



**HAL**  
open science

# Sur la stabilité et la stabilisation de systèmes non linéaires discrets

Mohamed Bensoubaya

► **To cite this version:**

Mohamed Bensoubaya. Sur la stabilité et la stabilisation de systèmes non linéaires discrets. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paul Verlaine - Metz, 1997. Français. NNT : 1997METZ040S . tel-01777223

**HAL Id: tel-01777223**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01777223v1>**

Submitted on 24 Apr 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

# THÈSE

présentée à l'Université de Metz  
pour l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE METZ EN MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

**Mohamed BENSOUBAYA**

Titre de la thèse :

**SUR LA STABILITÉ ET LA STABILISATION  
DE SYSTÈMES NON LINÉAIRES DISCRETS**

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE - METZ	
N° inv.	1997 0845
Cote	S/M <sub>3</sub> 97/40
Loc	Magasin

Soutenue le 25 Juin 1997 devant le jury composé de :

M. DAROUACH, professeur à L'IUT de Longwy. Rapporteur.

H. HAMMOURI, Professeur à l'Université Claude Bernard, Lyon I. Rapporteur.

A. IGGIDR, Chargé de recherche à l'INRIA.

B. KLARES, Professeur à l'Université de Metz.

G. SALLET, Professeur à l'Université de Metz. Directeur de thèse.

Thèse préparée dans le cadre du projet CONGE  
INRIA-LORRAINE & URA CNRS 399

# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>généralités</b>	<b>9</b>
1.1	Quelques exemples de modèles discrets . . . . .	9
1.2	Notions de stabilité . . . . .	11
1.3	Méthode directe de Lyapunov – Principe d’invariance de LaSalle	13
1.4	Stabilisation . . . . .	15
1.4.1	Condition nécessaire de stabilisation . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Nouveaux critères pour la stabilité des systèmes Discrets</b>	<b>19</b>
2.1	Introduction . . . . .	19
2.2	Résultats principaux . . . . .	22
2.3	Exemples et remarques . . . . .	26
2.4	Application à l’étude de certains systèmes : . . . . .	29
2.4.1	Variété Centrale . . . . .	29
2.4.2	Systèmes possédant des constantes du mouvement . . .	31
2.4.3	Lien entre détectabilité et stabilité pour les systèmes discrets . . . . .	32
2.4.4	Systèmes en cascade . . . . .	34
2.5	Conclusion . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Applications aux Problèmes de stabilisation</b>	<b>37</b>
3.1	Systèmes en cascade . . . . .	37
3.2	Systèmes dont la dérive est "dissipative" . . . . .	41
3.2.1	Existence . . . . .	44
3.2.2	Construction explicite . . . . .	48
3.2.3	Résultat global . . . . .	51
3.2.4	Exemples . . . . .	52
3.2.5	Cas des systèmes mono-entrée . . . . .	55
3.3	Principe de Séparation . . . . .	59

<b>4 Global Stabilization of Periodic Discrete-Time Nonlinear Systems</b>	<b>63</b>
4.1 Introduction . . . . .	64
4.2 Stability of periodic systems . . . . .	65
4.3 Stabilization . . . . .	67
<b>5 Appendice : Méthode de Jurdjevic-Quinn pour des systèmes non affines en contrôle</b>	<b>77</b>
5.1 Systèmes non linéaires déterministes . . . . .	78
5.1.1 Introduction . . . . .	78
5.1.2 Notations et définitions . . . . .	80
5.1.3 condition de type Jurdjevic-Quinn . . . . .	81
5.1.4 Cas d'une entrée scalaire . . . . .	86
5.1.5 Exemples . . . . .	88
5.2 systèmes non linéaires stochastiques . . . . .	90
5.2.1 Introduction . . . . .	90
5.2.2 Stabilité stochastique . . . . .	91
5.2.3 Condition suffisante de stabilisation . . . . .	93
<b>Bibliographie</b>	<b>97</b>

# 0

## Introduction

La théorie mathématique du contrôle est orientée vers l'étude des systèmes dynamiques. Contrôler un système c'est influencer son comportement en vue d'atteindre un objectif donné. Durant les dernières décennies cette théorie a gagné une grande importance chez les ingénieurs, les mathématiciens, les scientifiques et autres chercheurs. Les exemples de problèmes de contrôle sont très nombreux et touchent un grand champ d'applications comme par exemple le suivi d'un véhicule dans l'espace, le contrôle de l'économie d'une nation, la fabrication de robots, le contrôle d'une épidémie ou d'une culture biologique, etc ...

La dynamique d'un système est en général modélisée par une équation différentielle (système en temps continu) ou par une équation aux différences (système en temps discret).

Les systèmes en temps continu occupent une large place dans la littérature. Les systèmes discrets sont quant à eux d'un intérêt plus récent mais de plus en plus croissant. Ils ont une grande importance pratique. D'une part ils sont utilisés en tant que modèle approché pour l'étude des systèmes continus (échantillonnage et utilisation de calculateurs ...), et d'autre part ils sont le modèle de nombreux problèmes dynamiques qui sont d'origine discrète (systèmes économiques, modèles de croissance d'une population ...)

Parmi les thèmes de la théorie du contrôle on trouve les problèmes de commandabilité, d'observabilité, de stabilisation, d'estimation de l'état ...

Dans cette thèse on s'intéresse aux problèmes de la stabilité et de la stabilisation par retour d'état, de certains systèmes dynamiques non linéaires en temps discret et continu.

Dans le cas des systèmes linéaires ces problèmes ont été largement étudiés, et une théorie complète est maintenant disponible dans la littérature. Quand des non linéarités dans le système sont évoquées, le problème est considérablement plus difficile et les questions sont loin d'être complètement résolues.

Dans tout ce qui suit le point d'équilibre sera l'origine de  $\mathbb{R}^n$  et les systèmes considérés seront définis sur  $\mathbb{R}^n$  ou sur un voisinage ouvert de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ .

Le premier chapitre est consacré à des rappels de définitions et résultats classiques de stabilité, et de stabilisation, dont certains seront illustrés par des exemples. Le dernier paragraphe (extrait d'un article publié aux CRAS [4]) donne une version discrète du théorème de brockett ([11]), ainsi que des exemples illustratifs.

Dans le second chapitre ([5]) on s'intéresse aux systèmes discrets de la forme

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (0.1)$$

où  $f$  est une fonction continue. On donne une condition suffisante de stabilité qui permet d'étendre les résultats classiques de Lyapunov, dans le sens où l'on permet l'utilisation de fonctions semi définies pour l'étude de la stabilité. Des applications à des problèmes de stabilité ainsi que plusieurs exemples seront donnés pour illustrer ces résultats (systèmes en cascade (Vidyasagar [58]), systèmes possédant une variété centrale (Carr [16]) ou des constantes de mouvement : les constantes de mouvement sont aux systèmes discrets ce que sont les intégrales d'énergie pour les systèmes continus (Aeyels et Sepulchre [1])). Il est à remarquer que l'utilisation de fonctions semi définies permet de donner des preuves plus simples que celles proposées dans la littérature pour certains résultats antérieurs. Le dernier paragraphe de ce chapitre donne une application à l'étude du lien entre la stabilité et l'observabilité pour les systèmes de la forme

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ y(k) = h(x(k)) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (0.2)$$

Dans le troisième chapitre, on applique les résultats précédents à l'étude de la stabilisation par retour d'état des systèmes non linéaires en temps discret de la forme :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (0.3)$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ , et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue satisfaisant  $f(0, 0) = 0$ . Le système libre ( $u = 0$ ) est supposé stable, i.e l'origine est un point d'équilibre stable pour

$$x(k+1) = f(x, 0).$$

Peut-on alors construire un retour d'état  $u = u(x)$  qui rende l'origine asymptotiquement stable pour le système bouclé

$$x(k+1) = f(x(k), u(x(k)))?$$

Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs (*cf.* [30, 22, 32, 40, 45, 55]) pour les systèmes continus de la forme

$$\dot{x} = X(x) + uY(x). \quad (0.4)$$

Une des méthodes les plus connues est celle initiée par Jurdjevic et Quinn ([30]) et qu'on peut résumer ainsi : on suppose que

$$\dot{x} = X(x)$$

est stable et qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V$  définie positive telle que la dérivée de Lie de  $V$  le long du champ de vecteurs  $X$  vérifie

$$X.V(x) \leq 0.$$

On remarque que le feedback  $u(x) = -Y.V(x)$  conserve la stabilité pour (0.4) puisque la dérivée de Lie de  $V$  le long des trajectoires du système bouclé,  $\dot{V} = X.V(x) - (Y.V(x))^2 \leq 0$ , est semi définie négative. Ceci permet alors d'appliquer le principe d'invariance de LaSalle pour trouver les bonnes conditions que doivent satisfaire la fonction  $V$  et les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  pour avoir l'attractivité.

Pour les systèmes discrets, il y va tout autrement, et la méthode de Jurdjevic-Quinn ne peut pas s'appliquer exactement de la même façon : la linéarité en le contrôle  $u$  n'apporte rien ! En effet prenons un système affine en  $u$  (formellement analogue à (0.4))

$$x(k+1) = F(x(k)) + uG(x(k)), \quad (0.5)$$

et faisons les mêmes hypothèses que celles qui ont été faites pour le continu c.à.d. supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V$  définie positive telle que

$$\Delta V = V(F(x)) - V(x) \leq 0.$$

Comment peut-on alors calculer  $u(x)$  de telle façon que la différence de  $V$  le long des solutions du système bouclé

$$x(k+1) = F(x(k)) + u(x(k))G(x(k)),$$

reste semi définie négative ?



C'est à ce niveau là que se situe la difficulté du discret par rapport au continu. Pour le système continu (0.4) on a

$$\dot{V} = X.V(x) + uY.V(x)$$

ce qui conduit naturellement à choisir  $u(x) = -Y.V(x)$  pour avoir  $\dot{V} \leq 0$ . Par contre, pour le système discret (0.5), on a

$$\Delta V = V(F(x) + uG(x)) - V(x)$$

et le choix de  $u(x) \neq 0$  rendant  $\Delta V \leq 0$  est moins évident.

Le but du chapitre 3 est de résoudre ce problème tout en montrant qu'on peut utiliser des fonctions de Lyapunov non nécessairement définies positives.

Rappelons que dans [12] une condition suffisante est donnée pour la stabilisation des systèmes non linéaires en temps discret de la forme

$$x(k+1) = F(x(k)) + G(x(k))u \quad (0.6)$$

dont la dérive :

$$x(k+1) = F(x(k))$$

est stable. Celle-ci nécessite la connaissance d'une fonction de Lyapunov  $V$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , satisfaisant l'analogie en temps discret de la condition de Jurdjevic-Quinn, et telle que :

$$V(F(x) + G(x)u)$$

soit un polynôme de degré 2 en  $u$ . De plus,  $V$  doit satisfaire une condition de convexité si on veut une stabilisation globale. Dans [4], en utilisant le théorème du point fixe nous avons donné une condition suffisante plus générale pour la stabilisation des systèmes de la forme (0.6). Ce chapitre étend aux systèmes non linéaires discrets de la forme générale (0.3) le résultat de [4]. On commence par donner un résultat existentiel, puis on en fait une démonstration constructive permettant d'avoir explicitement le feedback stabilisateur. On notera que dans notre condition suffisante de stabilisation, les hypothèses de convexité sur  $V$  et de quadraticité en  $u$  sur  $V(f(x, u))$  sont écartées.

Dans ce même chapitre, les théorèmes du chapitre 2 sont utilisés pour étudier la stabilisation des systèmes en cascade ainsi que pour donner un principe de séparation. A titre d'exemple on stabilise un système bilinéaire à travers un observateur.

Dans le quatrième chapitre, on s'intéresse à la stabilisation des systèmes discrets non autonomes

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (0.7)$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ , et la fonction  $f(x, u, k)$  est continue en  $(x, u)$  et périodique en  $k$  satisfaisant  $f(0, 0, k) = 0, \forall k$ .

Pour les systèmes non autonomes en temps continu, Krasovski [36] a montré que s'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x, t)$  décroissante le long des trajectoires de

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (0.8)$$

et si l'ensemble

$$\{(x_0, t_0) / \frac{d}{dt}V(x(t, t_0, x_0), t) = 0, t \geq t_0\}$$

ne contient pas de trajectoire entière, alors l'origine du système est asymptotiquement stable. Par  $x(t, t_0, x_0)$  on désigne la solution de 0.8 telle que  $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$ .

On commence par donner une version discrète de ce résultat. Ceci nous permet d'établir des conditions suffisantes de stabilisation pour des systèmes de la forme (0.7). Un calcul explicite du feedback stabilisant est donné. En particulier ceci permet de donner une condition suffisante de stabilisation par feedback dépendant du temps pour des systèmes autonomes qui ne sont pas  $C^0$ -stabilisable. Ce chapitre constitue le prolongement et la généralisation du résultat donné dans ([6]).

On termine cette thèse par un appendice dans lequel on donne des résultats de stabilisation pour les systèmes continus déterministes et stochastiques. Le but est de mentionner un exemple d'apport d'idées et de techniques du discret vers le continu. En s'inspirant des techniques utilisées dans l'étude des systèmes discrets, on traite de problèmes similaires relatifs aux systèmes continus.

L'appendice ([8, 7]), est divisé en deux parties. La première est consacrée à l'étude du problème de la stabilisation pour des systèmes en temps continu non affines en contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (0.9)$$

Plus précisément, on généralise le résultat de Jurdjevic-Quinn sur les systèmes affines en contrôle aux systèmes non affines de la forme plus générale (0.9). En particulier, on montre que si les champs de vecteurs

$$X(x) = f(x, 0), \quad Y_i(x) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, 0), \quad i = 1, \dots, m \quad (0.10)$$

satisfont les conditions de Jurdjevic-Quinn alors le système (0.9) est globalement stabilisable par un feedback borné régulier, construit explicitement, avec un choix arbitraire de la borne.

La deuxième partie du chapitre montre que la méthode développée en première partie continue à s'appliquer aux systèmes stochastiques dont le champ de vecteurs (de la partie déterministe) et le bruit aléatoire vérifient des conditions analogues à celles de la première partie. Il est à remarquer que cette classe de systèmes est plus générale que celles étudiées dans [21] et [17] vu que la partie stochastique dépend du contrôle et que les parties déterministe et stochastique sont non affines en contrôle. On donne une condition suffisante de stabilisabilité globale, ainsi que le feedback stabilisateur.

Les résultats de ce travail ont l'objet des publications suivantes :

Le chapitre 3 a fait l'objet d'un article publié aux CRAS [4], et d'une partie de la communication [9] à la 2ème Conférence Internationale Sur les Equations Différentielles de Marrakech, 16-20 Juin 1995.

Le chapitre 4 constitue une généralisation et une extension d'un article paru aux *Proc. 34th IEEE CDC* 1995 [6].

Les résultats déterministes de l'appendice constituent l'objet de la deuxième partie de la communication [9] ainsi que de la publication aux *Proc. IASTED International Conference Modeling, Identification and Control*, Innsbruck, Austria, 17-19 Février 1997 [8].

Le résultat stochastique de l'appendice est publié aux CRAS [7].

Les chapitres 1 et 4 sont soumis à publication respectivement dans *Journal of Mathematical Analysis and Application* [5], et *Systems & Control Letters* [10].

# 1

## généralités

Ce travail se situe dans le cadre de l'étude des systèmes non linéaires en temps discret comme en temps continu. Plus précisément on s'intéresse aux propriétés de stabilité pour des systèmes discrets de la forme

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ x(k) \in \mathbb{R}^n \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

ainsi qu'au problème de la stabilisation pour des systèmes contrôlés en temps discret

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u) \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (1.1)$$

En appendice, on montre que certaines des idées développées auparavant pour les systèmes de la forme (1.1) s'appliquent aussi pour la stabilisation des systèmes en temps continu

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

L'objet de ce premier chapitre est de rappeler quelques définitions et propriétés classiques sur les équations aux différences. Auparavant nous commencerons par donner deux exemples illustrant l'intérêt des systèmes discrets en théorie du contrôle.

### 1.1 Quelques exemples de modèles discrets

Le but de ce paragraphe est de donner quelques exemples de situations concrètes faisant appel à des modèles discrets.

**Exemple 1 : équation logistique.** Soit  $y(k)$  la taille d'une population au temps  $k$ . Si  $\mu$  est le taux d'accroissement d'une génération à une autre, alors on peut considérer le modèle mathématique représentant la taille de la population au cours du temps sous la forme :

$$y(k+1) = \mu y(k), \quad \mu > 0.$$

Pour la condition initiale  $y(0) = y_0$  la solution est  $y(k) = \mu^k y_0$ . Si  $\mu > 1$  alors  $y(k)$  croît indéfiniment. Si  $\mu = 1$  alors  $y(k) = y_0, \forall k$ , ce qui signifie que la taille de la population est constante. Par contre pour  $\mu < 1$  la population tend à disparaître à l'infinie.

Pour la plus part des modèles biologiques, les cas cités ci-dessus ne se produisent pas. En fait la population croît jusqu'à une certaine limite, puis, vu la limitation des ressources disponibles, les individus engagent une compétition pour ces ressources. Ceci se traduit par une régression de la taille de cette population proportionnellement à son carré :

$$y(k+1) = \mu y(k) - by(k)^2, \quad b > 0.$$

Cette équation non linéaire présente deux points d'équilibre  $y = 0$  et  $y = (\mu - 1)/b$ . Par exemple, pour  $\mu = 2.5$  l'origine est instable, par contre l'autre point d'équilibre est asymptotiquement stable.

**Exemple 2 : Modèle discret pour un système continu ([2]).** Une des applications des systèmes discrets est le contrôle des systèmes continus (modélisés par une équation différentielle). La raison est que pour la plus part des modèles physiques qui sont de nature continue et qu'on souhaite contrôler, le contrôle est, généralement, fourni par un ordinateur, et donc de manière séquentielle. Dans ce cas une approche courante est de trouver un modèle discret équivalent au système continu à étudier.

Soit par exemple le système  $\Sigma_c$  (voir fig) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ A \in M_{n,n}(\mathbb{R}), \quad B \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \quad u \in \mathbb{R}^p. \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $x(t)$  est l'état du système à l'instant  $t$ , et  $u(t)$  est le contrôle. Soient le système  $S_T$  qui au signal continu  $x(t)$  associe la suite  $x(k)$ , tel que

$$x(k) = x(kT)$$

et le système  $H_T$  qui à la suite  $u(k)$  associe le signal constant :

$$u(t) = u(k) \quad \forall t \in [kT, (k+1)T].$$

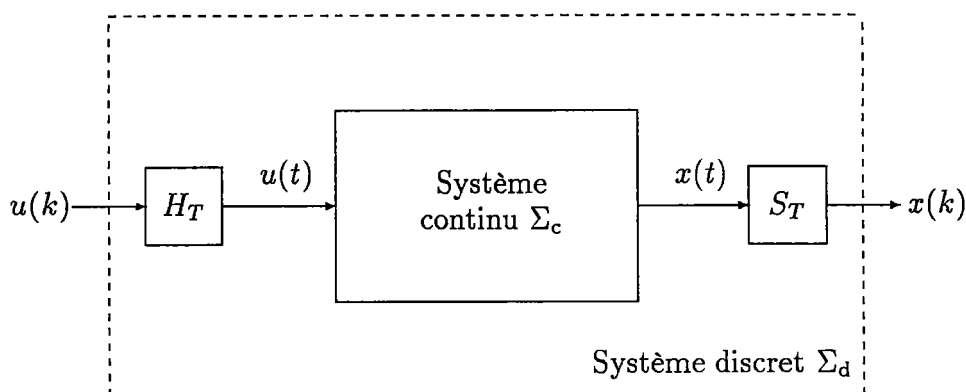
La solution du système (1.2) pour  $t \in [kT, (k+1)T]$  est

$$x(t) = e^{At}x(kT) + \int_{kT}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Alors le modèle discret associé est  $\Sigma_d$  (représenté en pointillé sur la figure) :

$$x(k+1) = \tilde{A}x(k) + \tilde{B}u(k)$$

où  $\tilde{A} = e^{AT}$  et  $\tilde{B} = Te^{AT}B$ .



## 1.2 Notions de stabilité

Les définitions et propriétés qui suivent sont données dans le cadre des équations aux différences. Un simple changement de notations permettra de les réécrire pour les équations différentielles.

Soit l'équation aux différences :

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ , et  $f$  est une fonction continue sur un ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x \in \mathcal{U}$ , on désigne par  $f^k(x)$  la solution de (1.3) commençant au point  $x$  à l'instant  $k = 0$ , i.e.

$$f^0(x) = x, \quad f^{k+1}(x) = f(f^k(x)).$$

Soit  $x_0$  un point de l'ouvert  $\mathcal{U}$ .

**Définition 1.1** On dira que  $x_0$  est un point d'équilibre pour (1.3) s'il est un point fixe de  $f$  (i.e.  $f(x_0) = x_0$ ).

On dira que  $x_0$  est un point d'équilibre stable si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } \|x - x_0\| < \alpha \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \|f^k(x) - x_0\| < \epsilon$$

**Définition 1.2**  $x_0$  est attractif si

$$\forall x \in \mathcal{U}, \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(x) = x_0.$$

$x_0$  est globalement attractif si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(x) = x_0.$$

**Définition 1.3**  $x_0$  est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.  $x_0$  est globalement asymptotiquement stable s'il est stable et globalement attractif.

Remarquons que l'origine peut être attractive mais non stable, en effet :

**Exemple 3 [19].** Considérons le système discret en coordonnées polaires

$$\begin{cases} r(k+1) = \sqrt{r(k)} \\ \theta(k+1) = \sqrt{2\pi\theta(k)} \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $r(k) > 0$  et  $0 \leq \theta(k) \leq 2\pi$ .

L'origine du système (1.4) est attractive, mais instable. En effet, pour une condition initiale donnée  $(r_0, \theta_0)$  on a :

$$r(n) = (r_0)^{(1/2)^n}, \quad \theta(n) = (2\pi)^{1-(1/2)^n} (\theta_0)^{(1/2)^n}.$$

Il est clair que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r(n) = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta(n) = 2\pi$ .

Maintenant si  $r_0 \neq 0$ ,  $\theta_0 = 0$ , alors la solution  $(r(n) = r_0^{(1/2)^n}, \theta(n) = 0)$  converge vers le point d'équilibre  $(1, 0)$ . Par contre si  $\theta_0 = 2\pi - \eta$  avec  $0 < \eta < 1$ , alors la solution correspondante s'enroule autour du cercle au lieu d'aller vers le point d'équilibre  $(1, 0)$ . Donc le point d'équilibre est attractif mais non stable.

On remarque que pour montrer qu'un point d'équilibre possède une des propriétés ci-dessus en utilisant les définitions, on doit calculer explicitement les solutions  $f^k(x)$ , ce qui est en général difficile voir infaisable. En fait, on utilise plutôt les théorèmes suivants dus à Lyapunov qui reposent sur une étude qualitative du système.

## 1.3 Méthode directe de Lyapunov – Principe d'invariance de LaSalle

**Théorème 1.1** *S'il existe une fonction  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ , continue sur un voisinage  $U$  de  $x_0$  et telle que :*

- (a)  $V(x_0) = 0$  et  $V(x) > 0$  si  $x \neq x_0$ ,  
 (b)  $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0 \quad \forall x \in U$ ,

*alors  $x_0$  est un point d'équilibre stable pour (1.3).*

*Si de plus la fonction  $V$  est telle que*

- (c)  $\Delta V(x) < 0 \quad \forall x \in U - \{x_0\}$

*alors  $x_0$  est asymptotiquement stable.*

**Définition 1.4** *Une fonction  $V$  qui satisfait (a) et (b) est appelée fonction de Lyapunov pour (1.3) en  $x_0$ . Si (c) est vérifiée alors  $V$  est appelée fonction de Lyapunov stricte pour (1.3) en  $x_0$ .*

*$V$  est dite propre si l'image réciproque d'un compact de  $\mathbb{R}^+$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$  ou encore  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} V(x) = +\infty$ .*

**Théorème 1.2** (version globale). *S'il existe  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie positive et propre telle que*

$$\Delta V(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n - \{x_0\}$$

*alors  $x_0$  est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.*

**Théorème 1.3** (instabilité) *S'il existe  $V : B(x_0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  continue, et une constante  $c$  telle que :*

$$\Delta V(x) \geq cV(x), \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon),$$

*et donc  $x_0 \in \overline{\{x/V(x) > 0\}}$ , alors  $x_0$  est un point d'équilibre instable pour le système (1.3).*

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . On désigne par  $L^+(x)$  l'ensemble des points  $y$ ,  $\omega$ -limite de  $x$ , i.e. tels qu'il existe une suite extraite  $f^{\phi(k)}(x)$  de la solution  $f^k(x)$  telle que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f^{\phi(k)}(x) = y.$$



**Théorème 1.4** *Tout ensemble  $\omega$ -limite  $L^+(x)$  est fermé et positivement invariant. Si la solution  $f^k(x)$  est bornée, alors  $L^+(x)$  est non vide. C'est le plus petit ensemble fermé vers lequel la solution  $f^k(x)$  tend quand  $k \rightarrow \infty$ .*

Dans la suite, si le système (1.3) admet une fonction de Lyapunov définie sur  $\mathcal{U}$ , on désignera par  $G$  l'ensemble où la différence de  $V$  le long des trajectoires du système s'annule :

$$G = \{x \in \mathcal{U} / V(f(x)) - V(x) = 0\},$$

et par  $G^*$  le plus grand sous ensemble invariant par (1.3) contenu dans  $G$ . Les ensembles définis par :

$$V^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n / V(x) = c\}, \quad c \in \mathbb{R}^+$$

sont dits des surfaces de niveaux.

Les théorèmes précédents prouvent que pour montrer qu'un point d'équilibre est asymptotiquement stable, il suffit de trouver une fonction de Lyapunov stricte, mais ce n'est pas une chose facile et il n'y a pas de méthodes constructives qui permettent de trouver de telles fonctions. Ceci dit, en général, il est plus facile de trouver une fonction  $V$  définie positive qui vérifie :

$$\Delta V(x) \leq 0$$

Une telle fonction sera appelée fonction de Lyapunov large pour le système en  $x_0$ . Quand une fonction de Lyapunov large existe, on a le résultat suivant qui permet de conclure à l'asymptotique stabilité.

**Théorème 1.5** (*Principe d'invariance de LaSalle*). *Si  $V$  est une fonction de Lyapunov pour le système (1.3) sur  $\mathcal{U}$ , et si  $f^k(x)$  est une solution bornée, et dans  $\mathcal{U}$  pour tout entier  $k$ , alors il existe un nombre  $c$  tel que :*

$$f^k(x) \rightarrow G^* \cap V^{-1}(c).$$

**Remarque** Soit l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = X(x(t)) \tag{1.5}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , et  $X$  un champ de vecteurs localement lipschitzien sur un ouvert  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x \in \mathcal{U}$ , on désigne par  $X_t(x)$  la solution de (1.5) commençant au point  $x$  à l'instant  $t = 0$  i.e.

$$\frac{d}{dt} X_t(x) = X(x) \quad \text{et} \quad X_0(x) = x.$$

Soit  $x_0$  un point de l'ouvert  $\mathcal{U}$ .  $x_0$  est un point d'équilibre pour (1.5) si  $X(x_0) = 0$ .

En supposant que  $V$  est continue sur  $\mathcal{U}$  et différentiable sur  $\mathcal{U} - \{x_0\}$ , on a alors les mêmes définitions et propriétés que précédemment en remplaçant  $f^k(x)$  par  $X_t(x)$ , et l'opérateur aux différences  $\Delta V$  par la dérivée de Lie  $X \cdot V$  de  $V$  suivant le champ de vecteur  $X$ , i.e.

$$X \cdot V(x) = \frac{d}{dt} V(X_t(x))_{t=0}.$$

## 1.4 Stabilisation

Soit le système contrôlé

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u) \\ x \in \mathcal{U}, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (1.6)$$

où  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , et  $f : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{U}$  est de classe  $C^o$  tel que  $f(0, 0) = 0$ .

On dira que (1.6) est stabilisable s'il existe un feedback  $u = u(x)$ , au moins continu, tel que le système bouclé :

$$x(k+1) = f(x(k), u(x(k)))$$

admette l'origine comme point d'équilibre asymptotiquement stable.

De même on dira qu'un système

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u)$$

est stabilisable s'il existe un feedback  $u = u(x)$ , suffisamment régulier, rendant l'origine un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système bouclé :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t))).$$

Parmi les techniques de stabilisation la méthode de linéarisation est la plus ancienne. Initiée par les mathématiciens Lyapunov ([43]) et Perron ([46]), elle continue à être utilisée dans de nombreuses situations. Rappelons la pour les systèmes discrets (elle s'exprime de façon similaire pour les systèmes continus).

Au système (1.6) on associe son linéarisé en l'origine, donné par

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu \\ A = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), B = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) \end{cases} \quad (1.7)$$

On sait alors que si (1.7) est stabilisable, (1.6) l'est aussi, et avec le même feedback. Il est à noter que cette méthode ne permet de conclure que localement.

Rappelons que le problème de stabilisation est complètement résolu pour les systèmes linéaires ( $f(x, u) = Ax + Bu$ ) mais que c'est loin d'être le cas pour les systèmes non linéaires, même les plus simples comme par exemple les systèmes bilinéaires :

$$x(k+1) = Ax(k) + uBx(k)$$

et

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + uBx(t)$$

### 1.4.1 Condition nécessaire de stabilisation

Dans ([4]) nous avons donné la version discrète du théorème dû à Brockett pour les systèmes en temps continu ([11]). Soit le système :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad f(0,0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

où  $x(k) \in \mathcal{U}$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  et  $f$  est une fonction continue sur un voisinage  $A \times U$  de  $(0,0)$ .

**Théorème 1.6** *Une condition nécessaire pour que le système (1.8) soit stabilisable est que l'application  $\gamma : A \times U \rightarrow \mathcal{U}$  définie par*

$$\gamma(x, u) = f(x, u) - x$$

*soit surjective sur un voisinage de l'origine.*

**Preuve.** Posons :

$$a(x) = f(x, u(x))$$

Si l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour :

$$x(k+1) = a(x(k))$$

il existe sur  $A$  une fonction de Lyapunov de classe  $\mathcal{C}^1$  (cf. [23], [24]) :

$$V(x) > 0 \text{ pour } x \neq 0, \quad V(0) = 0$$

telle que, pour  $x$  au voisinage de l'origine,  $x \neq 0$  :

$$V(a(x)) - V(x) < 0$$

Pour  $\alpha > 0$  suffisamment petit, l'ensemble :

$$V^\alpha = \{x \in A \mid V(x) \leq \alpha\}$$

étant compact, on a :

$$\sup\{V(a(x)) \mid x \in V^\alpha\} = \beta < \alpha$$

et il existe  $\eta > 0$  tel que pour  $x \in V^\alpha$  et  $\xi \in B_\eta = \{x \in \mathcal{U} \mid \|x\| \leq \eta\}$  :

$$|V(a(x) - \xi) - V(a(x))| \leq K\|\xi\|, \quad K = \sup_{y \in V^\alpha + B_\eta} \|\nabla V(y)\|$$

Il s'ensuit que pour  $\|\xi\| \leq \delta = \min\{\eta, \frac{\alpha - \beta}{K}\}$  on a :

$$V(a(x) - \xi) \leq \alpha$$

Ainsi  $x \mapsto a(x) - \xi$  est une application continue de  $V^\alpha$  dans lui-même. Par ailleurs, en considérant l'homotopie :

$$\phi : V^\alpha \times [0, 1] \rightarrow V^\alpha$$

donnée par :

$$\begin{cases} \phi(x, t) = \psi\left(x, \frac{t}{t-1}\right), & t \neq 1 \\ \phi(x, 1) = 0 \end{cases}$$

où  $\psi$  est défini par

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\nabla V(\psi) \\ \psi(x, 0) = x \end{cases}$$

on constate que  $V^\alpha$  est contractile et donc que  $V^\alpha$  a une homologie triviale. Le théorème du point fixe de Lefschetz permet alors de conclure. ■

**Exemple 1.** Comme en temps continu, un système non linéaire en temps discret peut être complètement contrôlable sans être stabilisable. C'est ce qu'illustre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + u_2(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + x_2(k)u_1(k) - x_1(k)u_2(k) \end{cases}$$

L'image de l'application  $\gamma : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$\gamma(x, u) = (u_1, u_2, x_2u_1 - x_1u_2)$$

ne contient aucun point de la forme  $(0, 0, \varepsilon)^T$ ,  $\varepsilon \neq 0$ . Ainsi, le système n'est pas stabilisable. On peut, cependant, établir aisément, grâce à des techniques d'algèbre de Lie (cf. [29]), que c'est un système complètement contrôlable. Notons que le linéarisé à l'origine ne possède aucun mode incontrôlable et instable.

**Exemple 2.** La condition de Brockett est nécessaire, mais loin d'être suffisante pour qu'un système soit stabilisable. En effet, soit :

$$\begin{cases} x(k+1) = -y(k) + ux(k)^2 \\ y(k+1) = x(k) + ux(k)y(k) \\ (x(k), y(k)) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Quelque soit  $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \mathbb{R}^2$  le système suivant:

$$\begin{cases} -x - y + ux^2 = \epsilon_1 \\ x - y + uxy = \epsilon_2 \\ (x(k), y(k)) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (1.10)$$

admet une solution (par exemple  $u = 0$ ,  $x = (\epsilon_2 - \epsilon_1)/2$  et  $y = -(\epsilon_2 + \epsilon_1)/2$ ). L'application  $f(x, y, u) - (x, y)$  est donc surjective sur tout voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^2$ .

Soit maintenant,  $V(x, y) = x^2 + y^2$ . On a

$$\Delta V(x, y) = u^2 x^2 V(x, y) \geq 0.$$

Donc l'origine n'est pas stabilisable quelque soit le choix de la commande  $u$ . Remarquons que le linéarisé est critique.

## 2

# Nouveaux critères pour la stabilité des systèmes Discrets

*Résumé* – Le but de ce chapitre est de présenter quelques nouveaux résultats de stabilité. Il s’agit de conditions suffisantes de stabilité pour les systèmes non linéaires en temps discret. On montre comment on peut utiliser des fonctions semi-définies comme fonctions de Lyapunov à la place de fonctions définies positives, pour l’étude qualitative d’un système donné. L’avantage des fonctions semi définies est qu’elles sont plus faciles à trouver, mais leur utilisation ne permet d’avoir que des résultats locaux car il est en général difficile d’avoir des fonctions semi définies propres. Remarquons toute fois que dans certaines situations particulières la bornétude des trajectoires est relativement plus facile à établir de manière directe (raisonnement par récurrence) pour les systèmes discrets que pour les continus . Ceci du fait qu’on a accès à la solution. Pour illustrer les différents théorèmes, plusieurs exemples seront donnés, ainsi que des applications à la théorie du contrôle.

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre on s’intéresse à l’extension des résultats classiques de la théorie de Lyapunov pour les systèmes non linéaires en temps discret. Dans [31],[26], les auteurs donnent une introduction intéressante à la théorie classique de Lyapunov pour les équations aux différences. Dans [38] une extension de cette théorie, utilisant le principe d’invariance de LaSalle pour les équations aux différences est donnée.

Cet approche classique est essentiellement basée sur la construction d’une fonction de Lyapunov définie positive (i.e. une fonction définie positive décroissante le long des trajectoires du système considéré).

Il faut noter que la construction d’une telle fonction n’est pas toujours simple. Comme dans ([27]), pour les systèmes en temps continu, le but ici est de relaxer la condition sur la fonction de Lyapunov d’être définie.

On considère l'équation aux différences :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) & x \in \mathcal{U} \\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\mathcal{U}$  est un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue.

Pour une condition initiale  $p \in \mathcal{U}$ , On note par  $f^k(p)$  la valeur à l'instant  $k$  de la solution de (2.1) qui part du point  $p$  à l'instant  $k = 0$ . Rappelons que  $f^k(p)$  est définie par récurrence de la manière suivante:  $f^0(p) = p$  et  $f^n(p) = f(f^{n-1}(p))$ .

Dans la suite on utilisera les notations suivantes :

$$f^+(p) = \{f^n(p), n \in \mathbb{N}\}.$$

$L^+(p)$  est l'ensemble  $\omega$ -limite de  $p$ .

$$B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \epsilon\}, \overline{B}_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq \epsilon\}.$$

$$S_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \epsilon\}.$$

On rappelle que la continuité de la fonction  $f$  est suffisante pour assurer l'existence et l'unicité des solutions du systèmes (2.1) pour chaque condition initial dans  $\mathcal{U}$ .

En général, on s'intéresse à un point  $x_0 \in \mathcal{U}$  tel que  $f(x_0) = x_0$  qu'on appelle *point d'équilibre* du système. A chaque point d'équilibre  $x_0$ , correspond une solution du système (2.1) constante,  $f^k(x_0) \equiv x_0$ .

**Définition 2.1** Soit  $x_0 \in \mathcal{U}$  un point d'équilibre. On dira que (2.1) est stable au sens de Lyapunov en  $x_0$ , ou que  $x_0$  est un point d'équilibre stable pour (2.1), si pour tout  $\epsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que pour  $\|x - x_0\| < \delta$  on ait  $\|f^k(x) - x_0\| < \epsilon$  pour tout  $k > 0$ . Quand (2.1) n'est pas stable au sens de Lyapunov en  $x_0$ , on dira qu'il est instable en  $x_0$ , ou que  $x_0$  est instable pour (2.1).

Intuitivement la stabilité au sens de Lyapunov s'interprète comme suit : les perturbations (supposées petites) auxquelles est soumis le système font qu'en un point d'équilibre  $x_0$ , l'état initial du système est voisin de  $x_0$  mais différent de  $x_0$ . La stabilité au sens de Lyapunov garantit que chaque état pris par le système dans son évolution future est encore voisin du point d'équilibre  $x_0$ . les systèmes physiques possèdent souvent cette propriété.

En fait, vu les forces de frottement, l'amplitude des perturbations initiales va décroître et éventuellement s'annuler. Cet aspect physique important n'est pas reflété par la définition 1. On est alors amené à introduire une notion plus forte.

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des points  $p \in \mathcal{U}$  pour lesquels

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(p) = x_0$$

$\mathcal{A}$  est dit *région d'attractivité*, ou *domaine d'attraction* de  $x_0$ .

Un point d'équilibre est dit *attractif* s'il est intérieur à sa région d'attractivité. On dira aussi que (2.1) est attractif en  $x_0$ . En général, un point d'équilibre attractif n'est pas nécessairement stable au sens de Lyapunov (voir l'exemple 3 - dans les généralités).

**Définition 2.2** *On dira que le système (2.1) est localement asymptotiquement stable au point d'équilibre  $x_0$ , ou que  $x_0$  est localement asymptotiquement stable pour (2.1), s'il est stable au sens de Lyapunov et attractif en  $x_0$ .*

Dans la suite on prendra  $x_0 = 0$ .

**Définition 2.3** *L'ensemble  $Y$  est invariant si  $f(Y) = Y$ , positivement invariant si  $f(Y) \subset Y$  et négativement invariant si  $Y \subset f(Y)$ .*

$Y$  étant un ensemble positivement invariant, on note par  $\mathcal{A}_Y$  le domaine d'attractivité relatif à  $Y$  (i.e:  $\mathcal{A}_Y = \mathcal{A} \cap Y$ ).

**Définition 2.4** *Soit  $Y$  un ensemble positivement invariant et fermé tel que  $0 \in Y$ . L'origine est dite :*

(a)  *$Y$ -stable si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f^+(B_\delta \cap Y) \subset B_\epsilon$ .*

(b)  *$Y$ -asymptotiquement stable s'il est  $Y$ -stable, et s'il existe  $\delta > 0$  telque:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0 \quad \forall x \in Y \cap B_\delta.$$

Dans la suite, si le système (2.1) a une fonction de Lyapunov  $V$  définie sur un voisinage de l'origine  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ , on désigne par  $G_0$  l'ensemble où  $V$  s'annule,  $G$  l'ensemble où la différence de  $V$  le long des trajectoires du système s'annule, et par  $G^*$  le plus grand sous ensemble invariant contenu dans  $G$ .

**Proposition 2.1** (1)  *$G_0$  est positivement invariant.*

(2)  *$G_0 \subseteq G^* \subseteq G$ .*

(3) *Les ensembles  $G_0$ ,  $G^*$  et  $G$  sont des fermés.*



**Preuve** (1) et (2). Soit  $x \in G_0$ , on a  $V(x) = 0$ , comme  $\Delta V = V(f(x)) - V(x) \leq 0$  on a alors  $V(f(x)) = 0$ . Donc  $G_0$  est positivement invariant. Par ailleurs  $G_0 \subseteq G$ , on déduit alors, de la définition de  $G^*$  et de ce qui précède, que  $G_0 \subseteq G^* \subseteq G$ .

(3). Les ensembles  $G_0$  et  $G$  sont des fermés car  $V$  est continue, et  $G_0 = V^{-1}\{0\}$  et  $G = (V(f) - V)^{-1}\{0\}$ . Maintenant, si  $A$  est un ensemble invariant on vérifie aisément que son adhérence est aussi un ensemble invariant. De ce fait,  $\overline{G^*}$  est invariant. Comme  $G^* \subseteq G$  et  $G$  est fermé, on a alors  $\overline{G^*} \subseteq G$ . Vu que  $G^*$  est le plus grand sous ensemble invariant (au sens de l'inclusion) dans  $G$ , on déduit que  $\overline{G^*} = G^*$ , et donc  $G^*$  est fermé. ■

## 2.2 Résultats principaux

Le premier théorème concerne la stabilité.

**Théorème 2.1** *S'il existe un voisinage de l'origine  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  et une fonction  $V \in C^0(\mathcal{V}, \mathbb{R})$  tel que :*

- (1)  $V(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathcal{V}$  et  $V(0) = 0$ .
- (2)  $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathcal{V}$ .
- (3) l'origine est  $G_0$ -asymptotiquement stable, où :  
 $G_0 = \{x \in \mathcal{V} : V(x) = 0\}$ .

alors l'origine est Lyapunov stable.

Le lemme suivant sera utile dans la preuve des Théorèmes (2.1 et 2.2).

**Lemme 2.1** *Soit  $Y$  un ensemble fermé positivement invariant tel que l'origine est  $Y$ -asymptotiquement stable, et soit  $K$  un voisinage compact de l'origine dans  $Y$ , tel que  $K \subset \mathcal{A}_Y$ . Alors la suite de fonctions  $f^n$  converge uniformément vers 0 sur  $K$ .*

**Preuve** Comme 0 est  $Y$ -stable on a :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad f^n(B_\alpha) \subset B_\epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

En utilisant l'attractivité :

$$\forall z \in K, \quad \exists N = N(z, \alpha), \quad \forall n \geq N(z, \alpha) : \quad f^n(z) \in B_{\frac{\alpha}{2}}$$

La continuité des solutions par rapport à la condition initiale assure l'existence de  $\beta = \beta(\alpha, N) > 0$  tel que

$$\|z - y\| < \beta \implies \|f^N(z) - f^N(y)\| < \frac{\alpha}{2} \quad (2.3)$$

On a donc :

$$\|f^N(y)\| < \|f^N(z) - f^N(y)\| + \|f^N(z)\| < \alpha \quad (2.4)$$

A partir de (2.2) et (2.4) on a :

$$\forall y \in B(z, \beta) \quad \forall n \geq 0 \quad \|f^n(f^N(y))\| < \epsilon$$

Comme  $K$  est compact, il existe un ensemble fini  $I \subset \mathbb{N}$  tel que

$$K = \bigcup_{z \in K} B(z, \beta) = \bigcup_{z_i \in I} B(z_i, \beta_i)$$

Soit  $N_0 = \sup_{i \in I} N(z_i)$ , on conclut alors que :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N_0 \quad \|f^n(z)\| < \epsilon \quad \forall n \geq N_0 \quad \text{et} \quad \forall z \in K \quad (2.5)$$

Ce qui entraîne la convergence uniforme de la suite de fonctions  $f^n$  vers 0 sur  $K$  et termine la preuve du lemme. ■

**Preuve du théorème(2.1)** Supposons que l'origine n'est pas stable. Il existe alors  $\epsilon > 0$  pour lequel il est possible de construire une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_\epsilon$  tel que :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la trajectoire  $f^k(x_n)$  partant de  $x_n$  quitte la boule  $B_\epsilon$ . Soit  $k_n$  le premier entier pour lequel la solution partant de  $x_n$  à l'instant  $k = 0$  quitte la boule  $B_\epsilon$ . Alors la suite  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  vérifie :

$$\begin{cases} \|f^m(x_n)\| < \epsilon \quad \text{for} \quad 0 \leq m < k_n \\ \|f^{k_n}(x_n)\| \geq \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.6)$$

(Remarquons que ceci n'entraîne pas que la solution ne peut pas revenir dans  $B_\epsilon$  après le temps  $k_n$ .) Sans perte de généralité on peut supposer que  $\overline{B_\epsilon} \cap G_0 \subset \mathcal{A}_{G_0}$ , (quitte à prendre  $\epsilon$  suffisamment petit).

Tout d'abord, on montre que pour tout  $T > 0$  il existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $k_n \geq T$  pour tout  $n \geq m_0$ , (i.e.  $k_n \rightarrow +\infty$  pour  $n \rightarrow +\infty$ ). En effet soit  $T$  un entier, d'une part, les fonctions  $f^m$ ,  $m \leq T$  étant continues, il existe  $\eta > 0$  tel que  $f^m(B_\eta) \subset B_\epsilon$  pour tout  $m \leq T$ . D'autre part comme la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers l'origine, il existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n \in B_\eta$  pour tout  $n \geq m_0$ . On en déduit alors que pour tout  $n \geq m_0$  et tout  $m \leq T$ ,  $f^m(x_n) \in B_\epsilon$ . Ce qui implique par définition de  $k_n$  que  $k_n \geq T$ .

Comme l'origine est  $G_0$ -asymptotiquement stable, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que la solution de (2.1) satisfait

$$\|f^n(z)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq N \quad \text{et} \quad \forall z \in \overline{B_\epsilon} \cap G_0 \quad (2.7)$$

(Grâce à la compacité de  $\overline{B_\epsilon} \cap G_0$ , et en utilisant le lemme (2.1), on établit que  $N$  peut être choisi indépendamment de  $z$ .)

La continuité des solutions par rapport à la condition initiale assure l'existence de  $\delta > 0$  tel que

$$\forall (x, y) \in \overline{B_\epsilon} \times \overline{B_\epsilon} \quad \|x - y\| < \delta \implies \|f^n(x) - f^n(y)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \leq N \quad (2.8)$$

Or il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\|x_n\| < \delta$  pour tout  $n \geq n_0$ , et donc à partir de (2.8) on a

$$\|f^p(x_n)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall p \leq N \quad \text{et} \quad \forall n \geq n_0.$$

Donc pour  $p = 0, \dots, N$  la trajectoire  $f^p(x_n)$  est dans la boule  $B_\epsilon$ , ceci pour tout  $n \geq n_0$ .

On déduit de ce qui précède et de 2.6 que  $N < k_n$  pour tout  $n \geq n_0$ . Par ailleurs  $k_n - N < k_n$ . (Remarquons qu'on peut aussi aboutir à cette inégalité en utilisant le fait que  $k_n \rightarrow +\infty$ )

Donc pour tout  $n \geq n_0$  on a  $0 < k_n - N < k_n$ .

En utilisant (2.6) on obtient :

$$\|f^{k_n - N}(x_n)\| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

ce qui implique que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  définie par  $u_n = f^{k_n - N}(x_n)$  admet une sous suite extraite convergente qu'on notera :  $(u_{\phi(n)})_{n \geq n_0}$ .

Soit  $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\phi(n)} \in \overline{B_\epsilon}$ . Comme la fonction  $V$  est continue on a

$$0 \leq V(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(u_{\phi(n)}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} V(f^{k_{\phi(n)} - N}(x_{\phi(n)})) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} V(x_{\phi(n)}) = 0$$

et alors  $z$  appartient à  $\overline{B_\epsilon} \cap G_0$ , donc (2.7) donne

$$\|f^N(z)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad (2.9)$$

Par ailleurs il existe  $p \geq n_0$  tel que  $\|z - f^{k_p - N}(x_p)\| < \delta$  donc à partir de (2.8)

$$\|f^N(z) - f^N(f^{k_p - N}(x_p))\| < \frac{\epsilon}{2} \quad (2.10)$$

Finalement la combinaison de (2.9) et de (2.10) conduit à

$$\|f^{k_p}(x_p)\| < \epsilon$$

ce qui contredit (2.6). ■

Le théorème suivant permet de conclure pour la stabilité asymptotique.

**Théorème 2.2** *S'il existe un voisinage de l'origine  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  et une fonction  $V \in C^0(\mathcal{V}, \mathbb{R})$  tel que :*

- (1)  $V(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathcal{V}$  et  $V(0) = 0$ ,
- (2)  $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathcal{V}$ ,
- (3) 0 et  $G^*$ -asymptotiquement stable, où  $G^*$  est le plus grand sous ensemble positivement invariant contenu dans  $G = \{x \in \mathcal{V} : V(f(x)) - V(x) = 0\}$ ,

alors l'origine est asymptotiquement stable.

**Preuve** L'ensemble  $G_0 = \{x \in \mathcal{V} : V(x) = 0\}$  est positivement invariant et donc contenu dans  $G^*$ . Toutes les hypothèses du Théorème (2.1) sont satisfaites, ce qui implique que l'origine est stable : pour tout  $\delta > 0$  il existe  $\gamma > 0$  tel que pour toute condition initiale dans  $B_\gamma$  la solution de (2.1) reste dans  $B_\delta$  pour tout entier  $n$ .

Soit  $\mathcal{A}_{G^*}$  le domaine d'attractivité relatif à  $G^*$ . On choisit  $\delta > 0$ , tel que  $\overline{B_\delta} \cap G^* \subset \mathcal{A}_{G^*}$ . Pour montrer que l'origine est attractive, on montrera que  $B_\gamma$  est contenue dans le domaine d'attractivité, i.e.,

$$\forall x \in B_\gamma : \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(x) = 0 \quad (2.11)$$

Soient  $x_0 \in B_\gamma$ , et  $\epsilon$  un réel positif. Grâce à la stabilité de l'origine il existe  $\eta > 0$  tel que :

$$f^n(B_\eta) \subset B_\epsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.12)$$

Comme

$$\overline{B_\delta} \cap G^* \subset \mathcal{A}_{G^*}$$

et en utilisant le lemme(2.1), il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\|f^n(y)\| < \frac{\eta}{2} \quad \forall n \geq N \text{ et } \forall y \in \overline{B_\delta} \cap G^*. \quad (2.13)$$

La continuité des solutions assure l'existence de  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall (x, y) \in \overline{B_\delta} \times \overline{B_\delta} \quad \|x - y\| < \alpha \implies \|f^n(x) - f^n(y)\| < \frac{\eta}{2} \quad \forall n \leq N \quad (2.14)$$

Soit  $y$  un élément de  $L^+(x_0)$ . D'après le principe d'invariance de LaSalle,  $y$  appartient à  $\overline{B_\delta} \cap G^*$ , donc de (2.13) on a

$$\|f^n(y)\| < \frac{\eta}{2} \quad \forall n \geq N. \quad (2.15)$$

D'autre part comme  $y \in L^+(x_0)$

$$\exists p \in \mathbb{N} : \|f^p(x_0) - y\| < \alpha \quad (2.16)$$

En utilisant (2.16), (2.14) et (2.15) on obtient

$$\| f^{N+p}(x_0) \| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \quad (2.17)$$

et à partir de (2.12), il s'ensuit que :

$$\| f^n(f^{N+p}(x_0)) \| < \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ce qui prouve que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(x_0) = 0$ . Ainsi on a montré qu'il existe  $\gamma > 0$  tel que  $B_\gamma$  est contenue dans le domaine d'attractivité, et donc le Théorème (2.2) est établi. ■

Supposons maintenant que le système (2.1) est défini sur  $\mathbb{R}^n$  et qu'il existe une fonction positive ou nulle  $V \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$  qui soit une fonction de Lyapunov pour (2.1) i.e.:  $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Comme dans ce qui précède  $G^*$  est le plus grand sous ensemble positivement invariant contenu dans  $G = \{x \in \mathbb{R}^n : \Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) = 0\}$ , on se pose la question suivante : est ce que la globale asymptotique stabilité du système restreint à l'ensemble invariant  $G^*$  implique la globale asymptotique stabilité du système (2.1) ?

La réponse est non comme le montre par la suite l'exemple (3). Néanmoins, on a le résultat global suivant qui est une conséquence directe du principe d'invariance de LaSalle et du Théorème (2.2).

**Théorème 2.3** *S'il existe une fonction  $V \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$  satisfaisant*

- (1)  $V(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $V(0) = 0$ ,
- (2)  $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
- (3) 0 est  $G^*$ -globalement asymptotiquement stable, où  $G^*$  est le plus grand sous ensemble positivement invariant contenu dans  $G = \{x \in \mathbb{R}^n : V(f(x)) - V(x) = 0\}$ ,
- (4) Toutes les solutions du système (2.1) sont bornées,

*alors l'origine est globalement asymptotiquement stable.*

## 2.3 Exemples et remarques

**Exemple 1:** Si  $f$  est une fonction de classe  $C^1$  on considère le linéarisé du système (2.1) en zero :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \quad (2.18)$$

On sait que si toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $A$  sont dans le disque unité ouvert (i.e,  $|\lambda_i| < 1$ ), alors le système (2.1) est localement asymptotiquement stable, et si  $A$  possède au moins une valeur propre  $\lambda$  en dehors du disque unité fermé (i.e,  $|\lambda| > 1$ ) alors le système (2.1) est instable. Mais quand la linéarisation donne un système critique i.e. quand la matrice  $A$  possède toutes ses valeurs propres à l'intérieur du disque unité avec au moins une valeur propre  $\lambda$  vérifiant  $|\lambda| = 1$  alors on ne peut pas conclure quant à la stabilité de (2.1). La solution nulle peut donc être stable ou instable. Les résultats de ce chapitre nous seront utiles pour étudier les systèmes dont la linéarisation n'apporte pas de réponse. Considérons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} x(k+1) = y(k) \\ y(k+1) = \frac{y(k)}{1 + \beta x(k)^2} \\ (x(k), y(k)) \in \mathbb{R}^2 \quad \beta > 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Le linearisé du système autour du point d'équilibre  $(0, 0)$  est :

$$\begin{cases} x(k+1) = y(k) \\ y(k+1) = y(k). \end{cases} \quad (2.20)$$

Ici  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . C'est un cas critique (le linearisé est stable mais non asymptotiquement) donc ici les techniques de linéarisation ne permettent pas de conclure.

Soit  $V(x, y) = y^2$ . On a  $\Delta V = y^2 \left[ \left( \frac{1}{1 + \beta x(k)^2} \right) - 1 \right] \leq 0$  donc  $V$  est une fonction de Lyapunov semi définie pour le système (2.19). En plus on a  $G^* = G_0$  et l'origine est  $G^*$ -asymptotiquement stable. Donc à partir du Théorème 2.2 La solution nulle de (2.19) est asymptotiquement stable.

**Exemple 2:** (LaSalle) Considérons le système :

$$\begin{cases} x(k+1) = \frac{ay(k)}{1 + x(k)^2} \\ y(k+1) = \frac{bx(k)}{1 + y(k)^2} \\ (x(k), y(k)) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.21)$$

En utilisant le théorème (2.2), avec  $V(x, y) = (xy)^2$  on obtient la discussion suivante

l'origine est globalement asymptotiquement stable si et seulement si  $|ab| < 1$ .

En effet si  $|ab| < 1$  :

$$\Delta V = \left( \frac{y(k)}{1+x(k)^2} \right)^2 \left( \frac{x(k)}{1+y(k)^2} \right)^2 [a^2 b^2 - (1+x(k)^2)^2 (1+y(k)^2)^2]$$

alors  $\Delta V \leq 0$ . Ici  $G_0 = G^* = G$ , et c'est la réunion des deux axes  $x = 0$  et  $y = 0$ . La solution sur  $G^*$ , pour une condition initiale  $(x(0), 0)$ , est donnée par :

$$\begin{cases} x(2k) = (ab)^k x(0) & , & x(2k+1) = 0 \\ y(2k) = 0 & , & y(2k+1) = b(ab)^k x(0) \\ k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

Et pour une condition initiale  $(0, y(0))$  la solution est

$$\begin{cases} y(2k) = (ab)^k y(0) & , & y(2k+1) = 0 \\ x(2k) = 0 & , & x(2k+1) = a(ab)^k y(0) \\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Comme  $|ab| < 1$ , le système est  $G^*$ -globalement asymptotiquement stable. De plus un calcul direct montre que les trajectoires, pour une condition initiale quelconque, sont bornées ( $|(x(k), y(k))| \leq |(x_0, y_0)|$ ). Le théorème 2.3 permet de conclure.

Le linéarisé permet de voir que le système est instable pour  $|ab| > 1$ .

Par contre le cas  $|ab| = 1$  est critique . L'étude du linéarisé ne permet pas de conclure. En utilisant le Théorème (2.2) on peut conclure que l'origine n'est pas asymptotiquement stable. En effet on a toujours  $\Delta V \leq 0$  et  $G_0 = G^* = G$  pour  $|ab| = 1$ , mais on n'a pas la  $G^*$ -asymptotique stabilité. En fait pour tout point de  $G^*$  (qui est comme précédemment égal à la réunion des deux axes  $x = 0$  et  $y = 0$ ), on obtient des solutions périodiques (il suffit de substituer la valeur de  $ab$  par 1 dans la discussion précédente).

**Remarque 1 :** Le théorème (2.2) établit que l'asymptotique stabilité de l'origine est équivalente à sa  $G^*$ -asymptotique stabilité. Cette équivalence n'est pas vraie en général pour la stabilité au sens de Lyapunov comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 3 :** Soit le système

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + y(k) \\ y(k+1) = y(k) \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.22)$$

Pour  $V(x, y) = y^2$  on a  $G_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ . L'origine est  $G_0$ -stable mais la solution du système est :  $f^n(x, y) = (x + ny, y)$  et la première

composante tend vers l'infini pour toute condition initiale  $(x, y)$  telle que  $y > 0$ . Donc le système est instable. Ceci montre que la  $G_0$ -stabilité de l'origine n'est pas suffisante pour avoir sa stabilité par rapport à des perturbations arbitraires.

**Exemple 3'** : Soit le système

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + x^3(k)y^2(k) \\ y(k+1) = y(k) \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.23)$$

Remarquons que le linéarisé est critique. Pour  $V(x, y) = y^2$  on a  $G_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ . L'origine est  $G_0$ -stable, mais le système est instable [19].

**Remarque 2** : La globale asymptotique stabilité de l'origine par rapport à  $G^*$  ne suffit pas en général pour que le système soit globalement attractif. On a l'exemple suivant :

**Exemple 4** : Soit le système

$$\begin{cases} x(k+1) = \frac{x(k)}{2} + \frac{3}{2}(y(k)x(k)^2) \\ y(k+1) = \frac{y(k)}{2} \\ (x(k), y(k)) \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.24)$$

Pour  $V(x, y) = y^2$  on a  $\Delta V(x, y) = -3/4y^2 \leq 0$  et

$$G_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : V(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\} = G$$

Donc  $G_0 = G^*$ . Sur  $G^*$  la solution est  $x(k+1) = \frac{x(k)}{2}$ ,  $y(k+1) = 0$ , d'où l'origine est  $G_0$  globalement asymptotiquement stable mais le système n'est pas globalement asymptotiquement stable. On remarque en effet que l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\}$$

est invariant, et donc l'origine n'est pas globalement attractive.

## 2.4 Application à l'étude de certains systèmes :

### 2.4.1 Variété Centrale

Soit le système

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + f(x(k), y(k)) \\ y(k+1) = By(k) + g(x(k), y(k)) \\ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \end{cases} \quad (2.25)$$



où  $A \in M_n(\mathbb{R})$  et  $B \in M_p(\mathbb{R})$  sont deux matrices carrées telles que toutes les valeurs propres de  $A$  appartiennent à  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  et toutes les valeurs propres de  $B$  sont dans  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  ;  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de classe  $C^2$  avec  $f(0,0) = 0$ ,  $f'(0,0) = 0$ ,  $g(0,0) = 0$ ,  $g'(0,0) = 0$ . (Ici,  $f'$  est la matrice Jacobienne de  $f$ ).

Dans [16], J. Carr ( Théorème 8, page 35) a établi que le système (2.25) admet une variété centrale  $y = h(x)$  avec  $h$  de classe  $C^2$  et  $h(0) = 0$ ,  $h'(0) = 0$ . Il a montré aussi les résultats suivants :

**Théorème 2.4** ([16]) *Si la solution nulle de*

$$x(k+1) = Ax(k) + f(x(k), h(x(k))) \quad (2.26)$$

*est asymptotiquement stable alors il en est de même pour le système (2.25).*

La preuve proposée dans [16] est très intéressante, mais, en utilisant le théorème 2.2, on donne une preuve plus simple.

**preuve** En effet, chaque valeur propre de la matrice  $B$  a un module strictement inférieur à 1 donc il existe une matrice symétrique définie positive  $Q \in M_p(\mathbb{R})$  tel que  $B^T Q B - Q = -I_p$  où  $I_p$  est la matrice identité de  $M_p(\mathbb{R})$ . Soit  $V(x, y) = (y - h(x))^T Q (y - h(x))$ . La différence de  $V$  le long des trajectoires de (2.25) est

$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) &= V(Ax + f(x, y), By + g(x, y)) - V(x, y) \\ &= (By + g(x, y) - h(Ax + f(x, y)))^T \cdot Q \\ &\quad \cdot (By + g(x, y) - h(Ax + f(x, y))) \\ &\quad - (y - h(x))^T Q (y - h(x)) \end{aligned}$$

D'une part  $f$  et  $g$  sont supposées être de classe  $C^2$ , donc on peut écrire :

$$f(x, y) = f(x, h(x)) + F(x, y)(y - h(x))$$

$$g(x, y) = g(x, h(x)) + G(x, y)(y - h(x))$$

$$h(Ax + f(x, y)) = h(Ax + f(x, h(x))) + H(x, y) \cdot F(x, y) \cdot (y - h(x))$$

où les matrices  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont définies par

$$F(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, sy + (1-s)h(x)) ds,$$

$$G(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial y}(x, sy + (1-s)h(x)) ds,$$

$$H(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial x} (Ax + f(x, h(x)) + sF(x, y) \cdot (y - h(x))) ds.$$

D'autre part l'ensemble  $\{y = h(x)\}$  est positivement invariant donc

$$Bh(x) + g(x, h(x)) - h(Ax + f(x, h(x))) = 0$$

et alors

$$\begin{aligned} \Delta V &= \left( B(y - h(x)) + G(x, y)(y - h(x)) - H(x, y)F(x, y)(y - h(x)) \right)^T Q \\ &\quad \left( B(y - h(x)) + G(x, y)(y - h(x)) - H(x, y)F(x, y)(y - h(x)) \right) \\ &\quad - (y - h(x))^T Q (y - h(x)) \\ &= (y - h(x))^T (B^T Q B - Q) (y - h(x)) + (y - h(x))^T \left( B^T Q (G(x, y) \right. \\ &\quad \left. - H(x, y)F(x, y)) + (G(x, y) - H(x, y)F(x, y))^T Q B + (G(x, y) \right. \\ &\quad \left. - H(x, y)F(x, y))^T Q (G(x, y) - H(x, y)F(x, y)) \right) (y - h(x)) \end{aligned}$$

soit

$$\Delta V = (y - h(x))^T (-I_p + \epsilon(x, y)) (y - h(x))$$

Les fonctions  $F$ ,  $G$  et  $H$  sont de classe  $C^1$  et s'annulent à l'origine donc la matrice  $\epsilon(x, y)$  est symétrique, de classe  $C^1$  en  $(x, y)$  et s'annule à l'origine. Donc dans un voisinage de l'origine, on a

$$\Delta V \leq \frac{-1}{2} |y - h(x)|^2.$$

Le Théorème 2.2 s'applique, ce qui termine la preuve. ■

### 2.4.2 Systèmes possédant des constantes du mouvement

Dans [1] (Theorem 1), Aeyels et Sepulchre ont étudié la stabilité des systèmes en temps continu qui possèdent une intégrale première. Ils ont montré que la stabilité d'un point d'équilibre par rapport aux perturbations dans chaque surface de niveau qui le contient, assure sa stabilité par rapport à des perturbations arbitraires. La démonstration dans ([1]) est basée sur une étude qualitative du système. Ici en utilisant les théorèmes précédents on établit ce résultat pour les systèmes discrets, et on donne une preuve assez simple. En effet supposons que :

(H) le système (2.1) possède  $k$  intégrales premières continues  $h_i$ ,  $i = 1 \dots k$  qui sont définies sur un voisinage  $\mathcal{U}$  de l'origine :

$$h_i(f(x)) - h_i(\dot{f}(x)) = 0, \quad i = 1 \dots k$$

Notons par  $h$  la fonction continue :

$$h : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

définie par  $h(x) = (h_1(x), \dots, h_k(x))$  et tel que  $h(0) = 0$ . Soit alors la fonction de Lyapunov semi définie  $V$ :

$$V(x) = \sum_{i=1}^{i=k} h_i^2(x)$$

On a

$$\Delta V(x) = \sum_{i=1}^{i=k} h_i^2(f(x)) - h_i^2(x) = 0$$

donc  $V$  est constante le long des trajectoires du système. En plus on a

$$G_0 = \{x \in \mathcal{U} : V(x) = 0\} = \{x \in \mathcal{U} : h(x) = 0\}$$

Comme conséquence directe du Théorème 2.1, on a alors la proposition suivante :

**Proposition 2.2** *Sous l'hypothèse (H), si l'origine est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système restreint*

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad x(k) \in \{x \in \mathcal{U} : h(x) = 0\}$$

alors l'origine est un point d'équilibre stable pour le système (2.1).

### 2.4.3 Lien entre détectabilité et stabilité pour les systèmes discrets

Considérons le système non linéaire en temps discrets

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ y_k = h(x_k). \end{cases} \quad (2.27)$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  est l'état à l'instant  $k$  et  $y(k)$  est une sortie mesurable du système.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont de classe  $C^0$  vérifiant  $f(0) = 0, h(0) = 0$ . A ce niveau on a besoin d'introduire les définitions suivantes :

**Définition 2.5** *Le système (2.27) est dit zero-state observable si*

$$h(f^n(p)) \equiv 0$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  alors

$$f^n(p) \equiv 0.$$

**Définition 2.6** Le système ( 2.27) est dit zero-state détectable si

$$h(f^n(p)) = 0$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(p) = 0$$

Considérons le système linéaire en temps discret

$$\begin{cases} x(k+1) = A(x(k)) \\ y_k = C(x_k). \end{cases} \quad (2.28)$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  est l'état à l'instant  $k$  et  $y(k)$  est une sortie mesurable du système.  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Pour les systèmes linéaires en temps continu (2.28), Morse [44] a donné un des premiers résultats importants dans l'étude de la relation entre la stabilité et l'observabilité du système (2.28), qui est aussi valable pour les systèmes discrets :

**Théorème 2.5** [44] Supposons que le système (2.28) est observable, alors la solution nulle de (2.28) est asymptotiquement stable si et seulement si la série  $\sum_{k=0}^{\infty} |C(A^k(x))|^2$  est convergente pour tout  $x \in \mathcal{U}$ .

En utilisant les résultats du chapitre 2 on a le théorème suivant :

**Théorème 2.6** Supposons que le système (2.27) est zero-state détectable et qu'il existe un réel positif  $q$  tel que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} |h(f^k(x))|^q$  est uniformément convergente sur  $\mathcal{U}$  alors la solution nulle de (2.27) est asymptotiquement stable si et seulement si elle est stable au sens de Lyapunov .

**Preuve** Sous les hypothèses de zero-state détectable du système (2.27) et le fait que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} |h(x_k)|^q$  est uniformément convergente, on montrera que la stabilité de l'origine au sens de Lyapunov implique son asymptotique stabilité. En effet considérons la fonction de Lyapunov suivante :

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |h(f^k(x))|^q$$

$V$  est continue et semi définie positive.

Sa variation le long des solutions du système (2.27) est :

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) = -|h(x)|^q \leq 0$$

Ici on a :

$$G = \{ x \in \mathcal{U} \mid h(x) = 0 \}.$$

Grâce au théorème (2.2) pour montrer que l'origine est asymptotiquement stable, il suffit de montrer qu'elle est  $G^*$ -asymptotiquement stable. Maintenant, si  $x$  est dans  $G^*$  alors  $h(x) = 0$  et comme  $G^*$  est invariant et contenu dans  $G$  on a  $h(f^k(x)) = 0$  pour tout  $k \in N$  donc :

$$G^* = \{ x \in \mathcal{U} \mid h(f^k(x)) = 0, \forall k \in N \}.$$

Du fait que le système est zero-state détectable, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x) = 0$ , ce qui prouve que l'origine est  $G^*$ -attractif, mais comme l'origine est stable, alors il est  $G^*$ -asymptotiquement stable.

**Remarque 4** Récemment dans [15] les auteurs se sont intéressés à la généralisation de l'étude de Morse aux systèmes non linéaires en temps continu. Ils ont donné un résultat analogue à celui du théorème (2.6) pour les systèmes non linéaires en temps continu, mais sous une hypothèse plus forte que la notre : A la place de la zero-state détectabilité ils supposent que le système est zero-state observable.

#### 2.4.4 Systèmes en cascade

Un grand intérêt a été porté dans la littérature aux systèmes en cascade en temps continu (voir [58] et sa bibliographie). En utilisant le théorème (2.2), on montre dans ce paragraphe que le résultat de stabilité asymptotique locale de [58] s'étend aux systèmes en cascade discrets. Il est à noter que l'utilisation de fonctions de Lyapunov semi définies permet ici de donner une preuve simple de notre résultat.

Considérons le système non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k)) \\ &\vdots \\ x_i(k+1) &= f_i(x_1(k), \dots, x_i(k)) \\ &\vdots \\ x_m(k+1) &= f_m(x_1(k), \dots, x_m(k)) \end{cases} \quad (2.29)$$

où  $x(k) = (x_1(k), \dots, x_m(k)) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_m}$  et  $f_1, \dots, f_m$  sont des fonctions continues telles que  $f_i(0, \dots, 0) = 0$ .

A (2.29) on associe les systèmes  $\Sigma_i$  pour  $i = 0, \dots, m$  :

$$\Sigma_i \begin{cases} x_i(k+1) = f_i(0, \dots, 0, x_i(k), 0, \dots, 0) \\ x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}, \end{cases} \quad (2.30)$$

Le théorème suivant est une conséquence directe du Théorème 2.2

**Théorème 2.7** *Le système (2.29) est asymptotiquement stable si et seulement si les sous systèmes (2.30) sont asymptotiquement stables.*

**Preuve** L'implication directe est immédiate (il suffit de voir que les ensembles  $(\{0 \dots, x_n, \dots, 0\})$  sont invariant par le système (2.29). On montre la réciproque par récurrence sur le nombre  $m$  d'équations du système (2.29).

En effet, supposons que la propriété est vraie à l'ordre  $m - 1$ , et que les sous systèmes de type (2.30) et d'ordre  $m$  sont asymptotiquement stables. Alors, la stabilité asymptotique des  $m - 1$  premiers systèmes entraîne, par hypothèse de récurrence, que le système de type (2.29) d'ordre  $m - 1$  est asymptotiquement stable. Il existe alors une fonction de Lyapunov  $V(x_1, \dots, x_{m-1})$  qui satisfait :

- $V(x_1, \dots, x_{m-1}) > 0$  ,  $V(0) = 0$
- $V(f(x_1, \dots, x_{m-1})) - V(x_1, \dots, x_{m-1}) < 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{n-n_m}$ .

Pour le système (2.29) d'ordre  $m$ , la fonction définie par

$$\tilde{V}(x_1, \dots, x_m) = V(x_1, \dots, x_{m-1})$$

est une fonction semi-définie positive décroissante le long des trajectoires, et on a :

$$\begin{aligned} G_0 = G = G^* &= \{(x_1, \dots, x_m) : \tilde{V}(x_1, \dots, x_m) = 0\} \\ &= \{(0, \dots, 0, x_m), x_m \in \mathbb{R}^{n_m}\}. \end{aligned}$$

L'origine est  $G^*$ -asymptotiquement stable par hypothèse de récurrence donc toutes les hypothèses du Théorème (2.2) sont satisfaites, ce qui implique que l'origine est asymptotiquement stable pour le système (2.29) d'ordre  $m$ . ■

## 2.5 Conclusion

La théorie qualitative est centrée autour du concept de base de la théorie de Lyapunov et du principe d'invariance de LaSalle. Dans ce chapitre les résultats obtenus étendent l'intérêt de la théorie classique, dans le sens où l'on n'exige pas que la fonction de Lyapunov utilisée soit définie. En effet par exemple la connaissance d'une fonction d'énergie du système  $V$  permet d'utiliser celle ci comme fonction de Lyapunov. En général une fonction d'énergie n'est pas définie. Cette approche constitue un nouvel outil pour l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaires discrets. Les illustrations précédentes montrent comment cette approche peut avoir des applications intéressantes.



# 3

## Applications aux Problèmes de stabilisation

### Résumé

Le but ici est d'appliquer les résultats du chapitre 2 aux problèmes de contrôle. Le plan de cette partie est le suivant :

Le premier paragraphe est une application aux systèmes en cascade illustrée par des exemples.

Dans le deuxième paragraphe, on s'intéresse à la stabilisation des systèmes de la forme

$$x(k+1) = f(x(k), u)$$

qui sont stables quand  $u \equiv 0$  (mais non asymptotiquement stables). Une condition suffisante de stabilisation est donnée. On commence par un résultat existentiel, puis on en fait une démonstration constructive permettant d'avoir explicitement le feedback stabilisateur. Une formulation plus générale est donnée pour les systèmes à entrée scalaire.

Dans le troisième paragraphe, toujours grâce aux résultats du chapitre 2, on démontre un principe de séparation. A titre d'exemple on stabilise un système bilinéaire à travers un observateur.

### 3.1 Systèmes en cascade

Les systèmes en cascade en temps continu ont été largement considérés dans la littérature ([58] et sa bibliographie, [50]). Les systèmes partiellement linéaires ([34, 53, 48, 20]) sont des exemples de systèmes en cascade. Ces derniers ont été largement étudiés, surtout à la suite des techniques de linéarisation partielle (voir [28] et sa bibliographie). On établit dans ce paragraphe, en utilisant le théorème (2.7), des résultats de stabilisation locale pour les systèmes en cascade en temps discret.



Considérons un système non linéaire discret de la forme (voir [58] pour l'analogie en continu):

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), u_1) \\ \vdots \\ x_i(k+1) = f_i(x_1(k), \dots, x_i(k), u_1, \dots, u_i) \\ \vdots \\ x_m(k+1) = f_m(x_1(k), \dots, x_m(k), u_1, \dots, u_m) \end{cases} \quad (3.1)$$

où

$$\begin{cases} x(k) = (x_1(k), \dots, x_m(k)) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_m} \\ u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{p_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_m} \end{cases}$$

et  $f_1, \dots, f_m$  sont des fonctions continues telles que  $f_i(0, \dots, 0) = 0$ .

A (3.1) on associe les systèmes  $\Sigma_i$  pour  $i = 1, \dots, m$  :

$$\Sigma_i \quad \begin{cases} x_i(k+1) = f_i(0, \dots, 0, x_i(k), 0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0) \\ x_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}, u_i \in \mathbb{R}^{p_i} \end{cases} \quad (3.2)$$

Pour  $1 \leq i \leq m$ , on dira que (3.2) est *stabilisable* en  $x_i = 0$ , s'il existe une loi de commande  $x_i \mapsto u_i(x_i)$  continue vérifiant  $u_i(0) = 0$ , telle que l'origine de  $\mathbb{R}^{n_i}$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système :

$$x_i(k+1) = f_i(0, \dots, 0, x_i(k), 0, \dots, 0, u_i(x_k), 0, \dots, 0)$$

Le théorème suivant s'obtient par application directe du théorème 2.2 aux systèmes (3.1) et (3.2) respectivement bouclés par  $u(x) = (u_1(x_1), \dots, u_m(x_m))$  et  $u_i(x_i)$ .

**Théorème 3.1** *Le système (3.1) est stabilisable si et seulement si les sous systèmes (3.2) sont stabilisables.*

**Exemple 1:** Considérons les systèmes :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), y(k)) \\ y(k+1) = g(y(k), u) \\ (x(k), y(k)) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), 0) \\ x(k) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} y(k+1) = g(y(k), u) \\ y(k) \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions continues telles que  $f(0,0) = 0$  et  $g(0,0) = 0$ . On suppose que (3.4) est asymptotiquement stable et qu'il existe une loi de commande  $y \mapsto u(y)$  stabilisant (3.5). Alors le système (3.3) est stabilisable.

En effet, d'après le théorème inverse, il existe une fonction de Lyapounov  $V$  pour

$$y(k+1) = g(y(k), u(y(k)))$$

La fonction  $W(x, y) = V(y)$  est semi définie positive et décroissante le long des trajectoires du système (3.3) bouclé par  $u(y)$  car :

$$\Delta W = V(g(y, u(y))) - V(y) \leq 0$$

De plus

$$\{W = 0\} = \{(x, 0)\} = \{\Delta V = 0\}$$

et donc  $G_0 = G^* = G$ . Or  $G^*$  est invariant par (3.3) et le système sur  $G^*$  est réduit à (3.4) qui est asymptotiquement stable. Le système (3.3) bouclé par  $u(y)$  est donc asymptotiquement stable.

**Exemple 2 :** Dans [48] Saberi, Kokotovic et Sussmann ont étudié les systèmes partiellement linéaire en temps continu qui sont analogues à (3.6). Ici on donne l'équivalent discret de leur résultats. La preuve, basée sur l'utilisation des fonctions semi définies, est simple mais les résultats sont locaux :

Soit

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), y(k)) \\ y(k+1) = Ay(k) + Bu \\ (x, y) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}, u \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $A \in M_{n_2, n_2}(\mathbb{R})$  et  $B \in M_{n_2, p}(\mathbb{R})$  sont deux matrices, et  $f(0,0) = 0$ . On suppose que la paire  $(A, B)$  est stabilisable, et que le système

$$x(k+1) = f(x(k), 0)$$

est asymptotiquement stable. Alors, d'après le théorème (3.1), le système 3.6 est stabilisable par un feedback linéaire.

En effet, la paire  $(A, B)$  étant stabilisable, il existe une matrice  $K \in M_{p, n_2}$  tel que le spectre de la matrice  $A + BK$  soit dans le disque unité ouvert. Il existe alors une matrice symétrique définie positive  $Q \in M_{n_2, n_2}(\mathbb{R})$  telle que

$$(A + BK)^T Q (A + BK) - Q = -I_{n_2}$$

où  $I_n$  est la matrice identité de  $M_{n, n}(\mathbb{R})$ . Soit  $V(x, y) = (y)^T Q (y)$ . C'est une fonction de Lyapunov semi définie pour le système (3.6) bouclé par  $u = Ky$ .

La différence de  $V$  le long des trajectoires de (3.6) est

$$\Delta V = \left( (A + BK)y \right)^T Q (A + BK)y - y^T Q y - \|y\|^2$$

et l'ensemble

$$\{\Delta V(x, y) = 0\} = \{(x, 0)\}$$

est positivement invariant par le système (3.6). De plus on a  $G^* = G_0$  et comme le système

$$x(k+1) = f(x(k), 0)$$

est asymptotiquement stable, l'origine est donc  $G^*$ -asymptotiquement stable. Par conséquent, à partir du théorème 2.2 la solution nulle de (3.6) est asymptotiquement stable. Maintenant que se passe-t-il si  $x(k+1) = f(x(k), 0)$  est globalement asymptotiquement stable ?

Dans le cas des systèmes continus, des résultats de stabilisation globale ont été donnés dans ([34, 53, 48, 20], etc), mais avec des conditions supplémentaires sur  $f$  et la construction du feedback stabilisant nécessite la connaissance d'une fonction de Lyapunov pour le système  $\dot{x} = f(x, 0)$ . Pour les systèmes discrets, en utilisant ce qui précède, on va donner un résultat de stabilisation globale sans aucune condition sur  $f$  et qui ne nécessite pas la connaissance d'une fonction de Lyapunov pour le système  $x(k+1) = f(x(k), 0)$ . Rappelons que, dans ([42] Théorème 2.3), les auteurs obtiennent les mêmes conclusions mais en supposant que  $p = n_2$  et que la matrice  $B$  est inversible, qui est une condition très forte.

**Proposition 3.1** *Si  $x(k+1) = f(x(k), 0)$  est globalement asymptotiquement stable et la paire  $(A, B)$  est contrôlable alors le système (3.6) est globalement asymptotiquement stable par un feedback linéaire.*

**Preuve** Comme la paire  $(A, B)$  est contrôlable il existe une matrice  $F$  telle que  $\tilde{A} = A + BF$  soit une matrice nilpotente,  $\tilde{A}^{n_2} = 0$ .

Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$  et  $(x_k, y_k)$  la solution du système bouclé, (avec  $u(x) = Fx$ ), issue de  $(x_0, y_0)$ . On montre que  $(x_k, y_k)$  est bornée. En effet,

La matrice est nilpotente  $\tilde{A} = A + BF$  donc,  $y(k) = 0 \forall k \geq n_2$ , on a alors :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), 0) \\ y(k+1) = 0 \\ \forall k \geq n_2. \end{cases}$$

Comme l'origine est supposé être globalement asymptotiquement stable pour  $x(k+1) = f(x(k), 0)$ , il s'ensuit que la suite  $(x_k)_{k \geq n_2}$  est bornée. Et

donc  $(x_k)_{k \geq 0}$  est la réunion d'un ensemble fini  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n_2}\}$  et d'une suite bornée  $(x_k)_{k \geq n_2}$ .

D'autre part la composante  $y_k$  de la solution vérifie  $(y_k)_{k \geq 0} \subset \{0, y_0, y_1, \dots, y_{n_2}\}$ , donc elle est bornée.

En résumé, la solution  $(x_k, y_k)$  est bornée et le système est  $G^*$ -globalement asymptotiquement stable. On conclut alors par application du le théorème (2.3).

## 3.2 Systèmes dont la dérive est "dissipative"

Dans ce paragraphe, on applique les résultats du chapitre 2 à l'étude de la stabilisation par retour d'état des systèmes non linéaires en temps discret de la forme :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ , et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction continue satisfaisant  $f(0, 0) = 0$ . Le système libre ( $u = 0$ ) est supposé stable, i.e l'origine est un point d'équilibre stable pour  $x(k+1) = f(x, 0)$ . Peut-on alors construire un retour d'état  $u = u(x)$  qui rende l'origine asymptotiquement stable pour le système bouclé  $x(k+1) = f(x, u(x))$ .

Ce problème a été étudié par plusieurs auteurs ( (cf. [30, 22, 32, 40, 45, 55]) pour les systèmes continus de la forme

$$\dot{x} = X(x) + uY(x). \quad (3.8)$$

Une des méthodes les plus connues est celle initiée par Jurdjevic et Quinn ([30]) et qu'on peut résumer ainsi : On suppose que  $\dot{x} = X(x)$  est stable et qu'il existe une fonction de Lyapunov définie positive telle que la dérivée de Lie de  $V$  le long du champ de vecteur  $X$  vérifie  $X.V(x) \leq 0$ . On remarque que le feedback  $u(x) = -Y.V(x)$  conserve la stabilité pour (3.8) puisque la dérivée de Lie de  $V$  le long des trajectoires du système bouclé,  $\dot{V} = X.V(x) - (Y.V(x))^2 \leq 0$ , est semi définie négative. Ceci permet alors d'appliquer le principe d'invariance de LaSalle pour trouver les bonnes conditions que doivent satisfaire la fonction  $V$  et les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  pour avoir l'attractivité.

Pour les systèmes discrets, il y va tout autrement, et la méthode de Jurdjevic-Quinn ne peut pas s'appliquer exactement de la même façon : la linéarité en le contrôle  $u$  n'apporte rien ! En effet prenons un système affine en  $u$  (formellement analogue à (3.8))

$$x(k+1) = F(x(k)) + uG(x(k)), \quad (3.9)$$

et faisons les mêmes hypothèses que celles qui ont été faites pour le continu c.à.d supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov définie positive telle que

$$\Delta V = V(F(x)) - V(x) \leq 0. \quad (3.10)$$

Comment peut-on calculer  $u(x)$  de telle façon que la différence de  $V$  le long des solutions du système bouclé

$$x(k+1) = F(x(k)) + u(x(k))G(x(k)),$$

reste semi définie négative ?

C'est à ce niveau là que se situe la difficulté du discret par rapport au continu. Pour le système continu (3.8) on a

$$\dot{V} = X.V(x) + uY.V(x)$$

ce qui conduit naturellement à choisir  $u(x) = -Y.V(x)$  pour avoir  $\dot{V} \leq 0$ . Par contre, pour le système discret (0.5), on a

$$\Delta V = V(F(x) + uG(x)) - V(x)$$

et le choix de  $u(x) \neq 0$  rendant  $\Delta V \leq 0$  est moins évident. Ce problème avait été étudié par plusieurs auteurs (cf. [12, 13, 14, 56, 57]), sous la condition que  $V(F(x) + uG(x))$  est un polynôme de degré 2 en  $u$ . Ceci permet par un raisonnement simple de définir au voisinage de l'origine un feedback  $u(x) \neq 0$  tel que  $\Delta V \leq 0$  et de donner des conditions analogue à celles du continu pour avoir l'attractivité. Cette hypothèse est par la suite éliminée pour les systèmes affines en contrôle de la forme 3.9 dans [4], où l'on montre l'existence globale d'un tel feedback à la seule condition (3.10). Ce résultat est généralisé dans ([9]) et ([41]) où l'on donne un feedback global explicite stabilisant globalement le système de la forme (3.7) à partir d'une fonction de Lyapunov définie positive telle que

$$\Delta V = V(f(x, 0)) - V(x).$$

Le but ici est de résoudre ce problème tout en montrant qu'on peut utiliser des fonctions de Lyapunov non nécessairement définies positives, mais semi définies. On obtient ainsi un résultat plus général que celui de ([9] et ([41])). On donne, en outre, pour les systèmes à entrée scalaire une condition suffisante de stabilisation globale plus large que celle donnée pour les systèmes à entrée vectorielle.

Ce paragraphe est divisé en quatre parties, on commence par donner un résultats existentiel en utilisant le théorème du point fixe. Dans la deuxième partie on construit explicitement le feedback, et dans la troisième partie on donne le résultat globale. Et dans la dernière partie on établit une formulation plus générale des résultats obtenus dans le cas des systèmes à entrée scalaire.

**Formulation du problème** On étudie la stabilisation des systèmes qui sont stables (mais non asymptotiquement stables) en régime libre ( $u = 0$ ). Autrement dit les systèmes de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)), \\ x(k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n, u(k) \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(0,0) = 0$ , et  $\mathcal{U}$  est un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que le système en régime libre ( $u = 0$ ), i.e.

$$x(k+1) = f(x(k), 0)$$

est Lyapunov stable et que :

(d1). – On connaît une fonction de Lyapunov semi définie  $V \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^+)$  vérifiant :

$$V(0) = 0, \quad V(f(x, 0)) \leq V(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

On va introduire quelques notations dont on aura besoin par la suite.

La fonction  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$ , on peut l'écrire sous la forme :

$$f(x, u) = f(x, 0) + g(x, u)u$$

où

$$g(x, u) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u}(x, tu) dt \quad (3.12)$$

Soit  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  définie par :

$$\tilde{f}(x) = f(x, 0) \quad (3.13)$$

et soient  $\tilde{f}^k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k \geq 0$ , les fonctions données de manière récurrente par :

$$\begin{aligned} \tilde{f}^0(x) &= x \\ \tilde{f}^k(x) &= \tilde{f}(\tilde{f}^{k-1}(x)), \quad \text{pour } k \geq 1 \end{aligned}$$

Posons, pour tous  $x \in \mathcal{U}$  et  $u \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\varphi(x, u) = - \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x}(f(x, 0) + tg(x, u)u)g(x, u)dt \quad (3.14)$$

Le but est de montrer qu'on peut construire un feedback stabilisant si le système satisfait la condition (d1) et les conditions suivantes :

(d2). – Les ensembles

$$\begin{aligned} W_1 &= \{x \in \mathcal{U} \mid V(\tilde{f}^{k+1}(x)) - V(\tilde{f}^k(x)) = 0, \forall k \in \mathbb{N}\} \\ W_2 &= \left\{x \in \mathcal{U} \mid \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}^{k+1}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{f}^k(x), 0) = 0, \forall k \in \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

vérifient  $W_1 \cap W_2 = G_0$ .

(d3).– l'origine est  $G_0$ -asymptotiquement stable pour le système libre  $x(k+1) = f(x(k), 0)$ .

### 3.2.1 Existence

**Proposition 3.2** Si pour tout  $x \in \mathcal{U}$  la fonction  $\varphi(x, \cdot)$  admet un point fixe :

$$u(x) = \varphi(x, u(x))$$

dépendant continuellement de  $x$  tel que  $u(0) = 0$ , le système (3.11) est stabilisable par la loi de commande  $x \mapsto u(x)$ .

**Preuve.** En effet, la variation de  $V$  le long des trajectoires du système bouclé vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V(f(x, 0) + g(x, u)u) - V(x) \\ &= V(f(x, 0)) - V(x) - u^T(x)\varphi(x, u(x)) \\ &= V(f(x, 0)) - V(x) - u^T(x)u(x) \leq 0 \end{aligned}$$

De l'hypothèse (d3) et à partir du théorème (2.2), on déduit que l'origine est stable au sens de Lyapounov.

Pour conclure il suffit de montrer que l'origine est  $G^*$ -asymptotiquement stable. On rappelle que  $G^*$  est le plus grand sous ensemble invariant contenu dans :

$$G = \{x \in \mathcal{U} \mid \Delta V(x) = V(f(x, 0) + g(x, u)u) - V(x) = 0\}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \Delta V(x) = 0 &\Leftrightarrow V(\tilde{f}(x)) - V(x) = 0 \text{ et } u(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow V(\tilde{f}(x)) - V(x) = 0 \text{ et } \varphi(x, 0) = 0 \\ &\Leftrightarrow V(\tilde{f}(x)) - V(x) = 0 \text{ et } \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) = 0 \quad (3.15) \end{aligned}$$

Soit  $x \in G^*$  et  $x(k)$  la solution du système bouclé avec  $x(0) = x$ . Comme  $G^*$  est invariant et  $u(x)$  est nul sur  $G^*$ , le système bouclé restreint à  $G^*$  est donné par :

$$x(k+1) = \tilde{f}(x(k))$$

d'où  $x(k) = \tilde{f}^k(x)$  pour tout  $k \geq 0$ , et donc à partir de (3.15)

$$V(\tilde{f}^{k+1}(x)) - V(\tilde{f}^k(x)) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}^{k+1}(x)) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(\tilde{f}^k(x), 0) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Il s'ensuit que  $x \in W_1 \cap W_2$ , ce qui implique à partir de l'hypothèse **(d2)**, que  $G^* \subset G_0$ .

De ce qui précède et de **(d3)**, on déduit alors que l'origine est  $G^*$ -asymptotiquement stable, et on termine la preuve en utilisant le théorème (2.2). ■

Comme première illustration de ce résultat, notons que lorsque  $f$  est affine en  $u$ , *i.e.* :

$$f(x, u) = \tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)u$$

et  $V(\tilde{f}(x) + \tilde{g}(x)u)$  est un polynôme en  $u$  de degré 2 (*cf.* [12]) (par exemple,  $V(x) = x^T P x$ ,  $P = P^T > 0$ ) il vient :

$$\varphi(x, u) = - \left( \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \tilde{g}(x) \right)^T - \frac{1}{2} \tilde{g}^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\tilde{f}(x)) \tilde{g}(x)u$$

Si, comme dans [12], on suppose que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\tilde{f}(x)) \geq 0 \tag{3.16}$$

alors, pour tout  $x \in \mathcal{U}$ , la matrice

$$M(x) = I + \frac{1}{2} \tilde{g}^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\tilde{f}(x)) \tilde{g}(x) \tag{3.17}$$

est inversible, et donc  $\varphi(x, u)$  admet un point fixe  $u(x)$  donné par :

$$u(x) = -M^{-1}(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \tilde{g}(x) \right)^T$$

D'après le théorème du point fixe  $u(x)$  est continu par rapport à  $x$ .

En fait, on n'a pas besoin de l'hypothèse  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\tilde{f}) \geq 0$  car si on désigne par  $\rho(x)$  le rayon spectral de la matrice  $\frac{1}{2} \tilde{g}^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\tilde{f}(x)) \tilde{g}(x)$ , le changement de contrôle :

$$\tilde{u} = (1 + \rho(x))u$$

transforme  $\varphi(x, u)$  en :

$$\tilde{\varphi}(x, \tilde{u}) = - \left( \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \tilde{g}(x) \right)^T - \frac{1}{2 + 2\rho(x)} \tilde{g}^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\tilde{f}(x)) \tilde{g}(x) \tilde{u}$$



qui admet le point fixe :

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x) &= -\tilde{M}^{-1}(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \tilde{g}(x) \right)^T \\ \tilde{M}(x) &= I + \frac{1}{2 + 2\rho(x)} \tilde{g}^T(x) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\tilde{f}(x)) \tilde{g}(x)\end{aligned}$$

Il s'ensuit que la commande :

$$u(x) = \frac{1}{1 + \rho(x)} \tilde{u}(x)$$

vérifiant  $u(0) = 0$ , stabilise le système (3.11). ■

Le résultat suivant montre que tout système de la forme (3.11) vérifiant (d1), (d2) et (d3) est  $C^0$ -stabilisable par une commande bornée.

**Théorème 3.2** *Si les conditions (d1), (d2) et (d3) sont satisfaites, alors, pour tout  $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ , le système (3.11) est  $C^0$ -stabilisable par une commande  $u(x)$  vérifiant  $\|u(x)\| \leq \eta$ , pour tout  $x \in \mathcal{U}$ .*

**Preuve.** Rappelons que la différence de  $V$  le long des trajectoires du système (3.11) est donnée par :

$$\Delta V(x) = V(f(x, 0)) - V(x) - u^T \varphi(x, u) \quad (3.18)$$

où

$$\varphi(x, u) = - \int_0^1 \frac{\partial V}{\partial x}(f(x, t)) + tg(x, u)u)g(x, t) dt$$

et

$$g(x, u) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u}(x, tu) dt$$

Les fonctions  $f$  et  $V$  étant de classe  $C^2$ , soit  $\alpha : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  la fonction continue définie par

$$\alpha(x, u) = \frac{-\eta}{1 + K_1(x) + 2\eta K_2(x)} \varphi(x, u) \quad (3.19)$$

où  $K_1(x)$  et  $K_2(x)$  sont des fonctions continues sur  $\mathcal{U}$  satisfaisant pour tout  $x$

$$K_1(x) \geq \sup_{\|u\| \leq \eta} \|\varphi(x, u)\| \quad (3.20)$$

$$K_2(x) \geq \sup_{\|u\| \leq \eta} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, u) \right\| \quad (3.21)$$

Alors, pour tout  $x \in \mathcal{U}$  et tout  $u \in \mathbb{R}^m$  tel que  $\|u\| \leq \eta$ , on a

$$\|\alpha(x, u)\| \leq \eta$$

et

$$\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u}(x, u) \right\| \leq \frac{1}{2}$$

Donc, par application du théorème du point fixe, il existe une fonction continue unique  $h : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$  satisfaisant pour tout  $x \in \mathcal{U}$ ,  $\|h(x)\| \leq \eta$  et  $\alpha(x, h(x)) = h(x)$ . Par conséquent, de (3.18) et (3.19), on obtient pour  $u = h(x)$

$$\Delta V(x) = V(f(x, 0)) - V(x) - \frac{1}{\eta} (1 + K_1(x) + 2\eta K_2(x)) h^T(x) h(x) \leq 0$$

$$\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x) - \frac{1}{\eta} (1 + K_1(x) + 2\eta K_2(x)) u^T(x) u(x) \leq 0$$

Et le théorème découle alors de la proposition 3.2. ■

**Remarque** Dans le théorème (3.2),  $f$  et  $V$  sont au moins de classe  $\mathcal{C}^2$ . Par contre dans la proposition on a seulement besoin d'une régularité  $\mathcal{C}^1$ . Si  $f$  et  $V$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , en choisissant  $K_1$  et  $K_2$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , le théorème des fonctions implicites s'applique à la fonction  $\psi(x, u) = \alpha(x, u) - u$  en chaque point  $x_0 \in \mathcal{U}$ , vu que  $\psi(x_0, h(x_0)) = 0$  et que la matrice jacobienne

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(x_0) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(x_0) - I$$

est inversible. Donc, il existe un voisinage  $W \times U$  de  $(x_0, h(x_0))$  et  $v : W \rightarrow U$  tel que  $\psi(x, v(x)) = 0$ ,  $\forall x \in W$ . Comme  $\psi$  est  $\mathcal{C}^\infty$ , on a  $v \in \mathcal{C}^\infty(W, U)$ . Mais l'équation  $\psi(x, u) = 0$  admet une solution unique  $h(x)$  définie sur  $\mathcal{U}$ , et donc,  $h|_W = v$ . Ceci montre que  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . ■

### 3.2.2 Construction explicite

Notons que le résultat précédent reste de type existentiel dans la mesure où il ne permet pas, sauf dans certains cas particuliers, le calcul explicite du feedback stabilisant. Dans ce paragraphe, sous les conditions **(d1)**, **(d2)** et **(d3)** posées précédemment, on donne explicitement un feedback borné (avec un choix arbitraire de la borne) stabilisant le système (3.11).

On rappelle que  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est la fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  définie sur par :  $\tilde{f}(x) = f(x, 0)$  Soient  $\tilde{V} : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varphi : \mathcal{U} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  définies

respectivement par

$$\tilde{V}(x, u) = V(f(x, u)) \quad (3.22)$$

$$\varphi(x, u, v) = \int_0^1 (1-t)v^T(x) \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial u^2}(x, tu(x)) v(x) dt \quad (3.23)$$

Pour  $\eta > 0$  fixé, soient  $K_1(x)$  et  $K_2(x)$  deux fonctions continues à valeurs réelles vérifiant :  $K_1(x) + K_2(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$ , et

$$K_1(x) \geq \sup_{\|u\| \leq \eta, \|v\|=1} |\varphi(x, u, v)|, \quad \forall x \in \mathcal{U} \quad (3.24)$$

$$K_2(x) \geq \left\| \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) \right\|, \quad \forall x \in \mathcal{U} \quad (3.25)$$

On désigne enfin par  $K(x)$  la fonction :

$$K(x) = \frac{\eta}{\eta K_1(x) + K_2(x)} \quad (3.26)$$

On a alors le resultat de stabilisation suivant :

**Théorème 3.3** *Si les hypothèses (d1), (d2) et (d3) sont vérifiées, alors, pour toute constante  $\eta > 0$ , le système (3.11) est asymptotiquement stabilisable par le feedback continu*

$$u(x) = -K(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) \right)^T \quad (3.27)$$

qui vérifie :

$$\|u(x)\| \leq \eta, \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

**Preuve.** Si l'on calcule la variation de la fonction de Lyapunov  $V$  le long des trajectoires du système bouclé(3.11-3.27), on obtient à partir de (3.22) et de la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V(f(x, u(x))) - V(x) \\ &= \tilde{V}(x, u(x)) - V(x) \\ &= \tilde{V}(x, 0) - V(x) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u}(x, 0) u(x) \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)u^T(x) \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial u^2}(x, tu(x)) u(x) dt \end{aligned}$$

Notons que :

$$\tilde{V}(x, 0) = V(\tilde{f}(x)) \quad (3.28)$$

et que :

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u}(x, 0) = \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0)$$

De (3.23) et de (3.27) on obtient alors :

$$\Delta V(x) = V(\tilde{f}(x)) - V(x) - \frac{1}{K(x)} u^T(x) u(x) + \varphi(x, u(x), u(x))$$

Il s'en suit que pour tout  $x \in \mathcal{U}$ , si  $u(x) = 0$  on a :

$$\Delta V(x) = V(\tilde{f}(x)) - V(x) \leq 0$$

et sinon, pour  $u(x) \neq 0$ , comme  $\varphi(x, u, v)$  est homogène de degré 2 par rapport à  $v$ , on obtient :

$$\Delta V(x) = V(\tilde{f}(x)) - V(x) - \frac{1}{K(x)} \|u(x)\|^2 + \|u(x)\|^2 \varphi\left(x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|}\right)$$

Par ailleurs, à partir de (3.24), (3.25) et (3.26), on a pour tout  $x \in \mathcal{U}$ ,  $\|u(x)\| \leq \eta$ , et on en déduit que  $\Delta V(x) \leq 0$ . En conclusion, suivant le théorème (2.1) et l'hypothèse **(d3)**, l'origine est stable au sens de Lyapounov.

Il reste à prouver que l'origine est attractive. Par application du théorème (2.2), il suffit de montrer que l'origine est  $G^*$ -asymptotiquement stable. On rappelle que  $G^*$  est le plus grand sous ensemble invariant contenu dans

$$G = \{x \in \mathcal{U} \mid \Delta V(x) = V(f(x, u(x))) - V(x) = 0\}$$

On a :

$$\begin{aligned} \Delta V(x) = 0 &\Leftrightarrow V(\tilde{f}(x)) - V(x) = 0 \text{ et } u(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow V(\tilde{f}(x)) - V(x) = 0 \text{ et } \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Soit  $x(k)$  la solution du système bouclé avec  $x(0) = x \in G^*$ . Comme  $G^*$  est invariant par ce dernier on aura  $x(k) \in G^*$  pour tout  $k \geq 0$ . Mais,  $u(x)$  est nul sur  $G^*$  d'où, suivant (3.13),  $x(k) = \tilde{f}^k(x)$  et donc à partir de (3.29)

$$V(\tilde{f}^{k+1}(x)) - V(\tilde{f}^k(x)) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}^{k+1}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{f}^k(x), 0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Il s'ensuit que  $x \in W_1 \cap W_2$ , ce qui implique à partir de l'hypothèse **(d2)**, que  $G^* \subset G_0$ . On déduit alors de ce qui précède et de **(d3)** que l'origine est  $G^*$ -asymptotiquement stable, et on conclut en utilisant le théorème (2.2). ■

**Exemple 3.** On considère le système non linéaire contrôlé dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{x_1(k)}{2} + x_2(k) + x_2^2(k) + x_3^2(k) \\ x_2(k+1) = (x_1(k) + 2x_3^2(k))u_1(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + \frac{x_1^4(k)}{1+x_2^2(k)}u_2(k) \end{cases} \quad (3.30)$$

La dynamique libre du système, donnée par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{x_1(k)}{2} + x_2(k) + x_2^2(k) + x_3^2(k) \\ x_2(k+1) = 0 \\ x_3(k+1) = x_3(k) \end{cases} \quad (3.31)$$

est stable et non asymptotiquement stable. En utilisant le théorème 3.3, on peut donc calculer un feedback stabilisateur  $u(x)$  (ici  $x = (x_1, x_2, x_3)$ ). Pour la fonction semi définie  $V(x) = x_2^2(k) + x_3^2(k)$ , on a  $G_0 = \{x_2 = x_3 = 0\}$  et  $\Delta V(x) = -x_2^2 \leq 0$ . Par ailleurs, il est clair, d'une part, que l'origine est  $G_0$ -asymptotiquement stable, et on vérifie aisément, d'autre part, que  $W_1 \cap W_2 = \{x_2 = x_3 = 0\} = G_0$ . Par application du théorème 3.3, on peut donc calculer un feedback stabilisant le système (3.30).

Avec les notations qui précèdent, un simple calcul donne :

$$\varphi(x, u, v) = ((x_1 + 2x_3^2)v_1)^2 + \left(\frac{x_1^4}{1+x_2^2}v_2\right)^2$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) = \left(0, \frac{2x_1^4 x_3}{1+x_2^2}\right)$$

On peut alors prendre

$$K_1(x) = (x_1 + 2x_3^2)^2 + \left(\frac{x_1^4}{1+x_2^2}\right)^2$$

$$K_2(x) = 1 + x_1^8 x_3^2$$

et on obtient le feedback borné suivant :

$$u(x) = \left(0, -\frac{2\eta x_1^4 x_3 (1+x_2^2)}{\eta(x_1^8 + (1+x_2^2)^2(x_1 + 2x_3^2)^2) + (1+x_2^2)^2(1+x_1^8 x_3^2)}\right)^T$$

où  $\eta$  est une constante strictement positive arbitraire.

### 3.2.3 Résultat global

Dans ce qui précède, les résultats sont de type local. A présent, on se propose de donner une condition suffisante permettant la stabilisation globale des systèmes de la forme (3.11).

On suppose que le voisinage de l'origine  $\mathcal{U}$  est non borné. Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, on a le résultat global suivant dont la preuve est similaire à celle du théorème (3.3), mais en utilisant le théorème d'asymptotique stabilité globale (2.3) :

**Théorème 3.4** *Si les hypothèses (d1) , (d2) sont vérifiées, et si de plus on ;*

(d3') *L'origine est  $G_0$ -globalement asymptotiquement stable.*

(d4) *Les trajectoires du système bouclé (3.11) sont bornées.*

*alors, pour toute constante  $\eta > 0$ , le système (3.11) est globalement asymptotiquement stabilisable par le feedback continu*

$$u(x) = -K(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) \right)^T$$

qui vérifie :

$$\|u(x)\| \leq \eta, \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

En particulier quand la fonction de Lyapounov est définie positive et propre on a le corollaire suivant :

**Corollaire 3.1** *S'il existe une fonction de Lyapounov définie positive  $V$ , propre et de classe  $C^2$  telle que les hypothèses (d1) et (d2) sont vérifiées, alors, pour toute constante  $\eta > 0$ , le système (3.11) est globalement stabilisable par le feedback continu :*

$$u(x) = -K(x) \left( \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) \right)^T \quad (3.32)$$

qui satisfait :

$$\|u(x)\| \leq \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.33)$$

**Preuve.** Si  $V$  est une fonction de Lyapounov définie positive on a  $G_0 = \{0\}$ . Comme dans la preuve du théorème 3.3, on vérifie que la variation de la fonction de Lyapounov  $V$  le long des trajectoires du système bouclé (3.11-3.32) est négative et que  $G_0 = G^*$ . De plus  $V$  étant propre, les trajectoires du système bouclé sont bornées. Ainsi, les conditions (1)-(4) du théorème (2.3) sont satisfaites. Par conséquent le système (3.11-3.32) est globalement asymptotiquement stable.

### 3.2.4 Exemples

**Exemple 1.** On considère le système affine en contrôle sur  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + x_2^2(k) \\ x_2(k+1) = u_1(k) + u_2(k) \\ x_3(k) = x_3(k) + u_2(k)x_1(k) \end{cases} \quad (3.34)$$

Avec les notations introduites dans le paragraphe 2, on a :

$$\tilde{f}(x) = f(x, 0) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_2^2 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & x_1 \end{pmatrix}$$

En prenant pour fonction de Lyapunov

$$V(x) = (x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_2^2 + x_3^2$$

on vérifie que :

$$V(\tilde{f}(x)) - V(x) = -x_2^2 \leq 0$$

et que :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x))g(x) = (2(x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2), 2(x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2)(1 + 2x_1x_3) + 2x_1x_3)$$

On a alors :

$$V(\tilde{f}(x)) - V(x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

et :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x_1, 0, x_3))g(x_1, 0, x_3) = (2(x_1 + x_3^2), 2(x_1 + x_3^2)(1 + 2x_1x_3) + 2x_1x_3)$$

D'où, il est immédiat de voir que  $V(\tilde{f}(x)) - V(x) = 0$  et  $(\partial V / \partial x)(\tilde{f}(x))g(x) = 0$  entraîne que  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . On a alors  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ , et le système (3.34) satisfait les hypothèses **(d1)** et **(d2)**. On peut donc utiliser le corollaire 3.1 pour le stabiliser globalement par un feedback borné de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . En outre, la fonction  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie en (3.23) est donnée par :

$$\varphi(x, u, v) = a(x, u)v_1^2 + b(x, u)v_1v_2 + c(x, u)v_2^2$$

avec :

$$a(x, u) = 2(1 + x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2) + 2u_1 + 2(1 + \frac{2}{3}x_1x_3)u_2$$

$$+u_1^2 + 2u_1u_2 + \left(1 + \frac{1}{3}x_1^2\right)u_2^2$$

$$b(x, u) = 4(1 + x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_3) + 4\left(1 + \frac{2}{3}x_1x_3\right)u_1 + \\ 4\left(1 + \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_3\right)u_2 + 2u_1^2 + 4\left(1 + \frac{1}{3}x_1^2\right)u_1u_2 + 2(1 + x_1^2)u_2^2$$

$$c(x, u) = 2 + 2x_1 + 2x_2 + x_1^2 + 4x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1^3 + 2x_1^2x_2 + 2x_1^2x_2^2 + \\ 6x_1^2x_3^2 + 2\left(1 + \frac{1}{3}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1x_3\right)u_1 + 2(1 + x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_1^3x_3)u_2 + \\ \left(1 + \frac{1}{3}x_1^2\right)u_1^2 + 2(1 + x_1^2)u_1u_2 + (1 + 2x_1^2 + x_1^4)u_2^2$$

et on voit facilement que, pour  $\eta > 0$  donné, les fonctions à valeurs réelles  $K_1(x)$  et  $K_2(x)$  définies sur  $\mathbb{R}^3$  par :

$$K_1(x) = (2 + \eta^2)x_1^4 + 4\eta x_3^2x_1^4 + 4x_2x_1^3 + (8\eta^2 + 11 + 8\eta)x_1^2 + 4x_1^2x_2^2 \\ + (14 + 16\eta)x_3^2x_1^2 + 16x_2x_1 + 24 + 32\eta + 16x_2^2 + 8x_3^2 + 16\eta^2$$

$$K_2(x) = 1 + 4(x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2)^2 \\ + \left(2(x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2)(1 + 2x_1x_3) + 2x_1x_3\right)^2$$

satisfont (3.24) et (3.25). Alors, par application du corollaire 3.1, le système (3.34) est globalement stabilisable par le feedback :

$$u(x) = \frac{-\eta}{\eta K_1(x) + K_2(x)} \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 2(x_1 + x_2 + x_2^2 + x_3^2)(1 + 2x_1x_3) + 2x_1x_3 \end{pmatrix}$$

Notons que le linéarisé de (3.34) à l'origine ne donne aucune information sur sa stabilisation locale.

**Exemple 2.** On considère le système plan :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + x_1^3(k)u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + x_2(k)u(k) + x_2(k)x_1^2(k)u^2(k) \end{cases} \quad (3.35)$$

Sa dynamique libre :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) \end{cases}$$

est stable au sens de Lyapunov mais non asymptotiquement stable. En outre l'approximation linéaire de (3.35) possède deux modes critiques incontrôlables



associés à la valeur propre  $\lambda = 1$ . Le principe de stabilité en première approximation ne permet pas alors de conclure pour la stabilisation de (3.35).

En utilisant les mêmes notations que dans le paragraphe 2, on a :

$$\tilde{f}(x) = f(x, 0) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

En prenant pour fonction de Lyapunov  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  on a alors  $W_1 = \mathbb{R}^2$  et :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) = 2x_1^4 + 2x_2^2$$

Ceci conduit à  $W_2 = \{0\}$  et donc (d1) et (d2) sont vérifiés. Un simple calcul donne :

$$\varphi(x, u, v) = (x_1^6 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^2 + 2x_1^2x_2^2u + x_1^4x_2^2u^2)v^2$$

et on vérifie aisément que, pour  $\eta > 0$  donné, les fonctions réelles  $K_1(x)$  et  $K_2(x)$  définies sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$\begin{aligned} K_1(x) &= x_1^6 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^2 + 2x_1^2x_2^2\eta + x_1^4x_2^2\eta^2 \\ K_2(x) &= 1 + 2(x_1^4 + x_2^2) \end{aligned}$$

satisfont (3.24) et (3.25). Par conséquent, par application du corollaire 3.1, le système (3.35) est globalement stabilisable par le feedback :

$$u(x) = \frac{-2\eta(x_1^4 + x_2^2)}{\eta(x_1^6 + 2x_1^2x_2^2 + x_2^2 + 2x_1^2x_2^2\eta + x_1^4x_2^2\eta^2) + 2(x_1^4 + x_2^2) + 1}$$

Dans le paragraphe suivant, on s'intéresse au cas mono-entrée ( $m = 1$ ) pour lequel on donne une condition suffisante plus générale de stabilisation.

### 3.2.5 Cas des systèmes mono-entrée

#### Motivation

**Exemple 3.** considérons le système plan à entrée scalaire :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) + x_1^2(k)u(k) + \frac{1}{2}x_1^2(k)x_2(k)u^2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_1(k)x_2(k)u(k) - \frac{1}{2}x_1^3(k)u^2(k) + u^3(k) \end{cases} \quad (3.36)$$

Comme pour les exemples précédents, la dynamique libre du système est stable au sens de Lyapunov mais non asymptotiquement stable et le principe de stabilité en première approximation ne conduit à aucun résultat.

Notons que "les approximations" :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) + x_1^2(k)u(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_1(k)x_2(k)u(k) \end{cases} \quad (3.37)$$

et

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) + x_1^2(k)u(k) + \frac{1}{2}x_1^2(k)x_2(k)u^2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_1(k)x_2(k)u(k) - \frac{1}{2}x_1^3(k)u^2(k) \end{cases} \quad (3.38)$$

de (3.35) ne sont pas stabilisables. En effet, avec les notations introduites dans le paragraphe 3 on vérifie aisément que, autant pour (3.37) que pour (3.38), la fonction de Lyapunov  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  satisfait :

- (i)  $V(f(x_1, x_2, u)) - V(x_1, x_2) \geq u^2 x_1^2 V(x_1, x_2)$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ , le long des trajectoires de (3.37).
- (i)  $V(f(x_1, x_2, u)) - V(x_1, x_2) \geq u^4 x_1^4 V(x_1, x_2)$ ,  $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ , le long des trajectoires de (3.38).

Ceci prouve que (3.37) et (3.38) ne sont pas stabilisables. La non stabilisabilité de (3.37) montre en particulier que le théorème (3.4) ne s'applique pas au système (3.36). On se propose de donner une formulation plus générale des résultats précédents pour les systèmes mono-entrée.

On considère le système discret de la forme :

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (3.39)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfait  $f(0, 0) = 0$ . Pour des raisons de simplicité,  $f$  est supposée de classe  $C^\infty$ . Comme précédemment on note par  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^n$  par

$$\tilde{f}(x) = f(x, 0)$$

et on suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov propre définie  $V(x)$  de classe  $C^\infty$  telle que l'hypothèse (d1) soit satisfaite. De plus,  $\tilde{V}$  étant définie par  $\tilde{V} = V \circ f$ , on suppose que :

(d'2) L'entier  $\mu \in \mathbb{N}^*$  défini par

$$\mu = \inf \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid \frac{\partial^k \tilde{V}}{\partial u^k}(x, 0) \neq 0 \right\} \quad (3.40)$$

est impair et l'ensemble

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid V(\tilde{f}^{k+1}(x)) - V(\tilde{f}^k(x)) = \frac{\partial^\mu \tilde{V}}{\partial u^\mu}(\tilde{f}^k(x), 0) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

est réduit à  $\{0\}$ .

Notons que si  $\mu = 1$ , (d'2) est exactement (d2). En utilisant (3.40) on obtient le développement de Taylor :

$$\tilde{V}(x, u) = \tilde{V}(x, 0) + \frac{u^\mu}{\mu!} \frac{\partial^\mu \tilde{V}}{\partial u^\mu}(x, 0) + u^{\mu+1} \varphi(x, u) \quad (3.41)$$

où  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par :

$$\varphi(x, u) = \frac{1}{\mu!} \int_0^1 (1-t)^\mu \frac{\partial^{\mu+1} \tilde{V}}{\partial u^{\mu+1}}(x, tu) dt$$

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 3.5** *Si les hypothèses (d1) et (d'2) sont vérifiées, alors, quelque soit la constante  $\eta > 0$ , le système (3.39) est globalement stabilisable par le feedback  $u(x)$  — qui satisfait  $|u(x)| \leq \eta$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  — donné par :*

$$u(x) = -\frac{1}{\mu!} \frac{\eta}{\eta K_1(x) + K_2(x)} \frac{\partial^\mu \tilde{V}}{\partial u^\mu}(x, 0) \quad (3.42)$$

où  $K_1(x)$  et  $K_2(x)$  sont des fonctions de classe  $C^\infty$  vérifiant  $K_1 + K_2 \neq 0$  et telles que :

$$K_1(x) \geq \sup_{|u| \leq \eta} |\varphi(x, u)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.43)$$

$$K_2(x) \geq \frac{1}{\mu!} \left| \frac{\partial^\mu \tilde{V}}{\partial u^\mu}(x, 0) \right|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.44)$$

**Preuve.** De (3.41), la différence de la fonction de Lyapunov  $V$  le long des trajectoires du système bouclé (3.39-3.42) est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V(f(x, u(x))) - V(x) \\ &= \tilde{V}(x, u(x)) - V(x) \\ &= \tilde{V}(x, 0) - V(x) + \frac{u(x)^\mu}{\mu!} \frac{\partial^\mu \tilde{V}}{\partial u^\mu}(x, 0) + u(x)^{\mu+1} \varphi(x, u(x)) \end{aligned}$$

et on a, à partir de (3.42) :

$$\Delta V(x) = V(\tilde{f}(x)) - V(x) - \frac{u^{\mu+1}(x)}{K(x)} [1 - K(x) \varphi(x, u(x))]$$

où

$$K(x) = \frac{\eta}{\eta K_1(x) + K_2(x)}$$

Or, de (3.42), (3.43) et (3.44) on a  $|u(x)| \leq \eta$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , et :

$$1 - K(x)\varphi(x, u(x)) \geq 0$$

et donc, de l'hypothèse (d1) et  $\mu$  étant impair, il découle que  $\Delta V(x) \leq 0$  ce qui implique que le système bouclé est stable au sens de Lyapunov. La stabilité asymptotique globale est établie par les mêmes arguments que ceux développés dans la preuve du corollaire 3.1. ■

**Remarque.** Si,  $f(x, u)$  est de la forme :

$$f(x, u) = \tilde{f}(x) + u^\mu g(x) + u^{\mu+1} G(x, u), \quad \mu > 1$$

alors on voit aisément que :

$$\frac{\partial^k \tilde{V}}{\partial u^k}(x, 0) \equiv 0 \quad 1 \leq k < \mu$$

et

$$\frac{\partial^\mu \tilde{V}}{\partial u^\mu}(x, 0) = \mu! \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x)) g(x)$$

Si de plus  $\mu$  est impair et :

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid V(\tilde{f}^{k+1}(x)) - V(\tilde{f}^k(x)) = \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}^{k+1}(x))g(\tilde{f}^k(x)) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

est réduit à  $\{0\}$ , alors, pour tout  $\eta > 0$  et toutes fonctions  $K_1(x)$  et  $K_2(x)$  de classe  $C^\infty$  vérifiant (3.43), (3.44) et :

$$K_2(x) \geq \left| \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x))g(x) \right|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

le feedback :

$$u(x) = \frac{\eta}{\eta K_1(x) + K_2(x)} \frac{\partial V}{\partial x}(\tilde{f}(x))g(x)$$

stabilise globalement le système (3.39).

Reprenons à présent l'exemple 3 donné au début de ce paragraphe

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_2(k) + x_1^2(k)u(k) + \frac{1}{2}x_1^2(k)x_2(k)u^2(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_1(k)x_2(k)u(k) - \frac{1}{2}x_1^3(k)u^2(k) + u^3(k) \end{cases}$$

Avec les notations introduites dans le paragraphe 3 et pour  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$  on a :

$$\tilde{f}(x) = f(x, 0) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Un calcul direct donne :

$$\tilde{V}(x, u) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1u^3 + u^4\varphi(x, u)$$

avec :

$$\varphi(x, u) = 2x_1x_2 + \frac{1}{4}x_1^4(x_1^2 + x_2^2) - x_1^3u + u^2$$

Il s'ensuit immédiatement que  $\mu = 3$  et :

$$V(\tilde{f}(x)) - V(x) = 0$$

$$\frac{\partial^3 \tilde{V}}{\partial u^3}(x, 0) = 12x_1$$

$$\frac{\partial^3 \tilde{V}}{\partial u^3}(\tilde{f}(x), 0) = -12x_2$$

ce qui conduit à  $W = \{0\}$ . En outre, on vérifie que pour  $\eta > 0$  donné, (3.43) et (3.44) sont satisfaites avec :

$$K_1(x) = 2(1 + x_1^2x_2^2) + \frac{1}{4}x_1^4(x_1^2 + x_2^2) + \eta x_1^2(1 + x_1^2) + \eta^2$$

$$K_2(x) = 2(1 + x_1^2)$$

Donc en utilisant le théorème 3.5, le feedback :

$$u(x) = \frac{-2\eta x_1}{2(1 + x_1^2) + \eta(2(1 + x_1^2x_2^2) + \frac{1}{4}x_1^4(x_1^2 + x_2^2) + \eta x_1^2(1 + x_1^2) + \eta^2)}$$

stabilise globalement le système (3.36).

### 3.3 Principe de Séparation

On considère un système de la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k)) \\ y(k) = h(x(k)), \end{cases} \quad (3.45)$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système à l'instant  $k$  et  $y(k)$  est une sortie mesurable du système. Les fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  sont de classe  $C^0$  satisfaisant  $f(0, 0) = 0$ , et  $h(0) = 0$ .

Un observateur pour (3.45) est un système dynamique dont les entrées sont l'entrée et la sortie de (3.45) et qui produit une estimation  $\hat{x}(k)$  de l'état  $x(k)$  tel que l'erreur d'estimation  $x(k) - \hat{x}(k)$  reste petite si elle est initialement petite et  $x(k) - \hat{x}(k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ .

On suppose ici que l'on a un observateur pour (3.45) de la forme :

$$\hat{x}(k+1) = g(\hat{x}(k), y(k), u(k)), \quad (3.46)$$

où  $g$  est continue et  $g(0, 0, 0) = 0$ . Soit  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$  l'erreur d'estimation. L'équation de l'erreur est

$$e(k+1) = f(x(k), u(k)) - g(\hat{x}(k), y(k), u(k)). \quad (3.47)$$

Le système (3.46) étant un observateur pour (3.45), on a  $f(x, u) = g(x, h(x), u)$  pour tout  $x$  et tout contrôle admissible  $u$ . En outre la solution nulle  $e(k) \equiv 0$  de (3.47) est asymptotiquement stable. Le problème qu'on se pose est alors le suivant : est-il possible de stabiliser le système (3.45) par un feedback d'état estimé ? Plus précisément, supposons qu'il existe une loi de commande continue  $\alpha(x)$  définie sur un voisinage de l'origine, et rendant ce point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système bouclé

$$x(k+1) = f(x(k), \alpha(x(k))) \quad (3.48)$$

En est-il alors de même pour

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), \alpha(\hat{x}(k))), \\ e(k+1) = f(x(k), \alpha(\hat{x}(k))) - g(\hat{x}(k), h(x(k)), \alpha(\hat{x}(k))) \end{cases} \quad (3.49)$$

On a la résultat suivant :

**Proposition 3.3** *Supposons que le système (3.46) est un observateur pour le système (3.45) et qu'il existe une fonction de Lyapounov continue et autonome  $W$  pour l'équation de l'erreur (3.47) satisfaisant*

- (i)  $W(0) = 0, W(e) > 0, \forall e \neq 0$  dans un voisinage  $\mathcal{E}$  de l'origine ( $e = 0$ ).
- (ii) La différence  $W(f(x, u) - g(x - e, h(x), u)) - W(e)$  est définie négative en  $e \in \mathcal{E}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout contrôle admissible  $u$ .

Alors le problème de stabilisation par retour d'état estimé pour le système (3.45) admet une solution. En d'autres termes si l'origine  $x = 0$  est un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (3.48) alors  $(x, e) = (0, 0)$  est aussi un point d'équilibre asymptotiquement stable pour le système (3.49).

**Preuve.** Pour montrer que le système (3.49) est asymptotiquement stable on considère la fonction  $V(x, e) = W(e)$ .  $V$  satisfait les hypothèses (1) et (2) du théorème 2.2. Il suffit alors de montrer que l'origine est  $G^*$ -asymptotiquement stable. On a  $G_0 = G = G^* = \{(x, 0), x \in \mathcal{V}\}$ . Donc sur  $G^*$ , on a  $\hat{x} = x$  et le système est alors gouverné par :

$$x(k+1) = f(x(k), \alpha(x(k))).$$

qui est supposé asymptotiquement stable. Ceci prouve que l'hypothèse (3) du théorème 2.2 est satisfaite, ce qui termine la preuve de la proposition 3.3. ■

**Exemple 3.** Considérons le système bilinéaire

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + uBx(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (3.50)$$

où  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}^m$ ,  $u(k) \in U \subset \mathbb{R}$ , et  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des matrices constantes de dimension appropriée. On suppose que la paire  $(A, C)$  est observable. Un observateur candidat pour le système (3.50) est de la forme :

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + uB\hat{x}(k) + K(y(k) - C\hat{x}(k)). \quad (3.51)$$

En effet l'équation de l'erreur est :

$$e(k+1) = (A - KC)e(k) + uBe(k). \quad (3.52)$$

La paire  $(A, C)$  étant observable, il existe une matrice  $K$  tel que toutes les valeurs propres de la matrice  $\hat{A} = A - KC$  soient dans le disque unité ouvert. Donc il existe une matrice symétrique définie positive  $P$  tel que  $\hat{A}^T P \hat{A} - P = -I_n$ . Pour montrer que (3.52) est asymptotiquement stable, on utilise la fonction de Lyapounov  $W(e) = e^T P e$ . Sa différence le long des solutions de (3.52) est :

$$\begin{aligned} \Delta W(e) &= (e^T \hat{A}^T + ue^T B^T) P (\hat{A}e + uBe) - e^T P e \\ &= e^T (\hat{A}^T P \hat{A} - P + u(\hat{A}^T P B + B^T P \hat{A}) + u^2 B^T P B) e \\ &= -\|e\|^2 + e^T (u(\hat{A}^T P B + B^T P \hat{A}) + u^2 B^T P B) e \\ &\leq -\|e\|^2 (1 - 2\|u\| \|A\| \|P\| \|B\| - \|u\|^2 \|B\|^2 \|P\|). \end{aligned}$$

Donc pour  $\eta > 0$  donné, il existe  $k > 0$  qui dépend de  $\|A\|$ ,  $\|P\|$  et  $\|B\|$  tel que pour  $\|u\| \leq \eta$ , on ait  $\Delta W(e) \leq -k\|e\|^2$ . Ceci montre que le système (3.51) est un observateur pour (3.50) et que la fonction  $W$  satisfait les conditions de la proposition 3.3.

Maintenant si le système (3.50) est stabilisable par un feedback  $u = \alpha(x)$  qui vérifie  $\|\alpha(x)\| \leq \eta$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  (ceci peut être réalisé par exemple si le système (3.50) satisfait les hypothèses du théorème 3.3), alors toutes les hypothèses de la proposition 3.3 sont vérifiées et donc le système (3.50) est stabilisable grâce à un feedback estimé de l'état  $u = \alpha(\hat{x})$  où l'estimation  $\hat{x}$  est donnée par l'observateur (3.51).





## 4

# Global Stabilization of Periodic Discrete-Time Nonlinear Systems

M. Bensoubaya      A. Ferfera      A. Iggidr

CONGE Project  
INRIA Lorraine & University of Metz  
Dept. of Math, URA-CNRS 399  
I.S.G.M.P. Bat. A, Ile du Saulcy  
57045 Metz cedex 01, France.

Dans ce chapitre on s'intéresse à la stabilisation des systèmes non autonomes de la forme  $x_{k+1} = F(x_k, u_k, k)$ . En utilisant un théorème dû à Krasovski ([36]), on donne une condition suffisante de stabilisation par des feedbacks dépendants du temps. Ce chapitre est la généralisation et l'extension d'un article publié dans *34th CDC* (1995) [6]. Dans ce dernier on a utilisé des feedbacks dépendant du temps pour stabiliser des systèmes qui ne sont pas  $C^0$  stabilisable. Le travail de ce chapitre est soumis à publication ([10]).

**Abstract** This paper provides sufficient conditions for stabilization of periodic discrete systems. These conditions are derived from a discrete version of a Theorem due to Krasovski for continuous-time systems. This tool allows to give a systematic design of time-varying stabilizing control for autonomous discrete systems that can not be stabilized by time-invariant feedback.

**Keywords** Lyapunov function, stability, stabilization, time-varying feedback, periodic discrete systems.

## 4.1 Introduction

We consider systems that can be written:

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k, u_k, k) & x_k \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}. \\ F(0, 0, k) = 0 & \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.1)$$

$F$  being continuous with respect the two first argument, and time-periodic.

The aim of this paper is to address the problem of stabilization of periodic discrete systems (4.1), by time-varying feedback. The approach is based on a discret version of a Krasovski's Theorem ([36]). Peculiarly for autonomous discrete systems that can not be stabilized by time-invariant feedback, we give a systematic design of time-varying stabilizing control. This impossibility to solve the stabilization problem by time-invariant feedback for autonomous systems is due to a topological obstruction. It has been pointed in ([11], [42]) that systems of the form  $x_{k+1} = \Psi(x_k, u_k)$  can not be stabilized by a feedback law  $u_k = u(x_k)$  if  $\Psi(x, u) - x$  is not locally onto. This was the initial motivation to introduce the use of time-varying feedback to stabilize nonlinear control systems. Our interest to time-varying feedback in discrete-time systems follows this line and has been inspired by the similar approach used for continuous-time systems. The motivation of this work goes beyond the above development, and is also a generalization and a continuation of previous works ([4], [9]) and [41] to periodic systems. More precisely, we consider systems that can be written:

$$x_{k+1} = F(x_k, u_k, k). \quad (4.2)$$

$F$  being time-periodic, assume that there exist a positive definite periodic function  $V(x, k)$  and a periodic feedback  $w(x, k)$  in such a way  $w(0, k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , and the origin is Lyapunov stable equilibrium point for the closed-loop system  $x_{k+1} = F(x_k, w(x_k, k), k)$ . We give a sufficient condition which allows a design of a time varying feedback to stabilize the system (4.2). The paper is organized as follows. In Section 2, we give a discrete version of Krasovki Theorem ([36]), and we derive a sufficient condition under which the attractivity of the equilibrium point is guaranteed. In Section 3, this condition will be used to derive a stabilization result for periodic systems. Theorem 2 is a generalization to periodic systems of previous works ([4], [9]), and [41]. As an application, we give a sufficient condition for time-varying feedback stabilization for a class of autonomous systems that can not be stabilized by time-invariant feedback. One can remark that this class includes the sampling models of nonholonomic systems.

## 4.2 Stability of periodic systems

Let us consider a discrete nonlinear system

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, k) & x(k) \in \mathbb{R}^n, \quad k \in \mathbb{N}. \\ f(0, k) = 0 & \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.3)$$

We assume that  $f$  is continuous, and periodic with respect to  $k$ , i.e. there exists  $T \in \mathbb{N}$  such that  $f(x, k+T) = f(x, k)$  for all  $k \in \mathbb{N}$  and all  $x \in \mathbb{R}^n$ . We shall denote by  $x(k, x_{k_0}, k_0)$  the solution (or trajectory) of (4.3) with initial state  $x_{k_0}$  at an initial time  $k_0$ .

Let  $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  be a continuous function. We shall say that  $a$  belongs to  $\mathcal{K}$  if it is strictly increasing, vanishes at zero and  $\lim_{r \rightarrow +\infty} a(r) = +\infty$ .

**Theorem 4.1** *Suppose there exists a continuous function  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , periodic in  $k$  with period  $T \geq 2$  such that for some  $a \in \mathcal{K}$  :*

- (1)  $V(x, k) \geq a(\|x\|)$  for all  $(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$  and  $V(0, k) = 0$ .
- (2)  $\Delta V(x, k) = V(f(x, k), k+1) - V(x, k) \leq 0$  for all  $(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$ .
- (3) The set  $G = \{(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} : \Delta V(x, k) = 0\}$  contains no complete solution of (4.3) except the trivial one.

*Then the origin is globally uniformly asymptotically stable.*

**Proof :** According to Lyapunov Theorem, (1) and (2) imply the stability of the origin. But for periodic systems the stability and the uniform stability are equivalent, so the origin is uniformly stable. It remains to prove the attractivity. Let  $(x_{k_0}, k_0)$  be a given initial condition and  $x_k = x(k, x_{k_0}, k_0)$  the corresponding solution. By (2) The sequence  $V(x_k, k)$  is decreasing and bounded from below so it has a limit  $l$  as  $k$  goes to infinity. Thanks to (1) one has

$$a(\|x_k\|) \leq V(x_k, k) \leq V(x_{k_0}, k_0),$$

so  $(x_k)_k$  is a bounded sequence and therefore it has a convergent subsequence say  $x_{k_i} \rightarrow y$  as  $k_i \rightarrow \infty$ .

As  $k_i \rightarrow \infty$ , there exist  $p \geq k_0$  and a subsequence  $(p_i)$  of  $(k_i)$  such that  $p_i \equiv p \pmod{T}$ . we have

$$x(p+1, y, p) = f(y, p) = f\left(\lim_{p_i \rightarrow +\infty} x(p_i, x_{k_0}, k_0), p\right).$$

Using the continuity of  $f(\cdot, p)$  we get :

$$x(p+1, y, p) = \lim_{p_i \rightarrow +\infty} f(x(p_i, x_{k_0}, k_0), p).$$

And by periodicity of  $f(x, \cdot)$  we get :

$$x(p+1, y, p) = \lim_{p_i \rightarrow +\infty} f(x(p_i, x_{k_0}, k_0), p_i) = \lim_{p_i \rightarrow +\infty} x(p_i+1, x(p_i, x_{k_0}, k_0), p_i).$$

Since  $x(p_i+1, x(p_i, x_{k_0}, k_0), p_i) = x(p_i+1, x_{k_0}, k_0)$  one can deduce :

$$x(p+1, y, p) = \lim_{p_i \rightarrow +\infty} x(p_i+1, x_{k_0}, k_0)$$

Now recursively, if we assume that

$$x(p+k, y, p) = \lim_{p_i \rightarrow +\infty} x(p_i+k, x_{k_0}, k_0).$$

Then we have

$$\begin{aligned} x(p+k+1, y, p) &= x(p+k+1, x(p+k, y, p), p+k) \\ &= f(x(p+k, y, p), p+k). \end{aligned}$$

And

$$\begin{aligned} f(x(p+k, y, p), p+k) &= \lim_{p_i \rightarrow +\infty} f(x(p_i+k, x_{k_0}, k_0), p+k) \\ &= \lim_{p_i \rightarrow +\infty} f(x(p_i+k, x_{k_0}, k_0), p_i+k). \end{aligned}$$

And so

$$x(p+k+1, y, p) = \lim_{p_i \rightarrow +\infty} x(p_i+k+1, x_{k_0}, k_0).$$

Therefore we have proved by induction that

$$x(p+k, y, p) = \lim_{p_i \rightarrow +\infty} x(p_i+k, x_{k_0}, k_0), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

As above, using the continuity and the periodicity of  $V$  we show that

$$V(x(p+k, y, p), p+k) = V(\lim_{p_i \rightarrow +\infty} x(p_i+k, x_{k_0}, k_0), p_i+k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

since  $V(x_k, k)$  converges to the limit  $l$  we get :

$$V(x(p+k, y, p), p+k) = V(\lim_{p_i \rightarrow +\infty} x(p_i+k, x_{k_0}, k_0), p_i+k) = l, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

So  $\{x(p+k, y, p), k \in \mathbb{N}\}$  is a complete solution of (4.3) contained in the set  $G$  and then assumption **(3)** allows to conclude.  $\blacksquare$

For the sequel, we define for all integer  $k$  a function  $\hat{f}_k$  in the following way

$$\hat{f}_k^k(x) = x \text{ and by induction } \hat{f}_k^{p+1}(x) = f(\hat{f}_k^p(x), p), \quad \forall p \geq k.$$

Actually  $\hat{f}_k^p(x)$  is nothing but the value at time  $p$  of the solution of (4.3) with initial state  $x$  at initial time  $k$ . With this notation we can prove the following result which gives a sufficient condition to get the condition (3) of the above Theorem.

**Proposition 4.1** *Suppose the hypothesis (1) and (2) are satisfied. If the set*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : V(\hat{f}_k^{p+1}(x), p+1) - V(\hat{f}_k^p(x), p) = 0, p = k, k+1, \dots\}$$

*is reduced to the origin for all  $k = 0, \dots, T$  then assumption (3) of Theorem (4.1) is satisfied and so the origin is globally uniformly asymptotically stable.*

**Proof :** Let  $x(k, x_{k_0}, k_0)$  be any solution of the system (4.3) contained in  $G$ , one has  $\forall p \in \mathbb{N}$

$$V(x(k_0 + p + 1, x_{k_0}, k_0), k_0 + p + 1) - V(x(k_0 + p, x_{k_0}, k_0), k_0 + p) = 0,$$

Using the above notation  $x(k, x_{k_0}, k_0) = \hat{f}_{k_0}^k(x_0)$ , we have for  $p = 1$

$$V(\hat{f}_{k_0}^{k_0+1}(x_0), k_0 + 1) - V(x, k_0) = 0,$$

and one can deduce recursively

$$V(\hat{f}_{k_0}^{k+1}(x), k+1) - V(\hat{f}_{k_0}^k(x), k) = 0, \quad \forall k \geq k_0.$$

Thus the complete solution  $x(k, x_{k_0}, k_0)$  is contained in  $M$ . As  $M = \{0\}$  we deduce that the set  $G$  contains no complete solution of (4.3) except the trivial one. This ends the proof by using Theorem (4.1).  $\blacksquare$

## 4.3 Stabilization

Consider a discrete-time nonlinear control system

$$\begin{cases} x_{k+1} = F(x_k, u_k, k) & x_k \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}. \\ F(0, 0, k) = 0 & \forall k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Where  $F$  is  $T$ -periodic ( $T \geq 2$ ).

Assume there exists a periodic feedback  $w(x, k)$  in such a way

(i)  $w(0, k) = 0, w(x, k+T) = w(x, k) \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^n.$

(ii) The origin is Lyapunov stable equilibrium point for the closed-loop system

$$x_{k+1} = F(x_k, w(x_k, k), k). \quad (4.5)$$

The problem addressed here is the following : does a periodic feedback  $u(x, k)$  exists in such a way

- (i)  $u(0, k) = 0, u(x, k + T) = u(x, k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$
- (ii) The origin is a globally asymptotically stable equilibrium point for the closed-loop system

$$x_{k+1} = F(x_k, u(x_k, k), k). \tag{4.6}$$

We will give a sufficient condition under which such a feedback exists. To do this we need the following notations :

For a Lyapunov function  $V(x, k)$  which is  $C^2$  in  $x$  and  $T$ -periodic in  $k$  let  $\tilde{V} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  be defined respectively by

$$\tilde{V}(x, u, k) = V(F(x, u, k), k + 1). \tag{4.7}$$

$$\varphi(x, u, v, k) = \int_0^1 (1 - t)v^T \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial u^2}(x, w + tu, k) v dt. \tag{4.8}$$

Set

$$F_w(x, k) = F(x, w(x, k), k).$$

For a fixed  $\eta > 0$ , let  $K_1(x, k)$  and  $K_2(x, k)$  be any nonnegative  $T$ -periodic and continuous real valued functions satisfying

$$K_1(x, k) + K_2(x, k) \neq 0, \quad \forall (x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$$

and for all  $(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$

$$K_1(x, k) \geq \sup_{\|u\| \leq \eta, \|v\|=1} |\varphi(x, u, v, k)|, \tag{4.9}$$

$$K_2(x, k) \geq \left\| \frac{\partial V}{\partial x}(F_w(x, k), k + 1) \frac{\partial F}{\partial u}(x, w, k) \right\|. \tag{4.10}$$

And set

$$K(x, k) = \frac{\eta}{\eta K_1(x, k) + K_2(x, k)}. \tag{4.11}$$

Notice that  $K$  is  $T$ -periodic with respect to  $k$ .

Now we can state the main result of this section :

**Theorem 4.2** *Assume that the system  $x_{k+1} = F(x_k, w(x, k), k)$  is stable and there exists a  $C^2$  Lyapunov function  $V(x, k)$  which is  $T$ -periodic in  $k$  such that  $V$  and  $F_w$  satisfy the assumptions (1) and (2) of Theorem (4.1). If for all  $k \in \{0, \dots, T\}$  the set*

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : V(\hat{F}_{w_k}^{p+1}(x), p+1) = V(\hat{F}_{w_k}^p(x), p), \right. \\ \left. \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{F}_{w_k}^{p+1}(x), p+1) \frac{\partial F}{\partial u}(\hat{F}_{w_k}^p(x), w(x, k), p) = 0, p \geq k \right\}$$

is reduced to the origin then, for any positive constant  $\eta$ , system (4.4) is globally asymptotically stabilizable by means of the continuous feedback law  $u(x, k) = w(x, k) + u_1(x, k)$  where

$$u_1(x, k) = -K(x, k) \left( \frac{\partial V}{\partial x}(F_w(x, k), k+1) \frac{\partial F}{\partial u}(x, w, k) \right)^T \quad (4.12)$$

which satisfies

$$\begin{cases} \|u_1(x, k)\| \leq \eta \quad \forall (x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}, \\ u_1(0, k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ u_1(x, k+T) = u_1(x, k) \quad \forall (x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Proof :** First of all the closed-loop system is a periodic system so we can apply Theorem 4.1. If one computes the difference of the Lyapunov function  $V$  along the trajectories of the closed-loop system (4.4 - 4.12)

$$x_{k+1} = F(x_k, u(x_k, k), k) \triangleq f(x_k, k),$$

one gets from (4.7) and the Taylor expansion formula :

$$\begin{aligned} \Delta V(x, k) &= V(f(x, k), k+1) - V(x, k) \\ &= \tilde{V}(x, w(x, k) + u_1(x, k), k) - V(x, k) \\ &= \tilde{V}(x, w(x, k), k) - V(x, k) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial u}(x, w(x, k), k) u_1(x, k) + \\ &+ \int_0^1 (1-t) u_1^T(x, k) \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial u^2}(x, w(x, k) + tu_1(x, k), k) u_1(x, k) dt. \end{aligned}$$

Notice that

$$\tilde{V}(x, w(x, k), k) = V(F_w(x, k), k+1). \quad (4.13)$$

And

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial u}(x, w(x, k), k) = \frac{\partial V}{\partial x}(F_w(x, k), k+1) \frac{\partial F}{\partial u}(x, w(x, k), k).$$



So, from (4.8) and (4.12),

$$\begin{aligned} \Delta V(x, k) = & V(F_w(x, k), k+1) - V(x, k) \\ & - \frac{1}{K(x)} u_1^T(x, k) u_1(x, k) + \varphi(x, u_1(x, k), u_1(x, k), k). \end{aligned}$$

It follows that, for  $x \in \mathbb{R}^n$  such that  $u_1(x, k) = 0$  one has

$$\Delta V(x, k) = V(F_w(x, k), k+1) - V(x, k)$$

and otherwise,  $\varphi(x, u, v, k)$  being homogeneous of degree 2 with respect to  $v$ , one gets:

$$\begin{aligned} \Delta V(x, k) = & V(F_w(x, k), k+1) - V(x, k) - \frac{1}{K(x)} \|u_1(x, k)\|^2 \\ & + \|u_1(x, k)\|^2 \varphi\left(x, u_1(x, k), \frac{u_1(x, k)}{\|u_1(x, k)\|}, k\right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

From (4.9), (4.10) and (4.11), one has for any  $(x, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{N}$ ,  $\|u_1(x, k)\| \leq \eta$ , and so one can deduce that  $\Delta V(x, k) \leq 0$ . Thus the closed-loop system (4.4-4.12) satisfies the conditions (1) and (2) of Theorem 4.1 and then the origin is uniformly stable.

It remains to show that it satisfies also the assumption (3). To this end it is sufficient to prove that condition of Proposition 4.1 is met. Indeed, let  $k$  be any integer less or equal to  $T$ , if  $x \in M$  then  $V$  is constant along the solution

$$x(p, x, k) = \hat{f}_k^p(x).$$

So, by (4.14), one deduce that on

$$\{\hat{f}_k^p(x), p = k, k+1, \dots\},$$

the feedback  $u_1$  vanishes and  $f = F_w$ . Hence

$$\begin{aligned} \Delta V(x, k) = 0 & \implies V(x(k+1, x, k), k+1) - V(x, k) = 0 \\ & \implies V(\hat{F}_{w_k}^{k+1}(x), k+1) - V(\hat{F}_{w_k}^k(x), k) = 0, \\ \text{and } u_1(x, k) = 0 & \implies \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{F}_{w_k}^{k+1}(x)) \frac{\partial F}{\partial u}(\hat{F}_{w_k}^k(x), w(x, k), k) = 0. \end{aligned}$$

And one gets by induction  $\forall p \geq k$

$$\begin{aligned} V(\hat{F}_{w_k}^{p+1}(x), p+1) - V(\hat{F}_{w_k}^p(x), p) & = 0, \text{ and} \\ \frac{\partial V}{\partial x}(\hat{F}_{w_k}^{p+1}(x), p+1) \frac{\partial F}{\partial u}(\hat{F}_{w_k}^p(x), w(x, k), p) & = 0, \end{aligned}$$

it follows that  $x$  belongs to  $W$  and thus  $x = 0$ . ■

Now, consider the following time invariant nonlinear control system

$$x_{k+1} = x_k + \Phi(x_k, u_k), \quad (4.15)$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  and  $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  is a  $C^2$  function satisfying  $\Phi(x, 0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ . It is known that if the map  $\Phi$  fail to be locally onto then (4.15) cannot be stabilized by means of continuous state feedback  $u_k = u(x_k)$ . From Theorem (4.2) one can derive a sufficient condition for this class of system to be globally stabilizable. In what follows we give a slightly different version of Theorem 2 which allows us to give a systematic way to design for special class of system, that we will present below, the explicite Lyapunov function and the explicit time-variant feedback. One can remark that this class includes the sampling models of nonholonomic systems.

**Theorem 4.3** *Assume that*

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial u_1 \partial u_j}(x, u) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m, \quad 1 \leq i, j \leq m \quad (4.16)$$

and that there exist a  $C^2$  Lyapunov function  $V(x, k)$  and a continuous real valued function  $\alpha(x, k)$  which are  $T$ -periodic with respect to time  $k$  such that  $V$  and the function  $F_0$  defined by

$$F_0(x, k) = x + \alpha(x, k) \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(x, 0) \quad (4.17)$$

satisfy the conditions of Theorem 4.2. Then, for any positive constant  $\eta$ , system (4.15) is globally asymptotically stabilizable by means of the continuous feedback

$$\begin{aligned} u(x, k) &= \nu(x, k) + \tilde{u}(x, k), \quad \nu(x, k) = [\alpha(x, k), 0, \dots, 0] \\ \tilde{u}(x, k) &= -K(x, k) \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(F_0(x, k), k+1) \frac{\partial \Phi}{\partial u}(x, \nu(x, k)) \right]^T \end{aligned} \quad (4.18)$$

where  $K(x, k)$  is got from (4.7)–(4.11) with

$$\tilde{V}(x, u, k) = V(x + \Phi(x, \nu(x, k) + u), k+1).$$

**Proof :** Let  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  be the continuous function defined by

$$G(x, v, w) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}(x, tv)(w, w) dt$$

with

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}(x, tv)(w, w) = \left( w^T \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial u^2}(x, tv)w, \dots, w^T \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial u^2}(x, tv)w \right)^T.$$

By taking the preliminary change of control

$$u = \nu(x, k) + \tilde{u}, \quad \tilde{u} \in \mathbb{R}^m \quad (4.19)$$

one has

$$\begin{aligned} \Phi(x, \nu(x, k) + \tilde{u}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}(x, 0)(\nu(x, k) + \tilde{u}) + G(x, \nu(x, k) + \tilde{u}, \nu(x, k) + \tilde{u}) \\ &= \alpha(x, k) \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(x, 0) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(x, 0)\tilde{u} \\ &\quad + G(x, \nu(x, k) + \tilde{u}, \nu(x, k) + \tilde{u}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

But (4.16) leads to  $(\partial G / \partial w_1)(x, v, w) = 0$ ,  $\forall (x, v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ , and so

$$G(x, \nu(x, k) + \tilde{u}, \nu(x, k) + \tilde{u}) = G(x, \nu(x, k) + \tilde{u}, \tilde{u}) \quad (4.21)$$

because  $\nu(x, k) = [\alpha(x, k), 0]^T$ . Hence, (4.19), (4.20) and (4.21) transform (4.15) into the  $T$ -periodic time-varying control system  $x_{k+1} = F(x_k, \tilde{u}_k, k)$  with

$$F(x, \tilde{u}, k) = x + \alpha(x, k) \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(x, 0) + \frac{\partial \Phi}{\partial u}(x, 0)\tilde{u} + G(x, \nu(x, k) + \tilde{u}, \tilde{u}).$$

Now, by (4.17),

$$F(x, 0, k) = x + \alpha(x, k) \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(x, 0) = F_0(x, k),$$

and one may end the proof by using Theorem (4.2). ■

Since the conditions and the design of the control laws in Theorem 4.3 make use of the functions  $V(x, k)$  and  $\alpha(x, k)$ , it is natural to look for particular systems of the form (4.15) for which  $V$  and  $\alpha$  can be explicit. Setting

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x)) = \frac{\partial \Phi}{\partial u}(x, 0),$$

it turns out, as in continuous-time (see [47]), that if

$$g_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}(x, 0) = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad (4.22)$$

it is actually possible to give an explicit design of  $V$  and  $\alpha$ , and by the way of the control laws.

Hereafter, for all  $x \in \mathbb{R}^n$ , set  $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)^T$  and for a fixed integer  $T \geq 2$  let

$$V(x, k) = \frac{1}{2} \left( [x_1 + h(\bar{x}, k)]^2 + \|\bar{x}\|^2 \right), \quad (4.23)$$

$$\alpha(x, k) = -\frac{1}{2}[x_1 - h(\bar{x}, k)] - h(\bar{x}, k + 1), \quad (4.24)$$

where  $h$  is a  $C^2$  function satisfying

$$h(\bar{x}, k + T) = h(\bar{x}, k), \quad \forall (\bar{x}, k) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{N} \text{ and } h(0, k) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

A possible choice for  $h$  is

$$h(\bar{x}, k) = \psi(\bar{x})H(k)$$

where  $\psi$  is a definite function with respect to  $\bar{x}$ , and  $H(k)$  is a time periodic function with period  $T$ . So  $V$  and  $\alpha$  are  $T$ -periodic with respect to time  $k$ , and  $V$  vanishes if and only if  $x = 0$ . With these notations we have:

**Proposition 4.2** *Assume that (4.16) and (4.22) hold. If there exists a definite function  $\psi$  and a  $T$ -periodic function  $H$  such that*

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \text{rank}\{\tilde{g}_i(\psi(\bar{x})H(k), \bar{x}), 2 \leq i \leq m, k = 0, \dots, T - 1\} = n - 1. \quad (4.25)$$

Where  $\tilde{g}_i(x) = (0, g_i^2(x), \dots, g_i^n(x))$ .

*Then, for any positive constant  $\eta$ , system (4.15) is globally asymptotically stabilizable by means of the feedback (4.18).*

**Proof:** Let us prove that Theorem 4.3 applies. From (4.17), (4.23) and (4.24) one may easily check that

$$V(F_0(x, k), k + 1) - V(x, k) = -\frac{3}{8}(x_1 + h(\bar{x}, k))^2 \leq 0.$$

It remains to prove that (4.25) involves  $W = \{0\}$ . let  $k \leq T$  and  $x \in \mathbb{R}^n$  such that

$$V(\hat{F}_{0k}^{p+1}(x), p + 1) - V(\hat{F}_{0k}^p(x), p) = 0, \quad \forall p \geq k \quad (4.26)$$

and

$$\frac{\partial V}{\partial x}(\hat{F}_{0k}^{p+1}(x), p + 1)g(\hat{F}_{0k}^p(x)) = 0, \quad \forall p \geq k. \quad (4.27)$$

A simple computation from (4.23), (4.24) and (4.17) shows that

$$\hat{F}_{0k}^p(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{p-k}}[x_1 + h(\bar{x}, k)] - h(\bar{x}, p) \\ \bar{x} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

and

$$V\left(\hat{F}_{0k}^{p+1}(x), p+1\right) - V\left(\hat{F}_{0k}^p(x), p\right) = \frac{-3}{2^{2p+3-2k}}[x_1 + h(\bar{x}, k)]^2$$

and so, by (4.26)

$$x_1 + h(\bar{x}, k) = 0. \quad (4.29)$$

On the other hand, notice that, by (4.23),

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x, k) = \left( x_1 + h(\bar{x}, k), \bar{x}^T + [x_1 + h(\bar{x}, k)] \frac{\partial h}{\partial \bar{x}}(\bar{x}, k) \right)$$

and so, by (4.28), for any  $p \geq k$

$$\frac{\partial V}{\partial x}\left(\hat{F}_{0k}^{p+1}(x), p+1\right) = (0, \bar{x}^T).$$

Hence

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x}\left(\hat{F}_{0k}^{p+1}(x), p+1\right) g(\hat{F}_{0k}^p(x)) = \\ \left[ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x} \end{pmatrix}, g_1(\hat{F}_{0k}^p(x)) \right\rangle, \dots, \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x} \end{pmatrix}, g_m(\hat{F}_{0k}^p(x)) \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Where  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is the inner product on  $\mathbb{R}^n$ . and it turns out from (4.22) and (4.27) that  $(0, \bar{x}^T)^T$  belongs to

$$\left( \text{Span} \left( \{g_2(\hat{F}_{0k}^p(x)), \dots, g_m(\hat{F}_{0k}^p(x)), p \geq k\} \right) \right)^\perp.$$

Hence, it follows from (4.25) that  $\bar{x} = 0$ , and so, by (4.29),  $x_1 = -h(0, k) = 0$  which finally implies that  $x = 0$ .  $\blacksquare$

**Example.** Consider the system evolving in  $\mathbb{R}^3$  defined by

$$\begin{cases} x(k+1) = x(k) + u_1(k), \\ y(k+1) = y(k) + x(k)u_2(k), \\ z(k+1) = z(k) + u_2(k). \end{cases}$$

This system doesn't satisfy the necessary stabilizability condition of ([42]). So the best we can do is to design a time-varying feedback stabilizer.

The assumptions of Proposition 2 are satisfied with

$$\psi(y, z) = y^2 + z^2 \quad \text{and} \quad H(k) = \cos(k\pi).$$

Thus

$$V(x, y, z, k) = (x + (y^2 + z^2) \cos(k\pi))^2 + y^2 + z^2.$$

So, one may easily check that this system can be stabilized thanks to the following periodic time-varying feedback:

$$u_1(x(k), y(k), z(k), k) = \frac{1}{19} \frac{-x(k) + \frac{5}{4}(y^2(k) + z^2(k)) \cos(k\pi)}{(2 + x^2(k) + y^2(k) + z^2(k))^2}$$

$$u_2(x(k), y(k), z(k), k) = \frac{a(x(k), y(k), z(k), k)}{19(2 + x^2(k) + y^2(k) + z^2(k))^2}.$$

Where

$$a(x(k), y(k), z(k), k) = (x(k)y(k) + z(k))\left(\frac{1}{2}x(k) + \frac{1}{4}(y^2(k) + z^2(k)) \cos(k\pi) - 1\right).$$



## 5

# Appendice : Méthode de Jurdjevic-Quinn pour des systèmes non affines en contrôle

Bien que les systèmes non linéaires discrets soient d'un intérêt récent par rapport aux systèmes continus, le lien entre les deux théories est fort. Cependant, les résultats ne se transposent pas directement de l'une à l'autre. En général, ce qui est valable pour les systèmes continus ne l'est pas forcément pour les systèmes discrets et inversement. Par exemple, il est possible d'atteindre le point d'équilibre en temps fini pour un système discret, ce qui ne peut être le cas pour un système continu. D'un autre côté, la recalabilité dans le temps pour un système discret impose des conditions plus restrictives que pour un système continu (inversibilité de la fonction  $f$  définissant l'équation aux différences [29]).

Notons que dans la littérature, les questions relatives aux systèmes discrets sont souvent inspirées de l'étude des systèmes continus. Cet appendice s'inscrit dans le cadre d'une démarche inverse moins classique. Inspirés par l'étude menée dans le chapitre 3 et les techniques utilisées pour les systèmes discrets à dérive dissipative, nous donnons ici des conditions de type Jurdjevic-Quinn pour la stabilisation globale de systèmes continus non affines en contrôle.

Cet appendice est divisé en deux parties. La première est consacrée à l'étude de la stabilisation des systèmes non linéaires déterministes. La deuxième est une extension de cette étude aux systèmes non linéaires stochastiques.



## 5.1 Systèmes non linéaires déterministes

### 5.1.1 Introduction

la stabilisation des systèmes non linéaires est l'un des problèmes les plus importants en théorie du contrôle.

La stabilisation locale a été largement étudiée : des conditions nécessaires ont été données par Brockett [11], Coron [18], Krasnosel'ski et Zabreiko [35], et plusieurs techniques (linéarisation, méthode de la variété centrale, zéros système en régimes, techniques d'approximation) ont été développées pour la détermination de feedbacks stabilisants.

Pour la stabilisation globale, on peut citer la méthode de Jurdjevic-Quinn (*cf.* [22, 30, 32, 40, 45, 55]), l'utilisation des fonctions de Lyapunov contrôlées introduites par Artstein [3] et utilisées par Sontag [51] et Tsiniias [55], et d'autres résultats basés sur le principe de réduction (*cf.* e.g. [54] et sa bibliographie). La plus part des résultats cités ci-dessus sont néanmoins restreints aux systèmes affines en contrôle :

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^m u_i Y_i(x) \quad (5.1)$$

Le but de ce chapitre est l'étude du problème de la stabilisation globale pour des systèmes non affines en contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \quad (5.2)$$

Plus précisément, on généralise le résultat de Jurdjevic-Quinn, connu pour les systèmes affines en contrôle, aux systèmes de la forme plus générale (5.2). En particulier, on montre que si les champs de vecteurs :

$$X(x) = f(x, 0), \quad Y_i(x) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, 0), \quad i = 1, \dots, m \quad (5.3)$$

satisfont les conditions de Jurdjevic-Quinn alors le système (5.2) est globalement stabilisable par un feedback borné régulier  $u = u(x)$ ,  $u(0) = 0$ , avec un choix arbitraire de la borne.

Historiquement, un des premiers résultats significatifs est dû à Jurdjevic et Quinn [30] qui utilisent le principe d'invariance de LaSalle pour donner une condition suffisante pour la stabilisation globale des systèmes non linéaires affines en contrôle (5.1) avec une dérive dissipative et linéaire (i.e.  $X(x) = Ax$ ). Depuis, plusieurs conditions suffisantes de type Jurdjevic-Quinn ont été développées par d'autres auteurs (*cf.* [22, 32, 40, 45, 55]). Plus spécialement, dans [45], Outbib et Sallet prouvent que s'il existe une fonction  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ , définie positive et propre telle que :

(i) la dérivée de Lie de  $V$  par rapport au champ de vecteurs  $X$  satisfait :

$$X \cdot V(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(ii) l'ensemble :

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid X^{k+1} \cdot V(x) = X^k \cdot Y_i \cdot V(x) = 0, k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m\}$$

est réduit à  $\{0\}$ ,

alors le système affine (5.1) est globalement stabilisable par la loi de commande

$$u(x) = -(Y_1 \cdot V(x), \dots, Y_m \cdot V(x))^T \quad (5.4)$$

En outre, ils remarquent que l'ensemble  $W$  s'exprime aussi par :

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid X^{k+1} \cdot V(x) = \text{ad}_X^k Y_i \cdot V(x) = 0, k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, m\}$$

qui constitue une forme plus classique dans la littérature (*cf.* [22, 30, 32, 40, 55]). Il est clair que la définition de  $W$  proposée en (ii) est minimale.

Sous l'hypothèse (i), la dérivée de la fonction  $V$  le long des solutions du système (5.1) est :

$$\dot{V}(x) = X \cdot V(x) + \sum_{i=1}^m u_i Y_i \cdot V(x)$$

de sorte que le feedback de Jurdjevic-Quinn (5.4) rend le système stable au sens de Lyapunov :

$$\dot{V}(x) = X \cdot V(x) - \sum_{i=1}^m (Y_i \cdot V(x))^2 \leq 0$$

Pour le système non affine en contrôle (5.2) :

$$\dot{x} = f(x, u)$$

le problème est de choisir  $u(x)$  tel que :

$$Z \cdot V(x) \leq 0 \text{ pour } Z(x) = f(x, u(x))$$

sous la condition :

$$X \cdot V(x) \leq 0 \text{ pour } X(x) = f(x, 0)$$

La difficulté provient essentiellement de la non linéarité de  $Z \cdot V$  par rapport à  $u$ .

Dans ce chapitre, on montre que s'il existe une fonction  $C^\infty V(x)$  définie positive et propre telle que le champ de vecteurs  $X(x) = f(x, 0)$  satisfait  $X \cdot V(x) \leq 0$ , alors il existe une loi de commande  $u(x) \neq 0$  telle que  $Z \cdot V(x) \leq 0$ . Il s'ensuivra que si les champs de vecteurs  $X, Y_1, \dots, Y_m$ , déterminés par (5.3), satisfont (i) et (ii) alors le système bouclé :

$$\dot{x} = f(x, u(x))$$

est globalement asymptotiquement stable. On donne une démonstration constructive de résultat permettant de calculer explicitement le feedback stabilisant.

Le plan de ce chapitre est le suivant : le paragraphe 2 rappelle quelques notations et définitions utiles pour la suite. Le paragraphe 3 établit les principaux théorèmes du chapitre. Le paragraphe 4 donne une formulation plus générale du résultat précédent au cas des systèmes à entrée scalaire. le paragraphe 5 présente deux exemples illustratifs.

### 5.1.2 Notations et définitions

Une fonction de classe  $(C^\infty) V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite fonction de Lyapunov large pour le système sur  $\mathbb{R}^n$  :

$$\dot{x} = X(x) \tag{5.5}$$

si  $V$  est définie positive, propre et satisfait :

$$X \cdot V(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où  $X \cdot V$  est la dérivée de Lie de  $V$  le long des trajectoires du champ de vecteurs  $X$  :

$$X \cdot V(x) = \left. \frac{d}{dt} V(X_t(x)) \right|_{t=0} = \langle \nabla V(x), X(x) \rangle \tag{5.6}$$

La notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ . Rappelons que  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est propre si pour tout  $\xi > 0$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq \xi\}$  est un compact.

Notons que si le champ de vecteurs  $X$  satisfait cette condition alors toutes les trajectoires du système (5.5) sont bornées, car  $V$  est propre et sa dérivées le long des trajectoires est négative.

On note par  $X_t(\cdot)$  le flot du champ de vecteurs  $X$  défini sur  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est dit  $X$ -invariant si pour tout  $x \in E$  on a  $X_t(x) \in E, \forall t \geq 0$ .

De même qu'en (5.6), les dérivées de Lie d'ordres supérieurs sont définies de façon récurrente :

$$X^0 \cdot V(x) = V(x), \quad X^{k+1} \cdot V(x) = X \cdot X^k \cdot V(x), \quad k \in \mathbb{N}$$

### 5.1.3 condition de type Jurdjevic-Quinn

On considère le système non linéaire de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (5.7)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ , et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $C^\infty$  satisfaisant  $f(0, 0) = 0$ .

On note par  $X, Y_1, \dots, Y_m$  les champs de vecteurs définis sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$X(x) = f(x, 0), \quad Y_i(x) = \frac{\partial f}{\partial u_i}(x, 0), \quad i = 1, \dots, m \quad (5.8)$$

et on suppose que :

**(h1)** *Le système en régime libre :*

$$\dot{x} = X(x)$$

est stable au sens de Lyapunov et l'on connaît une fonction de Lyapunov  $V(x) > 0, x \neq 0, V(0) = 0$ , de classe  $C^\infty$  telle que :

$$X \cdot V(x) \leq 0, \quad \forall x \neq 0$$

**(h2)** *L'ensemble :*

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid X^{k+1} \cdot V(x) = X^k \cdot Y_i \cdot V(x) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, m\}$$

est réduit à  $\{0\}$ .

On a alors le résultat de stabilisation suivant :

**Théorème 5.1** *Si les hypothèses (h1) et (h2) sont vérifiées, alors, pour toute constante  $\eta > 0$ , le système (5.7) est globalement asymptotiquement stabilisable par une loi de commande  $u = k(x)$  satisfaisant  $k(0) = 0$  et  $\|k(x)\| \leq \eta, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .*

**Preuve.**  $f$  étant une fonction de classe  $C^\infty$ , on a :

$$f(x, u) = f(x, 0) + g(x, u)u$$

où

$$g(x, u) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u}(x, tu) dt \quad (5.9)$$

Le calcul de la dérivé de la fonction de Lyapunov  $V$  le long des trajectoires du système (5.7), donne :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \langle \nabla V(x), f(x, 0) + g(x, u)u \rangle \\ &= X \cdot V(x) - u^T \varphi(x, u)\end{aligned}\quad (5.10)$$

où, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $u \in \mathbb{R}^m$  :

$$\varphi(x, u) = -(g(x, u))^T \nabla V(x) \quad (5.11)$$

Pour  $\eta > 0$ , soit  $\alpha : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  la fonction définie par :

$$\alpha(x, u) = \frac{\eta}{K_1(x) + 2\eta K_2(x)} \varphi(x, u)$$

où  $K_1(x)$  et  $K_2(x)$  sont des fonctions réelles de classe  $C^\infty$  satisfaisant, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $K_1(x) + K_2(x) \neq 0$  et :

$$\begin{aligned}K_1(x) &\geq \sup_{\|u\| \leq \eta} \|\varphi(x, u)\| \\ K_2(x) &\geq \sup_{\|u\| \leq \eta} \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x, u) \right\|\end{aligned}$$

Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $u \in \mathbb{R}^m$  telle que  $\|u\| \leq \eta$ , on a :

$$\|\alpha(x, u)\| \leq \eta \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u}(x, u) \right\| \leq \frac{1}{2}$$

Donc, par application du théorème du point fixe on déduit qu'il existe une unique fonction continue  $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , avec  $k(0) = 0$ , satisfaisant pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|k(x)\| \leq \eta$  et  $\alpha(x, k(x)) = k(x)$ . Par ailleurs, en chaque point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , le théorème des fonctions implicites s'applique à la fonction  $\psi(x, u) = \alpha(x, u) - u$ , puisque  $\psi(x_0, k(x_0)) = 0$  et la matrice jacobienne :

$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(x_0, k(x_0)) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(x_0, k(x_0)) - I_m$$

est inversible. Il existe alors un voisinage  $\mathcal{V} \times \mathcal{U}$  de  $(x_0, k(x_0))$  et  $v : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  telle que  $v(x_0) = k(x_0)$  et  $\psi(x, v(x)) = 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{V}$ . De plus  $v \in C^\infty(\mathcal{V}, \mathcal{U})$  puisque  $\psi$  est de classe  $C^\infty$ . Comme l'équation  $\psi(x, u) = 0$  à une solution unique  $k(x)$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ , on a,  $k|_{\mathcal{V}} = v$  et donc  $k$  est de classe  $C^\infty$ .

En prenant le feedback  $u = k(x)$ , et sachant que :

$$\varphi(x, k(x)) = \frac{1}{\eta} (K_1(x) + 2\eta K_2(x)) k(x) \quad (5.12)$$

on a à partir de 5.10 :

$$\dot{V}(x) = X \cdot V(x) - \frac{1}{\eta} (K_1(x) + 2\eta K_2(x)) k^T(x)k(x) \leq 0$$

ce qui implique que le système bouclé est stable.

Notons que toutes les trajectoires du système bouclé sont bornées car  $V$  est propre, et sa dérivée le long des trajectoires est négative. Soit à présent :

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid X \cdot V(x) = 0, \text{ et } k(x) = 0\} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Par application du principe d'invariance de LaSalle' (cf. [39]) toutes les solutions du système bouclé tendent vers  $\Omega$  le plus grand sous ensemble invariant contenus dans  $E$ . Montrons que  $\Omega$  est réduit à l'origine de  $\mathbb{R}^n$ .

D'une part,  $k(x)$  étant nul sur  $E$ , le système bouclé sur  $\Omega$  devient :

$$\dot{x} = X(x) \quad (5.14)$$

D'autre part, en utilisant (5.8), (5.9) et (5.11) on a :

$$\varphi(x, 0) = -(Y_1 \cdot V(x), \dots, Y_m \cdot V(x))^T$$

et de (5.12) il est clair que :

$$\begin{aligned} k(x) = 0 &\Rightarrow \varphi(x, 0) = 0 \\ &\Rightarrow Y_i \cdot V(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.15)$$

Soit  $x(t)$  une solution du système bouclé avec  $x(0) = x \in \Omega$ . comme  $\Omega$  est invariant on a à partir de (5.14) :

$$x(t) = X_t(x) \in \Omega, \quad \forall t \geq 0$$

et de (5.13) et (5.15), on a pour  $i = 1, \dots, m$

$$X \cdot V(X_t(x)) = Y_i \cdot V(X_t(x)) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Il s'ensuit que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} X \cdot V(X_t(x)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d^k}{dt^k} Y_i \cdot V(X_t(x)) \right|_{t=0} = 0$$

En utilisant la définition de la dérivée de Lie, on en déduit que :

$$X^{k+1} \cdot V(x) = \left. \frac{d^k}{dt^k} X \cdot V(X_t(x)) \right|_{t=0} = 0$$

et :

$$X^k \cdot Y_i \cdot V(x) = \left. \frac{d^k}{dt^k} Y_i \cdot V(X_t(x)) \right|_{t=0} = 0$$

et donc  $x \in W$  ce qui implique, suivant l'hypothèse (h2), que  $x = 0$  et termine la preuve. ■

Notons que, le théorème 5.1 donne un résultat existentiel de stabilisabilité dans le sens où, même si dans certains cas particuliers le point fixe peut être déterminé exactement, il ne donne pas, en générale, explicitement le feedback stabilisant. En donnant la construction explicite du feedback, théorème qui suit est plus proche des préoccupations pratiques en automatique.

Soit  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\varphi(x, v, w) = \left( \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, tv) w^2 dt \right)^T \nabla V(x) \quad (5.16)$$

où :  $(\partial^2 f / \partial u^2)(x, tv) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  (l'espace des applications bilinéaires de  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$ ) étant la dérivée partielle de second ordre de  $f$  par rapport à  $u$  en  $(x, tv)$ , et  $w^2 = (w, w)$  :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, tv) w^2 = \left( w^T \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}(x, tv) w, \dots, w^T \frac{\partial^2 f_n}{\partial u^2}(x, tv) w \right)^T$$

pour un  $\eta > 0$  fixé, soit  $K_1, K_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions de classe  $\mathcal{C}^\infty$  telles que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $K_1(x) + K_2(x) \neq 0$  et :

$$K_1(x) \geq \sup_{\|v\| \leq \eta, \|w\|=1} |\varphi(x, v, w)| \quad (5.17)$$

$$K_2(x) \geq \|(Y_1 \cdot V(x), \dots, Y_m \cdot V(x))\| \quad (5.18)$$

et posons :

$$K(x) = \frac{\eta}{\eta K_1(x) + K_2(x)} \quad (5.19)$$

Notons que la fonction  $\varphi$  est homogène de degré 2 par rapport à  $w$ .

On peut alors énoncer :

**Théorème 5.2** *Si les hypothèses (h1) et (h2) sont vérifiées, alors, pour toute constante  $\eta > 0$ , le système (5.7) est globalement stabilisable par le feedback*

$$u(x) = -K(x)(Y_1 \cdot V(x), \dots, Y_m \cdot V(x))^T \quad (5.20)$$

qui satisfait

$$\|u(x)\| \leq \eta, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (5.21)$$

**Preuve.** L'inégalité (5.21) est une conséquence immédiate de (5.18), (5.19) et (5.20). En outre, la dérivée de la fonction de Lyapunov  $V$  le long des trajectoires du système bouclé (5.7-5.20), s'écrit à partir de (5.8) et (5.16) :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \left\langle \nabla V(x), f(x, 0) + \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0)u(x) + \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(x, tu)u^2 dt \right\rangle \\ &= X \cdot V(x) + \sum_{i=1}^m u_i(x) Y_i \cdot V(x) + \varphi(x, u(x), u(x))\end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $u(x) = 0$  on a  $\dot{V}(x) = X \cdot V(x)$ , et sinon, de la propriété d'homogénéité de  $\varphi(x, v, w)$  par rapport à  $w$  on a :

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= X \cdot V(x) - \frac{1}{K(x)} \|u(x)\|^2 + \|u(x)\|^2 \varphi \left( x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \right) \\ &= X \cdot V(x) - \frac{1}{K(x)} \|u(x)\|^2 \left[ 1 + K(x) \varphi \left( x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \right) \right]\end{aligned}$$

En utilisant (5.17), (5.19) et (5.21) on a :

$$1 + K(x) \varphi \left( x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \right) \geq 0$$

Ainsi (h1) entraîne que  $\dot{V}(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , soit que le système bouclé est stable. Par ailleurs, suivant (5.17), (5.18) et (5.20) on a :

$$\begin{aligned}u(x) \neq 0 &\Rightarrow K_2(x) \neq 0 \\ &\Rightarrow 1 + K(x) \varphi \left( x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \right) \neq 0\end{aligned}$$

ce qui montre, à partir de (5.20), que :

$$\dot{V}(x) = 0 \Leftrightarrow X \cdot V(x) = 0 \text{ et } Y_i \cdot V(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

Comme pour le théorème 5.1, le principe d'invariance de LaSalle permet alors de conclure à la stabilité asymptotique globale du système bouclé (5.7-5.20).■

Dans le paragraphe suivant, on s'intéresse au cas des systèmes à entrée scalaire ( $m = 1$ ) pour lesquels on donne une condition suffisante de stabilisation plus générale.



### 5.1.4 Cas d'une entrée scalaire

On considère le système non linéaire à entrée scalaire :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (5.22)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction satisfaisant  $f(0, 0) = 0$ . Comme ci-dessus, on note par  $X$  le champ de vecteurs défini sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$X(x) = f(x, 0)$$

et on suppose qu'il existe une fonction de Lyapunov  $V$  de classe  $C^\infty$  telle que (h1) soit vérifiée. De plus, on suppose que :

(h'2) L'entier  $\mu \in \mathbb{N}^*$  défini par :

$$\mu = \inf \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid \left\langle \nabla V(x), \frac{\partial^k f}{\partial u^k}(x, 0) \right\rangle \neq 0 \right\} \quad (5.23)$$

est impair et l'ensemble :

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid X^{k+1} \cdot V(x) = X^k \cdot Y \cdot V(x) = 0, k \in \mathbb{N}\}$$

où  $Y$  est le champ de vecteurs défini sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$Y(x) = \frac{\partial^\mu f}{\partial u^\mu}(x, 0)$$

est réduit à  $\{0\}$ .

Notons que si  $\mu = 1$ , (h'2) est réduit à (h2). En utilisant la formule de Taylor, on a :

$$f(x, u) = f(x, 0) + u \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) + \dots + \frac{u^\mu}{\mu!} \frac{\partial^\mu f}{\partial u^\mu}(x, 0) + u^{\mu+1} \varphi(x, u) \quad (5.24)$$

où  $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est définie par :

$$\varphi(x, u) = \frac{1}{\mu!} \int_0^1 (1-t)^\mu \frac{\partial^{\mu+1} f}{\partial u^{\mu+1}}(x, tu) dt$$

On a alors le théorème suivant :

**Théorème 5.3** *Si les hypothèses (h1) et (h'2) sont vérifiées, alors, pour toute constante  $\eta > 0$ , le système (5.22) est globalement stabilisable par le feedback  $u(x)$  — qui satisfait  $|u(x)| \leq \eta$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  — donné par*

$$u(x) = -\frac{1}{\mu!} \frac{\eta Y \cdot V(x)}{\eta K_1(x) + K_2(x)} \quad (5.25)$$

où  $K_1(x)$  et  $K_2(x)$  sont des fonction réelles de classe  $C^\infty$  s vérifiant pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $K_1(x) + K_2(x) \neq 0$  et :

$$K_1(x) \geq \sup_{|u| \leq \eta} |\langle \nabla V(x), \varphi(x, u) \rangle| \quad (5.26)$$

$$K_2(x) \geq \frac{1}{\mu!} |Y \cdot V(x)| \quad (5.27)$$

**Preuve.** La dérivée de la fonction de Lyapunov  $V$  le long des trajectoires du système bouclé (5.22-5.25) est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \langle \nabla V(x), \\ &f(x, 0) + u(x) \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) + \cdots + \frac{u^\mu(x)}{\mu!} \frac{\partial^\mu f}{\partial u^\mu}(x, 0) + u^{\mu+1}(x) \varphi(x, u(x)) \rangle \end{aligned}$$

et on a à partir de (5.23) et (5.25) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= X \cdot V(x) + \frac{u^\mu(x)}{\mu!} Y \cdot V(x) + u^{\mu+1}(x) \langle \nabla V(x), \varphi(x, u(x)) \rangle \\ &= X \cdot V(x) - \frac{u^{\mu+1}(x)}{K(x)} [1 + K(x) \langle \nabla V(x), \varphi(x, u(x)) \rangle] \end{aligned}$$

où

$$K(x) = \frac{\eta}{\eta K_1(x) + K_2(x)}$$

Mais, de (5.25), (5.26) et (5.27) il vient que  $|u(x)| \leq \eta$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , et que :

$$1 + K(x) \langle \nabla V(x), \varphi(x, u(x)) \rangle \geq 0$$

et donc, de l'hypothèse (h1) et  $\mu$  étant impair, on a  $\dot{V}(x) \leq 0$  ce qui implique que le système bouclé est stable. Comme dans le théorème 5.2, on déduit la globale asymptotique stabilité par application du principe d'invariance de LaSalle. ■

**Remarque.** Notons que si, en plus de (h1) et (h'2),  $f$  est de la forme :

$$f(x, u) = f(x, 0) + u \frac{\partial f}{\partial u}(x, 0) + \cdots + \frac{u^\mu}{\mu!} \frac{\partial^\mu f}{\partial u^\mu}(x, 0)$$

soit que dans (5.24)  $\varphi$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , alors le feedback  $u(x) = -Y \cdot V(x)$  stabilise aussi globalement le système (5.22).

### 5.1.5 Exemples

**Exemple 1.** On considère le système sur  $\mathbb{R}^3$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 + (x_2^2 - 2x_2x_3)u + x_1u^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1^3 - (x_2^2 - x_3^2)u + u^3 \\ \dot{x}_3 = -x_3^3 + (x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2)u + (x_2 - x_1)u^2 + 2u^3 \end{cases} \quad (5.28)$$

Les champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  définis en (5.8) sont donnés par :

$$X(x) = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ -x_1^3 \\ -x_3^3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 - 2x_2x_3 \\ -x_2^2 + x_3^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 \end{pmatrix}$$

En prenant pour fonction de Lyapunov :

$$V(x) = \frac{1}{4}(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4)$$

on a :

$$X \cdot V(x) = -x_3^6 \leq 0$$

et :

$$\begin{aligned} Y \cdot V(x) &= x_1^3 x_2^2 - x_2^5 - 2x_1^3 x_2 x_3 + x_2^3 x_3^2 + x_1^2 x_3^3 + x_2^2 x_3^3 - 3x_3^5 \\ X \cdot Y \cdot V(x) &= -2x_1^6 x_2 + 5x_1^3 x_2^4 + 3x_1^2 x_2^5 + 2x_1^6 x_3 - 6x_1^2 x_2^4 x_3 \\ &\quad - 3x_1^3 x_2^2 x_3^2 + 2x_1 x_2^3 x_3^3 - 2x_2^3 x_3^4 - 3x_1^2 x_3^5 - 3x_2^2 x_3^5 + 15x_3^7 \\ X^2 \cdot Y \cdot V(x) &= 2x_1^9 - 20x_1^6 x_2^3 - 27x_1^5 x_2^4 + 15x_1^2 x_2^7 + 6x_1 x_2^8 + 36x_1^5 x_2^3 x_3 \\ &\quad - 12x_1 x_2^7 x_3 + 6x_1^6 x_2 x_3^2 - 9x_1^2 x_2^5 x_3^2 - 2x_1^6 x_3^3 - 6x_1^4 x_2^2 x_3^3 \\ &\quad + 6x_1^2 x_2^4 x_3^3 + 2x_2^6 x_3^3 + 12x_1^3 x_2^2 x_3^4 + 6x_1^3 x_2 x_3^5 - 12x_1 x_2^3 x_3^5 \\ &\quad + 8x_2^3 x_3^6 + 15x_1^2 x_3^7 + 15x_2^2 x_3^7 - 105x_3^9 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$X \cdot V(x_1, x_2, x_3) = 0 \Leftrightarrow x_3 = 0$$

et :

$$\begin{aligned} Y \cdot V(x_1, x_2, 0) &= (x_1 - x_2) x_2^2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \\ X \cdot Y \cdot V(x_1, x_2, 0) &= x_1^2 x_2 (-2x_1^4 + 5x_1 x_2^3 + 3x_2^4) \\ X^2 \cdot Y \cdot V(x_1, x_2, 0) &= x_1 (2x_1^8 - 20x_1^5 x_2^3 - 27x_1^4 x_2^4 + 15x_1 x_2^7 + 6x_2^8) \end{aligned}$$

D'où,  $X \cdot V(x) = Y \cdot V(x) = X \cdot Y \cdot V(x) = X^2 \cdot Y \cdot V(x) = 0$  implique que  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Ainsi  $W = \{0\}$ , et le système (5.28) satisfait les hypothèses (h1) et (h2). Il est alors globalement stabilisable par un feedback borné. En outre, la fonction  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par (5.16) est donnée par :

$$\varphi(x, v, w) = w^2[x_1^4 + v x_2^3 + (x_2 - x_1 + 2v)x_3^3]$$

et on peut facilement vérifier que, pour tout  $\eta > 0$ , les fonctions  $K_1$  et  $K_2$  définies sur  $\mathbb{R}^3$  par :

$$K_1(x) = 1 + 3\eta + x_1^4 + \eta x_2^6 + 2\eta x_3^6 + (x_2 - x_1)^2 x_3^6$$

$$K_2(x) = 1 + (Y \cdot V(x))^2$$

satisfont (5.17) et (5.18). Donc, par application du théorème 5.2, le système (5.28) est globalement stabilisable par le feedback :

$$u(x) = \frac{-\eta Y \cdot V(x)}{\eta K_1(x) + K_2(x)}$$

Notons que le linéarisé de (5.28) à l'origine ne donne pas de réponse pour sa stabilisation locale.

**Exemple 2.** On considère le système plan :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_2^2 u + x_1 x_2 u^3 + x_1 u^3 \sin u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1 x_2 u + x_2 u^3 + x_2 u^3 \sin u \end{cases} \quad (5.29)$$

Avec les mêmes notations que celles introduites en (h'2) et pour :

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

on a immédiatement  $\mu = 3$  et :

$$X \cdot V(x) = 0$$

$$Y \cdot V(x) = 6(x_1^2 + x_2)x_2$$

$$X \cdot Y \cdot V(x) = 6(-2x_1 x_2^2 + x_1^3 + 2x_1 x_2)$$

ce qui implique que  $W = \{0\}$ . En utilisant (5.24) on a  $\varphi(x, u) = (\sin u)x$  et pour un  $\eta > 0$  donné, (5.26) et (5.27) sont vérifiées avec :

$$K_1(x) = x_1^2 + x_2^2$$

$$K_2(x) = x_1^2(1 + x_2^2) + x_2^2 + 1$$

Donc, par application du théorème 5.3, le feedback :

$$u(x) = \frac{-\eta x_2(x_1^2 + x_2^2)}{(\eta + 1)(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2 x_2^2 + 1}$$

stabilise globalement le système (5.29). Notons que “l’approximation” :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + x_2^2 u \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1 x_2 u \end{cases} \quad (5.30)$$

de (5.29) n’est pas stabilisable. En effet, on vérifie aisément que :

$$V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

est une intégrale première pour (5.30) indépendamment de  $u$ .

## 5.2 systèmes non linéaires stochastiques

### 5.2.1 Introduction

Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité usuel,  $\{z_t, t \geq 0\}$  un processus de Wiener sur cet espace à valeur dans  $\mathbb{R}^p$  et  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration engendré par  $z$ . Le but de cette Note est de donner une condition suffisante de stabilisation globale par un retour d’état pour des systèmes non linéaires stochastiques (pris au sens de Itô) :

$$x_t = x_0 + \int_0^t f_0(x_s, u) ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t f_j(x_s, u) dz_s^j, \quad (5.31)$$

avec  $u = (u^1, \dots, u^m)^T$  un contrôle à valeur dans  $\mathbb{R}^m$  et  $f_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  des fonctions lipschitziennes de classe  $C^\infty$  telles que  $f_j(0, 0) = 0$ ,  $0 \leq j \leq p$ .

Cette condition généralise celle de Jurdjevic-Quinn, connue pour les systèmes non linéaires déterministes affines en contrôle (voir [30, 45]) :

$$\dot{x} = X(x) + \sum_{i=1}^m u^i Y^i(x). \quad (5.32)$$

En [45], il est prouvé que s’il existe  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie positive et propre telle que :

(i) la dérivée de Lie de  $V$  suivant le champ  $X$  est telle que :

$$XV(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

(ii) l'ensemble :

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid X^{k+1}V(x) = X^k Y^i(V) = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, m\}$$

est réduit à  $\{0\}$ ,

alors (5.32) est globalement stabilisable par le feedback  $u^i(x) = -Y^i V(x)$

Ce résultat est étendu en [21] à des systèmes stochastiques affines en contrôle :

$$x_t = x_0 + \int_0^t (X_0(x_s) + \sum_{i=1}^m u^i Y_0^i(x_s)) ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t X_j(x_s) dz_s^j, \quad (5.33)$$

dans lesquels les coefficients associés au bruit sont indépendants du contrôle. Pour ces systèmes le générateur infinitésimal associé,  $\mathcal{L}$ , vérifie :

$$\mathcal{L}V(x) = LV(x) + \sum_{i=1}^m u^i Y_0^i V(x),$$

où  $L$  est l'opérateur différentiel du second ordre :

$$L = X_0 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p X_j^2$$

et  $V$  une fonction de Liapounov. Ainsi, le feedback  $u^i(x) = -Y_0^i V(x)$  conduit à  $\mathcal{L}V(x) \leq 0$  si  $LV(x) \leq 0$ , ce qui permet d'établir en [21], sous des conditions analogues à (i) et (ii), que ce feedback stabilise globalement (5.33).

Pour les systèmes stochastiques de la forme générale (5.31),  $\mathcal{L}V(x)$  n'étant plus linéaire en  $u$ , la difficulté majeure est de prouver l'existence d'un feedback  $u(x) \neq 0$  conduisant à  $\mathcal{L}V(x) \leq 0$ . Dans cette Note, on montre que si les champs de vecteurs

$$X_j(x) = f_j(x, 0), \quad Y_j^i(x) = \frac{\partial f_j}{\partial u^i}(x, 0), \quad 0 \leq j \leq p, \quad 1 \leq i \leq m,$$

satisfont l'analogie stochastique de (i) et (ii) le système (5.31) est globalement stabilisable par un feedback borné explicitement donné.

### 5.2.2 Stabilité stochastique

On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats classiques de stabilité stochastique (voir [25]). Soit  $x_t$  le processus à valeur dans  $\mathbb{R}^n$  solution au sens de Itô de l'équation différentielle stochastique :

$$x_t = x_0 + \int_0^t \sigma_0(x_s) ds + \sum_{k=1}^p \int_0^t \sigma_k(x_s) dz_s^k, \quad \sigma_k(0) = 0, \quad 0 \leq k \leq p. \quad (5.34)$$

où les champs de vecteurs  $\sigma_k$  sont lipschitziens tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  on ait :

$$\sum_{k=0}^p \|\sigma_k(x)\| \leq K(1 + \|x\|), \quad K > 0. \quad (5.35)$$

Pour  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_t(x_0)$ ,  $t \geq 0$ , désigne la solution à l'instant  $t$  de (5.34) démarrant de l'état  $x_0$ . La solution  $x_t \equiv 0$  est stable en probabilité si pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} P \left( \sup_{t>0} \|x_t(x_0)\| > \varepsilon \right) = 0$$

S'il existe de plus un voisinage  $D$  de l'origine tel que :

$$P \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_t(x_0)\| = 0 \right) = 1$$

pour tout  $x_0 \in D$ , cette solution est asymptotiquement stable en probabilité. Elle est globalement asymptotiquement stable en probabilité (GASP) si  $D = \mathbb{R}^n$ .

Soit  $L$  le générateur infinitésimal associé à (5.34), défini pour toute fonction  $\Psi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^n$  par :

$$L\Psi(x) = \langle \sigma_0(x), \nabla\Psi(x) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \text{Tr} \left( \sigma_k(x) (\sigma_k(x))^T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) \right)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^n$ . On peut alors rappeler la version stochastique du théorème de Liapounov (voir [25]).

**Théorème 5.4** *S'il existe un voisinage  $D$  de l'origine et une fonction  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  définie positive tel que :*

$$LV(x) \leq 0 \text{ (resp. } LV(x) < 0), \quad \forall x \in D, \quad x \neq 0$$

*alors la solution  $x_t \equiv 0$  de (5.34) est stable (resp. asymptotiquement stable) en probabilité. Elle est GASP si  $D = \mathbb{R}^n$ ,  $V$  est propre et :*

$$LV(x) < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x \neq 0$$

Rappelons enfin, que la version stochastique du principe d'invariance de LaSalle (voir [37]) permet d'établir que si :

$$LV(x) \leq 0, \quad \forall x \in D$$

le processus  $x_t$  converge en probabilité vers le plus grand ensemble invariant dont le support est contenu dans :

$$\{x_t \mid LV(x_t) = 0, \forall t \geq 0\}$$

### 5.2.3 Condition suffisante de stabilisation

Le système (5.31) est globalement stabilisable s'il existe une commande  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $u(0) = 0$ , telle que la solution  $x_t \equiv 0$  soit GASP pour le système bouclé :

$$x_t = x_0 + \int_0^t f_0(x_s, u(x_s)) ds + \sum_{j=1}^p \int_0^t f_j(x_s, u(x_s)) dz_s^j.$$

Pour  $0 \leq j \leq p$ ,  $1 \leq i \leq m$ , on associe au système (5.31) les champs de vecteurs :

$$X_j(x) = f_j(x, 0), \quad Y_j^i(x) = \frac{\partial f_j}{\partial u^i}(x, 0)$$

et les opérateurs différentiels du second ordre  $L_0, L_i$ , définis pour toute fonction  $\Psi$  de  $C^2(\mathbb{R}^n)$  par :

$$L_0\Psi(x) = \langle X_0(x), \nabla\Psi(x) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \text{Tr} \left( X_j(x) (X_j(x))^T \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) \right), \quad (5.36)$$

$$L_i\Psi(x) = \langle Y_0^i(x), \nabla\Psi(x) \rangle + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \text{Tr} \left( \left[ X_j(x) (Y_j^i(x))^T + Y_j^i(x) (X_j(x))^T \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) \right) \quad (5.37)$$

Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $v, w \in \mathbb{R}^m$  on pose :

$$\tilde{f}_j(x, v, w) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f_j}{\partial u^2}(x, tv)(w, w) dt,$$

où :

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial u^2}(x, tv)(w, w) = \left( w^T \frac{\partial^2 f_j^1}{\partial u^2}(x, tv)w, \dots, w^T \frac{\partial^2 f_j^n}{\partial u^2}(x, tv)w \right)^T$$

et on considère les matrices d'ordre  $n$  données par :

$$\begin{aligned} A_j(x, v, w) &= X_j(x) \left( \tilde{f}_j(x, v, w) \right)^T + \tilde{f}_j(x, v, w) (X_j(x))^T \\ &\quad + \sum_{i=1}^m v^i \left[ Y_j^i(x) \left( \tilde{f}_j(x, v, w) \right)^T + \tilde{f}_j(x, v, w) (Y_j^i(x))^T \right] \\ &\quad + \sum_{i_1, i_2=1}^m w^{i_1} w^{i_2} Y_j^{i_1}(x) (Y_j^{i_2}(x))^T + \tilde{f}_j(x, v, v) \left( \tilde{f}_j(x, v, w) \right)^T \end{aligned}$$

On suppose enfin qu'il existe  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  définie positive et propre telle que :



et, grâce à (5.36), (5.37) et (5.38) :

$$\mathcal{L}V(x) = L_0V(x) + \sum_{i=1}^m u^i(x)L_iV(x) + \varphi_v(x, u(x), u(x)),$$

soit,  $\mathcal{L}V(x) = L_0V(x)$  si  $u(x) = 0$  et, sinon, en utilisant (5.40) :

$$\mathcal{L}V(x) = L_0V(x) - \frac{1}{K(x)}\|u(x)\|^2 \left[ 1 - K(x)\varphi_v \left( x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \right) \right]$$

où :

$$K(x) = \frac{\eta}{\eta K_1(x) + K_2(x)}$$

En outre, à partir de  $\|u(x)\| \leq \eta$  et de (5.39) on a :

$$1 - K(x)\varphi_v \left( x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \right) \geq 0$$

La condition **(h1)** donne alors  $\mathcal{L}V(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , d'où la stabilité en probabilité de la solution  $x_t \equiv 0$ . Par application de la version stochastique du principe d'invariance de LaSalle (see [37]), il suffit, pour montrer qu'elle est GASP, d'établir que pour toute solution complète  $x_t$  de (5.41) vérifiant  $\mathcal{L}V(x_t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , on a nécessairement  $x_t \equiv 0$ . On vérifie aisément que :

$$u(x) \neq 0 \Rightarrow K_2(x) \neq 0 \Rightarrow 1 - K(x)\varphi_v \left( x, u(x), \frac{u(x)}{\|u(x)\|} \right) \neq 0,$$

et donc que  $\mathcal{L}V(x) = 0$  si et seulement si :

$$L_iV(x) = 0, \quad i = 0, \dots, m$$

Ainsi, pour toute solution complète  $x_t$  de (5.41) vérifiant  $\mathcal{L}V(x_t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ , la formule de Itô permet d'avoir, par dérivations successives :

$$L_0^{k+1}V(x_t) = L_0^k L_i V(x_t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad i = 1, \dots, m$$

La condition **(h2)** entraîne alors que  $x_t \equiv 0$ .



# Bibliographie

- [1] C. Aeyels and R. Sepulchre. Stability for dynamical systems with first integrals: A topological criterion. *Systems & Control Letters*, **19** (1992), 461–465.
- [2] B. d'Andréa-Novel et M. Cohen de Lara. *Commande Linéaire des Systèmes Dynamiques*. Masson, Paris, 1994.
- [3] Z. Artstein. Stabilization with relaxed controls. *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.*, 7:1163–1173, 1983.
- [4] M. Bensoubaya, A. Ferfera and A. Iggidr. Stabilization of discrete-time nonlinear systems. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, Tome 321, Série I, No. 3, Août 1995, p. 371-374.
- [5] M. Bensoubaya, and A. Iggidr. New Results on the stability of discrete-time systems and application to control problems. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, (soumis)
- [6] M. Bensoubaya, A. Ferfera and A. Iggidr. Time-varying stabilizing feedback for a class of nonlinear discrete-time control systems. *34th CDC* (1995), p. 512-514.
- [7] M. Bensoubaya, A. Ferfera et A. Iggidr. Stabilisation globale de systèmes non linéaires stochastiques, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* **323**, (1996), 427-432.
- [8] M. Bensoubaya, A. Ferfera et A. Iggidr. Global stabilization of nonaffine control systems, *Proc. IASTED International Conference Modeling, Identification and Control*, Innsbruck, Austria, February 17-19, 1997.
- [9] M. Bensoubaya, A. Ferfera and A. Iggidr. On the stabilization of continuous and discrete time nonlinear systems. *2nd Marrakesh International Conference on Differential Equations*, June 16-20, 1995.

- [10] M. Bensoubaya, A. Ferfera et A. Iggidr. Global stabilization of periodic Discret-Time nonlinear systems, *Systems & Control Letters* (soumis).
- [11] R.W. Brockett. Asymptotic stability and feedback stabilization. In R.W. Brockett, R.S. Milmann, and H.J. Sussmann, editors, *Differential Geometric Control Theory*, pages 181–191. Birkhauser, 1983.
- [12] C.I. Byrnes, W. Lin, and B.K. Ghosh. Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback. *Systems & Control Letters*, 21:255–263, 1993.
- [13] C.I. Byrnes, and W. Lin. Lossless, feedback equivalence, global Stabilization of discrete-time nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 39: 1–83, 98 1994.
- [14] C.I. Byrnes, and W. Lin. Passivity and absolute stabilization of a class discrete-time nonlinear systems. *Automatica. Control*, 31: 2–83, 263–267, 1995.
- [15] C. Byrnes and C. Martin. An integral-invariance principle for nonlinear systems. *IEEE Trans. Aut. Control*, 40 (1995), 983–994.
- [16] J. Carr. Applications of Center Manifold Theory. Springer Verlag–New York, (1981).
- [17] R. Chabour et M. Oumoun. A stochastic version of Jurdjevic-Quinn theorem *J. Stoch. Anal. Appl.* (à aparaitre).
- [18] J.M. Coron. A necessary condition for feedback stabilization. *Systems & Control Letters*, 14:227–232, 1990.
- [19] S. N. Elaydi. An introduction to difference equations. Springer Verlag–New York, 1996.
- [20] A. Ferfera et A. Iggidr. A remark on the stabilization of partially linear composite systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* 42, 3 (1997), 411–414.
- [21] P. Florchinger. A stochastic version of Jurdjevic-Quinn theorem *J. Stoch. Anal. Appl.*, 12:473–480, 1994.
- [22] J.P. Gauthier and G. Bornard. chapter stabilisation des systèmes non linéaires. In *Outils et modèles mathématiques pour l'automatique et la théorie du signal*, pages 307–324. Editions du CNRS, 1981.
- [23] W. Hahn. Stability of motion. Springer Verlag–New York, 1967.

- [24] A. Halanay. Quelques questions de la théorie de la stabilité pour les systèmes aux différences finies. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 12:150–154, 1963.
- [25] R.Z. Hasminskii. *Stochastic stability of differential equations*, Sijthoff & Noordhoff–Alphen aan den Rijn, 1980.
- [26] J. Hurt. Some Stability theorems for ordinary difference equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 4 (1967), 582–596.
- [27] A. Iggidr, B. Kalitine and R. Outbib Semi-definite Lyapunov functions : stability and stabilization. *MCSS*, (to appear).
- [28] A. Isidori. *Nonlinear Control Systems*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1989.
- [29] B. Jakubczyk and E.D. Sontag. Controlability of nonlinear discrete-time systems: a lie-algebraic approach. *SIAM J. Control Optim.*, 28:1–33, 1990.
- [30] V. Jurdjevic and J.P. Quinn. Controllability and stability. *Journal of Differential Equations*, 28 (1978), 381–389, (1978).
- [31] R.E. Kalman and J.E. Bertram. Control system analysis and design via the second method of lyapounov II discrete systems . *Trans ASME Ser D.J.Basic Engineering*, 82 (1960), 394–400.
- [32] N. Kalouptsidis and J. Tsinias. Stability improvement of nonlinear systems by feedback. *IEEE Trans. Automat. Control*, 29:364–367, 1984
- [33] M. Kawski. Stabilization of nonlinear systems in the plane. *Systems & Control Letters*, 12:169–175, 1989.
- [34] P. V. Kokotovic et H. J. Sussmann. A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems, *Syst. Contr. Lett.* 13, (1989) 125-133.
- [35] M.A. Krasnosel'ski and P.P. Zabreiko. *Geometric Methods of nonlinear Analysis*. Academic Press, New-York, 1984.
- [36] N. N. Krasovski. Problems of the theory of stability of motion. In *Stanford Univ. Press*, Stanford, California 1963 ; translation of the Russian edition, Moskow, 1959.
- [37] H.J. Kushner. Stochastic stability. In *Stability of Stochastic Dynamical Systems*, Lecture Notes in Mathematics, R. Curtain, ed., Springer-Verlag, Berlin, 1972, 97–124.

- [38] J.P. LaSalle. *The stability and control of discret Processes*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [39] J.P. LaSalle and S. Lefschetz. *Stability by Liapunov's direct method with applications*. Academic Press, New-York, 1961.
- [40] K.K. Lee and A. Araposthathis. Remarks on smooth feedback stabilization of nonlinear system *Systems & Control Letters*, (10):41–44, (1988).
- [41] W. Lin. Further results on global stabilization of discrete nonlinear systems. *Systems & Control Letters*, (29), (1996), p. 51-59.
- [42] W. Lin and C.I. Byrnes Design of discrete-time nonlinear control systems via smooth feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 39, No 11, November 1994, p. 2340-2346.
- [43] A. Lyapunov. Problème général de la stabilité du mouvement. *Ann. of Math. Study*, 17, Princeton, 1947.
- [44] A.S. Morse and C.F. Martin Toward a unified theory of parameter adaptive controlability. *IEEE Trans. Aut. Control*, 35 (Sep 1990), 1002 –1012.
- [45] R. Outbib and G. Sallet. Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited. *Systems & Control Letters*, 18:93–98, 1992.
- [46] O. Perron. Über stabilität und asymptotisches verhalten der integral von differential-gleichungssystemen, *Math. Zeit*, (29), (1929), p. 129-160.
- [47] J.B. Pomet. Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift, *Systems & Control Letters*, (18), (1992), p. 147-158.
- [48] A. Saberi, P. V. Kokotovic et H. J. Sussmann. Global stabilization of partially linear composite systems, *SIAM J. Contr. and Optim.* 28 (1990), 1491-1503.
- [49] P. Seibert. Relative stability and stability of closed sets. *Lectures Notes in Mathematics*, No 144 Springer-Verlag, Berlin (1970), 185–189.
- [50] P. Seibert et R. Suarez. Global stabilization of nonlinear cascade systems, *Syst. Contr. Lett.* 14, (1990), 347-352.
- [51] E.D. Sontag. A universal construction of artstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems & Control Letters*, 13:117–123, 1989.

- [52] E. D. Sontag. Further facts about input to state stabilization. *IEEE Trans. Aut. Control*, **35** (1990), 473–477.
- [53] H. J. Sussmann et P. V. Kokotovic. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **36** (1991), 424–440.
- [54] E.D. Sontag. Feedback stabilization of nonlinear systems. In Ran A.C.M Kaashoek M.A, van Schuppen J.H, editor, *Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control*, pages 61–81. Birkhauser, 1990.
- [55] J. Tsiniias. Sufficient lyapunov-like conditions for stabilizability. *Mathematics of control, Signals and systems*, 2:343–357, 1989.
- [56] J. Tsiniias. stability of discrete-time systems. *IMA J. Control Information*, 6:135–150, 1989
- [57] J. Tsiniias. Output feedback stabililization of discrete-time control systems. *IMA J. Control Information*, 7:257–268, 1990
- [58] M. Vidyasagar. Decomposition techniques for large-scale systems with nonadditive interactions: Stability and stabilizability. *IEEE Trans. Aut. Control*, **25** (1980), 773–779.