



HAL
open science

Maîtrise de la thermique des fours de maintien en fonderie

Thomas Loussouarn

► **To cite this version:**

Thomas Loussouarn. Maîtrise de la thermique des fours de maintien en fonderie. Thermique [physics.class-ph]. Université de Lorraine, 2018. Français. NNT : 2018LORR0105 . tel-01935295

HAL Id: tel-01935295

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01935295v1>

Submitted on 9 Sep 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

THÈSE

Présentée à

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

École doctorale 409 EMMA : Énergie Mécanique et Matériaux

par

Thomas LOUSSOUARN

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

Spécialité/Discipline : Mécanique et Énergétique

Maîtrise de la thermique des fours de maintien en fonderie

soutenue publiquement le 2 février 2018 devant la commission d'examen composée
de :

M. Jérôme IDIER	DR CNRS, LS2N, Nantes	Rapporteur
M. Philippe LE MASSON	Professeur, Université de Bretagne Sud, Lorient	Rapporteur
M. Jean-Luc BATTAGLIA	Professeur, Université de Bordeaux, Bordeaux	Examinateur
M. Jean-Laurent GARDAREIN	MCF, Aix-Marseille Université, Marseille	Examinateur
Mme. Marie-Laurence GIORGI	Professeur, CentraleSupélec, Gif-sur-Yvette	Examinateur
M. Manuel GIRAULT	CR CNRS, Institut P', Poitiers	Examinateur
M. Denis MAILLET	Professeur émérite, Université de Lorraine, Nancy	Directeur de thèse
M. Benjamin REMY	Professeur, Université de Lorraine, Nancy	Co-directeur, Invité
Mme. Diane DAN	Ingénieur-Docteur, Safran SAE, Gennevilliers	Promoteur de thèse

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMETA)

CNRS UMR 7563

2, Avenue de la Forêt de Haye - TSA 60604

54518 Vandoeuvre-lès-Nancy cedex, France

<http://lemta.univ-lorraine.fr>

A mes grand-parents,

*"Prenez invariablement la position la plus élevée, c'est généralement la moins
encombrée."
[C. De Gaulle]*

Remerciements

Ce travail de 3 ans est le résultat de nombreuses collaborations avec des personnels de la fonderie Safran Aircraft Engines à Gennevilliers et du laboratoire LEMTA à Vandoeuvre-lès-Nancy. Je souhaite à travers les lignes qui vont suivre remercier l'ensemble des personnes sans qui cette thèse n'aurait pas abouti à ces résultats. Elles ont parfois porté le sujet à ma place, elles m'ont soutenu, elles m'ont permis d'aller au bout par leur soutien amical ou professionnel.

J'aimerais tout d'abord remercier les personnes sans qui cette thèse n'aurait pas eu lieu en les personnes de Diane DAN, Saïd B., Nicolas F. pour SAFRAN et Denis MAILLET et Benjamin REMY pour le LEMTA.

J'ai été encadré par un trio à la complémentarité exemplaire. Ils ont permis la réussite de cette thèse et je leur en serai toujours reconnaissant. Je remercie Diane DAN pour son soutien sans faille qui nous a permis d'aller au bout de toutes nos idées. Je remercie Denis MAILLET pour son enthousiasme permanent, le foisonnement d'idées et ses innombrables relectures. Je remercie Benjamin REMY pour sa rigueur, sa capacité à organiser la démarche scientifique ainsi que les heures tardives passées ensemble à résoudre des problèmes techniques.

Je souhaite particulièrement remercier messieurs Jérôme IDIER et Philippe LE MASSON qui m'ont fait l'honneur de rapporter ce travail de thèse. Leurs remarques et idées ont été très pertinentes, elles ont ainsi permis d'améliorer cette thèse. Je souhaite aussi sincèrement remercier Jean-Luc BATTAGLIA d'avoir accepté le rôle de président du jury et les examinateurs ayant accepté d'être dans le jury en les personnes de Jean-Laurent GARDAREIN, Marie-Laurence GIORGI et Manuel GIRAULT.

Au sein de Safran Aircraft Engines, les ateliers et les bureaux méthodes ont été particulièrement importants. Je souhaite donc remercier :

- l'encadrement (MM. Saïd B., Nicolas F., Didier L., Philippe P., Julien G.) d'avoir permis la réalisation des instrumentations malgré les contraintes inhérentes à un site industriel
- l'équipe méthode moulage-fusion, pour leur appui et leur expertise pour la préparation et la réalisation des instrumentations. En particulier, Magali M. pour l'attribution des ressources, Serge T., Pablo M., Johan C. et Jean-Pierre V. pour leur expertise technique et leur curiosité, Hortense C. pour son sens de l'organisation et son dévouement pour « LA » cause, Valérie B. et Grégoire S. pour leur aide à la préparation des grappes
- le laboratoire avec Serge F. pour son expertise technique hors-norme pour les instrumentations, son expertise pratique est une vraie mine d'or. Nicolas L. pour

son aide concernant les découpes pièces et ses connaissances en métallurgie. Enfin Sylvie C. qui a nous a sauvé des pénuries en colle alumine.

- L'équipe simulation avec Papa D., Jun N. et Marine G. pour la réalisation de simulation sous ProCAST et les transferts de données
- L'équipe PFX en les personnes de David G. et Taha N. pour l'intérêt porté à mes travaux et les discussions
- Régine C. pour l'aide administrative
- Les collègues pour leur écoute et leur soutien informel (J.P, Rémy, Loïc, Morgan, Julien)

Au sein du laboratoire LEMTA, les équipes techniques et administratives ont permis le bon déroulement de cette thèse. J'aimerais remercier :

- Fabrice L. pour l'accueil au sein du laboratoire LEMTA à Nancy
- Vincent S. pour les mesures de diffusimétrie ainsi que de calorimétrie, Hadrien C. pour les mesures de propriété optique des matériaux
- Franck D. pour l'usinage de pièces et la préparation d'échantillons.
- Gérard V. et Stéphane D. pour leur appui sur les problématiques d'induction, leur disponibilité et le prêt de matériel (pont RLC afin de mesurer la résistance des inducteurs) alors qu'ils n'intervenaient pas directement dans la thèse
- Le personnel administratif Edith L., Valérie R., Fatiha B., Irène L., Dalida S. et Christine S. dont leur disponibilité, leur réactivité et leur gentillesse est sans égal.
- Julien B. pour l'organisation des soirées squash et de m'avoir offert le gîte lors d'un retour à Nancy imprévu d'une semaine.

Je souhaite remercier mes collègues thésards et anciens thésards avec qui j'ai partagé de super moments et qui ont toujours su créer une atmosphère détendue tout au long de la thèse :

- l'équipe pile à combustible : Sofyane A., Thomas G., Saïd A., Mathilde C., Julian R
- l'équipe transfert de chaleur et de matière : Waseem A., Mathilde B., Thomas V., Morgan L., Miloud H
- les thésards du bureau : Juan David P., Ahmad A., Blandine L., Mohammed J.

Ma famille et mes amis qui m'ont encouragé au cours de ces 3 années (et même avant) et qui se sont toujours intéressés à mon travail. En particulier, Alice qui a toujours été là pour moi, à l'écoute, qui m'a redonné le sourire et fait oublier la thèse quand il le fallait. Elle est ainsi la seule personne de mon entourage capable d'expliquer ce que j'ai fait pendant ces 3 années. J'ai une pensée émue pour mes amis qui n'ont jamais compris quand j'étais à Paris ou à Nancy et m'ont considéré perdu dans une 4^{ème} dimension. Je souhaiterais aussi remercier mes colloques nancéiennes Leni J., Isabella P. et Clio F.

Merci à tous,

Table des matières

Introduction générale	1
1 Le procédé industriel de fonderie à cire perdue et la thermique associée	3
1.1 Procédé de fonderie de précision	3
1.1.1 Intérêt du procédé pour la production d'aubes de turbine	3
1.1.2 Description du procédé	5
1.1.3 Four de maintien et solidification dirigée	6
1.1.3.1 Présentation du four de maintien type Bridgman	6
1.1.3.2 Solidification dirigée d'un super alliage base nickel	7
1.2 La chauffe par induction et la thermique d'un four type Bridgman	9
1.2.1 Chauffage par induction	9
1.2.1.1 Equations de Maxwell et approximations	10
1.2.1.2 Résolution de l'équation de diffusion du vecteur potentiel en régime établi	11
1.2.1.3 Définition du courant parcourant l'inducteur et de la section efficace de passage du courant	12
1.2.2 La thermique du module de chauffe	12
1.2.2.1 Transfert par conduction	12
1.2.2.2 Transfert par rayonnement	13
1.2.2.3 rayonnement et conduction	21
1.2.3 Couplage thermique et induction	21
1.3 Travaux existants sur la modélisation des fours sous vide	21
1.3.1 Recherches réalisées par Safran Aircraft Engines	22
1.3.2 Modélisation détaillée des fours sous vide	22
2 Outils de modélisation directe et inverse	27
2.1 Problème direct et problème inverse	28
2.1.1 Problèmes inverses bien ou mal posés	28
2.2 Réduction et identification de modèles	29
2.3 Différents modèles réduits	30
2.3.1 Modèles enthalpiques	30
2.3.2 Modèles de dimension 1 (1D)	31
2.3.3 Modèles autorégressifs	31
2.4 Inversion de modèles	32

2.4.1	Estimation linéaire de paramètres	33
2.4.2	Estimation non-linéaire de paramètres	33
2.4.3	Statistique de l'estimateur des moindres carrés ordinaires	34
2.5	Modèle réduit de fours sous vide et capteurs virtuels	35
3	Modélisation détaillée d'un four de maintien en fonderie	37
3.1	Définition du four de maintien utilisé	37
3.1.1	Description des différentes parties du module de chauffe	37
3.1.2	Propriétés des éléments constitutifs du four	38
3.2	Définition du four détaillé par FlexPDE	41
3.2.1	Résolution du problème électromagnétique	41
3.2.1.1	Présentation du modèle électromagnétique	41
3.2.1.2	Résultats de la modélisation FlexPDE pour une puissance consigne de 40.48 kW	43
3.2.2	Résolution du problème thermique	47
3.2.2.1	Présentation du modèle thermique pour le module de chauffe	47
3.2.2.2	Résultats de la modélisation thermique sous FlexPDE	50
3.3	Définition du four détaillé par COMSOL	53
3.3.1	Résolution du problème électromagnétique	54
3.3.2	Résolution du problème thermique	58
3.3.2.1	Présentation du modèle thermique pour le module de chauffe	58
3.3.2.2	Résultats thermique de la modélisation COMSOL	59
3.4	Conclusions	61
4	Conception de modèles réduits	63
4.1	Le modèle 0D non-linéaire	64
4.1.1	La structure du modèle 0D : hypothèses et système	64
4.1.1.1	Rappel de la structure du modèle détaillé	64
4.1.1.2	Définition de la structure du modèle réduit	66
4.1.2	Estimation des paramètres pour le modèle RM1	67
4.1.3	Explication statistique des paramètres issus de l'estimation des paramètres pour le modèle RM1	70
4.1.4	Estimation des paramètres pour le modèle RM2	72
4.1.5	Validation du modèle 0D pour des points de mesure suffisamment éloignés de la sole	75
4.2	Le modèle 0.5D linéaire convolutif	77
4.2.1	Structure du modèle et hypothèses	77
4.2.2	Calculs des solutions stationnaire et transitoire du modèle 0.5D	79
4.2.2.1	Solution stationnaire analytique (indicée "perm")	79
4.2.2.2	Ecriture du système transitoire	80
4.2.3	Sorties du modèle 0.5D dans le domaine temporel	83
4.3	Modèles ARX et le modèle convolutif 0.5D linéaire	85
4.3.1	Le modèle ARX	86

4.3.2	Une vision paramétrique du modèle convolutif 0.5D	87
4.3.3	Comportement et vision convolutive du modèle ARX	87
4.3.3.1	ARX température du suscepteur et du moule	88
4.3.3.2	ARX température du moule et puissance électrique	90
4.3.3.3	Signal bruité	92
4.4	Modèle ARX et modèle détaillé COMSOL	93
4.4.1	ARX température du suscepteur et du moule	96
4.4.2	ARX puissance électrique et température du moule	98
4.4.3	ARX puissance électrique et température du moule et ajout d'une constante	100
4.4.3.1	Etude de l'ordre n_c pour la constante u_{cste} et de son impact sur les coefficients	100
4.4.3.2	Recherche du coefficient c_1 permettant un accord entre le modèle ARX et le profil synthétique COMSOL pour la phase de validation	103
4.4.3.3	Impact de la valeur de u_{cste}	106
4.5	Synthèse des travaux sur les modèles réduits	106
	Conclusion générale	109
	Annexes	111
	A Démonstration de l'approximation des régimes quasi-stationnaires	113
	B Mesure de la résistance du module de chauffe et calcul du rendement du système inductif	115
	C Méthodes de régularisation employées	119
	D Algorithme de Levenberg-Marquardt	123
	E Estimation des paramètres d'un modèle ARX à 2 entrées	127

Introduction générale

Safran Aircraft Engines est un bureau d'étude et un fabricant de turboréacteurs pour l'aéronautique. Le site de Gennevilliers produit en particulier des pièces de fonderie appelées aubes de turbine. Ces aubes de turbine sont des ailettes permettant la compression de l'air au sein du moteur. Elles ont un impact prépondérant sur le rendement du réacteur. En particulier, les aubes positionnées en sortie de la chambre de combustion, *i.e.* dans la partie haute température et haute pression du turboréacteur, subissent des contraintes de température et de pression de l'ordre de 2100°C et 10 bar. Ces pièces sont faites en superalliage base-nickel à haute résistance thermique et mécanique, et elles ont une structure cristallographique monocristalline. La structure monocristalline permet une meilleure résistance mécanique au fluage sous l'effet de la température et de la force centrifuge.

Le procédé de fabrication de ces pièces est le procédé de fonderie de précision à modèle à cire perdue. Ce procédé date de plusieurs milliers d'années et sa principale qualité est de permettre la production de pièces de forme géométrique complexe et d'assurer le respect dimensionnel de celles-ci. La fonderie de Gennevilliers s'est dotée depuis plusieurs années de moyens de simulation des procédés afin d'améliorer l'industrialisation de nouvelles pièces en réduisant les défauts métallurgiques et *in fine* le nombre de rebuts. La simulation des procédés s'intéresse tout particulièrement à la solidification du métal et à l'obtention de pièces monocristallines sans défauts de fonderie (grains parasites, freckles, retassures, *etc.*). Le moyen de production est un four à induction sous vide de type Bridgman. Les conditions aux limites du domaine modélisé sont habituellement prises sur les parois internes de ce dernier, l'effort portant essentiellement sur le moule et le métal.

Cette thèse s'intéresse au moyen de production plus qu'aux produits. L'objectif est de mieux connaître thermiquement le moyen de production afin d'améliorer les simulations de fonderie, d'augmenter la maîtrise du procédé en atelier et de mieux connaître le moyen en vue de prochains investissements. Cette thèse s'intéresse donc à modéliser de façon détaillée (induction et thermique) le moyen de production à l'aide d'outils de résolution par éléments finis afin de venir compléter les simulations déjà effectuées. Le four sera aussi modélisé de façon réduite afin de permettre un possible suivi en temps réel du comportement du four en atelier en vue de la détection d'anomalies éventuelles.

Ce travail est développé en quatre chapitres qui permettront de donner un aperçu précis des travaux menés au cours de cette thèse. Le contenu des chapitres est résumé dans les quatre paragraphes suivants.

Le premier chapitre présente le procédé de fonderie à cire perdue appliqué à la fabrication d'aubes de turbine. Nous nous intéresserons plus particulièrement au four

de maintien sous vide. Les bases théoriques nécessaires à la résolution des problèmes d'induction et de thermique au sein, d'un four sous vide à induction, seront abordés. Nous finirons en présentant quelques travaux qui ont déjà été réalisés au sein de la fonderie, ou par la communauté scientifique, autour des problématiques de fabrication d'aubes de turbine.

Le second chapitre aborde la théorie nécessaire à la réalisation de modèles réduits. Ainsi, les notions d'inversion et d'identification de modèles réduits seront étudiées. Les différents types de modèles réduits que nous utiliserons au cours des chapitres suivants sont présentés. Enfin, une revue bibliographique de travaux utilisant les modèles autorégressifs de type ARX clôture ce chapitre.

Le troisième chapitre concerne la modélisation détaillée du four de maintien. Le four de maintien est alors présenté plus en détail avec ses dimensions et ses propriétés. Deux modèles numériques axisymétriques de four basés sur les données physiques du four sont fournis. Ils permettent d'obtenir la température au sein du four à partir de la puissance électrique consommée. Ils ont été réalisés avec deux outils de modélisation différents : FlexPDE et COMSOL. Les sorties de ces modèles numériques sont comparées avec les données constructeurs, notamment au niveau des rendements d'induction.

Le quatrième et dernier chapitre concentre l'ensemble des travaux de modélisation réduite du four. Ainsi, les trois formes de modèles réduits présentés au chapitre 1 sont étudiés à partir des modélisations détaillées. Une étude plus approfondie est notamment réalisée sur le lien entre les modèles ARX et les modèles convolutifs.

Chapitre 1

Le procédé industriel de fonderie à cire perdue et la thermique associée

Au cours de ce chapitre, nous présenterons l'environnement de cette étude afin que le lecteur comprenne les travaux réalisés dans l'optique de modéliser thermiquement un four de maintien en fonderie.

Nous allons aborder le procédé de fonderie de précision dans son ensemble puis nous nous concentrerons sur le four de maintien qui est l'objet de cette thèse. Le fonctionnement et plus particulièrement la thermique de ce dernier seront présentés. Le four de maintien est le siège de la solidification du métal. Nous esquisserons donc les grands axes de la théorie de la solidification dirigée.

Sommaire

1.1 Procédé de fonderie de précision	3
1.1.1 Intérêt du procédé pour la production d'aubes de turbine	3
1.1.2 Description du procédé	5
1.1.3 Four de maintien et solidification dirigée	6
1.2 La chauffe par induction et la thermique d'un four type Bridgman	9
1.2.1 Chauffage par induction	9
1.2.2 La thermique du module de chauffe	12
1.2.3 Couplage thermique et induction	21
1.3 Travaux existants sur la modélisation des fours sous vide	21
1.3.1 Recherches réalisées par Safran Aircraft Engines	22
1.3.2 Modélisation détaillée des fours sous vide	22

1.1 Procédé de fonderie de précision

1.1.1 Intérêt du procédé pour la production d'aubes de turbine

Les aubes de turbine développées au cours de ces dernières années doivent résister à des températures (2100°C) et à des contraintes mécaniques de plus en plus grandes (10

bar), en sortie de chambre de combustion. Les aubes de turbine sont fabriquées en super alliage base nickel, ces alliages sont difficilement déformables. Elles ont des propriétés cristallographiques particulières obtenues par solidification dirigée (monocristalline ou colonnaire) afin d'améliorer leur tenue mécanique. Une structure colonnaire composée d'un ou plusieurs grains, présentant un axe $\langle 100 \rangle$ aligné dans la direction principale de sollicitation, permet d'éviter les joints de grain perpendiculaires à la contrainte principale due à la force centrifuge. Elles ont des formes complexes afin de répondre aux besoins d'amélioration aérodynamique du flux d'air traversant le moteur. Elles sont creuses pour permettre à un flux d'air froid de les refroidir en interne, voir la figure 1.1. La température de l'aube est ainsi contrôlée passivement. L'objectif de ces développements est d'améliorer le rendement des turbo-réacteurs tout en maîtrisant le temps de vie des aubes de turbine avec une résistance accrue aux efforts de fluage.

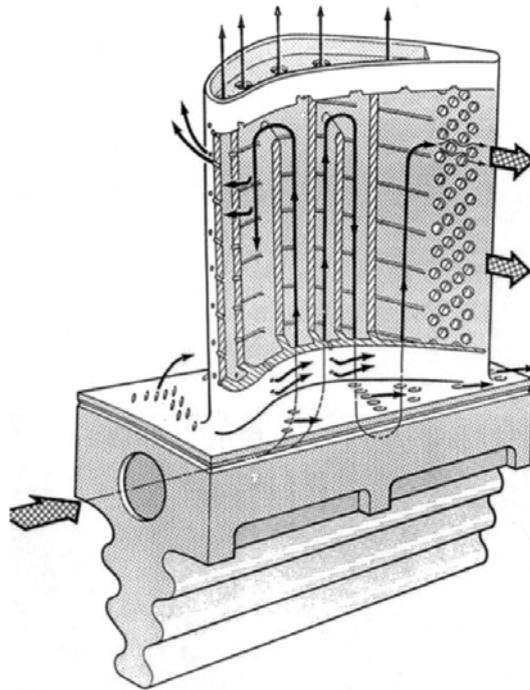


Fig. 1.1 – Schéma d'un exemple de canaux de refroidissement en forme de serpentin pour une aube de turbine tiré de l'article [1] sur les avancées récentes en matière d'aube de turbine

Le procédé de fonderie à cire perdue est un procédé vieux de plusieurs milliers d'années. Il a été utilisé au début pour fabriquer des armes, des bijoux, des statues ou autres objets. Ainsi à l'origine, le procédé était utilisé pour la fabrication de pièces à faible sollicitation mécanique. Depuis les années 1970, il est utilisé pour la fabrication d'aubes de turbine pour plusieurs raisons. Il est réputé pour sa capacité à obtenir des pièces avec des tolérances dimensionnelles strictes à un coût moindre par rapport à d'autres techniques comme l'usinage et le forgeage. Il permet également de maîtriser les modes de solidification du métal dans le cadre du procédé de solidification dirigée afin d'obtenir des pièces creuses avec l'ajout de noyaux en céramique au cours du procédé.

En résumé, le procédé de fonderie de précision à cire perdue est le meilleur procédé actuel pour répondre aux problématiques techniques et de coûts pour la fabrication d'aubes de turbine.

1.1.2 Description du procédé

Il est constitué de 4 grandes étapes que nous appellerons étape cire, étape moulage, étape métal et étape de finition. Nous présenterons ici les 4 étapes très rapidement, elles sont présentées plus en détail dans [2] et [3]. La [Figure 1.2](#) issue de [2] montre de façon schématique les différentes étapes présentées.

Le procédé débute par l'étape cire correspondant aux phases 1, 2 et 3 de la [figure 1.2](#). La matrice d'injection ou moule possède une ou plusieurs empreintes des pièces à fabriquer, voir phase 1. Un noyau céramique peut être préalablement positionné à l'intérieur du moule, il correspondra au système de canaux de refroidissement interne à l'aube. La matrice d'injection est refermée et est maintenue fermée à l'aide d'une presse lors de l'injection de la cire, phase 2. Une fois la cire solidifiée, les modèles cire de la pièce sont extraits de la matrice d'injection et sont ensuite assemblés pour former une grappe cire, phase 3.

Une fois, la grappe cire obtenue, nous passons à l'étape du moulage (phases 4 et 5 de la [Figure 1.2](#)). Le moulage consiste en l'obtention d'une carapace céramique autour de la grappe cire par trempe puis saupoudrage d'un réfractaire, phase 4. Une fois cette carapace céramique séchée, la carapace est décirée et les parties creuses restantes sont aux formes de la pièce à obtenir avec le noyau en céramique toujours présent, phase 5. Le moule est ensuite cuit pour obtenir de bonnes caractéristiques chimiques ainsi que mécanique. Le moule est alors prêt pour la coulée métal.

L'étape métal (phase 6 de la [Figure 1.2](#)) a lieu dans le four de maintien. Elle consiste en la fusion sous vide d'un lingot d'alliage puis en la coulée de ce métal liquide dans le moule préchauffé. Le moule est ensuite extrait du four suivant différents protocoles qui permettent d'obtenir des pièces avec des structures equiaxe, colonnaire ou monocristalline. Cette étape sera décrite plus en détail dans le chapitre suivant.

L'étape de finition (phases 7, 8 et 9 de la [Figure 1.2](#)) commence par le retrait de la céramique sur la grappe métallique obtenu (décochage), phase 7. Ensuite, les pièces sont extraites de la grappe par découpe, phase 8. Les noyaux céramiques sont dissouts afin d'obtenir les cavités de refroidissement des pièces par air. Le dimensionnel des pièces ainsi que leur structure cristalline sont vérifiés avant de quitter la fonderie, phase 9.

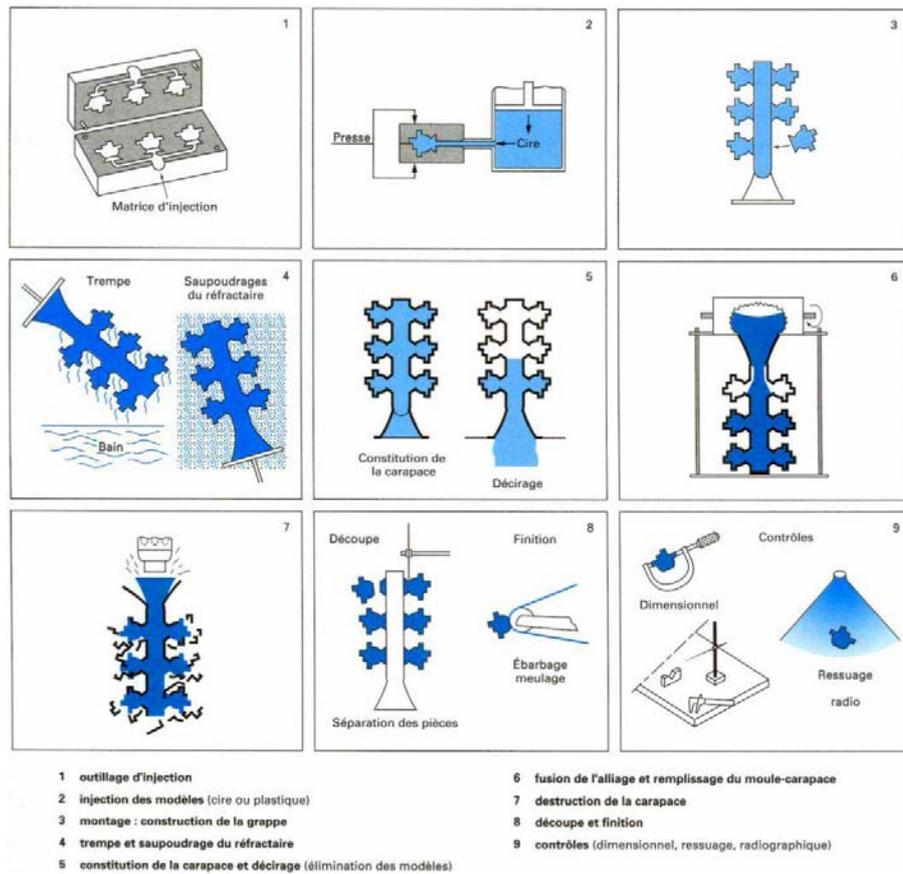


Fig. 1.2 – Présentation des différentes étapes du procédé de fonderie de précision à cire perdue

1.1.3 Four de maintien et solidification dirigée

1.1.3.1 Présentation du four de maintien type Bridgman

Le four de maintien est un four de type Bridgman. Cette technologie de four a été proposée en 1925 par Percy W. Bridgman [4] et améliorée au cours des années suivantes par Donald C. Stockbarger en 1936 [5]. La technologie de chauffe est à induction et le four fonctionne sous vide primaire. Il est constitué de 2 grandes parties qui sont le sas moule et la chambre chaude. La chambre chaude est constituée de 2 éléments distincts, voir la figure 1.3. Le premier est le module de fusion du lingot d'alliage. Le lingot est disposé dans un creuset céramique lui même positionné au centre d'un inducteur. Le métal est fondu par induction jusqu'à l'obtention d'un bain de métal à la température souhaitée (température autour de $1500^{\circ}C$). Le second élément est le module de chauffe. Il s'agit d'une chambre fermée au sein du four dont les éléments de chauffe (suscepteurs) et isolants sont en graphite. La chambre est chauffée par induction. Elle possède 2 inducteurs distincts, un pour le bas du module et un autre pour la partie haute. Ils sont commandés de façon indépendante. Le module de chauffe est fermé en bas via un écran thermique radiatif de diamètre intérieur correspondant au diamètre extérieur de la grappe. Un anneau en cuivre refroidi activement par eau est positionné sous l'écran et donc entre le module de chauffe et le sas moule. Il est appelé anneau refroidisseur.

La grappe céramique est insérée dans le four via le sas moule et elle est positionnée

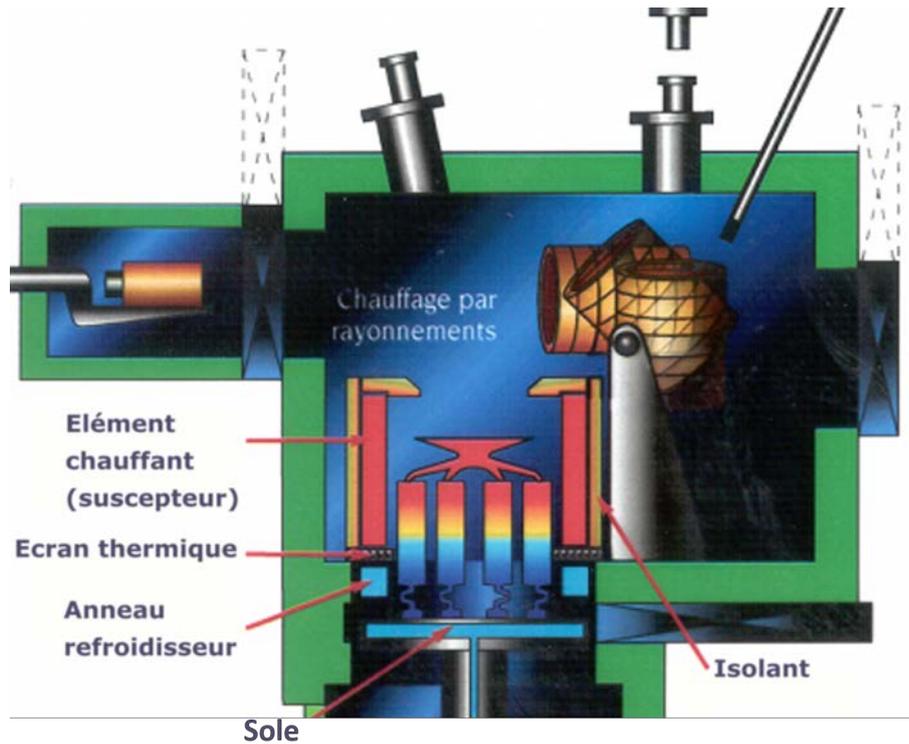


Fig. 1.3 – Représentation schématique de la chambre chaude du four de type de Bridgman et de la zone de transfert vers le sas moule (les suscepteurs haut et bas, ainsi que les isolants haut et bas du four que nous allons utiliser sont ici représentés chacun par 1 unique élément correspondant)

sur un élément en cuivre activement refroidi par un circuit d'eau, appelé sole. Une fois le sas moule mis sous vide, la grappe est montée dans le module de chauffe où elle est chauffée via les suscepteurs par rayonnement. La grappe est ainsi montée à la température souhaitée pour la coulée. Lorsque l'alliage est fondu et à la bonne température et que la température de la céramique est aussi stabilisée, le métal est versé dans le moule.

1.1.3.2 Solidification dirigée d'un super alliage base nickel

Le métal surchauffé remplissant le moule entre en contact avec la sole activement refroidie. Le moule est toujours maintenu en température par rayonnement grâce aux suscepteurs. La germination du cristal est initiée quasi-instantanément au contact de la sole refroidie. La grappe est ensuite extraite du module de chauffe à une vitesse prédéfinie suivant la géométrie de la grappe, de l'ordre de 2 à 10 mm/min dans le cas des fours de Bridgman avec des super alliages base nickel. La grappe est ainsi retirée progressivement en dehors du module de chauffe permettant ainsi la remontée du front solide et de la zone pâteuse tout en maintenant le gradient thermique vertical. Le contrôle de la vitesse de descente permet de maintenir le front solide et la zone pâteuse au niveau de l'écran thermique fermant le module de chauffe. Le refroidissement a lieu par rayonnement avec l'anneau refroidisseur et les parois du puit de transfert vers le sas moule une fois la solidification réalisée sur les premières dizaines de millimètres de métal

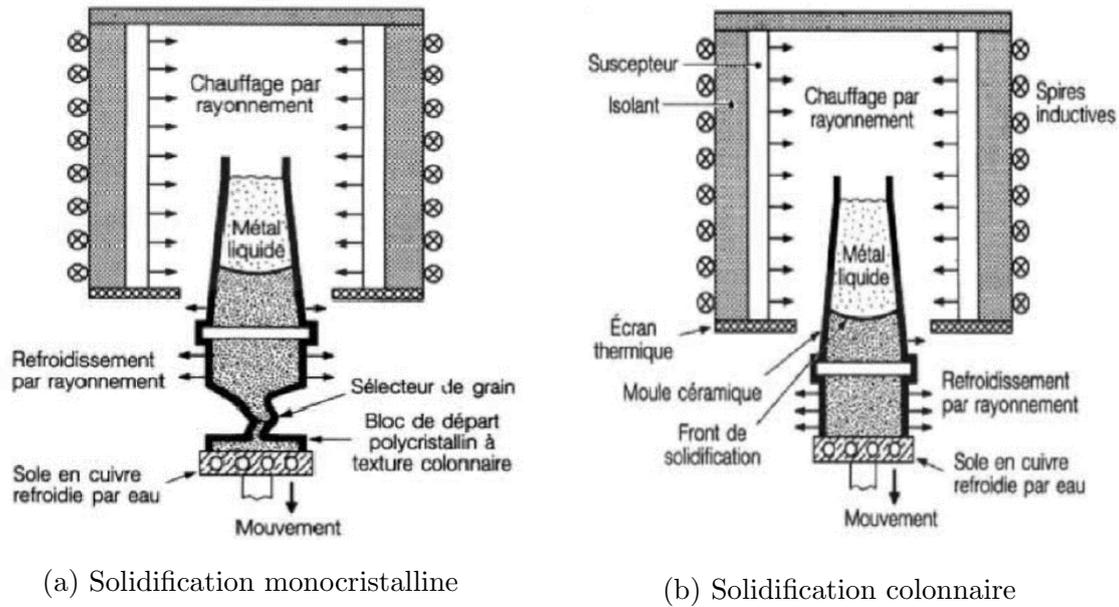


Fig. 1.4 – Schéma de principe du procédé de solidification dirigé pour l'obtention (a) d'une pièce monocristalline et (b) d'une pièce colonnaire [7]

solidifié par l'action de la sole [6]. L'objectif est d'empêcher la création de nouveaux germes en avant du front de solidification qui pourraient engendrer des grains parasites dans la pièce.

Afin d'obtenir, des pièces à structure monocristalline les grappes sont équipées soit d'un sélecteur de grain soit d'un germe. Le sélecteur de grain permet de sélectionner un grain ayant une direction $\langle 100 \rangle$ aligné avec l'axe principal du moule, voir Figure 1.4a. Il s'agit en fait d'une chicane dont le design a été réalisé de telle sorte que les différents grains initiés par la sole rentrent en compétition afin qu'il ne subsiste en sortie du sélecteur qu'un seul et unique grain ayant l'orientation voulue. Le germe consiste en l'ajout d'un germe monocristallin de direction $\langle 100 \rangle$ à la base du moule au niveau de la sole, afin que le métal fondu entre en contact avec le germe lors de la coulée. La germination du grain ne peut provenir que du germe monocristallin et ainsi la solidification du métal fondu est forcée suivant la direction $\langle 100 \rangle$. Le tirage (action de sortie du moule du module de chauffe) joue un rôle majeur car il favorise la croissance du grain selon l'axe principal. Dans le cas des pièces à structure colonnaire, le tirage permet de gérer le nombre grain constitutifs de la pièce et leur largeur, voir Figure 1.4b.

Enfin, les pièces à structure équiaxe sont des pièces polycristallines. Le paramètre cristallographique contrôlé est la taille de grains. Contrairement à la solidification dirigée, l'objectif est de favoriser la naissance d'une multitude de grains. L'intérieur de la grappe cire est alors recouvert d'un germinant permettant de favoriser la germination de grains en surface. Le métal fondu est coulé dans la grappe et au lieu de favoriser une direction de grain en effectuant un tirage contrôlé, la grappe est immédiatement retirée du module de chauffe. Elle se refroidit multidirectionnellement, ce qui permet la multiplicité des germinations. La taille des grains est gérée par la vitesse de refroidissement et ainsi des couches d'isolant peuvent être ajoutées pour ralentir le refroidissement.

Une aube de turbine est présentée, en Figure 1.5, pour les trois types de solidification présentés ci-dessus.

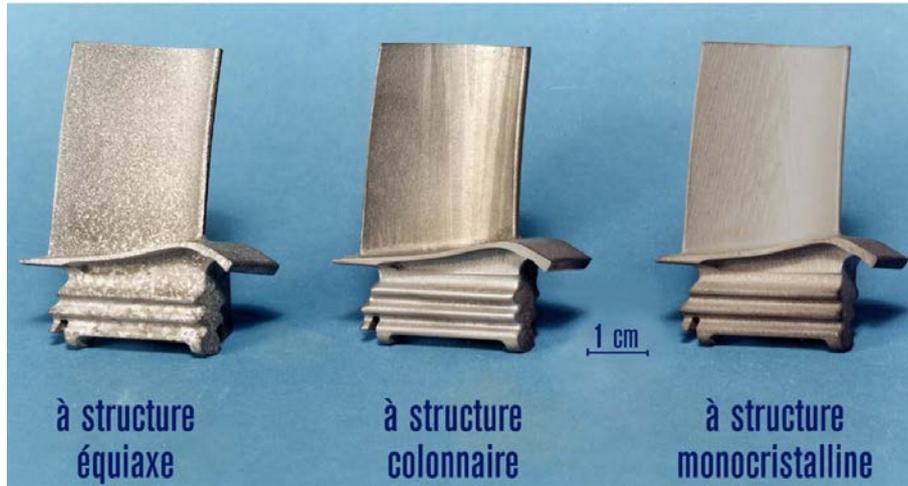


Fig. 1.5 – Aube de turbine avec différentes structures cristallines (équiaxe,colonnaire et monocristallin)

La solidification dirigée des super alliages base nickel a déjà fait l'objet de nombreux travaux, notamment [8].

1.2 La chauffe par induction et la thermique d'un four type Bridgman

Au cours de cette section, nous allons aborder la théorie de l'induction afin de comprendre la physique permettant la chauffe des suscepteurs du four de maintien. Nous verrons aussi la théorie des transferts thermiques et plus particulièrement la conduction et le rayonnement qui sont les deux principaux modes d'échange de chaleur dans le four.

1.2.1 Chauffage par induction

Le chauffage par induction est basé sur les lois physique de Lenz et de Joule. Un matériau conducteur électrique placé dans un champ électromagnétique variable est le siège de courants électriques induits. Ces courants induits dans le matériau entraînent une production de chaleur par effet Joule. Ces courants induits sont des courants de Foucault ayant la même direction que les courants dans l'inducteur mais de sens opposé (Loi de Lenz). Ils entraînent la création d'un champ électromagnétique (induit) qui va s'opposer au champ électromagnétique initial (inducteur). Les courants de Foucault sont donc concentrés sur la face exposée au champ inducteur, c'est la notion d'effet de peau. La profondeur de pénétration dépend des caractéristiques du matériau et de la fréquence du champ électromagnétique.

L'ensemble des développements qui suivront sont présentés en détail dans des ouvrages de référence ou dans la thèse [9].

1.2.1.1 Equations de Maxwell et approximations

1.2.1.1.1 Equations de Maxwell Les équations de Maxwell (équation du flux magnétique (1.1a), Maxwell-Gauss (1.1b), Maxwell-Faraday (1.1c), Maxwell-Ampère (1.1d)) permettent de décrire de façon générale tout problème électromagnétique.

$$Div(\vec{B}) = \vec{0} \quad (1.1a)$$

$$Div(\vec{D}) = \rho \text{ avec } \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.1b)$$

$$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1c)$$

$$\vec{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ avec } \vec{H} = \mu \vec{B} \text{ et } \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (1.1d)$$

où \vec{B} est le champ magnétique en teslas, \vec{E} est le champ électrique en $V.m^{-1}$, \vec{D} est le vecteur excitation électrique en $C.(m^2 - sr)^{-1}$, \vec{H} est le champ d'excitation magnétique en $A.(m^2 - str)^{-1}$, \vec{J} est le vecteur densité de courant électrique associé aux charges libres en $A.m^{-2}$.

Les paramètres physiques du problème sont la permittivité électrique du milieu ϵ en $F.m^{-1}$, la perméabilité magnétique μ en $H.m^{-1}$, la conductivité électrique σ en $S.m^{-1}$ et la densité volumique de charge électrique ρ en $C.m^{-3}$. La permittivité électrique ϵ et la perméabilité magnétique μ s'expriment en fonction de leurs valeurs dans le vide ($\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} F.m^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H.m^{-1}$) et d'une constante relative du milieu (ϵ_r et μ_r).

1.2.1.1.2 Les potentiels Le potentiel vecteur magnétique \vec{A} et le potentiel électrique V sont introduits à partir des équations du flux magnétique et de Maxwell-Gauss. Ils sont définis par :

$$\vec{B} = \vec{rot}(\vec{A}) \quad (1.2a)$$

$$\vec{E} = -\vec{grad}(V) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.2b)$$

Les potentiels ne sont pas définis de façon univoque, nous utiliserons la jauge de Coulomb :

$$Div(\vec{A}) = 0 \quad (1.3)$$

1.2.1.1.3 Approximations Nous pouvons appliquer aux équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère les approximations des régimes quasi-stationnaires (ARQS), voir en annexe A. Le système des équations de Maxwell (1.1) devient :

$$Div(\vec{B}) = \vec{0} \quad (1.4a)$$

$$Div(\vec{D}) = 0 \quad (1.4b)$$

$$\vec{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.4c)$$

$$\vec{rot}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (1.4d)$$

1.2.1.1.4 Système final = équation de diffusion L'équation de diffusion est généralement obtenue pour le potentiel vecteur \vec{A} . \vec{H} et \vec{E} sont remplacés par leurs expressions respectives en fonction des potentiels dans l'équation 1.4d. Après simplification avec la jauge de Coulomb, l'équation de diffusion suivante est obtenue :

$$-\frac{1}{\mu}\Delta\vec{A} + \sigma\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_s = -\sigma\overrightarrow{grad}(V) \quad (1.5)$$

Avec \vec{J}_s , le terme source correspondant à la densité de courant imposée dans l'inducteur. \vec{J}_s a pour expression, en pratique :

$$\vec{J}_s = \frac{I}{S_{eff}} \quad (1.6)$$

Avec I l'intensité parcourant l'inducteur et S_{eff} la section efficace de passage du courant dans l'inducteur du fait de l'effet de peau.

Notre problème est axisymétrique. Donc d'après les propriétés de symétrie et d'invariance, l'équation 1.5 projetée sur l'axe \vec{e}_θ devient :

$$-\frac{1}{\mu}\left[\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right] + \sigma\frac{\partial A}{\partial t} = J_s \quad (1.7)$$

1.2.1.1.5 Lois de continuité aux interfaces Les lois de conservation à la frontière entre 2 milieux physiquement différents, 1 et 2, en l'absence de courant de surface sont données par :

$$\vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \vec{B}_2 \cdot \vec{n} \quad (1.8a)$$

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{t} = \vec{H}_2 \cdot \vec{t} \quad (1.8b)$$

avec \vec{n} le vecteur normal à la surface et \vec{t} la vecteur tangentiel. Ainsi, le vecteur potentiel est continu à l'interface entre 2 milieux et on obtient pour la projection du potentiel vecteur sur l'axe \vec{e}_θ et sa dérivée spatiale les résultats suivant :

$$A_1 = A_2 \quad (1.9a)$$

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_2}{\partial n} \quad (1.9b)$$

avec \vec{n} un vecteur unité du plan (\vec{e}_r, \vec{e}_z) normal à la surface concernée.

1.2.1.2 Résolution de l'équation de diffusion du vecteur potentiel en régime établi

L'équation est résolue dans l'espace complexe avec une approximation harmonique [10] et une formulation en courant [11]. La résolution est réalisée avec les logiciels de calculs éléments finis FlexPDE [12] et COMSOL [13]. Une fois l'expression complexe du vecteur potentiel \vec{A} obtenue, il est possible d'obtenir l'ensemble des variables du problème. Finalement la puissance de chauffe dissipée dans les différentes parties du four est obtenue en fonction de la densité de courant induit complexe \vec{J}_c :

$$P_{chauffe} = \frac{1}{\sigma}\|\vec{J}_c\|^2 \quad (1.10)$$

1.2.1.3 Définition du courant parcourant l'inducteur et de la section efficace de passage du courant

L'effet de peau dans les spires de l'inducteur engendre une concentration de la densité de courant sur les faces extérieures des spires et en particulier sur la face en vis à vis avec la charge (induit) [14]. Le courant se concentre donc sur une épaisseur appelée épaisseur de peau (e) dont l'expression est :

$$e = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu_0 \mu_r \sigma}} \quad (1.11)$$

avec f la fréquence du courant I parcourant l'inducteur en Hz . En pratique, seule la puissance active est connue à tout instant, nous n'avons pas accès au courant parcourant effectivement l'inducteur. Il est donc nécessaire de connaître la résistance électrique totale (R_T) du système afin d'obtenir le courant parcourant l'inducteur ($I_{inducteur}$), équation 1.12. Cette dernière est obtenue par mesure à l'aide d'un pont RLC, voir annexe B.

$$I_{inducteur} = \sqrt{\frac{P_{active}}{R_T}} \quad (1.12)$$

1.2.2 La thermique du module de chauffe

Dans cette partie, nous allons nous intéresser aux transferts de chaleur au sein du module de chauffe. L'objectif de notre étude est d'être capable de connaître la température $T(\vec{r}, t)$ en tout point matériel du système. Dans le cas du module de chauffe les transferts thermiques sont essentiellement conductif et radiatif.

1.2.2.1 Transfert par conduction

Le transfert d'énergie par conduction apparaît dès qu'il existe un gradient de température dans la matière. Il correspond à la transmission de proche en proche de l'énergie thermique, *i.e.* au transport de l'énergie par les phonons et électrons libres dans le cas d'un solide [15].

1.2.2.1.1 Loi de Fourier Ce transfert est décrit par la loi de Fourier qui stipule que la densité de flux conductif surfacique (\vec{q}_{cd}) est proportionnelle au gradient de la température locale (T).

$$\vec{q}_{cd} = -k \overrightarrow{grad}(T) \quad (1.13)$$

avec k la conductivité thermique du matériau en $W.m^{-1}.K^{-1}$. La conductivité du matériau est généralement une fonction de la température et peut aussi dépendre de la position dans le cas d'un milieu non-homogène. Pour un milieu anisotrope, la conductivité est un tenseur d'ordre 2. Dans notre cas, les matériaux seront considérés homogènes et ils pourront être anisotropes.

1.2.2.1.2 Equation de la conservation de la chaleur en régime transitoire

Soit V un volume indéformable, fixe, continu et matériel délimité par une surface S , figure 1.6. L'équation de conservation de l'énergie pour le volume V correspond à l'éga-

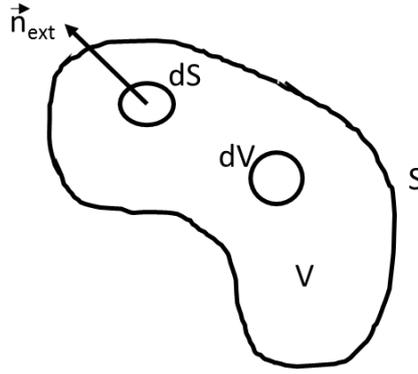


Fig. 1.6 – Volume d'étude

lité entre la variation d'énergie interne de V avec le flux entrant au travers de S et la puissance (P) engendrée dans le volume. Le flux net entrant de S (Q), voir expression en équation 1.14, correspond à la somme du flux conductif (Q_{cd}) et du flux radiatif (Q_r).

$$Q = \int_S -\vec{q} \cdot \vec{n}_{ext} dS \quad (1.14)$$

La variation d'énergie interne (E) dans le volume V est donnée par l'équation 1.15 avec ρ la masse volumique de l'élément V en $kg.m^{-3}$, $C_p(T)$ la capacité calorifique à pression constante en $J.kg^{-1}.K^{-1}$.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int_V \rho C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (1.15)$$

L'équation intégrale de conservation de l'énergie en régime transitoire est :

$$\int_V \rho C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} dV = \int_S -\vec{q} \cdot \vec{n}_{ext} dS + \int_V P dV \quad (1.16)$$

Au final, l'équation de conservation de l'énergie devient après application de la formule d'Ostrogradsky au terme de flux traversant S et après développement :

$$\rho C_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k(T) \overrightarrow{\text{grad}}(T)) - \text{div}(\vec{q}_R) + P \quad (1.17)$$

1.2.2.2 Transfert par rayonnement

Le transfert d'énergie par rayonnement permet de transférer de la chaleur entre 2 corps sans support matériel, *i.e.* dans le vide. Le transfert d'énergie radiative est alors effectuée par les photons. L'échange entre la matière et le champ de rayonnement peut s'effectuer soit par émission, soit par absorption. L'émission correspond à une conversion d'énergie interne en une énergie radiative et l'absorption est la conversion inverse. D'autres types d'échanges radiatifs tels que la diffusion ou la réflexion existent mais ils ne consistent qu'en une modification de la direction d'un rayonnement incident sans changement d'énergie du système.

Cette partie traite des bases du rayonnement afin de répondre aux besoins de cette thèse, des ouvrages tels que [16] permettent d'approfondir le sujet.

1.2.2.2.1 Propriétés élémentaires du rayonnement Le rayonnement se propage à une vitesse (c) qui dépend des propriétés du milieu traversé. La vitesse est donnée par la relation :

$$c = \frac{c_0}{n} \quad (1.18)$$

avec $c_0 = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ la vitesse de la lumière dans le vide et n l'indice de réfraction du milieu. Le rayonnement est défini par sa longueur d'onde (λ) ou sa fréquence (ν) et ces 2 paramètres peuvent être reliés par la relation 1.19.

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (1.19)$$

Le rayonnement thermique correspond à une plage de longueur d'onde restreinte du spectre électromagnétique, figure 1.7. La plage généralement considérée est située entre 0.1 (limite basse de l'ultra-violet) et 100 μm (limite haute de l'infra-rouge).

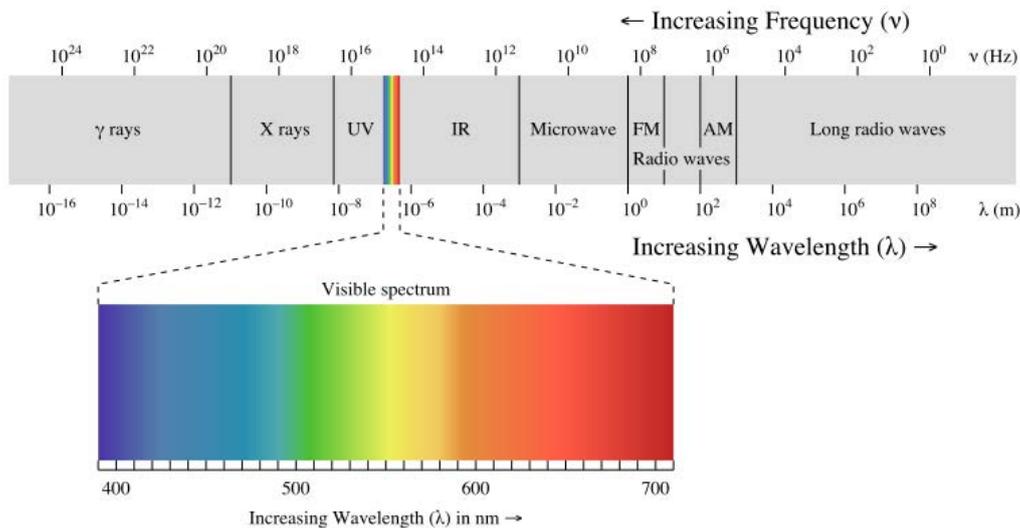


Fig. 1.7 – Spectre électromagnétique et classement des ondes

1.2.2.2.2 Propriétés radiatives élémentaires des matériaux La matière est classée dans 3 catégories concernant le rayonnement : les corps transparents, les corps semi-transparentes et les corps opaques. Les corps transparents sont des corps pour lesquels le rayonnement n'interagit pas avec la matière, l'ensemble de l'énergie radiative incidente est transmise. Les corps opaques absorbent ou réfléchissent l'ensemble de l'énergie radiative incidente, il n'y a pas d'énergie radiative transmise, voir figure 1.8. La profondeur de pénétration du rayonnement (δ) est petite devant une dimension caractéristique du matériau. Les corps semi-transparentes interagissent avec le rayonnement (absorption, émission, réflexion, diffusion, transmission), une partie du rayonnement incident peut alors être transmise.

Dans cette étude, nous travaillerons toujours avec des milieux gris, *i.e.* les propriétés radiatives sont supposées indépendantes de la longueur d'onde. Les surfaces sont diffusantes, *i.e.* les rayons incidents sont réfléchis uniformément dans toutes les directions de l'espace.

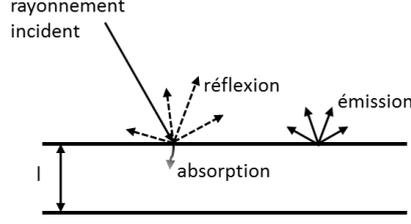


Fig. 1.8 – Interaction rayonnement-corps opaque

1.2.2.2.3 Définition de la luminance et du corps noir Le flux radiatif monochromatique élémentaire provenant d'une surface élémentaire dS dans l'angle solide $d\Omega$, centré sur la direction $\vec{\Omega}$ s'exprime en fonction de la luminance spectrale directionnelle $L'_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega})$, équation 1.20 et figure 1.9. La luminance totale correspond à l'intégration de la luminance spectrale sur l'ensemble du spectre électromagnétique.

$$d^3Q_\lambda(\vec{\Omega}) = L'_\lambda(\vec{r}, \vec{\Omega}) \cos(\theta) dS d\Omega d\lambda \quad (1.20)$$

L'émittance spectrale E_λ correspond à l'intégration de la luminance spectrale sur le

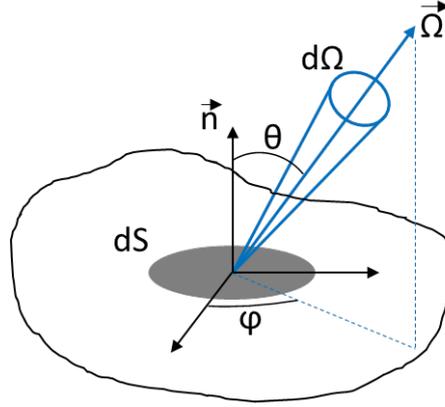


Fig. 1.9 – Luminance dans la direction $\vec{\Omega}$

demi espace en avant de la surface, *i.e.* pour toutes les directions telles que $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0$, voir figure 1.9. Ainsi, si les surfaces émettent de façon isotrope comme nous allons en faire l'hypothèse, on obtient la relation :

$$E_\lambda = \pi L_\lambda \quad (1.21)$$

Le corps noir absorbe toute l'énergie radiative incidente. La luminance du corps noir est donnée par la loi de Planck, équation 1.22.

$$L_\lambda^0(T) = \frac{C_1}{\lambda^5 [e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1]} \quad (1.22)$$

avec 2 constantes $C_1 = 1.19 \cdot 10^{-16} \text{ W.m}^{-2}$ et $C_2 = 1.4388 \text{ m.K}$, et T la température du corps noir en K . Le rayonnement émis par un corps noir est isotrope et la luminance totale du corps noir est égale à :

$$\int_0^{\text{inf}} L_\lambda^0(T) d\lambda = \frac{\sigma T^4}{\pi} \quad (1.23)$$

avec $\sigma = 5.6698 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ la constante de Stefan-Boltzman. L'émittance du corps noir (E_{cn}) est alors donnée d'après 1.21 et 1.23 par :

$$E_{cn} = \sigma T^4 \quad (1.24)$$

Nous pouvons aussi définir l'éclairement spectral qui caractérise le flux radiatif arrivant sur un élément de surface en provenance de toutes les directions de l'espace.

1.2.2.2.4 Propriétés optiques des surfaces L'émissivité monochromatique directionnelle ϵ'_λ est définie comme la capacité d'une surface opaque à émettre du rayonnement à une température T, à une longueur d'onde donnée et dans une direction donnée. Si la surface est diffusante, elle est égale au rapport de l'émittance spectrale du matériau sur l'émittance du corps noir. La réflectivité monochromatique directionnelle ρ'_λ caractérise la capacité de la surface à réfléchir du rayonnement dans une direction et à une longueur d'onde donnée. Elle est fonction de l'indice optique complexe du matériaux. L'absorptivité monochromatique directionnelle α'_λ caractérise la capacité d'une surface à absorber le rayonnement incident provenant d'une direction spécifique et à une longueur d'onde donnée. Si la surface est diffusante, elle est égale au rapport du rayonnement absorbé sur le rayonnement incident.

La loi de Kirchhoff stipule qu'à l'équilibre radiatif, l'absorptivité directionnelle spectrale est égale à l'émissivité directionnelle spectrale, 1.25.

$$\alpha'_\lambda = \epsilon'_\lambda \quad (1.25)$$

Les matériaux du four de maintien ont des propriétés optiques isotropes (surfaces diffuses) et sont assimilés à des corps gris. Nous définissons alors les grandeurs moyennes ou hémisphériques l'émissivité ϵ , l'absorptivité α et la réflectivité ρ . Nous utiliserons donc la généralisation de la loi de Kirchhoff, équation 1.26. De plus, les surfaces étant opaques, la somme de l'absorptivité et de la réflectivité est égale à 1. La relation 1.27 est alors obtenue et on peut en déduire la relation 1.28.

$$\alpha = \epsilon \quad (1.26)$$

$$\alpha + \rho = 1 \quad (1.27)$$

$$\rho = 1 - \epsilon \quad (1.28)$$

1.2.2.2.5 Echanges entre surfaces grises diffusantes-Radiosité Nous considérons ici une cavité fermée constituée de n surfaces S_i ($i=1$ à n) diffuses et opaques et à température uniforme séparées par du vide (transparent). Un bilan radiatif global pour chaque surface est décrit par la figure 1.10. La radiosité J_i d'une surface S_i que nous supposons grise ici, est définie par :

$$J_i = \epsilon_i E_{cn}(T_i) + \rho_i H_i \quad (1.29)$$

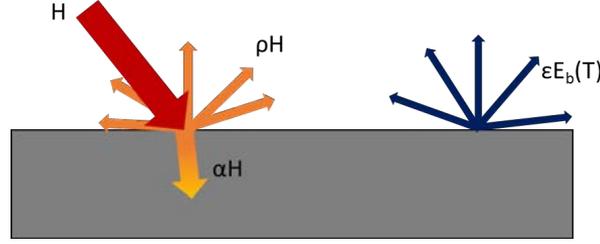


Fig. 1.10 – Bilan radiatif sur la surface

où H_i est l'éclairement de la surface S_i . Le flux net perdu par une surface grise S_i , en direction de la cavité, est donné par :

$$Q_{i\ net} = Q_{i\ émis} - Q_{i\ absorbé} \quad (1.30)$$

$$= S_i(\epsilon_i E_{cn}(T_i) - \epsilon_i H_i) \quad (1.31)$$

L'éclairement de S_i s'écrit :

$$H_i = \frac{J_i - \epsilon_i E_{cn}(T_i)}{1 - \epsilon_i} \quad (1.32)$$

En combinant les quatre équations précédentes, on obtient l'expression suivante de $Q_{i\ net}$ en fonction de la radiosité :

$$Q_{i\ net} = \frac{\epsilon_i S_i}{1 - \epsilon_i} [E_{cn}(T_i) - J_i] \quad (1.33)$$

Maintenant, si nous considérons 2 surfaces grises i et j de la cavité à des températures respectives T_i et T_j , le flux net entre la surface S_i et la surface S_j est donné par la différence entre le flux quittant la surface i et allant vers la surface j , et le flux arrivant de j sur i . On obtient alors la relation :

$$Q_{ij\ net} = Q_{i \rightarrow j} - Q_{j \rightarrow i} \text{ avec } Q_{i \rightarrow j} = S_i F_{ij} J_i \quad (1.34)$$

où F_{ij} est le facteur de forme entre S_i et S_j , défini par $F_{ij} = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \int_{S_j} \frac{\cos\theta_i \cos\theta_j}{\pi d_{ij}^2} dS_i dS_j$ avec d_{ij} la distance entre les deux surfaces élémentaires dS_i et dS_j centrées sur des points P_i et P_j et θ_i et θ_j les angles entre le segment $P_i P_j$ et chacun de leurs vecteurs normaux en ces 2 points. Les facteurs de forme vérifient la relation de réciprocité $S_i F_{ij} = S_j F_{ji}$. Le flux net échangé entre les surfaces i et j est donc égal à :

$$Q_{ij\ net} = J_i S_i F_{ij} - J_j S_j F_{ji} = S_i F_{ij} (J_i - J_j) \quad (1.35)$$

En fait, le problème est résolu en définissant un système matriciel de dimension n :

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} J_j = B_i \quad (1.36)$$

avec \mathbf{A} la matrice de dimension $n \times n$ dépendant des caractéristiques optiques des surfaces et des facteurs de forme et \mathbf{B} le vecteur de dimension $n \times 1$ des conditions

limites. Les conditions sont soit de type Neumann, c'est à dire que la densité de flux net ($q_{i\ net}$) est connue 1.37a, soit de type Dirichlet et la température est connue 1.37b.

$$J_i - \sum_{j=1}^n F_{ij} J_j = q_{i\ net} \quad (1.37a)$$

$$J_i - (1 - \epsilon_i) \sum_{j=1}^n F_{ij} J_j = \sigma \epsilon_i T_i^4 \quad (1.37b)$$

Remarquons que l'équation 1.37a est obtenue à partir de 1.35 et du calcul du bilan total de la surface S_i :

$$Q_{i\ net} = S_i q_i = \sum_{j=1}^n Q_{ij\ net} \Rightarrow q_{i\ net} = \sum_{j=1}^n F_{ij} (J_i - J_j) \quad (1.38)$$

En pratique, le système est découpé en surfaces élémentaires isothermes. Le code aux éléments finis COMSOL est muni d'un code de calcul des radiosités. Il utilise une méthode de Monte-Carlo afin de calculer l'ensemble des facteurs de forme pour chaque surface puis il résout les systèmes 1.37a ou 1.37b présentés précédemment. Dans le cas des conditions limites de Neumann, la température de surface est obtenue par l'expression 1.33 car les flux nets $Q_{i\ net}$ et les radiosités J_i sont connus. Pour les conditions limites de Dirichlet, la densité de flux net est obtenue directement par 1.33.

1.2.2.2.6 Résolution de l'Equation du Transfert Radiatif (ETR) dans les milieux semi-transparents-Méthode P_1 L'équation du transfert radiatif correspond à un bilan d'énergie sur un volume élémentaire. Elle s'applique à une direction donnée et à une longueur d'onde donnée. Le milieu semi-transparent interagit alors avec le rayonnement. Les interactions entre rayonnement et milieu semi-transparent sont recensées au nombre de 4 (2 atténuations et 2 renforcements).

L'atténuation par absorption : le milieu va absorber une partie du rayonnement incident. La perte est proportionnelle à la luminance $L'_\lambda(s, \vec{\Omega})$, à la longueur du trajet optique ds et au coefficient spectral d'absorption $\kappa_{abs\ \lambda}$, voir relation 1.39.

$$dL'_\lambda(s, \vec{\Omega}) = -\kappa_{abs\ \lambda}(s, \vec{\Omega}) L'_\lambda(s, \vec{\Omega}) ds \quad (1.39)$$

L'atténuation par diffusion : une partie du rayonnement provenant de la direction $\vec{\Omega}$ est diffusée dans toutes les directions. Comme précédemment, la perte par diffusion est proportionnelle à la luminance, à la longueur du trajet optique et au coefficient spectral de diffusion $\kappa_{diff\ \lambda}$, voir relation 1.40

$$dL'_\lambda(s, \vec{\Omega}) = -\kappa_{diff\ \lambda}(s, \vec{\Omega}) L'_\lambda(s, \vec{\Omega}) ds \quad (1.40)$$

Dans les 2 cas, l'atténuation est affectée du signe $-$. Le renforcement par émission propre correspond à l'émission de rayonnement par le milieu lui même. La variation de luminance est alors proportionnelle au coefficient spectral d'absorption, à la luminance du corps noir $L_{cn\ \lambda}(T)$ à la température T et à l'épaisseur du volume élémentaire, voir relation 1.41.

$$dL'_\lambda(s, \vec{\Omega}) = \kappa_{abs\ \lambda}(s, \vec{\Omega}) L'_\lambda(s, \vec{\Omega}) ds \quad (1.41)$$

Le renforcement par diffusion correspond au mécanisme inverse des pertes par diffusion. Un rayonnement incident se propageant selon la direction $\vec{\Omega}'$ peut être partiellement diffusé dans la direction $\vec{\Omega}$. Il est nécessaire d'introduire une fonction de phase $P_\lambda(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})$ qui caractérise la probabilité qu'un rayonnement issu de n'importe quelle direction de l'espace ($4\pi sr$) soit diffusée dans la direction $\vec{\Omega}$ dans l'angle solide $d\Omega$, voir l'expression 1.42.

$$\frac{1}{4\pi} P_\lambda(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega \quad (1.42)$$

Au final, le renforcement par diffusion s'écrit :

$$dL'_\lambda(s, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \kappa_{diff\lambda}(s, \vec{\Omega}) P_\lambda(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) L'_\lambda(s, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' ds \quad (1.43)$$

L'équation différentielle du transfert radiatif est donnée par le bilan d'énergie appliqué au volume élémentaire et vaut :

$$\begin{aligned} \frac{dL'_\lambda(s, \vec{\Omega})}{ds} &= -\kappa_{abs} L'_\lambda(s, \vec{\Omega}) - \kappa_{diff} L'_\lambda(s, \vec{\Omega}) + \kappa_{abs} L_\lambda^0(T) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'=4\pi} \kappa_{diff} P_\lambda(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) L'_\lambda(s, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \end{aligned} \quad (1.44)$$

avec κ_{abs} et κ_{diff} pris constants sur le milieu, *i.e.* indépendants de la longueur d'onde, du point de l'espace et de la direction.

Nous considérons que seul le vide est siège du rayonnement. Le vide partiel règne dans le four et il est considéré comme un milieu gris non diffusant et faiblement absorbant. Nous faisons donc l'hypothèse que l'équation 1.44 devient alors :

$$\frac{dL'_\lambda(s, \vec{\Omega})}{ds} = 0 \quad (1.45)$$

pour toute longueur d'onde λ et quelle que soit la direction $\vec{\Omega}$ décrite par les angles (β, ϕ) et le point de l'espace s décrit par les coordonnées (r, θ, z) . La différentielle du champ directionnel de la luminance le long d'un chemin optique, de l'équation 1.45, peut s'écrire en coordonnées cylindriques dans le cas d'une géométrie 2D axisymétrique sous la forme :

$$\frac{dL'_\lambda(s, \vec{\Omega})}{ds} = \sin \beta \cos \phi \frac{\partial L'}{\partial r} + \frac{\sin \beta \sin \phi}{r} \left(\frac{\partial L'}{\partial \theta} - \frac{\partial L'}{\partial \phi} \right) + \cos \beta \frac{\partial L'}{\partial z} \quad (1.46)$$

$$= l_r \frac{\partial L'}{\partial r} + \frac{l_\theta}{r} \left(\frac{\partial L'}{\partial \theta} - \frac{\partial L'}{\partial \phi} \right) + l_z \frac{\partial L'}{\partial z} \quad (1.47)$$

La méthode P_1 consiste en la décomposition du champ directionnel de luminance dans la base orthonormale complète des harmoniques sphériques. Cette base complète des harmoniques sphériques $Y_l^m(\beta, \phi)$ vérifie :

$$\int_{\Omega'=0}^{4\pi} Y_l^m Y_{l'}^{m'*} d\Omega = \delta_{mm'} \delta_{ll'} \quad (1.48)$$

avec δ_{ii} le symbole de Kronecker et $*$ désigne le nombre complexe conjugué. Une description de toutes les propriétés des harmoniques sphériques ainsi que leurs expressions

est donnée dans [17]. Le champ directionnel de luminance s'écrit alors dans la base des harmoniques sous la forme :

$$L'(s, \vec{\Omega}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} A_l^m(s) Y_l^m(\beta, \phi) \quad (1.49)$$

L'approximation P_1 correspond à l'approximation ne tenant compte que des termes pour l égal à 0 et 1, *i.e.* que la luminance le long d'un chemin optique a pour expression :

$$L'(s, \vec{\Omega}) = A_0^0 Y_0^0 + A_1^{-1} Y_1^{-1} + A_1^0 Y_1^0 + A_1^1 Y_1^1 \quad (1.50)$$

Les moments d'ordre 0 (L_0) et d'ordre 1 (L_r et L_z) sont définis de la façon suivante :

$$L_0 = \int_{\Omega=0}^{4\pi} L'(s, \vec{\Omega}) d\Omega \quad (1.51a)$$

$$L_r = \int_{\Omega=0}^{4\pi} l_r L'(s, \vec{\Omega}) d\Omega \quad (1.51b)$$

$$L_z = \int_{\Omega=0}^{4\pi} l_z L'(s, \vec{\Omega}) d\Omega \quad (1.51c)$$

Les coefficients $A_l^m(s)$ sont alors obtenus en remplaçant la luminance le long d'un chemin optique par son expression en fonction des harmoniques sphériques 1.50 dans la définition des moments. L'expression de la luminance développée en série d'harmoniques sphériques à l'ordre 1 est alors égale à :

$$L'(s, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} [L_0 + 3L_z \cos \beta + 3L_r \sin \beta \cos \phi] \quad (1.52)$$

En intégrant l'équation 1.45 sur l'ensemble de l'angle solide et en remplaçant la différentielle du champ directionnel de la luminance le long d'un chemin optique par son expression 1.47, voir [18], on obtient l'équation différentielle des moments :

$$\frac{1}{r} L_r + \frac{\partial L_r}{\partial r} + \frac{\partial L_z}{\partial z} = 0 \quad (1.53)$$

Le système d'équation pour les moments d'ordre 2 est :

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial L_{ij}}{\partial i} = -\kappa L_j \text{ avec } L_{ij} = \int_{\Omega=0}^{4\pi} l_i l_j L'(s, \vec{\Omega}) d\Omega \quad (1.54)$$

et les équations de fermeture du système sont obtenues en calculant les moments d'ordre 2 à partir de l'expression de la luminance fournie en 1.52 :

$$L_{ij} = \int_{\Omega=0}^{4\pi} l_i l_j L'(s, \vec{\Omega}) d\Omega = \frac{1}{3} L_0 \delta_{ij} \quad (1.55)$$

La résolution de l'équation 1.45 revient alors à la résolution du système d'équation des moments :

$$\text{div}(\frac{1}{3} \vec{\text{grad}}(L_0)) = 0 \quad (1.56a)$$

$$L_r = -\frac{1}{3\kappa} \frac{\partial L_0}{\partial r} \quad (1.56b)$$

$$L_z = -\frac{1}{3\kappa} \frac{\partial L_0}{\partial z} \quad (1.56c)$$

La résolution de l'équation de la luminance moyenne L_0 1.56a permet de calculer les 2 composantes du flux radiatif en fonction du coefficient d'absorption κ . Ainsi, le flux radiatif est égal à :

$$\vec{Q} = L_r \vec{e}_r + L_z \vec{e}_z \quad (1.57)$$

Les conditions aux limites sont données par les conditions de Marshak qui correspondent à l'intégration sur l'ensemble du demi espace face à la paroi de l'équation de transfert radiatif multipliée par les coefficients directeurs de la luminance l_r et l_z .

1.2.2.3 rayonnement et conduction

Pour les 2 modèles de résolution du problème radiatif, le rayonnement et la conduction sont couplés par les limites du domaine. Le rayonnement se limite ici aux zones de vide et la conduction aux zones matérielles.

1.2.3 Couplage thermique et induction

Nous allons voir dans cette section que les problèmes électromagnétique et thermique peuvent être découplés et exécutés l'un après l'autre. Le temps caractéristique du problème électromagnétique τ_{ind} est égal à l'inverse de la fréquence f , qui vaut pour rappel 3 kHz. Soit $\tau_{ind} = 3.3 \cdot 10^{-4} s$.

La géométrie du problème est axisymétrique, les éléments peuvent être considérés en 1^{ère} approche comme cylindriques. L'expression du nombre de Fourier Fo est :

$$Fo = \frac{at}{(\Delta R)^2} \quad (1.58)$$

avec a la diffusivité thermique du matériau en $m^2.s^{-1}$, ΔR la différence des rayons externe et interne du cylindre en m et t le temps en s . Le temps caractéristique de conduction τ_{cd} est alors donné par :

$$\tau_{cd} = \frac{(\Delta R)^2}{a} \quad (1.59)$$

Le temps caractéristique est minimal pour le matériau ayant la plus grande diffusivité thermique, c'est à dire pour l'élément chauffant. Nous obtenons alors pour une épaisseur $\Delta R = 20 mm$ et une diffusivité thermique de $5.74 \cdot 10^{-5} m^2.s^{-1}$, un temps caractéristique de conduction d'environ 7 s. Le rapport entre les 2 temps caractéristiques est de l'ordre de $2.1 \cdot 10^4$ donc le problème d'induction peut être résolu en statique du point de vue de la thermique.

En pratique, le problème électromagnétique sera résolu en statique pour une puissance source donnée. Le champ de puissance induite dans le four sera alors calculé puis importé comme une entrée du modèle thermique transitoire.

1.3 Travaux existants sur la modélisation des fours sous vide

Nous allons au cours de cette section discuter des travaux existants sur les fours sous vide et plus précisément les fours de maintien en fonderie de type Bridgman.

1.3.1 Recherches réalisées par Safran Aircraft Engines

Safran Aircraft Engines a mené de nombreuses études afin de permettre la modélisation de la solidification des aubes de turbine dans les fours de maintien en fonderie et de comprendre les interactions au sein du four. Deux grandes études ont déjà été réalisées avec des équipes de recherche :

- La première concerne la modélisation de la solidification des supers alliages base Nickel de type AM1 avec application à l’alliage AM1 [8].
- La seconde concerne l’étude de l’atmosphère au sein du module de chauffe. Cette étude était une analyse thermodynamique de la vaporisation des moules en céramique sous vide dans un module de chauffe en graphite ainsi que la condensation de l’atmosphère créée dans les parties froides du four [19]. Cette condensation peut engendrer des défauts de fonderie avec la formation d’inclusion dans l’alliage.

De nombreuses autres études internes ont été réalisées afin d’obtenir un modèle 3D thermique du four de maintien en fonderie. Ce modèle de four ne prend pas en compte le chauffage par induction, il s’agit d’un modèle à température fixée par les conditions limites. Les conditions limites et coefficients de transfert de chaleur ont été déterminées par corrélation expérimentale.

1.3.2 Modélisation détaillée des fours sous vide

Des modèles éléments finis modélisant le phénomène d’induction et de thermique ont déjà été réalisés. Le secteur pour lequel le phénomène est modélisé est souvent la modélisation de la fonte d’alliage dans des creusets comme par exemple dans les travaux [20] et [21]. On trouve aussi de telles modélisations par éléments finis réalisés sous COMSOL pour des fours à distillation sous vide [22]. Le design des fours de distillation sous vide se rapproche fortement des fours de types Bridgman.

En fait, la modélisation détaillée du procédé de fonderie à cire perdue sous vide pour la fabrication des aubes de turbine se concentre sur le phénomène de solidification. Les articles ne s’intéressent pas ou très peu à l’outil de production. Le four correspond aux conditions limites thermiques imposées au modèle. Ces modélisations ont commencé dans les années 90 avec les premiers articles concernant des méthodes de résolution par éléments finis [23], [24].

En parallèle du développement des résolutions par éléments finis, les recherches se sont concentrées sur l’estimation des coefficients d’échange de chaleur entre le métal et la sole ou la céramique. Il s’agit des facteurs les plus importants dans l’étude de la solidification des alliages pour les procédés de fonderie à cire perdue. En effet, ces coefficients varient fortement au cours du tirage de la grappe en dehors du module de chauffe. Des résultats concernant les transferts de chaleur à l’interface entre le métal et la sole en fonction de la qualité de la surface de la sole sont exposés en [25]. L’estimation de coefficients de transfert de chaleur à l’interface avec le moule céramique sont par exemple réalisés dans [26–29]. Ces travaux font appel à différentes méthodes d’estimation de fonctions et de paramètres (algorithme génétique multi-objectif, algorithme de

Gauss-Newton). Le travail [30] est réalisé sur des grappes ressemblant fortement aux pièces produites.

Les recherches se sont aussi focalisés sur les modèles de solidification pour les alliages afin de mieux identifier la naissance des défauts de fonderie avec l'utilisation de modèles couplant la thermique et la mécanique. Par exemple, le travail [31] se concentre sur la prédiction des grains recristallisés au cours du procédé de solidification monocristalline pour le super alliage CMSX-4.

Bibliographie

- [1] M. K. CHYU, « Recent advances in turbine heat transfer with a view of transition to coal-gas based systems », *Journal of Heat Transfer*, vol. 134, no. 3, p. 031006, 2012.
- [2] J.-C. DORIATH et J. NOUAILLES, *Fonderie de précision à modèle perdu - application aux super-alliages*. Techniques de l'Ingénieur, 1994.
- [3] S. PATTNAIK, D. B. KARUNAKAR et P. JHA, « Developments in investment casting process - a review », *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 212, p. 2332–2348, nov. 2012.
- [4] P. W. BRIDGMAN, « Certain Physical Properties of Single Crystals of Tungsten, Antimony, Bismuth, Tellurium, Cadmium, Zinc, and Tin », *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*, vol. 60, no. 6, p. 305, 1925.
- [5] D. C. STOCKBARGER, « The Production of Large Single Crystals of Lithium Fluoride », *Review of Scientific Instruments*, vol. 7, p. 133–136, mars 1936.
- [6] A. KERMANPUR, N. VARAHRAAM, E. ENGILEHEI, M. MOHAMMADZADEH et P. DAVAMI, « Directional solidification of Ni base superalloy IN738lc to improve creep properties », *Materials Science and Technology*, vol. 16, p. 579–586, mai 2000.
- [7] G. LESOULT, M. RETTENMAYR et M. HILLERT, *Thermodynamique des matériaux : de l'élaboration des matériaux à la genèse des microstructures*. No. 5 de Traité des matériaux, Lausanne : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1. éd éd., 2010.
- [8] H. BEN HAMOUDA, *Modélisation et simulation de la structure de solidification dans les superalliages base-nickel : Application AM1*. Thèse doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2012.
- [9] V. LABBE, *Modélisation numérique du chauffage par induction : approche éléments finis et calcul parallèle*. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002.
- [10] K. F. WANG, S. CHANDRASEKAR et H. T. Y. YANG, « Finite-element simulation of induction heat treatment », *Journal of Materials Engineering and Performance*, vol. 1, p. 97–112, fév. 1992.

- [11] G. VINSARD, *Transfert inductif de l'énergie - Leçon 3*. 2013.
- [12] PDE solutions Inc, *Technical descriptions of FlexPDE 5.0 User guide*, 2008.
- [13] COMSOL Inc, *Comsol Multiphysics 5.2 User guide*, 2016.
- [14] J. DAVIES, *Conduction and induction heating*. No. 11 de IEE power engineering series, London, U.K : P. Peregrinus Ltd. on behalf of the Institution of Electrical Engineers, 1990.
- [15] C. KITTEL, *Physique de l'état solide*. Paris : Dunod, 2007.
- [16] J. R. HOWELL, M. PINAR MENGÜC et R. SIEGEL, *Thermal radiation heat transfer*. Boca Raton London New York : CRC Press, sixth edition éd., 2016.
- [17] M. ABRAMOWITZ et I. A. STEGUN, édés, *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover books on mathematics, New York, NY : Dover Publ, 9. dover print éd., 2013.
- [18] J. HIGENYI et Y. BAYAZITOGU, « Differential Approximation of Radiative Heat Transfer in a Gray Medium : Axially Symmetric Radiation Field », *Journal of Heat Transfer*, vol. 102, no. 4, p. 719, 1980.
- [19] M. HEYRMAN, C. CHATILLON, C. BARAT et S. FARGEAS, « Thermodynamics of vaporization and condensation phenomena in vacuum furnaces used for casting superalloys », *Revue de Métallurgie*, vol. 100, p. 141–156, fév. 2003.
- [20] A. BERMÚDEZ, D. GÓMEZ, M. MUÑIZ, P. SALGADO et R. VÁZQUEZ, « Numerical simulation of a thermo-electromagneto-hydrodynamic problem in an induction heating furnace », *Applied Numerical Mathematics*, vol. 59, p. 2082–2104, sept. 2009.
- [21] P. BULIŃSKI, J. SMOLKA, S. GOLAK, R. PRZYLUCKI, M. PALACZ, G. SIWIEC, J. LIPART, R. BIALECKI et L. BLACHA, « Numerical and experimental investigation of heat transfer process in electromagnetically driven flow within a vacuum induction furnace », *Applied Thermal Engineering*, vol. 124, p. 1003–1013, sept. 2017.
- [22] A. A. BHAT, D. SUJISH, S. AGARWAL, B. MURALIDHARAN, G. PADMANKUMAR et K. K. RAJAN, « Electromagnetic and Thermal Modeling of Vacuum Distillation Furnace », *COMSOL conference proceedings*, 2013.
- [23] S. MODUKURU, N. RAMAKRISHNAN et A. SRIRAMAMURTHY, « Determination of the die profile for the investment casting of aerofoil-shaped turbine blades using the finite-element method », *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 58, p. 223–226, mars 1996.
- [24] R. W. LEWIS et K. RAVINDRAN, « Finite element simulation of metal casting », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, p. 29–59, jan. 2000.

-
- [25] W. D. GRIFFITHS et R. KAYIKCI, « The effect of varying chill surface roughness on interfacial heat transfer during casting solidification », *Journal of Materials Science*, vol. 42, p. 4036–4043, mai 2007.
- [26] F. LAU, W. LEE, S. XIONG et B. LIU, « A study of the interfacial heat transfer between an iron casting and a metallic mould », *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 79, no. 1, p. 25–29, 1998.
- [27] D. O'MAHONEY et D. J. BROWNE, « Use of experiment and an inverse method to study interface heat transfer during solidification in the investment casting process », *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 22, p. 111–122, sept. 2000.
- [28] N. VIENS, C. BISSIEUX, M. LACHI, P. PRIOT, C. LECLET, K. CHAILLER et A. GAUCHER, « Identification des flux de chaleur interfaciaux à partir d'un modèle conductif analytique du procédé de fonderie à cire perdue. », (Gérardmer), 2013.
- [29] G. PALUMBO, V. PIGLIONICO, A. PICCININI, P. GUGLIELMI, D. SORGENTE et L. TRICARICO, « Determination of interfacial heat transfer coefficients in a sand mould casting process using an optimised inverse analysis », *Applied Thermal Engineering*, vol. 78, p. 682–694, mars 2015.
- [30] Y. DONG, K. BU, Y. DOU et D. ZHANG, « Determination of interfacial heat-transfer coefficient during investment-casting process of single-crystal blades », *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 211, p. 2123–2131, déc. 2011.
- [31] C. PANWISAWAS, H. MATHUR, J.-C. GEBELIN, D. PUTMAN, C. M. RAE et R. C. REED, « Prediction of recrystallization in investment cast single-crystal superalloys », *Acta Materialia*, vol. 61, p. 51–66, jan. 2013.

Chapitre 2

Outils de modélisation directe et inverse

Nous allons ici aborder les méthodes d'identification et de réduction de modèle ainsi que les notions de capteur virtuel. Les modèles étudiés peuvent être linéaires ou non-linéaires. Une attention particulière sera apportée à l'identification de paramètres, à l'identification de fonctions de transfert et aux modèles ARX. Ces outils formeront la base théorique de la thèse.

Sommaire

2.1	Problème direct et problème inverse	28
2.1.1	Problèmes inverses bien ou mal posés	28
2.2	Réduction et identification de modèles	29
2.3	Différents modèles réduits	30
2.3.1	Modèles enthalpiques	30
2.3.2	Modèles de dimension 1 (1D)	31
2.3.3	Modèles autorégressifs	31
2.4	Inversion de modèles	32
2.4.1	Estimation linéaire de paramètres	33
2.4.2	Estimation non-linéaire de paramètres	33
2.4.3	Statistique de l'estimateur des moindres carrés ordinaires	34
2.5	Modèle réduit de fours sous vide et capteurs virtuels	35

L'objectif de cette thèse est de modéliser le four de maintien de façon détaillée mais aussi d'obtenir des modèles réduits permettant d'évaluer des températures en des positions où des capteurs physiques ne peuvent pas être positionnés. Il s'agit ainsi de mettre en place des capteurs virtuels. Ces capteurs virtuels sont le résultat de l'association d'un modèle réduit à une mesure expérimentale en entrée. Le modèle réduit doit permettre de fournir en temps réel une information sur un paramètre ou une variable du four à partir d'une mesure physique d'un autre paramètre ou d'une autre variable plus aisée à mesurer.

2.1 Problème direct et problème inverse

L'objectif d'un modèle est de représenter un système physique réel. Le modèle s'écrit alors :

$$\mathbf{y}_{mo} = \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{x}) \quad (2.1)$$

avec t la variable explicative ou indépendante, \mathbf{x} le vecteur paramètre composé des paramètres structurels $\boldsymbol{\beta}$ du modèle, de l'état initial \mathbf{X}_0 et du vecteur des entrées \mathbf{U} . t sera assimilé au temps au cours de ce document.

Résoudre un problème direct consiste à calculer la sortie \mathbf{y}_{mo} d'un modèle à partir de la connaissance de la structure du modèle $\boldsymbol{\eta}$ et de la valeur du vecteur paramètre \mathbf{x} , voir figure 2.1. On pose un problème inverse lorsque l'on cherche à obtenir une des composantes du vecteur paramètre \mathbf{x} connaissant la sortie du modèle et la structure du modèle, voir figure 2.1. Lorsque la composante \mathbf{U} est recherchée, on parle d'un problème inverse d'estimation de sources. Lorsque la composante \mathbf{X}_0 est recherchée, on parle de reconstruction de l'état initial et enfin lorsque l'inconnue est la composante $\boldsymbol{\beta}$ ou une partie de cette dernière, on parle d'estimation de paramètres.

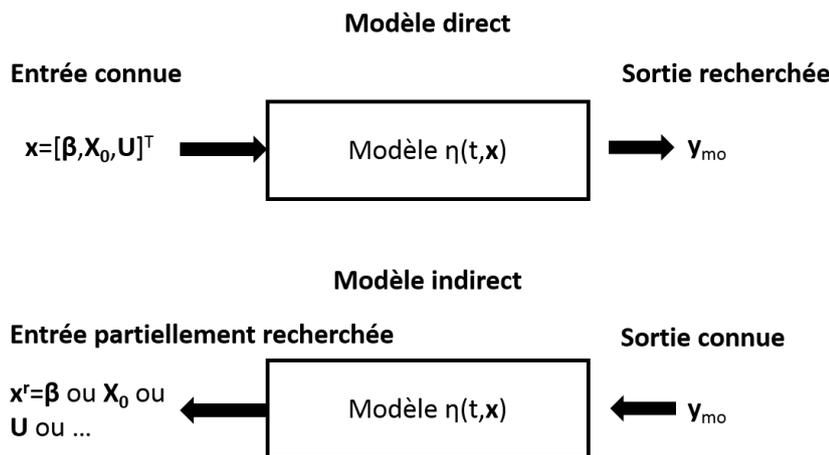


Fig. 2.1 – Problèmes direct et inverse

2.1.1 Problèmes inverses bien ou mal posés

Soit y_{mo} et x deux fonctions de t telles que $y_{mo} = Cx$ avec C un opérateur. Le problème inverse consiste en l'estimation de la fonction x à partir de la connaissance de l'opérateur C et de la fonction de sortie y_{mo} . Un problème est dit bien posé au sens d'Hadamard [1] si :

- il existe toujours une solution, *i.e.* l'opérateur C peut être inversé et permet le calcul de la fonction x pour tout y_{mo} ;
- la solution est unique, *i.e.* un même x ne peut pas provenir de 2 y_{mo} différentes ;
- la solution est stable, elle dépend continument des données, *i.e.* une faible variation de y_{mo} (δy_{mo}) engendre une faible variation de la fonction recherchée x (δx) ;

sinon le problème est dit « mal posé ». Les problèmes physiques directs sont généralement bien posés mais il arrive souvent que les problèmes inverses ne vérifient pas une ou plusieurs des conditions énoncées ci-dessus.

Une bonne connaissance du problème direct et des méthodes d'inversion permet la résolution des problèmes inverses malgré leur caractère éventuellement mal posé.

2.2 Réduction et identification de modèles

Supposons que l'on dispose d'un modèle de dimension N (taille du vecteur d'état) très grande, appelé modèle détaillé, pour simuler un processus physique. L'utilisation de ce modèle a un coût non négligeable en terme de calcul, surtout si l'on souhaite l'utiliser dans le cadre d'un problème d'optimisation. L'idée est alors de réduire la dimension de ce modèle à une dimension $n \ll N$ tout en ayant une sortie du modèle réduit $\mathbf{y}_{mo,réduit}$ la plus proche possible de celle du modèle détaillé $\mathbf{y}_{mo,détaillé}$ pour n'importe quelle excitation \mathbf{U} . On parle alors de réduction de modèle, voir figure 2.2. La réduction de modèle que nous allons proposer ici peut reposer sur un modèle physique ou sur des considérations mathématiques. Le modèle réduit est souvent un modèle dont la structure provient d'hypothèses physiques faites sur le système (symétrie, invariance, dimension).

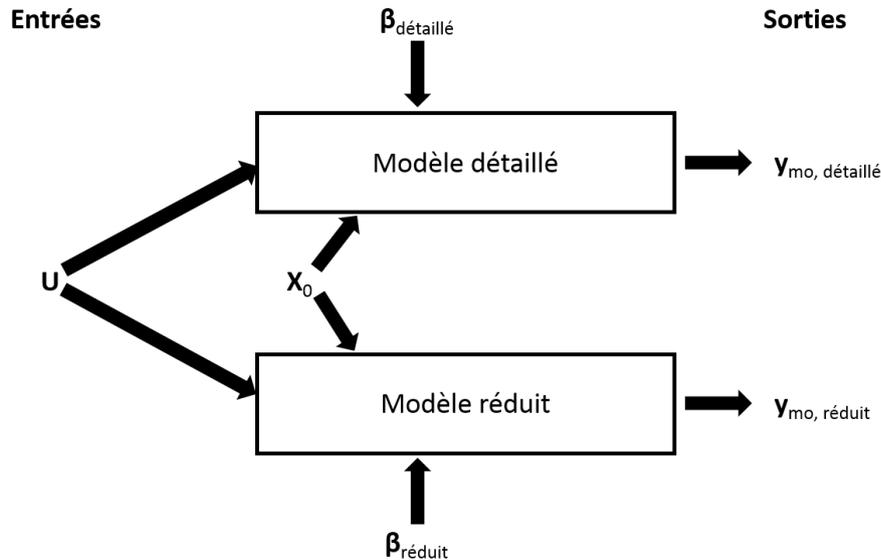


Fig. 2.2 – Réduction de modèle

Remarquons que dans la branche inférieure de la figure 2.2, correspondant à la simulation effectuée par le modèle réduit, il est possible de scinder la boîte correspondante en deux boîtes en série. La première correspond à l'équation d'état et la seconde à la définition des sorties observées (équation des sortie). La sortie de la première, qui est aussi l'entrée de la seconde, est l'état du système en un point et en un instant quelconque, voir par exemple la figure 5 à la section 2.1.2.3 de [2] et la section 4 de [3].

De la même façon que pour la réduction de modèle, l'identification de modèle consiste à rechercher un modèle de dimension n permettant d'approcher aux mieux

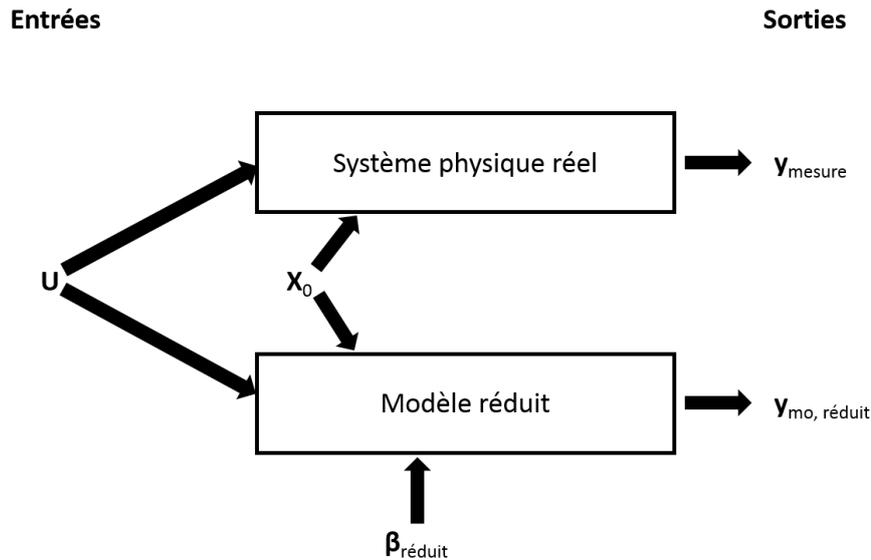


Fig. 2.3 – Identification expérimentale de modèle

des mesures expérimentales y_{mesure} , figure 2.3.

2.3 Différents modèles réduits

Dans ce travail, deux types de modèles réduits ont été étudiés. Les modèles enthalpiques basés sur des bilans d'énergie, les modèles autorégressifs basés sur une paramétrisation. Remarquons qu'un 3^{ème} type de modèle, les modèles convolutifs, sont étroitement liés aux modèles autorégressifs et peuvent alors être considérés comme un cas particulier de ces derniers.

2.3.1 Modèles enthalpiques

Les modèles enthalpiques sont basés sur des bilans d'énergie. Ils correspondent à des modèles dits « petit corps » ou de dimension 0 (0D). L'approche est physique, il est donc nécessaire de répertorier l'ensemble des variables et des paramètres pertinents. L'étape suivante est de discriminer les variables et paramètres d'influence à partir de mesures ou de modèles détaillés et d'effectuer des simplifications physiques (géométrie, réduction de dimension du problème, valeur moyenne de paramètres). Les équations sont alors fortement simplifiées et une approche d'estimation de paramètres (linéaire ou non-linéaire) peut être réalisée sur un jeu de données. On peut appeler cette phase étalonnage ou calibrage. Les premiers travaux ont été réalisés par Beck, Gladwell et Saint-Clair [4].

Cette méthode a comme avantage de rester physique et de permettre l'estimation de valeurs de coefficients physiques. Toutefois, l'estimation de l'ensemble de ces coefficients peut s'avérer impossible du fait de corrélation forte ou d'un biais du modèle.

2.3.2 Modèles de dimension 1 (1D)

Les modèles de dimension 1 ou 1D correspondent à des modèles physiques comme les modèles enthalpiques. Toutefois, la dimension supplémentaire du modèle permet de prendre en compte des gradients dans une direction au sein du système. Ainsi, le modèle peut être plus représentatif du modèle détaillé tout en ayant 2 dimensions en moins. Un modèle classique 1D que nous utiliserons par la suite est le modèle d'ailette.

2.3.3 Modèles autorégressifs

Ces modèles dit autorégressifs sont souvent utilisés en automatisme, ils ont été étudiés en particulier par Ljung [5].

Les modèles autorégressifs sont des modèles discrétisés temporellement. Travailler sur un modèle discret ne pose pas de problème puisque les mesures réalisées sont toujours effectuées à partir de l'échantillonnage d'un signal. Si nous prenons, l'équation de la chaleur en transitoire pour un (petit) corps de masse m , de chaleur spécifique C et de surface S à la température uniforme $T(t)$ soumis à des pertes conducto-convectives avec un milieu extérieur à la température T_{ext} et chauffé par une puissance volumique $P(t)$, alors le système d'équation à temps continu est donné par :

$$mC \frac{dT}{dt}(t) = P(t) - hS(T(t) - T_{ext}) \quad (2.2a)$$

$$T(0) = T_0 \quad (2.2b)$$

avec h le coefficient d'échange conducto-convectif en $W.m^{-2}.K^{-1}$. Ce système peut être discrétisé avec un pas de temps Δt et devient alors à l'instant k :

$$mCT(k) = mCT(k-1) + \Delta t [P(k-1) + hS(\Delta T_{ext} - \Delta T(k-1))] \quad (2.3a)$$

$$T(0) = T_0 \quad (2.3b)$$

On en déduit logiquement une écriture par récurrence de la sortie $T(k)$. L'équation 2.3a, s'apparente en fait à un modèle AutoRégressif avec variables eXogènes (ARX), voir l'équation 2.5 ci-dessous.

$$T(k) = -a_1 T(k-1) + b_1 P(k-1) + c T_{ext} \quad (2.4)$$

avec

$$a_1 = \frac{hS\Delta t}{mC} - 1, \quad b_1 = \frac{\Delta t}{mC} \quad \text{et} \quad c = \frac{hS\Delta t}{mC}$$

La partie autorégressive (AR) correspond aux termes associés à la variable T et la partie variables eXogènes correspond aux termes associés aux variables P et T_{ext} . Les modèles ARX sont utilisés dans les cas où les variables eXogènes où l'excitation du système est maîtrisée ou si elle est proche d'un bruit blanc (*i.e.* moyenne nulle et écart-type non nul). Dans notre cas, nous utiliserons comme excitation les puissances électriques consommées par le four ou les températures de suscepteur ou d'autres éléments (excitations maîtrisées). Le modèle ARX d'ordre (n_a, n_b) s'écrit généralement dans le cas mono-entrée u et mono-sortie y avec une perturbation aléatoire e sous la forme :

$$y(k) = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) + e(k) \quad (2.5)$$

Le modèle ARX peut aussi s'écrire sous forme matricielle. Par exemple, pour un cas avec p entrées (multiples) et m observations, le modèle ARX s'écrit :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \quad (2.6)$$

avec \mathbf{y} le vecteur sortie de dimension $m \times 1$ correspondant à :

$$\mathbf{y} = [y(1) y(2) \cdots y(m)]^T \quad (2.7)$$

avec \mathbf{D} la matrice de dimension $m \times q$ où $q = n_a + n_{b_1} + \cdots + n_{b_p}$, n_a l'ordre de l'ARX pour la sortie \mathbf{y} et n_{b_j} l'ordre correspondant pour l'entrée u_j ($j = 1$ à p) et q le nombre de paramètres, voir ci-dessous la ligne pour l'observation k :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{k}, \cdot} = [-y_{k-1} \quad -y_{k-2} \quad \cdots \quad -y_{k-n_a} \quad u_{1,k-1} \quad \cdots \quad u_{1,k-n_{b_1}} \quad u_{2,k-1} \quad \cdots \quad u_{2,k-n_{b_2}} \quad u_{p,k-1} \quad \cdots \quad u_{p,k-n_{b_p}}] \quad (2.8)$$

et $\boldsymbol{\beta}$ le vecteur paramètre de dimension $q \times 1$:

$$\boldsymbol{\beta} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{n_a} \ b_{1,1} \ \cdots \ b_{1,n_1} \ b_{2,1} \ \cdots \ b_{2,n_2} \ \cdots \ b_{n_p,1} \ \cdots \ b_{p,n_p}]^T \quad (2.9)$$

Il faut noter que les coefficients de $\mathbf{D}_{\mathbf{k}, \cdot}$ sont nuls lorsque l'indice pour y_{\cdot} ou $u_{j,\cdot}$ est nul ou négatif. Le vecteur paramètre $\boldsymbol{\beta}$ est alors obtenu en utilisant les outils d'estimation linéaire de paramètres présentés en section 2.4.1 avec $\boldsymbol{\beta}$ correspondant à \mathbf{x} et \mathbf{D} correspondant à \mathbf{S} .

2.4 Inversion de modèles

Nous allons aborder les méthodes d'inversion de modèles linéaire et non linéaire. Un modèle est dit linéaire par rapport aux paramètres si le modèle $\boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{x})$, présenté en section 2.1, vérifie :

$$\boldsymbol{\eta}(t, \alpha_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{\beta}_2, \mathbf{X}_0, \mathbf{U}) = \alpha_1 \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{\beta}_1, \mathbf{X}_0, \mathbf{U}) + \alpha_2 \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{\beta}_2, \mathbf{X}_0, \mathbf{U}) \quad (2.10)$$

Au cours de cette partie, la mesure \mathbf{y} rassemble m observations et la sortie du modèle \mathbf{y}_{mo} dépend de q (*n.b.* : voir section précédente) paramètres recherchés. L'inversion de modèles a pour but de trouver le jeu de paramètres qui minimisera la différence entre les mesures \mathbf{y} et le modèle \mathbf{y}_{mo} . En pratique, le but sera de minimiser le scalaire :

$$\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2 = \sum_{k=1}^m \mathbf{r}_k^2(\mathbf{x}) = \mathbf{r}(\mathbf{x})^T \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

qui correspond au carré de la norme L_2 du vecteur $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{mo}$. Nous pouvons, à partir du modèle, définir une matrice S appelée matrice de sensibilité de dimensions $m \times q$ dont les coefficients valent :

$$S_{ij} = \left. \frac{\partial y_{mo}}{\partial x_j} \right|_{t=i\Delta t, x_k \text{ pour } k \neq j} \quad (2.12)$$

Plus le coefficient de sensibilité est grand et plus le paramètre concerné aura un impact important sur le comportement du modèle. Le vecteur colonne j correspond à l'évolution temporelle de la sensibilité du modèle par rapport au $j^{\text{ème}}$ paramètre et la ligne i correspond à la valeur des sensibilités à tous les paramètres à l'instant $i\Delta t$.

2.4.1 Estimation linéaire de paramètres

Un modèle linéaire, au sens de l'estimation de paramètres, peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x} \quad (2.13)$$

Avec \mathbf{S} la matrice des sensibilités de taille $m \times q$ qui est ici indépendante des valeurs des paramètres de \mathbf{x} . Si le modèle était parfait, sa sortie mesurée s'écrirait :

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x}^*) + \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S}\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\epsilon} \quad (2.14)$$

avec ϵ le bruit de mesure d'espérance nulle et x^* la valeur exacte du vecteur paramètre. La résolution du problème des moindres carrés ordinaires correspond alors à la recherche de l'estimateur des moindres de carrés ordinaires $\hat{\mathbf{x}}$ tel que la norme présentée en 2.11 soit minimisée. La norme est minimisée si l'ensemble des dérivées partielles par rapport aux paramètres est nulle, soit d'après les propriétés de dérivation des produits de matrices :

$$\mathbf{grad}(\|\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}})\|^2) = -2\mathbf{S}^T\mathbf{y} + 2(\mathbf{S}^T\mathbf{S})\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

L'estimateur des moindres carrés peut donc s'écrire de façon analytique sous la forme :

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{S}^T\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^T\mathbf{y} \quad (2.16)$$

avec $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$, une matrice carré inversible de dimension $q \times q$. La qualité de l'inversion de la matrice $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ dépendra fortement de son nombre de conditionnement. Des méthodes de régularisation peuvent être appliquées comme la décomposition en valeurs singulières (TSVD), voir annexe C, en utilisant le principe de Morozov [4].

2.4.2 Estimation non-linéaire de paramètres

Alors que dans la section précédente le modèle était linéaire et pouvait s'écrire sous la forme 2.13, les modèles non-linéaires peuvent s'écrire, par exemple, sous la forme :

$$\mathbf{y}_{mo} = \mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x}) \quad (2.17)$$

Il n'est pas possible de séparer les paramètres \mathbf{x} du modèle. Le critère est inchangé, l'objectif est toujours de minimiser la distance entre des valeurs mesurées \mathbf{y} et les sorties du modèle \mathbf{y}_{mo} . Le gradient du critère s'écrit :

$$\mathbf{grad}(\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2) = -2\mathbf{S}^T(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x})) \quad (2.18)$$

en utilisant la définition de la matrice de sensibilité \mathbf{S} , donnée en 2.12. Cependant, l'estimateur des moindres carrés ne peut pas être obtenu de façon explicite car \mathbf{S} dépend de \mathbf{x} , il vérifie :

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\text{Min}}[\text{Arg}(\mathbf{r}(\mathbf{x}))] \quad (2.19)$$

Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes itératives, appelées méthodes de descente. La méthode itérative se base sur une initialisation et une relation de récurrence. Une méthode de descente d'ordre 1 correspond en fait à l'utilisation du développement de

Taylor à l'ordre 1 pour passer d'une sortie $\mathbf{y}_{mo}^{(k)}$ pour un vecteur paramètre $\mathbf{x}^{(k)}$ à une sortie $\mathbf{y}_{mo}^{(k+1)}$ pour un vecteur paramètre $\mathbf{x}^{(k+1)}$:

$$\mathbf{y}_{mo}^{(k+1)} = \mathbf{y}_{mo}^{(k)} + \mathbf{S}^{(k)}(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) \quad (2.20)$$

On peut alors obtenir une expression du paramètre $\mathbf{x}^{(k+1)}$:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + [\mathbf{S}^{(k)T} \mathbf{S}^{(k)}]^{-1} \mathbf{S}^{(k)T} (\mathbf{y}_{mo}^{(k+1)} - \mathbf{y}_{mo}^{(k)}) \quad (2.21)$$

L'objectif est que $\mathbf{y}_{mo}^{(k)}$ tende vers \mathbf{y} , le terme $\mathbf{y}_{mo}^{(k+1)}$ est alors remplacé par le vecteur des mesures \mathbf{y} . Ainsi, on obtient l'expression du vecteur paramètre $\mathbf{x}^{(k+1)}$ en fonction des données de l'itération précédente, voir équation 2.22.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + [\mathbf{S}^{(k)T} \mathbf{S}^{(k)}]^{-1} \mathbf{S}^{(k)T} (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{mo}^{(k)}) \quad (2.22)$$

Si la suite est convergente, le vecteur paramètre solution sera donné par la limite de cette suite. L'initialisation joue un rôle primordial pour les méthodes de descente, il est nécessaire de choisir un jeu de paramètres le plus proche possible de la solution afin d'éviter une convergence vers un minimum local. L'algorithme n'a pas conscience du caractère global ou non du minimum qu'il a atteint, c'est pourquoi il est important de réaliser plusieurs estimations pour des vecteurs paramètres initiaux différents.

L'algorithme de descente le plus utilisé et que nous avons utilisé est l'algorithme de Levenberg-Marquardt [6], voir en annexe D.

2.4.3 Statistique de l'estimateur des moindres carrés ordinaires

Nous avons supposé que la sortie du modèle était égale à la mesure au bruit ϵ près, voir équation 2.14. Si le bruit a une moyenne non nulle alors soit le modèle est biaisé, soit la mesure est biaisée. Nous allons travailler dans le cas où le modèle est parfait. Le bruit est alors un bruit blanc, il suit une loi de probabilité indépendante de moyenne nulle avec un écart-type σ constant et une variance σ^2 , voir la définition 2.23. On parle alors d'un bruit i.i.d (indépendant et identiquement distribué).

$$\epsilon : \mathcal{N}(E(\epsilon) = 0, cov(\epsilon) = \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (2.23)$$

A partir de cette définition du bruit sur la mesure, les propriétés statistiques de l'estimateur des moindres carrés ordinaires peuvent être retrouvées. Dans le cas linéaire, le lien entre l'estimateur des moindres carrés $\hat{\mathbf{x}}$ et la mesure \mathbf{y} est donnée en 2.16. L'espérance ou moyenne pour l'estimateur des moindres carrés ordinaires est égale au vecteur paramètre exact \mathbf{x}^* , voir équation 2.24. La matrice de covariance de l'estimateur des moindres carrés est donnée par la relation 2.25. Les résultats sont obtenus en utilisant la propriété de linéarité de l'opérateur espérance.

$$E(\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T E(\mathbf{S} \mathbf{x}^* + \epsilon) = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^* \quad (2.24)$$

$$cov(\hat{\mathbf{x}}) = E((\hat{\mathbf{x}} - E(\hat{\mathbf{x}}))(\hat{\mathbf{x}} - E(\hat{\mathbf{x}}))^T) = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \sigma^2 \quad (2.25)$$

Le même travail peut être réalisé dans le cas non linéaire et les expressions de l'espérance et de la matrice de covariance de l'estimateur des moindres carrés ordinaires peuvent encore être donnés de façon analytique au voisinage de la valeur exacte du paramètre, c'est à dire avec $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{x}})$ où $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^*$.

2.5 Modèle réduit de fours sous vide et capteurs virtuels

L'objectif de notre travail est d'obtenir des capteurs virtuels de la température de la grappe en fonction de la température du four et/ou de la puissance électrique de chauffe consommée. A notre connaissance, il n'existe pas de travaux dans la littérature concernant la réalisation de capteurs virtuels pour les fours de maintien en fonderie. Cependant, il existe de nombreux travaux dans d'autres secteurs.

La littérature est riche concernant l'étude des fours de réchauffage de brames d'acier. Ainsi, l'article [7] discute de la modélisation paramétrique des fours de réchauffage et les compare avec de précédents travaux utilisant des modèles physiques comme les modèles enthalpiques ou 1D. L'article [8] compare différentes modèles autorégressifs comme les modèles ARX, Box-Jenkins ou encore les modèles espaces-état. Ces différents travaux sont directement attachés à des problématiques industriels.

Au sein du laboratoire, les modèles ARX ont été utilisés précédemment par F. Ûriz Jàuregui au cours de sa thèse [9]. Le projet avait pour but d'obtenir des températures de fonctionnement des équipements de turbo-réacteurs dans des conditions extrêmes. En effet, les équipements sont testés lors d'essai en vol mais ces essais ne permettent pas forcément de rencontrer les cas les plus extrêmes. La problématique était donc d'obtenir des températures extrapolées à partir des essais en vol et en remplaçant les entrées des essais en vol par des entrées correspondant à des conditions extrêmes qui n'ont pas été rencontrées.

Les modèles ARX sont utilisés pour la réalisation de capteurs virtuels de déplacement d'un motobroche à haute vitesse [10], la température au sein des bâtiments à partir des données extérieures [11, 12] ou encore dans des cas d'école comme la température en sortie d'une ventilation avec un chauffage [13].

Bibliographie

- [1] J. HADAMARD, *Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations*. Mineola, New York : Dover Publications, Inc, dover edition éd., 2014.
- [2] D. PETIT et D. MAILLET, « Techniques inverses et estimation de paramètres. partie 1 », *Techniques de l'ingénieur Physique statistique et mathématique*, vol. base documentaire : 42619210., no. ref. article : af4515, 2008.
- [3] D. PETIT et D. MAILLET, « Techniques inverses et estimation de paramètres. partie 2 », *Techniques de l'ingénieur Physique statistique et mathématique*, vol. base documentaire : 42619210., no. ref. article : af4516, 2008.

- [4] J. V. BECK, B. BLACKWELL et C. R. ST. CLAIR, *Inverse heat conduction : ill-posed problems*. New York : Wiley, 1985.
- [5] L. LJUNG, *System identification : theory for the user*. Prentice Hall information and system sciences series, Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall PTR, 2nd ed éd., 1999.
- [6] D. W. MARQUARDT, « An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters », *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 11, p. 431–441, juin 1963.
- [7] A. STEINBOECK, D. WILD, T. KIEFER et A. KUGI, « A mathematical model of a slab reheating furnace with radiative heat transfer and non-participating gaseous media », *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 53, p. 5933–5946, déc. 2010.
- [8] Y. SAMYUDIA et H. SIBARANI, « Identification of reheat furnace temperature models from closed-loop data - an industrial case study », *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*, vol. 1, p. 70–81, oct. 2006.
- [9] F. URIZ-JAUREGUI, B. REMY, A. DEGIOVANNI et O. VERSEUX, « Model identification for temperature extrapolation in aircraft powerplant systems », *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 64, p. 162–177, fév. 2013.
- [10] J.-S. CHEN et W.-Y. HSU, « Characterizations and models for the thermal growth of a motorized high speed spindle », *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, vol. 43, p. 1163–1170, sept. 2003.
- [11] G. RÍOS-MORENO, M. TREJO-PEREA, R. Castañeda MIRANDA, V. HERNÁNDEZ-GUZMÁN et G. HERRERA-RUIZ, « Modelling temperature in intelligent buildings by means of autoregressive models », *Automation in Construction*, vol. 16, p. 713–722, août 2007.
- [12] M. JIMÉNEZ et M. HERAS, « Application of multi-output ARX models for estimation of the U and g values of building components in outdoor testing », *Solar Energy*, vol. 79, p. 302–310, sept. 2005.
- [13] T. JOHANSEN et B. FOSS, « Empirical modeling of a heat transfer process using local models and interpolation », vol. 5, p. 3654–3658, American Autom Control Council, 1995.

Chapitre 3

Modélisation détaillée d'un four de maintien en fonderie

Comme nous l'avons vu au cours du chapitre 1, le four de maintien en fonderie fait appel à des phénomènes d'induction, générant des transferts thermiques. Au cours de ce chapitre, nous allons tout d'abord vous présenter les caractéristiques du four de maintien étudié et nous aborderons ensuite deux modélisations de ce four. Ces modèles concernent la phase de chauffe du moule céramique dans le module de chauffe avant la verse de l'alliage. Le premier a été réalisé sous FlexPDE [1] et le second sous COMSOL [2], tout deux des logiciels de calculs éléments finis.

Les deux modèles créés prennent en compte les aspects électromagnétique et thermique du four. Nous aborderons le couplage entre l'induction et la thermique dans les 2 logiciels. La différence entre les deux modèles est située au niveau de la méthode de résolution des aspects radiatifs. Sous FlexPDE, le rayonnement est résolu via la méthode P_1 et sous COMSOL, le rayonnement est résolu via la méthode des radiosités.

Sommaire

3.1 Définition du four de maintien utilisé	37
3.1.1 Description des différentes parties du module de chauffe . . .	37
3.1.2 Propriétés des éléments constitutifs du four	38
3.2 Définition du four détaillé par FlexPDE	41
3.2.1 Résolution du problème électromagnétique	41
3.2.2 Résolution du problème thermique	47
3.3 Définition du four détaillé par COMSOL	53
3.3.1 Résolution du problème électromagnétique	54
3.3.2 Résolution du problème thermique	58
3.4 Conclusions	61

3.1 Définition du four de maintien utilisé

3.1.1 Description des différentes parties du module de chauffe

Nous allons voir dans cette section, l'ensemble des caractéristiques du four de maintien étudié. L'enceinte du four est constituée d'acier poli sur lequel vient se déposer un

condensat issu de la liquéfaction du lingot (vaporisation de certains éléments). Nous allons décrire le module en partant de l'extérieur et en allant vers l'intérieur. Le four étudié possède 2 inducteurs positionnés l'un au dessus de l'autre. Ces derniers enserrant le module sur quasiment toute sa hauteur. Les spires sont en cuivre et sont recouvertes d'un ruban de verre imprégné de résine epoxy afin d'éviter tout arc électrique entre 2 spires voisines. Les inducteurs sont refroidis activement par une circulation interne d'eau régulée à la température ambiante.

Un isolant graphite cylindrique creux, appelé fourreau, est positionné et isole thermiquement les suscepteurs des inducteurs sur toute la hauteur du module. Le module est fermé par des isolants (couvercle, rondelles et couronne). Une seule partie est mobile, il s'agit du couvercle, il est muni d'un bras. Ce couvercle est ouvert pour permettre la verse du métal en fusion dans le moule chauffé à l'intérieur du module de chauffe.

Le four possède 2 suscepteurs positionnés l'un au dessus de l'autre. Il s'agit d'éléments en graphite fortement conducteur électriquement et thermiquement. Ils permettent la chauffe du module de chauffe et génèrent le rayonnement sur le moule. Des écrans radiatifs sont positionnés dans le module et ils ont pour fonction de réaliser une barrière radiative réfractaire afin de compartimenter le four. Les deux zones du module de chauffe, haute et basse, sont dotées d'un thermocouple de contrôle et de régulation. Ces thermocouples sont insérés à travers l'isolant et le suscepteur dans le module de chauffe et ils débordent dans la cavité du module de chauffe.

La sole est l'élément central en cuivre sur laquelle le moule est positionné. Au niveau de cette sole, un anneau en cuivre activement refroidie par eau est positionné afin d'augmenter le gradient de température entre le module de chauffe et la zone froide du four.

3.1.2 Propriétés des éléments constitutifs du four

Les propriétés électriques, c'est à dire la permittivité électrique ϵ_r , la perméabilité magnétique μ_r et la conductivité électrique σ , sont données dans le tableau 3.1.

Les propriétés thermiques, c'est à dire la masse volumique ρ , la conductivité thermique λ , la capacité calorifique à pression constante C_p , la diffusivité thermique a et l'émissivité ϵ sont données dans le tableau 3.2. La connaissance de ces valeurs est partielle, pour certaines. Ainsi les valeurs de la conductivité thermique sont données par les fabricants à plusieurs températures. Pour d'autres propriétés, comme la conductivité électrique, une seule valeur est connue.

Les modélisations seront réalisées à partir de ces données mais elles pourront être complétées par des mesures réalisées sur les matériaux ou des données issues de la bibliographie.

TABLE 3.1 – Propriétés électriques des matériaux à partir des données fournisseurs

Parties du four	ϵ_r	μ_r	σ ($S.m^{-1}$)
Acier (paroi extérieure du four)	3	20	$1.45 \cdot 10^6$
Vide	0	0	0
Eau	80	1	$5.5 \cdot 10^{-6}$
Cuivre (inducteur, sole, anneau)	1	1	$5.9 \cdot 10^7$
Graphite extrudé (suscepteur)	1	1	$1.25 \cdot 10^5$
Graphite CBCF 15-2000 (fourreau)	1	1	400
Graphite CBCF 18-2000 (couvercle, couronne et papyex)	1	1	909

TABLE 3.2 – Propriétés thermiques des matériaux à partir des données fournisseurs

Parties du four	ρ ($kg.m^{-3}$)	λ ($W.m^{-1}.K^{-1}$)	C_p ($J.K^{-1}.kg^{-1}$)	a ($m^2.s^{-1}$)	ϵ
Cuivre (inducteur, sole, anneau)	8960	401	380	$1.74 \cdot 10^{-4}$	0.2
Graphite extrudé (suscepteur)	1740	200	2000	$5.74 \cdot 10^{-5}$	0.7
Graphite CBCF 15-2000 (fourreau)	150	0.32	2000	$1.06 \cdot 10^{-6}$	0.6
Graphite CBCF 18-2000 (couvercle, couronne et papyex)	150	0.32	2000	$1.06 \cdot 10^{-6}$	0.6
Céramique (moule)	2170	1.8	1100	$7.54 \cdot 10^{-7}$	0.6

3.2 Définition du four détaillé par FlexPDE

Comme nous l'avons vu en section 1.2.3, la résolution du problème électromagnétique est découplée du problème de thermique. Nous allons donc tout d'abord, discuter du modèle électromagnétique, puis dans un second temps, du modèle thermique qui a été implémenté sous FlexPDE.

3.2.1 Résolution du problème électromagnétique

3.2.1.1 Présentation du modèle électromagnétique

La résolution du problème d'induction a été réalisée pour la composante orthoradiale du potentiel vecteur \vec{A} à une fréquence donnée dans le domaine complexe et pour une géométrie axisymétrique, voir section 1.2.1.1.4. Le courant source I_s est supposé sinusoïdal de fréquence $3kHz$, il peut alors s'écrire sous la forme exponentielle complexe :

$$I_s = I_0 e^{j\omega t} \quad (3.1)$$

avec I_0 l'amplitude du courant source en ampère, j imaginaire pur tel que $j^2 = -1$ et $\omega = 2\pi f$ la pulsation en s^{-1} . Le système d'équations résolu par FlexPDE est donné en 3.2. Il est composé de l'équation 3.2a pour la partie réelle de \vec{A} et de l'équation 3.2b pour la partie imaginaire.

$$\omega\sigma A_{im} + \frac{1}{\mu_0\mu_r} \left[\frac{\partial^2 A_{re}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{re}}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_{re}}{\partial z^2} \right] + J_s = 0 \quad (3.2a)$$

$$\omega\sigma A_{re} - \frac{1}{\mu_0\mu_r} \left[\frac{\partial^2 A_{im}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{im}}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_{im}}{\partial z^2} \right] - J_s = 0 \quad (3.2b)$$

La densité de courant source J_s en $A.m^{-2}$ est égale au rapport $\frac{I_0}{S_{eff}}$ avec S_{eff} l'aire de la section effective de passage du courant source à cause de l'effet de peau en m^2 , voir la section 1.2.1.3.

Ce système est résolu sur l'ensemble du domaine présenté en figure 3.1. Le domaine comporte l'enceinte en acier et le module de chauffe composé de l'inducteur, des éléments graphites (suscepteurs et isolants) ainsi que des éléments refroidisseurs en cuivre (sole et anneau). Aux frontières du domaine, les composantes réelles et imaginaires du potentiel vecteur sont fixées à 0 sur l'axe central, qui est l'axe de symétrie, et le gradient est fixé à 0 sur les autres frontières. Aux interfaces, le vecteur potentiel magnétique est continu.

La géométrie des inducteurs modélisés sous FlexPDE, en 3.1, est simplifiée par rapport aux géométries réelles. Cette différence n'engendre pas de différence de rendement important car nous avons conservé la même surface de passage du courant dans les spires. La différence de rendement est donc limité à un problème d'optimisation. Le maillage est affiné au niveau des inducteurs et des frontières du domaine, voir figure 3.2. Le maillage possède 37892 noeuds et 18239 cellules.

La difficulté se situe au niveau de la définition des sources du problème. Nous avons vu comment calculer l'intensité source parcourant les inducteurs d'après la puissance consommée par l'inducteur et la mesure de la résistance de l'inducteur chargé, voir annexe B.

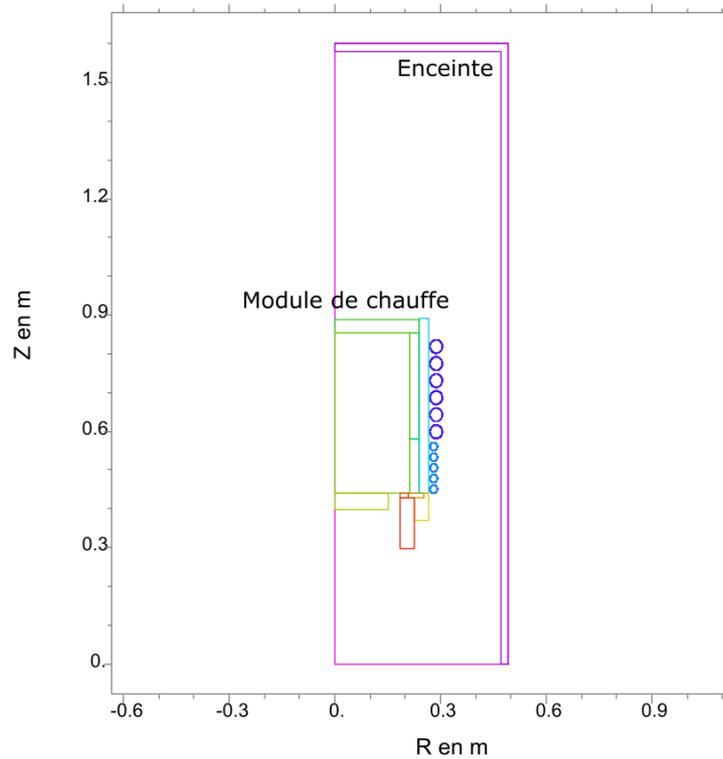


Fig. 3.1 – Géométrie du four utilisée pour la résolution du problème électromagnétique sous FlexPDE

Le calcul est réalisé pour une puissance électrique fournie aux inducteurs de 40.48 kW . Le modèle est un modèle formulé en courant source, il ne prend donc pas en compte les pertes inducteurs. Nous allons alors soustraire à la puissance électrique fournie aux inducteurs la puissance perdue dans l'inducteur. Les rendements sont fournis en annexe B, on obtient alors des puissances dissipées réellement dans la charge $P_h = 34878 \text{ W}$ pour l'inducteur haut et $P_b = 32748 \text{ W}$ pour l'inducteur bas. Les valeurs de courant efficace correspondant sont alors $I_h = 1047 \text{ A}$ et $I_b = 1064.5 \text{ A}$ respectivement pour les inducteurs haut et bas. Il est important de noter que $I_0 = \frac{I_{h,b}}{\sqrt{2}}$ car I_0 est le module de l'expression complexe de I_s . La section effective de passage du courant S_{eff} est définie par l'épaisseur de peau du courant dans l'inducteur en cuivre à 3 kHz et la répartition du courant en fonction de l'angle dans l'inducteur. En fait, le courant se concentre sur la face avant de l'inducteur en vis à vis avec la charge. Nous avons réalisé 2 modélisations : la première avec le courant réparti sur tout l'inducteur sur une épaisseur égale à l'épaisseur de peau et la seconde avec le courant réparti sur la face avant de l'inducteur sur l'épaisseur de peau. Nous appellerons alors le premier modèle « inducteur » et le second « demi-inducteur ». Les données sont résumées dans la table 3.3 ci-dessous.

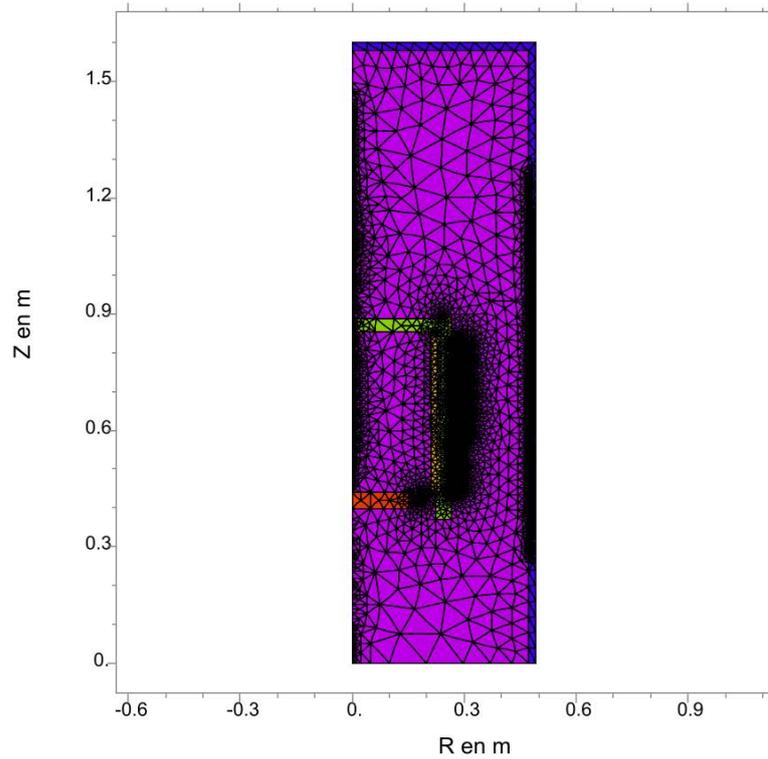


Fig. 3.2 – Géométrie du four utilisée pour la résolution du problème électromagnétique sous FlexPDE

TABLE 3.3 – Résumé des caractéristiques de la source pour une puissance électrique de 40.48 kW pour le cas courant traversant l'ensemble de la section de l'inducteur sur l'épaisseur de peau et le cas où le courant traverse seulement la face avant de l'inducteur sur l'épaisseur de peau

Modèle	Partie	Intensité $I_{h,b}$	Surface effective S_{eff}
	haute	1047 A	$1.417 \cdot 10^{-4} m^2$
	basse	1067.5 A	$8.454 \cdot 10^{-5} m^2$
	haute	1047 A	$7.086 \cdot 10^{-5} m^2$
	basse	1067.5 A	$4.227 \cdot 10^{-5} m^2$

3.2.1.2 Résultats de la modélisation FlexPDE pour une puissance consigne de 40.48 kW

Nous allons étudier le comportement du modèle « inducteur » avec les deux inducteurs complets, c'est à dire que les spires sont circulaires, et le modèle « demi-inducteur » avec les deux demi-inducteurs, c'est à dire que la spire est un demi cercle, voir image dans le tableau 3.3. Les résultats seront présentés à chaque fois dans les 2

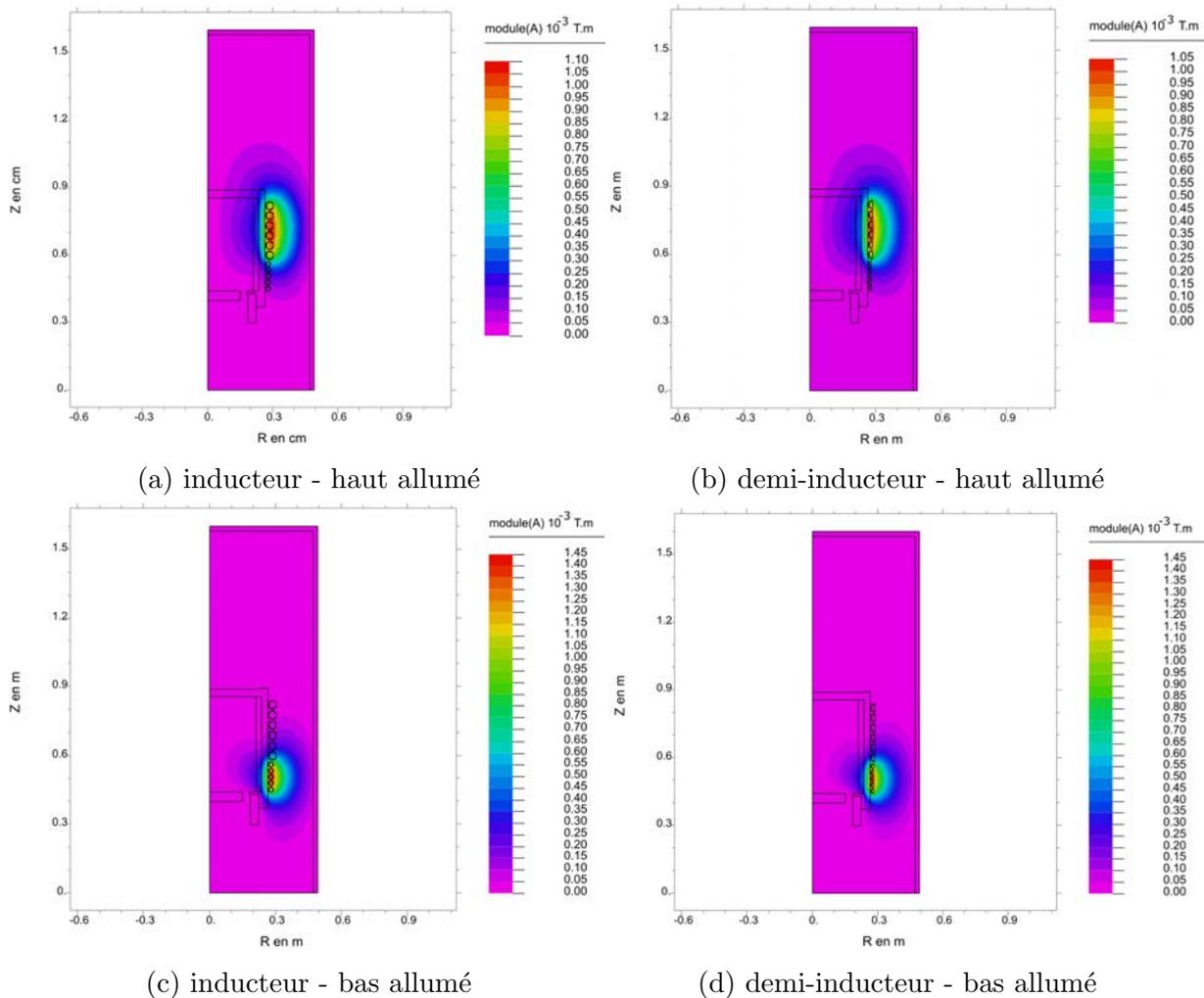


Fig. 3.3 – Présentation des contours du module du vecteur potentiel magnétique complexe pour les 2 cas et allumage de l'inducteur haut ou bas

cas et pour l'inducteur haut allumé puis l'inducteur bas allumé. La figure 3.3 présente le champ du module du vecteur potentiel magnétique complexe \vec{A} . Le modèle inducteur correspond aux figures 3.3a et 3.3c respectivement pour l'inducteur haut allumé et l'inducteur bas allumé. Le modèle demi-inducteur correspond aux figures 3.3b et 3.3d respectivement pour l'inducteur haut allumé et l'inducteur bas allumé.

L'amplitude du module du vecteur potentiel magnétique est semblable pour les modèles demi-inducteur et inducteur. La différence réside dans la répartition spatiale du vecteur potentiel magnétique. Ainsi, Le modèle demi-inducteur permet de présenter une concentration de champ magnétique plus forte du côté de la charge que le modèle inducteur qui a un maximum de vecteur potentiel plus diffus et en retrait de la charge.

Le résultat qui découle de cette différence de répartition du module du vecteur potentiel complexe \vec{A} est une augmentation de l'amplitude du module du champ électrique \vec{E} dans l'isolant et le suscepteur notamment pour la modélisation "demi-inducteur". Ceci engendre, un vecteur de courant surfacique induit plus grand dans le suscepteur et donc une densité de puissance volumique de chauffe induite plus importante, voir les figures 3.4a et 3.4c. L'effet de peau apparaît clairement sur les figures

de l'ensemble 3.4 avec une décroissance rapide de la densité de puissance de chauffe en fonction de la profondeur dans le suscepteur.

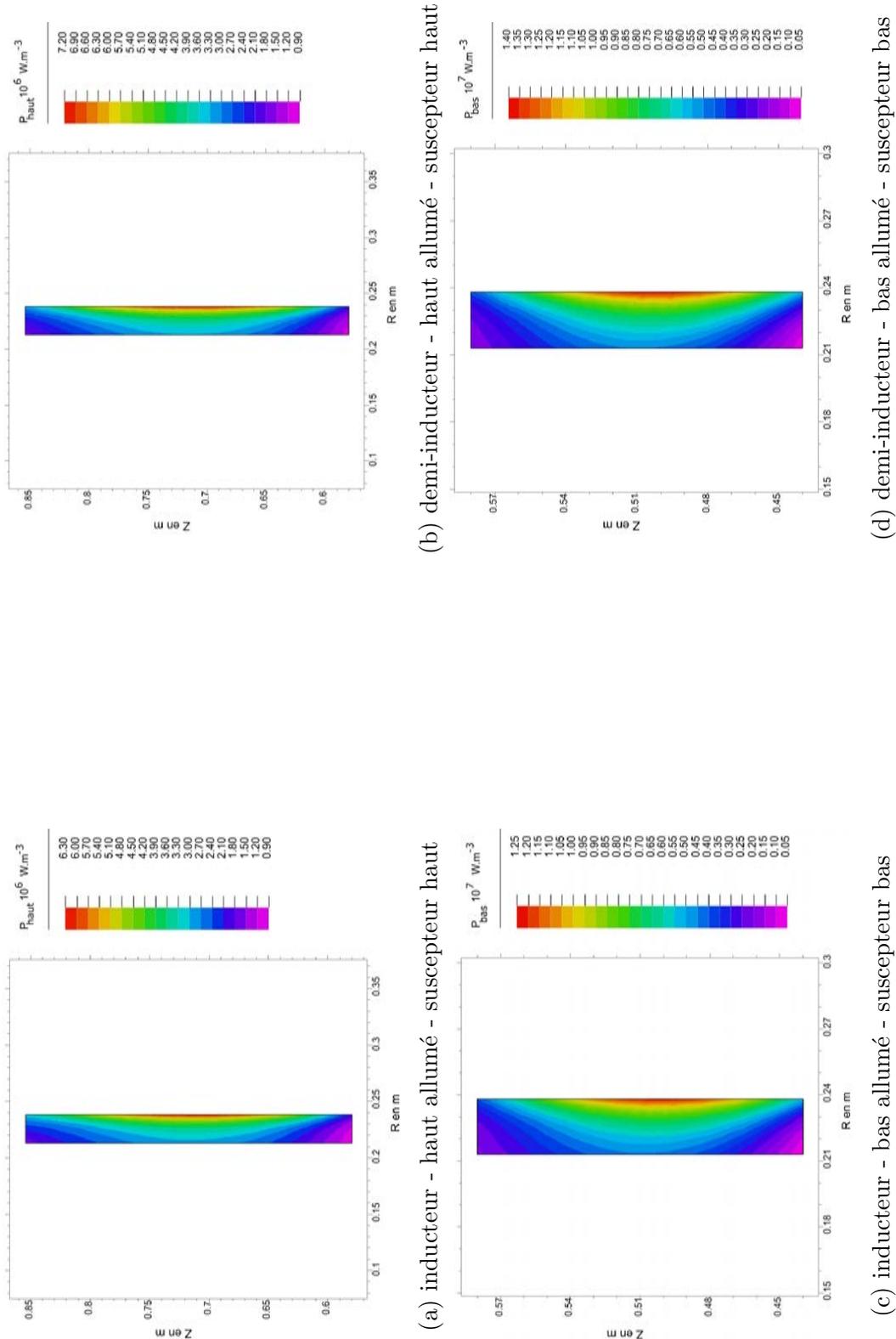


Fig. 3.4 – Présentation des contours de la densité de puissance de chauffe volumique induite en $W.m^{-3}$ dans les suscepteurs pour les 2 cas et allumage de l'inducteur haut ou bas

TABLE 3.4 – Puissance de chauffe effective pour une puissance électrique de 40.48 kW et rendement du système η pour les cas inducteur complet et cas demi-inducteur

Modèle	Partie	Puissance de chauffe en W	$\eta_{\text{modèle}}$ en %	$\eta_{\text{fournisseur}}$ en %
inducteur complet	haute	31899	78.8	86.6
	basse	29188	72.1	80.9
demi-inducteur	haute	35970	88.9	86.6
	basse	32503	80.3	80.9

Ces cartographies de densité de puissance volumique serviront d'entrée sous la forme d'une source de puissance localisée pour le modèle thermique. Nous allons maintenant travailler avec les résultats issus du modèle demi-inducteur car c'est celui qui se rapproche le plus du système physique avec les densités de courant concentrés sur la face des inducteurs en vis à vis avec la charge.

Nous pouvons effectuer l'intégration volumique de la densité de puissance sur les suscepteurs et nous obtenons la puissance de chauffe totale induite en watt. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.4 et comparés avec les données fournisseurs.

Le modèle électromagnétique fournit des résultats proches des données fournisseurs, ce qui est rassurant sur la qualité du modèle électromagnétique réalisé.

3.2.2 Résolution du problème thermique

3.2.2.1 Présentation du modèle thermique pour le module de chauffe

Le modèle thermique défini sous FlexPDE concerne le module de chauffe (moule, suscepteurs haut et bas et le fourreau), c'est un modèle à la géométrie simplifiée, voir figure 3.5. Le moule est ici un cylindre creux dont la base est fermée par un fond (disque) en céramique.

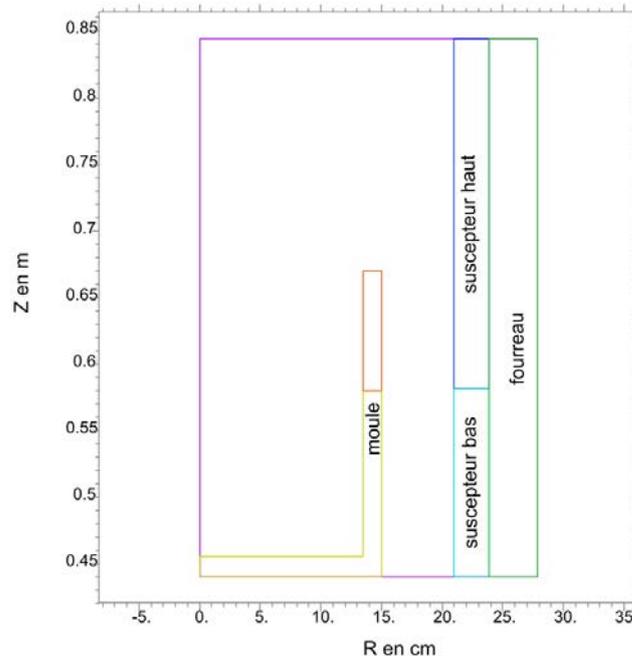


Fig. 3.5 – Géométrie du module de chauffe du four pour la résolution du problème thermique sous FlexPDE

Le modèle thermique peut être représenté schématiquement à l'aide de la figure 3.6.

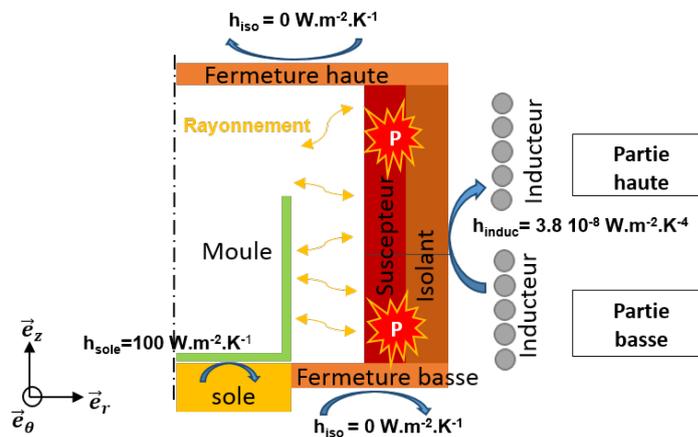


Fig. 3.6 – Schéma des transferts thermiques au sein du module de chauffe

Le contact entre le moule et la sole refroidie est imparfait, les échanges sont caractérisés par un coefficient d'échange h_{sole} représentatif d'une importante résistance de contact. La température de surface de la sole est fixée à 473 K. Les fermetures haute et basse sont considérées parfaites, il n'y a donc pas d'échange au niveau de ces faces. Les échanges entre le fourreau et l'inducteur sont représentés par un coefficient d'échange radiatif h_{induc} en $W.m^{-2}.K^{-4}$ qui a été calculé en assimilant la surface du fourreau et

la surface des inducteurs à 2 plans ainsi l'expression de h_{induc} est donnée par :

$$h_{induc} = \frac{\epsilon_{fourreau}\epsilon_{inducteur}\sigma}{1 - (1 - \epsilon_{fourreau})(1 - \epsilon_{inducteur})} \quad (3.3)$$

avec σ la constante de Stefan-Boltzmann et ϵ les émissivités. La température de surface de l'inducteur est fixée à 473 K.

Le modèle FlexPDE résout donc les transferts conductifs à partir de ces conditions limites sur le domaine présenté en figure 3.7a. Les conditions limites radiatives sont précisés en figure 3.7b. Les luminances moyennes $L_{0,i}$ pour $i = 1$ à 4 dans le cas 2D axisymétrique valent :

$$L_{0,1} = \frac{4\pi n^2 \sigma T^4}{p_i} - \frac{2(2 - \epsilon_{paroi})}{\epsilon} L_r \quad (3.4a)$$

$$L_{0,2} = \frac{4\pi n^2 \sigma T^4}{p_i} + \frac{2(2 - \epsilon_{paroi})}{\epsilon} L_r \quad (3.4b)$$

$$L_{0,3} = \frac{4\pi n^2 \sigma T^4}{p_i} - \frac{2(2 - \epsilon_{paroi})}{\epsilon} L_z \quad (3.4c)$$

$$L_{0,4} = \frac{4\pi n^2 \sigma T^4}{p_i} + \frac{2(2 - \epsilon_{paroi})}{\epsilon} L_z \quad (3.4d)$$

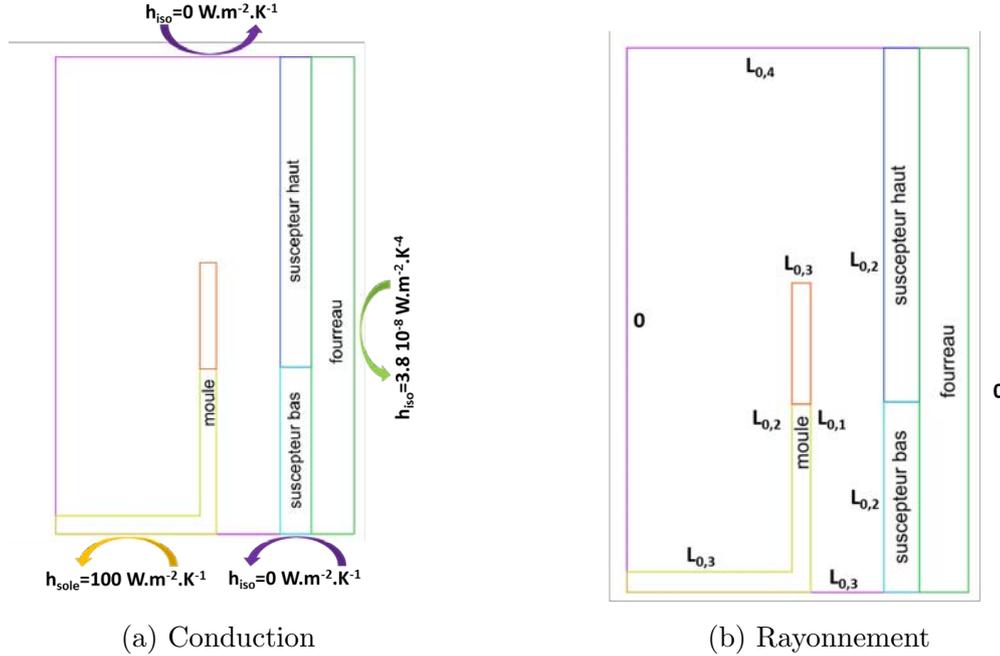


Fig. 3.7 – Présentation des conditions limites pour la conduction 3.7a et pour le rayonnement 3.7b au sein du module de chauffe

Le système d'équation résolu par FlexPDE est le système couplé conduction-rayonnement :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}(M, t) = \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T(M, t))) + P_{haut}(M, t) + P_{bas}(M, t) \quad (3.5a)$$

$$\text{div}\left(\frac{1}{3\kappa} \overrightarrow{\text{grad}}(L_0)\right) = 0 \quad (3.5b)$$

avec $P_{haut}(M, t)$ et $P_{bas}(M, t)$ les densités ponctuelles de puissance volumique issues respectivement de l'inducteur haut et de l'inducteur bas. Ces densités de puissance sont en fait issues de la section précédente et présentées en figures 3.4b et 3.4d auxquelles nous avons appliqués un coefficient multiplicateur variable dans le temps afin d'obtenir une consigne en puissance consommée électrique équivalente à celle présentée en figure 3.8.

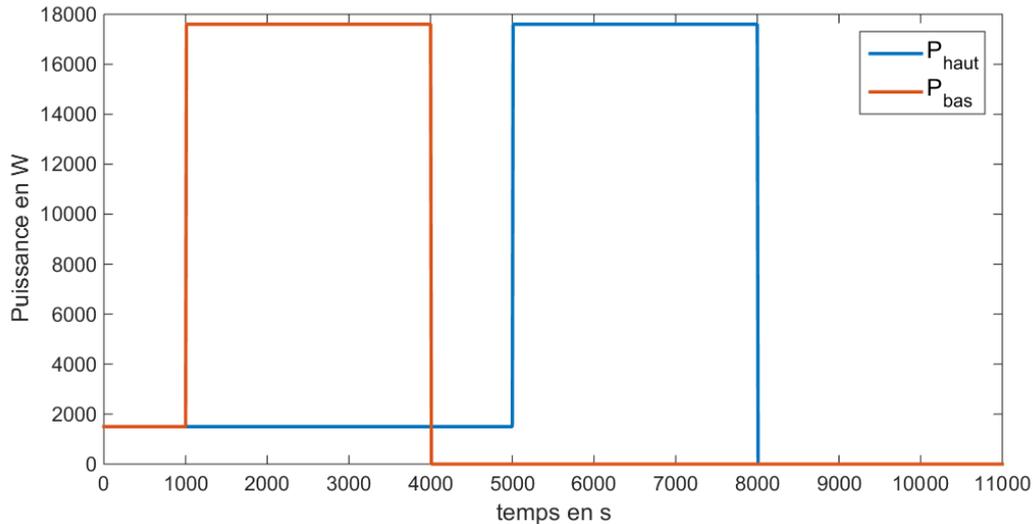


Fig. 3.8 – Distribution temporelle de la puissance électrique consommée par l'inducteur haut (P_{haut}) et l'inducteur bas (P_{bas})

Notre modèle est ici non-linéaire au sens des variables car les échanges radiatifs n'ont pas été linéarisés. Il est par contre linéaire au sens des paramètres car le modèle ne prend en compte aucune thermodépendance.

3.2.2.2 Résultats de la modélisation thermique sous FlexPDE

Le modèle FlexPDE fournit une température en tout point matériel du four à partir des conditions initiales et limites, et des entrées du modèle. Les corps du module de chauffe sont à une température fixée de 900 K à l'instant initial. Une consigne de puissance électrique, correspondant à la figure 3.8, est appliquée aux inducteurs haut et bas. Ainsi, nous pouvons obtenir une carte de la distribution spatiale de la température et de la luminance moyenne à $t = 2156$ s et $t = 6600$ s par exemple, voir la figure 3.9. A $t = 2156$ s et $t = 6600$ s, le module de chauffe est en phase de chauffage respectivement via l'inducteur bas et l'inducteur haut. On observe alors que la température est maximale pour les suscepteurs concernés par l'inducteur en fonctionnement et il en est de même pour la luminance moyenne. Nous pouvons observer une petite anomalie de température au niveau du coin haut gauche du moule. Cette anomalie de température est lié directement à l'anomalie sur la luminance moyenne dans le même secteur.

Nous pouvons aussi obtenir les profils temporels de température en des points d'intérêt (mesure par thermocouple) ou des températures moyennées sur un domaine (suscepteur, zone de moule). La figure 3.10 montre le positionnement de 4 points de mesure

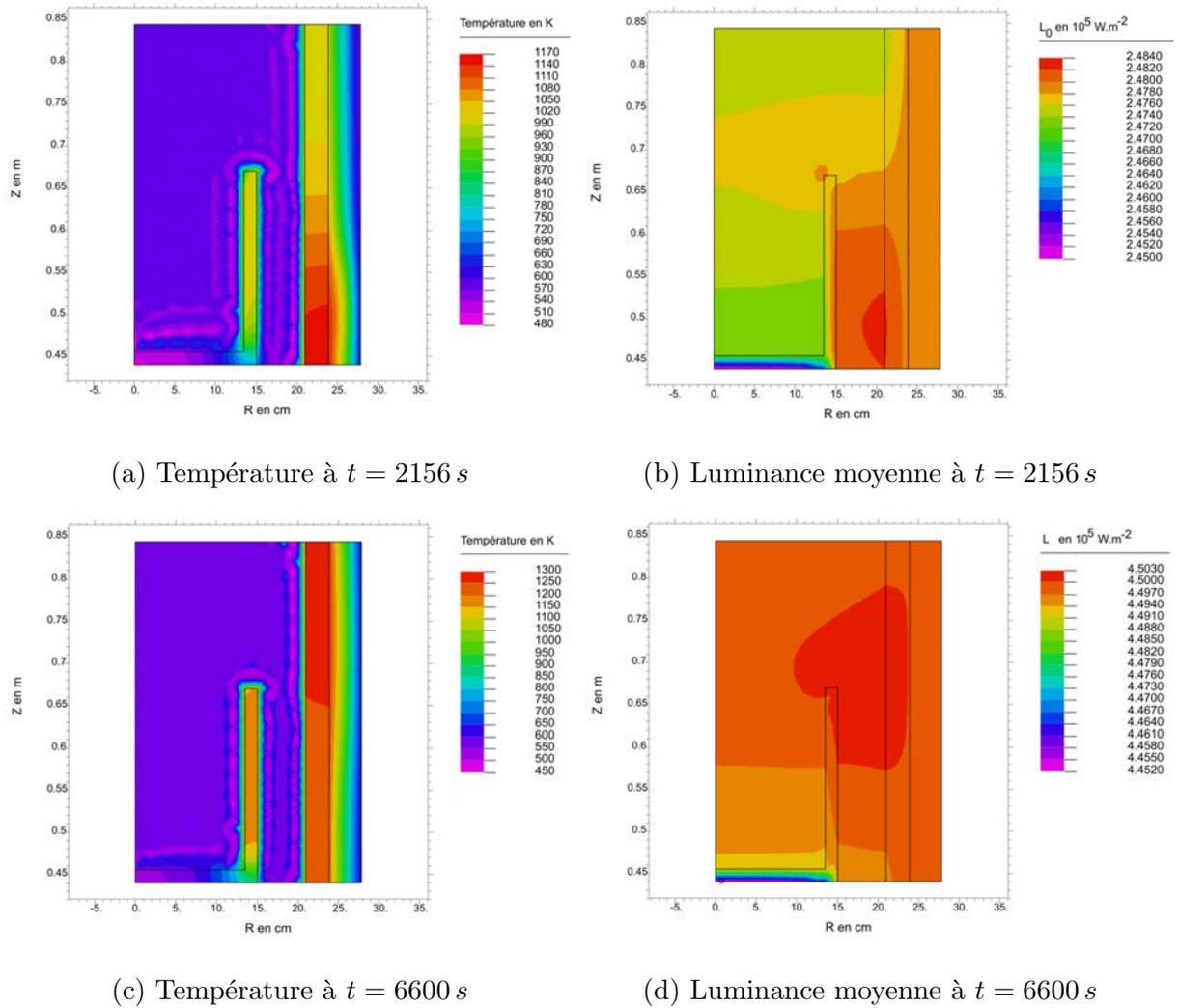


Fig. 3.9 – Présentation de la cartographie de température et de luminance moyenne à $t = 2156$ s et $t = 6600$ s

et les 4 zones volumiques sur lesquelles les températures sont moyennées (suscepteur haut et bas, moule partie haute et partie basse). La température moyenne spatiale est obtenue en réalisant

$$T_{m,\cdot}^{h,b} = \frac{1}{V_{m,\cdot}^{h,b}} \int_{V_{m,\cdot}^{h,b}} T(r, z, t) 2\pi r dr dz \quad (3.6)$$

Les exposants h et b correspondent à l'appartenance à la partie haute ou basse d'un élément et les indices m et \cdot l'appartenance au moule ou au susceptible. Ainsi, V_m^h et V_m^b sont les volumes respectifs de la partie haute et de la partie basse du moule. Notons que V_m^b n'intègre pas le fond du moule (disque). Les distributions temporelles

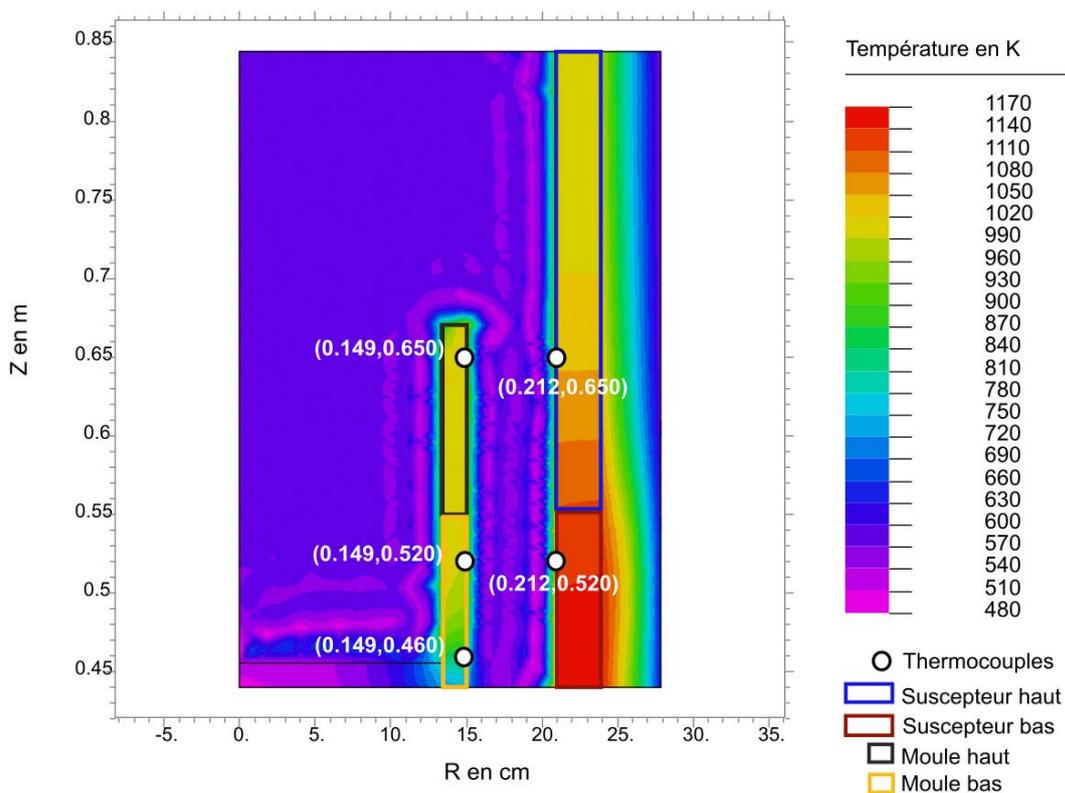


Fig. 3.10 – Champ de température au sein du module de chauffe pour la simulation FlexPDE déjà présenté en figure 3.9a avec les points d'observation de la température et la répartition des 4 zones spatiales

de température locale aux 4 points d'observation présentées dans la figure 3.10 sont données en figure 3.11. Les distributions temporelles des températures moyennées sur le susceptible haut (T^h), le susceptible bas (T^b), la partie haute du moule (T_m^h) et la partie basse du moule (T_m^b) sont présentées en figure 3.12.

L'écart constaté entre la température locale pour la partie basse du moule ($T_m^b(0.149, 0.650)$), figure 3.11, et la température moyennée pour la partie basse du moule (T_m^b), figure 3.12, est dû aux pertes avec la sole. La prise de mesure locale étant éloignée de la sole, le profil de température n'est pas aussi fortement impacté par les échanges avec la sole.

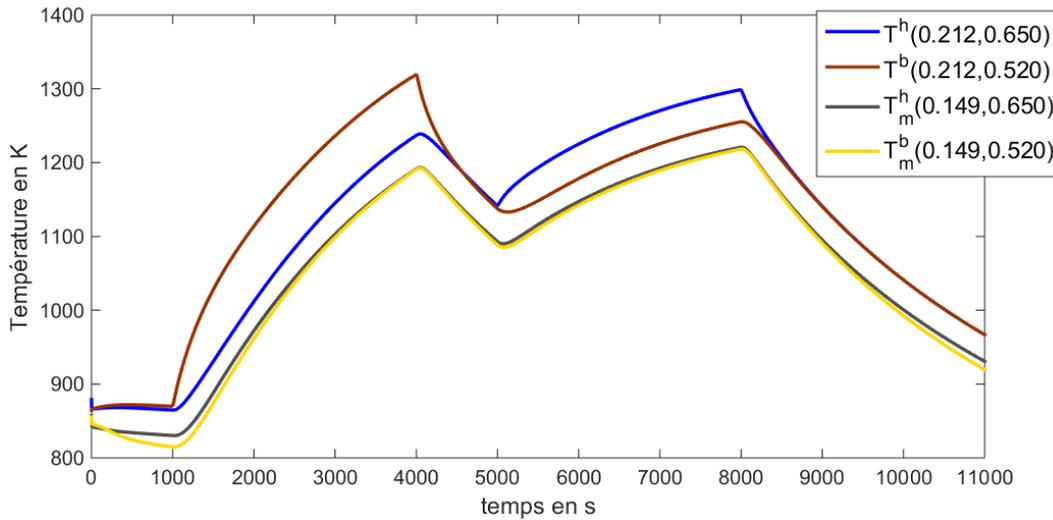


Fig. 3.11 – Profils de température locale, issus du modèle FlexPDE, pris dans le moule et le susceptible pour la distribution de puissance présentée en 3.8

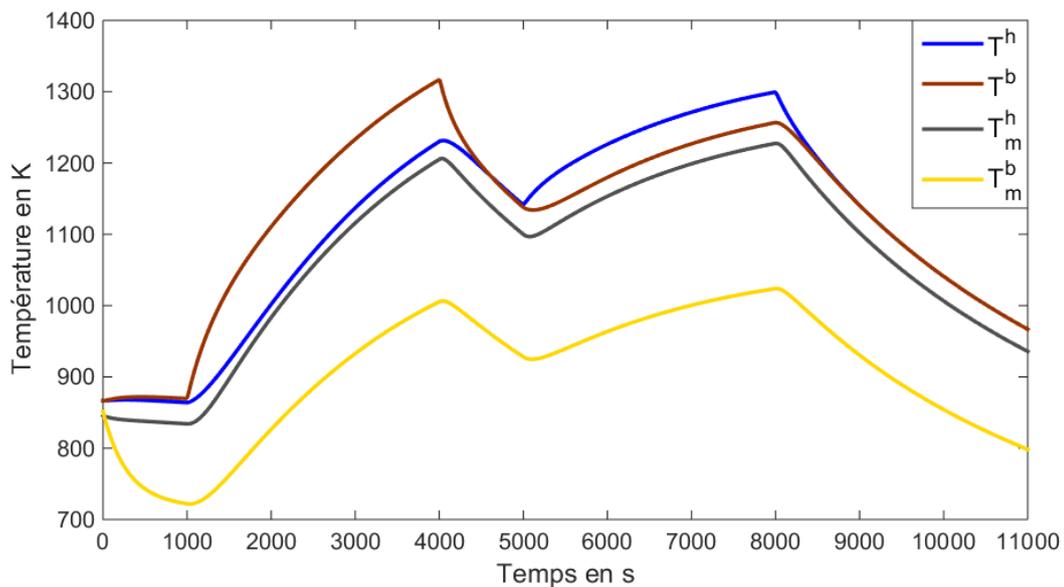


Fig. 3.12 – Profils de températures moyennées, issus du modèle FlexPDE, pris dans le moule et le susceptible pour la distribution de puissance présentée en 3.8

3.3 Définition du four détaillé par COMSOL

Comme pour le modèle implémenté sous FlexPDE, les modèles électromagnétique et thermique sont ici découplés. Le travail réalisé sous COMSOL est très proche du travail réalisé sous FlexPDE pour la résolution du problème électromagnétique. La résolution du problème thermique est quant à elle très différente avec la prise en compte des inducteurs et de l'enceinte et l'utilisation de la méthode des radiosités présentées en partie 1.2.2.2.5.

3.3.1 Résolution du problème électromagnétique

Nous gardons la répartition de courant, sur l'épaisseur de peau et la face interne des inducteurs, choisie au cours de la section 3.2.1.2. La définition géométrique du four est montrée en figure 3.13. Les propriétés des matériaux sont identiques à celle présentées pour la résolution avec FlexPDE. Les intensités parcourant les inducteurs haut et bas sont toujours respectivement $I_h = 1047 A$ et $I_b = 1067.5 A$. Cependant COMSOL utilise en entrée les intensités crêtes ou maximales, il faut donc appliquer en entrée les intensités multipliés par $\sqrt{2}$. Nous obtenons alors les résultats de champ

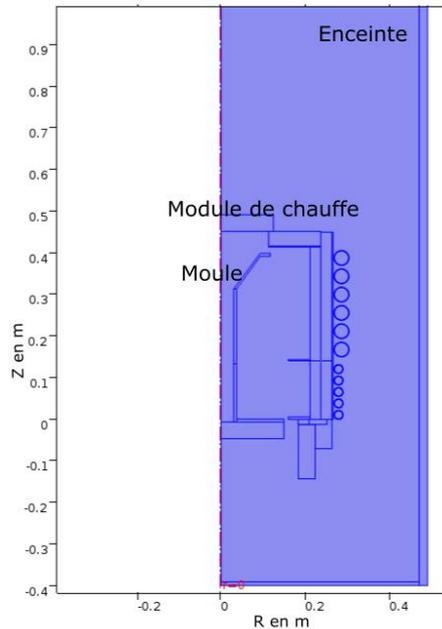
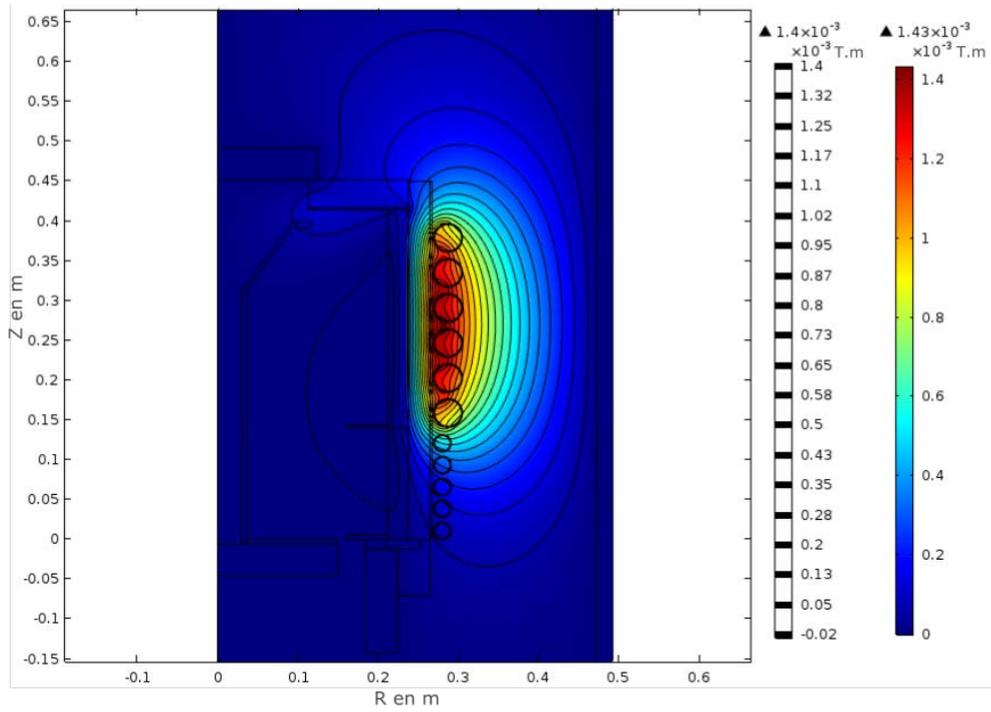


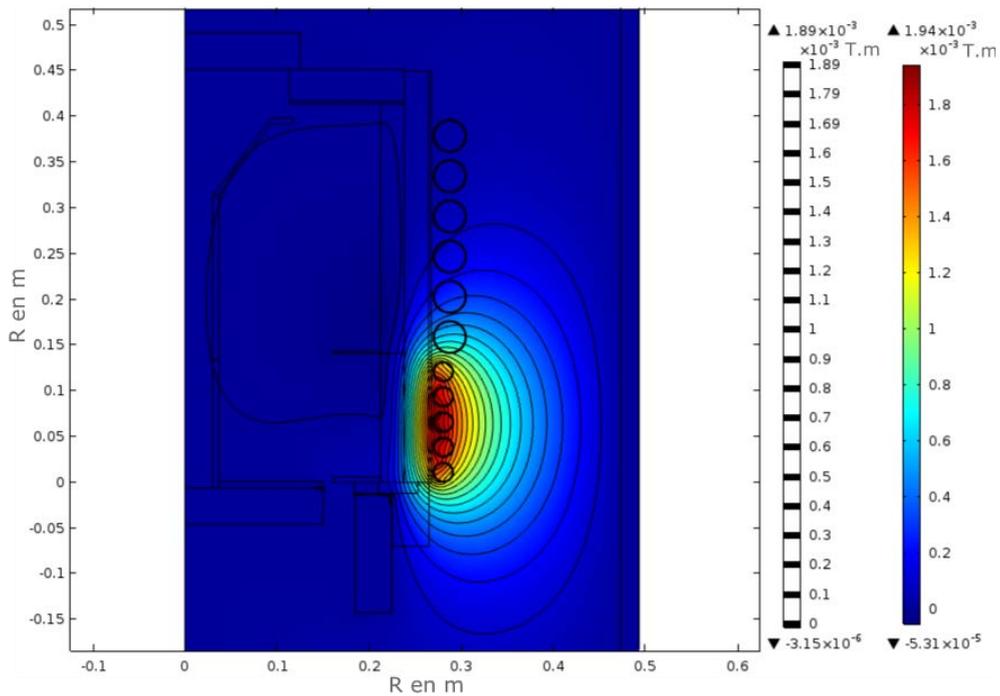
Fig. 3.13 – Géométrie du four utilisée pour la résolution du problème électromagnétique sous COMSOL

de potentiel vecteur magnétique \vec{A} pour les 2 cas où l'inducteur haut et bas sont allumés de façon distinctes, voir figure 3.14. Nous pouvons observer que les valeurs maximales du module du vecteur potentiel magnétique sous COMSOL sont de l'ordre des maximums observés sous FlexPDE, voir la figure 3.3, au coefficient multiplicatif $\sqrt{2}$ près. La différence provient de l'écriture en courant crête sous COMSOL plutôt qu'en courant efficace sous FlexPDE pour la source. La densité de puissance volumique est aussi calculée et présentée en figure 3.15 dans les suscepteurs correspondants à l'inducteur allumé. Les densités de puissance volumique calculés sont de l'ordre de celles obtenues sous FlexPDE en figure 3.4 pour le cas demi-inducteur.

Les puissances de chauffe obtenues sont en accord avec les données fournisseurs qui leur sont un peu supérieures, voir tableau 3.5. L'écart entre le modèle et les données fournisseurs est inférieur à 5 %.

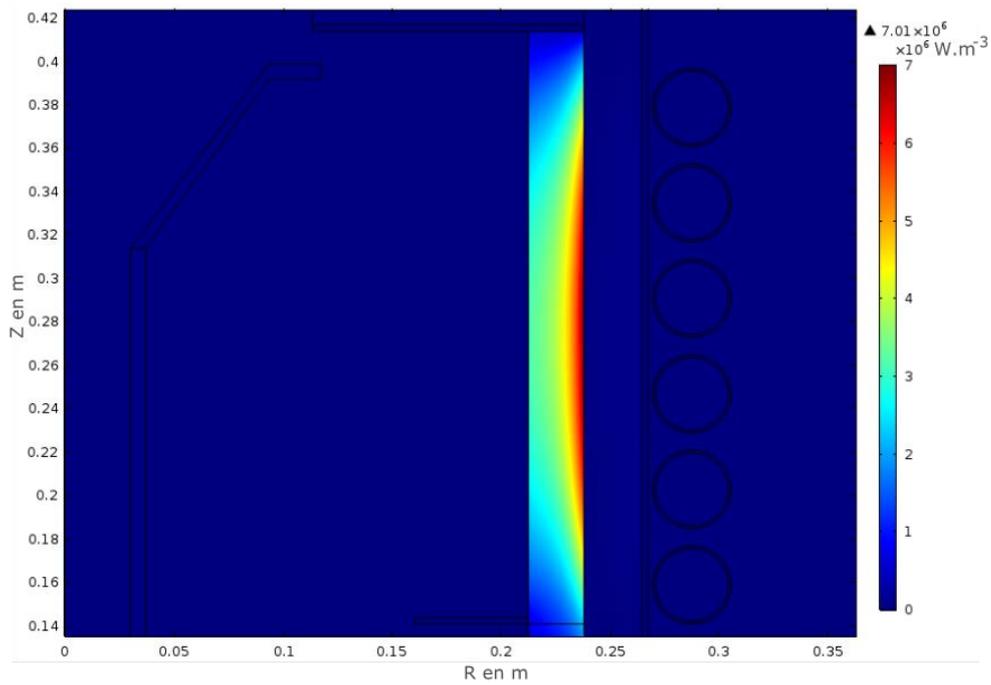


(a) inducteur haut allumé

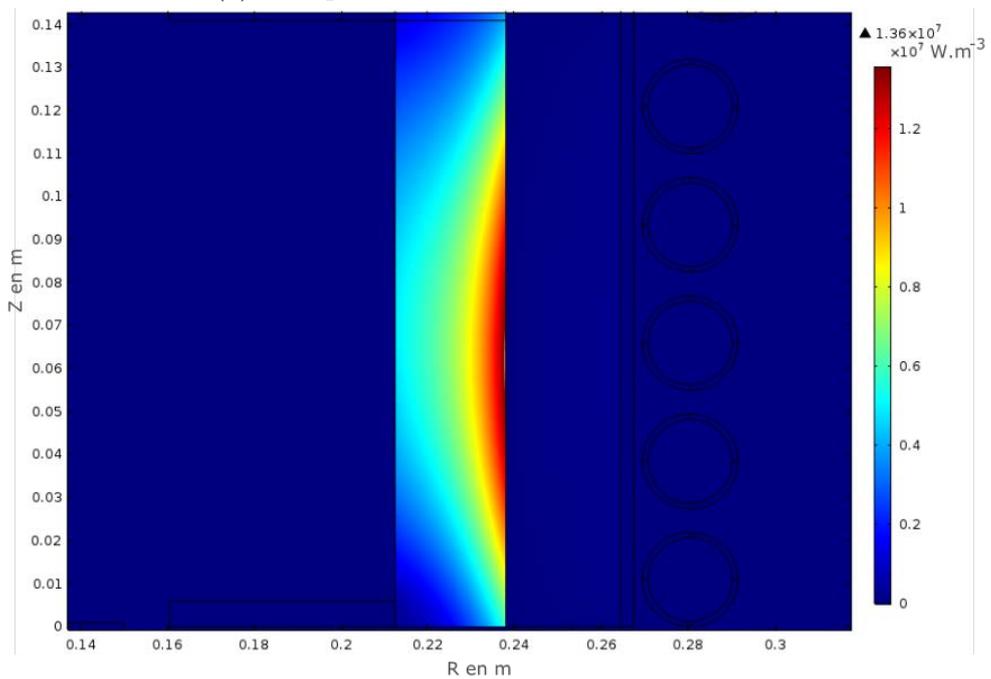


(b) inducteur bas allumé

Fig. 3.14 – Présentation des contours du module du vecteur potentiel magnétique complexe pour le courant concentré sur la face inducteur en vis à vis avec la charge et allumage de l'inducteur haut ou bas



(a) suscepteur haut - inducteur haut allumé



(b) suscepteur bas - inducteur bas allumé

Fig. 3.15 – Présentation des contours de la puissance de chauffe volumique dans les suscepteurs haut et bas obtenues par induction pour les inducteurs haut et bas alimentés respectivement

TABLE 3.5 – Puissance de chauffe effective pour une puissance électrique de 40.48 kW et rendement du système η à partir du modèle COMSOL

Inducteur allumé	Puissance de chauffe en W	$\eta_{\text{modèle}}$ en %	$\eta_{\text{fournisseur}}$ en %
haut	33614	83	86.6
bas	34814	78.6	80.9

3.3.2 Résolution du problème thermique

3.3.2.1 Présentation du modèle thermique pour le module de chauffe

Contrairement au modèle FlexPDE, le modèle thermique sous COMSOL est résolu sur l'ensemble de l'enceinte du module de chauffe, voir figure 3.16. Les températures sont imposées aux surfaces des éléments métalliques, c'est à dire de l'inducteur, de l'anneau, de la base de la sole en contact avec la circulation d'eau et de la paroi en acier de l'enceinte, voir la figure 3.16. Les faces extérieures des parois en acier sont fixées à la température ambiante soit 293 K. Les parois en acier supérieures et inférieures ne sont pas représentées sur ce schéma mais elles vérifient les mêmes règles que la paroi latérale en acier. L'extérieur des spires de l'inducteur ont une température fixe de 373 K qui correspond à la température moyenne mesurée lorsque le four est en fonctionnement. La température des faces inférieures de la sole et de l'anneau est fixée à 293 K car ce sont les faces qui sont en contact avec l'eau de refroidissement.

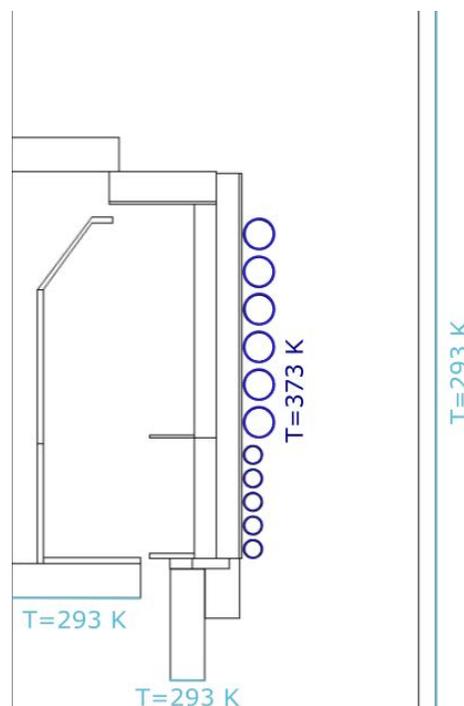


Fig. 3.16 – Présentation des conditions aux limites de Dirichlet pour les parois métalliques

Les émissivités des parois du système sont données en figure 3.17. L'acier est poli mais nous considérerons que sa surface est diffuse du fait du léger encrassement subi lors de l'utilisation. L'émissivité est fixée à 0.05. Les surfaces des éléments en graphites isolant, des papyexs et de l'isolant électrique en surface de l'inducteur ont une émissivité estimée à 0.5. L'émissivité du suscepteur est estimée à 0.7 et celle de la grappe céramique à 0.6. Enfin, nous avons pris une émissivité de 0.1 pour les éléments en cuivre.

Les transferts radiatifs sont résolus par la méthode des radiosités présentées en section 1.2.2.2.5. Le calcul des facteurs de forme des éléments finis de surface est réalisé à l'aide de la méthode de Monte-Carlo.

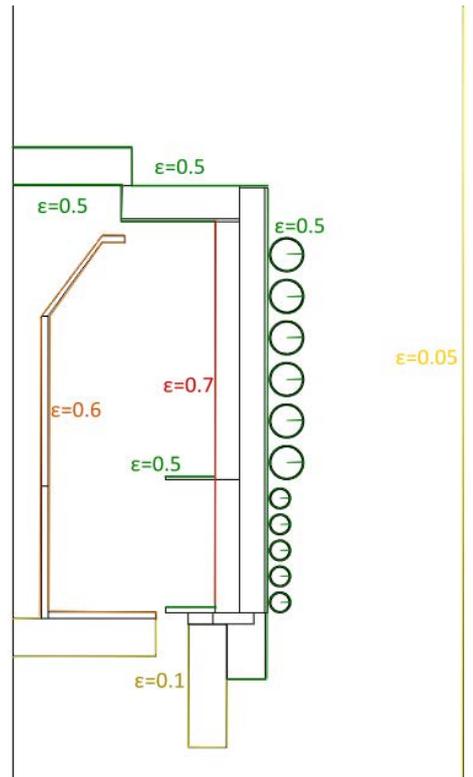


Fig. 3.17 – Présentation des émissivités pour l'ensemble des parois du système

3.3.2.2 Résultats thermique de la modélisation COMSOL

Des simulations four à vide ou four chargé avec moule ont été réalisées. Nous allons présenter les résultats d'une simulation pour un four chargé avec le moule correspondant à une expérience réalisée sur four réel. La géométrie est celle présentée au cours de la section précédente. Les puissances électriques sources correspondent aux distributions temporelles présentées en 3.18. Les conditions initiales correspondent à un four dont la grappe et les suscepteurs sont à 1173 K.

De la même façon que pour le cas FlexPDE, nous obtenons des cartographies de température dans l'enceinte du four à un instant donné, voir la figure 3.19 et nous pouvons aussi extraire des températures locales, voir la figure 3.20, ou moyennées spatialement, voir la figure 3.21. Les distributions temporelles des températures locales sont définies par leurs coordonnées dans le module de chauffe dans le référentiel utilisé en figure 3.19. Ainsi, $T^h(0.226, 0.271)$ correspond au point de prise de température dans le suscepteur haut aux coordonnées (R, Z) fournies et $T_m^h(0.034, 0.271)$ correspond à son homologue sur le moule. Les distributions temporelles des températures moyennées sur le suscepteur haut (T^h), le suscepteur bas (T^b), la partie haute du moule (T_m^h) et la partie basse du moule (T_m^b) correspondent aux définitions données dans la section précédente 3.2.2.2.

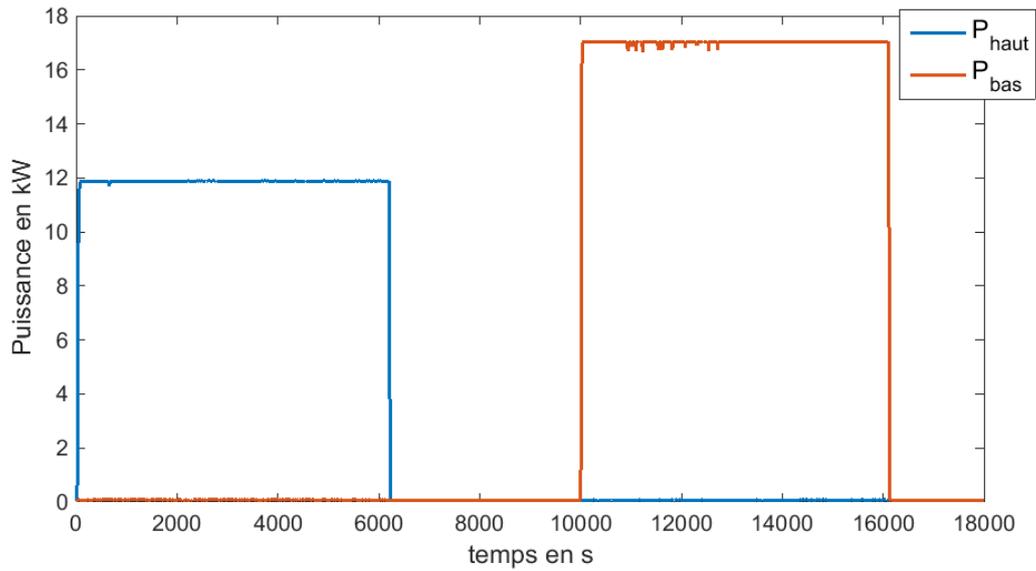


Fig. 3.18 – Distribution temporelle de la puissance électrique consommée par l'inducteur haut et l'inducteur bas pour la simulation COMSOL, issues de la mesure sur l'armoire de puissance

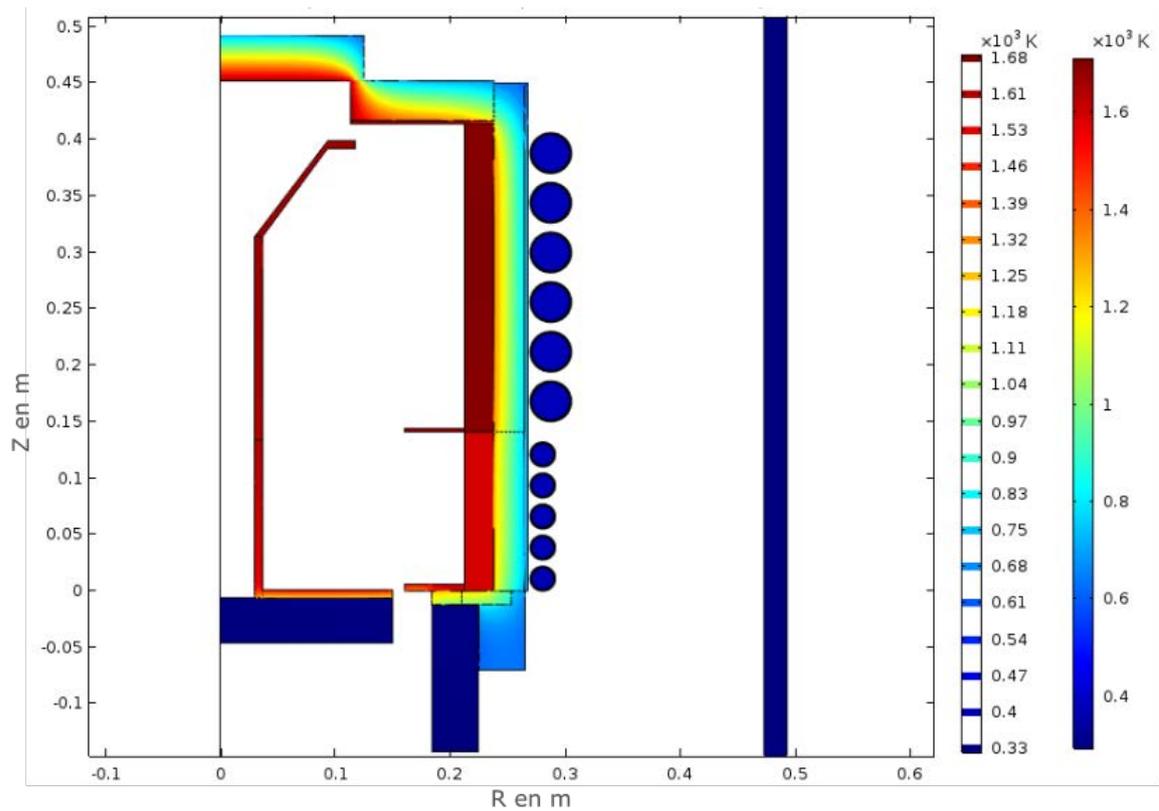


Fig. 3.19 – Champ de température à 5000 s suite à la distribution temporelle de puissance présentée en 3.18 et pour une température initiale des suscepteurs et du moule à 1173 K

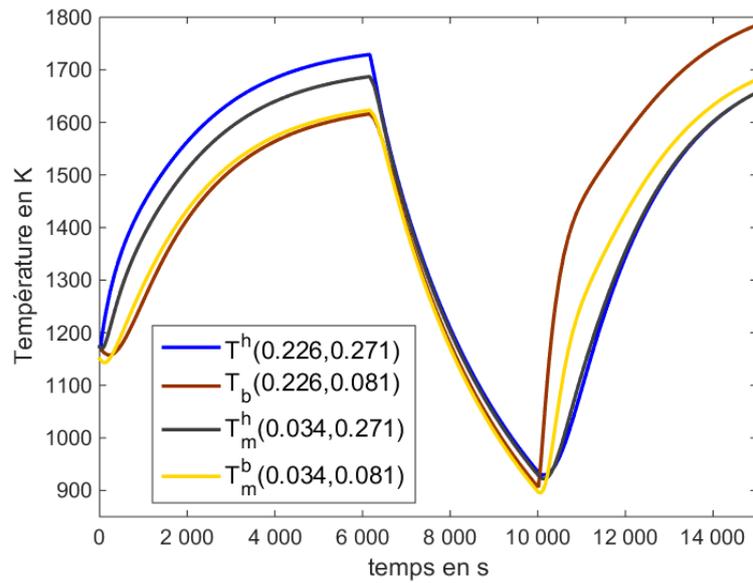


Fig. 3.20 – Profils de température locale, issus du modèle COMSOL, pris dans le moule et le suscepteur pour la distribution de puissance présentée en 3.8

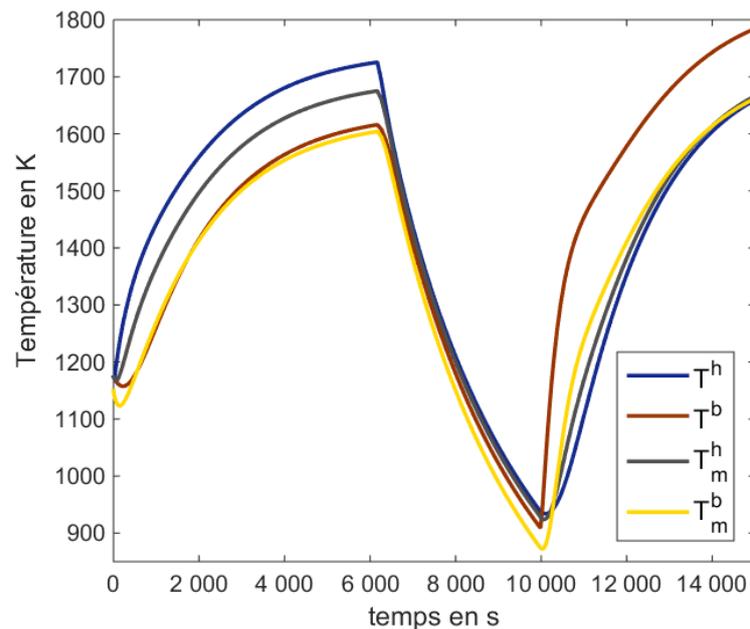


Fig. 3.21 – Profils de températures moyennées, issus du modèle COMSOL, pris dans le moule et le suscepteur pour la distribution de puissance présentée en 3.8

3.4 Conclusions

Les 2 modèles FlexPDE et COMSOL sont fonctionnels. Le premier modèle est en fait basé simplement sur des données fournisseurs. Le second modèle a fait l'objet d'un travail d'optimisation afin de correspondre aux expériences sur un four de production.

Nous utiliserons principalement le modèle FlexPDE pour l'étude des modèles réduits physiques. Il servira de modèle détaillé à partir duquel les réductions de modèle ont été

réalisées, voir section 4.1. Le modèle COMSOL est quant à lui utilisé comme modèle détaillé pour les modèles paramétriques type ARX, voir la section 4.4. L'optimisation a été réalisée pour le modèle COMSOL plutôt que pour le modèle FlexPDE car la résolution par la méthode P_n est moins robuste que la méthode des radiosités pour des milieux comme le vide, c'est à dire très peu diffusants et très faiblement absorbants,[3].

Bibliographie

- [1] PDE solutions Inc, *Technical descriptions of FlexPDE 5.0 User guide*, 2008.
- [2] COMSOL Inc, *Comsol Multiphysics 5.2 User guide*, 2016.
- [3] J. R. HOWELL, M. P. MENGÜÇ et R. SIEGEL, *Thermal radiation heat transfer*. Boca Raton London New York : CRC Press, sixth edition éd., 2016.

Chapitre 4

Conception de modèles réduits

A travers ce chapitre, nous souhaitons proposer plusieurs types de modèles réduits permettant de représenter le comportement du four de maintien en fonderie. L'intérêt de ces modèles réduits est d'être représentatif du système tout en ne requérant qu'un temps de calcul limité. Ils permettent ainsi de suivre en temps réel le bon déroulement du processus ou d'identifier des paramètres physiques pertinents. Différentes approches vont être proposées au cours de ce chapitre, nous étudierons alors leurs potentiels et leurs limites. Le travail sera basé sur les modèles détaillés précédemment dans le chapitre 3.

La première est une approche physique construite à partir d'un modèle 0D non linéaire d'échange entre le suscepteur, la grappe et l'extérieur. La seconde est basée sur un modèle dit 0.5D linéaire correspondant alors à un modèle convolutif. Le moule est considéré 1D (modèle d'ailette) et les suscepteurs sont des petits corps. La dernière approche est une approche paramétrique, nous utiliserons des modèles AutoRégressifs avec variables exogènes (ARX). Nous comparerons cette approche paramétrique avec le modèle convolutif.

Sommaire

4.1	Le modèle 0D non-linéaire	64
4.1.1	La structure du modèle 0D : hypothèses et système	64
4.1.2	Estimation des paramètres pour le modèle RM1	67
4.1.3	Explication statistique des paramètres issus de l'estimation des paramètres pour le modèle RM1	70
4.1.4	Estimation des paramètres pour le modèle RM2	72
4.1.5	Validation du modèle 0D pour des points de mesure suffisamment éloignés de la sole	75
4.2	Le modèle 0.5D linéaire convolutif	77
4.2.1	Structure du modèle et hypothèses	77
4.2.2	Calculs des solutions stationnaire et transitoire du modèle 0.5D	79
4.2.3	Sorties du modèle 0.5D dans le domaine temporel	83
4.3	Modèles ARX et le modèle convolutif 0.5D linéaire	85
4.3.1	Le modèle ARX	86
4.3.2	Une vision paramétrique du modèle convolutif 0.5D	87
4.3.3	Comportement et vision convolutive du modèle ARX	87

4.4	Modèle ARX et modèle détaillé COMSOL	93
4.4.1	ARX température du suscepteur et du moule	96
4.4.2	ARX puissance électrique et température du moule	98
4.4.3	ARX puissance électrique et température du moule et ajout d'une constante	100
4.5	Synthèse des travaux sur les modèles réduits	106

4.1 Le modèle 0D non-linéaire

Nous travaillerons dans cette section à partir du modèle détaillé FlexPDE réalisé dans la section 3.2.

4.1.1 La structure du modèle 0D : hypothèses et système

4.1.1.1 Rappel de la structure du modèle détaillé

Les échanges en jeu dans le module de chauffe peuvent être représentés schématiquement sous la forme de la figure 4.1. Les suscepteurs haut et bas sont chauffés par une densité de puissance volumique résultant de l'induction. Ils échangent de la chaleur par rayonnement avec le moule. Le moule est positionné sur une sole refroidie activement par eau. Les échanges sont modélisés par une résistance de contact et un coefficient d'échange h_{sole} . Les pertes latérales s'effectuent par échange radiatif avec l'inducteur.

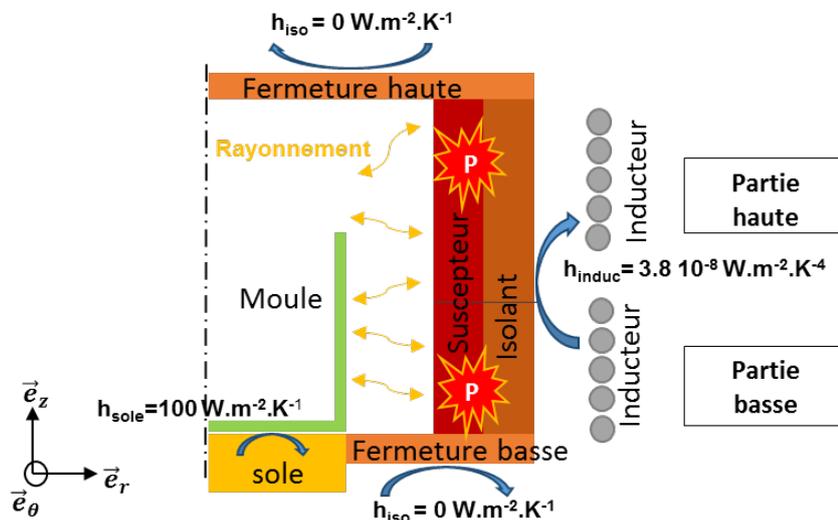


Fig. 4.1 – Représentation schématique du module de chauffe modélisé sous FlexPDE dans la partie 3.2

Des cartographies de la température au sein du module de chauffe ont été présentées dans la section 3.2. Par exemple, la cartographie de la température du module de chauffe à $t = 2156$ s, pour la distribution de puissance présentée en figure 4.2, est donnée en figure 4.3. Les différents points d'observation de la température par thermocouple ainsi que les différentes zones du module, que nous utiliserons par la suite, y sont présentés.

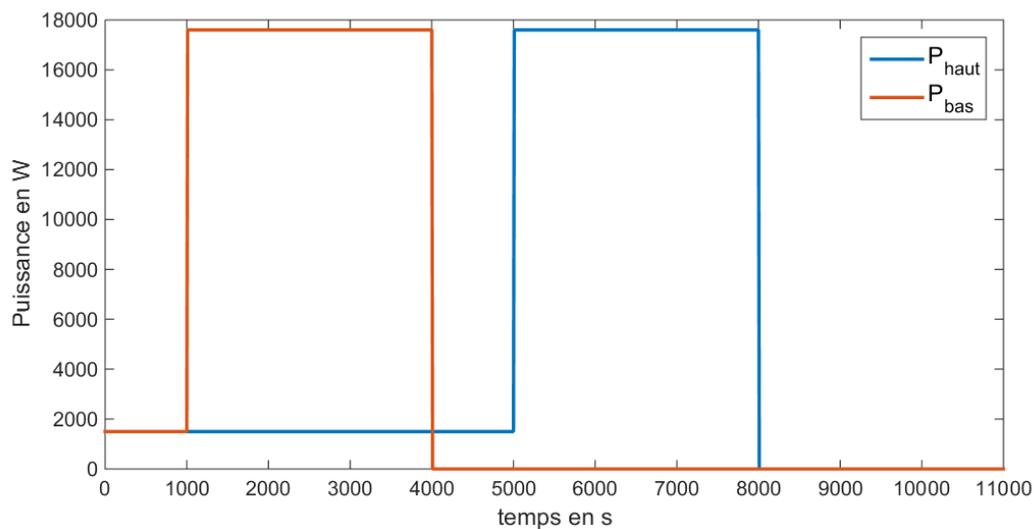


Fig. 4.2 – Distribution temporelle de la puissance électrique consommée par l'inducteur haut (P_{haut}) et l'inducteur bas (P_{bas})

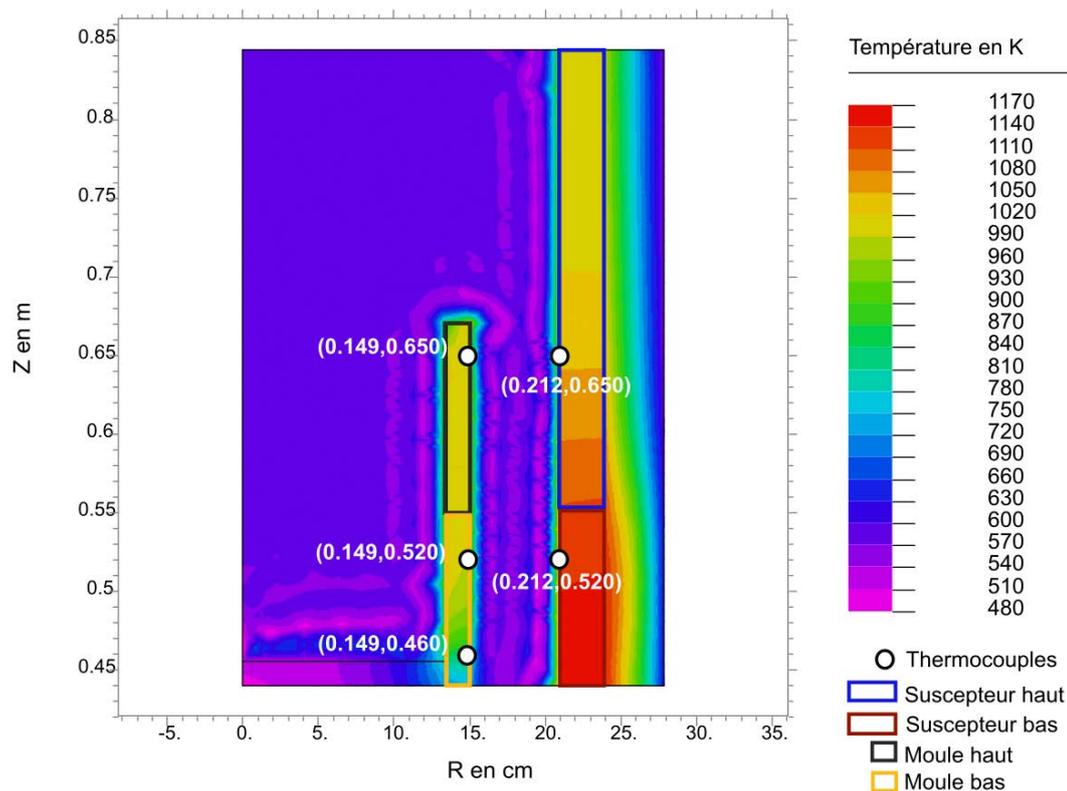


Fig. 4.3 – Champ de température au sein du module de chauffe pour la simulation FlexPDE avec les points d'observation de la température et la répartition des 4 zones spatiales

Les distributions temporelles de température correspondant aux points d'observation sont rappelées en figure 4.8 pour les températures locales et en figure 4.5 pour les températures moyennées par zone dans les sections suivantes.

4.1.1.2 Définition de la structure du modèle réduit

L'observation de la figure 4.3 montre que les champs de température dans les suscepteurs haut et bas peuvent être considérés comme uniformes compte tenu du niveau moyen de température auxquels ils sont soumis. Ceci justifie, la modélisation des suscepteurs par des petits corps. Leur température est appelée respectivement $T_h(t)$ pour le suscepteur haut et $T_b(t)$ pour le suscepteur bas. Ces deux températures sont pilotées dans le four de production, nous allons étudier leur évolution en fonction des températures du moule et de la puissance de chauffe. La température dans la partie haute du moule est uniforme alors que la partie basse du moule est soumise à un fort gradient de température. Nous utiliserons aussi les températures moyennées par zone en ce qui concerne le moule. Elles sont données par :

$$\tilde{T}_m^{h,b} = \frac{1}{V_m^{h,b}} \int_{V_m^{h,b}} T(r, z, t) 2\pi r dr dz \quad (4.1)$$

Les exposants h et b correspondent à l'appartenance à la partie haute ou basse d'un élément et l'indice m l'appartenance au moule. Ainsi, V_m^h et V_m^b sont les volumes respectifs de la partie haute et de la partie basse du moule. Le volume bas du moule correspond à la zone encadré en jaune dans la figure 4.3.

Les échanges radiatifs entre le moule et les suscepteurs sont modélisés par une résistance radiative équivalente $X_{int}^{h,b}$ en m^{-2} associée à la constante de Stefan-Boltzmann σ . Nous considérons qu'il n'y a pas de transfert de chaleur, par conduction et par rayonnement, entre les parties haute et basse. Les pertes avec l'extérieur sont modélisées par une résistance conducto-radiative équivalente $R_{ext}^{h,b}$ en $K.W^{-1}$. Cette dernière correspond aux échanges entre les suscepteurs et la surface des inducteurs à travers le fourreau. L'échange radiatif entre le fourreau et la surface de l'inducteur est linéarisé car la température de surface extérieure du fourreau est proche de celle de l'inducteur.

Les suscepteurs sont chauffés par des sources de chaleur modélisées par deux rendements directs η_{hh} et η_{bb} et deux rendements croisés η_{hb} et η_{bh} . Les rendements directs correspondent à la puissance apportée au suscepteur par l'inducteur en vis à vis et les rendements croisés correspondent à la puissance apportée au suscepteur par l'autre inducteur. Par exemple, l'inducteur haut engendre une densité de puissance volumique dans les suscepteurs dont une partie est utile au suscepteur bas et c'est au travers du rendement croisé η_{bh} que ce phénomène est traduit. Le modèle réduit est défini à partir du système d'équations 4.2.

$$\rho C_p V_h \frac{\partial \tilde{T}_h}{\partial t} = \eta_{hh} P_{haut}(t) + \eta_{hb} P_{bas}(t) - \frac{1}{R_{ext}^h} (\tilde{T}_h - T_{ext}) - \frac{\sigma}{X_{int}^h} (\tilde{T}_h^4 - \tilde{T}_m^{h^4}) \quad (4.2a)$$

$$\rho C_p V_b \frac{\partial \tilde{T}_b}{\partial t} = \eta_{bh} P_{haut}(t) + \eta_{bb} P_{bas}(t) - \frac{1}{R_{ext}^b} (\tilde{T}_b - T_{ext}) - \frac{\sigma}{X_{int}^b} (\tilde{T}_b^4 - \tilde{T}_m^{b^4}) \quad (4.2b)$$

Les rendements directs η_{hh} et η_{bb} , les rendements croisés η_{hb} et η_{bh} , les résistances équivalentes d'échange avec l'extérieur R_{ext}^h et R_{ext}^b , et les résistances radiatives équivalentes d'échange avec le moule X_{int}^h et X_{int}^b sont les paramètres à estimer. Le système non-linéaire 4.2 est résolu à l'aide de la suite Matlab de résolution des équations différentielles ordinaires [1].

Les entrées du modèle réduit (RM1) sont les distributions temporelles de puissances consommées par les inducteurs haut P_{haut} et bas P_{bas} ainsi que les températures moyennes des deux zones du moule \tilde{T}_m^h et \tilde{T}_m^b . La température de surface des inducteurs dite extérieure T_{ext} est égale à une constante de 473 K. Les sorties du modèle sont les températures moyennées des suscepteurs haut et bas, respectivement \tilde{T}_h et \tilde{T}_b . Le diagramme présenté en figure 4.4 résume la structure du modèle 0D choisi.

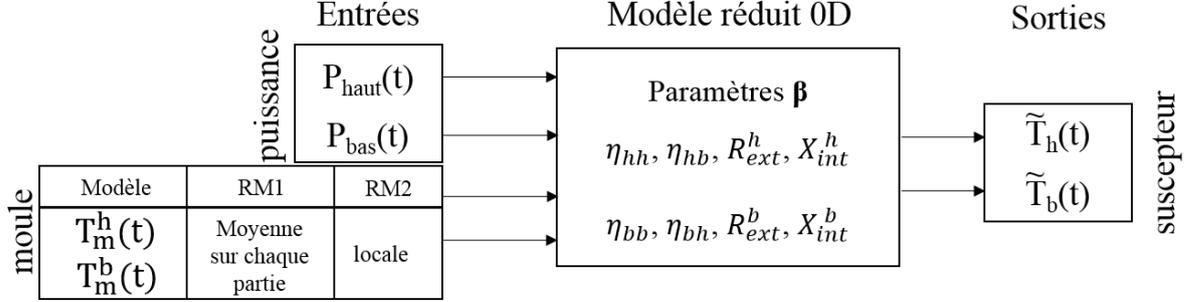


Fig. 4.4 – Représentation schématique des modèles réduits RM1 et RM2 avec leurs entrées et leurs sorties

4.1.2 Estimation des paramètres pour le modèle RM1

Au cours de cette partie, nous allons estimer les huit paramètres du modèle RM1 à l'aide de l'algorithme de minimisation de Levenberg-Marquardt [2]. Les entrées et les sorties du modèle RM1 sont données par les sorties du modèle détaillé pour les profils temporels de sources de puissance correspondant à la figure 4.2. Les températures utilisées sont les quatre températures moyennées spatialement $\tilde{T}_{h,b}$ et $\tilde{T}_m^{h,b}$ présentées en figure 4.5. Les paramètres sont initialisés à partir de calculs d'ordre de grandeur afin d'être au plus proche des valeurs après estimation, voir la première ligne du tableau 4.1.

Les profils de température recalculés pour les suscepteurs haut et bas à partir des valeurs estimées des 8 paramètres sont présentés en figure 4.6 avec les profils de sortie du modèle détaillé (synthétique). Les résidus $e_{h,b}$ correspondants sont présentés en figure 4.7. Les valeurs des 8 paramètres estimés sont fournies dans le tableau 4.1.

L'erreur quadratique moyenne (RMS) est égale à 3.1 K pour le suscepteur haut et à 19.5 K pour le suscepteur bas. L'erreur RMS est comparable, pour la partie haute, à l'erreur sur la mesure de température par les thermocouples (bruit de mesure) qui est de l'ordre de 5 K. Ainsi, le modèle RM1 est capable de représenter le modèle détaillé pour la partie haute du module, voir la superposition des courbes synthétique et recalculée bleues en figure 4.6. Par contre, le modèle RM1 est incapable de représenter le modèle détaillé pour la partie basse. Ce fait est illustré par l'importance de l'erreur quadratique moyenne, les importantes fluctuations des résidus pour la partie basse e_b et enfin les valeurs irréalistes prises par certains paramètres. Par exemple, la résistance équivalente avec l'extérieur R_{ext}^b prend la valeur de $4.97 \cdot 10^{10} K.W^{-1}$ et la somme des rendements direct et indirect pour l'inducteur haut ($\eta_{hh} + \eta_{hb}$) est supérieure à 1. Ces éléments montrent que le modèle est physiquement biaisé.

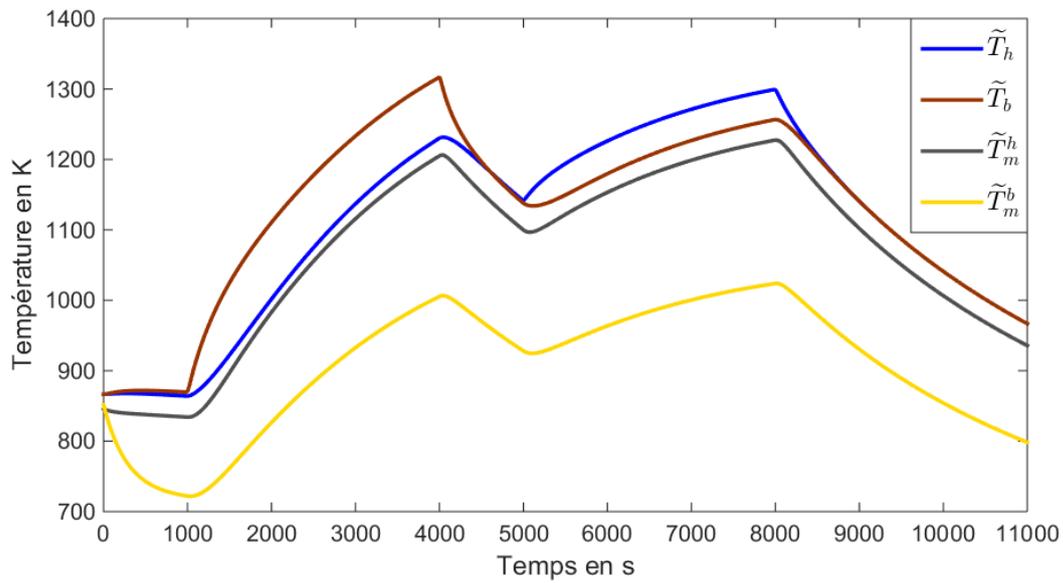


Fig. 4.5 – Profils de températures moyennées, issus du modèle FlexPDE, pris dans le moule et le suscepteur pour la distribution de puissance présentée en 4.2

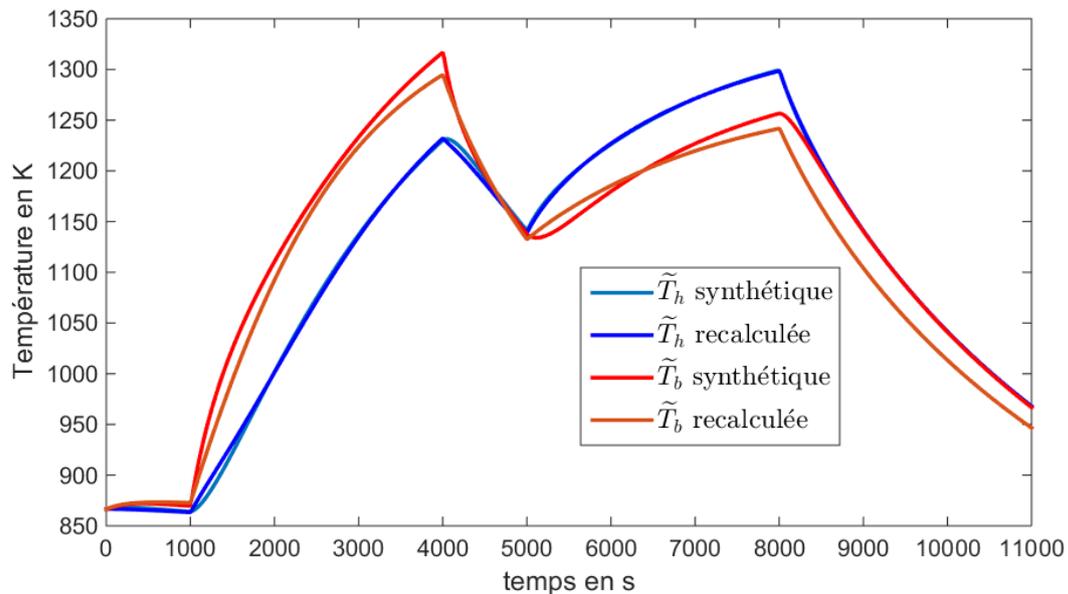


Fig. 4.6 – Profils de températures moyennées des suscepteurs haut et bas issus du modèle détaillé FlexPDE (synthétique) et du modèle réduit RM1 (recalculé) avec les paramètres estimés par l’algorithme de Levenberg-Marquardt

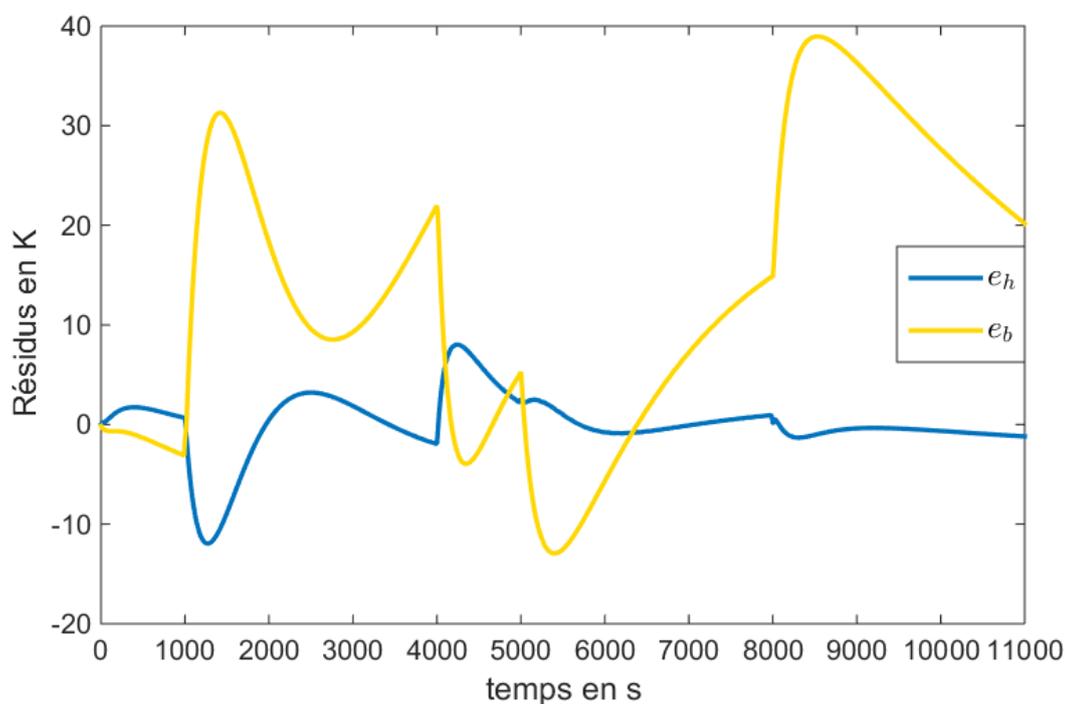


Fig. 4.7 – Profils des résidus correspondant à la différence entre le modèle détaillé et le modèle RM1 pour les suscepteurs haut et bas, voir en figure 4.6, avec les paramètres estimés par l’algorithme de Levenberg-Marquardt

TABLE 4.1 – Valeurs des 8 paramètres avant estimation et après estimation pour le cas RM1 sans bruit

	η_{hh}	η_{hb}	η_{bb}	η_{bh}	R_{ext}^h	R_{ext}^b	X_{int}^h	X_{int}^b
unités	/	/	/	/	$K.W^{-1}$	$K.W^{-1}$	m^{-2}	m^{-2}
initialisation	0.8	0.05	0.8	0.05	0.1	0.1	5	10
estimation	0.809	0.483	0.425	0.294	0.720	$4.97 \cdot 10^{10}$	3.082	15.31

En fait, la figure 4.3 montre la présence d'un important gradient dans la partie basse du moule à cause de la sole refroidie. Ce propos est illustré avec la figure 4.8. La base du moule est positionnée à 0.44 m. Les trois courbes de température du moule $T_m^b(0.149, 0.460)$, $T_m^b(0.149, 0.520)$ et $T_m^h(0.149, 0.650)$ correspondent donc respectivement aux hauteurs 20 , 80 et 210 mm. La température $T_m^b(0.149, 0.460)$ est très inférieure à la température $T_m^b(0.149, 0.520)$ qui est quant à elle proche de la température d'un point de la partie haute du moule $T_m^h(0.149, 0.650)$.

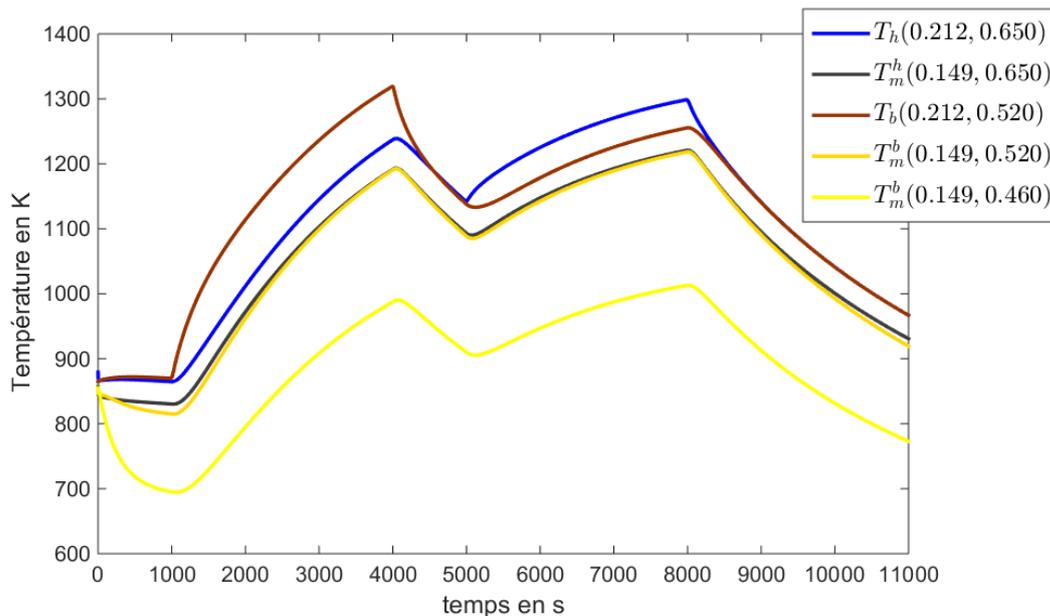


Fig. 4.8 – Profils de températures locales, issus du modèle FlexPDE, pris dans le moule et le susceptible pour la distribution de puissance présentée en 4.2

Nous avons choisi de moyenner spatialement la température de la partie basse du moule afin de réaliser notre modèle mais cette intégration biaise le modèle en considérant la partie basse du moule comme un petit corps.

4.1.3 Explication statistique des paramètres issus de l'estimation des paramètres pour le modèle RM1

La qualité de l'estimation des paramètres peut être mesurée par des indicateurs issus de la matrice de sensibilité réduite. Soit $\boldsymbol{\eta}$ un modèle de la forme $\mathbf{y} = \boldsymbol{\eta}(t, \boldsymbol{\beta})$, où \mathbf{y} est la sortie du modèle à l'instant t et $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_n]^T$ est le vecteur paramètre composé de n paramètres β_j (ici $n = 8$). Ainsi, pour un nombre d'observations m , la définition des coefficients de la matrice de sensibilité réduite de dimension $m \times n$ est :

$$S_{ij}^* = \beta_j \frac{\partial \eta(t_i; \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \quad t_i, \beta_k \text{ for } k \neq j \quad (4.3)$$

Le nombre de conditionnement de la matrice de sensibilité réduite est alors défini comme le rapport de ses valeurs singulières (w_i) maximale et minimale, soit :

$$\text{cond}(\mathbf{S}^*) = \frac{w_{\max}(\mathbf{S}^*)}{w_{\min}(\mathbf{S}^*)} \quad (4.4)$$

Ici, le nombre de conditionnement de la matrice de sensibilité réduite à l'initialisation est égal à environ 57 et après estimation à $3.8 \cdot 10^{11}$. Cette augmentation importante est due principalement à la dérive du paramètre R_{ext}^b dont la valeur après estimation est égale à $4.97 \cdot 10^{10}$ contre 0.1 à l'initialisation, voir 4.1.2. Ce nombre de conditionnement très élevé après estimation montre que le problème est mal posé. Maintenant, nous pouvons effectuer une analyse statistique plus fine des résultats à partir de l'étude de la matrice de sensibilité réduite.

Supposons qu'un bruit blanc d'écart-type σ est ajouté au signal synthétique, la matrice de covariance est alors définie par $\sigma^2(\mathbf{S}^{*T}\mathbf{S}^*)^{-1}$ et l'écart-type relatif pour les paramètres estimés est défini par :

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma(\beta_i)}{\beta_i} = \sigma \sqrt{[(\mathbf{S}^{*T}\mathbf{S}^*)^{-1}]_{ii}} \quad (4.5)$$

où $[\cdot]_{ii}$ désigne le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal d'une matrice. La matrice $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{*T}\mathbf{S}^*$ est appelée matrice d'information réduite. Le coefficient de corrélation entre deux paramètres β_i et β_j est alors donné par :

$$\text{cor}(\beta_i, \beta_j) = \frac{\text{cov}(\beta_i, \beta_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\mathbf{A}_{ij}}{\sqrt{\mathbf{A}_{ii}\mathbf{A}_{jj}}} \quad (4.6)$$

Nous pouvons ainsi pour un bruit donné calculer l'erreur d'estimation des paramètres en pourcentage en réalisant l'opération :

$$e_{\beta_i} = 100\sigma_i^* \quad (4.7)$$

Ces développements sont présentés en détails dans l'ouvrage de référence [3].

Supposons que ce bruit blanc ajouté ait un écart-type de $5K$, ce qui correspond au pire cas rencontré en production. Le tableau 4.2 fournit les coefficients de corrélation des paramètres par rapport au paramètre R_{ext}^b critique et le tableau 4.3 fournit les erreurs d'estimation des paramètres en pourcentage avant et après estimation.

Nous pouvons observer que le paramètre R_{ext}^b est corrélé avec les paramètres correspondant à la partie basse (η_{bb} , η_{bh} , X_{int}^b) contrairement aux paramètres de la partie haute. Les coefficients de corrélation sont significatifs mais pas handicapant pour la

TABLE 4.2 – Corrélation des paramètres avec le paramètre R_{ext}^b pour les valeurs de paramètres à l'initialisation et après estimation pour le cas des températures moyennées RM1

	η_{hh}	η_{hb}	η_{bb}	η_{bh}	R_{ext}^h	R_{ext}^b	X_{int}^h	X_{int}^b
initialisation	0	0	0.74	0.63	0	1	0	0.35
après estimation	0	0	0.57	0.31	0	1	0	0.67

TABLE 4.3 – Erreur relative d’estimation des paramètres (en % de la valeur donnée ou estimée) pour les valeurs de paramètres à l’initialisation et après estimation pour le cas des températures moyennées RM1

	η_{hh}	η_{hb}	η_{bb}	η_{bh}	R_{ext}^h	R_{ext}^b	X_{int}^h	X_{int}^b
initialisation	0.33	4.24	0.23	1.85	0.35	0.26	0.50	0.39
après estimation	0.93	0.72	0.21	0.35	10.4	$3.1 \cdot 10^{10}$	2.18	0.34

réalisation de l’estimation. Le tableau 4.3 montre que les erreurs d’estimation des paramètres, avec les valeurs à l’initialisation, sont faibles avec des niveaux inférieurs à 5 %. La dérive du paramètre R_{ext}^b suite à l’estimation engendre forcément un niveau d’erreur irréaliste pour ce paramètre mais les erreurs d’estimation pour les autres paramètres sont contenues avec des niveaux inférieurs à 11 %.

Le problème est mal posé mais la dérive du paramètre R_{ext}^b est majoritairement due au biais de modèle réduit. Malgré ce biais des résidus corrects peuvent être trouvés en prenant des points de mesure sur le moule suffisamment éloignés de la sole, voir les résultats pour la température du susceptible haut (\tilde{T}_h) en 4.6 et 4.7.

4.1.4 Estimation des paramètres pour le modèle RM2

Comme le modèle RM1 est incapable de suivre la température moyenne synthétique du susceptible bas, un modèle réduit RM2 a été testé. La structure du modèle RM2 est présentée en figure 4.4. Le modèle RM2 a exactement la même structure que le modèle RM1 (voir équations 4.2). Les températures utilisées ne sont plus des températures moyennées pour le moule et les suscepteurs mais les températures locales présentées en figure 4.8. Les températures locales du moule et des suscepteurs ont été bruitées par un bruit blanc numérique d’écart type 5 K afin de se rapprocher des conditions réelles de mesure de température, voir figure 4.9.

Nous allons étudier deux cas : le premier est appelé cas 80 mm et le second est appelé cas 20 mm. Le cas 80 mm utilise la température locale synthétique bruitée du moule $T_m^b(0.149, 0.520)$ et le cas 20 mm utilise la température locale synthétique bruitée du moule $T_m^b(0.149, 0.460)$. Dans les 2 cas, la température $T_m^h(0.149, 0.650)$, c’est à dire à 210 mm, est aussi utilisée pour l’estimation.

Après une estimation par méthode des moindres carrés non-linéaire du même type qu’à la section précédente 4.1.2, les profils de températures recalculées reproduisent les profils de température issus du modèle détaillé pour le cas 80 mm avec un bon accord, voir la figure 4.10. L’erreur quadratique moyenne est égale à 6.2 K pour le susceptible haut et 6 K pour le susceptible bas. L’erreur RMS est donc très proche de l’écart type du bruit blanc numérique ajouté.

Les profils de température correspondant aux températures recalculées et synthétiques bruitées pour le cas 20 mm sont présentées en figure 4.11. Pour ce cas, l’erreur RMS est de l’ordre de 6 K pour le susceptible haut et de 24.2 K pour le susceptible bas. Le comportement de la température recalculée pour le susceptible bas dans le cas 20 mm ressemble au comportement du cas avec les températures moyennées, voir la figure

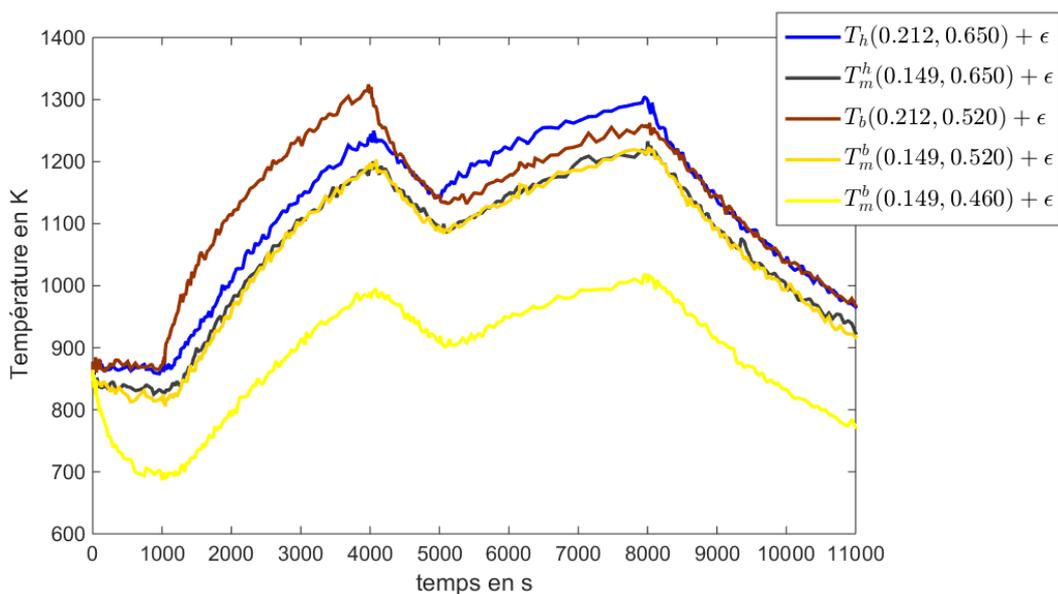


Fig. 4.9 – Profils de températures locales, issus du modèle FlexPDE, pris dans le moule et le suscepteur pour la distribution de puissance présentée en 4.2 avec ajout d’un bruit blanc synthétique ϵ

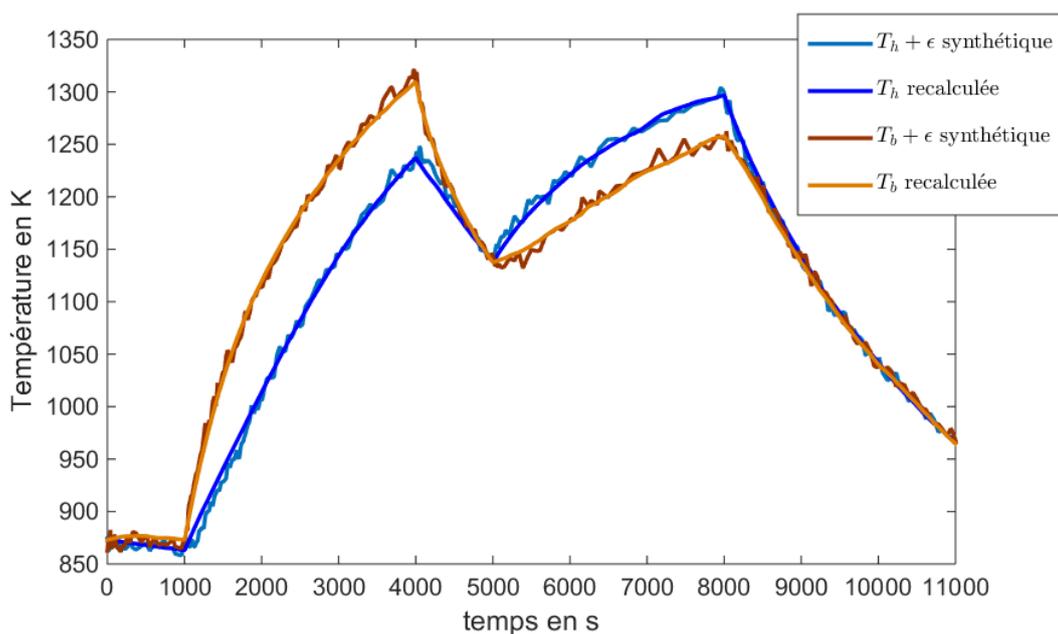


Fig. 4.10 – Profils de températures locales des suscepteurs haut et bas issus du modèle détaillé FlexPDE (synthétique) et du modèle réduit RM2 (recalculé) pour le cas 80 mm avec les paramètres estimés par l’algorithme de Levenberg-Marquardt

4.6. Le modèle est dans l’incapacité de suivre le profil de température synthétique pour le suscepteur bas avec des résidus supérieurs à 30 K pour la seconde phase de relaxation de 8000 s à 11000 s.

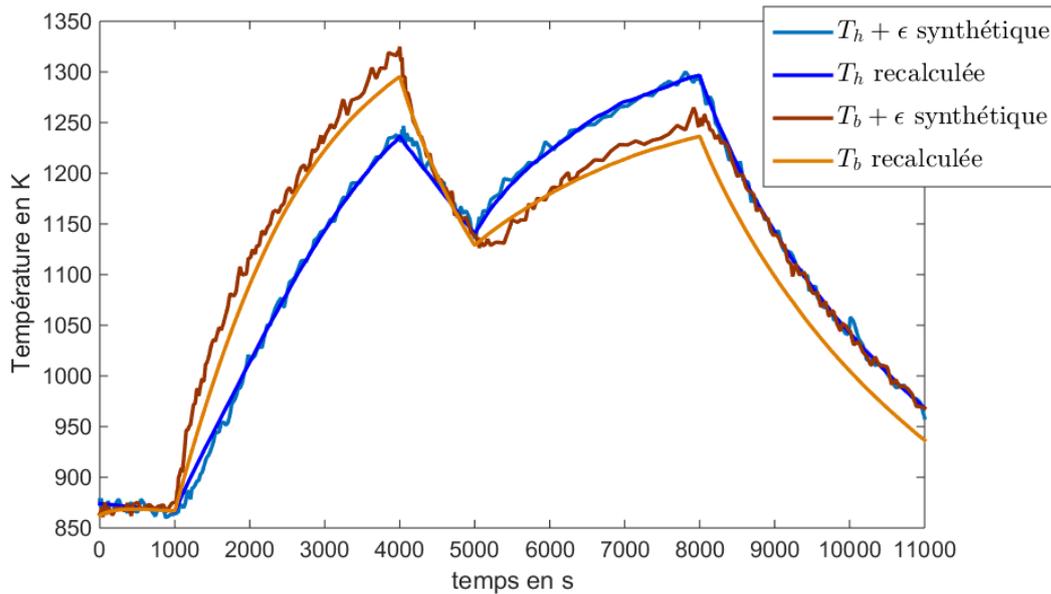


Fig. 4.11 – Profils de températures locales des suscepteurs haut et bas issus du modèle détaillé FlexPDE (synthétique) et du modèle réduit RM2 (recalculé) pour le cas 20 mm avec les paramètres estimés par l’algorithme de Levenberg-Marquardt

Les valeurs des paramètres estimés sont données dans le tableau 4.4 pour les cas 80 mm et 20 mm. Comme nous avons pu l’observer dans la section 4.1.2, le paramètre R_{ext}^b prend des valeurs extrêmement élevées dans les deux cas. Nous pouvons aussi remarquer que sa valeur décroît quand la distance du point de mesure par rapport à la sole augmente. La somme des rendements direct et indirect peut encore être supérieure à l’unité dans le cas RM2. Ainsi, le modèle ne représente pas de façon intrinsèque la physique du module de chauffe, malgré sa capacité à estimer correctement les 8 paramètres, en particulier pour le cas 80 mm, pour un couple de puissance de consigne (P_{haut}, P_{bas}) donné.

TABLE 4.4 – Valeurs des 8 paramètres avant estimation et après estimation pour les cas RM2 avec bruit 20 mm et 80 mm

	η_{hh}	η_{hb}	η_{bb}	η_{bh}	R_{ext}^h	R_{ext}^b	X_{int}^h	X_{int}^b
initialisation	0.8	0.05	0.8	0.05	0.1	0.1	5	10
cas 80 mm	0.702	0.573	0.653	0.213	0.327	$1.18 \cdot 10^4$	4.632	5.053
cas 20 mm	0.728	0.559	0.437	0.294	0.516	$9.2 \cdot 10^{13}$	3.85	15.49

4.1.5 Validation du modèle 0D pour des points de mesure suffisamment éloignés de la sole

Au cours de la partie précédente, les paramètres du modèle RM2 ont été estimés. Nous allons maintenant vérifier la reproductibilité du modèle 0D RM2 pour les points suffisamment loin de la sole malgré le fait que le modèle soit biaisé. Nous choisirons le cas de la mesure de température de la partie basse du moule à 80 mm de la sole. Pour cela, une nouvelle expérience, appelée validation, est réalisée à partir de deux nouveaux profils de puissance électrique imposés aux inducteurs haut et bas, voir la figure 4.12. Les puissances haute et basse sont identiques. Le but est d'obtenir les mêmes profils de température entre le modèle détaillé et le modèle réduit RM2. Les profils de température issus du modèle réduit RM2, avec les paramètres obtenus et présentés dans le tableau 4.4, et du modèle détaillé bruité sont présentés en figure 4.13 pour les profils de puissance imposés. Les profils temporels des résidus pour les parties haute et basse sont présentés en figure 4.14.

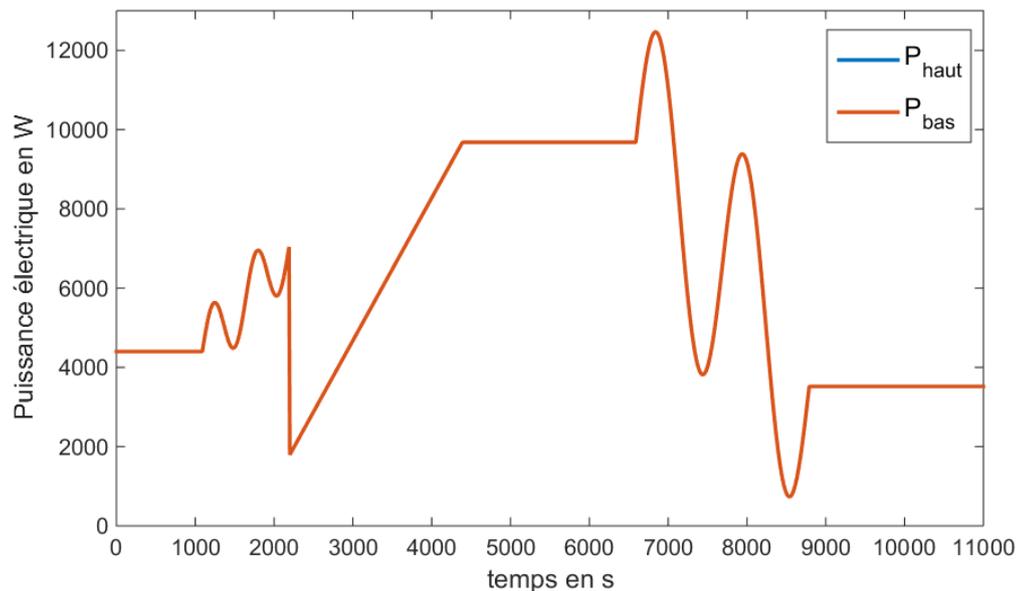


Fig. 4.12 – Distribution temporelle de la puissance électrique consommée par l'inducteur haut (P_{haut}) et l'inducteur bas (P_{bas}) pour l'expérience de validation

La différence entre le modèle détaillé et le modèle réduit RM2 est faible. L'erreur RMS est de 5 K pour la partie basse et 6.1 K pour la partie haute. Cette erreur est comparable au bruit blanc de mesure d'écart-type 5 K qui a été ajouté. Les résidus sont signés ce qui rappelle le fait que le modèle est biaisé, voir 4.14. Nous pouvons notamment remarquer une augmentation de la valeur absolue des résidus pendant la phase où la puissance est stable de 4560 s à 6560s. Cela montre que le modèle est précis pour les temps courts et a tendance à dériver pour les temps longs.

En conclusion, le modèle 0D est capable de reproduire le comportement du modèle détaillé lorsque les températures mesurées sur la grappe sont prises suffisamment loin de la sole et ce, même si certains de ses paramètres n'ont pas des valeurs physiquement acceptables.

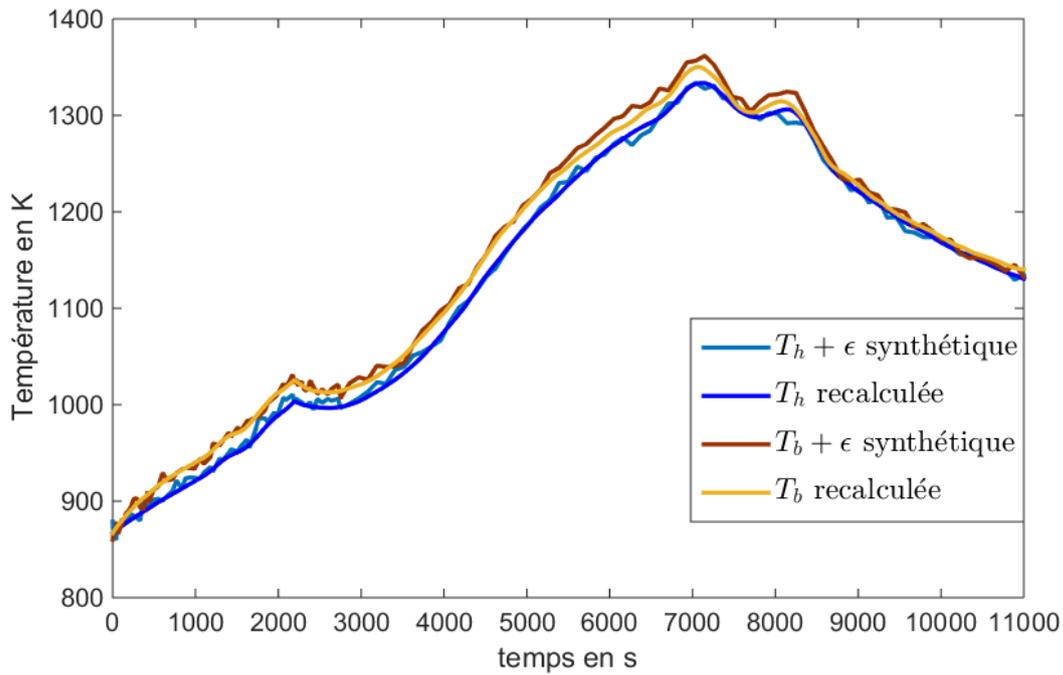


Fig. 4.13 – Profils de températures locales des suscepteurs haut et bas issus du modèle détaillé FlexPDE (synthétique) et du modèle réduit RM2 (recalculé) pour le cas 80 mm avec les paramètres estimés en première ligne du tableau 4.4

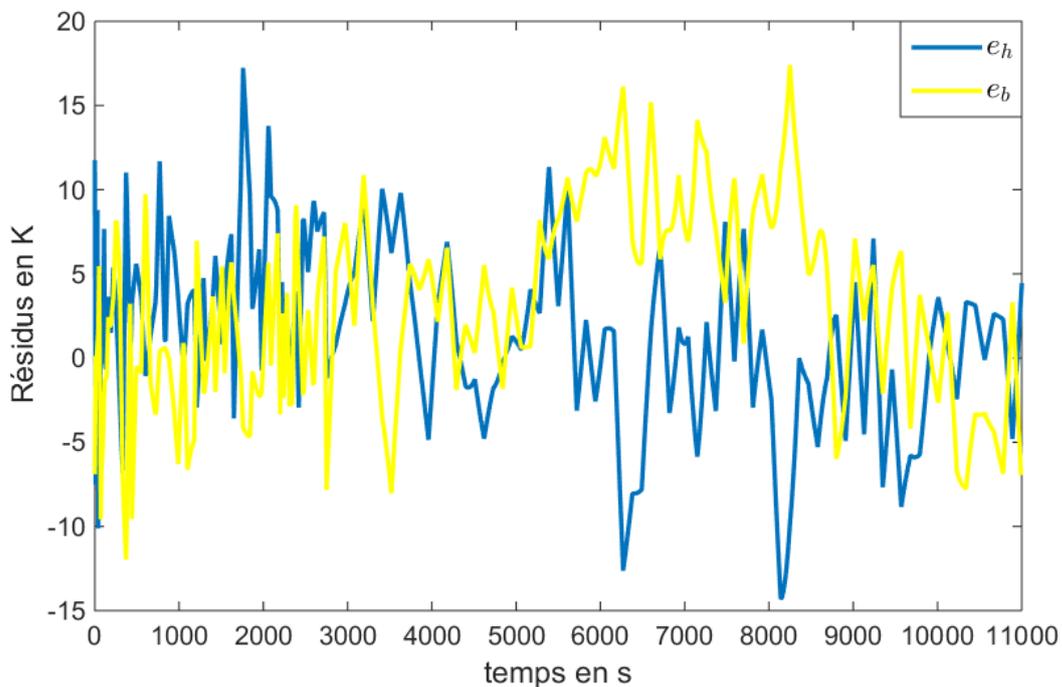


Fig. 4.14 – Profils de températures locales des suscepteurs haut et bas issus du modèle détaillé FlexPDE (synthétique) et du modèle réduit RM2 (recalculé) pour le cas 80 mm avec les paramètres estimés en première ligne du tableau 4.4

4.2 Le modèle 0.5D linéaire convolutif

Le modèle 0.5D linéaire est construit à partir d'un modèle de four à 1 zone de chauffe, voir figure 4.15. Nous comparerons par la suite ce modèle convolutif avec les modèles ARX développés à la section suivante et le modèle détaillé COMSOL présenté en section 3.3.

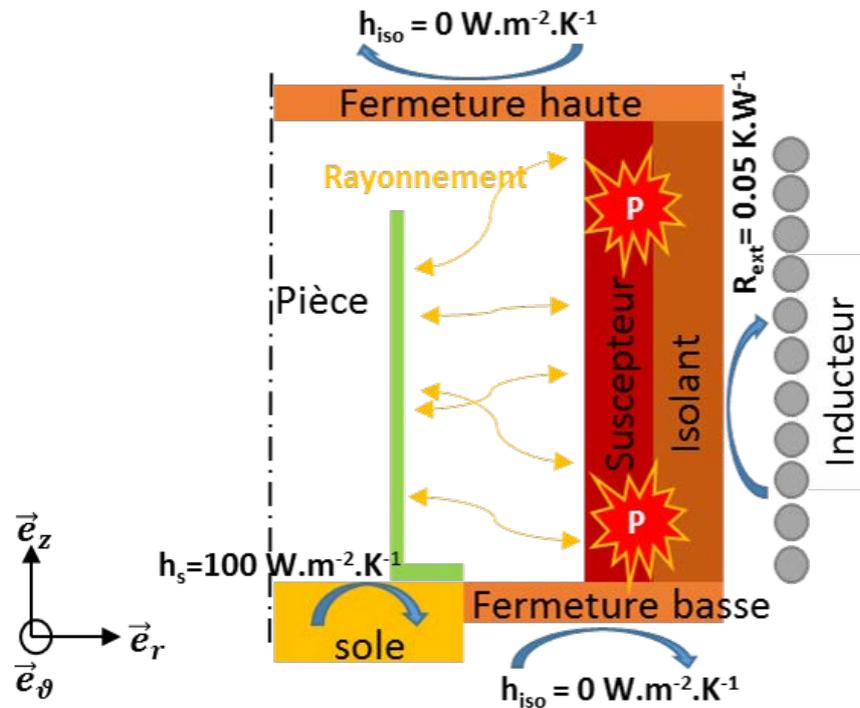


Fig. 4.15 – Configuration du module de chauffe à 1 zone de chauffe

4.2.1 Structure du modèle et hypothèses

L'idée du modèle 0.5D est de palier les problèmes rencontrés avec les modèles réduits RM1 et RM2 qui sont incapables de reproduire le gradient dans la partie basse du moule. Pour cela, les échanges radiatifs entre le suscepteur et le moule ont été linéarisés. Cette approximation a été faite suite aux expériences réalisées sur four de production. Le système est maintenant composé du moule et du suscepteur, voir le schéma en figure 4.16.

Le suscepteur est toujours considéré comme un petit corps. Il est chauffé par une densité de puissance volumique qui une fois intégrée sur le volume est égale à ηP avec P la puissance consommée par l'inducteur et η le rendement d'induction. Le suscepteur échange de la chaleur avec le moule par rayonnement ($hS_{sus}(T(t) - \tilde{T}_m(t))$) et il perd de la chaleur avec l'extérieur ($\frac{1}{R_{ext}}(T(t) - T_{ext})$) avec R_{ext} la résistance équivalente correspondant à la résistance conductive du fourreau et le rayonnement linéarisé avec

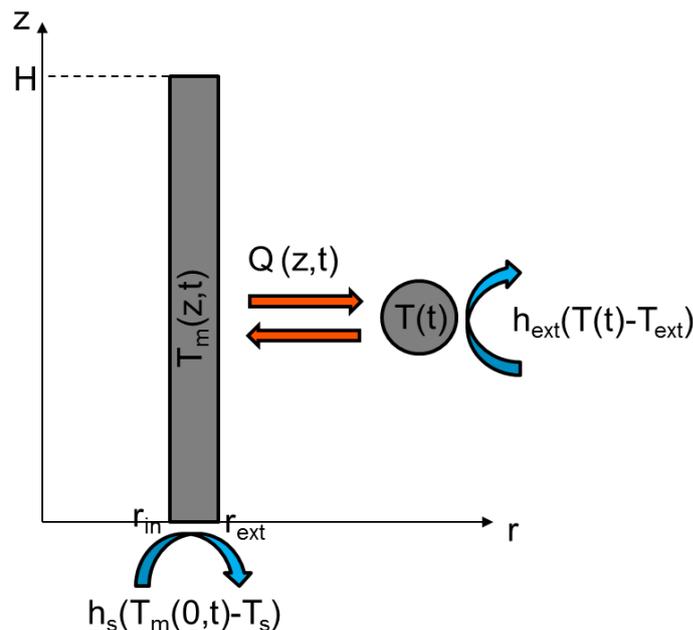


Fig. 4.16 – Représentation schématique de la modélisation 0.5D linéaire du module de chauffe avec $H = 0.276 \text{ m}$, $r_{int} = 0.03 \text{ m}$ et $r_{ext} = 0.037 \text{ m}$

l'inducteur. La température moyenne spatiale du moule $\tilde{T}_m(t)$ est définie par la relation :

$$\tilde{T}_m(t) = \frac{1}{H} \int_0^H T_m(z, t) dz \quad (4.8)$$

La température du suscepteur T est alors régie par l'équation de la chaleur :

$$\rho C_p V \frac{\partial T}{\partial t}(t) = \eta P - h S_{sus} (T(t) - \tilde{T}_m(t)) - \frac{1}{R_{ext}} (T(t) - T_{ext}) \quad (4.9)$$

Le moule est modélisé par une ailette. Nous considérons qu'il n'y a pas d'échange de chaleur sur la face interne du moule à cause de la symétrie du système. Du fait de l'approximation de l'aillette, il n'y a pas d'échange de chaleur sur sa surface supérieure. A une hauteur donnée z et un instant donné t , la température $T_m(z, t)$ est uniforme sur l'épaisseur. Les échanges de chaleur sont les échanges radiatifs linéarisés avec le suscepteur et les échanges par contact de la base de l'aillette avec la sole à la température T_s . L'équation de la chaleur de la charge est :

$$\frac{1}{a_m} \frac{\partial T_m}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial^2 T_m}{\partial z^2}(z, t) + \frac{hm}{k_m S_m} (T(t) - T_m(z, t)) \quad (4.10)$$

avec a_m la diffusivité thermique du moule en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, et m le périmètre extérieur de l'aillette et S_m la surface de la base de l'aillette définis par :

$$m = 2\pi r_{ext} \text{ et } S_m = \pi(r_{ext}^2 - r_{int}^2)$$

Les conditions limites sont :

$$k_m \frac{\partial T_m}{\partial z}(z = 0, t) = h_s(T_m(z = 0, t) - T_s) \quad (4.11a)$$

$$\frac{\partial T_m}{\partial z}(z = H, t) = 0 \quad (4.11b)$$

et la condition initiale correspond à une température non uniforme :

$$T_m(z, t = 0) = T_{m,0}(z) \quad (4.12)$$

Ainsi, la température du moule peut être calculée pour toutes les hauteurs. Le modèle permet alors la construction de capteurs virtuels reliant la température à n'importe quelle hauteur dans le moule avec la température du susceptible.

Le système va être résolu à l'aide de méthodes intégrales de type Laplace [4]. Il est alors nécessaire de bien définir un état initial nul afin de simplifier les travaux de transformation de Laplace permettant de passer du domaine temporel au domaine de Laplace et l'inversion de Laplace permettant de réaliser l'opération inverse.

4.2.2 Calculs des solutions stationnaire et transitoire du modèle 0.5D

4.2.2.1 Solution stationnaire analytique (indicée "perm")

L'objectif de cette partie est d'obtenir les expressions analytiques de la température du moule stationnaire $T_{m,perm}(z)$ et de la température du susceptible stationnaire T_{perm} à partir des relations définissant le système ci-dessus. Les équations de la chaleur 4.9 et 4.10 deviennent en permanent :

$$0 = \eta P_{perm} - h S_{sus}(T_{perm} - \tilde{T}_{m,perm}) - \frac{1}{R_{ext}}(T_{perm} - T_{ext}) \quad (4.13a)$$

$$0 = \frac{d^2 T_{m,perm}}{dz^2}(z) + \frac{hm}{k_m S_m}(T_{perm} - T_{m,perm}(z)) \quad (4.13b)$$

Les conditions limites 4.11 deviennent :

$$k_m \frac{dT_{m,perm}}{dz}(z = 0) = h_s(T_{m,perm}(z = 0) - T_s) \quad (4.14a)$$

$$\frac{dT_{m,perm}}{dz}(z = H) = 0 \quad (4.14b)$$

La résolution de l'équation 4.13b avec les conditions limites 4.14 permet d'obtenir l'expression de la température de la grappe en fonction de l'altitude z.

$$T_{m,perm}(z) = T_{perm} - h_s(T_{perm} - T_s) \frac{\cosh(\alpha(H - z))}{h_s \cosh(\alpha H) + k_m \alpha \sinh(\alpha H)} \quad (4.15)$$

avec $\alpha = \sqrt{\frac{hm}{k_m S_m}}$. Par intégration, on obtient la température moyenne de la grappe sur la hauteur $\tilde{T}_{m,perm}$:

$$\tilde{T}_{m,perm} = T_{perm} - \frac{1}{\alpha H}(T_{perm} - T_s) \frac{\tanh(\alpha H)}{1 + \frac{k_m \alpha}{h_s} \tanh(\alpha H)} \quad (4.16)$$

La température du susceptible est obtenue à partir des équations 4.16 et 4.13a et vérifie :

$$T_{perm} = \frac{\eta P_{perm} + \frac{T_{ext}}{R_{ext}} + \frac{hS_{sus}T_s}{\alpha H} \frac{\tanh(\alpha H)}{1 + \frac{k_m \alpha}{h_s} \tanh(\alpha H)}}{\frac{1}{R_{ext}} + \frac{hS_{sus}T_s}{\alpha H} \frac{\tanh(\alpha H)}{1 + \frac{k_m \alpha}{h_s} \tanh(\alpha H)}} \quad (4.17)$$

Ainsi, les expressions analytiques stationnaires de l'ensemble des températures du système sont connues.

4.2.2.2 Ecriture du système transitoire

A l'état initial, le système est considéré à l'équilibre stationnaire. Cet état initial, voir les équations 4.13a et 4.13b est soustrait au système d'équations transitoires 4.9 et 4.10. L'équation de la chaleur modifiée résultante pour le susceptible est :

$$\rho C_p V \frac{d\theta}{dt}(t) = \eta P' - hS_{sus}(\theta(t) - \tilde{\theta}_m(t)) - \frac{1}{R_{ext}}\theta(t) \quad (4.18)$$

avec

$$\theta(t) = T(t) - T_{perm}, \quad \tilde{\theta}_m(t) = \tilde{T}_m(t) - \tilde{T}_{m,perm}, \quad \theta_m(z, t) = T_m(z, t) - T_{m,perm}(z) \text{ et} \\ P'(t) = P(t) - P_{perm}$$

L'équation de la chaleur pour le moule devient quant à elle, en soustrayant 4.13b à 4.10 :

$$\frac{1}{a_m} \frac{\partial \theta_m}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial^2 \theta_m}{\partial z^2}(z, t) + \frac{hm}{k_m S_m}(\theta(t) - \theta_m(z, t)) \quad (4.19)$$

Les conditions limites associées 4.11 deviennent :

$$k_m \frac{\partial \theta_m}{\partial z}(z = 0, t) = h_s \theta_m(z = 0, t) \quad (4.20a)$$

$$\frac{\partial \theta_m}{\partial z}(z = H, t) = 0 \quad (4.20b)$$

Les équations 4.18 et 4.19 ont des conditions initiales nulles de par leur construction. Ainsi, nous pouvons appliquer une transformation intégrale de Laplace aisément. La variable de Laplace est notée s et les variables dans le domaine de Laplace sont notées $\bar{\cdot}$. Les équations 4.18 et 4.19 s'écrivent alors dans le domaine de Laplace :

$$(\rho C_p V s + hS_{sus} + \frac{1}{R_{ext}})\bar{\theta}(s) = \eta \bar{P}' + hS_{sus}\bar{\theta}_m(s) \quad (4.21a)$$

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_m}{dz^2}(z, s) - (\frac{s}{a_m} + \frac{hm}{k_m S_m})\bar{\theta}_m(z, s) + \frac{hm}{k_m S_m}\bar{\theta}(s) = 0 \quad (4.21b)$$

Les conditions limites pour le moule 4.20 sont aussi données dans le domaine de Laplace :

$$k_m \frac{d\bar{\theta}_m}{dz}(z = 0, s) = h_s \bar{\theta}_m(z = 0, s) \quad (4.22a)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_m}{dz}(z = H, s) = 0 \quad (4.22b)$$

Le système moule composé de l'équation 4.21b et des conditions limites 4.22 est résolu à l'aide de la méthode des quadripôles [4]. La transformée de Laplace de la

densité de flux dans la direction z $\bar{\phi} = -k_m \frac{d\bar{\theta}_m}{dz}$ est introduite. La solution de l'équation 4.21b s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_m \\ \bar{\phi} \end{bmatrix}_{z=0} = \begin{bmatrix} A_z & B_z \\ C_z & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_m \\ \bar{\phi} \end{bmatrix}_z - \begin{bmatrix} X_z \\ Y_z \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

avec :

$$A_z = \cosh(\alpha z), B_z = \frac{1}{k_m \alpha} \sinh(\alpha z), C_z = k_m \sinh(\alpha z) \text{ et } \alpha = \sqrt{\frac{s}{a_m} + \frac{hm}{k_m S_m}}$$

$$X_z = \int_0^z \frac{hm}{k_m S_m} \frac{\sinh(\alpha u)}{\alpha} \bar{\theta} du \text{ et } Y_z = \int_0^z \frac{hm}{k_m S_m} k_m \cosh(\alpha u) \bar{\theta} du$$

Après intégration, les fonctions de z X_z et Y_z s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} X_z \\ Y_z \end{bmatrix} = \frac{hm}{k_m S_m} \bar{\theta} \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha^2} (\cosh(\alpha z) - 1) \\ \frac{k_m}{\alpha} \sinh(\alpha z) \end{bmatrix} = \frac{hm}{k_m S_m} \bar{\theta} \begin{bmatrix} x_z \\ y_z \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

A l'aide des conditions limites, l'égalité suivante est définie à toute altitude z dans le moule :

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_m(z=0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h_s & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A_z & B_z \\ C_z & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_m \\ \bar{\phi} \end{bmatrix}_z - \frac{hm}{k_m S_m} \bar{\theta} \begin{bmatrix} x_z \\ y_z \end{bmatrix} \right) \quad (4.25)$$

La deuxième ligne du système matriciel 4.25 écrite pour $z=H$ permet d'obtenir l'expression de la température relative du moule en $z=H$ en fonction de la température relative du susceptible :

$$\bar{\theta}_m(H) = \frac{hm}{k_m S_m} \frac{y_H + h_s x_H}{C_H + h_s A_H} \bar{\theta} \quad (4.26)$$

De la même façon, l'expression de la température relative du moule en $z=0$ peut être obtenue et ainsi le système 4.25 peut être résolu. En éliminant, l'inconnue densité de flux à la hauteur z , on obtient l'expression de la température relative du moule à la hauteur z en fonction de la température relative du susceptible dans le domaine de Laplace :

$$\bar{\theta}_m(z, s) = \frac{hm}{k_m S_m \alpha^2} \left(1 - \frac{\cosh(\alpha(H-z))}{\cosh(\alpha H)} \right) \bar{\theta}(s) = \bar{W}_z(s) \bar{\theta}(s) \quad (4.27)$$

\bar{W}_z est une fonction de transfert appelée transmittivité (ou transmittance) puisqu'elle relie deux différences de températures entre elles. La température moyenne relative de la grappe $\bar{\theta}_m$ est obtenue par intégration de \bar{W}_z dans l'expression 4.27 :

$$\bar{\theta}_m(s) = \frac{hm}{k_m S_m \alpha^2} \left(1 - \frac{1}{H\alpha} \frac{\tanh(\alpha H)}{1 + \frac{k_m \alpha}{h_s} \tanh(\alpha H)} \right) \bar{\theta}(s) = \bar{W}(s) \bar{\theta}(s) \quad (4.28)$$

En combinant les équations 4.21a et 4.28, on obtient l'expression de la température relative du susceptible en fonction de la puissance électrique relative dans le domaine de Laplace, voir équation 4.29. La fonction de transfert \bar{Z} est appelée impédance, elle relie une différence de température à une différence de puissance.

$$\bar{\theta}(s) = \frac{1}{\rho C_p V s + \frac{1}{R_{ext}} + h S_{sus} (1 - \bar{W}(s))} \bar{P}(s) = \bar{Z}(s) \bar{P}(s) \quad (4.29)$$

La température relative du moule peut alors être écrite en fonction de la puissance relative et d'une impédance $\overline{Z}_m(z, s)$ avec :

$$\overline{\theta}_m(z, s) = \overline{W}_z(s)\overline{Z}(s)\overline{P}'(s) = \overline{Z}_m(z, s)\overline{P}'(s) \quad (4.30)$$

Ainsi la transmittivité \overline{W}_z est égale au rapport de l'impédance \overline{Z}_m sur \overline{Z} . Chacune des équations de 4.27 à 4.30 peut s'écrire sous la forme générique :

$$\overline{y}(s) = \overline{H}(s)\overline{u}(s) \quad (4.31)$$

où $\overline{y}(s)$, $\overline{u}(s)$ et $\overline{H}(s)$ sont les transformées de Laplace respectivement de la réponse $y(t)$, de l'excitation $u(t)$ et de la fonction de transfert $H(t)$ dans le domaine temporel. Un produit dans le domaine de Laplace est équivalent à un produit de convolution dans le domaine temporel. La réponse temporelle s'écrit donc :

$$y(t) = H(t) * u(t) = \int_0^t H(t-v) u(v) dv \quad (4.32)$$

avec $*$ le produit de convolution. Le produit de convolution s'écrit de façon discrète suivant l'équation 4.33. L'instant t_i correspond à i fois le pas de temps Δt choisi pour la discrétisation.

$$y_i = y(t_i) = \Delta t \sum_{j=1}^i H_{i-j+1} u_j \quad (4.33)$$

u_k et H_k (pour $k = 1$ à n) correspondent à une paramétrisation de $u(t)$ et $H(t)$ sur une base de n fonctions constantes par morceaux, n étant le nombre d'observations :

$$\Psi_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Psi(t) dt \text{ et } \Psi(t) = \sum_{k=1}^n \Psi_k (Heav(t - t_{k-1}) - Heav(t - t_k)) \quad (4.34)$$

pour $\Psi = u$ ou H , et où $Heav$ est la fonction de Heaviside et Δt le pas de temps avec $t_k = k\Delta t$ pour $k = 1$ à n , avec $n = \frac{t_{final}}{\Delta t}$ et $t_0 = 0$. En pratique, u_k correspond à $u(t_k)$. La relation 4.33 peut être mise sous forme matricielle en introduisant une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure $\mathbf{M}(u)$ construite à partir du vecteur colonne \mathbf{u} :

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}(u)\mathbf{H} \text{ où } \mathbf{M}(u) = \Delta t \begin{pmatrix} u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ u_2 & u_1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ u_n & u_{n-1} & \cdots & u_1 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Notons que l'égalité suivante est vraie par commutativité :

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}(u)\mathbf{H} = \mathbf{M}(H)\mathbf{u} \quad (4.36)$$

La transformée inverse de Laplace de $\overline{H}(s)$ est calculée à l'aide d'un algorithme d'inversion numérique [5] basé sur la méthode de De Hoog [6]. En utilisant la transformée inverse de Laplace et le produit de convolution, les températures peuvent être calculées à n'importe quel instant via les expressions :

$$\theta_m(z, t) = W_z(t) * \theta(t), \quad \theta(t) = Z(t) * P', \quad \theta_m(z, t) = Z_m(z, t) * P' \quad (4.37a, 4.37b, 4.37c)$$

4.2.3 Sorties du modèle 0.5D dans le domaine temporel

Les propriétés géométriques et physiques utilisées pour la résolution numérique du modèle sont résumées dans le tableau 4.5.

TABLE 4.5 – Valeurs numériques des propriétés physiques et géométriques du modèle 0.5D linéaire

Nom du paramètre	Valeur	Unité	Nom du paramètre	Valeur	Unité
H	0.290	m	m	0.233	m
r_{ext}	0.05	m	S	0.0015	m^2
S_{sus}	0.5515	m^2	V	0.0149	m^3
σ	$5.67 \cdot 10^{-8}$	$W.m^{-2}.K^{-4}$	h_s	45	$W.m^{-2}.K^{-1}$
h	300.23	$W.m^{-2}.K^{-1}$	k_m	1.8	$W.m^{-1}.K^{-1}$
ρ	1740	$kg.m^{-3}$	ρ_m	2170	$kg.m^{-3}$
C	1000	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	C_m	1100	$J.kg^{-1}.K^{-1}$

A l'instant initial, le suscepteur a une température stationnaire de 1173 K soit 900°C. La puissance électrique stationnaire permettant d'atteindre un tel un équilibre s'élève à 7.25 kW. La température dans le moule n'est pas uniforme comme nous l'avons vu dans la section précédente. Le profil de température du moule est donné en figure 4.17, le profil est bien représentatif du comportement réel avec un fort gradient dans les 50 premiers millimètres dû à la sole activement refroidie. Le gradient est concentré sur les premiers millimètres du fait de la faible conductivité thermique.

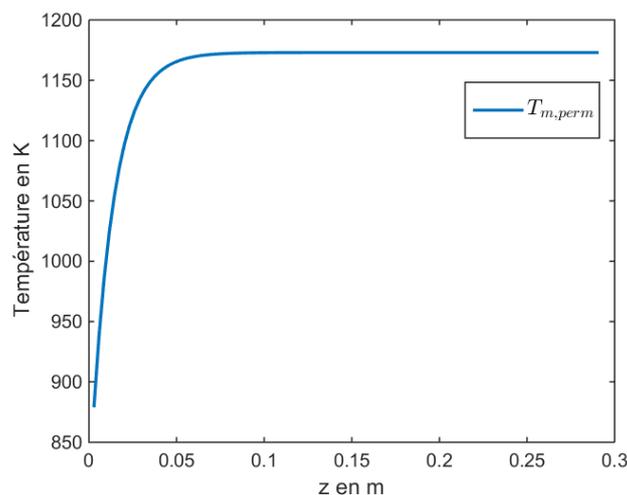


Fig. 4.17 – Température du moule en fonction de z pour un suscepteur à la température de 1173 K et avec les propriétés du tableau 4.5

A partir de cet état initial, une puissance électrique relative est appliquée en entrée du modèle. Deux types de profils ont été utilisés, un premier appelé profil de puissance relative de calibration (P'_{cal}) et un second profil de puissance relative de validation

(P'_{val}), voir figure 4.18. Le profil de calibration comporte des phases de chauffe et une phase de relaxation permettant ainsi l'acquisition d'un maximum d'information sur le comportement du système. Le profil de puissance peut alors être négatif dans les séquences de relaxation car pour rappel $P'(t) = P(t) - P_{init}(t)$ et donc au cours des phases de relaxation, four éteint on obtient la valeur $-P_{init}$ qui est égale à -7.25 kW.

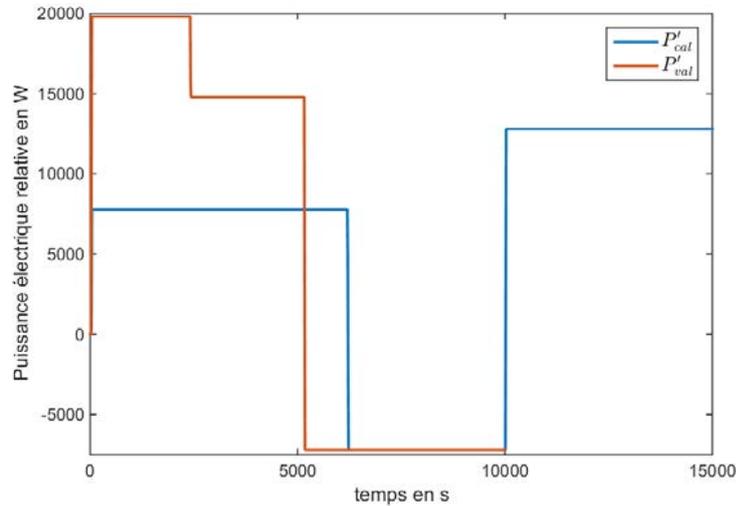


Fig. 4.18 – Profils de puissance électrique relative correspondant aux entrées du modèle 0.5D pour une calibration et une validation

A partir de ces puissances relatives électriques, les profils de température du suscepteur ainsi que dans le moule à différentes hauteurs sont obtenues. Les températures analytiques sont présentées en figure 4.19. Le gradient en bas du moule apparaît très clairement avec à tout instant $T_m(0.0029, t) \ll T_m(0.0145, t)$ tandis que les températures aux trois autres hauteurs sont très proches.

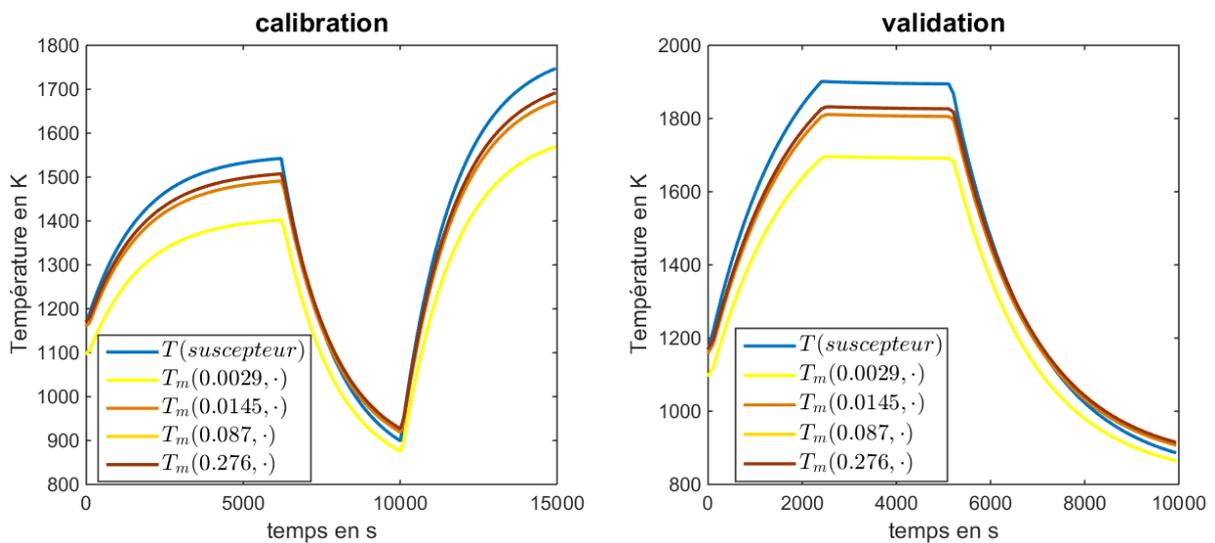


Fig. 4.19 – Distribution temporelle de la température du suscepteur et du moule à 4 hauteurs ($z=0.0029$ m, $z=0.0145$ m, $z=0.087$ m et $z=0.276$ m) pour les profils de puissance de calibration et validation présentés en figure 4.18

Nous pouvons aussi donner les profils temporels des impédances et transmittivités à tout instant, voir figure 4.20 pour les hauteurs $z=0.0029$ m et $z=0.087$ m avec un pas de temps $\Delta t = 10$ s. Ces profils sont riches en information, ils concentrent la physique du modèle. Ainsi, $Z(t)\Delta t$ a une valeur non nulle à l’instant initial car le suscepteur est considéré comme un petit corps. Il réagit instantanément à la puissance électrique qui lui est soumis. Au contraire, $Z_m(0.087, t)\Delta t$ a une valeur nulle car le moule a un temps de réponse non nul. La hauteur z modifie faiblement l’amplitude de la transmittivité $W_z(\cdot)$ et de l’impédance $Z_m(z, \cdot)$.

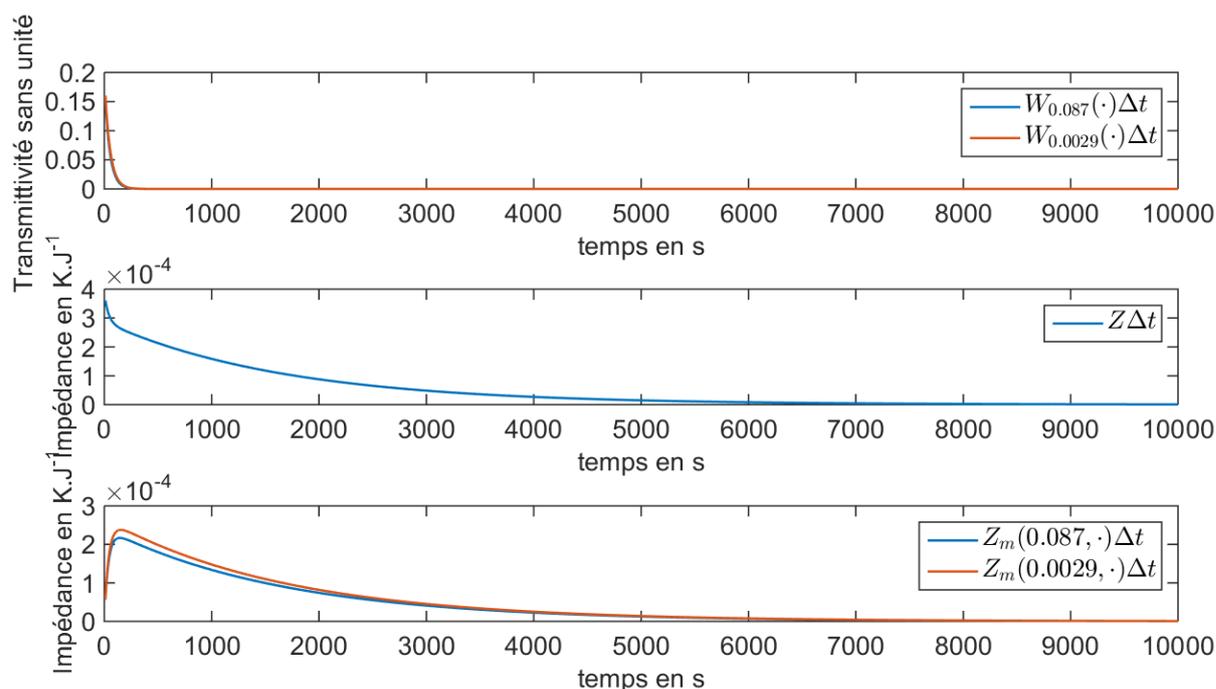


Fig. 4.20 – Distribution temporelle des fonctions de transfert paramétrisées, pour un pas de temps $\Delta t = 10$ s, $W_{0.087}(t)\Delta t$, $Z(t)\Delta t$ et $Z_m(0.087, t)\Delta t$

4.3 Modèles ARX et le modèle convolutif 0.5D linéaire

Dans les deux sections précédentes, 4.1 et 4.2, nous avons introduit des modèles "boîtes blanches", 0D puis 0.5 D, pour modéliser un four à un seul inducteur. Il s'agissait de modèles réduits intrinsèques résultant de la simplification du modèle physique détaillé décrivant le comportement thermique du moule et de sa charge. Ces modèles d'un système linéaire et invariant en temps donnaient accès, de par leur expression analytique explicite, aux fonctions de transferts (impédances et transmittances opérationnelles) dans l'espace de Laplace correspondant à un régime transitoire démarrant à l'instant initial à partir d'un régime permanent préexistant (absence de composante de relaxation dans la réponse en température relative à une excitation relative en plusieurs points du système). Ceci a permis d'utiliser, pour ces réponses, une structure convolutive basée sur des impédances et transmittances temporelles, après retour dans l'espace

temporel. Nous avons également montré que l'identification de ces deux types de réponses impulsionnelles, les fonctions de Green du régime forcé, pouvaient se faire par résolution d'un système linéaire basé sur une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure construite à partir du vecteur des entrées.

Dans cette nouvelle section, nous allons élargir cette modélisation convolutive au cas plus vaste des modèles AutoRégressifs à variables eXogènes (ARX), qui sont des modèles réduits "boîtes grises" extrinsèques, c'est à dire qu'ils cherchent à reproduire le système entrées-sorties sans considération de sa dynamique interne.

Cependant, nous allons montrer que ces modèles ARX température/température peuvent être retrouvés à partir des impédances des modèles purement convolutifs, par élimination de l'entrée en puissance dans ces derniers. Afin de garantir le lien avec la physique (absence de composante de relaxation dans les réponses forcées), nous identifierons, dans la suite de ce mémoire, les paramètres des modèles ARX toujours à partir d'un instant initial et des instants négatifs précédents où la réponse (relative) est toujours nulle, à la différence de la procédure d'identification glissante généralement utilisée en identification de systèmes (voir [7]). Ceci présente l'avantage d'une identification explicite et non itérative des paramètres (voir annexe E), qui peut cependant nécessiter une régularisation en présence de bruit sur les entrées et les sorties.

4.3.1 Le modèle ARX

Pour rappel, la structure du modèle ARX d'ordre $(n_a, n_b, 0)$ est donnée par :

$$y(k)\Delta t = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i \Delta t y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i \Delta t u(k-i) + \epsilon(k) \quad (4.38)$$

avec $y(0) = u(0) = 0$. Dans les prochaines parties, la sortie y correspond à la température relative du moule localement θ_m . L'entrée u correspond soit à la température relative du susceptible θ , soit à la puissance électrique relative P' .

L'équation 4.38 peut être écrite sous forme matricielle avec \mathbf{A} et \mathbf{B} les matrices triangulaires inférieures de taille (n, n) correspondant aux coefficients a_i et b_i et n est le nombre de mesures, voir 4.39.

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (4.39)$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{n_a} & & & 1 & & & \vdots \\ 0 & & & a_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n_a} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ b_{n_b} & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & b_1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n_b} & \cdots & b_1 \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{Y} = [y_1 y_2 \cdots y_n]^T$ et $\mathbf{U} = [u_1 u_2 \cdots u_n]^T$. Il est intéressant de noter que si n_a est nul alors le modèle est de forme convolutive comme présenté dans la section précédente

4.2.2. Le système 4.39 peut être réécrit dans le cas général sous la forme :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U} \quad (4.40)$$

4.3.2 Une vision paramétrique du modèle convolutif 0.5D

Les équations 4.37b et 4.37c peuvent être combinées afin d'éliminer l'entrée P' et obtenir la relation suivante :

$$Z(t) * \theta_m(z, t) = Z_m(z, t) * \theta(t) \quad (4.41)$$

Cette égalité peut être écrite à l'aide de Matrices de Toeplitz triangulaires inférieures :

$$\mathbf{M}(Z(t))\boldsymbol{\theta}_m(z, t) = \mathbf{M}(Z_m(z, t))\boldsymbol{\theta}(t) \quad (4.42)$$

avec par exemple $\mathbf{M}(Z(t))$ égale à :

$$\mathbf{M}(Z(t)) = \Delta t \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ Z_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ Z_n & \cdots & \cdots & Z_1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

A partir de l'expression 4.41, l'expression de la température du moule à chaque instant t_i (pour $i = 2$ à n) peut être écrite en fonction des sorties précédentes et des entrées précédentes et actuelle :

$$\theta_m(z, i) = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Z_{j+1}}{Z_1} \theta_m(z, i-j) + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{Z_{m,j+1}}{Z_1} \theta(i-j) = - \sum_{j=1}^{i-1 \geq n_a} a_j \theta_m(z, i-j) + \sum_{j=0}^{i-1 \geq n_b} b_j \theta(i-j) \quad (4.44)$$

Cette forme ressemble à la formule classique 4.38 d'un modèle ARX en posant $a_j = \frac{Z_{j+1}}{Z_1}$ et $b_j = \frac{Z_{m,j+1}}{Z_1}$ et si $b_0 = \frac{Z_{m,1}}{Z_1}$ est nul, ce qui est le cas ici (voir la figure 4.20, pour $i > n_a$ et $i > n_b$). A partir des sorties du modèle 0.5D présentées en section 4.2.3, les coefficients a_j et b_j peuvent être calculés pour le cas $z=0.087$ m par exemple. Les profils des coefficients a_j et b_j ainsi obtenus sont présentés en figure 4.21 pour $n_a = n_b = n = 1000$ (cas d'une observation sur 10^4 s avec $\Delta t = 10$ s).

Il est intéressant de remarquer que le nombres de paramètres a_j et b_j s'élève à $(2n - 2)$ pour n mesures. Le nombre maximum de paramètres identifiables est égal à m ainsi les ordres doivent vérifier l'égalité $n_a + n_b \leq m$.

4.3.3 Comportement et vision convolutive du modèle ARX

Nous allons maintenant observer les résultats d'une estimation des paramètres du modèle ARX à partir des données de la figure 4.18 pour les puissances électriques consommées et de la figure 4.19 pour les températures de suscepteur et de moule du modèle 0.5D.

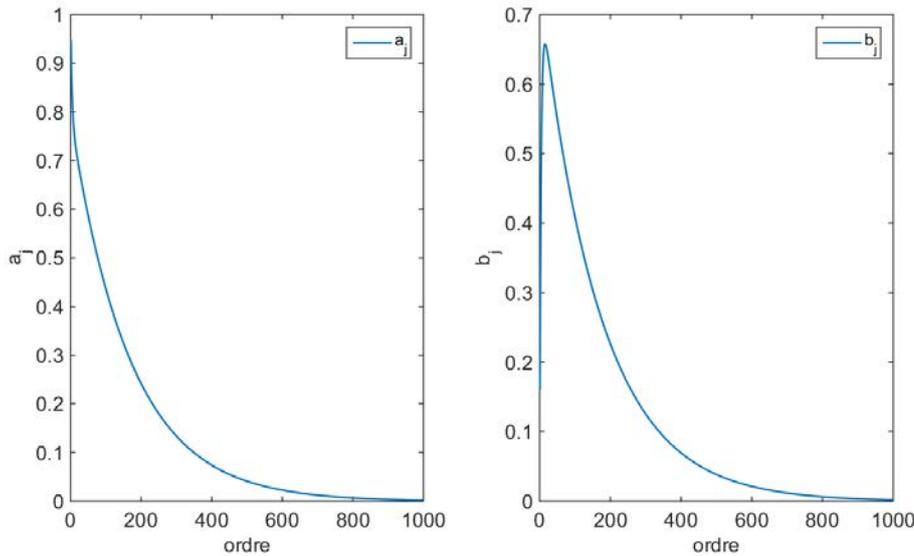


Fig. 4.21 – Profils des coefficients a_j et b_j à partir des résultats du modèle analytique pour $z=0.087$ m

4.3.3.1 ARX température du suscepteur et du moule

Ici, le modèle paramétrique utilise en entrée la température relative du suscepteur $\theta(t)$ et fournit en sortie la température relative du moule à une hauteur donnée $\theta_m(0.087, t)$. Nous avons étudié des modèles Autorégressifs avec $n_a = n_b \neq 0$ et des modèles convolutifs avec $n_a = 0$ et $n_b \neq 0$. Les coefficients a_j et b_j sont identifiés à partir d'une expérience de calibration (inversion linéaire d'un modèle de la forme $\mathbf{y} = \mathbf{D}\beta$, où β est un vecteur paramètre qui regroupe les coefficients a_j et b_j) puis vérifiés sur une expérience de validation. Les expériences correspondantes sont présentées en figure 4.18 pour les puissances électriques consommées et en figure 4.19 pour les températures de suscepteur et de moule. La méthode d'identification des coefficients a_j et b_j est détaillée en annexe E. Différents ordres ont été choisis pour l'étude.

Le tableau 4.6 fournit les résultats en terme de résidu quadratique moyen (e_{RMS}) entre les profils synthétiques de température du moule à $z=0.087$ m pour les phases de calibration et validation, et la température recalculée par le modèle ARX d'ordre $(n_a, n_b, 0)$, voir définition en 4.45.

$$e_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{n}} \|\theta_m(0.087, t) - \mathbf{y}\| = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\theta_m(0.087, j) - y(j))^2} \quad (4.45)$$

Les modèles ARX fournissent de très bon résultats et plus particulièrement les modèles autorégressifs à ordre faible, par exemple l'erreur RMS de calibration et validation pour un ordre $(1, 1, 0)$ est inférieure à $3 \cdot 10^{-6} K$. C'est à dire qu'avec l'estimation de seulement 2 paramètres a_1 et b_1 , le modèle ARX est capable de reproduire la température synthétique. Les modèles convolutifs nécessitent l'estimation d'un plus grand nombre de paramètres. Ainsi pour obtenir une erreur RMS équivalente à celle obtenue avec le modèle $(1, 1, 0)$, il faut un modèle d'ordre $(0, 70, 0)$ soit 70 paramètres à estimer.

TABLE 4.6 – Capacité du modèle ARX à suivre les profils de température du moule à $z=0.087$ m pour les phases de calibration et validation : résidus moyens quadratiques e_{RMS} pour différents ordres (la référence est le modèle 0.5D).

Ordre ARX	Calibration (e_{RMS} in K)	Validation (e_{RMS} in K)
Modèle autorégressif		
(1,1,0)	$1.73 \cdot 10^{-6}$	$2.52 \cdot 10^{-6}$
(4,4,0)	$2.38 \cdot 10^{-7}$	$3.35 \cdot 10^{-7}$
(50,50,0)	$9.14 \cdot 10^{-10}$	$1.32 \cdot 10^{-9}$
Modèle convolutif		
(0,2,0)	1.20	1.71
(0,8,0)	0.36	0.52
(0,70,0)	$2.03 \cdot 10^{-6}$	$2.88 \cdot 10^{-6}$
(0,100,0)	$4.65 \cdot 10^{-9}$	$6.64 \cdot 10^{-9}$

Les valeurs prises par les paramètres en fonction de l'ordre pour différents ordres de modèle ARX sont données en figure 4.22. Les valeurs prises par les coefficients a_j n'ont aucun sens physique, de même pour les coefficients b_j pour les modèles autorégressifs. Les coefficients oscillent et n'ont pas de lien avec les résultats issus du modèle analytique, voir figure 4.21. Cependant pour les modèles purement convolutifs, lorsque l'ordre du modèle augmente, les coefficients b_j convergent vers une solution ressemblant fortement à la transmittivité dont le profil est donné en 4.20.

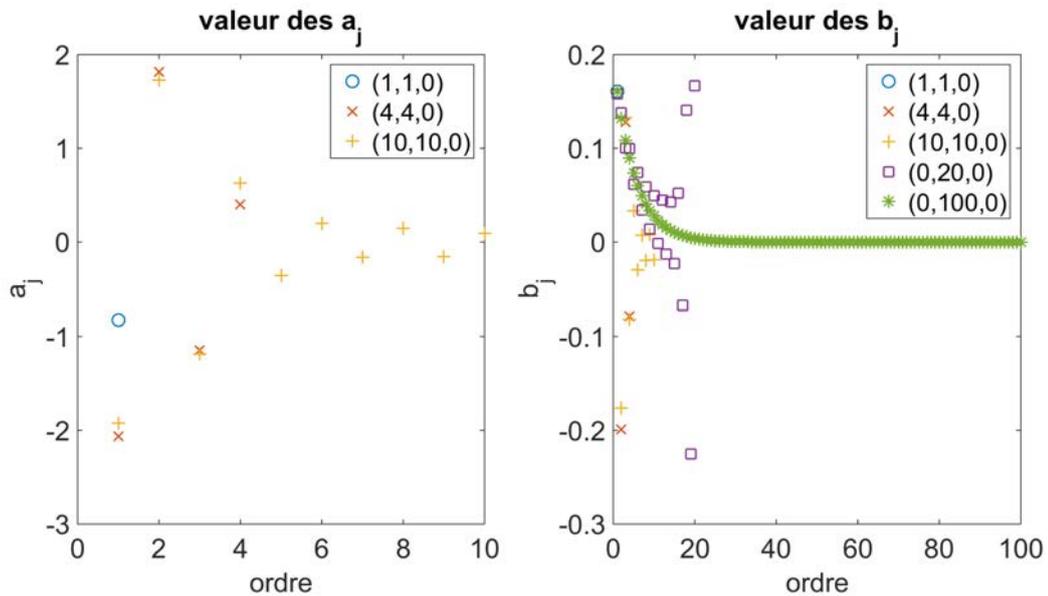


Fig. 4.22 – Profils des coefficients a_j et b_j en fonction de l'ordre pour différents ordres de modèle ARX (entrée : Température du suscepteur)

En fait, si on observe les coefficients c_j de la 1^{ère} colonne de la matrice \mathbf{C} donnée en 4.40, ces coefficients correspondent aux coefficients b_j du modèle purement convolutif et à la transmittivité multipliée par le pas de temps $W_{0.087}\Delta t$, voir figure 4.23. Ainsi,

la transmittivité entre la température du susceptible et celle du moule à une hauteur donnée peut être reconstruite à partir de seulement 4 coefficients a_j et 4 coefficients b_j . Les coefficients de la partie triangulaire supérieure de la matrice \mathbf{C} sont proches de zéro et s'apparentent à du bruit. La matrice \mathbf{C} peut donc être considéré comme une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure comme les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} .

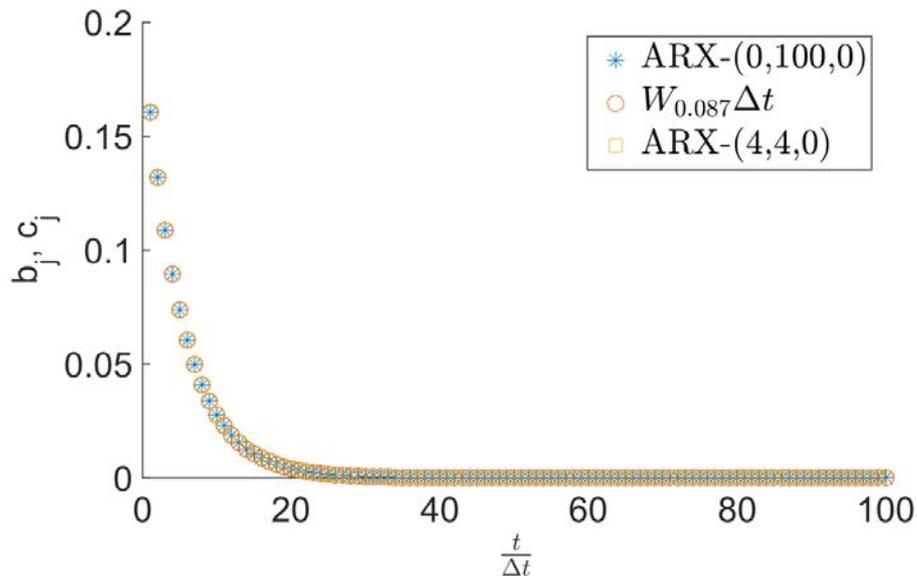


Fig. 4.23 – Valeurs estimées des coefficients b_j pour un modèle ARX (0, 100, 0), valeurs estimées des coefficients c_j (1^{ère} colonne de \mathbf{C}) pour un modèle d'ordre (4, 4, 0) et la transmittivité multipliée par le pas de temps $W_{0.087}\Delta t$ (modèle 0.5D analytique) en fonction de l'ordre ou du rapport $\frac{t}{\Delta t}$.

4.3.3.2 ARX température du moule et puissance électrique

Le modèle paramétrique relie la puissance électrique relative $\mathbf{P}'(t)$ (entrée) à la température relative du moule à une hauteur donnée $\theta_m(0.087, t)$ (sortie). Les profils de puissance électrique relative utilisés en entrée sont fournis en figure 4.18 et les profils de température relative du moule à une hauteur donnée sont fournis en figure 4.19 pour les phases de calibration et de validation.

De la même façon que dans la section précédente, nous avons étudié des modèles autorégressifs et des modèles convolutifs pour différents ordres. Les résultats pour les différents ordres en terme de résidu RMS sont présentés dans le tableau 4.7. Il apparaît alors que les modèles autorégressifs permettent de suivre correctement les profils de température synthétique pour les étapes de calibration et de validation dès les ordres faibles avec (4, 4, 0). Les coefficients a_j et b_j estimés sont donnés en figure 4.24. Les modèles convolutifs ne permettent pas d'obtenir des résultats satisfaisants. L'erreur RMS est supérieure à 5 K même pour un ordre élevé (0, 600, 0). L'estimation des 600 paramètres b_j n'est pas stable car contrairement à la section précédente les b_j ne convergent pas vers l'impédance $Z_m(0.087, \cdot)$ multipliée par le pas de temps, voir figure 4.25. L'identification est plus complexe car l'impédance $Z_m(0.087, \cdot)$ n'est pas monotone comme la transmittance $W_{0.087}(\cdot)$. Le pas de temps $\Delta t = 10$ s n'est pas

adapté pour représenter la première phase croissante, seulement 18 points caractérisent cette phase.

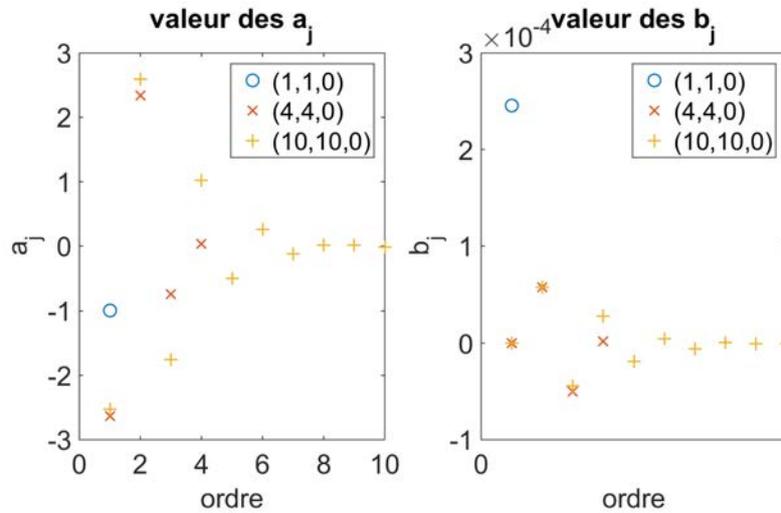


Fig. 4.24 – Profils des coefficients a_j et b_j en fonction de l'ordre pour différents ordres de modèle autorégressif ARX (entrée : Puissance électrique)

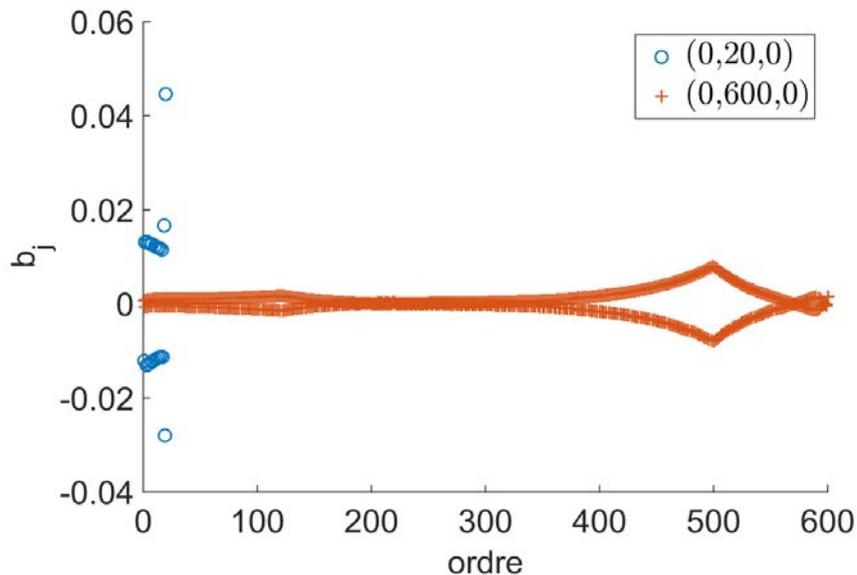


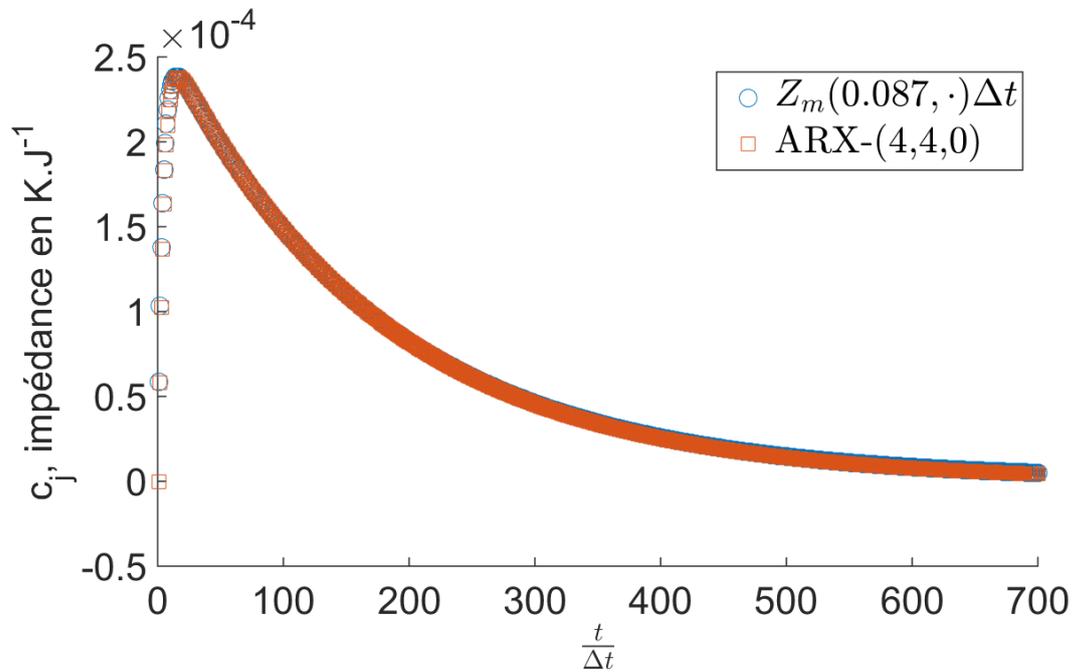
Fig. 4.25 – Profils des coefficients b_j en fonction de l'ordre pour différents ordres de modèle ARX de forme convolutive

Le profil de l'impédance $Z_m(0.087, t)$ multipliée par le pas de temps Δt est obtenu par les coefficients c_j de la 1^{ère} colonne de la matrice \mathbf{C} , voir figure 4.26.

Ainsi, le modèle autorégressif prend tout son sens dans les cas d'identification de modèle convolutif et la reproduction de ceux ci à partir de très peu d'information. Nous sommes capable de reconstruire théoriquement les fonctions de transfert représentatives du modèle physique.

TABLE 4.7 – Capacité du modèle ARX à suivre les profils de température du moule à $z=0.087$ m à partir de la puissance électrique consommée pour les phases de calibration et validation : résidus moyens quadratiques e_{RMS} pour différents ordres

Ordre ARX	Calibration (e_{RMS} in K)	Validation (e_{RMS} in K)
Modèle autorégressif		
(1,1,0)	5.98	11.09
(4,4,0)	$4.72 \cdot 10^{-6}$	$8.53 \cdot 10^{-6}$
(20,20,0)	$2.30 \cdot 10^{-6}$	$3.37 \cdot 10^{-6}$
Modèle convolutif		
(0,2,0)	173.5	285.5
(0,8,0)	166.9	275.3
(0,100,0)	110.0	156.1
(0,600,0)	5.74	7.09


 Fig. 4.26 – Profils des coefficients c_j (1^{ère} colonne de \mathbf{C}) obtenus pour un modèle ARX(4,4,0) et de l'impédance $Z_m(0.087, \cdot)\Delta t$ issue du modèle analytique en fonction de l'ordre qui est équivalent au rapport $\frac{t}{\Delta t}$

4.3.3.3 Signal bruité

Reprenons le cas de la section 4.3.3.1, le modèle paramétrique utilise en entrée la température relative du suscepteur $\theta(t)$ et fournit en sortie la température relative du moule à une hauteur donnée $\theta_m(0.087, t)$. Nous ajoutons un bruit blanc ϵ d'écart type 5 K aux profils de températures du suscepteur et du moule pour les phases de calibration et validation. Ce bruit blanc correspond au pire cas rencontré au cours des expérimentations réalisées. Les résultats du modèle ARX d'ordre (1, 1, 0) pour les

phases de calibration et de validation sont présentés en figure 4.27. Le résidu moyen e_{RMS} est égal à 6.48 K et 6.39 K respectivement pour les phases de calibration et de validation. Ces niveaux de résidu moyen sont comparables à l'écart-type du bruit blanc.

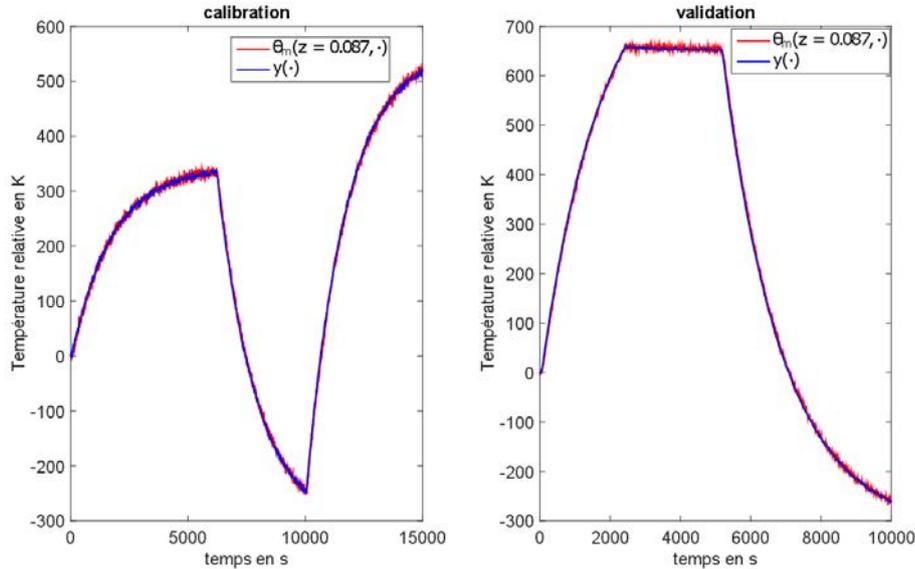


Fig. 4.27 – Profils temporels de $\theta_m(0.087, t)$ et les sorties du modèle ARX ($y(\cdot)$) correspondantes pour les phases de calibration et de validation

Les résultats du modèle ARX ne sont pas impactés par le bruit blanc ajouté. Ce résultat n'est pas une surprise car les modèles ARX sont faits pour répondre aux problématiques de bruit blanc.

4.4 Modèle ARX et modèle détaillé COMSOL

Au cours de cette section, nous allons tester la validité d'utilisation du modèle ARX sur un modèle détaillé. Ce modèle détaillé correspond au modèle COMSOL présenté en section 3.3. Afin de reproduire la configuration étudiée dans cette partie avec un modèle de four à inducteur sur l'ensemble de la hauteur du module de chauffe, les intensités parcourant les inducteurs ont été calculées de sorte que la puissance de chauffe fournie par les deux inducteurs soient identiques.

Les profils temporels de puissance électrique pour les phases de calibration et validation sont les mêmes qu'au cours de la section précédente et ils sont rappelés en figure 4.28. Les profils temporels de température résultant de ces consignes sont fournis en figure 4.29a pour la phase de calibration et en figure 4.29b pour la phase de validation. La différence de température localement mesurée entre le haut et le bas du suscepteur peut atteindre 25 K temporairement au cours des 2 cycles, voir la figure 4.30.

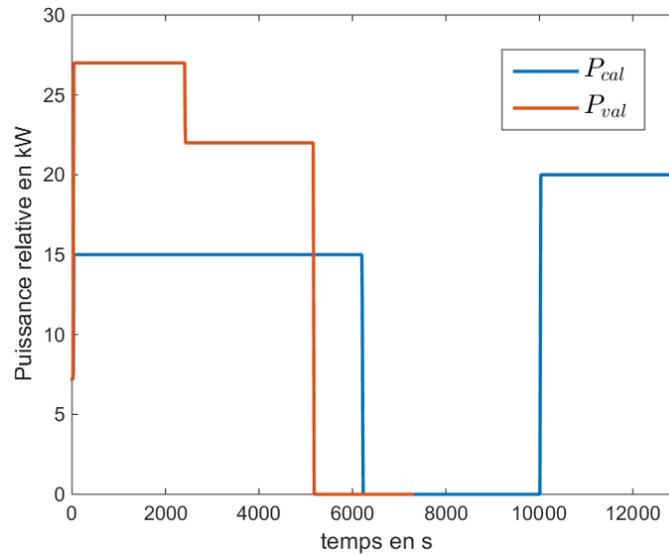


Fig. 4.28 – Profils temporels de la puissance électrique appliquée au module de chauffe pour les phases de calibration et de validation

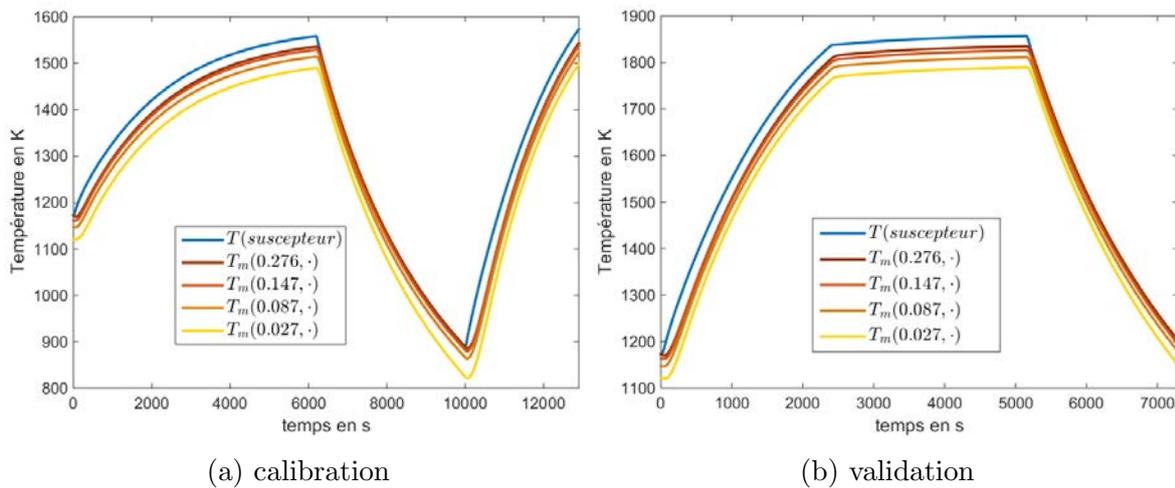


Fig. 4.29 – Profils temporels des températures locales du moule à différentes hauteurs (27 mm, 87 mm, 147 mm, 276 mm) et de la température moyenne du suscepteur pour les phases de calibration (4.29a) et de validation (4.29b)

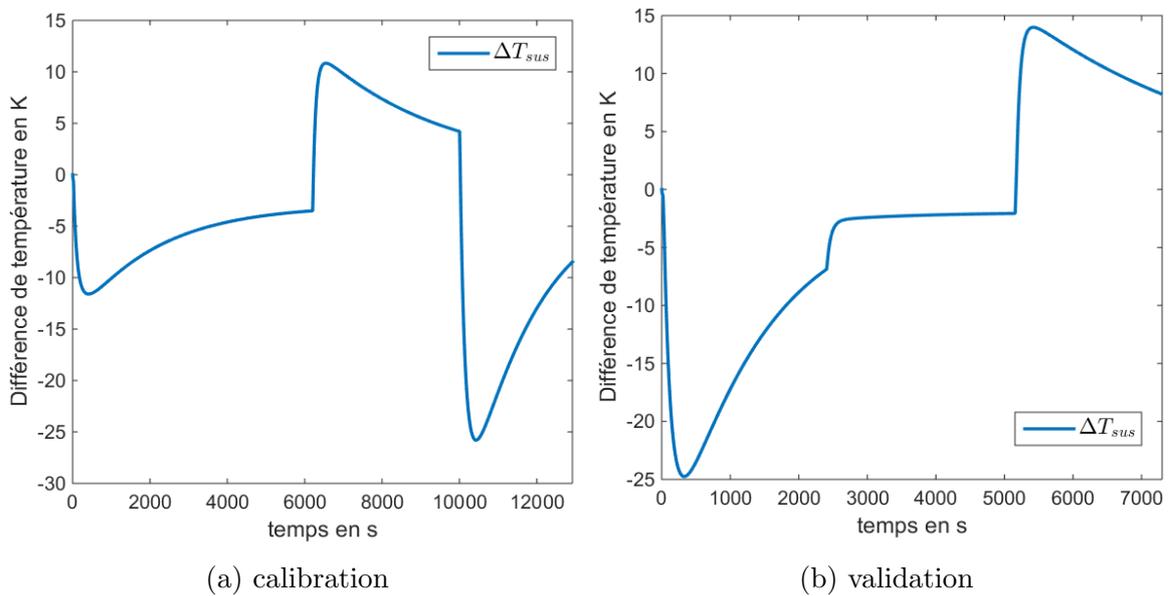


Fig. 4.30 – Profils temporels des différences de température locale entre le haut du suscepteur $h = 277 \text{ mm}$ et le bas du suscepteur $h = 87 \text{ mm}$ pour les phases de calibration (4.30a) et de validation (4.29b)

L'ensemble des travaux suivant de calibration et de validation des modèles ARX seront réalisés à partir des profils présentés ci-dessus.

4.4.1 ARX température du suscepteur et du moule

En nous inspirant du travail réalisé sur le modèle 0.5D, nous allons utiliser des modèles ARX afin d'obtenir les températures du moule localement à partir de la température moyenne du suscepteur (\tilde{T}_{sus}). Nous nous concentrerons sur l'obtention en sortie de la température locale de grappe à la hauteur 87 mm ($T_m(0.087, \cdot)$) comme pour le cas 0.5D. L'ordre du modèle ARX (n_a, n_b) vérifie l'égalité $n = n_a = n_b$ et le pas de temps Δt est de 10 s. Les modèles ARX sont appliqués aux températures relatives correspondant aux différences entre les températures synthétiques du modèle COMSOL et les températures synthétiques à l'instant initial.

La figure 4.31 fournit l'évolution des résidus RMS pour les phases de calibration et validation d'un modèle ARX d'ordre n variant entre 1 et 50 utilisant comme entrée la température moyenne relative du suscepteur et fournissant en sortie la température relative du moule à la hauteur de 87 mm. Les effets de créneau sont dus à la régularisation réalisée au cours de l'estimation des paramètres a_i et b_i qui est optimisée pour la phase de calibration. Les résidus convergent vers un minimum de l'ordre de 7 K pour la calibration et 9 K pour la validation.

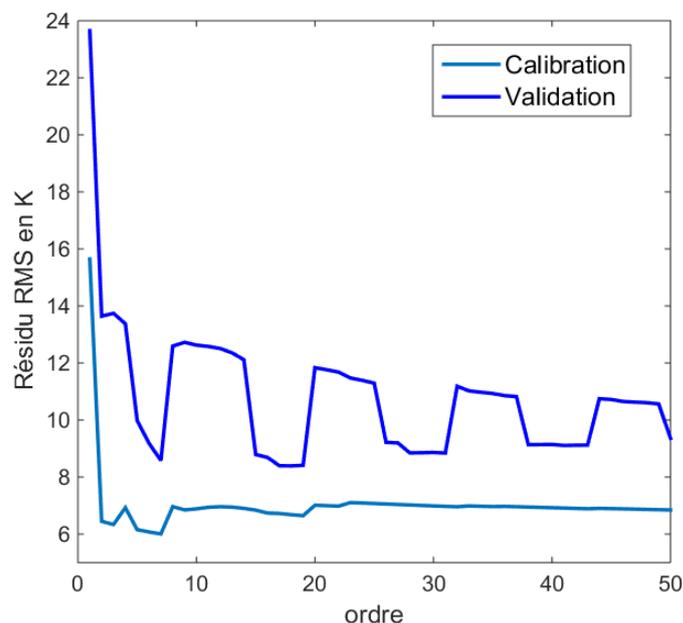


Fig. 4.31 – Evolution des résidus RMS en fonction de l'ordre n du modèle ARX ($\tilde{T}_{sus} \rightarrow T_m(0.087, \cdot)$) pour les phases de calibration et de validation

Les profils temporels des températures relatives de moule obtenus pour un modèle ARX d'ordre $n = 18$ et synthétique pour les phases de calibration et de validation sont présentés en figure 4.32. Les résidus RMS sont alors égaux à 6.68 K pour la phase de calibration et 8.39 K pour la phase de validation. Le profil temporel de la température relative issue du modèle ARX est en bon accord avec le profil synthétique pour la

calibration avec une erreur maximale égale à 8 K. Pour la phase de validation, l'accord est très bon sauf pour la phase de palier où le modèle ARX dérive par rapport à la sortie du modèle COMSOL et l'erreur atteint ponctuellement une valeur de 14 K.

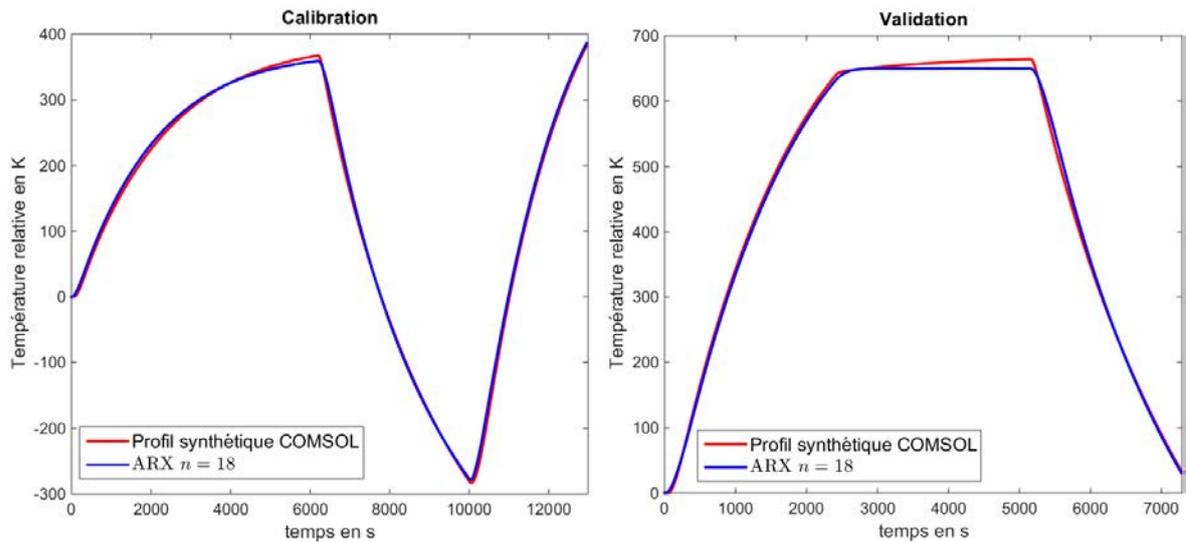


Fig. 4.32 – Profils temporels de la température relative synthétique du moule à la hauteur 87 mm et de la sortie du modèle ARX d'ordre $n = 18$ correspondant pour les phases de calibration et de validation

L'erreur observée peut être due à deux raisons. La première est un biais du modèle employé car nous avons essayé de remplacer la température locale du suscepteur qui varie sur toute sa hauteur par une température moyenne alors que l'écart entre le haut et le bas du suscepteur peut atteindre 25 K, voir la figure 4.30. La seconde est le fait que l'état initial n'est pas un état d'équilibre parfait. Les températures issues du modèle COMSOL varient légèrement aux instants initiaux.

La transmittivité reliant la température moyenne du suscepteur à la température locale de la grappe à la hauteur de 87 mm, notée $W_m(0.087, \cdot)$, et obtenue à partir de l'estimation des paramètres a_i et b_i , est présentée en figure 4.33. La transmittivité obtenue à partir du modèle ARX est fortement bruitée. Elle est cependant en accord avec celle obtenue à partir des données du modèle synthétique. La transmittivité obtenue à partir du modèle synthétique a en fait été calculée en utilisant la méthode employée par W. Al Hadad dans ses travaux de thèse sur les mini-canaux (régularisation par TSVD de la matrice $\mathbf{M}(\tilde{\theta})$) [8].

Le modèle ARX est ainsi capable de reconstruire la température du moule à une hauteur donnée à partir de la température moyenne du suscepteur. Le biais observé à la figure 4.32 est dû au gradient présent entre le haut et le bas du suscepteur.

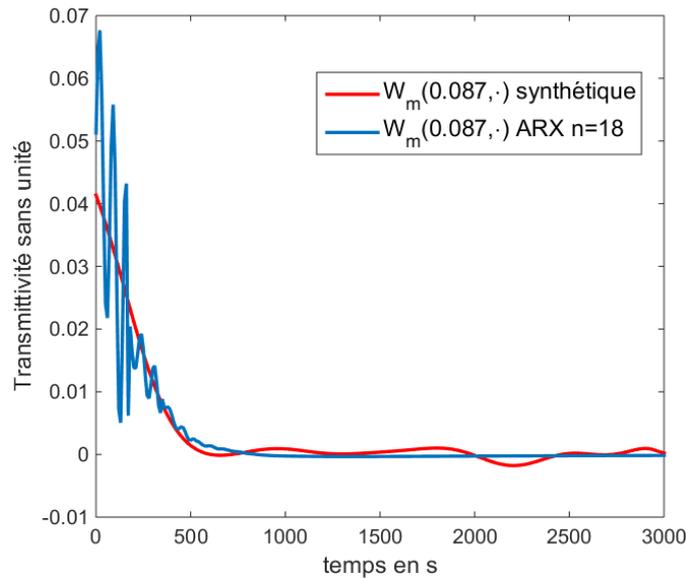


Fig. 4.33 – Profils temporels de la transmittivité $W_m(0.087, \cdot)$ issu de la déconvolution du modèle synthétique COMSOL et du modèle ARX d'ordre $n = 18$ à partir de la 1^{ère} colonne de la matrice \mathbf{C} , voir 4.40

4.4.2 ARX puissance électrique et température du moule

Le modèle ARX utilise maintenant en entrée la puissance électrique relative et fournit en sortie la température en un point du moule. Les puissances électriques relatives correspondent aux puissances ($P_{cal,val}$) présentées en figure 4.28 auxquelles on a soustrait leurs valeurs à l'instant initial. La température locale de moule que nous avons choisi d'expliquer est la température à 87 mm de hauteur ($T_m(0.087, \cdot)$).

La figure 4.34 montre l'évolution des résidus RMS pour les phases de calibration et de validation. Les résidus convergent rapidement vers un premier palier d'environ 20 K pour la calibration et de 42 K pour la validation. Les résidus oscillent de façon synchrone et diminuent lentement jusqu'à 18 K pour la calibration et 42 K pour la validation pour un modèle d'ordre 100. Les oscillations sont plus importantes pour la validation car la régulation a été optimisée pour la phase de calibration. Les résidus RMS sont globalement plus importants comparés aux résidus RMS du modèle température $\tilde{T}_{sus} \rightarrow T_m(0.087, \cdot)$ avec pour rappel des valeurs de l'ordre de 9 K pour la phase de calibration et validation. Ces résultats sont cohérents puisqu'il est toujours plus difficile d'expliquer une température à partir d'une puissance plutôt que d'une autre température.

Les profils temporels de la température relative du moule obtenus pour un modèle ARX d'ordre $n = 20$ et synthétique pour les phases de calibration et de validation sont fournis en figure 4.35. Les résidus RMS sont égaux à 20.4 K pour la phase de calibration et 41.5 K pour la phase de validation. Le modèle ARX suit correctement la première phase de la calibration entre 0 et 8000 s puis il s'éloigne de façon importante du profil synthétique jusqu'à atteindre 48 K de température au minimum de température. Le modèle ARX n'est pas en accord avec le profil synthétique pour la phase de validation, les écarts sont trop importants. L'impédance $Z_m(0.087, \cdot)$ reliant la puis-

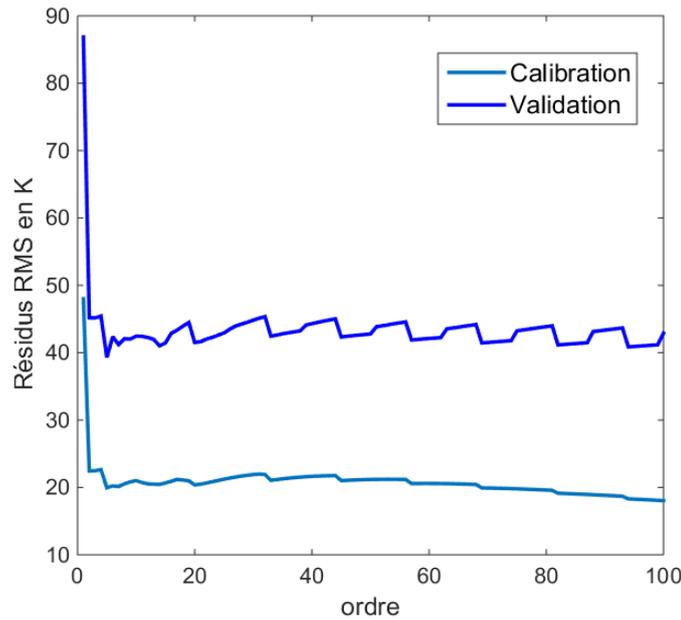


Fig. 4.34 – Evolution des résidus RMS en fonction de l'ordre n du modèle ARX ($P_{sus} \rightarrow T_m(0.087, \cdot)$) pour les phases de calibration et de validation

sance électrique à la température locale du moule à la hauteur de 87 mm est présentée en figure 4.36. L'impédance estimée à partir du modèle ARX est très propre malgré la régularisation et l'impédance estimée à partir du modèle synthétique est quant à elle bruitée. L'impédance est de la même forme que celle obtenue à partir du modèle ARX basé sur le modèle analytique 0.5D, voir la figure 4.26. L'inertie est beaucoup plus grande dans le cas du modèle COMSOL avec un maximum obtenu pour $t = 570$ s.

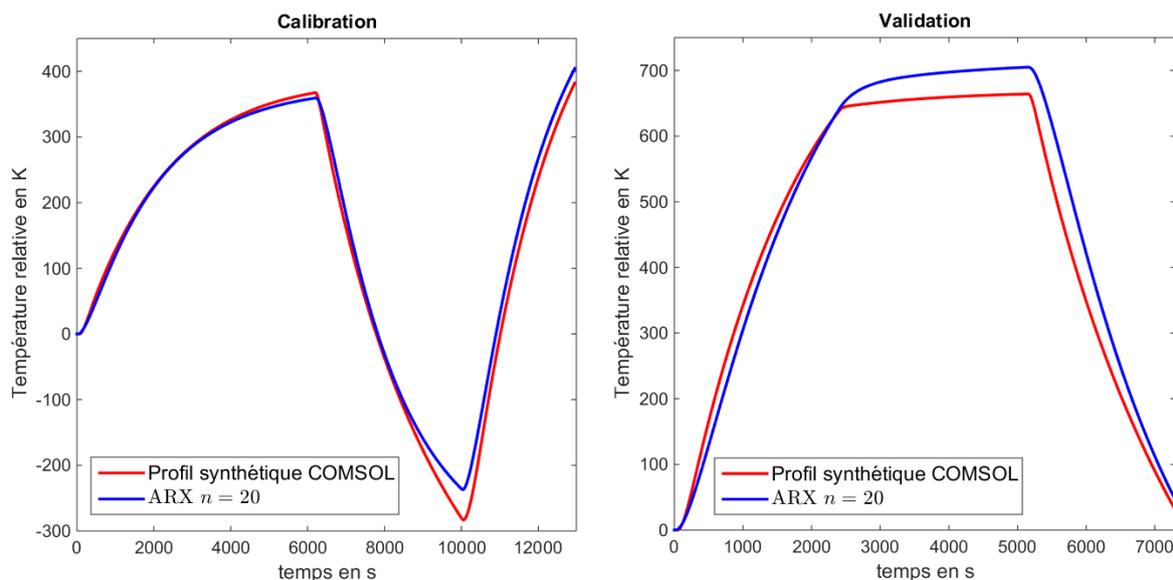


Fig. 4.35 – Profils temporels de la température relative synthétique du moule à la hauteur 87 mm et de la sortie du modèle ARX d'ordre $n = 20$ correspondant pour les phases de calibration et de validation

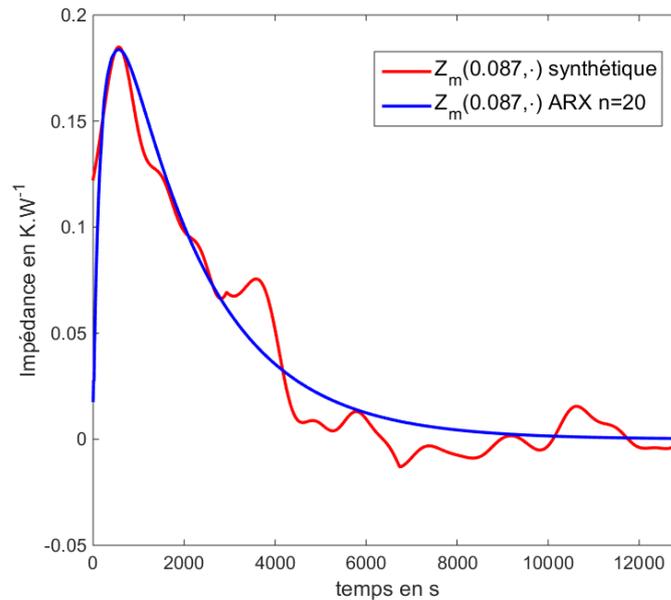


Fig. 4.36 – Profils temporels de l'impédance $Z_m(0.087, \cdot)$ synthétique et du modèle ARX d'ordre $n = 20$

En l'état le modèle ARX n'est pas capable de fournir la température en un point du moule à partir de la seule information de la puissance électrique consommée par le module de chauffe. Il manque une information supplémentaire afin de permettre au modèle ARX d'être en accord pour la calibration et la validation avec le modèle synthétique COMSOL.

4.4.3 ARX puissance électrique et température du moule et ajout d'une constante

Nous allons, au cours de cette partie, étudier l'ajout d'une constante u_{cste} en entrée du modèle ARX de la forme :

$$y(k) = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_b} b_i u(k-i) + \sum_{i=1}^{n_c} c_i u_{cste} + \epsilon(k) \quad (4.46)$$

L'ordre choisi est $n = n_a = n_b = 21$. La constante va en fait engendrer une dérive linéaire. Le choix de l'ordre n_c pour cette constante ne devrait pas engendrer de différences de résultats importants.

4.4.3.1 Etude de l'ordre n_c pour la constante u_{cste} et de son impact sur les coefficients

Nous allons tester $n_c = 21$ et $n_c = 1$ et étudier le comportement des coefficients a_i , b_i et c_i à travers 4 estimations. L'estimation 1 correspond au modèle ARX de la partie précédente avec une seule entrée P et d'ordre $n = 21$. L'estimation 2 correspond au modèle ARX à deux entrées P et la constante $u_{cste} = 500$ d'ordre $n = 21$ avec $n_c = 21$. L'estimation 3 correspond au modèle ARX à deux entrées P et la constante $u_{cste} = 500$ d'ordre $n = 21$ avec $n_c = 1$. Enfin, l'estimation 4 correspond au modèle ARX à deux

TABLE 4.8 – Résidus RMS issus de la comparaison entre le profil synthétique COMSOL et les profils de sortie des estimations 1 à 4 pour les phases de calibration et de validation

	Estimation 1	Estimation 2	Estimation 3	Estimation 4
Calibration	32.53 K	7.83 K	8.68 K	16.62 K
Validation	59.30 K	78.19 K	76.39 K	39.29 K

entrées P et la constante $u_{cste} = 500$ d'ordre $n = 21$ avec $n_c = 1$ mais cette fois ci nous prenons les coefficients a_i et b_i issus de l'estimation 1 et seul le coefficient c_1 est estimé. La figure 4.37 résume les 4 estimations réalisées.

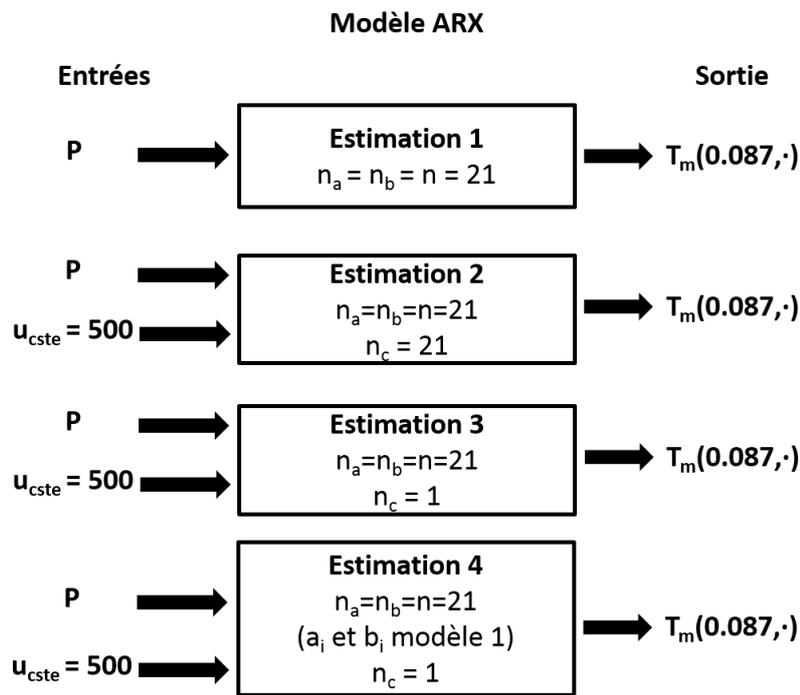


Fig. 4.37 – Représentation schématique des 4 estimations réalisées avec leurs entrées et sortie ainsi que les ordres des estimations

Les évolutions des températures relatives de la grappe à 87 mm de hauteur issues de ces 4 estimations sont présentées en figure 4.38. L'ajout de la constante améliore considérablement la qualité de la calibration mais pas nécessairement la qualité de la validation, voir le tableau 4.8. Les résidus des estimations 2 et 3 sont très proches, ainsi l'ordre de la constante ne semble pas avoir d'impact sur les résultats.

Nous allons maintenant observer le comportement des coefficients a_i et b_i pour les estimations réalisées. Les coefficients a_i sont donnés en figure 4.39a et les coefficients b_i en figure 4.39b. Le modèle 4 reprenant les coefficients du modèle 1, il n'apparaît donc pas dans les figures 4.39a et 4.39b. Les coefficients a_i provenant des trois estimations distinctes sont très proches, l'écart constaté maximum entre un coefficient issu de deux estimations différentes est de l'ordre de 10%. Les coefficients b_i des estimations 1 et 3 sont proches alors que les coefficients b_i du modèle 2 semblent osciller autour des valeurs

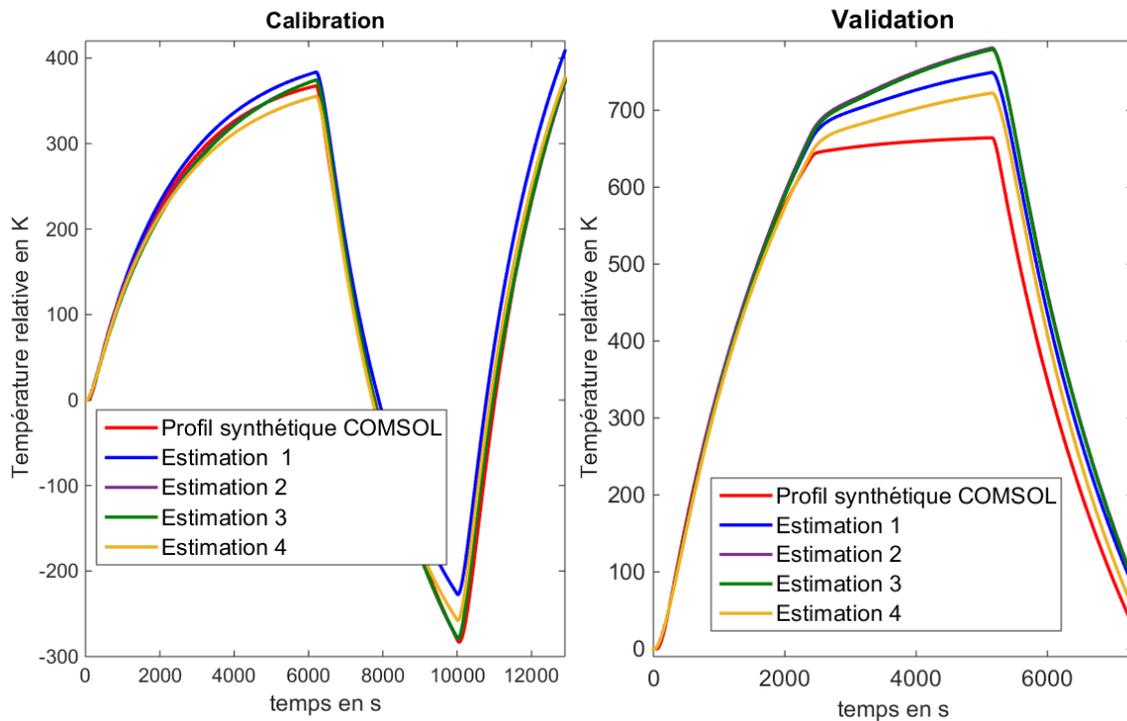


Fig. 4.38 – Profils temporels de la température relative synthétique du moule à la hauteur 87 mm et des sorties des estimations 1, 2, 3 et 4 pour les phases de calibration et de validation

des estimations 1 et 3. Cette oscillation est engendrée par l'ajout des 21 coefficients c_i dans l'estimation 2.

Il est alors intéressant de noter que la somme des 21 coefficients c_i de l'estimation 2 est égale à $-9.85 \cdot 10^{-5} K$ et le coefficient c_1 de l'estimation 3 est égal à $-1.016 \cdot 10^{-4} K$. La différence entre les deux est donc minime. L'entrée étant constante à chaque itération on ajoute soit $\sum_{i=1}^{21} c_i u_{cste}$ pour le modèle 2 soit $c_1 u_{cste}$ pour le modèle 3 afin d'obtenir la sortie. Le résultat est donc logique. Nous choisirons dorénavant de travailler avec le modèle d'ordre $n_c = 1$ qui permet de conserver des coefficients a_i et b_i semblables au cas de l'estimation 1 sans ajout de cette constante.

L'estimation 4 utilise les coefficients a_i et b_i de l'estimation 1 et est obtenue en estimant un coefficient c_1 permettant d'obtenir la meilleure approximation de la courbe synthétique possible. La valeur estimée du coefficient c_1 est $-3.82 \cdot 10^{-5} K$. Le résultat est très différent de la valeur $-1.016 \cdot 10^{-4} K$ obtenue pour l'estimation 3 alors que nous avons vu que les coefficients a_i et b_i de ces deux estimations sont similaires. Le modèle ARX est donc très fortement sensible aux coefficients a_i et b_i . L'estimation 4 est moins performante pour la calibration que les autres estimations et plus performante pour la validation, voir le tableau 4.8.

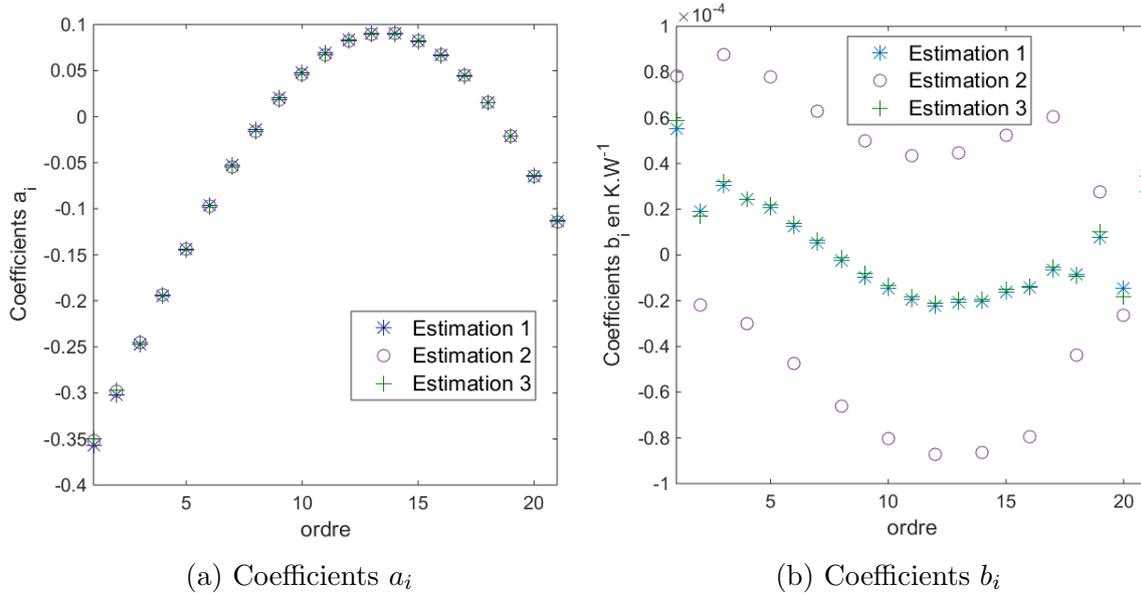


Fig. 4.39 – Valeurs des coefficients a_i et b_i issus des estimations 1 à 3

4.4.3.2 Recherche du coefficient c_1 permettant un accord entre le modèle ARX et le profil synthétique COMSOL pour la phase de validation

Nous pouvons, sur la base de l'estimation 4, estimer le coefficient c_1 pour la phase de validation avec les coefficients a_i et b_i des estimations 1 et 3 (optimisées pour la calibration). Ces estimations optimisées pour la validation sont intitulées estimations 3' et 4'. Les coefficients c_1 obtenus sont alors égaux à $-2.541 \cdot 10^{-4} K$ et $-8.171 \cdot 10^{-5} K$ respectivement pour les estimations 3' et 4'. Les profils issus de ces estimations sont présentés en figure 4.40. Les estimations 3' et 4' ont des comportements légèrement meilleurs que les estimations 3 et 4 optimisées pour la phase de calibration. Ainsi, les résidus issus des estimations 3' et 4' sont plus faibles que ceux issus des estimations 3 et 4, voir le tableau 4.9. Toutefois, les estimations 3' et 4' n'ont pas un comportement satisfaisant par rapport à la validation pour les phases transitoire (temps de montée) et permanente (croissance continue au lieu d'un palier).

Ces résultats étant peu concluants nous allons estimer un modèle ARX ayant la même structure que l'estimation 3. Le modèle ARX a un ordre $n = 21$ et $n_c = 1$, les coefficients a_i , b_i et c_1 sont estimés à partir de la phase de validation. Cette estimation est appelée estimation 5. Les évolutions des températures relatives sont fournies en figure 4.41. L'estimation 5 a un comportement très proche du profil synthétique, le résidu RMS est égal à $7.32 K$. Les coefficients a_i et b_i des estimations 3 et 5 sont

TABLE 4.9 – Résidus RMS issus de la comparaison entre le profil synthétique COMSOL et les profils de sortie des estimations 3, 3' et 4' pour la phase de validation

	Estimation 3	Estimation 4	Estimation 3'	Estimation 4'
Validation	76.39 K	39.29 K	30.74 K	21.06 K

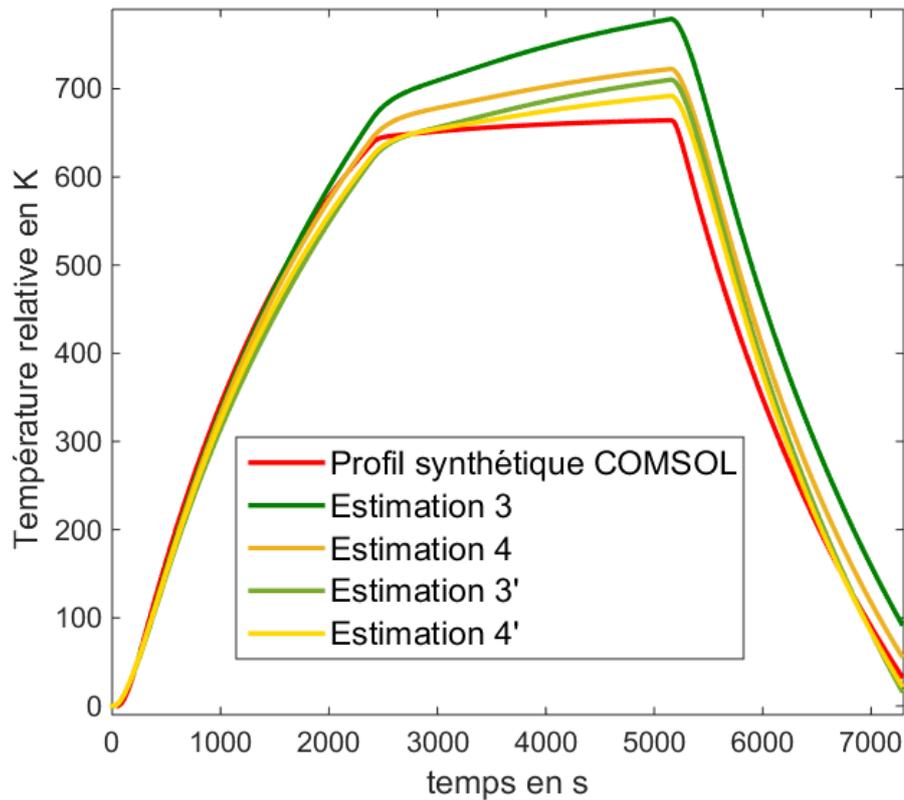


Fig. 4.40 – Profils temporels de la température relative synthétique du moule à la hauteur 87 mm et issus des sorties des estimations 3, 3' et 4, 4' pour la phase de validation

comparés en figure 4.42. Les coefficients a_i des deux estimations sont très proches. Les coefficients b_i de l'estimation 5 ont un comportement proche du comportement observé pour l'estimation 2 en figure 4.39 avec des oscillations autour des coefficients de l'estimation 3. Les coefficients c_1 sont quant à eux très différents, ainsi $c_1 u_{cste}$ est égal à $-0.0508 K$ pour l'estimation 3 et $0.04 K$ pour l'estimation 5. Les résultats en terme de profils sont bien différents malgré ces similarités, voir la figure 4.41.

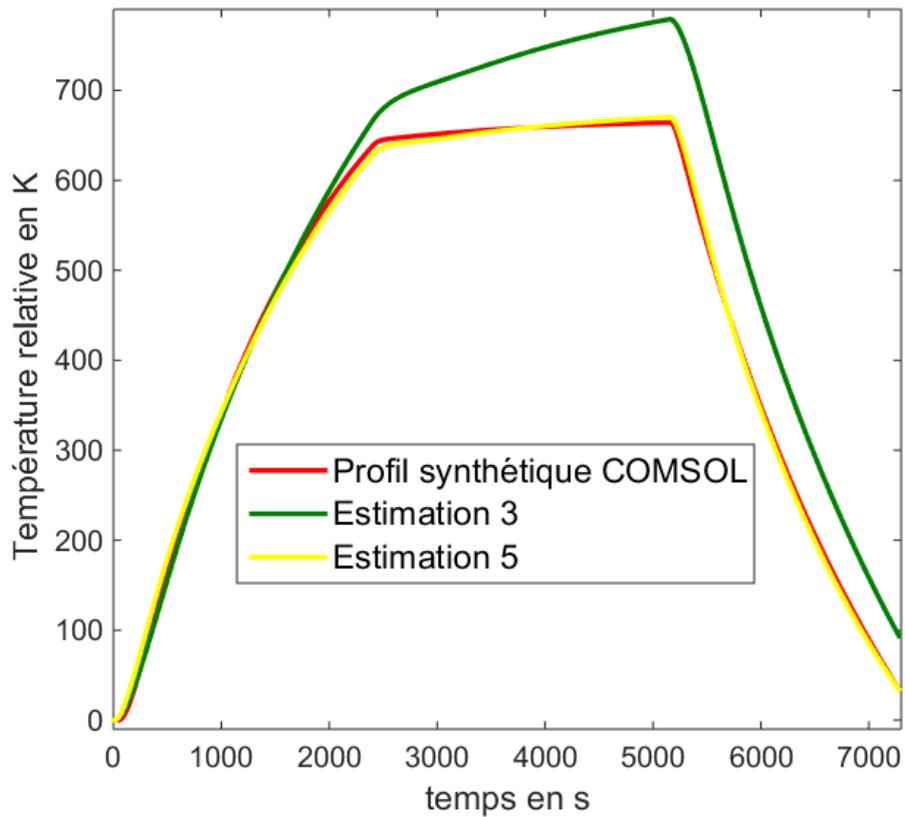


Fig. 4.41 – Profils temporels de la température relative synthétique du moule à la hauteur 87 mm et des sorties des estimations 3 et 5 pour la phase de validation

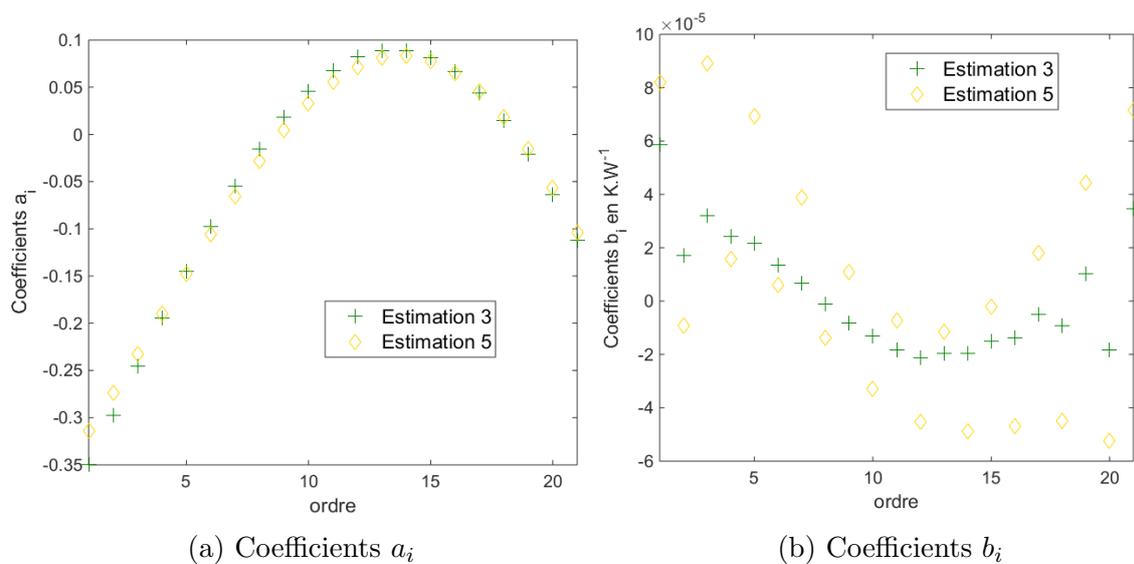


Fig. 4.42 – Valeurs des coefficients a_i et b_i issus des estimations 3 et 5

4.4.3.3 Impact de la valeur de u_{cste}

Le choix de l'amplitude de la constante n'engendre pas de différences significatives. Le coefficient c_1 estimé est proportionnel au coefficient estimé précédemment à une approximation près. Par exemple, si nous reprenons le modèle 3, où $u_{cste} = 500$, alors c_1 était égal à $-1.016 \cdot 10^{-4} K$ maintenant pour $u_{cste} = 1$ alors c_1 est égal à $0.0563 K$ ce qui correspond à un rapport de 554.

4.5 Synthèse des travaux sur les modèles réduits

Nous avons construit 2 modèles réduits 0D, de type « petit corps » (four à 2 inducteurs et moule) expliquant les températures des suscepteurs haut et bas, à partir de 4 entrées, les puissances électriques de chaque inducteur et soit les températures moyennes de chaque zone (haute et basse) du moule, soit les températures locales de ce dernier.

L'estimation des 8 paramètres de chacun de ces modèles (calibration) a été effectuée à partir d'une configuration de puissance électrique donnée pour chaque inducteur, en utilisant les entrées/sorties correspondantes pour le modèle FlexPDE associé (moindres carrés sur les sorties pour cette phase d'identification de modèle).

Une tentative de validation des paramètres estimés, par observation des résidus sur une 2^{ème} configuration (courbes de puissance des inducteurs haut et bas différentes), a été réalisée. Il en résulte que ces 2 modèles produisent des valeurs non physiques pour certains paramètres et ne peuvent être validés pour les températures du suscepteur bas (présence d'un biais de modèle), même s'ils permettent d'obtenir de bons résidus (estimation, ou validation) dans certains cas. Nous avons donc construit un modèle d'ailette 1D pour le moule, tout en gardant un modèle 0D pour les deux suscepteurs (modèle dit « 0.5D »).

Ce modèle 0.5D a été construit dans le cas d'un four axisymétrique à un seul inducteur. Il correspond à des échanges radiatifs linéarisés entre moule et suscepteur, ce qui rend le système d'équations associé linéaire et invariant en temps. Une solution locale 1D transitoire est disponible dans l'espace de Laplace en tout point du moule, ce qui conduit à 2 types de fonctions de transfert : impédances entre température locale du moule ou température du suscepteur/puissance électrique de l'inducteur, et transmittance entre température locale du moule et température du suscepteur.

La réponse temporelle en température locale du moule (ou du suscepteur) est donc un produit de convolution entre la réponse impulsionnelle (original de la fonction de transfert, obtenu par inversion numérique de la fonction de transfert analytique) et la source temporelle correspondante. On peut lui donner une forme vectorielle en introduisant une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure, construite à partir du vecteur de l'excitation si on veut procéder à l'identification de cette fonction de transfert temporelle.

Nous avons cherché à identifier les fonctions de transfert, dont on dispose des versions exactes (ici 2 impédances et une transmittance), à partir des coefficients de modèles réduits de structure ARX (AutoRégressifs à variables eXogènes) qui sont alors introduits. Ainsi, ce modèle 0.5D nous a servi à l'étude des modèles ARX.

Ces modèles ARX (AutoRégressifs à variables eXogènes) permettent de relier une réponse, à un instant donné, aux excitations, mais aussi aux réponses, aux instants précédents.

Nous avons montré que les modèles convolutifs appartenait aussi à cette classe de modèles, soit dans le cas où l'on cherche à relier une réponse à sa vraie source (partie autorégressive nulle), soit lorsque la vraie source est éliminé entre deux de ses réponses (égalité entre deux produits de convolution), une de ses réponses pouvant alors être considérée comme une « pseudo-source » de l'autre.

Les coefficients du modèle ARX liant température locale de moule et température du susceptible, estimés à partir des sorties générées par le modèle analytique en Laplace, ont été identifiés (calibration par moindres carrés linéaires, avec technique d'estimation présentée en annexe), puis validés, avec de très faibles résidus, sauf dans le cas de modèles sans partie autorégressive (AR), où un grand nombre de termes convolutifs (X) est nécessaire pour une identification correcte. Ceci est en particulier vrai pour des modèles autorégressifs à un seul terme autorégressif (AR) et à un seul terme convolutif (X). Nous montrons également que ces modèles ARX (à ordre autorégressifs et convolutifs faibles, ou à ordre autorégressif nul mais avec un ordre convolutif suffisamment élevé) permettent de reconstruire la transmittance du modèle analytique.

Le même type de résultats a été obtenu, avec des résidus de calibration, puis de validation faibles, avec une bonne reconstruction de l'impédance analytique, pour les modèles ARX liant température locale du moule et puissance électrique, dans les cas où la partie autorégressive était présente. Par contre, les modèles ARX purement convolutifs (X), même d'ordre élevé, se révèlent biaisés ici.

Nous avons également montré que la présence d'un bruit blanc, sur les températures relatives ponctuelle du moule et du susceptible, permettaient d'identifier puis de valider un modèle ARX à un seul terme autorégressif et à un seul terme convolutif, dont les résidus étaient compatibles avec le niveau de l'écart-type du bruit ajouté.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons utilisé exactement la même méthodologie, sur les sorties d'un modèle de four, toujours à un seul inducteur, pour des expériences simulées de calibration puis de validation, avec les deux entrées temporelles précédentes en puissance électrique, mais la référence n'étant plus ici le modèle analytique en Laplace, mais le modèle détaillé COMSOL présenté dans le chapitre précédent. Nous avons travaillé avec des modèles ARX à nombre de termes n_a de la partie AR égal au nombre de termes n_b de la partie X, c'est à dire que les modèles testés vérifient $n = n_a = n_b$.

Nous avons montré que le modèle ARX, entre température relative locale du moule et température relative moyenne du susceptible, permet d'obtenir des résidus quadratiques moyens de calibration acceptables (inférieurs à $8^\circ C$ pour des variations de plus de $600^\circ C$ des températures d'entrée et de sortie), avec cependant des résidus de validation moins bons, et ce, quel que soit l'ordre choisi. Ceci est dû à la présence d'un écart instantané de température non négligeable, et pouvant atteindre $25^\circ C$, entre le haut et le bas du susceptible et un régime permanent non parfaitement atteint au temps initial choisi pour la modélisation ARX entre les 2 températures relatives concernées. Le modèle ARX d'ordre optimal permet cependant de retrouver la transmittance obtenue par déconvolution avec régularisation de la réponse locale en température relative,

mais avec un « bruit » important aux temps courts.

Le modèle ARX, entre température relative du moule et puissance électrique relative de l'inducteur, a été testé pour les phases de calibration et de validation. Les résidus quadratiques moyens de calibration (10°C) et de validation (42°C) sont moins bons que pour le modèle ARX température/température précédent, même pour un ordre optimum (régularisation optimisée pour la calibration et non pour la validation). Par contre, le modèle ARX identifié optimal permet de retrouver l'impédance obtenue par déconvolution avec régularisation de la réponse en température relative locale, avec une bien meilleure précision, c'est-à-dire sans les oscillations provoquées par la déconvolution régularisée.

Afin d'améliorer ce dernier modèle, une deuxième entrée constante a été introduite, en plus de la puissance électrique relative de l'inducteur, pour autoriser un état initial ne correspondant pas à un régime permanent. Nous montrons, à l'optimum du résidu de calibration, que le choix de cette constante n'a pas d'influence sur les résidus.

Bibliographie

- [1] L. F. SHAMPINE et M. W. REICHEL, « The MATLAB ODE Suite », *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 18, p. 1–22, jan. 1997.
- [2] D. W. MARQUARDT, « An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters », *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 11, p. 431–441, juin 1963.
- [3] J. V. BECK et K. J. ARNOLD, *Parameter estimation in engineering and science*. Wiley series in probability and mathematical statistics, New York : Wiley, 1977.
- [4] D. MAILLET, S. ANDRÉ, J. C. BATSALE, A. DEGIOVANNI et C. MOYNE, édés, *Thermal quadrupoles : solving the heat equation through integral transforms*. Chichester ; New York : Wiley, 2000.
- [5] K. HOLLENBECK, « INVLAP.m : A matlab function for numerical inversion of Laplace transforms by the De Hoog algorithm », 1998.
- [6] F. R. de HOOG, J. H. KNIGHT et A. N. STOKES, « An Improved Method for Numerical Inversion of Laplace Transforms », *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, vol. 3, p. 357–366, sept. 1982.
- [7] F. URIZ-JAUREGUI, B. REMY, A. DEGIOVANNI et O. VERSEUX, « Model identification for temperature extrapolation in aircraft powerplant systems », *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 64, p. 162–177, fév. 2013.
- [8] W. AL HADAD, *Thermique des mini-canaux : comportement instationnaire et approche convolutive*. Thèse de l'université de Lorraine, sept. 2016.

Conclusion générale

Nous avons abordé, tout au long de cette thèse, la maîtrise thermique des fours de maintien en fonderie. En effet, nous avons travaillé dans l'optique de mieux comprendre le comportement thermique à travers les deux approches complémentaires : la modélisation et l'expérience.

Le premier aspect de la modélisation est la modélisation détaillée du comportement du module de chauffe du four de maintien. Ces modélisations ont été réalisées à l'aide de logiciels de calculs éléments finis (FlexPDE et COMSOL). La modélisation de l'induction dans le module de chauffe a été construite à partir de mesures sur les inducteurs du système et est comparable aux données fournisseurs. Cette modélisation a permis d'apporter des cartographies de densité de puissance volumique source en entrée de la modélisation des transferts thermiques. Deux méthodes différentes de résolution des transferts radiatifs ont été utilisées. La méthode P1 et la méthode des radiosités ont été employées respectivement sous FlexPDE et COMSOL. La méthode des radiosités a été privilégiée car la méthode P1 est moins robuste pour des transferts radiatifs à travers des milieux faiblement absorbant et diffusant. La modélisation détaillée COMSOL a été confrontée et ajustée sur les expériences réalisées au cours de cette thèse.

Cette modélisation détaillée a permis de soulever plusieurs points d'interrogation concernant le comportement du module de chauffe. En effet, le modèle ProCAST fixe des températures uniformes aux parois des suscepteurs et nous n'étions pas en mesure d'évaluer le gradient thermique au sein des suscepteurs. Grâce à ces modélisations, nous sommes en mesure d'évaluer le gradient thermique vertical dans les suscepteurs. Il est inférieur à 50°C en pratique.

Le second aspect de la modélisation est la modélisation réduite du système. Les modèles réduits ont pour objectif d'obtenir, par exemple, les températures locales du moule à partir des puissances consommées par les inducteurs ou de la température des suscepteurs. Nous avons donc essayé des modèles petit corps ou 0.5D mais ces approches ne permettent pas une représentation correcte du comportement. En effet, le modèle petit corps n'est pas capable de modéliser correctement le gradient thermique, dû à la sole, dans la céramique du moule. Nous nous sommes donc intéressés à des modèles paramétriques de type ARX, *i.e.* AutoRégressifs avec variables eXogènes. Les modèles paramétriques nécessitent une phase de calibration afin d'estimer les paramètres du modèle, puis une phase de validation afin de vérifier le comportement du modèle pour de nouveaux signaux d'entrée. Ces modèles paramétriques ont été étudiés à partir tout d'abord d'un modèle convolutif. Puis, les modèles ARX ont été confrontés à la modélisation détaillée du four de maintien afin de juger de la capacité de ces modèles à être représentatifs du module de chauffe. Enfin, les modèles ARX ont été confrontés

aux expériences, partie non décrite ici dans ce mémoire.

Lors de l'étude des modèles convolutifs, les modèles ARX d'ordre faible ont démontré leur aptitude à évaluer les fonctions de transfert des systèmes (transmittance ou impédance). Lors de l'étude à partir des données expérimentales, Les modèles ARX ont démontré leur capacité à donner de façon robuste la température locale du moule à partir de la température des suscepteurs puisque nous avons pu reproduire le comportement thermique du moule pour des expériences à plusieurs mois d'écart. Les modèles ARX ont aussi été utilisés afin d'obtenir les températures locales du moule à partir des puissances consommées par les inducteurs. Les résultats sont cette fois ci plus fragiles car les modèles ARX ne sont pas intrinsèques. Ils peuvent être calibrés pour un type de consigne mais nécessitent une nouvelle calibration en cas de changement du signal d'entrée. Une étude complémentaire en n'imposant plus l'égalité entre le nombre de termes autorégressifs (AR) et convolutifs (X) serait intéressant. Des travaux exploratoires ont été réalisés pour le suivi de la thermique du métal et de la céramique lors des phases de tirage.

Annexes

Annexe A

Démonstration de l'approximation des régimes quasi-stationnaires

La fréquence de fonctionnement du four (f) est de 3 kHz. Les matériaux utilisés sont principalement des graphites. La conductivité électrique minimale est de 400 S.m^{-1} et la conductivité maximale est de $1.25 \cdot 10^5 \text{ S.m}^{-1}$. Ils ont une permittivité relative égale à 1. Nous allons démontrer l'approximation des états quasi-stationnaires pour l'équation de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère.

Maxwell-Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère est donnée par :

$$\vec{rot}(\vec{H}) = \vec{J} + \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

Nous allons comparer le courant de conduction \vec{J} et le courant de déplacement $\frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t}$. En 1^{ère} approximation, le courant de déplacement est égal à :

$$\left\| \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \right\| \approx f \epsilon \|\vec{E}\| \quad (\text{A.2})$$

Le rapport du courant de conduction sur le courant de déplacement donne :

$$\frac{\|\sigma \vec{E}\|}{\left\| \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \right\|} \approx \frac{\sigma \|\vec{E}\|}{f \epsilon \|\vec{E}\|} = \frac{\sigma}{f \epsilon} \quad (\text{A.3})$$

Ceci fournit le résultat suivant pour le cas le plus défavorable, c'est à dire la conduction électrique la plus faible et :

$$\frac{|\sigma \vec{E}|}{\left| \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} \right|} \approx 1.5 \cdot 10^{10} \gg 1 \quad (\text{A.4})$$

Donc les courants de déplacements sont négligeables par rapport aux courants de conduction dans les graphites mais aussi dans les cuivres car la conductivité électrique du cuivre est plus grande que celle du graphite. L'expression de l'équation de Maxwell-Ampère [A.1](#) devient donc dans le cadre de l'ARQS :

$$\vec{rot}(\vec{H}) = \vec{J} \quad (\text{A.5})$$

Maxwell-Gauss

L'équation de Maxwell-Gauss est donnée par :

$$\text{Div}(\vec{D}) = \rho \quad (\text{A.6})$$

Considérons que les matériaux ont une charge volumique $\rho(M, t)$ au point M à l'instant t. L'application de l'opérateur divergence à l'équation A.1 permet d'éliminer le terme rotationnel et on obtient, d'après les propriétés de linéarité et d'indépendance entre l'espace et le temps, l'équation suivante :

$$\text{Div}(\vec{J}) + \frac{\partial \text{Div}(\vec{D})}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.7})$$

D'après l'équation A.6, l'équation A.7 devient :

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.8})$$

Par intégration, l'expression de la charge volumique ρ est :

$$\rho(M, t) = \rho(M, t_0) e^{\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (\text{A.9})$$

Avec la constante de temps $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$. Soit dans notre situation une constante de temps égale à $2.21 \cdot 10^{-14}$ seconde dans le pire des cas ce qui est bien inférieur à l'inverse de la fréquence f . La charge volumique est donc considérée comme nulle dans l'étude et l'équation de Maxwell-Gauss A.6 devient alors :

$$\text{Div}(\vec{D}) = 0 \quad (\text{A.10})$$

Annexe B

Mesure de la résistance du module de chauffe et calcul du rendement du système inductif

La tension nominale parcourant l'inducteur est fixée à 400 V. La puissance électrique fournie varie en fonction de la régulation en température. L'intensité électrique parcourant l'inducteur est donc l'unique variable électrique. Afin de l'obtenir, nous avons besoin de connaître la résistance électrique totale du système.

Schémas électriques du système

L'inducteur est couramment modélisé par une résistance (R_{ind}) et une inductance (L_{ind}) en série, voir figure B.1.

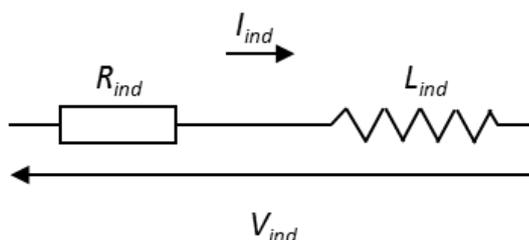


Fig. B.1 – Représentation électrique de l'inducteur en convention récepteur avec V_{ind} la tension aux bornes de l'inducteur et I_{ind} le courant parcourant l'inducteur

Le schéma électrique complet du module de chauffe (inducteur, fourreau et suscepteur (charge) est présenté en figure B.2. La charge est représentée sous la forme d'un circuit électrique fermé couplé électromagnétiquement avec l'inducteur par le biais d'une mutuelle inductance m . La charge est composée d'une résistance (R_{charge}) et d'une inductance (L_{charge}).

Au final, le circuit équivalent correspond au schéma électrique présenté en figure B.1 avec une résistance équivalente R_T et une inductance équivalente L_T dont les expres-

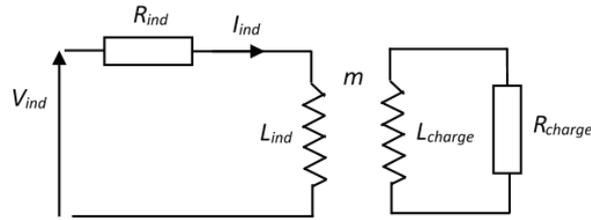


Fig. B.2 – Représentation électrique du module de chauffe en convention récepteur avec V_{ind} ma tension aux bornes de l'inducteur et I_{ind} le courant parcourant l'inducteur

sions sont données par respectivement B.1a et B.1b.

$$R_T = R_{ind} + \frac{(m\omega)^2}{R_{charge}^2 + (L_{charge}\omega)^2} R_{charge} \quad (\text{B.1a})$$

$$L_T\omega = L_{ind}\omega - \frac{(m\omega)^2}{R_{charge}^2 + (L_{charge}\omega)^2} L_{charge}\omega \quad (\text{B.1b})$$

Mesures des caractéristiques électriques du système

Une série de mesures de caractéristiques électriques a été réalisée sur l'inducteur seul et sur le système réel composé de l'inducteur couplé avec la charge. Ces mesures ont été réalisées à l'aide d'un pont RLC. Les valeurs présentées dans le tableau B.1 ont été obtenues à la fréquence de fonctionnement de 3 kHz. L'incertitude de mesure est de l'ordre de $\pm 0.2 m\Omega$ pour les valeurs de résistance et de $\pm 0.005 \mu H$ pour les valeurs d'inductance.

TABLE B.1 – Tableau récapitulatif des résistance et inductance mesurées pour le module haut et bas à vide et chargé et comparaison avec les données constructeurs

	Résistance en $m\Omega$		Inductance en μH	
	Module haut	Module bas	Module haut	Module bas
A vide (R_{ind}, L_{ind})	5	5.9	19.5	15
A vide (données Inductotherm)	4.4	5.96	18.3	16.8
Avec charge (R_T, L_T)	32.5	30.2	10.4	10.1
Avec charge (données Inductotherm)	31.8	28.9	7.7	8.6

Définition du rendement du module de chauffe

Le rendement η du module de chauffe est défini par le rapport de la puissance active consommée par la charge sur la puissance active fournie au système. Le rendement peut aussi être défini comme :

$$\eta = \frac{R_T - R_{ind}}{R_T} \quad (\text{B.2})$$

TABLE B.2 – Tableau comparatif des rendements pour les modules haut et bas fournis par le constructeur (Inductotherm) et obtenus par mesure

Module haut		Module bas	
η mesure $\pm 1\%$	η constructeur	η mesure $\pm 1\%$	η constructeur
84.6 %	86.6 %	80.4%	80.9 %

Les rendements obtenus sont présentés dans le tableau B.2, ci-dessous. Les résultats obtenus par la mesure sont très proches des données constructeur.

Annexe C

Méthodes de régularisation employées

Les méthodes de régularisation sont employées lorsque le problème est mal posé. En reprenant les écritures du chapitre 2, un modèle linéaire peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x} \quad (\text{C.1})$$

L'estimateur des moindres carrés peut alors s'écrire :

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{S}^T\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}^T\mathbf{y} \quad (\text{C.2})$$

Si la matrice \mathbf{S} est mal conditionnée, des instabilités peuvent apparaître à cause du bruit présent dans le signal \mathbf{y} . Il est alors nécessaire de régulariser le problème. La méthode par troncature de spectre appelée (TSVD) va être présentée dans la partie suivante.

Méthode de régularisation TSVD

La méthode par troncature de spectre consiste à tronquer une partie du spectre du signal, plus particulièrement la partie du spectre qui amplifie le bruit. Elle se base ici sur la troncature du spectre décomposé en valeur singulière ou *Truncated Singular Value Decomposition* (TSVD) en anglais. Le problème présenté précédemment est considéré et il est supposé surdéterminé, *i.e.* le nombre de mesures m est plus grand que le nombre d'inconnues n . Ainsi les vecteurs de mesure \mathbf{y} , d'inconnue \mathbf{x} et la matrice \mathbf{S} ont pour dimension respectivement $(m, 1)$, $(n, 1)$ et (m, n) .

Décomposition en valeurs singulières

Toute matrice rectangulaire peut se décomposer sous la forme d'un produit de trois matrices :

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T \quad (\text{C.3})$$

avec \mathbf{U} une matrice orthogonale de dimension (m, m) , \mathbf{W} une matrice carrée diagonale de dimension (m, m) et \mathbf{V} une matrice carrée orthogonale de dimension (n, n) . Il

s'agit de la forme dite « compacte » de la décomposition SVD d'une matrice. Les vecteurs colonnes d'une matrice orthogonale sont de norme égale à l'unité et ces derniers sont perpendiculaires deux à deux. Ainsi le produit de la transposée d'une matrice orthogonale par elle-même est égal à la matrice identité. Dans notre situation, on a :

$$\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_n \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T = \mathbf{I}_n \quad (\text{C.4a,C.4a})$$

avec \mathbf{I}_n la matrice identité de dimension (n, n) . La matrice carrée diagonale \mathbf{W} contient l'ensemble des valeurs singulières de la matrice \mathbf{S} . Elles sont notées w_i pour $i = 1$ à n et elles sont classées par ordre décroissant avec $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_n$. Les valeurs singulières correspondent à la racine carrée des valeurs propres de la matrice carrée $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$. Le rang de la matrice \mathbf{S} est égale au nombres de valeurs singulières non nulles.

Si nous considérons, la matrice \mathbf{S} de rang n alors l'équation C.2 s'écrit après application de la décomposition en valeur singulière :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{V} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y} \quad (\text{C.5})$$

avec

$$\mathbf{W}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{1}{w_n} \end{pmatrix}$$

Régularisation par troncature du spectre [1]

La troncature du spectre consiste à retirer les valeurs singulières les plus faibles. Ces valeurs singulières apportent peu d'informations pour la construction du signal de sortie \mathbf{y} mais l'estimation utilise l'inverse de la matrice \mathbf{W} donc ces valeurs singulières faibles amplifieront le bruit de mesure. Ce propos est démontré par l'expression de la covariance présentée au chapitre 2 :

$$\sum_{j=1}^n \text{var} \hat{x}_j = \text{Trace} [\text{cov}(\hat{\mathbf{x}})] = \sigma^2 \text{Trace} [(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1}] = \sigma^2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{w_k^2} \quad (\text{C.6})$$

La suppression des termes $w_k \approx 0$ permet bien d'éviter l'augmentation non contrôlée de la covariance de l'estimateur. Par contre, si nous choisissons une troncature d'ordre r , un biais de modèle apparaît du fait de la troncature du spectre et celui-ci est égal à :

$$b_{\hat{x}_r} = E(\hat{x}_r) - \hat{x} = - \sum_{k=r+1}^n (\mathbf{V}_k^T \mathbf{x}^*) \mathbf{V}_k \quad (\text{C.7})$$

où \mathbf{x}^* est la valeur exacte du vecteur paramètre et \mathbf{V}_k correspond à la $k^{\text{ème}}$ colonne de la matrice \mathbf{V} .

L'expression de l'estimateur pour une troncature d'ordre r est donnée par

$$\hat{\mathbf{x}}_r = \mathbf{V} \mathbf{W}_r^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y} \quad (\text{C.8})$$

avec

$$\mathbf{W}_r^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{w_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{1}{w_r} & \\ & & & 0 \\ & (\mathbf{0}) & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Le choix de l'ordre de troncature r consiste en un compromis entre réduction de l'instabilité due au bruit de mesure sur l'estimateur et augmentation du biais de l'estimateur. Il est intéressant d'appliquer le principe de contradiction de Morozov ou *discrepancy principle* en anglais.

Bibliographie

- [1] D. MAILLET, Y. JARNY, and D. PETIT, "Problèmes inverses en diffusion thermique Outils spécifiques de conduction inverse et de régularisation," *Techniques de l'ingénieur Transferts thermiques*, vol. base documentaire : TIB214DUO., no. ref. article : be8267, 2011.

Annexe D

Algorithme de Levenberg-Marquardt

L'algorithme de Levenberg-Marquardt permet de minimiser la norme des moindres carrés pour les modèles non-linéaires. Il s'agit d'un modèle de descente du second ordre basé sur l'algorithme de Newton. Cette méthode a été développée en complément des méthodes de gradient d'ordre 1 :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \lambda^{(k)} \mathbf{S}^T(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x}^{(k)})) \quad (\text{D.1})$$

dont le plus grand défaut est d'être lente à converger à l'approche du minimum.

Nous recherchons le vecteur paramètre optimum $\hat{\mathbf{x}}$ tel que le critère $\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{mo}\|^2$ soit minimisé. L'algorithme de Newton stipule qu'au voisinage de $\hat{\mathbf{x}}$, le critère $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ peut être approximativement représenté par un développement en série à l'ordre 1 du gradient du critère $\mathbf{r}'(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{r}'(\mathbf{x}) = \mathbf{r}'(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{r}''(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{D.2})$$

A l'optimum, $\mathbf{r}'(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ et en inversant le Hessien du critère, on obtient :

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - [\mathbf{r}''(\hat{\mathbf{x}})]^{-1} \mathbf{r}'(\mathbf{x}) \quad (\text{D.3})$$

L'algorithme de Newton s'écrit de façon itérative en ajoutant un coefficient de relaxation positif $\lambda^{(k)}$ à l'équation D.3 :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \lambda^{(k)} [\mathbf{r}''(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{r}'(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (\text{D.4})$$

Or le gradient et le Hessien du critère ont respectivement pour expression en fonction de la matrice sensibilité $\mathbf{S}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{r}'(\mathbf{x}) = -2\mathbf{S}^T(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x})) \quad (\text{D.5a})$$

$$\mathbf{r}''(\mathbf{x}) = 2\mathbf{S}^T(\mathbf{x})\mathbf{S}(\mathbf{x}) \quad (\text{D.5b})$$

après approximation de Gauss-Newton qui permet de supprimer les dérivées d'ordre 2 dans l'expression du Hessien du critère. Ainsi, nous pouvons réécrire l'algorithme de Newton, sous la forme dite de Gauss-Newton, en fonction de la matrice de sensibilité :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \lambda^{(k)} [\mathbf{S}^T(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{S}(\mathbf{x}^{(k)})]^{-1} \mathbf{S}^T(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x}^{(k)})) \quad (\text{D.6})$$

L'algorithme de Levenberg-Marquardt consiste à ajouter une matrice définie positive $\mathbf{\Omega}^{(k)}$ pondérée par un coefficient $\mu^{(k)}$ à la matrice initiale à inverser :

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \lambda^{(k)} [\mathbf{S}^T(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{S}(\mathbf{x}^{(k)}) + \mu^{(k)}\mathbf{\Omega}^{(k)}]^{-1} \mathbf{S}^T(\mathbf{x}^{(k)}) (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{mo}(\mathbf{x}^{(k)})) \quad (\text{D.7})$$

En pratique, la matrice $\mathbf{\Omega}^{(k)}$ est une matrice diagonale qui peut être soit la matrice identité \mathbf{I} soit la matrice diagonale $\text{diag}(\mathbf{S}^T(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{S}(\mathbf{x}^{(k)}))$.

Le coefficient $\mu^{(k)}$ permet de passer d'un cas type méthode de gradient classique d'ordre 1 pour $\mu^{(k)} \gg 0$ car à ce moment là le terme du Hessien est majoritairement dû à la matrice diagonale $\mathbf{\Omega}^{(k)}$ et donc l'algorithme correspond à l'équation D.1. A contrario lorsque $\mu^{(k)} = 0$, la méthode est de type Gauss-Newton, voir équation D.6. Ainsi, au départ l'algorithme fonctionne avec des valeurs de $\mu^{(k)} \gg 0$ puis au fur et à mesure $\mu^{(k)}$ converge vers 0. L'algorithme de Levenberg-Marquardt utilise les qualités complémentaires de la méthode de gradient classique et de Gauss-Newton. L'algorithme de Levenberg-Marquardt est présenté sous forme schématique en figure D.1.

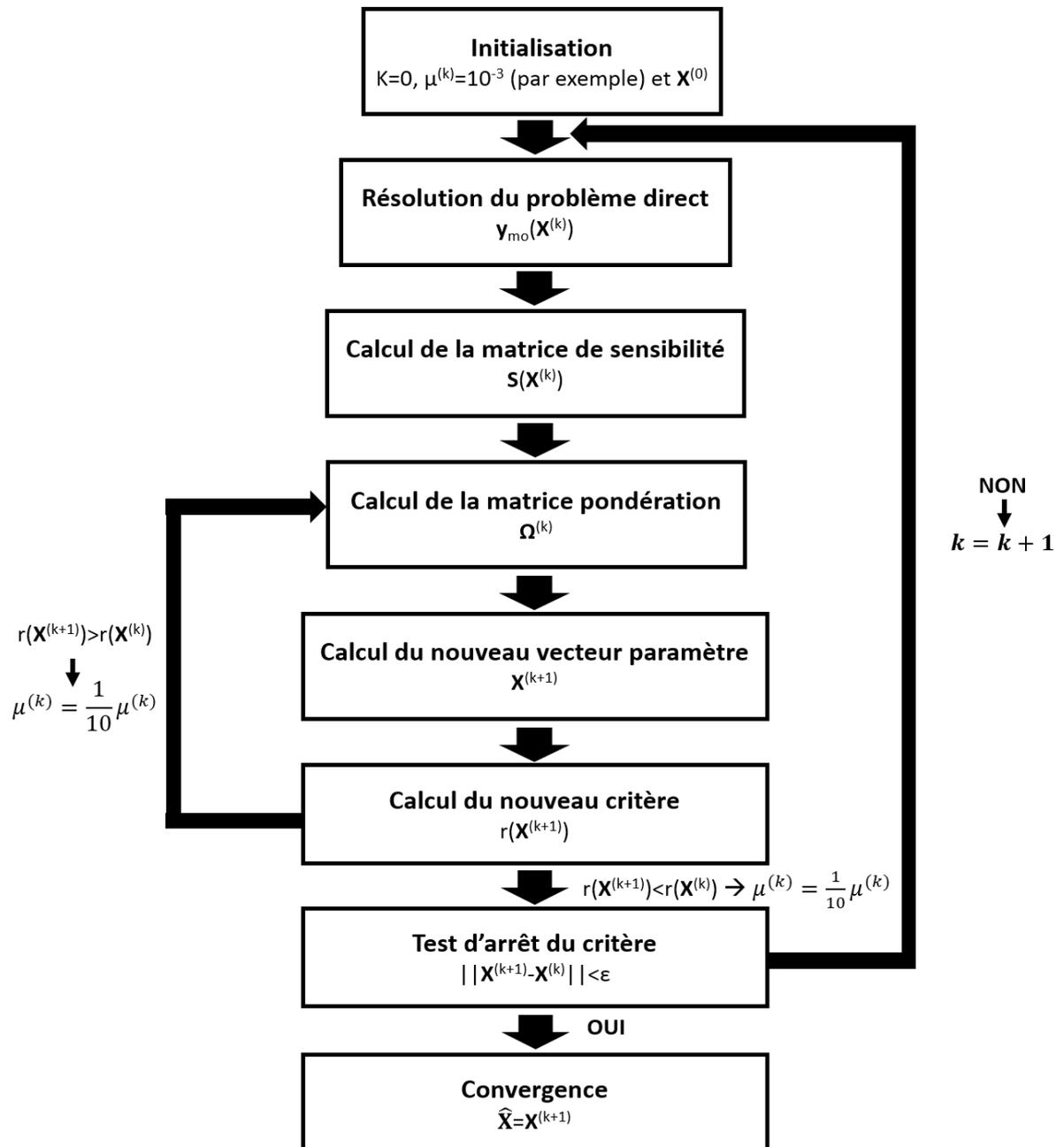


Fig. D.1 – Mise en oeuvre de l'algorithme de Levenberg-Marquardt

Annexe E

Estimation des paramètres d'un modèle ARX à 2 entrées

L'algorithme d'estimation des paramètres du modèle ARX se base principalement sur la méthode de décomposition en valeurs singulières (SVD) et sur la méthode de régularisation par troncature du spectre TSVD présentées en annexe D. Nous allons ici présenter l'algorithme pour un cas à 2 entrées ($\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$) et 1 sortie \mathbf{y} . Les entrées et sorties sont considérées nulles à l'instant initial, c'est à dire que le système est à l'équilibre à l'instant initial. Nous considérerons un modèle ARX d'ordre (n_a, n_{b_1}, n_{b_2}) vérifiant l'écriture :

$$y_{ARX}(k) = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{n_{b_1}} b_{1,i} u_1(k-i) + \sum_{i=1}^{n_{b_2}} b_{2,i} u_2(k-i) \quad (\text{E.1})$$

L'objectif de l'algorithme est d'obtenir le jeu de paramètres qui permet de minimiser l'erreur RMS définie par :

$$e_{RMS} = \frac{1}{\sqrt{m}} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_{ARX}\| = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (y(j) - y_{ARX}(j))^2} \quad (\text{E.2})$$

où m est ici le nombre de mesures utilisées. Nous avons vu en section 2.3.3 que le modèle ARX pouvait s'écrire de façon matricielle sous la forme :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e} \quad (\text{E.3})$$

avec \mathbf{Y} le vecteur sortie de dimension $m \times 1$ correspondant à :

$$\mathbf{Y} = [y(1) \ y(2) \ \cdots \ y(m)]^T \quad (\text{E.4})$$

avec \mathbf{D} la matrice de dimension $m \times q$ où $q = n_a + n_{b_1} + n_{b_2}$ le nombre de paramètres, voir ci-dessous la ligne pour l'observation k :

$$\mathbf{D}_{k,\cdot} = \left[-y_{k-1} \quad -y_{k-2} \quad \cdots \quad -y_{k-n_a} \quad u_{1,k-1} \quad \cdots \quad u_{1,k-n_{b_1}} \quad u_{2,k-1} \quad \cdots \quad u_{2,k-n_{b_2}} \right] \quad (\text{E.5})$$

et $\boldsymbol{\beta}$ le vecteur paramètre de dimension $q \times 1$:

$$\boldsymbol{\beta} = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_{n_a} \ b_{1,1} \ \cdots \ b_{1,n_1} \ b_{2,1} \ \cdots \ b_{2,n_2}]^T \quad (\text{E.6})$$

Il faut noter que les coefficients de $\mathbf{D}_{k,\cdot}$ sont nuls lorsque l'indice pour y_\cdot ou $u_{j,\cdot}$ est nul ou négatif.

Faisons abstraction de l'erreur \mathbf{e} , la statistique de l'estimateur des moindres carrés ordinaires ayant été présentée en 2.4.3. Nous recherchons le vecteur paramètre $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ vérifiant, au sens des moindres carrés :

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (\text{E.7})$$

L'équation E.3 s'écrit alors après multiplication par \mathbf{D}^T la transposée de la matrice \mathbf{D} :

$$\mathbf{D}^T\mathbf{y} = \mathbf{D}^T\mathbf{D}\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (\text{E.8})$$

La matrice $\mathbf{S} = \mathbf{D}^T\mathbf{D}$ est une matrice carrée de taille $q \times q$ que nous pouvons inverser à l'aide de la méthode de décomposition en valeur singulière et de la méthode de régularisation de type TSVD, voir l'annexe C. Notons que la régularisation TSVD aurait pu aussi être effectuée directement sur la matrice rectangulaire \mathbf{D} . Le vecteur paramètre estimé $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ vérifie alors :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{D}^T\mathbf{y} \quad (\text{E.9})$$

Une fois, les paramètres estimés nous pouvons reconstruire le signal de sortie du modèle ARX en réécrivant l'équation E.1 sous la forme matricielle avec \mathbf{A} et \mathbf{B} les matrices triangulaires inférieures de taille (m, m) correspondant aux coefficients a_i et b_i estimés précédemment, voir E.10.

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (\text{E.10})$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & \vdots \\ a_{n_a} & & & 1 & & & \vdots \\ 0 & & & a_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{n_a} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & \vdots \\ b_{n_b} & & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & b_1 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_{n_b} & \cdots & b_1 \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{U} = [u_1 u_2 \cdots u_m]^T$. En inversant la matrice \mathbf{A} , nous obtenons le système matriciel permettant de calculer les sorties \mathbf{y} du modèle ARX à partir des coefficients estimés :

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U} \quad (\text{E.11})$$

L'inversion de la matrice \mathbf{A} peut nécessiter une régularisation de type TSVD si cette dernière est mal conditionnée.

Cet algorithme peut être généralisé pour un nombre n d'entrées distinctes.

Maîtrise thermique des fours de maintien en fonderie

Résumé : Les fours de maintien à induction sous vide sont utilisés pour la fabrication d'aubes de turbine à l'aide du procédé de fonderie à cire perdue. La maîtrise de la thermique de ce dernier est primordiale afin d'assurer la qualité de la production. Ce travail est composé de 3 grandes parties : la modélisation détaillée du four, la modélisation réduite et l'expérience. Un four axisymétrique et sa charge ont été modélisés numériquement à l'aide des logiciels FlexPDE et COMSOL Multiphysics. Ces modèles utilisent en entrée la puissance consommée par les inducteurs et fournissent en sortie la température en tout point du module de chauffe et de la charge. Les modèles réduits étudiés sont des modèles physiques dit convolutifs (enthalpique (0D), analytique de dimension 1 (1D)) et paramétrique de type AutoRégressifs avec variables eXogènes (ARX). Les modèles ARX ont été comparés aux modèles convolutifs (procédures d'identification, puis de validation, de modèles). L'objectif est d'accéder à des températures en certains points du four sans présence d'un capteur physique local (capteur virtuel). Les modélisations détaillées et réduites ont été comparées à des expériences réalisées sur four de production. Cette dernière partie n'est pas décrite dans ce mémoire.

Mots clés : modèle détaillé, modèle réduit, modèle paramétrique ARX, problèmes inverses, induction, transfert de chaleur, rayonnement, conduction, haute température, mesures

Heat transfer control of an holding furnace in foundry

Abstract : Vacuum holding induction furnaces are used for the manufacturing of turbine blades by loss wax foundry process. Heat transfer control in a holding furnace is crucial to ensure the quality of manufacturing. This work has 3 major parts, which are the detailed modelling, reduced modelling and experiments. An axisymmetric furnace and its load have been numerically modelled using FlexPDE and COMSOL Multiphysics, finite element codes. Modelling takes as inputs the electric power consumed by inductors and gives the temperature field in the heating module. The studied reduced models are physical convolutive models (enthalpic (0D), 1 dimension analytical (1D)) and parametric like AutoRegressive with eXogeneous inputs (ARX). ARX models have been compared to convolutive models (identification, validation). The goal is to get temperatures in the heating module without local presence of physical sensors (virtual sensor). Detailed and reduced models have been compared to experiments on the furnace. This last part is not described in this document.

Keywords : numerical model, reduced model, parametric model, ARX, inverse problem, induction, heat transfer, radiation, conduction, high temperature, measurements
