite par la contrainte.
- Des essais de fluage anisotherme à contrainte imposée constante montrent l'influence du niveau de contrainte macroscopique. Pour des valeurs faibles de la contrainte, la transformation est nettement influencée par le mécanisme d'autoaccommodation des variantes.
- L'influence des paramètres de contrôle (température en superélasticité isotherme et contrainte en fluage anisotherme) permet de caractériser cristallographiquement l'alliage dans l'espace contrainte-température. Le diagramme d'état est alors tracé pour le monocristal et le polycristal.
- Deux essais à vitesse de déformation lente et rapide (censés représenter des transformations purement isotherme et adiabatique) sont également comparés.

La confrontation des prévisions théoriques aux mesures expérimentales fournit des résultats satisfaisants.

- Les résultats de modélisation du comportement isotherme confirment les bons résultats obtenus pour d'autres alliages.

- Les résultats de modélisation du comportement anisotherme sont corrects, en laissant toutefois apparaître une limitation quant à la description du phénomène d'autoaccommodation à basse contrainte. Cette limitation est liée à la description micromécanique employée lors du calcul de l'énergie d'interaction due aux contraintes internes.
- La prise en compte des échanges thermiques pendant la transformation est très satisfaisante. Elle rend compte de l'influence de la vitesse de sollicitation (de déformation) lors d'essais superélastiques isothermes.

L'approche utilisée permet également d'obtenir des résultats microstructuraux intéressants: évolution au cours du chargement des contraintes internes d'ordre II, de la déformation et des fractions volumiques dans les grains qui constituent le polycristal. En fonction de l'orientation des grains, les propriétés de ceux-ci diffèrent comparativement. Ce résultat permet d'espérer obtenir des comportements "à la carte" suivant la texture cristallographique du polycristal.

Cette étude s'inscrit dans une suite de différents travaux visant à un développement industriel des alliages à mémoire de forme. D'autres étapes sont encore nécessaires pour une meilleure prédiction du comportement des alliages à mémoire de forme.

- Une meilleure prise en compte du mécanisme d'autoaccommodation des variantes de martensite complétera la description du fluage anisotherme et permettra de modéliser l'effet mémoire simple sens.
- L'effet du cyclage avec apparition de plasticité par création de défauts est envisageable. On pourra alors espérer la modélisation de l'effet mémoire double sens et des effets de fatigue.

L'étude des alliages à mémoire de forme ouvre des pistes pour celle des Trip-Steel, alliages pour lesquels le couplage entre la plasticité et la transformation de phase conduit à des propriétés remarquables: déformation irréversible très importante avant striction.



## - Annexes -

<b>ANNEXE 1: Calcul de l'énergie d'interaction <math>W_{int}</math> intervenant dans le potentiel de transformation du monocristal</b>	<b>..Page 225</b>
A1.1 - RAPPEL	.....225
A1.2 - ASPECTS MICROSTRUCTURAUX ET CALCUL DE L'ÉNERGIE D'INTERACTION	.....226
A1.3 - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	.....232
<b>ANNEXE 2: Détermination du tenseur <math>T^{II}</math> et du tenseur de Green <math>G(r)</math></b>	<b>..Page 233</b>
A2.1 - RAPPEL	.....233
A2.2 - DÉTERMINATION DU TENSEUR DE GREEN	.....233
A2.3 - DÉTERMINATION DU TENSEUR D'INTERACTION $T^{II}$	.....235
A2.4 - RÉOLUTION NUMÉRIQUE	.....236
A2.5 - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	.....237
<b>ANNEXE 3: Résolution numérique</b>	<b>..Page 238</b>
A3.1 - INTRODUCTION ET FORMALISME	.....238
A3.2 - VARIANTES ACTIVES	.....241
A3.3 - TEMPS DE CALCUL	.....243
A3.4 - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	.....244

# ANNEXE 1:

## - Calcul de l'énergie d'interaction $W_{int}$ intervenant dans le potentiel de transformation du monocristal -

### A1.1 - RAPPEL

Le potentiel thermodynamique associé à la transformation de phase d'un monocristal a été déterminé au chapitre III.2.2.1. La décomposition du champ de contrainte local  $\sigma(r)$  en deux champs (champ de contrainte macroscopique  $\Sigma$  et champ de contrainte interne  $\tau(r)$ ) a permis d'établir la relation suivante (III.31):

$$\begin{aligned} \Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) = & -B(T - T_0) \sum_n f^n + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} + \alpha \Delta T \Sigma_{kk} + \\ & + \Sigma_{ij} \sum_n \varepsilon_{ij}^n f^n + \frac{1}{2V} \int_V \tau_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \end{aligned} \quad (A1.1)$$

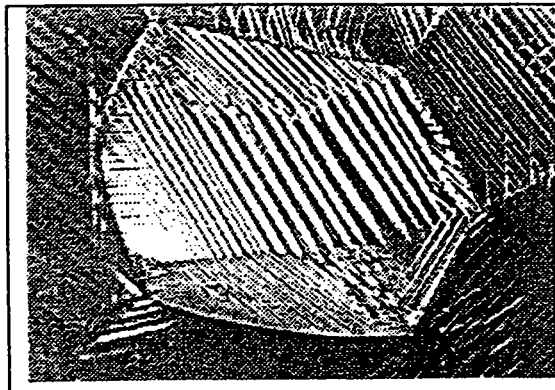
$B$  et  $T_0$  sont des constantes du matériau.  $S$  et  $\alpha$  sont les modules thermoélastiques et  $\varepsilon^n$  est la déformation de la variante  $n$ .

Les différentes contributions ont été réduites à des fonctions des paramètres de contrôle (contrainte  $\Sigma$  et température  $T$ ) et des variables internes  $f^n$  (fractions volumiques des variantes  $n$ ) mis à part le dernier terme de la relation. Ce terme symbolise l'énergie d'interaction  $W_{int}$  associée à l'apparition de la phase martensitique. Son évaluation nécessite la connaissance précise de la microstructure, c'est à dire la forme et la répartition spatiale des variantes.

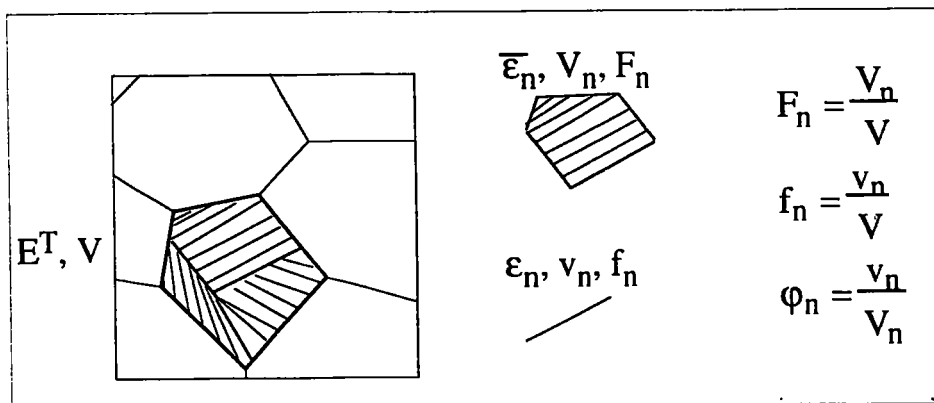
$$W^{int} = -\frac{1}{2V} \int_V \tau_{ij}(r) \varepsilon_{ij}^T(r) dV \quad (A1.2)$$

## A1.2 - ASPECTS MICROSTRUCTURAUX ET CALCUL DE L'ÉNERGIE D'INTERACTION

La figure A1-1 représente un matériau polycristallin à un stade avancé d'une transformation martensitique. Deux observations peuvent être faites: le nombre de variantes formées est limité (3 à 4 par grain sur 24 possibles) et chacune d'elle croît dans un domaine bien défini du grain.



*Fig.A1-1: Micrographie représentant les variantes dans un grain d'un polycristal CuAlBe [BUA96]*



*Fig. A1-2: Aspects microstructuraux de la transformation et définition des paramètres utilisés pour caractériser la microstructure.*

Les sources de contraintes internes proviennent majoritairement des interactions martensite/martensite. En conséquence, pour déterminer l'énergie d'interaction, on utilise une description de type "cluster". La figure A1-2 schématise cette structure en faisant apparaître les paramètres microstructuraux caractéristiques, à savoir:

- $E^T$  et  $V$ : La déformation de transformation et le volume du grain (monocristal).
- $\bar{\epsilon}_n$ ,  $V^n$ ,  $F^n$ : La déformation de transformation moyenne, le volume et la fraction volumique du domaine délimité par la variante  $n$  ( la variante est considérée comme l'ensemble des plaquettes).
- $\epsilon^n$ ,  $v^n$ ,  $f^n$ : La déformation de transformation, le volume et la fraction volumique de la plaquette de martensite  $n$ .
- $\phi^n$ : Le taux de la plaquette  $n$  dans le domaine associé.

La valeur moyenne du champ de déformation de transformation dans le domaine  $n$  est défini comme suit:

$$\bar{\epsilon}_{ij}^n = \frac{1}{V_n} \int_{V_n} \epsilon_{ij}^T(r) dV = \epsilon_{ij}^n \frac{V_n}{V_n} = \epsilon_{ij}^n \phi^n \quad (A1.3)$$

Ces hypothèses permettent de simplifier l'intégrale (A1.2) par une sommation sur les différents domaines  $n$ .

$$W_{int} = -\frac{1}{2V} \int_V \tau_{ij}(r) \epsilon_{ij}^T(r) dV = -\frac{1}{2V} \sum_n \bar{\tau}_{ij}^n \bar{\epsilon}_{ij}^n V_n \quad (A1.4)$$

où  $\bar{\tau}^n$  est la valeur moyenne de la contrainte interne sur le volume  $V_n$ . Or, la valeur moyenne de la contrainte interne dans un monocristal est nulle, ce qui permet d'écrire la propriété suivante:

$$\frac{1}{V} \int_V \tau_{ij}(r) \epsilon_{ij}^T dV = \frac{1}{V} \sum_n \bar{\tau}_{ij}^n \epsilon_{ij}^T V_n = 0 \quad (A1.6)$$

L'addition des deux dernières relations permet d'exprimer l'énergie d'interaction sous la forme:

$$\begin{aligned} W_{\text{int}} &= -\frac{1}{2V} \sum_n \bar{\tau}_{ij}^n \bar{\epsilon}_{ij}^n V_n + \frac{1}{2V} \sum_n \bar{\tau}_{ij}^n E_{ij}^T V_n \\ \Leftrightarrow W_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \sum_n \bar{\tau}_{ij}^n \left( E_{ij}^T - \bar{\epsilon}_{ij}^n \right) F^n \end{aligned} \quad (\text{A1.7})$$

En considérant le domaine  $n$  comme une inclusion ellipsoïdale caractérisée par un tenseur d'Eshelby  $S^n$  [E61], la contrainte uniforme  $\bar{\tau}^n$  dans cette inclusion s'exprime ainsi:

$$\bar{\tau}_{ij}^n = C_{ijkl} \left( I_{klrs} - S_{klrs}^n \right) \left( E_{rs}^T - \bar{\epsilon}_{rs}^n \right) \quad (\text{A1.8})$$

L'énergie d'interaction s'exprime alors:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_n \left( \bar{\epsilon}_{ij}^n - E_{ij}^T \right) C_{ijkl} \left( I_{klrs} - S_{klrs}^n \right) \left( \bar{\epsilon}_{rs}^n - E_{rs}^T \right) F^n \quad (\text{A1.9})$$

En superélasticité ou en fluage anisotherme à haute contrainte, le nombre de variantes (domaines) reste limité. Cette énergie peut donc être évaluée en limitant le calcul de l'énergie d'interaction pour des paires de variantes. Dans le cas de deux domaines  $p$  et  $q$ , la déformation globale de transformation devient:

$$E_{ij}^T = \bar{\epsilon}_{ij}^p F^p + \bar{\epsilon}_{ij}^q F^q \quad \text{avec} \quad F^p + F^q = 1 \quad (\text{A1.10})$$

Si ces domaines sont considérés comme des ellipsoïdes aplatis:  $S^p=S^q=S^{pq}$  et l'énergie d'interaction devient alors:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} F^p F^q \left( \bar{\epsilon}_{ij}^p - \bar{\epsilon}_{ij}^q \right) C_{ijkl} \left( I_{klrs} - S_{klrs}^{pq} \right) \left( \bar{\epsilon}_{rs}^p - \bar{\epsilon}_{rs}^q \right) \quad (\text{A1.11})$$

La déformation moyenne de transformation  $\bar{\varepsilon}^n$  et la fraction volumique  $F^n$  du domaine  $n$  peuvent s'exprimer à partir des paramètres  $f^n$  et  $\varepsilon^n$  intrinsèques à la transformation.

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^n \varphi^n \quad \text{et} \quad F^n = \frac{f^n}{\varphi^n} \quad (\text{A1.12})$$

L'énergie d'interaction s'écrit alors:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \frac{f^p}{\varphi^p} \frac{f^q}{\varphi^q} \left( \varphi^p \varepsilon_{ij}^p - \varphi^q \varepsilon_{ij}^q \right) C_{ijkl} \left( I_{klrs} - S_{klrs}^{pq} \right) \left( \varphi^p \varepsilon_{rs}^p - \varphi^q \varepsilon_{rs}^q \right) \quad (\text{A1.13})$$

Si l'on suppose que l'avancement de la transformation est identique pour tous les domaines, alors  $\varphi^p = \varphi^q$  et  $W_{\text{int}}$  s'écrit:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} f^p f^q \left( \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^q \right) C_{ijkl} \left( I_{klrs} - S_{klrs}^{pq} \right) \left( \varepsilon_{rs}^p - \varepsilon_{rs}^q \right) \quad (\text{A1.14})$$

Cette équation donne la valeur de l'énergie d'interaction  $W_{\text{int}}$  en fonction des variables internes  $f^n$  mais également en fonction de la forme et de l'orientation du domaine (par l'intermédiaire des  $\varepsilon^n$  et  $S^{pq}$ ). La minimisation de cette contribution (tab.A1-3) conduit à définir une matrice d'interaction  $H^{nm}$  (tab.A1-4) qui décrit les interactions élastiques entre variantes [E94]. En accord avec les observations expérimentales, elle comporte des termes très faibles dans le cas de variantes autoaccomodantes tandis que des termes importants sont associés aux incompatibilités de transformation de certaines variantes, dites incompatibles. La minimisation conduit à écrire l'énergie d'interaction sous la forme:

$$W_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{n,m} H^{nm} f^n f^m \quad (\text{A1.15})$$

n	m	dét( $\Delta\varepsilon_{ij}^{pq}$ )	$\Delta\varepsilon_{ij}^{pq} C_{ijkl} (I_{klmn} - S_{klmn}^{pq}) \Delta\varepsilon_{mn}^{pq}$	Type d'interaction
1	1	0	0	Compatible
1	2	0	$3.8 \cdot 10^{-2}$	Compatible
1	3	0	$0.2 \cdot 10^{-2}$	Compatible
1	4	0	$3.7 \cdot 10^{-2}$	Compatible
1	5	0.01	$1.4 \cdot 10^{-2}$	Incompatible
1	6	0.22	0.21	Incompatible
1	7	0	$1.3 \cdot 10^{-2}$	Compatible
1	8	0.22	0.20	Incompatible
1	9	0	$4.4 \cdot 10^{-4}$	Compatible
1	10	0.03	$3.8 \cdot 10^{-2}$	Incompatible
1	11	0	$0.3 \cdot 10^{-2}$	Compatible
1	12	-0.03	$3.8 \cdot 10^{-2}$	Incompatible
1	13	0.21	0.18	Incompatible
1	14	0	$1.1 \cdot 10^{-2}$	Compatible
1	15	0.21	0.20	Incompatible
1	16	-0.01	$1.4 \cdot 10^{-2}$	Incompatible
1	17	-0.21	0.20	Incompatible
1	18	$13 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	Incompatible
1	19	-0.22	0.20	Incompatible
1	20	0	$0.8 \cdot 10^{-2}$	Compatible
1	21	0	$0.8 \cdot 10^{-2}$	Compatible
1	22	-0.21	0.19	Incompatible
1	23	$-13 \cdot 10^{-6}$	$1.0 \cdot 10^{-2}$	Incompatible
1	24	-0.22	0.21	Incompatible

*Tableau A1-4: Type d'interaction entre la variante n=1 et les autres variantes pour un alliage CuZnAl. Détermination de la condition d'existence d'un plan invariant ( $\Delta\varepsilon^{pq}$ ) et minimisation de l'équation (A1.8).*

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24			
1		1	3	2	X	X	10	X	6	X	4	X	X	13	X	X	X	X	X	15	16	X	X	X			
2	1		2	3	X	X	X	15	X	6	X	4	16	X	X	X	X	X	10	X	X	13	X	X			
3	3	2		1	13	X	X	X	4	X	6	X	X	X	X	10	X	16	X	X	X	X	15	X			
4	2	3	1		X	16	X	X	X	4	X	6	X	X	15	X	13	X	X	X	X	X	X	10			
5						1	3	2	10	X	X	X	X	6	X	4	15	X	X	X	X	16	X	X			
6					1		2	3	X	15	X	X	6	X	4	X	X	10	X	X	13	X	X	X			
7					3	2		1	X	X	13	X	X	4	X	6	X	X	16	X	X	X	X	15			
8					2	3	1		X	X	X	16	4	X	6	X	X	X	X	13	X	X	10	X			
9										1	3	2	X	X	X	13	X	X	X	16	15	X	X	X			
10									1		2	3	X	X	16	X	X	X	13	X	X	10	X	X			
11									3	2		1	X	10	X	X	X	15	X	X	X	X	16	X			
12									2	3	1		15	X	X	X	10	X	X	X	X	X	X	13			
13														1	3	2	X	13	X	X	10	X	X	X			
14														1		2	3	16	X	X	X	X	15	X	X		
15														3	2		1	X	X	X	10	X	X	13	X		
16														2	3	1		X	X	15	X	X	X	16			
17																			1	3	2	X	4	X	6		
18																			1		2	3	4	X	6	X	
19																			3	2		1	X	6	X	4	
20																			2	3	1		6	X	4	X	
21																								1	3	2	
22																								1		2	3
23																								3	2		1
24																								2	3	1	

**Tableau A1-5: Matrice d'interaction H déterminé pour un alliage CuZnAl [ELA94]. 1, 2 et 3: Variantes d'un même groupe autoaccommodant; 4, 6, 10, 13, 15 et 16: Variantes compatibles; X: Variantes incompatibles. Les groupes en gras ont de nombreuses compatibilités avec le groupe entouré d'une double ligne placé sur la même ligne (justificatif de H2, §V.3.5).**

En définitive, le potentiel thermodynamique associé à la transformation martensitique d'un monocristal est décrit par les seules variables  $f^n$ , comme le montre le résultat suivant:

$$\begin{aligned}
 \Psi(\Sigma_{ij}, T, f^n) = & -B(T - T_0) \sum_n f^n + \frac{1}{2} \Sigma_{ij} S_{ijkl} \Sigma_{kl} + \alpha \Delta T \Sigma_{kk} + \\
 & + \Sigma_{ij} \sum_n \varepsilon_{ij}^n f^n + \frac{1}{2} \sum_{n,m} H^{nm} f^n f^m
 \end{aligned} \tag{A1.10}$$



### A1.3 - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [E94] El Amrani Zirifi M., *"Contributions à l'étude micromécanique des transformations martensitiques thermoélastiques"*, Thèse, Université de Metz (1994)
- [E61] Eshelby J.D., *"Elastic inclusions and inhomogeneities"*, Prog. in Solid Mech., 2, pp.89-140 (1961)
- [F85] Fassi-Fehri O., *"Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice isotrope - application à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité"*, Thèse d'État, Université de Metz (1985)

## ANNEXE 2: - Détermination du tenseur $T^{II}$ et du tenseur de Green $G(r)$ -

### A2.1 - RAPPEL

Le tenseur d'interaction  $T^{II}$  est indispensable à la détermination des tenseurs de localisation. Son expression a été définie en §III.3.3.3 (Éq.III.109), elle est fonction du tenseur de Green symétrisé  $\Gamma(r)$ :

$$\begin{aligned} T_{ijkl}^{II} &= \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^I} \Gamma_{ijkl}(r) dV dV' \\ &= \frac{1}{2V^I} \int_{V^I} \int_{V^I} [G_{ki,lj}(r) + G_{kj,li}(r)] dV dV' \end{aligned} \quad (A2.1)$$

Le tenseur de Green  $G(r)$  est la solution de l'équation de Navier obtenue par les lois classiques de l'élastostatique. Si  $L^0$  est le module du milieu et  $f_i = \delta_{im} \delta(r-r')$  une force volumique, l'équation qui définit  $G(r)$  est la suivante:

$$L_{ijkl}^0 G_{km,lj}(r-r') + \delta_{im} \delta(r-r') = 0 \quad (A2.2)$$

### A2.2 - DÉTERMINATION DU TENSEUR DE GREEN

La méthode de calcul est basée sur les techniques de transformée de Fourier du tenseur de Green. Cette méthode a été proposée par Kneer [K65] et développée par Mura [MK71].

La transformée de Fourier de  $G(r)$ , notée  $\tilde{G}(k)$  si  $k$  est le vecteur conjugué de  $r$ , est donnée par:

$$\tilde{G}_{km}(k) = \int_{V_t} G_{km}(r) e^{+ik_i r_i} dV_t \quad (A2.3)$$

Sa transformée de Fourier inverse est alors:

$$G_{km}(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} \tilde{G}_{km}(k) e^{-ik_i r_i} dV_k \quad (A2.4)$$

En dérivant deux fois cette expression par rapport à la position  $r$ , on obtient:

$$G_{km,lj}(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} -k_l k_j \tilde{G}_{km}(k) e^{-ik_i r_i} dV_k \quad (A2.5)$$

En faisant de même pour la distribution de Dirac  $\delta(r)$ , on a:

$$\tilde{\delta}(k) = 1 \quad \text{puis} \quad \delta(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{V_k} e^{-ik_i r_i} dV_k \quad (A2.6)$$

En reportant les résultats (A2.5) et (A2.6) dans l'expression (A2.2), cette dernière peut se réécrire (d'après le théorème de l'intégrale nulle):

$$L_{ijkl}^0 \tilde{G}_{km}(k) k_l k_j = \delta_{im} \quad (A2.7)$$

À ce stade intervient la forme de l'inclusion. En effet, l'inclusion possède un repère principal d'inertie (ou repère morphologique), généralement différent du repère cristallographique et dans lequel le vecteur  $k$  a pour coordonnées (dans l'hypothèse d'inclusions sphériques):

$$k_i = k\chi_i \quad \text{avec:} \quad \begin{cases} \chi_1 = \sin \theta \cos \varphi \\ \chi_2 = \sin \theta \sin \varphi \\ \chi_3 = \cos \theta \end{cases}$$

$k, \theta$  et  $\varphi$  sont les coordonnées sphériques du vecteur  $k$

L'équation (AII-7) devient alors:

$$L_{ijkl}^0 k^2 \chi_i \chi_j \tilde{G}_{km}(k) = \delta_{im} \quad (\text{A2.8})$$

qui définit  $\tilde{G}(k)$ , à savoir:

$$k^2 \tilde{G}_{km}(k) = \left[ L_{mjkl}^0 \chi_i \chi_j \right]^{-1} \quad (\text{A2.9})$$

### A2.3 - DÉTERMINATION DU TENSEUR D'INTERACTION T<sup>II</sup>

La transformée de Fourier de  $G(r)$  étant définie, on remplace dans la définition du tenseur T<sup>II</sup> (A2.1), le tenseur de Green par sa transformée de Fourier inverse (A2.5), ce qui donne:

$$T_{ijkl}^{II} = \frac{1}{16\pi^3} \int_{V^I} \int_{V^I} \int_{V_k} \left[ k_l k_j \tilde{G}_{ki}(k) + k_l k_i \tilde{G}_{kj}(k) \right] e^{ik_i(r_i' - r_i)} dV dV' dV_k \quad (\text{A2.10})$$

En coordonnées sphériques, l'élément de volume  $dV_k$  est donné par:

$$dV_k = k^2 \sin \theta d\theta d\varphi dk \quad (\text{A2.11})$$

Dans ce nouveau repère, (A2.10) s'écrit donc:

$$T_{ijkl}^{II} = \frac{1}{16\pi^3} \int_0^\pi \sin \theta \int_0^{2\pi} \left[ k^2 \chi_l \chi_j \tilde{G}_{ki}(k) + k^2 \chi_l \chi_i \tilde{G}_{kj}(k) \right] \int_0^\infty k^2$$

$$\int_{V^I} \int_{V^I} e^{ik_i(r_i' - r_i)} dV dV' dk d\varphi d\theta \quad (\text{A2.12})$$

En choisissant  $r_3$  suivant  $k$ , on a (si  $a$  est le rayon de la sphère):

$$\int_0^\infty k^2 \int_{V^I} \int_{V^I} e^{ik_i(r_i' - r_i)} dV dV' dk = \frac{(2a\pi)^3}{3} \quad (\text{A2.13})$$

Finalement, on obtient pour  $T^{II}$ :

$$T_{ijkl}^{II} = \frac{a^3}{6} \int_0^\pi \sin \theta \int_0^{2\pi} \left[ k^2 \chi_l \chi_j \tilde{G}_{ki}(k) + k^2 \chi_l \chi_i \tilde{G}_{kj}(k) \right] d\varphi d\theta \quad (\text{A2.14})$$

avec  $k^2 \tilde{G}(k)$  donné par (A2.9).

## A2.4 - RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

Le tenseur  $T^{II}$  donné par l'expression (A2.14) ne peut être calculé analytiquement que dans les cas simples d'inclusions sphériques dans un milieu isotrope. Pour toute autre configuration, une méthode numérique élaborée par Lipinski [L93] est employée et intégrée dans le processus numérique. Cette intégration numérique est basée sur la méthode d'intégration de Gauss.

Soit une fonction  $f(\theta, \varphi)$ : Son intégrale pour  $-1 \leq \theta \leq 1$  et  $-1 \leq \varphi \leq 1$  peut être approchée par la double somme suivante:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\theta, \varphi) d\theta d\varphi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(\theta_i, \varphi_j) w_i w_j \quad (\text{A2.15})$$

avec:

$N$  et  $M$ : Le nombre de points d'intégration selon  $\theta$  et  $\varphi$

$\theta_i$  et  $\varphi_j$ : Les positions des points d'intégration (dépend de  $N$  et  $M$ )

$w_i$  et  $w_j$ : Les poids d'intégration (également dépendant de N et M)

Les valeurs des poids ainsi que les positions des points d'intégration sont prédéfinis ([R65] par exemple). Deux changements de variable permettent de ramener le calcul de  $T^{II}$  (A2.14) au cas décrit précédemment (A2.15) [L93].

## A2.5 - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [K65] Kneer G., "*Über die Berechnung der Elastizitätsmoduln Vielkristalliner Aggregate mit Texture*", Phys. Status Solidi, 9, pp.825-838 (1965)
- [L93] Lipinski P., "*Modélisation du comportement des métaux en transformations élastoplastiques finies, à partir des méthodes de transition d'échelle*", Mémoire d'habilitation, ISGMP, LPMM, Université de Metz (1993)
- [MK71] Mura T., Kinoshita N., "*Green's functions for anisotropic elasticity*", Phys. Status Solidi (b), 47, pp.607-618 (1971)
- [R95] Ralston A., A First Course in Numerical Analysis, McGraw-Hill (1965)

## ANNEXE 3: - Résolution numérique -

### A3.1 - INTRODUCTION ET FORMALISME

On considère le comportement du matériau comme indépendant du temps (pas de viscosité) même s'il existe un effet de vitesse ayant une autre origine (§III.4). Dès lors, même si le caractère non linéaire de la transformation martensitique des alliages à mémoire de forme impose une écriture des lois de comportement sous forme de vitesses, la variable temps est ici utilisée pour repérer les états successifs du matériau au cours du chargement. Par conséquent, la notion de dérivée temporelle d'une variable correspond à la variation de celle-ci entre deux événements successifs (infiniment rapprochés). Ceci justifie dans un premier temps l'utilisation d'une formulation incrémentale pour l'écriture du schéma numérique. De plus, les équations (III.112) et (III.114) permettant le calcul des modules effectifs possèdent une forme implicite, ce qui constitue la principale difficulté de résolution. Lipinski et al. [LB89] ont proposé une approximation numérique qui consiste à choisir comme milieu de référence celui dont le comportement a été déterminé au pas de calcul précédent (ceci est possible de par la formulation numérique incrémentale).

L'incrément macroscopique imposé (numériquement) peut être de deux types: "mécanique" (en contrainte  $d\Sigma$  ou en déformation  $dE$ ) lors d'un chargement isotherme ou "thermique" (incrément de température  $dT$ ) lors d'un essai anisotherme. Dans ce deuxième cas, le niveau de contrainte appliqué doit être également contrôlé pendant la simulation. Pour ces deux types de chargement, la vérification du niveau de contrainte (à une tolérance  $\xi$  admise) est le critère qui permet le passage à l'incrément suivant. À ce stade, on peut présenter l'organigramme principal de la

simulation numérique, qui est principalement relié au comportement macroscopique (planche A3-1).

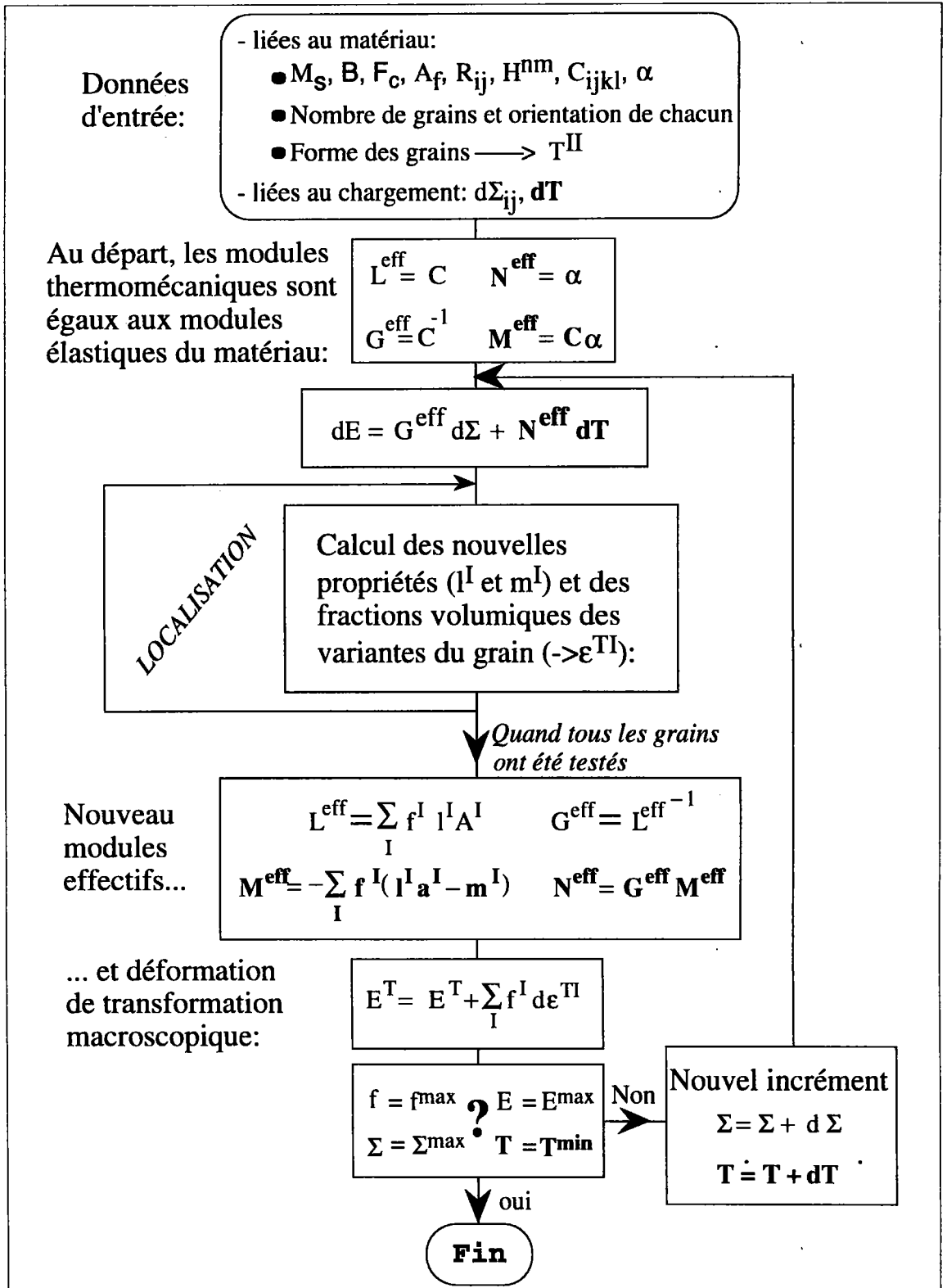


Planche A3-1: Organigramme du schéma de résolution numérique pour la superthermoélasticité des alliages à mémoire de forme.



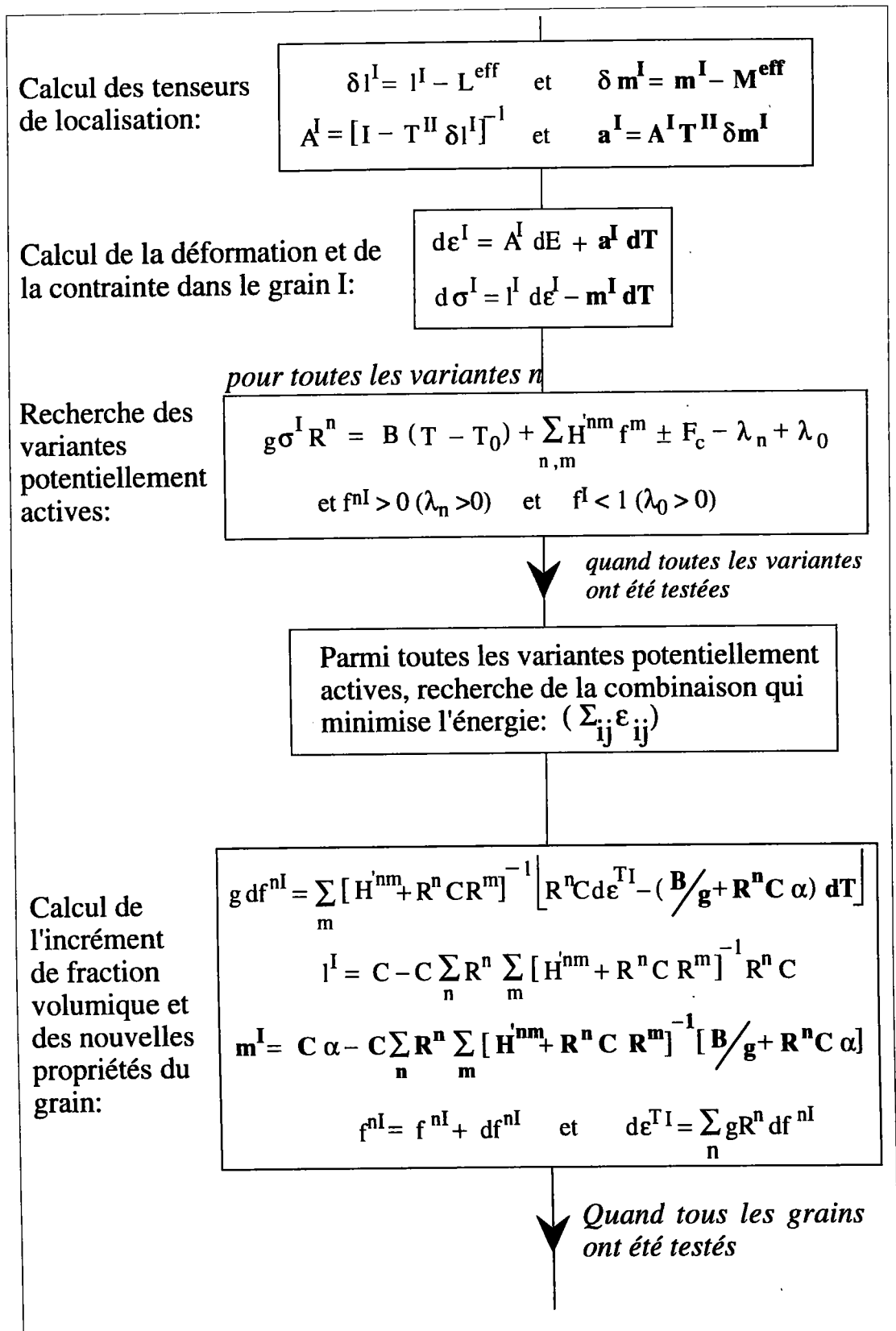


Planche A3-2: Organigramme de calcul des propriétés des grains.

La partie concernant le comportement local est représenté par l'organigramme de la planche A3-2, il est relatif à l'évolution du comportement et au calcul des propriétés dans un grain.

## A3.2 - VARIANTES ACTIVES

La transformation ou la déformation dans un grain résulte de l'activation et de l'évolution de une ou plusieurs variantes de martensite. Pour cela, au moins une condition doit être satisfaite pour activer la transformation: cette condition se traduit par la vérification du critère local défini par l'équation III.42.

Parmi ces variantes potentiellement actives, les équations (III.43) et (III.47) définissent celles qui le sont réellement mais dans la pratique, ces relations sont utilisées uniquement pour déterminer les vitesses de déformation de transformation pour une combinaison de variantes choisies. Avant cela, il faut choisir parmi toutes les variantes potentiellement actives, la combinaison qui l'est effectivement et qui correspond donc à la solution. Ce choix est basé sur un critère énergétique qui correspond à la minimisation de la solution du théorème des travaux virtuels exprimé sous forme incrémentale.

Finalement, le choix de la combinaison active impose de suivre le cheminement suivant:

- Choix d'une combinaison parmi toutes celles possibles
- Calcul des modules thermomécaniques  $l^I$  et  $m^I$  de la combinaison
- Détermination du tenseur de localisation  $A^I$
- Calcul des déformations et contraintes dans le grain
- Détermination des taux de déformation des différentes variantes avec rejet de la solution si une de ces valeurs est négatives
- Calcul de  $\varepsilon^I d\sigma^I$  et mise en mémoire de la combinaison qui minimise cette forme.

Ces opérations sont effectuées pour toutes les combinaisons possibles, la solution choisie est celle qui minimise l'énergie de déformation.

Un tel algorithme est très consommateur en calculs (et par conséquent en temps): Pour un nombre  $x$  de variantes potentiellement actives, le nombre de combinaisons  $N_c$  à tester est donné par:

$$N_c = \sum_{i=0}^x C_x^i = 2^x \quad \text{où: } C_x^i = \frac{x!}{i! (x-i)!} \quad (\text{A3.1})$$

Pour  $x=0$  (aucune variante potentiellement active),  $N_c=1$  correspond à la solution élastique. En conditions isothermes ou lorsque la contrainte appliquée est importante, le nombre moyen de variantes potentiellement actives généralement constaté est de 5; le nombre de combinaisons est alors de 32, ce qui reste raisonnable.

À l'inverse, lors d'un cycle thermique pendant lequel la contrainte imposée est faible, le nombre de variantes potentiellement actives peut être beaucoup plus important. Pour  $x=10$ , le nombre de combinaisons à tester est  $N_c=1024$ . Ce chiffre est multiplié par 16384 dans le cas extrême où toutes les variantes sont potentiellement actives (24 variantes possible lors d'un refroidissement à l'état libre de contrainte pour un alliage à base de Cuivre). Nous aborderons les temps de calcul ultérieurement.

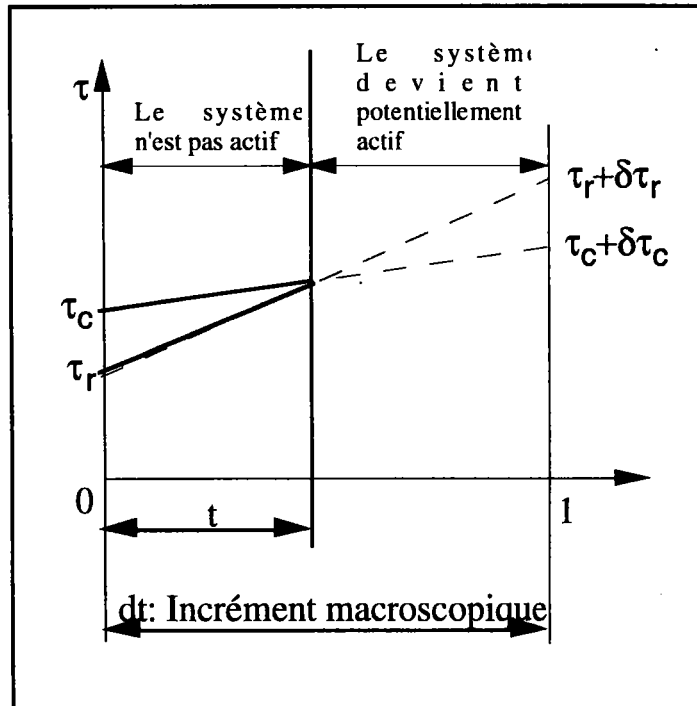
Un autre problème subsiste lors de la résolution numérique (relatif à l'incrément de charge). La détermination des variantes actives est effective dans la configuration du début de l'incrément de charge. En fonction de la valeur de cet incrément, il n'est pas évident que la solution soit encore valable en fin d'incrément. Il est nécessaire alors de définir des étapes intermédiaires de calcul qui vont permettre la prise en compte de modifications des variantes actives, comme l'activation ou la désactivation des variantes pendant l'incrément imposé.

La relation (A3.2) permet de définir un "temps"  $t$  sans dimension pendant lequel la solution reste valable. En scindant le critère en deux membres dont l'un représenterait la cission résolue (fonction de la contrainte), et l'autre la cission critique (fonction de la température et des autres variantes actives), on peut prédire l'instant où le critère sera satisfait pour une nouvelle variante (fig.A3-3).

$$t = \frac{\tau_c - \tau_r}{d\tau_r - d\tau_c} \quad (\text{A3.2})$$

avec: si  $t \geq 1$ : La solution est valable durant toute la totalité de l'incrément macroscopique.

si  $t < 1$ : Un incrément intermédiaire est nécessaire.



*Fig. A3-3: Détermination des pas de calcul intermédiaires par calcul de la "durée" de validité d'une combinaison.*

### A3.3 - TEMPS DE CALCUL

Les calculs se font sur une station de travail Hewlett-Packard 735/125 autonome ou sur la station Hewlett-Packard 700/RX relié à un réseau.

Le temps de calcul est principalement dépendant du trajet de chargement, et non de l'incrément de chargement imposé. Une simulation quelconque représente en moyenne 300 incréments macroscopiques. Ce nombre peut être multiplié par 3 afin de prendre en compte les incréments intermédiaires. À chaque fois, et pour chaque grain (100 dans notre cas), le test relatif aux combinaisons potentiellement actives ( $2^x$  si  $x$  est le nombre de variantes potentiellement actives) est effectué ainsi que tous les calculs qui lui sont associés. Ceci représente finalement le chiffre de  $90000 \cdot 2^x$  combinaisons testées quel que soit le chargement avec  $x$  le nombre de variantes potentiellement actives en moyenne ( $1 \leq x \leq 24$ ).

- Pour un chargement isotherme, le temps moyen pour charger et décharger à 3% de déformation de transformation est de 20 minutes.
- Pour un chargement anisotherme, le temps dépend de la contrainte appliquée. Pour de très faibles contraintes (10 à 25 MPa), le temps moyen est d'une dizaine d'heures (fonction de l'occupation du réseau).

On note toutefois que, si le temps d'un essai expérimental en superélasticité isotherme n'est que de quelques minutes pour un cycle, les essais en fluage anisotherme peuvent prendre 8 à 20 heures (fig.IV-29).

### A3.4 - RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [LB89] Lipinski P., Berveiller M., "*Elastoplasticity of micro-inhomogeneous metals at large strains*", Int. J. of Plasticity, 5, pp.149-172 (1989)