



**HAL**  
open science

# Méthode asymptotique numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'interaction fluide-structure

Jean-Marc Cadou

► **To cite this version:**

Jean-Marc Cadou. Méthode asymptotique numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'interaction fluide-structure. Matière Condensée [cond-mat]. Université Paul Verlaine - Metz, 1997. Français. NNT : 1997METZ022S . tel-01777208

**HAL Id: tel-01777208**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777208>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

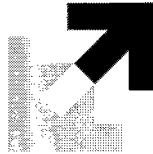
DB 120709



INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

# THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ  
PAR

Jean-Marc CADOU

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	19970465
Cote	S/M3 97/22
Loc	Magasin

Pour l'obtention du grade de :  
**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ de METZ**

**SPECIALITE :** Sciences de l'ingénieur

**OPTION :** Mécanique

**Méthode Asymptotique Numérique pour le calcul  
des branches solutions et des instabilités dans les  
fluides et pour les problèmes d'interaction  
fluide-structure.**

Soutenue le 13 Novembre 1997 devant le jury composé de :

Mr. B. Cochelin	E.S.M2	Marseille	Directeur de thèse
Mr. E. De Langre	LadHyX	Ecole Polytechnique	Rapporteur
Mr. U. Ehrenstein	L.M.L.	Lille	Rapporteur
Mr. P. Le Gal	I.R.P.H.E.	Marseille	Examineur
Mr. P. Le Quéré	L.I.M.S.I.	Orsay	Président
Mr. M. Potier-Ferry	L.P.M.M.	Metz	Examineur
Mr. O. Sero-Guillaume	L.E.M.T.A.	Nancy	Examineur

Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux  
U.R.A. C.N.R.S. 1215  
Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 METZ Cedex 01.

*Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux de l'Université de Metz sous la direction du professeur Bruno Cochelin au sein de l'équipe du Professeur Potier-Ferry.*

*Mes remerciements vont en premier lieu à Bruno Cochelin qui pendant ces trois années a su m'orienter et répondre à mes questions tout en m'accordant une autonomie confiante et constructive. Durant cette enrichissante collaboration il a su m'insuffler rigueur et curiosité scientifique et m'a fait partager son enthousiasme pour la recherche. Qu'il trouve en ces quelques lignes toute ma reconnaissance.*

*Je remercie également Michel Potier-Ferry de m'avoir accueilli dans son équipe et, associé à Nouredine Damil, je leur suis reconnaissant de m'avoir fait part de leur pertinence scientifique au travers de leur aide et de leurs conseils qui m'ont été bien précieux.*

*Je suis également reconnaissant au professeur Olivier Desbordes et à son équipe de l'École Supérieure de Mécanique de Marseille de m'avoir toujours accueilli avec les légendaires sourires et bonne humeur du sud. Leur disponibilité et les moyens informatiques qu'ils ont mis à ma disposition ont beaucoup contribué à la réalisation du quatrième chapitre.*

*J'exprime mes plus sincères remerciements à Messieurs U. Ehrenstein et E. de Langre pour avoir rapporté ce travail avec un œil critique et nouveau. Par leurs remarques et leurs suggestions ils m'ont permis d'entrevoir de nouvelles et intéressantes perspectives à cette thèse.*

*Je tiens également à remercier Monsieur P. Le Quéré pour avoir accepté de présider ce travail. Messieurs P. Le Gal et O. Sero-Guillaume m'ont fait l'honneur de participer au jury, je leur adresse mes vifs remerciements.*

*Je remercie mes amies et amis du L.P.M.M. pour leur aide et leur soutien dans la réalisation de ce travail et pour tous les bons moments passés ensemble.*

*A Anne pour sa patience et ses encouragements permanents, gboujta ...*

## Notations et symboles utilisés

MAN . . . .	Méthode Asymptotique Numérique
$L(\bullet)$ . . . .	Opérateur linéaire
$Q(\bullet, \bullet)$ . . .	Opérateur quadratique
$\lambda$ . . . . .	Paramètre de contrôle
$u$ . . . . .	Vecteur vitesse
$p$ . . . . .	Pression
$U$ . . . . .	Vecteur mixte contenant les inconnues $u$ et $p$
$\Omega$ . . . . .	Domaine occupé par le fluide
$\Omega_u$ . . . . .	Bord du domaine $\Omega$ sur lequel des vitesses sont imposées
$u_d$ . . . . .	Vitesse imposée sur le bord $\Omega_u$
$k$ . . . . .	Paramètre de pénalisation
$\delta u, \delta p$ . . . .	Fonctions tests de vitesse et de pression
$(U_0, \lambda_0)$ . .	Point régulier
"a" . . . . .	Paramètre de chemin
$L_t(\bullet)$ . . . .	Opérateur tangent défini en un point régulier
$s$ . . . . .	Scalaire
$\langle \bullet, \bullet \rangle$ . . . .	Produit scalaire
$e_{ij}$ . . . . .	Tenseur des taux de déformation
$D$ . . . . .	Matrice de comportement du fluide
$[N_u]$ . . . . .	Fonctions de forme de vitesse
$[N_p]$ . . . . .	Fonctions de forme de pression
$[K_{uu}]$ . . . . .	Matrice contenant les termes visqueux
$[N_{uu}(u, u)]$	Matrice contenant les termes convectifs
$[K_{up}]$ . . . . .	Matrice contenant les termes de pression et de vitesse
$[K_{pp}]$ . . . . .	Matrice contenant les termes de pression
$[K_t]$ . . . . .	Matrice tangente
$FQ$ . . . . .	Vecteur second membre
$[R(U, \lambda)]$ .	Vecteur résidu discret
$Re$ . . . . .	Nombre de Reynolds de l'écoulement
$\varepsilon$ . . . . .	Paramètre
$[W_u]$ . . . . .	Fonctions de pondération de la formulation Petrov-Galerkin
$\alpha$ . . . . .	Paramètre
$Re_e$ . . . . .	Nombre de Reynolds élémentaire
$\gamma$ . . . . .	Vitesse élémentaire
$U_i$ . . . . .	Composante de la vitesse élémentaire suivant la direction $i$
$\beta(U)$ . . . . .	Opérateur de décentrage de la formulation Petrov-Galerkin
$\eta$ . . . . .	Paramètre de régularisation
$\mu$ . . . . .	Indicateur de bifurcation
$f$ . . . . .	Vecteur force aléatoire
$\Delta \mathcal{V}$ . . . . .	Fluctuation de vitesse (réponse à une perturbation)
$U_f$ . . . . .	Solution fondamentale
$\tilde{Q}(\bullet, \bullet)$ . . .	Opérateur bilinéaire symétrique
$\omega$ . . . . .	Pulsation
$\Delta V$ . . . . .	Mode de bifurcation complexe

---

$\Delta V_a$ .....	Partie réelle du mode complexe $\Delta V$
$\Delta V_b$ .....	Partie imaginaire du mode complexe $\Delta V$
$\mathcal{L}_t(\bullet, \omega)$ ...	Opérateur de dimension $2n$
$M$ ou $M(\bullet)$	Matrice de masse
$S_t$ .....	Nombre de Strouhal
ALE .....	Description Arbitraire Lagrange-Euler
$y$ .....	Intensité de déplacement
$\vec{d}$ .....	Vecteur déplacement
$[J]$ .....	Matrice Jacobienne de passage entre le repère local et le global
$J$ .....	Déterminant de la matrice Jacobienne

# Sommaire

Introduction générale	7
<b>I Résolution des équations stationnaires de Navier-Stokes par la MAN</b>	<b>11</b>
I.1 Equations stationnaires de Navier-Stokes . . . . .	13
I.2 Forme faible des équations stationnaires de Navier-Stokes . . . . .	14
I.3 La méthode de perturbation . . . . .	15
I.4 Formulation du problème à l'ordre $p$ . . . . .	17
I.5 Ecriture du problème sous forme discrète . . . . .	18
I.5.1 Condensation de la pression . . . . .	19
I.5.2 Prise en compte des vitesses imposées . . . . .	20
I.6 Exemple . . . . .	21
I.7 Procédure de continuation . . . . .	24
I.8 Résultats numériques et discussion . . . . .	26
I.8.1 Comparaison MAN-Newton-Raphson . . . . .	26
I.8.2 Exemple de la cavité . . . . .	31
I.9 Conclusion . . . . .	33
<b>II MAN pour la formulation Petrov-Galerkin</b>	<b>35</b>
II.1 Pourquoi une formulation Petrov-Galerkin? . . . . .	37
II.2 Présentation de la formulation Petrov-Galerkin . . . . .	39
II.2.1 Equations à résoudre . . . . .	40
II.2.2 Résultats par Newton-Raphson . . . . .	41

II.3	MAN pour la formulation Petrov-Galerkin . . . . .	41
II.3.1	Modifications des équations . . . . .	42
II.3.2	Développements asymptotiques . . . . .	44
II.3.3	Remarques . . . . .	46
II.4	Résultats et Discussion . . . . .	48
II.4.1	Méthode "β constant par pas" . . . . .	48
II.4.2	Résultats numériques . . . . .	49
II.4.3	Discussions . . . . .	52
II.4.4	Place mémoire . . . . .	55
II.4.5	Influence du maillage . . . . .	56
II.5	Conclusion . . . . .	57
<b>III</b>	<b>Bifurcation stationnaire</b>	<b>61</b>
III.1	Indicateur de bifurcation . . . . .	63
III.2	Calcul numérique de l'indicateur . . . . .	65
III.3	Remarques . . . . .	65
III.4	Résultats . . . . .	67
III.4.1	Ecoulement dans un tunnel avec élargissement brusque . . . . .	67
III.4.2	Formulation Galerkin . . . . .	69
III.4.3	Formulation Petrov-Galerkin . . . . .	72
III.5	Conclusion . . . . .	74
<b>IV</b>	<b>Bifurcation de Hopf</b>	<b>77</b>
IV.1	Rappels théoriques . . . . .	79
IV.2	Caractérisation d'un point de bifurcation de Hopf . . . . .	81
IV.3	Méthodes usuelles de calcul de points de bifurcation de Hopf . . . . .	82
IV.3.1	Méthode indirecte . . . . .	82
IV.3.2	Méthode directe . . . . .	83
IV.4	Détermination des points de bifurcation de Hopf par une MAN . . . . .	84



IV.4.1	Introduction d'un indicateur de bifurcation . . . . .	85
IV.4.2	Propriétés de l'indicateur . . . . .	86
IV.5	Bifurcation de Hopf pour Navier-Stokes . . . . .	90
IV.5.1	Indicateur de bifurcation . . . . .	91
IV.6	Condition supplémentaire . . . . .	92
IV.7	Calcul direct . . . . .	94
IV.7.1	Remarques . . . . .	94
IV.8	Une MAN pour le calcul de l'indicateur . . . . .	95
IV.8.1	Propriétés . . . . .	98
IV.8.2	Discussion . . . . .	99
IV.9	Procédure de continuation . . . . .	102
IV.9.1	Nouveau point de départ . . . . .	102
IV.9.2	Remarque . . . . .	105
IV.10	Résultats numériques . . . . .	106
IV.10.1	Ecoulement autour d'un cylindre . . . . .	106
IV.10.2	Ecoulement dans une marche . . . . .	110
IV.10.3	Comparaison des formulations Galerkin et Petrov-Galerkin . . . . .	114
IV.11	Conclusion . . . . .	116
<b>V</b>	<b>Vers l'interaction fluide-structure</b>	<b>119</b>
V.1	Présentation du problème d'interaction fluide-structure . . . . .	122
V.2	Equations du problème stationnaire . . . . .	123
V.3	Equations du problème discret . . . . .	124
V.4	Méthode Asymptotique Numérique . . . . .	126
V.5	Conclusion . . . . .	129
	<b>Conclusion générale</b>	<b>131</b>
	<b>ANNEXES</b>	<b>132</b>

---

<b>A</b>	<b>Formulation A.L.E.</b>	<b>133</b>
A.1	Description cinématique de la formulation A.L.E. . . . . .	133
A.1.1	Définitions des dérivées . . . . .	135
A.2	Equations de continuité et d'équilibre . . . . .	136
<b>B</b>	<b>A.L.E. et la M.E.F.</b>	<b>141</b>
B.1	Introduction . . . . .	141
B.2	Définition des quantités et des matrices élémentaires . . . . .	141
B.3	Définition de l'effort du fluide sur le cylindre . . . . .	147
<b>C</b>	<b>Développements asymptotiques</b>	<b>149</b>
C.1	Présentation des équations . . . . .	149
C.2	Développements asymptotiques . . . . .	150
	<b>Références bibliographiques</b>	<b>157</b>

# Introduction générale

Depuis l'avènement de l'informatique, les moyens de calcul et les méthodes numériques ont réalisé de tels progrès qu'ils permettent conjointement aujourd'hui d'envisager la simulation de phénomènes physiques de plus en plus complexes, comme par exemple les interactions fluide-structure. D'autre part il est capital de fournir aux ingénieurs concernés par de telles applications, des outils numériques rapides et fiables qui sont capables non seulement de décrire l'évolution des écoulements mais également de déterminer l'apparition d'instabilités afin de prévenir toute détérioration des équipements industriels. Avant de s'intéresser à des phénomènes aussi complexes, il est nécessaire de montrer que pour des problèmes d'une difficulté relativement moindre, on dispose d'un ensemble d'outils répondant aux critères de rapidité et de fiabilité précédemment cités.

Le travail présenté dans cette thèse suit cette démarche puisqu'il s'agit de développer des méthodes numériques résolvant les équations de la mécanique des fluides, équations pour lesquelles on peut également déterminer l'apparition de certaines instabilités sur les branches solutions. Une fois leur fiabilité et leur rapidité démontrées, ces méthodes sont appliquées à un problème particulier d'interaction fluide-structure : tube cylindrique soumis à écoulement transverse.

L'essentiel des outils développés dans ce travail repose sur la Méthode Asymptotique Numérique (MAN). Cette dernière associe la très ancienne méthode de perturbation à la méthode des éléments finis. Elle permet de transformer le problème non linéaire initial en une succession de problèmes linéaires ayant le même opérateur tangent. Ces problèmes sont alors résolus récursivement par la méthode des éléments

finis. Une seule triangulation de l'opérateur tangent permet d'accéder à la connaissance, sous une forme analytique, d'une partie de la branche solution.

Ces techniques ont semble-t-il été utilisées pour la première fois par Thompson et Walker (1968 [1]) pour les problèmes de mécanique du solide et par Kawahara (1976 [2]) pour la mécanique des fluides. Diverses modifications ont ensuite été apportées à la méthode initiale, notamment avec les techniques de base réduite (Noor et Peters [3], [4], [5]). Malgré les avantages de la MAN par rapport aux méthodes itératives classiques, tels que la description continue de la branche solution et le gain de temps de calculs, plusieurs auteurs (Kawahara [2], Gallagher [6], Nayfeh [7], Van Dyke [8], Riks [9]) ont dénoncé une certaine difficulté dans la construction du vecteur second membre des problèmes linéaires lorsque l'ordre de troncature des approximations polynomiales devenait grand. La conséquence immédiate de cette difficulté à utiliser des ordres de troncature élevés est la limitation du domaine de validité des approximations polynomiales.

De récents travaux (Damil et Potier-Ferry [10], Azrar et Al [11], Cochelin [12], Cochelin et Al [13]) ont montré que cette difficulté pouvait être surmontée mais également que l'utilisation d'ordres élevés de troncature des approximations polynomiales conduit à des temps de calculs moins importants que ceux occasionnés par un algorithme itératif. Grâce à la méthode de continuation développée par Cochelin [12], la totalité de la solution est déterminée morceau par morceau en progressant le long de la branche.

Si les précédents travaux concernaient l'élasticité non linéaire, les travaux de Kawahara [2], Hadji [14], Tri [15] s'intéressent à l'application de la MAN à la mécanique des fluides, en particulier aux équations de Navier-Stokes. La non linéarité de ces équations étant naturellement quadratique (terme de convection), l'application de la MAN à ce type de problème est par conséquent plus facile que pour l'élasticité non linéaire où les équations sont cubiques par rapport au déplacement. Dans ce dernier cas on se ramène à une non linéarité quadratique en utilisant une formulation varia-

tionnelle mixte d'Hellinger-Reissner. A la différence de l'élasticité non-linéaire où la difficulté est intrinsèque aux équations, en mécanique des fluides, les physiciens s'accordent généralement pour affirmer que l'obstacle principal n'est pas le terme convectif mais qu'il provient de la condition d'incompressibilité. Or cette relation étant linéaire, l'introduction des développements asymptotiques n'entraîne pas de problèmes particuliers. Par contre les courbes solutions des problèmes de mécanique des fluides ayant généralement une allure plus complexe que celle des courbes obtenues en élasticité non-linéaire, le suivi des branches solutions apparaît donc à première vue plus délicat.

L'objectif de cette thèse est de proposer des méthodes numériques pour d'une part déterminer les branches solutions des équations stationnaires de Navier-Stokes et d'autre part de caractériser sur ces branches solutions les points de bifurcation (stationnaire ou dynamique). Ces algorithmes numériques sont développés dans l'optique de les appliquer ensuite à un problème d'interaction fluide-structure.

Le premier chapitre de cette thèse est un chapitre de rappel sur les principes de base de la MAN. On y montre comment, avec une seule triangulation de matrice, on obtient une partie de la courbe solution. La technique de continuation est ensuite rappelée afin de déterminer la totalité de la branche. Nous apportons ensuite des éléments de réponse aux problèmes rencontrés par Kawahara et Tri lors de l'application de la MAN aux équations stationnaires de Navier-Stokes. Quelques exemples numériques traditionnels nous permettent de mettre en valeur les qualités de la MAN par rapport à la méthode incrémentale-itérative de Newton-Raphson.

Le deuxième chapitre est consacré à l'utilisation de la MAN pour résoudre les équations stationnaires de Navier-Stokes avec une formulation Petrov-Galerkin. Cette formulation est utilisée pour éviter la détérioration de la solution par des phénomènes parasites non-physiques. Cette dégradation de la solution intervient lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est grand avec une formulation Galerkin. Bien que la non linéarité de ce problème soit plus complexe que celle des équations stationnaires de Navier-Stokes avec une formulation Galerkin, les développements

asymptotiques peuvent y être introduits, grâce notamment à quelques modifications des relations initiales et à l'apport de nouvelles variables.

Dans les deux chapitres suivants, des algorithmes de détection d'instabilités sont développés. Ces outils permettent de signaler, grâce à des indicateurs, les points sur les branches de solutions stationnaires où une bifurcation a lieu soit vers une solution stationnaire (bifurcation stationnaire, chapitre III), soit vers une solution périodique (bifurcation de Hopf chapitre IV).

Le cinquième chapitre est un chapitre d'application à un problème d'interaction fluide-structure. On y montre comment sur un problème complexe, un tube cylindrique soumis à un écoulement transverse, on peut appliquer la MAN pour déterminer les branches de solutions stationnaires. Les difficultés de cette application résident principalement dans la description cinématique des mouvements du cylindre et du fluide. Du fait de la constante interaction entre ces deux entités, nous avons décidé pour résoudre ce problème d'utiliser une description cinématique particulière : la description Arbitraire Lagrange-Euler. Cette description permet de donner au maillage une vitesse arbitraire et ainsi de surmonter les difficultés liées à l'application.

Les algorithmes numériques présentés dans ce travail, exception faite du chapitre V où seule la partie analytique est développée, sont tous intégrés dans un code de calculs développé au sein du L.P.M.M.. Nous disposons ainsi d'une entière maîtrise du modèle numérique.

Les chapitres II et V sont des travaux originaux, alors que les outils numériques présentés aux chapitres III et IV ont été précédemment développés pour des problèmes de mécanique du solide. Nous avons modifié ces méthodes afin de surmonter les difficultés propres aux problèmes de la mécanique des fluides.

## CHAPITRE I

# Résolution des équations stationnaires de Navier-Stokes par la MAN

Les premiers à avoir utilisé une MAN pour déterminer les solutions d'un problème de mécanique des fluides ont été Kawahara et al [2] (1976). Les conclusions de cette première tentative ne sont pas franchement enthousiasmantes quant à l'utilisation de la MAN comme méthode de résolution de problèmes non linéaires. Ils conseillaient d'utiliser la MAN couplée avec la méthode incrémentale-itérative de Newton-Raphson.

Plus récemment Hadji [14] (1995) et Tri [16] (1996) ont montré que la MAN est une méthode efficace dans la résolution des problèmes de mécanique des fluides. Hadji s'est principalement attaché à comparer les performances de la MAN à celles d'algorithmes itératifs classiques. Il a ainsi montré que la MAN permet de déterminer des solutions aussi précises mais surtout plus rapidement que certaines méthodes itératives.

Tri a lui aussi déterminé les branches de solutions mais en étudiant également leur stabilité. Il a de plus observé sur certains exemples des accumulations de pas de plus en plus courts qui conduisent à un arrêt de la technique de continuation. Il a associé ce phénomène à l'existence de points de bifurcation rapprochés. Bien que pour certains de ces exemples ces bifurcations n'aient sûrement pas de réalité physique aucune autre explication n'a été donnée. La MAN a été dans ces travaux intégrés dans

le code de calcul "MODULEF". Forts de cette expérience précédente nous avons décidé d'avoir une entière maîtrise de tous les développements numériques que nous avons à faire. Ainsi, tous les algorithmes numériques de ce travail (MAN, Newton-Raphson) sont développés dans un seul et unique code de calcul (EVE). La méthode numérique que nous avons retenue est la formulation mixte vitesse-pression avec un terme de pénalisation dans l'équation d'incompressibilité. Cette formulation est bien adaptée pour décrire les conditions aux limites et son extension au cas tridimensionnel ne devrait pas poser de problèmes particuliers. L'élément fini est un quadrangle, le Q9/3D. Cet élément est couramment utilisé en mécanique numérique des fluides et son efficacité n'est plus à démontrer.

Les objectifs de ce premier chapitre sont multiples. Il s'agit dans un premier temps de rappeler les principes de base de la MAN en l'appliquant aux équations stationnaires de Navier-Stokes. Le second objectif est de montrer qu'à partir d'un modèle numérique fiable, la MAN permet de déterminer la totalité de la branche solution sans pour autant rencontrer les difficultés observées par Tri. Le troisième point est la comparaison des performances de la MAN avec celles de la méthode de Newton-Raphson.



## I.1 Equations stationnaires de Navier-Stokes

On considère un fluide visqueux incompressible occupant un volume  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . Sur cette frontière on peut définir des conditions aux limites de type Dirichlet  $u = \lambda u_d$  sur  $\partial\Omega_u$  ou de type Neumann  $F = \lambda F_d$  sur  $\partial\Omega_f$ . Nous n'utiliserons pas de conditions de type Neumann, dans la suite du manuscrit. Seules seront indiquées les relations de type Dirichlet.

Les équations de mouvement de ce fluide proviennent de la conservation de la quantité de mouvement et de l'équation de continuité assurant l'incompressibilité. Ces équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \cdot u_{i,j} \right) = \sigma_{ij,j} + \rho f_i \text{ dans } \Omega \\ u_{i,i} = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = \lambda u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (\text{I.1})$$

Les inconnues du problème sont la vitesse  $u_i(x_i, t)$  et la pression  $p(x_i, t)$ .  $\rho$  désigne la masse volumique du fluide,  $f_i$  les forces volumiques et  $\lambda$  un paramètre de charge que l'on pourra aisément identifier au nombre de Reynolds. La loi de comportement du fluide est définie par :

$$\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + \mu \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{I.2})$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide. En introduisant l'équation (I.2) dans l'équation (I.1), on obtient les équations régissant le mouvement d'un fluide visqueux incompressible, communément appelées équations de Navier-Stokes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u_j \cdot u_{i,j} + p_{,i} - \mu \cdot u_{i,jj} = \rho f_i \text{ dans } \Omega \\ u_{i,i} = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = \lambda u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (\text{I.3})$$

Nous nous intéressons au problème stationnaire. Les dérivées par rapport au temps sont nulles dans l'équation (I.3). Nous négligerons aussi les forces volumiques  $f_i$  du-

rant la totalité de l'étude.

Afin de satisfaire la condition d'incompressibilité, nous introduisons un terme de pression pénalisé par un grand paramètre  $k$  assurant ainsi la stabilité du modèle numérique [14]. On trouvera dans [17] et [18] quelques précisions sur l'ordre de grandeur de ce paramètre. La condition d'incompressibilité s'écrit donc,

$$u_{i,i} - \frac{1}{k} p = 0 \text{ dans } \Omega \quad (\text{I.4})$$

## I.2 Forme faible des équations stationnaires de Navier-Stokes

La forme faible des équations stationnaires de Navier-Stokes s'obtient en multipliant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par une fonction test  $\delta u$  et l'équation de conservation de la masse par une autre fonction test  $\delta p$ . On intègre ces deux nouvelles écritures sur le domaine  $\Omega$ . Ces intégrations sont effectuées en supposant que les conditions aux limites sont seulement de type vitesse imposée.

On écrit ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\delta u_i \cdot \rho u_j \cdot u_{i,j} - \delta u_{i,i} \cdot p + \mu \cdot \delta u_{i,j} \cdot u_{i,j}) d\Omega = 0 \text{ dans } \Omega \\ \int_{\Omega} \delta p (u_{i,i} - \frac{1}{k} p) d\Omega = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = \lambda u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (\text{I.5})$$

Afin d'introduire ultérieurement une technique de perturbation, les équations (I.3) sont réécrites à l'aide d'opérateurs linéaire  $L(U)$  et quadratique  $Q(U, U)$  et d'un vecteur inconnu mixte  $U$  contenant les inconnues du problème : la vitesse  $u$  et  $p$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} L(U) + Q(U, U) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = \lambda u_d \text{ sur } \Omega \end{array} \right. \quad (\text{I.6})$$

où  $U$  désigne le vecteur mixte :

$$U = \left\{ \begin{array}{l} u \\ p \end{array} \right\} \quad (\text{I.7})$$

Les opérateurs linéaire et quadratique sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle L(U), \delta U \rangle = \int_{\Omega} (-\delta u_{i,i} \cdot p + \mu \cdot \delta u_{i,j} \cdot u_{i,j}) d\Omega + \int_{\Omega} \delta p (u_{i,i} - \frac{1}{k} p) d\Omega \\ \langle Q(U, U), \delta U \rangle = \int_{\Omega} \delta u_i (\rho u_j \cdot u_{i,j}) d\Omega \end{array} \right. \quad (I.8)$$

Le problème d'écoulement de fluides visqueux incompressibles s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U = \left\{ \begin{array}{l} u \\ p \end{array} \right\} \text{ solution de} \\ L(U) + Q(U, U) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = \lambda u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (I.9)$$

Le système (I.9) est un problème non linéaire paramétré par  $\lambda$  (équivalent au nombre de Reynolds) dont la solution est constituée de branches éventuellement reliées entre elles en des points de bifurcation.

### I.3 La méthode de perturbation

A partir d'un point régulier  $(U_0, \lambda_0)$ , solution du problème (I.9), il passe une branche solution dont on effectue un développement asymptotique en fonction d'un paramètre de chemin  $a$ . Le vecteur d'inconnues  $U$  et le paramètre de charge  $\lambda$  sont développés en séries entières de  $a$  au voisinage du point  $(U_0, \lambda_0)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \left\{ \begin{array}{l} u_0 \\ p_0 \end{array} \right\} + a \left\{ \begin{array}{l} u_1 \\ p_1 \end{array} \right\} + a^2 \left\{ \begin{array}{l} u_2 \\ p_2 \end{array} \right\} + \dots \\ \lambda = \lambda_0 + a\lambda_1 + a^2\lambda_2 + \dots \end{array} \right. \quad (I.10)$$

Ces développements sont ensuite introduits dans le problème (I.9) et en identifiant suivant les puissances de  $a$ , on obtient une succession de problèmes linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1} \\ \text{Ordre 2} \\ \dots \\ \text{Ordre p} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} L_t(U_1) = 0 \\ u_1 = \lambda_1 u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \\ L_t(U_2) = -Q(U_1, U_1) \\ u_p = \lambda_p u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \\ L_t(U_p) = -\sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r}) \\ u_p = \lambda_p u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (\text{I.11})$$

Tous ces problèmes linéaires admettent le même opérateur tangent défini par :

$$L_t(\bullet) = L(\bullet) + Q(U_0, \bullet) + Q(\bullet, U_0) \quad (\text{I.12})$$

On remarque que dans les équations (I.11), seul le second membre diffère à chaque ordre. Celui-ci se construit très facilement à l'aide des inconnues calculées aux ordres précédents.

Pour que ce problème soit bien posé il nous reste à définir le paramètre  $a$ . Nous ne nous étendrons pas ici sur le choix de ce paramètre, mais rappelons simplement que classiquement celui-ci peut être défini de trois façons différentes. Ces trois choix sont explicités par Cochelin dans [12] et [19]. Dans toutes nos applications nous identifierons ce paramètre à la projection des incréments de vitesse  $u - u_0$  et de chargement  $\lambda - \lambda_0$  sur le vecteur tangent  $(u_1, \lambda_1)$ , ce qui conduit à :

$$a = \frac{1}{s^2} \{ \langle u - u_0, u_1 \rangle + (\lambda - \lambda_0) \lambda_1 \} \quad (\text{I.13})$$

où  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  désigne le produit scalaire et,  $s$  un scalaire. Cette définition du paramètre  $a$ , que l'on peut rapprocher de la technique de longueur d'arc imposée utilisée lors de la résolution d'un problème non-linéaire par une méthode incrémentale-itérative, permet d'éviter les problèmes de pilotage pour les branches solutions présentant des points limites.

Les développements asymptotiques (éq. I.10) sont introduits dans la définition de  $a$  (I.13) et on obtient à chaque ordre,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1} \quad \langle u_1, u_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_1 = s^2 \\ \text{Ordre 2} \quad \langle u_2, u_1 \rangle + \lambda_2 \lambda_1 = 0 \\ \dots \\ \text{Ordre } p \quad \langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.14})$$

En conclusion le problème complet s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_t(U_1) = 0 \\ u_1 = \lambda_1 u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \langle u_1, u_1 \rangle + \lambda_1 \lambda_1 = s^2 \end{array} \right. \\ \text{Ordre 2} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_t(U_2) = -Q(U_1, U_1) \\ u_2 = \lambda_2 u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \langle u_2, u_1 \rangle + \lambda_2 \lambda_1 = 0 \end{array} \right. \\ \dots \\ \text{Ordre } p \quad \left\{ \begin{array}{l} L_t(U_p) = -\sum_{r=1}^{p-1} Q(U_r, U_{p-r}) \\ u_p = \lambda_p u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \langle u_p, u_1 \rangle + \lambda_p \lambda_1 = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{I.15})$$

## I.4 Formulation du problème à l'ordre $p$

Les expressions de l'équation (I.5) sont maintenant réécrites à chaque ordre  $p$  en introduisant la notations  $e_{ij}$  pour le tenseur des taux de déformation.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} (\delta u \cdot \rho \{ u_0 \cdot \nabla_p + u_p \cdot \nabla_0 \} + tr(\delta e) \cdot p_p + \delta e : D : e_p) d\Omega = - \int_{\Omega} \left\{ \sum_r^{p-1} (\delta u \cdot \rho u_r \cdot \nabla_{(p-r)}) \right\} d\Omega \\ \int_{\Omega} \delta p (tr(e_p) - \frac{1}{k} p_p) d\Omega = 0 \\ u_p = \lambda_p u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (\text{I.16})$$

avec  $e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i})$ . La matrice  $D$  est la matrice de comportement visqueux du fluide (Zienkiewicz [18]).

## I.5 Ecriture du problème sous forme discrète

Dans cette section, nous présentons la forme discrète des équations de Navier-Stokes. L'élément que nous avons choisi est un quadrangle à neuf noeuds de vitesses et trois points de pressions, noté  $Q9/3D$  (Zienkiewicz [18]). La pression est ainsi discontinue entre les éléments ce qui conduit, avec le terme de pénalisation des équations d'incompressibilité (I.4), à construire un modèle numérique faible en pression (Hadji [14]). Pour éviter des problèmes d'oscillations dans le champ de pression ([14] et [18]), les fonctions d'interpolation de la pression sont choisies linéaires et celles de la vitesse quadratiques.

Les fonctions solutions  $u$  et tests  $\delta u$  en vitesse sont approximées par :

$$[u] = [N_u] [\bar{u}] \quad \text{et} \quad [\delta u] = [N_u] [\delta \bar{u}] \quad (\text{I.17})$$

où  $[N_u]$  sont les fonctions de forme de la vitesse,  $[\bar{u}]$  les vitesses inconnues nodales et  $[\delta \bar{u}]$  les vitesses virtuelles nodales.

De la même façon, les fonctions solutions et tests de la pression sont approximées par :

$$[p] = [N_p] [\bar{p}] \quad \text{et} \quad [\delta p] = [N_p] [\delta \bar{p}] \quad (\text{I.18})$$

avec  $N_p$  les fonctions de forme de pression,  $\bar{p}$  et  $\delta \bar{p}$  respectivement les inconnues nodales et virtuelles de pression. En introduisant ces notations dans les relations (I.16), on obtient le système matriciel à l'ordre  $p$  [18] :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu} + N_{uu}(\bar{u}_0)] & [K_{up}] \\ [{}^t K_{up}] & [K_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_p \\ \bar{p}_p \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} FQ(\bar{u}_r) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{I.19})$$

avec les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [K_{uu}] = \sum_{nel} \int_{\Omega_e} {}^t B \cdot D \cdot B \, d\Omega_e \\ [K_{up}] = \sum_{nel} \int_{\Omega_e} B_v \cdot N_p \, d\Omega_e \\ [N_{uu}(\bar{u}_0)] = \sum_{nel} \int_{\Omega_e} \rho {}^t N_u \cdot \{ u_0 \cdot \nabla N_u + \nabla u_0 \cdot N_u \} \, d\Omega_e \\ [K_{pp}] = \sum_{nel} \int_{\Omega_e} \frac{1}{k} {}^t N_p \cdot N_p \, d\Omega_e \\ \{ FQ(\bar{u}_r) \} = \sum_{r=1}^{p-1} \sum_{nel} \int_{\Omega_e} \rho \{ {}^t N_u \cdot u_r \nabla u_{(p-1)} \} \, d\Omega_e \end{array} \right. \quad (I.20)$$

avec la matrice  $B$  identique à la traditionnelle matrice  $B$  utilisée en mécanique numérique du solide. Elle contient les dérivées des fonctions de forme de vitesse. La matrice  $B_v$  est un arrangement de  $B$ , elle représente la trace de la vitesse de déformation et est déterminée par :

$$[B_v] = {}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot [B] \quad (I.21)$$

La valeur du paramètre de pénalisation  $k$  est très grande mais généralement on la caractérise par une fonction d'une quantité physique du problème, soit la viscosité dynamique, soit le nombre de Reynolds (Hughes [17] Zienkiewicz [18]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} k = c \cdot \mu \quad \text{où bien} \quad k = c \cdot \max\{\mu, \mu \cdot Re\} \\ \text{Avec } c = 10^7 \text{ à } 10^{10} \end{array} \right. \quad (I.22)$$

### I.5.1 Condensation de la pression

Le problème (I.19) contient les deux champs inconnus : la vitesse  $u$  et la pression  $p$ . La pression dans un élément à l'ordre  $p$  est définie par :

$$\{\bar{p}_p\} = -[K_{pp}]^{-1} \cdot {}^t [K_{up}] \cdot \{\bar{u}_p\} \quad (I.23)$$

En introduisant cette relation dans l'équation discrète de la conservation de la quantité de mouvement on obtient un problème à résoudre avec une seule inconnue, la vitesse  $u$  :

$$[[K_{uu} + N_{uu}(\bar{u}_0)] - [K_{up}] \cdot [K_{pp}]^{-1} \cdot {}^t[K_{up}]] \{\bar{u}_p\} = -\{FQ(\bar{u}_r)\} \quad (\text{I.24})$$

Cette méthode est habituellement appelée méthode de condensation de la pression. La relation (I.24) permet de calculer la vitesse pour chaque incrément  $\lambda$  (ou pour chaque valeur du nombre de Reynolds). Le calcul de la pression s'effectue ensuite en introduisant la vitesse dans la relation (I.23). Les notations (I.23) et (I.24) sont abusives puisqu'elles suggèrent que la condensation de la pression soit effectuée globalement. Or cette opération est réalisée au niveau élémentaire, mais dans un souci de clarté de lecture, nous avons écrit cette opération au niveau global.

Soit la matrice tangente  $[K_t(\bar{u}_0)]$  définie par :

$$[K_t(\bar{u}_0)] = [[K_{uu} + N_{uu}(\bar{u}_0)] - [K_{up}] \cdot [K_{pp}]^{-1} \cdot {}^t[K_{up}]] \quad (\text{I.25})$$

Avec la relation (I.25), l'équation d'équilibre discrète à l'ordre  $p$  (I.24) devient :

$$[K_t(\bar{u}_0)]\{\bar{u}_p\} = -\{FQ(\bar{u}_r)\} \quad (\text{I.26})$$

La discrétisation de la définition du paramètre "a" conduit à la relation suivante à l'ordre  $p$  :

$${}^t[\bar{u}_p] \cdot [\bar{u}_1] + \lambda_p \cdot \lambda_1 = 0 \quad (\text{I.27})$$

## I.5.2 Prise en compte des vitesses imposées

Les conditions de vitesse imposée  $u = \lambda u_d$  sur le bord  $\partial\Omega_u$  sont prises en compte par la méthode directe présentée dans l'ouvrage de Dhatt et Batoz [20]. Les vitesses imposées sont ainsi transformées en force imposée sur le bord  $\partial\Omega_u$ . Pour cette raison, l'équation (I.26) est réécrite sous la forme :

$$[K_t(\bar{u}_0)]\{\bar{u}_p\} = \lambda_p \cdot \{F\} - \{FQ(\bar{u}_r)\} \quad (\text{I.28})$$



Finalement, la forme discrète des problèmes linéaires (I.14) qui sont à résoudre à chaque ordre est la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1} \\ \text{Ordre 2} \\ \dots \\ \text{Ordre p} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} [K_t(\bar{u}_0)]\{\bar{u}_1\} = \lambda_1 \cdot \{F\} \\ {}^t[\bar{u}_1] \cdot [\bar{u}_1] + \lambda_1 \cdot \lambda_1 = s^2 \\ [K_t(\bar{u}_0)]\{\bar{u}_2\} = \lambda_2 \cdot \{F\} - \{FQ(\bar{u}_1, \bar{u}_1)\} \\ {}^t[\bar{u}_2] \cdot [\bar{u}_1] + \lambda_2 \cdot \lambda_1 = 0 \\ \dots \\ [K_t(\bar{u}_0)]\{\bar{u}_p\} = \lambda_p \cdot \{F\} - \sum_{r=1}^{p-1} \{FQ(\bar{u}_r, \bar{u}_{p-r})\} \\ {}^t[\bar{u}_p] \cdot [\bar{u}_1] + \lambda_p \cdot \lambda_1 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I.29})$$

## I.6 Exemple

Nous présentons figure (I.2) les courbes solutions obtenues avec la MAN pour plusieurs ordres de troncature des séries. L'application étudiée est l'écoulement d'un fluide visqueux autour d'un cylindre. Les paramètres géométriques et les conditions aux limites sont donnés figure (I.1). Les caractéristiques physiques du fluide sont : la masse volumique égale à  $1 \text{ kg/m}^3$ , la viscosité dynamique est de  $0.1 \text{ Stokes}$ . Le nombre de Reynolds de l'écoulement est donné par la relation :

$$Re = \frac{\lambda \cdot u_d \cdot D \cdot \rho}{\mu} \quad (\text{I.30})$$

avec  $D$  le diamètre du cylindre. On distingue facilement sur la figure (I.2) l'une des caractéristiques principales des approximations polynomiales : elles ne satisfont la solution que dans un certain domaine de validité, c'est-à-dire qu'elles ont un rayon de convergence fini. A l'intérieur de ce domaine de validité les approximations polynomiales sont très bonnes, au delà elles divergent rapidement. Sur la figure (I.2) les courbes solutions des séries (pour des ordres de troncature de 5, 10, 15, 20) sont confondues pour des valeurs du paramètre "a" inférieures à 10. Au delà de cette valeur ces courbes s'écartent brutalement les unes des autres indiquant alors le rayon de convergence.

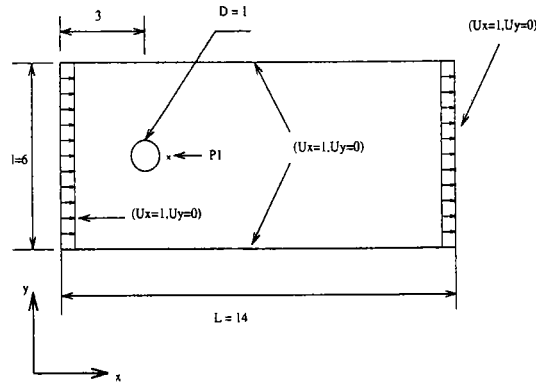


FIG. I.1 – Conditions aux limites et caractéristiques géométriques de l'écoulement autour d'un cylindre, 4000 degrés de liberté - 500 éléments Q9/3D

Afin de mettre en évidence la qualité des solutions polynomiales, le logarithme de la norme du vecteur résidu défini par la relation (I.31) pour chaque ordre de troncature des séries est tracé en fonction du paramètre de chemin "a" (figure I.3).

$$[R(U, \lambda)] = L(U) + Q(U, U) - \lambda.F \quad (I.31)$$

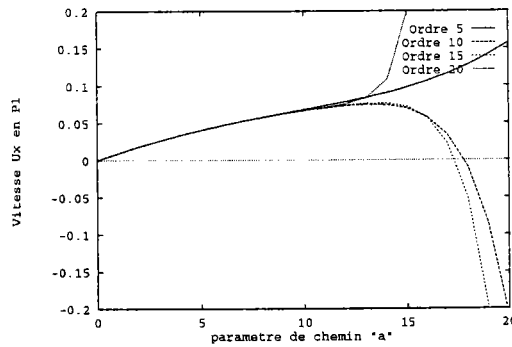


FIG. I.2 – Vitesses en un point noté P1 sur la figure I.1 obtenues avec la M.A.N pour différents ordres de troncatures des séries

Cette figure conforte l'idée précédente, à savoir la bonne qualité des approximations polynomiales jusqu'à une valeur de "a" égale à 10; au delà, elle se dégrade. Pour illustrer la bonne qualité des solutions polynomiales jusqu'à une certaine valeur de "a", la solution de la MAN avec un ordre de troncature de 15 est comparée avec la courbe solution obtenue par la méthode de Newton-Raphson (courbe annotée "référence" sur la figure I.4). Cette fois-ci la vitesse suivant x du point P1 est tracée en

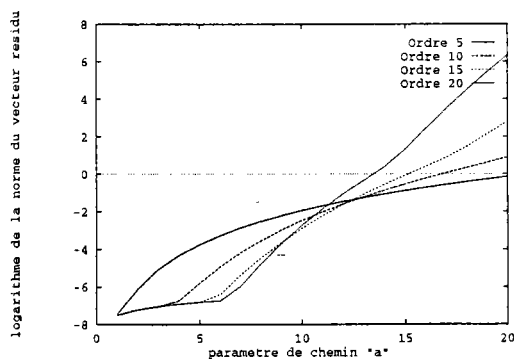


FIG. I.3 – Logarithme de la norme du résidu en fonction du paramètre  $a$

fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement. Les paramètres " $a$ " et  $\lambda$  sont liés par la relation (I.10). Grâce à la définition du nombre de Reynolds (I.30), on peut relier le nombre de Reynolds et le paramètre de chemin " $a$ ". Jusqu'à une valeur de Reynolds proche de 3 (correspondant à " $a$ " égale 10), les deux courbes sont confondues. Dès que ce nombre de Reynolds est dépassé, la solution de la MAN s'éloigne brutalement de la référence. On peut noter qu'une seule triangulation de matrice permet de connaître analytiquement (et non point par point) la courbe solution jusqu'à cette valeur du nombre de Reynolds. Pour augmenter ce domaine de validité des séries

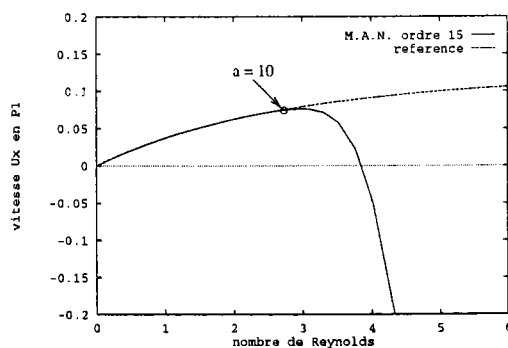


FIG. I.4 – Comparaison des vitesses en un point noté  $P_1$  sur la figure I.1 obtenues avec la M.A.N pour un ordre de troncature des séries égale à 15 et la méthode de Newton-Raphson

polynomiales on peut utiliser les approximants de Padé (Baker [21]). En effet, il est maintenant bien connu qu'une fonction rationnelle a une meilleure capacité à représenter une fonction analytique qu'une fonction polynomiale. Divers approximants de

Padé ont été testés avec succès en mécanique des solides (Cochelin [19], Najah [22]) et en mécanique des fluides (Tri [15]).

Mais augmenter le domaine de validité de la solution asymptotique ne permet pas de déterminer entièrement la branche solution. Par contre une technique de continuation donnant morceau par morceau la courbe solution est une stratégie adéquate pour calculer la totalité de cette branche [12].

## I.7 Procédure de continuation

Le calcul de la solution par une méthode d'approximations polynomiales ne permet pas, nous venons de le voir, de calculer entièrement la branche solution d'un problème non-linéaire. La technique de continuation proposée initialement par Cochelin [12] est très simple à mettre en oeuvre. Une fois les séries polynomiales calculées, un nouveau point de départ  $(U_0, \lambda_0)$  situé à l'intérieur du domaine de validité des séries, est introduit dans les équations (I.10). En réappliquant la M.A.N à partir de ce point, une partie supplémentaire de la courbe solution est déterminée. Par exemple pour le problème du cylindre, le point de départ du nouveau développement asymptotique peut être calculé à partir de :

$$\begin{cases} U_0 = U(a = 10) \\ \lambda_0 = \lambda(a = 10) \end{cases} \quad (\text{I.32})$$

En utilisant successivement cette technique on détermine entièrement la courbe solution. La seule difficulté concerne l'évaluation d'un nouveau point de départ  $(U_0, \lambda_0)$ . Cochelin [12] a proposé un critère simple pour le déterminer. Ce critère provient d'une analyse du comportement des approximations polynomiales au voisinage du rayon de convergence. En effet, deux approximations polynomiales successives s'éloignent brutalement dès que l'on atteint le rayon de convergence. Un critère simple consiste alors à exiger que la différence entre deux ordres des séries consécutifs soit inférieure à un

paramètre donné  $\varepsilon$ . Cela se traduit par la relation suivante :

$$\frac{\|u_n - u_{(n-1)}\|}{\|u_n - u_0\|} = \frac{\|a^n \cdot u_n\|}{\|a \cdot u_1 + \dots + u_n\|} < \varepsilon \quad (I.33)$$

ou bien, en approximant le dénominateur par  $\|a \cdot u_1\|$  :

$$a_m = \left( \varepsilon \frac{\|u_1\|}{\|u_n\|} \right)^{\frac{1}{n-1}} \quad (I.34)$$

où  $\|(\bullet)\|$  désigne la norme du vecteur  $(\bullet)$ .

Ce critère très simple et qui demande un temps de calcul insignifiant au regard d'une triangulation de matrice par exemple, est un critère en vitesse (ou en déplacement pour les solides). Cochelin propose dans sa thèse d'habilitation [19] un deuxième critère basé sur le calcul du résidu en fin de pas. Nous ne développerons pas ici cette seconde technique et nous utiliserons dans toutes les applications numériques la première solution pour calculer les valeurs de  $a_m$ . Nous comparons figure (I.5) la

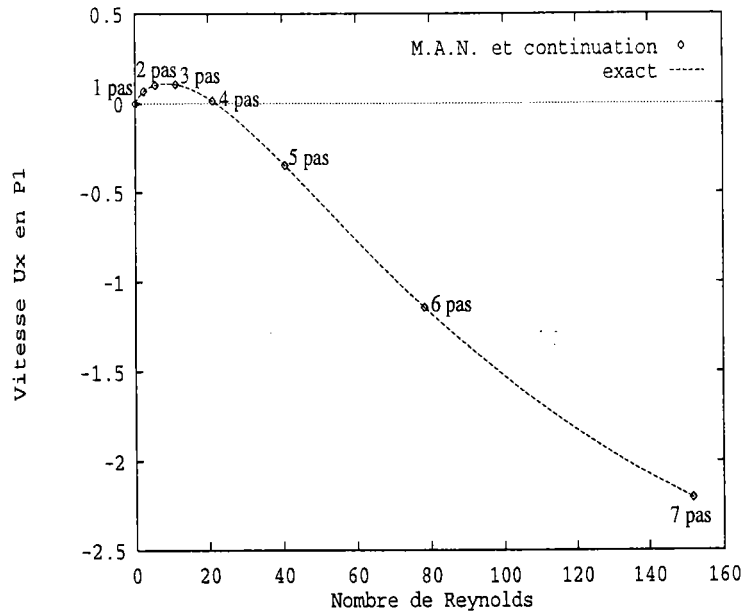


FIG. I.5 – Solution calculée avec la MAN et continuation (ordre de troncature égal à 15 et  $\varepsilon = 10^{-3}$ ) comparée avec la solution de Newton-Raphson - Exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (Fig I.1)

solution du problème de l'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre, calculée avec

la MAN et continuation, et celle obtenue avec la méthode itérative-incrémentale de Newton-Raphson. L'ordre de troncature des séries est 15 et le paramètre  $\varepsilon$  vaut  $10^{-3}$ . Le premier point de continuation noté "1 pas" correspond à la valeur de "a" égal à 10 sur la figure (I.4). Chaque point de la courbe correspond à une triangulation de matrice. La procédure de continuation est entièrement automatique. La longueur des pas de continuation s'ajuste en fonction de la difficulté rencontrée sur la courbe solution.

Tri [16] avait remarqué sur ce même exemple (la géométrie et les caractéristiques du fluide sont identiques) une accumulation de pas vers un nombre de Reynolds égal à 37,5. Cette accumulation conduisait à des longueurs de pas de plus en plus petites et finalement à l'arrêt de la méthode de continuation. Ces zones d'accumulation de pas sont généralement annonciatrices de bifurcations stationnaires (Boutyourn [23], Tri [16], voir aussi chapitre III). Mais sur l'exemple du cylindre il semble que les difficultés rencontrées par Tri soient en réalité liées au modèle numérique utilisé (bien que l'élément triangulaire non-conforme de Crouzeix-Raviart, Segal [24], ne soit pas à remettre en cause). La description des nombres réels (simple précision) dans le logiciel Modulef utilisé par Tri peut être la cause des problèmes d'accumulations de pas qu'il avait rencontré. Dans certains exemples numériques étudiés (avec la discrétisation et les éléments finis décrits précédemment), nous avons aussi observé des phénomènes d'accumulations de pas au voisinage de points de bifurcation stationnaire (voir chapitre III), mais jamais d'arrêt de la méthode de continuation.

Dans les paragraphes suivants des comparaisons de performances entre la MAN et la méthode de Newton-Raphson seront données.

## I.8 Résultats numériques et discussion

### I.8.1 Comparaison MAN-Newton-Raphson

La méthode de Newton-Raphson a été programmée dans le code EVE. Les comparaisons de temps de calcul, de qualité des solutions entre les deux méthodes de

résolution sont possibles et fiables car elles utilisent les mêmes subroutines Fortran, les mêmes algorithmes de stockage (en ligne de ciel) et de triangulation de matrice (méthode de Gauss). Le pilotage utilisé pour la méthode de Newton-Raphson est celui de la longueur d'arc imposée. Les performances des deux méthodes, c'est-à-dire les temps de calculs, le nombre de triangulation de matrices et la qualité de la solution à la fin du calcul, sont données dans le tableau (I.1). La différence entre les cinq calculs Newton-Raphson est la valeur de la longueur d'arc imposée. les performances sont données dans un ordre croissant de la valeur de la longueur d'arc. Ceci conduit à une diminution du nombre de pas mais à une augmentation du nombre d'itérations. Les résultats de la MAN sont donnés pour différents ordres de troncature des séries, le paramètre  $\varepsilon$  est constant.

Méthode	Nb de Triangul. de Mat.	temps CPU (s)	Norme du résidu
Newton-Raphson 1	84 ( 1 itér./pas)	6900	$10^{-5}$
Newton-Raphson 2	46 ( 1 itér./pas)	4140	$10^{-5}$
Newton-Raphson 3	30 ( 2 itér./pas)	2470	$10^{-5}$
Newton-Raphson 4	31 ( 2 itér./pas)	2550	$10^{-6}$
Newton-Raphson 5	13 ( 2-3 itér./pas)	1040	$10^{-6}$
MAN ordre 7	25	2520	$10^{-6}$
MAN ordre 10	13	1380	$10^{-5}$
MAN ordre 15	9	1020	$10^{-5}$
MAN ordre 20	7	900	$10^{-5}$
MAN ordre 25	6	900	$10^{-5}$
MAN ordre 30	6	1020	$10^{-5}$

TAB. I.1 - comparaison entre la MAN et Newton-Raphson -  $\varepsilon = 10^{-7}$  pour la MAN - écoulement autour d'un cylindre

Tous les calculs sont menés jusqu'à une valeur du nombre de Reynolds égal à 40. Globalement, pour une qualité de précision équivalente (norme du vecteur résidu de l'ordre de  $10^{-5}$ ,  $10^{-6}$ ), le temps C.P.U. de la MAN est inférieur à celui de Newton-Raphson. Seul le cas 5 de Newton-Raphson est compétitif, 5 pas étaient demandés pour aller jusqu'à  $Re = 40$ . Même si dans ce cas, le temps C.P.U. est équivalent à celui de la MAN, la description de la solution n'est pas la même. Sur la figure (I.6), les

solutions de Newton-Raphson (cas 5) et de la MAN (ordre 7 et  $\varepsilon = 10^{-7}$ ) sont tracées en fonction du nombre de Reynolds. La solution Newton-Raphson est déterminée point-par-point, ce qui donne cette allure saccadée pour des nombres de Reynolds inférieurs à 20. La courbe solution de la MAN est elle régulière car elle est connue analytiquement. Une des particularités de la MAN est la diminution du nombre de

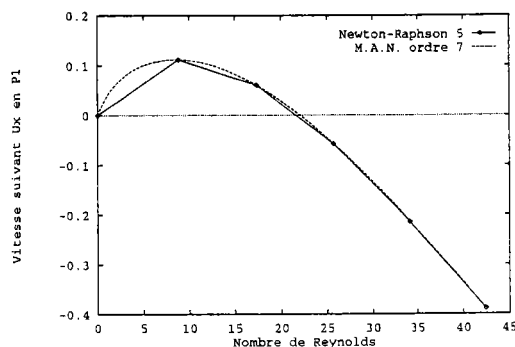


FIG. I.6 – Comparaison des vitesses en un point noté P1 sur la figure I.1; Calculs avec Newton-Raphson (cas 5 du tableau I.1) et avec la M.A.N ordre 7

triangulations de matrice avec l'augmentation de l'ordre de troncature des séries (25 pour l'ordre 7, 7 pour l'ordre 20). En effet, le rayon de convergence des séries et donc, la longueur des pas de continuation, augmente avec l'ordre de troncature des séries. Mais le temps de construction du second membre  $FQ$  croît également avec l'ordre de troncature des séries (tableau I.2). Il s'agit alors pour obtenir un résultat optimum de trouver un compromis entre la longueur des pas de continuation et le temps C.P.U. nécessaire à la construction du second membre. Ainsi, pour cet exemple, il n'est pas intéressant d'aller à des ordres supérieurs à 20, puisque le temps nécessaire à la construction des seconds membres pour l'ordre 25 et 30 est égal voire supérieur à une triangulation de matrice (tableau I.2).

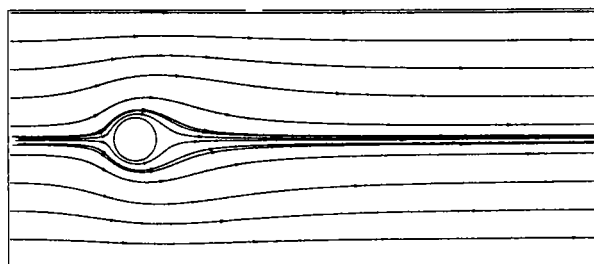
Afin d'illustrer l'évolution de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds, les lignes de courant de 3 écoulements sont présentés figure (I.7). Pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds ( $Re < 5$ , figure 7(a)), l'écoulement est linéaire (écoulement de Stokes); lorsque le nombre de Reynolds augmente, deux zones de recirculation ap-



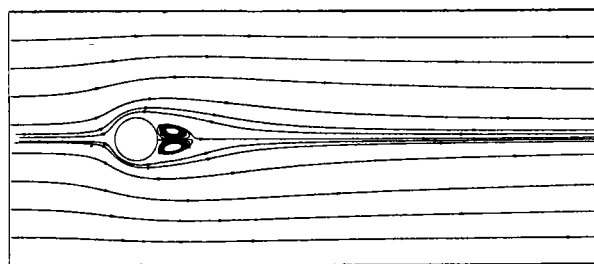
Ordre	Temps C.P.U. (s)
7	21
10	26
15	33
20	49
25	70
30	90
Temps C.P.U. pour une triang. Mat.	80

TAB. I.2 – *Temps C.P.U nécessaires à la construction du second membre pour un pas de continuation*

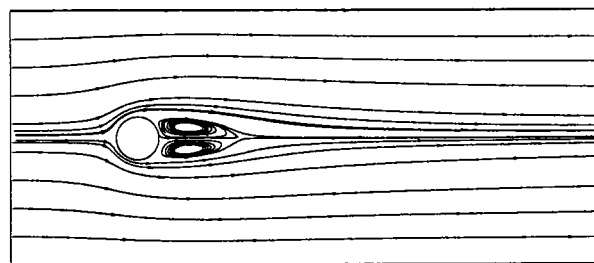
paraissent derrière le cylindre (figure 7(b)). L'amplitude de ces zones de recirculation s'accroît avec le nombre de Reynolds (figure 7(c)). Ces résultats sont conformes aux simulations expérimentales [25].



(a) Reynolds égal 5



(b) Reynolds égal 20



(c) Reynolds égal 40

FIG. I.7 – Lignes de courant des solutions calculées avec la MAN, exemple de l'écoulement autour d'un cylindre

### I.8.2 Exemple de la cavité

L'exemple suivant est celui de l'écoulement dans une cavité. Les conditions aux limites et géométriques sont données figure (I.8). Le maillage est constitué de 1600 éléments Q9/3D soit d'environ 13000 degrés de liberté. Le but de cet exemple est de montrer que la MAN permet de connaître la solution jusqu'à des nombres de Reynolds très élevés. La vitesse  $U_x$  d'un point de coordonnées  $(x = 0.5; y = 0.5)$  est tracée

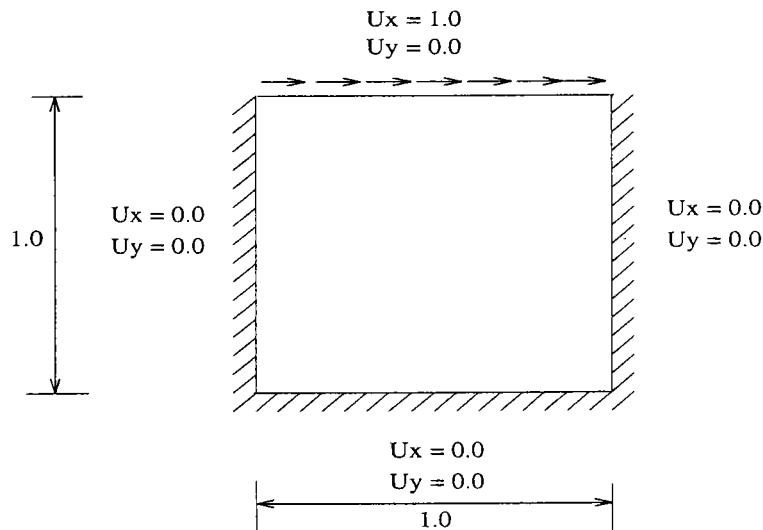


FIG. I.8 – Géométrie et conditions aux limites de l'exemple de la cavité, 13000 degrés de liberté, 1600 éléments Q9/3D

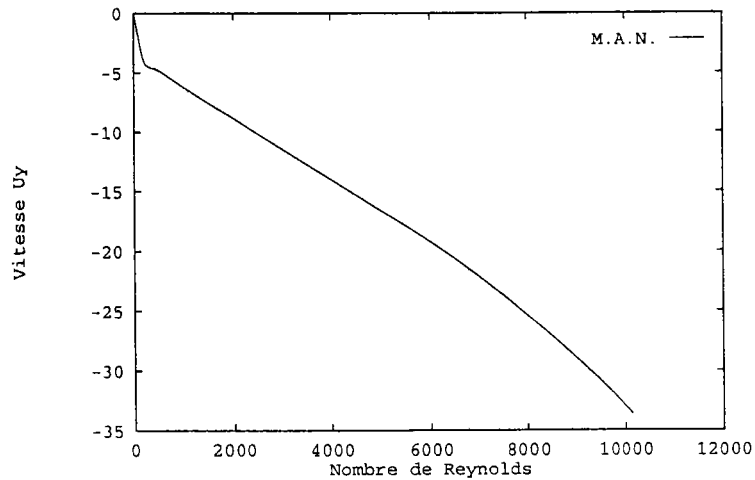


FIG. I.9 – vitesse  $U_x$  au centre de la cavité, solution MAN, ordre 15 et  $\varepsilon = 10^{-3}$

jusqu'à un nombre de Reynolds égal à 10000 sur la figure (I.9). Les lignes de courant de l'écoulement pour plusieurs nombres de Reynolds sont présentées figure (I.10). Ces écoulements sont conformes à ceux trouvés dans la littérature (Ghia [26]) bien que le maillage utilisé ici ne soit sans doute pas suffisamment fin pour décrire tous les phénomènes physiques (notamment sur le bord haut-gauche de la cavité). Cependant le nombre de d.d.l utilisé ici correspond au maximum des capacités de nos stations de travail. Il est intéressant sur un tel exemple (où le nombre de degrés de liberté est élevé) de regarder la mémoire nécessaire pour un calcul avec la MAN. Ainsi dans le tableau (I.3) nous présentons, pour plusieurs ordres de troncature des séries, la place mémoire occupée par :

- $[K_t]$  : la matrice tangente (stockage en ligne de ciel) ;
- $V$  : les vitesses nodales stockées pour chaque ordre ;
- $U$  : les vitesses pour chaque point de Gauss et pour chaque ordre ;
- $\nabla U$  les gradients de vitesse pour chaque point de Gauss et pour chaque ordre.

Quantité	ordre 10	ordre 15	ordre 20
$[K_t]$	$12,8 \cdot 10^6$ ( 85,4 %)	$12,8 \cdot 10^6$ ( 80,1 %)	$12,8 \cdot 10^6$ ( 75,4 %)
$V$	$0,3 \cdot 10^6$ (2 %)	$0,4 \cdot 10^6$ (2,6 %)	$0,5 \cdot 10^6$ (3,2 %)
$U$	$0,6 \cdot 10^6$ (4,2 %)	$0,9 \cdot 10^6$ (5,8 %)	$1,2 \cdot 10^6$ (7,2 %)
$\nabla U$	$1,2 \cdot 10^6$ (8,4 %)	$1,8 \cdot 10^6$ (11,5 %)	$2,4 \cdot 10^6$ (14,2 %)
Total	$15 \cdot 10^6$ (100 %)	$16 \cdot 10^6$ (100 %)	$17 \cdot 10^6$ (100 %)

TAB. I.3 - Nombre de réels stockés pour différents ordres de troncature des séries

Les quantités  $U$  et  $\nabla U$  sont stockées à chaque ordre et pour chaque point de Gauss afin d'éviter des redondances dans le calcul du second membre à l'ordre  $p$ ,  $FQ(U_r, U_{p-r})$ . Cette façon de faire n'est pas pénalisante car la place mémoire nécessaire à ces quantités ne dépasse jamais 25 % de la totalité du stockage, qui est occupée principalement par la matrice tangente (85,4 % à l'ordre 10, 75,4 % à l'ordre 20).

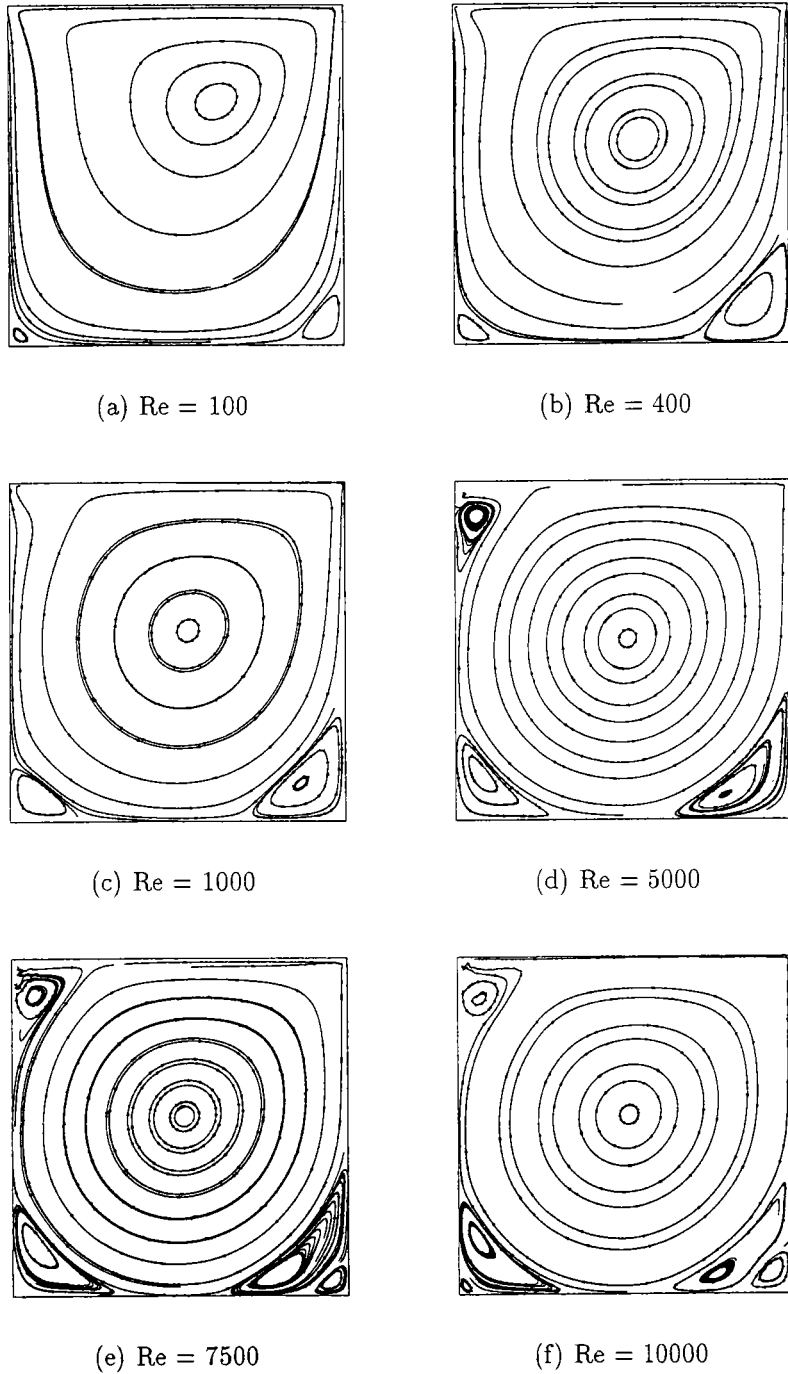


FIG. I.10 - Lignes de courant des solutions calculées avec la MAN, exemple de la cavité

## I.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré que grâce à des choix adéquats du modèle numérique et de l'élément fini nous n'observons pas les phénomènes d'accumula-

tions de pas rencontrés par Tri. Dans cette application aux équations stationnaires de Navier-Stokes la MAN confirme ainsi ses bonnes dispositions, que nous avons auparavant constatées en élasticité non linéaire, à décrire les branches solutions, même complexes, d'un problème de mécanique des fluides. De plus nous avons montré qu'elle ne nécessite pas, sur des problèmes à non linéarité quadratique comme l'avait suggéré Kawahara [2] d'être couplée à la méthode de Newton-Raphson. Bien au contraire grâce à ses atouts, notamment dans sa facilité d'utilisation, la description analytique des branches solutions et surtout sa rapidité, elle se pose comme une concurrente très compétitive aux méthodes itératives classiques. Dans le prochain chapitre nous appliquerons les principes de la MAN à un problème où la non linéarité n'est pas cette fois simplement quadratique mais plus complexe.

## CHAPITRE II

# MAN pour la formulation Petrov-Galerkin

La méthode des éléments finis permet de résoudre numériquement un grand nombre de problèmes. Sa facilité d'utilisation pour traiter des problèmes avec des géométries complexes et des conditions limites particulières l'ont conduit à être intégrée dans la plupart des codes de calcul.

La commodité d'utilisation de cette méthode repose essentiellement sur l'emploi de la formulation Galerkin. Cette formulation, où les fonctions de pondérations sont choisies comme étant égales aux fonctions de forme des variables inconnues, donne d'excellents résultats pour des problèmes où la matrice de rigidité est symétrique (ce qui est le cas dans la plupart des problèmes de mécanique du solide).

Cependant en mécanique des fluides, l'utilisation d'une description cinématique autre que la description Lagrangienne entraîne la présence de termes convectifs dans les équations du mouvement. Ces opérateurs de convection étant non-symétriques, la formulation Galerkin perd sa propriété de meilleure approximation (Donea [27]). Les solutions numériques, déterminées avec cette formulation, sont alors dégradées par des oscillations non-physiques lorsque la convection domine.

L'une des méthodes numériques qui permet de palier à cette dégradation de la solution est la formulation Petrov-Galerkin. Cette dernière se distingue de la formulation Galerkin par l'utilisation de fonctions de forme de pondération différentes des fonctions de forme des inconnues du problème. Cette formulation introduit de

nouvelles relations dont la non-linéarité n'est plus seulement quadratique.

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer la MAN à ce nouveau problème. Nous montrerons ainsi que les relations originales de la formulation Petrov-Galerkin peuvent se mettre sous la forme quadratique grâce notamment à quelques modifications comme l'introduction de nouvelles variables. Ce format quadratique, nous l'avons vu au chapitre I, est très avantageux pour le calcul des séries à des ordres élevés et ainsi pour déterminer les branches solutions avec un minimum de triangulations de matrice. L'objectif principal de ce chapitre est de montrer que la MAN peut être appliquée à des problèmes où les non linéarités ne sont pas seulement quadratiques à la base. L'application à la formulation Petrov-Galerkin nous permet de le démontrer. Mais on peut aussi envisager de traiter des problèmes avec d'autres formulations, ou avec d'autres modèles de mécaniques des fluides (des modèles de turbulence : le modèle  $k - \epsilon$  par exemple, Speziale [28], Pironneau [29]). Les techniques que nous employons dans ce chapitre pour transformer les expressions du problème initial seront aussi utilisées au chapitre V où nous utiliserons une description cinématique Arbitraire Lagrange-Euler pour étudier un problème d'interaction fluide-structure.



## II.1 Une formulation Petrov-Galerkin?

La formulation Galerkin ne permet pas toujours de résoudre correctement les équations stationnaires de Navier-Stokes, la solution numérique pouvant être perturbée par des phénomènes parasites. Ces derniers se traduisent pour les écoulements de fluide par des oscillations sans signification physique dans le champ des vitesses. Nous présentons figure (II.1) le champ de vitesse de l'écoulement autour d'un obstacle carré, pour un nombre de Reynolds égal à 200 (Hughes [17]). Sur cette figure (II.1),

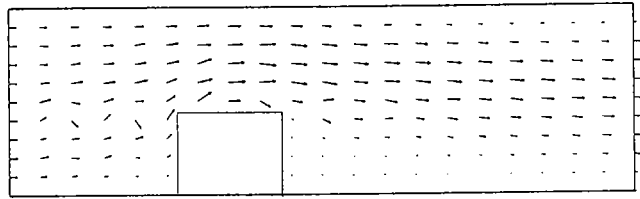


FIG. II.1 – *Écoulement autour d'un obstacle carré à Reynolds égal 200 par la méthode de Galerkin*

les oscillations parasites sont visibles en amont de l'obstacle.

Plusieurs auteurs notamment Donea[27] et Pironneau[29] ont essayé de comprendre les causes de ces phénomènes. Pironneau a notamment montré que la discrétisation par la méthode de Galerkin d'une équation de convection-diffusion monodimensionnelle, conduit à une matrice de rigidité instable lorsqu'une variable du problème devient trop grande. L'équation précédente peut être identifiée à l'équation de Navier-Stokes et la variable au nombre de Reynolds.

Donea a montré, sur un problème de convection-diffusion identique à celui de Pironneau, que l'équation discrète introduit un opérateur de diffusion négatif purement numérique. La conséquence est que l'on résoud numériquement une équation modifiée devenant instable lorsque l'opérateur de diffusion artificiel l'emporte sur l'opérateur de diffusion physique (dans le cas des équations de Navier-Stokes, lorsque le nombre de Reynolds est trop grand, la diffusion artificielle est identifiable à une viscosité artificielle).

L'un des thèmes de recherche des numériciens dans les années 70-80 a été alors de trouver une parade à ces instabilités numériques. Nous n'entrerons pas ici en détail dans les différentes méthodes permettant de parer ces phénomènes parasites (les principales méthodes sont décrites par Donea [27] et Pironneau [29]). Il est intéressant de rappeler que deux solutions sont généralement adoptées pour enlever ces oscillations parasites.

La première solution consiste à raffiner considérablement le maillage, et dans le cas instationnaire à réduire le pas de temps. Nous présentons figure (II.2) pour l'exemple précédent, un maillage fin et adapté (Gresho [30]). Le résultat du calcul avec ce maillage (figure II.3) montre la disparition de ces oscillations parasites, mais le nombre de degrés de liberté du problème a pratiquement triplé (passant de 550 ddl à 1400 ddl). La critique que l'on peut faire de cette méthode est qu'elle augmente considérablement le nombre de degrés de liberté (matrice importante à inverser).

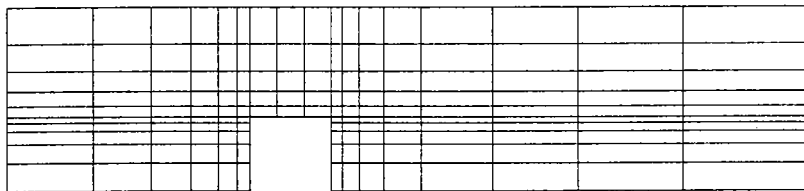


FIG. II.2 – Maillage utilisé par Gresho pour enlever les oscillations

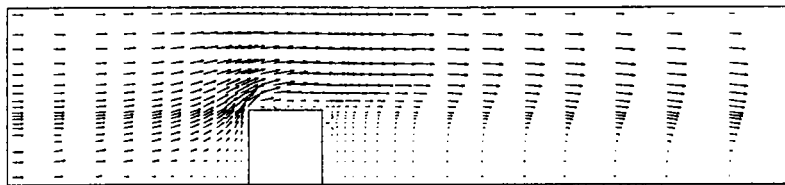


FIG. II.3 – Écoulement autour d'un obstacle carré à Reynolds égal 200 par la méthode de Galerkin, avec raffinement du maillage

La deuxième idée est une conséquence directe de l'analyse du phénomène parasite. En effet puisque la méthode de Galerkin conduit à résoudre un problème avec un opérateur de diffusion négative (ou une viscosité) pourquoi alors, ne pas introduire une diffusion supplémentaire afin de compenser cette diffusion artificielle? Il existe

une multitude de méthodes basées sur cette idée en stationnaire [27] ou en instationnaire. La méthode que nous avons retenue en tant qu'utilisateurs des éléments finis, est la formulation Petrov-Galerkin [18], [31]. Cette méthode consiste à modifier les fonctions de pondération du terme convectif en y ajoutant une diffusion (ou viscosité). Dans le paragraphe suivant nous rappelons les équations et variables liées à cette formulation.

## II.2 Présentation de la formulation Petrov-Galerkin

Dans la méthode des éléments finis les inconnues et les fonctions de pondérations du problème sont approximées par :

$$\{u\} = [N_u]\{q\} \text{ et } \{\delta u\} = [W_u]\{\delta q\} \quad (\text{II.1})$$

avec  $\{u\}$  les inconnues du problème,  $[N_u]$  les fonctions de forme,  $\{q\}$  les inconnues nodales,  $[W_u]$  les fonctions de forme de pondération. Avec la formulation Galerkin on pose  $[N_u] = [W_u]$ . La formulation Petrov-Galerkin introduit de nouvelles fonctions de pondération définies par [18] :

$$[W_u] = [N_u] + \frac{\alpha}{\|U\|} U_i \frac{\partial N_u}{\partial x_i} \quad (\text{II.2})$$

ou en introduisant l'opérateur  $\beta(U)$  :

$$\begin{cases} [W_u] = [N_u] + [\beta(U)] \\ \text{avec } \beta(U) = \frac{\alpha}{\gamma} U_i \frac{\partial N_u}{\partial x_i} \\ \gamma^2 = \|U\|^2 \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

Dans l'équation (II.2), la vitesse  $U_i$  est la vitesse suivant la direction  $i$ . Cette composante de la vitesse permet d'introduire une viscosité artificielle seulement suivant la direction de l'écoulement. Le paramètre  $\alpha$  est un scalaire donnant l'intensité de la viscosité. Ce paramètre dépend du nombre de Reynolds et est défini par :

$$\alpha = \frac{1}{\tanh Re_e} - \frac{1}{Re_e} \quad (\text{II.4})$$

Cette définition de  $\alpha$  donne la solution exacte dans le cas monodimensionnel et est une bonne approximation pour le 2 D et le 3 D [18]. Les quantités  $Re_e$ ,  $\|U\|$ ,  $h$  et  $\nu$  sont des quantités élémentaires. Ainsi  $h$  désigne une dimension géométrique élémentaire,  $\gamma$  est la vitesse élémentaire donnée par :

$$\gamma = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} \quad (\text{II.5})$$

Le nombre de Reynolds élémentaire est calculé avec :

$$Re_e = \frac{\gamma h}{2\nu} \quad (\text{II.6})$$

$\nu$  étant la viscosité cinématique de l'élément.

### II.2.1 Equations à résoudre

Avec une formulation Galerkin, la forme discrète des équations de Navier-Stokes après condensation de la pression est :

$$[K_{uu}(U)] + [N_{uu}(U, U)] = \lambda[F] \quad (\text{II.7})$$

avec  $[K_{uu}(U)]$  la partie visqueuse,  $[N_{uu}(U, U)]$  le terme convectif et  $\lambda[F]$  le vecteur des forces imposées provenant de la transformation des vitesses imposées sur la frontière.

Lorsqu'une formulation Petrov-Galerkin est utilisée, la forme discrète des équations de Navier-Stokes devient :

$$[K_{uu}(U)] + \beta(U) \cdot [N_{uu}(U, U)] + [N_{uu}(U, U)] = \lambda[F] \quad (\text{II.8})$$

Par abus de notation l'opérateur  $\beta(U)$  est sorti du terme de convection. L'opérateur  $\beta(U)$  ne concerne que le terme de convection des équations de Navier-Stokes [18]. En effet on peut aisément montrer que pour des éléments à fonctions d'interpolations linéaires (tel que le quadrangle à 4 noeuds) le terme  $\beta(U)$  de l'équation (II.2) est nul pour la partie visqueuse  $L(U)$ . Pour les éléments avec des fonctions d'interpolations d'ordre supérieur (par exemple quadratique pour les éléments Q9/3D) la contribution de  $\beta(U)$  est négligeable par rapport au premier terme de l'équation (II.2) pour la

partie visqueuse. Ceci conduit à utiliser une formulation Galerkin pour la partie visqueuse et une formulation Petrov-Galerkin pour le terme convectif des équations de Navier-Stokes.

## II.2.2 Résultats par Newton-Raphson

Cette nouvelle formulation a été introduite dans le code de calculs EVE. La méthode de résolution utilisée est la méthode incrémentale-itérative de Newton-Raphson. Les oscillations visibles en amont de l'obstacle sur la figure (II.1) ont bien disparues

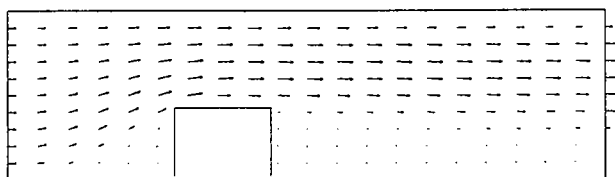


FIG. II.4 – *Écoulement autour d'un obstacle carré à Reynolds égal 200, résolution par la méthode de Newton-Raphson et la formulation Petrov-Galerkin*

figure (II.4). La formulation Petrov-Galerkin fonctionne donc convenablement avec la méthode de Newton-Raphson.

Le but est maintenant de résoudre le problème (II.8) avec la Méthode Asymptotique Numérique détaillée au chapitre I.

## II.3 MAN pour la formulation Petrov-Galerkin

La formulation Petrov-Galerkin introduit de nouvelles variables  $\beta$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $Re_e$  dont la dépendance avec la vitesse  $U$  n'est pas quadratique. Les développements asymptotiques peuvent être introduits directement dans les relations (II.2), (II.4), (II.5), (II.6), (II.8) mais l'identification suivant les puissances de "a" de chaque variable devient alors très complexe. Pour éviter ces difficultés, on distinguera deux phases pour appliquer la MAN à un problème avec des non linéarités non quadratiques. La première phase consiste à remplacer les relations qui ne sont pas originellement quadratiques par des expressions quadratiques équivalentes, ou du moins par des expressions qui

approcheront au mieux les relations initiales. Durant la deuxième phase les relations polynomiales, fractionnelles ou avec des racines carrées sont réécrites sous forme quadratique grâce notamment à l'introduction de nouvelles variables. Finalement, une fois ces deux phases réalisées, toutes les expressions sont sous forme quadratique, il devient alors facile d'y introduire les développements asymptotiques.

### II.3.1 Modifications des équations

La première équation modifiée est la définition du paramètre  $\alpha$  (II.4). La fonction (II.4) est remplacée par une fraction rationnelle :

$$\alpha = \frac{Re_e}{(Re_e + 1)} \quad (II.9)$$

Les fonctions (II.4) et (II.9) sont tracées en fonction du nombre de Reynolds élémentaire sur la figure (II.5). Sur la figure (II.6), les vitesses solutions d'un point derrière

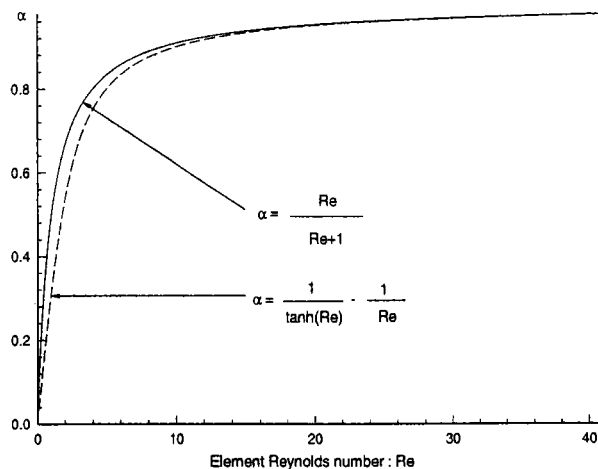


FIG. II.5 – Relations (II.4) et (II.9) en fonction du nombre de Reynolds élémentaire

l'obstacle carré sont représentées en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement pour les deux définitions du paramètre  $\alpha$ . Les courbes solutions sont obtenues avec la méthode de Newton-Raphson. Les deux courbes de la figure (II.6) sont pratiquement similaires, montrant que la fonction rationnelle (II.9) est une bonne approximation

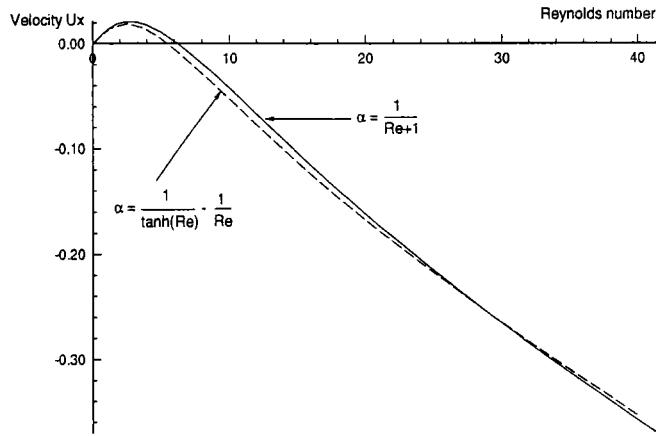


FIG. II.6 – Solutions de l'écoulement autour d'un obstacle calculées avec Newton-Raphson et les deux définitions de  $\alpha$

de la définition initiale (II.4) de  $\alpha$ . Cette fonction rationnelle remplace définitivement la relation (II.4).

La deuxième modification des relations initiales porte sur l'expression de la vitesse élémentaire (II.5). En effet les développements asymptotiques sont effectués au voisinage d'un point solution  $U_0$  qui est peut être nul. Dans ce cas la vitesse élémentaire  $\|U_0\|$  est nulle et l'expression  $\beta(U)$  est indéterminée. Pour éviter cette singularité au point de départ, un paramètre de régularisation  $\eta$  est introduit dans l'équation (II.5); cette dernière devient alors :

$$\gamma^2 = U_x^2 + U_y^2 + \eta^2 \quad (\text{II.10})$$

Dans l'expression (II.10), la racine carrée a disparu pour laisser place à un formalisme quadratique. Cette nouvelle expression de la vitesse sera utilisée sur toute la courbe solution. En effet dans certaines zones, par exemple les zones de recirculation, il se peut que la vitesse élémentaire soit nulle ou minimale. Pour éviter les singularités décrites précédemment on conservera tout le long de la courbe solution l'expression (II.10) de la vitesse élémentaire. La valeur de ce paramètre  $\eta$  fera l'objet d'une discussion dans l'un des paragraphes suivants.

Finalement nous écrivons les expressions de la formulation Petrov-Galerkin sous

la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta \cdot \gamma = \alpha \cdot U_i \cdot C_i \\ \alpha \cdot (Re_e + 1) = Re_e \\ \gamma^2 = U_x^2 + U_y^2 + \eta^2 \\ Re_e = \frac{\gamma h}{2\nu} \end{array} \right. \quad (\text{II.11})$$

avec  $C_i$  les dérivées des fonctions de forme :  $\frac{\partial N_u}{\partial x_i}$ . Les équations du système (II.11) sont toutes écrites sous un format quadratique. Il est maintenant aisé d'introduire les développements asymptotiques dans ces équations.

### II.3.2 Développements asymptotiques

Toutes les variables introduites par la formulation Petrov-Galerkin ainsi que la vitesse, la pression et le paramètre de chargement  $\lambda$  admettent un développement en séries entières du paramètre de chemin "a" qui est unique. Il est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \gamma_0 + a\gamma_1 + a^2\gamma_2 + \dots \\ \alpha = \alpha_0 + a\alpha_1 + a^2\alpha_2 + \dots \\ Re_e = Re_{e_0} + aRe_{e_1} + a^2Re_{e_2} + \dots \\ \beta = \beta_0 + a\beta_1 + a^2\beta_2 + \dots \\ U = U_0 + aU_1 + a^2U_2 + \dots \end{array} \right. \quad (\text{II.12})$$

Ces développements sont introduits dans le système (II.11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\beta_0 + a\beta_1 + a^2\beta_2 + \dots\} \{\gamma_0 + a\gamma_1 + a^2\gamma_2 + \dots\} = \{\alpha_0 + a\alpha_1 + a^2\alpha_2 + \dots\} \{U_{i_0} + aU_{i_1} + a^2U_{i_2} + \dots\} \cdot C_i \\ \{\alpha_0 + a\alpha_1 + a^2\alpha_2 + \dots\} \{1 + Re_{e_0} + aRe_{e_1} + a^2Re_{e_2} + \dots\} = \{Re_{e_0} + aRe_{e_1} + a^2Re_{e_2} + \dots\} \\ \{\gamma_0 + a\gamma_1 + a^2\gamma_2 + \dots\}^2 = \{U_{x_0} + aU_{x_1} + a^2U_{x_2} + \dots\}^2 + \{U_{y_0} + aU_{y_1} + a^2U_{y_2} + \dots\}^2 + \eta^2 \\ [Re_{e_0} + aRe_{e_1} + a^2Re_{e_2} + \dots] = \{\gamma_0 + a\gamma_1 + a^2\gamma_2 + \dots\} \cdot \frac{h}{2\nu} \end{array} \right. \quad (\text{II.13})$$

En multipliant les divers termes de (II.13) les uns avec les autres et en identifiant suivant les puissances de "a", on obtient à chaque ordre un ensemble d'équations défini par :



A l'ordre 0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_0 = \frac{\alpha_0 U_{i_0}}{\gamma_0} \cdot C_i \\ \alpha_0 = \frac{Re_{e_0}}{1+Re_{e_0}} \\ \gamma_0 = \sqrt{U_{x_0}^2 + U_{y_0}^2 + \eta^2} \\ Re_{e_0} = \frac{\gamma_0 \cdot h}{2\nu} \end{array} \right. \quad (II.14)$$

A l'ordre 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 = \left\{ \frac{\alpha_1 U_{i_0} + \alpha_0 U_{i_1}}{\gamma_0} \right\} \cdot C_i - \frac{\beta_0 \gamma_1}{\gamma_0} \\ \alpha_1 = \frac{Re_{e_1}(1-\alpha_0)}{1+Re_{e_0}} \\ \gamma_1 = \frac{2U_{x_0}U_{x_1} + 2U_{y_0}U_{y_1}}{2\gamma_0} \\ Re_{e_1} = \frac{\gamma_1 \cdot h}{2\nu} \end{array} \right. \quad (II.15)$$

A l'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_2 = \left\{ \frac{\alpha_2 U_{i_0} + \alpha_1 U_{i_1} + \alpha_0 U_{i_2}}{\gamma_0} \right\} \cdot C_i - \frac{\beta_0 \gamma_2 + \beta_1 \gamma_1}{\gamma_0} \\ \alpha_2 = \frac{Re_{e_2}(1-\alpha_0) - Re_{e_1} \alpha_1}{1+Re_{e_0}} \\ \gamma_2 = \frac{2U_{x_0}U_{x_2} + 2U_{y_0}U_{y_2} - \gamma_1^2}{2\gamma_0} \\ Re_{e_2} = \frac{\gamma_2 \cdot h}{2\nu} \end{array} \right. \quad (II.16)$$

A l'ordre p :

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_p = \left\{ \frac{\alpha_p U_{i_0} + \alpha_0 U_{i_p}}{\gamma_0} \right\} \cdot C_i + \sum_{r=1}^{p-1} \left\{ \frac{\alpha_r U_{i_{(p-r)}} \cdot C_i - \beta_r \gamma_{(p-r)}}{\gamma_0} \right\} \\ \alpha_p = \frac{Re_{e_p}(1-\alpha_0)}{1+Re_{e_0}} - \sum_{r=1}^{p-1} \frac{Re_{e_r} \alpha_{(p-r)}}{1+Re_{e_0}} \\ \gamma_p = \frac{2U_{x_0}U_{x_p} + 2U_{y_0}U_{y_p}}{2\gamma_0} + \frac{1}{2\gamma_0} \sum_{r=1}^{p-1} \{ U_{x_r} U_{x_{(p-r)}} + U_{y_r} U_{y_{(p-r)}} - \gamma_r \gamma_{(p-r)} \} \\ Re_{e_p} = \frac{\gamma_p \cdot h}{2\nu} \end{array} \right. \quad (II.17)$$

Les développements asymptotiques sont aussi introduits dans l'équation d'équilibre discrète (II.8). En identifiant suivant les puissances de "a" on obtient un ensemble de problèmes linéaires définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ordre 1} \\ [K_{uu}(U_1)] + [N_{uu}^s(U_1, U_0)] + \beta_0[N_{uu}^s(U_1, U_0)] + \beta_1[N_{uu}(U_0, U_0)] = \lambda_1[F] \\ \text{Ordre 2} \\ [K_{uu}(U_2)] + [N_{uu}^s(U_2, U_0)] + \beta_0[N_{uu}^s(U_2, U_0)] + \beta_2[N_{uu}(U_0, U_0)] = \lambda_2[F] - [FQ(U_1, U_0; \beta_0, \beta_1)] \\ \dots \\ \text{Ordre p} \\ [K_{uu}(U_p)] + [N_{uu}^s(U_p, U_0)] + \beta_0[N_{uu}^s(U_p, U_0)] + \beta_p[N_{uu}(U_0, U_0)] = \lambda_p[F] - [FQ(U_r, \beta_r)] \end{array} \right. \quad (\text{II.18})$$

avec l'opérateur symétrique  $[N_{u,u}^s(\bullet, \ast)]$  défini par  $[N_{u,u}(\bullet, \ast)] + [N_{u,u}(\ast, \bullet)]$ . Comme pour le problème quadratique, la matrice tangente est la même pour tous les ordres et est définie par :

$$[K_t(U_0, \bullet)] = [K_{uu}(\bullet)] + [N_{uu}^s(\bullet, U_0)] + \beta_0[N_{uu}^s(\bullet, U_0)] + \beta_\bullet[N_{uu}(U_0, U_0)] \quad (\text{II.19})$$

Seul le second membre  $[FQ(U_r, \beta_r)]$  est différent à chaque ordre. Il est construit à partir des ordres précédents et est défini par :

$$[FQ(U_r, \beta_r)] = \sum_{r=1}^{p-1} [N_{uu}^s(U_r, U_{p-r})] + \sum_{r=1}^{p-1} \beta_0 [N_{uu}^s(U_r, U_{p-r})] + \sum_{r=1}^{p-1} \beta_r \sum_{q=0}^{p-1} [N_{uu}^s(U_q, U_{p-q})] \quad (\text{II.20})$$

Finalement le problème discret à l'ordre  $p$  s'écrit :

$$[K_t(U_0, U_p)] = \lambda_p[F] - [FQ(U_r, \beta_r)] \quad (\text{II.21})$$

### II.3.3 Remarques

La méthode de continuation décrite au chapitre I (paragraphe I.7) est aussi utilisée ici pour déterminer pas-à-pas la branche solution. Le critère de continuation est identique à celui utilisé précédemment.

La méthode asymptotique numérique est l'association d'une technique de perturbation et de la méthode des éléments finis. L'ordre dans lequel les deux techniques

sont utilisées n'a pas d'influence sur le résultat final, cependant dans les applications précédentes, la règle était d'appliquer en premier la méthode de perturbation [13]. Lorsque l'on utilise la formulation Petrov-Galerkin, on discrétise d'abord puis on applique ensuite la technique de perturbation. En effet, dans cette formulation les termes non-linéaires supplémentaires apparaissent lors de l'utilisation des éléments finis. Il est alors logique et incontournable d'introduire la méthode de perturbation sur la forme discrète des équations de Navier-Stokes.

La difficulté principale lorsque l'on applique la MAN à la formulation Petrov-Galerkin est la construction à chaque ordre  $p$  du second membre  $FQ$ . Nous venons de montrer que grâce à l'introduction de nouvelles variables et de la mise sous forme quadratique des équations initiales, on obtient à chaque ordre  $p$  un vecteur second membre qui dépend des inconnues aux ordres précédents. La construction de ce second membre est cependant plus compliqué que celui calculé pour la formulation Galerkin (chapitre I).

Une variante peut aussi être utilisée afin de simplifier la construction de  $FQ$ . Elle consiste à garder le terme de décentrage  $\beta$  constant durant un pas et à l'actualiser à chaque début de pas de la technique de continuation ; on nommera cette variante "  $\beta$  constant par pas ". Dans ce cas, la non-linéarité est naturellement quadratique comme pour la formulation Galerkin. La matrice de rigidité tangente et le vecteur second membre sont alors définis par :

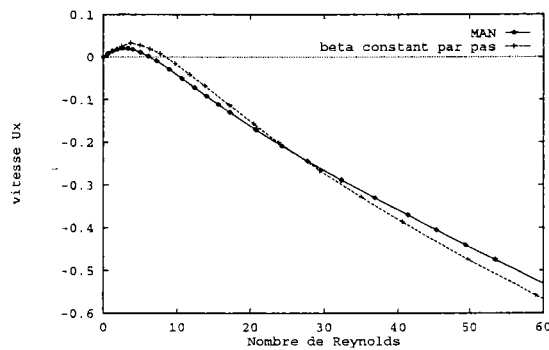
$$\left\{ \begin{array}{l} [K_t(U_0, \beta_0, U_p)] = [K_{uu}(u_p)] + [N_{uu}^{ns}(u_p, u_0)] + \beta_0 [N_{uu}^{ns}(u_p, u_0)] \\ [FQ(u_r, \beta_0)] = \sum_{r=1}^{p-1} [N_{uu}^{ns}(U_r, U_{p-r})] + \sum_{r=1}^{p-1} \beta_0 [N_{uu}^{ns}(U_r, U_{p-r})] \end{array} \right. \quad (\text{II.22})$$

avec  $\beta_0$  calculé en chaque début de pas. Un exemple de calcul avec cette méthode est donné au paragraphe suivant.

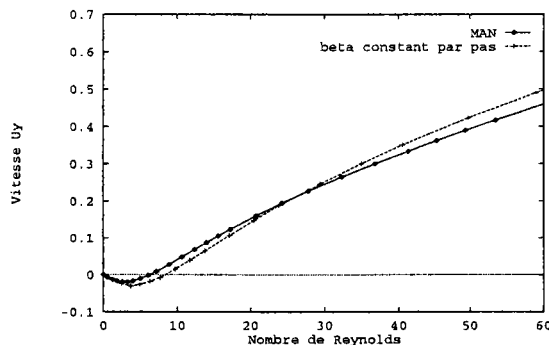
## II.4 Résultats et Discussion

### II.4.1 Méthode " $\beta$ constant par pas"

Sur les figures (II.7) les vitesses solutions de l'exemple de l'écoulement au dessus d'un obstacle carré (fig. II.1) sont tracées en fonction du nombre de Reynolds. Ce sont les vitesses d'un point situé derrière l'obstacle. La courbe "MAN" est la solution du problème (II.18) alors que la courbe "beta constant par pas" est celle des équations (II.22) (méthode " $\beta$  constant par pas"). Pour la méthode " $\beta$  constant par pas" le



(a) Vitesse  $U_x$  calculée avec la MAN, problème complet (II.21) et " $\beta$  constant par pas" (II.22)



(b) Vitesse  $U_y$  calculée avec la MAN, problème complet (II.21) et " $\beta$  constant par pas" (II.22)

FIG. II.7 – *Écoulement au dessus d'un obstacle carré*

terme de décentrage  $\beta$  est constant durant un pas de continuation et est réévalué à

chaque début de nouveau pas. Bien que la qualité de la solution de cette méthode dépende de la longueur des pas de la MAN (plus ceux-ci sont courts, plus la réévaluation de  $\beta$  est fréquente) nous ne la conseillons pas. En effet on voit sur la figure (II.7) que cette méthode ne donne que l'allure des courbes et non une solution "exacte". Il est préférable d'utiliser la procédure décrite au paragraphe (II.3.2) car  $\beta$  est évalué le long de la branche et non point par point. Il est cependant intéressant de remarquer que si  $\beta$  est constant durant un pas de continuation, on conserve alors le caractère quadratique des équations du problème continu.

## II.4.2 Résultats numériques

Cette partie porte sur l'exactitude des résultats déterminés avec la MAN comparée aux résultats numériques et expérimentaux trouvés dans la littérature.

Ainsi sur l'exemple de la cavité (pour lequel les conditions géométriques, ainsi que les vitesses imposées sont données sur la figure I.8 du chapitre I), les vitesses solutions calculées avec la MAN (ordre 15 et  $\varepsilon = 10^{-5}$ ) sont comparées avec les résultats de Ghia [26] et Zienkiewicz [32] (figures II.8, II.9, II.10). Le maillage est constitué de 900 éléments Q9/3D soit 7200 d.d.l. Pour atteindre une valeur du nombre de Reynolds de 400, le calcul a demandé 16 pas de continuation (soit 16 triangulations de matrice). Pour les trois valeurs du nombre de Reynolds (fig 8(a), 9(a), 10(a)) les solutions de la MAN sont en bon accord avec celles de la littérature.

Sur l'exemple de l'écoulement dans une marche (fig. II.11) le calcul a été mené jusqu'à une valeur 500 du nombre de Reynolds. Ce dernier est calculé à partir de la vitesse maximale du profil parabolique à l'entrée et de la hauteur de la marche. 700 éléments Q9/3D composent le maillage, ce qui représente un nombre de d.d.l. de 2971. Pour atteindre cette valeur du nombre de Reynolds, 69 pas de continuation ont été nécessaires (l'ordre de troncature des séries est 15 et  $\varepsilon = 10^{-3}$ ). Sur la figure (II.12) les profils des vitesses de la MAN pour plusieurs positions dans la marche (à  $Re=150$ ) sont comparés avec les résultats de Bogaerts [33]. Les solutions sont similaires. Afin

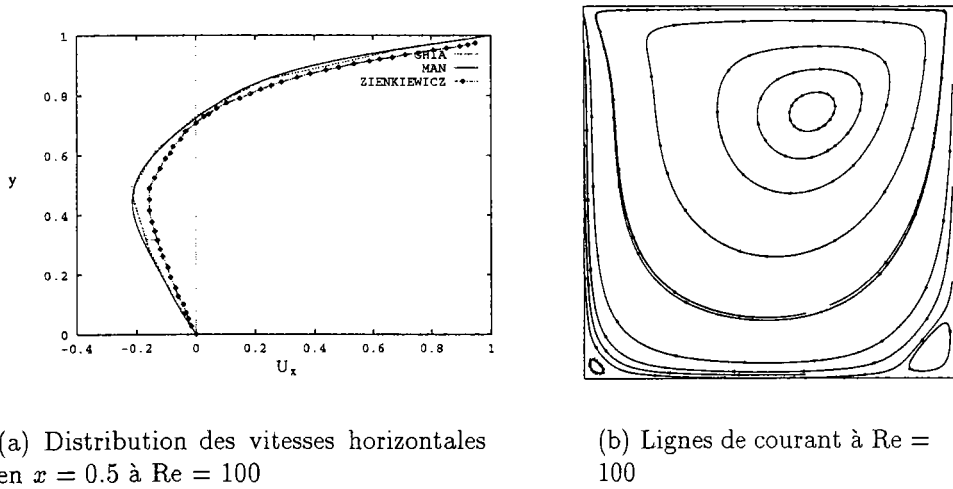


FIG. II.8 – Solutions calculées avec la MAN comparées aux solutions de Ghia [26] et Zienkiewicz [32], écoulement dans une cavité à  $Re = 100$

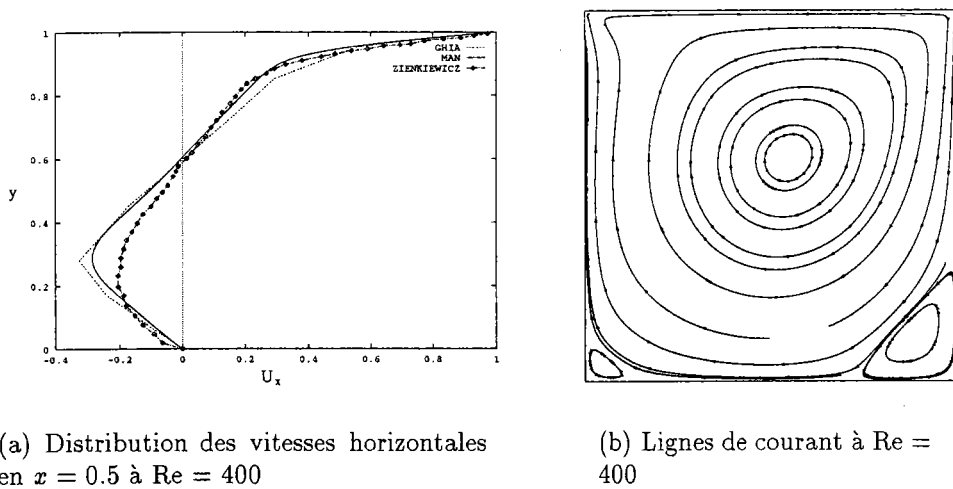


FIG. II.9 – Solutions calculées avec la MAN comparées aux solutions de Ghia [26] et Zienkiewicz [32], écoulement dans une cavité à  $Re = 400$

de montrer que les modifications que nous avons apportées aux relations originales de la formulation Petrov-Galerkin ne modifient pas l'évolution de l'écoulement lorsque le nombre de Reynolds augmente, les lignes de courant des solutions de la MAN sont présentées pour deux valeurs de Reynolds sur la figure (II.13). Belucci [34] et Armaly [35] décrivent la même évolution de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds. Pour des nombres de Reynolds inférieurs à 400, une seule zone de recirculation est visible. A partir de  $Re = 400$ , une deuxième zone apparaît.

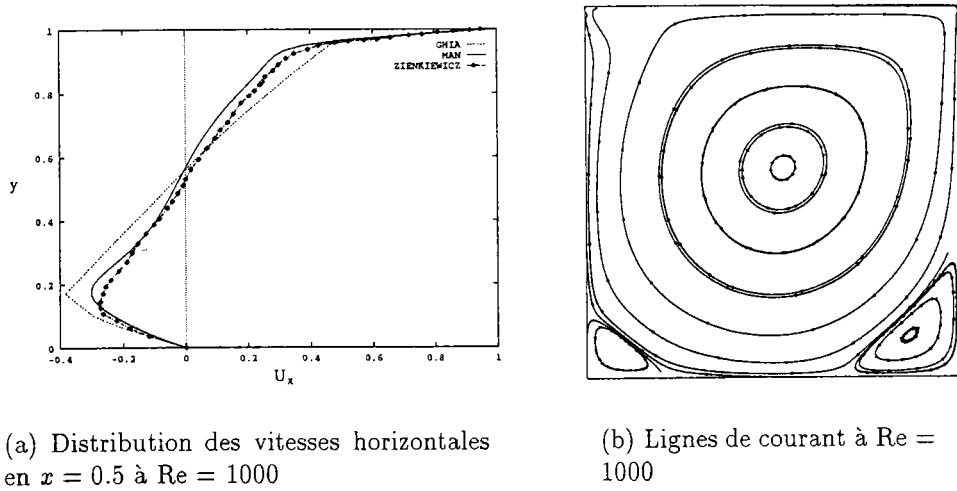


FIG. II.10 - Solutions calculées avec la MAN comparées aux solutions de Ghia [26] et Zienkiewicz [32], écoulement dans une cavité à  $Re = 1000$

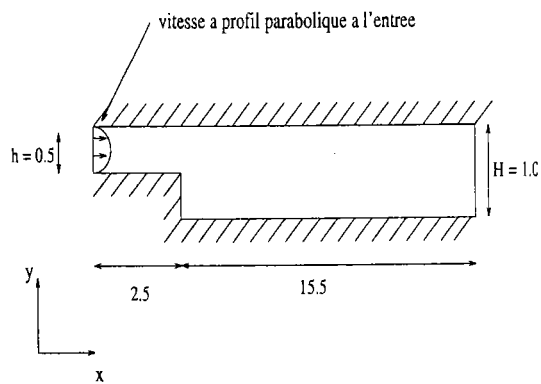


FIG. II.11 - Géométrie et conditions de vitesses imposées pour l'exemple de la marche

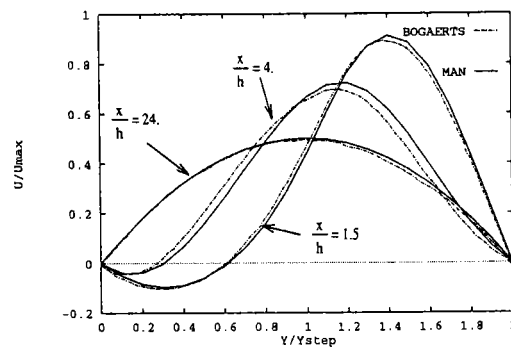
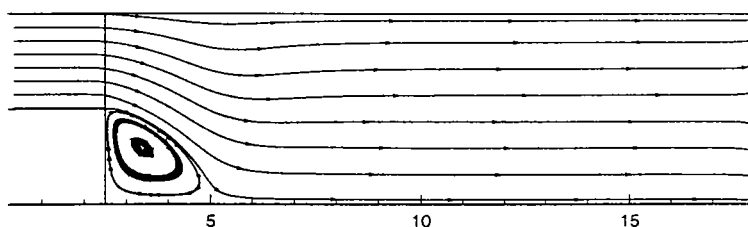
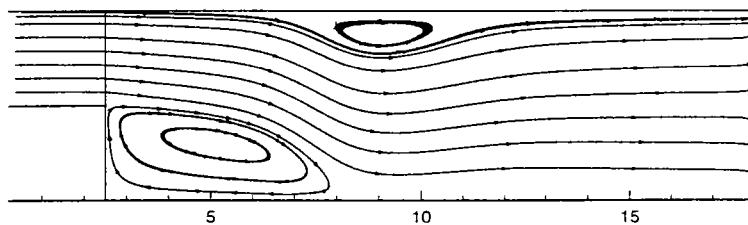


FIG. II.12 - Profils des vitesses horizontales pour  $Re=150$ , exemple de la marche

(a)  $Re = 150$ (b)  $Re = 500$ FIG. II.13 - Lignes de courant à  $Re=150$  et  $Re=500$ 

### II.4.3 Discussions

Nous allons maintenant nous attacher à la caractérisation de la valeur du paramètre de régularisation  $\eta$ . Tous les tests présentés ici sont réalisés sur l'exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (les caractéristiques géométriques et les conditions aux limites sont données figure I.1 du chapitre I). Plusieurs valeurs du paramètre  $\eta$  seront testées. Ainsi sur la figure (II.14) les solutions pour deux valeurs de  $\eta$  sont tracées en fonction du nombre de Reynolds. Le tableau (II.1) résume les performances de la MAN en fonction de la valeur de  $\eta$ . Les calculs sont menés jusqu'à un nombre de Reynolds de 40. Grâce à ce tableau on voit que le paramètre de régularisation

$\eta$	Nb de Triangul. de Mat.	temps CPU (s)	Norme du résidu
$\eta = 1$	13	1620	1
$\eta = 10^{-1}$	13	1620	$10^{-2}$
$\eta = 10^{-3}$	14	1800	$10^{-3}$
$\eta = 10^{-6}$	14	1800	$10^{-3}$

TAB. II.1 - Performances de la MAN pour plusieurs valeurs de  $\eta$



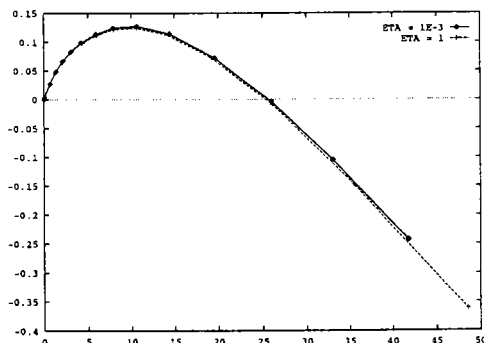


FIG. II.14 - *Écoulement autour d'un cylindre, solutions calculées avec la MAN pour  $\eta = 1$  et  $\eta = 10^{-3}$ , séries tronquées à l'ordre 7 et  $\varepsilon = 10^{-5}$*

influe très peu sur le nombre de triangulations de matrices, donc sur la longueur de pas de la technique de continuation. Par contre il influence la qualité de la solution (tableau II.1 et courbes II.14). A partir d'une certaine valeur de ce paramètre, aucune évolution n'est constatée. Ainsi  $\eta = 10^{-3}$  est une valeur acceptable. Pour tous les calculs de ce chapitre, la valeur de  $\eta$  est fixée à  $10^{-3}$ .

Dans le chapitre I nous avons comparé les performances de la MAN à celles de la méthode de Newton-Raphson. Nous allons réaliser la même étude avec la formulation Petrov-Galerkin. Trois calculs ont été étudiés avec la méthode de Newton-Raphson, quatre avec la MAN (tableau II.2). Les différences entre les trois calculs Newton-Raphson sont les valeurs des longueurs d'arc imposées ainsi que la qualité de la solution demandée. Les calculs avec la MAN sont réalisés avec la même valeur du paramètre  $\varepsilon$  ( $10^{-7}$ ), mais avec des ordres de troncature des séries différents. Les calculs sont menés jusqu'à un nombre de Reynolds égal à 40. Le tableau montre que pour une meilleure qualité de la solution, la MAN consomme moins de temps de calcul que la méthode de Newton-Raphson. Ainsi l'ordre 20 de la MAN a une meilleure qualité de solution que le cas 1 de Newton-Raphson pour un temps de calcul équivalent (tableau II.2).

Ce tableau montre aussi comme pour la formulation Galerkin (tableau I.1), que le nombre de triangulations de matrice décroît avec l'ordre de troncature des séries. Par

contre cette diminution ne s'accompagne pas pour tous les ordres d'une diminution du temps de calcul. Pour expliquer ce phénomène les temps de construction du second

Méthode	Nb de Triangul. de Mat.	temps CPU (s)	Norme du résidu
Newton-Raphson 1	57 (1 itér./pas)	4620	$10^{-2}$
Newton-Raphson 2	69 (2 itér./pas)	5760	$10^{-3}$
Newton-Raphson 3	126 (3 itér./pas)	10380	$10^{-4}$
MAN ordre 7	27	3360	$10^{-5}$
MAN ordre 10	18	2700	$10^{-5}$
MAN ordre 15	17	3420	$10^{-5}$
MAN ordre 20	17	4500	$10^{-5}$

TAB. II.2 – Comparaison entre la MAN et Newton-Raphson, exemple de l'écoulement autour d'un cylindre

membre  $FQ$  pour un pas de continuation sont donnés dans le tableau (II.3). Les temps de calculs nécessaires à la construction du second membre de la formulation Galerkin sont aussi indiqués. Ce tableau montre que comme pour la formulation Galerkin, il existe pour la formulation Petrov-Galerkin un ordre optimum de troncature des séries. Si pour la formulation Galerkin l'ordre 20 est l'ordre le plus performant, pour la formulation Petrov-Galerkin cela semble être l'ordre 10. Lorsque la série est tronquée à l'ordre 20, pour la formulation Petrov-Galerkin, le temps de construction du second membre est pratiquement équivalent à trois triangulations de matrice.

Cette explosion du temps de construction du second membre vient de la difficulté à évaluer la relation (II.20) lorsque l'ordre de troncature est grand. Cette difficulté ou cette augmentation du temps CPU est propre à la formulation Petrov-Galerkin. En effet, on constate également, en comparant les résultats du chapitre I (tableau I.1) avec ceux du tableau II.2, une augmentation du temps de calcul de la méthode Newton-Raphson avec la formulation Petrov-Galerkin, pour une qualité de solution inférieure à celle obtenue avec la formulation Galerkin.

Ordre	Galerkin	Petrov-Galerkin
7	21	44
10	26	70
15	33	121
20	49	224
Temps C.P.U. pour une triang. Mat.	80	80

TAB. II.3 – Temps C.P.U. nécessaires à la construction du second membre  $FQ$  pour un pas de continuation et pour les deux formulations

## II.4.4 Place mémoire

Comme nous l'avons fait pour la formulation Galerkin (chapitre I), nous allons regarder en détail la place mémoire occupée par les variables de la formulation Petrov-Galerkin (Tableau II.4) pour plusieurs ordres de troncature des séries. Comme on pouvait s'en douter (car toutes les nouvelles variables sont des quantités élémentaires) le stockage de ces nouvelles variables représente (pour l'ordre 20) moins de 3% de la taille totale. La matrice tangente occupe la majorité de l'espace mémoire. Ainsi, l'introduction de ces nouvelles variables, qui permettent de travailler avec des relations bien adaptées aux développements asymptotiques, n'est en rien pénalisant au niveau du stockage des données.

Quantité	ordre 10	ordre 15	ordre 20
$[K_t]$	$12,8.10^6$ ( 85,1 %)	$12,8.10^6$ ( 79 %)	$12,8.10^6$ ( 74 %)
$V$	$0,3.10^6$ ( 2 %)	$0,4.10^6$ ( 2,5 %)	$0,5.10^6$ ( 2,9 %)
$U$	$0,6.10^6$ ( 4 %)	$0,9.10^6$ ( 5,5 %)	$1,2.10^6$ ( 7 %)
$\nabla U$	$1,2.10^6$ ( 8 %)	$1,8.10^6$ ( 11,2 %)	$2,4.10^6$ ( 13,7 %)
Sous-total	$15.10^6$ ( 99,1 %)	$16.10^6$ ( 98,2 %)	$17.10^6$ ( 97,6 %)
Quantité Petrov-Galerkin			
$\alpha$	$0,02.10^6$ ( 0,15 %)	$0,04.10^6$ ( 0,25 %)	$0,06.10^6$ ( 0,35 %)
$Re_e$	$0,02.10^6$ ( 0,15 %)	$0,04.10^6$ ( 0,25 %)	$0,06.10^6$ ( 0,35 %)
$\beta$	$0,04.10^6$ ( 0,3 %)	$0,08.10^6$ ( 0,5 %)	$0,12.10^6$ ( 0,7 %)
$U_i$	$0,04.10^6$ ( 0,3 %)	$0,08.10^6$ ( 0,5 %)	$0,12.10^6$ ( 0,7 %)
$\gamma$	$0,02.10^6$ ( 0,15 %)	$0,04.10^6$ ( 0,25 %)	$0,06.10^6$ ( 0,35 %)
Sous-total	$0,14.10^6$ ( 0,9 %)	$0,28.10^6$ ( 1,8 %)	$0,42.10^6$ ( 2,4 %)
Total	$15,04.10^6$ ( 100 %)	$16,18.10^6$ ( 100 %)	$17,32.10^6$ ( 100 %)

TAB. II.4 – Nombre de réels stockés pour différents ordres de troncature des séries

## II.4.5 Influence du maillage

Dans ce paragraphe nous allons effectuer une comparaison entre les solutions obtenues avec les deux formulations. Cette étude n'a pas pour objectif d'affirmer la supériorité de l'une des deux méthodes mais de répondre simplement à une curiosité scientifique.

La formulation Petrov Galerkin permet de supprimer des oscillations parasites qui naissent dans le champ de vitesses de l'écoulement lorsque l'on utilise une formulation Galerkin. Mais même si cette méthode donne de bons résultats, son utilisation ne fait pas l'unanimité chez les numériciens. Ainsi Gresho [30] ne la conseille pas : il préconise au contraire d'utiliser la formulation Galerkin en raffinant le maillage. Sur l'exemple de l'écoulement autour d'un obstacle (fig. II.3), il propose un maillage (fig. II.2) qui permet de supprimer ces oscillations parasites. Nous nous sommes intéressés sur cet exemple à l'étude de l'évolution des solutions de la formulation Galerkin en fonction de la finesse du maillage. Sachant que sur cet exemple nous connaissons les zones où le raffinement était fortement conseillé. Sur la figure (II.15) la courbe

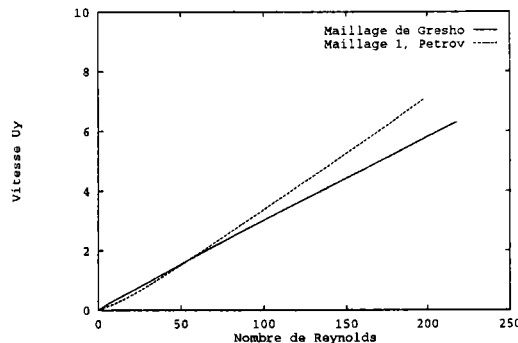


FIG. II.15 – *Comparaison des vitesses obtenues avec deux maillages et deux formulations différents*

”Maillage de Gresho” est la solution obtenue avec le maillage de Gresho et la formulation Galerkin. La courbe ”Maillage 1 : Petrov” est celle obtenue avec le maillage (17(a)) et la formulation Petrov-Galerkin. Les courbes présentées sont l'évolution des vitesses suivant  $y$  d'un point situé en amont de l'obstacle en fonction du nombre de

Reynolds. La solution du calcul avec la pondération Petrov-Galerkin est bonne car si l'on regarde la solution obtenue avec le même maillage mais avec une formulation Galerkin (fig. 16(b)) on voit que la vitesse est négative devant l'obstacle (solution parasite). Ainsi en faisant évoluer le nombre de d.d.l. du maillage (figures 16(b) et 16(c)), la vitesse devant l'obstacle devient aussi négative mais pour des valeurs supérieures du nombre de Reynolds. On constate ici que l'augmentation du nombre de d.d.l. retarde l'apparition des phénomènes parasites. Enfin, sur la courbe (16(d)), la vitesse est positive devant l'obstacle pour toute la plage de valeur du nombre de Reynolds décrite. On considère alors que la solution est bonne et que les phénomènes parasites ont bien disparu, ce qui confirme les conclusions de Gresho sur l'influence de la finesse du maillage. Cependant, la formulation Petrov-Galerkin atteint le même résultat avec un nombre de d.d.l. beaucoup moins important. Ceci permet d'atténuer l'un des inconvénients apparents de la MAN appliquée à la formulation Petrov-Galerkin : le coût plus élevé de construction du second membre  $FQ$ .

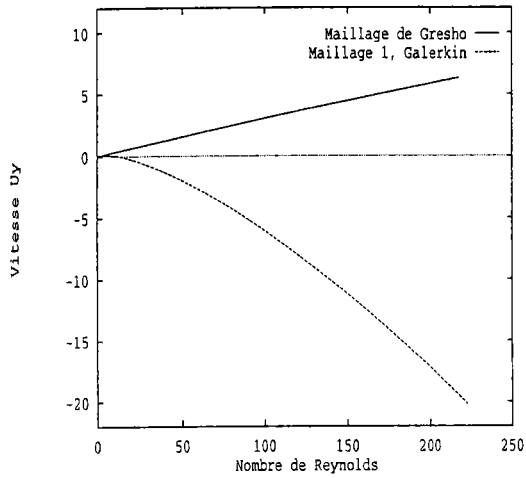
## II.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré que grâce à certaines modifications des relations initiales de la formulation Petrov-Galerkin et à l'introduction de nouvelles variables, la MAN conserve ses avantages et ses particularités : rapidité de calcul, description analytique de la branche solution, précision de la solution. Ainsi les temps de calcul de la MAN sont généralement inférieurs à ceux de la méthode de Newton-Raphson pour une meilleure qualité de la solution. Nous avons également constaté que, sur un problème où les non-linéarités ne sont plus quadratiques, l'ordre optimum de troncature des séries n'est plus 20 mais 10. Cette différence s'explique par la difficulté à évaluer le second membre pour des ordres élevés. En effet pour des ordres supérieurs à 10, le temps CPU nécessaire à la construction du vecteur second membre dépasse celui d'une triangulation de matrice.

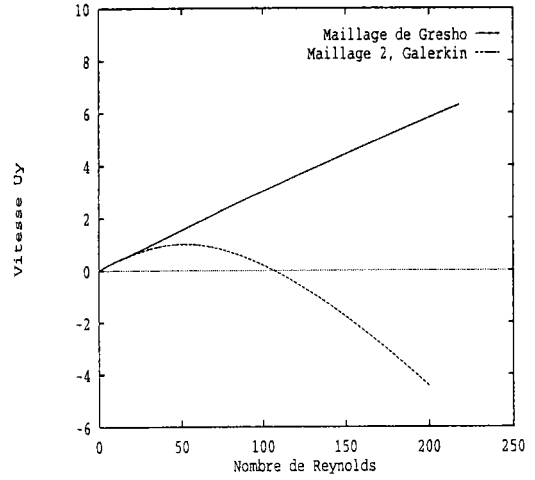
Mais le domaine d'application de la formulation Petrov-Galerkin ne se limite pas

à la mécanique des fluides. On retrouve également cette formulation pour résoudre numériquement des problèmes de transport convectif de la chaleur (Hughes [31]) ou bien de laminage (Hacquín [36]). On pourrait ainsi à l'avenir élargir le champ d'application de la MAN à ces deux problèmes.

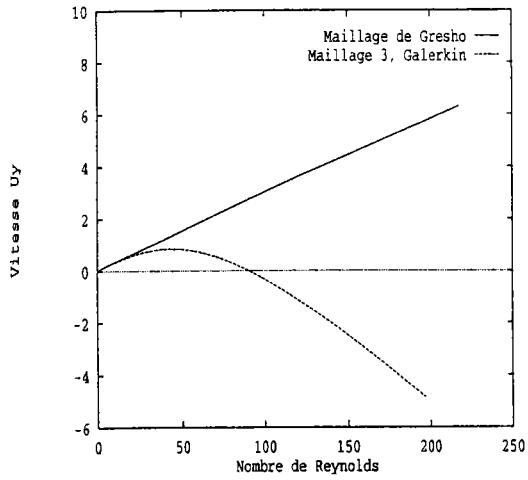
Mais le grand enseignement de ce chapitre est que conceptuellement nous savons appliquer la MAN à des problèmes où les non linéarités ne sont pas quadratiques à la base.



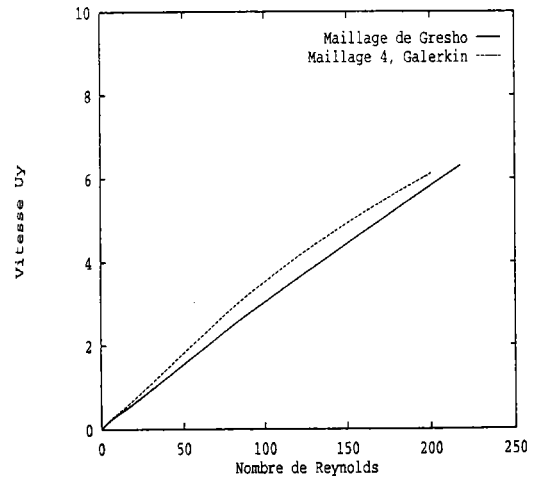
(a) Maillage 1 et Gresho (fig. II.2)



(b) Maillage 2 et Gresho (fig. II.2)

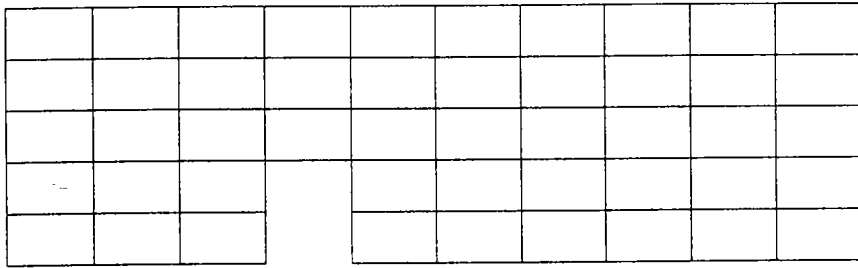


(c) Maillage 3 et Gresho (fig. II.2)

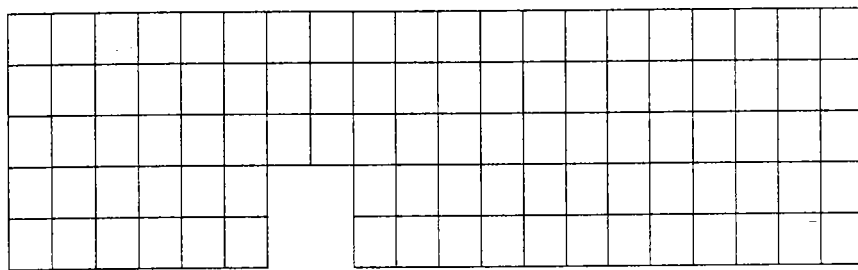


(d) Maillage 4 et Gresho (fig. II.2)

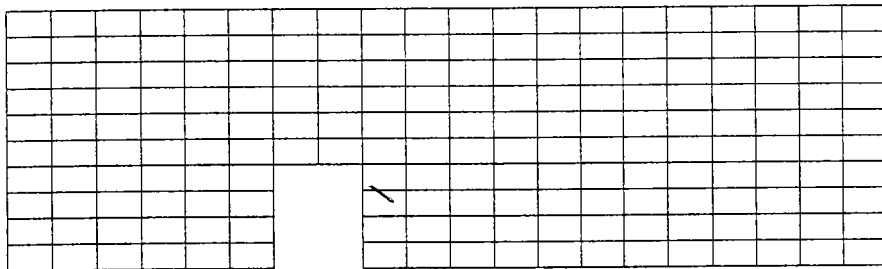
FIG. II.16 – Evolution de la solution en fonction du maillage (formulation Galerkin)



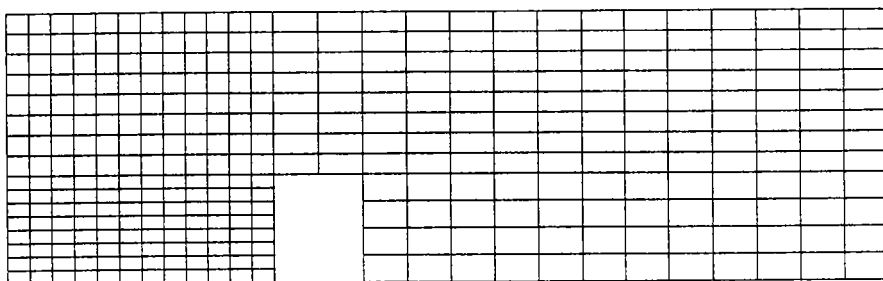
(a) Maillage 1 : 550 d.d.l., 48 éléments



(b) Maillage 2 : 880 d.d.l., 96 éléments



(c) Maillage 3 : 1700 d.d.l., 192 éléments



(d) Maillage 4 : 3000 d.d.l., 352 éléments

FIG. II.17 -- Illustration des différents maillages utilisés



## CHAPITRE III

# Indicateur de bifurcation stationnaire

Dans ce court chapitre nous allons nous intéresser à la détection des bifurcations stationnaires pouvant intervenir dans un écoulement. Même si le nombre de travaux numériques concernant ce sujet n'est pas très élevé, ces phénomènes existent et sont généralement spectaculaires, au sens où ils se caractérisent par une rupture de symétrie de l'écoulement. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Seydel [37] et à la thèse de Boutyours [23] pour les notions de stabilité, de points singuliers et de méthodes usuelles de calculs de ces points.

Nous allons introduire dans ce chapitre un indicateur de bifurcation qui est bien adapté aux développements asymptotiques détaillés aux chapitres I et II. Cet indicateur a été initialement proposé par Boutyours [38], [23] pour le calcul de bifurcations de structures élastiques. Dans sa thèse Tri [16] avait introduit cet indicateur pour les écoulements de fluides visqueux incompressibles.

Dans ce chapitre nous adaptons cet indicateur pour l'appliquer aux équations stationnaires de Navier-Stokes avec les formulations Galerkin et Petrov-Galerkin. Ce chapitre permettra d'introduire des notions élémentaires sur les équations d'équilibres perturbées qui seront reprises au chapitre suivant pour caractériser la bifurcation de Hopf. Nous montrerons dans ce chapitre qu'au voisinage d'une bifurcation stationnaire, on assiste à des accumulations de pas de la technique de continuation.

Finalement nous comparons les résultats du calcul de l'indicateur pour les formula-

tions Galerkin et Petrov-Galerkin sur un exemple dont on connaît expérimentalement et numériquement les solutions.

### III.1 Indicateur de bifurcation

Les équations stationnaires de Navier-Stokes s'écrivent pour la formulation Galerkin :

$$\begin{cases} L(U) + Q(U, U) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \lambda u_d & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

et pour la formulation Petrov-Galerkin :

$$\begin{cases} L(U) + \beta(U).Q(U, U) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \lambda u_d & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Supposons que l'on a déterminé la branche de solutions qui passe par un point donné  $(U_0, \lambda_0)$  solution de (III.1) ou (III.2). Pour détecter les éventuelles bifurcations stationnaires sur cette branche fondamentale au voisinage de  $(U_0, \lambda_0)$ , on introduit une perturbation en force  $\mu f$  où  $\mu$  représente l'intensité de cette perturbation et  $f$  un vecteur force aléatoire. La réponse à cette perturbation est une fluctuation en vitesse  $\Delta\mathcal{V}$  :

$$U = U_f + \Delta\mathcal{V} \quad (\text{III.3})$$

La relation (III.3) est introduite dans l'équation d'équilibre (III.2),

$$\begin{cases} L(U_f + \Delta\mathcal{V}) + \beta(U_f + \Delta\mathcal{V}).Q(U_f + \Delta\mathcal{V}, U_f + \Delta\mathcal{V}) = \mu.f & \text{dans } \Omega \\ u_f + \Delta\mathcal{V} = \lambda u_d & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

Le terme  $\beta(U_f + \Delta\mathcal{V})$  représentant la formulation Petrov-Galerkin est approximé par un développement de Taylor au voisinage de  $U_f$  tronqué à l'ordre 1 :

$$\beta(U_f + \Delta\mathcal{V}) = \beta(U_f) + \frac{\partial\beta(U_f)}{\partial U}.\Delta\mathcal{V} \quad (\text{III.5})$$

En introduisant cette expression dans l'équation (III.4) et en négligeant les termes non linéaires en  $\Delta\mathcal{V}$ , on obtient l'équation d'équilibre linéarisée perturbée suivante :

$$\begin{cases} L(\Delta\mathcal{V}) + \beta(U_f).\tilde{Q}(U_f, \Delta\mathcal{V}) + \frac{\partial\beta(U_f)}{\partial U}.Q(U_f, U_f).\Delta\mathcal{V} = \mu.f & \text{dans } \Omega \\ \Delta\mathcal{V} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{III.6})$$

avec  $\tilde{Q}(U_f, \Delta\mathcal{V})$  l'opérateur bilinéaire symétrique. L'équation d'équilibre perturbée (III.6) est écrite en tenant compte du fait que  $U_f$  est une solution de (III.1).

Pour écrire l'équation d'équilibre perturbée de la formulation Galerkin, l'équation (III.3) est introduite dans l'équation d'équilibre (III.1), en négligeant les termes non linéaires en  $\Delta\mathcal{V}$ . On obtient alors

$$\begin{cases} L(\Delta\mathcal{V}) + \tilde{Q}(U_f, \Delta\mathcal{V}) = \mu \cdot f & \text{dans } \Omega \\ \Delta\mathcal{V} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{III.7})$$

Dans les problèmes (III.6) et (III.7) le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Pour que le problème soit bien posé et que l'on ait une solution unique on ajoute une équation. Lors des précédentes applications en mécanique du solide (Boutyour [23]) ou en mécanique des fluides (Tri [16]), on imposait que l'incrément en vitesse  $\Delta\mathcal{V} - \Delta\mathcal{V}_0$  soit orthogonal à  $\Delta\mathcal{V}_0$ ,

$$\langle \Delta\mathcal{V} - \Delta\mathcal{V}_0, \Delta\mathcal{V}_0 \rangle = 0 \quad (\text{III.8})$$

où  $\Delta\mathcal{V}_0$  est la réponse à la perturbation  $f$  au point de départ  $(U_0, \lambda_0)$  considéré, soit :

$$\begin{cases} L_t(\Delta\mathcal{V}_0) = f \\ \mu_0 = 1 \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

avec  $L_t(\Delta\mathcal{V})$ , l'opérateur tangent au point  $(U_0, \lambda_0)$ .

Cet opérateur est défini par :

$$\begin{cases} \text{pour la formulation Galerkin} \\ L_t(\Delta\mathcal{V}) = L(\Delta\mathcal{V}) + \tilde{Q}(\Delta\mathcal{V}, U_f) \\ \text{et pour la formulation Petrov-Galerkin,} \\ L_t(\Delta\mathcal{V}) = L(\Delta\mathcal{V}) + \beta(U_f) \cdot \tilde{Q}(U_f, \Delta\mathcal{V}) + \frac{\partial\beta(U_f)}{\partial U} \cdot Q(U_f, U_f) \cdot \Delta\mathcal{V} \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

Le problème complet pour les deux formulations s'écrit finalement :

$$\begin{cases} L_t(\Delta\mathcal{V}) = \mu \cdot f & \text{dans } \Omega \\ \Delta\mathcal{V} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_u \\ \langle \Delta\mathcal{V} - \Delta\mathcal{V}_0, \Delta\mathcal{V}_0 \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{III.11})$$

L'intensité  $\mu$  de la perturbation s'apparente ici à une mesure de rigidité ; un point de bifurcation stationnaire sur la branche fondamentale correspond à la perte de cette rigidité, c'est-à-dire à l'annulation de  $\mu$ .

En résumé, le scalaire  $\mu$  défini le long de la branche par (III.11) s'annule en tous les points où l'opérateur  $L_t$  est singulier (bifurcation ou point limite en  $\lambda$ ). C'est notre indicateur de bifurcation.

## III.2 Calcul numérique de l'indicateur

La discrétisation par la méthode des éléments finis des équations (III.11) conduit à résoudre pour chaque valeur du nombre de Reynolds, ou pour chaque point de la branche fondamentale, le problème discret suivant :

$$\begin{cases} [K_t(U_f)] \cdot \{\Delta \mathcal{V}\} = \mu \cdot \{f\} \text{ dans } \Omega \\ \Delta \mathcal{V} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \langle \Delta \mathcal{V} - \Delta \mathcal{V}_0, \Delta \mathcal{V}_0 \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

avec  $\Delta \mathcal{V}_0$  solution de :

$$\begin{cases} \{\Delta \mathcal{V}_0\} = [K_t(U_{f_0})]^{-1} \cdot \{f\} \text{ dans } \Omega \\ \Delta \mathcal{V}_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \mu_0 = 1 \end{cases} \quad (\text{III.13})$$

où  $[K_t(U_f)]$  est la traditionnelle matrice tangente au point de la branche fondamentale  $(U_f, \lambda)$ . Cette matrice correspond à la discrétisation par la méthode des éléments finis de l'opérateur tangent  $L_t(\Delta \mathcal{V})$ . Pour chaque valeur du nombre de Reynolds, pour chaque point  $(U_f, \lambda_f)$  de la branche fondamentale, on calcule l'indicateur et le mode de bifurcation grâce aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \mu = \frac{\langle \Delta \mathcal{V}_0, \Delta \mathcal{V}_0 \rangle}{\langle [K_t(U_f)]^{-1} \cdot \{f\}, \Delta \mathcal{V}_0 \rangle} \\ \{\Delta \mathcal{V}\} = \mu \cdot [K_t(U_f)]^{-1} \cdot \{f\} \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

## III.3 Remarques

Dans les applications précédentes en mécanique du solide (Boutyour [23]) ou en mécanique des fluides (Tri [16]), l'indicateur de bifurcation  $\mu$  et la fluctuation  $\Delta \mathcal{V}$

sont développés en séries entières du paramètre de chemin "a". En introduisant ces développements asymptotiques dans le problème perturbé et en identifiant suivant les puissances de "a", on obtient à chaque ordre un problème perturbé qui admet le même opérateur tangent que celui qui avait servi à déterminer la branche fondamentale. Une telle méthode permet de calculer l'indicateur de bifurcation avec un temps de calcul dérisoire puisque l'on a besoin que de la construction de vecteurs second membre.

Pour la formulation Galerkin (equation III.7) la recherche de l'indicateur et du mode de bifurcation sous la forme de séries entières du paramètre de chemin "a" est identique aux problèmes précédemment cités, puisque la non linéarité des équations est quadratique.

Pour la formulation Petrov-Galerkin on propose dans ce paragraphe une méthode permettant d'introduire les développements asymptotiques dans l'équation d'équilibre perturbée. Pour déterminer le problème perturbé on pose alors :

$$\begin{cases} U = U_f + \Delta V \\ \beta = \beta_f + \Delta \beta \\ \alpha = \alpha_f + \Delta \alpha \\ Re_e = Re_{e_f} + \Delta Re_e \\ \gamma = \gamma_f + \Delta \gamma \end{cases} \quad (III.15)$$

avec les paramètres  $\alpha$ ,  $Re_e$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  relatifs à la formulation Petrov-Galerkin introduite au chapitre II. Les variables  $(U_f, \beta_f, \alpha_f, Re_{e_f}, \gamma_f)$  sont solutions du problème fondamental, elles vérifient donc les relations :

$$\begin{cases} L(U_f) + \beta_f \cdot Q(U_f, U_f) = \lambda \cdot F \\ \beta_f = \beta(U_f) = \frac{\alpha_f}{\gamma_f} U_{i_f} c_i \\ \gamma_f^2 = U_{x_f}^2 + U_{y_f}^2 + \eta^2 \\ Re_{e_f} = \frac{\gamma_f h}{2\nu} \\ \alpha_f = \frac{Re_{e_f}}{(Re_{e_f} + 1)} \end{cases} \quad (III.16)$$

On introduit les définitions (III.15) dans les expressions (II.3), (II.6), (II.9), (II.10) du chapitre (II); en tenant compte des expressions (III.16), on obtient un nouveau

problème linéarisé perturbé défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\Delta V) + \beta_f \tilde{Q}(\Delta V, U_f) + \Delta \beta \cdot Q(U_f, U_f) = \mu \cdot f \\ \Delta \beta = \left\{ \frac{\alpha_f \cdot \Delta U_i + \Delta \alpha \cdot U_{if}}{\gamma_f} \right\} \cdot C_i - \frac{\beta_f \cdot \Delta \gamma}{\gamma_f} \\ \Delta \alpha = \frac{\Delta Re_e (1 - \alpha_f)}{1 + Re_e} \\ \Delta \gamma = \frac{U_{xf} \cdot \Delta U_x + U_{yf} \cdot \Delta U_y}{\gamma_f} \\ \Delta Re_e = \frac{\Delta \gamma \cdot h}{2 \cdot \nu} \end{array} \right. \quad (\text{III.17})$$

Dans ce dernier on peut introduire les développements asymptotiques des variables  $(\mu, \Delta V, \Delta \beta, \Delta \alpha, \Delta \gamma, \Delta Re_e, U_f, \lambda)$  en fonction du paramètre de chemin "a". En identifiant suivant les puissances de "a" on obtient alors un ensemble de problèmes linéaires avec le même opérateur tangent. Ainsi grâce à une seule triangulation de matrice, une partie de la courbe de l'indicateur et du mode de bifurcation est connue sous forme analytique.

Nous n'avons pas programmé la recherche de l'indicateur par une méthode asymptotique car nous n'avons pas cherché dans ce travail à disposer d'un outil de calcul de l'indicateur le plus performant possible au sens de temps de calcul mais plutôt un outil fiable et efficace. Nous voulions de plus vérifier que les zones d'accumulation de pas de la méthode de continuation correspondaient à des points de bifurcation stationnaire. Le calcul exact de l'indicateur suffit alors pour vérifier cette hypothèse. C'est pourquoi en chaque point de la solution fondamentale (pour chaque valeur du nombre de Reynolds), on évaluera l'indicateur de bifurcation par la méthode exacte grâce aux relations (III.14).

## III.4 Résultats

### III.4.1 Écoulement dans un tunnel avec élargissement brusque

L'exemple que nous présentons pour illustrer le calcul de l'indicateur de bifurcation est celui de l'écoulement d'un fluide dans un tunnel avec un élargissement brusque

([39]). Les données géométriques, les conditions aux limites ainsi que les caractéristiques du fluide sont données figure (III.1). Deux maillages ont été utilisés pour les calculs. Le premier est constitué de 349 éléments Q9 soit 3026 degrés de liberté et le deuxième de 642 éléments pour un nombre de degrés de liberté de 5542.

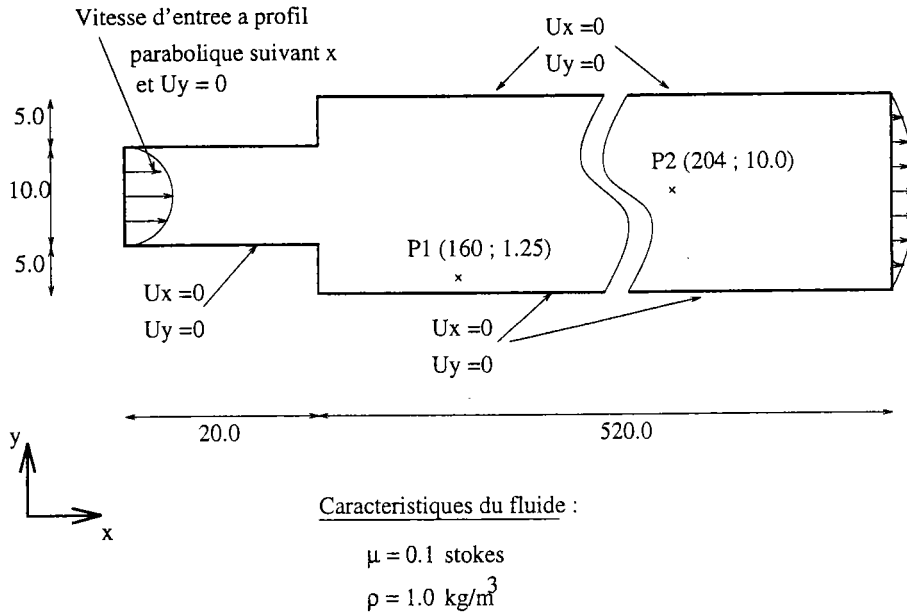


FIG. III.1 – Description de la géométrie, des conditions aux limites et des caractéristiques du fluide pour l'écoulement dans un tunnel avec un élargissement brusque.

Nous allons ici calculer l'indicateur de bifurcation le long de la branche fondamentale. La solution fondamentale est déterminée par la Méthode Asymptotique Numérique. Mais grâce à l'expérience que nous avons de la bifurcation stationnaire, nous savons qu'au voisinage d'une bifurcation (ainsi que d'un point limite) se produit un phénomène d'accumulation de pas. Il n'est pas nécessaire de calculer l'indicateur sur la totalité de la branche fondamentale mais seulement là où ces zones d'accumulation de pas apparaissent. C'est en quelque sorte un critère visuel de détection de bifurcation. C'est cette démarche que nous avons utilisé concernant l'exemple de l'écoulement dans un tunnel. Nous avons lancé un premier calcul pour déterminer la branche fondamentale avec la M.A.N. Les séries sont tronquées à l'ordre 15 et le paramètre  $\epsilon$  vaut  $10^{-8}$ . La vitesse solution suivant l'axe x d'un point noté P1 sur la figure (III.1) est tracée en fonction du nombre Reynolds de l'écoulement sur la figure



(III.2). Le nombre de Reynolds est calculé à partir de la vitesse maximale du profil parabolique des vitesses à l'entrée du tunnel et de la hauteur du tunnel avant l'élargissement. Une zone d'accumulation de pas apparaît pour un nombre de Reynolds environ égal à 250. Cette courbe a été obtenue en utilisant la formulation Galerkin.

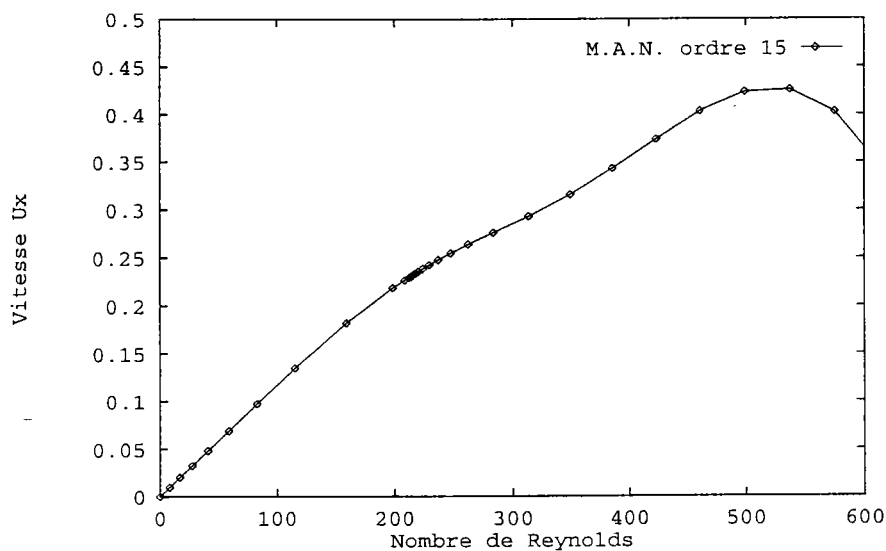


FIG. III.2 – *Mise en évidence des accumulations de pas au voisinage d'un point de bifurcation, vitesse suivant  $x$  d'un point noté P1 sur la figure (III.1), formulation Galerkin.*

### III.4.2 Formulation Galerkin

Nous venons de voir que pour un nombre de Reynolds voisin de 250, nous avons une accumulation de pas. Nous allons lancer l'algorithme de détection de bifurcation stationnaire dans cette zone. Le résultat du calcul de l'indicateur est donné figure (4(a)). L'indicateur de bifurcation s'annule pour un Reynolds compris entre 214 et 216.

Lorsque le point de bifurcation est déterminé, il est alors intéressant de calculer les branches bifurquées en ce point. Il est possible d'utiliser la méthode proposée par Vannucci ([37], [40]) et appliquée avec succès en élasticité non linéaire. Il calcule les solutions du problème non-linéaire avec la M.A.N. Sur ces courbes solutions, il détermine les points de bifurcation avec l'indicateur présenté ici puis, résout en ces

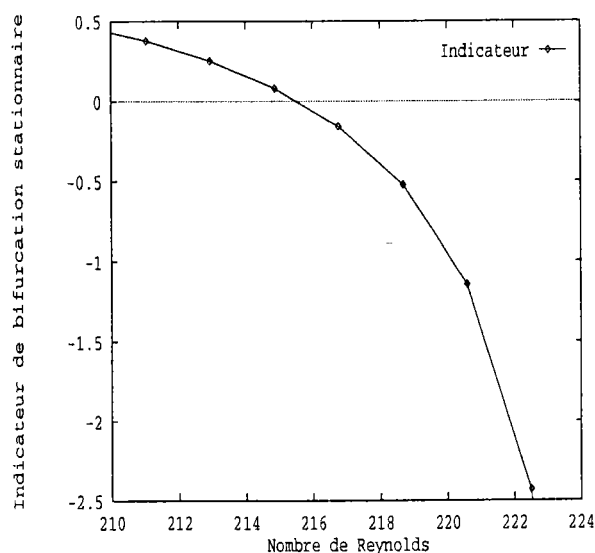
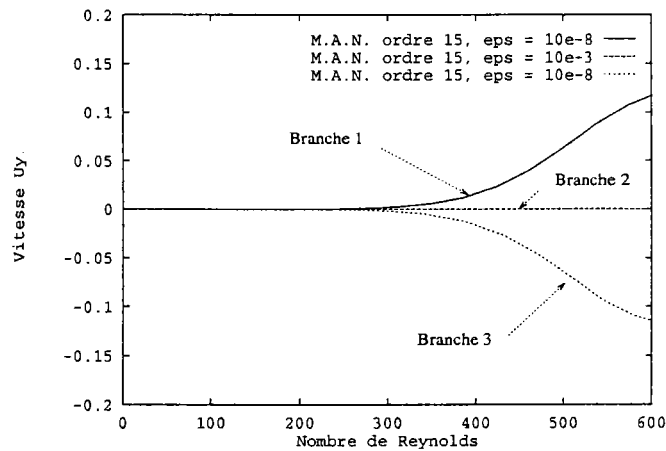


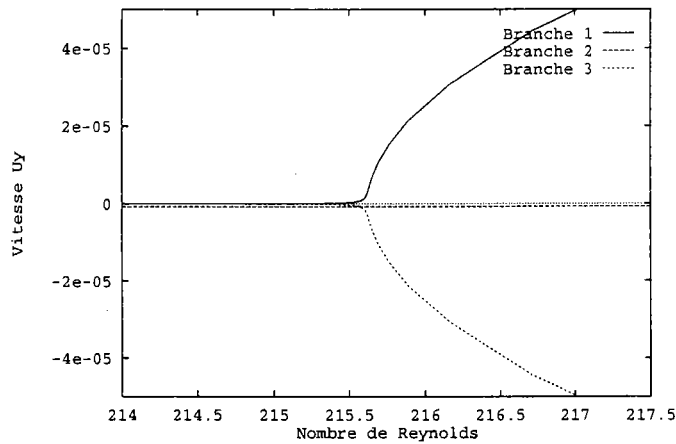
FIG. III.3 – Indicateur de bifurcation en fonction du nombre de Reynolds, bifurcation stationnaire pour  $Re = 215$ , formulation Galerkin.

points le problème aux tangentes. Bien que cette méthode ne sera pas appliquée ici aux fluides visqueux incompressibles, la M.A.N. offre la possibilité de déterminer quelques unes de ces branches bifurquées en ne faisant varier que quelques paramètres. Ainsi, sur l'exemple précédent, les branches notées 1 et 2 sur la figure (4(a)) ont été calculées avec des séries tronquées à l'ordre 15 et un paramètre  $\varepsilon$  égal à  $10^{-8}$  pour la branche 1 et  $10^{-3}$  pour la branche 2. Ces courbes sont les vitesses suivant  $y$  d'un point noté  $P2$  sur la figure (III.1). La branche 3 a été déterminée en utilisant un deuxième maillage.

Cette particularité de la M.A.N. pour le calcul des branches bifurquées vient du fait qu'en modifiant les paramètres du calcul, on introduit alors des perturbations numériques aiguillant les solutions vers telle ou telle branche bifurquée. Ainsi, lorsque l'on utilise un paramètre  $\varepsilon$  grand (cas de la branche 1) les longueurs de chaque pas de continuation sont grandes. Dans le cas de la branche 2, on a très bien pu ainsi "sauter" la bifurcation à  $Re = 215$ . Pour bien distinguer les trois branches bifurquées, les lignes de courant correspondant à ces trois branches sont présentées figures (III.5, III.6 et III.7) pour un nombre de Reynolds égal à 600. Le point de bifurcation que nous avons détecté précédemment correspond à une perte de symétrie de l'écoulement.



(a) Branches bifurquées et fondamentale



(b) Zoom des branches bifurquées et fondamentale

FIG. III.4 – Solutions obtenues avec la M.A.N. en utilisant deux maillages et des paramètres différents, vitesse suivant  $y$  d'un noeud noté P2 sur la figure (III.1), formulation Galerkin.

Ce phénomène a été observé expérimentalement par Durst [39] mais pour un nombre de Reynolds proche de 125. Sur ce même exemple Shapira et al. [41] ont effectué une analyse linéaire de la stabilité. Ils ont trouvé que pour un nombre de Reynolds compris entre 212 et 216, une valeur propre changeait de signe, indiquant donc une bifurcation stationnaire. Ceci correspond à la valeur pour laquelle notre indicateur de bifurcation s'est annulé ainsi qu'au début de l'écoulement antisymétrique.

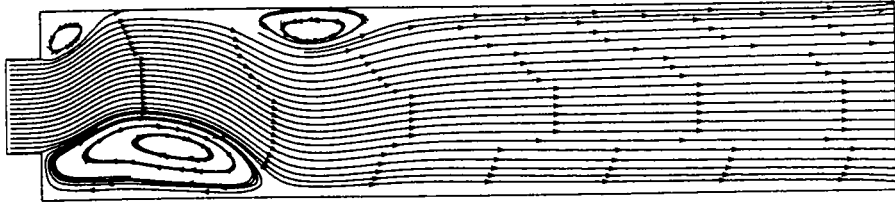


FIG. III.5 – Lignes de courant à Reynolds égal 600 sur la branche bifurquée 1 de la figure (4(a)), formulation Galerkin

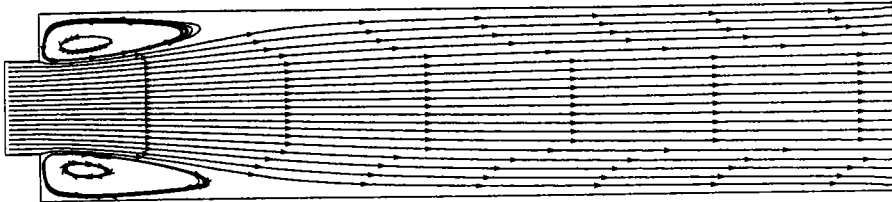


FIG. III.6 – Lignes de courant à Reynolds égal 600 sur la branche fondamentale 2 de la figure (4(a)), formulation Galerkin

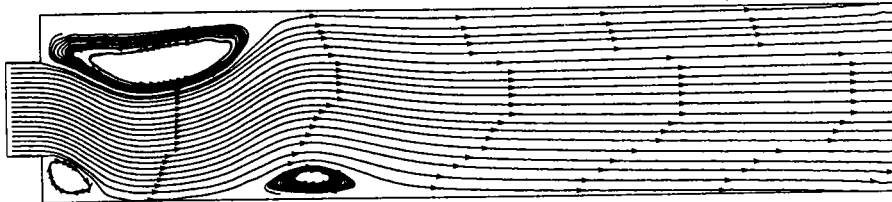


FIG. III.7 – Lignes de courant à Reynolds égal 600 sur la branche bifurquée 3 de la figure (4(a)).

### III.4.3 Formulation Petrov-Galerkin

Le même problème a été résolu avec la formulation Petrov-Galerkin. Sur la figure (III.8), un phénomène identique d'accumulation de pas au voisinage d'un point singulier est observé. L'indicateur de bifurcation a été déclenché pour un nombre de Reynolds compris entre 200 et 300. Figure (III.9), l'indicateur s'annule pour un nombre de Reynolds de 240 indiquant ainsi une bifurcation stationnaire pour cette valeur.

La M.A.N. conserve avec la formulation Petrov-Galerkin la même particularité

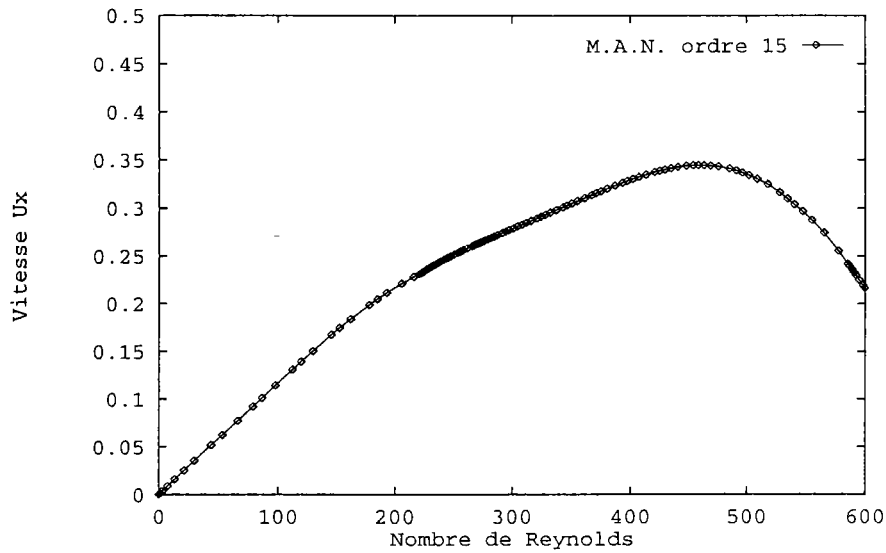


FIG. III.8 – Mise en évidence des accumulations de pas au voisinage du point de bifurcation, vitesse suivant  $x$  d'un point noté  $P1$  sur la figure (III.1), formulation Petrov-Galerkin

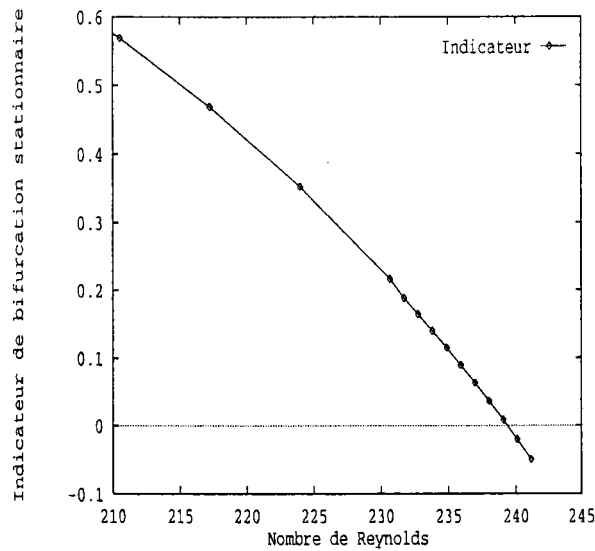
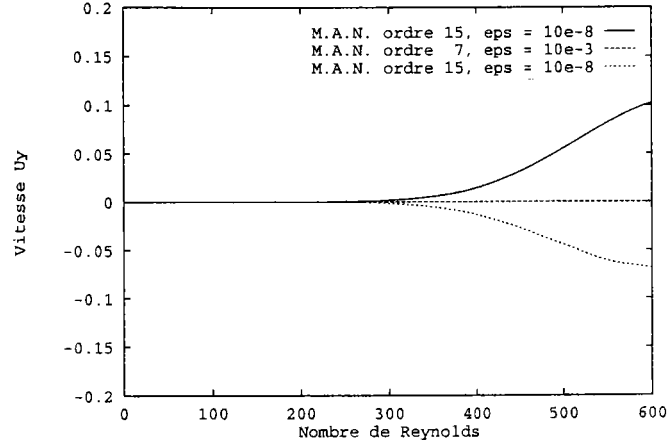


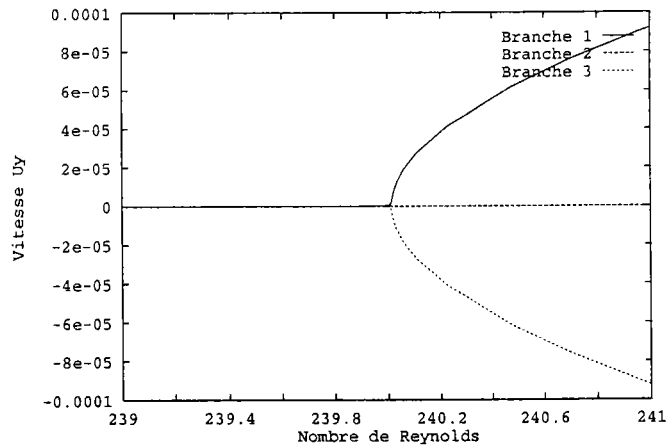
FIG. III.9 – Indicateur de bifurcation en fonction du nombre de Reynolds, bifurcation stationnaire pour  $Re = 240$ , formulation Petrov-Galerkin

de suivre des branches bifurquées différentes suivant les valeurs des paramètres des séries. On retrouve ainsi figure (10(a)), les trois branches bifurquées mises en évidence avec la formulation Galerkin. Deux branches ont été obtenues en modifiant l'ordre et le paramètre  $\epsilon$  des séries, la dernière avec un maillage différent. Les lignes de courant

correspondant à ces trois branches ne sont pas représentées car elles sont identiques à celles de la formulation Galerkin.



(a) Branches bifurquées et fondamentale



(b) Zoom des branches bifurquées et fondamentale

FIG. III.10 – Solutions obtenues avec la M.A.N. en utilisant deux maillages et des paramètres différents, vitesse suivant  $y$  d'un noeud noté  $P2$  sur la figure (III.1), formulation Petrov-Galerkin.

### III.5 Conclusion

Nous venons dans ce chapitre d'exposer une technique de calcul de bifurcation stationnaire pour les fluides visqueux incompressibles qui repose sur l'introduction d'un

indicateur. Cette technique se prête très bien à la Méthode Asymptotique que nous utilisons pour calculer les solutions des équations stationnaires de Navier-Stokes. Le calcul des bifurcations stationnaires est réalisé pour deux types de pondération, les formulations Galerkin et Petrov-Galerkin. Malgré la difficulté qu'amène l'utilisation de la formulation Petrov-Galerkin, nous avons montré que le calcul de l'indicateur est réalisable en effectuant quelques aménagements par rapport à la méthode initialement proposée par Boutyour. Bien que l'indicateur ne soit pas connu analytiquement, ce qui est pénalisant en termes de temps de calcul, quelques directions de travail sont avancées pour pallier à cet inconvénient. Nous confirmons aussi dans ce chapitre les accumulations de pas de la technique de continuation qu'avait constaté Tri [16] au voisinage d'un point de bifurcation stationnaire. Les résultats présentés sont relativement proches de ceux trouvés dans la littérature concernant l'utilisation de la formulation Galerkin. Pour la formulation Petrov-Galerkin, les mêmes bifurcations sont observées mais pas aux mêmes nombres de Reynolds. Ce décalage sera également observé entre les deux formulations pour le calcul des bifurcations de Hopf qui est l'objet du chapitre suivant.





## CHAPITRE IV

# Détection des points de bifurcation de Hopf

Une bifurcation de Hopf traduit le passage d'une solution stationnaire vers une solution périodique en temps. Les premiers travaux concernant la caractérisation d'une bifurcation de Hopf sont dus à Poincaré. Andropov et Hopf les ont ensuite étendus respectivement aux systèmes à deux et  $n$  dimensions (Hassard [42], Marsden et McCracken [43]). La première partie de ce chapitre est consacrée à des rappels sur la bifurcation de Hopf (caractérisation de ces points singuliers, principales méthodes numériques utilisées pour déterminer ces points). Dans la deuxième partie nous nous intéressons à l'indicateur de Hopf tel qu'il avait été initialement proposé et appliqué par Bensaadi [44] pour les systèmes à petit nombre de degrés de liberté. La première application de cet indicateur pour des systèmes continus discrétisés avait été faite par Tri [15] sur un problème de mécanique des solides. L'application aux équations des fluides visqueux incompressibles n'avait pas été possible à cause des accumulations de pas de la technique de continuation (voir chapitre I). Dans le but d'utiliser une formulation Petrov-Galerkin, nous allons montrer dans ce chapitre que grâce à certains aménagements (par rapport à l'algorithme initial de Bensaadi), cet indicateur est un outil numérique efficace pour calculer les bifurcations de Hopf sur les branches de solutions stationnaires de Navier-Stokes. La principale différence entre ce travail et les algorithmes utilisés par Bensaadi et Tri réside dans l'abandon des développements asymptotiques à deux paramètres : le paramètre de chemin " $a$ " et la pulsation  $\omega$ .

Nous n'utiliserons qu'un seul développement asymptotique, celui en  $\omega$ , et nous travaillerons à nombre de Reynolds fixe (à "a" fixé). Cette nouvelle manière de travailler permet d'introduire une technique de continuation sur l'indicateur (ce qui serait très compliqué pour les développements à deux paramètres), et ainsi de déterminer des bifurcations de Hopf pour n'importe quelle valeur de la pulsation. Deux exemples numériques clôtureront ce chapitre: le traditionnel exemple de l'écoulement autour du cylindre et l'écoulement dans une marche.

## IV.1 Rappels théoriques

Nous nous sommes attachés jusqu'à présent à résoudre un problème non-linéaire stationnaire. La branche fondamentale et les branches bifurquées sont solutions de :

$$R(U, \lambda) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

Lorsque le problème est dépendant du temps, les solutions vérifient alors l'équation suivante :

$$\frac{dU}{dt} = R(U, \lambda) \quad (\text{IV.2})$$

Sur ces branches solutions, on peut assister en un point singulier à une transition entre un état établi (stationnaire) et un état oscillant (harmonique). Un tel point de bifurcation d'une solution stationnaire vers une solution périodique en temps est appelé point de bifurcation de Hopf.

Un exemple simple à deux variables issu de l'ouvrage de Seydel [37] va nous permettre de caractériser l'apparition d'une bifurcation de Hopf.

Soit le système suivant à deux inconnues  $(U_1, U_2)$  et un paramètre  $\lambda$ ,

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -U_2 + U_1(\lambda - U_1^2 - U_2^2) \\ \dot{U}_2 = U_1 + U_2(\lambda - U_1^2 - U_2^2) \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Il n'existe qu'un seul point d'équilibre  $(U_1, U_2) = (0, 0)$ . En ce point, la matrice Jacobienne est :

$$\frac{\partial R(0, 0)}{\partial U} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

Les valeurs propres de cette matrice sont notées :

$$\zeta_{1,2}(\lambda) = \lambda \pm i \quad (\text{IV.5})$$

La discussion sur la stabilité de la solution stationnaire repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres (IV.5). Ainsi, si  $\lambda < 0$ , la solution est stable. Par contre si  $\lambda > 0$ , elle est instable. En  $\lambda = 0$ , on montre que la solution stationnaire bifurque vers une solution périodique.

En utilisant les coordonnées polaires  $(r, \omega)$ ,

$$\begin{cases} U_1 = r \cos \omega \\ U_2 = r \sin \omega \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

le système (IV.3) devient :

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \omega - r \dot{\omega} \sin \omega = -r \sin \omega + r \cos \omega (\lambda - r^2) \\ \dot{r} \sin \omega + r \dot{\omega} \cos \omega = r \cos \omega + r \sin \omega (\lambda - r^2) \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

En multipliant la première relation de (IV.7) par  $\cos \omega$ , la deuxième par  $\sin \omega$  et en les additionnant, on obtient une équation différentielle dépendant seulement de  $r$  :

$$\dot{r} = r(\lambda - r^2) \quad (\text{IV.8})$$

De la même façon, en multipliant cette fois-ci la première équation de (IV.7) par  $\sin \omega$  et la deuxième par  $\cos \omega$  et en les soustrayant, on obtient une équation différentielle dépendant seulement de  $\omega$  :

$$\dot{\omega} = 1 \quad (\text{IV.9})$$

D'après la relation (IV.8), pour  $r = \sqrt{\lambda}$ , on a  $\dot{r} = 0$ . Ainsi pour  $\lambda > 0$ , il y a une orbite périodique dont l'amplitude croît avec  $\sqrt{\lambda}$ . La figure (IV.1) résume les résultats

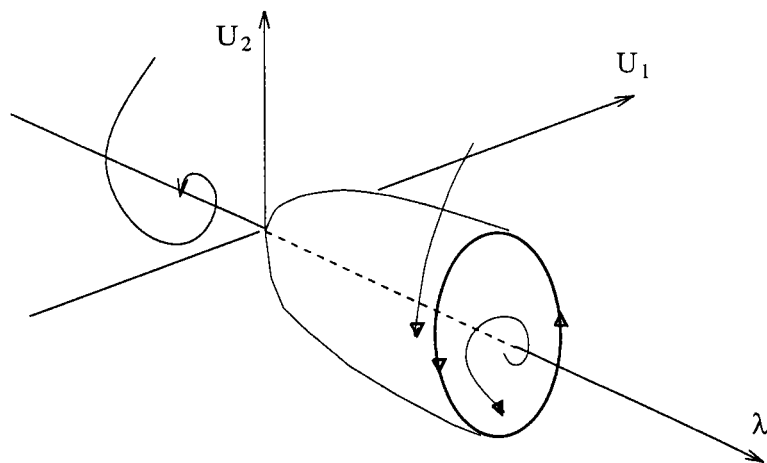


FIG. IV.1 – Illustration du changement de stabilité en  $\lambda = 0$  et de l'orbite périodique pour  $\lambda > 0$

précédents ; pour  $\lambda < 0$ , la solution est stable et à  $\lambda = 0$ , on a échange de stabilité et naissance d'un cycle limite dont l'amplitude croît avec  $\sqrt{\lambda}$ . En ce point, la matrice Jacobienne a une paire de valeurs propres purement imaginaires,  $\zeta_{1,2}(\lambda = 0) = \pm i$ .

## IV.2 Caractérisation d'un point de bifurcation de Hopf

Sur l'exemple précédent on a mis en évidence un point de bifurcation de Hopf. Soit maintenant un système d'équations différentielles, de dimension  $n$  défini par :

$$\frac{dU}{dt} = R(U, \lambda) \quad (\text{IV.10})$$

En un point stationnaire  $(U_c, \lambda_c)$  solution de :

$$R(U_c, \lambda_c) = 0 \quad (\text{IV.11})$$

la matrice Jacobienne associée au système (IV.10) a  $n$  valeurs propres notées :

$$\zeta_k(\lambda) = \alpha_k(\lambda) + i\beta_k(\lambda) \quad (\text{IV.12})$$

Si pour une valeur de  $\lambda$  on a

$$\begin{cases} \zeta_1(\lambda_c) = \overline{\zeta_2(\lambda_c)} = i\omega_c \\ \alpha_i(\lambda_c) < 0 \text{ avec } i = 3 \cdots n \\ \frac{d\alpha_1(\lambda_c)}{d\lambda} \neq 0 \end{cases} \quad (\text{IV.13})$$

alors  $(U_c, \lambda_c)$  est un point de bifurcation de Hopf et il y a alors naissance en ce point d'un cycle limite. La période initiale des oscillations de faible amplitude est :

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \quad (\text{IV.14})$$

Sur la figure (IV.2) nous avons représenté les trajectoires de deux valeurs propres particulières dans le plan complexe  $(\alpha, \beta)$ . La première condition de (IV.13) est satisfaite, puisque  $\zeta(\lambda_c) = \pm i\omega_c$ . Si de plus pour cette valeur de  $\lambda$  les parties réelles de toutes les autres valeurs propres sont négatives, alors il existe une bifurcation de Hopf en ce point  $(U_c, \lambda_c)$ .

On remarque que dans le cas d'une bifurcation de Hopf, contrairement à un point de bifurcation stationnaire symétrique où il y a alors apparition de deux branches bifurquées, il n'existe localement pour chaque valeur de  $\lambda$  qu'une seule solution périodique.

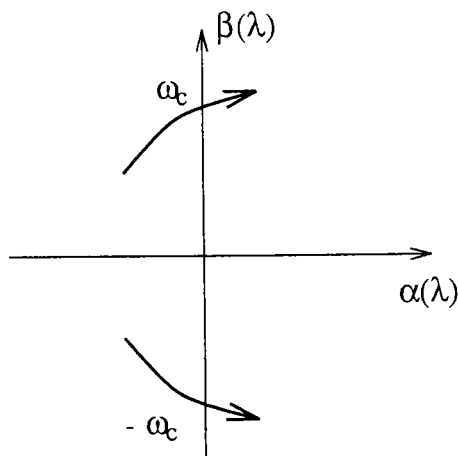


FIG. IV.2 – Trajectoire de deux valeurs propres dans le plan complexe  $(\alpha, \beta)$

### IV.3 Méthodes usuelles de calcul de points de bifurcation de Hopf

Au paragraphe précédent nous avons défini les conditions nécessaires à une bifurcation. Nous allons maintenant dresser une liste, non exhaustive, des méthodes numériques habituellement utilisées pour calculer ces points singuliers. Jepson [45] et Roose [46] fournissent des bibliographies conséquentes consacrées à ce sujet.

#### IV.3.1 Méthode indirecte

La méthode indirecte consiste à calculer et à suivre les valeurs propres de la matrice jacobienne le long de la branche stationnaire. Le suivi de ces dernières permet d'isoler le point où seules deux valeurs propres conjuguées sont imaginaires pures (Hassard [42]). La difficulté, est de bien isoler la valeur propre qui va probablement devenir imaginaire pure.

Une autre méthode habituellement utilisée pour caractériser une bifurcation de Hopf est le calcul des valeurs propres de la matrice tangente. Entre deux valeurs du nombre de Reynolds on regarde alors si deux valeurs propres ont traversé l'axe imaginaire. Mais comme le souligne Jackson [47], la taille de la matrice ayant doublé (puisque l'on travaille dans le plan complexe), les temps de calculs sont très importants. De plus la matrice tangente étant non-symétrique il faut utiliser des algorithmes

spécifiques telle que la technique d'itération inverse (Géradin, [48]). Ces techniques ne permettent de connaître qu'une seule valeur propre par calcul. Le calcul de valeurs supplémentaires nécessite d'utiliser des algorithmes de translation spectrale [47], [48] ce qui a pour conséquence d'augmenter le temps de calcul global.

### IV.3.2 Méthode directe

La méthode directe consiste à chercher les solutions d'un système d'équations défini par exemple par (Jepson [45], Jackson [47]) :

$$G(U, U^a, U^b, \omega, \lambda) = \begin{bmatrix} R(U, \lambda) \\ \frac{\partial R}{\partial U} \cdot U^a + \omega \cdot U^b \\ \frac{\partial R}{\partial U} \cdot U^b - \omega \cdot U^a \\ N(U^a, U^b) \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{IV.15})$$

avec  $(U^a, U^b)$  respectivement les parties réelle et imaginaire du mode complexe de bifurcation associé à la valeur propre au point de bifurcation  $\zeta(\lambda_c) = i\omega_c$ . L'expression  $N(U^a, U^b)$  désigne deux conditions de normalisation. Les inconvénients de cette technique sont d'une part qu'elle ne donne qu'un seul point de bifurcation et d'autre part elle est très gourmande en temps de calcul car elle demande d'évaluer un grand nombre d'inconnues. En effet, comme le système (IV.15) est généralement résolu par la méthode itérative de Newton-Raphson, on doit alors inverser une matrice Jacobienne  $\frac{\partial G}{\partial X}$  (avec  $X$  un vecteur contenant les inconnues  $U, U^a, U^b$ ) qui a une dimension trois fois plus importante que la matrice tangente utilisée pour calculer la solution fondamentale. D'après Jackson [47] cela conduit à un temps de calcul qui est approximativement 27 fois celui de l'inversion de la matrice tangente du problème initial. Pour surmonter cette difficulté Jackson procède par étapes. Grâce à de judicieuses substitutions, il transforme son problème initial en un problème de taille réduite où la dimension de la matrice jacobienne à inverser est alors deux fois plus

grande que celle du problème fondamental. Finalement la taille de cette matrice est huit fois la taille de celle du problème fondamental, ce qui demande approximativement un temps de calcul neuf fois plus important.

## IV.4 Détermination des points de bifurcation de Hopf par une MAN

Les études précédentes menées par Bensaadi [44] et Tri [16], respectivement pour les petits et grands systèmes, ont permis de mettre au point une stratégie de calcul des points de bifurcation de Hopf qui est bien adaptée à la résolution du problème non-linéaire stationnaire par la MAN

Nous allons maintenant rappeler les principes de base et les propriétés de l'indicateur de bifurcation introduit par Bensaadi [44].

En un point de la solution fondamentale  $U^f$ , le système (IV.10) est perturbé par  $\Delta\mathcal{V}$ . En négligeant les termes non-linéaires en  $\Delta\mathcal{V}$ , on obtient le système perturbé linéarisé suivant :

$$\frac{d\Delta\mathcal{V}}{dt} = L_t(\Delta\mathcal{V}) \quad (\text{IV.16})$$

où  $L_t(\Delta\mathcal{V})$  est l'opérateur tangent au point  $U^f$ . On rappelle que la solution fondamentale dépend du paramètre de chemin "a".

L'objectif est alors de trouver la valeur critique "a<sub>c</sub>" pour laquelle la matrice tangente a deux et seulement deux valeurs propres purement imaginaires, toutes les autres ayant leur partie réelle négative. Ceci revient à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} L_t(\Delta V_c) = i \cdot \omega_c \cdot \Delta V_c \\ \text{avec } \Delta\mathcal{V} = \Delta V_c \cdot e^{i\omega t} \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

avec  $\omega_c$ ,  $\Delta V_c$  respectivement la pulsation et le mode complexe au point singulier.

En séparant les parties réelle et imaginaire du mode complexe  $\Delta V_c$ , la dimension du



système (IV.17) est ainsi doublée et il se réécrit :

$$\begin{cases} L_t(\Delta V_c^a) = -\omega_c \Delta V_c^b \\ L_t(\Delta V_c^b) = \omega_c \Delta V_c^a \\ \text{avec } \Delta V_c = \Delta V_c^a + i \Delta V_c^b \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

Le système (IV.18) est mis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_t(\Delta V_c, \omega_c) = 0 \\ \text{avec } \mathfrak{L}_t(\Delta V_c, \omega_c) = \begin{bmatrix} L_t(\Delta V_c) & \omega_c \cdot I \\ -\omega_c \cdot I & L_t(\Delta V_c) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

La recherche des points de bifurcation de Hopf consiste à trouver le couple de réels  $(a_c, \omega_c)$  et le mode  $\Delta V_c$  qui satisfont la relation (IV.19).

#### IV.4.1 Introduction d'un indicateur de bifurcation

On introduit un indicateur de bifurcation  $\mu$  dépendant des deux paramètres  $(a, \omega)$  dans le système (IV.19). Ce dernier s'écrit :

$$\mathfrak{L}_t(\Delta V(a, \omega), \omega) = \mu(a, \omega) \cdot f \quad (\text{IV.20})$$

avec  $f$  un vecteur force aléatoire. Puisque le problème (IV.20) a plus d'inconnues que d'équations on doit imposer une condition supplémentaire. Cette dernière peut être choisie comme étant la projection du vecteur inconnu  $\Delta V(a, \omega)$  sur  $\Delta V(0, 0)$ ,

$$\langle \Delta V(a, \omega) - \Delta V(0, 0), \Delta V(0, 0) \rangle = 0 \quad (\text{IV.21})$$

avec  $\Delta V(0, 0)$ , un vecteur vérifiant la relation (IV.20) au point  $(a = 0, \omega = 0)$ , soit

$$\mathfrak{L}_t(\Delta V(0, 0), 0) = \mu(0, 0) \cdot f \quad (\text{IV.22})$$

la constante  $\mu(0, 0)$  est généralement choisie étant égale à 1. Finalement la recherche des points satisfaisant la relation (IV.19) consiste à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_t(\Delta V(a, \omega), \omega) = \mu(a, \omega).f \\ \langle \Delta V(a, \omega) - \Delta V(0, 0), \Delta V(0, 0) \rangle = 0 \\ \mu(0, 0) = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

Comme pour le calcul de l'indicateur de bifurcation stationnaire (chapitre III), le scalaire  $\mu(a, \omega)$  est défini le long de la branche solution par la relation (IV.23) et s'annule en tous points où l'opérateur  $\mathfrak{L}_t(\Delta V(a, \omega), \omega)$  est singulier. On peut de plus remarquer en comparant les systèmes (IV.24) (relations caractérisant le calcul de l'indicateur de bifurcation stationnaire, chapitre III) et (IV.23) que les deux formulations sont identiques.

$$\begin{cases} L_t(\Delta \mathcal{V}) = \mu.f \text{ dans } \Omega \\ \langle \Delta \mathcal{V} - \Delta \mathcal{V}_0, \Delta \mathcal{V}_0 \rangle = 0 \\ \mu_0 = 1 \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

Les principales différences entre les deux indicateurs sont :

- \* La dimension de l'opérateur  $\mathfrak{L}_t(\Delta V(a, \omega), \omega)$  (dimension  $2n$ ) pour le calcul de l'indicateur de bifurcation de Hopf ;
- \* Une inconnue supplémentaire pour le calcul de l'indicateur de bifurcation de Hopf, la pulsation  $\omega$ .

## IV.4.2 Propriétés de l'indicateur

Bensaadi [44] a montré dans sa thèse que l'indicateur avait certaines propriétés remarquables. Nous allons maintenant les rappeler.

La première propriété de l'indicateur est que celui-ci est une fraction rationnelle en  $\omega$ , ce qui est particulièrement intéressant, par exemple pour l'utilisation des approximations de Padé [49] en vue d'améliorer les solutions polynomiales.

Pour démontrer cette propriété, on introduit les parties réelle et imaginaire du mode de bifurcation et de la force aléatoire dans le système (IV.23) :

$$\begin{cases} L_t(\Delta V^a) + \omega \cdot \Delta^b = \mu \cdot f^a \\ L_t(\Delta V^b) - \omega \cdot \Delta^a = \mu \cdot f^b \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

En multipliant chaque équation du système (IV.25) par  $L_t(U^f(a))$  et en les substituant l'une dans l'autre, on obtient deux problèmes indépendants :

$$\begin{cases} L_t^2(\Delta V^a) + \omega^2 I \cdot \Delta V^a = \mu \cdot g^a(a, \omega) \\ L_t^2(\Delta V^b) + \omega^2 I \cdot \Delta V^b = \mu \cdot g^b(a, \omega) \\ \text{avec} \\ g^a(a, \omega) = -\omega \cdot f^b + L_t(U^f(a)) \cdot f^a \\ g^b(a, \omega) = -\omega \cdot f^a + L_t(u^f(a)) \cdot f^b \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

Le système est ensuite résolu par la méthode de Cramer. La solution  $\Delta V$  est :

$$\begin{cases} \Delta V = \mu(a, \omega) \cdot \frac{\Delta(a, \omega)}{\det(L_t^2(u^f(a)) + \omega^2 I)} \\ \text{avec } \Delta = \begin{bmatrix} \Delta^a(a, \omega) \\ \Delta^b(a, \omega) \end{bmatrix} \text{ les déterminants de Cramer} \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

En introduisant la condition de normalisation (IV.21) dans (IV.27), l'indicateur est finalement obtenu sous la forme d'une fraction rationnelle en  $(a, \omega)$ ,

$$\boxed{\mu(a, \omega) = \|\Delta V(0, 0)\|^2 \cdot \frac{\det(L_t^2(u^f(a)) + \omega^2 I)}{\langle \Delta V(a, \omega), \Delta V(0, 0) \rangle}} \quad (\text{IV.28})$$

On peut de plus montrer que le numérateur de l'indicateur est une fonction toujours positive. En effet, le numérateur de (IV.28) est défini par :

$$\begin{aligned} \text{num}(a, \omega) &= \det(L_t^2(u^f(a)) + \omega^2 I) \\ &= \det[(L_t(u^f(a)) + i \cdot \omega I)(L_t(u^f(a)) - i \cdot \omega I)] \\ &= \det(L_t(u^f(a)) + i \cdot \omega I) \det(L_t(u^f(a)) - i \cdot \omega I) \\ &= |\det(L_t(u^f(a)) - i \cdot \omega I)|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

La recherche des points de bifurcation de Hopf revient donc à annuler la fonction positive  $\text{num}(a, \omega)$ . En effet, la fonction  $\text{num}(a, \omega)$  est le module au carré d'un nombre complexe. Trouver les zéros de cette fonction consiste alors à annuler la partie réelle et la partie imaginaire de  $\det(L_x(u^f(a)) - i.\omega I)$ , ce qui nous donne deux équations pour les deux inconnues  $(a, \omega)$ . En tout point  $(a_c, \omega_c)$  où le numérateur  $\text{num}(a, \omega)$  est nul, les relations suivantes sont aussi satisfaites (car le couple  $(a_c, \omega_c)$  est un minimum de la fonction  $\text{num}(a, \omega)$ ),

$$\begin{cases} \frac{\partial \text{num}(a_c, \omega_c)}{\partial \omega} = 0 \\ \frac{\partial \text{num}(a_c, \omega_c)}{\partial a} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

La figure (IV.3) illustre le comportement et les propriétés de la fonction  $\text{num}(a, \omega)$

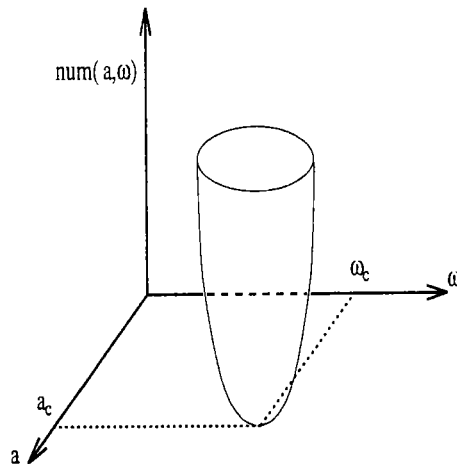


FIG. IV.3 – Illustration du comportement de la fonction  $\text{num}(a, \omega)$  au voisinage et en un point de bifurcation

au voisinage et en un point de bifurcation de Hopf. L'indicateur a d'autres propriétés que nous détaillons dans les paragraphes suivants.

A ce stade de l'étude on peut d'ores et déjà avancer les principales différences qui existent entre ce travail et les précédents travaux menés par Bensaadi et Tri ([44] et [16]). Lors des premières applications de toute la partie théorique de Bensaadi, l'indicateur et le mode étaient développés en séries entières de deux paramètres : le

paramètre de chemin "a" et la pulsation  $\omega$ ,

$$\begin{cases} \mu(a, \omega) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a^i \omega^j \mu(i, j) \\ \Delta V(a, \omega) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a^i \omega^j \Delta V(i, j) \end{cases} \quad (\text{IV.31})$$

En introduisant ces développements asymptotiques dans le système (IV.23) et en identifiant suivant les puissances de  $a$  et de  $\omega$ , on obtient  $n^2$  systèmes que l'on résout successivement. Avec les solutions à chaque ordre  $\mu(i, j)$  et  $\Delta V(i, j)$  on construit alors les approximants de Padé. Mais cette stratégie à deux paramètres est relativement compliquée et difficilement automatisable. De plus appliquer une procédure de continuation à des développements asymptotiques à deux paramètres est une technique que nous ne maîtrisons pas.

C'est pourquoi dans cette étude nous avons décidé de travailler avec le paramètre "a" fixe et de faire des développements asymptotiques seulement en  $\omega$ . Pour les fluides visqueux incompressibles, cela consiste à fixer le nombre de Reynolds et à effectuer pour cette valeur de  $Re$  des développements en  $\omega$  de l'indicateur et du mode de bifurcation. Un point de bifurcation de Hopf correspond alors à une valeur de la pulsation  $\omega$  pour laquelle la fonction  $\text{num}(a = Re_d, \omega)$  est nulle. Fixer le paramètre  $a$  revient donc à travailler dans des plans  $(\omega, \text{num}(a = Re_d, \omega))$  qui sont des coupes des surfaces 3D  $(a(Re), \omega, \text{num}(a, \omega))$  calculées par Bensaadi et Tri. Mais l'utilisation de cette technique rend impossible le calcul de la deuxième condition de (IV.30). Au voisinage d'un point de bifurcation, on perd l'information,  $\frac{\partial \text{num}(a_c, \omega_c)}{\partial a} = 0$ .

L'indicateur de bifurcation est globalement bien défini. Cependant pour certaines valeurs particulières du couple  $(a, \omega)$ , la condition de normalisation (IV.21) conduit à une valeur infinie de l'indicateur. En ces points "exceptionnels" il est alors impossible d'appliquer une technique de continuation sur l'indicateur. Pour appliquer une telle technique, nous choisirons donc une autre condition supplémentaire. Cette partie continuation sur l'indicateur est expliquée dans l'un des paragraphes suivants.

## IV.5 Calculs de l'indicateur de bifurcation de Hopf pour les fluides visqueux incompressibles

Le but de ce paragraphe est d'introduire une procédure numérique de calcul des points de bifurcation de Hopf sur les branches de solutions de l'équation stationnaire de Navier-Stokes qui sont déterminées par la MAN. Les équations de Navier-Stokes pour la formulation Galerkin s'écrivent :

$$\begin{cases} L(U) + Q(U, U) + M(\dot{U}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = \lambda u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.32})$$

où  $M(\dot{U})$  désigne la matrice de masse,  $L(U)$  et  $Q(U, U)$  sont les opérateurs linéaire et quadratique définis au chapitre I.

Lorsque l'on utilise une formulation de pondération de type Petrov-Galerkin (chapitre II), les équations (IV.32) deviennent :

$$\begin{cases} L(U) + \beta(U).Q(U, U) + \beta(U).M(\dot{U}) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = \lambda u_d \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.33})$$

Le terme  $\beta(U)$  correspondant à la formulation Petrov-Galerkin s'applique également au terme de masse  $M(\dot{U})$  (Hughes [31]).

Comme pour la recherche de bifurcation stationnaire (chapitre III), les équations (IV.32) et (IV.33) sont perturbées par  $\Delta\mathcal{V}$  en un point  $U^f$  qui est solution de l'équation stationnaire. Les équations d'équilibre linéarisées et perturbées s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \text{pour la formulation Petrov-Galerkin :} \\ L(\Delta\mathcal{V}) + \beta(U^f).\tilde{Q}(U^f, \Delta\mathcal{V}) + \frac{\partial\beta(U^f)}{\partial U}.Q(U^f, U^f)\Delta\mathcal{V} + \beta(U^f)M(\Delta\dot{\mathcal{V}}) = 0 \\ \Delta\mathcal{V} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.34})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{et pour la formulation Galerkin :} \\ L(\Delta \mathcal{V}) + \tilde{Q}(U^f, \Delta \mathcal{V}) + M(\Delta \mathcal{V}) = 0 \\ \Delta \mathcal{V} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (\text{IV.35})$$

où l'opérateur  $\tilde{Q}(\bullet, \bullet)$  désigne l'opérateur bilinéaire symétrique  $Q(U^f, \Delta \mathcal{V}) + Q(\Delta \mathcal{V}, U^f)$ .

Les solutions des équations (IV.34) et (IV.35) sont cherchées sous la forme exponentielle suivante :

$$\Delta \mathcal{V}(t) = \Delta V . e^{i\omega t} \quad (\text{IV.36})$$

Les équations ((IV.34) et (IV.35)) deviennent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_t(\Delta V) + i.\omega.M(\Delta V) = 0 \\ \Delta V = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (\text{IV.37})$$

où  $L_t(\Delta V)$  désigne l'opérateur tangent en un point de la branche fondamentale et  $M(\Delta V)$  est l'opérateur de masse.

Dans l'équation (IV.37) nous n'avons pas différencié les deux types de formulation afin de pas alourdir les notations. Cependant on peut noter que pour la formulation Petrov-Galerkin, les opérateurs tangent  $L_t(\Delta V)$  et de masse sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_t(\Delta V) = L(\Delta V) + \beta(U^f) . \tilde{Q}(U^f, \Delta V) + \frac{\partial \beta(U^f)}{\partial U} . Q(U^f, U^f) \Delta V \\ M(\Delta V) = i.\omega . \beta(U^f) . M(\Delta V) \end{array} \right. \quad (\text{IV.38})$$

Pour la formulation Galerkin, ces opérateurs sont définis par :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_t(\Delta V) = L(\Delta V) + \tilde{Q}(U^f, \Delta V) \\ M(\Delta V) = i.\omega . M(\Delta V) \end{array} \right. \quad (\text{IV.39})$$

### IV.5.1 Introduction de l'indicateur de bifurcation

L'indicateur de bifurcation  $\mu(a, \omega)$  est introduit dans l'équation (IV.37) :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_t(\Delta V) + i.\omega.M(\Delta V) = \mu f \\ \Delta V = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{array} \right. \quad (\text{IV.40})$$

avec  $f$  un vecteur force aléatoire. A la valeur propre  $i.\omega$  est associé un mode complexe  $\Delta V$ , de parties réelle  $\Delta V^a$  et imaginaire  $\Delta V^b$ .

$$\Delta V = \Delta V^a + i.\Delta V^b \quad (\text{IV.41})$$

L'équation (IV.40) devient :

$$\begin{cases} \begin{cases} L_t(\Delta V^a) - \omega.M(\Delta V^b) = \mu.f \\ L_t(\Delta V^b) + i.\omega.M(\Delta V^a) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta V^a = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \\ \Delta V^b = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

Le vecteur force aléatoire est choisi comme étant réel (Bensaadi [44]). Les équations (IV.42) sont réécrites sous forme matricielle avec les matrices associées aux opérateurs de masse et de rigidité :

$$\begin{bmatrix} K_t(U_f) & -\omega.M(U_f) \\ \omega.M(U_f) & K_t(U_f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V^a \\ \Delta V^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu.f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.43})$$

Finalement le système à résoudre est exprimé sous la forme condensée suivante :

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_t(U_f, \omega).\Delta V = \mu.f \\ \Delta V = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

## IV.6 Condition supplémentaire

Pour assurer l'unicité de la solution, une condition supplémentaire est nécessaire. Cette condition était auparavant ([44], [38], [15]) choisie comme étant la projection du mode  $\Delta V$  sur une certaine direction  $\Delta V_0$ ,

$$\langle \Delta V - \Delta V_0, \Delta V_0 \rangle = 0 \quad (\text{IV.45})$$

Cette définition a l'avantage d'être linéaire. Elle permet par ailleurs d'obtenir l'indicateur sous forme de fraction rationnelle :

$$\mu = \frac{\langle \Delta V_0, \Delta V_0 \rangle}{\langle \mathfrak{L}_t^{-1}(U_f, \omega).f, \Delta V_0 \rangle} \quad (\text{IV.46})$$



Cette dernière particularité est appréciable lors de l'utilisation des approximants de Padé afin d'améliorer la solution polynomiale obtenue avec la MAN. Cependant pour certaines valeurs de  $\omega$ , il est possible que les modes correspondants, définis par  $\mathcal{L}_t^{-1}(U_f, \omega) \cdot f$  soient orthogonaux à  $\Delta V_0$ . Un pôle apparaît alors (Figure IV.4). Il est donc impossible d'appliquer une stratégie de continuation pour le calcul de l'indicateur.

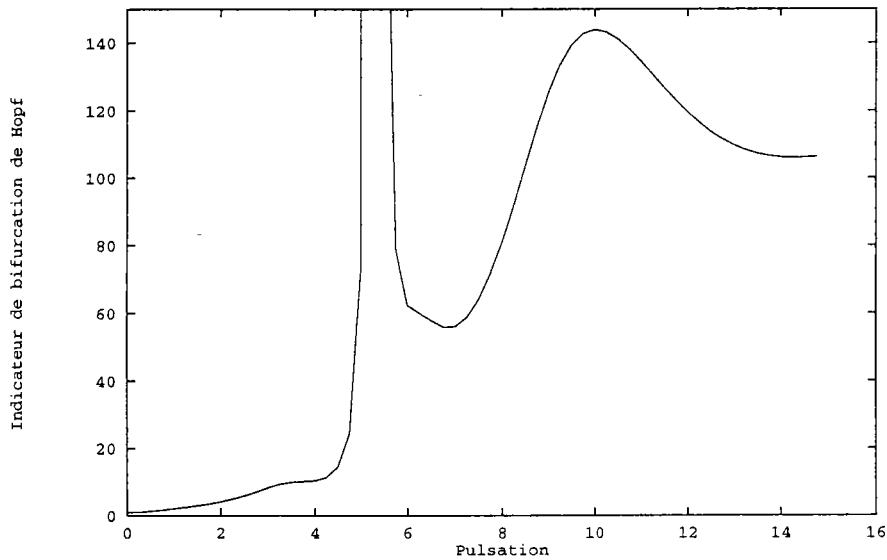


FIG. IV.4 - Existence d'un pôle à  $\omega = 5$  pour l'indicateur de bifurcation de Hopf, Exemple du cylindre à Reynolds égal 52 (formulation Petrov-Galerkin)

Pour appliquer une procédure de continuation pour la MAN, une autre condition est choisie :

$$\| \Delta V \|^2 = \| \Delta V_0 \|^2 \quad (\text{IV.47})$$

avec le vecteur  $\Delta V_0$  solution du système (IV.44) pour  $\omega = 0$  et  $\mu_0 = 1$ ,

$$\begin{cases} \Delta V_0 = \mathcal{L}_t^{-1}(U_f, 0) \cdot f \\ \Delta V_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.48})$$

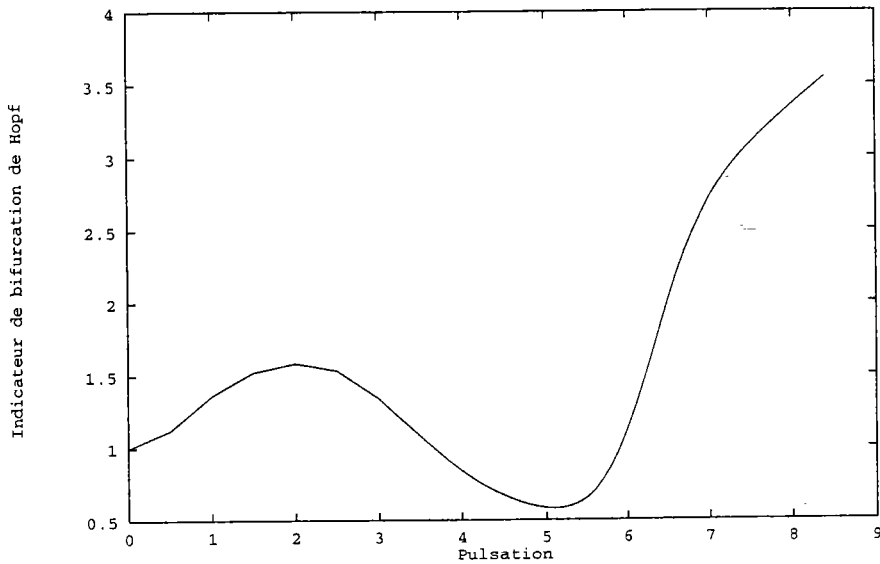


FIG. IV.5 – Calcul de l'indicateur avec la nouvelle condition (eq. IV.47). Exemple du cylindre à Reynolds égal 52 (formulation Petrov-Galerkin)

## IV.7 Calcul de l'indicateur de façon directe

Dans le but de comparer les résultats obtenus par une procédure de continuation et la MAN, une technique de calcul direct de l'indicateur a été développée.

Il s'agit d'évaluer pour chaque valeur de  $\omega$ , l'indicateur  $\mu$ . Il faut donc inverser la matrice de taille  $2n$  (IV.43) en chaque point  $\omega$  et trouver la valeur critique  $\omega_c$  qui annule l'indicateur  $\mu$ .

En chaque point  $\omega$  l'indicateur est donné par :

$$\mu = \sqrt{\frac{\langle \Delta V_0, \Delta V_0 \rangle}{\langle U^*, U^* \rangle}} \quad (\text{IV.49})$$

avec  $U^* = \mathcal{L}_t^{-1}(U_f, \omega).f$

### IV.7.1 Remarques sur le calcul de l'indicateur avec la méthode directe

La difficulté essentielle du calcul de l'indicateur de bifurcation de Hopf réside dans l'inversion de l'opérateur de taille  $2n$ ,  $\mathcal{L}_t^{-1}(U_f, \omega)$ . Nous avons choisi au départ de ne pas l'inverser et d'utiliser une méthode itérative pour déterminer les inconnues  $\mu$  et

$\Delta V$ . Nous avons testé deux méthodes itératives, la méthode de Gauss-Seydel (Ciarlet [50]) et la méthode de Uzawa (Zienkiewicz [18]). Mais ces deux méthodes ne nous ont pas donnés satisfaction, car elles étaient toutes deux instables et ne donnaient qu'une infime partie des courbes solutions.

Pour inverser l'opérateur  $\mathfrak{L}_t^{-1}(U_f, \omega)$  nous avons décidé de ne pas conserver le stockage tel qu'il est indiqué dans l'équation (IV.43). En effet, la taille mémoire nécessaire a une telle inversion devient très vite énorme. Nous avons alors choisi de ranger alternativement partie réelle et partie imaginaire du mode complexe. Ce stockage permet de conserver le profil bande de la matrice tangente du problème stationnaire initial. Ainsi dans le système IV.43 le mode de bifurcation est rangé de la manière suivante :

$$\Delta V = {}^t \{ \Delta V_a^1, \Delta V_a^2, \dots, \Delta V_a^n, \Delta V_b^1, \Delta V_b^2, \dots, \Delta V_b^n \} \quad (\text{IV.50})$$

Pour le nouveau stockage de l'opérateur  $\mathfrak{L}_t^{-1}(U_f, \omega)$  le mode est stocké comme suit :

$$\Delta V = {}^t \{ \Delta V_a^1, \Delta V_b^1, \Delta V_a^2, \Delta V_b^2 \dots, \Delta V_a^n, \Delta V_b^n \} \quad (\text{IV.51})$$

Dans les expressions (IV.50) et (IV.51), l'exposant désigne le d.d.l. et l'indice la partie réelle ou imaginaire. La taille de la matrice qui résulte de ce stockage est 4 fois celle du problème initial. Le temps CPU nécessaire à la triangulation de cette matrice est également équivalent à quatre fois celui de la matrice tangente du problème stationnaire (chapitre I et II).

## IV.8 Une Méthode Asymptotique pour déterminer l'indicateur

Lors des précédentes études portant sur la détermination de la bifurcation de Hopf par une MAN ([44], [15]), l'indicateur  $\mu$  ainsi que le mode  $\Delta V$  étaient développés en séries à deux paramètres,  $a$  et  $\omega$ . Cependant devant la complexité de la mise en oeuvre d'outils numériques pour déterminer l'indicateur, tels que les approximants

de Padé à deux paramètres, nous avons opté pour une autre stratégie. Il nous a semblé plus simple et surtout plus judicieux de faire des développements de l'indicateur  $\mu$  et du mode  $\Delta V$  en fonction de  $\omega$  a valeur de "a" fixe. D'où les développements asymptotiques suivants :

$$\begin{cases} \Delta V = \Delta V_0 + \omega \Delta V_1 + \omega^2 \Delta V_2 + \dots + \omega^p \Delta V_p \\ \mu = \mu_0 + \omega \cdot \mu_1 + \omega^2 \cdot \mu_2 + \dots + \omega^p \cdot \mu_p \end{cases} \quad (\text{IV.52})$$

Ces développements sont ensuite introduits dans le système d'équilibre perturbé (IV.40) et dans la condition (IV.47). En identifiant suivant les puissances de  $\omega$  on obtient à chaque ordre :

### Ordre 0

$$\begin{cases} K_t(U_f) \cdot \Delta V_0 = f \\ \mu_0 = 1 \\ \Delta V_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.53})$$

La valeur de l'indicateur  $\mu$  à l'ordre zéro est choisie comme étant égale à 1 ([44]).

### Ordre 1

$$\begin{cases} K_t(U_f) \cdot \Delta V_1 + i \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_0 = \mu_1 \cdot f \\ \langle \Delta V_1, \Delta V_0 \rangle = 0 \\ \Delta V_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.54})$$

### Ordre 2

$$\begin{cases} K_t(U_f) \cdot \Delta V_2 + i \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_2 = \mu_2 \cdot f \\ 2 \cdot \langle \Delta V_2, \Delta V_0 \rangle + \langle \Delta V_1, \Delta V_1 \rangle = 0 \\ \Delta V_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.55})$$

### Ordre p

$$\begin{cases} K_t(U_f) \cdot \Delta V_p + i \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_{(p-1)} = \mu_p \cdot f \\ 2 \cdot \langle \Delta V_p, \Delta V_0 \rangle + \sum_{r=1}^{p-1} \langle \Delta V_{(p-r)}, \Delta V_r \rangle = 0 \\ \Delta V_p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.56})$$

### Remarque

La condition supplémentaire utilisée ici est un peu plus délicate à mettre en oeuvre que la relation (eq. IV.45) car, n'étant plus linéaire, elle introduit un second membre dépendant des ordres précédents.

A chaque ordre on obtient donc un vecteur complexe défini par :

### Ordre 0

$$\begin{cases} \Delta V_0 = [K_t(U_f)]^{-1} \cdot f \\ \mu_0 = 1 \\ \Delta V_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.57})$$

### Ordre 1

$$\begin{cases} \Delta V_1 = \mu_1 \cdot [K_t(U_f)]^{-1} \cdot f - i \cdot [K_t(U_f)]^{-1} \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_0 \\ \langle \Delta V_1, \Delta V_0 \rangle = 0 \\ \Delta V_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.58})$$

### Ordre 2

$$\begin{cases} \Delta V_2 = \mu_2 \cdot [K_t(U_f)]^{-1} \cdot f - i \cdot [K_t(U_f)]^{-1} \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_1 \\ 2 \cdot \langle \Delta V_2, \Delta V_0 \rangle + \langle \Delta V_1, \Delta V_1 \rangle = 0 \\ \Delta V_2 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.59})$$

### Ordre $p$

$$\begin{cases} \Delta V_p = \mu_p \cdot [K_t(U_f)]^{-1} \cdot f - i \cdot [K_t(U_f)]^{-1} \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_{(p-1)} \\ 2 \cdot \langle \Delta V_p, \Delta V_0 \rangle + \sum_{r=1}^{p-1} \langle \Delta V_{(p-r)}, \Delta V_r \rangle = 0 \\ \Delta V_p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.60})$$

#### IV.8.1 Propriétés de l'indicateur

Les relations précédentes permettent de calculer à chaque ordre les valeurs du vecteur  $\Delta V$  et de l'indicateur. Grâce à ces relations, une propriété supplémentaire de l'indicateur peut être mise en évidence. Ainsi à l'ordre 0, on montre que le vecteur  $\Delta V_0$  est réel si le vecteur  $f$  est réel,

$$\begin{cases} \Delta V_0 = [K_t(U_f)]^{-1} \cdot f \\ \mu_0 = 1 \\ \Delta V_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.61})$$

Les relations à l'ordre 0 sont introduites dans le système à l'ordre 1 (éq. IV.58). La valeur de l'indicateur à l'ordre 1 est alors nulle et le vecteur complexe correspondant est imaginaire pur :

$$\begin{cases} \Delta V_1 = -i \cdot [K_t(U_f)]^{-1} \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_0 \\ \mu_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.62})$$

En utilisant la solution à l'ordre 1, celle à l'ordre 2 s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta V_2 = \mu_2 \cdot \Delta V_0 + \Delta V_2^* \\ \mu_2 = \frac{-\langle \Delta V_1, \Delta V_1 \rangle - 2 \cdot \langle \Delta V_2^*, \Delta V_0 \rangle}{2 \cdot \langle \Delta V_0, \Delta V_0 \rangle} \\ \text{Avec } \Delta V_2^* = [K_t(U_f)]^{-1} \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_1 \end{cases} \quad (\text{IV.63})$$

Ainsi à l'ordre 2, le vecteur  $\Delta V$  est réel.

On peut donc donner une définition du vecteur complexe  $\Delta V$  et de l'indicateur à l'ordre  $p$  selon que  $p$  soit pair ou impair :

Ordre  $p$  pair

$$\boxed{\begin{cases} \Delta V_p = \mu_p \cdot \Delta V_0 + \Delta V_p^* \\ \mu_p = \frac{-2 \cdot \langle \Delta V_p^*, \Delta V_0 \rangle - \sum_{r=1}^{p-1} \langle \Delta V_{(p-r)}, \Delta V_r \rangle}{2 \cdot \langle \Delta V_0, \Delta V_0 \rangle} \\ \Delta V_p^* = [K_t(U_f)]^{-1} \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_{(p-1)} \end{cases}} \quad (\text{IV.64})$$

Ordre  $p$  impair

$$\boxed{\begin{cases} \Delta V_p = i \cdot \Delta V_p^* \\ \mu_p = 0 \\ \Delta V_p^* = -1 \cdot [K_t(U_f)]^{-1} \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_{(p-1)} \end{cases}} \quad (\text{IV.65})$$

En introduisant les valeurs de l'indicateur et du mode à chaque ordre dans les développements asymptotiques (IV.66), on construit :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta V = \begin{Bmatrix} \Delta V_0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \omega \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ i \cdot \Delta V_1^* \end{Bmatrix} + \omega^2 \cdot \begin{Bmatrix} \Delta V_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \dots \\ + \omega^{(p-1)} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ i \cdot \Delta V_{(p-1)}^* \end{Bmatrix} + \omega^p \cdot \begin{Bmatrix} \Delta V_p \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \mu = \mu_0 + \omega^2 \cdot \mu_2 + \omega^4 \cdot \mu_4 + \dots + \omega^p \cdot \mu^p \text{ avec } p \text{ pair} \end{cases}} \quad (\text{IV.66})$$

L'indicateur est donc une fonction paire en  $\omega$  et le mode est successivement réel et imaginaire selon la parité de l'ordre des séries. Ces propriétés avaient été mises en évidence par Bensaadi [44] et sont les conséquences directes du choix du vecteur  $f$  réel.

## IV.8.2 Discussion

Les développements en séries de  $\omega$  du mode et de l'indicateur permettent de connaître une partie de la courbe de l'indicateur. Cette représentation polynomiale de l'indicateur admet un certain domaine de validité à l'intérieur duquel la solution polynomiale est très bonne, mais dès que l'on quitte ce domaine, les solutions divergent très rapidement. Sur la figure (IV.6), nous avons tracé l'indicateur de bifurcation en fonction de  $\omega$  pour différents ordres de troncature des séries (pour l'exemple

de l'écoulement autour d'un cylindre et pour une valeur du nombre de Reynolds de 46). La courbe notée "référence" est obtenue par la méthode de calcul direct définie

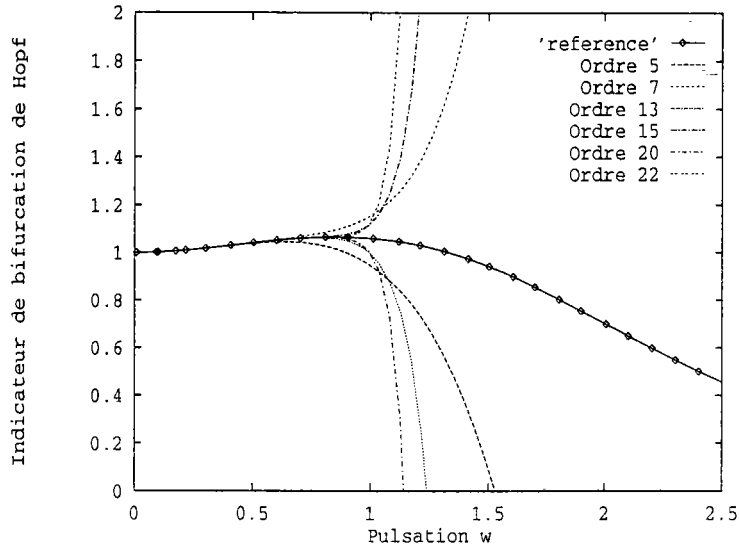


FIG. IV.6 – Un pas de calcul avec la MAN, représentations polynomiales de l'indicateur à  $Re=46$ , exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (méthode de Galerkin)

au paragraphe (IV.7). On constate sur cette courbe que, selon l'ordre de troncature des séries, le domaine de validité des approximations polynomiales varie entre  $\omega = 0.5$  (pour l'ordre 5) et  $\omega = 1.0$  (pour l'ordre 20). Ce domaine de validité des approximations polynomiales est cependant insuffisamment grand pour déterminer une bifurcation de Hopf, qui pour cet exemple, devrait se situer aux environs de  $\omega = 4.0$  (soit un nombre de Strouhal de 0.14, Jackson [47]). Pour augmenter ce domaine de validité on peut utiliser les approximants de Padé. Nous avons utilisé deux techniques de calculs des approximants de Padé. Une que l'on nomme "Padé classique" (Cochelin et al. [51]) et la deuxième "avec même dénominateur" (Cochelin [52]). Nous avons représenté (figure IV.7 pour les Padé avec même dénominateur et figure IV.8 pour les Padé classiques) les solutions obtenues pour plusieurs ordres de troncature des séries et toujours pour l'exemple de l'écoulement autour d'un cylindre à  $Re=46$ . Certes, on remarque sur ces deux figures que le domaine de validité des approximants de Padé est pratiquement deux fois celui des solutions polynomiales, mais ce n'est pas en-



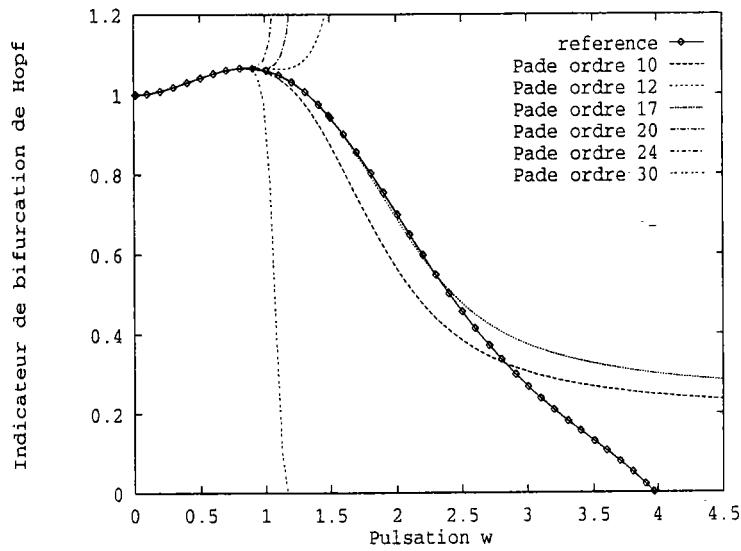


FIG. IV.7 – Un pas de calcul avec la MAN, approximants de Padé avec même dénominateur à  $Re=46$ , exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (méthode de Galerkin)

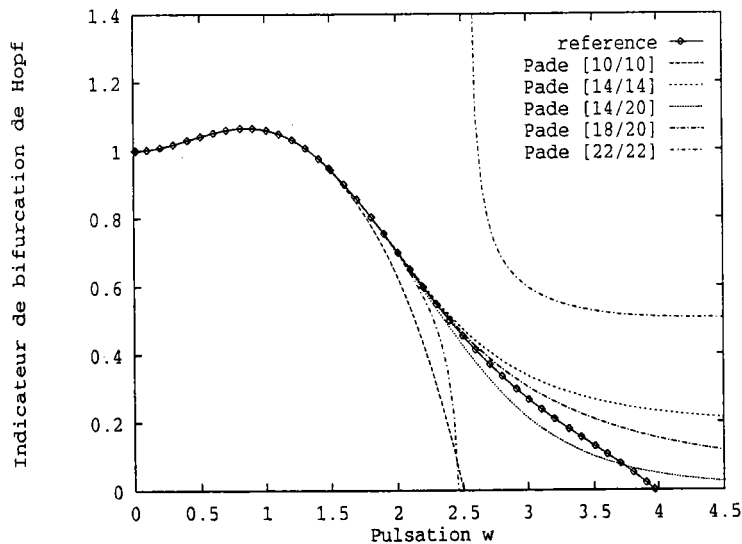


FIG. IV.8 – Un pas de calcul avec la MAN, approximants de Padé classiques à  $Re=46$ , exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (méthode de Galerkin)

core suffisant pour atteindre une pulsation de l'ordre de 4. Bien que l'utilisation des approximants de Padé nous paraissait de prime abord opportune, cette technique ne donne pas de résultats exploitables pour le calcul de l'indicateur.

L'expérience que nous avons acquise dans la résolution de problèmes non-linéaires nous fournit une autre technique pour déterminer l'indicateur quelle que soit la valeur de la pulsation. Nous allons appliquer la technique de continuation définie au chapitre I et ainsi déterminer pas à pas l'indicateur.

## IV.9 Procédure de continuation

### IV.9.1 Calcul d'un nouveau point de départ

Pour appliquer une stratégie de continuation dans l'optique de déterminer pas-à-pas la courbe de l'indicateur et le mode complexe, il faut définir un nouveau point de départ  $(\omega_0, \mu_0, \Delta V_0)$  qui soit à l'intérieur du domaine de validité des séries. Pour calculer ce nouveau point, on utilise ici la même définition du rayon de convergence que celle utilisée pour déterminer par continuation la solution fondamentale (chapitre I, paragraphe I.7). C'est-à-dire que l'on impose que la différence entre deux ordres consécutifs reste petite, ou du moins inférieure à un petit paramètre  $\varepsilon$ .

Le paramètre de développement est maintenant la pulsation  $\omega$ ; le critère de continuation s'écrit alors :

$$\frac{\| \Delta V_p - \Delta V_{(p-1)} \|}{\| \Delta V_p - \Delta V_0 \|} = \frac{\| \omega^p \Delta V_p \|}{\| \omega \Delta V_1 + \dots + \omega^p \Delta V_p \|} < \varepsilon \quad (\text{IV.67})$$

En approximant le dénominateur par  $\| \omega \Delta V_1 \|$ , on définit la pulsation optimale  $\omega_m$  à l'intérieur du domaine de validité des approximations polynomiales :

$$\omega_m = \left( \varepsilon \frac{\| \Delta V_1 \|}{\| \Delta V_p \|} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (\text{IV.68})$$

On construit alors les séries (IV.66) avec cette valeur  $\omega_m$  pour le premier pas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V_F = \left\{ \begin{array}{l} \Delta V_0 \\ 0 \end{array} \right\} + \omega_m \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ i \cdot \Delta V_1^* \end{array} \right\} + \omega_m^2 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \Delta V_2 \\ 0 \end{array} \right\} + \dots \\ + \omega_m^{(p-1)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ i \cdot \Delta V_{(p-1)}^* \end{array} \right\} + \omega_m^p \cdot \left\{ \begin{array}{l} \Delta V_p \\ 0 \end{array} \right\} \\ \mu_F = \mu_0 + \omega_m^2 \cdot \mu_2 + \omega_m^4 \cdot \mu_4 + \dots + \omega_m^p \cdot \mu^p \text{ avec } p \text{ pair} \end{array} \right. \quad (\text{IV.69})$$

Le point  $(\omega_m, \mu_F, \Delta V_F)$  est pris comme nouveau point de départ  $(\omega_0, \mu_0, \Delta V_0)$ . La pulsation  $\omega$  devient donc :

$$\omega = \omega_0 + \hat{\omega} \quad (\text{IV.70})$$

Le paramètre de développement est maintenant  $\hat{\omega}$ . On écrit ainsi :

$$\begin{cases} \Delta V = \Delta V_0 + \hat{\omega} \Delta V_1 + \hat{\omega}^2 \Delta V_2 + \cdots + \hat{\omega}^p \Delta V_p \\ \mu = \mu_0 + \hat{\omega} \cdot \mu_1 + \hat{\omega}^2 \cdot \mu_2 + \cdots + \hat{\omega}^p \cdot \mu_p \end{cases} \quad (\text{IV.71})$$

Ces développements sont ensuite introduits dans le système (IV.40) et dans la condition supplémentaire (IV.47). En identifiant suivant les puissances de  $\hat{\omega}$  on obtient à chaque ordre un système à résoudre :

### Ordre 0

$$\begin{cases} \mathfrak{L}(U_f, \omega_0) \Delta V_0 = \mu_0 \cdot f \\ \langle \Delta V_0, \Delta V_0 \rangle = \langle \Delta V_0^i, \Delta V_0^i \rangle \\ \Delta V_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.72})$$

### Ordre 1

$$\begin{cases} \mathfrak{L}(U_f, \omega_0) \Delta V_1 = \mu_1 \cdot f - i \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_0 \\ \langle \Delta V_1, \Delta V_0 \rangle = 0 \\ \Delta V_1 = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.73})$$

### Ordre p

$$\begin{cases} \mathfrak{L}(U_f, \omega_0) \Delta V_p = \mu_p \cdot f - i \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_{p-1} \\ 2 \cdot \langle \Delta V_p, \Delta V_0 \rangle + \sum_{r=1}^{p-1} \langle \Delta V_{(p-r)}, \Delta V_r \rangle = 0 \\ \Delta V_p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \end{cases} \quad (\text{IV.74})$$

Tous ces systèmes ont le même opérateur  $\mathfrak{L}(U_f, \omega_0)$ , défini par :

$$\boxed{\mathfrak{L}(U_f, \omega_0) \cdot \Delta V_p = K_t(U_f) \cdot \Delta V_p + i \cdot \omega_0 M(U_f) \cdot \Delta V_p} \quad (\text{IV.75})$$

Cet opérateur est le même que celui utilisé par la méthode directe (paragraphe IV.7). Le vecteur  $\Delta V_0^i$  introduit dans l'équation (IV.72) est le vecteur  $\Delta V$  à l'ordre 0 au premier pas de la MAN, ceci afin d'assurer une complète continuité de l'indicateur et du mode complexe. A chaque ordre l'indicateur et le mode sont donc calculés avec :

### Ordre 0

$$\begin{cases} \mu_0 = \sqrt{\frac{\langle \Delta V_0^i, \Delta V_0^i \rangle}{\langle \Delta V_0^*, \Delta V_0^* \rangle}} \\ \Delta V_0^* = \mathfrak{L}(U_f, \omega_0)^{-1} \cdot f \\ \Delta V_0 = \mu_0 \cdot \Delta V_0^* \end{cases} \quad (\text{IV.76})$$

### Ordre 1

$$\begin{cases} \mu_1 = -\frac{\langle \Delta V_1^*, \Delta V_0 \rangle}{\langle \Delta V_0^*, \Delta V_0 \rangle} \\ \Delta V_1^* = \mathfrak{L}(U_f, \omega_0)^{-1} \cdot i \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_0 \\ \Delta V_1 = \mu_1 \cdot \Delta V_0^* + \Delta V_1^* \end{cases} \quad (\text{IV.77})$$

### Ordre p

$$\begin{cases} \mu_p = \frac{-2 \cdot \langle \Delta V_p^*, \Delta V_0 \rangle - \sum_{r=1}^{p-1} \langle \Delta V_{p-r}, \Delta V_r \rangle}{2 \cdot \langle \Delta V_0^*, \Delta V_0 \rangle} \\ \Delta V_p^* = \mathfrak{L}(U_f, \omega_0)^{-1} \cdot i \cdot M(U_f) \cdot \Delta V_{p-1} \\ \Delta V_p = \mu_p \cdot \Delta V_0^* + \Delta V_p^* \end{cases} \quad (\text{IV.78})$$

Finalement en appliquant la procédure de continuation pas-à-pas, l'indicateur est déterminé pour n'importe quelle valeur de la pulsation. Nous présentons (Fig. IV.9) la courbe solution de l'indicateur déterminée par la MAN et la continuation. Nous comparons cette courbe avec celle obtenue par la méthode directe (paragraphe IV.7).

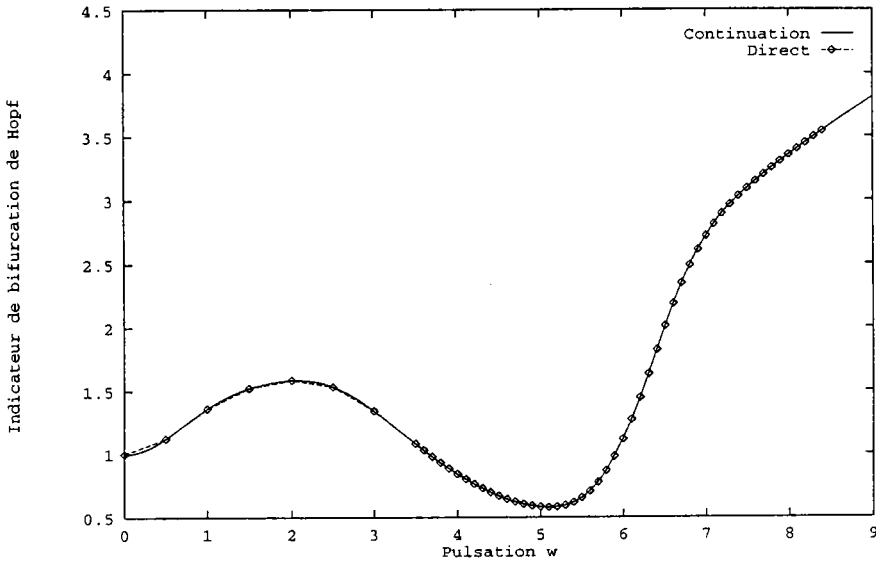


FIG. IV.9 – Calcul de l'indicateur de bifurcation par la MAN et continuation comparée avec le calcul direct, exemple du cylindre à Reynolds égal 52 (formulation Petrov-Galerkin)

#### IV.9.2 Remarque

Le calcul du nouveau point de démarrage  $(\omega_0, \mu_0, \Delta V_0)$  peut se faire de deux manières différentes. Soit comme nous l'avons décrit précédemment en remplaçant dans les séries (IV.52)  $\omega$  par sa valeur optimale  $\omega_m$  calculée en fin de pas. Soit en inversant au pas suivant le système à l'ordre 0 (eq. IV.72). Cette deuxième méthode permet de calculer pour un nouveau pas, les valeurs exactes (pour un  $\omega_0$  donné) de l'indicateur et du mode à l'ordre 0,  $\mu_0$  et  $\Delta V_0$ . En effet, l'équation d'équilibre perturbée (IV.40) étant linéaire en  $\Delta V$ , l'opérateur  $\mathcal{L}(U_f, \omega_0)$  est alors le même pour tous les ordres (y compris l'ordre 0). Cet opérateur peut donc être inversé pour calculer l'indicateur et le mode à l'ordre 0. Il n'est donc pas pénalisant de l'inverser pour le calcul des quantités à l'ordre 0. La conséquence est que l'on peut démarrer le calcul de l'indicateur avec la technique de continuation pour n'importe quelle valeur initiale de la pulsation,  $\omega_0$  (grâce à l'équation (IV.76)). Ainsi sur l'exemple du cylindre, l'allure de la courbe  $\mu(\omega)$ , n'a pas d'intérêt pour des valeurs de  $\omega < 3$  car on sait qu'il n'y a pas de bifurcation dans cet intervalle. On peut alors démarrer le calcul

de l'indicateur pour une valeur de  $\omega_0$  proche de la pulsation critique, c'est-à-dire vers  $\omega = 3$ . Cette technique suggère que l'on connaisse auparavant certains nombres critiques de l'écoulement étudié (comme par exemple le nombre de Strouhal).

Pour le calcul de l'indicateur de bifurcation de Hopf, nous avons choisi de calculer de façon exacte les valeurs  $\mu_0$  et  $\Delta V_0$  à chaque début de nouveau pas.

## IV.10 Résultats numériques

### IV.10.1 Ecoulement autour d'un cylindre

Le premier exemple que nous allons étudier est celui de l'écoulement autour d'un obstacle cylindrique. Cet écoulement est particulièrement intéressant car de nombreuses études expérimentales (Tritton [53], Chen [54]) et numériques (Jackson [47], Chen [54]) fournissent des valeurs du nombre de Reynolds critique et du nombre de Strouhal (fréquence sans dimension). Pour tester l'indicateur, deux géométries ont été utilisées (figure IV.10). La première géométrie, qui sera référencée ultérieurement "cyl 1" correspond aux données géométriques  $l = 6$ ,  $L = 14$ ,  $l' = 3$ ,  $D = 1$  qui sont présentées en détail sur la figure (IV.10). Sur cette géométrie nous discuterons l'influence du maillage et de la configuration. La deuxième géométrie notée "cyl 2" correspond aux données soulignées sur la figure (IV.10). Ces données sont identiques à celles utilisées par Jackson. Les nombres adimensionnels de l'écoulement sont calculés à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} Re = \frac{\rho \cdot U_x \cdot D}{\mu} \\ St = \frac{D \cdot \omega}{2 \cdot \pi \cdot U_x} \end{cases} \quad (IV.79)$$

Le premier calcul de l'indicateur est réalisé sur l'exemple "cyl 1" avec une formulation Petrov-Galerkin. Sur la courbe (IV.11) nous présentons l'indicateur en fonction de la pulsation  $\omega$ . L'indicateur est calculé pour quatre valeurs du nombre de Reynolds voisines de  $Re = 69$ . Sur cette figure on voit que l'indicateur tend vers une valeur nulle pour des Reynolds compris entre 69.28 et 69.46. Au delà de ces valeurs le minimum

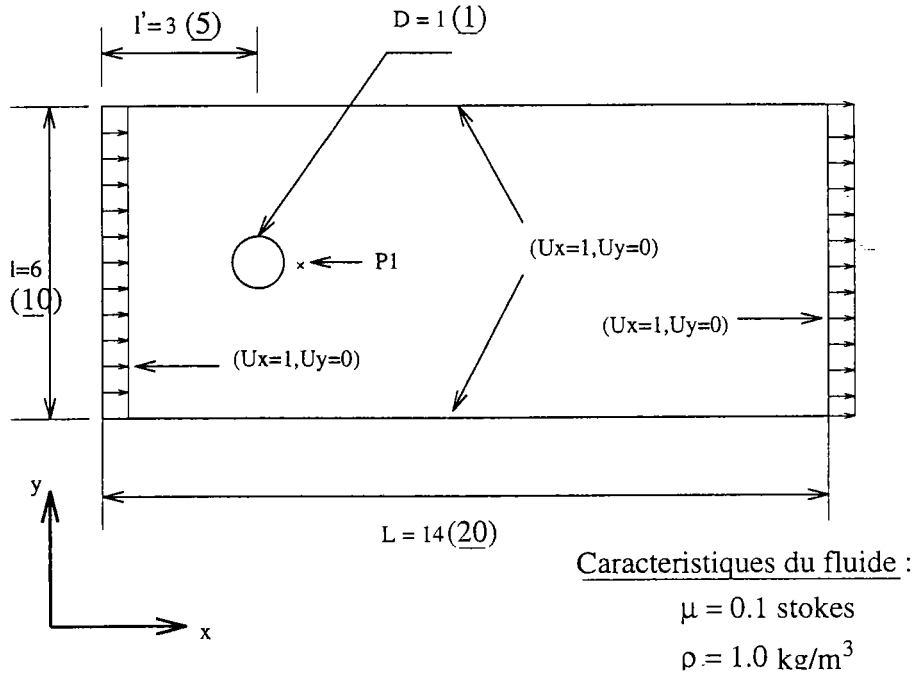


FIG. IV.10 – Description des géométries des exemples de calcul de l'écoulement autour d'un obstacle

de la fonction  $\mu(Re)$  augmente indiquant ainsi que la bifurcation est dépassée. Le tableau (IV.1) montre l'évolution du minimum de l'indicateur en fonction du nombre de Reynolds. Ainsi pour des valeurs de  $Re$  inférieures à 69, le minimum de la fonction  $\mu$  diminue ( $\mu_{\min}(Re = 46.19) = 0.219$  et  $\mu_{\min}(Re = 68.36) = 0.0475$ ), alors que pour des valeurs supérieures ce minimum augmente ( $\mu_{\min}(Re = 69.71) = 0.0148$  et  $\mu_{\min}(Re = 72.42) = 0.1$ ). Pour cet exemple, la bifurcation de Hopf apparaît

Re	46.83	68.36	69.37	69.71	72.42
$\mu_{\min}$	0.219	$0.475 \cdot 10^{-1}$	$0.190 \cdot 10^{-4}$	$0.148 \cdot 10^{-1}$	0.1
$\omega(\mu_{\min})$	4.853	9.424	9.547	9.582	9.73

TAB. IV.1 – Evolution du minimum de l'indicateur en fonction du nombre de Reynolds, exemple de l'écoulement autour d'un cylindre, "cyl 1" (formulation Petrov-Galerkin)

pour un Reynolds critique  $Re_c = 69.37$  et une pulsation égale à 9.547 rad/s. Sur les courbes (IV.12), l'indicateur et sa dérivée par rapport à  $\omega$  sont tracés pour le nombre de Reynolds critique,  $Re_c = 69.37$ . La dérivée de l'indicateur est nulle pour

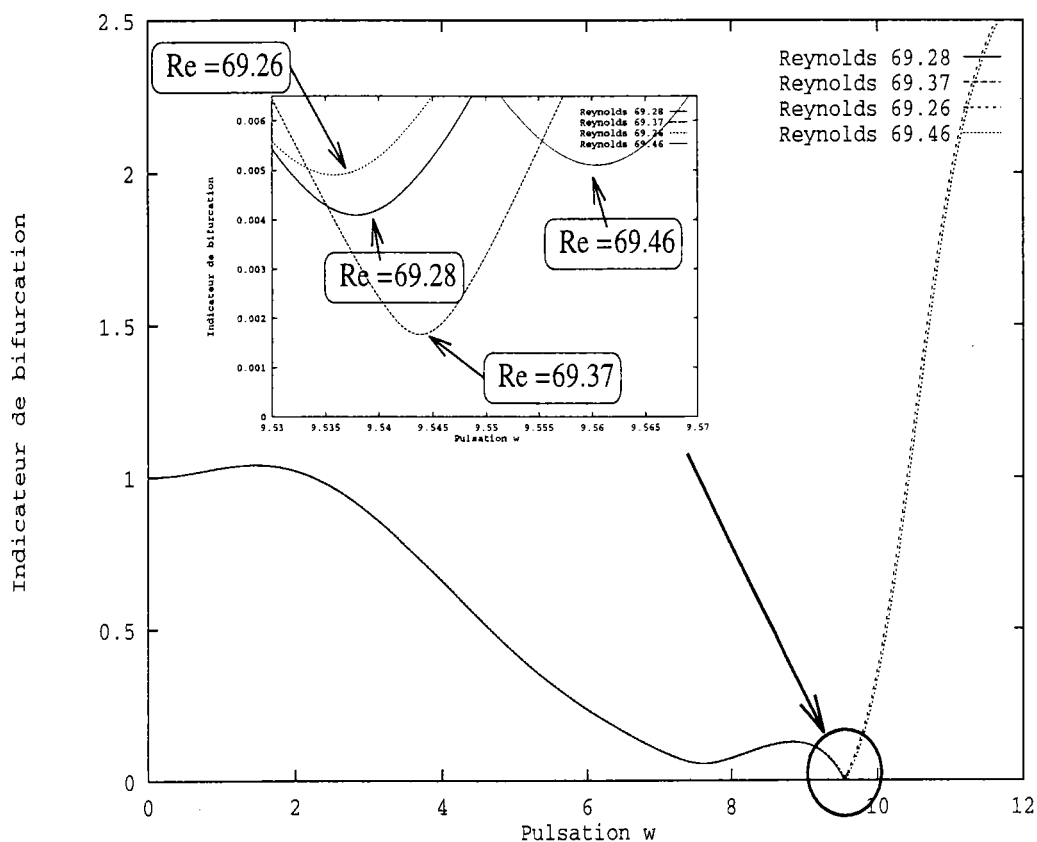


FIG. IV.11 – Calcul de l'indicateur de bifurcation par la MAN, exemple du cylindre "cyl 1" (formulation Petrov-Galerkin)

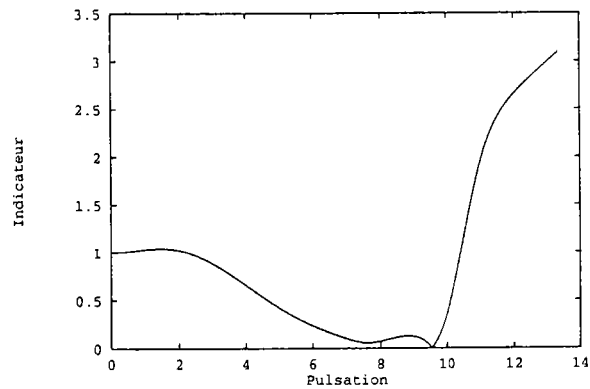
une pulsation  $\omega = 9.547$  rad/s. Cette dérivée est calculée numériquement à partir de la relation suivante :

$$\frac{\partial \mu}{\partial \omega} = \mu_1 + 2 \cdot \omega \cdot \mu_2 + \dots + p \cdot \omega^{(p-1)} \cdot \mu_p \tag{IV.80}$$

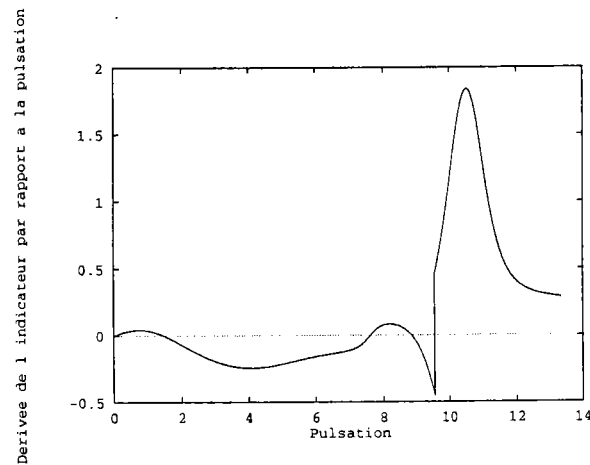
Ce premier exemple nous a permis de caractériser le comportement de l'indicateur au voisinage d'une bifurcation. Nous avons vu que la recherche de la valeur nulle de l'indicateur correspond en pratique à l'étude de l'évolution des minimums de l'indicateur en fonction du nombre de Reynolds.

Le deuxième exemple est l'étude du modèle utilisé par Jackson [47]. Jackson utilise une formulation Galerkin et des éléments Q9/3D. Le calcul de l'indicateur est effectué pour des valeurs du nombre de Reynolds comprises entre 38 et 47. Nous utilisons pour





(a) Indicateur pour  $Re = 69.37$



(b) Dérivée de l'indicateur pour  $Re = 69.37$

FIG. IV.12 – Indicateur et sa dérivée par rapport à  $\omega$ , exemple du cylindre "cyl1" (formulation Petrov-Galerkin)

cette exemple la formulation Galerkin et le cylindre "cyl2". Le tableau (IV.2) montre l'évolution de la valeur minimum de l'indicateur en fonction du nombre de Reynolds. On observe le même comportement de l'indicateur que sur l'exemple précédent. Pour

Re	38.00	43.83	45.98	46.13	47.53
$\mu_{mini}$	$0.903 \cdot 10^{-1}$	$0.184 \cdot 10^{-1}$	$1. \cdot 10^{-8}$	$0.112 \cdot 10^{-2}$	$0.11 \cdot 10^{-1}$
$\omega(\mu_{mini})$	3.195	3.769	3.972	3.986	4.117

TAB. IV.2 – Evolution du minimum de l'indicateur en fonction du nombre de Reynolds, exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (formulation Galerkin)

des valeurs du nombre de Reynolds inférieures à 45, le minimum de l'indicateur di-

minue, pour des valeurs supérieures il augmente. Ainsi pour  $Re = 45.98$  l'indicateur est nul ( $\mu_{\min}(Re = 45.98) = 1.10^{-8}$ ) signalant ainsi pour ces valeurs du nombre Reynolds et de la pulsation ( $\omega = 3.9$ , figure IV.13) une bifurcation de Hopf. Ces valeurs critiques correspondent à un nombre de Strouhal critique égal à  $S_{t_c} = 0.137$ . Jackson [47] donne des valeurs critiques  $Re_c = 46.184$  et  $S_{t_c} = 0.138$  qui sont très proches de celles que nous avons trouvées ici. Nous avons aussi pour  $Re_c = 45.98$  et

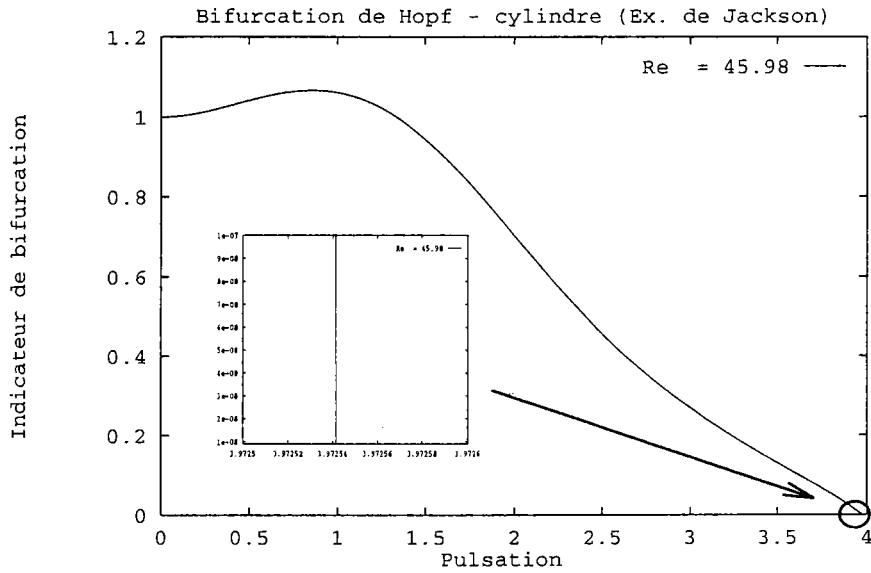


FIG. IV.13 – Indicateur de bifurcation pour  $Re = 45.98$ , exemple du cylindre "cyl 2" (formulation Galerkin)

$\omega_c = 3.9$  calculé les modes de bifurcation réel et imaginaire (figure IV.14). Ces modes de bifurcation sont antisymétriques comme le souligne Jackson [47].

#### IV.10.2 Écoulement dans une marche

Le deuxième exemple que nous allons étudier est celui de l'écoulement dans une marche. Les conditions géométriques ainsi que les vitesses imposées sont données sur la figure (III.1) du chapitre III. Durst [39] indique une bifurcation de Hopf pour une valeur du nombre de Reynolds proche de 610. Cette application est particulièrement intéressante car nous disposons de très peu de renseignements sur les nombres critiques qui caractérisent cette bifurcation de Hopf. La formulation Galerkin a été

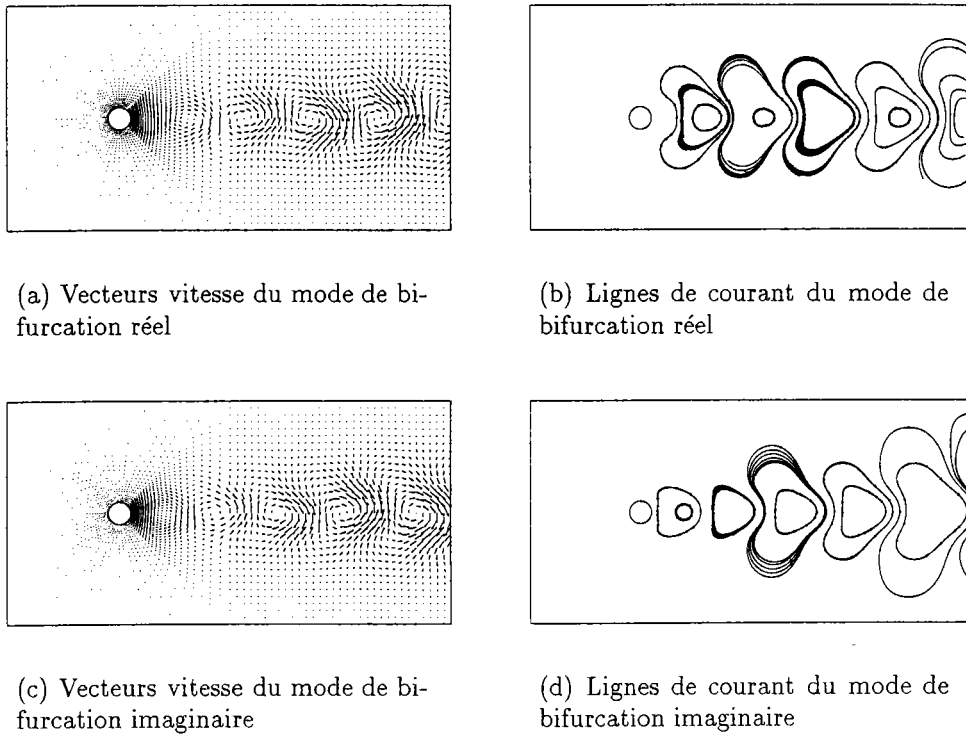


FIG. IV.14 – Modes de bifurcation réel et imaginaire à  $Re_c = 45.98$  et  $\omega_c = 3.9$

utilisée pour ce calcul et l'intervalle des nombres de Reynolds étudié est  $[600, 630]$ . Sur la figure (IV.15), l'évolution des minimums des fonctions  $\mu(Re)$  est présentée pour quatre valeurs du nombre de Reynolds voisines de 610. Sur cette figure, on voit que l'indicateur tend vers une valeur nulle pour un Reynolds critique compris entre 609 et 610 et une pulsation proche de 0.54 rad/s. Ainsi sur cet exemple les valeurs critiques de la bifurcation de Hopf sont :

$$\begin{cases} Re_c = 609 \\ \omega_c = 0.54 \text{ rad/s} \\ St_c = 0.14 \end{cases} \quad (\text{IV.81})$$

Sur la figure (IV.16) les modes de bifurcations réel et imaginaires (précisons que ces modes sont des modes déterminés numériquement en introduisant la pulsation critique  $\omega_c$  dans les développements asymptotiques IV.52) sont donnés pour ces valeurs critiques.

La recherche d'une bifurcation sur la plage de Reynolds  $[600, 630]$  a permis de mettre en évidence une deuxième bifurcation pour  $Re \approx 620$  (figure IV.17). Cette

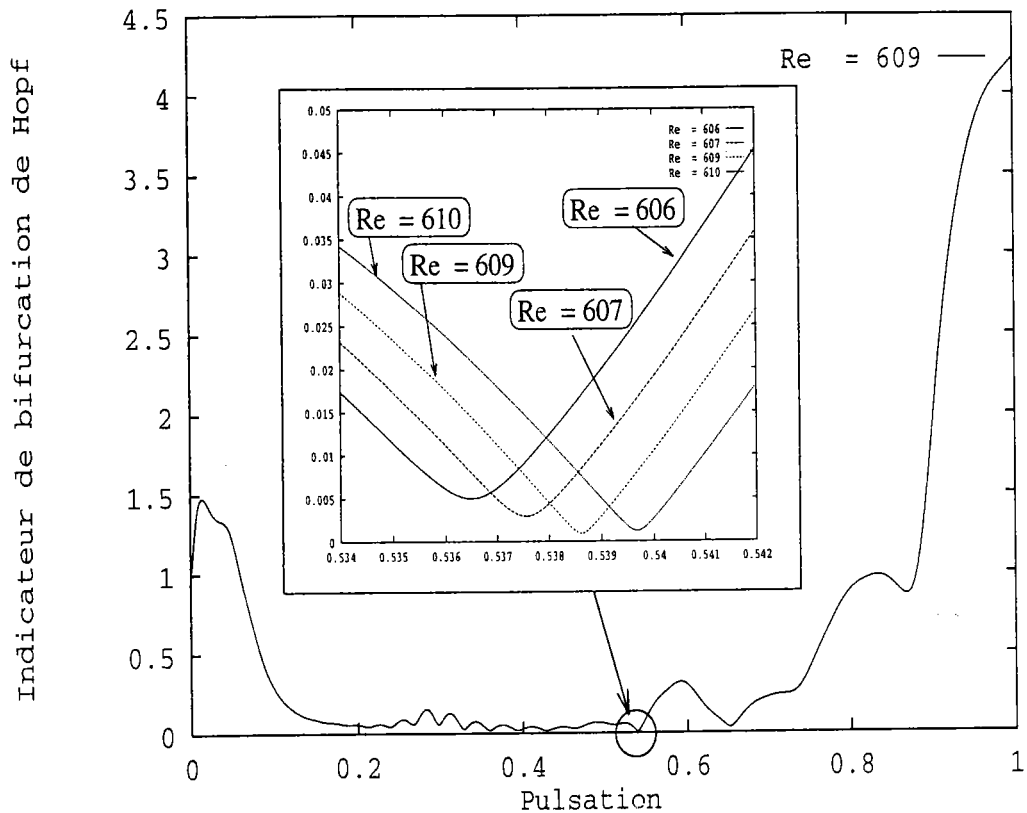


FIG. IV.15 – Calcul de l'indicateur de bifurcation par la MAN, exemple de la marche (formulation Galerkin)

deuxième bifurcation correspond à une valeur de la pulsation proche de 0.66. Le minimum de la fonction  $\mu(Re)$  pour cette valeur de  $\omega$  était déjà présent pour un nombre de Reynolds égal à 609. Mais ce minimum n'a évolué que lorsque  $Re$  a atteint une valeur proche de 617.

On peut alors imaginer que chaque minimum des fonctions  $\mu(Re)$  des figures (IV.15 et IV.17) correspond à des nombres critiques pour lesquels il peut y avoir une bifurcation de Hopf. On compte ainsi une dizaine de vallées (ou de minimums) entre  $\omega = 0.2$  rad/s et  $\omega = 0.8$  rad/s. Ce phénomène d'accumulations de minimums peut être identifié à un ensemble de valeurs propres de la matrice tangente proche de l'axe imaginaire. Chaque valeur propre s'apprête à traverser cet axe, signifiant ainsi une possible bifurcation de Hopf. Ainsi sur cet exemple, deux valeurs propres ont traversé

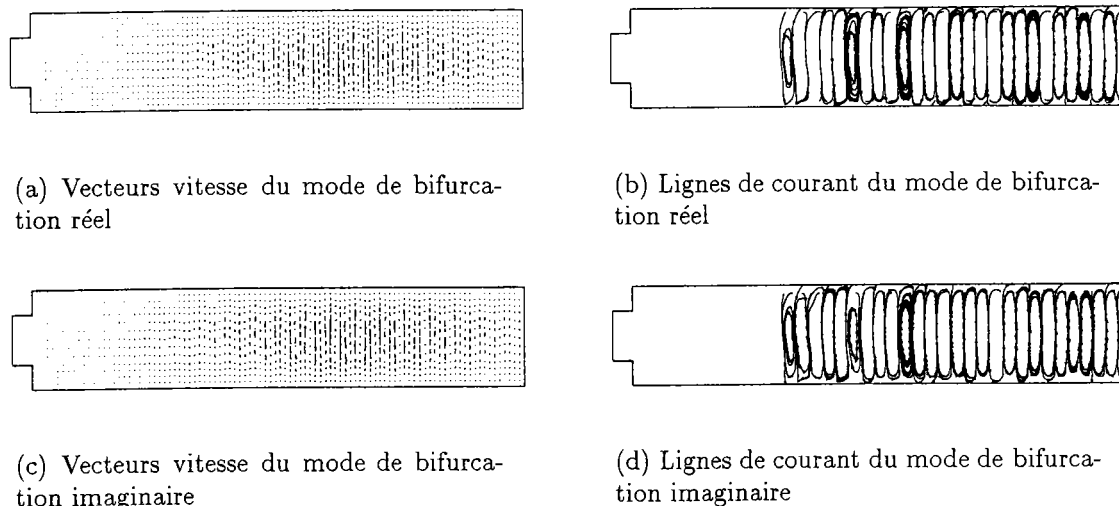


FIG. IV.16 - Modes de bifurcation réel et imaginaire à  $Re_c = 609$  et  $\omega_c = 0.54$ , exemple de la marche, modes numériques obtenus en introduisant  $\omega_c = 0.54$  dans l'expression (IV.52)

l'axe imaginaire: une à  $Re_c = 609$  et la deuxième à  $Re_c = 620$ . L'indicateur de bifurcation semble se comporter comme une mesure de distance entre l'axe imaginaire et la position des valeurs propres dans le plan complexe.

Pour montrer que ces vallées évoluent avec le nombre de Reynolds de l'écoulement, nous avons représenté pour quatre valeurs de  $Re$  la courbe de l'indicateur en fonction de la pulsation. Ainsi pour de faibles valeurs du nombre de Reynolds ( $Re = 70$ , Fig. 18(a)) aucune vallée n'est visible. Dès que Reynolds augmente ( $Re = 270$ , Fig. 18(b)) quelques minimums apparaissent mais sont encore loin de la valeur nulle. Pour  $Re = 550$ , fig. 18(c), l'allure générale de la courbe est proche de celle des valeurs  $Re = 609$  et  $Re = 620$ . Pour  $Re = 830$ , fig. 18(d), certains minimums de la courbe précédente ont disparu, indiquant ainsi la possibilité que certaines valeurs propres aient traversées l'axe imaginaire entre  $Re = 550$  et  $Re = 830$ .

L'intérêt d'un tel indicateur, en plus de donner des valeurs des nombres critiques très précises, est de présenter un ensemble de pulsations qui peuvent devenir critiques et donner naissances à des bifurcations de Hopf. Ainsi pour l'exemple de la marche, les deux bifurcations trouvées à  $Re = 609$  et  $Re = 620$  correspondent aux valeurs

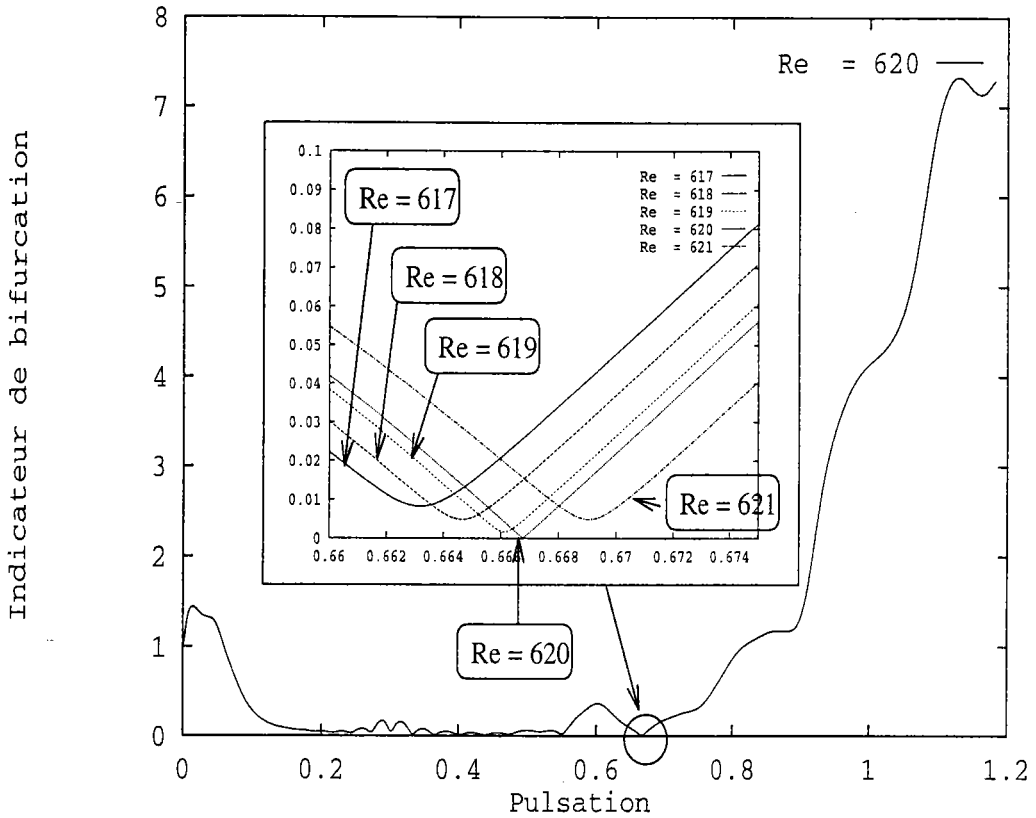


FIG. IV.17 – Calcul de l'indicateur de bifurcation par la MAN, exemple de la marche (formulation Galerkin)

propres suivantes :

$$\begin{cases} Re = 609, \zeta_1(\lambda_c) = \bar{\zeta}_2(\lambda_c) = i\omega_c = 0.54.i \\ Re = 620, \zeta_1(\lambda_c) = \bar{\zeta}_2(\lambda_c) = i\omega_c = 0.66.i \end{cases} \quad (IV.82)$$

### IV.10.3 Comparaison des formulations Galerkin et Petrov-Galerkin

Dans ce paragraphe, nous allons comparer les résultats des formulations Galerkin et Petrov-Galerkin sur les deux exemples précédents. Les deux configurations géométriques du cylindre (fig. IV.10) sont testées avec des maillages différents en vue de déterminer l'influence du nombre de d.d.l. sur les nombres critiques de l'écoulement. Le tableau (IV.3) résume les valeurs des nombres de Reynolds et les pulsations critiques à chaque fois qu'une bifurcation a été trouvée. Pour la formulation Galer-

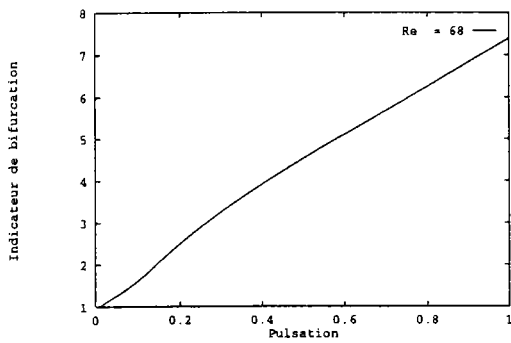
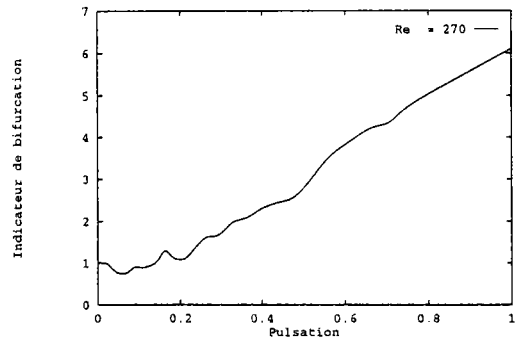
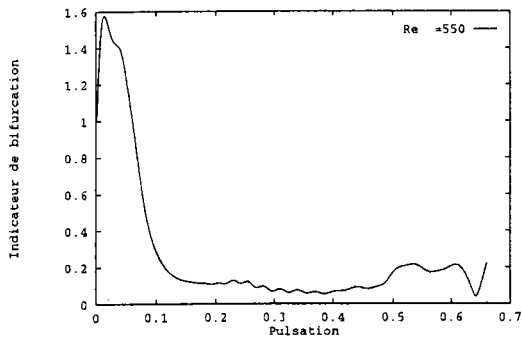
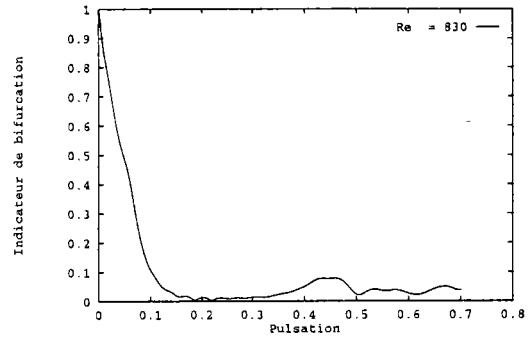

 (a)  $Re = 70$ 

 (b)  $Re = 270$ 

 (c)  $Re = 550$ 

 (d)  $Re = 830$ 

FIG. IV.18 – Evolution de l'indicateur de bifurcation en fonction du nombre de Reynolds (exemple de la marche)

kin (exemple "cyl1") on observe une certaine convergence des valeurs critiques avec la finesse du maillage ( $Re_c = 52.71$  et  $\omega_c = 5.53$  pour 2800 d.d.l.,  $Re_c = 45.61$  et  $\omega_c = 4.68$  pour 6400 d.d.l.). Ces valeurs critiques sont relativement proches des valeurs numériques et expérimentales de la littérature ([47], [54]) qui sont :  $Re_c \approx 46$  et  $St_c \approx 0.14$ . Par contre avec la formulation Petrov-Galerkin ces valeurs critiques évoluent très peu avec le nombre de d.d.l.. Les nombres de Reynolds correspondant à une bifurcation de Hopf sont proches de 70 et les pulsations de 9 rad/s. On pouvait cependant prévoir ce résultat, ou ce comportement car la finalité de la formulation Petrov-Galerkin est de conserver une certaine qualité de la solution indépendamment de la finesse du maillage. De plus sur l'exemple "cyl2", l'indicateur avec une formula-

tion Petrov-Galerkin ne s'est jamais annulé dans l'intervalle du nombre de Reynolds [40, 80]. Le phénomène de décalage du nombre de Reynolds critique que nous avons constaté lors du calcul de l'indicateur de bifurcation stationnaire avec une formulation Petrov-Galerkin (chapitre III) apparaît aussi pour le calcul de l'indicateur de bifurcation de Hopf. Ce décalage est aussi observé sur l'exemple de la marche, où

Exemples	Galerkin			Petrov-Galerkin		
	$Re_c$	$\omega_c$	$S_t$	$Re_c$	$\omega_c$	$S_t$
Cyl 1 (2800 d.d.l.)	52.716	5.530	0.167	69.377	9.548	0.22
Cyl 1 (5000 d.d.l.)	49.33	5.306	0.171	71.247	9.31	0.21
Cyl 1 (6400 d.d.l.)	45.61	4.687	0.163	68	8.125	0.19
Cyl 2 (6100 d.d.l.)	45.98	3.972	0.137	*	*	*
Marche (6000 d.d.l.)	609.48	0.539	0.14	625	0.37	0.09
Marche (6000 d.d.l.)	620	0.66	0.17	*	*	*

TAB. IV.3 – Résumé des résultats sur le calcul de l'indicateur pour les deux formulations

la première bifurcation de Hopf est trouvée pour un nombre de Reynolds égal à 625 ( $Re_c = 610$  pour la formulation Galerkin).

## IV.11 Conclusion

Les résultats numériques de ce chapitre montrent l'efficacité de l'indicateur de bifurcation de Hopf. Quelques aménagements par rapport à la méthode initialement développée par Bensaadi, permettent grâce à une technique de continuation, de chercher des points de bifurcation pour n'importe quelle valeur de la pulsation. De plus, contrairement aux méthodes directes qui n'autorisent le calcul que d'un seul et unique point singulier, cet algorithme a l'avantage de déterminer tous les points de bifurcation sur une branche de solution stationnaire.

L'indicateur de bifurcation que nous avons développé dans ce chapitre est un outil numérique fiable mais qui peut être amélioré. Pour diminuer le nombre de triangulations de la matrice  $\mathcal{L}(U_f, \omega)$  et ainsi diminuer le temps de calcul, on pourrait utiliser une technique de continuation avec les approximants de Padé (Elhage-Hussein [55]),



puisque ces derniers doublent pratiquement le rayon de convergence des approximations polynomiales. Mais nous nous orientons aussi vers une procédure entièrement automatique de détection des points de bifurcation, et non pas "visuelle" comme nous le faisons aujourd'hui. Une des idées que nous privilégions est le suivi des minimums de l'indicateur. En effet comme nous disposons d'expressions analytiques des fonctions  $\mu(\omega)$ , il est alors aisé de calculer et de suivre ces minimums. Cette technique devrait nécessiter de revenir à des fonctions  $\mu$  à deux paramètres (le nombre de Reynolds et la pulsation).

Mais on peut aussi imaginer de coupler les résultats de l'algorithme actuel avec par exemple la méthode d'itérations inverses pour le calcul de valeurs propres. En effet sur l'exemple de la marche nous disposons d'une dizaine de valeurs de la pulsation qui peuvent servir de valeurs initiales à ces algorithmes et ainsi augmenter leur rapidité de convergence.

Nous avons aussi montré dans ce chapitre que les résultats avec une formulation Petrov-Galerkin sont incorrects. Il semble que cette formulation transforme la physique du problème étudié. En effet l'indicateur s'annule (lorsqu'il s'annule) pour des nombres de Reynolds qui ne correspondent pas aux Reynolds critiques observés expérimentalement. Nous savons que cette formulation transforme la physique du problème pour assurer une bonne stabilité numérique avec des maillages grossiers. Cette formulation n'avait pas trop perturbé les calculs stationnaires que nous avons réalisés précédemment. En revanche, la formulation Petrov-Galerkin a conduit à des résultats inacceptables pour les quatre bifurcations de Hopf que nous avons étudié ici : dans deux cas, nous n'avons trouvé aucune bifurcation ; dans les deux autres le nombre de Strouhal et le nombre de Reynolds critiques étaient erronés.



## CHAPITRE V

# Vers l'interaction fluide-structure

Ce dernier chapitre a un caractère particulier puisqu'il est consacré à l'application des techniques et outils numériques, développés aux chapitres précédents, à un problème d'interaction fluide-structure. Il existe une multitude d'installations industrielles où l'on rencontre de telles interactions. Nous nous bornerons dans cette étude à un cas particulier : celui d'un tube cylindrique soumis à un écoulement transverse. Ce type d'installation, lorsque la vitesse de l'écoulement est suffisamment importante, peut être sérieusement endommagé ou totalement détruit. Un des phénomènes physiques responsables de tels dommages est les instabilités fluide-élastiques.

Ces instabilités sont des bifurcations de Hopf (Païdoussis et Li [56]) et consistent en des oscillations auto-entretenues des tubes pouvant conduire à la destruction de l'installation, soit par usure, soit par fatigue, selon le mode de fixation des tubes, supports avec jeux où alors fermement maintenus (Axisa [57]).

L'intérêt que nous portons à une telle application est compréhensible car nous disposons d'un outil numérique fiable pour déterminer les branches de solutions stationnaires ainsi que les points de bifurcation de Hopf.

La difficulté de cet exemple réside dans la formulation du problème couplé. Il faut, en effet, tenir compte de l'interaction réciproque fluide-structure : le cylindre modifie l'écoulement par son mouvement et simultanément le fluide agit sur la position du tube par les efforts qu'il lui applique. Pour surmonter cette difficulté, nous utiliserons une description cinématique particulière : la description Arbitraire Lagrange-Euler

(ALE, Huerta [58]). Cette description permet de pallier aux inconvénients des descriptions lagrangiennes et eulériennes (grandes distortions du maillage pour la première et difficultés à représenter les conditions aux limites pour la seconde, voir aussi annexe A) en donnant au maillage une vitesse qui ne soit pas celle des particules fluides (description lagrangienne) et qui ne soit pas nulle (description eulérienne). Nous avons choisi de donner au maillage la vitesse de déplacement du cylindre. Les nouvelles relations qui découlent de la description ALE et dans lesquelles nous introduirons les développements asymptotiques, sont données dans l'annexe A.

Ce chapitre est consacré au calcul des branches de solution d'un problème stationnaire d'interaction fluide-structure par la MAN. Pour introduire les développements asymptotiques dans les équations du problème, nous utilisons les techniques, développées au chapitre II, de mise sous forme quadratique des équations à l'aide notamment de nouvelles variables. Tous les détails techniques concernant la description ALE, la méthode des éléments finis utilisée pour obtenir la forme discrète des équations ainsi que les développements asymptotiques, sont donnés respectivement dans les annexes A, B et C. Nous présentons dans ce chapitre seulement la forme finale des équations à résoudre, l'application numérique étant en cours de réalisation.

L'approche numérique du problème d'interaction fluide-structure que nous proposons dans ce travail se situe entre les modèles physiques et analytiques (Connors-Blevins, Païdoussis-Price ... [59], [60], [61], [62], [63], [64], [65], [66], [67],) et les modèles numériques complets de Tezduyar ou de Farhat ([68], [69]). Notre modèle prend en compte le mouvement de la structure grâce à une cinématique Arbitraire Lagrange-Euler. Les équations stationnaires de Navier-Stokes et celles du mouvement d'une structure indéformable seront résolues par la MAN. Sur les branches de solutions stationnaires, les indicateurs de bifurcation stationnaire et de Hopf définis aux chapitres III et IV permettront d'étudier la stabilité du problème. Nous utiliserons dans notre modèle numérique la formulation Galerkin car nous avons montré aux chapitres précédents que même si la formulation Petrov-Galerkin permettait de déterminer correcte-

ment les solutions stationnaires, elle modifiait sensiblement la physique du problème étudié.

La méthode de résolution du phénomène d'interaction fluide-structure que nous proposons ici est une première approche du problème. Il reste encore à tester numériquement cette démarche. Des difficultés pratiques, imprévisibles au stade actuel de notre avancement, pourraient en effet se révéler lors de la mise en place de la résolution numérique.

## V.1 Présentation du problème d'interaction fluide-structure

Nous présentons dans ce paragraphe le problème d'interaction fluide-structure que nous allons résoudre avec la MAN. La structure est un tube cylindrique indéformable de frontière  $\Gamma_c$  (figure V.1). Ce tube peut se déplacer selon l'axe  $x_2$ , son mouvement est noté  $y\vec{d}$ , avec  $y$  l'intensité du déplacement qui est une inconnue. Il est retenu selon  $x_2$  par un ressort élastique linéaire. Le fluide occupe un volume  $\Omega_f$  de frontière  $\Gamma_f$ . Une vitesse  $\lambda v_d$  est imposée sur cette frontière. La difficulté de cet exemple est que le cylindre est en mouvement, il modifie donc constamment le domaine fluide  $\Omega_f$ . Pour surmonter cette difficulté nous utilisons une formulation Arbitraire Lagrange-Euler (voir annexe A) dans laquelle la vitesse de déplacement du maillage vaut la vitesse du cylindre sur  $\Gamma_c$  et zéro sur  $\Gamma_f$ . Les équations du problème d'interaction

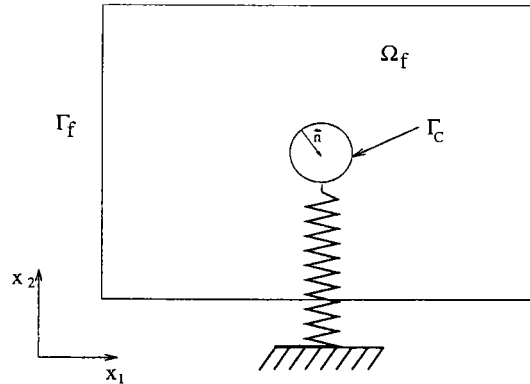


FIG. V.1 – Description du problème étudié

fluide-structure dans le repère spatial (voir annexe A) s'écrivent alors :

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \Big|_x + \rho \cdot c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{dans } R_x \quad (\text{V.1})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{dans } R_x \quad (\text{V.2})$$

$$v = \lambda v_d \quad \text{sur } \Gamma_f \quad (\text{V.3})$$

$$v_i = (y \dot{d}_i) \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (\text{V.4})$$

$$m(\ddot{y}d) + k \cdot y \cdot d = - \int_{\Gamma_c} \sigma(v, p) \cdot n \cdot dl \quad (\text{V.5})$$

avec  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $m$  et  $k$  respectivement la masse par unité de longueur et la raideur du ressort. Les relations (V.1), (V.2), sont les équations d'équilibre, de continuité d'un fluide visqueux incompressible. L'expression (V.3) désigne la condition de vitesse imposée sur la frontière  $\Gamma_f$ . La relation V.4 exprime la condition de compatibilité entre la vitesse du fluide et celle du cylindre sur le bord  $\Gamma_c$ . Finalement la relation (V.5) est l'équation du mouvement du cylindre soumis à l'effort du fluide  $F$  sur le cylindre (suivant la normale  $n$  à l'enveloppe du cylindre  $\Gamma_c$ ). L'action du fluide sur le cylindre est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \int_{\Gamma_c} \sigma(v, p) \cdot n \cdot dl \\ \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \sigma(v, p) = -p \cdot I + 2\mu \cdot e(v) \\ e_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (\text{V.6})$$

## V.2 Equations du problème stationnaire

Dans le paragraphe précédent nous avons rappelé les équations d'un fluide visqueux incompressible avec une formulation ALE. Nous allons maintenant réécrire ces équations en considérant le mouvement du cylindre et l'écoulement fluide stationnaire. La vitesse du maillage est donc nulle,  $\tilde{v} = 0$ . La vitesse de convection  $c_i$  définie par la relation (A.17) (annexe A) est égale à la vitesse des particules fluides dans le repère spatial,  $v_i$ . Les équations définissant le problème stationnaire s'écrivent alors :

$$\rho \cdot v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{dans } R_x \quad (\text{V.7})$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{dans } R_x \quad (\text{V.8})$$

$$v = \lambda v_d \quad \text{sur } \Gamma_f \quad (\text{V.9})$$

$$v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (\text{V.10})$$

$$k \cdot y \cdot \tilde{d} = - \int_{\Gamma_c} \sigma(v, p) \cdot n \cdot dl \quad (\text{V.11})$$

Les équations (V.7), (V.8), (V.9) sont similaires à celles que nous avons résolues par la méthode des éléments finis au chapitre I. Cette fois-ci l'élément de référence n'est pas défini dans le repère spatial mais dans le repère mixte (annexe A).

Nous allons donc travailler dans le repère spatial; l'inconvénient est que celui-ci est en mouvement par rapport au repère de référence (le repère mixte). Cette difficulté peut être enlevée en utilisant des éléments isoparamétriques et en faisant référence pour les quantités discrètes au repère mixte (Hughes [70], fig V.2). C'est à dire que la position d'un point dans le repère spatial sera déterminée par la relation :

$$\tilde{x}(\xi, \eta) = \chi(\xi, \eta) + y \cdot \tilde{d}(\xi, \eta) \tag{V.12}$$

avec  $(\xi, \eta)$  les coordonnées de l'élément de référence,  $\tilde{d}(\xi, \eta)$  le déplacement du maillage (que l'on se donne) et  $y$  l'intensité du déplacement qui est inconnue.

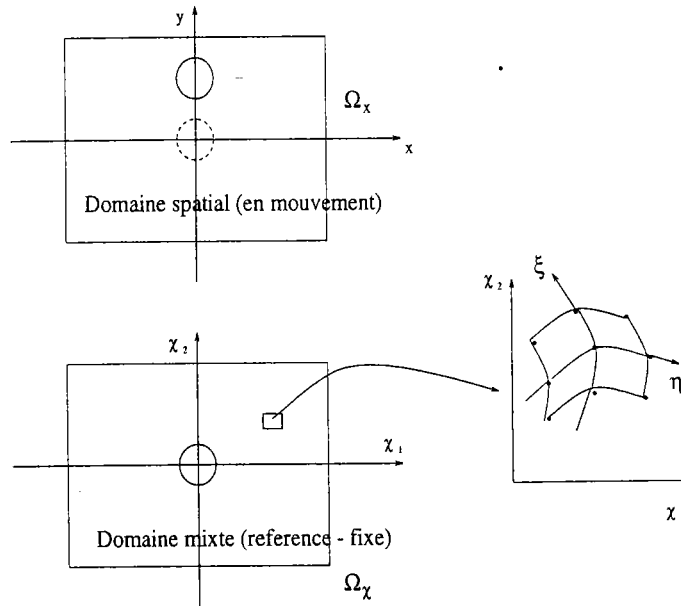


FIG. V.2 - Illustration des deux domaines

### V.3 Equations du problème discret

On introduit dans l'équation de continuité (V.7), un terme de pression pénalisé par un grand paramètre  $k$  ; cette relation s'écrit alors :

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{1}{k} \cdot p = 0 \quad \text{dans } R_x \tag{V.13}$$



Le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  exprime la loi de comportement d'un fluide visqueux et est défini par :

$$\sigma_{ij} = -p.\delta_{ij} + \mu.(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (\text{V.14})$$

en introduisant cette dernière équation dans l'équation d'équilibre, on obtient les équations de Navier-Stokes dans le repère  $R_x$  (en supposant les forces de volume  $f_i$  nulles) :

$$\rho.v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + p_{,i} - \mu.v_{i,jj} = 0 \quad \text{dans } R_x \quad (\text{V.15})$$

La forme faible des équations (V.13), (V.15) est obtenue en les multipliant respectivement par les fonctions tests  $\delta p$  et  $\delta v_i$  et en les intégrant sur le domaine  $R_x$ . Soit les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_x} (\delta v_i . \rho v_j . v_{i,j} - \delta v_{i,i} . p + \mu . \delta v_{i,j} . v_{i,j}) d\Omega_x = 0 \text{ dans } \Omega_x \\ \int_{\Omega_x} \delta p (v_{i,i} - \frac{1}{k} p) d\Omega_x = 0 \text{ dans } \Omega_x \end{array} \right. \quad (\text{V.16})$$

Le système (V.16) se met sous la forme discrète grâce aux équations définies au chapitre I, paragraphe I.5.

$$\left[ \begin{array}{cc} [K_{uu} + N_{uu}(v)] & [K_{up}] \\ [{}^t K_{up}] & [K_{pp}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} v \\ p \end{array} \right\} = \lambda . \left\{ \begin{array}{c} F \\ 0 \end{array} \right\} \quad (\text{V.17})$$

La discrétisation de l'équation d'équilibre du cylindre (V.11) conduit à résoudre le problème suivant :

$$k.y. \underset{\sim}{d} + \mathcal{F} = 0 \quad (\text{V.18})$$

avec  $\mathcal{F}$  représentant l'effort discret du fluide sur le cylindre (voir annexe B, paragraphe B.3)

## V.4 Méthode Asymptotique Numérique

Dans ce paragraphe nous allons introduire les développements asymptotiques pour résoudre le problème d'interaction fluide-structure défini par les équations (V.17) et (V.18). Avant d'effectuer ces développements asymptotiques il est important de rappeler que les matrices élémentaires ( $K_{uu}$ ,  $N_{uu}$ ,  $K_{up}$ ,  $K_{pp}$ ) dépendent de l'intensité du déplacement du maillage  $y$ . La dépendance de chaque matrice est donnée dans l'annexe (B). Les inconnues du problème sont maintenant la vitesse du fluide  $v$ , la pression  $p$  ainsi que l'intensité du déplacement du maillage  $y$ . Le déplacement du maillage dans les équations stationnaires de Navier-Stokes introduit de nouvelles relations qui dépendent soit de la vitesse du fluide, soit de l'intensité du déplacement du maillage ou des deux. Les expressions dans lesquelles les développements asymptotiques vont être introduits sont définies par les relations (V.19) (voir annexe B pour plus de détails).

Toutes ces relations sont des expressions discrètes. Les indices  $^0$  et  $^d$  signifient que les quantités ainsi indicées font références soit à la position de la particule fluide dans le repère mixte (indice  $^0$ ), soit au déplacement du maillage dans le repère mixte (indice  $^d$ ). La discrétisation des relations (V.17) et (V.18) ne conduit pas directement aux expressions (V.19). En effet ces dernières sont toutes sous une forme quadratique, grâce à laquelle, nous l'avons souligné au chapitre II, il est aisé d'introduire les développements asymptotiques. Pour obtenir les relations (V.19) nous avons ainsi utilisé les techniques introduites au chapitre II. A savoir, dès que la non linéarité d'une expression discrète du problème n'est pas quadratique, nous introduisons alors de nouvelles variables pour transformer l'expression initiale en une expression équivalente mais quadratique. Ainsi la variable  $\varphi$ , les matrices  $M^0$  et  $M^d$  ont été introduites dans cette optique.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 J = J^0 + y.J^{0d} + y^2.J^d \\
 K_{uu} = \varphi . k_{uu} \\
 J.\varphi = 1 \\
 k_{uu} = [K_{uu}^0 + y.K_{uu}^{0d} + y^2.K_{uu}^d] \\
 K_{up} = K_{up}^0 + y.K_{up}^d \\
 K_{pp} = K_{pp}^0 + y.K_{pp}^{0d} + y^2.K_{pp}^d \\
 N_{uu}(v, v) = M^0 + y.M^d \\
 M^0 = N_{uu}^0(v, v) \\
 M^d = N_{uu}^d(v, v) \\
 \mathcal{F} = \int_{-1}^{+1} \{\sigma_p + \sigma_v\} . n . d\xi_i \\
 \sigma_p = [N_p] . [I] . p \\
 \sigma_v = \frac{1}{j} . [D] \{ [B^0] + y.[B^d] \} . \{v\}
 \end{array} \right. \quad (V.19)$$

On peut remarquer dans l'ensemble d'équations (V.19) que les quantités :  $J^0$ ,  $J^{0d}$ ,  $J^d$ ,  $K_{uu}^0$ ,  $K_{uu}^{0d}$ ,  $K_{uu}^d$ ,  $K_{up}^0$ ,  $K_{up}^d$ ,  $K_{pp}^0$ ,  $K_{pp}^{0d}$ ,  $K_{pp}^d$ ,  $B^0$ ,  $B^d$  sont toutes des constantes. Les matrices  $M^0$  et  $M^d$  représentent les termes convectifs des équations stationnaires de Navier-Stokes. Les inconnues  $(v, y, p)$  sont solutions du problème discret résultant de la forme faible des équations stationnaires de Navier-Stokes et de l'équation d'équilibre du cylindre :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 [K_{uu}] \{v\} + [N_{uu}(v, v)] + [K_{up}] \{p\} = \lambda \{F\} \\
 [K_{pu}] \{v\} + [K_{pp}] \{p\} = 0 \\
 k.y.d + \mathcal{F} = 0
 \end{array} \right. \quad (V.20)$$

Nous effectuons des développements asymptotiques en fonction du paramètre de chemin  $a$  du vecteur d'inconnues et de quantités élémentaires  $U$  défini par :

$$U = {}^t \{v, p, \lambda, y, J, \varphi, K_{uu}, k_{uu}, K_{up}, K_{pp}, N_{uu}(v, v), M^0, M^d, \mathcal{F}, \sigma_p, \sigma_v\} \quad (\text{V.21})$$

Le vecteur  $U$  s'écrit alors :

$$U = U_0 + aU_1 + a^2U_2 + a^3U_3 + \dots + a^pU_p \quad (\text{V.22})$$

En introduisant ces développements dans le problème (V.20) et en identifiant suivant les puissances de "a", on obtient un problème à l'ordre  $p$  qui s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} [K_t^v] \{v_p\} + [K_t^y] \cdot y_p = \lambda_p \{F\} - FQ \\ [k \cdot d + \mathcal{F}^y] \cdot y_p + [\mathcal{F}^v] \cdot \{v_p\} = -\mathcal{F}Q \end{cases}} \quad (\text{V.23})$$

Les quantités  $K_t^v$  et  $K_t^y$  sont les matrices tangentes où interviennent respectivement la vitesse du fluide et l'intensité du déplacement du maillage. Ces matrices sont définies dans l'annexe C par les relations (C.19). Elles traduisent la dépendance des équations stationnaires de Navier-Stokes envers les inconnues ( $v, p, y, \dots$ ). Le second membre  $FQ$  dépend de la vitesse du fluide et de l'intensité du déplacement aux ordres précédents (cf équation (C.20), annexe C). Dans la seconde relation du problème (V.23), la quantité  $\mathcal{F}^y$  est en quelque sorte la matrice tangente de l'équation du mouvement du tube. Elle résulte de la force du fluide sur le tube. Le second membre  $\mathcal{F}Q$  dépend lui aussi de la vitesse du fluide et de l'intensité du déplacement aux ordres inférieurs à  $p$ . Le problème V.23 est écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{cc} [K_t^v] & [K_t^y] \\ [\mathcal{F}^v] & [k \cdot d + \mathcal{F}^y] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{v_p\} \\ y_p \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \lambda_p \{F\} - FQ \\ -\mathcal{F}Q \end{array} \right\} \\ \text{noté} \\ [K^{F.S.}] \cdot \{U_p^{F.S.}\} = \{F_p^{F.S.}\} \end{array} \right. \quad (\text{V.24})$$

avec  $U^{F.S.}$  le vecteur inconnu mixte à l'ordre  $p$ , défini par :

$$U^{F.S.} = \left\{ \begin{array}{c} v_p \\ y_p \end{array} \right\} \quad (\text{V.25})$$

Comme pour les précédents problèmes non-linéaires résolus avec la MAN (les équations stationnaires de Navier-Stokes chapitres I et II), La matrice tangente  $K^{F.S.}$  est la même pour tous les ordres. Une seule triangulation de  $K^{F.S.}$  et l'évaluation à chaque ordre du second membre  $F_p^{F.S.}$  permet de connaître une partie de la courbe solution. Pour déterminer la totalité des branches solutions, une procédure de continuation comme celle explicitée au chapitre I peut être appliquée. Finalement, sur ces branches de solutions stationnaires du problème d'interaction fluide-structure, un indicateur de bifurcation soit stationnaire (chapitre III) soit dynamique (chapitre IV) peut être introduit sans difficulté particulière.

## V.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre comment nous comptons résoudre un problème d'interaction fluide-structure. Grâce à une description cinématique adaptée, le mouvement du tube a pu être pris en compte dans les équations. Pour la résolution du problème stationnaire par la MAN nous nous sommes appuyés sur les conclusions et les techniques décrites au chapitre II. Ainsi grâce à l'introduction de nouvelles variables, toutes les équations ont pu être mises sous une forme quadratique, ce qui nous a permis d'introduire aisément les approximations polynomiales dans les équations.

Nous avons aussi montré que la matrice tangente gouvernant le problème d'interaction fluide-structure est la même pour tous les ordres de troncature des séries, ce qui permet d'envisager des temps de calcul moins élevés que pour une méthode incrémentale-itérative.

L'introduction d'un indicateur de bifurcation soit stationnaire, soit dynamique, n'a pas fait l'objet de ce chapitre, mais cela ne devrait pas générer de difficulté particulière. En effet nous avons montré aux chapitres précédents que même si la difficulté du problème augmentait (comme c'est le cas avec une formulation Petrov-Galerkin) nous étions capable d'y introduire un indicateur fiable. Nous disposons de plus des équations stationnaires et dynamiques du problème d'interaction fluide-

structure.

Même si la priorité demeure aujourd'hui la programmation des équations développées dans ce chapitre dans le code de calcul EVE, nous nous intéressons aussi à l'augmentation du nombre de tubes, afin de se rapprocher dans l'avenir des problèmes industriels.

# Conclusion générale

L'objectif de cette thèse était d'apporter un outil numérique simple, efficace et rapide pour la mécanique des fluides, dans l'optique de l'appliquer ensuite à un problème plus complexe. Cet objectif est atteint puisque nous disposons aujourd'hui d'un code de calculs pour la mécanique des fluides : ce code a la particularité de résoudre les équations stationnaires de Navier-Stokes avec les formulations Galerkin et Petrov-Galerkin. Nous nous sommes attachés dans ce travail à mettre en évidence les qualités de la MAN par rapport à la méthode incrémentale-itérative de Newton-Raphson. La rapidité, la précision, la description analytique des solutions sont des atouts qui autorisent aujourd'hui la MAN à concurrencer les méthodes de prédiction-corrrection pour résoudre tous les types de problèmes non linéaires. A l'aide de quelques modifications des relations initiales, modifications ne transformant en aucune façon la physique du problème étudié, la MAN peut être appliquée à la plupart des problèmes non linéaires. Il faut en effet dire que des problèmes présentant des singularités sévères (discontinuité par exemple) pourraient s'avérer impossibles à traiter avec une technique de perturbation.

Sur les branches de solutions stationnaires, des indicateurs d'instabilité stationnaire et dynamique informent sur l'évolution de l'écoulement en fonction du nombre de Reynolds. La fiabilité de ces indicateurs a été démontrée sur des problèmes où il existe des instabilités. Pour l'indicateur de bifurcation de Hopf, il reste cependant des améliorations à apporter pour que celui-ci devienne une méthode numérique automatique. Des éléments de réponse sont avancés, notamment dans le suivi des minimums des fonctions de l'indicateur.

Le problème stationnaire d'interaction fluide-structure est quant à lui résolu sur le papier et les applications numériques devraient être rapidement possibles. Les indicateurs d'instabilités doivent apporter des réponses concernant les nombres critiques de l'écoulement. L'extension à des problèmes de complexité plus importante, en particulier l'augmentation du nombre de cylindres, permettra de construire un modèle plus représentatif des installations industrielles. L'objectif de disposer à terme d'un arsenal d'outils numériques simulant les écoulements industriels et l'apparition d'instabilités s'avère aujourd'hui réaliste. De plus de récentes études sur les équations instationnaires de Navier-Stokes (DE OLIVEIRA [71]) devraient permettre de déterminer d'une part les solutions instationnaires du problème d'interaction fluide-structure et d'autre part les solutions périodiques qui naissent après une bifurcation de Hopf.



## ANNEXE A

# Formulation A.L.E.

Deux descriptions cinématiques sont généralement utilisées pour décrire le mouvement d'un domaine fluide ou solide. La première est la description lagrangienne dans laquelle le domaine et les coordonnées d'un point sont notés respectivement  $R_X$  et  $X$ . Dans la seconde, la description eulérienne, le domaine et les coordonnées d'un point sont notés  $R_x$  et  $x$ . Dans la description lagrangienne, les points du maillage coïncident avec les points matériels (la vitesse du maillage est alors celle des particules fluides). L'avantage de cette description réside dans la facilité à représenter les conditions aux limites. De plus cette description n'introduit pas de termes convectifs ce qui facilite le traitement numérique des équations qui gouvernent le mouvement du fluide. Cette description possède cependant l'inconvénient de produire de grandes distortions du maillage. La description eulérienne permet d'éviter ce genre de désagrément. Le maillage est alors fixe et les particules fluides passent au travers. Mais cette description présente elle aussi quelques inconvénients. Le premier est la difficulté numérique à traiter le terme convectif, qui traduit le mouvement relatif entre le maillage et les particules fluides. Le deuxième inconvénient de cette description est la difficulté à représenter les conditions aux limites, par exemple aux interfaces fluide-structures.

Pour éviter les désagréments de ces deux descriptions, la description Arbitraire Lagrange-Euler (ALE) a été développée (Hirt et Al. [72] pour les différences finies et Donéa et Al. [73] pour les éléments finis). L'idée principale de cette nouvelle description est de donner au maillage une vitesse qui ne soit pas celle des particules fluides (description lagrangienne) et qui ne soit pas nulle (description eulérienne). La vitesse du maillage est choisie arbitrairement par l'utilisateur.

Nous reprenons dans cette annexe la totalité des notations, des écritures et des expressions de l'article de Huerta et Liu [58].

## A.1 Description cinématique de la formulation A.L.E.

Dans la description ALE, trois domaines sont définis (fig A.1). Le domaine matériel  $R_X$  (Lagrange), le domaine spatial  $R_x$  (Euler) et le domaine mixte  $R_\chi$  (ALE) où les coordonnées des points sont notés  $\chi$ . Soit  $f$  une quantité physique, on notera alors :

- $f(x, t)$  si  $f$  est exprimé dans le repère spatial

- $f^*(\chi, t)$  si  $f$  est exprimé dans le repère mixte
- $f^{**}(X, t)$  si  $f$  est exprimé dans le repère matériel

et l'on peut écrire la relation suivante :

$$f(x, t) = f^*(\chi, t) = f^{**}(X, t) \tag{A.1}$$

La figure (A.1) exprime les relations de passage entre les trois domaines. Elles sont définies par :

$$\begin{aligned} \phi : \quad R_\chi &\longrightarrow R_x \\ (\chi, t) &\longrightarrow \phi(\chi, t) = x \end{aligned} \tag{A.2}$$

et

$$\begin{aligned} \psi : \quad R_\chi &\longrightarrow R_X \\ (\chi, t) &\longrightarrow \psi(\chi, t) = X \end{aligned} \tag{A.3}$$

La relation (A.4) peut alors être réécrite sous la forme suivante :

$$f(\phi(\chi, t), t) = f^*(\chi, t) = f^{**}(\psi(\chi, t), t) \tag{A.4}$$

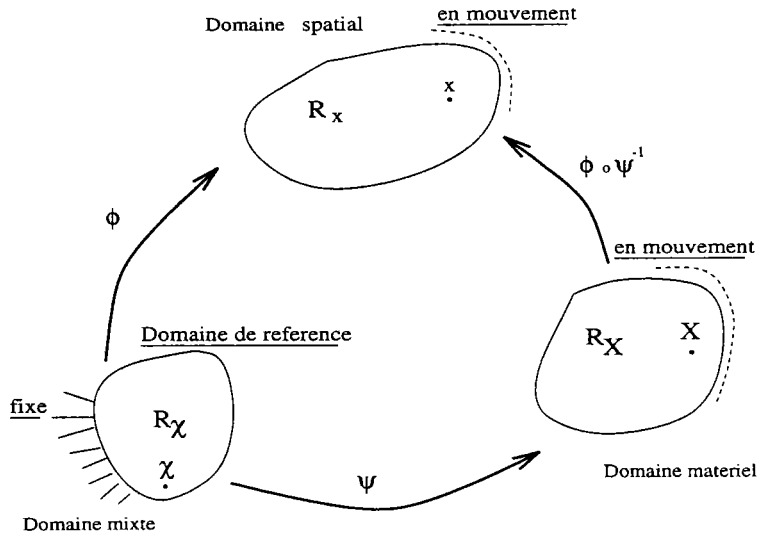


FIG. A.1 - Définition des domaines pour la description Arbitraire Lagrange-Euler (Huerta [58])

### A.1.1 Définitions des dérivées

Soit  $f$  la quantité physique précédemment introduite, sa dérivée matérielle est définie par la relation :

$$\dot{f} = \frac{\partial f^{**}}{\partial t}(X, t) \Big|_X \quad (\text{A.5})$$

sa dérivée spatiale est notée :

$$f' = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \Big|_x \quad (\text{A.6})$$

et finalement sa dérivée mixte est définie par :

$$\tilde{f} = \frac{\partial f^*}{\partial t}(\chi, t) \Big|_x \quad (\text{A.7})$$

Les règles de dérivation des fonctions composées permettent d'écrire les relations suivantes :

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t}(X, t) \Big|_X = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \Big|_x + \frac{\partial x_j}{\partial t} \Big|_X \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, t) \quad (\text{A.8})$$

et

$$\frac{\partial f^*}{\partial t}(\chi, t) \Big|_x = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \Big|_x + \frac{\partial x_j}{\partial t} \Big|_x \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, t) \quad (\text{A.9})$$

ou encore

$$\frac{\partial f^{**}}{\partial t}(X, t) \Big|_X = \frac{\partial f^*}{\partial t}(\chi, t) \Big|_x + \frac{\partial \chi_j}{\partial t} \Big|_x \frac{\partial f^*}{\partial \chi_j}(\chi, t) \quad (\text{A.10})$$

De plus la relation (A.1) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{**}}{\partial t}(X, t) \Big|_X &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \Big|_X \\ \frac{\partial f^*}{\partial t}(\chi, t) \Big|_x &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \Big|_x \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Si on désigne par  $v_i$ ,  $w_i$  et  $\tilde{v}_i$  respectivement les vitesses des particules dans le repère matériel, mixte et la vitesse du maillage, ces dernières sont alors définies :

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_X = \frac{\partial x^{**}}{\partial t}(X, t) \Big|_X \quad (\text{A.12})$$

et

$$w_i = \frac{\partial \chi_j}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.13})$$

et

$$\tilde{v}_i = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_x = \left. \frac{\partial x_i^*}{\partial t}(\chi, t) \right|_x \quad (\text{A.14})$$

Si la quantité physique  $f$  désigne la position  $x_i^{**}$  d'une particule dans le repère matériel, la relation (A.10) devient alors :

$$\left. \frac{\partial x_i^{**}}{\partial t}(X, t) \right|_X = \left. \frac{\partial x_i^*}{\partial t}(\chi, t) \right|_x + \left. \frac{\partial \chi_j}{\partial t} \right|_x \frac{\partial x_i^*}{\chi_j}(\chi, t) \quad (\text{A.15})$$

ou bien en introduisant les relations des vitesses dans chaque repère (éqs (A.12), (A.13) et (A.14)) :

$$v_i - \tilde{v}_i = w_j \frac{\partial x_i^*}{\chi_j}(\chi, t) \quad (\text{A.16})$$

ou encore

$$\boxed{c_i = w_j \cdot \frac{\partial x_i^*}{\chi_j}(\chi, t)} \quad (\text{A.17})$$

avec  $c_i$  la vitesse de convection (Hughes [70]) définie par la relation  $c_i = v_i - \tilde{v}_i$ . Finalement les relations précédentes permettent d'écrire une relation générale de passage entre le repère matériel et le repère mixte pour une quantité physique  $f$  :

$$\boxed{\left. \frac{\partial f^{**}}{\partial t}(X, t) \right|_X = \left. \frac{\partial f^*}{\partial t}(\chi, t) \right|_x + c_i \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)} \quad (\text{A.18})$$

## A.2 Equations de continuité et d'équilibre

La cinématique de la description ALE permet d'écrire les équations de conservation de la masse et d'équilibre dans les trois repères.

Si  $M$  est la masse du fluide considéré, elle est alors définie par :

$$M = \int_{\Omega_X} \rho^0 d\Omega_X = \int_{\Omega_\chi} \hat{\rho} d\Omega_\chi = \int_{\Omega_x} \rho d\Omega_x \quad (\text{A.19})$$

avec  $\rho^0$ ,  $\hat{\rho}$  et  $\rho$  les masses volumiques du fluide définies respectivement dans les repères matériel, mixte et spatial. Le principe de conservation de la masse implique les relations suivantes :

$$\left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_X = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_X \int_{\Omega_X} \rho^0 d\Omega_X = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_X \int_{\Omega_\chi} \hat{\rho} d\Omega_\chi = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_X \int_{\Omega_x} \rho d\Omega_x = 0 \quad (\text{A.20})$$

En utilisant le théorème de changement de repère d'une intégrale de volume (ou formule de transport de Reynolds), l'équation de continuité dans le repère mixte est :

$$\left. \frac{\partial M}{\partial t} \right|_X = \int_{\Omega_\chi} \left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right|_x d\Omega_\chi + \int_{\partial\Omega_\chi} \hat{\rho} w \cdot \hat{n} dS_\chi = 0 \quad (\text{A.21})$$

En utilisant le théorème de la divergence, l'équation (A.21) devient :

$$\frac{\partial M}{\partial t} \Big|_X = \int_{\Omega_x} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_x d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \frac{\partial \hat{\rho} w_i}{\partial \chi_i} d\Omega_x = 0 \quad (\text{A.22})$$

Finalement, l'intégrale de l'équation (A.22) étant nulle quelque soit le domaine  $R_x$ , l'équation de conservation de la masse s'écrit dans le repère mixte :

$$\boxed{\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial \hat{\rho} w_i}{\partial \chi_i} = 0 \text{ dans } R_x} \quad (\text{A.23})$$

De la même façon, on obtient l'équation de conservation de la masse dans le repère spatial :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ dans } R_x} \quad (\text{A.24})$$

On peut bien sûr obtenir des relations similaires en utilisant les définitions (A.8), (A.9) et (A.10). Ainsi en posant  $f = \rho$  dans (A.8) et avec :

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (\text{A.25})$$

on obtient une deuxième équation de continuité dans le repère spatial :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_x + c_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \text{ dans } R_x \quad (\text{A.26})$$

La quantité de mouvement du domaine  $\Omega_x$  à l'instant  $t$  est donnée par la relation :

$$Q(t) = \int_{\Omega_x} \rho(x, t) v(x, t) d\Omega_x \text{ dans } R_x \quad (\text{A.27})$$

cette quantité peut aussi être exprimée dans le repère mixte  $R_x$ , ainsi :

$$Q(t) = \int_{\Omega_x} \hat{\rho}(\chi, t) v(\chi, t) d\Omega_x \text{ dans } R_x \quad (\text{A.28})$$

L'équation d'équilibre dans le domaine  $R_x$  est obtenue en dérivant l'équation (A.28) par rapport au temps, et en définissant les actions extérieures agissant sur  $\Omega_x$  comme la somme des forces de volume  $\hat{f}_i$  et de surface  $\hat{F}_i$  :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \Big|_X = \int_{\Omega_x} \hat{f}_i d\Omega_x + \int_{\partial\Omega_x} \hat{F}_i dS_x \text{ dans } R_x \quad (\text{A.29})$$

En introduisant la relation (A.28) et en utilisant les théorèmes de transport de Reynolds et de la divergence, l'équation (A.29) devient :

$$\int_{\Omega_x} \left[ \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot v)}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot v_i \cdot w_i)}{\partial \chi_j} \right] d\Omega_x = \int_{\Omega_x} \hat{f}_i d\Omega_x + \int_{\partial\Omega_x} \hat{F}_i dS_x \text{ dans } R_x \quad (\text{A.30})$$

En introduisant le premier tenseur de Piola-Kirchoff donné dans le repère mixte  $\hat{T}_{ij}$  et défini par  $\hat{F}_i = \hat{T}_{ji} \cdot \hat{n}_j$ , les équations d'équilibre dans le repère mixte deviennent :

$$\left. \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot v)}{\partial t} \right|_x + \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot v_i \cdot w_i)}{\partial \chi_j} = \hat{f}_i + \frac{\partial \hat{T}_{ji}}{\partial \chi_j} \quad \text{dans } R_x \quad (\text{A.31})$$

Avec l'équation de continuité (A.23) définie dans le repère mixte on obtient :

$$\boxed{\left. \hat{\rho} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} \right|_x + \hat{\rho} \cdot w_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial \chi_j} = \hat{f}_i + \frac{\partial \hat{T}_{ji}}{\partial \chi_j} \quad \text{dans } R_x} \quad (\text{A.32})$$

Les efforts extérieurs appliqués sur  $\Omega_x$  sont définis comme étant la somme des forces volumiques  $f_i$  agissant sur  $\Omega_x$  et des forces surfaciques  $F_i$  agissant sur la surface  $S_x$ . L'équation d'équilibre s'écrit dans  $R_x$  :

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_X = \int_{\Omega_x} f_i d\Omega_x + \int_{\partial\Omega_x} F_i dS_x \quad (\text{A.33})$$

Avec l'expression des efforts surfaciques :

$$F_i = \sigma_{ji} n_j = \sigma_{ij} n_j \quad (\text{A.34})$$

et le théorème de la divergence, l'équation (A.33) devient :

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_X = \int_{\Omega_x} f_i d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega_x \quad (\text{A.35})$$

ou  $\sigma_{ij}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy. En reprenant le premier membre de l'équation d'équilibre écrite dans  $R_x$  (A.30) et avec  $d\Omega_x = \hat{J} d\Omega_x$  on obtient :

$$\int_{\Omega_x} \hat{J}^{-1} \left[ \left. \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot v)}{\partial t} \right|_x + \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot v_i \cdot w_j)}{\partial \chi_j} \right] d\Omega_x = \int_{\Omega_x} f_i d\Omega_x + \int_{\Omega_x} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\Omega_x \quad (\text{A.36})$$

Avec  $\Omega_x$  choisi arbitrairement, l'équation (A.36) devient :

$$\hat{J}^{-1} \left[ \left. \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot v)}{\partial t} \right|_x + \frac{\partial(\hat{\rho} \cdot v_i \cdot w_j)}{\partial \chi_j} \right] = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.37})$$

Avec l'équation de continuité dans le repère  $R_x$  (A.23) réécrite :

$$\left. \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} \right|_x = - \frac{\partial \hat{\rho} w_j}{\partial \chi_j} \quad (\text{A.38})$$

on obtient :

$$\hat{J}^{-1} \left[ \hat{\rho} \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_x + \hat{\rho} \cdot w_j \frac{\partial v_i}{\partial \chi_j} \right] = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.39})$$

Finalement, avec la relation de passage entre les masses volumiques, (A.39) devient :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_x + \rho \cdot w_j \frac{\partial v_i}{\partial \chi_j} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{A.40})$$

avec la relation suivante :

$$\rho \cdot w_j \frac{\partial v_i}{\partial \chi_j} = \rho \cdot w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \chi_j} \quad (\text{A.41})$$

et avec l'expression (A.17) liant les différentes vitesses entre elles :

$$c_k = w_j \frac{\partial x_k}{\partial \chi_j} \quad (\text{A.42})$$

En utilisant la convention des indices muets on peut écrire :

$$\rho \cdot w_j \frac{\partial v_i}{\partial \chi_j} = \rho \cdot c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.43})$$

Finalement la relation d'équilibre dans le repère spatial s'écrit :

$$\boxed{\rho \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_x + \rho \cdot c_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{dans } R_x} \quad (\text{A.44})$$





## ANNEXE B

# Description A.L.E et éléments finis

### B.1 Introduction

Nous définissons dans cette annexe les expressions dans la configuration Arbitraire-Lagrange-Euler des différentes quantités nécessaires pour le calcul par éléments finis. Le déplacement du maillage est notée  $\tilde{d}$ , son intensité est  $y$ . La position d'une particule dans le repère spatial est alors :

$$\tilde{x} = \chi + y \cdot \tilde{d} \quad (\text{B.1})$$

Nous utiliserons des éléments isoparamétriques pour le calcul éléments finis. Ceci nous donne pour la position et la vitesse de la particule dans le repère mixte :

$$\begin{cases} \chi = \sum_1^{nnoe} N_i(\xi, \eta) \cdot l_i \\ \tilde{v} = \sum_1^{nnoe} N_i(\xi, \eta) \cdot q_i \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

avec  $l_i$  et  $q_i$  respectivement la position et la vitesse aux noeuds. Pour la position d'une particule dans le repère spatial on note :

$$\tilde{x} = \sum_1^{nnoe} N_i(\xi, \eta) \cdot l_i + y \cdot \sum_1^{nnoe} N_i(\xi, \eta) d_i \quad (\text{B.3})$$

avec  $d_i$  les coordonnées des noeuds du maillage.

### B.2 Définition des quantités et des matrices élémentaires

Le Jacobien de la transformation pour le passage du repère  $R_x$  au repère  $R_{(\xi, \eta)}$  s'écrit :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial \xi} & \frac{\partial d_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial d_1}{\partial \eta} & \frac{\partial d_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

On décompose le Jacobien en deux parties, une première qui ne dépend pas de  $y$  et une seconde linéaire en  $y$ . On le réécrit ainsi :

$$\boxed{[J] = [J^0] + y \cdot [J^d]} \quad (\text{B.5})$$

En notant  $J$  le déterminant du Jacobien de la transformation, on peut le définir de la façon suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} J = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \eta} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \eta} \\ J = \frac{\partial(\chi_1 + y \cdot d_1)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial(\chi_2 + y \cdot d_2)}{\partial \eta} - \frac{\partial(\chi_2 + y \cdot d_2)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial(\chi_1 + y \cdot d_1)}{\partial \eta} \end{array} \right. \quad (\text{B.6})$$

soit en fonction du déplacement du maillage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{J = J^0 + y \cdot J^{0d} + y^2 \cdot J^d} \\ \text{Avec} \\ J^0 = \det[J^0] = \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} - \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} \\ J^{0d} = \left\{ \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial d_2}{\partial \eta} + \frac{\partial d_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} \right\} - \left\{ \frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial \eta} + \frac{\partial d_2}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} \right\} \\ J^d = \frac{\partial d_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial d_2}{\partial \eta} - \frac{\partial d_2}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial d_1}{\partial \eta} \end{array} \right. \quad (\text{B.7})$$

L'inverse du Jacobien peut-être exprimé de la même façon :

$$[J]^{-1} = \frac{1}{J} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \{ [\mathcal{J}^0] + y \cdot [\mathcal{J}^d] \} \quad (\text{B.8})$$

avec les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} [\mathcal{J}^0] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial \chi_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial \chi_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \chi_1}{\partial \xi} \end{bmatrix} \\ [\mathcal{J}^d] = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_2}{\partial \eta} & -\frac{\partial d_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial d_1}{\partial \eta} & \frac{\partial d_1}{\partial \xi} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{B.9})$$

La forme faible des équations de Navier-Stokes conduit à la définition de plusieurs matrices élémentaires. La première liée à la partie visqueuse est notée  $k_{uu}^e$ , la deuxième liée à la pression de l'équation de quantité de mouvement,  $k_{pu}^e$ , la troisième liée à l'équation d'incompressibilité,  $k_{up}^e$  et la dernière représente la pénalisation,  $k_{pp}^e$ . Le terme de convection est noté  $n_{uu}^e$ . La forme faible des équations de Navier-Stokes s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \{[K_{uu}] + [K_{pu}]\} \{q\} + [N_{uu}(v, v)] = \lambda \{F\} \\ \{[K_{up}] + [K_{pp}]\} \{p\} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

avec  $q$  les vitesses nodales et  $p$  les pressions nodales. La partie visqueuse est définie par :

$$K_{uu} = \sum_{nel} k_{uu}^e = \sum_{nel} \int_{\Omega_x^e} [B]^t [D] [B] d\Omega_x^e = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} [B]^t [D] [B] H_i J_i w_i \quad (\text{B.11})$$

La matrice  $[B]$  contient les dérivées de la vitesse définie dans le repère spatial,  $v$ , et s'écrit :

$$[B] \cdot \{q\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

Le vecteur contenant les dérivées des vitesses dans le repère spatial est exprimé dans le repère de l'élément de référence :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [N_{i,\xi}] & 0 \\ [N_{i,\eta}] & 0 \\ 0 & [N_{i,\xi}] \\ 0 & [N_{i,\eta}] \end{bmatrix} [q_i] \quad (\text{B.13})$$

L'expression de la matrice  $[B]$  est donc :

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [N_{i,\xi}] & 0 \\ [N_{i,\eta}] & 0 \\ 0 & [N_{i,\xi}] \\ 0 & [N_{i,\eta}] \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

soit en introduisant la relation (B.8) incluant le déplacement du maillage :

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{J} \begin{bmatrix} [\mathcal{J}^0] + y \cdot [\mathcal{J}^d] & 0 \\ 0 & [\mathcal{J}^0] + y \cdot [\mathcal{J}^d] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [N_{i,\xi}] & 0 \\ [N_{i,\eta}] & 0 \\ 0 & [N_{i,\xi}] \\ 0 & [N_{i,\eta}] \end{bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Nous séparons dans cette dernière relation les parties dépendantes du déplacement du maillage ;  $[B]$  se réécrit :

$$[B] = \frac{1}{J} \{ [B^0] + y \cdot [B^d] \} \quad (\text{B.16})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [B^0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{J}^0] & 0 \\ 0 & [\mathcal{J}^0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [N_{i,\xi}] & 0 \\ [N_{i,\eta}] & 0 \\ 0 & [N_{i,\xi}] \\ 0 & [N_{i,\eta}] \end{bmatrix} \\ [B^d] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{J}^d] & 0 \\ 0 & [\mathcal{J}^d] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [N_{i,\xi}] & 0 \\ [N_{i,\eta}] & 0 \\ 0 & [N_{i,\xi}] \\ 0 & [N_{i,\eta}] \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{B.17})$$

soit en introduisant la relation (B.16) dans l'expression (B.11) :

$$K_{uu} = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} \frac{1}{J} [B^0 + y \cdot B^d]^t [D] [B^0 + y \cdot B^d] H \cdot w_i \quad (\text{B.18})$$

ou bien

$$K_{uu} = K_{uu}^0 + y \cdot K_{uu}^{0d} + y^2 \cdot K_{uu}^d \quad (\text{B.19})$$

avec les définitions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{uu}^0 = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} \frac{1}{J} [B^0]^t [D] [B^0] H \cdot w_i \\ K_{uu}^{0d} = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} \frac{1}{J} \{ [B^d]^t [D] [B^0] + [B^0]^t [D] [B^d] \} H \cdot w_i \\ K_{uu}^d = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} \frac{1}{J} [B^d]^t [D] [B^d] H \cdot w_i \end{array} \right. \quad (\text{B.20})$$

Par abus de notation, l'expression (B.19) est écrite :

$$\boxed{K_{uu} = \frac{1}{J} \{ K_{uu}^0 + y \cdot K_{uu}^{0d} + y^2 \cdot K_{uu}^d \}} \quad (\text{B.21})$$

La matrice  $K_{up}$  s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{up} = \sum_{nel} k_{up}^e = \sum_{nel} \int_{\Omega_x^e} [B_v]^t [N_p] d\Omega_x^e = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} [B_v]^t [N_p] H J \cdot w_i \\ \text{Avec } [B_v] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} [B] \\ \text{et } N_p \text{ les fonctions de forme de pression} \end{array} \right. \quad (\text{B.22})$$

En introduisant l'expression de la matrice  $[B]$  (B.16) où le déplacement du maillage intervient, la matrice  $K_{up}$  devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{K_{up} = K_{up}^0 + y \cdot K_{up}^d} \\ \text{avec les définitions suivantes :} \\ K_{up}^0 = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} [B_v^0]^t [N_p] H w_i \text{ et } [B_v^0] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} [B^0] \\ K_{up}^d = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} [B_v^d]^t [N_p] H w_i \text{ et } [B_v^d] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} [B^d] \end{array} \right. \quad (\text{B.23})$$

La matrice  $K_{pp}$  relative à la pression provenant de la pénalisation (où  $K$  représente le coefficient de pénalisation) dans l'équation de conservation de la masse est définie par la relation,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{pp} = \sum_{nel} k_{pp}^e = \sum_{nel} \frac{1}{K} \int_{\Omega_x^e} [N_p]^t [N_p] d\Omega_x^e = \sum_{nel} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{NPG} [N_p]^t [N_p] H J \cdot w_i \\ \text{où bien} \\ \boxed{K_{pp} = J \cdot K_{pp}^0} \\ \text{Avec } K_{pp}^0 = \sum_{nel} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{NPG} [N_p]^t [N_p] H w_i \end{array} \right. \quad (\text{B.24})$$

En introduisant dans l'équation précédente la définition du déterminant  $J$  (eq. B.7),

la matrice  $K_{pp}$  est réécrite en fonction du déplacement du maillage :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \boxed{K_{pp} = K_{pp}^0 + y \cdot K_{pp}^{0d} + y^2 \cdot K_{pp}^d} \\
 \text{Avec les relations suivantes :} \\
 K_{pp}^0 = \sum_{nel} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{NPG} [N_p]^t [N_p] H J^0 \cdot w_i \\
 K_{pp}^{0d} = \sum_{nel} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{NPG} [N_p]^t [N_p] H J^{0d} \cdot w_i \\
 K_{pp}^d = \sum_{nel} \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{NPG} [N_p]^t [N_p] H J^d \cdot w_i
 \end{array} \right. \quad (B.25)$$

La matrice  $N_{uu}(v, v)$  contenant les termes de convection s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 N_{uu}(v, v) = \sum_{nel} n_{uu}^e(v, v) = \sum_{nel} \int_{\Omega_x^e} [w_u]^t [A(v)] [\theta(v)] d\Omega_x^e = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} [w_u]^t [A(v)] [\theta(v)] H J \cdot w_i \\
 \text{Avec} \\
 [A(v)] = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & v_2 \end{bmatrix} \\
 {}^t[\theta(v)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}
 \end{array} \right. \quad (B.26)$$

D'après les relations (B.13) et (B.8) où intervient le déplacement du maillage, la matrice  $[\theta]$  devient :

$$[\theta(v)] = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} [\mathcal{J}^0] + y \cdot [\mathcal{J}^d] & 0 \\ 0 & [\mathcal{J}^0] + y \cdot [\mathcal{J}^d] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [N_{i,\xi}] & 0 \\ [N_{i,\eta}] & 0 \\ 0 & [N_{i,\xi}] \\ 0 & [N_{i,\eta}] \end{bmatrix} [q_i] \quad (B.27)$$

La matrice  $N_{uu}(v, v)$  s'écrit finalement :

$$N_{uu}(v, v) = N_{uu}^0(v, v) + y \cdot N_{uu}^d(v, v) \quad (B.28)$$

L'équation (B.28) est réécrite :

$$\boxed{N_{uu}(v, v) = M^0 + y \cdot M^d} \quad (B.29)$$

$M^0$  et  $M^d$  sont des opérateurs quadratiques définis par les relations :

$$\begin{cases} M^0 = N_{uu}^0(v, v) \\ M^d = N_{uu}^d(v, v) \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

avec les définitions suivantes

$$\begin{cases} N_{uu}^0(v, v) = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} [w_u]^t [A(v)] [\theta^0(v)] H \cdot w_i \\ N_{uu}^d(v, v) = \sum_{nel} \sum_{i=1}^{NPG} [w_u]^t [A(v)] [\theta^d(v)] H \cdot w_i \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

et aussi

$$\begin{cases} [\theta^0(v)] = \begin{bmatrix} [\mathcal{J}^0] & 0 \\ 0 & [\mathcal{J}^0] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [N_{i,\xi}] & 0 \\ [N_{i,\eta}] & 0 \\ 0 & [N_{i,\xi}] \\ 0 & [N_{i,\eta}] \end{bmatrix} [q_i] \\ [\theta^d(v, v)] = \begin{bmatrix} [\mathcal{J}^d] & 0 \\ 0 & [\mathcal{J}^d]^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [N_{i,\xi}] & 0 \\ [N_{i,\eta}] & 0 \\ 0 & [N_{i,\xi}] \\ 0 & [N_{i,\eta}] \end{bmatrix} [q_i] \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

### B.3 Définition de l'effort du fluide sur le cylindre

L'effort du fluide sur le cylindre  $F$  est défini par la relation :

$$\begin{cases} F = \int_{\Gamma_c} \sigma(v, p) \cdot n \cdot dl \\ \text{avec } \begin{cases} \sigma(v, p) = -p \cdot I + 2\mu \cdot e(v) \\ e_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

La forme discrète de cette force notée  $\mathcal{F}$  est donnée par la relation :

$$\mathcal{F} = \int_{-1}^{+1} \sigma(v, p) \cdot n \cdot d\xi_i \quad (\text{B.34})$$

où  $\xi_i$  représente le côté de l'élément de référence (figure B.1) sur lequel la force agit. La forme discrète du tenseur des contraintes est donnée par l'expression :

$$\sigma(v, p) = [N_p] \cdot [I] \cdot p + [D] \cdot [B] \cdot \{v\} \quad (\text{B.35})$$

En introduisant la relation (B.16) dans l'expression (B.35), on obtient la relation entre la contrainte et les variables  $v$ ,  $p$  et l'intensité du déplacement  $y$ .

$$\sigma(v, p) = [N_p] \cdot [I] \cdot p + \frac{1}{J} \cdot [D] \{ [B^0] + y \cdot [B^d] \} \cdot \{v\} \quad (\text{B.36})$$

Finalement, la force  $\mathcal{F}$  est définie par la relation :

$$\mathcal{F} = \int_{-1}^{+1} \{ \sigma_p + \sigma_v \} \cdot n \cdot d\xi_i \quad (\text{B.37})$$

avec les définitions suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_p = [N_p] \cdot [I] \cdot p \\ \sigma_v = \frac{1}{J} \cdot [D] \{ [B^0] + y \cdot [B^d] \} \cdot \{v\} \end{cases} \quad (\text{B.38})$$

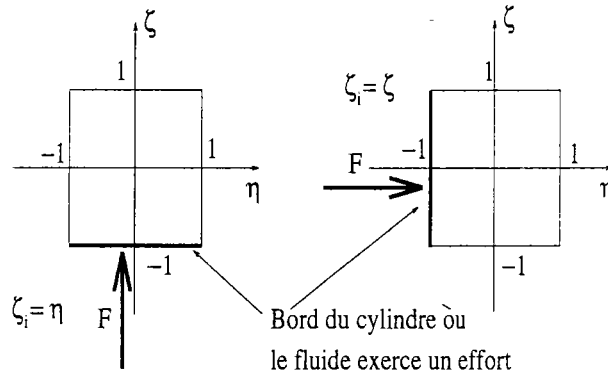


FIG. B.1 – Définition de l'effort du fluide sur l'élément de référence



## ANNEXE C

# Développements asymptotiques pour le problème d'interaction fluide-structure

## C.1 Présentation des équations

Les relations dans lesquelles les développements asymptotiques vont être introduits sont définies par les relations suivantes (voir annexe B pour plus de détails):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 J = J^0 + y.J^{0d} + y^2.J^d \\
 K_{uu} = \frac{1}{J} [K_{uu}^0 + y.K_{uu}^{0d} + y^2.K_{uu}^d] \\
 K_{up} = K_{up}^0 + y.K_{up}^d \\
 K_{pp} = K_{pp}^0 + y.K_{pp}^{0d} + y^2.K_{pp}^d \\
 N_{uu}(v, v) = M^0 + y.M^d \\
 M^0 = N_{uu}^0(v, v) \\
 M^d = N_{uu}^d(v, v) \\
 \mathcal{F} = \int_{-1}^{+1} \{\sigma_p + \sigma_v\} . n . d\xi_i \\
 \sigma_p = [N_p] . [I] . p \\
 \sigma_v = \frac{1}{J} . [D] \{ [B^0] + y.[B^d] \} . \{v\}
 \end{array} \right. \quad (C.1)$$

Toutes les inconnues sont solutions du système discret résultant de la forme faible des équations stationnaires de Navier-Stokes et de l'équation du mouvement du tube :

$$\begin{cases} [K_{uu}] \{v\} + [N_{uu}(v, v)] + [K_{up}] \{p\} = \lambda \{F\} \\ [K_{pu}] \{v\} + [K_{pp}] \{p\} = 0 \\ k.y.d + \mathcal{F} = 0 \end{cases} \quad (C.2)$$

Afin d'éviter de stocker certaines quantités élémentaires à chaque ordre, la relation traduisant la viscosité du fluide est réécrite en introduisant deux nouvelles variables  $\varphi$  et  $k_{uu}$  :

$$\begin{cases} K_{uu} = \varphi \cdot [K_{uu}^0 + y.K_{uu}^{0d} + y^2.K_{uu}^d] = \varphi \cdot k_{uu} \\ \text{avec} \\ \varphi \cdot J = 1 \text{ et } k_{uu} = [K_{uu}^0 + y.K_{uu}^{0d} + y^2.K_{uu}^d] \end{cases} \quad (C.3)$$

En effet si on conserve la forme initiale de l'expression de la matrice de viscosité  $K_{uu}$ , on doit alors, après y avoir introduit les développements asymptotiques, stocker à chaque ordre une matrice locale  $k_{uu, \text{ordre}}^e$ . La dimension de cette matrice est [18, 18] et comme elle est calculée pour chaque point de Gauss, on comprend que le stockage nécessaire à une telle méthode devienne très vite énorme. Les modifications apportées dans les équations (C.3) conduisent à stocker à chaque ordre seulement deux scalaires  $\varphi_{\text{ordre}}$  et  $J_{\text{ordre}}$ .

## C.2 Développements asymptotiques

Nous introduisons les développements asymptotiques en fonction du paramètre de chemin  $a$  dans le vecteur d'inconnues et de quantités élémentaires et globales  $U$  défini par :

$$U = {}^t \{v, p, \lambda, y, J, \varphi, K_{uu}, k_{uu}, K_{up}, K_{pp}, N_{uu}(v, v), M^0, M^d, \mathcal{F}, \sigma_p, \sigma_v\} \quad (C.4)$$

Les développements asymptotiques du vecteur d'inconnues  $U$  s'écrivent :

$$U = U_0 + aU_1 + a^2U_2 + a^3U_3 + \dots + a^pU_p \quad (C.5)$$

En identifiant suivant les puissances de "a" on obtient des relations à chaque ordre pour les quantités élémentaires et globales linéaires en  $v$  :

• Déterminant  $J$  :

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } J_0 = J^0 + y_0.J^{0d} + y_0^2.J^d \\ \text{Ordre 1: } J_1 = y_1.J^{0d} + 2.y_1.y_0.J^d \\ \text{Ordre p: } J_p = y_p.J^{0d} + 2.y_p.y_0.J^d + \sum_{r=1}^{p-1} y_r.y_{(p-r)}.J^d \end{cases} \quad (C.6)$$

• Quantité  $\varphi$  :

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } \varphi_0 \cdot J_0 = 1 \\ \text{Ordre 1: } J_1 \cdot \varphi_0 + J_0 \cdot \varphi_1 = 0 \\ \text{Ordre p: } J_p \cdot \varphi_0 + J_0 \cdot \varphi_p + \sum_{r=1}^{p-1} J_r \cdot \varphi_{(p-r)} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

• Matrice  $K_{uu}$  :

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } K_{uu_0} = \varphi_0 \cdot k_{uu_0} \\ \text{Ordre 1: } K_{uu_1} = \varphi_1 \cdot k_{uu_0} + \varphi_0 \cdot k_{uu_1} \\ \text{Ordre p: } K_{uu_p} = \varphi_p \cdot k_{uu_0} + \varphi_0 \cdot k_{uu_p} + \sum_{r=1}^{p-1} \varphi_{(p-r)} k_{uu_r} \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

• Matrice  $k_{uu}$  :

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } k_{uu_0} = K_{uu}^0 + y_0 \cdot K_{uu}^{0d} + y_0^2 \cdot K_{uu}^d \\ \text{Ordre 1: } k_{uu_1} = y_1 \cdot K_{uu}^{0d} + 2 \cdot y_1 \cdot y_0 \cdot K_{uu}^d \\ \text{Ordre p: } k_{uu_p} = y_p \cdot K_{uu}^{0d} + 2 \cdot y_p \cdot y_0 \cdot K_{uu}^d + \sum_{r=1}^{p-1} y_r y_{(p-r)} K_{uu}^d \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

• Matrice  $K_{up}$  :

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } K_{up_0} = K_{up}^0 + y_0 \cdot K_{up}^d \\ \text{Ordre 1: } K_{up_1} = y_1 \cdot K_{up}^d \\ \text{Ordre p: } K_{up_p} = y_p \cdot K_{up}^d \end{cases} \quad (\text{C.10})$$

• Matrice  $K_{pp}$  :

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } K_{pp_0} = K_{pp}^0 + y_0 \cdot K_{pp}^{0d} + y_0^2 \cdot K_{pp}^d \\ \text{Ordre 1: } K_{pp_1} = y_1 \cdot K_{pp}^{0d} + 2 \cdot y_1 \cdot y_0 \cdot K_{pp}^d \\ \text{Ordre p: } K_{pp_p} = y_p \cdot K_{pp}^{0d} + 2 \cdot y_p \cdot y_0 \cdot K_{pp}^d + \sum_{r=1}^{p-1} y_r y_{(p-r)} K_{pp}^d \end{cases} \quad (\text{C.11})$$

Les développements asymptotiques (C.4) sont aussi introduits dans le terme de convection  $N_{uu}(v, v)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bullet \text{Matrice } N_{uu}(v, v): \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Ordre 0: } N_{uu_0}(v, v) = M_0^0 + y_0 \cdot M_0^d \\
 \text{Ordre 1: } N_{uu_1}(v, v) = M_1^0 + y_0 \cdot M_1^d + y_1 \cdot M_0^d \\
 \text{Ordre } p: N_{uu_p}(v, v) = M_p^0 + y_0 \cdot M_p^d + y_p \cdot M_0^d + \sum_{r=1}^{p-1} y_{(p-r)} \cdot M_r^d
 \end{array} \right. \\
 \bullet \text{Matrice } M^0: \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Ordre 0: } M_0^0 = N_{uu}^0(v_0, v_0) \\
 \text{Ordre 1: } M_1^0 = N_{uu}^0(v_1, v_0) + N_{uu}^0(v_0, v_1) \\
 \text{Ordre } p: M_p^0 = N_{uu}^0(v_p, v_0) + N_{uu}^0(v_0, v_p) + \sum_{r=1}^{p-1} N_{uu}^0(v_r, v_{(p-r)})
 \end{array} \right. \\
 \bullet \text{Matrice } M^d: \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Ordre 0: } M_0^d = N_{uu}^d(v_0, v_0) \\
 \text{Ordre 1: } M_1^d = N_{uu}^d(v_1, v_0) + N_{uu}^d(v_0, v_1) \\
 \text{Ordre } p: M_p^d = N_{uu}^d(v_p, v_0) + N_{uu}^d(v_0, v_p) + \sum_{r=1}^{p-1} N_{uu}^d(v_r, v_{(p-r)})
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (\text{C.12})$$

Nous allons séparer dans les relations (C.6), (C.7), (C.8), (C.9), (C.10), (C.11) et (C.12) les expressions aux ordres  $p$  et celles aux ordres inférieurs, ainsi par exemple pour la quantité  $\varphi$  on note:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varphi_p = \varphi(y_p) + \varphi Q \\
 \text{avec} \\
 \varphi(y_p) = -\frac{\varphi_0}{J_0} [J^{0d} + 2 \cdot y_0 J^d] \cdot y_p \\
 \varphi Q = -\sum_{r=1}^{p-1} \left\{ \frac{\varphi_0}{J_0} \cdot y_r \cdot y_{(p-r)} \cdot J^d + \frac{J_r}{J_0} \cdot \varphi_{(p-r)} \right\}
 \end{array} \right. \quad (\text{C.13})$$

Pour les matrices globales  $K_{uu}$ ,  $K_{up}$ ,  $K_{pp}$  on note :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \bullet \text{Matrice } K_{uu} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 K_{uu_p} = K_{uu}(y_p) + KQ_{uu} \\
 \text{avec} \\
 K_{uu}(y_p) = k_{uu_0} \cdot \varphi(y_p) + \varphi_0 \cdot [K_{uu}^{0d} + 2 \cdot y_0 \cdot K_{uu}^d] \cdot y_p \\
 KQ_{uu} = \varphi Q \cdot k_{uu_0} + \sum_{r=1}^{p-1} \{ \varphi_0 \cdot y_r \cdot y_{(p-r)} \cdot K_{uu}^d + \varphi_{(p-r)} \cdot k_{uu_r} \} \\
 \bullet \text{Matrice } K_{up} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 K_{up_p} = K_{up}(y_p) \\
 \text{avec} \\
 K_{up}(y_p) = K_{up}^d \cdot y_p \\
 \bullet \text{Matrice } K_{pp} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 K_{pp_p} = K_{pp}(y_p) + KQ_{pp} \\
 \text{avec} \\
 K_{pp}(y_p) = [K_{pp}^{0d} + 2 \cdot y_0 \cdot K_{pp}^d] \cdot y_p \\
 KQ_{pp} = \sum_{r=1}^{p-1} y_r y_{(p-r)} K_{pp}^d
 \end{array} \right.
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (C.14)$$

Pour l'expression  $N_{uu}(v, v)$  à l'ordre  $p$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 N_{uu_p}(v, v) = N_{uu}(y_p) + N_{uu}(v_p) + NQ_{uu} \\
 \text{avec} \\
 N_{uu}(y_p) = M_0^d \cdot y_p \\
 N_{uu}(v_p) = N_{uu}^0(v_p, v_0) + N_{uu}^0(v_0, v_p) + y_0 [N_{uu}^d(v_p, v_0) + N_{uu}^d(v_0, v_p)] \\
 NQ_{uu} = \sum_{r=1}^{p-1} \{ y_{(p-r)} \cdot M_r^d + N_{uu}^0(v_r, v_{(p-r)}) + y_0 \cdot N_{uu}^d(v_r, v_{(p-r)}) \}
 \end{array} \right. \quad (C.15)$$

Les développements asymptotiques (C.5) sont introduits dans les équations du problème (C.2) ; ce dernier s'écrit alors à l'ordre  $p$  :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left\{ \begin{array}{l}
 [K_{uu_0}] \{v_p\} + [K_{uu_p}] \{v_0\} + [N_{uu_p}(v, v)] + [K_{up_0}] \{p_p\} + [K_{up_p}] \{p_0\} = \lambda \{F\} - FQ_1 \\
 [K_{pu_0}] \{v_p\} + [K_{pu_p}] \{v_0\} + [K_{pp_0}] \{p_p\} + [K_{pp_p}] \{p_0\} = -FQ_2
 \end{array} \right. \\
 \text{avec} \left\{ \begin{array}{l}
 FQ_1 = \sum_{r=1}^{p-1} \{ [K_{uu_r}] \{v_{(p-r)}\} + [K_{up_r}] \{p_{(p-r)}\} \} \\
 FQ_2 = \sum_{r=1}^{p-1} \{ [K_{pu_r}] \{v_{(p-r)}\} + [K_{pp_r}] \{p_{(p-r)}\} \}
 \end{array} \right.
 \end{array} \right. \quad (C.16)$$

En condensant la pression dans le problème (C.16), on obtient un nouveau problème à l'ordre  $p$  où les seules inconnues sont la vitesse du fluide  $v_p$  et l'intensité de dépla-

gement du maillage  $y_p$  :

$$\begin{cases} [K_{uu_0}] \{v_p\} + [K_{uu_p}] \{v_0\} + [N_{uu_p}(v, v)] + [K_{up_p}] \{p_0\} \\ -[K_{up_0}][K_{pp_0}]^{-1} \{ [K_{pu_p}] \{v_0\} + [K_{pu_0}] \{v_p\} + [K_{pp_p}] \{p_0\} \} \\ = \lambda \{F\} - FQ_1 + [K_{up_0}][K_{pp_0}]^{-1} \{FQ_2\} \end{cases} \quad (C.17)$$

Finalement les relations (C.14) et (C.15) sont introduites dans le problème (C.17), ce dernier est écrit sous la forme condensée suivante :

$$\boxed{[K_t^v] \{v_p\} + [K_t^y] \cdot y_p = \lambda_p \{F\} - FQ} \quad (C.18)$$

Les quantités  $K_t^v$  et  $K_t^y$  sont les matrices tangentes où interviennent respectivement la vitesse du fluide et l'intensité du déplacement du maillage ; ces matrices sont définies par les relations :

$$\begin{cases} [K_t^v] = [K_{uu_0}] + [N_{uu}(v_p)] - [K_{up_0}] \cdot [K_{pp_0}]^{-1} \cdot [K_{pu_0}] \\ [K_t^y] = [K_{uu}(y_p)] \{v_0\} + [N_{uu}(y_p)] + [K_{up}(y_p)] \{p_0\} \\ -[K_{up_0}][K_{pp_0}]^{-1} \{ [K_{pu}(y_p)] \{v_0\} + [K_{pp}(y_p)] \{p_0\} \} \end{cases} \quad (C.19)$$

Le second membre  $FQ$  est une expression contenant les inconnues  $v$  et  $y$  aux ordres précédents et est défini par :

$$FQ = FQ_1 + NQ_{uu} + KQ_{uu} - [K_{up_0}] \cdot [K_{pp_0}]^{-1} \cdot \{ [KQ_{pp}] \{p_0\} + FQ_2 \} \quad (C.20)$$

Nous allons maintenant introduire les développements dans les équations gouvernant le mouvement du cylindre. Soient les relations :

$$\begin{cases} \mathcal{F} = \int_{-1}^{+1} \{ \sigma_p + \sigma_v \} \cdot n \cdot d\xi_i \\ \sigma_p = [N_p] \cdot [I] \cdot p \\ J \cdot \sigma_v = \frac{1}{J} \cdot [D] \{ [B^0] + y \cdot [B^d] \} \cdot \{ v \} \end{cases} \quad (C.21)$$

L'expression de la contrainte  $\sigma_v$  est modifiée dans l'équation (C.21) pour travailler avec un forme quadratique. Les expressions (C.21) deviennent à chaque ordre :

• Force du fluide sur cylindre  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } \mathcal{F}_0 = \int_{-1}^{+1} \{ \sigma_{p_0} + \sigma_{v_0} \} \cdot n \cdot d\xi_i \\ \text{Ordre 1: } \mathcal{F}_1 = \int_{-1}^{+1} \{ \sigma_{p_1} + \sigma_{v_1} \} \cdot n \cdot d\xi_i \\ \text{Ordre p: } \mathcal{F}_p = \int_{-1}^{+1} \{ \sigma_{p_p} + \sigma_{v_p} \} \cdot n \cdot d\xi_i \end{cases} \quad (C.22)$$

• Contrainte  $\sigma_v$  :

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } \sigma_{v_0} = \frac{1}{J_0} \cdot [D] \{ [B^0] + y_0 \cdot [B^d] \} \cdot \{v_0\} \\ \text{Ordre 1: } \sigma_{v_1} = \frac{1}{J_0} \cdot \{ [D] \cdot [B^0] \cdot \{v_1\} + y_1 \cdot [D] \cdot [B^d] \cdot \{v_0\} + y_0 \cdot [D] \cdot [B^d] \cdot \{v_1\} \} - \frac{1}{J_0} \cdot J_1 \cdot \sigma_{v_0} \\ \text{Ordre p: } \sigma_{v_p} = \frac{1}{J_0} \cdot \{ [D] \cdot [B^0] \cdot \{v_p\} + y_p \cdot [D] \cdot [B^d] \cdot \{v_0\} + y_0 \cdot [D] \cdot [B^d] \cdot \{v_p\} \} - \frac{1}{J_0} \cdot J_p \cdot \sigma_{v_0} \\ \quad + \frac{1}{J_0} \cdot \sum_{r=1}^{p-1} \left[ y_r \cdot [D] \cdot [B^d] \cdot \{v_{(p-r)}\} - J_r \cdot \sigma_{v_{(p-r)}} \right] \end{cases} \quad (C.23)$$

• Contrainte  $\sigma_p$  :

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } \sigma_{p_0} = [N_p] \cdot [I] \cdot p_0 \\ \text{Ordre 1: } \sigma_{p_1} = [N_p] \cdot [I] \cdot p_1 \\ \text{Ordre p: } \sigma_{p_p} = [N_p] \cdot [I] \cdot p_p \end{cases} \quad (C.24)$$

La relation (C.23) à l'ordre  $p$  est réécrite en introduisant la définition du déterminant  $J$  à l'ordre  $p$  (C.6) :

$$\begin{cases} \sigma_{v_p} = \sigma_v(y_p) + \sigma_v(v_p) + \sigma Q_v \\ \text{avec} \\ \sigma_v(y_p) = \frac{1}{J_0} \{ [D] \cdot [B^d] \cdot \{v_0\} - (J^{0d} + 2 \cdot y_0 \cdot J^d) \cdot \sigma_{v_0} \} \cdot y_p \\ \sigma_v(v_p) = \frac{1}{J_0} \{ [D] \cdot [B^0] \cdot \{v_p\} + y_0 \cdot [D] \cdot [B^d] \cdot \{v_p\} \} \\ \sigma Q_v = \frac{1}{J_0} \cdot \sum_{r=1}^{p-1} \left[ y_r \cdot [D] \cdot [B^d] \cdot \{v_{(p-r)}\} - J_r \cdot \sigma_{v_{(p-r)}} - y_r \cdot y_{(p-r)} \cdot J^d \cdot \sigma_{v_0} \right] \end{cases} \quad (C.25)$$

Finalement en introduisant les relations (C.24) et (C.25) dans l'expression (C.22), on définit la force du fluide sur le cylindre à l'ordre  $p$  en fonction de la vitesse du fluide et de l'intensité du déplacement :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_p = \mathcal{F}_p(y_p) + \mathcal{F}_p(v_p) + \mathcal{F}Q \\ \text{avec} \\ \mathcal{F}_p(y_p) = \int_{-1}^{+1} \sigma_v(y_p) \cdot n \, d\xi_i \\ \mathcal{F}_p(v_p, p_p) = \int_{-1}^{+1} \{ \sigma_v(v_p) + \sigma_{p_p} \} \cdot n \, d\xi_i \\ \mathcal{F}Q = \int_{-1}^{+1} \sigma Q_v \, d\xi_i \end{cases} \quad (C.26)$$

L'équation du mouvement du cylindre s'écrit à chaque ordre :

$$\begin{cases} \text{Ordre 0: } k \cdot d \cdot y_0 + \mathcal{F}_0 = 0 \\ \text{Ordre 1: } k \cdot d \cdot y_1 + \mathcal{F}_1 = 0 \\ \text{Ordre p: } k \cdot d \cdot y_p + \mathcal{F}_p = 0 \end{cases} \quad (C.27)$$

L'expression de l'équation d'équilibre du cylindre s'écrit finalement à l'ordre  $p$  :

$$\boxed{\left\{ k \cdot d + \mathcal{F}^y \right\} \cdot y_p + [\mathcal{F}^v] \cdot \{v_p\} = -\mathcal{F}Q} \quad (\text{C.28})$$

avec  $\mathcal{F}^y \cdot y_p = \mathcal{F}_p(y_p)$  et  $[\mathcal{F}^v] \cdot \{v_p\} = \mathcal{F}_p(v_p)$ . Grâce à la condensation de la pression, seules la vitesse et l'intensité du déplacement du maillage interviennent dans la relation (C.28).



# Références bibliographiques

- [1] J.M.T. THOMPSON and A.C. WALKER. The non-linear perturbative analysis of discrete structural systems. *Int. J. Sol. Struc.*, 4:757-768, 1968.
- [2] M. KAWAHARA, N. YOSHIMURA, K. NAKAGAWA, and H. OHSAKA. Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 10:437-456, 1976.
- [3] A.K. NOOR and J.M. PETERS. Reduced basis technique for non-linear analysis of structures. *AIAA Journal*, 18(4):79-0747R, 1980.
- [4] A.K. NOOR and J.M. PETERS. Tracing post-limit-point paths with reduced basis technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 28:217-240, 191.
- [5] A.K. NOOR. Hybrid analytical techniques for nonlinear analysis of structures. *AIAA Journal*, 23(6):938-946, 1985.
- [6] R.H. GALLAGHER. *Perturbation procedures in non-linear finite element structural analysis*, volume 461. Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [7] A. NAYFEH. *Perturbations Methods*. Johns Wileys and Sons, 1973.
- [8] M. VAN DYKE. *Perturbations Methods in fluid mechanics*. Academic Press, 1964. Version annotée 1975, Parabolic Press.
- [9] E. RIKS E. Some computational aspect of the stability analysis of non-linear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47:219-259, 1984.
- [10] N. DAMIL and M. POTIER FERRY. A new method to compute perturbed bifurcations: application to the buckling of imperfect elastic structures. *Int. J. Engng Sci*, 28(9):943-957, 1990.
- [11] L. AZRAR, B. COCHELIN, N. DAMIL, and M. POTIER FERRY. A asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 36:1251-1277, 1993.
- [12] B. COCHELIN. A path-following technique via an Asymptotic-Numerical Method. *Comp. and Struct.*, 53(5):1181-1192, 1994.

- [13] B. COCHELIN, N. DAMIL, and M. POTIER FERRY. The Asymptotic-Numerical Method: an efficient perturbation technique for non-linear structural mechanics. *Revue Européenne des éléments fins*, 3(2):281–297, 1994.
- [14] S. HADJI. Méthodes de résolution pour les fluides incompressibles. *Thèse*, Université de Technologie de Compiègne, COMPIEGNE, FRANCE, 1995.
- [15] A. TRI, B. COCHELIN, and M. POTIER FERRY. Résolution des équations de Navier-Stokes et détection des bifurcations stationnaires par une Méthode Asymptotique Numérique. *Revue Européenne des éléments finis*, 5:415–442, 1996.
- [16] A. TRI. Méthode asymptotique-numérique pour les fluides visqueux incompressibles et la détection de la bifurcation de Hopf. *Thèse de l'Université de Metz*, LPMM, ISGMP, METZ, FRANCE, 1996.
- [17] T.J.R. HUGHES, W.K. LIU, and A. BROOKS. Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation. *J. of Comp. Phys.*, 30:1–60, 1979.
- [18] O.C. ZIENKIEWICZ and R.L. TAYLOR. *The Finite Element Method*, volume 2, section 12.13. McGraw-Hill Book Company, fourth edition, 1991.
- [19] B. COCHELIN. Méthodes asymptotiques-numériques pour le calcul non-linéaire géométriques des structures élastiques. *Thèse d'habilitation*, Université de Metz, LPMM, ISGMP, METZ, FRANCE, 1994.
- [20] BATOZ J.L. and DHATT G. *Modélisation des structures par éléments finis*, volume 1, solides élastiques 2, pages 216–220. HERMES, 1990.
- [21] BAKER G.A. and GRAVES MORRIS P. *Padé Approximants, Part I: Basic Theory - Encyclopaedia of Mathematics and its applications*, volume 13. Addison-Wesley Publishing Company, New-York, 1981.
- [22] A. NAJAH, B. COCHELIN, N. DAMIL, and M. POTIER-FERRY. A critical review of Asymptotic Numerical Methods. *Soumis à: Archives of computational Methods in Engeneering*, 1996.
- [23] E.H. BOUTYOUR. Méthode asymptotique-numérique pour le calcul de bifurcations: Application aux structures élastiques. *Thèse de l'Université de Metz*, LPMM, ISGMP, METZ, FRANCE, 1994.
- [24] SEGAL A., CURVELIER C., and VAN STEENHOVEN A. A. *Finite element methods of Navier-Stokes equations*. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Netherland, 1986.
- [25] BATCHELOR G.K. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1967. Version 1975.

- [26] U. GHIA, K.N. GHIA, and C.T. CHIN. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *J. of Comp. Phys.*, 48:387–411, 1982.
- [27] J. DONEA. Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de convection-diffusion. *Revue Européenne des éléments finis*, 1:225–252, 1992.
- [28] C. G. SPEZIALE. On non-linear  $k - l$  and  $k - \epsilon$  models of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 178:459–475, 1987.
- [29] PIRONNEAU. *Méthode des éléments finis pour les fluides*, volume 2, phénomènes de convection-diffusion 3. McGraw-Hill Book Company, fourth edition, 1991.
- [30] P.M. GRESHO and R.L. LEE. Don't suppress the wiggles-they're telling you something. *Computers and Fluid*, 9:223–253, 1981.
- [31] T.J.R. HUGHES and A. BROOKS. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 32:199–259, 1982.
- [32] O.C. ZIENKIEWICZ, J. SZMELTER, and J. PERAIRE. Compressible and incompressible flow; an algorithm for all seasons. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 78:105–121, 1990.
- [33] S. BOGAERTS, G. DEGREGZ, and B. NITROSSO. Multidimensionnal upwind schemes for the solution of the incompressible Navier-Stokes equations. In *Proceedings of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Paris*, pages 57–63, 1996.
- [34] V. BELLUCCI, M. BARBATO, and P. GHERI. A preconditioning technique for low-speed internal flows. In *Proceedings of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Paris*, pages 924–930, 1996.
- [35] B.F. ARMALY, F. DURST, J.C.F. PEREIRA, and B. SCHÖNUNG. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. *J. Fluid Mech.*, 127:473–496, 1983.
- [36] A. HACQUIN. Modélisation thermomécanique tridimensionnelle du laminage. *Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, FRANCE*, 1996.
- [37] R. SEYDEL. *From equilibrium to chaos. Practical bifurcation theory and stability analysis*. Elsevier, New-York, 1988.
- [38] E.H. BOUTYOUR, B. COCHELIN, and M. POTIER FERRY. Calculs des points de bifurcation par une méthode asymptotique numérique. In *Proceedings 1er Congrès National de Mécanique au Maroc*, pages 371–378, 1993.
- [39] F. DURST, J.C.F. PEREIRA, and C. TROPEA. The plane symmetric sudden-expansion flow at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 248:567–581, 1993.

- [40] P. VANNUCCI, B. COCHELIN, N. DAMIL, and M. POTIER-FERRY. An asymptotic-numerical method to compute bifurcating branches. *A paraître dans International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997.
- [41] M. SHAPIRA, D. DEGANI, and D. WEIHS. Stability and existence of multiple solutions for viscous flow in suddenly enlarged channels. *Computers and Fluids*, 18:239–258, 1990.
- [42] B. HASSARD, N. KAZARINOFF, and Y-H WAN. *Theory and applications of Hopf bifurcation*. Cambridge University Press, 1981.
- [43] J.E. MARSDEN and M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer, New-York, 1976.
- [44] M.E.H. BENZAADI. Méthode Asymptotique-Numérique pour le calcul de bifurcations de Hopf et de solutions périodiques. *Thèse de l'Université de Metz, LPMM, ISGMP, METZ, FRANCE*, 1995.
- [45] A. D. JEPSON. Numerical Hopf bifurcation. *Thèse de l'institut de technologie de Californie, U.S.A.*, 1981.
- [46] D. ROOSE. An algorithm for the computation of Hopf bifurcation points in comparaison with other methods. *Journal of computational and Applied Mathematics*, 12-13:517–529, 1985.
- [47] C. P. JACKSON. A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped body. *J. Fluid Mech.*, 182:23–45, 1987.
- [48] M. GERADIN and D. RIXEN. *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*. Masson, 1993.
- [49] G.A. BAKER and P. GRAVES-MORRIS. *Padé Approximants, Part I: Basic Theory*, volume 13. Addison-Wesley publishing Company, 1981. Encyclopedia of mathematics and its applications.
- [50] CIARLET P. *Introduction à l'analyse matricielle*. Masson, 1985. Collection mathématiques appliquées pour la Maîtrise.
- [51] B. COCHELIN, N. DAMIL, and M. POTIER FERRY. Asymptotic-Numerical Methods and Padé approximants for non-linear elastic structures. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 37:1187–12137, 1994.
- [52] B. COCHELIN. Amélioration des séries vectorielles par des approximants de Padé. *Notes internes*, 1:1, 1997.
- [53] D.J. TRITTON. Experiments on the flow past a circular cylinder at low reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 6:547–567, 1959.
- [54] J.H. CHEN, W.G. PRITCHARD, and S.J. TAVENER. Bifurcation for flow past a cylinder between parallel planes. *J. Fluid Mech.*, 284:23–41, 1995.

- [55] A. ELHAGE-HUSSEIN. Méthode asymptotique-numérique pour les problèmes de contact sans frottement. *Thèse de l'Université de Metz, LPMM, ISGMP, METZ, FRANCE*, 1997.
- [56] M.P. PAÏDOUSSIS and G.X. LI. Cross-flow-induced chaotic vibrations of heat-exchanger tubes impacting on loose supports. *J. of Sound and Vibration*, 152(2):305–326, 1992.
- [57] F. AXISA. *Vibrations induites par les écoulements*. Cours de DEA Mécanique des solides et des structures, Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires, 1995.
- [58] A. HUERTA and W.K. LIU. Viscous flow with large free surface motion. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng.*, 69:277–324, 1988.
- [59] M.P. PAÏDOUSSIS. Fluidelastic vibration of cylinder arrays in axial and cross-flow: State of the art. *J. of Sound and Vibration*, 76(3):329–360, 1981.
- [60] B. W. ROBERTS. Low frequency, aeroelastic vibrations in a cascade of circular cylinders. *Institution of Mechanical Engineers, Mechanical Engineering Science Monograph*, 4, 1966.
- [61] M.P. PAÏDOUSSIS. *Practical Experiences with flow-induced vibrations. Flow induced vibrations in nuclear reactors and heat exchangers: Practical experiences and state of knowledge*, pages 1–81. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [62] S.S. CHEN. *Flow induced vibrations of cylindrical structures*. Springer-Verlag, 1977.
- [63] R.D. BLEVINS. *Flow induced vibrations*. Van Nostrand Reinhold, 1990.
- [64] M.J. PETTIGREW and TAYLOR C.E. Fluidelastic instability of heat exchanger tube bundles: review and design recommendation. In *Proceedings 5<sup>th</sup> international conference on flow induced vibrations, Brighton*, pages 349–368, 1991.
- [65] H.J. CONNORS. Fluidelastic vibration of tube arrays excited by cross flow. In *Symposium on flow-induced vibrations in heat exchangers, A.S.M.E. Winter Annual Meeting, New-York*, pages 42–56, 1970.
- [66] F. AXISA, J. ANTUNES, and B. VILLARD. Overview of numerical methods for predicting flow induced vibrations. *Journal of Pressure Vessel*, 10:6–14, 1988.
- [67] M.P. PAÏDOUSSIS and S.J. PRICE. The mechanisms underlying flow-induced instabilities of cylinder arrays in cross-flow. *J. Fluid Mech.*, 187:45–59, 1984.
- [68] T. TEZDUYAR. *Computations of unsteady incompressible flows with the Finite-element Method - Space-time formulations, iterative strategies and massively parallel implementations*. In *new Methods in Transient Analysis*, volume 143, pages 7–24. P. SMOLINSKI, AMD, NEW-YORK, 1992.

- [69] C. FARHAT, S. LANTERI, and N. MAMAN. Distributed solution of transient coupled aeroelastic problems. In *Proceedings of the third World Congress on Computational Mechanics*, volume II, pages 1563–1564, 1994.
- [70] T.J.R. HUGHES, W.K. LIU, and T.K. ZIMMERMANN. Lagrangian-eulerian finite element formulations for incompressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 29:329–349, 1981.
- [71] J. DE OLIVEIRA. Résolution des équations instationnaires de Navier-Stokes par une Méthode Asymptotique-Numérique. *Mémoire de DEA, LPMM, ISGMP, Université de Metz*, 1997.
- [72] C.W. HIRT, A.A. AMSDEN, and J.L. COOK. An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds. *Journal of Computational Physics*, 14:227–253, 1974.
- [73] J. DONEA, S. GUILIANI, and J.P. HALLEUX. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 33:689–723, 1982.

# Liste des figures

I.1	Conditions aux limites et caractéristiques géométriques de l'écoulement autour d'un cylindre, 4000 degrés de liberté - 500 éléments Q9/3D . . .	22
I.2	Vitesses en un point noté $P1$ sur la figure I.1 obtenues avec la M.A.N pour différents ordres de troncatures des séries . . . . .	22
I.3	Logarithme de la norme du résidu en fonction du paramètre $a$ . . . . .	23
I.4	Comparaison des vitesses en un point noté $P1$ sur la figure I.1 obtenues avec la M.A.N pour un ordre de troncature des séries égale à 15 et la méthode de Newton-Raphson . . . . .	23
I.5	Solution calculée avec la MAN et continuation (ordre de troncature égal à 15 et $\varepsilon = 10^{-3}$ ) comparée avec la solution de Newton-Raphson - Exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (Fig I.1) . . . . .	25
I.6	Comparaison des vitesses en un point noté $P1$ sur la figure I.1; Calculs avec Newton-Raphson (cas 5 du tableau I.1) et avec la M.A.N ordre 7	28
I.7	Lignes de courant des solutions calculées avec la MAN, exemple de l'écoulement autour d'un cylindre . . . . .	30
I.8	Géométrie et conditions aux limites de l'exemple de la cavité, 13000 degrés de liberté, 1600 éléments Q9/3D . . . . .	31
I.9	vitesse $U_x$ au centre de la cavité, solution MAN, ordre 15 et $\varepsilon = 10^{-3}$	31
I.10	Lignes de courant des solutions calculées avec la MAN, exemple de la cavité . . . . .	33
II.1	Écoulement autour d'un obstacle carré à Reynolds égal 200 par la méthode de Galerkin . . . . .	37
II.2	Maillage utilisé par Gresho pour enlever les oscillations . . . . .	38
II.3	Écoulement autour d'un obstacle carré à Reynolds égal 200 par la méthode de Galerkin, avec raffinement du maillage . . . . .	38
II.4	Écoulement autour d'un obstacle carré à Reynolds égal 200, résolution par la méthode de Newton-Raphson et la formulation Petrov-Galerkin	41
II.5	Relations (II.4) et (II.9) en fonction du nombre de Reynolds élémentaire	42
II.6	Solutions de l'écoulement autour d'un obstacle calculées avec Newton-Raphson et les deux définitions de $\alpha$ . . . . .	43
II.7	Écoulement au dessus d'un obstacle carré . . . . .	48
II.8	Solutions calculées avec la MAN comparées aux solutions de Ghia [26] et Zienkiewicz [32], écoulement dans une cavité à $Re = 100$ . . . . .	50
II.9	Solutions calculées avec la MAN comparées aux solutions de Ghia [26] et Zienkiewicz [32], écoulement dans une cavité à $Re = 400$ . . . . .	50

II.10 Solutions calculées avec la MAN comparées aux solutions de Ghia [26] et Zienkiewicz [32], écoulement dans une cavité à $Re = 1000$ . . . . .	51
II.11 Géométrie et conditions de vitesses imposées pour l'exemple de la marche	51
II.12 Profils des vitesses horizontales pour $Re=150$ , exemple de la marche .	51
II.13 Lignes de courant à $Re=150$ et $Re=500$ . . . . .	52
II.14 Ecoulement autour d'un cylindre, solutions calculées avec la MAN pour $\eta = 1$ et $\eta = 10^{-3}$ , séries tronquées à l'ordre 7 et $\varepsilon = 10^{-5}$ . . . . .	53
II.15 Comparaison des vitesses obtenues avec deux maillages et deux formulations différents . . . . .	56
II.16 Evolution de la solution en fonction du maillage (formulation Galerkin)	59
II.17 Illustration des différents maillages utilisés . . . . .	60
III.1 Description de la géométrie, des conditions aux limites et des caractéristiques du fluide pour l'écoulement dans un tunnel avec un élargissement brusque. . . . .	68
III.2 Mise en évidence des accumulations de pas au voisinage d'un point de bifurcation, vitesse suivant $x$ d'un point noté $P1$ sur la figure (III.1), formulation Galerkin. . . . .	69
III.3 Indicateur de bifurcation en fonction du nombre de Reynolds, bifurcation stationnaire pour $Re = 215$ , formulation Galerkin. . . . .	70
III.4 Solutions obtenues avec la M.A.N. en utilisant deux maillages et des paramètres différents, vitesse suivant $y$ d'un noeud noté $P2$ sur la figure (III.1), fomulation Galerkin. . . . .	71
III.5 Lignes de courant à Reynolds égal 600 sur la branche bifurquée 1 de la figure (4(a)), formulation Galerkin . . . . .	72
III.6 Lignes de courant à Reynolds égal 600 sur la branche fondamentale 2 de la figure (4(a)), formulation Galerkin . . . . .	72
III.7 Lignes de courant à Reynolds égal 600 sur la branche bifurquée 3 de la figure (4(a)). . . . .	72
III.8 Mise en évidence des accumulations de pas au voisinage du point de bifurcation, vitesse suivant $x$ d'un point noté $P1$ sur la figure (III.1), formulation Petrov-Galerkin . . . . .	73
III.9 Indicateur de bifurcation en fonction du nombre de Reynolds, bifurcation stationnaire pour $Re = 240$ , formulation Petrov-Galerkin . . . . .	73
III.10 Solutions obtenues avec la M.A.N. en utilisant deux maillages et des paramètres différents, vitesse suivant $y$ d'un noeud noté $P2$ sur la figure (III.1), fomulation Petrov-Galerkin. . . . .	74
IV.1 Illustration du changement de stabilité en $\lambda = 0$ et de l'orbite périodique pour $\lambda > 0$ . . . . .	80
IV.2 Trajectoire de deux valeurs propres dans le plan complexe $(\alpha, \beta)$ . . .	82
IV.3 Illustration du comportement de la fonction $\text{num}(a, \omega)$ au voisinage et en un point de bifurcation . . . . .	88
IV.4 Existence d'un pôle à $\omega = 5$ pour l'indicateur de bifurcation de Hopf, Exemple du cylindre à Reynolds égal 52 (formulation Petrov-Galerkin)	93



IV.5	Calcul de l'indicateur avec la nouvelle condition (eq. IV.47). Exemple du cylindre à Reynolds égal 52 (formulation Petrov-Galerkin) . . . . .	94
IV.6	Un pas de calcul avec la MAN, représentations polynomiales de l'indicateur à $Re=46$ , exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (méthode de Galerkin) . . . . .	100
IV.7	Un pas de calcul avec la MAN, approximants de Padé avec même dénominateur à $Re=46$ , exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (méthode de Galerkin) . . . . .	101
IV.8	Un pas de calcul avec la MAN, approximants de Padé classiques à $Re=46$ , exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (méthode de Galerkin) . . . . .	101
IV.9	Calcul de l'indicateur de bifurcation par la MAN et continuation comparée avec le calcul direct, exemple du cylindre à Reynolds égal 52 (formulation Petrov-Galerkin) . . . . .	105
IV.10	Description des géométries des exemples de calcul de l'écoulement autour d'un obstacle . . . . .	107
IV.11	Calcul de l'indicateur de bifurcation par la MAN, exemple du cylindre "cyl 1" (formulation Petrov-Galerkin) . . . . .	108
IV.12	Indicateur et sa dérivée par rapport à $\omega$ , exemple du cylindre "cyl1" (formulation Petrov-Galerkin) . . . . .	109
IV.13	Indicateur de bifurcation pour $Re = 45.98$ , exemple du cylindre "cyl 2" (formulation Galerkin) . . . . .	110
IV.14	Modes de bifurcation réel et imaginaire à $Re_c = 45.98$ et $\omega_c = 3.9$ . . . . .	111
IV.15	Calcul de l'indicateur de bifurcation par la MAN, exemple de la marche (formulation Galerkin) . . . . .	112
IV.16	Modes de bifurcation réel et imaginaire à $Re_c = 609$ et $\omega_c = 0.54$ , exemple de la marche, modes numériques obtenus en introduisant $\omega_c = 0.54$ dans l'expression (IV.52) . . . . .	113
IV.17	Calcul de l'indicateur de bifurcation par la MAN, exemple de la marche (formulation Galerkin) . . . . .	114
IV.18	Evolution de l'indicateur de bifurcation en fonction du nombre de Reynolds (exemple de la marche) . . . . .	115
V.1	Description du problème étudié . . . . .	122
V.2	Illustration des deux domaines . . . . .	124
A.1	Définition des domaines pour la description Arbitraire Lagrange-Euler (Huerta [58]) . . . . .	134
B.1	Définition de l'effort du fluide sur l'élément de référence . . . . .	148



# Liste des tableaux

I.1	<i>comparaison entre la MAN et Newton-Raphson - <math>\varepsilon = 10^{-7}</math> pour la MAN - écoulement autour d'un cylindre . . . . .</i>	27
I.2	<i>Temps C.P.U nécessaires à la construction du second membre pour un pas de continuation . . . . .</i>	29
I.3	<i>Nombre de réels stockés pour différents ordres de troncature des séries</i>	32
II.1	<i>Performances de la MAN pour plusieurs valeurs de <math>\eta</math> . . . . .</i>	52
II.2	<i>Comparaison entre la MAN et Newton-Raphson, exemple de l'écoulement autour d'un cylindre . . . . .</i>	54
II.3	<i>Temps C.P.U. nécessaires à la construction du second membre FQ pour un pas de continuation et pour les deux formulations . . . . .</i>	55
II.4	<i>Nombre de réels stockés pour différents ordres de troncature des séries</i>	55
IV.1	<i>Evolution du minimum de l'indicateur en fonction du nombre de Reynolds, exemple de l'écoulement autour d'un cylindre, "cyl 1" (formulation Petrov-Galerkin) . . . . .</i>	107
IV.2	<i>Evolution du minimum de l'indicateur en fonction du nombre de Reynolds , exemple de l'écoulement autour d'un cylindre (formulation Galerkin) . . . . .</i>	109
IV.3	<i>Résumé des résultats sur le calcul de l'indicateur pour les deux formulations . . . . .</i>	116

## **Méthode Asymptotique Numérique pour le calcul des branches solutions et des instabilités dans les fluides et pour les problèmes d'interaction fluide-structure.**

Dans cette thèse, nous nous intéressons au calcul des branches solutions des équations stationnaires de Navier-Stokes par une Méthode Asymptotique Numérique (MAN). Sur les branches solutions ainsi obtenues, nous proposons des indicateurs de bifurcation stationnaire et de Hopf qui nous permettent de déterminer les points singuliers de l'écoulement fluide.

La MAN est l'association d'une technique de perturbation et la méthode des éléments finis. La méthode de perturbation permet de transformer le problème non linéaire initial en une succession de problèmes linéaires qui admettent tous le même opérateur tangent. Les systèmes linéaires sont ensuite résolus de façon récursive par la méthode des éléments finis, une seule décomposition de matrice est alors nécessaire pour déterminer analytiquement une partie de la courbe solution.

Le premier chapitre de cette thèse est consacrée à des rappels sur la MAN et sur la méthode de continuation pour le calcul des branches solutions des équations stationnaires de Navier-Stokes. Le deuxième chapitre porte sur l'application de la MAN à la formulation Petrov-Galerkin pour les équations de Navier-Stokes. La difficulté de ce problème est de se ramener à un formalisme quadratique. Lorsque cela est réalisé les notions développées au premier chapitre sont alors appliquées. Les troisième et quatrième chapitres sont consacrés à la détermination des points singuliers sur les branches solutions. Deux types d'instabilités sont étudiés, les bifurcations stationnaires et de Hopf. La détermination de ces points s'effectue grâce à des indicateurs de bifurcation. Des exemples d'écoulements de fluide permettent de démontrer l'efficacité et la fiabilité de ces indicateurs.

Dans le dernier chapitre nous appliquons les outils numériques développés aux chapitres précédents pour traiter un problème d'interaction fluide-structure : un tube cylindrique soumis à un écoulement transverse. Les équations du mouvement du tube et du fluide sont décrites à l'aide du formalisme Arbitraire Lagrange-Euler.

### **Mots clefs :**

Méthodes numériques - Navier-Stokes - Eléments finis - Petrov-Galerkin - Bifurcations - Hopf - ALE - Interaction fluide-structure.

## **Asymptotic Numerical Method to compute stationary solution branches and instabilities in fluids and in fluid/structure interaction problems.**

This work deals with the computing of solution branches of the stationary Navier-Stokes equations with an Asymptotic Numerical Method. Some bifurcating indicators are introduced on solution branches to detect stationary and Hopf bifurcation points.

ANM is the combination of a perturbation technique and finite element method. Perturbation technique transforms the initial non-linear problem into a succession of linear ones which have the same tangent operator. So these linear problems are solved numerically by finite element method and only one triangulation of the tangent stiffness matrix is needed to determine analytically a part of the solution branch.

The first chapter of this thesis is an overview of the ANM and continuation technique to compute solutions branches of stationary Navier-Stokes equations. The second chapter deals with the application of the ANM when a Petrov-Galerkin weighting is used. The main difficulty of such a problem is the non-quadratic form of the equations. Initial relations must then be modified to introduce asymptotic expansions and continuation method defined in chapter one.

The two following chapters concern the detection of singular points on stationary solution branches. Two kinds of instabilities are investigated, stationary and Hopf bifurcations. Bifurcation indicators permit us to evaluate numerically these singular points. Several numerical examples show the efficiency and the reliability of such indicators.

In the last chapter we apply the numerical procedures previously defined to a problem of fluid/structure interaction : a cylinder in a cross flow. Equations of motion of the fluid and the cylinder are described in a Arbitrary Lagrangian-Eulerian frame.

### **Keywords :**

Numerical methods - Navier-Stokes - Finite element method - Petrov-Galerkin - Bifurcations - Hopf - ALE - fluid/structure Interaction.