



HAL
open science

K-théorie pour les C^* -algèbres de pavages de Penrose hyperboliques

Pierre-Henry Collin

► **To cite this version:**

Pierre-Henry Collin. K-théorie pour les C^* -algèbres de pavages de Penrose hyperboliques. K-théorie et homologie [math.KT]. Université de Lorraine, 2018. Français. NNT : 2018LORR0319 . tel-02096279

HAL Id: tel-02096279

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02096279>

Submitted on 11 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

K-théorie pour les C^* -algèbres de pavages de Penrose hyperboliques

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 19 Décembre 2018

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de Lorraine

(mention mathématiques)

par

Pierre-Henry COLLIN

Composition du jury

<i>Président :</i>	Claire Anantharaman-Delaroche	Professeur à l'Université d'Orléans
<i>Rapporteurs :</i>	Jean Renault Samuel Petite	Professeur à l'Université d'Orléans Maître de Conférence à l'Université de Picardie Jules Verne
<i>Examineurs :</i>	Maria Paula Gomez Aparicio Jean-Louis Tu Samuel Petite	Maître de Conférence à l'Université Paris-Sud Professeur à l'Université de Lorraine Maître de Conférence à l'Université de Picardie Jules Verne
<i>Directeur de thèse :</i>	Hervé Oyono-Oyono	Professeur à l'Université de Lorraine

Mis en page avec la classe thesul.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Hervé Oyono-Oyono pour sa patience infinie et sa disponibilité sans limite.

Je remercie infiniment Jean Renault et Samuel Petite qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie également Claire Anantharaman-Delaroche, Maria Paula Gomez Aparicio et Jean-Louis Tu de leur présence dans le jury de ma thèse.

Je remercie également tous les doctorants passés et présents que j'ai côtoyé à l'IECL et avec lesquels j'ai passé d'excellents moments : Allan, Jérémy, Clément, Maxime, Benjamin, Simon, Rémy, Heidi et Yahya.

Je remercie également tout le personnel administratif de l'IECL.

Je remercie enfin et surtout mes parents et mes frères pour le soutien sans faille qu'ils m'ont apporté dans la réalisation de ce travail.

Table des matières

Table des figures

ix

Introduction

Chapitre 1

Introduction aux pavages hyperboliques issus de substitutions

I	Pavages euclidiens classiques	1
1	Rappels sur les pavages	1
2	Complément de définitions et pavages de type fini	2
3	Introduction aux substitutions	2
4	Pavage par substitution	4
5	Définitions et propriétés associées aux pavages par substitution	5
6	Notions de supertuiles, couronnes et propriétés associées	7
7	Forçage de bords	8
8	Mot fixe pour une substitution primitive	9
9	Cas des substitutions de dimension 1	9
10	Transversale canonique	11
11	Probabilité invariante sur Ξ	13
II	Pavages hyperboliques	14
1	Notations	14
2	Pavages hyperboliques sur \mathbb{H}_2	14
III	Construction de pavages de Penrose hyperboliques à partir de substitutions	17
1	Remarques concernant l'article [OP11]	17
2	Construction du pavage hyperbolique provenant d'une substitution	17
IV	Enveloppe d'un pavage hyperbolique et propriétés	19
1	Enveloppe continue d'un pavage hyperbolique	19
2	Lien entre les enveloppes dans le cas d'un pavage par substitution	20
V	Coloriage d'un pavage hyperbolique	21

Chapitre 2		
C^*-algèbres et K-théorie		25
I	Introduction aux C^* -algèbres	25
1	Définitions	25
II	Modules hilbertiens [Weg93],[Wil98]	26
1	Définitions	26
2	Opérateurs adjoignables	27
3	Opérateurs de rang un et opérateurs compacts	27
4	Produit croisé réduit par les groupes \mathbb{R} et \mathbb{Z}	28
III	K -théorie ([Weg93],[Bla98])	31
1	Unitaires et inversibles dans les C^* -algèbres	31
2	Projecteurs d'une C^* -algèbre	34
3	Foncteur K_0	35
4	Foncteur K_1	39
5	Propriétés fondamentales de la K -théorie	40
Chapitre 3		
Groupeïde associé au pavage et sa C^*-algèbre		49
I	C^* -algèbre d'un groupeïde	49
1	Groupeïdes : définition et exemples	49
2	Système de Haar	50
3	Construction de la C^* -algèbre réduite d'un groupeïde [Ren80]	51
4	Suspension de groupeïdes et leurs C^* -algèbres	51
II	C^* -algèbres de pavages	53
1	Cas euclidien	53
2	Cas hyperbolique	53
3	Isomorphismes	54
4	Conclusion	60
Chapitre 4		
Cohomologie des espaces de pavages et lien avec la K-théorie		61
I	Structure cellulaire d'un graphe orienté	61
II	Cohomologies des graphes orientés	61
1	Cohomologie cellulaires des graphes orientés	61
2	Cohomologie de Čech et isomorphisme avec la cohomologie cellulaire pour un graphe orienté	62
III	Cohomologie des espaces de pavages [AP98]	63

1	Introduction à l'article	63
2	Résultats principaux	63
3	Liens avec la K-théorie des espaces de pavages	65
IV	K-théorie des graphes orientés	65
1	Suites exactes	65
V	Lien avec la K-théorie des CW-complexes	66
VI	Isomorphismes avec la K-théorie	67

Chapitre 5

Équivalence de Morita

69

I	Définition de base	69
II	Shift et C^* -algèbre d'un espace de pavage	70
III	Construction du bimodule d'imprimitivité	70
1	Définition des produits hilbertiens	70
IV	Isomorphisme entre \mathcal{E} et $L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$	73
V	Bimodule d'imprimitivité \mathcal{E}	75
1	Action du produit croisé $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g) \rtimes \mathbb{R}$ sur \mathcal{E}	75
2	Produit hilbertien à valeurs dans $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g) \rtimes \mathbb{R}$	77
VI	Transport de l'action sur la partie non coloriée	78
1	Transport des générateurs de $L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$	78
2	Transport de $\tilde{\alpha}_c$	78

Chapitre 6

Substitution de Fibonacci

87

I	Définition et première propriété de la substitution	87
1	Substitution de Fibonacci	87
2	Détermination des prototiles du pavage	88
3	Couronne et forçage de bords pour la substitution	89
4	Couronnes	89
5	Définition du pavage dans \mathbb{H}_2	90
II	C^* -algèbre du pavage hyperbolique	92
1	Cas où T_0 est une couronne de type $A = (a).b(a)$	92
2	Cas où T_0 est une couronne de type $B = (a).a(b)$	92
3	Cas où T_0 est une couronne de type $C = (b).a(a)$	93
4	Cas où T_0 est une couronne de type $D = (b).a(b)$	94
III	Mesure invariante sur les pavages en couronnes	94
IV	Construction d'Anderson et Putnam [AP98] et liens avec X_P^N	95

1	Construction de l'approximation Γ_1 pour le pavage de Fibonacci	96
2	Calcul de la cohomologie cellulaires de Γ_1	96
V	K-théorie	99
VI	K-théorie de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$	99

Chapitre 7
Substitution de Thue-Morse 101

I	Définitions et mise en place du pavage	101
1	Caractéristiques de la substitutions	101
2	Couronnes et forçages des bords	102
3	Mise en place du pavage hyperbolique associé	102
II	C^* -algèbre du pavage hyperbolique	105
1	Détermination des isométries partielles	105
III	Mesure invariante sur les pavages en couronne	106
IV	Construction d'Anderson et Putnam [AP98] et liens avec X_P^N	107
1	Construction de l'approximation Γ_1 pour le pavage de Thue-Morse	107
2	Calcul de la cohomologie cellulaires de Γ_1	107
V	K-théorie	110
VI	K-théorie de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$	111
VII	Cas pavage non coloré	112

Chapitre 8
Substitution de Tribonacci 115

I	Définition et premières propriétés	115
1	Substitution de Tribonacci	115
2	Couronnes et forçage des bords	116
3	Mise en place du pavage hyperbolique associé	117
II	C^* -algèbre du pavage hyperbolique	120
1	Cas où T_0 est une couronne de type $A = (a).a(b)$	120
2	Cas où T_0 est une couronne de type $B = (a).b(a)$	121
3	Cas où T_0 est une couronne de type $C = (a).c(a)$	121
4	Cas où T_0 est une couronne de type $D = (b).a(b)$	122
5	Cas où T_0 est une couronne de type $E = (b).a(a)$	123
6	Cas où T_0 est une couronne de type $F = (b).a(c)$	123
7	Cas où T_0 est une couronne de type $G = (c).a(b)$	124
III	Mesure invariante sur les pavages en couronnes	125
IV	Construction d'Anderson-Putnam	126

1	Détermination de Γ_1 et σ^*	126
2	Calcul de la cohomologie cellulaires de Γ_1	127
V	K-théorie	129
VI	K-théorie de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$	130
VII	Cas du pavage non coloré	131

Chapitre 9

Annexes

133

I	Calcul du facteur d'expansion de Tribonacci	133
II	Section pour le groupe dans la suite exacte de $K_0(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G)$	135

Bibliographie

139

Table des figures

1.1	Réalisation géométrique de la substitution de Fibonacci	5
1.2	Réalisation géométrique de la substitution de Thue-Morse	5
1.3	Réalisation géométrique substitution de Tribonacci	5
1.4	Pavage de l'article [OP11]	16
1.5	Prototuille pavage hyperbolique de [OP11]	17
1.6	Début de la ligne du pavage [OP11]	17
1.7	Prototuelles Fibonacci	18
1.8	Partie d'une ligne du pavage de Penrose hyperbolique issu de Fibonacci	19
6.1	Substitution de Fibonacci géométrique	88
6.2	Prototuelles du pavage hyperbolique de Fibonacci	89
6.3	Prototuelles et règles de descente pour Fibonacci hyperbolique	89
6.4	Pavage de Fibonacci hyperbolique	91
6.5	Voisins autorisés pour chaque tuile	96
6.6	CW-complexe Γ_1 et son image par σ^* associé à Fibonacci	96
7.1	Substitution de Thue-Morse sur \mathbb{R}	101
7.2	Règles de passages entre les lignes	103
7.3	Thue-Morse hyperbolique	104
7.4	CW-complexe Γ_1 et son image par σ^* pour la substitution de Thue-Morse	107
8.1	Substitution de Tribonacci sur \mathbb{R}	116
8.2	Prototuelles du pavage hyperbolique de Tribonacci	117
8.3	Règles de substitution pour Tribonacci hyperbolique	118
8.4	Tribonacci hyperbolique	119
8.5	Voisins autorisés pour chaque tuile	126
8.6	CW-complexe Γ_1 et son image par σ^*	127
9.1	Diagramme $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*)) \hookrightarrow C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$	135

Introduction

La notion de pavages est connue et étudiée depuis l'Antiquité, en particulier les mathématiciens grecs avant déjà une connaissance des pavages réguliers du plan. Une des représentations historiques célèbres des pavages se trouve au palais de l'Alhambra en Espagne, où la quasi totalité des pavages réguliers y sont représentés. L'étude et la description complète de ces pavages dû attendre la découverte de la notion de groupes, qui permis leur classification complète.

La chimie et la physique, plus particulièrement en cristallographie, permirent de faire un lien entre les cristaux et les pavages réguliers au moyen des diagrammes de diffraction, au point de donner une définition formelle d'un cristal à partir des propriétés de son diagramme de diffraction.

La notion de pavages de Penrose, nommée en l'honneur de Sir Roger Penrose, est plus récente. Durant les années 1960, Hao Wang considéra la possibilité de paver un espace avec des tuiles carrées dont les arêtes sont libellées. Un des objets fut de déterminer la possibilité de paver le plan avec ce type de tuiles en imposant que les arêtes communes a deux tuiles aient même labels. Une réponse négative à cette question fut donnée par un étudiant de Wang, Robert Berger, qui dans le même temps exhiba un pavage de \mathbb{R}^2 apériodique (contrairement aux pavages réguliers) formé en utilisant plus de 27000 tuiles différentes. La renommée de Sir Penrose provient des exemples de tels pavages n'utilisant que deux tuiles distinctes.

Pour construire de tels pavages, Penrose a utilisé la notion substitution, que l'on connaissait déjà via des exemples comme la substitution de Thue-Morse datant d'un peu plus d'un siècle. Contrairement à la plupart des notions mathématiques, la physique n'est pas à l'origine de cette étude. Il faudra attendre les années 1980 pour que Dan Shechtman et son équipe découvrent en 1981 de nouveaux matériaux dont le diagramme de diffraction ressemble à ceux des cristaux. À la différence des cristaux usuels, le diagramme de diffraction admet des symétries d'ordre 8 et 10 qui ne sont pas autorisées en cristallographie. C'est pour cette raison que ces matériaux ont été nommés quasicristaux. La notion de pavage apériodique (en particulier les pavages de Penrose) est un bon modèle pour ces quasicristaux.

En parallèle la théorie de la géométrie non commutative s'est développée sous l'impulsion d'Alain Connes et l'une des applications est l'étude de la dynamique de l'enveloppe des pavages de Penrose. La C^* -algèbre associée à un espace de pavage est le produit croisé $C(\Omega) \rtimes G$ où Ω est l'enveloppe d'un pavage G -apériodique (dans le cas des pavages construits par Penrose, il suffit de prendre $G = \mathbb{R}^2$). Cette C^* -algèbre encode toutes les propriétés du pavage (et de sa substitution).

L'utilisation de la K -théorie et des diverses cohomologies permet de relier aux pavages des invariants topologiques. Une des applications de la K -théorie pour les espaces de pavages est donnée par la notion de gap-labelling énoncée par Jean Bellissard et qui relie la K -théorie de $C(\Omega) \rtimes \mathbb{R}^n$ au saut d'énergie dans le spectre d'un opérateur de Schrödinger qui correspond à un mouvement d'un électron dans un quasicristal modélisé par le pavage apériodique.

L'objet de cette thèse est d'étendre l'étude des C^* -algèbres associées aux pavages hyperboliques faites dans [OP11] sur un pavage dans le demi-plan de Poincaré muni de la métrique hyperbolique usuelle (introduit dans la thèse de Samuel Petite [Pet05]), aux C^* -algèbres de pavages hyperboliques provenant de substitutions. Les pavages hyperboliques issus de substitutions ont déjà été introduits dans la thèse de Björn Monson [Mon17]. Il y considère les substitutions comme des automorphismes de groupes libres et il étudie ces pavages du point de vu de la dynamique de ces automorphismes.

Nous allons pour ce faire donner une description de la C^* -algèbre de l'enveloppe des pavages en utilisant générateurs et relations. Enfin dans les cas des pavages provenant des substitutions de Fibonacci, Thue-Morse et Tribonacci nous allons donner la description de la K -théorie en termes de générateurs.

Nous allons dans le premier chapitre de cette thèse introduire les notions de pavages, en particulier ceux issus de substitutions, puis les objets topologiques associées tels les enveloppes, les transversales canoniques et les mesures de probabilité invariantes. Nous allons ensuite donner une description des pavages hyperboliques associés et en particulier la méthodologie pour les construire. Enfin nous allons introduire les notions d'enveloppes pour ces pavages définies à partir de l'action de deux groupes $N = \{\mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2, z \mapsto z + t, t \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{\mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2, z \mapsto az + b, (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\}$.

Le second chapitre de cette thèse sera consacré aux rappels sur les C^* -algèbres et la K -théorie. Nous y introduirons pour commencer, les notions de C^* -algèbres, modules hilbertiens et produits croisés réduits par les groupes \mathbb{Z} et \mathbb{R} . Nous donnerons ensuite toutes les définitions permettant d'introduire la notions de K -théorie. Enfin nous exposerons les résultats fondamentaux qui nous permettrons de calculer ces groupes de K -théorie dans la suite de cette thèse. En particulier nous y introduirons la suite de Pimsner-Voiculescu, le théorème de Thom-Connes et la K -théorie du mapping torus.

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de groupoïdes associés aux pavages. Nous introduisons notamment la notion de suspension de groupoïde qui nous permettra de décrire la structure des C^* -algèbres associées à l'enveloppe du pavages comme étant à Morita équivalente un double produit croisé par \mathbb{Z} . Nous y introduirons les définitions les concernant, puis nous nous concentrerons sur la notion de produit croisé réduit qui nous accompagnera tout du long. Nous donnerons ensuite la définition et quelques propriétés sur les modules hilbertiens pour arriver a la notion d'équivalence Morita dans le cadre des C^* -algèbres. Nous conclurons cette partie sur la construction de la C^* -algèbre réduite d'un groupoïde selon Jean Renault pour ensuite parvenir à la décomposition de la C^* -algèbre du pavage hyperbolique $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ en $(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(X_P)^N \rtimes \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_+^*$.

Le quatrième chapitre de cette thèse est consacré aux diverses cohomologies associées à un espace de pavages. Nous allons donc introduire les deux cohomologies (cellulaire et de Čech) en lien avec la K -théorie topologique, dont la cohomologie de Čech. Ensuite nous rappellerons les principaux résultats obtenus par Ian Putnam et Jared Anderson ([AP98]) qui permettent la construction d'une approximation de l'enveloppe dans le but de faciliter les calculs de cohomologie de Čech d'un enveloppe de pavages. Nous terminerons ce chapitre en donnant une suite d'isomorphismes \mathbb{Z} -équivariants reliant la cohomologie avec $K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$

Le cinquième chapitre sera lui consacré à description de l'isomorphisme issu de l'équivalence Morita entre $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_\mathfrak{g})$ et $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ où Ξ désigne la transversale canonique du pavage. Une fois cet isomorphisme obtenu nous pourrons alors utiliser les résultats du second chapitre pour obtenir les générateurs de la K -théorie ainsi que l'automorphisme en K -théorie induit par l'action par \mathbb{Z} sur $C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(X_P^N) \rtimes \mathbb{R}$

Les trois derniers chapitres sont consacrés aux calculs explicites dans le cas des substitutions de Fibonacci, Thue-Morse et Tribonacci. Nous donnons en particulier une description de la K -théorie en termes de générateurs.

Résumé

Étant donnée une substitution de dimension 1, notée σ , nous pouvons définir l'enveloppe Ω_σ formant un système dynamique $(\Omega_\sigma, \mathbb{R})$ où l'action de \mathbb{R} sur les pavages est donnée par les translations. Si la substitution est primitive alors nous pouvons construire un pavage P du demi-plan de Poincaré \mathbb{H}_2 muni de sa métrique $\frac{dx+dy}{y^2}$. De manière analogue nous pouvons construire des enveloppes pour les actions de $N = \{\mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2, z \mapsto z + t, t \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{\mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2, z \mapsto az + b, (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\}$ que l'on notera respectivement X_P^N et $X_{P(c)}^G$ (où $P(c)$ est le pavage colorié ligne à ligne pour rendre l'action de G libre).

En utilisant la notion de C^* -algèbre de groupoïde [Ren80] ainsi que les résultats obtenus dans [AP98] et via l'isomorphisme issu de l'équivalence Morita entre $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g)$ et $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$, nous pouvons donner la description de la C^* -algèbre de l'enveloppe du pavage hyperbolique en termes de générateurs et relations. Nous terminons par la description des générateurs de la K -théorie de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ pour les substitutions de Fibonacci, Thue-Morse et Tribonacci.

Mots-clés: pavage, substitution, hyperbolique, K -théorie

Abstract

Given a one dimensional substitution σ , one can define the continuous hull Ω_σ for the \mathbb{R} -action given by translations and so we obtain a dynamical system (Ω_σ, σ) . If the substitution we choose is primitive, then we can construct an hyperbolic tiling on Poincaré's half-plane equipped with its standard metric $\frac{dx+dy}{y^2}$. By analogy of the standard case, we can define two continuous hulls, denoted X_P^N and $X_{P(c)}^G$, where $P(c)$ is a colored tiling (in such fashion that the action of G is free), and the groups are denoted respectively $N = \{\mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2, z \mapsto z + t, t \in \mathbb{R}\}$ and $G = \{\mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2, z \mapsto az + b, (a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\}$.

Using Jean Renault's construction of the reduced C^* -algebra of a groupoid (see [Ren80]), the results of [AP98] and the Morita equivalence between $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g)$ and $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$, we describe the C^* -algebra of the hyperbolic tiling using generators and relations. Finally we obtain for the Fibonacci, Thue-Morse and Tribonacci substitutions the full description of the generators of $K_*(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G)$.

Keywords: tiling, substitution, K -theory.

Chapitre 1

Introduction aux pavages hyperboliques issus de substitutions

Dans ce chapitre, nous allons introduire successivement la notion de pavages euclidiens puis la notion de substitutions permettant de construire le type de pavages qui nous intéresse et pour finir les objets topologiques, en particulier les enveloppes continues, que nous pouvons mettre en avant pour une étude approfondie.

I- Pavages euclidiens classiques

Dans cette partie, nous introduirons les notions afférentes aux pavages euclidiens classiques. En particulier nous introduirons tous les éléments de langage dont nous aurons besoin tout au long de cette thèse. De plus nous ferons le lien pour les pavages de la droite réelle \mathbb{R} avec les pavages dit symboliques. Enfin nous énoncerons plusieurs propriétés essentielles de certaines classes de pavages. La plupart des notions exposées dans cette partie proviennent de trois ouvrages ([Sad08], [Que87] et [FBF⁺02]).

I.1- Rappels sur les pavages

Commençons par donner la définition formelle d'un pavage (euclidien) dans \mathbb{R}^d .

Définition 1.1.1 (pavage euclidien de \mathbb{R}^d). On appelle *pavage de \mathbb{R}^d* une collection de tuiles $P = (p_i)_{i \in I}$, où une *tuile* p_i désigne un polyèdre convexe d'intérieur non vide de \mathbb{R}^d , satisfaisant les propriétés suivantes :

- i) pour tous $i, j \in I, i \neq j, \overset{\circ}{p}_i \cap \overset{\circ}{p}_j = \emptyset$;
- ii) deux tuiles coïncident sur une hyperface;
- iii) $\bigsqcup_{i \in I} p_i = \mathbb{R}^d$.

Plus concrètement, on impose que les tuiles soient d'intérieurs disjoints et dont la réunion toute entière soit l'espace euclidien.

Remarque 1.1.2. En imposant que deux tuiles coïncident sur une hyperface, nous nous concentrons sur la catégorie des pavages dits *simples*.

Exemple 1.1.3. On peut penser dans \mathbb{R}^d à une infinité de d -cubes identiques dont les intersections ne se font que de bord à bord sans chevauchement. On peut également penser aux pavages réguliers du plan, pavages déjà connus en partie par les Grecs et dont la connaissance complète est connue au Moyen-Âge (voir par exemple le Palais de l'Alhambra) et dont la preuve du nombre et des polygones réguliers les composant se fit plus tardivement à l'aide des groupes.

I.2- Complément de définitions et pavages de type fini

On introduit maintenant une classe importante de pavage.

Définition 1.I.4 (pavage de type (\mathbb{R}^d) -fini). On dit que le pavage P est de type (\mathbb{R}^d) -fini, s'il existe une sous-famille finie $\{p_1, \dots, p_n\}$ de P dont les éléments sont appelés *prototyles* et qui satisfait la propriété suivante

$$\forall p \in P, \exists ! i \in [1, n], \exists t \in \mathbb{R}^d; p = p_i + t.$$

Remarque 1.I.5. Afin de distinguer deux prototyles isométriques, on s'autorise à les colorier (voir le pavage de Thue-Morse).

Soit $P = \{p_i\}_{i \in I}$ un pavage de \mathbb{R}^d tel que défini ci-dessus. Nous pouvons alors regarder les pavages de \mathbb{R}^d ne nécessitant qu'un nombre fini de tuiles différentes à translations près pour les construire. Remarquons à présent que l'on a une action de \mathbb{R}^d sur ce pavage par les translations, plus précisément si $t \in \mathbb{R}^d$ nous noterons par $P + t$ le pavage de \mathbb{R}^d appelé pavage P translaté par t et défini par $P + t = \{p_i + t\}_{i \in I}$.

Remarque 1.I.6. Plus généralement, nous pouvons aussi considérer les pavages de type G -fini si G est un groupe d'isométries de \mathbb{R}^d .

Nous pouvons alors définir une action du groupe G sur le pavage $P = \{t_i\}_{i \in I}$ définie pour $g \in G$, notée $g \cdot P$, où $g \cdot P$ est le pavage $\{g \cdot t_i\}_{i \in I}$.

Nous pouvons alors introduire la notion de patch pour de tels pavage.

Définition 1.I.7 (patch, G -patch). On appelle *patch* de P une réunion finie connexe de tuiles de P . On appelle G -*patch* une classe modulo G d'un patch de P .

I.3- Introduction aux substitutions

Dans la plupart des cas, le groupe d'isométrie G n'étant autre que celui des translations, on cherche un moyen efficace de construire des pavages affines de type (\mathbb{R}^d) -fini. Pour cela les substitutions font parties des moyens les plus efficaces. Commençons par introduire la notion de substitution géométrique.

I.3.3.1-SUBSTITUTION GÉOMÉTRIQUE

Définition 1.I.8 (substitution géométrique, [Fre05]). Soit $\{p_i, 1 \leq i \leq n\}$ une famille de prototyles de \mathbb{R}^d , c-à-d des polyèdres convexes non vides de \mathbb{R}^d . Une *substitution géométrique* σ est la composé $S \circ Q$ d'un couple (Q, S) d'applications, où Q est une *application d'expansion* et S est un *règle de découpage*. Une application d'expansion est une application $Q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ linéaire dont toute ses valeurs propres sont plus grandes que 1 en module.

Une application de découpage S est une application qui associe à $Q(p_i)$ une réunion de translaté de prototyles pavant $Q(p_i)$.

I.3.3.2-SUBSTITUTION SYMBOLIQUE

Dans la mesure où nous nous intéresserons par la suite à des pavages qui proviennent de substitutions dans \mathbb{R} , nous nous restreignons dès à présent à la dimension 1. Nous allons alors introduire la notion de substitution symbolique sur un alphabet, et nous montrerons que les deux notions coïncident en dimension 1.

Définition 1.I.9 (substitution symbolique). On se donne un *alphabet* $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$, dont les éléments a_i sont appelés *lettres*, que l'on choisit fini. On appelle k -*mot* ($k \in \mathbb{N}^*$) formé par des lettres de \mathcal{A} une suite de k lettres de \mathcal{A} . On note \mathcal{A}^k l'ensemble des k -mots, $\mathcal{A}^0 = \{\emptyset\}$ et $\mathcal{A}^* = \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}^k$ l'ensemble des mots finis sur \mathcal{A} .

Une substitution sur l'alphabet \mathcal{A} est une application $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$, où \mathcal{A}^* est l'ensemble des mots formés à partir de lettres de \mathcal{A} telle que $\sigma(a_i) \neq \emptyset$ pour tout $i \in [1, n]$ et dont l'image d'un mot est obtenu par concaténation des images des lettres qui le composent (i.e. $\sigma(a_i a_j \dots a_k) = \sigma(a_i) \sigma(a_j) \dots \sigma(a_k)$).

On va maintenant parler de la matrice de la substitution.

Définition 1.I.10 (matrice de substitution). Soit $M^\sigma = (M_{ij}^\sigma)$ la matrice dont les coefficients M_{ij}^σ sont définis comme le nombre de lettres a_i qui apparaissent dans $\sigma(a_j)$. On appelle la matrice M_σ *matrice de la substitution*.

Nous pouvons alors parler de la notion de substitution primitive via la notion de matrice primitive.

Définition 1.I.11 (matrice primitive). On dit qu'une matrice M est *primitive* si une puissance de M ne comporte que des entrées positives non nulles.

Rappelons immédiatement le théorème de Perron-Frobenius.

Théorème 1.I.12 (Perron-Frobenius). Soit M une matrice primitive et soit λ_{PF} sa plus grande valeur propre positive. Alors cette valeur propre est de multiplicité 1 et les vecteurs propres associés (à gauche et à droite) n'ont que des entrées positives non nulles. De plus toutes les autres valeurs propres de la matrice sont plus petites strictement en norme que cette valeur propre.

Définition 1.I.13 (substitution primitive). On dit qu'une substitution σ sur un alphabet $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ est *primitive* s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que toutes les lettres de l'alphabet apparaissent dans $\sigma^n(a_j)$ pour tout j .

Proposition 1.I.14. Une substitution σ est primitive si et seulement si sa matrice M^σ est une matrice primitive.

Pour pouvoir faire un lien entre les substitutions symboliques et géométriques, il nous faut une notion d'expansion dans le cas symbolique et de longueur compatible avec une substitution.

Définition 1.I.15 (facteur d'expansion). Soient $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ un alphabet, $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ une substitution primitive, on appelle *facteur d'expansion* de la substitution σ noté $\lambda \in]1, +\infty[$ la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice de substitution M^σ .

Définition 1.I.16 (longueur). Soit \mathcal{A} un alphabet fini. On appelle longueur une application $\ell : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ satisfaisant

$$\ell(ab) = \ell(a) + \ell(b)$$

pour tous mots a et b de \mathcal{A}^* .

Une longueur est *compatible* avec σ si elle vérifie

$$\ell(\sigma(a)) = \lambda \ell(a), \forall a \in \mathcal{A}^*,$$

où λ est le facteur d'expansion.

Remarque 1.I.17. Une longueur ℓ est compatible si et seulement si

$$\ell(\sigma(a_i)) = \lambda \ell(a_i), \forall i \in I.$$

Comme

$$\ell(\sigma(a_i)) = \sum_{j \in I} M_{ji}^\sigma \ell(a_j),$$

les longueurs compatibles sont en correspondance avec les vecteurs propres de $(M^\sigma)^t$ associés au facteur d'expansion. En particulier ℓ est une longueur compatible si et seulement si

$$(M^\sigma)^t \begin{pmatrix} \ell(a_1) \\ \vdots \\ \ell(a_n) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \ell(a_1) \\ \vdots \\ \ell(a_n) \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, on renormalisera la longueur ℓ telle que $\min\{\ell(a_i)\} = 1$.

On arrive donc à la définition du facteur d'expansion de la substitution.
Donnons un exemple trivial.

Exemple 1.I.18. Soit $\mathcal{A} = \{a\}$ et $\sigma(a) = aa$, alors on a $\ell(a) = 1$ et

$$\ell(aa) = \ell(a) + \ell(a) = 2 = \lambda \ell(a) = \lambda$$

Dans tout ce qui suivra nous nous restreindrons à l'étude et l'emploi de substitutions **primitives**

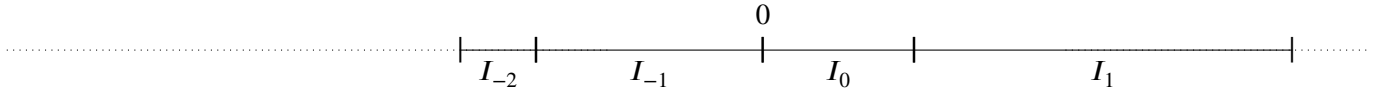
I.3.3.3-LIENS ENTRE LES DEUX TYPES DE SUBSTITUTIONS (PRIMITIVES) EN DIMENSION 1

Soit σ une substitution primitive sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ munie de sa longueur associée (voir la remarque précédente). On définit les prototiles I_k comme les intervalles de longueurs $\ell(a_k)$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. On définit alors l'application d'expansion $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lambda x$ où λ est le facteur d'expansion de σ . On définit pour terminer l'application de découpage S qui à $Q(I_k)$ associe la suite d'intervalles $I_{k_1} \dots I_{k_p}$ où les indices k_i sont les mêmes que ceux dans l'image de $\sigma(a_k) = a_{k_1} \dots a_{k_p}$. On notera par $\text{Geom}(\sigma) = S \circ Q$ la substitution géométrique obtenue à partir de la substitution symbolique σ .

Donnons maintenant la définition de mots bi-infini.

Définition 1.I.19 (mot bi-infini). Soient \mathcal{A} un alphabet et $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ une substitution symbolique primitive. On appelle mot *bi-infini* un mot de l'alphabet de cardinal infini noté $\dots a_{-2}a_{-1}.a_0a_1a_2 \dots$.

Étant donné une longueur pour la substitution nous pouvons alors à partir d'un mot bi-infini construire sa réalisation géométrique T_σ comme étant le pavage de la droite réelle de la figure ci-dessous où les intervalles I_j sont de longueurs $\ell(a_j)$:



I.4- Pavage par substitution

Maintenant que nous avons défini la notion de substitution, nous allons maintenant brièvement expliquer comment on obtient un pavage par ce procédé en donnant la définition suivante.

Définition 1.I.20 (pavage par substitution, [Fre05, FBF⁺02]). On appelle *pavage par substitution associé à la substitution* $\text{Geom}(\sigma) = S \circ Q$ et à la famille de prototiles $\{p_i, 1 \leq i \leq n\}$, un pavage P de \mathbb{R}^d tel que tout \mathbb{R}^d -patch p de P est un sous- \mathbb{R}^d -patch d'un translaté de $(S \circ Q)^n(p_i)$ pour un certain entier n et certain indice $1 \leq i \leq n$.

Donnons quelques exemples qui nous suivront tout au long de cette thèse.

Exemple 1.I.21.

- 1) La substitution de Fibonacci est donnée par l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ et $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = a$. En prenant pour longueur $\ell(a) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\ell(b) = 1$ on obtient le pavage géométrique associé suivant :



FIGURE 1.1 – Réalisation géométrique de la substitution de Fibonacci

- 2) La substitution de Thue-Morse est donnée par l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ et $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = ba$. En prenant la longueur ℓ définie par $\ell(a) = \ell(b) = 1$, on obtient le pavage géométrique associé suivant :



FIGURE 1.2 – Réalisation géométrique de la substitution de Thue-Morse

- 3) La substitution de Tribonacci est donnée par l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$ et $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = ac$, $\sigma(c) = a$. En prenant la longueur ℓ définie par $\ell(a) = \beta$, $\ell(b) = \beta^2 - \beta$ et $\ell(c) = 1$ avec $\beta = \frac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + 1}{3}$ (voir pour cela section I p.133) on obtient le pavage géométrique associé suivant :



FIGURE 1.3 – Réalisation géométrique substitution de Tribonacci

Remarque 1.I.22. On peut également citer le ou plutôt les pavages de Penrose qui ont mis en lumière l'importance des substitutions pour construire des pavages aperiodiques, quasi-periodiques et autosimilaires.

I.5- Définitions et propriétés associées aux pavages par substitution

On va se restreindre aux actions par translations sur un pavage euclidien de \mathbb{R}^d P , c-à-d le groupe $G = \mathbb{R}^d$ et l'on notera $t \cdot P = P + t$, $t \in \mathbb{R}^d$.

Nous détaillerons plus loin la notion d'enveloppe d'un pavage (en particulier les questions topologiques) mais pour pouvoir donner certaines définitions nous devons définir cette notion.

Définition 1.I.23 (enveloppe d'un pavage de \mathbb{R}^d [KP00, RW92, GS86]). On note et définit l'enveloppe continue Ω_T d'un pavage T de \mathbb{R}^d comme l'ensemble des pavages T' satisfaisant la propriété que pour tout patch p' de T' il existe $t \in \mathbb{R}^d$ tel que $p' - t$ soit un patch de T .

Remarque 1.I.24. Une autre manière de décrire Ω_T est l'ensemble des pavages de \mathbb{R}^d localement de la forme de T .

On peut alors définir une métrique sur Ω_T comme suit : soient $P, P' \in \Omega_T$, posons

$$A(P, P') = \inf \{ \varepsilon \in [0, \sqrt{2}/2]; \exists t \in \mathbb{R}^d, |t| < \varepsilon, P \cap \mathcal{B}_{\varepsilon^{-1}}(0) = (P' + t) \cap \mathcal{B}_{\varepsilon^{-1}}(0) \}.$$

On pose alors

$$d(P, P') = \begin{cases} A(P, P') & \text{si } A(P, P') \neq \emptyset \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous allons maintenant relier Ω_T aux orbites de pavages dont nous rappelons ci-dessous la définition.

Définition 1.I.25 (orbite de T). L'orbite d'un pavage euclidien T est notée et définie par

$$\mathcal{O}(T) = \{T - x, x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Nous pouvons alors relier les deux entités par la proposition suivante.

Proposition 1.I.26. La fermeture de $\mathcal{O}(T)$ pour la topologie induite par la métrique d est l'enveloppe Ω_T tout entière

On donne maintenant une définition classique et centrale dans l'étude des pavages. On rappelle qu'un \mathbb{R}^d -patch est la classe d'un patch modulo l'action de \mathbb{R}^d par translations.

Définition 1.I.27 (complexité locale finie). On dit que le pavage P possède une complexité locale finie si pour tout réel $R > 0$ il existe un nombre fini de \mathbb{R}^d -patches de diamètre plus petit que R .

Ce qui nous amène à la proposition suivante.

Proposition 1.I.28 ([FBF⁺02],[Sad08]). Les pavages de Fibonacci, Thue-Morse et Tribonacci sont de complexité locale finie.

On verra par la suite que la complexité locale finie est essentielle dans l'étude dynamique des pavages en particulier de leurs enveloppes continues qui seront alors des espaces topologiques compacts ainsi que la caractérisation en ensemble de Cantor pour les transversales canoniques. On donne également un théorème fondamental sur la topologie de cet espace de pavages.

Théorème 1.I.29 (Rudolph,[MSMSS89]). L'espace métrique (Ω_T, d) est complet et si de plus T est de complexité locale finie alors Ω_T est compact.

Corollaire 1.I.30. Si T est un pavage simple alors Ω_T est un espace compact.

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'un pavage simple est FLC et d'appliquer le Théorème 1.I.29 p.6. □

Définition 1.I.31 (pavage aperiodique,[Sad08]). On dit que le pavage T est complètement aperiodique pour l'action de \mathbb{R}^d pour tout $P \in \Omega_T$, l'égalité $P + t = P$ implique $t = 0$.

Remarque 1.I.32. Considérons le pavage $T = (t_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ avec $t_0 = b$ et $t_i = a$ pour tout $i \neq 0$. Ce pavage n'est pas périodique, mais contient le pavage périodique $P = (p_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ défini par $p_i = a$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ dans son enveloppe.

On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.I.33. [FBF⁺02, chapitre 5] Les pavages de Fibonacci, Thue-Morse et Tribonacci sont complètement apériodiques.

Définition 1.I.34 (répétitivité). On dit qu'un pavage P de \mathbb{R}^d est *répétitif* si pour tout patch p de P il existe un réel positif non nul R_p tel que toute intersection de P avec une boule de rayon R_p dans \mathbb{R}^d contient la translation de p par un élément de \mathbb{R}^d .

Théorème 1.I.35 (Gottschalk,[GH55]). Le système dynamique (Ω_T, \mathbb{R}) est minimal (c-à-d tout les orbites sont denses) si et seulement si le pavage est répétitif.

Les pavages de Fibonacci, Thue-Morse (voir [FBF⁺02]) et Tribonacci (voir [CHM01]), entre autres, vérifient cette propriété dynamique.

1.6- Notions de supertuiles, couronnes et propriétés associées

On se donne une substitution σ sur un alphabet $\mathcal{A} = \{a_i, 1 \leq i \leq n\}$. Pour pouvoir étudier plus en détail cette substitution, on est amené à regarder des objets plus grands que les prototuiles, c'est l'objet de la définition suivante.

Définition 1.I.36 (n -supertuiles). Soit $n \in \mathbb{N}$, on appelle n -supertuile de type i le patch du pavage correspondant à $\sigma^n(a_i)$.

Dans l'étude des substitutions et des pavages qui en découlent, on a besoin non seulement de se concentrer sur une tuiles mais aussi celles qui l'entourent, c'est exactement l'objet des couronnes.

Définition 1.I.37 (couronnes). Soient P un pavage, $p \in P$ une tuile de P et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle 1 -couronne (ou plus simplement tuiles coloré) de p le patch de P contenant p et ses voisins (c'est-à-dire les tuiles ayant au moins un sommet commun la tuile considérée). On appelle n -couronne le patch de P contenant la $n - 1$ -couronne de p et toutes les tuiles voisines.

Avant de continuer on définit une notation supplémentaire. Afin d'éviter l'usage récurrent d'indice pour les lettre d'un mot autour de l'origine, on notera par exemple le mot $\dots a_{-1}b_0c_1 \dots$ par $\dots a.bc \dots$ signifiant que la lettre démarrant en l'origine 0 est la lettre b_0 .

Exemple 1.I.38 (voir Proposition 6.I.4 p.89). Pour le pavage de Fibonacci, on a exactement quatre 1-couronnes :

$$(a).a(b), (b).a(b), (a).b(a), (b).a(a)$$

où la tuile centrale est celle non-parenthésée.

On peut alors donner la propriété suivante dont la preuve est immédiate.

Proposition 1.I.39. Un pavage est de complexité locale finie si et seulement si pour tout entier n , il y a un nombre fini de n -couronnes.

Définition 1.I.40 (pavage à partir de couronnes). A tout pavage T , on peut lui associer un pavage T_{couronne} dont les tuiles sont les tuiles de T indexées suivant les 1-couronnes.

Remarque 1.I.41. Si T est de complexité locale finie alors T_{couronne} l'est également, par conséquent $\Omega_{T_{\text{couronne}}}$ est compacte.

Proposition 1.I.42. L'application

$$\Omega_T \rightarrow \Omega_{T_{\text{couronne}}}, T' \mapsto T'_{\text{couronne}}$$

est un homéomorphisme équivariant pour les actions de \mathbb{R} par translations.

Démonstration. Soit p un patch de T'_{couronne} . Soit p' le patch obtenu en prenant toutes les tuiles voisines de p en oubliant l'indexation. Alors p' est un patch de T' et l'image réciproque de $U(p, \varepsilon) = \{T'' \in \Omega_{T_{\text{couronne}}}; \exists t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\text{ tq } p \text{ patch de } T'' + t\} \subset \Omega_{T_{\text{couronne}}}$ est incluse dans $U(p', \varepsilon) \subset \Omega_{T'}$. L'application est donc continue.

L'application réciproque consiste à oublier l'indexation. L'équivariance est immédiate. \square

I.7- Forçage de bords

Avant d'à proprement parler de cette notion, il convient de remarquer sur des exemples des limitations que l'on peut rencontrer lorsque l'on veut construire un pavage comme point fixe d'une substitution. Commençons par regarder ce qu'il se passe lorsque l'on itère la substitution de Fibonacci, on obtient en commençant par a les séquences suivantes

$$a, ab, aba, abaab, abaababa, abaababaabaab, \dots$$

et en commençant par b

$$b, a, ab, abaab, abaababa, abaababaabaab, \dots$$

Remarquons que quelque soit la tuile de départ choisie, on se ramène au même cas car b devient une tuile a sous l'action de la substitution. Ainsi l'extension vers la droite sur la partie de \mathbb{R}_+ est bien définie.

En ce qui concerne par exemple la substitution de Thue-Morse, on se trouve dans le cas où l'on a deux choix d'extension vers la gauche selon que l'on commence par une tuile a ou une tuile b .

Malheureusement pour ces deux substitutions, on ne peut à priori pas étendre vers la gauche sans faire plusieurs hypothèses. Nous avons alors besoin de la notion de forçage de bords et de celle de mot bi-infini σ -admissible.

Définition 1.I.43 (forçage de bords [Kel95]). Soient $\mathcal{A} = \{a_i, 1 \leq i \leq n\}$ un alphabet et $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ une substitution. On dit que σ force les bords s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que deux n -supertuiles de même type aient même voisinage.

Remarque 1.I.44. Cela veut dire que si σ force les bords et que n est l'entier de la définition alors une $(n+k)$ -supertuile détermine toutes les k -supertuiles de son voisinage pour tout entier k .

Rappelons que l'on peut réécrire la substitution sur les couronnes en libellant en couronnes les images par la substitution des couronnes. De cette définition va intervenir une propriété centrale pour toute la suite.

Proposition 1.I.45 ([Sad08] p.28). Soient $\mathcal{A} = \{a_i, 1 \leq i \leq n\}$ un alphabet et $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ une substitution primitive. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^n = \sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma$ vue comme substitution sur les couronnes force les bords.

Ce qui nous donne pour les substitutions qui nous intéresse la propriété suivante dont la preuve sera donnée plus en avant de ce document.

Proposition 1.I.46.

- (i) La substitution de Fibonacci force les bords à l'ordre 2 sur les tuiles colorées (voir Proposition 6.I.6 p.90);
- (ii) La substitution de Thue-Morse force les bords à l'ordre 1 sur les tuiles colorées (voir Proposition 7.I.4 p.102);
- (iii) La substitution de Tribonacci force les bords à l'ordre 2 sur les tuiles colorées (voir Proposition 8.I.5 p.117).

Cette notion de forçage de bords nous permettra de construire des mots dits bi-infini σ -admissibles dont voici la définition.

Définition 1.I.47 (mot bi-infini σ -admissible). On dit que $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est un mot bi-infini σ -admissible si tout sous-mot fini ω_0 de ω est un sous-mot de $\sigma^n(a_1)$ pour un certain $n > 0$.

I.8- Mot fixe pour une substitution primitive

On commence par le théorème suivant.

Théorème 1.I.48 (existence de pavages autosimilaires,[Sad08]). Soit σ une substitution primitive, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que σ^n admette au moins un point fixe. On appelle ces points fixes, pavages autosimilaires.

Remarque 1.I.49. Ce théorème permet de montrer que Ω_σ , l'enveloppe associée qui sera abordée plus tard, est non vide.

Démonstration. Soit σ une substitution primitive. Nous allons construire un pavage géométrique fixe pour la substitution géométrique associée $\text{Geom}(\sigma)$. Donnons nous $a \in \mathcal{A}$, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que toute supertuile (symbolique) d'ordre n contienne une copie de a , par primitivité de la substitution. En notant \tilde{a} la prototuile géométrique de $\text{Geom}(\sigma)$ correspondant à a pour σ , alors pour n assez grand on peut alors supposer que toute n -supertuile géométrique \tilde{t} contient une copie de \tilde{a} dans son intérieur. Posons t_1 la réunion des tuiles de la supertuile et t_2 la copie de \tilde{a} que l'on a choisi à l'intérieur de la supertuile.

Si l'on trouve $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $t_1 - x = \lambda^n(t_2 - x)$ alors $t_1 - x$ sera l'origine de notre point fixe recherché car dans ces conditions la supertuile $t_1 - x$ sera le résultat de n applications de la substitution $\text{Geom}(\sigma)$ à $t_2 - x$.

Commençons par subdiviser t_2 en tuiles de plus petites tailles (via le facteur $\frac{1}{\lambda^n}$) suivant le même schéma selon lequel t_1 est subdivisée en tuile. Notons t_3 la sous-tuile de t_2 occupant la même place que t_2 dans t_1 .

En continuant le procédé, on obtient une suite généralisée $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-tuiles dont l'intersection est de diamètre 0 car $\lambda > 1$. Ainsi cette intersection est réduite à un point x . \square

Exemple 1.I.50.

- 1) Pour la substitution de Fibonacci, il suffit de prendre l'entier $n = 2$ et prendre le mot fixe provenant de la tuile colorée $(a).a(b)$ en lui appliquant σ^2 un nombre infini de fois ;
- 2) Pour la substitution de Thue-Morse, l'entier $n = 2$ convient et il suffit de prendre le mot provenant soit de la tuile colorée $(a).ab$ (on peut également prendre la couronne $(a).b(a)$) et l'on a appliqué la substitution σ^2 un nombre infini de fois ;
- 3) Pour la substitution de Tribonacci, il faut aller chercher l'ordre $n = 3$ et le mot provenant de la couronne $(a).a(b)$ auquel on applique σ^3 un nombre infini de fois.

I.9- Cas des substitutions de dimension 1

On va maintenant donner les définitions en rapport avec une substitution **primitive** $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ avec $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Rappelons qu'un mot bi-infini σ -admissible est un élément $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tel que tout sous-mot fini ω_0 de ω soit un sous-mot de $\sigma^m(a_i)$ pour un certain $m > 0$ et $i \in \{1, \dots, n\}$.

Remarque 1.I.51.

- 1) On peut se restreindre à $\sigma^m(a_1)$ car la substitution est supposée primitive ;

2) La notion de σ -admissibilité impose au mot ω de respecter les configurations interdites par la substitution.

Nous allons maintenant introduire la notion d'espaces des séquences.

Définition 1.I.52 (espace des séquences). On note par S_σ l'espace des séquences défini comme l'ensemble des mots bi-infini σ -admissibles.

Avant de parler de l'enveloppe d'une substitution nous allons introduire plusieurs notations. On rappelle que grâce à la notion de longueur on peut faire correspondre à toute lettre $a_k \in \mathcal{A}$ un compact I_k (de longueur $\ell(a_k)$). On notera alors $\text{Pav}(I_1, \dots, I_n)$ l'ensemble des pavages de \mathbb{R} dont les tuiles sont de type I_k . Réciproquement, soit $T \in \text{Pav}(I_1, \dots, I_n)$ on notera par $\text{Symb}(T)$ le mot bi-infini dans \mathcal{A}^* dont les lettres correspondent aux tuiles de T et où la lettre d'indice 0 correspond à la tuile de T contenant l'origine sans que celle-ci soit la borne supérieure de cette tuile (pour obtenir l'unicité de cette définition).

Définition 1.I.53 (enveloppe d'une substitution). Soit σ une substitution primitive, répétitive et de complexité locale finie. On note et définit l'enveloppe de σ comme

$$\Omega_\sigma = \{T \in \text{Pav}(I_1, \dots, I_n); \text{Symb}(T) \in S_\sigma\}.$$

A présent on va donner un théorème fondamental pour l'étude des substitutions.

Théorème 1.I.54 ([FBF⁺02],[Sad08]). Pour toute substitution primitive σ et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, les espaces Ω_σ et Ω_{σ^k} sont égaux pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$.

Démonstration. Commençons par remarquer que toute supertuile pour σ^k est une supertuile pour σ . Cela veut donc dire que l'on a $S_{\sigma^k} \subset S_\sigma$.

Pour l'autre inclusion il suffit de remarquer que si ω se trouve dans $\sigma^n(a_1)$ pour un certain n , alors ω est aussi dans les supertuiles de type a_1 d'ordre plus grand que n . En particulier ω se trouve dans les supertuiles d'ordre lk pour $l \in \mathbb{N}^*$ assez grand, ce qui implique $S_\sigma \subset S_{\sigma^k}$. \square

On va maintenant introduire la notion de reconnaissabilité (voir [Que87]).

Soit ω un mot fixe de \mathcal{A}^* . On définit alors un sous-ensemble E_1 de \mathbb{N} par

$$E_1 = \{0\} \cup \left\{ \left| \sigma(\omega_0 \cdots \omega_{p-1}) \right|, p \geq 1 \right\},$$

où $\left| \sigma(\omega_0 \cdots \omega_{p-1}) \right|$ désigne le nombre de lettre dans $\sigma(\omega_0 \cdots \omega_{p-1})$.

En remarquant que $\omega = \omega_0 \cdots \omega_p \cdots$ et que $\omega = \sigma(\omega_0) \cdots \sigma(\omega_p) \cdots$ par construction, alors un entier r est dans E_1 s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\omega_0 \cdots \omega_r = \sigma(\omega_0 \cdots \omega_k)$. La réciproque étant vraie par construction.

On peut alors donner la définition de substitution reconnaissable.

Définition 1.I.55 (substitution reconnaissable). On dit que σ est reconnaissable s'il existe un entier $K \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n \in E_1 \text{ et } \omega_n \cdots \omega_{n+K} = \omega_m \cdots \omega_{m+K} \implies m \in E_1$$

Remarque 1.I.56. Cette propriété permet de dire en regardant k lettres successives si ω_m est la première lettre d'un supertuile.

Proposition 1.I.57 ([Que87]). Les substitutions de Fibonacci, Thue-Morse et Tribonacci sont reconnaissables.

Le problème avec cette propriété est qu'elle est définie vers la « droite » et non bilatère. Or les mots dont nous avons besoin sont des mots bi-infini et donc nous devons utiliser la version plus faible introduite par [Mos92] et dont nous donnons la définition.

Définition 1.I.58 (reconnaissabilité bilatère). On dit que σ possède la *propriété de reconnaissabilité bilatère* s'il existe $L > 0$ tel que

$$n \in E_1 \text{ et } \omega_{n-L}\omega_{n-L+1} \cdots \omega_{n+L} = \omega_{m-L} \cdots \omega_{m+L} \implies m \in E_1$$

Remarque 1.I.59. La propriété de reconnaissabilité bilatère permet de découper un pavage en supertuile de manière unique.

On a alors la propriété suivante.

Proposition 1.I.60 (Mossé,[Mos92]). *Toute substitution primitive apériodique possède la propriété de reconnaissabilité bilatère.*

Remarque 1.I.61. Ainsi les substitutions de Fibonacci, Thue-Morse et Tribonacci sont reconnaissables bilatères.

Une conséquence de la reconnaissabilité est le théorème suivant.

Théorème 1.I.62 (Solomyak,[Sol98]). *Si σ est un substitution primitive et que Ω_σ contient au moins un élément non périodique, alors tout élément de Ω_σ est non périodique et σ s'étend sur Ω_σ en un homéomorphisme encore noté $\tilde{\sigma} : \Omega_\sigma \rightarrow \Omega_\sigma$.*

On peut alors donner un théorème liant Ω_T et Ω_σ .

Théorème 1.I.63 ([Sad08]). *Soit σ un substitution primitive et si T est un élément de Ω_σ , alors $\Omega_T = \Omega_\sigma$.*

Remarque 1.I.64. En notant pour un mot bi-infini $\omega \in \mathcal{A}^*$, $\text{Geo}(\omega)$ le pavage euclidien (par utilisation de la longueur) nous avons que pour tout élément $\omega \in S_\sigma$ que

$$\Omega_{\text{Geo}(\omega)} = \Omega_\sigma$$

De plus le fait que $\Omega_{\sigma^k} = \Omega_\sigma$ pour tout entier k implique qu'en trouvant un mot fixe ω_0 (voir Théorème 1.I.48 page 9) pour une puissance de la substitution, nous avons

$$\Omega_{\text{Geo}(\omega_0)} = \Omega_\sigma.$$

1.10- Transversale canonique

Définition 1.I.65 (transversale canonique). On appelle *transversale canonique* pour la substitution σ l'ensemble

$$\Xi = \{T \in \Omega_\sigma; 0 \text{ est une borne d'une tuile de } T\}.$$

Proposition 1.I.66. *Si σ est une substitution apériodique répétitive et de complexité locale finie, Ξ est un ensemble de Cantor.*

Démonstration. Soit p un patch on pose

$$\Xi_p = \{T \in \Xi, p \subset T\}$$

Alors les Ξ_p forment une base de compacts ouverts de Ξ . Ainsi Ξ est totalement discontinu.

En fixant un patch p , le fait que σ soit répétitive implique le fait qu'il existe une infinité de pavages contenant ce patch. Par conséquent Ξ est sans point isolé donc est un Cantor. \square

De plus au sens des groupoïdes (voir [Ren80]), Ξ permet de définir une transversale au groupoïde $\Omega_\sigma \rtimes \mathbb{R}$ (ce qui nous permettra de construire une équivalence Morita pour la C^* -algèbre d'un pavage hyperbolique).

Il convient de remarquer que l'application shift sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ induit alors une application $\mathfrak{s} : \Xi \rightarrow \Xi$ correspondant à la restriction du shift sur la transversale.

Nous pouvons introduire la notion de numération.

Définition 1.I.67 (numération). On note par $\Delta : \Xi \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application de *numération* définie pour tout $(T, n) \in \Xi \times \mathbb{Z}$ comme l'unique réel $\Delta(T, n)$ satisfaisant

$$T - \Delta(T, n) = \mathfrak{s}^n(T).$$

Remarque 1.I.68.

1. L'unicité provient de l'apériodicité de la substitution. L'application Δ est localement constante donc continue.
2. En notant pour $T \in \Xi$ par n_T le nombre de tuiles obtenu en substituant la tuile en l'origine (ou encore si $T_0 = a_i$, $n_T = \text{Card } \sigma(a_i)$) L'application Δ vérifie les égalités suivantes :

(a)

$$\Delta(\mathfrak{s}(T), 1) = \Delta(T, 2) - \Delta(T, 1);$$

(b)

$$\Delta(\sigma(\mathfrak{s}(T)), 1) = \Delta(\sigma(T), n_T + 1) - \Delta(\sigma(T), n_T);$$

(c)

$$\lambda \Delta(T, 1) = \Delta(\sigma(T), n_T);$$

(d)

$$\Delta(\mathfrak{s}^n(T), -n) = -\Delta(T, n).$$

On peut alors donner une propriété utile pour le calcul de la cohomologie des espaces de pavages.

Proposition 1.I.69 ([Sad08]). *Si le pavage T est répétitif, alors Ω_T est un espace connexe.*

Démonstration. Soit $f : \Omega_T \rightarrow \{0, 1\}$ continue. Ainsi f est invariante par l'action de \mathbb{R} . Par conséquent $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont des fermés invariants et f est constante par minimalité d'après le Théorème 1.I.35. \square

Nous pouvons également introduire l'application

$$\mathcal{A}_\mathfrak{s} : \Xi \times \mathbb{R} \rightarrow \Xi \times \mathbb{R}, (T, t) \mapsto \mathcal{A}_\mathfrak{s}(T, t) = (\mathfrak{s}(T), t - \Delta(T, 1)). \quad (1.1)$$

On remarque que $\mathcal{A}_\mathfrak{s}^n(T, t) = (\mathfrak{s}^n(T), t - \Delta(T, n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En particulier on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(T, n) = \infty$ uniformément en T . L'action de \mathbb{Z} sur $(\Xi \times \mathbb{R})$ définie par $\mathcal{A}_\mathfrak{s}^n$ est propre et cocompact : en notant pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\Xi_{p_i}^0$ l'ensemble des pavages de $T \in \Xi$ dont la première tuile T_0 est de type p_i , le domaine

$$\bigsqcup \Xi_{p_i}^0 \times [0, \ell(p_i)]$$

est un domaine fondamental compact. On en déduit alors que $(\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_\mathfrak{s}$ est compact.

Proposition 1.I.70. *Les espaces $(\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_\mathfrak{s}$ et Ω_σ sont homéomorphes.*

Démonstration. Soit $\Phi : (\Xi \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega_\sigma, (T, t) \mapsto T + t$. L'application Φ est continue et passe au quotient car

$$\begin{aligned}\Phi(\mathcal{A}_g(T, t)) &= \Phi(s(T), t - \Delta(T, 1)) \\ &= s(T) + t - \Delta(T, 1) \\ &= T + t \\ &= \Phi(T, t).\end{aligned}$$

Notons $\bar{\Phi}$ l'application induite. Cette application est surjective car si $T' \in \Omega_\sigma$, il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $T' + t' = \tilde{T} \in \Xi$. Dans ces conditions nous avons $\bar{\Phi}([T', t']) = \tilde{T}$.

En ce qui concerne l'injectivité si $\bar{\Phi}([T, t]) = \bar{\Phi}([T', t'])$ alors $T = T' + (t' - t)$ et comme $T, T' \in \Xi$, nécessairement $t' - t = \Delta(T, n)$ et $T = \mathfrak{g}^n(T')$ pour un certain entier n . Et donc $[T, t] = [T', t']$. L'espace $(\Xi \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}$ est compact, alors $\bar{\Phi}$ est un homéomorphisme. \square

L'action de \mathbb{R} sur $(\Xi \times \mathbb{R})$ triviale sur Ξ et par translation sur \mathbb{R} passe au quotient car

$$(s(T), t - \Delta(T, 1) + s) = \mathcal{A}_g(T, t + s).$$

Proposition 1.I.71. *Les deux systèmes dynamiques $(\Omega_\sigma, \mathbb{R})$ et $((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g, \mathbb{R})$ sont topologiquement conjugués.*

Démonstration. En gardant les mêmes notations pour $\bar{\Phi}$, nous avons enfin que $\Phi(s \cdot [T, t]) = \Phi([T, t + s]) = T + (t + s) = s \cdot (T + t) = s \cdot \Phi([T, t])$. \square

I.11- Probabilité invariante sur Ξ

Nous allons introduire les mesures de probabilités ergodiques associées aux substitutions. Nous allons décrire comment construire une telle mesure sur Ξ par limite inductive.

On rappelle que la substitution est adossée à la famille de couronnes $\{p_i, 1 \leq i \leq m\}$ et l'on note $M_1^\sigma = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ la matrice de la substitution sur les couronnes.

On remarque que $\Xi_{p_i}^0$ décrit l'ensemble des éléments de Ξ dont la tuile d'indice 0 est du type p_i . Dans ces conditions nous avons naturellement

$$\Xi = \bigsqcup_{1 \leq i \leq m} \Xi_{p_i}^0.$$

Considérons le vecteur propre associé à la valeur propre de Perron-Frobenius de la matrice de M_1^σ s'écrit sous la forme

$$x = (x_1, \dots, x_m).$$

En normalisant ce vecteur pour la norme $\|x\|_1 = \sum_{1 \leq i \leq m} |x_i|$, on définit alors la mesure de probabilité μ sur Ξ de la façon suivante : Soient t_2 une n -supertuile et t_1 une tuile incluse dans t_2 . Une paire (t'_1, t'_2) où t'_1 est une tuile et t'_2 est une supertuile est dite de type (t_1, t_2) s'il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $t_1 + s = t'_1$ et $t_2 + s = t'_2$. Pour $T \in \Xi^0$, on note par T_n la n -supertuile contenant T_0 . On définit

$$\Xi_{t_1, t_2}^n = \{T \in \Xi, (T_0, T_n) \text{ soit de type } (t_1, t_2)\}$$

On pose

$$\mu(\Xi_{t_1, t_2}^n) = \frac{1}{\lambda^n} \frac{x_i}{\|x\|_1}$$

où t_2 est une n -supertuile de type p_i .

En remarquant que nous avons l'égalité

$$\Xi_{t_1, t_2}^n = \bigsqcup_{t_3} \Xi_{t_1, t_3}^{n+1}.$$

où t_3 parcourt l'ensemble des $n+1$ tuiles contenant t_2

Si t_2 est de type p_i on a alors,

$$\mu \left(\bigsqcup_{t_3} \Xi_{t_1, t_3}^{n+1} \right) = \sum_{j=1}^n m_{ij} \frac{x_j}{\lambda^{n+1}} = \frac{\lambda x_i}{\lambda^{n+1}} = \mu(\Xi_{t_1, t_2}^n).$$

Donc la mesure respecte la limite inductive. On peut se référer à [Mou09] pour la preuve de l'invariance de cette mesure pour l'action du shift et de l'unique ergodicité.

II- Pavages hyperboliques

Le but de cette partie est d'introduire la notion de pavages hyperboliques qui sont les objets d'étude de cette thèse.

II.1- Notations

Commençons par les notations que nous utilisons.

Dans tout ce qui suit, on notera par \mathbb{H}_2 le demi-plan de Poincaré muni de sa métrique $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. On se donne aussi deux groupes N et G agissant sur ce demi-plan hyperbolique et définis respectivement par

$$N = \{ \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2, z \mapsto z + t, t \in \mathbb{R} \} \cong \mathbb{R}$$

et

$$G = \{ \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2, z \mapsto az + b, a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R} \} \cong N \rtimes \mathbb{R}_+^*.$$

Le groupe N n'est autre que le groupe des translations sur ce demi-plan hyperbolique et G celui des isométries affines positives sur ce même objet.

Notons par ailleurs que ces deux groupes sont de fait deux sous-groupes du groupe des isométries du demi-plan hyperbolique.

II.2- Pavages hyperboliques sur \mathbb{H}_2

On va fixer ici toutes les notions relatives aux pavages hyperboliques introduit dans la thèse de Samuel Petite [Pet05].

Définition 1.II.1 (tuiles hyperboliques). On appelle *tuile hyperbolique* t un polygone convexe hyperbolique non vide de \mathbb{H}_2 dont les sommets sont reliés par des géodésiques pour la métrique hyperbolique usuelle.

Il faut remarquer que l'on impose la notion de convexité à des fins de construction du pavage via des substitutions.

Donnons à présent la définition d'un pavage hyperbolique.

Définition 1.II.2 (pavage hyperbolique). On appelle *pavage hyperbolique de \mathbb{H}_2* une collection de tuiles hyperbolique $P = \{p_i, i \in I\}$ satisfaisant :

- (i) les tuiles ne se rencontrent que bord à bord sans chevauchement ni décalage ;
- (ii) $\bigsqcup p_i = \mathbb{H}_2$.

On remarque que les deux groupes N et G agissent sur les pavages hyperboliques et comme dans le cas euclidien, on peut donner la définition de pavage de type G -fini.

Définition 1.II.3 (pavage hyperbolique de type G -fini). On dit qu'un pavage hyperbolique P est de *type G -fini* s'il existe une famille fine $\{p_1, \dots, p_n\}$ de tuiles hyperboliques telle que pour toute tuile $t \in P$ il existe un unique indice $i \in [1; n]$ et il existe $g \in G$ satisfaisant $t = g \cdot p_i$.

Dans toute la suite de ce document on ne s'intéressera seulement aux pavages hyperboliques de type G -fini.

Donnons un exemple que l'on peut retrouver par exemple dans [OP11]. Commençons par décrire la protoile. Les cinq sommets sont respectivement donnés par les points d'affixes

$$i, i + 1, i + 2, 2i + 2, 2i$$

De plus les arêtes sont des géodésiques pour la métrique hyperbolique $\frac{dx^2+dy^2}{y^2}$. On obtient alors le pavage suivant :

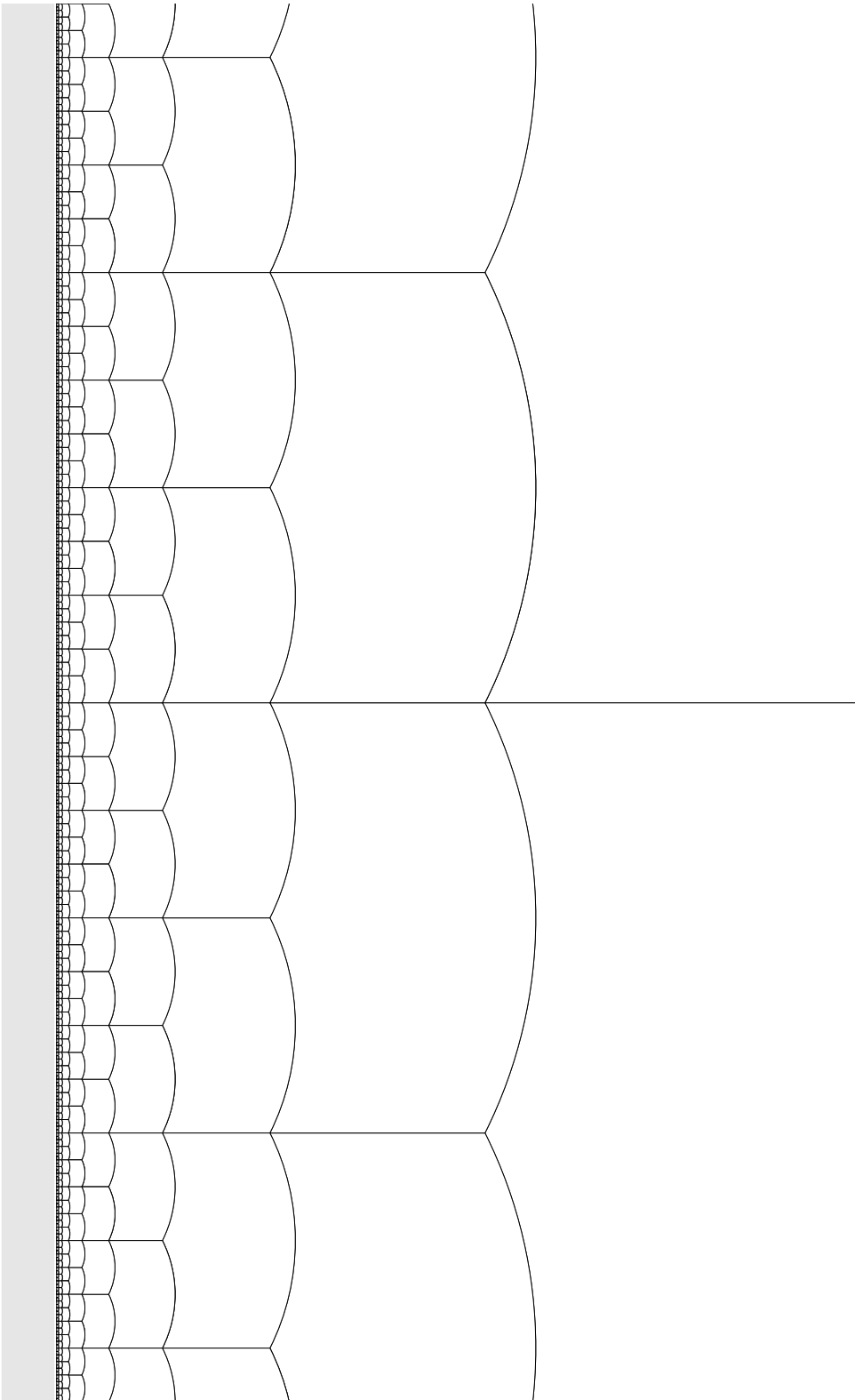


FIGURE 1.4 – Pavage de l'article [OP11]

III- Construction de pavages de Penrose hyperboliques à partir de substitutions

Le but de cette partie est d'expliquer comment à partir de substitutions (en dimension 1), on peut obtenir des pavages de Penrose hyperboliques. Ces objets ont déjà été introduit dans le thèse de Björn Monson [Mon17], où les substitutions sont vues comme des automorphismes de groupes libres. Nous allons donner une autre description de ces pavages.

III.1- Remarques concernant l'article [OP11]

L'idée derrière l'utilisation d'une substitution pour construire un pavage de Penrose hyperbolique vient de la constatation concernant le pavage décrit page précédente.

On remarque qu'en se focalisant sur une seule ligne de tuile, alors à translation près, il n'y a qu'un seul type de tuile que l'on peut noter par exemple a . On remarque alors que pour passer à la ligne située en dessous chaque tuile a donne deux tuiles a mais dont la taille est réduite d'un facteur $\frac{1}{2}$. On peut donc légitimement considérer la substitution symbolique suivante donnée par l'alphabet

$$\mathcal{A} = \{a\}$$

et

$$\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$$

définie par $\sigma(a) = aa$.

Par essence même, le facteur d'expansion associé est 2 et le (seul) mot bi-infini σ -admissible est le mot $\omega = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $a_k = a, \forall k \in \mathbb{Z}$. De plus on a évidemment $\sigma(\omega) = \omega$.

En fixant de manière arbitraire à la lettre une longueur égale à 1, on peut alors construire une tuile hyperbolique On peut maintenant représenter ω et $\sigma(\omega)$ via les prototiles hyperboliques ce qui nous donne



FIGURE 1.5 – Prototile pavage hyperbolique de [OP11]

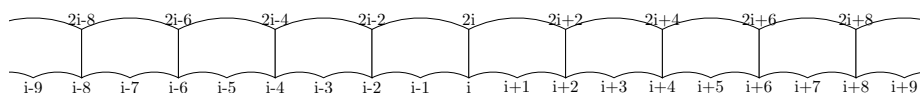


FIGURE 1.6 – Début de la ligne du pavage [OP11]

Pour retrouver le pavage de l'article il suffit d'empiler les lignes successivement en les modifiant pour descendre d'un facteur $\frac{1}{2}$ et pour remonter d'un facteur 2 (qui n'est autre que le facteur associé à σ^{-1} en un certain sens). On obtient ainsi un pavage apériodique (pour l'action de N).

Ainsi se pose légitimement la question de remplacer la substitution triviale σ par une autre, par exemple celle de Fibonacci. Cependant pour pouvoir faire la même construction, on a besoin de trouver un mot bi-infini σ -admissible fixe par la substitution.

III.2- Construction du pavage hyperbolique provenant d'une substitution

Dans la pratique pour décrire le ou les points fixes en dimension 1, il est plus facile de combiner cette notion avec celle du forçage de bords sur les couronnes. En effet, si l'on prend l'exemple du pavage de

Fibonacci, on remarque que la substitution ainsi que toutes ses puissances ne forcent les bords en partant des prototiles que vers la droite. Si l'on part de a , en appliquant la substitution on obtient ab , puis aba puis $abaab$ et ainsi de suite. On peut démontrer que la n ième itération t_n s'écrit $t_{n-1}t_{n-2}$ par concaténation d'où le nom de Fibonacci.

L'une des clés pour construire simplement ces pavages est de pouvoir décrire un point fixe de la substitution (peu importe la puissance σ^n choisi). D'où l'intérêt des pavages autosimilaires dont l'existence est donnée par le Théorème 1.I.48. L'idée est alors de décrire précisément un tel pavage et ensuite comment se déplacer verticalement dans le pavage.

Avant de continuer on rappelle la notation

$$\cdots a_1 \cdot a_0 a_1 \cdots$$

où « . » indique l'origine, ici 0 dans \mathbb{R} .

Si maintenant, on part d'une couronne pour le pavage de Fibonacci, par exemple

$$(b) \cdot a(b)$$

en appliquant σ^2 (pour obtenir un mot fixe), on obtient

$$(ab) \cdot ab(ab)$$

ce qui nous donne à l'étape suivante

$$(abaab) \cdot abaab(abaab).$$

On peut alors décrire le centre du mot fixe ω pour σ^2 que l'on obtient :

$$\cdots b \cdot ab \cdots$$

la suite s'obtenant en substituant.

On remarque tout de même que ce mot fixe pour σ^2 est conjugué par σ au mot $\sigma(\omega)$ dont le centre est décrit par

$$\cdots a \cdot ab \cdots$$

On peut maintenant décrire la construction d'un pavage de Penrose hyperbolique issu d'une substitution :

1) Description d'un mot fixe bi-infini σ -admissible ω ainsi que son centre (si possible) et de ses conjugués par σ . On obtient un ensemble de mots bi-infinis σ -admissibles $\{\omega, \sigma(\omega), \dots, \sigma^{k-1}(\omega)\}$ où l'indice k choisi minimal provient du Théorème 1.I.48.

2) Définir les prototiles hyperboliques en associant tout d'abord des longueurs aux lettres puis en associant à chaque lettre son image par σ comme par exemple dans le cas de Fibonacci qui nous donne deux prototiles hyperboliques :

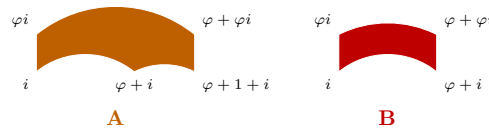


FIGURE 1.7 – Prototiles Fibonacci

3) Mettre la ligne originelle (celle dont les sommets supérieurs ont la partie imaginaire de leurs affixes exactement i) en tuiles hyperboliques suivant le mot ω et en appliquant σ^{k-1} pour monter d'une ligne et en appliquant σ pour descendre d'une ligne.

On obtient pour Fibonacci en notant par $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or,

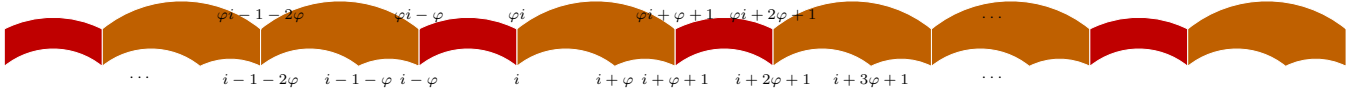


FIGURE 1.8 – Partie d'une ligne du pavage de Penrose hyperbolique issu de Fibonacci

IV- Enveloppe d'un pavage hyperbolique et propriétés

Nous allons maintenant étudier la partie dynamique des pavages puisque nous avons introduit ci-avant deux groupes notés N et G qui agissent sur les pavages. Définissons une métrique sur le groupe G . Soit $g : z \mapsto az + b$, et regardons g comme une homographie sur \mathbb{H}_2 . Sa forme matricielle est alors

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une norme sur G est alors donnée par la norme d'opérateur sur les matrices. Pour $g \in G$, on notera par $B_\alpha^G(g)$ la boule ouverte de centre g et de rayon α pour cette norme sur G .

Nous noterons également par $B_r^{\mathbb{H}_2}(i)$ la boule pour la métrique hyperbolique centrée au point d'affixe $z = i$ de rayon r .

IV.1- Enveloppe continue d'un pavage hyperbolique

On va dans cette partie se restreindre aux pavages hyperboliques de \mathbb{H}_2 de type G -fini. On peut comme dans le cas euclidien introduire la notion de patch hyperbolique.

Définition 1.IV.1 (action de G sur un pavage P). Soit P un pavage hyperbolique de \mathbb{H}_2 , écrit sous la forme $P = \{P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ avec P_i ses tuiles hyperboliques. Soit $g \in G$ on note et définit l'action de g sur P comme le pavage noté $g \cdot P = \{g \cdot P_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ où $g \cdot P_i$ est la transformation de la tuile P_i par l'homographie g .

Définition 1.IV.2. On appelle *patch* hyperbolique de P , une réunion finie et connexe de tuile (hyperbolique) de P . On appelle G -patch hyperbolique la classe modulo G d'un patch p .

On peut alors donner la définition de l'enveloppe continue d'un pavage.

Définition 1.IV.3 (enveloppe continue). L'*enveloppe continue* d'un pavage hyperbolique P , notée X_P^G est l'ensemble des pavages hyperboliques P' tels que tout patch p' de T est un G -patch de P .

Remarque 1.IV.4. De manière équivalente, X_P^G est l'ensemble des pavages hyperboliques qui coïncident localement avec P à $g \in G$ translation près.

On peut alors donner une base pour la topologie de X_P^G .

Théorème 1.IV.5. L'espace X_P^G est compact pour la topologie des pavages donnée par la base de voisinages suivantes :

$$U(P, \varepsilon, r) = \{P' \in X_P^G; \exists g \in B_\varepsilon^G(\text{id}_G), g \cdot P' \cap B_r^{\mathbb{H}_2}(i) = P \cap B_r^{\mathbb{H}_2}(i)\}, \quad \varepsilon > 0, r > 0.$$

Définition 1.IV.6 (métrique associée à X_P^G , [BG03]). Soient P_1 et P_2 deux éléments de X_P^G , on pose alors

$$A(P_1, P_2) = \left\{ \varepsilon \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]; \exists g \in B_\varepsilon^G(\text{id}_G), P_1 \cap B_{\varepsilon^{-1}}^{\mathbb{H}_2}(i) = g \cdot P_2 \cap B_{\varepsilon^{-1}}^{\mathbb{H}_2}(i) \right\},$$

et on définit

$$d(P_1, P_2) = \begin{cases} \inf A(P_1, P_2), & \text{si } A(P_1, P_2) \neq \emptyset \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut remarquer que cela nous donne bien une métrique puisque la réflexivité est donné en remarquant que $P_1 \cap \mathcal{B}_{\varepsilon^{-1}}^{\mathbb{H}_2}(i) = g \cdot P_2 \cap \mathcal{B}_{\varepsilon^{-1}}^{\mathbb{H}_2}(i)$ est équivalent à $g^{-1} \cdot P_1 \cap \mathcal{B}_{\varepsilon^{-1}}^{\mathbb{H}_2}(i) = P_2 \cap \mathcal{B}_{\varepsilon^{-1}}^{\mathbb{H}_2}(i)$. Le fait que $d(P_1, P_2) = 0$ si et seulement si $P_1 = P_2$ est trivial tandis que l'inégalité triangulaire provient du fait que l'infimum satisfait cette propriété. Comme la substitution est reconnaissable, une base de la topologie est également donnée (en ne regardant qu'une ligne du pavage) par

$$U(\tilde{P}, r, \varepsilon) = \{P' \in G \cdot P; \exists g \in \mathcal{B}_\varepsilon(\text{id}_G) \text{ tq } g \cdot P' \cap]i - r, i + r[= \tilde{P} \cap]i - r, i + r[\},$$

où \tilde{P} est un élément de $G \cdot P$, $\varepsilon > 0$, $r > 0$ et $\mathcal{B}_\varepsilon(\text{id}_G) = \{g \in G, \|g - \text{id}_G\| < \varepsilon\}$.

Étant donné que G agit continument sur P par $g \cdot P = \{g \cdot P_i\}$ où P_i désigne les tuiles hyperboliques de P , on peut alors étendre l'action de G sur X_P^G par continuité et dans ces conditions X_P^G admet une orbite dense $G \cdot P$.

Remarque 1.IV.7. De la même manière, on introduit l'enveloppe du pavage P sous l'action du groupe N que l'on note X_P^N .

Enfin, on peut introduire la définition de répétitivité pour une pavage hyperbolique.

Définition 1.IV.8 (répétitivité hyperbolique). On dit que P est *répétitif* si pour tout patch hyperbolique p de P , il existe $R(p) > 0$ tel que $P \cap \mathcal{B}_{R(p)}^{\mathbb{H}_2}(x)$ contient pour tout $x \in \mathbb{H}_2$ l'image de p par un élément de G .

On peut alors donner le théorème de Gottschalk dans le cadre hyperbolique.

Théorème 1.IV.9 (Gottschalk,[GH55]). *Le système dynamique (X_P^G, G) est minimal, c-à-d toutes les orbites sont denses, si et seulement si P est répétitif.*

IV.2- Lien entre les enveloppes dans le cas d'un pavage par substitution

Le but de cette partie est donner le lien entre les deux enveloppes Ω_{σ^k} et celle de P pour l'action de N . La substitution étant un homéomorphisme de l'enveloppe Ω_σ . On peut reproduire construction de la sous-section 2 pour tout pavage de l'enveloppe. En notant pour tout élément $\omega \in \Omega_\sigma$ par $\text{Hyp}(\omega)$ le pavage hyperbolique associé comme dans sous-section 2, on obtient alors une application

$$\Omega_\sigma \rightarrow X_P^G, \omega \mapsto \text{Hyp}(\omega).$$

Proposition 1.IV.10. *L'application Hyp est :*

1. continue ;
2. \mathbb{R} -équivariante ;
3. injective
4. l'image est X_P^N ;

Démonstration. L'injectivité est obtenue en prenant l'intersection avec la droite réelle. L'équivariance est obtenue par construction.

Montrons la continuité de cette application. Soit $\varepsilon > 0$ et posons $P_1 = \text{Hyp}(\omega)$. Il existe alors $\alpha > 0$ et k un entier minimal tels que

$$\mathcal{B}_{\varepsilon^{-1}}^{\mathbb{H}_2}(i) \subset]i\lambda^{-k}, i\lambda^k[\times] - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} [.$$

Il existe $\alpha' < \alpha$ tel que pour tout $\ell \in \{1, \dots, k\}$ on ait

$$U(\omega, \alpha') \subseteq \sigma^\ell U(\sigma^{-\ell}(\omega), \alpha).$$

Si $\omega' \in U(\omega, \alpha')$, alors $\sigma^{-\ell}(\omega') \in U(\sigma^{-\ell}\omega, \alpha)$ c-à-d il existe $t_\ell \in \mathbb{R}$ avec $|t| < \alpha$ tel que

$$(\sigma^{-\ell}(\omega') - t_\ell) \cap] - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} [= \sigma^{-\ell}(\omega) \cap] - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} [$$

Ainsi quitte à prendre α petit, on obtient l'unicité des t_ℓ avec $t_\ell = \frac{1}{\lambda} t_{\ell-1}$. Donc

$$\text{Hyp}(\omega') \in U(P_1, \varepsilon).$$

Le fait que l'image soit X_P^N provient de la continuité et l'orbite de P est dans X_P^N qui est compact. \square

Remarque 1.IV.11. Par construction du pavage l'action du facteur d'expansion λ préserve l'enveloppe X_P^N . Modulo l'identification de la Proposition 1.IV.10, l'homéomorphisme $\sigma : \Omega_\sigma \rightarrow \Omega_\sigma$ correspond à l'action de λ sur X_P^N .

Nous avons vu dans la partie sur les pavages euclidiens l'existence dans les conditions que nous nous somme fixées, d'une transversale canonique Ξ pour Ω_σ . De plus nous avons rappelé que sous ces conditions que Ξ est un ensemble de Cantor. Tout ce que nous avons établi pour le cas euclidien reste valable dans le cas des pavages hyperboliques que nous considérons. On rappelle que \mathcal{A}_g est l'application sur $\Xi \times \mathbb{R}$ est donnée par

$$\mathcal{A}_g(P', t) = (g(P'), t - \Delta(P', 1)), \quad \forall P' \in \Xi, \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus l'action de \mathbb{R} sur la suspension est donnée par

$$t \cdot (\tilde{P}, s) = (\tilde{P}, s + t), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall \tilde{P} \in \Xi.$$

Corollaire 1.IV.12. On a un isomorphisme équivariant entre

$$(\Xi \times \mathbb{R}) / \mathcal{A}_g \rightarrow X_P^N, (\omega, t) \mapsto [\text{Hyp}(\omega), t].$$

Dans ces conditions, les systèmes dynamiques (X_P^N, N) et $((\Xi \times \mathbb{R}) / \mathcal{A}_g, \mathbb{R})$ sont topologiquement conjugués.

V- Coloriage d'un pavage hyperbolique

L'action de G n'étant pas libre nous utiliserons un coloriage afin de remédier à cette situation.

Définition 1.V.1 (coloriage d'un pavage hyperbolique). Soit P un pavage de Penrose hyperbolique issu d'un substitution de dimension un. En écrivant P sous la forme $(P_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où P_i est une ligne de niveau, on appelle *coloriage* par r couleurs, un suite $c \in \{1, \dots, r\}^{\mathbb{Z}}$. Le pavage hyperbolique colorié par c issu de P est noté par $P(c) = (\text{col}(P_i, c_{-i}))_{i \in \mathbb{Z}}$ où col est l'application qui colorie la ligne P_i par la couleur c_{-i} .

On munit l'ensemble des coloriages de la topologie produit. Cet espace est compact et est métrisable pour la métrique définie par

$$d(c^1, c^2) = \begin{cases} r^{-\inf\{n \in \mathbb{N}; c_n^1 \neq c_n^2 \text{ ou } c_{-n}^1 \neq c_{-n}^2\}} & \text{si l'ensemble n'est pas vide} \\ 0 & \text{si l'ensemble précédent est vide} \end{cases}$$

Comme dans le cas non colorié, on peut définir de la même manière l'enveloppe $X_{P(c)}^G$ comme l'ensemble des pavages coloriés suivant les couleurs de c dont tout patch est un G -patch pour $P(c)$. Nous obtenons un système $(X_{P(c)}^G, G)$ et l'espace $X_{P(c)}^G$ est compact pour la topologie définie sur X_P^G .

Afin de pouvoir parler d'action libre, introduit alors le shift sur le coloriage noté s .

Définition 1.V.2 (shift pour les coloriage). Soit un coloriage par r couleurs, on définit le *shift* sur les coloriages noté \mathbf{s} par

$$\mathbf{s} : \{1, \dots, r\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{1, \dots, r\}^{\mathbb{Z}}, (c_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \mathbf{s}((c_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (c_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Définition 1.V.3 (couleur apériodique). On dit qu'une couleur c est *apériodique pour le shift* \mathbf{s} si $\mathbf{s}^k(c) = c$ si et seulement si $k = 0$.

Cela nous donne une action de \mathbb{Z} sur les coloriages par l'application \mathbf{s} et si c est apériodique pour le shift \mathbf{s} , alors l'action de G sur $P(c)$ est libre ainsi que sur $X_{P(c)}^G$.

Proposition 1.V.4 ([Que87] section 4.2 p.97). Soit $c \in \{1, \dots, r\}^{\mathbb{Z}}$ un coloriage apériodique pour le shift \mathbf{s} . Alors l'espace

$$\mathcal{Z}_c = \overline{\{\mathbf{s}^k(c), k \in \mathbb{Z}\}}^{\|\cdot\|_c}$$

est un espace de Cantor. De plus \mathbf{s} s'étend par uniforme continuité en une application encore notée \mathbf{s} sur \mathcal{Z}_c .

On peut maintenant donner une propriété essentielle de la coloration.

Proposition 1.V.5. Le coloriage d'un pavage vérifie les propriétés suivantes :

1. l'application

$$\mathfrak{C} : X_P^N \times \mathcal{Z}_c \rightarrow X_{P(c)}^G, (P', c') \mapsto P'(c')$$

est bien définie et continue ;

2. Nous avons pour tous $P' \in X_P^N$, $\tau \in \mathbb{R}$ et $c' \in \mathcal{Z}_c$,

$$\mathfrak{C}(P' + \tau, c') = P'(c') + \tau;$$

3. Pour tous $P' \in X_P^N$ et tous $c' \in \mathcal{Z}_c$,

$$P'(\mathbf{s}^n(c')) = \lambda^n \cdot \left(\left(\frac{1}{\lambda^n} \cdot P' \right)(c') \right).$$

Démonstration. Le point 2 est vérifié car le coloriage est verticale. Le troisième point provient du fait que

$$\lambda \cdot (P(c')) = (\lambda \cdot P)(\mathbf{s}(c'))$$

et donc

$$\lambda^n \cdot \left(\left(\frac{1}{\lambda^n} \cdot P' \right)(c') \right) = \left(\lambda^n \frac{1}{\lambda^n} \cdot P' \right)(\mathbf{s}^n(c')) = P'(\mathbf{s}^n(c')).$$

Montrons que l'application est bien définie. Montrons que $P'(c')$ est dans $X_{P(c)}^G$ pour tout $(P', c') \in X_P^N \times \mathcal{Z}_c$. Soit p un patch de $P'(c')$. Par définition de \mathcal{Z}_c , alors p est un patch de $P'(\mathbf{s}^n(c)) = \lambda^n \cdot \left(\left(\frac{1}{\lambda^n} \cdot P' \right)(c) \right)$ pour un certain entier n . En particulier p est un G -patch de $\frac{1}{\lambda^n} \cdot P'(c)$. De plus puisque $\left(\frac{1}{\lambda^n} \cdot P' \right) \in X_P^G$, alors $P'(c)$ et $P(c)$ ont même G -patch. L'application de coloriage est bien à valeurs dans $X_{P(c)}^G$ par définition des enveloppes de pavages hyperboliques.

On a pour tout $0 < \varepsilon < 1$, $r > 0$,

$$\mathfrak{C}^{-1}(U(P(c), r, \varepsilon) \subseteq U(P, r, \varepsilon) \times U(c, k_\varepsilon)$$

où k_ε est le plus petit entier tel que $]\varepsilon, \varepsilon^{-1}[\subseteq]\lambda^{-k_\varepsilon}, \lambda^{k_\varepsilon}[$ et l'application est continue. □

Remarque 1.V.6. On remarque, en rappelant que m désigne l'entier minimal donné Théorème 1.I.48 sur les pavages autosimilaire, que l'on a l'égalité

$$(z \mapsto \lambda^m z) \cdot (P(c)) = P(\mathbf{s}^m(c)),$$

mais $(z \mapsto \lambda z) \cdot (P(c)) \neq P(\mathbf{s}(c))$ en général car $m \neq 1$ (contrairement au pavage traité dans l'article [OP11]).

Le théorème de Gottschalk s'appliquant au système dynamique $(\mathcal{Z}_c, \mathbf{s})$ celui-ci est donc minimal si et seulement si c est apériodique. On termine cette partie par un lemme.

Lemme 1.V.7 (voir [OP11]). *Le système dynamique $(X_{P(c)}^G, G)$ est minimal si et seulement si $(\mathcal{Z}_c, \mathbf{s})$ est minimal.*

Démonstration. Si le système dynamique $(\mathcal{Z}_c, \mathbf{s})$ est minimal alors le coloriage c est répétitive. Le pavage P étant répétitif alors $P(c)$ l'est. Réciproquement si $(X_{P(c)}^G, G)$ est minimal, alors $P(c)$ est répétitif, par conséquent c l'est également.

□

Chapitre 2

C^* -algèbres et K -théorie

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les notions entourant les C^* -algèbres dont la notion de produit croisé réduit. On terminera ensuite ce chapitre sur la notion de K -théorie d'une C^* -algèbre qui est reliée dans le cas des pavages à des notions de « gap labelling ».

I- Introduction aux C^* -algèbres

On se place ici dans le cas où toutes les algèbres considérées sont des \mathbb{C} -algèbres non nécessairement unifières en rappelant qu'une algèbre A est *unifière* s'il existe $1_A \in A$ satisfaisant $1_A x = x 1_A$ pour tout élément $x \in A$. On peut citer par exemple le livre de J. Dixmier comme référence [Dix82]

I.1- Définitions

On va d'abord rappeler la notion d'algèbre de Banach, avant de parler d'involution pour arriver enfin à la définition d'une C^* -algèbre.

Définition 2.I.1 (algèbre de Banach). On dit que A est une *algèbre de Banach* si A est une algèbre normée par $\|\cdot\|_A$ complète pour celle-ci et vérifiant $\|xy\|_A \leq \|x\|_A \|y\|_A$ pour tout couple $(x, y) \in A^2$.

Pour continuer notre chemin vers les C^* -algèbres, on doit introduire la notion d'algèbre involutive qui suit.

Définition 2.I.2 (algèbre involutive). On dit qu'une algèbre A est *involutive* s'il existe une *involution* $*$ définie par

$$*: A \rightarrow A, x \mapsto x^*$$

satisfaisant les axiomes :

- (i) $(x + y)^* = x^* + y^*$;
- (ii) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$;
- (iii) $(xy)^* = y^* x^*$;
- (iv) $(x^*)^* = x$;

pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout couple $(x, y) \in A$.

On peut maintenant donner la définition d'une C^* -algèbre.

Définition 2.I.3 (C^* -algèbre). On dit qu'une algèbre A est une *C^* -algèbre* si A est une algèbre de Banach involutive satisfaisant $\|x^* x\|_A = \|x\|_A^2$ pour tout élément x de A .

On donne la définition de l'unitarisée d'une C^* -algèbre.

Définition 2.I.4 (unitarisation d'une C^* -algèbre). Soit A une C^* -algèbre non unifère. On note et définit l'*unitarisation* de A comme $A^+ = A \times \mathbb{C}$ munit du produit

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab, \lambda\mu)$$

de l'involution

$$(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda}).$$

Remarque 2.I.5. Tout élément (a, λ) de A^+ agit comme opérateur borné sur A par $(a, \lambda) \cdot b = ab + \lambda b$ et la norme d'opérateur de (a, λ) vu comme opérateur est une norme de C^* -algèbre.

On peut ensuite introduire quelques éléments particuliers d'une C^* -algèbre.

Définition 2.I.6 (éléments unitaires, hermitiens, normaux). Soient A une C^* -algèbre et x un élément de A . On dit que :

- (i) x est *hermitien* ou *auto-adjoint* si $x = x^*$;
- (ii) x est *normal* si $xx^* = x^*x$;
- (iii) si A est unifère l'élément x est dit *unitaire* si $xx^* = x^*x = 1_A$.

II- Modules hilbertiens [Weg93],[Wil98]

II.1- Définitions

On commence par définir la notion de prémodule hiberbien.

Définition 2.II.1. Soit A une C^* -algèbre. On dit que X est un *A -prémodule hilbertien à droite* si X est un \mathbb{C} -espace vectoriel muni d'une application sesquilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow A$ satisfaisant les axiomes suivants pour tous $x, y, z \in X$ et $a \in A$:

- (i) les structures entre A et celle de \mathbb{C} -espace vectoriel sont compatibles, c-à-d $(\lambda x) \cdot a = x \cdot (\lambda a)$;
- (ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- (iii) $\langle x, y \cdot a \rangle = \langle x, y \rangle a$;
- (iv) $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$;
- (v) $\langle x, x \rangle \geq 0$ vu comme élément de A ;
- (vi) $\langle x, x \rangle = 0$ ssi $x = 0$.

On appelle $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *produit scalaire associé* au A -module X .

Le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\langle x, y \rangle\| \leq \|\langle x, x \rangle\|^{\frac{1}{2}} \|\langle y, y \rangle\|^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x, y \in X.$$

On en déduit une norme sur X définie par

$$\|x\|_X = \|\langle x, x \rangle\|^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in X.$$

Définition 2.II.2 (module hilbertien à droite). Soient A une C^* -algèbre et X un A -prémodule hilbertien à droite muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit que X est un *A -module hilbertien à droite* si $(X, \|\cdot\|_X)$ est un espace complet.

Exemple 2.II.3. Soient Σ un ensemble dénombrable, A une C^* -algèbre, on définit

$$\ell^2(\Sigma; A) = \{v : \Sigma \rightarrow A; \sum_{\sigma \in \Sigma} v(\sigma)^* v(\sigma) \text{ converge}\}.$$

Ainsi défini, $\ell^2(\Sigma; A)$ est un A -module hilbertien à droite pour le produit scalaire

$$\langle v, v' \rangle = \sum_{\sigma \in \Sigma} v(\sigma)^* v'(\sigma).$$

Remarque 2.II.4 (module hilbertien à gauche). On dit que X est un A -module hilbertien à gauche si X est un A^{opp} -module hilbertien où A^{opp} est la C^* -algèbre opposée définie comme la C^* -algèbre dont les opérations sont données par $a \cdot_{opp} b = ba$.

II.2- Opérateurs adjoignables

On va maintenant parler des opérateurs dit adjoignables que l'on utilisera plus tard dans la construction de certaines C^* -algèbres.

Définition 2.II.5 (opérateurs adjoignables, [Weg93]). Soient A une C^* -algèbre et X, Y deux A -modules hilbertiens à droite. Une application $T : X \rightarrow Y$ est dite *adjoignable* s'il existe une application $T^* : Y \rightarrow X$ appelée *adjoint de T* tel que pour tous $x \in X$ et $y \in Y$ on ait

$$\langle T(x), y \rangle_Y = \langle x, T^*(y) \rangle_X.$$

On note par $\mathcal{L}_A(X, Y)$ l'ensemble des applications de X vers Y adjoignables.

On liste maintenant les principales propriétés des opérateurs adjoignables.

Proposition 2.II.6 ([Weg93]). Soient A une C^* -algèbre et X, Y deux A -modules hilbertiens à droite. Soit $T \in \mathcal{L}_A(X, Y)$. Alors les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) L'opérateur T^* est unique et l'on a $(T^*)^* = T$;
- (ii) L'opérateur T est A -linéaire et \mathbb{C} -linéaire;
- (iii) Si Z est un A -module hilbertien à droite alors pour $T' \in \mathcal{L}_A(Y, Z)$ on a $(T' \circ T)^* = T^* \circ T'^*$;
- (iv) L'opérateur T est borné;
- (v) L'ensemble $\mathcal{L}_A(X, X) \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{L}_A(X)$ est une C^* -algèbre pour la norme d'opérateurs;
- (vi) On a une inclusion $A \hookrightarrow \mathcal{L}_A(A)$ induite par la multiplication à gauche. La C^* -algèbre A est alors un idéal fermé bilatère de $\mathcal{L}_A(A)$. On appelle $\mathcal{L}_A(A)$ l'algèbre des multiplicateurs de A que l'on note $\mathcal{M}(A)$;

II.3- Opérateurs de rang un et opérateurs compacts

On introduire ici les notions d'opérateurs de rang un dont nous aurons besoin dans la partie sur l'équivalence Morita.

Les opérateurs de rang un sur un espace de Hilbert \mathcal{H} sont de la forme $\Theta_{x,y}$ défini par

$$\Theta_{x,y}(\xi) = x \langle y, \xi \rangle, \quad \forall \xi \in \mathcal{H}.$$

Les opérateurs de rang finis sont une combinaison linéaire d'opérateurs $\Theta_{x,y}$. On peut alors faire le lien avec les opérateurs compacts sur un espace de Hilbert.

Proposition 2.II.7. L'algèbre des opérateurs de rang fini est dense dans l'algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ des opérateurs compact sur un espace de Hilbert \mathcal{H} .

On va maintenant généraliser la définition d'un opérateur de rang un sur un A -module hilbertien.

Définition 2.II.8 (opérateur de rang un sur un A -module). Soient A une C^* -algèbre, $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$ et Y deux A -modules hilbertiens. Pour $x \in X$ et $y \in Y$, on peut alors définir un opérateur dit de rang un noté $\Theta_{y,x} : X \rightarrow Y$ et défini par

$$\Theta_{y,x}(\xi) = y \cdot \langle x, \xi \rangle_A, \quad \forall \xi \in X.$$

Remarque 2.II.9. En notant $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle_X)$ et $(Y, \langle \cdot, \cdot \rangle_Y)$ les deux A -modules, on a pour tous $x \in X, y \in Y, \xi \in X, \xi' \in Y$,

$$\begin{aligned} \langle \Theta_{y,x}(\xi), \xi' \rangle_Y &= \langle y \cdot \langle x, \xi \rangle_X, \xi' \rangle_Y \\ &= \langle x, \xi \rangle_X^* \langle y, \xi' \rangle_Y \\ &= \langle \xi, x \rangle_X \langle y, \xi' \rangle_Y \\ &= \langle \xi, x \cdot \langle y, \xi' \rangle_Y \rangle_X \\ &= \langle \xi, \Theta_{x,y}(\xi') \rangle_X \end{aligned}$$

Ainsi les opérateurs $\Theta_{y,x}$ sont adjoignables d'adjoint $\Theta_{y,x}^* = \Theta_{x,y}$.

On termine par la définition d'opérateurs compacts d'un A -module hilbertien.

Définition 2.II.10. Soient A une C^* -algèbre et X, Y deux A -modules hilbertiens. On rappelle que $\mathcal{L}_A(X, Y)$ désigne l'ensemble des opérateurs adjoignables A -linéaires. On définit alors l'espace des opérateurs compacts de X dans Y , noté $\mathcal{K}(X, Y)$, comme étant la fermeture de $\text{Vect}\{\Theta_{y,x}, x \in X, y \in Y\}$ dans $\mathcal{L}_A(X, Y)$. En particulier nous noterons par $\mathcal{K}(X)$ à la place de $\mathcal{K}(X, X)$.

Remarque 2.II.11. En général les éléments de $\mathcal{K}(X, Y)$ ne sont pas des opérateurs compacts au sens usuel du terme (image de la boule unité relativement compacte).

II.4- Produit croisé réduit par les groupes \mathbb{R} et \mathbb{Z}

Nous rencontrerons dans la suite plusieurs exemples de produits croisés réduits de $C(X)$ par les groupes \mathbb{R} et \mathbb{Z} . Nous allons donc introduire ici cette notions. Avant de détailler les deux cas voulus, introduisons la notion d'action d'un groupe sur une C^* -algèbre A .

Définition 2.II.12 (action d'un groupe sur A). Soient A une C^* -algèbre et G un groupe. Une *action de G sur A* est un morphisme de groupe fortement continu $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ où $\text{Aut}(A)$ est le groupe des $*$ -automorphismes de A .

On peut alors donner la notion de système dynamique.

Définition 2.II.13 (système dynamique). Soit un triplet (A, G, α) où A est une C^* -algèbre, G un groupe agissant par automorphismes définis par α . On dit alors que (A, G, α) est un *système dynamique*.

On termine alors par la notion de représentation covariante d'un système dynamique.

Définition 2.II.14 (morphisme covariant). Soient (A, G, α) un système dynamique et B une C^* -algèbre. Un *morphisme covariant* pour (A, G, α) à valeurs dans B est une paire (π, U) où

- (i) $\pi : A \rightarrow B$ est un morphisme de C^* -algèbres;
- (ii) $U : G \rightarrow U(\mathcal{M}(B))$ est un morphisme de groupes avec $U(\mathcal{M}(B))$ est le groupe des unitaires de $\mathcal{M}(B)$;

(iii) On pour tout $g \in G$ et tout $a \in A$,

$$U(g)\pi(a)U(g)^* = \pi(\alpha_g(a)).$$

Cela veut dire que vue dans B l'action de G est donnée par conjugaison par un multiplicateur unitaire. Soit (A, G, α) un système dynamique. On munit alors $C_c(G; A)$ d'une structure d'algèbre de convolution involutive par

$$f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(g')\alpha_{g'}(f_2(g'^{-1}g))d\mu(g'), \quad \forall f_1, f_2 \in C_c(G; A), \forall g \in G,$$

avec μ la mesure de Haar sur G et

$$f^*(g) = \Delta(g^{-1})\alpha_g(f(g^{-1}))^*, \quad \forall f \in C_c(G; A), \forall g \in G.$$

Si (π, U) est un morphisme covariant à valeurs dans une C^* -algèbre B , on a alors une représentation involutive de $C_c(G; A)$ dans B donnée par

$$f \mapsto \int_G f(g)U(g)bd\mu(g).$$

II.4.4.1-PRODUIT CROISÉ RÉDUIT PAR \mathbb{Z}

Soit (A, \mathbb{Z}, α) un système dynamique. Rappelons que sur $\ell^2(\mathbb{Z}; A)$ nous avons un produit hilbertien défini par

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\ell^2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi(n)^* \eta(n), \quad \forall \xi, \eta \in \ell^2(\mathbb{Z}; A).$$

On note $n \cdot a = \alpha(n) \cdot a$. On a alors un morphisme covariant (ρ, λ) à valeurs dans $\ell^2(\mathbb{Z}; A)$, défini par

$$\lambda_n \cdot \xi(m) = \xi(m - n)$$

et

$$\rho(a)\xi(m) = (-m) \cdot a(m).$$

Soit $\lambda_{A, \mathbb{Z}}$ la représentation covariante associée à (ρ, λ) . Si l'on considère un élément de $C_c(\mathbb{Z}, A)$ s'écrivant sous la forme

$$a = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_n, \quad a_n \in A, \forall n \in \mathbb{N}$$

on a alors

$$\lambda_{A, \mathbb{Z}}(a) \cdot \xi(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-m) \cdot a_n \xi(m - n).$$

Le morphisme $\lambda_{A, \mathbb{Z}} : C_c(\mathbb{Z}; A) \rightarrow \mathcal{L}_A(\ell^2(\mathbb{Z}; A))$ est alors injectif.

Définition 2.II.15 (produit croisé réduit par \mathbb{Z}). Le produit croisé réduit de A par \mathbb{Z} noté $A \rtimes \mathbb{Z}$ est la fermeture de $\lambda_{A, \mathbb{Z}}(C_c(\mathbb{Z}; A))$ dans $\mathcal{L}_A(\ell^2(\mathbb{Z}; A))$.

Dans le cas particulier où $A = C_0(X)$ avec X un espace localement compact muni d'une action de \mathbb{Z} par homéomorphismes, notée $m \cdot x = x + m$. On a alors une action de \mathbb{Z} sur $C_0(X)$ par automorphismes $m \cdot f(x) = f(x - m)$. Le $C_0(X)$ -module $\ell^2(\mathbb{Z}; C_0(X))$ est alors le module des sections d'un champ continu trivial d'espaces de Hilbert $(\mathcal{H}_x)_{x \in X}$ avec

$$\mathcal{H}_x = \ell^2(\mathbb{Z}), \quad \forall x \in X.$$

Le morphisme $\lambda_{C_0(X)}$ étant $C_0(X)$ -linéaire, on obtient une famille de représentations (fibre à fibre) $(\lambda_x, \ell^2(\mathbb{Z}))_{x \in X}$ de $C(\mathbb{Z}; C_0(X))$ définie pour tout $a \in C_0(X)$

$$\lambda_x \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta_n \right) \eta(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (x + m) \xi(m - n), \quad \xi \in \ell^2(\mathbb{Z}).$$

Le produit croisé réduit de $C_0(X)$ par \mathbb{Z} est la complétion de $C_c(\mathbb{Z}; C_0(X))$ pour la norme

$$\|a\| = \sup_{x \in X} \|\lambda_x(a)\|.$$

II.4.4.2-PRODUIT CROISÉ RÉDUIT PAR \mathbb{R}

Soit A une C^* -algèbre muni d'une action de \mathbb{R} que l'on notera par $t \cdot a$.

On note par $L^2(\mathbb{R}; A)$ l'ensemble des fonctions de carré intégrable pour l'intégrale de Riemann vue comme la complétion de $C_c(\mathbb{R}, A)$.

On considère le morphisme covariant à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}; A))$ défini par

$$t \cdot \xi(s) = \xi(s - t), \quad t \in \mathbb{R}, \xi \in L^2(\mathbb{R}, A)$$

et

$$a \cdot \xi(s) = (-s) \cdot a \xi(s).$$

Comme dans le cas d'une action de \mathbb{Z} , on construit alors $A \rtimes \mathbb{R}$ comme le complété de $C_c(\mathbb{R}, A)$ vu comme opérateur adjoignables via l'action définie pour $f \in C_c(\mathbb{R}, A)$ et $\xi \in C_c(\mathbb{R}, A)$ par

$$f \cdot \xi(s) = \int_{\mathbb{R}} (-s) \cdot f(t) \xi(s - t) dt.$$

De même si $A = C_0(X)$ avec X un espace localement compact muni d'une action de \mathbb{R} par homéomorphismes tels que $t \cdot x = x + t$ soit continu. Considérons pour tout $x \in X$ la représentation de $C_c(\mathbb{R}; C_0(X)) \subset C_0(\mathbb{R} \times X)$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R})$ donnée par

$$\lambda_x(f) \cdot \xi(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t, x + s) \xi(s - t) dt$$

Le produit croisé de $C_0(X)$ par \mathbb{R} noté $C_0(X) \rtimes \mathbb{R}$ est la complétion de $C_c(\mathbb{R}, C_0(X))$ pour la norme

$$\|a\| = \sup_{x \in X} \|\lambda_x(f)\|.$$

II.4.4.3-CAS DES ACTIONS DE GROUPES

Soit G un groupe localement compact muni de sa mesure de Haar μ et soit X un espace localement compact muni d'une action de G par homéomorphismes tel que $(g, x) \mapsto g \cdot x$ soit continu. Comme dans le cas de \mathbb{Z} et \mathbb{R} , on définit une famille de représentations $(\lambda_x, L^2(G))_{x \in X}$ définie par

$$\lambda_x(f) \cdot \xi(g) = \int_G f(h, g \cdot x) \xi(h^{-1}g) d\mu(h).$$

Définition 2.II.16 (produit croisé par G). Le produit croisé réduit de $C_0(X)$ par G noté $C_0(X) \rtimes G$ est la complétion de $C_c(G; C_0(X))$ pour la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|\lambda_x(f)\|.$$

II.4.4.4-MAPPING TORUS

Soit A une C^* -algèbre munie d'une action de \mathbb{Z} notée θ , on peut alors définir le mapping torus de A par θ .

Définition 2.II.17 (mapping torus). Soient A une C^* -algèbre et $\theta \in \text{Aut}(A)$, on définit le *mapping torus* de A par rapport à θ la C^* -algèbre notée A_θ et définie par

$$A_\theta = \{f \in C([0, 1]; A); f(1) = \theta(f(0))\}.$$

Ainsi pour une C^* -algèbre muni d'une action de \mathbb{Z} notée θ , le mapping torus A_θ est muni d'une action \mathbb{R} , notée $\hat{\theta}$, donnée par

$$\hat{\theta}(t)f(s) = f(s - t), \quad f \in A_\theta, (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Le système dynamique $(A_\theta, \mathbb{R}, \hat{\theta})$ est alors le système induit de (A, \mathbb{Z}, θ) par l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$. On peut alors donner le théorème d'imprimitivité de Green.

Théorème 2.II.18 (imprimitivité de Green, [Gre78]). *Les C^* -algèbres $A \rtimes_\theta \mathbb{Z}$ et $A_\theta \rtimes_{\hat{\theta}} \mathbb{R}$ sont Morita équivalentes.*

Nous reviendrons de façon explicite sur ce théorème dans le chapitre 4.

III- K -théorie ([Weg93],[Bla98])

III.1- Unitaires et inversibles dans les C^* -algèbres

III.1.1.1-GROUPE LINÉAIRE, GROUPE DES UNITAIRES

Définition 2.III.1 (groupes linéaire et des unitaires). Si A est une algèbre unifère, on définit

$$\text{GL}(A) = \{x \in A; x \text{ est inversible dans } A\}$$

et

$$\mathcal{U}(A) = \{x \in A; x^*x = xx^* = 1\}.$$

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\text{GL}_n(A) = \text{GL}(M_n(A))$$

et

$$\mathcal{U}_n(A) = \mathcal{U}(M_n(A)).$$

Remarque 2.III.2.

- 1) $\mathcal{U}_n(A)$ et $\text{GL}_n(A)$ sont des groupes topologiques (pour la norme induite par celle de $M_n(A)$). De plus $\mathcal{U}_n(A)$ est un sous-groupe fermé de $\text{GL}_n(A)$.
- 2) On a une inclusion canonique $\text{GL}_n(A) \hookrightarrow \text{GL}_{n+1}(A)$ donnée par

$$X \longmapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De même par la même définition on a $\mathcal{U}_n(A) \hookrightarrow \mathcal{U}_{n+1}(A)$.

On peut maintenant définir $\text{GL}_\infty(A)$ et $\mathcal{U}_\infty(A)$.

Définition 2.III.3 ($GL_\infty(A)$, $\mathcal{U}_\infty(A)$). On note et définit

$$GL_\infty(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} GL_n(A)$$

qui est bien défini d'après la remarque précédente.

De même on a

$$\mathcal{U}_\infty(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n(A).$$

Remarque 2.III.4. On peut voir $X \in GL_\infty$ comme la matrice

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1 sauf pour un nombre fini.

III.1.1.2-HOMOTOPIES

Définition 2.III.5 (homotopie dans $GL(A)$ et $\mathcal{U}(A)$). Soient A une C^* -algèbre unifère et $z, z' \in GL(A)$. On dit que z et z' sont *homotopes* dans $GL(A)$ s'il existe $Z : [0, 1] \rightarrow GL(A)$ continue (pour la norme) telle que $Z(0) = z$ et $Z(1) = z'$. On note usuellement $Z = (Z_t)_{t \in [0,1]}$ avec $Z(t) = z(t), \forall t$.

De même on définit une homotopie dans $\mathcal{U}(A)$.

On note alors $z \sim_h z'$.

Remarque 2.III.6. L'homotopie dans $GL(A)$ et dans $\mathcal{U}(A)$ est une relation d'équivalence. De plus x et y sont homotopes dans $GL(A)$ (resp. dans $\mathcal{U}(A)$) si et seulement ils appartiennent à la même composante connexe par arcs.

Or, $GL(A)$ étant un ouvert de A qui est de Banach, on sait que parler des composantes connexes par arcs et des composantes connexe est la même chose et ces composantes sont fermées.

Définition 2.III.7 ($GL(A)_0$, $\mathcal{U}(A)_0$). On définit $GL(A)_0$ comme la composante neutre de $GL(A)$ (bien défini car A est supposée unifère).

De même on définit $\mathcal{U}(A)_0$ comme la composante neutre de $\mathcal{U}(A)$.

Remarque 2.III.8 ([Weg93, Section 4]).

- 1) On a l'équivalence suivante : $x \in \mathcal{U}(A)_0 \iff x \sim_h 1$;
- 2) $GL(A)_0$ et $\mathcal{U}(A)_0$ sont respectivement des sous-groupes normaux de $GL(A)$ et de $\mathcal{U}(A)$ (car $x GL(A)_0 x^{-1}$ est un composante connexe qui contient l'identité).
- 3) $GL(A)_0$ est un sous-groupe fermé de $GL(A)$.
- 4) Si $z \in GL(A)$ alors z est homotope dans $GL(A)$ à un élément de $\mathcal{U}(A)$.
- 5) Le groupe $\mathcal{U}(A)$ est localement connexe par arcs.

Proposition 2.III.9 ([Weg93]).

- (i) $GL(A)/GL(A)_0$ et $\mathcal{U}(A)/\mathcal{U}(A)_0$ sont des groupes topologiques (car $GL(A)_0$ et $\mathcal{U}(A)_0$ sont fermés) et discret (car $GL(A)_0$ et $\mathcal{U}(A)_0$ sont fermés).
- (ii) $x \sim_h y$ dans $GL(A)$ si et seulement si $[x] = [y]$ dans $GL(A)/GL(A)_0$. On a la même équivalence si on remplace $GL(A)$ et $GL(A)_0$ par $\mathcal{U}(A)$ et $\mathcal{U}(A)_0$.

(iii) $GL(A)/GL(A)_0$ (resp. $\mathcal{U}(A)/\mathcal{U}(A)_0$) est le groupe de classes d'homotopie de $GL(A)$ (resp. de $\mathcal{U}(A)$).

On a la proposition suivante.

Proposition 2.III.10 ([Weg93]). *Les groupes topologiques discrets $GL(A)/GL(A)_0$ et $\mathcal{U}(A)/\mathcal{U}(A)_0$ sont isomorphes.*

On a lemme suivant concernant les opérations invariantes par homotopie.

Lemme 2.III.11 ([Weg93]). *Les classes d'homotopie dans $GL_n(A)$ sont inchangées par les opérations suivantes :*

- (i) la multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire $\lambda \neq 0$;
- (ii) l'échange de lignes ou de colonnes;
- (iii) l'ajout à une ligne (resp. une colonne) d'une combinaison linéaire de lignes (resp. de colonnes) à coefficients dans A .

On a le corollaire suivant.

Corollaire. *Soient $u, v \in GL(A)$, on a*

$$\begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

Ce sont des homotopies dans $GL_2(A)$.

Si $u, v \in \mathcal{U}(A)$ on les même homotopies mais cette fois dans $\mathcal{U}_2(A)$.

Démonstration. Immédiat d'après le lemme précédent. □

On a aussi le corollaire suivant.

Corollaire 2.III.12.

(i) *Si $x \in GL(A)$, alors*

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } GL_2(A).$$

(ii) *Si $x \in \mathcal{U}(A)$, alors*

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^* \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathcal{U}_2(A).$$

Démonstration. Immédiat. □

III.1.1.3-RELÈVEMENT D'INVERSIBLES ET D'UNITAIRES

La motivation principale de cette notion est : si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme d'algèbres unifères, et soit $y \in GL(B)$, existe-t-il $x \in GL(A)$ tel que $\varphi(x) = y$?

On donne le lemme suivant.

Lemme 2.III.13 ([Weg93]). *Soit A une C^* -algèbre unifère, alors $z \in GL(A)_0$ si et seulement si il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ tel que $z = \exp(a_1) \cdots \exp(a_n)$.*

Comme conséquence, on a le théorème suivant.

Théorème 2.III.14. *Soit $\varphi : A \longrightarrow B$ un morphisme surjectif de C^* -algèbres unifères, alors on a*

$$\varphi(GL(A)_0) = GL(B)_0.$$

III.2- Projecteurs d'une C^* -algèbre

III.2.2.1-ISOMÉTRIE PARTIELLE ET PROJECTEUR

Définition 2.III.15 (projecteur). Soit A une C^* -algèbre unifère. Soit $p \in A$, on dit que p est un *projecteur* si $p^* = p$ et $p^2 = p$.

Remarque 2.III.16.

- 1) Si p est un projecteur, alors $Sp(p) \in \{0, 1\}$, car si $\lambda \in Sp(p)$ alors $\lambda^2 = \lambda$.
Réciproquement si p est normal et $Sp(p) = \{0, 1\}$, alors le calcul fonctionnel continu implique que $p^2 = p$.
- 2) $Sp(p) = \{0, 1\}$ si et seulement si $p \neq 1$ et $p \neq 0$.
- 3) Si A est unifère et p est un projecteur de A , alors $1 - p$ est un projecteur de A .

Définition 2.III.17 (projecteurs orthogonaux). Soient p et q deux projecteurs de A . On dit que p et q sont *orthogonaux* et on notera $p \perp q$ si $qp = 0$ (on a aussi $(pq)^* = q^*p^* = qp = 0$).
Si $p \perp q$, alors $p + q$ est un projecteur.

Définition 2.III.18 (isométrie partielle). Soit A une C^* -algèbre. On dit que $v \in A$ est une *isométrie partielle* si v^*v est un projecteur.

Définition 2.III.19 (image et support d'une isométrie partielle). Si v est un isométrie partielle, on définit :

- (i) $p = v^*v$ est appelé *support* de v ;
- (ii) $q = vv^*$ est appelé *image* de v .

III.2.2.2-ÉQUIVALENCE DE PROJECTEURS

On donne maintenant les définitions relatives aux équivalences de projecteurs.

Définition 2.III.20. Soient A une C^* -algèbre unifère, p et q deux projecteurs. On dit que :

- p et q sont dits *équivalents*, et on note $p \sim q$, s'il existe $v \in A$ une isométrie partielle telle que $p = v^*v$ et $q = vv^*$.
- p et q sont dits *unitairement équivalents*, et on note $p \sim_u q$, si les deux projecteurs sont conjugués dans $\mathcal{U}(A)$, i.e. $q = upu^*$ avec $u \in \mathcal{U}(A)$.
- p et q sont dits *homotopiquement équivalents*, et on note $p \sim_h q$, s'il existe $P \in C([0, 1], A)$ un projecteur tel que $P(0) = p$ et $P(1) = q$ avec $P = (P_t)_{t \in [0, 1]}$ tel que P_t soit un projecteur de A pour tout t .

Proposition 2.III.21. Les équivalences \sim, \sim_u et \sim_h sont des relations d'équivalences.

Donnons une série de trois lemmes. Ce premier lemme fait le liens entre orthogonalités de couples de projecteurs et orthogonalité de leur somme.

Lemme 2.III.22 ([Weg93]). Soient p_1, p_2, q_1, q_2 des projecteurs tels que $p_1 \perp q_1, p_2 \perp q_2, p_1 \sim p_2, q_1 \sim q_2$, alors on a

$$p_1 + q_1 \sim p_2 + q_2.$$

Le deuxième concerne l'implication entre conjugaison et conjugaison unitaire.

Lemme 2.III.23 ([Weg93]). Soient p et q deux projecteurs conjugués d'une C^* -algèbre, alors $p \sim_u q$.

Enfin le dernier concerne le fait que deux projecteurs proches en norme sont conjugués unitairement.

Lemme 2.III.24. Soient p et q deux projecteurs d'une C^* -algèbre unifère tels que $\|p - q\| < 1$. Alors :

- (i) il existe u_q un unitaire tel que $q = u_q p u_q^*$.
 (ii) sur $\{q \text{ proj. tq } \|p - q\| < 1\}$ $q \mapsto u_q$ peut être choisi continue et $u_p = 1$.

On a un corollaire immédiat de ce lemme

Corollaire. On a : $p \sim_h q$ si et seulement si il existe une homotopie $(u_t)_{t \in [0,1]}$ dans $\mathcal{U}(A)$ (en fait dans $\mathcal{U}(\tilde{A})$ si A est non unifiée) telle que $u_0 = 1$ et $q = u_1 p u_1^*$.

Ainsi l'équivalence par homotopie implique l'équivalence unitaire. On donne maintenant la proposition suivante.

Proposition 2.III.25. Soient A une C^* -algèbre unifiée, p et q deux projecteurs alors :

- (i) On a l'implication suivante :

$$p \sim q \implies \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } M_2(A).$$

- (ii) On a l'implication suivante :

$$p \sim_u q \implies \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dans } M_2(A).$$

Remarque 2.III.26. Le (ii) reste vrai même si A n'est pas unifiée.

Lemme 2.III.27 ([Weg93]). Soient p et q deux projecteurs de A , alors

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

III.3- Foncteur K_0

III.3.3.1-SEMI-GROUPE DES CLASSES DE PROJECTEURS

Si A est une C^* -algèbre on pose

$$M_\infty(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n(A)$$

et on a l'inclusion canonique

$$M_n(A) \hookrightarrow M_{n+1}(A), X \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que $M_\infty(A)$ est une algèbre involutive (de complétion $\mathcal{K}(H) \otimes A$). On peut alors voir un élément de $M_\infty(A)$ une matrice de taille infini dont seul un nombre fini d'entrées sont non nulles.

Définition 2.III.28 (projecteurs équivalents dans $M_\infty(A)$). Deux projecteurs p et q dans $M_\infty(A)$ sont dits *équivalents*, et on note $p \sim q$, s'il existe $v \in M_\infty(A)$ tel que

$$p = v^* v \quad \text{et} \quad q = v v^*.$$

Il faut bien remarquer que ces relations ont lieu dans un certain $M_n(A)$.

On notera $\text{Proj}(A)$ l'ensemble des classes d'équivalence de projecteurs dans $M_\infty(A)$.

Remarque 2.III.29.

- 1) Soient p et q deux projecteurs dans $M_\infty(A)$ (A est ici unifère). On a équivalence entre
 - (a) $p \sim q$;
 - (b) il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $p, q \in M_n(A)$ et $p \sim q$ dans $M_n(A)$;
 - (c) il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $p, q \in M_n(A)$ et $p \sim_h q$ dans $M_n(A)$;
 - (d) il existe $n \in \mathbb{N}$ tels que $p, q \in M_n(A)$ et $p \sim_u q$ dans $M_n(A)$;
- 2) Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme de C^* -algèbres, alors φ induit un morphisme que l'on notera encore $\varphi : M_n(A) \longrightarrow M_n(B)$ défini par

$$\varphi((x_{ij})_{i,j}) = (\varphi(x_{ij}))_{i,j}.$$

De même on peut étendre φ de $M_\infty(A) \longrightarrow M_\infty(B)$ et cela induit une application $\varphi_* : \text{Proj}(A) \longrightarrow \text{Proj}(B)$.

On suppose maintenant que A est unifère et on a la définition suivante.

Définition 2.III.30 (loi + de $\text{Proj}(A)$). Si p, q, p', q' sont des projecteurs tels que $p \sim p', q \sim q'$ et $p' \perp q'$, par exemple $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, on pose

$$[p] + [q] = [p' + q'].$$

On remarque que c'est bien défini car $p' + q'$ est bien un projecteur et c'est indépendant du choix de p' et q' .

En particulier, on peut choisir,

$$[p] + [q] = \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right].$$

La loi + est associative car

$$\left(\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \right)$$

et elle est commutative car

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.III.31.

- 1) En tant que semi-groupe, on a

$$(\text{Proj}(\mathbb{C}), +) \cong (\mathbb{N}, +).$$

- 2) Si A est unifère, on note l'image de I_k dans $M_\infty(A)$, i.e.

$$p_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0_\infty \end{pmatrix}.$$

On alors,

$$[p_j] + [p_k] = [p_{j+k}].$$

Par conséquent, p_1 est le générateur de $\text{Proj}(\mathbb{C})$.

III.3.3.2-DÉFINITION DE K_0

Soit A une C^* -algèbre unifère. On veut définir une relation d'équivalence sur $\text{Proj}(A) \times \text{Proj}(A)$ comme suit.

Définition 2.III.32 (relation d'équivalence sur $\text{Proj}(A) \times \text{Proj}(A)$). On dit que $([p], [q]) \sim ([p'], [q'])$ où $[p], [p'], [q], [q'] \in \text{Proj}(A)$ si et seulement s'il existe $[r] \in \text{Proj}(A)$ tel que

$$[p] + [q'] + [r] = [p'] + [q] + [r].$$

On rajoute $[r]$ pour obtenir la transitivité.

Remarque 2.III.33.

- (i) Si $([p'], [q']) \sim ([p''], [q''])$ alors il est clair que $([p] + [p'], [q] + [q']) \sim ([p] + [p''], [q] + [q''])$.
- (ii) On a $([p], [p]) \sim ([0], [0])$.

(iii) On définit

$$([p], [q]) + ([p'], [q']) \stackrel{def}{=} ([p] + [p'], [q] + [q']).$$

Cette loi respecte \sim sur $\text{Proj}(A) \times \text{Proj}(A)$ et on a

$$([p], [q]) + ([q], [p]) = ([p] + [q], [p] + [q]) \sim ([0], [0]).$$

On peut maintenant définir K_0 .

Définition 2.III.34 ($K_0(A)$). Si A est une C^* -algèbre unifère, alors on définit $K_0(A)$ par

$$K_0(A) = \text{Proj}(A) \times \text{Proj}(A) / \sim .$$

$K_0(A)$ est un groupe abélien pour la loi

$$([p], [q]) + ([p'], [q']) \stackrel{def}{=} ([p] + [p'], [q] + [q']).$$

On utilise couramment la notation suivante.

Notation. On note dans $K_0(A)$,

$$([p], [q]) = [p] - [q]$$

car l'inverse de $[[p], [q]]$ dans $K_0(A)$ est $[[q], [p]]$.

Exemple 2.III.35.

- 1) On a $K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ l'isomorphisme étant donné par l'application $[p] - [q] \mapsto \text{tr}(p) - \text{tr}(q)$. On remarque que $[p_1]$ est un générateur de $K_0(\mathbb{C})$.

III.3.3.3-FONCTORIALITÉ

- (1) Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme de C^* -algèbres unifères alors φ induit un morphisme de groupes $\varphi_* : K_0(A) \longrightarrow K_0(B)$ défini par

$$\varphi_*([p] - [q]) = [\varphi(p)] - [\varphi(q)].$$

- (2) Si $\varphi : A \longrightarrow B$ et $\psi : B \longrightarrow D$ sont deux morphismes de C^* -algèbres unifères, on a

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* .$$

III.3.3.4-CAS NON UNIFÈRE

Soit A une C^* -algèbre non unifère et soit A^+ l'unitarisé (voir la Définition 2.I.4 p.26) et ρ_A défini par

$$\rho_A : A^+ \longrightarrow \mathbb{C}, (a, \lambda) \longmapsto \lambda.$$

Définition 2.III.36 ($K_0(A)$, A non unifère). Si A est non unifère, on définit $K_0(A)$ par

$$K_0(A) = \text{Ker}(\rho_{A^*})$$

où

$$\rho_{A^*} : K_0(A) \longrightarrow K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}, [p] - [q] \longmapsto \text{rg}(\rho_A(p)) - \text{rg}(\rho_A(q)) = \text{tr}(\rho_A(p) - \rho_A(q))$$

On a en particulier une suite exacte

$$0 \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow K_0(A^+) \xrightarrow{\rho_{A^*}} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

III.3.3.5-FONCTORIALITÉ DANS LE CAS NON UNIFÈRE

Soit A une C^* -algèbre, on notera par \tilde{A} l'unitarisé A^+ dans le cas non unifère et $A \oplus \mathbb{C}$ dans le cas unifère. On notera $\rho_A : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$ la projection. Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme de C^* -algèbres, alors φ s'étend en un morphisme de C^* -algèbres unifères, $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{B} \\ & \searrow \tilde{\rho}_A & \downarrow \rho_B \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

Par functorialité dans le cas unifère on en déduit que :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(\tilde{A}) & \xrightarrow{\rho_{A^*}} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \tilde{\varphi}_* & & \\ 0 & \longrightarrow & K_0(B) & \longrightarrow & K_0(\tilde{B}) & \xrightarrow{\rho_{B^*}} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par conséquent $\tilde{\varphi}$ induit un morphisme de groupes (par restriction) $\varphi_* : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ défini par

$$\varphi_*([p] - [q]) = [\tilde{\varphi}(p)] - [\tilde{\varphi}(q)]$$

où A et B sont vues comme des sous- C^* -algèbres de \tilde{A} et \tilde{B} .

III.3.3.6-FORME STANDARD DE K_0

Donnons la forme standard de la K -théorie via la proposition suivante.

Proposition 2.III.37 (forme standard, [Weg93]). Soit A une C^* -algèbre. Alors :

- (i) $K_0(A) = \{[p] - [q], p, q \text{ projecteurs dans } M_\infty(A^+) \text{ et } p - q \in M_\infty(A^+)\}$ avec la convention $A^+ = A$ dans le cas unifère ;
- (ii) Tout élément de $K_0(A)$ peut s'écrire sous la forme $[p] - [p_k]$ où p est un projecteur de $M_\infty(A^+)$, $p - p_k \in M_\infty(A^+)$ et $n \geq k$ avec la convention $A^+ = A$ dans le cas unifère ;

(iii) $[p] - [q] = 0$ dans $K_0(A)$ où p et q sont des projecteurs de $M_n(A^+)$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{pmatrix} p & & \\ & I_k & \\ & & O_m \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} q & & \\ & I_k & \\ & & O_m \end{pmatrix} \quad \text{dans } M_{n+m+k}(A^+).$$

Il est équivalent d'avoir \sim_u ou \sim_h .

III.4- Foncteur K_1

III.4.4.1-DÉFINITION

On a déjà vu que pour A une C^* -algèbre unifère on a

$$\mathcal{U}_\infty(A)/\mathcal{U}_\infty(A)_0 \cong \text{GL}_\infty(A)/\text{GL}_\infty(A)_0$$

et ce par un isomorphisme induit par l'inclusion.

On peut maintenant définir le foncteur $K_1(A)$.

Définition 2.III.38 ($K_1(A)$, A unifère). Si A est une C^* -algèbre unifère, on pose

$$K_1(A) = \mathcal{U}_\infty(A)/\mathcal{U}_\infty(A)_0 \cong \text{GL}_\infty(A)/\text{GL}_\infty(A)_0.$$

$K_1(A)$ est un groupe pour le produit matriciel et il est abélien.

$K_1(A)$ abélien. Si $u, v \in \mathcal{U}_n(A)$, on a vu que

$$\begin{pmatrix} uv & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & \\ & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & \\ & u \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $uv = \begin{pmatrix} uv & \\ & 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{U}_\infty(A)$, on en déduit que

$$[u][v] = [v][u] = \left[\begin{pmatrix} u & \\ & v \end{pmatrix} \right].$$

□

Remarque 2.III.39.

- 1) L'élément neutre du groupe $K_1(A)$ sera noté $0 = [1]$. Si $[u] = 1$, il existe un entier n tel que $u \in \mathcal{U}_n(A)$ et $u \sim_h I_n$ dans $\mathcal{U}_n(A)$.
- 2) L'inclusion canonique $\mathcal{U}_n(A) \hookrightarrow \mathcal{U}_{n+1}(A)$ induit un morphisme

$$\mathcal{U}_n(A)/\mathcal{U}_n(A)_0 \longrightarrow \mathcal{U}_{n+1}(A)/\mathcal{U}_{n+1}(A)_0.$$

On a alors,

$$K_1(A) = \varinjlim (\mathcal{U}_n(A)/\mathcal{U}_n(A)_0)$$

On a cependant défini $K_1(A)$ que dans le cas où A est unifère. On donne maintenant la définition de $K_1(A)$ si A est non unifère.

Définition 2.III.40 ($K_1(A)$, A non unifère). Si A est une C^* -algèbre non unifère, on définit $K_1(A)$ par

$$K_1(A) := K_1(A^+).$$

III.4.4.2-FONCTORIALITÉ

- (i) Si $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphisme de C^* -algèbres unifières, alors φ induit un morphisme de groupes continu, encore noté $\varphi : \mathcal{U}_n(A) \longrightarrow \mathcal{U}_n(B)$ défini par

$$(x_{ij})_{i,j} \longmapsto (\varphi(x_{ij}))_{i,j}.$$

De même on peut étendre φ sur $\mathcal{U}_\infty(A) \longrightarrow \mathcal{U}_\infty(B)$ et sur $\mathcal{U}_\infty(A)_0 \longrightarrow \mathcal{U}_\infty(B)_0$ car φ est continue. Donc φ passe au quotient et induit donc un morphisme $\varphi_* : K_1(A) \longrightarrow K_1(B)$ défini par

$$[u] \longmapsto \varphi_*([u]) = [\varphi(u)].$$

- (ii) Si $\varphi : A \longrightarrow B$ et $\psi : B \longrightarrow D$ sont des morphismes de C^* -algèbres unifières, alors

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_*.$$

- (iii) Si maintenant $\varphi : A \longrightarrow B$ est un morphismes de C^* -algèbres non nécessairement unifières, alors φ induit un morphisme de C^* -algèbres unifières $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \longrightarrow \tilde{B}$ et donc un morphisme de groupes $\varphi_* : K_1(\tilde{A}) \longrightarrow K_1(\tilde{B})$.

Si A et B sont unifières, comme $K_1(\tilde{A}) \cong K_1(A)$ et $K_1(\tilde{B}) \cong K_1(B)$ la définition de φ_* est cohérente vis à vis de celle donnée pour le cas unifière.

Dans ces condition, si $\varphi : A \longrightarrow B$ et $\psi : B \longrightarrow D$ sont des morphisme de C^* -algèbres, on a encore

$$\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_*.$$

III.4.4.3-DÉFINITION DE $K_*(A)$

Définition 2.III.41 ($K_*(A)$). Si A est un C^* -algèbre, on pose

$$K_*(A) = K_0(A) \oplus K_1(A).$$

L'étude des propriétés de $K_*(A)$ sont l'objet du prochain chapitre.

III.5- Propriétés fondamentales de la K -théorie

III.5.5.1-INVARIANCE PAR HOMOTOPIE

Définition 2.III.42. Soient A et B deux C^* -algèbres.

- (i) Soient $\varphi_0 : A \longrightarrow B$ et $\varphi_1 : A \longrightarrow B$ deux morphismes de C^* -algèbres. On dit que φ_0 et φ_1 sont *homotopes* s'il existe un chemin $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ de morphismes de C^* -algèbres entre φ_0 et φ_1 tels que pour tout $a \in A$, $t \longmapsto \varphi_t(a)$ soit continue (i.e. préserve la topologie de la convergence faible).
- (ii) On dit qu'un morphisme de C^* -algèbres $\alpha : A \longrightarrow B$ est une *équivalence d'homotopies* s'il existe $\beta : B \longrightarrow A$ tel que :
- $\alpha \circ \beta$ soit homotope à id_B ;
 - $\beta \circ \alpha$ soit homotope à id_A .

On dit aussi que les C^* -algèbres A et B sont *homotopiquement équivalentes*.

- (iii) Une C^* -algèbre est dite *contractile* si id_A et 0 (l'application nulle) sont homotopes.

Exemple 2.III.43.

- 1) $\alpha : \mathbb{C} \longrightarrow C([0, 1])$, $\lambda \longmapsto \lambda$ est une équivalence d'homotopies. Il suffit de prendre $\beta : C([0, 1]) \longrightarrow \mathbb{C}$, $f \longmapsto f(0)$. On a alors $\beta \circ \alpha = \text{id}_{\mathbb{C}}$ et $\alpha \circ \beta(f) = f(0)$. Soit $\gamma_t : C([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1])$, $f \longmapsto (s \longmapsto f(st))$. On remarque que γ_t est un morphisme de C^* -algèbres et à f fixé, $t \longmapsto \gamma_t(f) = (s \longmapsto f(st))$ est continue car f l'est. On remarque que $(\gamma_t)_{t \in [0,1]}$ est un homotopie entre $\alpha \circ \beta$ et $\text{id}_{C([0,1])}$.

- 2) Plus généralement A et $C([0, 1], A)$ sont homotopiquement équivalentes.
- 3) Si $C_0([0, 1]) = \{f \in C([0, 1]); f(0) = 0\}$, on voit que γ_t définie précédemment se restreint à un morphisme de C^* -algèbres $\gamma_t : C_0([0, 1]) \longrightarrow C_0([0, 1])$.
De plus $(\gamma_t)_t$ est une homotopie entre $\text{id}_{C_0([0,1])}$ et 0 par conséquent, $C_0([0, 1])$ est une C^* -algèbre contractile.
De même $C_0([0, 1], A)$ est aussi une C^* -algèbre contractile.

On donne le théorème fondamental suivant.

Théorème 2.III.44 (invariance par homotopie de K_*). Soient $\varphi_0 : A \longrightarrow B$ et $\varphi_1 : A \longrightarrow B$ deux morphismes de C^* -algèbres homotopes. Alors on a

$$\varphi_{0*} = \varphi_{1*} : K_*(A) \longrightarrow K_*(B).$$

On donne les corollaires suivant.

Corollaire 2.III.45. Si A et B sont **homotopiquement équivalentes**, alors il y a un isomorphisme

$$K_*(A) \xrightarrow{\sim} K_*(B).$$

Exemple 2.III.46. On a vu que $C([0, 1])$ et \mathbb{C} sont homotopiquement équivalentes, donc

$$K_*(C([0, 1])) = K_*(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}.$$

Le corollaire suivant concerne les C^* -algèbres contractiles.

Corollaire 2.III.47. Si A est contractile, alors

$$K_*(A) = \{0\}.$$

En particulier pour toutes C^* -algèbres,

$$K_*(C([0, 1], A)) = \{0\}.$$

III.5.5.2-K-THÉORIE POUR LES CANTOR

Nous allons rappeler un résultat sur la K -théorie d'un système inductif de C^* -algèbre.

Définition 2.III.48 (ensemble ordonné, ensemble ordonné filtrant). Soit I un ensemble et \leq une relation binaire sur I . On dit que (I, \leq) est un *ensemble partiellement ordonné* si il vérifie les trois axiomes :

1. pour tout $i \in I$, on a $i \leq i$ (réflexivité);
2. si $(i, j) \in I$ sont tels que $i \leq j$ et $j \leq i$ alors $i = j$ (anti-symétrie);
3. si $(i, j, k) \in I$ sont tels que $i \leq j$ et $j \leq k$ alors $i \leq k$ (transitivité).

On dit qu'un ensemble ordonné (I, \leq) est *filtrant* si pour tout couple $(i, j) \in I^2$ il existe $k \in I$ tel que $i \leq k$ et $j \leq k$.

Définition 2.III.49 (système inductif de groupe). Soit (I, \leq) un ensemble filtrant. On dit que le couple $(\{G_i\}_{i \in I}, \{f_{ij} : G_i \rightarrow G_j\}_{i, j \in I, i \leq j})$ est un système inductif de groupes si :

1. G_i est un groupe pour tout $i \in I$;
2. pour tous $i, j \in I, i \leq j$, l'application $f_{ij} : G_i \rightarrow G_j$ est un morphisme de groupes;
3. pour tout $i \in I, f_{ii} : G_i \rightarrow G_i$ est le morphisme identité de G_i ;

4. pour tous $i, j, k \in I$ avec $i \leq j \leq k$, on a $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$.

Définition 2.III.50 (limite inductive d'un système inductif de groupe). Soient (I, \leq) un ensemble filtrant et $(\{G_i\}_{i \in I}, \{f_{ij} : G_i \rightarrow G_j\}_{i, j \in I, i \leq j})$ un système inductif de groupe. On note

$$G_\infty = \{x \in \prod_{i \in I} G_i; \exists i_0 \in I, i_0 \leq i \implies x_i = f_{i_0 i}(x_{i_0})\}.$$

La limite inductive du système inductif de groupes est le groupe noté et défini par

$$\varinjlim(G_i, f_{ij}) = G_\infty / N$$

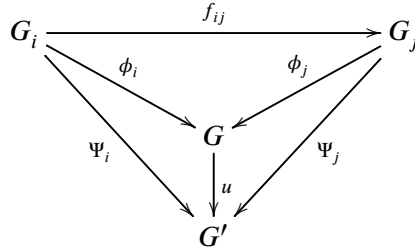
où $N = \{(x_i)_{i \in I} \in G_\infty; \exists i_0 \in I, i_0 \leq i \implies x_i = 0\}$. Il existe des applications canoniques

$$\phi_i : G_i \rightarrow \varinjlim(G_i, f_{ij})$$

définie pour $x \in G_i$ par $\phi_i(x) = \{(x_k)\}_{k \in I}$ où $x_k = 0$ si $k < i$ et $x_k = x$ si $i \leq k$. De plus ces applications vérifient la propriété de commutation pour tout $i \leq j$

$$\Phi_i = \Phi_j \circ f_{ij}.$$

Théorème 2.III.51 (propriété universelle). Soit $(\{G_i\}_{i \in I}, \{f_{ij} : G_i \rightarrow G_j\}_{i, j \in I, i \leq j})$ un système inductif de groupe et $G = \varinjlim(G_i, f_{ij})$ une limite inductive. Si G' est un groupe et qu'il existe une famille d'application $\{\psi_i : G_i \rightarrow G'\}_{i \in I}$ satisfaisant la propriété de commutation $\Psi_i = \Psi_j \circ f_{ij}$ pour $i \leq j$, alors il existe une unique application $u : G \rightarrow G'$ rendant commutatif le diagramme suivant pour tous $i \leq j$:



De la même manière que pour les groupes on peut considérer un système inductif de C^* -algèbres.

Définition 2.III.52 (système inductif de C^* -algèbres). Soit (I, \leq) un ensemble filtrant. On dit que le couple $(\{A_i\}_{i \in I}, \{f_{ij}\}_{i, j \in I, i \leq j})$ est un système inductif de C^* -algèbres si :

1. A_i est une C^* -algèbre pour tout $i \in I$;
2. pour tous $i, j \in I, i \leq j$, l'application $f_{ij} : A_i \rightarrow A_j$ est un morphisme de C^* -algèbres;
3. pour tout $i \in I, f_{ii} : A_i \rightarrow A_i$ est le morphisme identité de A_i ;
4. pour tous $i, j, k \in I$ avec $i \leq j \leq k$, on a $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$.

Soient (I, \leq) un ensemble filtrant et $(\{A_i\}_{i \in I}, \{f_{ij}\}_{i, j \in I, i \leq j})$ un système inductif de C^* -algèbre. On note

$$A_\infty = \{x \in \prod_{i \in I} A_i; \exists i_0 \in I, i_0 \leq i \implies x_i = f_{i_0 i}(x_{i_0})\}.$$

Pour tout $x = (x_i)_{i \in I} \in A_\infty$ on définit l'application $\alpha : A_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\alpha(x) = \lim_{i \in I} \|x_i\|.$$

Alors α est une semi-norme de C^* -algèbres. On peut alors donner la définition de la limite inductive d'une C^* -algèbre.

Définition 2.III.53 (limite inductive de C^* -algèbre). Soit $(\{A_i\}_{i \in I}, \{f_{ij} : A_i \rightarrow A_j\}_{i,j \in I, i \leq j})$ un système inductif de C^* -algèbres. On appelle *limite inductive du système inductif de C^* -algèbres*, la C^* -algèbre notée $\varinjlim (A_i, f_{ij})$ et définie comme le complété séparé de A_∞ pour la semi-norme α .

Théorème 2.III.54 (système inductif et K -théorie,[Weg93]). Soit $(\{A_i\}_{i \in I}, \{\varphi_{ij} : A_i \rightarrow A_j\}_{i,j \in I, i \leq j})$ un système inductif de C^* -algèbres. Alors $(\{K_*(A_i)\}_{i \in I}, \{\varphi_{ij}^* : K_*(A_i) \rightarrow K_*(A_j)\}_{i,j \in I, i \leq j})$ est un système inductif de groupes. Le foncteur de K -théorie commute avec la limite inductive et l'on obtient un isomorphisme (voir Proposition 6.2.9 et Proposition 7.1.7 dans [Weg93])

$$\varinjlim K_*(A_i) \cong K_*(\varinjlim A_i).$$

Pour Ξ un Cantor on définit $C(\Xi; \mathbb{Z})$ l'algèbre des fonctions à valeurs entières sur le Cantor. En corollaire du théorème précédent nous pouvons calculer la K -théorie.

Corollaire 2.III.55. Soit Ξ un Cantor. On alors :

- i) $C(\Xi; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} K_0(C(\Xi))$ donnée par $\chi_E \mapsto [\chi_E]$ pour E un compact ouvert de Ξ ;
- ii) $K_1(C(\Xi)) = \{0\}$.

Démonstration. Soit Ξ un ensemble de Cantor, alors il existe une suite de recouvrements finis $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de Ξ par des compacts ouverts tels que pour $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ il existe $V \in \mathcal{U}_n$ avec $U \subseteq V$ et $\bigcup U_i$ est un système fondamental de voisinages. Posons alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A_n la C^* -algèbre commutative à spectre fini engendrée par les fonctions constantes sur les compacts ouverts de \mathcal{U}_n . Ainsi $C(\Xi)$ est la limite des A_n et en utilisant le théorème précédent on obtient $K_1(C(\Xi)) = 0$ et que l'application $C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(C(\Xi))$, $\chi_E \mapsto [\chi_E]$ (E compact ouvert de Ξ) est un isomorphisme. \square

Plus généralement on peut calculer de la même manière la K -théorie de la C^* -algèbre des fonctions continues d'un Cantor à valeurs dans une C^* -algèbre.

Proposition 2.III.56. Soient A une C^* -algèbre unifère et Ξ un ensemble de Cantor. Il existe un isomorphisme

$$C(\Xi, K_*(A)) \rightarrow K_*(C(\Xi, A))$$

défini dans le cas pair par

$$\chi_E \otimes [p] \mapsto [\chi_E \otimes p]$$

et dans le cas impair

$$\chi_E \otimes [u] \mapsto [\chi_E \otimes u + (1 - \chi_E \otimes 1)].$$

Remarque 2.III.57. C'est un cas particulier de la formule de Künneth en K -théorie.

III.5.5.3-SUITE EXACTE À 6 TERMES

Nous donnons une description de la suite exacte à six termes dans le cas unifère. Dans le cas non unifère, il faut remplacer les C^* -algèbres par leurs unitarisations.

Définition 2.III.58 (applications indice et exponentielle,[Weg93]). Soit la suite exacte de C^* -algèbres suivante

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0.$$

On note et définit l'application exponentielle par $\partial_0 : K_0(B) \rightarrow K_1(J)$ de façon unique comme suit : soit $p \in M_n(B)$ un projecteur et un relevé autoadjoint $x \in M_n(A)$ on pose alors

$$\partial_0([p]_0) = [e^{2i\pi x}]_1.$$

On note et définit l'application indice $\partial_1 : K_1(B) \rightarrow K_0(J)$ de la façon suivante : soit u un unitaire de $M_n(B)$, alors $\begin{pmatrix} u & \\ & u^* \end{pmatrix}$ est dans la composante neutre de l'identité de $U_n(A)$. D'après le Corollaire 2.III.12 il existe un relevé w un relevé de $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$ dans la composante neutre de $U_{2n}(A)$. On pose alors

$$\partial_1([u]_1) = \left[w \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix} w^* \right]_0 - \left[\begin{pmatrix} 1_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]_0.$$

Dans le cas particulier de l'extension

$$\{0\} \rightarrow C_0(]0, 1[, A) \rightarrow C_0(]0, 1[, A) \xrightarrow{ev_1} A \rightarrow 0,$$

les flèches de bords sont appelées *morphismes de Bott*,

$$\beta_A : K_1(A) \rightarrow K_0(C_0(]0, 1[, A))$$

et

$$\theta_A : K_1(A) \rightarrow K_1(C_0(]0, 1[, A)).$$

Théorème 2.III.59 (périodicité de Bott). *Les morphismes β_A et θ_A définis ci-dessus sont des isomorphismes.*

Théorème 2.III.60 (suite exacte à six termes, [Weg93]). *Soit la suite exacte de C^* -algèbres suivante*

$$0 \rightarrow J \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \rightarrow 0$$

nous obtenons la suite exacte à six termes en K -théorie

$$\begin{array}{ccccc} K_0(J) & \xrightarrow{\varphi_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\psi_*} & K_0(B) \\ \partial_1 \uparrow & & & & \downarrow \partial_0 \\ K_1(B) & \xleftarrow{\psi_*} & K_1(A) & \xleftarrow{\varphi_*} & K_1(J) \end{array}$$

III.5.5.4-K-THÉORIE DU MAPPING TORUS

Soit (A, \mathbb{Z}, θ) un système dynamique et considérons le mapping torus A_θ (voir Paragraphe 4.4 p.31), nous avons que $C_0(]0, 1[, A)$ est un idéal dans A_θ . Nous obtenons alors une extension

$$0 \rightarrow C_0(]0, 1[, A) \rightarrow A_\theta \xrightarrow{ev_0} A \rightarrow \{0\}.$$

Le Théorème 2.III.60 combiné avec la périodicité de Bott donne lieu à la proposition.

Proposition 2.III.61 (K -théorie du mapping torus). *Soit (A, \mathbb{Z}, θ) un système dynamique. On a une suite exacte à six termes en K -théorie*

$$\begin{array}{ccccc} K_1(A) & \longrightarrow & K_0(A_\theta) & \longrightarrow & K_0(A) \\ \text{id} - \theta_* \uparrow & & & & \downarrow \text{id} - \theta_* \\ K_1(A) & \longleftarrow & K_1(A_\theta) & \longleftarrow & K_0(A) \end{array}$$

où les flèches

$$K_*(A) \rightarrow K_{*+1}(A_\theta)$$

sont données modulo la périodicité de Bott par l'inclusion $C_0(]0, 1[, A) \hookrightarrow A_\theta$.

Introduisons pour G un groupe abélien et ψ un automorphisme sur G , les deux sous-groupes des invariants par ψ respectivement des coinvariants relativement à ψ ,

$$\text{Inv}(G; \psi) = \{g \in G; \psi(g) = g\}$$

et

$$\text{Coinv}(G; \psi) = G / \langle g - \psi(g), g \in G \rangle.$$

Nous obtenons dans le cas où $A = C(\Xi)$ avec Ξ un Cantor :

1. l'application $\text{Inv}C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(A_\theta)$ définie par $[\chi_K] \mapsto [P_K]$ où $P_K(\omega, t) = \chi_K(\omega)$ est un isomorphisme avec K compact invariant ;
2. l'application $\text{Coinv}C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(A_\theta), [\chi_K] \mapsto [t \mapsto e^{2i\pi t \chi_K}]$ est un isomorphisme avec K compact ouvert tel que χ_K soit coinvariante.

III.5.5.5-SUITE EXACTE DE PIMSNER VOICULESCU

Avant d'énoncer le théorème de Pimsner-Voiculescu, nous allons donner l'isomorphisme de Thom-Connes.

Théorème 2.III.62 (Thom-Connes,[Con81]). *Soit A une C^* -algèbre munie d'une action de \mathbb{R} notée $\hat{\theta}$, alors*

$$K_*(A \rtimes_{\hat{\theta}} \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} K_{*+1}(A).$$

Une description de l'isomorphisme de Thom-Connes a été donnée par Joachim Cuntz et Ralf Meyer dans [CMR07, chap 10]. Considérons l'action $\check{\theta} = (\check{\theta}_t)_{t \in [0,1]}$ sur $\mathbb{A} := C_0([0, 1[; A)$ définie par

$$\check{\theta}_s(f)(t) = \theta_{st}(f(t))$$

où $t \in [0, 1[, s \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{A}$.

Ainsi la suite suivante

$$0 \longrightarrow C_0([0, 1[; A) \longrightarrow \mathbb{A} \xrightarrow{ev_0} A \longrightarrow 0$$

est exacte.

En passant au produit croisé, on obtient l'extension

$$0 \longrightarrow C_0([0, 1[, A) \rtimes_{\check{\theta}} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{A} \rtimes_{\check{\theta}} \mathbb{R} \longrightarrow A \rtimes_{\theta} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

Nous obtenons le bord

$$K_*(A \otimes C^*(\mathbb{R})) \xrightarrow{\cong} K_*(A \otimes C_0(\mathbb{R})) \longrightarrow K_{*+1}(C_0([0, 1[; A) \rtimes_{\check{\theta}} \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} K_{*+1}(C_0([0, 1[; A \rtimes_{\theta} \mathbb{R}))$$

La C^* -algèbre \mathbb{A} étant contractile, le bord en K -théorie

$$K_*(A \otimes C^*(\mathbb{R})) \rightarrow K_{*+1}(C_0([0, 1[, A) \rtimes_{\theta} \mathbb{R})$$

est un isomorphisme. L'isomorphisme de Thom-Connes est obtenu en utilisant l'isomorphisme de Fourier $C^*(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R})$ l'isomorphisme de bord donné ci-avant et la périodicité de Bott.

Considérons alors le morphisme

$$\alpha : K_*(A \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} K_*(A_\theta \rtimes_{\hat{\theta}} \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} K_{*+1}(A_\theta) \xrightarrow{ev_*} K_{*+1}(A)$$

obtenu par la composition suivante :

- L'isomorphisme $K_*(A \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} K_*(A_{\theta} \rtimes_{\hat{\theta}} \mathbb{R})$ est induit par l'équivalence Morita donnée par le Théorème 2.II.18 p.31 ;
- L'isomorphisme $K_*(A_{\theta} \rtimes_{\hat{\theta}} \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} K_{*+1}(A_{\theta})$ est l'isomorphisme de Thom-Connes (Théorème 2.III.62) ;
- La dernière composante de α est le morphisme en K -théorie induit par l'évaluation en 0 $ev : A_{\theta} \rightarrow A, f \mapsto f(0)$, noté $ev_* : K_{*+1}(A_{\theta}) \rightarrow K_{*+1}(A)$.

Remarque 2.III.63. L'isomorphisme $K_*(A \rtimes \mathbb{Z}) \rightarrow K_{*+1}(A_{\theta})$ correspondant à la composition des deux premiers isomorphismes précédents est appelé isomorphisme du mapping torus.

Nous pouvons déduire de la suite exacte du mapping torus (Paragraphe 4.4) la suite exacte de Pimsner-Voiculescu.

Théorème 2.III.64 (suite exacte de Pimsner-Voiculescu,[Weg93]). *Soient A une C^* -algèbre et notons l'action de \mathbb{Z} sur A par θ , alors la suite suivante est exacte :*

$$\begin{array}{ccccc}
 K_0(A) & \xrightarrow{\theta_* - \iota_*} & K_0(A) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(A \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) \\
 \uparrow \alpha & & & & \downarrow \alpha \\
 K_1(A \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\iota_*} & K_1(A) & \xleftarrow{\theta_* - \iota_*} & K_1(A)
 \end{array}$$

où $\iota : A \hookrightarrow A \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}$ l'inclusion induit $\iota_* : K_*(A) \rightarrow K_*(A \rtimes_{\theta} \mathbb{Z})$, θ_* est induit par θ en K -théorie et α est le morphisme de la proposition précédente.

En utilisant comme dans le mapping torus les groupes d'invariants et coinvariants, on obtient alors deux suites exactes en K -théorie issu de la suite exacte de Pimsner-Voiculescu (voir par exemple [OP11]),

$$0 \rightarrow \text{Coinv}(K_0(A); \theta_*) \rightarrow K_0(A \rtimes_{\theta} \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Inv}(K_1(A), \theta_*) \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

et

$$0 \rightarrow \text{Coinv}(K_1(A), \theta_*) \rightarrow K_1(A \rtimes \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Inv}(K_0(A), \theta_*) \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Ces deux suites exactes permettent ainsi de calculer les groupes de K -théorie d'un produit croisé à partir du moment où l'on connaît les générateurs des groupes de K -théorie de A . En particulier nous avons pour le produit croisé $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ où l'action de \mathbb{Z} est induite par une action de \mathbb{Z} sur Ξ un ensemble de Cantor la conséquence suivante et en utilisant le Corollaire 2.III.55 p.43.

Proposition 2.III.65 ([OP11]). *Soit un ensemble de Cantor Ξ muni d'une action de \mathbb{Z} . Cette action induit une action de \mathbb{Z} sur $C(\Xi)$ par automorphisme. Alors on a*

- 1) $\text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \rightarrow K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}), \chi_E \rightarrow [\chi_E]$ (E compact ouvert) est un isomorphisme ;
- 2) $\text{Inv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \rightarrow K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}), \chi_E \mapsto \chi_E \delta_1 + (1 - \chi_E)$ (E est un compact ouvert invariant) est un isomorphisme.

III.5.5.6-TRACE ET K -THÉORIE

La notion de trace va jouer un rôle dans le calcul et l'interprétation de la K -théorie pour des espaces de pavages. Nous allons voir comment se définit une trace sur une C^* -algèbre puis allons en donner l'application induite en K -théorie.

Définition 2.III.66 (trace). Soit A une C^* -algèbre unifère. On dit qu'une fonctionnelle linéaire $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ est *positive* si $\tau(a^*a) \geq 0$ pour tout $a \in A$.

Une trace sur A est une fonctionnelle positive τ satisfaisant $\tau(1) = 1$ et $\tau(ab) = \tau(ba)$ pour tous $(a, b) \in A^2$.

On dit de plus que τ est *fidèle* si $\tau(a^*a) = 0$ ssi $a = 0$.

On s'intéresse maintenant aux traces sur un produit croisé $A \rtimes \mathbb{Z}$, où l'action de \mathbb{Z} sur A est notée $n \cdot a$.

Soit une trace τ sur A invariante par l'action de \mathbb{Z} au sens où $\tau(n \cdot a) = \tau(a)$ pour tous $a \in A$ et $n \in \mathbb{Z}$. On peut alors étendre cette trace en une trace sur $A \rtimes \mathbb{Z}$ notée $\tau_{\mathbb{Z}}$ et définie pour tout $a = \sum_n a_n \delta_n \in C_c(\mathbb{Z}, A)$ par

$$\tau_{\mathbb{Z}}(a) = \tau(\langle \pi(a)\delta_0, \delta_0 \rangle) = \tau(a_0).$$

L'application $\tau_{\mathbb{Z}}$ est bien une trace car pour $a = \sum_n a_n \delta_n, b = \sum_m b_m \delta_m \in C_c(\mathbb{Z}, A)$ on a

$$\tau_{\mathbb{Z}}(ab) = \tau(\langle \pi(ab)\delta_0, \delta_0 \rangle) = \tau \sum_n \tau(a_n b_{-n}) = \sum_n \tau(b_n a_{-n}) = \tau_{\mathbb{Z}}(ba).$$

En particulier si $A = C(X)$, avec X compact, et si μ est une mesure borélienne finie sur X alors on peut définir une trace notée τ_{μ} sur $C(X)$ par la formule

$$\tau_{\mu}(f) = \int_X f(x) d\mu(x), \quad \forall f \in C(X).$$

On a bien pour $f \in C(X), f \neq 0$,

$$\tau_{\mu}(f^*f) = \int_X \overline{f(x)}f(x) d\mu(x) = \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) \geq 0$$

et

$$\tau_{\mu}(fg) = \int_X f(x)g(x) d\mu(x) = \int_X g(x)f(x) d\mu(x) = \tau_{\mu}(gf), \quad \forall f, g \in C(X).$$

Si de plus μ est invariante pour l'action de \mathbb{Z} sur X au sens où $\mu(n \cdot E) = \mu(E)$ pour tout borélien E de X , τ_{μ} induit une trace $\tau_{\mu, \mathbb{Z}}$ sur $C(X) \rtimes \mathbb{Z}$ et pour tout $a = \sum_n a_n \delta_n \in C(X) \rtimes \mathbb{Z}$, on a

$$\tau_{\mu, \mathbb{Z}}(a) = \tau_{\mu}(\langle \pi(a)\delta_0, \delta_0 \rangle) = \int_X a_0(x) d\mu(x) = \tau_{\mu}(a_0).$$

Le dernier résultat dont nous aurons besoin sur les traces est le morphisme induit en K -théorie. Notons par Tr la trace usuelle sur $M_n(A)$. On définit alors $(\tau_{\mu})_*$ comme le morphisme

$$(\tau_{\mu})_* : K_0(A) \rightarrow \mathbb{R}, [p] - [q] \mapsto (\tau_{\mu} \otimes \text{Tr})(p - q).$$

Pour voir que $(\tau_{\mu})_*$ est bien défini, il faut voir plusieurs points :

- τ s'étend sur $M_n(A)$ par la formule $\tau \otimes \text{Tr}((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}) = \sum_{1 \leq i \leq n} \tau(a_{ii})$;
- τ s'étend donc sur $\text{Proj}(A)$;
- si deux projecteurs p et q sont équivalents, noté $p \sim q$ (voir Paragraphe 2.2), alors on a $\tau(p) = \tau(q)$;
- Ainsi la propriété universelle de la K -théorie implique que l'application $\tau_{\mu} \otimes \text{Tr} = (\tau_{\mu})_*$ est bien un morphisme de groupes entre $K_0(A)$ et \mathbb{R} .

Chapitre 3

Groupeïde associé au pavage et sa C^* -algèbre

Nous allons introduire dans ce chapitre la notion de groupeïde, puis donner la construction de la C^* -algèbre réduite d'un groupeïde d'après Jean Renault et terminerons par introduire une groupeïde associé au pavage hyperbolique.

I- C^* -algèbre d'un groupeïde

Nous allons expliquer ici comment à partir d'un groupeïde (notion que l'on définira juste après) on peut obtenir une C^* -algèbre réduite telle que $C_r^*(X \rtimes H) = C(X) \rtimes_r H$ où $X \rtimes H$ est un groupeïde de transformation pour X compact et H localement compact séparé.

On rappelle que nous avons vu précédemment la notion de produit croisé réduit d'une C^* -algèbre A par les groupes \mathbb{R} et \mathbb{Z} (voir pour cela la sous-section 4 p.28). Nous allons procéder de manière analogue pour la construction d'une C^* -algèbre réduite d'un groupeïde, en regardant la complétion de $C_c(\mathcal{G}, \lambda)$ vu comme opérateurs adjoignables.

I.1- Groupeïdes : définition et exemples

On va maintenant donner la définition d'un groupeïde.

Définition 3.I.1 (groupeïde). On appelle groupeïde \mathcal{G} de base X la donnée de deux ensembles \mathcal{G} , dont les éléments sont appelés flèches et X , dont les éléments sont appelés *unités*, d'applications r et s appelées respectivement *source et but* de \mathcal{G} à valeurs dans X .

On note par $\mathcal{G}^{(2)} = \{(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G}; s(\gamma) = r(\gamma')\} \rightarrow \mathcal{G}, (\gamma, \gamma')$, l'ensemble des flèches composables de \mathcal{G} . Les axiomes suivants sont vérifiés :

- 1) Il existe une application $\iota : X \hookrightarrow \mathcal{G}, x \mapsto 1_x$ telle que $s(1_x) = r(1_x) = x$ les flèches de ce type sont appelées les *flèches unités*, satisfaisant les axiomes suivants.
- 2) il existe une application produit $\cdot : \mathcal{G}^{(2)} \rightarrow \mathcal{G}, (\gamma, \gamma') \mapsto \gamma \cdot \gamma'$;
- 3) $r(\gamma \cdot \gamma') = r(\gamma), s(\gamma \cdot \gamma') = s(\gamma')$ pour tous $(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G}^{(2)}$;
- 4) $\gamma \cdot (\gamma' \cdot \gamma'') = (\gamma \cdot \gamma') \cdot \gamma''$ pour tous $(\gamma, \gamma'), (\gamma', \gamma'') \in \mathcal{G}^{(2)}$;
- 5) $\gamma \cdot 1_x = x \cdot \gamma'$ pour tous $(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G}^2$ tels que $s(\gamma) = r(\gamma') = x$;
- 6) pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$ il existe une flèche notée γ^{-1} satisfaisant $r(\gamma^{-1}) = s(\gamma), s(\gamma^{-1}) = r(\gamma)$ et $\gamma \cdot \gamma^{-1} = 1_{r(\gamma)}, \gamma^{-1} \cdot \gamma = 1_{s(\gamma)}$.

On dira que le groupeïde \mathcal{G} de base X est un *groupeïde topologique* si \mathcal{G} et X sont des espaces topologiques et toutes les opérations définies ci-dessus sont continues pour ces topologies respectives.

Donnons quelques exemples immédiats de groupoïdes.

Exemple 3.I.2.

- 1) Tout groupe G est un groupoïde, en effet il suffit de prendre la base $X = \{e_G\}$.
- 2) Une union disjointes de groupes est un groupoïdes, il suffit de prendre pour base l'ensemble des éléments neutres des groupes.

On donne maintenant la définition d'un groupoïde de transformation.

Définition 3.I.3 (groupoïde de transformation). Soit X est un espace compact et H un groupe localement compact séparé qui agit continument sur X , alors on peut former le groupoïde produit croisé de X par H , noté $X \rtimes H$ où la base est X . On appelle ce groupoïde, *groupoïde de transformation de X par H* . Les applications source et but sont définies respectivement par $r(x, g) = x$ et $s(x, g) = g^{-1}x$, le produit est quant à lui défini par $(x, g)(g^{-1}x, g') = (x, gg')$.

On introduit également les notations suivantes pour un groupoïde \mathcal{G} et un élément x de sa base,

$$\mathcal{G}_x = \{\gamma \in \mathcal{G}; s(\gamma) = x\}$$

et

$$\mathcal{G}^x = \{\gamma \in \mathcal{G}; r(\gamma) = x\}.$$

I.2- Système de Haar

Comme dans le cas des groupes, lorsque l'on veut construire une C^* -algèbre de groupes il faut pouvoir intégrer les fonctions sur le groupe et donc disposer d'une mesure, il nous faut donc un analogue à la mesure de Haar, c'est précisément l'objet de la notion suivante.

Définition 3.I.4 (système de Haar). Soit \mathcal{G} un groupoïde de base X localement compact séparé. Un système de Haar λ sur \mathcal{G} est une collection $(\lambda^x)_{x \in X}$ de mesure de Radon sur \mathcal{G} satisfaisant les axiomes suivants :

- (i) le support de la mesure λ^x est inclus dans \mathcal{G}^x ;
- (ii) Pour toute fonction $f \in C_c(\mathcal{G})$ (espace des fonctions continues à support compact sur \mathcal{G}), l'application $X \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \int_{\mathcal{G}^x} f(\gamma) d\lambda^x(\gamma)$ est continue ;
- (iii) Pour tout $\gamma \in \mathcal{G}$, l'application de translation à gauche $L_\gamma : \mathcal{G}^{s(\gamma)} \rightarrow \mathcal{G}^{r(\gamma)}, \gamma' \mapsto \gamma\gamma'$ préserve le système de Haar au sens où $(L_\gamma)_* \lambda^{s(\gamma)} = \lambda^{r(\gamma)}$ c-à-d pour tout $f \in C_c(\mathcal{G}, \lambda)$,

$$\int_{\mathcal{G}^{s(\gamma)}} f(\gamma\gamma') d\lambda^{s(\gamma)}(\gamma') = \int_{\mathcal{G}^{r(\gamma)}} f(\gamma') d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma').$$

La notion de système de Haar est relié à une mesure de Haar dans le cas d'un groupoïde de transformation $X \rtimes H$. En effet si μ désigne une mesure de Haar sur H , alors il suffit de prendre $\lambda = (\mu_x)_{x \in X}$ où $\mu_x = \mu$ pour tout $x \in X$ et on obtient alors un système de Haar pour le groupoïde $X \rtimes H$. Ainsi pour tout groupe localement compact H agissant continument sur un espace compact X , il existe un système de Haar.

Malheureusement, contrairement au cas des groupes, on n'a pas de théorème d'existence de tels systèmes ni même de leur unicité à multiplication par une constante positive près.

I.3- Construction de la C^* -algèbre réduite d'un groupoïde [Ren80]

L'idée pour obtenir cette C^* -algèbre est de construire un bon module hilbertien et de regarder les opérateurs adjointables.

Soit donc \mathcal{G} un groupoïde topologique de base X , alors $C_c(\mathcal{G})$ à une structure de $C_0(X)$ -module donnée par

$$\phi \cdot f = \phi f \circ s.$$

On définit alors le produit scalaire sur $C_c(\mathcal{G})$ à valeurs dans $C_0(X)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{C_0(X)}$ défini par

$$\langle \phi, \phi' \rangle_{C_0(X)}(x) = \int_{\mathcal{G}^x} \overline{\phi(\gamma^{-1})} \phi'(\gamma^{-1}) d\lambda^x(\gamma), \quad \forall \phi, \phi' \in C_c(\mathcal{G}).$$

Par complétion, on obtient un $C_0(X)$ -module hilbertien que l'on notera $\mathcal{L}^2(\mathcal{G}, \lambda)$.

On pose maintenant l'application $\Lambda : C_c(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{L}_A(\mathcal{L}^2(\mathcal{G}, \lambda))$, où $\mathcal{L}_A(\mathcal{L}^2(\mathcal{G}, \lambda))$ désigne les opérateurs adjointables (voir la sous-section 2 p.27), définie pour tout $f \in C_c(\mathcal{G})$ par

$$\Lambda(f)(\phi)(\gamma) = \int_{\mathcal{G}^{r(\gamma)}} f(\gamma') \phi(\gamma'^{-1} \gamma) d\lambda^{r(\gamma)}(\gamma').$$

De plus en posant pour $f \in C_c(\mathcal{G})$, $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$, on a

$$\Lambda(f)^* = \Lambda(f^*).$$

On définit alors la C^* -algèbre réduite du groupoïde \mathcal{G} comme $\overline{\Lambda(C_c(\mathcal{G}))}^{\|\cdot\|_{C_0(X)}}$ que l'on note $C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)$.

Exemple 3.I.5 (C^* -algèbre réduite d'un groupoïde de transformation). Soit X un espace compact et H un groupe localement compact séparé agissant continument sur X . On regarde à présent le groupoïde de transformation $X \rtimes H$.

En notant μ la mesure de Haar sur H , il existe un isomorphisme naturel entre $C_r^*(X \rtimes H, \mu)$ et $C(X) \rtimes_r H$. Pour le voir il suffit de remarquer que la construction précédente coïncident en tout point avec la construction du produit croisé réduit usuel des C^* -algèbres dont la construction est donnée précédemment.

I.4- Suspension de groupoïdes et leurs C^* -algèbres

Le but de cette partie est d'introduire la suspension d'un groupoïde relativement à un morphisme afin de pouvoir étudier les groupoïdes associés à un pavage hyperbolique. On commence par définir un morphisme de groupoïdes.

Définition 3.I.6 (morphisme de groupoïdes). Soient \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 deux groupoïdes de bases respectives X_1 et X_2 et d'applications sources et buts associées notées s_1, s_2, r_1, r_2 . On dit que $\alpha : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ est un *morphisme de groupoïdes* si les axiomes suivants sont satisfaits :

- (i) Pour tout $(\gamma, \gamma') \in \mathcal{G}_1^{(2)}$, on a $(\alpha(\gamma), \alpha(\gamma')) \in \mathcal{G}_2^{(2)}$ et $\alpha(\gamma\gamma') = \alpha(\gamma)\alpha(\gamma')$;
- (ii) Pour tout $\gamma \in \mathcal{G}_1$, $\alpha(\gamma^{-1}) = \alpha(\gamma)^{-1}$;
- (iii) Pour tout $x \in X_1$, $\alpha(x) \in X_2$, c-à-d α envoie unités de X_1 sur celles de X_2 ;

Si les groupoïdes sont topologiques, on dit qu'un morphisme de groupoïdes α est continu si α est continu en tant qu'application entre \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 .

On va maintenant regarder plus précisément les groupoïdes munis d'un système de Haar.

Définition 3.I.7. Soient \mathcal{G} un groupoïde muni d'un système de Haar $\lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ et $\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ un automorphisme. On dit que α *préserve le système de Haar* λ s'il existe une application $\rho_\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in X$, $\alpha_* \lambda^x$ et $\lambda^{\alpha(x)}$ soient deux mesures équivalentes sur $\mathcal{G}^{\alpha(x)}$ et ρ_α restreint à $\mathcal{G}^{\alpha(x)}$ est la dérivé de Radon-Nikodym $\frac{d\alpha_* \lambda^x}{d\lambda^{\alpha(x)}}$. On appelle ρ_α la *densité de l'automorphisme* α .

Remarque 3.I.8. On peut montrer que si α préserve le système de Haar, alors α^{-1} le préserve également et $\rho_{\alpha^{-1}} = \frac{1}{\rho_\alpha} \circ \alpha$. De plus on peut montrer que ρ_α est constant sur \mathcal{G}_x pour tout $x \in X$.

On peut maintenant définir la notion de suspension d'un groupoïde relativement à un automorphisme.

Définition 3.I.9 (suspension d'un groupoïde). Soient \mathcal{G} un groupoïde de base X d'applications source et but respectivement notées s et r et $\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ un automorphisme de groupoïde. Le *groupoïde de suspension de \mathcal{G} relativement à α* , noté \mathcal{G}_α , est le groupoïde $\mathcal{G} = (\mathcal{G} \times \mathbb{R}) / \mathcal{A}_\alpha$ avec $\mathcal{A}_\alpha : \mathcal{G} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G} \times \mathbb{R}$, $(\gamma, t) \mapsto (\alpha(\gamma), t - 1)$. La base de ce groupoïde est $X_\alpha = (X \times \mathbb{R}) / \mathcal{A}_{\alpha_X}$. On notera par $[\gamma, t]$ un élément de \mathcal{G}_α .

Les applications source et but de ce groupoïdes sont notées et définie pour tout $[\gamma, t] \in \mathcal{G}_\alpha$ par

$$s_\alpha([\gamma, t]) = [s(\gamma), t]$$

et

$$r_\alpha([\gamma, t]) = [r(\gamma), t].$$

De plus si $[\gamma, t], [\gamma', t] \in \mathcal{G}_\alpha$ sont composables alors $[\gamma, t][\gamma', t] = [\gamma\gamma', t]$ et $[\gamma, t]^{-1} = [\gamma^{-1}, t]$.

Remarque 3.I.10. De par la construction, \mathbb{R} agit par automorphisme sur \mathcal{G}_α via $(\theta_s)_{s \in \mathbb{R}}$ défini par $\theta_s([\gamma, t]) = [\gamma, t + s]$.

On s'intéresse maintenant aux groupoïdes possédant un système de Haar et la proposition suivante établit l'existence d'un système de Haar pour la suspension de tels groupoïdes.

Proposition 3.I.11 ([OP11],[Ren80]). Soient \mathcal{G} un groupoïde de base X d'applications source et but notées s et r . Soit $\lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ un système de Haar sur \mathcal{G} et soit α un automorphisme sur \mathcal{G} . Si α préserve λ et si $\rho_\alpha = \rho_\alpha \circ \alpha$, alors \mathcal{G}_α admet un système de Haar noté $\lambda_\alpha = (\lambda_\alpha^{[x,t]})_{[x,t] \in X_\alpha}$ défini pour tout $f \in C_c(\mathcal{G}_\alpha)$ par

$$\lambda_\alpha^{[x,t]}(f) = \int_{\mathcal{G}^x} \rho_\alpha(\gamma)^{-t} f([\gamma, t]) d\lambda^x(\gamma).$$

I.4.4.1-MORPHISME DE C^* -ALGÈBRES INDUIT PAR UN MORPHISME DE GROUPOÏDES [OP11]

On se donne maintenant un automorphisme α sur un groupoïde \mathcal{G} . Le but de cette partie est d'énoncer des conditions sur α afin de pouvoir trouver un morphisme de C^* -algèbres entre la C^* -algèbre réduite du groupoïde de suspension de \mathcal{G} par α et un mapping torus de $C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)$ par un automorphisme dérivant de α .

Proposition 3.I.12. Soient \mathcal{G} un groupoïde localement compact de base X , $\lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ un système de Haar sur \mathcal{G} et $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{G})$ un automorphisme de groupoïde préservant λ . En posant, $\rho'_\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma \mapsto \rho_\alpha(\gamma^{-1})$, alors il existe un unique automorphisme de C^* -algèbres noté $\tilde{\alpha}$ sur $C_r^*(\mathcal{G})$ défini par

$$\tilde{\alpha}(f) = (\rho'_\alpha \rho_\alpha)^{\frac{1}{2}} f \circ \alpha^{-1}, \quad \forall f \in C_c(\mathcal{G}).$$

La proposition suivante permet de faire un lien entre $\tilde{\alpha}$ que l'on vient de définir et un morphisme de C^* -algèbres entre la C^* -algèbre d'une suspension de groupoïdes et un mapping torus (voir Paragraphe 4.4 p.31)

Proposition 3.I.13. *soient \mathcal{G} un groupoïde localement compact de base X , $\lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$ un système de Haar sur \mathcal{G} et $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{G})$ un automorphisme de groupoïde préservant le système de Haar et satisfaisant $\rho_\alpha = \rho_\alpha \circ \alpha$. Alors il existe un unique morphisme de C^* -algèbres*

$$\Lambda_\alpha : C_r^*(\mathcal{G}_\alpha, \lambda_\alpha) \rightarrow C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)_{\hat{\alpha}}$$

défini pour tout $f \in C_c(\mathcal{G}_\alpha)$ par

$$\Lambda_\alpha(f) = \hat{f} : (\gamma, t) \mapsto \rho_\alpha(\gamma)^{-\frac{t}{2}} \rho'_\alpha(\gamma)^{-\frac{t}{2}} f([\gamma, t]).$$

En remarquant que l'action de \mathbb{R} sur \mathcal{G}_α définie (dans la remarque 3.I.10) par les automorphismes $(\theta_s)_{s \in \mathbb{R}}$ préserve la système de Haar λ ayant pour densité $\gamma \rightarrow \rho_\alpha(\gamma)^s$, alors cela induit pour tout réel s un automorphisme $\tilde{\theta}_s$ sur $C_r^*(\mathcal{G}_\alpha)$. On obtient ainsi une action fortement continue de \mathbb{R} sur $C_r^*(\mathcal{G}_\alpha, \lambda^\alpha)$ par automorphisme $(\tilde{\theta}_s)_{s \in \mathbb{R}}$.

Proposition 3.I.14. *Le morphisme Λ_α est \mathbb{R} -équivariant pour les actions de \mathbb{R} sur $C_r^*(\mathcal{G}_\alpha, \lambda^\alpha)$ par automorphismes $(\tilde{\theta}_s)_{s \in \mathbb{R}}$ et l'action sur $C_r(\mathcal{G}, \lambda)_{\hat{\alpha}}$ donnée par $\hat{\alpha}$ issue de l'action de \mathbb{R} par translation sur le mapping torus (voir Paragraphe 4.4).*

II- C^* -algèbres de pavages

On va présenter ici les différentes C^* -algèbres que l'on peut construire dans le cadre des pavages par substitutions. On va se restreindre aux pavages de dimension un, bien que l'on puisse étendre cette construction dans le cas euclidien aux pavages par substitutions pour toutes les dimensions.

On rappelle que le facteur d'expansion d'une substitution est noté λ .

II.1- Cas euclidien

Dans le cas euclidien, on se donne une substitution σ sur \mathbb{R} et P un pavage par substitution issu de σ (voir pour cela la partie sur les pavages). On a construit l'enveloppe du pavage P que l'on note Ω_σ (car ne dépend que de σ , voir pour cela le chapitre 1). On sait également que l'on a une action de \mathbb{R} par translations. On peut alors définir la C^* -algèbre du pavage P .

Définition 3.II.1 (C^* -algèbre de pavage euclidien). On appelle C^* -algèbre associée au pavage par substitution P la C^* -algèbre réduite du groupoïde $\Omega_\sigma \rtimes \mathbb{R}$ issu de l'action par translation de \mathbb{R} . Cette C^* -algèbre n'est autre que $C(\Omega_\sigma) \rtimes \mathbb{R}$.

Remarque 3.II.2. On verra par la suite que l'on a une équivalence Morita entre cette C^* -algèbre et la C^* -algèbre issue de la transversale du pavage, pour cela se référer à la partie concernant les équivalences Morita.

II.2- Cas hyperbolique

Dans la partie introduisant les pavages ainsi que leurs enveloppes, on a construit les systèmes dynamiques (X_P^N, N) et (X_P^G, G) .

Définition 3.II.3 (C^* -algèbres d'un pavage hyperbolique). La C^* -algèbre d'un pavage de Penrose hyperbolique issu d'une substitution est la C^* -algèbre $C(X_P^G) \rtimes G$.

Remarque 3.II.4. On n'a pas besoin ici de différencier le produit croisé réduit puisque le groupe G est moyennable.

Dans le cas de X_P^G l'action de G n'est pas libre en effet on remarque que $(z \mapsto \lambda^m) \cdot P = P$. Ainsi, pour rendre cette action libre, on utilise un coloriage des lignes de niveaux afin de ne pas perdre la structure qui nous intéresse voir pour cela section V du chapitre 1 p.21.

On peut alors donner la définition de la C^* -algèbre d'un pavage de Penrose hyperbolique colorié.

Définition 3.II.5 (C^* -algèbres d'un pavage hyperbolique colorié). La C^* -algèbre d'un pavage de Penrose hyperbolique colorié issu d'une substitution est la C^* -algèbre $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$.

II.3- Isomorphismes

On a vu dans la partie sur les pavages que l'on a un isomorphisme équivariant entre X_P^N et Ω_σ (Proposition 1.IV.10, p.20).

Proposition 3.II.6. Soit P un pavage de Penrose hyperbolique issu d'une substitution σ de dimension une. Alors on a un isomorphisme de C^* -algèbres

$$C(\Omega_\sigma) \rtimes \mathbb{R} \cong C(X_P^N) \rtimes N.$$

L'idée est maintenant d'étudier le système dynamique $(X_{P(c)}^G, G)$ afin de faire apparaître le cas classique pour relier toutes les notions.

II.3.3.1-ÉTUDE DU SYSTÈME DYNAMIQUE $(X_{P(c)}^G, G)$

Dans le but d'alléger les notations futures, on notera pour tout réel t et tout élément T de $X_{P(c)}^G$ l'élément $t \cdot T$ en lieu et place de $(z \mapsto tz) \cdot T$. On veut simplifier l'étude du système dynamique $(X_{P(c)}^G, G)$ en trouvant une application de conjugaison entre ce système et un espace produit quotienté par une certaine relation faisant intervenir les espaces X_P^N et \mathcal{Z}_c (voir Proposition 1.V.4 p.22). Commençons par définir l'application nécessaire pour passer au quotient. Soit

$$\mathcal{R} : X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}_+^*$$

définie par

$$\mathcal{R}(P', c', t) := (\lambda \cdot P', s(c'), \lambda^{-1}t).$$

On peut alors considérer l'action de G sur $X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}_+^*$ donnée pour $g = (z \rightarrow az + b)$ par

$$g \cdot (P', c', t) = (P' + \frac{b}{at}, c', at).$$

On veut voir que l'action de G commute avec \mathcal{R} . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(g \cdot (P', c', t)) &= \mathcal{R}(P' + \frac{b}{at}, c', at) \\ &= (\lambda \cdot (P' + \frac{b}{at}), s(c'), \lambda^{-1}at). \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} g \cdot \mathcal{R}(P', c', t) &= g \cdot (\lambda \cdot P', s(c'), \lambda^{-1}t) \\ &= (\lambda \cdot P' + \lambda \frac{b}{at}, s(c'), \lambda^{-1}at) \\ &= (\lambda \cdot (P' + \frac{b}{at}), s(c'), \lambda^{-1}at). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour tout pavage P' de $X_{P(c)}^G$,

$$g \cdot \mathcal{R}(P') = \mathcal{R}(g \cdot P'), \quad \forall g \in G \quad (3.1)$$

et l'action de G passe au quotient sur $(X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}_+^*)/\mathcal{R}$. Cet espace quotient étant à homéomorphisme près entre \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R} une suspension, il est alors compact. On a alors une conjugaison de systèmes dynamiques via la proposition suivante.

Proposition 3.II.7. *Les deux systèmes dynamiques $(X_{P(c)}^G, G)$ et $((X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}_+^*)/\mathcal{R}, G)$ sont conjugués. Plus précisément, l'application*

$$\psi : G \cdot P(c) \rightarrow (X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}_+^*)/\mathcal{R}, \quad g \cdot P(c) \mapsto [g \cdot (P, c, 1)]$$

où $[x]$ dénote la \mathcal{R} -classe de x , est bien définie et s'étend en une application de conjugaison entre les deux systèmes dynamiques considérés.

Démonstration. Soit l'application $\Phi : X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow X_{P(c)}^G$ définie par

$$\Phi(P', c', t) = t \cdot (P'(c')).$$

Puisque l'application de coloriage est bien définie et continue (Proposition 1.V.5 page 22), alors en munissant de la topologie produit l'espace considéré, on voit que l'application Φ est continue. On veut maintenant voir que l'application passe au quotient. On a d'après Proposition 1.V.5 p.22

$$\begin{aligned} \Phi \circ \mathcal{R}(P', c', t) &= \Phi(\lambda \cdot (P'), \mathbf{s}(c'), \lambda^{-1}t) \\ &= (\lambda^{-1}t) \cdot ((\lambda \cdot P')(\mathbf{s}(c'))) \\ &= (\lambda^{-1}t \cdot \lambda \cdot (P'(c))) \\ &= t \cdot (P'(c')). \end{aligned}$$

Par conséquent $\Phi \circ \mathcal{R} = \Phi$ donc l'application passe au quotient et

$$\bar{\Phi} : (X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}_+^*)/\mathcal{R} \rightarrow X_{P(c)}^G$$

et l'image de $\bar{\Phi}$ est compacte. La G -orbite de $P(c)$ est dense et est contenue dans l'image de $\bar{\Phi}$ l'application est surjective. Montrons l'injectivité. Si $t' \cdot P'(c') = t \cdot P(c)$, alors $P'(c') = t'^{-1}t \cdot P(c)$. Ainsi $t'^{-1}t = \lambda^n$ et $P'(c') = \lambda^n \cdot P(c) = (\lambda^n \cdot P)(\mathbf{s}^n(c))$. Par suite $P' = \lambda^n \cdot P$ et $c' = \mathbf{s}^n(c)$. Par conséquent, nous avons

$$(P', c', t') = \mathcal{R}^n(P, c, t).$$

Il ne reste à montrer que l'équivariance. Soit $g : z \mapsto az + b$.

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(g \cdot (P', c', t')) &= \bar{\Phi}(P' + \frac{b}{at}, c', at) \\ &= at P'(c') + b \\ &= g \cdot \bar{\Phi}(P', c', t). \end{aligned}$$

Donc l'action est bien équivariante.

Ainsi les deux systèmes dynamiques sont conjugués. □

II.3.3.2-GROUPOÏDE DU SYSTÈME DYNAMIQUE $(X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}_+^*/\mathcal{R}, \mathbb{R})$

On considère le groupoïde $\mathcal{G} = (X_P^N \times \mathcal{Z}_c) \rtimes \mathbb{R}$ où \mathbb{R} agit sur $(X_P^N \times \mathcal{Z}_c)$ par $t \cdot (P', c') = (P' + t, c')$. La base X de ce groupoïde est $X_P^N \times \mathcal{Z}_c$ et les applications source et but sont données par

$$r((P', c', t)) = (P', c'); \quad s((P', c', t)) = t^{-1} \cdot (P', c') = (P' - t, c').$$

De plus le produit est donné par $(P', c', t) \cdot (P' - t, c', t') = (P', c', t + t')$.

On note par dt la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} et, dans ces conditions, le groupoïde \mathcal{G} est muni d'un système de Haar $\mu = (\mu^{(P', c')})_{(P', c') \in X_P^N \times \mathcal{Z}_c}$ défini par

$$\mu^{(P', c')}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(P', c', t) dt, \quad \forall f \in C_c(X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}).$$

On définit maintenant un automorphisme de groupoïde sur \mathcal{G} , noté α_c , pour tous $(P', c', t) \in \mathcal{G}$ par

$$\alpha_c(P', c', t) = (\lambda \cdot P', s(c'), \lambda t) \tag{3.2}$$

et d'inverse

$$\alpha_c^{-1}(P', c', t) = (\lambda^{-1} \cdot P', s^{-1}(c'), \lambda^{-1} t).$$

On cherche maintenant à savoir si α_c préserve le système de Haar λ défini précédemment. On a pour toute fonction f de $C_c(X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R})$ et tout couple (P', c') de $X_P^N \times \mathcal{Z}_c$,

$$\begin{aligned} (\alpha_c)_* \mu^{(P', c')}(f) &= \mu^{(P', c')}(f \circ \alpha_c) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f \circ \alpha_c(P', c', t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda \cdot P', s(c'), \lambda t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{-1} f(\lambda \cdot P', s(c'), t) dt \\ &= \lambda^{-1} \mu^{(\lambda \cdot P', s(c'))}(f). \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré la proposition suivante.

Proposition 3.II.8. *L'automorphisme de groupoïde α_c préserve le système de Haar λ en ayant une densité*

$$\rho_{\alpha_c}(P', c', t) = \lambda^{-1}, \forall (P', c', t) \in X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}.$$

Remarque 3.II.9. On montre de même que α_c^{-1} préserve aussi le système de Haar en ayant une densité $\rho_{\alpha_c^{-1}}$ constante égale à λ . On remarque alors que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\rho_{\alpha_c^{-1}} = (1/\rho_{\alpha_c}) \circ \alpha_c.$$

II.3.3.3-DIGRESSION SUR LA SUSPENSION D'UN GROUPOÏDE

Vu le paragraphe précédent et vu la partie sur la suspension d'un groupoïde, le couple $(\mathcal{G} = (X_P^N \times \mathcal{Z}_c) \rtimes \mathbb{R}, \alpha_c)$ satisfait toutes les propriétés permettant de construire le groupoïde de suspension \mathcal{G}_{α_c} . En effet, on remarque que la densité ρ_{α_c} est constante égale à λ^{-1} et que α_c préserve le système de Haar de \mathcal{G} donc le groupoïde de suspension admet lui aussi un système de Haar.

II.3.3.4-ÉTUDE DU GROUPOÏDE $X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}$

On veut étudier dans cette partie le groupoïde du produit semi-direct de $X_{P(c)}^G$ par \mathbb{R} où l'action de \mathbb{R} sur $X_{P(c)}^G$ est donnée par $\mathbb{R} \times X_{P(c)}^G \rightarrow X_{P(c)}^G, (t, P') \mapsto P' + t$. La motivation principale de l'étude de ce groupoïde est de montrer que ce groupoïde et le groupoïde de suspension \mathcal{G}_{α_c} vu précédemment sont isomorphes et que de plus, l'isomorphisme de groupoïdes est \mathbb{R} -équivariant pour les deux actions (celle de \mathbb{R} sur \mathcal{G}_{α_c} et celle de \mathbb{R} sur $X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}$ que l'on va définir ci-après). Commençons par définir l'action de \mathbb{R} sur le groupoïde. Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ on définit l'automorphisme de groupoïde η_t par

$$\eta_t : X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R} \longrightarrow X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}, (P', s) \longmapsto \eta_t(P', s) := (\lambda^t \cdot P', \lambda^t s),$$

où $\lambda^t \cdot P' := (z \mapsto \lambda^t) \cdot P'$. On remarque alors que η_t est bien un automorphisme de groupoïde d'inverse $(\eta_t)^{-1} = \eta_{-t}$.

Comme précédemment, on peut définir sur ce groupoïde un système de Haar que l'on notera par $\mu = (\mu^{P'})_{P' \in X_{P(c)}^G}$ issu de la mesure de Haar sur \mathbb{R} . On a la proposition suivante concernant la préservation de ce système de Haar par η_t .

Proposition 3.II.10. *Soit $t \in \mathbb{R}$, alors l'automorphisme de groupoïde η_t préserve le système de Haar μ et a pour densité $\rho_{\eta_t} \equiv \lambda^{-t}$.*

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$, on pour tout $P' \in X_{P(c)}^G$, et toute fonction $f \in C_c(X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} (\eta_t)_* \mu^{P'}(f) &= \int_{\mathbb{R}} f \circ \eta_t(P', s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda^t \cdot P', \lambda^t s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^{-t} f(\lambda^t \cdot P', s) ds \\ &= \lambda^{-t} \mu^{\eta_t(P')}(f). \end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien que η_t préserve le système de Haar μ sur $X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}$ ayant pour densité $\rho_{\eta_t}(P', s) = \lambda^{-t}$, pour tous $(P', s) \in X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}$. \square

II.3.3.5-LIENS ENTRE LES GROUPOÏDES $((X_P^N \times \mathcal{Z}_c) \rtimes \mathbb{R})_{\alpha_c}$ ET $X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}$

On rappelle que dans la Proposition 3.I.13 on a construit un isomorphisme de C^* -algèbres entre $C_r^*(\mathcal{G}_{\alpha_c}, \lambda^{\alpha_c})$ et $C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)_{\tilde{\alpha}_c}$. De plus cet isomorphisme est \mathbb{R} -équivariant pour les actions de \mathbb{R} données dans la proposition.

Nous donnons dans la proposition qui suit un isomorphisme de groupoïdes entre $X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}$ et \mathcal{G}_{α_c} où α_c est défini dans l'Équation 3.2 p.56.

Proposition 3.II.11. *Soit $c \in \{1, \dots, r\}^{\mathbb{Z}}$, alors il existe un unique isomorphisme de groupoïdes $\kappa_{\alpha_c} : \mathcal{G}_{\alpha_c} \longrightarrow X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :*

- (i) *pour tous les couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\kappa_{\alpha_c}([P + x, c, y, 0]) = (P(c) + x, y)$;*
- (ii) *l'application κ_{α_c} est équivariante par rapports aux actions respectives de \mathbb{R} sur les deux groupoïdes ;*
- (iii) *$(\kappa_{\alpha_c})_* \lambda^{\alpha_c}$ est le système de Haar sur $X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}$ issu de la mesure de Haar sur \mathbb{R} .*

Démonstration. On rappelle tout d'abord la définition de l'application $\mathcal{R}(P', c', t) = (\lambda \cdot P', \mathbf{s}(c'), \lambda^{-1}t)$ et

$$\Phi : X_P^N \times \mathcal{Z}_c \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow X_{P(c)}^G, (P + \tau, c', t) \longmapsto t \cdot (P(c') + \tau),$$

où Φ est l'application continue définie dans la Proposition 3.II.7. Dans toute la suite de la preuve, on notera pour $T \in X_P^N$ et $c' \in \mathcal{Z}_c$,

$$T \bullet c := \overline{\Phi}([T, c', 1]).$$

On remarque alors que l'application

$$X_P^N \times \mathcal{Z}_c \longrightarrow X_{P(c)}^G, (P', c') \longmapsto P' \bullet c'$$

est continue. Cela provient de la continuité de $\overline{\Phi}$.

De plus remarquons que l'on a

$$(\lambda \cdot T) \bullet \mathbf{s}(c') = \overline{\Phi}[\lambda \cdot T, \mathbf{s}(c'), 1] = (\lambda \cdot T)(\mathbf{s}(c')) \quad (3.3)$$

et

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (T \bullet c') &= \lambda(\overline{\Phi}([T, c', 1])) \\ &= \lambda \cdot ((T(c'))) \\ &= \lambda \cdot (T(c')) \\ &= \overline{\Phi}[T, c', \lambda] \\ &= \overline{\Phi}[\lambda \cdot T, \mathbf{s}(c'), 1]. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\lambda \cdot (T \bullet c') = (\lambda \cdot T) \bullet \mathbf{s}(c').$$

Maintenant établie cette égalité, on va pouvoir montrer le résultat voulu. Pour ce faire on considère l'application

$$\Lambda : \mathcal{G} \times \mathbb{R} \longrightarrow X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}, (T, c', x, y) \longmapsto (\lambda^y \cdot (T \bullet c'), \lambda^y x).$$

On remarque que cette application est bien continue (toutes les opérations intervenant dans la définition le sont) et l'on veut maintenant montrer que l'on a $\Lambda \circ \mathcal{A}_{\alpha_c} = \Lambda$. Ainsi, pour tout couple $(T, c', x, y) \in \mathcal{G} \times \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \Lambda \circ \mathcal{A}_{\alpha_c}(T, c', x, y) &= \Lambda(\lambda \cdot T, \mathbf{s}(c'), \lambda x, y - 1) \\ &= (\lambda^{(y-1)} \cdot ((\lambda \cdot T) \bullet \mathbf{s}(c')), \lambda^{(y-1)} \lambda x) \\ &= (\lambda^{(y-1)} \lambda) \cdot (T \bullet c'), \lambda^y x \\ &= \Lambda(T, c', x, y). \end{aligned}$$

Par suite, l'application Λ passe au quotient sur \mathcal{G}_{α_c} en une application notée κ_{α_c} .

Il faut maintenant montrer que κ_{α_c} ainsi définie est injective. Supposons donc que pour deux couples (T_1, c_1, x_1, y_1) et (T_2, c_2, x_2, y_2) dans \mathcal{G}_{α_c} on ait l'égalité de leurs images respectives par κ_{α_c} . De

$$\kappa_{\alpha_c}(T_1, c_1, x_1, y_1) = \kappa_{\alpha_c}(T_2, c_2, x_2, y_2) \iff (\lambda^{y_1} \cdot (T_1 \bullet c_2), \lambda^{y_1} x_1) = (\lambda^{y_2} \cdot (T_2 \bullet c_2), \lambda^{y_2} x_2), \quad (3.4)$$

on déduit tout d'abord que l'on a $\lambda^{\tilde{y}} \cdot (T_1 \bullet c_1) = T_2 \bullet c_2$ pour $\tilde{y} = y_2 - y_1$. Mais alors on a nécessairement d'après l'Équation 3.3 que $\overline{\Phi}([T_1, c_1, \lambda^{\tilde{y}}]) = \overline{\Phi}([T_2, c_2, 1])$ et par conséquent on a l'égalité entre les deux classes $[T_1, c_1, \lambda^{\tilde{y}}] = [T_2, c_2, 1]$. Par suite, $\tilde{y} \in \mathbb{Z}$ et en réécrivant alors les classes via la relation d'équivalence \mathcal{R} , on a alors

$$\begin{cases} \tilde{y} \in \mathbb{Z}; \\ c_2 = \mathbf{s}^{\tilde{y}}(c_1); \\ T_2 = \lambda^{\tilde{y}} \cdot (T_1). \end{cases}$$

De l'égalité (3.4), on en déduit que κ_{α_c} est injective.

Pour montrer la surjectivité de l'application, il suffit de remarquer que tout élément $P' \in X_{P(c)}^G$ peut s'écrire sous la forme $P' = \lambda^a \cdot (\tilde{P} \bullet c')$ où $\tilde{P} \in X_P^N$, $a \in \mathbb{R}$ et $c' \in \mathcal{Z}_c$. Par conséquent, on a alors que pour tout réel t ,

$$(\lambda^a \cdot (\tilde{P} \bullet c'), t) = \kappa_{\alpha_c}([\tilde{P}, c', \lambda^{-a}t, a])$$

et donc Λ est surjective.

On montre maintenant que l'application précédemment définie est équivariante pour les deux actions. On se donne donc un réel t et (T, c', x, y) dans \mathcal{G}_{α_c} , et l'on a

$$\begin{aligned} \eta_t \cdot \kappa_{\alpha_c}(T, c', x, y) &= \eta_t \cdot (\lambda^y \cdot (T \bullet c'), \lambda^y x) \\ &= ((\lambda^t \lambda^y) \cdot (T \bullet c'), \lambda^t \lambda^y x) \\ &= (\lambda^{(y+t)} \cdot (T \bullet c'), \lambda^{(y+t)} x) \\ &= \kappa_{\alpha_c}(T, c', x, y + t) \\ &= \kappa_{\alpha_c}(\theta_t(T, c', x, y)). \end{aligned}$$

Pour finir la preuve il faut maintenant regarder le système de Haar. Pour ce faire on doit tout d'abord rappeler la définition du système de Haar sur \mathcal{G} . On a pour $(P', c') \in X_P^N \times \mathcal{Z}_c$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(P', c')} &= \{\gamma \in \mathcal{G}; r(\gamma) = (P', c')\} \\ &= \{(\tilde{P}, \tilde{c}, t) \in \mathcal{G}; (\tilde{P}, \tilde{c}) = (P', c')\} \\ &= \{(P', c', t), t \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On a vu que α_c préserve le système de Haar et puisque $\rho_{\alpha_c} \circ \alpha_c = \rho_{\alpha_c}$, on peut donc construire le système de Haar λ^{α_c} sur \mathcal{G}_{α_c} . On a pour toute fonction $f \in C_c(\mathcal{G}_{\alpha_c})$,

$$\lambda_{\alpha_c}^{[P', c', s]}(f) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^s f([P', c', t, s]) dt.$$

De même,

$$\begin{aligned} (\kappa_{\alpha_c})_* \lambda_{\alpha_c}^{[P', c', s]}(h) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^s h(\lambda^s \cdot (P \bullet c), \lambda^s t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\lambda^s \cdot (P' \bullet c'), t) dt, h \in C_c(X_{P(c)}^G \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

La dernière égalité termine alors la preuve de la proposition car on a

$$\mu_{\lambda^{ms} \cdot (P' \bullet c')} (f) = (\kappa_{\alpha_c})_* \lambda_{\alpha_c}^{[P', c', s]}(f), \quad \forall f \in C_c(\mathcal{G}_{\alpha_c})$$

et comme on sait que tout élément de $X_{P(c)}^G$ s'exprime sous la forme $\lambda^{ms} \cdot (P' \bullet c')$, le résultat est démontré. En ce qui concerne l'unicité d'une telle application κ_{α_c} , elle résulte du fait de l'équivariance demandée et du fait que $\mathbb{R} \cdot P$ est dense dans X_P^N . \square

Corollaire 3.II.12. *L'application*

$$C_c(X_{P(c)}^G \rtimes \mathbb{R}) \longrightarrow C_r^*(\mathcal{G}_{\alpha_c}), f \mapsto f \circ \kappa_{\alpha_c}$$

induit un isomorphisme \mathbb{R} -équivariant

$$\widetilde{\kappa}_{\alpha_c} : C(X_{P(c)}^G) \rtimes \mathbb{R} \longrightarrow C_r^*(\mathcal{G}_{\alpha_c}, \lambda_{\alpha_c}).$$

Démonstration. Il suffit de combiner la proposition précédente ainsi que la Proposition 3.I.14. \square

II.4- Conclusion

On a un isomorphisme entre G et $\mathbb{R} \rtimes \mathbb{R}$ via l'isomorphisme de groupes $(\mathbb{R}_*^+, \times) \rightarrow (\mathbb{R}, +), t \mapsto \lambda^t$. Ainsi l'on a

$$C(X_{P(c)}^G) \rtimes G \cong (C(X_{P(c)}^G) \rtimes \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}.$$

On a alors montré que

$$C(X_{P(c)}^G) \rtimes G \cong C_r^*(\mathcal{G}_{\alpha_c}, \lambda_{\alpha_c}) \rtimes_{\eta} \mathbb{R}$$

et en appliquant l'isomorphisme \mathbb{R} -équivariant (Proposition 3.I.14 page 53) on a

$$C(X_{P(c)}^G) \rtimes G \cong C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)_{\tilde{\alpha}_c} \rtimes \mathbb{R}$$

En concluant par le théorème d'imprimitivité de Green on obtient l'équivalence Morita suivante

$$C(X_{P(c)}^G) \rtimes G \sim_M C_r^*(\mathcal{G}, \lambda) \rtimes_{\tilde{\alpha}_c} \mathbb{Z}.$$

Chapitre 4

Cohomologie des espaces de pavages et lien avec la K-théorie

Le but de ce chapitre est d'introduire les différentes notions d'homologie et de cohomologie intervenant dans l'étude des espaces de pavages pour ensuite décrire les calculs mis en place dans [AP98]. Puisque les objets dont on veut calculer la (co)-homologie sont de dimension cohomologie égale à 1, nous n'introduirons que les groupes de dimension 0 et 1.

I- Structure cellulaire d'un graphe orienté

On note par $G = (V, E)$ un graphe fini muni d'une orientation. On notera par $|G|$ sa réalisation géométrique et s et r ses applications source et but. Si $e \in E$ est une arête, on notera $\bar{e} \subseteq |G|$ sa réalisation géométrique. On a alors des applications naturelles

$$\Phi_e : [0, 1] \rightarrow \bar{e}$$

respectant l'orientation. On identifiera les sommets V avec les points de $|G|$ correspondant.

On rappelle que $|G|$ est muni d'une structure de CW -complexe de dimension 1 :

1. le 0-squelette formé par les sommets ;
2. les 1-cellules correspondent aux arêtes et l'application de recollement associée est alors Φ_e .

II- Cohomologies des graphes orientés

II.1- Cohomologie cellulaires des graphes orientés

Posons $C_0(G)$ le groupe libre engendré par les sommets V de G et notons sa base $(\delta_x)_{x \in V}$. Définissons également $C_1(G)$, le groupe libre engendré par les arêtes du graphe orienté de base $(\delta_e)_{e \in E}$. Soit $\partial : C_1(G) \rightarrow C_0(G)$ l'application définie par $\partial \delta_e = \delta_{r(e)} - \delta_{s(e)}$.

On définit le groupe des 0-cochaines de G à valeurs entières par $C^0(G; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_0(G), \mathbb{Z})$ que l'on identifie au groupe \mathbb{Z}^V via la base duale $(\delta_x^*)_{x \in V}$. De la même manière le groupe des 1-cochaines à valeurs entières $C^1(G; \mathbb{Z}) = \text{Hom}(C_1(G), \mathbb{Z})$ est identifié au groupe \mathbb{Z}^E par la base duale $(\delta_e^*)_{e \in E}$. Si $\psi \in C^0(G; \mathbb{Z})$ on définit alors l'élément $\partial^* \psi \in C^1(G; \mathbb{Z})$ pour tout $e \in E$ par $\partial^* \psi(\delta_e) = \psi(\partial \delta_e)$.

$$\partial^* \delta_x = \sum_{\substack{e \in E \\ r(e)=x}} \delta_e^* - \sum_{\substack{e \in E \\ s(e)=x}} \delta_e^*.$$

On dit également qu'une 0-cochaine α est un *cocycle* si $\partial^* \alpha = 0$ et qu'un 1-cocycle α est un *cobord* si $\alpha = \partial^* \beta$ pour une certaine 0-cochaine β .

On obtient alors une suite

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^V \xrightarrow{\partial^*} \mathbb{Z}^E \rightarrow 0.$$

On peut alors définir les deux groupes de cohomologie cellulaires

$$H_{CW}^0(G; \mathbb{Z}) = \ker(\partial^*)$$

et

$$H_{CW}^1(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^V / \text{Im}(\partial^*).$$

Remarque 4.II.1 (liens avec les composantes connexes d'un graphe). On remarque alors que l'on a

$$H^0(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^k$$

où k est le nombre de composantes connexes du graphes et les générateurs sont les éléments de \mathbb{Z}^E de la forme $\sum_{x \in C} \delta_x^*$, pour C une partie connexe du graphe.

II.2- Cohomologie de Čech et isomorphisme avec la cohomologie cellulaire pour un graphe orienté

Dans cette partie, on introduira les groupes de cohomologie de Čech de dimension 0 et 1. On donnera pour les CW-complexes de dimension 1 une description explicite de l'isomorphisme entre cohomologie de Čech et cohomologie cellulaire. Pour un cadre général, on pourra se référer à [Hat02].

Commençons par définir la cohomologie de Čech. La définition classique utilise la notion de faisceaux mais en degré un, le théorème d'Eilenberg-MacLane nous permet de donner une définition plus simple de la cohomologie à valeurs entière. Nous avons pour cela besoin d'introduire la notion de classe d'homotopies à valeurs dans le cercle unité \mathbb{S}^1 .

Définition 4.II.2 (classes d'homotopies d'applications continues). Soit X un compact, on note $[X; \mathbb{S}^1] = \{f : X \rightarrow \mathbb{S}^1, \text{ continue}\} / \sim_h$ avec $[f] = [g]$ si f est homotope à g .

Remarque 4.II.3. Puisque \mathbb{S}^1 est un groupe alors $[X; \mathbb{S}^1]$ possède une structure de groupes via $[f][g] = [h]$ avec $h(x) = f(x)g(x), \forall x \in X$.

Définition 4.II.4 ([Hat02]). Soit X un espace compact. On définit le groupe de cohomologie de Čech de dimension 0 à valeurs entières par

$$\check{H}^0(X; \mathbb{Z}) = C(X; \mathbb{Z})$$

et celui de dimension 1 par

$$\check{H}^1(X; \mathbb{Z}) = [X; \mathbb{S}^1],$$

où $C(X; \mathbb{Z})$ désigne les fonctions continues à valeurs entières.

En utilisant des résultats généraux de cohomologie (voir par exemple ([GH94], pp.34-39), la cohomologie des graphes est la même que l'on regarde celle de Čech ou celle cellulaire, ie

$$\check{H}^\bullet(G; \mathbb{Z}) = H_{CW}^\bullet(G; \mathbb{Z})$$

En particulier, la cohomologie de Čech d'un graphe orienté de dimension 0 à valeurs entières est

$$\check{H}^0(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^k$$

et est engendré par les fonctions caractéristiques des composantes connexes.

Soit e^1 une arête. Soit $\varphi_e : |G| \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\varphi_e(x) = 1, \text{ si } x \notin \bar{e}$$

et

$$\varphi_e(\Phi_e(t)) = e^{2i\pi t}, t \in [0, 1].$$

L'application $C^1(|G|; \mathbb{Z}) \rightarrow [X; \mathbb{S}^1], \delta_e \mapsto [\varphi_e]$ s'annule sur les cochaines.

Proposition 4.II.5. *L'application*

$$H_{CW}^1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow [X; \mathbb{S}^1] \cong \check{H}^1(X; \mathbb{Z}), [\delta_e] \mapsto [\varphi_e]$$

est un isomorphisme.

III- Cohomologie des espaces de pavages [AP98]

III.1- Introduction à l'article

Le but de l'article [AP98] est donner une construction d'une approximation des espaces de pavages par substitution permettant de calculer plus facilement la cohomologie des espaces de pavages. De plus, dans cet article les auteurs relient le calcul de la cohomologie avec la K-théorie des C^* -algèbres associées. Dans cette partie, on va commencer par donner la construction de l'approximation, puis le calcul de la cohomologie et enfin expliciter le lien avec la K-théorie. On fixe dans tout ce qui suit σ une substitution primitive, répétitive, apériodique. On notera par Ω_σ l'espace de pavages de la droite réelle associés qui est donc compact d'après le chapitre consacré aux espaces de pavages.

III.2- Résultats principaux

III.2.2.1-CONSTRUCTION DES APPROXIMATIONS Γ_i

Avant de construire les approximations, on rappelle que la substitution σ induit un homéomorphisme $\sigma : \Omega_\sigma \rightarrow \Omega_\sigma$.

L'idée derrière ces approximation est de remarquer qu'un pavage peut se définir comme une tuile à l'origine puis les tuiles entourant cette tuile et ainsi de suite. Le fait que l'on ait besoin de construire deux types d'approximations résulte du fait que la substitution force ou non les bords sur les protuiles. On va donc rappeler la construction d'Anderson et Putnam puis énoncer leur théorème sur les liens avec Ω_σ .

Soit T un pavage et t une tuile de T . On pose

$$T^{(0)}(t) := \{t\}$$

et

$$T^{(1)}(t) = \{\text{couronne de } T \text{ centrée en } t\}$$

On regarde ensuite la produit $\Omega_\sigma \times \mathbb{R}^d$ muni de la topologie produit où celle sur Ω_σ est la topologie discrète. On prend $\sim_i, i \in \{0, 1\}$ les plus petites relations d'équivalence sur $\Omega_\sigma \times \mathbb{R}^d$ reliant (T_1, u_1) à (T_2, u_2) dès que $T^{(i)}(t_1) - u_1 = T^{(i)}(t_2) - u_2$ pour des tuiles $t_i \in T_i$ et des réels $u_i \in t_i$.

On note $(T, u)_i$ les classes d'équivalences et on note $\Gamma_i = (\Omega_\sigma \times \mathbb{R}^d) / \sim_i$ le quotient muni de la topologie quotient.

D'après les résultats du chapitre 1, l'enveloppe d'un pavage couronné est la même que celle d'un pavage non couronné.

III.2.2.2-PROPRIÉTÉS DES ESPACES $\Gamma_i, i \in \{0, 1\}$

On va lister ici les principales propriétés des espaces que l'on vient de construire. Ces propriétés restent vraies en dimension plus grande que 1, mais puisque les objets que l'on considère sont de dimension 1 nous restreindrons ces propriétés à la dimension 1. Commençons par la proposition suivante.

Proposition 4.III.1 ([AP98]). *Les approximations Γ_0 et Γ_1 ont une structure de CW-complexes finis.*

Démonstration. On va montrer que ces deux approximations sont des réalisations de graphes orientés. Faisons le pour Γ_1 (la méthode est identique pour Γ_0). Notons e_1, \dots, e_n les couronnes (le nombre est fini car la substitution est FLC). Ces éléments e_1, \dots, e_n correspondent aux arêtes du graphe. Pour terminer de décrire le graphe il faut définir ces sommets. Notons $s_i = s(e_i)$ et $r_i = r(e_i)$. Posons $\alpha_1 = r(e_1)$, alors dès que la configuration $e_1 e_j$ est autorisée par la substitution, on pose $s(e_j) = \alpha_1$. En continuant le processus, on pose $\alpha_2 = r(e_i)$ pour le plus petit i tel que $r(e_i)$ n'est pas été défini par α_1 et en recommençant le processus, on construit une suite $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ qui forme les arêtes de du graphe. Par conséquent Γ_1 s'identifie à la réalisation géométrique du graphe $(\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, \{e_1, \dots, e_n\})$ et possède donc bien une structure de CW-complexe.

Le cas Γ_0 est obtenu en prenant les protuite s comme arêtes et en attribuant les sommets comme précédemment. □

On verra par la suite l'intérêt de cette proposition car elle va nous permettre de calculer la cohomologie de Čech des espaces de pavages via un calcul de cohomologie cellulaire. Les espaces Γ_0 et Γ_1 sont compacts. Vient alors une propriété fondamental de ces espaces, à savoir l'existence d'une application continue sur ceux-ci.

Proposition 4.III.2. *L'application $\sigma : \Omega_\sigma \rightarrow \Omega_\sigma$ induit deux applications de graphes continues surjectives $\gamma_0 : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_0$ et $\gamma_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$ définies par $\gamma_i((T, u)_i) = (\sigma(T), \lambda u)_i$ où λ désigne le facteur d'expansion de la substitution.*

On peut alors définir les espaces suivants.

Définition 4.III.3. On note et définit par Ω_i le i -ième approximant d'Anderson et Putnam comme la limite projective de Γ_i relative à l'application γ_i que l'on note également

$$\Omega_i = \varprojlim(\Gamma_i, \gamma_i).$$

Nous allons voir que (Ω_1, ω_1) et (Ω_0, ω_0) (si la substitution force les bords) sont conjugués à (Ω_σ, σ) . Avant d'énoncer le théorème établissant cette conjugaison, on va d'abord rappeler la topologie sur les espaces Ω_i ainsi que l'action de \mathbb{Z} dont ils sont munis.

Par définition, Ω_i consiste en la collection de toutes les suites infinies $\{x_l\}_{l \geq 0}$ d'éléments de Γ_i satisfaisant $\gamma_i(x_l) = x_{l-1}, l \geq 1$. La topologie sur ces espaces est la topologie relative issu de la topologie produit. Plus précisément une base pour cette topologie est donnée par les éléments $B_{U,n}^{\Omega_i}$ de la forme

$$B_{U,n}^{\Omega_i} = \{x = \{x_l\}_{l \geq 0} \in (\Omega_i)^{\mathbb{N}}; x_l \in \gamma_i^{n-l}(U), l \in \{0, \dots, n\}\},$$

où $n \in \mathbb{N}^*, U \subseteq \Gamma_i$ est un ouvert.

On considère le shift à droite $\omega_i : \Omega_i \rightarrow \Omega_i$ défini par $\omega_i(x)_l = \gamma_i(x)_l$ pour $x = \{x_l\}_{l \geq 0} \in \Omega_i$. Cette application est bijective d'inverse ω_i^{-1} définie par $\omega_i^{-1}(x)_l = x_{l+1}$. De plus en utilisant la base $B_{U,n}^{\Omega_i}$, on voit que ω_i est un homéomorphisme sur Ω_i et donc induit une action de \mathbb{Z} sur Ω_i ce qui nous donne le système dynamique (Ω_i, ω_i) annoncé.

En définissant alors l'application $\pi : \Omega_\sigma \rightarrow \Omega_1$ par $\pi(T) = \{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ avec $x_i = (\omega_1^{-i}(T), 0)_1$, Jared Anderson et Ian Putnam démontrent que π conjugue les systèmes dynamiques (Ω_σ, σ) et (Ω_1, ω_1) ainsi que le théorème suivant.

Théorème 4.III.4 ([AP98]).

- (i) Les systèmes dynamiques (Ω_σ, σ) et (Ω_1, ω_1) sont conjugués;
- (ii) Dans le cas où σ force les bords, alors (Ω_σ, σ) et (Ω_0, ω_0) sont également conjugués.

III.3- Liens avec la K-théorie des espaces de pavages

On donne le théorème concernant le calcul de l'homologie de Čech de Ω_σ .

Théorème 4.III.5 (Anderson-Putnam). *Pour tout substitution σ satisfaisant les hypothèses de construction de Γ_1 , on a*

$$H^i(\Omega_\sigma, \mathbb{Z}) \cong \varinjlim (H^i(\Gamma_1; \mathbb{Z}), \gamma_1^*)$$

Si de plus σ force les bords alors

$$H^i(\Omega_\sigma, \mathbb{Z}) \cong \varinjlim (H^i(\Gamma_0; \mathbb{Z}), \gamma_0^*).$$

IV- K-théorie des graphes orientés

Pour pouvoir calculer la K-théorie des graphes orientés nous allons d'abord utiliser des suites exactes afin de construire de longues suites exactes en cohomologie que nous rapprocherons de la K-théorie, la finalité étant de pouvoir expliciter le calcul pour les espaces de pavages.

IV.1- Suites exactes

Calculons la cohomologie cellulaire de G grâce à la suite exacte longue associée à la paire $(|G|, V)$.

Soit $v \in V$, on pose

$$\kappa(\delta_v) = \sum_{e \in E} \varepsilon(e, v) \delta(e)$$

où

$$\varepsilon(e, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } s(e) = v \\ -1 & \text{si } r(e) = v \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

le morphisme κ est l'application de connexion dans la suite exacte en cohomologie cellulaire associée à la paire $(|G|, V)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{CW}^0(|G|; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_{CW}^0(V; \mathbb{Z}) & & \\ & & & & \downarrow \kappa & & \\ 0 & \longleftarrow & H_{CW}^1(|G|; \mathbb{Z}) & \longleftarrow & H_{CW}^1(|G/V|; \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

où $|G/V|$ est la réalisation géométrique du graphe obtenu en identifiant tous les sommets de G .

De même effectuons les mêmes calculs en cohomologie de Čech. Définissons pour $v \in V$, $\Phi_v : |G/V| \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\Phi_v(\Phi_e(t)) = \begin{cases} e^{2i\pi t}, & \text{si } r(e) = v \text{ ou } s(e) = v; \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Considérons alors

$$\check{\kappa} : \check{H}^0(V; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{|V|} \rightarrow \check{H}^1(|G/V|; \mathbb{Z}), [\delta_v] \mapsto [\Phi_v].$$

Le morphisme $\check{\kappa}$ est l'application de connexion dans la longue suite exacte en cohomologie de Čech associée à la paire $(|G|, V)$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \check{H}^0(|G|; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \check{H}^0(V; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^V & & \\ & & & & \downarrow \check{\kappa} & & \\ 0 & \longleftarrow & \check{H}^1(|G|; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^E & \longleftarrow & \check{H}^1(|G/V|; \mathbb{Z}) & & \end{array}$$

Les deux longues suites exactes sont compatibles avec l'identification faite entre les deux cohomologies dans la Proposition 4.II.5 page 63.

V- Lien avec la K -théorie des CW-complexes

L'inclusion de V dans G donne lieu à la suite exacte :

$$0 \rightarrow C_0(|G| \setminus V) \rightarrow C(|G|) \rightarrow C(V) \rightarrow 0.$$

En appliquant la suite exacte à six termes en K -théorie (Théorème 2.III.60 page 44), on obtient

$$\begin{array}{ccccc} K_0(C_0(|G| \setminus V)) & \longrightarrow & K_0(C(|G|)) & \longrightarrow & K_0(C(V)) \cong \mathbb{Z}^V \\ & & & & \downarrow \delta_0 \\ K_1(C(V)) & \longleftarrow & K_1(C(|G|)) & \longleftarrow & K_1(C(|G| \setminus V)) \cong \mathbb{Z}^E \end{array}$$

où $|G| \setminus V$ est vu comme le compactifié de $|G| \setminus V$. On a alors

$$K_0(C_0(|G| \setminus V)) = \{0\}, \quad K_1(C(V)) = 0.$$

et les générateurs de $K_0(C(V))$ sont donnés par les classes $[e^{2i\pi\Phi_e^{-1}}]$;

Remarque 4.V.1. Si X est un espace compact, le déterminant induit un morphisme

$$\det_* : K_1(C(X)) \rightarrow H_{CW}^1(X), [u] \mapsto [\det u]$$

qui est scindé par

$$H_{CW}^1(X) \rightarrow K_0(C(X)), [u] \mapsto [u]$$

Proposition 4.V.2. *Le diagramme suivant est commutatif.*

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xlongequal{\quad} & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}^0(|G|; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\text{Tr}_*} & K_0(C(|G|)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}^0(V; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\text{Tr}_*} & K_0(C(V)) \\ \downarrow \kappa & & \downarrow \delta_0 \\ \check{H}^1(|G/V|; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\det_*} & K_1(C(|G| \setminus V)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}^1(|G|; \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\det_*} & K_1(C(|G|)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \xlongequal{\quad} & 0 \end{array}$$

avec

$$\delta_0(v) = [\varphi_v].$$

Démonstration. En faisant le calcul on obtient

$$\kappa \circ \text{Tr} = \det \circ \delta_0.$$

□

Corollaire 4.V.3. *Le morphisme*

$$\det_* : K_1(C(|G|) \rightarrow H_1(|G|, \mathbb{Z}))$$

est un isomorphisme d'inverse

$$H^1(|G|; \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(C(|G|)), [u] \mapsto [u].$$

VI- Isomorphismes avec la K-théorie

En utilisant le lemme (Proposition 2.III.65) on obtient la K-théorie de $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ en utilisant invariants et coinvariants. On a alors

$$K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z}))$$

et

$$K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \text{Inv}(C(\Xi; \mathbb{Z}))$$

Nous pouvons alors donner suite d'isomorphismes en K-théorie permettant de calculer la K-théorie paire de $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ dans le cas des espaces de pavages.

Proposition 4.VI.1. *Nous avons la suite d'isomorphismes suivante :*

$$\begin{array}{c} \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z}) \cong K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \\ \downarrow \alpha_1 \\ K_1(C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathbb{Z})) \\ \downarrow \alpha_2 \\ K_1(C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}})) \\ \downarrow \alpha_3 \\ K_1(C(\Omega_\sigma)) \\ \downarrow \alpha_4 \\ \varinjlim K_1(C(\Gamma_1)) \\ \parallel \\ \varinjlim \check{H}^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \\ \parallel \\ \varinjlim H_{CW}^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \end{array}$$

Les quatre morphismes α_i sont des isomorphismes.

- (i) Soit E un compact ouvert de Ξ tel que $\chi_E \in \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z}))$, on définit alors $\alpha_1(\chi_E)$ comme la classe dans K_1 de

$$\Xi \times \mathbb{R} \ni (\omega, t) \mapsto \chi_E(\omega)e^{2i\pi t} + (1 - \chi_E)(\omega).$$

Voir Proposition 2.III.61 p.44.

(ii) Le morphisme résultant d'une remise à l'échelle donnée par l'application Δ et définit par

$$\alpha_2(u)[T, t] = u[T, \Delta(T, 1)t].$$

(iii) Le troisième morphisme α_3 est induit par le morphisme de la Proposition 1.I.71 p.13 ;

(iv) Le dernier morphisme provient de l'isomorphisme entre $\Omega_\sigma \cong \varprojlim(\Gamma_1, \sigma_1^*)$ et du fait que $K_*(\varprojlim A) = \varinjlim K_*(A)$.

Proposition 4.VI.2 (équivariance). *La suite d'isomorphismes précédente est \mathbb{Z} -équivariante pour les actions provenant de σ^* sur $\varinjlim H_{CW}^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$.*

Démonstration. Sur $\varinjlim H_{CW}^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ nous avons une action de \mathbb{Z} provenant de σ^* . Nous allons maintenant montrer que la suite d'isomorphismes est \mathbb{Z} -équivariante. Le fait que l'isomorphisme entre les cohomologies cellulaire et de Čech soit \mathbb{Z} -équivariant provient de la définition de la cohomologie de Čech via le diagramme utilisant les fonctions homotopes sur le cercle \mathbb{S}^1 . En effet l'action de σ^* se transporte sur $[\Gamma_1 : \mathbb{S}^1]$ via $\sigma^* f = f \circ \sigma$.

L'isomorphisme $\varinjlim \check{H}^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \varinjlim K_1(C(\Gamma_1))$ est \mathbb{Z} -équivariant pour les actions respectives de σ^* sur la cohomologie et l'action par σ_* (ou σ est un homéomorphisme sur l'enveloppe Ω_σ);

L'isomorphisme $K_1(C(\Omega_\sigma)) \xrightarrow{\sim} K_1(C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g))$ provient du fait que les systèmes dynamiques $(\Omega_\sigma, \mathbb{R})$ et $((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g, \mathbb{R})$ sont conjugués (voir Proposition 1.I.71 p.13);

La remise à l'échelle donnant l'isomorphisme α_2 est clairement \mathbb{Z} -équivariante ;

Enfin le dernier isomorphisme α_1 est également \mathbb{Z} -équivariant en prenant l'action de sur les coinvariants l'action de la substitution sur Ξ .

□

Chapitre 5

Équivalence de Morita

On va introduire la notion d'équivalence Morita qui va nous permettre de faire le calcul de la K -théorie

I- Définition de base

On se réfère ici à [Wil98] pp 42-44. On commence par donner la définition d'un bimodule d'imprimitivité (dont le nom vient de l'article originel de Marc Rieffel [Rie82]).

Définition 5.I.1 (bimodule d'imprimitivité). Soient A et B deux C^* -algèbres. Un $A - B$ -bimodule d'imprimitivité X est un bimodule hilbertien (muni de ${}_A \langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ satisfaisant :

- (i) X est un A -module hilbertien à gauche plein et un B -module hilbertien à droite plein (c-à-d que ${}_A \langle X, X \rangle$ et $\langle X, X \rangle_B$ sont des idéaux respectivement denses dans A et B);
- (ii) Pour tous $x, y \in X, a \in A$ et $b \in B$, on a

$$\langle a \cdot x, y \rangle_B = \langle x, a^* \cdot y \rangle_B$$

et

$${}_A \langle x \cdot b, y \rangle = {}_A \langle x, y \cdot b^* \rangle.$$

- (iii) Pour tous $x, y, z \in X$, on a

$${}_A \langle x, y \rangle \cdot z = x \cdot \langle y, z \rangle_B.$$

On peut alors donner des exemples de bimodule d'imprimitivité.

Exemple 5.I.2.

- 1) Un espace de Hilbert \mathcal{H} est un $\mathcal{K}(\mathcal{H}) - \mathbb{C}$ -bimodule d'imprimitivité. On définit ici $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ comme le produit hilbertien de \mathcal{H} et on prend

$$\mathcal{K}(\mathcal{H}) \langle \xi, \xi' \rangle (x) = \xi \langle x, \xi' \rangle_{\mathbb{C}}.$$

- 2) Si A est une C^* -algèbre alors A est un $A - A$ -bimodule d'imprimitivité. On prend pour cela

$${}_A \langle a, b \rangle = ab^* \quad \langle a, b \rangle_A = a^*b, \quad \forall a, b \in A.$$

On arrive alors à la définition de l'équivalence Morita.

Définition 5.I.3 (équivalence Morita). Soient A et B deux C^* -algèbres. On dit que les deux C^* -algèbres sont *Morita équivalentes* s'il existe un $A - B$ -bimodule d'imprimitivité.

On donne maintenant une propriété fondamentale en K -théorie pour des C^* -algèbres Morita équivalentes.

Proposition 5.I.4 ([Weg93]). *Si deux C^* -algèbres sont Morita équivalentes, alors $K_*(A) = K_*(B)$.*

Avant de terminer cette section, on donne une propriété que l'on utilisera dans la suite pour décomposer nos C^* -algèbres de pavages.

Proposition 5.I.5 ([Wil98]). *Soient B une C^* -algèbre et X un B -module hilbertien plein à droite, alors X est un $\mathcal{K}(X) - B$ -bimodule d'imprimitivité avec $\kappa_{\mathcal{K}(X)} \langle x, y \rangle = \Theta_{x,y}$, où $\Theta_{x,y}$ est un opérateur de rang un.*

Réciproquement si X est un $A - B$ -bimodule d'imprimitivité alors il existe un isomorphisme $\phi : A \rightarrow \mathcal{K}(X)$ tel que $\phi(\langle x, y \rangle) = \kappa_{\mathcal{K}(X)} \langle x, y \rangle$ pour tout $x, y \in X$.

II- Shift et C^* -algèbre d'un espace de pavage

Nous avons vu dans le chapitre 1 l'existence d'une transversale canonique Ξ pour Ω_σ qui dans le cas des substitutions qui nous intéressent est un espace de Cantor associé au sous-shift sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ relatif aux mots bi-infini σ -admissibles. Nous avons également vu que dans le cas des pavages hyperboliques associés à de telles substitutions que X_P^N admet une transversale canonique au sens de [Ren80] en considérant le groupoïde $X_P^N \rtimes N$ (il suffit pour cela de prendre $(\Xi, 0) \cong \Xi$).

Nous rappelons également l'existence d'une application $\Delta : \Xi \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant pour tout $T \in \Xi$ et tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$T - \Delta(T, n) = \mathfrak{s}^n(T),$$

où $\mathfrak{s} : \Xi \rightarrow \Xi$ l'application qui correspond au sous-shift sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$.

Dans ces conditions nous avons alors montré que X_P^N et $(\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_s$ sont deux espaces homéomorphes en posant $\mathcal{A}_s : \Xi \times \mathbb{R} \rightarrow \Xi \times \mathbb{R}, (T, t) \mapsto (\mathfrak{s}(T), t - \Delta(T, 1))$.

III- Construction du bimodule d'imprimitivité

L'idée derrière la construction de ce bimodule d'imprimitivité provient de la notion de transversale T d'un groupoïde \mathcal{G} qui permet à Jean Renault dans [Ren80] de construire un $C_r^*(\mathcal{G}, \lambda) - C_r^*(\mathcal{G}_T^T, \lambda_T)$ bimodule d'imprimitivité issu d'une complétion de $C_c(\mathcal{G}_T)$, où $\mathcal{G}_T^T = \{\gamma \in \mathcal{G}, r(\gamma) \in T\}$ et $\mathcal{G}_T = \{\gamma \in \mathcal{G}; s(\gamma) \in T\}$. On sait que les espaces de pavages (voir chapitre 1) admettent une transversale canonique Ξ accompagnée d'une action de \mathbb{Z} provenant du sous-shift sur $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Dans ce cas \mathcal{G}_Ξ^{Ξ} est alors donné par l'action de \mathbb{Z} sur Ξ provenant du sous-shift.

III.1- Définition des produits hilbertiens

III.1.1.1-PRODUIT HILBERTIEN À VALEURS DANS $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$

On va tout d'abord définir un produit scalaire $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ -valué sur $C_c(\Xi \times \mathbb{R})$. Posons pour tous $\xi, \xi' \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$

$$\langle \xi, \xi' \rangle_{\mathbb{Z}}(T, \ell) = \int_{\mathbb{R}} \bar{\xi}(T, s) \xi' \circ \mathcal{A}_s^{-\ell}(T, s) ds, \quad \forall (T, \ell) \in \Xi \times \mathbb{Z}.$$

Il suffit alors de vérifier que les propriétés d'un produit préhilbertien sont vérifiées et donc induit un $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ module hilbertien à droite que l'on notera \mathcal{E} , dont l'action sur $C(\Xi \times \mathbb{R})$ est donnée pour tout $h \in C_c(\Xi \times \mathbb{Z})$ et tout $\xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$ par

$$\xi \cdot h(T, s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi \circ \mathcal{A}_s^n(T, s) h(\mathfrak{s}^n(T), n), \quad \forall (T, s) \in \Xi \times \mathbb{R}.$$

Il faut maintenant voir que les axiomes d'un produit hilbertien sont vérifiés.

La linéarité est obtenue par une inversion série intégrale.

Vérifions maintenant la positivité. En utilisant la famille de représentations $(\pi_T, \ell^2(\mathbb{Z}))_{T \in \Xi}$ construite dans la sous-section 4 p.28 pour l'action de \mathbb{Z} sur Ξ , il suffit de montrer que

$$\pi_T(\langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}}) \geq 0, \forall \xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{R}).$$

Soient donc $\eta \in \ell^2(\mathbb{Z})$ et $\xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{Z})$, on a alors

$$\begin{aligned} \langle \eta, \pi_T \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}} \cdot \eta \rangle_{\ell^2} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\eta(n)} (\pi_T \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}} \cdot \eta)(n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\eta(n)} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}^n(T), m) \eta(n-m) \right) \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \overline{\eta(n)} \int_{\mathbb{R}} \overline{\xi(\mathfrak{g}^n(T), s)} \xi(\mathfrak{g}^{n-m}(T), s - \Delta(\mathfrak{g}^n(T), -m)) ds \eta(n-m) \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\eta(n) \xi(\mathfrak{g}^n(T), s)} \xi(\mathfrak{g}^{n-m}(T), s + \Delta(T, n) - \Delta(T, n-m)) \eta(n-m) ds \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\eta(n) \xi(\mathfrak{g}^n(T), s - \Delta(T, n))} \xi(\mathfrak{g}^{n-m}(T), s - \Delta(T, n-m)) \eta(n-m) ds \\ &= \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \overline{\eta(n) \xi(\mathfrak{g}^n(T), s - \Delta(T, n))} \xi(\mathfrak{g}^m(T), s - \Delta(T, m)) \eta(m) ds \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\pi_T \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}} \geq 0$ pour tout $T \in \Xi$ et donc $\langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}} \geq 0$ pour tout $\xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{Z})$. Par passage au complété séparé nous obtenons un $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ -module hilbertien à droite noté \mathcal{E} .

Définissons une action de $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}})$ sur $C_c(\Xi \times \mathbb{R})$ pour $f \in C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}})$ et $\xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$ par

$$f \cdot_{\mathbb{R}} \xi(T, s) = f([T, s]) \xi(T, s), \quad \forall (T, s) \in \Xi \times \mathbb{R}.$$

Montrons que l'on a

$$\langle f \cdot_{\mathbb{R}} \xi, f \cdot_{\mathbb{R}} \xi \rangle_{\mathbb{Z}} \leq \|f\|^2 \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}}, \quad \forall f \in C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}), \forall \xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{R}).$$

On a,

$$\begin{aligned} (\|f\|^2 \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}} - \langle f \cdot_{\mathbb{R}} \xi, f \cdot_{\mathbb{R}} \xi \rangle_{\mathbb{Z}})(T, \ell) &= \|f\|^2 \int_{\mathbb{R}} \overline{\xi(T, s)} \xi \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^{-\ell}(T, s) ds - \int_{\mathbb{R}} \overline{f \cdot_{\mathbb{R}} \xi(T, s)} (f \cdot_{\mathbb{R}} \xi) \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^{-\ell}(T, s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|f\|^2 \overline{\xi(T, s)} \xi \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^{-\ell}(T, s) ds \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \overline{f([T, s]) \xi(T, s)} f([T, s]) \xi \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^{-\ell}(T, s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\|f\|^2 - |f([T, s])|^2) \overline{\xi(T, s)} \xi \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^{-\ell}(T, s) ds. \end{aligned}$$

Or $\|f\|^2 - |f(T, s)|^2 > 0$ pour tout $(T, s) \in \Xi \times \mathbb{R}$, alors il existe $h > 0$ tel que $h^2(T, s) = \|f\|^2 - |f(T, s)|^2, \forall (T, s) \in \Xi \times \mathbb{R}$, et l'on a

$$\|f\|^2 \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}} - \langle f \cdot_{\mathbb{R}} \xi, f \cdot_{\mathbb{R}} \xi \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle h \cdot \xi, h \cdot \xi \rangle_{\mathbb{Z}} \geq 0.$$

Par conséquent on a pour tout $f \in C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g)$ et tout $\xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$,

$$\langle f \cdot_{\mathbb{R}} \xi, f \cdot_{\mathbb{R}} \xi \rangle_{\mathbb{Z}} \leq \|f\|^2 \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}}$$

et l'on peut alors étendre l'action de $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g)$ en une action sur \mathcal{E} .

Soient $\xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}$, définissons

$$\alpha_t \xi(T, s) = \xi(T, s - t).$$

On va alors montrer que α est une isométrie et donc s'étend sur \mathcal{E} . On a pour tout $\xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha_t \xi, \alpha_t \xi \rangle_{\mathbb{Z}}(T, \ell) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\alpha_t \xi(T, s)} \alpha_t \xi \circ \mathcal{A}_g^{-\ell}(T, s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\xi(T, s + t)} \xi \circ \mathcal{A}_g^{-\ell}(T, s + t) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\xi(T, s)} \xi \circ \mathcal{A}_g^{-\ell}(T, s) ds \\ &= \langle \xi, \xi \rangle_{\mathbb{Z}}(T, \ell). \end{aligned}$$

Par conséquent l'action de \mathbb{R} sur $C_c(\Xi \times \mathbb{R})$ est une isométrie et par densité de $C_c(\Xi \times \mathbb{R})$ dans \mathcal{E} , α définit une action de \mathbb{R} par unitaire sur \mathcal{E} .

On rappelle que l'action définissant le produit croisé réduit $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g) \rtimes \mathbb{R}$ encore notée α est définie pour toute fonction $f \in C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g)$ par

$$\alpha_t f([T, s]) = f([T, s - t]), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall [T, s] \in (\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g.$$

On remarque que l'on a pour tout $f \in C_c((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g)$ et tout $\xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$ que

$$\alpha_t f \alpha_{-t} \xi(T, s) = f \alpha_{-t} \xi(T, s - t) = f([T, s - t]) \xi(T, s)$$

ce qui nous donne une représentation covariante de $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(\mathcal{E})$. Le groupe \mathbb{R} étant moyennable, on obtient alors une action du produit croisé sur \mathcal{E} définie pour tout $f \in C_c((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g \times \mathbb{R})$ et tout $\xi \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$ par

$$f \cdot \xi(T, t) = \int_{\mathbb{R}} f([T, t], s) \xi(T, t - s) ds.$$

Lemme 5.III.1. *La représentation de $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g) \rtimes \mathbb{R}$ sur \mathcal{E} est fidèle.*

Démonstration. En utilisant les notations introduite dans la sous-section 4 p.28. Fixons $[T, t] \in (\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_g$. Soient $f \in C_c(\Xi \times \mathbb{R}/\mathcal{A}_g) \times \mathbb{R}$ et $\eta, \eta' \in C_c(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle \eta, \pi_{[T, t]} f \cdot \eta' \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \bar{\eta}(s) \pi_{[T, t]} f \cdot \eta'(s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \bar{\eta}(s) f([T, s + t], s') \eta'(s - s') ds' ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \bar{\eta}(s - t) f([T, s], s') \eta'(s - s' - t) d' ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \bar{\eta}_t(s) f([T, s], s') \eta'_t(s - s') ds' ds \\ &= \langle \eta_t, f \cdot \eta'_t \rangle_{\mathbb{Z}}(T, 0) \end{aligned}$$

avec les notations $\eta_t(s) = \eta(s - t)$ et $\eta'_t(s - s') = \eta'(s - s' - t)$.

En particulier

$$\left\| \langle \eta, \pi_{[T,t]} f \cdot \eta' \rangle \right\| \leq \left\| \langle \eta_t, f \cdot \eta'_t \rangle_{\mathbb{Z}} \right\|.$$

Cette inégalité s'étend au produit croisé $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$. En particulier si $f \in C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$ satisfait $f \cdot \xi = 0, \forall \xi \in \mathcal{E}$ alors

$$\langle \eta_t, f \cdot \eta'_t \rangle_{\mathbb{Z}} = 0, \quad \forall \eta \in C_c(\mathbb{R}), \forall t \in \mathbb{R}$$

et

$$\langle \eta, \pi_{[T,t]} f \cdot \eta' \rangle = 0, \quad \forall \eta, \eta' \in C_c((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}} \times \mathbb{R}).$$

Donc $f = 0$ et la représentation est fidèle. \square

IV- Isomorphisme entre \mathcal{E} et $L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$

Le but de cette section est de construire un isomorphisme de $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ -module hilbertien à droite entre \mathcal{E} et $L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$.

Posons

$$\Psi : C_c([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{E}$$

définie par

$$\begin{aligned} & \Psi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes a_n \delta_n \right) (T, t) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\Delta(T, n+1) - \Delta(T, n)|^{\frac{1}{2}}} f_n \left(\frac{t - \Delta(T, n)}{\Delta(T, n+1) - \Delta(T, n)} \right) a_n(\mathfrak{g}^n(T)), \quad \forall (T, t) \in \Xi \times \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Nous allons montrer que Ψ est une isométrie à image dense.

Montrons que Ψ est $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ -linéaire.

On a premièrement

$$\begin{aligned} \Psi \left(\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes a_n \delta_n \right) \cdot b \delta_p \right) (T, t) &= \Psi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes (a_n \mathfrak{g}^{-n}(b) \delta_{n+p}) \right) (T, t) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\Delta(T, n+p+1) - \Delta(T, n+p)|^{\frac{1}{2}}} f_n \left(\frac{t + \Delta(T, n+p)}{\Delta(T, n+p+1) - \Delta(T, n+p)} \right) \\ & \quad a_n(\mathfrak{g}^{-n+p}(T) b(\mathfrak{g}^p(T))) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left(\Psi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes a_n \delta_n \right) \right) \cdot b \delta_p (T, t) &= \Psi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes a_n \delta_n \right) (\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^p(T, t)) \cdot b(\mathfrak{g}^p(T)) \\ &= \Psi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes a_n \delta_n \right) (\mathfrak{g}^p(T), t - \Delta(T, p)) \cdot b(\mathfrak{g}^p(T)) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\Delta(\mathfrak{g}^p(T), n+1) - \Delta(\mathfrak{g}^p(T), n)|^{\frac{1}{2}}} f_n \left(\frac{t - \Delta(T, p) - \Delta(\mathfrak{g}^p(T), n)}{\Delta(\mathfrak{g}^p(T), n+1) - \Delta(\mathfrak{g}^p(T), n)} \right) \\ & \quad a_n(\mathfrak{g}^{n+p}(T)) b(\mathfrak{g}^p(T)) \end{aligned}$$

On remarque alors que $\Delta(\mathfrak{g}^p(T), n+1) = \Delta(T, n+p+1)$ et $\Delta(T, p) + \Delta(\mathfrak{g}^p(T), n) = \Delta(T, n+p)$, on peut alors réécrire

$$\left(\Psi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes a_n \delta_n \right) \right) \cdot b \delta_p(T, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\Delta(T, n+p+1) - \Delta(T, n+p)|^{\frac{1}{2}}} f_n \left(\frac{t - \Delta(T, n+p)}{\Delta(T, n+p+1) - \Delta(T, n+p)} \right) a_n(\mathfrak{g}^{n+p}(T)) b(\mathfrak{g}^p(T))$$

Par suite, on a bien

$$\Psi \left(\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes a_n \delta_n \right) \cdot b \delta_p \right) = \Psi \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \otimes a_n \delta_n \right) \cdot b \delta_p.$$

Remarquons que par linéarité Ψ est uniquement déterminée par

$$\Psi(f \otimes \delta_0)(T, t) = \frac{1}{|\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{t}{\Delta(T, 1)} \right).$$

Montrons que Ψ est bien une isométrie. Nous avons, pour tout $j, k \in \mathbb{Z}$,

$$\langle \Psi(f \otimes \delta_j), \Psi(g \otimes \delta_k) \rangle = \delta_j^* \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \delta_0) \rangle \delta_k.$$

Il faut donc calculer $\langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \delta_0) \rangle$ ce qui nous donne

$$\langle \Psi(f \otimes 1 \delta_0), \Psi(g \otimes 1 \delta_0) \rangle(T, \ell) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{s - \Delta(T, 0)}{\Delta(T, 1) - \Delta(T, 0)} \right) \frac{1}{|\Delta(\mathfrak{g}^{-\ell}(T), 1)|^{\frac{1}{2}}} g \left(\frac{s - \Delta(T, -\ell) - \Delta(\mathfrak{g}^{-\ell}(T), 0)}{\Delta(\mathfrak{g}^{-\ell}(T), 1) - \Delta(\mathfrak{g}^{-\ell}(T), 0)} \right) ds$$

On remarque que si $\ell \neq 0$ alors $\langle \Psi(f \otimes 1 \delta_0), \Psi(g \otimes 1 \delta_0) \rangle_{\mathbb{Z}} = 0$. Si $\ell = 0$, alors on a

$$\langle \Psi(f \otimes 1 \delta_0), \Psi(g \otimes 1 \delta_0) \rangle_{\mathbb{Z}}(T, 0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{s}{\Delta(T, 1)} \right) \frac{1}{|\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} g \left(\frac{s}{\Delta(T, 1)} \right) ds$$

et en faisant le changement de variable $x = \Delta(T, 1)s$, on obtient finalement

$$\langle \Psi(f \otimes 1 \delta_0), \Psi(g \otimes 1 \delta_0) \rangle_{\mathbb{Z}}(T, 0) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} g(x) dx = \langle f, g \rangle_{L^2(0,1)}.$$

Par conséquent on a

$$\langle \Psi(f \otimes 1 \delta_0), \Psi(g \otimes 1 \delta_0) \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle f, g \rangle_{L^2(0,1)} \delta_0.$$

Ainsi Ψ est bien une isométrie entre deux $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ -module hilbertien.

Lemme 5.IV.1. *L'application Ψ s'étend en unitaire.*

Démonstration. Puisque Ψ est une isométrie, pour montrer que cette application s'étend en un unitaire il faut montrer que son image est dense.

Montrons que Ψ est à image dense.

Par linéarité, on peut se restreindre au cas où $f \in C_c(\mathbb{R})$. Notons alors par p_1, \dots, p_k les patch de P contenus dans le support de f .

Montrons alors que $f \otimes \chi_p$ est dans l'image pour $p \in \{p_1, \dots, p_k\}$. Fixons $p \in \{p_1, \dots, p_k\}$ et notons $n(p)$ le nombre de tuiles du patch p . Soit $0 < \varepsilon < 1$, il existe $f' \in C_c(\mathbb{R})$ tel que

$$\text{Supp } f' \subseteq \bigcup_{i \text{ tuile de } p} i$$

avec

$$\|f - f'\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n(p)}}.$$

Puisque le support de f' est dans l'intérieur des tuiles du patch, on voit par linéarité que $f' \otimes \chi_p$ est dans l'image de Ψ . Il faut donc montrer que $f' \otimes \chi_p$ approxime bien $f \otimes \chi_p$.

On regarde à présent $\langle f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p, f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p \rangle_{\mathbb{Z}}$. On a pour tout pavage $T \in \Xi$ et tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $\langle f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p, f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p \rangle_{\mathbb{Z}}(T, \ell)$ est nul sauf pour un nombre $n(p)$ termes et l'on a en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \langle f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p, f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p \rangle_{\mathbb{Z}}(T, \ell) &= \int_{\mathbb{R}} \overline{(f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p)(T, s)} (f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p) \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^{-\ell}(T, s) ds \\ &\leq \|f - f'\|_{L^2}^2 = \frac{\varepsilon^2}{n(p)} \end{aligned}$$

En particulier on a pour tout entier $\ell \in \mathbb{Z}$ que

$$\sup_{T \in \Xi} \langle f \otimes \chi_p - f', f \otimes \chi_p - f' \rangle_{\mathbb{Z}}(T, \ell) < \frac{\varepsilon^2}{n(p)}.$$

Puisque le $\langle f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p, f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p \rangle_{\mathbb{Z}}(T, \ell)$ s'annule sauf pour $n(p)$ entiers ℓ , alors

$$\|f \otimes \chi_p - f' \otimes \chi_p\|_{\mathbb{Z}}^2 \leq n(p) \frac{\varepsilon^2}{n(p)} \leq \varepsilon^2.$$

Par conséquent Ψ est à image dense. □

V- Bimodule d'imprimitivité \mathcal{E}

V.1- Action du produit croisé $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$ sur \mathcal{E}

Lemme 5.V.1. Soit $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ et considérons φ comme un élément de $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$ (via l'inclusion $C_c(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_c((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}, \mathbb{R})$), alors φ agit comme un opérateur compact sur \mathcal{E} .

Démonstration. Soit $f \in C_c(]0, 1[)$. Nous avons,

$$\begin{aligned} \varphi \cdot \Psi(f \otimes \delta_0)(T, t) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(s) \Psi(f)(T, t - s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t - s) \Psi(f)(T, s) ds \\ &= \int_0^{\Delta(T, 1)} \varphi(t - s) \frac{1}{|\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} f\left(\frac{s}{\Delta(T, 1)}\right) \\ &= \int_0^1 \varphi(t - \Delta(T, 1)s) |\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}} f(s) ds \end{aligned}$$

En posant à présent pour tous $(T, s) \in \Xi \times \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\varphi_n(T, t) = \chi_{[\Delta(T, n), \Delta(T, n+1)]}(t)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \varphi \cdot \Psi(f)(T, t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n(T, t) \int_0^1 \varphi(t - \Delta(T, 1)s) |\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}} f(s) ds \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \varphi_n(T, t) \varphi(t - \Delta(T, 1)s) |\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}} f(s) ds \end{aligned}$$

En posant pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \varphi'_n(T, t, s) &= |\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}} |\Delta(\mathfrak{S}^{-n}(T), 1)|^{\frac{1}{2}} \chi_{[0, 1]}(t) \\ &\quad \varphi(\Delta(T, 1)(t - \Delta(\mathfrak{S}^{-n}(T), 1)s) + \Delta(\mathfrak{S}^{-n}(T), n)) \end{aligned}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \Psi(\varphi'_n \otimes \delta_n)(T, t, s) &= \frac{1}{|\Delta(T, n+1) - \Delta(T, n)|^{\frac{1}{2}}} \varphi'_n(\mathfrak{S}^n(T), \frac{t - \Delta(T, n)}{\Delta(T, n+1) - \Delta(T, n)}, s) \\ &= \frac{1}{|\Delta(T, n+1) - \Delta(T, n)|^{\frac{1}{2}}} |\Delta(T, n+1) - \Delta(T, n)|^{\frac{1}{2}} |\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \chi_{[0, 1]} \left(\frac{t - \Delta(T, n)}{\Delta(T, n+1) - \Delta(T, n)} \right) \varphi(t - \Delta(T, 1)s) \\ &= |\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}} \varphi_n(T, t) \varphi(t - \Delta(T, 1)s). \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\Psi^{-1}(\varphi \cdot \Psi(f \otimes \delta_0))(T, t, n) = \int_0^1 \varphi'_n(T, t, s) f(s) ds \quad (5.2)$$

En posant

$$K_n f(T, t) = \int_0^1 \varphi'_n(T, t, s) f(s) ds$$

On obtient une fonction continue de Ξ à valeurs dans $\mathcal{K}(L^2([0, 1]))$ nulle pour presque tout n . Alors

$$\Psi^{-1} \cdot \varphi \cdot \Psi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n \delta_n$$

est un opérateur compact sur $L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ et donc φ agit comme opérateur compact sur \mathcal{E} . \square

Corollaire 5.V.2. Soit $f \in C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$, alors f agit par opérateur compact sur \mathcal{E}

Démonstration. Il existe une unité approchée pour le produit croisé $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$ de la forme $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ avec $\varphi_i \in C_c(\mathbb{R})$. Par conséquent d'après le lemme précédent tout élément de $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$ agit comme opérateur compact sur \mathcal{E} . \square

V.2- Produit hilbertien à valeurs dans $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$

On pose pour tous $\xi, \xi' \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$,

$${}_{\mathbb{R}} \langle \xi, \xi' \rangle ([T, t], s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t) \overline{\xi'} \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t - s), \quad \forall [T, t] \in (\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}, \forall s \in \mathbb{R}.$$

Lemme 5.V.3 (compatibilité des structures de modules hilbertiens). *Pour tout $\xi, \xi', \xi'' \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$,*

$$\xi \cdot \langle \xi', \xi'' \rangle_{\mathbb{Z}} =_{\mathbb{R}} \langle \xi, \xi' \rangle \cdot \xi''$$

Démonstration. On a pour tout $\xi, \xi', \xi'' \in C_c(\Xi \times \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \xi \cdot \langle \xi', \xi'' \rangle_{\mathbb{Z}}(T, t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t) \langle \xi', \xi'' \rangle_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}^n(T), n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t) \int_{\mathbb{R}} \overline{\xi'}(\mathfrak{g}^n(T), s) \xi'' \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^{-n}(\mathfrak{g}^n(T), s) ds \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \xi \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t) \overline{\xi'}(\mathfrak{g}^n(T), s) \xi'' \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^{-n}(\mathfrak{g}^n(T), s) ds \end{aligned}$$

On remarque alors que l'on a

$$\overline{\xi'}(\mathfrak{g}^n(T), s) = \overline{\xi'} \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, s + \Delta(T, n))$$

et

$$\xi'' \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^{-n}(\mathfrak{g}^n(T), s) = \xi''(T, s - \Delta(\mathfrak{g}^n(T), -n)) = \xi''(T, s + \Delta(T, n)).$$

En faisant alors pour tout $n \in \mathbb{Z}$ le changement de variable $s' = s - t + \Delta(T, n)$, on a alors

$$\begin{aligned} \xi \cdot \langle \xi', \xi'' \rangle_{\mathbb{Z}}(T, t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \xi \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t) \overline{\xi'} \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t + s) \xi''(T, t + s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \xi \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t) \overline{\xi'} \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t + s) \right) \xi''(T, t - s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} {}_{\mathbb{R}} \langle \xi, \xi' \rangle ([T, t], s) \xi''(T, t - s) ds \\ &=_{\mathbb{R}} \langle \xi, \xi' \rangle \cdot \xi''(T, t). \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.V.4. 1. *Le produit croisé $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$ s'identifie via la représentation sur \mathcal{E} à $\mathcal{K}(\mathcal{E})$;*

2. *Le produit scalaire ${}_{\mathbb{R}} \langle \cdot, \cdot \rangle$ s'étend à $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \rightarrow C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$;*

3. *\mathcal{E} est un $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R} - C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ -bimodule d'imprimitivité.*

Démonstration. 1. D'après le lemme précédent la représentation est à image dense et est injective. Ainsi c'est un isomorphisme entre le produit croisé $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$ et $\mathcal{K}(\mathcal{E})$;

2. Comme $\mathcal{K}(\mathcal{E})$ est une $\mathcal{K}(\mathcal{E}) - A$ -bimodule d'imprimitivité, par transport de structure $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}}$ s'étend à un produit scalaire sur \mathcal{E} à valeurs dans $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R}$ est alors un $C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R} - C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ -bimodule d'imprimitivité.

3. En particulier d'après le 5.V.3, ${}_{\mathbb{R}}\langle \cdot, \cdot \rangle$ s'étend à $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$. □

Corollaire 5.V.5. *Il existe un isomorphisme $\Upsilon : C((\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}) \rtimes \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{E})$ uniquement par*

$$\Upsilon(\Theta_{f,f'} \otimes \delta_0) = {}_{\mathbb{R}}\langle f, f' \rangle, \quad \forall f, f' \in C_c((0, 1)).$$

VI- Transport de l'action sur la partie non coloriée

Dans le chapitre 2, nous avons vu que la C^* -algèbre du pavage hyperbolique est Morita équivalente au produit croisé de $C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)$ par l'action de \mathbb{Z} donnée par $\tilde{\alpha}_c$ définie pour tout $f \in C_c(\mathcal{G}, \lambda)$ par

$$\tilde{\alpha}_c(f)(P', c', t) = \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{1}{\lambda} \cdot P', s^{-1}(c), \frac{t}{\lambda}\right).$$

Pour pouvoir faire le calcul de la K -théorie, nous allons devoir expliciter le transport de la restriction de $\tilde{\alpha}_c$ à la partie non coloriée, que l'on notera $\tilde{\alpha}$, par l'isomorphisme Υ énoncé dans la partie précédente.

VI.1- Transport des générateurs de $L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$

Soient $f, g : \Xi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de supports dans $\Xi \times [0, 1]$ et soit $\phi \in C(\Xi)$. On a d'après la définition de Ψ que pour tout $(T, t) \in \Xi \times \mathbb{R}$, $t \in [0, \Delta(T, 1)]$

$$\Psi(f\delta_0)(T, t) = \frac{1}{|\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} f\left(T, \frac{t}{\Delta(T, 1)}\right)$$

et

$$\Psi(g\delta_1)(T, t) = \frac{1}{|\Delta(T, 2) - \Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} g\left(\mathfrak{s}(T), \frac{t - \Delta(T, 1)}{\Delta(T, 2) - \Delta(T, 1)}\right).$$

VI.2- Transport de $\tilde{\alpha}_c$

Nous noterons dans la suite par $n(T)$ le nombre de tuiles dans la substitution de la première tuile de T pour $T \in \Xi$. Nous introduisons enfin la notation

$$\alpha_n^T = \frac{\Delta(\lambda \cdot T, n)}{\lambda \Delta(T, 1)}, \quad \forall T \in \Xi, \forall n \in \{0, n(T)\}.$$

Remarquons que l'on a pour $f, g \in C_c((0, 1))$ et $\Phi \in C(\Xi)$ que pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$\Psi(\Theta_{f,g} \otimes (\Phi\delta_n)^*) = {}_{\mathbb{R}}\langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \Phi\delta_n) \rangle.$$

VI.2.2.1-TRANSPORT DE L'ACTION SUR $\Theta_{f,g} \otimes \delta_0$

On commence par regarder le transport de $\Theta_{f,g} \otimes \delta_0$ où $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ et $\text{Supp } f, \text{Supp } g \subset [0, 1]$. Nous avons

$${}_{\mathbb{R}}\langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \delta_0) \rangle([T, t], s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi(f \otimes \delta_0) \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t) \overline{\Psi(g \otimes \delta_0) \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t - s)}$$

et si $t \in [0, \Delta(T, 1)]$ nous avons

$${}_{\mathbb{R}}\langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \delta_0) \rangle([T, t], s) = \Psi(f \otimes \delta_0)(T, t) \overline{\Psi(g \otimes \delta_0)(T, t - s)}.$$

On a

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbb{R}} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \delta_0) \rangle([\lambda \cdot T, \lambda t], \lambda s) &= \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\Delta(\mathfrak{g}^n(T), 1)|} f \left(\frac{\lambda t - \Delta(\lambda \cdot T, n)}{\Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 1)} \right) \overline{g \left(\frac{\lambda(t+s) - \Delta(\lambda \cdot T, n)}{\Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 1)} \right)} \\ &= \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)|} f \left(\frac{\lambda t - \Delta(\lambda \cdot T, n)}{\Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)} \right) \\ &\quad \times \overline{g \left(\frac{\lambda(t+s) - \Delta(\lambda \cdot T, n)}{\Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)} \right)} \end{aligned}$$

Pour obtenir une description complète nous pouvons nous restreindre à $t \in [0, \Delta(T, 1)]$ et d'utiliser l'application $\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}$. Dans ces conditions seuls les $n(T)$ premiers termes sont non nuls et pour tout $t \in [0, \Delta(T, 1)]$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbb{R}} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \delta_0) \rangle([\lambda \cdot T, \lambda t], \lambda s) \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{n(T)-1} \frac{1}{|\Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)|} f \left(\frac{\lambda t - \Delta(\lambda \cdot T, n)}{\Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)} \right) \\ &\quad \times \overline{g \left(\frac{\lambda(t+s) - \Delta(\lambda \cdot T, n)}{\Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)} \right)} \end{aligned}$$

En introduisant maintenant les notations α_n^T , nous obtenons au final

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbb{R}} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \delta_0) \rangle([\lambda \cdot T, \lambda t], \lambda s) &= \sum_{n=0}^{n(T)-1} \frac{1}{|\Delta(T, 1)(\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T)|} f \left(\frac{t - \Delta(T, 1)\alpha_n^T}{\Delta(T, 1)(\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T)} \right) \\ &\quad \times \overline{g \left(\frac{t - \Delta(T, 1)\alpha_n^T}{\Delta(T, 1)(\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T)} \right)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

VI.2.2.2-TRANSPORT DE L'ACTION SUR $\Theta_{f,g} \otimes (\phi\delta_1)^*$

On regarde maintenant le transport de $\Theta_{f,g} \otimes (\Phi\delta_1)^*$ avec $f, g \in C_c((0, 1))$ et $\Phi \in C(\Xi)$. Nous avons

$$\mathbb{R} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \phi\delta_1) \rangle([T, t], s) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi(f \otimes \delta_0) \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t) \overline{\Psi(g \otimes \phi\delta_1) \circ \mathcal{A}_{\mathfrak{g}}^n(T, t-s)}$$

et si $t \in [0, \Delta(T, 1)]$ nous avons,

$$\mathbb{R} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \phi\delta_1) \rangle([T, t], s) = \Psi(f \otimes \delta_0)(T, t) \overline{\Psi(g \otimes \phi\delta_1)(T, t-s)}.$$

On a alors,

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbb{R}} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \phi\delta_1) \rangle([\lambda T, \lambda t], \lambda s) \\ &= \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi(f \otimes \delta_0)(\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}(\lambda \cdot T, \lambda t) \overline{\Psi(g \otimes \phi\delta_1)(\mathcal{A}_{\mathfrak{g}}(\lambda \cdot T, \lambda(t+s)))}) \\ &= \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi(f \otimes \delta_0)(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), \lambda t - \Delta(T, n)) \overline{\Psi(g \otimes \phi\delta_1)(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), \lambda(t+s) - \Delta(\lambda \cdot T, n))} \\ &= \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 1)|^{1/2}} f \left(\frac{\lambda t - \Delta(\lambda \cdot T, n)}{\Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 1)} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{|\Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 2) - \Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 1)|^{1/2}} \overline{g \left(\frac{\lambda(t+s) - \Delta(\lambda \cdot T, n) - \Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 1)}{\Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 2) - \Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 1)} \right)} \\ &\quad \times \overline{\phi(\mathfrak{g}^{n+1}(\lambda \cdot T))}. \end{aligned}$$

Or nous avons

$$\Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 1) = \Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)$$

et

$$\Delta(\mathfrak{g}^n(\lambda \cdot T), 2) = \Delta(\lambda \cdot T, n+2) - \Delta(\lambda \cdot T, n).$$

D'où

$$\begin{aligned} & \lambda_{\mathbb{R}} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \phi \delta_1) \rangle([\lambda T, \lambda t], \lambda s) \\ & \lambda \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|\Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)|^{1/2}} f \left(\frac{\lambda t - \Delta(\lambda \cdot T, n)}{\Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)} \right) \\ & \times \frac{1}{|\Delta(\lambda \cdot T, n+2) - \Delta(\lambda \cdot T, n+1)|^{1/2}} g \left(\frac{\lambda(t+s) - \Delta(\lambda \cdot T, n+1)}{\Delta(\lambda \cdot T, n+2) - \Delta(\lambda \cdot T, n+1)} \right) \\ & \times \overline{\phi(\mathfrak{g}^{n+1}(\lambda \cdot T))}. \end{aligned}$$

Mais puisque les deux fonctions f et g ont leurs supports inclus dans $[0, 1]$, alors en se restreignant à $t \in [0, \Delta(T, 1)]$, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} & \lambda_{\mathbb{R}} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \phi \delta_1) \rangle([\lambda T, \lambda t], \lambda s) = \\ & \lambda \sum_{n=0}^{n(T)-1} \frac{1}{|\Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)|^{1/2}} f \left(\frac{\lambda t - \Delta(\lambda \cdot T, n)}{\Delta(\lambda \cdot T, n+1) - \Delta(\lambda \cdot T, n)} \right) \\ & \times \frac{1}{|\Delta(\lambda \cdot T, n+2) - \Delta(\lambda \cdot T, n+1)|^{1/2}} g \left(\frac{\lambda(t+s) - \Delta(\lambda \cdot T, n+1)}{\Delta(\lambda \cdot T, n+2) - \Delta(\lambda \cdot T, n+1)} \right) \\ & \times \overline{\phi(\mathfrak{g}^{n+1}(\lambda \cdot T))}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

En introduisant les notations α_n^T , nous concluons que

$$\begin{aligned} & \lambda_{\mathbb{R}} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \phi \delta_1) \rangle([\lambda T, \lambda t], \lambda s) = \\ & \sum_{n=0}^{n(T)-1} \frac{1}{|\Delta(T, 1)(\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T)|^{1/2}} f \left(\frac{t - \Delta(T, 1)\alpha_n^T}{\Delta(T, 1)(\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T)} \right) \\ & \times \frac{1}{|\Delta(T, 1)(\alpha_{n+2}^T - \alpha_{n+1}^T)|^{1/2}} g \left(\frac{t+s - \Delta(T, 1)\alpha_{n+1}^T}{\alpha_{n+2}^T - \alpha_{n+1}^T} \right) \\ & \times \overline{\phi(\mathfrak{g}^{n+1}(\lambda \cdot T))}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

VI.2.2.3-RÉÉCRITURE EN UTILISANT DES ISOMÉTRIES PARTIELLES

On pose pour tout entier $n \in \{0, \dots, n(T) - 1\}$,

$$U_n(f)(T, t) = \frac{1}{|\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T|^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{t - \alpha_n^T}{\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T} \right) \chi_{[\alpha_n^T, \alpha_{n+1}^T]}(t)$$

et

$$U_n(f) = 0, \quad \forall n \geq n(T).$$

Pour tout pavage T , l'isométrie partielle $U_n(T, \bullet)$ est induite par l'application affine envoyant à normalisation par la longueur de la première tuile l'intervalle $[0, 1]$ sur la $(n + 1)$ -ième tuile de la substitution. On pose également,

$$W_n \phi(T) = \begin{cases} \phi(\mathfrak{s}^n(\lambda \cdot T)) & \text{si } 0 \leq n \leq n(T) - 1 \\ 0 & \text{si } n \geq n(T). \end{cases}$$

Calculons alors l'image par Ψ de $U_n(f)\delta_0$ ce qui nous donne pour $0 \leq n \leq n(T) - 1$,

$$\begin{aligned} \Psi(U_n(f)\delta_0)(T, t) &= \frac{1}{|\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} U_n f \left(T, \frac{t}{\Delta(T, 1)} \right) \\ &= \frac{1}{|\Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T|^{\frac{1}{2}}} f \left(\frac{\frac{t}{\Delta(T, 1)} - \alpha_n^T}{\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T} \right) \\ &= \frac{1}{|\Delta(T, 1)(\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T)|^{1/2}} f \left(\frac{t - \Delta(T, 1)\alpha_n^T}{\Delta(T, 1)(\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T)} \right). \end{aligned}$$

De même nous avons

$$\begin{aligned} \Psi(U_0(g)\delta_1)(T, t) &= \frac{1}{|\Delta(T, 2) - \Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} U_0(g) \left(\mathfrak{s}(T), \frac{t - \Delta(T, 1)}{\Delta(T, 2) - \Delta(T, 1)} \right) \\ &= \frac{1}{|\Delta(T, 2) - \Delta(T, 1)|^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{|\alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} - \alpha_0^{\mathfrak{s}(T)}|^{\frac{1}{2}}} g \left(\frac{\frac{t - \Delta(T, 1)}{\Delta(T, 2) - \Delta(T, 1)} - \alpha_0^{\mathfrak{s}(T)}}{\alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} - \alpha_0^{\mathfrak{s}(T)}} \right) \\ &= \frac{1}{|\Delta(T, 1)(\alpha_{n(T)+1}^T - \alpha_{n(T)}^T)|^{\frac{1}{2}}} g \left(\frac{t - \Delta(T, 1)\alpha_n^T}{\Delta(T, 1)(\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T)} \right) \end{aligned}$$

Nous avons utilisé pour cela le fait que

$$\Delta(\lambda \cdot \mathfrak{s}(T), 1) = \Delta(\lambda \cdot T, n(T) + 1) - \Delta(\lambda \cdot T, n(T))$$

et

$$\lambda \Delta(T, 1) = \Delta(\lambda \cdot T, n(T)).$$

Par conséquent,

$$(\Delta(T, 2) - \Delta(T, 1))\alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = \Delta(T, 1)(\alpha_{n(T)+1}^T - \alpha_{n(T)}^T)$$

et

$$\alpha_T^{n(T)} = 1$$

Alors d'après (5.3), on a en introduisant les U_n que

$$\lambda_{\mathbb{R}} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), g \otimes \delta_0 \rangle([\lambda \cdot T, \lambda t], \lambda s) = \sum_{n=0}^{n(T)-1} \psi(U_n(f)\delta_0)(T, t) \overline{\psi(U_n(g)\delta_0)(T, t+s)} \quad (5.6)$$

De la même manière en utilisant (5.5) on obtient

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbb{R}} \langle \Psi(f \otimes \delta_0), \Psi(g \otimes \phi \delta_1) \rangle([\lambda T, \lambda t], \lambda s) &= \sum_{n=0}^{n(T)-2} \psi(U_n(f))(T, t) \overline{\psi(U_{n+1}(g)\delta_0)(T, t+s)} W_n(\overline{\mathfrak{s}(\phi)}) \\ &\quad + \psi(U_{n(T)-1}(f))(T, t) \overline{\psi(U_0(g)\delta_1)(T, t+s)} W_{n(T)}(\overline{\mathfrak{s}(\phi)})(T) \end{aligned} \quad (5.7)$$

VI.2.2.4-TRANSPORT VU COMME MULTIPLICATEURS

Notons par u l'unitaire de $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ provenant de $1 \in \mathbb{Z}$ et $\hat{Y} = \text{ad}_\gamma \circ \tilde{\alpha}$ D'après (5.6) nous avons alors que

$$\begin{aligned} \hat{Y}(\Theta_{f,g} \otimes \phi) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \Theta_{U_n(f), U_n(g)}(\text{id}_{L^2([0,1])} \otimes W_n \phi) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n(\Theta_{f,g} \otimes 1) U_n^* \otimes W_n \phi \end{aligned}$$

et la somme est localement fini puisque qu'au voisinage d'un élément $T \in \Xi$ seuls les n_T premiers termes sont non nuls.

Avant de continuer on doit utiliser une localisation en rappelant que

$$\Xi = \bigsqcup_{i=1}^m \Xi_{p_i}^0$$

où m désigne le nombre de couronnes, p_i désigne une couronne de la substitution et $\Xi_{p_i}^0 = \{T \in \Xi; T_0 = p_i\}$.

En remarquant alors que $n(T) = n(p_i)$ est constant sur $\Xi_{p_i}^0$ et en posant $M = 1 \otimes u$, nous avons pour l'image de $\Theta_{f \otimes \delta_0, g \otimes \delta_1} = \Theta_{f,g} \otimes u^*$ que

$$\begin{aligned} \chi_{\Xi_{p_i}^0} \hat{Y}(\Theta_{f,g} \otimes u^*) &= \chi_{\Xi_{p_i}^0} \sum_{n=0}^{n(p_i)-2} \Theta_{U_n(f), U_{n+1}(g)} \otimes 1 + \Theta_{U_{n(p_i)-1}(f), U_0(g)} M \\ &= \chi_{\Xi_{p_i}^0} \sum_{n=0}^{n(p_i)-2} U_n \cdot \Theta_{f,g} \otimes 1 \cdot U_{n+1}^* + U_{n(p_i)-1} \cdot \Theta_{f,g} \cdot (U_0 M)^* \\ &= \chi_{\Xi_{p_i}^0} \sum_{n=0}^{n(p_i)-2} U_n \cdot \Theta_{f,g} \otimes 1 \cdot U_{n+1}^* + U_{n(p_i)-1} \cdot \Theta_{f,g} \cdot M^* U_0^* M M^* \\ &= \chi_{\Xi_{p_i}^0} \sum_{n=0}^{n(p_i)-2} U_n \cdot \Theta_{f,g} \otimes 1 \cdot U_{n+1}^* + U_{n(p_i)-1} \cdot \Theta_{f,g} \cdot (\mathfrak{s}^{-1}(U_0))^* \otimes u^*, \end{aligned}$$

avec $\mathfrak{s}^{-1}(U_0) : C(\Xi, L^2([0, 1])) \rightarrow C(\Xi, L^2([0, 1]))$, $C(\Xi)$ -linéaire et définie pour tout $f \in L^2([0, 1])$ par

$$\mathfrak{s}^{-1}(U_0)(f)(T, t) = U_0(f)(\mathfrak{s}(T), t).$$

Soit V l'isométrie partielle définie sur $C(\Xi, L^2([0, 1]))$ pour tout $(T, t) \in \Xi \times \mathbb{R}$ par

$$V f(T, t) = \left| \frac{\alpha_{n(T)}^T - \alpha_{n(T)-1}^T}{\alpha_1^{\mathfrak{s}(T)}} \right|^{\frac{1}{2}} f \left(\left(\frac{\alpha_{n(T)}^T - \alpha_{n(T)-1}^T}{\alpha_1^{\mathfrak{s}(T)}} \right) t + \alpha_{n(T)-1}^T \right) \chi_{[0, \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)}]}(t)$$

Pour tout pavage T , l'isométrie partielle $V(T, \bullet)$ est induite par l'application affine envoyant à normalisation par la longueur de la première tuile l'intervalle la dernière tuile de la substitution de la tuile T_0 sur la première tuile de la substitution de la tuile T_1 .

Par construction cette isométrie partielle satisfait

$$V = \mathfrak{s}^{-1}(U_0) U_{n(T)-1} \text{ et } V U_n = 0, \forall n \in \{0, \dots, n(T) - 2\}.$$

De la même manière notons par V' l'isométrie partielle définie sur $C(\Xi, L^2([0, 1]))$ pour tout $(T, t) \in \Xi \times \mathbb{R}$ et $f \in C(\Xi \times]0, 1[)$ par

$$V'f(T, t) = \sum_{n=1}^{n(T)-1} \left| \frac{\alpha_n^T - \alpha_{n-1}^T}{\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T} \right|^{\frac{1}{2}} f \left(\left(\frac{\alpha_n^T - \alpha_{n-1}^T}{\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T} \right) t + \frac{\alpha_{n-1}^T (\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T) - \alpha_n^T (\alpha_n^T - \alpha_{n-1}^T)}{\alpha_{n+1}^T - \alpha_n^T} \right) \chi_{[\alpha_n^T, \alpha_{n+1}^T]}(t)$$

Pour tout pavage T , l'isométrie partielle $V'(T, \bullet)$ est induite par l'application affine envoyant à normalisation par la longueur de la première tuile l'intervalle la n -ième tuile (de la première tuile jusqu'à l'avant dernière tuile) de la substitution de la tuile T_0 sur la $(n+1)$ -ème tuile de la substitution de la tuile T_0 . Les isométries partielles U_n, V et V' sont uniquement déterminées l'image de $f \in C_c(\Xi \times]0, 1[)$.

Elle satisfait par construction

$$V'U_{n(T)-1} = 0 \text{ et } V'U_n = U_{n+1}, \forall n \in \{0, \dots, n(T) - 2\}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \chi_{\Xi^0} \hat{Y}(\Theta_{f \otimes \delta_0, g \otimes \delta_1}) &= \chi_{\Xi^0} \sum_{n=0}^{n(p_i)-2} U_n \cdot \Theta_{f,g} \otimes 1 \cdot U_n^* V'^* + U_{n(p_i)-1} \cdot \Theta_{f,g} \cdot U_{n(p_i)-1}^* V^* \otimes u^* \\ &= \chi_{\Xi^0} \left(\sum_{n=0}^{n(p_i)-1} U_n \cdot \Theta_{f,g} \otimes 1 \cdot U_n^* \right) (V'^* \otimes 1 + V^* \otimes u^*) \end{aligned}$$

L'opérateur \hat{Y} s'étend linéairement aux multiplicateurs $\mathcal{M}(\mathcal{K}(L^2([0, 1])) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$. Considérons

$$\mathfrak{z}(V)(f)(T, t) = Vf(\mathfrak{z}^{-1}(T), t).$$

Pour tout pavage T , l'isométrie partielle $\mathfrak{z}(V)(T, \bullet)$ est induite par l'application affine envoyant à normalisation par la longueur de la première tuile l'intervalle la dernière tuile de la substitution de la tuile T_{-1} sur la première tuile de la substitution de la tuile T_0 . Posons ensuite

$$\chi_n(T, t) = \begin{cases} \chi_{[\alpha_n^T, \alpha_{n+1}^T]}(t), & n \leq n_T \\ 0 & n > n_T \end{cases}$$

nous pouvons alors énoncer le théorème donnant le transport de l'action de $\tilde{\alpha}$ dans l'algèbre des multiplicateurs.

Théorème 5.VI.1. *L'action de $\tilde{\alpha}$ est donnée dans $\mathcal{M}(\mathcal{K}(L^2([0, 1])) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ par l'unique morphisme \hat{Y} satisfaisant :*

1. $\hat{Y}(k \otimes 1) = \sum_{loc \text{ finie}} U_n \cdot k \otimes 1 \cdot U_n^*$;
2. $\hat{Y}(1 \otimes \phi) = \sum_{loc \text{ finie}} \chi_n \otimes W_n \phi$;
3. $\hat{Y}(1 \otimes u) = V' \otimes 1 + \mathfrak{z}(V)(1 \otimes u)$.

Donnons le résultat suivant permettant de montrer que modulo l'équivalence Morita que \hat{Y} agit trivialement sur u .

Théorème 5.VI.2. *Notons A l'unitarisée de $L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$. Alors pour $f \in L^2([0, 1])$ de norme 1, les deux unitaires*

$$\sum_{i=0}^p \chi_{\Xi^0} \left(\sum_{n=0}^{n(p_i)-2} \Theta_{U_n f, U_{n+1} f} + \Theta_{U_{n(p_i)-1} f, U_0 f} (1 \otimes u^*) + 1 - \sum_{n=0}^{n(p_i)-1} \Theta_{U_n f, U_n f} \right)$$

et

$$(1 - \Theta_{f,f}) \otimes 1 + \Theta_{f,f} \otimes u$$

sont homotopes dans A .

Démonstration. Nous allons montrer le résultat sur chaque composante $\chi_{\Xi^0_{p_i}}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$. Fixons donc $T \in \Xi^0_{p_i}$ pour un certain $i \in \{1, \dots, p\}$. On commence par poser $f_0 = f$ et on complète en un base hilbertienne f_0, \dots, f_m, \dots de $L^2([0, 1])$. En remarquant ensuite que

$$\{U_0 f_0, \dots, U_0 f_m, \dots, U_1 f_0, \dots, U_1 f_m, \dots, \dots, U_{n(T)-1} f_0, \dots, U_{n(T)-1} f_m, \dots\}$$

est encore une base hilbertienne de $L^2([0, 1])$. Ainsi le premier unitaire s'écrit sur la composante $\Xi^0_{p_i}$ dans cette base sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & u \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & 1 & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Or cette expression est homotope toujours dans cette base à

$$\begin{pmatrix} u & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Le deuxième unitaire ayant la même expression mais dans la base $\{f_0, \dots, f_n, \dots\}$, les deux unitaires sont donc conjugués, par conséquent homotopes.

Par conséquent le résultat est vérifié sur chaque composante. \square

En définitive on obtient via la Morita équivalence entre $K_*(\mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{R})$ et $K_*(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ un homéomorphisme sur $K_*(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ encore noté \hat{Y} . Le transport de $\tilde{\alpha}_*$ sur $K_*(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ est donnée par la proposition suivante.

Proposition 5.VI.3. 1. Modulo l'identification $\text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \xrightarrow{\sim} K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ (voir Proposition 2.III.65), $\tilde{\alpha}_*$ est donné par l'isomorphisme

$$\text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})), [f] \mapsto [f \circ \sigma].$$

2. Si l'action sur Ξ est minimale alors $\tilde{\alpha}_*$ est triviale sur $K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$.

Démonstration. 1. C'est une conséquence du Théorème 5.VI.1 (point 1 et point 2);

2. Si l'action est minimale alors

$$K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

et est engendré par $[u]$. En appliquant le point 3 du Théorème 5.VI.1 et le Théorème 5.VI.2 nous obtenons le résultat. \square

On notera dans la suite $A_{P(c)}$ en lieu et place de $(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rtimes_{\tilde{\alpha}_c} \mathbb{Z}$. Grâce aux résultats des chapitre 2 et de ce chapitre que $A_{P(c)}$ est Morita équivalente à la C^* -algèbre du pavage hyperbolique coloré $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ et donc que $K_*(A_{P(c)}) \cong K_*(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G)$.

Chapitre 6

Substitution de Fibonacci

On a vu dans les parties précédentes que l'on peut construire des pavages de Penrose hyperboliques à partir de substitution. On commence par l'un des exemples les plus emblématiques à savoir la substitution de Fibonacci. Dans cette partie nous allons donc introduire cette substitution puis construire les approximations d'Anderson et Putnam pour finir par calculer la K -théorie en utilisant ce que nous avons défini dans les parties précédentes.

I- Définition et première propriété de la substitution

I.1- Substitution de Fibonacci

Définition 6.I.1 (substitution de Fibonacci). On se donne un alphabet $\mathcal{A} := \{a, b\}$. On appelle *substitution de Fibonacci* l'application $\sigma : \mathcal{A}^* \longrightarrow \mathcal{A}^*$ définie par

$$\sigma(a) = ab \quad \sigma(b) = a.$$

Ainsi l'image du mot $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_k$ par σ est donnée par $\sigma(\alpha) := \sigma(\alpha_1) \cdots \sigma(\alpha_k)$ où $\alpha_i \in \{a, b\}$.

Nous allons avoir besoin des configurations interdites pour construire les approximations Γ_1 , c'est précisément l'objet de la proposition suivante.

Proposition 6.I.2 ([MS02],[Que87]). *La substitution de Fibonacci σ vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) *la substitution admet un point fixe défini vers la droite noté ω , que l'on appelle mot de Fibonacci, défini par $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^n(a)$;*
- (ii) *le mot de Fibonacci ω vérifie n'admet pas les configurations suivantes :*
 - 1) *bb n'apparaît pas dans ω ;*
 - 2) *aaa n'apparaît pas dans ω ;*
 - 3) *la plus grande puissance (i.e. le nombre maximum de répétitions d'une configuration) est 3 et seul aba est d'ordre 3;*
 - 4) *le mot ω n'est pas périodique, tout suite de lettres consécutives réapparaissent dans le mot un nombre infini de fois, enfin le mot n'est pas ultimement périodique (i.e. le temps de retour pour les itérations a par σ n'admet pas de limite).*

Démonstration. En ce qui concerne le point fixe ω il suffit de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{n+2}(a) = \sigma^n(a)\sigma^{n+1}(a)$. Ainsi en prenant le mot obtenu par ce procédé, il est fixe vers la droite.

En ce qui concerne les configurations interdites, il n'est pas possible d'obtenir par la substitution bb car pour obtenir un b il faut substituer un a et dans ce procédé cela fait apparaître un a . De la même manière

pour obtenir trois a consécutif il faudrait pour cela substituer bbb ou bba ce qui est interdit par ce qui précède.

Pour les deux autres assertions voir [FBF⁺02]. □

On regarde maintenant le facteur d'expansion de la substitution permettant de passer d'un cadre symbolique à un cadre géométrique via un pavage de \mathbb{R} .

Proposition 6.I.3. *La substitution de Fibonacci admet pour facteur d'expansion (ou encore valeur propre de Perron-Frobenius) le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Démonstration. On remarque que sans perte de généralités on peut fixer la longueur b égale à 1 (voir pour cela la Définition 1.I.16 ainsi que la remarque qui la suit). Ainsi en notant λ le facteur d'expansion, et en notant encore par a la longueur de la tuile a , on doit avoir puisque $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = a$ que

$$\lambda a = a + 1$$

et

$$\lambda b = \lambda = a.$$

Par suite λ satisfait l'équation $\lambda^2 = \lambda + 1$ et donc $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or noté usuellement φ . □

En utilisant la notion de longueur pour une substitution (voir longueur), on obtient la version géométrique de la substitution de Fibonacci.



FIGURE 6.1 – Substitution de Fibonacci géométrique

I.2- Détermination des prototuiles du pavage

Pour déterminer les prototuiles du pavages hyperboliques, nous appliquons la méthode énoncée dans le chapitre 1 plus précisément dans la sous-section 2. Nous obtenons par ce biais deux prototuiles **A** et **B** associées aux lettres a et b de la substitution originale. Pour décrire la prototuille **A**, il suffit de regarder une lettre a et son image $\sigma(a) = ab$. On veut donc relier a avec ab , et pour cela il suffit de prendre les affixes φi et $\varphi i + \varphi + 1$ (correspondant à a) et $i, i + \varphi$ et $i + \varphi + 1$ (correspondant à ab) que l'on relie par des géodésiques de \mathbb{H}_2 . De la même manière, pour la prototuille **B**, on prend les points d'affixes $\varphi i, \varphi i + \varphi$ (correspondant à b) et $i, i + \varphi$ (correspondant à $\sigma(b) = a$). Les deux prototuiles ont alors la forme suivante :



FIGURE 6.2 – Prototiles du pavage hyperbolique de Fibonacci

De plus, en utilisant la substitution on obtient les règles de descente pour les lignes :

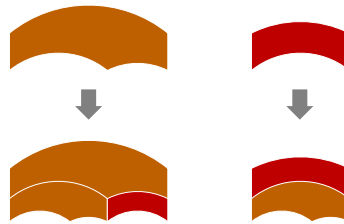


FIGURE 6.3 – Prototiles et règles de descente pour Fibonacci hyperbolique

On remarque maintenant que d'après les propriétés de la substitution de Fibonacci, les tuiles **A** et **B** auront un rôle similaire aux lettres a et b de l'alphabet \mathcal{A} . Ainsi le placement transversal des prototiles **A** et **B** se fera selon la substitution originelle.

I.3- Couronne et forçage de bords pour la substitution

Connaissant la substitution, on se pose maintenant la question de savoir si le fait de fixer une tuile «origine» permet d'obtenir un mot fixe pour la substitution. Il est clair par définition que la substitution force les bords vers la droite.

I.4- Couronnes

Comme vu dans la partie sur les pavages, il nous faut regarder les couronnes. La proposition suivante nous permet de les lister. On convient que "." indique que la lettre qui le suit est la lettre d'indice 0 comme par exemple $\omega_{-1}\omega_0\omega_1$ sera noté $\omega_{-1}.\omega_0\omega_1$.

Proposition 6.I.4. *La substitution de Fibonacci admet uniquement les quatre couronnes listées ci-après :*

$$\begin{aligned} A &= (a)b(a); \\ B &= (a)a(b); \\ C &= (b)a(a); \\ D &= (b)a(b). \end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant la Proposition 6.I.2, on exclut les configurations interdites au niveau des couronnes. Il suffit ensuite de les lister. \square

Puisque la substitution ne force pas les bords pour les tuiles usuelles, on doit maintenant réécrire la substitution σ au niveau des couronnes données par la proposition précédente.

Proposition 6.I.5. *Les images des couronnes données par la Proposition 6.I.4 sont :*

$$\begin{cases} \sigma(A) = \sigma((a).b(a)) = (A).C(B); \\ \sigma(B) = \sigma((a).a(b)) = (A).DA; \\ \sigma(C) = \sigma((b).a(a)) = .BA(D); \\ \sigma(D) = \sigma((b).a(b)) = .BA \quad . \end{cases}$$

Démonstration. Puisque $\sigma(A) = \sigma((a).b(a)) = (ab).a(ab)$, on a $\sigma(A) = (A).C(B)$. De la même manière on trouve également que $\sigma(B) = (A)DA$, $\sigma(C) = BA(D)$ et $\sigma(D) = BA$. \square

De nouveau on remarque que σ ne force pas les bords via les couronnes (à cause de l'image de B , C et D). Cependant en regardant cette fois la substitution σ^2 , on obtient alors la propriété suivante.

Proposition 6.I.6. *La substitution de Fibonacci force les bords à l'ordre 2 sur les couronnes, dont les images sont alors données ci-après :*

$$\begin{cases} \sigma^2(A) = (AC)BA(DA); \\ \sigma^2(B) = (AC)BAC(B); \\ \sigma^2(C) = (A)DAC(BA); \\ \sigma^2(D) = (A)DAC(B). \end{cases}$$

Démonstration. Comme dans la proposition précédente, il suffit de faire le calcul et on remarque alors que les voisins de chaque couronne sont connus en regardant l'image par σ^2 ce qui démontre le forçage des bords. \square

I.5- Définition du pavage dans \mathbb{H}_2

En appliquant la méthode énoncée dans le chapitre 1, on obtient le pavage de Penrose hyperbolique issu de la substitution de Fibonacci.

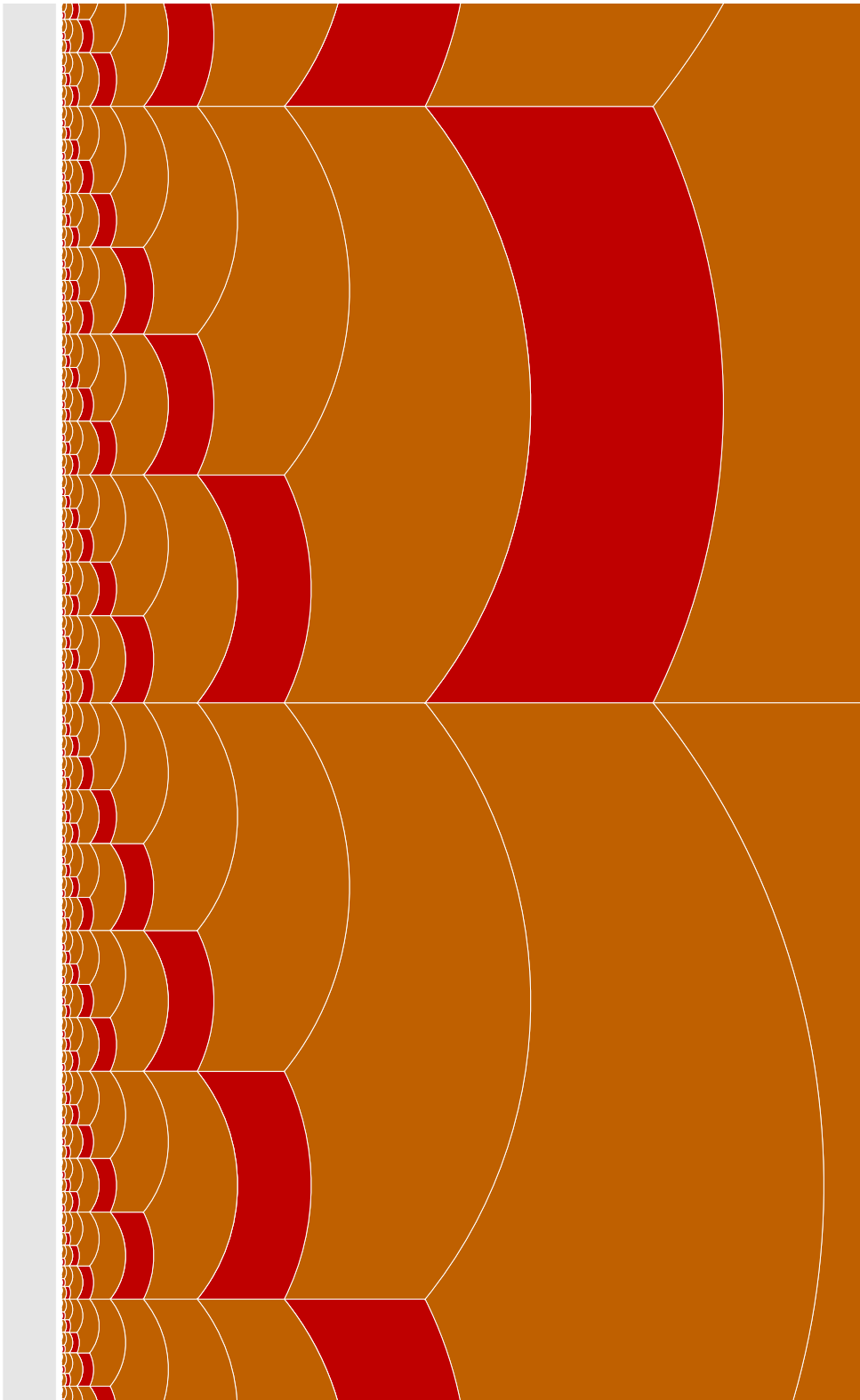


FIGURE 6.4 – Pavage de Fibonacci hyperbolique

II- C^* -algèbre du pavage hyperbolique

En conclusion des chapitre 2 et chapitre 5, la C^* -algèbre $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ est Morita équivalente $A_{P(c)}$ où $A_{P(c)} = (C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rtimes_{\tilde{\alpha}_c} \mathbb{Z}$. Dans le cas du pavage de Fibonacci, on donne la description explicite de $\tilde{\alpha}$. Pour obtenir cette description nous allons regarder couronne par couronne comme dans le Théorème 5.VI.1. On sait qu'au plus $n_T = 2$ et pour une fonction $\phi \in C(\Xi)$

$$W_0\phi(T) = \phi(\varphi \cdot T)$$

et

$$W_1\phi(T) = \phi(\mathfrak{s}(\varphi \cdot T)).$$

II.1- Cas où T_0 est une couronne de type $A = (a).b(a)$

Pour donner la description explicite du transport de $\tilde{\alpha}$ nous devons expliciter les isométries partielles U_n, V et V' . Nous avons dans ce cas $n(T) = 1$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = \varphi^{-1}.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = 1, \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 1.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ l'isométrie partielle

$$U_0(f)(T, t) = f(t)$$

Nous avons également

$$Vf(T, t) = \sqrt{\varphi}f(\varphi t)\chi_{[0, \varphi^{-1}]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V)f(T, t) = V(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = (\varphi - 1)f((2 - \varphi)t + \varphi - 1).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = k \otimes 1$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = 1 \otimes \phi(\varphi \cdot T)$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

II.2- Cas où T_0 est une couronne de type $B = (a).a(b)$

Nous avons dans ce cas $n(T) = 2$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = \varphi - 1, \quad \alpha_2^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = 1.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = \chi_{[0, \varphi^{-1}]}(t), \quad \chi_1(T, t) = \chi_{[\varphi^{-1}, 1]}(t), \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 2.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ les isométries partielles

$$U_0(f)(T, t) = \sqrt{\varphi}f(\varphi t)\chi_{[0, \varphi^{-1}]}(t)$$

et

$$U_1f(T, t) = \varphi f((\varphi + 1)t - \varphi)\chi_{[\varphi^{-1}, 1]}(t).$$

Nous avons également

$$Vf(T, t) = (\varphi - 1)f((2 - \varphi)t + \varphi - 1)\chi_{[0,1]}(t)$$

et

$$V'f(T, t) = \sqrt{\varphi}f(\varphi t - 1)\chi_{[\varphi-1,1]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V)f(T, t) = V(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = \sqrt{\varphi - 1}f((\varphi - 1)t + \varphi - 1)\chi_{[0, \varphi-1]}(t).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = U_0(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_0(T, \bullet)^* + U_1(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_1(T, \bullet)^*$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = \chi_0(T, \bullet) \otimes \phi(\varphi \cdot T) + \chi_1(T, \bullet) \otimes \phi(\mathfrak{s}(\varphi \cdot T))$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = V'(T, \bullet) \otimes 1 + \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

II.3- Cas où T_0 est une couronne de type $C = (b).a(a)$

Nous avons dans ce cas $n(T) = 2$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = \varphi - 1, \quad \alpha_2^T = 1, \quad \text{et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = \varphi - 1.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = \chi_{[0, \varphi-1]}(t), \quad \chi_1(T, t) = \chi_{[\varphi-1, 1]}(t), \quad \chi_n(T, t) = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ les isométries partielles

$$U_0(f)(T, t) = \sqrt{\varphi}f(\varphi t)\chi_{[0, \varphi-1]}(t)$$

et

$$U_1f(T, t) = \varphi f((\varphi + 1)t - \varphi)\chi_{[\varphi-1, 1]}(t).$$

Nous avons également

$$Vf(T, t) = \sqrt{(\varphi - 1)}f((\varphi - 1)t + \varphi - 1)\chi_{[0, \varphi-1]}(t)$$

et

$$V'f(T, t) = \sqrt{\varphi}f(\varphi t - 1)\chi_{[\varphi-1, 1]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V)f(T, t) = V(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = \sqrt{\varphi}f(\varphi t)\chi_{[0, \varphi-1]}(t).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = U_0(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_0(T, \bullet)^* + U_1(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_1(T, \bullet)^*$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = \chi_0(T, \bullet) \otimes \phi(\varphi \cdot T) + \chi_1(T, \bullet) \otimes \phi(\mathfrak{s}(\varphi \cdot T))$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = V'(T, \bullet) \otimes 1 + \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

II.4- Cas où T_0 est une couronne de type $D = (b).a(b)$

Nous avons dans ce cas $n(T) = 2$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = \varphi - 1, \quad \alpha_2^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = 1.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = \chi_{[0, \varphi-1]}(t), \quad \chi_1(T, t) = \chi_{[\varphi-1, 1]}(t), \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 2.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ les isométries partielles

$$U_0(f)(T, t) = \sqrt{\varphi} f(\varphi t) \chi_{[0, \varphi-1]}(t)$$

et

$$U_1 f(T, t) = \varphi f((\varphi + 1)t - \varphi) \chi_{[\varphi-1, 1]}(t).$$

Nous avons également

$$V f(T, t) = (\varphi - 1) f((2 - \varphi)t + \varphi - 1) \chi_{[0, 1]}(t)$$

et

$$V' f(T, t) = \sqrt{\varphi} f(\varphi t - 1) \chi_{[\varphi-1, 1]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V) f(T, t) = V(\mathfrak{s}^{-1} T, t) = \sqrt{\varphi} f(\varphi t) \chi_{[0, \varphi-1]}(t).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = U_0(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_0(T, \bullet)^* + U_1(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_1(T, \bullet)^*$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = \chi_0(T, \bullet) \otimes \phi(\varphi \cdot T) + \chi_1(T, \bullet) \otimes \phi(\mathfrak{s}(\varphi \cdot T))$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = V'(T, \bullet) \otimes 1 + \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

III- Mesure invariante sur les pavages en couronnes

Nous allons déterminer la mesure invariante sur l'espace des pavages en couronne. Pour cela, on remarque que la matrice de la substitution σ pour les couronnes est

$$M^\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi pour déterminer le mesure de probabilité invariante, il faut déterminer le vecteur propre de Perron-Frobenius de On remarque tout d'abord que la valeur propre de Perron-Frobenius est toujours $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Soit donc $x = \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}$ le vecteur propre, on doit alors résoudre

$$\begin{cases} \varphi a = b + c + d \\ \varphi b = c + d \\ \varphi c = a \\ \varphi d = b \end{cases}$$

On obtient alors

$$x \in \text{Vect} \begin{pmatrix} \varphi^2 \\ \varphi \\ \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc en renormalisant x , nous obtenons

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varphi^2} \\ \frac{1}{\varphi^3} \\ \frac{1}{\varphi^3} \\ \frac{1}{\varphi^4} \end{pmatrix}.$$

Par conséquent la mesure de probabilité μ est définie sur les couronnes comme la forme linéaire

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{1}{\varphi^2}, \frac{1}{\varphi^3}, \frac{1}{\varphi^3}, \frac{1}{\varphi^4} \right) \\ &= (2 - \varphi, 2\varphi - 3, 2\varphi - 3, 5 - 3\varphi) \end{aligned}$$

On note par $\mathbb{Z}[\varphi] = \{n\varphi + m, (n, m) \in \mathbb{Z}\}$ le groupe pour la loi additive. On remarque $\varphi^{-1} = \varphi - 1 \in \mathbb{Z}[\varphi]$ ainsi la multiplication par φ est inversible dans $\mathbb{Z}[\varphi]$, on obtient alors une action de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z}[\varphi]$ satisfaisant $\varphi(n\varphi + m) = (n + m)\varphi + n$.

Lemme 6.III.1. Soit l'application $\mu : C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_{\Xi} f d\mu$.

1. μ est à image dans $\mathbb{Z}[\varphi]$;
2. μ se factorise en un morphisme

$$\bar{\mu} : \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Z}[\varphi].$$

Démonstration. L'application $C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et pour montrer que sont domaine d'arrivée est bien $\mathbb{Z}[\varphi]$, il suffit de regarder l'image des indicatrices $\chi_{\Xi_{p_i}^0}$. Or

$$\int_{\Xi} \chi_{\Xi_{p_i}^0} d\mu = \mu(\Xi_{p_i}^0)$$

et comme toutes les entrées de μ sont dans $\mathbb{Z}[\varphi]$, alors le domaine d'arrivée est bien $\mathbb{Z}[\varphi]$.

Puisque la mesure μ est invariante pour l'action du shift, nous remarquons que l'application $C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[\varphi]$ passe bien au quotient en un morphisme

$$\bar{\mu} : \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Z}[\varphi].$$

□

On rappelle que la mesure μ induit une trace τ_{μ} sur le produit croisé $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ (voir Paragraphe 5.6 p.46). On obtient alors le résultat suivant.

Lemme 6.III.2. Modulo l'isomorphisme $\text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \rightarrow K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}), \chi_E \mapsto [\chi_E]$ (voir Proposition 2.III.65 p.46), la trace τ_{μ} induite par μ correspond au morphisme $\bar{\mu}$.

IV- Construction d'Anderson et Putnam [AP98] et liens avec X_P^N

IV.1- Construction de l'approximation Γ_1 pour le pavage de Fibonacci

Pour résumer la situation, on fait un schéma où les flèches partent de la gauche d'une tuile et arrivent à la droite d'une autre tuile. Dans le cas de Fibonacci, on a la situation suivante :

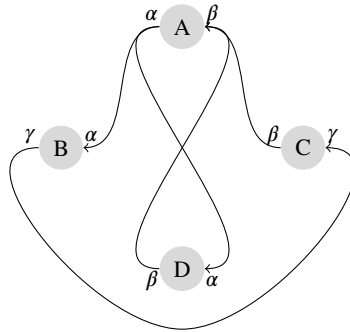


FIGURE 6.5 – Voisins autorisés pour chaque tuile

Dans la figure précédente, on sait par exemple que la configuration BA est autorisée donc il existe une flèche (notée α) de A vers B .

Dans le cas des approximations données par les deux auteurs dans [AP98], les flèches sont des 0-cellules et deux flèches ont même nom si elles proviennent ou arrivent d'un même endroit. Les 1-cellules sont les tuiles qui relient deux 0-cellules si l'une des flèche entre en la tuile et l'autre en sort. On regarde maintenant l'image de Γ_1 par la substitution σ (que l'on ne regarde que pour les couronnes). On obtient alors la figure suivante :

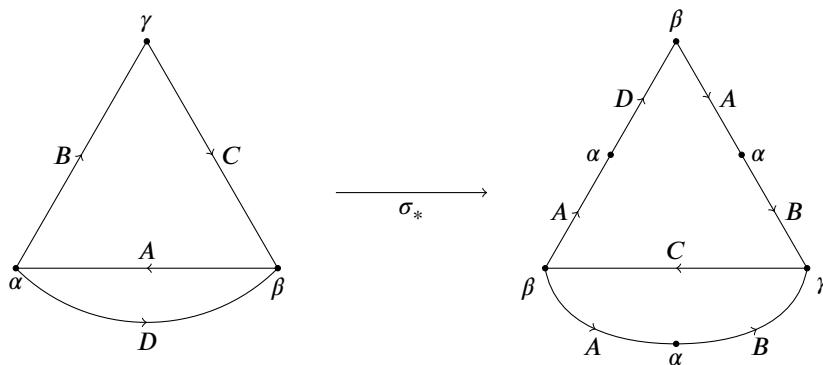


FIGURE 6.6 – CW-complexe Γ_1 et son image par σ^* associé à Fibonacci

IV.2- Calcul de la cohomologie cellulaires de Γ_1

On remarque que le CW-complexe Γ_1 est composé de trois sommets $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ et de quatre arêtes $\{A, B, C, D\}$. Par suite, on a $C_0(\Gamma_1) \cong \mathbb{Z}^3$ et $C_1(\Gamma_1) \cong \mathbb{Z}^4$. De même, on a $C^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^3$ et $C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4$. On regarde maintenant les applications de bord et de cobord ∂_1 et $\delta_1 = \partial_1^*$ ce qui nous donne sous

forme matricielle,

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque ensuite que le rang de δ_1 est 2 car $L_3 = -L_2 - L_1$ et $L_4 = -L_1$. De plus le noyau $\ker \delta_1$ est engendré par $(1, 1, 1)^t$ et comme le graphe est connexe nous obtenons

$$H^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \ker \delta_1 / \{0\} \cong \mathbb{Z}.$$

Pour calculer $H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ on doit déterminer l'image de δ_1 . Soit donc $\psi \in C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$, alors $\psi \in \text{Im } \delta_1$ si et seulement s'il existe $\phi \in C^0(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ vérifiant $\psi = \delta_1 \phi$. Ainsi on a le système d'équations

$$\begin{cases} \psi(A) = \phi(\alpha) - \phi(\beta); \\ \psi(B) = \phi(\gamma) - \phi(\alpha); \\ \psi(C) = \phi(\beta) - \phi(\gamma) = -\psi(A) - \psi(B); \\ \psi(D) = \phi(\beta) - \phi(\alpha) = -\psi(A). \end{cases}$$

Par suite $\psi \in \text{Im } \delta_1$ si et seulement si $\psi \in \langle (1, 0, -1, -1), (0, 1, -1, 0) \rangle_{\mathbb{Z}}$. et l'on a donc $\text{Im } \delta_1 \cong \mathbb{Z}^2$. Ainsi le groupe $C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ a pour base $(1, 0, -1, -1), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ la décomposition d'un élément $\psi = (\psi_A, \psi_B, \psi_C, \psi_D)$ suivant cette base est donnée par

$$\psi = \psi_A(1, 0, -1, -1) + \psi_B(0, 1, -1, 0) + (\psi_C + \psi_A + \psi_B)(0, 0, 1, 0) + (\psi_D + \psi_A)(0, 0, 0, 1).$$

On en déduit alors que en notant par $\overline{(0, 0, 1, 0)}$ et $\overline{(0, 0, 0, 1)}$ les classes respectives de $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ modulo l'image de Ψ que

$$H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^4 / \text{Im } \delta_1 = \langle \overline{(0, 0, 1, 0)}, \overline{(0, 0, 0, 1)} \rangle \cong \mathbb{Z}^2.$$

Pour conclure quant à la cohomologie sur l'enveloppe, on doit maintenant regarder l'action de la substitution sur les groupes de cohomologie et l'on notera respectivement $\sigma^{(0)}$ et $\sigma^{(1)}$ les applications induites par σ sur les groupes de cohomologie. Dans le cas de la substitution de Fibonacci, σ induit sur les 0-cochaines et les 1-cochaines les applications données par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque ensuite que les deux matrices ne sont pas de rangs pleins, car respectivement de rang 2 et 3, on doit donc étudier plus en détails ce que se passe.

On s'intéresse tout d'abord à $H^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \langle (1, 1, 1) \rangle$. On a

$$\sigma^{(0)}(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$$

par suite,

$$\varinjlim(H^0(\Gamma_1, \mathbb{Z}), \sigma^{(0)}) = \mathbb{Z}.$$

Il nous reste alors à calculer la limite directe de $H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ sous l'action de $\sigma^{(0)}$. On a deux générateurs pour ce groupe de cohomologie, à savoir $(0, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$ et on doit regarder leurs images respectives par σ_1^* ce qui nous donne

$$\sigma^{(1)}(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 1, 0) + (0, 0, 0, 1) + \Psi_1$$

et

$$\sigma^{(1)}(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0) + \Psi_2,$$

avec Ψ_1, Ψ_2 dans $\text{Im } \delta_1$.

En passant au classe modulo $\text{Im } \delta_1$, l'application $\sigma^{(1)}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $\sigma^{(1)}$ est inversible dans $GL_2(\mathbb{Z})$. Par conséquent la limite inductive du système

$$\varinjlim(H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}), \sigma^{(1)}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

En utilisant les résultats du 5 nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 6.IV.1. *La cohomologie de Cech de l'espace X_P^N est de dimension 1 avec*

$$\check{H}^0(X_P^N) \cong \mathbb{Z}$$

engendré par la classe de l'application constante sur les arêtes de Γ_1 , et

$$\check{H}^1(X_P^N) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

engendré par $[\exp(2i\pi \chi_{\Xi_C^0})]$ et $[\exp(2i\pi \chi_{\Xi_D^0})]$ avec $\Xi_C^0 = \{T \in \Xi; T_0 \text{ couronne de type } C\}$ et $\Xi_D^0 = \{T \in \Xi; T_0 \text{ couronne de type } D\}$

Pour en déduire la K-théorie de $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$, on utilise la suite d'isomorphismes vue dans le chapitre 4, ce qui nous donne les générateurs de la K-théorie de $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$. En remontant le diagramme nous obtenons que modulo la suite d'isomorphismes les générateurs de $K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ sont $[\chi_{\Xi_C^0}]$ et $[\chi_{\Xi_D^0}]$. Nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 6.IV.2.

1. La trace τ_μ induit un isomorphisme $(\tau_\mu)_* : K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[\varphi]$ (où l'action sur $\mathbb{Z}[\varphi]$ est donné par la multiplication par φ ;
2. Cet isomorphisme est équivariant.

Démonstration. 1. En posant $(\tau_\mu)_*([\chi_{\Xi_C^0}]) = \varphi$ et $(\tau_\mu)_*([\chi_{\Xi_D^0}]) = 1$, ce morphisme est bien un isomorphisme induit la trace τ_μ ;

2. En utilisant la Proposition 5.VI.3 p.85, l'action sur $K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \text{Coinv}C(\Xi; \mathbb{Z})$ est donnée par $[f] \mapsto [f \circ \sigma]$ et nous avons $(\tau_\mu)_*([f \circ \sigma]) = \varphi(\tau_\mu)_*([f])$. Ainsi $(\tau_\mu)_*$ est covariant. □

V- *K*-théorie

On vient de montrer que l'action de $\tilde{\alpha}_*$ sur $\text{Coinv}(C(\Xi, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}[\varphi]$ est donnée par la multiplication par φ . Nous allons maintenant pouvoir établir l'action de $\tilde{\alpha}_{c*}$ sur la *K*-théorie. On rappelle que d'après la Proposition 2.III.56 p.43, on a un isomorphisme

$$C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\varphi]) \rightarrow K_0(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$$

défini par

$$\chi_K \otimes \varphi \mapsto [\chi_K \otimes \chi_{\Xi^0}]$$

$$\chi_K \otimes 1 \mapsto [\chi_K \otimes \chi_{\Xi_D^0}]$$

K étant un compact ouvert de \mathcal{Z}_c .

Proposition 6.V.1. *Modulo cette identification le morphisme $\tilde{\alpha}_{c*}$ est réalisé sur $K_0(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ par l'automorphisme*

$$\Psi_0 : C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\varphi]) \rightarrow C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\varphi]), f \mapsto \varphi f \circ s^{-1}.$$

Démonstration. Soient K compact ouvert de \mathcal{Z}_c , $f \in L^2([0, 1])$ de norme 1 et tout élément $[p] \in K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$, nous avons

$$\tilde{\alpha}_{c*}([\chi_K \otimes \Theta_{f,f} \otimes p]) = [\chi_{s(K)} \otimes \tilde{\alpha}_*(\sum \Theta_{U_n f f, U_n f} \otimes p)]$$

En utilisant la Proposition 5.VI.3 p.85, on sait que $\tilde{\alpha}$ est donné via l'identification $K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z}))$ par $[f] \mapsto [f \circ \sigma]$ et en utilisant la Proposition 6.IV.2 p.98, on conclut que $\tilde{\alpha}_{c*}$ est bien réalisé par Ψ_0 . \square

En ce qui concerne le groupe de *K*-théorie d'ordre impaire nous avons toujours d'après la Proposition 2.III.56 un isomorphisme

$$C(\mathcal{Z}_c; K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})) = C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}), \chi_E \otimes u \mapsto [\chi_K \otimes u + (1 - \chi_K \otimes 1)],$$

K étant un compact ouvert de \mathcal{Z}_c .

Proposition 6.V.2. *Modulo cette identification, l'automorphisme $(\tilde{\alpha}_c)_*$ est donné par l'automorphisme*

$$\Psi_1 : C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}), f \mapsto f \circ s^{-1}.$$

Démonstration. L'action de $\tilde{\alpha}_*$ étant l'identité sur $K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ et puisque $\tilde{\alpha}_c = s \otimes \tilde{\alpha}$ le résultat est immédiat. \square

VI- *K*-théorie de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$

Commençons par rappeler la notation introduite dans le chapitre 5, $A_{P(c)} = (C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1])) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rtimes_{\tilde{\alpha}_c} \mathbb{Z}$. Nous avons établi que $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ et $A_{P(c)}$ sont Morita équivalente, ainsi $K_*(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G) \cong K_*(A_{P(c)})$.

On remarque tout d'abord que puisque pour $f \neq 0$,

$$\|\Psi_0(f)\| = \varphi \|f\|$$

il n'y a pas d'invariants pour l'action de $(\tilde{\alpha}_c)_*$ sur $K_0(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1])) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$, ie $\text{Inv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\varphi]) = \{0\}$.

Proposition 6.VI.1 (groupe K_0). *La suite suivante est exacte et scindée*

$$0 \longrightarrow \text{Coinv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\varphi]) \xrightarrow{i} K_0(A_{P(c)}) \longrightarrow \text{Inv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})) \longrightarrow 0$$

avec en fixant f de norme L^2 égale à 1,

$$i([\chi_K \otimes \varphi]) = \iota_*([\chi_K \otimes \Theta_{f,f} \otimes \chi_{\Xi_c^0}])$$

et

$$i([\chi_K \otimes 1]) = \iota_*([\chi_K \otimes \Theta_{f,f} \otimes \chi_{\Xi_d^0}]).$$

Une section dans la suite exacte (voir Proposition 9.II.1 p.135) est donnée à isomorphisme près en K -théorie par l'équivalence Morita, par

$$\eta : \text{Inv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})) \rightarrow K_0(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G) \cong K_0(A_{P(c)})$$

définie pour $e \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*))$ un projecteur de rang 1, vu comme élément de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ (voir diagramme de la Figure 9.1 p.135), par

$$\eta(1) = [e \otimes \chi_K]$$

où K est un clopen invariant de \mathcal{Z}_c .

En ce qui concerne le groupe de K -théorie d'ordre paire nous avons la proposition suivante.

Proposition 6.VI.2. *On a un isomorphisme*

$$\text{Coinv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})) \xrightarrow{\cong} K_1(A_{P(c)})$$

obtenu par la composition de :

1. l'application

$$\text{Coinv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})) \rightarrow K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}), [\chi_K] \mapsto [\chi_K \otimes u + (1 - \chi_K) \otimes 1],$$

où u est l'unitaire issu de $1 \in \mathbb{Z}$ dans le produit croisé;

2. l'isomorphisme en K -théorie $K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1])) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ provenant de l'équivalence Morita entre une C^* -algèbre A et $A \otimes \mathcal{K}$;

3. le morphisme $K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1])) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(A_{P(c)})$ issu de l'inclusion canonique $C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1])) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z} \hookrightarrow A_{P(c)}$.

Chapitre 7

Substitution de Thue-Morse

La substitution de Thue-Morse va nous donner un pavage hyperbolique dont les tuiles ont la même forme que celui étudié dans [OP11] à la différence près que deux types de "matériaux" sont utilisés dans notre cas (au lieu d'un seul dans le cas de l'article). Encore une fois, on va étudier $X_{P(c)}^G \rtimes G$ ainsi que la C^* -algèbre associée $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$.

I- Définitions et mise en place du pavage

On va dans cette partie rappeler la définition de la substitution ainsi qu'établir ses principales propriétés.

Définition 7.I.1 (Thue-Morse). La *substitution de Thue-Morse* est la donnée d'un alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$ ainsi que d'une application $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ définie sur les deux lettres par $\sigma(a) = ab$ et $\sigma(b) = ba$.

I.1- Caractéristiques de la substitutions

Pour transformer cette substitution écrite de manière formelle, on doit associer à chaque lettre une prototuile et déterminer le facteur d'expansion de la substitution, qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 7.I.2. La substitution a pour facteur d'expansion 2.

Démonstration. Le facteur d'expansion λ satisfait les deux conditions $\lambda a = a + b = \lambda b$. En particulier $a = b := 1$ et $\lambda = 2$. \square

Pour établir une substitution de Thue-Morse de la droite réelle, il suffit de prendre deux prototuiles a et b qui sont deux intervalles fermés de longueur 1 et la règle de substitution est alors décrite par la figure suivante.

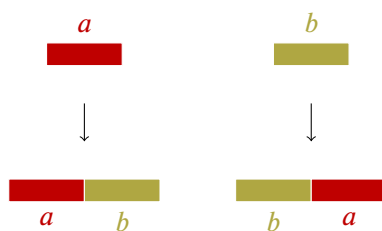


FIGURE 7.1 – Substitution de Thue-Morse sur \mathbb{R}

I.2- Couronnes et forçages des bords

Comme dans le cas de Fibonacci, il est clair par la définition de cette substitution que celle-ci ne force le bords que vers la droite. Il nous faut, comme dans le cas de Fibonacci, passer par les couronnes de cette substitution qui sont l'objet de la proposition suivante.

Proposition 7.I.3. *La substitution de Thue-Morse admet exactement les six couronnes listées ci-après :*

$$\begin{aligned} A &= (a).b(a), \\ B &= (a).b(b), \\ C &= (a).a(b), \\ D &= (b).a(b), \\ E &= (b).b(a), \\ F &= (b).a(a). \end{aligned}$$

Démonstration. Il est clair que comme on ne dispose que de deux prototiles, la substitution n'admet qu'au plus huit couronnes, qui sont celles listés ci-avant et les deux restants à savoir $(a)a(a)$ et $(b)b(b)$. Il faut donc les exclure du champs des possibles pour Thue-Morse. Supposons que la couronne $(a)a(a)$ soit autorisée, alors le premier a est nécessairement un descendant d'un b (sinon le a du milieu serait un b). De la même manière le dernier a provient lui-même d'une lettre a . Or comme toute image d'une lettre par la substitution nous donne deux lettres, il est impossible de trouver un antécédent au a du milieu, donc cette configuration est impossible. Le même raisonnement exclut la configuration $(b)b(b)$.

Avant de regarder les six autres couronnes, remarquons que les lettres a et b jouent un rôle symétrique dans la substitution, ainsi il nous suffit de regarder seulement les trois couronnes A, B et C (qui sont symétriques de D, E et F respectivement). En regardant $\sigma^3(a) = abbabaab$, on remarque qu'elles y apparaissent toutes les trois. \square

On peut maintenant regarder l'extension de la substitution σ aux couronnes.

Proposition 7.I.4. *Les images des couronnes par la substitution sont données par :*

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= (B).EF(C), \\ \sigma(B) &= (B).ED(A), \\ \sigma(C) &= (A).DB(E), \\ \sigma(D) &= (F).CB(E), \\ \sigma(E) &= (D).AF(C), \\ \sigma(F) &= (F).CA(D). \end{aligned}$$

On veut savoir quand la substitution force les bords au niveau des couronnes, et il est clair d'après la proposition précédente qu'une seule itération de σ force les bords.

Corollaire 7.I.5. *La substitution σ force les bords sur les couronnes à l'ordre 1.*

I.3- Mise en place du pavage hyperbolique associé

On se trouve comme dans le cas du pavage hyperbolique de Fibonacci avec deux prototiles hyperboliques notées **A** et **B** qui sont de même forme : on relie par des géodésiques de \mathbb{H}_2 les points $i, i + 1, i + 2, 2i + 1$ et $2i$, nous donnant bien un convexe compact non vide de \mathbb{H}_2 . Pour construire le

pavage hyperbolique, on a besoin de savoir passer d'une ligne à l'autre du pavage. De la même manière que dans le Fibonacci hyperbolique le passage d'une ligne à l'autre est relié à la substitution et on obtient les règles suivantes.

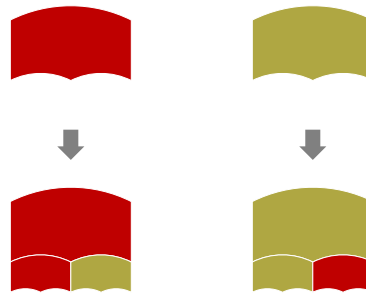


FIGURE 7.2 – Règles de passages entre les lignes

Il est clair qu'à l'horizontale, les lignes suivent la substitution de Thue-Morse afin de pouvoir bien définir le pavage (vers le haut). Il faut aussi remarquer que la substitution de Thue-Morse est contractante dont admet un point fixe pour les mots définis vers la droite. Pour pouvoir l'étendre, on dispose du choix de la couronnes, ce qui revient essentiellement à choisir la lettre d'indice -1 , ce qui nous donne deux choix (et qui sont image l'un de l'autre par la substitution). On peut donc construire le pavage hyperbolique associé à la substitution de Thue-Morse en prenant comme tuiles d'indice 0 et -1 dans la bande délimitée par les droites $z = i$ et $z = 2i$ des tuiles du type **A**. Un tel choix nous détermine alors entièrement le pavage. Cela nous donne le pavage suivant que l'on appellera P .

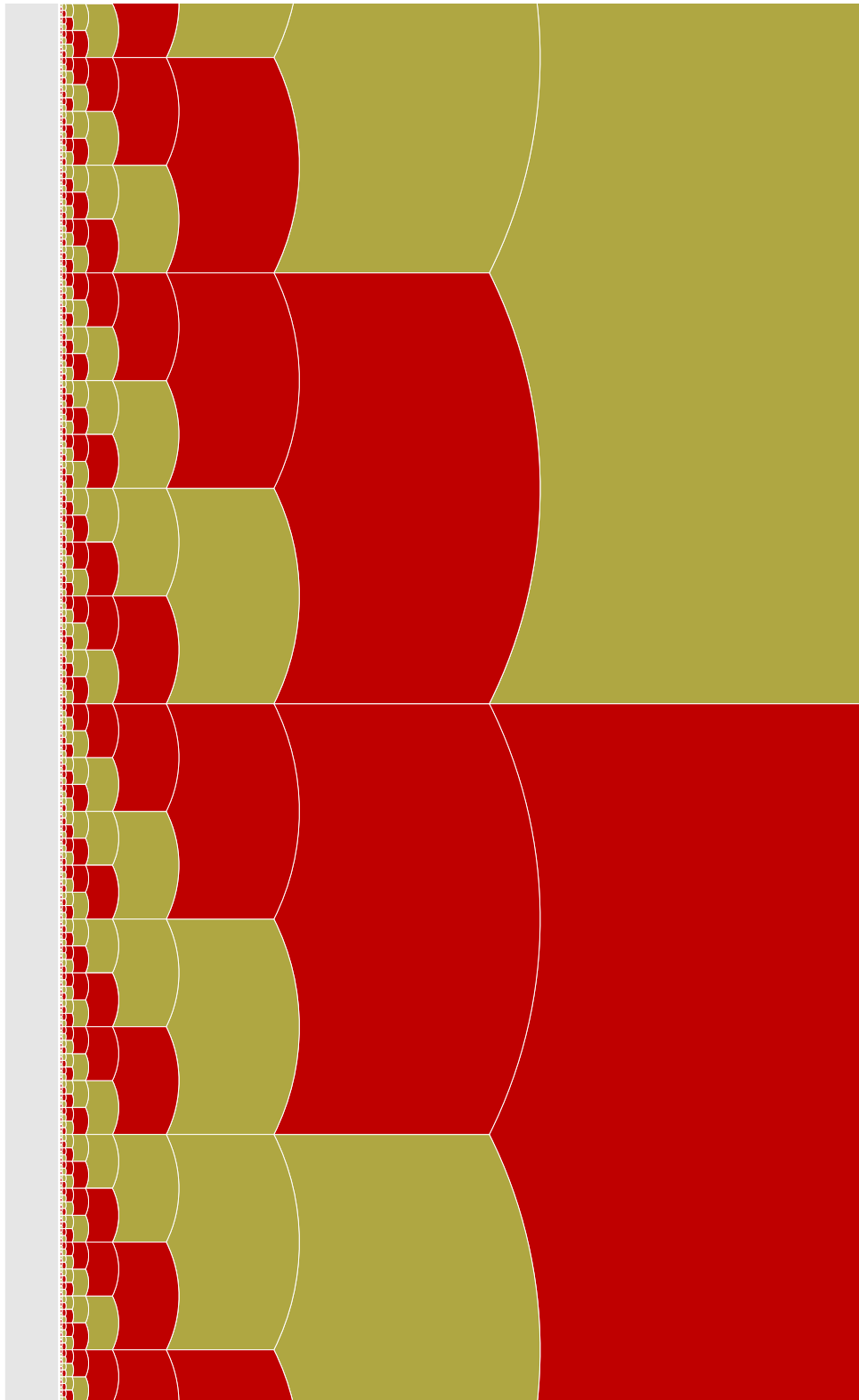


FIGURE 7.3 – Thue-Morse hyperbolique

II- C^* -algèbre du pavage hyperbolique

En conclusion des chapitre 2 et chapitre 5 la C^* -algèbre $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ est Morita équivalente à $A_{P(c)}$. Dans le cas du pavage de Thue-Morse, on donne la description explicite de $\tilde{\alpha}$. Contrairement au cas du pavage de Fibonacci, puisque les tuiles ont même longueur on peut faire le calcul sans distinguer les couronnes.

II.1- Détermination des isométries partielles

Pour donner la description explicite du transport de $\tilde{\alpha}$ nous devons expliciter les isométries partielles U_n, V et V' . Nous avons $n(T) = 2$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = \chi_{[0, \frac{1}{2}]}(t), \quad \chi_1(T, t) = \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(t) \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 2.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ les isométries partielles

$$U_0(f)(T, t) = \sqrt{2}f(2t)\chi_{[0, \frac{1}{2}]}(t)$$

et

$$U_1(f)(T, t) = \sqrt{2}f(2t - 1)\chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(t).$$

Nous avons également

$$Vf(T, t) = f(t + \frac{1}{2})\chi_{[0, \frac{1}{2}]}(t)$$

et

$$V'f(T, t) = f(t - \frac{1}{2})\chi_{[\frac{1}{2}, 1]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V)f(T, t) = V(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = f(t + \frac{1}{2})\chi_{[0, \frac{1}{2}]}(t).$$

Pour une fonction $\phi \in C(\Xi)$ nous avons

$$W_0\phi(T) = \phi(2 \cdot T)$$

et

$$W_1\phi(T) = \phi(\mathfrak{s}(2 \cdot T)).$$

Dans ces conditions nous avons quelque soit la configuration locale

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = U_0(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_0(T, \bullet)^* + U_1(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_1(T, \bullet)^*$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = \chi_0(T, \bullet) \otimes \phi(2 \cdot T) + \chi_1(T, \bullet) \otimes \phi(\mathfrak{s}(2 \cdot T))$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

III- Mesure invariante sur les pavages en couronne

Nous savons que la substitution sur les couronnes a pour matrice

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur propre de Perron-Frobenius donnant la mesure invariante est donné par

$$\mu = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right).$$

Lemme 7.III.1. Soit l'application $\mu : C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_{\Xi} f d\mu$.

1. μ est à image dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$;
2. μ se factorise en un morphisme

$$\bar{\mu} : \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}].$$

Démonstration. L'application $C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et pour montrer que son domaine d'arrivée est bien $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, il suffit de regarder l'image des indicatrices $\chi_{\Xi_{p_i}^0}$. Or

$$\int_{\Xi} \chi_{\Xi_{p_i}^0} d\mu = \mu(\Xi_{p_i}^0)$$

et comme toutes les entrées de μ sont dans $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, alors le domaine d'arrivée est bien $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Puisque la mesure μ est invariante pour l'action du shift, nous remarquons que l'application $C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ passe bien au quotient en un morphisme

$$\bar{\mu} : \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}].$$

□

Lemme 7.III.2. Modulo l'isomorphisme $\text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \rightarrow K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}), \chi_E \mapsto [\chi_E]$ (voir Proposition 2.III.65 p.46), la trace τ_{μ} induite par μ correspond au morphisme $\bar{\mu}$.

IV- Construction d'Anderson et Putnam [AP98] et liens avec X_P^N

IV.1- Construction de l'approximation Γ_1 pour le pavage de Thue-Morse

On rappelle qu'en réécrivant la substitution via les six couronnes, on a remarqué que celle-ci force les bords, ce qui implique que notre calcul se fera à partir du premier approximant Γ_1 ainsi que ses images successives par l'application induite par σ , notée σ^* . On obtient la figure suivante :

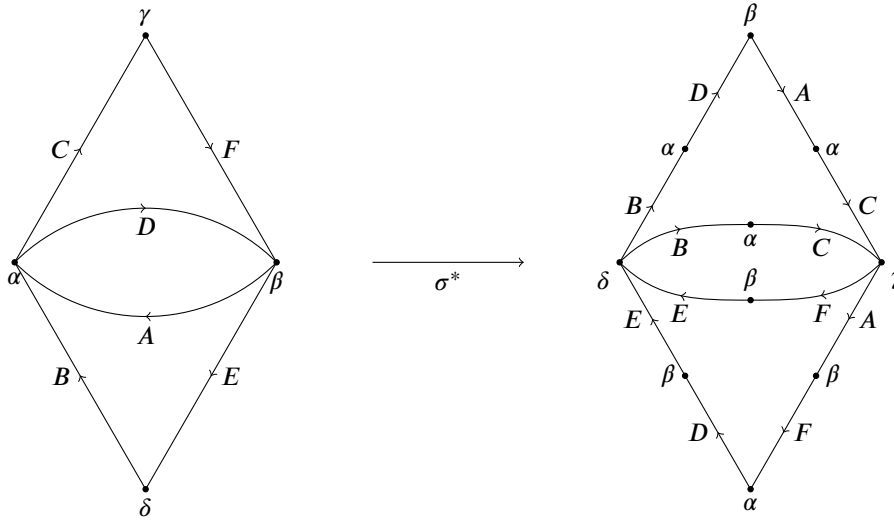


FIGURE 7.4 – CW-complexe Γ_1 et son image par σ^* pour la substitution de Thue-Morse

IV.2- Calcul de la cohomologie cellulaires de Γ_1

On remarque que le CW-complexe Γ_1 est composé de quatre sommets $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ et de six arêtes $\{A, B, C, D, E, F\}$. Par suite, on a $C_0(\Gamma_1) \cong \mathbb{Z}^4$ et $C_1(\Gamma_1) \cong \mathbb{Z}^6$. De même, on a $C^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^4$ et $C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^6$. On regarde maintenant les applications de bord et de cobord ∂_1 et $\delta_1 = \partial_1^*$ ce qui nous donne sous forme matricielle,

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le noyau $\ker \delta_1$ est engendré par $(1, 1, 1, 1)^t$ et comme le graphe est connexe nous obtenons

$$H^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \ker \delta_1 / \{0\} \cong \mathbb{Z}.$$

Pour calculer $H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ on doit déterminer l'image de δ_1 . Soit donc $\psi \in C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$, alors $\psi \in \text{Im } \delta_1$ si et seulement s'il existe $\varphi \in C^0(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ vérifiant $\psi = \delta_1 \varphi$. Ainsi on a le système d'équations

$$\begin{cases} \delta\varphi(A) = \varphi(\alpha) - \varphi(\beta) := k_A \\ \delta\varphi(B) = \varphi(\alpha) - \varphi(\delta) := k_B \\ \delta\varphi(C) = \varphi(\gamma) - \varphi(\alpha) := k_C \\ \delta\varphi(D) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) := k_D = -k_A \\ \delta\varphi(E) = \varphi(\eta) - \varphi(\beta) := k_E = k_A - k_B \\ \delta\varphi(F) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) := k_F = -k_A - k_C \end{cases}$$

Par suite on a

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= (k_A, k_B, k_C, k_D, k_E, k_F) \\ &= (k_A, k_B, k_C, -k_A, k_A - k_B, -k_A - k_C) \\ &= k_A \underbrace{(1, 0, 0, -1, 1, -1)}_{:=C_A} + k_B \underbrace{(0, 1, 0, 0, -1, 0)}_{:=C_B} + k_C \underbrace{(0, 0, 1, 0, 0, -1)}_{:=C_C} \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Im } \delta$ est engendré par les cobords C_A, C_B et C_C et donc $\text{Im } \delta \cong \mathbb{Z}^3$.
Soit maintenant $(a, b, c, d, e, f) \in C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^6$, on a

$$\begin{aligned} (a, b, c, d, e, f) &= aC_A + bC_B + cC_C + (0, 0, 0, d + a, e - a + b, f + a + c) \\ &= aC_A + bC_B + cC_C + (d + a)e_D + (e - a + b)e_E + (f + a + c)e_F, \end{aligned}$$

où e_D, e_E et e_F sont les cycles valant 1 seulement en D resp en E et resp en F . Il est clair que l'on a une \mathbb{Z} -base pour $C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$.

On a donc en notant $\overline{e_D}, \overline{e_E}$ et $\overline{e_F}$ les classes respectives de e_D, e_E et e_F modulo l'image de δ que,

$$\mathbb{Z}^6 / \text{Im } \delta = H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \langle \overline{e_D}, \overline{e_E}, \overline{e_F} \rangle \cong \mathbb{Z}^3.$$

Pour conclure quant à la cohomologie sur l'enveloppe, on doit maintenant regarder l'action de la substitution sur les groupes de cohomologie et l'on notera respectivement $\sigma^{(0)}$ et $\sigma^{(1)}$ les applications induites par σ sur les groupes de cohomologie. Dans le cas de la substitution de Thue-Morse, σ induit sur les 0-cochaines et les 1-cochaines les applications données par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse tout d'abord à $H^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \langle (1, 1, 1) \rangle$. Puisque $\sigma^{(0)}$ est de rang plein, avec $\sigma^{(0)}(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$, nous avons

$$\varinjlim (H^0(\Gamma_1, \mathbb{Z}), \sigma^{(0)}) = \mathbb{Z}.$$

Il nous reste alors à calculer la limite directe de $H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ sous l'action de $\sigma^{(0)}$. On a trois générateurs pour ce groupe de cohomologie, à savoir $\overline{e_D}, \overline{e_E}$ et $\overline{e_F}$ et on doit regarder leurs images respectives par σ_1^* ce qui nous donne

$$\sigma^{(1)}(e_D) = e_E + e_F + \Psi_1,$$

puis

$$\sigma^{(1)}(e_E) = e_D + e_F + \Psi_2$$

et

$$\sigma^{(1)}(e_F) = e_D + e_F + \Psi_3$$

avec Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 dans $\text{Im } \delta_1$.

En passant au classe modulo $\text{Im } \delta_1$, l'application $\sigma^{(1)}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\sigma^{(1)}$ n'est pas inversible dans $GL_3(\mathbb{Z})$ contrairement au cas Fibonacci. Pour pouvoir passer à la limite directe, nous allons d'abord regarder une sous-groupe stable. En prenant le sous-groupe engendré par les vecteurs

$$v_1 = \overline{e_D} + \overline{e_E} + \overline{e_F}, v_2 = \overline{e_F} - \overline{e_E}$$

nous remarquons que

$$\sigma^{(1)}v_1 = 2v_1 + v_2, \quad \sigma^{(1)}v_2 = 0$$

Ainsi le sous-groupe $\langle v_1, v_2 \rangle$ est stable par $\sigma^{(1)}$.

Lemme 7.IV.1. *Il existe un morphisme injectif de groupe*

$$\iota : \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rightarrow \varinjlim (H^1(\Gamma_1, \mathbb{Z}), \sigma^{(1)})$$

uniquement déterminé par

$$\iota(1) = [((\sigma^{(1)})^i(v_1))_{i \in \mathbb{N}}].$$

De plus le morphisme satisfait $\iota(2n) = \sigma^{(1)}\iota(n)$.

Démonstration. Posons $V = \langle v_1, v_2 \rangle$. On remarque que V est stable par $\sigma^{(1)}$. Comme $\sigma^{(1)}(v_2) = 0$, alors le morphisme

$$V \rightarrow \mathbb{Z}, v_1 \mapsto 1, v_2 \mapsto 0$$

induit un isomorphisme

$$\varinjlim (V, \sigma^{(1)}) \rightarrow \varinjlim (\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}).$$

On en déduit un isomorphisme

$$\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \xrightarrow{\sim} \varinjlim (V, \sigma^{(1)})$$

et donc une inclusion

$$\iota : \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \rightarrow \varinjlim (H^1(\Gamma_1, \mathbb{Z}), \sigma^{(1)})$$

satisfaisant $\iota(1) = [((\sigma^{(1)})^i(v_1))_{i \in \mathbb{N}}]$. □

En remarquant que (v_1, v_2, e_F) est une base de $H^1(\Gamma_1, \mathbb{Z})$, on en déduit que

$$H^1(\Gamma_1, \mathbb{Z})/V = \langle \overline{e_F} \rangle \cong \mathbb{Z}$$

et l'action de $\sigma^{(1)}$ sur ce quotient est la multiplication par (-1) . On en déduit la proposition suivante.

Proposition 7.IV.2. *On a une extension*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \longrightarrow \varinjlim(H^1(\Gamma_1, \mathbb{Z}), \sigma^{(1)}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

scindée par

$$\mathbb{Z} \rightarrow \varinjlim(H^1(\Gamma_1, \mathbb{Z}), \sigma^{(1)}), 1 \mapsto [((-1)^i e_F)_{i \in \mathbb{N}}].$$

Modulo la section de la suite exacte, nous obtenons un isomorphisme

$$\varinjlim(H^1(\Gamma_1, \mathbb{Z}), \sigma^{(1)}) \rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}$$

et l'automorphisme $\sigma^{(1)}$ est donné modulo cette identification par la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En conclusion, via l'identification précédente nous obtenons

$$\check{H}^1(X_P^N; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z},$$

de générateurs $[\exp(2i\pi(\chi_{\Xi_D^0} + \chi_{\Xi_E^0} + \chi_{\Xi_F^0}))]$ et $[\exp(2i\pi\chi_{\Xi_F^0})]$.

Remarque 7.IV.3. Modulo l'identification entre la K -théorie du produit croisé et $\check{H}^1(X_P^N; \mathbb{Z})$, l'application $(\tau_\mu)_*$ induite par la trace est la projection sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. En particulier la trace n'est pas un isomorphisme contrairement aux pavages de Fibonacci et Tribonacci.

V- K -théorie

On vient de montrer que l'action de $\tilde{\alpha}_*$ sur $\text{Coinv}(C(\Xi, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}$ est donnée par la multiplication par $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Nous allons maintenant pouvoir établir l'action de $\tilde{\alpha}_{c*}$ sur la K -théorie. On rappelle que d'après la Proposition 2.III.56 p.43, on a un isomorphisme

$$C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$$

défini par

$$\begin{aligned} \chi_K \otimes (1, 0) &\mapsto [\chi_K \otimes (\chi_{\Xi_D^0} + \chi_{\Xi_E^0} + \chi_{\Xi_F^0})] \\ \chi_K \otimes (0, 1) &\mapsto [\chi_K \otimes \chi_{\Xi_F^0}] \end{aligned}$$

K étant un compact ouvert de \mathcal{Z}_c .

Proposition 7.V.1. *Modulo l'identification précédente l'automorphisme $\tilde{\alpha}_{c*}$ est réalisé sur $C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z})$ par l'automorphisme*

$$\Psi_0 : C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}), (x, n) \mapsto ((2x + n)\text{os}^{-1}, -n\text{os}^{-1}).$$

Démonstration. Soit $f \in L^2([0, 1])$ de norme 1 et tout compact ouvert K de \mathcal{Z}_c , nous avons pour $p \in K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$,

$$(\tilde{\alpha}_{c*})_*([\chi_K \otimes \Theta_{f,f} \otimes p]) = [\chi_{s(K)} \otimes \tilde{\alpha}_* \sum_{f \text{ finie}} \Theta_{U_{nf}, U_{nf}} \otimes p].$$

En utilisant la Proposition 5.VI.3 p.85, on sait que $\tilde{\alpha}$ est donné via l'identification $K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z}))$ par $[f] \mapsto [f \circ \sigma]$, on conclut que $\tilde{\alpha}_{c*}$ est bien réalisé par Ψ_0 . \square

En ce qui concerne le groupe de K -théorie d'ordre impair nous avons toujours d'après la Proposition 2.III.56 un isomorphisme

$$C(\mathcal{Z}_c; K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})) = C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}), \chi_E \otimes u \mapsto [\chi_K \otimes u + (1 - \chi_K \otimes 1)],$$

K étant un compact ouvert de \mathcal{Z}_c .

Proposition 7.V.2. *Modulo l'identification ci-dessus, l'automorphisme $(\tilde{\alpha}_c)_*$ est réalisé par l'automorphisme*

$$\Psi_1 : C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}), f \mapsto f \circ s^{-1}.$$

Démonstration. L'automorphisme $\tilde{\alpha}_*$ étant l'identité alors $(\alpha_c = s \otimes \alpha)_*$ est bien réalisé par Ψ_1 . \square

VI- K -théorie de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$

On rappelle que dans le chapitre 5 on a montré que la C^* -algèbre $A_{P(c)}$ est Morita équivalente à $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ et donc $K_*(A_{P(c)}) \cong K_*(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G)$. En remarquant que $\|\Psi_0(f)\| \neq \|f\|, f \neq 0$ il n'y a pas d'invariants pour l'action de $(\tilde{\alpha}_c)_*$ sur $K_0(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}))$. On notera ι_* le morphisme en K -théorie issu de l'application

$$C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K} \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z} \cong C_r^*(G, \lambda) \hookrightarrow C_r^*(G, \lambda) \rtimes_{\tilde{\alpha}_c} \mathbb{Z}.$$

Nous pouvons alors donner une description de groupe de K -théorie d'ordre pair de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$.

Proposition 7.VI.1 (groupe K_0). *La suite suivante est exacte et scindée*

$$0 \longrightarrow \text{Coinv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]) \oplus \mathbb{Z}) \xrightarrow{i} K_0(A_{P(c)}) \longrightarrow \text{Inv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})) \longrightarrow 0$$

avec en prenant f de norme L^2 égale à un,

$$i([\chi_K \otimes (x, 0)]) = \iota_*([\chi_K \otimes \Theta_{f,f} \otimes (\chi_{\Xi_D} + \chi_{\Xi_E} + \chi_{\Xi_F})])$$

et

$$i([\chi_K \otimes (0, 1)]) = \iota_*([\chi_K \otimes \Theta_{f,f} \otimes \chi_{\Xi_F}])$$

Une section dans la suite exacte (voir Proposition 9.II.1 p.135) est donnée à isomorphisme en K -théorie donnée par l'équivalence Morita, par

$$\eta : \text{Inv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})) \rightarrow K_0(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G) \cong K_0(A_{P(c)})$$

définie pour $e \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*))$ un projecteur de rang 1, vu comme élément de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ (voir diagramme de la Figure 9.1 p.135), par

$$\eta(1) = [e \otimes \chi_K]$$

où K est un compact ouvert invariant de \mathcal{Z}_c .

En ce qui concerne le groupe de K -théorie d'ordre paire nous avons la proposition suivante.

Proposition 7.VI.2. *On a un isomorphisme*

$$\text{Coinv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})) \xrightarrow{\cong} K_1(A_{P(c)})$$

obtenu par la composition de :

1. l'application

$$\text{Coinv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}), [\chi_K] \mapsto [\chi_K \otimes u + (1 - \chi_K) \otimes 1],$$

où u est l'unitaire issu de $1 \in \mathbb{Z}$ dans le produit croisé;

2. l'isomorphisme en K -théorie $K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ provenant de l'équivalence Morita entre une C^* -algèbre A et $A \otimes \mathcal{K}$;
3. le morphisme $K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(A_{P(c)})$ issu de l'inclusion canonique $C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z} \hookrightarrow A_{P(c)}$.

VII- Cas pavage non coloré

On se place dans la situation où c est réduit à une couleur et dans ces conditions la C^* -algèbre du pavage hyperbolique est $C(X_P^G) \rtimes G$ et est Morita équivalente (d'après les chapitre 2 et chapitre 5) à $(\mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rtimes_{\tilde{\alpha}_*} \mathbb{Z}$ que l'on note A_P^G . En utilisant le Proposition 5.VI.3, pour déterminer la K -théorie de cette C^* -algèbre nous devons déterminer les invariants et coinvariants de $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}$ pour l'action de $\sigma^{(1)}$.

Lemme 7.VII.1. *On a un isomorphisme*

$$\text{Coinv}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}, \sigma^{(1)}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Le générateur d'ordre 2 est donné par $\overline{(0, 1)}$.

Démonstration. Soit donc $(x, n) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} - \sigma^{(1)} \begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x + n \\ -n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -x - n \\ 2n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour déterminer les coinvariants pour l'action de $\sigma^{(1)}$ il faut résoudre alors le système

$$\begin{pmatrix} x' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - n \\ 2n \end{pmatrix}$$

où $(x, n), (x', n') \in (\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z})^2$. Nous obtenons alors

$$x = -x' - \frac{n'}{2} \text{ et } n = \frac{n'}{2}.$$

Ainsi ce système n'a de solution que si n' est pair. On définit l'application

$$\Phi : \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (x, n) \mapsto \bar{n}$$

où \bar{n} est la classe modulo 2 de n .

D'après le calcul précédent cette application se factorise en une application

$$\overline{\Phi} : \text{Coinv}(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \oplus \mathbb{Z}, \sigma^{(1)}) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $[(x, 2n + 1)] = [(0, 1)]$ vu dans les coinvariants et $\overline{\Phi}([(0, 1)]) = 1$. Ainsi l'application $\overline{\Phi}$ est bien un isomorphisme. \square

On rappelle également que $\sigma^{(0)}$ étant l'identité sur $K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, alors $\text{Inv}(\mathbb{Z}, \sigma^{(0)}) \cong \mathbb{Z}$.
On a ainsi la suite exacte en K -théorie scindée donné par

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow K_0(A_p^G) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

A Morita équivalence près, la section $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow K_0(C(X_p^G) \rtimes G) \cong K_0(A_p^G)$ est donné par la Proposition 9.II.1 où l'on a oublié la coloration et est définie pour $e \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*))$ un projecteur de rang 1 vu comme élément de $C(X_p^G) \rtimes G$ via la Figure 9.1 par

$$\eta(1) = e.$$

Proposition 7.VII.2. *Le groupe $K_0(A_p^G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le générateur d'ordre 2 est $[\chi_{\Xi_F^0}]$ et le générateur d'ordre infini est $[e]$.*

Chapitre 8

Substitution de Tribonacci

On va dans cette partie déterminer les groupes de K -théorie pour la substitution de Tribonacci.

I- Définition et premières propriétés

I.1- Substitution de Tribonacci

Commençons par rappeler la définition de cette substitution.

Définition 8.I.1 (substitution de Tribonacci). On se donne un alphabet $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$. La substitution de Tribonacci $\sigma : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^*$ est définie par $\sigma(a) = ab$, $\sigma(b) = ac$ et $\sigma(c) = a$, que l'on étend aux mots par concaténation.

Continuons notre approche en regardant maintenant les configurations interdites pour cette substitution.

Proposition 8.I.2. *La substitution de Tribonacci σ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *La substitution admet un point fixe défini vers la droite et que l'on note ω et appelle mot de Tribonacci ;*
2. *Le mot de Tribonacci ω n'admet pas les configurations suivantes : cc , bb , cb , bc , aaa , aac , cac et caa*

Démonstration. Pour le mot fixe il suffit de poser ω en prenant le mot infini à droite donné comme la limite du processus de substitution $\sigma^n(a)$.

Regardons les configurations interdites. Il est clair que la configuration cc n'est pas possible pour la substitution. En effet le seul moyen d'obtenir c est de partir de b cependant on obtient $\sigma(b) = ac$ ainsi le a à gauche de c interdit la configuration cc .

En suivant le même raisonnement les configurations bb , cb et bc sont également interdites.

En ce qui concerne la configuration aaa , il est nécessaire que le a du milieu provienne d'un élément c cependant une fois cet antécédent c fixé, le premier a doit également provenir d'un c or comme cc est interdit alors aaa est aussi interdit.

Dans le cas de la configuration aa . On vient de voir que aaa est interdite, donc aa ne peut faire partie que des configurations aab ou aac .

Pour le cas aac , le seul antécédent qui serait possible est cb , celui-ci étant interdit aac l'est donc aussi.

Dans le cas cac , il suffit de voir que cette configuration provient de la substitution d'une configuration bb qui est interdite.

Dans le cas de caa , le c provient d'un b et pour obtenir un aa il faut nécessairement que celui-ci vienne de c donc une partie de l'antécédent est bc qui est interdit ce qui vaut donc pour caa . \square

On veut maintenant transposer la définition formelle en une substitution de la droite réelle. Il faut pour cela déterminer le facteur d'expansion associé, ce qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 8.I.3. *La substitution formelle σ définie précédemment se transpose en un substitution de la droite réelle \mathbb{R} dont l'ensemble des prototiles est composé de trois intervalle fermés encore dénotés a , b et c . Le facteur d'expansion, noté β , vaut*

$$\beta = \frac{\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1}{3}.$$

Démonstration. Voir annexe I □

On peut alors fixer la longueur de chaque tuile d'après la définition et le facteur d'expansion, ce qui nous donne

$$a = \beta, b = \beta^2 - \beta, c = 1,$$

et l'on obtient ainsi une substitution de la droite réelle :

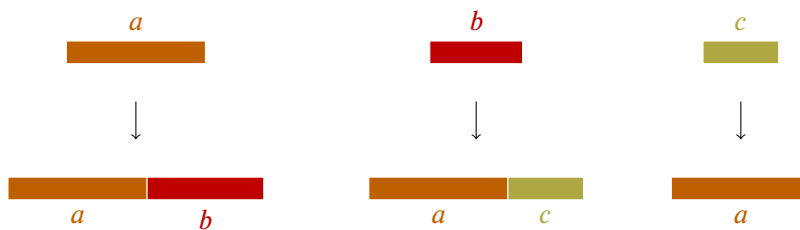


FIGURE 8.1 – Substitution de Tribonacci sur \mathbb{R}

I.2- Couronnes et forçage des bords

D'après la définition de la substitution, il est clair que celle-ci force les bords à droite. Cependant on ne sait pas a priori ce qui se passe sur la gauche (en particulier pour les tuiles de type a). Ainsi, comme dans le cas de la substitution de Fibonacci, cette substitution ne force pas les bords et il faut donc passer aux couronnes qui sont l'objet de la proposition suivante.

Proposition 8.I.4. *La substitution de Tribonacci admet exactement sept couronnes listées ci-après :*

$$\left\{ \begin{array}{l} A = (a).a(b); \\ B = (a).b(a); \\ C = (a).c(a); \\ D = (b).a(b); \\ E = (b).a(a); \\ F = (b).a(c); \\ G = (c).a(b). \end{array} \right.$$

Démonstration. Nous avons déterminé les configurations interdites pour la substitution de Tribonacci dans la Proposition 8.I.2. Il ne reste à voir que les couronnes citées sont autorisées.

Dans le cas aab , on se trouve dans le cas d'un antécédent du type ab lui-même ayant un antécédent de type a ce qui est autorisé.

Dans le cas baa , il suffit de prendre $a \rightarrow ab \rightarrow abac \rightarrow abacaba \rightarrow abacabaababacab$ d'où la configuration est autorisée.

Il ne reste plus qu'à regarder ce qui se passe quand une tuile a est au centre de la couronne. Les cas aba , cab , bac et bab ont déjà été traités dans le cas de l'antécédent de baa au paragraphe précédent.

Les derniers cas sont aca provenant de ba et aba provenant de ac . □

Afin de pouvoir mettre en place le pavage, on doit regarder la substitution sur les couronnes et trouver l'ordre à partir duquel elle force les bords, ce qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 8.1.5. *La substitution de Tribonacci force les bords à l'ordre 2. De plus les images des couronnes via σ et σ^2 sont listées ci-après :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(A) = (B).DB(F); \\ \sigma(B) = (B).FC(G); \\ \sigma(C) = (B.)E(A); \\ \sigma(D) = (C).GB(F); \\ \sigma(E) = (C).GB(D); \\ \sigma(F) = (C).GB; \\ \sigma(G) = AB(F). \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2(A) = (BFC)GBFC(GB); \\ \sigma^2(B) = (BFC)GBE(ABF); \\ \sigma^2(C) = (BFC)GB(DBF); \\ \sigma^2(D) = (BE)ABFC(GB); \\ \sigma^2(E) = (BE)ABFC(GBF); \\ \sigma^2(F) = (BE)ABFC(G); \\ \sigma^2(G) = (B)DBFC(GB). \end{array} \right.$$

Démonstration. Il suffit de faire le calcul des images. Il est ensuite clair que σ ne force pas les bords sur les couronnes (d'après les images de F et G), et l'on voit qu'à l'ordre 2 elle force les bords. \square

I.3- Mise en place du pavage hyperbolique associé

De par la définition de la substitution, on peut tout de suite remarquer que le pavage hyperbolique associé sera composé de trois prototiles, que l'on notera **A**, **B** et **C**. Les trois images qui suivent représentent les trois prototiles de ce pavage.



FIGURE 8.2 – Prototiles du pavage hyperbolique de Tribonacci

Pour relier le pavage usuel et sa version hyperbolique on donne les règles de substitutions pour les prototiles hyperboliques.

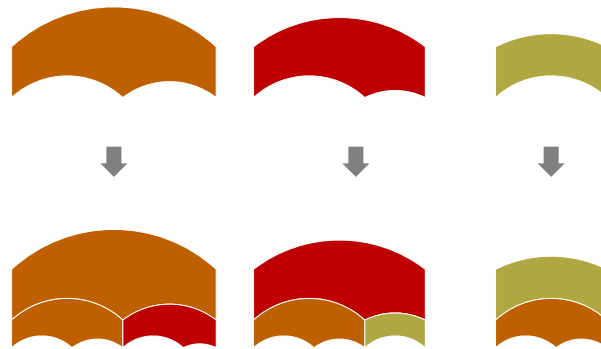


FIGURE 8.3 – Règles de substitution pour Tribonacci hyperbolique

On obtient alors pavage de Tribonacci hyperbolique.

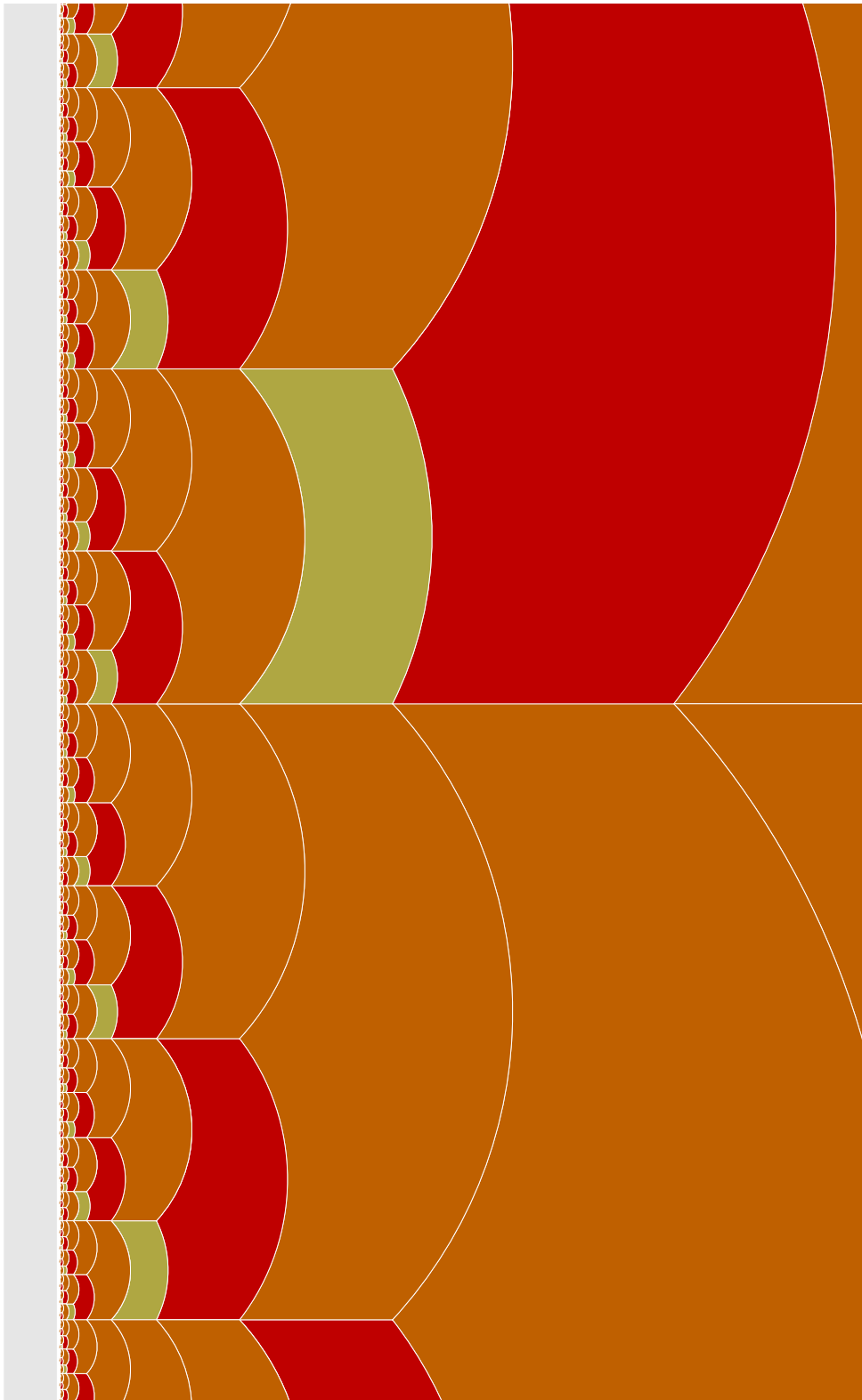


FIGURE 8.4 – Tribonacci hyperbolique

II- C^* -algèbre du pavage hyperbolique

En conclusion des chapitre 2 et chapitre 5, la C^* -algèbre $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ est Morita équivalente au produit croisé de $C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1])) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ par l'automorphisme $\tilde{\alpha}_c = \mathfrak{s} \otimes \tilde{\alpha}$. Dans le cas du pavage de Tribonacci, on donne la description explicite de $\tilde{\alpha}$. Pour obtenir cette description nous allons regarder couronne par couronne comme dans le chapitre 5. Puisque dans tous les cas nous avons $n_T \leq 2$, on rappelle que pour $\phi \in C(\Xi)$ on a

$$W_0\phi(T) = \phi(\beta \cdot T)$$

et

$$W_1\phi(T) = \phi(\mathfrak{s}(\beta \cdot T)).$$

II.1- Cas où T_0 est une couronne de type $A = (a).a(b)$

Pour donner la description explicite du transport de $\tilde{\alpha}$ nous devons expliciter les isométries partielles U_n, V et V' . Nous avons dans ce cas $n(T) = 2$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = \beta^{-1}, \quad \alpha_2^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = \frac{1}{\beta^2 - \beta}.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t), \quad \chi_2(T, t) = \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t), \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 2.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ les isométries partielles

$$U_0(f)(T, t) = \sqrt{\beta} f(\beta t) \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t)$$

et

$$U_1 f(T, t) = \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}} f\left(\frac{\beta}{\beta-1}t - \frac{1}{\beta-1}\right) \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t).$$

Nous avons également

$$V f(T, t) = (\beta-1) f\left((\beta-1)^2 t + \frac{1}{\beta}\right) \chi_{[0, \frac{1}{\beta^2-\beta}]}(t)$$

et

$$V' f(T, t) = \sqrt{\frac{1}{\beta-1}} f\left(\frac{t}{\beta-1} - \frac{1}{\beta^2-\beta}\right) \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V) f(T, t) = V(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = \sqrt{\beta-1} f\left((\beta-1)t + \frac{1}{\beta}\right) \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = U_0(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_0(T, \bullet)^* + U_1(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_1(T, \bullet)^*$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = \chi_0(T, \bullet) \otimes \phi(\beta \cdot T) + \chi_1(T, \bullet) \otimes \phi(\mathfrak{s}(\beta \cdot T))$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = V'(T, \bullet) \otimes 1 + \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

II.2- Cas où T_0 est une couronne de type $B = (a).b(a)$

Nous avons dans ce cas $n(T) = 2$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = \frac{1}{\beta^2 - \beta}, \quad \alpha_2^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = \frac{1}{\beta}.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = \chi_{[0, \frac{1}{\beta^2 - \beta}]}(t), \quad \chi_2(T, t) = \chi_{[\frac{1}{\beta^2 - \beta}, 1]}(t), \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 2.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ les isométries partielles

$$U_0(f)(T, t) = \sqrt{\beta^2 - \beta} f((\beta^2 - \beta)t) \chi_{[0, \frac{1}{\beta^2 - \beta}]}(t)$$

et

$$U_1 f(T, t) = \sqrt{\frac{\beta^2 - \beta}{\beta^2 - \beta - 1}} f\left(\frac{\beta^2 - \beta}{\beta^2 - \beta - 1}t - \frac{1}{\beta^2 - \beta - 1}\right) \chi_{[\frac{1}{\beta^2 - \beta}, 1]}(t).$$

Nous avons également

$$V f(T, t) = \sqrt{\frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta - 1}} f\left(\frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta - 1}t + \frac{1}{\beta^2 - \beta}\right) \chi_{[0, \frac{1}{\beta}]}(t)$$

et

$$V' f(T, t) = \sqrt{\frac{1}{\beta^2 - \beta - 1}} f\left(\frac{1}{\beta^2 - \beta - 1}t - \frac{1}{\beta^2 - \beta - 1} \frac{1}{\beta^2 - \beta}\right) \chi_{[\frac{1}{\beta^2 - \beta}, 1]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V) f(T, t) = V(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = (\beta - 1)f((\beta - 1)^2t + \frac{1}{\beta}) \chi_{[0, \frac{1}{\beta^2 - \beta}]}(t).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = U_0(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_0(T, \bullet)^* + U_1(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_1(T, \bullet)^* \otimes 1$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = \chi_0(T, \bullet) \otimes \phi(\beta \cdot T) + \chi_1(T, \bullet) \otimes \phi(\mathfrak{s}(\beta \cdot T))$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = V'(T, \bullet) \otimes 1 + \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

II.3- Cas où T_0 est une couronne de type $C = (a).c(a)$

Nous avons dans ce cas $n(T) = 1$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = \frac{1}{\beta}.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = 1, \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 1.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ l'isométrie partielle

$$U_0(f)(T, t) = f(t).$$

Nous avons également

$$Vf(T, t) = \sqrt{\beta} f(\beta t) \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V)f(T, t) = V(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}} f\left(\frac{\beta}{\beta-1}t + \frac{1}{\beta}\right).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = k \otimes 1$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = 1 \otimes \phi(\beta \cdot T).$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

II.4- Cas où T_0 est une couronne de type $D = (b).a(b)$

Nous avons dans ce cas $n(T) = 2$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = \beta^{-1}, \quad \alpha_2^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = \frac{1}{\beta^2 - \beta}.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t), \quad \chi_2(T, t) = \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t), \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 2.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ les isométries partielles

$$U_0(f)(T, t) = \sqrt{\beta} f(\beta t) \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t)$$

et

$$U_1 f(T, t) = \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}} f\left(\frac{\beta}{\beta-1}t - \frac{1}{\beta-1}\right) \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t).$$

Nous avons également

$$Vf(T, t) = (\beta-1)f\left((\beta-1)^2t + \frac{1}{\beta}\right) \chi_{[0, \frac{1}{\beta^2-\beta}]}(t)$$

et

$$V'f(T, t) = \sqrt{\frac{1}{\beta-1}} f\left(\frac{t}{\beta-1} - \frac{1}{\beta^2}\right) \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V)f(T, t) = Vf(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = \sqrt{\frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta - 1}} f\left(\frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta - 1}t + \frac{1}{\beta^2 - \beta}\right) \chi_{[0, \frac{1}{\beta}]}(t).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = U_0(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_0(T, \bullet)^* + U_1(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_1(T, \bullet)^*$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = \chi_0(T, \bullet) \otimes \phi(\beta \cdot T) + \chi_1(T, \bullet) \otimes \phi(\mathfrak{s}(\beta \cdot T))$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = V'(T, \bullet) \otimes 1 + \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

II.5- Cas où T_0 est une couronne de type $E = (b).a(a)$

Nous avons dans ce cas $n(T) = 2$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = \beta^{-1}, \quad \alpha_2^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = \frac{1}{\beta}.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t), \quad \chi_2(T, t) = \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t), \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 2.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ les isométries partielles

$$U_0(f)(T, t) = \sqrt{\beta} f(\beta t) \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t)$$

et

$$U_1 f(T, t) = \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}} f\left(\frac{\beta}{\beta-1}t - \frac{1}{\beta-1}\right) \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t).$$

Nous avons également

$$V f(T, t) = \sqrt{\beta-1} f\left((\beta-1)t + \frac{1}{\beta}\right) \chi_{[0, \frac{1}{\beta}]}(t)$$

et

$$V' f(T, t) = \sqrt{\frac{1}{\beta-1}} f\left(\frac{t}{\beta-1} - \frac{1}{\beta^2-\beta}\right) \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V)f(T, t) = V f(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = \sqrt{\frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta - 1}} f\left(\frac{\beta^2 - \beta - 1}{\beta - 1}t + \frac{1}{\beta^2 - \beta}\right) \chi_{[0, \frac{1}{\beta}]}(t).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = U_0(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_0(T, \bullet)^* + U_1(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_1(T, \bullet)^*$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = \chi_0(T, \bullet) \otimes \phi(\beta \cdot T) + \chi_1(T, \bullet) \otimes \phi(\mathfrak{s}(\beta \cdot T))$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = V'(T, \bullet) \otimes 1 + \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

II.6- Cas où T_0 est une couronne de type $F = (b).a(c)$

Nous avons dans ce cas $n(T) = 2$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = \beta^{-1}, \quad \alpha_2^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = 1.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t), \quad \chi_2(T, t) = \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t), \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 2.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ les isométries partielles

$$U_0(f)(T, t) = \sqrt{\beta} f(\beta t) \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t)$$

et

$$U_1 f(T, t) = \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}} f\left(\frac{\beta}{\beta-1}t - \frac{1}{\beta-1}\right) \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t).$$

Nous avons également

$$Vf(T, t) = \sqrt{\frac{\beta-1}{\beta}} f\left(\frac{\beta-1}{\beta}t + \frac{1}{\beta}\right) \chi_{[0,1]}(t)$$

et

$$V'f(T, t) = \sqrt{\frac{1}{\beta-1}} f\left(\frac{t}{\beta-1} - \frac{1}{\beta^2-\beta}\right) \chi_{[\beta^{-1},1]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V)f(T, t) = Vf(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = \sqrt{\frac{\beta^2-\beta-1}{\beta-1}} f\left(\frac{\beta^2-\beta-1}{\beta-1}t + \frac{1}{\beta^2-\beta}\right) \chi_{[0, \frac{1}{\beta}]}(t).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = U_0(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_0(T, \bullet)^* + U_1(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_1(T, \bullet)^*$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = \chi_0(T, \bullet) \otimes \phi(\beta \cdot T) + \chi_1(T, \bullet) \otimes \phi(\mathfrak{s}(\beta \cdot T))$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = V'(T, \bullet) \otimes 1 + \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

II.7- Cas où T_0 est une couronne de type $G = (c).a(b)$

Nous avons dans ce cas $n(T) = 2$ et

$$\alpha_0^T = 0, \quad \alpha_1^T = \beta^{-1}, \quad \alpha_2^T = 1 \text{ et } \alpha_1^{\mathfrak{s}(T)} = \frac{1}{\beta^2-\beta}.$$

Ainsi

$$\chi_0(T, t) = \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t), \quad \chi_2(T, t) = \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t), \quad \chi_n(T, t) = 0, \forall n \geq 2.$$

Nous pouvons alors déterminer pour $f \in C_c(0, 1)$ les isométries partielles

$$U_0(f)(T, t) = \sqrt{\beta} f(\beta t) \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t)$$

et

$$U_1 f(T, t) = \sqrt{\frac{\beta}{\beta-1}} f\left(\frac{\beta}{\beta-1}t - \frac{1}{\beta-1}\right) \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t).$$

Nous avons également

$$Vf(T, t) = (\beta-1)f\left((\beta-1)^2t + \frac{1}{\beta}\right) \chi_{[0, \frac{1}{\beta^2-\beta}]}(t)$$

et

$$V'f(T, t) = \sqrt{\frac{1}{\beta-1}} f\left(\frac{t}{\beta-1} - \frac{1}{\beta^2}\right) \chi_{[\beta^{-1}, 1]}(t).$$

De plus

$$\mathfrak{s}(V)f(T, t) = Vf(\mathfrak{s}^{-1}T, t) = \sqrt{\beta} f(\beta t) \chi_{[0, \beta^{-1}]}(t).$$

Dans ces conditions nous avons

$$\hat{Y}(k \otimes 1)(T) = U_0(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_0(T, \bullet)^* + U_1(T, \bullet) \cdot k \otimes 1 \cdot U_1(T, \bullet)^*$$

ainsi que

$$\hat{Y}(1 \otimes \phi)(T) = \chi_0(T, \bullet) \otimes \phi(\beta \cdot T) + \chi_1(T, \bullet) \otimes \phi(\mathfrak{s}(\beta \cdot T))$$

et

$$\hat{Y}(1 \otimes u)(T) = V'(T, \bullet) \otimes 1 + \mathfrak{s}(V)(T, \bullet)(1 \otimes u).$$

III- Mesure invariante sur les pavages en couronnes

Nous allons déterminer la mesure invariante sur l'espace des pavages en couronnes. On rappelle d'après ce qui précède que la substitution σ sur les couronnes admet pour matrice

$$M^\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient le vecteur propre

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^4} \\ \frac{1}{\beta^2} \\ \frac{1}{\beta^3} \\ \frac{1}{\beta^5} \\ \frac{1}{\beta^4} \\ \frac{1}{\beta^3} \\ \frac{1}{\beta^3} \end{pmatrix}.$$

et donc la mesure invariante sur Ξ est donnée par

$$\begin{aligned} \mu &= \left(\frac{1}{\beta^4}, \frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\beta^3}, \frac{1}{\beta^5}, \frac{1}{\beta^4}, \frac{1}{\beta^3}, \frac{1}{\beta^3} \right) \\ &= (-\beta^2 + \beta, -\beta^2 + 2\beta, -\beta + 2, -\beta + 1, -\beta^2 + \beta, -\beta + 2, -\beta + 2). \end{aligned}$$

On note par $\mathbb{Z}[\beta] = \{n\beta^2 + m\beta + p, (n, m, p) \in \mathbb{Z}^3\}$ le groupe pour la loi additive. On remarque $\beta^{-1} = \beta^2 - \beta - 1 \in \mathbb{Z}[\beta]$ ainsi la multiplication par β est inversible dans $\mathbb{Z}[\beta]$, on obtient alors une action de \mathbb{Z} sur $\mathbb{Z}[\beta]$ satisfaisant $\beta(n\beta^2 + m\beta + p) = (n + m)\beta^2 + (n + p)\beta + n$.

Lemme 8.III.1. Soit l'application $\mu : C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \int_{\Xi} f d\mu$.

1. μ est à image dans $\mathbb{Z}[\beta]$;
2. μ se factorise en un morphisme

$$\bar{\mu} : \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Z}[\beta].$$

Démonstration. L'application $C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie et pour montrer que son domaine d'arrivée est bien $\mathbb{Z}[\beta]$, il suffit de regarder l'image des indicatrices $\chi_{\Xi_{p_i}^0}$. Or

$$\int_{\Xi} \chi_{\Xi_{p_i}^0} d\mu = \mu(\Xi_{p_i}^0)$$

et comme toutes les entrées de μ sont dans $\mathbb{Z}[\beta]$, alors le domaine d'arrivée est bien $\mathbb{Z}[\beta]$.

Puisque la mesure μ est invariante pour l'action du shift, nous remarquons que l'application $C(\Xi; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[\beta]$ passe bien au quotient en un morphisme

$$\bar{\mu} : \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Z}[\beta].$$

□

On rappelle que la mesure μ induit une trace τ_μ sur le produit croisé $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ (voir Paragraphe 5.6 p.46). On obtient alors le résultat suivant.

Lemme 8.III.2. *Modulo l'isomorphisme $\text{Coinv}(C(\Xi, \mathbb{Z})) \rightarrow K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$, $\chi_E \mapsto [\chi_E]$ (voir Proposition 2.III.65 p.46), la trace τ_μ induite par μ correspond au morphisme $\bar{\mu}$.*

IV- Construction d'Anderson-Putnam

IV.1- Détermination de Γ_1 et σ^*

On a listé dans la Proposition 8.I.5 les couronnes associées à la substitution ainsi que leurs images respectives par σ et σ^2 . On peut ainsi faire la construction du CW-complexe Γ_1 en commençant par faire un schéma listant les couronnes ainsi que leurs voisins autorisés à gauche et à droite.

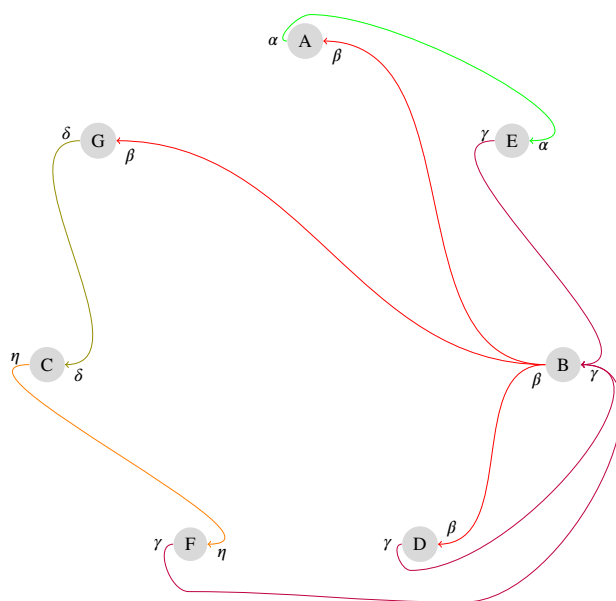


FIGURE 8.5 – Voisins autorisés pour chaque tuile

On peut alors construire le CW-complexe Γ_1 ainsi que son image par l'application σ^* induite par σ sur Γ_1 :

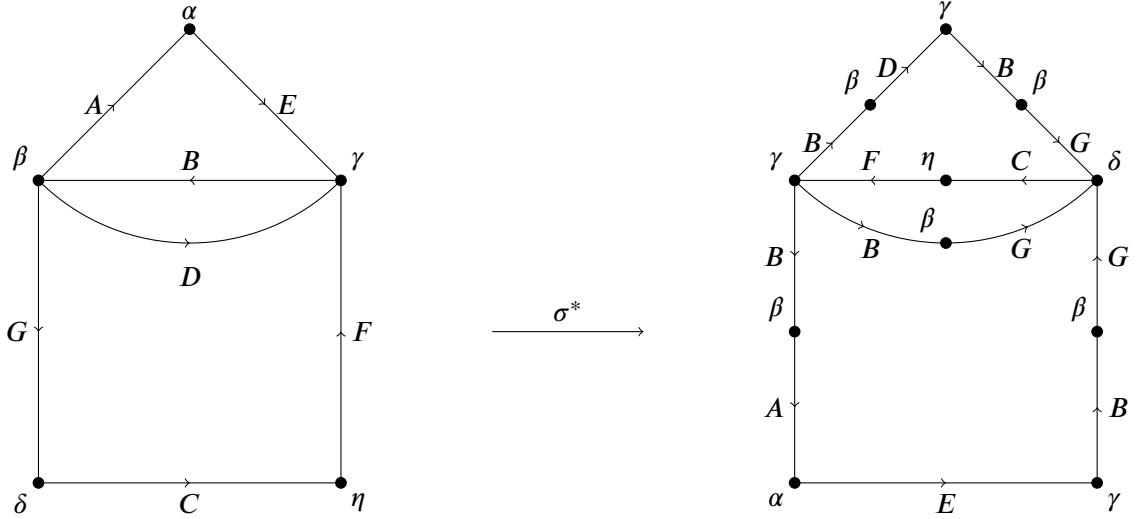


FIGURE 8.6 – CW-complexe Γ_1 et son image par σ^*

IV.2- Calcul de la cohomologie cellulaires de Γ_1

On remarque que le CW-complexe Γ_1 est composé de cinq sommets $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta\}$ et de sept arêtes $\{A, B, C, D, E, F, G\}$. Par suite, on a $C_0(\Gamma_1) \cong \mathbb{Z}^5$ et $C_1(\Gamma_1) \cong \mathbb{Z}^7$. De même, on a $C^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^5$ et $C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^7$. On regarde maintenant les applications de bord et de cobord ∂_1 et $\delta_1 = \partial_1^*$ ce qui nous donne sous forme matricielle,

$$\partial_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et par conséquent

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque ensuite que le rang de δ_1 est 4. De plus le noyau $\ker \delta_1$ est engendré par $(1, 1, 1, 1, 1)^t$ et comme le graphe est connexe nous obtenons

$$H^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \ker \delta_1 / \{0\} \cong \mathbb{Z}.$$

Pour calculer $H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ on doit déterminer l'image de δ_1 . Soit donc $\psi \in C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$, alors $\psi \in \text{Im } \delta_1$ si et seulement s'il existe $\varphi \in C^0(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ vérifiant $\psi = \delta_1 \varphi$. En notant $\psi = (\psi_A, \dots, \psi_G)$, de $\delta_1 \varphi = \psi$, on

déduit que

$$\psi = (\psi_A, \psi_B, \psi_C, -\psi_B, -\psi_A - \psi_B, \psi_F, -\psi_B - \psi_C - \psi_F), \quad \psi_A, \psi_B, \psi_C, \psi_F \in \mathbb{Z}.$$

Par réécriture, on obtient que $\psi \in \text{Im } \delta$ si et seulement si ψ s'écrit sous la forme

$$\psi = \psi_A(1, 0, 0, 0, -1, 0, 0) + \psi_B(0, 1, 0, -1, -1, 0, -1) + \psi_C(0, 0, 1, 0, 0, 0, -1) + \psi_F(0, 0, 0, 0, 0, 1, -1) \quad (8.1)$$

où ψ_A, ψ_B, ψ_C et ψ_F sont des entiers. En notant e_1, e_2, e_3 et e_4 les quatre éléments de $C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ apparaissant dans l'équation 8.1, on remarque alors qu'ils forment une base de $\text{Im } \delta_1$. D'autre part, si $\psi \in C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$, $\psi = (\psi_A, \dots, \psi_G)$, alors on peut réécrire cet élément sous la forme

$$\psi = \psi_A e_1 + \psi_B e_2 + \psi_C e_3 + \psi_F e_4 + (\psi_D + \psi_B) e_D + (\psi_A + \psi_B + \psi_E) e_E + (\psi_G + \psi_B + \psi_C + \psi_F) e_G,$$

où e_D (resp e_E resp e_G) est l'élément de $C^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ prenant la valeur 1 en D (resp E resp G) et 0 ailleurs. De plus la décomposition est unique. En notant $\overline{e_D}, \overline{e_E}$ et $\overline{e_G}$ les classes modulo $\text{Im } \delta_1$ de e_D, e_E et e_G , on a

$$H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \langle \overline{e_D}, \overline{e_E}, \overline{e_G} \rangle \cong \mathbb{Z}^3.$$

Pour conclure quant à la cohomologie sur l'enveloppe, on doit maintenant regarder l'action de la substitution sur les groupes de cohomologie et l'on notera respectivement $\sigma^{(0)}$ et $\sigma^{(1)}$ les applications induites par σ sur les groupes de cohomologie. Dans le cas de la substitution de Tribonacci, σ induit sur les 0-cochaines et les 1-cochaines les applications données par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque ensuite que les deux matrices ne sont pas de rangs pleins, car respectivement de rang 3 et 4, on doit donc étudier plus en détails ce que se passe.

On s'intéresse tout d'abord à $H^0(\Gamma_1; \mathbb{Z}) = \langle (1, 1, 1, 1, 1) \rangle$. On a

$$\sigma^{(0)}(1, 1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1, 1)$$

par suite,

$$\varinjlim (H^0(\Gamma_1, \mathbb{Z}), \sigma^{(0)}) = \mathbb{Z}.$$

Il nous reste alors à calculer la limite directe de $H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z})$ sous l'action de $\sigma^{(0)}$. On a trois générateurs pour ce groupe de cohomologie, à savoir $\overline{e_D}, \overline{e_E}$ et $\overline{e_G}$ et on doit regarder leurs images respectives par σ_1^* ce qui nous donne

$$\sigma^{(1)}(e_D) = e_E + \Psi_1$$

puis

$$\sigma^{(1)}(e_E) = e_G + \Psi_2$$

et

$$\sigma^{(1)}(e_G) = e_D + e_E + e_G + \Psi_3,$$

avec Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 dans $\text{Im } \delta_1$.

En passant au classe modulo $\text{Im } \delta_1$, l'application $\sigma^{(1)}$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\sigma^{(1)}$ est inversible dans $GL_3(\mathbb{Z})$ d'inverse

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent la limite inductive du système

$$\varinjlim (H^1(\Gamma_1; \mathbb{Z}), \sigma^{(1)}) = \mathbb{Z}^3.$$

En utilisant les résultats du 5 nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 8.IV.1. *La cohomologie de Cech de l'espace X_p^N est de dimension 1 avec*

$$\check{H}^0(X_p^N) \cong \mathbb{Z}$$

engendré par la classe de l'application constante sur les arêtes de Γ_1 , et

$$\check{H}^1(X_p^N) \cong \mathbb{Z}^3$$

engendré par $[\exp(2i\pi \chi_{\Xi_D^0})]$, $[\exp(2i\pi \chi_{\Xi_E^0})]$ et $[\exp(2i\pi \chi_{\Xi_G^0})]$ avec $\Xi_D^0 = \{T \in \Xi; T_0 \text{ couronne de type } D\}$, $\Xi_E^0 = \{T \in \Xi; T_0 \text{ couronne de type } E\}$ et $\Xi_G^0 = \{T \in \Xi; T_0 \text{ couronne de type } G\}$

Pour en déduire la K-théorie de $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$, on utilise la suite d'isomorphismes vue dans le chapitre 4 ce qui nous donne les générateurs de la K-théorie de $C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$. En remontant le diagramme nous obtenons que modulo la suite d'isomorphismes les générateurs de $K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ sont $[\chi_{\Xi_D^0}]$, $[\chi_{\Xi_E^0}]$ et $[\chi_{\Xi_G^0}]$. Nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 8.IV.2.

1. La trace τ_μ induit un isomorphisme $(\tau_\mu)_* : K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}[\beta]$;
2. Cet isomorphisme est équivariant.

Démonstration. 1. On a $(\tau_\mu)_*([\chi_{\Xi_D^0}]) = 1$, $(\tau_\mu)_*([\chi_{\Xi_E^0}]) = \beta$ et $(\tau_\mu)_*([\chi_{\Xi_G^0}]) = \beta^2$ ce morphisme est bien un isomorphisme induit la trace τ_μ ;

2. En utilisant la Proposition 5.VI.3 p.85, l'action sur $K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \text{Coinv}C(\Xi; \mathbb{Z})$ est donnée par $[f] \mapsto [f \circ \sigma]$ et nous avons $(\tau_\mu)_*([f \circ \sigma]) = \beta(\tau_\mu)_*([f])$. Ainsi $(\tau_\mu)_*$ est équivariant. □

V- K-théorie

On vient de montrer que l'action de $\tilde{\alpha}_*$ sur $\text{Coinv}(C(\Xi, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}[\beta]$ est donnée par la multiplication par β . Nous allons maintenant pouvoir établir l'action de $\tilde{\alpha}_{c*}$ sur la K-théorie. On rappelle que d'après la Proposition 2.III.56 p.43, on a un isomorphisme

$$C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\beta]) \rightarrow K_0(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$$

défini par

$$\begin{aligned} \chi_K \otimes \beta^2 &\mapsto [\chi_K \otimes \chi_{\Xi_G^0}] \\ \chi_K \otimes \beta &\mapsto [\chi_K \otimes \chi_{\Xi_E^0}] \\ \chi_K \otimes 1 &\mapsto [\chi_K \otimes \chi_{\Xi_D^0}] \end{aligned}$$

K étant un compact ouvert de \mathcal{Z}_c .

Proposition 8.V.1. *Modulo cette identification le morphisme $\tilde{\alpha}_{c*}$ est réalisé sur $C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\beta])$ par l'automorphisme*

$$\Psi_0 : C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\beta]) \rightarrow C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\beta]), f \mapsto \beta f \circ s^{-1}.$$

Démonstration. Pour tout K compact ouvert de \mathcal{Z}_c , toute fonction $f \in L^2([0, 1])$ de norme 1 et tout élément $[p] \in K_0(C(Xi) \rtimes \mathbb{Z})$, nous avons

$$(\tilde{\alpha}_c)_*([\chi_K \otimes \Theta_{f,f} \otimes p]) = [\chi_{s(K)} \otimes \tilde{\alpha}_*(\sum \Theta_{U_n f, U_n f} \otimes p)].$$

En utilisant la Proposition 5.VI.3 p.85, on sait que $\tilde{\alpha}$ est donné via l'identification $K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \text{Coinv}(C(\Xi; \mathbb{Z}))$ par $[f] \mapsto [f \circ \sigma]$ et en utilisant la Proposition 8.IV.2 p.129, on conclut que $\tilde{\alpha}_{c*}$ est bien réalisé par Ψ_0 . \square

En ce qui concerne le groupe de K -théorie d'ordre impaire nous avons toujours d'après la Proposition 2.III.56 un isomorphisme

$$C(\mathcal{Z}_c; K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})) = C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}); \chi_E \otimes u \mapsto [\chi_K \otimes u + (1 - \chi_K \otimes 1)],$$

K étant un compact ouvert de \mathcal{Z}_c .

Proposition 8.V.2. *Modulo cette identification, l'automorphisme $(\tilde{\alpha}_c)_*$ est donné par l'automorphisme*

$$\Psi_1 : C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}), f \mapsto f \circ s^{-1}.$$

Démonstration. L'action de $\tilde{\alpha}_*$ étant l'identité sur $K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ et puisque $\tilde{\alpha}_c = s \otimes \tilde{\alpha}$ le résultat est immédiat. \square

VI- K -théorie de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$

On rappelle que dans le chapitre 5 on a montré que la C^* -algèbre $A_{P(c)}$ est Morita équivalente à $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ et donc $K_*(A_{P(c)}) \cong K_*(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G)$. On remarque tout d'abord que puisque

$$\|\Psi_0(f)\| = \beta \|f\|$$

il n'y a pas d'invariants pour l'action de $(\tilde{\alpha}_c)_*$ sur $K_0(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}))$, ie $\text{Inv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\beta])) = \{0\}$.

On notera par ι_* le morphisme en K -théorie issu de l'application

$$(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K} \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong C_r^*(G, \lambda) \hookrightarrow C_r^*(G, \lambda) \rtimes_{\tilde{\alpha}_c} \mathbb{Z}$$

Proposition 8.VI.1 (groupe K_0). *La suite suivante est exacte et scindée*

$$0 \longrightarrow \text{Coinv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\beta])) \xrightarrow{i} K_0(A_{P(c)}) \rtimes G \longrightarrow \text{Inv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})) \longrightarrow 0$$

avec en prenant f de norme L^2 égale à 1,

$$i([\chi_K \otimes \beta^2]) = \iota_*([\chi_K \otimes \Theta_{f,f} \otimes \chi_{\Xi^0}])$$

puis

$$i([\chi_K \otimes \beta]) = \iota_*([\chi_K \otimes \Theta_{f,f} \otimes \chi_{\Xi^0}])$$

et

$$i([\chi_K \otimes 1]) = \iota_*([\chi_K \otimes \Theta_{f,f} \otimes \chi_{\Xi^0}]).$$

Une section dans la suite exacte (voir Proposition 9.II.1 p.135) est donnée à isomorphisme en K -théorie donnée par l'équivalence Morita, par

$$\eta : \text{Inv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G) \cong K_0(A_{P(c)})$$

définie pour $e \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*))$ un projecteur de rang 1, vu comme élément de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ (voir diagramme de la Figure 9.1 p.135), par

$$\eta(1) = [e \otimes \chi_K]$$

où K est un clopen invariant de \mathcal{Z}_c .

En ce qui concerne le groupe de K -théorie d'ordre paire nous avons la proposition suivante.

Proposition 8.VI.2. *On a un isomorphisme*

$$\text{Coinv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})) \xrightarrow{\cong} K_1(A_{P(c)})$$

obtenu par la composition de :

1. l'application

$$\text{Coinv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}), [\chi_K] \mapsto [\chi_K \otimes u + (1 - \chi_K) \otimes 1],$$

où u est l'unitaire issu de $1 \in \mathbb{Z}$ dans le produit croisé ;

2. l'isomorphisme en K -théorie $K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ provenant de l'équivalence Morita entre une C^* -algèbre A et $A \otimes \mathcal{K}$;
3. le morphisme $K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rightarrow K_1(A_{P(c)})$ issu de l'inclusion canonique $C(\mathcal{Z}_c) \otimes \mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z} \hookrightarrow A_{P(c)}$.

VII- Cas du pavage non coloré

Comme dans le cas du pavage de Thue-Morse, on peut regarder le pavage non coloré car les coinvariants pour l'action de σ sur $K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z})$ sont non nuls. De la même manière que dans le pavage de Thue-Morse non coloré, on notera A_P^G en lieu et place de la C^* -algèbre $(\mathcal{K}(L^2([0, 1]) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rtimes_{\tilde{\alpha}} \mathbb{Z}$. On a démontré dans les chapitre 2 et chapitre 5 que cette C^* -algèbre est Morita équivalente à $C(X_P^G) \rtimes G$ la C^* -algèbre du pavage non coloré.

Pour déterminer le groupe de K -théorie pair de A_P^G regarder le groupe des coinvariants de $\text{Coinv}(K_0(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}, \sigma^{(1)}))$. En utilisant l'application induite par la trace cela revient à regarder les coinvariants pour l'application

$$h : \mathbb{Z}[\beta] \rightarrow \mathbb{Z}[\beta], x \mapsto (\beta - 1)x.$$

Lemme 8.VII.1. *On a*

$$\text{Coinv}(\mathbb{Z}[\beta], h) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

engendré par la classe de 1 dans les coinvariants.

Démonstration. Nous avons

$$h(1) = \beta - 1, \quad h(\beta) = \beta^2 - \beta, \quad h(\beta^2) = \beta^3 - \beta^2 = \beta + 1.$$

Posons à présent

$$\Phi : \mathbb{Z}[\beta] \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (a + b\beta + c\beta^2) \mapsto \overline{a + b + c},$$

où \bar{x} est la classe modulo 2 de x .

On remarque que $\Phi(\text{Im } h) = 0$ et donc Φ se factorise en un morphisme

$$\bar{\Phi} : \text{Coinv}(\mathbb{Z}[\beta], h) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On a

$$\bar{\Phi}([1]) = 1.$$

De plus en écrivant $\beta = \beta - 1 + 1$ et $\beta^2 = (\beta^2 - \beta) + (\beta - 1) + 1$, on obtient que $[1] = [\beta] = [\beta^2]$ dans les coinvariants. Par suite on a $\bar{\Phi}$ est bien un isomorphisme. \square

Pour terminer le calcul de $K_0(A_P^G)$ il suffit de remarque que l'action de σ sur $K_1(C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ est l'identité et donc

$$\text{Inv}(\mathbb{Z}, \sigma^{(0)}) \cong \mathbb{Z}.$$

On a ainsi la suite exacte en K -théorie scindée donné par

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow K_0(A_P^G) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

A Morita équivalence près, la section $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow K_0(C(X_P^G) \rtimes G) \cong K_0(A_P^G)$ est donné par la Proposition 9.II.1 où l'on a oublié la coloration et est définie pour $e \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*))$ un projecteur de rang 1 vu comme élément de $C(X_P^G) \rtimes G$ via la Figure 9.1 par

$$\eta(1) = e.$$

Proposition 8.VII.2. *Le groupe $K_0(A_P^G)$ est isomorphe à $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le générateur d'ordre 2 est $[\chi_{\Xi_D^0}]$ et le générateur d'ordre infini est $[e]$.*

Chapitre 9

Annexes

I- Calcul du facteur d'expansion de Tribonacci

Proposition 9.I.1. *La substitution formelle σ définie précédemment se transpose en un substitution de la droite réelle \mathbb{R} dont l'ensemble des prototiles est composé de trois intervalle fermés encore dénotés a , b et c . Le facteur d'expansion, noté β , vaut*

$$\beta = \frac{\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1}{3}.$$

Démonstration. Quitte à fixer la longueur de l'intervalle c égale à 1, on a les équations suivantes qui sont satisfaites :

$$\begin{cases} \beta a = a + b; \\ \beta b = a + 1; \\ \beta = a. \end{cases}$$

On obtient donc au final que β satisfait

$$\beta^3 = \beta^2 + \beta + 1.$$

Pour résoudre cette équation, on fait appel aux méthodes de Cardan. On pose $\beta = z - \frac{1}{3}$, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} (z + \frac{1}{3})^3 &= (z + \frac{1}{3})^2 + (z + \frac{1}{3}) + 1 \\ \Leftrightarrow z^3 + 3\frac{1}{3}z^2 + 3\frac{1}{9}z\frac{1}{27} &= z^2 + \frac{2}{3}z + \frac{1}{9} + z + \frac{1}{3} + 1. \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$z^3 - \frac{4}{3}z - \frac{38}{27} = 0. \tag{9.1}$$

On pose maintenant $z = u + v$ avec $u, v \in \mathbb{C}$. En remplaçant dans l'équation 9.1, on obtient alors

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv - \frac{4}{3}) - \frac{38}{27} = 0 \tag{9.2}$$

On suppose maintenant que $uv = \frac{4}{9}$, ce qui nous donne le système d'équations

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = \frac{38}{27}; \\ u^3 v^3 = \frac{4^3}{9^3}. \end{cases} \tag{9.3}$$

Ainsi u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation du second degré

$$X^2 - \frac{38}{27}X + \frac{4^3}{9^3} = 0.$$

Le discriminant de cet équation est donné par

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{38^3}{27^2} - \frac{4^4}{9^3} \\ &= \frac{4}{27^2}(19^2 - 8^2) \\ &= \frac{4}{27^2} \times 11 \times 27 \\ &= \frac{4 \times 11}{27} > 0. \end{aligned}$$

Ainsi quitte à supposer $u^3 > v^3$ et en utilisant $u^3 + v^3 = \frac{38}{27}$ du système d'équations (8.3) on obtient

$$\begin{aligned} u^3 &= \frac{\frac{38}{27} + \frac{2}{9}\sqrt{33}}{2} \\ &= \frac{19 + 3\sqrt{33}}{27}. \end{aligned}$$

et

$$v^3 = \frac{19 - 3\sqrt{33}}{27}.$$

On prend ensuite les racines cubiques de ces deux éléments ce qui nous donne

$$u \in \left\{ \frac{\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}}{3}, j \frac{\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}}{3}, j^2 \frac{\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}}{3} \right\}$$

et

$$v \in \left\{ \frac{\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}, j \frac{\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3}, j^2 \frac{\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}}{3} \right\}.$$

Or on a supposé que $uv = \frac{4}{9}$ ce qui implique que les couples u et v satisfaisant cette hypothèses sont :

$$\begin{cases} u = \frac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}}{3}, v = \frac{\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}}{3}; \\ u = j \frac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}}{3}, v = j^2 \frac{\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}}{3}; \\ u = j^2 \frac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}}{3}, v = j \frac{\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}}{3}. \end{cases}$$

On a ainsi l'ensemble des solutions de l'équation 9.1 est

$$\left\{ \frac{\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1}{3}, \frac{j\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + j^2\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1}{3}, \frac{j^2\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + j\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1}{3} \right\}.$$

Puisque β est réel, le résultat est démontré. □

II- Section pour le groupe dans la suite exacte de $K_0(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G)$

Dans les trois chapitres consacrés aux exemples nous avons donné une suite exacte concernant le groupe de K -théorie paire de la C^* -algèbre associée à l'enveloppe des pavages. Nous allons maintenant donner la construction de la section de cette suite exacte. Avant de commencer la preuve nous allons rappeler quelques données utiles.

L'espace $X_{P(c)}^G$ est compact (voir Théorème 1.IV.5 p. 19) alors il existe bien une inclusion canonique (voir [Wil07])

$$C^*(G) \hookrightarrow C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$$

définie pour $a \in C_c(G)$ par

$$X \times G \rightarrow \mathbb{C}, (x, g) \mapsto a(g).$$

De plus nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 C^*(G) & \hookrightarrow & C(X_{P(c)}^G) \rtimes G \\
 \cong \uparrow & & \\
 C^*(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_+^* & & \\
 \cong \uparrow & & \\
 C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_+^* & & \\
 \uparrow & & \\
 C_0(\mathbb{R}_+^*) \rtimes \mathbb{R}_+^* & & \\
 \cong \uparrow & & \\
 \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*)) & &
 \end{array}$$

FIGURE 9.1 – Diagramme $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*)) \hookrightarrow C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$

L'isomorphisme $C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_+^* \rightarrow C^*(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_+^*$ est donné par la transformée de Fourier, l'inclusion $C_0(\mathbb{R}_+^*) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R})$ induit l'inclusion $C_0(\mathbb{R}_+^*) \rtimes \mathbb{R}_+^* \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_+^*$, enfin l'isomorphisme $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*)) \cong C_0(\mathbb{R}_+^*) \rtimes \mathbb{R}_+^*$ est donné par :

Soit $f \in C_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ vu comme élément de $C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$. On définit $\tilde{f}(s, t) = f(s, st^{-1})$ et on note $I_{\tilde{f}}$ l'opérateur de noyau \tilde{f} . L'application $f \mapsto I_{\tilde{f}}$ induit un isomorphisme $C_0(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}))$ (voir [Wil07, p.133])

Proposition 9.II.1 ([OP11]). *Supposons que le système dynamique $(\mathcal{Z}_c, \mathbf{s})$ soit minimal et soit $e \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*))$ projecteur de rang 1, vu comme élément de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ (voir Figure 9.1), l'application*

$$\eta : \mathbb{Z} \rightarrow K_0(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G)$$

définie par

$$\eta(1) = [e]$$

est une section pour la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Coinv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z}[\varphi]) \xrightarrow{i} K_0(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Le système $(\mathcal{Z}_c, \mathfrak{s})$ étant minimal il est engendré par $1 \in C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})$. La preuve énoncée dans l'article repose sur deux diagrammes. Le premier est le suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K_1(C^*(\mathbb{R})) & \xrightarrow{\beta_1} & K_1(C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)) & & \\ \downarrow t.c. & & \downarrow t.c. & & \\ \mathbb{Z} \cong K_0(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\beta_2} & K_0(C(X_P^N \times \mathcal{Z}_c)) & \xrightarrow{ev_{0,*}} & K_0(C(\Xi \times \mathcal{Z}_c)) \end{array}$$

où β_1 et β_2 sont les applications en K -théorie induites par $\mathbb{C} \hookrightarrow C(X_P^N \times \mathcal{Z}_c)$, $t.c$ est le morphisme de Thom-Connes (voir Théorème 2.III.62 p.45) et $ev_{0,*}$ est l'application induite en K -théorie par

$$\Xi \rightarrow (\Xi \times \mathbb{R})/\mathcal{A}_\mathfrak{s} \cong X_P^N, T \mapsto [T, 0].$$

De ce diagramme nous obtenons une application

$$K_1(C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)) \rightarrow K_0(C(\Xi \times \mathcal{Z}_c))$$

et en utilisant l'équivalence Morita entre $C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)$ et $C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}$ l'application précédente est à équivalence près le bord

$$K_1(C(\mathcal{Z}_c) \otimes C(\Xi) \rtimes \mathbb{Z}) \rightarrow K_0(C(\Xi \times \mathcal{Z}_c))$$

dans la suite à six termes de Pimsner-Voiculescu (voir Théorème 2.III.64, p. 46).

On sait que $\text{Inv}K_1(C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)) \cong \mathbb{Z}$ et en utilisant le diagramme, ce groupe de K -théorie est engendré par l'image par β_1 de la classe $[x] \in K_1(C^*(\mathbb{R}))$ qui correspond via l'identification $K_1(C^*(\mathbb{R})) \cong K_1(C_0(\mathbb{R})) \cong K_0(\mathbb{C}) \cong \mathbb{Z}$ à la classe d'un projecteur $p \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 1.

Pour pouvoir continuer il nous faut donner le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & K_0(C_r^*(\mathcal{G}, \lambda) \rtimes \mathbb{Z}) \\ & & & & & & \uparrow \sim \\ K_0(C^*(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_+^*) & \xrightarrow{\gamma_1} & K_0(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G) & \xrightarrow{\gamma_2} & K_0(C_r^*(\mathcal{G}_{\alpha_c}, \lambda_{\alpha_c}) \rtimes \mathbb{R}) & \xrightarrow{\gamma_3} & K_0(C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)_{\alpha_c} \rtimes \mathbb{R}) \\ \downarrow t.c. & & \downarrow t.c. & & \downarrow t.c. & & \downarrow t.c. \\ K_1(C^*(\mathbb{R})) & \longrightarrow & K_1(C(X_{P(c)}^G) \rtimes \mathbb{R}) & \longrightarrow & K_1(C_r^*(\mathcal{G}_{\alpha_c}, \lambda_{\alpha_c})) & \longrightarrow & K_1(C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)_{\alpha_c}) \\ & & & & & & \downarrow ev_{0,*} \\ & & & & & & K_0(C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)) \end{array}$$

Donnons le détails des applications du diagramme :

1. L'application γ_1 est induite par l'inclusion $C^*(\mathbb{R}) \hookrightarrow C(X_{P(c)}^G) \rtimes \mathbb{R}$;
2. L'application γ_2 est induite par l'isomorphisme \mathbb{R} -équivariant $\widetilde{\kappa_{\alpha_c}}$ (voir le corollaire Corollaire 3.II.12 p.60);
3. La dernière application γ_3 est induite par l'isomorphisme de la Proposition 3.I.13 p.53;
4. L'application $ev_{0,*}$ est celle donnée dans le calcul de la K -théorie du mapping torus (voir Proposition 2.III.61 p.44)

On remarque alors que

$$\begin{array}{ccccccc} K_1(C^*(\mathbb{R})) & \longrightarrow & K_1(C(X_{P(c)}^G) \rtimes \mathbb{R}) & \longrightarrow & K_1(C_r^*(\mathcal{G}_{\alpha_c}, \lambda_{\alpha_c})) & \longrightarrow & K_1(C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)_{\alpha_c}) \\ & & & & & & \downarrow \text{ev}_{0,*} \\ & & & & & & K_0(C_r^*(\mathcal{G}, \lambda)) \end{array}$$

est induite par (voir le début de la preuve)

$$C^*(\mathbb{R}) \hookrightarrow C(X_P^N \times \mathcal{Z}_c) \rtimes \mathbb{R} = C_r^*(\mathcal{G}, \lambda).$$

En utilisant ensuite la suite exacte

$$0 \rightarrow C_0(\mathbb{R}^*) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

nous obtenons alors une application surjective

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^*) \rtimes \mathbb{R}) \cong K_0(C^*(\mathbb{R}_+^*) \rtimes \mathbb{R}_+^*) \oplus K_0(C^*(\mathbb{R}_-^*) \rtimes \mathbb{R}_+^*) \longrightarrow K_0(C^*(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$$

Puisque $\mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*)) \cong C_0(\mathbb{R}_+^*) \rtimes \mathbb{R}_+^*$ et $C^*(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R}_+^*)$, alors tout opérateur de rang un $\Theta \in \mathcal{K}(L^2(\mathbb{R}_+^*))$ donne un générateur ζ_Θ de $K_0(C^*(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}_+^*)$. De plus en utilisant la description de l'isomorphisme de Thom-Connes (voir Théorème 2.III.62 p.45), l'image de ζ_Θ est le générateur $[x]$ résultant du premier diagramme.

Pour conclure il faut voir que Θ vu comme élément de $C(X_{P(c)}^G) \rtimes G$ relève bien le générateur $1 \in C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})$ en utilisant la description de bord dans le théorème de Pimsner-Voiculescu. \square

Dans le cas général le système dynamique $(\mathcal{Z}_c, \mathbf{s})$ n'est pas nécessairement ergodique, mais le groupe $\text{Inv}C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})$ est engendré par les fonctions indicatrices χ_{K_i} où K_i est un compact ouvert invariant pour le shift \mathbf{s} et en posant alors

$$\tilde{\eta} : \text{Inv}(C(\mathcal{Z}_c; \mathbb{Z})) \rightarrow K_0(C(X_{P(c)}^G) \rtimes G), \chi_{K_i} \mapsto [e \otimes \chi_{K_i}]$$

est un section pour la suite exacte en K -théorie.

Bibliographie

- [AP98] Jared E. Anderson and Ian F. Putnam. Topological invariants for substitution tilings and their associated C^* -algebras. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 18(3) :509–537, 1998.
- [BG03] Riccardo Benedetti and Jean-Marc Gambaudo. On the dynamics of \mathbb{G} -solenoids. applications to delone sets. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(3) :673–691, 2003.
- [Bla98] Bruce Blackadar. *K -theory for operator algebras*. 2nd ed. Cambridge : Cambridge University Press, 2nd ed. edition, 1998.
- [CHM01] Nataliya Chekhova, Pascal Hubert, and Ali Messaoudi. Propriétés combinatoires, ergodiques et arithmétiques de la substitution de tribonacci. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 13(2) :371–394, 2001.
- [CMR07] Joachim Cuntz, Ralf Meyer, and Jonathan M. Rosenberg. *Topological and bivariant K -theory*, volume 36 of *Oberwolfach Seminars*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [Con81] A Connes. An analogue of the thom isomorphism for crossed products of a c^* algebra by an action of \mathbb{Z} . *Advances in Mathematics*, 39(1) :31 – 55, 1981.
- [Dix82] J. Dixmier. *C^* -algebras*. North-Holland mathematical library. North-Holland, 1982.
- [FBF⁺02] N.P. Fogg, V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, and A. Siegel. *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2002.
- [Fre05] D. Frettlöh. Duality of model sets generated by substitutions. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 50(5-6) :619–639, 2005.
- [GH55] W.H. Gottschalk and G.A. Hedlund. *Topological Dynamics*. American Mathematical Society : Colloquium publications. American Mathematical Society, 1955.
- [GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. 2nd ed. New York, NY : John Wiley & Sons Ltd., 2nd ed. edition, 1994.
- [Gre78] Philip Green. The local structure of twisted covariance algebras. *Acta Math.*, 140 :191–250, 1978.
- [GS86] Branko Grünbaum and G C Shephard. *Tilings and Patterns*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1986.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge : Cambridge University Press, 2002.
- [Kel95] Johannes Kellendonk. Noncommutative geometry of tilings and gap labelling. *Reviews in Mathematical Physics*, 07(07) :1133–1180, 1995.
- [KP00] Johannes Kellendonk and Ian F. Putnam. Tilings, C^* -algebras, and K -theory. In *Directions in mathematical quasicrystals*, pages 177–206. Providence, RI : AMS, American Mathematical Society, 2000.

- [Mon17] Björn Monson. Pavages de la droite réelle, du demi-plan hyperbolique et automorphismes du groupe libre. PhD thesis, 2017. Thèse de doctorat dirigée par François Gautero, Mathématiques Côte d’Azur 2017.
- [Mos92] Brigitte Mossé. Puissance de mots et reconnaissabilité des points fixes d’une substitution. Theoretical Computer Science, 99(2) :327 – 334, 1992.
- [Mou09] Haija Moustafa. Gap-labeling des pavages de type pinwheel. PhD thesis, 2009. Thèse de doctorat dirigée par Hervé Oyono-Oyono, Mathématiques pures Clermont-Ferrand 2 2009.
- [MS02] N. Pytheas Fogg ; Valérie Berthé ; Sébastien Ferenczi ; Christian Mauduit and A. Siegel, editors. Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics. Berlin : Springer, 2002.
- [MSMSS89] D. Maharam-Stone, R.D. Mauldin, R.M. Shortt, and C.E. Silva. Measure and Measurable Dynamics : Proceedings of a Conference in Honor of Dorothy Maharam Stone, Held September 17-19, 1987. Contemporary mathematics. American Mathematical Society, 1989.
- [OP11] Hervé Oyono-Oyono and Samuel Petite. C^* -algebras of Penrose hyperbolic tilings. J. Geom. Phys., 61(2) :400–424, 2011.
- [Pet05] Samuel Petite. Pavages du demi-plan hyperbolique et laminations. PhD thesis, 2005. Thèse de doctorat dirigée par Jean-Marc Gambaudo, Mathématiques Dijon 2005.
- [Que87] M. Queffélec. Substitution Dynamical Systems, Spectral Analysis. Number n° 1294 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1987.
- [Ren80] Jean Renault. A groupoid approach to C^* -algebras. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag, 1980.
- [Rie82] Marc A Rieffel. Morita equivalence for operator algebras. In Proc. Symp. Pure Math, volume 38, pages 285–298, 1982.
- [RW92] Charles Radin and Mayhew Wolff. Space tilings and local isomorphism. Geometriae Dedicata, 42(3) :355–360, Jun 1992.
- [Sad08] Lorenzo Adlai Sadun. Topology of Tiling Spaces. University lecture series. American Mathematical Society, 2008.
- [Sol98] Boris Solomyak. Nonperiodicity implies unique composition for self-similar translationally finite tilings. Discrete & Computational Geometry, 20(2) :265–279, Jun 1998.
- [Weg93] Niels Erik Wegge-Olsen. K -theory and C^* -algebras : a friendly approach. Oxford : Oxford University Press, 1993.
- [Wil98] Iain Raeburn ; Dana P. Williams. Morita Equivalence and Continuous-Trace C^* -Algebras (Mathematical Surveys and Monographs), volume 60. American Mathematical Society, 1998.
- [Wil07] Dana P. Williams. Crossed products of C^* -algebras. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2007.