



**HAL**  
open science

# Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants

Gabriela Iuliana Bara

► **To cite this version:**

Gabriela Iuliana Bara. Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants. Sciences de l'ingénieur [physics]. INPL - Institut National Polytechnique de Lorraine, 2001. Français. NNT : 2001INPL591N . tel-02007046

**HAL Id: tel-02007046**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02007046>**

Submitted on 5 Feb 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

1380272926

01 INPL 590 N



École doctorale IAEM Lorraine

Institut National  
Polytechnique de Lorraine

DFD Automatique et Production Automatisée

[P] 2001 BARA, G. I

# Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 21 décembre 2001

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine

Spécialité Automatique et Traitement du Signal

par

BARA Gabriela Iuliana

Service Commun de la Documentation  
INPL  
Nancy-Brabois

### Composition du jury

<i>Président :</i>	Claude IUNG	Professeur à l'INPL, Nancy (CRAN)
<i>Rapporteurs :</i>	Luc DUGARD	Directeur de Recherche CNRS, Grenoble (LAG)
	Germain GARCIA	Professeur à l'INSA, Toulouse (LAAS)
<i>Examineurs :</i>	Pierre APKARIAN	Ingénieur de recherche CERT-ONERA, Professeur associé à l'Université Paul Sabatier, Toulouse
	Frédéric KRATZ	Professeur à l'Université d'Orléans, IUT de Bourges (LVR)
	José RAGOT	Professeur à l'INPL, Nancy (CRAN)
	Jamal DAAFOUZ	Maître de Conférences à l'INPL, Nancy (CRAN)



*Dragilor mei părinți.*

*À mes chers parents.*



## Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), au sein du Groupe de Recherche en Automatique et Sécurité des Processus Hybrides (GRASPHY). Je remercie M. Francis LEPAGE, directeur du CRAN, et M. René HUSSON, responsable en 1999 du DFD Automatique et Production Automatisée, pour m'avoir aidé à trouver le climat et le cadre nécessaires à l'aboutissement de ce travail. Je remercie également M. Claude IUNG, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Lorraine (INPL), pour m'avoir accueilli au sein de son groupe de recherche.

J'exprime ma reconnaissance envers M. Luc DUGARD, directeur de recherche du CNRS au Laboratoire d'Automatique de Grenoble, et M. Germain GARCIA, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail. Ces remerciements s'adressent aussi à M. Pierre APKARIAN, ingénieur de recherche au Centre d'Études et de Recherche de Toulouse (CERT), et à M. Claude IUNG, Professeur à l'INPL, qui ont accepté de participer au jury de cette thèse.

Je suis également reconnaissante à mon Directeur de thèse M. Frédéric KRATZ, Professeur à l'Université d'Orléans, et à mon co-directeur de thèse M. José RAGOT, Professeur à l'INPL, sans qui je n'aurais pas découvert la thématique liée à ce travail.

Je voudrais tout particulièrement remercier M. Jamal DAAFOUZ, Maître des Conférences à l'INPL et co-encadrant de ma thèse, pour son soutien constant et pour sa disponibilité.

Je remercie tous mes collègues du CRAN qui ont su et pu me supporter durant tous ces années et qui ont contribué à la bonne ambiance qui a caractérisé le déroulement de cette thèse. J'adresse une mention tout particulière à Yasmina pour sa gentillesse, sa confiance et surtout pour son amitié sans faille et à Didier pour son aide dans les corrections de la thèse.

Je ne remercierai jamais assez ceux qui comptent le plus à mes yeux. Que ma famille et en particulier mes parents qui m'ont toujours soutenue pour réaliser l'essentiel de ma vie, trouve ici une petite preuve de mon amour. Je remercie de tout mon cœur mon copain pour son soutien et son amour qui ont toujours su parcourir les milliers de kilomètres interposés entre nous ces dernières années.





# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 Contexte et motivations</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	6
1.1.1 Système LPV . . . . .	6
1.1.2 Stabilité des systèmes LPV . . . . .	12
1.1.3 Performance et analyse des systèmes LPV . . . . .	15
1.1.4 Le problème de l'estimation d'état . . . . .	18
1.1.5 Le problème de la commande par retour d'état . . . . .	20
1.2 Inégalités linéaires matricielles . . . . .	21
1.2.1 Introduction . . . . .	21
1.2.2 LMI avec contrainte de rang . . . . .	22
1.2.3 LMI dépendant des paramètres . . . . .	23
1.3 Contexte du séquençement de gain : un état de l'art . . . . .	25
1.3.1 Introduction . . . . .	25
1.3.2 Approche conventionnelle du séquençement de gain . . . . .	31
1.3.3 Approches récentes du séquençement de gain . . . . .	36
1.4 Techniques LPV . . . . .	37
1.5 Conclusion . . . . .	40
<b>Chapitre 2 Synthèse d'observateurs LPV à temps continu : approche par interpolation</b>	<b>41</b>
2.1 Introduction . . . . .	42
2.2 Approche par interpolation polynomiale . . . . .	42
2.2.1 Formulation du problème . . . . .	43
2.2.2 Observateur d'ordre plein . . . . .	44
2.2.3 Exemple numérique . . . . .	48
2.2.4 Conclusion . . . . .	49

2.3	Approche par interpolation linéaire . . . . .	51
2.3.1	Positionnement du problème . . . . .	51
2.3.2	Méthode d'interpolation . . . . .	52
2.3.3	Synthèse de l'observateur LPV . . . . .	54
2.3.4	Conditions LMI sous contrainte de rang pour la synthèse de l'ob- servateur . . . . .	55
2.3.5	Conditions LMI pour la synthèse de l'observateur . . . . .	58
2.3.6	Applications numériques . . . . .	59
2.4	Conclusion . . . . .	66

**Chapitre 3 Synthèse d'observateurs LPV à temps continu : approche LPV 69**

3.1	Introduction . . . . .	70
3.2	Synthèse d'observateurs LPV . . . . .	70
3.2.1	Positionnement du problème . . . . .	71
3.2.2	Synthèse de l'observateur . . . . .	71
3.2.3	Implémentation numérique . . . . .	75
3.2.4	Exemple numérique . . . . .	76
3.2.5	Conclusion . . . . .	77
3.3	Lien entre l'approche par interpolation linéaire et l'approche LPV . . . . .	77
3.4	Problème dual : la commande par retour d'état . . . . .	80
3.4.1	Formulation du problème . . . . .	80
3.4.2	Synthèse du contrôleur . . . . .	81
3.4.3	Exemple numérique . . . . .	84
3.5	Application à la commande par retour d'état basée observateur . . . . .	85
3.6	Conclusion . . . . .	87

**Chapitre 4 Synthèse d'observateurs LPV à temps discret 89**

4.1	Introduction . . . . .	90
4.2	Synthèse d'observateurs LPV pour des systèmes affines . . . . .	90
4.2.1	Formulation du problème . . . . .	90
4.2.2	Première solution . . . . .	92
4.2.3	Deuxième solution . . . . .	94
4.3	Application à l'estimation d'état des systèmes à commutation . . . . .	97
4.4	Exemples numériques . . . . .	99

---

4.5 Conclusion . . . . .	101
<b>Conclusion générale</b>	<b>103</b>
<b>Annexes</b>	<b>107</b>
<b>Annexe A Algèbre linéaire</b>	<b>109</b>
A.1 Théorie des matrices . . . . .	110
A.1.1 Complément de Schur . . . . .	110
A.1.2 Élimination des matrices . . . . .	111
A.2 Conditions de rang pour la résolution d'un système d'équations . . . . .	112
<b>Annexe B Théorie des systèmes</b>	<b>115</b>
B.1 Stabilité des systèmes dynamiques . . . . .	116
B.1.1 Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	116
B.1.2 Méthode directe de Lyapunov . . . . .	118
<b>Annexe C Analyse convexe</b>	<b>121</b>
C.1 Rappels sur la convexité . . . . .	122
<b>Références bibliographiques</b>	<b>123</b>



# Table des figures

1.1	Les modèles linéaires . . . . .	7
1.2	L'observateur . . . . .	18
1.3	Le séquençement de gain . . . . .	27
1.4	Principe et classification du séquençement de gain . . . . .	28
2.1	Les valeurs propres de $A(\rho)$ . . . . .	49
2.2	Le polynôme d'interpolation, le paramètre $\rho(t)$ et les erreurs de reconstruction. . . . .	50
2.3	Les valeurs propres de $H(\rho)$ . . . . .	50
2.4	L'erreur d'estimation correspondant à l'évolution du paramètre. . . . .	61
2.5	Le domaine des paramètres. . . . .	62
2.6	Domaine des valeurs propres de $A(\rho)$ . . . . .	62
2.7	Les erreurs d'estimation $e_1$ (ligne continue) et $e_2$ (ligne en tiret). . . . .	63
2.8	Domaine des valeurs propres de $A(\rho)$ . . . . .	65
2.9	Les erreurs d'estimation $e_1$ , $e_2$ et $e_3$ . . . . .	66
3.1	Les erreurs d'estimation pour une certaine évolution des paramètres. . . . .	76
3.2	Le domaine des valeurs propres pour la matrice $A(\rho) - L(\rho)C(\rho)$ . . . . .	77
4.1	Les erreurs d'estimation pour une certaine évolution du paramètre. . . . .	99
4.2	Les erreurs d'estimation pour une certaine séquence de commutation. . . . .	100

*Table des figures*

---

## Liste des tableaux

2.1	Coefficients de poussée . . . . .	60
2.2	Coefficients de tangage . . . . .	60





# Notations

## Ensembles et domaines

$R$	Ensemble des nombres réels,
$R_+$	Ensemble des nombres réels positifs, <i>i.e.</i> $R_+ = \{x \in R \mid x \geq 0\}$ ,
$R^n$	Espace réel euclidien de dimension $n$ ,
$R^{n \times m}$	Ensemble des matrices de dimension $(n \times m)$ à coefficients dans $R$ ,
$S^n$	Ensemble des matrices symétriques dans $R^{n \times n}$ , <i>i.e.</i> $S^n = \{X \in R^{n \times n} \mid X = X^T\}$ ,
$B_r$	Boule de centre 0 et de rayon $r$ , <i>i.e.</i> ensemble des éléments $x \in R^n$ tels que $\ x\  \leq r, r \geq 0$ ,
$\text{dom } f$	Domaine de définition de la fonction $f : A \rightarrow B$ , $\text{dom } f \subseteq A$ $A$ donne le type d'argument pour la fonction $f$ tandis que $\text{dom } f$ donne les valeurs valides pour l'argument de $f$ ,
$\text{Vert}(\mathcal{P})$	Ensemble des sommets du polytope $\mathcal{P}$ ,
$\text{Co}(v_1, \dots, v_k)$	Polytope dont les sommets sont $v_1, \dots, v_k$ ,
$\text{Card}(E)$	Cardinal de l'ensemble $E$ .

## Sous-espaces des fonctions

$s$	Variable de la transformée de Laplace d'un signal continu,
$z$	Variable de la transformée en $\mathcal{Z}$ d'un signal discret,
$\mathcal{L}_2[0, \infty)$	Espace de Lebesgue à temps continu <i>i.e.</i> espace des signaux continus carré-intégrables définis sur $[0, \infty)$ à valeur dans $R^n$ ,
$\ell_2[0, \infty)$	Espace de Lebesgue à temps discret <i>i.e.</i> espace des signaux discrets carré-sommables définis sur $[0, \infty)$ à valeur dans $R^n$ .

## Matrices et opérateurs

$A > 0$ ( $A \geq 0$ )	Matrice $A$ symétrique définie (resp. semi-définie) positive,
$A < 0$ ( $A \leq 0$ )	Matrice $A$ symétrique définie (resp. semi-définie) négative,
$I_n$	Matrice identité de dimension $n$ ,

## Notations

---

$A^{-1}$	Inverse de $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , $\det A \neq 0$ ,
$A^T, A^{-T}$	Transposée de $A$ , resp. de l'inverse de $A$
$A^*$	Transposée conjuguée de $A$ ,
$A^\dagger$	Inverse généralisée de Moore-Penrose de $A$ ,
( $\star$ )	Transposée de l'expression matricielle précédant ce symbole,
$A_\perp$	Complément orthogonal de la matrice $A$ , les colonnes de $A_\perp$ forment une base arbitraire du noyau de la matrice $A$ ,
$\det A$	Déterminant de la matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,
$\text{rang } A$	Rang de la matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,
$\text{Ker } A$	Espace noyau de la matrice $A$ , i.e. $\text{Ker } A = \{x \mid Ax = 0\}$ ,
$\text{Im } A$	Espace image de la matrice $A$ , i.e. $\text{Im } A = \{y \mid \exists x \text{ tel que } Ax = y\}$ ,
$\lambda(A)$	Valeurs propres de la matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,
$\sigma(A)$	Valeurs singulières de la matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ,
$\ A\ $	Norme euclidienne d'une matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ .

## Notations Supplémentaires

$\ v\ $	Norme euclidienne d'un vecteur $v \in \mathbf{R}^n$ ,
$\mathcal{C}^0(U, V)$	Classe des fonctions continues de $U$ à $V$ ,
$\mathcal{C}^1(U, V)$	Classe des fonctions continûment différentiables de $U$ à $V$ ,
$\nabla_x f$	Jacobien de la fonction $f$ par rapport à la variable $x$ ,
$\text{Bdiag}(A_1, \dots, A_i)$	Matrice bloc-diagonale ayant sur la diagonale les matrices $A_1, \dots, A_i$

# Acronymes

AQS	Affine Quadratiquement Stable
BTI	Bilinéaire à Temps Invariant
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i> – Inégalité Matricielle Bilinéaire
LFT	<i>Linear Fractional Transformation</i> – Transformation Linéaire Fractionnaire
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> – Inégalité Matricielle Linéaire
LPV	Linéaire à Paramètres Variants
LTI	Linéaire à Temps Invariant
LTV	Linéaire à Temps Variant
SDP	<i>Semi-Definite Programming</i> – Programmation semi-définie
SISO	<i>Single Input Single Output</i> – Entrée Simple Sortie Simple
SQA	Stabilité Quadratique Affine



*La souris est un animal qui, tué en quantité suffisante et dans des conditions contrôlées, produit une thèse de doctorat.*

Woody Allen.

## Introduction générale

La connaissance, entière ou partielle, de l'état d'un système est une exigence importante qui intervient dans les domaines de la commande, du diagnostic et de la surveillance des systèmes. Sur le plan pratique, cette exigence est difficile à satisfaire dans la plupart des cas. Ceci est dû, d'une part, au fait que les variables d'état n'ont pas toujours une signification physique et leur mesure directe est impossible à réaliser. D'autre part, lorsqu'une variable d'état existe physiquement, sa mesure peut être délicate à effectuer d'un point de vue technique (capteur nécessaire indisponible ou de précision insuffisante ...). De plus, d'un point de vue économique, il est souvent souhaitable d'installer un minimum de capteurs afin de réduire les coûts d'instrumentation et de maintenance. Par conséquent, dès qu'une stratégie de commande, de diagnostic ou de surveillance demande l'utilisation de variables d'état non mesurées, il est indispensable de reconstruire, entièrement ou partiellement, le vecteur d'état du système. Ce problème peut être résolu en utilisant un système dynamique auxiliaire, appelé observateur d'état (ou estimateur d'état), dont le rôle est de fournir en temps réel une estimation du vecteur d'état du système étudié en fonction des entrées, des sorties et du modèle dynamique de celui-ci.

Dans un premier temps, la recherche s'est orientée vers l'estimation d'état des systèmes linéaires à temps invariant (LTI) et de ce fait il existe de nombreuses méthodes qui permettent de résoudre ce problème. Malheureusement, l'hypothèse de modèles LTI est assez éloignée de la réalité pratique et ne couvre qu'une faible part des processus industriels. Par contre, de nombreux processus industriels peuvent être modélisés comme des systèmes linéaires dont les matrices de la représentation d'état sont des fonctions d'un ou plusieurs paramètres qui peuvent être variants dans le temps. C'est pourquoi ces dernières années, l'étude des systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps (LPV) a suscité un intérêt de plus en plus important en automatique. Cet intérêt se justifie également par le fait que certaines techniques applicables à des systèmes non linéaires reposent sur un modèle linéaire dépendant des paramètres. C'est le cas, par exemple, de certaines méthodes à base de séquençement de gain.

Lorsque nous souhaitons élaborer une stratégie d'estimation d'état pour des systèmes LPV, l'utilisation d'observateurs LTI n'est pas appropriée et les résultats de synthèse

correspondants sont trop pessimistes. Afin de réduire ce conservatisme, l'idée générale est de construire des observateurs qui s'adaptent et qui suivent l'évolution du système en temps réel. Par conséquent, cela revient à effectuer la synthèse d'observateurs ayant une structure proche voire identique à celle du système initial; c'est ce qui nous a conduit à privilégier la synthèse d'observateurs LPV. Par rapport aux observateurs LTI qui se focalisent sur un point de fonctionnement particulier, les observateurs LPV prennent en compte toutes les trajectoires admissibles du système. Un avantage particulier de leur structure LPV réside dans l'exploitation en temps réel de la dynamique courante du système. En effet, en plus des signaux de mesure, l'observateur tire profit d'une information supplémentaire sur la dynamique du processus à savoir les paramètres du système supposés mesurables.

Le problème de synthèse d'observateurs LPV n'a été que partiellement résolu et l'exploration de nouvelles solutions permettant de remédier à ce problème constitue le but de ce mémoire. Dans cette thèse nous avons privilégié plus particulièrement deux types d'approche :

- Une première approche développée dans cette thèse est à ranger dans la classe des méthodes par séquençement de gain et plus particulièrement les méthodes de séquençement de gain par une technique à base d'interpolation.
- La deuxième approche fait partie des techniques LPV et repose sur la synthèse d'un observateur s'écrivant, comme le système de départ, sous la même forme LPV.

Caractérisée par un développement historique très riche (voir [58, 50] pour une étude générale et historique), l'approche par séquençement de gain a été appliquée avec succès dans de nombreux domaines et plus particulièrement dans le domaine aéronautique ou aérospatial. Dans le séquençement de gain traditionnel, un processus non linéaire est linéarisé autour d'un certain nombre de points de fonctionnement et des contrôleurs linéaires sont construits pour ces points. Par la suite, les contrôleurs linéaires sont pré-programmés, séquencés en fonction du processus qui évolue entre ces points de fonctionnement. La manière la plus populaire pour réaliser le séquençement des contrôleurs linéaires consiste à interpoler en temps réel les contrôleurs linéaires obtenus.

Malgré l'ancienneté et la popularité d'une telle approche, on ne trouve dans la littérature que peu de méthodes pratiques et théoriques bien justifiées mathématiquement [60, 62, 63]. La littérature scientifique reste assez silencieuse sur la problématique de l'interpolation des contrôleurs linéaires même si l'interpolation est une composante nécessaire à la synthèse par séquençement de gain. Des méthodes d'interpolation *ad-hoc*, utilisant surtout des contrôleurs d'ordre réduit, ont souvent été proposées par les ingénieurs mais ces méthodes ne donnent de bons résultats que pour les applications particulières considérées. Pour d'autres applications, ces techniques d'interpolation peuvent même générer des contrôleurs qui ne sont pas stabilisants dans certaines situations. Les méthodes de synthèse linéaires plus modernes, comme la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ , fournissent des contrôleurs d'ordre élevé qui ne peuvent pas être interpolés par les techniques traditionnelles. Ces constatations ont justifié une étude soignée du problème d'interpolation et l'élaboration de solutions

---

permettant de prendre en compte ce problème constitue un premier objectif de cette thèse. Un deuxième objectif de ce mémoire est d'aborder le problème de l'interpolation de manière implicite en s'appuyant sur des techniques LPV. L'utilisation des techniques LPV permet d'envisager la construction d'observateurs d'état qui intègrent directement les variations paramétriques du système en recopiant la structure de celui-ci.

Les solutions proposées par les deux approches utilisent le concept de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres pour étudier la stabilité de l'erreur d'estimation. Cette notion nous a permis de disposer de degrés de liberté supplémentaires pour la synthèse d'observateurs LPV. En effet, il s'agit d'une notion moins restrictive que celle utilisant une fonction de Lyapunov unique garantissant la stabilité pour tout le domaine de variation des paramètres [16]. Les conditions de synthèse d'observateurs sont formulées comme un problème de résolution d'inégalités matricielles linéaires ou bilinéaires. Par ailleurs, l'application du concept de multi-convexité nous a permis de ramener le nombre infini d'inégalités matricielles à un nombre fini.

## Organisation de la thèse

Ce mémoire est organisé de la manière suivante :

- Le *premier chapitre* présente la classe des systèmes utilisée dans la suite du mémoire ainsi que les notions de stabilité, de performance et d'estimation d'état appropriées. Ce chapitre permet également de situer la contribution de cette thèse. Ainsi, une présentation générale des méthodes de séquençement de gain, des méthodes LPV et de la problématique sous-jacente motive le déroulement des chapitres suivants.
- Le *deuxième chapitre* regroupe les résultats sur l'estimation d'état des systèmes LPV obtenus par une technique de séquençement de gain à base d'interpolation. Les solutions proposées traitent le problème de l'interpolation en garantissant la stabilité de l'erreur d'estimation, non seulement pour chaque valeur des paramètres, mais aussi pour toute trajectoire paramétrique admissible.
- Le *troisième chapitre* propose une solution fondée sur les techniques LPV pour l'estimation d'état et montre le lien entre l'approche par séquençement de gain avec interpolation et l'approche LPV. Par la suite, cette technique s'avère être immédiatement transposable au cas de la synthèse d'une commande par retour d'état satisfaisant un critère de  $\gamma$ -performance. Une étude préliminaire d'une commande basée observateur est également présentée.
- Le *quatrième chapitre* est consacré au cas des systèmes LPV polytopiques à temps discret. La formulation du problème d'observateurs à base d'interpolation y est discutée. On donne une première solution pour une formulation moins générale que celle abordée dans les chapitres précédents pour le cas continu et on met surtout en évidence les différences par rapport au cas continu et les difficultés qui subsistent. La principale différence est la prise en compte des discontinuités des paramètres et

l'application quasi-immédiate des résultats du cas discret à une classe de systèmes hybrides.

Tous les résultats présentés dans ce mémoire ont fait l'objet d'applications numériques illustratives.

Nous concluons notre travail par un résumé des principales contributions de ce mémoire à la synthèse d'observateurs pour des systèmes linéaires à paramètres variants et par quelques perspectives de recherche.



# 1

## Contexte et motivations

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
1.1.1	Système LPV	6
1.1.2	Stabilité des systèmes LPV	12
1.1.3	Performance et analyse des systèmes LPV	15
1.1.4	Le problème de l'estimation d'état	18
1.1.5	Le problème de la commande par retour d'état	20
<b>1.2</b>	<b>Inégalités linéaires matricielles</b>	<b>21</b>
1.2.1	Introduction	21
1.2.2	LMI avec contrainte de rang	22
1.2.3	LMI dépendant des paramètres	23
<b>1.3</b>	<b>Contexte du séquençement de gain : un état de l'art</b>	<b>25</b>
1.3.1	Introduction	25
1.3.2	Approche conventionnelle du séquençement de gain	31
1.3.3	Approches récentes du séquençement de gain	36
<b>1.4</b>	<b>Techniques LPV</b>	<b>37</b>
<b>1.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>40</b>

---

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous énonçons quelques notions fondamentales liées aux systèmes LPV, nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Après quelques rappels sur les notions de stabilité et de performance, nous présentons le problème de l'estimation d'état d'un système LPV ainsi que le problème dual, à savoir la commande par retour d'état. Certaines difficultés apparaissant dans la formulation de type inégalités matricielles de ces problèmes sont également discutées. Une présentation générale des méthodes de séquençement de gain, des méthodes LPV et de la problématique sous-jacente permet de situer les problèmes traités ainsi que les contributions de cette thèse.

La classe des systèmes abordée dans ce mémoire est celle des systèmes linéaires à paramètres variants de dimension finie et déterministes.

### 1.1.1 Système LPV

La notion de système linéaire à paramètres variants dans le temps (LPV) a été introduite pour la première fois dans [61]. D'après cette première appellation, un système LPV est un système linéaire qui varie dans le temps et dont les matrices de la représentation d'état sont des fonctions dépendant d'un vecteur de paramètres  $\rho(t)$ .

D'un point de vue pratique, les systèmes LPV peuvent être interprétés de deux manières :

- ▷ Ils peuvent être vus comme des systèmes linéaires à temps invariant (LTI) sujets à des incertitudes paramétriques variants dans le temps. Dans ce cas, ces systèmes font l'objet de techniques d'analyse et de synthèse robustes pour les systèmes LTI.
- ▷ Les systèmes LPV peuvent aussi représenter des modèles issus de la modélisation de processus linéaires variants dans le temps ou de la linéarisation d'un processus non linéaire le long des trajectoires des paramètres. Dans ce cas, les paramètres ne sont plus incertains et ils peuvent être mesurés en temps réel durant le fonctionnement du processus. Par conséquent, une stratégie d'analyse et de synthèse peut exploiter la mesurabilité de ces paramètres.

Il est important de noter que, contrairement au cas LTI, les systèmes LPV possèdent plusieurs types de propriétés pouvant être classifiées en propriétés LPV et propriétés LTI. Les propriétés LPV sont globales et concernent les caractéristiques du système le long de toutes les trajectoires paramétriques possibles. Par contre, les propriétés LTI sont seulement locales et elles concernent les caractéristiques du système pour une valeur particulière des paramètres.

Un système LPV est la généralisation des systèmes LTI et des systèmes linéaires à temps variant (LTV) (voir figure 1.1). En effet, un système LTI peut être vu comme un système LPV dont les paramètres sont figés sur une valeur fixe ou comme un système

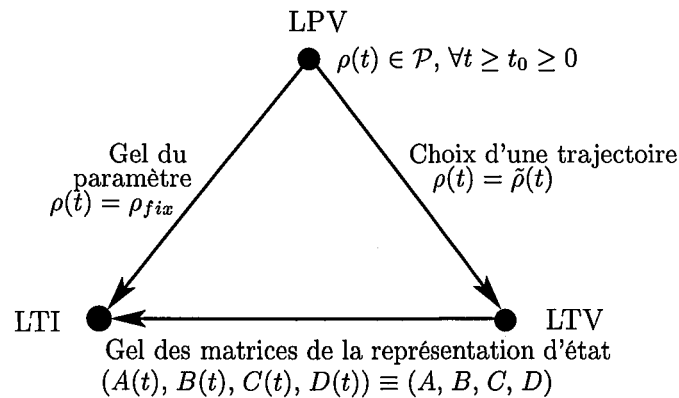


FIG. 1.1 – Les modèles linéaires

LTV dont les matrices de la représentation d'état sont figées dans le temps. De même, un système LTV peut être interprété comme un système LPV avec une trajectoire prédéfinie.

Les modèles LPV interviennent souvent dans des applications où l'évolution des paramètres est inconnue *a priori* mais peut être mesurée en temps réel. Par opposition à un système LTV dont l'évolution temporelle est entièrement décrite par les équations, un système LPV a autant de comportements différents qu'il y a de trajectoires paramétriques admissibles.

Une propriété importante de ces trois classes de systèmes linéaires réside dans le fait qu'ils obéissent au *principe de superposition* :

- *Superposition des effets*

La sortie d'un système linéaire se décompose en deux composantes, une composante libre due aux conditions initiales lorsque la commande est nulle et une composante forcée pour des conditions initiales nulles.

- *Superposition des entrées*

Si  $y_1$  et  $y_2$  représentent l'évolution des sorties d'un processus respectivement pour les entrées  $u_1$  et  $u_2$  sur un horizon temporel et pour un même état initial donné, alors à l'entrée  $u = \alpha u_1 + \beta u_2$  correspond la sortie  $y = \alpha y_1 + \beta y_2$  sur le même horizon et pour les mêmes conditions initiales.

## Domaine des paramètres

Afin de mieux comprendre l'influence des paramètres sur la dynamique d'un système, prenons l'exemple d'un avion. Lorsque nous écrivons les équations de la dynamique d'un avion, nous aboutissons à un modèle non linéaire. Cependant, nous pouvons le traiter comme un modèle linéaire paramétré par un certain nombre de paramètres. Ces paramètres affectent la dynamique du modèle différemment et globalement nous pouvons classer ces paramètres en quatre groupes principaux :

- *Paramètres virtuellement constants*

La masse et le centre de gravité d'un avion varient très lentement et ils peuvent être considérés comme virtuellement constants lorsqu'on les compare avec la dynamique du système.

- *Paramètres lentement variables*

Des bornes supérieures et inférieures sur ces paramètres ainsi que sur leur vitesse de variation peuvent être déterminées. La vitesse et l'altitude d'un avion varient plus rapidement que la masse et le centre de gravité et des bornes sur ces paramètres peuvent être définies.

- *Paramètres variant arbitrairement vite*

Ce sont des paramètres rapidement variables comme par exemple l'angle d'attaque d'un avion. Ces paramètres varient au moins aussi vite que la dynamique du système et il est généralement difficile de déterminer des bornes sur leur vitesse de variation.

- *Changements abrupts irréversibles*

Ce type de changement apparaît souvent dans les applications aérospatiales, par exemple lorsqu'un lanceur de satellite passe d'un état de fusée à un autre.

La modélisation LPV permet de prendre en compte toutes ces variations paramétriques du système dynamique. Le modèle évolue alors en fonction d'une trajectoire paramétrique admissible. Une trajectoire paramétrique admissible est telle que chacun de ses points appartient à chaque instant au domaine ou à l'ensemble des paramètres.

De manière générale, par domaine ou ensemble des paramètres nous entendons un ensemble compact  $\mathcal{P} \subset R^N$ . Dans le développement des résultats principaux de cette thèse, nous supposons que les paramètres sont bornés par des valeurs extrêmes. Nous définissons alors l'ensemble des paramètres comme suit :

**Définition 1.1.1 (Ensemble des paramètres).** L'ensemble des paramètres  $\mathcal{P}$  est un ensemble convexe et il représente un hyper-rectangle dans l'espace  $R^N$  :

$$\mathcal{P} = \{ \rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_N]^T \in R^N \mid \rho_i \in [\underline{\rho}_i, \overline{\rho}_i] \text{ pour } i = 1, \dots, N \}.$$

Nous noterons  $\mathcal{P}_0$  l'hyper-rectangle contenant l'origine de l'espace  $R^N$  :

$$\mathcal{P}_0 = \{ \rho \in R^N \mid \rho_i \in [\underline{\rho}_i, \overline{\rho}_i], \underline{\rho}_i < 0, \overline{\rho}_i > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, N \}. \quad \blacklozenge$$

**Propriété 1.1.1.** L'hyper-rectangle des paramètres a  $2^N$  sommets qui correspondent aux valeurs extrêmes de  $\rho$  :

$$\text{Vert}(\mathcal{P}) = \mathcal{V} = \{ (v_1, v_2, \dots, v_N) \mid v_i \in \{ \underline{\rho}_i, \overline{\rho}_i \} \text{ pour } i = 1, \dots, N \}.$$

En effet, la projection de  $\mathcal{P}$  sur le plan engendré par les axes  $\rho_i$  et  $\rho_j$  est un rectangle pour tout  $i$  et  $j$  avec  $i \neq j$ . ■

**Définition 1.1.2 (Ensemble de variation des paramètres).** Soit un ensemble compact  $\mathcal{P} \subset R^N$ . Nous définissons l'ensemble de variation des paramètres  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  comme étant

l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{P})$  qui obéissent à une inclusion différentielle rectangulaire :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \{ \rho(t) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{P}) \mid \dot{\rho}_i(t) \in [\underline{\omega}_i, \overline{\omega}_i] \text{ pour tout } i = 1, \dots, N \text{ et } t \in \mathbb{R}_+ \}.$$

L'ensemble de variation des paramètres  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  contient toutes les *trajectoires admissibles* du vecteur de paramètres.  $\blacklozenge$

Nous pouvons énoncer la propriété suivante pour l'ensemble de variation des paramètres.

**Propriété 1.1.2.** *La vitesse de variation du vecteur de paramètres appartient à un hyperrectangle défini par l'ensemble des sommets suivant :*

$$\mathcal{W} = \{ (w_1, w_2, \dots, w_N) \mid w_i \in \{ \underline{\omega}_i, \overline{\omega}_i \} \text{ pour } i = 1, \dots, N \}.$$

Alors l'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  est un ensemble convexe.  $\blacksquare$

**Preuve :** Soient  $f_1$  et  $f_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  deux fonctions et  $0 \leq \theta \leq 1$ . Pour prouver que  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  est un ensemble convexe, conformément à la Définition C.1.1 (voir annexe C), il faut prouver que  $\theta f_1 + (1 - \theta) f_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ . Comme l'ensemble des paramètres  $\mathcal{P}$  est un ensemble convexe par définition, il suit que  $\theta f_1 + (1 - \theta) f_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{P})$ . La dérivée de  $\theta f_1 + (1 - \theta) f_2$  est  $\theta \dot{f}_1 + (1 - \theta) \dot{f}_2$  et elle appartient à  $\text{Co}(\mathcal{W})$  parce que  $\dot{f}_1, \dot{f}_2 \in \text{Co}(\mathcal{W})$  et  $\text{Co}(\mathcal{W})$  est un ensemble convexe. Par conséquent,  $\theta f_1 + (1 - \theta) f_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .  $\square$

**Remarque 1.1.1.** Dans cette thèse, la notation  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  désigne une trajectoire à temps-variant dans l'ensemble de variation des paramètres tandis que  $\rho \in \mathcal{P}$  définit une trajectoire variant arbitrairement vite dans l'ensemble des paramètres. Par convention, la dépendance de  $\rho$  par rapport au temps  $t$  sera éliminée dans ce qui suit pour alléger l'écriture des expressions. On gardera la dépendance de  $\rho$  par rapport au temps lorsque ceci sera nécessaire pour la clarté des expressions.

## Représentation d'état

**Définition 1.1.3 (Système LPV).** Étant donné l'ensemble des trajectoires admissibles du vecteur des paramètres  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ , le système LPV est défini comme étant l'ensemble des systèmes admissibles à temps variant associés à la famille  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ . Le système LPV est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) = C(\rho)x(t) + D(\rho)u(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  est le vecteur des paramètres,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie. La représentation d'état

$$(A, B, C, D) : \mathbb{R}^N \longrightarrow (\mathbb{R}^{n \times n}, \mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{R}^{p \times n}, \mathbb{R}^{p \times m})$$

est constituée par des fonctions matricielles continues par rapport au vecteur  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ . ♦

**Remarque 1.1.2.** Comme les fonctions matricielles  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont continues par rapport au vecteur  $\rho \in \mathcal{P}$ , ces fonctions sont bornées sur l'ensemble  $\mathcal{P}$ .

**Définition 1.1.4 (Matrice de transition).** Pour tout  $t_0 \in \mathcal{R}$ , nous définissons la matrice de transition d'état  $\Phi_{\rho}(\cdot, \cdot) : \mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^{n \times n}$  du système LPV comme étant la solution continue unique de l'équation différentielle homogène :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_{\rho}(t, t_0) &= A(\rho) \Phi_{\rho}(t, t_0) \\ \Phi_{\rho}(t_0, t_0) &= I. \end{aligned}$$

♦

Comme énoncé dans la Remarque 1.1.2, la continuité des matrices de la représentation d'état implique la bornitude de ces matrices sur l'ensemble compact  $\mathcal{P}$ , ce qui garantit l'unicité et la continuité de la matrice de transition d'état pour tout  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

**Propriété 1.1.3.** La matrice de transition d'état a les propriétés suivantes :

1. Elle est non-singulière pour tout  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  et  $\Phi_{\rho}(t_1, t_0) = \Phi_{\rho}^{-1}(t_0, t_1)$ ,
2.  $\Phi_{\rho}(t_2, t_1) = \Phi_{\rho}(t_2, t_0) \Phi_{\rho}(t_0, t_1)$ .

■

Lorsque le paramètre  $\rho$  est figé sur une valeur particulière, nous pouvons définir des propriétés locales pour le système LPV (1.1). Ces propriétés sont les mêmes que les propriétés d'un système LTI. A titre d'exemple, on peut calculer une fonction ou une matrice de transfert ainsi que les pôles correspondants afin de juger, par exemple, de la stabilité locale de ce système. Par contre, pour l'étude du comportement global (comportement LPV) du système on ne peut plus définir la notion de fonction ou de matrice de transfert et encore moins celle de pôles.

## Représentation entrée-sortie

Étant données des conditions initiales  $x(t_0)$  et une entrée  $u(t)$ , la réponse du système LPV est donnée par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi_{\rho}(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_{\rho}(t, \tau)B(\rho(\tau))u(\tau)d\tau \\ y(t) &= C(\rho)x(t) + D(\rho)u(t). \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que la sortie se décompose en deux parties, une composante libre générée par les conditions initiales non nulles et une composante forcée générée par le vecteur des commandes du système :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_l(t) + y_f(t) \text{ avec} \\ y_l(t) &= C(\rho)\Phi_{\rho}(t, t_0)x(t_0) \text{ et} \\ y_f(t) &= \int_{t_0}^t C(\rho(t))\Phi_{\rho}(t, \tau)B(\rho(\tau))u(\tau)d\tau + D(\rho(t))u(t). \end{aligned}$$

**Définition 1.1.5 (Opérateur entrée-sortie).** Étant données les conditions initiales  $x(t_0) \equiv 0$ , l'équation d'état (1.1) définit un opérateur linéaire causal

$$\mathcal{G}_\rho : \mathcal{L}_2[0, \infty) \longrightarrow \mathcal{L}_2[0, \infty) \text{ où } u(t) \longmapsto y_f(t). \quad \blacklozenge$$

La représentation d'état d'un système LPV n'est pas unique car l'opérateur entrée-sortie  $\mathcal{G}_\rho$  est invariant sous des transformations de similarité dépendant des paramètres. Lorsque nous introduisons des transformations de similarité dépendant des paramètres, il faut veiller à ce que la solution de l'équation d'état existe et qu'elle reste unique.

**Définition 1.1.6 (Transformations de similarité [65]).** Étant donnée une représentation d'état d'un système LPV, soit une matrice continue  $T(\rho)$  ayant des dérivées partielles continues par rapport à chaque paramètre du vecteur des paramètres (de classe  $\mathcal{C}^1$ ) et telle que  $T^{-1}(\rho)$  existe pour tout  $\rho \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$ . Soit la transformation d'état dépendant des paramètres  $x(t) = T(\rho)\bar{x}(t)$  alors une représentation d'état équivalente du système LPV (1.1) est :

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1}(\rho)A(\rho)T(\rho) - T^{-1}(\rho)\dot{T}(\rho) & T^{-1}(\rho)B(\rho) \\ C(\rho)T(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (1.2) \quad \blacklozenge$$

Nous trouvons souvent, dans la littérature scientifique, une hypothèse supplémentaire en ce qui concerne la structure du système LPV : il s'agit de la dépendance affine par rapport aux paramètres. Cette hypothèse trouve sa justification dans le cadre de l'analyse au sens de Lyapunov. Nous distinguons les modèles affines et les modèles polytopiques.

Pour les modèles affines, les éléments de la représentation d'état  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  vérifient

$$\begin{aligned} A(\rho) &= A_0 + \sum_{i=1}^N \rho_i A_i, & B(\rho) &= B_0 + \sum_{i=1}^N \rho_i B_i, \\ C(\rho) &= C_0 + \sum_{i=1}^N \rho_i C_i, & \text{et } D(\rho) &= D_0 + \sum_{i=1}^N \rho_i D_i \end{aligned}$$

pour tout  $\rho \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$ .

Le modèle polytopique est assez proche du modèle affine et il est décrit par :

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \sum_{i=1}^M \lambda_i(\rho) \tilde{A}_i, & B(\rho) &= \sum_{i=1}^M \lambda_i(\rho) \tilde{B}_i, \\ C(\rho) &= \sum_{i=1}^M \lambda_i(\rho) \tilde{C}_i, & \text{et } D(\rho) &= \sum_{i=1}^M \lambda_i(\rho) \tilde{D}_i \end{aligned}$$

avec  $\lambda_i(\rho) \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^M \lambda_i(\rho) = 1$  et  $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i$  correspondant à  $A(\rho), B(\rho), C(\rho), D(\rho)$  lorsque  $\rho \in \text{Vert}(\mathcal{P})$ , donc  $M = 2^N$ . Ce type de modèle admet une définition plus générale que le modèle affine parce que l'hyper-rectangle  $\mathcal{P}$  peut être remplacé par un polytope à  $M$  sommets.

Bien que les deux types de modèles soient très proches, le point essentiel qui les différencie est la dépendance paramétrique. Dans le premier cas, le modèle dépend directement du vecteur de paramètres  $\rho$  tandis que dans le deuxième cas, ce sont les coordonnées barycentriques de  $\rho$  par rapport aux sommets  $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i, \tilde{C}_i, \tilde{D}_i$  qui, à un instant donné, situent le système dans le polytope. La notion de sommet joue donc un rôle prépondérant, peu importe la forme du domaine  $\mathcal{P}$  pourvu qu'il soit un polytope. En ce sens, le modèle polytopique généralise le modèle affine. Cependant, si on souhaite limiter la vitesse d'évolution des paramètres, c'est le modèle affine qu'il faut retenir.

### 1.1.2 Stabilité des systèmes LPV

Nous présentons dans cette section quelques notions de stabilité pour les systèmes LPV. On trouvera dans l'annexe B.1.1 une présentation des principaux résultats de base sur la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques. Il convient pourtant d'apporter une précision concernant la stabilité exponentielle d'un système LPV.

Soit le système LPV suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) \\ \text{avec les conditions initiales } x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

La notion de stabilité exponentielle pour les systèmes LPV se définit comme suit :

**Définition 1.1.7.** Le système LPV (1.3) est exponentiellement stable s'il existe des constantes  $\beta, \alpha > 0$  telles que sa matrice de transition satisfait la condition suivante

$$\|\Phi_\rho(t, \tau)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-\tau)} \text{ pour tout } \rho \in \mathcal{P} \text{ et } t \geq \tau. \quad \blacklozenge$$

Pour que le système (1.3) soit (simplement ou asymptotiquement ou exponentiellement) stable pour toutes les trajectoires paramétriques admissibles prises une à une, il faut exiger la stabilité (simple ou asymptotique ou exponentielle) de tout système local LTI obtenu en figeant le paramètre  $\rho$ . Cependant, la stabilité de la famille des systèmes locaux LTI obtenue en figeant le paramètre  $\rho$  n'implique pas la stabilité du système LPV (1.3) lorsque le paramètre est variant dans le temps. En d'autres mots, la stabilité locale ou le lieu des pôles pour des paramètres gelés ne donne aucune information sur la stabilité globale lorsque les paramètres sont variants dans le temps.

#### Stabilité quadratique

La stabilité quadratique est une notion de stabilité robuste dans le sens où la stabilité est garantie pour des trajectoires paramétriques  $\rho$  variant arbitrairement vite. Sa définition utilise une fonction de Lyapunov quadratique unique.

**Définition 1.1.8 (Stabilité quadratique).** Étant donné le compact  $\mathcal{P}$ , le système (1.3)



est quadratiquement stable sur  $\mathcal{P}$  s'il existe une matrice  $P \in \mathcal{S}^n$  définie positive satisfaisant

$$A^T(\rho)P + PA(\rho) < 0 \text{ pour tout } \rho \in \mathcal{P}. \quad (1.4)$$

◆

**Remarque 1.1.3.** Comme la fonction matricielle  $A$  est continue par rapport au paramètre  $\rho \in \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}$  est un ensemble compact, la condition (1.4) implique que  $A^T(\rho)P + PA(\rho)$  est uniformément définie négative. Cela signifie qu'il existe un scalaire  $\delta > 0$  tel que

$$A^T(\rho)P + PA(\rho) \leq -\delta I_n \text{ pour tout } \rho \in \mathcal{P}.$$

Notons que cette notion est définie pour des trajectoires paramétriques variant arbitrairement vite et donc elle ne permet pas d'exploiter la connaissance d'une borne sur la vitesse de variation des paramètres. Une autre approche, permettant de formuler des résultats qui sont moins restrictifs que ceux utilisant la stabilité quadratique et pouvant exploiter la connaissance d'une borne sur la vitesse de variation des paramètres, est l'approche par fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres.

### Fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres

Nous définissons la notion de stabilité quadratique dépendant des paramètres (QDP) pour un système LPV comme une généralisation de la notion de stabilité quadratique classique. En utilisant la notion de stabilité quadratique dépendant des paramètres, on cherche une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres qui assure la stabilité de la dynamique du système LPV. Les conditions d'existence d'une telle fonction sont moins restrictives que celles obtenues pour une stabilité quadratique utilisant une fonction de Lyapunov unique assurant la stabilité sur tout le domaine de variation des paramètres (voir [16]). En effet, on démontre généralement que l'ensemble des solutions fourni par la condition de stabilité quadratique dépendant des paramètres englobe l'ensemble des solutions fourni par le cas quadratique qui sont donc des solutions particulières du cas QDP.

#### Définition 1.1.9 (Stabilité quadratique dépendant des paramètres ou QDP).

Étant donné  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ , le système (1.3) est quadratiquement dépendant des paramètres stable ou QDP stable s'il existe une fonction matricielle  $P \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R}^N, \mathcal{S}^n)$  définie positive satisfaisant

$$A^T(\rho)P(\rho) + P(\rho)A(\rho) + \frac{dP(\rho)}{dt} < 0 \quad (1.5)$$

pour toutes les trajectoires admissibles  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

◆

**Remarque 1.1.4.** En utilisant le caractère compact de l'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  et la propriété de continuité de l'expression par rapport au paramètre  $\rho$ , nous pouvons démontrer que la partie gauche de l'inégalité (1.5) est uniformément définie négative. Cela signifie qu'il existe un scalaire  $\delta > 0$  tel que

$$A^T(\rho)P(\rho) + P(\rho)A(\rho) + \frac{dP(\rho)}{dt} \leq -\delta I_n$$

pour toutes les trajectoires  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

La fonction de Lyapunov quadratique garantissant la stabilité du système (1.3) est  $V(x, \rho) = x^T P(\rho)x$ . La Définition 1.1.9 exige de vérifier que

- cette fonction est définie positive  $V(x, \rho) > 0$
- sa dérivée est définie négative  $dV(x, \rho)/dt < 0$

pour toutes les trajectoires admissibles  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

Pour les systèmes LTI, il est bien connu que la stabilité quadratique est équivalente à la stabilité exponentielle [64]. Ce résultat n'est plus valable pour les systèmes LPV. La stabilité quadratique implique la stabilité exponentielle et la réciproque n'est pas forcément vraie. De même, la stabilité QDP implique la stabilité exponentielle comme énoncé dans le lemme suivant.

**Lemme 1.1.4.** *Étant donné un compact  $\mathcal{P}$  et le système QDP stable*

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) \tag{1.6}$$

où  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ , alors il existe des scalaires positifs  $\gamma_1, \gamma_2$  tels que la matrice de transition d'état  $\Phi_{\rho}(t, t_0)$  qui caractérise toutes les solutions de l'équation (1.6), satisfasse

$$\|\Phi_{\rho}(t, t_0)\| \leq \gamma_1 e^{-\gamma_2(t-t_0)}$$

pour tout  $t \geq t_0 \geq 0$  et tout  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ . ■

**Preuve :** Le lecteur trouvera dans [66, 46] la preuve de ce lemme. □

Dans le cas général, il est très difficile de construire la fonction matricielle  $P(\rho)$  et de vérifier que  $\dot{V}(x, \rho)$  est définie négative. Nous pouvons nous affranchir de ce problème par le choix d'une classe appropriée de fonctions de Lyapunov et par une modélisation particulière des systèmes LPV. Un choix possible est la classe des fonctions de Lyapunov qui dépendent de manière affine des paramètres. Ce choix permet d'énoncer la notion de stabilité quadratique affine conformément à la définition suivante :

**Définition 1.1.10 (Stabilité quadratique affine [31]).** Le système linéaire (1.3) est affine quadratiquement stable (AQS) s'il existe  $K + 1$  matrices symétriques  $P_0, P_1, \dots, P_K$  telles que les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} P(\rho) &= P_0 + \rho_1 P_1 + \dots + \rho_K P_K > 0 \\ \mathfrak{F}(\rho, \dot{\rho}) &= A(\rho)^T P(\rho) + P(\rho) A(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 < 0 \end{aligned}$$

sont satisfaites pour toutes les trajectoires du vecteur des paramètres  $\rho \in \mathcal{F}_p$ .  $\blacklozenge$

Malgré le fait que la stabilité quadratique affine est un cas particulier de la stabilité QDP, elle reste moins restrictive que la stabilité quadratique classique. En effet, la stabilité quadratique classique est un cas particulier de la stabilité quadratique affine et correspond à  $P(\rho) = P_0$ .

### 1.1.3 Performance et analyse des systèmes LPV

Nous présentons quelques réflexions sur la notion de performance d'un système. Il est bien connu qu'une loi de commande doit satisfaire, en plus de l'exigence de stabilité en boucle fermée, certaines performances par exemple des performances liées à des critères énergétiques, au rejet de perturbations, à des exigences temporelles en terme de temps de réponse ou de temps de montée... Dans le cas des systèmes LTI, afin de formuler mathématiquement les indices de performance associés à certaines exigences, on relie par exemple la notion de performance à l'existence d'une borne sur la norme  $\mathcal{H}_\infty$  ou  $\mathcal{H}_2$  de la fonction de transfert ou à la localisation de ses pôles.

D'une façon générale, on peut formuler un problème de synthèse de correcteurs avec une contrainte de performance en spécifiant un critère de performance à optimiser. Un tel critère peut être par exemple la norme de la matrice de transfert du système en boucle fermée. Les normes les plus utilisées sont les normes  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mathcal{H}_2$ . Une norme est aussi bien un outil d'analyse que de synthèse qui permet de caractériser en plus de la stabilité, exigence nécessaire, un certain niveau de performance. Nous rappelons ici la définition de la norme  $\mathcal{H}_\infty$ . Nous ne présentons par la suite que le critère  $\mathcal{H}_\infty$  étant donné le lien étroit entre la commande de type «  $\gamma$ -performance » abordée à la fin du chapitre 3 et ce type de critère.

#### Critère (norme) $\mathcal{H}_\infty$

Soit le système  $G$  de type LTI, décrit par la représentation d'état suivante :

$$G : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \quad (1.7)$$

**Définition 1.1.11 (Norme  $\mathcal{H}_\infty$ ).** La norme  $\mathcal{H}_\infty$  du système LTI (1.7) est la plus petite valeur de  $\gamma > 0$  vérifiant l'inégalité

$$\int_0^T y^T(t)y(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^T u^T(t)u(t)dt \quad \forall T \geq 0. \quad \blacklozenge$$

Lorsque la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système linéaire est finie et bornée par  $\gamma$ , ceci signifie que le système est stable et que l'énergie de la sortie reste inférieure dans un rapport  $\gamma$  à celle

de l'entrée. Remarquons que cette norme est induite par la norme usuelle sur les signaux de l'espace  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ .

Dans le domaine fréquentiel, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système stable peut être interprétée comme étant :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \geq 0} \bar{\sigma}(G(j\omega)).$$

Dans le cas mono-variable, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  correspond à la valeur maximale du module de la fonction de transfert. Cette norme peut être exploitée pour résoudre des problèmes de performance tels que le rejet de perturbations ou la minimisation de l'erreur de poursuite.

Lorsque nous nous intéressons à la classe des systèmes LPV ou LTV, on ne peut plus parler de fonction de transfert, ni de norme  $\mathcal{H}_2$  ou  $\mathcal{H}_\infty$ , et non plus de pôles. Dans ce cas, l'analyse en performance nécessite certaines extensions.

### Extension de la norme $\mathcal{H}_\infty$

Dans le cas LPV, on parle plus précisément de la norme induite  $\mathcal{L}_2$  et de performance en norme induite  $\mathcal{L}_2$ . En effet, la norme induite  $\mathcal{L}_2$  est l'extension de la norme  $\mathcal{H}_\infty$  au cas des systèmes LPV dans le sens qu'elle mesure la plus grande amplification possible de l'énergie du signal d'entrée sur toutes les trajectoires paramétriques admissibles.

**Définition 1.1.12.** La norme induite  $\mathcal{L}_2$  d'un système LPV est bornée par  $\gamma$  si

$$\forall u \in \mathcal{L}_2[0, \infty), \forall T \geq 0 \quad \int_0^T y^T(t)y(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^T u^T(t)u(t)dt$$

pour toute trajectoire paramétrique admissible  $\rho \in \mathcal{F}_\mathcal{P}$ . ◆

Nous remarquons que cette définition coïncide avec la norme  $\mathcal{H}_\infty$  classique pour les systèmes LTI. Étant donné que l'on ne peut pas définir la notion de pôles pour les systèmes LPV, il n'existe pas d'interprétation dans le domaine fréquentiel pour cette norme.

Notons que, pour un système LPV QDP stable, il existe toujours une borne supérieure finie de la norme induite  $\mathcal{L}_2$  conformément au lemme suivant.

**Lemme 1.1.5 ([66]).** *Étant donné un système LPV QDP stable, il existe un scalaire  $\gamma > 0$  tel que pour des conditions initiales nulles  $x(t_0) \equiv 0$*

$$\sup_{\rho \in \mathcal{F}_\mathcal{P}} \sup_{\substack{\|u\|_2 \neq 0 \\ u \in \mathcal{L}_2[0, \infty)}} \frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \leq \gamma^2 < \infty.$$

■

La version LPV du lemme borné réel constitue un résultat permettant de calculer une borne supérieure de cette norme au moyen des LMIs.

**Théorème 1.1.6 (Lemme borné réel).** *Le système LPV*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) = C(\rho)x(t) + D(\rho)u(t) \end{cases} \quad (1.8)$$

*est quadratiquement stable sur  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  et sa norme induite  $\mathcal{L}_2$  est bornée par  $\gamma$ , réel positif, s'il existe une matrice strictement définie positive  $P$  telle que*

$$\begin{bmatrix} A(\rho)^T P + P A(\rho) & P B(\rho) & C(\rho)^T \\ B(\rho)^T P & -\gamma I & D(\rho)^T \\ C(\rho) & D(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (1.9)$$

*pour toute trajectoire paramétrique admissible  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .* ■

En utilisant une fonction de Lyapunov quadratique unique, ce théorème présente une condition suffisante pour vérifier si la norme induite  $\mathcal{L}_2$  d'un système LPV est plus petite qu'une valeur imposée  $\gamma$ . Cela signifie que même si la condition (1.9) n'est pas vérifiée pour un  $\gamma$  donné, la norme induite  $\mathcal{L}_2$  peut être plus petite que  $\gamma$ . Cette condition peut également être utilisée pour calculer une borne supérieure de la norme induite  $\mathcal{L}_2$  en minimisant  $\gamma$  sujet aux LMIs (1.9).

De manière analogue à la stabilité quadratique, ce théorème peut être étendu au cas des fonctions de Lyapunov quadratiques dépendant des paramètres. En choisissant la classe des fonctions de Lyapunov affines, nous énonçons la notion de  $\gamma$ -performance quadratique affine comme une généralisation de la performance  $\mathcal{H}_{\infty}$  et sous une forme similaire à celle donné dans [31].

**Définition 1.1.13 ( $\gamma$ -performance quadratique affine).** Étant donné le système LPV (1.8) et un scalaire  $\gamma > 0$ , le problème de  $\gamma$ -performance quadratique affine est soluble s'il existe des matrices symétriques  $P_0, P_1, \dots, P_N$  telles que

$$\begin{aligned} P(\rho) &= P_0 + \rho_1 P_1 + \dots + \rho_N P_N > 0 \\ \begin{bmatrix} A(\rho)P(\rho) + P(\rho)A(\rho)^T - P(\rho) + P_0 & P(\rho)C(\rho)^T & B(\rho) \\ C(\rho)P(\rho) & -\gamma I & D(\rho) \\ B(\rho)^T & D(\rho)^T & -\gamma I \end{bmatrix} &< 0 \end{aligned}$$

pour toute trajectoire paramétrique admissible  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ . ♦

**Remarque 1.1.5.** La fonction de Lyapunov  $V(x, \rho) = x^T P^{-1}(\rho)x$  garantit la stabilité asymptotique et exponentielle du système LPV (1.8) ainsi que la bornitude de sa norme induite  $\mathcal{L}_2$  par  $\gamma$ .

Notons que dans le cas LTI, le lemme borné réel donne une condition nécessaire et suffisante pour que le système LTI satisfasse le niveau de performance  $\gamma$ . L'extension au

cas LPV se réduit à une condition suffisante et par conséquent, elle est assez conservatrice. Même dans le cas plus général d'une matrice de Lyapunov  $P(\rho)$  dépendant des paramètres (pas forcément de façon affine), la principale source de conservatisme vient du fait que la fonction de Lyapunov  $V(x, \rho)$  ne doit pas être forcément quadratique.

### 1.1.4 Le problème de l'estimation d'état

De nombreuses méthodes rencontrées dans la littérature scientifique s'appuient sur le formalisme d'état comme, par exemple, la commande par retour d'état ou la détection des défaillances. Dans ce contexte, leur mise en œuvre nécessite la connaissance de l'état ou d'une partie de celui-ci à chaque instant. En général, à un instant donné, l'état ne peut pas être déduit algébriquement de la sortie à ce même instant et par conséquent une stratégie d'observation est nécessaire afin de reconstituer l'état du système.

De manière générale, un observateur est par définition un système dynamique auxiliaire qui, à partir de la connaissance des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer, permet d'en reconstruire asymptotiquement ou exponentiellement l'état. Le schéma de principe d'un tel système est donné par la figure 1.2.

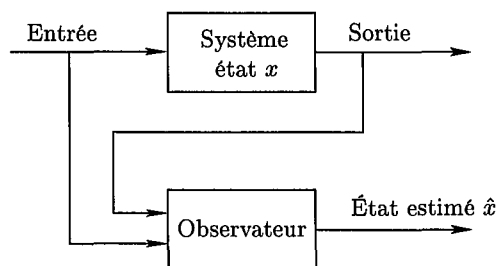


FIG. 1.2 – L'observateur

Dans le cas des systèmes LTI, il existe de nombreux travaux permettant de résoudre le problème d'observation. Une solution simple et optimale a été donnée par les estimateurs de type Luenberger-Kalman. Le principe de l'estimateur de Luenberger est fondé sur les techniques linéaires de placement de pôles [51] alors que l'estimateur de Kalman, dualisant les résultats de commande optimale, s'appuie sur la résolution d'une équation de Riccati [40] dans un contexte stochastique.

Dans le cas des systèmes LPV, l'utilisation des observateurs LTI n'est pas appropriée, les résultats de synthèse correspondants étant trop conservatifs. Afin de réduire ce conservatisme, nous devons privilégier la synthèse des observateurs avec une structure exploitant en temps réel la dynamique courante du système. Cela revient à utiliser des observateurs LPV dont l'avantage principal est lié à leur structure même qui est adaptée à celle du système. La formulation de ce problème d'estimation d'état via un observateur

s'énonce comme suit.

**Définition 1.1.14 (Observateur).** Considérons le système LPV

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) = C(\rho)x(t) + D(\rho)u(t) \\ \text{avec les conditions initiales } x(t_0), \rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}} \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie, et le système auxiliaire

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = H(\rho)z(t) + L(\rho)y(t) + J(\rho)u(t) \\ \hat{x}(t) = Nz(t) + My(t) \\ \text{avec les conditions initiales } z(t_0), \rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}} \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $z(t) \in \mathbb{R}^j$  ( $j \leq n$ ) et  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état estimé. Si les hypothèses suivantes sont vérifiées

1.  $\hat{x}(t_0) = x(t_0) \implies \hat{x}(t) = x(t)$  pour tout  $t \geq t_0$
2. l'erreur d'estimation  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  est quadratiquement stable

alors le système (1.11) est un observateur LPV quadratique pour le système (1.10).  $\blacklozenge$

**Remarque 1.1.6.** Dans ce mémoire, on s'intéresse plutôt à la stabilité quadratique dépendant des paramètres et plus particulièrement à la stabilité quadratique affine de l'erreur d'estimation. Par conséquent, lorsque l'erreur d'estimation est AQS, le système (1.11) est appelé *observateur LPV-AQS*.

Le problème de la synthèse de l'observateur (1.11) revient à déterminer les fonctions matricielles  $H(\rho) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{j \times j}$ ,  $L(\rho) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{j \times p}$ ,  $J(\rho) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{j \times m}$  et les matrices  $N$  et  $M$ , de dimensions appropriées, pour que l'état estimé  $\hat{x}(t)$  converge quadratiquement vers l'état  $x(t)$  du système (1.10) indépendamment des états initiaux  $x(t_0)$  et  $z(t_0)$ , de l'entrée de commande  $u(t)$  et de la trajectoire du vecteur des paramètres  $\rho$  dans  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ . Par analogie avec les observateurs conventionnels, l'observateur (1.11) est d'ordre plein si  $j = n$  ( $N = I_n$ ) et d'ordre réduit si  $j < n$ . Par la suite nous nous intéressons uniquement à la synthèse d'observateurs d'ordre plein et on prendra donc  $N = I_n$ .

Il faut noter que l'observateur (1.11) a une forme plus générale qu'un observateur de type Luenberger. En effet, un observateur dépendant des paramètres de type Luenberger est un cas particulier de l'observateur (1.11) et il correspond à

$$M = 0, H(\rho) = A(\rho) - L(\rho)C(\rho) \text{ et } J(\rho) = B(\rho) - L(\rho)D(\rho). \quad (1.12)$$

Donc, en utilisant (1.12), on retrouve la structure d'observateur dépendant des paramètres de type Luenberger

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(\rho)\hat{x}(t) + B(\rho)u(t) + L(\rho)(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (1.13)$$

avec  $\hat{y}(t) = C(\rho)\hat{x}(t) + D(\rho)u(t)$ . Dans ce cas, la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par

$$\dot{e}(t) = (A(\rho) - L(\rho)C(\rho))e(t).$$

Une condition suffisante pour l'existence de l'observateur (1.13) est la suivante : supposons qu'il existe les fonctions matricielles  $P_L \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R}^N, \mathcal{S}^n)$  et  $L \in \mathcal{C}^0(\mathcal{R}^N, \mathcal{R}^{n \times p})$  telles que  $P_L > 0$  et

$$(A(\rho) - L(\rho)C(\rho))^T P_L(\rho) + P_L(\rho)(A(\rho) - L(\rho)C(\rho)) + \frac{dP_L(\rho)}{dt} < 0 \quad (1.14)$$

pour tout  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ . Alors, l'utilisation d'une telle fonction  $L$  dans l'implémentation de l'observateur LPV (1.13) permet d'avoir une erreur d'estimation qui est QDP stable pour tout  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

**Remarque 1.1.7.** La condition (1.14) représente une condition de *déteçtabilité paramétrique* de la paire des fonctions matricielles  $(A(\rho), C(\rho))$  sur  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

L'inégalité matricielle (1.14) permet de calculer le gain  $L(\rho)$  ainsi que la matrice de Lyapunov  $P_L(\rho)$ . La difficulté principale dans la résolution de cette inégalité vient du fait qu'elle contient des termes croisés impliquant les matrices inconnues  $L(\rho)$  et  $P_L(\rho)$ , ce qui nous ramène à un problème d'optimisation non-convexe. Dans les chapitres 2 et 3 de ce mémoire, cette difficulté est contournée en reformulant la condition de type (1.14) comme une LMI sous contrainte de rang ou simplement comme une LMI impliquant l'utilisation d'une matrice auxiliaire. La deuxième difficulté dans la résolution numérique est liée au nombre infini d'inégalités contenues dans la condition (1.14) à cause de la dépendance paramétrique. Ce point est abordé dans la section 1.2.

### 1.1.5 Le problème de la commande par retour d'état

Le problème dual de l'estimation d'état est le problème de la commande par retour d'état.

Considérons le système LPV

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \\ y(t) = C(\rho)x(t) + D(\rho)u(t), \rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}} \end{cases} \quad (1.15)$$

où  $x(t) \in \mathcal{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathcal{R}^m$  est le vecteur d'entrée,  $y(t) \in \mathcal{R}^p$  est le vecteur de sortie. Le problème de la commande par retour d'état consiste à trouver une commande dépendant des paramètres de type  $u(t) = K(\rho)x(t)$  permettant de satisfaire des exigences de performance pour le système en boucle fermée. Une exigence nécessaire pour cette loi de commande est qu'elle assure la stabilité de la boucle fermée.



De la même manière que précédemment, une condition suffisante pour l'existence d'un gain de retour d'état est la suivante : supposons qu'il existe les fonctions  $P_K \in \mathcal{C}^1(\mathcal{R}^N, \mathcal{S}^n)$  et  $K \in \mathcal{C}^0(\mathcal{R}^N, \mathcal{R}^{m \times n})$  telles que  $P_K > 0$  et

$$(A(\rho) + B(\rho)K(\rho))P_K(\rho) + P_K(\rho)(A(\rho) + B(\rho)K(\rho))^T - \frac{dP_K(\rho)}{dt} < 0 \quad (1.16)$$

pour toutes les trajectoires paramétriques  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ . Alors la loi de commande  $u(t) = K(\rho)x(t)$  garantit la stabilité quadratique dépendant des paramètres et implicitement la stabilité exponentielle du système en boucle fermée.

**Remarque 1.1.8.** La condition (1.16) représente une condition de *stabilisabilité paramétrique* de la paire des fonctions matricielles  $(A(\rho), B(\rho))$  sur  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

L'inégalité (1.16) permet de construire le gain du retour d'état par une recherche numérique des matrices  $K(\rho)$  et  $P_K(\rho)$ . On retrouve les mêmes difficultés liées aux termes croisés impliquant les matrices inconnues  $K(\rho)$  et  $P_K(\rho)$  et au nombre infini de LMIs.

Après un bref rappel sur la formulation LMI, la section qui suit est dédiée à une discussion à propos de ces aspects.

## 1.2 Inégalités linéaires matricielles

Un grand nombre de problèmes de l'automatique concernant la stabilité, l'analyse et la synthèse des systèmes dynamiques ainsi que les spécifications de robustesse ou de performance peuvent se traduire sous la forme d'une optimisation convexe avec des contraintes inégalité. Des problèmes qui apparaissent difficiles voire impossibles à résoudre de manière analytique peuvent être formulés par l'approche LMI et donc numériquement résolus. En effet, le développement de « solveurs » de plus en plus puissants ont rendu ce type d'approche facilement exploitable numériquement.

### 1.2.1 Introduction

Une inégalité matricielle linéaire est définie comme suit :

**Définition 1.2.1 (Inégalité matricielle linéaire ou LMI).** Une contrainte de la forme

$$F(a) < 0, \quad F(a) \leq 0, \quad F(a) > 0, \quad F(a) \geq 0$$

est une inégalité matricielle linéaire (LMI) si la fonction  $F : \mathcal{R}^{n_a} \longrightarrow \mathcal{S}^{m_a}$  est affine par rapport à la variable  $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{n_a}]^T$  c'est-à-dire  $F(a) = F_0 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i F_i$  où  $\{F_i\}_{i=1 \dots n_a}$  est une famille de matrices de  $\mathcal{S}^{m_a}$ . ◆

Le vecteur  $a \in \mathbb{R}^{n_a}$  est appelé le vecteur des *variables de décision*.

Nous résumons brièvement l'intérêt de la formulation LMI :

- *Convexité* : Un aspect important dans l'utilisation des LMIs est le fait que celles-ci définissent un *ensemble convexe*. Pour prouver ceci, considérons  $x^1$  et  $x^2$  solutions du problème LMI (1.2.1) *i.e.*  $F(x^1) > 0$  et  $F(x^2) > 0$ . Alors pour tout  $\theta \in [0, 1]$ ,  $x = \theta x^1 + (1 - \theta)x^2$  est solution du même problème LMI :

$$F(x) = F(\theta x^1 + (1 - \theta)x^2) = \theta F(x^1) + (1 - \theta)F(x^2) > 0.$$

- *Concaténation* :

- Un système qui comprend des LMIs et des contraintes supplémentaires affines en  $x$  peut s'écrire sous la forme d'une seule LMI.
- Des LMIs multiples peuvent également se ramener à une seule. En effet, résoudre les deux LMIs  $F_1(x) > 0$  et  $F_2(x) > 0$  est équivalent à résoudre l'inégalité

$$\text{Bdiag}(F_1(x), F_2(x)) > 0.$$

- *Temps de convergence polynomial* : Des méthodes numériques très efficaces ont été développées pour la résolution des problèmes LMI. Actuellement, les principales classes d'algorithmes sont basées sur les méthodes du point intérieur et elles garantissent la convergence en un temps polynomial. Ces méthodes sont itératives et, à chaque itération, un problème de minimisation de moindres carrés est résolu.
- *Large application* : Les formulations par LMI peuvent être utilisées pour résoudre de nombreux problèmes comme l'analyse de stabilité, la synthèse de contrôleurs ou d'observateurs, l'analyse et la synthèse  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_\infty$ ...

Les deux grandes familles de méthodes qui permettent de résoudre les problèmes par formulation LMI sont les méthodes des plans sécants et les méthodes du point intérieur [23, 25].

Nous présentons une extension de la formulation LMI au cas des inégalités linéaires matricielles soumises à des contraintes de rang.

## 1.2.2 LMI avec contrainte de rang

Il existe de nombreux problèmes de commande ou d'observation qui ne peuvent pas être résolus en utilisant des inégalités linéaires matricielles. Une approche possible est de formuler des inégalités bilinéaires matricielles (BMI) définies par :

$$F(a,b) = F^T(a,b) = \sum_{i=0}^{n_a} \sum_{j=0}^{n_b} a_i b_j F_{ij} > 0.$$

Comme il a été montré dans les sections précédentes, le problème de la synthèse d'un observateur de type Luenberger ou d'une loi de commande par retour d'état peut être formulé comme la résolution de l'inégalité bilinéaire (1.14) ou respectivement (1.16).

Le problème de résolution de BMIs est un problème non-convexe et il peut y avoir plusieurs solutions locales. Pour les résoudre localement nous pouvons utiliser des schémas itératifs qui nous permettent de réduire la complexité de calcul engendrée par les BMIs à celle des LMIs. Par exemple dans [35], les auteurs proposent une méthode homotopique pour résoudre localement une BMI. Même si des méthodes globales de résolution existent [34, 19], les problèmes BMIs restent encore des problèmes complexes et non facilement traitables numériquement. Certaines BMIs peuvent être converties en un problème équivalent LMI avec une contrainte de rang. C'est le cas des inégalités de la forme (1.14), comme nous pourrions le constater dans les résultats présentés dans le chapitre 2.

La résolution des problèmes LMI avec une contrainte de rang apparaît fréquemment dans les formulations d'analyse et de synthèse. La résolution d'une relation LMI avec une contrainte de rang reste un problème non-convexe difficile. Cependant il existe des méthodes heuristiques permettant de trouver des solutions à cette classe de problèmes [32]. Une heuristique basée sur des relaxations convexes peut être utilisée pour résoudre des problèmes sous contrainte de rang [33, 52]. Ceci est réalisé par l'implémentation d'un algorithme de complémentarité de cône. Pour plus de détail sur l'algorithme de complémentarité de cône et les relaxations SDP<sup>1</sup>, le lecteur peut se référer aussi à [24, 37]. À titre d'exemple, dans [38], les auteurs ont formulé la co-stabilisation d'une famille de systèmes linéaires SISO comme un problème LMI avec une contrainte de rang-1. Ils ont résolu ce problème LMI avec contrainte de rang-1 par une procédure de relaxation des LMIs et ils ont proposé un algorithme de synthèse heuristique basé sur une méthode de réduction. Comme extension, il est possible de résoudre un problème avec contrainte de rang- $n$  via une heuristique basée sur des relaxations convexes. Pourtant, cette heuristique ne permet pas toujours de trouver une solution, même si elle existe.

Des algorithmes d'optimisation locale ou globale d'usage universel peuvent également être employés. Les algorithmes d'optimisation locale, comme l'algorithme de Frank et Wolfe par exemple, n'offrent aucune garantie pour qu'un minimum local soit aussi un minimum global. Une méthode d'optimisation globale utilisant la programmation concave a été proposée dans [5]. En effet, cette méthode indique comment utiliser l'algorithme de Frank et Wolfe afin de garantir l'optimalité globale de la solution.

### 1.2.3 LMI dépendant des paramètres

Nous avons vu dans les sections précédentes que l'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres permet de mettre en place des méthodes d'analyse et de synthèse moins restrictives capables d'exploiter des informations sur la vitesse d'évolution

---

1. semidefinite programming

paramétrique. Lors de la synthèse, ces méthodes engendrent la résolution des inégalités matricielles dépendant des paramètres comportant deux difficultés, respectivement liées au fait que le nombre d'inégalités est infini et que la matrice de Lyapunov  $P(\rho)$  évolue dans un espace fonctionnel de dimension infinie.

Pour limiter la dimension de l'espace fonctionnel, un choix particulier de la structure de la matrice de Lyapunov  $P(\rho)$  doit être fait : elle peut être choisie comme étant

$$P(\rho) = \sum_{i=1}^N f_i(\rho) P_i.$$

Un *quadrillage* de l'espace d'évolution des paramètres permet d'effectuer un nombre fini de tests pour chaque point du quadrillage. Cette solution soulève des difficultés en ce qui concerne le choix des fonctions  $f_i(\cdot)$  et la finesse du quadrillage. Dans [67], nous trouvons une approche de type Raleigh-Ritz pour le choix des fonctions de base  $f_i(\cdot)$ .

Une deuxième approche permettant d'éviter le nombre infini d'inégalités est fondée sur la notion de *multi-convexité*. L'annexe C regroupe quelques notions élémentaires sur la convexité. La notion de multi-convexité signifie convexité par rapport à chaque direction de l'espace paramétrique. Cette approche est applicable dans le cas des modèles affines, pour lequel on peut également choisir une structure affine pour la matrice  $P(\rho)$ . Un résultat sur la multi-convexité des fonctions quadratiques scalaires a été donné dans [31] et une généralisation similaire pour le cas des fonctions polynomiales a été présenté dans [1]. Nous rappelons ici le résultat sur la multi-convexité d'une fonction polynomiale.

**Lemme 1.2.1 ([1]).** *Soit une fonction polynomiale  $f : R^n \rightarrow R$  dont le degré total est  $d$  et dont le degré partiel par rapport à la variable  $x_k$  est  $d_k$  pour  $k = 1, \dots, n$ . Alors la fonction  $f$  est négative (respectivement positive) sur tout son domaine  $\text{dom } f$  si*

$$f(x) < 0, \quad (\text{resp. } > 0) \quad \forall x \in \text{Vert}(\text{dom } f), \quad (1.17)$$

et

$$(-1)^m \frac{\partial^{2m} f(x)}{\partial x_{i_1}^2 \dots \partial x_{i_m}^2} \leq 0 \quad (\text{resp. } \geq 0) \quad \forall x \in \text{Vert}(\text{dom } f), \quad (1.18)$$

où

$$1 \leq l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_m \leq n, \quad 1 \leq m \leq d/2$$

$$\text{Card}(\{l_j = k, j \in \{1, \dots, m\}\}) \leq d_k/2, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad \blacksquare$$

**Preuve :** Le lecteur intéressé trouvera la preuve de ce théorème dans [1].  $\square$

Ce théorème présente une condition suffisante pour qu'une fonction scalaire soit négative. En effet, si une fonction est multi-convexe et elle est négative aux sommets de son domaine de définition alors la fonction est négative sur tout son domaine de définition.

L'application de ce théorème en accord avec la théorie de Lyapunov permet de réduire le nombre infini d'inégalité causé par la dépendance paramétrique à un nombre fini d'inégalités. Nous reviendrons, dans les chapitres 2 et 3, avec plus de détails sur l'application de la notion de multi-convexité.

## 1.3 Contexte du séquençement de gain : un état de l'art

L'approche par séquençement de gain est une des approches de synthèse non linéaire. Son origine et sa popularité se situent dans le domaine aéronautique et plus précisément les applications de commande de vol. Aujourd'hui le séquençement de gain est utilisé dans de nombreux domaines allant des applications aérospatiales civiles et militaires (missiles, lanceurs) jusqu'à la commande des processus en général. Sa popularité est en grande partie due à sa capacité de décomposer un problème non linéaire en un nombre fini de sous-problèmes linéaires et donc de permettre l'application des méthodes de synthèse linéaire à des problèmes non linéaires.

### 1.3.1 Introduction

Le séquençement de gain, en anglais « gain scheduling », est un domaine assez ancien qui permet la synthèse des systèmes de commande (ou d'observation) non linéaires d'un type particulier : ces correcteurs ou observateurs sont linéaires mais leur activation est faite en fonction de variables auxiliaires et d'une manière préprogrammée. Les différentes approches du séquençement de gain, que ce soit les approches classiques ou plus récentes, ont un point commun qui est l'utilisation de techniques de synthèse (de commande ou d'observation) linéaires pour aborder des problèmes non linéaires.

Parmi les différentes méthodes de synthèse qui peuvent être vues comme du séquençement de gain, on trouve :

- la commutation entre différentes valeurs du gain de commande en fonction des conditions de fonctionnement ou en fonction des temps de pré-réglage,
- la pré-compensation d'un gain non linéaire par la fonction inverse du gain,
- la commutation entre les sorties de plusieurs contrôleurs fonctionnant en parallèle (« controller blending ») ...

L'appellation *séquençement de gain* traduit également le fait d'associer les paramètres du correcteur aux points de fonctionnement du processus. En d'autres termes, le séquençement de gain peut être vu comme une application (mapping) entre les paramètres du processus vers les paramètres du contrôleur. Cette application ou association peut se faire via des variables auxiliaires appelées *variables de séquençement* qui reflètent les changements de dynamique. Elle peut être implémentée comme une fonction ou un tableau de valeurs.

La terminologie « séquençement de gain » vient du fait qu'à l'origine ce principe consistait à mesurer le gain du processus et à pré-programmer un contrôleur pour compenser les changements de ce gain. Avec le développement des nouvelles techniques de synthèse, cette appellation est devenue de plus en plus large mais les différentes formulations restent unifiées malgré l'absence d'une définition rigoureuse. À titre d'exemple, Helmersson définit le

séquencement de gain comme étant la synthèse d'un contrôleur linéaire à paramètres variables (LPV) dont les paramètres changent en fonction des points de fonctionnement [36]. Dans ce mémoire, nous centrons notre attention sur le séquencement de gain au sens de la formulation suivante :

*Séquencement de gain* = synthèse d'un système (contrôleur ou observateur) LPV dont les paramètres varient de manière continue dans le temps en fonction de certains signaux appelés variables de séquencement qui peuvent être des signaux externes ou internes au processus.

Il existe de nombreuses controverses pour savoir si le séquencement de gain doit être considéré comme un système adaptatif ou non. On peut répondre que oui, si on regarde un système adaptatif comme étant composé d'un contrôleur à paramètres ajustables et d'un mécanisme d'ajustement. Mais, on peut aussi répondre que non si on regarde le mécanisme d'ajustement du système adaptatif comme une procédure d'estimation des paramètres du processus alors que le séquencement de gain suppose la mesurabilité de ces paramètres.

Bien que ce mémoire soit dédié en grande partie à la synthèse d'observateurs, la présentation bibliographique faite de ces approches et du principe général du séquencement de gain privilégie l'aspect synthèse de loi de commande. La raison principale est due au fait que la plupart des publications sur le séquencement de gain traitent la synthèse de contrôleurs et il existe très peu de publications qui s'intéressent à la synthèse d'observateurs. Cela n'affecte en rien l'idée principale de ces types d'approches et sa transposition au cas de la synthèse d'observateurs est immédiate.

### Principe général, historique et état de l'art du séquencement de gain

Le séquencement de gain est basé sur la mesurabilité des points de fonctionnement du processus et il constitue une très bonne technique pour compenser les effets produits par la variation des paramètres du processus ou par certaines non linéarités connues du processus.

Le schéma de principe d'un système avec un contrôleur à gain séquencé est donné dans la figure 1.3 ([7]). Dans ce schéma, le système corrigé peut être vu comme ayant deux boucles : une boucle interne composée du système et du contrôleur et une boucle externe qui permet de changer les paramètres du contrôleur en fonction des points de fonctionnement.

Bien que l'idée d'associer les paramètres d'un contrôleur à des variables auxiliaires soit ancienne, les outils nécessaires à sa mise en œuvre ne sont disponibles que depuis peu. Implémenter le séquencement de gain avec des techniques analogiques nécessite des générateurs de fonctions et des multiplicateurs difficiles à réaliser. Pour des considérations de coût très élevé et des difficultés au niveau matériel, les techniques de séquencement de gain n'ont été adoptées, au début, que pour des applications militaires. Avec l'apparition

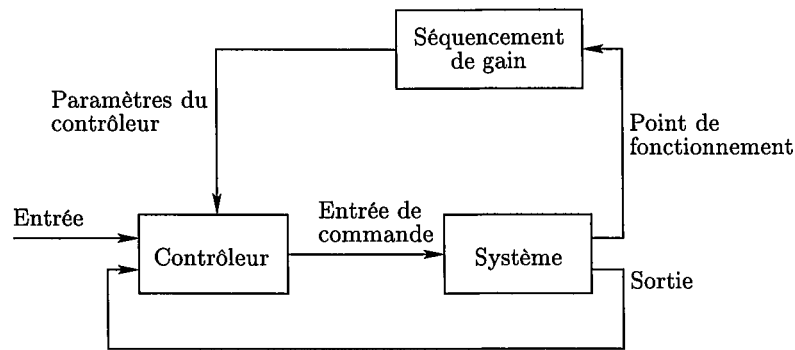


FIG. 1.3 – Le séquençement de gain

de contrôleurs implémentés numériquement sur ordinateur, le séquençement de gain a été également adopté dans d'autres domaines industriels.

Malgré son ancienneté, on trouve peu de publications sur le séquençement de gain avant les années 1990. Les premières études théoriques sur le séquençement de gain comme synthèse pour les systèmes non linéaires sont dues à [61] et [57]. De nombreux travaux ont été entrepris depuis et nous commençons à avoir de nombreuses publications dans ce domaine [56, 60, 39, 54, 45, 3, 43, 47, 2, 62].

Le séquençement de gain *traditionnel* est basé sur la linéarisation du système autour de plusieurs points d'équilibre. Des méthodes de synthèse linéaire sont appliquées sur le modèle linéarisé à chaque point d'équilibre afin d'obtenir un ensemble de contrôleurs LTI qui fonctionnent lorsque le système en boucle fermée évolue autour de ces points. Par la suite, la procédure de séquençement proprement dite est à l'origine de l'aspect non linéaire du problème de synthèse. L'idée de base de la procédure de séquençement implique l'interpolation de contrôleurs LTI pour les conditions de fonctionnement intermédiaires.

Parallèlement, des approches alternatives très intéressantes ont été proposées dans le contexte du séquençement de gain. Elles utilisent plutôt une représentation du système de type LPV qu'une représentation non linéaire et elles sont appelées méthodes LPV de séquençement de gain. Ces approches sont différentes conceptuellement du séquençement de gain classique dans le sens où elles construisent directement un contrôleur LPV sans passer par une famille de contrôleurs LTI.

Nous pouvons regrouper toutes les méthodes du séquençement de gain basée sur la linéarisation jacobienne et utilisant soit des techniques traditionnelles d'interpolation soit des techniques LPV pour la synthèse de contrôleurs. Ces méthodes sont connues dans la littérature sous le nom de séquençement par linéarisation mais nous, on les appellera dans cette thèse *approche conventionnelle* du séquençement de gain (en bleu sur la figure 1.4). Une présentation plus détaillée de l'approche conventionnelle est présentée dans la section 1.3.2.

Une limitation de l'approche conventionnelle réside dans le fait qu'elle exploite le comportement du système seulement dans un voisinage des points d'équilibre. Une approche

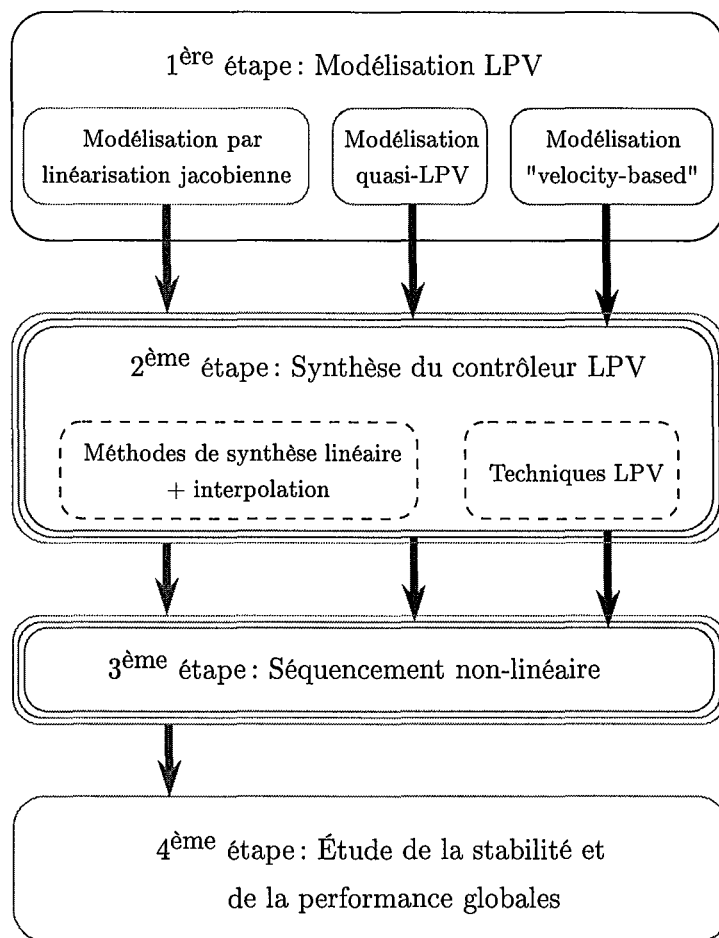


FIG. 1.4 – Principe et classification du séquencement de gain

récente qui attaque directement cette restriction est basée sur la linéarisation de type « velocity-based » (en vert sur la figure 1.4). Cette nouvelle approche permet d’associer un système linéaire à chaque point de fonctionnement du système et plus seulement aux points d’équilibre. Les avantages d’une telle approche seront présentés plus loin.

Toutes les approches conservant la philosophie classique du séquencement de gain où la synthèse d’un contrôleur non linéaire est décomposée en la synthèse de plusieurs contrôleurs LTI, ont été appelées par Leith [50] « divide & conquer gain-scheduling design ».

De manière générale, la synthèse de contrôleurs par séquencement de gain pour des processus non linéaires est une procédure à quatre étapes comportant l’utilisation de différentes techniques comme on peut le constater sur la figure 1.4 :

**PREMIÈRE ÉTAPE :** Elle consiste à concevoir un modèle LPV du processus. La méthode la plus utilisée est la linéarisation jacobienne (du 1<sup>er</sup> ordre) du processus autour d’une famille de points d’équilibre et, suite à cette linéarisation, nous obtenons une famille paramétrée de modèles linéarisés. La paramétrisation correspond à des valeurs fixes des variables de séquencement. Ces variables de séquencement sont soit des variables internes



du processus soit des signaux externes du processus voire une fonction de ceux-ci. Cette approche s'appelle *séquençement par linéarisation* (en bleu sur la figure 1.4).

Une deuxième approche consiste à déguiser les non linéarités en les ré-écrivant comme des paramètres variants dans le temps qui sont utilisés par la suite comme des variables de séquençement. Cette approche s'appelle *séquençement quasi-LPV* (en rouge sur la figure 1.4). D'autres approches plus récentes peuvent être rajoutées à cette première étape : modélisation basée sur la vitesse, modélisation de type logique floue ou réseaux neuronaux.

**DEUXIÈME ÉTAPE :** Dans une deuxième étape, l'utilisation des méthodes de synthèse linéaire permet la synthèse des contrôleurs linéaires pour le modèle LPV. Une famille paramétrée de contrôleurs linéaires, correspondant au modèle linéaire dépendant des paramètres, peut être obtenue :

- soit par des méthodes directes comme les méthodes LPV,
- soit par un mécanisme (ou une procédure) d'interpolation à partir d'un ensemble de contrôleurs LTI construits pour des valeurs isolées des variables de séquençement.

Généralement, la synthèse est faite de telle sorte que le modèle LPV en boucle fermée, pour chaque valeur fixée des paramètres, respecte les performances désirées. Des méthodes plus récentes de synthèse essaient d'assurer les performances désirées pour des trajectoires des paramètres à temps variant appartenant à une classe spécifiée (voir les méthodes LPV décrites dans la section 1.4).

**TROISIÈME ÉTAPE :** Elle concerne la mise en œuvre pratique du séquençement de gain qui nécessite une implémentation de la famille de contrôleurs de telle façon que les coefficients (ou les gains) du contrôleur varient en fonction de la valeur courante des variables de séquençement. Les méthodes diffèrent selon le type de séquençement choisi, *i.e.* séquençement par linéarisation ou quasi-LPV.

**QUATRIÈME ÉTAPE :** La stabilité et les performances locales du contrôleur à gain séquencé font l'objet d'une investigation analytique tandis que l'évaluation de la performance globale est faite par simulation.

### Caractéristiques du séquençement de gain

Nous présentons les caractéristiques générales du séquençement de gain qui peuvent être soit des avantages soit des inconvénients [57, 58] :

- L'avantage principal de l'approche par séquençement de gain réside dans l'utilisation d'outils puissants de synthèse linéaire pour des problèmes non linéaires difficiles. La plupart des spécifications de performance sont formulées dans le cas linéaire et des notions du domaine fréquentiel, par exemple, deviennent directement exploitables. Ainsi, beaucoup de techniques qui ne sont pas assez bien définies dans un contexte non linéaire deviennent applicables dans une approche par séquençement de gain.

- Cette approche ne nécessite pas d’hypothèse structurelle sévère sur le modèle du processus et elle peut être appliquée même en l’absence d’un modèle complet (par exemple lorsqu’on dispose seulement de la connaissance de quelques points d’équilibre et des linéarisations correspondantes).
- Un autre avantage réside dans le fait que cette approche permet au contrôleur de répondre rapidement aux changements du processus. Pourtant cet avantage introduit certaines difficultés. Une des difficultés concerne la sélection des variables de séquençement appropriées: il est très important que les variables de séquençement traduisent les changements de la dynamique du système comme des changements de points de fonctionnement. Une autre difficulté importante est la sélection de la procédure de séquençement. L’interpolation linéaire s’est avérée être la procédure standard.
- Un autre aspect du séquençement de gain est le fait qu’il est local par sa nature. En effet, la stabilité peut être assurée localement et seulement pour des variations lentes des paramètres. Il n’y a pas de garantie de performance globale. Celle-ci doit être vérifiée par des études de simulation approfondies, ce qui est la contrepartie des avantages de l’utilisation des méthodes de synthèse linéaires. Par contre l’approche quasi-LPV, décrite plus loin, offre des garanties de performance et de stabilité.

Nous avons présenté le séquençement de gain comme étant une technique qui permet de résoudre les problèmes non linéaires par décomposition en un nombre fini de sous-problèmes linéaires. Mais, la synthèse par séquençement de gain est aussi une technique attractive qui permet de concevoir des contrôleurs pour des systèmes soumis à des variations paramétriques. Le principe de base consiste à choisir les paramètres du contrôleur en ligne comme des fonctions des paramètres du système. Lorsque les paramètres sont incertains et disponibles en temps réel pour le contrôleur, nous pouvons construire des contrôleurs en appliquant des techniques de synthèse par séquençement de gain ou des techniques de synthèse robuste. De plus, la stabilité et les performances des contrôleurs à gain séquencé peuvent être analysées en utilisant des critères de robustesse. Un lien intéressant entre les deux types de technique de synthèse est présenté par la suite.

## Robustesse ou séquençement de gain

Dans le contexte des systèmes incertains avec des paramètres incertains variants dans le temps, on peut se poser le problème de la synthèse d’un contrôleur robuste ou d’un contrôleur à gain séquencé. Dans le cas de la stabilisation par retour d’état, Blanchini a abordé dans [22] une question très intéressante: *quand la stabilisation par séquençement de gain est-elle équivalente à un problème de stabilisation robuste?* La réponse donnée peut être étonnante: pour les modèles convexes les deux problèmes de stabilisation par retour d’état sont équivalents. En effet, l’auteur considère un modèle incertain convexe de

la forme :

$$\dot{x} = a(x, \rho) + b(x, \rho)u$$

où  $a(x, \rho)$  et  $b(x, \rho)$  évoluent dans des ensembles convexes par rapport au paramètre incertain variant dans le temps  $\rho(t) \in \Omega$ . Il est bien connu que l'existence d'un contrôleur stabilisant robuste implique l'existence d'un contrôleur stabilisant à gain séquencé. Blanchini montre que l'existence d'un contrôleur stabilisant à gain séquencé  $\Phi_{GS}(x, \rho)$  implique l'existence d'un contrôleur stabilisant robuste  $\Phi_R(x)$  continu partout à l'exception de l'origine. Dans le cas des systèmes LPV polytopiques, la commande  $\Phi_R(x)$  n'est plus discontinue à l'origine.

La question tout à fait naturelle que nous pouvons nous poser maintenant est la suivante : *La mesurabilité des paramètres apporte-t-elle un avantage pour le contrôleur ?* La réponse est donnée dans le même article : l'avantage de la mesurabilité des paramètres réside dans le fait qu'elle rend possible l'implémentation de contrôleurs stabilisants linéaires. Il faut noter que les résultats proposés ne sont valables que pour le problème de stabilisation par retour d'état. De ce fait, la connaissance du paramètre  $\rho$  est utile pour assurer de meilleures performances en boucle fermée. De même, une commande discontinue en  $x = 0$  peut générer, lors de l'implémentation pratique, des oscillations non désirables lorsque l'état est proche de l'origine. Dans le cas d'une commande basée observateur, la connaissance des paramètres joue un rôle très important. En effet, si l'observateur n'est pas dépendant des paramètres, l'équation de l'erreur d'estimation présente des termes devant être considérés comme des incertitudes. Les résultats d'équivalence fournis par Blanchini ne sont donc pas valables pour une commande basée observateur ni dans le cas plus général d'une commande par retour de sortie.

### 1.3.2 Approche conventionnelle du séquençement de gain

Par approche conventionnelle du séquençement de gain on comprend une approche basée sur la linéarisation jacobienne du système autour d'un certain nombre de points d'équilibre. Par conséquent, elle utilise uniquement l'information concernant la dynamique du système en ces points d'équilibre. La présentation qui suit, de l'approche conventionnelle, aborde aussi bien les techniques traditionnelles que les techniques plus modernes et elle suit la présentation donnée dans [58].

#### Modélisation LPV du système

Soit le système non linéaire décrit par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases} \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.19)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur des entrées de commande et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des sorties.  $f$  et  $g$  sont des fonctions différentiables avec des dérivées continues lipschitziennes et bornées.

L'ensemble des points d'équilibre du système non linéaire (1.19) est constitué des points  $(x_e, u_e)$  tels que  $f(x_e, u_e) = 0$ . Cet ensemble de points d'équilibre est paramétré par une variable de séquençement  $\rho \in \mathbb{R}^N$ , ce qui nous permet de définir une variété d'équilibre ou une famille de points d'équilibre.

Une *variété d'équilibre* ou *famille de points d'équilibre* paramétrée par  $\rho \in \mathbb{R}^N$  est définie comme étant l'ensemble des fonctions continues  $x_e : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u_e : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^m$  telles que

$$f(x_e(\rho), u_e(\rho)) = 0 \quad \forall \rho \in \mathcal{D} \quad (1.20)$$

où  $\mathcal{D}$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^N$ .

**Remarque 1.3.1.** La variable de séquençement  $\rho$  peut dépendre de l'état, des entrées et des sorties du système. Étant donné que le vecteur de séquençement doit être mesurable, il ne peut dépendre de l'état qu'à travers les sorties mesurées  $y$  et donc  $\rho = h(u, y)$ . La variable de séquençement  $\rho$  est vue comme un paramètre par le processus de synthèse et par la suite, dans l'implémentation du contrôleur à séquençement de gain, elle devient une entrée à temps variant via la dépendance  $\rho(t) = h(u(t), y(t))$ .

**Remarque 1.3.2.** Le choix de la variable de séquençement n'est pas unique et cette sélection ainsi que la définition de la variété d'équilibre dépendent du problème considéré.

A chaque point d'équilibre nous pouvons associer une linéarisation (une approximation) du système autour de ce même point d'équilibre qui décrit le comportement local du système non linéaire. Par conséquent, nous associons à une variété d'équilibre donnée la *famille de linéarisations* correspondante qui s'écrit sous la forme LPV suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_\delta = \nabla_x f(x_e(\rho), u_e(\rho))x_\delta + \nabla_u f(x_e(\rho), u_e(\rho))u_\delta \\ y_\delta = \nabla_x g(x_e(\rho), u_e(\rho))x_\delta + \nabla_u g(x_e(\rho), u_e(\rho))u_\delta \end{cases} \quad \forall t \geq t_0 \text{ et } \forall \rho \in \mathcal{D} \quad (1.21)$$

où  $x_\delta(t)$ ,  $u_\delta(t)$  et  $y_\delta(t)$  sont des signaux de déviation

$$x_\delta(t) = x(t) - x_e(\rho) \quad u_\delta(t) = u(t) - u_e(\rho) \quad y_\delta(t) = y(t) - y_e(\rho)$$

et  $\nabla_x f$  est le jacobien de la fonction  $f$  par rapport à la variable  $x$ . La sortie  $y_e(\rho)$  représente la sortie associée à la variété d'équilibre, *i.e.*  $y_e(\rho) = g(x_e(\rho), u_e(\rho))$ ,  $\rho \in \mathcal{D}$ . Du fait que les fonctions  $f$  et  $g$  sont continûment différentiables, les fonctions matricielles  $\nabla_x f$ ,  $\nabla_u f$ ,  $\nabla_x g$  et  $\nabla_u g$  sont continues.

La famille de linéarisation (1.21) décrit, pour chaque valeur figée du paramètre  $\rho$ , le comportement local du système non linéaire autour du point d'équilibre correspondant.

**Remarque 1.3.3.** Dans les équations de la forme non linéaire (1.19), des entrées externes peuvent intervenir. Nous pouvons les séparer en  $v$  et  $w$  de telle sorte que le vecteur des

entrées externes  $w$  reflète la dépendance paramétrique du système en fonction des variables externes tandis que le vecteur  $v$  représente des entrées de types signaux de référence, perturbations et bruits. La distinction entre les deux types d'entrées externes est faite au niveau de la synthèse. Dans le cas du séquençement par linéarisation, l'équation d'état sera linéarisée par rapport à  $v$  mais pas par rapport à  $w$ . Le vecteur  $w$  apparaît plutôt comme une partie de la paramétrisation de la famille des linéarisations, *i.e.*  $\rho = h(u, y, w)$ .

## Synthèse linéaire

La synthèse du contrôleur à séquençement de gain consiste en la synthèse d'une famille de contrôleurs linéaires correspondant à la famille de linéarisations (1.21) du système. Ceci a comme résultat l'obtention d'une famille de contrôleurs linéaires paramétrée par la variable de séquençement  $\rho$  avec  $y_\delta(t)$  comme signal d'entrée et  $u_\delta(t)$  comme signal de sortie.  $y_\delta(t)$  et  $u_\delta(t)$  sont des signaux de déviation associés au système linéarisé autour de points d'équilibre paramétrés par  $\rho$ . La famille de contrôleurs linéaires peut être écrite sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta^c \\ u_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\rho) & G(\rho) \\ H(\rho) & E(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta^c \\ y_\delta \end{bmatrix}, \quad \rho \in \mathcal{D}. \quad (1.22)$$

Afin d'obtenir le contrôleur LPV (1.22), nous pouvons procéder de différentes manières. Une solution consiste à diviser la famille d'équilibre en des régions disjointes  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \dots \cup \mathcal{D}_K$  et à faire la synthèse d'un contrôleur LTI pour chacune de ces régions. Ensuite, le contrôleur LPV est obtenu en faisant varier les coefficients du contrôleur selon la valeur de  $\rho$  *i.e.* si  $\rho \in \mathcal{D}_k$  alors utiliser les coefficients correspondants  $F_k$ ,  $G_k$ ,  $H_k$  et  $E_k$ . Cette solution est la plus simple mais elle présente l'inconvénient de produire des discontinuités et des sauts dans les coefficients du contrôleur LPV, ce qui n'est pas forcément souhaitable.

Une autre solution consiste à évaluer le modèle LPV en des points sélectionnés formant un ensemble de points de synthèse et à calculer des contrôleurs LTI pour chacun de ces points. En d'autres termes, en choisissant des points  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_K$  représentatifs de la famille des points d'équilibre, un contrôleur LTI est construit pour chaque linéarisation du système correspondant à ces points. Ceci génère un ensemble indexé de contrôleurs LTI :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_\delta^c \\ u_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_k & G_k \\ H_k & E_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\delta^c \\ u_\delta \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, K.$$

Bien entendu, les variables de chaque contrôleur sont des variables de déviation par rapport au point d'équilibre considéré, *i.e.* par exemple  $y_\delta(t) = y(t) - y_e(\rho_k)$ . Ensuite, cet ensemble des contrôleurs LTI est interpolé entre les points de synthèse par rapport au paramètre  $\rho$  d'une manière au moins continue afin d'obtenir le contrôleur (1.22). Cette solution soulève une difficulté pratique de conception relative au choix souvent délicat de la méthode d'interpolation en ligne.

Bien qu'une partie de la littérature sur le séquençement de gain ignore les problèmes posés par l'interpolation [61, 57, 41, 45], en supposant que le contrôleur interpolé continuellement (1.22) est disponible, d'autres chercheurs se sont plutôt focalisés sur l'interpolation de contrôleurs LTI. De nombreuses méthodes *ad-hoc* ont été proposées :

- interpolation des fonctions de transfert en interpolant linéairement les pôles, les zéros et les gains des contrôleurs LTI [53],
- interpolation linéaire des matrices de la représentation d'état de ces correcteurs [42],
- interpolation linéaire des contrôleurs  $\mathcal{H}_\infty$  obtenus par résolution des équations algébriques de Riccati [56],
- interpolation linéaire du gain de la boucle fermée et du gain d'observateur [39]
- interpolation des sorties de plusieurs contrôleurs implémentés en parallèle [26], [43].

Toutes ces approches proposent des solutions plutôt intuitives qui donnent de bons résultats pour les applications particulières considérées. Malheureusement, des contrôleurs non stabilisants peuvent être générés pour des points d'équilibre intermédiaires ou pour certaines valeurs du paramètre  $\rho$  ce qui, sans précaution particulière, peut engendrer l'instabilité de la boucle fermée.

En complément de ces méthodes *ad-hoc*, des méthodes bien justifiées théoriquement ont été proposées. Une interpolation linéaire des gains du retour d'état permettant de placer les pôles de la boucle fermée dans une région choisie, est présentée dans [60]. Dans [62, 63], les auteurs proposent des méthodes d'interpolation des contrôleurs qui stabilisent le système pour chaque valeur du paramètre  $\rho$ . Afin de garantir la stabilité globale du système non linéaire en boucle fermée, une borne sur la vitesse de variation de  $\rho$  a été calculée.

Une solution alternative qui permet de contourner le problème de l'interpolation, en abordant ce problème de manière implicite, est offerte par les techniques LPV. Dans l'approche LPV, il est possible d'obtenir directement la famille de contrôleurs (1.22) par des méthodes de synthèse LPV [17, 3, 4] ou LFT [54]. Ces méthodes seront présentées en détail dans la section 1.4.

## Séquençement non linéaire

Le but de cette étape est de calculer un contrôleur de la forme non linéaire générale

$$\begin{cases} \dot{x}^c(t) = a(x^c(t), y(t)) \\ u(t) = b(x^c(t), y(t)) \end{cases} \quad \forall t \geq t_0 \quad (1.23)$$

avec les signaux  $u(t)$  et  $y(t)$  correspondant au système non linéaire (1.19).

Un premier objectif de cette étape du séquençement est qu'un point d'équilibre du contrôleur se superpose à un point d'équilibre du système. Dans ce cas, le système en boucle fermée aura le même point d'équilibre et en plus la linéarisation du système en

boucle fermée autour de ce point correspond à la boucle fermée obtenue en associant le système linéarisé et le contrôleur linéarisé. Par conséquent, la variété d'équilibre du contrôleur (1.23) doit se superposer avec la variété d'équilibre du système non linéaire. Cette exigence suppose l'existence d'une fonction  $x_e^c(\rho)$  telle que

$$0 = a(x_e^c(\rho), y_e(\rho)) \text{ et} \quad (1.24a)$$

$$u_e(\rho) = b(x_e^c(\rho), y_e(\rho)), \quad \rho \in \mathcal{D}. \quad (1.24b)$$

La condition (1.24b) exige que le contrôleur, en la variété d'équilibre, fournisse un signal d'entrée constant permettant au système de maintenir la condition d'équilibre (1.20).

Un deuxième objectif exige que la famille des linéarisations du contrôleur non linéaire (1.23) soit identique à la famille des contrôleurs linéaires (1.22) obtenue par le processus de synthèse. La linéarisation du contrôleur non linéaire autour de chaque point d'équilibre est identique au contrôleur linéaire (1.22) construit pour ce point d'équilibre si

$$\begin{aligned} \nabla_{x^c} a(x_e^c(\rho), y_e(\rho)) &= F(\rho) \\ \nabla_y b(x_e^c(\rho), y_e(\rho)) &= E(\rho), \quad \rho \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

La manière la plus simple pour trouver un contrôleur satisfaisant les conditions (1.24b) et (1.25) consiste à utiliser directement le contrôleur LPV ce qui permet de trouver le contrôleur à gain séquençé suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}^c = F(\rho)(x^c - x_e^c(\rho)) + G(\rho)(y - y_e(\rho)) \\ u = H(\rho)(x^c - x_e^c(\rho)) + E(\rho)(y - y_e(\rho)) + u_e(\rho), \quad \rho \in \mathcal{D}. \end{cases} \quad (1.26)$$

L'implémentation de ce contrôleur est obtenue tout simplement en remplaçant  $\rho(t)$  par sa description  $h(u(t), y(t))$ .

Généralement, il peut y avoir plusieurs contrôleurs non linéaires, à part le contrôleur (1.26), satisfaisant les conditions (1.24b) et (1.25). Le contrôleur (1.26) est le choix habituel pour les applications. Certains auteurs ont concentré leur attention sur la synthèse de contrôleurs de la forme (1.23). Par exemple dans [41], le point de départ est la famille de contrôleurs linéaires (1.22). Les auteurs proposent une méthode produisant un contrôleur dont la linéarisation en boucle fermée, en chaque point d'équilibre, a les mêmes valeurs propres et la même fonction de transfert que la boucle fermée linéaire composée du système linéarisé et du contrôleur linéaire.

**Remarque 1.3.4.** L'implémentation du contrôleur (1.26) fait disparaître le paramètre artificiel  $\rho$  apparaissant dans sa structure. Par conséquent, comme  $\rho$  n'intervient plus explicitement, la linéarisation de cette implémentation est différente de la famille de contrôleurs linéaires (1.22). Cela est dû à l'apparition de certains termes supplémentaires agissant soit au niveau de la boucle fermée soit comme des perturbations extérieures et ces termes sont connus dans la littérature scientifique sous le nom de termes de couplage caché [53, 45, 58]. Certains remèdes contre l'apparition de ces couplages ont été proposées par [57, 53, 45]. Par exemple, la méthode de synthèse du contrôleur non linéaire proposée dans [41] évite les couplages cachés.

### 1.3.3 Approches récentes du séquençement de gain

Comme présentée dans la section précédente, l'approche conventionnelle du séquençement de gain est basée sur la linéarisation jacobienne du système autour d'un certain nombre de points d'équilibre. Par conséquent, cette technique n'utilise que l'information concernant la dynamique du système en ces points d'équilibre. Des méthodes plus récentes permettent de contourner cette limitation et d'exploiter des informations supplémentaires comme la dynamique du système en des points de fonctionnement différents des points d'équilibre.

#### Modélisation quasi-LPV

La modélisation quasi-LPV permet d'obtenir une description linéaire du système d'une manière très différente de l'approche par famille de linéarisation jacobienne. Elle est basée sur la possibilité de ré-écrire les non linéarités comme des paramètres variants dans le temps qui sont inclus, par la suite, dans le vecteur de séquençement.

Comme les termes non linéaires contiennent généralement l'état, ceci signifie qu'une partie de l'état doit être utilisée dans la constitution du vecteur de séquençement. Dans cette optique, le vecteur d'état est partagé en deux parties : une partie mesurable  $x_m$  qui contient les états considérés comme paramètres et une deuxième partie  $x_d$  qui contient les états dynamiques. En supposant qu'il existe une représentation quasi-LPV du système (1.19) alors elle s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho) \\ C(\rho) & D(\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{u}(\rho, u) \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

avec  $\rho$  contenant le vecteur  $x_m$  et éventuellement des signaux externes. La fonction  $\hat{u}(\rho, u)$  est supposée inversible par rapport à  $u$ , *i.e.* il existe  $\hat{u}^{-1}$  tel que  $\hat{u}^{-1}(\rho, \hat{u}(\rho, u)) = u$ . Alors la synthèse d'une commande linéaire pour  $\hat{u}$  conduit à la synthèse de la commande non linéaire  $u$  comme étant  $u = \hat{u}^{-1}(\rho, \hat{u})$ .

Il est important de noter qu'une représentation quasi-LPV d'un système n'est pas unique et que toutes ces représentations quasi-LPV ne sont pas forcément utilisables pour le séquençement de gain. Pour qu'une représentation quasi-LPV soit exploitable par une approche utilisant le séquençement de gain il faut que seule la partie mesurable du vecteur d'état intervienne dans les non linéarités.

Le modèle LPV (1.27) n'est pas obtenu par une technique de linéarisation. Par conséquent, on n'a pas une famille de points d'équilibre mais uniquement le point d'équilibre à l'origine. Si une loi de commande satisfait les performances désirées pour toutes les trajectoires paramétriques  $\rho$  alors elle satisfait les mêmes performances lorsque le vecteur  $x_m$  prend la valeur de la variable dynamique  $x_m(t)$  intervenant dans le système de départ. Cela est dû au fait que le modèle LPV (1.27) introduit des caractéristiques supplémentaires qui peuvent aller au delà de celles du système non linéaire considéré, ce qui augmente considérablement les difficultés de la synthèse du contrôleur.



### Modélisation par linéarisation basée sur la vitesse (« velocity-based »)

La linéarisation basée sur la vitesse est la généralisation rigoureuse de la linéarisation par développement en série autour d'un point d'équilibre. En effet, par cette méthode de linéarisation on associe un système linéaire à chaque point de fonctionnement de l'espace de fonctionnement et pas seulement aux points d'équilibre. En dérivant le système non linéaire (1.19), une représentation de ce système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = w \\ \dot{w} = \nabla_x f(x,u)w + \nabla_u f(x,u)\dot{u} \\ \dot{y} = \nabla_x g(x,u)w + \nabla_u g(x,u)\dot{u}. \end{cases} \quad (1.28)$$

Du point de vue de la dynamique, le système (1.28), avec des conditions initiales appropriées, est équivalent au système non linéaire (1.19) dans le sens où les deux systèmes ont la même solution  $x$ . Il faut noter que cette transformation translate tous les points d'équilibre à l'origine ( $w = 0 = \dot{u}$ ). Une linéarisation basée sur la vitesse du système (1.19) au point de fonctionnement  $(x_1, u_1)$  est tout simplement le système (1.28) fixé sur le point de fonctionnement  $(x_1, u_1)$ .

Ainsi, au système non linéaire (1.19) on peut associer une famille de linéarisations basées sur la vitesse définie par (1.28) avec  $(x, u)$  appartenant à l'ensemble des points de fonctionnement. Il s'en suit que la famille de linéarisations basées sur la vitesse englobe toutes les dynamiques du système non linéaire sans aucune perte d'information. De plus, en choisissant des variables de séquençement qui reflètent le changement de point de fonctionnement, on peut paramétrer cette famille par rapport aux variables de séquençement et donc obtenir un modèle LPV décrivant le comportement du système non linéaire.

En se basant sur cette famille de linéarisations, on détermine une famille de linéarisations (de type « velocity based ») pour le contrôleur de telle manière que la famille en boucle fermée satisfasse les performances désirées. Comme chaque membre de la famille est linéaire, on peut utiliser les méthodes de synthèse linéaire conventionnelles pour calculer le membre correspondant de la famille de contrôleurs. Comme alternative, on peut également utiliser les méthodes de synthèse LPV.

Notons que la linéarisation basée sur la vitesse facilite l'analyse globale en dehors de points d'équilibre et permet l'investigation des caractéristiques transitoires.

Le lecteur intéressé peut se référer à [48, 49] pour une étude détaillée de cette approche du séquençement de gain.

## 1.4 Techniques LPV

Comme présenté dans la section précédente, le séquençement de gain traditionnel construit un contrôleur LPV en interpolant une famille de contrôleurs locaux calculée par

des méthodes LTI. Récemment, une approche alternative intéressante a été proposée dans le contexte de la synthèse par séquençement de gain [54, 17, 3, 4, 20, 59, 68, 2]. Cette approche est conceptuellement différente du séquençement de gain traditionnel puisqu'elle implique la synthèse directe du contrôleur LPV plutôt que sa construction à partir d'une famille de contrôleurs LTI locaux. Du fait qu'elle prend comme point de départ la représentation LPV sans considérer que cette représentation est issue d'un modèle non linéaire, cette approche est connue dans la littérature scientifique sous le nom d'approche LPV.

La caractéristique principale de l'approche LPV est le fait que la loi de commande est directement recherchée sous la forme d'un correcteur global bâti sur le même modèle que le système. Autrement dit, les variations paramétriques du système sont directement intégrées au niveau de la loi de commande dont la structure recopie celle du système. Un tel choix a l'avantage de garantir stabilité et performances sur tout le domaine d'évolution paramétrique.

Les techniques LPV exploitent des mesures de performances utilisant la norme comme outil : la norme induite  $\mathcal{L}_2$  est largement utilisée étant donné le lien étroit avec la théorie  $\mathcal{H}_\infty$  dans le cas linéaire. Cela implique un certain degré de conservatisme et correspond plutôt à des extensions particulières qu'à une généralisation complète de la synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  (voir section 1.1.3).

Certaines méthodes s'inscrivent dans le cadre d'une approche quadratique classique [3, 18] et elles reposent parfois sur un modèle polytopique [4] ou un modèle LFT [54]. Dans l'hypothèse d'une modélisation affine, des méthodes adaptées au contrôle des systèmes variants lentement et utilisant des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres ont également été proposées [1].

### Approche quadratique

Dans [18, 17], les auteurs traitent la synthèse de contrôleurs par retour de sortie avec une performance en norme induite  $\mathcal{L}_2$  en utilisant une fonction de Lyapunov quadratique. Une généralisation au cas discret a été présentée dans [4]. Une difficulté pratique relevée dans ces résultats est due au nombre infini de contraintes à respecter. Pour contourner cette difficulté, dans [18] les auteurs utilisent une méthode de quadrillage paramétrique alors que dans [4] les résultats de synthèse se réduisent à un problème de faisabilité avec un nombre fini de contraintes évaluées aux sommets d'un polytope de matrices.

Comme évoqué dans la section 1.1.2, le principal inconvénient de l'approche quadratique est le conservatisme induit par la recherche d'une fonction de Lyapunov quadratique unique.

### Approche par fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres

Récemment, motivés par le conservatisme de l'approche quadratique, de nombreux chercheurs ont proposé des solutions de synthèse basées sur l'existence d'une fonction

de Lyapunov dépendant des paramètres [67, 2, 62]. Contrairement au cas quadratique, les matrices du contrôleur dépendent maintenant non seulement du paramètre  $\rho$  mais également de sa dérivée  $\dot{\rho}$ . En plus, la vitesse de variation des paramètres est supposée bornée ce qui n'est pas le cas de l'approche précédente. Ce type de contrôleur est d'un intérêt pratique limité du fait que la dérivée du paramètre  $\rho$  ne peut être ni mesurée ni facilement estimée pendant le fonctionnement du système [2]. Afin de résoudre ce problème, mais pas sans perte de généralité, la dépendance du contrôleur par rapport à  $\dot{\rho}$  peut être éliminée en limitant notre attention à une sous-classe de fonctions de Lyapunov.

Dans cette approche, nous retrouvons les mêmes difficultés liées au nombre infini de contraintes à satisfaire, comme dans l'approche quadratique, mais aussi des difficultés liées à la dimension infinie de l'espace fonctionnel de la matrice de Lyapunov. Par rapport à la première difficulté, un quadrillage paramétrique ou alternativement un choix spécifique pour les systèmes LPV affines (ou polytopiques) permettent de réduire le nombre infini de contraintes à un nombre fini. La deuxième difficulté peut être contournée en choisissant la classe de fonctions de Lyapunov affines [2] ou une approche de type Raleigh-Ritz [67].

À part ces aspects pratiques, il existe également d'autres aspects théoriques liés à l'approche dépendant des paramètres. Bien que l'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres permette d'obtenir des conditions moins restrictives que l'approche quadratique, ceci introduit un certain conservatisme, aspect qui a déjà été présenté dans la section 1.1.2. Il faut noter que cette approche est réservée à des situations où les paramètres sont des signaux exogènes qui peuvent être variants dans le temps mais qui sont strictement indépendants de l'état du système (ce qui n'est pas le cas pour l'approche quadratique et l'approche basée sur la théorie du faible gain). En revanche, cette approche devient applicable lorsque les paramètres dépendent de l'état à condition de limiter les entrées et les conditions initiales de l'état de telle façon à assurer une variation lente des paramètres.

### Méthodes LFT du faible gain

Dans certains cas, on peut modéliser la dépendance paramétrique d'un système LPV comme une transformation linéaire fractionnaire (LFT). En effet, une représentation LFT est un cas particulier des systèmes LPV qui se présente comme un système LTI avec une boucle fermée contenant la dépendance paramétrique sous forme bloc-diagonale. Cette forme est exploitée en utilisant le théorème du faible gain afin de déduire des méthodes particulières de séquençement de gain.

La procédure de synthèse consiste à regarder temporairement les paramètres comme des perturbations inconnues et à utiliser des méthodes d'optimisation LTI en accord avec l'analyse du faible gain afin de construire la partie LTI du contrôleur. Les paramètres sont incorporés par la suite dans cette partie LTI pour produire le contrôleur LPV. Cette idée a été développée dans [54] et [3]. L'utilisation des opérateurs de mise à l'échelle (« scalings ») permet de réduire le conservatisme des conditions de synthèse. Il faut noter

qu'avec une représentation de type LFT on peut construire un contrôleur en utilisant des conditions de type LMI moins complexes que dans le cas général LPV [3, 36]. Dans [36], les résultats de synthèse sont valides non seulement pour des paramètres externes mais aussi pour le cas plus général où les paramètres dépendent de l'état du système.

Cependant cette approche a une limitation importante : le contrôleur à gain séquencé peut être conservatif dans le sens où il garantit les performances désirées non seulement pour toutes les trajectoires paramétriques admissibles mais aussi pour des dynamiques allant au-delà des dynamiques imposées par les trajectoires paramétriques admissibles.

## 1.5 Conclusion

A travers ce premier chapitre nous avons présenté deux grandes approches permettant de construire un contrôleur ou un observateur dépendant des paramètres pour un système LPV. La première est constituée par les techniques de séquençement de gain tandis que la seconde repose sur les méthodes LPV. Bien que les deux approches considèrent comme point de départ des classes de systèmes différentes et qu'elles se soient développées a priori séparément, il existe des liens très forts qui les unissent. Le séquençement de gain fait appel aux méthodes LPV afin de contourner le problème posé par le choix, souvent délicat, d'une méthode d'interpolation.

L'interpolation entre plusieurs contrôleurs LTI (ou observateurs LTI) peut aboutir à un contrôleur (observateur) dépendant des paramètres qui n'est pas stabilisant (dont l'erreur d'estimation n'est pas stable) pour certaines valeurs particulières des paramètres. Il existe très peu de méthodes qui offrent une solution rigoureuse à ce problème [60, 62] et cela constitue la motivation principale du chapitre 2. À ce niveau, nous proposons des méthodes qui garantissent la stabilité non seulement pour chaque valeur des paramètres mais aussi pour toute trajectoire paramétrique. Le chapitre 3 est consacré au développement des méthodes LPV adaptées à l'estimation de l'état et à la commande par retour d'état des systèmes LPV. Le cas temps discret est abordé dans le chapitre 4.

# 2

## Synthèse d'observateurs à paramètres variants pour des systèmes LPV à temps continu : approche par interpolation

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>42</b>
<b>2.2</b>	<b>Approche par interpolation polynomiale</b>	<b>42</b>
2.2.1	Formulation du problème	43
2.2.2	Observateur d'ordre plein	44
2.2.3	Exemple numérique	48
2.2.4	Conclusion	49
<b>2.3</b>	<b>Approche par interpolation linéaire</b>	<b>51</b>
2.3.1	Positionnement du problème	51
2.3.2	Méthode d'interpolation	52
2.3.3	Synthèse de l'observateur LPV	54
2.3.4	Conditions LMI sous contrainte de rang pour la synthèse de l'observateur	55
2.3.5	Conditions LMI pour la synthèse de l'observateur	58
2.3.6	Applications numériques	59
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>66</b>

---

## 2.1 Introduction

Comme présenté dans le chapitre précédent, l'interpolation en temps réel est une des techniques utilisées dans le séquençement de gain. Cette technique permet de concevoir un contrôleur ou un observateur LPV en combinant explicitement les caractéristiques d'une famille de contrôleurs ou d'observateurs LTI en fonction des variables de séquençement. Bien que le séquençement de gain soit plutôt appliqué à des systèmes non linéaires, il représente une approche attractive aussi dans le cas des systèmes LPV. Lorsqu'on travaille avec des modèles LPV, les variables de séquençement sont les paramètres du système supposés mesurables. Concevoir un observateur à gain séquençé par une technique d'interpolation pour un système LPV suppose la synthèse d'une famille d'observateurs estimant l'état du système lorsque les paramètres sont figés sur certaines valeurs (par exemple des valeurs extrêmes). Cette synthèse est suivie de l'interpolation en temps réel de cette famille d'observateurs.

Dans le but d'aboutir à la synthèse d'un observateur à paramètres variants pour un système LPV, nous proposons par la suite deux approches de synthèse dans le contexte de séquençement de gain par une technique d'interpolation. Une première approche propose la synthèse d'observateurs LPV en se basant sur une technique d'interpolation polynomiale tandis que la deuxième approche de synthèse est basée sur l'interpolation linéaire. Les méthodes d'interpolation et de synthèse proposées par les deux approches sont différentes des techniques existantes au niveau de l'interpolation dans le sens qu'elles garantissent la stabilité de l'erreur d'estimation non seulement pour chaque valeur des paramètres mais aussi pour toute trajectoire admissible de ces paramètres. En effet, dans [60, 62, 63], les méthodes proposées ont été qualifiées comme étant des méthodes d'*interpolation préservant la stabilité* parce qu'elles assurent la stabilité pour chaque valeur des paramètres. Lorsque les paramètres sont variants dans le temps une borne sur leur vitesse de variation est calculée afin de garantir la stabilité.

## 2.2 Approche par interpolation polynomiale

Nous présentons, dans cette section, une méthode d'interpolation d'observateurs LTI permettant de construire un observateur d'état d'un système LPV. Nous proposons une interpolation polynomiale. Nous énonçons des conditions suffisantes, en fonction du choix de la fonction d'interpolation, pour la convergence de l'erreur d'estimation générée par l'observateur ainsi obtenu. Le type d'approche proposée a l'avantage de fournir un observateur dont la vitesse de convergence dépend uniquement des valeurs extrêmes du paramètre variant  $\rho$ . Comme la vitesse de variation de  $\rho$  n'intervient pas dans cette approche, le résultat proposé est aussi valable pour le cas des paramètres variant arbitrairement vite voire discontinus.

A notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature une autre solution basée sur une interpolation polynomiale à part celle présentée par la suite.

### 2.2.1 Formulation du problème

Nous considérons la classe des systèmes linéaires variants dans le temps de la forme :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^{i=r} \rho^i A_i x(t) + \sum_{i=1}^{i=r} \rho^i B_i u(t) + B_0 u(t) \quad (2.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.1b)$$

où la fonction scalaire  $\rho(t) \in [\rho_1, \rho_2] \subset \mathbf{R}$  est une fonction *continue* inconnue *a priori* mais mesurable en temps réel avec

$$\rho_1 = \min_{\forall t \in \mathbf{R}_+} \rho(t) \text{ et } \rho_2 = \max_{\forall t \in \mathbf{R}_+} \rho(t)$$

valeurs extrêmes de  $\rho(t)$  connues *a priori*.  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  le vecteur des entrées de commande et  $y(t) \in \mathbf{R}^p$  le vecteur des sorties. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que la matrice  $C$  est de rang plein ligne.

Une façon de justifier l'intérêt d'une telle représentation est la suivante. Soit le système défini par l'ensemble d'équations :

$$\dot{x}(t) = A_s(\rho)x(t) + B_s(\rho)u(t) \quad (2.2a)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (2.2b)$$

Supposons que les matrices d'état et de commande sont des fonctions matricielles *continues* non linéaires de  $\rho$  ( $\rho$  étant une fonction continue sur  $\Omega$  un intervalle compact). En considérant qu'un développement en série de Taylor d'ordre  $r + 1$  des éléments de la matrice  $A_s(\rho) = (A_{ij}(\rho))_{i=1..n, j=1..n}$  ainsi que de la matrice  $B_s(\rho) = (B_{ij}(\rho))_{i=1..n, j=1..m}$ , autour d'un point de fonctionnement  $\rho_0$ , représente une bonne approximation pour les éléments  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$ , nous pouvons déduire le modèle approché (2.1).

Comme le modèle (2.1) varie en fonction du paramètre  $\rho$ , il convient naturellement de construire un observateur dont le gain varie en fonction de  $\rho$ . A cet effet, des observateurs linéaires locaux sont conçus pour les valeurs extrêmes de  $\rho$  et l'observateur à gain variant est construit par interpolation de ces observateurs en temps réel en fonction du paramètre  $\rho$ .

Le système (2.1) peut être écrit de la manière suivante :

$$\dot{x}(t) = \left( A_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \rho^i A_i \right) x(t) + B u_\rho(t) \quad (2.3a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.3b)$$

avec  $B = [B_0 \ B_1 \ \dots \ B_r]$ , le vecteur des entrées étendu  $u_\rho(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix}$  et le vecteur des entrées virtuelles  $w(t) = [\rho u(t) \ \rho^2 u(t) \ \dots \ \rho^r u(t)]^T$ .

Notre objectif est de construire un observateur d'ordre plein pour le système (2.1) ayant la structure suivante :

$$\dot{z}(t) = H(\rho)z(t) + L(\rho)y(t) + Ju_\rho(t) \quad (2.4a)$$

$$\hat{x}(t) = z(t) + My(t). \quad (2.4b)$$

où  $z \in \mathbb{R}^n$  et  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  est l'état estimé. Les matrices  $H(\rho)$ ,  $L(\rho)$ ,  $J$  et  $M$  de dimensions appropriées sont à déterminer de telle sorte que l'erreur d'estimation converge exponentiellement vers l'origine. Les matrices

$$H(\rho) = \mu_1(\rho)H_1 + \mu_2(\rho)H_2 \text{ et } L(\rho) = \mu_1(\rho)L_1 + \mu_2(\rho)L_2$$

sont obtenues par interpolation entre les valeurs extrêmes  $(H_1, L_1)$  et respectivement  $(H_2, L_2)$  par l'intermédiaire des fonctions d'interpolation  $\mu_1(\rho)$  et  $\mu_2(\rho)$ . Ces valeurs extrêmes correspondent aux observateurs locaux estimant l'état du système lorsque  $\rho(t) = \rho_1$  et respectivement  $\rho(t) = \rho_2$ . Nous choisissons pour les fonctions d'interpolation  $\mu_1(\rho)$  et  $\mu_2(\rho)$  la forme polynomiale suivante :

$$\mu_2(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots + a_r\rho^r \quad (2.5)$$

$$\mu_1(\rho) = 1 - \mu_2(\rho). \quad (2.6)$$

Afin d'effectuer une interpolation cohérente où

$$\begin{aligned} H(\rho_1) &= H_1, & H(\rho_2) &= H_2 \\ L(\rho_1) &= L_1 & \text{et} & L(\rho_2) = L_2, \end{aligned}$$

la condition suivante s'impose sur le choix des fonctions d'interpolation :

$$\mu_2(\rho_1) = 0, \quad \mu_2(\rho_2) = 1, \quad \mu_i(\rho) > 0_{i=1,2} \quad \forall \rho(t) \in [\rho_1, \rho_2]. \quad (2.7)$$

Le problème de synthèse de l'estimateur d'état est réduit à déterminer les matrices  $H_1, H_2, L_1, L_2, J, M$  et les coefficients  $a_i$  du polynôme d'interpolation de telle sorte que l'erreur d'estimation d'état est exponentiellement stable indépendamment des conditions initiales  $x(t_0)$  et  $z(t_0)$ , de l'entrée  $u(t)$  et de l'évolution de la variable  $\rho$ .

**Remarque 2.2.1.** Les polynômes d'interpolation sont pris de même degré que la forme polynomiale de la matrice d'état du système (2.3). Cela est important pour le développement des résultats comme on le verra par la suite. Il faut noter que les coefficients  $a_i$  du polynôme d'interpolation peuvent être choisis *a priori* ou peuvent être considérés comme des degrés de liberté.

## 2.2.2 Observateur d'ordre plein

L'erreur de reconstruction d'état est donnée par :  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ . Dans cette partie nous donnons les conditions de convergence de l'observateur indépendamment des conditions initiales  $x(t_0)$  et  $z(t_0)$ , de l'entrée  $u(t)$  et de l'évolution de la variable  $\rho$ .



**Théorème 2.2.1 ([13]).** *La dynamique de l'erreur d'observation est stable au sens de Lyapunov s'il existe des matrices  $H_1, H_2, L_1, L_2, T, J, M$  et des coefficients  $a_i$  tels que les conditions suivantes soient satisfaites :*

$$(a_0 H_2 + (1 - a_0) H_1) T + (a_0 L_2 + (1 - a_0) L_1) C - T A_0 = 0 \quad (2.8)$$

$$a_i (H_2 - H_1) T + a_i (L_2 - L_1) C - T A_i = 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (2.9)$$

$$J = T B \quad (2.10)$$

$$T = I_n - M C \quad (2.11)$$

$$\max \Re e(\lambda(a_0 H_2 + (1 - a_0) H_1)) < \Gamma \quad (2.12)$$

$$a_0 + a_1 \rho_1 + a_2 \rho_1^2 + \dots + a_r \rho_1^r = 0 \quad (2.13)$$

$$a_0 + a_1 \rho_2 + a_2 \rho_2^2 + \dots + a_r \rho_2^r = 1 \quad (2.14)$$

$$\mu_2(\rho) \text{ n'a pas de racines réelles dans l'intervalle } [\rho_1, \rho_2] \quad (2.15)$$

avec

$$\Gamma = - \left( \sqrt{r} \|\tilde{\rho}\|_2 \left( \sum_{i=1}^{i=r} \bar{\rho}_i a_i^2 \right) \|(H_2 - H_1)^T (H_2 - H_1)\|_2 \right)^{1/2}$$

$$\text{et } \tilde{\rho} = [\bar{\rho}_1 \quad \bar{\rho}_2 \quad \dots \quad \bar{\rho}_r]^T, \quad \bar{\rho}_i = \max_{t \in \mathbb{R}_+} |\rho(t)^i|. \quad \blacksquare$$

**Preuve :** En utilisant la matrice  $T$  de dimension appropriée, définie par (2.11), l'erreur d'estimation est donnée par  $e(t) = z(t) - T x(t)$ . La dynamique de l'erreur d'estimation s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = & (\bar{H}_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \rho^i \bar{H}_i) e(t) + (\bar{H}_0 T + \bar{L}_0 C - T A_0) x(t) \\ & + \sum_{i=1}^{i=r} \rho^i (\bar{H}_i T + \bar{L}_i C - T A_i) x(t) + (J - T B) u_\rho(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec  $\bar{H}_0 = a_0 H_2 + (1 - a_0) H_1$ ,  $\bar{L}_0 = a_0 L_2 + (1 - a_0) L_1$ ,  $\bar{H}_i = a_i (H_2 - H_1)$ ,  $\bar{L}_i = a_i (L_2 - L_1)$ .

Si les conditions (2.8) à (2.10) sont satisfaites alors l'équation (2.16) est réduite à

$$\dot{e}(t) = H(\rho) e(t) = (\bar{H}_0 + \sum_{i=1}^{i=r} \rho^i \bar{H}_i) e(t). \quad (2.17)$$

En adaptant la démonstration de [55], nous trouvons que la condition de stabilité au sens de Lyapunov de cette équation est assurée par la condition (2.12). En effet, pour prouver la stabilité de cette équation nous considérons la fonction de Lyapunov  $V(t) = e^T(t) Q e(t)$  telle que la matrice  $Q_h = \bar{H}_0^T Q + Q \bar{H}_0 = -2\alpha_h I$  soit définie négative, avec  $\alpha_h > 0$ . Après utilisation du principe de Rayleigh [44], nous obtenons la relation

$$\lambda_{max}(Q) \leq \frac{-\alpha_h}{\max \Re e(\lambda(\bar{H}_0))}$$

qui nous permet, après quelques majorations, d'écrire la condition de négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov, et par conséquent celle de la stabilité de l'erreur d'observation, sous la forme :

$$(\max \Re(\lambda(\bar{H}_0)))^2 > f(\alpha_h) \text{ avec } f(\alpha_h) = \frac{\sqrt{r} \|\tilde{\rho}\|_2 \alpha_h^2}{2\alpha_h - \left\| \sum_{i=1}^{i=r} \rho_i \bar{H}_i^T \bar{H}_i \right\|_2}.$$

En minimisant  $f(\alpha_h)$  par rapport à  $\alpha_h$  et en remplaçant les expressions de  $\bar{H}_i$  nous retrouvons la condition (2.12).

Les relations (2.13), (2.14), (2.15) sont déduites de la condition (2.7).  $\square$

A partir de ces conditions, nous pouvons remarquer que l'existence de l'observateur ainsi que la vitesse de convergence de l'erreur d'estimation ne dépendent pas de l'évolution de la variable  $\rho(t)$  mais seulement de ses valeurs extrêmes  $\rho_1$  et  $\rho_2$ .

Nous pouvons reformuler les conditions suffisantes d'existence de l'observateur comme l'indique le corollaire suivant.

**Corollaire 2.2.2 ([13]).** *La dynamique de l'erreur d'observation est stable s'il existe des matrices  $H_1, H_2, L_1, L_2, T, J, M$  et des coefficients  $a_i$  tels que les conditions (2.10) jusqu'à (2.15) soient satisfaites ainsi que les conditions suivantes :*

$$H_2 T + L_2 C - T \bar{A}_2 = 0 \quad (2.18)$$

$$H_1 T + L_1 C - T \bar{A}_1 = 0 \quad (2.19)$$

$$T \Xi = 0 \quad (2.20)$$

avec

$$\bar{A}_1 = A_0 + \rho_1 A_1 + \rho_1^2 A_2 + \dots + \rho_1^r A_r$$

$$\bar{A}_2 = A_0 + \rho_2 A_1 + \rho_2^2 A_2 + \dots + \rho_2^r A_r$$

$$\Xi = [a_1(\bar{A}_2 - \bar{A}_1) - A_1 \dots a_i(\bar{A}_2 - \bar{A}_1) - A_i \dots a_r(\bar{A}_2 - \bar{A}_1) - A_r].$$

■

**Preuve :** En multipliant les relations (2.9) par  $\rho_1^i$  et en additionnant ces relations par rapport à  $i$  et avec la relation (2.8), on obtient la condition (2.18) après l'utilisation des conditions (2.13) et (2.14). Ensuite, en répétant les mêmes opérations mais par rapport à  $\rho_2^i$  on obtient la condition (2.19). En faisant la soustraction entre (2.18) et (2.19), les  $r$  conditions (2.9) sont équivalentes à (2.20).  $\square$

Ce corollaire présente des conditions suffisantes pour la synthèse d'un observateur de la forme (2.4) qui sont plus facilement utilisables que les conditions du Théorème 2.2.1.

Cependant une difficulté majeure, présente autant dans le Théorème 2.2.1 que dans le Corollaire 2.2.2, vient de la condition de  $\Gamma$ -détectabilité (2.12) qui n'est pas facilement intégrable dans une procédure de synthèse étant donné que cette condition utilise les matrices inconnues  $H_1$  et  $H_2$  ainsi que les coefficients  $a_i$ .

Afin de simplifier la procédure de synthèse, supposons que les coefficients  $a_i$  sont choisis *a priori* tels que les conditions (2.13), (2.14) et (2.15) sont satisfaites. Alors on connaît la matrice  $\Xi$  et donc on peut calculer les matrices  $M$  et  $T$  en utilisant les équations matricielles (2.11) et (2.20). En effet, en utilisant la relation (2.11), l'équation (2.20) est équivalente à :

$$MC\Xi = \Xi. \quad (2.21)$$

Généralement, cette équation n'a pas de solution unique. La condition pour que cette équation ait au moins une solution est

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C\Xi \\ \Xi \end{bmatrix} = \text{rang } C\Xi \implies \text{rang } C\Xi = \text{rang } \Xi \quad (2.22)$$

(voir annexe A.2).

Ensuite, la résolution des équations de Sylvester (2.18) et (2.19) permet de calculer les matrices  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $L_1$  et  $L_2$  comme :

$$\begin{aligned} H_1 &= -K_1C + T\bar{A}_1 & H_2 &= -K_2C + T\bar{A}_2 \\ L_1 &= K_1 + H_1M & L_2 &= K_2 + H_2M \end{aligned} \quad (2.23)$$

avec  $K_1$ ,  $K_2$  des matrices arbitraires de dimensions appropriées.

Alors, la *procédure de synthèse de l'observateur* se résume comme suit :

1. Définir les fonctions d'interpolation  $\mu_1$  et  $\mu_2$  en choisissant les coefficients  $a_i$  tels que (2.13), (2.14) et (2.15) soient satisfaites.
2. Calculer la matrice  $\Xi$  et vérifier la condition de rang (2.22). Si la condition n'est pas vérifiée alors on ne peut pas trouver un observateur avec la méthode proposée, sinon résoudre l'équation (2.21) en appliquant l'inverse généralisée de Moore-Penrose et en obtenant la matrice  $M$ . Calculer la matrice  $T$  en utilisant (2.11) et la matrice  $J$  en utilisant la condition (2.10).
3. Résoudre les deux équations de Sylvester (2.18) et (2.19) comme indiqué par (2.23) avec des matrices  $K_1$  et  $K_2$  choisies arbitrairement. On obtient  $H_1$  et  $H_2$ . Calculer  $\Gamma$ .
4. Vérifier la condition de  $\Gamma$ -détectabilité (2.12). Si elle n'est pas vérifiée alors revenir en 3 et choisir d'autres matrices  $K_1$  et  $K_2$ .

La solution présentée par cette procédure est applicable dans le cas des systèmes LPV dépendant d'un seul paramètre et dont la structure est donnée par les équations (2.1). Une généralisation au cas des systèmes dépendant de plusieurs paramètres de manière polynomiale peut éventuellement être envisagée mais cette généralisation ne peut qu'être encore plus difficile à utiliser. En effet, une première difficulté vient du fait que, même si on choisit *a priori* les coefficients des polynômes d'interpolation, la condition de  $\Gamma$ -détectabilité est vérifiée *a posteriori*, c'est-à-dire, une fois que les matrices de l'observateur aient été calculées. Cela nous oblige à itérer sur les pas 3 et 4 de la procédure de synthèse sans aucune garantie de trouver une solution même si elle existe. De plus, si pour un certain choix des coefficients  $a_i$  on ne trouve pas un observateur cela ne signifie pas que l'observateur n'existe pas. Peut être que pour un autre choix de ces coefficients il est possible que les conditions de la procédure de synthèse puissent fournir une solution. Un dernier inconvénient de la solution proposée est le fait qu'elle soit fondée de façon implicite (voir preuve du Théorème 2.2.1) sur l'utilisation de la stabilité quadratique, ce qui augmente le conservatisme de l'approche.

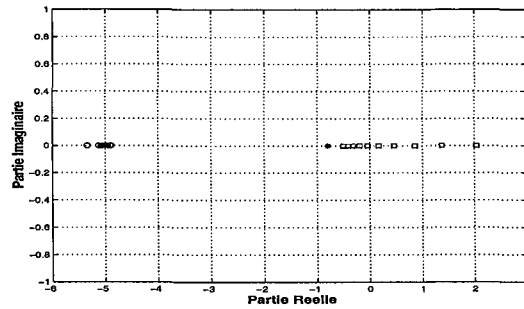
Cependant, il est possible de simplifier la procédure de synthèse si on remplace la condition de  $\Gamma$ -détectabilité par une condition plus simple. En effet, la  $\Gamma$ -détectabilité vient de la nécessité d'assurer la stabilité de l'équation (2.17). Si l'on applique les résultats présentés dans la section 1.1.2 sur la stabilité quadratique et la stabilité QDP d'un système LPV nous pouvons contourner la condition de  $\Gamma$ -détectabilité. Malheureusement, même avec cette simplification, le résultat de synthèse reste assez conservatif. Ce conservatisme vient de l'équation (2.20) qui réduit sensiblement la classe des systèmes pour laquelle notre approche est applicable. Des solutions permettant de contourner la condition de  $\Gamma$ -détectabilité et d'éliminer le conservatisme produit par l'équation (2.20) seront présentées par la suite.

Nous observons que les relations (2.18), (2.19), (2.20) et (2.10), (2.11), (2.12) sont équivalentes aux conditions d'existence et de stabilité d'un observateur de type bilinéaire estimant l'état d'un système BTI [15]. Par conséquent, la synthèse d'un observateur à gain séquencé du type (2.4) pour un système LPV ayant la structure (2.1) peut donc être ramenée à la synthèse d'un observateur bilinéaire pour un système BTI approprié. Cela n'offre aucun avantage parce que la théorie des systèmes bilinéaires ne permet pas de prendre en compte la connaissance des bornes sur les paramètres ou sur leur vitesse de variation.

### 2.2.3 Exemple numérique

Nous présentons un exemple numérique illustrant les résultats précédents. Nous considérons le système décrit par les matrices suivantes :

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0.8 & -1.5 & -1 \\ 0 & -5 & -0.2 \\ 0 & -2 & -0.7 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1.2 \end{pmatrix},$$


 FIG. 2.1 – Les valeurs propres de  $A(\rho)$ .

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2.2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.7 & 1.2 \end{pmatrix}, \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le paramètre  $\rho$  varie dans l'intervalle  $[0.1 \ 1]$ . Pour avoir une idée de la variation paramétrique considérée, nous présentons sur la figure 2.1 le domaine d'évolution des valeurs propres de la matrice  $A(\rho)$ .

Le polynôme d'interpolation est choisi *a priori* de telle manière à satisfaire les contraintes (2.5), (2.6) et (2.7) et il est donné par :  $\mu_2(\rho) = -0.0461 + 0.4461\rho + 0.1\rho^2 + 0.5\rho^3$ .

L'application de la procédure de synthèse nous permet d'obtenir les matrices suivantes pour l'observateur :

$$H_1 = \begin{bmatrix} -0.4 & -0.7 & -0.7 \\ 1.56 & -2.3 & 1.4 \\ -1.06 & 2 & -1.7 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -0.26 & -0.7 & -0.7 \\ 1.44 & -2.2 & 1.4 \\ -1.11 & 1.8 & -1.9 \end{bmatrix},$$

$$L_1 \simeq L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6.38 & 2 \\ 6.38 & -2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 7.6 & -2 \\ -7.6 & 2 \end{bmatrix},$$

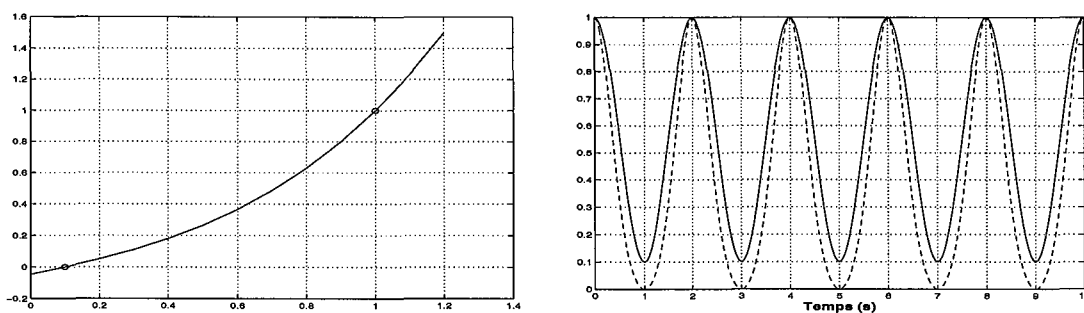
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2.2 & 0 \\ -2.2 & 1 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2.2 & 1 & 0 \\ 2.2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et un  $\Gamma$  qui vaut  $-0.3405$ .

Pour ce choix du polynôme d'interpolation et pour une évolution sinusoïdale de la variable  $\rho(t)$ , la figure 2.2 regroupe les résultats obtenus. Sur la figure 2.3, nous présentons le domaine d'évolution des valeurs propres de  $H(\rho)$  afin d'avoir une idée sur l'influence de l'interpolation.

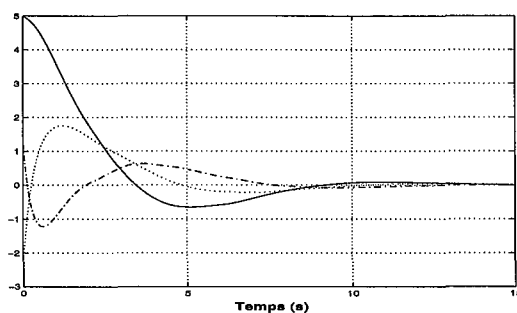
## 2.2.4 Conclusion

Par la suite, une extension directe de ce résultat, au cas où les matrices d'état dépendent de plusieurs paramètres est proposée. Puisqu'il est difficile d'évaluer l'apport



(a) Le polynôme d'interpolation  $\mu_2(\rho)$ .

(b) Les fonctions  $\rho(t)$  (ligne continue) et  $\mu_2(\rho(t))$  (ligne en tiret).



(c) L'erreur d'estimation :  $e = (e_1 \ e_2 \ e_3)^T$ .

FIG. 2.2 – Le polynôme d'interpolation, le paramètre  $\rho(t)$  et les erreurs de reconstruction.

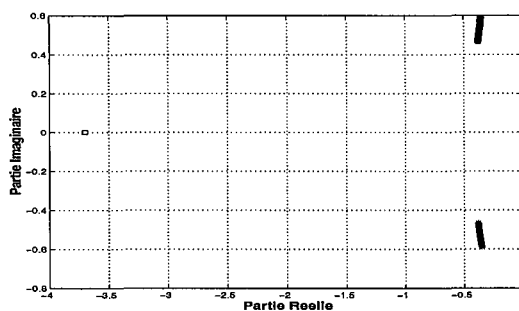


FIG. 2.3 – Les valeurs propres de  $H(\rho)$ .

d'une interpolation polynomiale par rapport à une interpolation linéaire et afin d'éviter les inconvénients de la solution par interpolation polynomiale, nous proposons une méthode de synthèse basée sur une interpolation linéaire. Par ailleurs, afin de diminuer le conservatisme de l'approche, l'utilisation de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres pour prouver la stabilité de la dynamique de l'erreur sera privilégiée.

## 2.3 Approche par interpolation linéaire

### 2.3.1 Positionnement du problème

La classe des systèmes LPV considérée est définie par la Définition 1.1.3 où la matrice de mesure est constante  $C(\rho) = C$ . Sans perte de généralité pour la construction de l'observateur, nous supposons que  $D(\rho) = 0$  et que la matrice  $C$  est de rang plein ligne. Cette classe des systèmes est décrite par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \quad (2.24a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.24b)$$

où

$$A(\rho(t)) = A_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i(t)A_i, \quad B(\rho(t)) = B_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i(t)B_i,$$

et  $A_0, A_1, \dots, A_N, B_0, B_1, \dots, B_N, C$  sont des matrices connues.  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur d'entrée et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie. Les paramètres  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$  sont des signaux exogènes et ils évoluent indépendamment les uns des autres. Le vecteur de paramètres  $\rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_N]^T$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  donné par la Définition 1.1.2.

Pour faire la synthèse d'un observateur à paramètres variants pour le système LPV (2.24), nous construisons des observateurs linéaires pour chaque valeur extrême du domaine paramétrique  $\mathcal{P}$ . L'observateur à paramètres variants (ou à gain séquencé) est obtenu par interpolation linéaire de ces observateurs LTI, en temps réel, en fonction du paramètre  $\rho$ .

Nous proposons la structure générale d'ordre plein suivante pour l'observateur à gain séquencé :

$$\dot{z}(t) = H(\rho)z(t) + L(\rho)y(t) + J(\rho)u(t) \quad (2.25a)$$

$$\hat{x}(t) = z(t) + My(t). \quad (2.25b)$$

où  $z \in \mathbb{R}^n$  et  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état estimé. Les matrices  $H(\rho), L(\rho), J(\rho)$  et  $M$  sont des matrices de dimensions appropriées à déterminer de telle manière que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers l'origine. Dans la section 1.1.4, nous avons présenté le lien entre ce type d'observateur et un observateur dépendant des paramètres de type Luenberger.

En définissant l'erreur d'estimation  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$  et en utilisant une matrice  $T$  de dimension appropriée telle que  $T = I_n - MC$ , l'erreur d'estimation peut s'écrire  $e(t) = z(t) - Tx(t)$ . Ceci nous permet de formuler la dynamique de l'erreur d'estimation sous la forme

$$\dot{e}(t) = H(\rho)e(t) + (H(\rho)T + L(\rho)C - TA(\rho))x(t) + (J(\rho) - TB(\rho))u(t). \quad (2.26)$$

Le problème de la synthèse de l'observateur LPV (2.25) consiste à trouver les matrices dépendant des paramètres de la représentation d'état de telle manière que l'erreur d'estimation (2.26) converge asymptotiquement vers l'origine. Afin d'atteindre cet objectif, les matrices  $H(\rho)$ ,  $L(\rho)$  et  $J(\rho)$  sont obtenues par interpolation linéaire entre les valeurs extrêmes. Cela correspond à des observateurs LTI estimant l'état du système lorsque  $\rho \in \mathcal{V}$  (voir Propriété 1.1.1). L'implémentation de l'observateur à gain séquencé suppose l'interpolation en temps réel de ces observateurs LTI en fonction du vecteur  $\rho$ . Par conséquent, le problème de la synthèse d'un observateur LPV est réduit à la synthèse d'observateurs extrêmes tels que par l'interpolation linéaire des ces observateurs extrêmes on obtient une erreur de reconstruction (2.26) affine quadratiquement stable et indépendante des initialisations  $x(t_0)$  et  $z(t_0)$ , de la commande  $u(t)$  et de la trajectoire de  $\rho \in \mathcal{F}_p$ .

La notion de stabilité quadratique affine définie par la Définition 1.1.10 suppose l'existence d'une fonction de Lyapunov qui dépende de manière affine des paramètres. En utilisant la notion de stabilité quadratique affine, nous cherchons une fonction de Lyapunov dépendant des paramètres pour garantir la stabilité de la dynamique de l'erreur d'estimation. Comme présentées dans la section 1.1.2, les conditions d'existence d'une telle fonction sont moins restrictives que celles obtenues pour une stabilité quadratique utilisant une fonction de Lyapunov unique assurant la stabilité sur tout le domaine de variation des paramètres.

### 2.3.2 Méthode d'interpolation

Dans cette section, nous présentons la procédure d'interpolation par rapport au vecteur des paramètres [14, 12]. Cette procédure est linéaire par rapport à chaque paramètre.

Les matrices d'état  $H(\rho)$  et de commande  $J(\rho)$  ainsi que la matrice de gain de l'observateur  $L(\rho)$  sont obtenues par interpolation par rapport à chaque paramètre. Comme le vecteur des paramètres évolue dans un hyper-rectangle dont les sommets sont donnés par l'ensemble  $\mathcal{V}$ , les matrices  $H(\rho)$ ,  $L(\rho)$  et  $J(\rho)$  appartiennent à des polytopes de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbb{R}^{n \times m}$  et respectivement  $\mathbb{R}^{n \times p}$  dont les ensembles de sommets sont :

$$\mathcal{H} = \{\bar{H}_0, \bar{H}_1, \dots, \bar{H}_{2^N-1}\} \quad (2.27)$$

$$\mathcal{L} = \{\bar{L}_0, \bar{L}_1, \dots, \bar{L}_{2^N-1}\} \quad (2.28)$$

$$\mathcal{J} = \{\bar{J}_0, \bar{J}_1, \dots, \bar{J}_{2^N-1}\}. \quad (2.29)$$

Chaque sommet  $\bar{H}_i$  de  $\mathcal{H}$ ,  $\bar{L}_i$  de  $\mathcal{L}$  et  $\bar{J}_i$  de  $\mathcal{J}$  correspond respectivement à un certain sommet du polytope de paramètres. La liaison entre ces sommets est donnée par la suite.

Pour faciliter la manipulation des sommets, soit  $(b_N^i \dots b_2^i b_1^i)$  la représentation binaire de l'indice  $i$  avec  $b_1^i$  le bit le moins significatif et  $b_N^i$  le bit le plus significatif. Le sommet du polytope de paramètres correspondant à  $\bar{H}_i$ ,  $\bar{L}_i$  et  $\bar{J}_i$  est  $(\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \dots, \tilde{\rho}_N)$  où

$$\tilde{\rho}_j = \begin{cases} \underline{\rho}_j & \text{si } b_j^i = 0 \\ \bar{\rho}_j & \text{si } b_j^i = 1 \end{cases}.$$



Les matrices de l'observateur obtenues par une procédure d'interpolation s'écrivent :

$$H(\rho) = \mu_0(\rho)\bar{H}_0 + \dots + \mu_{2^N-1}(\rho)\bar{H}_{2^N-1} \quad (2.30)$$

$$L(\rho) = \mu_0(\rho)\bar{L}_0 + \dots + \mu_{2^N-1}(\rho)\bar{L}_{2^N-1} \quad (2.31)$$

$$J(\rho) = \mu_0(\rho)\bar{J}_0 + \dots + \mu_{2^N-1}(\rho)\bar{J}_{2^N-1} \quad (2.32)$$

où  $\mu_0(\rho), \mu_1(\rho), \dots, \mu_{2^N-1}(\rho)$  sont les fonctions d'interpolation. Ces fonctions d'interpolation sont caractérisées par :

- $\mu_0(\rho) + \mu_1(\rho) + \dots + \mu_{2^N-1}(\rho) = 1, 0 \leq \mu_i(\rho) \leq 1$  pour  $i = 0, \dots, 2^N - 1$
- chaque fonction d'interpolation est donnée par

$$\mu_i(\rho) = \prod_{j=1}^N \frac{\alpha_{ij}\rho_j + \beta_{ij}}{\underline{\rho}_j - \bar{\rho}_j} \text{ avec } \alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } b_j^i = 0 \\ -1 & \text{si } b_j^i = 1 \end{cases} \text{ et } \beta_{ij} = \begin{cases} -\bar{\rho}_j & \text{si } b_j^i = 0 \\ \underline{\rho}_j & \text{si } b_j^i = 1 \end{cases} . \quad (2.33)$$

En utilisant les relations (2.30), (2.31), (2.32) et (2.33), nous trouvons la forme suivante pour les matrices de l'observateur :

$$H(\rho) = \sum_{i=0}^{2^N-1} \left( \prod_{j=1}^N \rho_j^{b_j^i} \right) H_i \quad (2.34)$$

$$L(\rho) = \sum_{i=0}^{2^N-1} \left( \prod_{j=1}^N \rho_j^{b_j^i} \right) L_i. \quad (2.35)$$

$$J(\rho) = \sum_{i=0}^{2^N-1} \left( \prod_{j=0}^N \rho_j^{b_j^i} \right) J_i. \quad (2.36)$$

Les matrices  $H_i, L_i$  et  $J_i$  sont des matrices constantes. Du fait de l'équivalence entre  $\{(2.34), (2.35), (2.36)\}$  et  $\{(2.30), (2.31), (2.32)\}$ , nous pouvons choisir l'une ou l'autre forme pour l'implémentation de notre observateur. En effet, si on connaît les matrices  $H_i, L_i, J_i$ , alors on peut calculer aussi les matrices  $\bar{H}_i, \bar{L}_i, \bar{J}_i$  et inversement. Par la suite, nous utiliserons la forme  $\{(2.34), (2.35), (2.36)\}$  parce qu'elle est plus facile à implémenter et par conséquent, le problème de synthèse d'observateur se réduit à trouver les matrices  $H_0, H_1, \dots, H_{2^N-1}, L_0, L_1, \dots, L_{2^N-1}$  et  $J_0, J_1, \dots, J_{2^N-1}$  telles que la dynamique de l'erreur de reconstruction soit affine quadratiquement stable.

**Remarque 2.3.1.** La procédure d'interpolation linéaire utilisée engendre des matrices  $H(\rho), L(\rho)$  et  $J(\rho)$  avec une structure plus générale que la structure du système. Cette structure est affine par rapport à chaque paramètre  $\rho_i$  pris séparément. En revanche, elle est polynomiale par rapport aux composantes du vecteur des paramètres  $\rho$ . Notons que cette structure est imposée par la procédure d'interpolation et qu'elle est indépendante de la structure affine de notre système. Le cas d'observateurs LPV affines n'est donc qu'un cas particulier de l'observateur proposé et il correspond à  $H_i = 0, L_i = 0, J_i = 0$  pour tout  $i = N + 1, \dots, 2^N - 1$ .

### 2.3.3 Synthèse de l'observateur LPV

Les résultats présentés par la suite sont basés sur la stabilité quadratique affine de la dynamique de l'erreur d'estimation (2.26). Nous présentons, dans un premier temps, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'observateur LPV d'ordre plein (2.25) assurant une erreur d'estimation linéaire à paramètres variants et AQS stable. Un tel observateur sera appelé *observateur LPV-AQS*. Pour cela, considérons la proposition suivante :

**Proposition 2.3.1 ([14, 12]).** *Le système (2.25) est un observateur LPV-AQS pour le système LPV (2.24) si et seulement s'il existe  $T, M, H(\rho), L(\rho), J(\rho)$ , matrices de dimensions appropriées, telles que*

$$H(\rho) \text{ est AQS} \quad (2.37)$$

$$H(\rho)T + L(\rho)C - TA(\rho) = 0 \quad (2.38)$$

$$T = I_n - MC \quad (2.39)$$

$$J(\rho) = TB(\rho) \quad (2.40)$$

■

**Preuve :** Compte tenu de l'équation de l'erreur d'estimation (2.26), l'observateur génère une erreur d'estimation de type LPV et indépendante de l'entrée  $u(t)$  et de l'état  $x(t)$  si et seulement si les équations (2.38) à (2.40) sont satisfaites. Dans ce cas, l'erreur d'estimation devient :

$$\dot{e} = H(\rho)e. \quad (2.41)$$

L'observateur LPV-AQS existe si et seulement si la condition (2.37) est satisfaite. □

Notons que cette proposition est valable pour tout observateur LPV-AQS de la forme (2.25) pas forcément obtenu par une procédure d'interpolation. Par la suite, nous exploitons la structure imposée par la procédure d'interpolation, à savoir  $H(\rho), L(\rho)$  et  $J(\rho)$  sont données par les équations (2.34), (2.35) et (2.36), afin d'obtenir des conditions de synthèse facilement utilisables numériquement.

Afin de ramener les conditions de la Proposition 2.3.1 à un problème de faisabilité LMI, examinons l'équation (2.38) qui est une équation de Sylvester à matrices dépendant des paramètres. La solution de cette équation est :

$$H(\rho) = -K(\rho)C + TA(\rho) \quad (2.42)$$

$$L(\rho) = K(\rho) + H(\rho)M \quad (2.43)$$

avec  $K(\rho)$  une matrice arbitraire dépendant des paramètres. Cela implique pour la matrice  $K(\rho)$  la même structure par rapport aux paramètres que celle des matrices  $H(\rho), L(\rho)$  et

$J(\rho)$ , c'est-à-dire :

$$K(\rho) = \sum_{i=0}^{2^N-1} \left( \prod_{j=1}^N \rho_j^{b_j^i} \right) K_i. \quad (2.44)$$

Cette structure de la matrice  $K(\rho)$  nous permettra, par la suite, de reformuler la condition de stabilité (2.37) de  $H(\rho)$  comme un problème de faisabilité LMI. Compte tenu de l'équation (2.44), on déduit de (2.42) et (2.43) que :

$$\begin{cases} H_i = -K_i C + T A_i & \text{pour } i = 0, \dots, N \\ H_i = -K_i C & \text{pour } i = N + 1, \dots, 2^N - 1 \\ L_i = K_i + H_i M & \text{pour } i = 0, \dots, 2^N - 1. \end{cases} \quad (2.45)$$

Maintenant, la procédure de synthèse d'un observateur LPV revient à suivre les étapes suivantes :

- i) En remplaçant les matrices inconnues  $H_i$ , solutions de l'équation (2.38), dans la condition (2.37) et en utilisant l'équation (2.39), trouver les matrices  $K_0, \dots, K_{2^N-1}$  et  $M$  telles que la condition de stabilité AQS soit satisfaite. Ceci est le problème clef de la synthèse de l'observateur et la solution à ce problème sera présentée dans la suite.
- ii) Calculer les matrices  $T, H_0, \dots, H_{2^N-1}, L_0, \dots, L_{2^N-1}$  en utilisant les équations (2.39) et (2.45).
- iii) Calculer les matrices  $J_0, \dots, J_{2^N-1}$  à partir de l'équation (2.40) explicitée sous la forme :

$$\begin{cases} J_i = T B_i & \text{pour } i = 0, \dots, N \\ J_i = 0 & \text{pour } i = N + 1, \dots, 2^N - 1. \end{cases} \quad (2.46)$$

La solution de la première étape de cette procédure de synthèse est donnée dans les deux sous-sections suivantes.

### 2.3.4 Conditions LMI sous contrainte de rang pour la synthèse de l'observateur

Pour traduire la condition de stabilité AQS sous la forme d'un problème de faisabilité LMI, nous utilisons l'approche de Gahinet *et al.* qui traite le problème de stabilité quadratique affine (voir [31]). Cette approche utilise la notion de multi-convexité qui signifie convexité par rapport à chaque direction de l'espace des paramètres. Ceci nous permet de formuler dans le théorème suivant des conditions suffisantes d'existence de l'observateur sous la forme d'un problème de faisabilité LMI avec une contrainte de rang.

**Théorème 2.3.2 ([14, 12]).** *Il existe un observateur LPV-AQS de la forme (2.25) pour le système LPV (2.24) s'il existe des matrices  $M, K_0, \dots, K_{2N-1}, \mathcal{R}$  et  $N + 1$  matrices symétriques  $P_0, P_1, \dots, P_N$  telles que les conditions LMI suivantes*

$$\Gamma(\rho_{fix})\mathfrak{P} > 0 \text{ pour un } \rho_{fix} \in \mathcal{P} \quad (2.47)$$

$$\mathfrak{F}(\omega, \tau) = \Gamma(\omega)\mathfrak{R}\Phi(\omega) + \Phi^T(\omega)\mathfrak{R}^T\Gamma^T(\omega) + \Gamma(\omega)\mathfrak{P}A(\omega) + A^T(\omega)\mathfrak{P}^T\Gamma^T(\omega) + \Lambda(\tau)\mathfrak{P} < 0$$

pour tout  $(\omega, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$  (2.48)

$$\mathfrak{G}_i(\omega) = \Delta_i\mathfrak{R}\Psi_i(\omega) + \Psi_i^T(\omega)\mathfrak{R}^T\Delta_i^T + \Delta_i\mathfrak{P}A_i + A_i^T\mathfrak{P}^T\Delta_i^T \geq 0$$

pour tout  $i = 1, \dots, N$  et  $\omega \in \mathcal{V}$  (2.49)

admettent une solution vérifiant la contrainte de rang suivante :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \mathfrak{P} & \mathfrak{R} \end{bmatrix} = n \quad (2.50)$$

où  $\mathfrak{P} = [P_0 \ P_1 \ \dots \ P_N]^T$ ,  $\mathcal{K} = [-K_0 \ -K_1 \ \dots \ -K_{2N-1} \ -M]$ ,  $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}\mathcal{K}$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho) &= [I_n \ \rho_1 I_n \ \dots \ \rho_N I_n] \\ \Lambda(\dot{\rho}) &= [0_n \ \dot{\rho}_1 I_n \ \dots \ \dot{\rho}_N I_n] \\ \Delta_i &= \frac{\partial \Gamma(\rho)}{\partial \rho_i}, \quad \Psi_i(\rho) = \frac{\partial \Phi(\rho)}{\partial \rho_i} \end{aligned} \quad \text{et} \quad \Phi(\rho) = \begin{bmatrix} C \\ \rho_1 C \\ \vdots \\ \left( \prod_{i=1}^N \rho_i \right) C \\ CA(\rho) \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, la matrice  $\mathcal{K}$  est donnée par  $(\mathfrak{P})^\dagger \mathfrak{R}$ . ■

**Preuve :** Si les conditions (2.38), (2.39) et (2.40) sont satisfaites, alors l'erreur d'estimation a une dynamique donnée par l'équation (2.41). Pour assurer la stabilité affine quadratique de cette équation nous utilisons la fonction de Lyapunov affine

$$V(e, \rho) = e^T P(\rho) e \quad \text{avec} \quad P(\rho) = P_0 + \rho_1 P_1 + \dots + \rho_N P_N.$$

La condition (2.47) et la continuité des valeurs propres de la matrice  $P(\rho)$  assurent que la fonction de Lyapunov  $V(e, \rho)$  est définie positive pour tout le domaine des paramètres. Étudions maintenant dans quelles conditions on peut assurer la négativité de la dérivée de cette fonction de Lyapunov. La dérivée de la fonction de Lyapunov s'écrit :

$$\frac{dV(e, \rho)}{dt} = e^T \mathfrak{F}(\rho, \dot{\rho}) e = e(H(\rho)^T P(\rho) + P(\rho)H(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0) e.$$

En remplaçant  $H(\rho)$  par  $H(\rho) = \mathcal{K}\Phi(\rho) + A(\rho)$ ,  $P(\rho)$  par  $\Gamma(\rho)\mathfrak{P}$  et en utilisant la notation  $\mathfrak{R} = \mathfrak{P}\mathcal{K}$ , nous trouvons que :

$$\mathfrak{F}(\rho, \dot{\rho}) = \Gamma(\rho)\mathfrak{R}\Phi(\rho) + \Phi^T(\rho)\mathfrak{R}^T\Gamma^T(\rho) + \Gamma(\rho)\mathfrak{P}A(\rho) + A^T(\rho)\mathfrak{P}^T\Gamma^T(\rho) + \Lambda(\dot{\rho})\mathfrak{P}.$$

La condition (2.48) exprime la nécessité que  $\mathfrak{F}(\rho, \dot{\rho})$  soit définie négative aux sommets  $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ . Par la suite nous assurons que  $\mathfrak{F}(\rho, \dot{\rho})$  est définie négative dans tout le domaine et donc implicitement la négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov, en imposant la condition de multi-convexité (voir Théorème 1.2.1) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}(\rho, \tau)}{\partial \rho_i^2} &= 2 \frac{\partial \Gamma(\rho)}{\partial \rho_i} \mathfrak{A} \frac{\partial \Phi(\rho)}{\partial \rho_i} + 2 \left( \frac{\partial \Phi(\rho)}{\partial \rho_i} \right)^T \mathfrak{A}^T \left( \frac{\partial \Gamma(\rho)}{\partial \rho_i} \right)^T + 2 \frac{\partial \Gamma(\rho)}{\partial \rho_i} \mathfrak{B} \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho_i} + \\ &2 \left( \frac{\partial A(\rho)}{\partial \rho_i} \right)^T \mathfrak{B}^T \left( \frac{\partial \Gamma(\rho)}{\partial \rho_i} \right)^T = 2 \mathfrak{G}_i(\rho) \geq 0 \text{ pour tout } i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Les inégalités (2.51) dépendent du vecteur de paramètres  $\rho$  et pour les satisfaire nous imposons qu'elles soient vérifiées aux sommets, ce qui nous donne la condition (2.49). Nous remarquons que la condition (2.49) est suffisante pour satisfaire les inégalités (2.51) parce qu'elles vérifient la propriété de multi-convexité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}_i}{\partial \rho_j^2} &= \frac{\partial^2 \Delta_i \mathfrak{A} \Psi_i(\omega)}{\partial \rho_j^2} + \frac{\partial^2 (\Delta_i \mathfrak{A} \Psi_i(\omega))^T}{\partial \rho_j^2} + \frac{\partial^2 \Delta_i \mathfrak{B} A_i}{\partial \rho_j^2} + \frac{\partial^2 (\Delta_i \mathfrak{B} A_i)^T}{\partial \rho_j^2} = 0 \\ &\text{pour tout } i, j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Par conséquent, les conditions (2.47), (2.48) et (2.49) garantissent la stabilité quadratique affine de l'erreur d'estimation (2.41).

Comme nous avons utilisé la notation  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathcal{K}$ , la contrainte de rang (2.50) s'impose afin de garantir que cette équation admet au moins une solution (voir l'annexe A.2).  $\square$

La résolution des conditions du Théorème 2.3.2 nous permet de calculer la matrice  $K(\rho)$  de manière à ce que la matrice  $H(\rho)$  soit AQS. Si on regarde la relation (2.42), cela signifie que le Théorème 2.3.2 donne des conditions suffisantes pour la détectabilité paramétrique de la paire des fonctions matricielles  $(TA(\rho), C)$  sur  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

**Remarque 2.3.2.** Si l'ensemble des paramètres contient l'origine de l'espace  $R^N$  c'est-à-dire

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 = \{ \rho \in R^N \mid \rho_i \in [\underline{\rho}_i, \bar{\rho}_i], \underline{\rho}_i < 0, \bar{\rho}_i > 0 \text{ pour } i = 1, \dots, N \}$$

alors la condition (2.47) peut être remplacée par la condition  $P_0 > 0$ .

Afin de construire l'observateur LPV, nous devons résoudre les conditions LMIs (2.47), (2.48) et (2.49) avec la contrainte de rang- $n$  (2.50). Résoudre une relation LMI avec une contrainte de rang est un problème non-convexe difficile. Nous pouvons éviter la contrainte de rang en remplaçant  $\mathcal{R}$  par  $\mathcal{P}\mathcal{K}$  et en résolvant la BMI (2.48) avec les LMIs (2.47) et (2.49). Ceci ne fournit aucun avantage numérique parce que le problème de résolution de BMIs est un problème non-convexe et il peut y avoir plusieurs solutions locales. Nous avons présenté dans la section 1.2 quelques références à ce sujet.

La difficulté de résolution des conditions proposées par le Théorème 2.3.2 justifie l'investigation de conditions basées sur des LMIs.

### 2.3.5 Conditions LMI pour la synthèse de l'observateur

Puisque l'origine de la non-convexité dans la solution précédente est le couplage entre les matrices inconnues de l'observateur et les matrices de Lyapunov, la généralisation de nouveaux résultats de stabilité proposés dans [6] permet d'éviter un tel couplage et par conséquent de fournir des conditions LMI. En fait, Apkarian *et al.* donnent de nouvelles conditions LMI suffisantes pour la stabilité des systèmes linéaires LTI. Ces conditions sont l'extension au cas continu d'un résultat développé dans le cas discret par [29] et mettant en jeu une variable auxiliaire qui fournit une flexibilité supplémentaire pour un large éventail de problèmes. La représentation LMI augmentée permet d'éliminer le produit entre les matrices de l'observateur et les matrices de Lyapunov. La généralisation de ces résultats à la stabilité quadratique affine de l'erreur d'estimation LPV (2.41) nous permet d'énoncer le résultat suivant.

**Théorème 2.3.3 ([12]).** *Il existe un observateur LPV-AQS pour le système LPV (2.24) s'il existe des matrices  $\mathcal{Q}$ ,  $V$  et des matrices symétriques  $P_0, P_1, \dots, P_N$  telles que les conditions LMI suivantes*

$$\begin{bmatrix} -(V + V^T) & \mathcal{Q}\Phi(\omega) + V^T A(\omega) + P(\omega) & V^T \\ \Phi^T(\omega)\mathcal{Q}^T + A^T(\omega)V + P(\omega) & -P(\omega) + P(\tau) - P_0 & 0 \\ V & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} < 0$$

pour tout  $(\omega, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$  (2.52)

soient satisfaites avec

$$\Phi(\rho) = \begin{bmatrix} C^T & \rho_1 C^T & \dots & \left(\prod_{i=1}^N \rho_i\right) C^T & (CA(\rho))^T \end{bmatrix}^T$$

et  $P(\rho) = P_0 + \rho_1 P_1 + \dots + \rho_N P_N$ .

Dans ce cas, la matrice  $\mathcal{K} = [-K_0 \quad -K_1 \quad \dots \quad -K_{2N-1} \quad -M]$  est donnée par  $V^{-T}\mathcal{Q}$ . ■

**Preuve :** Comme dans les théorèmes précédents, si les contraintes (2.38), (2.39) et (2.40) sont satisfaites alors l'erreur d'estimation d'état est donnée par (2.41). Nous prouverons par la suite que pour assurer la stabilité quadratique affine de cette équation, selon la Définition 1.1.10, il est suffisant d'assurer l'existence d'une matrice  $V$  et d'une matrice de Lyapunov symétrique dépendant des paramètres satisfaisant

$$\begin{bmatrix} -(V + V^T) & V^T H(\rho) + P(\rho) & V^T \\ H^T(\rho)V + P(\rho) & -P(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 & 0 \\ V & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} < 0. \quad (2.53)$$

Pour prouver ceci nous utilisons la généralisation au cas LPV des résultats de stabilité donnés dans [6] pour le cas des systèmes LTI. L'inégalité (2.53) est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} 0 & P(\rho) & 0 \\ P(\rho) & -P(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 & 0 \\ 0 & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ H^T(\rho) \\ I \end{bmatrix} V [I \quad 0 \quad 0] + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} V^T [-I \quad H(\rho) \quad I] < 0$$

et nous pouvons éliminer la matrice  $V$  en utilisant le lemme de projection (voir Annexe A, Lemme A.1.3). Comme les matrices orthogonales à  $[I \ 0 \ 0]$  et  $[-I \ H(\rho) \ I]$  sont respectivement  $\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T$  et  $\begin{bmatrix} H^T(\rho) & I & 0 \\ I & 0 & I \end{bmatrix}^T$ , les conditions de projection donnent :

$$\begin{bmatrix} -P(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 & 0 \\ 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} P(\rho)H(\rho) + H^T(\rho)P(\rho) - P(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 & P(\rho) \\ P(\rho) & -P(\rho) \end{bmatrix} < 0.$$

En appliquant le complément de Schur, nous avons la condition de stabilité quadratique affine pour l'équation (2.41) selon la Définition 1.1.10 et la contrainte  $P(\rho) - P(\dot{\rho}) + P_0 > 0$  sur la matrice de Lyapunov. Cela signifie que la solution  $P(\rho)$  donnée par (2.53) est une solution particulière des conditions de la Définition 1.1.10 puisqu'elle satisfait nécessairement la contrainte  $P(\rho) - P(\dot{\rho}) + P_0 > 0$ . Ainsi la condition (2.53) est suffisante pour assurer la stabilité quadratique affine de l'équation (2.41).

En remplaçant  $H(\rho)$  par  $\mathcal{K}\Phi(\rho) + A(\rho)$  et en utilisant le changement de variable  $\mathcal{Q} = V^T\mathcal{K}$ , la relation (2.52) signifie que (2.53) est satisfaite aux sommets  $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ . Comme la condition (2.53) présente une dépendance affine par rapport aux paramètres, elle vérifie la propriété de multi-convexité et elle est satisfaite ainsi pour tout le domaine  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

A partir de (2.52), nous déduisons que  $V + V^T > 0$  ce qui implique que la matrice  $V$  est définie positive et par conséquent inversible. Donc la matrice  $\mathcal{K} = V^{-T}\mathcal{Q}$  existe et elle peut être calculée.  $\square$

Les conditions de stabilité du Théorème 2.3.3 sont sur-paramétrées par l'intermédiaire de la matrice inconnue  $V$  et les LMIs (2.52) ne font pas apparaître de produit entre les matrices de l'observateur et les matrices de Lyapunov comme dans les conditions du Théorème 2.3.2. De même que le Théorème 2.3.2, le Théorème 2.3.3 présente une condition suffisante de détectabilité paramétrique de la paire des fonctions matricielles  $(TA(\rho), C)$  sur  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

## 2.3.6 Applications numériques

Nous présentons quelques applications numériques afin de mettre en évidence les résultats de l'approche par interpolation linéaire.

### Exemple numérique 1

Dans un premier exemple nous étudions la synthèse d'un observateur LPV pour un missile. Le modèle utilisé est celui du « pitch-axis ». Ce type de modèle et surtout la

synthèse du pilote automatique a été largement débattue dans la littérature [53, 62, 21]. L'équation du mouvement pour ce type de missile est donnée par

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_\delta \\ M_\delta \end{bmatrix} \delta$$

avec  $\alpha$  l'angle d'attaque (deg),  $q$  la vitesse angulaire de tangage (deg/s),  $\delta$  l'angle de débattement de la gouverne (deg) et

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= K_\alpha M (a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n) \\ M_\alpha &= K_q M^2 (a_m \alpha^2 + b_m |\alpha| + c_m) \\ Z_\delta &= K_\alpha M d_n \cos \alpha \\ M_\delta &= K_q M^2 d_m \\ N_\alpha &= K_z M^2 (a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n) \\ N_\delta &= K_z M^2 d_m. \end{aligned}$$

Cette description est représentative d'un missile avec une vitesse de Mach  $M = 3$ , une altitude de 20000 ft et avec un angle d'attaque variant entre  $-20$  et  $20$  degrés. Les tableaux 2.1 et 2.2 contiennent les valeurs numériques des coefficients intervenant dans le modèle.

$a_n$	$b_n$	$c_n$	$d_n$	$K_\alpha$	$K_z$
$1,03 \cdot 10^{-4}$	$-9,45 \cdot 10^{-3}$	$-0,1696$	$-3,4 \cdot 10^{-2}$	$1,1855$	$0,667$

TAB. 2.1 – Coefficients de poussée

$a_m$	$b_m$	$c_m$	$d_m$	$K_q$
$2,15 \cdot 10^{-4}$	$-1,95 \cdot 10^{-2}$	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$-0,206$	$70,586$

TAB. 2.2 – Coefficients de tangage

D'importantes simplifications (voir [21]) peuvent être faites en exploitant les relations entre les coefficients. Après ces simplifications, le modèle du missile peut être ré-écrit comme un modèle LPV dépendant d'un paramètre :

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = (A_0 + \rho A_1) \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_\delta \\ M_\delta \end{bmatrix} \delta$$

avec  $A_0 = \begin{bmatrix} -0.8477 & 1.0000 \\ -64.1627 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_1 = \begin{bmatrix} 0.2298 & 0 \\ 96.5616 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} Z_\delta \\ M_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1209 \\ -130.8664 \end{bmatrix}$ . Les valeurs extrêmes du paramètre sont

$$\rho(t) \in [-1, 1], \quad \dot{\rho}(t) \in [-6.8, 6.8].$$



Nous supposons que les vitesses angulaires sont mesurées par des compas gyroscopiques de cadence et par conséquent  $q$  est disponible en temps réel. En définissant la matrice des mesure  $C$  comme  $[0 \ 1]$  on va illustrer les résultats de synthèse d'un observateur LPV.

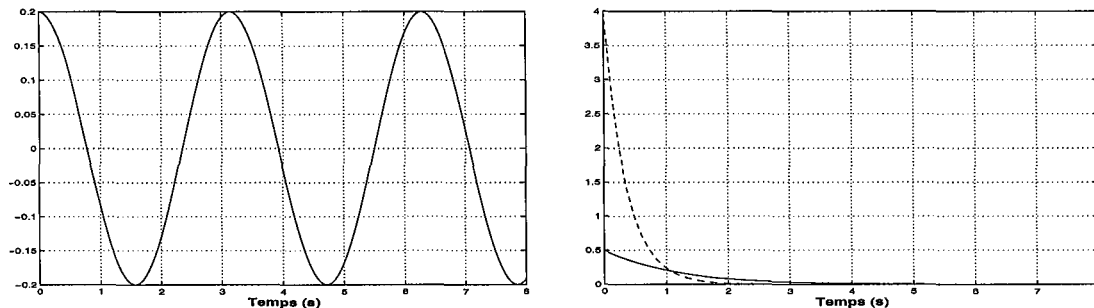
Les matrices de l'observateur sont

$$H(\rho) = H_0 + \rho H_1, \quad L(\rho) = L_0 + \rho L_1, \quad J(\rho) = J_0 + \rho J_1 \text{ et } K(\rho) = K_0 + \rho K_1.$$

En prenant comme fonction de Lyapunov  $V(e, \rho) = e^T(P_0 + \rho_1 P_1)e$ , des solutions pour la synthèse de l'observateur sont données par les conditions de faisabilité des Théorèmes 2.3.2 et 2.3.3. Pour résoudre les conditions du Théorème 2.3.2, nous avons utilisé l'algorithme de Frank et Wolfe, décrit dans [33, 5], et on a trouvé que les conditions ne sont pas vérifiées. Cela ne signifie pas qu'il n'existe pas de solution pour les conditions du Théorème 2.3.2 mais traduit seulement le fait que l'algorithme d'optimisation locale appliqué ne fournit pas de solution. L'application d'autres méthodes d'optimisation, éventuellement globales, peuvent donner une solution. Par contre, en appliquant les conditions LMI du Théorème 2.3.3 nous obtenons les matrices suivantes :

$$H(\rho) = \begin{bmatrix} -0.9085 + 0.3213\rho & 0 \\ 0 & -2.8255 \end{bmatrix} \quad L(\rho) = \begin{bmatrix} 1.0009 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -0.0009 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad J(\rho) = \begin{bmatrix} -0.2449 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



(a) Évolution du paramètre  $\rho$ .

(b) Les erreurs d'estimation  $e_1, e_2$ .

FIG. 2.4 – L'erreur d'estimation correspondant à l'évolution du paramètre.

Pour une évolution du paramètre indiquée sur la figure 2.4(a), les erreurs d'estimation d'état obtenues après implémentation de l'observateur LPV sont données sur la figure 2.4(b).

## Exemple numérique 2

Le deuxième exemple utilise un système LPV affine dépendant de deux paramètres. Le vecteur des paramètres évolue dans un rectangle donné sur la figure 2.5.

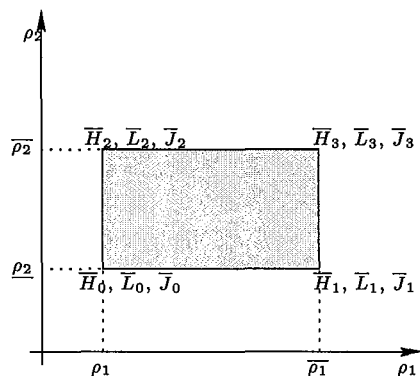


FIG. 2.5 – Le domaine des paramètres.

Le système est décrit par les équations (2.24) avec

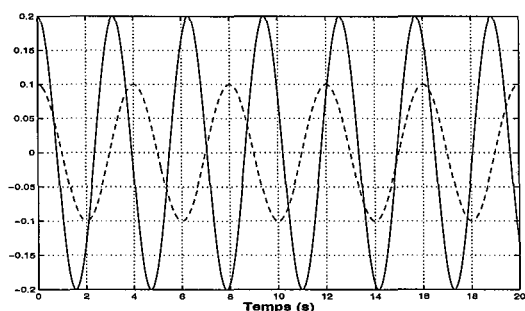
$$A_0 = \begin{bmatrix} -1 & -0.6 \\ 0.5 & -1.4 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -0.4 & 1.5 \\ 1.3 & -4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.8 \\ 3.9 & -0.2 \end{bmatrix} \text{ et } C = [1 \quad 0.5].$$

La matrice  $B$  n'est pas considérée ici parce qu'elle n'intervient pas dans la synthèse de l'observateur et les simulations ont été faites avec une entrée de commande nulle.

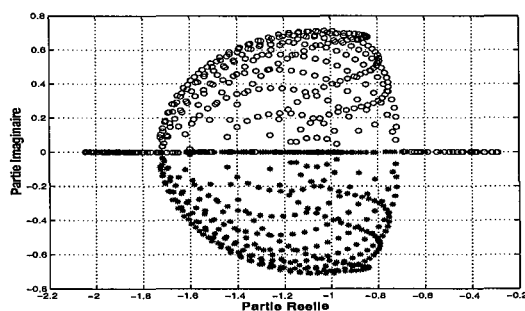
Les valeurs extrêmes des paramètres sont :

$$\rho_1(t) \in [-0.2, 0.2], \quad \rho_2(t) \in [-0.1, 0.1], \quad \dot{\rho}_1(t) \in [-0.4, 0.4], \quad \dot{\rho}_2 \in [-0.158, 0.158].$$

Pour avoir une idée de l'influence de la trajectoire des paramètres, le domaine des valeurs propres de la matrice d'état du système LPV est donné sur la figure 2.6(b). Ce domaine correspond à une trajectoire des paramètres indiquée sur la figure 2.6(a).



(a) Évolution des paramètres  $\rho_1$  (ligne continue) et  $\rho_2$  (ligne en tiret).



(b) Valeurs propres de  $A(\rho)$ .

FIG. 2.6 – Domaine des valeurs propres de  $A(\rho)$ .

Les matrices de l'observateur sont :

$$\begin{aligned} H(\rho) &= H_0 + \rho_1 H_1 + \rho_2 H_2 + \rho_1 \rho_2 H_3 \\ L(\rho) &= L_0 + \rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 + \rho_1 \rho_2 L_3 \\ J(\rho) &= J_0 + \rho_1 J_1 + \rho_2 J_2 + \rho_1 \rho_2 J_3 \\ K(\rho) &= K_0 + \rho_1 K_1 + \rho_2 K_2 + \rho_1 \rho_2 K_3. \end{aligned}$$

En utilisant la fonction de Lyapunov  $V(e, \rho) = e^T (P_0 + \rho_1 P_1 + \rho_2 P_2) e$ , nous présentons les résultats de synthèse obtenus avec les deux méthodes.

Les conditions LMI avec contrainte de rang du Théorème 2.3.2 ont été résolues en utilisant la méthode de Frank et Wolfe présentée dans [5] et nous obtenons l'observateur LPV suivant :

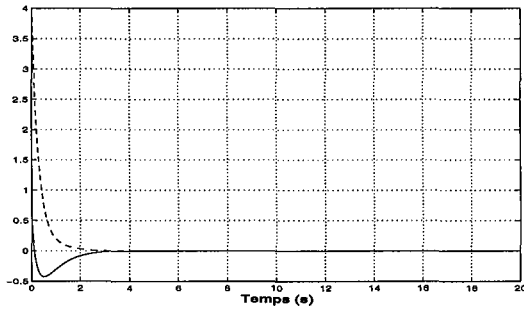
$$H(\rho) = \begin{bmatrix} -2.0577 - 0.1937\rho_1 - 0.8112\rho_2 - 0.0014\rho_1\rho_2 & -1.4010 + 1.4193\rho_1 + 1.2841\rho_2 - 0.0007\rho_1\rho_2 \\ 0.2509 + 1.3723\rho_1 + 4.4072\rho_2 + 0.0074\rho_1\rho_2 & -2.4779 - 4.6080\rho_1 + 0.5432\rho_2 + 0.0037\rho_1\rho_2 \end{bmatrix},$$

$$L(\rho) = \begin{bmatrix} 2.8863 - 1.5385\rho_1 - 1.6412\rho_2 - 0.0026\rho_1\rho_2 \\ 1.9561 + 4.5308\rho_1 - 1.8998\rho_2 - 0.0134\rho_1\rho_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -0.2942 \\ -1.0306 \end{bmatrix}$$

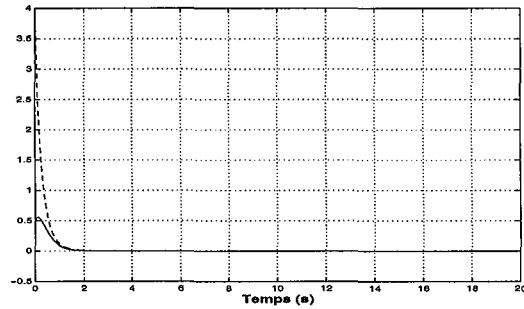
$$\text{et } J(\rho) = \begin{bmatrix} 1.2942 & 0.1471 \\ 1.0306 & 1.5153 \end{bmatrix} B(\rho).$$

La matrice de Lyapunov est :

$$P(\rho) = \begin{bmatrix} 0.3531 + 0.3991\rho_1 + 0.0852\rho_2 & -0.0579 + 0.1583\rho_1 + 0.2440\rho_2 \\ -0.0579 + 0.1583\rho_1 + 0.2440\rho_2 & 0.3525 - 0.1346\rho_1 + 0.0190\rho_2 \end{bmatrix}.$$



(a) Les erreurs d'estimation lorsque l'observateur est conçu à partir du Théorème 2.3.2.



(b) Les erreurs d'estimation lorsque l'observateur est conçu à partir du Théorème 2.3.3.

FIG. 2.7 – Les erreurs d'estimation  $e_1$  (ligne continue) et  $e_2$  (ligne en tiret).

Les conditions LMI du Théorème 2.3.3 donnent l'observateur LPV suivant :

$$H(\rho) = \begin{bmatrix} -2.9436 - 1.1683\rho_1 - 0.2489\rho_2 & 0.2350 + 2.3366\rho_1 + 0.4978\rho_2 \\ 0.2350 + 2.3366\rho_1 + 0.4978\rho_2 & -3.2961 - 4.6733\rho_1 - 0.9955\rho_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1.9533 \\ -1.9066 \end{bmatrix}$$

$$L(\rho) = \begin{bmatrix} -2.7891 - 6.4570\rho_1 - 3.5652\rho_2 \\ 5.5783 + 12.9140\rho_1 + 7.1304\rho_2 \end{bmatrix} \text{ et } J(\rho) = TB(\rho) = \begin{bmatrix} -0.9533 & -0.9766 \\ 1.9066 & 1.9533 \end{bmatrix} B(\rho).$$

La matrice de Lyapunov est :

$$P(\rho) = \begin{bmatrix} 1.1181 + 0.1427\rho_1 + 0.0367\rho_2 & -0.0202 - 0.2853\rho_1 - 0.0734\rho_2 \\ -0.0202 - 0.2853\rho_1 - 0.0734\rho_2 & 1.1484 - 0.1346\rho_1 + 0.1468\rho_2 \end{bmatrix}.$$

Les erreurs d'estimation obtenues après l'implémentation de l'observateur construit suite à la résolution des conditions LMI avec contrainte de rang du Théorème 2.3.2 sont indiquées sur la figure 2.7(a). Les conditions du Théorème 2.3.3 nous permettent d'obtenir un observateur dont les erreurs d'estimation sont montrées sur la figure 2.7(b).

### Exemple numérique 3

Un troisième exemple nous permet de présenter les résultats de synthèse d'un observateur LPV pour un système LPV affine dépendant de trois paramètres. Le système est décrit par les matrices suivantes :

$$A_0 = \begin{bmatrix} -1.8 & -3.2 & 0.4 \\ 0.5 & -3.9 & 0.9 \\ 1.6 & -7.4 & 1.4 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} -2.7 & -1.5 & -1 \\ -1 & -1.1 & -1.4 \\ -0.6 & -0.3 & -1.7 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0.08 & -1.4 & -0.5 \\ -0.2 & -1.1 & -0.2 \\ 0.9 & 0.1 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2.7 & -1.2 \\ 0.7 & -2.5 & -0.9 \\ 1.9 & -1.3 & -1.1 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 1.8 \\ 1.6 & 1.5 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Les paramètres évoluent entre les valeurs extrêmes

$$\rho_1(t) \in [-0.1, 0.1], \rho_2(t) \in [-0.1, 0.1], \rho_3(t) \in [-0.15, 0.15]$$

$$\dot{\rho}_1(t) \in [-0.2, 0.2], \dot{\rho}_2 \in [-0.158, 0.158], \dot{\rho}_3(t) \in [-1, 1].$$

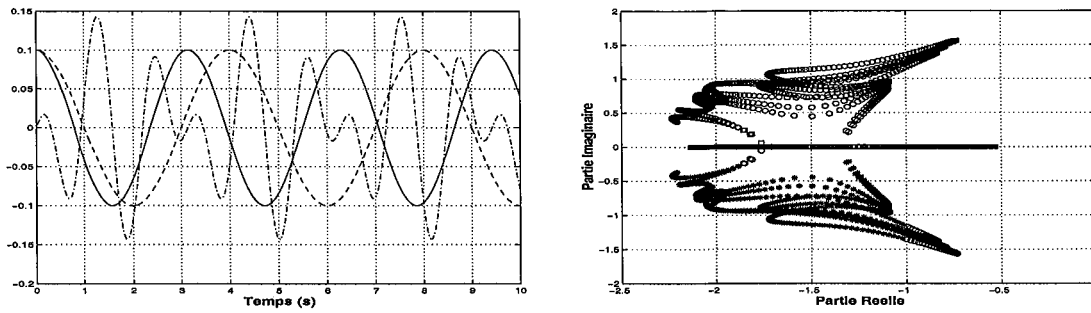
Pour avoir une idée de l'influence de la trajectoire des paramètres, le domaine des valeurs propres de la matrice d'état du système LPV est donné sur la figure 2.8(b). Ce domaine correspond à une trajectoire des paramètres indiquée sur la figure 2.8(a).

Comme le vecteur des paramètres est de dimension 3, les matrices de l'observateur sont :

$$H(\rho) = H_0 + \rho_1 H_1 + \rho_2 H_2 + \rho_3 H_3 + \rho_1 \rho_2 H_4 + \rho_1 \rho_3 H_5 + \rho_2 \rho_3 H_6 + \rho_1 \rho_2 \rho_3 H_7$$

et  $L(\rho)$ ,  $J(\rho)$  et  $K(\rho)$  ont la même structure.

L'application des résultats du Théorème 2.3.2 ne permet pas de trouver une solution pour la synthèse de l'observateur. Cela ne veut pas dire qu'il n'existe pas de solution pour ces LMIs avec contrainte de rang mais, comme pour l'exemple 1, cela traduit l'échec de l'implémentation de la méthode de Frank et Wolfe. En appliquant les conditions du



(a) Évolution des paramètres  $\rho_1$  (ligne continue),  $\rho_2$  (ligne en tiret) et  $\rho_3$  (ligne pointillée).

(b) Valeurs propres de  $A(\rho)$ .

FIG. 2.8 – *Domaine des valeurs propres de  $A(\rho)$ .*

Théorème 2.3.3, nous obtenons un observateur dépendant des paramètres dont les matrices sont :

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \begin{bmatrix} -2.8283 & 0.0003 & -0.0002 \\ 0.0003 & -2.8286 & 0.0002 \\ -0.0002 & 0.0002 & -2.8282 \end{bmatrix}, & H_1 &= \begin{bmatrix} -0.0711 & 0.1043 & -0.0474 \\ 0.1043 & -0.1529 & 0.0695 \\ -0.0474 & 0.0695 & -0.0316 \end{bmatrix}, \\
 H_2 &= \begin{bmatrix} 0.0599 & -0.0879 & 0.0399 \\ -0.0879 & 0.1289 & -0.0586 \\ 0.0399 & -0.0586 & 0.0266 \end{bmatrix}, & H_3 &= \begin{bmatrix} -0.0117 & 0.0172 & -0.0078 \\ 0.0172 & -0.0252 & 0.0114 \\ -0.0078 & 0.0114 & -0.0052 \end{bmatrix}, \\
 H_4 \approx H_5 \approx H_6 \approx H_7 \approx 0, & L_0 &= \begin{bmatrix} -0.5495 & 0.3976 \\ 0.8059 & -0.5832 \\ -0.3663 & 0.2651 \end{bmatrix}, & L_1 &= \begin{bmatrix} 0.5127 & -0.7021 \\ -0.7519 & 1.0298 \\ 0.3418 & -0.4681 \end{bmatrix}, \\
 L_2 &= \begin{bmatrix} -0.0313 & -0.0226 \\ 0.0460 & 0.0332 \\ -0.0209 & -0.0151 \end{bmatrix}, & L_3 &= \begin{bmatrix} -0.0296 & 0.0045 \\ 0.0435 & -0.0066 \\ -0.0198 & 0.0030 \end{bmatrix}, & L_4 \approx L_5 \approx L_6 \approx L_7 \approx 0, \\
 M &= \begin{bmatrix} -0.1689 & 0.4507 \\ -0.4190 & 0.6723 \\ 0.9985 & -0.8106 \end{bmatrix}, & T &= \begin{bmatrix} 0.4478 & -0.4227 & -0.1016 \\ -0.6567 & 0.6200 & 0.1491 \\ 0.2985 & -0.2818 & -0.0678 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La matrice de Lyapunov est :

$$\begin{aligned}
 P(\rho) &= \begin{bmatrix} 1.1082 & -0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 1.1082 & -0.0000 \\ 0.0000 & -0.0000 & 1.1082 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 0.0098 & -0.0143 & 0.0065 \\ -0.0143 & 0.0210 & -0.0095 \\ 0.0065 & -0.0095 & 0.0043 \end{bmatrix} \\
 &+ \rho_2 \begin{bmatrix} -0.0096 & 0.0142 & -0.0064 \\ 0.0142 & -0.0208 & 0.0094 \\ -0.0064 & 0.0094 & -0.0043 \end{bmatrix} + \rho_3 * 1.0e - 03 * \begin{bmatrix} 0.3340 & -0.4898 & 0.2227 \\ -0.4898 & 0.7184 & -0.3266 \\ 0.2227 & -0.3266 & 0.1484 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

L'erreur d'estimation d'état obtenue avec cet observateur est donnée sur la figure 2.9.

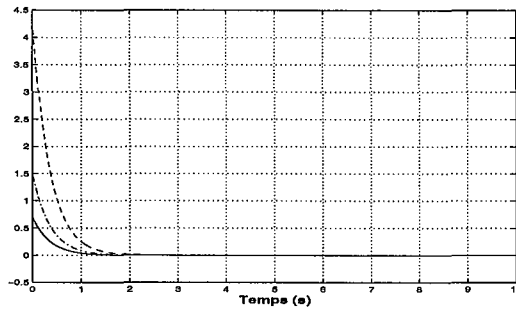


FIG. 2.9 – Les erreurs d'estimation  $e_1$ ,  $e_2$  et  $e_3$ .

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, plusieurs conditions suffisantes permettant la synthèse d'observateurs pour un système LPV ont été proposées. La première (Théorème 2.2.1) est relative au calcul de l'observateur à base d'interpolation polynomiale. Elle s'avère être difficile à exploiter et elle aboutit à un résultat conservatif. La deuxième (Théorème 2.3.2) exploite les faiblesses de la première et repose sur une interpolation linéaire par rapport à chaque paramètre et l'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres pour garantir la stabilité. La dernière (Théorème 2.3.3) est une solution permettant d'éliminer le couplage qui est à l'origine de la non-convexité des conditions du Théorème 2.3.2 et propose des conditions LMI pour la synthèse de l'observateur. Ces conditions sont certainement plus conservatives que celles du Théorème 2.3.2 mais néanmoins facilement vérifiables numériquement.

D'un point de vue pratique, on peut dégager trois points importants de cette étude :

- *Résolution numérique*

Dans les applications numériques présentées, pour la résolution des conditions LMI sous contrainte de rang du Théorème 2.3.2, nous avons utilisé l'algorithme de Frank et Wolfe qui est une méthode d'optimisation locale. Nous n'avons pas essayé d'algorithme d'optimisation globale. Nous avons plutôt privilégié la recherche de solutions alternatives pour la synthèse de l'observateur LPV et au dépend d'une étude comparative d'un point de vue numérique des deux méthodes proposées. Bien que les conditions du Théorème 2.3.2 soient moins restrictives d'un point de vue théorique, nous n'avons pas eu de difficultés à trouver des exemples pour lesquels les conditions LMI sous contrainte de rang du Théorème 2.3.2 ne sont pas faisables avec l'algorithme utilisé alors que les conditions LMI du Théorème 2.3.3 aboutissent à une solution. On suggère donc pour la synthèse de l'observateur de commencer par tester en premier les conditions LMI du Théorème 2.3.3. Si ces conditions échouent, il faudrait alors résoudre les conditions du Théorème 2.3.2 et éventuellement utiliser d'autres algorithmes lorsque celui de Frank et Wolfe ne permet pas de conclure.

- *Dynamique de l'erreur*

Les conditions proposées dans ce chapitre permettent de garantir la stabilité de l'erreur d'observation et uniquement la stabilité. En regardant le deuxième exemple numérique, on peut remarquer que la dynamique de l'erreur d'estimation et le temps de convergence sont différents, en fonction de la méthode de synthèse utilisée. Comme les conditions du Théorème 2.3.2 et du Théorème 2.3.3 garantissent uniquement la stabilité asymptotique et exponentielle de l'erreur d'estimation, on ne sait pas comment maîtriser le temps de convergence. Ce point peut constituer une perspective intéressante de ce travail.

- *Structure de l'observateur*

Dans la troisième application numérique, les matrices  $H(\rho)$ ,  $L(\rho)$  et  $J(\rho)$  ont une structure plutôt affine et non polynomiale. Comme le stipule la Remarque 2.3.1, un observateur à structure affine est un cas particulier de l'observateur à structure polynomiale multivariable. Par conséquent, la classe des observateurs à structure polynomiale est un peu trop large.

Ce dernier point justifie une étude plus approfondie d'observateurs à structure affine. Cette étude est l'objet du chapitre suivant.





# 3

## Synthèse d'observateurs à paramètres variants pour des systèmes LPV affines à temps continu : approche LPV

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>70</b>
<b>3.2</b>	<b>Synthèse d'observateurs LPV</b>	<b>70</b>
3.2.1	Positionnement du problème	71
3.2.2	Synthèse de l'observateur	71
3.2.3	Implémentation numérique	75
3.2.4	Exemple numérique	76
3.2.5	Conclusion	77
<b>3.3</b>	<b>Lien entre l'approche par interpolation linéaire et l'approche LPV</b>	<b>77</b>
<b>3.4</b>	<b>Problème dual : la commande par retour d'état</b>	<b>80</b>
3.4.1	Formulation du problème	80
3.4.2	Synthèse du contrôleur	81
3.4.3	Exemple numérique	84
<b>3.5</b>	<b>Application à la commande par retour d'état basée observateur</b>	<b>85</b>
<b>3.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>87</b>

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, le problème de l'interpolation est abordé de manière implicite dans le sens que l'observateur dépendant des paramètres est obtenu directement par des techniques LPV. De plus, on s'intéresse à la synthèse d'observateurs ayant une dépendance affine par rapport aux paramètres. La méthode de synthèse proposée est applicable pour un système LPV dont toutes les matrices de la représentation d'état ont une dépendance affine par rapport aux paramètres. En effet, cette méthode est une extension de la méthode proposée dans la section 2.3.5. On montre également que dans le cas des observateurs LPV affines, l'interpolation linéaire explicite (par rapport aux paramètres) entre les observateurs LTI extrêmes génère le même observateur LPV.

La méthode de synthèse d'observateurs par des techniques LPV a été adaptée par la suite au problème de synthèse d'une commande par retour d'état. Nous énonçons des conditions suffisantes pour la synthèse d'un gain de retour d'état dépendant des paramètres avec  $\gamma$ -performance pour la boucle fermée. Une étude préliminaire sur une commande basée observateur est également présentée.

### 3.2 Synthèse d'observateurs LPV

Dans ce chapitre, nous considérons le cas général des systèmes LPV où toutes les matrices de la représentation d'état ont une dépendance affine par rapport aux paramètres. Nous rappelons que cette classe de systèmes est décrite par :

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \quad (3.1a)$$

$$y(t) = C(\rho)x(t) + D(\rho)u(t) \quad (3.1b)$$

où

$$A(\rho(t)) = A_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i(t)A_i, \quad B(\rho(t)) = B_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i(t)B_i,$$

$$C(\rho(t)) = C_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i(t)C_i, \quad D(\rho(t)) = D_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i(t)D_i.$$

et  $\{A_i\}_{i=1,\dots,N}$ ,  $\{B_i\}_{i=1,\dots,N}$ ,  $\{C_i\}_{i=1,\dots,N}$  et  $\{D_i\}_{i=1,\dots,N}$  sont des matrices connues.  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  est le vecteur d'entrée et  $y(t) \in \mathbf{R}^p$  est le vecteur de sortie. Les paramètres  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N$  sont des signaux exogènes qui évoluent indépendamment les uns des autres et le vecteur de paramètres  $\rho = [\rho_1 \ \rho_2 \ \dots \ \rho_N]^T$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  donné par la Définition 1.1.2.

### 3.2.1 Positionnement du problème

Notre but est de concevoir un observateur dépendant des paramètres de type Luenberger :

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(\rho)\hat{x}(t) + B(\rho)u(t) + L(\rho)(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (3.2)$$

où  $\hat{y}(t) = C(\rho)\hat{x}(t) + D(\rho)u(t)$ .

En définissant l'erreur d'estimation comme  $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ , nous obtenons une dynamique de l'erreur donnée par

$$\dot{e}(t) = (A(\rho) - L(\rho)C(\rho))e(t). \quad (3.3)$$

Le problème à étudier est de trouver la matrice de gain de l'observateur  $L(\rho)$  telle que l'erreur d'estimation (3.3) converge asymptotiquement vers l'origine indépendamment des conditions initiales, de l'entrée de commande et de l'évolution du vecteur de paramètres  $\rho$  dans le domaine  $\mathcal{F}_\rho$ .

Dans l'équation (3.2) définissant l'observateur, les matrices d'état et de commande sont affines par rapport aux paramètres. Nous choisissons la même structure pour la matrice de gain, c'est-à-dire :

$$L(\rho(t)) = L_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i L_i. \quad (3.4)$$

Par conséquent, nous obtenons un observateur LPV affine et le problème de sa synthèse est réduit à trouver les matrices  $L_0, \dots, L_N$  de manière à assurer la stabilité quadratique affine de l'erreur de reconstruction. Dans la suite, nous étudions le problème de synthèse d'observateur en terme d'existence d'une matrice de gain et d'une fonction de Lyapunov affine dépendant des paramètres et garantissant la stabilité quadratique affine (SQA) de l'erreur d'estimation selon la Définition 1.1.10. Nous appellerons cet observateur un *observateur affine LPV-AQS*.

### 3.2.2 Synthèse de l'observateur

Dans cette section, nous formulons des conditions suffisantes pour l'existence de l'observateur affine LPV-AQS. Le problème de l'existence de la matrice  $L(\rho)$  et de la fonction de Lyapunov affine dépendant des paramètres est formulé comme un problème de faisabilité LMI.

Nous rappelons que la difficulté principale dans la résolution des inégalités issues des conditions de stabilité de la Définition 1.1.10 pour l'équation (3.3) vient du couplage existant entre la matrice de Lyapunov  $P(\rho)$  et la matrice d'état de l'erreur d'estimation  $A(\rho) - L(\rho)C(\rho)$ . En effet, nous avons montré dans le chapitre précédent que ce couplage

nous amène à résoudre des inégalités LMI avec une contrainte de rang- $n$  lorsque  $C(\rho)$  est constant. Pour surmonter cette difficulté, nous avons proposé, dans le même chapitre, d'éliminer un tel couplage et par conséquent fournir des conditions LMI en généralisant les résultats de stabilité proposés dans [6]. Dans cette section, nous appliquons cette généralisation au problème abordé dans ce chapitre. Nous commençons par énoncer la proposition suivante :

**Proposition 3.2.1 ([9]).** *Il existe un observateur affine LPV-AQS pour le système LPV (3.1) s'il existe des matrices  $W, L_0, L_1, \dots, L_N$  et  $P_0, P_1, \dots, P_N$  matrices symétriques telles que la condition*

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & W^T(A(\rho) - L(\rho)C(\rho)) + P(\rho) & W^T \\ (A(\rho) - L(\rho)C(\rho))^T W + P(\rho) & -P(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 & 0 \\ W & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.5)$$

est satisfaite pour toute trajectoire admissible  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$  avec  $L(\rho)$  donné par (3.4) et

$$P(\rho) = P_0 + \rho_1 P_1 + \dots + \rho_N P_N.$$

■

**Preuve :** La preuve de cette proposition est basée sur la généralisation des résultats de stabilité énoncés dans [6] pour un système LTI. L'inégalité (3.5) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} 0 & P(\rho) & 0 \\ P(\rho) & -P(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 & 0 \\ 0 & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ A^T(\rho) - C^T(\rho)L^T(\rho) \\ I \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix} + (*) < 0.$$

Nous pouvons éliminer la matrice  $W$  en utilisant le lemme de projection (voir Annexe A, Lemme A.1.3). Les matrices orthogonales à  $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} -I & A(\rho) - L(\rho)C(\rho) & I \end{bmatrix}$  sont  $\begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T$  et respectivement  $\begin{bmatrix} A^T(\rho) - C^T(\rho)L^T(\rho) & I & 0 \\ I & 0 & I \end{bmatrix}^T$ . Par calcul des conditions de projection, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} -P(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 & 0 \\ 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} P(\rho)(A(\rho) - L(\rho)C(\rho)) + (A(\rho) - L(\rho)C(\rho))^T P(\rho) - P(\rho) + P(\dot{\rho}) - P_0 & P(\rho) \\ P(\rho) & -P(\rho) \end{bmatrix} < 0$$

pour toute trajectoire admissible  $\rho \in \mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ . En appliquant le complément de Schur nous obtenons la condition de stabilité quadratique affine (SQA) pour l'équation (3.3) et la contrainte  $P(\rho) - P(\dot{\rho}) + P_0 > 0$  sur la matrice de Lyapunov. Cela signifie que le domaine des solutions de l'inégalité (3.5) est inclus dans le domaine des solutions satisfaisant les conditions de la Définition 1.1.10 et donc la condition (3.5) est suffisante pour assurer la SQA de l'équation (3.3). □

**Remarque 3.2.1.** Si la matrice  $P(\rho)$  est constante alors  $P(\dot{\rho}) - P_0 = 0$  et l'inégalité (3.5) représente une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité quadratique de l'équation (3.3).

Une fois le couplage entre  $P(\rho)$  et  $A(\rho) - L(\rho)C(\rho)$  éliminé par la Proposition 3.2.1, il reste encore le problème relatif au nombre infini de LMI qu'on doit résoudre via l'inégalité (3.5). En utilisant le principe de multi-convexité, nous réduisons la condition de la Proposition 3.2.1 à un nombre fini de LMI dans le théorème suivant.

**Théorème 3.2.2 ([9]).** *Il existe un observateur affine LPV-AQS pour le système LPV (3.1) s'il existe des matrices  $W, R_0, R_1, \dots, R_N$  et  $P_0, P_1, \dots, P_N$  matrices symétriques telles que les conditions LMI suivantes*

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & W^T A(\omega) - \mathcal{R}(\omega)C(\omega) + P(\omega) & W^T \\ A^T(\omega)W - C^T(\omega)\mathcal{R}^T(\omega) + P(\omega) & -P(\omega) + P(\tau) - P_0 & 0 \\ W & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} < 0$$

pour tout  $(\omega, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$  (3.6)

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & 0 & -P(\omega) - R_i C_i & W^T \\ 0 & -(W + W^T) & -P_i + W^T A_i - R_i C(\omega) - \mathcal{R}(\omega)C_i & 0 \\ -P(\omega) - C_i^T R_i^T & -P_i + A_i^T W - C(\omega)^T R_i^T - C_i^T \mathcal{R}(\omega)^T & -P(\omega) & 0 \\ W & 0 & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} \leq 0$$

pour tout  $\omega \in \mathcal{V}$  et  $i = 1, \dots, N$  (3.7)

sont satisfaites, avec

$$\mathcal{R}(\rho) = R_0 + \rho_1 R_1 + \dots + \rho_N R_N \quad \text{et} \quad P(\rho) = P_0 + \rho_1 P_1 + \dots + \rho_N P_N.$$

Dans ce cas, la matrice de gain de l'observateur  $L(\rho)$  est donnée par  $W^{-T}\mathcal{R}(\rho)$ . ■

**Preuve :** Pour prouver ce théorème, nous commençons par étudier séparément les contraintes (3.6) et (3.7).

En utilisant la notation  $R(\rho) = W^T L(\rho)$  et en accord avec la Proposition 3.2.1, les inégalités (3.6) expriment le fait que l'équation (3.3) est quadratiquement stable aux sommets  $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$  délimitant les trajectoires paramétriques admissibles. En effet, en appliquant la même méthodologie que dans la preuve de la Proposition 3.2.1, les inégalités (3.6) impliquent que la fonction de Lyapunov  $V(x, \rho) = x^T P(\rho)x$  est définie positive aux sommets  $\mathcal{V}$  et sa dérivée

$$f(\rho, \dot{\rho}) = dV(x, \rho)/dt = x^T \mathcal{F}(\rho, \dot{\rho})x = x^T \left( (A(\rho) - L(\rho)C(\rho))^T P(\rho) + P(\rho)(A(\rho) - L(\rho)C(\rho)) + P(\dot{\rho}) - P_0 \right) x \quad (3.8)$$

est définie négative aux sommets  $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$  de son domaine de définition.

Regardons maintenant les conditions (3.7). En utilisant la notation  $R(\rho) = W^T L(\rho)$ , les inégalités (3.7) sont équivalentes à

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & 0 & -P(\omega) - W^T L_i C_i & W^T \\ 0 & -(W + W^T) & -P_i + W^T (A_i - L_i C(\omega) - L(\omega) C_i) & 0 \\ -P(\omega) - C_i^T L_i^T W & -P_i + (A_i - L_i C(\omega) - L(\omega) C_i)^T W & -P(\omega) & 0 \\ W & 0 & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} \leq 0 \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{V} \text{ et } i = 1, \dots, N$$

ou encore à

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -P(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & -P_i & 0 \\ -P(\omega) & -P_i & -P(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^T & 0 \\ 0 & W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I & 0 & -L_i C_i & I \\ 0 & -I & A_i - L_i C(\omega) - L(\omega) C_i & 0 \end{bmatrix} + (*) \leq 0 \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{V} \text{ et } i = 1, \dots, N.$$

Comme les matrices orthogonales à  $\begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{bmatrix}$  et  $\begin{bmatrix} -I & 0 & -L_i C_i & I \\ 0 & -I & A_i - L_i C(\omega) - L(\omega) C_i & 0 \end{bmatrix}$  sont respectivement  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T$  et  $\begin{bmatrix} -(L_i C_i)^T & (A_i - L_i C(\omega) - L(\omega) C_i)^T & I & 0 \\ I & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T$ , nous pouvons éliminer la matrice  $\begin{bmatrix} W^T & 0 \\ 0 & W^T \end{bmatrix}$  en utilisant le lemme de projection pour des inégalités non strictes (Lemme A.1.4) et nous trouvons les conditions de projection suivantes :

$$\begin{bmatrix} -P_i (A_i - L_i C(\omega) - L(\omega) C_i) + P(\omega) L_i C_i + (*) - P(\omega) & -P(\omega) \\ -P(\omega) & -P(\omega) \end{bmatrix} \leq 0 \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{V} \text{ et } i = 1, \dots, N.$$

En appliquant le complément de Schur, ces inégalités sont équivalentes à

$$\begin{aligned} P(\omega) &\geq 0 \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{V} \\ -P_i (A_i - L_i C(\omega) - L(\omega) C_i) + P(\omega) L_i C_i + (*) &\leq 0 \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{V} \text{ et } i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

La première inégalité est aussi incluse dans la condition (3.6) et donc nous n'avons pas besoin de la prendre en compte. La deuxième inégalité représente la condition de multi-convexité de la dérivée de la fonction de Lyapunov  $dV(x, \rho)/dt$  selon le Lemme 1.2.1 avec un degré partiel  $d_k = 3$  pour  $k = 1, \dots, N$  et un degré total  $d = 3$ . La fonction de Lyapunov  $V(x, \rho)$  est affine par rapport aux paramètres et elle est donc convexe.

Par conséquent, les conditions (3.6) et (3.7) impliquent que la fonction de Lyapunov  $V(x, \rho)$  est définie positive et sa dérivée est définie négative sur tout le domaine des trajectoires paramétriques admissibles. Cela garantit la convergence asymptotique et exponentielle de l'erreur d'estimation.  $\square$

Ce théorème présente des conditions suffisantes pour calculer les matrices  $L_0, L_1, \dots, L_N$  telles que l'erreur d'estimation soit AQS et implicitement asymptotiquement et exponentiellement stable. Notons que les contraintes du Théorème 3.2.2 représentent une condition suffisante de détectabilité paramétrique de la paire de fonctions matricielles  $(A(\rho), C(\rho))$  sur  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

### 3.2.3 Implémentation numérique

Quelques remarques au niveau de l'implémentation numérique s'imposent à cause des inégalités linéaires matricielles non strictes. La contrainte de multi-convexité (3.7) induit quelques difficultés lors de la résolution numérique des LMI du Théorème 3.2.2 à cause de son caractère non strict. Comme suggéré dans [31], afin d'éviter ce problème et pour alléger la contrainte de multi-convexité de la dérivée de la fonction de Lyapunov, nous imposons que celle-ci soit seulement bornée par une fonction multi-convexe. Soit  $f_{conv}(\rho)$  cette fonction et

$$f_{conv}(\rho, \dot{\rho}) = x^T \mathcal{F}_{conv}(\rho, \dot{\rho}) x = x^T \left( \mathcal{F}(\rho, \dot{\rho}) + \sum_{i=1}^N \rho_i^2 M_i \right) x \geq x^T \mathcal{F}(\rho, \dot{\rho}) x = f(\rho) = dV(x, \rho)/dt$$

où  $\mathcal{F}(\rho, \dot{\rho})$  est donnée par (3.8) et  $M_i \geq 0$ . La fonction  $f_{conv}(\rho, \dot{\rho})$  satisfait la propriété de multi-convexité par rapport à  $\rho$  si et seulement si :

$$-P_i(A_i - L_i C(\omega) - L(\omega) C_i) + P(\omega) L_i C_i + (*) - M_i \leq 0 \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{V} \text{ et } i = 1, \dots, N.$$

Malheureusement cette solution augmente le nombre de LMI à résoudre à cause de l'utilisation des matrices  $M_i$  qui doivent être définies positives. Pour alléger ces LMIs supplémentaires nous pouvons choisir  $M_i = \mu_i I$  ce qui revient à remplacer la condition (3.7) du Théorème 3.2.2 par l'inégalité

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & 0 & -P(\omega) - R_i C_i & W^T \\ 0 & -(W + W^T) & -P_i + W^T A_i - R_i C(\omega) - \mathcal{R}(\omega) C_i & 0 \\ -P(\omega) - C_i^T R_i^T & -P_i + A_i^T W - C(\omega)^T R_i^T - C_i^T \mathcal{R}(\omega)^T & -P(\omega) & 0 \\ W & 0 & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} - B \text{diag}(0, 0, \mu_i I, 0) < 0 \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{V} \text{ et } i = 1, \dots, N \quad (3.9)$$

avec  $\mu_i > 0$ .

La condition (3.6) du Théorème 3.2.2 doit être remplacée par

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & W^T A(\omega) - \mathcal{R}(\omega) C(\omega) + P(\omega) & W^T \\ A^T(\omega) W - C^T(\omega) \mathcal{R}^T(\omega) + P(\omega) & -P(\omega) + P(\tau) - P_0 & 0 \\ W & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} + B \text{diag}(0, \sum_i \mu_i \omega_i^2 I, 0) < 0 \text{ pour tout } (\omega, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}. \quad (3.10)$$

Dans l'application numérique présentée par la suite, nous avons utilisé cette version du Théorème 3.2.2, à savoir nous avons remplacé les LMIs (3.6) et (3.7) par (3.10) et (3.9).

### 3.2.4 Exemple numérique

L'application numérique présentée porte sur un système dépendant de deux paramètres. L'ensemble des matrices décrivant le système est :

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2.4 & 0.6 \\ 1.5 & 0.7 & 1.4 \\ 1.6 & 2.8 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 2.4 & 1.5 & 1.7 \\ 2.1 & 1.9 & 1.3 \\ 1.5 & 1.7 & 1.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 2.1 & 2.8 \\ 1.2 & 3.44 & 1.1 \\ 1.4 & 1.6 & 2.2 \end{bmatrix},$$

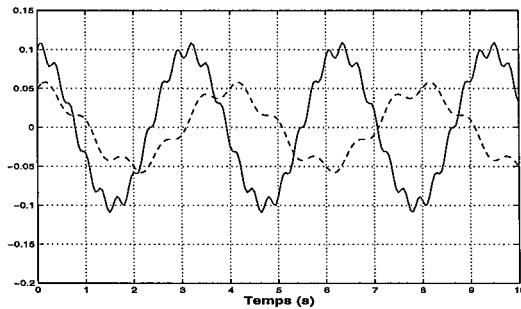
$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & 1.8 \\ 1.6 & 1.5 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1.5 & 0.8 \\ 0.6 & 2.5 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 2.1 & 1.5 \\ 1 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs extrêmes des paramètres sont :

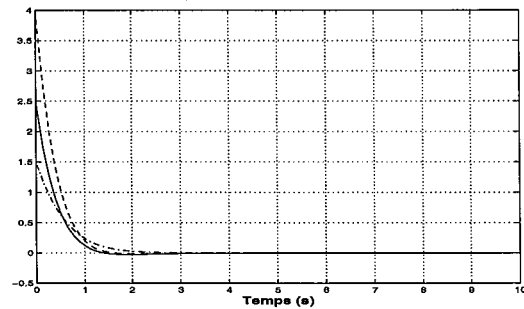
$$\rho_1(t) \in [-0.2, 0.2], \quad \rho_2(t) \in [-0.1, 0.1], \quad \dot{\rho}_1(t) \in [-0.4, 0.4], \quad \dot{\rho}_2 \in [-0.158, 0.158].$$

Les conditions de faisabilité du Théorème 3.2.2, avec (3.10) et (3.9) au lieu de (3.6) et (3.7), permettent de trouver la matrice de gain de l'observateur

$$L(\rho) = \begin{bmatrix} 0.2101 & 1.5116 \\ 1.2422 & 0.4874 \\ 1.6748 & 0.0213 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} -0.4826 & 0.2798 \\ 0.0521 & -0.3376 \\ -0.8436 & 0.6527 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} 0.1427 & -0.4095 \\ -0.8285 & 0.3619 \\ -0.4560 & 0.1137 \end{bmatrix},$$



(a) Évolution des paramètres  $\rho_1$  (ligne continue) et  $\rho_2$  (ligne en tiret).



(b) Les erreurs d'estimation  $e_1, e_2$  et  $e_3$ .

FIG. 3.1 – Les erreurs d'estimation pour une certaine évolution des paramètres.

la matrice  $W = \begin{bmatrix} 0.3905 & -0.1316 & -0.0155 \\ -0.0741 & 0.4482 & 0.0468 \\ -0.0839 & -0.1464 & 0.4472 \end{bmatrix}$  et la matrice de Lyapunov

$$P(\rho) = \begin{bmatrix} 0.7627 & -0.0768 & 0.0348 \\ -0.0768 & 0.9290 & 0.0233 \\ 0.0348 & 0.0233 & 1.0098 \end{bmatrix} + \rho_1 \begin{bmatrix} 0.2326 & -0.0418 & 0.1616 \\ -0.0418 & -0.1149 & -0.0598 \\ 0.1616 & -0.0598 & 0.1223 \end{bmatrix} + \rho_2 \begin{bmatrix} 0.0513 & 0.1848 & 0.4343 \\ 0.1848 & 0.4520 & -0.2705 \\ 0.4343 & -0.2705 & 0.2187 \end{bmatrix}.$$



Les valeurs de  $\mu_i$  sont  $\mu_1 = 1.4780$  et  $\mu_2 = 1.0503$ .

Pour une évolution des paramètres comme sur la figure 3.1(a), celle de l'erreur d'estimation d'état est indiquée sur la figure 3.1(b).

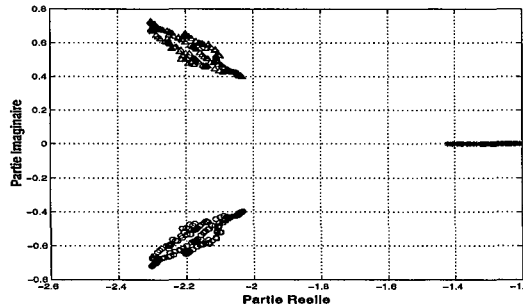


FIG. 3.2 – Le domaine des valeurs propres pour la matrice  $A(\rho) - L(\rho)C(\rho)$ .

Pour mettre en évidence l'influence de la variation des paramètres, le domaine des valeurs propres de la matrice d'état de l'erreur d'estimation est représenté sur la figure 3.2.

### 3.2.5 Conclusion

Les résultats de synthèse de l'observateur affine LPV-AQS sont basés sur une technique de découplage des matrices de synthèse grâce à l'utilisation d'une matrice supplémentaire. Cette technique de découplage a été aussi utilisée dans les conditions LMI du Théorème 2.3.3 du chapitre précédent. Bien que la technique de découplage soit commune, elle est appliquée de manière différente dans les deux chapitres. En effet, dans le chapitre précédent, les conditions du Théorème 2.3.3 sont obtenues en appliquant le principe de multi-convexité après le découplage des matrices. Dans les conditions du Théorème 3.2.2 nous appliquons d'abord le principe de multi-convexité sur la fonction de Lyapunov et sur sa dérivée et ensuite on applique le principe de découplage sur les conditions ainsi obtenues.

## 3.3 Lien entre l'approche par interpolation linéaire et l'approche LPV

Dans l'approche LPV le problème de l'interpolation est abordé de manière implicite dans le sens où l'observateur est dépendant des paramètres. Dans ce qui suit, nous montrons que, dans l'hypothèse d'une structure affine pour l'observateur, poser ce problème de manière explicite nous ramène au même type de solution que celle obtenue par l'approche LPV.

Soit le vecteur des paramètres  $\rho$  qui évolue dans  $\mathcal{P}$  dont les sommets sont donnés par l'ensemble  $\mathcal{V}$ . Supposons que ce vecteur engendre un polytope de matrices dont l'ensemble des sommets est donné par :

$$\mathcal{U} : \{\bar{U}_0, \bar{U}_1, \dots, \bar{U}_{2^N-1}\} \quad (3.11)$$

Le sommet du polytope (hyper-rectangle) des paramètres correspondant au sommet  $\bar{U}_i$  est  $(\tilde{\rho}_1^i, \tilde{\rho}_2^i, \dots, \tilde{\rho}_N^i)$  avec

$$\tilde{\rho}_j^i = \begin{cases} \underline{\rho}_j & \text{si } b_j^i = 0 \\ \bar{\rho}_j & \text{si } b_j^i = 1 \end{cases}$$

et  $(b_N^i \dots b_2^i b_1^i)$  la représentation binaire de l'indice  $i$ . Supposons que chaque sommet du polytope (3.11) a une dépendance affine par rapport aux paramètres du sommet qui lui correspond dans l'hyper-rectangle des paramètres *i.e.*

$$\bar{U}_i = U_0 + \tilde{\rho}_1^i U_1 + \tilde{\rho}_2^i U_2 + \dots + \tilde{\rho}_N^i U_N \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

Nous montrons par la suite que l'interpolation linéaire entre les sommets de l'ensemble (3.11) génère une matrice équivalente à une matrice affine.

L'interpolation linéaire, telle qu'elle a été exposée précédemment dans la section 2.3.2, permet d'écrire

$$U_{interp}(\rho) = \mu_0(\rho)\bar{U}_0 + \dots + \mu_{2^N-1}(\rho)\bar{U}_{2^N-1}$$

avec les fonctions d'interpolation  $\mu_0(\rho), \mu_1(\rho), \dots, \mu_{2^N-1}(\rho)$  données par

$$\mu_i(\rho) = \prod_{j=1}^N \frac{\alpha_{ij}\rho_j + \beta_{ij}}{\underline{\rho}_j - \bar{\rho}_j} \quad \text{avec } \alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } b_j^i = 0 \\ -1 & \text{si } b_j^i = 1 \end{cases} \quad \text{et } \beta_{ij} = \begin{cases} -\bar{\rho}_j & \text{si } b_j^i = 0 \\ \underline{\rho}_j & \text{si } b_j^i = 1 \end{cases} .$$

**Proposition 3.3.1.** *La matrice  $U_{interp}(\rho)$  obtenue par interpolation linéaire entre les sommets de l'ensemble (3.11) et la matrice affine  $U(\rho) = U_0 + \rho_1 U_1 + \dots + \rho_N U_N$  sont identiques.* ■

**Preuve :** Pour prouver cette proposition nous utilisons une démonstration par récurrence.

Soit  $N = 1$  alors  $U_{interp}(\rho) = \mu_0(\rho)\bar{U}_0 + \mu_1(\rho)\bar{U}_1$ . En remplaçant  $\mu_0(\rho)$  par  $\frac{\rho-\bar{\rho}}{\underline{\rho}-\bar{\rho}}$  et  $\mu_1(\rho)$  par  $\frac{\bar{\rho}-\rho}{\underline{\rho}-\bar{\rho}}$  on trouve  $U_{interp}(\rho) = U_0 + \rho U_1$ .

Nous supposons que la proposition est vraie pour  $N = k$  et nous montrons qu'elle reste valable aussi pour  $N = k + 1$ . Nous noterons avec  $U_{interp}^k(\rho)$  la matrice obtenue par l'interpolation de  $k$  paramètres entre les sommets  $\bar{U}_0^k, \bar{U}_1^k, \dots, \bar{U}_{2^k-1}^k$  et avec  $\mu_0^k(\rho), \mu_1^k(\rho), \dots, \mu_{2^k-1}^k(\rho)$  les fonctions d'interpolation correspondantes. Autrement dit, nous supposons que  $U_{interp}^k(\rho) = U_0 + \rho_1 U_1 + \dots + \rho_k U_k$  et nous montrons que  $U_{interp}^{k+1}(\rho) = U_0 + \rho_1 U_1 + \dots + \rho_{k+1} U_{k+1}$ .

Lorsqu'on rajoute le paramètre numéro  $k+1$  aux  $k$  paramètres existants nous pouvons déduire les relations suivantes entre les fonctions d'interpolation :

$$\mu_i^{k+1}(\rho) = \frac{\alpha_{i(k+1)}\rho_{k+1} + \beta_{i(k+1)}}{\underline{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}} \mu_i^k(\rho) \quad \text{pour } i = 0, \dots, 2^{k+1} - 1$$

et donc

$$\mu_i^{k+1}(\rho) = \frac{\rho_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}}{\underline{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}} \mu_i^k(\rho) \quad \text{et} \quad \mu_{2^k+i}^{k+1}(\rho) = \frac{-\rho_{k+1} + \underline{\rho}_{k+1}}{\underline{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}} \mu_i^k(\rho)$$

pour  $i = 0, \dots, 2^k - 1$ . (3.12)

En rajoutant le paramètre  $\rho_{k+1}$ , nous passons du polytope  $\text{Co}(\bar{U}_0^k, \bar{U}_1^k, \dots, \bar{U}_{2^k-1}^k)$  au polytope  $\text{Co}(\bar{U}_0^{k+1}, \bar{U}_1^{k+1}, \dots, \bar{U}_{2^{k+1}-1}^{k+1})$  et le lien entre les sommets de ces polytopes est donné par

$$\begin{aligned} \bar{U}_i^{k+1} &= \bar{U}_i^k + \underline{\rho}_{k+1} U_{k+1} \\ \bar{U}_{2^k+i}^{k+1} &= \bar{U}_i^k + \bar{\rho}_{k+1} U_{k+1} \end{aligned} \quad \text{pour tout } i = 0, \dots, 2^k - 1. \quad (3.13)$$

Dans le cas de l'interpolation de  $k+1$  paramètres nous avons

$$U_{interp}^{k+1}(\rho) = \mu_0^{k+1}(\rho) \bar{U}_0^{k+1} + \dots + \mu_{2^{k+1}-1}^{k+1}(\rho) \bar{U}_{2^{k+1}-1}^{k+1}.$$

Regroupons d'un côté les  $2^k$  premiers termes qui correspondent à tous les  $b_{k+1} = 0$  et d'un autre côté les  $2^k$  termes restants qui correspondent à tous les  $b_{k+1} = 1$  et utilisant les équations (3.12), nous avons

$$\begin{aligned} U_{interp}^{k+1}(\rho) &= \frac{\rho_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}}{\underline{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}} (\mu_0^k(\rho) \bar{U}_0^{k+1} + \dots + \mu_{2^k-1}^k(\rho) \bar{U}_{2^k-1}^{k+1}) + \\ &\quad \frac{\underline{\rho}_{k+1} - \rho_{k+1}}{\underline{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}} (\mu_0^k(\rho) \bar{U}_{2^k}^{k+1} + \dots + \mu_{2^{k+1}-1}^k(\rho) \bar{U}_{2^{k+1}-1}^{k+1}). \end{aligned}$$

En appliquant la relation (3.13), chaque parenthèse contient une interpolation en fonction de  $k$  paramètres plus un terme additionnel et donc

$$U_{interp}^{k+1}(\rho) = \frac{\rho_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}}{\underline{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}} (U_{interp}^k(\rho) + \underline{\rho}_{k+1} U_{k+1}) + \frac{\underline{\rho}_{k+1} - \rho_{k+1}}{\underline{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}} (U_{interp}^k(\rho) + \bar{\rho}_{k+1} U_{k+1}).$$

Comme  $U_{interp}^k(\rho) = U_0 + \rho_1 U_1 + \dots + \rho_k U_k$ , nous trouvons facilement que

$$U_{interp}^{k+1}(\rho) = U_0 + \rho_1 U_1 + \dots + \rho_{k+1} U_{k+1}.$$

□

La Proposition 3.3.1 permet de dire que si on a une matrice affine (par rapport à  $\rho$ ) qui évolue dans le polytope engendré par la bornitude des paramètres, l'interpolation linéaire par rapport à chaque paramètre et entre les sommets de ce polytope génère une matrice équivalente à la matrice affine. Cela est un résultat théorique intéressant qui nous permet de formuler un lien entre l'approche par interpolation linéaire et l'approche LPV. Supposons qu'on a construit un observateur affine par l'approche LPV. Alors l'implémentation de l'observateur par une interpolation linéaire entre les observateurs extrêmes est également un estimateur d'état du système. Cela est garanti par l'équivalence énoncée dans la Proposition 3.3.1. Par contre, d'un point de vue pratique, ce résultat ne présente aucun avantage parce que c'est plus simple d'implémenter directement l'observateur affine que d'utiliser une procédure d'interpolation lors de son implémentation.

## 3.4 Problème dual : la commande par retour d'état

Il est bien connu que le problème dual de la synthèse d'un observateur est le problème de la commande par retour d'état. Dans cette section, nous examinons le problème de commande dépendant de paramètres et satisfaisant un indice de  $\gamma$ -performance. Ce problème est la version généralisée au cas LPV du problème de commande  $\mathcal{H}_\infty$  standard. Nous appliquons la technique développée dans la section précédente au cas de la synthèse d'un gain de retour d'état dépendant des paramètres et garantissant la  $\gamma$ -performance quadratique affine pour le système LPV soumis à des perturbations extérieures.

### 3.4.1 Formulation du problème

Le système considéré est celui de la section précédente auquel on rajoute des perturbations extérieures :

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) + B_w(\rho)w(t) \quad (3.14a)$$

$$y(t) = C(\rho)x(t) + D(\rho)u(t) + D_w(\rho)w(t). \quad (3.14b)$$

Les matrices  $A(\rho)$ ,  $B(\rho)$ ,  $B_w(\rho)$ ,  $C(\rho)$ ,  $D(\rho)$ ,  $D_w(\rho)$  présentent une dépendance affine par rapport aux paramètres,  $w(t)$  étant le vecteur des entrées de perturbations.

Nous examinons par la suite, le problème d'analyse de  $\gamma$ -performance et de commande de type  $\mathcal{H}_\infty$  en utilisant des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres. La notion de  $\gamma$ -performance quadratique affine a été introduite dans la Définition 1.1.13. Cette notion implique l'existence d'une fonction de Lyapunov affine dépendant des paramètres garantissant la stabilité asymptotique et exponentielle et une borne supérieure sur le gain  $\mathcal{L}_2$  du système en boucle fermée.

Notre but est de construire un contrôleur par retour d'état ayant la forme suivante :

$$u(t) = K(\rho)x(t) \quad \text{où} \quad K(\rho) = K_0 + \sum_{i=1}^{i=N} \rho_i K_i \quad (3.15)$$

de telle manière que le système en boucle fermée satisfait la condition de  $\gamma$ -performance quadratique affine de la Définition 1.1.13. Le système en boucle fermée est décrit par la représentation d'état

$$\dot{x}(t) = A_{cl}(\rho)x(t) + B_w(\rho)w(t) \quad (3.16a)$$

$$y(t) = C_{cl}(\rho)x(t) + D_w(\rho)w(t) \quad (3.16b)$$

$$\text{où } A_{cl}(\rho) = A(\rho) + B(\rho)K(\rho) \text{ et } C_{cl}(\rho) = C(\rho) + D(\rho)K(\rho). \quad (3.16c)$$

### 3.4.2 Synthèse du contrôleur

Dans cette section, nous formulons des conditions suffisantes pour la synthèse du gain de retour d'état. Ces conditions se présentent sous la forme d'un nombre fini de LMI et elles garantissent la  $\gamma$ -performance en boucle fermée.

Nous commençons par énoncer une solution suffisante pour le problème d'analyse de  $\gamma$ -performance du système LPV en boucle fermée (3.16). Cette solution permet d'éliminer le couplage entre le gain du contrôleur et la matrice de Lyapunov.

**Proposition 3.4.1 ([8]).** *Soit le système (3.16) et un scalaire  $\gamma > 0$ . Supposons qu'il existe une matrice  $W$  et  $P_0, P_1, \dots, P_N$  matrices symétriques telles que les conditions LMI suivantes*

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & W^T A_{cl}^T(\rho) + P(\rho) & W^T C_{cl}^T(\rho) & 0 & W^T \\ A_{cl}(\rho)W + P(\rho) & -P(\rho) - P(\dot{\rho}) + P_0 & 0 & B_w(\rho) & 0 \\ C_{cl}(\rho)W & 0 & -\gamma I & D_w(\rho) & 0 \\ 0 & B_w^T(\rho) & D_w^T(\rho) & -\gamma I & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} < 0 \quad (3.17)$$

sont satisfaites pour toutes les trajectoires admissibles du vecteur des paramètres  $\rho$ , avec  $P(\rho) = P_0 + \rho_1 P_1 + \dots + \rho_N P_N$ . Alors le système (3.16) satisfait les conditions de  $\gamma$ -performance dépendant des paramètres de la Définition 1.1.13. ■

**Preuve :** La preuve est basée sur la généralisation des résultats de stabilité donnés dans [6] pour les systèmes LTI à la notion de  $\gamma$ -performance pour un système LPV. L'inégalité (3.17) est équivalente à

$$\begin{bmatrix} 0 & P(\rho) & 0 & 0 & 0 \\ P(\rho) & -P(\rho) - P(\dot{\rho}) + P_0 & 0 & B_w(\rho) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma I & D_w(\rho) & 0 \\ 0 & B_w^T(\rho) & D_w^T(\rho) & -\gamma I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -P(\rho) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ A_{cl}(\rho) \\ C_{cl}(\rho) \\ 0 \\ I \end{bmatrix} W [I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] + (*) < 0.$$

On peut éliminer la matrice  $W$  en utilisant le lemme de projection. Les matrices orthogo-

nales à  $[I \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$  et  $[-I \ A_{cl}^T(\rho) \ C_{cl}^T(\rho) \ 0 \ I]$  sont respectivement  $\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T$

et  $\begin{bmatrix} A_{cl}(\rho) & I & 0 & 0 & 0 \\ C_{cl}(\rho) & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}^T$ . En appliquant le complément de Schur sur les conditions de projection, nous obtenons les conditions suivantes

$$\begin{bmatrix} -P(\rho) - P(\dot{\rho}) + P_0 & 0 & B_w(\rho) \\ 0 & -\gamma I & D_w(\rho) \\ B_w^T(\rho) & D_w^T(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} P(\rho)A_{cl}^T(\rho) + A_{cl}(\rho)P(\rho) - P(\dot{\rho}) + P_0 & P(\rho)C_{cl}^T(\rho) & B_w(\rho) \\ C_{cl}(\rho)P(\rho) & -\gamma I & D_w(\rho) \\ B_w^T(\rho) & D_w^T(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

pour toutes les trajectoires admissibles du vecteur des paramètres  $\rho$ . La deuxième inégalité est la condition de  $\gamma$ -performance pour l'équation (3.16) et la première inégalité est une contrainte sur la matrice affine  $P(\rho)$ . Cela signifie que l'ensemble des solutions donné par (3.17) est inclus dans l'ensemble des solutions satisfaisant les conditions de la Définition 1.1.13. Par conséquent, la conditions (3.17) est suffisante pour la  $\gamma$ -performance quadratique affine du système (3.16).  $\square$

Comme précédemment, le résultat d'analyse de la Proposition 3.4.1 est difficilement applicable au problème de synthèse à cause du nombre infini de LMI contenu dans sa formulation. L'application du principe de multi-convexité nous permet de contourner cette difficulté et de formuler le problème de synthèse du gain de retour d'état comme un problème de faisabilité LMI, comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 3.4.2 ([8]).** *Soit le système LPV (3.14) et un scalaire  $\gamma > 0$  donné. Supposons qu'il existe des matrices  $W, R = [R_0^T \ R_1^T \ \dots \ R_N^T]^T$ , des scalaires positifs  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$  et  $P_0, P_1, \dots, P_N$  matrices symétriques telles que les conditions LMI suivantes*

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & W^T A^T(\omega) + R^T B^T(\omega) + P(\omega) & W^T C^T(\omega) + R^T D^T(\omega) & 0 & W^T \\ A(\omega)W + B(\omega)R + P(\omega) & -P(\omega) - P(\tau) + P_0 & 0 & B_w(\omega) & 0 \\ C(\omega)W + D(\omega)R & 0 & -\gamma I & D_w(\omega) & 0 \\ 0 & B_w^T(\omega) & D_w^T(\omega) & -\gamma I & 0 \\ W & 0 & 0 & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} + \sum_i \nu_i \omega_i^2 \text{Bdiag}(0, I, I, I, 0) < 0 \quad \text{pour tout } (\omega, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W} \quad (3.18)$$

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & 0 & -P(\omega) + R^T \mathcal{O}_i^T B_i^T & R^T \mathcal{O}_i^T D_i^T & -W^T \\ 0 & -(W + W^T) & -P_i + W^T A_i^T + R^T \Phi_i^T(\omega) & W^T C_i + R^T \Delta_i^T(\omega) & 0 \\ -P(\omega) + B_i \mathcal{O}_i R & -P_i + A_i W + \Phi_i(\omega) R & -P(\omega) - \nu_i I & 0 & 0 \\ D_i \mathcal{O}_i R & C_i W + \Delta_i(\omega) R & 0 & -\nu_i I & 0 \\ -W & 0 & 0 & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} \leq 0 \quad \text{pour tout } \omega \in \mathcal{V} \text{ et } i = 1, \dots, N \quad (3.19)$$

sont satisfaites, avec

$$\begin{aligned}
 & \text{block } \downarrow i + 1 \\
 {}^2\mathcal{O}_i &= [0 \dots I \dots 0] \quad \mathcal{I}(\rho) = [I \ \rho_1 I \ \dots \ \rho_N I] \\
 \Phi_i(\rho) &= B(\rho)\mathcal{O}_i + B_i\mathcal{I}(\rho) \quad \Delta_i(\rho) = D(\rho)\mathcal{O}_i + D_i\mathcal{I}(\rho) \\
 B(\rho) &= B(\rho)\mathcal{I}(\rho) \quad D(\rho) = D(\rho)\mathcal{I}(\rho)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

et  $P(\rho) = P_0 + \rho_1 P_1 + \dots + \rho_N P_N$ . Dans ce cas, la loi de commande  $u(t) = K(\rho)x(t)$  avec  $K(\rho)$  donné par (3.15) où  $K_i = R_i W^{-1}$ , garantit la condition de  $\gamma$ -performance quadratique affine pour le système en boucle fermée. ■

**Preuve :** Afin de prouver ce théorème nous regardons séparément les conditions (3.18) et (3.19). Considérons la fonction

$$f(\rho, \dot{\rho}) = \mathcal{X}^T \begin{bmatrix} P(\rho)A_{cl}^T(\rho) + A_{cl}(\rho)P(\rho) - P(\dot{\rho}) + P_0 & P(\rho)C_{cl}^T(\rho) & B_w(\rho) \\ C_{cl}(\rho)P(\rho) & -\gamma I & D_w(\rho) \\ B_w^T(\rho) & D_w^T(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} \mathcal{X} \tag{3.21}$$

avec  $\mathcal{X} \in R^{n+p+m_w}$ . Le système en boucle fermée (3.16) respecte les conditions de  $\gamma$ -performance données par la Définition 1.1.13 si et seulement si la condition

$$\begin{bmatrix} P(\rho)A_{cl}^T(\rho) + A_{cl}(\rho)P(\rho) - P(\dot{\rho}) + P_0 & P(\rho)C_{cl}^T(\rho) & B_w(\rho) \\ C_{cl}(\rho)P(\rho) & -\gamma I & D_w(\rho) \\ B_w^T(\rho) & D_w^T(\rho) & -\gamma I \end{bmatrix} < 0$$

avec  $P(\rho) > 0$  est satisfaite pour toutes les trajectoires admissibles des paramètres. Cela est équivalent à dire que le système en boucle fermée (3.16) respecte les conditions de  $\gamma$ -performance données par la Définition 1.1.13 si et seulement si  $f(\rho, \dot{\rho}) < 0$  et  $P(\rho) > 0$  pour toutes les trajectoires admissibles des paramètres et pour tout  $\mathcal{X} \neq 0$ . On exige que la fonction  $f(\rho, \dot{\rho})$  soit bornée par une fonction multi-convexe

$$f_{conv}(\rho, \dot{\rho}) = f(\rho, \dot{\rho}) + \mathcal{X}^T \sum_i \nu_i \rho_i^2 \mathcal{X} \geq f(\rho, \dot{\rho}) \text{ avec } \nu_i > 0.$$

Par conséquent, le système (3.16) satisfait la condition de  $\gamma$ -performance si  $f_{conv}(\rho, \dot{\rho}) < 0$  avec  $P(\rho) > 0$  pour toutes les trajectoires admissibles des paramètres et pour tout  $\mathcal{X} \neq 0$ .

En appliquant la même technique que dans la preuve de la Proposition 3.4.1, nous trouvons que les inégalités (3.18) impliquent que  $f_{conv}(\rho, \dot{\rho}) < 0$  aux sommets  $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$  et  $P(\rho) > 0$  aux sommets  $\mathcal{V}$  délimitant toutes les trajectoires paramétriques admissibles.

En utilisant la même technique que dans la preuve de la Proposition 3.4.1, on peut éliminer la matrice  $\begin{bmatrix} W^T & 0 \\ 0 & W^T \end{bmatrix}$  des inégalités (3.19) en appliquant le lemme de projection

---

2. matrice bloc-ligne dont le bloc  $i + 1$  est la matrice identité et tous les autres blocs sont des matrices nulles de dimension appropriée

pour des inégalités non strictes. En utilisant les notations  $R_i = K_i W$  et (3.20) nous trouvons que ces inégalités sont équivalentes à

$$\begin{bmatrix} -B_i K_i P(\omega) - (A_i + B_i K(\omega) + B(\omega) K_i) P_i + (*) - \nu_i I & -P(\omega)(D_i K_i)^T - P_i(C_i + D_i K(\omega) + D(\omega) K_i)^T \\ -D_i K_i P(\omega) - P_i(C_i + D_i K(\omega) + D(\omega) K_i) & -\nu_i I \end{bmatrix} \leq 0 \text{ pour tout } \omega \in \mathcal{V} \text{ et } i = 1, \dots, N.$$

Ces inégalités constituent la condition de multi-convexité de la fonction  $f_{conv}(\rho, \dot{\rho})$  conformément au Lemme 1.2.1 avec un degré partiel  $d_k = 3$  pour  $k = 1, \dots, N$  et un degré total  $d = 3$ . Comme la matrice  $P(\rho)$  est affine par rapport aux paramètres, pour assurer qu'elle soit définie positive il est suffisant d'imposer qu'elle soit définie positive aux sommets  $\mathcal{V}$  et cette condition est incluse dans les inégalités (3.18).

Par conséquent, les contraintes (3.18) et (3.19) impliquent que  $P(\rho) > 0$  et  $f_{conv}(\rho, \dot{\rho}) < 0$  pour tout  $\mathcal{X} \neq 0$  et sur tout le domaine des trajectoires paramétriques admissibles, et donc que le système (3.16) satisfait la condition de  $\gamma$ -performance.  $\square$

Les contraintes LMI du Théorème 3.4.2 présentent des conditions suffisantes permettant de calculer un gain de retour d'état qui garantit la stabilité quadratique affine du système en boucle fermée et la bornitude de son gain  $\mathcal{L}_2$  par  $\gamma$ . En effet, les conditions (3.18) et (3.19) englobent une condition suffisante de stabilisabilité paramétrique de la paire des fonctions matricielles  $(A(\rho), B(\rho))$  sur  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ .

### 3.4.3 Exemple numérique

Afin d'illustrer nos résultats, considérons le système LPV décrit par

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \begin{bmatrix} -2.1 - 3.2\rho & 1.8 + 0.9\rho \\ 1.9 - 2.5\rho & -3 - 4.2\rho \end{bmatrix}, & B(\rho) &= \begin{bmatrix} 3.1 - 0.1\rho \\ 2.8 + 0.5\rho \end{bmatrix}, & B_w(\rho) &= \begin{bmatrix} -0.03 \\ -0.47 \end{bmatrix} \\ C(\rho) &= \begin{bmatrix} 1 + 0.1\rho & 0 + 0.3\rho \\ 0 & 1 + 0.4\rho \end{bmatrix}, & D(\rho) &= \begin{bmatrix} \rho \\ 1 \end{bmatrix}, & D_w(\rho) &= \begin{bmatrix} 0.6 + 0.2\rho \\ 0.9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les valeurs extrêmes du paramètre sont :  $\rho \in [-0.4; 0.4]$  et  $\dot{\rho} \in [-0.5; 0.5]$ .

Nous remarquons que le système est instable pour des valeurs  $\rho < -0.16$ . En utilisant le Théorème 3.4.2 nous pouvons construire un contrôleur par retour d'état dépendant des paramètres dont le gain est

$$K(\rho) = \begin{bmatrix} -1.1348 + 0.5817\rho \\ -1.1909 + 0.6117\rho \end{bmatrix}.$$

Ce gain garantit la stabilité exponentielle du système en boucle fermée et correspond à la plus petite borne,  $\gamma = 2.5768$ , atteignable avec les conditions du Théorème 3.4.2.



### 3.5 Application à la commande par retour d'état basée observateur

Dans cette section, nous considérons le problème de la stabilité du système en boucle fermée obtenu par le bouclage du système LPV (3.1) avec un gain de retour d'état via un observateur. Les conditions du Théorème 3.2.2 seront utilisées pour la synthèse du gain de l'observateur. Comme le système LPV (3.1) est équivalent au système (3.14) ayant les matrices de perturbations nulles *i.e.*  $B_w(\rho) = 0$  et  $D_w(\rho) = 0$ , des simplifications s'imposent au niveau des résultats de synthèse du gain de retour d'état. En effet, les conditions du Théorème 3.4.2 sont reformulées au cas de la synthèse du gain de retour d'état garantissant la stabilité quadratique affine de la boucle fermée, de la manière suivante.

**Théorème 3.5.1.** *Soit le système LPV (3.1). Supposons qu'il existe des matrices  $W$ ,  $R = [R_0^T \ R_1^T \ \dots \ R_N^T]^T$ , des scalaires positifs  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N$  et  $P_0, P_1, \dots, P_N$  matrices symétriques telles que les conditions LMI suivantes*

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & W^T A^T(\omega) + R^T \mathcal{B}^T(\omega) + P(\omega) & W^T \\ A(\omega)W + \mathcal{B}(\omega)R + P(\omega) & -P(\omega) - P(\tau) + P_0 + \sum_i \nu_i \omega_i^2 I & 0 \\ W & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} < 0$$

pour tout  $(\omega, \tau) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$  (3.22)

$$\begin{bmatrix} -(W + W^T) & 0 & -P(\omega) + R^T \mathcal{O}_i^T B_i^T & -W^T \\ 0 & -(W + W^T) & -P_i + W^T A_i^T + R^T \Phi_i^T(\omega) & 0 \\ -P(\omega) + B_i \mathcal{O}_i R & -P_i + A_i W + \Phi_i(\omega) R & -P(\omega) - \nu_i I & 0 \\ -W & 0 & 0 & -P(\omega) \end{bmatrix} \leq 0$$

pour tout  $\omega \in \mathcal{V}$  et  $i = 1, \dots, N$  (3.23)

sont satisfaites, avec  $\mathcal{O}_i, \mathcal{I}(\omega), \Phi_i(\rho), \Delta_i(\rho), \mathcal{B}(\rho), \mathcal{D}(\rho)$  et  $P(\rho)$  données comme dans le Théorème 3.4.2. Dans ce cas, la loi de commande  $u(t) = K(\rho)x(t)$  avec  $K(\rho)$  donné par (3.15) où  $K_i = R_i W^{-1}$ , garantit la stabilité quadratique affine du système en boucle fermée avec commande par retour d'état. ■

**Preuve :** La preuve de ce théorème découle facilement de la preuve du Théorème 3.4.2. □

On peut trouver facilement que le système en boucle fermée avec une commande par retour d'état basée observateur est décrit par la représentation d'état suivante :

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} A(\rho) & B(\rho)K(\rho) \\ L(\rho)C(\rho) & A(\rho) + B(\rho)K(\rho) - L(\rho)C(\rho) \end{bmatrix} z(t) \quad (3.24)$$

avec  $z = [x^T \ \hat{x}^T]^T$ . Le théorème suivant montre que le contrôleur basé observateur garantit la stabilité du système en boucle fermée.

**Théorème 3.5.2.** *Supposons que les conditions LMI du Théorème 3.2.2 et du Théorème 3.5.1 admettent une solution et soient  $K_0, \dots, K_N$  et  $L_0, \dots, L_N$  les matrices construites à partir de ces solutions. Alors le système en boucle fermée (3.24) obtenu en utilisant le contrôleur basé observateur, avec  $L(\rho)$  donné par (3.4) et  $K(\rho)$  donné par (3.15), est exponentiellement stable. ■*

**Preuve :** La preuve de ce théorème est essentiellement inspirée de [62].

Définissons le changement de variable  $\tilde{z} = \begin{bmatrix} \varepsilon I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix} z$  avec  $\varepsilon$  une constante réelle. Le système (3.24) est équivalent au système

$$\dot{\tilde{z}}(t) = A_{CL}(\rho)\tilde{z}(t) \text{ avec } A_{CL}(\rho) = \begin{bmatrix} A(\rho) + B(\rho)K(\rho) & -\varepsilon B(\rho)K(\rho) \\ 0 & A(\rho) - L(\rho)C(\rho) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Soit  $P_C(\rho)$  et  $P_O(\rho)$  les fonctions de Lyapunov solutions des conditions LMI du Théorème 3.5.1 et du Théorème 3.2.2 respectivement. Soit la fonction de Lyapunov

$$V(\tilde{z}, \rho) = \tilde{z}^T P_{CL}(\rho)\tilde{z} = \tilde{z}^T \begin{bmatrix} P_C^{-1}(\rho) & 0 \\ 0 & P_O(\rho) \end{bmatrix} \tilde{z}.$$

Partageons le vecteur  $\tilde{z}$  en deux vecteurs de même dimension *i.e.*  $\tilde{z} = [z_1^T \ z_2^T]^T$ . Comme  $P_C(\rho)$  et  $P_O(\rho)$  vérifient les conditions LMI du Théorème 3.5.1 et du Théorème 3.2.2 respectivement, alors  $V_1(z_1, \rho) = z_1^T P_C^{-1}(\rho)z_1$  et  $V_2(z_2, \rho) = z_2^T P_O(\rho)z_2$  sont des fonctions de Lyapunov garantissant la stabilité exponentielle des systèmes

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (A(\rho) + B(\rho)K(\rho))z_1 \quad \text{et respectivement} \\ \dot{z}_2 &= (A(\rho) - L(\rho)C(\rho))z_2. \end{aligned}$$

Il existe donc  $\delta_{1i}$ ,  $\delta_{2i}$  et  $\delta_{3i} > 0$  tels que

$$\begin{aligned} \delta_{1i} \|z_i\|^2 &< V_i(z_i, \rho) < \delta_{2i} \|z_i\|^2 \quad \text{et} \\ \frac{dV_i(z_i, \rho)}{dt} &\leq -\delta_{3i} \|z_i\|^2 \quad \text{pour } i = 1, 2. \end{aligned}$$

Nous prouvons par la suite que la fonction  $V(\tilde{z}, \rho)$  assure la stabilité quadratique dépendant des paramètres du système (3.25) et par conséquent celle du système (3.24).

Nous avons la relation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dV(\tilde{z}, \rho)}{dt} &= [z_1^T \ z_2^T] \left( A_{CL}(\rho)^T P_{CL}(\rho) + P_{CL}(\rho) A_{CL}(\rho) + \dot{P}_{CL}(\rho) \right) \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= [z_1^T \ z_2^T] \begin{bmatrix} LMI_C & -\varepsilon P_C^{-1}(\rho) B(\rho) K(\rho) \\ -\varepsilon K^T(\rho) B^T(\rho) P_C^{-1}(\rho) & LMI_O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{où} \quad LMI_C &= (A(\rho) + B(\rho)K(\rho))P_C^{-1} + (*) + d(P_C^{-1})/dt \\ LMI_O &= (A(\rho) - L(\rho)C(\rho))P_O + (*) + d(P_O)/dt. \end{aligned}$$

Comme  $dV_1(z_1, \rho)/dt = z_1^T LMI_C z_1$  et  $dV_2(z_2, \rho)/dt = z_2^T LMI_O z_2$ , on peut en déduire directement que

$$\begin{aligned} \frac{dV(\tilde{z}, \rho)}{dt} &= \frac{dV_1(z_1, \rho)}{dt} + \frac{dV_2(z_2, \rho)}{dt} - \varepsilon(z_1^T P_C^{-1}(\rho) B(\rho) K(\rho) z_2 + (\star)) \\ &\leq -\delta_{31} \|z_1\|^2 - \delta_{32} \|z_2\|^2 - \varepsilon(z_1^T P_C^{-1}(\rho) B(\rho) K(\rho) z_2 + (\star)). \end{aligned}$$

Donc, pour  $0 < \delta_3 < \min\{\delta_{31}, \delta_{32}\}$ , il existe  $\varepsilon$  suffisamment petit tel que

$$dV(\tilde{z}, \rho)/dt \leq -\delta_3 \|\tilde{z}\|^2 < 0 \text{ pour } \tilde{z} \neq 0.$$

Par conséquent, le système (3.24) est quadratiquement dépendant des paramètres stable. En appliquant le Lemme 1.1.4, la stabilité QDP implique la stabilité exponentielle du système (3.24).  $\square$

### 3.6 Conclusion

À travers ce troisième chapitre nous avons proposé une méthode de synthèse d'observateurs affines pour des systèmes LPV affines en se basant sur les techniques LPV. La méthode proposée est applicable pour une classe de systèmes plus large que celle considérée dans le chapitre 2, toutes les matrices d'état étant dépendantes des paramètres, et elle consiste en la résolution numérique d'un ensemble fini de conditions LMI. Comme ces conditions sont seulement suffisantes, on n'a pas la garantie de trouver une solution. Cette méthode a été par la suite étendue au cas de la synthèse d'une commande de type  $\gamma$ -performance par retour d'état. Seul le cas d'une commande stabilisante basée observateur a été abordée en fin de ce chapitre. Il s'agit en effet d'une première exploitation des résultats de ce chapitre. Le cas plus difficile d'une commande de type  $\gamma$ -performance basée observateur constitue une perspective envisagée de ce travail.



# 4

## Synthèse d'observateurs à paramètres variants pour des systèmes LPV à temps discret

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>90</b>
<b>4.2</b>	<b>Synthèse d'observateurs LPV pour des systèmes affines</b>	<b>90</b>
4.2.1	Formulation du problème	90
4.2.2	Première solution	92
4.2.3	Deuxième solution	94
<b>4.3</b>	<b>Application à l'estimation d'état des systèmes à commutation</b>	<b>97</b>
<b>4.4</b>	<b>Exemples numériques</b>	<b>99</b>
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>101</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons le problème de la synthèse d'observateurs pour des systèmes LPV affines à temps discret. Nous centrons notre attention sur les observateurs dépendant des paramètres de type Luenberger. Comme dans le cas continu, la matrice de gain de l'observateur est construite par interpolation linéaire entre les gains extrêmes correspondant aux observateurs estimant l'état du système lorsque les paramètres se situent aux sommets du domaine paramétrique. Contrairement au cas continu, dans le cas discret, les résultats de synthèse ne dépendent pas de la vitesse de variation des paramètres. En effet, un premier type de solution utilise les fonctions de Lyapunov quadratiques uniques pour la stabilité de l'erreur d'estimation et donc implicitement la stabilité est garantie pour des trajectoires paramétriques variant arbitrairement vite. Un deuxième type de solution est basé sur la stabilité quadratique dépendant des paramètres. Contrairement au cas continu où l'on dérive la fonction de Lyapunov, dans le cas discret, la décroissance de la fonction de Lyapunov est vérifiée en évaluant la différence de la fonction de Lyapunov entre deux instants consécutifs  $(k, k + 1)$  et par conséquent la vitesse de variation des paramètres n'intervient plus dans la procédure de synthèse. Cette différence par rapport au cas continu nous permet de prendre en compte une évolution discontinue des paramètres et l'application de nos résultats au cas des systèmes hybrides à commutation est quasi-immédiate.

## 4.2 Synthèse d'observateurs LPV pour des systèmes affines

### 4.2.1 Formulation du problème

Nous considérons le système LPV à temps discret dont la représentation d'état est la suivante :

$$x(k+1) = A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k) \quad (4.1a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (4.1b)$$

$x(k) \in \mathbf{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(k) \in \mathbf{R}^m$  le vecteur des entrées de commande et  $y(k) \in \mathbf{R}^p$  le vecteur des sorties. Les matrices  $A(\rho)$  et  $B(\rho)$  ont une dépendance affine par rapport aux paramètres. Nous supposons que chaque paramètre est contenu dans un intervalle borné ce qui signifie que le vecteur des paramètres  $\rho(k)$  évolue dans le polytope  $\mathcal{P}$  à  $2^N$  sommets défini dans la Définition 1.1.1. Par conséquent, les matrices  $A(\rho)$  et  $B(\rho)$  évoluent dans des polytopes de  $\mathbf{R}^{n \times n}$  et respectivement  $\mathbf{R}^{n \times m}$  dont les sommets sont  $\{A_i\}_{i=1, \dots, 2^N}$  et respectivement  $\{B_i\}_{i=1, \dots, 2^N}$ . Ces sommets correspondent aux sommets  $\mathcal{V}$  du polytope des paramètres et chaque sommet  $A_i, B_i$  a une dépendance affine par rapport aux paramètres du sommet qui lui correspond dans le polytope des paramètres.

En utilisant le résultat de la section 3.3 qui montre que l'interpolation linéaire entre ce type de sommets par rapport aux paramètres génère une matrice identique à la matrice affine, nous pouvons écrire que

$$A(\rho(k)) = \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(\rho(k)) A_i \quad (4.2)$$

$$B(\rho(k)) = \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(\rho(k)) B_i. \quad (4.3)$$

où  $\mu_i(\rho)$  représentent les fonctions d'interpolation. Autrement dit, dans le cas des systèmes affines, les fonctions d'interpolation  $\mu_i(\rho)$  sont les coordonnées barycentriques de  $\rho$  par rapport aux sommets  $A_i, B_i$ , qui situent le système dans le polytope à un instant donné.

Notre but est de concevoir un observateur dépendant des paramètres de type Luenberger de la forme suivante :

$$\hat{x}(k+1) = A(\rho(k))\hat{x}(k) + B(\rho(k))u(k) + L(\rho(k))(y(k) - \hat{y}(k)) \quad (4.4a)$$

$$\hat{y}(k) = C\hat{x}(k). \quad (4.4b)$$

La matrice de gain  $L(\rho)$  est obtenue par interpolation entre les valeurs extrêmes correspondant aux observateurs estimant l'état du système lorsque  $\rho \in \mathcal{V}$ . Nous utilisons la technique d'interpolation présentée dans la section 2.3.2 pour le cas continu. Cette technique nous permet d'écrire la matrice  $L(\rho)$  comme étant

$$L(\rho(k)) = \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(\rho(k)) L_i \quad (4.5)$$

avec  $L_i$  les gains extrêmes et  $\mu_i(\rho)$  les fonctions d'interpolation qui permettent une transition lisse entre ces gains en fonction de la valeur réelle de  $\rho$ .

Le problème de la synthèse de l'observateur LPV est réduit à trouver un ensemble de gains d'observateurs LTI locaux construits pour les valeurs extrêmes du vecteur des paramètres, tel que l'interpolation linéaire de ces gains par rapport à chaque paramètre aboutit à un observateur dépendant des paramètres pour le système (4.1).

En définissant l'erreur d'estimation comme  $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$  et en utilisant l'observateur LPV (4.4) pour estimer l'état du système (4.1), nous obtenons une dynamique de l'erreur d'estimation décrite par l'équation suivante :

$$e(k+1) = (A(\rho(k)) - L(\rho(k))C)e(k) = \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(\rho(k)) (A_i - L_i C)e(k). \quad (4.6)$$

Le problème de la synthèse de l'observateur est réduit à trouver les matrices de gain  $L_i$  pour  $i = 1, \dots, 2^N$  de manière à ce que le gain interpolé  $L(\rho)$  assure la convergence

asymptotique de l'erreur d'estimation vers l'origine. Nous présentons par la suite deux types de solution. Une première solution est basée sur la stabilité quadratique de l'équation (4.6). Afin d'obtenir des conditions de synthèse moins restrictives, nous présentons une deuxième solution utilisant la notion de stabilité quadratique dépendant des paramètres.

### 4.2.2 Première solution

Le théorème suivant propose une solution LMI pour la synthèse des gains des observateurs locaux LTI en utilisant la stabilité quadratique pour prouver la convergence de l'erreur d'estimation.

**Théorème 4.2.1.** *Il existe un observateur LPV de la forme (4.4) pour le système (4.1) s'il existe les matrices  $R_i$  pour  $i = 1, \dots, 2^N$  et la matrice symétrique  $P$ , de dimensions appropriées, telles que*

$$\begin{bmatrix} P & A_i^T P - C^T R_i^T \\ P A_i - R_i C & P \end{bmatrix} > 0 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, 2^N\}. \quad (4.7)$$

Alors la matrice de gain  $L(\rho)$  est donnée par (4.5) avec  $L_i = P^{-1} R_i$ . ■

**Preuve :** Lorsque les conditions LMI (4.7) sont satisfaites, en utilisant la notation  $R_i = P L_i$  et le fait que  $\sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(\rho) = 1$ , on peut additionner par rapport à  $i$  les inégalités (4.7) multipliées par  $\mu_i(\rho)$ . Nous déduisons que

$$\begin{bmatrix} P & \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(\rho) (A_i - L_i C)^T P \\ P \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(\rho) (A_i - L_i C) & P \end{bmatrix} > 0.$$

En utilisant le complément de Schur, nous trouvons que  $P$  est une matrice de Lyapunov garantissant la stabilité quadratique de l'erreur d'estimation (4.6). Cela implique que l'erreur d'estimation est asymptotiquement et exponentiellement stable. □

En utilisant la nouvelle condition développée dans [29] sur la stabilité d'un système LTI discret, nous pouvons reformuler les conditions de synthèse du Théorème 4.2.1 sous une forme comportant l'utilisation d'une matrice auxiliaire.

**Théorème 4.2.2 ([11]).** *Il existe un observateur LPV de la forme (4.4) pour le système (4.1) s'il existe les matrices  $R_i$  pour  $i = 1, \dots, 2^N$ ,  $G$  et la matrice symétrique  $P$ , de dimensions appropriées, telles que*

$$\begin{bmatrix} -P & A_i^T G^T - C^T R_i^T \\ G A_i - R_i C & P - (G + G^T) \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, 2^N\}. \quad (4.8)$$

Alors la matrice de gain  $L(\rho)$  est donnée par (4.5) avec  $L_i = G^{-1} R_i$ . ■



**Preuve :** En étudiant la stabilité du système  $x(k+1) = Fx(k)$ , les auteurs du [29] montrent que l'existence d'une matrice symétrique  $P$  et d'une matrice  $G$  telles que

$$\begin{bmatrix} -P & F^T G^T \\ GF & P - (G + G^T) \end{bmatrix} < 0$$

est équivalente à  $F^T P F - P < 0$ . En utilisant ce résultat et la notation  $R_i = GL_i$ , nous pouvons déduire que les conditions (4.8) sont équivalentes à

$$(A_i - L_i C)^T P (A_i - L_i C) - P < 0 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, 2^N\}$$

ou encore à

$$\begin{bmatrix} P & (A_i - L_i C)^T P \\ P(A_i - L_i C) & P \end{bmatrix} > 0 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, 2^N\}.$$

En utilisant la même technique que dans la preuve du Théorème 4.2.1, nous trouvons que  $P$  est une matrice de Lyapunov garantissant la stabilité quadratique de l'erreur d'estimation. À partir de l'inégalité (4.8) on déduit que  $G + G^T > P > 0$  et donc on peut calculer les gains  $L_i$  comme  $G^{-1}R_i$ .  $\square$

Notons que les conditions du Théorème 4.2.1 sont équivalentes aux conditions du Théorème 4.2.2. L'avantage principal dans la formulation LMI du Théorème 4.2.2 vient du fait que les matrices de synthèse  $L_i$  et la matrice de Lyapunov  $P$  sont découplées. Ce résultat nous permet de formuler des conditions de synthèse moins restrictives pour le cas des systèmes affines, comme on le verra dans la sous-section suivante.

Les théorèmes précédents nous permettent de calculer un observateur avec une erreur d'estimation qui converge asymptotiquement et exponentiellement vers l'origine. Afin d'obtenir un observateur avec une meilleure vitesse de convergence, on peut utiliser la notion de « decay rate » (le plus grand exposant de Lyapunov) définie dans le cas discret comme étant le plus grand scalaire  $\gamma \geq 1$  tel que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma^k \|e(k)\| = 0 \quad (4.9)$$

pour toutes les trajectoires de  $e(k)$ . La convergence asymptotique correspond à  $\gamma = 1$  tandis que la convergence exponentielle correspond à  $\gamma > 1$ . Nous pouvons utiliser la fonction de Lyapunov quadratique  $V(e(k)) = e^T(k)Pe(k)$  pour déterminer une borne inférieure du plus grand exposant de Lyapunov  $\gamma$ . Alors, en utilisant les conditions du Théorème 4.2.1, les gains  $L_i$  sont calculés comme suit.

**Théorème 4.2.3 ([27]).** *Supposons que le problème d'optimisation suivant*

$$\begin{aligned} & \text{Min } \beta \\ & \text{sujet à } \begin{bmatrix} \beta P & A_i^T P - C^T R_i^T \\ P A_i - R_i C & P \end{bmatrix} > 0, \quad i = \{1, \dots, 2^N\} \\ & 0 < \beta < 1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

admet une solution  $\beta_o$ ,  $P_o = P_o^T$  et  $R_{oi}$  pour  $i = 1, \dots, 2^N$ . Alors l'observateur LPV obtenu par l'interpolation de  $L_{oi} = P_o^{-1}R_{oi}$ ,  $i = 1, \dots, 2^N$  conduit à une vitesse de convergence de l'erreur d'estimation vers l'origine au moins égale à  $\beta_o^{-\frac{1}{2}}$ . ■

**Preuve :** Si les conditions (4.10) admettent une solution  $\beta_o$ ,  $P_o$ ,  $R_{oi}$ ,  $i = 1, \dots, 2^N$  alors, conformément à la preuve du Théorème 4.2.1, nous avons

$$(A(\rho) - L_o(\rho)C)^T P_o (A(\rho) - L_o(\rho)C) - \beta_o P_o < 0 \quad (4.11)$$

ce qui signifie que

$$V(e(k+1)) < \beta_o V(e(k)) \text{ avec } 0 < \beta_o < 1 \quad (4.12)$$

pour toute trajectoire  $e(k)$ . Par conséquent,  $V(e(k)) < \beta_o^k V(e(0))$  ou de manière équivalente

$$\| e(k) \| < \beta_o^{\frac{k}{2}} M$$

avec  $M$  un scalaire positif donné par  $M = \| P^{\frac{1}{2}} \| \| P^{-\frac{1}{2}} \| \| e(0) \|$ . □

Notons que ces théorèmes présentent des conditions suffisantes pour la synthèse d'un observateur LPV et par conséquent elles sont assez conservatives. Ce conservatisme vient essentiellement du fait que la solution proposée est fondée sur la stabilité quadratique. Par contre, à partir des preuves de ces théorèmes, nous déduisons que les conditions de synthèse sont des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'erreur d'estimation soit quadratiquement stable.

Par la suite, nous nous intéressons à l'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres afin de réduire le conservatisme de cette solution.

### 4.2.3 Deuxième solution

La solution présentée par la suite est basée sur la notion de stabilité quadratique dépendant des paramètres. Comme dans le cas continu, cette notion utilise une fonction de Lyapunov de la forme  $V(x(k), \rho(k)) = x^T(k)P(\rho(k))x(k)$  pour l'étude de la stabilité d'un système LPV de type

$$x(k+1) = A(\rho(k))x(k). \quad (4.13)$$

Contrairement au cas continu, afin de garantir la stabilité asymptotique du système (4.13) conformément à la théorie de Lyapunov il faut que la fonction  $V(x(k), \rho(k))$  soit définie positive et strictement décroissante ou autrement dit, il faut que  $V(x(k), \rho(k)) > 0$  et

$$V(x(k+1), \rho(k+1)) - V(x(k), \rho(k)) < 0.$$

En utilisant la forme quadratique de la fonction  $V(x(k), \rho(k))$ , nous pouvons conclure que le système (4.13) est quadratiquement dépendant des paramètres stable si

$$\begin{aligned} P(\rho(k)) &> 0 \\ A(\rho(k))^T P(\rho(k+1)) A(\rho(k)) - P(\rho(k)) &< 0. \end{aligned}$$

Nous retrouvons dans ces conditions de stabilité les mêmes caractéristiques que dans le cas continu, à savoir le nombre infini d'inégalités à satisfaire et la difficulté de construction de la fonction matricielle  $P(\rho)$ . On peut s'affranchir de ces difficultés lorsque la matrice

$A(\rho(k))$  du système (4.13) appartient à un modèle polytopique, *i.e.*  $A(\rho(k)) = \sum_{i=1}^{2^N} \xi_i(k) A_i$  avec  $A_i$  les sommets du polytope, en choisissant une matrice de Lyapunov de la forme  $P(\rho(k)) = \sum_{i=1}^{2^N} \xi_i(k) P_i$  où  $P_i$  est la matrice de Lyapunov correspondant au sommet  $A_i$ .

Nous proposons d'appliquer cette théorie pour l'étude de la stabilité de l'erreur d'estimation (4.6). Dans ce cas, les fonctions d'interpolation  $\mu_i(\rho(k))$  représentent les paramètres  $\xi_i(k)$ . En utilisant la technique de découplage énoncée dans le Théorème 4.2.2, le problème de la synthèse de l'observateur LPV se formule comme suit.

**Théorème 4.2.4.** *Il existe un observateur LPV de la forme (4.4) pour le système (4.1) s'il existe les matrices  $R_i$ ,  $G$  et les matrices symétriques  $P_i$  pour  $i = 1, \dots, 2^N$ , de dimensions appropriées, telles que*

$$\begin{bmatrix} -P_i & A_i^T G^T - C^T R_i^T \\ G A_i - R_i C & P_j - (G + G^T) \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, 2^N\}. \quad (4.14)$$

Alors la matrice de gain  $L(\rho)$  est donnée par (4.5) avec  $L_i = G^{-1} R_i$ . ■

**Preuve :** En utilisant la notation  $R_i = G L_i$  et le fait que  $\sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(\rho) = 1$ , on peut additionner par rapport à  $i$  les inégalités (4.14) préalablement multipliées par  $\mu_i(\rho)$ . Nous trouvons que les inégalités (4.14) sont équivalentes à

$$\begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^{2^N} \mu_i P_i & \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i (A_i - L_i C)^T G^T \\ G \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i (A_i - L_i C) & P_j - (G + G^T) \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } j \in \{1, \dots, 2^N\}. \quad (4.15)$$

Nous notons

$$\begin{aligned} P(\rho) &= P(\rho(k)) = \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(k) P_i \text{ et} \\ P_+(\rho) &= P(\rho(k+1)) = \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(k+1) P_i = \sum_{i=1}^{2^N} \mu_j(k) P_j. \end{aligned}$$

En utilisant ces notations et en additionnant par rapport à  $j$  les inégalités (4.15) préalablement multipliée par  $\mu_j(\rho)$ , les inégalités (4.15) sont équivalentes à

$$\begin{bmatrix} -P(\rho) & (A(\rho) - L(\rho)C)^T G^T \\ G(A(\rho) - L(\rho)C) & P_+(\rho) - (G + G^T) \end{bmatrix} < 0. \quad (4.16)$$

Cela implique que  $P(\rho) > 0$ . En multipliant l'inégalité (4.16) par  $\begin{bmatrix} I & (A(\rho) - L(\rho)C)^T \end{bmatrix}$  à gauche et par  $\begin{bmatrix} I & (A(\rho) - L(\rho)C)^T \end{bmatrix}^T$  à droite, nous trouvons que cette inégalité implique que

$$(A(\rho) - L(\rho)C)^T P_+(\rho) (A(\rho) - L(\rho)C) - P(\rho) < 0.$$

Autrement dit, l'erreur d'estimation satisfait la condition de stabilité quadratique dépendant des paramètres et la matrice de Lyapunov globale garantissant la stabilité est  $P(\rho) = \sum_{i=1}^{2^N} \mu_i(\rho) P_i$ . À partir de l'inégalité (4.14) on déduit que  $G + G^T > P_j > 0$  et donc on peut calculer les gains  $L_i$  comme  $G^{-1} R_i$ .  $\square$

Les conditions développées dans le Théorème 4.2.4 correspondent, à quelques détails près, à la forme duale des résultats proposés dans [28] pour ce type d'étude. En effet, la forme que nous avons proposée est plus appropriée pour un problème d'observation.

En effet, ce résultat permet de calculer une matrice de Lyapunov  $P_i$  pour chaque sommet du polytope des paramètres de manière à ce que la matrice  $A_i - L_i C$  soit stable. La matrice de Lyapunov globale  $P(\rho(k))$  est construite par interpolation linéaire de ces matrices de Lyapunov obtenues pour chacun des sommets. Par conséquent, la matrice  $P(\rho(k))$  a une structure affine par rapport à chaque paramètre mais globalement, par rapport au vecteur des paramètres  $\rho$ , elle a une structure polynomiale.

Nous remarquons que, contrairement au cas continu, les conditions LMI de synthèse de l'observateur ne font pas intervenir une borne de la vitesse de variation des paramètres. Par conséquent, cela permet une application directe de nos résultats à une classe de systèmes hybrides à savoir les systèmes à commutation. Notons que lorsque le système discret est issu de la discrétisation d'un système continu cette application n'est plus valable. En effet, en discrétisant un système continu, il y a toujours une information sur la vitesse de variation des paramètres qui est cachée entre deux instants d'échantillonnage consécutifs. Afin que nos résultats soient applicables à cette classe des systèmes hybrides, il faut en effet imposer une durée minimale entre les instants de commutation.

## 4.3 Application à l'estimation d'état des systèmes à commutation

Dans cette section, nous considérons la classe des systèmes hybrides à commutation décrite par la représentation d'état

$$x(k+1) = A(\rho(k))x(k) + B(\rho(k))u(k) \quad (4.17a)$$

$$y(k) = C(\rho(k))x(k). \quad (4.17b)$$

Le paramètre  $\rho(k)$  prend sa valeur dans un ensemble fini  $I = \{1, \dots, M\}$  et il est inconnu *a priori* mais mesurable en temps réel. Autrement dit, le système hybride est défini par l'ensemble des modes

$$\{(A_i, B_i, C_i) \mid i \in I\}$$

et la séquence de commutation entre ces modes est donnée par l'évolution du paramètre  $\rho(k)$  dont la valeur peut changer à des instants discrets arbitraires.

Notre but est de construire un observateur de la forme

$$\hat{x}(k+1) = A(\rho(k))\hat{x}(k) + B(\rho(k))u(k) + L(\rho(k))(y(k) - \hat{y}(k)) \quad (4.18a)$$

$$\hat{y}(k) = C(\rho(k))\hat{x}(k). \quad (4.18b)$$

Pour chaque mode du système hybride, on doit calculer une matrice de gain  $L_i = L(\rho)$  de telle manière que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers l'origine et indépendamment des conditions initiales, de la commande  $u(k)$  et de la séquence de commutation donnée par  $\rho(k)$ .

Dans ce cas, la dynamique de l'erreur d'estimation est donnée par l'équation

$$e(k+1) = (A(\rho) - L(\rho)C(\rho))e(k). \quad (4.19)$$

Pour garantir la convergence vers l'origine de l'erreur d'estimation, on doit assurer la stabilité asymptotique du système à commutation (4.19) pour des séquences de commutations arbitraires. Notons que le système (4.19) est défini par l'ensemble des modes

$$\{A_i - L_i C_i \mid i \in I\}$$

et la commutation entre ces modes est donnée par  $\rho$ .

Une première solution est basée sur la stabilité quadratique de l'erreur d'estimation.

**Théorème 4.3.1 ([10]).** *Il existe un observateur LPV de la forme (4.18) pour le système (4.17) s'il existe les matrices  $R_i$  pour  $i = 1, \dots, M$ ,  $G$  et la matrice symétrique  $P$ , de dimensions appropriées, telles que*

$$\begin{bmatrix} -P & A_i^T G^T - C_i^T R_i^T \\ G A_i - R_i C_i & P - (G + G^T) \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, M\}. \quad (4.20)$$

Alors les matrices de gain de l'observateur sont données par  $L_i = G^{-1}R_i$ . ■

**Preuve :** Soient les fonctions indicatrices définies par

$$\xi_i(k) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque le système hybride est décrit par le } i^{\text{ème}} \text{ mode } (A_i, B_i, C_i) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

pour  $i = 1, \dots, M$ . En multipliant les inégalités (4.20) par la fonction indicatrice  $\xi_i$ , en additionnant ces inégalités par rapport à  $i$  et en utilisant la notation  $R_i = GL_i$ , on trouve que

$$\begin{bmatrix} -P & \sum_{i=1}^M \xi_i (A_i - L_i C_i)^T G^T \\ G \sum_{i=1}^M \xi_i (A_i - L_i C_i) & P - (G + G^T) \end{bmatrix} < 0$$

En multipliant à gauche par  $\begin{bmatrix} I & \sum_{i=1}^M \xi_i (A_i - L_i C_i)^T \end{bmatrix}$  et à droite par la transposée de cette matrice, cette inégalité implique que  $P$  est une matrice de Lyapunov garantissant la stabilité quadratique de l'équation (4.19). À partir de l'inégalité (4.20) on déduit que  $G + G^T > P > 0$  et donc on peut calculer les gains  $L_i$  comme  $G^{-1}R_i$ .  $\square$

Le théorème suivant présente une solution moins conservative en calculant une matrice de Lyapunov  $P_i$  pour chaque mode du système hybride (4.19) de manière à garantir la stabilité pour des commutations arbitraires.

**Théorème 4.3.2.** *Il existe un observateur LPV de la forme (4.18) pour le système (4.17) s'il existe les matrices  $R_i$ ,  $G$  et les matrices symétriques  $P_i$  pour  $i = 1, \dots, M$ , de dimensions appropriées, telles que*

$$\begin{bmatrix} -P_i & A_i^T G^T - C_i^T R_i^T \\ G A_i - R_i C_i & P_j - (G + G^T) \end{bmatrix} < 0 \quad \text{pour } i, j \in \{1, \dots, M\}. \quad (4.21)$$

Alors les matrices de gain sont données par  $L_i = G^{-1}R_i$ .  $\blacksquare$

**Preuve :** En utilisant les fonctions indicatrices introduites dans la preuve du Théorème 4.3.1, l'erreur d'estimation s'écrit comme

$$e(k+1) = \sum_{i=1}^M \xi_i (A_i - L_i C_i) e(k).$$

En appliquant la même démarche que dans le Théorème 4.2.4, nous pouvons prouver que les conditions (4.21) impliquent que  $P(\rho) = \sum_{i=1}^M \xi_i P_i$  est une matrice de Lyapunov garantissant la stabilité asymptotique de l'erreur d'estimation.  $\square$

Notons que pour la classe des systèmes considérée les instants de commutation correspondent à des instants de temps discret.

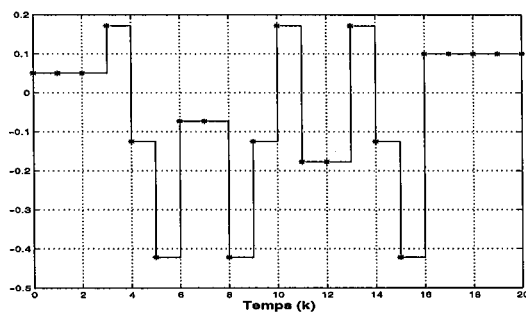
## 4.4 Exemples numériques

### Application pour un système affine

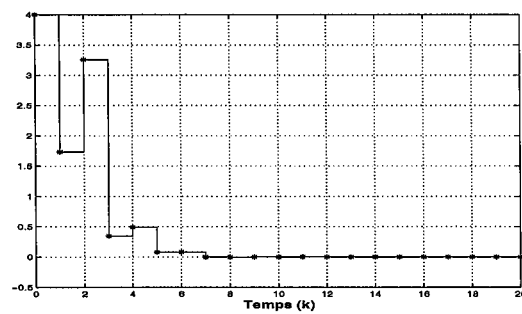
Nous considérons le système affine dont les matrices de la représentation d'état sont

$$A(\rho) = \begin{bmatrix} -0.51 & -1 & 0.57 \\ 0.28 & -0.1 & -1.12 \\ -0.07 & 0.5 & 0.03 \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} -0.9 & 0 & 0.42 \\ 0.08 & -0.2 & -1.32 \\ -0.74 & -0.55 & 1.7 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = [-0.5 \quad 0 \quad 0.33].$$

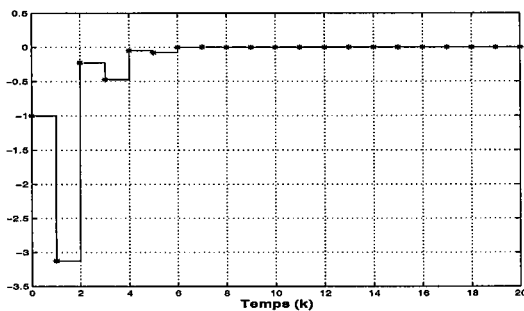
La matrice  $B(\rho)$  n'est pas donnée ici parce qu'elle n'intervient pas dans la synthèse de l'observateur et les simulations ont été faites avec une entrée nulle.



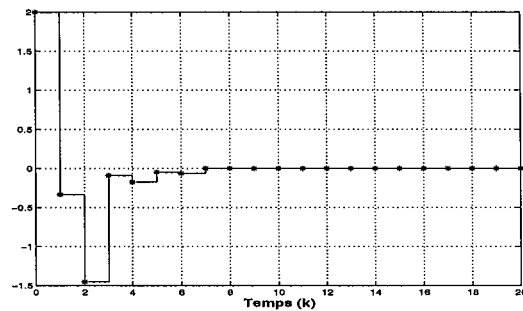
(a) Évolution du paramètre  $\rho$ .



(b) L'erreur d'estimation  $e_1$ .



(c) L'erreur d'estimation  $e_2$ .



(d) L'erreur d'estimation  $e_3$ .

FIG. 4.1 – Les erreurs d'estimation pour une certaine évolution du paramètre.

En utilisant les conditions du Théorème 4.2.4 nous obtenons les gains locaux

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.4225 \\ -0.7590 \\ -1.1802 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1.6169 \\ -1.7312 \\ 0.7218 \end{bmatrix}.$$

Les matrices de Lyapunov sont

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.6826 & -0.0638 & 0.5310 \\ -0.0638 & 1.1200 & -0.0902 \\ 0.5310 & -0.0902 & 1.1230 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0.8260 & 0.0205 & 0.7559 \\ 0.0205 & 1.0993 & 0.0344 \\ 0.7559 & 0.0344 & 1.4568 \end{bmatrix},$$

tandis que la matrice  $G$  satisfaisant aux conditions du Théorème 4.2.4 est

$$G = \begin{bmatrix} 0.7807 & 0.0175 & 0.4348 \\ -0.0359 & 1.0766 & -0.0501 \\ 0.4385 & 0.0282 & 1.1427 \end{bmatrix}.$$

Sur la figure 4.1 nous indiquons l'évolution de l'erreur d'estimation pour chaque composante en fonction de l'évolution du paramètre.

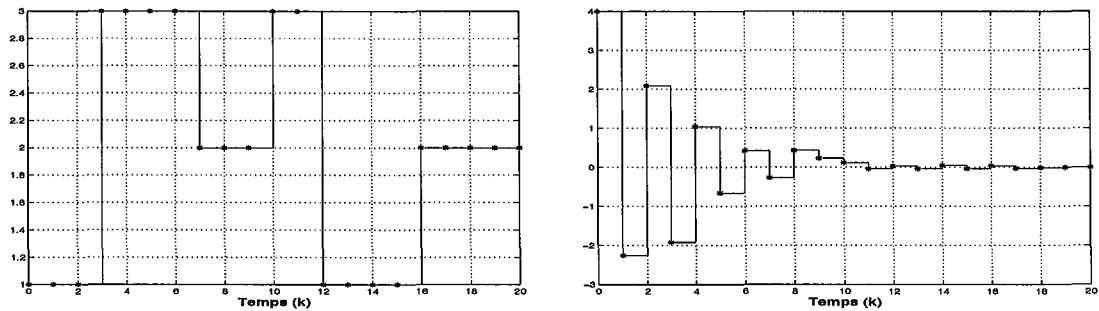
### Application pour un système hybride à commutation

Le système hybride considéré est décrit par les trois modes suivants

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.6 & 2.4 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1.9 & 0.2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0.5 & -0.7 \end{bmatrix} \text{ et}$$

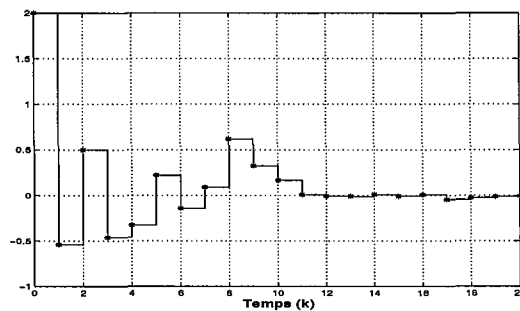
$$C_1 = [-0.9 \quad -1.4], \quad C_2 = [0.1 \quad 0.9], \quad C_3 = [-0.2 \quad 0.4].$$

Comme la matrice  $B(\rho)$  n'intervient pas dans la synthèse de l'observateur et les simulations sont faites pour une entrée nulle, cette matrice n'est pas considérée ici.



(a) Séquence de commutation  $\rho$ .

(b) L'erreur d'estimation  $e_1$ .



(c) L'erreur d'estimation  $e_2$ .

FIG. 4.2 – Les erreurs d'estimation pour une certaine séquence de commutation.



L'application des conditions de synthèse du Théorème 4.3.1 ne permet pas de trouver un observateur parce qu'elles ne sont pas solubles pour ce système. L'application du Théorème 4.3.2 nous permet de trouver les gains d'observateur

$$L_1 = \begin{bmatrix} -0.7269 \\ -0.3343 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 1.9969 \\ -1.6970 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} -7.9094 \\ -1.5589 \end{bmatrix}.$$

Ces gains correspondent aux matrices de Lyapunov

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.8962 & -0.9671 \\ -0.9671 & 1.0969 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 0.8992 & -0.8839 \\ -0.8839 & 0.9835 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0.6083 & -0.2612 \\ -0.2612 & 0.2255 \end{bmatrix}$$

et à la matrice  $G = \begin{bmatrix} 0.9044 & -0.7989 \\ -0.8339 & 1.1184 \end{bmatrix}$ .

La figure 4.2 résume les résultats de simulation obtenus.

## 4.5 Conclusion

À travers ce chapitre nous avons abordé le problème de l'estimation d'état pour des systèmes LPV affines à temps discret. En utilisant la technique d'interpolation introduite dans le chapitre 2, nous avons présenté des conditions LMI suffisantes pour la synthèse du gain de l'observateur. Notons que les résultats sont basés sur le fait, prouvé dans la section 3.3, qu'une matrice affine peut s'écrire sous une forme polytopique impliquant les fonctions d'interpolation comme coordonnées barycentriques. Cela nous permet d'obtenir une erreur d'estimation obéissant à une description polytopique et donc le problème de la stabilité de l'erreur d'estimation est réduit à un nombre fini d'inégalités évaluées aux sommets du domaine polytopique. Dans un premier temps, nous avons proposé une solution qui garantit la stabilité quadratique de l'erreur d'estimation alors qu'une deuxième approche est basée sur la stabilité quadratique dépendant des paramètres. La principale différence entre le cas discret et le cas continu est le fait que la vitesse de variation des paramètres n'intervient plus dans la procédure de synthèse pour le cas discret. Cela permet une application directe de ces résultats à la classe de systèmes hybrides à commutation.



*Knowing is not enough ; we must apply.  
Willing is not enough ; we must do.*

Goethe.

## Conclusion générale

Ce mémoire est le résultat d'un travail de recherche essentiellement théorique dédié à la synthèse d'observateurs d'état des systèmes linéaires à paramètres variants. Comme cette classe de systèmes a autant de comportements caractéristiques que de trajectoires paramétriques admissibles, notre attention a été centrée sur la construction d'observateurs qui s'adaptent et qui suivent l'évolution du système en temps réel. Cela nous a conduit à privilégier la synthèse d'observateurs linéaires à paramètres variant qui, en plus des signaux de mesure, exploitent la mesurabilité des paramètres reflétant les changements de dynamique du processus. Notre étude a été motivée par les techniques de séquençement de gain et donc le premier objectif de ce mémoire était de fournir une approche de synthèse avec un fondement théorique solide dans le contexte du séquençement de gain par interpolation. Le deuxième objectif était de contourner le problème de l'interpolation en s'appuyant sur les techniques LPV.

Dans le premier chapitre de ce mémoire nous avons tout d'abord rappelé les résultats classiques ayant trait à la théorie des systèmes LPV : stabilité, performance, problème de l'estimation d'état, problème de la commande par retour d'état. Afin de situer au mieux notre apport, un état de l'art sur le séquençement de gain, les techniques LPV et les problèmes adjacents a été proposé.

Nos contributions apparaissent à partir du deuxième chapitre de cette thèse. Dans le chapitre 2 nous avons proposé plusieurs approches dans le contexte du séquençement de gain par interpolation. La première approche propose une interpolation polynomiale pour la synthèse d'observateurs LPV, solution qui s'avère conservative et difficilement utilisable en pratique. La deuxième approche présente deux solutions qui sont basées sur la stabilité quadratique affine de l'erreur d'estimation dans le cadre d'une synthèse par interpolation linéaire. La première solution est formulée comme une condition de résolution LMI sous contrainte de rang alors que la deuxième solution repose sur des conditions LMI en se basant sur une technique de découplage. Bien que la deuxième solution soit plus conservative conceptuellement que la première, elle est néanmoins plus facilement soluble numériquement.

Le troisième chapitre est dédié à la synthèse d'observateurs affines par des techniques

LPV. La solution proposée repose sur une formulation LMI et elle est en quelque sorte une extension de la solution LMI précédente dans le sens où la classe des systèmes considérée est plus générale et l'interpolation est abordée de manière implicite. Cette méthode a été par la suite étendue au cas de la synthèse d'une commande de type  $\gamma$ -performance par retour d'état.

Le dernier chapitre de ce mémoire reprend dans le cas des systèmes à temps discret le problème de la synthèse d'un observateur LPV par une technique à base d'interpolation. En se basant sur les propriétés de l'interpolation linéaire, une première méthode de synthèse utilise la notion de stabilité quadratique et par conséquent elle est assez conservatrice. Afin de réduire ce conservatisme, une deuxième solution utilise les fonctions de Lyapunov de type polytopique. Contrairement au cas continu, l'approche temps-discret est applicable directement au problème d'estimation d'état d'une classe de systèmes hybrides à commutation.

Le problème de la synthèse d'observateurs ou de compensateurs dépendant des paramètres pour les systèmes LPV est un problème qui reste encore largement ouvert. Ce mémoire a contribué à fournir un ensemble de solutions au problème de la synthèse d'observateurs par une technique de séquençement de gain, dans un premier temps en abordant explicitement le problème de l'interpolation et ensuite en s'appuyant sur les techniques LPV. Une des caractéristiques communes de ces solutions est de faire appel à des techniques numériques efficaces.

Les prolongements directs des travaux de ce mémoire sont :

- ▷ Dans le chapitre 2, nous avons proposé deux solutions alternatives pour la synthèse d'observateurs LPV par une technique de séquençement de gain à base d'interpolation linéaire. Il serait intéressant de fournir une étude comparative d'un point de vue numérique entre les deux méthodes proposées. Une deuxième perspective de ce travail est de chercher à étendre ces solutions de manière à pouvoir maîtriser le temps de convergence des observateurs obtenus et, une fois cette extension faite, éventuellement d'étudier quelle est la méthode permettant d'obtenir le meilleur temps de convergence.
- ▷ Une première exploitation des résultats du chapitre 3 nous a permis de fournir une solution au problème de commande stabilisante basée observateur. L'extension de ce résultat au cas d'une commande de type  $\gamma$ -performance basée observateur est envisageable.
- ▷ Dans le cas des systèmes à temps discret, la solution présentée dans le chapitre 4 reste à être généralisée au cas des systèmes avec une matrice de mesure dépendant des paramètres.

Des liens avec d'autres domaines de recherche sont également à envisager, comme par

---

exemple :

- ▷ L'approche de séquençement de gain par interpolation ou par techniques LPV nécessite la connaissance de l'évolution des paramètres du système, en temps réel. En pratique, cela peut nécessiter une estimation de ces paramètres ou d'une partie de ces paramètres. Il serait alors intéressant de voir comment coupler l'estimation des paramètres avec la synthèse d'observateurs.
- ▷ Les résultats de cette thèse sont basés sur la mesurabilité des paramètres. La notion d'observateur LPV robuste vis-à-vis des incertitudes de mesure sur les paramètres variants est un concept qui reste à développer et à exploiter.
- ▷ Si l'on évoque encore les aspects liés à la robustesse, l'extension de nos résultats à la classe de systèmes soumis non seulement à des variations paramétriques mais également à des incertitudes de modélisation constitue, à notre avis, un thème de recherche très intéressant.



# Annexes





# A

## Algèbre linéaire

### Sommaire

---

<b>A.1</b>	<b>Théorie des matrices . . . . .</b>	<b>110</b>
A.1.1	Complément de Schur . . . . .	110
A.1.2	Élimination des matrices . . . . .	111
<b>A.2</b>	<b>Conditions de rang pour la résolution d'un système d'équations</b>	<b>112</b>

---

## A.1 Théorie des matrices

**Définition A.1.1 (Norme matricielle).** Nous définissons la norme induite d'une matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$  par

$$\|M\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Mu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Mu\|.$$

La norme induite euclidienne d'une matrice est la valeur singulière maximale de la matrice :

$$\|M\| = \bar{\sigma}(M).$$

◆

**Définition A.1.2.** Soit une matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symétrique. Nous disons que :

- |                               |            |   |
|-------------------------------|------------|---|
| $M$ est définie positive      | $M > 0$    | ssi $x^T M x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$      |
| $M$ est semi-définie positive | $M \geq 0$ | ssi $x^T M x \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$   |
| $M$ est définie négative      | $M < 0$    | ssi $x^T M x < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$      |
| $M$ est semi-définie négative | $M \leq 0$ | ssi $x^T M x \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ . |

Nous utilisons la notation  $\mathcal{S}^n$  pour l'ensemble des matrices symétriques de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

◆

### A.1.1 Complément de Schur

**Lemme A.1.1 (Complément de Schur [23]).** Soient les matrices  $Q \in \mathcal{S}^n, R \in \mathcal{S}^m$  et la matrice bloc  $M = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$  alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

1.  $M$  est définie négative.
2.  $R < 0$  et  $Q - SR^{-1}S^T < 0$ .
3.  $Q < 0$  et  $R - S^T Q^{-1}S < 0$ .

■

Le complément de Schur peut être généralisé au cas des inégalités non strictes. Avant de formuler ce résultat, nous rappelons brièvement la notion d'inverse généralisée de Moore-Penrose.

**Définition A.1.3.** Soit la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . L'inverse généralisée de Moore-Penrose de la matrice  $A$  est la matrice  $A^\dagger \in \mathbb{R}^{m \times n}$  satisfaisant les conditions :

$$\begin{aligned} AA^\dagger A &= A \\ A^\dagger AA^\dagger &= A^\dagger \\ (AA^\dagger)^* &= AA^\dagger \\ (A^\dagger A)^* &= A^\dagger A. \end{aligned}$$

◆

**Lemme A.1.2 (Complément de Schur pour des inégalités non strictes [23]).** Soient les matrices  $Q \in \mathcal{S}^n$  et  $R \in \mathcal{S}^m$ . La matrice bloc  $M = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$  est semi-définie négative si est seulement si

$$\begin{array}{lcl} R \leq 0 & & Q \leq 0 \\ Q - SR^\dagger S^T \leq 0 & \text{ou encore} & R - S^T Q^\dagger S \leq 0 \\ S(I - RR^\dagger) = 0 & & (I - Q^\dagger Q)S = 0 \end{array}$$

où  $Q^\dagger$  est l'inverse généralisée de Moore-Penrose de la matrice  $Q$ . ■

### A.1.2 Élimination des matrices

Par la suite nous énonçons quelques résultats sur l'élimination des matrices.

**Définition A.1.4 (Complément orthogonal).** Nous définissons le complément orthogonal de la matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ( $n < m$ ) de rang plein ligne comme étant une matrice  $A_\perp \in \mathbb{R}^{m \times (m-n)}$  de rang plein colonne telle que  $\text{Ker } A = \mathfrak{S}m A_\perp$ . ◆

Remarquons que la matrice  $[A^T \ A_\perp]$  est de rang plein et que les colonnes de  $A_\perp$  forment une base arbitraire du noyau de la matrice  $A$  donc  $AA_\perp = 0$ . Dans les applications, n'importe quel choix de la matrice  $A_\perp$  est acceptable.

**Lemme A.1.3 (Lemme de Projection [30]).** Soient les matrices  $\Psi \in \mathcal{S}^m$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $Q \in \mathbb{R}^{p \times m}$  alors il existe une matrice  $X \in \mathbb{R}^{p \times n}$  telle que la condition LMI suivante

$$\Psi + P^T X^T Q + Q^T X P < 0$$

soit satisfaite si et seulement si les inégalités de projection suivantes sont satisfaites

$$\begin{array}{l} P_\perp^T \Psi P_\perp \leq 0 \\ Q_\perp^T \Psi Q_\perp \leq 0 \end{array}$$

où  $P_\perp$  et  $Q_\perp$  sont des bases arbitraires du noyau de  $P$  et  $Q$  respectivement. ■

**Preuve :** Voir [30]. □

Nous présentons une généralisation de ces résultats au cas des inégalités non strictes. En effet, dans le cas des inégalités non strictes uniquement la partie nécessaire du Lemme A.1.3 est vrai. Cependant, on peut montrer la suffisance de ce lemme lorsque les sous-espaces  $\mathfrak{S}m P^T$  et  $\mathfrak{S}m Q^T$  sont linéairement indépendants.

**Lemme A.1.4 (Lemme de Projection pour des inégalités non strictes).** Soient la matrice  $\Psi \in \mathcal{S}^m$  et les matrices  $P \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $Q \in \mathbb{R}^{p \times m}$  telles que  $\mathfrak{S}m P^T$  et  $\mathfrak{S}m Q^T$  sont linéairement indépendants. Alors il existe une matrice  $X \in \mathbb{R}^{p \times n}$  telle que

$$\Psi + P^T X^T Q + Q^T X P \leq 0 \tag{A.1}$$

si et seulement si les inégalités de projection suivantes sont satisfaites

$$P_{\perp}^T \Psi P_{\perp} \leq 0 \quad (\text{A.2})$$

$$Q_{\perp}^T \Psi Q_{\perp} \leq 0. \quad (\text{A.3})$$

■

**Preuve :** Une démonstration de ce lemme a été donnée par Helmersson dans [36]. □

Notons que dans cette thèse nous avons utilisé uniquement la partie nécessaire de ce lemme et donc on n'a pas besoin de vérifier que  $\mathfrak{S}m P^T$  et  $\mathfrak{S}m Q^T$  sont linéairement indépendants.

## A.2 Conditions de rang pour la résolution d'un système d'équations

Soit le système d'équations suivant écrit sous forme matricielle avec  $m$  équations et  $n$  inconnues :

$$Ax = b \quad A \in R^{m \times n}. \quad (\text{A.4})$$

L'équation matricielle (A.4) est dite *consistante* ou *soluble* si elle possède au moins une solution. Dans le cas contraire, elle est appelée *inconsistante*. Nous nous intéressons à la condition de consistance ou de solvabilité de l'équation (A.4) et la réponse à cette question est formulée dans la suite.

**Lemme A.2.1 ([44]).** *L'équation matricielle (A.4) est soluble si et seulement si*

$$\text{rang}[A \ b] = \text{rang } A.$$

■

Nous généralisons ce résultat au cas des équations matricielles de la forme :

$$AX = B \text{ avec } A \in R^{m \times n}, X \in R^{n \times p}, B \in R^{m \times p}. \quad (\text{A.5})$$

Cette généralisation s'énonce comme suit.

**Théorème A.2.2.** *L'équation matricielle (A.5) est soluble si et seulement si*

$$\text{rang}[A \ B] = \text{rang } A. \quad (\text{A.6})$$

■

**Preuve :** Nous notons avec  $x^i$  respectivement  $b^i$  la  $i$ -ème colonne de  $X$  respectivement  $B$ . Alors l'équation matricielle (A.5) est équivalente avec :

$$Ax^i = b^i \text{ pour tout } i = 1, \dots, p$$

et ces équations sont solvables si et seulement si

$$\text{rang}[A \ b^i] = \text{rang } A \text{ pour tout } i = 1, \dots, p. \quad (\text{A.7})$$

Nous démontrons que la condition (A.7) est équivalente à la condition (A.6).

$\implies$  : Les conditions (A.7) signifient que chaque  $b^i$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$  et donc par conséquent la condition (A.6) est satisfaite.

$\impliedby$  : Réciproquement, si la condition (A.6) est satisfaite alors chaque  $b^i$  est une combinaison linéaire des colonnes de  $A$  et donc les conditions (A.7) sont satisfaites.  $\square$



# B

## Théorie des systèmes

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Stabilité des systèmes dynamiques . . . . .</b>	<b>116</b>
B.1.1	Stabilité au sens de Lyapunov . . . . .	116
B.1.2	Méthode directe de Lyapunov . . . . .	118

---

## B.1 Stabilité des systèmes dynamiques

Dans cette section nous rappelons quelques notions sur la stabilité des systèmes dynamiques à temps continu et à temps discret. La stabilité est une propriété des systèmes dynamiques qui caractérise le comportement de celui-ci lorsqu'il est déplacé d'un état d'équilibre. Analyser la stabilité d'un système dynamique signifie étudier sa trajectoire d'état lorsque son état initial est proche d'un point d'équilibre ou d'une trajectoire d'équilibre. Une théorie qui nous permet d'étudier la stabilité du mouvement ou de la trajectoire d'un système est la théorie de Lyapunov.

### B.1.1 Stabilité au sens de Lyapunov

La stabilité au sens de Lyapunov est une théorie mathématique générale applicable à toute équation différentielle. Ce principe signifie qu'une équation différentielle autonome avec une condition initiale suffisamment proche d'une trajectoire d'équilibre a une solution qui reste arbitrairement proche de la trajectoire d'équilibre.

#### Cas des systèmes à temps continu

Considérons l'ensemble des systèmes décrits par l'équation dynamique générale :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \\ \text{avec les conditions initiales } x(t_0) \end{cases} \quad \forall t \geq t_0 \quad (\text{B.1})$$

où  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  est le vecteur des entrées et  $y(t) \in \mathbf{R}^p$  est le vecteur des sorties.

#### *Existence et unicité*

Par mouvement on entend le déplacement le long des solutions de l'équation différentielle contenue dans le système d'équations (B.1). Afin de garantir l'existence et l'unicité locale d'une solution de cette équation différentielle sur l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + \delta]$  nous supposons que la fonction  $f : \mathcal{D} \subset \mathbf{R}^n \times [t_0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}^n$  est

- continue par morceaux par rapport à  $t$
- localement Lipschitzienne par rapport à  $x$ , i.e.  $\forall K \subset \mathcal{D}, \exists L > 0$  tel que

$$\|f(x_1, 0, t) - f(x_2, 0, t)\| \leq L \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in K \text{ et } \forall t \in [t_0, t_1].$$

Lorsque la constante  $L$  ne dépend pas du compact  $K$ , la fonction  $f$  est globalement Lipschitzienne. Une condition suffisante pour que  $f$  soit Lipschitzienne est que sa dérivée partielle par rapport à  $x$  soit continue et uniformément bornée sur  $\mathcal{D} \times [t_0, t_1]$ .

Pour l'étude de la stabilité nous considérons le système (B.1) *autonome* i.e.  $u(t) = 0$ ,  $\forall t \geq t_0$ . Nous désignons par  $x_e$  une trajectoire d'équilibre telle que  $f(x_e, 0, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$  et par  $x(t, x(t_0), t_0)$  la trajectoire d'état, solution à l'instant  $t$  du système autonome initialisé au point  $x(t_0)$  à l'instant  $t_0$ . Comme dans le contenu de cette thèse nous analyserons



plutôt la dynamique d'une erreur d'estimation et comme il est toujours possible de se ramener, par simple translation, à une condition de type  $f(0,0,t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$ , nous nous limiterons à la présentation des résultats de stabilité autour de la trajectoire d'équilibre constitué par  $x_e \equiv 0$ .

**Définition B.1.1 (Stabilité simple).** La trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est dite simplement stable si  $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 \geq 0$ , il existe un scalaire positif  $\delta(\varepsilon, t_0)$  tel que :

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0) \implies \|x(t, x(t_0), t_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

◆

**Définition B.1.2 (Stabilité uniforme).** La trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est dite uniformément stable si  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe un scalaire positif  $\delta(\varepsilon)$  tel que :

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon) \implies \|x(t, x(t_0), t_0)\| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0.$$

◆

**Définition B.1.3 (Stabilité asymptotique).** La trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est asymptotiquement stable si :

- la condition de stabilité simple est vérifiée
- la condition d'*attractivité (convergence)* est vérifiée, c'est-à-dire

$$\forall t_0 \geq 0, \exists \delta(t_0) \text{ tel que } \|x(t_0)\| < \delta(t_0) \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x(t_0), t_0) = 0 \quad \forall t \geq t_0.$$

◆

Si la propriété de stabilité asymptotique est vérifiée quel que soit  $x(t_0)$  i.e.  $\delta(t_0) = \infty$ , alors on parle de *stabilité asymptotique globale*.

Nous énonçons un résultat général sur la stabilité exponentielle.

**Théorème B.1.1 (Stabilité exponentielle).** La trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est exponentiellement stable s'il existe des réels  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  tels que :

$$\|x(t, x(t_0), t_0)\| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)} \quad \forall t \geq t_0 \text{ et } \forall x(t_0) \in \mathcal{B}_r.$$

Lorsque  $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$  on dit que la trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est globalement exponentiellement stable. ■

### Cas des systèmes à temps discret

L'ensemble des systèmes discrets analogue à la classe des systèmes continus (B.1) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \\ \text{avec les conditions initiales } x(k_0). \end{cases} \quad \forall k \geq k_0 \quad (\text{B.2})$$

Nous notons avec  $x(k, k_0, x(k_0))$  la solution à l'instant  $k$  du système autonome discret initialisé au point  $x(k_0)$  à l'instant  $k_0$ .

Les définitions précédentes restent valables pour les systèmes à temps discret, mais il convient d'apporter certaines modifications concernant les résultats généraux sur la stabilité exponentielle.

**Théorème B.1.2 (Stabilité exponentielle).** *La trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est exponentiellement stable s'il existe des réels  $\alpha > 0$  et  $0 < \zeta < 1$  tels que :*

$$\|x(k, x(k_0), k_0)\| \leq \alpha \|x(k_0)\| \zeta^{k-k_0} \quad \forall k \geq k_0 \geq 0 \text{ et } \forall x(k_0) \in \mathcal{B}_r.$$

Si  $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$  alors l'origine est globalement exponentiellement stable. ■

## B.1.2 Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov permet d'étudier la stabilité d'un système autour d'une trajectoire d'équilibre sans avoir à résoudre l'équation d'état. L'existence d'une fonction  $V(x, t)$ , appelée fonction de Lyapunov, le signe de cette fonction ainsi que celui de sa dérivée donnent une information sur la stabilité du système. La définition d'une fonction de Lyapunov repose sur celle d'une fonction propre définie positive.

**Définition B.1.4.** Soit  $V(x, t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction continue.  $V$  est dite propre définie positive si :

1.  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad V(x, t) > 0$
2.  $\forall t \in \mathbb{R}_+, V(x, t) = 0 \implies x = 0$
3.  $\forall t \in \mathbb{R}_+, \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V = \infty.$

◆

**Définition B.1.5 (Fonction de Lyapunov).** Une fonction  $V(x, t)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  est une fonction de Lyapunov locale (respectivement globale) au sens large pour un système différentiel si elle est propre définie positive et s'il existe un voisinage de l'origine  $\mathfrak{X}_0$  tel que :

$$\forall x \in \mathfrak{X}_0 \text{ (respectivement } x \in \mathbb{R}^n) \quad \dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \left( \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right)^T f(x(t), 0, t) \leq 0.$$

Si  $\dot{V}(x, t) < 0$  alors  $V$  est appelée fonction de Lyapunov au sens strict. ◆

**Définition B.1.6 (Méthode directe de Lyapunov).** Si un système différentiel admet une fonction de Lyapunov locale au sens large (respectivement au sens strict) alors la trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est localement stable (respectivement localement asymptotiquement stable).

Si la fonction de Lyapunov est globale alors on parle de stabilité globale (respectivement stabilité asymptotique globale). ◆

Une fonction de Lyapunov garantissant la stabilité d'un système dynamique n'est pas unique et le fait de ne pas trouver une telle fonction ne signifie pas que le système est instable.

**Théorème B.1.3 (Stabilité exponentielle).** *La trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est localement exponentiellement stable s'il existe des réels  $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ,  $p \geq 0$  et une fonction de Lyapunov locale  $V(x,t) : \mathfrak{X}_0 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tels que  $\forall x \in \mathfrak{X}_0$  :*

1.  $\alpha\|x\|^p \leq V(x,t) \leq \beta\|x\|^p$
2.  $\dot{V}(x,t) < -\gamma V(x,t)$ .

Si  $\mathfrak{X}_0 = \mathbb{R}^n$  alors la trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est globalement exponentiellement stable.

■

L'application de la méthode directe de Lyapunov nous permet de regarder la stabilité asymptotique comme l'existence d'une fonction de Lyapunov propre définie positive telle que sa dérivée soit strictement négative.

Une classe de fonctions de Lyapunov jouant un rôle important dans l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques est la classe des fonctions quadratiques. Ces fonctions s'écrivent sous la forme :

$$V(x,t) = x^T(t)Px(t).$$

Cette fonction est définie positive si  $P$  est une matrice symétrique définie positive. Dans le cas des systèmes autonomes LTI

$$\dot{x} = Ax,$$

une condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée de  $V(x,t)$  soit négative et implicitement pour que le système autonome LTI soit asymptotiquement stable, consiste à trouver une matrice  $P$  symétrique définie positive telle que l'inégalité matricielle soit vérifiée

$$A^T P + P A < 0.$$

Notons que les fonctions de Lyapunov ne sont pas nécessairement quadratiques. D'autres classes peuvent être définies comme par exemple les fonctions de Lyapunov polyédrales ou les fonctions de type Lur'e avec un terme intégral additif. Dans ce mémoire nous limiterons notre étude aux fonctions de Lyapunov quadratiques.

### Cas des systèmes à temps discret

Dans le cas discret, la stabilité exponentielle par la méthode directe de Lyapunov s'énonce comme suit :

**Théorème B.1.4 (Stabilité exponentielle).** *La trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est localement exponentiellement stable s'il existe des réels  $\alpha, \beta > 0$ ,  $0 < \gamma < 1$  et une fonction propre définie positive  $V(x(k),k) : \mathcal{B}_r \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  tels que  $\forall x(k_0) \in \mathcal{B}_r$  :*

1.  $\alpha\|x(k)\|^2 \leq V(x(k),k) \leq \beta\|x(k)\|^2$

2. la suite de Lyapunov  $\{V(x(k),k)\}_{k=k_0,\dots}$  est strictement décroissante i.e.

$$\Delta V(x(k),k) = V(x(k+1),k+1) - V(x(k),k) \leq -\gamma V(x(k),k).$$

Si  $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$  alors la trajectoire d'équilibre  $x_e \equiv 0$  est globalement exponentiellement stable.

■

Dans le cas des systèmes autonomes LTI de type

$$x(k+1) = Ax(k),$$

une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction de Lyapunov quadratique  $V(x,k) = x(k)^T Px(k)$  soit strictement décroissante et implicitement pour que le système autonome LTI soit asymptotiquement stable, consiste à trouver une matrice  $P$  symétrique définie positive telle que l'inégalité matricielle

$$A^T P A - P < 0$$

soit vérifiée.

# C

## Analyse convexe

### Sommaire

---

C.1 Rappels sur la convexité . . . . .	122
--	-----

---

Nous rappelons brièvement quelques définitions et propriétés élémentaires utiles.

## C.1 Rappels sur la convexité

Pour un cours détaillé sur la convexité et l'optimisation convexe, le lecteur peut se référer à [25].

**Définition C.1.1 (Ensemble convexe).** Un ensemble  $\mathbf{C}$  est dit convexe si pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$  et pour tout  $0 \leq \theta \leq 1$  nous avons

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in \mathbf{C}.$$

◆

D'un point de vue géométrique cela signifie que le segment qui relie deux points appartenant à un ensemble convexe est inclus dans cet ensemble.

Un exemple typique d'ensemble convexe est l'ellipsoïde dont l'équation s'écrit

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x - x_c)^T P^{-1}(x - x_c) \leq 1\}$$

où  $P \in \mathcal{S}^n$  est définie positive. Le vecteur  $x_c \in \mathbf{R}^n$  est le centre de l'ellipsoïde et la matrice  $P$  détermine l'étendue de l'ellipsoïde sur chaque direction à partir de  $x_c$ . Les longueurs des demi-axes de  $\mathcal{E}$  sont données par  $\sqrt{\lambda_i}$  ou  $\lambda_i \in \lambda(P)$  sont les valeurs propres de  $P$ .

**Définition C.1.2 (Fonction convexe).** Une fonction  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  est dite convexe si et seulement si son domaine  $\text{dom } f$  est convexe et pour tout  $x, y \in \text{dom } f$  et pour tout  $\theta \in [0, 1]$  nous avons

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

La fonction  $f$  est strictement convexe si et seulement si

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) < \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

pour tout  $x \neq y$  et  $0 < \theta < 1$ .

◆

## Références bibliographiques





# Bibliographie

- [1] P. Apkarian and R. J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. In *Proceedings of the American Control Conference, Albuquerque, New Mexico, USA, 1997*.
- [2] P. Apkarian and R. J. Adams. Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6(1):21–32, 1998.
- [3] P. Apkarian and P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5):853–864, 1995.
- [4] P. Apkarian, P. Gahinet, and G. Becker. Self-scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  control of linear parameter-varying systems: a design example. *Automatica*, 31(9):1251–1261, 1995.
- [5] P. Apkarian and H. D. Tuan. Robust Control via concave minimisation: local and global algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(2):299–305, 2000.
- [6] P. Apkarian, H. D. Tuan, and J. Bernussou. Analysis, eigenstructure assignment and  $\mathcal{H}_2$  multi-channel synthesis with enhanced LMI characterizations. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, December 2000*.
- [7] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Adaptive Control*. Addison-Wesley Series in Electrical and Computer Engineering: Control Engineering. Addison-Wesley, second edition, 1995.
- [8] G. I. Bara and J. Daafouz. Parameter-dependent control with  $\gamma$ -performance for affine LPV systems. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA, December 2001*.
- [9] G. I. Bara, J. Daafouz, and F. Kratz. Advanced gain scheduling techniques for the design of parameter-dependent observers. In *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA, December 2001*.
- [10] G. I. Bara, J. Daafouz, F. Kratz, and C. Iung. State estimation for a class of hybrid systems. In *Proceedings of the 4th International Conference in Automation of Mixed Processes: Hybrid Dynamic Systems, Dortmund, Germany, September 2000*.
- [11] G. I. Bara, J. Daafouz, F. Kratz, and J. Ragot. Observers interpolation for state reconstruction of discrete time LPV systems: A LMI approach. In *Proceedings of the 8th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation, Rio, Patras, Grece, July 2000*.

- [12] G. I. Bara, J. Daafouz, F. Kratz, and J. Ragot. Parameter dependent state observer design for affine LPV systems. *To appear in International Journal of Control*, 2001.
- [13] G. I. Bara, J. Daafouz, J. Ragot, and F. Kratz. Observateurs d'état pour les systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Lille, France*, pages 87–91, June 2000.
- [14] G. I. Bara, J. Daafouz, J. Ragot, and F. Kratz. State estimation for affine LPV systems. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia*, December 2000.
- [15] G. I. Bara, H. Rafaralahy, M. Zasadzinski, and M. Darouach. State observers for a class of bilinear descriptor systems subjected to unmeasurable disturbances. In *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona, USA*, pages 63–69, December 1999.
- [16] B. R. Barmish. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimisation Theory and Applications*, 46 :399–408, 1985.
- [17] G. Becker and A. Packard. Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically-dependent linear feedback. *Systems & Control Letters*, 23 :205–215, 1994.
- [18] G. Becker, A. Packard, D. Philbrick, and G. Balas. Control of parametrically-dependent linear systems: a single quadratic lyapunov approach. In *Proceedings of American Control Conference, San Francisco, USA*, pages 2795–2799, 1993.
- [19] E. Beran, L. Vandenberghe, and S. Boyd. A global BMI algorithm based on the generalized Benders decomposition. In *Proceedings of the European Control Conference, Brussels*, September 1997.
- [20] J. M. Biannic. *Commande robuste des systèmes à paramètres variables. Application en aéronotique*. Thèse, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'espace, Octobre 1996.
- [21] J. M. Biannic and P. Apkarian. Missile autopilot design via a modified LPV synthesis technique. *Aerospace Science and Technology*, 3 :153–160, 1999.
- [22] F. Blanchini. The gain scheduling and the robust state feedback stabilization problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(11) :2061–2070, 2000.
- [23] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. vol. 15 SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.
- [24] S. Boyd and L. Vandenberghe. Semidefinite programming relaxations of non-convex problems in control and combinatorial optimization. *Communications, Computation, Control and Signal Processing*, 1997.
- [25] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization with Engineering Applications*. Lecture Notes, Stanford University, Stanford, 2001.
- [26] H. Buschek. Robust autopilot design for future missile systems. In *Proceedings of*

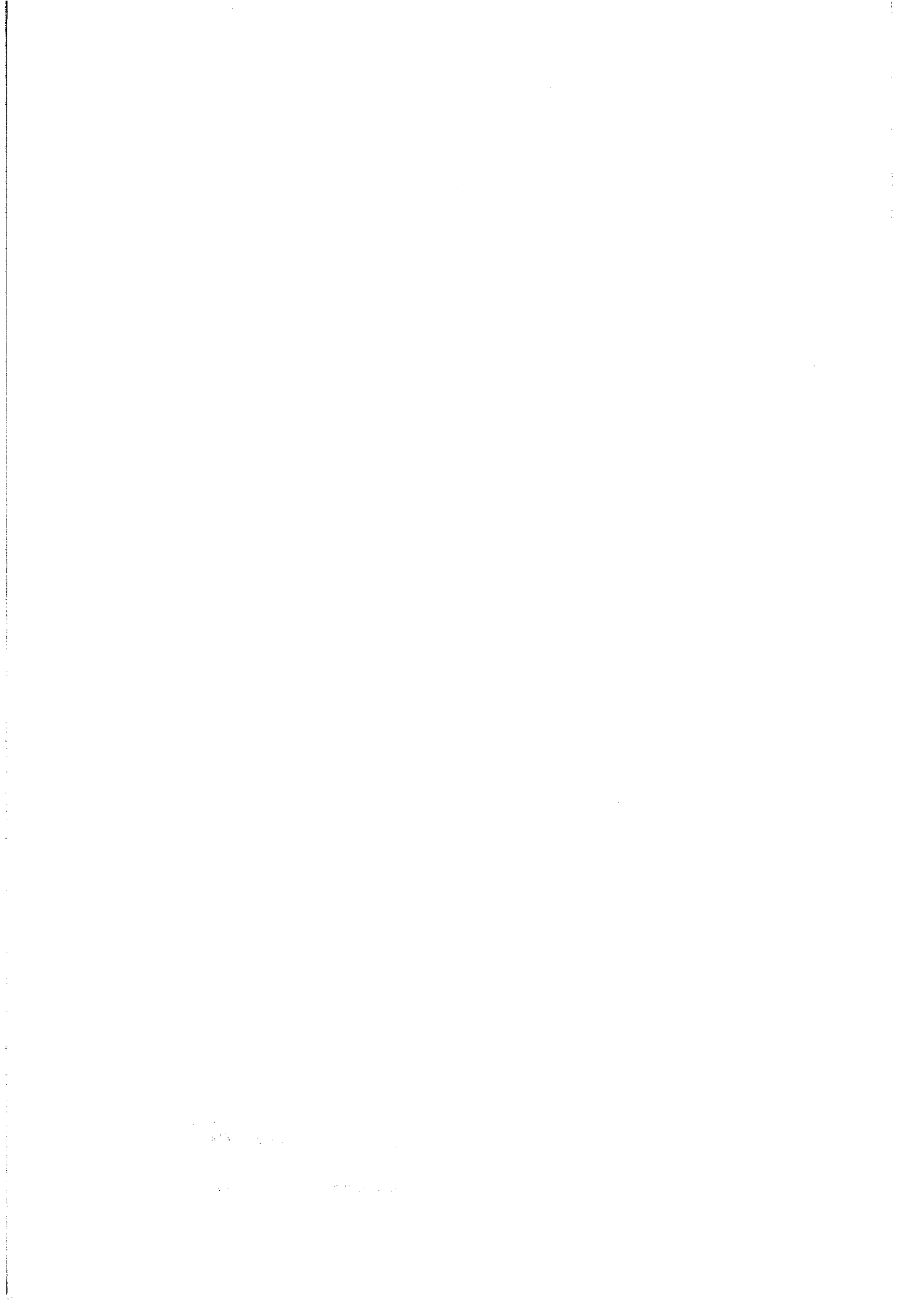
---

the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, New Orleans, LA, pages 1672–1681, 1997.

- [27] J. Daafouz, G. I. Bara, F. Kratz, and J. Ragot. State observers for discrete-time LPV systems: An interpolation approach. In *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia*, December 2000.
- [28] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43(5):355–359, 2001.
- [29] M. C. de Oliveira, J. Bernussou, and J. C. Geromel. A new discrete-time robust stability condition. *Systems & Control Letters*, 37(4):261–265, 1999.
- [30] P. Gahinet and P. Apkarian. A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1996.
- [31] P. Gahinet, P. Apkarian, and M. Chilali. Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):436–442, 1996.
- [32] J. C. Geromel, C. C. de Souza, and Skelton R. E. Static output feedback controllers: stability and convexity. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:120–125, 1998.
- [33] L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. Ait Rami. A cone complementarity linearization algorithm for static output feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1171–1176, 1997.
- [34] K. C. Goh, M. G. Safonov, and G. P. Papavassilopoulos. A global optimization approach for the BMI problem. In *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, Florida, USA*, pages 2009–2014, December 1994.
- [35] A. Hassibi, J. How, and S. Boyd. A path-following method for solving BMI problems in control. In *Proceedings of the American Control Conference, San Diego, California, USA*, pages 1385–1389, June 1999.
- [36] A. Helmersson. *Methods for Robust Gain Scheduling*. PhD Thesis, Linköping University, Linköping, 1995.
- [37] D. Henrion, V. Kucera, and M. Sebek. Stabilization of affine polynomial families: an LMI approach. In *IEEE International Symposium on Computer-Aided Control Systems Design, Anchorage, Alaska*, September 2000.
- [38] D. Henrion, S. Tarbouriech, and M. Sebek. Rank-one LMI approach to simultaneous stabilization of linear systems. *Systems & Control Letters*, 38(2):79–89, 1999.
- [39] R. A. Hyde and K. Glover. The application of scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  controllers to a VSTOL aircraft. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7):1021–1039, 1993.
- [40] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering. *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, 82:35–45, 1960.

- [41] I. Kaminer, A. M. Pascoal, P. P. Khargonekar, and E. E. Coleman. A velocity algorithm for the implementation of gain-scheduled controllers. *Automatica*, 31(8):1185–1191, 1995.
- [42] M. G. Kellett. Continuous scheduling of  $H_\infty$  controllers for a MS760 *Paris* aircraft. In P.H. Hammond, *Robust control system design using  $\mathcal{H}_\infty$  and related methods*. London, England: Institute of Measurement and Control, pages 197–223, 1991.
- [43] J. H. Kelly and J. H. Evers. An interpolation strategy for scheduling dynamic compensators. In *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference, New Orleans, LA*, pages 1682–1690, 1997.
- [44] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The theory of matrices*. Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press, second edition, 1985.
- [45] D. A. Lawrence and W. J. Rugh. Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant. *Automatica*, 31(3):381–390, 1995.
- [46] L. H. Lee. *Identification and Robust Control of Linear Parameter-Varying Systems*. PhD Thesis, University of California at Berkeley, Berkeley, California, 1997.
- [47] D. J. Leith and W. E. Leithead. Appropriate realisation of gain scheduled controllers with application to wind turbine regulation. *International Journal of Control*, 65(2):223–248, 1996.
- [48] D. J. Leith and W. E. Leithead. Gain-scheduled controller design: an analytic framework directly incorporating non-equilibrium plant dynamics. *International Journal of Control*, 70(2):249–269, 1998.
- [49] D. J. Leith and W. E. Leithead. Input-output linearisation by velocity-based gain-scheduling. *International Journal of Control*, 72(3):229–246, 1999.
- [50] D. J. Leith and W. E. Leithead. Survey of gain scheduling analysis & design. *International Journal of Control*, pages 1001–1025, 2000.
- [51] D. G. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6):596–602, 1971.
- [52] M. Mesbahi and Papavassilopoulos G. P. Solving a class of rank minimization problems via semi-definite programs, with applications to the fixed order output feedback synthesis. In *Proceedings of the American Control Conference, Albuquerque, New Mexico, USA*, 1997.
- [53] R. A. Nichols, R. T. Reichert, and W. J. Rugh. Gain scheduling for  $\mathcal{H}$ -infinity controllers: a flight control example. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1(2):69–78, 1993.
- [54] A. Packard. Gain-scheduling via linear fractional transformations. *Systems & Control Letters*, 22:79–92, 1994.
- [55] H. Rafaralahy, M. Zasadzinski, M. Boutayeb, and M. Darouach. State observer design for descriptor bilinear systems. In *Proceedings of International Conference on Control. Control '96, Exeter, UK*, pages 843–848, 1996.

- 
- [56] R. T. Reichert. Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles. *IEEE Control Systems Magazine*, 12(5):35–42, 1992.
- [57] W. J. Rugh. Analytical framework for gain scheduling. *IEEE Control Systems Magazine*, 11(1):79–84, 1991.
- [58] W. J. Rugh and J. S. Shamma. Research on gain scheduling. *Automatica*, 36:1401–1425, 2000.
- [59] C. Scherer, P. Gahinet, and M. Chilali. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):896–911, 1997.
- [60] S. M. Shahruz and S. Behtash. Design of controllers for linear parameter-varying systems by the gain scheduling technique. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 168(1):195–217, 1992.
- [61] J. S. Shamma and M. Athans. Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(8):898–907, 1990.
- [62] D. J. Stilwell and W. J. Rugh. Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(6):1225–1229, 1999.
- [63] D. J. Stilwell and W. J. Rugh. Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers. *Automatica*, 36(5):665–671, 2000.
- [64] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, 1978.
- [65] G. D. Wood. *Control of Parameter-Dependent Mechanical Systems*. PhD Thesis, St. Johns College, Cambridge University, Cambridge, UK, 1995.
- [66] F. Wu. *Control of Linear Parameter Varying Systems*. PhD Thesis, University of California at Berkeley, Berkeley, California, 1995.
- [67] F. Wu, X. H. Yang, A. Packard, and G. Becker. Induced  $\mathcal{L}_2$ -norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates. *International Journal of Control*, 69(10):983–998, 1996.
- [68] J. Yu and A. Sideris.  $\mathcal{H}_\infty$  control with parametric Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 30(2-3):57–69, 1997.



**AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE  
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL  
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

o0o

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR  
Monsieur DUGARD Luc, Directeur de Recherche, LAG - ENSIEG, Saint Martin d'Hères  
Monsieur GARCIA Germain, Professeur, LAAS - CNRS, Toulouse

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

**Mademoiselle BARA Gabriela Juliana**

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,  
une thèse intitulée :

**"Estimation d'état des systèmes linéaires à paramètres variants."**

en vue de l'obtention du titre de :

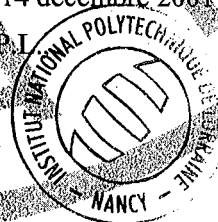
**DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE**

Spécialité « Automatique et Traitement du Signal »

Fait à Vandoeuvre, le 14 décembre 2001

Le Président de l'INPL

J. HARDY



NANCY BRABOIS  
2, AVENUE DE LA  
FORET-DE-HAYE  
BOITE POSTALE 3  
F - 5 4 5 0 1  
VANDOEUVRE CEDEX

Service Commun de la Documentation  
INPL  
Nancy - Brabois





### Résumé :

La reconstruction, partielle ou entière, de l'état d'un système à l'aide d'un observateur est une étape importante qui intervient dans les domaines de la commande, du diagnostic et de la surveillance des systèmes. Notre travail de recherche porte sur l'estimation d'état de systèmes linéaires à paramètres variants dans le temps (LPV). Lorsque nous souhaitons élaborer une stratégie d'estimation d'état pour des systèmes LPV, l'utilisation d'observateurs linéaires à temps invariant n'est pas appropriée et les résultats de synthèse correspondant sont trop pessimistes. Afin de réduire ce conservatisme, notre travail est centré sur la synthèse d'observateurs de type LPV. En effet, en plus des signaux de mesure, ce type d'observateur tire profit d'une information supplémentaire sur la dynamique du processus à savoir les paramètres du système supposés mesurables.

Dans cette thèse, nous avons privilégié plus particulièrement deux types d'approche :

- La première approche fait partie des méthodes par séquençement de gain et plus particulièrement des méthodes de séquençement de gain par une technique à base d'interpolation.
- La deuxième approche fait partie des techniques LPV.

Les solutions que nous avons proposées dans le cadre de ces deux approches utilisent le concept de fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres pour étudier la stabilité de l'erreur d'estimation. Cette notion nous a permis de disposer de degrés de liberté supplémentaires pour la synthèse d'observateurs LPV. Les conditions de synthèse d'observateurs sont formulées comme un problème de résolution d'inégalités matricielles linéaires (LMI) sous contrainte de rang ou comme un problème de résolution de LMI. En effet, l'utilisation d'une technique de découplage permet de réduire la complexité du problème de synthèse à un problème de faisabilité LMI. Par ailleurs, l'application du concept de multi-convexité nous a permis de ramener le nombre infini d'inégalités matricielles à un nombre fini.

### Mots-clés :

Observateurs LPV, Systèmes LPV, fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres, Inégalités Linéaires Matricielles.

---

### Abstract:

The full or partial state reconstruction is an important subject finding its application in areas such as control, diagnosis and safety of dynamical systems. Our work is concentrated on the state estimation of linear parameter varying systems (LPV). In the case of LPV systems, the use of linear time invariant (LTI) observers is not appropriate because the synthesis results are too conservative. In order to reduce this conservatism, our research work is focused on the synthesis of LPV observers. In fact, these observers use an additional information on the system dynamic that is given by the measurable system parameters in order to estimate the system state.

In our thesis, we essentially use two kinds of approaches:

- The first approach is build on the gain scheduling philosophy and, more exactly, it frames itself into the interpolation based gain scheduling methods.
- The second approach is a part of LPV techniques.

The solutions proposed in this framework are based on the concept of parameter dependent Lyapunov functions in order to study the stability of the estimation error. This notion allows us to dispose of some additional freedom degree for the synthesis of LPV observers. The obtained results are formulated as a rank constrained linear matrix inequality (LMI) problem or LMI feasibility problem. In fact, the use of a slack variable reduces the complexity of the synthesis problem to a LMI feasibility problem and the application of the multi-convexity concept allows the reduction of the infinite number of LMI problem to a finite number.

### Keywords:

LPV Observers, LPV systems, parameter dependent Lyapunov functions, Linear Matrix Inequalities.