



**HAL**  
open science

# Une nouvelle méthode d'homogénéisation des matériaux composites élastiques

Mustapha El Mouden

► **To cite this version:**

Mustapha El Mouden. Une nouvelle méthode d'homogénéisation des matériaux composites élastiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. UPVM - Université Paul Verlaine - Metz, 1995. Français. NNT : 1995METZ022S . tel-01997465

**HAL Id: tel-01997465**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-01997465>**

Submitted on 31 Jan 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**ISGMP**

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

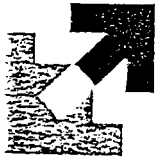
b 84850

S/Mz

95/45

# THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

*Mustapha ELMOUDEN*

Pour l'obtention du grade de :  
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : MÉCANIQUE  
OPTION : MATÉRIAUX ET STRUCTURES

UNE NOUVELLE MÉTHODE D'HOMOGENÉISATION DES  
MATÉRIAUX COMPOSITES ÉLASTIQUES

soutenue le 3 Juillet 1995 devant le jury composé de :

|              |                    |
|--------------|--------------------|
| C. ESLING    | Président          |
| A. MOLINARI  | Directeur de thèse |
| G. R. CANOVA | Rapporteur         |
| P. GILORMINI | Rapporteur         |
| L.S. TÓTH    | Examineur          |
| Y.M. LEROY   | Examineur          |

Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux

BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE DE METZ



022 165808 8

R. S. 1215

cy, 57045 Metz cedex 01.



681850

INSTITUT SUPERIEUR DE GENIE MECANIQUE  
ET PRODUCTIQUE

# THESE

Présentée à



UNIVERSITE DE METZ

PAR

*Mustapha EL MOUDEN*

Pour l'obtention du grade de :  
DOCTEUR de L'UNIVERSITÉ de METZ

SPECIALITE : MÉCANIQUE  
OPTION : MATÉRIAUX ET STRUCTURES

UNE NOUVELLE MÉTHODE D'HOMOGENÉISATION DES  
MATÉRIAUX COMPOSITES ÉLASTIQUES

soutenue le 3 Juillet 1995 devant le jury composé de :

|              |                    |
|--------------|--------------------|
| C. ESLING    | Président          |
| A. MOLINARI  | Directeur de thèse |
| G. R. CANOVA | Rapporteur         |
| P. GILORMINI | Rapporteur         |
| L.S. TÓTH    | Examineur          |
| Y.M. LEROY   | Examineur          |

|                                      |            |
|--------------------------------------|------------|
| BIBLIOTHEQUE UNIVERSITAIRE<br>- METZ |            |
| N° inv.                              | 19950875   |
| Cote                                 | S/M3 95/45 |
| Loc                                  | Magasin    |

Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux

U. R. A. C. N. R. S. 1215

Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01.

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique et de Mécanique des Matériaux de l'Institut Supérieur de Génie Mécanique et Productique à la Faculté des Sciences de Metz sous la direction de Monsieur le Professeur A. MOLINARI.

Ma gratitude et ma reconnaissance s'adressent tout d'abord à Monsieur le Professeur A. MOLINARI qui a accepté de diriger cette thèse. Grâce à son enthousiasme, sa rigueur et son goût passionné pour la recherche scientifique, qu'il a su me faire partager, j'ai trouvé auprès de lui l'aide la plus efficace qui m'a permis de mener à bien cette thèse.

Messieurs, les professeurs G.R. CANOVA et P. GILORMINI ont accepté d'examiner et de porter leur jugement sur ce travail. Je tiens à les remercier très vivement. L'intérêt qu'ils ont bien voulu accorder à cette étude et leur présence dans mon jury est pour moi un très grand honneur.

Je remercie Monsieur le professeur C. ESLING, de m'avoir fait l'honneur d'être le président de ce jury de thèse. Je remercie également M<sup>r</sup> Y.M. LEROY, chargé de recherche à l'école polytechnique de Paris, et M<sup>r</sup> L.S. TÓTH, Maître de Conférence à l'Université de Metz et chargé de recherche, d'avoir accepté de participer au jury et de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je voudrais exprimer tout particulièrement mon humble gratitude et ma profonde reconnaissance à Monsieur le professeur G.R. CANOVA qui a guidé mes premiers pas de chercheur et avec qui j'ai beaucoup appris.

Je désire exprimer ma cordiale reconnaissance et sympathie à Mademoiselle V. JEANCLAUDE, Maître de Conférence à l'Université de Metz, pour son aide à la rédaction de ce travail.

J'adresse également mes sincères remerciements à l'ensemble du personnel du L.P.M.M. de leur amical et agréable soutien.

J'adresse enfin tous mes remerciements à tous les membres de ma famille qui m'ont permis d'arriver jusque là ...

## TABLE DES MATIÈRES

|   |           |
|---|-----------|
| <b>INTRODUCTION GÉNÉRALE.....</b>   | <b>5</b>  |
| <br>  |           |
| <b>CHAPITRE I : ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.....</b>                              | <b>12</b> |
| <br>  |           |
| <b>I.1- INTRODUCTION.....</b>   | <b>14</b> |
| <b>I.2- PRINCIPES DE BASE EN HOMOGÉNÉISATION.....</b>                       | <b>14</b> |
| I.2.1. Description micro et macro du composite.....                         | 15        |
| I.2.2. Utilisation de ces relations dans le cas de composites "réels" ..... | 18        |
| <b>I.3- HOMOGÉNÉISATION DES MATÉRIAUX POLYPHASÉS</b>                        |           |
| <b>DÉSORDONNÉS.....</b>   | <b>18</b> |
| I.3.1. Approximation de Voigt et Reuss.....                                 | 19        |
| I.3.2. Méthodes variationnelles.....  | 19        |
| I.3.3. Milieux dilués .....   | 22        |
| I.3.4. Modèle de la sphère composite.....                                   | 23        |
| I.3.5. Modèle à trois phases.....   | 26        |
| I.3.6. Méthode d'Eshelby.....   | 29        |
| I.3.6.1) Solution générale du problème.....                                 | 29        |
| I.3.6.2) Méthode de l'inclusion équivalente.....                            | 32        |
| I.3.6.3) Calcul du tenseur d'élasticité effectif.....                       | 34        |
| I.3.7. Méthode autocohérente.....   | 35        |
| I.3.8. Méthode de Mori-Tanaka.....  | 40        |
| I.3.9. Schéma différentiel.....   | 43        |
| I.3.10. Notion de tenseur de polarisation.....                              | 45        |
| I.3.11. Méthodes statistiques.....  | 46        |
| I.3.12. Comparaison entre ces différents modèles.....                       | 47        |

|             |   |           |
|-------------|---|-----------|
| <b>I.4-</b> | <b>HOMOGENÉISATION DES MATÉRIAUX POLYPHASÉS À<br/>STRUCTURE PÉRIODIQUE.....</b> | <b>51</b> |
| I.4.1.      | Homogénéisation asymptotique.....   | 52        |
| I.4.1.1)    | Problème élémentaire.....   | 54        |
| I.4.1.2)    | Utilisation de symétries.....   | 57        |
| I.4.2.      | Séries de Fourier.....  | 58        |
| I.4.3.      | Autres modèles.....   | 64        |
| I.4.4.      | Comparaison entre ces modèles.....  | 67        |
| <b>I.5-</b> | <b>CONCLUSIONS.....</b>   | <b>70</b> |

## **CHAPITRE II : SCHÉMA DU CLUSTER.....71**

|                |   |           |
|----------------|---|-----------|
| <b>II.1-</b>   | <b>INTRODUCTION.....</b>  | <b>72</b> |
| <b>II.2-</b>   | <b>FORMULATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME ÉLASTIQUE.....</b>          | <b>74</b> |
| II.2.1.        | Équation intégrale pour les milieux hétérogènes élastiques..... | 74        |
| II.2.2.        | Propriétés de l'opérateur de Green modifié.....                 | 78        |
| <b>II.3.</b>   | <b>SOLUTIONS APPROCHÉES DE L'ÉQUATION INTÉGRALE .....</b>       | <b>79</b> |
| <b>II.3.1.</b> | <b>Milieux inclusionnaires.....</b>                             | <b>80</b> |
| II.3.1.1)      | Problème de l'inclusion multiple .....                          | 80        |
| II.3.1.2)      | Méthodes de résolution.....                                     | 83        |
| II.3.1.2.1)    | Méthode du cluster.....   | 85        |
| II.3.1.2.1.1)  | Cas des milieux périodiques.....                                | 86        |
| a)             | Présentation de la méthode .....                                | 86        |
| b)             | Étude de la convergence de la méthode.....                      | 93        |
| c)             | Quelques cas particuliers.....                                  | 100       |
| d)             | Schéma de résolution numérique.....                             | 103       |
| II.3.1.2.1.2)  | Cas des milieux aléatoires.....                                 | 105       |
| II.3.1.2.2)    | Méthode du cluster-Mori-Tanaka.....                             | 107       |
| II.3.1.2.2.1)  | Cas des milieux périodiques.....                                | 108       |
| a)             | Présentation de la méthode.....                                 | 108       |
| b)             | Vérification de la convergence de la méthode.....               | 110       |
| II.3.1.2.2.2)  | Cas des milieux à clusters isolés.....                          | 112       |

|  |     |
|--|-----|
| <b>II.3.2. Matériaux polycristallins : méthode du cluster-<br/>autocohérent</b> .....  | 115 |
| a)Présentation de la méthode.....  | 116 |
| b)Étude de la convergence de la méthode.....   | 124 |
| c)Organisation schématique du programme et récapitulatif de la<br>méthode .....        | 127 |
| <b>II.4- CONCLUSIONS</b> .....   | 130 |
| <br>   |     |
| <b>CHAPITRE III : APPLICATIONS AUX INCLUSIONS<br/>SPHÉRIQUES</b> .....                 | 131 |
| <br>   |     |
| <b>III.1- INTRODUCTION</b> .....   | 132 |
| <b>III.2- CAS DES MATÉRIAUX BIPHASÉS</b> .....   | 132 |
| III.2.1. Méthode du cluster.....   | 132 |
| a) Distribution de sphères sur un réseau cubique simple .....                          | 134 |
| b) Distribution de sphères sur un réseau cubique centré.....                           | 141 |
| c) Distribution de sphères sur un réseau tétragonal.....                               | 146 |
| III.2.2. Méthode du cluster-Mori-Tanaka .....  | 146 |
| <b>III.3- CAS DES MATÉRIAUX TRIPHASÉS</b> .....  | 150 |
| <b>III.4- EFFETS DE LA RÉPARTITION SPATIALE SUR LES<br/>MODULES ÉQUIVALENTS</b> .....  | 152 |
| <b>III.5- CONCLUSIONS</b> .....  | 155 |
| <br>   |     |
| <b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b> .....   | 156 |
| <br>   |     |
| <b>RÉFÉRENCES</b> .....  | 159 |
| <br>   |     |
| <b>ANNEXES</b> .....   | 170 |
| A - Calcul des tenseurs $\Gamma^{IJ}$ par la méthode de la transformée de Fourier .... | 171 |
| B - Comparaison de la méthode du cluster avec celle de Mori-Tanaka.....                | 177 |
| C - Méthode des cellules de Aboudi .....   | 179 |



## NOTATIONS

Dans tout ce rapport, on adoptera les notations suivantes :

- \*  $A_{ij} B_{jk} \equiv \sum_j A_{ij} B_{jk}$  (notation d'Einstein).
- \*  $A_{i(j)} B_{(j)k}$  (indice  $j$  non affecté par la sommation implicite).
- \*  $\underline{A}:\underline{B}$  (produit contracté de deux tenseurs).
  - $(\underline{A}:\underline{B})_{ijmn} = A_{ijkl} B_{lkmn}$  si  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont des tenseurs d'ordre 4.
  - $(\underline{A}:\underline{B})_{ij} = A_{ijkl} B_{lk}$  si  $\underline{A}$  est un tenseur d'ordre 4 et  $\underline{B}$  est un tenseur d'ordre 2.
- \*  $\underline{u} \cdot \underline{v} \equiv u_i v_i$  (produit scalaire de deux vecteurs).
- \* VER pour volume élémentaire représentatif.
- \* Cluster : mot anglais signifiant groupement que nous utiliserons comme appellation pour notre modèle.

## **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

### **GÉNÉRALITÉS SUR LES MATÉRIAUX COMPOSITES**

Un matériau composite est un matériau hétérogène : les bétons, les plastiques armés, les papiers synthétiques, ou les métaux renforcés en sont des exemples. Comme leur nom l'indique, ils sont composés de plusieurs constituants de façon à améliorer les qualités du produit désiré, surtout en ce qui concerne ses propriétés mécaniques, thermiques, ou diélectriques. On utilise essentiellement les matériaux composites obtenus par renfort de fibres ou de particules, isotropes ou anisotropes ; ils sont généralement constitués de deux ou plusieurs matériaux ayant des propriétés mécaniques différentes : une matrice ou liant, et des renforts sous forme de particules ou fibres (inclusions).

Les matériaux composites, et en particulier les matériaux renforcés par des fibres (isotropes ou anisotropes), sont de plus en plus utilisés dans certains secteurs industriels (aéronautique, spatial, automobile, etc. ...) où les progrès technologiques nécessitent de combiner des propriétés (mécaniques, thermiques, diélectriques, ...).

Les fibres sont en général des composés de matériaux dont les liaisons interatomiques sont fortes et stables. Elles sont le plus souvent à base de verre, de silice, de bore, d'alumine, de graphite, ou de polymères spéciaux. On cite :

- l'oxyde d'aluminium
- le carbure de silicium
- l'oxyde de silicium

qui sont caractérisés par leur légèreté, leur rigidité et leur dureté. Toutefois, ce type de matériaux casse facilement, et c'est pour cette raison d'ailleurs que leur utilisation comme matériau de structure est très limitée. Pour remédier à ce problème, ces fibres sont intégrées dans une matrice faite d'un autre matériau; cette matrice lie entre elles les fibres et assure la solidité de l'ensemble. Les matrices sont le plus souvent constituées de matières plastiques, de métaux, ou de céramiques. La résistance mécanique et la rigidité d'un composite dépendent avant tout du matériau du renfort, mais la matrice apporte ses propres qualités. Divers paramètres influencent le comportement des matériaux composites :

- la fraction volumique des différents constituants,
- leur morphologie,
- l'orientation et la nature des composants (fibres et matrice),
- la répartition des fibres.

C'est pour cela que les spécialistes de la conception peuvent choisir avec certaine liberté, à la fois la composition, et la structure interne des matériaux.

Les matériaux composites permettent dans de nombreux cas de relever le double défi de l'amélioration des performances mécaniques, et de l'allégement de certaines structures. Pour la conception de ces structures, et ceci du fait même du grand nombre d'hétérogénéités présentes, on ne peut recourir à une étude directe. Dans les méthodes de prévision des propriétés mécaniques des matériaux composites, on substitue au matériel réel un matériau homogène équivalent (en un sens qu'il faudra préciser), qui a le même comportement au niveau macroscopique.

Les matériaux composites les mieux connus sont sans doute les composites à fibres longues, pour lesquels les méthodes de prévision des propriétés mécaniques ne manquent pas et donnent de bons résultats. Dans ces composites, les fibres sont alors bidimensionnelles. De plus, les fibres sont pratiquement toujours alignées, et les seules données nécessaires pour caractériser complètement ces composites sont les propriétés mécaniques des différents constituants, la fraction volumique des fibres ainsi que le type de répartition géométrique dans le plan perpendiculaire aux fibres (voir Christensen, 1979).

Une autre catégorie de matériaux composites est celle des composites à fibres courtes ou à particules. Les études les plus avancées et les plus prometteuses actuellement, portent sur les composites Aluminium/Alumine ou Aluminium/Carbone, mais surtout Aluminium/Carbure de Silicium, le carbure de Silicium étant introduit soit sous forme de "whiskers", soit sous forme de particules. Un autre intérêt de ces composites est de pouvoir être transformés par alliage, forgeage, laminage, selon les propriétés traditionnelles. Des techniques spécifiques sont envisagées pour la réalisation

de ces produits, telles par exemple que l'insertion dans l'Aluminium par voie liquide et pressage (procédé "Squeeze Casting"). Les additions de particules ou de "whiskers" ne sont d'ailleurs pas seulement employées avec des matrices métalliques, mais également dans des composites Résine/Verre par exemple.

Pour les matériaux composites à fibres courtes, outre l'aspect fini de la longueur des fibres qui va donner naissance à des variations rapides des champs de contraintes et de déformations élastiques, on note une forte inhomogénéité dans l'aspect géométrique des fibres ainsi que dans leur orientation.

L'aspect géométrique du composite dépend bien sûr du processus de fabrication retenu, et les matériaux à prendre en compte vont du composite à fibres alignées jusqu'à celui où les fibres sont orientées de façon aléatoire dans l'espace. D'autre part, la répartition géométrique des fibres, qui conditionne les interactions entre fibres voisines, est cette fois à considérer dans l'espace entier. Il est bien évident que la prise en compte de tous ces paramètres est délicate à réaliser de façon simultanée. Cependant, pour répondre à un cahier des charges bien défini, il est nécessaire de connaître l'influence de chaque paramètre définissant le matériau sur son comportement. Il s'agit donc de fournir aux spécialistes de calcul des structures une loi de comportement homogénéisée représentant la réponse d'un élément de volume considéré comme macrohomogène. D'autre part, pour la prévision de tenue en service des structures composites, il est essentiel d'évaluer les contraintes locales dans chacun des constituants et à l'interface entre fibre et matrice, pour préciser les limites d'emplois de tels matériaux en évitant la rupture ou la décohésion. Ceci n'est toutefois possible que sur des bases théoriques solides qui permettent de prévoir l'effet de chaque variable sur les performances du produit. Comme les matériaux sont examinés en tant que matériaux hétérogènes, on pourra alors considérer que les progrès qui ont eu lieu dans ce domaine sont à la base du développement des méthodes utilisées pour étudier le comportement des composites. Ainsi, grâce à l'étude de "l'hétérogénéité élémentaire" faite par Eshelby (1961), mais limitée aux milieux faiblement dilués, et au-delà des modèles simples de Voigt (1889),

Reuss (1929) (qui en fait, ainsi que l'a montré Hill (1952)), fournissent des bornes supérieure et inférieure pour les constantes élastiques effectives, se sont développées des méthodes statistiques systématiques qui font intervenir l'ensemble des fonctions de corrélations des constantes élastiques des constituants (Kröner, 1980).

Les premiers travaux significatifs fournissant des estimations autres que celles de Voigt et Reuss, sont l'oeuvre d'Hershey (1954) et de Kröner (1958), qui ont utilisé en élasticité le schéma autocohérent introduit précédemment par les physiciens en mécanique quantique (théorie des champs moyens). L'utilisation s'est élargie ensuite à d'autres domaines (viscoélasticité, plasticité). D'autres modèles, basés sur la méthode autocohérente, ont été développés par Molinari et al. (1987), Ahzi et al. (1990), Canova et al. (1992), Molinari et Tóth (1994) et Tóth et al. (1994) dans le cas des matériaux polycristallins.

Parallèlement, des méthodes variationnelles plus performantes que celle de Hill (1952) et dues à Hashin et Shtrikman (1962, 1963) et Walpole (1966, 1969), ont permis de resserrer les bornes obtenues à partir des modèles de Voigt et Reuss.

Le schéma autocohérent et la méthode de Mori-Tanaka sont deux méthodes basées sur les travaux d'Eshelby (1957) qui permettent d'évaluer le comportement d'une hétérogénéité en la remplaçant par une prédéformation (libre de contrainte) d'un milieu homogène. Ces deux méthodes, et d'autres qui seront présentées dans le paragraphe I.2, ne s'intéressent qu'à une seule hétérogénéité, les interactions entre hétérogénéités étant décrites par un choix approprié du milieu qui entoure chaque hétérogénéité. Leur mise en oeuvre est simple et légère, et leurs résultats sont intéressants pour une première approche. Ces méthodes ont permis de mettre en évidence plusieurs phénomènes intéressants concernant la variation des modules d'élasticité en fonction de l'élancement des fibres, leur fraction volumique ou les caractéristiques des différents constituants. Toutefois, par leur principe même, ces méthodes ne permettent qu'une prise en compte très approchée des interactions entre hétérogénéités et ne peuvent rendre compte d'effets

géométriques faisant intervenir plusieurs hétérogénéités (recouvrement de fibres par exemple).

Les modèles de réseaux périodiques permettent d'introduire des informations géométriques très riches sur la disposition des fibres, parfois même plus riches que celles dont on peut couramment disposer par des moyens classiques d'observation. Une théorie bien fondée, prolongée par des résolutions par éléments finis, permet théoriquement d'obtenir des résultats précis sur les propriétés élastiques des composites, et à défaut d'expressions analytiques simples, permet d'effectuer des études paramétrées sur l'influence de divers paramètres géométriques ou matériels. Peyroux et Suquet (1990) ont utilisé cette méthode pour étudier l'influence de la fraction volumique, de l'éclatement et du recouvrement des fibres (paramètres géométriques), ainsi que l'influence du rapport des modules d'Young des phases (paramètres matériels) sur l'élasticité du composite. Ils ont effectué une étude plus approfondie du recouvrement, paramètre non pris en compte dans le schéma autocohérent ni dans la méthode de Mori-Tanaka, et ont trouvé une forte influence de ce paramètre sur le module longitudinal du composite (les autres modules étant peu affectés). Cet effet justifierait donc une mesure précise du recouvrement moyen des fibres. Ces auteurs ont trouvé que les méthodes d'éléments finis s'étaient avérées lourdes et complexes à mettre en œuvre.

Une autre méthode, utilisant des développements en séries de Fourier des fonctions périodiques, permet de modéliser les répartitions périodiques de fibres. Cette méthode est décrite dans le paragraphe I.4.2. Le choix des vecteurs de base permet de prendre en considération le recouvrement des fibres et leur fraction volumique. Les conditions de périodicité sont ici prises automatiquement en compte dans le développement en séries de Fourier et il n'y a pas de maillage à réaliser, mais la programmation reste délicate.

Dans ce travail, nous nous intéressons essentiellement à la détermination d'une loi de comportement homogénéisée, pour un matériau composite à élasticité linéaire constitué de deux ou plusieurs phases différentes.

Dans le chapitre I, on rappelle certains résultats d'homogénéisation qui concernent plus précisément le passage du niveau microscopique au niveau macroscopique. On aboutit à des relations donnant les caractéristiques élastiques du composite en fonction de celles des différents constituants, si l'on connaît les tenseurs de localisation dans chaque phase. On présente aussi les différentes méthodes qui permettent d'obtenir ces tenseurs : le schéma autocohérent, la méthode de Mori-Tanaka, le modèle de la sphère composite ou du cylindre composite, le modèle à trois phases, le schéma différentiel, l'homogénéisation asymptotique de milieux périodiques, et le développement en séries de Fourier ...

Dans le chapitre II, nous présentons une nouvelle méthode, susceptible de prendre en compte la répartition spatiale du renfort ou des inclusions. Ce modèle part, non pas des interactions entre une inclusion et le milieu homogène équivalent, mais plutôt des interactions, entre une inclusion du volume élémentaire représentatif de la répartition spatiale des inclusions, et l'ensemble des inclusions.

Dans le chapitre III, nous ferons des applications dans le cas de plusieurs répartitions d'inclusions sphériques isotropes. Les résultats seront comparés avec ceux obtenus par les méthodes qui sont présentées dans le premier chapitre.



# CHAPITRE I :

## ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE

|  |           |
|--|-----------|
| <b>I.1- INTRODUCTION.....</b>  | <b>14</b> |
| <b>I.2- PRINCIPES DE BASE EN HOMOGENÉISATION.....</b>                      | <b>14</b> |
| I.2.1. Description micro et macro du composite.....                        | 15        |
| I.2.2. Utilisation de ces relations dans le cas de composites "réels"..... | 18        |
| <b>I.3- HOMOGENÉISATION DES MATÉRIAUX POLYPHASÉS</b>                       |           |
| <b>DÉSORDONNÉS.....</b>  | <b>18</b> |
| I.3.1. Approximation de Voigt et Reuss.....                                | 19        |
| I.3.2. Méthodes variationnelles.....                                       | 19        |
| I.3.3. Milieux dilués .....  | 22        |
| I.3.4. Modèle de la sphère composite.....                                  | 23        |
| I.3.5. Modèle à trois phases.....  | 26        |
| I.3.6. Méthode d'Eshelby.....  | 29        |
| I.3.6.1) Solution générale du problème.....                                | 29        |
| I.3.6.2) Méthode de l'inclusion équivalente.....                           | 32        |
| I.3.6.3) Calcul du tenseur d'élasticité effectif.....                      | 34        |
| I.3.7. Méthode autocohérente.....  | 35        |
| I.3.8. Méthode de Mori-Tanaka.....   | 40        |
| I.3.9. Schéma différentiel.....  | 43        |
| I.3.10. Notion de tenseur de polarisation.....                             | 45        |
| I.3.11. Méthodes statistiques.....   | 46        |
| I.3.12. Comparaison entre ces différents modèles.....                      | 47        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>I4- HOMOGÉNÉISATION DES MATÉRIAUX POLYPHASÉS À<br/>STRUCTURE PÉRIODIQUE.....</b> | <b>51</b> |
| I.4.1. Homogénéisation asymptotique.....  | 52        |
| I.4.1.1) Problème élémentaire.....  | 54        |
| I.4.1.2) Utilisation de symétries.....  | 57        |
| I.4.2. Séries de Fourier.....   | 58        |
| I.4.3. Autres modèles.....  | 64        |
| I.4.4. Comparaison entre ces modèles.....   | 67        |
| <b>I5- CONCLUSIONS.....</b>   | <b>70</b> |

## I.1- INTRODUCTION

Nous présentons dans ce chapitre deux types de méthodes, qui permettent d'obtenir les caractéristiques élastiques du composite en fonction de celles des différents constituants. Les méthodes du premier type négligent les interactions entre fibres, ou elles les décrivent par un choix approprié du milieu qui entoure chaque fibre. Elles ne font intervenir que le taux de remplissage des renforts dans la matrice et leur comportement élastique respectif, certaines d'entre elles prenant en compte, toutefois, la forme des renforts. Pour tenir compte de la répartition des inclusions dans la matrice, on présente un deuxième type de modèles, plus complexes à mettre en place, mais permettant de rendre compte des effets géométriques faisant intervenir plusieurs fibres (répartition spatiale des fibres, recouvrement des fibres par exemple).

Nous commençons par un rappel de certains résultats d'homogénéisation qui concernent plus précisément le passage du niveau microscopique au niveau macroscopique. On aboutit à des relations donnant les caractéristiques élastiques du composite en fonction de celles des différents constituants.

## I.2- PRINCIPES DE BASE EN HOMOGENÉISATION

On considère un milieu  $D$  élastique linéaire infini et homogène, de tenseur d'élasticité  $\underline{C}^M$  (dans le cas isotrope de module de cisaillement  $\mu^M$ , de module d'Young  $E^M$ , de module de compressibilité  $k^M$  et de coefficient de Poisson  $\nu^M$ ), constituant la matrice. Une infinité d'inclusions élastiques de formes ellipsoïdales sont noyées dans la matrice. On note  $\underline{C}^I$  le tenseur d'élasticité d'une inclusion (dans le cas isotrope on introduit les de modules de cisaillement  $\mu^I$ , module d'Young  $E^I$ , module de compressibilité  $k^I$  et le coefficient de Poisson  $\nu^I$ ).

### I.2.1. Description micro et macro du composite

Un matériau composite peut, de façon générale, être considéré comme un matériau à (N+1) constituants, la matrice étant la phase 0, les N autres phases constituant le renforcement. Lorsqu'on cherche à obtenir les caractéristiques élastiques d'un matériau hétérogène, on utilise classiquement un chargement de type conditions aux limites homogènes au contour. On impose alors sur la surface extérieure  $\partial V$  du composite des déplacements  $\underline{u}(\partial V)$  ou des efforts  $\underline{\sigma}_n(\partial V)$  de la forme :

$$(I-1a,b) \quad \underline{u}(\partial V) = \underline{E} \cdot \underline{x} \quad \text{ou} \quad \underline{\sigma}_n(\partial V) = \underline{\Sigma} \cdot \underline{n}$$

où  $\underline{E}$  et  $\underline{\Sigma}$  représentent respectivement les tenseurs de déformations et de contraintes macroscopiques, donc uniformes.

$\underline{E}$  (ou  $\underline{\Sigma}$ ) étant imposé, la résolution théorique (mais impossible à réaliser en générale) du problème élastique correspondant fournit l'expression des champs de contrainte et de déformation locaux. Sous un de ces chargements, les champs de déformation et contrainte microscopiques sont perturbés par la présence des hétérogénéités. On notera, en chaque point  $M(\underline{x})$  de  $D$ ,  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  et  $\underline{\epsilon}(\underline{x})$  les champs de contraintes et de déformations. Ces champs locaux sont reliés aux champs macroscopiques par des relations de moyenne :

$$(I-2a,b) \quad \langle \underline{\epsilon}(\underline{x}) \rangle = \underline{E} \quad \text{et} \quad \langle \underline{\sigma}(\underline{x}) \rangle = \underline{\Sigma}$$

où  $\langle . \rangle$  désigne l'opération de moyenne sur le milieu  $D$  de volume  $|D|$ , opération définie par :

$$(I-3) \quad \langle f \rangle = \frac{1}{|D|} \int_D f(\underline{x}) d\underline{x}$$

Dans le cadre de l'élasticité linéaire où nous nous plaçons, les contraintes et déformations microscopiques sont reliées par :  $\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{C}(\underline{x}) : \underline{\epsilon}(\underline{x})$  ou  $\underline{\epsilon}(\underline{x}) = \underline{S}(\underline{x}) : \underline{\sigma}(\underline{x})$ . Ces champs locaux sont reliés aux champs macroscopiques par :

$$(I-4a,b) \quad \underline{\epsilon}(\underline{x}) = \underline{A}(\underline{x}) : \underline{E} \quad \text{et} \quad \underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{B}(\underline{x}) : \underline{\Sigma}$$

où  $\underline{A}(\underline{x})$  et  $\underline{B}(\underline{x})$  sont des tenseurs de localisation du quatrième ordre. La loi de

comportement macroscopique permet alors d'obtenir le tenseur d'élasticité  $\underline{C}^{\text{eff}}$  (ou  $\underline{S}^{\text{eff}}$ ) du matériau composite par :

$$(I-5a) \quad \langle \underline{\sigma} \rangle = \underline{C}^{\text{eff}} : \underline{E} \quad \text{si on impose une déformation } \underline{E}$$

$$(I-5b) \quad \langle \underline{\epsilon} \rangle = \underline{S}^{\text{eff}} : \underline{\Sigma} \quad \text{si on impose une contrainte } \underline{\Sigma}$$

où les tenseurs effectifs sont donnés par :

$$(I-6a,b) \quad \underline{C}^{\text{eff}} = \langle \underline{C}(\underline{x}) : \underline{A}(\underline{x}) \rangle \quad \text{et} \quad \underline{S}^{\text{eff}} = \langle \underline{S}(\underline{x}) : \underline{B}(\underline{x}) \rangle$$

On définit  $\underline{\sigma}^K$  et  $\underline{\epsilon}^K$  comme étant les contraintes et déformations moyennes (on les qualifiera de microscopiques par rapport aux grandeurs macroscopiques  $\underline{E}$  et  $\underline{\Sigma}$ ) sur la phase K :

$$(I-7a,b) \quad \underline{\sigma}^K = \langle \underline{\sigma}(\underline{x}) \rangle_K \quad \text{et} \quad \underline{\epsilon}^K = \langle \underline{\epsilon}(\underline{x}) \rangle_K$$

où  $\langle . \rangle_K$  désigne l'opération de moyenne sur la phase K considérée, opération définie par :

$$(I-8) \quad \langle f \rangle_K = \frac{1}{|D_K|} \int_{D_K} f(\underline{x}) d\underline{x}$$

Dans cette dernière expression,  $|D_K|$  désigne le volume du domaine  $D_K$  contenant la phase K.

Le passage au niveau macroscopique se fait ensuite par la moyenne sur tout le volume des grandeurs  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  et  $\underline{\epsilon}(\underline{x})$  (I-2a,b), ce qui peut encore s'écrire en fonction de  $\underline{\sigma}^K$  et  $\underline{\epsilon}^K$  :

$$(I-9a,b) \quad \underline{E} = \sum_{I=0}^N f_I \underline{\epsilon}^I \quad \text{et} \quad \underline{\Sigma} = \sum_{I=0}^N f_I \underline{\sigma}^I = \sum_{I=0}^N f_I \underline{C}^I : \underline{\epsilon}^I$$

où  $f_I$  désigne la fraction volumique de la phase I. La dernière équation est obtenue en utilisant la loi de comportement élastique de la phase I :  $\underline{\sigma}^I = \underline{C}^I : \underline{\epsilon}^I$ .

Le rôle joué par la phase 0 (matrice dans un composite) est particulier, c'est pourquoi les deux équations précédentes sont écrites de la façon suivante :

$$(I-10a,b) \quad \underline{E} = f_0 \underline{\epsilon}^0 + \sum_{I=1}^N f_I \underline{\epsilon}^I \quad \text{et} \quad \underline{\Sigma} = f_0 \underline{C}^0 : \underline{\epsilon}^0 + \sum_{I=1}^N f_I \underline{C}^I : \underline{\epsilon}^I$$

ce qui permet d'éliminer  $\underline{\epsilon}^0$  et d'obtenir :

$$(I-11) \quad \underline{\Sigma} = \underline{C}^0 : \underline{E} + \sum_{I=1}^N f_I (\underline{C}^I - \underline{C}^0) : \underline{\epsilon}^I$$

De même, en écrivant cette fois (I-9a,b) sous la forme :

$$(I-12a,b) \quad \underline{\underline{E}} = f_0 \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{\sigma}}^0 + \sum_{I=1}^N f_I \underline{\underline{S}}^I : \underline{\underline{\sigma}}^I \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\Sigma}} = f_0 \underline{\underline{\sigma}}^0 + \sum_{I=1}^N f_I \underline{\underline{\sigma}}^I$$

(où  $\underline{\underline{S}}^I$  est la matrice de souplesse de la phase I, inverse de  $\underline{\underline{C}}^I$ ), on obtient :

$$(I-13) \quad \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{S}}^0 : \underline{\underline{\Sigma}} + \sum_{I=1}^N f_I (\underline{\underline{S}}^I - \underline{\underline{S}}^0) : \underline{\underline{\sigma}}^I$$

Si maintenant, par une méthode quelconque on peut exprimer  $\underline{\underline{\sigma}}^I$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^I$  sous la forme :

$$(I-14a,b) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^I = \underline{\underline{A}}^I : \underline{\underline{E}} \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}^I = \underline{\underline{B}}^I : \underline{\underline{\Sigma}}$$

on pourra déduire  $\underline{\underline{C}}^{\text{eff}}$  et  $\underline{\underline{S}}^{\text{eff}}$  de (I-11) et (I-13) :

$$(I-15a,b) \quad \underline{\underline{C}}^{\text{eff}} = \underline{\underline{C}}^0 + \sum_{I=1}^N f_I (\underline{\underline{C}}^I - \underline{\underline{C}}^0) : \underline{\underline{A}}^I \quad \text{et} \quad \underline{\underline{S}}^{\text{eff}} = \underline{\underline{S}}^0 + \sum_{I=1}^N f_I (\underline{\underline{S}}^I - \underline{\underline{S}}^0) : \underline{\underline{B}}^I$$

Le tenseur  $\underline{\underline{A}}^I$  (respectivement  $\underline{\underline{B}}^I$ ) est la moyenne sur la phase I du tenseur de localisation des déformations  $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{x}})$  (respectivement des contraintes  $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{x}})$ ) défini en chaque point  $M(\underline{\underline{x}})$  dans (I-4a) (respectivement dans (I-4b)). Ces tenseurs  $\underline{\underline{A}}^I$  et  $\underline{\underline{B}}^I$  dépendent de la microstructure et de l'hétérogénéité du matériau composite.

Nous verrons dans les prochains paragraphes des méthodes visant à déterminer les tenseurs  $\underline{\underline{A}}$  et  $\underline{\underline{B}}$  : la méthode d'Eshelby, la méthode de Mori-Tanaka et le schéma autocohérent à 1-site ....

Auparavant, rappelons brièvement quelques propriétés concernant les tenseurs de localisation.

De (I-14a,b) on tire  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \langle \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{E}} \rangle = \langle \underline{\underline{A}} \rangle : \underline{\underline{E}}$ , et on peut procéder de même pour les contraintes, ce qui donne :

$$(I-16a,b) \quad \langle \underline{\underline{A}} \rangle = \underline{\underline{I}} \quad \text{et} \quad \langle \underline{\underline{B}} \rangle = \underline{\underline{I}}$$

où  $\underline{\underline{I}}$  est le tenseur identité symétrique d'ordre 4 défini par :

$$(I-17) \quad I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

avec  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

De plus les tenseurs  $\underline{\underline{A}}^I$  et  $\underline{\underline{B}}^I$  sont reliés par la relation :

$$(I-18) \quad \underline{\underline{B}}^I = \underline{\underline{C}}^I : \underline{\underline{A}}^I : \underline{\underline{S}}^{\text{eff}}$$

Les relations que nous venons d'établir serviront de base à tout ce qui va suivre.

### I.2.2. Utilisation de ces résultats dans le cas de composites "réels"

Les relations (I-15a,b) permettent donc d'obtenir les caractéristiques élastiques du composite, et ceci dès que l'on connaît les tenseurs de localisation de chaque phase. Mais l'obtention du tenseur  $\underline{\Delta}^I$ , par exemple, suppose que l'on puisse obtenir la déformation moyenne  $\underline{\varepsilon}^I$  dans la phase I qui comporte deux parties : l'une due à l'effet de l'hétérogénéité de la phase I, l'autre représentant les interactions de toutes les autres phases. Pour un composite réel, le problème de la détermination exacte de  $\underline{\Delta}^I$  (et donc de  $\underline{\varepsilon}^I$ ) est en général impossible du fait même du grand nombre de phases en présence. On peut néanmoins proposer la démarche suivante. Il s'agit de mettre en évidence certains paramètres géométriques et de définir ainsi des familles de fibres. Une famille peut, par exemple, contenir des fibres de matériau de forme identique, toutes alignées dans la même direction. Le problème se réduit alors au calcul du tenseur  $\underline{\Delta}^I$  correspondant aux différentes familles de fibres, et les sommations dans (I-15a,b) deviennent des sommations sur les familles de fibres. Ce point sera expliqué en détail dans le Chapitre II.

Le problème est donc maintenant de savoir déterminer les tenseurs de localisation des contraintes et des déformations. Répondent à ce besoin <sup>pour</sup> plusieurs <sup>re</sup> méthodes, qui vont être détaillées dans les deux prochains paragraphes, distinguant les deux types de techniques dont nous avons déjà parlé en introduction de ce chapitre.

## I.3- HOMOGÉNÉISATION DES MATÉRIAUX POLYPHASÉS DÉSORDONNÉS

Les différents techniques d'homogénéisation qui vont être recensées et expliquées dans cette partie de façon non exhaustive, vont nous permettre de cerner tour à tour leurs possibilités et leurs faiblesses, le fil conducteur étant la complexité de la méthode employée et l'importance des hypothèses.

### I.3.1. Approximation de Voigt et Reuss

Les méthodes les plus rudimentaires sont la méthode de Voigt (1889) pour l'approche en déformation et sa duale en contrainte : la méthode de Reuss (1929). Pour la première, l'hypothèse faite consiste à considérer une déformation constante dans tout le composite, c'est à dire que dans toute phase I, on a  $\underline{\underline{\epsilon}}^I = \underline{\underline{\epsilon}}$ . Le tenseur  $\underline{\underline{A}}^I$  est donc partout réduit au tenseur identité, et l'estimation correspondante pour le tenseur de rigidité du composite est la moyenne arithmétique des tenseurs de rigidité de chaque phase :

$$(I-19a) \quad \underline{\underline{C}}_V^{eff} = \underline{\underline{C}}^M + \sum_{I=1}^N f_I (\underline{\underline{C}}^I - \underline{\underline{C}}^M)$$

Pour la méthode de Reuss, l'hypothèse faite est  $\underline{\underline{\sigma}}^I = \underline{\underline{\sigma}}$  partout, et on obtient alors :

$$(A-19b) \quad \underline{\underline{S}}_R^{eff} = \underline{\underline{S}}^M + \sum_{I=1}^N f_I (\underline{\underline{S}}^I - \underline{\underline{S}}^M)$$

Ces deux modèles simples ne font intervenir que le taux de remplissage des renforts dans la matrice et leur comportement élastique respectif. Ils fournissent des bornes supérieure et inférieure pour les constantes élastiques effectives, ce que nous allons voir dans le prochain paragraphe.

### I.3.2. Méthodes variationnelles

La détermination des bornes sur les modules d'élasticité utilise les théorèmes variationnels de l'énergie. Dans une approche en terme de déplacements, le théorème de l'énergie potentielle totale permet de trouver les bornes supérieures, alors que le théorème de l'énergie complémentaire permet, dans le cadre d'une approche en contraintes, d'accéder aux bornes inférieures.

Hill (1952) a démontré que l'approximation de Reuss et celle de Voigt représentent respectivement les bornes inférieures et supérieures. Donc dans le cas d'un mélange isotrope de deux phases isotropes, on a :

$$(I-20a) \quad \frac{k^I k^M}{(1-f)k^I + f k^M} \leq k^{eff} \leq (1-f)k^M + f k^I$$

$$(I-20b) \quad \frac{\mu^I \mu^M}{(1-f)\mu^I + f \mu^M} \leq \mu^{eff} \leq (1-f)\mu^M + f \mu^I$$

Plus généralement, pour un mélange globalement isotrope de constituants localement



isotropes on a :

$$(I-21a) \quad \langle k^{-1} \rangle^{-1} \leq k^{\text{eff}} \leq \langle k \rangle$$

$$(I-21b) \quad \langle \mu^{-1} \rangle^{-1} \leq \mu^{\text{eff}} \leq \langle \mu \rangle$$

On remarque que  $E^I E^M / (1-f)E^I + fE^M$  minore effectivement le module d'Young  $E^{\text{eff}}$  du matériau global, grâce à la relation linéaire  $1/E = (1/3\mu) + (1/9k)$  qui transmet les inégalités données par l'approche de Reuss  $1/k^{\text{eff}} \geq (f/k^I) + ((1-f)/k^M)$  et  $1/\mu^{\text{eff}} \geq (f/\mu^I) + ((1-f)/\mu^M)$ . Mais on notera que  $fE^I + (1-f)E^M$  ne majore pas forcément  $E^{\text{eff}}$ . Le coefficient de Poisson étant relié à  $k$  et  $\mu$  par la relation  $2\nu = (3k - 2\mu) / (3k + \mu)$ , on ne peut en donner d'encadrement.

Si connaissant les proportions volumiques des phases supposées isotropes, on sait que l'ensemble est isotrope (les formes des phases pouvant être quelconques mais leurs orientations étant alors distribuées aléatoirement de façon à garantir l'isotropie du mélange), on dispose de bornes plus resserrées que celles de Voigt et Reuss, établies en premier par Hashin et Shtrikman (1962,1963). Elles ont été généralisées par Walpole (1966,1969,1970), Willis et Acton (1976), Willis (1977), Kröner (1977), Laws et McLaughlin (1979). Dans le cas de deux phases, les relations s'écrivent de la façon suivante :

$$(I-22a) \quad \min(k_a, k_b) \leq k^{\text{eff}} \leq \max(k_a, k_b)$$

$$(I-22b) \quad \min(\mu_a, \mu_b) \leq \mu^{\text{eff}} \leq \max(\mu_a, \mu_b)$$

avec

$$(I-23a) \quad k_a = k^M + f \frac{k^I - k^M}{1 + (1-f) \frac{k^I - k^M}{k^M + \frac{4}{3}\mu^M}}$$

$$(I-23b) \quad k_b = k^M + f \frac{k^I - k^M}{1 + (1-f) \frac{k^I - k^M}{k^M + \frac{4}{3}\mu^I}}$$

et si  $(\mu^I - \mu^M)(k^I - k^M) \geq 0$ , alors (Hashin et Shtrikman, 1963) :

$$(I-24a) \quad \mu_a = \mu^M + f \frac{\mu^I - \mu^M}{1 + (1-f) \frac{\mu^I - \mu^M}{\mu^M + \frac{1}{\frac{1}{\mu^M} + \frac{10}{9k^M + 8\mu^M}}}}$$

$$(I-24b) \quad \mu_b = \mu^M + f \frac{\mu^I - \mu^M}{1 + (1-f) \frac{\mu^I - \mu^M}{\mu^M + \frac{1}{\frac{1}{\mu^I} + \frac{10}{9k^I + 8\mu^I}}}}$$

ou si  $(\mu^I - \mu^M)(k^I - k^M) \leq 0$ , alors (Walpole, 1966) :

$$(I-24c) \quad \mu_a = \mu^M + f \frac{\mu^I - \mu^M}{1 + (1-f) \frac{\mu^I - \mu^M}{\mu^M + \frac{1}{\frac{1}{\mu^M} + \frac{10}{9k^I + 8\mu^M}}}}$$

$$(I-24d) \quad \mu_b = \mu^M + f \frac{\mu^I - \mu^M}{1 + (1-f) \frac{\mu^I - \mu^M}{\mu^M + \frac{1}{\frac{1}{\mu^I} + \frac{10}{9k^M + 8\mu^I}}}}$$

avec identité entre les deux versions pour les bornes sur  $\mu$  dans le cas où  $k^I = k^M$  (incompressibilité, en particulier). On notera la similitude formelle entre toutes ces expressions avec seulement des variations dans un numérateur. Nous signalons que des relations plus compliquées sont disponibles dans le cas de phases plus nombreuses (Hashin et Shtrikman, 1962, 1963, Walpole, 1966). Les bornes de Hashin-Shtrikman-Walpole sont les plus resserrées possibles à partir des seules informations concernant les concentrations et l'isotropie locale et globale.

Le rôle symétrique joué par les deux phases mérite d'être signalé : en changeant  $k^I$  en  $k^M$ ,  $\mu^I$  en  $\mu^M$  et  $f$  en  $(1-f)$ , on ne fait que changer  $k_a$  en  $k_b$  d'une part, et  $\mu_a$  en  $\mu_b$  d'autre part, ce qui laisse l'encadrement de Hashin-Shtrikman-Walpole inchangé. Une telle opération laisse également inchangées les bornes de Voigt et Reuss. De telles bornes seront donc insensibles au fait qu'une des phases est en inclusion dans l'autre, par exemple. Des travaux de Stolz et Zaoui (1991) permettent de mettre à profit une telle information morphologique pour obtenir des bornes encore plus resserrées et sensibles à

cette inversion de répartition. De façon générale, on peut construire des bornes d'autant plus proches que l'on a une information précise sur la distribution des phases, au moins formellement. Les travaux de Kröner (1977, 1980a), par exemple, ont introduit la notion de désordre gradué et ont donné l'expression des bornes correspondantes. Les bornes élémentaires, celles de Voigt et Reuss, celles de Hashin-Shtrikman-Walpole, entrent alors dans un cadre commun plus vaste.

Parmi les divers travaux effectués dans le cas des fibres, nous citons d'une part ceux de Hill (1964) et Hashin (1965), effectués dans le cas des fibres de différents diamètres réparties au hasard, mais avec une répartition donnée en volume, d'autre part ceux de Hashin et Rosen (1964), dans le cas de fibres de diamètres identiques réparties suivant un arrangement hexagonal. Ces auteurs ont trouvé, pour un matériau macroscopiquement isotrope transverse, un encadrement des cinq modules effectifs indépendants : le module de compression latérale (sans déformation longitudinale, défini par  $K = k + \mu/3$ )  $K_{23}$ , le module de cisaillement latéral  $\mu_{23}$ , le module de cisaillement transversal  $\mu_{12}$ , le module d'Young longitudinal, et le coefficient de Poisson transversal.

Les bornes de Hashin-Shtrikman-Walpole ne sont pas très resserrées quand l'hétérogénéité du comportement est forte, d'où la nécessité d'autres modèles qui nous fournissent une loi de comportement homogénéisée représentant la réponse d'un élément de volume considéré comme macrohomogène. C'est ce que nous allons voir dans les prochains paragraphes.

### I.3.3. Milieu dilué

Si, dans un milieu hétérogène, la phase inclusionnaire est extrêmement diluée dans la matrice, on peut alors négliger les interactions entre éléments de phase inclusionnaire. Dewey (1947), en se basant sur la solution d'élasticité donnée par Goodier (1933), a obtenu, dans le cas d'une dispersion de sphères par exemple :

$$(I-25a) \quad k^{\text{eff}} = k^M + f \frac{k^I - k^M}{1 + \frac{k^I - k^M}{k^M + \frac{4}{3}\mu^M}}$$

$$(I-25b) \quad \mu^{\text{eff}} = \mu^M + f \frac{\mu^I - \mu^M}{1 + \frac{\mu^I - \mu^M}{\mu^M + \frac{1}{\frac{1}{\mu^M} + \frac{10}{9k^M + 8\mu^M}}}}$$

lorsque  $f$  tend vers 0. On notera que ces expressions correspondent aux bornes de Hashin-Shtrikman données au paragraphe précédent ( $k_a$  et  $\mu_a$ ) développées au premier ordre au voisinage de  $f=0$ . De plus, l'expression de  $\mu^{\text{eff}}$  est encore comprise entre les bornes de Walpole lorsque  $(\mu^I - \mu^M)(k^I - k^M)$  est négatif, puisqu'alors le faisceau des bornes est plus large que celui donné par les expressions de Hashin-Shtrikman. Le cas particulier d'une dispersion de sphères rigides dans un fluide incompressible correspond à  $\mu^I$  et  $k^M$  tendant vers l'infini, et conduit immédiatement à la loi établie par Einstein (1911) :  $\mu^{\text{eff}} = \mu^M \left(1 + \frac{5}{2}f\right)$ . Remarquons que si on change  $k^I$  en  $k^M$ ,  $\mu^I$  en  $\mu^M$  et  $f$  en  $(1-f)$ , on obtient l'autre borne de Hashin-Shtrikman ( $k_b$ ,  $\mu_b$ ) au premier ordre du voisinage de  $f=0$ .

Ce modèle est plus performant, mais limité aux milieux faiblement dilués. Nous présentons dans les deux prochains paragraphes deux modèles complémentaires plus satisfaisants que ce dernier.

### I.3.4. Modèle de la sphère composite

Hashin (1962) a considéré une sphère composite contenant un noyau sphérique de phase isotrope, de comportement défini par  $k^I$  et  $\mu^I$ , entourée d'une couche concentrique de phase isotrope de comportement défini par  $k^M$  et  $\mu^M$ . Le rapport des rayons du noyau et de la sphère ( $a/b$ ) est fixé pour chaque sphère composite, le rayon extérieur  $b$  étant quelconque. Sous l'action d'une pression uniforme, cette sphère se contracte en restant de forme sphérique, et la variation de volume peut être calculé exactement ; elle correspond à une compressibilité globale de la sphère composite donnée par :

$$(I-26) \quad k^{\text{comp}} = k^M + f \frac{k^I - k^M}{1 + (1-f) \frac{k^I - k^M}{k^M + \frac{4}{3}\mu^M}}$$

On notera qu'elle est indépendante de  $\mu^I$  et qu'elle est identique à la compressibilité  $k_a$  des bornes de Hashin-Shtrikman.

Considérons maintenant un corps homogène de compressibilité  $k^{\text{comp}}$  et de module de cisaillement quelconque, soumis à une pression uniforme sur sa surface extérieure ; il règne alors à l'intérieur une pression uniforme. Une région sphérique quelconque située dans ce corps subit donc une contraction qui est identique à celle de la sphère composite précédente, puisque les compressibilités sont les mêmes. On peut donc substituer à la sphère du milieu considéré une sphère composite de même volume sans que rien ne soit changé dans le reste du corps. Cette opération peut ensuite être répétée dans un autre domaine sphérique de rayon quelconque, et ainsi de suite jusqu'à substitution complète du milieu homogène par des sphères composites analogues, mais de différents rayons extérieurs. Ce processus aboutit à un milieu hétérogène ne contenant que la matrice et la phase inclusionnaire avec une fraction volumique  $f=(a/b)^3$ . Ce milieu, qui peut d'ailleurs être périodique ou non, a une structure fractale (les sphères composites s'échelonnent jusqu'à des tailles infiniment petites) dont le "remplissage apollinien" décrit par Mandelbort (1977) donne une bonne idée et suggère une construction en deux dimensions. La compressibilité de ce milieu hétérogène de structure complexe est donc connue exactement, puisque c'est  $k^{\text{eff}}=k^{\text{comp}}$  par construction. On notera le rôle dissymétrique joué par les deux phases dans l'expression de  $k^{\text{eff}}$ . L'expression obtenue rend compte de l'influence de la distribution des phases. Remarquons enfin que le raisonnement qui a été tenu s'applique quelle que soit la taille et la forme du milieu hétérogène, et qu'il s'étend de même pour des comportements non linéaires. Il est également valable pour des composantes élémentaires non sphériques, pourvu que la forme extérieure soit telle que l'on puisse effectuer les substitutions successives et que la forme du noyau intérieur soit telle que, compte tenu des propriétés mécaniques des deux phases, la forme extérieure se transforme de façon homothétique sous l'action d'une pression uniforme.

Comme la compressibilité trouvée ici est une valeur exacte, et qu'elle est identique

à chacune des bornes de Hashin-Shtrikman pour le module de compressibilité selon la nature de la phase en inclusion (on obtient  $k^{\text{eff}}=k_b$  si les inclusions sont plus molles que la matrice), il en résulte que ces bornes, qui n'utilisent que les concentrations et l'isotropie, ne peuvent être plus resserrées, sans quoi des cas particuliers exacts seraient en dehors de l'encadrement, ce qui est la démonstration la plus simple de leur optimalité.

Il n'est par contre pas possible de tenir le même raisonnement pour calculer le module de cisaillement de ce milieu particulier, car l'application de conditions aux limites en cisaillement conduit à déformer une sphère homogène en ellipsoïde alors qu'il n'en est pas de même pour une sphère composite, ce qui rend impossible le processus de substitution précédent. Hashin (1962) a toutefois proposé des bornes établies en imposant contraintes ou déplacements de cisaillement à la surface de la sphère composite, à la manière de Reuss et Voigt, mais ne donnant pas forcément un encadrement meilleur que celui de Hashin-Shtrikman-Walpole. Des bornes réellement plus resserrées ont par contre été obtenues par Hervé, Stolz et Zaoui (1991) pour l'assemblage de sphères de Hashin en utilisant le fait qu'une des phases est en inclusion dans l'autre.

Hashin (1962) a donné l'expression de  $\mu^{\text{eff}}$  dans les deux cas limites : faible et forte concentration. A faible concentration, le résultat est celui du milieu dilué (I-25a,b) ; à forte concentration,  $\mu^{\text{eff}}$  a l'expression suivante :

$$(I-27) \quad \mu^{\text{eff}} = \mu^I - (1-f)(\mu^I - \mu^M) \frac{7 - 5v^M + 2(4 - 5v^M) \frac{\mu^I}{\mu^M}}{15(1 - v^M)}$$

Le modèle de la sphère composite a été appliqué par Hashin et Rosen (1964) dans le cas des cylindres de longueurs infinies noyés dans une matrice isotrope, puis par Hill (1964), Hashin (1966), en considérant une fibre cylindrique de rayon  $a$ , entourée d'un cylindre de matrice de rayon  $b$ . Ces deux rayons sont liés à la fraction volumique des fibres par la relation :  $f=(a/b)^2$ . Ils ont déterminé les expressions de quatre modules d'élasticité indépendants du matériau composite : le module de compression latéral  $K_{23}$  ( $K=k+\mu/3$ ), le module de cisaillement longitudinal  $\mu_{12}$ , le module d'Young longitudinal, et le coefficient de Poisson transversal, en trouvant les solutions exactes de trois

à chacune des bornes de Hashin-Shtrikman pour le module de compressibilité selon la nature de la phase en inclusion (on obtient  $k^{eff}=k_b$  si les inclusions sont plus molles que la matrice), il en résulte que ces bornes, qui n'utilisent que les concentrations et l'isotropie, ne peuvent être plus resserrées, sans quoi des cas particuliers exacts seraient en dehors de l'encadrement, ce qui est la démonstration la plus simple de leur optimalité.

Il n'est par contre pas possible de tenir le même raisonnement pour calculer le module de cisaillement de ce milieu particulier, car l'application de conditions aux limites en cisaillement conduit à déformer une sphère homogène en ellipsoïde alors qu'il n'en est pas de même pour une sphère composite, ce qui rend impossible le processus de substitution précédent. Hashin (1962) a toutefois proposé des bornes établies en imposant contraintes ou déplacements de cisaillement à la surface de la sphère composite, à la manière de Reuss et Voigt, mais ne donnant pas forcément un encadrement meilleur que celui de Hashin-Shtrikman-Walpole. Des bornes réellement plus resserrées ont par contre été obtenues par Hervé, Stolz et Zaoui (1991) pour l'assemblage de sphères de Hashin en utilisant le fait qu'une des phases est en inclusion dans l'autre.

Hashin (1962) a donné l'expression de  $\mu^{eff}$  dans les deux cas limites : faible et forte concentration. A faible concentration, le résultat est celui du milieu dilué (I-25a,b) ; à forte concentration,  $\mu^{eff}$  a l'expression suivante :

$$(I-27) \quad \mu^{eff} = \mu^I - (1-f)(\mu^I - \mu^M) \frac{7 - 5\nu^M + 2(4 - 5\nu^M) \frac{\mu^I}{\mu^M}}{15(1 - \nu^M)}$$

Le modèle de la sphère composite a été appliqué par Hashin et Rosen (1964) dans le cas des cylindres de longueurs infinies noyés dans une matrice isotrope, puis par Hill (1964), Hashin (1966), en considérant une fibre cylindrique de rayon  $a$ , entourée d'un cylindre de matrice de rayon  $b$ . Ces deux rayons sont reliés à la fraction volumique des fibres par la relation :  $f=(a/b)^2$ . Ils ont déterminé les expressions de quatre modules d'élasticité indépendants du matériau composite : le module de compression latéral  $K_{23}$  ( $K=k+\mu/3$ ), le module de cisaillement longitudinal  $\mu_{12}$ , le module d'Young longitudinal, et le coefficient de Poisson transversal, en trouvant les solutions exactes de trois

problèmes d'élasticité de la cellule cylindrique :

- traction uniforme,
- cisaillement longitudinal,
- compression hydrostatique latérale.

Ayant mis en évidence quatre modules indépendants, il reste à en exprimer un cinquième, par exemple le module de cisaillement transversal. Toutefois, aucune solution analytique exacte n'a été obtenue au problème de cisaillement transversal de cellule élémentaire cylindrique. L'expression du module de cisaillement sera donnée par le modèle à trois phases abordé dans le paragraphe suivant. Précisons que ces résultats ont été trouvés en supposant que les fibres ont des longueur infinies. Russel (1973) a déterminé les expressions des cinq modules indépendants dans le cas de fibres isotropes de longueurs finies et parallèles entre elles, plongées dans une matrice isotrope, en se basant sur les travaux d'Eshelby (1957).

On verra dans le prochain paragraphe que l'expression de  $\mu^{\text{eff}}$  est donnée par le modèle à trois phases de Christensen et Lo (1979), qui complète le modèle de la sphère composite de Hashin donnant l'expression de  $k^{\text{eff}}$ .

### **I.3.5. Modèle à trois phases**

Ce type de modèle se propose de prendre en compte le rôle différent joué par la matrice et la phase inclusionnaire dans le cadre d'une approche autocohérente, afin de pallier l'insuffisance du modèle autocohérent dit "à deux phases". Il a été proposé à l'origine par Fröhlich et Sack (1946) qui ont modélisé les propriétés macroscopiques des fluides visqueux contenant des sphères élastiques rigides ; ils ont pu obtenir la viscosité effective en utilisant le modèle à trois phases. Mackenzie (1950) a repris le modèle à trois phases de Fröhlich et Sack (1946) en considérant des cavités sphériques entourées de matrice, le tout plongé dans un matériau homogène infini. Puis ce modèle a été de nouveau remanié par Kerner (1956), Van der Poel (1958), et Smith (1974). C'est Christensen et Lo (1979, 1986) qui ont résolu complètement ce problème en se basant sur



les résultats d'Eshelby (1956). Ces auteurs ont étudié aussi le problème plan des solides avec des inclusions cylindriques en utilisant le même modèle. Le modèle à trois phases a été développé depuis par plusieurs auteurs ; son application est actuellement limitée au cas de biphasés avec deux phases isotropes, les inclusions étant soit des sphères soit des cylindres de sections circulaires et parallèles.

L'hypothèse de base consiste à considérer que les déformations moyennes dans le noyau et l'enveloppe d'une sphère composite de Hashin (représentative des teneurs volumiques et des propriétés mécaniques du biphasé) plongée dans le milieu homogène équivalent, sont celles qui règnent dans la phase inclusionnaire et la matrice au sein du milieu hétérogène. On peut remarquer que le fait de considérer qu'une inclusion est entourée de matrice dans son voisinage immédiat, et non de matériau homogénéisé comme le suppose le modèle autocohérent (voir paragraphe I.3.7.), semble tout à fait naturel lorsqu'il y a une phase de matrice.

Dans ces conditions, la compressibilité du matériau homogénéisé peut être obtenue indépendamment de son module de cisaillement et coïncide avec celle du modèle de la sphère composite de Hashin (voir paragraphe précédent). Elle est également en accord avec les bornes de Hashin-Shtrikman, puisque l'on a remarqué, lors de la première substitution, que la déformation moyenne de la sphère composite plongée dans le milieu de compressibilité  $k^{eff}$ , était identique à celle de la sphère homogène dont elle avait pris la place. Christensen et Lo (1979,1986) en ont déterminé la solution exacte ; la déformation n'est cette fois plus uniforme dans l'inclusion, et l'on retrouve la solution d'Eshelby lorsque noyau et enveloppe, ou matrice et enveloppe, ont les mêmes caractéristiques mécaniques, ou encore lorsque la taille du noyau est beaucoup plus petite que celle de la sphère composite (dans ce dernier cas, les relations de localisations de matrice à enveloppe et d'enveloppe à noyau tendent vers celles d'Eshelby). A partir des moyennes des déformations obtenues ainsi dans l'enveloppe et le noyau, le module de cisaillement effectif est donné par la solution de l'équation quadratique suivante (dans le cas des inclusions sphériques) :

$$(I-28) \quad A \left( \frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^{\text{M}}} \right)^2 + 2B \left( \frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^{\text{M}}} \right) + C = 0$$

où

$$A = 8 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) (4 - 5v^{\text{M}}) \eta_1 f^{10/3} - 2 \left[ 63 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] f^{7/3} + 252 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) \eta_2 f^{5/3} - 50 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) (7 - 12v^{\text{M}} + 8(v^{\text{M}})^2) \eta_2 f + 4(7 - 10v^{\text{M}}) \eta_2 \eta_3$$

$$B = -2 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) (1 - 5v^{\text{M}}) \eta_1 f^{10/3} + 2 \left[ 63 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] f^{7/3} - 252 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) \eta_2 f^{5/3} + 75 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) (3 - v^{\text{M}}) \eta_2 v^{\text{M}} f + \frac{3}{2} (-7 + 15v^{\text{M}}) \eta_2 \eta_3$$

$$C = 4 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) (-7 + 5v^{\text{M}}) \eta_1 f^{10/3} - 2 \left[ 63 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) \eta_2 + 2\eta_1 \eta_3 \right] f^{7/3} - 252 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) \eta_2 f^{5/3} + 25 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) (-7 + (v^{\text{M}})^2) \eta_2 f - (7 + 5v^{\text{M}}) \eta_2 \eta_3$$

et où la fraction volumique des inclusions  $f=(a/b)^3$ , avec

$$\eta_1 = (49 - 50v^{\text{M}}v^{\text{I}}) \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 1 \right) + 35 \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} (v^{\text{I}} - 2v^{\text{M}}) + 35(2v^{\text{I}} - v^{\text{M}})$$

$$\eta_2 = 5v^{\text{I}} \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} - 8 \right) + 7 \left( \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} + 4 \right)$$

$$\eta_3 = \frac{\mu^{\text{I}}}{\mu^{\text{M}}} (8 - 10v^{\text{M}}) + (7 - 5v^{\text{M}})$$

Ce modèle prévoit bien un comportement dissymétrique et il redonne le cas de forte dilution (I-25b) pour  $f$  tendant vers 0. Ses prévisions se situent entre les bornes de Hashin-Shtrikman-Walpole ; elles sont inchangées si l'on considère une condition portant sur les contraintes ou sur l'énergie (Christensen et Lo, 1979, 1986), plutôt que sur les déformations. L'expression du module de compressibilité est celle obtenue par le modèle de la sphère composite de Hashin (1962), et elle est donnée par la relation (I-26). Le résultat (I-28) est une estimation du module de cisaillement effectif du modèle de la sphère composite.

Dans le cas de cylindres parallèles de longueurs infinies, Christensen et Lo (1979, 1986) ont développé le même modèle, à partir des travaux effectués par Hermans (1967).

La méthode consiste à considérer un modèle cylindrique à trois phases. Dans ce modèle, la cellule cylindrique élémentaire est entourée d'un cylindre de grande dimensions, constitué par le matériau équivalent homogénéisé et possédant donc les propriétés effectives homogénéisées du matériau composite. Ce cylindre est soumis sur ses frontières extérieures aux conditions de l'essai de cisaillement transversal. Ce modèle donne une expression du module de cisaillement transversal  $\mu_{23}$  du matériau composite, le cinquième module manquant dans le modèle du cylindre composite.

Ces deux derniers modèles permettent de déterminer les modules effectifs pour les inclusions sphériques et les fibres cylindriques de sections circulaires. Mais ils ne sont pas applicables aux inclusions ellipsoïdales. Nous allons voir deux autres méthodes (Mori-Tanaka et autocohérente) applicables aux inclusions ellipsoïdales ; elles sont basées sur la modélisation d'Eshelby (1957) qui part de la solution du problème de l'inclusion hétérogène, mais se limite aux milieux faiblement dilués. Nous la présentons, toutefois, en détail, car elle a été la base des deux méthodes (autocohérente et Mori-Tanaka) qui seront détaillées plus loin.

### **I.3.6. Méthode d'Eshelby**

#### **I.3.6.1) Solution générale du problème**

Soit  $D$  un corps solide élastique, homogène, isotrope et supposé infini, libre de tout chargement. On considère une région  $I$  de ce corps, appelée inclusion, que l'on soumet à une déformation libre homogène, c'est à dire à un processus provoquant une déformation  $\underline{\epsilon}^*$  sans apparition de contraintes. Une dilatation thermique ou une déformation plastique localisée induite par une élévation de température, peuvent par exemple être considérées comme des déformations libres. Quel que soit le phénomène considéré, la région  $I$ , si elle était isolée, se dilaterait "librement" de  $\underline{\epsilon}^*$ . Ici, le matériau autour de  $I$  va gêner cette déformation, créant des champs de contraintes et de déformations élastiques,  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  et  $\underline{\epsilon}(\underline{x})$ , que l'on recherche. Il n'y a donc pas

d'hétérogénéité élastique du matériau mais une hétérogénéité de prédéformation d'un milieu homogène.

Eshelby (1957) a proposé une démarche "physique" pour trouver les expressions des champs de déformations et contraintes en fonction de la déformation libre  $\underline{\varepsilon}^*$ , que nous présentons ci-dessous en quatre étapes.

On considère que la déformation libre  $\underline{\varepsilon}^*$  est donnée sous la forme  $\underline{\varepsilon}^*(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}^* \theta^I(\underline{x})$ , où  $\theta^I(\underline{x})$  est la fonction caractéristique de l'inclusion définie par :

$$(I-29) \quad \theta^I(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \in I \\ 0 & \text{si } \underline{x} \notin I \end{cases}$$

**1<sup>ère</sup> étape :** On réalise une coupure fictive I' autour de I. On isole I et on le soumet à la déformation libre homogène  $\underline{\varepsilon}^*$ . On a alors :

$$(I-30) \quad \begin{cases} \underline{\sigma}^I = 0 \\ \underline{\varepsilon}^I = 0 \\ \underline{\varepsilon}^{IT} = \underline{\varepsilon}^* \end{cases}$$

équations dans lesquelles  $\underline{\sigma}^I$  est la contrainte dans l'inclusion,  $\underline{\varepsilon}^I$  est la déformation élastique dans l'inclusion, et  $\underline{\varepsilon}^{IT}$  est la déformation totale dans l'inclusion.

**2<sup>ème</sup> étape :** On impose à I toujours isolée, une déformation élastique ( $-\underline{\varepsilon}^*$ ) afin que l'inclusion reprenne sa forme initiale I. Ceci peut se faire en appliquant une densité surfacique de force  $d\underline{F}$ , définie par :  $d\underline{F} = -\underline{C}^0 : \underline{\varepsilon}^* : d\underline{s}_n$ , où  $\underline{C}^0$  désigne le tenseur d'élasticité du milieu considéré. Les champs s'expriment alors de la façon suivante :

$$(I-31) \quad \begin{cases} \underline{\sigma}^I = -\underline{C}^0 : \underline{\varepsilon}^* \\ \underline{\varepsilon}^I = -\underline{\varepsilon}^* \\ \underline{\varepsilon}^{IT} = 0 \end{cases}$$

**3<sup>ème</sup> étape :** On replace l'inclusion dans le milieu infini D et on "rétablit" la continuité de matière entre D et I. L'inclusion est toujours soumise à la densité de force  $d\underline{F}$  et les champs de contraintes et de déformations dans l'inclusion ne changent pas.

**4<sup>ème</sup> étape :** On "relâche" la densité de force  $d\underline{F}$ , ou, ce qui revient au même, on applique sur la frontière de I une densité de force ( $-d\underline{F}$ ). On crée alors des champs de contraintes et déformations élastiques supplémentaires dans tout le milieu. Pour cette étape, l'expression de la contrainte  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  est donnée en chaque point par :

$$(I-32) \quad \sigma_{ij}(\underline{x}) = C_{ijkl}^o (u_{k,l} - \varepsilon_{kl}^* \theta^I(\underline{x}))$$

où  $\underline{u}(\underline{x})$  est le champ de déplacement solution, et où on a utilisé la symétrie de  $C^o$ .

Les équations d'équilibre conduisent alors à :

$$(I-33) \quad C_{ijkl}^o u_{k,lj} = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^* n_j \delta_{\partial I}$$

où  $\delta_{\partial I}$  est la "fonction de Dirac" sur la frontière  $\partial I$  de  $I$ , de normale unitaire extérieure  $\underline{n}$ .

Cette équation (I-32) peut aussi être considérée comme l'équation d'équilibre d'un milieu homogène, soumis sur  $\partial I$  à une distribution de forces :  $f_i = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^* n_j$ .

On note par  $\underline{\varepsilon}^I(-d\underline{F})$  la déformation élastique dans l'inclusion due à  $(-d\underline{F})$ . Pour calculer cette quantité, on utilise le tenseur de Green  $\underline{G}$  du problème d'élasticité. Rappelons que  $\underline{G}$  est un tenseur donnant au point  $\underline{x}$  le déplacement  $\underline{u}$  provoqué par l'application d'une force ponctuelle  $d\underline{F}$ , appliquée au point  $\underline{x}'$ , les deux points se trouvant dans un même milieu homogène infini.

Dans le problème de l'inclusion,  $d\underline{F}$  est répartie sur la surface  $\partial I$  de l'inclusion :

$$(I-34) \quad du_i(\underline{x}) = G_{ij}(\underline{x} - \underline{x}') dF_j(\underline{x}')$$

Pour le problème étudié, le champ  $\underline{u}$  s'obtient en intégrant cette relation sur la frontière extérieure  $\partial I$  de  $I$  :

$$(I-35) \quad u_i(\underline{x}) = \int_{\partial I} G_{ij}(\underline{x} - \underline{x}') (-\sigma_{jk} n_k) d\underline{x}'$$

où  $\sigma_{jk}$  est la contrainte induite par  $(-d\underline{F})$  sur  $\partial I$ .

Si le milieu est isotrope, le tenseur de Green s'exprime de la suivante :

$$(I-36) \quad G_{ij}(\underline{x} - \underline{x}') = \frac{1}{4\pi\mu} \frac{\delta_{ij}}{|\underline{x} - \underline{x}'|} - \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{(\underline{x} - \underline{x}')_i (\underline{x} - \underline{x}')_j}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3}$$

Par transformation intégrale de volume de (I-35), on obtient :

$$(I-37) \quad u_i(\underline{x}) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \varepsilon_{ijk}^* \Psi_{,ijk} - \frac{1}{2\pi} \varepsilon_{ik}^* \Phi_{,k} - \frac{\nu}{8\pi(1-\nu)} \varepsilon_{kk}^* \Phi_{,i}$$

expression dans laquelle :

$$(I-38a,b) \quad \Psi(\underline{x}) = \int_I |\underline{x} - \underline{x}'| d\underline{x}' \quad \text{et} \quad \Phi(\underline{x}) = \int_I \frac{d\underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$$

En écrivant que  $\varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\underline{x}) - u_{j,i}(\underline{x}))$ , on obtient alors le résultat obtenu par

Eshelby (1957) concernant les inclusions de forme ellipsoïdale, pour lesquelles il est possible de calculer explicitement les intégrales de volume  $\Psi(\underline{x})$  et  $\Phi(\underline{x})$ . Dans ce cas particulier on arrive à :

$$(I-39) \quad \varepsilon_{ij}^{II}(-d\underline{F}) = S_{ijkl}\varepsilon_{kl}^*$$

où  $\underline{S}$  est le tenseur d'Eshelby, qui est un tenseur du quatrième ordre constant. Les expressions de ce tenseur pour diverses formes d'inclusions se trouvent dans Mura (1987) et dans Nemat-Nasser et Hori (1993). On notera, fait remarquable, que la déformation dans l'inclusion est constante.

Pour la configuration de l'étape quatre, on a alors :

$$(I-40) \quad \begin{cases} \underline{\sigma}^I = \underline{C}^o : (\underline{S} - \underline{I}) : \underline{\varepsilon}^* \\ \underline{\varepsilon}^I = (\underline{S} - \underline{I}) : \underline{\varepsilon}^* \\ \underline{\varepsilon}^{II} = \underline{S} : \underline{\varepsilon}^* \end{cases}$$

qui représentent les champs de déformations et contraintes que l'on recherchait.

### 1.3.6.2) Méthode de l'inclusion équivalente

Les résultats précédents concernent les cas où la région I étudiée a les mêmes caractéristiques élastiques que le milieu qui l'entoure. Pour pouvoir traiter le cas d'une hétérogénéité élastique, Eshelby (1957) a remplacé le problème avec hétérogénéité par un problème dans un milieu homogène ayant subi une déformation localisée.

On considère une hétérogénéité, de matrice de rigidité  $\underline{C}^I$ , occupant une région ellipsoïdale I d'un milieu D supposé infini dont le tenseur d'élasticité est  $\underline{C}^o$ . On soumet le milieu à une déformation macroscopique  $\underline{E}$  (le champ de déplacement  $\underline{u}$  se compose comme  $\underline{u} = \underline{E} \cdot \underline{x}$  à l'infini). Eshelby se ramène au cas d'une inclusion soumise à une déformation libre  $\underline{\varepsilon}^*$  dans un milieu homogène soumis à  $\underline{E}$ , l'équivalence entre les deux problèmes étant établi si  $\underline{\varepsilon}^*$  est choisie de façon à ce que les champs de déformations et contraintes aient les même expressions dans les deux situations.

#### Problème 1 : Hétérogénéité élastique

La problématique est la suivante : trouver le champ de déplacement  $\underline{u}$  satisfaisant les relations :

$$(I-41) \quad \begin{cases} \underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{C}(\underline{x}) : (\underline{\varepsilon}(\underline{u}) + \underline{E}) \\ \underline{\varepsilon}(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}(\underline{u}) + \underline{E} \\ \underline{\varepsilon}^T(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}(\underline{u}) + \underline{E} \\ \langle \underline{\varepsilon}^T(\underline{x}) \rangle = \underline{E} \end{cases}$$

où  $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$  et  $\underline{\varepsilon}^T(\underline{x})$  représentent respectivement la déformation élastique et la déformation totale.

Problème 2 : Problème d'inclusion soumise à une déformation libre  $\underline{\varepsilon}^*$  dans un milieu homogène soumis à  $\underline{E}$ .

Ce problème peut aussi s'énoncer d'une manière similaire : trouver  $\underline{v}$  tel que

$$(I-42) \quad \begin{cases} \underline{\sigma}'(\underline{x}) = \underline{C}^o : (\underline{\varepsilon}(\underline{v}) - \underline{\varepsilon}^* + \underline{E}) \\ \underline{\varepsilon}'(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}(\underline{v}) - \underline{\varepsilon}^* + \underline{E} \\ \underline{\varepsilon}'^T(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}(\underline{v}) + \underline{E} \\ \langle \underline{\varepsilon}'^T(\underline{x}) \rangle = \underline{E} \end{cases}$$

Les deux problèmes sont équivalents à la condition que les déformations et les contraintes soient les mêmes dans les deux cas, et ceci en chaque point  $\underline{x}$  de  $D$ .

La condition  $\underline{\varepsilon}^T(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}'^T(\underline{x})$  dans  $D/I$  implique que  $\underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \underline{\varepsilon}(\underline{v})$ , et la condition  $\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\sigma}'(\underline{x})$  y est alors satisfaite (on rappelle que  $\underline{\varepsilon}^*$  est uniforme et non nulle dans  $I$ , nulle à l'extérieur de  $I$ ).

La condition  $\underline{\varepsilon}^T(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}'^T(\underline{x})$  dans  $I$  implique également que  $\underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \underline{\varepsilon}(\underline{v})$ , et la condition  $\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\sigma}'(\underline{x})$  donne :

$$(I-43) \quad \underline{\varepsilon}(\underline{u}) = [\underline{C}^o - \underline{C}^I]^{-1} : \underline{C}^o : \underline{\varepsilon}^* - \underline{E}$$

Or dans le problème 2, les relations (I-42) permettent d'écrire :

$$(I-44) \quad \begin{cases} \underline{\sigma}'(\underline{x}) = \underline{C}^o : [(\underline{S} - \underline{I}) : \underline{\varepsilon}^* + \underline{E}] \\ \underline{\varepsilon}'(\underline{x}) = (\underline{S} - \underline{I}) : \underline{\varepsilon}^* + \underline{E} \\ \underline{\varepsilon}'^T(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}(\underline{v}) + \underline{E} = \underline{\varepsilon}(\underline{u}) + \underline{E} = \underline{S} : \underline{\varepsilon}^* + \underline{E} \end{cases}$$

La relation (I-39) nous donne alors :

$$(I-45) \quad \underline{\varepsilon}^* = [(\underline{C}^o - \underline{C}^I) : \underline{S} - \underline{C}^o]^{-1} : (\underline{C}^I - \underline{C}^o) : \underline{E}$$

relation qui peut aussi se mettre sous la forme :

$$(I-46) \quad \underline{C}^o : [(\underline{S} - \underline{I}) : \underline{\varepsilon}^* + \underline{E}] = \underline{C}^I : [\underline{S} : \underline{\varepsilon}^* + \underline{E}]$$

On notera que cette expression traduit le fait que la déformation et la contrainte dans l'inclusion, pour le problème homogène 1, sont reliées par la loi de comportement  $\underline{\sigma}' = \underline{C}^I : \underline{\varepsilon}'$ , loi de comportement propre à l'hétérogénéité du problème 1.

En portant alors (I-45) dans les équations (I-42) ou (I-44), on obtient après quelques manipulations :

$$(I-47) \quad \underline{\varepsilon}^I = \left[ \underline{I} + \underline{S} : \underline{S}^o : (\underline{C}^I - \underline{C}^o) \right]^{-1} : \underline{E}$$

où  $\underline{S}^o$  est le tenseur de compliancance :  $\underline{S}^o = \underline{C}^{o-1}$ .

### I.3.6.3) Calcul du tenseur d'élasticité effectif

La détermination du tenseur d'élasticité du matériau composite nécessite de connaître le tenseur de localisation des déformations  $\underline{A}^I$ . Eshelby (1957), pour le calculer, fait l'hypothèse que les inclusions dans le matériau composite réel se comportent de la même façon que si elles étaient seules isolées dans le milieu infini, ayant les mêmes propriétés que la matrice, et soumises à une déformation macroscopique  $\underline{E}$ . Dans ces conditions, le calcul de la déformation moyenne dans l'inclusion se fait en considérant que  $\underline{C}^o$ , élasticité du milieu qui entoure l'inclusion, est égale à  $\underline{C}^M$ , élasticité de la matrice.

La relation (I-45) nous fournit alors :

$$(I-48) \quad \underline{\varepsilon}^I = \left[ \underline{I} + \underline{S} : \underline{S}^M : (\underline{C}^I - \underline{C}^M) \right]^{-1} : \underline{E}$$

d'où

$$(I-49) \quad \underline{A}^I = \left[ \underline{I} + \underline{S} : \underline{S}^M : (\underline{C}^I - \underline{C}^M) \right]^{-1}$$

Il vient alors :

$$(I-50) \quad \underline{C}^{\text{eff}} = \underline{C}^M + f_I (\underline{C}^I - \underline{C}^M) : \left[ \underline{I} + \underline{S} : \underline{S}^M : (\underline{C}^I - \underline{C}^M) \right]^{-1}$$

Dans le cas d'un milieu hétérogène contenant plusieurs phases différentes (la matrice et N autres constituants de constantes élastiques  $\underline{C}^I$ ), il convient de dissocier le problème en autant de familles de renforts (une famille de renfort est constituée par des inclusions de mêmes constantes élastiques, de même forme et de même orientation), et d'effectuer les opérations de localisation sur chaque famille de renforts. L'expression de  $\underline{C}^{\text{eff}}$  sera donnée par la relation suivante :



$$(I-51) \quad \underline{C}^{\text{eff}} = \underline{C}^M + \sum_{I=1}^N f_I (\underline{C}^I - \underline{C}^M) : \left[ \underline{I} + \underline{S} : \underline{S}^M : (\underline{C}^I - \underline{C}^M) \right]^{-1}$$

• Le passage à la dernière équation est fait en considérant que le tenseur de localisation est le même pour toutes les inclusions d'une même famille. Donc la sommation dans cette équation porte sur les familles d'inclusions I,  $f_I$  étant la fraction volumique de la famille d'inclusions notée  $F_I$ . On note que l'on ne dispose pas de renseignements supplémentaires sur la répartition des inclusions.

Dans le cas des inclusions ellipsoïdales plongées dans une matrice isotrope, les expressions de  $\mu^{\text{eff}}$  et  $k^{\text{eff}}$  sont données par :

$$(I-52a) \quad k^{\text{eff}} = \frac{k^M}{1 - f \frac{k^I - k^M}{k^M + \frac{1}{3} S_{ijj} (k^I - k^M)}}$$

$$(I-52b) \quad \mu^{\text{eff}} = \frac{\mu^M}{1 - f \frac{\mu^I - \mu^M}{\mu^M + 2S_{1212} (\mu^I - \mu^M)}}$$

Cette méthode a été généralisée par Nemat-Nasser et Hori (1993), mais reste toujours limitée aux milieux faiblement dilués. Les méthodes qui seront présentées dans les deux prochains paragraphes sont basées sur ces travaux, et apparaissent plus performantes que cette dernière.

### I.3.7. Méthode autocohérente

Le modèle autocohérent a été introduit dans le domaine de la mécanique par Hershey (1954), et a été développé par Kröner (1958), puis par Budiansky et Wu (1966), comme un moyen pour modéliser le comportement des matériaux polycristalins. L'extension de ce modèle aux milieux multiphasés a été faite par Hill (1965) et Budiansky (1965). Il consiste à remplacer les interactions entre une hétérogénéité particulière (l'inclusion) et le milieu réel environnant, par celles existant entre une inclusion et un milieu homogène qui a les propriétés du matériau composite.

On se propose dans ce paragraphe d'introduire le problème de l'inclusion hétérogène (la formulation générale du problème sera détaillée dans le chapitre II) ; en se

basant sur la technique du tenseur de Green, on calcule les champs de déformation et de contrainte.

Considérons un milieu D homogène infini de constantes élastiques  $\underline{C}^{\text{eff}}$  et de volume V. Le milieu contient une inclusion I de volume  $V_I$ , de fraction volumique  $f_I$ , et de constantes élastiques  $\underline{C}^I$  supposés uniformes dans  $V_I$ . En l'absence d'inclusions, le milieu de constantes élastiques  $\underline{C}^{\text{eff}}$  est sollicité par un système de forces surfaciques créant dans tout le milieu homogène une déformation uniforme  $\underline{E}$ . L'équation intégrale proposée par Zeller et Dederichs (1973) permet de trouver le champ de déformation locales  $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$  répondant à ce problème :

$$(I-53) \quad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = E_{ij} + \int_V \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') \delta C_{klmn}(\underline{x}') \varepsilon_{mn}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

où

$$(I-54) \quad \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') = \frac{1}{4} \left[ G_{ki,lj}(\underline{x} - \underline{x}') + G_{kj,li}(\underline{x} - \underline{x}') + G_{li,kj}(\underline{x} - \underline{x}') + G_{lj,ki}(\underline{x} - \underline{x}') \right]$$

$\delta C_{klmn}(\underline{x})$  est donné ici par :

$$(I-55) \quad \delta C_{klmn}(\underline{x}) = (C_{klmn}^I - C_{klmn}^{\text{eff}}) \theta^I(\underline{x})$$

où la fonction  $\theta^I(\underline{x})$ , donnée par la relation (I-29), est la fonction indicatrice de l'inclusion I.

L'équation intégrale (I-53) est appelée équation L.S.D. par Kröner (1980b). La solution exacte de cette équation pour une inclusion quelconque est encore très complexe et difficile à déduire en général. La résolution du modèle autocohérent à un-site suppose les déformations  $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$  uniformes dans les inclusions. Johnson (1983) a utilisé l'approximation de Born qui consiste à remplacer  $\varepsilon_{ij}(\underline{x}')$  dans l'intégrale par le champ uniforme  $E_{ij}$ . Mais cette approximation a montré que la méthode n'est valable que pour de faibles pourcentages du renfort dans la matrice.

On notera  $\Delta C_{klmn}^I$  la différence  $(C_{klmn}^I - C_{klmn}^{\text{eff}})$ , et en tenant compte de (I-55),

l'équation (I-53) devient :

$$(I-56) \quad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = E_{ij} + \int_V \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') \Delta C_{klmn}^I \theta^I(\underline{x}') \varepsilon_{mn}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

L'intégrale sur V peut être réduite à une intégrale sur le volume  $V_I$  puisque la fonction

$\theta^I(\underline{x})$  s'annule en dehors de  $V_I$ . L'équation (I-56) s'écrit alors :

$$(I-57) \quad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = E_{ij} + \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') \Delta C_{klmn}^I \varepsilon_{mn}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

En supposant que la déformation est uniforme dans l'inclusion I (ce qui est vérifié a posteriori), on obtient :

$$(I-58) \quad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = E_{ij} + \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \Delta C_{klmn}^I \varepsilon_{mn}^I$$

Eshelby (1957) a démontré que l'intégrale dans cette expression est une constante indépendante de  $\underline{x}$ , pour  $\underline{x} \in V_I$ , donc  $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$  est uniforme (et notée  $\underline{\varepsilon}^I$ ) dans une inclusion ellipsoïdale isolée (voir aussi Faivre, 1964). On pose :

$$(I-59) \quad \Gamma_{ijkl}^{\Pi} = \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' = \frac{1}{V_I} \int_{V_I} \int_{V_I} \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' d\underline{x}$$

La déformation dans l'inclusion est donc solution de :

$$(I-60) \quad \varepsilon_{ij}^I = E_{ij} + \Gamma_{ijkl}^{\Pi} \Delta C_{klmn}^I \varepsilon_{mn}^I$$

La relation (I-60) nous permet d'obtenir le tenseur de localisation de déformation  $\underline{\Delta}^I$  de l'inclusion I. En remplaçant l'expression déterminée du tenseur  $\underline{\Delta}^I$  dans la relation (I-15a), on obtient :

$$(I-61) \quad \underline{C}^{\text{eff}} = \underline{C}^M + f_I(\underline{C}^I - \underline{C}^M) : \left[ \underline{I} - \underline{\Gamma}^{\Pi} : (\underline{C}^I - \underline{C}^{\text{eff}}) \right]^{-1}$$

On voit donc, d'après (I-61), que la solution du problème d'inclusion hétérogène se ramène également à la détermination du tenseur  $\underline{\Gamma}^{\Pi}$ . On constate que le tenseur  $\underline{\Gamma}^{\Pi}$  (donc le tenseur de localisation des déformations  $\underline{\Delta}^I$ ) est fonction des composantes élastiques  $\underline{C}^{\text{eff}}$ . L'expression (I-61) nous donnant le calcul du tenseur d'élasticité du composite  $\underline{C}^{\text{eff}}$ , qui est par ailleurs fonction du tenseur  $\underline{\Delta}^I$ , fonction lui même de  $\underline{C}^{\text{eff}}$ , ne peut être résolue numériquement que par un procédé itératif. Dans un premier pas de calcul, on peut injecter dans l'expression de  $\underline{\Delta}^I$  pour obtenir  $\underline{C}^{\text{eff}}$  des constantes élastiques initiales obtenues par exemple à partir de la loi des mélanges proposée par Voigt (I-19b). Quand les solutions obtenues n'avoisinent pas les constantes élastiques injectées, on calcule de nouveau les constantes  $\underline{C}^{\text{eff}}$  en introduisant les solutions obtenues dans l'expression de  $\underline{C}^{\text{eff}}$ . On répète le même processus jusqu'à convergence. On peut adopter le critère de convergence suivant :

$$(I-62) \quad \left[ \frac{\left( C_{ijkl}^{eff(n)} - C_{ijkl}^{eff(n-1)} \right) \left( C_{ijkl}^{eff(n)} - C_{ijkl}^{eff(n-1)} \right)}{C_{ijkl}^{eff(n)} C_{ijkl}^{eff(n)}} \right]^{1/2} \leq \epsilon$$

où "n" est le nombre de pas dans le processus itératif et  $\epsilon$  un nombre petit devant 1.

Dans tous les cas, quelle que soit la loi de départ prise dans le calcul itératif, même lorsque les valeurs de départ sont celles de l'inclusion ou de la matrice ( $\underline{C}^{eff} = \underline{C}^I$  ou  $\underline{C}^{eff} = \underline{C}^M$ ), les résultats doivent converger vers des valeurs de constantes élastiques équivalentes similaires. Le nombre d'itérations pour la convergence sera d'autant plus faible que les valeurs de départ de  $\underline{C}^{eff}$  sont proches des valeurs recherchées.

Pour un milieu hétérogène contenant plusieurs phases différentes, la matrice et N autres constituants de constantes élastiques  $\underline{C}^I$ , il convient de dissocier le problème en autant de familles de renforts (une famille de renforts est constituée par des fibres de même constantes élastiques, de même forme et de même orientation), et d'effectuer les opérations de localisation sur chaque famille de renforts. L'expression de  $\underline{C}^{eff}$  sera donnée par la relation suivante :

$$(I-63) \quad \underline{C}^{eff} = \underline{C}^M + \sum_{I=1}^N f_I (\underline{C}^I - \underline{C}^M) : \left[ \underline{I} - \underline{\Gamma}^I : (\underline{C}^I - \underline{C}^{eff}) \right]^{-1}$$

où  $f_I$  représentera la fraction volumique correspondant à chaque famille de renforts de telle sorte que :

$$\sum_{I=1}^N f_I = \sum_{I=1}^N \left( \frac{V_I}{V} \right) = f, \quad f \text{ étant la fraction volumique totale des renforts.}$$

Ce problème traité est en fait un cas particulier d'un problème plus général d'inclusion plastique et hétérogène, proposé par Berveiller et Zaoui (1982) et repris par Berveiller, Fassi-Fehri et Hihi (1986). Une région de volume  $V_I$  d'un matériau subissant à la fois une déformation inélastique et ayant des modules élastiques différents rentre dans la catégorie d'une paire d'inclusions hétérogènes et plastiques. Les transformations de phase, par exemple en font partie, ou encore les problèmes d'inclusion plastique. Dans ce dernier cas, la matrice et l'inclusion ont les mêmes constantes d'élasticités ( $\underline{C}^I = \underline{C}^M$ ). L'hétérogénéité ne provient que des déformations plastiques. La solution de ce problème

élémentaire a été obtenue par Eshelby (1961) lorsque la matrice est élastique, puis Kröner (1961), Willis (1970) et Mura (1971) ont généralisé la solution d'Eshelby au cas où la matrice a subi une déformation plastique homogène.

Budiansky (1965) a trouvé l'expression du module de cisaillement effectif ; dans le cas des sphères rigides, cette expression est la suivante :

$$(I-64) \quad \mu^{\text{eff}} = \begin{cases} \frac{\mu^{\text{M}}}{1 - \frac{5}{2}f} & \text{pour } 0 \leq f \leq \frac{2}{5} \\ \infty & \text{pour } \frac{2}{5} \leq f \leq 1 \end{cases}$$

Notons que  $\mu^{\text{eff}}$  s'annule quand  $f=0.5$  dans le cas des cavités sphériques, et devient infini quand  $f=2/5$  dans le cas des inclusions rigides. Dans les autres cas (inclusions ellipsoïdales de même aspect de forme et parallèles), on a :

$$(I-65a) \quad \mu^{\text{eff}} = \mu^{\text{M}} + f \frac{(\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{M}})\mu^{\text{eff}}}{\mu^{\text{eff}} + 2S_{1212}(\mu^{\text{I}} - \mu^{\text{eff}})}$$

$$(I-65b) \quad k^{\text{eff}} = k^{\text{M}} + f \frac{(k^{\text{I}} - k^{\text{M}})k^{\text{eff}}}{k^{\text{eff}} + \frac{1}{3}S_{\text{ijj}}(k^{\text{I}} - k^{\text{eff}})}$$

avec

$$S_{1212} = \frac{4 - 5\nu^{\text{eff}}}{15(1 - \nu^{\text{eff}})}, \quad S_{\text{ijj}} = \frac{1 + \nu^{\text{eff}}}{1 - \nu^{\text{eff}}}$$

Wu (1966) a résolu simultanément ces deux équations (I-65a,b), et a étudié l'effet de forme des inclusions en utilisant le tenseur d'Eshelby pour les sphéroïdes. Walpole (1967) a étendu cette théorie aux matériaux anisotropes, et a proposé des séries d'approximations convergentes. Kneer (1965) et Morris (1970) ont calculé les modules élastiques des polycristaux où la distribution de l'orientation des monocristaux est développée en séries d'harmoniques sphériques généralisées (texture cristallographique).

Signalons que le cas isotrope transverse incompressible a été traité par Gilormini (1992a,b) pour des phases isotropes ellipsoïdales de révolution d'axes parallèles, à partir du tenseur d'Eshelby correspondant calculé par Gilormini et Vernusse (1992).

L'hypothèse de base de ce modèle, (milieu extérieur hétérogène remplacé par le milieu homogène équivalent), n'est pas non plus complètement satisfaisante, car elle

place l'inclusion dans un milieu plus "raide" que le milieu réel, et notamment ne permet pas de prendre en compte la déformation de la zone de matrice entourant l'inclusion (cette zone est en effet plus "souple" que le milieu homogène équivalent). Nous allons présenter dans le paragraphe suivant une méthode qui prend mieux en compte la déformation moyenne réelle de la matrice.

### I.3.8. Méthode de Mori-Tanaka

Elle a été introduite par Mori et Tanaka (1973), puis appliquée au cas des matériaux composites par Takao, Chou et Taya (1982) et par Breban et Baptiste (1990). La démarche va être décrite dans ce qui suit.

On considère toujours le même composite où les inclusions sont toutes identiques et alignées, et on le soumet à une déformation macroscopique  $\underline{E}$ . Du fait de la présence de nombreuses inclusions, la déformation moyenne dans la matrice peut se décomposer en la déformation  $\underline{E}$  et en un terme de perturbation de la façon suivante :

$$(I-66) \quad \underline{\epsilon}^M = \underline{E} + \tilde{\underline{\epsilon}}^M$$

$\tilde{\underline{\epsilon}}^M$  étant la moyenne dans la matrice des perturbations dues à toutes les inclusions, et  $\underline{\epsilon}^M$  la moyenne des déformations dans la matrice. On s'intéresse maintenant à une inclusion I particulière. Dans cette inclusion, la déformation moyenne  $\underline{\epsilon}^I$  peut s'écrire sous la forme :

$$(I-67) \quad \underline{\epsilon}^I = \underline{E} + \tilde{\underline{\epsilon}}^M + \tilde{\underline{\epsilon}}^I = \underline{\epsilon}^M + \tilde{\underline{\epsilon}}^I$$

où  $\tilde{\underline{\epsilon}}^I$  est un terme de fluctuation par rapport à  $\underline{\epsilon}^M$ .

Dans la méthode de Mori-Tanaka, on considère que la déformation de chaque inclusion dans le matériau hétérogène est égale à celle qui s'y produirait si elle était seule entourée de matrice avec pour déformation imposée à l'infini la valeur  $\underline{\epsilon}^M$ .

Afin de déterminer  $\underline{\epsilon}^I$ , on utilise la méthode précédemment décrite de l'inclusion équivalente, en remplaçant l'inclusion I dans le milieu homogène infini de caractéristique élastique  $\underline{C}^M$  et soumis à une déformation macroscopique  $\underline{\epsilon}^M = \underline{E} + \tilde{\underline{\epsilon}}^M$ .

D'après (I-48), on en déduit  $\underline{\epsilon}^I$  en fonction de  $\underline{\epsilon}^M$  par :

$$(I-68) \quad \underline{\epsilon}^I = \left[ \underline{I} + \underline{S} : \underline{S}^M : (\underline{C}^I - \underline{C}^M) \right]^{-1} : \underline{\epsilon}^M$$

On pose :

$$(I-69) \quad \underline{T}^I = \left[ \underline{I} + \underline{S} : \underline{S}^M : (\underline{C}^I - \underline{C}^M) \right]^{-1}$$

On utilise ensuite la relation de moyenne (I-10a) pour aboutir à :

$$(I-70) \quad \underline{E} = \left[ f_M \underline{I} + f_I \underline{T}^I \right] : \underline{\varepsilon}^M$$

d'où

$$(I-71) \quad \underline{\varepsilon}^M = \left[ f_M \underline{I} + f_I \underline{T}^I \right]^{-1} : \underline{E}$$

( $\underline{I}$  représente le tenseur identité, donné par la relation (I-17)).

Soit

$$(I-72) \quad \underline{\varepsilon}^I = \underline{T}^I : \left[ f_M \underline{I} + f_I \underline{T}^I \right]^{-1} : \underline{E}$$

équation qui nous donne le tenseur de localisation des déformations,  $\underline{A}^I$ .

Le même raisonnement appliqué aux contraintes conduit au tenseur de localisation des contraintes,  $\underline{B}^I$  :

$$(I-73) \quad \underline{\sigma}^I = \underline{W}^I : \left[ f_M \underline{I} + f_I \underline{W}^I \right]^{-1} : \underline{\Sigma}$$

avec :

$$(I-74) \quad \underline{W}^I = \underline{C}^I : \underline{T}^I : \underline{S}^M$$

Les relations (I-72) et (I-73) nous fournissent alors les expressions recherchées de  $\underline{C}^{\text{eff}}$  et  $\underline{S}^{\text{eff}}$  :

$$(I-75a) \quad \underline{C}^{\text{eff}} = \underline{C}^M + f_I (\underline{C}^I - \underline{C}^M) : \underline{T}^I : \left[ f_M \underline{I} + f_I \underline{T}^I \right]^{-1}$$

$$(I-75b) \quad \underline{S}^{\text{eff}} = \underline{S}^M + f_I (\underline{S}^I - \underline{S}^M) : \underline{W}^I : \left[ f_M \underline{I} + f_I \underline{W}^I \right]^{-1}$$

(si on a plusieurs familles d'inclusions en présence, on fait une sommation sur toutes les familles d'inclusions). On remarque ici que la relation donnant  $\underline{C}^{\text{eff}}$  est parfaitement explicite et ne nécessite donc aucun traitement numérique particulier, contrairement à celle du modèle autocohérent décrit dans le paragraphe I.3.7. Mais elle présente le risque de mener à une matrice de modules non symétrique lorsqu'il y a au moins deux phases inclusionnaires, à cause de la non symétrie du tenseur de localisation (hormis le cas des sphères).

Pour le cas simple d'un biphasé avec une dispersion isotrope dans une matrice isotrope, on obtient les deux relations suivantes :

$$(I-76a) \quad k^{\text{eff}} = k^M + f \frac{k^I - k^M}{1 + (1-f) \frac{k^I - k^M}{k^M + \frac{4}{3}\mu^M}}$$

$$(I-76b) \quad \mu^{\text{eff}} = \mu^M + f \frac{\mu^I - \mu^M}{1 + (1-f) \frac{\mu^I - \mu^M}{\mu^M + \frac{3/2}{\frac{1}{\mu^M} + \frac{10}{9k^M + 8\mu^M}}}}$$

où l'on reconnaît les expressions de bornes de Hashin-Shtrikman  $k_a$  et  $\mu_a$  (quand  $(\mu^I - \mu^M)(k^I - k^M) \geq 0$ ), et où l'on retrouve donc aussi, dans la formulation de  $k^{\text{eff}}$ , la compressibilité de la sphère de Hashin (voir paragraphe I.3.4). Si on change  $k^I$  en  $k^M$ ,  $\mu^I$  en  $\mu^M$  et  $f$  en  $(1-f)$ , on obtient  $k_b$  et  $\mu_b$ , ce qui illustre les rôles dissymétriques joués par la matrice et la phase inclusionnaire dans ce modèle. On peut remarquer également que si  $(\mu^I - \mu^M)(k^I - k^M)$  est négatif, ce modèle donne bien une valeur de  $\mu^{\text{eff}}$  comprise entre les bornes de Walpole, car dans ces conditions, le faisceau est plus large que si  $(\mu^I - \mu^M)(k^I - k^M)$  est positif, comme on l'a signalé dans le paragraphe I.3.2. Cette correspondance avec les bornes optimales est également vraie dans les cas isotropes transverses (Weng, 1992).

De façon générale, le comportement déduit du modèle de Mori-Tanaka n'est pas toujours situé entre les bornes, comme par exemple, dans le cas d'une dispersion isotrope d'inclusions ellipsoïdales de révolution, d'après Qui et Weng (1990).

Benveniste (1987) a proposé une nouvelle approche du modèle de Mori-Tanaka, en considérant une double inclusion, constituée par une inclusion ellipsoïdale  $V$  laquelle contient une autre inclusion ellipsoïdale  $I$ . Cette double inclusion est plongée dans un domaine uniforme infini de matrice. Les tenseurs d'élasticités de l'inclusion  $I$  et de la partie  $V/I$  sont respectivement  $\underline{C}^I$  et  $\underline{C}^M$ . Dans cette nouvelle approche, l'expression de  $\underline{C}^{\text{eff}}$  est donnée par :

$$(I-77) \quad \underline{C}^{\text{eff}} = \underline{C}^M : \left[ \underline{I} + f_I (\underline{S} - \underline{I}) : (\underline{A}^I - \underline{S})^{-1} \right] : \left[ \underline{I} + f_I \underline{S} : (\underline{A}^I - \underline{S})^{-1} \right]^{-1}$$

avec

$$(I-78) \quad \underline{A}^I = [\underline{C}^M - \underline{C}^I]^{-1} : \underline{C}^M = [\underline{I} - \underline{S}^M : \underline{C}^I]^{-1}$$



Une autre méthode basée sur la solution des milieux faiblement dilués, tenant compte de la connexité de la matrice et des inclusions, sera présentée dans le paragraphe ci-dessous.

### I.3.9. Schéma différentiel

Le modèle différentiel a été proposé à l'origine par Roscoe (1952,1973), qui a étudié la viscosité des sphères rigides en suspension, et les propriétés des composites avec des constituants élastiques et viscoélastiques. Son application aux matériaux composites et aux solides avec des micro fissures a été faite par Boucher (1974), puis reprise par McLaughlin (1977), et Cleary et al. (1980). Norris (1985) a enfin proposé une extension de ce modèle au cas de plusieurs phases inclusionnaires. Hashin (1988) l'a appliquée aux matériaux fissurés, puis elle a été développée par Christensen (1990), Nemat-Nasser et Hori (1990) et Zimmerman (1991). D'autres travaux en géophysique ont été faits par Sen et al. (1981), et Sheng et Callegari (1984).

On se propose d'utiliser la solution pour des inclusions fortement diluées, que l'on connaît précisément, pour traiter les cas où la concentration est élevée. L'idée consiste à ajouter peu à peu de la phase inclusionnaire en utilisant à chaque étape l'approximation diluée pour homogénéiser le milieu hétérogène avant l'étape suivante. En ajoutant à chaque étape une quantité infinitésimale de la phase inclusionnaire, McLaughlin (1977) a montré, sans résoudre les équations différentielles, que la fraction volumique totale des inclusions est reliée au paramètre  $\eta$  par :  $f = 1 - e^{-\eta}$ . Norris (1985) avait utilisé le schéma différentiel avec  $\eta=f$ , au lieu de  $\eta=-\ln(1-f)$ . Cette méthode a donné un module effectif normalisé par  $\exp(2f)$  en dessous de la borne inférieure de Hashin-Shtrikman. Dans le cas des inclusions sphériques identiques, plongées dans une matrice isotrope, les modules de compressibilité et de cisaillement vérifient les deux équations suivantes (McLaughlin, 1977, Norris, 1985) :

$$(I-79a) \quad \frac{1}{k^{\text{eff}}} \frac{dk^{\text{eff}}}{d\eta} = \frac{(3k^{\text{eff}} + 4\mu^{\text{eff}})(k^{\text{I}} - k^{\text{eff}})}{(3k^{\text{I}} + 4\mu^{\text{eff}})k^{\text{eff}}}$$

$$(I-79b) \quad \frac{1}{\mu^{\text{eff}}} \frac{d\mu^{\text{eff}}}{d\eta} = \frac{(15k^{\text{eff}} + 20\mu^{\text{eff}})(\mu^I - \mu^{\text{eff}})}{(6k^{\text{eff}} + 12\mu^{\text{eff}})\mu^I + (9k^{\text{eff}} + 8\mu^{\text{eff}})\mu^{\text{eff}}}$$

Ce système de deux équations différentielles du premier ordre couplées et non linéaires (puisque  $k^{\text{eff}}$  et  $\mu^{\text{eff}}$  interviennent dans les deux équations) doit être traité numériquement pour obtenir  $k^{\text{eff}}(f)$  et  $\mu^{\text{eff}}(f)$  à partir des conditions initiales  $k^{\text{eff}}(0)=k^M$  et  $\mu^{\text{eff}}(0)=\mu^M$ . On notera ici encore une dissymétrie satisfaisante du modèle.

Zimmerman (1991) a trouvé une solution analytique de ces deux équations dans les deux cas limites importants : sphères rigides et vides sphériques.

Dans le cas de sphères rigides, on a :

$$(I-80a) \quad \frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^M} = \frac{1}{(1-f)^2} \left[ \frac{3(1-\nu^M)}{4(1-2\nu^M) - (1-5\nu^M) \left(\frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^M}\right)^{-0.6}} \right]^{1/3}$$

$$(I-80b) \quad \frac{k^{\text{eff}}}{\mu^{\text{eff}}} = \frac{4}{3} - \frac{2(1-5\nu^M)}{3(1-2\nu^M)} \left(\frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^M}\right)^{-3/5}$$

alors que dans le cas des vides sphériques, on a :

$$(I-81a) \quad \frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^M} = (1-f^2) \left[ \frac{2(1+\nu^M) + (1-5\nu^M) \left(\frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^M}\right)^{3/5}}{3(1-\nu^M)} \right]^{1/3}$$

$$(I-81b) \quad \frac{k^{\text{eff}}}{\mu^{\text{eff}}} = \frac{3}{4} + \frac{3(1-5\nu^M)}{4(1+\nu^M)} \left(\frac{\mu^{\text{eff}}}{\mu^M}\right)^{3/5}$$

Christensen (1990) a intégré les équations différentielles (I-79a,b) dans le cas particulier d'une matrice incompressible ( $\nu^M=0.5$ ). Les solutions obtenues étaient en accord avec les équations (I-80a,b).

On peut montrer que le schéma différentiel donne bien une compressibilité et un module de cisaillement compris entre les bornes de Hashin-Shtrikman-Walpole (voir McLaughlin, 1977).

Nous présentons ci-dessous, brièvement, une autre façon de déterminer les modules équivalents.

### I.3.10. Notion de tenseur de polarisation

Une autre manière d'accéder au tenseur de localisation  $\underline{\Delta}^I$  est celle proposée par Hill (1964), puis reprise par de nombreux auteurs (Walpole, 1969, Dederichs et Zeller, 1973, Willis, 1983, ...), dans laquelle le problème traité est celui d'un milieu homogène avec précontrainte  $\underline{\tau}$ , appelée tenseur de polarisation, que nous présentons brièvement. Nous raisonnons ici à déformation macroscopique  $\underline{E}$  imposée, et considérons toujours une hétérogénéité I noyée dans un milieu homogène infini D.

Le problème hétérogène à résoudre est le suivant : trouver un champ de déplacement  $\underline{u}$  satisfaisant aux conditions aux limites (ici  $\langle \underline{\epsilon}(\underline{u}) \rangle = \underline{E}$ ), tel que :

$$(I-82) \quad \begin{cases} \underline{\sigma} = \underline{C}^M : \underline{\epsilon}(\underline{u}) & \text{dans } D / I \\ \underline{\sigma} = \underline{C}^I : \underline{\epsilon}(\underline{u}) & \text{dans } I \end{cases}$$

$\underline{\sigma}$  étant un champ auto-équilibré ( $\text{div}(\underline{\sigma})=0$ ).

On le remplace par le problème suivant : trouver un champ de déplacement  $\underline{u}$  satisfaisant aux conditions aux limites, tel que :  $\underline{\sigma} = \underline{C} : \underline{\epsilon}(\underline{u}) + \underline{\tau}$  partout avec

$$(I-83) \quad \begin{cases} \underline{\tau} = 0 & \text{dans } D / I \\ \underline{\tau} = \underline{\Delta C} : \underline{\epsilon}(\underline{u}) & \text{dans } I \end{cases}$$

Avec cette notation,  $\underline{\tau}(\underline{x})$  s'écrit alors :

$$(I-84) \quad \underline{\tau}(\underline{x}) = \underline{\tau} \theta^I(\underline{x})$$

$\underline{\sigma}$  étant un champ statistiquement admissible. L'introduction de  $\underline{\tau}$  évite le recours à une prédéformation libre  $\underline{\epsilon}^*$ , qui peut sembler un peu artificielle. L'écriture de l'équation d'équilibre conduit à :

$$(I-85) \quad C_{ijkl} u_{k,lj}(\underline{x}) = -\tau_{im,n}(\underline{x})$$

Le champ  $\underline{u}$  peut alors être calculé comme le champ de déplacement induit par les forces de volume  $\tau_{ij,j}(\underline{x})$ . On utilise à nouveau le tenseur de Green pour obtenir l'expression de

$\underline{u}$  en fonction de  $\underline{\tau}$ , puis après quelques calculs, on obtient l'équation intégrale suivante :

$$(I-87) \quad \underline{\epsilon}(\underline{u}) = \underline{\epsilon}^o(\underline{x}) - \int_D \underline{\Gamma}(\underline{x} - \underline{x}') : \underline{\tau}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

où

$$(I-86) \quad \Gamma_{ijkl} = \frac{1}{4} [G_{ik,jl} + G_{jk,il} + G_{il,jk} + G_{jl,ik}]$$

En utilisant la relation  $\underline{\tau}(\underline{x}) = \delta \underline{C} : \underline{\varepsilon}(\underline{u})$ , l'équation (I-80) devient :

$$(I-88) \quad \underline{\tau}(\underline{x}) = \delta \underline{C} : \left\{ \underline{\varepsilon}^0(\underline{x}) - \int_D \underline{\Gamma}(\underline{x} - \underline{x}') : \underline{\tau}(\underline{x}') d\underline{x}' \right\}$$

En moyennant cette équation sur I, on peut alors obtenir une expression de  $\underline{\tau}(\underline{x})$  en fonction de  $\underline{\varepsilon}^0$ , ce que l'on recherchait.

Des méthodes statistiques systématiques ont permis d'aborder le problème de façon générale en introduisant des fonctions de corrélation des modules élastiques qui décrivent complètement la structure ; ces méthodes restent toutefois complexes. Nous les présentons brièvement ci-dessous.

### I.3.11. Méthodes statistiques

En mécanique des fluides, Batchelor et Green (1972) ont développé une méthode basée sur la densité de probabilité (qui est fonction de la distance relative entre deux inclusions sphériques). Ils ont pu obtenir une expression de la viscosité effective, à l'ordre de  $f^2$ , d'un matériau constitué par des particules sphériques (qui peuvent être de différentes tailles ou non) en suspension dans un fluide Newtonien, où  $f$  est la fraction volumique des sphères ( $f \ll 1$ ). Ils ont fait l'analogie en mécanique des solides ; c'est le cas des matériaux constitués par une matrice incompressible, dans laquelle sont noyées des sphères rigides identiques. Ils ont déterminé dans ce cas très particulier de haute dilution le module de cisaillement effectif du matériau :

$$(I-89) \quad \frac{\mu^{eff}}{\mu^M} = 1 + \frac{5}{2}f + 5.2 f^2$$

On remarque que cette formule généralise la formule obtenue par Einstein (1911) :

$$\frac{\mu^{eff}}{\mu^M} = 1 + \frac{5}{2}f$$

Dederichs et Zeller (1973) ont introduit des fonctions de corrélations des modules élastiques, pour avoir une description statistique du composite, puis ces méthodes ont été

développées par Willis (1977) et Kröner (1980). Ces méthodes statistiques systématiques, quoique exactes, sont longues et fastidieuses.

Récemment, Buryachenko et Kreher (1995) ont proposé une nouvelle méthode qu'ils ont appelé MEFM (Multiparticle effective field method), basée sur la théorie des fonctions à variables aléatoires et sur les fonctions de Green, applicable aux matériaux composites constitués par une matrice homogène, dans laquelle sont noyées d'une façon aléatoire des inclusions de formes ellipsoïdales. Cette méthode est une suite des travaux développés par Buryachenko et Lipanov (1986), et Buryachenko (1987).

### **I.3.12. Comparaison entre ces différents modèles**

Nous avons donc exposé dans ce paragraphe plusieurs méthodes de calcul pour résoudre le problème de la détermination des constantes élastiques équivalentes d'un matériau composite.

Pour pouvoir les analyser, nous nous proposons d'étudier, pour un matériau composite constitué de sphères noyées dans une matrice, leur comportement en fonction de la fraction volumique de sphères dans la matrice. Les valeurs des constantes élastiques équivalentes obtenues par chacune de ces méthodes seront comparées entre elles afin de dégager certaines remarques.

Nous avons écrit un logiciel qui utilise le schéma autocohérent à 1-site pour calculer le tenseur d'élasticité d'un matériaux composite, où on a une ou deux familles d'inclusions de formes ellipsoïdales. Le logiciel utilisant la méthode de Mori-Tanaka est bâti sur la même architecture et utilise des sous-programmes communs.

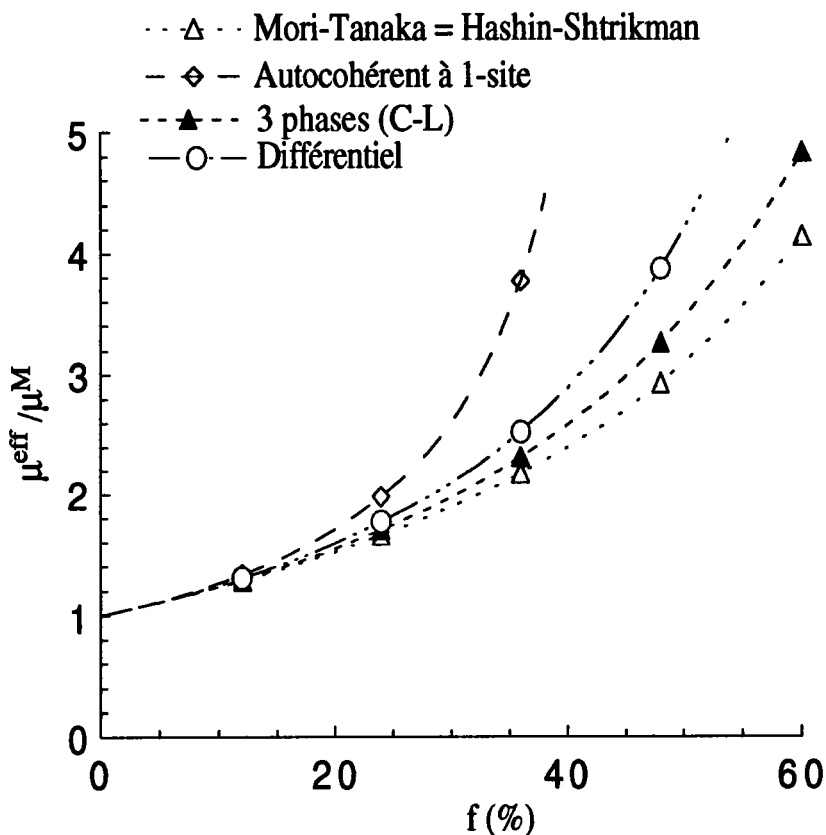


Figure I.1 : Comparaison des différents modèles dans le cas d'un mélange isotrope de sphères rigides.

La figure I.1 représente la variation du module de cisaillement effectif  $\mu^{\text{eff}}$  (normalisé par le module de cisaillement de la matrice), en fonction de la fraction volumique de sphères rigides, obtenu par les différentes méthodes qui ont été décrites ici. Le coefficient de Poisson de la matrice est pris ici égal à 0.2. Tous les résultats sont bien entendus compris entre les bornes de Hashin-Shtrikman-Walpole, et l'on observe d'une part la coïncidence entre le modèle de Mori-Tanaka et la borne inférieure et d'autre part la proximité entre les prévisions du modèle différentiel et du modèle à trois phases.

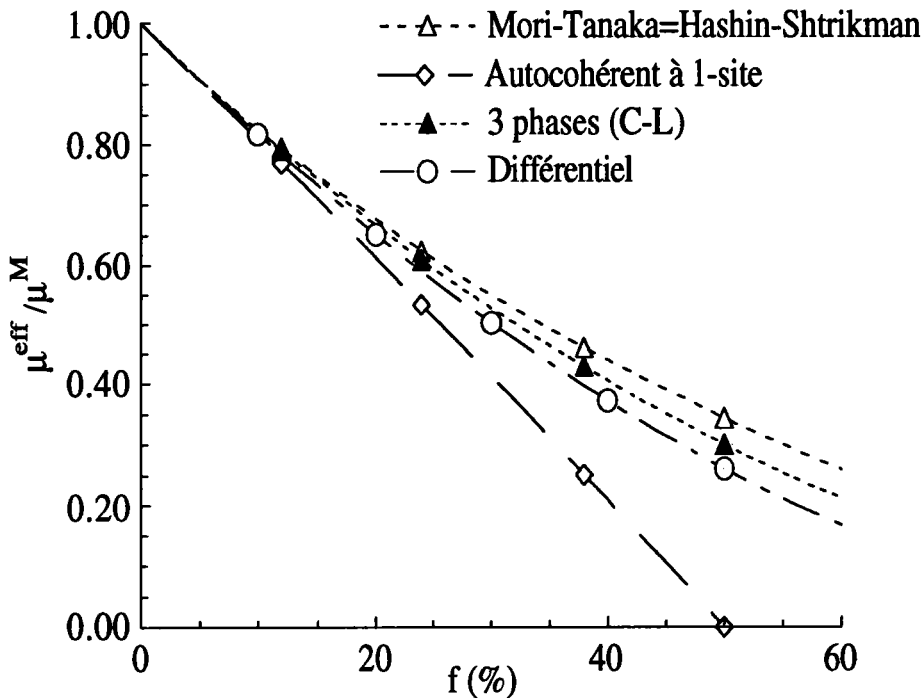


Figure I.2 : Variation du module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) en fonction de la fraction volumique de vides sphériques.

La figure I.2 représente la variation du module de cisaillement effectif  $\mu^{\text{eff}}$  (normalisé par le module de cisaillement de la matrice), en fonction de la fraction volumique de vides sphériques, obtenu par les différents modèles qui ont été décrits ici. Le coefficient de Poisson de la matrice est pris ici égal à 0.2. On remarque sur cette figure que le schéma autocohérent donne un seuil de percolation à 50% de fraction volumique, et que cet effet ne se reproduit pas dans les autres modèles. On observe aussi que le modèle autocohérent prédit une évolution du module de cisaillement équivalent de façon presque linéaire, ce qui n'est pas le cas des autres méthodes. On constate également une coïncidence entre le modèle de Mori-Tanaka et la borne supérieure de Hashin-Shtrikman

et que les résultats des trois modèles Mori-Tanaka, trois phases et différentiel sont proches.

Les prévisions des différents modèles du comportement des matériaux hétérogènes qui ont été exposées ci-dessus sont comparées avec les résultats expérimentaux de Walsh et al. (1965), sur la figure I.3 dans le cas de vides sphériques. Le coefficient de Poisson de la matrice est pris égale à 0.193. On peut faire les mêmes constatations que sur la figure I.2 en ce qui concerne le modèle autocohérent à 1-site (comportement presque linéaire jusqu'à 50% et seuil de percolation à 50%). Le modèle de Mori-Tanaka coïncide avec le modèle de la sphère composite et la borne supérieure de Hashin-Shtrikman. Ces trois modèles donnent des résultats supérieurs à ceux prédits par le modèle différentiel qui sont en accord parfait avec les mesures expérimentales (Zimmerman, 1991). Les résultats expérimentaux nous permettent de faire les remarques suivantes : le modèle de Mori-Tanaka et de la sphère composite surestiment les modules équivalents dans le cas des vides sphériques, et le modèle différentiel prédit de meilleurs résultats et le schéma autocohérent à 1-site n'est pas adapté pour les milieux inclusionnaires, mais adapté aux matériaux polycristallins. Signalons que Christensen (1990) a trouvé un accord remarquable entre les prévisions du modèle à trois phases et les mesures expérimentales de Thomas (1965) pour une dispersion de sphères rigides dans une matrice incompressible, et ce jusqu'à des concentrations élevées, le modèle différentiel étant relativement satisfaisant pour des concentrations assez faibles, celui de Mori-Tanaka sous-évaluant nettement les résultats et le modèle autocohérent à 1-site divergeant à partir d'une teneur de 40%.



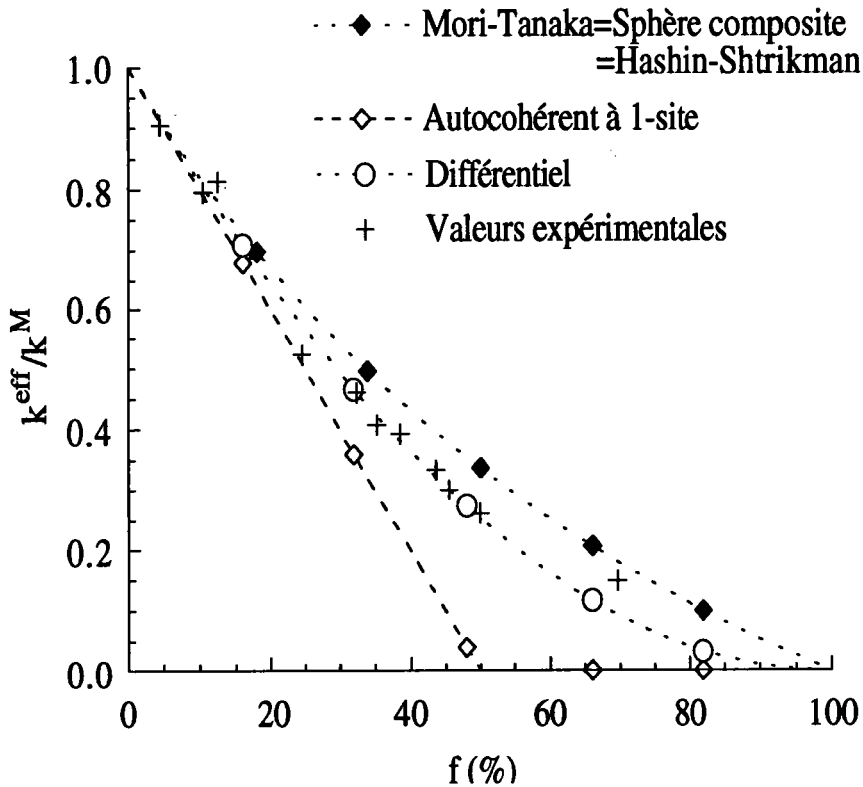


Figure I.3 : Module de compressibilité effectif (normalisé par le module de compressibilité de la matrice) obtenu par différents modèles et mesures expérimentales dans le cas de vides sphériques.

Tous ces modèles ne font intervenir que le taux de remplissage des renforts dans la matrice, leur comportement élastique respectif, et la forme des renforts. Mais ils ne tiennent pas compte de l'effet de la répartition spatiale des inclusions dans la matrice. Une répartition ordonnée ou désordonnée des renforts dans la matrice contribue aussi à la modification du comportement macroscopique du matériau. En plus des interactions entre une inclusion I et le milieu homogène équivalent (dans le cas du modèle autocohérent à 1-site), il existe aussi des interactions entre l'inclusion considérée et son voisinage immédiat, constitué d'un certain nombre d'inclusions, et formant un réseau autour de cette inclusion.

Le reproche majeur que l'on peut tout de suite faire à ces méthodes, c'est qu'elles négligent complètement ou prennent incomplètement les interactions entre les inclusions en ne considérant qu'une seule inclusion dans un massif infini de matrice lors du calcul de  $\Delta^I$ . Ceci sera d'autant plus vrai que la fraction volumique des inclusions sera élevée, ce qui imposera des interactions entre inclusions plus marquées. C'est pourquoi dans le paragraphe qui suit nous allons voir un deuxième type de méthodes, qui, elles, prennent en considération ces interactions.

#### **I.4- HOMOGENÉISATION DES MATÉRIAUX POLYPHASÉS ÉLASTIQUES À STRUCTURE PÉRIODIQUE**

Si la forme des renforts, leur comportement élastique respectif et leur taux de remplissage dans la matrice influent sur le comportement macroscopique du matériau composite, leur répartition ordonnée ou désordonnée dans la matrice contribue également à la modification de ce comportement. En plus des interactions entre une inclusion  $I$  et le milieu homogène équivalent (dans le cas du modèle autocohérent à un-site), ou avec la matrice (dans le cas du modèle de Mori-Tanaka), il existe aussi des interactions entre l'inclusion considérée et son voisinage immédiat constitué d'un certain nombre d'inclusions, formant un réseau autour de cette inclusion. En tenant compte de ce voisinage, on représente à la fois l'anisotropie morphologique du milieu (forme des inclusions), et l'anisotropie due à la répartition spatiale des hétérogénéités dans le composite. Nous présentons dans ce paragraphe les méthodes qui tiennent compte de ces effets.

Nous avons à caractériser le comportement d'un matériau hétérogène et globalement anisotrope, où les hétérogénéités sont réparties de façon périodique, de période petite devant les dimensions du milieu. La période spatiale caractéristique du

milieu est appelée cellule de base et sera notée  $Y$  dans la suite. Si l'on sait donner une loi de comportement du matériau sur  $Y$ , il est clair que l'on pourra, par périodicité, étendre cette loi de comportement à tout le milieu. On peut donc, dans le cas de milieux périodiques, limiter le domaine d'étude à  $Y$ , et on cherchera des champs microscopiques de déformations et de contraintes qui soient  $Y$ -périodiques.

Conformément à ce que a été vu au paragraphe I.3, pour obtenir la loi de comportement du matériau sur  $Y$ , il suffit de connaître le tenseur de localisation des déformations. Pour atteindre ce tenseur dans le cas de milieux périodiques, on propose dans ce paragraphe quelques modèles : homogénéisation asymptotique, séries de Fourier ....

#### **I.4.1. Homogénéisation asymptotique**

La méthode d'homogénéisation asymptotique s'est développée sur des bases mathématiques rigoureuses utilisant le principe des méthodes variationnelles introduites par Hashin et Shtrikman (1962, 1963). Cette méthode a été développée dans le cas des matériaux composites par plusieurs auteurs tels que Suquet (1982). Parmi les travaux les plus importants, ceux de Léné (1984) qui a su regrouper les résultats essentiels au calcul des constantes élastiques équivalentes d'un matériau composite constitué de un ou plusieurs renforts et d'une matrice. La méthode d'homogénéisation asymptotique a la caractéristique principale suivante : elle n'est applicable qu'à des structures ordonnées périodiques. Son domaine d'application est donc limité, mais les résultats que l'on peut rencontrer dans la littérature montrent que c'est une méthode qui reproduit les résultats expérimentaux obtenus au sein de différents laboratoires. Nous allons donc exposer dans ce paragraphe les principes du développement de cette méthode.

Considérons un matériau composite constitué d'inclusions réparties selon un réseau périodique et noyées dans un matériau élastique représentant la matrice. Le matériau occupe dans son état non déformé une région  $D$  de l'espace rapporté à un système d'axes orthonormés  $(O, x_1, x_2, x_3)$ . Associons à chaque point  $\underline{x}$  du matériau

hétérogène un volume représentatif de la géométrie des inclusions et de leur répartition spatiale. La figure obtenue à partir d'une période  $P$  quelconque du matériau est la cellule de base  $Y$ . On rapporte la cellule de base  $Y$  à un système d'axes  $(O, y_1, y_2, y_3)$ . Il apparaît ainsi deux échelles, l'une macroscopique liée au matériau composite, et l'autre microscopique liée à la cellule de base  $Y$ .

On montre que les coefficients homogénéisés sont obtenus après résolution de six problèmes (voir paragraphe I.4.1.1) d'élasticité posés sur la cellule de base, la résolution de ces six problèmes étant effectuée par un code éléments finis, et la détermination des coefficients homogénéisés se fait par un calcul de moyenne des coefficients de chacun des constituants et des contraintes correspondant aux six problèmes. Le problème à résoudre est donc le suivant : on suppose que la cellule  $Y$ , représentant le milieu périodique, est soumise à un chargement qui induit des déformations et des contraintes macroscopiques  $\underline{E}$  et  $\underline{\Sigma}$ . Dans la méthode présentée ci-après, on impose la valeur  $\underline{E}$ . On recherche alors  $\underline{\varepsilon}(\underline{u})$  et  $\underline{\sigma}$ , champs de déformations et de contraintes microscopiques  $Y$ -périodiques qui en résultent. On note  $\underline{u}$  le champ de déplacements associé à  $\underline{\varepsilon}(\underline{u})$ .

On décompose alors  $\underline{\varepsilon}(\underline{u})$  de la façon suivante :

$$(I-90) \quad \underline{\varepsilon}(\underline{u}) = \underline{E} + \underline{\varepsilon}(\underline{v})$$

où  $\underline{\varepsilon}(\underline{v})$  est une fluctuation locale de la déformation autour de la valeur moyenne. De plus, les grandeurs  $\underline{\varepsilon}(\underline{u})$  et  $\underline{E}$  sont reliées par la relation :  $\underline{E} = \langle \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \rangle_Y$ . L'équation (I-90) moyennée sur  $Y$  donne alors :  $\langle \underline{\varepsilon}(\underline{v}) \rangle_Y = 0$  et  $\underline{\varepsilon}(\underline{v})$  étant  $Y$ -périodique, le champ de déplacement  $\underline{v}$  est  $Y$ -périodique.

D'autre part, l'écriture des densités d'efforts sur les faces opposées de  $Y$  montre que les contraintes normales aux faces,  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  (où  $\underline{n}$  désigne la normale à la face considérée), sont opposées sur des faces opposées.  $\underline{\sigma} \cdot \underline{n}$  est donc  $Y$ -antipériodique.

Le problème élastique à résoudre sur  $Y$  peut alors s'écrire sous la forme :

on cherche le champ de déplacement  $\underline{u}$ , solution du système :

$$(I-91) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \underline{\sigma} = 0 \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} (\epsilon_{kl}(\underline{v}) + E_{kl}) = C_{ijkl} \epsilon_{kl}(\underline{u}) \\ \langle \underline{\epsilon}(\underline{u}) \rangle_Y = \underline{E} \\ \text{avec les conditions aux limites:} \\ \underline{v} \quad Y - \text{périodique} \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \quad Y - \text{antipériodique} \end{cases}$$

Ayant supposé que le milieu présente une structure périodique, les coefficients  $C_{ijkl}(\underline{x})$  sont alors des fonctions périodiques de la variable d'espace  $\underline{x}$ . La période est supposée très petite devant les dimensions du milieu. La structure périodique non déformée occupant la région  $D$  de l'espace rapporté à la variable d'espace  $\underline{x}$  de dimension caractéristique  $V$ , désignons par  $v$  la dimension d'une période dans le matériau réel, la quantité  $\eta=v/V$  représentant alors un petit paramètre du problème.

Ainsi posé, le problème (I-91) admet une solution unique en  $(\underline{\sigma}, \underline{u})$ . En un point  $M(\underline{y})$ , le champ  $\underline{u}$  s'obtient en intégrant (I-90) en posant  $\underline{u} = \underline{E} \cdot \underline{y} + \underline{v}$ . Il est donc défini à un champ de déplacement rigide près qui traduit la position de la cellule  $Y$  dans le "pavage" périodique du milieu. Le traitement de ce problème passe par une résolution de type éléments finis, que l'on peut qualifier d'exacte, à condition toutefois que le maillage de  $Y$  soit suffisamment raffiné. On voit alors tout l'intérêt de la prise en compte des conditions de périodicité : dans le cas qui nous intéresse, la caractérisation du matériau hétérogène, le problème se limite à l'étude d'une hétérogénéité (ou de quelques hétérogénéités), permettant ainsi d'avoir accès aux champs de contraintes et de déformations microscopiques avec une précision relativement grande.

#### I.4.1.1) Problème élémentaire

Dans la méthode d'homogénéisation asymptotique, on cherche s'il existe  $(\underline{\epsilon}^0, \underline{\sigma}^0)$  limites de  $(\underline{\epsilon}^\eta, \underline{\sigma}^\eta)$  lorsque  $\eta$  tend vers 0 ; la loi de comportement homogénéisé sera la relation qui lie  $\underline{\sigma}^0$  et  $\underline{\epsilon}^0$ . On cherche alors pour  $(\underline{\epsilon}^\eta, \underline{\sigma}^\eta)$  un développement asymptotique à double échelle  $(\underline{x}, \underline{y})$  de la forme :

$$(I-92) \quad \underline{u}^\eta(\underline{x}) = \underline{u}^0(\underline{x}) + \eta \underline{u}^1(\underline{x}, \underline{y}) + \dots$$

où  $\underline{u}^0$  est le déplacement macroscopique.

En calculant le gradient de  $\underline{u}^\eta$ , on obtient le développement asymptotique de  $\underline{\varepsilon}^\eta$  :

$$(I-93) \quad \underline{\varepsilon}^\eta(\underline{x}) = \underline{\varepsilon}(\underline{u}^\eta) = \underline{\varepsilon}^0(\underline{x}, \underline{y}) + \eta \underline{\varepsilon}^1(\underline{x}, \underline{y}) + \dots$$

où

$$(I-94) \quad \varepsilon_{ij}^k(\underline{x}, \underline{y}) = \varepsilon_{ijx}(\underline{u}^k) + \varepsilon_{ijy}(\underline{u}^{k+1})$$

avec

$$(I-95) \quad \varepsilon_{ijx}(\underline{u}^k) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^k(\underline{x}, \underline{y})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k(\underline{x}, \underline{y})}{\partial x_i} \right) \text{ et } \varepsilon_{ijy}(\underline{u}^k) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^k(\underline{x}, \underline{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j^k(\underline{x}, \underline{y})}{\partial y_i} \right)$$

En utilisant la loi de comportement  $\underline{\sigma}^\eta(\underline{x}) = \underline{C}^\eta(\underline{x}) : \underline{\varepsilon}^\eta(\underline{x}) = \underline{C}(\underline{y}) : \underline{\varepsilon}(\underline{u}^\eta)$ , on obtient le développement de  $\underline{\sigma}^\eta$ .

En écrivant la condition d'équilibre et en identifiant les puissances successives de  $\eta$ , on obtient plusieurs problèmes sur la cellule de base : à l'ordre -1 de  $\eta$ , l'équation en  $(\underline{u}^1, \underline{\varepsilon}^0, \underline{\sigma}^0)$  correspond aux problèmes locaux.

Le problème (I-91) est linéaire par rapport à la déformation imposée  $\underline{E}$ . On peut donc écrire  $\underline{E}$ , déformation macroscopique a priori quelconque, sous forme d'une combinaison linéaire de déformations macroscopiques élémentaires, résoudre successivement les six problèmes élémentaires, puis former la solution finale par la combinaison linéaire des six solutions élémentaires. On obtient alors :

$$(I-96) \quad u_i^1(\underline{x}, \underline{y}) = w_i^{kh} W^{kh} + c_i^{ste}$$

où  $\underline{W}^{kh}$  désigne la déformation macroscopique élémentaire dans la direction  $kh$ , et  $\underline{w}^{kh}$  la solution en déplacements du problème (I-91) posé avec  $\underline{E} = \underline{W}^{kh}$ .

Ainsi,  $\underline{w}^{11}$  représente le champ de déplacement microscopique sur  $Y$ , induit par une déformation macroscopique de dilatation pure dans la direction 11. Pour  $\underline{w}^{12}$ , la déformation macroscopique imposée est un glissement pur dans le plan 12.

Le problème à résoudre se transforme en un problème classique de calcul des structures par la méthode des éléments finis avec conditions aux limites de périodicité et forces extérieures appliquées. Il ne reste alors qu'à dériver l'équation (I-96) par rapport à la variable de position pour trouver l'expression du tenseur de localisation des déformations  $\underline{\Delta}$ . Et lorsque les six fonctions  $\underline{w}^{kh}$  sont obtenues à partir de ces

résolutions, on atteint le tenseur d'élasticité effectif par un calcul de moyenne sur Y (en faisant la moyenne de  $\underline{\sigma}^0$  sur Y) :

$$(I-97) \quad C_{ijkh}^{\text{eff}} = \left\langle C_{ijkh}(\underline{y}) \right\rangle_Y + \left\langle C_{ijmn}(\underline{y}) \frac{\partial w_k^{mn}}{\partial y_h} \right\rangle_Y$$

#### I.4.1.2) Utilisation de symétries

Dans ce paragraphe, et sans vouloir rentrer dans les détails de la résolution numérique même du problème (I-91), on indique quelles sont les simplifications qui peuvent être portées lorsque la cellule de base présente des symétries matérielles. On se limitera ici à la présentation du cas d'une symétrie par rapport à un plan, et on renverra le lecteur à la thèse de Léné (1985) pour plus de détails. La cellule est définie géométriquement par  $Y = ]-Y_1, Y_1[x] - Y_2, Y_2[x] - Y_3, Y_3[$ , et elle présente une symétrie par rapport au plan  $Y_3 = 0$ . On peut alors ne prendre en considération que la moitié  $Y' = ]-Y_1, Y_1[x] - Y_2, Y_2[x] 0, Y_3[$  de la cellule de base en donnant les conditions aux limites appropriées. On convient de noter P le plan de symétrie,  $P_1$  et  $P_1'$  les plans d'équation  $y = \pm y_1$ , et  $P_2$  et  $P_2'$  les plans d'équation  $y = \pm y_2$ . Les conditions aux limites sont alors les suivantes :

- \*  $u_3 = 0$  sur P, conditions de périodicité "classiques" sur  $(P_1, P_1')$  et  $(P_2, P_2')$  pour les problèmes élémentaires en  $\underline{E} = \underline{W}^{11}$  ou  $\underline{E} = \underline{W}^{22}$  ou  $\underline{E} = \underline{W}^{33}$  ou  $\underline{E} = \underline{W}^{12}$ ,
- \*  $u_1 = u_2 = 0$  sur P, conditions de périodicité "classiques" sur  $(P_1, P_1')$  et  $(P_2, P_2')$  pour les problèmes élémentaires en  $\underline{E} = \underline{W}^{13}$  ou  $\underline{E} = \underline{W}^{23}$ .

On a donc pu réduire le nombre de conditions de périodicité, et le domaine d'étude a été divisé par deux. On peut alors effectuer le calcul plus rapidement, ou bien avec un temps de calcul et une taille de problème équivalents, utiliser un maillage plus raffiné. Suivant le type de cellule étudiée, il peut se faire que l'on arrive, par des considérations de symétries multiples (autour de plans médiateurs...), à ne plus avoir de conditions de périodicité à écrire.

Cette méthode est prolongée par des résolutions par éléments finis. Cependant,

d'après Peyroux (1990), les méthodes d'éléments finis se sont avérées lourdes et complexes à mettre en oeuvre. C'est pourquoi nous présentons ci-dessous une méthode basée sur des développements en séries de Fourier, plus aisée à manipuler que celle-ci.

#### **I.4.2. Séries de Fourier**

Ce modèle a été utilisé au départ par Afzali et Nemat-Nasser (1979), qui ont estimé les modules élastiques d'un métal contenant des vides de formes sphériques distribués d'une façon périodique. Dans leurs calculs, ils ont tenu compte de l'effet des interactions entre les particules adjacentes, de la taille des vides, mais non de la forme des vides. En comparant avec les résultats des autres modèles (Mackenzie, 1950, Eshelby, 1957) qui ne prennent pas en compte les effets des interactions, ils ont remarqué que ces effets deviennent importants quand la fraction volumique des vides devient grande. Cependant, les résultats qu'ils ont donnés n'étaient pas exacts.

Nemat-Nasser et Taya (1981, 1985) ont repris cette méthode, et en utilisant le concept de la déformation de transformation (déformation libre ou eigenstrain), ils ont obtenu une équation intégrale en ce tenseur, dans le cas des vides sphériques. Ils ont résolu cette équation intégrale par trois méthodes différentes : la première (1) est une approximation simple, qui consiste à remplacer dans l'équation intégrale la déformation de transformation par sa valeur moyenne dans l'inclusion ; la deuxième (2) s'effectue en approchant la déformation de transformation par un polynôme de coefficients inconnus, calculés par la méthode de Galerkin ou par une approche variationnelle ; la troisième (3) donne une solution complète, plus exacte que les deux autres, en faisant un changement de variable, qui permet de transformer l'équation intégrale en un système d'équations algébriques linéaires de la nouvelle variable. Nous avons calculé l'erreur relative des deux premières méthodes par rapport à la solution complète à 30 % de vides sphériques : pour la première, on trouve une erreur relative de 2.73 % sur le module de compressibilité, et de 10.23 % (si on a un cisaillement pure, et de 0.2 % si on a un cisaillement simple) sur le module de cisaillement ; pour la deuxième méthode (avec un polynôme de degré 2),



l'erreur relative est de 0.45 % sur le module de compressibilité, et de 10.3 % (si on a un cisaillement pure, et de 0% si on a un cisaillement simple) sur le module de cisaillement.

Nemat-Nasser et al. (1982) ont étendu ce modèle aux cas des inclusions sphériques quelconques, modèle que nous présentons ci-dessus en détails.

Soit un matériau hétérogène à structure périodique : le tenseur d'élasticité  $\underline{C}(\underline{x})$  est donc une fonction périodique en  $\underline{x}=(x_1, x_2, x_3)$

$$(I-98) \quad \underline{C}(\underline{x} + n_p \underline{a}_p) = \underline{C}(\underline{x})$$

où  $n_p$  est un entier arbitraire et où les vecteurs  $\underline{a}_p$  sont des constantes qui déterminent la période de la structure.

On considère un milieu infini homogène de tenseur d'élasticité  $\underline{C}^M$ , contenant des inclusions distribuées périodiquement. La cellule de base  $Y$  est supposée de forme parallélépipédique et contenant seulement une seule inclusion. La région occupée par cette inclusion est notée  $I$ , de volume  $V_I$ . La contrainte dans la cellule est donc donnée par :

$$(I-99) \quad \begin{cases} \sigma_{ij}^M = C_{ijkl}^M (E_{kl} + \varepsilon_{kl}) & \text{dans } Y / I \\ \sigma_{ij}^I = C_{ijkl}^I (E_{kl} + \varepsilon_{kl}) & \text{dans } I \end{cases}$$

où  $\underline{E}$  est la déformation macroscopique imposée à la cellule de base.

Les équations d'équilibre nous donne :

$$(I-100) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}^M (E_{kl} + \varepsilon_{kl})] = 0 & \text{dans } Y / I \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}^I (E_{kl} + \varepsilon_{kl})] = 0 & \text{dans } I \end{cases}$$

Les conditions aux limites à la surface de l'inclusion se traduisent par :

$$(I-101) \quad \begin{cases} [C_{ijkl}^M (E_{kl} + \varepsilon_{kl})^+ - C_{ijkl}^I (E_{kl} + \varepsilon_{kl})^-] n_j = 0 \\ u_i^+ - u_i^- = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \partial I$$

où  $\underline{n}$  est le vecteur unitaire dans la direction normale extérieure à la surface  $\partial I$ , et où les quantités "-" et "+" désignent la valeur de la quantité immédiatement proche de la surface  $\partial I$ , respectivement à l'intérieur et à l'extérieur de l'inclusion.

Pour résoudre les équations ci-dessus, on introduit la déformation de transformation dans

I de la manière suivante :

$$(I-102) \quad \begin{cases} C_{ijkl}^M (E_{kl} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) = C_{ijkl}^I (E_{kl} + \varepsilon_{kl}) & \text{dans I} \\ \text{et} \\ \varepsilon_{kl}^* = 0 & \text{dans Y / I} \end{cases}$$

Avec cette définition, la 2<sup>ème</sup> équation de (I-100) devient :

$$(I-103) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ C_{ijkl}^M (E_{kl} + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*) \right] = 0 \quad \text{dans I}$$

ou encore :

$$(I-104) \quad C_{ijkl}^M \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = C_{ijkl}^M \frac{\partial \varepsilon_{kl}^*}{\partial x_j} \quad \text{dans I}$$

Vue la périodicité spatiale, il est avantageux de développer les composantes de déplacement  $u_k(\underline{x})$ , et les composantes de la déformation de transformation  $\varepsilon_{kl}^*(\underline{x})$ , en série de Fourier comme suit :

$$(I-105) \quad u_k(\underline{x}) = \sum_{n_p=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_k(\underline{\xi}) e^{i\underline{\xi} \cdot \underline{x}}$$

$$(I-106) \quad \varepsilon_{mn}^*(\underline{x}) = \sum_{n_p=-\infty}^{+\infty} \hat{\varepsilon}_{mn}^*(\underline{\xi}) e^{i\underline{\xi} \cdot \underline{x}}$$

$$\text{où } \xi_p = \frac{2\pi n(p)}{\Lambda(p)} \quad (p = 1, 2, 3) \text{ et } i = \sqrt{-1}$$

Les coefficients de Fourier, dans les relations (I-105) et (I-106), sont donnés par :

$$(I-107) \quad \hat{u}_k(\underline{\xi}) = \frac{1}{|\underline{Y}|} \int_{\underline{Y}} u_k(\underline{x}) e^{-i\underline{\xi} \cdot \underline{x}} d\underline{x}$$

$$(I-108) \quad \hat{\varepsilon}_{mn}^*(\underline{\xi}) = \frac{1}{|\underline{Y}|} \int_{\underline{Y}} \varepsilon_{mn}^*(\underline{x}) e^{-i\underline{\xi} \cdot \underline{x}} d\underline{x}$$

Après substitution dans (I-104), on obtient alors :

$$(I-109) \quad \hat{u}_k(\underline{\xi}) = -i N_{kj}(\underline{\xi}) C_{pjmn}^M \hat{\varepsilon}_{mn}^*(\underline{\xi}) \xi_p$$

et en portant cette expression dans (I-105), on a :

$$(I-110) \quad u_k(\underline{x}) = -i \sum_{n_p=-\infty}^{+\infty} N_{kj}(\underline{\xi}) C_{pjmn}^M \hat{\varepsilon}_{mn}^*(\underline{\xi}) \xi_p e^{i\underline{\xi} \cdot \underline{x}}$$

où

$$(I-111) \quad N_{kj}(\underline{\xi}) = \left[ C_{sjkl}^M \xi_l \xi_s \right]^{-1}$$

L'équation (I-104) permet de déterminer les composantes de la déformation :

$$(I-112) \quad \varepsilon_{jk}(\underline{x}) = \sum_{\substack{n_p=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} g_{jkmn}(\underline{\xi}) \hat{\varepsilon}_{mn}^*(\underline{\xi}) e^{i\underline{\xi} \cdot \underline{x}}$$

où  $n = \sqrt{n_p n_p}$  et

$$(I-113) \quad \begin{aligned} g_{jkmn}(\underline{\xi}) &= \frac{1}{2} (N_{ks}(\underline{\xi}) \xi_j + N_{js}(\underline{\xi}) \xi_k) C_{psmn}^M \xi_p \\ &= \frac{1}{2\xi^2} \left\{ \xi_k (\delta_{jn} \xi_m + \delta_{jm} \xi_n) + \xi_j (\delta_{kn} \xi_m + \delta_{km} \xi_n) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{1-\nu^M} \frac{\xi_j \xi_k \xi_m \xi_n}{\xi^4} + \frac{\nu^M}{1-\nu^M} \frac{\xi_j \xi_k}{\xi^2} \delta_{mn} \end{aligned}$$

avec  $\nu^M$  le coefficient de Poisson de la matrice.

Substituons la relation (I-108) dans la relation (I-112), ce qui donne :

$$(I-114) \quad \varepsilon_{jk}(\underline{\xi}) = \frac{1}{|\underline{Y}|} \sum_{\substack{n_p=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} g_{jkmn}(\underline{\xi}) \int_I \varepsilon_{mn}^*(\underline{x}') e^{-i\underline{\xi} \cdot (\underline{x} - \underline{x}')} d\underline{x}'$$

Cette solution correspond aux résultats d'Eshelby dans le cas d'un milieu élastique à structures périodiques.

La relation (I-102) peut s'écrire de la façon suivante :

$$(I-115) \quad E_{mn} = A_{ijkl} \varepsilon_{kl}^*(\underline{x}) - \varepsilon_{kl}(\underline{x}) \quad \text{dans } I$$

et c'est alors une équation intégrale en  $\varepsilon_{kl}^*(\underline{x})$ .

Portant la relation (I-115) dans (I-102), on arrive à :

$$(I-116) \quad \underline{A} = [\underline{C}^M - \underline{C}^I]^{-1} : \underline{C}^M$$

Si la matrice et les inclusions sont isotropes de constantes de Lamé, respectivement,  $(\lambda^M, \mu^M)$ , et  $(\lambda^I, \mu^I)$ , on a :

$$(I-117) \quad A_{ijkl} = \frac{\mu^M}{2(\mu^M - \mu^I)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{(\mu^M \lambda^I - \lambda^M \mu^I) \delta_{ij} \delta_{kl}}{(\mu^M - \mu^I) [3(\lambda^M - \lambda^I) - 2(\mu^M - \mu^I)]}$$

Intégrons (I-115) dans I, et utilisons la relation (I-114), on obtient l'équation intégrale (en  $\varepsilon_{kl}^*(\underline{x})$ ) suivante :

$$(I-118) \quad E_{jk} = A_{jksl} \bar{\varepsilon}_{sl}^*(\underline{x}) - \frac{1}{|\underline{Y}|} \sum_{\substack{n_p=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} g_{jkmn}(\underline{\xi}) \frac{1}{V_I} \int_I \varepsilon_{mn}^*(\underline{x}') e^{-i\underline{\xi} \cdot (\underline{x} - \underline{x}')} d\underline{x}'$$

où

$$(I-119) \quad \bar{\varepsilon}_{ij}^* = \frac{1}{V_I} \int_I \varepsilon_{ij}^*(\underline{x}) d\underline{x}$$

On résout l'équation intégrale (I-118) par trois méthodes.

\* Approximation simple : pour une première approximation, on remplace dans la relation (I-118)  $\underline{\varepsilon}^*(\underline{x})$  par sa valeur moyenne dans l'inclusion, notée  $\bar{\underline{\varepsilon}}^*$ , et on intègre l'équation (I-109). On aura alors :

$$(I-120) \quad E_{ij} = (A_{ijkl} - S_{ijkl}) \bar{\varepsilon}_{kl}^*$$

où

$$(I-121) \quad S_{ijkl} = \sum_{\substack{n_p = -\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} P(\underline{\xi}) g_{ijkl}(\underline{\xi})$$

avec

$$(I-122) \quad P(\underline{\xi}) = \frac{1}{V_I |Y|} g_o(\underline{\xi}) g_o(-\underline{\xi}),$$

$$(I-123) \quad g_o(\underline{\xi}) = \int_I e^{\underline{\xi} \cdot \underline{x}} d\underline{x}$$

\* Approximation en polynôme : on approche  $\varepsilon_{kl}^*(\underline{x})$  par un polynôme de degré K, de la façon suivante :

$$(I-124) \quad \varepsilon_{ij}^*(\underline{x}) = \sum_{k=0}^K \varepsilon_{ij}^{*k} r^k$$

avec  $r = \sqrt{\left(\frac{x_1}{d_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{d_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{d_3}\right)^2}$  où  $d_i$  est une distance "convenable" dans la

direction  $x_i$ .

Substituons cette équation dans la relation (I-118) pour obtenir un système d'équations linéaires en  $\varepsilon_{ij}^{*k}$  que l'on pourra résoudre par la méthode de Galerkin ou par une méthode variationnelle.

\* Solution complète : réécrivant la relation (I-115) en tenant compte de la relation (I-114), on peut facilement réduire cette équation intégrale à un système d'équations linéaires, d'inconnues  $E_{jk}^*(\underline{\xi})$  définies par :

$$(I-125) \quad E_{jk}^*(\underline{\xi}) = \frac{1}{V_I} \int_I \varepsilon_{jk}^*(\underline{x}) e^{-i\underline{\xi} \cdot \underline{x}} d\underline{x}$$

Si on multiplie la relation (I-115) par  $e^{-i\underline{\xi} \cdot \underline{x}}$  et si on intègre sur le volume  $V_I$ , on obtient :

$$(I-126) \quad E_{ij} Q(\underline{\eta}) = A_{ijkl} E_{kl}^*(\underline{\eta}) - f \sum_{\substack{n_p = -\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} g_{ijkl}(\underline{\xi}) Q(\underline{\eta} - \underline{\xi}) E_{kl}^*(\underline{\xi})$$

où

$$(I-127) \quad Q(\underline{\eta}) = \frac{g_0(-\underline{\eta})}{V_I}$$

La solution de l'équation (I-126) étant trouvée, l'équation (I-125) donne :

$$(I-128) \quad \bar{\epsilon}_{ij}^* = E_{jk}^*(0)$$

On aboutit à un système linéaire d'une infinité d'équations avec une infinité d'inconnues  $E_{ij}^*(\underline{\xi})$ . Comme l'a signalé Nemat-Nasser et Taya (1981) et Nemat-Nasser et al. (1982), cette méthode est lourde à mettre en œuvre, ce qui n'est pas le cas de la première, qui donne de plus de bons résultats.

On rappelle que la cellule  $Y$  est soumise à la déformation uniforme  $\underline{E}$ , et par conséquent à la contrainte uniforme  $\underline{\sigma}^0 = \underline{C}^M \cdot \underline{E}$ , l'énergie de déformation étant donnée par la relation suivante dans l'absence d'inclusion :

$$(I-129) \quad W_0 = \frac{1}{2} \int_Y \sigma_{ij}^0 E_{ij} \, d\underline{x} = \frac{1}{2} |Y| \sigma_{ij}^0 E_{ij}$$

et dans la présence d'inclusion par :

$$(I-130) \quad W_e = \frac{1}{2} \int_Y C_{ijkl}^M (E_{kl} + \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) (E_{ij} + \epsilon_{ij}) \, d\underline{x}$$

Sachant que  $\underline{\epsilon}^* = 0$  dans  $Y/I$  et que  $u_i = 0$  sur  $\partial Y$ , l'équation (I-121) peut être écrite comme suit (Nemat-Nasser et al., 1982) :

$$(I-131) \quad W_e = W_0 - \frac{1}{2} f |Y| \sigma_{ij}^0 \bar{\epsilon}_{ij}^*$$

où  $f = V_I / |Y|$  est la fraction volumique de l'inclusion. D'un autre côté, pour la cellule homogène avec les propriétés effectives  $\underline{C}^{eff}$ , l'énergie de déformation s'écrit :

$$(I-132) \quad W_e = \frac{1}{2} f |Y| C_{ijkl}^{eff} E_{kl} E_{ij}$$

En comparant les deux relations (I-131) et (I-132), on obtient l'équation qui permet de déterminer  $\underline{C}^{eff}$  :

$$(I-133) \quad C_{ijkl}^{eff} E_{kl} E_{ij} = C_{ijkl}^M E_{kl} E_{ij} - f C_{ijkl}^M E_{kl} \bar{\epsilon}_{ij}^*$$

Inversons l'équation (I-120), et remplaçons  $\underline{\epsilon}^*$  (exprimé en fonction de  $\underline{E}$ ) dans (I-133).

Cela nous donne :

$$(I-134) \quad \left[ C_{ijkl}^{eff} - C_{ijkl}^M + f C_{ijmn}^M (A_{mnkl} - S_{mnkl})^{-1} \right] E_{kl} E_{ij} = 0$$

Puisque cette équation est vraie pour un  $\underline{E}$  arbitraire, nous concluons que :

$$(I-135) \quad C_{ijkl}^{eff} = C_{ijkl}^M - f C_{ijmn}^M (A_{mnkl} - S_{mnkl})^{-1}$$

Cette formule a été utilisée par Nemat-Nasser et al. (1982) pour estimer les modules effectifs  $k^{eff}$  et  $\mu^{eff}$  d'un milieu élastique isotrope dans lequel des inclusions sont distribuées d'une façon périodique.

Cette méthode a été étendue par Iwakuma et Nemat-Nasser (1983), pour des inclusions ellipsoïdales, distribuées périodiquement dans une matrice homogène isotrope. Elle a été utilisée par Accorsi et Nemat-Nasser (1986), pour déterminer les bornes élastoplastiques des matériaux composites à structures périodiques, puis, par Nemat-Nasser et Hori (1992), pour déterminer les bornes des constantes élastiques des matériaux composites à structures périodiques. Récemment, elle a été appliquée par Nemat-Nasser et al. (1993) dans le cas des solides contenant des fissures distribuées d'une façon périodique.

Les conditions de périodicité sont ici prises automatiquement en compte dans le développement en séries de Fourier et il n'y a pas de maillage à réaliser, mais la programmation reste délicate. Nous présentons dans le prochain paragraphe d'autres méthodes d'homogénéisation des milieux périodiques, mais leurs applications, comme nous allons le voir sont limitées.

### I.4.3. Autres modèles

Nunan et Keller (1984) ont proposé un modèle pour calculer les propriétés effectives d'un milieu isotrope dans lequel sont distribuées des inclusions sphériques rigides, de façon périodique. En utilisant la solution fondamentale périodique des équations d'élasticité classiques, ils ont obtenu une équation intégrale en force de traction  $f_i(\underline{x}) = \sigma_{ij}n_j$  exercée par la matrice sur la surface des sphères rigides. La résolution de cette équation intégrale a permis de trouver une expression du tenseur d'élasticité effectif, donnée par la relation suivante (Nunan et Keller, 1984) :

$$(I-136) \quad C_{ijkl}^{eff} \gamma_{kl} = \lambda^M \delta_{ij} \gamma_{kl} + \mu^M (\gamma_{ij} + \gamma_{ji}) + \frac{1}{|\underline{Y}|} \int_{\partial I} \underline{x}_j (\sigma_{ik} n_k) dS$$

où  $\lambda^M$  et  $\mu^M$  sont les constantes de Lamé de la matrice, et  $\gamma_{ij}$  est un tenseur de cisaillement constant, défini par :

$$(I-137) \quad u_i(\underline{x} + \underline{r}^p) = u_i(\underline{x}) + \gamma_{ij} r_j^p, \quad \underline{x} \in D, \underline{p} \in Z^3$$

Pour un réseau qui présente une symétrie cubique, le tenseur d'élasticité  $C_{ijkl}^{eff}$  est donné par l'expression suivante :

$$(I-138) \quad C_{ijkl}^{eff} = (\lambda^M + \mu^M \gamma) \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu^M (1 + \beta) I_{ijkl} + 2\mu^M (\alpha - \beta) \delta_{ijkl}$$

où  $\delta_{ijkl}=1$  si  $i=j=k=l$  et  $\delta_{ijkl}=0$  si  $i \neq j \neq k \neq l$ , et où  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  sont fonctions de la fraction volumique, du coefficient de Poisson de la matrice, et des paramètres caractérisant la configuration périodique. Ils sont déterminés par les relations suivantes :

$$(I-139) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \int_{\partial I} (x_1 f_1^{11} - x_2 f_2^{11}) dS \\ \beta = \frac{1}{2} \int_{\partial I} (x_1 f_2^{12} + x_2 f_1^{12}) dS \\ \gamma = \int_{\partial I} x_2 f_2^{11} dS \end{cases}$$

( $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $\gamma$  sont calculés en utilisant la méthode de Galerkin) où les fonctions  $f_i^{mn}$  sont définies par :

$$(I-140) \quad \mu^M |\Upsilon| \int_{\partial I} v_{ik} f_i^{mn} dS = \delta_{km} y_n, \quad y \in \partial I$$

avec

$$(I-141) \quad v_{ik}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{4\pi^2 \mu^M |\Upsilon|} \sum_{\underline{p}} \left( \frac{\delta_{ik}}{|\underline{S}^p|^2} - \frac{\lambda^M + \mu^M}{\lambda^M + 2\mu^M} \frac{S_i^p S_k^p}{|\underline{S}^p|^4} \right) \exp[4\pi i \underline{S}^p \cdot (\underline{x} - \underline{y})]$$

et  $\underline{S}^p$  un vecteur du réseau réciproque, défini en fonction des vecteurs de base ( $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3$ ) du réseau réciproque par :

$$(I-142) \quad \underline{S}^p = p_1 \underline{b}_1 + p_2 \underline{b}_2 + p_3 \underline{b}_3, \quad \underline{p} = (p_1, p_2, p_3) \in Z^3$$

Sangani et Lu (1987) ont repris le modèle de Nunan et Keller (1984), en appliquant la méthode de distribution de singularité développée par Zuzovsky, Adler et Brenner (1983) à l'équation d'élasticité (I-138) obtenue par Nunan et Keller (1984). Leur méthode consiste à employer la solution fondamentale singulière périodique de l'équation (I-138), pour construire la solution du problème en prenant des dérivés successives de cette solution fondamentale, et en ajoutant la condition de continuité du déplacement et de la

force de traction à la surface des particules sphériques. Ainsi ils ont étendu le modèle de Nunan et Keller à des inclusions sphériques quelconques.

Rodin (1993) a proposé une nouvelle méthode de calcul des propriétés élastiques effectives des matériaux composites constitués par des inclusions sphériques distribuées d'une façon périodique dans une matrice. Il s'est basé sur la méthode de l'inclusion équivalente (Eshelby, 1957, Mura, 1987), entre l'inclusion et l'inhomogénéité d'une part, d'autre part en négligeant l'effet de la fluctuation de déformation de transformation dans l'inclusion I par rapport à la moyenne, que l'on note par  $\underline{\tilde{\epsilon}}^*(\underline{x})$  :

$$(I-143) \quad \underline{\epsilon}^*(\underline{x}) = \underline{\bar{\epsilon}}^* + \underline{\tilde{\epsilon}}^*(\underline{x})$$

Avec cette hypothèse, il obtient un système d'équations linéaires en déformation de polarisation dans l'inclusion I :

$$(I-144) \quad \underline{C}^I : \left[ \underline{E} + \frac{1}{V^I} \underline{S} : \underline{\gamma}^I + \sum_{J \neq I} \underline{T}(\underline{R}^{IJ}) : \underline{\gamma}^J \right] = \underline{C}^M : \left[ \underline{E} + \frac{1}{V^I} \underline{S} : \underline{\gamma}^I + \sum_{J \neq I} \underline{T}(\underline{R}^{IJ}) : \underline{\gamma}^J - \frac{1}{V^I} \underline{\gamma}^I \right]$$

où  $\underline{\gamma}^I$  est la déformation de polarisation définie par :

$$(I-145) \quad \underline{\gamma}^I = \int_{V^I} \underline{\tilde{\epsilon}}^*(\underline{x}) d\underline{x} = V^I \underline{\bar{\epsilon}}^*$$

et où  $\underline{E}$  est la déformation uniforme appliquée à l'infini au milieu.  $\underline{S}$  est le tenseur d'Eshelby.  $\underline{T}(\underline{R}^{IJ})$  est le tenseur d'interaction entre les inclusions I et J, donné par :

$$(I-146) \quad \underline{T}(\underline{R}^{IJ}) = \frac{1}{V^I V^J} \int_{V^I} \int_{V^J} \underline{K}(\underline{x}, \underline{y}) d\underline{y} d\underline{x}$$

avec  $\underline{R}^{IJ}$  le vecteur qui relie les centres des inclusions I et J.  $\underline{K}(\underline{x}, \underline{y})$  est défini par :

$$(I-147) \quad K_{ijkl}(\underline{x}, \underline{y}) = -\frac{1}{2} \left[ G_{ip,qj}(\underline{x}, \underline{y}) + G_{jp,qi}(\underline{x}, \underline{y}) \right] C_{pqkl}$$

$\underline{G}(\underline{x}, \underline{y})$  est le tenseur de Green donné par la relation suivante :

$$(I-148) \quad G_{ij}(\underline{x}, \underline{y}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[ \frac{(3-4\nu)\delta_{ij}}{|\underline{x}-\underline{y}|} + \frac{(x_i-y_j)(x_j-y_i)}{|\underline{x}-\underline{y}|^3} \right]$$

La résolution du système (I-144) en  $\underline{\gamma}^J$  ( $J=1, \dots, N$ ) permet de calculer le tenseur d'élasticité effectif du matériau composite à partir de l'équation ci-après :

$$(I-149) \quad \underline{\Sigma} = \underline{C}^M : \left( \underline{E} - \frac{N}{V} \langle \underline{\gamma} \rangle \right) = \underline{C}^{eff} : \underline{E}$$

où  $\langle \underline{\gamma} \rangle$  est la déformation de polarisation moyenne, telle que :



$$(I-150) \quad \langle \underline{\gamma} \rangle = \frac{1}{N} \sum_J \underline{\gamma}^J$$

Le reproche majeur que l'on peut tout de suite faire à ces méthodes, c'est que leurs applications sont limitées aux inclusions sphériques (le modèle de Nunan et Keller est limité aux sphères rigides).

#### I.4.4. Comparaison entre ces modèles

Nous avons exposé dans ce paragraphe plusieurs méthodes de calcul pour résoudre le problème de la détermination des constantes élastiques équivalentes d'un matériau composite à structure périodique.

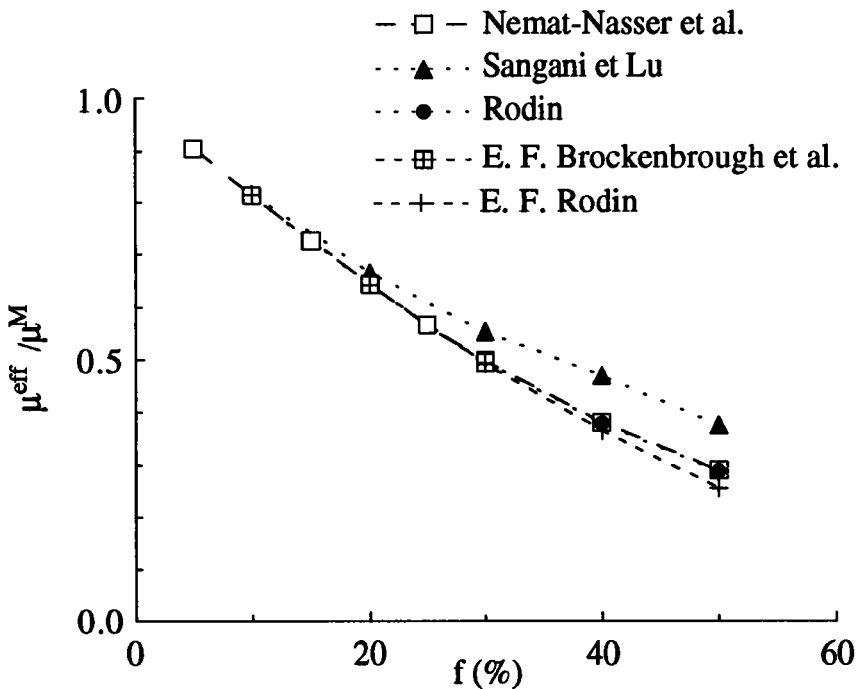


Figure I.4 : Module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) dans une direction principale de symétrie cubique.

Tous ces modèles tiennent compte de l'effet du taux de remplissage des renforts dans la

matrice, de leur comportement élastique respectif, de la forme des renforts et également de la répartition spatiale des inclusions dans la matrice.

Nous nous proposons d'étudier, pour un matériau composite constitué de sphères noyées d'une façon périodique dans une matrice élastique homogène infinie, le comportement de ces différentes méthodes en fonction de la fraction volumique des sphères. Les valeurs des constantes élastiques équivalentes obtenues par chacune de ces méthodes seront comparées entre elles afin de dégager certaines remarques.

La figure I.4 représente la variation du module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) dans une direction principale de symétrie cubique en fonction de la fraction volumique de vides sphériques, réparties sur un réseau cubique simple, obtenu par les éléments finis (Brockenbrough et al., 1992 et Rodin, 1993), par le modèle de développement en séries de Fourier (Nemat-Nasser et al., 1982), par le modèle de Rodin (1993), et par Sangani et Lu (1987). Les coefficients de Poisson de la matrice et celui des inclusions sont pris égaux à 0.3. On remarque que les modèles analytiques de Nemat-Nasser et al. (1982) et de Rodin (1993) donnent des résultats très proches de ceux calculés par éléments finis, et que le modèle de Sangani et Lu surestime le module de cisaillement équivalent à forte concentration. Ceci s'explique par le fait que ce modèle diverge quand la fraction volumique des inclusions se rapproche de la fraction volumique maximale correspondant au réseau périodique considéré (elle est égale à 52 % dans le cas du réseau cubique simple). Ces auteurs, pour trouver les modules équivalents à fortes concentrations, ont utilisé des formes asymptotiques des coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

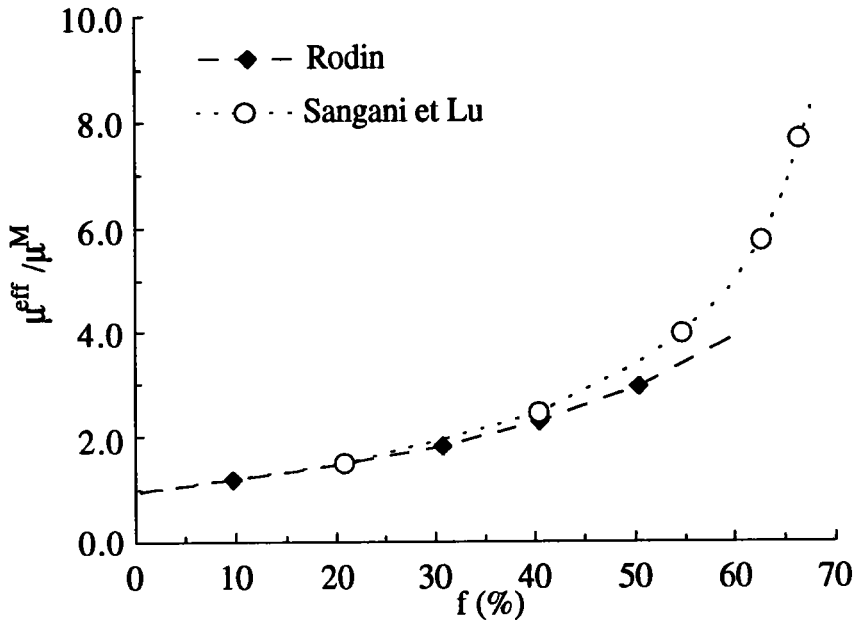


Figure I.5 : Module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) dans une direction principale de symétrie cubique (avec  $\mu^I/\mu^M=40$ ).

Puisque le modèle de Sangani et Lu donne des valeurs supérieures à celles prédites par les autres modèles dans le cas de vides sphériques, nous allons le tester dans le cas d'un réseau cubique centré d'inclusions sphériques, avec le rapport  $\mu^I/\mu^M=40$  et un coefficient de Poisson de la matrice égal à 0.3. La figure I.5 représente la variation du module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) dans une direction principale de symétrie cubique, en fonction de la fraction volumique des inclusions sphériques, obtenu par le modèle de Rodin (1993), et par Sangani et Lu (1987). On constate que le modèle de Sangani et Lu donne là aussi des valeurs supérieures à celles prédites par le modèle de Rodin.

## **I.5- CONCLUSIONS**

Nous avons exposé et examiné dans ce chapitre plusieurs modèles d'homogénéisation des matériaux composites élastiques. Il semble donc que le choix d'une de ces méthodes soit fortement lié, à la fois à la finesse avec laquelle on peut décrire le matériau, au temps que l'on souhaite consacrer au calcul, et à la précision attendue. La méthode de Mori-Tanaka sera plus adaptée à des évaluations rapides des caractéristiques mécaniques. Pour des études paramétriques, les méthodes de développement en série de Fourier (si le paramètre est le recouvrement des fibres) conviennent bien car elles autorisent un stockage de certains tenseurs intermédiaires. Les autres modèles sont très limités : le modèle de Nunan et Keller n'est envisageable que pour des sphères rigides, le modèle de Rodin et celui de Sangani et Lu que pour les inclusions sphériques. Par contre, l'homogénéisation asymptotique permet de faire une étude plus fine, permettant l'accès aux contraintes et déformations locales. Enfin, pour des fractions volumiques élevées, le recours aux éléments finis est justifié. Mais ces deux méthodes restent lourdes à mettre en œuvre.

Ce chapitre nous a permis de nous familiariser au formalisme des problèmes d'inclusions et va à présent servir de base pour introduire une nouvelle formulation qui peut être considérée comme une extension des problèmes classiques d'inclusions. En se basant sur les travaux de Zeller et Dederichs (1973) et sur le problème de la paire d'inclusions hétérogènes et plastiques développé par Fassi-Fehri (1985) et Berveiller et al. (1987), nous avons mis au point un formalisme de calcul qui prend en compte les interactions entre inclusions. Nous l'avons appelé méthode du cluster. Son avantage réside dans sa souplesse et dans les résultats semi analytiques fournis dans les situations les plus simples. Avec ce modèle, nous avons pu étudier les effets de la répartition spatiale des inclusions dans la matrice sur les propriétés macroscopiques des matériaux composites. L'objet du prochain chapitre sera la présentation de ce modèle.

## CHAPITRE II :

### SCHEMA DU CLUSTER

|  |            |
|--|------------|
| <b>II.1- INTRODUCTION.....</b>   | <b>72</b>  |
| <b>II.2- FORMULATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME ÉLASTIQUE.....</b>                         | <b>74</b>  |
| II.2.1. Équation intégrale pour les milieux hétérogènes élastiques.....              | 74         |
| II.2.2. Propriétés de l'opérateur de Green modifié.....                              | 78         |
| <b>II.3. SOLUTIONS APPROCHÉES DE L'ÉQUATION INTÉGRALE .....</b>                      | <b>79</b>  |
| <b>II.3.1. Milieux inclusionnaires.....</b>  | <b>80</b>  |
| II.3.1.1) Problème de l'inclusion multiple .....                                     | 80         |
| II.3.1.2) Méthodes de résolution.....  | 83         |
| II.3.1.2.1) Méthode du cluster.....  | 85         |
| II.3.1.2.1.1) Cas des milieux périodiques.....                                       | 86         |
| a)Présentation de la méthode .....   | 86         |
| b)Étude de la convergence de la méthode.....   | 93         |
| c)Quelques cas particuliers.....   | 100        |
| d)Schéma de résolution numérique.....  | 103        |
| II.3.1.2.1.2) Cas des milieux aléatoires.....  | 105        |
| II.3.1.2.2) Méthode du cluster-Mori-Tanaka.....                                      | 107        |
| II.3.1.2.2.1) Cas des milieux périodiques.....                                       | 108        |
| a)Présentation de la méthode.....  | 108        |
| b)Vérification de la convergence de la méthode.....                                  | 110        |
| II.3.1.2.2.2) Cas des milieux à clusters isolés.....                                 | 112        |
| <b>II.3.2. Matériaux polycristallins : méthode du cluster-<br/>autocohérent.....</b> | <b>115</b> |
| a)Présentation de la méthode.....  | 116        |
| b)Étude de la convergence de la méthode.....   | 124        |
| c)Organisation schématique du programme et récapitulatif de la<br>méthode .....      | 127        |
| <b>II.4- CONCLUSIONS.....</b>  | <b>130</b> |

## II.1- INTRODUCTION

Nous avons vu dans le chapitre I que le modèle autocohérent à 1-site, pour le calcul des coefficients élastiques équivalents d'un matériau composite, ne fait intervenir, dans le calcul du tenseur de localisation des déformations  $\Delta^I$ , que la fraction volumique des divers constituants, leurs caractéristiques respectives.

L'effet de la forme des inclusions confère au matériau composite un comportement anisotrope dû à la morphologie de l'inclusion (ellipsoïdale par exemple). Mais la répartition spatiale des inclusions dans la matrice, dont le modèle autocohérent à 1-site ne tient pas compte, contribue aussi à la modification du comportement macroscopique du matériau. En plus des interactions entre une inclusion I et le milieu homogène équivalent du modèle autocohérent à 1-site, il existe aussi des interactions, quoique souvent faibles à petite fraction volumique, entre l'inclusion considérée et son voisinage immédiat constitué d'un certain nombre d'inclusions.

En tenant compte de ce voisinage, on représente à la fois l'anisotropie morphologique du milieu (forme des inclusions) et l'anisotropie due à la répartition spatiale des hétérogénéités dans le composite. Fassi-Fehri (1985), dans son étude sur les matériaux composites, a proposé une méthode autocohérente dite à N-sites (en prenant les idées de base du modèle autocohérent à 1-site) : au lieu de partir des interactions entre une inclusion unique et le milieu homogène équivalent, elle considère les interactions entre

une "cellule hétérogène élémentaire" et le milieu homogène équivalent recherché. Cette cellule est alors constituée d'une inclusion et de ses premiers voisins, et elle est située selon l'arrangement spatiale "tripériodique" du matériau. Cette façon de procéder n'est pas correcte et n'a pas apporté de grandes corrections par rapport à la méthode autocohérente à 1-site. Nous ferons un rappel de cette méthode autocohérente à plusieurs sites dans ce chapitre.

Zeller et Dederichs (1973) ont formulé le problème d'élasticité hétérogène en une équation intégrale similaire à l'équation de Lippman-Schwinger-Dyson en mécanique quantique. En se basant sur ces travaux, nous développons deux formalismes de calcul que nous appelons la méthode du cluster pour le premier et la méthode du cluster-autocohérent pour le second. La différence entre ces deux méthodes réside dans le choix du milieu de référence considéré :

- C'est la matrice dans le cas d'un composite chargé d'inclusions. Elle trouvent des applications dans les problèmes bien sûr de matériaux composites, mais aussi d'endommagement (interaction entre précipités, des fissures ...).

- C'est le milieu homogène équivalent pour la méthode du cluster-autocohérent (avec par exemple une application toute naturelle aux matériaux polycristallins).

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord l'équation intégrale de Zeller et Dederichs (1973). Une fois cette formulation générale exposée, nous présentons tout d'abord la méthode du cluster qui fera l'objet de deux parties différentes : l'une concerne des inclusions ellipsoïdales, et l'autre expose une combinaison de la méthode de Mori-Tanaka avec celle du cluster (méthode du cluster-Mori-Tanaka). Dans le chapitre III, nous comparerons les résultats obtenus par ces deux méthodes avec ceux déduits des autres modèles approchés cités dans le chapitre I. Ensuite on présente le modèle du cluster-

autocohérent que nous appliquerons à un matériau composite tissé constitué de fibres longues dans les trois directions orthogonales.

## II.2- FORMULATION GÉNÉRALE DU PROBLÈME ÉLASTIQUE

On se propose dans ce paragraphe d'introduire le problème de l'inclusion hétérogène. En rappelant tout d'abord sa formulation générale et en utilisant la technique du tenseur de Green, on calcule le champs de déformation et de contrainte.

### II.2.1. Équation intégrale pour les milieux hétérogènes élastiques

Considérons un milieu continu fini de frontière  $\partial V$ , non déformé dans un état initial naturel (contraintes nulles). Si on le soumet à l'action des forces extérieures (de densité volumique  $F_i$ ) en imposant à la surface  $\partial V$  une répartition mixte d'efforts (de densité surfacique  $T_i^S$  et de déplacement  $U_i^S$ ), le milieu sera en équilibre sous le siège de contraintes  $\sigma_{ij}$  et d'un champ de déplacement  $u_i$  continu sans vide ni recouvrement.

L'application de la relation fondamentale de dynamique se traduit par :

$$(II-1) \quad \begin{cases} - \text{l'équilibre des forces : } \sigma_{ij,j} + F_i = 0 \\ - \text{l'équilibre des moments : } \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ (en l'absence de couples)} \end{cases}$$

et le respect des conditions de frontière nécessite :

$$(II-2) \quad \begin{cases} \text{pour les efforts : } \sigma_{ij} n_j^S = T_i^S \\ \text{pour le déplacement : } u_i = U_i^S \text{ à la frontière } \partial V \end{cases}$$

( $n^S$  : normale unitaire extérieure à la surface  $\partial V$ ).

Pour compléter l'étude, il faut préciser la loi de comportement du matériau. La déformation élastique  $\underline{\epsilon}(\underline{x})$  est associée à la contrainte locale  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  par la loi de Hooke locale d'élasticité anisotrope :

$$(II-3) \quad \sigma_{ij}(\underline{x}) = C_{ijkl}(\underline{x}) \epsilon_{kl}(\underline{x})$$



où  $C_{ijkl}(\underline{x})$  désigne les composantes du tenseur d'élasticité en  $\underline{x}$ .

Dans le cas d'un matériau homogène,  $C_{ijkl}(\underline{x})$  ne dépend pas de  $\underline{x}$  en général, et

$C_{ijkl}(\underline{x})$  possède les symétries suivantes :

$$(II-4) \quad C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

La déformation infinitésimale est définie par :

$$(II-5) \quad \varepsilon_{ij}(\underline{u}) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(\underline{x}) + u_{j,i}(\underline{x})]$$

où  $\underline{u}(\underline{x})$  est le vecteur déplacement.

On considère le cas d'un milieu infini, ce qui impose que les conditions de frontière (II-2) sont rejetées à l'infini, et on note :

$$(II-6) \quad \begin{cases} - \text{pour les contraintes : } \sigma_{ij}(\infty) = \Sigma_{ij} \text{ uniforme} \\ - \text{pour les déformations : } \varepsilon_{ij}(\infty) = E_{ij} \text{ uniforme} \end{cases}$$

Nous considérons dorénavant le deuxième type de condition à la limite.

Nous cherchons un système d'équations portant uniquement sur la déformation  $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$ . En reportant (II-5) dans (II-3), on obtient :

$$(II-7) \quad \sigma_{ij}(\underline{x}) = C_{ijkl}(\underline{x}) u_{k,l}(\underline{x})$$

qui dans (II-1), en l'absence de forces volumiques, conduit au système d'équations aux dérivées partielles :

$$(II-8) \quad [C_{ijkl}(\underline{x}) u_{k,l}(\underline{x})]_{,j} = 0$$

Nous considérons maintenant un milieu de référence homogène de tenseur d'élasticité  $\underline{C}^0$ .

Le tenseur d'élasticité local se décompose en la partie constante  $\underline{C}^0$  et en une partie fluctuante  $\delta\underline{C}(\underline{x})$  :

$$(II-9) \quad \underline{C}(\underline{x}) = \underline{C}^0 + \delta\underline{C}(\underline{x})$$

Substituons la relation (II-9) dans l'équation (II-8), et on obtient une équation de type Navier :

$$(II-10) \quad C_{ijkl}^0 u_{k,l}(\underline{x}) + \left[ \delta C_{ijkl}(\underline{x}) u_{k,l}(\underline{x}) \right]_{,j} = 0$$

Ceci constitue un système d'équations aux dérivées partielles dont les inconnues sont les  $u_i(\underline{x})_{(i=1,2,3)}$ , qu'il faut résoudre en tenant compte des conditions de frontière à l'infini (II-6), et où le terme  $\left[ \delta C_{ijkl}(\underline{x}) u_{k,l}(\underline{x}) \right]_{,j}$  peut être considéré comme une distribution de forces volumiques fictives. Une résolution avantageuse de (II-10) fait appel à la technique du tenseur de Green  $\underline{G}$  pour le milieu infini de constantes d'élasticité  $\underline{C}^0$  :  $G_{km}(\underline{x}-\underline{x}')$  représente le déplacement dans le milieu dans la direction  $k$ , au point  $\underline{x}$  quelconque, lorsqu'une force unité  $f_i = \delta_{im} \delta(\underline{x}-\underline{x}')$  est appliquée en un point  $\underline{x}'$  dans la direction de l'axe  $m$ .  $G_{km}$  est symétrique par rapport à  $k$  et  $m$ . Il est solution de l'équation suivante :

$$(II-11) \quad C_{ijkl}^0 G_{km,jl}(\underline{x}-\underline{x}') + \delta_{im} \delta(\underline{x}-\underline{x}') = 0$$

avec comme condition auxiliaire son annulation à l'infini.

$\delta_{im}$  est le tenseur de Kronecker, et  $\delta(\underline{x}-\underline{x}')$  est la distribution de Dirac à trois dimensions dont les propriétés permettent d'écrire la solution de (II-10) ainsi :

$$(II-12) \quad u_i(\underline{x}) = u_i^0(\underline{x}) + \int_{R^3} G_{ki}(\underline{x}-\underline{x}') \left[ \delta C_{klmn}(\underline{x}') u_{m,n}(\underline{x}') \right]_{,l'} d\underline{x}'$$

où  $u_i^0(\underline{x})$  est une solution de l'équation homogène associée, et  $d\underline{x}'$  est l'élément de volume ( $d\underline{x}' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$ ),  $x'_1, x'_2, x'_3$  étant les coordonnées cartésiennes du point  $\underline{x}'$ . Il convient d'indiquer ici les relations entre les dérivées partielles portant sur  $G_{ki}(\underline{x}-\underline{x}')$ , à savoir :

$$(II-13) \quad G_{ki,j}(\underline{x}-\underline{x}') = \frac{\partial}{\partial x_j} G_{ki}(\underline{x}-\underline{x}') = -\frac{\partial}{\partial x_j} G_{ki}(\underline{x}-\underline{x}') = -G_{ki,j'}(\underline{x}-\underline{x}')$$

On a alors :  $G_{ki,jl}(\underline{x}-\underline{x}') = G_{ki,j'l'}(\underline{x}-\underline{x}')$ .

En intégrant l'équation (II-12) par parties et en annulant l'intégrale de surface du fait des propriétés de  $\underline{G}$  à l'infini, on obtient :

$$(II-14) \quad u_i(\underline{x}) = u_i^o(\underline{x}) + \int_{R^3} G_{ki,l}(\underline{x} - \underline{x}') \delta C_{klmn}(\underline{x}') u_{m,n}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

Soit, pour le gradient de déplacement, en utilisant la relation (II-13) :

$$(II-15) \quad u_{i,j}(\underline{x}) = u_{i,j}^o(\underline{x}) + \int_{R^3} G_{ki,lj}(\underline{x} - \underline{x}') \delta C_{klmn}(\underline{x}') \varepsilon_{mn}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

Après symétrisation par rapport à "i,j" et "k,l", on aboutit à une équation intégrale, similaire à celle de Lippman-Schwinger-Dyson (L.S.D) en mécanique quantique :

$$(II-16) \quad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \varepsilon_{ij}^o + \int_{R^3} \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') \delta C_{klmn}(\underline{x}') \varepsilon_{mn}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

où  $\underline{\varepsilon}^o$  est une déformation uniforme créée dans tout le milieu homogène ( $\underline{C}^o$ ) par la déformation uniforme  $\underline{E}$  appliquée au milieu infini.  $\underline{\Gamma}$  est le tenseur de Green modifié défini par :

$$(II-17) \quad \Gamma_{ijkl} = [G_{ki,lj}]_{\{ij\}\{kl\}}$$

où on a noté par des accolades fermées  $\{mn\}$  la partie symétrique du tenseur par rapport aux indices "m,n".

L'équation intégrale (II-16), appelée équation L.S.D. par Kröner (1980b), a été proposée sous cette forme par Zeller et Dederichs (1973). Dans ce qui suit on propose une solution de cette équation intégrale pour trois types de matériaux. Nous rappelons d'abord les propriétés du tenseur de Green modifié, car elles vont être utilisées de façon importante dans les développements qui vont suivre.

### II.2.2. Propriétés de l'opérateur de Green modifié

D'après François, Pineau et Zaoui (1991), sous des conditions très générales, l'opérateur de Green modifié  $\Gamma(\underline{x}, \underline{x}')$  se décompose en une partie singulière  $\underline{E}^o$ , dite locale, et une partie régulière  $\underline{F}^o$ , dite de distance, telles que :

$$(II-18) \quad \begin{cases} \Gamma(\underline{x}, \underline{x}') = \underline{E}^o(\underline{x}, \underline{x}') + \underline{F}^o(\underline{x}, \underline{x}') \\ \underline{E}^o(\underline{x}) = \underline{E}^o \delta(\underline{x}, \underline{x}') = \underline{E}^o \delta(\underline{x} - \underline{x}') \end{cases}$$

où  $\underline{F}^o(\underline{x}, \underline{x}')$  décroît comme  $\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3}$ , et où  $\underline{E}^o(\underline{x})$  est un simple tenseur du quatrième ordre. L'intégrale de  $\underline{F}^o$  dans un ellipsoïde est uniforme (et nulle dans une sphère) si le point  $\underline{x}$  est à l'intérieur de l'ellipsoïde. Ce sont ces propriétés remarquables qui sont à l'origine de la simplicité de la solution du problème d'Eshelby pour une inclusion ellipsoïdale en milieu infini (notamment de l'uniformité de la solution à l'intérieur de l'inclusion).

L'explicitation analytique de  $\Gamma$  pour une anisotropie quelconque n'est malheureusement pas possible. En revanche son expression est simple dans le cas isotrope et pour un milieu infini. Pour ce cas très particulier, les expressions  $\underline{E}^o$  et  $\underline{F}^o$  sont connues analytiquement, et sont données ci-dessous.

Le tenseur de green s'écrit en effet :

$$(II-19) \quad G_{ij}(\underline{x}, \underline{x}') = G_{ij}(\underline{x} - \underline{x}') = \frac{1}{8\pi\mu(3k + 4\mu)|\underline{x} - \underline{x}'|} \left[ (3k + 7\mu)\delta_{ij} + (3k + \mu)r_i r_j \right]$$

$$(II-20) \quad E_{ijkl}^o = \frac{1}{15\mu^0(3k^0 + 4\mu^0)} \left\{ -(3k^0 + \mu^0)\delta_{ij}\delta_{kl} + 9(k^0 + 2\mu^0)I_{ijkl} \right\}$$

$$(II-21) \quad F_{ijkl}^0 = \frac{1}{8\pi\mu^0(3k^0 + 4\mu^0) \left| \underline{x} - \underline{x}' \right|^3} \left\{ (3k^0 + \mu^0)\delta_{ij}\delta_{kl} - 3(3k^0 + \mu^0)(r_{i1}r_{j1}\delta_{kl} + r_{k1}r_{l1}\delta_{ij}) \right. \\ \left. - 6\mu^0 I_{ijkl} + 15(3k^0 + \mu^0)r_{i1}r_{j1}r_{k1}r_{l1} - \frac{3}{2}(3k^0 + 2\mu^0)(r_{i1}r_{l1}\delta_{jk} + r_{i1}r_{j1}\delta_{lk} + r_{j1}r_{k1}\delta_{il} + r_{i1}r_{k1}\delta_{jl}) \right\}$$

avec  $\underline{r} = \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{\left| \underline{x} - \underline{x}' \right|}$

### II.3- SOLUTIONS APPROCHÉES DE L'ÉQUATION INTÉGRALE

Dans ce paragraphe, nous proposons de résoudre l'équation intégrale (II-16) en distinguant le cas d'un composite chargé d'inclusions de celui d'autres matériaux tel un polycristal.

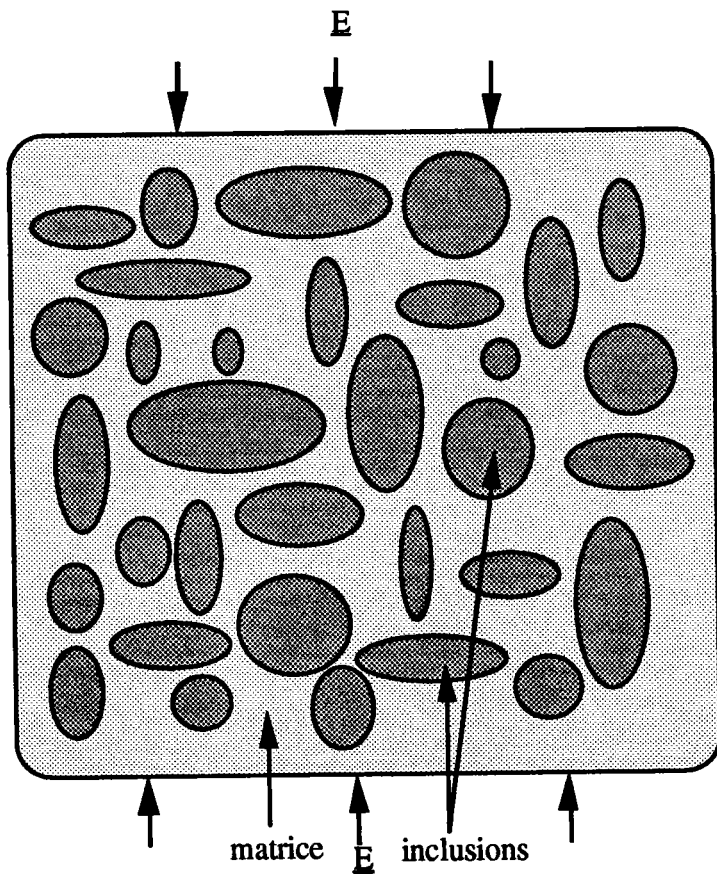


Figure II.1 : Représentation schématique d'un milieu inclusionnaire.

### II.3.1. Milieux inclusionnaires

L'équation intégrale (II-16) a été utilisée par Fassi-Fehri (1985), Berveiller et al. (1986, 1987) et Fassi-Fehri et al. (1989) pour résoudre le problème particulier de la paire d'inclusions. Ils ont pu obtenir une solution approchée pour les déformations moyennes, en considérant un milieu infini de constantes élastiques  $\underline{C}^0$  contenant deux inclusions I et J, de volume respectivement  $V_I$  et  $V_J$  et de constantes élastiques  $\underline{C}^I$  et  $\underline{C}^J$ , qu'ils ont supposées uniformes dans  $V_I$  et  $V_J$ . La solution exacte de cette équation pour une inclusion quelconque est encore très complexe et difficile à déduire en générale. Johnson (1983) prendra l'approximation de Born qui consiste à remplacer  $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$  dans l'intégrale par le champ uniforme  $\underline{E}$ . Mais cette approximation a montré que la méthode n'est valable que pour de faibles pourcentages du renfort dans la matrice. La méthode autocohérente, pour simplifier le problème, prend une inclusion noyée dans le milieu homogène équivalent de constantes élastiques  $\underline{C}^{eff}$ , et considère que la déformation est uniforme dans l'inclusion. Nous avons vu dans le chapitre I que cette méthode ne donne pas de bons résultats à grande fraction volumique des inclusions (quand le rapport du module de l'inclusion par rapport au module de la matrice est très grand ou très faible). Dans le cas général, la résolution exacte de l'équation intégrale nécessite le recours à des méthodes numériques complexes ou à un développement de  $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$  sous forme polynomiale (Moshovidis et Mura, 1975).

#### II.3.1.1) Problème de l'inclusion multiple

On considère un matériau composite élastique constitué par une infinité d'inclusions plongées dans une matrice homogène et infinie (voir figure II.1). Les constantes élastiques des inclusions sont notées  $\underline{C}^I$ , celles de la matrice  $\underline{C}^M$ . Les inclusions sont supposées de formes ellipsoïdales. La géométrie d'une inclusion I est caractérisée par les demi-longueurs principales  $a_I$ ,  $b_I$ ,  $c_I$ , et des trois angles d'Euler, et par la position du centre.

Dans ce cas de matériaux et avec les notations ci-dessus, on a :

$$(II-22) \quad \delta \underline{C}(\underline{x}) = \sum_{I=1}^{+\infty} (\underline{C}^I - \underline{C}^0) \theta^I(\underline{x}) = \sum_{I=1}^{+\infty} \Delta \underline{C}^I \theta^I(\underline{x})$$

où la fonction  $\theta^I(\underline{x})$ , donnée par la relation (I-29), est la fonction indicatrice de l'inclusion I de fraction volumique  $f_I$ .

Substituons la relation (II-22) dans l'équation (II-10), l'équation de type Navier devient :

$$(II-23) \quad C_{ijkl}^0 u_{k,l}(\underline{x}) + \left[ \sum_{I=1}^{+\infty} \Delta C_{ijkl}^I \theta^I(\underline{x}) u_{k,l}(\underline{x}) \right]_{,j} = 0$$

En substituant la relation (II-22) dans (II-16), on obtient :

$$(II-24) \quad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \varepsilon_{ij}^0 + \sum_{J=1}^{+\infty} \int_{R^3} \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') \Delta C_{klmn}^J \theta^J(\underline{x}') \varepsilon_{mn}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

En tenant compte des propriétés de la fonction  $\theta^J(\underline{x})$ , qui s'annule en dehors des  $V_J$ , l'intégrale sur  $R^3$  peut être réduite à une sommation sur des intégrales sur les volumes  $V_J$ .

L'équation (II-24) s'écrit alors :

$$(II-25) \quad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \varepsilon_{ij}^0 + \sum_{J=1}^{+\infty} \int_{V_J} \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') \Delta C_{klmn}^J \varepsilon_{mn}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

Les déformations et les contraintes dans les inclusions I ( $I=1, \dots, +\infty$ ) n'ont aucune raison d'être uniformes dans les volumes  $V_I$ , même pour des inclusions de formes ellipsoïdales. Ici réside la difficulté majeure du problème. Une approximation plus intuitive et justifiée par Moshovidis et Mura (1975), consiste à remplacer, dans les volumes  $V_J$  de l'équation (II-25) (dont la solution exacte est très complexe et difficile à déduire en générale),  $\underline{\varepsilon}(\underline{x}')$  par les valeurs moyennes de  $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$  sur ces volumes, définie par :

$$(II-26) \quad \underline{\varepsilon}^J = \frac{1}{V_J} \int_{V_J} \underline{\varepsilon}(\underline{x}) d\underline{x}$$

L'uniformité des contraintes dans une inclusion isolée dans un milieu infini, a été démontrée par Eshelby (1957). Les calculs de Nemat-Nasser et Taya (1981), et Nemat-Nasser et al. (1982) dans le cas des inclusions sphériques réparties d'une façon périodique, ont montré qu'en supposant les déformations et contraintes uniformes dans les inclusions, on commet une erreur relative de quelques pourcents (à 30% de vides sphériques elle est de 0.3% sur le module de cisaillement et de 0.27% sur le module de compressibilité). Et puisque nous sommes très intéressés par l'évaluation des contraintes et déformations moyennes dans les différentes phases, nous utiliserons donc cette hypothèse, qui sera testée en comparant les résultats de notre modèle à différents résultats analytiques ou numériques. On note par  $\underline{\varepsilon}^I$  (respectivement  $\underline{\sigma}^I$ ) la déformation (respectivement la contrainte) dans l'inclusion I. Le domaine occupé par cette inclusion sera noté I et son volume  $V_I$ .

Considérons la relation (II-22). Il s'en suit immédiatement que :

$$(II-27) \quad \delta C_{ijkl}(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{x} \in \text{matrice} \\ \Delta C_{ijkl}^I = C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^0 & \text{si } \underline{x} \in \text{inclusion I} \end{cases}$$

Suite à l'hypothèse de l'uniformité de la déformation dans l'inclusion, l'équation intégrale (II-25) devient :

$$(II-28) \quad \varepsilon_{mn}(\underline{x}) = \varepsilon_{mn}^0 + \sum_{J=1}^{\infty} \left( \int_{V_J} \Gamma_{mnij}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \right) \Delta C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^J$$

où la sommation porte sur l'ensemble des inclusions se trouvant dans la matrice infinie. En examinant (II-28), on remarque que l'uniformité de la déformation n'est pas réalisée dans l'inclusion, sauf si l'on considère une inclusion ellipsoïdale isolée. En faisant la



moyenne de la déformation dans l'inclusion I définie par la relation (II-28), on obtient alors :

$$(II-29) \quad \varepsilon_{mn}^I = \varepsilon_{mn}^o + \sum_{J=1}^{\infty} \Gamma_{mnij}^{IJ} \Delta C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^J$$

avec :

$$(II-30) \quad \Gamma_{mnij}^{IJ} = \frac{1}{V_I} \iint_{IJ} \Gamma_{mnij}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' d\underline{x}$$

Notons que les interactions de l'inclusion I avec les autres inclusions sont tenues en compte dans les tenseurs d'ordre 4  $\Gamma^{IJ}$  ( $I \neq J$ ). Ces tenseurs d'interactions peuvent être calculés quand la forme et la position des inclusions sont connues. Les termes  $\Gamma^{II}$  sont en général prépondérants par rapport aux termes  $\Gamma^{IJ}$  ( $I \neq J$ ). D'après une étude faite par Fassi-Fehri (1985), les tenseurs  $\Gamma^{IJ}$  ont un comportement en  $1/R^3$  et  $1/R^5$  ( $R$  est la distance entre les centres des deux inclusions I et J), donc on peut raisonnablement limiter les interactions au proches voisins. L'évaluation des termes  $\Gamma^{IJ}$  est donnée dans l'Annexe A.

Les relations (II-29) constituent un système d'équations avec un nombre infini d'inconnues  $\varepsilon^J$ . Nous avons développé deux méthodes pour résoudre ce système d'équations, que nous présentons dans le paragraphe suivant.

### II.3.1.2. Méthodes de résolution

Une méthode autocohérente (valable en milieu dilués), appelée N-sites, a été proposée par Fassi-Fehri (1985), puis reprise par Berveiller et al. (1986) et Fassi-Fehri et al. (1989) en utilisant la solution du problème de la paire d'inclusions hétérogènes. Au lieu de partir des interactions entre une inclusion unique et le milieu homogène équivalent, une cellule hétérogène élémentaire est défini, constituée d'une inclusion et de ses premiers voisins situés dans le milieu homogène équivalent. Elle consiste à prendre comme milieu de référence le milieu homogène équivalent ( $\underline{C}^o = \underline{C}^{eff}$ ), et de prendre  $\varepsilon^o = \underline{E}$ .

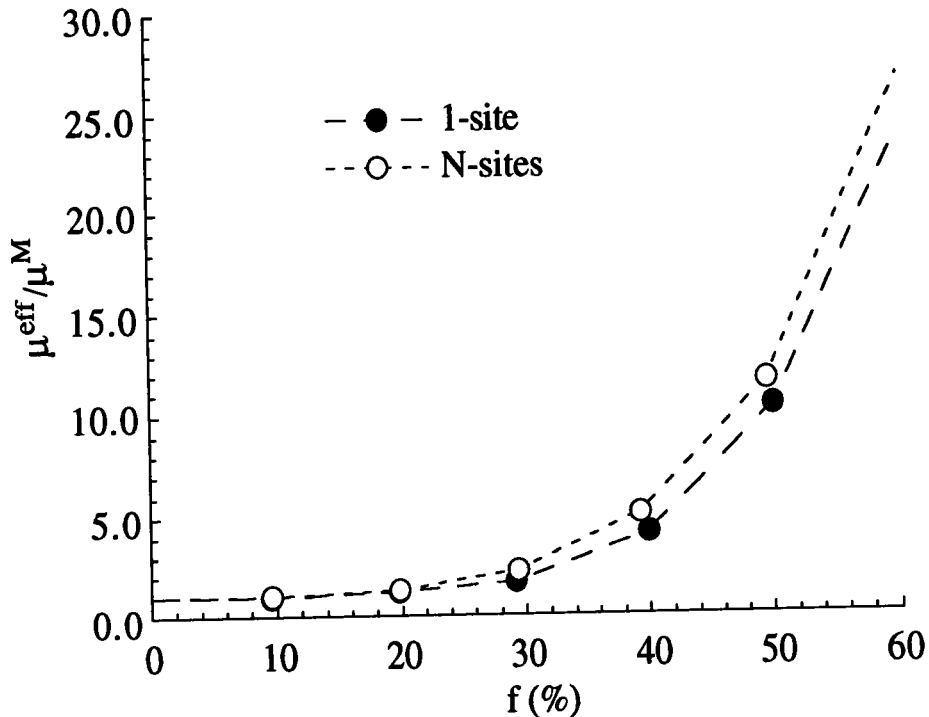


Figure II.2 : évolution du module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice), en fonction de la fraction volumique  $f$ , calculé à partir du modèle autocohérent à 1-site et du modèle autocohérent à N-sites (Berveiller et al. 1986).

Berveiller et al. (1986) ont effectué les calculs pour des inclusions sphériques réparties selon un réseau cubique centré, en limitant les interactions aux huit premiers voisins (sommets du cube). La matrice et les inclusions ont été supposées isotropes, de modules de cisaillement respectivement  $\mu^M$  et  $\mu^I$ , et de même coefficient de Poisson  $\nu=0.2$ .

La figure II.2 montre, pour un facteur d'hétérogénéité (défini par  $\frac{\mu^I - \mu^M}{\mu^M}$ ) de 100, l'évolution du module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) en fonction de la fraction volumique  $f$  des inclusions sphériques, évaluation obtenue à partir du modèle autocohérent à 1-site et du modèle autocohérent à N-sites présenté par Berveiller et al. (1986). On observe que les résultats obtenus à partir du modèle autocohérent à N-sites sont très proches des résultats obtenus à partir du modèle autocohérent à 1-site. Nous voyons que le modèle autocohérent à N-sites présenté par Fassi-Fehri (1985), Berveiller et al. (1986) et Fassi-Fehri et al. (1989) n'apporte donc pas de grande correction au résultat donné par le modèle autocohérent à 1-site. L'hypothèse de base de ce modèle, (milieu extérieur hétérogène remplacé par le milieu homogène équivalent), n'est pas complètement satisfaisante, car elle place les inclusions dans un milieu plus "raide" que le milieu réel, et notamment ne permet pas de prendre en compte la déformation de la zone de matrice entourant l'inclusion (cette zone est en effet plus "souple" que le milieu homogène équivalent). Les résultats de cette méthode seront comparés avec ceux de notre modèle dans le prochain chapitre (voir figure III.10). C'est pourquoi nous avons développé une nouvelle méthode décrivant de façon plus satisfaisante le comportement des milieux inclusionnaires, méthodes qui vont être présentées dans les paragraphes suivants.

### II.3.1.2.1) Méthode du cluster

Elle s'applique aux cas d'inclusions ellipsoïdales, distribuées d'une manière périodique (voir figure II.3) ou non périodique (voir figure II.1) dans une matrice homogène infinie. La méthode du cluster consiste à prendre comme milieu de référence la matrice ( $C^0 = C^M$ ).

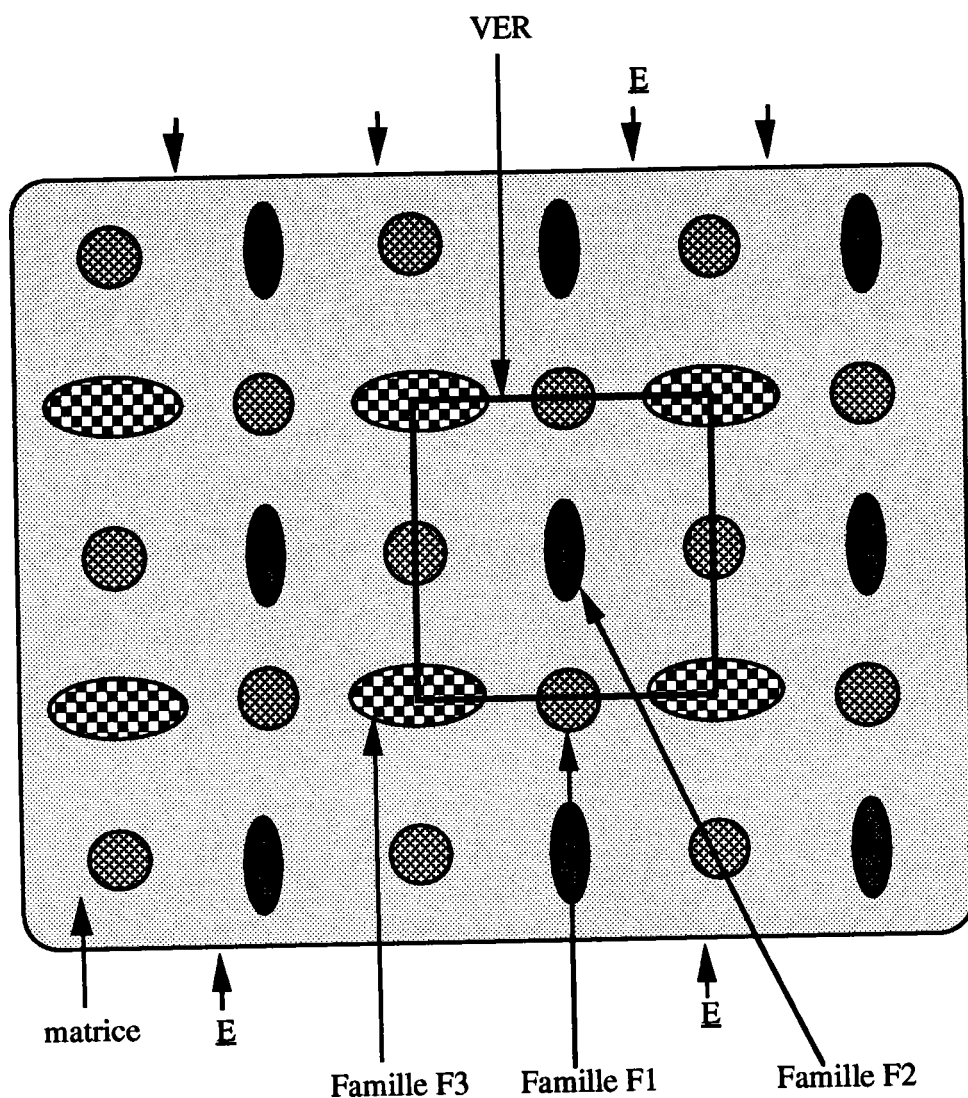


Figure II.3 : Représentation schématique d'un milieu inclusionnaire périodique constitué par trois familles d'inclusions.

### II.3.1.2.1.1) Cas des milieux périodiques

#### a) Présentation de la méthode

Les relations (II-29) constituent un système d'équations avec un nombre infini d'inconnues  $\epsilon^j$ . Comme dans Canova et al. (1992), le problème peut être réduit à un système de N équations à N inconnues en considérant un ensemble d'inclusions (N inclusions), constituant un volume élémentaire représentatif (VER), représentatif en effet

à la fois de l'anisotropie géométrique et mécanique de chacune d'entre elles, et de leur répartition mutuelle. Le VER, contenant donc N inclusions et reproduit par périodicité, permet ainsi de remplir tout l'espace (voir figure II-3). Par exemple, le volume élémentaire représentatif dans le cas d'une répartition de sphères en cubique simple, est constitué par un cube contenant une seule sphère en son centre (figure II.4). On associe à chaque inclusion  $K=1,\dots,N$  dans le VER, la famille (notée  $F_K$ ) d'inclusions obtenue par périodicité. Cette famille est aussi notée par  $K$ . La fraction volumique de l'inclusion  $K$  dans le VER est notée par  $f_K$  et est égale à la fraction volumique de la famille  $K$  dans tout l'espace. Les inconnues sont les déformations  $\underline{\varepsilon}^K$  dans les inclusions ( $K=1,\dots,N$ ). (II-29) peut être réécrite comme suit :

$$(II-31) \quad \underline{\varepsilon}^I = \underline{\varepsilon}^0 + \sum_{J \in F_1} \underline{\Gamma}^J : \Delta \underline{C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + \dots + \sum_{J \in F_N} \underline{\Gamma}^J : \Delta \underline{C}^N : \underline{\varepsilon}^N$$

pour  $I=1,\dots,N$ .

Les sommations dans cette équation introduisent des séries infinies d'inclusions. On obtient une solution approchée de la manière suivante : à chaque inclusion  $I$ , on associe une sphère  $S(I, R_c)$  de rayon  $R_c$  et de centre confondu avec celui de l'inclusion  $I$  (voir figures II.5 et II.6). On note par  $C(I, R_c)$ , ou plus brièvement par  $C_I$ , le cluster des inclusions qui ont leur centre dans  $S(I, R_c)$ . On réduit la sommation dans (II-31) à une sommation finie qui prend seulement en compte les inclusions ayant leur centre dans le cluster  $C_I$ . Si on définit par  $C_{Ij}$  l'intersection du cluster  $C_I$  avec la famille d'inclusions  $F_j$ , nous avons, compte tenu de (II-31) :

$$(II-32) \quad \underline{\varepsilon}^I = \underline{\varepsilon}^0 + \sum_{J \in C_{I1}} \underline{\Gamma}^J : \Delta \underline{C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + \dots + \sum_{J \in C_{IN}} \underline{\Gamma}^J : \Delta \underline{C}^N : \underline{\varepsilon}^N$$

pour  $I=1,\dots,N$ .

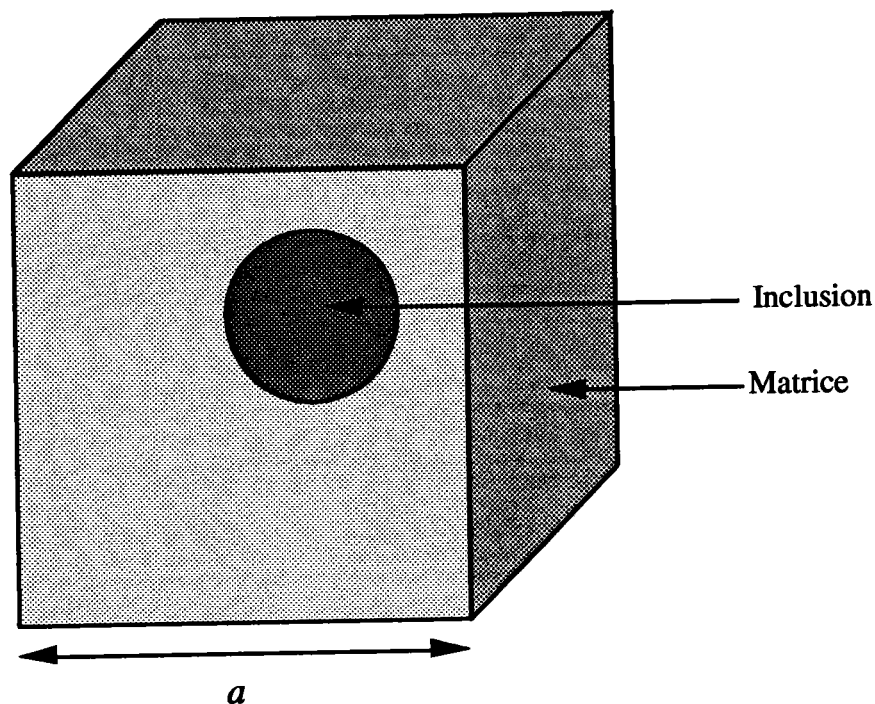


Figure II.4 : Volume élémentaire représentatif d'une distribution de sphère en cubique simple.

Le cluster correspondant à la répartition présentée sur la figure II.3 est schématisé en deux dimensions sur la figure II.5. La figure II.6 représente schématiquement en deux dimensions, le cluster correspondant à la répartition de sphères sur un réseau cubique simple. Dans la méthode du cluster on considère que la déformation de chaque inclusion dans le matériau hétérogène est égale à celle qui s'y produirait si le cluster sphérique de cette inclusion était seul, entouré de matrice élastique homogène infinie, avec pour déformation imposée à l'infini la valeur  $\epsilon^0$  (voir figure II.7) qu'on va déterminer ci-après.

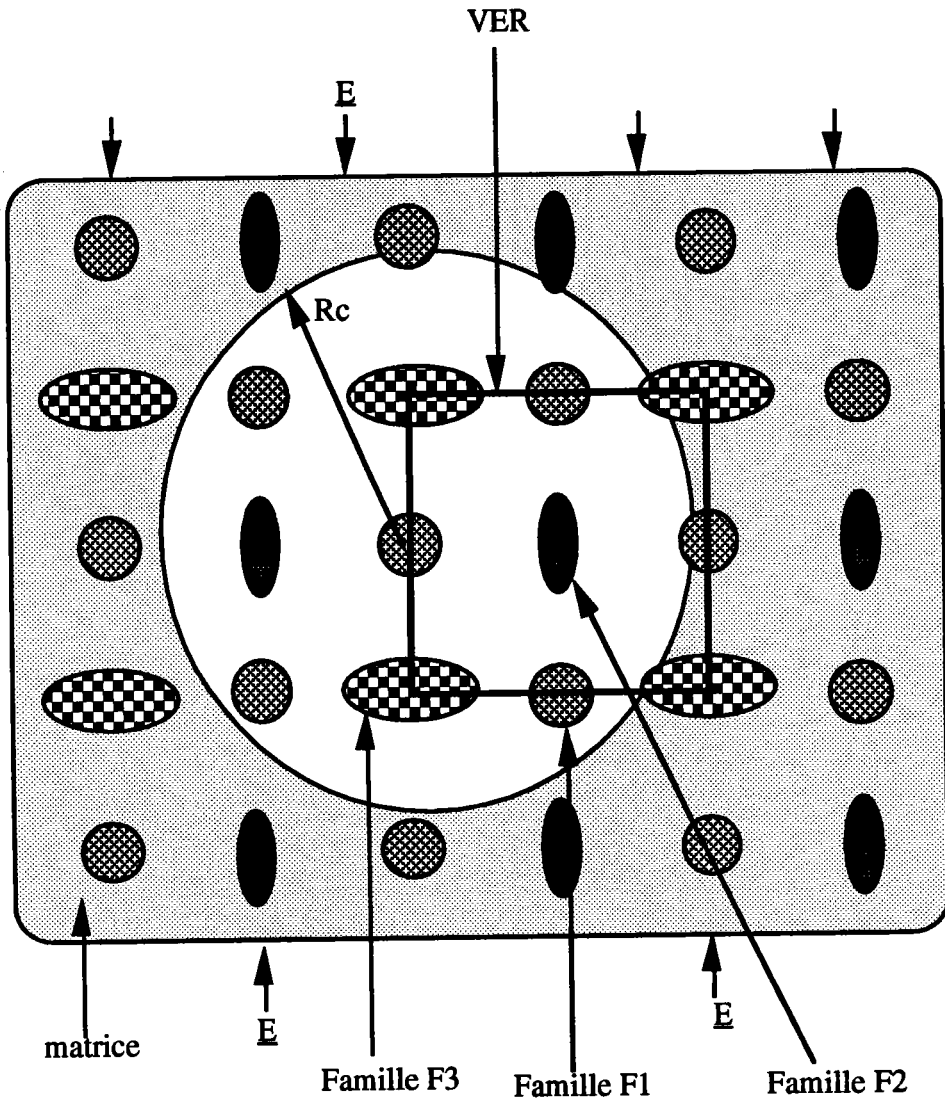


Figure II.5 : Représentation schématique du cluster de rayon  $R_c$  dans le cas d'une distribution de trois familles d'inclusions et du volume élémentaire représentatif (VER).

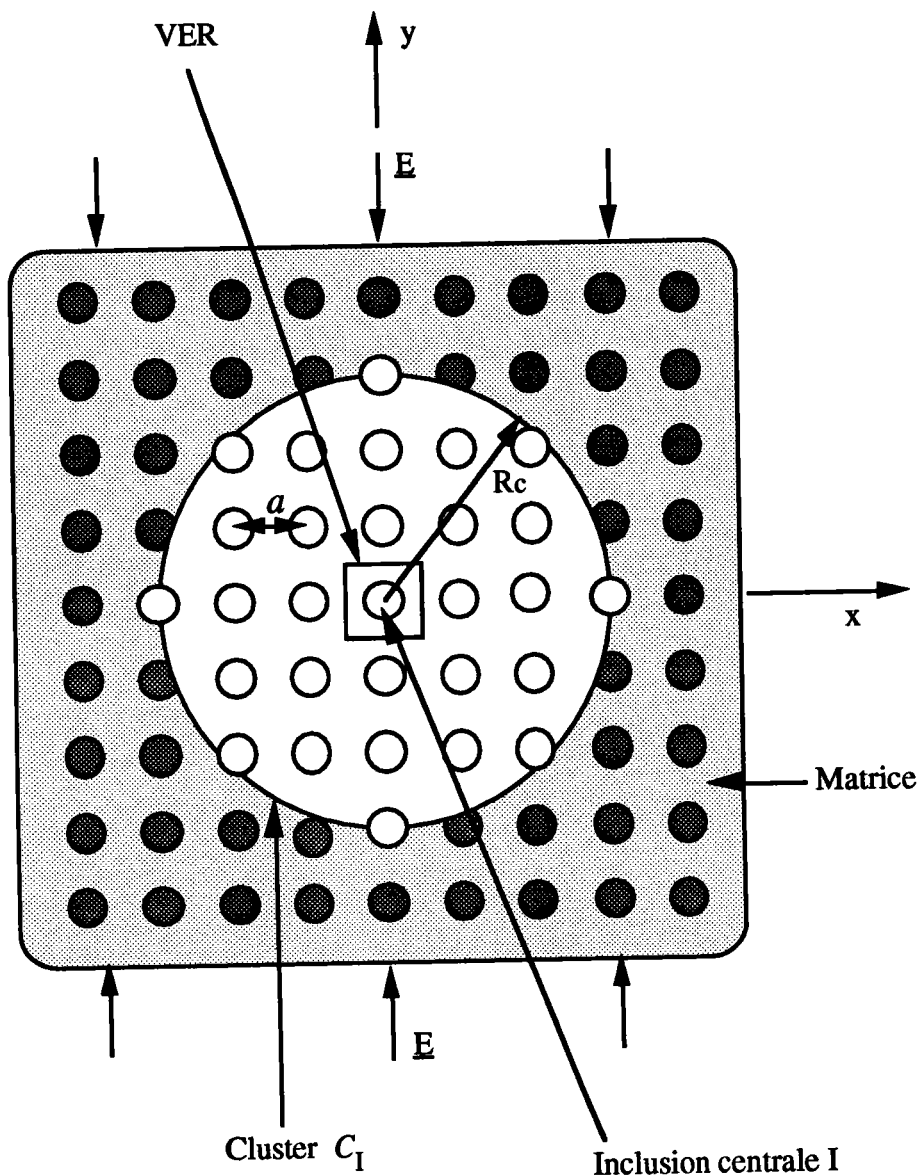


Figure II.6 : Représentation schématique du cluster de rayon  $R_c$  dans le cas d'une distribution de sphères sur un réseau cubique simple. Le petit cube au centre de la figure est le volume élémentaire représentatif (VER).



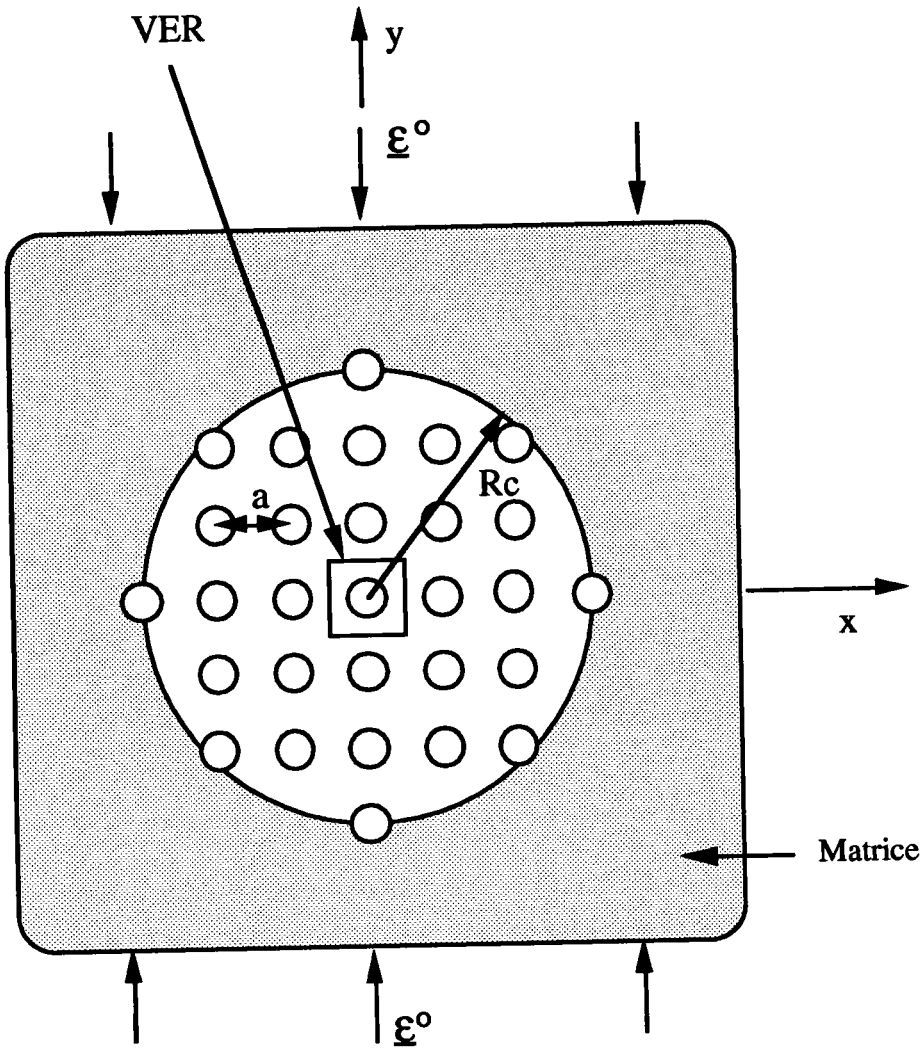


Figure II.7 : Représentation schématique du cluster équivalent.

La constante d'intégration  $\underline{\epsilon}^0$  qui apparaît dans la relation (II-31) peut être reliée à la déformation macroscopique  $\underline{E}$  appliquée à l'infini (Molinari et El Mouden, 1995). On note par  $\langle f \rangle$  la valeur moyenne de  $f$ , définie par :

$$(II-33) \quad \langle f \rangle = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R^3} \int_{B(\underline{x}, R)} f(\underline{x}') d\underline{x}'$$

où  $B(\underline{x}, R)$  est une sphère de centre  $\underline{x}$  et de rayon  $R$ . Nous supposons l'homogénéité statistique. Par conséquent, la définition de la valeur moyenne  $\langle f \rangle$  ne dépend pas du

centre  $\underline{x}$  de la sphère  $B(\underline{x}, R)$ . En faisant la moyenne de l'équation intégrale (II-16), on obtient l'expression suivante :

$$(II-34) \quad E_{mn} = \varepsilon_{mn}^0 + \langle \Gamma_{mnij} * \delta C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rangle$$

où "\*" désigne le produit de convolution. Compte tenu des propriétés du tenseur de Green modifié  $\Gamma_{mnij}(\underline{x} - \underline{x}')$ , l'opération de moyenne donne :

$$(II-35) \quad \langle \Gamma_{mnij} * \delta C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rangle = -E_{mnij}^0 \langle \delta C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \rangle$$

Pour une matrice isotrope définie par les modules de cisaillement et de compressibilité  $\mu^M$  et  $k^M$ ,  $\underline{E}^0$  est donné par la relation (II-20).

Les inconnues sont les déformations  $\underline{\varepsilon}^K$  dans les inclusions ( $K=1, \dots, N$ ). Avec ces notations, la constante  $\underline{\varepsilon}^0$  peut être exprimée, en utilisant (II-34) et (II-35), de la façon suivante :

$$(II-36) \quad \underline{\varepsilon}^0 = \underline{E} + \underline{E}^0 : \sum_{K=1}^N f_K \Delta \underline{C}^K : \underline{\varepsilon}^K$$

En substituant cette relation dans la relation (II-32), on obtient un système linéaire d'équations dont les inconnues sont les déformations  $\underline{\varepsilon}^I$  :

$$(II-37) \quad \underline{\varepsilon}^I = \underline{E} + \sum_{J \in C_{I1}} \underline{\Gamma}^{IJ} : \Delta \underline{C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + \dots + \sum_{J \in C_{IN}} \underline{\Gamma}^{IJ} : \Delta \underline{C}^N : \underline{\varepsilon}^N + \underline{E}^0 : \sum_{K=1}^N f_K \Delta \underline{C}^K : \underline{\varepsilon}^K$$

pour  $I=1, \dots, N$ ,

avec

$$(II-38) \quad \Delta C_{ijkl}^K = C_{ijkl}^K - C_{ijkl}^M$$

La convergence de la solution est étudiée dans le paragraphe II.3.1.2.1.b (voir El Mouden et Molinari, 1995).

Substituons (I-14a) dans (II-37), et en considérant que  $\underline{E}$  est arbitraire, on aboutit à un système linéaire de  $N$  équations, où les inconnues sont les tenseurs de localisations  $\underline{\Delta}^I$  :

$$(II-39) \quad \underline{\mathbf{A}}^I = \underline{\mathbf{I}} + \sum_{J \in C_{I1}} \underline{\Gamma}^{IJ} : \underline{\Delta C}^I : \underline{\mathbf{A}}^1 + \dots + \sum_{J \in C_{IN}} \underline{\Gamma}^{IJ} : \underline{\Delta C}^N : \underline{\mathbf{A}}^N + \underline{\mathbf{E}}^0 : \sum_{K=1}^N f_K \underline{\Delta C}^K : \underline{\mathbf{A}}^K$$

pour  $I=1, \dots, N$ ,

où  $\underline{\mathbf{I}}$  est le tenseur unité symétrique d'ordre 4 défini dans (I-17).

On remarque ici que la relation donnant  $\underline{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$  est parfaitement explicite, puisque les tenseurs  $\underline{\Gamma}^{IJ}$  et  $\underline{\Delta C}^I$  ne dépendent pas de  $\underline{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$ . Par conséquent, le calcul de  $\underline{\mathbf{C}}^{\text{eff}}$  ne nécessite donc pas d'utiliser une méthode itérative, contrairement au modèle cluster-autocohérent décrit dans le paragraphe II.3.2.

Pour déterminer les composantes des tenseurs de localisations  $\mathbf{A}_{ijkl}^I$  ( $I=1, \dots, N$ ,  $N$  étant le nombre d'inclusions contenues dans le VER), nous calculons les tenseurs  $\underline{\Gamma}^{IJ}$  en utilisant les coefficients  $\underline{\mathbf{C}}^M$  de la matrice ; les composantes de  $\underline{\Gamma}^{IJ}$  sont trouvées numériquement dans un repère macroscopique (voir Annexe A). Une fois les composantes des tenseurs de localisations de déformations  $\underline{\mathbf{A}}^I$  ( $I=1, \dots, N$ ) obtenues après résolution du système d'équations (II-39), nous en déduisons, pour une fraction volumique totale  $f$  donnée des inclusions (c'est-à-dire pour des fractions volumiques  $f_k$   $k=1, \dots, N$  de famille d'inclusions  $F_k$ ), le tenseur d'élasticité du matériau composite à partir de la relation (I-15a), qui peut s'écrire :

$$(II-40) \quad \underline{\mathbf{C}}^{\text{eff}} = \underline{\mathbf{C}}^M + \sum_{I=1}^N f_I (\underline{\mathbf{C}}^I - \underline{\mathbf{C}}^M) : \underline{\mathbf{A}}^I$$

### b) Étude de la convergence de la méthode

Dans ce paragraphe nous allons démontrer et vérifier, sur des répartitions simples de sphères, la convergence de la méthode pour une taille croissante du cluster (El Mouden et Molinari, 1995).

Pour une inclusion I et un rayon  $R_c$ , nous considérons une partition de la famille  $F_i$  d'inclusions telle que :

$$(II-41) \quad F_i = C_{Ii} \cup \hat{C}_{Ii} \quad , \quad C_{Ii} \cap \hat{C}_{Ii} = \emptyset$$

où  $C_{Ii}$  a été défini dans le paragraphe (II.3.1.2.1.1.a) comme l'ensemble d'inclusions de la famille  $F_i$  qui ont leur centre dans la sphère  $S(I, R_c)$ . Cette dernière a un rayon  $R_c$  et son centre est confondu avec celui de l'inclusion I.  $\hat{C}_{Ii}$  représente quant à lui l'ensemble des inclusions dont les centres se trouvent à l'extérieur de la sphère  $S(I, R_c)$ .

Pour des grandes valeurs du rayon du cluster  $R_c$ , pour justifier le remplacement du système d'équations (II-31) par (II-32), il faut prouver que le terme de la forme  $\sum_{J \in \hat{C}_{Ii}} \underline{\Gamma}^{IJ} : \delta \underline{C}^i : \underline{\varepsilon}^i$  est négligeable. C'est le cas si on montre que :

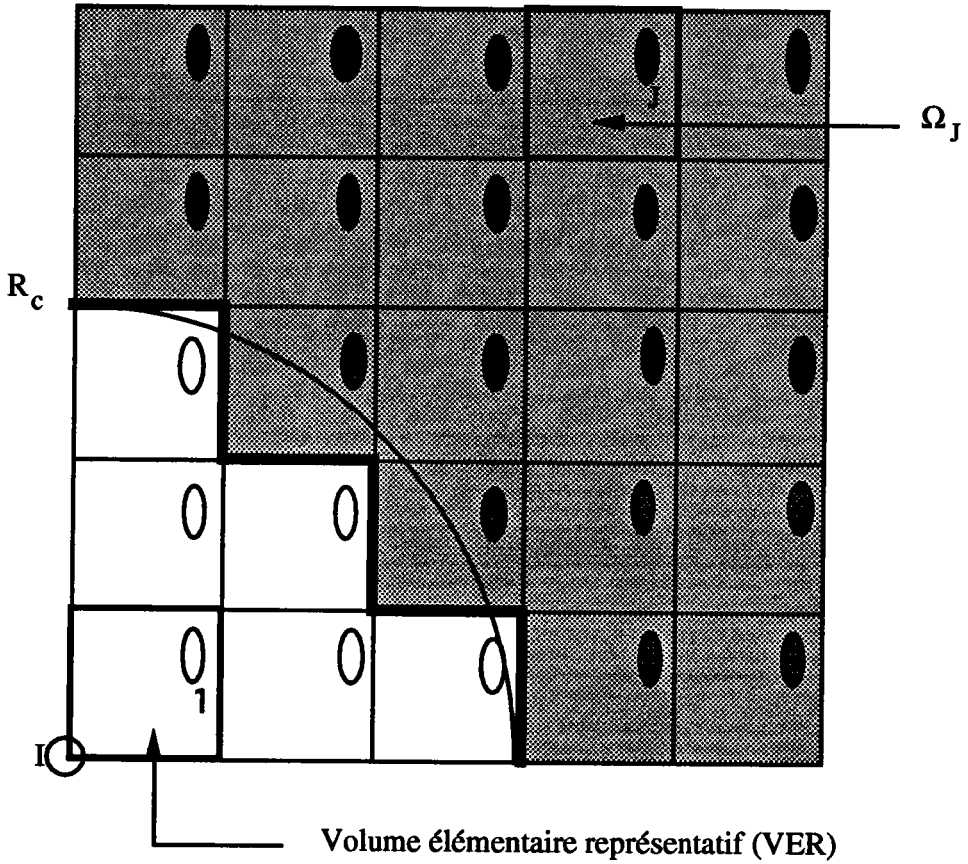
$$(II-42) \quad \lim_{R_c \rightarrow \infty} \sum_{J \in \hat{C}_{Ii}} \underline{\Gamma}^{IJ} = 0$$

Ces résultats deviennent, en tenant compte des propriétés bien connues du tenseur de Green modifié  $\underline{\Gamma}(\underline{x} - \underline{x}')$  :

$$(II-43) \quad \int_{S^c} \underline{\Gamma}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' = 0 \quad (\underline{x} \in S)$$

pour  $\underline{x}$  appartenant à la sphère S (l'intégration est faite sur le complémentaire de la sphère S, définie par :  $S^c = R^3 - S$ ).

Si on démontre la relation (II-42) pour la famille d'inclusions  $F_1$ , cette relation sera vérifiée pour toutes les familles d'inclusions  $F_i$ . On considère alors une inclusion J appartenant à  $\hat{C}_{I1}$ , son centre se trouvant donc à l'extérieur de la sphère  $S(I, R_c)$ . On note par  $\Omega_J$  le cube qui se reproduit par périodicité à partir du VER, dans lequel se trouve l'inclusion J (voir figure II.8).



○  $c_{II}$

●  $\hat{c}_{II}$

$$F1 = c_{II} U \hat{c}_{II}$$

Figure II.8 : Représentation schématique de partition de la famille d'inclusions  $F_1$ .

A partir de (II-30), on a :

$$\Gamma_{mnij}^U = \frac{1}{V_I} \int_I \left( \int_J \Gamma_{mnij}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \right) d\underline{x}$$

Pour des grandes valeurs de  $R_c$ , l'approximation suivante est justifiée :

$$(II-44) \quad \underline{\Gamma}^J \approx \frac{V_J}{V_I} \int \underline{\Gamma}(\underline{x} - \underline{x}_J) d\underline{x} \approx \frac{1}{V_I} \frac{V_J}{\Omega_J} \int \left( \int_{\Omega_J} \underline{\Gamma}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \right) d\underline{x}$$

où  $\underline{x}_J$  est le centre de l'inclusion J.

Puisque  $V_J/\Omega_J$  est égal à la fraction volumique  $f_1$  de la famille d'inclusions  $F_1$ , on peut écrire :

$$(II-45) \quad \sum_{J \in \hat{C}_{11}} \underline{\Gamma}^J = f_1 \frac{1}{V_I} \int \left( \int_{\hat{\Omega}} \underline{\Gamma}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \right) d\underline{x}$$

Quand  $R_c$  est très grand, le volume  $\hat{\Omega} = \sum_{J \in \hat{C}_{11}} \Omega_J$  est confondu avec  $S^c = R^3 - S(I, R_c)$ .

Ainsi, dans la relation (II-45),  $\hat{\Omega}$  peut être remplacé par  $S^c$ , où S est la sphère  $S(I, R_c)$ .

Par conséquent la démonstration de (II-42) résulte de :

$$(II-46) \quad \sum_{J \in \hat{C}_{11}} \underline{\Gamma}^J \approx f_1 \frac{1}{V_I} \int \left( \int_{S^c} \underline{\Gamma}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \right) d\underline{x} = 0$$

qui apparaît comme une conséquence directe de (II-43), puisque  $\underline{x} \in S$ .

Maintenant, nous allons vérifier que la solution approchée converge, quand  $R_c \rightarrow +\infty$ , pour plusieurs distributions d'inclusions sphériques, en étudiant la variation des modules effectifs dans les directions principales de symétrie, en fonction du rayon du cluster  $R_c$ . Lors de notre calcul, nous avons remarqué que la convergence est rapide pour les faibles fractions volumiques des inclusions. On note que pour  $R_c < a$ , le cluster contient une seule inclusion, et que les résultats sont identiques à ceux prédits par la méthode de Mori-Tanaka (la démonstration est donnée dans l'Annexe B), qui donne un comportement isotrope.

Sur la figure II.9, nous étudions la variation du module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) dans une direction principale de symétrie cubique en fonction du rayon du cluster  $R_c$ , pour la fraction volumique  $f=0.5$  de

sphères rigides distribuées sur un réseau cubique simple. On remarque une convergence à partir de  $R_c=2a$ , où  $a$  est la distance entre les centres de deux inclusions voisines. On s'aperçoit aussi que la convergence est rapide pour les faibles fractions volumiques.

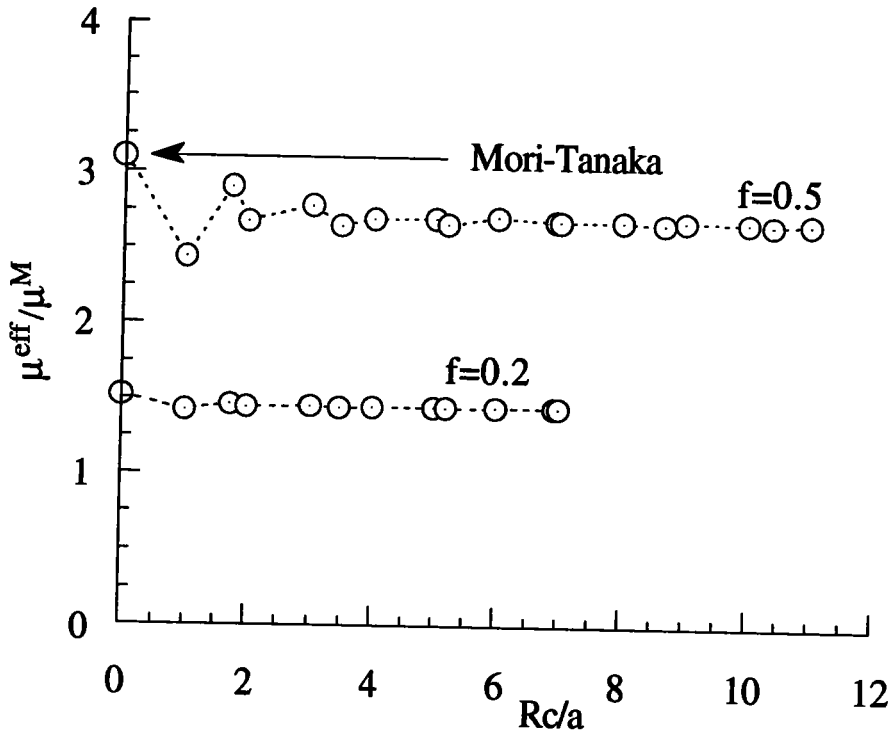


Figure II.9 : Convergence de la méthode du cluster pour des valeurs croissantes du rayon  $R_c$  du cluster. On considère une distribution de sphères rigides sur un réseau cubique simple.

La figure II.10 représente, pour une distribution de vides sphériques sur un réseau cubique centré, la variation du module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) dans une direction principale de symétrie cubique en fonction du rayon du cluster  $R_c$ , pour la fraction volumique  $f=0.60$ . On note bien une convergence à partir de  $R_c=2a$ , où  $a$  est la distance entre les centres de deux inclusions voisines.

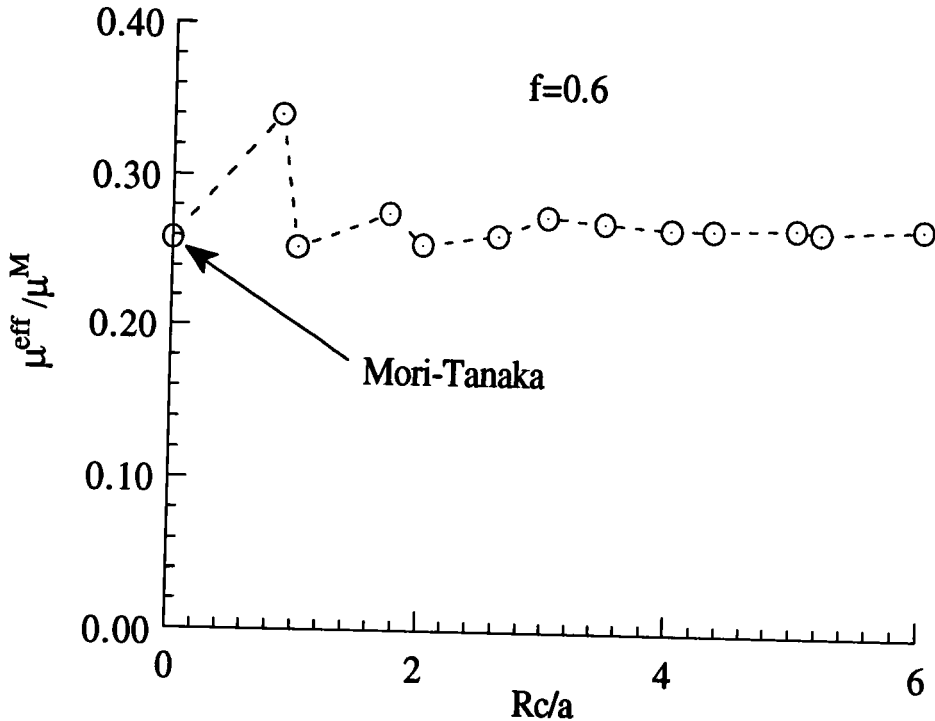


Figure II.10 : Convergence de la méthode du cluster pour des valeurs croissantes du rayon  $R_c$  du cluster. On considère une distribution de vides sphériques sur un réseau cubique centré.

La figure II.11 met en évidence, pour un réseau tétragonal P ( $c=2a=2b$ ), la variation des modules de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) dans les directions principales de symétrie en fonction du rayon du cluster  $R_c$ , pour la fraction volumique  $f=0.25$  de sphères rigides. On s'aperçoit d'une convergence toujours à partir de  $R_c=2a$ , où  $a$  est la distance entre les centres de deux inclusions voisines.



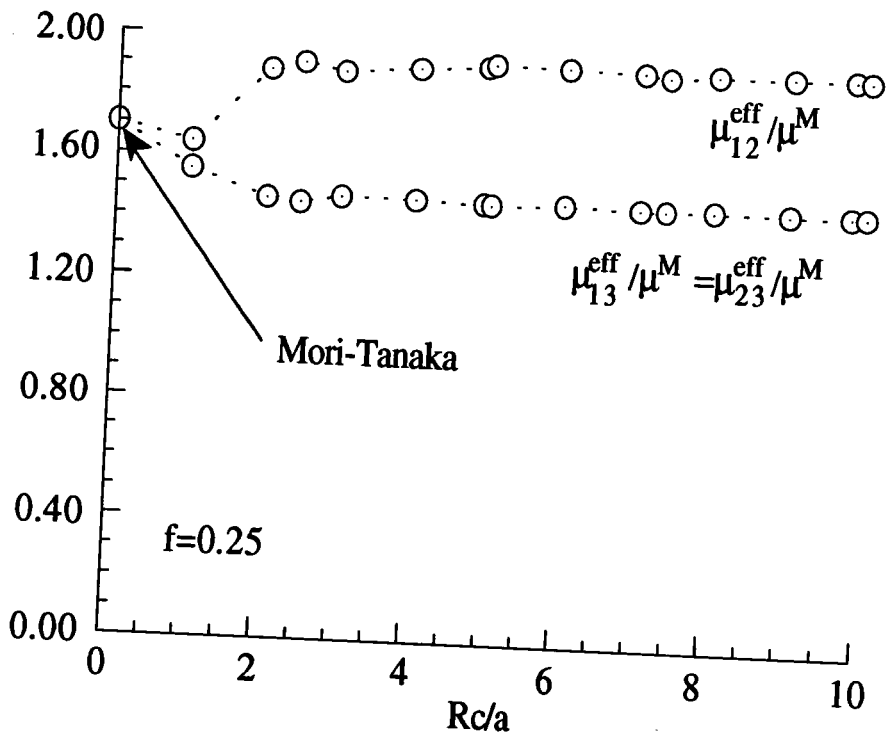


Figure II.11 : Convergence de la méthode du cluster pour des valeurs croissantes du rayon  $R_c$  du cluster. On considère une distribution de sphères rigides sur un réseau tétragonal P ( $c=2a=2b$ ).

La variation du module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) dans une direction principale de symétrie cubique, en fonction du rayon du cluster  $R_c$ , est étudiée sur la figure II.12. Une distribution cubique centrée de 30% de sphères rigides et de 30% de vides sphériques est considérée. On remarque également une convergence à partir de  $R_c=2a$ , où  $a$  est la distance entre les centres de deux inclusions voisines.

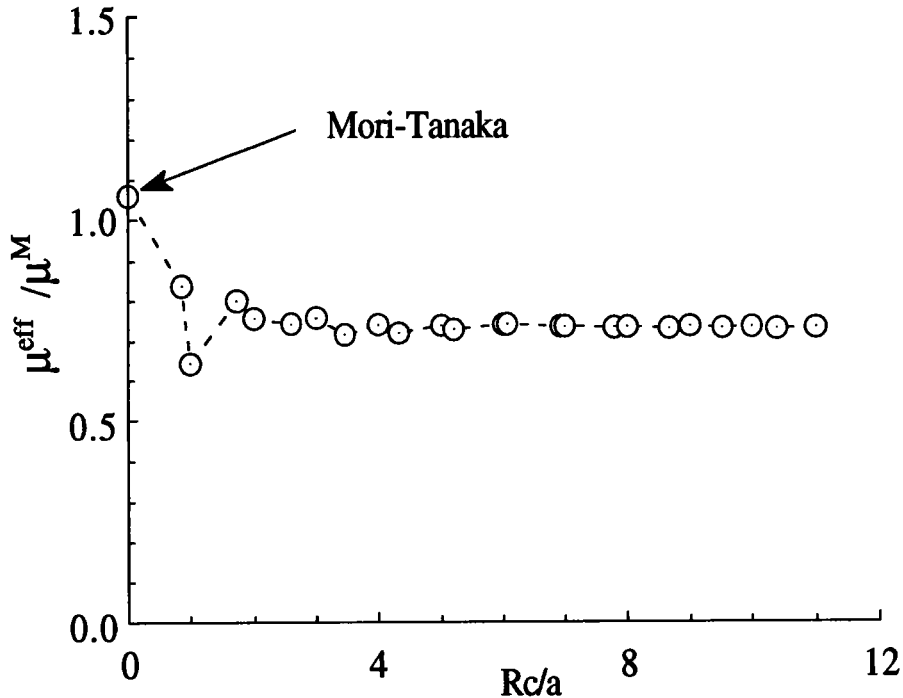


Figure II.12 : Convergence de la méthode du cluster pour des valeurs croissantes du rayon  $R_c$  du cluster. Une distribution cubique centrée de 30% de sphères rigides et de 30% de vides sphériques est considérée.

### c) Quelques cas particuliers

Dans le cas d'une maille élémentaire unique dans laquelle chaque inclusion joue le même rôle (c'est le cas par exemple des réseaux CS, CC, CFC, orthorhombique...), la déformation dans chaque inclusion est identique. Nous avons alors une seule famille d'inclusions  $F_1$  et une seule inconnue  $\underline{\epsilon}^1$ . La figure II.4 montre le cas d'une distribution des inclusions sur un réseau cubique simple. L'équation de localisation (II-37) devient alors :

$$(II-47) \quad \underline{\epsilon}^1 = \underline{E} + \sum_{J \in C_1} \Gamma^{IJ} : \Delta \underline{C}^1 : \underline{\epsilon}^1 + \underline{E}^0 : f_1 \Delta \underline{C}^1 : \underline{\epsilon}^1$$

Dans le cas de deux familles d'inclusions  $F_1$  et  $F_2$  (les inclusions sont différentes soit par leur orientations, et/ou par leurs tailles, et/ou par leurs propriétés mécaniques :  $\underline{C}^1 \neq \underline{C}^2$ ), la figure II.13 (voir aussi les figures II.14 et II.15) montre le cas d'une distribution des inclusions sur un réseau cubique centré. Dans ce cas, il y a deux inconnues  $\underline{\varepsilon}^1$  et  $\underline{\varepsilon}^2$  à déterminer.

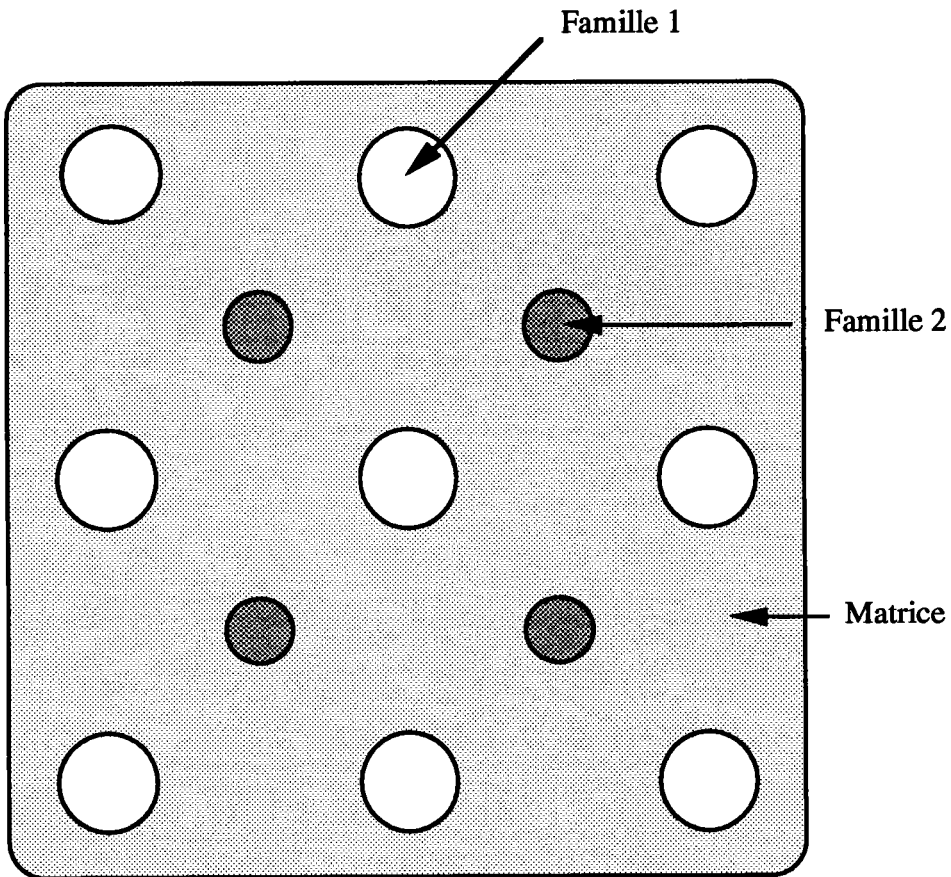


Figure II.13 : Représentation schématique en deux dimension d'une distribution de deux familles d'inclusions  $F_1$  et  $F_2$  sur un réseau cubique centré.

L'équation de localisation (II-37) s'écrit alors :

$$(II-48) \quad \begin{cases} \underline{\varepsilon}^1 = \underline{E} + \sum_{J \in C_{11}} \underline{\Gamma}^{1J} : \underline{\Delta C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + \sum_{J \in C_{12}} \underline{\Gamma}^{1J} : \underline{\Delta C}^2 : \underline{\varepsilon}^2 + \underline{E}^0 : \sum_{K=1}^2 f_K \underline{\Delta C}^K : \underline{\varepsilon}^K \\ \underline{\varepsilon}^2 = \underline{E} + \sum_{J \in C_{21}} \underline{\Gamma}^{2J} : \underline{\Delta C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + \sum_{J \in C_{22}} \underline{\Gamma}^{2J} : \underline{\Delta C}^2 : \underline{\varepsilon}^2 + \underline{E}^0 : \sum_{K=1}^2 f_K \underline{\Delta C}^K : \underline{\varepsilon}^K \end{cases}$$

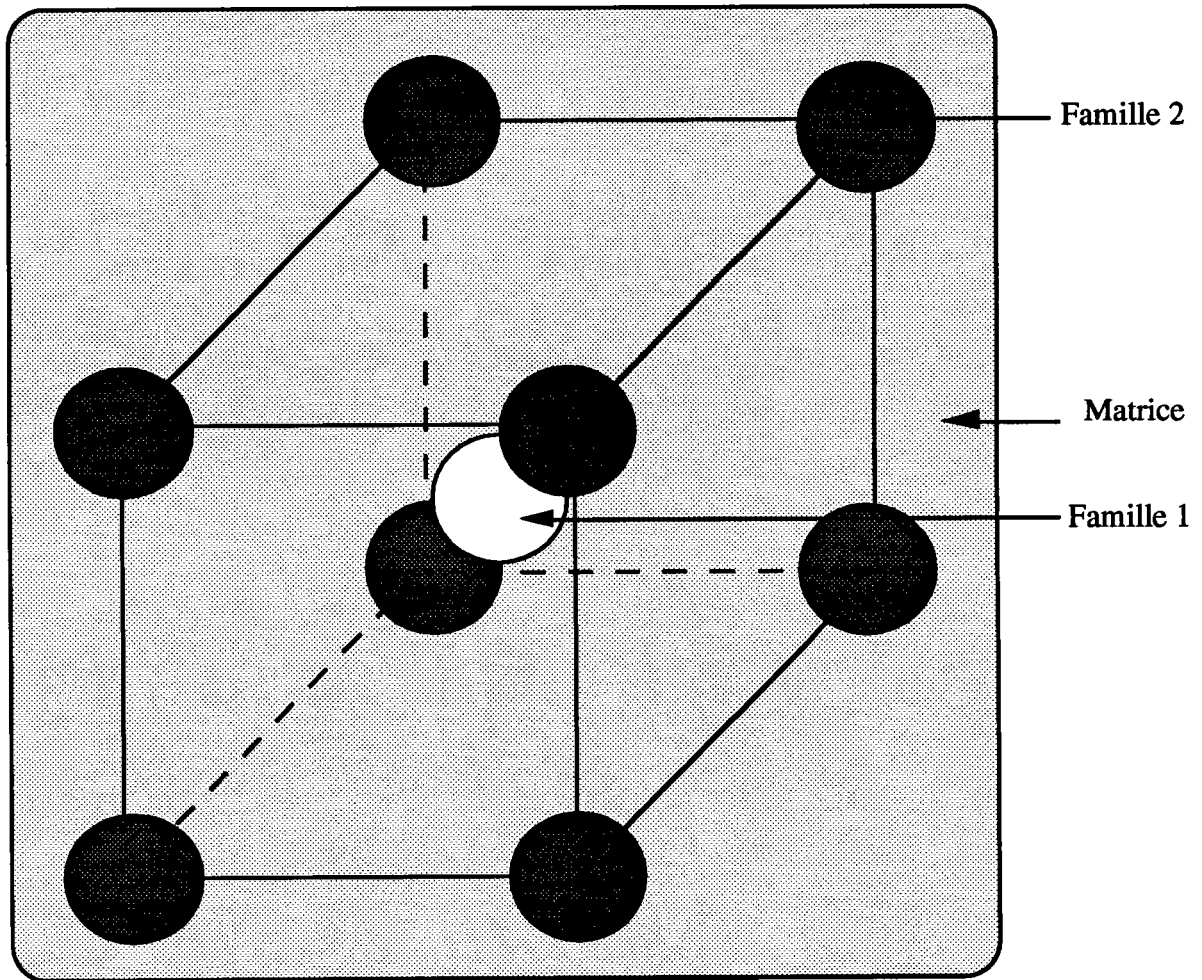


Figure II.14 : Représentation d'une distribution de deux familles d'inclusions  $F_1$  et  $F_2$  sur un réseau cubique centré présenté sur la figure II.17.

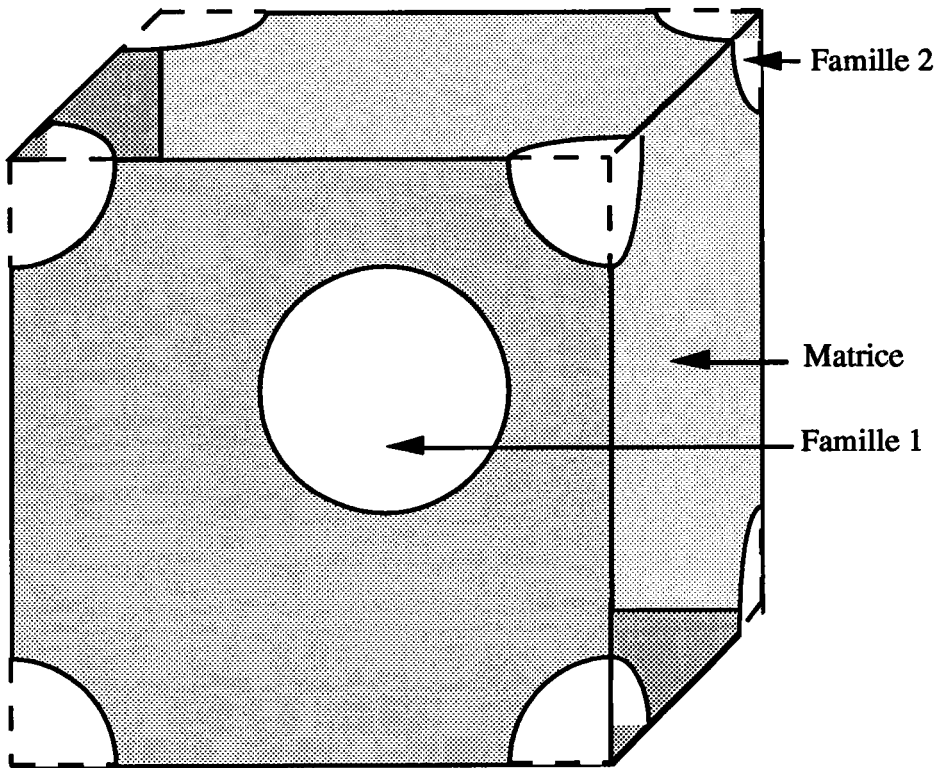


Figure II.15 : Représentation du volume élémentaire représentatif de la distribution des deux familles d'inclusions  $F_1$  et  $F_2$  sur un réseau cubique centré présenté sur les figures II.13 et II.14.

#### d) Schéma de résolution numérique

Nous avons écrit un autre logiciel qui utilise le schéma du cluster pour calculer le tenseur d'élasticité du matériau composite, pour une et deux familles d'inclusions ellipsoïdales réparties sur les réseaux périodiques suivants : cubique simple, cubique centré, cubique à face centré, hexagonal, tétragonal P et I, orthorhombique P, I, C et F.

Nous présentons dans ce paragraphe l'organigramme du programme permettant le calcul des constantes élastiques effectives d'un composite par le schéma du cluster. L'algorithme est présenté sur le schéma II.1. Il convient de calculer pour tous les grains :

- ☞ les tenseurs  $\underline{\Gamma}^I$  (expression II.30) en prenant pour le comportement du milieu de référence le tenseur d'élasticité de la matrice ;
- ☞ la déviation des propriétés  $\Delta \underline{C}^I$  par rapport au milieu de référence en se servant de (II-38) ;
- ☞ les tenseurs de localisations  $\underline{A}^I$ , en résolvant le système d'équations (II-39) ;
- ☞ les propriétés élastiques  $\underline{C}^{\text{eff}}$  à partir de (II-40).

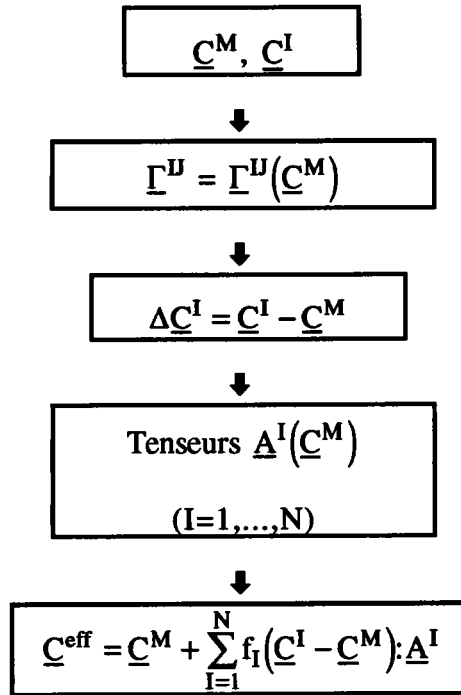


Schéma II.1 : Algorithme de la méthode du cluster

### II.3.1.2.1.2) Cas des milieux aléatoires

La méthode du cluster peut s'appliquer aussi aux milieux inclusionnaires aléatoires. En substituant les relations (II-34) et (II-35) dans la relation (II-29), on obtient:

$$(II-49) \quad \underline{\underline{\epsilon}}^I = \underline{\underline{E}} + \sum_{J=1}^{+\infty} \underline{\underline{\Gamma}}^{IJ} : \Delta \underline{\underline{C}}^J : \underline{\underline{\epsilon}}^J + \underline{\underline{E}}^o : \sum_{K=1}^{+\infty} f_K \Delta \underline{\underline{C}}^K : \underline{\underline{\epsilon}}^K$$

pour  $I=1, \dots, +\infty$ .

Les relations (II-49) constituent un système linéaire d'équations avec un nombre infini d'inconnues  $\underline{\underline{\epsilon}}^J$ . On obtient une solution approchée de la manière suivante : On considère un volume  $V$  du milieu infini ( $V$  doit être suffisamment grand pour représenter le milieu inclusionnaire infini), et à chaque inclusion  $I$  du volume  $V$ , on associe une sphère  $S(I, R_c)$  de rayon  $R_c$  et de centre confondu avec celui de l'inclusion  $I$  (voir figure

II.16). On note par  $C_I$ , le cluster des inclusions qui ont leur centre dans  $S(I, R_c)$ . On réduit la sommation dans (II-49) à une sommation finie qui prend seulement en compte les inclusions ayant leur centre dans le cluster  $C_{I_j}$ . (voir II.3.1.2.1.1.). L'équation (II-49) devient :

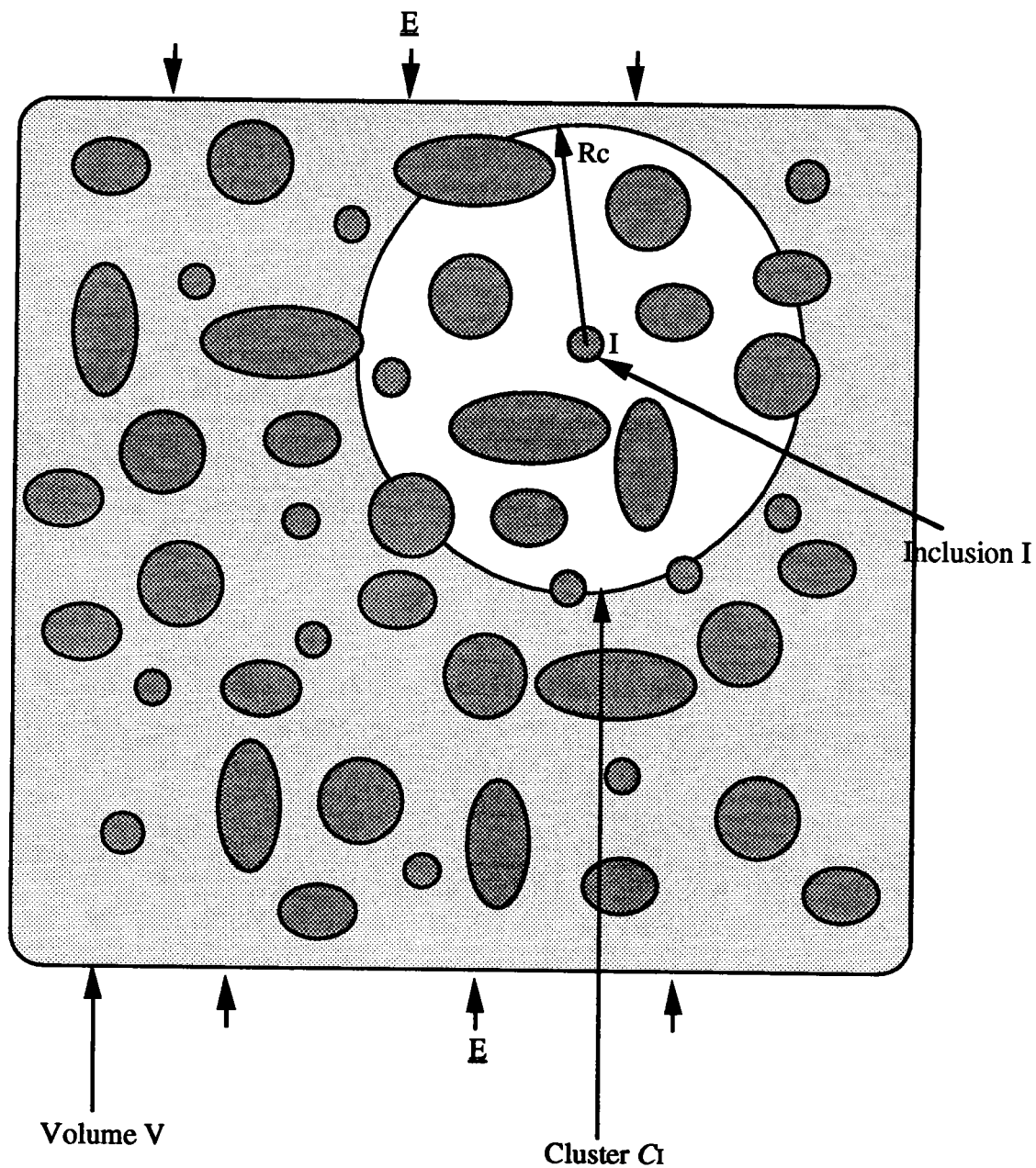


Figure II.16 : Représentation schématique d'un milieu inclusionnaire non périodique, et du cluster de rayon  $R_c$ .



$$(II-50) \quad \underline{\varepsilon}^I = \underline{E} + \sum_{J \in C_{II}} \underline{\Gamma}^J : \underline{\Delta C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + \dots + \sum_{J \in C_{IN}} \underline{\Gamma}^J : \underline{\Delta C}^N : \underline{\varepsilon}^N + \underline{E}^0 : \sum_{K=1}^N f_K \underline{\Delta C}^K : \underline{\varepsilon}^K$$

pour  $I=1, \dots, N$ ,  $N$  étant le nombre d'inclusions contenues dans le volume  $V$ .

Dans le même ordre d'idées que les deux méthodes que nous venons de développer, nous avons combiné la méthode du cluster avec celle de Mori-Tanaka, et nous avons appelé cette nouvelle méthode : cluster-Mori-Tanaka.

### II.3.1.2.2) Méthode du cluster-Mori-Tanaka

Comme la méthode du cluster, celle-ci s'applique aussi aux cas d'inclusions ellipsoïdales distribuées d'une façon périodique ou non périodique dans une matrice élastique homogène infinie. Mais elle est plus adaptée aux milieux inclusionnaires où les inclusions sont réparties par paquets dans la matrice homogène élastique infinie (voir figure II.19), ce type de matériaux qu'on l'appellera matériaux clusters isolés (le bambou par exemple a ce type de structure). Les paquets doivent être suffisamment éloignés les uns des autres pour pouvoir négliger les interactions entre inclusions se trouvant dans des paquets différentes.

Nous avons vu au premier chapitre que la méthode de Mori-Tanaka permet de mieux prendre en compte la déformation moyenne réelle de la matrice, mais elle néglige les effets des interactions entre inclusions, et par conséquent, ne tient pas compte de la répartition spatiale des inclusions dans la matrice. Dans ce paragraphe, nous proposons une combinaison de la méthode du cluster avec la méthode de Mori-Tanaka, cette nouvelle méthode permettant de considérer les interactions entre inclusions. Au lieu de partir des interactions entre une inclusion unique et la matrice, on reprend la méthodologie du cluster en définissant un volume élémentaire représentatif (VER), contenant  $N$  inclusions et reproduit par périodicité dans la matrice infinie. Cet ensemble d'inclusions est alors représentatif à la fois de l'anisotropie morphologique des inclusions et de leur

répartition spatiale. Elle consiste à prendre comme milieu de référence la matrice homogène de tenseur d'élasticité  $\underline{C}^M$  ( $\underline{C}^0 = \underline{C}^M$ ).

### II.3.1.2.2.1) Cas des milieux périodiques

#### a) Présentation de la méthode

On considère toujours le même composite constitué par une matrice homogène de constantes élastiques  $\underline{C}^M$ , dans laquelle sont noyées une infinité d'inclusions élastiques de formes ellipsoïdales de constantes élastiques  $\underline{C}^I$  ( $I=1, \dots, +\infty$ ) selon une distribution arbitraire, et on le soumet à une déformation macroscopique  $\underline{E}$ . Du fait de la présence de nombreuses inclusions, la déformation moyenne dans la matrice peut se décomposer en la déformation  $\underline{E}$  et en un terme de perturbation :

$$(I-51) \quad \underline{\epsilon}^M = \underline{E} + \tilde{\underline{\epsilon}}^M$$

$\tilde{\underline{\epsilon}}^M$  étant la moyenne dans la matrice des perturbations dues à toutes les inclusions, et  $\underline{\epsilon}^M$  la moyenne des déformations dans la matrice. On s'intéresse maintenant à une inclusion  $I$  particulière. Dans cette inclusion, la déformation moyenne  $\underline{\epsilon}^I$  peut s'écrire sous la forme :

$$(I-52) \quad \underline{\epsilon}^I = \underline{E} + \tilde{\underline{\epsilon}}^M + \tilde{\underline{\epsilon}}^I = \underline{\epsilon}^M + \tilde{\underline{\epsilon}}^I$$

où  $\tilde{\underline{\epsilon}}^I$  est un terme de fluctuation par rapport à  $\underline{\epsilon}^M$ .

On obtient une solution approchée de l'équation (II-31) de la manière suivante : à chaque inclusion  $I$ , on associe un cube  $C(I)$  de centre confondu avec celui de l'inclusion  $I$  (voir figure II.17 dans le cas du réseau cubique simple). On note par  $C(I)$ , ou plus brièvement par  $C_I$ , l'ensemble des inclusions qui ont leur centre dans  $C(I)$ . On réduit la sommation dans (II-31) à une sommation finie qui prend seulement en compte les inclusions ayant leur centre dans le cluster  $C_I$ .

Dans la méthode du cluster-Mori-Tanaka, on considère que la déformation de chaque inclusion dans le matériau hétérogène est égale à celle qui s'y produirait si le

cluster cubique était seul, entouré de matrice, avec pour déformation imposée à l'infini la valeur  $\underline{\varepsilon}^M$ .

Si on définit par  $C_{Ij}$  l'intersection du cluster  $C_I$  avec la famille d'inclusions  $F_j$ , l'équation (II-31) devient alors :

$$(II-53) \quad \underline{\varepsilon}^I = \underline{\varepsilon}^M + \sum_{J \in C_{I1}} \underline{\Gamma}^{IJ} : \underline{\Delta C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + \dots + \sum_{J \in C_{IN}} \underline{\Gamma}^{IJ} : \underline{\Delta C}^N : \underline{\varepsilon}^N$$

La relation (I-10a) nous permet d'écrire :

$$(II-54) \quad \underline{E} = \left( 1 - \sum_{K=1}^N f_K \right) \underline{\varepsilon}^M + \sum_{K=1}^N f_K \underline{\varepsilon}^K$$

En remplaçant  $\underline{\varepsilon}^M$  dans (II-51), on obtient :

$$(II-55) \quad \underline{\varepsilon}^I = \frac{1}{\left( 1 - \sum_{K=1}^N f_K \right)} \left( \underline{E} - \sum_{K=1}^N f_K \underline{\varepsilon}^K \right) + \sum_{J \in C_{I1}} \underline{\Gamma}^{IJ} : \underline{\Delta C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + \dots + \sum_{J \in C_{IN}} \underline{\Gamma}^{IJ} : \underline{\Delta C}^N : \underline{\varepsilon}^N$$

qui peut également s'exprimer de la manière suivante :

$$(II-56) \quad \underline{\varepsilon}^I = \frac{1}{f_M} \underline{E} + \left[ \left( \sum_{J \in C_{I1}} \underline{\Gamma}^{IJ} \right) : \underline{\Delta C}^1 - \frac{f_1}{f_M} \underline{I} \right] : \underline{\varepsilon}^1 + \dots + \left[ \left( \sum_{J \in C_{IN}} \underline{\Gamma}^{IJ} \right) : \underline{\Delta C}^N - \frac{f_N}{f_M} \underline{I} \right] : \underline{\varepsilon}^N$$

où  $f_M = 1 - \sum_{K=1}^N f_K$ , est la fraction volumique de la matrice.

En substituant la relation (I-14a) dans (II-56), on aboutit à un système linéaire d'équations en tenseurs de localisations de déformations  $\underline{A}^K$  ( $K=, \dots, N$ ) :

$$(II-57) \quad \underline{A}^I = \frac{1}{f_M} \underline{I} + \left[ \left( \sum_{J \in C_{I1}} \underline{\Gamma}^{IJ} \right) : \underline{\Delta C}^1 - \frac{f_1}{f_M} \underline{I} \right] : \underline{A}^1 + \dots + \left[ \left( \sum_{J \in C_{IN}} \underline{\Gamma}^{IJ} \right) : \underline{\Delta C}^N - \frac{f_N}{f_M} \underline{I} \right] : \underline{A}^N$$

où  $\underline{I}$  est le tenseur unité symétrique d'ordre 4 défini dans (I-17).

Une fois les composantes des tenseurs de localisations de déformations  $\Delta^I$  ( $I=1,\dots,N$ ) calculées en résolvant le système d'équations (II-56), nous en déduisons le tenseur d'élasticité du matériau composite à partir de la relation (II-40).

On remarque ici (comme dans le cas du schéma du cluster, et de Mori-Tanaka) que la relation donnant  $\underline{C}^{\text{eff}}$  est parfaitement explicite et ne nécessite donc aucun traitement numérique particulier. Cependant, elle peut présenter le risque de mener à un tenseur d'élasticité non symétrique (comme la méthode de Mori-Tanaka) dans le cas où il y a au moins deux phases inclusionnaires du fait de la non symétrie du tenseur de localisation (hormis dans le cas des sphères), ce point sera vérifié dans les travaux qui vont suivre.

Nous allons vérifier la convergence de cette méthode quand la taille du cluster augmente. Des comparaisons avec la méthode du cluster et les autres méthodes du chapitre I seront faites dans le prochain chapitre.

#### **b) Vérification de la convergence de la méthode**

Maintenant, nous allons donc vérifier que la solution approchée converge quand la taille du cluster cubique augmente, pour plusieurs distributions d'inclusions sphériques. Pour ce faire, nous étudions la variation des modules effectifs dans les directions principales de symétrie, en fonction de la taille du cluster (nombre de grains contenus dans le cluster). Lors de notre calcul, nous avons remarqué que la convergence est rapide pour de faibles fractions volumiques des inclusions. On note qu'à l'ordre 0, le cluster contient une seule inclusion, et que l'on retrouve alors la méthode de Mori-Tanaka qui donne un comportement isotrope.

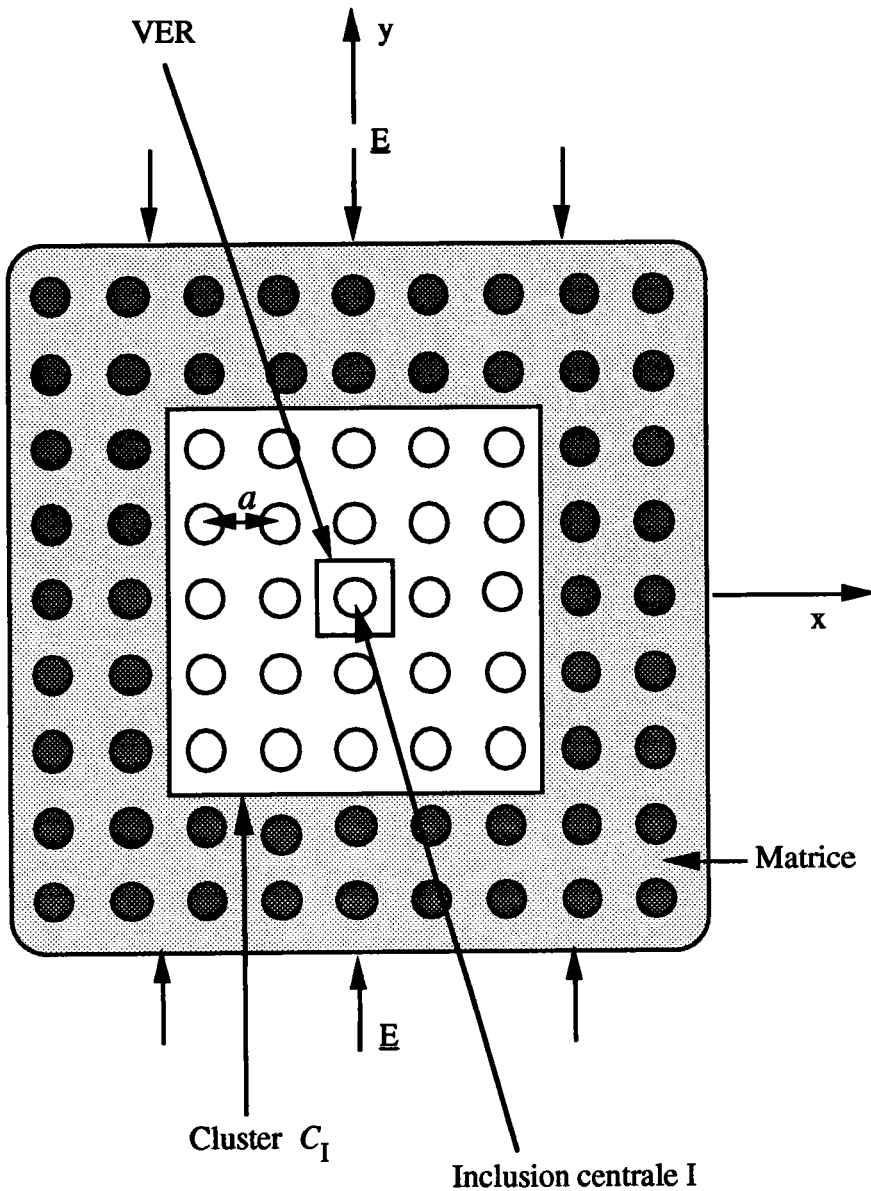


Figure II.17 : Représentation schématique du cluster cubique, dans le cas de une distribution de sphères sur un réseau cubique simple. Le petit cube au centre de la figure est le volume élémentaire représentatif (VER).

La figure II.18 représente, pour une distribution cubique centrée de vides sphériques, la variation des modules de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) dans une direction principale de symétrie cubique en fonction

du nombre de couches prises en compte dans le cluster cubique (la 1<sup>ère</sup> couche contient 9 grains, la 2<sup>ème</sup> en contient 35, et la 3<sup>ème</sup> en contient 91 ...), pour la fraction volumique  $f=0.60$ . On note bien une convergence à partir de la deuxième couche.

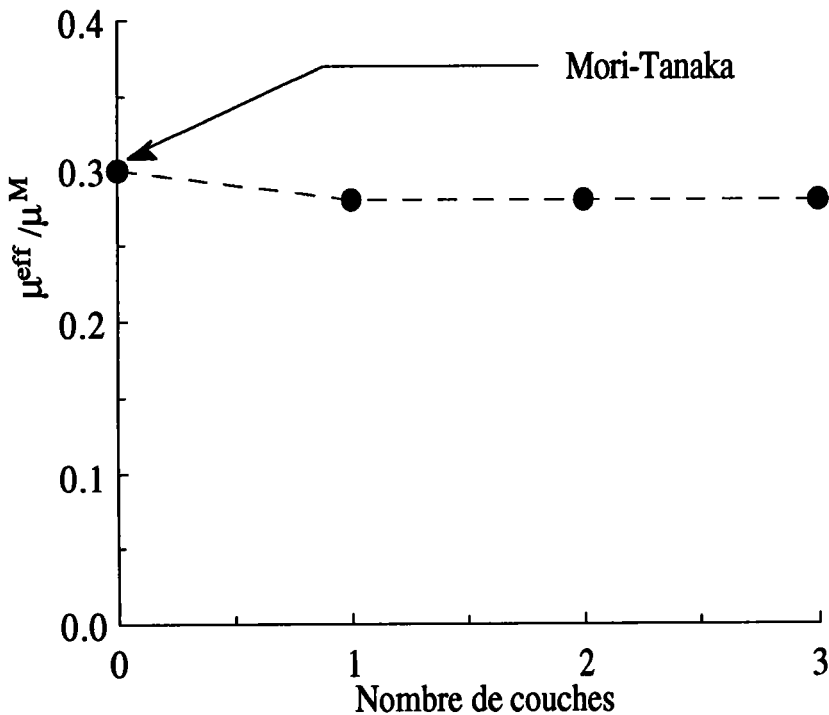


Figure II.18 : Convergence de la méthode du cluster-Mori-Tanaka pour des tailles croissantes du cluster cubique. On considère une distribution de vides sphériques sur un réseau cubique centré.

### II.3.1.2.2.1) Cas des milieux à clusters isolés

On considère un matériau composite élastique constitué par une infinité de paquets (ou de clusters) isolés d'inclusions ellipsoïdales élastiques de tenseurs d'élasticité  $\underline{C}^I$ ,

plongées dans une matrice élastique homogène infinie de tenseur d'élasticités  $\underline{C}^M$  (voir figure II.19). On suppose que chaque paquet d'inclusions contient N inclusions. La relation (II-29) s'écrit :

$$(II-58) \quad \underline{\varepsilon}^I = \underline{\varepsilon}^M + \sum_{J=1}^N \underline{\Gamma}^J : \Delta \underline{C}^J : \underline{\varepsilon}^J$$

pour  $I=1, \dots, N$ .

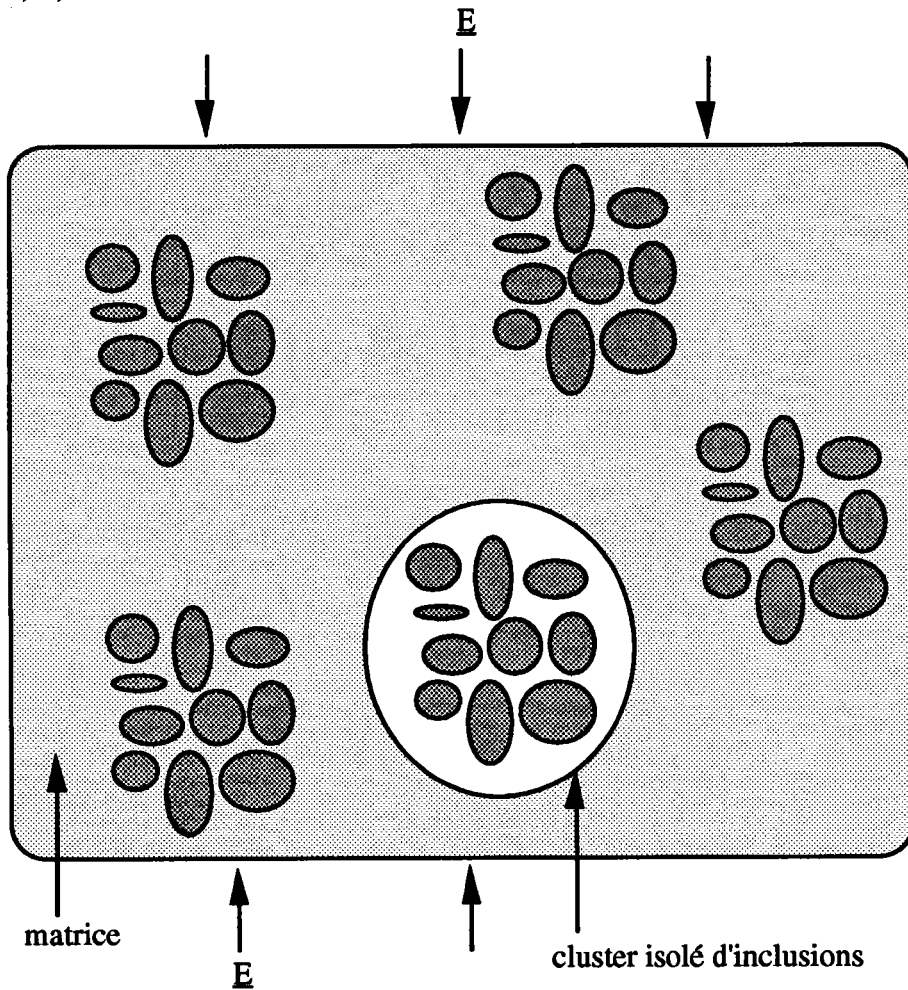


Figure II.19 : Représentation schématique d'un matériau inclusionnaire constitué par des inclusions réparties suivant des clusters isolés.

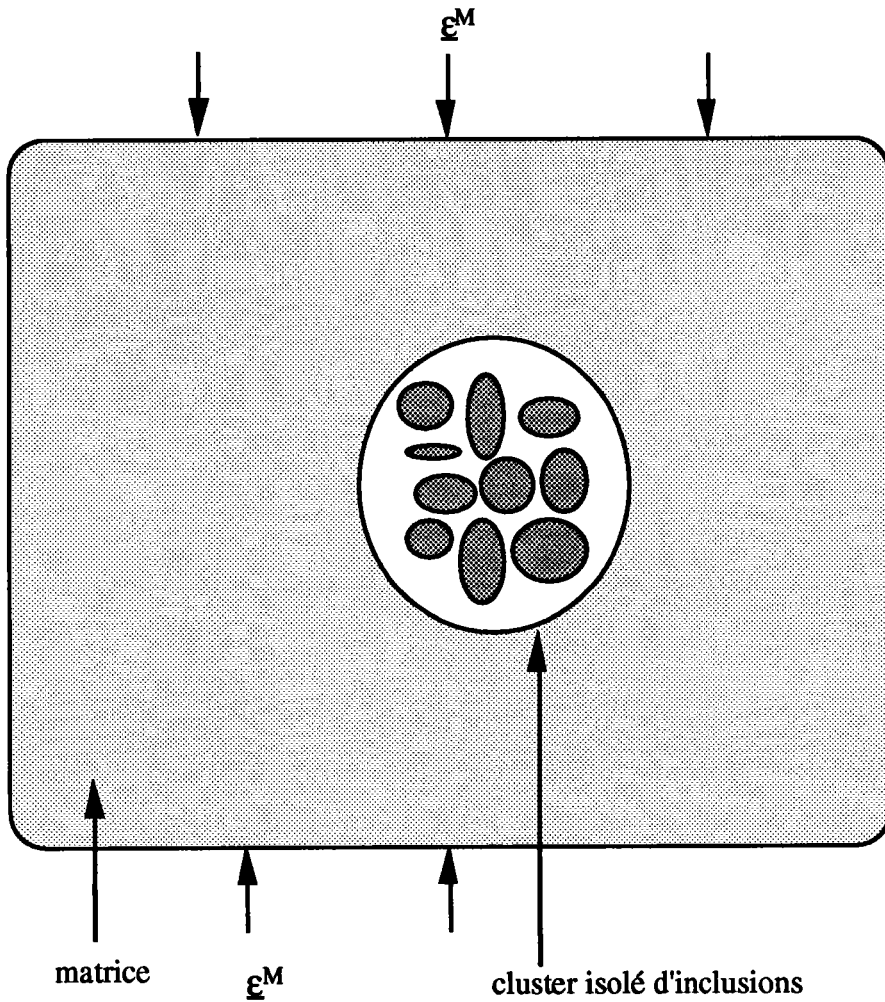


Figure II.20 : Représentation schématique du cluster équivalent correspondant au milieu inclusionnaire constitué par des inclusions réparties suivant des clusters isolés.

Les relations (II-58) constituent un système linéaire d'équations avec un nombre fini d'inconnues  $\underline{\varepsilon}^I$  ( $I=1,N$ ). En remplaçant  $\underline{\varepsilon}^M$  donnée par la relation (II-54) dans les relations (II-58), on obtient :

$$(II-59) \quad \underline{\varepsilon}^I = \frac{1}{\left(1 - \sum_{K=1}^N f_K\right)} \left( \underline{E} - \sum_{K=1}^N f_K \underline{\varepsilon}^K \right) + \sum_{J=1}^N \underline{\Gamma}^J : \Delta \underline{C}^J : \underline{\varepsilon}^J$$



qui peut également s'exprimer de la manière suivante :

$$(II-60) \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^I = \frac{1}{f_M} \underline{\underline{E}} + \sum_{J=1}^N \left( \underline{\underline{\Gamma}}^J : \underline{\underline{\Delta C}}^J - \frac{f_J}{f_M} \underline{\underline{I}} \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}^J$$

En substituant la relation (I-14a) dans (II-60), on aboutit à un système linéaire d'équations en tenseurs de localisations de déformations  $\underline{\underline{\Delta}}^K$  ( $K=, \dots, N$ ) :

$$(II-61) \quad \underline{\underline{\Delta}}^I = \frac{1}{f_M} \underline{\underline{I}} + \sum_{J=1}^N \left( \underline{\underline{\Gamma}}^J : \underline{\underline{\Delta C}}^J - \frac{f_J}{f_M} \underline{\underline{I}} \right) : \underline{\underline{\Delta}}^J$$

où  $\underline{\underline{I}}$  est le tenseur unité symétrique d'ordre 4 défini dans (I-17).

Signalons que l'organigramme de cette méthode est semblable de celui de la méthode du cluster, et que le logiciel utilisant cette méthode est bâti sur la même architecture que celle du cluster, et en utilise beaucoup de modules (voir schéma II.1).

### II.3.2. Matériaux polycristallins : Méthode du cluster-autocohérent

Dans le cas des matériaux polycristallins et des matériaux composites à fibres longues et de sections rectangulaires, réparties suivant une structure périodique. Les tissages volumiques multidirectionnels sont caractérisés par le nombre de directions de tissage : 2D, 3D, 4D, etc. On présente sur la figure II.21 la structure du tissage 3D, où les fils sont disposés suivant trois directions orthogonales. Le vide restant entre les fibres est rempli de matrice. la figure II.22 représente la cellule de base correspondant à cette structure. Signalons que dans ce type de matériaux les fibres ne sont pas complètement entourées de matrice. Nous proposons dans ce paragraphe une méthode autocohérente pour homogénéiser ce type de matériaux composites et les matériaux polycristallins.

### a) Présentation de la méthode

On considère un matériau composite élastique constitué par plusieurs phases de fibres longues de sections rectangulaires. Les constantes élastiques des phases sont notées  $\underline{C}^{PI}$ . Ces différentes phases sont réparties suivant une structure périodique. Associons à chaque point  $\underline{x}$  du matériau hétérogène un volume représentatif de la répartition spatiale des différentes phases constituant le matériau. La figure obtenue à partir d'une période quelconque du matériau est la cellule de base. Le problème à résoudre est donc le suivant : on suppose que la cellule de base, représentant le milieu périodique, est soumise à un chargement qui induit des déformations et des contraintes macroscopiques  $\underline{E}$  et  $\underline{\Sigma}$ . Dans la méthode présentée ci-après, on impose la valeur  $\underline{E}$ . On recherche alors  $\underline{\varepsilon}(\underline{u})$  et  $\underline{\sigma}$ , champs de déformations et de contraintes microscopiques qui en résultent.

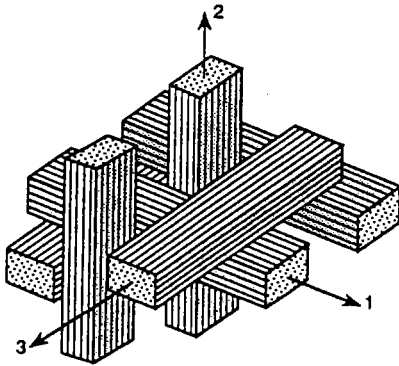
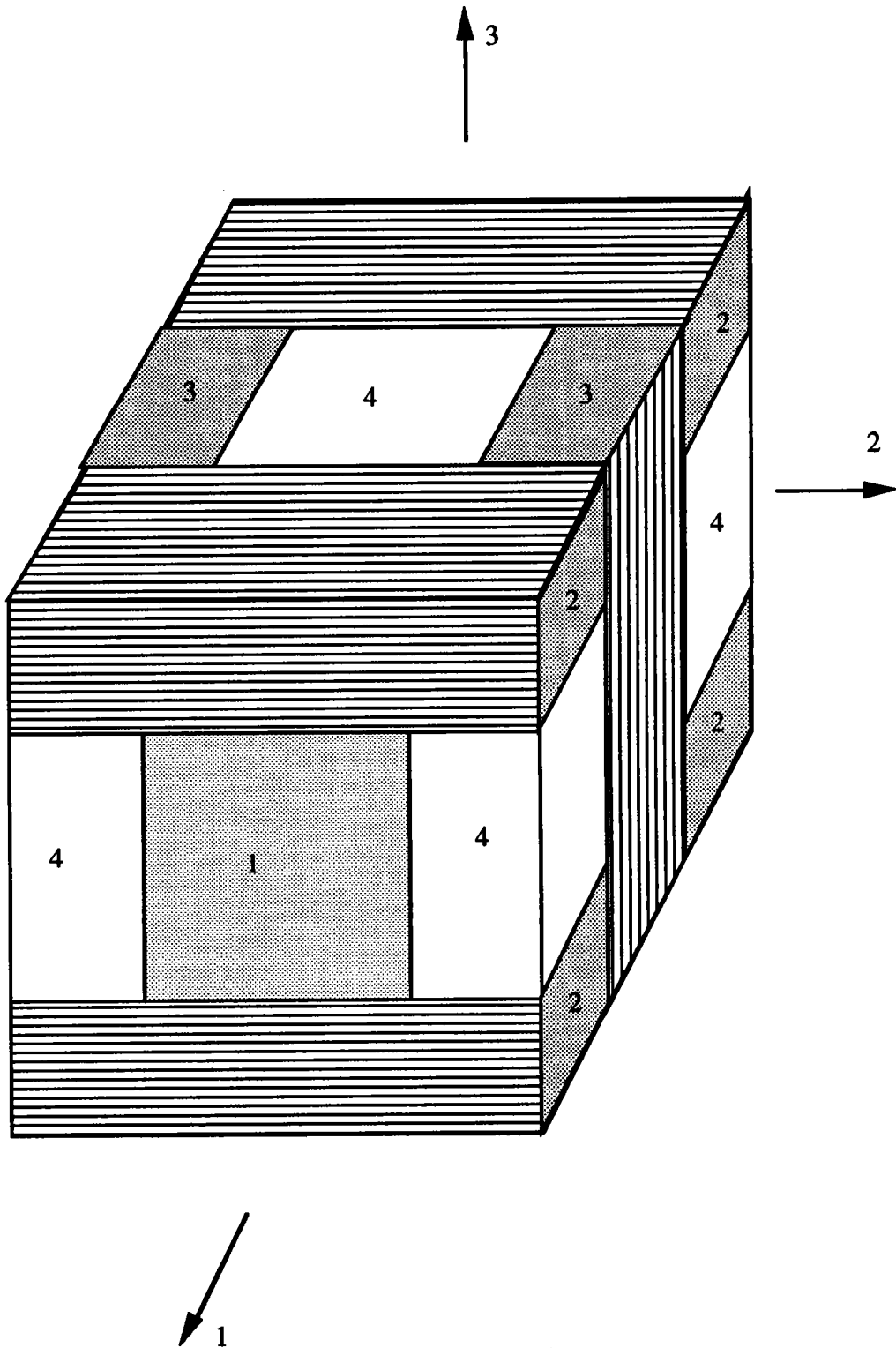


Figure II.21 : Structure d'un composite 3D.



- 1 : Baguettes dans la direction 1
- 2 : Baguettes dans la direction 2
- 3 : Baguettes dans la direction 3
- 4 : Matrice remplissant les vides entre les baguettes

Figure II.22 : Cellule de base correspondant à la structure 3D.

Comme dans l'homogénéisation asymptotique des milieux périodiques, lorsque la cellule de base présente des symétries matérielles, on peut ne prendre en considération qu'une partie de cette dernière. Le domaine d'étude est réduit, et on peut alors effectuer le calcul plus rapidement, ou bien avec un temps de calcul et une taille de problème équivalent, utilisé un maillage plus raffiné.

On réalise un maillage dans les trois directions orthogonales de la cellule, on affectera ensuite, pour chaque élément les propriétés mécaniques des fibres ou de matrice suivant la position de l'élément considéré dans la cellule, celle-ci contient donc NE éléments. Les constantes élastiques des éléments sont notées  $\underline{C}^I$ . Dans la cellule de base et avec les notations ci-dessus, la relation (II-9) donnant  $\delta\underline{C}(\underline{x})$  devient :

$$(II-62) \quad \delta\underline{C}(\underline{x}) = \sum_{I=1}^{NE} (\underline{C}^I - \underline{C}^o) \theta^I(\underline{x}) = \sum_{I=1}^{NE} \Delta\underline{C}^I \theta^I(\underline{x})$$

où la fonction  $\theta^I(\underline{x})$ , donnée par la relation (I-29), est la fonction indicatrice de l'élément I de fraction volumique  $f_I$ , et NE est le nombre d'éléments dans la cellule de base.

En substituant la relation (II-62) dans l'équation intégrale (II-16), on obtient :

$$(II-63) \quad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \varepsilon_{ij}^o + \sum_{J=1}^{+\infty} \int_{R^3} \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') \Delta C_{klmn}^J \theta^J(\underline{x}') \varepsilon_{mn}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

Dans la sommation de cette équation, les éléments J se trouvant à l'extérieure de la cellule de base son déduit par périodicité à partir des éléments de la cellule.

En tenant compte des propriétés de la fonction  $\theta^J(\underline{x})$ , qui s'annule en dehors des  $V_J$ , l'intégrale sur  $R^3$  peut être réduite à une sommation sur des intégrales sur les volumes  $V_J$ . L'équation (II-63) s'écrit alors :

$$(II-64) \quad \varepsilon_{ij}(\underline{x}) = \varepsilon_{ij}^o + \sum_{J=1}^{+\infty} \int_{V_J} \Gamma_{ijkl}(\underline{x} - \underline{x}') \Delta C_{klmn}^J \varepsilon_{mn}(\underline{x}') d\underline{x}'$$

Les déformations et les contraintes dans les éléments I (I=1, ...,NE) n'ont aucune raison d'être uniformes dans les volumes  $V_I$ . Chiu (1977) a démontré que les déformation et les contraintes ne sont pas uniformes dans une inclusion parallélépipédique rectangle noyée dans un milieu homogène infini. Ici réside la difficulté majeure du problème. Une approximation plus simple, consiste à remplacer, dans les volumes  $V_J$  de l'équation (II-64) (dont la solution exacte est très complexe et difficile à déduire en générale),  $\underline{\varepsilon}(\underline{x}')$  par les valeurs moyennes de  $\underline{\varepsilon}(\underline{x})$  sur ces volumes, définie par :

$$(II-65) \quad \underline{\varepsilon}^J = \frac{1}{V_J} \int_{V_J} \underline{\varepsilon}(\underline{x}) d\underline{x}$$

Puisque nous sommes très intéressés par l'évaluation des contraintes et déformations moyennes dans les différentes phases, nous utiliserons donc cette hypothèse, qui sera testée en comparant les résultats de notre modèle à différents résultats analytiques ou numériques. On note par  $\underline{\varepsilon}^I$  (respectivement  $\underline{\sigma}^I$ ) la déformation (respectivement la contrainte) dans l'élément I. Le domaine occupé par cet élément sera noté I et son volume  $V_I$ .

Considérons la relation (II-62). Il s'en suit immédiatement que :

$$(II-66) \quad \delta C_{ijkl}(\underline{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{x} \notin \text{élément I} \\ \Delta C_{ijkl}^I = C_{ijkl}^I - C_{ijkl}^o & \text{si } \underline{x} \in \text{élément I} \end{cases}$$

Suite à l'hypothèse de l'uniformité de la déformation dans les éléments, l'équation intégrale (II-64) devient :

$$(II-67) \quad \varepsilon_{mn}(\underline{x}) = \varepsilon_{mn}^0 + \sum_{J=1}^{\infty} \left( \int_{V_J} \Gamma_{mnij}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' \right) \Delta C_{ijkl}^J \varepsilon_{kl}^J$$

où la sommation porte sur l'ensemble des éléments se trouvant dans le milieu infini. En examinant (II-67), on remarque que l'uniformité de la déformation n'est pas réalisée dans les éléments, même si l'on considère un élément parallélépipédique rectangle isolé. En faisant la moyenne de la déformation dans l'élément I définie par la relation (II-67), on obtient alors :

$$(II-68) \quad \epsilon_{mn}^I = \epsilon_{mn}^o + \sum_{J=1}^{\infty} \Gamma_{mnij}^{IJ} \Delta C_{ijkl}^J \epsilon_{kl}^J$$

avec :

$$(II-69) \quad \Gamma_{mnij}^{IJ} = \frac{1}{V_I} \iint_{IJ} \Gamma_{mnij}(\underline{x} - \underline{x}') d\underline{x}' d\underline{x}$$

Notons que les interactions de l'élément I avec les autres éléments sont tenues en compte dans les tenseurs d'ordre 4  $\Gamma^{IJ}$  ( $I \neq J$ ). Ces tenseurs d'interactions peuvent être calculés quand les trois dimensions et la position des éléments sont connues. Nous signalons que les termes  $\Gamma^{II}$  sont en général prépondérants par rapport aux termes  $\Gamma^{IJ}$  ( $I \neq J$ ). L'évaluation des termes  $\Gamma^{IJ}$  est donnée dans l'Annexe A.

Les relations (II-68) constituent un système d'équations linéaire de NE équations à NE inconnues (la sommation dans l'équation introduit une série infinie d'éléments) en considérant un ensemble d'éléments (NE éléments), constituant la cellule de base. La cellule de base, contenant donc NE éléments et reproduit par périodicité, permet ainsi de remplir tout l'espace. On associe à chaque élément  $K=1, \dots, NE$  dans la cellule, la famille (notée  $F_K$ ) d'éléments obtenue par périodicité. Cette famille est aussi notée par  $K$ . La fraction volumique de l'élément  $K$  dans la cellule est notée par  $f_K$  et est égale à la fraction volumique de la famille  $K$  dans tout l'espace. Les inconnues sont les déformations  $\underline{\epsilon}^K$  dans les éléments ( $K=1, \dots, NE$ ). (II-68) peut être réécrite comme suit :

$$(II-70) \quad \underline{\epsilon}^I = \underline{\epsilon}^o + \sum_{J \in F_I} \Gamma^{IJ} : \Delta \underline{C}^J : \underline{\epsilon}^J + \dots + \sum_{J \in F_{NE}} \Gamma^{IJ} : \Delta \underline{C}^{NE} : \underline{\epsilon}^{NE}$$

pour  $I=1, \dots, NE$ .

Les sommations dans l'équation (II-70) introduisent des séries infinies d'éléments. On obtient une solution approchée de la manière suivante : à chaque élément I, on associe une sphère  $S(I, R_c)$  de rayon  $R_c$  et de centre confondu avec celui de l'élément I (voir figure II.23). On note par  $C(I, R_c)$ , ou plus brièvement par  $C_I$ , le cluster des éléments qui ont leur centre dans  $S(I, R_c)$ . On réduit la sommation dans (II-70) à une sommation finie qui prend seulement en compte les éléments ayant leur centre dans le cluster  $C_I$ . Si on définit par  $C_{Ij}$  l'intersection du cluster  $C_I$  avec la famille d'éléments  $F_j$ , nous avons, compte tenu de (II-68) :

$$(II-71) \quad \underline{\varepsilon}^I = \underline{\varepsilon}^0 + \sum_{J \in C_{I1}} \underline{\Gamma}^J : \underline{\Delta C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + \dots + \sum_{J \in C_{INE}} \underline{\Gamma}^J : \underline{\Delta C}^{NE} : \underline{\varepsilon}^{NE}$$

pour  $I=1, \dots, NE$ .

Dans la méthode du cluster autocohérent, on considère que la déformation de chaque élément dans le matériau hétérogène est égale à celle qui s'y produirait si le cluster était seul entouré de milieu homogène équivalent (M.H.E) avec pour déformation imposée à l'infini la valeur  $\underline{E}$  (voir figure II.23). Donc cette méthode consiste à prendre comme milieu de référence le milieu homogène équivalent (M.H.E), de tenseur d'élasticité le tenseur d'élasticité effectif du matériau composite ( $\underline{C}^0 = \underline{C}^{eff}$ ). Dans le cas étudié ici, on aura aussi  $\underline{\varepsilon}^0 = \underline{E}$ . L'équation (II-71) devient alors :

$$(II-72) \quad \underline{\varepsilon}^I = \underline{E} + \sum_{J \in C_{I1}} \underline{\Gamma}^J : \underline{\Delta C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + \dots + \sum_{J \in C_{INE}} \underline{\Gamma}^J : \underline{\Delta C}^{NE} : \underline{\varepsilon}^{NE}$$

avec

$$(II-73) \quad \underline{\Delta C}^I_{ijkl} = C^I_{ijkl} - C^{eff}_{ijkl}$$

En y substituant la relation (I-14a), on obtient un système d'équations en tenseurs de localisations de déformations  $\underline{A}^K$  ( $K=1, \dots, NE$ ) :

$$(II-74) \quad \underline{A}^I = \underline{I} + \sum_{J \in C_{I1}} \underline{\Gamma}^J : \underline{\Delta C}^1 : \underline{A}^1 + \dots + \sum_{J \in C_{INE}} \underline{\Gamma}^J : \underline{\Delta C}^{NE} : \underline{A}^{NE}$$

pour  $I=1, \dots, NE$ .

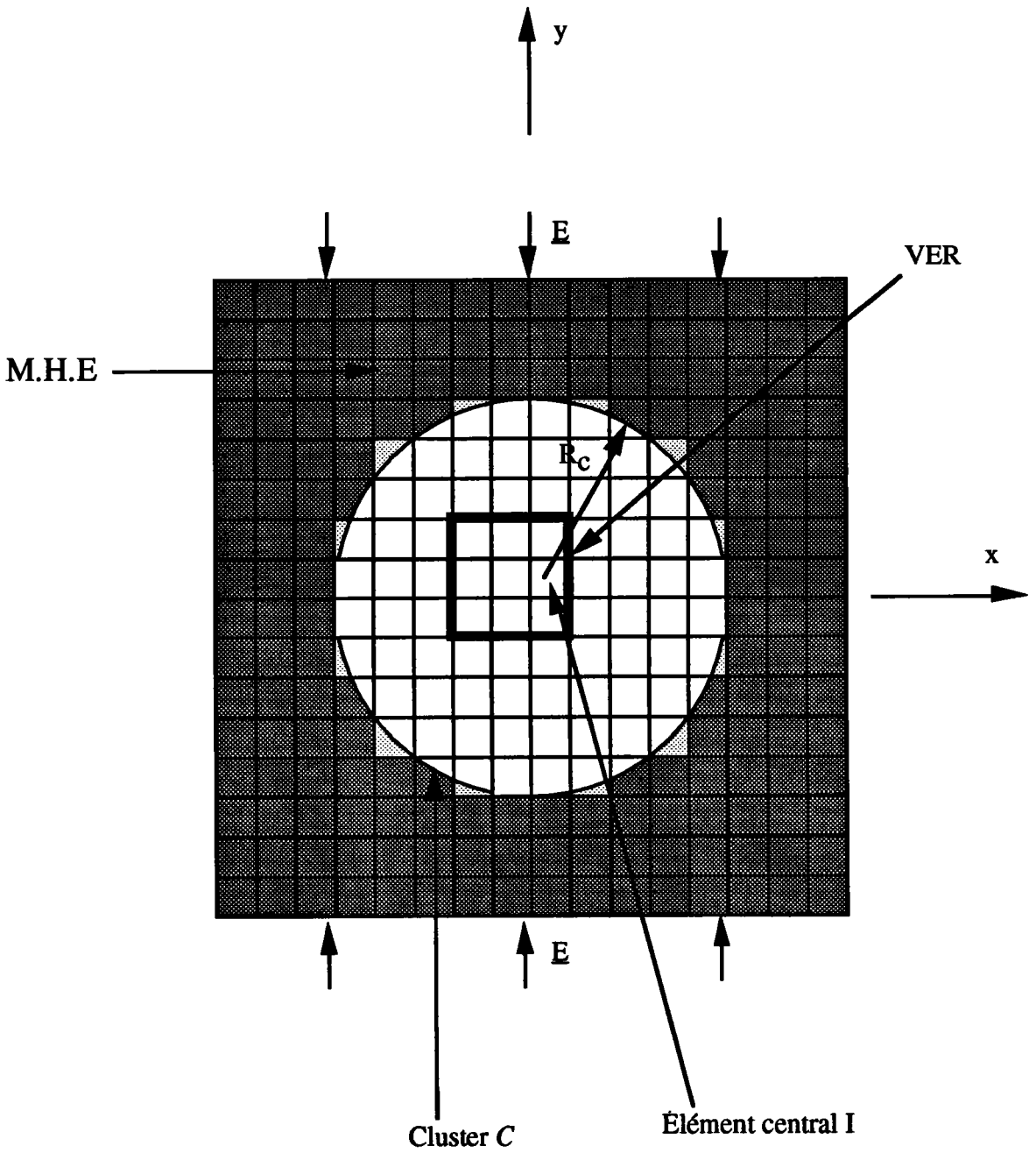


Figure II.23 : Représentation schématique du cluster de rayon  $R_c$  dans le cas d'un maillage tridimensionnel avec des éléments parallélépipédiques rectangles. Le cube au centre de la figure est la cellule de base.



Pour déterminer les composantes des tenseurs de localisations  $A_{ijkl}^I$  ( $I=1,\dots,NE$ ,  $NE$  étant le nombre d'éléments contenues dans la cellule), nous calculons les tenseurs  $\Gamma^U$  en utilisant les coefficients  $\underline{C}^{eff}$  du milieu homogène équivalent ; les composantes de  $\Gamma^U$  sont calculées numériquement dans un repère macroscopique (voir Annexe A). La résolution du système d'équations (II-74) nous fournit alors les composantes des tenseurs de localisations de déformations  $\underline{A}^I$  ( $I=1,\dots,NE$ ) à partir desquelles nous en déduisons le tenseur d'élasticité du matériau composite à partir de la relation (I-6a) :

$$(II-75) \quad \underline{C}^{eff} = \sum_{I=1}^{NE} f_I \underline{C}^I : \bar{\underline{A}}^I$$

où  $\bar{\underline{A}}^I = \underline{A}^I / \left( \sum_{K=1}^{NE} \underline{A}^K \right)$  (d'après Ahzi (1995), les tenseurs de localisation des déformations doivent être normalisés à droite pour que la condition (I-16a) soit réalisée).

Notons que les tenseurs d'interactions  $\Gamma^U$  (et les tenseurs  $\Delta \underline{C}^I$ ) dans cette méthode dépendent du tenseur d'élasticité effectif (inconnu). Par conséquent, on utilise une méthode itérative pour le calcul des constantes élastiques du matériau composite. Dans le premier pas de calcul, nous injectons dans  $\Gamma^U$  les solutions  $\underline{C}_1^{eff}$  du problème à 1-site. Nous en déduisons les composantes des tenseurs  $\underline{A}^I$  en résolvant le système d'équations (II-74). À partir de (II-75), (pour des fractions volumiques  $f_k$  où  $k=1,\dots,NE$  de famille d'éléments  $F_k$ ), les valeurs de  $C_{ijkl}^{eff}$  peuvent être déterminées. Nous réinjectons ces valeurs dans  $\Gamma^U$  pour obtenir de nouvelles valeurs des tenseurs  $\underline{A}^I$  et de nouvelles valeurs pour  $C_{ijkl}^{eff}$  telles que les différences entre les nouvelles et les précédentes valeurs, en valeur relative, deviennent inférieures à une valeur fixée à l'avance, de manière à ce que le processus itératif converge. Ces calculs sont possibles numériquement en adoptant le critère de convergence défini par la relation (I-62).

**b) Étude de la convergence de la méthode**

Nous étudions dans ce paragraphe la convergence de la méthode du cluster-autocohérent. Pour un élément I et un rayon  $R_c$  du cluster, nous considérons une partition de la famille  $F_1$  d'éléments telle que :

$$F_1 = C_{I1} \cup \hat{C}_{I1} \quad , \quad C_{I1} \cap \hat{C}_{I1} = \emptyset$$

où  $C_{I1}$  a été défini précédemment comme l'ensemble d'éléments de la famille  $F_1$  qui ont leur centre dans la sphère  $S(I, R_c)$ . Cette dernière a un rayon  $R_c$  et son centre est confondu avec celui de l'élément I, de la forme d'un parallélépipède rectangle. On définit par  $\hat{C}_{I1}$  l'ensemble des éléments dont les centres se trouvent à l'extérieur de la sphère  $S(I, R_c)$ .

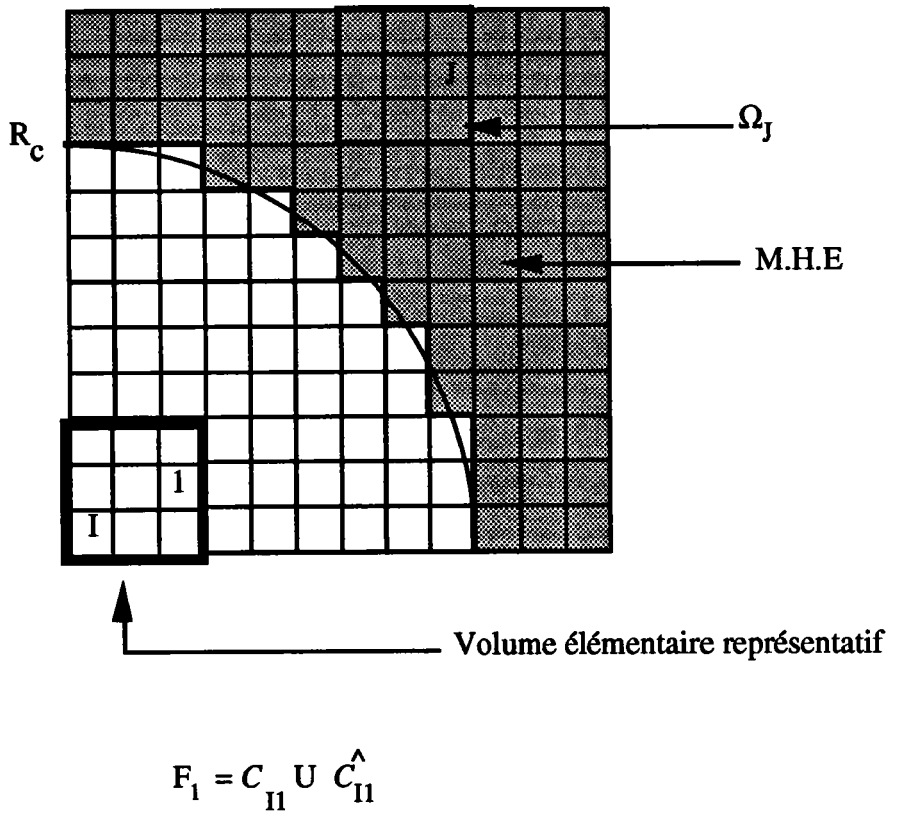


Figure II.24 : Représentation schématique de la partition de la famille d'éléments  $F_1$ .

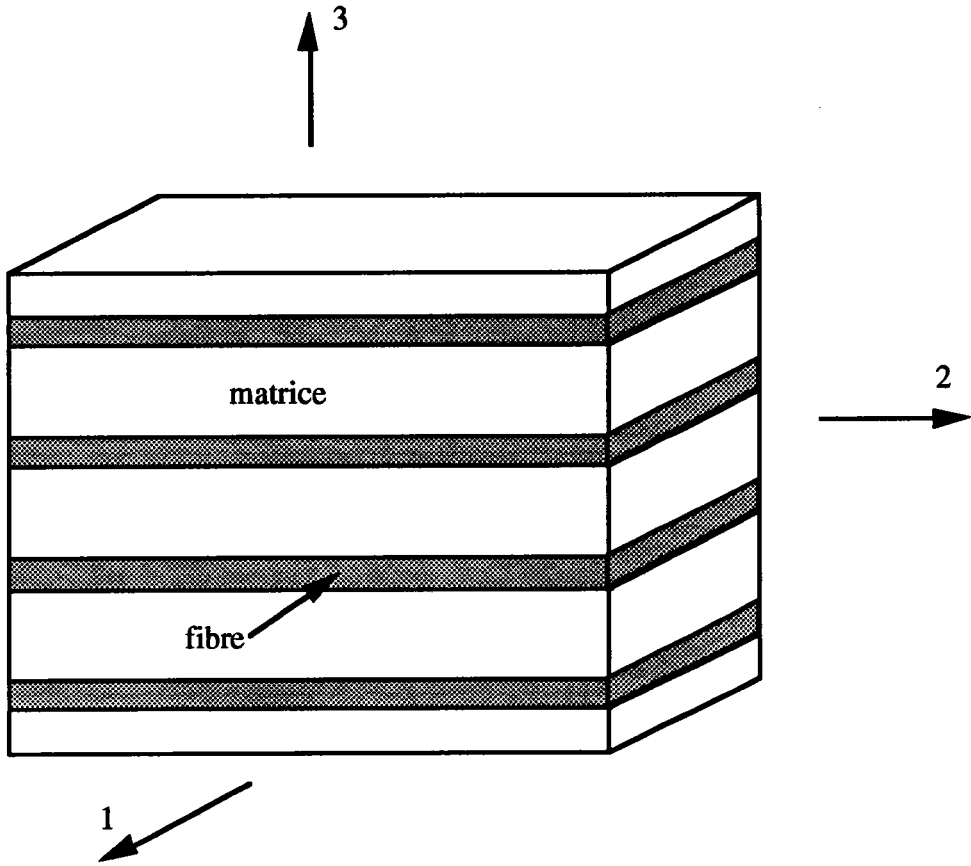


Figure II.25 : Représentation schématique par couches d'un composite unidirectionnel.

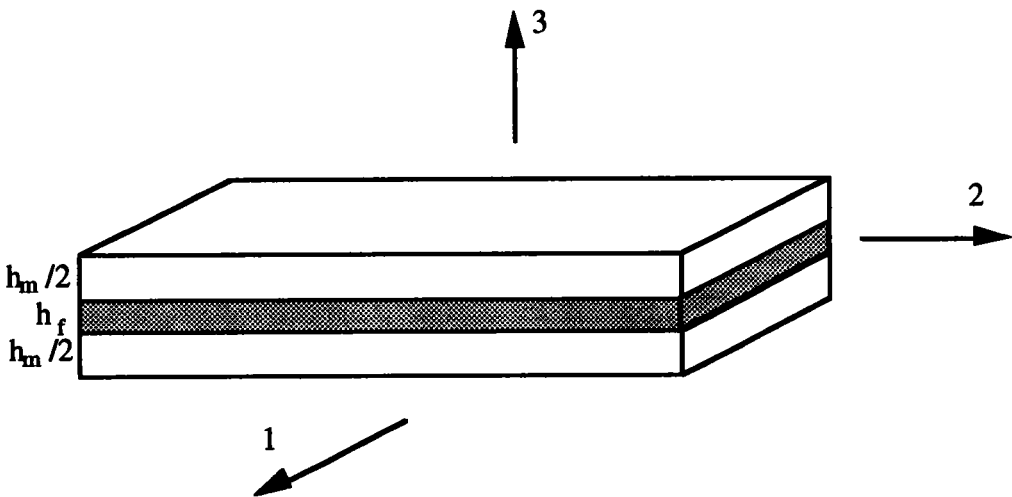


Figure II.26 : Représentation schématique de la cellule de base du composite unidirectionnel présenté dans la figure II.25.

On considère un élément  $J$  appartenant à  $\hat{C}_{11}$ , son centre se trouvant à l'extérieur de la sphère  $S(I, R_c)$ . On note par  $\Omega_J$  le cube qui se reproduit par périodicité à partir de la cellule de base, dans laquelle se trouve l'élément en forme de parallélépipède rectangle  $J$  (voir figure II.24). La démonstration de la convergence de la méthode est la même que celle pour la méthode du cluster présentée dans le paragraphe II.3.1.2.1.b.

Nous allons vérifier que la solution approchée converge, quand  $R_c \rightarrow \infty$ , pour un matériau composite à matrice époxyde-fibres de verre unidirectionnels (voir figure II.25 et 26). La fraction volumique des fibres est de 60%. On étudie la variation des modules effectifs dans les directions principales de symétries en fonction du rayon du cluster  $R_c$ . On remarque une convergence à partir de  $R_c=5a$ , où  $a$  est la distance entre les centres de deux éléments (parallélépipédiques rectangles) voisins. On note que pour  $R_c < a$ , le cluster contient un seul élément, et on retrouve le modèle autocohérent à 1-site qui donne un comportement isotrope. Nous comparons les résultats obtenus par la méthode du cluster-autocohérent aux valeurs théoriques obtenues à partir des relations suivantes (voir Berthélot, 1992) :

- le module d'Young longitudinal  $E_L$  (dans la direction des fibres), obéissant à la loi des mélanges :

$$(II-76) \quad E_L = f_I E^I + (1 - f_I) E^M$$

- le module d'Young transversal  $E_T$  tel que :

$$(II-77) \quad \frac{1}{E_T} = \frac{f_I}{E^I} + \frac{(1 - f_I)}{E^M}$$

Ces valeurs sont de plus comparées aux résultats obtenus par la méthode des cellules proposée par Aboudi (1991) (voir figure II.27). La méthode des cellules est présentée brièvement dans l'Annexe C.

La première remarque que l'on peut tout de suite faire au vu de cette figure, c'est que la méthode du cluster-autocohérent converge quand la taille du cluster augmente, et que la méthode à l'ordre 0 donne les résultats de la méthode autocohérente à 1-site qui

prédit un comportement isotrope ( $E_{Long}=E_{Tans}$ ). Pour le module d'Young transversal, la valeur vers laquelle la méthode tend coïncide avec les résultats d'Aboudi et la valeur analytique donnée par la relation (II-77). Pour le module d'Young longitudinal, notre modèle converge vers une valeur légèrement inférieure à celle prédite par le modèle d'Aboudi avec un écart de 8%, et de 11% par rapport à la valeur obtenue par la relation (II-76). On peut conclure que notre méthode donne des résultats très proches de ceux obtenus par la méthode d'Aboudi. L'avantage de la méthode présentée ici est sa facilité de mise en oeuvre, notamment pour des répartitions de fibres dans les trois ou quatre directions de l'espace où la méthode d'Aboudi ne peut s'appliquer.

### c) Organisation schématique du programme et récapitulatif de la méthode

Nous avons écrit un logiciel qui utilise le schéma du cluster-autocohérent pour calculer le tenseur d'élasticité des matériaux composites à fibres tridirectionnelles de sections rectangulaires. Le programme fait un maillage dans les trois directions orthogonales de la cellule de base. On peut y faire varier le rayon du cluster jusqu'à obtention des valeurs stables des différents modules équivalents du matériau composite. Le code à l'ordre 0 donne les résultats du modèle autocohérent à 1-site.

Le calcul des propriétés élastiques effectives du composite par la méthode du cluster-autocohérent se déroule suivant l'algorithme présenté sur le schéma II.2. Il convient donc de déterminer pour tous les éléments :

- ☞ les tenseurs  $\underline{\Gamma}^{ij}$  (expression II.30) en prenant pour le comportement du milieu de référence le tenseur d'élasticité effectif déterminé à l'itération "i" ;
- ☞ la déviation des propriétés  $\Delta \underline{C}_i^I$  par rapport au milieu de référence à partir de (II-73) ;
- ☞ les tenseurs de localisations  $\underline{A}_i^I$ , en résolvant le système d'équations (II-74) ;

- ☞ la nouvelle approximation des propriétés élastiques  $\underline{C}_{i+1}^{eff}$  avec (II-75) ;
- ☞ la dernière étape consiste à vérifier la convergence de la solution. Le critère adopté ici est basé sur la comparaison de  $\underline{C}^{eff}$  dans deux itérations successives. Le processus d'itération est arrêté quand la condition (I-62) est vérifiée.

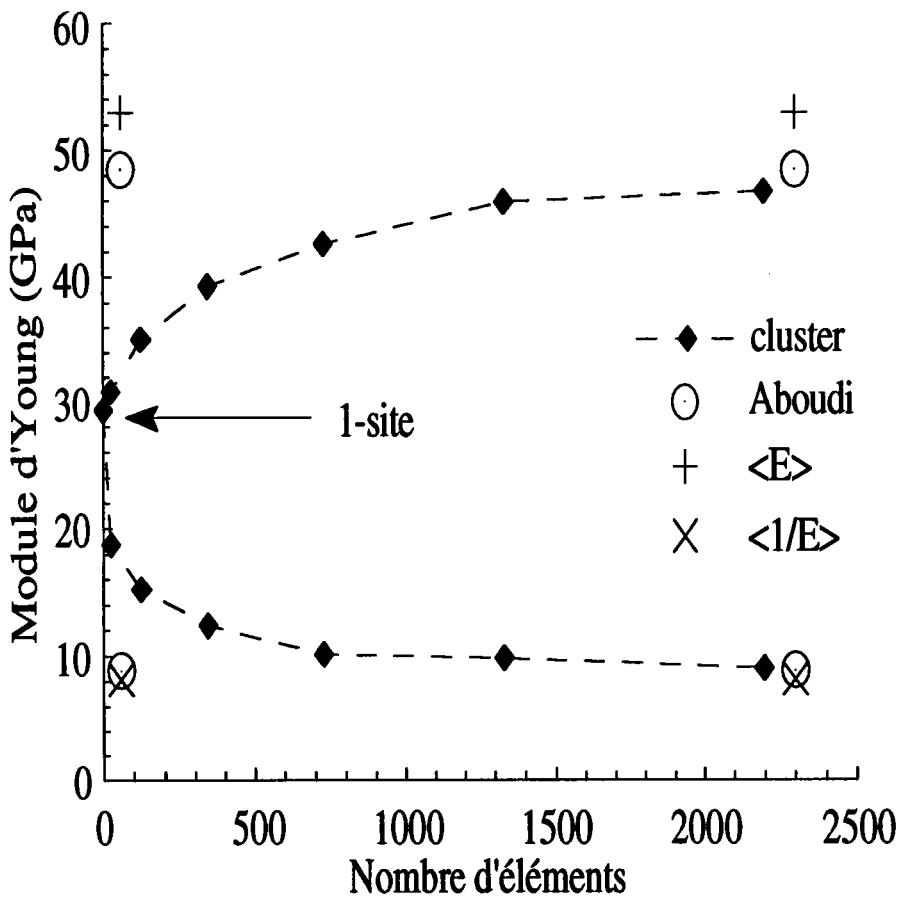


Figure II.27 : Convergence de la méthode du cluster-autocoherent pour des valeurs croissantes du nombre d'éléments contenus dans le cluster. On considère un composite unidirectionnel (Verre (60%)/époxyde).

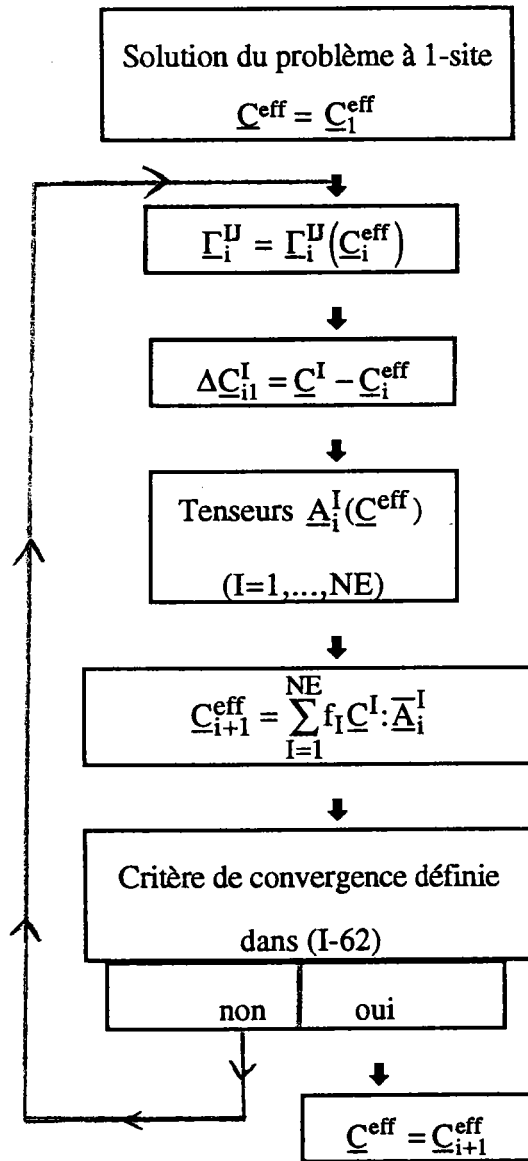


Schéma II.2 : Algorithme de la méthode du cluster-autocoherent

## II.4- CONCLUSIONS

Nous avons présenté des modèles simples et semi analytiques :

- Le premier et le second constituent les méthodes du cluster et du cluster-Mori-Tanaka, applicables aux cas des inclusions ellipsoïdales distribuées d'une manière périodique ou non périodique dans une matrice élastique homogène infinie. Les applications des deux dernières aux inclusions sphériques seront faites dans le troisième chapitre. Nous comparerons alors les résultats obtenus par ces deux méthodes avec ceux obtenus, d'une part par les différentes méthodes analytiques exposées dans le premier chapitre (Mori-Tanaka, trois phases, séries de Fourier, ...), d'autre part par des modèles numériques (éléments finis). La deuxième méthode est adaptée surtout aux matériaux inclusionnaires constitués par de paquets isolés d'inclusions.

- le troisième est la méthode du cluster-autocohérent , applicable aux matériaux polycristallins et aux matériaux composites à fibres longues et de sections rectangulaires, réparties suivant une structure périodique. Nous avons appliqué cette méthode à un matériau composite unidirectionnel à 60% de fibres de verre, les résultats obtenus ont été comparés favorablement avec des résultats analytiques.

Dès à présent, on peut remarquer qu'un avantage non négligeable des trois méthodes proposées réside dans leur souplesse, et dans les résultats semi analytiques fournis dans les situations les plus simples.



**CHAPITRE III :**  
**APPLICATIONS AUX INCLUSIONS SPHÉRIQUES**

|  |            |
|--|------------|
| <b>III.1- INTRODUCTION.....</b>  | <b>132</b> |
| <b>III.2- CAS DES MATÉRIAUX BIPHASÉS.....</b>  | <b>132</b> |
| <b>III.2.1. Méthode du cluster.....</b>  | <b>132</b> |
| a) Distribution de sphères sur un réseau cubique simple .....                            | 134        |
| b) Distribution de sphères sur un réseau cubique centré.....                             | 141        |
| c) Distribution de sphères sur un réseau tétragonal.....                                 | 146        |
| <b>III.2.2. Méthode du cluster-Mori-Tanaka.....</b>                                      | <b>146</b> |
| <b>III.3- CAS DES MATÉRIAUX TRIPHASÉS.....</b>   | <b>150</b> |
| <b>III.4- EFFETS DE LA RÉPARTITION SPATIALE SUR LES<br/>    MODULES ÉQUIVALENTS.....</b> | <b>152</b> |
| <b>III.5- CONCLUSIONS.....</b>   | <b>155</b> |

### **III.1- INTRODUCTION**

Pour valider notre modèle, et le modèle de Mori-Tanaka généralisé, nous allons comparer dans ce chapitre les résultats obtenus par notre façon de faire avec ceux déduits des méthodes approchées, citées dans le premier chapitre, et par des méthodes numériques (éléments finis). Nous ferons aussi des comparaisons avec les résultats expérimentaux. Nous allons étudier la variation des modules effectifs en fonction de la fraction volumique des inclusions, pour des répartitions spatiales particulières. Les applications, dans ce chapitre, seront limitées aux inclusions sphériques. Nous étudierons aussi les effets de la répartition spatiale des inclusions sur le comportement global des matériaux composites.

### **III.2- CAS DES MATÉRIAUX BIPHASÉS**

#### **III.2.1. Méthode du cluster**

On considère un matériau composite biphasé, constitué par des inclusions sphériques de rayons et de tenseurs d'élasticité identiques, noyées dans une matrice élastique linéaire homogène isotrope infinie. Dans nos calculs, l'interaction d'une sphère avec les sphères voisines est tenue en compte dans l'approximation simplifiée de la méthode du cluster, décrite dans le précédent chapitre. Dans une maille élémentaire ou volume élémentaire représentatif (VER), chaque inclusion joue le même rôle ; la

déformation est alors identique dans toutes les inclusions. Par conséquent, nous avons une seule famille d'inclusions  $F_1$  et une seule inconnue  $\xi^1$ , qui sera déterminée en résolvant l'équation linéaire (II-47). Plusieurs cas particuliers vont être examinés dans ce qui suit.

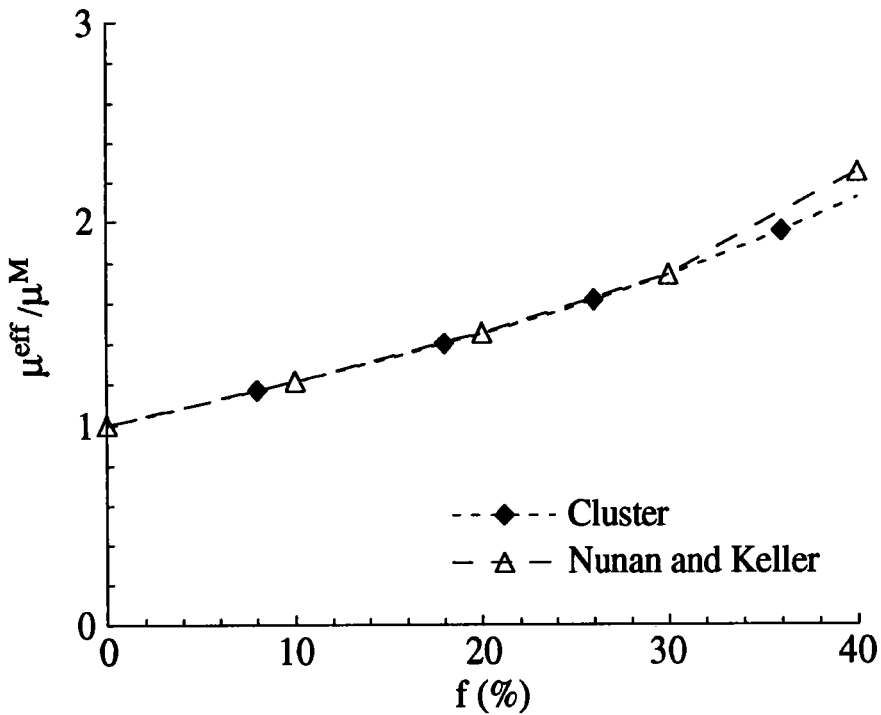


Figure III.1 : Module de cisaillement normalisé dans la direction principale de symétrie cubique pour une distribution cubique simple de sphères rigides. Les résultats obtenus par la méthode du cluster sont comparés avec les résultats analytiques de Nunan et Keller (1984).

**a) Distribution de sphères sur un réseau cubique simple**

On étudie une distribution de sphères sur un réseau cubique simple. Notons que pour cette distribution la fraction volumique maximale d'inclusions est de 52%. Le volume élémentaire représentatif pour cette répartition est constitué par un cube contenant une seule sphère en son centre (voir figure II.4).

Dans un premier exemple, nous considérons une distribution de sphères rigides sur un réseau cubique simple. Ce problème a été résolu analytiquement par Nunan et Keller (1984). Remarquons que, pour des inclusions rigides, l'équation (II-47) est indéterminée, car les composantes de  $\Delta \underline{C}^1$  sont infinies et les composantes de la déformation  $\underline{\epsilon}^1$  dans les inclusions sont nulles. Cependant, nous avons résolu le problème des inclusions rigides en prenant un  $\Delta \underline{C}^1$  suffisamment grand. La convergence de la solution a été vérifiée dans le chapitre précédent (figure II.9). Sur la figure III.1, nous présentons la variation du module de cisaillement effectif (normalisé par le module de cisaillement de la matrice) dans une direction principale de symétrie cubique, en fonction de la fraction volumique des sphères rigides. Le coefficient de Poisson de la matrice est pris égal à 0.3. Les résultats de notre modèle apparaissent très proches de ceux prédits par la méthode de Nunan et Keller (1984), jusqu'à 40% de sphères rigides. Signalons que ce modèle présente des problèmes de convergence à forte fraction volumique, ce qui explique la légère différence après 30% d'inclusions par rapport à la méthode du cluster. Pour palier à ce problème, les auteurs ont calculé les paramètres définies par (I-139) asymptotiquement.

On compare maintenant les résultats du cluster avec les résultats obtenus par le modèle autocohérent à 1-site, par le modèle à trois phases ( de Christensen et Lo, 1979) et par le schéma différentiel (voir figure III.2). Rappelons que dans ces trois méthodes, aucune hypothèse d'une distribution périodique est faite. Les résultats de la figure III.2 montrent clairement que le modèle autocohérent à 1-site est non adapté au matériau considéré, car il ne tient pas compte de la connexité de la matrice avec les inclusions : il

considère que les inclusions sont noyées dans le milieu homogène équivalent, plus "raide" que le matériau réel, et ne permet de prendre en compte la déformation de la zone de matrice entourant l'inclusion (cette zone est en effet plus "souple" que le milieu homogène équivalent). Les deux autres modèles, permettant de mieux rendre la déformation moyenne réelle de la matrice, donnent des résultats proches de ceux de notre méthode. Cependant, ces deux méthodes conviennent bien pour les distributions isotropes de sphères, alors qu'ici nous avons considéré une distribution de sphères sur un réseau cubique simple. La légère déviation par rapport aux résultats du cluster, vient du fait que l'anisotropie cubique est faiblement différente de l'isotropie.

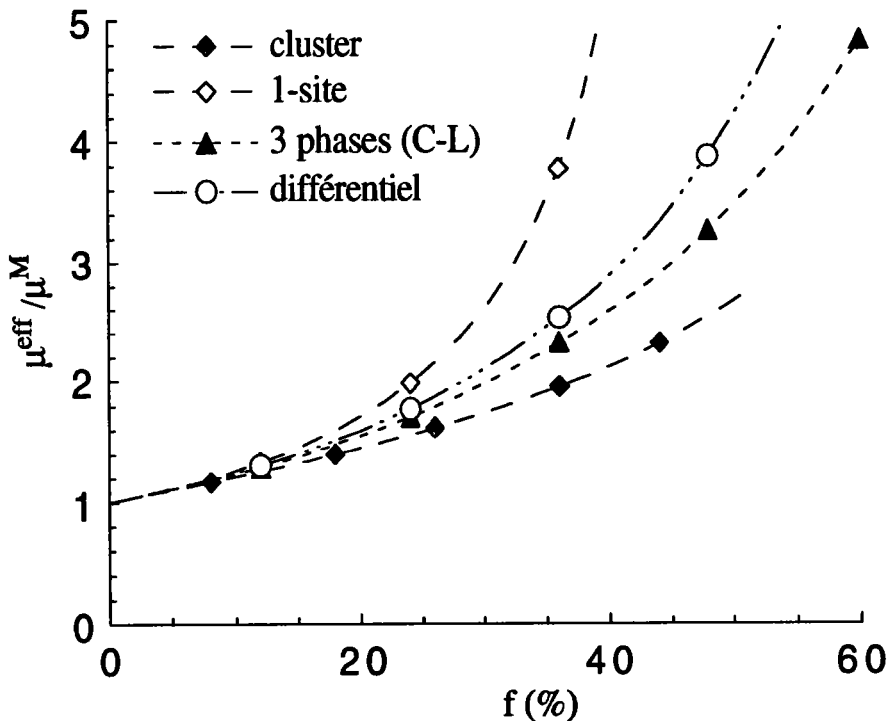


Figure III.2 : Comparaison des résultats de la méthode du cluster avec ceux de la méthode autocohérente à 1-site, du modèle à trois phases et du schéma différentiel. Une distribution de sphères rigides sur un réseau cubique simple est considérée.

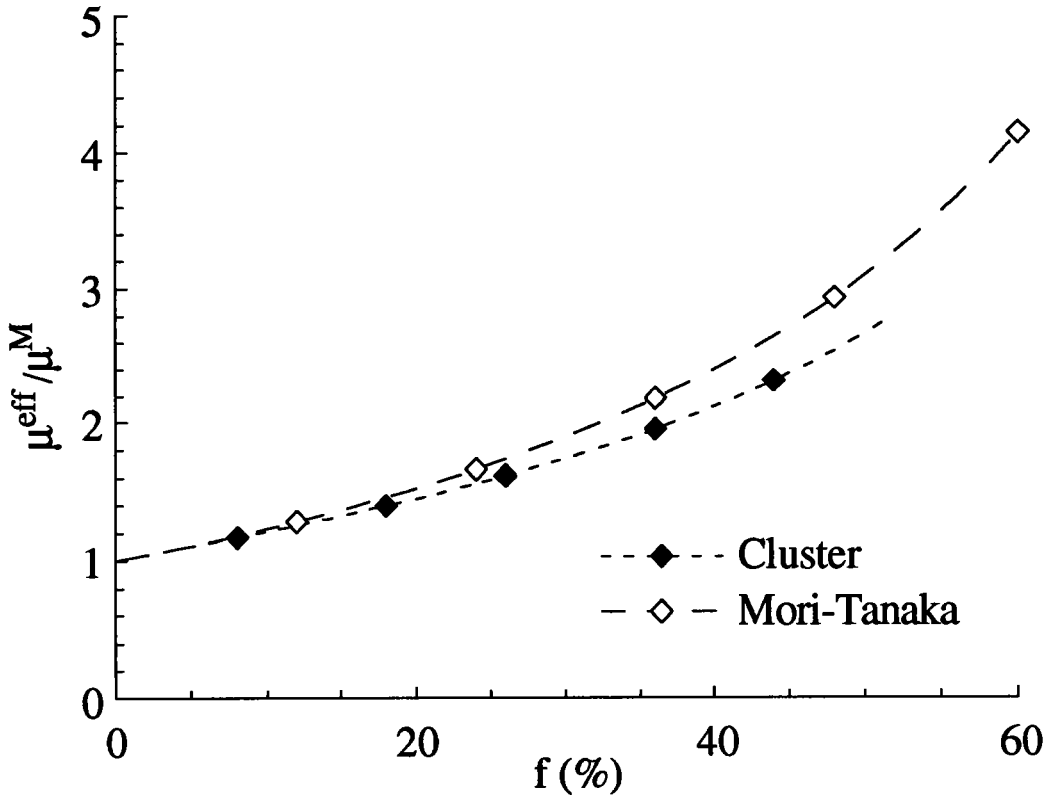


Figure III.3 : Comparaison de la méthode de Mori-Tanaka avec la méthode du cluster pour une distribution de sphères rigides sur un réseau cubique simple.

La figure III.3 montre que la méthode de Mori-Tanaka surestime globalement le module de cisaillement effectif dans ce cas traité (sphères rigides distribuées sur un réseau cubique simple). Nous avons vu dans le premier chapitre que les résultats prédits par le modèle de Mori-Tanaka coïncident avec les bornes inférieures de Hashin-Shtrikman dans le cas des distributions isotropes de sphères rigides. Or ici on a considéré une distribution de sphères rigides sur un réseau cubique simple, donc les résultats obtenus par la méthode de Mori-Tanaka ne constituent pas des bornes inférieures pour ce matériau.

Le même type de résultats est présenté sur la figure III.4 pour une distribution de vides sphériques sur un réseau cubique simple. Les résultats obtenus par notre modèle coïncident avec ceux obtenus par Nemat-Nasser et al. (1982) avec la méthode des séries de Fourier que nous avons présentée dans le premier chapitre.

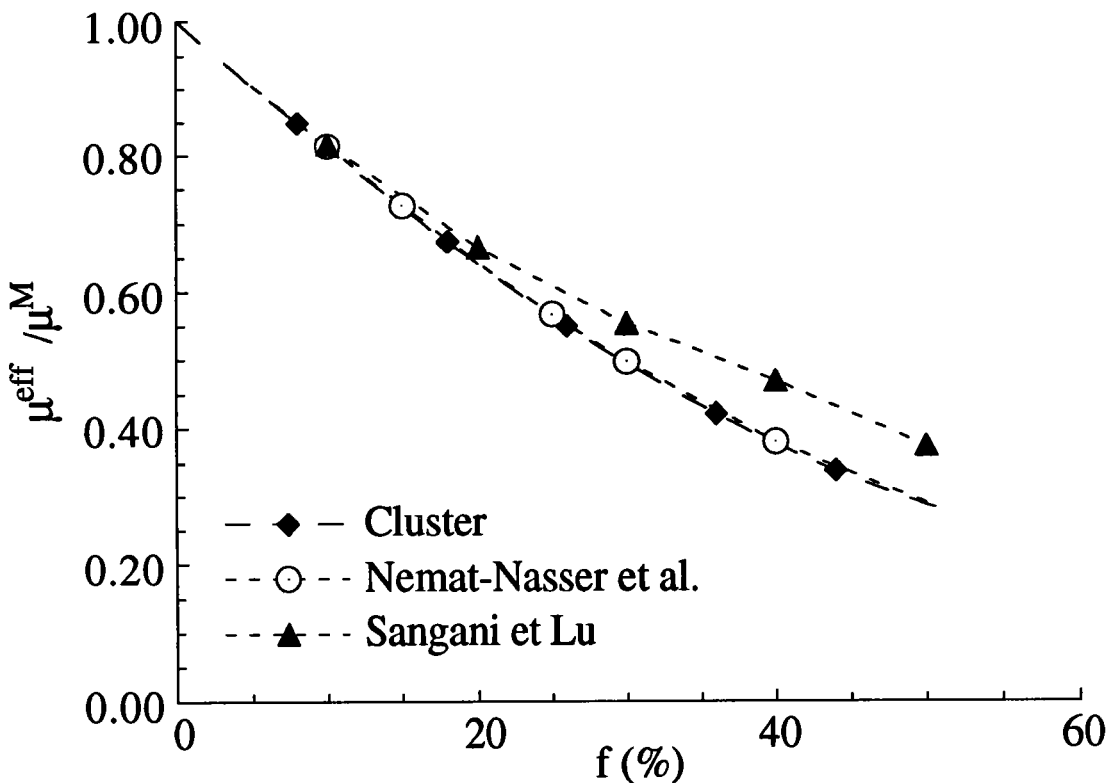


Figure III.4 : Variation du module de cisailment normalisé dans la direction principale de symétrie cubique de vides sphériques sur un réseau cubique simple. Les résultats de la méthode du cluster sont comparés avec ceux de Nemat-Nasser et al. (1982) et Sangani et Lu (1987).

Rappelons que cette méthode tient compte des interactions entre inclusions, par conséquent de la répartition spatiale considérée ici. Nous comparons aussi les résultats

obtenus par Sangani et Lu (1987), qui surestiment légèrement le module de cisaillement effectif à forte fraction volumique. Ceci pourrait venir du fait que le modèle présenté par Sangani et Lu (1987) diverge quand la fraction volumique des inclusions est proche de la fraction volumique maximale (égale à 52% pour le réseau cubique simple). Ces auteurs, pour atteindre les fractions volumiques maximales, ont complété le modèle par des formes asymptotiques des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  (relations I-139).

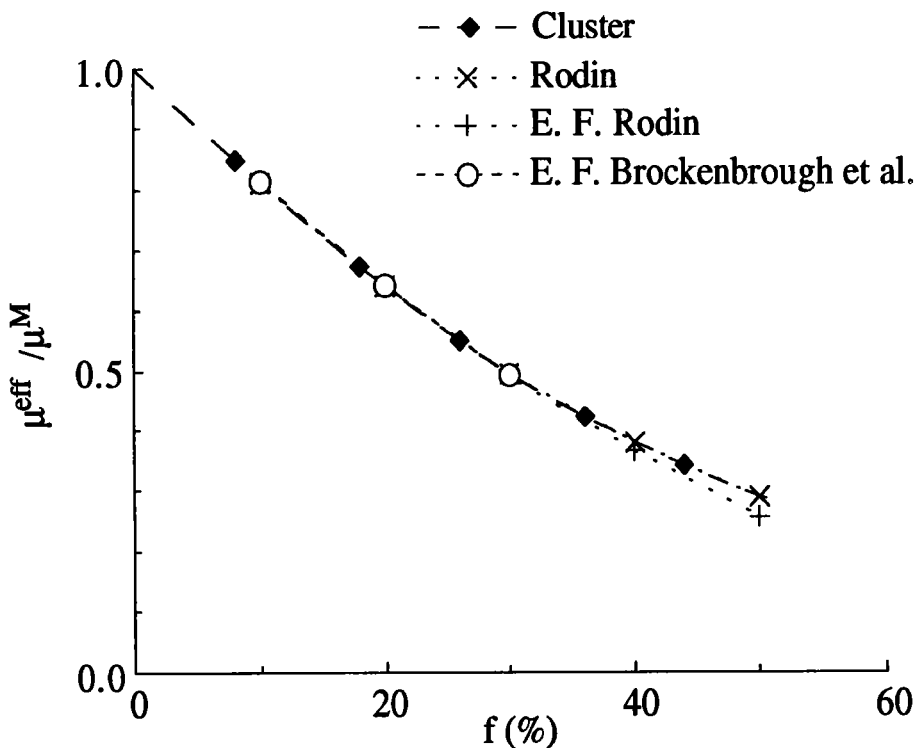


Figure III.5 : Module de cisaillement normalisé dans la direction principale de symétrie cubique pour une distribution cubique simple de vides sphériques. Les résultats obtenus par la méthode du cluster sont comparés avec les résultats analytiques de Rodin (1993) et les résultats obtenus par éléments finis de Brockenbrough et al. (1992) et Rodin (1993).



Pour le même matériau, nous comparons sur la figure III.5 les résultats du cluster avec les résultats analytiques de Rodin (1993), et les calculs par éléments finis réalisés par Rodin (1993) et Brockenbrough et al. (1992). On remarque un parfait accord entre les différentes valeurs obtenues ce qui démontre clairement l'efficacité de notre méthode pour ce cas particulier.

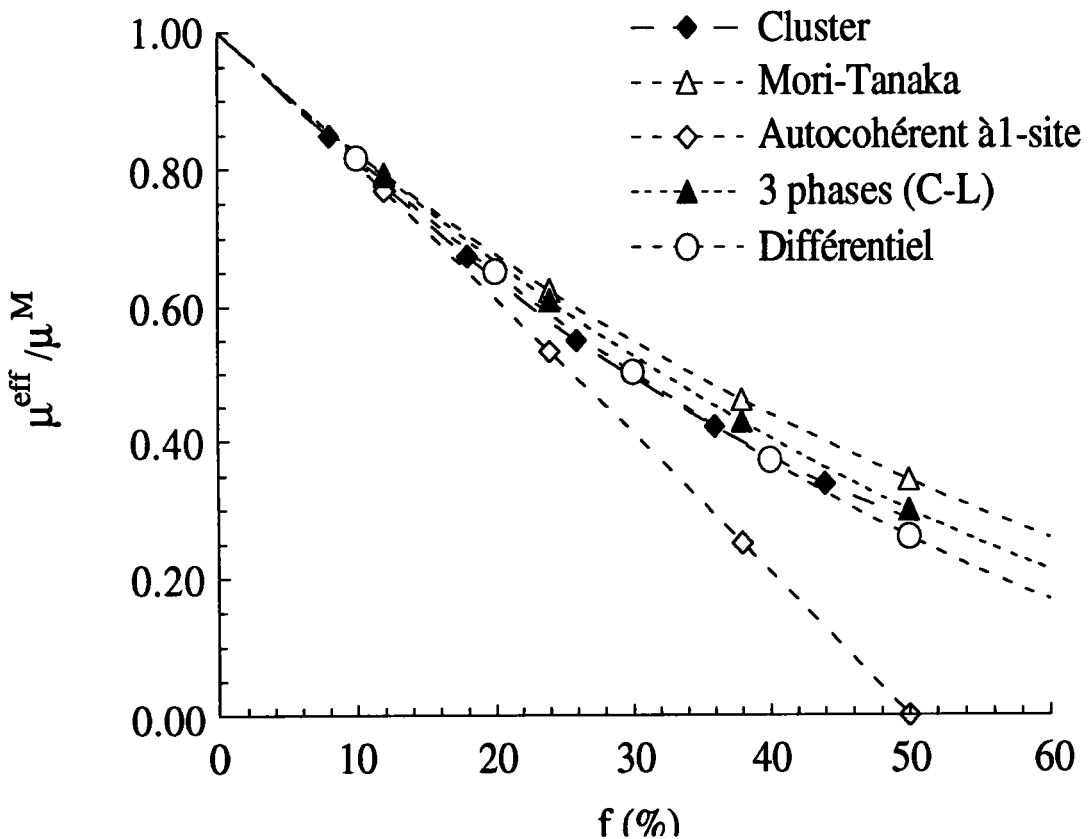


Figure III.6 : Comparaison des résultats de la méthode du cluster, pour une distribution de vides sphériques sur un réseau cubique simple, avec les modèles de Mori-Tanaka, autocohérent à 1-site, à trois phases et différentiel.

La figure III.6 permet d'analyser les résultats prédits par notre modèle avec ceux prédits par les méthodes citées dans le premier chapitre (Mori-Tanaka, 1-site, trois phases

et différentielle). Notons que les mêmes remarques qui ont été faites pour la figure III.2 concernant l'adéquation de ces méthodes d'homogénéisation peuvent être faites ici. On constate de plus que les résultats de la méthode du cluster coïncident avec ceux du modèle différentiel. Cette coïncidence est un hasard puisque le matériau étudié par le schéma différentiel n'est pas de structure cubique simple. On s'aperçoit que le seuil de percolation prédit à 50% d'inclusions par la méthode autocohérente à 1-site, n'est reproduit par aucune méthode. Cela confirme que le comportement donné par ce modèle est loin du comportement réel du matériau composite.

Nous pensons qu'il est intéressant de comparer les résultats prédits par notre méthode avec les résultats expérimentaux. La figure III.7 montre les valeurs expérimentales de Walsh et al. (1965) pour le module de compressibilité, comparées avec les résultats obtenus par le schéma différentiel (Zimmerman, 1991), et les résultats fournis par notre modèle pour une distribution de vides sphériques sur réseau cubique simple. Cependant, la distribution spatiale exacte des vides dans le matériau réel est mal connue (est-ce bien un matériau avec vides sphériques sur un réseau cubique simple dont on s'est servi au cours des expériences ?), et certainement n'est pas exactement la répartition considérée dans la méthode du cluster. Notons que, pour une distribution d'inclusions sphériques de même rayon sur un réseau cubique simple, la fraction volumique maximale est de 52%. Cette restriction limite la comparaison entre les résultats du cluster et les valeurs expérimentales.

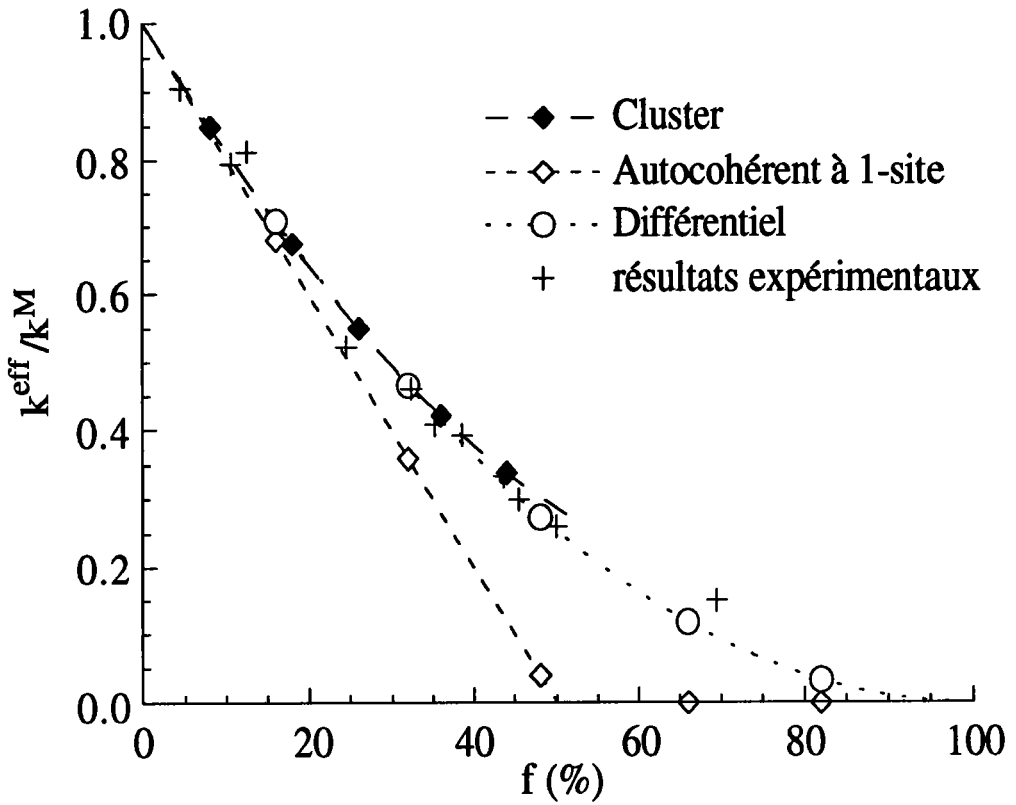


Figure III.7 : Comparaison des résultats de la méthode du cluster, pour une distribution de vides sphériques sur un réseau cubique simple, avec les résultats expérimentaux. Ces résultats sont aussi comparés avec ceux obtenus par le modèle autocohérent à 1-site et différentiel.

### b) Distribution de sphères sur un réseau cubique centré

Dans ce paragraphe, nous considérons une distribution de sphères sur un réseau cubique centré. Notons que pour cette distribution la fraction volumique maximale d'inclusions est de 68%.

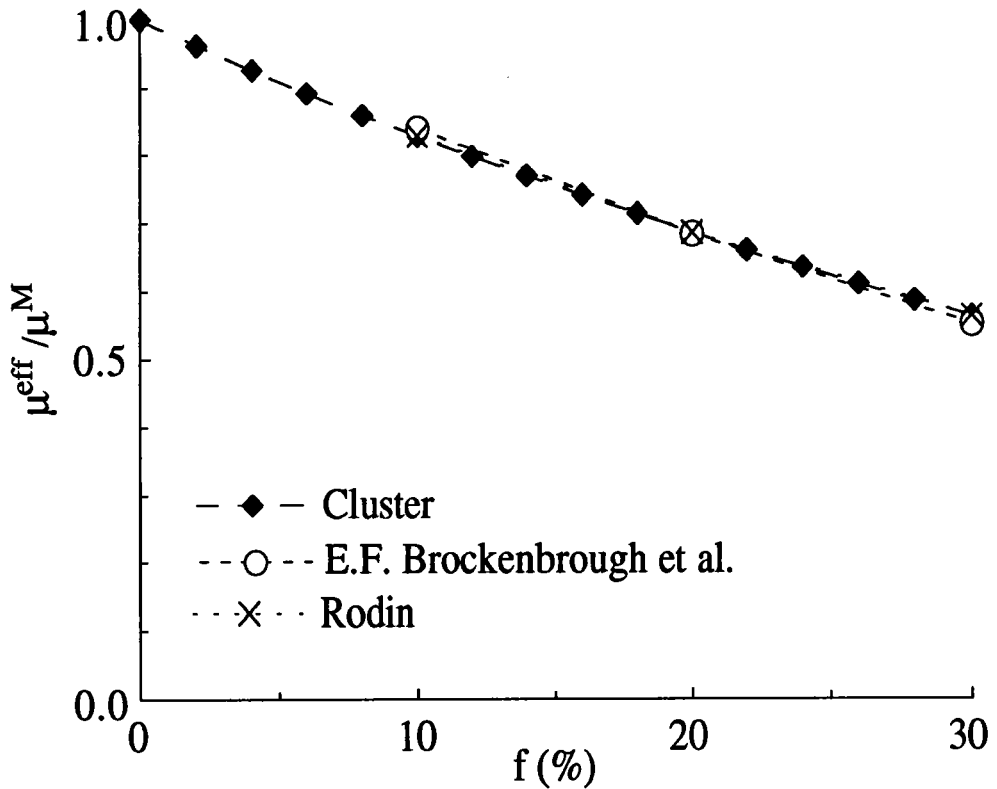


Figure III.8 : Comparaison des résultats de la méthode du cluster avec les résultats analytiques de Rodin (1993) et numériques de Brockenbrough et al. (1992). Une distribution de vides sphériques sur un réseau cubique centrée est considérée.

Pour une distribution de vides sphériques sur un réseau cubique centré, on peut étudier sur la figure III.8 la variation du module de cisailment effectif (normalisé par le module de cisailment de la matrice) dans une direction principale de symétrie cubique, en fonction de la fraction volumique. Le coefficient de Poisson de la matrice est pris égal à 0.3. Les résultats obtenus par notre modèle coïncident parfaitement avec les résultats analytiques de Rodin (1993) et les résultats numériques (éléments finis) de

Brockenbrough et al. (1992), ce qui démontre encore l'efficacité de notre modèle pour ce cas traité.

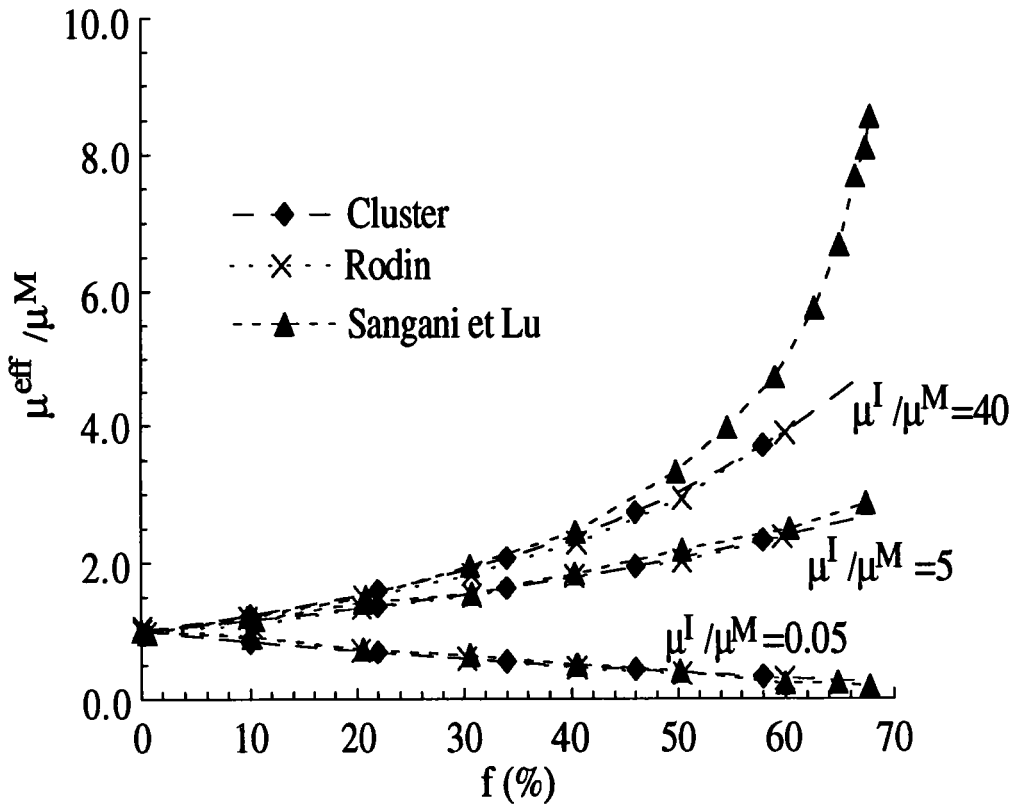


Figure III.9 : Comparaison des résultats de la méthode du cluster avec les résultats analytiques de Rodin (1993) et Sanagani et Lu (1987), pour une distribution cubique centrée de sphères élastiques, avec différentes valeurs du rapport  $\mu^I / \mu^M$  (0.05, 5 et 40).

Nous allons comparer, pour différentes valeurs du rapport  $\mu^I / \mu^M$  (0.05, 5 et 40), sur la figure III.9, notre modèle avec les méthodes analytiques de Rodin (1993) et Sangani et Lu (1987), pour une distribution des inclusions sphériques sur un réseau cubique centré. On remarque sur la figure que nos résultats coïncident avec ceux de

Rodin (1993), pour les trois valeurs de  $\mu^I/\mu^M$ . On remarque aussi que le modèle de Sangani et Lu surestime encore dans ce cas les modules effectifs pour les fortes fractions volumiques, quand le rapport  $\mu^I/\mu^M$  est grand (40). Comme nous l'avons déjà signalé, cette surestimation peut venir du fait que ce modèle diverge à forte fraction volumique, auquel cas les modules sont obtenus asymptotiquement.

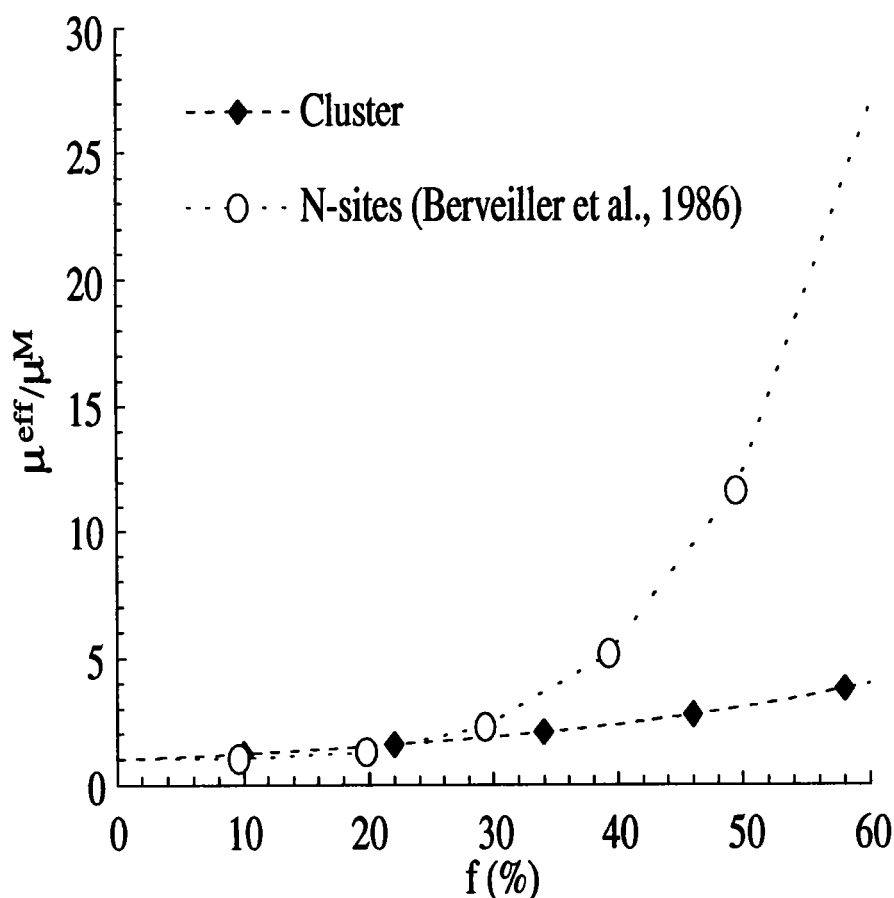


Figure III.10 : Comparaison des résultats de la méthode du cluster avec les résultats de la méthode autocohérente à N-sites (Berveiller et al., 1986) dans le cas d'une distribution de sphères élastiques ( $\mu^I/\mu^M = 101$ ), sur un réseau cubique centré.

Nous avons signalé au deuxième chapitre que la méthode autocohérente à N-sites proposée par Fassi-Fehri (1985), puis reprise par Berveiller al. (1986), Fassi-Fehri (1989) n'a pas apporté de grande correction au résultats donné par le modèle autocohérent à 1-site (voir figure II.2). Ces auteurs ont limité la portée des interactions aux premiers proches voisins. Sur la figure III.10 on compare les résultats obtenus par cette méthode avec ceux prédits par notre modèle. À forte fraction volumique ce modèle surestime le module de cisaillement équivalent. En augmentant la portée des interactions ce modèle converge-t-il vers la solution réelle ?

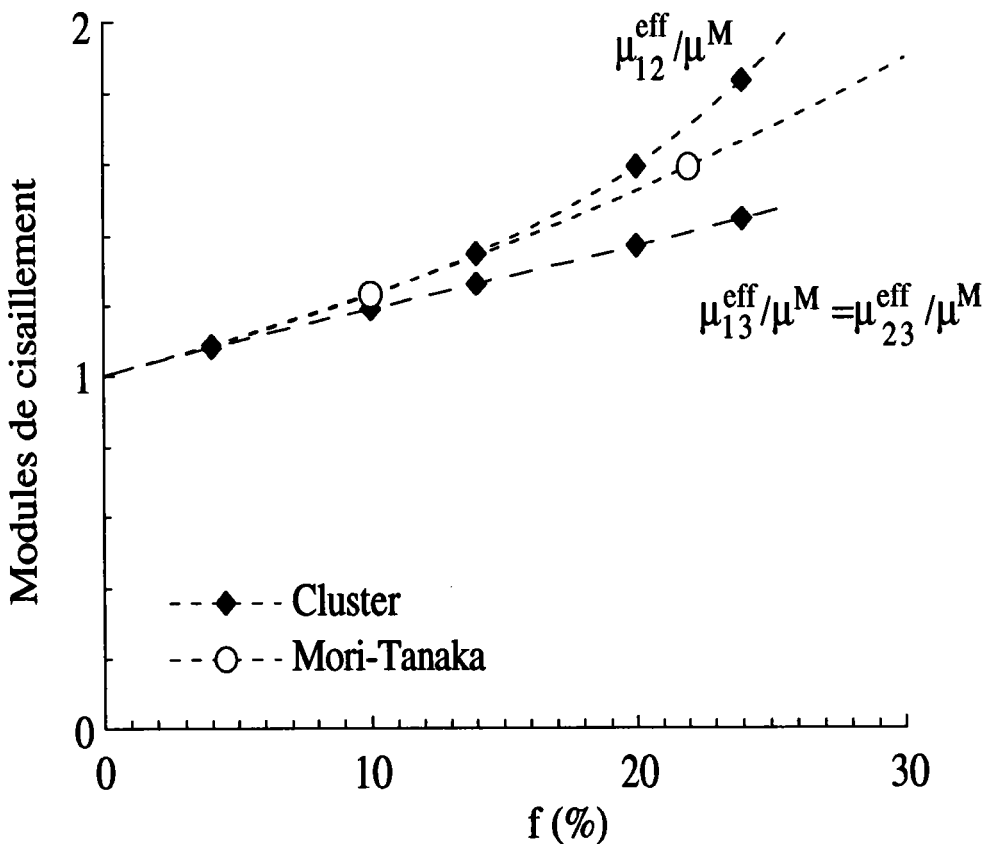


Figure III.11 : Comparaison des résultats de la méthode du cluster avec les résultats de la méthode de Mori-Tanaka. Une distribution de sphères rigides sur un réseau tétragonal P est considérée.

### c) Distribution de sphères sur un réseau tétragonal

Finalement, pour terminer cette partie de comparaison avec les autres méthodes, nous avons considéré une distribution d'inclusions sphériques rigides sur un réseau tétragonal P, avec la relation entre les dimension de la cellule de base  $c=2a=2b$ . Sur la figure III.11, nous avons étudié les variations des modules de cisaillement effectif (normalisés toujours par le module de cisaillement de la matrice)  $\mu_{12}^{\text{eff}}$  et  $\mu_{23}^{\text{eff}} = \mu_{13}^{\text{eff}}$  (où les indices 1, 2, 3 représentent respectivement les directions  $a, b, c$ ) dans les directions principales de symétries, en fonction de la fraction volumique de sphères rigides. On remarque un comportement global anisotrope qui s'accroît quand la fraction volumique des inclusions augmente. Cette anisotropie n'est pas prédite par le modèle de Mori-Tanaka, qui donne un comportement isotrope.

Les résultats de la méthode du cluster ont été trouvés proches des différents résultats analytiques ou numériques. Nous ferons toutefois des commentaires plus approfondis en conclusion de ce chapitre. Reste à comparer maintenant les résultats de la méthode du cluster-Mori-Tanaka ; c'est l'objet du prochain paragraphe.

### III.2.2. Méthode de cluster-Mori-Tanaka

Dans ce paragraphe, nous allons comparer la méthode du cluster-Mori-Tanaka (qui est une combinaison de celle du cluster et de celle de Mori-Tanaka), avec la méthode du cluster. Rappelons que pour ce modèle, le cluster est un cube, contenant un certain nombre d'inclusions qui interagissent avec l'inclusion se trouvant en son centre. Les trois figures (III.12, 13 et 14) de ce paragraphe permettent de montrer les différences entre la méthode de Mori-Tanaka et celle du cluster-Mori-Tanaka, et de mettre en évidence l'amélioration qu' a apportée cette dernière qui tient compte de la répartition spatiale des inclusions dans la matrice.



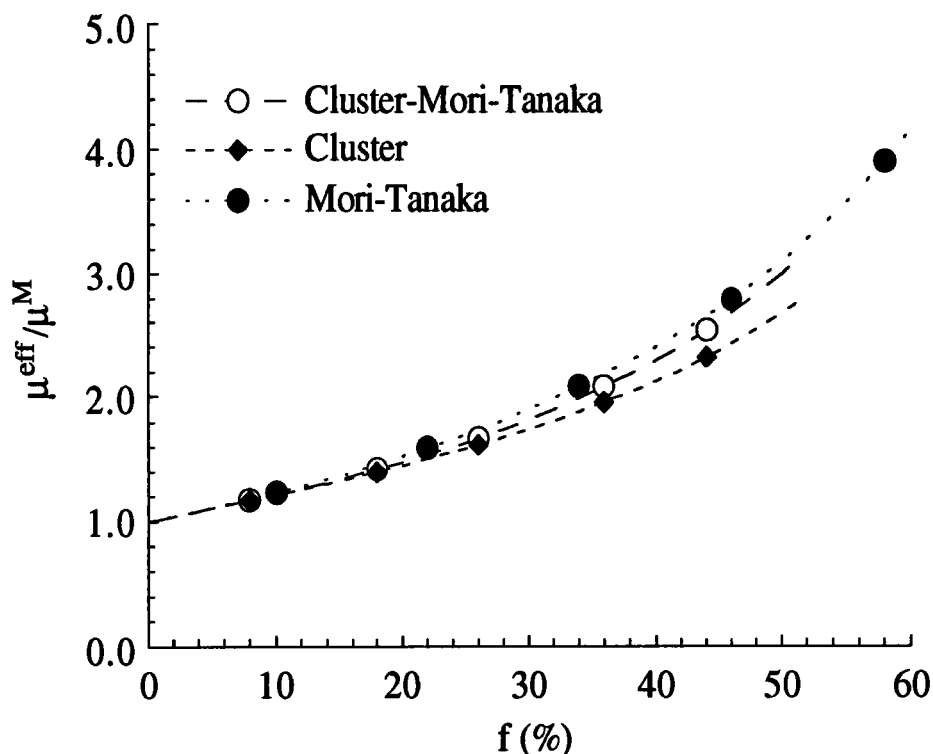


Figure III.12 : Comparaison des résultats de la méthode du cluster-Mori-Tanaka avec ceux obtenus par la méthode Mori-Tanaka et par la méthode du cluster. Une distribution de sphères rigides sur un réseau cubique simple est considérée.

La figure III.12 compare les résultats du cluster-Mori-Tanaka avec les résultats obtenus par la méthode du cluster et ceux obtenus par la méthode de Mori-Tanaka, pour une distribution de sphères rigides sur un réseau cubique simple. On constate que les résultats du cluster-Mori-Tanaka sont légèrement inférieurs à ceux de Mori-tanaka, et un peu supérieurs à ceux du cluster.

Pour une distribution de vides sphériques sur un réseau cubique centré, on regarde sur la figure III.13 les résultats de la méthode du cluster-Mori-Tanaka, ceux du cluster, ceux de Rodin (1993) et ceux de Mori-Tanaka. On remarque encore une bonne corrélation entre la méthode du cluster-Mori-Tanaka et la méthode du cluster. Les calculs analytiques de Rodin fournissent également des valeurs quasiment identiques à celles de nos deux méthodes, ce qui démontre leur validité.

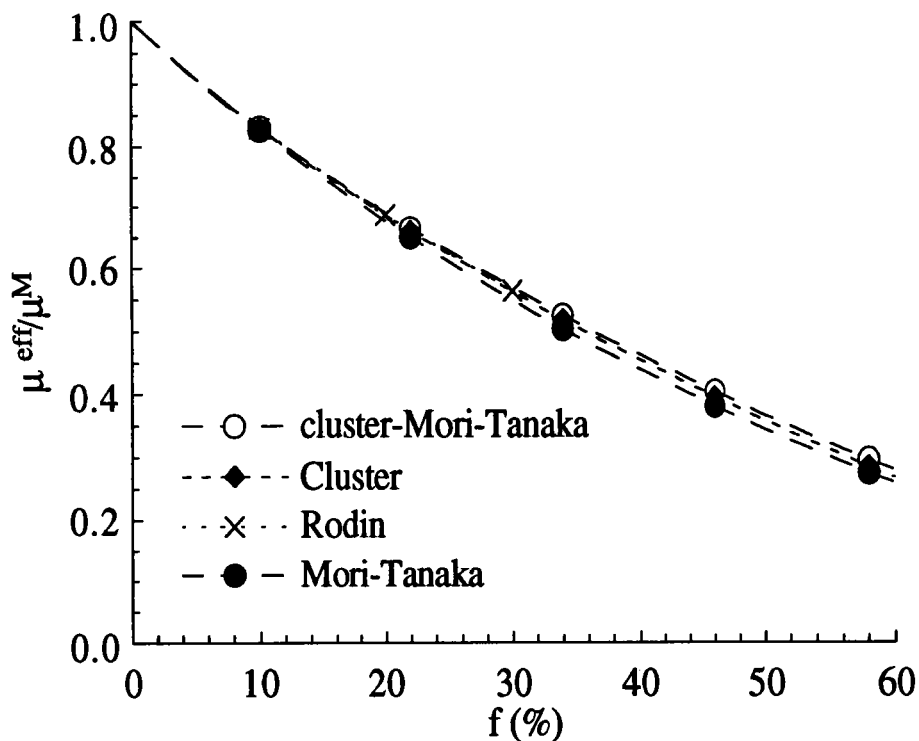


Figure III.13 : Comparaison des résultats de la méthode du cluster-Mori-Tanaka, pour une distribution de vides sphériques sur un réseau cubique centré, avec les résultats de la méthode de Mori-Tanaka et du cluster. Ces résultats sont aussi comparés avec ceux de Rodin (1993).

Dans le cas d'une distribution de sphères élastiques (avec un rapport de  $\mu^I/\mu^M=40$ ) sur un réseau cubique centré, la figure III.14 permet de constater une légère amélioration apportée à la méthode de Mori-Tanaka, en combinant la méthode du cluster avec cette dernière.

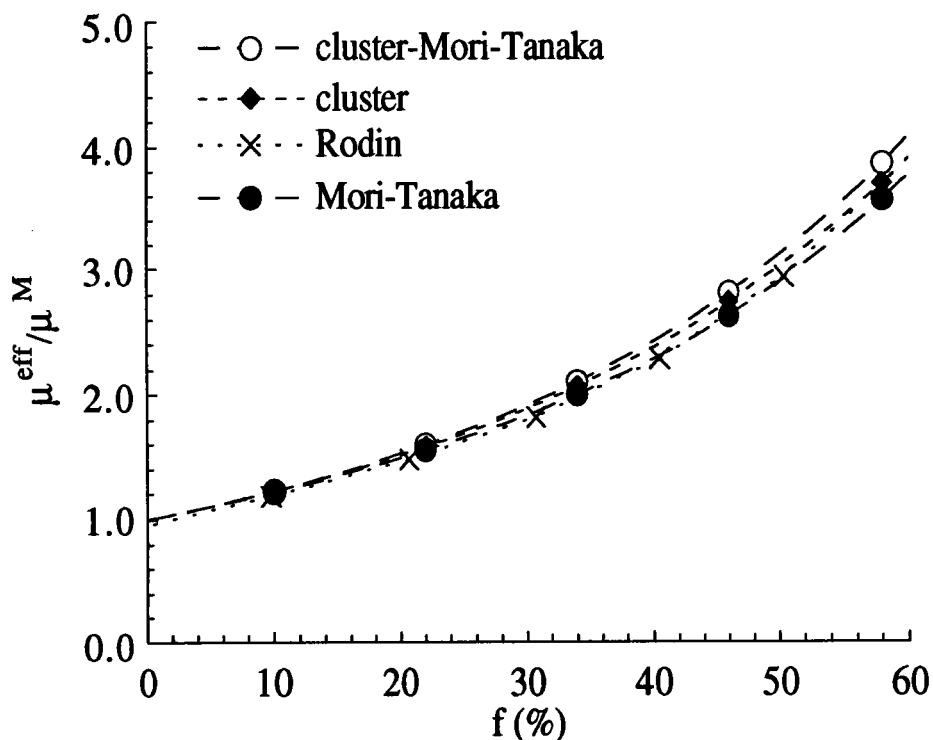


Figure III.14 : Comparaison des résultats de la méthode du cluster-Mori-Tanaka avec les résultats analytiques de Rodin (1993) et les résultats obtenus par la méthode du cluster et de Mori-Tanaka, pour une distribution cubique centrée de sphères élastiques, avec la valeur du rapport  $\mu^I/\mu^M = 40$ .

Donc, si la méthode du cluster-Mori-Tanaka apporte un plus de façon générale à celle du Mori-Tanaka, entre celle du cluster et celle du cluster-Mori-Tanaka, laquelle vaut-il mieux utiliser ? Pour les cas examinés dans ce paragraphe (inclusions sphériques sur un réseaux cubique simple ou cubique centré), aucune conclusion ne se dégage de façon frappante, d'autant plus que le coût en calculs est sensiblement le même. Cependant, cette méthode a un avantage sur la méthode du cluster dans le cas des milieux inclusionnaires où les inclusions sont réparties en clusters isolés dans la matrice homogène élastique infinie.

Cependant, la souplesse de la méthode du cluster nous permet de l'appliquer à des matériaux composites multiphasés. Dans le paragraphe suivant, nous présentons son application à un triphasé constitué de vides sphériques et de sphères rigides.

### III.3- CAS DES MATÉRIAUX TRIPHASÉS

Dans le cas de deux familles d'inclusions  $F_1$  et  $F_2$  (les inclusions sont différentes soit par leur taille soit par leurs propriétés mécaniques :  $\underline{C}^1 \neq \underline{C}^2$  soit par leurs répartitions spatiales), la figure II.13 (et également les figures II.14 et II.15) montre le cas d'une distribution de deux familles d'inclusions sur un réseau cubique centré. Dans ce cas, il y a deux inconnues  $\underline{\epsilon}^1$  et  $\underline{\epsilon}^2$  à déterminer, obtenues en résolvant le système linéaire d'équations (II-48).

La figure III.15 représente une étude de la variation du module de cisaillement (normalisé) du matériau composite, dans une direction principale de symétrie cubique, en fonction de la fraction volumique de vides sphériques, pour différentes valeurs de la fraction volumique de sphères rigides. On remarque que les effets des vides sphériques dans la chute du module de cisaillement globale sont très significatifs pour les grandes valeurs de la fraction volumique de sphères rigides.

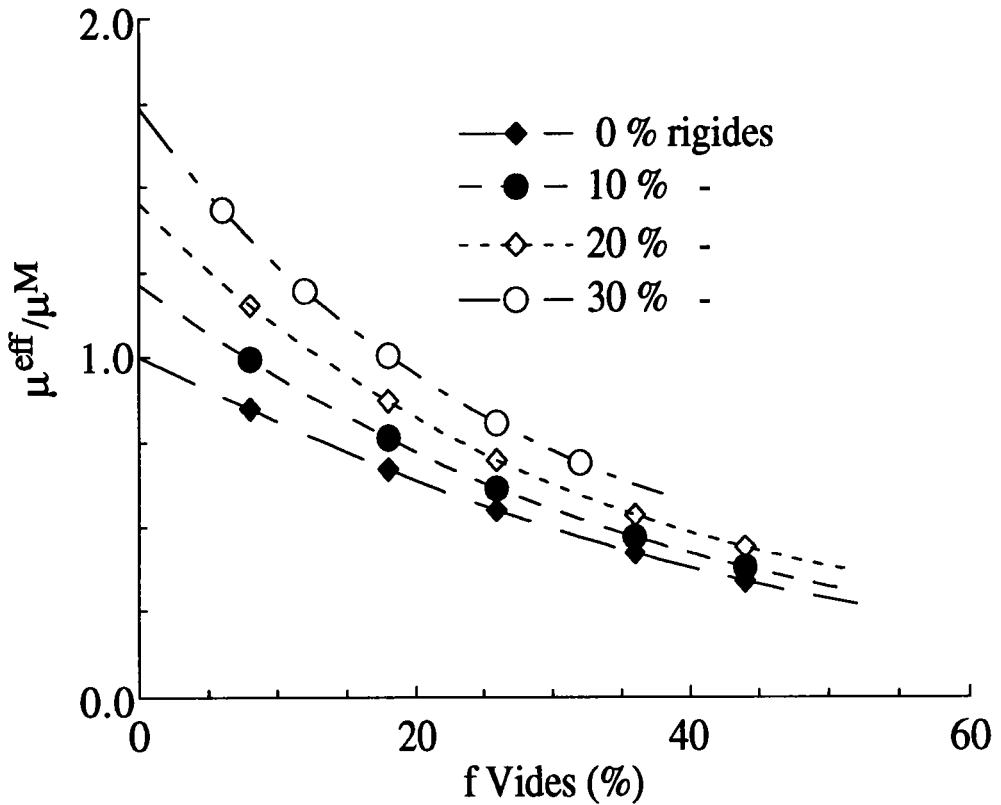


Figure III.15 : Module de cisaillement effectif (dans une direction principale de symétrie cubique) pour un matériau triphasé constitué par une distribution en cubique centrée de vides sphériques et de sphères rigides.

Les résultats présentés sur la figure III.16 correspondent quant à eux à une distribution des inclusions sur un réseau cubique simple ; nous pouvons construire la structure de ce matériau en plaçant les sphères des familles  $F_1$  et  $F_2$  alternativement sur les noeuds d'un réseau cubique simple. Dans ce matériau, chaque sphère d'une famille est entourée de six sphères de l'autre famille. Le réseau spatial est CFC et la base comprend une sphère de la famille  $F_1$  (par exemple) en  $000$  et une sphère de la famille  $F_2$  en  $1/2 \ 1/2 \ 1/2$ . Les résultats de la figure illustrent, quand on les compare avec les résultats

de la figure III.15, les effets de la distribution spatiale des inclusions. Ces effets seront étudiés dans le paragraphe suivant.

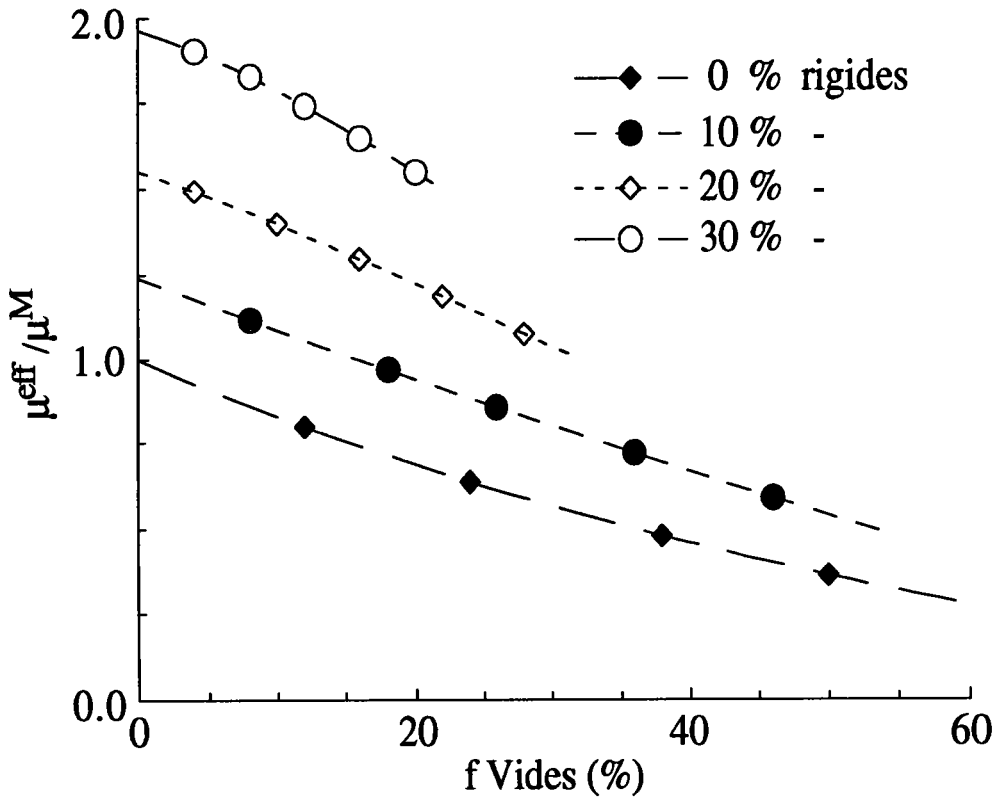


Figure III.16 : Module de cisaillement effectif (dans une direction principale de symétrie cubique) pour un matériau triphasé constitué par une distribution en cubique simple de vides sphériques et de sphères rigides.

### III.4- EFFETS DE LA RÉPARTITION SPATIALE SUR LES MODULES ÉQUIVALENTS

Dans ce paragraphe, nous allons essayer d'étudier les effets de la répartition spatiale des inclusions dans la matrice, en représentant la variation des modules équivalents d'un matériau composite biphasé en fonction de la fraction volumique des

inclusions. On considérera les différentes répartitions suivantes : cubique simple, cubique centrée, cubique à face centrée, orthorhombique I ( $b=1.2a$ ,  $c=1.5a$ ). On représente par des indices 1, 2, 3 respectivement les directions principales de symétries a, b, c du volume élémentaire représentative. Les inclusions sont des vides sphériques ou des sphères rigides. Ces applications ont été faites avec la méthode du cluster, le modèle cluster-Mori-Tanaka ayant prédit des résultats semblables. Nous ne disposons malheureusement pas de résultats des autres modèles (qui décrivent les matériaux composites à structure périodique) pour ces différentes répartitions spatiales, lesquels nous auraient permis de statuer sur la validité de notre modèle.

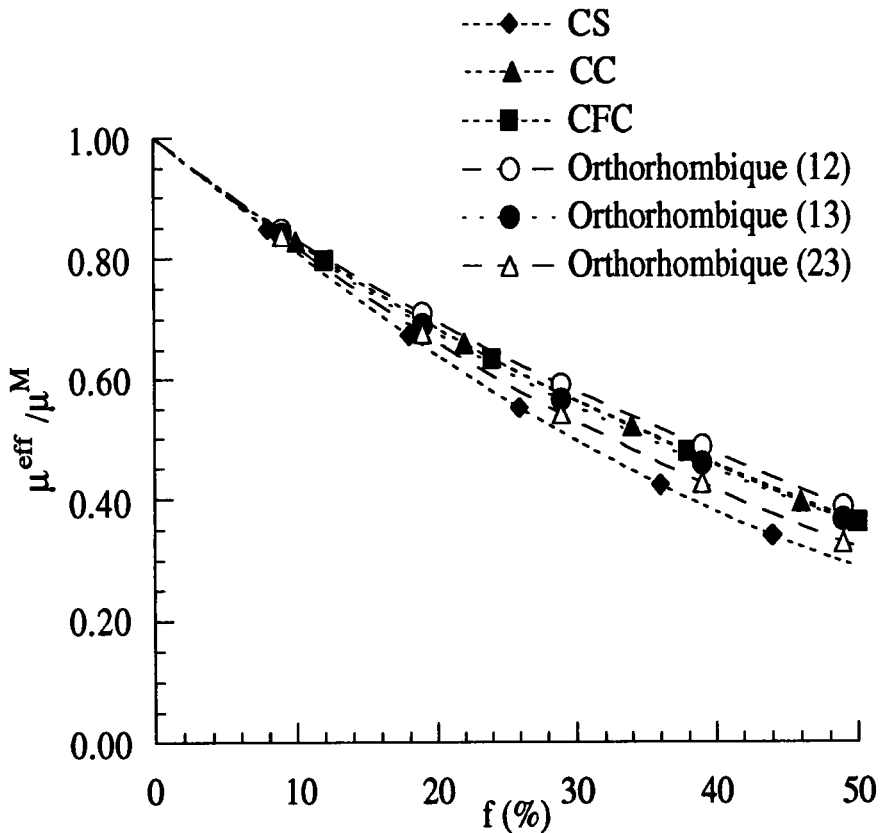


Figure III.17 : Illustration des effets de la distribution spatiale de vides sphériques, pour différentes répartitions. Les indices 1,2,3 représentent resp. les directions a,b,c du VER.

Nous avons étudié la variation des modules de cisaillement effectifs (normalisés par le module de cisaillement de la matrice), dans les directions principales de symétries, en fonction de la fraction volumique des sphères. On constate un comportement global anisotrope pour certaines répartitions (tétraogonales et orthorhombiques), qui augmente sensiblement avec la fraction volumique. On s'aperçoit aussi d'un écart entre les modules des différentes répartitions qui augmente avec la fraction volumique. Sur la figure III.17 (représentant des distributions de vides sphériques), l'écart maximal est de 30% entre le réseau cubique simple et le réseau orthorhombique, et de 32% entre le réseau cubique simple et la répartition orthorhombique sur la figure III.18 (donnant la variation du module de cisaillement en fonction de la fraction volumique de sphères rigides).

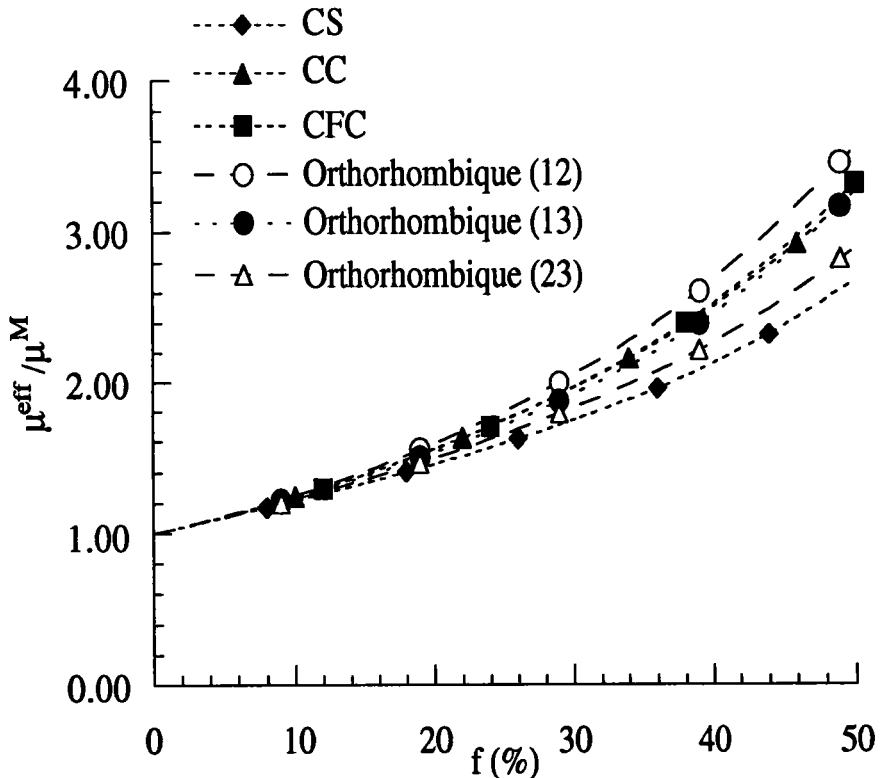


Figure III.18 : Illustration des effets de la répartition spatiale de sphères rigides. Les indices 1,2,3 représentent resp. les directions a,b,c du VER.



### **III.5- CONCLUSIONS**

Dans ce chapitre, nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par les autres modèles cités dans le premier chapitre de ce travail, avec ceux déterminés par la méthode des éléments finis et avec des résultats expérimentaux. Nous avons constaté que les modèles de Mori-Tanaka, trois phases et différentiel semblent être plus proches de la réalité que le schéma autocohérent à 1-site. Nous avons aussi remarqué une très bonne corrélation entre les prévisions de la méthode du cluster avec les résultats expérimentaux de Walsh et al. (1965) et avec les résultats des modèles analytiques (Nemat-Nasser et al., 1982, Nunan et Keller, 1984, Rodin, 1993) ou numériques (Brockenbrough et al., 1992, Rodin, 1993) qui tiennent compte de la répartition spatiale des inclusions dans le matériau. L'avantage de notre modèle réside dans sa souplesse et dans les résultats semi-analytiques fournis dans les situations les moins compliquées. La simplicité du modèle du cluster nous a permis d'étudier plusieurs répartitions spatiales de sphères.

Nous avons combiné le cluster avec la méthode de Mori-Tanaka, en prenant les idées de base de la méthode du cluster, et celles de Mori-Tanaka : au lieu de prendre une inclusion entourée de matrice homogène infinie, nous avons pris un ensemble d'inclusions (dont les centres se trouvent dans un cube) entourées de matrice homogène infinie. Nous avons ainsi apporté une correction significative à la méthode de Mori-Tanaka, qui ne prenait pas en compte la répartition spatiale des inclusions dans la matrice.

## **CONCLUSION GÉNÉRALE**

Dans ce travail, nous avons développé de nouvelles méthodes permettant, à partir de la solution du problème d'inclusions multiples hétérogènes, de prendre en compte les effets de la répartition spatiale des inclusions sur les propriétés effectives globales. Ces méthodes élargissent les champs d'applications des problèmes classiques d'inclusions d'Eshelby. Elles font apparaître explicitement la connexion entre inclusions et matrice :

(1) cluster : applicable aux cas d'inclusions élastiques de formes ellipsoïdales distribuées périodiquement ou non périodiquement dans une matrice élastique homogène infinie. Dans le cas d'inclusions sphériques, les résultats prédits par cette méthode sont en très bonne corrélation avec les résultats obtenus par les modèles d'homogénéisation des matériaux composites à structures périodiques, et avec les résultats expérimentaux. Ces calculs ont été étendus à des situations plus complexes prenant en compte des populations d'ellipsoïdes distribuées périodiquement dans une matrice homogène isotrope infinie.

(2) cluster-Mori-Tanaka : elle est la combinaison entre la méthode du cluster et celle de Mori-Tanaka ; son domaine d'application est le même que celui de la méthode du cluster. Les résultats de cette méthode dans le cas des milieux inclusionnaires périodiques, sont proches de ceux de la méthode du cluster. Cette méthode est adaptée au milieux inclusionnaires constitués par des inclusions réparties en clusters isolés dans une matrice élastique homogène infinie

(3) cluster-autocohérent : applicable aux matériaux composites à fibres longues et de sections rectangulaires, réparties suivant une structure périodique. Les résultats de cette méthode ont été comparés favorablement à des résultats analytiques.

L'avantage de ces méthodes proposées réside dans leurs facilités de mise en oeuvre, et dans les résultats semi-analytiques fournis dans les situations les plus simples et leurs rapidités.

Il est évident que pour obtenir des résultats simples et pratiques, nous nous sommes restreints aux hypothèses classiques usuelles des problèmes d'inclusions :

- déformation élastique et comportement constants par morceaux,
- forme ellipsoïdale ou parallélépipédique rectangle des inclusions,

En théorie, ces restrictions limitent le champ d'application des résultats obtenus, mais permettent cependant de traiter un grand nombre de problèmes.

Nous pensons que les résultats présentés dans ce travail ouvrent un large champ d'investigations micromécaniques et structurales qui permettent d'apporter un nouveau développement aux phénomènes d'endommagement (interaction entre précipités, entre fissures ....).

## **RÉFÉRENCES**

- 
- Aboudi, J. (1983), The effective moduli of short-fiber composites, *Int. J. Solids Struct.* 19, 693-707.
- Aboudi, J. (1991), *Mechanics of composite materials - A unified micromechanical approach*, Elsevier, Amsterdam, 35-111.
- Accorsi, M. L. and Nemat-Nasser, S. (1986), Bounds on the overall elastic and instantaneous elastoplastic moduli of periodic composites, *Mech. Mater.* 5, 209-220.
- Adams, Canova, G. R. and Molinari, A. (1989), *Textures and microstructure*.
- Afzali, H. and Nemat-Nasser, S. (1979), Radiation effects on elasticity of metals, *J. Nucl. Mat.* 87, 175-184.
- Ahzi, S. (1995). Communication personnelle.
- Ahzi, S., Molinari, A. and Canova, G. R. (1990). Effect of grain shape on the texture evolution of a polycrystalline material, *Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids*, EGF5 (Edited by J. P. Boehler), Mechanical Engineering Publ., London, 425-441.
- Batchelor, G. K. and Green, J. T. (1972), The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c^2$ , *J. Fluid Mech.* 56, 401-427.
- Benveniste, Y. (1987), A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, *Mech. Mater.* 6, 147-157.
- Berthelot, J. -M. (1992), *Matériaux composites : comportement mécanique et analyse des structures*, Masson, Paris, 149-183.
- Berveiller, M., Fassi-Fehri, O. et Hihi, A. (1986), Détermination du comportement élastique effectif d'un matériau composite à partir d'un modèle autocohérent à plusieurs sites, *Comptes rendus des 5<sup>ème</sup> Journées Nationales sur les Composites (JNC5)*, Paris, 237-247.
- Berveiller, M., Fassi-Fehri, O. and Hihi, A. (1987), The problem of two inclusions in an

- anisotropic medium, *Int. J. Engng. Sci.* 25, 691-709.
- Berveiller, M. et Zaoui, A. (1980), Méthodes self-consistantes en mécanique des milieux continus, *Comptes Rendus du 15<sup>ème</sup> Colloque du Groupe Français de Rhéologie, comportement rhéologique et structure des matériaux*, Paris, 175-199.
- Berveiller, M. et Zaoui, A. (1982), *Colloque International du CNRS, N° 139*.
- Boucher, S. (1974), On the effective moduli of isotropic two-phase elastic composites, *J. Compos. Mater.* 8, 82-89.
- Breban, P. et Baptiste, D. (1990), *Modèle de Tanaka et Mori : Applications aux composites à fibres discontinues, 3<sup>ème</sup> Colloque Annuel MECAMAT, Evian*.
- Brockenbrough, J. R., Wienecke, H. A. and Romanko, A. D. (1992), A unit cell model of a particulate composite.
- Budiansky, B. (1965), On the elastic moduli of some heterogeneous materials, *J. Mech. Phys. Solids* 13, 223-227.
- Budiansky, B. and Wu, T. T. (1962), Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals, *Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1175-1185.
- Buryachenko, V. A. (1987), Correlation function for stress field in matrix composites, *Mekhanika Tverdogo Tela*, No 3, 69-76, (In Russian. Engl. Transl. *Mech. Solids* 22, 66-73).
- Buryachenko, V. A. and Lipanov, A. M. (1986), Stress concentration at ellipsoidal inclusions and effective thermoelastic properties of composite materials, *Prikladnaya Mekhanika*, No 11, 105-111, (In Russian. Engl. Transl. *Soviet Appl. Mech.* 22, 1103-1109).
- Buryachenko, V. A. and Kreher, W. W. (1995), Internal residual stresses in heterogeneous solids-A statistical theory for particulate composites, *J. Mech. Phys. Solids* 43, 1105-1125.
- Canova, G. R., Wenk, H. R. and Molinari, A. (1992), Deformation modelling of multi-phase polycrystals: case of a quartz-mica aggregate, *Acta Metall. Mater.* 40, 1519-1530.

- Chiu, Y. P. (1977), On the stress field due to initial strains in a cuboid surrounded by an infinite elastic space, *J. Appl. Mech.* 44, 587-590.
- Christensen, R. M. (1979), *Mechanics of composite materials*, Wiley-Interscience, New-York.
- Christensen, R. M. (1990), A critical evaluation for a class of micromechanics models, *J. Mech. Phys. Solids* 38, 379-404.
- Christensen, R. M. and Lo, K. H. (1979), Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models, *J. Mech. Phys. Solids* 27,315-330.
- Christensen, R. M. and Lo, K. H. (1986), Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models, *J. Mech. Phys. Solids* 34, 639 (Erratum).
- Cleary, M. P., Chen, I. -W. and Lee, S. -M.(1980), Self-consistent techniques of heterogeneous media, *J. Engrn. Mech. Div. ASCE* 106, 861-887.
- Dederichs, P. H. and Zeller, R. (1973), Variational treatment of the elastic constants of disordered materials, *Z. Physik* 259, 103-116.
- Dewey, J. M. (1947), The elastic constants of materials loaded with non-rigid fillers, *J. Appl. Phys.* 18, 578-581.
- Einstein, A. (1911), *Annalen der Physik* 34, 591.
- El Mouden, M. and Molinari, A. (1995), Acluster approach of the elastic interaction of inclusions, *C. R. Acad. Sci. Paris série II (Soumis pour publication)*.
- Eshelby, J. D. (1956), The continuum theory of lattice defects, in *Progress in Solid State Physics*, Vol. 3, F. Seitz and D. Turnbull, Eds., Academic, New York, p. 79.
- Eshelby, J. D. (1957), The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems, *Proc. R. Soc. Lond., Series A241*, 376-396.
- Eshelby, J. D. (1961), Elastic inclusions and inhomogeneities, in *Progress in Solid Mechanics* 2, eds. I. N. Sneddon and R. Hill. North-Holland, Amsterdam.
- Faivre, G. (1964), Hétérogénéité ellipsoïdales dans un milieu élastique anisotrope, *J. Physique* 32, 325-331.



- Fassi-Fehri, O. (1985), Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope. Application à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité, Thèse de Doctorat d'État, Université de Metz.
- Fassi-Fehri, O., Hihi, A. and Berveiller, M. (1989), Multiple site self consistent scheme, *Int. J. Engng. Sci.* 27, 495-502.
- François, D., Pineau, A. et Zaoui, A. (1991), Comportement mécanique des matériaux, Volume 1, Hermès, Paris, 85-144.
- Fröhlich, H. and Sack, R. (1946), Theory of the rheological properties of dispersions, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 185, 415-430.
- Ghahremani, F. (1977), Numerical evaluation of the stresses and strains in ellipsoidal inclusions in an anisotropic elastic material, *Mech. Res. Commun.* 4, 89-91.
- Gilormini, P. (1992a), Application d'un modèle autocohérent à un agrégat élastique isotrope transverse incompressible, *C. R. Acad. Sci. Paris Série II* 314, 333-338.
- Gilormini, P. (1992b), Une présentation simplifiée de méthodes d'homogénéisation utilisées pour les matériaux désordonnés, Rapport interne LMT N° 132.
- Gilormini, P. et Vernusse, Ph. (1992), Tenseur d'Eshelby et problème d'inclusion dans le cas isotrope transverse incompressible, *C. R. Acad. Sci. Paris Série II* 314, 257-261.
- Goodier, J. N. (1933), Concentration of stress around spherical and cylindrical inclusions and flaws, *J. Appl. Mech.* 1, 39-44.
- Hashin, Z. (1962), The elastic moduli of heterogeneous materials, *J. Appl. Mech* 29, 143-150.
- Hashin, Z. (1965), On elastic behaviour of fiber reinforced materials of arbitrary transverse phase geometry, *J. Mech. Phys. Solids* 13, 119-134.
- Hashin, Z. (1966), Viscoelastic fiber reinforced materials, *AIAA J.* 4, 1411.
- Hashin, Z. (1988), The differential scheme and its application to cracked materials, *J. Mech. Phys. Solids* 21, 236-241.
- Hashin, Z. and Rosen, B. W. (1964), The elastic moduli of fiber reinforced materials, *J.*

- 
- Appl. Mech. 31, 223-232.
- Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1962a), On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity, *J. Mech. Phys. Solids* 10, 335-342.
- Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1962b), A variational approach to the theory of the elastic behaviour of polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids* 10, 343-352.
- Hashin, Z. and Shtrikman, S. (1963), A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids* 11, 127-140.
- Hermans, J. J. (1967), The elastic properties of fiber reinforced materials when the fibers are aligned, *Proc. K. Ned. Akad. Wet. B* 70, 1.
- Hershey, A. V. (1954), The elasticity of an isotropic aggregate of anisotropic cubic crystals, *J. Appl. Mech.* 21, 236-241.
- Hervé, E., Stolz, C. et Zaoui, A. (1991), A propos de l'assemblage de sphères composites de Hashin, *C. R. Acad. Sci. Paris Série II* 313, 857-862.
- Hill, R. (1952), The elastic behavior of crystalline aggregate, *Proc. Phys. Soc. A* 65, 349-354.
- Hill, R. (1964), Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials - I: Elastic behavior, *J. Mech. Phys. Solids* 12, 199-212.
- Hill, R. (1965a), Theory of mechanical properties of fibre-strengthened materials - III: Self-consistent model, *J. Mech. Phys. Solids* 13, 189-198.
- Hill, R. (1965b), A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids* 13, 213-222.
- Iwakuma, T. and Nemat-Nasser, S. (1983), Composites with periodic microstructure, *Computers & structures* 16, 13-19.
- Johson, W. C. (1983), *Met. Trans.*, 14a
- Kerner, E. H. (1956), The elastic and thermo-elastic properties of composite media, *Proc. Phys. Soc.* 69, 808-813.
- Kneer, G. (1965), Über die berechnung der elastizitätsmoduln vielkristalliner aggregate mit textur, *Phys. Stat. Sol.* 9, 825-838.

- 
- Kröner, E. (1958), Berechnung der elastischen konstanten des vielkristalls aus den konstanten des einkristalls. *Z. Phys.* 151, 504-518.
- Kröner, E. (1961), Zur plastischen verformung des vielkristalls, *Act. Metall.* 9, 155-161.
- Kröner, E. (1977), On bounds for effective elastic moduli of desordered materials, *J. Mech. Phys. Solids* 25, 137-155.
- Kröner, E. (1980a), Graded and perfect disorder in random media elasticity, *J. Eng. Mech. Division* 106, No. EM5, 889-914.
- Kröner, E. (1980b), Linear properties of random media : the systematic theory, *Comptes Rendus du 15<sup>ème</sup> colloque du Groupe Français de Rhéologie, Paris.*
- Laws, N. (1977), The determination of stress and strain concentration at an ellipsoidal inclusion in an anisotropic material, *J. Elasticity* 7, 91-79.
- Laws, N. and McLaughlin, R. (1979), The effect of fiber length on the overall moduli of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids* 27, 1-13.
- Léné, F. (1984), Contribution à l'étude des matériaux composites et de leur endommagement, Thèse de Doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- McLaughlin, R. (1977), A study of the differential scheme for composite materials, *Int. J. Eng. Sci.* 15, 237-244.
- Mackenzie, J. K. (1950), The elastic constants of solid containing spherical holes, *Proc. Phys. Soc. B* 63, 2-11.
- Mandelbort, B. B. (1977), *The fractal geometry of nature*, W. H. Freeman, New York.
- Molinari, A., Canova, G. R. and Ahzi, S. (1987), A self-consistent approach of the large deformation polycrystal viscoplasticity, *Acta Metall.* 35, 2983-2994.
- Molinari, A. and El Mouden, M. (1995), The problem of elastic inclusions at finite concentration, *Int. J. Solids Structures* (Soumis pour publication).
- Molinari, A. and Tóth, L.S. (1994), Tuning a self consistent viscoplastic model by finite element results - I. Modeling, *Acta Met. Mater.* 42, 2453-2458.

- 
- Mori, T. and Tanaka, K. (1973), Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Met.* 21, 571-574.
- Morris, P. R. (1970), Elastic constants of polycrystals, *Int. J. Engng Sci.* 8, 49-61.
- Moschovidis, Z. A. and Mura, T. (1975), Two-ellipsoidal inhomogeneities by the equivalent inclusions method, *J. Appl. Mech.* 42, 847-852.
- Mura, T. (1971), Displacement and plastic distortion fields produced by dislocations in anisotropic media, *J. Appl. Mech.* 38, 865-868.
- Mura, T. (1987), *Micromechanics of defects in solids*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- Nemat-Nasser, S. and Taya, M. (1981), On the effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids, *Quarterly Applied Math.* 39, 43-59.
- Nemat-Nasser, S., Iwakuma, T. and Hejazi, M. (1982), On composites with periodic structure, *Mech. Mater.* 1, 239-267.
- Nemat-Nasser, S. and Taya, M. (1985), On the effective moduli of an elastic body containing periodically distributed voids (Comments and corrections), *Quarterly Applied Math.* 43, 187-188.
- Nemat-Nasser, S. and Hori, M. (1990), Elastic solids with microdefects, in *Micromechanics and inhomogeneity - The T. Mura 65th anniversary volume*, Springer-Verlag, New York, 297-320.
- Nemat-Nasser, S., Yu, N. and Hori, M. (1992), Bounds and estimates of overall moduli of composites with periodic microstructure, *Mech. Mat.* 15, 163-181.
- Nemat-Nasser, S. and Hori, M. (1993), *Micromechanics : Overall properties of heterogeneous solids*, Elsevier Science Publishers, North-Holland.
- Nemat-Nasser, S. Yu, N. and Hori, M. (1993), Solids with periodically distributed cracks, *Int. J. Solids Structures* 30, 2071-2095.
- Norris, A. N. (1985), A differential scheme for the effective moduli of composites, *Mech. Mater.* 4, 1-16.
- Nunan, K. C. and Keller, J. B. (1984), Effective elasticity tensor of a periodic com-

- 
- posite, *J. Mech. Phys. Solids* 32, 259-280.
- Peyroux, R. (1990), *Caractéristiques thermoélastiques de matériaux composite à fibres courtes*, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Université Montpellier II, Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier.
- Peyroux, R. et Suquet, P. (1989), *Caractéristiques thermoélastiques d'un composite à fibres courtes*, 394-395.
- Qiu, Y. P. and Weng, G. J. (1990), *On the application of Mori-Tanaka's theory involving transversely isotropic spheroidal inclusions*, *J. Engng. Sci.* 28, 1121-1137.
- Reuss, A. (1929), *Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle*, *Z. Angew. Math. Mech.* 9, 49-58.
- Rodin, G. J. (1993), *The overall elastic response of materials containing spherical inhomogeneities*, *Int. J. Solids Structures* 30, 1849-1863.
- Roscoe, R. (1952), *The viscosity of suspensions of rigid spheres*, *Brit. J. Appl. Phys.* 3, 267-269.
- Roscoe, R. (1973), *Isotropic composites with elastic or viscoelastic phases : General bounds for the moduli and solutions for special geometries*, *Rheol. Acta* 12, 404-411.
- Russel W. B. (1973), *On the effective moduli of composite materials : effect of fiber length and geometry at dilute concentrations*, *J. Appl. Math. Phys.* 24, 581-600.
- Sangani, A. S. and Lu, W. (1987), *Elastic coefficients of composites containing spherical inclusions in a periodic array*, *J. Mech. Phys. Solids* 35, 1-21.
- Sen, P. N., Scala, C. and Cohen, M. H. (1981), *A self similar model for sedimentary rocks with application to the dielectric constant of fused glass beads*, *Geophysics* 46, 781-795.
- Sheng, P. and Callegari, A. J. (1984), *Differential effective medium theory for sedimentary rocks*, in : *Physics and Chemistry of Porous Media*, AIP Conference Proceedings, American Institute of Physics, New York, Vol. 107.
- Smith, J. C. (1974), *Correction and extension of van der Poel's method for calculating*

- 
- the shear modulus of a particule composite, *J. Res. Natl. Bur. Stand. Sect. A* 78, 355-361.
- Stolz, C. et Zaoui, A. (1991), Modélisation micromécanique à base d'inclusions composites, in *Mécanique, modélisation numérique et dynamique des matériaux*, publication du LMA N° 124, Marseille, 191.
- Suquet, P. (1982), *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris.
- Takao, Y., Chou, T. W. and Taya, M. (1982), Effective longitudinal Young's modulus of misoriented short fiber composites, *J. Appl. Mech.* 49, 536-540.
- Thomas, D. G. (1965), *J. Colloid Sci.* 20, 267.
- Tóth, L.S., Molinari, A. and Bons, P. D. (1994), Self consistent modelling of the creep behavior of mixtures of camphor and octachloropropane, *Mat. Sci. Engng.* A175, 231-236.
- van der Poel, C. (1958), On the rheology of concentrated dispersions, *Rheol. Acta* 1, 198-205.
- Voigt, L. J. (1889), *Über die beziehung zwischen den beiden elastizitäts konstanten isotroper körper*, *Wied. Ann.* 33, 573-587. (Lehrbuch der kristallphysik, Teubner, Leipzig)
- Walpole, L. J. (1966a), On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems -I, *J. Mech. Phys. Solids* 14, 151-162.
- Walpole, L. J. (1966b), On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems -II, *J. Mech. Phys. Solids* 14, 289-301.
- Walpole, L. J. (1967), The elastic field of an inclusion in anisotropic medium, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* 300, 270-289.
- Walpole, L. J. (1969), On the overall elastic moduli of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids* 17, 235-251.
- Walpole, L. J. (1970), Strengthening effects in elastic solids, *J. Mech. Phys. Solids* 18, 343-358.

- Walsh, J. B., Brace, W. F. and England, A. W. (1965), The effect of porosity on compressibility of glass, *J. Am. Ceram. Soc.* 48, 605-608.
- Weng, G. J. (1984), Some elastic properties of reinforced solids, with special reference to isotropic ones containing special inclusions, *Int. J. Engng. Sci.* 22, 845-856.
- Weng, G. J. (1992), Explicit evaluation of Willis' bounds with ellipsoidal inclusions, *Int. J. Engng. Sci.* 30, 83-92.
- Willis, J. R. (1970), Stress fields produced by dislocations in anisotropic media, *Phil. Mag.* 21, 931-949.
- Willis, J. R. (1977), Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites, *J. Mech. Phys. Solids* 25, 185-202.
- Willis, J. R. (1983), The overall elastic response of composite materials, *J. Appl. Mech.* 50, 1202-1209.
- Willis, J. R. and Acton, J. R. (1976), The overall elastic moduli of a dilute suspension of spheres, *Q. J. Mech. Appl. Math.* 29, 163-177.
- Wu, T. T. (1966), The effect of inclusion shape on the elastic moduli of a two-phase material, *Int. J. Solids Structures* 2, 1-8.
- Zeller, R. and Dederichs, P. H. (1973), Elastic constants of polycrystals, *Phys. Status Solidi B* 55, 831-842.
- Zimmerman, R. W. (1991), Elastic moduli of solid containing spherical inclusions, *Mech. Mater.* 12, 17-24.
- Zuzovsky, M., Adler, P. M. and Brenner, H. (1983), Spatially periodic suspensions of convex particles in linear shear flows III. Dilute arrays of spheres suspended in Newtonian fluids, *Physics Fluids* 26, 1714-1723.

## **ANNEXES**



---

## Annexe A

### Calcul des tenseurs d'interactions $\Gamma^{IJ}$ par la méthode de la transformée de Fourier

L'évaluation du tenseur  $\Gamma^{IJ}$  pour un milieu anisotrope est complexe à cause de la présence du tenseur de Green, qui, pour un tel milieu ne peut se calculer explicitement pour une anisotropie quelconque. Une méthode numérique, pour le problème d'une inclusion ellipsoïdale (évaluation de  $\Gamma^{II}$ ), a été proposée par Kneer (1965) et reprise par Mura (1973), Laws (1977) et Ghahremani (1977) : elle consiste à utiliser la transformée de Fourier du tenseur de Green  $\underline{\mathbf{G}}$  et à intégrer sur l'espace de  $\underline{\mathbf{k}}$  (conjugué de  $\underline{\mathbf{x}}$ ). Fassi-Fehri (1985) lors de son étude de la paire d'inclusions, et Berveiller et al. (1987) ont utilisé une méthode analogue pour le calcul des composantes du tenseur  $\Gamma^{IJ}$  dans le cas de deux inclusions ellipsoïdales dans un milieu anisotrope. Nous donnerons dans cette Annexe les résultats de  $\Gamma^{IJ}$  dans le cas de deux inclusions sphériques. Et nous présenterons aussi les calculs de  $\Gamma^{IJ}$  dans le cas de deux inclusions parallélépipédiques rectangles, obtenus en utilisant une méthode de calcul qui a été développée pour des cubes par Adams et al. (1989).

Dans le cas de deux inclusions sphériques de rayons respectivement  $a$  et  $b$ , pour un milieu isotrope caractérisé par les constantes élastiques  $\mu, \nu$ , Berveiller et al. (1987) ont calculé les composantes du tenseur  $\Gamma^{IJ}$  analytiquement, en considérant un repère orthonormé  $R(O, x_1, x_2, x_3)$  tel que l'axe  $Ox_3$  passe par les centres  $O_1$  et  $O_2$  des deux

sphères. On note par  $R$  la distance entre les centres des deux inclusions  $I$  et  $J$ . On désigne par  $V_J = 4/3 \pi b^3$  le volume de la sphère  $J$ . Les composantes non nulles de  $\Gamma^{IJ}$  sont données par les relations suivantes si  $I \neq J$  :

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{1111}^{IJ} &= \Gamma_{2222}^{IJ} = \frac{-V_J}{16\pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left( 1 - 4\nu + \frac{9}{5}\rho^2 \right) \\
 \Gamma_{1122}^{IJ} &= \Gamma_{2211}^{IJ} = \frac{-V_J}{16\pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left( -1 + \frac{3}{5}\rho^2 \right) \\
 \Gamma_{1133}^{IJ} &= \Gamma_{2233}^{IJ} = \Gamma_{3311}^{IJ} = \Gamma_{3322}^{IJ} = \frac{-V_J}{16\pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left( 2 - \frac{12}{5}\rho^2 \right) \\
 \Gamma_{1212}^{IJ} &= \Gamma_{1221}^{IJ} = \Gamma_{2121}^{IJ} = \Gamma_{2112}^{IJ} = \frac{-V_J}{16\pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left( 1 - 2\nu + \frac{3}{5}\rho^2 \right) \\
 \Gamma_{1313}^{IJ} &= \Gamma_{1331}^{IJ} = \Gamma_{3113}^{IJ} = \Gamma_{3131}^{IJ} = \frac{-V_J}{16\pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left( 1 + \nu - \frac{12}{5}\rho^2 \right) \\
 \Gamma_{2323}^{IJ} &= \Gamma_{2332}^{IJ} = \Gamma_{3223}^{IJ} = \Gamma_{3232}^{IJ} = \frac{-V_J}{16\pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left( 1 + \nu - \frac{12}{5}\rho^2 \right) \\
 \Gamma_{3333}^{IJ} &= \frac{-V_J}{16\pi R^3} \frac{1}{\mu(1-\nu)} \left( -8 + 8\nu + \frac{24}{5}\rho^2 \right)
 \end{aligned}
 \tag{A-1}$$

où  $\rho^2 = (a^2 + b^2)/R^2$

On remarque que  $\Gamma_{ijkl}^{IJ} = 0$  quand il y a trois indices différents, ou quand il y a trois indices identiques, mais différents du quatrième.

Si  $I=J$ , on a :

$$\Gamma_{ijkl}^{II} = \frac{-1}{30\mu(1-\nu)} \left\{ 2(4-5\nu)I_{ijkl} - \delta_{ij}\delta_{kl} \right\}
 \tag{A-2}$$

Dans le cas de deux inclusions parallélépipédiques rectangle, on donnera ci-dessous l'expression du tenseur d'interaction  $\Gamma_{ijkl}^{IJ}$ , défini par la relation (II-30), qui est la partie symétrique du tenseur  $\gamma_{ijkl}^{II}$  (défini ci-dessous). Soient  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ , les dimensions du parallélépipède rectangle  $I$ , et  $\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3$ , ceux du parallélépipède rectangle  $J$ . On note par  $R^0$  la distance entre les centres des deux inclusions  $I$  et  $J$ .  $\gamma_{ijkl}^{II}$  est donné par la relation suivante :

$$\gamma_{mnij}^{II} = \frac{1}{V_I} \left( \frac{-1}{8\pi^3} \right) \int_{R^3} d\mathbf{k} k_n k_j \tilde{G}_{mi}(\mathbf{k}) \int_{V_I} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} \int_{V_J} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} d\mathbf{x}'
 \tag{A-3}$$

En introduisant les cosinus directeurs de  $\underline{k}$  qu'on notera  $\chi$ , le tenseur ( $k^2 \tilde{G}_{mi}$ ) s'exprime uniquement en fonction des angles  $\theta$  et  $\varphi$  en coordonnées sphériques. On note par  $k$  le module de  $\underline{k}$ , défini par la relation :  $\underline{k} = k \chi$ .

Après utilisation de la transformée de Fourier du tenseur de Green, l'expression de  $\gamma_{ijkl}^{\Pi}$  devient (voir Adams et al., 1989) :

$$(A-4) \quad \gamma_{ijmn}^{\Pi} = \frac{1}{V_I} \frac{-1}{8\pi^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta F(\theta, \varphi) \chi_j \chi_n (k^2 \tilde{G}_{im})$$

où

$$(A-5) \quad F(\theta, \varphi) = \left( \frac{8}{\chi_1 \chi_2 \chi_3} \right)^{2+\infty} \int_0^{+\infty} \left\{ \cos(ck) \sin\left(\frac{1}{2} \chi_1 \Delta_1 k\right) \sin\left(\frac{1}{2} \chi_2 \Delta_2 k\right) \sin\left(\frac{1}{2} \chi_3 \Delta_3 k\right) \right. \\ \left. \sin\left(\frac{1}{2} \chi_1 \Delta'_1 k\right) \sin\left(\frac{1}{2} \chi_2 \Delta'_2 k\right) \sin\left(\frac{1}{2} \chi_3 \Delta'_3 k\right) \right\} \frac{dk}{k^4}$$

avec :  $c = \underline{\chi} \cdot \underline{R}^o$ , et  $\chi_1 = \sin\theta \cos\varphi$ ,  $\chi_2 = \sin\theta \sin\varphi$ ,  $\chi_3 = \cos\theta$

Pour calculer  $F(\theta, \varphi)$  on pose :

$$(A-6) \quad S_i = \sin\left(\frac{1}{2} \chi_i \Delta_i k\right) \sin\left(\frac{1}{2} \chi_i \Delta'_i k\right) \quad (i=1,2,3)$$

$S_i$  peut s'écrire sous la forme :

$$(A-7) \quad S_i = \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{1}{2} \chi_i (\Delta_i - \Delta'_i) k\right) - \cos\left(\frac{1}{2} \chi_i (\Delta_i + \Delta'_i) k\right) \right]$$

On note :

$$(A-8) \quad \delta_i = \frac{1}{2} (\Delta_i - \Delta'_i) \quad , \quad \eta_i = \frac{1}{2} (\Delta_i + \Delta'_i)$$

ce qui permet d'écrire  $S_i$  sous la forme plus simple :

$$(A-9) \quad S_i = \frac{1}{2} [\cos(\delta_i \chi_i k) - \cos(\eta_i \chi_i k)]$$

Avec ces notations, on obtient :

$$\cos(ck) S_1 S_2 S_3 = [ Q_1 - Q_2 - Q_3 + Q_4 - Q_5 + Q_6 + Q_7 - Q_8 ] / 8$$

où

$$(A-10) \quad \begin{aligned} Q_1 &= \cos(ck) \cos(\delta_1 \chi_1 k) \cos(\delta_2 \chi_2 k) \cos(\delta_3 \chi_3 k) \\ Q_2 &= \cos(ck) \cos(\delta_1 \chi_1 k) \cos(\delta_2 \chi_2 k) \cos(\eta_3 \chi_3 k) \\ Q_3 &= \cos(ck) \cos(\delta_1 \chi_1 k) \cos(\eta_2 \chi_2 k) \cos(\delta_3 \chi_3 k) \\ Q_4 &= \cos(ck) \cos(\delta_1 \chi_1 k) \cos(\eta_2 \chi_2 k) \cos(\eta_3 \chi_3 k) \\ Q_5 &= \cos(ck) \cos(\eta_1 \chi_1 k) \cos(\delta_2 \chi_2 k) \cos(\delta_3 \chi_3 k) \\ Q_6 &= \cos(ck) \cos(\eta_1 \chi_1 k) \cos(\delta_2 \chi_2 k) \cos(\eta_3 \chi_3 k) \\ Q_7 &= \cos(ck) \cos(\eta_1 \chi_1 k) \cos(\eta_2 \chi_2 k) \cos(\delta_3 \chi_3 k) \\ Q_8 &= \cos(ck) \cos(\eta_1 \chi_1 k) \cos(\eta_2 \chi_2 k) \cos(\eta_3 \chi_3 k) \end{aligned}$$

Après quelques manipulations trigonométriques l'expression de  $Q_1$  devient :

$$(A-11) \quad Q_1 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \cos(q_i^1 k)$$

avec

$$(A-12) \quad \begin{aligned} q_1^1 &= c + \delta_1 \chi_1 + \delta_2 \chi_2 + \delta_3 \chi_3 \\ q_2^1 &= c + \delta_1 \chi_1 + \delta_2 \chi_2 - \delta_3 \chi_3 \\ q_3^1 &= c + \delta_1 \chi_1 - \delta_2 \chi_2 + \delta_3 \chi_3 \\ q_4^1 &= c + \delta_1 \chi_1 - \delta_2 \chi_2 - \delta_3 \chi_3 \\ q_5^1 &= c - \delta_1 \chi_1 + \delta_2 \chi_2 + \delta_3 \chi_3 \\ q_6^1 &= c - \delta_1 \chi_1 + \delta_2 \chi_2 - \delta_3 \chi_3 \\ q_7^1 &= c - \delta_1 \chi_1 - \delta_2 \chi_2 + \delta_3 \chi_3 \\ q_8^1 &= c - \delta_1 \chi_1 - \delta_2 \chi_2 - \delta_3 \chi_3 \end{aligned}$$

De la même façon, on obtient  $Q_2$  qui a l'expression suivante :

$$(A-13) \quad Q_2 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \cos(q_i^2 k)$$

où les  $q_i^2$  sont obtenus en remplaçant  $\delta_3$  par  $\eta_3$  dans l'expression de  $q_i^1$ .

$$(A-14) \quad Q_3 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \cos(q_i^3 k)$$

où les  $q_i^3$  sont obtenus en remplaçant  $\delta_2$  par  $\eta_2$  dans l'expression de  $q_i^1$ .

$$(A-15) \quad Q_4 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \cos(q_i^4 k)$$

où les  $q_i^4$  sont obtenus en remplaçant  $\delta_2$  par  $\eta_2$  et  $\delta_3$  par  $\eta_3$  dans l'expression de  $q_i^1$ .

$$(A-16) \quad Q_5 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \cos(q_i^5 k)$$

où les  $q_i^5$  sont obtenus en remplaçant  $\delta_1$  par  $\eta_1$  dans l'expression de  $q_i^1$ .

$$(A-17) \quad Q_6 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \cos(q_i^6 k)$$

où les  $q_i^6$  sont obtenus en remplaçant  $\delta_1$  par  $\eta_1$  et  $\delta_3$  par  $\eta_3$  dans l'expression de  $q_i^1$ .

$$(A-18) \quad Q_7 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \cos(q_i^7 k)$$

où les  $q_i^7$  sont obtenus en remplaçant  $\delta_1$  par  $\eta_1$  et  $\delta_2$  par  $\eta_2$  dans l'expression de  $q_i^1$ .

$$(A-19) \quad Q_8 = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 \cos(q_i^8 k)$$

où les  $q_i^8$  sont obtenus en remplaçant  $\delta_1$  par  $\eta_1$  et  $\delta_2$  par  $\eta_2$  et  $\delta_3$  par  $\eta_3$  dans l'expression de  $q_i^1$ .

L'expression de  $F(\theta, \varphi)$  devient alors :

$$(A-20) \quad F(\theta, \varphi) = \frac{8}{(\chi_1 \chi_2 \chi_3)^2} \int_0^{+\infty} \{Q_1 - Q_2 - Q_3 + Q_4 - Q_5 + Q_6 + Q_7 - Q_8\} \frac{dk}{k^4}$$

Dans cette expression de  $F(\theta, \varphi)$  on aura des intégrales du type :  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha k)}{k^4} dk$ . Le calcul

de ces différentes intégrales se fait aisément en utilisant la formule suivante :

$$(A-21) \quad \int_{\eta}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha k)}{k^4} dk = \frac{\cos(\alpha \eta)}{3\eta^3} - \frac{\alpha \sin(\alpha \eta)}{6\eta^2} - \frac{\alpha^2 \cos(\alpha \eta)}{6\eta} + \frac{\alpha^3}{6} \int_{\eta}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha k)}{k} dk,$$

quand  $\eta$  tend vers 0. En faisant des développements limités des fonctions cos et sin au voisinage de 0, on trouve :

$$(A-22) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha k)}{k^4} dk = \frac{\alpha^3}{6} \frac{\pi}{2} \text{Sgn}(\alpha) = \frac{\pi}{12} |\alpha|^3$$

d'où l'expression de la fonction  $F(\theta, \varphi)$  :

$$(A-23) \quad F(\theta, \varphi) = \frac{1}{(\chi_1 \chi_2 \chi_3)^2} \frac{\pi}{12} \left\{ \sum_{i=1}^8 |q_i^1|^3 - \sum_{i=1}^8 |q_i^2|^3 - \sum_{i=1}^8 |q_i^3|^3 + \sum_{i=1}^8 |q_i^4|^3 \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^8 |q_i^5|^3 + \sum_{i=1}^8 |q_i^6|^3 + \sum_{i=1}^8 |q_i^7|^3 - \sum_{i=1}^8 |q_i^8|^3 \right\}$$

En portant cette relation dans l'expression (A-4) pour calculer les tenseurs  $\gamma_{mnij}^U$ , le calcul des tenseurs d'interactions  $\Gamma_{mnij}^U$  se fait par symétrisation du tenseur  $\gamma_{mnij}^U$  :

$$(A-24) \quad \Gamma_{mnij}^U = \frac{1}{4} \left[ \gamma_{mnij}^U + \gamma_{nmij}^U + \gamma_{mnji}^U + \gamma_{nmji}^U \right]$$

## Annexe B

### Comparaison de la méthode du cluster avec le modèle de Mori-Tanaka

On considère une population d'inclusions sphériques. Nous allons montrer, pour deux familles d'inclusions, que la méthode du cluster à l'ordre 0, coïncide avec le modèle de Mori-Tanaka.

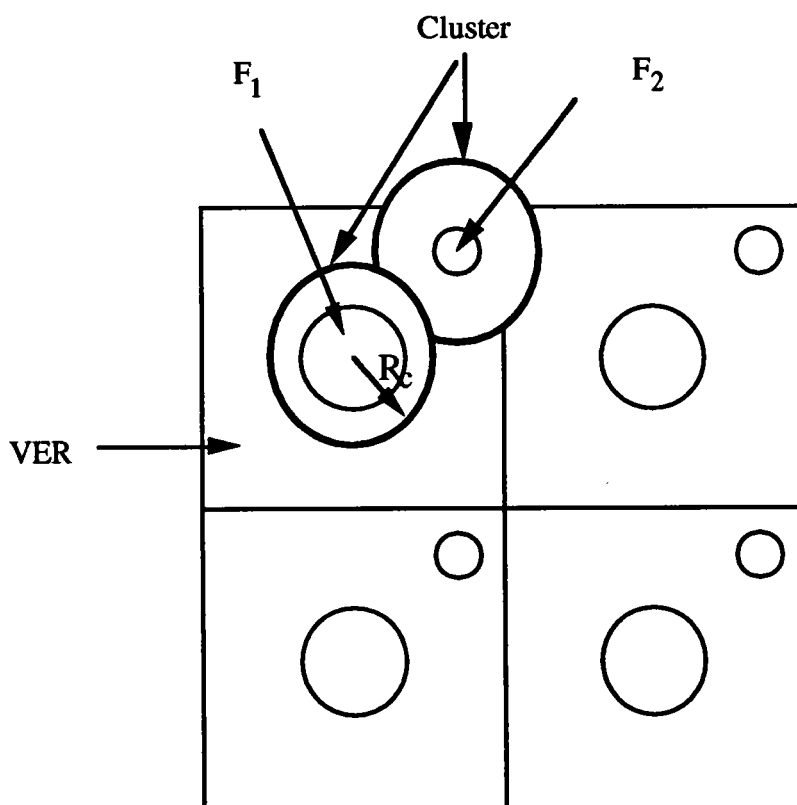


Figure B1 : Représentation schématique des clusters de deux inclusions, dans le cas d'une répartition périodique de deux familles d'inclusions.

La figure B1, montre une distribution spatiale périodique des deux familles de sphères élastiques  $F_1$  et  $F_2$ . Dans la méthode du cluster à l'ordre 0, chaque cluster contient une seule inclusion, donc on a :  $C_{12} = C_{21} = \emptyset$  ( $C_{12} = C_1 \cap F_2$ ) ; les relations (II-57) se réduisent à :

$$(B-1) \quad \begin{cases} [\underline{I} + (1 - f_1)\underline{E}^o : \delta\underline{C}^1] : \underline{\varepsilon}^1 - f_2 \underline{E}^o : \delta\underline{C}^2 : \underline{\varepsilon}^2 = \underline{E} \\ -f_1 \underline{E}^o : \delta\underline{C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 + [\underline{I} + (1 - f_2)\underline{E}^o : \delta\underline{C}^2] : \underline{\varepsilon}^2 = \underline{E} \end{cases}$$

Dans le cas des inclusions sphériques, on a :  $\underline{\Gamma}^{II} = -\underline{E}^o$  (voir Annexe A).

D'un autre côté, le modèle de Mori-Tanaka, dans le cas d'un triphasé, nous fournit les deux relations suivantes :

$$(B-2) \quad \begin{cases} \underline{\varepsilon}^1 = \underline{\varepsilon}^M - \underline{E}^o : \delta\underline{C}^1 : \underline{\varepsilon}^1 \\ \underline{\varepsilon}^2 = \underline{\varepsilon}^M - \underline{E}^o : \delta\underline{C}^2 : \underline{\varepsilon}^2 \end{cases}$$

Nous avons vu, dans le premier chapitre (I-5a), que la déformation moyenne dans la matrice  $\underline{\varepsilon}^M$  est reliée à la déformation macroscopique  $\underline{E}$  par la relation suivante :

$$(B-3) \quad \underline{E} = \langle \underline{\varepsilon} \rangle = f_1 \underline{\varepsilon}^1 + f_2 \underline{\varepsilon}^2 + (1 - f_1 - f_2) \underline{\varepsilon}^M$$

Par conséquent,  $\underline{\varepsilon}^M$  peut être éliminée dans les relations (B-2). Après quelques manipulations algébriques simples, on obtient un système d'équations identique à (B-1).



## Annexe C

### Méthode des cellules

Aboudi (1983) a proposé la méthode des cellules (voir aussi Aboudi, 1991) pour homogénéiser les matériaux composites, constitués par des fibres parallélépipédiques rectangles, identiques, de dimensions finies, homogènes isotropes de constantes de Lamé  $(\lambda^I, \mu^I)$ , noyées dans une matrice homogène isotrope de constantes de Lamé  $(\lambda^M, \mu^M)$ . Ces fibres sont distribuées d'une façon périodique. Ce modèle appliqué à un matériau composite unidirectionnel représenté sur les figures II.25 et II.26, donne l'expression de la matrice d'élasticité du matériau composite, notée  $C_{ij}^c$  :

$$\begin{aligned}
 C_{11}^c &= \left[ (h_f + h_m)^2 (\lambda^I + 2\mu^I) (\lambda^M + 2\mu^M) \right. \\
 &\quad \left. + 4h_f h_m (\mu^I - \mu^M) (\lambda^I + \mu^I - \lambda^M - \mu^M) \right] / \Delta \\
 C_{12}^c &= \left[ (h_f + h_m)^2 \lambda^I \lambda^M + 2(\lambda^I h_f + \lambda^M h_m) (\mu^I h_m + \mu^M h_f) \right] / \Delta \\
 C_{13}^c &= (h_f + h_m) \left[ \lambda^I h_f (\lambda^M + 2\mu^M) + \lambda^M h_m (\lambda^I + 2\mu^I) \right] / \Delta \\
 C_{33}^c &= (h_f + h_m)^2 (\lambda^I + 2\mu^I) (\lambda^M + 2\mu^M) / \Delta \\
 C_{44}^c &= \mu^I \mu^M (h_f + h_m) / (\mu^I h_m + \mu^M h_f) \\
 C_{66}^c &= (C_{11}^c - C_{12}^c) / 2
 \end{aligned}$$

avec

$$\Delta = (h_f + h_m) \left[ h_f (\lambda^M + 2\mu^M) + h_m (\lambda^I + 2\mu^I) \right]$$

## Résumé de la thèse :

La modélisation du comportement mécanique des matériaux hétérogènes est un thème important et classique en mécanique des milieux continus. Son importance est liée au rôle croissant joué aujourd'hui par les matériaux composites au besoin de comprendre leur comportement pour les concevoir et les utiliser de façon optimale. Cela a bien sûr suscité de nombreux travaux de recherche et plusieurs modèles ont déjà été développés ; c'est dans ce contexte que se situe le travail (uniquement théorique), que nous avons développé. Nous avons proposé trois variantes d'une nouvelle méthode (dite du 'cluster') pour prédire le comportement homogénéisé des matériaux hétérogènes. Il se limite au cas de l'élasticité linéaire, première étape naturelle en ce domaine, et restreint dans ses applications aux composites présentant une structure périodique.

Il s'agit de prendre en compte la répartition spatiale des hétérogénéités en considérant pour chacune d'entre elles un voisinage suffisamment vaste contenant un grand nombre d'hétérogénéités (cluster) en interaction. Le problème est d'abord formulé sous la forme d'une équation intégrale, comme cela est maintenant classique, et trois nouvelles solutions approchées sont avancées. Elles se distinguent par le comportement de référence et la déformation associée et constituent autant de variantes du modèle d'homogénéisation proposé, dénommées respectivement 'cluster' (avec comportement de la matrice et déformation auxiliaire), 'cluster-Mori-Tanaka' (avec comportement et déformation moyenne de la matrice) et 'cluster-autocohérent' (avec comportement effectif et déformation globale imposée).

Les deux premières variantes privilégient la présence d'une phase de matrice continue et seront donc appliquées à des composites inclusionnaires, alors que la dernière sera réservée à certains composites à fibres longues. Si chacune de ces approches s'applique clairement au cas des composites périodiques, l'extension à des milieux aléatoires a été évoquée pour la méthode du 'cluster'. Le comportement homogénéisé étant défini par la limite obtenue lorsque la taille du cluster croît (des analyses de convergence ont été présentées).

Cette étude a clairement montré l'effet de la répartition spatiale des hétérogénéités sur le comportement élastique effectif du composite. Les comportements prévus se comparent très favorablement aux résultats expérimentaux de la littérature et surtout aux prédictions des modèles destinés aux composites périodiques.

**MOTS-CLÉS** : Matériaux composites - Milieux hétérogènes - Milieux périodiques -  
Homogénéisation - Approximation autocohérente - Micromécanique - Élasticité.