Structuration de la déformation plastique par l'effet Portevin-Le Chatelier : une analyse dynamique

Lahcen Quaouire

▶ **To cite this version:**

Lahcen Quaouire. Structuration de la déformation plastique par l'effet Portevin-Le Chatelier : une analyse dynamique. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Paul Verlaine - Metz, 1997. Français. NNT : 1997METZ027S . tel-01777212

HAL Id: tel-01777212

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777212

Submitted on 24 Apr 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

ISGMP

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE
ET PRODUCTIQUE

D 1997 544

THESE

Présentée à

UNIVERSITE DE METZ
BU Technopôle
S C D

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE
- METZ

N° inv.	19970585
Cote	S/M3 97/27
Loc	Magasin

UNIVERSITE DE METZ

PAR

Lahcen QUAOUIRE

Pour l'obtention du grade de :
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : Sciences de l'ingénieur
OPTION : Génie Mécanique

STRUCTURATION DE LA DÉFORMATION PLASTIQUE PAR L'EFFET PORTEVIN-LE CHATELIER : UNE ANALYSE DYNAMIQUE.

Soutenue le 2 juin 1997
devant le jury composé de :

Président :	M. Potier-Ferry	Professeur à l'université de Metz
Rapporteurs :	L. P. Kubin	Directeur de recherche au C.N.R.S.
	G. Bonhomme	Professeur à l'université de Nancy
Directeur de thèse :	C. Fressengeas	Professeur à l'université de Metz
Examinateurs :	G. Ananthakrishna	Professeur à I.I.S. de Bangalore
	O. Sero-Guillaume	Professeur à E.N.S.E.M. de Nancy
	A. Zeghloul	Professeur à l'université de Metz

SOMMAIRE.

INTRODUCTION GENERALE 1

Chapitre I : **PRESENTATION DE L'EFFET PORTEVIN-LE CHATELIER.**

1- INTRODUCTION 5

2- MANIFESTATIONS MACROSCOPIQUES 8

2-1- Les courbes de traction 8

2-2- Interprétation des courbes de traction 9

2-3- Morphologie des décrochements en machine dure 12

3- ASPECT MICROPHYSIQUE DU PHENOMENE 14

3-1- Comportement d'une dislocation 14

3-2- Le vieillissement dynamique 15

3-3- Sensibilité à la vitesse de déformation 18

3-4- Récapitulation 23

4- MODELISATIONS DU PHENOMENE 24

4-1- Opération de moyenne 24

4-1-1- Modèle de Penning 24

4-1-2- Modèle de Kubin et Estrin 26

a- Equation constitutive du modèle 26

b- Stabilité de l'état stationnaire uniforme 28

c- Comportement temporel 29

d- Caractéristiques des bandes PLC 30

4-1-3- Conclusion 31

4-2- Modèle non-local (le glissement dévié des dislocations) 32
4-2-1- Introduction 32
4-2-2- Loi de comportement 33
4-2-3- L'état stationnaire uniforme 35
4-2-4- Solutions propageantes 36
4-2-5- Stabilité des solutions propageantes périodiques 41
a- Stabilité linéaire 41
b- Stabilité non linéaire 41
4-2-6- Conclusion 43
4-3- Modèle dynamique de dislocations 44
4-3-1- Formulation du modèle 44
4-3-2- Cas d'une machine dure 46
4-3-3- Résultats du modèle 47
a- Le régime périodique 47
b- Comparaison avec l'expérience 48
c- Le régime chaotique 49
4-3-4- Aspect spatial du phénomène 51
5- CONCLUSION 52

Chapitre II :

ETUDE QUALITATIVE DU COMPORTEMENT D'UN SYSTEME DYNAMIQUE.

1- ESPACE DE PHASES 53
1-1- Notion de flot 53
1-2- Portrait de phases (PDP) 56
1-3- Caractérisation d'un régime dynamique 57

2- LES ATTRACTEURS ETRANGES 59

2-1- Introduction et propriétés 59

2-2- Objet fractal 60

2-3- Dimension fractale 63

2-3-1- Dimension fractale au sens de Hausdorff-Besicovitch 63

2-3-2- Dimension fractale au sens des masses 65

2-3-3- Caractérisation d'un régime chaotique déterministe 67

2-4- Exposant de Lyapunov 67

2-4-1- Définition et signification 67

2-4-2- Caractérisation d'un régime chaotique déterministe 70

3- METHODE DES RETARDS 71

3-1- Série temporelle 71

3-2- Principe de la méthode 72

3-2-1- Introduction 72

3-2-2- Reconstruction d'une variété 73

3-3- Reconstruction du portrait de phases d'un système dynamique 74

3-3-1- L'équivalence d'ordre k 74

3-3-2- Théorème de Takens 75

3-4- Mise en oeuvre de la méthode 76

3-5- Limites de la méthode 76

3-5-1- Qualité de la série temporelle 77

3-5-2- Paramètres de reconstruction 77

4- CARACTERISATION DES ATTRACTEURS ETRANGES A PARTIR D'UNE SERIE TEMPORELLE 78

4-1- L'algorithme de Grassberger-Procaccia (G-P) 78

4-1-1- Intégrale de corrélation 79

4-1-2- Dimension de corrélation 79

4-1-3- Conclusion 81

4-2- L'exposant de Lyapunov 81
4-2-1- L'exposant dépendant du temps 81
4-2-2- Le plus grand exposant de Lyapunov 83
4-3- Conclusion 83
5- CONCLUSION 84

Chapitre III :

MISE EN OEUVRE ET VALIDATION DE LA METHODE D'ANALYSE DYNAMIQUE.

A- MISE EN OEUVRE DE LA METHODE.

1- RAPPEL DE LA METHODE DES RETARDS 85
2- CHOIX DES PARAMETRES DE RECONSTRUCTION 86
2-1- La fonction d'auto-corrélation 87
2-2- Le déplacement moyen 88
2-3- L'exposant dépendant du temps 89
2-4- Commentaire et conclusion 90
3- L'ESPACE DES COMPOSANTES PRINCIPALES 91
3-1- L'analyse du système singulier 91
3-2- Les composantes principales 92
3-3- La décomposition par valeurs singulières (DVS) 93
4- REDUCTION DU BRUIT 94
4-1- Spectre des valeurs singulières 94
4-2- Dimension de corrélation en présence du bruit 95
4-3- Composante déterministe de la trajectoire 97

B- VALIDATION DE LA METHODE.

1- RESOLUTION DU FLOT DE LORENZ 99

2- LA METHODE DES RETARDS

EN ABSENCE DU BRUIT 102

3- QUE SE PASSE-T-IL EN PRESENCE DU BRUIT ? 104

4- CALCUL DE LA DIMENSION DE CORRELATION

EN PRESENCE DU BRUIT 106

4-1- Influence des paramètres de reconstruction 106

4-2- Application de la décomposition par valeurs singulières 109

5- COMPOSANTE DETERMINISTE

DE LA TRAJECTOIRE 112

5-1- L'espace de reconstruction 112

5-2- L'espace des composantes principales 113

5-3- Retour à l'espace de reconstruction 114

Chapitre IV :

ANALYSE DYNAMIQUE DE L'EFFET PORTEVIN-LE CHATELIER.

1- DESCRIPTION DES SERIES TEMPORELLES

ANALYSEES 116

1-1- Les séries temporelles de J. Vergnol 117

1-2- Les série temporelles de S. Bakir 118

1-3- Traitement préalable des séries temporelles 119

2- RESULTATS DE L'ANALYSE DYNAMIQUE 120

2-1- Analyse de la série temporelle VER09.DAT 120

2-1-1- Choix des paramètres de reconstructions 120

2-1-2- Calcul de la dimension de corrélation 123

2-1-3- Application de la DVS 124

2-1-4- Le plus grand exposant de Lyapunov 127

2-1-5- Conclusion 128

2-2- Analyse de la série temporelle LPMM12.DAT 129

2-2-1- Choix des paramètres de reconstruction 130

2-2-2- Calcul de la dimension de corrélation 133

2-2-3- Application de la DVS 135

2-2-4- Le plus grand exposant de Lyapunov 137

2-2-5- Conclusion 139

2-3- Analyse de la série LPMM1516.DAT 140

2-3-1- Choix des paramètres de reconstruction 142

2-3-2- Calcul de la dimension de corrélation 145

2-3-3- Calcul du plus grand exposant de Lyapunov 146

2-3-4- Données de substitution 147

2-3-5- Représentation de l'attracteur étrange 149

2-3-6- Conclusion 153

3- RECAPITULATION DES RESULTATS ET CONCLUSION 154

CONCLUSION GENERALE 155

BIBLIOGRAPHIE.

INTRODUCTION GENERALE

L'effet Portevin-Le Chatelier (PLC) est l'une des formes les plus fascinantes de l'instabilité de la déformation plastique. Ce phénomène se manifeste par la génération répétée et la propagation de bandes de déformation plastique localisée le long d'une éprouvette de traction [1]. L'observation expérimentale de ces bandes montre qu'elles apparaissent et qu'elles se propagent de manière souvent irrégulière. Sur les courbes de traction à vitesse de déformation constante, ceci se traduit par des décrochements de la contrainte d'apparence aléatoire.

L'effet PLC apparaît pour des alliages métalliques pourvus d'impuretés en solution solide (comme certains alliages d'aluminium ou certains aciers doux), lorsqu'ils sont déformés dans un intervalle de vitesse de déformation et de température précis. On admet que l'origine microscopique du phénomène est l'interaction entre les dislocations mobiles et les atomes de soluté, également mobiles grâce à des processus diffusionnels [2,3]. Ce mécanisme, connu sous le nom de *vieillissement dynamique*, fait que *la sensibilité à la vitesse de déformation* devient négative, ce qui entraîne le passage d'un écoulement homogène à une déformation inhomogène. Notons que ce passage, appelé "instabilité de la déformation plastique", ne se produit que pour un domaine limité des paramètres de contrôle du système tels que la vitesse de chargement, la température de l'essai, la concentration du soluté ...

Dans le but de comprendre ce phénomène, plusieurs modèles ont été proposés. La formulation de ces modèles ainsi que leurs résultats sont exposés au premier chapitre de ce mémoire. On montre ainsi l'existence d'un état de déformation stationnaire uniforme, instable si la vitesse de déformation correspondant à cet état est située dans le domaine de sensibilité négative à la vitesse de déformation. Dans ce cas le régime stationnaire uniforme laisse place à un régime de déformation inhomogène propagatif. Nous nous intéressons particulièrement aux modèles [4] et [5] qui, en plus des résultats mentionnés ci-dessus, aboutissent à des conclusions en accord avec les observations expérimentales selon lesquelles l'effet PLC est le plus souvent apériodique.

Dans l'un de ces modèles, Jeanclaude et Fressengeas [4] utilisent une loi de comportement macroscopique de type "réaction-diffusion" en se basant sur un modèle du glissement dévié des dislocations vis. Dans cette approche on montre l'existence de solutions périodiques sous forme de cycle limite dans l'espace des phases. L'étude de la stabilité linéaire et non linéaire de ces solutions mène au résultat suivant : il y a *instabilité locale* et *stabilité globale* du cycle limite. On en déduit que la trajectoire de phases peut décrire une orbite apériodique et par suite que le régime dynamique associé à l'effet PLC peut apparaître aléatoire.

Ananthakrishna et Valsakumar [5], grâce à un modèle basé sur des considérations microscopiques, aboutissent à un résultat plus précis : pour certaines valeurs des paramètres de contrôle (notamment la vitesse de déformation), la trajectoire de phases du système est attirée par une orbite apériodique de nature spéciale appelée *attracteur étrange*. La dynamique sous-jacente à l'effet PLC est alors dite chaotique déterministe.

A ce stade, il nous semble devoir mettre l'accent sur la différence entre une évolution "aléatoire" et une évolution "chaotique déterministe". Toutes deux ont un caractère imprévisible. Plus le nombre de degrés de liberté d'un système dynamique est élevé, plus son évolution est complexe et difficile à prévoir. Dans le cas extrême où le nombre de degrés de liberté d'un système dynamique est infini (le cas du "bruit blanc" par exemple), on ne peut prévoir le comportement du système ni son devenir. Son évolution est alors dite *aléatoire* et on parle de *chaos stochastique*.

Toutefois, un système dynamique peut avoir une évolution d'apparence aléatoire même si son nombre de degrés de liberté est faible (supérieur ou égal à trois). Cette apparence est due à la non linéarité du système. Le caractère imprévisible de l'évolution résulte de la sensibilité du système aux conditions initiales : aussi petite soit-elle, une différence initiale s'amplifie rapidement jusqu'à rendre impossible la prévision à long terme. La dynamique du système est alors dite *chaotique déterministe* et on parle de *chaos déterministe*.

Naturellement, la question se pose de savoir si un système dont l'évolution apparaît aléatoire possède une dynamique déterministe ou non. En d'autre termes, comment peut-on distinguer un chaos stochastique d'un chaos déterministe ? La première réponse à cette question réside dans la notion d'*attracteur étrange* [6]. Le terme "étrange" fait référence aux propriétés peu communes de ces attracteurs, telles que leur structure fractale, par opposition aux attracteurs simples tels que le point fixe, le cycle limite et le tore. Lorsque la dynamique d'un système est chaotique déterministe, la trajectoire de phases converge vers un attracteur étrange, et réciproquement. La mise en évidence d'un attracteur étrange montre donc que la dynamique du système considéré est chaotique déterministe.

Si l'on considère l'effet PLC sous cet angle, la question suivante s'impose : le régime dynamique associé à l'effet PLC est-il aléatoire ? Ou bien, l'aspect aléatoire est-il seulement apparent et cache-t-il un certain ordre ? En d'autres termes, la dynamique du phénomène PLC est-elle ou non déterministe ? Notre objectif est d'apporter une réponse à cette question en analysant l'information dynamique contenue dans les variations temporelles de la contrainte.

Dans un premier chapitre nous présentons l'effet PLC : ses manifestations macroscopiques, son aspect microphysique et les modélisations proposées pour expliquer ce phénomène. Au deuxième chapitre nous exposons certaines techniques permettant la caractérisation de la dynamique d'un système, en particulier *la méthode des retards* [7] qui permet de reconstruire le portrait de phases d'un système dynamique à partir d'une série temporelle. Par "série temporelle" ou encore "signal", il faut entendre l'enregistrement de l'évolution au cours du temps de l'une des variables d'état du système considéré. Dans ce chapitre on trouve aussi les outils mathématiques permettant la recherche des caractéristiques d'un régime déterministe, la dimension fractale de l'attracteur étrange associé [8] et les exposants de Lyapunov qui quantifient la sensibilité aux conditions initiales [9]. Dans le troisième chapitre sont exposées la mise en oeuvre et la validation de la méthode d'analyse. Cette dernière, avant d'être appliquée à l'effet PLC, a été testée sur l'attracteur de Lorenz [10]. Le quatrième chapitre contient les résultats de notre travail. Les séries analysées sont constituées des variations temporelles de la contrainte lors de la traction, à vitesse de déformation constante, de divers échantillons sujets à l'effet PLC [11,12]. Enfin nous terminons par une conclusion dans laquelle sont discutés nos résultats ainsi que les perspectives de notre travail.

Chapitre I.

PRESENTATION DE L'EFFET PORTEVIN-LE CHATELIER

1- INTRODUCTION

Même si la déformation plastique n'est pas homogène à l'échelle microscopique, elle apparaît généralement homogène à l'échelle macroscopique. En revanche, pour certains matériaux et des conditions de déformation données, il arrive qu'un écoulement plastique homogène disparaisse et laisse place à un écoulement plastique inhomogène, qui se manifeste par une localisation de la déformation plastique. On fait référence à une telle situation par le terme "instabilité plastique" dont nous citons ci-dessous deux exemples bien connus :

* La striction : lors de la traction uni-axiale d'une éprouvette, sa section diminue uniformément (la déformation plastique est homogène) jusqu'à un certain stade de la déformation où un étranglement apparaît dans une zone de l'échantillon (la déformation plastique devient localisée).

* Les bandes de cisaillement : lors d'un cisaillement simple, le passage de l'écoulement plastique uniforme à un écoulement hétérogène se manifeste par l'apparition de bandes étroites de déformation plastique localisée.
L'étude des instabilités plastiques a généralement pour but d'éviter leur déclenchement et leur développement à cause de leurs effets néfastes sur la mise en forme et la durée de vie des matériaux.

Une des formes les plus fascinantes de l'instabilité de la déformation plastique des métaux est la génération répétée et la propagation de bandes de déformation plastique localisée le long d'une éprouvette sollicitée en traction : c'est l'effet Portevin-Le Chatelier (PLC). Parfois ces bandes peuvent être visibles à l'oeil nu comme le montre la photographie de la figure I-1. Après l'essai de traction, ces bandes persistent à la surface de l'échantillon et résistent au polissage, ce qui est très pénalisant notamment dans l'industrie aéronautique où cette rugosité indélébile affecte le rendement de la propulsion.

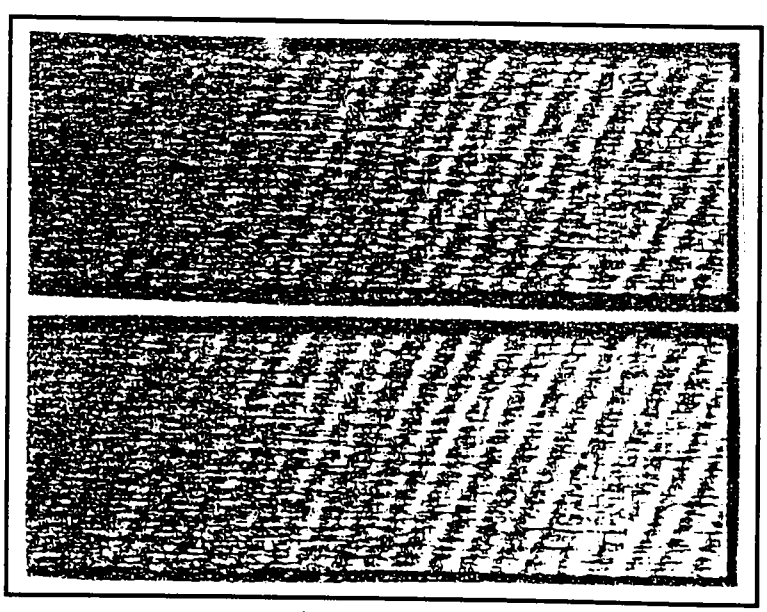


Figure I-1 :

Photographie de la morphologie des bandes PLC
pour l'alliage Al4,8%Mg sollicité à la température ambiante
avec une vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}_a = 8{,}285.10^{-5} s^{-1}$ [13].

Ce phénomène a été observé dès 1878 par Adamson ; il était connu chez les métallurgistes sous le nom de "fragilité au bleu" [14]. On l'a ensuite baptisé "effet Portevin-Le Chatelier" en faisant référence aux premiers chercheurs qui s'y sont intéressés. En effet, en 1909 Le Chatelier fut le premier à mettre en évidence ce phénomène dans les aciers doux à des températures sensiblement élevées [15], ensuite Portevin et Le Chatelier [16] l'ont observé, en 1924, dans des alliages légers à la température ambiante.

L'effet PLC apparaît pour des matériaux tels que les alliages d'aluminium et les aciers doux : matériaux de structure cfc ou cc contenant soit des éléments en solution solide en position substitutionnelle, soit des impuretés interstitielles. L'observation du phénomène exige des conditions expérimentales précises : la figure I-2 montre qu'il existe un intervalle limité de vitesses de chargement et de température pour que l'effet PLC ait lieu.

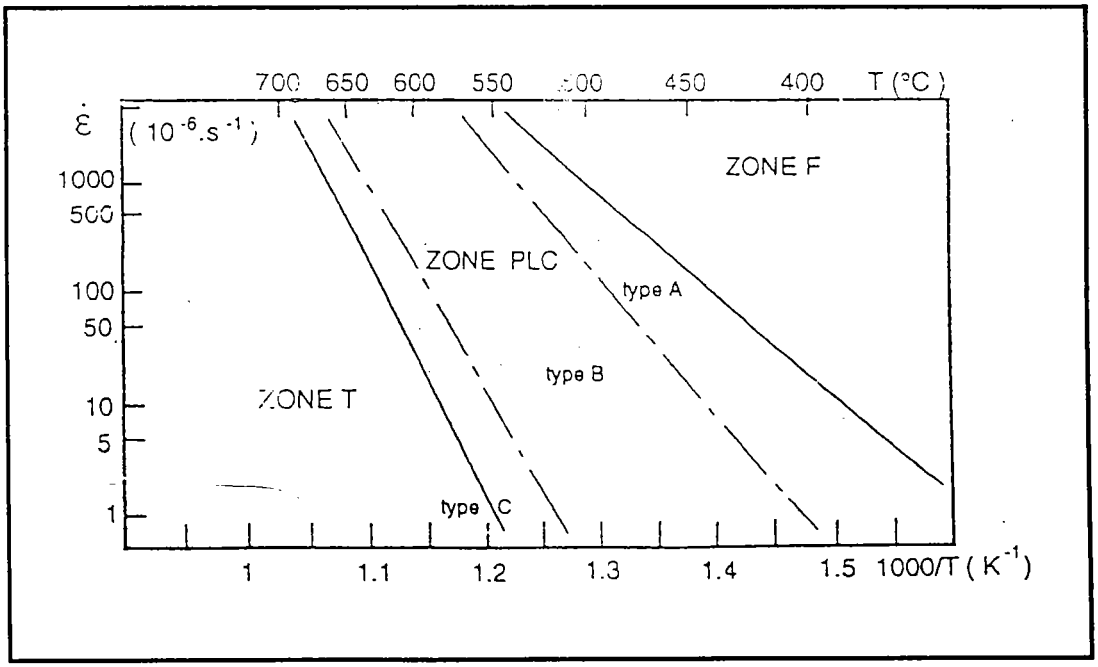


Figure I-2 :

L'effet PLC a lieu dans un domaine limité
de température et de vitesse de déformation [17].

2- MANIFESTATIONS MACROSCOPIQUES

2-1- Les courbes de traction

Lors d'un essai de traction d'un matériau sujet à l'effet PLC, la courbe de traction obtenue présente des décrochements ou des paliers à partir d'une certaine valeur de la déformation plastique. Les décrochements de la contrainte sont observés lorsque l'essai de traction est réalisé sur une machine dure, c'est-à-dire à vitesse de déformation constante $\dot{\varepsilon}_a$ (voir la figure I-3). Les paliers de la déformation sont obtenus lorsque l'essai de traction est réalisé sur une machine douce, c'est-à-dire à taux de contrainte constant $\dot{\sigma}_a$ (voir la figure I-4). Chaque décrochement ou palier correspond à la génération et à la propagation d'une bande de déformation plastique localisée due à l'effet PLC, pour simplifier disons une bande PLC.

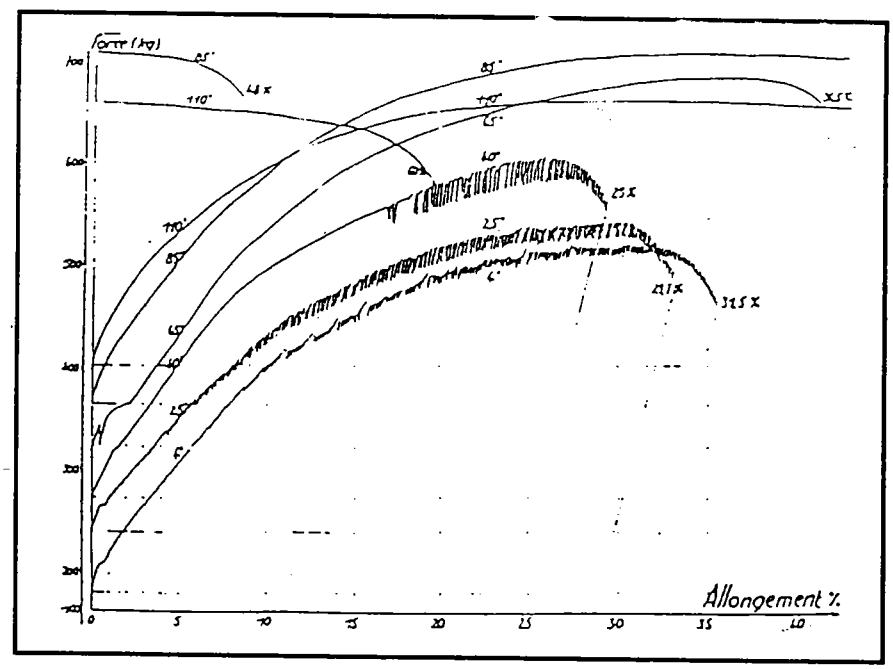


Figure I-3 :

Courbes de traction (sur machine dure) d'un alliage Al3%Mg sollicité à température croissante et à $\dot{\varepsilon}_a = 1{,}25.10^{-3}\ s^{-1}$ [18].

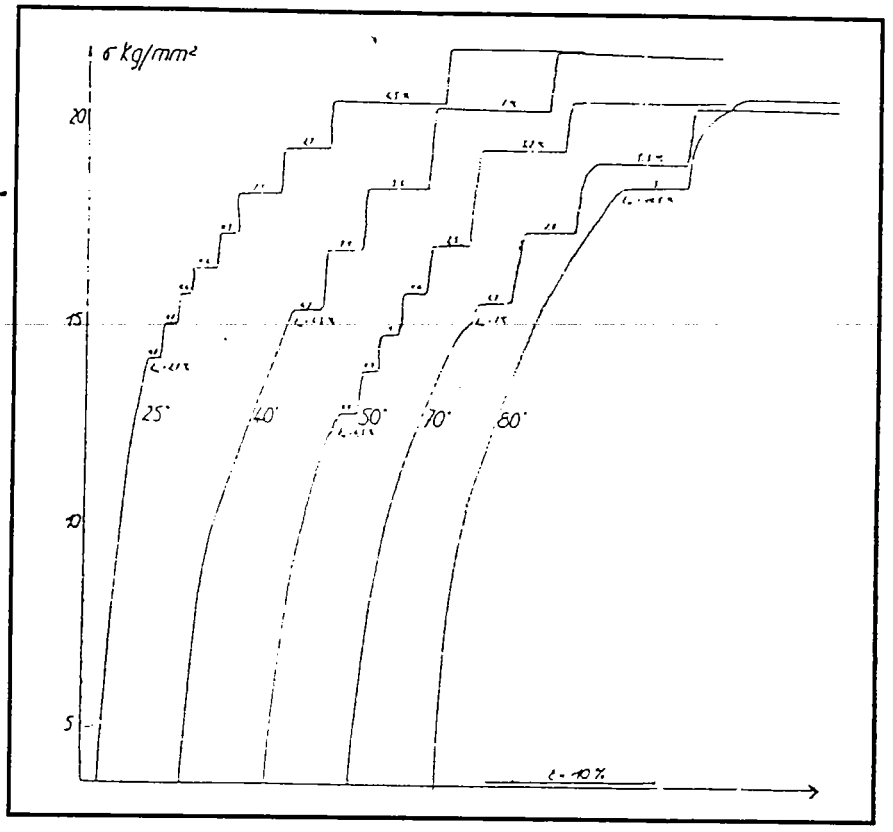


Figure I-4 :

Courbes de traction (sur machine molle) d'un alliage Al3%Mg déformé à température croissante et à $\dot{\sigma}_a$=9,33 g/mm/s [18].

2-2- Interprétation des courbes de traction

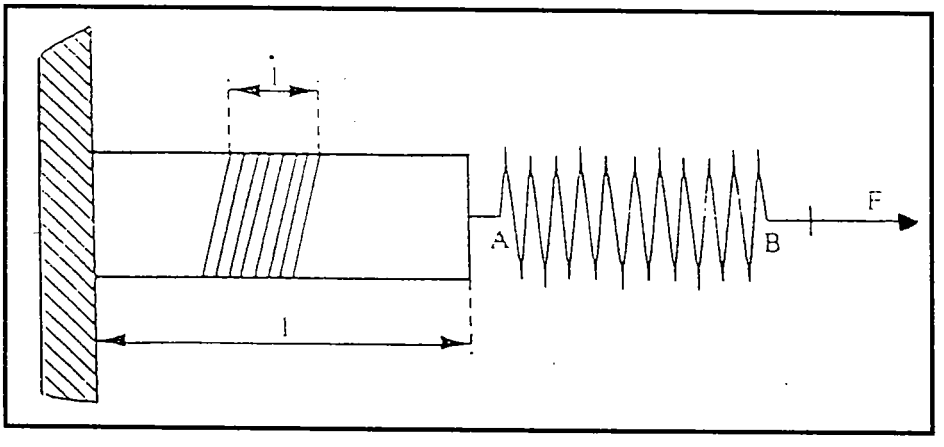


Figure I-5 :

Schéma simplifié d'une machine de traction.

La figure I-5 montre le schéma simplifié d'une machine de traction. Pendant un intervalle de temps dt, la traction de l'échantillon impose le déplacement des points A et B respectivement aux points A' et B' tels que AA'=*dl* et BB'=*da*. *dl* est l'allongement de l'échantillon et *da* représente l'allongement total (imposé ou enregistré). Soit K la rigidité de la machine de traction ; la variation de la force F (imposée ou enregistrée) pendant l'intervalle de temps *dt* est :

$$dF = K(da - dl)$$

K est définie par la rigidité du bâti, de la traverse et des lignes d'amarrage ; sa valeur est nulle pour une machine douce idéale et infinie pour une machine dure idéale. On peut modifier la nature d'une machine en jouant sur sa rigidité ; on peut obtenir une machine douce en intercalant un élément de très faible rigidité, comme un soufflet, dans un montage rigide [19,20].

* Cas d'une machine dure :

L'essai de traction est réalisé à vitesse de déformation constante $\dot{\varepsilon}_a$: on impose à la traverse de la machine une vitesse de déplacement constante V=da/dt et on relève les variations temporelles de la force appliquée :

$$\frac{dF}{dt} = K\left(V - \frac{dl}{dt}\right). \qquad (I\text{-}1)$$

On peut expliquer les décrochements observés sur la courbe de traction d'un matériau sujet à l'effet PLC par la répétition du cycle suivant : pendant l'écoulement homogène, le déplacement de la traverse à vitesse constante V provoque un allongement dl de l'échantillon tel que dl/dt reste inférieur à V d'où

une augmentation progressive et monotone de la force appliquée (dF/dt étant positif). L'apparition et la propagation d'une bande PLC produit un allongement plastique brusque de l'échantillon qui fait que dl/dt devient supérieur à V et dF/dt devient brusquement négatif, d'où une chute de la force appliquée, accompagnée d'une décharge élastique de la machine. Puisque la traverse continue son déplacement à la vitesse V, la machine se recharge après le passage de cette bande et la force appliquée retrouve une augmentation progressive et monotone jusqu'à l'apparition d'une autre bande.

* Cas d'une machine douce :

Une telle machine permet de réaliser la traction d'un échantillon en imposant un taux de contrainte constant $\dot{\sigma}_0$. On applique une force dont la variation temporelle $\dot{F}_0$=dF/dt est constante et on relève l'allongement résultant au point B :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\dot{F}_0}{K} + \frac{dl}{dt}. \qquad \text{(I-2)}$$

$\dot{F}_0/K$ étant une constante, l'allongement relevé a les même variations que l'allongement de l'échantillon : l'augmentation de la force appliquée induit une faible déformation de l'échantillon jusqu'à l'apparition d'une bande PLC. La propagation de cette dernière provoque un allongement brusque de l'échantillon d'où les marches observées sur la courbe de traction.

2-3- Morphologie des décrochements en machine dure

Selon la rigidité de la machine de traction, l'état du matériau et les conditions expérimentales, divers types de décrochements sont observés :

* La figure I-6 montre des enregistrements typiques sur deux éprouvettes à l'état recuit (a) et non recuit (b). On constate une augmentation de l'amplitude des décrochements avec l'écrouissage du matériaux.

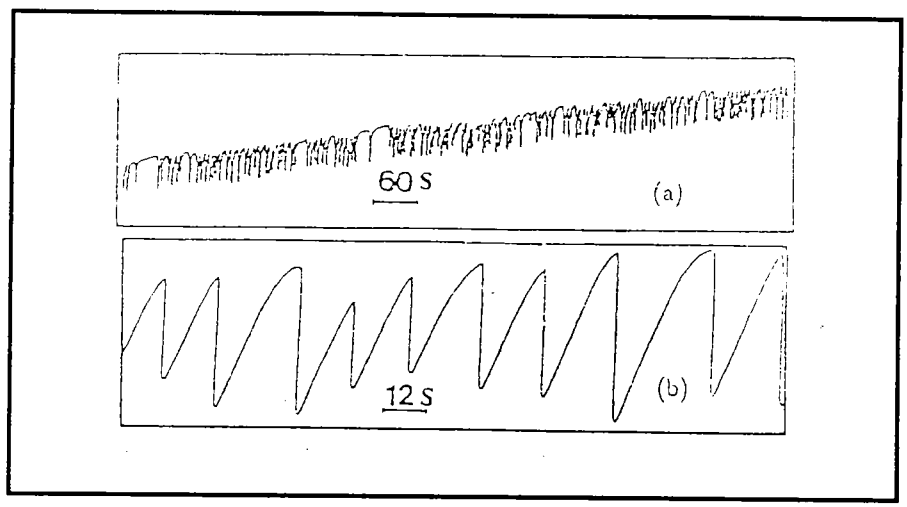


Figure I-6 :

Phénomène PLC en machine dure pour deux échantillons d'alliage Al-Mg recuit (a) et non recuit (b). L'essai de traction est réalisé à la température ambiante avec $\dot{\varepsilon}_a=2,5.10^{-5}$ s^{-1} [20].

* La température et la vitesse de déformation ont une influence non seulement sur l'existence de l'effet PLC (voir la figure I-2) mais aussi sur la forme des décrochements. La figure I-7 montre les trois types de décrochements observés sur les courbes de traction d'un matériau sujet à l'effet PLC. Le type C est observé aux basses vitesses de déformation. Après l'initiation de la première bande à l'une des extrémités de l'échantillon et sa propagation le long de ce dernier, d'autres bandes sont générées en des positions aléatoires de l'échantillon. Le temps de recharge est considérable pour ce type de décrochement. Le type B est

typiquement observé aux vitesses de déformation intermédiaires. Les chutes de contraintes associées à ce type de décrochement sont plus petites que celles associées au type C et la génération de bandes est maintenant corrélée dans l'espace : après l'initiation d'une bande en une section de l'échantillon, la suivante se forme à la section adjacente et la propagation se fait en "course de relais". Le type A est observé aux grandes vitesses de déformation. Les chutes de contrainte et le temps de recharge sont plus petits que pour le type B et la corrélation spatiale est plus forte : la génération de bandes est plus rapide et leur propagation est continue. Enfin notons que généralement un accroissement de la vitesse de déformation a le même résultat qu'une diminution de la température.

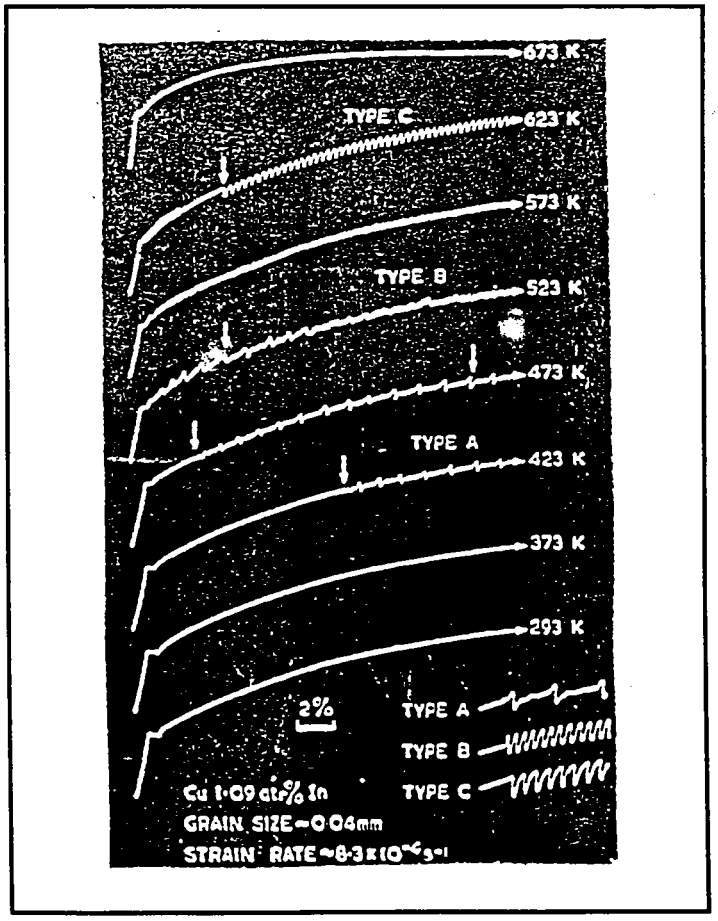


Figure I-7 :

Courbes de traction schématiques montrant la variation de la forme des décrochements de la contrainte avec la température croissante pour l'alliage Cu-In [21].

3- ASPECT MICROPHYSIQUE DU PHENOMENE

3-1- Comportement d'une dislocation

Une dislocation est une perturbation locale de l'arrangement cristallin ou encore un défaut de la structure cristalline ; elle est caractérisée par sa ligne et son vecteur de Burgers [22]. Selon que ce vecteur est tangent ou normal à la ligne de dislocation, cette dernière est appelée vis ou coin. La ligne d'une dislocation doit, ou se refermer sur elle-même, ou aboutir à un autre défaut cristallin (surface, joint, dislocation ...). C'est le mouvement des dislocations qui est à l'origine de la déformation plastique ; on dit que les dislocations sont les porteuses de la déformation plastique. La sollicitation d'un matériau entraîne le déplacement des dislocations et leurs interactions entre elles et avec tous les autres défauts cristallins. Ces interactions peuvent être directes, sous forme de frottements visqueux, ou indirectes, c'est-à-dire dues aux champs de contraintes créés par la différence entre les caractéristiques des défauts et celles de la matrice.

L'effet PLC est attribué à l'interaction des dislocations mobiles et des atomes du soluté qui sont également mobiles grâce à des processus diffusionnels. Dans ce cas la contrainte nécessaire au mouvement d'une dislocation dans son plan de glissement peut elle être décomposée de la façon suivante [23] :

$$\sigma = \sigma_d + f . \qquad \text{(I-3)}$$

où σ_d est la contrainte due à l'interaction de la dislocation avec le reste des défauts cristallins, en particulier les forêts de dislocations et f, appelée "contrainte de frottement", a pour origine l'interaction de la dislocation avec les atomes du soluté. A son tour, σ_d est la somme de deux termes : σ_d^{at} représentant la

composante athermique et σ_d^{th} résultant de l'interaction de la dislocation avec les obstacles localisés suivant un processus thermiquement activé. L'équation I-3 devient alors :

$$\sigma = \sigma_d^{at} + F. \qquad \text{(I-4)}$$

$$\text{avec } F = \sigma_d^{th} + f. \qquad \text{(I-5)}$$

F est donc une fonction de la température T et de la vitesse de dislocation v alors que σ_d^{at} est largement indépendante de ces quantités, mais augmente avec la déformation ε.

3-2- Le vieillissement dynamique

Les théories microphysiques de l'effet PLC sont basées sur l'interaction entre les dislocations mobiles et les atomes du soluté. Le mouvement des dislocations est interrompu par des obstacles localisés constitués de défauts cristallins tels que les forêts de dislocations. Pendant l'arrêt des dislocations, les atomes de soluté diffusent vers elles et les empêchent de franchir ces obstacles : c'est le vieillissement dynamique (*Dynamic Strain Ageing* : DSA).

En se basant sur ce modèle, les premières interprétations de l'effet PLC sont dues à Cottrell [24] et Friedel [25]. Lorsqu'une dislocation est arrêtée au niveau d'un obstacle localisé, les atomes de soluté diffusent vers elle et forment un "nuage" appelé nuage ou atmosphère de Cottrell. Ces modèles suggèrent un mouvement visqueux continu des dislocations et le phénomène est interprété en termes d'ancrage et de désancrage des dislocations sur le nuage formé.

D'autres auteurs [26,27] considèrent que le mouvement des dislocations a un caractère discontinu. Une dislocation se déplaçant dans le réseau cristallin est temporairement arrêtée par des obstacles localisés pendant un intervalle de temps t_w appelé temps d'attente. Dans les condition "normales" d'activation, ce délai permet aux atomes de soluté de diffuser vers cette dislocation et de l'empêcher de franchir l'obstacle. En négligeant le temps écoulé entre deux obstacles localisés, appelé temps de vol, on considère que c'est le temps d'attente qui détermine la vitesse de dislocations [28]. Si l est la distance moyenne parcourue par une dislocation entre deux obstacles localisés, alors sa vitesse est donnée par :

$$v = \frac{l}{t_w} \qquad \text{(I-6)}$$

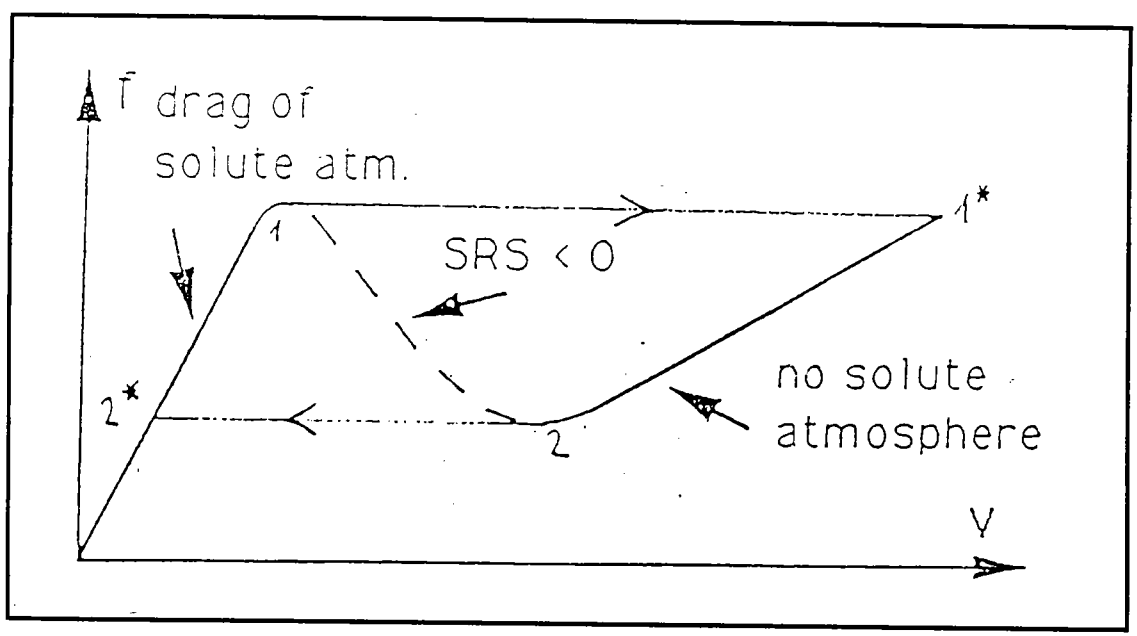


Figure I-8 :

Forces effectives exercées sur une dislocation mobile en fonction de sa vitesse : vieillissement dynamique dans la région où df/dv<0 [2].

Pour un matériau qui ne présente pas l'effet PLC et pour une vitesse de déformation donnée, la contrainte de frottement f augmente avec la vitesse de dislocation v et diminue avec la température T. En revanche, pour un matériau sujet à l'effet PLC, cette contrainte devient décroissante dans un certain intervalle de vitesses intermédiaires $[v_1,v_2]$. La figure I-8 montre les variations de la contrainte de frottement f en fonction de la vitesse de dislocation v.

L'intervalle des vitesses v inférieures à v_1 est appelé branche lente, et est noté (2*1). L'intervalle des vitesses v supérieures à v_2 est appelé branche rapide, et est noté (1*2). Sur ces deux branches la résistance au mouvement des dislocations croît avec leur vitesse selon un processus d'activation thermique "normal". Sur la branche lente (les basses vitesses de dislocations), le temps d'attente est grand, par conséquent les atomes de soluté ont largement le temps nécessaire pour diffuser vers les dislocations temporairement arrêtées par des obstacles localisés. Dans ce régime de vitesses, les dislocations sont ancrées. En revanche, sur la branche rapide (les grandes vitesses de dislocations) le temps d'attente des dislocations au niveau des obstacles est tellement court que la diffusion des atomes de soluté ne se produit pas : dans ce régime de vitesses, les dislocations sont désancrées. Lorsque les dislocations sont ancrées, outre le frottement du réseau cristallin, elles subissent un frein dû aux atmosphères de soluté, c'est pourquoi la pente de la courbe f(v) sur la branche lente est plus grande que sur la branche rapide. D'autre part, lorsque la vitesse de déformation est telle que le temps d'attente est de l'ordre du temps caractéristique de diffusion du soluté, la contrainte de frottement diminue lorsque la vitesse des dislocations augmente, au contraire du régime "normal" thermiquement activé, d'où la pente négative de f(v) dans l'intervalle des vitesses intermédiaires. C'est cette "anomalie" qui permet d'expliquer l'effet PLC [28,30].

En fait les vitesses intermédiaires sont interdites aux dislocations et le mécanisme qui gère leur mouvement est le suivant : lorsque la contrainte appliquée à une dislocation ancrée augmente sur la branche lente (2*1) de sorte que le point 1 est atteint, un saut se produit jusqu'au point 1* sur la branche rapide (1*2) où la dislocation est désancrée. Lorsque la contrainte appliquée à une dislocation désancrée diminue sur la branche rapide de sorte que le point 2 est atteint, un deuxième saut se produit jusqu'au point 2* sur la branche lente où la dislocation est ancrée de nouveau.

3-3- Sensibilité à la vitesse de déformation

Dans l'intervalle des vitesses intermédiaires, la pente de la courbe f(v) est négative à cause du vieillissement dynamique qui fournit une contribution négative à la sensibilité à la vitesse de déformation (*Strain Rate Sensitivity* : SRS). C'est dans cet intervalle que l'effet PLC est observé [23,31-34]. Afin de donner une forme analytique à la SRS, Kubin *et al* [35] suggèrent que la loi constitutive I-4 soit vue comme l'intégration de la forme différentielle générale :

$$d\sigma = h d\varepsilon + S d(\log\dot{\varepsilon}). \qquad \text{(I-7)}$$

$$\text{avec } h = \left.\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}\right|_{\dot{\varepsilon}}. \qquad \text{(I-8)}$$

$$\text{et } S = \left.\frac{\partial\sigma}{\partial(\log\dot{\varepsilon})}\right|_{\varepsilon}. \qquad \text{(I-9)}$$

à condition que le taux d'écrouissage h soit indépendant de $\dot{\varepsilon}$ et que la sensibilité à la vitesse de déformation S soit indépendante de la déformation ε.

On considère la décomposition additive suivante de S :

$$S = S_0 + S_{ageing}. \tag{I-10}$$

S_0 est la SRS associée au processus normal d'activation, qui tend à réduire la contrainte d'écoulement lorsque le temps d'attente augmente ; elle est donnée par :

$$S_0 = \left.\frac{\partial \sigma_d^{th}}{\partial(\log\dot{\varepsilon})}\right|_{\varepsilon} = \frac{kT}{\gamma}. \tag{I-11}$$

où k est la constante de Boltzman, T est la température et γ est le volume d'activation thermique nécessaire au franchissement des obstacles localisés.
S_{ageing} est la contribution du vieillissement dynamique qui tend à durcir les obstacles lorsque le temps d'attente augmente ; elle est donnée par :

$$S_{ageing} = \frac{df}{d(\log\dot{\varepsilon})}. \tag{I-12}$$

Pour donner une expression analytique à cette contribution il faut avoir l'expression de la contrainte de frottement f. Comme on ne peut pas distinguer toutes les variétés de dislocations, le nombre et la nature des systèmes de glissement mis en jeu, un compromis raisonnable [2,36-39] consiste à regrouper tous les défauts cristallins en deux types de dislocations : les dislocations mobiles, de densité ρ_m, et les dislocations fixes, de densité ρ_f, qui jouent le rôle d'obstacles localisés. La distance moyenne entre deux obstacles est alors supposée fonction de la densité de dislocations fixes :

$$l = c\rho_f^{-1/2}. \tag{I-13}$$

où c est un facteur de proportionnalité.

D'autre part la vitesse de déformation est liée à la densité de dislocations mobiles ρ_m selon la loi de Orowan [40] :

$$\dot{\varepsilon} = \phi b v \rho_m . \tag{I-14}$$

où ϕ est un facteur géométrique, b est l'amplitude du vecteur de Burgers et v est la vitesse de dislocations mobiles qu'on peut exprimer, compte tenu des équations I-5 et I-13, en fonction du temps d'attente et de la densité des dislocations fixes :

$$v = \frac{c\rho_f^{-1/2}}{t_w}. \tag{I-15}$$

L'expression de la vitesse de déformation devient alors :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\Omega(\varepsilon)}{t_w}. \tag{I-16}$$

où $\Omega(\varepsilon)$ donné par :

$$\Omega(\varepsilon) = c\phi b \rho_m \rho_f^{-1/2}. \tag{I-17}$$

représente l'incrément de déformation résultant lorsqu'un pas d'activation élémentaire est accompli par toutes les dislocations mobiles. Compte tenu de l'équation I-12, l'expression de la SRS due au vieillissement dynamique devient :

$$S_{ageing} = \frac{df}{d\log(\Omega(\varepsilon)/t_w)} \tag{I-18}$$

Cette équation reflète une dépendance indirecte de f vis à vis de la déformation due au comportement collectif des dislocations. En effet les densités ρ_m et ρ_f évoluent avec la déformation [28,29,41] ce qui entraîne, d'après l'équation I-17, une évolution de Ω. Pour rendre compte de cette dépendance, le modèle [36] propose des équations différentielles couplées gouvernant l'évolution des deux densités de dislocations ρ_m et ρ_f ; il en résulte qu'aux petites déformations plastiques, ρ_m augmente plus vite que ρ_f, alors qu'aux grandes déformations c'est ρ_f qui augmente plus vite, ρ_m étant pratiquement saturée. La figure I-9 donne les variations de Ω en fonction de ε et permet d'interpréter l'existence de déformations critiques d'apparition et de disparition de l'effet PLC.

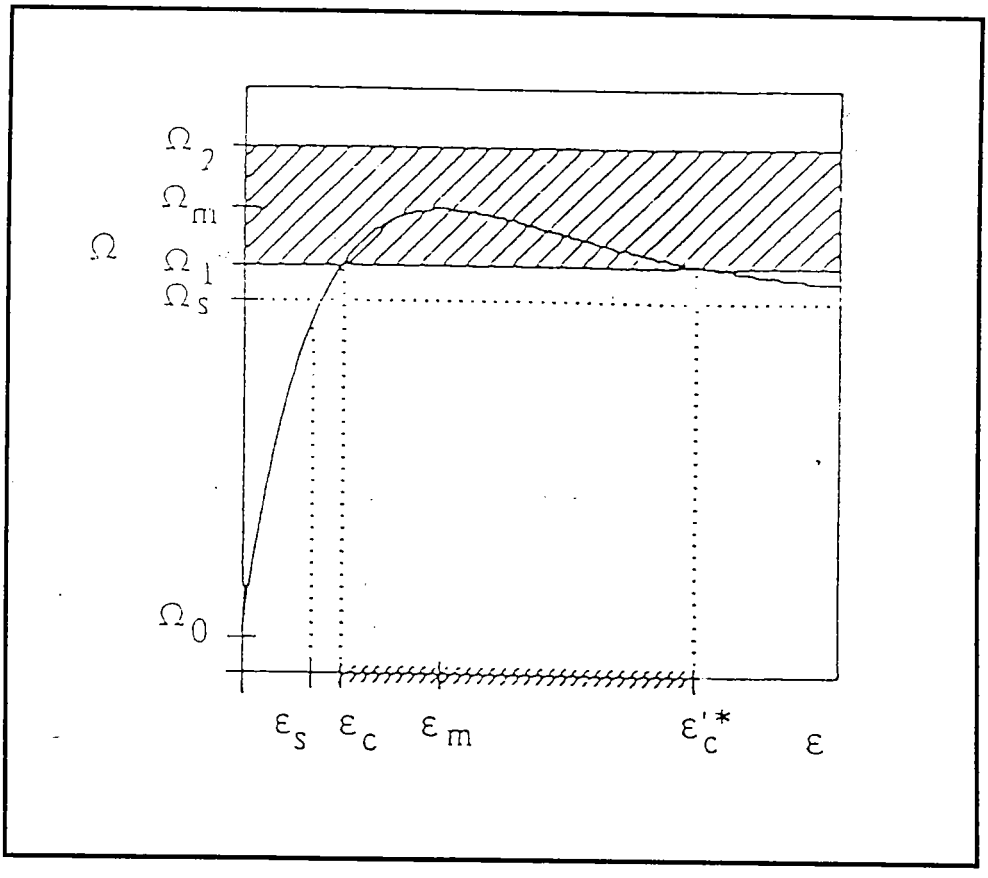


Figure I-9 :

Variations de l'incrément de déformation Ω en fonction de la déformation ε. ε_c et $\varepsilon_c'^*$ représentent respectivement les déformations critiques d'apparition et de disparition du phénomène PLC [36].

Pour une déformation plastique donnée, l'expression de S_{ageing} est donnée par :

$$S_{ageing} = -\frac{df}{d(\log(t_w))} \quad \text{(I-19)}$$

En supposant que la contrainte de frottement f est proportionnelle à la concentration du soluté C_s au voisinage des dislocations arrêtées au niveau des obstacles localisés, Louat [42] propose l'expression suivante de f en fonction du temps d'attente t_w :

$$f = f_0\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{t_w}{\tau_0}\right)^{2/3}\right]\right\}. \quad \text{(I-20)}$$

où f_0 représente la contrainte maximale due au vieillissement dynamique. Elle est proportionnelle à C_m, valeur de saturation de C_s atteinte pour les grandes valeurs du temps d'attente. τ_0 est un temps caractéristique de la diffusion donné dans [25] par :

$$\tau_0 = \frac{1}{KD}\left(\frac{C_m}{C_0}\right)^{3/2}. \quad \text{(I-21)}$$

K est une constante traduisant l'énergie de liaison soluté-dislocation, C_0 est la concentration nominale du soluté et D est le coefficient de diffusion des atomes de soluté dans la matrice. Compte tenu des équations I-19 et I-20, l'expression de S_{ageing} devient :

$$S_{ageing} = -\frac{2}{3} f_0 \left(\frac{t_w}{\tau_0}\right)^{2/3} \exp\left[-\left(\frac{t_w}{\tau_0}\right)^{2/3}\right]. \quad \text{(I-22)}$$

Enfin, une expression analytique adimensionnelle de la SRS est donnée par :

$$s = s_0 - X\exp(-X). \tag{I-23}$$

$$\text{en posant } s = \frac{3}{2}\frac{S}{f_0},\ X = \left(\frac{t_w}{\tau_0}\right)^{2/3} \text{ et } s_0 = \frac{3}{2}\frac{S_0}{f_0} = \frac{3}{2}\frac{kT}{\gamma f_0}.$$

Le terme s_0 associé au processus normal d'activation est toujours positif (supposé constant) et c'est le terme $X\exp(-X)$ qui, à cause du vieillissement dynamique, peut dépasser la valeur de s_0 pour que la SRS devienne négative, ce qui donne naissance à l'instabilité associée à l'effet PLC.

3-4- Récapitulation

La SRS dépend de la déformation ε et de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ par l'intermédiaire du temps d'attente (voir l'équations I-16). Elle dépend aussi de la diffusivité des atomes de soluté et de leur concentration dans le matériau par l'intermédiaire du temps caractéristique de diffusion τ_0 (voir l'équations I-21). Enfin une dépendance par rapport à la température est incluse dans le terme s_0. Sa valeur n'est donc négative que pour certaines valeurs de ces paramètres : c'est pourquoi l'effet PLC a lieu pour des matériaux donnés dans un domaine de température et de vitesse de déformation déterminé (voir la figure I-2) et à partir d'une déformation critique ε_c (voir la figure I-9).

4- MODELISATIONS DU PHENOMENE

4-1- Opération de moyenne

4-1-1- Modèle de Penning

Penning suggère la loi constitutive de son modèle [43] :

$$\sigma = h\varepsilon + F(\dot{\varepsilon}). \qquad \text{(I-24)}$$

où $h\varepsilon$ représente l'écrouissage du matériau par la déformation ε et la courbe de $F(\dot{\varepsilon})$ retient la forme caractéristique de la courbe f(v) avec quelques distorsions dues au fait que la densité de dislocations mobiles ρ_m, entrant dans la relation d'Orowan, dépend de la vitesse de déformation. L'allure de F en fonction de $\dot{\varepsilon}$ donnée par la figure I-10 est considérée comme la propriété clé donnant naissance à l'effet PLC [44-48].

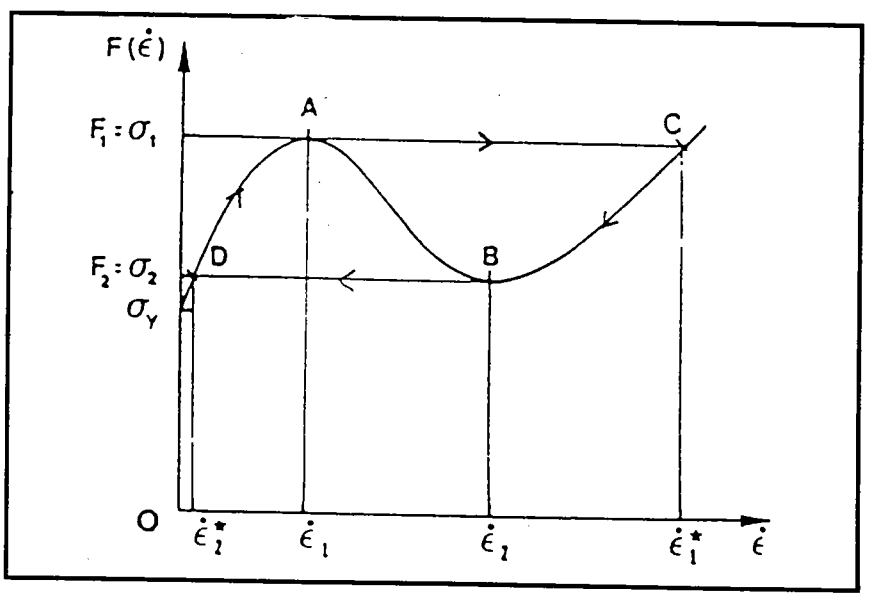


Figure I-10 :

Variations de la composante F (de la contrainte d'écoulement σ) en fonction de la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ [32].

Penning considère des essais de traction sur machine dure. En supposant que la déformation plastique ε est faible dans une section droite, il exprime la vitesse de déformation appliquée $\dot{\varepsilon}_a$ (constante) comme la somme de la vitesse de déformation élastique et la vitesse de déformation plastique moyenne :

$$\dot{\varepsilon}_a = \frac{\dot{\sigma}}{M} + \frac{1}{L}\int_0^L \dot{\varepsilon} dx. \qquad \text{(I-25)}$$

où L est la longueur de l'éprouvette, M est le module de la machine et de l'éprouvette, et $\dot{\varepsilon}$ est la vitesse de déformation d'une section de l'éprouvette repérée par l'abscisse x. C'est l'équation dite "de la machine".
En combinant les équations I-24 et I-25 pour éliminer la contrainte, on obtient l'équation intégro-différentielle suivante :

$$M\dot{\varepsilon}_a = h\dot{\varepsilon} + \ddot{\varepsilon}\frac{dF(\dot{\varepsilon})}{d\dot{\varepsilon}} + \frac{M}{L}\int_0^L \dot{\varepsilon} dx. \qquad \text{(I-26)}$$

Dans le cas d'une déformation non uniforme, cette équation n'admet pas de solution exacte. Cependant elle possède une solution stationnaire ($\ddot{\varepsilon}_s=0$) et uniforme ($\frac{\partial \dot{\varepsilon}_s}{\partial x}=0$) donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{M}{M+h}\dot{\varepsilon}_a \text{ et } \dot{\sigma}_s = h\dot{\varepsilon}_s. \qquad \text{(I-27)}$$

Les insuffisances de ce modèle résident dans les hypothèses faites pour son élaboration, à savoir : la séparation additive des variables ε et $\dot{\varepsilon}$ dans l'équation constitutive I-24, l'hypothèse que le taux d'écrouissage h est constant et, plus

sérieux, le fait que ε joue le rôle d'une variable d'état ce qui n'est valable que pour les matériaux sans mémoire du chemin de chargement. Ces hypothèses sont justifiées tant que les déformations restent petites, ce qui est le cas lors du passage d'une bande PLC. Ainsi Penning trouve deux types de comportement : des bandes de déformation localisée se déplaçant par sauts et d'autres se propageant continûment à vitesse constante. Il montre que ces comportements ne sont observés que lorsque la vitesse de déformation appliquée est telle que la vitesse de déformation associée à l'état stationnaire uniforme appartient à l'intervalle $[\dot{\varepsilon}_1,\dot{\varepsilon}_2]$ où la SRS est négative.

4-1-2- Modèle de Kubin et Estrin

a- Equation constitutive du modèle

Le modèle de Penning est justifié à l'aide d'arguments mathématiques. C'est pourquoi Kubin et Estrin [2,32-35] l'ont repris en lui donnant un support physique par l'intégration du concept de vieillissement dynamique associé à une sensibilité négative à la vitesse de déformation.

Sachant que $S(\dot{\varepsilon}) = dF(\dot{\varepsilon})/d(\log\dot{\varepsilon})$, ces auteurs suggèrent une expression de la contrainte viscoplastique $F(\dot{\varepsilon})$ en utilisant l'expression de la SRS donnée par l'équation I-23 :

$$F(\dot{\varepsilon}) = F_0 + S_0 \log(\dot{\varepsilon}) - f_0 \exp\left[-\left(\frac{\Omega(\varepsilon)}{\tau\dot{\varepsilon}}\right)^{2/3}\right].$$

Dans cette opération, il est supposé que les propriétés vérifiées à l'échelle où sont définies les densités de dislocations (échelle mésoscopique) sont retrouvées à l'échelle d'une section droite de l'échantillon (échelle macroscopique). Les opérations de moyennes effectuées sont justifiées par l'homogénéité des distributions dans cette transition.

Kubin et Estrin considèrent des essais de traction sur machine douce car l'interprétation est plus simple, notamment en ce qui concerne les vitesses de bandes. Pour prendre en compte l'influence du taux de chargement constant $\dot{\sigma}_0$, dans [49], le terme $\frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\sigma}_0}{h\varepsilon}-1\right)$ est ajouté à l'expression de S. On obtient alors :

$$F(\dot{\varepsilon},\dot{\sigma}_0)=F_0+S_0\log(\dot{\varepsilon})-f_0\exp\left[-\left(\frac{\Omega(\varepsilon)}{\tau\dot{\varepsilon}}\right)^{2/3}\right]+\frac{1}{2}\left(1-\frac{\dot{\sigma}_0}{h\dot{\varepsilon}}\log\left(\frac{h\dot{\varepsilon}}{\dot{\sigma}_0}\right)\right). \qquad \text{(I-28)}$$

D'autre part la dérivation par rapport au temps de l'équation constitutive I-24 du modèle de Penning donne :

$$\dot{\sigma}_0 = h\dot{\varepsilon} + \ddot{\varepsilon}\frac{dF(\dot{\varepsilon})}{d\dot{\varepsilon}}. \qquad \text{(I-29)}$$

Cette équation admet une solution $\dot{\varepsilon}_s$ stationnaire ($\ddot{\varepsilon}_s=0$) et uniforme ($\frac{\partial\dot{\varepsilon}_s}{\partial x}=0$) donnée par :

$$\dot{\varepsilon}_s = \frac{\dot{\sigma}_0}{h}. \qquad \text{(I-30)}$$

On peut alors écrire l'équation I-29 sous la forme :

$$\ddot{\varepsilon} = -h\frac{\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_s}{F'(\dot{\varepsilon})}. \qquad \text{(I-31)}$$

Notons que l'on retrouve un état stationnaire uniforme comme pour la traction à vitesse de déformation constante.

b- Stabilité de l'état stationnaire uniforme

Pour l'étude de la stabilité, on considère une petite perturbation locale de l'état stationnaire de la forme :

$$\delta\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_s = (\delta\dot{\varepsilon})_0 \exp(\lambda t). \qquad \text{(I-32)}$$

où $(\delta\dot{\varepsilon})_0$ est la perturbation introduite à l'instant t=0 et λ est une constante, appelée taux de croissance, dont le signe indique l'évolution au cours du temps de la perturbation introduite. D'après l'équation I-31, l'évolution de $\delta\dot{\varepsilon}$ est donnée par :

$$\delta\ddot{\varepsilon} = -h\frac{\delta\dot{\varepsilon}}{S(\dot{\varepsilon}_s)} \quad \text{avec } S(\dot{\varepsilon}_s) = \left.\frac{dF(\dot{\varepsilon})}{d\dot{\varepsilon}}\right|_{\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}_s}. \qquad \text{(I-33)}$$

et par suite le coefficient λ est donné par :

$$\lambda = -\frac{h}{S(\dot{\varepsilon}_s)}. \qquad \text{(I-34)}$$

λ est une fonction de la sensibilité à la vitesse de déformation S. Ce paramètre est positif lorsque les conditions de chargement sont telles que $S(\dot{\varepsilon}_s)$ est négatif, d'où l'attribution de l'effet PLC à une SRS négative. La condition S=0 est considérée comme ligne de démarcation entre l'état stable et instable.

c- Comportement temporel

L'évolution de la vitesse de déformation peut être examinée au travers du signe de sa dérivée donnée par l'équation I-31. Vues les variations de la fonction F (voir la figure I-10), deux situations sont envisageables :

i/ $\dot{\varepsilon}_s$ est en dehors de l'intervalle $[\dot{\varepsilon}_1,\dot{\varepsilon}_2]$. Dans ce cas $\ddot{\varepsilon}$ est du signe de $(\dot{\varepsilon}_s-\dot{\varepsilon})$ car $F'(\dot{\varepsilon})$ est positif. Après un régime transitoire on atteint l'état stationnaire : si $\dot{\varepsilon}<\dot{\varepsilon}_s$ alors $\ddot{\varepsilon}$ est positif et $\dot{\varepsilon}$ va croître jusqu'à $\dot{\varepsilon}_s$. Si $\dot{\varepsilon}>\dot{\varepsilon}_s$ alors $\ddot{\varepsilon}$ est négatif et $\dot{\varepsilon}$ va décroître jusqu'à $\dot{\varepsilon}_s$. Ceci concorde avec le fait que l'état stationnaire est stable puisque λ est négatif en dehors de l'intervalle $[\dot{\varepsilon}_1,\dot{\varepsilon}_2]$ (voir l'équation I-34).

ii/ $\dot{\varepsilon}_s$ appartient à l'intervalle $[\dot{\varepsilon}_1,\dot{\varepsilon}_2]$. Dans ce cas l'état stationnaire n'est jamais atteint et $\dot{\varepsilon}$ varie selon le cycle suivant :

* A partir de 0, la vitesse de déformation augmente jusqu'à $\dot{\varepsilon}_1$ puisque $\ddot{\varepsilon}$ est positif ($F'(\dot{\varepsilon})$ étant positif et $\dot{\varepsilon}<\dot{\varepsilon}_s$).

* Au point $\dot{\varepsilon}_1$, $F'(\dot{\varepsilon})$ s'annule et $\ddot{\varepsilon}$ qui était positif devient infini, la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ effectue alors un saut à la valeur $\dot{\varepsilon}_1^*$.

* Au point $\dot{\varepsilon}_1^*$, $\ddot{\varepsilon}$ devient négatif puisque $F'(\dot{\varepsilon})$ est positif et $\dot{\varepsilon}>\dot{\varepsilon}_s$. Par suite $\dot{\varepsilon}$ diminue jusqu'à la valeur $\dot{\varepsilon}_2$.

* Au point $\dot{\varepsilon}_2$, $F'(\dot{\varepsilon})$ s'annule et $\ddot{\varepsilon}$ qui était négatif devient infini, la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$ effectue alors un deuxième saut à la valeur $\dot{\varepsilon}_2^*$ et le cycle reprend.

Le comportement décrit ci-dessus et schématisé par la figure I-10 montre qu'un régime périodique se substitue à l'état stationnaire uniforme $\dot{\varepsilon}_s$, ce dernier étant instable lorsqu'il se situe dans l'intervalle $[\dot{\varepsilon}_1,\dot{\varepsilon}_2]$. Au niveau microscopique, l'intervalle des vitesses de déformation inférieures à $\dot{\varepsilon}_1$ correspond à l'ancrage des dislocations par les atomes de soluté et l'intervalle des vitesses de déformation supérieures à $\dot{\varepsilon}_2$ correspond à leur désancrage alors que l'intervalle $[\dot{\varepsilon}_1,\dot{\varepsilon}_2]$ correspond à l'intervalle des vitesses $[v_1,v_2]$ interdites aux dislocations.

d- Caractéristiques des bandes PLC

Connaissant l'expression de la contrainte viscoplastique F, on peut calculer diverses caractéristiques des bandes PLC en utilisant l'équation I-29 :

* Le temps ΔT_1 qui s'écoule entre deux apparitions de bandes PLC dans une section de l'échantillon est donné par :

$$\Delta T_1 = \frac{1}{h}\int_{\dot{\varepsilon}_2^*}^{\dot{\varepsilon}_1} \frac{dF}{\dot{\varepsilon}-\dot{\varepsilon}_s}.$$

* Le temps ΔT_2 nécessaire à une bande PLC pour traverser une section de l'échantillon est donné par :

$$\Delta T_2 = \frac{1}{h}\int_{\dot{\varepsilon}_1^*}^{\dot{\varepsilon}_2} \frac{dF}{\dot{\varepsilon}-\dot{\varepsilon}_s}.$$

* L'incrément de déformation $\Delta\varepsilon$ d'une section de l'échantillon après un cycle d'oscillations temporelles (A→B→C→D→A de la figure I-10) est donné par :

$$\Delta\varepsilon = \dot{\varepsilon}_s \Delta T.$$

où $\Delta T=\Delta T_1+\Delta T_2$ est la période de passage des bandes PLC.

* De plus on peut facilement démontrer que l'équation I-29 admet des solutions périodiques sous forme d'ondes se propageant avec une vitesse constante arbitraire V [50,51], ainsi la période spatiale Λ et la largeur w d'une bande PLC sont données par :

$$\begin{cases} \Lambda = V\Delta T. \\ w = V\Delta T_2. \end{cases}$$

4-1-3- Conclusion

En dépit des reproches qu'on peut faire aux modèles ci-dessus, retenons qu'ils permettent une compréhension raisonnable de l'effet PLC. Ils permettent de montrer l'existence d'un état de déformation stationnaire uniforme, instable lorsque la vitesse de déformation correspondant à cet état est située dans le domaine de sensibilité négative à la vitesse de déformation. Un régime périodique se substitue à cet état ; il consiste en une suite de sauts périodiques de la vitesse de déformation donnant naissance à des bandes de déformation plastique qui se déplacent par sauts ou bien à vitesse constante. La critique essentielle que l'on peut faire à ces modèles est principalement le caractère local des équations constitutives utilisées. En particulier la vitesse de propagation des bandes PLC reste arbitraire et son indétermination est attribuée à l'absence de coordonnées d'espace dans ces équations.

4-2- Modèle non-local (le glissement dévié des dislocations)

4-2-1- Introduction

Lorsque la déformation plastique est uniforme, la longueur caractéristique du champ de déformation est de l'ordre des dimensions de l'échantillon. Par suite, une formulation constitutive sans échelle de longueur (loi de comportement locale) suffit pour l'interprétation du phénomène. Ce type de loi devient insuffisant lorsque des gradients de déformation apparaissent à cause de la localisation de la déformation. Dans ce cas on doit éventuellement faire appel à des lois de comportement dites non locales.

La déformation plastique peut devenir localisée sous forme de bandes étroites de déformation plastique. L'introduction des gradients de déformation s'avère nécessaire pour décrire le champ de déformation si la largeur de ces bandes devient de l'ordre de grandeur d'une longueur interne liée à la structure du matériau. Parfois ces bandes peuvent se propager le long de l'échantillon, comme dans le cas de l'effet PLC, ce qui indique l'existence d'un couplage spatial fort entre éléments adjacents de l'échantillon. Ce phénomène de propagation, dont l'origine physique reste l'objet de controverses, nécessite l'introduction de gradients de déformation et d'échelles de longueur dans les lois constitutives [52-56].

Parmi les modèles non-locaux suggérés pour l'effet PLC, nous exposons ci-dessous le modèle du glissement dévié. En partant d'une loi de comportement non-locale de type "réaction-diffusion", ce modèle permet de calculer la vitesse de propagation des bandes PLC. La variation de cette vitesse avec le taux de contrainte appliqué peut être comparée à la tendance expérimentale. Ce qui nous

intéresse le plus dans ce modèle est qu'il aboutit au résultat suivant : une analyse de stabilité non linéaire montre que les solutions périodiques obtenues peuvent laisser place à des solutions apériodiques. Ce modèle prévoit donc une dynamique sous-jacente à l'effet PLC qui peut éventuellement devenir chaotique.

4-2-2- Loi de comportement

Une loi de comportement non-locale est formulée en considérant que les échanges de dislocations mobiles entres éléments adjacents du matériau se font par glissement dévié [2,57,58]. Considérons une approximation unidimensionnelle où les plans de glissement sont repérés par l'abscisse x. Soit $\rho_m(x,t)$ la densité de dislocations mobiles dans un plan x à l'instant t. La variation non-locale de cette densité due au glissement dévié, quel que soit son origine, peut s'écrire :

$$\left.\frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right|_{nl}(x,t) = \int_{-x_c}^{x_c} \Gamma v(\rho_m(r,t) - \rho(0,t))dr.$$

où x_c et Γ sont respectivement la distance maximale et la probabilité de glissement dévié, v est la vitesse moyenne des dislocations et $r = x - x'$ est la distance entre deux plans voisins repérés par x et x'.

Après le développement limité au second ordre de $\rho_m(r,t)$ autour de r=0 et le calcul de l'intégrale on obtient :

$$\left.\frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right|_{nl}(x,t) \approx D\frac{\partial^2 \rho_m}{\partial x^2}.$$

avec $D=\frac{1}{3}\Gamma v x_c^3$, appelé coefficient de pseudo-diffusion, valable pour tout mécanisme de glissement dévié [59]. La variation locale de la densité de dislocations mobiles due à d'autres facteurs que le glissement dévié est donc :

$$\left.\frac{\partial \rho_m}{\partial t}\right|_I (x,t)=\frac{\partial \rho_m}{\partial t}(x,t)-D\frac{\partial^2 \rho_m}{\partial x^2}(x,t).$$

Après une opération de moyenne, la loi d'Orowan devient :

$$\dot{Y}=\dot{\varepsilon}-D\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}=\Phi \rho_m b v.$$

La loi constitutive du modèle est basée sur l'hypothèse que l'on peut également substituer $\dot{Y}$ à $\dot{\varepsilon}$ dans la loi de comportement utilisée par Kubin et Estrin ; soit :

$$Z=F(\dot{Y}) \text{ avec } \begin{cases} Z=\sigma-h\varepsilon. \\ \dot{Y}=\dot{\varepsilon}-D\varepsilon_{xx}. \end{cases} \qquad \text{(I-35)}$$

F est la fonction dont l'allure est donnée par la figure I-10. D'après le théorème des fonctions implicites, il est possible de prendre l'inverse de la fonction F là où sa dérivée est non nulle : soient G_1 l'inverse de F pour les points de la branche lente (2*1) que l'on appellera dorénavant la branche I et G_2 l'inverse de F pour les points de la branche rapide (1*2) appelée branche II (voir la figure I-11). La branche instable (1,2) n'est pas atteinte et ne sera pas nécessaire dans la suite de cette analyse. L'équation $Z=F(\dot{Y})$ peut être écrite sous la forme d'un couple d'équations non linéaires de type réaction-diffusion :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = G_1(\sigma - h\varepsilon) \text{ pour } \dot{\varepsilon}_2^* \le \dot{\varepsilon} \le \dot{\varepsilon}_1. \\ \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = G_2(\sigma - h\varepsilon) \text{ pour } \dot{\varepsilon}_2 \le \dot{\varepsilon} \le \dot{\varepsilon}_1^*. \end{cases} \quad \text{(I-36)}$$

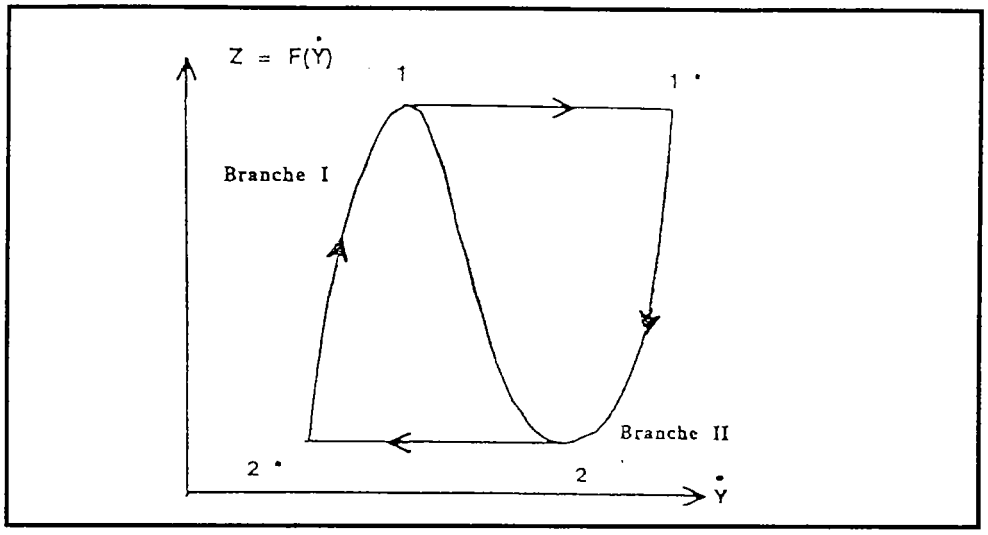


Figure I-11 :

Définition des branches I et II (lente et rapide) [59].

4-2-3- L'état stationnaire uniforme

Dans le cas d'une traction à vitesse de chargement constante $\dot{\sigma}_0$, l'équation I-35 admet la solution d'équilibre suivante :

$$\begin{cases} \dot{Y}_e = \dot{\varepsilon}_e = \dfrac{\dot{\sigma}_0}{h}. \\ Z_e = \sigma_0 = F(\dot{\varepsilon}_e). \end{cases} \quad \text{(I-37)}$$

qui correspond à l'état de déformation plastique uniforme :

$$\begin{cases} \sigma_e = \dot{\sigma}_0 t + \sigma_0. \\ \varepsilon_e = \dot{\varepsilon}_e t. \end{cases} \quad \text{(I-38)}$$

La stabilité de cet état d'équilibre est étudiée en introduisant une perturbation de la forme : $u=\varepsilon-\varepsilon_e=\hat{\varepsilon}\exp(\omega t+ikx)$ où k est le nombre d'onde et ω est le taux de variation [32]. Cette analyse de perturbation linéaire montre que l'état d'équilibre $(\dot{\varepsilon}_e,\sigma_e)$ est stable si $F'(\dot{\varepsilon}_e)$ est positif et qu'il est instable si $F'(\dot{\varepsilon}_e)$ est négatif c'est-à-dire si $\dot{\varepsilon}_1<\dot{\varepsilon}_e<\dot{\varepsilon}_2$, domaine où la sensibilité à la vitesse de déformation est négative ; dans ce cas le point d'équilibre n'est jamais atteint.

4-2-4- Solutions propageantes

Considérons les perturbations non-uniformes z et y de l'état d'équilibre :

$$\begin{cases} z=Z-Z_e. \\ \dot{y}=\dot{Y}-\dot{Y}_e. \end{cases}$$

Leur évolution est gouvernée par l'équation :

$$z=f(\dot{y}) \text{ avec } f(\dot{y})=F(\dot{y}+\dot{Y}_e)-F(\dot{Y}_e).$$

En utilisant la perturbation de la déformation plastique $u=\varepsilon-\varepsilon_e$, cette équation devient :

$$u=f_h(\dot{y}) \text{ avec } f_h(\dot{y})=\frac{f(\dot{y})}{h}.$$

Soient g^I et g^{II} les fonctions représentant l'inverse de la fonction f_h sur les branches stables (voir la figure I-12) ; l'équation ci-dessus produit alors deux équations aux dérivées partielles de type réaction-diffusion [4] :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g^{I}(u) \text{ pour la branche I } (2^*1). \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g^{II}(u) \text{ pour la branche II } (1^*2). \end{cases} \quad \text{(I-39)}$$

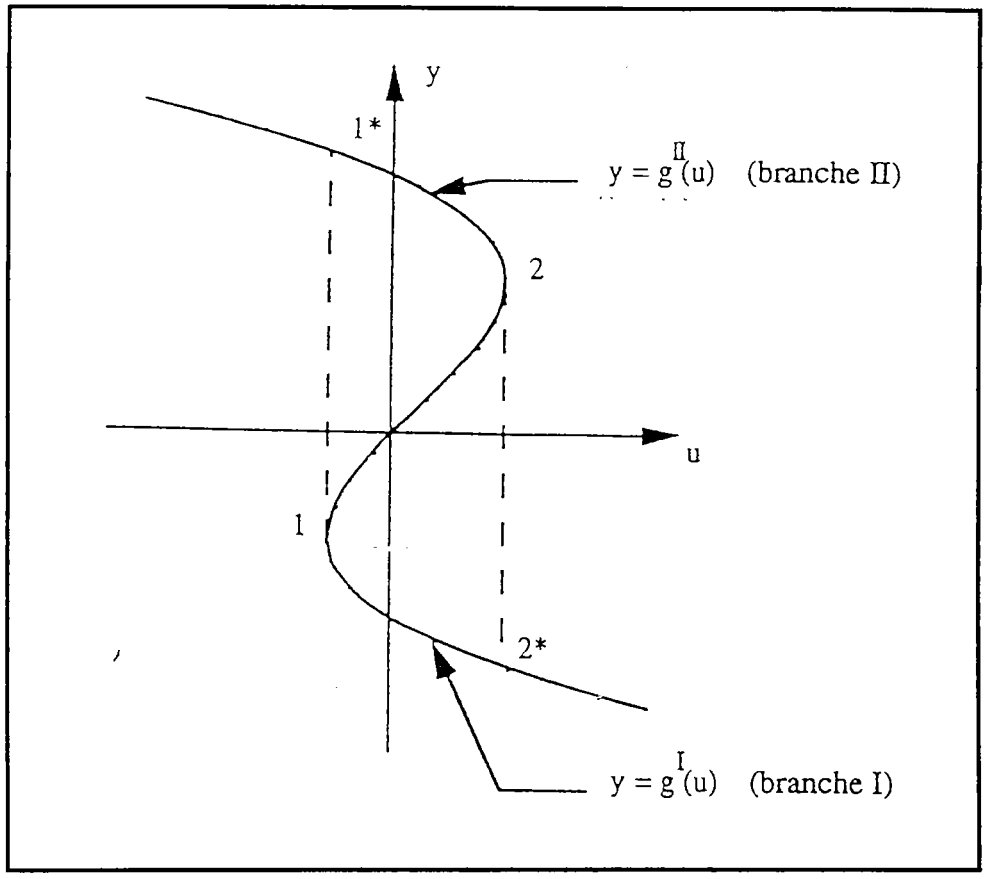


Figure I-12 :

Définition des fonctions $g^{I}(u)$ et $g^{II}(u)$ [59].

On cherche une solution du couple d'équations I-39 sous forme d'une onde stationnaire dans un repère se déplaçant à la vitesse c constante :

$$u(x,t) = u(\xi) = u(x - ct).$$

Le couple d'équations aux dérivées partielles devient alors :

$$Du'' + cu' + g(u) = 0. \quad \text{(I-40)}$$

Le signe ' désigne la dérivée par rapport ξ, g représente alternativement g^{I} (la fonction inverse de f_h sur la branche I) et g^{II} (l'inverse de f_h sur la branche II). Cette solution propageante est étudiée dans l'espace de phases (u_1,u_2) en posant :

$$\begin{cases} u_1 = u. \\ u_2 = u'. \end{cases}$$

L'équation I-40 s'écrit alors sous la forme de deux équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{cases} u_1' = u_2. \\ Du_2' = -cu_2 - g(u_1). \end{cases} \qquad \text{(I-41)}$$

D'autre part on peut écrire :

$$u_2' = u_2 \frac{du_2}{du_1}.$$

L'équation I-41 devient alors :

$$Du_2 \frac{du_2}{du_1} = -cu_2 - g(u_1). \qquad \text{(I-42)}$$

Dans le cas non diffusif (D=0), on retrouve le cycle discontinu décrit par Kubin et Estrin [32,33]. En effet, pour D=0, l'équation I-42 donne :

$$u_2^0 = -\frac{g(u_1)}{c}.$$

Par conséquent, pour u_1 donné, deux solutions stables sont possibles :

$$\begin{cases} u_2^{0I} = -\dfrac{g^I(u_1)}{c}. \\ u_2^{0II} = -\dfrac{g^{II}(u_1)}{c}. \end{cases}$$

L'orbite périodique $u_2(u_1)$ est constituée par les branches I et II parcourues respectivement après les sauts $2 \rightarrow 2^*$ et $1 \rightarrow 1^*$.

Lorsqu'on introduit la diffusion ($D \neq 0$), ces sauts disparaissent et l'équation I-42 s'écrit :

$$\begin{cases} Du_2 \dfrac{du_2}{du_1} = c(u_2^{0I} - u_2) \text{ pour la branche I.} \\ Du_2 \dfrac{du_2}{du_1} = c(u_2^{0II} - u_2) \text{ pour la branche II.} \end{cases} \qquad \text{(I-43)}$$

En considérant le signe de $\dfrac{du_2}{du_1}$ qui représente la tangente à la trajectoire dans l'espace de phases (u_1,u_2), on montre que la trajectoire de phases est formée de deux arcs I et II (voir la figure I-13) qui se situent à l'intérieur du cycle non-diffusif et qui coupent respectivement la branche I en un point 1' (voisin de 1*) et la branche II en un point 2' (voisin de 2*). Une orbite fermée peut s'établir si l'équation ci-dessous est satisfaite :

$$\int_{2'}^{1'} (g^I - g^{II}) du_1 = \int_{2'}^{1'} (u_2^{II} - u_2^I) du_1.$$

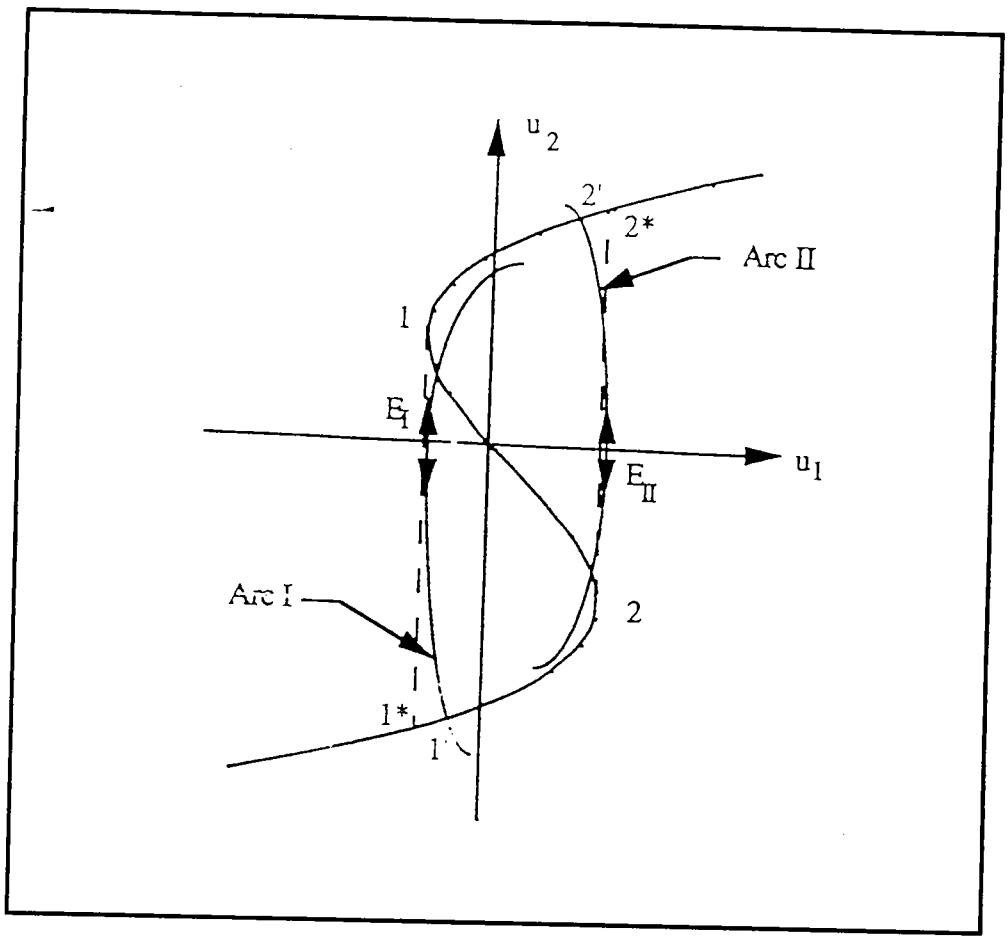


Figure I-13 :

Allure des trajets de phases.
La trajectoire de phases est constituée des arcs I et II [59].

En d'autres termes, l'égalité ci-dessus représente une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation I-40 admette une solution périodique et I-39 une solution propageante. La vitesse de propagation obtenue dans ce modèle est calculée en utilisant l'équation suivante :

$$\frac{c^2}{D} = \frac{\Delta\dot{\varepsilon}}{\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^0}.$$

où $\Delta\varepsilon$ (respectivement $\Delta\varepsilon^0$) est la déformation plastique accumulée sur les trajets I et II (respectivement les branches I et II).

4-2-5- Stabilité des solutions propageantes périodiques

a- Stabilité linéaire

Soit $\vec{U}=(U_1,U_2)$ une solution propageante périodique, de période X, du système autonome I-41 : $\vec{U}(\xi+X)=\vec{U}(\xi)$. En utilisant la théorie des systèmes périodiques de Floquet [60], on aboutit à une instabilité linéaire de la solution $\vec{U}$. Le cycle limite est hyperbolique ; chaque point est un point selle et le taux de croissance de la perturbation est proportionnel à c/D. La périodicité du cycle limite n'est pas remise en cause tant que la perturbation reste suffisamment faible, seule l'amplitude de la solution perturbée est dérégularisée. Puisque toutes les observations expérimentales indiquent que l'amplitude des perturbations reste bornée au cours du temps, les effets non linéaires devraient avoir une influence stabilisante.

b- Stabilité non linéaire

Soit $A(U_1,U_2)$ un point du cycle limite solution du système autonome I-41, la trajectoire admet, au point A, une tangente donnée par : $\frac{dU_2}{dU_1}=\frac{c}{D}\left(\frac{u_2^{0I}}{U_2}-1\right)$ et elle coupe l'axe u_1 au point E_I où la tangente est verticale.

Sur D_A la droite passant par A et parallèle à l'axe u_2, considérons deux points D et E tels que : $u_2(D)<U_2$ et $u_2(E)>U_2$, nous avons $\frac{du_2}{du_1}(D)>\frac{dU_2}{dU_1}$ et $\frac{du_2}{du_1}(E)<\frac{dU_2}{dU_1}$.

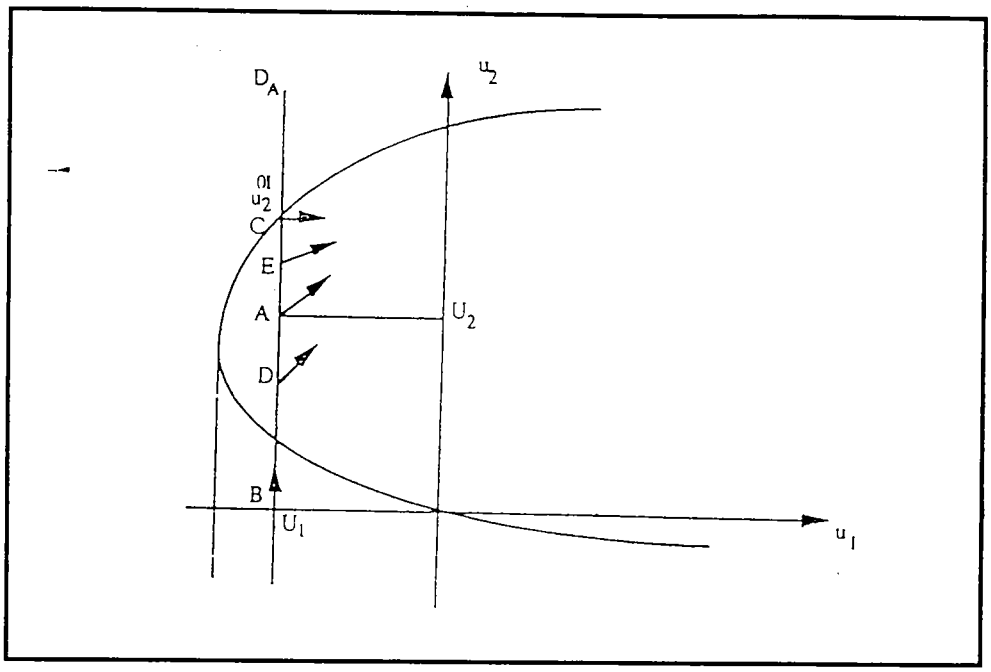


Figure I-14 :

Evolution de la tangente à la trajectoire en fonction de u_2 pour une valeur donnée de u_1 [59].

La figure I-14 montre ce faisceau de tangentes qui permet de mettre en évidence l'instabilité non linéaire locale du cycle limite. En effet, si une perturbation locale en A est effectuée de sorte que la solution perturbée passe en D (resp. en E), la tangente en D (resp. en E) impose à la solution perturbée de s'écarter de la solution initiale. Pour la trajectoire perturbée, le point de tangente verticale sera différent du point E_I et le point d'intersection avec la branche II sera différent de 1'. Cependant une fois ce point atteint, c'est la détermination g^{II} qui est à considérer pour le système I-41 : le cycle perturbé passe sur l'autre chemin ce qui le renvoie vers le point initial (voir la figure I-15).

En conséquence, si les effets non linéaires ont une influence localement déstabilisantes (une perturbation locale entraîne une divergence) ils sont globalement stabilisants du fait de l'alternance entre l'arc I et II.

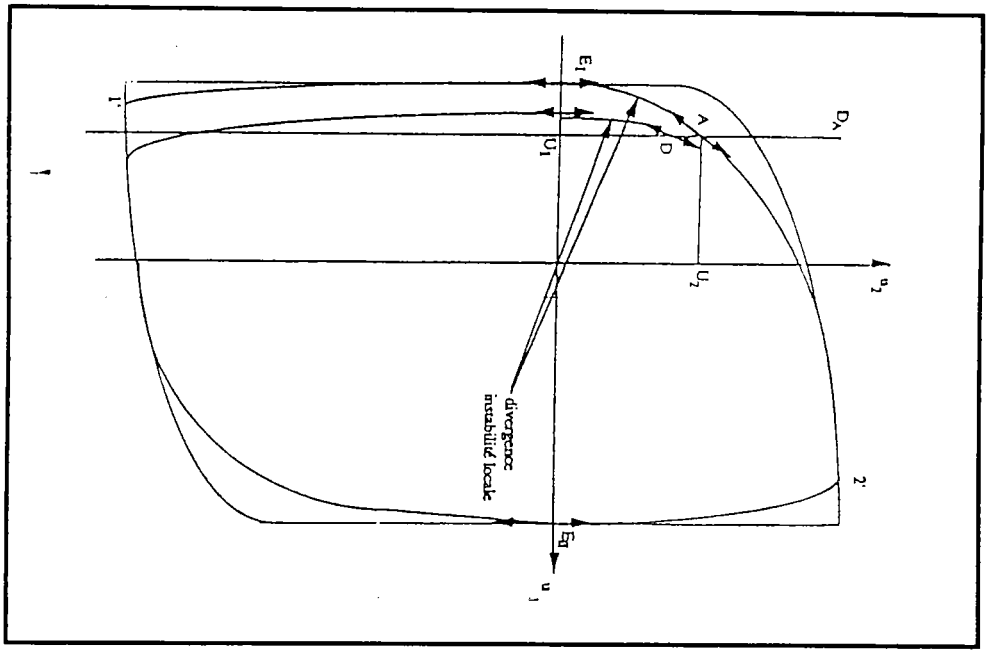


Figure I-15 :

La perturbation de la trajectoire de phases montre l'existence d'une instabilité locale et une stabilité globale du cycle limite [59].

4-2-6- Conclusion

Le modèle non local de glissement dévié des dislocations vis permet un calcul de la vitesse de bande, qui n'est pas l'objet de ce mémoire. Notons cependant qu'il existe plusieurs modèles non locaux en concurrence, dont les résultats sont contradictoires, et que, d'autre part, les résultats expérimentaux restent eux mêmes confus sur ce point. Un deuxième résultat du modèle est que le régime périodique, qui se substitue à l'état stationnaire instable, est localement instable et globalement stable. On en déduit que des orbites non périodiques sont susceptibles de se produire au voisinage de l'orbite calculée. La vitesse de propagation déterminée à partir d'une orbite périodique pourra donc subir des variations d'apparence aléatoire. Enfin, notons que ces résultats sont obtenus pour une machine douce ; ils ne sont qu'indicatifs dans le cas d'une machine dure : à vitesse de déformation imposée, seule une étude numérique pourrait fournir le comportement de perturbations non uniformes de la solution stationnaire.

4-3- Modèle dynamique de dislocations (échelle mésoscopique)

4-3-1- Formulation du modèle

Une première tentative d'explication de l'effet PLC par la connexion entre les variables macroscopiques et le comportement des défauts à l'échelle microscopique est due au groupe de Ananthakrishna [5,61-68]. Pour interpréter l'écoulement discontinu dans le cas du fluage, une théorie a été développée en 1978 en supposant que les dislocations mobiles, notées "g", et les dislocations immobiles, notées "s", interagissent entre elles et se transforment les unes en les autres [69]. Pour prendre en compte le concept du vieillissement dynamique de Cottrell, ces auteurs introduisent un troisième type de dislocations, notées "i" : ce sont les dislocations entourées d'atomes de soluté [64]. Ces dernières se déplacent beaucoup plus lentement que les dislocations mobiles et deviennent éventuellement immobiles. Le modèle est basé sur une description de la dynamique des dislocations qui stipule que les trois types de dislocations ci-dessus peuvent se transformer les uns en les autres suivant des mécanismes que l'on peut représenter par les "réactions" suivantes :

$$\begin{cases} g \xrightarrow{\theta V_g} g + g & (1) \\ g + g \xrightarrow{k\mu'/2} s + s & (2) \\ g + g \xrightarrow{(1-k)\mu'/2} 0 & (3) \\ g + s \xrightarrow{\mu} 0 & (4) \\ s \xrightarrow{\lambda} g & (5) \\ g \xrightarrow{\alpha} i & (6) \\ i \xrightarrow{\alpha'} s & (7) \end{cases} \qquad \text{(I-44)}$$

La première réaction décrit la génération des dislocations mobiles par des mécanismes de glissement dévié ; θ étant la constante de multiplication et V_g la vitesse des dislocations mobiles. La deuxième réaction exprime la conversion de deux dislocations mobiles en deux dislocations immobiles. Les réactions (3) et (4) décrivent l'annihilation d'une dislocation mobile avec une autre dislocation mobile ou avec une dislocation immobile. La réaction (5) représente la mise en mouvement d'une dislocation suite à l'application d'une contrainte ou suite à l'activation thermique (λ). La réaction (6) correspond au vieillissement dynamique en vertu duquel les dislocations mobiles sont ancrées par les atomes de soluté. Le paramètre α devrait dépendre de la constante de diffusion des atomes de soluté, de leur concentration et de la vitesse des dislocations "i". La diffusion des atomes de soluté vers les dislocations "i" entraîne l'immobilisation de ces dernières, d'où la réaction (7). Le paramètre α' est le coefficient de frottement subi par les dislocations "i".

En considérant le bilan des variations de chaque type de dislocations, on obtient un système de trois équations différentielles non linéaires couplées gouvernant l'évolution des densités N_g, N_s et N_i de ces trois types de dislocations:

$$\begin{cases} \dot{N}_g = \theta V_g N_g - \mu' N_g^2 - \mu N_g N_s + \lambda N_s - \alpha N_g . \\ \dot{N}_s = k\mu' N_g^2 - \mu N_g N_s - \lambda N_s + \alpha' N_i . \\ \dot{N}_i = \alpha N_g - \alpha' N_i . \end{cases} \qquad \text{(I-45)}$$

Dans le cas du fluage, la résolution numérique du système d'équations ci-dessus ainsi que la résolution analytique approximative [65] (basée sur la méthode des oscillations de relaxation) montrent une bonne concordance du modèle avec les expériences de Zagorukuyko [70].

4-3-2- Cas d'une machine dure

Dans [67] le modèle est étendu au cas d'une traction à vitesse de déformation constante $\dot{\varepsilon}$ en rajoutant, au système ci-dessus, l'équation traduisant le chargement imposé ("équation de la machine") :

$$\dot{\sigma}_a = K\left(\dot{\varepsilon} - b_0(N_g + \gamma N_i)V_g(\sigma^*)\right). \qquad \text{(I-46)}$$

où K est la rigidité effective et b_0 est le module du vecteur de Burgers. Pour la vitesse des dislocations mobiles, on a utilisé une loi en puissance de la forme :

$$V_g = V_0\left(\sigma^*/\sigma_0\right)^m \text{ avec } \sigma^* = \sigma_a - HN^{1/2}.$$

σ^* est la contrainte effective, σ_a est la contrainte appliquée, σ_0 est la contrainte nécessaire pour que les dislocations mobiles se déplacent à la vitesse V_0, H est une constante caractéristique de l'écrouissage, N est la densité totale de dislocations ($N=N_g+N_s+N_i$) et m est un exposant de sensibilité à la vitesse.

On suppose que les paramètres de contrôle θ, μ (=μ'), λ, α, et α' sont indépendants de la contrainte et on pose :

$$\begin{cases} \mu N_g = \lambda x,\ \mu N_s = \theta V_0 y,\ \mu\alpha' N_i = \lambda\alpha z,\ \sigma = \sigma_0\varphi. \\ \tau = \theta V_0 t,\ bx + y + \dfrac{ab}{c}z = \eta. \end{cases}$$

D'où le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{x} = (\varphi - h\eta^{1/2})^m x - bx^2 - ax + y - xy. \\ \dot{y} = b(kbx^2 - xy - y + az). \\ \dot{z} = c(x - z). \\ \dot{\varphi} = d\left[e - (\varphi - h\eta^{1/2})^m (x - \gamma' z)\right]. \end{cases} \qquad \text{(I-47)}$$

$$\text{où} \begin{cases} \alpha = \theta V_0 a,\ \lambda = \theta V_0 b,\ \alpha' = \theta V_0 c,\ \alpha'\gamma' = a\gamma. \\ \theta\mu\sigma_0 d = \lambda b_0 K,\ e b_0 V_0 = \dot{\varepsilon}\mu,\ h\sigma_0 = H\left(\frac{\theta V_0}{\mu}\right)^{1/2}. \end{cases}$$

4-3-3- Résultats du modèle

a- Le régime périodique

On montre que le système I-47 admet une solution stationnaire $P_a = (x_a, y_a, z_a, \varphi_a)$ pour laquelle $\dot{x}_a = \dot{y}_a = \dot{z}_a = \dot{\varphi}_a = 0$. La stabilité de cette solution est étudiée en fonction des paramètres de contrôle (a, b, c, d, m, k et e). Pour un certain intervalle de ces paramètres, l'état stationnaire est instable et le système I-47 admet des solutions périodiques appelées "cycles limites" [71]. On montre que ces solutions périodiques sont dues à l'égalité de l'énergie fournie (multiplication des dislocations grâce à la contrainte appliquée) et de l'énergie dissipée (annihilation et immobilisation des dislocations et d'autres processus). Ce phénomène est donc hors d'une situation d'équilibre et c'est un exemple de structure dissipative. En termes de dislocations, le régime périodique peut être interprété comme la répétition du cycle $g \rightarrow i \rightarrow s \rightarrow g$ selon les transformations décrites au début de ce paragraphe.

b- Comparaison avec l'expérience

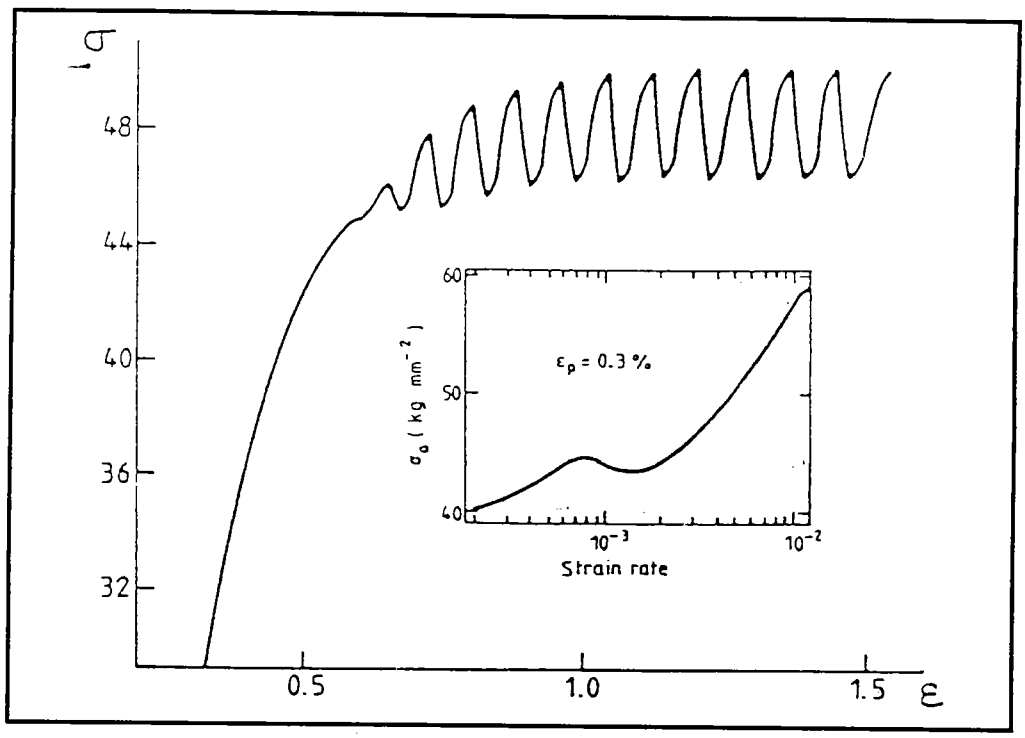


Figure I-16 :

Courbe de traction à vitesse de déformation constante
et sensibilité négative à la vitesse de déformation [67,68].

Dans le domaine d'instabilité de l'état stationnaire, la résolution numérique du système I-47 aboutit à des résultats qui sont qualitativement en accord avec l'expérience :

* La figure I-16 montre une courbe de traction typique de l'écoulement discontinu associé à l'effet PLC.

* Le phénomène n'est observé que dans un intervalle de vitesse de déformation et de concentration de soluté.

* Les décrochements de la contrainte sont obtenus à partir d'une déformation critique ε_c qui augmente puis diminue avec la vitesse de déformation en accord avec les expériences de Mc Cormik [72].

* L'amplitude des décrochements augmente avec la déformation et devient stationnaire ce qui concorde encore avec [72].

D'autre part la sensibilité négative de la contrainte d'écoulement par rapport à la vitesse de déformation apparaît dans ce modèle comme conséquence du passage de l'état stationnaire vers un régime périodique contrairement aux autres théories dans lesquelles cette caractéristique était ou bien supposée [43] ou bien dérivée de considérations phénoménologiques [28,41].

c- Le régime chaotique

En plus de ces résultats, le modèle ci-dessus prévoit un comportement chaotique du système. Le paramètre de contrôle est la vitesse de déformation adimensionnelle e. Pour les faibles valeurs de e, on obtient, comme nous l'avons indiqué ci-dessus, un comportement périodique (de période T) à la suite d'une bifurcation de Hopf pour $e=e_1$. Lorsque e augmente, l'orbite de période T devient instable et donne naissance à une orbite de période 2T après une deuxième bifurcation pour $e=e_2$. On obtient de même une orbite de période 4T pour $e=e_3$, une orbite de période 8T pour $e=e_4$ ... et, finalement, une orbite apériodique pour $e = e_\infty$. Cette suite de bifurcations, appelée "doublement de période" est à l'origine du comportement chaotique du système. La vitesse d'approche de cet état est donnée par $\delta=(e_n-e_{n-1})/(e_{n+1}-e_n)$ appelé "exposant de Feigenbaum" [73] (e_n est la valeur de e à la $n^{ième}$ bifurcation).

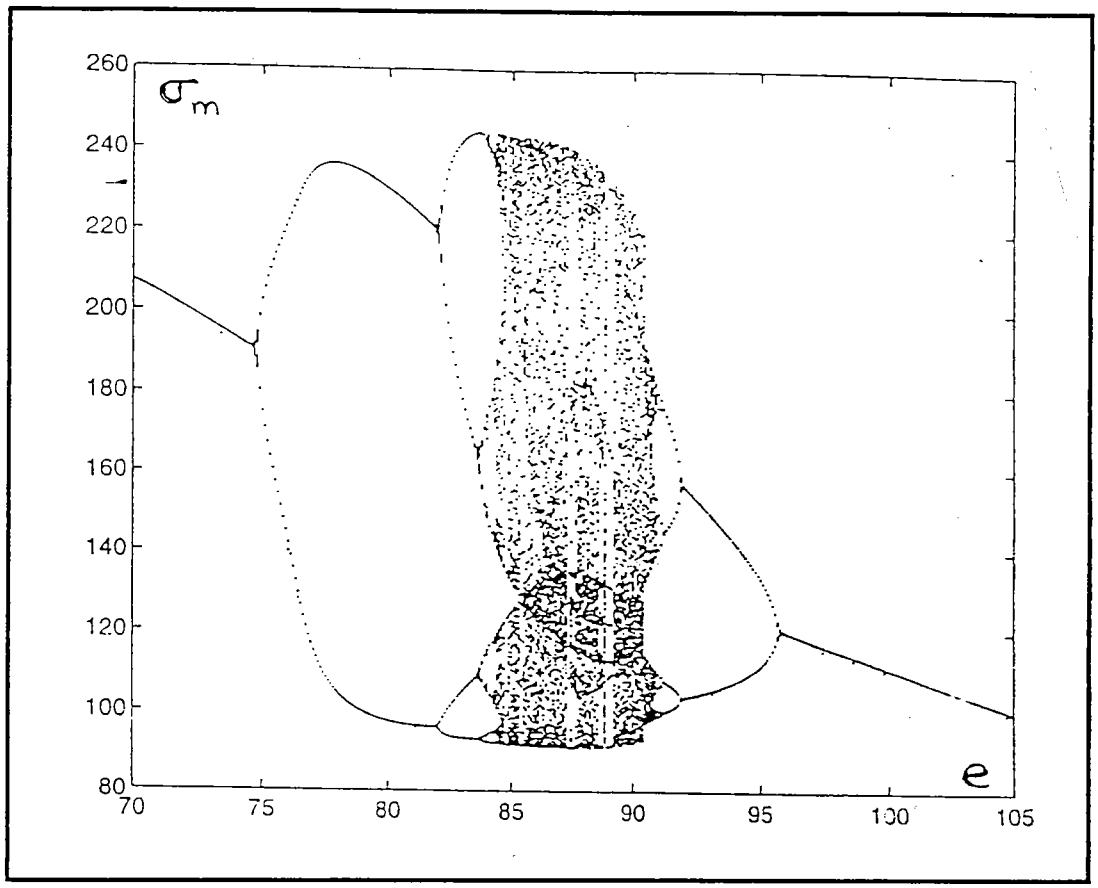


Figure I-17 :

Diagramme de bifurcation obtenu à partir du modèle [74].

La figure I-17 illustre cette cascade de bifurcations et l'apparition du chaos par doublement de période. Elle représente l'amplitude maximale du saut de contrainte en fonction du paramètre de contrôle e. On note un retour au régime périodique lorsque e continue de croître, dû au fait que l'effet PLC a lieu dans un intervalle fini de vitesses de déformation.

La figure I-18 montre la projection du portrait de phases du système sur le plan (x,z) pour m=2 et e=183,5. On observe un attracteur apériodique appelé "attracteur étrange" dont la structure fractale est caractéristique d'un régime chaotique déterministe.

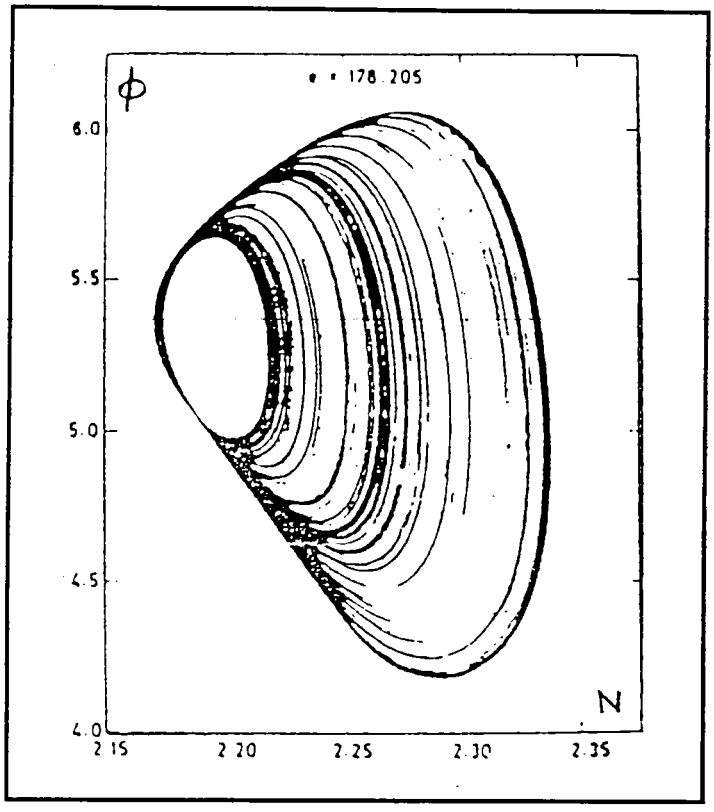


Figure I-18 :

La projection de la trajectoire de phases sur le plan (N,Φ) montre l'existence d'un attracteur étrange [5,74].

4-3-4- Aspect spatial du modèle

La critique que l'on peut adresser à ce modèle est qu'il ignore l'aspect spatial du phénomène. Dans [75], la dépendance spatiale est introduite sous forme de gradient, grâce aux équations de continuité des densités de dislocations. Moyennant une analyse de stabilité, on obtient alors une vitesse de propagation des bandes PLC qui augmente avec la vitesse de déformation imposée et qui décroît avec la concentration du soluté. Cette dernière dépendance a besoin d'une confirmation expérimentale mais la première concorde avec les résultats expérimentaux de Chihab [20] obtenus à vitesse de déformation constante.

5- CONCLUSION

Ce chapitre constitue une présentation de l'effet PLC ; on y trouve un rappel de quelques modélisations à la fois microscopiques et macroscopiques du phénomène, en rapport avec notre propos. De cette étude nous notons particulièrement deux résultats : le modèle du glissement dévié aboutit à la possibilité d'un régime chaotique, éventuellement déterministe et le modèle d'Ananthakrishna montre l'existence d'un attracteur étrange et suggère ainsi que la dynamique de l'effet PLC est chaotique déterministe.

Chapitre II.

ETUDE QUALITATIVE DU COMPORTEMENT D'UN SYSTEME DYNAMIQUE.

1- ESPACE DE PHASES

1-1- Notion de flot

Après avoir identifié les variables dont dépend l'état d'un système dynamique, la modélisation de son comportement commence par poser les lois régissant les variations spatio-temporelles de ces variables. Dans le cas des systèmes étendus dans l'espace, on aboutit à un ensemble d'équations aux dérivées partielles qu'il faut résoudre pour déterminer l'évolution des variables afin de comprendre la dynamique du système considéré.

Dans la plupart des situations, ces équations aux dérivées partielles sont difficiles à résoudre analytiquement. Leur résolution à l'aide de modes spatiaux amène souvent à les transformer en un système de n équations différentielles ordinaires appelé *flot* dans IR^n :

$$\frac{d}{dt}\vec{X}(t) = \vec{F}\left(\vec{X}(t)\right) \qquad \text{(II-1)}$$

où $\vec{X}$ est un vecteur de IR^n dont les composantes sont les n variables d'état du système. $\vec{F}$ désigne un champs de vecteur de IR^n ; il contient les paramètres traduisant l'interaction du système avec le milieu extérieur. Lorsque $\vec{F}$ dépend explicitement du temps, le flot est dit non autonome ; dans le cas contraire, le flot est dit autonome.

La transformation d'un système d'équations aux dérivées partielles en flot fait par exemple appel à la méthode de Galerkin ou à la méthode des éléments finis. Pour effectuer correctement cette opération certaines règles doivent être respectées [6] :

i/ Ne pas introduire d'instabilité "catastrophique", ce qui n'est pas une tâche aisée en dynamique non linéaire. Certes la connaissance de la physique d'un problème déterminé devrait permettre, au moins en principe, d'éliminer toute espèce de catastrophe des équations initiales. Cependant, le recours à des approximations est presque toujours nécessaire pour mener les calculs à leur terme. Il est très difficile de s'assurer que l'introduction de telles approximations ne s'accompagne pas de celle de singularités. Par exemple, si à l'issue d'une approximation, on obtient l'équation différentielle non linéaire simple $dx/dt=x^2$, dont la solution est $x(t)=x(0)/(1-t.x(0))$, on introduit une singularité pour $t=1/x(0)$. C'est un temps positif dès que x(0) est positif.

ii/ Préserver les propriétés exactes des équations de départ, lorsque celles-ci en possèdent. C'est en particulier le cas des équations de bilan de toutes les variables extensives soumises à un principe de conservation telles que la masse, la quantité de mouvement, ...

iii/ Elaborer des équations tronquées aussi proches que possible des équations initiales. Ainsi pour modéliser des équations aux dérivées partielles, il convient de prendre le maximum de points de grille (ou de modes de Fourier) compatibles avec la réalisation effective du calcul. Une faible résolution spatiale introduit souvent des comportements qui ne sont pas intrinsèques au système dynamique. Citons à titre d'exemple l'étude de la convection de Rayleigh-Bénard [6]. Lorenz construit son modèle en transformant le système d'équations aux dérivées partielles de Boussinesq en flot tridimensionnel [10]. Lors de cette transformation, Lorenz respecte les deux premières règles ci-dessus, mais les faibles moyens de calcul de l'époque l'amènent à une simplification maximale de la représentation dynamique : pour la troncature des équations de Boussinesq, Lorenz utilise une méthode spectrale impliquant seulement trois modes de Fourier. La résolution du flot obtenu conduit, dans certaines conditions, à un comportement chaotique du système (attracteur de Lorenz). Plus tard, Curry *et al* [76] reprennent la résolution des équations de Boussinesq en utilisant un développement plus poussé que celui de Lorenz (impliquant plusieurs dizaines de modes de Fourier). Ils montrent alors que le régime chaotique obtenu par Lorenz n'est pas stable, et qu'il subit rapidement une transition vers un régime périodique ou quasi-périodique. On en déduit que le comportement chaotique obtenu par Lorenz n'est pas intrinsèque au système physique : ce n'est que le fruit d'une résolution spatiale inadéquate. Rice [77] aboutit à une conclusion identique lors de la simulation numérique, par éléments finis, des glissements entre plaques de la croûte terrestre. Il montre que des glissements complexes du point de vue

spatio-temporel, disparaissent en faveur de régimes périodiques lorsqu'on diminue, jusqu'à la limite continue, la taille des éléments formant le maillage. Une telle opération suppose que le modèle comprenne une échelle de longueur intrinsèque, à laquelle on peut comparer la longueur caractéristique du maillage. Tel n'est pas le cas des modèles discrets qui ont par conséquent tendance à produire des comportements spatio-temporels complexes.

1-2- Portrait de phases (PDP)

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, la résolution analytique du système II-1 n'est possible que dans certaines situations particulières. Dans la plupart des cas le flot n'est pas intégrable, ce qui impose une étude numérique et/ou qualitative du comportement du système.

Le vecteur $\vec{X}(t)$ (de dimension n) représente l'état du système à l'instant t ; il permet de définir un point P(t) dans un espace S (de dimension n) appelé *espace de phases du système* (EDP). A partir d'une condition initiale $\vec{X}(t_0)$, l'évolution du système au cours du temps entraîne le déplacement du point $P(t_0)$ dans l'EDP. La ligne décrite par ce point est appelée *trajectoire de phases du système* (TDP). Le diagramme obtenu est appelé *portrait de phases du système* (PDP). Pour certaines conditions initiales, les TDP convergent souvent vers un ensemble compact de l'EDP appelé *attracteur*. L'ensemble des point de l'EDP donnant naissance à une TDP qui converge vers un attracteur est appelé *bassin d'attraction* (voir la figure I-1).

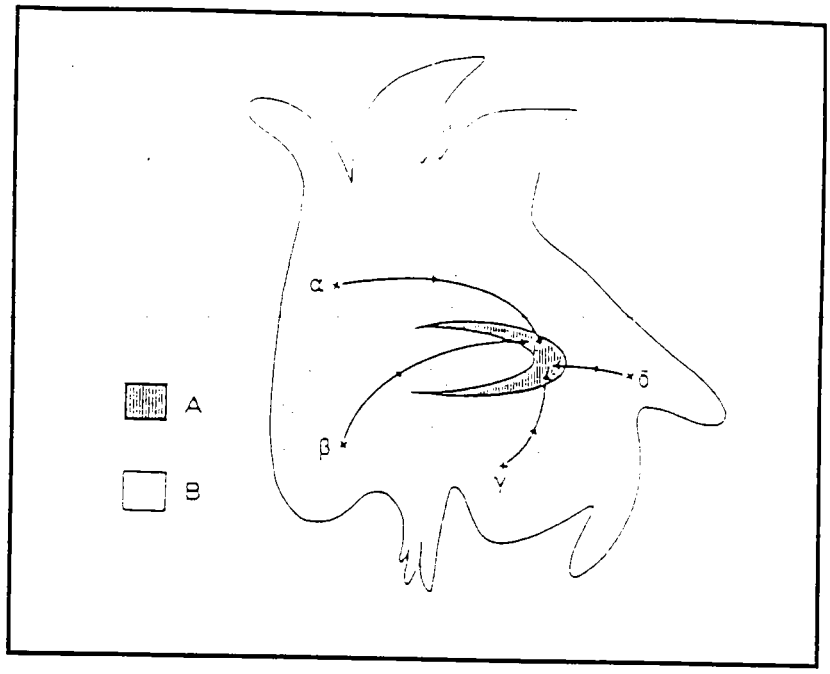


Figure II-1 :

A représente l'attracteur et **B** son bassin d'attraction.
Les trajectoires issues des points initiaux α,β,γ et δ
sont amenées sur A par le flot [6].

Chaque type d'attracteur est le reflet d'un régime dynamique donné. Par conséquent l'identification d'un attracteur (par l'observation du PDP) permet de caractériser la dynamique d'un système, et éventuellement de maîtriser son comportement. On entend par la maîtrise du comportement d'un système, la compréhension de sa dynamique, le contrôle de son évolution et la prévision de son devenir.

1-3- Caractérisation d'un régime dynamique

1-3-1- Régime stationnaire

L'attracteur associé à un tel régime est appelé *point fixe*. Toute TDP partant du bassin d'attraction converge vers un point attracteur de l'EDP. Une fois que ce point est atteint, la TDP cesse d'évoluer.

1-3-2- Régime périodique

L'attracteur associé à un tel régime est appelé *cycle limite*. Toute TDP partant du bassin d'attraction converge vers une orbite fermée de l'EDP et ne la quitte plus.

1-3-3- Régime quasi-périodique

L'attracteur associé à un régime quasi-périodique, ayant r fréquences de base, est un *tore* de dimension r noté T^r. Toute TDP partant du bassin d'attraction s'enroule indéfiniment autour du tore.

1-3-4- Régime apériodique :

Parfois les TDP d'un système dissipatif ne convergent vers aucun des attracteurs précédents. Leur évolution possède une complexité qu'on peut expliquer par l'une des raisons suivantes :

i/ Ou bien la TDP évolue d'une façon complètement aléatoire. Dans ce cas il s'agit d'un régime qu'on appelle *chaos stochastique*.

ii/ Ou bien la TDP est attirée par un objet de forme plus ou moins complexe et de nature topologique spéciale baptisé, *attracteur étrange*. Dans ce cas il s'agit d'un régime apériodique déterministe qu'on appelle *chaos déterministe*. L'appellation donnée à ces attracteurs fait référence à leur propriétés peu communes que nous allons voir au paragraphe suivant.

2- LES ATTRACTEURS ETRANGES

2-1- Introduction et propriétés

La notion d'attracteur étrange est apparue pour expliquer la transition d'un régime dynamique régulier vers un régime chaotique telle que le passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent. C'est à Ruelle et Takens [6] que revient le mérite d'avoir ouvert, en 1971, une voie radicalement nouvelle en introduisant ce type d'attracteur. L'appellation d'attracteur étrange fait référence aux propriétés peu communes de ces attracteurs dont la plus cruciale est la sensibilité aux conditions initiales en vertu de laquelle deux trajectoires, initialement aussi voisines que l'on veut, finissent toujours par s'écarter, l'une de l'autre, au cours du temps.

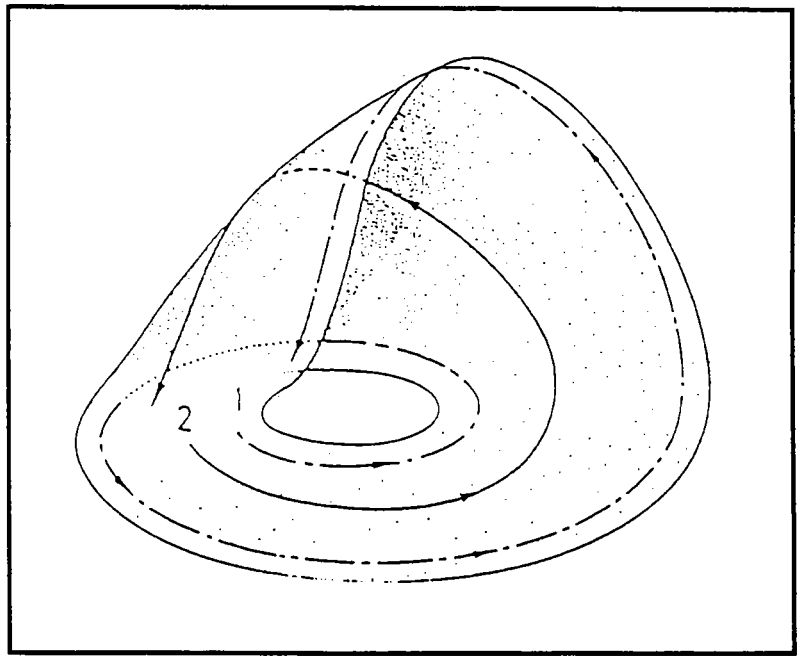


Figure II-2 : D'après Abraham et Shaw [6].

Les trajectoires 1 et 2 émergent du plan horizontal, se croisent sans intersection dans l'espace, et retournent vers la "spirale".

Dans cette formulation, on réunit deux termes "contradictoires" : la divergence des trajectoires à cause de la sensibilité aux conditions initiales et leur repliement à cause de l'existence de termes non linéaires, conduisant à un attracteur du type de la figure II-2 ci-dessus. La divergence des trajectoires s'effectue suivant une spirale plane, puis les trajectoires émergent du plan dans l'espace, et sont réinjectées au centre de la spirale. L'attracteur doit alors avoir une dimension d strictement supérieure à deux (d>2). D'autre part, à cause de la contraction des aires dans un système dissipatif (des volumes en général), l'attracteur a une dimension d strictement inférieure à la dimension n de l'espace de phases (d<n). Par conséquence, pour un espace de phases de dimension 3 par exemple, nous arrivons au résultat suivant : $2<d<3$ qui veut dire que la dimension d'un attracteur étrange peut être non entière. Cette dimension est différente de la dimension Euclidienne et s'appelle *dimension fractale*. Une deuxième propriété d'un attracteur étrange, résultant directement des opérations d'extension et de repliement, est donc qu'il est *un objet fractal*.

2-2- Objet fractal

2-2-1- Définition :

Un objet fractal est une structure irrégulière à toute échelle [6,78]. On en distingue deux types :

i/ Les fractales auto-similaires : elles sont identiques à elles mêmes à toute échelle, c'est-à-dire qu'elles gardent le même aspect quel que soit le grossissement auquel elles sont observées. C'est le cas des attracteurs étranges par exemple.

ii/ Les fractales statistiques telles que les cotes maritimes, les polymères, etc. Ces fractales ne sont auto-similaires qu'en moyenne.

2-2-2- Exemples

a- L'ensemble "triadique" de Cantor

On enlève au segment unité son tiers central, puis on répète cette opération sur les deux segments restants et on réitère indéfiniment ce processus. On obtient un objet fractal constitué d'une infinité de points disjoints (voir la figure II-3).

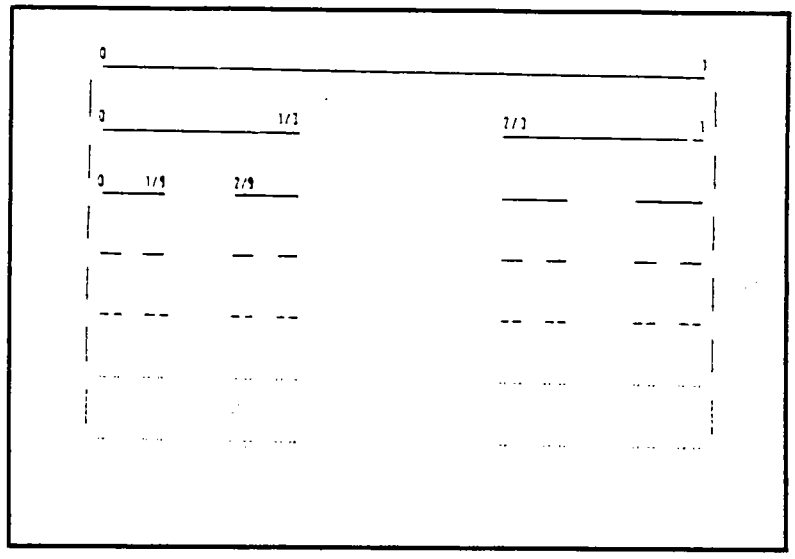


Figure II-3 :

Premières étapes de construction
de l'ensemble "triadique" de Cantor [6].

b- La courbe "triadique" de Koch

On divise chaque coté d'un triangle équilatéral en trois parties et on construit trois nouveaux triangles équilatéraux sur les tiers centraux. En réitérant cette opération indéfiniment, on obtient un objet fractal appelé courbe triadique de Koch ou encore "flocon de neige" (voir la figure II-4).

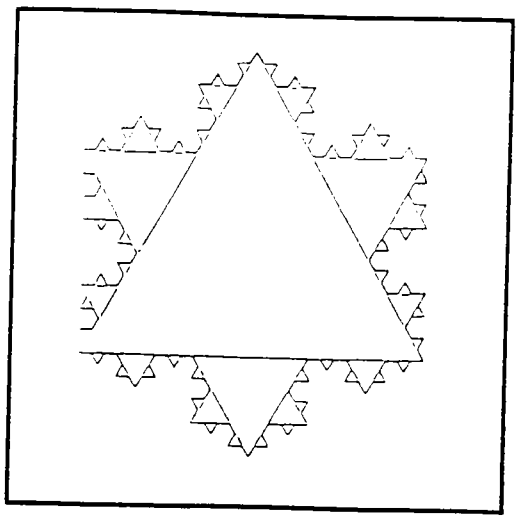


Figure II-4 :

Premières étapes de construction
de l'ensemble "triadique" de Koch [6].

c- La carte itérée de Hénon

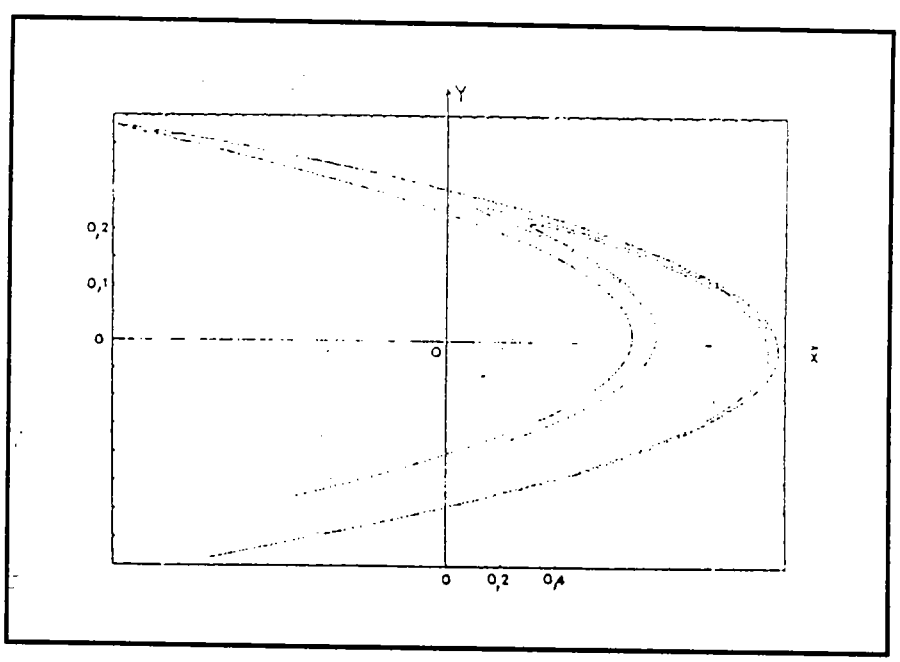


Figure II-5 : Représentation du plan de Hénon [79].

C'est l'ensemble des points P_k du plan (voir figure II-5) dont les coordonnées X_k et Y_k sont définies par :

$$\begin{cases} X_{k+1} = Y_k + 1 - \alpha \cdot X_k^2 \\ Y_{k+1} = \beta \cdot X_k \end{cases} \quad \text{avec } \alpha = 1{,}4 \text{ et } \beta = 0{,}3.$$

2-3- Dimension fractale

C'est une mesure du degré d'irrégularité d'un objet fractal. Elle permet de caractériser la répartition de sa structure dans l'espace. Nous allons en citer deux définitions [6,78].

2-3-1- Dimension fractale au sens de Hausdorff-Besicovitch
ou dimension de recouvrement D

a- Définition

Supposons que l'objet fractal soit un ensemble de points situés dans un espace de dimension p. Cherchons à recouvrir cet ensemble de points par des volumes de dimension p et de taille ε (cubes ou hyper-cubes d'arête ε).

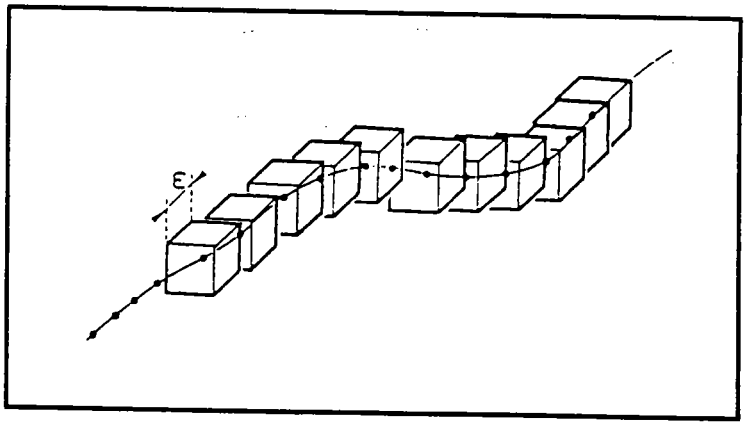


Figure II-6 :

Illustration du principe de recouvrement
d'un objet (ensemble de point) par des cubes d'arête ε [6].

Soit N(ε) le nombre minimal de ces volumes ; par définition, la dimension fractale de Hausdorff-Besicovitch (H-B), si elle existe, est :

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{Ln(N(\varepsilon))}{Ln\left(1/\varepsilon\right)} \right) \qquad \text{(II-2)}$$

Autrement dit, pour ε petit, le nombre N(ε) varie en ε^{-D}.

b- Exemples

i/ Cas d'un objet régulier

* Un point de l'espace : $N(\varepsilon)=1 \Rightarrow D=0$.
* Un segment de longueur L : $N(\varepsilon)=L/\varepsilon \Rightarrow D=1$.
* Une surface d'aire S : $N(\varepsilon)=S/\varepsilon^2 \Rightarrow D=2$.
* Un cube de volume V : $N(\varepsilon)=V/\varepsilon^3 \Rightarrow D=3$.

Jusque-là, la notion de dimension fractale au sens de H-B n'ajoute rien à celle introduite par Euclide ; la dimension fractale D n'est autre que la dimension Euclidienne α : $N(\varepsilon)=(L/\varepsilon)^{\alpha} \Rightarrow D=\alpha$.

ii/ Cas d'un objet fractal

* L'ensemble "triadique" de Cantor

Au premier stade : $\varepsilon=1/3 \Rightarrow N(\varepsilon)=2$.

Au deuxième stade : $\varepsilon=1/9 \Rightarrow N(\varepsilon)=4$.

⋮

Au $m^{ième}$ stade : $\varepsilon=(1/3)^m \Rightarrow N(\varepsilon)=2^m$.

$$\text{d'où } D = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{Ln\left(2^{m}\right)}{Ln\left(3^{m}\right)}\right) \cong 0.63$$

Notons que la dimension obtenue n'est pas entière. Elle est comprise entre zéro et un, ce qui concorde avec le fait que l'objet fractal occupe plus d'espace qu'un point et moins d'espace qu'un segment.

* La courbe "triadique" de Koch

Par un raisonnement similaire au précédent, la dimension fractale au sens de H-B obtenue pour cet objet est : D=Ln(4)/Ln(3)=1.26
Là encore la valeur de D (non entière et comprise entre un et deux) est en accord avec le fait que l'objet fractal occupe plus d'espace qu'une courbe et moins d'espace qu'une surface.

2-3-2- Dimension fractale au sens des masses ν

La détermination de la dimension fractale de H-B n'est pas une tâche facile surtout dans les cas d'intérêt pratique. On définit alors une autre dimension fractale ν. Celle-ci est généralement différente de D mais elle en donne une valeur approchée par défaut : $\nu \leq D$.

a- Définition

Supposons encore que l'objet fractal soit un ensemble de points situés dans un espace de dimension p. Traçons une sphère (ou hyper-sphère) de rayon r, centrée sur l'un des points constituant cet objet fractal, et comptons le nombre de points N(r) situés à l'intérieur de cette sphère (voir figure II-7).

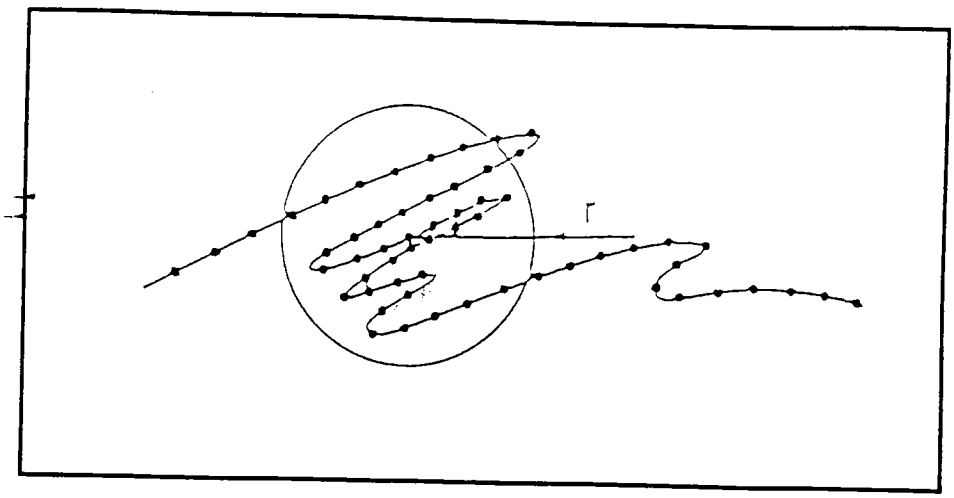


Figure II-7 :

Illustration de la méthode de calcul de la dimension fractale, au sens des masses, pour un ensemble de point [6].

Par définition, la dimension fractale au sens des masses ν est telle que :

$$N(r) \sim r^{\nu}. \qquad \text{(II-3)}$$

b- Exemples

i/ Cas d'un objet régulier

* Ensemble de points situés sur une courbe

$N(r) \sim r \Rightarrow \nu = 1.$

* Ensemble de points uniformément repartis sur une surface

$N(r) \sim r^2 \Rightarrow \nu = 2.$

Remarquons encore que, pour les objets réguliers, la dimension fractale au sens des masses n'ajoute rien à la dimension Euclidienne ; $\nu = \alpha$.

ii/ Cas d'un objet fractal

* La carte itérée de Hénon

On trouve $N(r) \sim r^{1.26}$ ce qui implique $\nu = 1,26$.

* L'ensemble de Cantor

On trouve $N(r) \sim r^{0.63}$ ce qui implique $\nu = 0,63$.

2-3-3- Caractérisation d'un régime chaotique déterministe

Sachant qu'un attracteur étrange est le reflet d'un régime apériodique déterministe et que c'est un objet fractal, l'existence d'une dimension fractale est une condition nécessaire pour que la dynamique d'un système chaotique soit déterministe.

2-4- Exposant de Lyapunov

En raison de la sensibilité aux conditions initiales, les trajectoires de phases divergent l'une de l'autre. On mesure la vitesse de cette divergence au moyen de l'*exposant* ou *nombre caractéristique de Lyapunov*.

2-4-1- Définition et signification précise

Considérons un système dont la dynamique est gouvernée par le flot, de dimension n, donné par l'équation II-1. L'utilité de l'exposant de Lyapunov apparaît lorsqu'on examine le comportement d'une trajectoire initialement proche d'une solution $\vec{X}(t)$ de ce flot [6]. En linéarisant le flot autour de la solution $\vec{X}(t)$, l'évolution de l'écart $\delta\vec{X}(t)$ est donnée par l'équation :

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{X} = D(t)\delta\vec{X} \qquad \text{(II-4)}$$

où $D(t) = \left.\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{X}}\right|_{\vec{X}(t)}$ est une matrice qui dépend du flot et de la solution $\vec{X}(t)$.

Pour un écart initial $\delta\vec{X}(0)$, la solution $\delta\vec{X}(t)$ de l'équation II-4 s'écrit :

$$\delta\vec{X}(t) = L(t)\delta\vec{X}(0)$$

où L(t) est une matrice carrée d'ordre n dont les n valeurs propres donnent une indication sur l'évolution d'une perturbation de la trajectoire de phase.

Cette démarche relève de la même inspiration que la théorie de Floquet de la stabilité linéaire d'une solution périodique : il s'agit d'une analyse linéaire du comportement au voisinage d'une trajectoire. Dans la théorie de Floquet [60], on regarde ce qui se passe au bout d'une période T pour une orbite de référence fermée alors qu'ici les valeurs propres de L donnent une indication sur l'évolution à proximité d'une trajectoire qui n'est pas astreinte à se refermer sur elle-même.

a- Cas particulier

Si la matrice D ne dépend pas du temps, elle possède n valeurs propres constantes, éventuellement complexes, $\Lambda_1,\Lambda_2,...,\Lambda_n$. Dans ce cas, l'intégration de l'équation II-4 aboutit à une matrice L(t) diagonale dans le repère des vecteurs propres :

$$L(t) = \mathrm{diag}(\Lambda_1,\Lambda_2,...,\Lambda_n) \text{ avec } \Lambda_i = e^{\lambda_i t}.$$

Les λ_i sont appelés : *coefficients de Lyapunov*.

Désignons par L^+ la matrice hermitique conjuguée de la matrice L. La trace du produit L^+L est alors donnée par :

$$Tr\left(L^+(t)L(t)\right)=\sum_{i=1}^{n} e^{(\lambda_i+\lambda_i^*)t}$$

Lorsque le temps augmente, l'exponentielle ayant la partie réelle la plus grande, notée $\bar{\lambda}$, finit toujours par l'emporter sur les autres, soit :

$$\bar{\lambda}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}Ln\left[Tr\left(L^+(t)L(t)\right)\right] \qquad \text{(II-5)}$$

Grâce à cette formule on peut donc déterminer la plus grande partie réelle sans avoir à chercher les valeurs propres de la matrice L. $\bar{\lambda}$ est *le plus grand exposant de Lyapunov*. Il donne une indication sur l'évolution à proximité d'une trajectoire.

b- Cas général

Dans la plupart des cas la matrice D dépend du temps et L(t) ne se met plus sous la forme simple précédente. En effet, les valeurs propres de la matrice D ne sont pas constantes et la matrice L n'est pas diagonalisable dans un repère fixe. Néanmoins, on peut toujours définir la quantité :

$$\lambda_{[\bar{x}]}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t}Ln\left[Tr\left(L^+(t)L(t)\right)\right] \qquad \text{(II-6)}$$

Cette limite, qui existe pour une large catégorie de situations, est appelée *exposant ou nombre caractéristique de Lyapunov* attaché à la solution $\vec{X}(t)$. Aux temps longs, suivant le signe de $\lambda_{[\vec{X}]}$, l'écart $\delta\vec{X}(t)$ augmente ou diminue en moyenne exponentielle.

2-4-2- Caractérisation d'un régime chaotique déterministe

Pour un régime périodique ou quasi-périodique stable, on obtient un exposant de Lyapunov nul. Pour un régime apériodique déterministe, auquel est associé un attracteur étrange, la sensibilité aux conditions initiales implique la divergence des trajectoires de phases. Le plus grand exposant de Lyapunov doit donc être positif. Le long du mouvement orbital, l'exposant de Lyapunov est nul. Il en résulte que, en raison de la contraction des aires pour un système dissipatif, au moins un exposant de Lyapunov doit être négatif. On voit aussi la nécessité de l'existence de trois variables indépendantes au moins pour qu'un système dynamique dissipatif soit chaotique. Dans le prolongement de ce raisonnement simple, il est naturel d'envisager la caractérisation d'un régime chaotique déterministe par l'existence d'un exposant de Lyapunov positif.

3- LA METHODE DES RETARDS

3-1- Série temporelle

L'étude qualitative d'un système dynamique dans l'espace de phases présuppose la connaissance des variables d'état de ce système et le flot qui régit leurs variations. Lorsqu'il s'agit d'un système dynamique réel, on a rarement accès à ces informations. Faut-il, pour autant, conclure que l'analyse précédente reste uniquement applicable à des simulations numériques et qu'elle ne peut servir à l'étude des systèmes réels ? Il n'en est rien, du moins lorsque le nombre de degrés de liberté du système reste faible. On s'attend à ce que chacune des variables d'état reflète suffisamment bien les différentes facettes du comportement du système pour permettre d'en faire une analyse qualitative [7,80]. Sans connaître le flot d'un système dynamique, la méthode des retards permet d'obtenir une reconstruction du portrait de phases à l'aide de l'enregistrement temporel v(t) de l'évolution de l'une des variables d'état v du système.

Pratiquement, lors d'un essai expérimental ou d'une simulation numérique, on relève les valeurs de la variable v à des instants régulièrement espacés d'un intervalle de temps T_s appelé *temps d'échantillonnage* (voir la figure II-8). Soit v_i la valeur de v relevée à l'instant $t_i=i.T_s$. L'ensemble des valeurs v_i forme ce qu'on appelle un *signal* ou une *série temporelle* et que l'on note par :

$$[v_i/i=1,2, \ldots ,N_s]. \qquad \text{(II-7)}$$

N_s étant le nombre de valeurs v_i relevées. L'intervalle de temps $T_t=(N_s-1).T_s$, correspondant à la durée de l'enregistrement, est appelé *longueur de la série*.

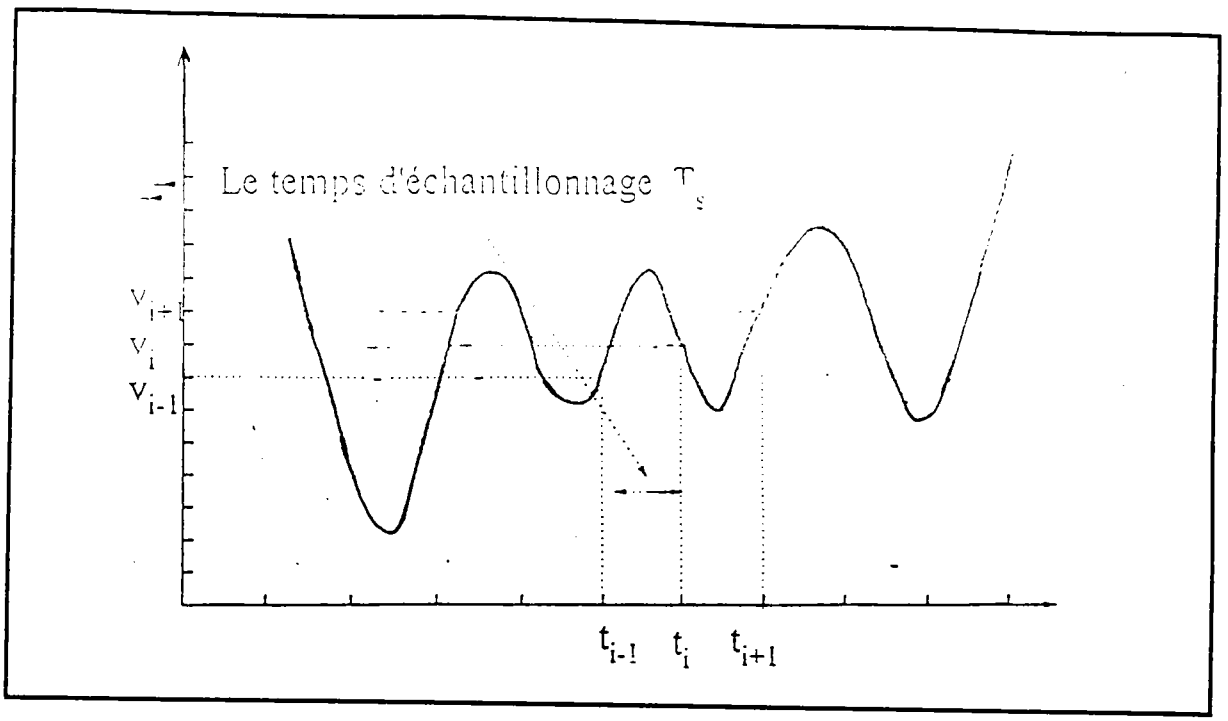


Figure II-8 : Signal ou série temporelle.

3-2- Principe de la méthode :

3-2-1- Introduction :

Considérons un système dynamique dont le comportement est gouverné par le flot II-1. Formellement, étant donnée une condition initiale $\vec{X}_0$, nous pouvons écrire la solution à l'instant t telle que $\vec{X}(t) = \varphi_t(\vec{X}_0)$, où φ_t représente une famille d'applications dans l'espace de phases S de dimension n. Pour toutes les conditions initiales possibles, nous pouvons concevoir une écriture collective des solutions telle que $\varphi_t(S)$, ce qui peut être vu comme un flux de points dans S. La dimension de $\varphi_t(S)$ est, à priori, égale à celle de S. Cependant, quand un système dissipatif évolue, le flux se contracte dans un espace de dimension inférieure qui est l'attracteur. Dans la suite, nous supposons que ce dernier existe dans une variété régulière A de dimension m [81].

3-2-2- Reconstruction d'une variété

a- Définition

Une reconstruction d'une variété A est une application continue Φ définie de la variété A vers un espace U telle que :

i/ $\Phi(A)$ est une sous-variété de U.

ii/ Φ est un difféomorphisme entre A et $\Phi(A)$.

b- Théorème de Whitney [82]

Soit A une variété compacte de dimension m. Pour toute paire $(\vec{F}, v)$, où $\vec{F}$ est un champ de vecteur de classe C^2 et v est une fonction continue sur A, c'est une propriété générique que l'application $\Phi_{\vec{F},v}$, définie ci-dessous, est une reconstruction de A dans $\mathbb{R}^{2m+1}$.

$$\Phi_{\vec{F},v} : A \to \mathbb{R}^{2m+1}$$

$$\vec{X} \mapsto \Phi_{\vec{F},v}(\vec{X}) = \left(v(\vec{X}), v(\varphi_1(\vec{X})), v(\varphi_2(\vec{X})), \ldots, v(\varphi_{2m}(\vec{X}))\right)$$

$v(\varphi_j(\vec{X}))$ étant le flux de $\vec{F}$ à l'instant t_j.

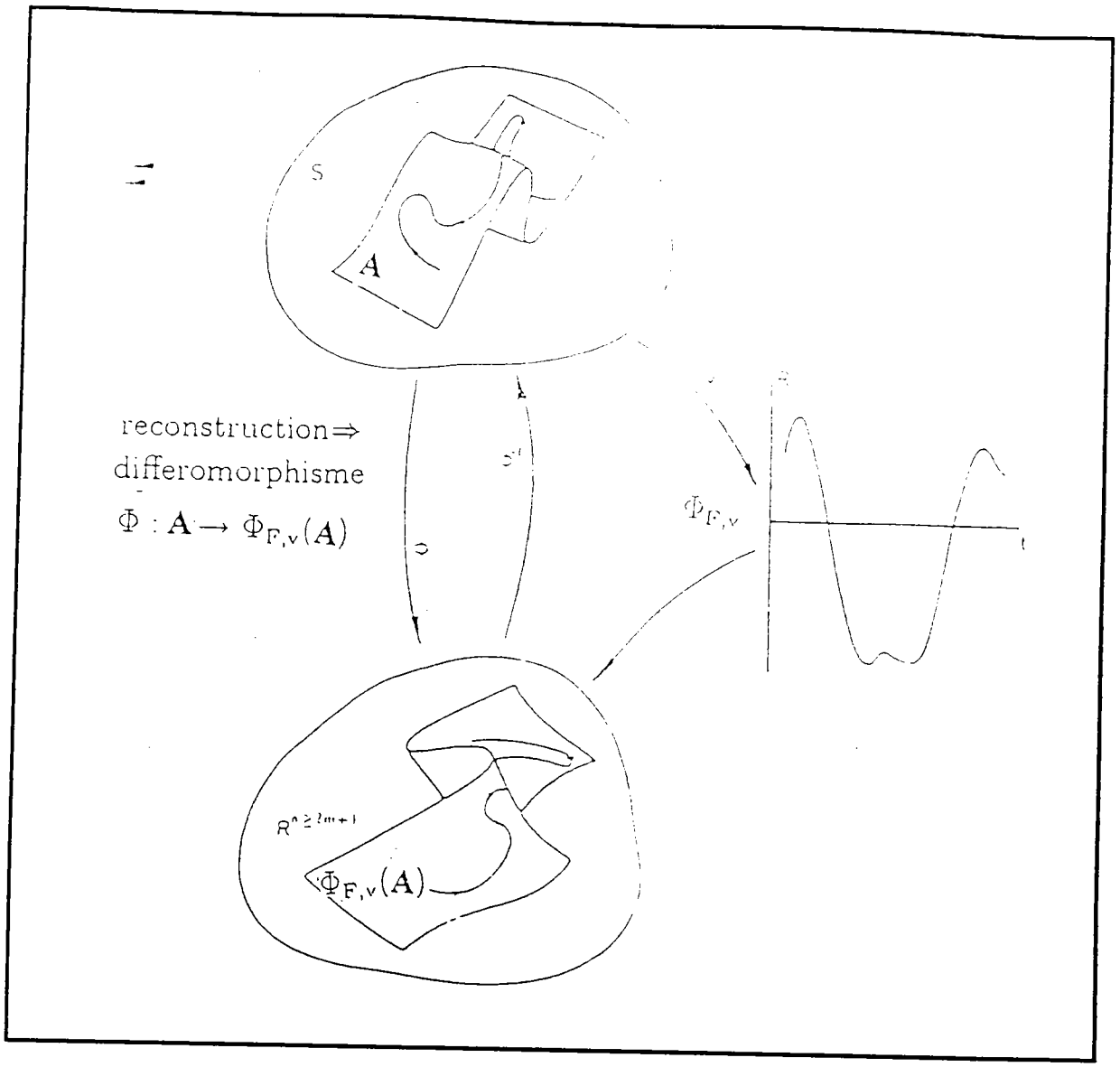


Figure II-9 : Schéma d'une reconstruction [81].

3-3- Reconstruction du portrait de phases d'un système dynamique

3-3-1- L'équivalence d'ordre k [83]

Soient $\vec{F}$ et $\vec{G}$ deux champs de vecteurs de classe C^r. On dit qu'il y a équivalence d'ordre k, avec $k \leq r$, entre $\vec{F}$ et $\vec{G}$ s'il existe un difféomorphisme Φ de classe C^k qui associe aux orbites $\varphi_t(\vec{X})$, relatives à $\vec{F}$, des orbites

$\psi_{t'}\left(\Phi\left(\vec{X}\right)\right)$, relatives à $\vec{G}$, en conservant leur orientation. L'équivalence est dite différentielle si $k \geq 1$. Pour k=0, l'équivalence est dite topologique et Φ est un homéomorphisme.

3-3-2- Théorème de Takens

Dans la reconstruction définie par Whitney, Φ est un difféomorphisme. Il y a donc une relation d'équivalence différentielle. Sachant que cette dernière conserve les propriétés topologiques et différentielles des objets mathématiques, Takens suggère une application du théorème de Whitney pour la reconstruction du portrait de phases d'un système dynamique. Dans sa technique [7], appelée *méthode des retards*, Takens propose de remplacer la fonction v par une des variables d'état du système et $v\left(\varphi_j\left(\vec{X}\right)\right)$ par la valeur de cette variable d'état à l'instant t_j.

Lorsque, pour une raison ou une autre, on n'a pas accès au flot d'un système dynamique ayant n degrés de liberté, il suffit, grâce à la méthode des retards, d'une série temporelle pour reconstruire son portrait de phases dans un espace U de dimension M. Le diagramme obtenu est appelé *pseudo-portrait de phases* (PPDP), l'espace U est appelé *espace de reconstruction* et sa dimension M, appelée *dimension de reconstruction*, doit vérifier le critère de Takens :

$$M \geq 2n+1. \qquad \text{(II-8)}$$

3-4- Mise en oeuvre de la méthode

Dans le théorème de Takens, aucune indication n'est donnée concernant l'intervalle de temps séparant deux relevées successifs de la variable d'état v (le temps d'échantillonnage T_s). Sachant que lorsque cet intervalle est trop court, on risque d'avoir une redondance de l'information (la valeur v à un instant donné n'apporte pas plus d'information que sa valeur à l'instant précédent), il convient d'introduire un concept usuel appelé *fenêtrage*. Une fenêtre (M,L) laisse apparaître M éléments de la série temporelle, espacés d'un intervalle de temps $T_L=L.T_s$ qu'on appelle *retard*. L'intervalle de temps $T_w=(M-1).L.T_s$ est appelé *longueur de la fenêtre d'observation*. M et L sont deux constantes entières appelées *paramètres de reconstruction*. Chaque ensemble de M éléments (de la série temporelle) constitue les composantes d'un vecteur de dimension M, appelé *vecteur-trajectoire* ou encore *vecteur de reconstruction* :

$$\vec{X}_i=\left(v_i, v_{i+L}, v_{i+2L}, \ldots, v_{i+(M-1)L}\right)^T. \qquad \text{(II-9)}$$

Le fenêtrage de toute la série temporelle génère un nombre $N_v=N_s-(M-1).L$ de vecteurs-trajectoire permettant chacun de définir un point P de l'espace de reconstruction. La ligne passant par ces points constitue ce qu'on appelle la *trajectoire reconstruite*.

3-5- Limites de la méthode

Telle qu'elle est présentée, la méthode des retards est une technique très utile pour l'étude qualitative d'un système dynamique. Cependant dans la pratique plusieurs problèmes surgissent ; ils concernent aussi bien la série temporelle que les paramètres de reconstruction.

3-5-1- Qualité de la série temporelle

Théoriquement la série temporelle est supposée infinie et dépourvue de tout bruit. Ce sont deux conditions d'application du théorème de Takens que l'on ne peut pas réaliser dans la pratique. D'une part il est impossible d'obtenir une série temporelle infinie, que ce soit à l'issue d'une expérience, d'une observation ou d'une simulation numérique. On verra plus loin l'influence de la longueur de la série. Notons pour le moment que plus la série est longue, meilleur est le résultat. D'autre part, notre série contient toujours du bruit lié au dispositif de mesure (lors d'une observation ou d'un essai expérimental) ou aux erreurs de calcul (lors d'une simulation numérique).

3-5-2- Paramètres de reconstruction

Pour la reconstruction du portrait de phases d'un système, il faut se donner la dimension de reconstruction M et le retard L, alors que le théorème de Takens ne prévoit pas de critère pour le choix de ces paramètres. A la limite, Takens exige que la dimension de reconstruction M soit supérieure à 2n+1. Ce critère donne une valeur minimale de M, mais il devient inutile lorsqu'on ne connaît pas le nombre n de degrés de liberté du système. Ces deux paramètres restent donc arbitraires alors que le résultat de la reconstruction dépend crucialement de leur choix. En effet, une erreur par défaut lors du choix de la dimension de reconstruction induit la présence de ce qu'on appelle les *faux voisins* [9] : lorsqu'on reconstruit le portrait de phases du système dans un espace de dimension inférieure à ce qui serait nécessaire, on n'obtient pas une "bonne" reconstruction, mais seulement une projection du PPDP sur un espace de dimension inférieure. Par conséquence certains points apparaissent voisins alors qu'en réalité ils ne le sont pas. D'autre part, une valeur non optimale du retard

entraîne une mauvaise représentation de la dynamique du système [84] : une surestimation du retard fait perdre toute corrélation entre les composantes d'un vecteur-trajectoire et une sous-estimation du retard augmente la corrélation orbitale et affaiblit le gain d'information entre deux composantes successives d'un vecteur-trajectoire (il y a redondance de l'information). Nous verrons, au troisième chapitre, certains critères suggérés pour le choix des paramètres de reconstruction.

4- CARACTERISATION DES ATTRACTEURS ETRANGES A PARTIR D'UNE SERIE TEMPORELLE

Rappelons que, selon la méthode des retards, on peut reconstruire le portrait de phases d'un système dynamique à partir d'une série temporelle. Pour cela, on se donne une dimension de reconstruction M et un retard L puis on construit N_v vecteurs-trajectoire suivant l'équation II-9.

4-1- L'algorithme de Grassberger-Procaccia

Considérons un système dynamique dont le comportement est chaotique déterministe. Vue la complexité de la trajectoire reconstruite, il n'apparaît pas de relation simple entre les positions de deux points éloignés dans le temps. Cependant, comme ces deux points sont situés sur l'attracteur, il existe une certaine relation spatiale entre leurs positions. La quantité permettant d'identifier cette relation s'appelle l'intégrale de corrélation.

4-1-1- Intégrale de corrélation

Dans un espace de reconstruction Φ_M de dimension M, selon Grassberger et Procaccia (G-P), l'intégrale de corrélation est donnée par [8] :

$$C(r)=\frac{1}{N_p}\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{N_v} H\left(r-\left\|\vec{X}_i-\vec{X}_j\right\|\right). \qquad \text{(II-10)}$$

* $N_p=N_v(N_v-1)/2$ est le nombre de paires de vecteurs-trajectoire utilisés.

* H est la fonction de Heaviside définie par : $\begin{cases} H(x)=1 \text{ si } x\geq 0. \\ H(x)=0 \text{ si } x<0. \end{cases}$

* r est le rayon d'une sphère (ou hyper-sphère) centrée sur un point P_i donné.

* $\left\|\vec{X}_i-\vec{X}_j\right\|$ est la distance entre deux points P_i et P_j (de l'espace Φ_M) définis respectivement par les vecteurs-trajectoire $\vec{X}_i$ et $\vec{X}_j$.

4-1-2- Dimension de corrélation

a- Définition

Pour un point P_i donné, C(r) n'est autre que la probabilité d'avoir un point P_j dans une sphère (ou hyper-sphère) de rayon r centrée sur P_i. C(r) est donc proportionnelle à N(r) défini au paragraphe 2-3-2 pour la dimension fractale au sens des masses ν. Par conséquent, si un attracteur étrange existe, C(r) est proportionnelle à r^{ν} puisque N(r) varie en r^{ν} pour un objet fractal. Il en résulte que log(C(r)) est une fonction linéaire de log(r) dont la pente D(r,M) est donnée par :

$$D(r,M)=\frac{d[\log(C(r))]}{d[\log(r)]} \qquad \text{(II-11)}$$

Par définition la dimension de corrélation D est donnée par :

$$D=\lim_{M\to\infty}\lim_{r\to 0} D(r,M) \qquad \text{(II-12)}$$

On montre que D est une borne supérieure de la dimension fractale ν [8].

b- Détermination pratique

Pratiquement, deux problèmes se posent lors du calcul de la dimension de corrélation D. D'une part, D(r,M) ne devrait pas dépendre de r lorsqu'un attracteur étrange existe, ce qui n'est jamais réellement le cas compte tenu des dimensions finies des attracteurs. L'intégrale de corrélation est une quantité statistique qui perd ses performances pour un faible nombre de points P_i. C'est le cas lorsque r est voisin de zéro où de plus se manifeste l'influence du bruit expérimental. C'est aussi le cas pour r très grand car les points P_i finissent par se trouver en dehors de l'attracteur, et toute corrélation entre eux est alors perdue. D'autre part, dans la pratique il est impossible de faire tendre M vers l'infini ; les grandes valeurs de M nécessitent un temps de calcul prohibitif et la statistique perd aussi ses performances. Pour ces raisons, on se contente d'avoir une pente D(r,M) constante sur un intervalle fini $[\log(r_l),\log(r_u)]$ appelé "plateau". Quant à la dimension M, on utilise des valeurs croissantes et on exige que la valeur de D(r,M) sur le plateau reste constante à partir d'une certaine valeur M_0 de M. Cette démarche, appelée *saturation*, est la même que celle adoptée par Roux *et al* [85] qui augmentent systématiquement la dimension de reconstruction jusqu'à ce que les trajectoires cessent de se croiser.

4-1-3- Conclusion

La mise en oeuvre exposée ci-dessus reste valable pour une série longue et en l'absence de bruit important. La présence de ce dernier risque de masquer tout aspect déterministe. Pour le moment retenons que l'obtention d'une dimension de corrélation est un résultat double :

i/ C'est une condition nécessaire de l'existence d'un attracteur étrange qui est le reflet d'un régime chaotique déterministe.

ii/ La reconstruction conserve les caractéristiques topologiques, et en particulier la dimension fractale. D'où un renseignement sur le nombre de degrés de liberté du système dynamique étudié.

4-2- L'exposant de Lyapunov

4-2-1- L'exposant dépendant du temps Λ

Dans l'espace de reconstruction, la dynamique du système est supposée représentée par l'application $\vec{F}(\vec{X}_i)=\vec{X}_{i+1}$. Typiquement, on suppose que les points P_i et P_j tels que la distance $\|\vec{X}_i-\vec{X}_j\|$ est suffisamment petite peuvent être pris comme conditions initiales voisines. Soit r^* la distance maximale considérée entre orbites à l'instant initial. L'examen de la convergence des trajectoires revient à l'observation, au bout d'un certain intervalle de temps T_K, du devenir des distances $\|\vec{X}_i-\vec{X}_j\|$ inférieures à r^*. Si le comportement est chaotique, les paires de points (P_i,P_j) telles que : $\|\vec{X}_i-\vec{X}_j\|<r^*$ et $\|\vec{X}_{i+K}-\vec{X}_{j+K}\|>\|\vec{X}_i-\vec{X}_j\|$ seront dominantes à cause de la sensibilité aux conditions initiales.

Pour une description quantitative, Gao et Zheng [9] introduisent une quantité Λ appelée *l'exposant dépendant du temps* et définie par :

$$\Lambda(K,M,L)=\left\langle \mathrm{Ln}\frac{\left\|\vec{X}_{i+K}-\vec{X}_{j+K}\right\|}{\left\|\vec{X}_{i}-\vec{X}_{j}\right\|}\right\rangle . \forall(P_i,P_j)/\left\|\vec{X}_{i}-\vec{X}_{j}\right\|\leq r^{*}. \qquad \text{(II-13)}$$

K est un entier positif définissant l'intervalle de temps $T_K=K.T_s$ au bout duquel on observe le devenir d'une paire de points (P_i,P_j). $\langle\ \rangle$ représente la moyenne sur toutes les paires (P_i,P_j) vérifiant la condition $\left\|\vec{X}_{i}-\vec{X}_{j}\right\|\leq r^{*}$. Comme r^{*} (distance entre orbites) reste arbitraire dans cet algorithme, on doit éviter les voisins appartenant à une même orbite. Pour cela, il est parfois souhaitable de ne prendre en compte que les paires (P_i,P_j) telles que $j\geq i+\Omega$ avec Ω égale à l'entier W définissant la longueur de la fenêtre (W=(M-1)L).

Dans cette formulation, on s'intéresse plus à la divergence qu'au repliement des trajectoires donc aux paires (P_i,P_j) telles que $\left\|\vec{X}_{i+K}-\vec{X}_{j+K}\right\|>\left\|\vec{X}_{i}-\vec{X}_{j}\right\|$. On définit alors l'exposant Λ_+ par :

$$\Lambda_{+}(K,M,L)=\left\langle \mathrm{Ln}\frac{\left\|\vec{X}_{i+K}-\vec{X}_{j+K}\right\|}{\left\|\vec{X}_{i}-\vec{X}_{j}\right\|}\right\rangle . \forall(P_i,P_j)/\begin{cases}\left\|\vec{X}_{i}-\vec{X}_{j}\right\|\leq r^{*}\\ \left\|\vec{X}_{i}-\vec{X}_{j}\right\|<\left\|\vec{X}_{i+K}-\vec{X}_{j+K}\right\|\end{cases}$$

4-2-2- Le plus grand exposant de Lyapunov

Pour les faibles valeurs de K, Λ/T_K n'est autre que la valeur moyenne du plus grand exposant de Lyapunov local. Lorsque K augmente, le vecteur séparant deux points P_i et P_j a tendance à s'aligner avec la direction propre du plus grand exposant de Lyapunov. Par suite lorsqu'on trace le graphe représentant Λ en fonction de K, on prévoit une courbe linéaire, sur un intervalle $[K_l,K_u]$, qui passe par l'origine lorsqu'elle est extrapolée. Objectivement, le plus grand exposant de Lyapunov λ peut être estimé par la pente de la courbe représentant Λ en fonction de K sur l'intervalle $[K_l,K_u]$; soit :

$$\lambda=\frac{\Lambda(K_2)-\Lambda(K_1)}{(K_2-K_1)\cdot T_s} \text{ avec } K_1,K_2\in[K_l,K_u] \qquad \text{(II-14)}$$

Une valeur positive du plus grand exposant de Lyapunov λ indique qu'il y a sensibilité aux conditions initiales, ce qui représente la signature d'un régime chaotique déterministe.

4-3- Conclusion

La caractérisation d'un attracteur étrange à partir d'une série temporelle utilise à la fois ses propriétés dynamiques locales, en mesurant la sensibilité aux condition initiales à l'aide du plus grand exposant de Lyapunov et ses propriétés dynamiques globales par la mesure de sa dimension de corrélation.

5- CONCLUSION :

Dans ce chapitre, nous avons vu qu'il est possible de caractériser un régime dynamique à partir d'une série temporelle constituée des variations de l'une des variables d'état du système. En particulier, on y trouve deux algorithmes permettant de mettre en évidence l'existence d'un attracteur étrange qui est le reflet d'une dynamique chaotique déterministe. Cependant, ces deux techniques souffrent de limites liées à la méthode des retards. Dans la première partie du chapitre suivant, nous exposons certaines approches permettant de faire face aux limites de cette méthode d'analyse. Nous illustrons, dans la deuxième partie, les concepts et méthodes introduits en les mettant en oeuvre sur l'exemple de l'attracteur de Lorenz [10].

Chapitre III.

MISE EN OEUVRE ET VALIDATION DE LA METHODE D'ANALYSE DYNAMIQUE

A- MISE EN OEUVRE DE LA METHODE

1- RAPPEL DE LA METHODE DES RETARDS

On suppose que l'on ne connaît pas le flot qui régit l'évolution du système dynamique étudié mais que l'on dispose de l'enregistrement des variations temporelles de l'une de ses variables d'état. Cet enregistrement effectué à une fréquence constante f_s est appelé "série temporelle" notée $[v_i / i=1,2, \ldots ,N_s]$ où v_i est la valeur de v à l'instant $t_i=i.T_s$. L'intervalle de temps T_s donné par $T_s=1/f_s$ est appelé "temps d'échantillonnage". La durée d'enregistrement, donnée par $T_t = (N_s - 1).T_s$ où N_s est le nombre d'éléments de la série temporelle, est appelée "longueur de la série".

En utilisant *la méthode des retards* [7], cette *série temporelle* permet de reconstruire le portrait de phases du système dans un espace Φ_M, de dimension M, appelé "espace de reconstruction". Pour obtenir cette reconstruction, appelée "pseudo-portrait de phases" (PPP), on se donne deux constantes entières M et L et on compose une série de vecteurs $\left[\vec{X}_i / \; i=1,2, \ldots ,N_v \right]$ tels que :

$$\vec{X}_i = \left(v_i , v_{i+L} , v_{i+2L} , \ldots , v_{i+(M-1)L} \right)^T . \qquad \text{(III-1)}$$

M est appelée "dimension de reconstruction", L est appelée "retard" et l'entier W=(M-1).L est appelé "longueur de la fenêtre d'observation". Les vecteurs $\vec{X}_i$, dont le nombre est $N_v=N_s-W$, sont de dimension M et ils sont appelés "vecteurs de reconstruction" ou encore "vecteurs-trajectoire". Chaque vecteur détermine un point de l'espace Φ_M et l'ensemble de ces points permet de reconstruire la trajectoire de phases du système.

2- CHOIX DES PARAMETRES DE RECONSTRUCTION

On reproche à la méthode des retards le fait que les constantes M et L, appelées "paramètres de reconstruction", restent arbitraires, surtout lorsque l'on sait que la trajectoire reconstruite est très sensible aux valeurs de ces paramètres (voir le paragraphe 3-5 du chapitre II). Afin de remédier à cet inconvénient majeur, des critères de choix de la dimension de reconstruction minimale et du retard optimum ont été suggérés. Certains auteurs partent de l'aspect temporel et définissent des fonctions liées à la série temporelle telles que la fonction d'auto-corrélation [86,87], le spectre de puissance [81], l'information mutuelle [88,89] et les corrélations d'ordre supérieur [90]. D'autres partent de l'aspect géométrique et définissent des quantités liées à la trajectoire reconstruite telles que le facteur de remplissage [91,92], le déplacement moyen [84] et l'exposant dépendant du temps [9].

2-1- La fonction d'auto-corrélation

La fonction d'auto-corrélation d'une série temporelle $[v_i / i=1,2, \ldots ,N_s]$ est, par définition, la quantité ψ donnée par :

$$\psi_m = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s - 1} v_i \cdot v_{i+m} \cdot \qquad \text{(III-2)}$$

ψ étant une fonction du temps ; $\psi_m=\psi(t_m)=\psi(m.T_s)$. Physiquement, c'est la moyenne du produit de la valeur du signal à l'instant t_i par sa valeur à l'instant t_{i+m} ultérieur. Elle permet donc de déceler si, et pendant combien de temps, la valeur instantanée du signal dépend de ce qu'elle était auparavant. En d'autres termes cette quantité mesure le degré de ressemblance du signal avec lui même lorsque le temps s'écoule ; en ce sens, la fonction d'auto-corrélation d'un signal aléatoire tend rapidement vers zéro. En se basant sur la signification physique de cette fonction, on définit les temps caractéristiques suivants :

* T_0 c'est le première zéro de la fonction ψ.
* T_m c'est le premier minimum de la fonction ψ.
* T_i c'est le premier point d'inflexion de la fonction ψ.
* T_c : défini comme étant le temps nécessaire à la fonction ψ pour passer à 1/e de sa valeur initiale. On l'appelle *temps de corrélation*.

Typiquement on choisit une fenêtre dont la longueur est de l'ordre de grandeur de l'un des temps caractéristiques ci-dessus [86,87]. En étudiant l'attracteur de Lorenz, Albano *et al* [86] suggèrent l'utilisation de fenêtres dont la longueur $T_w=W.T_s$ est comprise entre 1,6 et 3,5 fois le temps de corrélation.

Ce critère n'est pas très satisfaisant puisqu'il mène à la considération de plusieurs valeurs du couple (M,L). Cependant c'est une procédure qui permet de restreindre le domaine des valeurs possibles des paramètres de reconstruction.

2-2- Le déplacement moyen

C'est une quantité qui permet de répondre à la question suivante : pour un retard donné, la trajectoire est-elle suffisamment étendue de la diagonale principale de l'espace de reconstruction ? Le déplacement moyen S est une fonction du retard L définie par :

$$S(L)=\frac{1}{N_v}\sum_{i=1}^{N_v}\left\|\vec{X}_i-\vec{X}_i^0\right\|.$$

Les vecteurs $\vec{X}_i$ sont les vecteurs-trajectoire de dimension M donnés par l'équation III-1 alors que les vecteurs $\vec{X}_i^0$ sont des "vecteurs-trajectoire" de dimension M correspondant à une "reconstruction" dont le retard est nul (L=0). Le déplacement moyen s'écrit alors :

$$S(L)=\frac{1}{N_v}\sum_{i=1}^{N_v}\left[\sum_{j=1}^{M-1}\left(v_{i+jL}-v_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad \text{(III-3)}$$

Selon Rosenstein *et al* [84], le retard optimum L_0 est donné par la première valeur du retard correspondant à une diminution de la pente de S en fonction de L de 40% de sa valeur initiale : $S'(L_0)$ est égale à 40% de $S'(1)$.

Dans [84] la dimension de reconstruction M est supposée connue. Comme ce n'est pas toujours le cas, nous calculons les variations S en fonction de L pour des valeurs croissantes de M. Nous repérons le retard optimum par la première valeur de L dont le rapport S'(L)/S'(1), appelé pente normalisée du déplacement moyen, vaut 0,4. Ce critère est plus satisfaisant que celui du temps de corrélation puisqu'il permet de déterminer, pour chaque valeur de la dimension de reconstruction M, un valeur optimale du retard L.

2-3- L'exposant dépendant du temps Λ

Pour M et L donnés, cette quantité est donnée par :

$$\Lambda(M,L) = \left\langle \frac{\left\| \vec{X}_{i+K} - \vec{X}_{j+K} \right\|}{\left\| \vec{X}_i - \vec{X}_j \right\|} \right\rangle \text{ pour } \left\| \vec{X}_i - \vec{X}_j \right\| < r^* . \qquad \text{(III-4)}$$

On utilise souvent "l'exposant plus", noté $\Lambda_+(M,L)$, en exigeant, en plus de $\left\| \vec{X}_i - \vec{X}_j \right\| < r^*$, que $\left\| \vec{X}_i - \vec{X}_j \right\| < \left\| \vec{X}_{i+K} - \vec{X}_{j+K} \right\|$.

Rappelons qu'un mauvais choix du retard entraîne une représentation incorrecte de la dynamique du système (trop de points décorrélés sont pris en considération). Sur l'exposant dépendant du temps, ceci se traduit par l'apparition de valeurs excessivement larges du rapport $\left\| \vec{X}_{i+K} - \vec{X}_{j+K} \right\| / \left\| \vec{X}_i - \vec{X}_j \right\|$. Selon Gao et Zheng [9], après avoir fixé M, K et r^*, le retard optimum est donné par le minimum de Λ_+ en fonction de L.

Comme on ne connaît pas généralement la dimension de reconstruction M, nous traçons Λ_+ en fonction de L pour des valeurs croissantes de M. Ces courbes présentent un minimum (en une valeur L_0 de L) qui diminue lorsque M augmente. A partir d'une certaine valeur M_0 de M, ce minimum cesse de diminuer ; Gao et Zheng suggèrent que L_0 est la valeur optimum du retard et que M_0 est la valeur minimale de la dimension de reconstruction.

Notons que K (entier positif) et r^* (réel positif) sont deux constantes arbitraires dans cette formulation ce qui réduit l'efficacité de ce critère. Or r^* est supposé de l'ordre de la distance entre orbites. Nous le prenons alors de l'ordre de quelques dixièmes de la distance maximale entre les points de l'espace de reconstruction. Quant à l'entier K, il définit le temps au bout duquel on observe le devenir de deux orbites initialement voisines, nous le choisissons alors tel que l'intervalle de temps $T_K=K.T_s$ soit de l'ordre du temps de corrélation T_c.

2-4- Commentaire et conclusion

Pour le choix des paramètres de reconstruction, les critères proposés dans la littérature, malgré leur fondement qualitatif, restent d'un emploi délicat dans la pratique. En effet, les relations auxquelles on aboutit découlent seulement de l'appréciation de leurs performances quand ces critères sont appliqués à des modèles simples et connus. En d'autres termes, ces critères restent empiriques. Par suite, un même critère peut donner de bons résultats pour certains systèmes dynamiques mais devenir inefficace pour d'autres systèmes. Enfin, parmi ces critères, certains exigent la connaissance de la dimension de reconstruction pour déterminer le retard optimum. Pour toutes ces raisons, nous utilisons systématiquement les trois critères cités ci-dessus pour faire le meilleur et le plus prudent des choix des paramètres de reconstruction lors de notre analyse.

3- L'ESPACE DES COMPOSANTES PRINCIPALES

3-1- L'analyse du système singulier

a- La matrice trajectoire

A partir des vecteurs-trajectoires $\left[\vec{X}_i / \ i=1,2, \ldots ,N_v\right]$, on définit une matrice X d'ordre (N_v,M), appelée matrice trajectoire, telle que :

$$X^T=\frac{1}{\sqrt{N_v}}\left[\vec{X}_1,\vec{X}_2, \ldots ,\vec{X}_{N_v}\right] \qquad \text{(III-5)}$$

La matrice trajectoire et sa transposée peuvent être vues comme représentant des applications linéaires entre les espaces IR^M et IR^{N_v}. Dans la théorie généralisée de l'information, développée dans [81,93-95], le triplet $\left(X,IR^{N_v},IR^M\right)$ peut être analysé en utilisant *un système singulier*.

b- La matrice de covariance et les valeurs singulières

La matrice de covariance de la matrice trajectoire X est une matrice carrée, d'ordre M, donnée par :

$$\Sigma=X^TX \qquad \text{(III-6)}$$

Par sa définition, Σ est une matrice réelle symétrique définie positive ; elle possède alors M valeurs propres réelles positives. Ces dernières, notées s_i (pour i=1,2,...,M), sont appelées les *valeurs singulières* de la matrice trajectoire X.

3-2- Les composantes principales

a- La matrice des vecteurs singuliers

Soient $[c_i/i=1,2, \ldots ,M]$ les vecteurs propres associés aux valeurs propres $[s_i/i=1,2, \ldots ,M]$ de la matrice Σ. Ces vecteurs forment une base de l'espace de reconstruction et leurs composantes constituent les éléments d'une matrice orthogonale U appelée matrice des vecteurs singuliers :

$$U^T=[c_1,c_2, \ldots ,c_M], \; U^TU=UU^T=I_M. \qquad \text{(III-7)}$$

b- La matrice des valeurs singulières

Ce n'est autre que la matrice S issue de la diagonalisation de la matrice de covariance Σ :

$$S=\text{diag}(s_1,s_2, \ldots ,s_M)=U^T\Sigma U. \qquad \text{(III-8)}$$

c- La matrice des composantes principales

On définit la matrice des composantes principales X' par :

$$X'=XU. \qquad \text{(III-9)}$$

Cette matrice d'ordre (N_v,M), dont les colonnes sont appelées "composantes principales", peut s'écrire sous la forme :

$$X'^T=[\vec{X}'_1,\vec{X}'_2, \ldots ,\vec{X}'_{N_v}] \text{ avec } \vec{X}_i'^T=\vec{X}_i^TU. \qquad \text{(III-10)}$$

3-3- La décomposition par valeurs singulières

La transformation ci-dessus peut être vue comme une rotation de l'espace de reconstruction Φ_M ou encore une projection du PPP dans un nouveau espace Φ'_M engendré par les vecteurs singuliers $[c_i/i=1,2, \ldots ,M]$ qu'on appelle "l'espace des composantes principales". La matrice des composantes principales X' peut être considérée comme une nouvelle matrice trajectoire représentant le PPP dans l'espace des composantes principales Φ'_M. L'intérêt de cette transformation apparaît lorsqu'on considère la matrice de covariance de X' ; nous avons :

$$\Sigma'=X'^{T}X'=S. \qquad \text{(III-11)}$$

i/ Sachant que les éléments non diagonaux de la matrice de covariance sont les coefficients de corrélation entre les composantes des vecteurs-trajectoires, on peut conclure qu'il n'y a pas de redondance dans l'espace des composantes principales car $\Sigma'_{ij}=0$ pour $i\neq j$.

ii/ Sachant que les éléments diagonaux ($\Sigma'_{ii}= s_i$ pour i=1,2, ... ,M) donnent les variances des axes correspondants, on peut se baser sur les valeurs singulières pour avoir une idée sur la dimension R du sous espace Φ_R (de l'espace Φ'_M) contenant la trajectoire reconstruite. En d'autres termes, lorsqu'une valeur singulière s_i est nulle, la trajectoire n'évolue pas dans la direction c_i.

4- REDUCTION DU BRUIT

La méthode des retard est valable en l'absence de bruit ce qui n'est jamais réellement le cas. Pour cela on utilise des techniques permettant de réduire le bruit et de ne garder que l'information dont l'origine est la dynamique sous-jacente du phénomène étudié. A cet égard, nous utilisons la décomposition par valeurs singulières (DVS).

4-1- Spectre des valeurs singulières

Le spectre des valeurs singulières est le graphe représentant $\log(s_i/s_0)$ en fonction de l'indice i. s_0 est un facteur de normalisation qu'on prend égal à s_1 ou à la trace de Σ. D'après le paragraphe précédent, l'observation de ce spectre permet de connaître la dimension R du sous espace Φ_R contenant la trajectoire reconstruite ; ce n'est autre que le nombre de valeurs singulières non nulles [81]. Dans la pratique, on obtient pas de valeurs singulières nulles et selon les valeurs de M (la dimension de reconstruction), L (le retard) et B (le taux de bruit), on obtient l'une des trois distributions de valeurs singulières suivantes :

$$\begin{cases} s_1 > s_2 > \dots > s_{M-1} > s_M \cdot \\ s_1 > s_2 > \dots > s_R >> s_{R+1} \approx s_{R+2} \approx \dots \approx s_{M-1} \approx s_M \cdot \\ s_1 > s_2 > \dots > s_R >> s_{R+1} > s_{R+2} > \dots > s_{M-1} > s_M \cdot \end{cases} \qquad \text{(III-12)}$$

La première distribution est généralement obtenue lorsque les paramètres de reconstruction sont optimums et pour des faibles taux de bruit alors qu'on obtient plutôt la deuxième distribution pour les grands taux de bruit ou des valeurs sous-estimées du retard. La troisième distribution reste la plus souvent rencontrée. En tous cas, retenons que dans les directions correspondant au petites valeurs singulières, l'extension de la trajectoire est si faible que le bruit risque de dominer et de masquer toute information déterministe.

4-2- Dimension de corrélation en présence du bruit

4-2-1- Rappel de l'algorithme de Grassberger-Procaccia

Pour calculer la dimension de corrélation D d'un attracteur étrange, on dispose de l'algorithme de Grassberger-Procaccia (G-P). L'intégrale de corrélation C(r) est donnée par [8] :

$$C(r)=\frac{1}{N_p}\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{N_v} H\left(r-\left\|\vec{X}_i-\vec{X}_j\right\|\right). \qquad \text{(III-13)}$$

* $N_p=N_v(N_v-1)/2$ est le nombre de paires de vecteurs-trajectoire utilisées.

* H est la fonction de Heaviside définie par : $\begin{cases} H(x)=1 \text{ si } x\geq 0. \\ H(x)=0 \text{ si } x<0. \end{cases}$

* r est le rayon d'une sphère (ou hyper-sphère) centrée sur un point P_i donné.

* $\left\|\vec{X}_i-\vec{X}_j\right\|$ est la distance entre deux points P_i et P_j (de l'espace de reconstruction Φ_M de dimension M) définis respectivement par les vecteurs $\vec{X}_i$ et $\vec{X}_j$.

La dimension de corrélation D est estimée par la pente D(r,M) de la courbe représentative de log(C) en fonction de log(r). La démarche classique consiste à tracer cette pente en fonction de log(r) pour des valeurs croissantes de la dimension de reconstruction M. Si le système étudié est déterministe, un "plateau" apparaît dans ces courbes à partir d'une certaine valeur de M et reste conservé lorsqu'on augmente M d'avantage. Dans ce cas, on dit qu'il y a "saturation". Notons que, pour pouvoir illustrer cette saturation, nous utilisons des valeurs de r comprise entre 0 et 1 et nous normalisons les distances, à chaque reconstruction, par la distance maximale qui peut exister entre les points de l'attracteur.

4-2-2- Combinaison de l'algorithme de G-P et la DVS

En présence de bruit, la démarche ci-dessus n'aboutit pas à l'existence d'un attracteur étrange même si la série temporelle est déterministe. En effet, à partir d'une certaine valeur de la dimension de corrélation, la composante déterministe de la trajectoire reste indifférente à l'augmentation systématique de M, contrairement au bruit qui trouve de plus en plus l'occasion de se manifester et de dominer. Ceci se reflète par l'augmentation de la dimension de corrélation avec la dimension de reconstruction et même la disparition du plateau des courbes de D(r,M) en fonction de log(r). Une solution à ce problème est suggérée par Albano *et al* [86] qui proposent une combinaison de la DVS et de l'algorithme de G-P. Cette technique permet en principe de limiter l'influence de la composante stochastique dans le calcul de la dimension de corrélation.

Rappelons que le spectre des valeurs singulières ne permet pas toujours de déterminer la dimension R du sous espace Φ_R contenant la composante déterministe de la trajectoire. Pour cela, on calcule l'intégrale de corrélation dans des sous espaces Φ_C (de l'espace Φ'_M) de dimension C≤M. Ceci revient à remplacer, dans l'algorithme de G-P, les vecteurs-trajectoire $\vec{X}_i$ par les nouveaux vecteurs-trajectoire $\vec{X}'_i$ (équation III-10) limités à leur C premières composantes. On fait donc varier C entre 2 et M et on retient la valeur de C qui donne le plateau le plus large et la meilleure convergence lorsqu'on augmente M pour chercher la saturation. Cette valeur de C n'est autre que la dimension R du sous espace contenant la composante déterministe de la trajectoire.

4-3- Composante déterministe de la trajectoire

Après avoir déterminé R, on peut extraire la composante déterministe de la trajectoire en effectuant une rotation inverse qui nous ramène à l'espace de reconstruction Φ_M. Pour cela on utilise la matrice transposée de U limitée à ses R premières colonnes. On retrouve l'espace de reconstruction Φ_M avec une matrice trajectoire X'' séparée d'une partie significative de sa composante stochastique [81] :

$$X'' = \overline{X}' \overline{U}^T . \qquad \text{(III-14)}$$

$\overline{X}'$ et $\overline{U}$ sont les matrices X' et U dont on n'a gardé que les R premières colonnes.

B- VALIDATION DE LA METHODE

Le système de Lorenz fournit un exemple typique de chaos déterministe. Les équations gouvernant l'évolution de ce système sont facilement résolubles et l'attracteur étrange qui lui est associé est bien connu dans la littérature. Afin de pouvoir faire confiance à notre méthode d'analyse, nous l'avons testée sur ce système dont on sait que la caractérisation est délicate avant de l'appliquer à l'effet Portevin-Le Châtelier.

Dans un premier temps, nous résolvons le flot du système de Lorenz et nous montrons une projection de l'attracteur associé à ce système. Nous calculons sa dimension de corrélation en utilisant l'algorithme de G-P où les vecteurs $\vec{X}_i$ ont pour composantes les variables d'état du système. Ensuite, à partir d'une série temporelle constituée par l'une des variables d'état du système, nous dressons le pseudo-portrait de phases du système en utilisant la méthode des retards. Nous calculons de nouveau la dimension de corrélation de l'attracteur en utilisant l'algorithme de G-P où les vecteurs $\vec{X}_i$ sont, cette fois ci, les vecteurs de reconstruction. Enfin, pour montrer la capacité de cette méthode d'analyse à réduire le bruit, nous avons ajouté une composante aléatoire à la série temporelle précédente. Grâce à la décomposition par valeurs singulières, nous avons tenté d'extraire l'information déterministe contenue dans la nouvelle série temporelle.

1- RESOLUTION DU FLOT DE LORENZ

Pour l'étude du comportement d'un fluide en convection, Lorenz propose le modèle défini par le flot tridimensionnel autonome suivant [10] :

$$\begin{cases} \dot{x} = Pr(y - x). \\ \dot{y} = -xz + rx - y. \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases} \qquad \text{(III-15)}$$

En général, on fixe les valeurs de Pr et b (très souvent Pr=10 et b=8/3) et on utilise r comme paramètre de contrôle. Pour les faibles valeurs de r, les solutions stables sont stationnaires ; en revanche, lorsque r devient supérieur à 24.74, les trajectoires projetées sur le plan (x,y) décrivent des orbites irrégulières autour de deux points fixes instables C et C' : comme le montre la figure III-2, la trajectoire converge vers un attracteur étrange.

1-1- Portrait de phases

Pour r=28, nous avons résolu le flot III-15 au moyen d'un algorithme Prédicteur-Correcteur standard. Pour un temps d'échantillonnage T_s=0.003 s, et un intervalle de temps d'intégration T_t=30 s, nous avons obtenu des séries temporelles des variables d'état x, y, et z ayant 10 000 points chacune. La figure III-1 montre une série temporelle de la variable x. Les variations irrégulières de cette dernière laissent penser que le comportement du système est aléatoire.

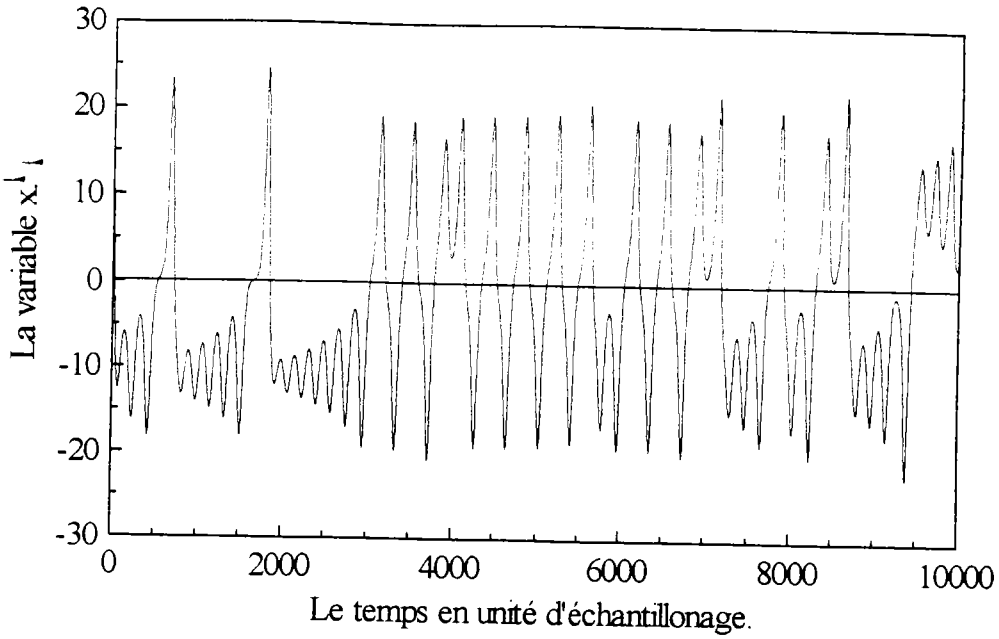


Figure III-1 : Série temporelle de la variable x.
(N_s=10000 et T_s=3.10^{-3} s)

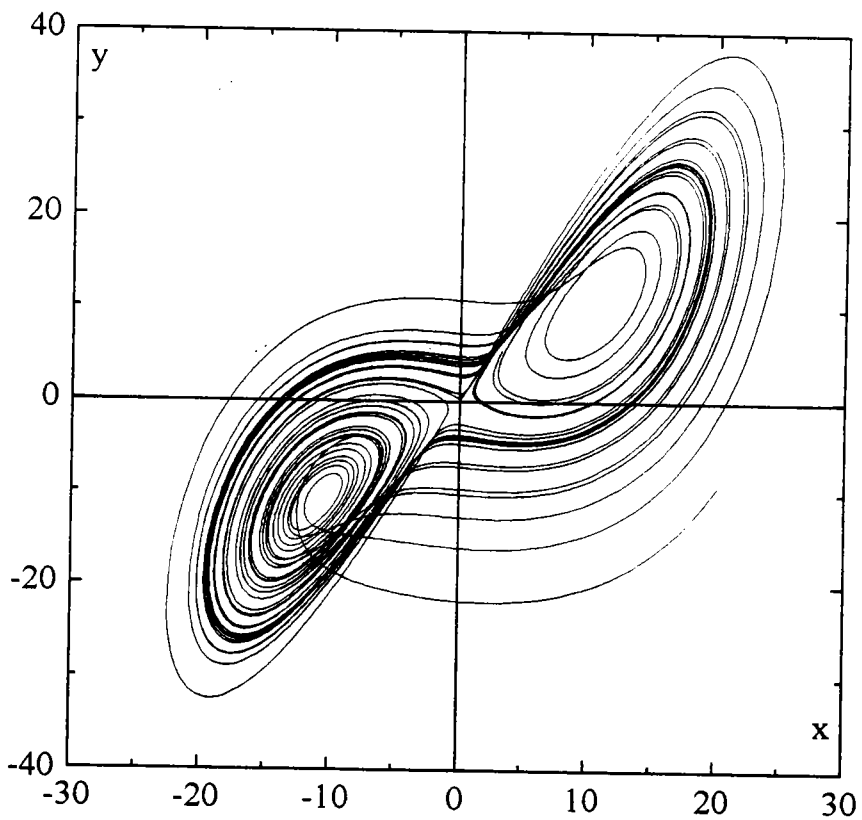


Figure III-2 : Projection du portrait de phases du système de Lorenz sur le plan (x,y) de l'espace de phases.

En utilisant les série temporelles des variables x et y, nous avons dressé, sur la figure III-2, la projection du portrait de phases du système de Lorenz sur le plan (x,y). Contrairement à l'aspect des variations temporelles de x, on observe un certain ordre dans l'évolution de la trajectoire de phases du système : cette dernière est attirée par un attracteur étrange caractérisé par une dimension de corrélation que nous allons estimer ci-dessous en utilisant l'algorithme de G-P.

1-2- Dimension de corrélation

On utilise l'espace de phases réel pour calculer l'intégrale de corrélation : les coordonnées des vecteurs $\vec{X}_i$ sont les trois paramètres d'état x,y et z du système. L'utilisation de l'algorithme de G-P conduit au résultat fourni par la figure III-3. Cette dernière montre les variations, en fonction de log(r), de la pente de l'intégrale de corrélation associée à l'attracteur de Lorenz. Un plateau s'étend de -5.2 à -1.8 et affiche une dimension de corrélation D=1.8±0.1. C'est une valeur assez compatible avec celles de la littérature [6].

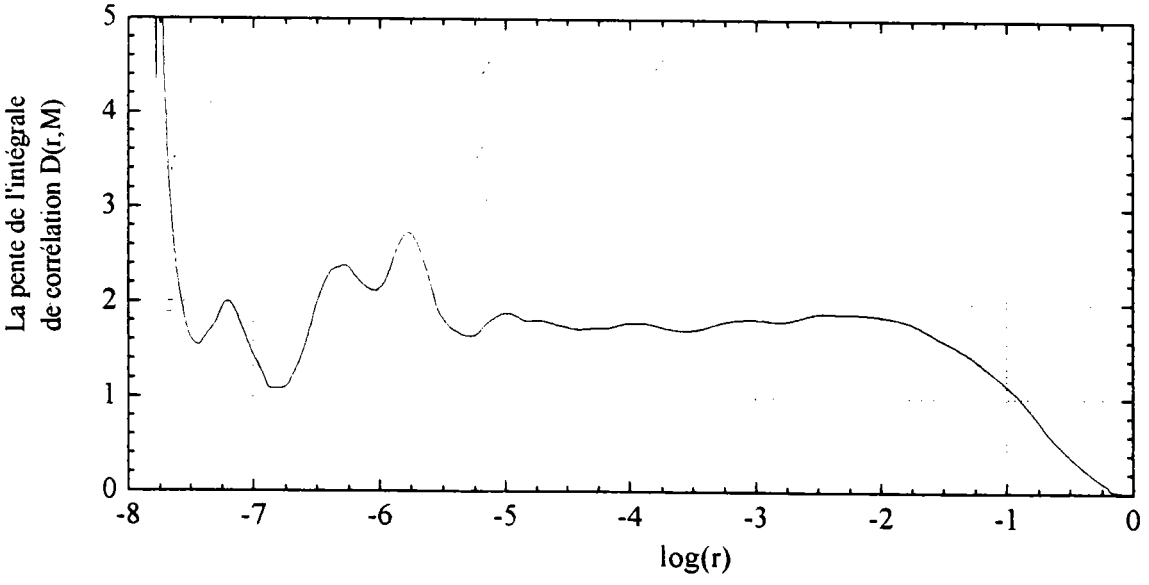


Figure III-3 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r).

2- LA METHODE DES RETARDS EN L'ABSENCE DE BRUIT

Dans ce qui suit, nous supposons que nous ne connaissons pas le flot du système de Lorenz, mais nous disposons de la série temporelle de la figure III-1 que nous allons appeler LOR.DAT. En utilisant la méthode des retards, nous allons tenter de retrouver les résultats précédents.

2-1- Pseudo-portrait de phases (PPP)

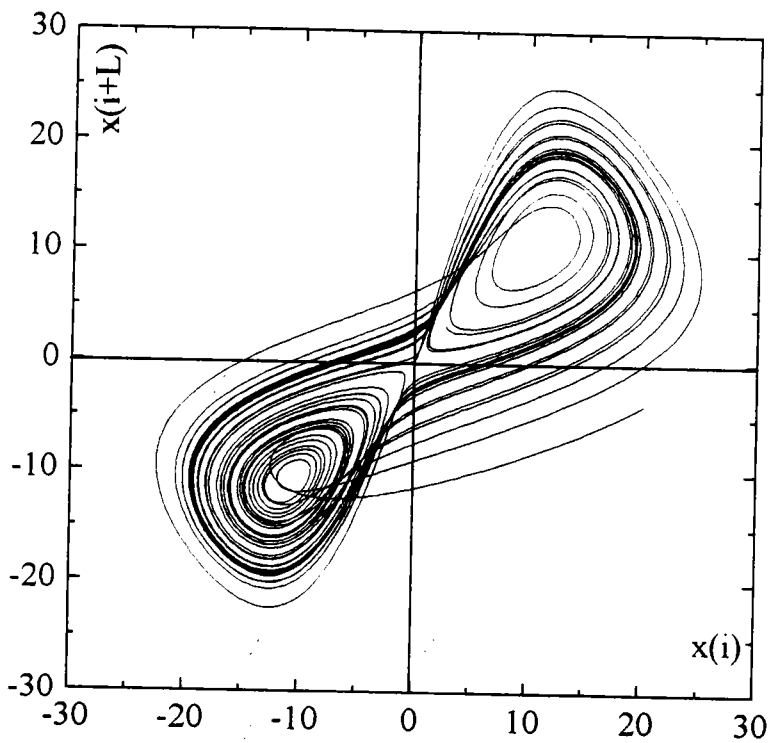


Figure III-4 : Projection du pseudo-portrait de phases sur le plan (1,2) de l'espace de reconstruction pour L=30 et M arbitraire.

En utilisant la série LOR.DAT, pour un retard L=30 et une dimension de reconstruction arbitraire, la figure III-4 montre la projection du PPP sur le plan (1,2) de l'espace de reconstruction. On observe que la trajectoire reconstruite décrit une orbite irrégulière semblable, au sens d'un difféomorphisme, à celle de la figure III-2. Grâce à la méthode des retards, nous avons donc pu reconstruire l'attracteur de Lorenz au lieu de résoudre le flot du système.

2-2- Dimension de corrélation

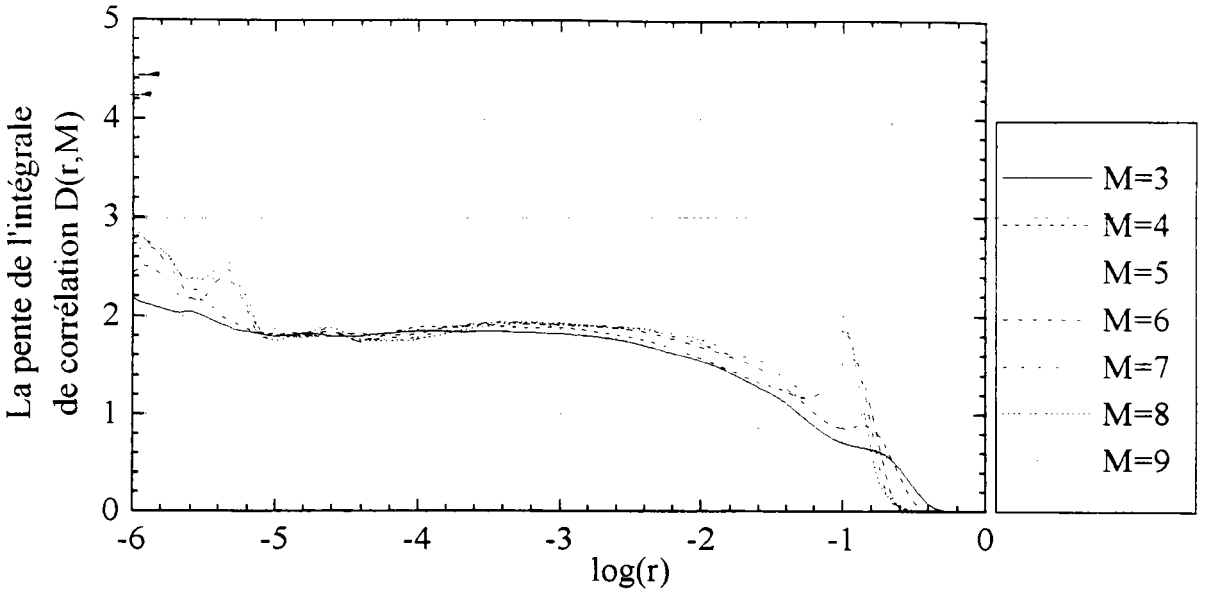


Figure III-5 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour L=30 et M allant de 3 jusqu'à 9.

Dans l'algorithme de G-P, on utilise le portrait de phases reconstruit à l'aide de la série LOR.DAT. La figure III-5 montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r). Afin de vérifier si la saturation a lieu, nous avons calculé cette pente, pour un retard L=30, dans des espaces de reconstruction de dimension croissante. A partir de M=5, les courbes présentent un plateau qui s'étend de -4.8 à -2.3, indiquant une dimension de corrélation $D=1.85\pm0.10$. C'est une valeur compatible avec celle calculée en résolvant le flot du système de Lorenz (cf. paragraphe 1-1-2).

3- QUE SE PASSE-T-IL EN PRESENCE DE BRUIT ?

Si l'on néglige les erreurs numériques (nous avons exigé une grande précision lors de la résolution du flot), on peut dire que la série temporelle utilisée jusqu'à présent ne contient que très peu de bruit et que c'est pour cette raison que la méthode des retards donne de bons résultats. Pour nous en assurer, ajoutons une composante aléatoire à la série LOR.DAT et observons les changements. Le taux de bruit introduit est modulé à B=5% de la valeur moyenne du signal et la nouvelle série est appelée LOR.B005.

3-1- Pseudo-portrait de phases

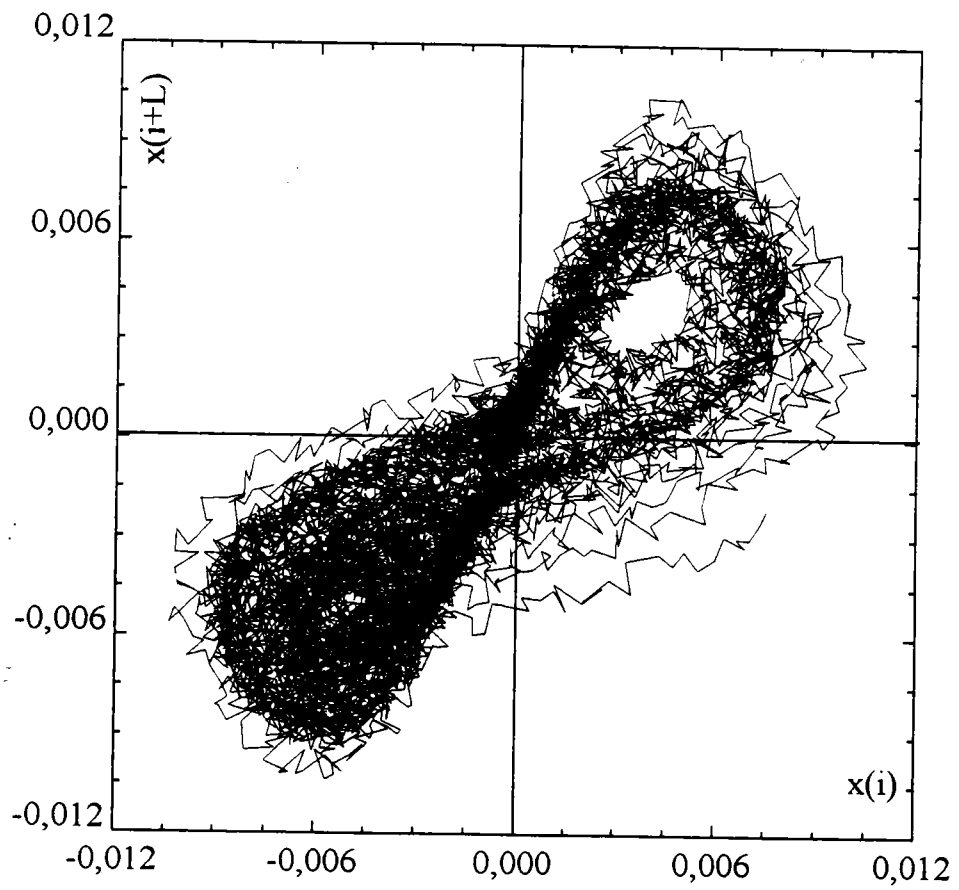


Figure III-6 : Projection du pseudo-portrait de phases sur le plan (1,2) pour L=30 et B=0.05.

Pour le même retard (L=30) et une dimension de reconstruction arbitraire, la figure III-6 montre la projection du PPP, sur le plan (1,2), en utilisant la série LOR.B005. En comparaison avec la figure III-4, on voit que la trajectoire reconstruite n'est pas aussi régulière à cause de la présence du bruit. On perdrait toute trace des caractéristiques de l'attracteur si l'on augmentait le taux de bruit.

3-2- Dimension de corrélation

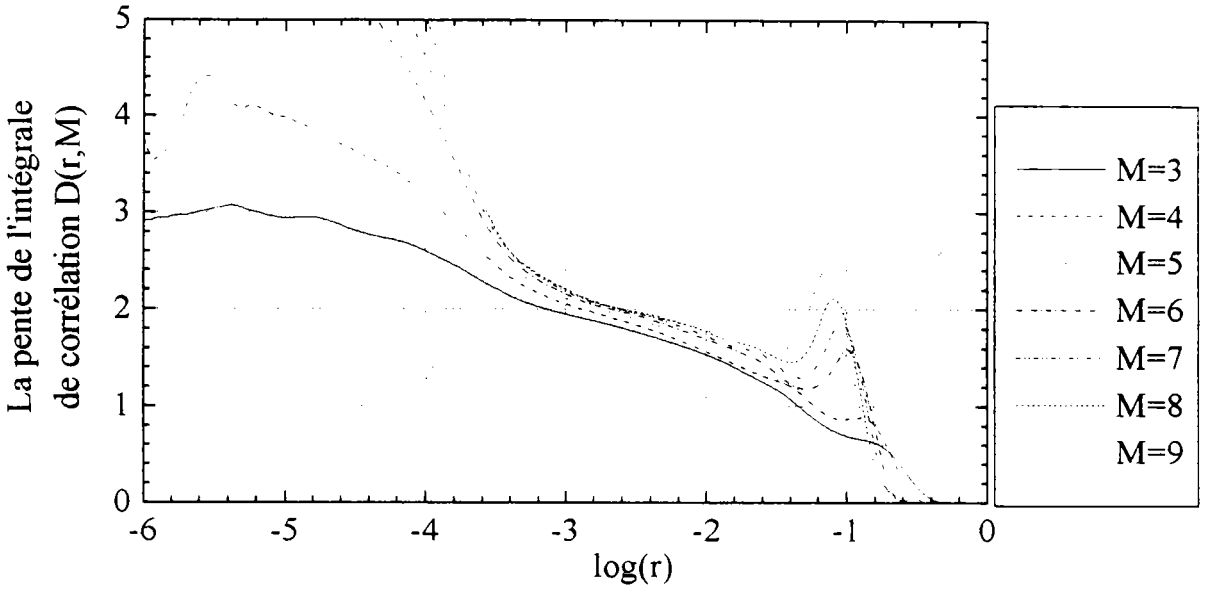


Figure III-7 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour B=0.05, L=30 et M allant de 3 jusqu'à 9.

La figure III-7 montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour L=30 et des valeurs croissantes de la dimension de reconstruction M. En comparant ce résultat à celui de la figure III-5, on peut conclure que la présence de bruit masque le plateau de la figure III-5 et que les valeurs de la pente ne cessent d'augmenter avec M, surtout pour les faibles valeurs de r. Cette perte de la saturation est due à l'augmentation de la fenêtre d'observation W=(M-1).L et à la décorrélation qui en résulte.

4- CALCUL DE LA DIMENSION DE CORRELATION EN PRESENCE DE BRUIT

4-1- Influence des paramètres de reconstruction

En fait, le calcul de la dimension de corrélation est très sensible aux valeurs des paramètres de reconstruction. La démarche classique consistant à augmenter la dimension de reconstruction pour chercher la saturation n'est pas toujours applicable. Pour une même valeur du retard, lorsque la dimension de reconstruction augmente, la présence du bruit fait que le PPP a tendance à occuper tout l'espace de reconstruction, quel que soit sa dimension. En l'occurrence, pour un taux de bruit B=1, la pente moyenne de l'intégrale de corrélation est sensiblement égale à la dimension de reconstruction. Pour ces raisons, nous allons nous servir des critères de choix des paramètres de reconstruction cités au début de ce chapitre, afin d'utiliser, pour une dimension de reconstruction donnée, une valeur convenable du retard.

4-1-1- Paramètres de reconstruction optimums

a- Temps de corrélation

La figure III-8 montre la fonction d'auto-corrélation associée à la série LOR.B005. Le temps de corrélation indiqué est de l'ordre de 75 unités d'échantillonnage, ce qui suggère [86] que la longueur de la fenêtre W est comprise entre 120 et 260.

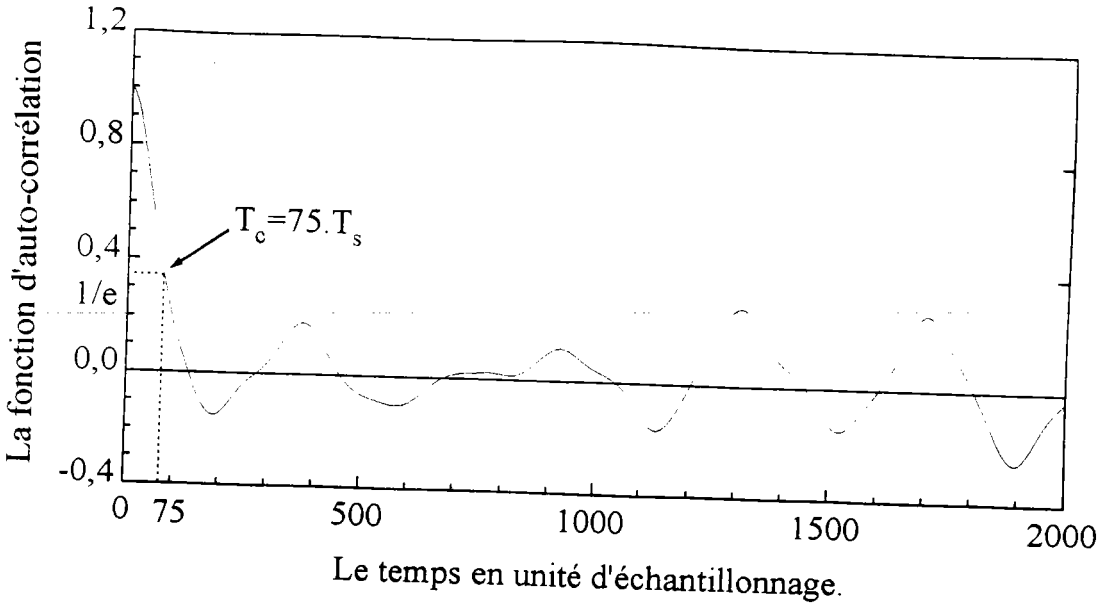


Figure III-8 : Variations temporelles de la fonction d'auto-corrélation de la série temporelle LOR.B005. (T_s=3.10^{-3} s et T_c=75.T_s).

b- Déplacement moyen

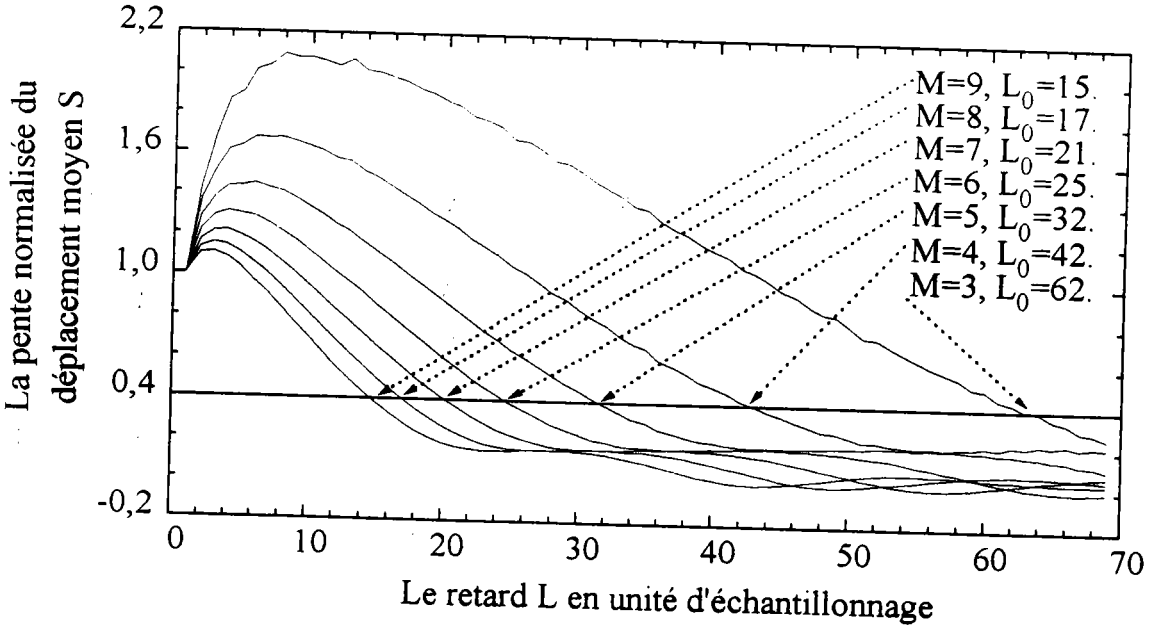


Figure III-9 : Variations de la pente normalisée du déplacement moyen S en fonction du retard L pour M allant de 3 jusqu'à 9.

Pour M allant de 3 à 9, la figure III-9 montre les variations du rapport S'(L)/S'(1) en fonction du retard L. Sachant que le retard optimum L_0 est tel que S'(L_0) est égale à 40% de S(1) [84], on en déduit que les couples (M,L) optimums sont (3,62), (4,42), (5,32), (6,25), (7,21), (8,17) et (9,15). Ces derniers correspondent à une fenêtre dont la longueur est de l'ordre de 124 unités d'échantillonnage. C'est une longueur compatible avec celle suggérée par le temps de corrélation.

4-1-2- Dimension de corrélation

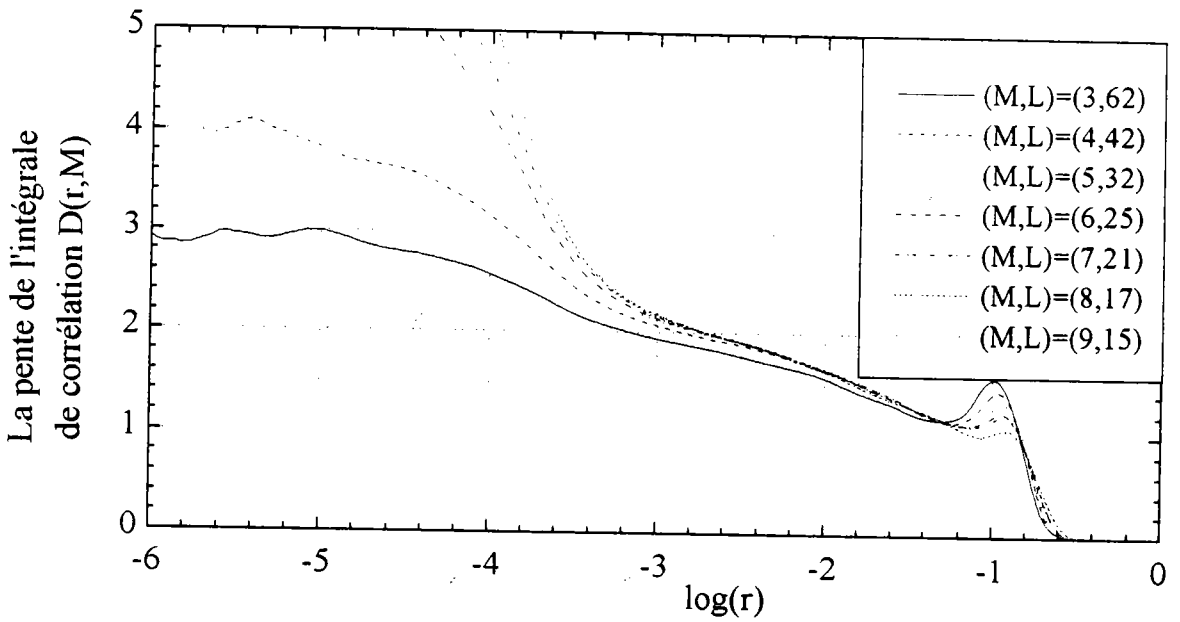


Figure III-10 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour les couples (M,L) optimums.

La figure III-10 montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation en fonction de log(r) pour les couples de paramètres de reconstruction optimums. En comparaison avec la figure III-7, les valeurs de la pente n'augmentent pas avec M. La convergence est assurée lorsque M augmente, mais seulement dans la mesure où la longueur de la fenêtre d'observation reste quasi-constante. Cependant le résultat recherché qui est la dimension de corrélation n'est pas obtenu : la présence de bruit empêche l'apparition d'un plateau.

4-2- Application de la décomposition par valeurs singulières

4-2-1- Spectre des valeurs singulières

La figure III-11 montre le spectre des valeurs singulières pour les couples de paramètres de reconstruction optimums. Jusqu'à i=5, on constate une variation linéaire en fonction de i et, à partir de i=6, les valeurs singulières sont pratiquement comparables. On en déduit que, dans l'espace des composantes principales, la trajectoire est confinée à un sous espace Φ_R de dimension R=6.

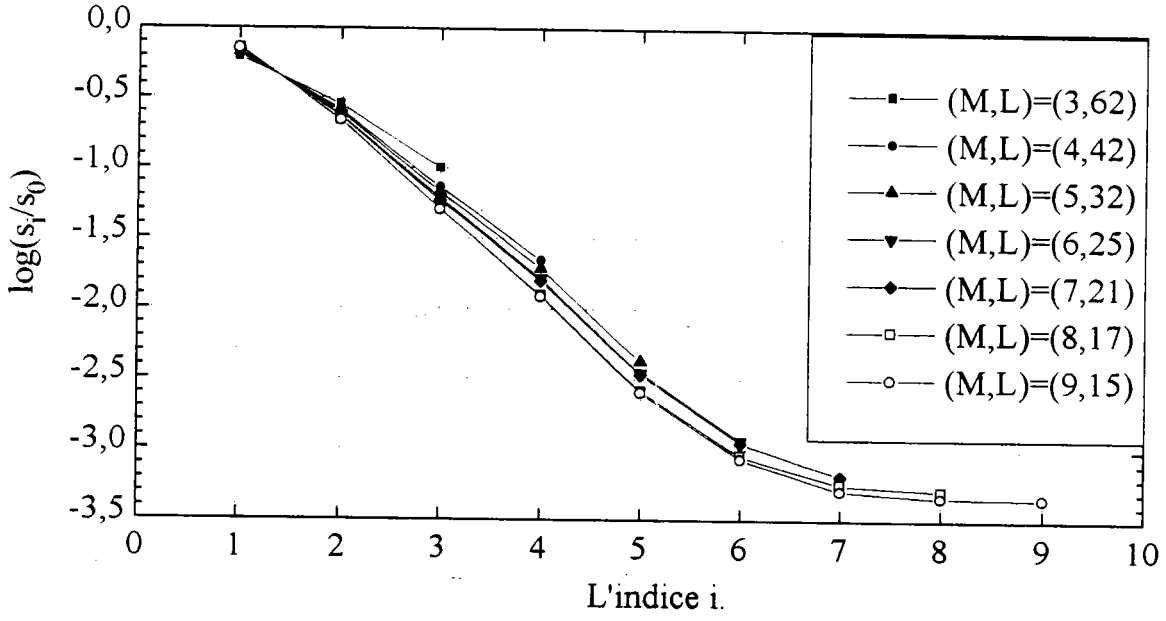


Figure III-11 : Le spectre des valeurs singulières pour les couples (M,L) optimums.

4-2-2- Dimension de corrélation

La figure III-12 montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation en fonction de log(r) pour le couple (M,L)=(9,15). Les huit courbes superposées correspondent, de bas en haut, à C croissant de 2 à M. C est le nombre de composantes principales utilisées dans l'algorithme de G-P pour le calcul de la dimension de corrélation D.

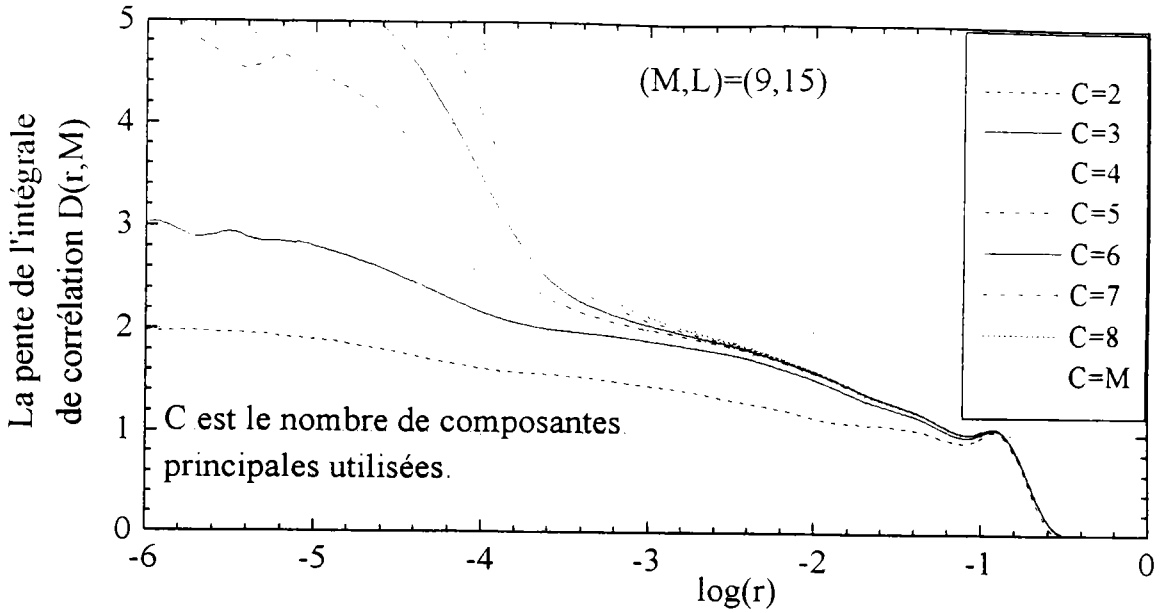


Figure III-12 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour (M,L)=(9,15) et C allant de 2 à M.

Nous avons tracé cette figure pour montrer deux résultats. D'une part, les variations de la pente de l'intégrale de corrélation en fonction de log(r) restent pratiquement les mêmes pour C allant de 6 à M, ce qui confirme le résultat ci-dessus suivant lequel la trajectoire reconstruite est confinée à un sous-espace Φ_R de dimension R=6. D'autre part, pour les faibles valeurs de r, on commence à perdre le plateau dès que l'on dépasse C=3 ; on en déduit que le bruit domine dans les directions c_i telles que i>3. En conclusion, dans l'espace des composantes principales, la composante déterministe de la trajectoire est confinée à un sous-espace Φ_C de dimension C=3. C'est dans cet espace que nous devons calculer la dimension de corrélation si l'on veut réduire l'influence du bruit.

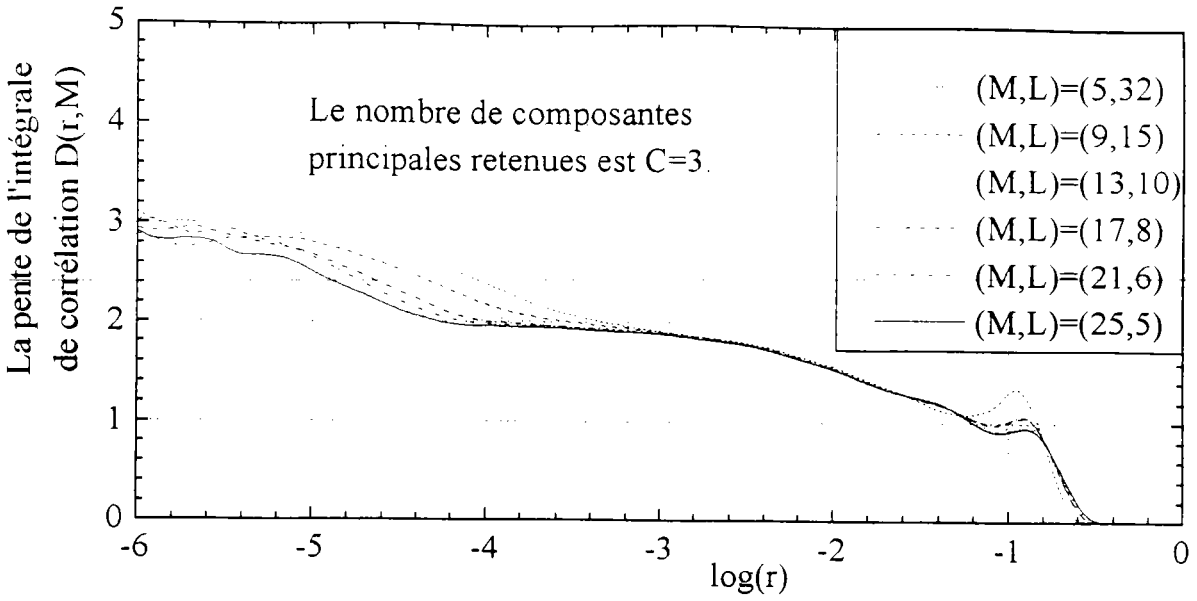


Figure III-13 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour les couples (M,L) optimums et C=3.

La figure III-13 montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation en fonction de log(r) pour des couples optimums donnés par S(L) en se limitant à un nombre de composantes principales égal à trois. Pour montrer qu'il y a "saturation", nous avons augmenté la dimension M (de 5 à 25 avec un pas de 4) tout en gardant la longueur de la fenêtre égale à la valeur optimale donnée par le déplacement moyen et le temps de corrélation. En utilisant seulement les trois premières composantes principales (C=3) dans l'algorithme de G-P, un plateau apparaît entre -4.4 et -2.6 et indique une dimension de corrélation D=1.95±0.05 compatible avec la littérature.

5- COMPOSANTE DETERMINISTE DE LA TRAJECTOIRE

Pour une meilleure démonstration de la capacité à extraire la composante déterministe de la trajectoire, nous allons utiliser une série temporelle contenant moins de bruit que celle utilisée jusqu'à présent. Cette série, que nous avons appelé LOR.B001, est obtenue en ajoutant une composante aléatoire à la série LOR.DAT avec un taux B=0.01.

5-1- L'espace de reconstruction

En utilisant la série temporelle LOR.B001 et l'un des couples de paramètres de reconstruction optimums (M,L)=(9,15), la figure III-14 montre la projection du PPP sur le plan (1,2) de l'espace de reconstruction Φ_M. Les irrégularités observées sont dues au bruit que nous avons introduit.

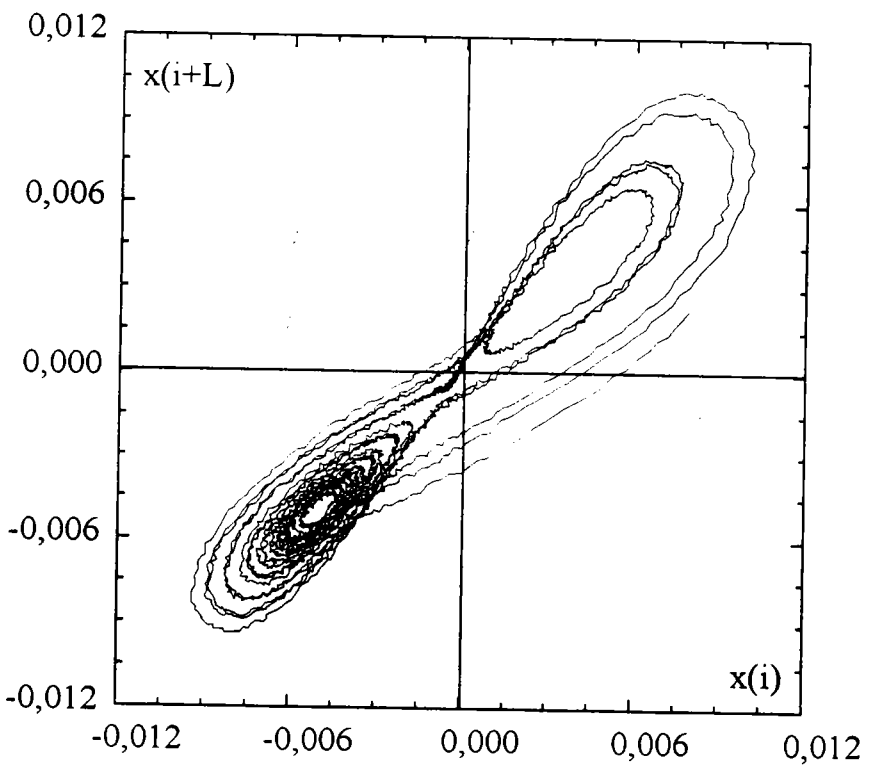


Figure III-14 : Projection de la trajectoire reconstruite sur le plan (1,2) de l'espace de reconstruction pour (M,L)=(9,15).

5-2- L'espace des composantes principales

Grâce à la matrice des vecteurs singuliers U on effectue une rotation de l'espace de reconstruction Φ_M. Le PPP est alors projeté dans l'espace des composantes principales Φ'_M dans lequel la composante déterministe de la trajectoire est confinée au sous-espace Φ_C (de dimension C=3) engendré par les trois premiers vecteurs singuliers c_1,c_2 et c_3.

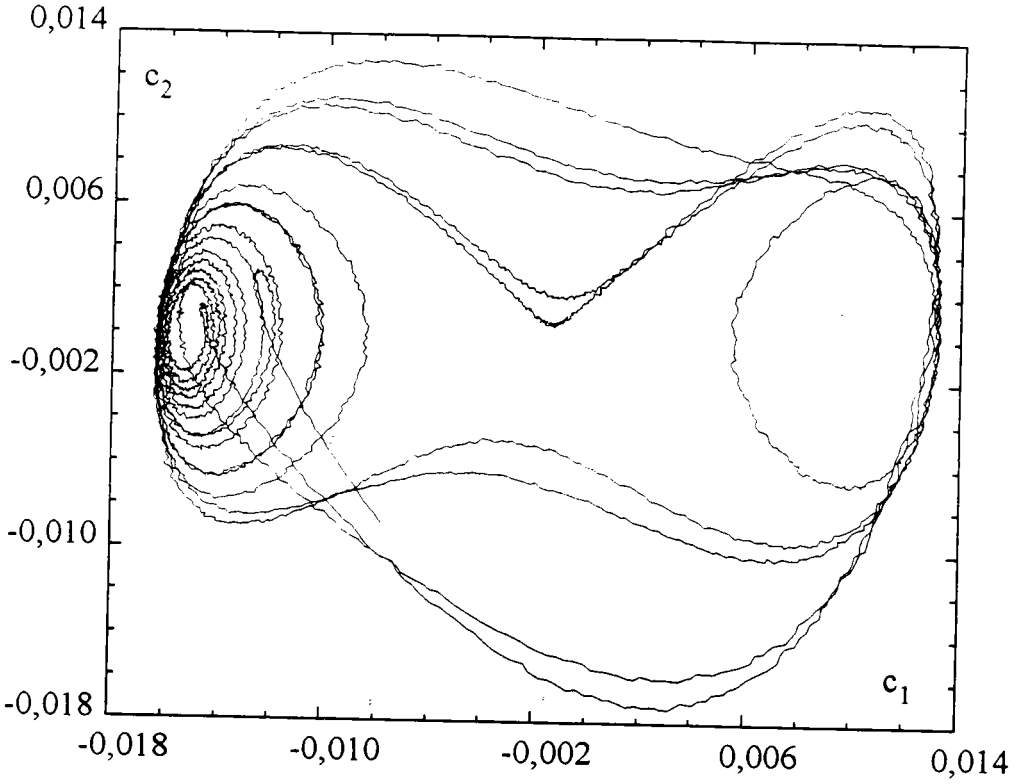


Figure III-15 : Projection de la trajectoire reconstruite sur le plan (c_1,c_2) de l'espace des composantes principales pour (M,L)=(9,15).

La figure III-15 montre la projection de la trajectoire reconstruite sur le plan (c_1,c_2) de l'espace des composantes principales Φ'_M. En comparaison avec la figure III-14, les irrégularités constatées dans l'évolution de la trajectoire sont affaiblies. On remarque aussi une meilleure extension de la trajectoire dans cet espace. Celle-ci résulte du fait que les composantes des vecteurs-trajectoires sont décorrélées dans l'espace Φ'_M.

5-3- Retour à l'espace de reconstruction :

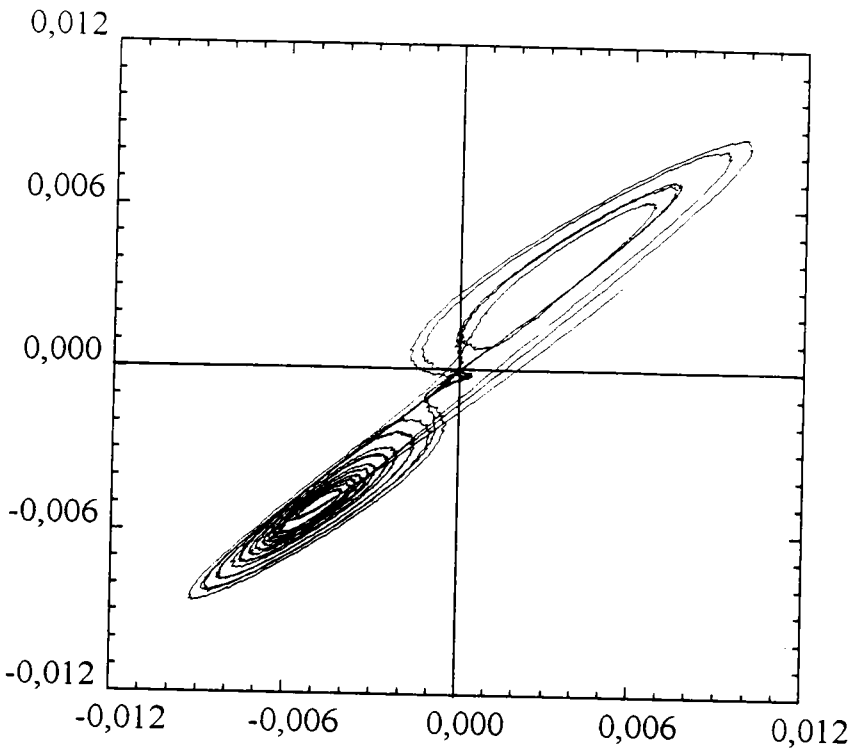


Figure III-16 : Projection de la composante déterministe de la trajectoire sur le plan (1,2) de l'espace de reconstruction pour (M,L,C)=(9,15,3).

Pour une meilleure comparaison avec la figure III-14, nous avons effectué une rotation inverse, du sous-espace Φ_C de dimension C=3, en utilisant la transposée de la matrice des vecteurs singuliers limitée à ses trois premières colonnes. La différence du PPP de la figure III-16 avec celui de la figure III-14 est évidente : la DVS a permis de réduire le bruit qui se manifestait par des irrégularités dans l'évolution de la trajectoire reconstruite. On s'approche même du portrait de phases de la figure III-2.

Chapitre IV.

ANALYSE DYNAMIQUE DE L'EFFET PORTEVIN-LE CHATELIER

Lors de la traction, à vitesse de déformation constante, d'un matériau sujet à l'effet Portevin-Le Chatelier (PLC), la courbe de traction présente des décrochements de la contrainte. Comme cela a été indiqué au premier chapitre, ces décrochements se répètent de manière souvent irrégulière. D'autre part, on dispose de modèles dynamiques qui prévoient l'émergence d'un comportement chaotique pour certaines valeurs des paramètres de contrôle. On est donc conduit à la caractérisation dynamique de séries temporelles expérimentales, pour rechercher une éventuelle confirmation de ces prévisions théoriques.

Lorsque les effets d'inertie peuvent être considérés comme négligeables, la contrainte de traction est uniforme le long de l'éprouvette d'essai. Il en résulte qu'elle constitue un signal "global", indépendant de la taille de l'échantillon ainsi que de celle des bandes de déformation. Les séries temporelles de la contrainte sont donc bien adaptées à l'analyse du comportement moyen de l'éprouvette, malgré la distribution non uniforme des vitesses de déformation plastique. Des séries temporelles de la contrainte sont donc examinées à l'aide de la méthode d'analyse dynamique décrite dans le chapitre précédent. Celles-ci nous ont été confiées par des expérimentateurs [11,12], collaborant avec nous dans le but de répondre à la question posée dans l'introduction de ce mémoire, à savoir : la dynamique de l'effet PLC est-elle, ou non, chaotique déterministe ?

1- DESCRIPTION DES SERIES TEMPORELLES ANALYSEES

Les essais de traction de divers alliages d'aluminium sujets à l'effet PLC ont été réalisés sur machine dure, c'est-à-dire à vitesse de déformation constante. La fréquence f_s de l'enregistrement des variations de la contrainte d'écoulement σ est constante. On obtient alors des séries temporelles $\left[\sigma_i / i=1,2, \ldots ,N_s\right]$ où σ_i est la valeur de σ à l'instant $t_i=i.T_s$. T_s est le temps d'échantillonnage donné par $T_s=1/f_s$; c'est l'intervalle de temps séparant deux relevés successifs de la contrainte. La durée de l'enregistrement, appelée longueur de la série temporelle, est alors donnée par $T_t=(N_s-1).T_s$.

1-1- Les séries temporelles de J. Vergnol (Université de Poitiers)

L'essai de traction a été réalisé sur un échantillon d'un monocristal de l'alliage Cu-7%Al [11]. La vitesse de déformation était fixée à $3{,}34.10^{-4}$ s^{-1} et l'expérience s'est déroulée à la température ambiante T=294°K. L'enregistrement des variations de la contrainte a été fait à la fréquence 245 Hz et il a été stocké dans 16 fichiers contenant 3072 valeurs chacun. On dispose alors de 16 séries temporelles dont la longueur et le temps d'échantillonnage sont respectivement de l'ordre de 12 s et 4.10^{-3} s. Dans l'ordre chronologique, ces séries ont été nommées VER01.DAT, VER02.DAT,...,VER16.DAT. Parmi ces dernières, la figure IV-1 montre la série VER09.DAT. On constate une apparence aléatoire des variations de la contrainte au cours du temps. En plus des décrochements associés à l'effet PLC, en nombre relativement faible, on remarque des décrochements minuscules qui seraient dus au dispositif de mesure.

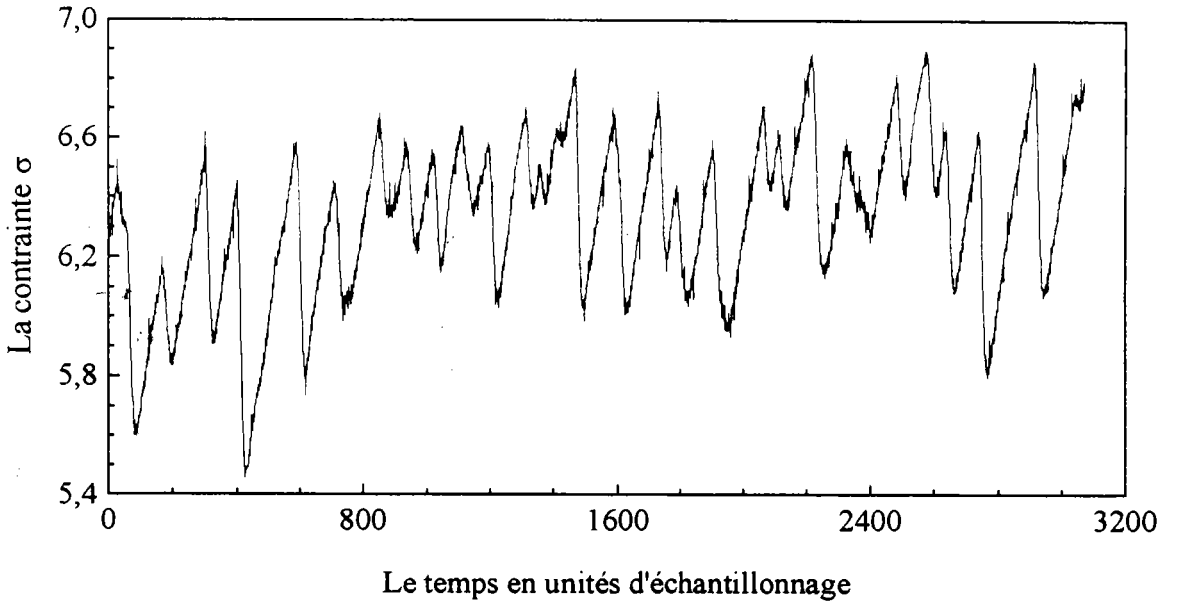


Figure IV-1 : La série temporelle VER09.DAT.
($T_s=4.10^{-3}$ s et $N_s=3072$)

1-2- Les séries temporelles de S. Bakir (LPMM, Université de Metz)

L'essai de traction est réalisé sur un échantillon d'un polycristal de l'alliage Al-3%Mg [12]. Cet échantillon de longueur 50 mm et de largeur 5 mm a été extrait d'une plaque d'épaisseur 0,5 mm. Après avoir passé trois heures à une température de 460°C, l'échantillon a été refroidi ce qui donne une grandeur moyenne des grains de 250 μm. La déformation a eu lieu à la température ambiante avec une vitesse constante de $6{,}67.10^{-5}$ s^{-1}. Lorsque la déformation a atteint 10%, un nombre N_s=28254 de valeurs de la contrainte a été relevé avec une fréquence constante f_s=20 Hz. On obtient alors la série LPMM1.DAT ayant un temps d'échantillonnage $T_s=5.10^{-2}$ s et une longueur proche de 40 heures (voir la figure IV-2).

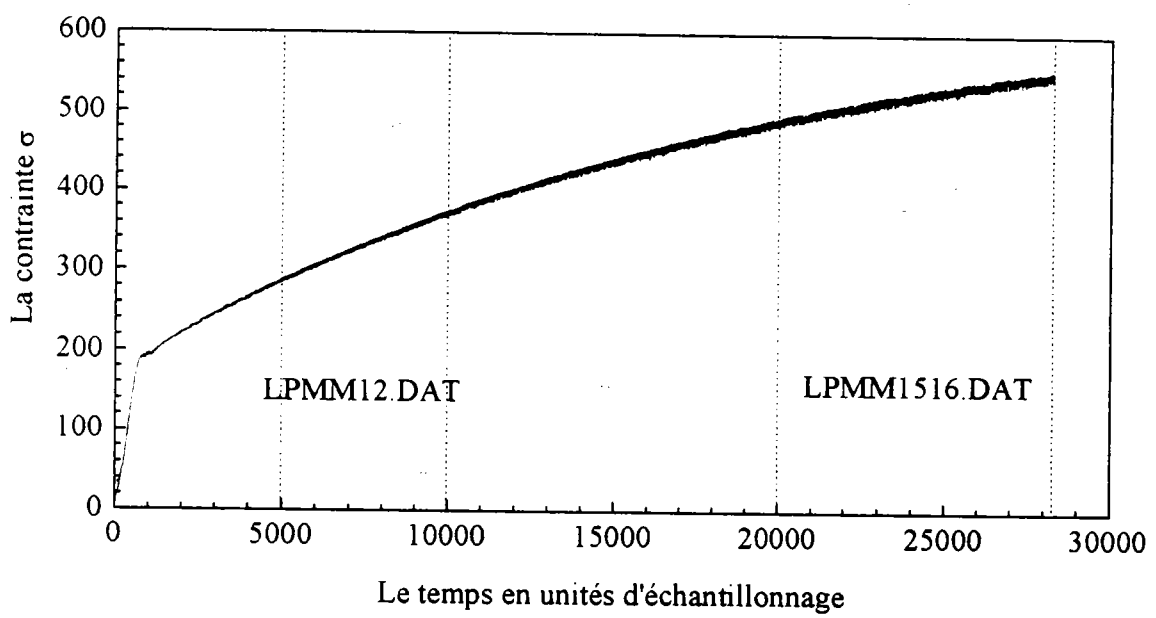


Figure IV- 2 : La série temporelle LPMM1.DAT.
($T_s=5.10^{-2}$ s et N_s=28254)

1-3- Traitement préalable des séries temporelles

Dans la méthode d'analyse préconisée, la série temporelle est supposée être stationnaire. Ici, le terme "stationnaire" signifie que la variable constituant la série temporelle oscille autour de zéro et garde une amplitude moyenne constante. L'observation de la série LPMM1.DAT montre que ces deux conditions ne sont pas vérifiées. A cause de l'écrouissage du matériau et des modifications structurelles qui lui sont associées, les séries fournies par Vergnol et Bakir présentent une dérive vers des valeurs croissantes de la contrainte et une augmentation de l'amplitude des décrochements au cours du temps. Afin de minimiser cette augmentation de l'amplitude, nous avons été amenés à partager la série LPMM1.DAT en séries plus petites. Pour satisfaire à la première condition, nous construisons des séries variant autour de zéro en retranchant des séries initiales la tendance moyenne représentée par un polynôme d'ordre suffisant. Notre étude a été concentrée, particulièrement, sur la série VER09.DAT parmi les séries fournies par Vergnol puis sur les séries LPMM12.DAT et LPMM1516.DAT indiquées sur la figure IV-2. On note que LPMM12.DAT fait apparaître encore un accroissement de l'amplitude des oscillations, alors que celle-ci reste sensiblement constante dans la série LPMM1516.DAT.

2- RESULTATS DE L'ANALYSE DYNAMIQUE

2-1- Analyse de la série temporelle VER09.DAT

Après avoir retranché la moyenne à la série VER09.DAT, nous obtenons la série stationnaire, nommée VER09.FIT, qui sera utilisée dans les calculs. La figure IV-3 permet de voir que la variable constituant cette série varie autour de zéro tout en gardant le même aspect que la série initiale.

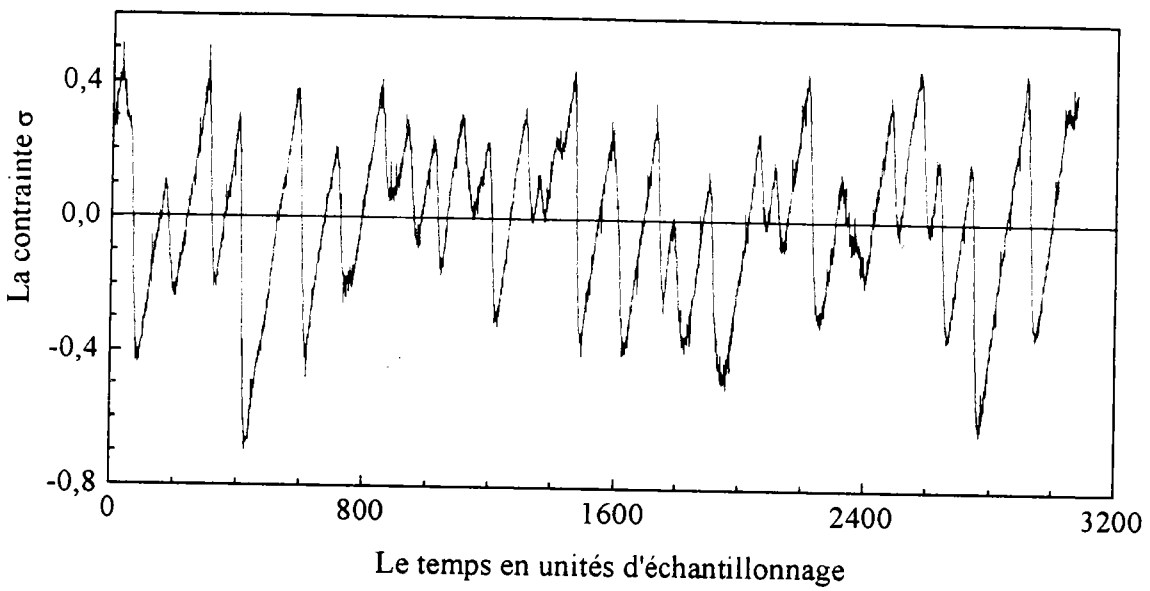


Figure IV-3 : La série temporelle VER09.FIT.
(T_s=4.10^{-3} s et N_s=3072)

2-1-1- Choix des paramètres de reconstruction

a- Le temps de corrélation

La figure IV-4 montre les variations temporelles de la fonction d'auto-corrélation de la série VER09.FIT. On obtient un temps de corrélation égal à 29 unités d'échantillonnage (T_c=29.T_s=0,116 s) ce qui suggère (d'après [86]) des

couples de paramètres de reconstruction (M,L) tels que la longueur de fenêtre W=(M-1).L soit comprise entre 47 et 101.

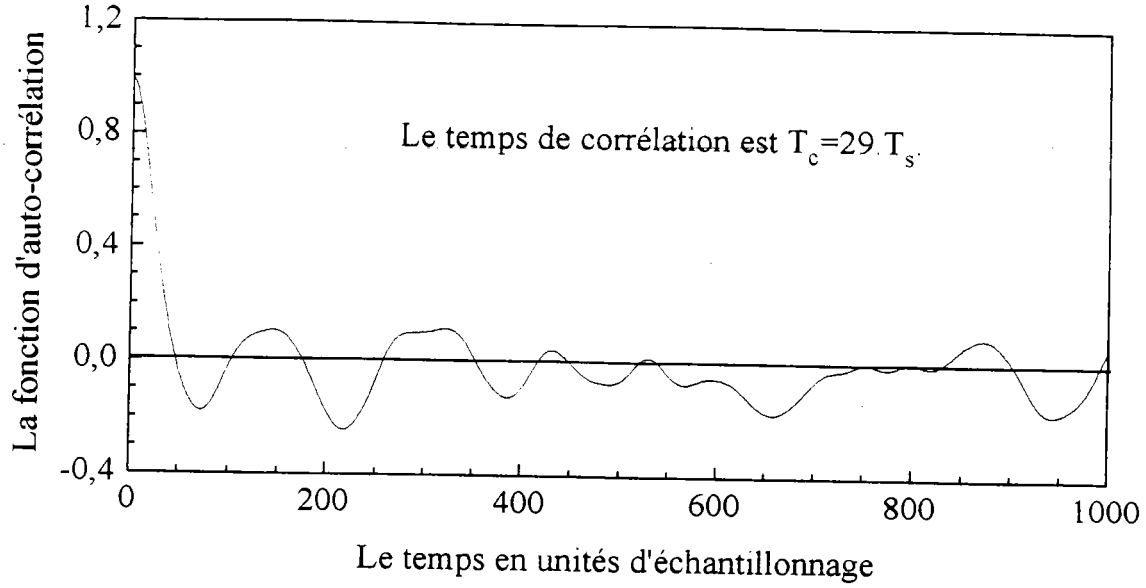


Figure IV-4 : Variations temporelles de la fonction d'auto-corrélation de la série VER09.FIT. (T_s=4.10^{-3} s)

b- Le déplacement moyen

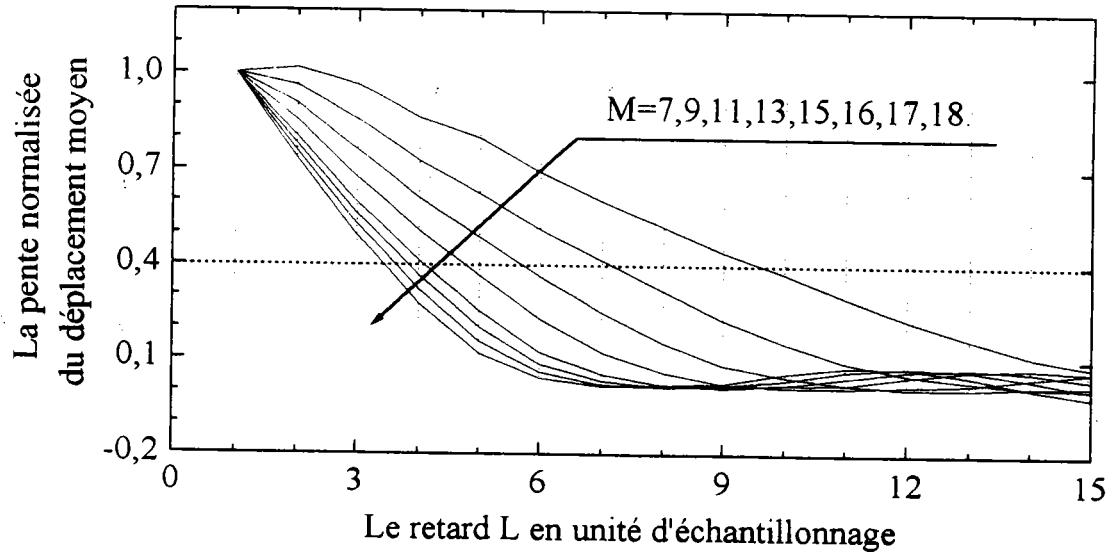


Figure IV-5 : Variations de la pente normalisée du déplacement moyen S

Même s'il permet de borner la longueur de la fenêtre W, le critère du temps de corrélation laisse le domaine des paramètres de reconstruction (M,L) assez vaste. C'est pour cela que nous avons calculé les variations de la pente normalisée du déplacement moyen S en fonction du retard L pour des valeurs croissantes de la dimension de reconstruction M. La figure IV-5 montre que, pour M=7, 9, 11 et 13, les retards optimums sont respectivement L=10, 8, 6 et 5, et pour M≥15 le retard optimum est L=4 [84]. En plus de la précision de ce critère, les fenêtres qu'il suggère ont des longueurs situées dans l'intervalle conseillé par le critère du temps de corrélation (W est de l'ordre de 60, ce qui représente deux fois le temps de corrélation).

c- L'exposant dépendant du temps

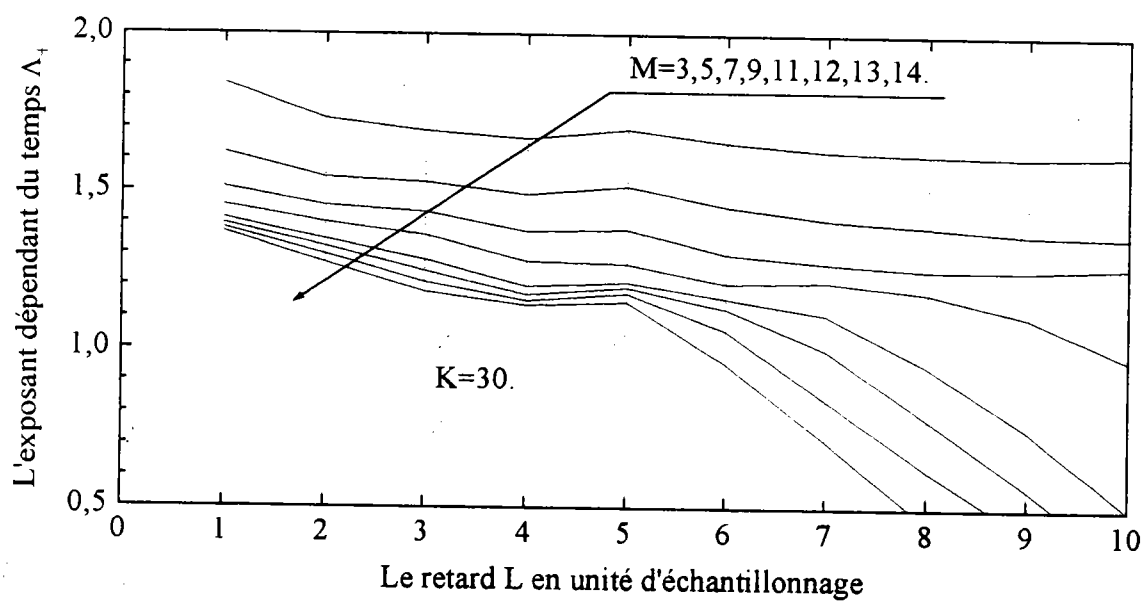


Figure IV-6 : Variations de l'exposant dépendant du temps Λ_+ en fonction du retard L pour K=30 et M=3,5,7,9,11,12,13,14.

Pour un intervalle de temps de l'ordre du temps de corrélation (T_K=K.T_s avec K=30), nous avons tracé les variations de l'exposant dépendant du temps Λ_+ en fonction du retard L pour des dimensions de reconstruction M allant de 3 à 14.

La figure IV-6 montre que ces courbes présentent un minimum de Λ_+ en L=4, qui devient pratiquement constant à partir de M=11. Nous considérons par conséquent [9] que le retard optimum est L=4 et que la dimension de reconstruction minimale est M=11.

d- Conclusion.

D'une part le critère du temps de corrélation suggère des couples (M,L) tels que la longueur de fenêtre W soit comprise entre 47 et 101. D'autre part le critère du déplacement moyen aboutit à une longueur de fenêtre minimale W=56 ((M,L)=(7,10), (9,8), (11,6), (13,5)) et le même retard optimum L=4 à partir de M=15). Enfin l'exposant dépendant du temps confirme ce retard optimum (L=4) à partir d'une dimension de reconstruction M=11. La prise en compte des trois critères nous conduit à une dimension de reconstruction minimale M=11 et un retard optimum L=4 qui n'est permis qu'à partir de M=15 puisque la longueur de fenêtre minimale est W=56. Par suite, nous avons choisi comme paramètres de reconstruction optimums : (M,L)=(11,6), (13,5), (15,4), (16,4), (17,4) et (18,4).

2-1-2- Calcul de la dimension de corrélation

Pour les couples de paramètres de reconstruction choisis ci-dessus, nous avons calculé l'intégrale de corrélation en utilisant l'algorithme de Grassberger-Procaccia (G-P) [8]. La figure IV-7 montre les variations de la pente de cette intégrale D(r,M) en fonction de log(r). Un plateau apparaît pour log(r) compris entre -1,8 et -2,8, indiquant une dimension de corrélation de l'ordre de D=2,1.

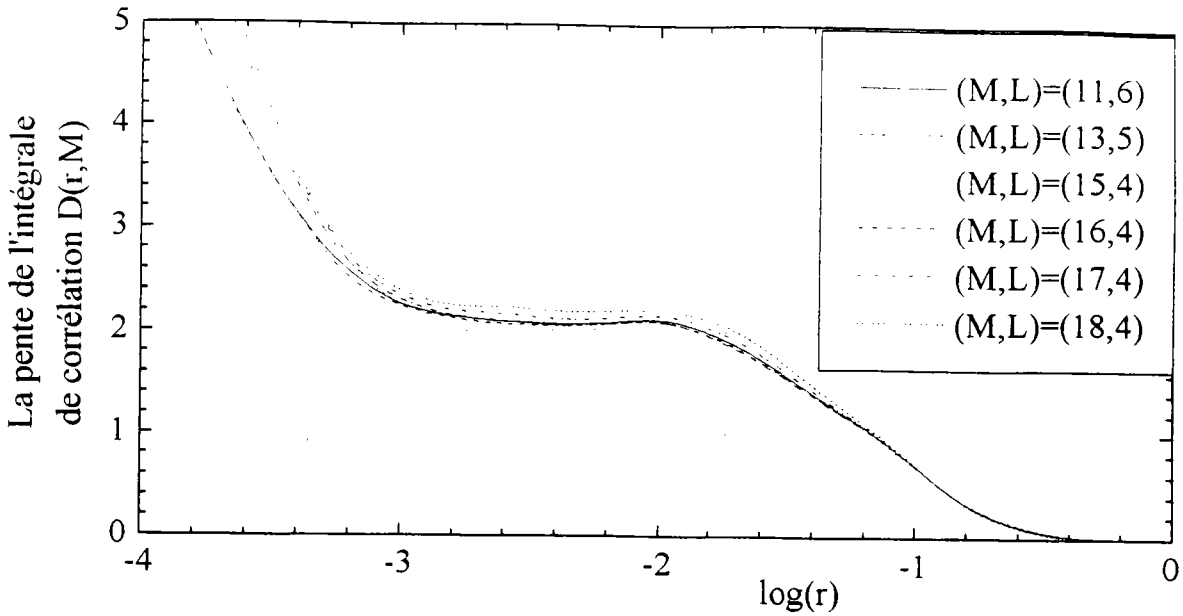


Figure IV-7 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log (r) pour les couples (M,L) optimums.

2-1-3- Application de la décomposition par valeurs singulières

Le résultat fourni par la figure IV-7 n'est pas très satisfaisant, en raison de la faible largeur du plateau obtenu. Dans la suite nous allons utiliser la décomposition par valeurs singulières (DVS) pour obtenir une éventuelle amélioration des résultats [86]. La figure IV-8-a montre le spectre des valeurs singulières calculées pour les couples de paramètres de reconstruction optimums. Jusqu'à i=8, on observe une diminution linéaire des valeurs singulières qui deviennent pratiquement égales à partir de i=9. Nous en déduisons que, dans l'espace des composantes principales, la composante déterministe de la trajectoire est confinée à un sous-espace Φ_C de dimension C=8. Dans le reste des directions, c'est la composante stochastique de la trajectoire qui risque de dominer [81].

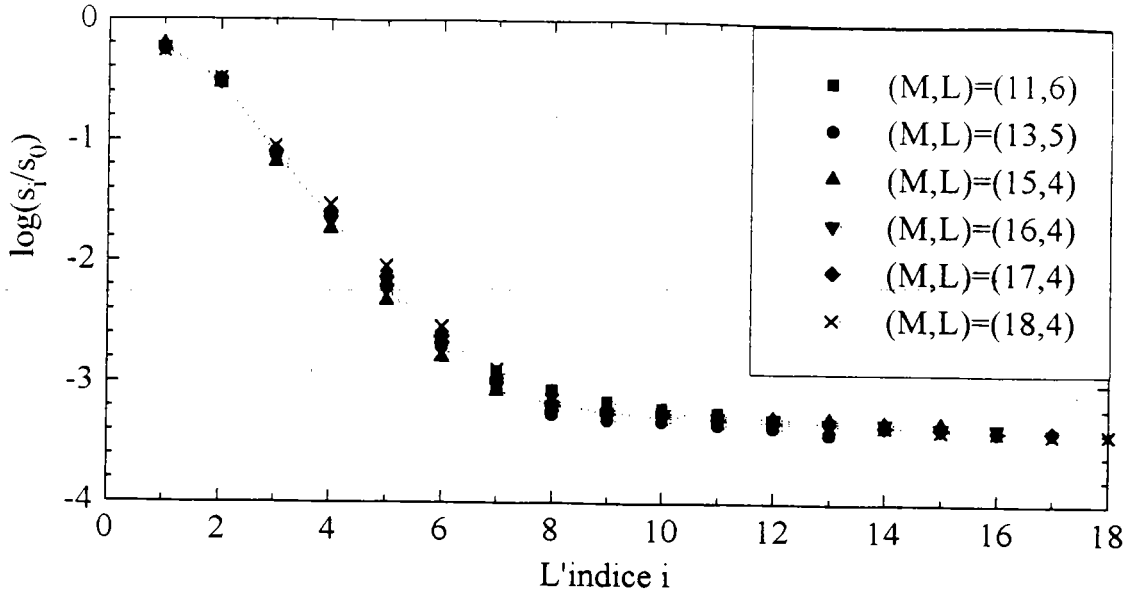


Figure IV-8-a : Le spectre des valeurs singulières pour les couples (M,L) optimums.

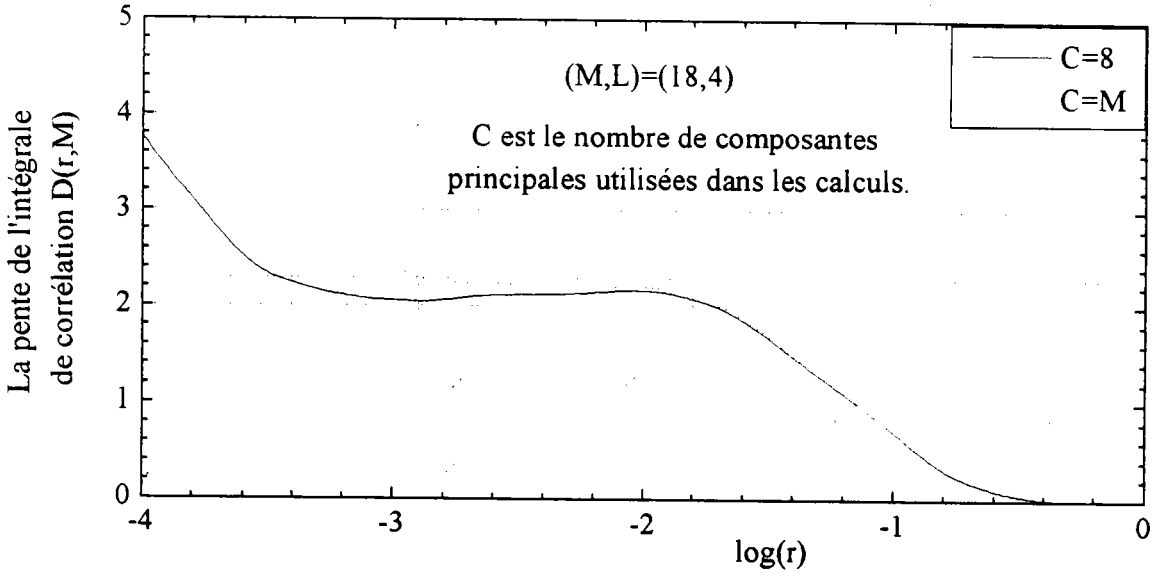


Figure IV-8-b : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour (M,L)=(18,4) et C=8,M.

La figure IV-8-b constitue une confirmation de la conclusion tirée du spectre des valeurs singulières. Cette dernière montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation en fonction de log(r) pour le couple de paramètres de reconstruction (M,L)=(18,4). La courbe en ligne pointillée est obtenue en

considérant la totalité des composantes principales (C=M) et montre un plateau qui s'étend de -2,9 à -1,8. La courbe en ligne continue est obtenue en se limitant aux huit premières composantes principales (C=8) et montre un plateau plus large qui s'étend de -3,4 à -1,8. Cette extension du plateau (en passant de C=M à C=8) pour les faibles valeurs de r résulte de la réduction de la composante stochastique de la trajectoire lorsque les calculs sont effectués dans le sous-espace Φ_C. Cette composante (stochastique) est due au bruit qui proviendrait du dispositif expérimental pendant l'enregistrement de la série temporelle.

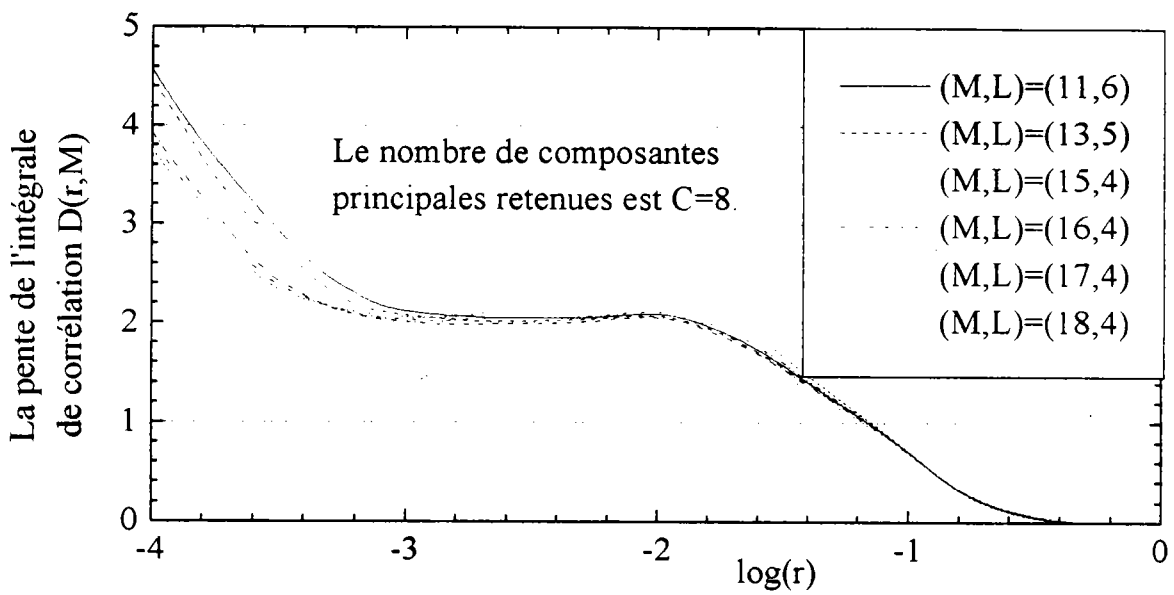


Figure IV-9 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour les couples (M,L) optimums avec C=8.

Le résultat de la figure IV-9 diffère de celui de la figure IV-7 par le fait que seules les huit premières composantes principales sont utilisées dans l'algorithme de G-P. Grâce à la DVS, nous avons obtenu un plateau plus large et une meilleure saturation. À partir de M=15, les valeurs de la pente D(r,M) cessent d'augmenter sur un intervalle de log(r) qui s'étend de -3,4 à -1,8 ce qui donne une dimension de corrélation D de l'ordre de 2,1.

2-1-4- Le plus grand exposant de Lyapunov

L'obtention d'une dimension de corrélation est une condition nécessaire de l'existence d'un attracteur étrange. Une confirmation de l'existence d'un tel attracteur est l'obtention d'un exposant de Lyapunov positif. Pour cela, nous avons calculé les variations temporelles de l'exposant dépendant du temps Λ qui permet d'estimer le plus grand exposant de Lyapunov λ [9]. Le résultat est représenté dans la figure IV-10-a pour le retard optimum L=4 et des valeurs croissantes de la dimension de reconstruction M.

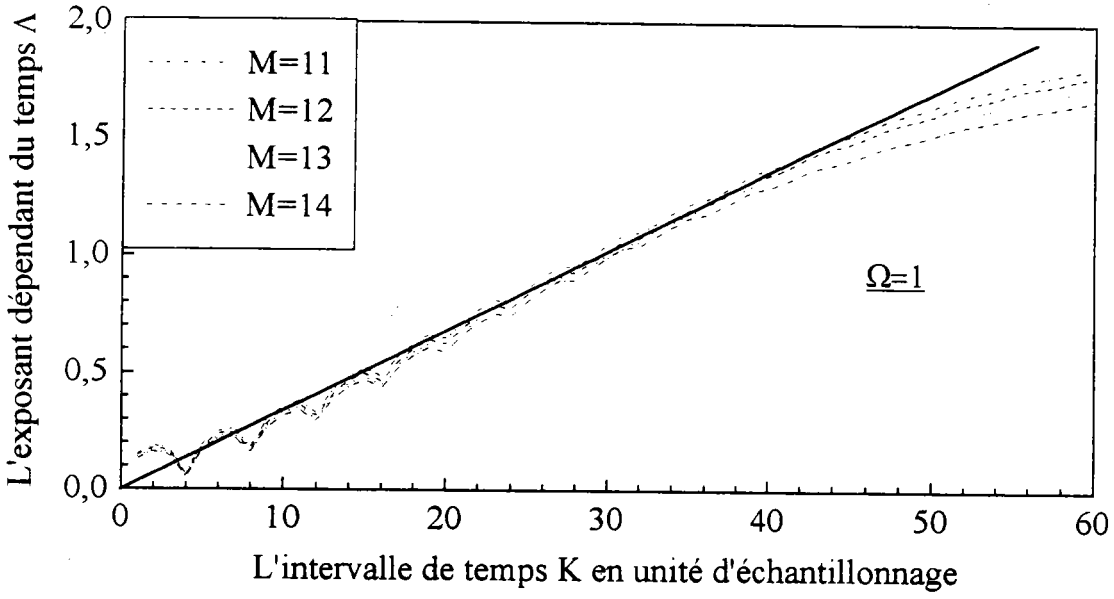


Figure IV-10-a : Variations temporelles de l'exposant dépendant du temps Λ pour L=4 et M=11,12,13,14 avec Ω=1.

Afin d'éviter les voisins appartenant à la même orbite, nous avons refait les calculs (figure IV-10-b) en utilisant Ω=W (voir chapitre III). Si l'on néglige les décrochements qui apparaissent pour les multiples de L, on peut dire que les courbes représentant Λ en fonction de K sont linéaires. Pour K compris entre 24 et 44 (donc un intervalle de temps très bref de 8.10^{-2} s) la pente de la partie linéaire est de l'ordre de 0,038. Le plus grand exposant de Lyapunov λ est donc positif, de l'ordre de 9,423 s^{-1}, ce qui nous semble très élevé.

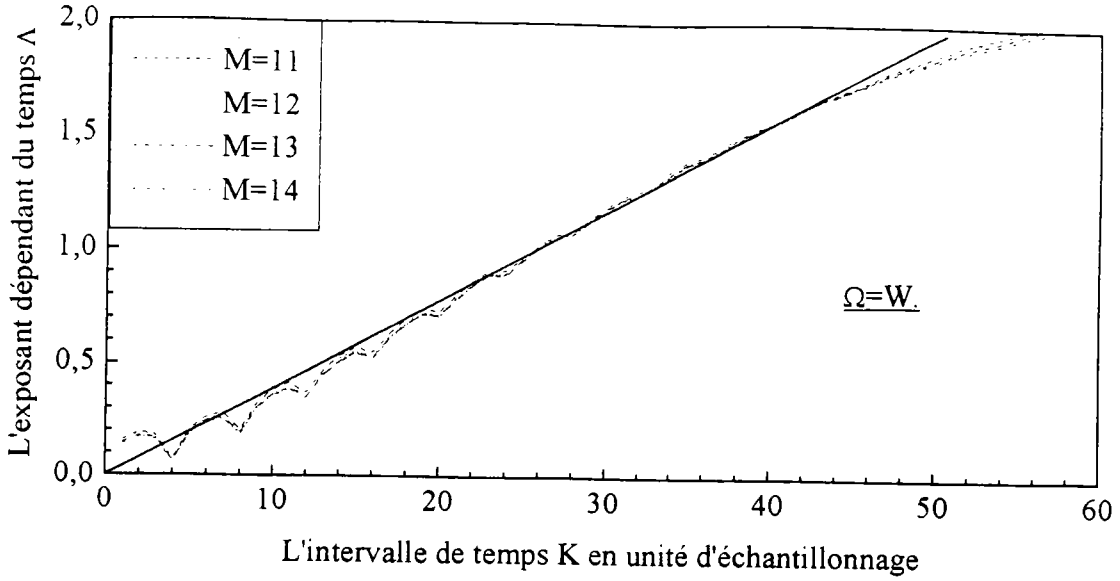


Figure IV-10-b : Variations temporelles de l'exposant dépendant du temps Λ pour L=4 et M=11,12,13,14 avec Ω=W.

2-1-5- Conclusion

L'analyse dynamique de l'effet PLC à travers la série VER09.DAT semble aboutir à l'existence d'un attracteur étrange. D'une part la combinaison de l'algorithme de G-P et la DVS conduit à une dimension de corrélation **D=2,1** pour log(r) compris entre -3,4 et -1,8. D'autre part l'exposant dépendant du temps a permis d'estimer le plus grand exposant de Lyapunov à λ**=9,423** s^{-1} sur un intervalle de temps de 8.10^{-2} s. Cependant, il convient de rester prudent en ce qui concerne la dynamique du phénomène. En effet l'intervalle (de log(r)) sur lequel la pente de l'intégrale de corrélation est constante n'est pas assez large et la valeur du plus grand exposant de Lyapunov exprime une très forte divergence sur un intervalle de temps trop court. En d'autre termes, le plus grand exposant de Lyapunov obtenu à partir de la série VER09.DAT n'est qu'un exposant de Lyapunov local.

Cette incertitude sur les résultats est certainement due à la mauvaise qualité et à la brièveté de la série temporelle VER09.DAT. Celle-ci, outre le bruit expérimental qu'elle contient, n'est pas assez longue pour pouvoir rendre compte du phénomène (3072 valeurs de la contrainte relevées à la fréquence 245 Hz implique une durée d'enregistrement d'environ 12 secondes). Cette conclusion pouvait être tirée à priori de l'examen de la figure IV-1 où trop peu d'événements liés à l'effet PLC sont enregistrés, ce qui rend la statistique insuffisante.

2-2- Analyse de la série temporelle LPMM12.DAT

La figure IV-11 montre l'aspect de la série temporelle LPMM12.DAT. C'est la partie de la série LPMM1.DAT, allant de 5000 à 10000 unités d'échantillonnage (voir la figure IV-2). On voit clairement la dérive des éléments de cette série vers des valeurs croissantes de la contrainte.

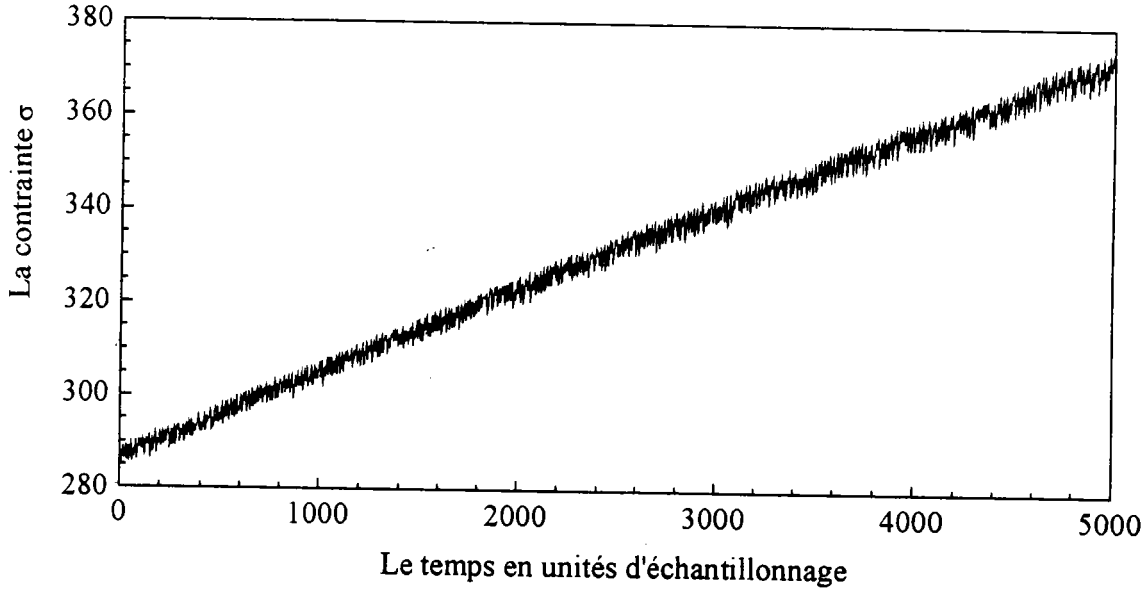
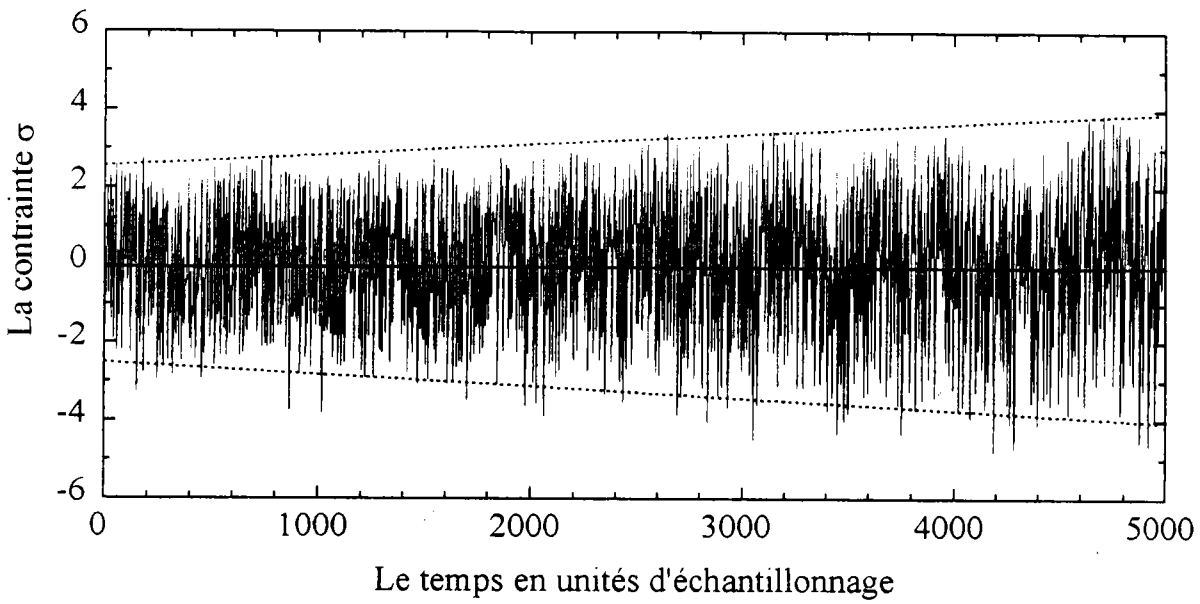


Figure IV-11 : La série temporelle LPMM12.DAT
(T_s=5.10^{-2} s et N_s=5000)

La figure IV-12 montre la série qui sera utilisée dans les calculs qui vont suivre. Cette série, nommée LPMM12.FIT, n'est autre que la série "stationnaire" associée à la série initiale LPMM12.DAT. Constatons l'irrégularité de la répétition des décrochements de la contrainte ainsi que l'augmentation de leur amplitude au cours du temps. Les variations de cette amplitude s'inscrivent dans un "cône" schématisé, dans la figure IV-12, par deux traits pointillés.



Figue IV-12 : La série temporelle LPMM12.FIT
(T_s=5.10^{-2} s et N_s=5000)

2-2-1- Choix des paramètres de reconstruction

a- Le temps de corrélation

La figure IV-13 montre le début (de 0 à 500.T_s) des variations de la fonction d'auto-corrélation associée à la série LPMM12.FIT. Le temps de corrélation obtenu est de l'ordre de 4 unités d'échantillonnage (T_c=20.10^{-2} s). D'après [86], les fenêtres optimales d'observation (M,L) ont une longueur W comprise entre 7 et 14.

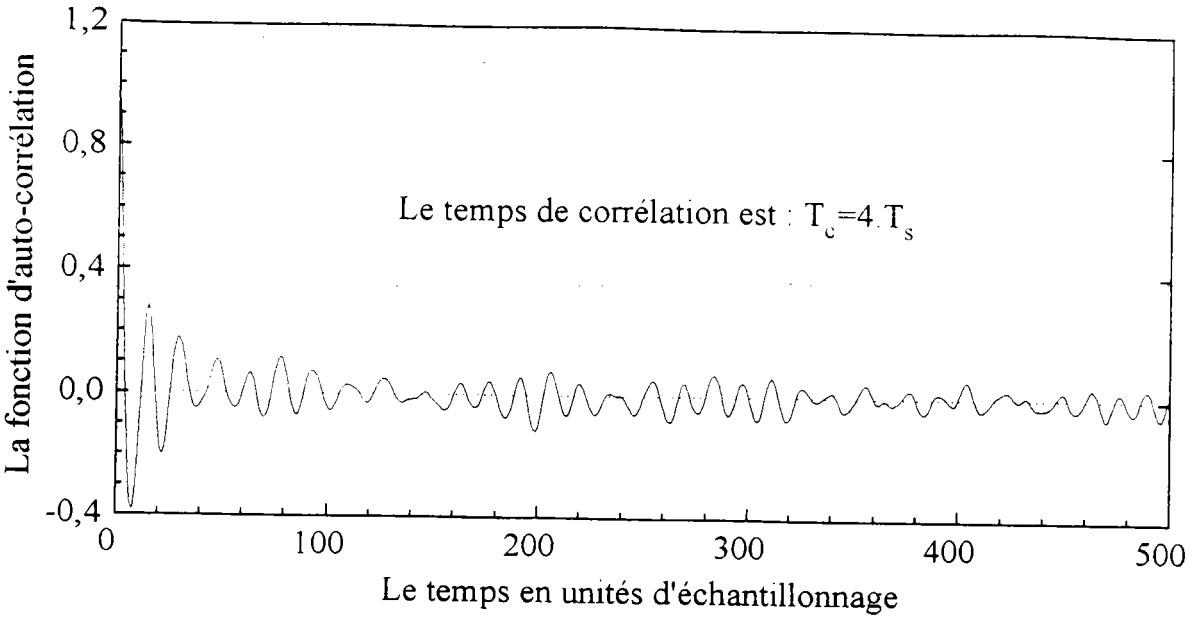


Figure IV-13 : Variations temporelles de la fonction d'auto-corrélation de la série LPMM12.FIT. ($T_s=5.10^{-2}$ s)

b- Le déplacement moyen

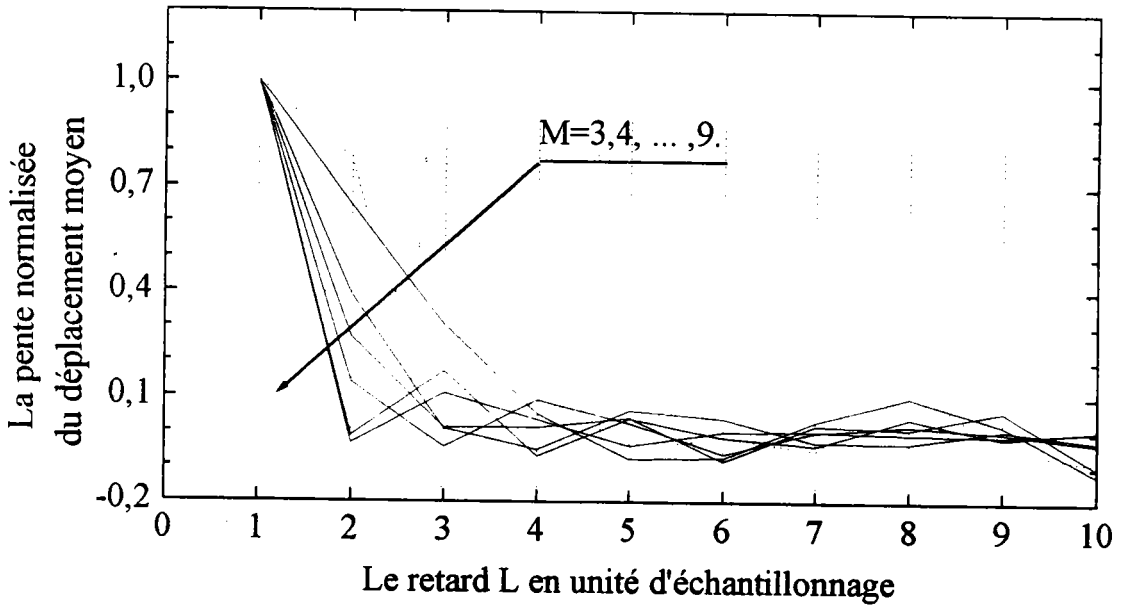


Figure IV-14 : Variations de la pente normalisée du déplacement moyen S en fonction du retard L pour M allant de 3 à 9.

La figure IV-14 montre les variations de la pente normalisée du déplacement moyen S, en fonction du retard L, pour des dimensions de reconstruction M croissantes. Les six courbes représentées en ligne continue correspondent, du haut en bas, à M=3, 4, 5, 6, 7 et 8. Il en résulte [84] que le retard optimum pour M=3 ou 4 est L=3, et pour M=5,6,7 ou 8 ce retard est L=2. Les longueurs de fenêtre W associées à ces couples de paramètres de reconstruction (M,L) sont comprises entre 6 et 14 ce qui est compatible avec le critère du temps de corrélation.

c- Conclusion

Avec le critère du déplacement moyen on aboutit au résultat suivant : le retard optimum passe de L=2 (pour M=6, 7 et 8) à L=3 pour M=9 (voir la courbe représentée en ligne pointillée). Pour M inférieur à 8 nous obtenons des longueurs de fenêtre compatibles avec celles suggérées par le temps de corrélation (W compris entre 7 et 14). Ce n'est pas le cas pour le couple (9,3) qui donne une longueur de fenêtre W=24 largement supérieure à 14. Nous pensons qu'à partir de M=9, le retard optimum devrait passer à L=1 mais le critère du déplacement moyen ne le prévoit pas puisque les pentes de S sont normalisées par la pente en L=1. En fait, on peut même envisager que le retard optimum est "inférieur à un" et de reprocher à la série temporelle la longueur de son temps d'échantillonnage (comparé à celui de la série VER09.DAT par exemple). On est donc contraint d'utiliser des fenêtres de petite longueur en restant au voisinage de la borne inférieure (W=7) de l'intervalle suggéré par le temps de corrélation. Si l'on décide de ne pas dépasser W=10 (deux fois le temps de corrélation) alors les couples optimums possibles sont (4,3), (5,2), (6,2), (9,1), (10,1), et (11,1).

2-2-2- Calcul de la dimension de corrélation

La figure IV-15 montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation en fonction de log(r) pour les couples (M,L) choisis ci-dessus. Les six courbes présentent un plateau pour log(r) compris entre -4,2 et -1,6. Sur cet intervalle la pente D(r,M) vaut 1,8 pour (M,L)=(5,2) ou (9,1); elle devient 2,0 pour (M,L)=(4,3) ou (10,1) et elle passe à 2,2 pour (M,L)=(6,2) ou (11,1).

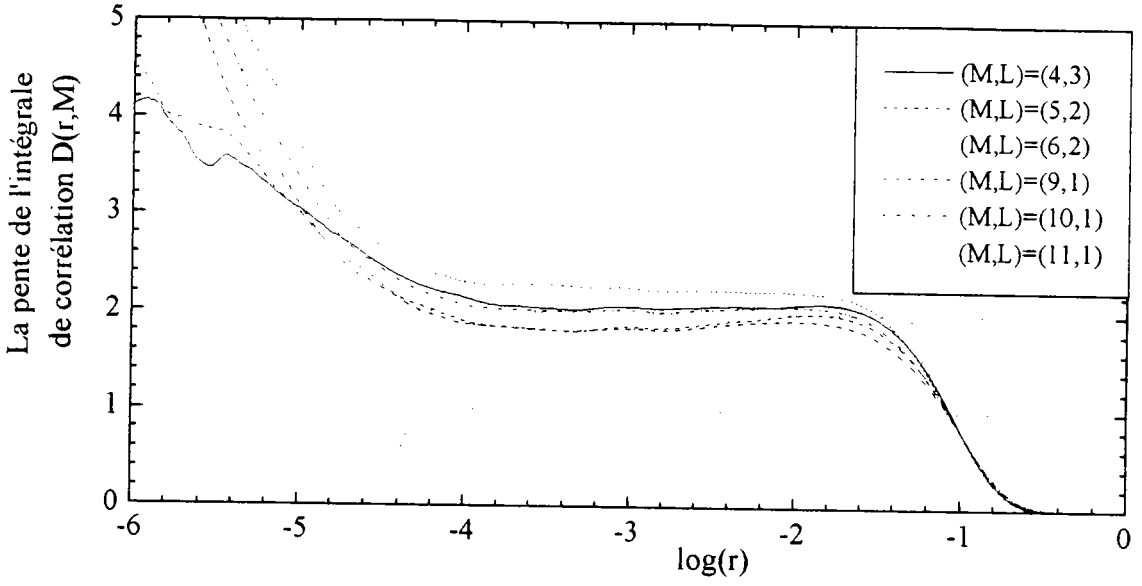


Figure IV-15 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour les couples (M,L) optimums.

On constate donc une augmentation de la dimension de corrélation avec la longueur de la fenêtre (D(r,M) passe de 1,8 à 2,2 lorsque W passe de 8 à 10). On voit ici les difficultés d'application du théorème de Takens : la saturation de la pente de l'intégrale de corrélation, lorsque la dimension de reconstruction M croit, n'est obtenue que dans la mesure où la longueur de la fenêtre d'observation W reste constante. Pour W=10, les deux seules valeurs possibles de M (M=6 avec L=2 et M=11 avec L=1) conduisent à la même valeur de la pente : **D=2,2**.

2-2-3- Application de la décomposition par valeurs singulières

La figure IV-16-a montre le spectre des valeurs singulières pour les couples de paramètres de reconstruction optimums. On remarque que les deux premières valeurs singulières sont comparables et se distinguent des autres, et qu'à partir de i=3, la décroissance des valeurs singulières est pratiquement linéaire. Nous en déduisons que, dans l'espace des composante principales, la majeure partie de la trajectoire s'étend dans les directions c_1 et c_2 alors que les autres directions (c_i avec $i \geq 3$) sont de moins en moins "visitées" par la trajectoire.

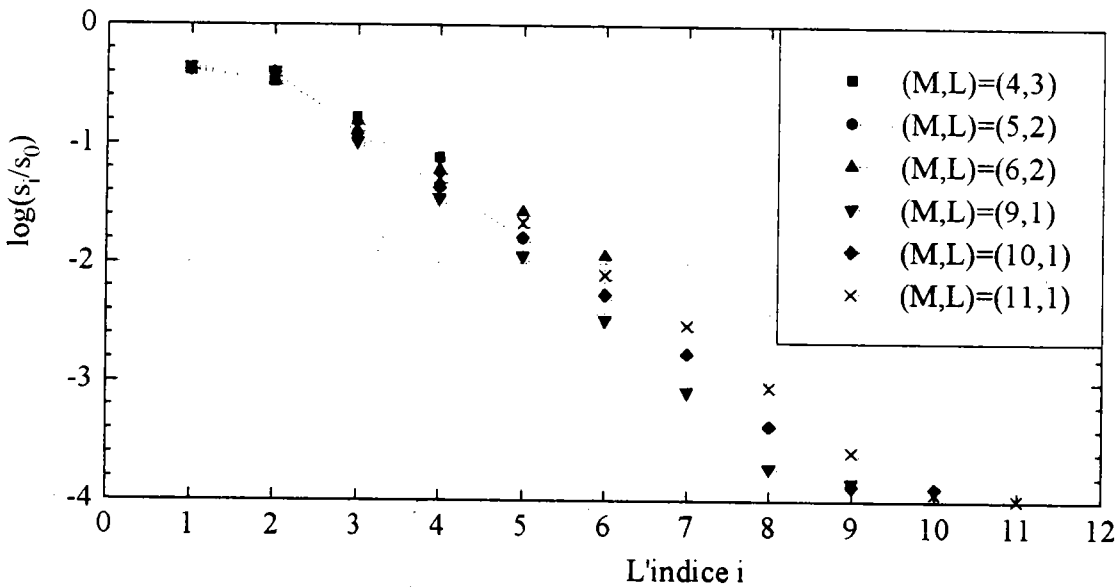


Figure IV-16-a : Le spectre des valeurs singulières pour les couples (M,L) optimums.

La figure IV-16-b montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation en fonction de log(r) pour le couple (M,L)=(10,1). Les courbes superposées correspondent, du bas vers le haut, à un nombre de composantes principales allant de 2 à M. A partir de C=3, les courbes sont pratiquement confondues surtout pour log(r) compris entre -4 et -2, ce qui confirme la conclusion tirée du spectre des valeurs singulières.

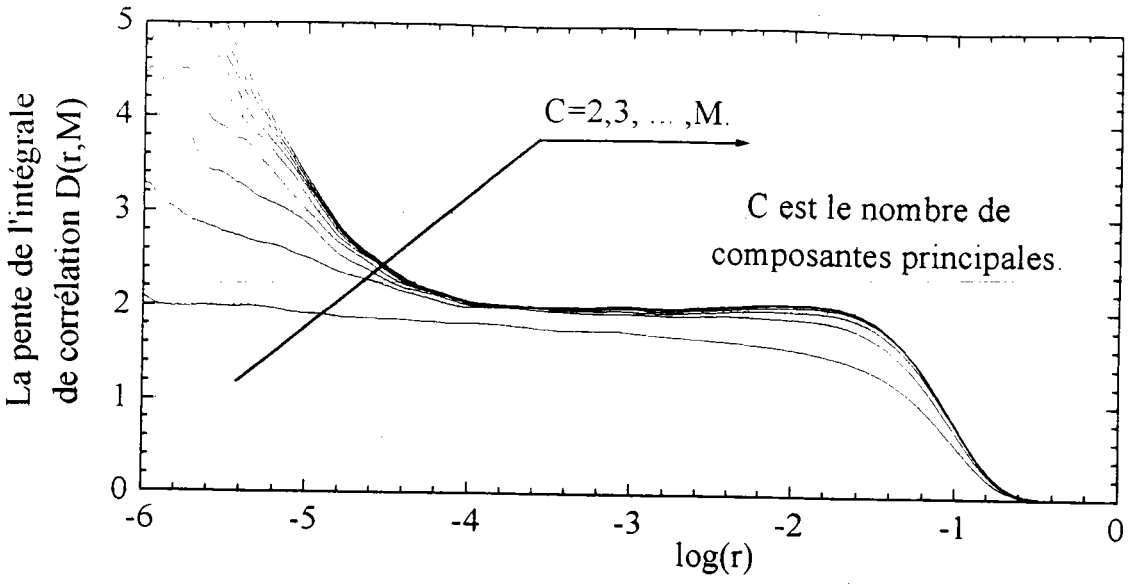


Figure IV-16-b : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) pour le couple (M,L)=(10,1) et C allant de 2 à M.

Contrairement au résultat de la figure IV-8-b, le plateau ne subit pas de changement, quelque soit le nombre de composantes principales utilisées dans les calculs. La différence entre les résultats de la figure IV-8-b et IV-16-b trouve l'explication dans celle des figures IV-8-a et IV-16-a. Rappelons que le spectre de la figure IV-8-a montre que les valeurs singulières diminuent linéairement puis deviennent comparables à partir de i=9. Un tel spectre informe sur les directions dans lesquelles la composante stochastique de la trajectoire commence à dominer. Par suite en se limitant aux 8 premières composantes principales nous avons pu réduire le bruit contenue dans la série VER09.DAT. À l'inverse, le spectre de la figure IV-16-a montre que les deux premières valeurs singulières sont comparables et que les suivantes subissent une diminution linéaire. Un tel spectre permet de conclure que la série ne contient que peu de bruit et que les directions c_1 et c_2 sont les plus "visitées" par la trajectoire reconstruite. Par suite, on devrait trouver les mêmes résultats à partir d'un nombre quelconque de composantes principales supérieur ou égal à trois, d'où une réduction possible du temps de calcul en choisissant C=3.

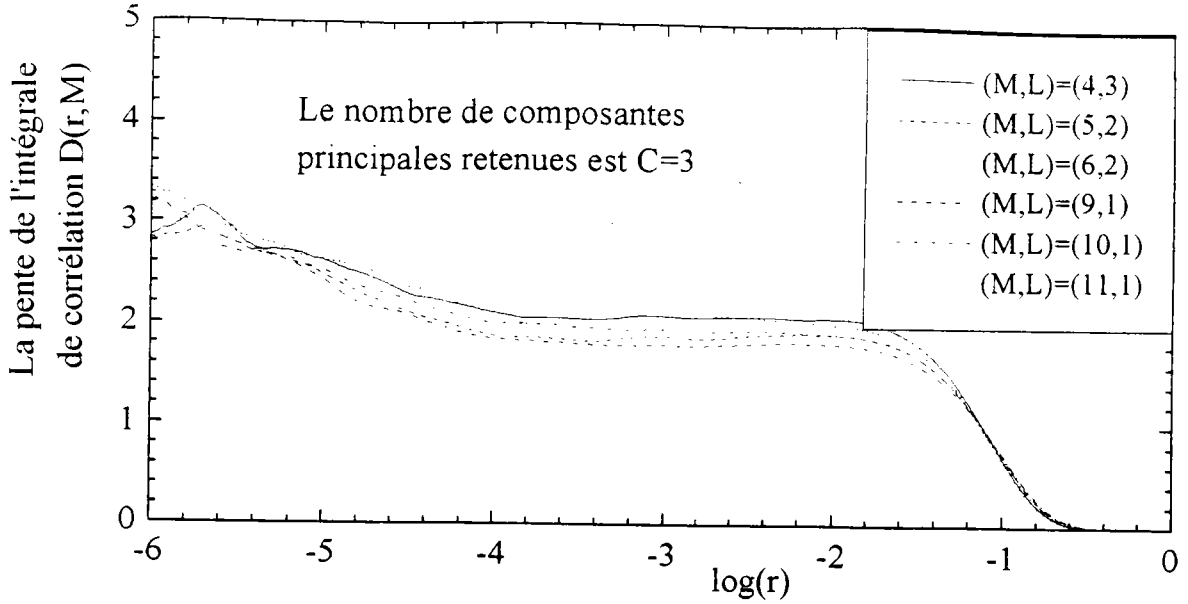


Figure IV-17 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour les couples (M,L) optimums avec C=3.

La figure IV-17 montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation en fonction de log(r) pour les couples (M,L) optimums. Seules les trois premières composantes principales (C=3) sont prises en compte dans les calculs. Le résultat que fournit cette figure est pratiquement le même que celui de la figure IV-15 où toutes les composantes principales (C=M) sont utilisées dans les calculs. On conclut que la série LPMM12.DAT fournit une zone de saturation significative et insensible au bruit, où la valeur de la pente D est de l'ordre de 2,1.

2-2-4- Le plus grand exposant de Lyapunov.

Pour calculer les variations temporelles de l'exposant dépendant du temps, nous avons besoin de connaître la dimension de reconstruction minimale. Pour cela, nous avons calculé les variations de l'exposant Λ_+ en fonction du retard L pour des valeurs croissantes de la dimension de reconstruction. L'intervalle de temps T_K utilisé est de l'ordre du temps de corrélation (K=5).

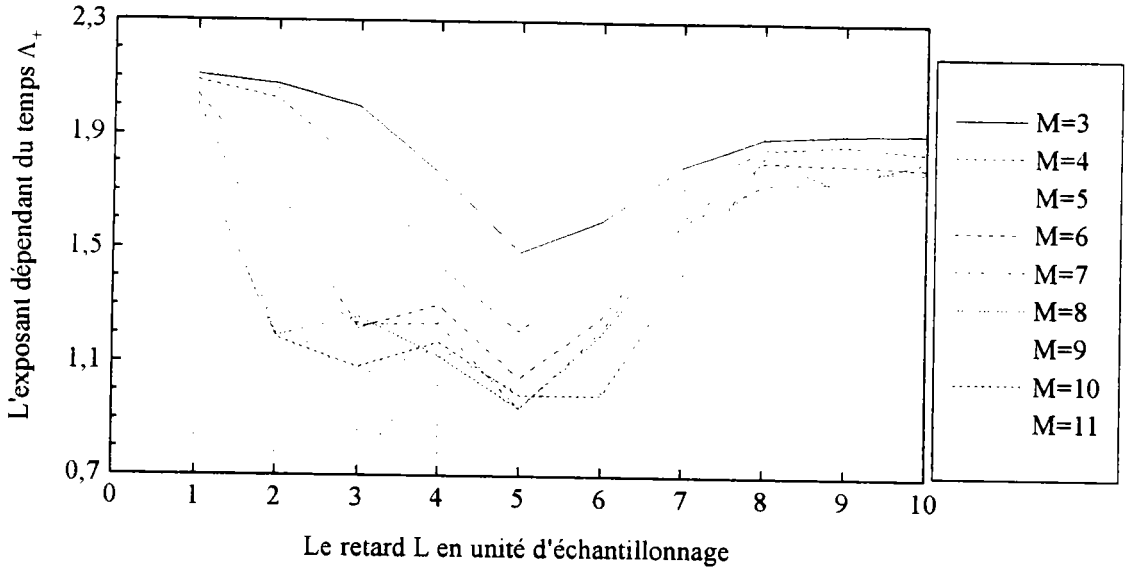


Figure IV-18-a : Variations de l'exposant dépendant du temps Λ_+ en fonction du retard L pour K=5 et M allant de 3 à 11.

La figure IV-18-a montre qu'un minimum de Λ_+ apparaît en L=2 pour M égal à 8 et 9 et passe à L=3 à partir de M=10. Sachant que L=2 est mieux placé que L=3 pour être le retard optimum (voir la conclusion de la section 2-2-1), nous avons calculé les variations de Λ_+ en fonction de M pour L=2. La figure IV-18-b montre que l'exposant Λ_+ diminue lineairement pour M allant de 5 à 8 et qu'il varie très peu à partir de M=8. Nous en déduisons que pour L=2, la dimension de reconstruction minimale est M=8 [9].

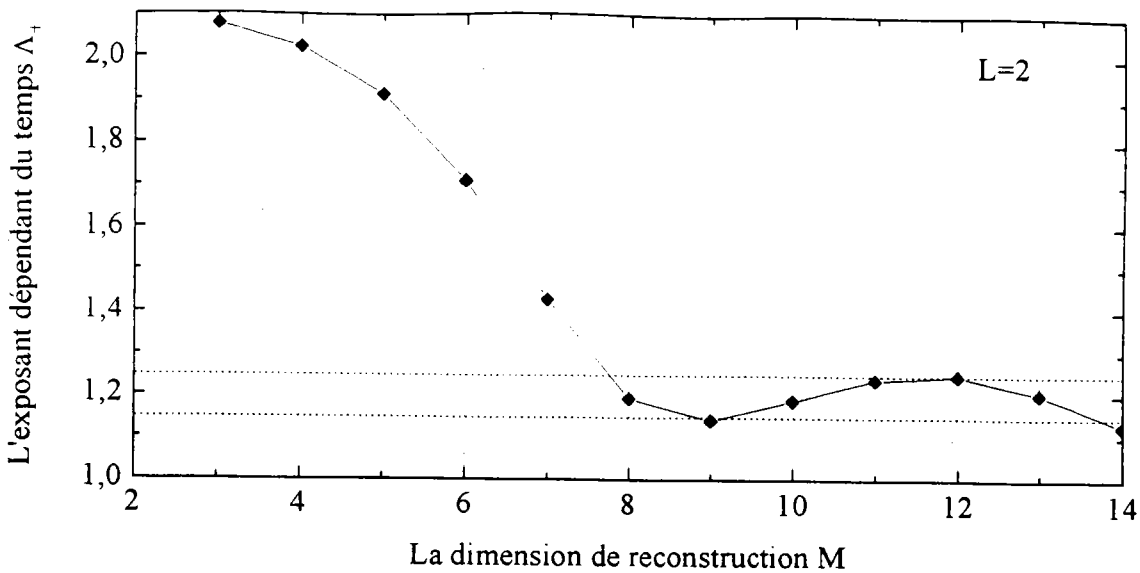


Figure IV-18-b : Variations de l'exposant dépendant du temps Λ_+ en fonction de la dimension de reconstruction M pour K=5 et L=2.

La figure IV-19 montre les variations temporelles de l'exposant dépendant du temps Λ pour le retard optimum L=2 et des dimensions de reconstruction allant de M=8 (la dimension minimale de reconstruction) à M=10.

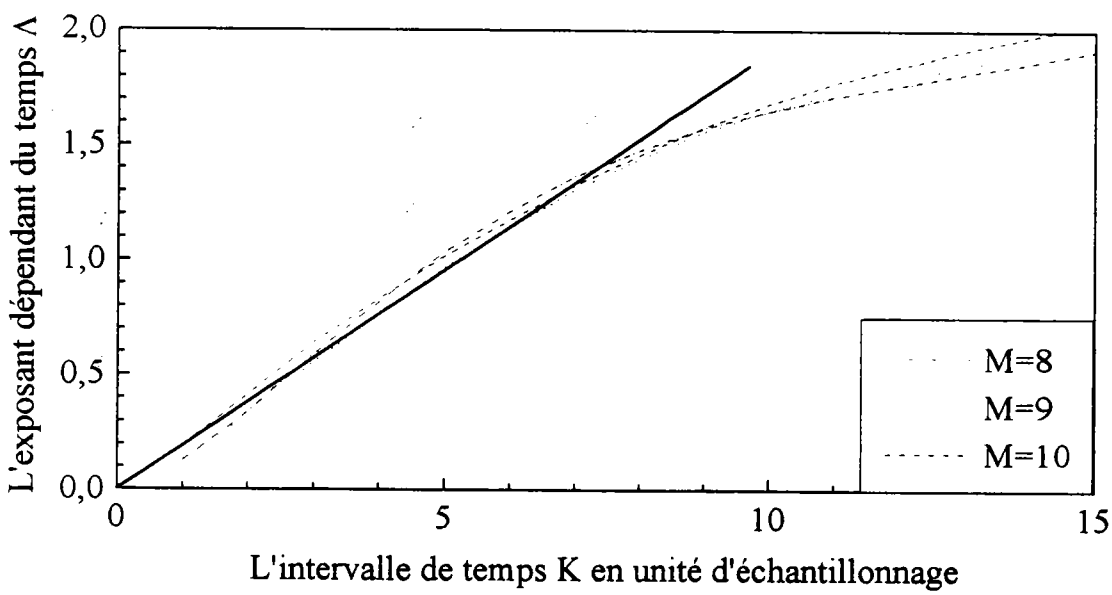


Figure IV-19 : Variations temporelles de l'exposant dépendant du temps Λ

Les courbes obtenues présentent une partie linéaire qui passe par l'origine lorsqu'elle est extrapolée. Cette partie linéaire qui s'étend jusqu'à K=8 possède une pente positive d'environ 0,184 et permet d'estimer le plus grand exposant de Lyapunov à λ=3,692 s^{-1} sur un intervalle de temps de l'ordre de 8 unités d'échantillonnage, c'est-à-dire deux fois le temps de corrélation.

2-2-5- Conclusion

Avec la série LPMM12.DAT on semble encore aboutir à l'existence d'un attracteur étrange. La dimension de corrélation retenue est de l'ordre de **D=2,1** pour log(r) compris entre -4,2 et -1,6 et le plus grand exposant de Lyapunov estimé est de l'ordre de λ=**3,7** s^{-1} sur un intervalle de temps de 0,4 s. Ces résultats sont meilleurs que ceux obtenus à partir de la série VER09.DAT. Nous avons obtenu un plateau beaucoup plus large, qui s'étend aux faibles valeurs de r (-4,2 à -1,6 pour LPMM12.DAT contre -3,4 à -1,8 pour VER09.DAT) et qui est insensible au bruit. Quant au plus grand exposant de Lyapunov, sa valeur est plus raisonnable (nous avons obtenu λ=9,423 s^{-1} pour VER09.DAT) et l'intervalle de temps sur lequel nous l'avons estimé est beaucoup plus long (0,4 s pour LPMM12.DAT contre 0.08 s pour VER09.DAT)

La meilleure qualité de ces résultats est due à celle de la série temporelle LPMM12.DAT. Cette série contient beaucoup moins de bruit que la série VER09.DAT et elle est beaucoup plus longue (N_s=5000 et T_s=5.10^{-2} s pour LPMM12.DAT contre N_s=3072 et T_s=4.10^{-3} s pour VER09.DAT) en ce sens qu'elle contient un plus grand nombre d'événements liés à l'effet PLC. On peut reprocher à ces résultats un certain manque de saturation lors du calcul de la dimension de corrélation. Nous pensons que cela est dû à la petitesse de la longueur de la fenêtre optimale, qui serait de l'ordre de 10 unités

d'échantillonnages. Ceci nous empêche de considérer plusieurs valeurs de la dimension de reconstruction : comme nous l'avons déjà dit, pour W=10 les seules valeurs possibles du couple (M,L) sont (11,1) et (6,2). Enfin, la critique majeure que l'on peut adresser à ces résultats est qu'ils concernent une série non stationnaire, en ce sens que l'amplitude des décrochements de la contrainte augmente au cours du le temps, en raison des modifications de la microstructure du matériau. C'est pourquoi nous réservons encore nos conclusions quant à la nature de la dynamique du phénomène PLC.

2-3- Analyse de la série LPMM1516.DAT

La figure IV-20 montre l'aspect de la série temporelle LPMM1516.DAT. Celle-ci n'est autre que la partie de la série LPMM1.DAT qui commence à partir de 20000 unités d'échantillonnage (voir la figure IV-2).

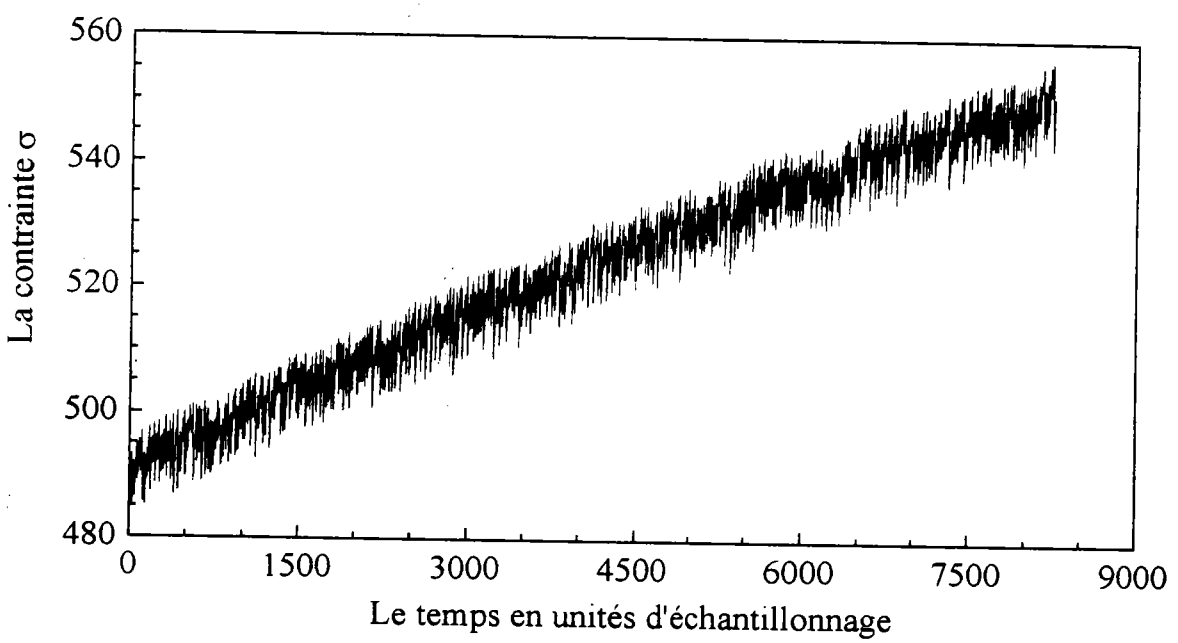


Figure IV-20 : La série temporelle LPMM1516.DAT
(T_s=5.10^{-2} s et N_s=8254)

Comparée à la série LPMM12.DAT, la série LPMM1516.DAT possède deux avantages. Pour le même temps d'échantillonnage, cette dernière contient 8254 éléments alors que la première n'en contenait que 5000. Outre sa longueur, les variations de la série LPMM1516.FIT ne s'inscrivent pas dans un "cône", comme c'est le cas de la série LPMM12.FIT (comparer la figure IV-21 et la figure IV-12). L'amplitude des décrochements reste stationnaire en moyenne puisqu'il y a saturation des effets d'écrouissage.

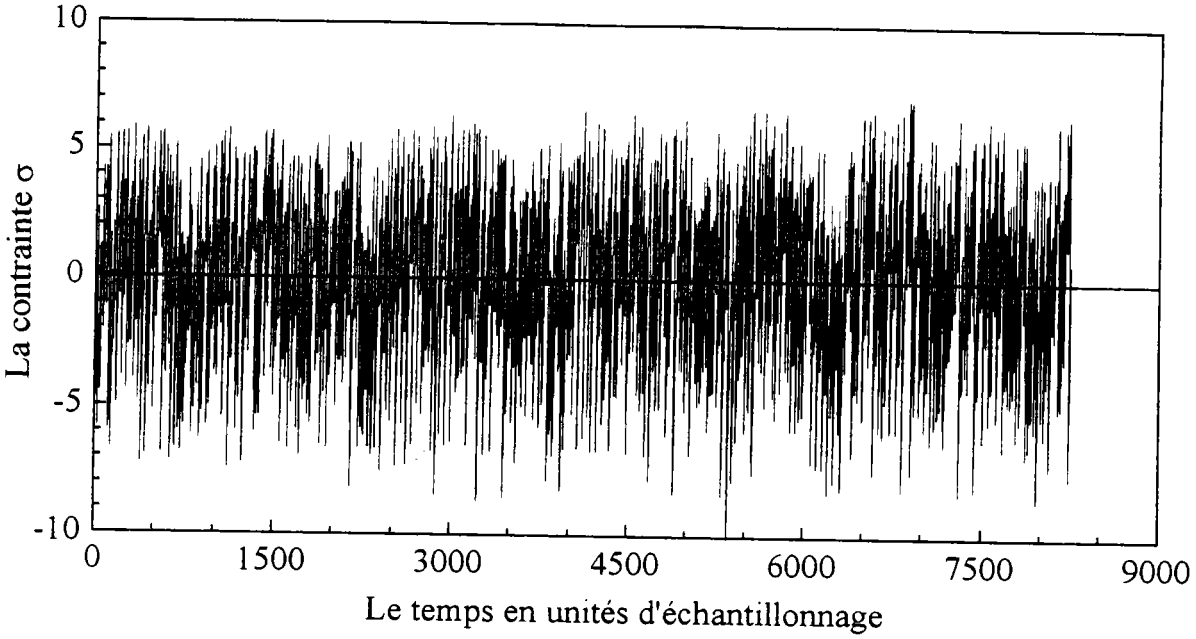


Figure IV-21 : La série temporelle LPMM1516.FIT.
(T_s=5.10^{-2} s et N_s=8254)

2-3-1- Choix des paramètres de reconstruction

a- Le temps de corrélation

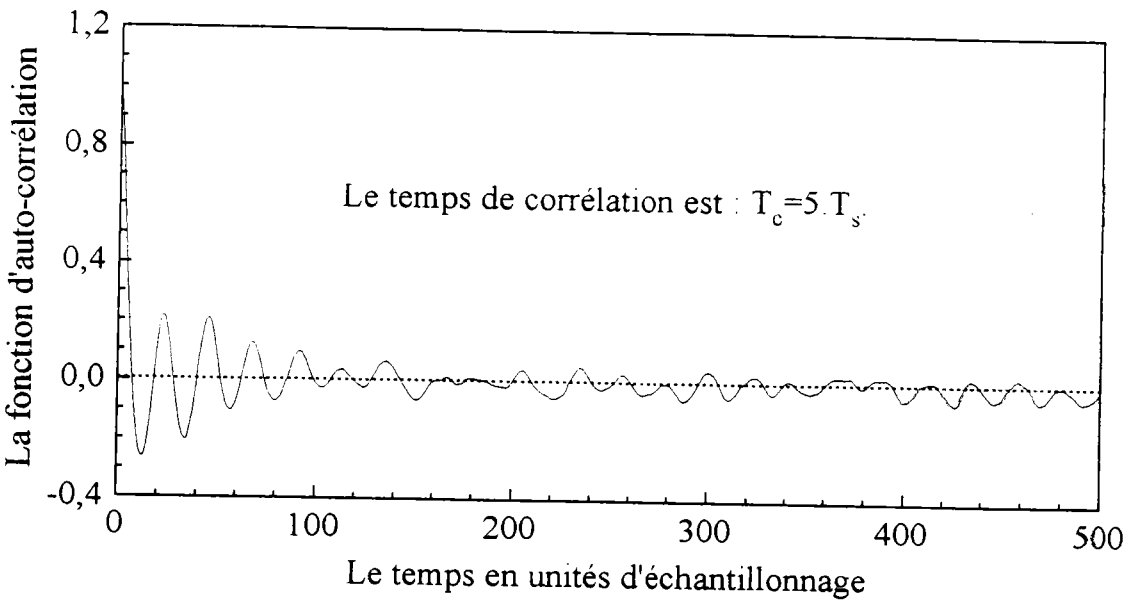


Figure IV-22 : Variations temporelles de la fonction d'auto-corrélation de le série LPMM1516.FIT. ($T_s=5.10^{-2}$ s)

Les variations de la fonction d'auto-corrélation de la série LPMM1516.FIT (montrées par la figure IV-22) sont pratiquement les mêmes que celles de la série LPMM12.FIT. Le temps de corrélation obtenu est $T_c=5.T_s$ ce qui suggère [86] que les longueurs de fenêtre optimales sont comprises entre 8 et 17. Cependant la comparaison des séries LPMM12.FIT et LPMM1516.FIT montre que la corrélation devrait être plus forte pour cette dernière puisqu'elle est stationnaire alors que l'on aboutit à des temps de corrélation voisins. Cette remarque se confirme lorsqu'on compare les autres temps caractéristiques associés à ces séries (par exemple le minimum de la fonction d'auto-corrélation [86] est situé à 8 unités d'échantillonnage pour la série LPMM12.FIT alors qu'il se situe à $12.T_s$ pour la série LPMM1516.FIT). Pour cela, le critère du temps de corrélation ne sera pas pris en considération, au sens strict, mais il sera étendu vers les grandes valeurs des longueurs de fenêtre.

b- Le déplacement moyen

Pour des dimensions de reconstruction M allant de 3 à 11, la figure IV-23 montre les variations de la pente normalisée du déplacement moyen S en fonction du retard L [84]. Pour M inférieur à 5, les couples optimums obtenus sont (M,L)=(3,5), (4,4) et (5,3). À partir de M=6, le retard optimum passe à L=2 et reste le même lorsque M augmente. On se trouve alors avec des fenêtres dont la longueur augmente à partir de 10 avec un pas de 2. Notons que ce critère reste en accord avec celui du temps de corrélation pour des dimensions de reconstruction qui ne dépassent pas 9.

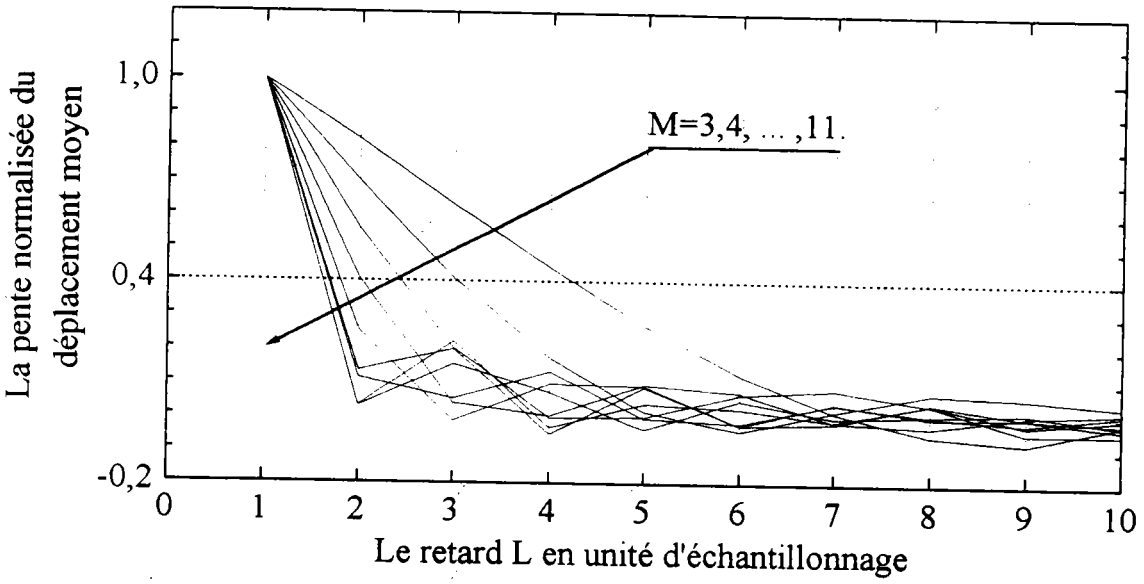


Figure IV-23 : Variations de la pente normalisée du déplacement moyen S en fonction du retard L pour M allant de 3 à 11.

c- L'exposant dépendant du temps Λ_+

La figure IV-24 montre les variations de l'exposant Λ_+ en fonction du retard L pour un intervalle de temps $T_K=4.T_s$. A partir de M=13, ces courbes présentent un minimum en L=2 ce qui implique, d'après [9], que la dimension de reconstruction minimale est M=13 et que le retard optimum est L=2.

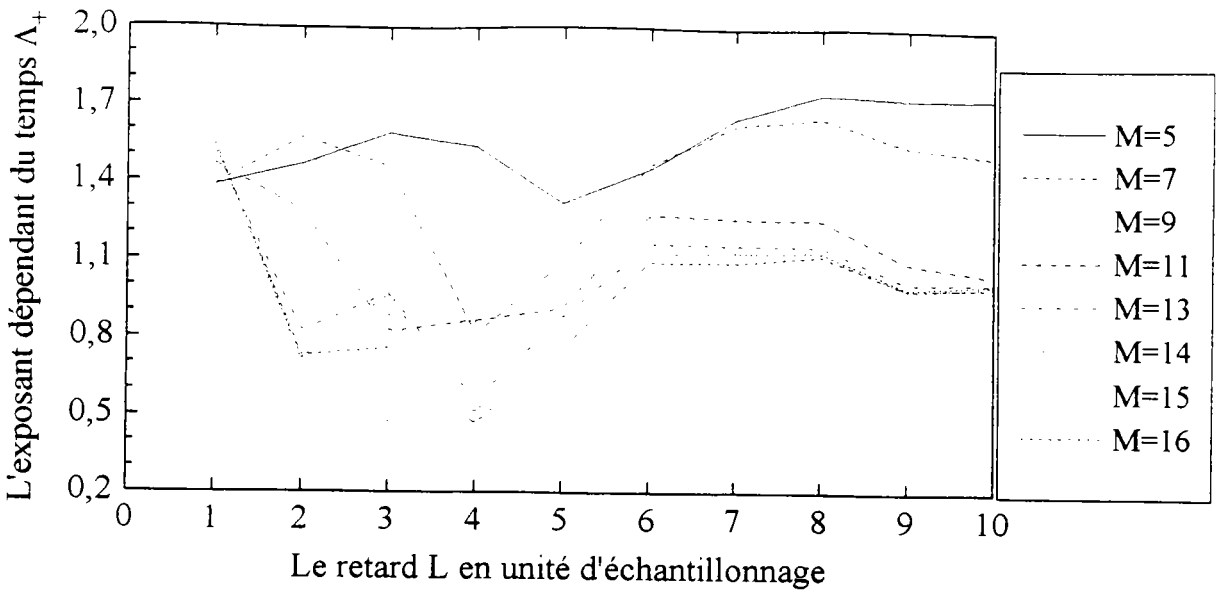


Figure IV-24 : Variations de l'exposant dépendant du temps Λ_+ en fonction du retard L pour K=4 et M allant de 5 à 16.

d- Conclusion.

L'exposant dépendant Λ_+ aboutit au retard optimum L=2 et à la dimension de reconstruction minimale M=13, soit une longueur de fenêtre minimale W=24. Remarquons que la longueur de fenêtre minimale que donne ce critère dépasse la borne supérieure de l'intervalle suggéré le critère du temps de corrélation (W compris entre 8 et 17). Comme nous l'avons déjà indiqué, cette incompatibilité résulte de la petitesse excessive du temps de corrélation de la série LPMM1516.DAT. Par conséquence, nous adoptons le résultat du critère de l'exposant dépendant du temps car il possède un point intéressent (le retard optimum L=2) en commun avec le critère du déplacement moyen. D'autre part, comme le montre la figure IV-24, le minimum de Λ_+ (en L=2) risque de disparaître pour des dimensions M supérieures à 16. En conclusion, nous retenons L=2 comme valeur optimale du retard et M=13 et M=16 respectivement comme valeurs minimale et maximale de la dimension de reconstruction, ce qui donne W compris entre 2 et 3 fois le minimum de la fonction d'auto-corrélation.

2-3-2- Calcul de la dimension de corrélation

Pour L=2 et M=13, 14, 15 et 16, la figure IV-25 montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M). Pour les valeurs de log(r) comprises entre -3,8 et -1,4, cette pente est pratiquement constante mais elle croit de 2,9 à 3,2 (avec un pas d'environ 0,1) lorsque M augmente de 13 à 16.

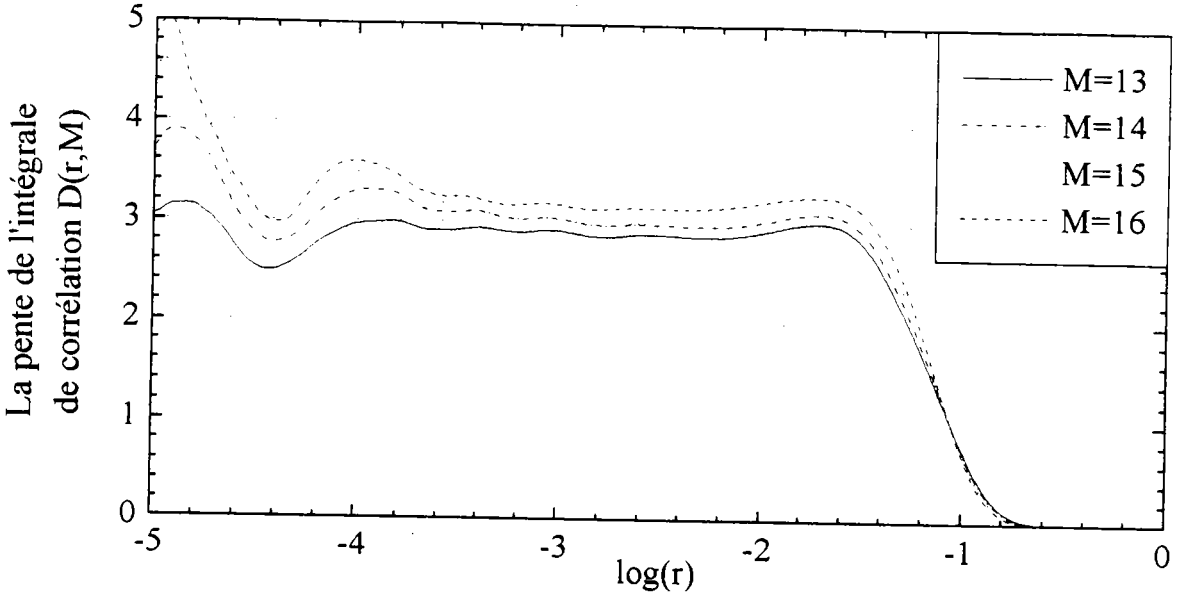


Figure IV-25 : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M) en fonction de log(r) pour L=2 et M=13,14,15,16.

A priori il n'y a pas de saturation si la longueur de la fenêtre d'observation augmente. Sur le plateau, la pente de l'intégrale de corrélation augmente d'environ 0,1 lorsque M passe à M+1 en fixant L=2. Cependant, comme la série LPMM12.DAT, cette série temporelle fournit une zone auto-similaire significative et insensible au bruit, où la valeur observée de la pente D(r,M) est de l'ordre de 3,1.

2-3-3- Calcul du plus grand exposant de Lyapunov

Pour L=2 et M allant de 13 à 16, nous avons calculé les variations temporelles de l'exposant Λ. La figure IV-26 montre que ces courbes présentent une partie linéaire qui s'étend jusqu'à 12 unités d'échantillonnage. Cette partie linéaire passe par l'origine lorsqu'elle est extrapolée et sa pente vaut 0,125, ce qui donne pour le plus grand exposant de Lyapunov $\lambda=2,5\ s^{-1}$ sur un intervalle de temps de l'ordre de 0,6 s. Le plus grand exposant de Lyapunov est positif ce qui suggère qu'il y a sensibilité aux conditions initiales.

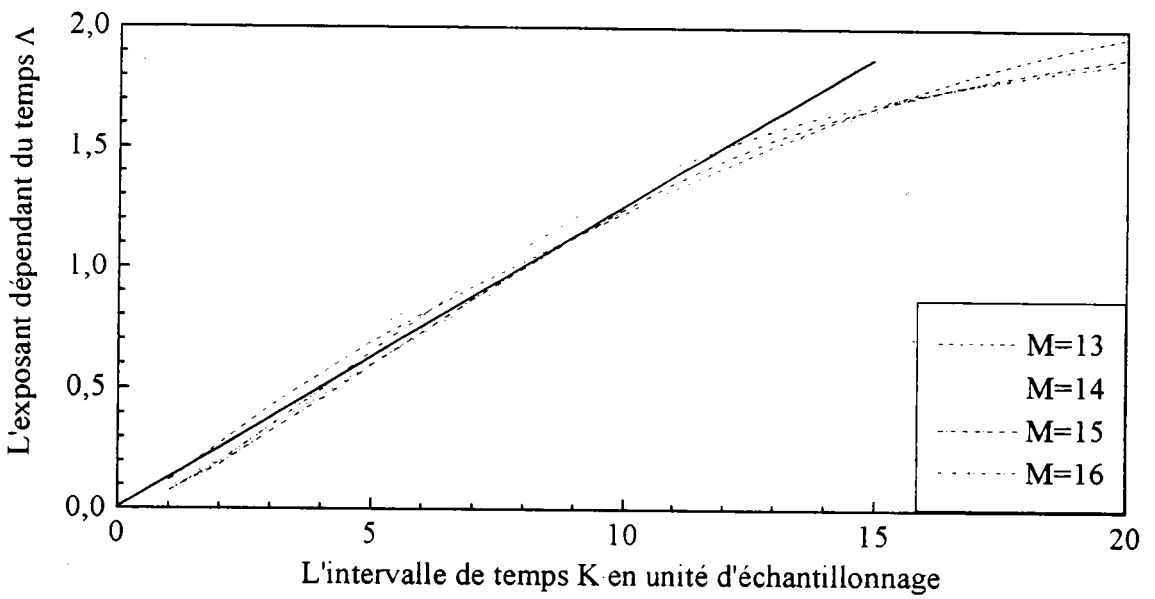


Figure IV-26 : Variations temporelles de l'exposant dépendant du temps Λ pour L=2 et M=13,14,15,16 avec Ω=1.

2-3-4- Données de substitution.

Pour donner plus de rigueur aux résultats précédents qui suggèrent l'existence d'un attracteur étrange (l'existence d'un plateau et la valeur positive du plus grand exposant de Lyapunov), nous avons eu recours à la méthode des données de substitution [96]. Nous calculons la transformée de Fourier de la série temporelle LPMM1516.FIT. Après avoir rendu aléatoire la phase de cette transformée (sans toucher à son amplitude), nous calculons sa transformée de Fourier inverse. La partie réelle de la dernière transformée, nommée LPMM1516.FFT, est appelée "données de substitution". Si l'analyse de la série LPMM1516.FFT permet de retrouver les résultats obtenus pour la série LPMM1516.FIT, on conclut au caractère non déterministe de cette dernière. Inversement, si les résultats obtenus avec les données de substitution sont très différents de ceux de la série initiale, le caractère déterministe de cette dernière n'est pas exclu.

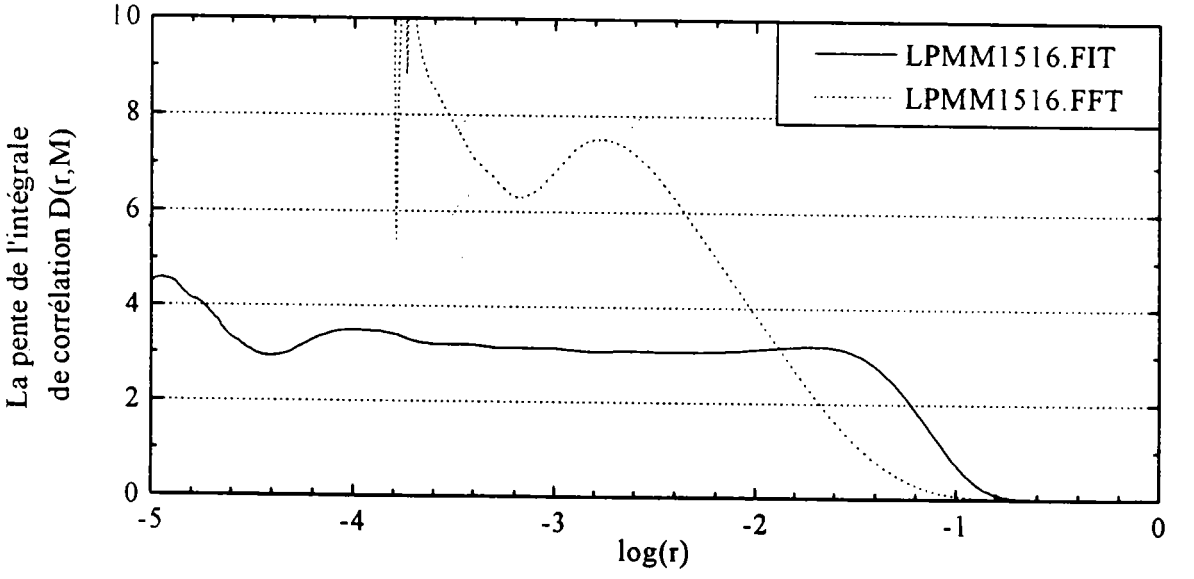


Figure IV-27-a : Variations de la pente de l'intégrale de corrélation D(r,M)

Pour le couple de paramètres de reconstruction optimum (M,L)=(15,2), la figure IV-27-a montre les variations de la pente de l'intégrale de corrélation en fonction de log(r). Le plateau obtenu en utilisant la série LPMM1516.FIT disparaît complètement lorsque l'on utilise la série LPMM1516.FFT pour la reconstruction du portrait de phases.

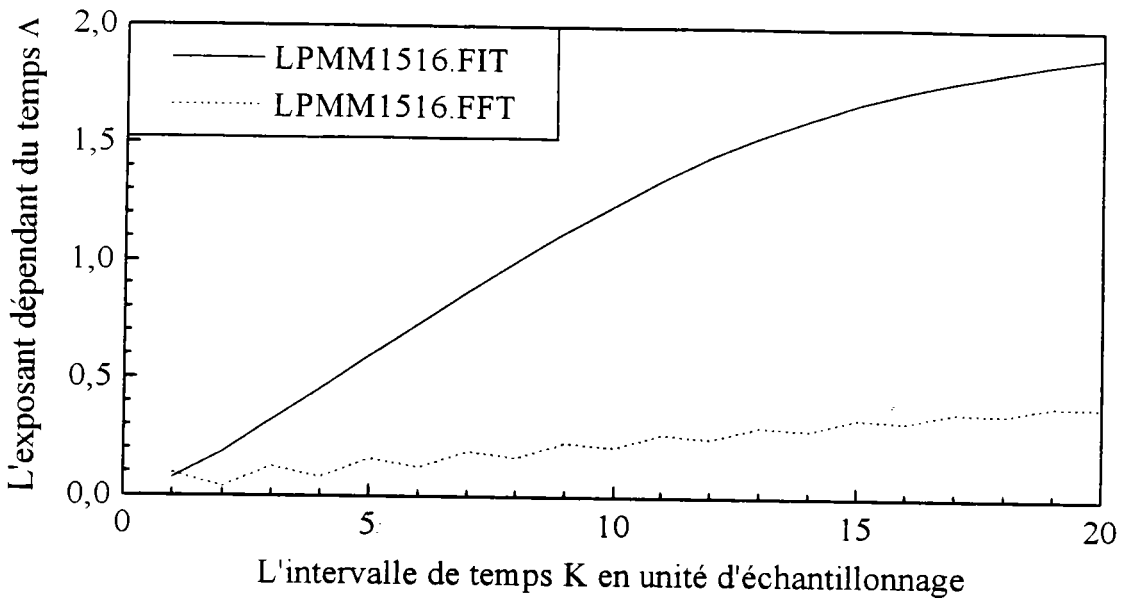


Figure IV-27-b : Variations temporelles de l'exposant dépendant du temps Λ pour (M,L)=(15,2).

Pour le même couple de paramètres de reconstruction (M,L)=(15,2), la figure IV-27-b montre les variations temporelles de l'exposant Λ. On voit nettement le changement du résultat lorsqu'on remplace la série LPMM1516.FIT par la série LPMM1516.FFT. Avec cette dernière, les valeurs obtenues de l'exposant Λ sont proches de zéro. Ce changement radical prouve que le caractère déterministe de la série LPMM1516.FIT n'est pas dû à une processus stochastique en loi de puissance [96].

Il est utile de noter que des données de substitution obtenues de manière indépendante par N.J. Norohna [97], à partir des mêmes données initiales LPMM1516.FIT conduisent au même changement radical de comportement. Nous ne pouvons pas déduire directement de ces résultats que la série LPMM1516.DAT est déterministe. Néanmoins, ajoutés aux résultats des sections 2-2-3 et 2-3-3, ils convergent avec les indications précédentes pour amener à conclure à l'existence d'une dynamique déterministe non linéaire à un faible nombre de paramètres d'état. L'attracteur étrange associé a pour dimension de corrélation D=3,1 et la sensibilité aux conditions initiales est exprimée par une valeur positive du plus grand exposant de Lyapunov $\lambda=2,5\ s^{-1}$.

2-3-5- Représentation de l'attracteur étrange

Maintenant que nous avons mis en évidence l'existence d'un attracteur étrange, il serait intéressant de montrer son allure. Pour un retard L=2, la figure IV-28 montre la projection du pseudo-portrait de phases sur le plan (1,2) de l'espace de reconstruction [6,7]. La trajectoire reconstruite n'est pas attirée par un attracteur simple. Son évolution n'est pas aléatoire non plus. On constate une structure en feuilles du pseudo-portrait de phases qui rappelle celle d'un objet fractal (voir le chapitre II). On remarque aussi certaines irrégularités dans l'évolution de la trajectoire. Ces dernières sont dues au bruit contenu dans la série temporelle et ont tendance à cacher la structure fractale de l'attracteur. Enfin, on constate que la trajectoire ne s'étend que dans la partie située sous la diagonale du plan (1,2) de l'espace de reconstruction. Ceci n'est pas surprenant, sachant que les plus grandes variations des éléments de la série temporelle sont négatives. Ce caractère de la série vient des chutes de la contrainte associées à la génération et à la propagation des bandes PLC.

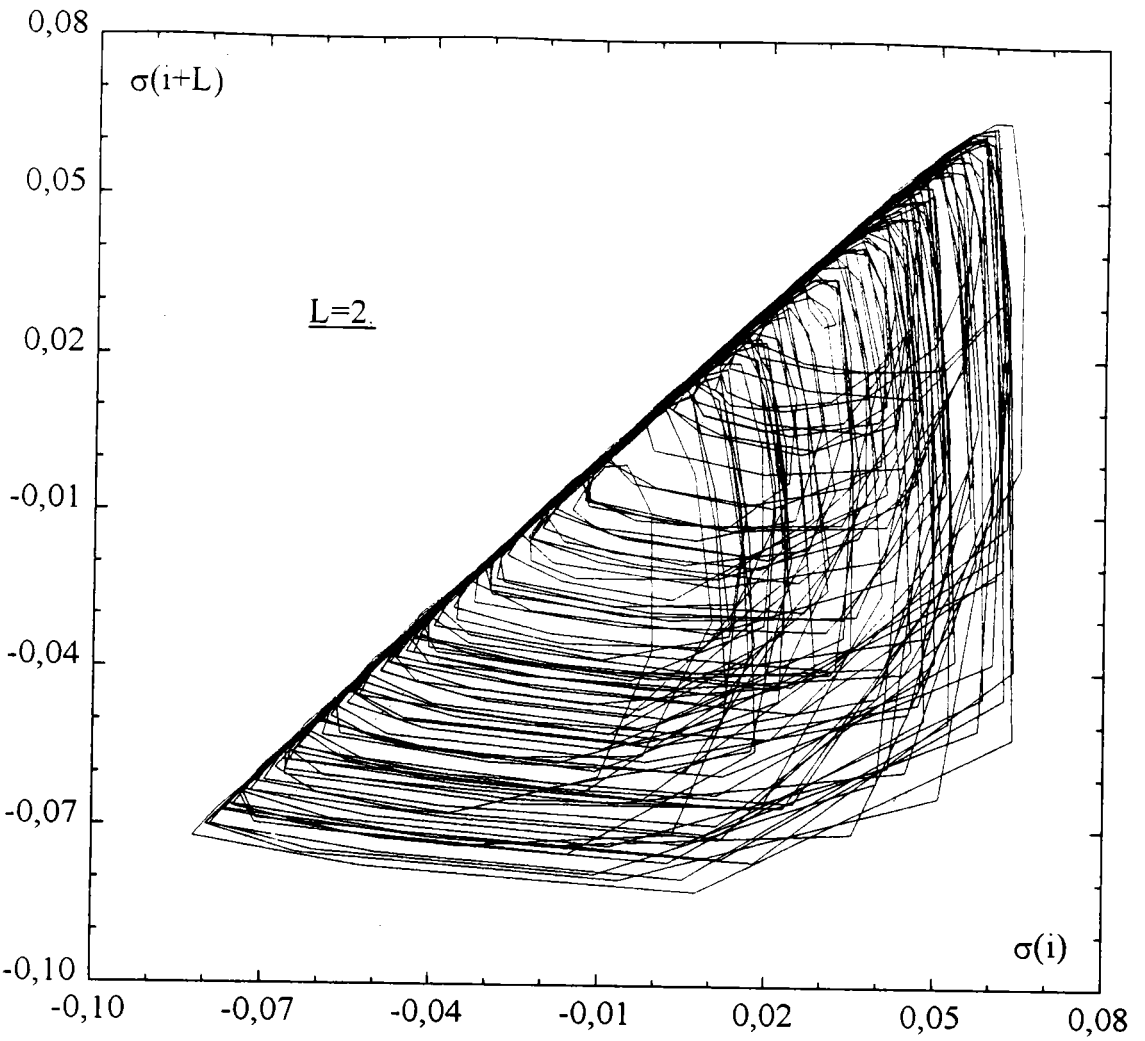


Figure IV-28 : Projection de la trajectoire sur le plan (1,2) de l'espace de reconstruction pour L=2.

La représentation de la trajectoire dans l'espace de reconstruction suggère bien l'existence d'un attracteur étrange. Cependant le calcul de ses caractéristiques se heurte à des problèmes liés à la façon dont la trajectoire s'étend dans l'espace [84]. A part quelques "visites" à la partie inférieure à la diagonale, la trajectoire a tendance à rester au voisinage de cette dernière.

Les figures IV-29-a, IV-29-b et IV-29-c montrent respectivement la projection de la trajectoire sur le plan (c_1,c_2), (c_1,c_3) et (c_2,c_3) de l'espace des composantes principales. Ces projections montrent que la trajectoire reconstruite est mieux étendue dans cet espace que dans l'espace de reconstruction (le PPP de la figure IV-28). Cette meilleure extension de la trajectoire exprime une réduction de la redondance dans l'espace des composantes principales. Comme nous l'avons vu au chapitre III, c'est pourquoi l'on préfère effectuer les calculs dans l'espace des composantes principales [86].

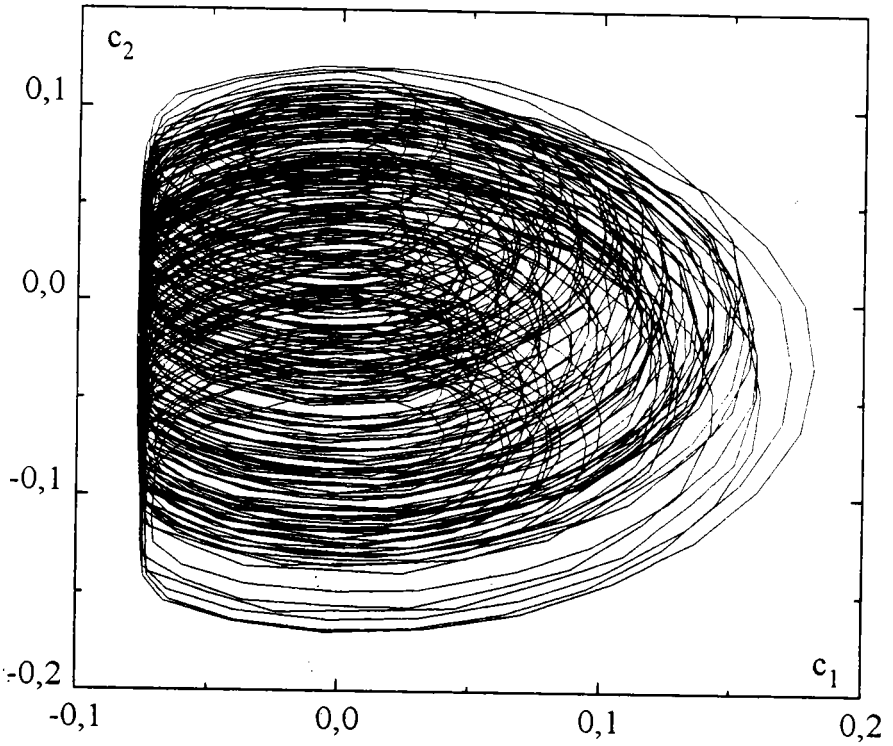


Figure IV-29-a : Projection de la trajectoire sur le plan (c_1,c_2) de l'espace des composantes principales.

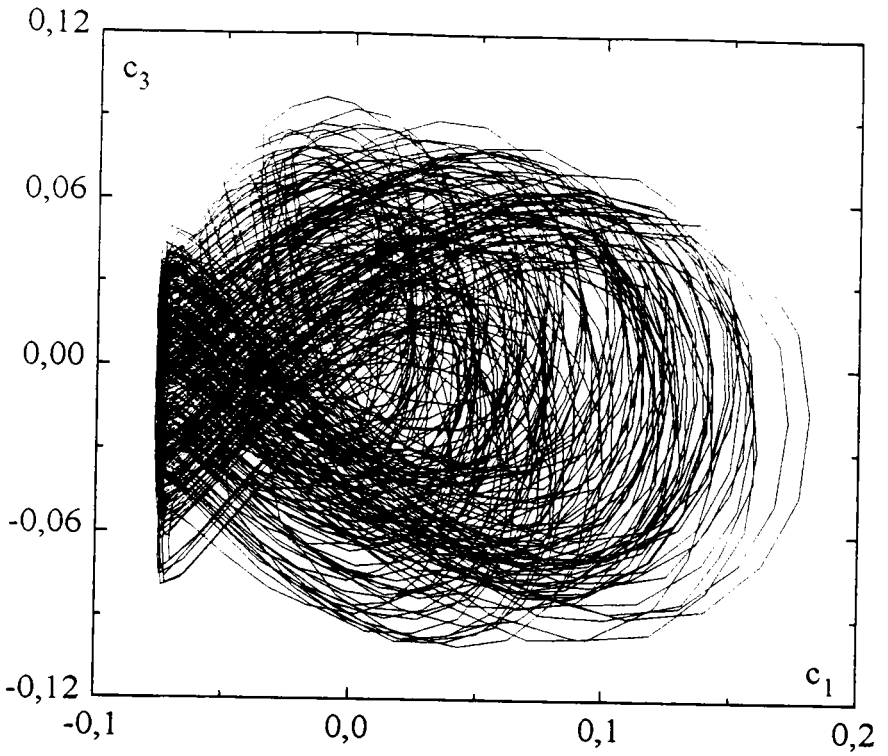


Figure IV-29-b : Projection de la trajectoire sur le plan (c_1,c_3) de l'espace des composantes principales.

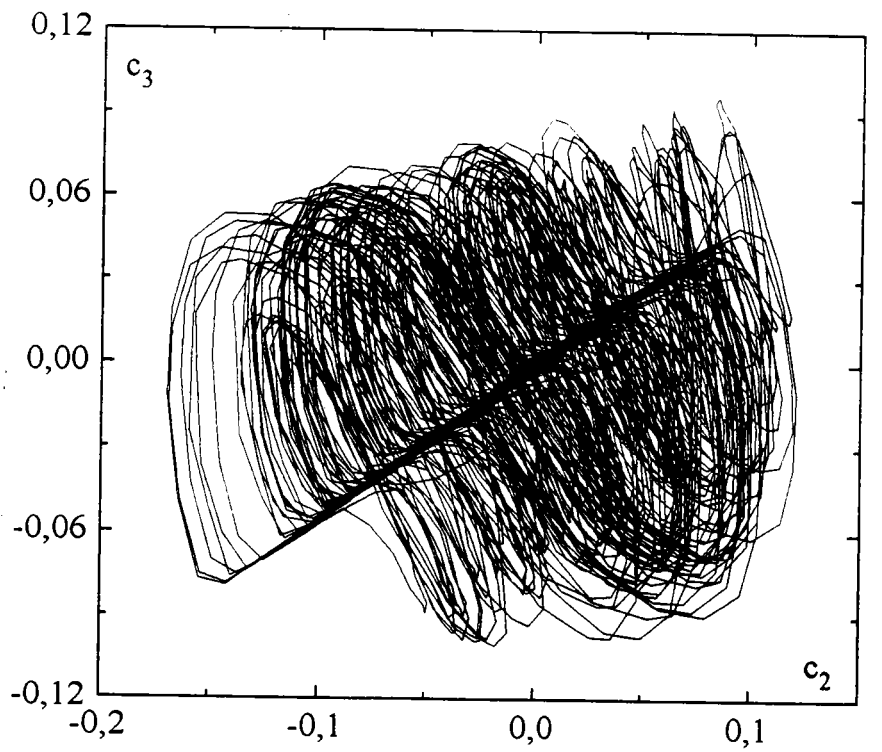


Figure IV-29-c : Projection de la trajectoire sur le plan (c_2,c_3) de l'espace des composantes principales.

2-3-6- Conclusion

Le calcul de la dimension de corrélation effectué dans la section 2-3-2 montre l'existence d'une zone auto-similaire significative : la pente de l'intégrale de corrélation est pratiquement constante pour log(r) allant de -3,8 à -1,4. De plus (section 2-3-3), la sensibilité aux conditions initiales est attestée par la valeur positive du plus grand exposant de Lyapunov : λ=**2,5** s^{-1} sur un intervalle de temps de l'ordre de 0,6 s. Enfin, dans la section 2-3-4, un affinement de ces résultats est obtenu grâce à la méthode des données de substitution : le plateau disparaît complètement et les valeurs de l'exposant de Lyapunov sont proches de zéro. Ce changement radical prouve que le caractère déterministe de la série temporelle initiale n'est pas dû à un processus stochastique en loi puissance. Ces indices, ajoutés l'un à l'autre, nous permettent de confirmer l'existence d'un attracteur étrange dont la dimension de corrélation est de l'ordre de **D=3,1**. La critique qu'on peut adresser aux résultats de l'analyse de la série LPMM1516.DAT est l'augmentation de la pente de l'intégrale de corrélation avec la dimension de reconstruction. En suivant [98], nous attribuons ce manque de saturation à la longueur insuffisante de la série temporelle analysée. Par ailleurs, selon [99], il suffit que la dimension de reconstruction soit supérieure à deux fois la dimension de corrélation pour que cette dernière soit conservée par la reconstruction.

3- RECAPITULATION DES RESULTATS ET CONCLUSION

Pour l'échantillon de monocristal de l'alliage Cu7%Al, le plus grand exposant de Lyapunov obtenu est de l'ordre de λ=9,4 s^{-1} et la décomposition par valeurs singulières nous a permis de réduire le bruit contenu dans la série VER09 et d'aboutir à une dimension de corrélation de l'ordre de D=2,1. Cependant ce résultat n'est pas suffisant pour conclure en ce qui concerne la dynamique du phénomène car la série VER09 est trop courte (durée d'enregistrement de l'ordre de 12 secondes). Une deuxième analyse est faite sur deux parties de la série LPMM1, qui est issue de la traction d'un échantillon de polycristal de l'alliage Al3%Mg. L'analyse de la partie correspondant aux petites valeurs de la déformation (LPMM12) aboutit à une valeur de l'ordre de D=2,1 pour la dimension de corrélation et une valeur de l'ordre de λ=3,6 s^{-1} pour le plus grand exposant de Lyapunov. A ce stade nous réservons nos conclusions quant à la dynamique du phénomène car la série LPMM12 n'est pas stationnaire (l'amplitude des décrochements augmente au cours du temps). Cet inconvénient n'existe pas dans la dernière partie de la série LPMM1. C'est pourquoi nous avons conduit une troisième analyse en utilisant la série LPMM1516. Cette dernière analyse est menée en collaboration avec Ananthakrishna et Noronha [100] et il en résulte que la dimension de corrélation est de l'ordre de D=3,1 et que le plus grand exposant de Lyapunov est de l'ordre de λ=2,5 s^{-1}. En outre, l'utilisation de données de substitution dont la phase est rendue aléatoire amène à une modification radicale du comportement de la série temporelle. L'accumulation des résultats ci-dessus nous permet de conclure que la dynamique sous-jacente à l'effet PLC est chaotique déterministe dans le cas de l'alliage Al3%Mg, et pour une déformation plastique assez grande pour que l'amplitude des décrochements reste stationnaire.

CONCLUSION GENERALE

Ce travail concerne l'instabilité de la déformation plastique associée à l'effet Portevin-Le Chatelier. Rappelons que celle-ci se manifeste, lors de la traction à vitesse de déformation constante de certains alliages, par la génération et la propagation irrégulières de bandes de déformation plastique localisée le long de l'échantillon de traction. Les courbes de traction obtenues montrent des décrochements de la contrainte dont l'apparence est aléatoire. A ce constat s'ajoutent les résultats de certains modèles qui suggèrent que la dynamique du phénomène peut être apériodique [4] voire chaotique déterministe [5].

Ces suggestions nous ont poussé à chercher si l'on peut confirmer le caractère déterministe de la dynamique de l'effet PLC en analysant l'information contenue dans l'évolution de la contrainte d'écoulement. Pour cela nous avons utilisé diverses méthodes d'analyse qui permettent la caractérisation de la dynamique d'un système à partir d'une série temporelle constituée des variations de l'un de ses paramètres d'état. Nous avons d'abord utilisé la méthode des retards [7] pour reconstruire le portrait de phases du système à partir de séries temporelles de la contrainte. Le pseudo-portrait de phases obtenu suggère que la trajectoire reconstruite converge vers un attracteur étrange, qui est le reflet d'une dynamique chaotique déterministe. A l'aide de l'algorithme de Grassberger et Procaccia [8], nous avons alors calculé la dimension de corrélation qui est l'une des caractéristiques d'un attracteur étrange. De plus, sachant qu'une dynamique déterministe est caractérisée par la sensibilité des trajectoires aux conditions initiales, nous avons cherché l'existence d'un exposant de Lyapunov positif exprimant la divergence de trajectoires initialement voisines [6,9]. Enfin, pour

donner plus de rigueur à nos résultats, nous avons eu recours à la méthode des données de substitution qui permet d'exclure le caractère stochastique des séries temporelles analysées [96]. Notons que, malgré le principe relativement simple de ces techniques, leur application pratique se heurte à des problèmes liés à leur mise en oeuvre et à la qualité des séries temporelles. Dans la méthode des retards, les paramètres de reconstruction restent arbitraires, et il convient donc d'être prudent en utilisant simultanément plusieurs critères pour le choix des valeurs optimums de ces paramètres [9,84,86]. D'autre part, les séries temporelles analysées sont souvent contaminées par du bruit provenant du dispositif expérimental, ce qui risque de masquer l'information dynamique qu'elles contiennent. A cet égard, nous nous sommes servi de la décomposition par valeurs singulières [81,86] pour réduire la contribution de la composante stochastique dans les calculs.

Nous avons appliqué cette méthode d'analyse dynamique aux séries temporelles de la contrainte obtenues lors de la traction, à vitesse de déformation constante, de divers échantillons d'alliages sujets à l'effet PLC [11,12]. Les conclusions les plus significatives sont celles tirées de l'analyse de la contrainte appliquée à un polycristal d'alliage Al3%Mg, après une déformation plastique suffisante pour que, hors écrouissage, la microstructure demeure stationnaire (la série LPMM1516). L'utilisation de l'algorithme de G-P montre l'existence d'une zone auto-similaire significative, avec une valeur de la dimension de corrélation de l'ordre de D=3,1, ce qui représente une condition nécessaire à l'existence d'un attracteur étrange. D'autre part, le calcul des variations temporelles de l'exposant dépendant du temps [9] montre que le plus grand exposant de Lyapunov est positif, de l'ordre de λ=2,5 s^{-1}, ce qui prouve qu'il y a sensibilité du système aux conditions initiales. Enfin l'application de la méthode des données de substitution conduit à la perte de la dimension de corrélation et à des valeurs de l'exposant de

Lyapunov proches de zéro. L'accumulation de ces informations et leur compatibilité avec des résultats similaires [101-106], permet de conclure que, dans ces conditions expérimentales, la dynamique sous jacente à l'effet PLC est chaotique déterministe.

Notons que l'aspect quantitatif de ce travail demeure imprécis. En effet, la critique majeure que l'on peut adresser aux résultats obtenus est la légère augmentation de la pente de l'intégrale de corrélation avec la dimension de reconstruction. Dans [98], on montre que même s'il existe un attracteur étrange, la saturation n'est observée que si la série temporelle est assez longue. Or, l'amplitude des décrochements de la contrainte augmente avec la déformation, à cause de l'écrouissage du matériau et des modifications de la structure qui en résultent. Par conséquent, la série temporelle doit être courte pour minimiser l'augmentation de son amplitude au cours du temps, ce qui est contradictoire avec les conditions de la saturation. La valeur obtenue pour la dimension de corrélation est donc une valeur par défaut, et le résultat essentiel est qu'elle reste faible.

Par ailleurs, les résultats exposés restent ponctuels dans la mesure où ils ne concernent qu'un nombre réduit de conditions expérimentales. Il est donc nécessaire d'examiner l'influence des conditions de chargement et des paramètres du matériau sur l'information dynamique contenue dans les séries temporelles de la contrainte. En d'autres termes, l'analyse de séries temporelles issues de la traction de divers échantillons, dans des conditions de déformation variées, permettrait de mieux comprendre la relation entre l'aspect microscopique du phénomène (les interactions à l'échelle mésoscopique) et le comportement global que reflète une série temporelle de la contrainte (la corrélation, ou non, de la génération et de la propagation des bandes PLC).

On doit enfin noter que les systèmes sujets à l'effet PLC sont étendus, et que la localisation de la déformation plastique y est très forte. L'information contenue dans l'évolution de la contrainte appliquée possède un caractère moyen, insuffisant pour rendre compte de cette localisation. C'est cette propriété de moyenne qui est utilisée pour caractériser la dynamique globale de l'échantillon ; bien qu'elles reflètent les corrélations qui sont responsables de la génération et de la propagation des bandes PLC, les séries temporelles utilisées ne permettent pas à elles seules de caractériser la dynamique locale de manière exhaustive.

Le mérite de ce travail ne s'arrête pas à la réponse à la question posée au début de ce mémoire, à savoir : la dynamique de l'effet PLC est-elle, ou non, chaotique déterministe ? Outre l'aboutissement à la mise en évidence d'un attracteur étrange, qui est le reflet d'une telle dynamique, la valeur de la dimension de corrélation obtenue, légèrement supérieure à trois, implique que la dimension de la variété contenant l'attracteur est au moins égale à quatre. En supposant que la dynamique locale moyenne est identique à la dynamique globale mise en évidence, nous en déduisons qu'une description dynamique locale de l'effet PLC doit prendre en considération au moins quatre paramètres d'état, ce qui est compatible avec le modèle dynamique des dislocations d'Ananthakrishna *et al* [5].

BIBLIOGRAPHIE.

1- **P. Lacombe.** Matériaux et Techniques, Aout-Sept., E5-E15, 1985.

2- **Y. Estrin & L.P. Kubin.** "Collective Dislocation Behaviour in Dilute Alloys and the Portevin-Le Chatelier effect".

3- **Y. Estrin & L.P. Kubin.** Res. Mecaneca, 23, 197-221, 1988.

4- **V. Jeanclaude & C. Fressengeas.** Scripta Metall., 29, 1117-1182, 1993.

V. Jeanclaude & C. Fressengeas. C.R.A.S. Paris, 315, 7-13, 1992.

5- **G. Ananthakrishna & M.C. Valsakumar.** Phys. Lett., A95, 69, 1983.

6- **P. Bergé, Y. Pomeau & Ch. Vidal.** "L'ordre dans le chaos", Vers une approche déterministe de la turbulence. Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts.

7- **F. Takens.** Detecting strange attractors in turbulence. Lecture notes in mathematics. Vol. 898 (Springer, Berlin, 1981) p.366.

F. Takens. In proceedings of the Warwick Symposium. 1981, edited by D. Rand and L.S. Young (Springer, Berlin, 1981).

8- **P. Grassberger & I. Procaccia.** Characterisation of strange attractors. Phys. Rev. Lett. 50 (1983) 346.

9- **J. Gao & Z. Zheng.** Direct dynamical test for feterministic chaos and optimal embedding of a chaotic time series. Physical review E, volume 49 number 5, (May 1994) 3807-3814.

10- **E.N. Lorenz.** Deterministic non-périodic flow. J. Atmospheric Sciences. 20 (1963) 130-141.

11- **J. Vergnol.** Communication privée. Université de Poitiers.

12- **S. Bakir.** Communication privée. LPMM, Université de Metz.

13- **M. Dablije.** Communication privée. LPMM, Université de Metz.

14- **E.D. Hall.** Yield point phenomena in metals and alloys (Mc Millan, 1970).

15- **F. Le Chatelier.** Rev. Metall. 6, 914, 1909.

16- **A. Portevin & F. Le Chatelier.** C.R. Acad. Sci., Paris, 167, 507, 1923.

A. Portevin & F. Le Chatelier. Trans. ASST 5 (1924) 457.

17- **D. Blanc.** Thèse de doctorat, École des mines de Paris (1986).

18- **J. Caisso.** Thèse de doctorat, Université de Poitiers (1958).

19- **S. Bakir.** Thèse de doctorat, Université de Metz (1995).

20- **K. Chihab.** Thèse de doctorat, Université de Poitiers (1986).

21- **B.J. Brindley & P.J. Worthington.** Metal. and Mater. 4, 101 (1970).

22- **J. M. Burgers.** K. Ned. Akad. Wet. 42, p293, 1939.

23- **U.F. Kocks.** Progr. Mater. Sci., Chalmers anniversary vol. (Pergamon Press, Oxford, 1981) p185.

24- **A.H. Cottrell.** Dislocations and plastic flow in crystals, Clarendom Press, Oxford, 1953.

25- **J. Friedel.** Dislocations, Pergamon Press, Oxford, 1964.

26- **J.J. Gilman.** Phil. Mag. 20, 279 (1969).

27- **S.M. Copley & B.H. Kear.** Trans. Am. Inst. Min. Eng., 239, 984, (1967).

28- **A. Van Den Beukel.** Phys. Stat. Sol. a30, 197 (1975).

29- **P.G. Mc Cormik.** Acta. Metall. 20 (1972) 35.

30- **Ph. Aubrun.** C.R.A.S., Série C, 1081 et 1351 (1975).

31- **S.H. Van Den Brink, A. Van Den Beukel & P.G. Mc Cormick.** Phys. Stat. Sol. (6), 30, (1975), 469.

32- **L.P. Kubin & Y. Estrin.** Acta Metall, 33, 3, 397-407, (1985).

33- **L.P. Kubin & Y. Estrin.** Scripta Metall, 23, (1989), 815.

34- **P.G. Mc Cormick.** Acta Metall, 36, (1988), 3061.

35- **L.P. Kubin & Y. Estrin.** Rev. Phys. Appl., 23, 4, 1988.

36- **L.P. Kubin & Y. Estrin.** "Evolution of Dislocation Densities and the Critical Conditions for the Portevin-Le Chatelier Effect". Acta. Metall. Mater. Vol. 38, pp. 697-708, 1990.

37- **L.P. Kubin, Y. Estrin & G. Canova.** "Dislocation Patterns and Plastic instabilities".

38- **G. Ananthakrishna.** Solid State Phenomena, Vol. 3 and 4, p 357-368, (1988).

39- **P. Hähner.** European Research Conference : Plasticity of Materials, Ascoma, 1992.

40- **E. Orowan.** Dislocation in Plasticity, The Sorby Centenniel Symposium on the History of Metallurgy, Ed. Cyril, Stanley Smith, MIT, Cordon and Breach, p 359, 1965.

41- **A. Van Den Beukel.** Acta Mettal 28 (1980) 965.

42- **N. Louat.** Scripta Metall, 15, 1167, 1981.

43- **P. Penning.** Acta Metall, 20, 1169-1175, 1972.

44- **C.F. Elam.** Proc. R. Soc. London A65 (1938) 568.

45- **M.J. Manjoine.** Trans. Am. Soc. Min. Engrs. 18, 66, (1944) A211.

46- **A.W. Sleeswijk.** Acta. Mettal. 6 (1958) 598.

47- **S.R. Bodner.** Mater. Sci. and Engg. 2 (1967) 213.

48- **S.R. Bodner & A. Rosen.** J. Mech. Phys. Solids 15 (1967) 47,63.

49- **L.P. Kubin, K. Chihab & Y. Estrin.** Acta Metall, 36, 2707, 1988.

50- **L.P. Kubin & Y. Estrin.** Strength of Metals and Alloys,
H. Mc Queen *et al.*, eds. (Pergamon Press, Oxford, 1985) p 331.

51- **L.P. Kubin & Y. Estrin.** J. Physique 47 (1986) 497.

52- **Y. Estrin, C.P. Ling & P.G. Mc Cormick.** Acta. Metall. Mater., Vol. 39, N° 11, pp 2943-2949, 1991.

53- **H.M. Zbib & E.C. Aifantis.** Scripta. Metall., 22, 1331-1336, 1988.

54- **E.C. Aifantis.** Trans. A.S.M.E., J. Eng. Mat. Tech., 106, 326-330, 1984.

55- **J. Kratochvil.** Rev. Phys. Appl., 23, 419, 1988.

56- **Fleck, Muller, Ashby & Hutchinson.** Acta. Metall. Mater., 42, 2, pp 475-487, 1994.

57- **Y. Bréchet & F. Louchet.** Solid State Phenomena, Vol 3&4, pp 347-356, 1988.

58- **Y. Bréchet & F. Louchet.** Non Linear Phenomena in Materials Science, **L.P. Kubin. & G. Martin.** éd, pp 347-356, Trans. Tech. Publications, Aedermannodorf Switzerland, 1988.

59- **V. Jeanclaude.** Thèse de doctorat, Université de Metz (1993).

60- **G. Iooss & D.D. Joseph.** Elementary Stability and Bifurcation Theory, Springer, Verlag, 1980.

61- **G. Ananthakrishna & D. Sahoo.** J. Phys. D, 14, 699, 1981.

62- **G. Ananthakrishna.** J. Phys. D, 14, 2091, 1981.

63- **G. Ananthakrishna.** J. Phys. D, 14, 77, 1982.

64- **G. Ananthakrishna & D. Sahoo.** J. Phys. D : Appl. Phys., 14, 2081-2090, 1981.

65- **M.C. Valsakumar & G. Ananthakrishna.** J. Phys. D : Appl. Phys., 16, pp 1055-1068, 1983.

66- **D. Sahoo & G. Ananthakrishna.** J. Phys. D, 15, 1439, 1982.

67- **G. Ananthakrishna & M.C. Valsakumar.** J. Phys. D : Appl. Phys., 15, L171-175, 1982.

68- **G. Ananthakrishna.** Bull. Mater. Sci., 6, 665, 1984.

69- **G. Ananthakrishna & D. Sahoo.** Nucl. Phys. Solid State Phys. (India), 21C, 771, 1978.

70- **L.N. Zagorukuyko, A.I. Osetskiy & V.P. Soldatov.** Phys. Met. Metallogr., 43, 156, 1977.

71- **N. Minorsky.** Nonlinear Oscillations (New Jersey : Van Nostrand), 1977.

72- **P.G. Mc Cormick.** Acta Metall, 19, 463, 1971.

73- **M.J. Feigenbaum.** J. Stat. Phys. 19, 25 (1978).

74- **G. Ananthakrishna & T.M. John.** In direction in chaos, ed. Hao Bai-Lin, (Singapore World Scientific, 1990).

75- **G. Ananthakrishna.** Scripta. Metall. Mat., 29, 1183-1188, 1993.

76- **J. H. Curry, J.R. Herring, J. Loncaric & S. A. Orszag.** Order and disorder in two- and three-dimensional Bénard convection. J. Fluid Mech. 147 (1984) 1-38.

77- **J.R. Rice.** Spatio-temporal complexity of slip on a fault. Journal of Geophysical Research (1992) 1-40.

78- **Benhammou.** Séminaire, Institut de Physique, 1993-1994.

79- **M. Hénon.** Commun. Math. Phys., 50, 69 (1976).

80- **N.H. Packard, J.P. Crutchfield, J.D. Framer & R.S. Shaw.** "Geometry from a time series". Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 712.

81- **D.S. Broomhead & G.P. King.** Exracting qualitative dynamics from exparimental data. Physica D 20 (1986) 217-236.

82- **H. Whitney.** "Differentiable Manifolds". Ann. Math. 37 (1936) 645.

83- **J. Guckenheimer & P. Holmes.** Non linear oscillations, Dynamical systems, and bifurcations of vector fields (Spriger, Berlin, 1983).

J. Palis, Jr. & W. de Melo. Geometric Theory of dynamical systems. An introduction (Springer, New York, 1982).

84- **M.T. Rosenstein, J.J. Collins & C.J. De Luca.** Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times. Physica D 73 (1994) 82-98.

85- **T.C. Roux, R.H. Simoyi & H.L. Swinney.** "Observation of a strange attractor". Physica 8D (1983) 257-266.

86- **A.M. Albano, J. Muench, C. Schwartz, A.I. Mees & P.E. Rapp.** "Singular value decomposition and the Grassberger-Procaccia algorithm. Phys. Rev. A 38 (1988). pp 3017-3026.

87- **G.P. King, R.Jones & D.S. Broomhead.** Phase portraits from a time series : a singular system approach. Nucl. Phys. B2 (1987) 379.

88- **A.M. Fraser & H.L. Swinney.** Independent coordinates for strange attractors from mutual information. Phys. Rev. A33 (1986) 1134.

89- **W. Liebert & H.G. Schuster.** Proper choice of the time delay for the analysis of chaotic time series. Phys. Lett. A142 (1989) 107.

90- **A.M. Albano, A Passamante & M.E. Farrell.** Using higher-oerder correlations to define an embedding window. Physica D 54 (1991) 85.

91- **T. Buzug & G. Pfister.** Optimal delay time and embedding dimension for delay-time coordinates by analysis of the global static and local dynamical behavior of strange attractors. Phys. Rev. A 45. (1992) 7073.

92- **T. Buzug & G. Pfister.** Comparison of algorithms calculating optimal parameters for delay time coordinates. Physica D 58 (1992) 127.

93- **M. Bertero & E.R. Pike.** "resolution in diffraction limited imaging, a singular value analysis. I : The case of coherent illumination". Opt. Acta. 29 (1982) p727.

94- **E.R. Pike, J.G. McWhirter & M. Bertero.**"Generalised information theory for inverse problems signal processing". IEE Proccedings, 131, pt. F. No (Oct 1984) p 660.

95- **G.W. Stewart.** Introduction to matrix computation. (Academic Press, NewYork 1973).

96- **J. Theiler, S. Eubank, A. Longtin, B. Galdrikian & J. D. Farmer.** Testing for nonlinearity in time series : the methode of surrogate data. Physica D 58 77-94, (1992).

97- **N.J. Norohna.** Communication privée. MRC, IIS, Bangalore (India).

98- **M. Ding, C. Grebogi, E. Ott, T. Sauer & J.A. York.** Plateau Onset for Correlation Dimension : When Does it Occur ? Phys. Rev. Lett. Vol 70 No 25 (1993) 3872-3875.

99- **T. Sauer & J.A. York.** How many delay coordinates do you need ? Inter. J. Bif. Chaos, Vol 3, N° 3, 737-744, (1993).

100- **S.J. Norohna, G. Ananthakrishna, L. Quaouire, C. Fressengeas & L.P. Kubin.** Chaos in the Portevin-Le Catelier effet, Int. J. Bif. Chaos, 1997.

101- **L. Quaouire & C. Fressengeas.** Key Engeng. Mater., 103, 293, (1995).

102- **G. Ananthakrishna & S.J. Norohna.** Key Engeng. Mater., 103, 277, (1995).

103- **G. Ananthakrishna, C. Fressengeas, M. Grosbras, J. Vergnol, C Engelke, J. Plessing, H. Heuhäuser, E. Bouchaud, J. Planes & L.P. Kubin.** Scripta Metall. Mater., 32, 1731, (1995).

104- **S. Venkadesan, K.P.N. Murthy & M.C. Valsakumar.** Key Engeng. Mater., 103, 287, (1995).

105- **S.J. Norohna, G. Ananthakrishna, L. Quaouire & C. Fressengeas.** Chaos in Jerky Flow - Experimental Verification of a theoritical Prediction, Pramana, 1996.

106- **C. Engelke.** Dynamische Zeitreihenanalyse Plastischer Instabilitäten Von Binären Legierungen, Cuvilier, Göttingen. 1996.