



**HAL**  
open science

# Détermination des déformations critiques en cisaillement adiabatique : effets matériels et effets de structure

Jean-Louis Minot

► **To cite this version:**

Jean-Louis Minot. Détermination des déformations critiques en cisaillement adiabatique : effets matériels et effets de structure. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1997. Français. NNT : 1997METZ018S . tel-01777203

**HAL Id: tel-01777203**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777203>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

6113421

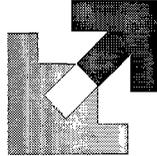


S/M2  
97/18

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

# THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

*Jean Louis MINOT*

Pour l'obtention du grade de :

DOCTEUR de L'UNIVERSITE de METZ

SPECIALITE : *Sciences de l'ingénieur*  
OPTION : *Mécanique*

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19970385
Cote	S/M2 97/18
Loc	Magasin

Détermination des déformations critiques  
en cisaillement adiabatique :  
effets matériels et effets de structure

Soutenu le 26 Juin 1997 devant le jury composé de :

<i>COUQUE H.</i>	<i>(G.I.A.T. Industries)</i>	<i>Examineur</i>
<i>DORMEVAL R.</i>	<i>(C.E.A.)</i>	<i>Président</i>
<i>FRESSENGEAS C.</i>	<i>(Université de Metz)</i>	<i>Directeur</i>
<i>GILORMINI P.</i>	<i>(E.N.S. Cachan)</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>KLEPACZKO J.R.</i>	<i>(Université de Metz)</i>	<i>Examineur</i>
<i>LEROY Y.M.</i>	<i>(Ecole Polytechnique)</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>VRAY E.</i>	<i>(D.G.A.)</i>	<i>Examineur</i>

# *Remerciements*

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz.

En tout premier lieu, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à Monsieur FRESSENGEAS, Professeur à l'Université de Metz, qui a accepté de diriger cette thèse.

J'adresse mes plus sincères remerciements aux rapporteurs de ce travail, Monsieur GILORMINI, Directeur de recherche C.N.R.S. à l'E.N.S. Cachan, et à Monsieur LEROY, Chargé de Recherche C.N.R.S. à l'Ecole Polytechnique, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter sur ce travail et pour leur présence dans le jury.

Je suis reconnaissant envers Monsieur DORMEVAL, Ingénieur au sein du C.E.A. d'avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Je remercie également Monsieur COUQUE, Ingénieur au G.I.A.T. Industries, Monsieur KLEPACZKO, Directeur de recherche C.N.R.S. au L.P.M.M. de l'Université de Metz, Monsieur VRAY Ingénieur à la D.G.A., pour leur participation à mon jury de thèse.

Je tiens également à remercier les enseignants de Mécanique de l'université de Metz, de l'Ecole de Mines de Nancy, ainsi que tous les membres du laboratoire qui m'ont aimablement accueilli.

Merci enfin à tous ceux que j'aurais pu malencontreusement oublier. Qu'ils ne me tiennent pas rigueur de mon étourderie.

Je dédie ce travail à Laurence qui m'a soutenu, encouragé et aidé durant ces années.

*Sommaire*

*Sommaire*

---

<i>Introduction</i>	<i>1</i>
---------------------	----------

---

<i>Chapitre 1</i>	<i>7</i>
<i>Présentation des Bandes de Cisaillement Adiabatique</i>	

---

<b>I : INTRODUCTION</b> .....	10
<b>II : FORMATION DES BANDES DE CISAILLEMENT ADIABATIQUE</b> .....	11
II.1 : PRINCIPE DE FORMATION DES B.C.A. ....	11
II.2 : B.C.A. DANS LES STRUCTURES ....	12
II.2.1 : Usinage .....	12
II.2.2 : Perforation .....	14
II.3 : TECHNIQUE EXPERIMENTALES.....	15
II.3.1 : Production des B.C.A. ....	15
II.3.2 : Instrumentation locale .....	18
II.4 : OBVERSVATIONS EXPERIMENTALES .....	20
II.4.1 : Les différents stades de la localisation .....	20
II.4.2 : Position axiale des B.C.A. ....	23
II.4.3 : Propagation des bandes de cisaillement .....	24
II.4.4 : Déformation au centre de la bande .....	25
II.4.5 : Déformation nominale critique et déformation nominale à rupture .....	26
II.4.6 : Largeur de bande .....	27
II.4.7 : Température.....	28
II.4.8 : Conditions de chargement .....	29
II.4.9 : Effets d'échelle.....	30
<b>III : MODELISATION</b> .....	30
III.1 : LOIS DE COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE.....	31
III.2 : CONCEPTS DE BIFURCATION, D'INSTABILITE ET DE LOCALISATION	32

III.2.1 : Structure parfaite .....	34
III.2.2 : Structure imparfaite .....	36
III.3 : MODELE UNIDIMENSIONNEL DE GLISSEMENT SIMPLE .....	38
III.3.1 : Hypothèses .....	38
III.3.2 : Figure.....	38
III.3.3 : Conséquence.....	39
III.4 : LOI DE COMPORTEMENT.....	39
III.4.1 : Hypothèses .....	39
III.4.2 : Loi générale .....	39
III.4.3 : Loi puissance multiplicative.....	39
III.4.4 : Loi de Knowles.....	40
III.5 : FORMULATION DU PROBLEME.....	41
III.5.1 : Compatibilité cinématique .....	41
III.5.2 : Conservation de la quantité de mouvement.....	41
III.5.3 : Premier principe de la thermodynamique.....	41
III.5.4 : Conditions aux limites.....	42
III.5.5 : Solution homogène adiabatique. ....	43
III.6 : ANALYSE DE LA LOCALISATION .....	45
IV : CONCLUSION.....	50
TABLE DES FIGURES.....	51
ANNEXES DU CHAPITRE 1.....	52
CRITERE DE BIFURCATION, D'INSTABILITE, DE LOCALISATION.....	52

---

## *Chapitre 2*

53

### *Distribution de la déformation plastique dans les B. C. A*

---

I : INTRODUCTION.....	56
II : DISTRIBUTION DE LA DEFORMATION PLASTIQUE.....	57
II.1 : MODELISATION.....	57
II.1.1 : Modélisation de l'éprouvette de Kolsky.....	57
II.1.2 : Description du défaut.....	58
II.1.3 : Loi de comportement.....	61
II.1.4 : Equations fondamentales .....	62
II.2 : CALCUL DE LA DISTRIBUTION DE LA DEFORMATION PLASTIQUE.....	64
II.2.1 : Méthode asymptotique.....	64
II.2.2 : Résolution complète .....	68
II.3 : CALCUL ANALYTIQUE POUR LA LOI DE KNOWLES .....	73
II.3.1 : Utilisation des intégrales du type $\int_u^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$ .....	74

II.3.2 : Utilisation des intégrales du type $\int_0^u f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$ .....	75
II.3.3 : Comparaison entre les différentes expressions.....	76
II.3.4 : Déformation plastique le long du défaut .....	79
<b>III : CONDITION DE PROPAGATION ET EFFET D'ECHELLE</b> .....	<b>81</b>
III.1 : INTEGRALE J.....	81
III.1.1 : Expression générale.....	81
III.1.2 : Contour éloigné .....	82
III.1.3 : Contour le long de la surface de glissement.....	84
III.2 : CONDITION DE PROPAGATION .....	85
III.2.1 : Hypothèses .....	85
III.2.2 : Modèle.....	86
III.3 : EXEMPLE D'APPLICATION.....	88
<b>IV : CONCLUSION</b> .....	<b>92</b>
<b>TABLE DES FIGURES</b> .....	<b>93</b>
<b>ANNEXES DU CHAPITRE 2</b> .....	<b>94</b>
A.II.1 : DEVELOPPEMENT EN SERIE DE GAUSS .....	94
A.II.2 : FORMULAIRE DE CALCUL INTEGRAL .....	94
A.II.3 : FORMULAIRE DE CALCUL INTEGRAL (LOI DE KNOWLES) .....	95

---

*Chapitre 3*

97

---

*Déformation critique*


---

<b>I : INTRODUCTION</b> .....	<b>100</b>
<b>II : DEFORMATION CRITIQUE</b> .....	<b>101</b>
II.1 : EXPRESSION GENERALE.....	101
II.2 : CAS DE LA FONCTION DE KNOWLES .....	101
II.2.1 : Influence des paramètres rhéologiques.....	102
II.2.2 : Influence du défaut .....	104
<b>III : ETUDE DES CONDITIONS AUX LIMITES</b> .....	<b>106</b>
III.1 : CONDITION AUX LIMITES MIXTES.....	106
III.1.1 : Calcul de la vitesse au bord $v(1,t)$ .....	107
III.1.2 : Calcul de la contrainte aux bords $\tau(1,t)$ .....	108
III.1.3 : Détermination de $\gamma(0,t)$ et $\dot{\gamma}(0,t)$ .....	108
III.1.4 : Détermination de la courbe contrainte-déformation nominale.....	109
III.1.5 : Exemple.....	110
III.1.6 : Conclusion.....	111

---

III.2 : LOIS DE COMPORTEMENT EN PUISSANCES MULTIPLICATIVES .....	112
III.2.1 : Introduction .....	112
III.2.2 : Contrôle en vitesse .....	112
III.2.3 : Conditions en contrainte.....	117
III.2.4 : Comparaison entre les deux contrôles.....	119
III.3 : CONCLUSION.....	122
IV : CONFRONTATION EXPERIMENTALE.....	123
V : CONCLUSION .....	125
TABLE DES FIGURES.....	126
ANNEXES DU CHAPITRE 3.....	127
A.III.1 : CALCUL D'INTEGRALES ETENDUE A LA ZONE DE LOCALISATION.	127
A.III.2 : LOI PUISSANCE THERMIQUEMENT ACTIVEE.....	128

---

*Conclusion* *131*

---

---

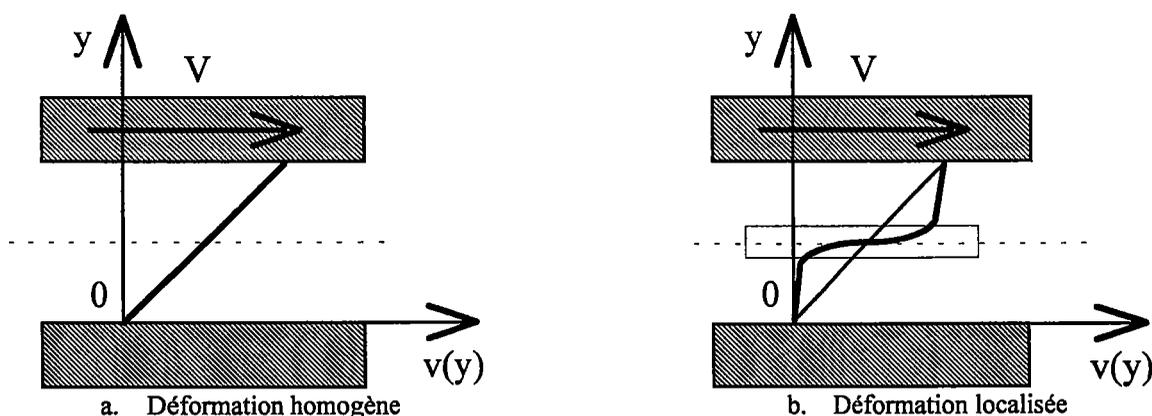
*Références bibliographiques* *135*

---

*Introduction*

# Introduction

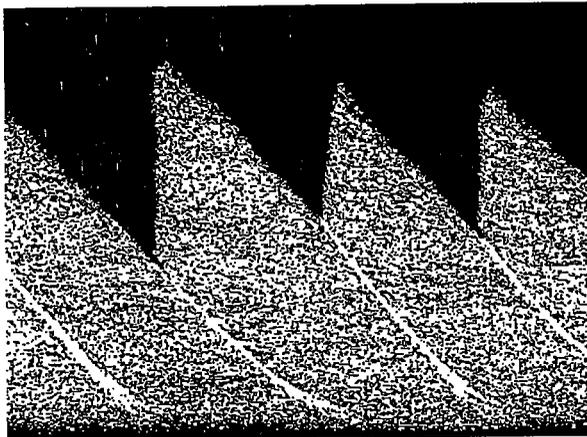
Le but de la mise en forme des matériaux est d'imposer à ceux-ci une déformation plastique donnée que l'on souhaite généralement la plus homogène possible. Or, pour certains matériaux et pour certaines conditions de chargement, le régime d'écoulement plastique homogène devient instable : un changement de mode de déformation se produit, qui peut éventuellement déboucher sur une déformation fortement non homogène. Il existe alors des zones relativement étroites où la déformation plastique est plus importante ; on dit qu'il y a localisation de la déformation plastique. Les bandes de cisaillement sont un exemple de ces zones de localisation (**Figure 0.1**).



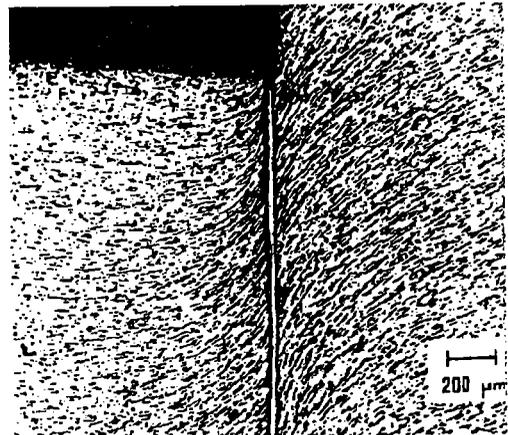
**Figure 0.1 : Exemple de la localisation d'écoulement plastique**  
(en cisaillement simple)

Elles constituent un mécanisme "universel" de déformation que l'on rencontre dans une grande variété de matériaux et à des échelles très variées. Dans les métaux, elles peuvent être de nature cristallographique, intra-granulaire ou transgranulaire, et se manifester sur une

échelle microscopique ou macroscopique. A l'échelle macroscopique, elles apparaissent lors de processus de déformation à grande vitesse tel que l'Usinage à Très Grande Vitesse (**figure 0.2.a**) ou la perforation de plaques épaisses (**figure 0.2.b**). Elles apparaissent également lors de certains processus quasi-statiques, comme la striction d'une tôle emboutie ou celle d'une éprouvette en traction simple.



a. Usinage à très grande vitesse  
Copeau de TA6V obtenu en tournage  
d'après LESOURD (1996)

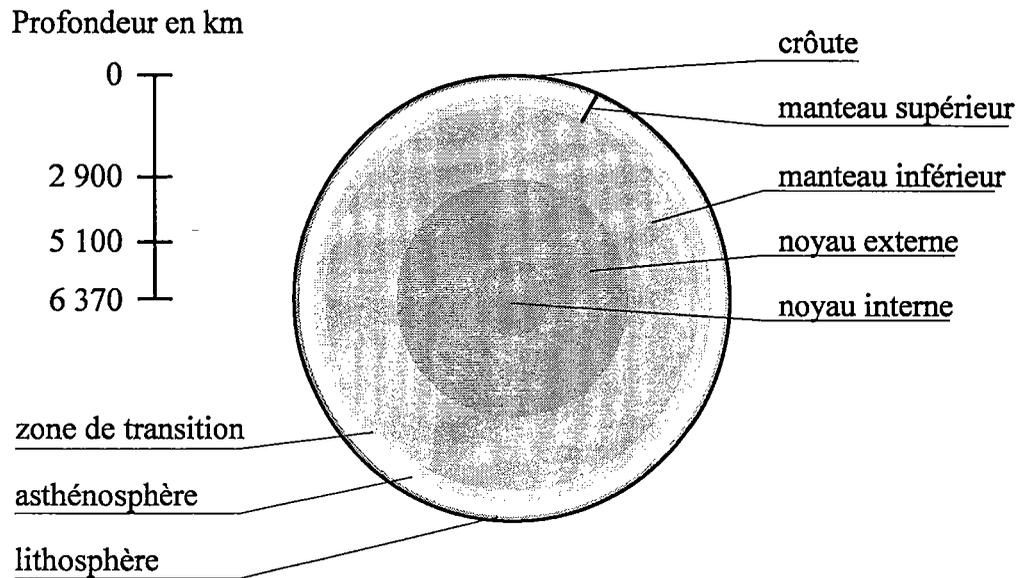


b. Perforation de plaques épaisses  
Acier CRS 1018 impacté à 100 m/s  
d'après Rogers (1983)

**Figure 0.2 : Exemple de bandes de cisaillement**

On retrouve également des bandes de cisaillement dans les polymères (1  $\mu\text{m}$  à 10  $\mu\text{m}$ ) ou dans les géomatériaux (roches, argiles ...). Dans le domaine de la géophysique, l'étude de la tectonique des plaques montre que l'asthénosphère (**figure 0.3**), qui est une couche visqueuse de plusieurs dizaines de kilomètres d'épaisseur sur laquelle repose la lithosphère, peut être considérée comme une zone de cisaillement intense avec, bien entendu, des ordres de grandeur très différents de ceux que l'on peut rencontrer dans les matériaux métalliques (LEROY (1991)).

Le phénomène de localisation sous forme de bandes de cisaillement peut également être rencontré dans l'écoulement des glaciers ainsi que dans les écoulements d'huiles lubrifiantes (Bair, Qureshi & Winer W.O.(1993)). Cet inventaire des exemples, où peuvent être observées des bandes de cisaillement, n'est naturellement pas exhaustif.



**Figure 0.3 : Asthénosphère - lithosphère**

Dans les métaux on peut distinguer deux types de bandes de cisaillement macroscopiques :

- les bandes de cisaillement isotherme
- les bandes de cisaillement dites "adiabatiques"

La déstabilisation de l'écoulement uniforme, conduisant à des bandes de cisaillement isotherme, est le résultat d'un mécanisme d'adoucissement purement mécanique du matériau. La décroissance de la contrainte d'écoulement provient d'un endommagement du matériau, d'un effet de vertex de la surface d'écoulement ou d'une évolution de la texture cristallographique. En ce qui concerne les bandes de cisaillement "adiabatique", la déstabilisation de l'écoulement uniforme est due à un mécanisme de couplage thermo-mécanique.

Pour des matériaux déformés à grande vitesse ou présentant une faible conductivité thermique, environ quatre vingt dix pour cent du travail de la déformation plastique se convertit localement et irréversiblement en un dépôt de chaleur. Une concentration de contraintes, un défaut matériel ou géométrique, entraîne un accroissement local de la déformation, ce qui conduit à une élévation locale de la température. Pour un matériau thermo-adoucissant, cette augmentation de température provoque, à nouveau, une augmentation de la déformation ; ainsi un cycle auto-catalytique catastrophique s'initialise-t-il

et conduit à la formation de bandes de cisaillement adiabatique. Celles-ci provoquent une importante chute de la capacité de résistance du matériau éventuellement suivie de la rupture.

Dans certains cas, cette rupture est souhaitée ; c'est le cas, par exemple, de l'usinage où l'on souhaite la fragmentation du copeau par cisaillement adiabatique, ou de la perforation si l'on se place du côté du projectile ; en revanche, dans d'autres cas on veut éviter la rupture. C'est le cas notamment de l'emboutissage et de la perforation envisagée du point de vue de la résistance des blindages. Même en l'absence de rupture, la fragilisation du matériau par le cisaillement adiabatique conduit à rechercher les conditions dans lesquelles il pourra être évité. C'est pourquoi l'étude des bandes de cisaillement a été l'objet de développements considérables au cours des trente dernières années.

Dans ce travail, nous nous intéressons uniquement aux bandes de cisaillement adiabatique et nous nous proposons d'étudier, plus particulièrement, les conditions critiques de déclenchement de la phase brutale de perte de la capacité de résistance du matériau au cisaillement, c'est à dire les différents facteurs physiques provoquant la chute de la contrainte de cisaillement supportée par le matériau.

Les paramètres rhéologiques, les facteurs structurels locaux et la morphologie fine, comme les défauts de structure du matériau ou les imperfections géométriques, peuvent avoir une influence sur l'évolution de la localisation et affecter les déformations nominales critiques.

Il en est de même de facteurs structurels globaux comme la taille des échantillons ou la nature des conditions aux limites : il est intéressant de chercher à comparer l'importance relative des facteurs rhéologiques et structurels, locaux ou globaux, sur les déformations nominales critiques et c'est ce que nous ferons dans ce travail.

Après une revue des différentes techniques expérimentales, permettant la description de la formation et de l'évolution des B.C.A. à partir de la mesure de grandeurs caractéristiques (déformations nominales, déformations nominales à la rupture, déformations et températures locales), le chapitre 1 sera consacré à la formulation du problème de la localisation de la déformation thermo-viscoplastique ainsi qu'aux modèles associés.

Les méthodes que nous utilisons, pour déterminer la répartition des déformations plastiques orthogonalement à la direction de la bande, seront exposées dans le second chapitre. Un modèle bi-dimensionnel, permettant d'introduire les effets d'échelle et de décrire la répartition des déformations plastiques dans le sens de la bande, sera également commenté.

Et enfin, dans le troisième et dernier chapitre, nous présenterons l'influence des paramètres structurels et des paramètres rhéologiques de l'éprouvette. L'influence des conditions aux limites sur le point de chute de contrainte sera notamment étudiée. Une étude analytique, simple à mettre en place et peu coûteuse en temps de calculs, permettra de déterminer la déformation nominale critique avec précision.

# *Chapitre 1*

## **Présentation des Bandes de Cisaillement Adiabatique**

# Sommaire

<b>I : INTRODUCTION</b> .....	10
<b>II : FORMATION DES BANDES DE CISAILLEMENT ADIABATIQUE</b> .....	11
II.1 : PRINCIPE DE FORMATION DES B.C.A. ....	11
II.2 : B.C.A. DANS LES STRUCTURES .....	12
II.2.1 : Usinage .....	12
II.2.2 : Perforation .....	14
II.3 : TECHNIQUE EXPERIMENTALES.....	15
II.3.1 : Production des B.C.A. ....	15
II.3.2 : Instrumentation locale .....	18
II.4 : OBSERVATIONS EXPERIMENTALES .....	20
II.4.1 Les différents stades de la localisation.....	20
II.4.2 : Position axiale des B.C.A. ....	23
II.4.3 : Propagation des bandes de cisaillement .....	24
II.4.4 : Déformation au centre de la bande .....	25
II.4.5 : Déformation nominale critique et déformation nominale à rupture .....	26
II.4.6 : Largeur de bande .....	27
II.4.7 : Température .....	28
II.4.8 : Conditions de chargement .....	29
II.4.9 : Effets d'échelle.....	30
<b>III : MODELISATION</b> .....	30
III.1 : LOIS DE COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE.....	31
III.2 : CONCEPTS DE BIFURCATION, D'INSTABILITE ET DE LOCALISATION	32
III.2.1 : Structure parfaite .....	34
III.2.2 : Structure imparfaite .....	36

III.3 : MODELE UNIDIMENSIONNEL DE GLISSEMENT SIMPLE .....	38
III.3.1 : Hypothèses .....	38
III.3.2 : Figure.....	38
III.3.3 : Conséquence.....	39
III.4 : LOI DE COMPORTEMENT.....	39
III.4.1 : Hypothèses .....	39
III.4.2 : Loi générale .....	39
III.4.3 : Loi puissance multiplicative.....	39
III.4.4 : Loi de Knowles.....	40
III.5 : FORMULATION DU PROBLEME.....	41
III.5.1 : Compatibilité cinématique .....	41
III.5.2 : Conservation de la quantité de mouvement.....	41
III.5.3 : Premier principe de la thermodynamique.....	41
III.5.4 : Conditions aux limites.....	42
III.5.5 : Solution homogène adiabatique. ....	43
III.6 : ANALYSE DE LA LOCALISATION .....	45
<b>IV : CONCLUSION.....</b>	<b>50</b>
<b>TABLE DES FIGURES.....</b>	<b>51</b>
<b>ANNEXES DU CHAPITRE 1.....</b>	<b>52</b>
<b>CRITERE DE BIFURCATION, D'INSTABILITE, DE LOCALISATION.....</b>	<b>52</b>

# Chapitre 1

## Présentation des Bandes de Cisaillement Adiabatique

### I : INTRODUCTION

Lors de processus de déformation à grande vitesse, ou à vitesse plus faible pour des matériaux présentant une faible conductivité thermique, la déformation homogène d'une structure laisse souvent place à une déformation localisée. Les Bandes de Cisaillement Adiabatique (B.C.A.) constituent un exemple de localisation intense de la déformation plastique ; elles peuvent ainsi être des éléments précurseurs de la rupture, ou être responsables de la détérioration d'une structure.

Si nous sommes en présence d'éléments de construction, on veut éviter l'altération de leurs capacités de résistance mécanique ; on cherche donc à minimiser le risque d'apparition et de développement des B.C.A. Inversement, si l'on veut, par exemple, améliorer les conditions de coupe dans un processus d'usinage à très grande vitesse ou perforer des plaques épaisses, on recherche l'apparition et le développement des B.C.A. On pourrait encore citer bien d'autres domaines (forgeage, emboutissage, chocs à grande vitesse par exemple) où les B.C.A. peuvent apparaître ; c'est pourquoi on comprend l'intérêt porté à leur étude.

L'étude expérimentale et théorique des B.C.A. peut se faire uniquement si on sait les produire de façon contrôlée et reproductible. " Sur le terrain ", c'est-à-dire lors de la déformation de structures complexes, il est très difficile de réaliser ces conditions, ce qui a conduit les expérimentateurs à mener les études en laboratoire à partir de situations simplifiées qui fournissent de nombreuses indications sur la morphologie et les mécanismes de développement. C'est pourquoi, la première partie de ce chapitre sera notamment consacrée à différentes techniques d'observation expérimentale permettant de caractériser les B.C.A..

Nous présenterons ensuite une étude analytique de différents modèles proposés permettant de rendre compte de l'apparition et du développement des B.C.A. pour des matériaux thermo-viscoplastiques. Certaines méthodes classiques d'analyse de l'apparition et du développement des B.C.A. seront rappelées ainsi que les conclusions qu'elles permettent de tirer quant au mode d'écoulement plastique.

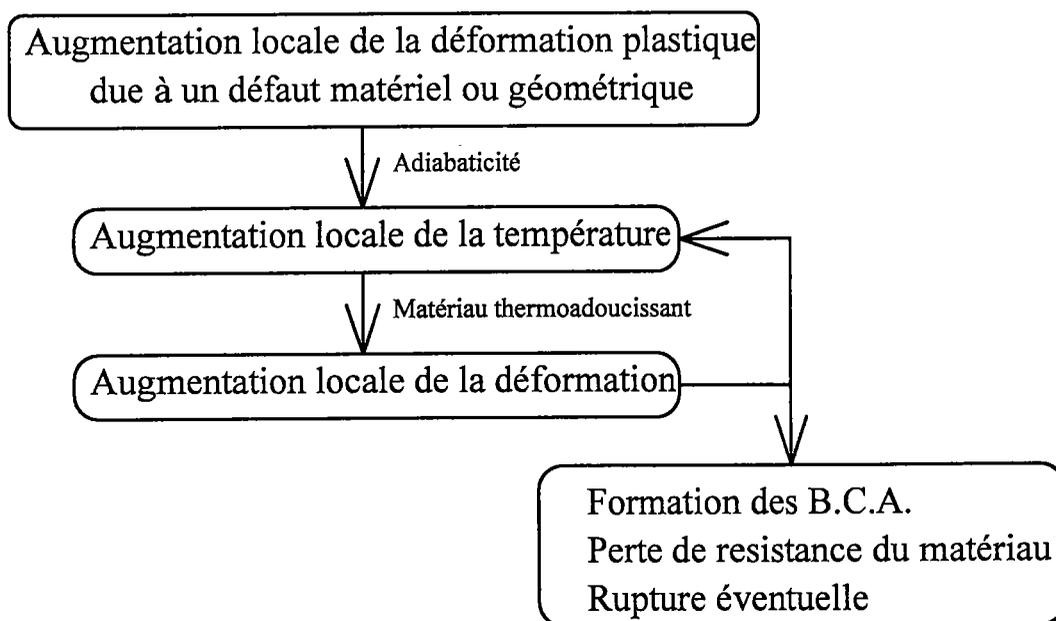
## **II : FORMATION DES BANDES DE CISAILLEMENT ADIABATIQUE**

### **II.1 : PRINCIPE DE FORMATION DES B.C.A.**

D'après JOHNSON (1987), l'existence de bandes étroites de déformation intense, durant la déformation plastique des matériaux, a été citée pour la première fois par TRESKA (1878), dont le nom est universellement associé au critère de la contrainte de cisaillement maximale. Plus tard, MASSEY (1921) décrit le phénomène de localisation de la déformation plastique sous forme de bandes de chaleur ("Heat lines") du fait de la forte augmentation de température durant leur formation.

ZENER et HOLLOMON (1944) établissent le mécanisme de l'instabilité thermo-mécanique à partir de l'observation expérimentale suivante : une augmentation locale de la déformation plastique résultant d'une inhomogénéité matérielle ou d'un défaut géométrique entraîne une élévation locale de la température. En effet 90% du travail de déformation plastique se transforme en énergie calorifique qui est conservée localement dans le cas d'une vitesse de déformation élevée ou d'un matériau possédant une faible conductivité thermique.

Dans les matériaux thermo-viscoplastiques, les effets de l'adoucissement thermique sont déstabilisants, les effets de la sensibilité à la vitesse de déformation et de l'écroutissage par la déformation sont stabilisants. Lorsque les effets déstabilisants sont supérieurs aux effets stabilisants, l'écoulement plastique est facilité dans les zones fragilisées, ce qui entraîne une nouvelle déformation plastique locale. Nous sommes en présence d'un mécanisme auto-catalytique qui peut devenir rapidement catastrophique ; il dépend principalement des paramètres rhéologiques du matériau, de la géométrie de la structure et des conditions aux limites.

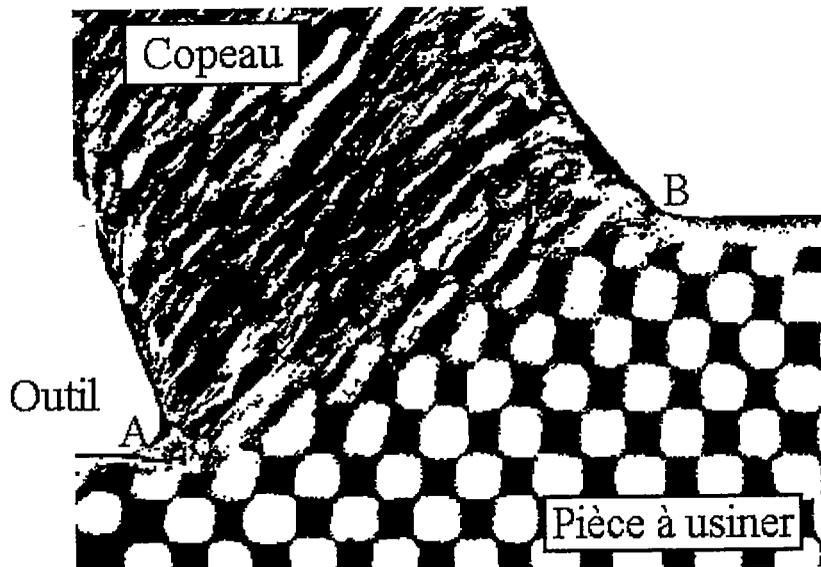


**Figure 1-1 : Mécanisme de formation des B.C.A.**

## II.2 : B.C.A. DANS LES STRUCTURES

### II.2.1 : Usinage

Une étude expérimentale (OXLEY(1989)) montre qu'au cours d'un usinage à grande vitesse, on peut observer deux zones de déformation plastique par cisaillement localisé dans le copeau. La **Figure 1-2** réalisée à l'aide d'une éprouvette en pâte à modeler, ne montre pas de bande de cisaillement. Son but est de situer les deux zones.



**Figure 1-2 : Déformation dans le copeau ; grille de 0,05 mm de côté d'après OXLEY (1989)**

La première zone, appelée zone de cisaillement primaire, se situe au voisinage du plan (AB), à la limite du copeau et de la pièce à usiner. On peut remarquer que cette zone se déplace à travers le matériau en même temps que l'outil. Une seconde zone, nommée zone de cisaillement secondaire, peut également se développer à l'interface outil - matériau lorsque celui-ci "colle" à l'outil.

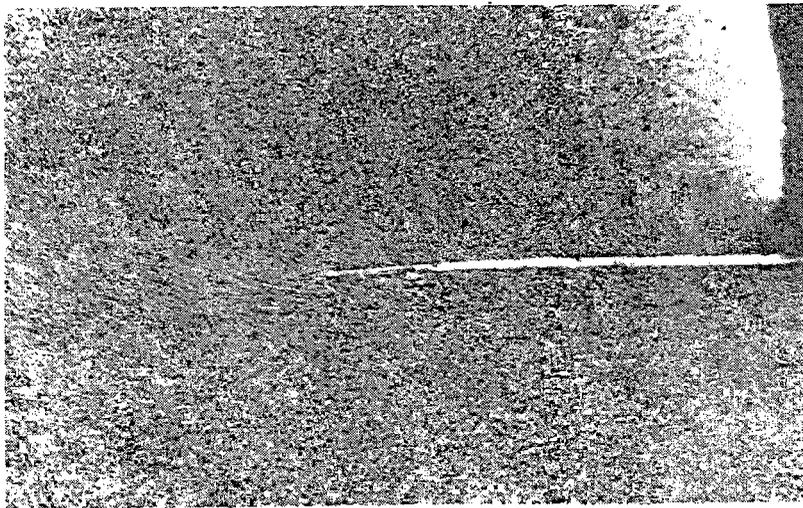
Lorsque la vitesse d'avance est assez grande, on observe un phénomène de segmentation du copeau par des B.C.A. apparaissant périodiquement (**Figure 1.3**) :



**Figure 1.3 : Copeau de AISI 4340 d'après SEMIATIN S.L., LAHOTI G.D. & OH S.I. (1983)**

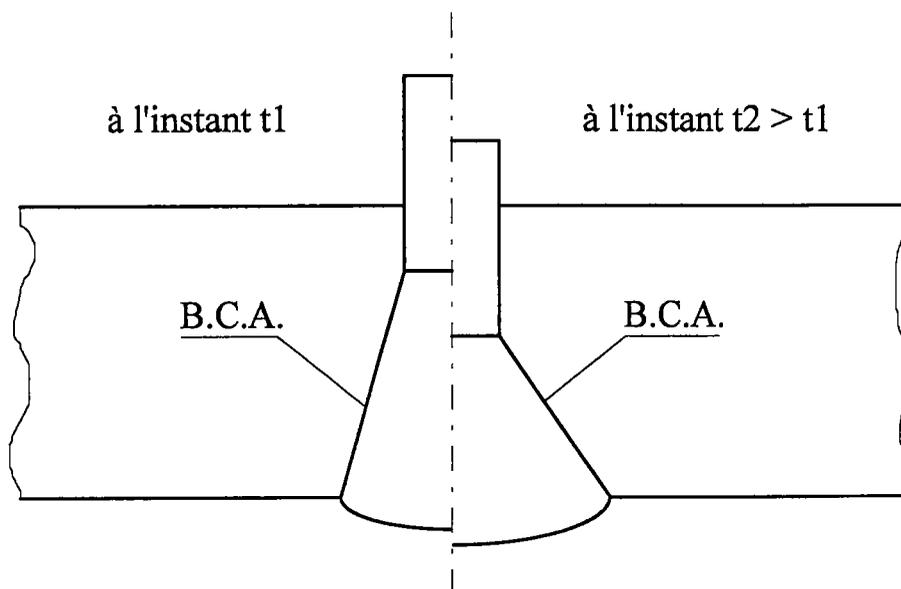
### II.2.2 : Perforation

D'après une étude expérimentale de AWERBUCH et BODNER (1973), il existe une zone de cisaillement, plus ou moins large, au cours de la perforation de plaques métalliques par un projectile. Cette zone se situe au coin du cratère et est parallèle à celui-ci. Sur la **Figure 1-4** extraite d'un article de ROGERS (1983), on distingue une bande de cisaillement parfaitement dans le prolongement du cratère formé par l'impact d'un projectile. On remarque également la longueur finie de la bande, qui suggère le caractère propagatif du phénomène.



**Figure 1-4 : Perforation de plaques épaisses**  
d'après ROGERS (1983)

Dans certaines conditions, des B.C.A. peuvent se développer sur la surface d'un tronc de cône dont le sommet est le fond du cratère (RAVID et BODNER (1983)). Dans ce cas, la direction des B.C.A. change avec l'avance du projectile (**Figure 1-5**), ce qui rend l'étude particulièrement difficile avec les connaissances actuelles.



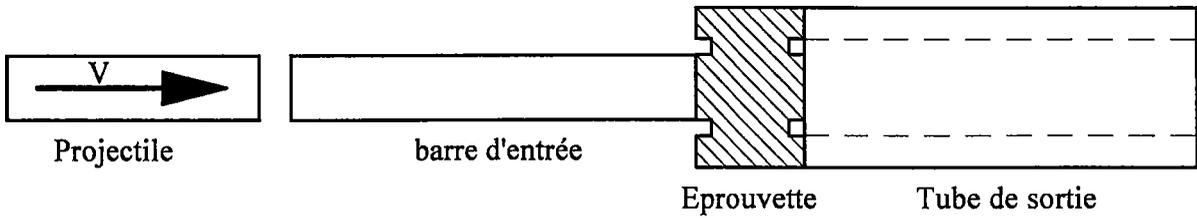
**Figure 1-5 : Perforation de plaques épaisses**  
d'après RAVID et BODNER (1983)

### II.3 : TECHNIQUE EXPERIMENTALES

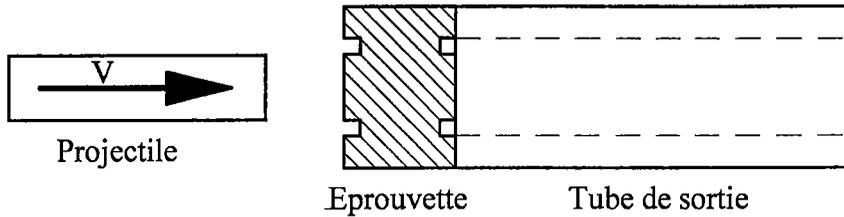
#### II.3.1 : Production des B.C.A.

Dans une structure complexe, il est très difficile de contrôler le développement des B.C.A. Pour faire une étude fiable et reproductible, il est nécessaire de construire des expériences de laboratoire simples sur lesquelles on peut contrôler les conditions aux limites et la génération des B.C.A..

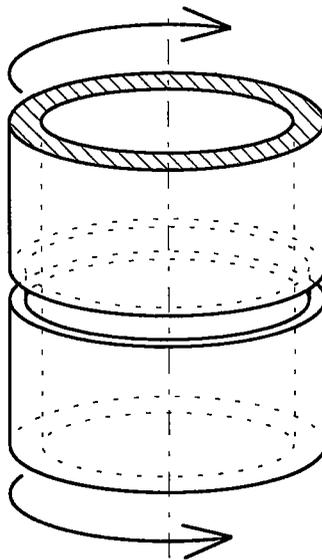
Parmi celles-ci, on trouve la torsion à grande vitesse d'un tube à parois minces (**Figure 1-6.c**) à l'aide de machines hydrauliques de torsion à grande vitesse, n'excédant pas  $5 \cdot 10^2 \text{ s}^{-1}$ , ou à l'aide de barres de torsion de KOLSKY (1949) pour des vitesses de déformation de l'ordre de  $5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  ; on trouve également l'essai de double cisaillement pour des vitesses de déformation pouvant aller jusqu'à  $10^5 \text{ s}^{-1}$  (**Figure 1-6.b**). Ces méthodes ont l'avantage de ne pas présenter les phénomènes de striction, communs aux essais de traction, qui sont des instabilités de nature géométrique.



a Expérience du double cisaillement d'après CAMPBELL et FERGUSON (1970)



b Expérience du double cisaillement par impact direct d'après KLEPACZKO (1994)

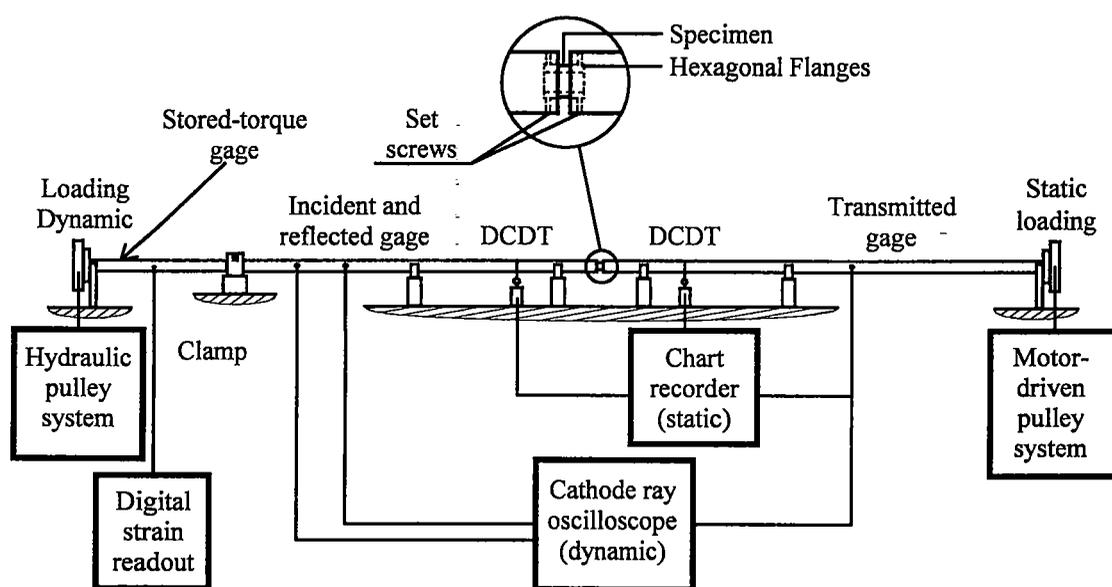


c. Torsion d'un tube à parois mince

**Figure 1-6 : Dispositifs expérimentaux de production de B.C.A.**

MARCHAND et DUFFY (1988) décrivent l'expérience des barres de torsion de Kolsky : une éprouvette tubulaire est placée entre deux barres de torsion (**Figure 1-7**). Un couple de torsion est emmagasiné en amont de la barre d'entrée ; ce couple est brutalement relâché, faisant ainsi propager une onde élastique de torsion dans la barre d'entrée. Une partie de cette onde est transmise à la barre de sortie par l'intermédiaire de l'éprouvette et l'autre partie est réfléchiée. L'éprouvette se trouve donc cisailée à grande vitesse (entre  $10^3 \text{ s}^{-1}$  et  $10^4 \text{ s}^{-1}$ ) entre

ces deux barres. L'étude des ondes élastiques incidente, transmise et réfléchi donne certaines informations globales : l'onde réfléchi nous indique la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(t)$ . Par intégration on obtient  $\gamma(t)$  ; l'onde transmise nous donne la contrainte de torsion  $\tau(t)$ . Ce sont des grandeurs moyennes sur l'échantillon, inadaptées par conséquent à la description de la localisation de la déformation.



**Figure 1-7 : Barre de torsion**  
d'après HARTLEY, DUFFY et HAWLEY (1987)

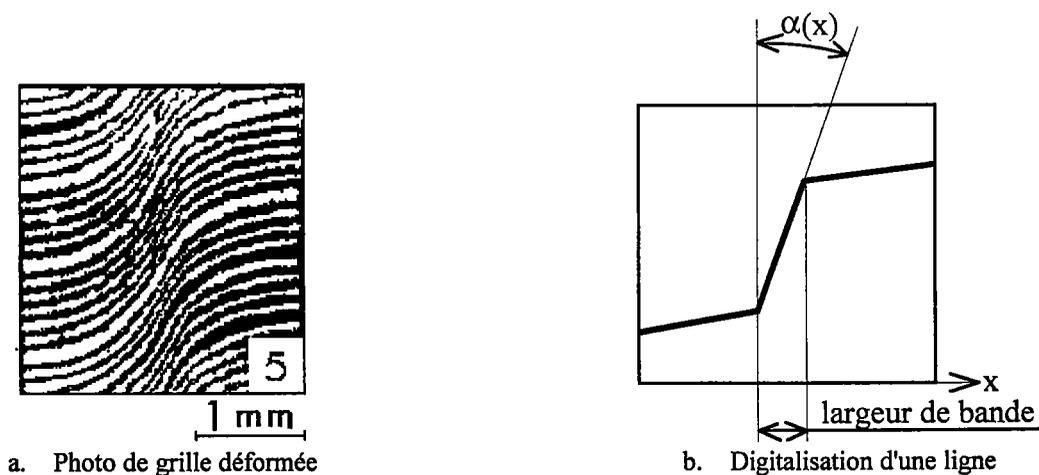
La technique du double cisaillement a été définie par CAMPBELL et FERGUSON (1970). Ces auteurs proposent de monter une éprouvette à double entaille entre des barres de Hopkinson modifiées. La barre de sortie est remplacée par un tube qui sert de support à l'éprouvette. Un projectile percute la barre d'entrée qui, elle-même, percute l'éprouvette. Celle-ci se trouve cisailée. CAMPBELL et FERGUSON (1970) constatent que l'éprouvette n'est pas soumise à du cisaillement pur, mais est également sollicitée en flexion. De plus, on peut remarquer une importante concentration de contrainte sur les congés ; de ce fait, le dépouillement des essais devient très complexe. OUSSOUADI (1994), REZAIG (1994) et KLEPACZKO (1994) ont résolu partiellement ce problème en modifiant les dimensions de l'éprouvette. En chargeant celle-ci directement par le projectile (suppression de la barre d'entrée), ce dispositif présente l'avantage d'accéder à une plage de vitesses de déformation plus étendue (jusqu'à  $10^5 \text{ s}^{-1}$ ) avec des vitesses de projectile modérées (de  $1 \text{ m s}^{-1}$  à  $200 \text{ m s}^{-1}$ ).

De plus, le chargement par impact direct permet de contrôler très précisément les conditions aux limites en vitesse imposées à l'échantillon.

L'étude de la distribution de la déformation ou du champ de température, au niveau de la zone de localisation, nécessite l'instrumentation locale de ces dispositifs expérimentaux.

### II.3.2 : Instrumentation locale

Pour la mesure de la déformation locale, GIOVANOLA (1988) MARCHAND et DUFFY (1988) proposent une méthode qui consiste à déposer une grille par photorésistance sur l'éprouvette et à photographier celle-ci à des intervalles de temps très rapprochés. On peut ainsi suivre l'évolution de la déformation locale dans le temps et dans l'espace. Si on digitalise une ligne, la pente  $\alpha(x)$  en un point de position axiale  $x$  est interprétée comme une mesure directe de la déformation plastique locale :  $\gamma(x) = \tan \alpha(x)$  ; la largeur de la bande est définie comme étant la plus petite distance séparant deux sections droites de pente uniforme, de part et d'autre de la zone de localisation (**Figure 1-8**)



**Figure 1-8 : Mesure de la déformation locale**

VALLE, COTTRON et LAGARDE (1995) travaillent actuellement sur une méthode optique de mesure locale des déformations à grande vitesse.

La méthode est basée sur la comparaison entre un état de référence et l'état déformé d'un réseau orthogonal marqué ou gravé à la surface d'une éprouvette localement plane. Les caractéristiques du réseau déformé sont mesurées grâce à sa transformée de Fourier optique,

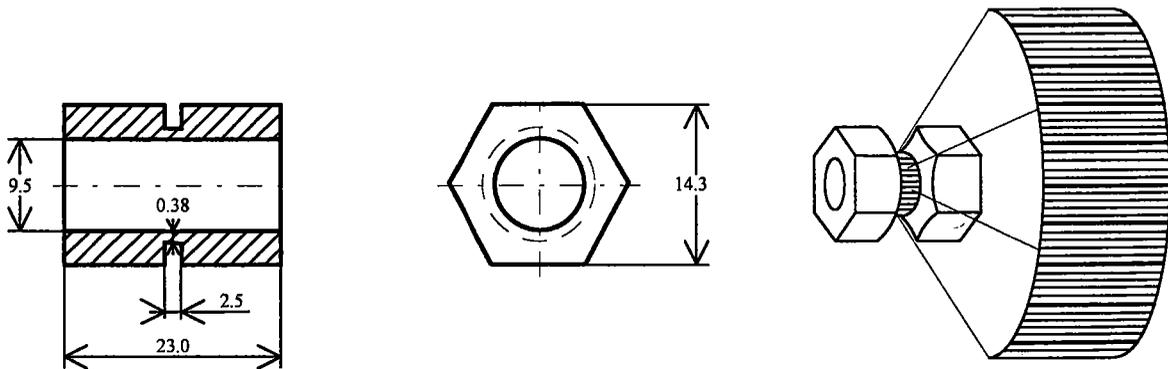
réalisée par diffraction sous incidence oblique ; la mesure des positions des taches de diffraction d'un faisceau laser sur un film holographique conduit à la détermination du tenseur des déformations en un point, de la rotation et du déplacement solide de l'éprouvette à une fréquence de 500 kHz. Pour l'instant, cette technique ne peut pas fournir des mesures de localisation car elle est ponctuelle. Un travail est en cours pour adapter cette méthode à un champ continu plan (WANG, COTTRON et LAGARDE).

DUFFY (1984) et HARTLEY, DUFFY et HAWLEY (1987) proposent une méthode basée sur la mesure du rayonnement infrarouge émis par l'éprouvette pour déterminer la distribution de température. Le dispositif comprend un détecteur constitué de 12 cellules de mesure carrées de 35  $\mu\text{m}$  de côté, espacées de 11  $\mu\text{m}$ . Chaque cellule fournit un relevé temporel de la température moyenne de la zone d'émission visée. Or, dans les métaux, la largeur des B.C.A. est comprise généralement entre 10  $\mu\text{m}$  et 200  $\mu\text{m}$  ce qui entraîne que la bande peut très bien se développer sur une seule zone, voire même entre deux zones ; il paraît donc bien difficile d'obtenir la distribution de la température dans la bande. Celle-ci n'est d'ailleurs obtenue que de manière statistique, à partir de plusieurs essais. En outre, le signal infrarouge est très sensible aux variations du facteur d'émissivité, par ailleurs mal connues, car dépendant fortement de la température, de l'état de la surface et de sa nature physico-chimique.

PINA et HERVE utilisent également une méthode de pyrométrie optique pour mesurer localement la température ; cette technique prend en compte l'évolution du facteur d'émissivité en fonction de la température et des propriétés physico-chimiques de la surface de l'éprouvette. Pour le découplage du problème, la solution proposée consiste à utiliser deux axes optiques, l'un travaillant aux très courtes longueurs d'ondes ( $\approx 0,7\mu\text{m}$ ), permettant d'obtenir un signal très peu sensible aux variations du facteur d'émissivité et de mesurer la température vraie avec une précision de 10K. L'autre axe, travaillant dans le domaine de l'infrarouge lointain ( $\approx 5\mu\text{m}$ ), est sensible aux variations de l'émissivité. Sachant qu'un changement de phase du matériau se traduit par une variation brutale de l'émissivité en fonction de la température, il est donc possible de le repérer avec cette solution à deux axes optiques (PINA (1996)).

## II.4 : OBSERVATIONS EXPERIMENTALES

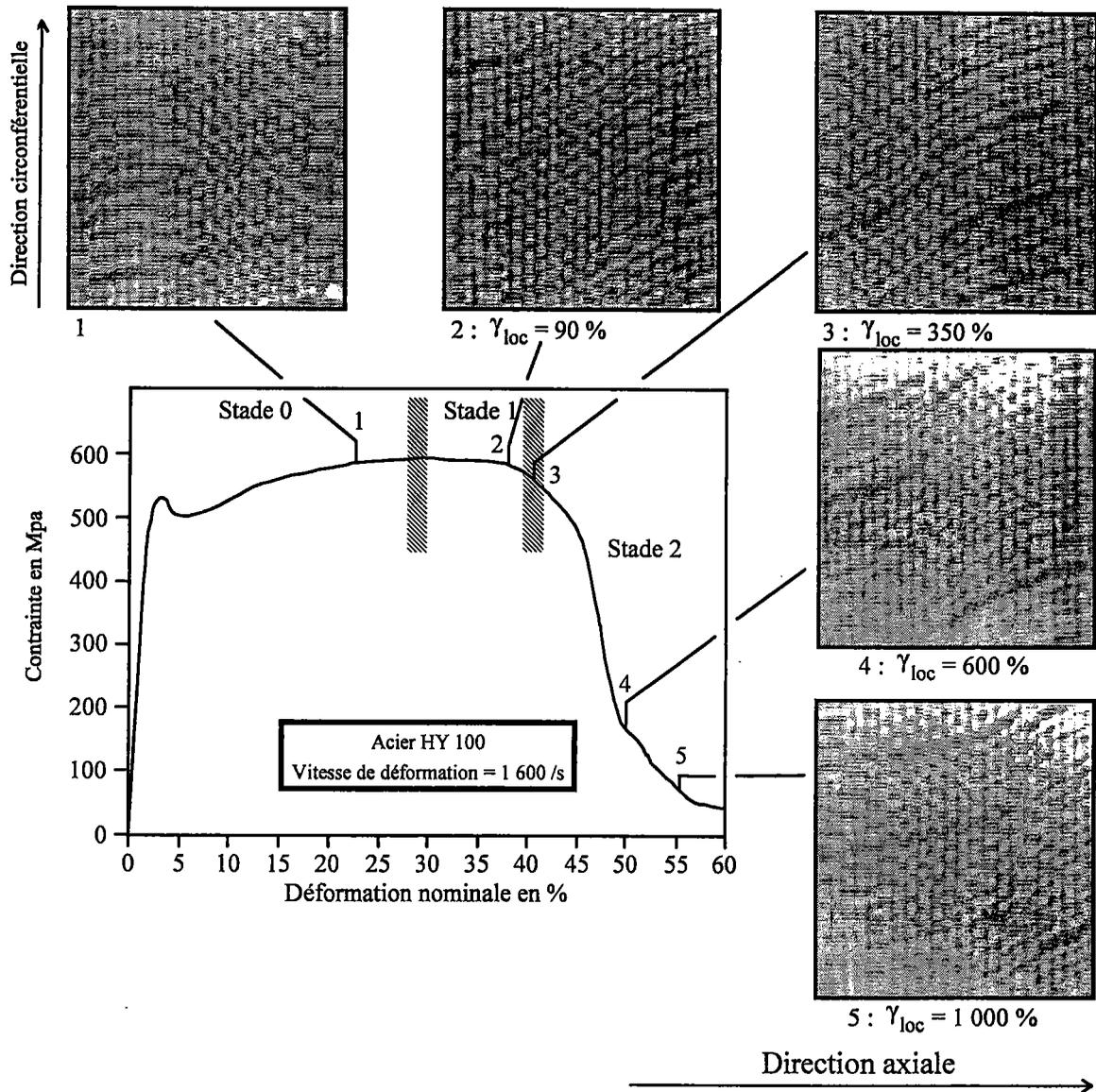
A l'aide des barres de Kolsky (**Figure 1-7**) et d'une éprouvette sur laquelle une grille a été déposée par photorésistance (**Figure 1-9**) MARCHAND et DUFFY (1988) ont suivi l'extension spatiale de la localisation lors de l'essai de torsion rapide d'un tube à paroi mince, en prenant simultanément trois photographies, avec trois appareils photographiques pointés sur trois points différents de la circonférence de l'éprouvette. De telles séries de photographies ont été prises à plusieurs moments de l'expérience, pour suivre également l'évolution temporelle.



**Figure 1-9 : Eproutette de torsion**  
d'après MARCHAND et DUFFY (1988)

### II.4.1 : Les différents stades de la localisation

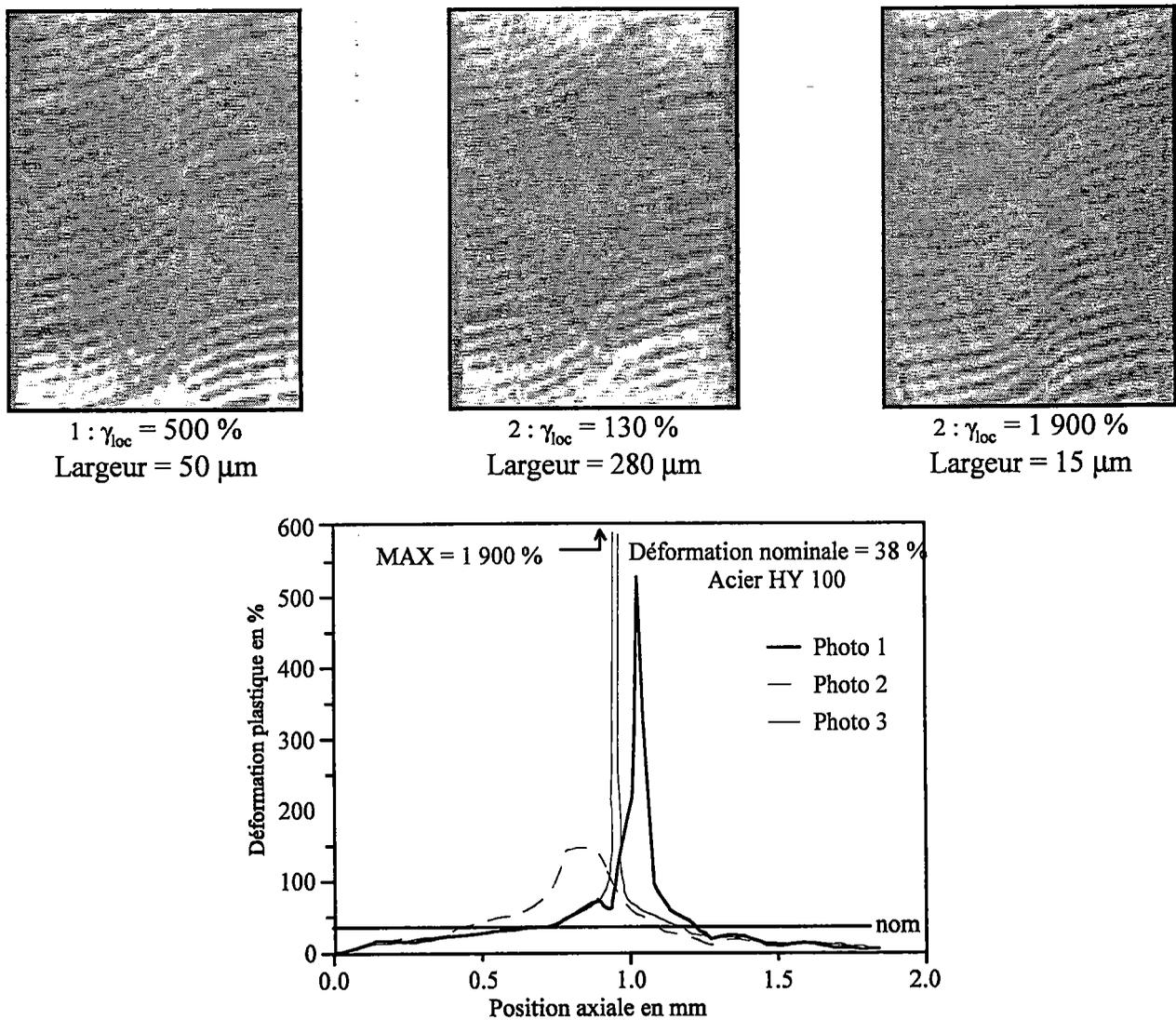
La courbe contrainte - déformation dynamique (**Figure 1-10**) associée aux séries de photographies permet la caractérisation des étapes de formation des B.C.A.



**Figure 1-10 : Courbe contrainte déformation de cisaillement dynamique et les photos de la grille d'un même point à différents instants d'après MARCHAND et DUFFY (1988).**

Jusqu'à l'extremum de la contrainte, la distribution de la déformation est homogène axialement et circonférentiellement car les trois photos prises simultanément sont identiques (photo n°1 de la Figure 1-10). La déformation nominale moyenne, associée à cet extremum, a une valeur constante et reproductible. C'est à ce point que débute le premier stade de la localisation (stade 1) qui se termine avec le début d'une décroissance importante de la contrainte. Au cours de ce stade, la déformation plastique commence à devenir inhomogène dans la direction axiale (photos n°2, 3 de la Figure 1-10), cependant qu'elle reste homogène circonférentiellement. L'inhomogénéité axiale de la déformation plastique reste relativement

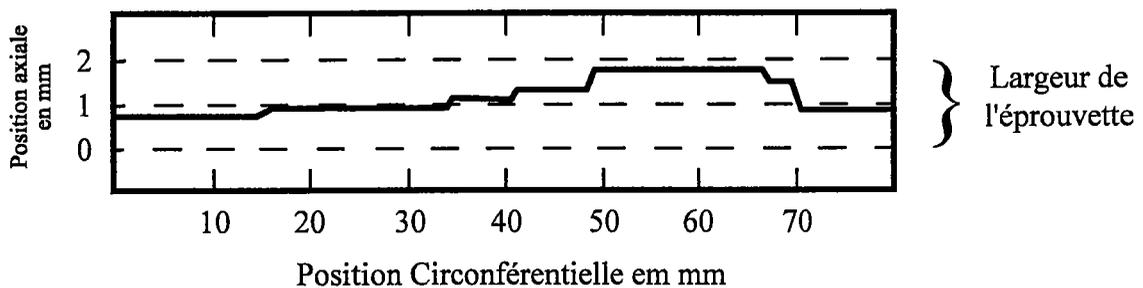
faible ainsi que l'élévation de température. La bande, en cours de formation, reçoit le nom de "bande de déformation", mais aucune "bande de transformation" (ROGERS (1979), (1983)) révélant un changement de micro structure du matériau n'est observée. Le second stade de la localisation (stade 2) débute avec la décroissance rapide de la contrainte et se termine avec la fin de l'expérience et éventuellement la rupture de l'éprouvette (photos n° 4, 5 de la **Figure 1-10**). Au cours de ce stade, l'inhomogénéité axiale augmente fortement. De plus, la distribution de la déformation devient inhomogène circonférentiellement (**Figure 1-11**).



**Figure 1-11 : Distribution de la déformation en trois points différents de la circonférence de l'éprouvette au même instant d'après MARCHAND et DUFFY (1988)**

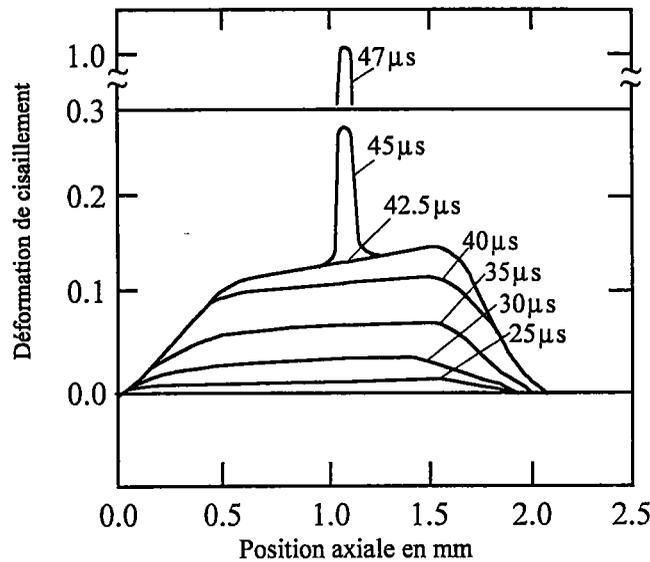
### II.4.2 : Position axiale des B.C.A.

MARCHAND et DUFFY (1988) constatent que la position du plan de cisaillement maximum dépend de la position circonférentielle du point visé (Figure 1-11). A l'aide d'une analyse microscopique des éprouvettes, GIOVANOLA (1988) constate également que plusieurs bandes de cisaillement s'initialisent dans des plans distincts le long de la circonférence ce qui confirme l'inhomogénéité circonférentielle. Les bandes ainsi initialisées interagissent entre-elles pour se rejoindre et former un chemin de rupture unique (Figure 1-12). D'après GIOVANOLA (1988), leur initiation est due à des perturbations locales qui peuvent être des marques d'usinage ou bien des irrégularités microstructurales ; celles-ci, irrégulièrement réparties, engendrent des sites où le déclenchement du second stade de la localisation est facilité.



**Figure 1-12 : Chemin de la rupture de cisaillement**  
d'après GIOVANOLA (1988).

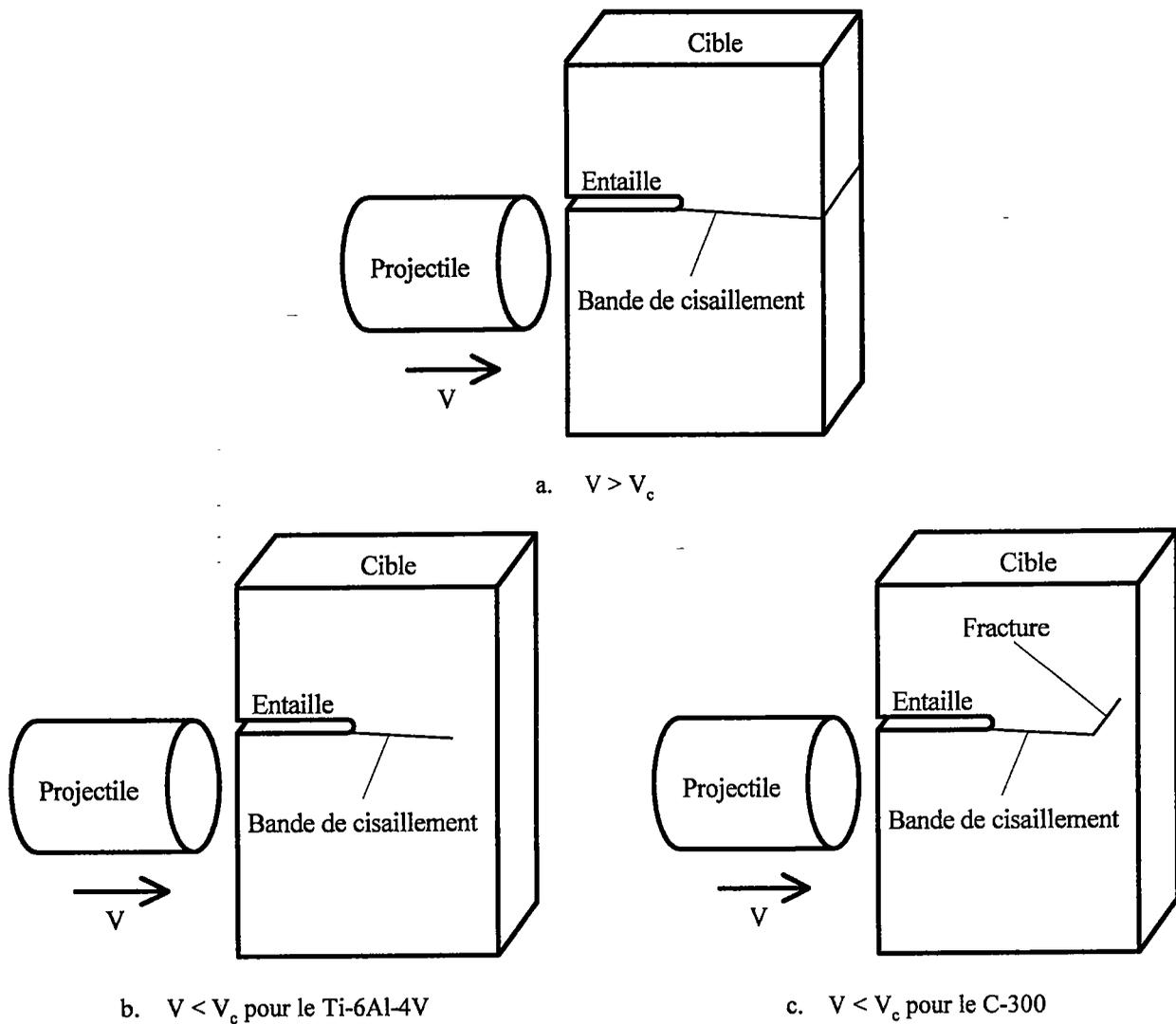
De plus cette étude montre aussi que le plan de cisaillement maximum dans le stade 2 n'est pas nécessairement celui du stade 1 (Figure 1-13).



**Figure 1-13 : Profil de déformation à différents instants**  
d'après GIOVANOLA (1988)

#### II.4.3 : Propagation des bandes de cisaillement

Les résultats de MARCHAND et DUFFY (1988) et de GIOVANOLA (1988) peuvent aussi être interprétés par la propagation de la bande de cisaillement, étudiée expérimentalement par ZHOU, ROSAKIS et RAVICHANDRAN (1996) : A l'aide d'un canon à gaz, un projectile est envoyé sur une cible parallélépipédique pré-entailée (**Figure 1-14**). Des photographies rapides du profil de la cible sont prises pour étudier la propagation des bandes de cisaillement dans l'acier C-300 et dans un alliage de titane : Ti-6Al-4V. La bande de cisaillement, initiée dans le prolongement de l'entaille, se propage dans une direction quasiment parallèle à la direction d'impact. Lorsque le projectile dépasse une certaine vitesse critique  $V_c$ , la bande de cisaillement se propage à travers toute l'éprouvette (**Figure 1-14.a**). En revanche, si le projectile n'atteint pas la vitesse critique  $V_c$ , la bande de cisaillement s'arrête avant de « sortir de l'éprouvette ». Il existe une différence de mode de rupture entre l'éprouvette de Ti-6Al-4V où le seul mode de rupture est la bande de cisaillement (**Figure 1-14.b**) et l'éprouvette de C-300, où une fissure se crée dans le prolongement de la bande de cisaillement avec une certaine inclinaison par rapport à cette dernière (**Figure 1-14.c**).



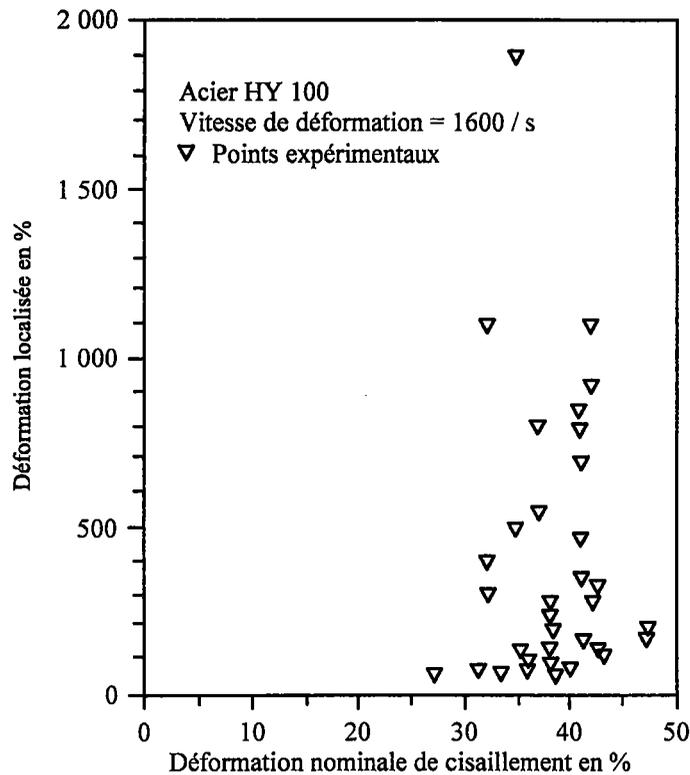
**Figure 1-14 : Propagation des bandes de cisaillement**  
D'après ZHOU, ROSAKIS et RAVICHANDRAN (1996)

La fissure inclinée du C-300 est due au fait que la bande de cisaillement se propage à une vitesse inférieure à celle de propagation de l'onde élastique engendrée par l'impact. Lorsque cette dernière arrive à l'extrémité de l'éprouvette, elle est réfléchiée et rencontre ensuite la tête de la bande de cisaillement qui se propage plus lentement. Cette rencontre stoppe la propagation de la bande et crée une fissure qui voit sa direction déviée par rapport à celle de la bande.

#### II.4.4 : Déformation au centre de la bande

MARCHAND et DUFFY (1988) étudient la déformation localisée au centre de la B.C.A. en fonction de la déformation nominale appliquée à l'éprouvette. De cette étude il ressort qu'il

existe une déformation seuil en dessous de laquelle il ne se produit aucune localisation (Figure 1-15). A partir de ce seuil, toute déformation supplémentaire appliquée à l'éprouvette aboutit à une localisation dans la B.C.A., et on observe une forte dispersion des valeurs obtenues.



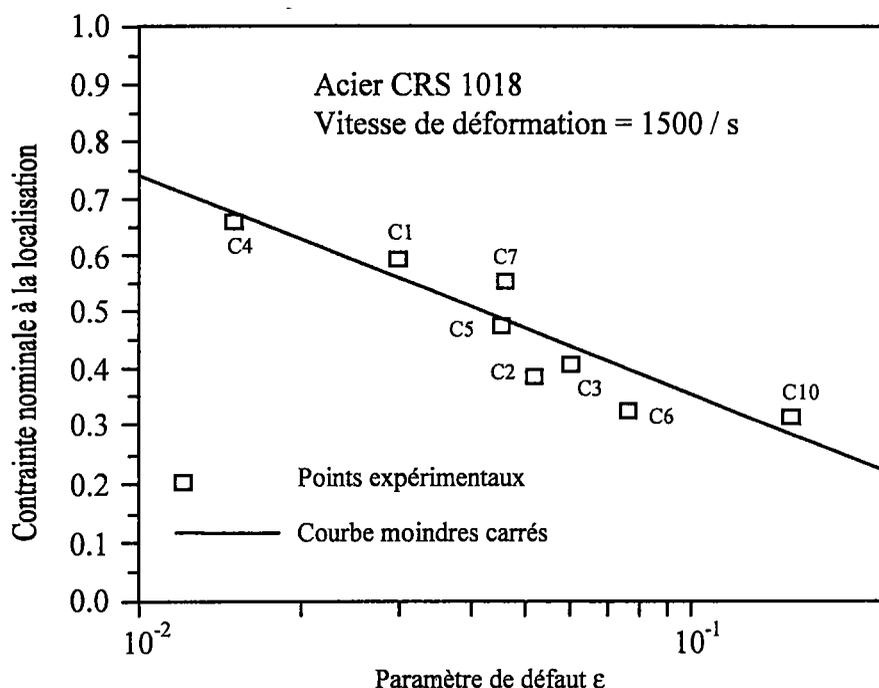
**Figure 1-15 : Déformation au centre de la B.C.A. en fonction de la déformation nominale**  
d'après MARCHAND et DUFFY (1988)

#### II.4.5 : Déformation nominale critique et déformation nominale à rupture

La déformation nominale atteinte au moment de la rupture de l'éprouvette  $\gamma_{rup}$  n'est pas reproductible et semble dépendre fortement des inhomogénéités matérielles et des défauts de surface. De plus, la difficulté à maîtriser les conditions aux limites imposées au bord de l'éprouvette peut introduire des variations dans les valeurs de  $\gamma_{rup}$ .

DUFFY (1991) montre une certaine corrélation entre l'amplitude  $\epsilon$  d'un défaut de surface de l'éprouvette et la déformation nominale critique  $\gamma_c$  à partir de laquelle la décroissance de la contrainte devient importante. Cette déformation est sensiblement une fonction linéaire décroissante de  $\ln(\epsilon)$  (Figure 1-16) ;  $\gamma_c$  est d'autant plus faible que le défaut

est plus important. Dans cette étude l'influence de la forme du défaut n'est pas prise en considération, bien qu'elle puisse jouer un rôle important, et plus particulièrement pour les éprouvettes de faible épaisseur.



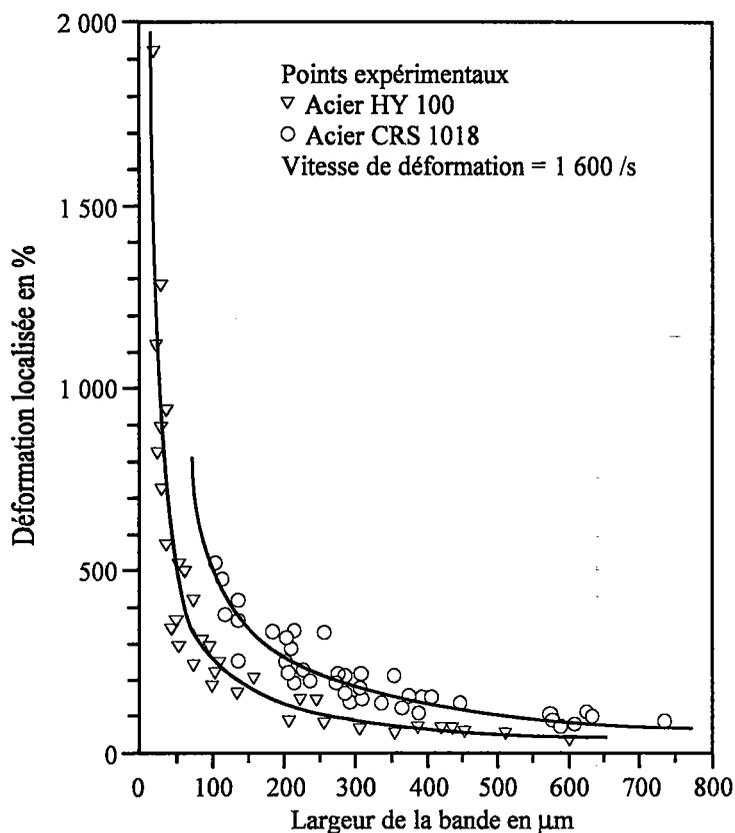
**Figure 1-16 : Déformation nominale critique en fonction de l'amplitude d'un défaut de surface d'après DUFFY (1991)**

#### II.4.6 : Largeur de bande

Suivant les auteurs, la méthode de mesure de la largeur de bande diffère. De toutes les études, il se dégage cependant une tendance générale : la largeur de la bande cisillée est d'autant plus faible que la déformation localisée dans la B.C.A. est plus importante (**Figure 1-17**)

MARCHAND et DUFFY (1988) retrouvent cette tendance et proposent une loi empirique pour traduire une localisation de plus en plus intense :  $\gamma_{Loc} = aw^c$  où  $w$  est la largeur de bande,  $a$  une constante positive et  $c$  une constante négative.

Il est également observé expérimentalement que la largeur de bande se stabilise lorsque  $\gamma_{loc}$  devient très grand, ce que ne traduit pas la loi empirique de MARCHAND et DUFFY (1988). Il semble que la stabilisation soit due à un équilibre entre la tendance à la localisation et une tendance à l'uniformisation liée à la diffusion thermique.

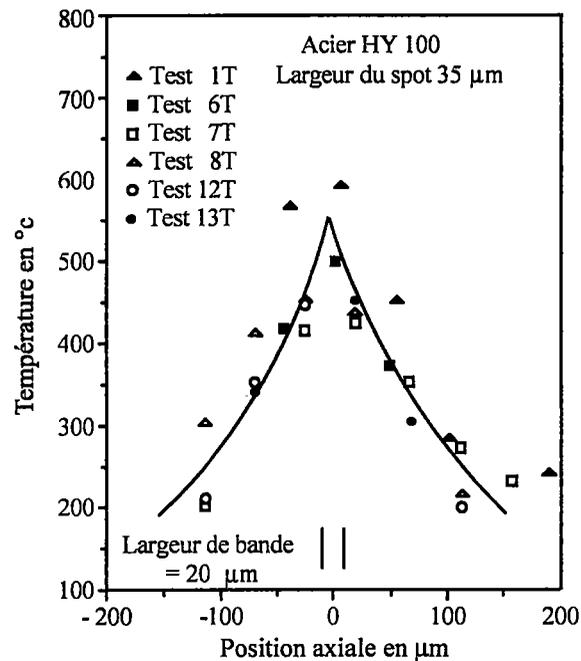


**Figure 1-17 : Déformation localisée en fonction de la largeur de bande**  
d'après MARCHAND et DUFFY (1988)

#### II.4.7 : Température

Tous les relevés expérimentaux de la température indiquent la présence d'un gradient de température à l'intérieur même de la B.C.A. ainsi qu'entre celle-ci et son voisinage proche. Ce gradient augmente lorsque l'on se rapproche du centre de la B.C.A. (**Figure 1-18**). La **Figure 1-18** n'est pas la distribution de la température au cours d'un essai mais est un relevé "statistique" de plusieurs essais. La température atteinte est de 600 C, mais il semble qu'une mesure plus localisée (PINA (1996)) conduise à des valeurs plus importantes. Dans un alliage Ta6V, PINA observe en effet des températures de l'ordre de 1 100C à 1 300C. Certains essais (GIOVANOLA (1988), REZAIG (1994)) montrent l'existence de zones fondues ; il est possible cependant que la fusion soit obtenue post-mortem, par frottement des surface de rupture. Les essais de micro dureté de CHO, LEE, NUTT et DUFFY (1993), dans un acier martensitique, montrent l'existence d'une zone affectée par la diffusion thermique où le matériau est adouci, de part et d'autre de la bande. Les micrographies de LUFT (1992) sur des monocristaux de

molybdène montrent l'existence, le long d'une micro-bande de cisaillement où la densité de dislocations est très élevée, de zones adoucies thermiquement où la densité de dislocations est plus faible que dans les zones plus éloignées de la bande, confirmant ainsi le point de vue selon lequel un volume limité autour de la bande est affecté par la diffusion de la chaleur.



**Figure 1-18 : Profil de température**  
d'après MARCHAND et DUFFY (1988)

#### II.4.8 : Conditions de chargement

Il y a plusieurs manières de contrôler le déroulement d'une expérience, soit en imposant une vitesse de déplacement à la frontière de l'échantillon, soit en lui imposant une contrainte, soit en imposant une condition mixte. Dans l'expérience des barres de Kolsky présentée par MARCHAND et DUFFY (1988), le pilotage est réalisé en vitesse de déplacement imposée. Mais, une étude analytique sur la propagation des ondes élastiques montre, qu'en réalité, nous sommes en présence d'une combinaison linéaire des modes de contrôle en vitesse et en contrainte (LEROY et MOLINARI (1992)). Dans cette étude, les auteurs montrent la relation suivante entre la vitesse  $v$  et la contrainte  $\tau$  :

$$(v - V) - \phi(\tau - \tau_0) = 0$$

I-1

où  $V$  et  $\tau_0$  sont respectivement la vitesse de déplacement et la contrainte imposées au bord de l'échantillon et  $\phi$  un paramètre négatif.

Si  $\phi$  est égal à 0, on retrouve un contrôle en vitesse de déplacement, et si  $\phi$  tend vers moins l'infini, on retrouve un contrôle en contrainte.

Dans le cas des barres de Kolsky, LEROY et MOLINARI (1992) proposent pour  $\phi$  la valeur suivante :

$$\phi = \frac{-8 r^3 h}{R^4 \sqrt{\mu / \rho}} \quad \text{I-2}$$

où  $h$ ,  $r$  et  $R$  sont respectivement la largeur, le rayon de l'éprouvette et celui de la barre, et  $\sqrt{\mu / \rho}$  représente la célérité des ondes élastiques de cisaillement.

#### II.4.9 : Effets d'échelle

BACKMAN, FINNEGAN, SCHULZ et PRINGLE. ont étudié expérimentalement les effets d'échelle sur la perforation de plaques en aluminium par des projectiles sphériques en acier. En faisant varier, soit l'épaisseur de la plaque, soit le diamètre de la sphère d'un certain facteur  $k$ , la largeur de bande ne varie pas et semble donc être indépendante des effets d'échelle. En revanche, le nombre des B.C.A., ainsi que leur longueur, varient. Les conclusions que l'on peut tirer de ce type d'expérience sont encore assez floues, car l'analyse semble complexe : beaucoup de paramètres interagissent : forme du projectile, surface de contact projectile/plaque, direction des B.C.A., effets d'inertie dus aux choc .....

Pour faire une étude des effets d'échelle, il serait intéressant de monter des essais plus simples, par exemple des essais de torsion simple et d'effectuer une série d'essais en ne faisant varier qu'un seul paramètre, comme la taille de l'éprouvette. Ainsi on obtiendrait une série de courbes de localisation qui pourraient mettre en évidence d'éventuels effets d'échelle.

### III : MODELISATION

Nous allons nous placer dans le cadre rhéologique d'un matériau viscoplastique isotrope incompressible. Dans un premier temps, une étude tri dimensionnelle de la

localisation de la déformation plastique sera présentée et, après simplification, nous nous placerons dans un cas unidimensionnel.

### III.1 : LOIS DE COMPORTEMENT VISCOPLASTIQUE

Nous nous plaçons dans un repère cartésien. Les coordonnées d'un point du matériau dans la configuration initiale sont notées  $x_i$  ( $i=1$  à 3). Les coordonnées de ce même point dans la configuration actuelle sont quant à elle notées  $\bar{x}_i$  ( $i=1$  à 3). Les composantes  $F_{ij}$  du gradient de déformation  $F$  sont alors données par la relation suivante :

$$F_{ij} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \quad \underline{I-3}$$

A partir de I-3, il est possible de déterminer le gradient de vitesse  $\mathbf{L}$  :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \underline{I-4}$$

Le tenseur des vitesses de déformation  $\mathbf{D}$  est la partie symétrique de ce gradient de vitesse  $\mathbf{L}$ , donc il s'écrit :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^t) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-t} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t) \quad \underline{I-5}$$

avec les notations suivantes :  $\mathbf{A}^t$  signifie transposée de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}^{-t}$  est la transposée de l'inverse de  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{A}^{-t} = (\mathbf{A}^{-1})^t$ ).

Quant au déviateur des contraintes de Cauchy  $\mathbf{S}$ , il s'écrit :

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{1} \quad \underline{I-6}$$

où  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $p$  et  $\mathbf{1}$  sont respectivement le tenseur des contraintes de Cauchy, la pression et le tenseur unité.

Pour un matériau isotrope, la loi d'écoulement plastique qui lie le déviateur de contraintes de Cauchy  $\mathbf{s}$  et le tenseur des vitesses de déformation  $\mathbf{D}$  s'écrit alors :

$$\mathbf{S} = 2 \mu \mathbf{D} \quad \underline{I-7}$$

où le module  $\mu$  du matériau est fonction de la déformation équivalente et de la vitesse de déformation équivalente.

A partir du déviateur des contraintes de Cauchy  $s$  et du tenseur des vitesses de déformation  $D$ , on peut définir la contrainte équivalente  $\tau_e$  I-8, la vitesse de déformation équivalente  $\dot{\gamma}_e$  I-9 et donc la déformation équivalente  $\gamma_e$  I-10

$$\tau_e = \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} \cdot s_{ij}} \quad \text{contrainte équivalente} \quad \text{I-8}$$

$$\dot{\gamma}_e = \sqrt{2 D_{ij} \cdot D_{ij}} \quad \text{vitesse de déformation équivalente} \quad \text{I-9}$$

$$\gamma_e = \int \dot{\gamma}_e dt \quad \text{déformation équivalente} \quad \text{I-10}$$

Par un produit deux fois contracté de I-7 par lui même et en introduisant I-8 et I-9, on peut en déduire la relation liant la contrainte équivalente  $\tau_e$  et la vitesse de déformation équivalente  $\dot{\gamma}_e$  :

$$\tau_e = \mu \dot{\gamma}_e \quad \text{I-11}$$

Comme  $\mu$  est une fonction de la déformation équivalente et de la vitesse de déformation équivalente, on peut poser :

$$\tau_e = f(\gamma_e, \dot{\gamma}_e) \quad \text{I-12}$$

pour une évolution isotherme ou complètement adiabatique, soit par exemple :

$$\tau_e = f(\gamma_e) \dot{\gamma}_e^m \quad \text{I-13}$$

pour un matériau non-newtonien. Il en résulte que la "viscosité"  $\mu$  est :

$$\mu = f(\gamma_e) \dot{\gamma}_e^{m-1} \quad \text{I-14}$$

On vérifie que dans une expérience de glissement simple, la vitesse de déformation équivalente  $\dot{\gamma}_e$  n'est autre que la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}$  et la contrainte équivalente  $\tau_e$ , la contrainte de cisaillement  $\tau$

### III.2 : CONCEPTS DE BIFURCATION, D'INSTABILITE ET DE LOCALISATION

L'analyse de bifurcation exprime la possibilité, pour un matériau soumis à une sollicitation donnée, de présenter une non-unicité du mode de déformation.

La bifurcation de l'écoulement plastique a lieu lorsque la solution des équations du problème cesse d'être unique. Pour les théories "conventionnelles" utilisant un matériau élastique non linéaire ou élasto-plastique, les bandes de cisaillement sont des discontinuités du champ de vitesses qui apparaissent lorsque les équations du problème changent de nature ; on obtient ainsi un critère de bifurcation qui est repéré en cisaillement simple par le maximum de la contrainte de cisaillement (STAKER (1981)). Un écoulement non homogène se substitue alors à l'écoulement homogène initial. Pour un chargement donné, ce critère indique si le matériau étudié est susceptible de présenter une bifurcation à partir d'une déformation critique ; il nous signale le déclenchement du mode d'écoulement bifurqué de la déformation plastique mais ne nous donne aucune information quant à sa forme ultérieure.

L'analyse de la stabilité linéaire ou non linéaire fournit les conditions d'évolution de perturbations d'un écoulement homogène : suivant les hypothèses et les méthodes adoptées, on obtient différents critères de stabilité qui indiquent si, au cours du temps, une perturbation, non homogène diverge, reste bornée ou tend asymptotiquement vers zéro.

L'analyse de la localisation indique si, pour un matériau donné, la déformation plastique peut être concentrée dans une zone étroite. S'il y a localisation dans cette zone et si la déformation plastique locale est importante tout en étant finie, on parlera de localisation finie. Si au contraire, la déformation plastique locale tend vers l'infini, on la qualifiera de localisation infinie ou de localisation asymptotique. Comme l'analyse de stabilité, l'analyse de la localisation considère un processus se développant au cours du temps, alors que l'analyse de bifurcation ne fournit que le début du processus.

Pour l'étude de la localisation, il est nécessaire d'utiliser une formulation lagrangienne, car nous admettons que les bandes de cisaillement sont fixes par rapport au matériau. Cette condition n'est pas réalisée dans le cas de l'usinage orthogonal, où la matière est convectée au travers de la bande.

Si nous considérons un élément de surface de référence  $d\vec{S}_0$  qui devient l'élément de surface  $d\vec{S}$  dans la configuration actuelle, alors d'après la formule de NANSON :

$$\vec{dS} = J \mathbf{G} d\vec{S}_0 \quad \underline{I-15}$$

où  $J$  et  $\mathbf{G}$  sont respectivement le déterminant Jacobien c'est à dire le déterminant de  $\mathbf{F}$ , et le transposé de l'inverse de  $\mathbf{F}$  ( $\mathbf{G} = \mathbf{F}^{-t}$ )

Soit  $d\vec{F}$  l'effort actuel exercé sur  $d\vec{S}$  :

$$d\vec{F} = \sigma d\vec{S} = \sigma J \mathbf{G} d\vec{S}_0 \quad \underline{I-16}$$

D'après I-16, le tenseur des contraintes nominales de Boussinesq  $\mathbf{N}$  s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{N} = J \sigma \mathbf{G} \quad \underline{I-17}$$

en effet :

$$d\vec{F} = \sigma \cdot d\vec{S} = \mathbf{N} \cdot d\vec{S}_0 \quad \underline{I-18}$$

D'après I-6, I-7 et I-17  $\mathbf{N}$  est égal à :

$$\mathbf{N} = J p \mathbf{F}^{-t} + J \mu (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-t} \cdot \dot{\mathbf{F}}^t) \mathbf{F}^{-t} \quad \underline{I-19}$$

que l'on peut également écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{N} = \mathbf{K} : \mathbf{F} + \mathbf{L} : \dot{\mathbf{F}} \quad \underline{I-20}$$

$\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$  sont deux tenseurs d'ordre quatre caractérisant le matériau et dépendant en général du chemin de déformation. Par hypothèse, nous nous sommes placés dans le cas d'un matériau isotrope ; il existe donc certaines symétries de ces deux tenseurs. Pour des matériaux non isotropes, nous pourrions retrouver la même expression I-20, mais avec des formes plus générales de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{L}$ . Cette formulation inclut le cas d'un comportement purement plastique, en posant simplement  $\mathbf{L} = 0$

### III.2.1 : Structure parfaite

Nous supposons le matériau homogène, de modules ( $\mathbf{K}^\circ$ ,  $\mathbf{L}^\circ$ ) constants et soumis à une déformation homogène ( $\dot{\mathbf{F}}^\circ$ ,  $\mathbf{F}^\circ$ ,  $\mathbf{N}^\circ$ ) quasi-statique. L'étude de la localisation consiste à déterminer si la déformation peut se localiser sous forme d'une bande de normale  $\vec{v}$  et de direction  $\vec{q}$  fixes par rapport au matériau (**Figure 1-19**)

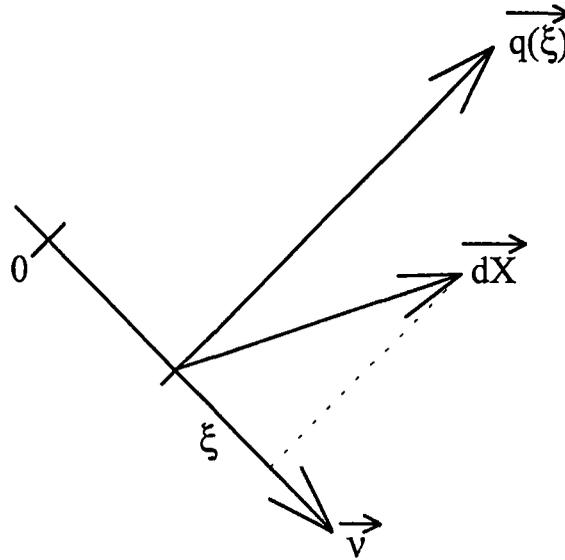


Figure 1-19 : Localisation

L'écoulement plastique reste homogène à l'extérieur de la bande de cisaillement. Par contre à l'intérieur, il existe un écoulement plastique non homogène représenté par I-21 où  $\xi$  est une coordonnée orthogonale à la bande

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\xi) &= \mathbf{F}^o + \delta\mathbf{F}(\xi) \\ \dot{\mathbf{F}}(\xi) &= \dot{\mathbf{F}}^o + \delta\dot{\mathbf{F}}(\xi) \end{aligned} \quad \text{I-21}$$

$\delta\mathbf{F}(\xi)$  est un glissement parallèle à  $\vec{q}(\xi)$ . Ce glissement doit être continu à travers toute la bande. Il est nécessairement de la forme :

$$\begin{aligned} \vec{\delta\mathbf{F}}(\xi) &= \vec{q}(\xi) \otimes \vec{v} \\ \vec{\delta\dot{\mathbf{F}}}(\xi) &= \vec{q}(\xi) \otimes \vec{v} \end{aligned} \quad \text{I-22}$$

De plus, il y a continuité de l'équilibre dans la bande et à l'extérieur : l'effort appliqué en un point A appartenant à la frontière de la bande est identique que l'on se place du côté intérieur ou du côté extérieur à la bande. Comme  $\vec{v}$  est la normale à la bande, on obtient la relation suivante :

$$\mathbf{N} \cdot \vec{v} = \mathbf{N}_0 \cdot \vec{v} \quad \text{I-23}$$

Si on remplace  $\mathbf{n}$  par sa valeur tirée de la loi constitutive I-20 et de I-21, on obtient :

$$\mathbf{N} \vec{v} = (\mathbf{K}^o : (\mathbf{F}^o + \vec{q} \otimes \vec{v}) + \mathbf{L}^o : (\dot{\mathbf{F}}^o + \vec{q} \otimes \vec{v})) \vec{v} = \mathbf{N}_0 \vec{v} = (\mathbf{K}^o : \mathbf{F}^o + \mathbf{L}^o : \dot{\mathbf{F}}^o) \vec{v} \quad \text{I-24}$$

d'où :

$$(\mathbf{K}^\circ : \vec{q} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{v} + (\mathbf{L}^\circ : \vec{q} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \quad \text{I-25}$$

ou encore

$$(\vec{v} \mathbf{L}^\circ \vec{v}) \cdot \vec{q} + (\vec{v} \mathbf{K}^\circ \vec{v}) \cdot \vec{q} = 0 \quad \text{I-26}$$

Si à l'instant  $t = 0$   $\vec{q}(0) = \vec{0}$ ,  $\vec{q}$  peut être différent de zéro si

$$\det(\vec{v} \mathbf{L}^\circ \vec{v}) = 0 \quad \text{I-27}$$

à cette condition, il y a bifurcation à l'instant envisagé.

Si  $\vec{q}(0) \neq \vec{0}$  on peut en général intégrer le système d'équations différentielles ordinaires homogènes I-26 ;  $\vec{q}$  tend vers l'infini lorsque  $\det(\vec{v} \mathbf{L}^\circ \vec{v}) = 0$  sauf si  $\vec{q}$  est vecteur du noyau de  $\vec{v} \mathbf{K}^\circ \vec{v}$

Si  $\vec{q}$  tend vers l'infini, on dira qu'il y a localisation  $l_\infty$  et que

$$\det(\vec{v} \mathbf{L}^\circ \vec{v}) = 0 \quad \text{I-28}$$

est une condition de cette localisation ; elle est assurée si  $\det(\vec{v} \mathbf{K}^\circ \vec{v}) \neq 0$ . L'orientation  $\vec{v}$  la bande est celle qui remplit la condition I-28 le plus tôt. La condition I-28 est en général différente de I-27 car les coordonnées de  $\mathbf{L}^\circ$  dépendent du chemin de déformation. En outre, la condition de localisation  $l_\infty$  indique seulement que la pente  $\vec{q}$  devient infinie, et non que les déformations, représentées par  $\vec{q}$ , deviennent infinies.

### III.2.2 : Structure imparfaite

Nous allons maintenant supposer qu'il existe une tranche de matériau présentant des propriétés variant avec  $\xi$  ; soient  $\dot{\mathbf{F}}^\circ$  ;  $\mathbf{F}^\circ$ ,  $\mathbf{N}^\circ$ ,  $\mathbf{K}^\circ$  et  $\mathbf{L}^\circ$  les champs caractérisant la déformation, l'état de contraintes et le matériau en un point de référence, par exemple extérieur à la bande, et  $\mathbf{F}(\xi)$ ,  $\dot{\mathbf{F}}(\xi)$ ,  $\mathbf{N}(\xi)$ ,  $\mathbf{K}(\xi)$  et  $\mathbf{L}(\xi)$  les champs analogues à l'intérieur de la bande, définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\xi) &= \mathbf{F}^\circ + \vec{q}(\xi) \otimes \vec{v} \\
\mathbf{f}(\xi) &= \mathbf{f}^\circ + \vec{q}(\xi) \otimes \vec{v} \\
\mathbf{N}(\xi) &= \mathbf{N}^\circ + \delta\mathbf{N}(\xi) \\
\mathbf{K}(\xi) &= \mathbf{K}^\circ + \delta\mathbf{K}(\xi) \\
\mathbf{L}(\xi) &= \mathbf{L}^\circ + \delta\mathbf{L}(\xi)
\end{aligned}
\tag{I-29}$$

$\delta\mathbf{K}$  et  $\delta\mathbf{L}$  représentent une imperfection du matériau. Compte tenu de I-19, en général  $\delta\mathbf{K} = 0$  pour un matériau incompressible.

Comme dans le cas d'une structure parfaite, il y a continuité de l'équilibre au passage de la bande, donc la condition I-23 est vérifiée :

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}^\circ \cdot \vec{v} &= (\mathbf{K}^\circ : \mathbf{F}^\circ + \mathbf{L}^\circ : \dot{\mathbf{F}}^\circ) \cdot \vec{v} \\
\mathbf{N} \cdot \vec{v} &= (\mathbf{K}^\circ : (\mathbf{F}^\circ + \vec{q} \otimes \vec{v}) + (\mathbf{L}^\circ + \delta\mathbf{L}) : (\dot{\mathbf{F}}^\circ + \vec{q} \otimes \vec{v})) \cdot \vec{v}
\end{aligned}
\tag{I-30}$$

d'où :

$$(\mathbf{K}^\circ : \vec{q} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{v} + (\mathbf{L} : \vec{q} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{v} + (\delta\mathbf{L} : \dot{\mathbf{F}}^\circ) \cdot \vec{v} = 0
\tag{I-31}$$

ou encore

$$(\vec{v} \mathbf{L} \vec{v}) \cdot \vec{q} + (\vec{v} \mathbf{K}^\circ \vec{v}) \cdot \vec{q} + (\delta\mathbf{L} : \dot{\mathbf{F}}^\circ) \cdot \vec{v} = 0
\tag{I-32}$$

### III.2.2.1 : Discussion

① si  $\delta\mathbf{L} = 0$  : on retrouve le cas précédent

② si  $\delta\mathbf{L} \neq 0$  : on obtient le système d'équations différentielles ordinaires non homogène

I-32 qui admet en général une solution  $\vec{q}^\circ$  constante, solution de :

$$(\vec{v} \mathbf{K}^\circ \vec{v}) \cdot \vec{q}^\circ = -(\delta\mathbf{L} : \dot{\mathbf{F}}^\circ) \cdot \vec{v} \text{ sauf si } \det(\vec{v} \mathbf{K}^\circ \vec{v}) = 0
\tag{I-33}$$

L'écart  $\vec{q}$  par rapport à la solution constante  $\vec{q}^\circ$  est régi par l'équation homogène

$$(\vec{v} \mathbf{L} \vec{v}) \cdot \vec{q} + (\vec{v} \mathbf{K}^\circ \vec{v}) \cdot \vec{q} = 0
\tag{I-34}$$

et la condition de localisation  $l_\infty$  reste en général :

$$\det(\vec{v} \wedge \vec{v}) = 0$$

I-35

L'orientation  $\vec{v}$  la plus favorable est celle qui remplit la condition I-35 le plus rapidement. Une simplification de cette analyse est obtenue dans le cas du glissement simple où l'orientation des bandes est connue a priori.

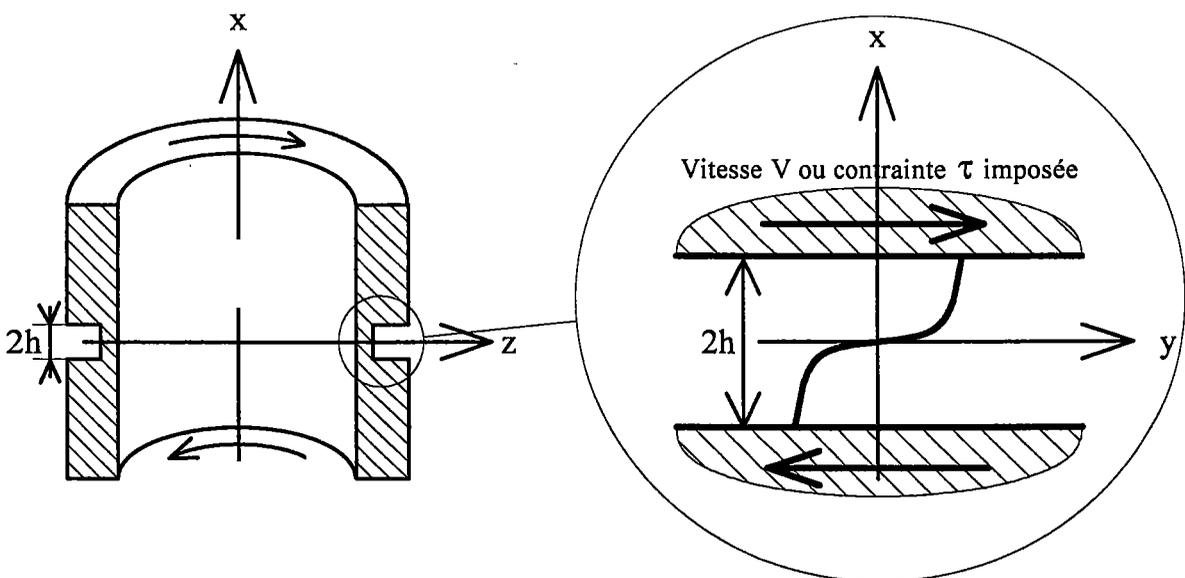
### III.3 : MODELE UNIDIMENSIONNEL DE GLISSEMENT SIMPLE

Les expériences de double cisaillement, comme celles de torsion d'un tube à parois minces à grande vitesse, peuvent se ramener à un problème de glissement simple.

#### III.3.1 : Hypothèses

On étudie le cisaillement simple : on suppose une couche de longueur infinie dans la direction  $y$ . Toutes les quantités sont indépendantes de  $y$  et  $z$ . La déformation est nulle suivant l'axe  $z$ . La vitesse  $V$  dans la direction  $y$  est en général fonction de  $x$  et du temps  $t$ .

#### III.3.2 : Figure



**Figure 1-20 : Modélisation de l'éprouvette.**

III.3.3 : Conséquence

Cette modélisation suppose que la localisation de la déformation soit indépendante de  $y$ , ce qui entraîne qu'il n'y a aucune prise en compte de phénomènes multidimensionnels comme l'amorçage multiple, la propagation ou la structuration de la bande.

III.4 : LOI DE COMPORTEMENTIII.4.1 : Hypothèses

On suppose de nouveau que le matériau a un comportement thermo-viscoplastique et qu'il est incompressible. La déformation élastique est négligée.

III.4.2 : Loi générale

$$\tau = f(\gamma, \dot{\gamma}; \theta) \quad \underline{I-36}$$

où  $\tau$ ,  $\gamma$ ,  $\dot{\gamma}$ ,  $\theta$  représentent respectivement la contrainte de cisaillement, la déformation plastique, la vitesse de déformation et la température absolue.

Dans le cadre de ce travail, il est important de pouvoir traduire la compétition entre les effets déstabilisants de l'adoucissement thermique et les effets stabilisants du durcissement dus à l'écroutissage et à la sensibilité à la vitesse de déformation. C'est pourquoi, nous avons choisi une loi générale du type

$$\tau = f(\gamma; \theta) \dot{\gamma}^m \quad \underline{I-37}$$

où  $m$  est le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation et  $f(\gamma, \theta)$  est une fonction qui tient compte de l'adoucissement thermique et du durcissement du matériau.

III.4.3 : Loi puissance multiplicative

De nombreux auteurs utilisent, pour leurs développements analytiques, la loi puissance multiplicative :

$$\tau = f(\gamma; \theta) \dot{\gamma}^m = \mu \theta^v \gamma^n \dot{\gamma}^m \quad \underline{I-38}$$

dans l'identification des courbes expérimentales

Bien que paraissant simpliste du fait de l'indépendance des coefficients par rapport à la déformation plastique et à la température, cette loi met relativement bien en évidence les phénomènes majeurs. Son principal intérêt est sa simplicité ; elle permet une étude analytique ou tout du moins d'aller le plus loin possible dans celle-ci. Les études analytiques ont l'avantage de donner des résultats ou des tendances avec un minimum de temps de calcul et de permettre l'examen qualitatif et quantitatif des conséquences de la variation des paramètres.

On peut facilement montrer que la courbe  $\tau(\gamma)$  présente un maximum uniquement si  $\nu+n < 0$  : cette condition conduit à un adoucissement thermique dominant pour une déformation importante ; au contraire le durcissement reste prépondérant si  $\nu+n > 0$ .

(Figure 1-21)

#### III.4.4 : Loi de Knowles

MARCHAND et DUFFY (1988) utilisent la fonction de KNOWLES (1976) pour caractériser l'acier HY-100

$$\tau = f(\gamma; \theta) \dot{\gamma}^m = \mu \gamma \left( 1 + \frac{\beta}{n} \gamma^2 \right)^{n-1} \dot{\gamma}^m \quad \underline{I-39}$$

Cette fonction est indépendante de la température, elle permet cependant la modélisation d'un comportement thermo-viscoplastique adiabatique durcissant puis adoucissant lorsque  $n < 1/2$  (Figure 1-21).

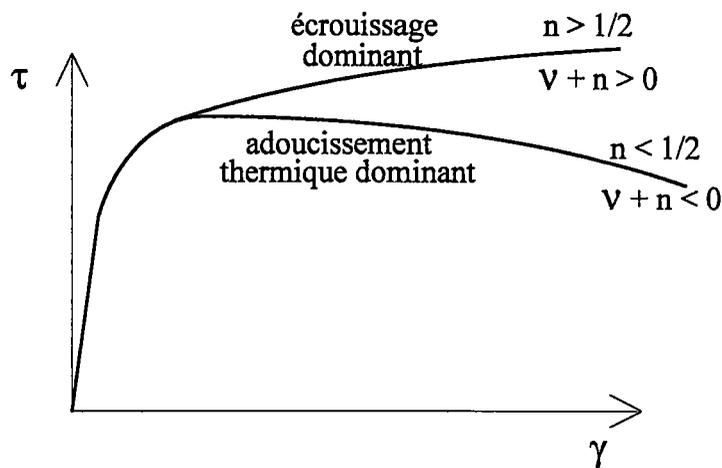


Figure 1-21 : Comportement thermo-viscoplastique

### III.5 : FORMULATION DU PROBLEME

#### III.5.1 : Compatibilité cinématique

Pour que la compatibilité cinématique soit respectée, il est nécessaire que l'on ait la condition suivante :

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{I-40}$$

#### III.5.2 : Conservation de la quantité de mouvement

Dans le cas d'une couche d'épaisseur constante, l'équation fondamentale de la dynamique s'exprime par :

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{I-41}$$

où  $\rho$  est la masse volumique. Dans le cas où les effets d'inertie sont négligeables, on pose :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad \text{I-42}$$

#### III.5.3 : Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique s'exprime par :

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \beta \tau \dot{\gamma} \quad \underline{I-43}$$

où  $\rho c$ ,  $k$  et  $\beta$  sont respectivement la chaleur spécifique volumique, le coefficient de conductivité thermique et le coefficient de TAYLOR-QUINNEY (1934) qui est supposé constant en première approximation et égal à 0,9 dans le cas des métaux.

Le premier membre de I-43 traduit la variation de l'énergie interne et la diffusion de la chaleur et le second représente la fraction de travail de déformation plastique transformée en chaleur. Les transferts de chaleur autres que conductifs sont négligés.

### III.5.4 : Conditions aux limites

On suppose le problème symétrique par rapport à l'axe  $(o, \vec{y})$ . Le contrôle de la tranche modélisée peut se faire de différentes manières :

$$\text{Contrôle en vitesse :} \quad V(0,t) = V(h,t) = V \quad \underline{I-44}$$

où  $V$  est la vitesse constante du bord supérieur de la tranche de matériau

$$\text{Contrôle en contrainte :} \quad \tau(0,t) = \tau(h,t) = \tau_0 \quad \underline{I-45}$$

où  $\tau_0$  est la contrainte constante appliquée sur le bord supérieur et le bord inférieur de la tranche de matériau.

$$\text{Contrôle mixte :} \quad (v-V) - \phi(\tau - \tau_0) = 0 \quad \underline{I-46}$$

où  $\phi \in ] - \infty, 0 ]$ .

Le cas  $\phi = 0$  conduit au contrôle en vitesses et  $\phi \rightarrow - \infty$  est équivalent au contrôle en contraintes.

L'équation thermique admet les conditions aux limites suivantes pour  $x=h$  et  $x=0$

$$\text{Dans le cas adiabatique :} \quad \frac{\partial \theta(h,t)}{\partial x} = 0 \quad \underline{I-47}$$

$$\text{Dans le cas isotherme :} \quad \theta(h,t) = \tilde{\theta} \quad \underline{I-48}$$

$$\text{et par symétrie :} \quad \frac{\partial \theta(0,t)}{\partial x} = 0 \quad \underline{I-49}$$

### III.5.5 : Solution homogène adiabatique

On se propose maintenant de déterminer la solution adiabatique du problème formulé précédemment à l'aide de I-40, I-41 et I-43 pour un matériau qui a une loi de comportement puissance multiplicative exprimée en I-38

Les conditions initiales homogènes sont :

$$\begin{cases} \gamma(x,0) = 0 \\ \dot{\gamma}(x,0) = \dot{\gamma}_0 \\ \theta(x,0) = \theta_0 \end{cases} \quad \text{Pour } 0 \leq x \leq h \quad \text{I-50}$$

Le système d'équations aux dérivées partielles non linéaires issu des équations I-38, I-40, I-41 et I-43 s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \dot{\gamma} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \beta \tau \dot{\gamma} \end{cases} \quad \text{I-51}$$

Dans le stade 1, les phénomènes de conduction thermique sont négligeables ( $k = 0$ ) et le système précédent I-51 admet une solution homogène exacte pour un contrôle en vitesse I-44 :  $\dot{\gamma}_0$  est constante :  $\dot{\gamma}_0 = \frac{V}{h}$

$$\begin{cases} \theta_0(t) = \left( 1 + \frac{1-v}{1+n} \frac{\beta \tau_0}{\rho c \theta_0} \gamma_0^{1+n} \right)^{\frac{1}{1-v}} \\ \gamma_0(t) = \dot{\gamma}_0 t \\ \tau_0(t) = \mu \left( 1 + \frac{1-v}{1+n} \frac{\beta \tau_0}{\rho c \theta_0} \gamma_0^{1+n} \right)^{\frac{v}{1-v}} \gamma_0^n \dot{\gamma}_0^m \end{cases} \quad \text{I-52}$$

Par contre, dans le cas d'un contrôle en contrainte I-45, seule une solution dans le domaine quasi-statique  $\left( \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \right)$  est accessible par le calcul :

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_0(t) = \gamma_0^{\frac{-n}{m}}(t) \left( 1 + \frac{\beta \tau_0}{\rho c \theta_0} \gamma_0(t) \right)^{\frac{-v}{m}} \\ \theta_0(t) = 1 + \frac{\beta \tau_0}{\rho c \theta_0} \gamma_0(t) \\ t = \int_0^{\gamma_0} u^{\frac{n}{m}} \left( 1 + \frac{\beta \tau_0}{\rho c \theta_0} u \right)^{\frac{v}{m}} du \end{cases} \quad \underline{I-53}$$

Dans le cas adiabatique, on obtient ainsi deux expressions de la contrainte de cisaillement : l'une associée au contrôle en contrainte

$$\tau = f(\gamma) \dot{\gamma}^m \quad \text{avec } f(\gamma) = \mu \theta_0^v \left( 1 + \frac{\beta \tau_0}{\rho c \theta_0} \gamma \right)^v \quad \underline{I-54}$$

l'autre au contrôle en vitesse :

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \dot{\gamma}^m \quad \text{avec } f(\dot{\gamma}) = \mu \theta_0^v \left( 1 + \frac{(1-v)}{(1+n)} \frac{\mu \beta}{\rho c} \frac{\dot{\gamma}_0^m}{\theta_0^{1-v}} \dot{\gamma}^{n+1} \right)^{\frac{v}{1-v}} \dot{\gamma}^n \quad \underline{I-55}$$

Pour les conditions mixtes, le cas adiabatique paraît très difficilement accessible au calcul.

Le tableau suivant (**Figure 1-22**) résume les différents cas possibles pour des contrôles en vitesse et en contrainte. On notera que le comportement de la solution homogène varie en fonction des paramètres rhéologiques. On pose  $\alpha = \frac{\beta \tau_0}{\rho c \theta_0}$

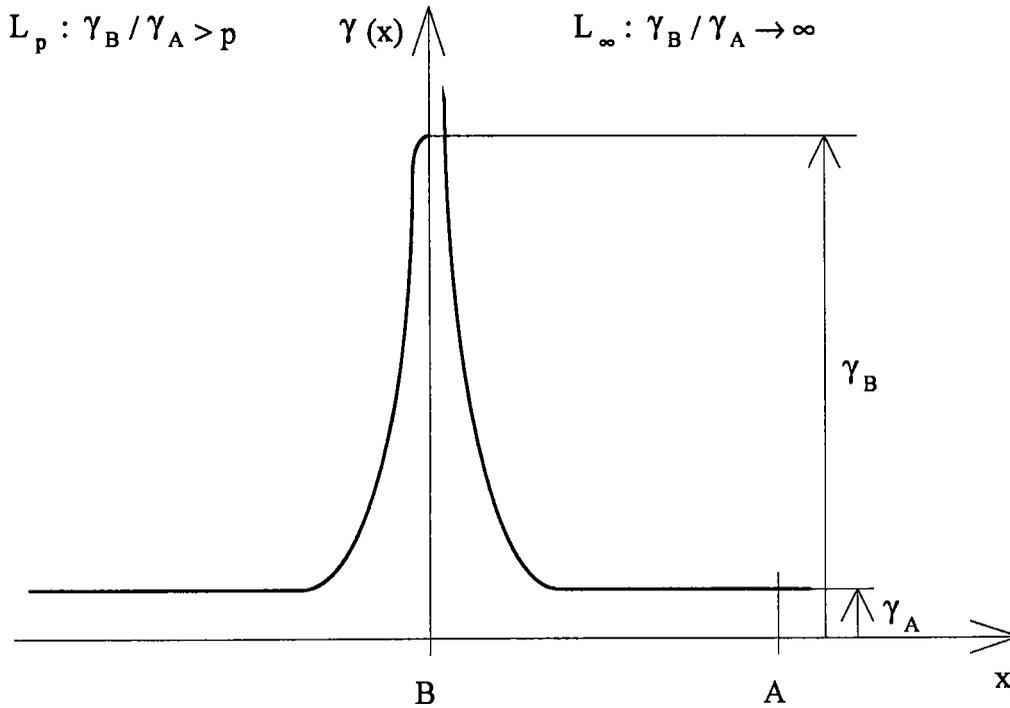
Cond. Limit.	$v = 1$	$\tau = 1$ et $n \neq 0$	$\tau = 1$ et $n = 0$
$\gamma_0$	$t$		$\frac{\theta_0 - 1}{\alpha}$
$\frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0}$	$\frac{1}{t}$	$\gamma_0^{-\frac{n+m}{m}} (1 + \alpha\gamma_0)^{-\frac{v}{m}}$	$\alpha \frac{\theta_0^{-\frac{v}{m}}}{\theta_0 - 1}$
$\theta_0$	$\left(1 + \alpha \frac{1-v}{1+n} \gamma_0^{n+1}\right)^{\frac{1}{1-v}}$	$1 + \alpha\gamma_0$	$\left(1 + \alpha \frac{v+m}{m} t\right)^{\frac{m}{v+m}}$
$\frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0}$	$\frac{\alpha\gamma_0^n}{1 + \alpha \frac{1-v}{1+n} \gamma_0^{1+n}}$	$\frac{\alpha\gamma_0^{-\frac{n}{m}}}{(1 + \alpha\gamma_0)^{\frac{v+m}{m}}}$	$\frac{1}{1 + \alpha \frac{v+m}{m} t}$
<u>Si <math>v &lt; 1</math></u>		<u>Si <math>v+n+m &lt; 0</math></u>	
$\theta_0 _{\infty} = \infty \quad \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} _{\infty} = 0$		$\frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} _{th} = \infty \quad \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} _{th} = \infty$	
<u>Si <math>v &gt; 1</math></u>		<u>Si <math>v+n+m &gt; 0</math></u>	
$\theta_0 _{\gamma_{0c}} = \infty \quad \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} _{\gamma_{0c}} = \infty$		$\frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_0} _{\infty} = 0 \quad \frac{\dot{\theta}_0}{\theta_0} _{\infty} = 0$	

**Figure 1-22 : Comportement de la solution homogène**  
D'après FRESSENGEAS et MOLINARI (1987)

III.6 : ANALYSE DE LA LOCALISATION

Par une méthode d'analyse non linéaire, il est possible de décrire la localisation de l'écoulement plastique dans certains cas particuliers : le glissement simple quasi statique (MOLINARI et CLIFTON (1983)) ou la traction uniaxiale quasi statique d'un matériau thermo-viscoplastique non-conducteur de la chaleur (FRESSENGEAS et MOLINARI (1985)).

Le phénomène de la localisation de la déformation plastique s'exprime analytiquement par les concepts de localisation asymptotique  $L_{\infty}$  et de localisation finie  $L_p$  (Figure 1-23)



**Figure 1-23 : Localisation infinie  $L_\infty$  et localisation finie  $L_p$**

Par définition, la localisation asymptotique  $L_\infty$  est caractérisée par une déformation infinie au centre (B) de la B.C.A. et une déformation finie en tout autre point (A), ce qui se traduit mathématiquement par l'expression suivante :

$$\forall A \neq B \quad \exists \gamma_c(A) < \infty \text{ tel que } \lim_{\gamma(A) \rightarrow \gamma_c(A)} \left( \frac{\gamma(B)}{\gamma(A)} \right) = \infty \quad \underline{\underline{I-56}}$$

Cette définition est différente de la localisation  $l_\infty$  (voir I-28) qui concerne les vitesses de déformation.

De même, on définit la localisation finie  $L_p$  par une déformation plastique de valeur très élevée mais finie au centre de la B.C.A. et mathématiquement par l'expression ci dessous :

$$\begin{matrix} \exists V_p(B) \\ \exists \gamma_c(A) \end{matrix} \text{ tel que } \begin{cases} \forall A \notin V_p(B) \\ \gamma(A) > \gamma_c(A) \end{cases} \quad \frac{\gamma(B)}{\gamma(A)} \geq p > 1 \quad \underline{\underline{I-57}}$$

Dans le cas d'un matériau thermo-viscoplastique, MOLINARI et CLIFTON (1987) obtiennent une formulation analytique exacte des conditions de localisation  $L_\infty$ . Le problème est modélisé par une tranche d'un matériau soumis à un cisaillement simple quasi-statique et

adiabatique perpendiculairement à son épaisseur. Cette tranche possède un défaut géométrique suivant son épaisseur qui est décrite par la fonction sinusoïdale suivante :

$$l(x) = l_i \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \left( \cos \left( \frac{2 \pi x}{h} \right) - 1 \right) \right) \tag{I-58}$$

où  $l(x)$ ,  $l_i$ ,  $\varepsilon$  et  $h$  sont respectivement l'épaisseur à une position  $x$ , l'épaisseur maximale, l'amplitude du défaut et la hauteur de la couche cisillée.

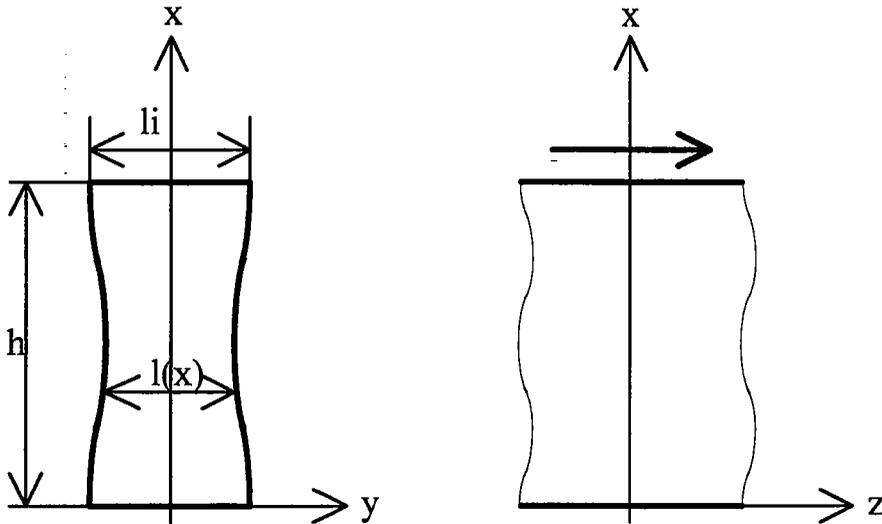


Figure 1-24 : Géométrie du spécimen et condition de chargement

Il y a équilibre en tout point de la zone de localisation, donc en deux points différents A et B de la zone, la force de cisaillement est égale à :

$$l(x_A) \cdot \tau(x_A) = l(x_B) \cdot \tau(x_B) \tag{I-59}$$

Après substitution de la loi de comportement I-37 dans I-59 et en écrivant l'équilibre entre un point à une position  $x$  du centre de la bande et le centre de cette même bande on obtient

$$l(x) f(\theta, \gamma(x)) \dot{\gamma}(x)^m = l(0) f(\theta, \gamma(0)) \dot{\gamma}(0)^m \tag{I-60}$$

et après intégration au cours du processus de déformation :

$$l(x)^{\frac{1}{m}} \int_{\gamma_0}^{\gamma(x)} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = l(0)^{\frac{1}{m}} \int_{\gamma_0}^{\gamma(0)} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \tag{I-61}$$

Il y a localisation infinie  $L_\infty$  si la déformation au centre de la bande  $\gamma(0)$  tend vers l'infini lorsque la déformation plastique  $\gamma(x)$  en un point  $x$  de la bande tend vers une déformation critique finie  $\gamma_c(x)$ .

La déformation  $\gamma(x)$  étant finie, le membre de gauche de l'égalité I-61 a une valeur finie ; par conséquent l'intégrale du membre de droite de cette même expression doit également être finie. Le critère d'existence de cette intégrale est en fait le critère de localisation  $L_{\infty}$ .

A titre d'exemple, pour un essai de torsion contrôlé en contrainte d'une éprouvette régie par une loi de comportement puissance multiplicative I-38, le critère de localisation  $L_{\infty}$  s'écrit : (MOLINARI et CLIFTON (1987))

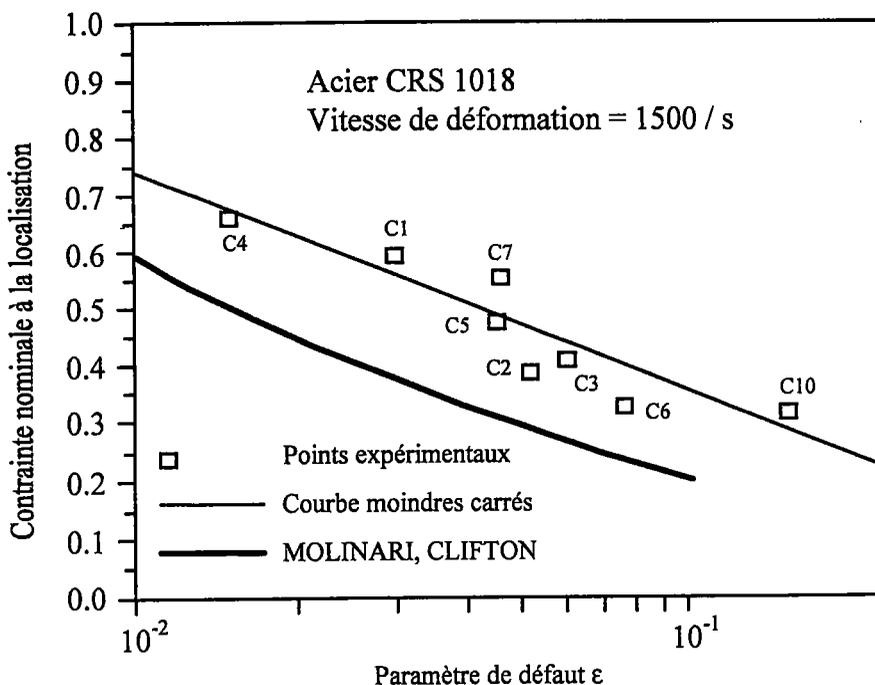
$$v + n + m < 0 \quad \text{I-62}$$

Ce critère met bien en évidence la compétition entre les effets stabilisants de l'écrouissage ( $n > 0$ ) et de la sensibilité à la vitesse de déformation ( $m > 0$ ) et les effets déstabilisants de l'adoucissement thermique ( $v < 0$ ) ; les critères de localisation d'un matériau thermo-viscoplastique soumis à du cisaillement simple adiabatique quasi statique sont répertoriés en annexe.

Pour une déformation plastique donnée  $\gamma(0)$  au centre de la bande, on peut calculer numériquement la déformation plastique  $\gamma(x)$  en tout point de la bande à partir de l'expression I-61, et obtenir ainsi la distribution de la déformation plastique ; il est alors possible de déterminer la déformation nominale  $\gamma_{\text{nom}}$  en moyennant la déformation plastique sur la largeur de l'éprouvette  $h$

$$\gamma_{\text{nom}} = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx \quad \text{I-63}$$

Lorsque l'on fait varier la valeur de la déformation plastique  $\gamma(0)$  au centre de la bande, on obtient une courbe contrainte-déformation nominale que l'on peut porter sur la **Figure 1-16** pour obtenir la **Figure 1-25**.



**Figure 1-25 : Déformation nominale critique en fonction de l'amplitude d'un défaut de surface**

Si l'on utilise le défaut géométrique proposé par MOLINARI et CLIFTON (1987) et décrit par la formulation I-58, on constate que la déformation nominale calculée décroît bien lorsque la taille du défaut augmente, mais qu'elle reste inférieure aux valeurs expérimentales. Ces différences peuvent être expliquées de différentes façons :

- les phénomènes de diffusion thermique qui, ne sont pas pris en considération par ce modèle, peuvent retarder le processus de la localisation, sans toutefois influencer fortement le début du stade 2,
- l'acuité des défauts, qui n'est pas considérée par l'analyse, peut jouer un rôle sur la localisation : un défaut aigu la suscite, un défaut plus plat la retarde,
- le contrôle aux limites, tant sur le plan expérimental que sur celui des simulations numériques, s'avère difficile.

Il conviendra donc d'analyser la part de ces différents phénomènes, en utilisant une description plus précise des défauts, tenant compte de leur taille et de leur forme, et en analysant le rôle des conditions aux limites

## IV : CONCLUSION

La première partie de ce chapitre a été consacrée à l'analyse des observations expérimentales de la distribution spatio-temporelle de la déformation plastique dans les B.C.A. de manière à dégager les problèmes ouverts qui seront abordés dans la suite de ce travail :

- On peut remarquer que l'influence des effets d'échelle, sur le processus de localisation de la déformation plastique et sur le phénomène de propagation des B.C.A., n'est pas connue de manière indiscutable. Il en est de même quant à l'influence des conditions aux limites sur le point de chute de contrainte.

- Les paramètres structurels locaux (taille, forme du défaut) et les paramètres rhéologiques de l'éprouvette peuvent influencer sur le régime local de déformation et sur le mode de rupture qui en résulte.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, différents modèles et méthodes d'analyse ont été présentés dans le but d'introduire les techniques d'étude qui seront utilisées dans les deux prochains chapitres. Cette présentation est un bilan non exhaustif des méthodes disponibles dans la littérature et pouvant apporter des éléments de réponse aux problèmes dégagés par les observations expérimentales évoquées ci dessus.

Au second chapitre, on étudiera la distribution de la déformation plastique dans une zone de localisation pour des conditions aux limites variées. La plupart des modèles utilisés dans la littérature sont unidimensionnels, les défauts géométriques ou structurels sont ramenés au plan de section transverse de l'éprouvette ; les phénomènes de propagation et les effets d'échelle ne peuvent donc pas être pris en considération, c'est pourquoi dans le second chapitre, nous commenterons également un modèle bi-dimensionnel susceptible de lever cette barrière dans certaines conditions.

Le troisième chapitre sera entièrement consacré à l'influence des paramètres structurels (imperfections, conditions aux limites) et des paramètres rhéologiques de l'éprouvette sur la déformation nominale critique.

## *Table des figures*

Figure 1-1 : Mécanisme de formation des B.C.A.....	12
Figure 1-2 : Déformation dans le copeau ; grille de 0.05 mm de côté .....	13
Figure 1.3 : Copeau de TA6V obtenu en tournage.....	13
Figure 1-4 : Perforation de plaques épaisses .....	14
Figure 1-5 : Perforation de plaques épaisses .....	15
Figure 1-6 : Dispositifs expérimentaux de production de B.C.A.....	16
Figure 1-7 : Barre de torsion .....	17
Figure 1-8 : Mesure de la déformation locale. ....	18
Figure 1-9 : Eprouvette de torsion.....	20
Figure 1-10 : Courbe contrainte déformation de cisaillement dynamique et les photos de la grille d'un même point à différents instants .....	21
Figure 1-11 : Distribution de la déformation en trois points différents de la circonférence de l'éprouvette au même instant.....	22
Figure 1-12 : Chemin de la rupture de cisaillement .....	23
Figure 1-13 : Profil de déformation à différents instants .....	24
Figure 1-14 : Propagation des bandes de cisaillement .....	25
Figure 1-15 : Déformation au centre de la B.C.A. en fonction de la déformation nominale ...	26
Figure 1-16 : Déformation nominale critique en fonction de l'amplitude d'un défaut de surface.....	27
Figure 1-17 : Déformation localisée en fonction de la largeur de bande .....	28
Figure 1-18 : Profil de température .....	29
Figure 1-19 : Localisation .....	35
Figure 1-20 : Modélisation de l'éprouvette. ....	38
Figure 1-21 : Comportement thermo-viscoplastique .....	41
Figure 1-22 : Comportement de la solution homogène.....	45
Figure 1-23 : Localisation infinie $L_{\infty}$ et localisation finie $L_p$ .....	46
Figure 1-24 : Géométrie du spécimen et condition de chargement.....	47
Figure 1-25 : Déformation nominale critique en fonction de l'amplitude d'un défaut de surface.....	49

# Annexes du chapitre 1

## CRITERE DE BIFURCATION, D'INSTABILITE, DE LOCALISATION

Dans le cas d'un écoulement adiabatique quasi-statique ( $m=0$ ) le critère de bifurcation s'exprime par la condition d'existence d'un extremum de la contrainte c'est à dire :  $\frac{\partial \tau}{\partial \gamma} = 0$

FRESSENCEAS et MOLINARI (1987) ont établi les critères d'instabilité pour un matériau thermo-viscoplastique modélisé par une loi de comportement puissance multiplicative.

Les critères de localisation d'un matériau thermo-viscoplastique soumis à du cisaillement simple adiabatique quasi-statique ont été établis par MOLINARI et CLIFTON (1987).

	Contrainte	Vitesse	Knowles
$f(\gamma)$	$(1 + a_c \gamma)^v \gamma^n$	$(1 + a_v \gamma^{n+1})^{\frac{v}{1-v}} \gamma^n$	$\gamma \left(1 + \frac{\beta}{n} \gamma^2\right)^{n-1}$
Bifurcation ( $m=0$ )	$v+n < 0$	$v+n < 0$	$2n < 1$
Instabilité	$v+n < 0$	$v+n < 0$	
Instabilité asymptotique	$v+n < 0$	$v+n < 0$	
Instabilité relative	$v+n+m < 0$	$v+n+m < 0$	
Localisation	$v+n+m < 0$	$v+n+m(1-v) < 0$	$2n + m < 1$

avec  $a_c = 1 + \frac{\mu \tau}{\rho c \theta_0} \gamma^n$  et  $a_v = 1 + \frac{(1-v) \mu \beta}{(1+n) \rho c \theta_0^{1-v}} \gamma^{n+1}$

*Chapitre 2*

**Distribution de la  
déformation plastique dans  
les B.C.A.**

# Sommaire

<b>I : INTRODUCTION.....</b>	<b>56</b>
<b>II : DISTRIBUTION DE LA DEFORMATION PLASTIQUE.....</b>	<b>57</b>
II.1 : MODELISATION.....	57
II.1.1 : Modélisation de l'éprouvette de Kolsky.....	57
II.1.2 : Description du défaut.....	58
II.1.3 : Loi de comportement.....	61
II.1.4 : Equations fondamentales.....	62
II.2 : CALCUL DE LA DISTRIBUTION DE LA DEFORMATION PLASTIQUE.....	64
II.2.1 : Méthode asymptotique.....	64
II.2.1.1 : Localisation $L_{\infty}$ .....	65
II.2.1.2 : Localisation $L_p$ .....	67
II.2.2 : Résolution complète .....	68
II.2.2.1 : Calcul des intégrales.....	69
II.2.2.2 : Localisation $L_{\infty}$ et localisation $L_p$ .....	71
II.3 : CALCUL ANALYTIQUE POUR LA LOI DE KNOWLES .....	73
II.3.1 : Utilisation des intégrales du type $\int_u^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$ .....	74
II.3.2 : Utilisation des intégrales du type $\int_0^u f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$ .....	75
II.3.3 : Comparaison entre les différentes expressions.....	76
II.3.3.1 : Critère de localisation.....	76
II.3.3.2 : Exemple et premières conclusions .....	77
II.3.4 : Déformation plastique le long du défaut .....	79
<b>III : CONDITION DE PROPAGATION ET EFFET D'ECHELLE .....</b>	<b>81</b>
III.1 : INTEGRALE J.....	81

III.1.1 : Expression générale.....	81
III.1.2 : Contour éloigné .....	82
III.1.3 : Contour le long de la surface de glissement.....	84
III.2 : CONDITION DE PROPAGATION .....	85
III.2.1 : Hypothèses .....	85
III.2.2 : Modèle.....	86
III.3 : EXEMPLE D'APPLICATION.....	88
<b>IV : CONCLUSION.....</b>	<b>92</b>
<b>TABLE DES FIGURES.....</b>	<b>93</b>
<b>ANNEXES DU CHAPITRE 2.....</b>	<b>94</b>
A.II.1 : DEVELOPPEMENT EN SERIE DE GAUSS .....	94
A.II.2 : FORMULAIRE DE CALCUL INTEGRAL .....	94
A.II.3 : FORMULAIRE DE CALCUL INTEGRAL (LOI DE KNOWLES) .....	95

## Chapitre 2

### Distribution de la déformation plastique dans les B.C.A.

#### I : INTRODUCTION

Dans le premier chapitre, certains problèmes ouverts ont été dégagés à partir d'observations expérimentales de la distribution spatio-temporelle de la déformation plastique dans les B.C.A.. De plus, différents modèles de localisation ont été présentés. Dans ce second chapitre, nous traiterons donc de la distribution de la déformation plastique pour des conditions aux limites variées.

Dans la première partie de ce chapitre, l'étude portera sur l'évolution des B.C.A. dans une éprouvette présentant un défaut de forme et constituée d'un matériau thermo-viscoplastique comportant un défaut métallurgique. Nous nous intéresserons plus particulièrement à la déformation critique  $\gamma_c$  (début de la chute de contrainte : début du stade 2 défini au chapitre 1). Jusqu'à cette déformation, les effets non locaux de la diffusion thermique ne sont pas significatifs et seront donc négligés de même que les effets d'inertie. Dans un premier temps, une étude de la distribution de la déformation plastique dans l'éprouvette, par une méthode asymptotique puis analytique/numérique complète, sera menée. Nous

présenterons ensuite une forme entièrement analytique de la déformation plastique pour la loi de Knowles.

La seconde partie de ce chapitre sera consacrée à la discussion d'un modèle bi-dimensionnel qui, sous certaines conditions, pourrait donner des informations sur les conditions de propagation de la zone de localisation. Ce modèle est basé sur une approche intégrale empruntée à la mécanique de la rupture.

## II : DISTRIBUTION DE LA DEFORMATION PLASTIQUE

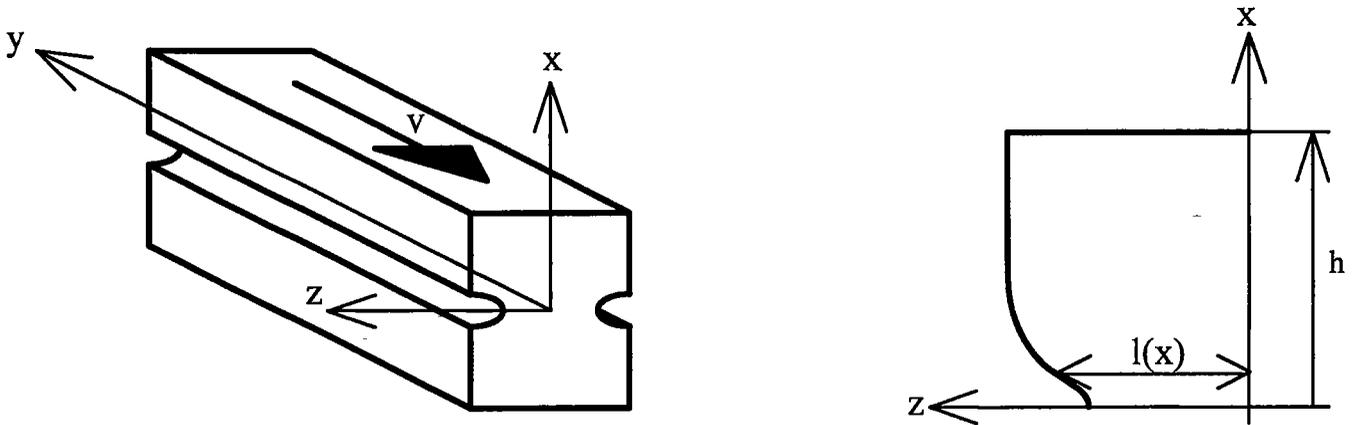
### II.1 : MODELISATION

#### II.1.1 : Modélisation de l'éprouvette de Kolsky

Dans l'expérience des barres de Kolsky présentée par MARCHAND et DUFFY (1988), l'éprouvette tubulaire est cisailée à grande vitesse par l'application d'un couple de torsion. La symétrie du problème nous conduit à ramener cette étude à celle du cisaillement simple parallèle à l'axe (oy) d'une couche de demi-épaisseur  $h$  suivant l'axe (ox), de longueur infinie suivant l'axe (oy) et de largeur  $l(x)$  suivant l'axe (oz) (**Figure 2-1**).

La vitesse de tout point appartenant à l'éprouvette est supposée de direction (oy). De plus, nous supposons que toutes les variables du problème sont dépendantes de l'ordonnée  $x$  et du temps  $t$  uniquement. Ainsi, une formulation unidimensionnelle du problème est proposée.

L'éprouvette est supposée être constituée d'un matériau thermo-viscoplastique incompressible et présenter un défaut qui peut être géométrique (variation de sa largeur), matériel (variation de son module  $\mu$ ) ou bien une combinaison des deux. De plus, la déformation élastique est négligée. FRESSENGEAS et MOLINARI (1985) ont montré numériquement que les effets dynamiques n'interviennent que faiblement dans les phénomènes de la localisation pour les vitesses de déformation de l'ordre de  $10^3 \text{ s}^{-1}$  atteintes en général avec ce dispositif. Dans le premier stade de la localisation, les effets de la diffusion thermique peuvent également être négligés. Pour ces différentes raisons, la déformation peut être supposée adiabatique et quasi-statique au premier stade de la localisation.



**Figure 2-1 : Géométrie de l'éprouvette et condition de chargement**

### II.1.2 : Description du défaut.

Le défaut géométrique au voisinage du centre de la bande de cisaillement est décrit par le développement local de la largeur  $l(x)$  de l'éprouvette :

$$\forall x \in [-x_1, +x_1] \quad l(x) = l(0) + l_r(0) |x|^r \quad \underline{\underline{II-1}}$$

où  $r$  représente l'acuité du défaut et  $l_r(0)$  un paramètre précisant sa longueur d'onde. Plus  $r$  est important ou  $l_r(0)$  petit, plus le défaut est plat et inversement. Si le défaut est peu prononcé ( $r > 1$ ) (**Figure 2-1.a**), les grandeurs caractéristiques du matériau dépendent principalement de la variable  $x$  et du temps  $t$  (toutes les variations des grandeurs dues aux autres variables sont négligeables). En revanche, si le défaut est aigu ( $r < 1$ ) (**Figure 2-2.b**), il faut tenir compte de la variable  $z$ . En effet, il existe une concentration de contraintes à proximité du défaut ; celles-ci dépendent donc de  $x$  mais également de  $z$ . Dans cette situation, toute analyse unidimensionnelle est à proscrire. C'est pourquoi, dans le cadre de ce travail unidimensionnel, nous supposons que  $r$  est supérieur à 1 et que  $l_r(0)$  est assez petit pour que la longueur d'onde du défaut soit assez grande.

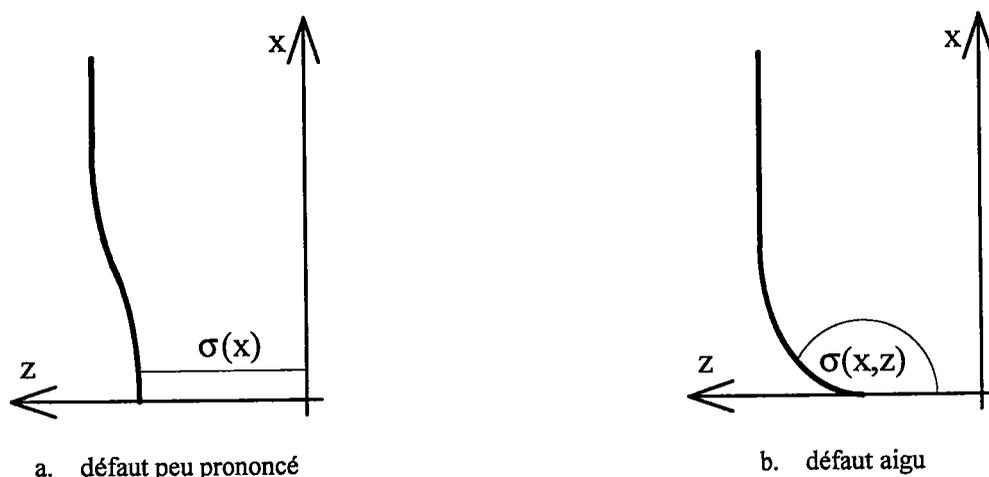


Figure 2-2 : Profil du défaut géométrique

Le défaut géométrique local décrit par II-1 entre  $-x_1$  et  $+x_1$  est raccordé au profil rectiligne de largeur  $l_i$  au voisinage du bord du spécimen par l'intermédiaire d'un polynôme d'ordre 5 (Figure 2-3). La courbe que forme le défaut, son raccord et le profil rectiligne au bord de l'éprouvette, est continue et continûment dérivable à l'ordre 2 (continuité du profil, de sa pente et de sa courbure). C'est cette condition qui nous permet de déterminer les coefficients  $a_i$  du polynôme d'ordre 5, lorsque l'on connaît le profil du défaut et le bord de l'éprouvette.

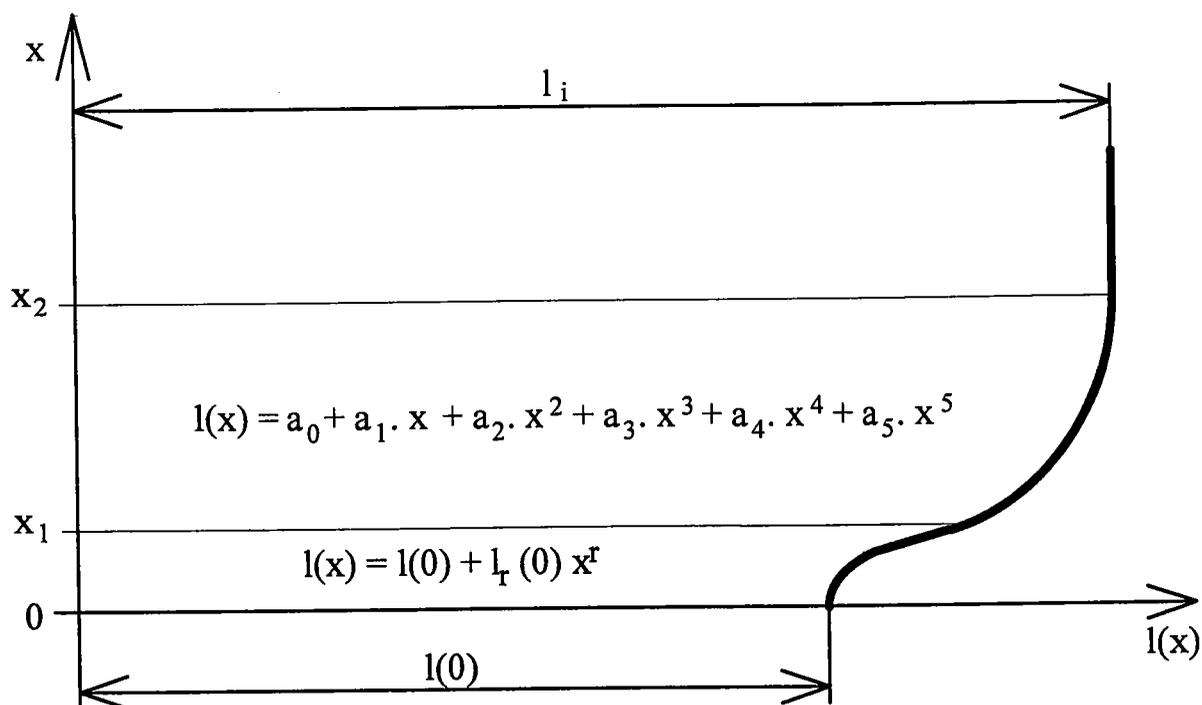


Figure 2-3 : Définition du défaut géométrique et de son raccord

La taille relative  $\epsilon_l$  du défaut, définie par l'expression II-2 est généralement comprise entre  $10^{-2}$  et  $10^{-1}$  (DUFFY (1991))

$$\epsilon_l = \frac{l_i - l(0)}{l_i} \tag{II-2}$$

Les défauts matériels (variation du module  $\mu$ ) sont modélisés au voisinage du centre de la bande de cisaillement par un développement analogue à la modélisation du défaut géométrique :

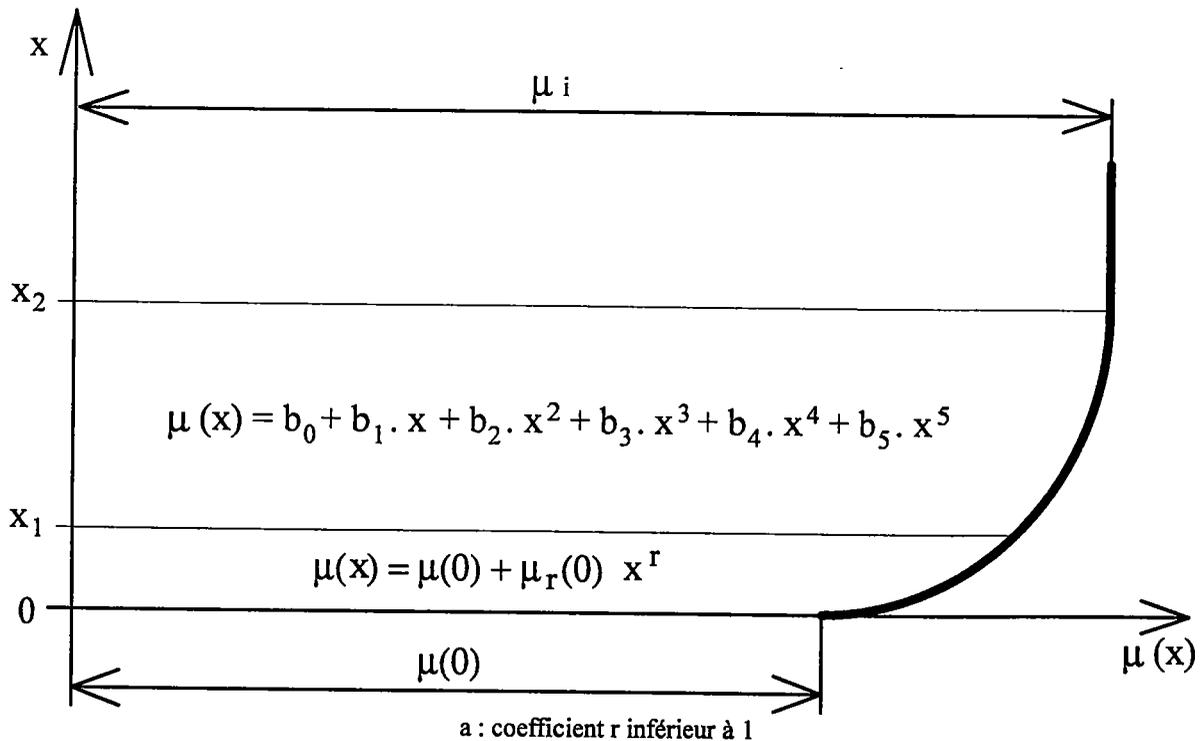
$$\forall x \in [-x_1, +x_1] \quad \mu(x) = \mu(0) + \mu_r(0) |x|^r \tag{II-3}$$

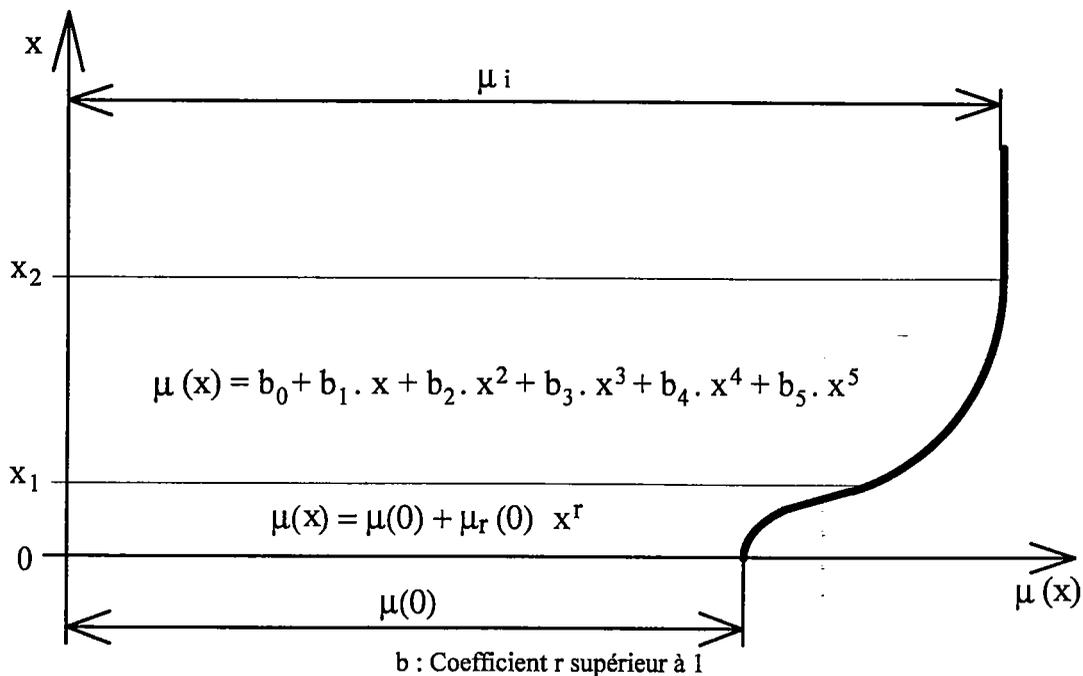
Dans ce cas, les coefficients  $r$  et  $\mu_r(0)$  ne sont soumis à aucune restriction. Lorsque  $r$  est inférieur à 1, on décrit les micro-défauts liés à une singularité matérielle et la pente du profil devient infinie au centre ( $x = 0$ )

Le raccord du défaut avec le profil rectiligne se fait de la même façon que pour le défaut géométrique, avec un polynôme de degré 5. (Figure 2-4)

La taille relative  $\epsilon_\mu$  du défaut s'écrit également :

$$\epsilon_\mu = \frac{\mu_i - \mu(0)}{\mu_i} \tag{II-4}$$





**Figure 2-4 : Définition du défaut matériel et de son raccord**

A l'heure actuelle, il n'existe pas de relevé systématique de l'acuité des défauts lors d'une expérience de localisation de la déformation plastique. Ces informations pourraient être obtenues par une analyse statistique de la rugosité de surface de l'échantillon. L'objectif de ce travail ne sera donc pas de fournir une description quantitative qui pourrait être comparée à des résultats expérimentaux, mais uniquement d'identifier et de quantifier des tendances.

### II.1.3 : Loi de comportement

Dans leur expression unidimensionnelle, les lois de comportement thermo-viscoplastiques que nous utiliserons sont de la forme générale :

$$\tau = F(\gamma; \theta) \dot{\gamma}^m \quad \text{II-5}$$

où  $m$  est le coefficient de sensibilité de la contrainte d'écoulement à la vitesse de déformation.

Dans le cas de la loi puissance multiplicative, la contrainte de cisaillement s'écrit sous la forme :

$$\tau = \mu(x) \theta^v \gamma^n \dot{\gamma}^m \quad \text{II-6}$$

où  $v$  et  $n$  sont respectivement les coefficients d'adoucissement thermique et d'écrouissage (voir aussi I-37 et I-38). Les deux coefficients ont été identifiés par MARCHAND et DUFFY (1988)

pour l'acier CRS-1018. Pour un problème de cisaillement simple quasi-statique adiabatique, la contrainte de cisaillement peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\tau = \mu(x) \theta_0^v f(\gamma) \dot{\gamma}^m \quad \text{II-7}$$

où l'on retrouve (voir I-54 et I-55) pour la fonction  $f$  deux expressions, l'une associée au contrôle en contrainte :

$$f(\gamma) = (1 + a_c \gamma)^v \gamma^n \quad \text{avec } a_c = \frac{\beta \tau(x)}{\rho c \theta_0} \text{ et } \tau(x) = \tau_0 \frac{l(0)}{l(x)} \quad \text{II-8}$$

et l'autre associée au contrôle en vitesse :

$$f(\gamma) = (1 + a_v \gamma^{n+1})^{\frac{v}{1-v}} \gamma^n \quad \text{avec } a_v = \frac{\mu(x) \beta}{\rho c} \frac{(1-v)}{(1+n)} \frac{\dot{\gamma}_0^m}{\theta_0^{1-v}} \quad \text{II-9}$$

MARCHAND et DUFFY (1988) ont également identifié les coefficients  $b$  et  $n$  de la loi phénoménologique proposée par KNOWLES (1976) II-10 pour l'acier HY-100.

$$\tau = \mu(x) f(\gamma) \dot{\gamma}^m \quad \text{avec } f(\gamma) = \gamma \left( 1 + \frac{b}{n} \gamma^2 \right)^{n-1} \quad \text{II-10}$$

#### II.1.4 : Equations fondamentales

Si l'on écrit l'équation d'équilibre entre un point quelconque d'abscisse  $x$  appartenant à la zone de localisation et le centre de cette même zone ( $x=0$ ), on obtient la relation suivante :

$$\forall x \in [-h, +h] \quad \tau(x, t) l(x) = \tau(0, t) l(0) \quad \text{II-11}$$

Après substitution de la loi de comportement et intégration le long du processus de localisation, on obtient :

$$\forall x \in [-h, +h] \quad (l(x) \mu(x))^{\frac{1}{m}} \int_{\gamma_0}^{\gamma(x)} f(a(x); \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = (l(0) \mu(0))^{\frac{1}{m}} \int_{\gamma_0}^{\gamma(0)} f(a(0); \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \quad \text{II-12}$$

où  $\gamma_0$  est la déformation plastique initiale que l'on suppose uniforme et  $\gamma(0)$  la déformation au centre de la bande. Le coefficient  $a(x)$  rappelle que la fonction  $f$  dépend éventuellement de  $x$  au travers de ce coefficient  $a$  (voir ci-dessus II-8, II-9 et ci-dessous la **Figure 2-5**). L'expression II-12 peut également s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{\gamma(x)}^{\gamma(0)} f(a(x), \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \int_{\gamma_0}^{\gamma(0)} f(a(x), \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi - \left( \frac{l(x) \mu(x)}{l(0) \mu(0)} \right)^{\frac{1}{m}} \int_{\gamma_0}^{\gamma(0)} f(a(0), \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \quad \text{II-13}$$

A la localisation infinie  $L_\infty$  au point  $x=0$  II-13 devient :

$$\int_{\gamma(x)}^{\infty} f(a(x), \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \int_{\gamma_0}^{\infty} f(a(x), \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi - \left( \frac{l(x) \mu(x)}{l(0) \mu(0)} \right)^{\frac{1}{m}} \int_{\gamma_0}^{\infty} f(a(0), \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \quad \text{II-14}$$

Lors de la localisation physique  $L_p$  dans un voisinage du point ( $x=0$ ) la déformation en tout point de ce voisinage prend une valeur élevée finie appelée  $\gamma_p$  au moins  $p$  fois supérieure à la déformation nominale ; dans ce cas II-13 devient :

$$\int_{\gamma(x)}^{\gamma_p} f(a(x), \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \int_{\gamma_0}^{\gamma_p} f(a(x), \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi - \left( \frac{l(x) \mu(x)}{l(0) \mu(0)} \right)^{\frac{1}{m}} \int_{\gamma_0}^{\gamma_p} f(a(0), \xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \quad \text{II-15}$$

Lorsque l'on s'intéresse à la localisation infinie  $L_\infty$  ou à la localisation physique  $L_p$ , à partir des lois de comportement II-10 et II-7 associées aux fonctions II-8 et II-9, il existe cinq cas différents de résolution de II-14 ou de II-15, répertoriés dans le tableau de la **Figure 2-5**

Loi de comportement	Cas	a
<u>Loi adiabatique avec contrôle en contrainte</u>  $f(\gamma) = (1 + a_c \gamma)^v \gamma^n$ avec $a_c = \frac{\beta}{\rho c \theta_0} \tau_0 \frac{l(0)}{l(x)}$	1	$l(x)$ variable $\mu(x)$ quelconque $\Rightarrow a_c$ variable
	2	$l(x)$ constant $\mu(x)$ variable $\Rightarrow a_c$ constant
<u>Loi adiabatique avec contrôle en vitesse</u>  $f(\gamma) = (1 + a_v \gamma^{n+1})^{\frac{v}{1-v}} \gamma^n$ avec $a_v = \frac{\mu(x) \beta}{\rho c} \frac{(1-v)}{(1+n)} \frac{\dot{\gamma}_0^m}{\theta_0^{1-v}}$	3	$l(x)$ quelconque $\mu(x)$ variable $\Rightarrow a_v$ variable
	4	$l(x)$ variable $\mu(x)$ constant $\Rightarrow a_v$ constant
<u>Loi de Knowles</u>  $f(\gamma) = \gamma \left( 1 + \frac{b}{n} \gamma^2 \right)^{n-1}$	5	$a = \frac{b}{n}$ : toujours constant

**Figure 2-5 : Différents cas de résolutions possibles**

Si nous nous plaçons dans les cas où  $a$  est constant, c'est à dire les cas 2, 4, 5 du tableau ci-dessus, l'expression II-14 se simplifie de la manière suivante :

$$\int_{\gamma(x)}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \left( 1 - \left( \frac{l(0) \mu(0)}{l(x) \mu(x)} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \int_{\gamma_0}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \quad \text{II-16}$$

et II-15 devient :

$$\int_{\gamma(x)}^{\gamma_p} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \left( 1 - \left( \frac{l(0) \mu(0)}{l(x) \mu(x)} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \int_{\gamma(x)}^{\gamma_p} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \quad \text{II-17}$$

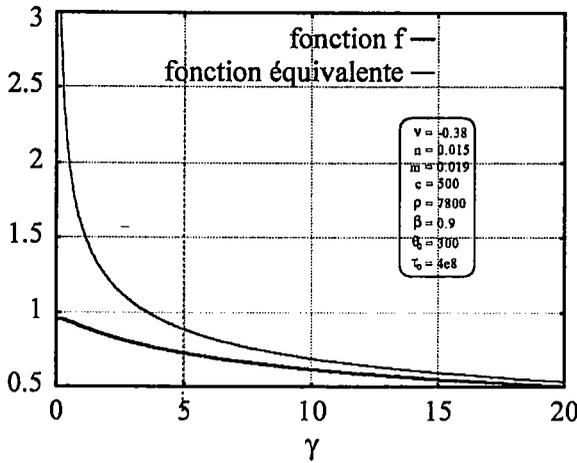
## II.2 : CALCUL DE LA DISTRIBUTION DE LA DEFORMATION PLASTIQUE

A partir de l'une des équations implicites II-14 ou II-15, l'objectif est d'exprimer la déformation plastique  $\gamma(x)$  en chacun des points du profil. Pour cela, il est nécessaire de calculer les différentes intégrales. La solution, qui consisterait à les calculer par une méthode traditionnelle simple (type points de Gauss), ne fournit pas de résultats corrects, même en décomposant l'intervalle d'intégration du fait de la singularité du profil de la déformation plastique. Pour résoudre ce problème, deux méthodes sont présentées : l'une consiste en un développement asymptotique local, et la seconde est une solution analytique complète exprimée à l'aide d'un développement asymptotique en série convergente des intégrales. Notre contribution consiste, en outre, à préciser les conditions de convergence de ces développements.

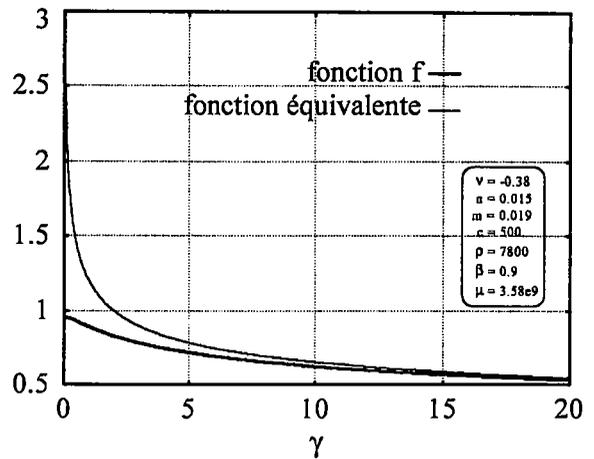
### II.2.1 : Méthode asymptotique

Pour cette méthode, nous nous limitons au cas où  $a$  est constant (cas 2, 4 et 5 de la **Figure 2-5**). La méthode consiste à remplacer la fonction  $f(\xi)$  par une fonction équivalente  $e(\xi)$  pour les grandes valeurs de  $\xi$  ;  $e(\xi)$  est obtenue en utilisant les développements établis par DIEUDONNE (1968) et se présentant sous la forme suivante :

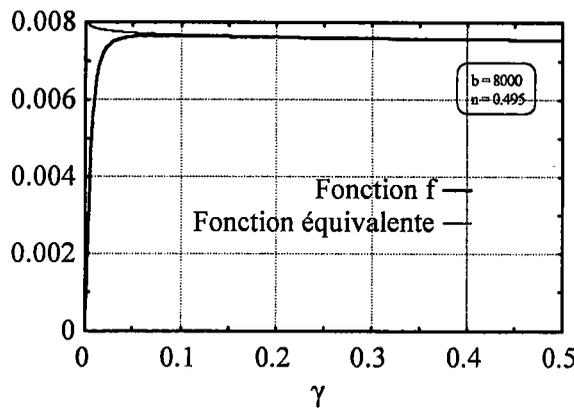
$$e(\xi) = a_{\infty} \xi^{-p_{\infty}} \quad \text{II-18}$$



a. Loi adiabatique avec contrôle en contrainte



b. Loi adiabatique avec contrôle en vitesse



c. Loi de Knowles

**Figure 2-6 : Comparaison entre les fonctions f et leur fonction équivalente**

II.2.1.1 : Localisation  $L_\infty$

L'équation II-16 a donc pour équivalent, pour des  $\gamma(x)$  assez grand :

$$\int_{\gamma(x)}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \left( 1 - \left( \frac{l(x)}{l(0)} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \int_{\gamma_0}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \approx \int_{\gamma(x)}^{\infty} e(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \frac{a_\infty^{\frac{1}{m}}}{\frac{p_\infty}{m} - 1} \gamma(x)^{-\frac{p_\infty}{m} + 1} \quad \text{II-19}$$

Ce développement peut être utilisé pour de grandes déformations, c'est à dire au voisinage du centre de la B.C.A.. Dans cette même zone, on peut également substituer à  $\left( 1 - \left( \frac{l(x)}{l(0)} \right)^{\frac{1}{m}} \right)$  ou  $\left( 1 - \left( \frac{\mu(x)}{\mu(0)} \right)^{\frac{1}{m}} \right)$  le développement au premier ordre suivant :

$$1 - \left( \frac{l(x)}{l(0)} \right)^{\frac{1}{m}} \approx \frac{l_r(0)}{m l(0)} x^r \quad \text{ou} \quad 1 - \left( \frac{\mu(x)}{\mu(0)} \right)^{\frac{1}{m}} \approx \frac{\mu_r(0)}{m \mu(0)} x^r \quad \text{II-20}$$

Si on note  $A_\infty = \int_{\gamma_0}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$ , il est possible d'exprimer la déformation à partir de II-19 :

$$\gamma(x) = \left( A_{\infty} \left( a_{\infty}^{-\frac{1}{m}} \right)^{\frac{p_{\infty}-m}{m}} \frac{l_r(0)}{m l(0)} x^r \right)^{\frac{m}{-p_{\infty}+m}} \tag{II-21}$$

que l'on écrit sous la forme suivante :

$$\gamma(x) = \alpha x^{-p} \quad \text{avec } -p = \frac{m}{-p_{\infty}+m} \tag{II-22}$$

Lorsqu'il y a localisation, la déformation nominale reste finie ; l'intégrale de la déformation doit donc être finie au voisinage de la B.C.A. c'est à dire :

$$\int_0^{x_1} \gamma(x) dx = \int_0^{x_1} \alpha x^{-p} dx < \infty \tag{II-23}$$

La condition II-23 est réalisée lorsque  $p < 1$  ce qui fournit un nouveau critère de localisation asymptotique sous déformation nominale finie noté critère de localisation  $L_{\infty,r}$  (DINZART (1994)).

Les tableaux de la **Figure 2-7** résument les valeurs de  $\alpha$  et  $p$  pour chacune des trois lois ; ils rappellent les critères d'instabilité et de localisation  $L_{\infty}$  déjà vus au chapitre 1 et fournissent le critère de localisation  $L_{\infty,r}$ .

	Contrainte	Vitesse	Knowles
$f(\gamma)$	$(1 + a_c \gamma)^v \gamma^n$	$(1 + a_v \gamma^{n+1})^{\frac{v}{1-v}} \gamma^n$	$\gamma \left( 1 + \frac{\beta}{n} \gamma^2 \right)^{n-1}$

a. Fonction f correspondant aux trois comportements

	$a_{\infty}$	$-p_{\infty}$	$\alpha$	$-P$
Contrainte	$a_c^v$	$v+n$	$\left( a_c^{-v} \left( -\frac{v+n+m}{m} A_{\infty} \frac{l_r(0)}{m l(0)} \right)^m \right)^{\frac{1}{v+n+m}}$	$\frac{r m}{v+n+m}$
Vitesse	$a_v^{\frac{v}{1-v}}$	$\frac{v+n}{1-v}$	$\left( a_v^{-v} \left( \frac{v+n+m(1-v)}{m(v-1)} A_{\infty} \frac{l_r(0)}{m l(0)} \right)^m \right)^{\frac{1}{v+n+m(1-v)}}$	$\frac{r m (1-v)}{v+n+m (1-v)}$
Knowles	$\left( \frac{b}{n} \right)^{n-1}$	$2n - 1$	$\left( \left( \frac{b}{n} \right)^{1-n} \left( \frac{1-2n-m}{m} A_{\infty} \frac{l_r(0)}{m l(0)} \right)^m \right)^{\frac{1}{2n-1+m}}$	$\frac{r m}{2n-1+m}$

b. Tableau récapitulatif

	Contrainte	Vitesse	Knowles
Instabilité	$v+n < 0$	$v+n < 0$	$2n < 1$
Localisation $L_\infty$	$v+n+m < 0$	$v+n+m(1-v) < 0$	$2n+m < 1$
Localisation $L_{\infty,r}$	$v+n+m(1+r) < 0$	$v+n+m(1-v)(1+r) < 0$	$2n+m(1+r) < 1$

c. Localisation  $L_\infty$  et  $L_{\infty,r}$

**Figure 2-7 : Localisation  $L_\infty$  et  $L_{\infty,r}$**

Le critère de localisation  $L_{\infty,r}$  complète la condition de localisation  $L_\infty$  ; en effet, si à titre d'exemple,  $r$  tend vers 0 (défaut ponctuel en  $x=0$ ), on retrouve le critère de localisation  $L_\infty$ . Si on augmente la valeur de  $r$  (défaut plus plat), les effets stabilisants du coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation augmentent car ils sont pondérés par le facteur  $(1+r)$  ; la convergence de l'intégrale II-23 nécessite alors une augmentation des effets déstabilisants.

II.2.1.2 : Localisation  $L_p$

Pour de grandes valeurs de la déformation plastique, l'équation de la localisation  $L_p$

II-17 s'écrit à l'aide des équivalences de DIEUDONNE (1968) :

$$\int_{\gamma(x)}^{\gamma_p} e(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \frac{a_\infty^{\frac{1}{m}}}{-\frac{p_\infty}{m} + 1} \left( \gamma_p^{-\frac{p_\infty}{m} + 1} - \gamma(x)^{-\frac{p_\infty}{m} + 1} \right) = \frac{l_r(0)}{m l(0)} x^r \int_{\gamma(x)}^{\gamma_p} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \tag{II-24}$$

si l'on note  $\int_{\gamma(x)}^{\gamma_p} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = A_p$  alors la déformation plastique s'écrit :

$$\gamma(x) = \left( A_p \left( a_\infty^{-\frac{1}{m}} \right)^{\frac{p_\infty - m}{m}} \frac{l_r(0)}{m l(0)} x^r + \gamma_p^{-\frac{p_\infty}{m} + 1} \right)^{-\frac{m}{p_\infty + m}} \tag{II-25}$$

qu'il est possible d'écrire sous la forme suivante :

$$\gamma(x) = \left( \beta x^r + \gamma_p^{-\frac{1}{q}} \right)^{-q} \tag{II-26}$$

Le tableau ci-dessous résume les constantes  $\beta$  et  $q$  pour chacune des lois.

	$f(\gamma)$	$a_\infty$	$-p_\infty$	$\beta$	$-q$
Contrainte	$(1 + a_c \gamma)^v \gamma^n$	$a_c^v$	$v+n$	$- a_c^{-\frac{v}{m}} A_p \frac{l_r(0)}{m l(0)} \frac{v+n+m}{m}$	$\frac{m}{v+n+m}$
Vitesse	$(1 + a_v \gamma^{n+1})^{\frac{v}{1-v}} \gamma^n$	$a_v^{\frac{v}{1-v}}$	$\frac{v+n}{1-v}$	$a_v^{\frac{v}{m(v-1)}} A_p \frac{l_r(0)}{m l(0)} \frac{v+n+m(1-v)}{m (v-1)}$	$\frac{m (1-v)}{v+n+m (1-v)}$
Knowles	$\gamma \left(1 + \frac{\beta}{n} \gamma^2\right)^{n-1}$	$\left(\frac{\beta}{n}\right)^{n-1}$	$2n - 1$	$\left(\frac{\beta}{n}\right)^{\frac{1-n}{m}} A_p \frac{l_r(0)}{m l(0)} \frac{1-2n+m}{m}$	$\frac{m}{2n-1+m}$

Figure 2-8 : Profil des déformations pour une localisation  $L_p$

Cette méthode n'est utilisable qu'à proximité du centre de la bande ; son domaine de validité ne peut, en aucun cas, être supérieur à l'intervalle  $[-x_1 ; +x_1]$ , donc si l'on désire connaître la déformation plastique en tout point du profil, il faut recourir à une autre méthode.

II.2.2 : Résolution complète

Pour obtenir une solution analytique complète des équations II-14 et II-15 associées respectivement à l'étude de la localisation  $L_\infty$  et  $L_p$ , nous allons effectuer un développement en séries convergentes des intégrales à l'aide de fonctions hypergéométriques  ${}_2F_1$  (GRADSHTEYN et RYZHIK (1965)). On trouvera en annexe A.II.2 le formulaire du développement en série de Gauss ainsi que ses conditions de convergence.

Pour réduire le nombre de développements à effectuer, nous allons utiliser la formulation générique du comportement II-27 reprenant l'ensemble des cas étudiés :

$$\tau = \mu f(\gamma) \dot{\gamma}^m \text{ avec } f(\gamma) = (1 + a\gamma)^v \gamma^n \tag{II-27}$$

Cette formulation est identique à la loi adiabatique avec contrôle en contrainte. Si nous étudions la loi adiabatique avec contrôle en vitesse, le changement de variable suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma' = \gamma^{n+1} \\ n' = \frac{n}{n+1} (1-m) \\ v' = \frac{v}{1-v} \\ \mu' = \frac{\mu \theta_0^v}{(1+n)^m} \end{array} \right. \quad \text{II-28}$$

conduit à  $\tau = \mu \theta_0^v f(\gamma) \dot{\gamma}^m = \mu \theta_0^v (1 + a_v \gamma^{n+1})^{\frac{v}{1-v}} \gamma^n \dot{\gamma}^m$  qui s'écrit  $\tau = \mu' (1 + a \gamma')^{-v'} \gamma'^{n'} \dot{\gamma}'^m$  et nous retrouvons la formulation II-27.

De même pour la fonction de Knowles, le changement de variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma'' = \gamma^2 \\ n'' = \frac{1-m}{2} \\ v'' = n - 1 \\ \mu'' = \frac{\mu}{2^m} \end{array} \right. \quad \text{II-29}$$

fournit  $\tau = \mu(x) f(\gamma) \dot{\gamma}^m = \mu \left(1 + \frac{b}{n} \gamma^2\right)^{n-1} \gamma \dot{\gamma}^m$  qui s'écrit  $\tau = \mu'' (1 + a \gamma'')^{-v''} \gamma''^{n''} \dot{\gamma}''^m$  et nous retrouvons également la formulation II-27.

Ce changement de variable n'a pas de signification physique ; il sert à utiliser une formulation unique pour trois lois différentes.

### II.2.2.1 : Calcul des intégrales

Si l'on note  $F_{\infty}(a, \gamma)$  l'intégrale suivante :  $\int_{\gamma}^{\infty} ((1 + a\xi)^v \xi^n)^{\frac{1}{m}} d\xi$ , la formule [3.194.2] de

GRADSHTEYN et RYZHIK (1965) donne la relation suivante :

$$F_{\infty}(a, \gamma) = -\frac{m}{n+m+v} \gamma^{1+\frac{n+v}{m}} {}_2F_1\left(-\frac{n+v}{m} - 1, -\frac{v}{m}; -\frac{n+v}{m}; \frac{1}{a\gamma}\right) \quad \text{II-30}$$

La série converge si  $z = \frac{1}{a\gamma} < 1$  (voir annexe A.II.1). Si  $\gamma$  n'est pas très grand, cette condition

n'est pas réalisée. C'est pourquoi, il est nécessaire d'utiliser le changement de variable suivant :

$z' = \frac{z}{z+1}$ .  $z'$  est toujours strictement inférieur à 1 et II-30 devient :

$$F_{\infty}(a, \gamma) = a^{-\left(1 + \frac{n}{m}\right)} \frac{-m}{v+n+m} h_{\infty}(a, \gamma)^{-\frac{v+n+m}{m}} {}_2F_1\left(-\frac{v+n}{m} - 1, -\frac{n}{m}; -\frac{v+n}{m}; h_{\infty}(a, \gamma)\right) \quad \text{II-31}$$

avec  $h_{\infty}(a, \gamma) = \frac{1}{1+a\gamma}$

D'après GRADSHTEYN et RYZHIK [3.194.2] (1965), la fonction hypergéométrique  ${}_2F_1$  existe si  $v+n+m < 0$  ce qui nous donne, après les changements de variable II-28 et II-29,  $v+n+m(1-v) < 0$  pour la loi adiabatique avec contrôle en vitesse et  $2n+m-1 < 0$  pour la fonction de Knowles. Les critères obtenus précédemment sont ainsi bien retrouvés.

Le développement en série de Gauss de la fonction hypergéométrique  ${}_2F_1$  s'exprime par :

$${}_2F_1 = \sum_{i=0}^k \beta_i (h_{\infty}(a, \gamma))^i \quad \text{avec} \quad \beta_i = \frac{v+n+m}{v+n+m(1-i)} \left(-\frac{n}{m}\right)_i \frac{1}{i!} \quad \text{II-32}$$

où  $(a)_i$  désigne le symbole de Pochhammer défini en annexe A.II.1

L'intégrale  $F_{\infty}(a, \gamma)$  s'écrit donc :

$$F_{\infty}(a, \gamma) = a^{-\left(1 + \frac{n}{m}\right)} \frac{-m}{v+n+m} h_{\infty}(a, \gamma)^{-\frac{v+n+m}{m}} \sum_{i=0}^k \beta_i (h_{\infty}(a, \gamma))^i \quad \text{II-33}$$

Le développement en série de Gauss de  $F_{\infty}(a, \gamma)$  converge. Donc, après le calcul d'un certain nombre fini de termes, on atteint le résultat escompté avec une bonne précision.

De même si l'on note  $F_0(a, \gamma)$  l'intégrale :  $\int_0^{\gamma} ((1 + a\xi)^v \xi^n)^{\frac{1}{m}} d\xi$ , la formule [3.194.1] de GRADSHTEYN et RYZHIK (1965) permet d'exprimer  $F_0(a, \gamma)$  en fonction de la fonction hypergéométrique  ${}_2F_1$  :

$$F_0(a, \gamma) = \frac{m}{n+m} \gamma^{1 + \frac{n}{m}} {}_2F_1\left(\frac{n}{m} + 1, -\frac{v}{m}; 2 + \frac{n}{m}; -a\gamma\right) \quad \text{II-34}$$

La série converge si  $z = -a\gamma < 1$ . Or, si  $\gamma$  n'est pas très grand, cette condition n'est pas réalisée. C'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser le changement de variable :  $z' = \frac{z}{z+1}$ .  $z'$  est toujours strictement inférieur à 1 et II-34 devient :

$$F_0(a, \gamma) = a^{-\left(1 + \frac{n}{m}\right)} \frac{m}{n+m} (h_0(a, \gamma))^{\left(1 + \frac{n}{m}\right)} {}_2F_1\left(\frac{n}{m} + 1, \frac{v+n}{m} + 2; \frac{n}{m} + 2; h_0(a, \gamma)\right) \quad \text{II-35}$$

avec  $h_0(a, \gamma) = \frac{1}{1 + \frac{1}{a\gamma}}$

Le développement de  ${}_2F_1$  s'écrit :

$${}_2F_1 = \sum_{i=0}^k \delta_i (h_0(a,\gamma))^i \text{ avec } \delta_i = \frac{n+m}{n+m(1+i)} \left( \frac{v+n}{m} + 2 \right)_i \frac{1}{i!} \quad \text{II-36}$$

ce qui donne donc :

$$F_0(a,\gamma) = a^{-(1+\frac{n}{m})} \frac{m}{n+m} (h_0(a,\gamma))^{(1+\frac{n}{m})} \sum_{i=0}^k \delta_i (h_0(a,\gamma))^i \quad \text{II-37}$$

Enfin, si l'on note  $F_{0,\infty}(a,\gamma)$  l'intégrale :  $\int_0^\infty ((1 + a \xi)^v \xi^n)^{\frac{1}{m}} d\xi$ , la formule [3.194.3] de

GRADSHTEYN et RYZHIK (1965) fournit la relation suivante :

$$F_{0,\infty}(a) = \frac{1}{2} a^{-(1+\frac{n}{m})} B\left(-\frac{v+m+n}{m}, \frac{n}{m} + 1\right) \quad \text{II-38}$$

où B représente la fonction Bêta

On remarque qu'aux faibles valeurs de  $\gamma$ , le calcul de l'intégrale  $F_0$  converge nettement plus rapidement que le calcul de l'intégrale  $F_\infty$ . En revanche, si  $\gamma$  est très grand, c'est le calcul de  $F_\infty$  qui converge plus vite. On peut également remarquer que dans ces deux cas et pour la loi de Knowles, la convergence est très rapide ; nous montrerons dans le paragraphe II.3 qu'un seul terme peut souvent suffire. Ceci est dû au fait que  $\frac{b}{n}$ , qui est de l'ordre de 16 000, est très nettement supérieur à 1. En ce qui concerne les lois adiabatiques,  $a$  est de l'ordre de grandeur de 1 ; la convergence se fait donc moins rapidement et il faut au minimum une dizaine de termes pour obtenir des résultats satisfaisants.

### II.2.2.2 : Localisation $L_\infty$ et localisation $L_p$

Avec les notations introduites précédemment, les équations de localisation  $L_\infty$  II-14 et de localisation  $L_p$  II-15 peuvent s'écrire respectivement :

$$\frac{F_\infty(a(x), \gamma_0) - F_\infty(a(x), \gamma(x))}{F_\infty(a(0), \gamma_0)} = G(x)^{-1} \quad (a)$$

ou

$$\frac{F_\infty(\gamma(x))}{F_\infty(\gamma_0)} = 1 - G(x)^{-1} \quad (b) \quad \text{II-39}$$

et

$$\frac{F_{\infty}(a(x), \gamma_0) - F_{\infty}(a(x), \gamma(x))}{F_{\infty}(a(0), \gamma_0) - F_{\infty}(a(0), \gamma_p)} = G(x)^{-1} \quad (a)$$

ou

$$\frac{F_{\infty}(\gamma_0) - F_{\infty}(\gamma(x))}{F_{\infty}(\gamma_0) - F_{\infty}(\gamma_p)} = G(x)^{-1} \quad (b) \quad \text{II-40}$$

$$\text{avec } G(x) = \left( \frac{l(x) \mu(x)}{l(0) \mu(0)} \right)^{\frac{1}{m}}$$

Connaissant le profil de l'éprouvette  $l(x)$ , le défaut matériel  $\mu(x)$ , la déformation plastique initiale  $\gamma_0$  et éventuellement la déformation plastique au centre de la bande en cas de localisation physique  $L_p$ , le profil de déformation plastique  $\gamma(x)$  est parfaitement défini en résolvant l'équation II-39 ou II-40 suivant le cas. En effet, à une position  $x$ , il est possible de déterminer  $\left( \frac{l(x) \mu(x)}{l(0) \mu(0)} \right)^{\frac{1}{m}}$ ,  $F_{\infty}(a(x), \gamma_0)$ ,  $F_{\infty}(a(0), \gamma_0)$ ,  $F_{\infty}(a(0), \gamma_p)$  et, par conséquent, la valeur  $X$  de  $F_{\infty}(a(x), \gamma(x))$ . Il ne reste plus qu'à résoudre  $F_{\infty}(a(x), \gamma(x)) = X$ . Ce calcul peut, en général, être mené analytiquement pour la fonction de Knowles (voir ci-dessous paragraphe II.3) car un seul terme de la série suffit pour calculer les intégrales. En ce qui concerne la loi adiabatique où une dizaine de termes au minimum sont nécessaires, le calcul de  $\gamma(x)$  ne peut être atteint que par une méthode numérique de dichotomie. D'après les remarques précédentes, il est possible de réduire le nombre de calculs nécessaires à la résolution II-39 et II-40 en résolvant une des équations du tableau ci-dessous.

a(x)	$\gamma(x)$	Loc.	Equation de localisation
V a r i a b l e	G r a n d	$L_\infty$	$\frac{-F_0(a(x), \gamma_0) + F_{0,\infty}(a(x)) - F_\infty(a(x), \gamma(x))}{-F_0(a(0), \gamma_0) + F_{0,\infty}(a(0))} = G(x)^{-1}$
		$L_p$	$\frac{-F_0(a(x), \gamma_0) + F_{0,\infty}(a(x)) - F_\infty(a(x), \gamma(x))}{-F_0(a(0), \gamma_0) + F_{0,\infty}(a(0)) - F_\infty(a(0), \gamma_p)} = G(x)^{-1}$
	P e t i t	$L_\infty$	$\frac{-F_0(a(x), \gamma_0) + F_0(a(x), \gamma(x))}{-F_0(a(0), \gamma_0) + F_{0,\infty}(a(0))} = G(x)^{-1}$
		$L_p$	$\frac{-F_0(a(x), \gamma_0) + F_0(a(x), \gamma(x))}{-F_0(a(0), \gamma_0) + F_{0,\infty}(a(0)) - F_\infty(a(0), \gamma_p)} = G(x)^{-1}$
		$\gamma(0)$ Petit	$\frac{-F_0(a(x), \gamma_0) + F_0(a(x), \gamma(x))}{-F_0(a(0), \gamma_0) + F_0(a(0), \gamma_p)} = G(x)^{-1}$
	C o n s t a n t	G r a n d	$L_\infty$
$L_p$			$\frac{-F_0(\gamma_0) + F_{0,\infty} - F_\infty(\gamma(x))}{-F_0(\gamma_0) + F_{0,\infty} - F_\infty(\gamma_p)} = G(x)^{-1}$
P e t i t		$L_\infty$	$\frac{-F_0(\gamma_0) + F_0(\gamma(x))}{-F_0(\gamma_0) + F_{0,\infty}} = G(x)^{-1}$
		$L_p$	$\frac{-F_0(\gamma_0) + F_0(\gamma(x))}{-F_0(\gamma_0) + F_{0,\infty} - F_\infty(\gamma_p)} = G(x)^{-1}$
		$\gamma(0)$ Petit	$\frac{-F_0(\gamma_0) + F_0(\gamma(x))}{-F_0(\gamma_0) + F_0(\gamma_p)} = G(x)^{-1}$

Figure 2-9 : Equation de localisation

II.3 : CALCUL ANALYTIQUE POUR LA LOI DE KNOWLES

Dans ce paragraphe, nous nous attacherons à montrer que pour la loi de Knowles, à proximité du centre du défaut, un seul terme du développement en séries convergentes suffit

pour calculer les différentes intégrales. Dans la zone où cette condition est vérifiée, il est possible de déterminer une forme analytique facilement intégrable du profil de déformation qui servira, en outre, à calculer la déformation nominale :

$$\gamma_{\text{nom}} = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx \quad \text{II-41}$$

A partir du tableau de la **Figure 2-9** ou de l'équation de localisation **II-42** :

$$\forall x \in [-h, +h] \quad (l(x) \mu(x))^{\frac{1}{m}} \int_{\gamma_0}^{\gamma(x)} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = (l(0) \mu(0))^{\frac{1}{m}} \int_{\gamma_0}^{\gamma(0)} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \quad \text{II-42}$$

avec la loi de Knowles

$$f(\xi) = \xi \left( 1 + \frac{b}{n} \xi^2 \right)^{n-1} \quad \text{II-43}$$

et pour une déformation nominale  $\gamma(0)$  au centre de la bande tendant vers l'infini, il est possible d'écrire :

$$\int_{\gamma(x)}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \left( 1 - G(x)^{-1} \right) \int_{\gamma_0}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \quad \text{II-44}$$

ou

$$\int_0^{\gamma(x)} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \left( 1 - G(x)^{-1} \right) \int_0^{\gamma_0} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi - G(x)^{-1} \int_0^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \quad \text{II-45}$$

Dans un premier temps, nous allons calculer les intégrales de l'expressions **II-44** avec un seul terme du développement en série convergente de Gauss. Ensuite, nous ferons de même pour l'expression **II-45**. La distribution de déformation plastique, issue de chacune des deux expressions **II-44** et **II-45**, sera ensuite comparée à la distribution de la déformation plastique obtenue à l'aide d'un calcul utilisant une centaine de termes du développement en série convergente de Gauss. Le calcul des différentes intégrales se trouve en annexe A.II.3

### II.3.1 : Utilisation des intégrales du type $\int_u^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$

L'intégrale du membre de droite de l'expression **II-44** s'écrit :

$$\int_{\gamma_0}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \int_0^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi - \int_0^{\gamma_0} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \quad \text{II-46}$$

d'après la forme de la fonction  $f(\xi)$ , la valeur de l'intégrale de 0 à  $\gamma_0$  est négligeable devant l'intégrale de 0 à l'infini, ce qui donne :

$$\int_{\gamma_0}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \cong \int_0^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = A_{\infty} \quad \text{II-47}$$

En calculant les intégrales avec un seul terme du développement en série convergente de Gauss, l'expression II-44 devient :

$$K_{\infty} \gamma(x)^{-p} = (1 - G(x)^{-1}) A_{\infty} \quad \text{II-48}$$

avec  $K_{\infty} = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1-n}{m}} \frac{m}{1-2n-m}$  et  $p = \frac{1-2n-m}{m}$

d'où

$$\gamma(x) = \left(\frac{K_{\infty}}{A_{\infty}}\right)^{\frac{1}{p}} (1 - G(x)^{-1})^{-\frac{1}{p}} \quad \text{II-49}$$

### II.3.2 : Utilisation des intégrales du type $\int_0^u f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$

En calculant les intégrales avec un seul terme du développement en série convergentes de Gauss, l'expression II-45 devient :

$$K_0 \left(1 + \frac{n}{b} \gamma(x)^{-2}\right)^{p_0} = (1 - G(x)^{-1}) K_0 \left(1 + \frac{n}{b} \gamma_0^{-2}\right)^{p_0} - G(x)^{-1} A_{\infty} \quad \text{II-50}$$

ce qui conduit

$$\gamma(x) = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[ (1-G(x)^{-1}) \left(1 + \frac{n}{b} \gamma_0^{-2}\right)^{-p_0} - G(x)^{-1} \frac{A_{\infty}}{K_0} \right]^{\frac{1}{p_0}} - 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{II-51}$$

avec  $K_0 = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1-n}{m}} \frac{2m}{1+m}$  et  $p_0 = \frac{1+m}{2m}$

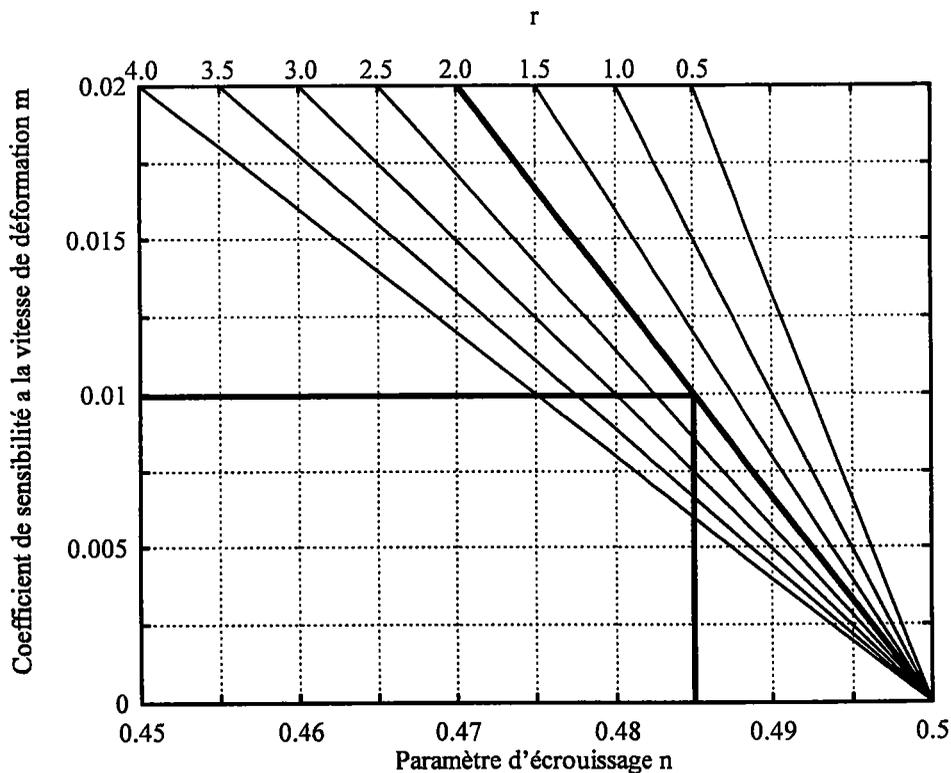
### II.3.3 : Comparaison entre les différentes expressions

#### II.3.3.1 : Critère de localisation

Avant de passer à une application numérique, il est nécessaire de s'assurer que les données vérifient le critère de localisation  $L_{\infty,r}$  **II-52** établi précédemment :

$$2n+m(1+r) < 1 \quad \text{II-52}$$

La **Figure 2-10** montre le domaine de variation des différents paramètres pour lesquels il y a localisation de la déformation plastique : celle-ci apparaît lorsque le point de coordonnées (n;m) est situé dans la partie de gauche de l'espace (n;m) délimité par la droite oblique correspondant à l'acuité r du défaut.



**Figure 2-10 : Critère de localisation  $L_{\infty,r}$**

Soit par exemple une éprouvette constituée d'un matériau présentant les caractéristiques suivantes :  $n=0,485$  et  $m=0,01$  ; il y a localisation de la déformation plastique si cette éprouvette possède un défaut d'acuité r inférieure à 2. En d'autres termes, si une

éprouvette a pour paramètre  $m : 0,01$  et possède un défaut d'acuité  $r=2$ , il y a localisation de la déformation plastique si  $n$  est inférieur à  $0,485$ .

### II.3.3.2 : Exemple et premières conclusions

Prenons l'exemple d'un matériau caractérisé par la loi de Knowles II-43, présentant un défaut matériel (qui pourrait également être géométrique) défini sous la forme II-3 rappelée par II-53 :

$$\forall x \in [-x_1, +x_1] \quad \mu(x) = \mu(0) + \mu_r(0) |x|^r \quad \text{II-53}$$

Toutes les caractéristiques de l'éprouvette sont mentionnées ci-dessous :

Caractéristiques rhéologiques :  $b = 8\,000$   $n = 0,49$

$m = 0,007$

Caractéristiques du défaut :  $\varepsilon = 0,04$   $x_1 = 0,2$

$\mu_i = 0,3579e10$   $x_2 = 1,0$

$\frac{\mu_r(0)}{\mu_i} = 0,01$

Conditions de chargement :  $\gamma_0 = 0,01$   $\dot{\gamma}_0 = 1e4 \text{ s}^{-1}$

Pour cette éprouvette, le critère de localisation II-52 est vérifié.

Sur la **Figure 2-11**, trois courbes sont représentées. L'une a été obtenue avec un calcul complet des intégrales de l'expression II-44, les deux autres sont obtenues grâce aux expressions II-49 et II-51 utilisant un seul terme du développement des différentes intégrales.

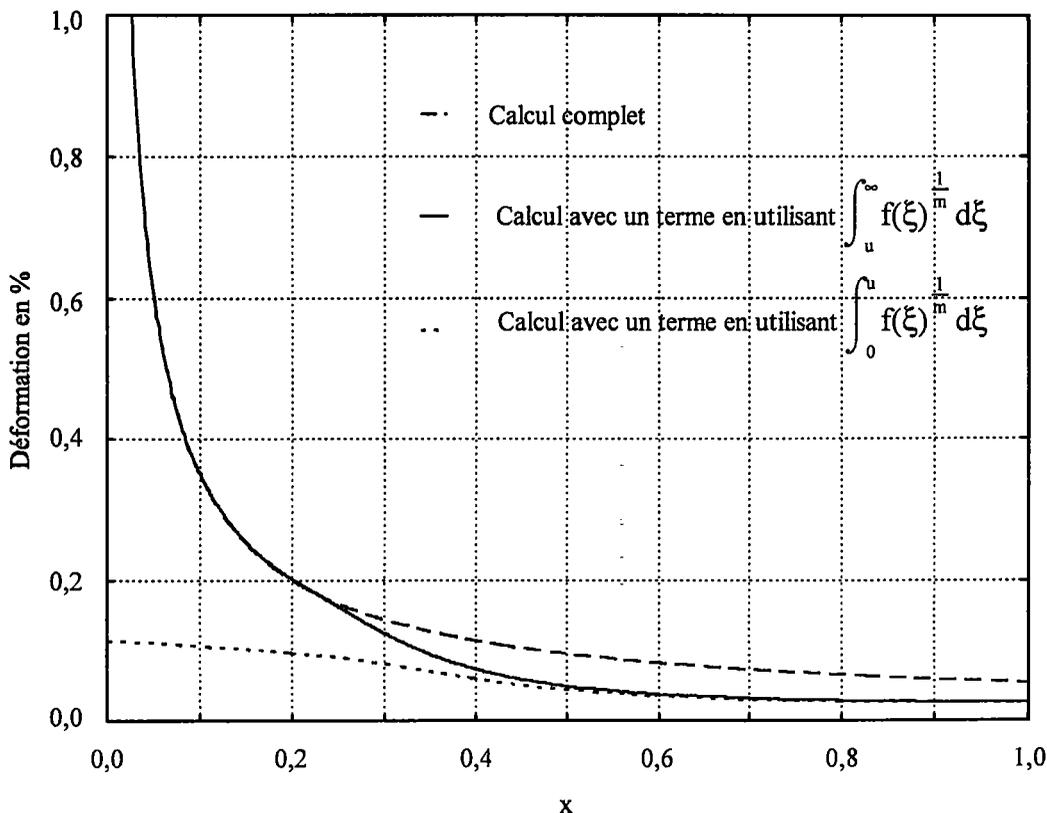


Figure 2-11 : Profil de la déformation plastique

Pour de grandes valeurs de la déformation plastique (près du centre du défaut), l'utilisation de l'expression II-49 est suffisante pour décrire la déformation plastique. De même, pour de faibles valeurs de la déformation plastique (près du bord) l'utilisation de l'expression II-51 est à son tour suffisante, donc

$$\begin{aligned}
 \text{pour } x \rightarrow 0 \quad \gamma(x) &= \left(\frac{K_\infty}{A_\infty}\right)^{\frac{1}{p}} \left(1 - G(x)^{-1}\right)^{-\frac{1}{p}} \\
 \text{pour } x \rightarrow h \quad \gamma(x) &= \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[ \left(1 - G(x)^{-1}\right) \left(1 + \frac{n}{b} \gamma_0^{-2}\right)^{-p_0} - G(x)^{-1} \frac{A_\infty}{K_0} \right]^{-\frac{1}{p_0}} - 1 \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{II-54}
 \end{aligned}$$

$$\text{avec } A_\infty = \int_0^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi ; K_\infty = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1-n}{m}} \frac{m}{1-2n-m} ; p = \frac{1-2n-m}{m} ; K_0 = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1-n}{m}} \frac{2m}{1+m} ; p_0 = \frac{1+m}{2m}$$

Les expressions II-54 ne sont pas uniquement valables pour l'éprouvette utilisée dans cet exemple, mais s'appliquent pour toute éprouvette ayant un comportement identifiable par la loi de Knowles et vérifiant le critère de localisation II-52.

Dans le cadre de loi adiabatique avec contrôle, soit en vitesse ou en contrainte, il est impossible de trouver une expression d'une forme aussi simple et intégrable analytiquement. Le calcul des intégrales de l'équation de localisation II-44, en série convergente de Gauss nécessite, en effet, au minimum 7 à 10 termes pour que des résultats corrects soient obtenus. Il en résulte que l'intégration de II-44 s'écrit sous la forme d'un polynôme de la fonction  $g(\gamma(x))$  de degré sept à dix,  $g(\gamma(x))$  étant de la forme  $1/(1+a\gamma(x))$ . Il est donc impossible de déterminer analytiquement l'expression de la déformation plastique  $\gamma(x)$

### II.3.4 : Déformation plastique le long du défaut

L'expression II-49 décrit parfaitement le profil de déformation plastique sur tout le défaut  $[-x_1; x_1]$ . Celui-ci ayant une expression analytique, il semble intéressant de poursuivre le calcul analytique, car les problèmes rencontrés lors du calcul la déformation nominale, se situent au centre de la bande (ou du défaut) où il existe une singularité.

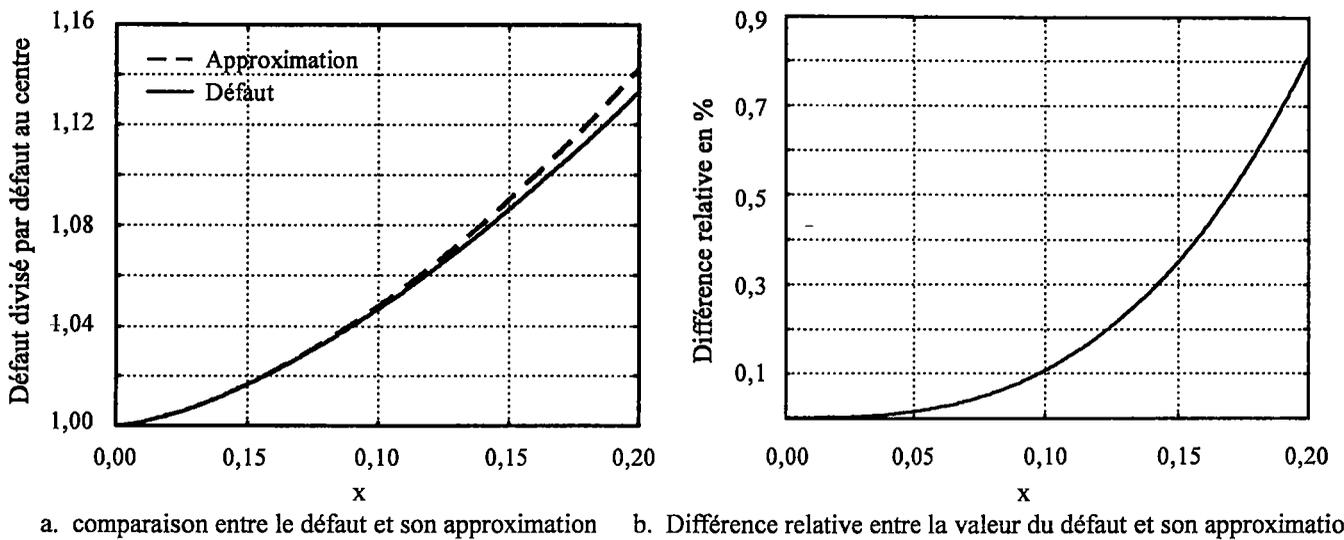
Sur l'intervalle  $[-x_1; x_1]$ ,  $G(x)^{-1}$  s'écrit

$$\left. \begin{array}{l} l(0) = l(x) \\ \mu(x) = \mu(0) \left( 1 + \frac{\mu_r(0)}{\mu(0)} |x|^r \right) \end{array} \right\} \Rightarrow G(x)^{-1} = \left( 1 + \frac{\mu_r(0)}{\mu(0)} |x|^r \right)^{-\frac{1}{m}} \quad \text{II-55}$$

Sur cet intervalle,  $\frac{\mu_r(0)}{\mu(0)} |x|^r$  est petit ; à l'aide d'un développement au premier ordre,  $G(x)^{-1}$  s'écrit alors

$$G(x)^{-1} = 1 - \frac{1}{m} \frac{\mu_r(0)}{\mu(0)} |x|^r \quad \text{II-56}$$

La **Figure 2-12** montre que dans l'intervalle  $[-x_1; x_1]$ , pour l'éprouvette précédemment citée, l'approximation II-56 est tout à fait justifiée avec une différence relative d'environ 0,8% à la limite du défaut et de son raccord  $x_1$ . Cette différence n'est plus que de 0,1% en  $x_1/2$

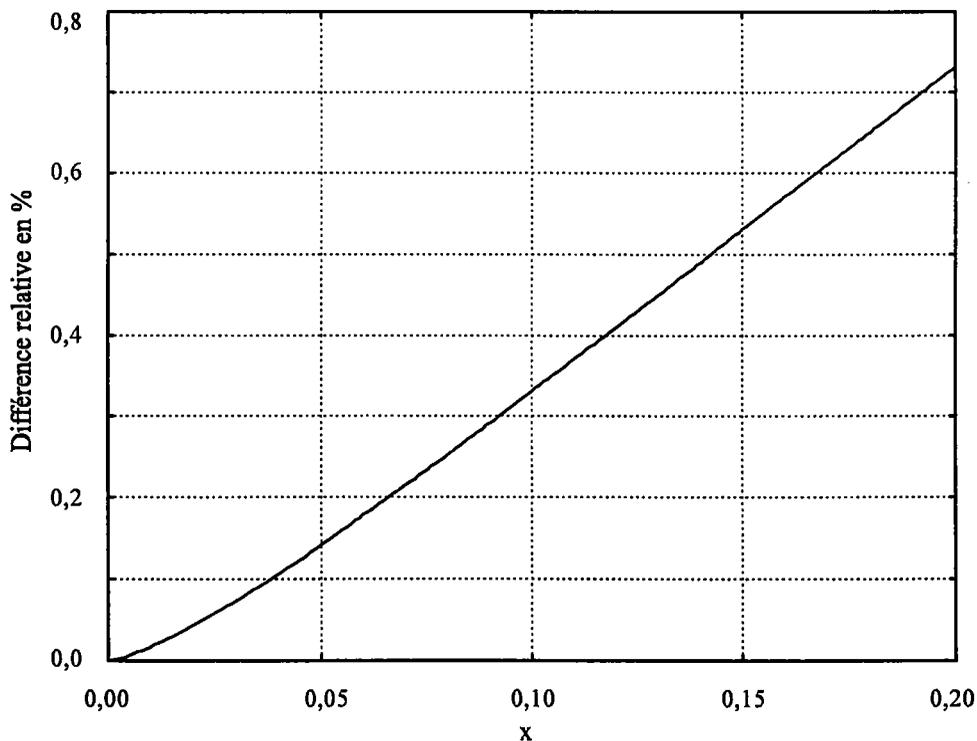


**Figure 2-12 : Développement au premier ordre de l'expression du défaut**

L'expression II-49 de la déformation plastique  $\gamma(x)$  peut donc s'écrire sous la forme :

$$\gamma(x) = H |x|^{-\frac{1}{p}} \tag{II-57}$$

avec  $H = \left(\frac{K_\infty}{A_\infty}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{m \mu(0)}{\mu_r(0)}\right)^{\frac{1}{p}}$  ;  $K_\infty = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1-n}{m}} \frac{m}{1-2n-m}$  ;  $A_\infty = \int_0^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$  et  $p = \frac{1-2n-m}{m}$



**Figure 2-13 : Différence relative entre un calcul complet et le calcul analytique de la déformation plastique**

La **Figure 2-13** montre que pour l'éprouvette mentionnée précédemment, la différence relative, entre un calcul complet et l'expression **II-57**, est toujours inférieure à 0,8% sur l'intervalle  $[-x_1; +x_1]$ . Sur celui-ci, nous utiliserons donc l'expression  $\gamma(x) = H |x|^{-\frac{1}{p}}$  pour décrire le profil de déformation dans le cadre d'une fonction de Knowles.

### **III : CONDITION DE PROPAGATION ET EFFET D'ECHELLE**

Durant le second stade de la localisation, il a été montré expérimentalement que les bandes de cisaillement adiabatique se propagent dans leur direction (MARCHAND, DUFFY (1988) ZHOU, ROSAKIS ET RAVICHANDRAN(1996)). Il est impossible de prendre en compte le phénomène dans un modèle unidimensionnel. C'est pourquoi, nous allons étudier un modèle bi-dimensionnel.

Nous allons essayer de déterminer dans quelles conditions, une approche intégrale empruntée à la mécanique de la rupture, et en particulier l'intégrale J de RICE (1968), peut être appliquée à la détermination des conditions de propagation de la zone de localisation. Cependant, avant cela, une présentation succincte de l'intégrale J ne sera pas superflue.

#### **III.1 : INTEGRALE J**

##### **III.1.1 : Expression générale**

Nous supposons une éprouvette dans un état plan ( $x_1-x_2$ ) de déformation. Cette éprouvette possède une surface de glissement parallèle à l'axe  $x_1$  et son comportement à l'extérieur de celle-ci est tel que, pour une déformation  $\epsilon_{qp}$ , le travail de déformation, par exemple élastique,  $W(\epsilon_{qp})$  s'écrit :

$$W(\epsilon_{qp}) = \int_0^{\epsilon_{qp}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \quad \text{II-58}$$

où  $\sigma, \epsilon$  sont respectivement le tenseur de contrainte et le tenseur des taux de déformation. Nous supposons également que toutes les propriétés du matériau ainsi que les forces de volume dépendent uniquement de  $x_2$  lorsque l'éprouvette n'est pas chargée. Imaginons une

courbe  $\Gamma$  dont le point de départ est  $P^-$ , point appartenant à la partie inférieure de la surface de glissement, se terminant en  $P^+$ , point appartenant à la partie supérieure de la surface de glissement, jouxtant le point  $P^-$  lorsque l'éprouvette n'est pas chargée (Figure 2-14).

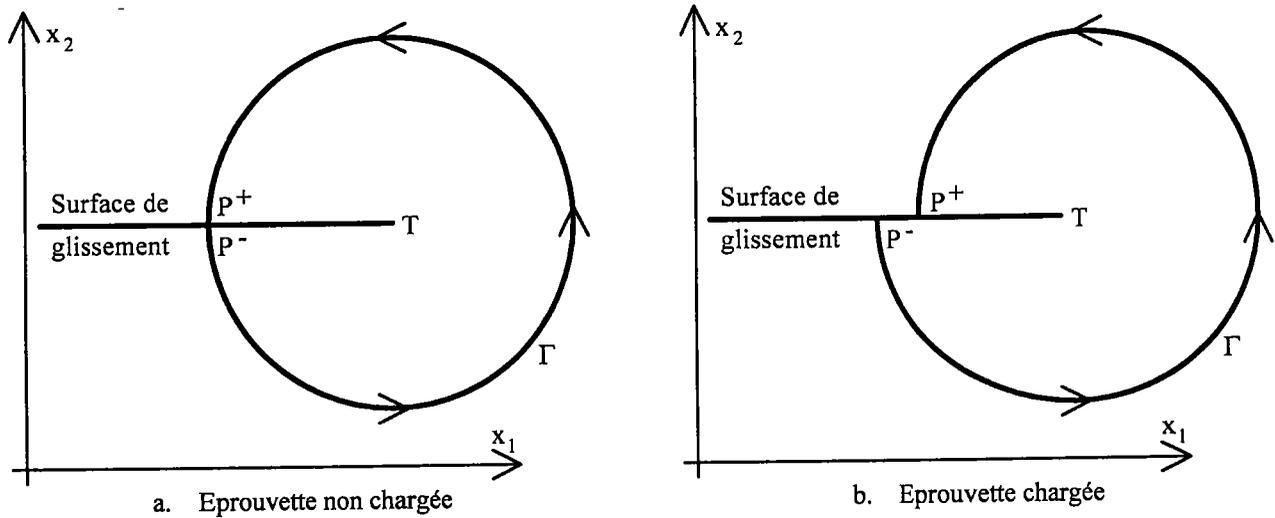


Figure 2-14 : Chemin d'intégration

La courbe  $\Gamma$  ne doit pas traverser la surface de glissement ; l'expression générale de l'intégrale  $J$  s'écrit :

$$J_p = \int_{\Gamma} \left( (W - f_i u_i) dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) \quad \text{II-59}$$

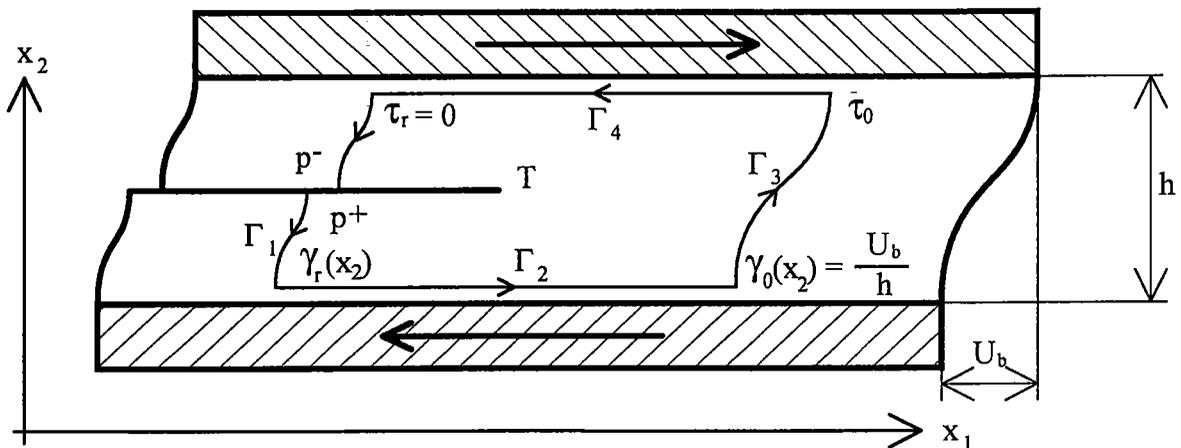
où  $f_i$ ,  $u_i$ ,  $T_i$  et  $ds$  sont respectivement les composantes des forces de volume agissant sur l'éprouvette, les composantes du déplacement de ses points, les efforts de surface agissant sur  $\Gamma$  et un élément différentiel d'abscisse curviligne sur  $\Gamma$ . RICE (1968) a montré que cette intégrale II-59 est indépendante du chemin d'intégration  $\Gamma$ .

Nous allons maintenant calculer l'intégrale  $J$  suivant deux contours distincts, l'un éloigné de la surface de glissement, l'autre le long de la surface de glissement.

### III.1.2 : Contour éloigné

Nous allons nous intéresser au calcul de l'intégrale  $J$  dans une zone éloignée de la surface de glissement, où l'éprouvette se décharge élastiquement et où la valeur de la contrainte de cisaillement passe de  $\tau_0$  à zéro.

Soit une éprouvette longue suivant l'axe  $x_1$ , de hauteur  $h$  beaucoup plus faible suivant l'axe  $x_2$ , chargée en glissement simple à déplacement contrôlé, et possédant une surface de glissement parallèle à  $x_1$ . L'extrémité T de cette surface est loin du bord de l'éprouvette (**Figure 2-15**). Nous supposons qu'à une certaine valeur  $\tau_0$  de la contrainte de l'éprouvette, la surface de glissement se propage, ce qui entraîne une décharge élastique de l'éprouvette. Loin à gauche de l'extrémité T, la contrainte devient nulle tout en restant non nulle à droite de T (**Figure 2-15**)



**Figure 2-15 : Décharge élastique**

A proximité de l'extrémité T, la contrainte est fonction des variables  $x_1$  et  $x_2$  ; plus loin, la contrainte ne dépend plus que de la variable  $x_1$ , c'est pourquoi, pour éviter de faire intervenir des effets bi-dimensionnels, nous allons utiliser un chemin d'intégration  $\Gamma$  passant loin de T. Ce chemin est présenté dans la **Figure 2-15** et peut se décomposer en quatre parties notées  $\Gamma_k$  avec  $k$  variant de 1 à 4. Le long de  $\Gamma_1$  la déformation plastique est égale à la déformation résiduelle  $\gamma_r$  après décharge élastique. Le long de la partie opposée  $\Gamma_3$ , la déformation plastique est égale à une déformation moyenne  $\gamma_0$  à laquelle est associée la contrainte  $\tau_0$ . Ces deux parties sont reliées par les trajets  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  qui longent les bords de l'éprouvette où nous sommes en présence d'un mouvement de corps rigide.

Nous pouvons également décomposer le calcul de l'intégrale J en quatre intégrales :

$$J_p = \sum_{k=1}^{k=4} J_k = \sum_{k=1}^{k=4} \int_{\Gamma_k} \left( (W - f_i u_i) dx_2 - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \right) \tag{II-60}$$

$J_2$  et  $J_4$  sont égales à zéro car  $dx_2$  est nul, de même que  $\frac{\partial u_i}{\partial x_1}$  pour un déplacement de corps rigide. Les intégrales  $J_1$  et  $J_3$  se réduisent à :

$$J_1 = \int_h^0 W(\gamma_r(x_2)) dx_2$$

$$J_3 = \int_0^h W(\gamma_0(x_2)) dx_2$$
II-61

Dans ce cas, l'intégrale  $J$  est donc égale à :

$$J_p = \int_0^h [ W(\gamma_0(x_2)) - W(\gamma_r(x_2)) ] dx_2$$
II-62

avec

$$W(\gamma_0(x_2)) - W(\gamma_r(x_2)) = \int_{\gamma_r(x_2)}^{\gamma_0(x_2)} \tau d\gamma$$
II-63

Pour un matériau pouvant se décharger élastiquement,  $d\tau = G d\gamma$  où  $G$  est le module de cisaillement à la décharge, qui peut être différent du module de cisaillement lors du chargement. Après changement de variables, l'expression II-63 s'écrit donc :

$$W(\gamma_0(x_2)) - W(\gamma_r(x_2)) = \frac{1}{G} \int_0^{\tau_0(x_2)} \tau d\tau = \frac{\tau_0^2(x_2)}{2G}$$
II-64

Loin de  $T$  nous sommes dans une situation unidimensionnelle donc  $\tau_0(x_2) = \tau_0$ . L'intégrale  $J$  s'écrit donc :

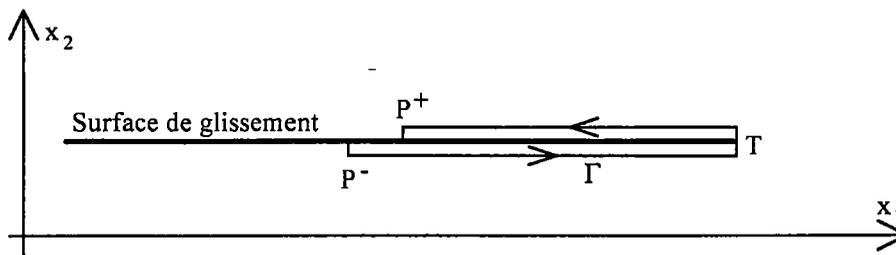
$$J_p = \frac{h \tau_0^2}{2G}$$
II-65

Nous pouvons dire que  $J_p$  correspond à l'énergie élastique libérée lors du déchargement élastique où la contrainte passe de la valeur  $\tau_0$  à zéro.  $J_p$  est proportionnelle à la hauteur  $h$  de l'éprouvette : plus l'éprouvette est large, plus elle peut emmagasiner d'énergie élastique lors d'une déformation, plus elle peut en restituer lors d'une décharge élastique.

### III.1.3 : Contour le long de la surface de glissement

Nous allons maintenant nous intéresser au calcul de l'intégrale  $J$  lorsque qu'il y a déplacement le long de la surface de glissement.

L'éprouvette possède une surface de glissement dans la direction  $x_2$ . Nous prenons maintenant un chemin d'intégration qui longe la surface de glissement (**Figure 2-16**)



**Figure 2-16 : Déplacement du point P**

Tout le long du chemin d'intégration  $\Gamma$ ,  $dx_2$  est égal à zéro donc l'intégrale  $J$  s'écrit :

$$J_p = \int_{\Gamma} -T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} ds \quad \text{II-66}$$

La contribution à  $J_p$  de  $T_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ , le long de la surface inférieure de la surface de glissement, annule la contribution du même terme le long de la surface supérieure, ce qui nous laisse uniquement pour  $J_p$  :

$$J_p = \int_{\Gamma} \sigma_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 = \int_T^P \sigma_{21} \frac{\partial (u_1^+ - u_1^-)}{\partial x_1} dx_1 \quad \text{II-67}$$

où  $u_1^+$  et  $u_1^-$  sont respectivement les déplacements dans la direction  $x_1$  sur la surface supérieure et sur la surface inférieure. On notera  $\delta$  le déplacement relatif  $u_1^+ - u_1^-$  et l'intégrale  $J$  s'écrit :

$$J_p = \int_0^{\delta_p} \tau(\delta) d\delta \quad \text{II-68}$$

Dans ce cas  $J_p$  correspond au travail plastique nécessaire pour produire le déplacement du point P. Elle est égale à l'aire de la surface se trouvant sous la courbe contrainte-déplacement ( $\tau$ - $\delta$ ) qu'il sera nécessaire de déterminer ultérieurement.

## III.2 : CONDITION DE PROPAGATION

### III.2.1 : Hypothèses

Soit une éprouvette présentant une bande de cisaillement de direction  $x$ . Nous supposons qu'elle est constituée d'un matériau adoucissant à l'intérieur de la bande de

cisaillement et qu'elle a un comportement élastique à l'extérieur de celle-ci. La bande a une épaisseur  $e$  très faible par rapport à sa longueur  $L$  (Figure 2-17). Elle est assimilée à une zone de décohésion qui est éventuellement initiée par une fracture. Le déplacement relatif  $\delta$ , de la frontière supérieure de la bande par rapport à sa frontière inférieure, est supposé être indépendant de la variable  $x$ ; cette condition n'est pas vérifiée dans deux petites zones situées autour de chaque extrémité de la bande. Ces zones sont très petites par rapport à la longueur de la bande; nous considérerons donc que la condition est tout de même vérifiée tout le long de la bande.

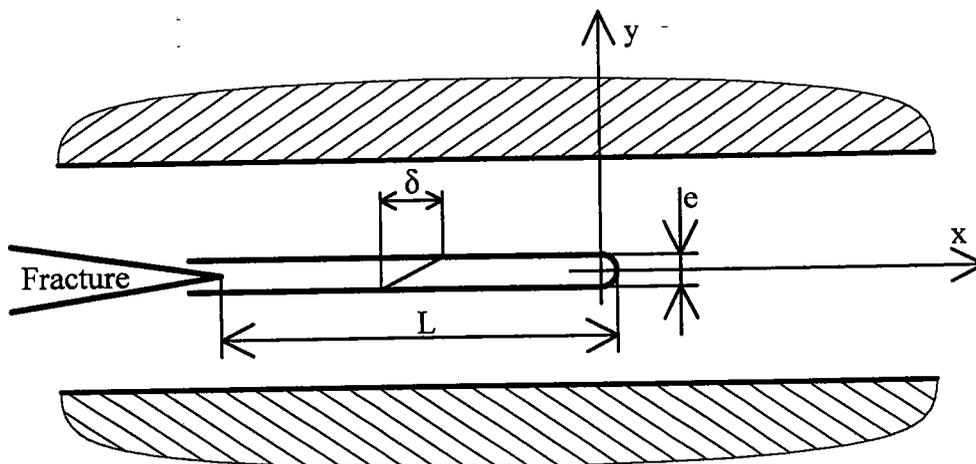


Figure 2-17 : Modélisation de l'éprouvette

### III.2.2 : Modèle

L'idée principale de ce modèle est que la bande de cisaillement ne peut se propager que si l'éprouvette peut libérer une quantité d'énergie élastique au moins égale à la quantité d'énergie nécessaire pour créer un déplacement relatif des deux bords de la surface de glissement. Ceci se traduit avec ce qui a été vu précédemment par la relation suivante :

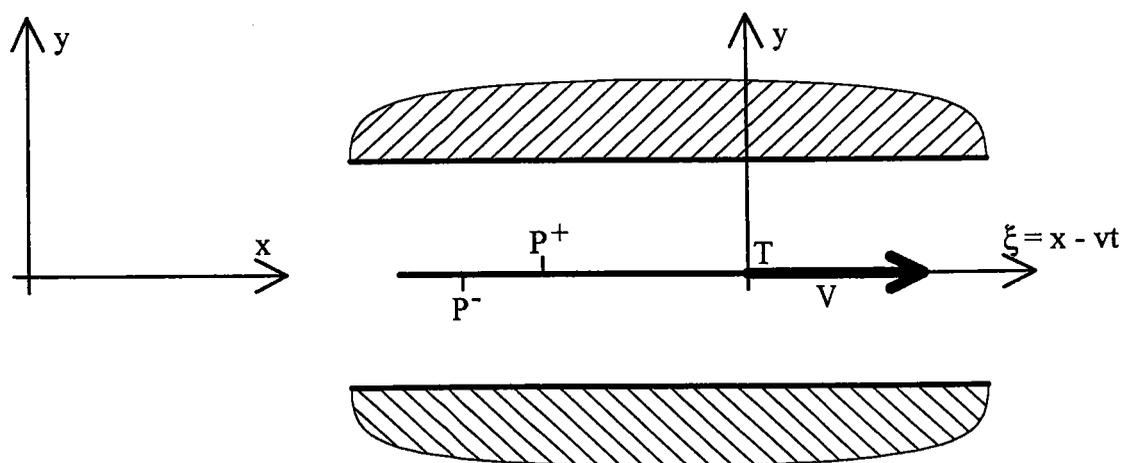
$$\int_0^{\delta_{\text{sup}}} \tau(\delta) d\delta \leq \frac{h \tau_0^2}{2 G} \quad \text{II-69}$$

ou encore :

$$\sqrt{\frac{2 G}{h} \int_0^{\delta_{\text{sup}}} \tau(\delta) d\delta} \leq \tau_0 \quad \text{II-70}$$

Cette relation donne une condition sur la contrainte à partir de laquelle il y a propagation de la zone de localisation. Pour un comportement plastique avec écrouissage par la déformation  $\tau_0 = f(\gamma_0)$ , on obtient ainsi la déformation homogène critique  $\gamma_{0c}$  nécessaire à la propagation de la bande de cisaillement. Il s'agit donc d'une approche énergétique globale. Cette approche n'est pas applicable à un matériau présentant un adoucissement préalable, pour lequel le déclenchement de la propagation ne se produit qu'après le développement d'une inhomogénéité significative, et pour lequel la rupture a un caractère ductile prononcé. La dissipation d'énergie mécanique, avant la propagation, est alors telle que les mécanismes qui président à la perte de résistance du matériau et à sa rupture sont différents des mécanismes quasi-fragiles mentionnés ci-dessus

Nous supposons maintenant que la bande de cisaillement adiabatique se propage et que sa tête "avance" à une vitesse  $V$  constante. Nous supposons également que tous les champs sont indépendants du temps  $t$  (**Figure 2-18**), c'est-à-dire que si l'on photographie l'éprouvette à deux instants  $t_1$  et  $t_2$  différents, on obtient les deux mêmes éprouvettes, mais décalées dans l'espace. Les dérivées partielles par rapport au temps sont donc égales aux dérivées partielles par rapport à la variable de position  $\xi$  multipliées par l'opposé de la vitesse  $V$  :  $\left(\frac{\partial}{\partial t} = -V \frac{\partial}{\partial \xi}\right)$



**Figure 2-18 : Vitesse de propagation**

Si l'on note  $P_p$  la puissance des forces de cohésion définie par la relation suivante :

$$P_p = \int_T^P \tau \frac{\partial \delta}{\partial t} dx \quad \text{II-71}$$

l'indépendance des différents champs par rapport au temps nous donne :

$$P_p = -V \int_T^P \tau \frac{\partial \delta}{\partial \xi} d\xi \quad \text{avec} \quad \int_T^P \tau \frac{\partial \delta}{\partial \xi} d\xi = \int_T^P \tau d\delta = J_p \quad \text{II-72}$$

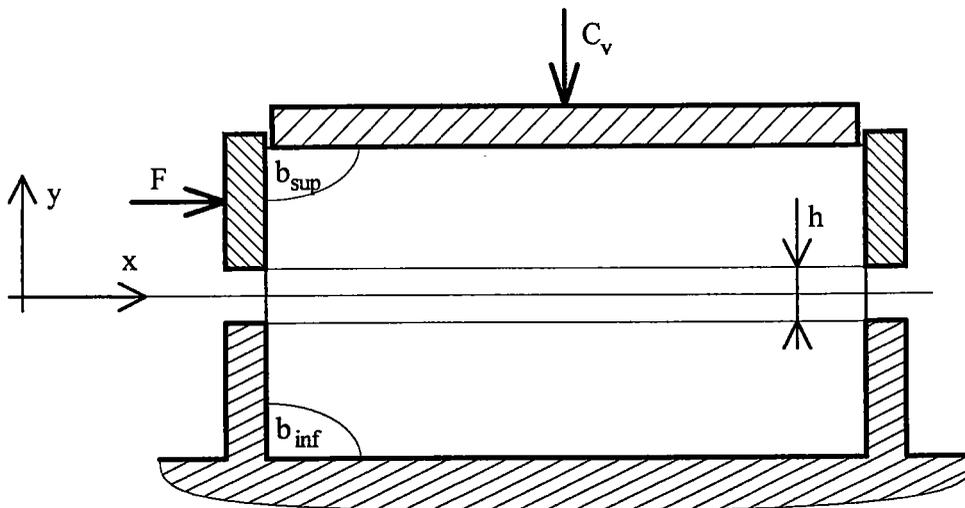
si nous connaissons  $\frac{\partial \delta}{\partial t}$ , il est donc possible de déterminer la vitesse  $V$  :

$$V = -\frac{P_p}{J_p} \quad \text{II-73}$$

Les conditions de stationnarité, nécessaires à l'application de cette analyse, ne sont, en général, satisfaites qu'approximativement. On ne peut donc obtenir au mieux qu'un ordre de grandeur de la vitesse de propagation.

### III.3 : EXEMPLE D'APPLICATION

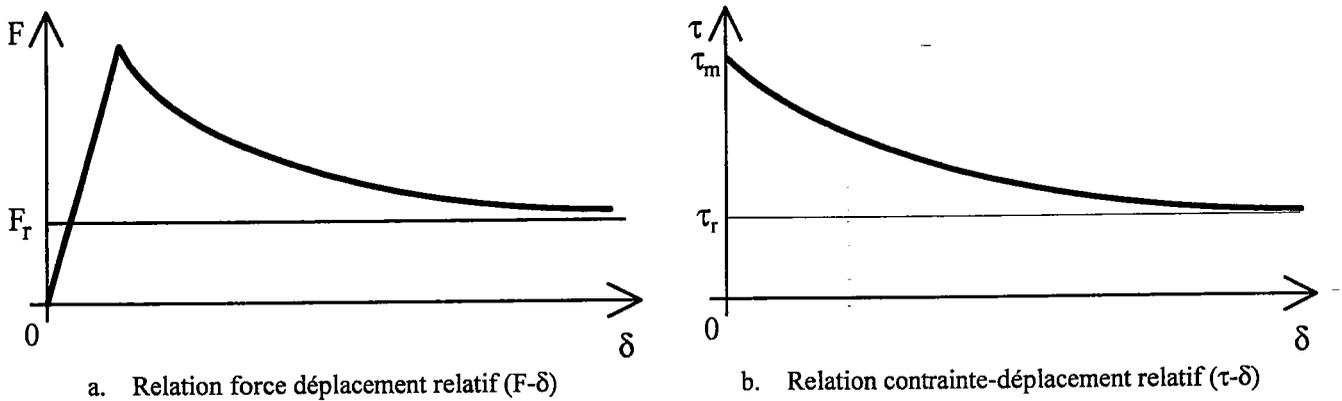
Prenons l'exemple didactique d'un bloc de sol argileux soumis à du cisaillement dans un dispositif dit "boîte de cisaillement" (PALMER, RICE (1973))(Figure 2-19)



**Figure 2-19 : Boîte de cisaillement**

Une charge verticale  $C_v$  constante est imposée pour permettre à la partie supérieure ( $b_{sup}$ ) et à la partie inférieure ( $b_{inf}$ ) du bloc de sol (à l'extérieur de la zone de hauteur  $h$ ) d'être considérées comme étant rigides. Une force  $F$  horizontale est appliquée sur la partie supérieure de la boîte. La variation de cette force en fonction du déplacement horizontal relatif  $\delta$  des deux parties de la boîte est observée : une force maximum est rapidement atteinte ; la déformation de

cisaillement entre les deux parties de bloc  $b_{sup}$  et  $b_{inf}$  se localise alors dans une bande très étroite et la force nécessaire au mouvement diminue de façon monotone pour tendre asymptotiquement vers une valeur résiduelle non nulle  $F_r$ .



**Figure 2-20 : Relations force et contrainte en fonction du déplacement relatif**

Les déformations sont supposées planes et parallèles au plan (x,y). La bande de cisaillement se propage selon la direction x. Elle est considérée comme une surface de discontinuité semi-infinie, sans épaisseur, sur laquelle existe une relation  $\tau(\delta)$  entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le déplacement relatif  $\delta$

$$\tau(\delta) = \tau_r + (\tau_m - \tau_r) \exp\left(-\frac{\delta}{\delta_r}\right) \quad \text{II-74}$$

Cette relation rend compte du phénomène d'adoucissement du matériau au voisinage de la bande et de l'existence d'une contrainte résiduelle  $\tau_r$  atteinte après un déplacement caractérisé par  $\delta_r$ . En dehors de la bande, le matériau obéit à des lois élastoplastiques conventionnelles. Loin en amont de la bande, le long de la surface  $S_0$  (Figure 2-21), la contrainte de cisaillement est  $\tau_0$ , la déformation de cisaillement  $\gamma_0$  est uniforme ; le long de  $S_{r+}$  et  $S_{r-}$ , loin en aval du front T de la bande, subsiste une déformation plastique résiduelle uniforme  $\gamma_r$ , après une décharge élastique de module G  $\tau_0$  à  $\tau_r$ .

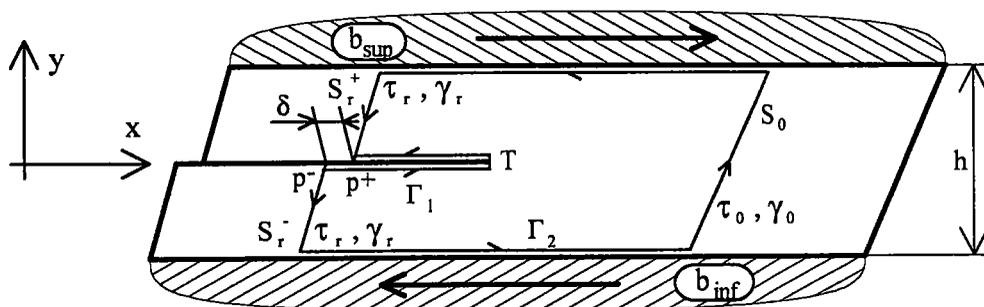


Figure 2-21 : Surface de glissement avec ses deux chemins d'intégration

Le déplacement relatif  $\delta$  de la partie supérieure  $b_{sup}$  par rapport à la partie  $b_{inf}$  s'exprime par la relation  $\delta = h(\gamma_0 - \gamma_r)$ . De plus lors d'une décharge élastique  $\tau = G \gamma$ , ce qui conduit à :

$$\delta = h(\gamma_0 - \gamma_r) = \frac{h}{G}(\tau_0 - \tau_r) \quad \text{II-75}$$

Il a été vu précédemment que le long de la surface de glissement, c'est à dire le long de  $\Gamma_1$  l'intégrale J s'écrit :

$$J_p(\Gamma_1) = \int_0^\delta \tau(\delta) d\delta \quad \text{II-76}$$

ce qui, dans ce cas, en introduisant II-74 dans II-76, donne :

$$\text{ou } J_p(\Gamma_1) = \tau_r \delta + \delta_r (\tau_m - \tau_r) \left( 1 - \exp\left(-\frac{\delta}{\delta_r}\right) \right) \quad \text{II-77}$$

puis en utilisant II-75 :

$$J_p(\Gamma_1) = \tau_r \frac{h}{G}(\tau_0 - \tau_r) + \delta_r (\tau_m - \tau_r) \left( 1 - \exp\left(-\frac{\delta}{\delta_r}\right) \right) \quad \text{II-78}$$

De même le long du chemin référencé  $\Gamma_2$  de la **Figure 2-21** l'intégrale J s'écrit :

$$J_p(\Gamma_2) = \int_0^h (W(\gamma_0) - W(\gamma_r)) dy = h(W(\gamma_0) - W(\gamma_r)) \quad \text{II-79}$$

or  $W(\gamma_p) = \int_0^{\gamma_p} \tau(\gamma) d\gamma$  ou  $\frac{1}{G} \int_0^{\tau_p} \tau d\tau$  ce qui entraîne :

$$J_p(\Gamma_2) = \frac{h}{2G} (\tau_0^2 - \tau_r^2) \quad \text{II-80}$$

L'équation de propagation s'écrit  $J_p(\Gamma_1) = J_p(\Gamma_2)$ , et par conséquent, d'après II-78 et II-80 :

$$\tau_r \frac{h}{G}(\tau_0 - \tau_r) + \delta_r (\tau_m - \tau_r) \left( 1 - \exp\left(-\frac{\delta}{\delta_r}\right) \right) = \frac{h}{2G} (\tau_0^2 - \tau_r^2) \quad \text{II-81}$$

soit :

$$\frac{1}{2} \frac{G \delta_r}{h(\tau_m - \tau_r)} \left( \frac{\delta}{\delta_r} \right)^2 = 1 - \exp\left(-\frac{\delta}{\delta_r}\right) \quad \text{II-82}$$

ou encore :

$$\frac{1}{2} \alpha x^2 = 1 - \exp(-x) \quad \text{II-83}$$

si on pose  $\alpha = \frac{1}{2} \frac{G \delta_r}{h(\tau_m - \tau_r)}$  et  $x = \frac{\delta}{\delta_r}$ . L'équation (II-83) fournit le déplacement nécessaire à la propagation, puis la valeur de  $\tau_0$  et  $\gamma_0$  au moyen de la relation II-75. A la limite où le déplacement relatif  $\delta$  tend vers l'infini, les relations II-75 et II-82 fournissent donc :

$$\frac{1}{2} \frac{G \delta_r}{h(\tau_m - \tau_r)} \left( \frac{\tau_0 - \tau_r}{\tau_m - \tau_r} \right)^2 = \frac{2G}{h} \frac{\delta_r}{(\tau_m - \tau_r)} = 2\alpha \quad \text{II-84}$$

ou encore

$$\frac{\tau_0 - \tau_r}{\tau_m - \tau_r} = \sqrt{2\alpha} \quad \text{II-85}$$

Comme  $\tau_0$  est nécessairement inférieur ou égal à  $\tau_m$ , il vient :

$$\sqrt{2\alpha} \leq 1 \quad \text{II-86}$$

soit

$$h \geq 2 \frac{G}{(\tau_m - \tau_r)} \delta_r = \bar{h} \quad \text{II-87}$$

On voit apparaître la notion de taille critique de l'éprouvette : il s'agit d'une épaisseur minimum  $\bar{h}$  en dessous de laquelle l'énergie élastique disponible est insuffisante pour entretenir la propagation de la bande de cisaillement. Ceci suggère, comme nous l'avons indiqué au chapitre 1, qu'une série d'expériences, où l'épaisseur de l'échantillon est successivement diminuée, pourrait être mise en oeuvre et utilisée pour savoir si un transfert d'énergie élastique est effectivement utilisé de manière significative pour l'entretien de la propagation des bandes de cisaillement. Notons simplement que le développement préalable d'une zone d'inhomogénéité, où la dissipation d'énergie est importante, ne favorise pas le déclenchement d'un tel mécanisme.

**IV : CONCLUSION**

Au cours de ce chapitre, nous avons été amenés à préciser les méthodes de détermination de la distribution des déformations plastiques dans les bandes de cisaillement, ainsi que leurs conditions d'application et de convergence. Nous allons maintenant utiliser ces résultats pour la détermination des déformations nominales critiques et pour l'examen de leurs propriétés, en relation avec les caractéristiques rhéologiques du matériau et les conditions de chargement du spécimen.

## *Table des figures*

Figure 2-1 : Géométrie de l'éprouvette et condition de chargement .....	58
Figure 2-2 : Profil du défaut géométrique .....	59
Figure 2-3 : Définition du défaut géométrique et de son raccord.....	59
Figure 2-4 : Définition du défaut matériel et de son raccord .....	61
Figure 2-5 : Différents cas de résolutions possibles.....	63
Figure 2-6 : Comparaison entre les fonctions $f$ et leur fonction équivalente .....	65
Figure 2-7 : Localisation $L_{\infty}$ et $L_{\infty,r}$ .....	67
Figure 2-8 : Profil des déformations pour une localisation $L_p$ .....	68
Figure 2-9 : Equation de localisation .....	73
Figure 2-10 : Critère de localisation $L_{\infty,r}$ .....	76
Figure 2-11 : Profil de la déformation plastique .....	78
Figure 2-12 : Développement au premier ordre de l'expression du défaut.....	80
Figure 2-13 : Différence relative entre un calcul complet et le calcul analytique de la déformation plastique .....	80
Figure 2-14 : Chemin d'intégration .....	82
Figure 2-15 : Décharge élastique.....	83
Figure 2-16 : Déplacement du point P .....	85
Figure 2-17 : Modélisation de l'éprouvette .....	86
Figure 2-18 : Vitesse de propagation .....	87
Figure 2-19 : Boîte de cisaillement .....	88
Figure 2-20 : Relations force et contrainte en fonction du déplacement relatif.....	89
Figure 2-21 : Surface de glissement avec ses deux chemins d'intégration.....	90

## Annexes du chapitre 2

### A.II.1 : DEVELOPPEMENT EN SERIE DE GAUSS

Les formules qui suivent sont également extraites de GRADSHTEYN et RYZHIK (1965)

$${}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1(b,a;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$$

où  $(a)_n$  désignent le symbole de Pochhammer :  $(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$

et  $\Gamma(a)$  la fonction Gamma qui vérifie la relation de récurrence  $\Gamma(a+n+1) = (a+n)\Gamma(a+n)$ .

Le développement en série de Gauss  ${}_2F_1(a,b;c;z)$  ne converge pas si  $|z| > 1$  en revanche si  $|z| \leq 1$  son comportement est :

- divergent si  $\text{Re}(c-b-a) \leq -1$
- absolument convergent si  $\text{Re}(c-b-a) > 0$
- convergent en excluant le point  $z = 1$  si  $-1 < \text{Re}(c-b-a) \leq 0$

### A.II.2 : FORMULAIRE DE CALCUL INTEGRAL

Les formules qui suivent sont extraites de GRADSHTEYN et RYZHIK (1965)

$$\int_0^u \frac{\xi^{\alpha-1}}{(1+a\xi)^\beta} d\xi = \frac{u^\alpha}{\alpha} {}_2F_1(\beta, \alpha; 1+\alpha; -a u) \quad [|\arg(1+au)| < \pi; \text{Re}(\alpha) > 0] \quad (3-194-1)$$

$$\int_u^\infty \frac{\xi^{\alpha-1}}{(1+a\xi)^\beta} d\xi = \frac{u^{\alpha-\beta}}{a^\beta (\beta-\alpha)} {}_2F_1\left(\beta, \beta-\alpha; \beta-\alpha+1; -\frac{1}{a u}\right) \quad [\text{Re}(\alpha) > \text{Re}(\beta)] \quad (3-194-3)$$

$$\int_0^\infty \frac{\xi^{\alpha-1}}{(1+a\xi)^\beta} d\xi = a^{-\alpha} B(\alpha, \beta-\alpha) \quad [|\arg(a)| < \pi; \text{Re}(\beta) > \text{Re}(\alpha) > 0]$$

avec B étant la fonction Bêta

**A.II.3 : FORMULAIRE DE CALCUL INTEGRAL (LOI DE KNOWLES)**

Dans le cadre de la fonction de Knowles :  $f(\xi) = \xi \left( 1 + \frac{b}{n} \xi^2 \right)^{n-1}$

Calcul de  $\int_0^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$

$$\int_0^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = A_\infty = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1+m}{2m}} \beta\left(\frac{1-2n-m}{m}; \frac{1+m}{2m}\right)$$

Calcul de  $\int_u^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$

$$\int_u^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1+m}{2m}} \frac{m}{1-2n-m} g(u)^{\frac{1-2n-m}{2m}} {}_2F_1\left(\frac{1-2n-m}{2m}, \frac{m-1}{2m}; \frac{1-2n+m}{2m}; g(u)\right)$$

$$\text{avec } g(u) = \left(1 + \frac{b}{n} u^2\right)^{-1}$$

ce qui donne si l'on utilise un seul terme :

$$\int_u^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \cong \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1+m}{2m}} \frac{m}{1-2n-m} \left(1 + \frac{b}{n} u^2\right)^{-\frac{1-2n-m}{2m}}$$

de plus si u est assez grand,  $\frac{b}{n} u^2$  est nettement supérieur à 1 et l'intégrale devient :

$$\int_u^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \cong \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1-n}{m}} \frac{m}{1-2n-m} u^{-\frac{1-2n-m}{m}} = K_\infty u^{-p_\infty}$$

$$\text{avec } K_\infty = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1-n}{m}} \frac{m}{1-2n-m} \text{ et } p_\infty = \frac{1-2n-m}{m}$$

Calcul de  $\int_0^u f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$

$$\int_0^u f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1+m}{2m}} \frac{2m}{1+m} h(u)^{\frac{1+m}{2m}} {}_2F_1\left(\frac{1+m}{2m}, \frac{2n+3m-1}{2m}; \frac{1+3m}{2m}; h(u)\right)$$

$$\text{avec } h(u) = \left(1 + \frac{n}{b} u^2\right)^{-1}$$

ce qui donne si l'on utilise un seul terme :

$$\int_0^u f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \cong \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1+m}{2m}} \frac{2m}{1+m} \left(1 + \frac{n}{b} u^2\right)^{-\frac{1+m}{2m}} = K_0 \left(1 + \frac{n}{b} u^2\right)^{-p_0}$$

$$\text{avec } K_0 = \left(\frac{n}{b}\right)^{\frac{1-n}{m}} \frac{2m}{1+m} \text{ et } p_0 = \frac{1+m}{2m}$$

*Chapitre 3*

**Déformation critique**

# Sommaire

<b>I : INTRODUCTION.....</b>	<b>100</b>
<b>II : DEFORMATION CRITIQUE .....</b>	<b>101</b>
II.1 : EXPRESSION GENERALE.....	101
II.2 : CAS DE LA FONCTION DE KNOWLES .....	101
II.2.1 : Influence des paramètres rhéologiques.....	102
II.2.2 : Influence du défaut .....	104
<b>III : ETUDE DES CONDITIONS AUX LIMITES.....</b>	<b>106</b>
III.1 : CONDITION AUX LIMITES MIXTES .....	106
III.1.1 : Calcul de la vitesse au bord $v(1,t)$ .....	107
III.1.2 : Calcul de la contrainte aux bords $\tau(1,t)$ .....	108
III.1.3 : Détermination de $\gamma(0,t)$ et $\dot{\gamma}(0,t)$ .....	108
III.1.4 : Détermination de la courbe contrainte-déformation nominale.....	109
III.1.5 : Exemple.....	110
III.1.6 : Conclusion.....	111
III.2 : LOIS DE COMPORTEMENT EN PUISSANCES MULTIPLICATIVES .....	112
III.2.1 : Introduction .....	112
III.2.2 : Contrôle en vitesse .....	112
III.2.3 : Conditions en contrainte.....	117
III.2.4 : Comparaison entre les deux contrôles.....	119
III.3 : CONCLUSION .....	122
<b>IV : CONFRONTATION EXPERIMENTALE.....</b>	<b>123</b>
<b>V : CONCLUSION .....</b>	<b>125</b>
<b>TABLE DES FIGURES.....</b>	<b>126</b>

---

**ANNEXES DU CHAPITRE 3**.....127

    A.III.1 : CALCUL D'INTEGRALES ETENDUE A LA ZONE DE LOCALISATION .127

    A.III.2 : LOI PUISSANCE THERMIQUEMENT ACTIVEE.....128

# Chapitre 3

## Déformation critique

### I : INTRODUCTION

L'un des problèmes majeurs rencontrés dans la caractérisation des matériaux est le calcul de leur tenue en cisaillement adiabatique. Les laboratoires de recherche industrielle ont notamment besoin d'un outil d'aide au choix des matériaux, capable de prévoir, pour un coût réduit, la déformation nominale critique atteinte dans un essai de torsion par un matériau dont le comportement est identifié au moyen d'un nombre restreint de paramètres rhéologiques.

Dans ce qui suit, nous développons un outil de ce type basé sur les développements en série de la fonction de Knowles présentés dans le chapitre précédent. Il est nécessaire d'insister sur le rôle des paramètres de structure : défauts, conditions aux limites, dont l'influence, sur les déformations critiques, est considérable, même dans un essai réputé « simple » comme l'essai de torsion. Nous mettrons ainsi en évidence le rôle des différents paramètres rhéologiques et géométriques avant de nous attarder sur les conditions aux limites et de conclure en montrant la dispersion des résultats qui résulte du manque de contrôle que l'on exerce sur défauts et les conditions aux limites dans ce type d'essai.

## II : DEFORMATION CRITIQUE

### II.1 : EXPRESSION GENERALE

Nous allons définir la déformation critique  $\gamma_c$  comme étant la déformation nominale lorsque la déformation au centre de la bande tend vers l'infini ou lorsque la contrainte de cisaillement tend vers zéro :

$$\gamma_c = \lim_{\gamma(0) \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx$$

ou

$$\gamma_c = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx$$

**III-1**

L'intégration numérique avec des points de Gauss de la déformation plastique présentant quelques problèmes à proximité du centre du défaut lorsqu'il y a localisation, il est nécessaire de décomposer le domaine d'intégration plusieurs fois à proximité de ce centre comme il est indiqué en annexe **A.III.1** ; cette technique a l'inconvénient de multiplier le nombre de calculs.

### II.2 : CAS DE LA FONCTION DE KNOWLES

Pour la fonction de Knowles, la déformation plastique peut être exprimée analytiquement dans le défaut sous la forme :

$$\gamma(x) = H |x|^{-\frac{r}{p}}$$

**III-2**

Il est alors possible de pallier au problème d'intégration numérique évoqué précédemment en décomposant l'intégrale en deux, une partie dite locale  $\gamma_{c,loc}$  jusqu'à  $x_c$  qui sera calculée analytiquement et une seconde partie dite extérieure  $\gamma_{c,ext}$  qui pourra n'être calculée que numériquement. Ce calcul numérique ne présente pas de problème particulier et peut être effectué avec huit points de Gauss.

$$\gamma_c = \frac{1}{h} \int_0^h \gamma(x) dx = \frac{1}{h} \int_0^{x_c} \gamma(x) dx + \frac{1}{h} \int_{x_c}^h \gamma(x) dx = \gamma_{c,loc} + \gamma_{c,ext}$$

**III-3**

Il reste à déterminer la limite  $x_c$  entre la partie locale et la partie extérieure. Elle est nécessairement située dans le défaut et ne peut, en aucun cas, se situer dans le raccord où aucune expression analytiquement intégrable de la déformation plastique n'est connue. Dans la plupart des cas, l'écart entre la déformation plastique obtenue avec un calcul complet et son approximation le long du défaut est négligeable et cette limite sera confondue avec la limite du défaut et de son raccord ( $x_c = x_1$ ). Si l'écart n'est pas négligeable, une valeur de  $x_c$  inférieure à  $x_1$  sera choisie

Par intégration de III-2 entre 0 et  $x_c$ , la déformation critique locale  $\gamma_{c,loc}$  s'écrit :

$$\gamma_{c,loc} = \frac{1}{h} H \frac{p}{p-r} x_c^{(1-\frac{r}{p})} \quad \text{III-4}$$

ce qui conduit à

$$\gamma_c = \frac{1}{h} \int_0^n \gamma(x) dx = \frac{1}{h} H \frac{p}{p-r} x_c^{(1-\frac{r}{p})} + \frac{1}{h} \int_{x_c}^n \gamma(x) dx \quad \text{III-5}$$

$$\text{avec } H = \left( \frac{K_\infty}{A_\infty} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{m \mu(0)}{\mu_r(0)} \right)^{\frac{1}{p}}; K_\infty = \left( \frac{n}{b} \right)^{\frac{1-n}{m}} \frac{m}{1-2n-m}; A_\infty = \int_0^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi \text{ et } p = \frac{1-2n-m}{m}$$

Nous allons maintenant nous intéresser à l'influence des paramètres rhéologiques et géométriques sur la déformation critique. Quant à l'influence des conditions aux limites, elle fera l'objet du paragraphe III. La confrontation quantitative avec les données expérimentales n'est pas toujours possible du fait de leur absence ou du manque d'informations complémentaires les concernant, néanmoins une confrontation qualitative est effectuée.

### II.2.1 : Influence des paramètres rhéologiques

La **Figure 3-1** représente la déformation critique en fonction du paramètre d'érouissage  $n$  pour différentes valeurs du paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation  $m$ , et pour un défaut donné (taille  $\epsilon=0,04$  et acuité  $r = 1,5$ ); La **Figure 3-2** représente, quant à elle, la déformation critique en fonction du paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation  $m$ , pour différentes valeurs du paramètre d'érouissage  $n$  et pour le défaut précédent (taille  $\epsilon=0,04$  et acuité  $r = 1,5$ ).

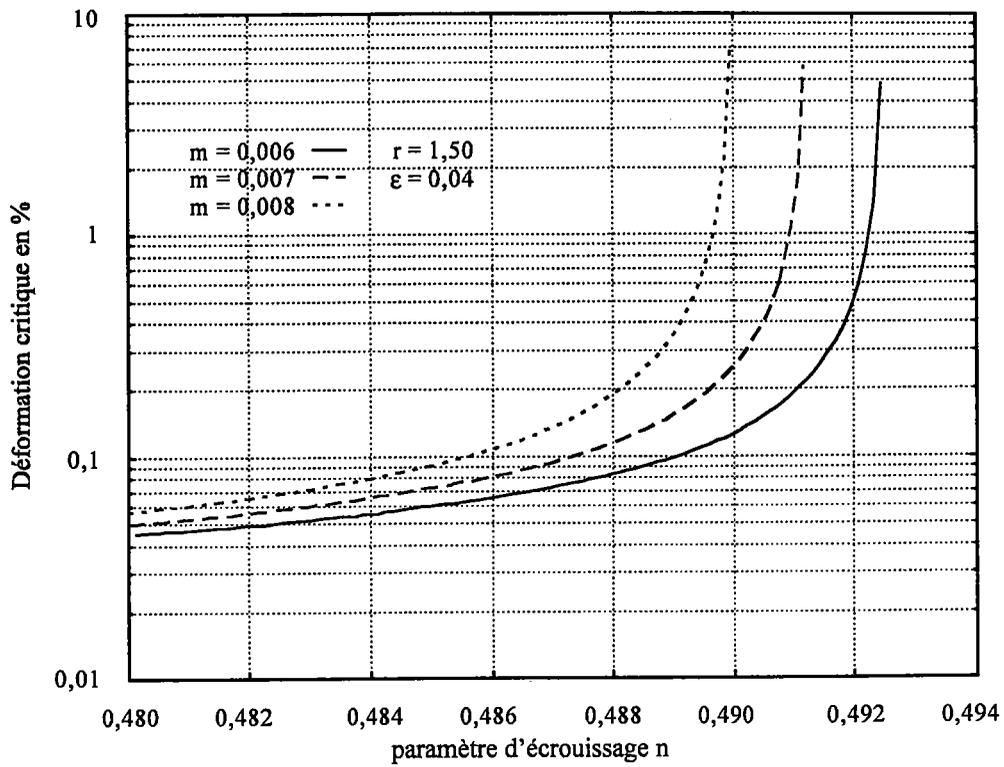


Figure 3-1 : Influence du paramètre d'érouissage sur la déformation critique

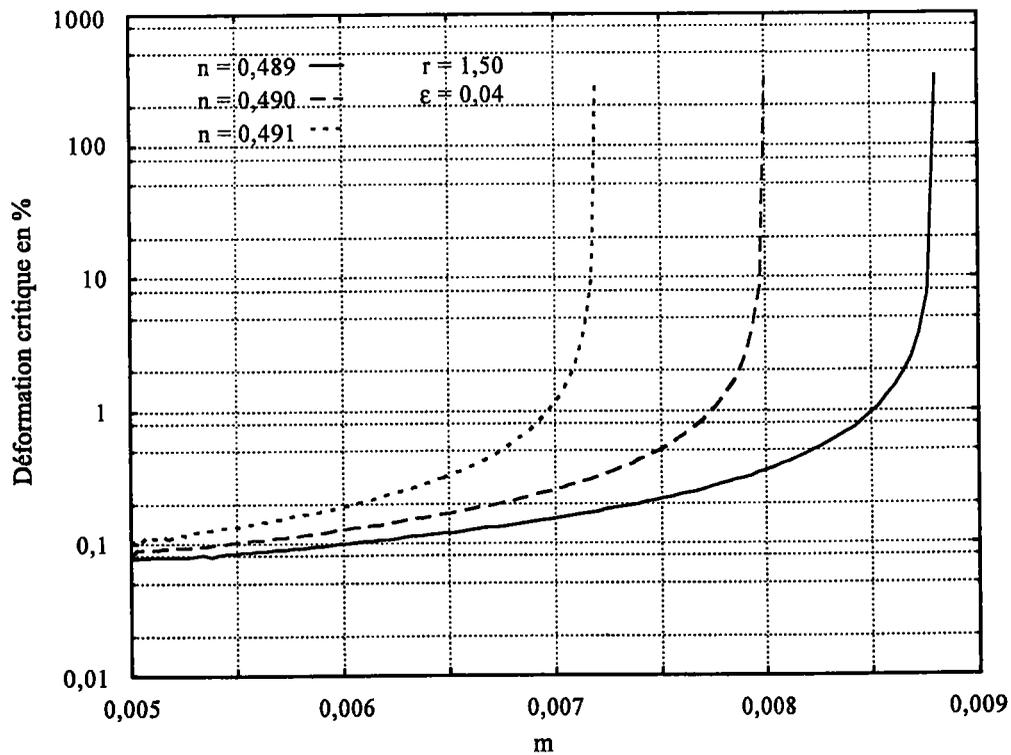


Figure 3-2 : Influence de la sensibilité à la vitesse de déformation  $m$  sur déformation critique

Ces deux dernières figures montrent que la déformation critique augmente aussi bien avec le paramètre d'écroutissage  $n$  qu'avec le paramètre de sensibilité à la vitesse de déformation. On voit ainsi le caractère uniformisant de l'écroutissage par la vitesse de déformation. De même, lorsque le paramètre  $n$  est augmenté, la tendance à la localisation est amoindrie. Ces résultats confirment les tendances prévues par les analyses de stabilité linéaire (CLIFTON (1987), BAI (1982), FRESSENGEAS et MOLINARI (1987)). Toutefois, ils sont plus précis que ces dernières car ils sont obtenus à l'aide d'une analyse non linéaire du processus de localisation, et parce qu'en outre, ils concernent les déformations nominales critiques et non le développement initial du processus. Ils sont aussi en accord avec les tendances observées expérimentalement et résumées par exemple par HUTCHINSON et NEALE (1977). Toutes ces courbes présentent une asymptote. Celle-ci s'explique à partir du critère de localisation  $L_{\infty,r}$  établi au chapitre précédent et rappelé en III-6. Lorsque ce critère est vérifié, la déformation critique est finie ; en revanche s'il ne l'est pas, la déformation tend vers l'infini.

$$2n+m(1+r)<1 \quad \text{III-6}$$

Les asymptotes se situent donc à  $n = \frac{1-m(1+r)}{2}$  ou à  $m = \frac{1-2n}{1+r}$  suivant le type de courbe.

L'analyse présentée rejoint donc l'analyse asymptotique représentée par le critère de localisation  $L_{\infty,r}$  (DINZART, MOLINARI, FRESSENGEAS (1994)). Elle l'étend aux déformations nominales finies.

### II.2.2 : Influence du défaut

La **Figure 3-4** et la **Figure 3-3** montrent respectivement l'influence de la taille et de l'acuité du défaut sur la déformation critique. Nous pouvons noter que la déformation critique augmente avec le paramètre  $r$  représentant l'acuité du défaut (défaut plus plat) ce qui illustre le caractère localisant de la forme du défaut. Nous retrouvons également une asymptote à  $r = \frac{1-2n}{m} - 1$  pour la même raison que précédemment.

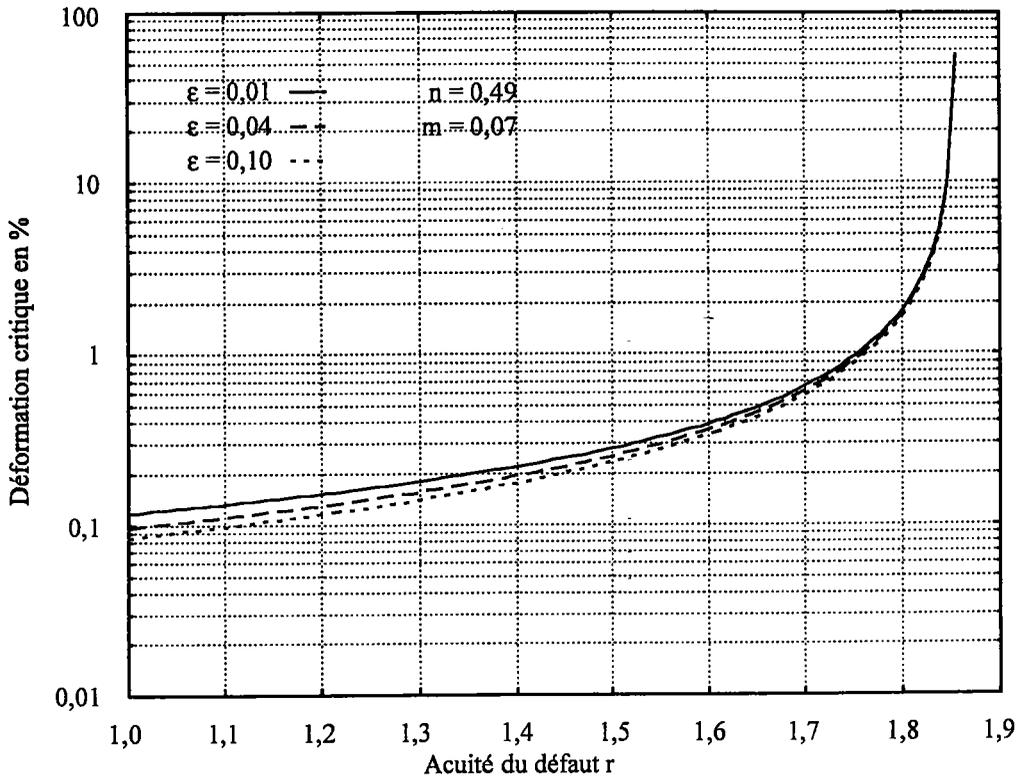


Figure 3-3 : Influence de l'acuité  $r$  du défaut sur la déformation critique

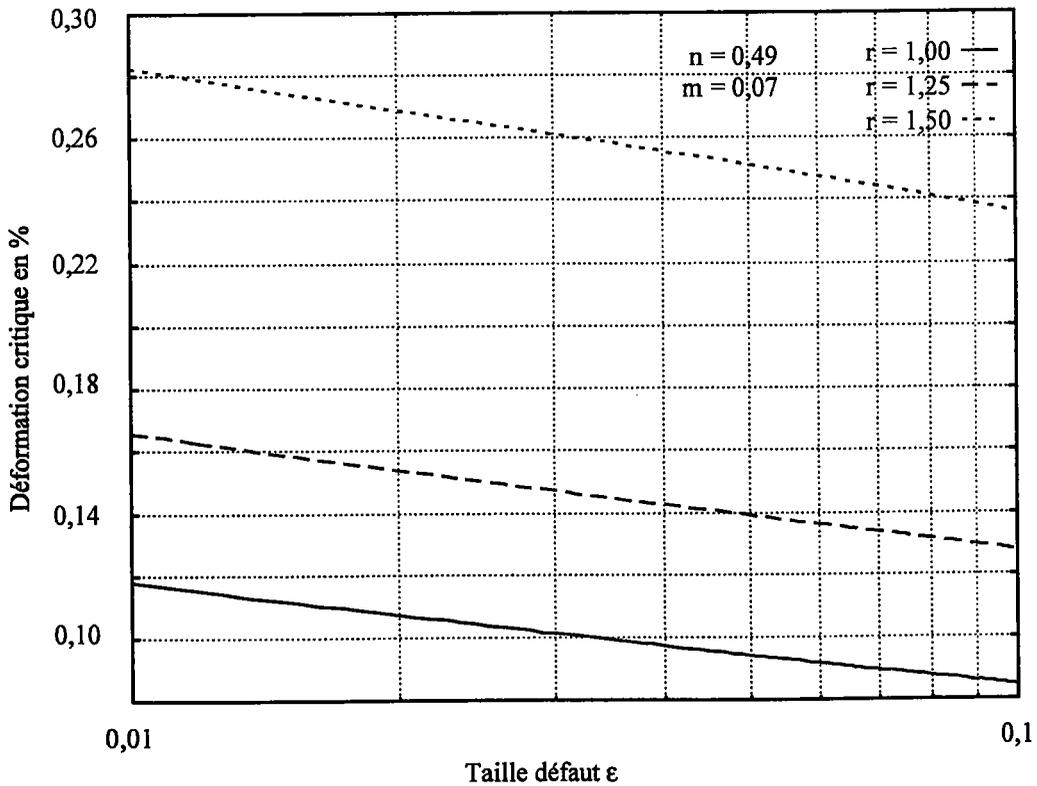


Figure 3-4 : Influence de la taille du défaut sur la déformation critique

Il n'existe pas d'asymptote sur les courbes déformation critique - taille relative du défaut car le critère de localisation  $L_{\infty,r}$  III-6 est indépendant de la taille du défaut. La

déformation critique décroît linéairement avec le logarithme décimal de la taille du défaut, ce qui a été suggéré expérimentalement par DUFFY (1991), analytiquement par MOLINARI et CLIFTON (1987) avec un défaut sinusoïdal, puis par DINZART, FRESSENGEAS, MOLINARI (1994) avec un calcul complet pour les lois adiabatiques. Avec un minimum de calculs, il a donc été possible d'étudier l'influence des paramètres rhéologiques et géométriques sur la déformation critique pour la fonction de Knowles. Par la suite, nous allons nous attarder sur l'influence des conditions aux limites.

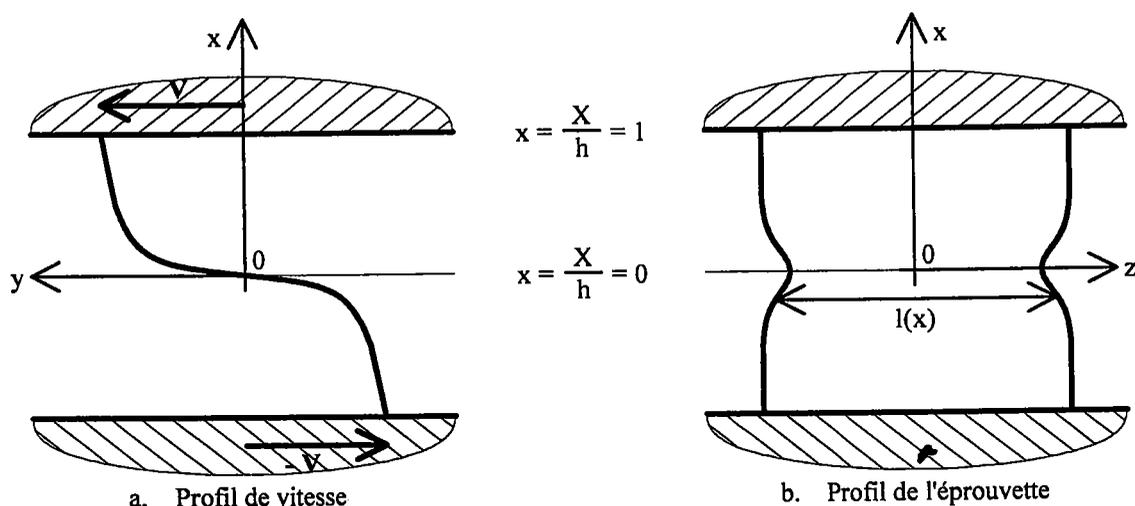
### III : ETUDE DES CONDITIONS AUX LIMITES

#### III.1 : CONDITION AUX LIMITES MIXTES

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à l'influence des conditions aux limites sur la chute de contrainte pour la loi de Knowles. Pour cela, nous supposons que l'éprouvette est soumise à des conditions aux limites mixtes du type :

$$v(h,t) - \phi \tau(h,t) = \tilde{v} - \phi \tilde{\tau} \quad \text{III-7}$$

Nous ferons varier le coefficient  $\phi$  et nous comparerons les différentes courbes contrainte/déformation nominale.



**Figure 3-5 : Géométrie de l'éprouvette et condition de chargement**

Par hypothèse, l'éprouvette possède un défaut matériel ou un défaut géométrique (Figure 3-5.b) ou les deux. Elle est constituée d'un matériau thermo-viscoplastique qui suit la loi de Knowles.

$$\tau = \mu(x) f(\gamma) \dot{\gamma}^m \quad \text{avec } f(\gamma) = \gamma \left(1 + \frac{b}{n} \gamma^2\right)^{n-1} \quad \text{III-8}$$

L'équation d'équilibre s'écrit toujours

$$\forall x \in [-1, +1] \quad \tau(x, t) l(x) = \tau(0, t) l(0) \quad \text{III-9}$$

et le contrôle aux bords est mixte, c'est à dire qu'il existe une combinaison linéaire d'un contrôle en vitesse (vitesse imposée au bord) et d'un contrôle en contrainte (contrainte imposée au bord) (Figure 3-6). De plus, la vitesse est nulle au centre de la bande (Figure 3-5.a).

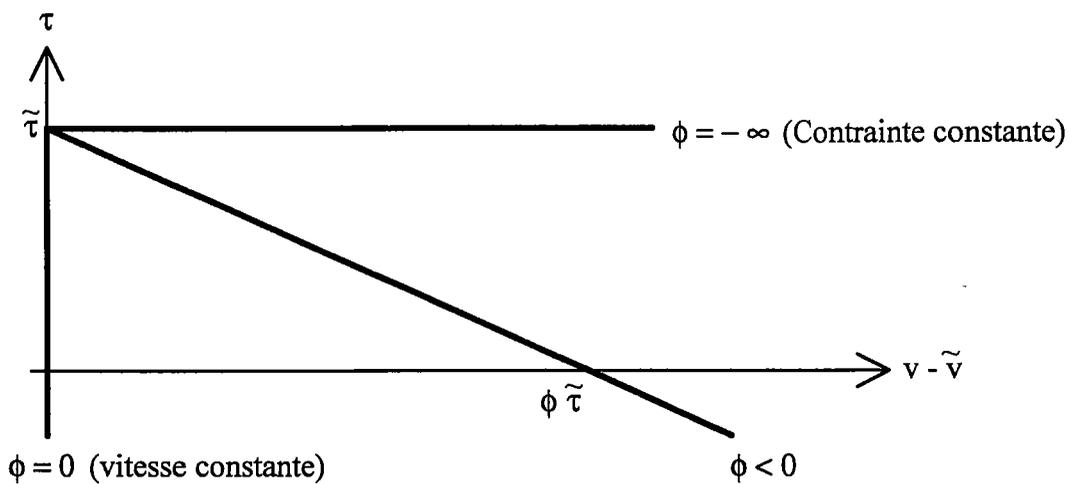


Figure 3-6 : Conditions aux limites mixtes

Les conditions aux limites sont donc définies par :

$$\text{en } x = 0 \quad v(0,t) = 0$$

$$\text{en } x = 1 \quad v(1,t) - \phi \tau(1,t) = \tilde{v} - \phi \tilde{\tau} \Leftrightarrow \tau = \tilde{\tau} + \frac{1}{\phi} (v - \tilde{v}) \quad \text{III-10}$$

Il est maintenant nécessaire de calculer la vitesse au bord de l'éprouvette  $v(1,t)$  ainsi que la contrainte à ce même endroit  $\tau(1,t)$ .

III.1.1 : Calcul de la vitesse au bord  $v(1,t)$

La vitesse de déplacement  $v(1,t)$  au bord de l'éprouvette, est obtenue par intégration de la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(x,t)$  :

$$v(1,t) = \int_0^h \dot{\gamma}(x,t) dx \quad \text{III-11}$$

L'équation d'équilibre III-9 peut s'écrire :

$$(l(x) \mu(x))^{\frac{1}{m}} f(\gamma(x,t))^{\frac{1}{m}} \dot{\gamma}(x,t) = (l(0) \mu(0))^{\frac{1}{m}} f(\gamma(0,t))^{\frac{1}{m}} \dot{\gamma}(0,t) \quad \text{III-12}$$

d'où il est possible d'extraire la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(x,t)$  :

$$\dot{\gamma}(x,t) = \dot{\gamma}(0,t) \left( \frac{l(0) \mu(0)}{l(x) \mu(x)} \right)^{\frac{1}{m}} \left( \frac{f(\gamma(0,t))}{f(\gamma(x,t))} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{III-13}$$

ce qui conduit à :

$$v(1,t) = \dot{\gamma}(0,t) \int_0^h \left( \frac{l(0) \mu(0)}{l(x) \mu(x)} \frac{f(\gamma(0,t))}{f(\gamma(x,t))} \right)^{\frac{1}{m}} dx \quad \text{III-14}$$

(Pour le calcul de l'intégrale, voir annexe A.III.1)

Lorsqu'au temps  $t$ , la déformation plastique au centre de la bande  $\gamma(0,t)$  est connue, la distribution de la déformation plastique  $\gamma(x,t)$  est déterminée à l'aide des équations de localisation  $L_p$  III-15, ainsi que la déformation nominale  $\gamma_{nom}(t)$  par intégration. De plus, si la vitesse de déformation au centre  $\dot{\gamma}(0,t)$  est déterminée, il est possible de calculer la vitesse aux bords  $v(1,t)$ .

### III.1.2 : Calcul de la contrainte aux bords $\tau(1,t)$

L'équation d'équilibre III-9 donne directement :

$$\tau(1,t) = \frac{l(0)}{l(1)} \tau(0,t) = \frac{l(0)}{l(1)} \mu(0) f(\gamma(0,t)) \dot{\gamma}(0,t)^m \quad \text{III-15}$$

$\tau(1,t)$  est déterminé lorsque  $\gamma(0,t)$  et  $\dot{\gamma}(0,t)$  sont connues.

### III.1.3 : Détermination de $\gamma(0,t)$ et $\dot{\gamma}(0,t)$

En remplaçant  $v(1,t)$  (III-14) et  $\tau(1,t)$  (III-15) dans l'expression III-10 on obtient :

$$\dot{\gamma}(0,t) \int_0^h \left( \frac{l(0) \mu(0)}{l(x) \mu(x)} \right)^{\frac{1}{m}} \left( \frac{f(\gamma(0,t))}{f(\gamma(x,t))} \right)^{\frac{1}{m}} dx - \phi \frac{l(0)}{l(1)} \mu(0) f(\gamma(0,t)) \dot{\gamma}(0,t)^m = \tilde{v} - \phi \tilde{\tau} \quad \text{III-16}$$

Si la déformation plastique au centre de la bande  $\gamma(0,t)$  est connue, il est possible de calculer la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(0,t)$  en résolvant l'équation différentielle ordinaire III-16, qui s'écrit encore :

$$A_{\gamma(0,t)} \dot{\gamma}(0,t)^m + B_{\gamma(0,t)} \dot{\gamma}(0,t) + C = 0 \tag{III-17}$$

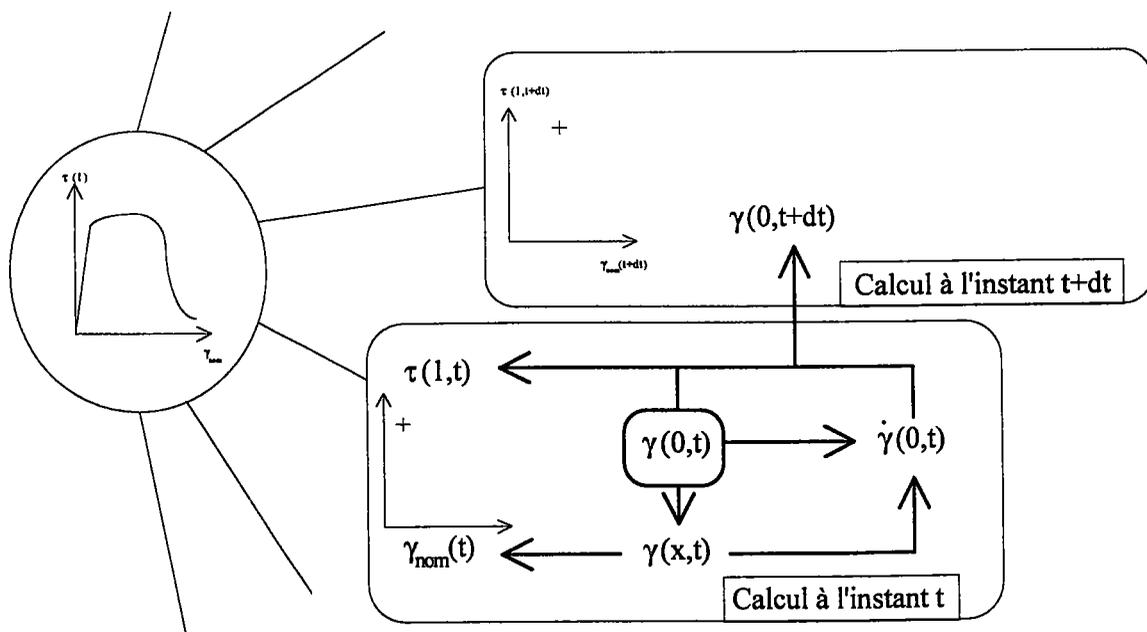
avec  $A = \phi \frac{l(0)}{l(1)} \mu(0) f(\gamma(0,t))$ ,  $B = \int_0^h \left( \frac{l(0)}{l(x)} \mu(x) \frac{f(\gamma(0,t))}{f(\gamma(x,t))} \right)^{\frac{1}{m}} dx$ , et  $C = -\tilde{v} + \phi \tilde{\tau}$

A un instant ultérieur  $t+dt$ , la déformation plastique au centre de la bande est définie par la relation suivante approchée au premier ordre :

$$\gamma(0,t+dt) = \gamma(0,t) + \dot{\gamma}(0,t) dt \tag{III-18}$$

III.1.4 : Détermination de la courbe contrainte-déformation nominale

En se donnant la déformation initiale au centre de la bande  $\gamma(0,t=0)$ ,  $\tilde{v}$ ,  $\tilde{\tau}$  et  $\phi$ , il est possible de déterminer le profil de déformation  $\gamma(x,0)$ , la déformation nominale  $\gamma_{nom}(0)$ , la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(0,0)$  et la contrainte  $\tau(1,0)$ . On peut ensuite déterminer la déformation plastique un instant plus tard  $\gamma(0,dt)$  et recommencer le calcul de  $\gamma(x,dt)$ ,  $\gamma_{nom}(dt)$ ,  $\dot{\gamma}(0,dt)$ ,  $\tau(1,dt)$ . Par incréments de temps successifs, il est possible de tracer la courbe contrainte-déformation nominale (Figure 3-7).



**Figure 3-7 : Calcul de la courbe contrainte déformation nominale**

III.1.5 : Exemple

Prenons l'exemple d'un matériau caractérisé par la loi de Knowles III-10, présentant un défaut matériel (qui pourrait également être géométrique) défini par III-3 et soumis à des conditions aux limites mixtes III-10. Toutes les caractéristiques de l'éprouvette sont mentionnées ci-dessous

Caractéristiques rhéologiques :  $b = 8\ 000$   $n = 0,49$

$m = 0,007$

Caractéristiques du défaut :  $\epsilon = 0,04$   $x_1 = 0,2$

$\mu_i = 0,3579e10$   $x_2 = 1,0$

$\frac{\mu_r(0)}{\mu_i} = 0,01$

$\mu_i$

Conditions de chargement :  $\tilde{v} = 2,5\ m\ s^{-1}$   $\tilde{\tau} = 22,5\ Mpa$

Nous allons tracer la courbe contrainte déformation nominale pour différentes valeurs du paramètre  $\phi$  et comparer les déformations critiques

III.1.5.1 : Domaine de variation du paramètre  $\phi$

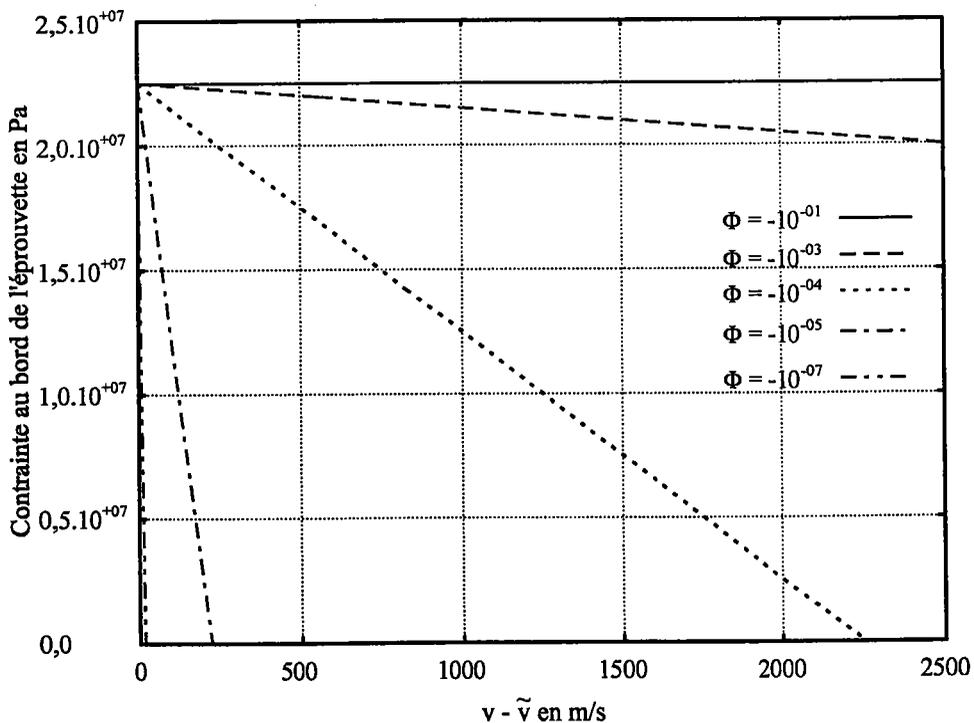
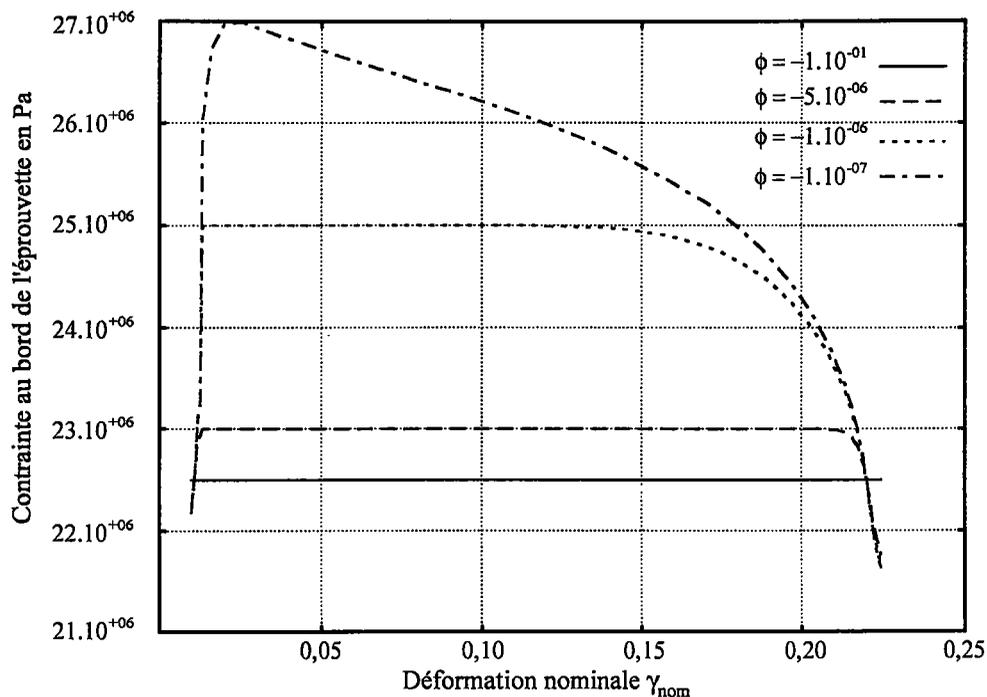


Figure 3-8 : Domaine de variation du paramètre  $\phi$

Théoriquement,  $\phi$  varie de moins l'infini à 0. Avec nos valeurs de  $\tilde{\nu}$  et  $\tilde{\tau}$  (non adimensionnalisées), la **Figure 3-8** indique que pour  $\phi = -10^{-1}$ , le contrôle est pratiquement à contrainte constante, et quasiment à vitesse constante pour  $\phi = -10^{-7}$  ; c'est pourquoi, dans cette étude, nous nous limitons à l'intervalle  $[-10^{-7} ; -10^{-1}]$  de la variation de  $\phi$

### III.1.5.2 Courbe contrainte - déformation ( $\tau - \gamma_{nom}$ ) et discussion



**Figure 3-9 : Courbes contrainte déformation nominale ( $\tau - \gamma_{nom}$ )**

Nous pouvons constater que la valeur de la déformation nominale finale de ces quatre courbes est identique. Cette valeur finale est obtenue par arrêt des calculs à une valeur de la déformation au centre ( $\gamma(0)$ ) que nous avons fixée ici à  $10^8$ . Ce résultat est obtenu quelles que soient les valeurs de  $\tilde{\nu}$  et  $\tilde{\tau}$ . Une variation des ces paramètres influe uniquement sur le niveau de contrainte.

### III.1.6 : Conclusion

La remarque précédente suggère que les conditions de chargement n'influent pas sur la valeur de la déformation nominale critique, comme l'avait établi une étude par éléments finis (LEROY Y.M., BONVALOT B., MOLINARI A. (1994) ; BODIN L. (1996)) , mais qu'elles influent

sur le niveau de contraintes atteint et sur l'énergie nécessaire à la formation des bandes. Cette conclusion, qui découle directement de l'équation de localisation II-14, qui est établie indépendamment des conditions aux limites, n'est cependant vérifiée que dans la mesure où la fonction  $f$  est elle-même indépendante des conditions aux limites. C'est le cas dans ce paragraphe, où la fonction de Knowles est constamment employée, mais la loi de comportement en puissances multiplicatives II-6, qui conduit à des fonctions adiabatiques  $f$  différentes selon que l'on a affaire à un contrôle en contrainte II-8 ou un contrôle en vitesse II-9, fournira au contraire des déformations nominales critiques différentes. Il est donc intéressant d'examiner maintenant le cas d'une loi de comportement en puissances multiplicatives, sous conditions aux limites en vitesse puis en contrainte.

### III.2 : LOIS DE COMPORTEMENT EN PUISSANCES MULTIPLICATIVES

#### III.2.1 : Introduction

Pour la loi de comportement en puissance, l'étude des conditions mixtes sur le modèle du paragraphe III.1 n'est pas possible du fait que cette loi conduit à deux fonctions  $f$  différentes selon que l'on a affaire à un contrôle en contrainte III-8 ou un contrôle en vitesse III-9 ; c'est pourquoi, dans un premier temps, le contrôle en vitesse est étudié. Le contrôle en contrainte est ensuite réalisé, puis on effectue une comparaison avec le cas précédent.

#### III.2.2 : Contrôle en vitesse

Ce paragraphe apporte des précisions sur les hypothèses utilisées dans le calcul des courbes contrainte-déformation nominale rencontrées dans la littérature concernant le cas adiabatique avec contrôle en vitesse (DINZART, FRESSENGEAS, MOLINARI (1994)).

Dans cette étude, on suppose que la vitesse de déformation à la puissance  $m$  :  $\dot{\gamma}^m$  reste voisine de  $\dot{\gamma}_0^m$  dans l'équation de la thermique (déjà vue dans le chapitre 1 et rappelée en III-19). Cette hypothèse est utilisée pour l'obtention de la fonction  $f(\gamma)$  III-9.

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \beta \tau \dot{\gamma} = \beta \mu(x) \theta_0^v f(\gamma) \dot{\gamma}^m \dot{\gamma} \quad \text{III-19}$$

Ceci nécessite que  $m$  soit assez petit, mais ne veut nullement dire que le profil des vitesses de déformation reste constant le long du défaut. Au contraire, l'expression III-13 explicite la variation de la vitesse de déformation à travers l'éprouvette. Néanmoins, on suppose que cette variation reste modérée.

En outre, les courbes contrainte-déformation nominale que l'on trouve dans l'étude (DINZART, FRESSENGEAS, MOLINARI (1994)) sont obtenues en imposant une vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(0,t)$  constante au centre de la bande. Cette condition n'a qu'un intérêt numérique car elle ne peut pas être contrôlée expérimentalement.

### III.2.2.1 Nouvelle modélisation

Expérimentalement, le paramètre, qui est contrôlable, est la vitesse de déplacement  $v(1,t)$  des bords de l'éprouvette (**Figure 3-5**). Celle-ci, définie par l'expression III-14, est supposée constante et égale à  $\tilde{v}$ . Il est donc possible de déterminer la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(0,t)$  au centre de la bande :

$$\dot{\gamma}(0,t) = \frac{v(1,t)}{\int_0^h \left( \frac{l(0) \mu(0) f(\gamma(0,t))}{l(x) \mu(x) f(\gamma(x,t))} \right)^{\frac{1}{m}} dx} = \frac{\tilde{v}}{\int_0^h \left( \frac{l(0) \mu(0) f(\gamma(0,t))}{l(x) \mu(x) f(\gamma(x,t))} \right)^{\frac{1}{m}} dx} \quad \text{III-20}$$

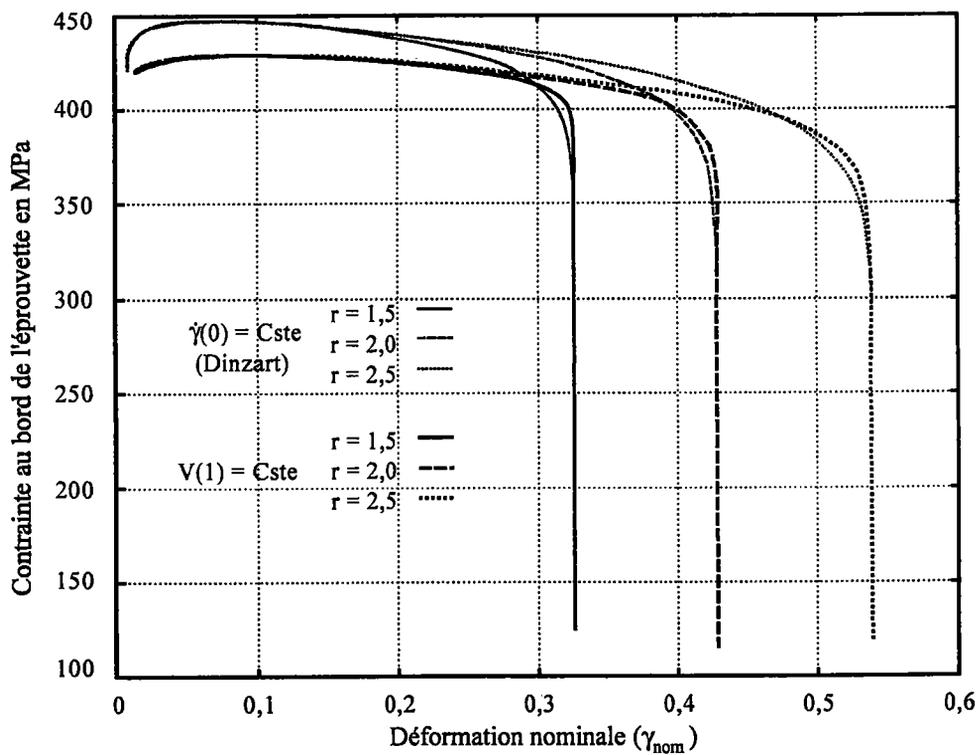
En se donnant la déformation initiale au centre de la bande  $\gamma(0,t=0)$  et la vitesse au bord  $\tilde{v}$ , il est donc possible de déterminer le profil de déformation  $\gamma(x,0)$ , la déformation nominale  $\gamma_{\text{nom}}$ , la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(0,0)$  et la contrainte  $\tau(1,0)$ . On peut ensuite déterminer la déformation plastique un court instant plus tard  $\gamma(0,dt)$  et recommencer le calcul de  $\gamma(x,dt)$ ,  $\gamma_{\text{nom}}(dt)$ ,  $\dot{\gamma}(0,dt)$ ,  $\tau(1,dt)$ . Par incréments de temps successifs, il est possible de tracer la courbe contrainte-déformation nominale (**Figure 3-7**).

### III.2.2.2 : Exemple

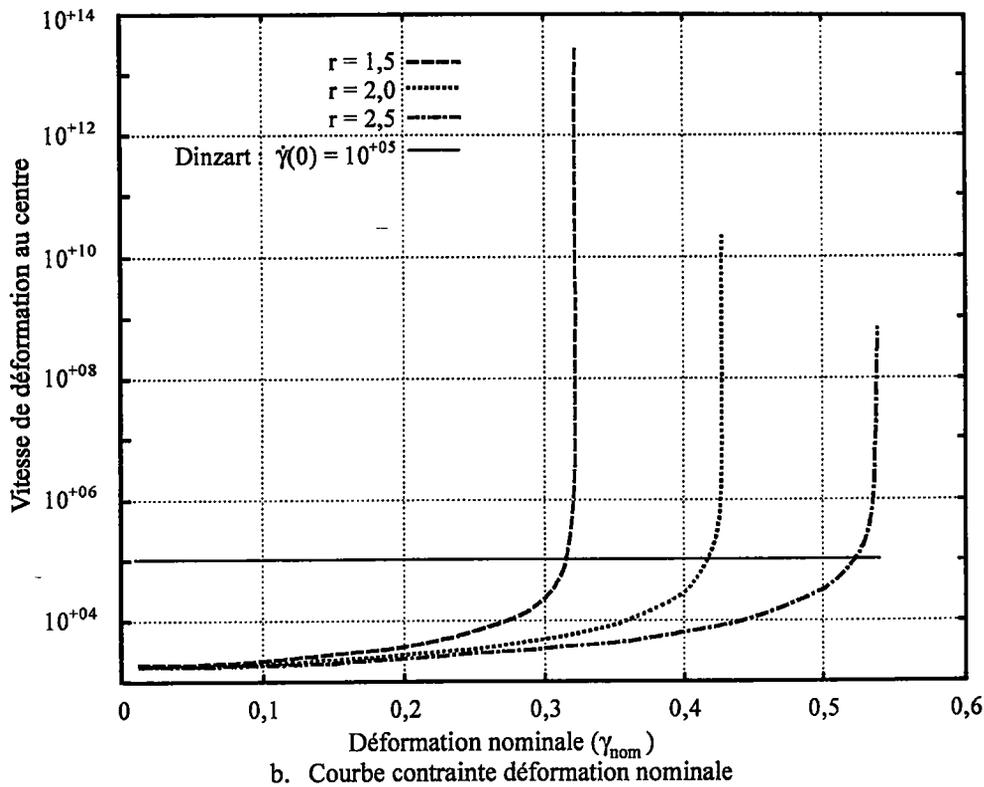
Pour un spécimen d'acier CRS 1018 dont les caractéristiques rhéologiques, les conditions de chargement ainsi que les caractéristiques du défaut sont mentionnées ci-dessous :

<u>Caractéristiques rhéologiques :</u>	$v = -0,38$	$\rho = 7\,800 \text{ Kg/m}^3$
	$n = 0,015$	$c = 500 \text{ J/Kg K}$
	$m = 0,019$	$\beta = 0,9$
<u>Caractéristiques du défaut :</u>	$\varepsilon = 0,04$	$x_1 = 0,2$
	$\mu_i = 0,3579e10$	$x_2 = 1,0$
	$\frac{\mu_r(0)}{\mu_i} = 0,04$	
<u>Conditions de chargement :</u>	$\gamma_0 = 0,01$	$\dot{\gamma}_0 = 1e4 \text{ s}^{-1}$
<u>Température initiale :</u>	$\theta_0 = 300 \text{ K}$	

la Figure 3-10.a présente la différence entre les deux hypothèses : vitesse de déformation au centre de la bande imposée ( $\dot{\gamma}(0,t) = \dot{\gamma}_0 = \text{constante}$ ) et vitesse de déplacement au bord constante ( $v(1,t) = \text{constante}$ ) pour différentes valeurs de l'acuité  $r$  du défaut :



a. Courbe contrainte déformation nominale

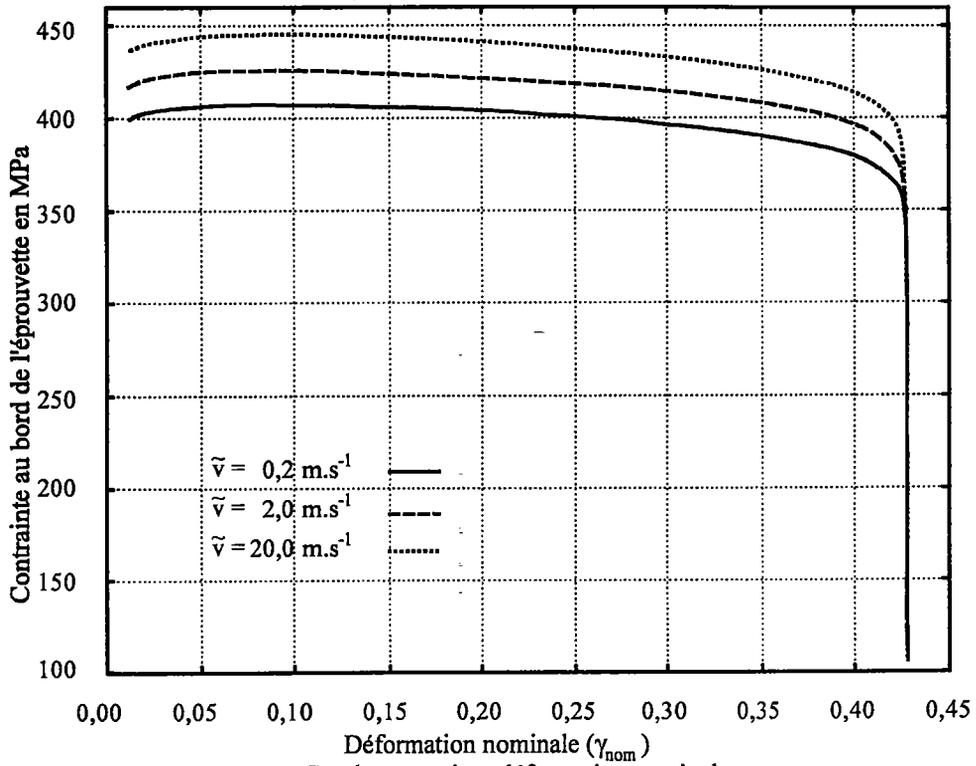


**Figure 3-10 : Comparaison des deux hypothèses**

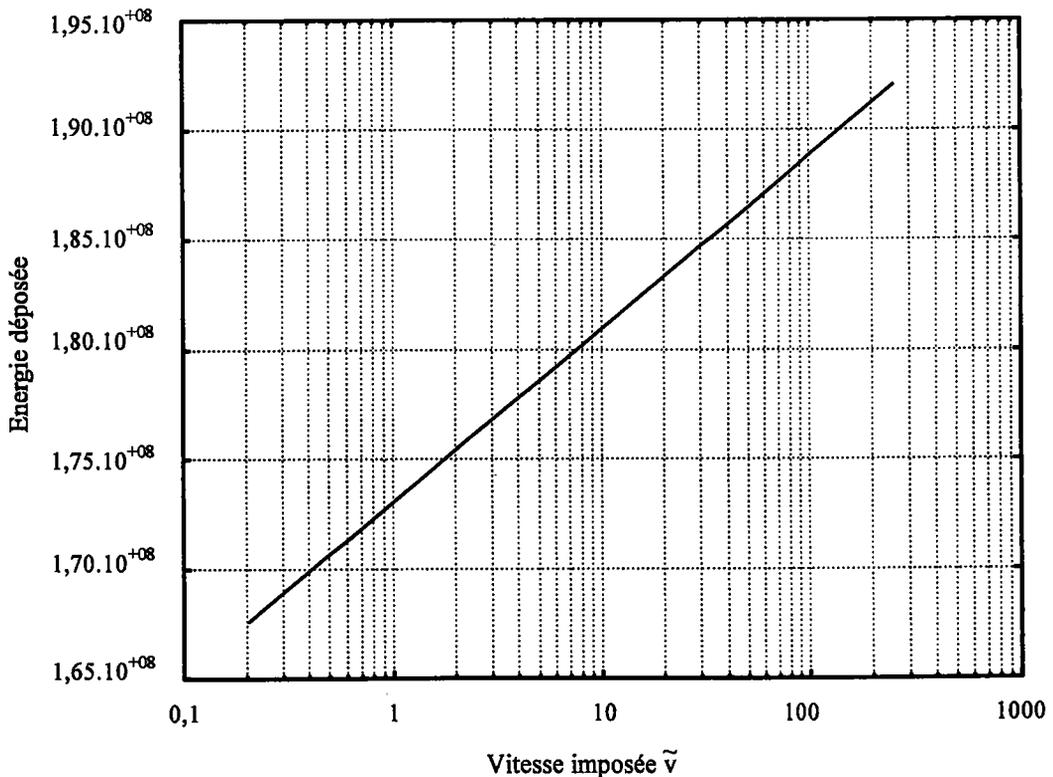
Par rapport au travail de DINZART (1994) où la vitesse de déformation au centre de la bande est imposée ( $\dot{\gamma}(0,t) = \dot{\gamma}_0 = \text{constante}$ ), les valeurs des déformations critiques sont identiques, mais les valeurs des contraintes diffèrent (**Figure 3-10.a**). L'intensité de la localisation est plus forte lorsque la vitesse au bord est imposée (**Figure 3-10.b**). Il en résulte que l'approximation est  $\dot{\gamma}^m \equiv \dot{\gamma}_0^m$  est plus pénalisante pour les conditions aux limites en vitesse au bord imposée que lorsque la vitesse de déformation au centre de la bande est imposée.

III.2.2.3 : Variation de  $\tilde{v}$

Nous nous intéressons ici à l'influence de la vitesse  $\tilde{v}$  imposée au bord de l'éprouvette sur la déformation nominale critique  $\gamma_c$ . Prenons l'éprouvette déjà utilisée ci-dessus et appliquons lui différentes vitesses de déplacement au bord.



a. Courbe contrainte-déformation nominale



b. Influence sur l'énergie déposée

**Figure 3-11 : Influence de la vitesse imposée  $\tilde{v}$**

La Figure 3-11.a montre que, quelle que soit la vitesse imposée  $\tilde{v}$ , la déformation critique  $\gamma_c$  ne varie pas. En revanche, le niveau de contrainte augmente avec  $\tilde{v}$  en raison d'un

écrouissage supplémentaire par la vitesse de déformation. Ceci implique que l'énergie déposée au cours de l'expérience, représentée par l'aire sous la courbe contrainte-déformation et exprimée par III-21, augmente également avec la vitesse imposée  $\tilde{v}$ .

$$W_{\text{prod}} = \int_0^{\gamma_c} \tau \, d\gamma_{\text{nom}} \quad \text{III-21}$$

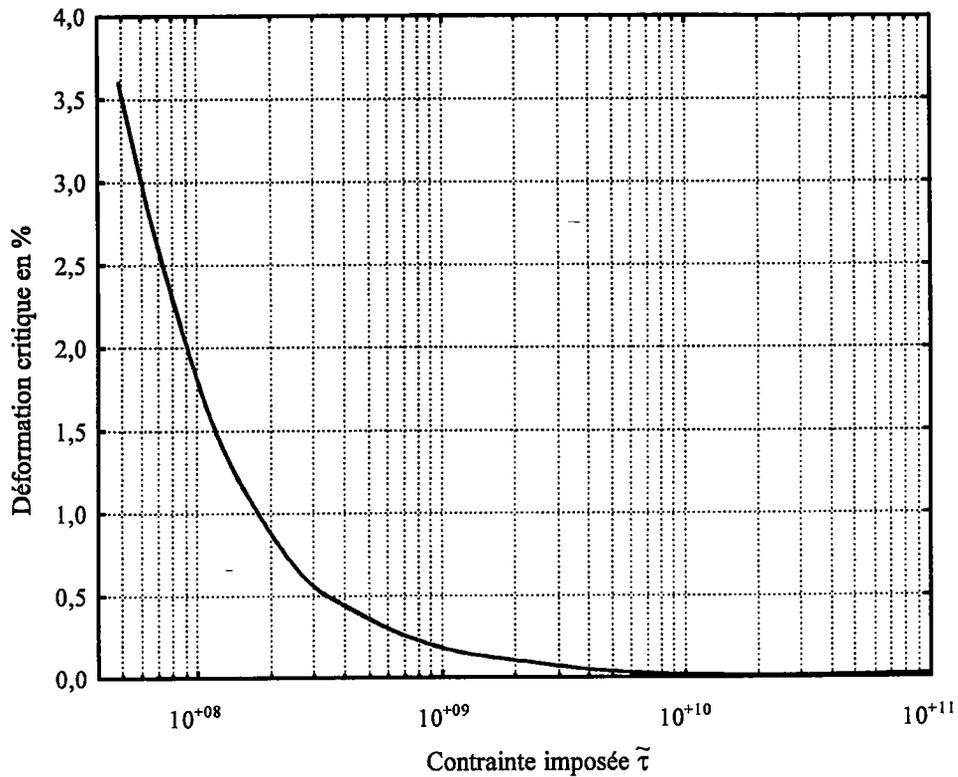
La **Figure 3-11.b** montre que l'énergie déposée III-21 est proportionnelle au logarithme décimal de la vitesse. Ces deux dernières figures indiquent donc que la déformation critique  $\gamma_c$  reste constante, quelle que soit l'énergie déposée au cours de l'expérience.

### III.2.3 : Conditions en contrainte

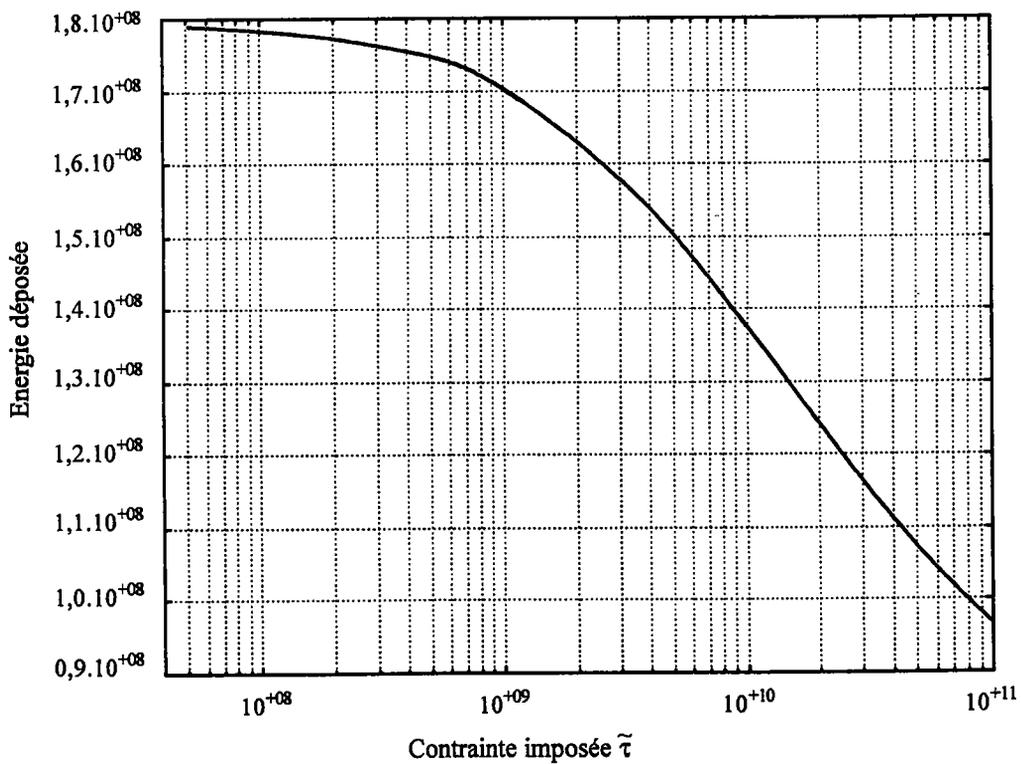
Lorsqu'il y a contrôle en contrainte,  $\tau(x,t)$  est supposée constante et égale à  $\tilde{\tau}$ . Pour une déformation plastique  $\gamma(0,t)$  au centre de la bande à un instant donné, il est donc possible de déterminer la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(0,t)$  :

$$\dot{\gamma}(0,t) = \left( \frac{\tau(1,t)}{\frac{l(0)}{l(1)} \mu(0) f(\gamma(0,t))} \right)^{\frac{1}{m}} = \left( \frac{\tilde{\tau}}{\frac{l(0)}{l(1)} \mu(0) f(\gamma(0,t))} \right)^{\frac{1}{m}} \quad \text{III-22}$$

En se donnant la déformation initiale au centre de la bande  $\gamma(0,t=0)$  et une contrainte au bord  $\tilde{\tau}$ , il est donc possible de déterminer le profil de déformation  $\gamma(x,0)$ , la déformation nominale  $\gamma_{\text{nom}}$  et la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(0,0)$ . On peut ensuite déterminer la déformation plastique un court instant plus tard  $\gamma(0,dt)$  et recommencer le calcul de  $\gamma(x,dt)$ ,  $\gamma_{\text{nom}}(dt)$ ,  $\dot{\gamma}(0,dt)$ ,  $\tau(1,dt)$ . Par incréments de temps successifs, il est possible de tracer la courbe contrainte-déformation nominale (**Figure 3-7**). Pour l'éprouvette mentionnée dans le paragraphe précédent, les deux figures suivantes (**Figure 3-12.a** et **Figure 3-12.b**) montrent que la déformation critique ainsi que l'énergie déposée décroissent avec la contrainte imposée  $\tilde{\tau}$ .



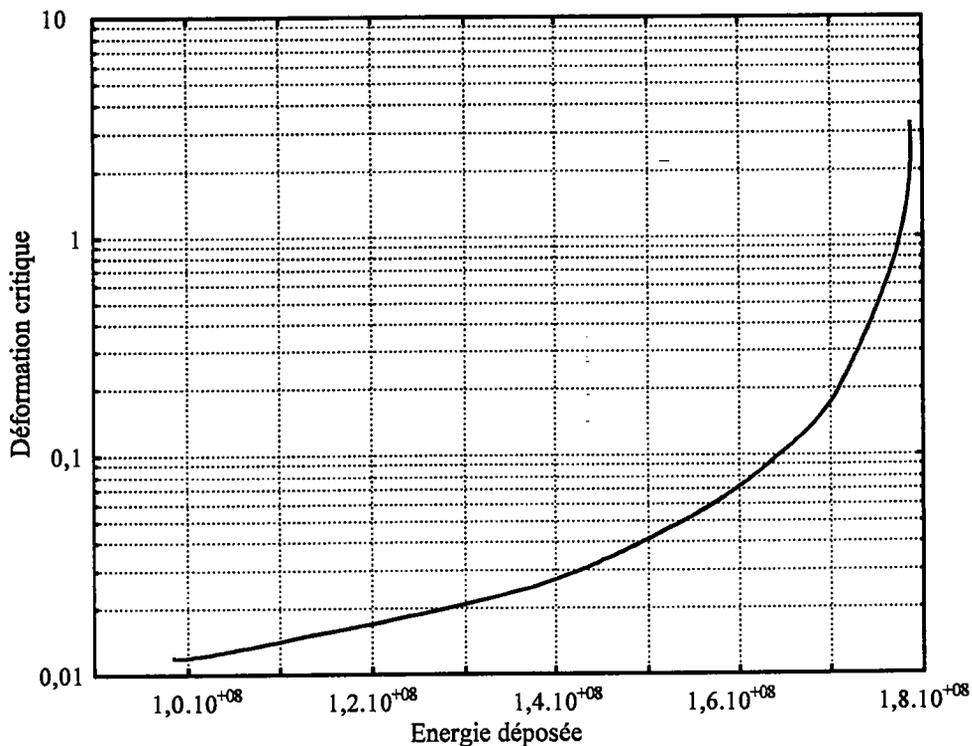
a. Influence sur la déformation critique



b. Influence sur l'énergie déposée

**Figure 3-12 : Influence de la contrainte imposée  $\tilde{\tau}$  sur la déformation critique et sur l'énergie déposée**

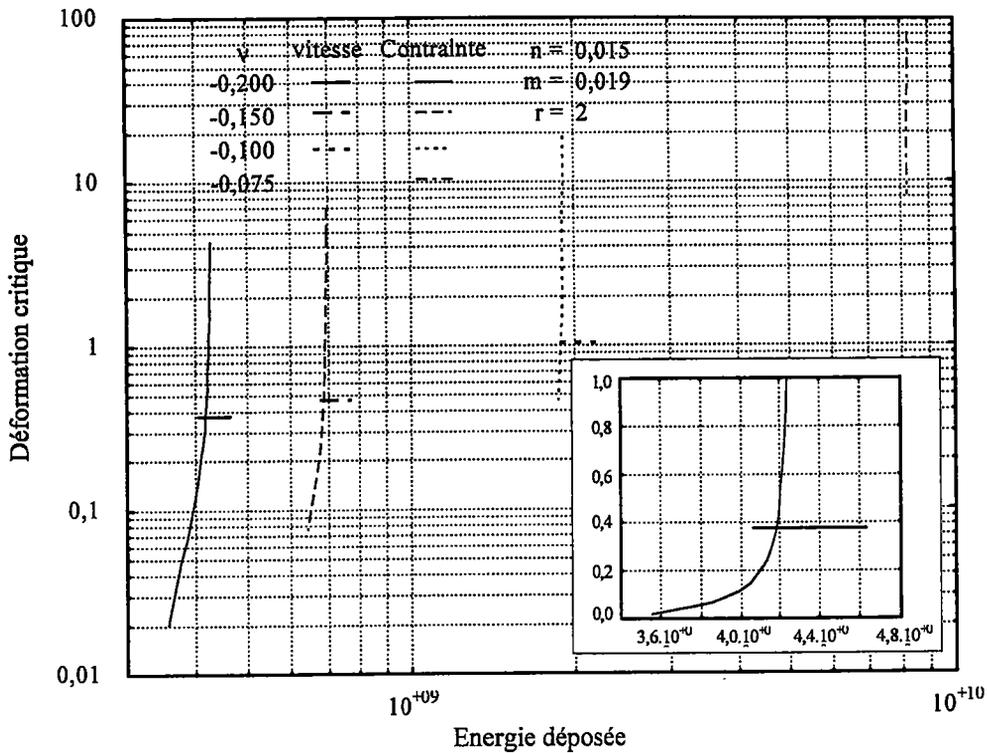
A partir des deux courbes précédentes, il est possible de construire la courbe déformation critique - énergie déposée.



**Figure 3-13 : Courbe énergie déposée - déformation nominale**

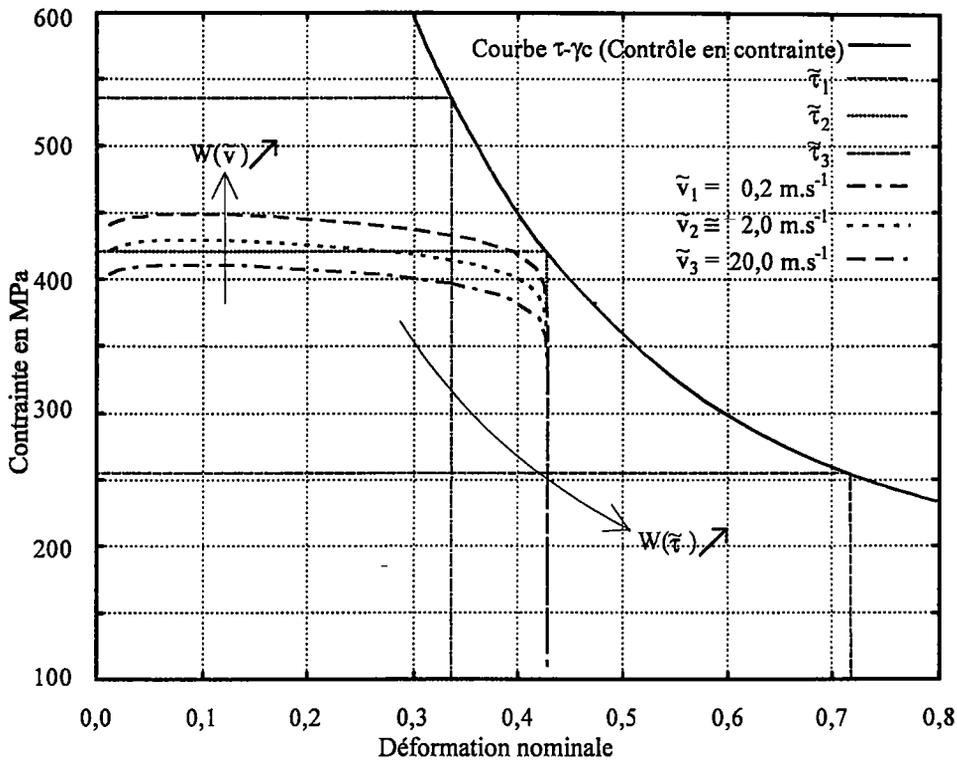
#### III.2.4 : Comparaison entre les deux contrôles

Pour comparer les déformations critiques  $\gamma_c$  lors de deux expériences soumises respectivement à un contrôle en vitesse et à un contrôle en contrainte, il est nécessaire de « caler » ces deux essais à l'aide d'un paramètre commun. Celui qui nous semble naturel est l'énergie déposée. Nous comparerons donc des expériences conduisant à la même énergie déposée, ce qui nous amène à une première conclusion : il existe une différence entre les deux contrôles puisqu'en vitesse imposée, la déformation critique reste constante quelle que soit l'énergie déposée, ce qui n'est pas vrai sous contrainte imposée. Imaginons des éprouvettes présentant les mêmes caractéristiques que l'acier CRS 1018 utilisé précédemment, à l'exception du coefficient d'adoucissement thermique  $\nu$  que nous ferons varier. Ces éprouvettes sont soumises à différents chargements, ce qui permet de tracer les courbes déformation nominale - énergie déposée.



**Figure 3-14 : Courbes énergie déposée - déformation nominale**

La **Figure 3-14** montre que pour un coefficient d'adoucissement thermique  $\nu$  donné, (-0,20, -0,15 et -0,10) il existe une énergie  $W_i$  correspondante à une vitesse  $\tilde{\nu}_i$  pour le contrôle en vitesse et à une contrainte  $\tilde{\tau}_i$  pour le contrôle en contrainte pour laquelle les deux conditions aux limites fournissent la même déformation critique  $\gamma_c$ . Ce n'est pas le cas en général pour les autres valeurs de l'énergie déposée. La **Figure 3-15** présente trois courbes contrainte - déformation nominale associées à un contrôle en vitesse avec  $\tilde{\nu}_1 < \tilde{\nu}_2 < \tilde{\nu}_3$ . Trois autres associées à un contrôle en contrainte sont également tracées pour  $\tilde{\tau}_1 < \tilde{\tau}_2 < \tilde{\tau}_3$ . Les valeurs  $\tilde{\nu}_2$  et  $\tilde{\tau}_2$  ont été choisies de telle manière que la contrainte critique ainsi que l'énergie déposée soient identiques lors des deux expériences. Ces différentes courbes montrent la variation de la déformation critique avec la contrainte ou l'énergie déposée. Cette dernière augmente avec la vitesse ( $W(\tilde{\nu}_1) < W(\tilde{\nu}_2) < W(\tilde{\nu}_3)$ ) alors qu'elle diminue lorsque la contrainte augmente ( $W(\tilde{\tau}_1) > W(\tilde{\tau}_2) > W(\tilde{\tau}_3)$ )



**Figure 3-15 : Comparaison entre contrôle en vitesse et contrôle en contrainte**

Pour un coefficient d'adoucissement thermique égal à -0,075 la déformation critique tend vers l'infini pour le contrôle en vitesse (Figure 3-14), car dans ce cas le critère de localisation  $L_{\infty,r}$  n'est pas vérifié. En revanche, il l'est pour le contrôle en contrainte et, par conséquent, la déformation critique reste finie. Suivant les paramètres rhéologiques ( $v$ ,  $n$  et  $m$ ) et l'acuité du défaut, il existe donc une zone où la déformation critique reste finie pour le contrôle en contrainte ( $L_{\infty,r}$  vérifié) et est infinie ( $L_{\infty,r}$  non vérifié) pour le contrôle en vitesse. Cette zone est définie par exemple par :

$$-n-m(1+r) < v < \frac{-n-m(1+r)}{1-m(1+r)} \tag{III-23}$$

pour la loi en puissances multiplicatives.

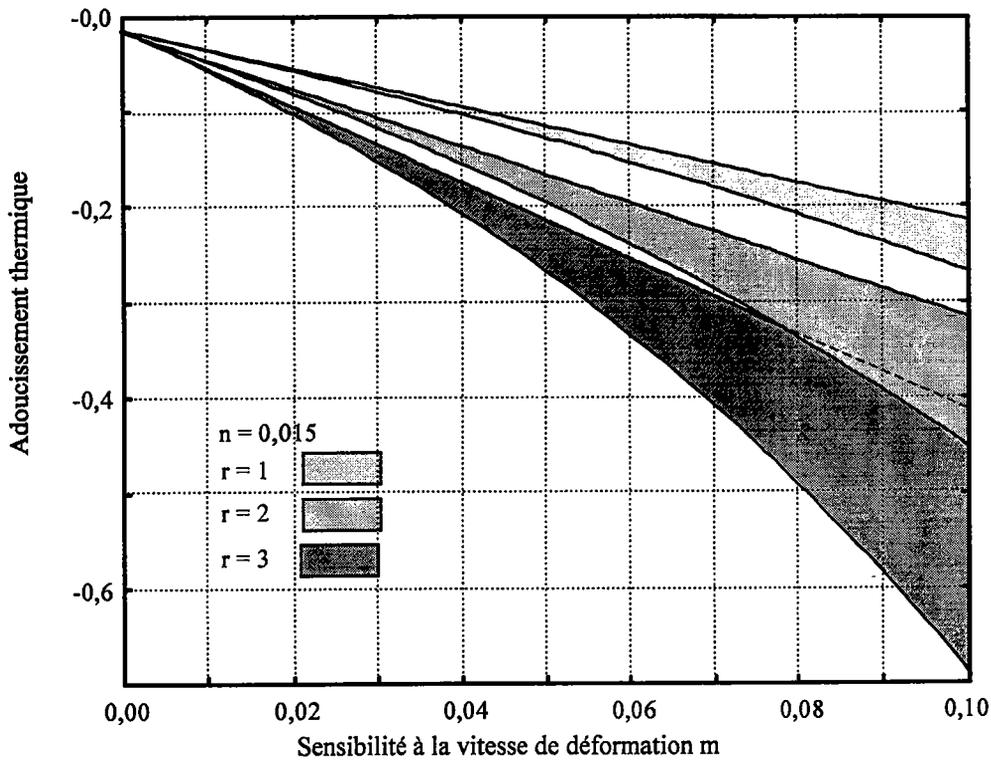


Figure 3-16 : Critère de localisation  $L_{\infty,r}$

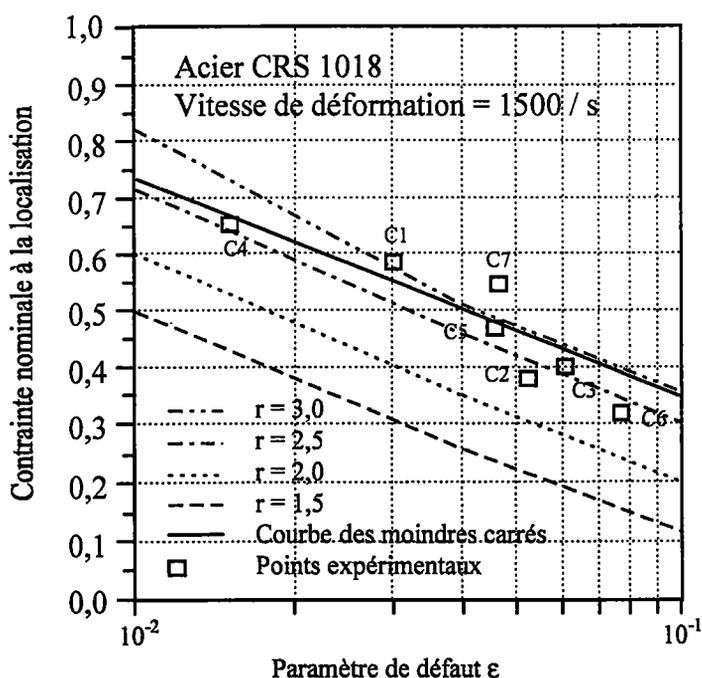
Les inéquations III-23 sont vérifiées dans les zones grisées de la **Figure 3-16**, tracées pour différentes valeurs de l'acuité du défaut. En dessous de ces zones, les critères de localisation  $L_{\infty,r}$  sont vérifiés pour les deux contrôles, en revanche, au dessus des zones, aucun critère de localisation  $L_{\infty,r}$  n'est vérifié. A l'intérieur et au voisinage inférieur de ces zones, les déformations critiques dépendent donc des conditions aux limites. Ces zones de dépendance n'existent pas dans le cas de la loi de Knowles où la fonction  $f(\gamma)$  est identique, quel que soit le contrôle, et présentent donc toujours le même critère de localisation  $L_{\infty,r}$ . Pour la loi thermiquement activée utilisée par LEROY Y.M., BONVALOT B., MOLINARI A. (1994) dans l'étude précédemment citée, les fonctions  $f(\gamma)$  s'avèrent différentes suivant le contrôle, mais le critère de la localisation  $L_{\infty,r}$  reste identique (voir annexe A.III.2). Ces zones de dépendance n'existent donc pas non plus.

### III.3 : CONCLUSION

Contrairement à la conclusion émise pour les conditions aux limites mixtes dans le cadre de la loi de Knowles, la déformation critique dépend des conditions aux limites pour la

loi puissance multiplicative. On doit donc conclure, en général, à la possibilité d'une dépendance des déformations critiques vis à vis des conditions aux limites imposées. Cependant, la modélisation rhéologique du matériau, qui est adoptée, peut masquer cette propriété dans les simulations numériques du processus de localisation. La propriété a cependant une grande importance pour l'expérimentateur. En effet, on sait que le contrôle expérimental des conditions aux limites est particulièrement délicat. Il en résulte que l'on doit s'attendre à une dispersion des déformations critiques d'autant plus significative que les paramètres rhéologiques et l'acuité des défauts situent le spécimen à proximité ou à l'intérieur des zones grisées de la **Figure 3-16**. Un exemple de la dispersion obtenue est présenté dans ce qui suit.

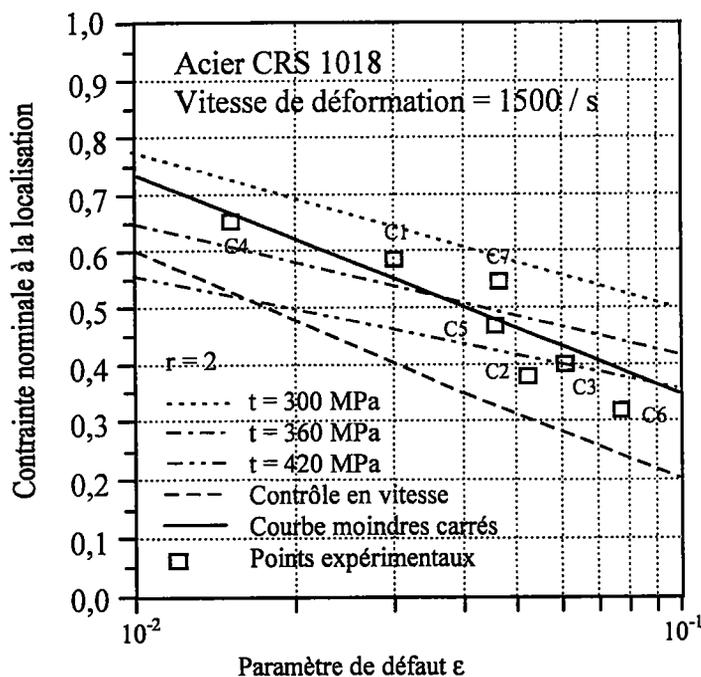
#### IV : CONFRONTATION EXPERIMENTALE



**Figure 3-17 : Influence de l'acuité du défaut**  
d'après DINZART, FRESSENGEAS, MOLINARI (1994)

DINZART, FRESSENGEAS, MOLINARI (1994) montrent que la dispersion rencontrée par DUFFY (1991) sur la déformation critique en fonction de la taille relative du défaut lors d'un essai contrôlé en vitesse peut s'expliquer par l'absence de maîtrise de l'acuité  $r$  du défaut. En effet, celle-ci a une influence non négligeable sur la déformation critique (**Figure 3-17**).

Cette explication est tout à fait justifiée, mais n'est pas la seule. Nous avons vu précédemment que pour un contrôle en vitesse, cette dernière n'influe pas sur la déformation critique, contrairement au contrôle en contrainte où la déformation critique dépendait fortement de la contrainte appliquée. Expérimentalement, il est très délicat de contrôler les conditions aux limites. Comme nous l'avons indiqué au chapitre 1, les expériences réalisées par DUFFY (1991) sur les barres de Kolsky ont probablement lieu sous conditions aux limites mixtes (voir relation I-2), bien qu'elles soient annoncées à vitesse constante. La valeur du coefficient  $\phi$  est mal connue, et on peut donc penser qu'elle est sujette à des variations non contrôlées.



**Figure 3-18 : Influence de la contrainte imposée**

La **Figure 3-18** représente les points expérimentaux de DUFFY (1991), la déformation critique en fonction de l'amplitude du défaut pour un contrôle en vitesse et une acuité  $r = 2$ , ainsi que ce même type de courbes pour un contrôle en contrainte et différentes contraintes appliquées. Il en résulte que si les conditions aux limites ne sont pas parfaitement maîtrisées, la déformation critique se situe quelque part entre la courbe de contrôle en vitesse et l'une des courbes de contrôle en contrainte. Ceci peut être une autre explication de la dispersion rencontrée par DUFFY (1991).

## **V : CONCLUSION**

L'objectif de ce chapitre était d'étudier l'influence des différents paramètres rhéologiques et structurels (géométrie et conditions aux limites) d'une éprouvette de torsion sur la déformation nominale critique. Pour cela, nous avons déterminé la déformation critique à partir de l'expression analytique de la déformation plastique pour un matériau décrit par la loi de Knowles. L'outil de calcul, ainsi constitué, est simple et précis car il décrit, de manière analytique, le comportement au voisinage de la localisation. L'étude paramétrique du matériau et de sa géométrie a confirmé, au niveau de la déformation critique, les tendances prévues par les analyses de stabilité linéaire ou les analyses de localisation asymptotique. L'étude des conditions aux limites a montré que celles-ci pouvaient influencer fortement sur la déformation critique. Cette influence peut expliquer la dispersion des déformations critiques observées par DUFFY (1991).

## *Table des figures*

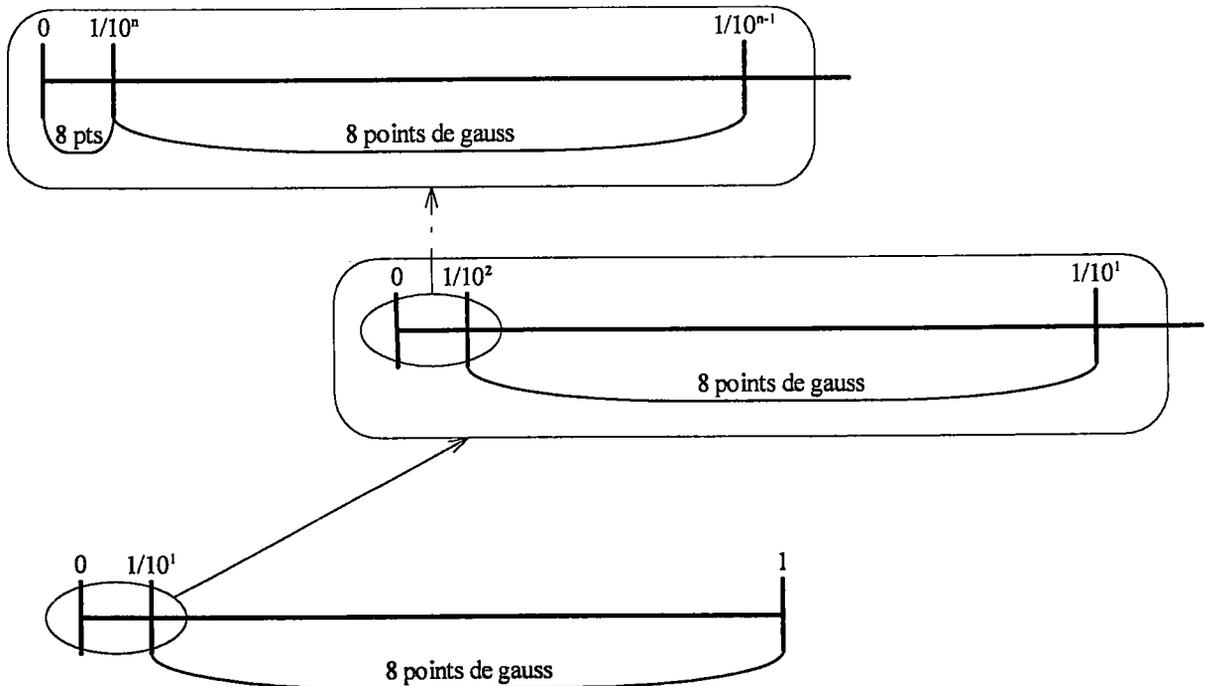
Figure 3-1 : Influence du paramètre d'écroissage sur la déformation critique.....	103
Figure 3-2 : Influence de la sensibilité à la vitesse de déformation $m$ sur déformation critique .....	103
Figure 3-3 : Influence de l'acuité $r$ du défaut sur la déformation critique .....	105
Figure 3-4 : Influence de la taille du défaut sur la déformation critique.....	105
Figure 3-5 : Géométrie de l'éprouvette et condition de chargement .....	106
Figure 3-6 : Conditions aux limites mixtes.....	107
Figure 3-7 : Calcul de la courbe contrainte déformation nominale.....	109
Figure 3-8 : Domaine de variation du paramètre $\phi$ .....	110
Figure 3-9 : Courbes contrainte déformation nominale ( $\tau - \gamma_{nom}$ ) .....	111
Figure 3-10 : Comparaison des deux hypothèses.....	115
Figure 3-11 : Influence de la vitesse imposée $\tilde{v}$ .....	116
Figure 3-12 : Influence de la contrainte imposée $\tilde{\tau}$ sur la déformation critique et sur l'énergie déposée .....	118
Figure 3-13 : Courbe énergie déposée - déformation nominale.....	119
Figure 3-14 : Courbes énergie déposée - déformation nominale .....	120
Figure 3-15 : Comparaison entre contrôle en vitesse et contrôle en contrainte .....	121
Figure 3-16 : Critère de localisation $L_{\infty,r}$ .....	122
Figure 3-17 : Influence de l'acuité du défaut .....	123
Figure 3-18 : Influence de la contrainte imposée .....	124

## Annexes du Chapitre 3

### A.III.1 : CALCUL D'INTEGRALES ETENDUE A LA ZONE DE LOCALISATION

Le calcul des intégrales  $\int_0^h \gamma(x,t) dx$  et  $\int_0^h \left( \frac{l(0) \mu(0)}{l(x) \mu(x)} \frac{f(\gamma(0,t))}{f(\gamma(x,t))} \right)^{\frac{1}{m}} dx$  par une méthode de

Gauss présente un problème du fait de la singularité des courbes à intégrer en  $x=0$ . Pour résoudre ce problème, l'intervalle d'intégration a été découpé  $n$  fois de la façon suivante :



$n$  correspondant à un entier tel que le calcul de l'intégrale sur l'intervalle  $[0; 1/10^{n-1}]$  avec 8 points de Gauss est égale la somme des intégrales sur les intervalles  $[0; 1/10^n]$  et  $[1/10^n; 1/10^{n-1}]$  toujours avec 8 points de Gauss.

Cependant, on verra au chapitre suivant qu'une intégration analytique reste plus précise, quelque soit le degré de raffinement employé ici.

### A.III.2 : LOI PUISSANCE THERMIQUEMENT ACTIVEE

La loi d'activation thermique linéarisée est de la forme :

$$\tau = \mu(x) f(\gamma) \dot{\gamma}^m \quad \text{avec } f(\gamma) = e^{v\theta} \gamma^n \text{ et } v < 0$$

A partir de l'équation de la chaleur  $\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \beta \tau \dot{\gamma}$  on obtient donc la loi adiabatique pour un contrôle en vitesse

$$f(\gamma) = e^{v\theta_0} \left( 1 - \frac{\beta \mu \dot{\gamma}_0^m e^{v\theta_0}}{\rho c (n+1)} \gamma^{n+1} \right)^{\frac{1}{m}} \gamma^n$$

et pour un contrôle en contrainte

$$f(\gamma) = e^{v\theta_0} e^{\frac{v\beta\tau_0}{\rho c} \gamma} \gamma^n$$

L'équation de localisation s'écrit toujours

$$\int_{\gamma(x)}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi = \left( 1 - \left( \frac{l(x) \mu(x)}{l(0) \mu(0)} \right)^{\frac{1}{m}} \right) \int_0^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$$

## I CONTROLE EN VITESSE

### I.1 LOCALISATION $L_{\infty}$

Lorsque  $\gamma$  tend vers l'infini,  $f(\gamma)^{\frac{1}{m}}$  tend vers  $a\gamma^{-\frac{1}{m}}$ , avec  $a = \frac{e^{v\theta_0}}{m} \left( 1 - \frac{\beta \mu \dot{\gamma}_0^m e^{v\theta_0}}{\rho c (n+1)} \right)^{\frac{1}{m}}$  ;  $m$  étant toujours inférieur à 1, l'intégrale  $\int_{\gamma(x)}^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$  reste donc toujours finie quels que soient les différents paramètres. Par conséquent le critère de localisation  $L_{\infty}$  est toujours vérifié.

### I.2 DISTRIBUTION DE LA DEFORMATION PLASTIQUE $\gamma(x)$

Lorsque  $\gamma(x)$  est grand, l'équation de localisation peut s'écrire :

$$\int_{\gamma(x)}^{\infty} a \xi^{-\frac{1}{m}} d\xi = (1 - G(x)^{-1}) A_{\infty}$$

avec  $a = \left( 1 - \frac{\beta \mu \dot{\gamma}_0^m e^{v\theta_0}}{\rho c (n+1)} \right)^{\frac{1}{m}}$ ,  $G(x)^{-1} = \left( \frac{l(x) \mu(x)}{l(0) \mu(0)} \right)^{\frac{1}{m}}$  et  $A_{\infty} = \int_0^{\infty} f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$

ce qui conduit à  $\gamma(x) = \left[ \frac{1}{m a} (1-m) A_\infty (1 - G(x)^{-1}) \right]^{\frac{m}{m-1}}$ . Avec un défaut du type

$$\left. \begin{aligned} l(0) = l(x) \\ \mu(x) = \mu(0) \left( 1 + \frac{\mu_r(0)}{\mu(0)} |x|^r \right) \end{aligned} \right\} \text{ on obtient } G(x)^{-1} = \left( 1 + \frac{\mu_r(0)}{\mu(0)} |x|^r \right)^{-\frac{1}{m}} \cong 1 - \frac{1}{m} \frac{\mu_r(0)}{\mu(0)} |x|^r$$

La déformation plastique devient alors :

$$\gamma(x) = \left[ \frac{(1-m) A_\infty \mu_r(0) |x|^r}{m^2 a \mu(0)} \right]^{\frac{m}{m-1}} = K |x|^{\frac{r m}{m-1}}$$

avec  $K = \left[ \frac{(1-m) A_\infty \mu_r(0)}{m^2 a \mu(0)} \right]^{\frac{m}{m-1}}$

I.3 LOCALISATION  $L_{\infty,r}$ .

Il y a localisation  $L_{\infty,r}$  lorsque l'intégrale  $\int_0^{x_1} \gamma(x) dx = K \int_0^{x_1} x^{\frac{r m}{m-1}} dx$  reste finie. Ceci est vérifié lorsque  $\frac{r m}{1-m} < 1$ , soit  $m < \frac{1}{1+r}$ . Avec les valeurs usuelles de m et r cette inéquation est toujours vérifiée, il y a donc toujours localisation  $L_{\infty,r}$ .

II CONTROLE EN CONTRAINTE

II.1 LOCALISATION  $L_{\infty}$

$\int_0^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$  peut s'écrire  $\int_0^\infty e^{-a\xi} \xi^{\frac{n}{m}} d\xi = \frac{1}{a^\alpha} \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{a^\alpha} \Gamma(\alpha)$  et de même

$\int_{\gamma(x)}^\infty f(\xi)^{\frac{1}{m}} d\xi$  peut s'écrire  $\int_{\gamma(x)}^\infty e^{-a\xi} \xi^{\frac{n}{m}} d\xi = \frac{1}{a^\alpha} \int_{a\gamma(x)}^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{a^\alpha} \Gamma(\alpha, a\gamma(x))$

avec  $a = -\frac{v\beta\tau_0}{\rho c m}$ ,  $t = a\xi$ ,  $\alpha = \frac{n}{m} + 1$ .  $\Gamma(\alpha, z)$  est la fonction Gamma qui existe et est finie si  $Re(\alpha) > 0$ . Dans notre cas  $\frac{n}{m} + 1$  est toujours strictement positif, et il y a donc toujours localisation infinie.

II.2 DISTRIBUTION LA DEFORMATION PLASTIQUE  $\gamma(x)$

L'équation de localisation peut s'écrire  $(1 - G(x)^{-1}) \Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha, a\gamma(x))$

$$\text{avec } \Gamma(\alpha, a\gamma) = \gamma^{\alpha-1} e^{-\gamma} \left( 1 - \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\gamma \Gamma(1-\alpha)} + O(\gamma^{-2}) \right)$$

Pour de grandes valeurs de  $\gamma(x)$  on a donc  $\Gamma(\alpha, a\gamma) \cong \gamma^{\alpha-1} e^{-\gamma(x)}$  ce qui donne :

$$x \cong k \gamma^{\frac{n}{m r}} e^{-\frac{a}{r} \gamma}$$

$$\text{avec } k = \left( \frac{m \mu(0)}{\Gamma(\alpha) \mu_r(0)} \right)^{\frac{1}{r}} \left( -\frac{v \beta \tau_0}{\rho c m} \right)^{\frac{n}{m r}}$$

### II.3 LOCALISATION $L_{\infty, r}$

Il y a localisation  $L_{\infty, r}$  si  $\int_0^{x_1} \gamma(x) dx$  reste finie

En intégrant par partie  $\int_0^{x_1} \gamma(x) dx$  on obtient :

$$\int_0^{x_1} \gamma(x) dx = x_1 \gamma(x)_1 + \frac{r k}{a} \Gamma\left(\frac{n+m r}{m r}; \frac{a \gamma_1(x)}{r}\right) \text{ qui est finie si } \frac{n+m r}{m r} > 0, \text{ ce qui est toujours vrai,}$$

donc il y a toujours localisation  $L_{\infty, r}$ .

### III CONCLUSION

Quel que soit le type de contrôle, les critères de localisation  $L_{\infty}$  et  $L_{\infty, r}$  sont toujours vérifiés pour des valeurs physiquement acceptables de  $m$ ,  $n$ ,  $v$  et  $r$ .

*Conclusion*

## *Conclusion*

Au cours de ce travail, nous nous sommes attachés à déterminer la déformation nominale critique obtenue, lors de la localisation de la déformation plastique, dans une bande de cisaillement adiabatique, puis à évaluer l'influence respective des paramètres rhéologiques (écrouissage, sensibilité à la vitesse de déformation .... ) et structurels (imperfections, conditions aux limites) sur ses variations.

Pour mener à bien cette étude, il a été nécessaire de préciser la distribution spatiale et l'évolution temporelle de la déformation plastique. Dans le second chapitre, un modèle unidimensionnel de localisation adiabatique a permis de déterminer la distribution de la déformation plastique, pour différentes lois de comportement, par des développements en séries convergentes des intégrales à l'aide de fonctions hypergéométriques. L'accent a notamment porté sur les conditions et les vitesses de convergence de ces développements. Ceci a conduit, notamment, à une expression purement analytique de la distribution de la déformation plastique dans le cas de la loi de Knowles.

Au troisième chapitre, nous avons pu déterminer la déformation nominale critique pour la loi de Knowles par une approche analytique. Une étude paramétrique des déformations critiques montre alors que la déformation critique augmente avec la sensibilité à la vitesse et l'écrouissage du matériau, en accord avec les résultats expérimentaux, et diminue lorsque l'acuité  $1/r$  et la taille des défauts augmentent. Ces résultats étendent aux déformations nominales critiques les tendances prévues par les analyses de stabilité linéaire et les analyses de localisation asymptotique précédentes. Ce travail a également permis de montrer

l'influence des conditions aux limites sur la déformation critique : selon l'énergie fournie, la déformation critique sous contrainte imposée peut être inférieure, égale ou supérieure à la déformation critique à vitesse constante. Il en résulte que le manque de maîtrise expérimentale des conditions aux limites est susceptible d'entraîner une certaine dispersion des déformations nominales critiques.

En considérant que la déformation critique se situe au début du stade 2 de la localisation (début de la chute rapide de contrainte), les effets d'inertie et de conduction thermique ainsi que les changements microstructuraux du matériau ont pu être négligés dans ce travail. Pour la même raison, un modèle unidimensionnel reste justifié jusqu'au début du stade 2 de la localisation. Nous avons par ailleurs expliqué les limites d'une approche énergétique globale bi-dimensionnelle, tout en posant la question des effets d'échelle qui seraient liés à d'éventuels effets de décharge élastique. D'un point de vue industriel, il est plus important est de déterminer la tenue au cisaillement adiabatique, c'est à dire le début de la perte de résistance, que la manière dont la contrainte chute. Une étude bi-dimensionnelle, ou incluant la conduction thermique, n'est donc pas nécessaire pour atteindre l'objectif que nous nous étions fixé.

Le mérite de cette approche est d'être plus simple et plus précise que des simulations numériques par éléments finis. Elle permet de prendre en compte les aspects majeurs de la localisation, comme les singularités de la distribution de la déformation plastique, en produisant des résultats quantitativement corrects et comparables aux valeurs expérimentales, lorsqu'elles existent. Un outil de calcul analytique / numérique des déformations critiques, a été mis en place pour montrer le rôle relatif des paramètres de structure et des paramètres rhéologiques. Enfin, il a été montré que les conditions aux limites pouvaient influencer fortement sur les déformations critiques.

En prolongement de cette étude qui est loin d'être terminée, il serait intéressant de préciser les relations qui pourraient exister entre la représentation du comportement, les paramètres rhéologiques et la sensibilité aux conditions aux limites. Il serait également important de quantifier les résultats sur la sensibilité aux conditions aux limites de la déformation critique. Cette étude, pour la loi multiplicative puissance ne pourrait se faire que

par une méthode numérique du type de la méthode des éléments finis. Et enfin, la généralisation tri-dimensionnelle de l'étude de localisation pourrait être implémentée dans une méthode d'éléments finis pour l'examen des structures plus complexes.

*Références  
bibliographiques*

*Références  
bibliographiques*

- AWERBUCH J. & BODNER S.R. 1973  
 "Analysis of the mechanics of perforation of projectiles in metallic plates"  
*Int. J. Solids structures*, Vol. 10, pp. 671-684
- BACKMAN M.E., FINNEGAN S.A., SCHULZ J.C., PRINGLE J.K. 1986  
 "Scaling rules for adiabatic shear"  
 Metallurgical Applications of Shock-Wave and High-Strain Rate Phenomena, L.E. MURR,  
 K.P. STAUDHAMMER, M.A. MEYERS, pp. 675-687
- BAI Y.L. 1982  
 "Thermo-plastic instability in simple shear"  
*J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 30, n°4, pp.195-207
- BAIR S., QURESHI F. & WINER W.O. 1993  
 "Observations of shear localization on liquid lubricants under pressure"  
*J. of tribology*, Vol 115, pp. 507-514
- BODIN L. 1996  
 "Bandes de cisaillement en thermo-viscoplasticité dynamique : applications à l'usinage et à  
 la rupture ductile des métaux"  
 Thèse de l'Université de Metz
- CAMPBELL J.D.& FERGUSON W.G. 1970  
 "The temperature and strain rate dependence of shear strength of mild steel"  
*Philos. Mag.*, Vol. 21, pp. 63-82
- CHO, LEE, NUTT, DUFFY 1993  
 "Adiabatic shear band formation during dynamic torsional deformation of HY-100 steel"  
*Acta metall mater.*, Vol 41, n°3 pp923-932
- CLIFTON R.J. 1987  
 Adiabatic Shear Report NMAB-356 of the NRC Committee on Material Response to  
 Ultrasonic Loading Rates

- DIEUDONNE J. 1968  
 "Calcul infinitésimal"  
*Hermann*, pp. 84-87
- DINZART F. 1994  
 "Bandes de cisaillement adiabatique : effets géométriques et effets de conduction"  
 Thèse de l'Université de Metz
- DINZART F., FRESSENGEAS C., MOLINARI A. 1994  
 "Localisation de la déformation plastique en cisaillement simple : Effets locaux de géométrie et inhomogénéité matérielle"  
*C.R. Acad. Sci. Paris*, Vol.319, serie II, pp.381-386
- DUFFY J. 1984  
 "Mechanics of material behavior, The Daniel C. Drucker Anniversary Volume"  
 Elsevier Science Publishes BV Amsterdam, édité par DVORAK & SHIELD, pp. 75-86
- DUFFY J. 1991  
 "Experimental studies of shear band formation through temperature measurements and high speed photography"  
*Journal de physique IV Colloque C3, Suppl au journal de Physique III, Vol 1*, pp. 649-652
- FRESSENGEAS C. & MOLINARI A. 1985  
 "Formation des bandes de cisaillement : Une analyse de stabilité"  
*J. Phys.*, Vol. C5, pp. 121-126
- FRESSENGEAS C. & MOLINARI A. 1985  
 "Sur les critères de localisation de la déformation plastique de traction simple"  
*J. Phys.*, Vol. C5, pp. 283-289
- FRESSENGEAS C. & MOLINARI A. 1985  
 "Inertia and thermal effects on the localization of plastic flow"  
*Acta. Metall*, Vol. 33, pp. 387-396
- FRESSENGEAS C. & MOLINARI A. 1987  
 "Instability and localization of plastic flow in shear at high strain rates"  
*J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35, n°2, pp.185-211
- GIOVANOLA J.H. 1988  
 "Adiabatic shear banding under pure shear loading, Part I : Direct observation of strain localization and energy dissipation measurements"  
*Mechanics of materials 7*, pp.59-72
- GIOVANOLA J.H. 1988  
 "Adiabatic shear banding under pure shear loading, Part II : Fractographic and Metallurgic observations"  
*Mechanicals of materials 7*, pp.73-87
- GRADSHTEYN I.S. & RYZHIK I.M. 1965  
 "Table of integrals series and products"  
 Academic press, New-York/USA, pp. 284-286

- HARTLEY K.A., DUFFY J & HAWLEY R.H. 1987  
 "Measurement of the temperature profile during shear band formation in steels deforming at high strain rates"  
*J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 35, pp. 283
- HUTCHINSON J.W. & NEALE K.W. 1977  
 "Influence of strain-rate sensitivity on necking during uniaxiale loading"  
*Acta. Metall*, Vol. 25, pp. 839-846
- JOHNSON W. 1987  
 "HENRI TRESCA as the originator of adiabatic heat lines"  
*Int. J. Mech. Sci.* Vol 29, n°5, pp. 301
- KLEPACZKO J.R. 1994  
 "An experimental technique for shear testing at high and very high strain rate. The case of a mild steel"  
*Int. J. Impact. Engng.*, Vol 15, n°1, pp.25-39
- KOLSKY H. 1949  
 "An investigation of the mechanical properties of materials at very high rates of loading"  
*Proc. Roy. Soc. Lond*, Vol. 62B, pp. 676-700
- KNOWLES J.K. 1976  
 "On finite antiplane shear for incompressible elastic materials"  
*J. Austral. Math. Soc.*, Vol 19B, pp. 400-415
- LEROY Y. M. 1991  
 "Linear stability analysis of rate-dependent discrete systems"  
*Int. J. Solids. Struct.*, Vol 27, pp 783
- LEROY Y.M., BONVALOT B. & MOLINARI A. 1994  
 "Steady shear zones : the influence of mixed boundary conditions"  
*J. Phys IV C8*, pp. 429-434.
- LEROY Y.M. & MOLINARI A. 1992  
 "Stability of steady states in shear zones"  
*J. Mech. Phys. Solid.*, Vol 40, n°1, pp.181-212
- LESOURD B. 1996  
 "Etude de la modélisation des mécanismes de formation de bandes de cisaillement intense en coupe des métaux. application au tournage assisté par laser de l'alliage de titane TA6V"  
 Thèse de l'Ecole Centrale de Nantes
- LUFT 1992  
 "On the instability of dislocation microstructures during plastic deformation"  
*Solid State Phenomena*, Vol 23 & 24, pp.285-303
- MARCHAND A. & DUFFY J. 1988  
 "An experimental study of the formation process of adiabatic shear bands in a structural steel"  
*J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 36, n°3, pp. 251-283

- MASSEY H.F. 1921  
 "The flow of metal during forging"  
*Proc. Manchester Assoc. Engineers*, pp. 21
- MOLINARI A. & CLIFTON R.J. 1983  
 Localisation de la déformation viscoplastique en cisaillement simple : Résultats exacts en théorie non linéaire"  
*C.R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 296 série II, pp. 1-4
- MOLINARI A. & CLIFTON R.J. 1987  
 "Analytical characterization of shear localization in thermoviscoplastic materials"  
*Journal of applied mechanics*, Vol. 54, pp. 806-812
- OKLEY P.L.B. 1989  
 "The mechanics of machining : An analytical approach to assessing machinability"  
*Ellis Horwood limited*
- OUSSOUADI O. 1994  
 "Analyse numérique de l'effet de géométrie sur le comportement thermo mécanique de quelques métaux en cisaillement"  
 Thèse de l'Université de Metz
- PALMER A.C. & RICE J.R. 1973  
 "The growth of slip surfaces in the progressive failure of over-consolidated clay"  
*Proc. Roy. Soc. Lond.*, Vol A.332, pp. 527-548
- PINA V. 1996  
 "Mesure de température des bandes de cisaillement adiabatique dans des alliages de titane"  
 Thèse de l'Université de Paris X - Nanterre
- RAVID M. & BODNER S.R. 1983  
 "Dynamic perforation of viscoplastic plates by rigid projectiles"  
*Int. J. Engng Sci.*, Vol. 21, n°6 pp. 577-591
- REZAIG B. 1994  
 "Etude numérique et expérimentale du cisaillement adiabatique par impact de projectile : Cas de deux aciers"  
 Thèse de l'Université de Metz
- RICE J.R. 1968  
 "A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks"  
*J. Appl. Mech.*, Vol. 35, pp. 379-386
- ROGERS H.C. 1979  
 "Adiabatic plastic deformation"  
*Annual Revue of Material Science*, Vol9, pp. 283
- ROGERS H.C. 1983  
 "Adiabatic shearing - general nature and materials aspects"  
 Material behavior under high Stress and ultrahigh loading rates - Sagamore army materials resort conference proceeding, MESSALL & WEISS, Plenum Press, New York pp. 101-118

- SEMIATIN S.L., LAHOTI G.D. & OH S.I. 1983  
 "The occurrence of shear band in metalworking"  
 Material behavior under high Stress and ultrahigh loading rates - Sagamore army materials  
 resort conference proceeding, MESCALL & WEISS, Plenum Press, New York pp. 101-118
- STAKER M.R. 1981  
 "The relation between adiabatic shear instability strain and material properties"  
*Acta. Metall.*, Vol. 29 pp. 683-689
- TAYLOR G.I. & QUINNEY H. 1934  
*Proc. Roy. Soc. Lond*, Vol. A1 43, pp. 307-326
- TRESCA H. 1878  
 "On further applications of the flow of solids"  
*Proc. Inst. Mech. Engrs.*, Vol. 30, pp. 301-354
- VALLE V., COTTRON M. & LAGARDE A. 1995  
 "Utilisation du phénomène de diffraction sous incidence oblique d'un faisceau laser par un  
 réseau croisé, pour la mesure locale en statique et dynamique, des déformation et  
 mouvement d'un solide"  
 Mechanics Research Com., Vol. 22, pp. 103-107
- WANG, COTTRON M. & LAGARDE A.  
 Communication privée
- ZENER C. & HOLLOMON J.H. 1944  
 "Effect of strain rate upon plastic flow of steel"  
*J. Appl. Phys.*, Vol. 15, pp. 22-32
- ZHOU M., ROSAKIS A.J., & RAVICHANDRAN G. 1996  
 "Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates, Part I :  
 Experimental investigations of temperature signatures and propagation speed"  
*J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 44
- ZHOU M., RAVICHANDRAN G. & ROSAKIS A.J. 1996  
 "Dynamically propagating shear bands in impact-loaded prenotched plates, Part II : Finite  
 elements simulations"  
*J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 44