



HAL
open science

Le processus de contact sur le graphe Booléen

Tom Riblet

► **To cite this version:**

Tom Riblet. Le processus de contact sur le graphe Booléen. Mathématiques [math]. Université de Lorraine, 2019. Français. NNT : 2019LORR0007 . tel-02096425

HAL Id: tel-02096425

<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02096425v1>

Submitted on 11 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE



**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ DE LORRAINE**

Spécialité

Mathématiques

École doctorale Informatique, Automatique, Électronique et Mathématiques
(IAEM - Nancy)

Présentée par

Tom RIBLET

à l'Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL)

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Sujet de la thèse :

Le processus de contact sur le graphe Booléen

soutenue le 2 février 2019

devant le jury composé de :

M. Olivier GARET	Directeur de thèse
Mme. Régine MARCHAND	Directrice de thèse
M. Vincent BEFFARA	Rapporteur
M. David COUPIER	Rapporteur
Mme. Anne-Laure BASDEVANT	Examinatrice
M. Laurent MÉNARD	Examineur
M. Radu STOICA	Examineur
Mme. Marie THÉRET	Examinatrice

*<< J'étais tranquille, j'étais pénard
Accoudé au comptoir... >>*
Renaud Séchan

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais remercier les deux rapporteurs de mon mémoire de thèse : Vincent Beffara et David Coupier. Je suis très fier que vous ayez accepté de donner vos avis d'experts sur mon travail.

Merci aussi à Anne-Laure Basdevant, Laurent Ménard, Radu Stoica et Marie Théret d'avoir accepté de faire partie de mon jury et d'être venus jusqu'à Nancy.

Ensuite je remercie une première fois Olivier Garet et Régine Marchand pour m'avoir encadré et accompagné durant cette thèse. Je suis très heureux d'avoir travaillé avec vous pour un trop grand nombre de raisons pour que je les énumère ici mais je vais quand même essayer. Vous m'avez fait travailler sur de très belles mathématiques et j'ai eu un réel plaisir à essayer de les apprivoiser ! Je me suis toujours senti à l'aise avec vous et j'ai toujours reçu l'aide dont j'avais besoin. À vos côtés j'ai eu la chance d'apprendre tant de choses que ce soit en mathématique ou autre ! Vous êtes les personnes que j'ai le plus admirées en tant qu'étudiant et je suis excessivement fier d'avoir fait ma thèse sous votre direction. Je n'oublierai jamais ces 3 années.

Je vais vous remercier ici une seconde fois accompagnés de tous mes très chers professeurs qui m'ont sincèrement donné le goût des mathématiques et l'envie de continuer jusqu'à aujourd'hui. Ce n'était d'ailleurs pas un travail facile : en arrivant à la fac' j'étais plutôt largement l'étudiant du fond qui vient une fois sur quatre et qui se contente du strict minimum ! Un grand merci donc à : Marie-Line Chabanol, Pierre-Emmanuel Chaput, Philippe Chassaing, Benoît Daniel, David Dos Santos Ferreira, Bruno Duchesne, Olivier Garet, Françoise Geandier, Isabelle Genelot, Alain Genestier, Jean-Sébastien Giet, Jean-François Grosjean, Oussama Hijazi, Khalid Koufany, Aline Kurzmann, Manfred Madritsch, Régine Marchand, Séraphin Méphire, Frédéric Robert, Michel Schang, Didier Schmitt, Julie Scholler, Thomas Stoll, Matei Toma et j'en oublie sûrement...

Je voudrais donner une mention spéciale à Julien Maubon et Vincent Koziarz qui ont vraiment été les premiers à me donner la passion des mathématiques en première année, à François Chargois qui m'a appris à rédiger correctement, à Michel Matignon qui fait véritablement de ses agrégatifs ses enfants durant toute une année et qui éveille ma curiosité avec tant de facilité et à Lucas Fresse qui a partagé son bureau avec moi pendant 3 ans et que je n'ai jamais vu autrement que d'excellente humeur !

Merci aussi à tous les membres du laboratoire qui rendent ce lieu si agréable qu'ils soient secrétaires, chercheurs, révolutionnaires, doctorants ou autres. Parmi eux je tiens à citer Nathalie Benito, Koléhè Coulibaly-Pasquier, Élodie Cunat, Cécile Dartyge, Anne De Roton, Aurélien Deya, Nathalie Fontenay, Didier Gemmerlé, Hélène Jouve, Irène Marcovici, Damien Mégy, Bruno Pinçon, Laurence Quirot, Bruno Scherrer, Paula Schneider, Laurent Thomann et Jean-François Weisse.

Je remercie aussi ma famille : mes parents, Anne et Étienne Riblet, dont je suis per-

suadé que l'éducation qu'il m'ont donnée est une des principales raisons de ma réussite ; ma sœur, Fanny, qui a toujours été un modèle de réussite pour moi et aussi et surtout mon petit frère, Robin, qui a suivi exactement le même parcours que moi et avec qui j'ai la chance incroyable de pouvoir tout partager !

Enfin je remercie Clémence Karmann qui a parcouru un bout de chemin avec moi et sans qui rien ne m'aurait été possible. Dans ma classe et tête de promotion depuis le 2ème semestre de L1, elle a été le parfait exemple et le moteur qui me poussait à avancer. Elle a toujours été un soutien infailible et toujours là pour me remettre sur le droit chemin lorsque je m'en éloignais. Pour tout cela Clémence : merci infiniment !

Table des matières

1	Introduction et présentation du résultat principal	6
2	Modèle Booléen et théorie des graphes	13
2.1	Définition d'un Processus ponctuel de Poisson et Marking Theorem	13
2.2	Le modèle Booléen : définition du graphe Booléen	15
2.3	Étude du modèle Booléen	17
2.3.1	À propos des procédures de renormalisation	17
2.3.2	Fonctions de démarrage	19
2.3.3	Analogie d'un résultat d'Antal et Pisztora pour le graphe Booléen surcritique	22
2.3.4	Premier contrôle sur le modèle Booléen	26
2.3.5	Un deuxième contrôle sur le modèle Booléen	30
2.3.6	Régularité dans un voisinage	31
3	Environnement : la modélisation du processus de contact sur le graphe Booléen	34
3.1	Construction des processus	34
3.2	Définition du processus de contact sur le graphe Booléen : la construction graphique de Harris	37
3.3	Probabilité gelée	38
3.4	Translations	40
3.4.1	Translations spatiales	40
3.4.2	Translations temporelles	41
3.5	Quantités d'intérêt du processus de contact	42
4	Propriétés du modèle	43
4.1	Ergodicité du système aléatoire	43
4.2	Inégalités FKG	43
4.3	Markovianité du processus de contact sous la probabilité gelée	44
4.3.1	Argument de percolation	46
4.3.2	Processus de Feller	47
5	Preuves	50
5.1	Premières propriétés du processus de contact	50
5.2	Contrôles de croissance sur le processus de contact	52
5.2.1	Croissance au plus linéaire	52
5.2.2	Couplage unidimensionnel	54
5.2.3	Vitesse d'extinction, une procédure de redémarrage	55
5.2.4	Croissance au moins linéaire	57
5.3	Le temps d'atteinte essentiel	60
5.3.1	Définition du temps d'atteinte essentiel $\sigma(x)$ et de la translation spatio-temporelle associée $\tilde{\theta}_x$	60
5.3.2	Propriété de stationnarité et d'ergodicité de $\tilde{\theta}_x$ sous \mathbb{P}	63
5.3.3	Contrôle du défaut de sous-additivité de $\sigma(x)$	71
5.4	Contrôle par la distance chimique de l'écart entre les temps d'atteinte	78

5.5	Contrôle normé et continuité des temps d'atteinte	82
5.6	Théorème de forme asymptotique	85
5.7	Zone couplée	92
5.7.1	Théorème de forme	92
5.7.2	Contrôles de croissance pour la zone couplée	95
6	Notations	103

1 Introduction et présentation du résultat principal

Sous l'impulsion de la mécanique statistique, F. Spitzer a introduit dans les années 60 la théorie des systèmes de particules en interaction ([46]). D'un point de vue mathématique, il s'agit d'une classe très générale de modèles markoviens en temps continu qui évoluent sur des réseaux. L'enjeu principal est de déterminer le comportement en temps long pour de tels systèmes avec un nombre infini de particules en interactions locales. L'étude des systèmes de particules en interaction est une branche de la théorie des probabilités devenue une forêt à elle toute seule en conséquence de la complexité des problèmes qu'elle pose aux probabilistes, de la beauté des résultats qu'elle leur fait démontrer et des interactions qu'elle établit avec d'autres domaines scientifiques tels que la physique, la biologie ou la sociologie.

Dans cette théorie, il s'agit plus précisément d'étudier des systèmes infinis de particules qui interagissent en changeant d'état au cours du temps ; elles sont donc liées par des propriétés microscopiques (interaction entre particules proches) et macroscopiques (caractéristiques du système à grande échelle). Pour construire des modèles mathématiques à partir de phénomènes physiques ou biologiques, il faut bien sûr faire des hypothèses de simplification sur le système observé : ainsi les objets d'études sont modélisés par un réseau et à chaque site du réseau est attribué un état à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable. Ensuite, les interactions entre particules sont traduites par des taux de changement d'état des sites dépendant des sites eux-mêmes et de la configuration qui les entoure. L'indéterminisme des phénomènes à décrire nous mène à une modélisation probabiliste.

Un cas particulier de système de particules en interaction, auquel je m'intéresserai particulièrement dans cette thèse, est celui des modèles de croissance, qui, comme leur nom l'indique, représentent une quantité qui grandit (au sens des sites qu'elle atteint) au cours du temps et se propage au sein du réseau. Ce type de processus apparaît naturellement quand on essaie par exemple de modéliser l'expansion d'une population ou encore la propagation d'une épidémie. L'étude de ces modèles est souvent portée sur leurs évolutions au cours du temps et en particulier leurs comportements asymptotiques quand le temps tend vers l'infini.

Cette thèse s'inscrit dans cette branche. Je me concentrerai plus précisément sur une variante du processus de contact qui s'avèrera présenter un résultat de forme asymptotique déterministe intéressant.

Le processus de contact a été introduit ([27], [28], [27]) par T.E. Harris en 1974 ; il modélise par exemple le développement d'une infection paramétrisée par un taux de contamination souvent noté λ . C'est un des plus simples systèmes de particules en interaction présentant une transition de phase : il existe un paramètre critique en deça duquel le processus s'éteint presque sûrement et au dessus duquel le processus survit avec probabilité strictement positive. On appelle respectivement phase sous-critique et surcritique ces différents comportements. Les principales questions que l'on se pose sont : comment se comporte le processus surcritique spatialement dans le cas de la survie (convergence en

loi du processus, croissance de la zone des points contaminés) ? À quelle vitesse s'éteint-il en phase sous-critique ? Combien vaut le paramètre critique et que se passe-t-il pour le processus d'intensité critique ?

Après T.E. Harris, R. Durrett et D. Griffeath s'attaquent au processus de contact sur les réseaux \mathbb{Z}^d ([24], [11], [16]). En premier lieu, le cas de la dimension 1 est traité notamment à l'aide d'outils de percolation ([12]). Le cas de la dimension $d \geq 2$ est beaucoup plus subtil et il faut attendre la construction ([4]) de C. Bezuidenhout et G. Grimmett, en 1991 (inspirée des travaux de G. Grimmett et J.M. Marstrand [26]) qui réalise un couplage entre le processus de contact et la percolation orientée pour permettre de montrer l'extinction au point critique ainsi que la croissance au moins linéaire du processus dans le cadre surcritique conditionné à la survie. Cette construction reviendra régulièrement lors de l'étude d'extensions du processus de contact, mais elle apparaîtra aussi dans d'autres modèles de systèmes de particules en interaction tels que les marches aléatoires branchantes. Elle permet notamment (dans [16]) d'étendre le théorème de forme asymptotique pour le processus de contact à la zone surcritique entière. Une démonstration alternative est apportée par O. Garet et R. Marchand ([21]) pour le processus de contact en environnement aléatoire surcritique : les difficultés consistent à bien mener les techniques de redémarrage pour montrer la croissance au moins linéaire et à trouver une quantité ayant de bonnes propriétés (croissance, sous-additivité, stationnarité, intégrabilité) pour démontrer la convergence finale grâce à des méthodes sous-additives proches des résultats de Kingman ([31], [32]).

Depuis, une grande quantité de variantes du processus de contact ont été proposées et étudiées. Ces extensions sont généralement de deux types :

- on fait varier la procédure d'infection aux plus proches voisins,
- ou on fait varier le réseau sur lequel on fait vivre le processus de contact.

Parmi les extensions du premier type, on peut citer l'environnement aléatoire de O. Garet et R. Marchand ([23]) évoqué dans le paragraphe précédent et dans lequel chaque site du réseau \mathbb{Z}^d est muni d'un taux d'infection qui lui est propre. On peut aussi mentionner le processus de contact en environnement dynamique (D. Remenik [44]), le processus de contact avec phénomène de mémoire (sensibilisation, immunisation ou maturation : J.E. Steif et M. Warfheimer [47] ou M. Bramson, R. Durrett et R.H. Schonman [6]) ou encore le processus de contact avec vieillissement (A. Deshayes [9]). Parmi les extensions du second type, on trouve les travaux sur les arbres (R. Pemantle [40]) et sur les réseaux finis (R. Durrett et X.F. Liu [13] puis R. Durrett et R.H. Schonman [14] puis R. Durrett, R.H. Schonman et N. Tanaka [15]). Plus récemment des travaux ont été menés sur des graphes aléatoires. On peut par exemple mentionner l'article d'introduction de J-C. Mourrat et D. Valesin sur les graphes aléatoires finis [39] ou les travaux sur les amas de percolation (X. Chen et Q. YAO [8] ou D. Bertacchi, N. Lanchier et F. Zucca [3]).

C'est dans cette dernière catégorie que se situent les travaux présentés dans ce manuscrit. Nous étudions une version du processus de contact très naturelle : l'évolution du processus est celle du processus de contact standard de paramètre λ tandis que le réseau

sous-jacent est un amas de percolation Booléenne surcritique. Le modèle Booléen est un modèle de percolation qui associe à un processus ponctuel de Poisson un graphe appelé graphe Booléen dont les sommets sont les atomes du processus ponctuel tandis que les arêtes sont déterminées par un rayon de connexion : on place une arête entre deux atomes si leur distance euclidienne est inférieure à ce rayon de connexion. Nous paramétrons le modèle Booléen par l'intensité $\mu > 0$ du processus Poissonien sous-jacent tandis que le rayon de connexion sera toujours 1. En fonction de la dimension $d \geq 2$, il existe un seuil critique $\mu_c(d)$ au delà duquel, le modèle Booléen possède presque sûrement une unique composante connexe sur laquelle le processus de contact est susceptible de survivre (voir par exemple le livre de Penrose [41]). Dans la suite, le terme environnement aléatoire est utilisé pour désigner le modèle Booléen tandis que le terme environnement gelé désigne un modèle où l'on a fixé une réalisation de percolation Booléenne.

Même si tous les travaux suivants sont rédigés dans ce cadre précis, les preuves fonctionnent pour étudier le processus de contact standard évoluant sur d'autres graphes aléatoires infinis inclus dans l'espace d dimensionnel. Il suffit pour cela que :

- l'application q qui à un point de l'espace associe son point le plus proche du graphe définisse une fonction de démarrage au sens de la définition 2.7,
- le graphe satisfasse à trois propriétés de régularité décrites par la proposition 2.17, le lemme 2.21 et les propriétés de P. Antal et A. Pisztora énoncées dans la proposition 2.12.

Ceci inclut par exemple le cas de l'amas infini de percolation de Bernoulli surcritique sur \mathbb{Z}^d . On a toutes les raisons de penser que les graphes de Voronoï et de Delaunay vérifient ces conditions. En effet, pour ces graphes qui conservent les bonnes propriétés du processus ponctuel de Poisson sous-jacent à leur construction, on a gratuitement le premier point ainsi que la régularité du lemme 2.21 qui contrôle le nombre de sommets du graphe dans d'une boule. Pour le graphe de Voronoï qui est à degré borné, on obtient aussi gratuitement la régularité de la proposition 2.17 qui compte le nombre de chemin distincts d'une certaine taille partant d'une localisation fixée. En revanche, pour le graphe de Delaunay, cela demande plus de travail : c'est un travail en cours.

La première partie de cette thèse sera consacrée à l'étude du modèle Booléen et en particulier des propriétés de régularité nécessaires à la preuve d'un théorème de forme asymptotique pour le processus de contact standard sur ce graphe.

La deuxième partie sera découpée en trois sections. Dans la première section, je définirai rigoureusement le cadre théorique et les différents outils que l'on utilisera. Cela demande de se pencher sur la théorie des processus ponctuels et plus précisément sur le conditionnement pour les processus ponctuels marqués afin de justifier l'existence de notre modèle probabiliste. J'exposerai l'idée de la représentation graphique de Harris qui permet de quitter le cadre abstrait des processus de Markov pour manipuler des familles de processus de Poisson.

Dans la deuxième section, je démontre certaines propriétés d'ergodicité et de markovianité du modèle ainsi qu'une inégalité du type FKG.

La troisième partie est consacrée aux preuves. Dans leur article [37], L. Ménard et A. Singh montrent que pour des paramètres $d \geq 2$ et $\mu > \mu_c(d)$ fixés, il existe un seuil critique $\lambda_c(d, \mu)$ à partir duquel la probabilité de survie du processus de contact standard sur le modèle Booléen de paramètre μ sur \mathbb{R}^d devient strictement positive. On se place dans un cadre très surcritique (λ plus grand que le seuil critique du processus de contact standard sur \mathbb{Z}) et il est alors possible de construire une quantité (le temps essentiel de O. Garet et R. Marchand) capturant les caractéristiques de croissance du modèle et présentant, malgré les difficultés posées par l'extinction possible du processus de contact, de bonnes propriétés de sous-additivité, intégrabilité et stationnarité sous la probabilité conditionnée à survivre. Ces propriétés me permettent, de conclure à des contrôles de croissance du processus de contact qui nous mènent enfin à un théorème de forme asymptotique dont la preuve repose essentiellement sur un théorème ergodique presque-sous-additif.

Remarque. *Nos résultats ne couvrent pas la zone surcritique ambiante en entier. Pour des valeurs du paramètre d'infection λ entre le point critique ambiant $\lambda_c(d, \mu)$ et le point critique du processus de contact standard sur \mathbb{Z} , on n'a aucune raison de s'attendre à un comportement différent du processus de contact sur le graphe Booléen mais notre stratégie de preuve ne s'adapte pas dans le cas où λ est trop petit. Plus précisément, on aura besoin de contrôles sur le déplacement de l'infection dans des copies de \mathbb{N} incluses dans le graphe Booléen ambiant qui ne sont assurés que dans le cas de la survie du processus sur ce sous-graphe. Ils permettront notamment de gérer les zones du graphe Booléen les plus défavorables à la survie du processus de contact : ce sont les zones avec peu de points où le graphe ressemble à \mathbb{N} . On souligne que $\lambda_c(\mathbb{Z}) = \lambda_c(\mathbb{N})$ (voir Durrett et Griffeath [12]).*

Pistes d'ouvertures : *Pour étendre le théorème de forme asymptotique à toute la zone surcritique, on doit réussir à réaliser une construction du type ([4]) de C. Bezuidenhout et G. Grimmett en environnement gelé. Ceci semble difficile à première vue à cause de la forte hétérogénéité des configurations du modèle Booléen. Cependant, on peut essayer de discrétiser l'espace en bonnes et mauvaises zones (à définir) de sorte qu'une construction de type C. Bezuidenhout et G. Grimmett soit possible sur un amas infini de bonnes boîtes. En s'inspirant des travaux de cette thèse, on peut ensuite essayer de montrer qu'il existe presque sûrement une échelle aléatoire admettant un moment exponentiel pour laquelle les bonnes zones percolent. On pourrait alors obtenir des contrôles de croissance pour le processus de contact qui soient uniformes en les configurations à partir d'un certain temps aléatoire que l'on devra contrôler. La fin de la preuve présentée dans cette thèse devrait fonctionner à partir ce point.*

Déconseillé en première lecture : le dernier problème consisterait à passer de $\bar{\mathbb{P}}$ à $\tilde{\mathbb{P}}$ car ces deux probabilités ne sont plus trivialement équivalentes.

Présentation des résultats principaux

Dans la suite, on note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d définie par :

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i^2}.$$

Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on note $0 = 0_{\mathbb{R}^d}$ l'origine de l'espace \mathbb{R}^d . Pour tout $r \geq 0$, on note aussi $B(r)$ la boule ouverte de rayon r associée à la norme $\|\cdot\|_2$ centrée en $0_{\mathbb{R}^d}$. La boule centrée en un point $x \in \mathbb{R}^d$ sera notée $B(x, r)$. Enfin, on indentifie une partie A d'un ensemble S à son indicatrice $\mathbb{1}_A$ qui est un élément de $\{0, 1\}^S$ et on note $|A|$ son cardinal éventuellement infini.

Le modèle auquel on s'intéresse est décrit par deux couches d'aléa :

- on tire d'abord un processus ponctuel de Poisson dans \mathbb{R}^d dont les particules forment les sommets du graphe aléatoire du modèle Booléen,
- puis on fait vivre le processus de contact standard sur ce graphe aléatoire.

On travaillera souvent avec une seule couche d'aléa : on regarde le processus de contact standard évoluer sur une réalisation fixée du graphe aléatoire donné par le modèle Booléen. On appellera ce modèle l'environnement gelé.

Pour toute réalisation du modèle Booléen, c'est-à-dire d'un amas de percolation Booléenne $\phi \subseteq \mathbb{R}^d$, le processus de contact $(\xi_t)_{t \geq 0}$ en environnement gelé ϕ est un processus de Markov homogène prenant ses valeurs dans $\mathcal{P}(\phi)$. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on utilisera les variables aléatoires $\xi_t(x) := \mathbb{1}_{\{x \in \xi_t\}}$. On peut interpréter le processus de contact comme un modèle de propagation d'une maladie. On dit qu'une particule x est infectée lorsque $\xi_t(x) = 1$ sinon, on dit que le site x est sain. La dynamique du processus est décrite par :

- un site $x \in \phi$ infecté guérit (c'est-à-dire devient sain) à taux 1,
- un site $x \in \phi$ sain est infecté à taux $\lambda \sum_{z' \sim x} \xi_t(z')$,

chacunes de ces évolutions étant indépendantes les unes par rapport aux autres et où la somme porte sur tous les voisins de x dans ϕ .

Remarque. Une réalisation du modèle Booléen est un graphe plongé dans \mathbb{R}^d dont le degré n'est pas borné ! Cette particularité sera centrale tout le long de ce document. Dans un premier temps, il faudra s'assurer que le processus de contact est bien construit dans ce cadre puis il faudra jouer avec les propriétés du processus ponctuel sous-jacent pour aboutir à des contrôles sur les quantités d'intérêt en environnement aléatoire sans être capable d'obtenir des contrôles uniformes en environnement gelé. À notre connaissance, ceci est le premier exemple de graphe à degré non-borné sur lequel on montre un théorème de forme asymptotique pour le processus de contact.

Théorèmes de forme asymptotique

Le modèle Booléen admet une transition de phase décrite dans la proposition [2.5](#) : pour tout $d \geq 2$, il existe un seuil critique de percolation $\mu_c(d)$ pour le modèle Booléen. On va se placer dans le cadre surcritique $\mu > \mu_c(d)$ et s'intéresser particulièrement au processus de contact standard évoluant sur l'unique amas infini de percolation du modèle Booléen. Sur cet amas infini, le processus de contact est susceptible de survivre et c'est le cas pour certains paramètres d'infection (voir [37](#)).

Pour des valeurs suffisamment grandes du paramètre d'infection λ , on démontre des contrôles de croissance du processus de contact en environnement gelé qui sont en un certain sens uniformes en l'environnement considéré.

Grâce à cette uniformité, on obtient de bons contrôles en environnement aléatoire (c'est-à-dire pour le modèle avec deux couches d'aléa où l'on tire d'abord le graphe sous-jacent de façon aléatoire). On rappelle que cette uniformité est obtenue uniquement pour de grandes valeurs de λ . Cela nous permet de montrer les théorèmes de forme asymptotique suivants. On pense que ces résultats restent vrais pour toutes les valeurs de λ dans la zone surcritique ambiante mais la stratégie présentée ici ne permet pas d'étendre les théorèmes dans ce sens.

Les environnement gelés sont notés \mathbb{P}_ϕ où ϕ désigne une réalisation de percolation Booléenne tandis que l'environnement aléatoire de paramètre μ est simplement noté \mathbb{P} . Les définitions rigoureuses seront données plus loin. Pour $r \geq 0$, $B(r)$ désigne la boule centrée en 0 et de paramètre r associée à la norme euclidienne.

Théorème 1.1 (de forme asymptotique pour la zone infectée). *Pour tout $\lambda > \lambda_c(\mathbb{N})$ (seuil critique du processus de contact standard sur le graphe \mathbb{N}), il existe $a > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$:*

$$\bar{\mathbb{P}} \left(\exists T > 0, \forall t \geq T, B(a - \epsilon) \subseteq \frac{H_t}{t} \subseteq B(a + \epsilon) \right) = 1,$$

où H_t désigne l'ensemble des points de l'espace \mathbb{R}^d dont le plus proche voisin dans l'amas infini de percolation Booléenne est infecté au temps t et $\bar{\mathbb{P}}$ désigne l'environnement aléatoire conditionné à la survie du processus de contact. (Les notations précises sont introduites plus loin et un énoncé plus précis se trouve page [91](#).)

$$\bar{\mathbb{P}} \left[\begin{array}{c} \exists T > 0, \\ \forall t \geq T \end{array} \left[\begin{array}{c} \leftarrow B(a + \epsilon) \\ \leftarrow \frac{H_t}{t} \\ \leftarrow B(a - \epsilon) \end{array} \right] \right] = 1.$$

On énonce maintenant le théorème de forme asymptotique pour la zone couplée K'_t .

On appelle zone couplée l'ensemble K'_t des points dont l'état à partir de l'instant $t \geq 0$ est le même pour le processus de contact partant de la configuration initiale réduite au singleton $\{q(0)\}$ et celui partant de tout l'amas infini de percolation Booléenne (voir page 92 pour la définition rigoureuse).

Théorème 1.2 (de forme asymptotique pour la zone couplée). *Il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\bar{\mathbb{P}} \left(\exists T > 0, \forall t \geq T, B(a - \epsilon) \subseteq \frac{K'_t \cap G_t}{t} \subseteq B(a + \epsilon) \right) = 1,$$

où G_t désigne l'ensemble des points de l'espace \mathbb{R}^d dont le plus proche voisin dans l'amas infini de percolation Booléenne a déjà été atteint au temps t au sens d'un temps d'atteinte essentiel absolument central dans cette thèse (il est défini page 60.) et très proche du temps d'atteinte classique.

Un énoncé plus précis se trouve page 92.

2 Modèle Booléen et théorie des graphes

Dans cette partie, on introduit le modèle Booléen et on montre des propriétés de ce modèle utiles pour la deuxième partie de la thèse dans laquelle on étudiera le processus de contact standard évoluant sur le modèle Booléen.

On commence par introduire la notion de processus ponctuel de Poisson.

2.1 Définition d'un Processus ponctuel de Poisson et Marking Theorem

Définition-proposition 2.1. Soit (S, \mathcal{S}, ν) un espace mesuré vérifiant :

- la tribu \mathcal{S} est dénombrablement engendrée et distingue ses points,
- la mesure d'intensité ν du processus est non-atomique et σ -finie.

Le processus ponctuel de Poisson d'intensité ν sur (S, \mathcal{S}) est l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ défini par :

- Ω est l'ensemble des mesures de comptage localement finies sur S . Ici une mesure ω est dite localement finie si :

$$\forall A \in \mathcal{S}, \nu(A) < +\infty \Rightarrow \omega(A) < +\infty.$$

- \mathcal{F} est la tribu engendrée par les applications $\pi_A : \omega \mapsto \omega(A)$ où A parcourt \mathcal{S} .
- Pour $\omega \in \Omega$ et $A \in \mathcal{S}$, notons $N(A)(\omega)$ le nombre d'atomes de ω dans A (autrement dit $N(A)(\omega) = \omega(A)$). La mesure \mathbb{P} est l'unique mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout $A \in \mathcal{S}$ tel que $\nu(A) < +\infty$, $N(A)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\nu(A)$.
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{S}$ disjoints alors les variables aléatoires $N(A)$ et $N(B)$ sont indépendantes sous \mathbb{P} .

Remarque. Ces deux propriétés impliquent que pour tout $A \in \mathcal{S}$ tel que $\nu(A) < +\infty$, sachant $N(A)$, les points sont placés uniformément et indépendamment dans A .

On appelle mesure du processus ponctuel de Poisson d'intensité ν sur (S, \mathcal{S}) la mesure \mathbb{P} .

Remarque. • Les conditions sur l'espace mesuré (S, \mathcal{S}, ν) garantissent l'existence de la mesure \mathbb{P} . Pour plus de détails concernant la construction d'une telle mesure \mathbb{P} , on laisse le lecteur se référer à Ruelle [45], Preston [43] ou encore Kingman [33] pour un aperçu plus rapide.

- *Lorsqu'on introduira un tel processus ponctuel de Poisson, on vérifiera les conditions nécessaires sur (S, \mathcal{S}, ν) .*

On définit maintenant la notion de processus ponctuel de Poisson marqué qui sera utile dans la seconde partie pour la construction du modèle du processus de contact évoluant sur le modèle Booléen étudié dans cette partie. Ce qui suit peut donc être omis pour le lecteur qui s'intéresse en priorité aux résultats sur le modèle Booléen.

Définition 2.2. *Un processus ponctuel de Poisson marqué sur un espace mesurable (E, \mathcal{E}) d'intensité ν_E et d'espace des marques (M, \mathcal{M}, ν_M) où ν_M est une mesure finie, est le processus ponctuel de Poisson d'intensité $\nu_E \otimes \nu_M$ sur $(E \times M, \mathcal{E} \otimes \mathcal{M})$.*

Remarque. *On sera amené à considérer le cas où ν_M est une mesure de probabilité.*

Les processus ponctuels de Poisson marqué vérifient le Marking theorem suivant :

Théorème 2.3 (Marking Theorem, [2]). *Si $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un processus ponctuel de Poisson marqué d'intensité ν_E sur (E, \mathcal{E}) et d'espace des marques (M, \mathcal{M}, ν_M) alors, en notant Φ la projection des mesures de comptage $\omega \in \Omega$ sur l'espace E , on a :*

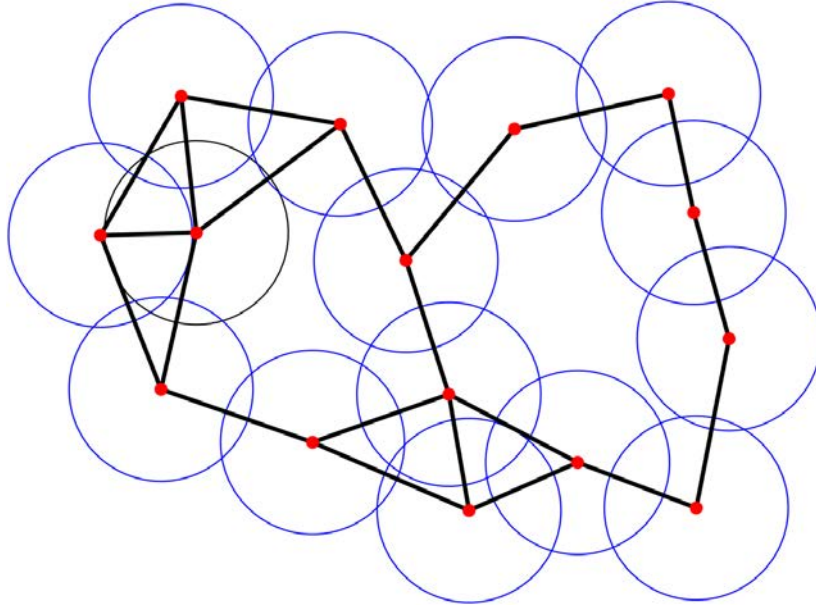
- *la mesure image de \mathbb{P} par Φ est la mesure du processus ponctuel de Poisson d'intensité ν_E sur (E, \mathcal{E}) .*
- *Sachant Φ , les marques attachées aux atomes de Φ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi ν_M sous \mathbb{P} .*

Pour modéliser le processus de contact sur le graphe Booléen, on va utiliser la construction graphique introduite par T.E. Harris dans [29]. T.E. Harris prouve que le processus qu'il décrit à l'aide de sa construction suit bien la loi du processus de contact défini comme un certain processus de Feller avec les taux de saut indiqués précédemment. Néanmoins, sa preuve ne fonctionne que pour les graphes à degré borné. Un argument de percolation nous permet cependant de nous ramener au cadre de graphes finis, donc au cadre du degré borné, et ainsi de justifier l'utilisation de la construction graphique pour la modélisation du processus de contact sur le graphe Booléen.

Pour réaliser la construction de Harris, on doit associer à chaque sommet x du graphe un processus de Poisson homogène (c'est-à-dire dont l'intensité est proportionnelle à la mesure de Lebesgue et on appelle alors encore intensité le rapport de proportionnalité) sur \mathbb{R}_+ d'intensité 1 qui représente les instants de guérison de la particule x et à chaque arête $\{x, y\}$ deux processus de Poisson homogènes d'intensité λ qui représentent respectivement les infections potentielles de la particule x par la particule y et vice-versa. Le bon cadre pour notre travail est celui des processus ponctuels de Poisson marqués. En effet, pour que les translations spatiales agissent sur notre modèle de la façon souhaitée, on veut attacher les variables aléatoires nécessaires à modéliser le processus de contact directement sur les points du processus ponctuel sous-jacent.

2.2 Le modèle Booléen : définition du graphe Booléen

Le modèle Booléen ou modèle de percolation continue est un modèle de percolation qui associe un graphe aléatoire aussi appelé graphe Booléen à un processus ponctuel de Poisson homogène d'intensité $\mu > 0$ sur \mathbb{R}^d . Les sommets de ce graphe sont les points du processus et l'ensemble des arêtes est déterminé par la règle suivante : on place une arête entre deux sommets x et y si $\|x - y\|_2 \leq 1$. Les arêtes de ce graphe sont appelées arêtes Booléennes et on note E^{Bool} l'ensemble des arêtes Booléennes. On note aussi $x \sim y$ pour signifier que deux points sont voisins au sens du graphe Booléen. Pour plus de détails sur ce modèle, on renvoie le lecteur vers le livre de M. Penrose [41] qui sera beaucoup utilisé dans la suite. On propose aussi les références suivantes : le livre de R. Durrett [17] et le livre de R. Meester et R. Roy [36]. L'intensité μ est le paramètre du modèle Booléen.



On introduit l'espace mesurable canonique pour un processus ponctuel de Poisson sur \mathbb{R}^d :

$$X := \left\{ \phi = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{x_i} \text{ localement finie} : \forall i \neq j, x_i \neq x_j \right\}.$$

On munit X de la tribu \mathcal{X} engendrée par les applications

$$\pi_B : \phi \longmapsto \phi(B)$$

où B parcourt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Pour respecter les futures notations, on ne choisit pas directement un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\mu > 0$ sur \mathbb{R}^d mais on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sous lequel vit une variable aléatoire

$$\Phi : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (X, \mathcal{X})$$

dont la mesure image soit celle du processus ponctuel de Poisson homogène d'intensité μ .

On définit alors $G_b(\Phi)$ le graphe Booléen associé au processus Φ .

Définition 2.4 (Chemin Booléen). *On dira qu'il existe un chemin ouvert au sens de la percolation entre deux points x et y dans Φ s'il existe une suite finie de points (a_1, \dots, a_n) de Φ telle que :*

- $a_1 = x$ et $a_n = y$,
- pour tout $1 \leq i \leq n - 1$, $\|a_i - a_{i+1}\|_2 \leq 1$.

C'est-à-dire, si (a_1, \dots, a_n) est un chemin de $G_b(\Phi)$. Dans ce cas, on dit que (a_1, \dots, a_n) est un chemin Booléen de taille $n - 1$ entre x et y . On ne précise pas toujours la taille ni les points de départ et d'arrivée d'un chemin. Enfin, on dit qu'un chemin Booléen est sans recoupement si pour tout $i \neq j$, on a $a_i \neq a_j$.

Pour plus de détails sur la théorie des graphes, on réfère le lecteur au livre de J.A. Bondy et U.S.R. Murty [5].

Le modèle Booléen admet une transition de phase.

Proposition 2.5 (Transition de phase du modèle Booléen, Penrose [42]). *Pour $d \geq 2$, il existe un seuil critique $\mu_c(d) \in]0; +\infty[$ tel que :*

- Pour tout $\mu < \mu_c(d)$, presque-sûrement, tous les amas du graphe $G_b(\Phi)$ sont finis.
- Pour tout $\mu > \mu_c(d)$, presque-sûrement, il existe un unique amas infini dans le graphe $G_b(\Phi)$.

Remarque. *On fixe dorénavant $\mu > \mu_c(d)$ et on note $\{\exists! \text{ amas } \infty\} \in \mathcal{X}$ l'événement sur lequel le graphe Booléen admet une unique composante connexe infinie.*

On note alors C_Φ^∞ la composante géante du graphe Booléen, c'est-à-dire son unique amas infini. Puis, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $q(x)$ le point le plus proche de x dans l'amas de percolation infini C_Φ^∞ :

$$q(x) := \operatorname{argmin}\{\|x - z\|_2 \mid z \in C_\Phi^\infty\}.$$

Remarque. *Bien que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $q(x)$ soit \mathbb{P} -presque sûrement uniquement déterminé, lorsqu'on travaillera en environnement gelé $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$, on ne peut pas garantir que tous les $q(x)$ soient bien définis. Pour palier ce problème, on définit aussi $q(x)$ lorsque l'ensemble des points de l'amas infini C_ϕ^∞ réalisant le minimum des distances euclidiennes à x n'est pas réduit à un point. Dans ce cas, on choisit le plus petit de ces points au sens de l'ordre lexicographique. Il faut comprendre que cette définition est superflue dans tout le travail qui suit. En outre, avec cette définition $q(x)$ n'est pas stable par rotation autour du point x mais ceci est complètement transparent lorsqu'on regarde la loi de $q(x)$. Par transparent, on entend que la loi de $q(x)$ sous \mathbb{P} est, elle, invariante par les rotations autour de x .*

Dans tout environnement $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$, pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, notons $d_\phi^\infty(x, y)$ la distance de graphe dans C_ϕ^∞ entre $q(x)$ et $q(y)$, c'est-à-dire la taille du chemin le plus court liant $q(x)$ et $q(y)$ dans cet amas infini. En outre, notons $B_\phi^\infty(x, r)$ la boule de centre $q(x)$ et de rayon $r \geq 0$ pour cette distance :

$$B_\phi^\infty(x, r) := \left\{ y \in C_\phi^\infty : d_\phi^\infty(x, y) \leq r \right\}.$$

2.3 Étude du modèle Booléen

Dans cette partie, on montre certaines propriétés de régularité pour le Modèle Booléen. Ces propriétés sont nécessaires pour montrer le théorème de forme asymptotique pour le processus de contact qui représente le principal résultat de cette thèse mais elles sont aussi suffisantes en le sens que si un graphe aléatoires les satisfait alors la preuve du théorème de forme asymptotique fonctionnera aussi pour ce graphe.

Les travaux qui suivent sont nécessaires pour permettre le passage de l'étude du système intégré au système gelé. En effet, afin d'établir des contrôles sur les quantités d'intérêt du processus de contact en environnement gelé qui soient en quelque sorte uniformes en la configuration gelée, on va se restreindre à un événement de mesure 1 sur les configurations du modèle Booléen dont les éléments possèdent une certaine régularité.

Pour tout $r > 0$, on rappelle qu'on note $B(r)$ la boule fermée de rayon r associée à la norme $\|\cdot\|_2$ centrée en $0_{\mathbb{R}^d}$.

Pour tout $r > 0$ et $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on note $Q_r(x) := \prod_{i=1}^d]-r + x_i; r + x_i]$. On note simplement $Q_r := Q_r(0_{\mathbb{R}^d})$.

Nous commençons par établir des liens entre la distance de graphe sur l'amas infini $d_{\mathbb{F}}^\infty$ et la norme $\|\cdot\|_2$. Pour cela nous allons montrer quelques propriétés de percolation dont les preuves reposent sur les résultats d'Antal et Pisztora [1] ainsi que sur des résultats classiques de percolation (voir [25] et [41]).

2.3.1 À propos des procédures de renormalisation

On commence par définir les outils nécessaires à une procédure de renormalisation qui permet de coupler le modèle Booléen avec d'autres modèles de percolation plus simple et mieux connus. Soit $R > 1$ un réel strictement positif, on rappelle que Q_R désigne la boîte $\left(\prod_{i=1}^d]-R; R[\right)$. On dit que Q_R est à croisement dans la i -ème direction si il existe un chemin ouvert au sens de la percolation Booléenne entre deux points $x = (x_1, \dots, x_d) \in Q_R$ et $y = (y_1, \dots, y_d) \in Q_R$ tels que $x_i \leq -R + 1$ et $y_i \geq R - 1$. Pour $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on pose :

$$L_i(A) := \inf \{x_i : x \in A\}, \text{ et } R_i(A) := \sup \{x_i : x \in A\},$$

et on définit $\text{diam}(A)$ le diamètre de A par :

$$\text{diam}(A) := \max \{R_i(A) - L_i(A) : 1 \leq i \leq d\}.$$

On note que pour $R \geq 2$, si Q_R est à croisement dans l'une des directions, alors il possède un chemin ouvert de diamètre plus grand que R . On dit que Q_R est à croisement si :

- Q_R est à croisement dans toutes les directions $i = 1, \dots, d$

- et si Q_R possède un unique amas C vérifiant $\text{diam}(C) \geq R - 1$.

On définit de même la notion de boîtes à croisement pour les translatées de Q_R . La condition concernant le diamètre supérieur à $R - 1$ vient du fait que si l'on considère deux boîtes de la taille de Q_R translatée l'une par rapport à l'autre de Re_i (où e_i désigne l'un des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^d) et qui soient toutes deux à croisement, alors les deux gros amas de chacune de ces boîtes sont connectés sans quoi ces boîtes admettraient un deuxième amas de diamètre supérieur à $R - 1$.

La proposition suivante est cruciale et nous permet d'utiliser des procédures de renormalisation qui seront abondamment utilisées dans ce document.

Proposition 2.6 (p.208, Random Geometric graphs- M. Penrose [41]). *Dans le cas sur-critique, on a :*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Q_R \text{ est à croisement}) = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram of a box } Q_R \text{ with red curves and a diameter } \leq R-1 \text{ indicated.} \\ \text{Height of the box is } R. \end{array} \right] = 1.$$

Une procédure de renormalisation consiste dans un premier temps à définir une notion de bon événement pour la boîte Q_R . Un bon événement est un événement qui ne regarde que l'intérieur de la boîte Q_R et de probabilité tendant vers 1 lorsque $R \rightarrow \infty$. En vertu des propriétés du processus de Poisson Φ , un tel événement est indépendant de tout événement ne regardant pas Q_R . On appelle bonne boîte un translaté de la boîte Q_R pour lequel le bon événement est réalisé. Une fois cette notion de bon événement choisie, on définit par exemple :

$$X_{i,j} = \mathbb{1}_{\{Q_R(iRe_1 + jRe_2) \text{ est une bonne boîte}\}}.$$

De cette manière, on définit un processus qui, dans cet exemple, est indexé par \mathbb{Z}^2 mais pourrait être indexé par \mathbb{Z}^d ou d'autres ensembles en fonction du modèle avec lequel on veut coupler le modèle Booléen. Le processus $(X_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ est un processus K -dépendant pour un certain $K > 0$ donc, en vertu de la proposition 4.6 (droit à la dépendance locale, T.M. Liggett, R.H. Schonmann et A.M. Stacey), on peut choisir R suffisamment grand pour que le processus $(X_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ domine stochastiquement une percolation de Bernoulli indépendante surcritique sur les sites de \mathbb{Z}^2 .

Remarque. La proposition 2.6 est un candidat parfait pour mettre en place des procédures de renormalisation car si deux bonnes boîtes dont le bon événement implique l'événement de la proposition 2.6 se chevauchent suffisamment alors les gros amas de chacune des deux bonnes boîtes sont obligatoirement connectés et par suite l'amas infini du modèle Booléen passe par toutes les boîtes de l'amas infini du modèle couplé.

2.3.2 Fonctions de démarrage

On définit maintenant une notion de fonction de démarrage. Ce sont des fonctions qui à un point de l'espace \mathbb{R}^d associent un point localement proche mais dans l'amas infini du modèle Booléen.

Définition 2.7. On appelle fonction de démarrage toute fonction $f : \mathbb{R}^d \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telle que :

- pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f(x, \omega) \in C_{\Phi}^{\infty}(\omega)$,
- il existe $A, B > 0$ pour lesquels pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t > 0$:

$$\mathbb{P}(\|x - f(x, \cdot)\|_2 \geq t) \leq Ae^{-Bt}.$$

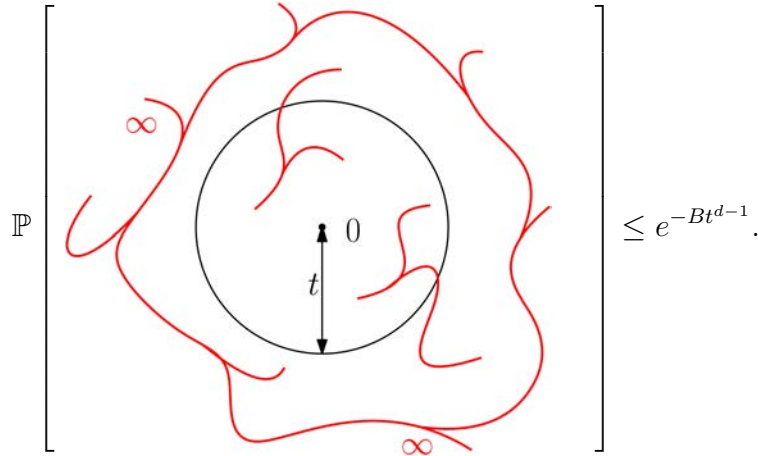
Si f est une fonction de démarrage et si $x \in \mathbb{R}^d$, on note $f(x)$ la variable aléatoire $f(x, \cdot)$.

Remarque. Un premier exemple de fonction de démarrage qui va nous intéresser est la fonction q qui associe à tout point $x \in \mathbb{R}^d$ son plus proche voisin, au sens de la norme $\|\cdot\|_2$, dans l'amas infini C_{Φ}^{∞} . À égalité, un choix arbitraire est fait grâce à l'ordre lexicographique.

Ce résultat est obtenu comme corollaire immédiat du lemme suivant :

Lemme 2.8 (C.-L. YAO, G. CHEN et T.-D. GUO, lemme 3.3 dans [48]). Il existe une constante $B > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(B(0, t) \cap C_{\Phi}^{\infty} = \emptyset) \leq e^{-Bt^{d-1}}.$$



Corollaire 2.9. La fonction q est une fonction de démarrage.

Remarque. Dans la fin de cette section Fonctions de démarrage, on parle d'une deuxième fonction de démarrage b qui ne sera pas utile avant la fin du document dans la section zone couplée. On conseille donc au lecteur d'omettre ce passage en première lecture.

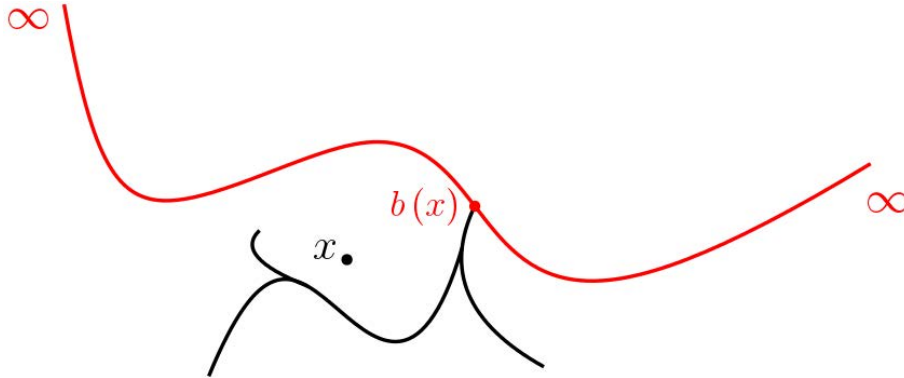
Nous allons utiliser cette technique ici pour coupler le processus de contact de paramètre λ en environnement inhomogène $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$ fixé avec un processus de contact de paramètre λ évoluant sur une copie de \mathbb{Z} .

On note $\text{Bif}(C_{\Phi}^{\infty})$ l'ensemble des points de C_{Φ}^{∞} qui sont une bifurcation, c'est à dire qui sont inclus dans un sous-graphe de C_{Φ}^{∞} isomorphe à \mathbb{Z} en tant que graphe. Puis définissons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$b(x) := \operatorname{argmin}_{y \in \text{Bif}(C_{\Phi}^{\infty})} \{\|x - y\|_2\}.$$

Pour être plus exact, l'ensemble des points réalisant ce minimum n'est un singleton que pour \mathbb{P} presque toute configuration ϕ . Si cet ensemble n'est pas un singleton, on définit $b(x)$ comme le minimum de cet ensemble au sens de l'ordre lexicographique.

Remarque. *L'existence d'une bifurcation dans le modèle Booléen surcritique est presque sûre. Pour voir cela, on peut par exemple observer que le modèle Booléen surcritique percole presque sûrement dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{d-1}$, $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^{d-1}$ (ceci est impliqué par la proposition 10.6 dans le livre *Random Geometric Graphs* [41] de M. Penrose) et dans \mathbb{R}^d . Ainsi, on peut choisir une copie de \mathbb{N} dans chacun des demi-espaces ci-dessus et la percolation sur \mathbb{R}^d nous garantit que ces deux sous-graphes sont connectés. Cette observation implique l'existence d'un sous-graphe isomorphe à \mathbb{Z} .*



On montre alors le lemme suivant :

Lemme 2.10. *La fonction b définit une fonction de démarrage.*

preuve du lemme 2.10. Il suffit de montrer qu'il existe des constantes $A, B > 0$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0, \quad \mathbb{P}(\|x - b(x)\|_2 \geq t) \leq Ae^{-Bt}.$$

La preuve de ce lemme nécessite une procédure de renormalisation dont la construction est relativement lourde et peu agréable à lire alors que les idées derrière la preuve sont très simples. Aussi nous nous contenterons dans un premier temps de raconter la démonstration puis nous donnerons une version plus rigoureuse de cette dernière.

Version heuristique :

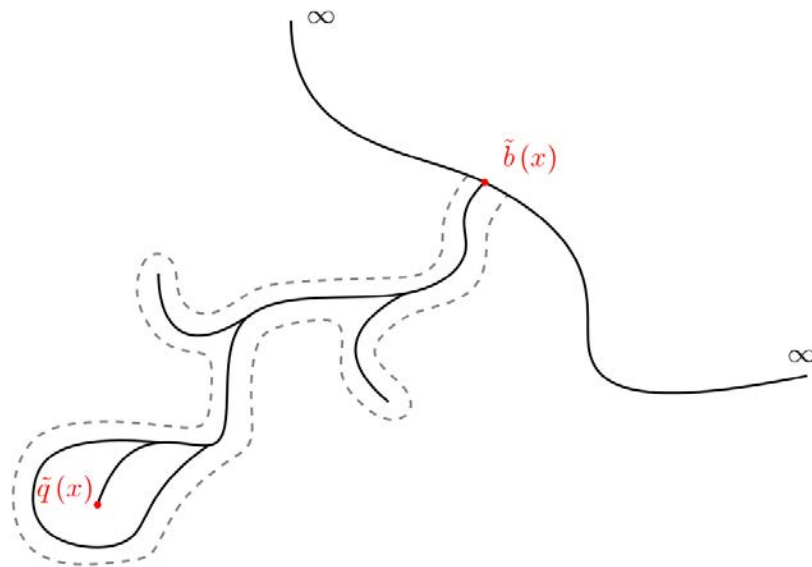
On commence donc par une procédure de renormalisation dont les événements de blocs sont donnés par la propriété de la proposition 2.6 et qui permet de coupler le graphe Φ avec une percolation indépendante surcritique en dimension deux.

Dans la percolation macroscopique, on note respectivement $\tilde{q}(x)$ et $\tilde{b}(x)$ le point de l'amas infini et la bifurcation la plus proche de x au sens de la norme $\|\cdot\|_1$ dans la percolation macroscopique.

On utilise alors la proposition suivante qui concerne la percolation de Bernoulli sous-critique sur \mathbb{Z}^2 :

Proposition 2.11 (G.Grimmett [25]). *En régime sous-critique, la probabilité qu'un amas soit de taille plus grande que n décroît exponentiellement vite en n .*

En utilisant ce résultat ainsi qu'un raisonnement sur le graphe dual, on montre qu'en deux dimension on contrôle facilement la distance à la bifurcation la plus proche dans la percolation macroscopique. En effet, on observe que la partie de l'amas infini entre $\tilde{q}(x)$ et $\tilde{b}(x)$ est nécessairement finie. C'est une conséquence de la définition de $\tilde{b}(x)$: sinon on trouverait une bifurcation plus proche de $\tilde{q}(x)$ que $\tilde{b}(x)$. Ainsi, on est dans la situation suivante :



Le chemin en pointillé désigne le chemin du graphe dual qui entoure la partie finie de l'amas infini entre $\tilde{q}(x)$ et $\tilde{b}(x)$. On voit ainsi que si $\tilde{b}(x)$ est loin de $\tilde{q}(x)$ en terme de distance de graphe, alors cela implique l'existence d'un gros amas dans le graphe dual qui est sous-critique.

Enfin, on remarque facilement qu'une bifurcation proche dans le système couplé implique une bifurcation proche dans le système ambiant Φ . (On utilise le fait que la distance de x à $\tilde{q}(x)$ décroît exponentiellement vite.)

Version rigoureuse :

Plus précisément, pour $R > 0$, on considère les blocs de la forme $Q_R(x + iRe_1 + jRe_2)$ avec i, j dans \mathbb{Z} et on dira qu'un tel bloc est *bon* si il est à croisement. Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, on note :

$$X_{i,j} = \mathbb{1}_{\{Q_R(x+iRe_1+jRe_2) \text{ est à croisement}\}}.$$

Le processus $(X_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ est un processus 2-dépendant donc, en vertu de la proposition 2.6 et de la proposition 4.6 (droit à la dépendance locale, T.M. Liggett, R.H. Schonmann et A.M. Stacey), on peut choisir R suffisamment grand pour que le processus $(X_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ domine stochastiquement une percolation de Bernoulli indépendante surcritique sur les sites de \mathbb{Z}^2 .

Dans la percolation macroscopique, on note $\tilde{q}(x)$ l'élément $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ choisit de sorte que la quantité $|i| + |j|$ soit minimale et que $X_{i,j} = 1$ (à égalité on choisit selon l'ordre lexicographique). De même, on note $\tilde{b}(x)$ la bifurcation la plus proche de x au sens de la norme $\|\cdot\|_1$ dans la percolation macroscopique.

Notons maintenant \tilde{C} l'amas de mauvaises boîtes dans la percolation macroscopique qui entoure l'amas formé des bonnes boîtes accessibles depuis $\tilde{q}(x)$ sans passer par $\tilde{b}(x)$. En dimension 2 une percolation surcritique implique que son dual est sous-critique et ainsi on peut utiliser le résultat suivant pour contrôler la taille de \tilde{C} .

Proposition 2.11 [G.Grimmett 25] *Notons $C(0)$ l'amas contenant 0 dans une percolation de Bernoulli indépendante et sous-critique sur les sites de \mathbb{Z}^2 , alors il existe $A, B > 0$ tels que :*

$$\mathbb{P}(\text{Card}(C(0)) \geq n) \leq Ae^{-Bn}.$$

On obtient donc $\mathbb{P}(\text{Card}(\tilde{C}) \geq n)$ décroît exponentiellement vite en n . On note maintenant \tilde{x} la boîte contenant le point x . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|x - b(x)\|_2 \geq t) &\leq \mathbb{P}\left(\|\tilde{x} - \tilde{b}(x)\|_1 \geq \frac{t}{R}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\|\tilde{x} - \tilde{q}(x)\|_1 \geq \frac{t}{2R}\right) + \mathbb{P}\left(\|\tilde{q}(x) - \tilde{b}(x)\|_1 \geq \frac{t}{2R}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\|\tilde{x} - \tilde{q}(x)\|_1 \geq \frac{t}{2R}\right) + \mathbb{P}\left(\text{Card}(\tilde{C}) \geq \frac{t}{2R}\right). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

2.3.3 Analogie d'un résultat d'Antal et Pisztora pour le graphe Booléen surcritique

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Proposition 2.12. *Soit f une fonction de démarrage, il existe une constante $\varrho = \varrho(\mu, d) > 0$ ainsi que $A, B > 0$ telles que :*

$$1. \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}\left(d_\phi^\infty(0, f(x)) > \varrho \|x\|_2\right) \leq Ae^{-B\|x\|_2}.$$

2. Pour \mathbb{P} -presque tout $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$,

$$\exists N(\phi) \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^d, \|x\|_2 \geq N(\phi) \implies d_\phi^\infty(0, f(x)) \leq \varrho \|x\|_2.$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}\left(d_\phi^\infty(0, f(x)) > \varrho \|x\|_2 + t\right) \leq Ae^{-Bt}.$

La preuve de cette proposition repose sur les travaux de P. Antal et A. Pisztora. Dans le cadre du modèle de percolation de Bernoulli surcritique (\mathbb{P}_p avec $p > p_c(d)$), ils ont montré le résultat suivant où D désigne la distance de graphe sur les amas de percolation :

Proposition 2.13 (Antal et Pisztora [11], théorème 1.1). *Il existe une constante $\varrho = \varrho(p, d) > 0$ ainsi que $A, B > 0$ telles que*

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \quad \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x, D(0, x) > \varrho \|x\|_1) \leq Ae^{-B\|x\|_1}.$$

En outre, dans leur preuve se trouve en fait un résultat plus fort :

Lemme 2.14 (proposition 3.1 et preuve du théorème 1.1 [11]). *Il existe une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes et identiquement distribuées telle que X_1 admette un moment exponentiel et pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$:*

$$D(0, x) \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow x\}} \preceq \sum_{k=1}^{\|x\|_1} X_k$$

où \preceq désigne l'ordre de domination stochastique.

De ce résultat, on obtient un contrôle exponentiel en t de la quantité :

$$\mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x, D(0, x) > \varrho \|x\|_1 + t).$$

Notons \mathbb{E}_p l'opérateur espérance associé à \mathbb{P}_p . Soient donc $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées donnée par le lemme 2.14 et $h > 0$ tel que $\mathbb{E}_p[e^{hX_1}] = c < +\infty$. Pour $\varrho > \frac{\log(c)}{h}$, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow x, D(0, x) > \varrho \|x\|_1 + t) &\leq \mathbb{P}_p\left(\sum_{k=1}^{\|x\|_1} X_k > \varrho \|x\|_1 + t\right) \\ &\leq \mathbb{E}_p\left[\prod_{k=1}^{\|x\|_1} e^{hX_k}\right] e^{-h(\varrho \|x\|_1 + t)} \\ &\leq c^{\|x\|_1} e^{-h(\varrho \|x\|_1 + t)} \leq e^{-ht}. \end{aligned}$$

Ces résultats sont fondateurs et ont été utilisés notamment par O. Garet et R. Marchand dans [19] et [20] dans lesquels ils étudient le modèle de percolation de premier passage pour la distance de graphe sur l'amas infini de percolation de Bernoulli. Ensuite, C.L. Yao, G. Chen et T.D. Guo ont étudié les propriétés de la distance de graphe sur le modèle Booléen dans [48]. Ce sont leurs résultats que j'utilise ici. Dans ce papier, les auteurs travaillent sous la probabilité de Palm sous laquelle les points x et 0 sont ajoutés au processus ponctuel de Poisson Φ sur lequel on forme le graphe Booléen. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on note $\mathbb{P}_{0,x}$ cette mesure de probabilité et on note encore D la distance de graphe sur le graphe Booléen dont les sommets sont $\Phi \cup \{0, x\}$.

Lemme 2.15 (C.L. Yao, G. Chen et T.D. Guo [48], lemme 3.4 page 160). *Pour tout $\mu > \mu_c(d)$, il existe une constante $\varrho = \varrho(\mu, d) \geq 1$ ainsi que $A, B > 0$ telles que :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}_{0,x}(0 \leftrightarrow x, D(0, x) > \varrho \|x\|_2) \leq Ae^{-B\|x\|_2}.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{P}_{0,x}(0 \leftrightarrow x, D(0, x) > \varrho \|x\|_2 + t) \leq Ae^{-Bt}.$

Avant de montrer la proposition 2.12, on montre le résultat suivant :

Corollaire 2.16 (du lemme 2.15). *Pour tout $\mu > \mu_c(d)$, il existe une constante $\varrho = \varrho(\mu, d) \geq 1$ ainsi que $A, B > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:*

1. $\mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{\exists y \in B(0, \frac{1}{3}\|x\|_2) \cap \Phi \\ \exists z \in B(x, \frac{1}{3}\|x\|_2) \cap \Phi}} \{y \leftrightarrow z, D(y, z) > \varrho \|y - z\|_2\} \right) \leq Ae^{-B\|x\|_2},$
2. $\mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{\exists y \in B(0, t) \cap \Phi \\ \exists z \in B(x, t) \cap \Phi}} \{y \leftrightarrow z, D(y, z) > \varrho \|y - z\|_2 + t\} \right) \leq Ae^{-Bt}.$

Preuve. Soit $\varrho \geq 1$ une constante vérifiant le lemme 2.15. On écrit alors :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left(\bigcup_{\substack{\exists y \in B(0, \frac{1}{3}\|x\|_2) \cap \Phi \\ \exists z \in B(x, \frac{1}{3}\|x\|_2) \cap \Phi}} \{y \leftrightarrow z, D(y, z) > \varrho \|y - z\|_2\} \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left[\sum_{y, z \in \Phi} \mathbb{1}_{\{y \in B(0, \frac{1}{3}\|x\|_2)\}} \mathbb{1}_{\{z \in B(x, \frac{1}{3}\|x\|_2)\}} \mathbb{1}_{\{y \leftrightarrow z, D(y, z) > \varrho \|y - z\|_2\}} \right] \end{aligned}$$

On applique alors le théorème de Campbell-Mecke à la fonction :

$$h(y, z, \Phi \setminus \{y, z\}) := \mathbb{1}_{\{y \in B(0, \frac{1}{3}\|x\|_2)\}} \mathbb{1}_{\{z \in B(x, \frac{1}{3}\|x\|_2)\}} \mathbb{1}_{\{y \leftrightarrow z, D(y, z) > \varrho \|y - z\|_2\}}.$$

Pour plus de détails sur la théorie des mesures de Palm et sur le conditionnement dans les processus ponctuels on pourra regarder le livre de J. Möller et R.P. Waagepetersen [38] notamment l'appendice C ainsi que l'article de O. Kallenberg [30]. Le théorème de Campbell-Mecke donne :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\sum_{y, z \in \Phi} h(y, z, \Phi \setminus \{y, z\}) \right] \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_X h(y, z, \phi) d\mathbb{P}_{y,z}(\phi) d\lambda_d(y) d\lambda_d(z) \\ & = \int_{B(x, \frac{1}{3}\|x\|_2)} \int_{B(0, \frac{1}{3}\|x\|_2)} \mathbb{P}_{y,z}(y \leftrightarrow z, D(y, z) > \varrho \|y - z\|_2) d\lambda_d(y) d\lambda_d(z) \\ & \leq \int_{B(x, \frac{1}{3}\|x\|_2)} \int_{B(0, \frac{1}{3}\|x\|_2)} Ae^{-B\|y-z\|_2} d\lambda_d(y) d\lambda_d(z), \end{aligned}$$

où on rappelle que la mesure λ_d désigne la mesure de Lebesgue d dimensionnelle. Pour conclure, on remarque que dans la dernière ligne $\|y - z\|_2 \geq \frac{1}{3} \|x\|_2$ et que le volume des boules est proportionnel à $\|x\|_2^d$.

Pour le deuxième point, il suffit d'écrire le théorème de Campbell-Mecke pour la fonction :

$$h(y, z, \Phi \setminus \{y, z\}) := \mathbb{1}_{\{y \in B(0, t)\}} \mathbb{1}_{\{z \in B(x, t)\}} \mathbb{1}_{\{y \leftrightarrow z, D(y, z) > \varrho \|y - z\|_2 + t\}}$$

et d'utiliser le deuxième point du lemme [2.15](#) pour conclure. □

On se tourne maintenant vers la preuve de la proposition [2.12](#) :

Preuve de la proposition [2.12](#). Soit f une fonction de démarrage et soit $\varrho \geq 1$ vérifiant le corollaire précédent. Remarquons que si $\|0 - f(0)\|_2 < \frac{1}{3} \|x\|_2$ et $\|x - f(x)\|_2 < \frac{1}{3} \|x\|_2$ alors $\|f(0) - f(x)\|_2 \leq \frac{5}{3} \|x\|_2$ et si en outre $d_\phi^\infty(0, f(x)) > \frac{5}{3} \varrho \|x\|_2$, alors il existe $y \in B(0, \frac{1}{3} \|x\|_2) \cap \Phi$ et $z \in B(x, \frac{1}{3} \|x\|_2) \cap \Phi$ tels que :

$$y \leftrightarrow z \text{ et } D(y, z) > \varrho \|y - z\|_2.$$

On écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(d_\phi^\infty(0, f(x)) > \frac{5}{3} \varrho \|x\|_2\right) &\leq \mathbb{P}\left(\|0 - f(0)\|_2 \geq \frac{1}{3} \|x\|_2\right) + \mathbb{P}\left(\|x - f(x)\|_2 \geq \frac{1}{3} \|x\|_2\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{y \in B(0, \frac{1}{3} \|x\|_2) \cap \Phi \\ z \in B(x, \frac{1}{3} \|x\|_2) \cap \Phi}} \{y \leftrightarrow z, D(y, z) > \varrho \|y - z\|_2\}\right). \end{aligned}$$

Comme f est une fonction de démarrage, on contrôle les deux premiers termes tandis que le troisième est contrôlé par le corollaire [2.16](#). Ceci montre le premier point de la proposition.

Le deuxième point se prouve à l'aide du lemme de Borel-Cantelli. Il faut montrer la décroissance exponentielle en n des événements A_n suivants :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$A_n := \left\{ \exists x \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } n - 1 \leq \|x\|_2 \leq n \text{ et } d_\phi^\infty(0, f(x)) \geq \frac{5}{3} \varrho \|x\|_2 \right\}.$$

Cette décroissance exponentielle se prouve de la même façon que pour le point 1. Le volume de $B(0, n/3)$ et celui de la couronne de rayons $2n/3 - 1$ et $4n/3$ sont tous deux proportionnels à n alors qu'ils seront en facteur d'un terme en décroissance exponentielle.

Le lemme de Borel-Cantelli assure alors que $\mathbb{P}\left(\overline{\lim}_{n \in \mathbb{N}^*} (A_n^c)\right) = 1$, ce qui implique le résultat du point 2.

La preuve du dernier point est essentiellement identique à celle du premier mais en utilisant le deuxième point du corollaire [2.16](#). Ceci achève la preuve de la proposition [2.12](#). □

2.3.4 Premier contrôle sur le modèle Booléen

La première notion de régularité à laquelle on va s'intéresser est un contrôle sur le cardinal du nombre de chemins Booléens de longueur n partant d'une certaine localisation. Dans un graphe quelconque, on appelle longueur d'un chemin ψ et on note $l(\psi)$ le nombre d'arêtes de ce chemin. Dans la suite, pour tous $L, n \in \mathbb{N}$, on note $C_n^L = C_n^L(\Phi)$ l'ensemble des chemins Booléens sans recoupement de longueur n partant d'un point situé dans la boîte Q_{Ln} .

Proposition 2.17. *Pour tout entier $L \geq 0$, il existe $B > 0$ et $\sigma > 1$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P}\left(|C_n^L| > \sigma^n\right) \leq e^{-Bn}.$$

Remarque. *Dans un premier temps, ce résultat ne sera utilisé que pour $L = 1$ mais lorsqu'on voudra obtenir des contrôles dans tout un voisinage d'un point, on aura besoin de ce résultat plus général.*

Remarque. *Cette propriété ressemble beaucoup à une inégalité de type Inégalité de Chernoff mais les points du processus ponctuel de Poisson sous-jacent au graphe Booléen peuvent être agglutinés de sorte que le graphe n'est pas à degré borné et cela rend difficile le contrôle de $|C_n^L|$. Pour retrouver le cadre d'un graphe borné, nous allons devoir utiliser une discrétisation de l'espace.*

Preuve. Commençons par montrer que pour tout entier $L \geq 0$, il existe $\sigma^L(\mu, d) > 1$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}\left[|C_n^L|\right] \leq \sigma^L(\mu, d)^n.$$

Soient $L \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, pour prouver cette proposition, on va utiliser une procédure de discrétisation de l'espace. Notons $e := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d e_i$. On va considérer la partition de l'espace \mathbb{R}^d donnée par les boîtes de côté 1 de la forme $Q_{1/2}(e + z)$ où $z \in \mathbb{Z}^d$. On rappelle que par définition, pour tout $r > 0$ et $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on note $Q_r(x) := \prod_{i=1}^d]-r + x_i; r + x_i]$. On introduit l'application p qui associe à un atome $a \in \mathbb{R}^d$ l'unique point $z \in \mathbb{Z}^d$ tel que $a \in Q_{1/2}(e + z)$. On remarque que $p(Q_{Ln})$ est un ensemble formé d'exactly $(2Ln)^d$ points.

On considère maintenant le graphe \mathbb{Z}^d dont l'ensemble des arêtes est :

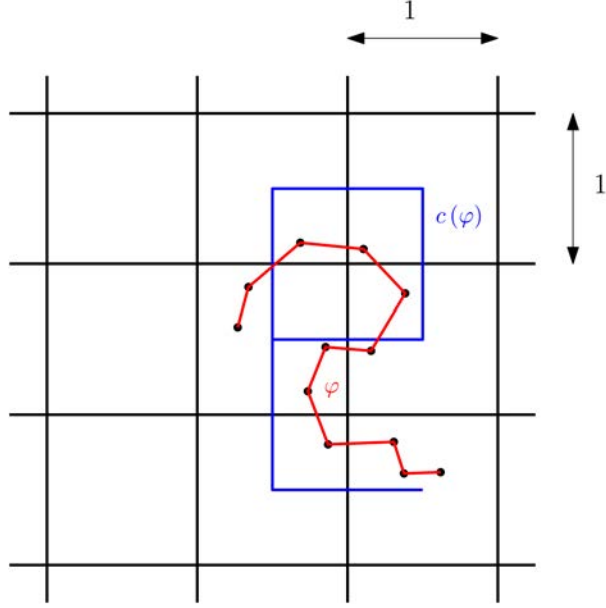
$$\{\{z, \tilde{z}\} \subset (\mathbb{Z}^d)^2 \mid \|z - \tilde{z}\|_\infty \leq 1\}.$$

Un chemin dans ce graphe est un chemin étoilé qui peut rester sur place. On note \tilde{C}_n l'ensemble des chemins de longueur n partant d'un point de $p(Q_{Ln})$ dans ce graphe.

Pour un chemin ψ dans un graphe quelconque, on note aussi $\text{Cont}(\psi)$ le contenu du chemin ψ , c'est-à-dire l'ensemble des sommets du graphe par lesquels passe le chemin ψ .

On associe à tout chemin $\varphi = (a_1, \dots, a_{n+1}) \in C_L^n$ le chemin $c(\varphi) \in \tilde{C}_n$ défini par :

$$c(\varphi) := (p(a_1), \dots, p(a_{n+1})).$$



En partitionnant l'ensemble C_n^L selon la valeur de $c(\varphi)$, on peut écrire :

$$\mathbb{E} [|C_n^L|] \leq \mathbb{E} \left[\sum_{\psi \in \tilde{C}_n} \text{card} \left(\{ \varphi \in C_n^L \mid c(\varphi) = \psi \} \right) \right].$$

Pour tout $\psi \in \tilde{C}_n$ et $z \in \text{Cont}(\psi)$, on note l_z le nombre de visite du point z dans le chemin ψ . À $\psi \in \tilde{C}_n$ fixé, on remarque alors que le cardinal des ensembles $\{ \varphi \in C_n^L \mid c(\varphi) = \psi \}$ peut être majoré par le produit sur les $z \in \text{Cont}(\psi)$ du nombre N_z de l_z -uplets sans répétition de points de $\Phi \cap Q_{1/2}(e+z)$:

$$\mathbb{E} [|C_n^L|] \leq \sum_{\psi \in \tilde{C}_n} \mathbb{E} \left[\prod_{z \in \text{Cont}(\psi)} N_z \right].$$

Or, par indépendance des réalisations du processus ponctuel de Poisson Φ sur des zones disjointes de l'espace, l'espérance du produit est égale au produit des espérances. En outre $N := |\Phi \cap Q_{1/2}|$ suit la loi du nombre de point de Φ dans l'une quelconque des boîtes de côté 1 et ainsi, pour tout $z \in \text{Cont}(\psi)$, on a :

$$N_z \text{ est égal en loi sous } \mathbb{P} \text{ à } \frac{N!}{(N - l_z)!}.$$

On ajoute que N suit la loi de Poisson de paramètre $\mu \lambda_d(Q_{1/2}) = \mu$. Il suit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[|C_n^L| \right] &\leq \sum_{\psi \in \tilde{C}_n} \mathbb{E} \left[\prod_{z \in \text{Cont}(\psi)} N_z \right] \\
&\leq \sum_{\psi \in \tilde{C}_n} \prod_{z \in \text{Cont}(\psi)} \mathbb{E} [N_z] \\
&\leq \sum_{\psi \in \tilde{C}_n} \prod_{z \in \text{Cont}(\psi)} \mathbb{E} \left[\frac{N!}{(N - l_z)!} \right] \\
&\leq \sum_{\psi \in \tilde{C}_n} \prod_{z \in \text{Cont}(\psi)} \mu^{l_z}.
\end{aligned}$$

Observons que, par définition des l_z et comme $\psi \in \tilde{C}_n$, on a $\sum_{z \in \text{Cont}(\psi)} l_z = n + 1$. D'où :

$$\mathbb{E} \left[|C_n^L| \right] \leq \sum_{\psi \in \tilde{C}_n} \mu^{n+1}.$$

Il reste à majorer le cardinal de \tilde{C}_n . On a déjà remarqué qu'il y a $(2Ln)^d$ choix pour le point de départ d'un chemin de \tilde{C}_n . Une fois celui-ci choisit, on a exactement $(3^d)^n$ choix de trajectoire possible pour un tel chemin (chemins étoilés avec répétitions possibles) de sorte que :

$$\mathbb{E} \left[|C_n^L| \right] \leq (2Ln)^d (3^d)^n \mu^{n+1}.$$

Ce qui achève la première partie de la preuve.

Pour terminer, on choisit $\sigma > \sigma^L(\mu, d)$ et on écrit l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P} \left(|C_n^L| > \sigma^n \right) \leq \frac{\mathbb{E} \left[|C_n^L| \right]}{\sigma^n} \leq \left(\frac{\sigma^L(\mu, d)}{\sigma} \right)^n.$$

□

Pour toute la suite, on fixe $\sigma > 1$ vérifiant la proposition 2.17 pour $L = 1$.

Pour toute fonction de démarrage f (définition 2.7) et tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\hat{C}_n(f)$ l'ensemble des chemins Booléens sans recoupement de longueur n partant du point $f(0)$.

Lemme 2.18. *Soit f une fonction de démarrage, alors, il existe $A, B > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\mathbb{P} \left(|\hat{C}_n(f)| > \sigma^n \right) \leq A e^{-Bn}.$$

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$, il suffit d'écrire :

$$\mathbb{P} \left(|\hat{C}_n(f)| > \sigma^n \right) \leq \mathbb{P} (\|f(0)\|_2 \geq n) + \mathbb{P} \left(|C_n^1| > \sigma^n \right),$$

ce qui achève la preuve. □

Pour toute fonction de démarrage f , on note :

$$\Gamma_1(f) := \bigcap_{x \in \mathbb{Q}^d} \lim_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\} : \left| \hat{C}_n(f) \circ T_x(\phi) \right| \leq \sigma^n \right\} \in \mathcal{X}. \quad (1)$$

Attention, bien que l'on ait écrit l'événement Γ_1 de cette manière pour plus de simplicité, il faut comprendre que l'intersection ne porte en fait que sur les points de l'amas infini Φ . De ce fait, il suit que :

$$\Gamma_1(f) = \bigcap_{x \in \mathbb{R}^d} \lim_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\} : \left| \hat{C}_n(f) \circ T_x(\phi) \right| \leq \sigma^n \right\} \in \mathcal{X},$$

où l'on intersecte sur tous les points de \mathbb{R}^d .

En vertu du lemme de Borel-Cantelli et du lemme [2.18](#), on obtient :

Lemme 2.19. $\Phi^{-1}(\Gamma_1(f))$ est un événement \mathbb{P} presque sûr.

En se plaçant sur l'événement $\Gamma_1(f)$, on pourra travailler sur des environnements gelés ayant en quelque sorte une certaine régularité. En effet, sur $\Phi^{-1}(\Gamma_1(f))$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on peut définir la variable aléatoire Φ mesurable

$$T_1(x, f) := \inf \left\{ T \geq 0, \forall n > T, \left| \hat{C}_n(f) \circ T_x \right| \leq \sigma^n \right\}. \quad (2)$$

Afin d'obtenir des contrôles exponentiels sous la probabilité intégrée à partir de contrôles en environnement gelé, on aura besoin du résultat suivant :

Lemme 2.20. Pour toute fonction de démarrage f , il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(T_1(x, f) > t) \leq Ae^{-Bt}.$$

Preuve. En vertu de l'invariance de \mathbb{P} par translation, il suffit de démontrer le lemme pour $x = 0$. Soit $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_1(0, f) > t) &= \mathbb{P}(\exists n > t : \left| \hat{C}_n(f) \right| > \sigma^n) \\ &\leq \sum_{n > t} \mathbb{P}(\left| \hat{C}_n(f) \right| > \sigma^n). \end{aligned}$$

Le lemme [2.18](#) permet d'achever la preuve. □

Remarque. Plus loin on sera amené à considérer une autre fonction de démarrage. C'est pourquoi on montre les résultats précédent dans le cadre f quelconque. Cependant, pour plus de simplicité, on note maintenant $\Gamma_1 := \Gamma_1(q)$ ainsi que $T_1(x) := T_1(x, q)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. La suite sera écrite dans ce cadre particulier mais les preuves fonctionnent dans le cadre d'une fonction de démarrage f quelconque. Ceci sera utile dans la section Zone couplée.

2.3.5 Un deuxième contrôle sur le modèle Booléen

Outre le cardinal de l'ensemble des chemins Booléens de longueur n , une autre propriété de régularité nous intéresse pour l'étude du processus de contact sur le graphe Booléen : c'est le nombre de sommets du graphe dans la boule $B(t)$ qui, on le rappelle, désigne la boule de rayon $t \geq 0$, associée à la norme $\|\cdot\|_2$ et centrée en l'origine.

Le nombre de points de Φ dans la boule $B(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre proportionnel à t^d . À l'aide d'une inégalité de Chernoff, il suit facilement que la limite inférieure des événements $\{|\Phi \cap B(n)| \leq n^{d+1}\}$ est de mesure 1 et on obtient aussi un moment exponentiel pour le temps à partir duquel on a effectivement $|\Phi \cap B(t)| \leq t^{d+1}$.

Remarque. *On choisit de contrôler le cardinal de $\Phi \cap B(t)$ par t^{d+1} (alors que de façon optimale, on pourrait choisir t^d) car nous avons seulement besoin de savoir qu'il est polynomial en t . En contre-partie, on pourra se passer d'un certain nombre de détails technique assez lourds. En particulier, pour un contrôle en t^d il faudrait manipuler des constantes assez spécifiques à chaque utilisation de ce genre de contrôles.*

Soit f une fonction de démarrage, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on définit :

$$T_2(x, f) := \inf \left\{ T \in \mathbb{N} : \forall t \geq T, |\Phi \cap B(f(x), t)| \leq t^{d+1} \right\}, \quad (3)$$

puis :

$$\Gamma_2(f) := \bigcap_{x \in \mathbb{Q}^d} \Phi(\{T_2(x, f) < +\infty\}). \quad (4)$$

En vertu de l'inégalité de Chernoff, on obtient facilement :

Lemme 2.21. *Pour tout entier $L > 0$, il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $t \geq 0$:*

$$\mathbb{P}(|\Phi \cap B(Lt)| > t^{d+1}) \leq Ae^{-Bt^{d+1}}.$$

Preuve. Soient $L > 0$ un entier et $t \geq 0$, on a :

$$\mathbb{P}(|\Phi \cap B(Lt)| > t^{d+1}) \leq e^{-t^{d+1}} \mathbb{E} \left[e^{|\Phi \cap B(Lt)|} \right].$$

Or, $\mathbb{E} \left[e^{|\Phi \cap B(Lt)|} \right]$ est de la forme e^{Ct^d} où $C > 0$ est une fonction de L, d et μ . Ceci achève la preuve. \square

De ce lemme, il vient :

Lemme 2.22. *$T_2(x, f)$ est fini sur $\Phi^{-1}(\Gamma_2(f))$ et il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(T_2(0, f) \geq t) \leq Ae^{-Bt}.$$

En outre, l'événement $\Phi^{-1}(\Gamma_2(f))$ est \mathbb{P} presque sûr

Preuve. La première partie est une conséquence immédiate de la définition de $\Gamma_2(f)$. Pour le contrôle de $T_2(0, f)$, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_2(0, f) \geq t) &\leq \mathbb{P}\left(\exists n \geq t : |\Phi \cap B(f(0), n+1)| > t^{d+1}\right) \\ &\leq \sum_{n \geq t} \mathbb{P}\left(|\Phi \cap B(f(0), n+1)| > t^{d+1}\right) \\ &\leq \sum_{n \geq t} \mathbb{P}(\|f(0)\|_2 \geq n) + \mathbb{P}\left(|\Phi \cap B(2n+1)| > t^{d+1}\right). \end{aligned}$$

Les deux termes dans la dernière somme sont respectivement contrôlés par la propriété de f en tant que fonction de démarrage et par le lemme [2.21](#) avec $L = 3$. Ceci achève la preuve. \square

Définition 2.23. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $T_2(x) := T_2(x, q)$. Puis pour toute fonction de démarrage f :

$$\Gamma(f) := \Gamma_1(f) \cap \Gamma_2(f) \subseteq \{\exists! \text{ amas } \infty\} \text{ et enfin } \Gamma := \Gamma(q). \quad (5)$$

Remarque. Pour toute configuration $\phi \in \Gamma$ et tout $t > T_2(0)$, le cardinal de $\phi \cap B(q(0), t)$ est polynomial en t mais comme on a toujours $B_\phi^\infty(0, t) \subseteq B(q(0), t)$, il en va de même pour le cardinal de la Boule associée à la distance de graphe $B_\phi^\infty(0, t)$. Ceci sera beaucoup utilisé dans la suite.

2.3.6 Régularité dans un voisinage

Cette partie reprend les preuves précédentes pour montrer un contrôle sur une quantité qui possède beaucoup plus d'informations que T_1 ou T_2 . Dans l'étude du processus de contact, on pourrait en fait travailler systématiquement avec la quantité $\mathcal{T}(x, f)$ que l'on introduit ici mais on perdrait de vue les informations effectivement utilisées dans chacune des preuves.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et toute fonction de démarrage f , on introduit maintenant la variable aléatoire $\mathcal{T}(x, f)$ définie par :

$$\frac{1}{\theta} \inf \{T \geq 0 : \forall t \geq T, \forall y \in B_\phi^\infty(x, 3Kt + 2), \max(T_1(y, f), T_2(y, f)) \leq t\}. \quad (6)$$

Cette variable assure une régularité du graphe non-seulement en $f(x)$ mais aussi en tous les points proches de $f(x)$ au sens de la distance de graphe. Le choix de la taille du voisinage est dû à des détails techniques dans certaines preuves. Elle admet aussi une queue de distribution qui décroît exponentiellement vite :

Lemme 2.24. Il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et toute fonction de démarrage f ,

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(\mathcal{T}(x, f) > t) \leq Ae^{-Bt}.$$

Preuve. Soient $x \in \mathbb{R}^d$, f une fonction de démarrage et $t \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\theta \mathcal{F}(x, f) > t) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq \lfloor t \rfloor} \bigcup_{y \in B_{\Phi}^{\infty}(x, 3K(n+1)+2)} \{\max(T_1(y, f), T_2(y, f)) > n\}\right) \\ &\leq \sum_{n \geq \lfloor t \rfloor} \mathbb{P}\left(\bigcup_{y \in B_{\Phi}^{\infty}(x, 3K(n+1)+2)} [\{T_1(y, f) > n\} \cup \{T_2(y, f) > n\}]\right) \\ &\leq \sum_{n \geq \lfloor t \rfloor} \mathbb{P}\left(\bigcup_{y \in B_{\Phi}^{\infty}(x, 3K(n+1)+2)} \{T_1(y, f) > n\}\right) \\ &\quad + \sum_{n \geq \lfloor t \rfloor} \mathbb{P}\left(\bigcup_{y \in B_{\Phi}^{\infty}(x, 3K(n+1)+2)} \{T_2(y, f) > n\}\right). \end{aligned}$$

Le décalage entre l'indice $n + 1$ qui apparaît dans l'union et l'indice n dans l'inégalité est nécessaire pour traiter avec le cas des indices t non-entiers. On montre séparément la décroissance exponentielle de chacune des deux sommes précédente.

- **Première somme**

Notons que pour tout entier $n \geq \lfloor t \rfloor$, on a :

$$\{T_1(y, f) > n\} \subseteq \bigcup_{m \geq n} \{|\tilde{C}_m(f) \circ T_y| > \sigma^m\}$$

où encore le décalage d'indices entre m et $m + 1$ est nécessaire pour traiter le cas des indices non-entiers. Enfin notons que si $\|x - f(x)\|_2 \leq n$ alors on a :

$$B_{\Phi}^{\infty}(x, 3K(n+1)+2) \subseteq B(x, 3K(n+1)+n+2).$$

Soit $L \in \mathbb{N}$ tel que $Ln \geq 3K(n+1)+n+2$ pour tout $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, il suit que :

$$\bigcup_{\substack{y \in B_{\Phi}^{\infty}(x, 3K(n+1)+2) \\ m \geq n}} \{|\tilde{C}_m(f) \circ T_y| > \sigma^m\} \subseteq \{\|x - f(x)\|_2 \leq n\} \cup \bigcup_{m \geq n} \{|C_m^L| > \sigma^m\}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcup_{y \in B_{\Phi}^{\infty}(x, 3K(n+1)+2)} \{T_1(y, f) > n\}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{\substack{y \in B_{\Phi}^{\infty}(x, 3K(n+1)+2) \\ m \geq n}} \{|\tilde{C}_m(f) \circ T_y| > \sigma^m\}\right) \\ &\leq \mathbb{P}(\|x - f(x)\|_2 > n) + \sum_{m \geq n} \mathbb{P}(|C_m^L| > \sigma^m). \end{aligned}$$

Les deux dernières probabilités sont respectivement contrôlées par les propositions [2.12](#) et [2.17](#) ce qui achève le contrôle de la première somme.

- **Deuxième somme**

Pour $n \geq \lfloor t \rfloor$, on a :

$$\{T_2(y, f) > n\} \subseteq \bigcup_{m \geq n} \{|\Phi \cap B(f(y), m+1)| > m^{d+1}\}.$$

Pour $n \geq \lfloor t \rfloor$ on observe ensuite que :

$$\begin{aligned} & \bigcup_{\substack{y \in B_{\Phi}^{\infty}(x, 3K(n+1)+2) \\ m \geq n}} \left\{ |\Phi \cap B(f(y), m+1)| > m^{d+1} \right\} \\ & \subseteq \left\{ \|x - f(x)\|_2 > n \right\} \cup \bigcup_{m \geq n} \left\{ |\Phi \cap B(x, 3K(n+1) + n + m + 3)| > m^{d+1} \right\}. \end{aligned}$$

Or pour $m \geq n \geq \lfloor t \rfloor$, on a :

$$\begin{aligned} & \left\{ |\Phi \cap B(x, 3K(n+1) + n + m + 3)| > m^{d+1} \right\} \\ & \subseteq \left\{ |\Phi \cap B(x, 3K(m+1) + 2m + 3)| > m^{d+1} \right\} \end{aligned}$$

dont la probabilité est contrôlée par le lemme [2.21](#) avec $L \in \mathbb{N}$ tel que $Lm \geq 3K(m+1) + 2m + 3$ pour tout $m \geq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq \lfloor t \rfloor} \mathbb{P} \left(\bigcup_{y \in B_{\Phi}^{\infty}(x, 3K(n+1)+2)} \{T_2(y, f) > n\} \right) \\ & \leq \sum_{n \geq \lfloor t \rfloor} \left[\mathbb{P}(\|x - f(x)\|_2 > n) + \sum_{m \geq n} \mathbb{P}(|\Phi \cap B(x, Lm)| > m^{d+1}) \right]. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

Définition 2.25. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on note $\mathcal{T}(x) := \mathcal{T}(x, q)$.

3 Environnement : la modélisation du processus de contact sur le graphe Booléen

3.1 Construction des processus

Dans cette partie, on construit rigoureusement l'espace de probabilité sur lequel on travaille par la suite. Ce qui suit est riche en théorie des processus ponctuels et en détails assez techniques. Le lecteur peut se passer d'une grande partie de cette section en première lecture. Il est néanmoins important de comprendre ce que sont les environnements gelé et aléatoire. Pour plus de détails sur les processus ponctuels, on réfère le lecteur aux livres de C. Preston [43] et de D. Ruelle [45].

Dans ce qui suit, λ désigne un nombre réel strictement positif. On munit \mathbb{R}_+ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ et on note C l'ensemble des mesures de comptage localement finies $c = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{t_i}$ sur \mathbb{R}_+ . On munit C de la tribu \mathcal{F}_C engendrée par les applications $\pi_B : c \mapsto c(B)$ où B parcourt $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Comme le nombre de sommets voisins d'une particule n'est pas borné a priori, il est nécessaire d'attacher un nombre infini dénombrable de marques associées aux infections à chaque sommet du graphe Booléen (une pour chaque voisin). De ce fait, on définit l'espace des marques par :

$$M := C \times C^{\mathbb{N}}.$$

Un élément $m \in M$ est appelé une marque. On va attacher une marque à chaque particule du processus qui servira à construire le graphe Booléen. La première coordonnée d'une marque sera utilisée pour coder les instants de guérison de la particule à laquelle la marque est attachée et la seconde coordonnée, qui correspond à une suite de mesures de comptage localement finies sur \mathbb{R}_+ , codera les instants d'infection sur les arêtes adjacentes à cette particule. Plus tard, on considérera l'ensemble $\tilde{\Omega} := M^{\mathbb{N}}$ dont un élément correspond à l'ensemble des marques nécessaires à la construction graphique. On munit M et $\tilde{\Omega}$ de leur tribu respective :

$$\mathcal{F}_M := \mathcal{F}_C \otimes (\mathcal{F}_C)^{\otimes \mathbb{N}} \text{ et } \tilde{\mathcal{F}} := (\mathcal{F}_M)^{\otimes \mathbb{N}}.$$

On définit maintenant l'espace mesurable (S, \mathcal{S}) en posant :

$$S := \mathbb{R}^d \times M \text{ et } \mathcal{S} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}_M.$$

Puis sur cet espace, on considère le processus ponctuel de Poisson d'intensité $\mu \lambda_d \otimes (\mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_\lambda^{\otimes \mathbb{N}})$ où λ_d désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , et pour $\delta > 0$, \mathcal{P}_δ désigne la loi du processus ponctuel de Poisson d'intensité δ sur \mathbb{R}_+ . On est en train de prendre un processus ponctuel de Poisson homogène sur \mathbb{R}^d d'intensité μ auquel on a attaché à chaque point une marque de loi $\nu_M := \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_\lambda^{\otimes \mathbb{N}}$ ce qui nous donne les processus nécessaires à la construction graphique. Vérifions l'existence du processus ponctuel de Poisson d'intensité $\mu \lambda_d \otimes \nu_M$ sur (S, \mathcal{S}) :

Il est facile de voir que la tribu \mathcal{S} admet une partie génératrice dénombrable. En outre, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et pour toute $c = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{t_i} \in C$ on a :

$$\{c\} = \bigcap_{i=0}^{+\infty} \bigcap_{n=1}^{+\infty} \pi_{]t_i - \frac{1}{n}; t_i + \frac{1}{n}[}^{-1}(\{1\}).$$

D'autre part, $\mu\lambda_d \otimes \nu_M$ est non-atomique car λ_d l'est et la σ -finitude est obtenue par exemple en considérant les pavés $[-n; n]^d \times M$ car ν_M est une mesure de probabilité (donc finie).

On note donc Ω l'ensemble des mesures de comptage localement finies sur S dont les premières coordonnées des atomes sont toutes distinctes :

$$\Omega := \left\{ \omega = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{(x_i, m_i)} \text{ localement finie} : \forall i \neq j, x_i \neq x_j \right\}$$

où pour tout i , $x_i \in \mathbb{R}^d$ et $m_i \in M$.

Remarque. • *La condition à propos des atomes de premières coordonnées distinctes est juste technique. On note tout de même que cela ne coûte rien car l'ensemble des mesures de comptage qui ne vérifient pas cette condition est de mesure nulle sous la loi d'un processus ponctuel de Poisson.*

- *On fait d'ores et déjà une identification implicite entre mesure de comptage localement finie sur un espace et configuration de particules localement finie de ce même espace.*

Puis on note \mathcal{F} la tribu sur Ω engendrée par les applications

$$\pi_F : \omega \longmapsto \omega(F)$$

où F parcourt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}_M$. Enfin, on munit donc (Ω, \mathcal{F}) de la mesure du processus ponctuel de Poisson d'intensité $\mu\lambda_d \otimes \nu_M$ sur (S, \mathcal{S}) .

On rappelle que X désigne l'ensemble des mesures de comptage localement finies sur \mathbb{R}^d dont les atomes sont tous distincts :

$$X := \left\{ \phi = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{x_i} \text{ localement finie} : \forall i \neq j, x_i \neq x_j \right\}.$$

On munit X de la tribu \mathcal{X} engendrée par les applications

$$\pi_B : \phi \longmapsto \phi(B)$$

où B parcourt $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Puis notons :

$$\begin{aligned} \Phi : (\Omega, \mathcal{F}) &\longrightarrow (X, \mathcal{X}) \\ \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{(x_i, m_i)} &\longmapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{x_i} \end{aligned}$$

Remarque. • Φ est une application mesurable. En effet, si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$\Phi^{-1}(\pi_B^{-1}(\{k\})) = \pi_{B,M}^{-1}(\{k\}).$$

- Pour l'interprétation, les premières coordonnées des atomes de $\omega \in \Omega$ sont les sommets du graphe Booléen de paramètre $\mu > \mu_c(d)$ tandis que les deuxièmes sont les variables aléatoires qui permettront la construction graphique du processus de contact sur ce graphe.

Comme ν_M est une mesure de probabilité, le processus ponctuel de Poisson $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ peut être interprété comme le processus ponctuel de Poisson marqué d'intensité $\mu\lambda_d$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ avec espace des marques $(M, \mathcal{F}_M, \nu_M)$ et ainsi, en vertu du Marking Theorem [2.3](#):

- La mesure image de \mathbb{P} par Φ définit la mesure du processus ponctuel de Poisson d'intensité μ sur \mathbb{R}^d ,
- sachant Φ , les marques attachées aux atomes de Φ sont indépendantes identiquement distribuées de loi $\nu_M = \mathcal{P}_1 \otimes \mathcal{P}_\lambda^{\otimes \mathbb{N}}$.

Pour expliciter ce théorème, on introduit plusieurs notations. Pour commencer, pour $i \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on note $\bar{s}_i(\omega) \in S$ l'atome de ω donc la première coordonnée est la $(i+1)$ -ième lorsqu'on les ordonne dans l'ordre croissant de leurs distances euclidiennes à l'origine puis, à égalité, dans l'ordre lexicographique. $\bar{s}_i(\omega) \in S$ est toujours bien définie. On note aussi $\bar{m}_i(\omega)$ la deuxième coordonnée de $\bar{s}_i(\omega)$ et on définit :

$$\begin{aligned} \Delta : (\Omega, \mathcal{F}) &\longrightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}) \\ \omega &\longmapsto (\bar{m}_i(\omega))_{i \in \mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Remarque. Δ est une application mesurable. En effet, on note que la tribu $\tilde{\mathcal{F}}$ est engendrée par les événements de la forme $E = \prod_{i \leq N} E_i \prod_{i > N} M$ où $N \in \mathbb{N}$ et $E_i \in \mathcal{F}_M$ pour tout $i \leq N$. On considère donc un tel événement et on note que :

$$\Delta^{-1}(E) = \bigcap_{\substack{(q_1, \dots, q_N) \in (\mathbb{Q}_+)^N \\ q_1 < \dots < q_N}} \bigcap_{0 \leq i \leq N-1} \left\{ \left(\pi_{\text{Cour}(q_i, q_{i+1}), E_i} \right)^{-1}(\{1\}) \right\},$$

où $q_0 = 0$ et $\text{Cour}(a, b)$ désigne la couronne ouverte centrée en $0_{\mathbb{R}^d}$ de rayons $a < b$.

En vertu du Marking theorem, la variable aléatoire Δ admet $(\nu_M)^{\otimes \mathbb{N}}$ pour loi conditionnelle par rapport à Φ tandis que Φ suit la loi d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\mu > \mu_c(d)$.

Définition 3.1. Dans la suite, on appelle probabilité intégrée la mesure \mathbb{P} et le terme environnement aléatoire fait référence à l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour tout $t \geq 0$, notons \mathcal{F}_t la tribu engendrée par Φ et les applications $\omega \longmapsto \Delta(\omega)(B)$ où B parcourt $(\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{B}([0, t])^{\otimes \mathbb{N}})^{\otimes \mathbb{N}}$. La tribu \mathcal{F}_t représente les événements qui sont observables grâce aux positions géographiques des points du graphe Booléen et grâce aux guérisons et infections qui ont lieu jusqu'au temps t .

3.2 Définition du processus de contact sur le graphe Booléen : la construction graphique de Harris

Comme dans la partie [2.2](#), on note $\{\exists! \text{amas } \infty\} \in \mathcal{X}$ l'événement sur lequel le graphe Booléen admet une unique composante connexe infinie.

Par abus, on note encore $\{\exists! \text{amas } \infty\} \in \mathcal{F}$ l'événement sur lequel le graphe associé au modèle Booléen possède une unique composante connexe infinie. On rappelle qu'en vertu du *Marking theorem*, Φ suit la loi d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité $\mu > \mu_c(d)$ et donc l'événement $\{\exists! \text{amas } \infty\}$ est \mathbb{P} presque sûr.

La construction graphique de Harris qui suit est une description d'un processus aléatoire (vivant sur l'espace probabilisé précédent) dont la loi est exactement celle du processus de contact et qui permet en outre d'étudier le processus de contact d'un point de vue *percolation*. En effet, la question de la survie de la maladie en tout instant s'interprète comme celle de l'existence d'un chemin ouvert infini dans le graphe H comme cela est défini ci-après.

Notons $\Pi := \{(x, c(x), (c_k(x))_{k \geq 1}) \mid x \in \Phi\}$ l'ensemble des atomes d'un élément $\omega \in \Omega$ et considérons $H = \Phi \times \mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \Phi$, on place une marque de guérison sur la ligne de temps $\{x\} \times \mathbb{R}_+$ à la position de chaque atome de $c(x)$, puis en ordonnant les points de $\Phi \setminus \{x\}$ selon l'ordre croissant de leur distance euclidienne à x , on attribue à tout point $y \in \Phi \setminus \{x\}$ un numéro $k(y)$ et la marque correspondante $c_{k(y)}(x)$. Puis, pour tout $y \in \Phi$ tel que $\{x, y\}$ soit une arête Booléenne, on place une flèche de contamination de (x, t) vers (y, t) aux temps t correspondant aux atomes de $c_{k(y)}(x)$.

On appelle chemin ouvert un chemin connecté et orienté dans H qui se déplace le long des lignes de temps dans la direction croissante en t et saute d'un site à un autre en utilisant les flèches orientées mais ne traversant jamais une marque de guérison. Pour $(x, t), (y, t') \in H$, on note $(x, t) \longrightarrow (y, t')$ pour signifier qu'il existe un chemin ouvert du premier vers le second point.

Plus rigoureusement, pour $t \leq t'$:

$$(x, t) \longrightarrow (y, t') \Leftrightarrow \exists n \geq 1, \exists t = t_0 \leq \dots \leq t_n = t', \exists x = x_1 \sim \dots \sim x_n = y \text{ tels que :}$$

$$\forall 1 \leq i < n, c_{k(x_{i+1})}(x_i)(\{t_i\}) = 1$$

$$\text{et } \forall 1 \leq i \leq n, c(x_i)([t_{i-1}, t_i]) = 0.$$

Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on définit alors le processus de contact $(\xi^A(t))_{t \geq 0}$ partant de la configuration initiale A sur C_Φ^∞ par :

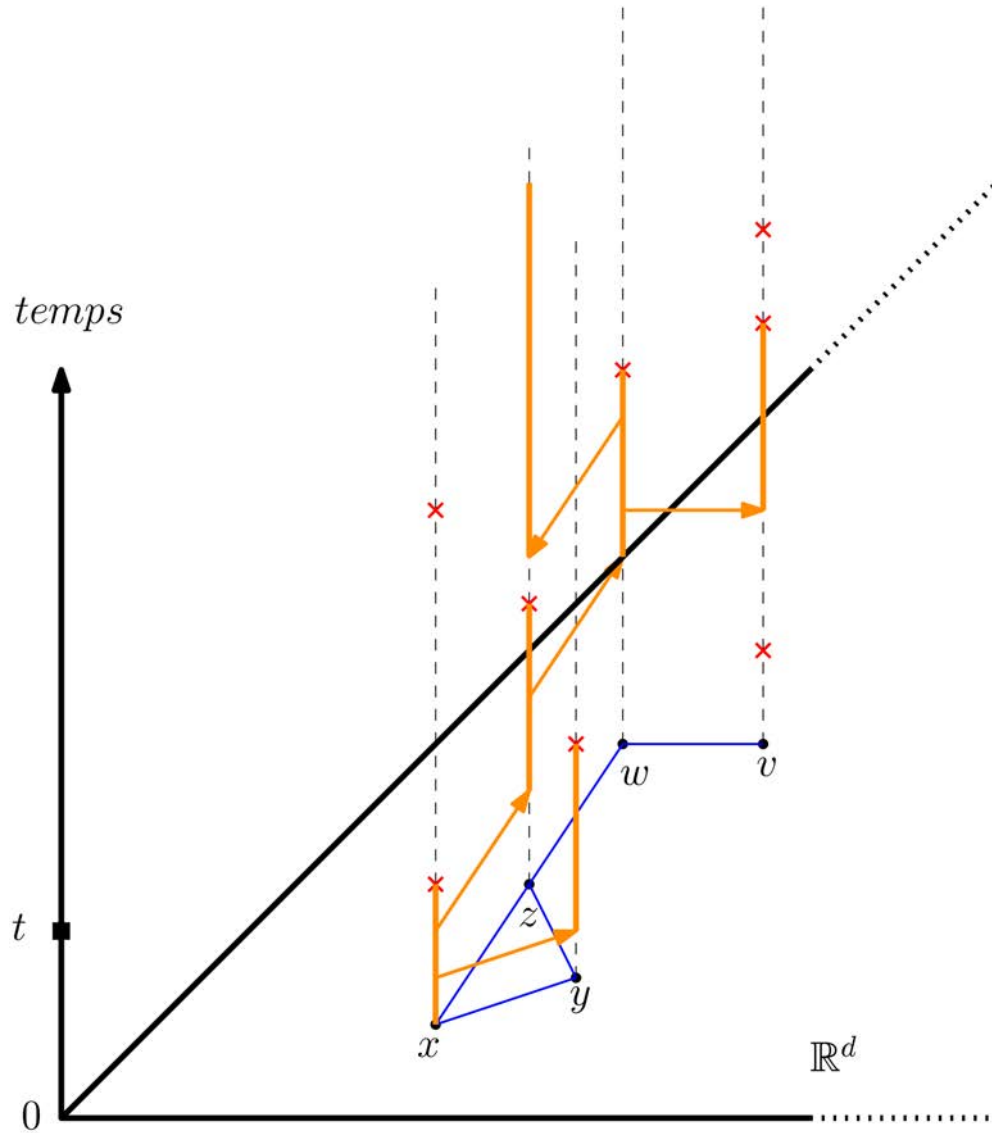
$$\forall t \geq 0, \xi^A(t) := \{x \in \Phi \mid \exists y \in A \cap \Phi, (y, 0) \longrightarrow (x, t)\}.$$

On a en particulier :

$$\xi^A(t) = \bigcup_{x \in A} \xi^{\{x\}}(t).$$

Ce qui montre l'additivité de ce processus au sens suivant : Si $A, \tilde{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, alors pour tout $t \geq 0$:

$$\xi^A(t) \cup \xi^{\tilde{A}}(t) = \xi^{A \cup \tilde{A}}(t).$$



Représentation graphique de Harris

Dans le plan \mathbb{R}^d , on a indiqué les arêtes du graphe Booléen $E^{\text{Bool}}(\phi)$. Les croix désignent les instants de guérison et les flèches les instants de contamination potentielle. On considère le processus de contact partant de la configuration $\{x\}$ au temps 0. Au temps t , les seuls points infectés sont les points y , z et w .

3.3 Probabilité gelée

On définit maintenant l'application fondamentale $\varpi : X \times \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ qui réalise une bijection entre ces deux espaces d'application réciproque (Φ, Δ) . Pour cela, on définit les variables aléatoires \bar{x}_i sur (X, \mathcal{X}) qui associent à $\phi \in X$ l'atome de ϕ numéroté $(i+1)$ -ième dans l'ordre croissant de leurs distances à l'origine, puis à égalité, dans l'ordre lexicographique. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, \bar{x}_i est bien définie.

Remarque. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, \bar{x}_i est bien une application mesurable.

On définit alors l'application ϖ par :

$$\begin{aligned} \varpi : (X \times \tilde{\Omega}, \mathcal{X} \otimes \tilde{\mathcal{F}}) &\longrightarrow (\Omega, \mathcal{F}) \\ (\phi, (m_i)_{i \in \mathbb{N}}) &\longmapsto \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{(\bar{x}_i, m_i)} \end{aligned}$$

Remarque. ϖ définit elle aussi une application mesurable.

Pour toute application mesurable $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ on définit alors l'application $\tilde{f} = f \circ \varpi$ de sorte qu'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\Omega, \mathcal{F}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ \uparrow \varpi & \nearrow \tilde{f} & \\ (X \times \tilde{\Omega}, \mathcal{X} \otimes \tilde{\mathcal{F}}) & & \end{array}$$

(Le diagramme est complété par une flèche circulaire à l'intérieur, indiquant la commutativité.)

Pour tout environnement $\phi \in X$, et pour toute application mesurable $f : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, on définit l'opérateur \mathbb{E}_ϕ par :

$$\mathbb{E}_\phi[f] := \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{f}(\phi, \tilde{\omega}) d(\nu_M)^{\otimes \mathbb{N}}(\tilde{\omega}).$$

Proposition 3.2. Pour tout $\phi \in X$, l'application \mathbb{P}_ϕ définie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\phi : \mathcal{F} &\longrightarrow [0, 1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}_\phi(A) = \mathbb{E}_\phi[\mathbb{1}_A] \end{aligned}$$

est une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) dont \mathbb{E}_ϕ est l'opérateur espérance associé.

Preuve. Il est clair que $\mathbb{P}_\phi(\Omega) = 1$. Soit maintenant $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux disjoints. On a :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{1}}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}(\phi, \tilde{\omega}) = 1 &\Leftrightarrow \varpi(\phi, \tilde{\omega}) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ &\Leftrightarrow \exists ! n \in \mathbb{N} : \varpi(\phi, \tilde{\omega}) \in A_n \\ &\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_n}(\varpi(\phi, \tilde{\omega})) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathbb{1}}_{A_n}(\phi, \tilde{\omega}) = 1 \end{aligned}$$

Il suit facilement de la définition que :

$$\mathbb{P}_\phi\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_\phi(A_n).$$

Enfin on achève la preuve en remarquant que \mathbb{E}_ϕ est un opérateur linéaire qui coïncide avec $\mathbb{P}_\phi(A)$ sur l'indicatrice $\mathbb{1}_A$. \square

Définition-proposition 3.3. Pour $\phi \in X$, on appelle probabilité gelée en environnement ϕ la probabilité \mathbb{P}_ϕ . Si $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ est une application mesurable alors, par construction et en vertu du Marking theorem :

$$\mathbb{E}[f] = \mathbb{E}[\mathbb{E}_\Phi[f]].$$

Remarque. Dans la suite, par abus, on notera parfois encore f l'application $\tilde{f} = f \circ \varpi$.

3.4 Translations

3.4.1 Translations spatiales

Le groupe \mathbb{R}^d agit sur lui-même par translation. Cette action est naturellement étendue aux espaces X et Ω et doit être comprise comme un changement de point de vue spatial du processus de contact. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, par abus, on notera T_x l'opérateur de translation de vecteur x sur les différents espaces \mathbb{R}^d , X et Ω définis respectivement par :

$$\begin{aligned} T_x : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}^d \\ z &\longmapsto z + x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_x : X &\longrightarrow X \\ \phi = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{x_i} &\longmapsto T_x(\phi) = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{x_i - x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_x : \Omega &\longrightarrow \Omega \\ \omega = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{(x_i, m_i)} &\longmapsto T_x(\omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{(x_i - x, m_i)}. \end{aligned}$$

On veut maintenant définir les opérateurs $T_{x,\phi}$ sur l'espace $\tilde{\Omega}$ de sorte qu'ils soient compatibles avec notre modèle dans le sens suivant :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T_x(\omega) = \varpi \left(T_x \left(\Phi(\omega), T_{x,\Phi(\omega)}(\Delta(\omega)) \right) \right). \quad (7)$$

Il suit facilement que pour $\phi \in X$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on doit définir $T_{x,\phi}$ par :

$$\begin{aligned} T_{x,\phi} : \tilde{\Omega} &\longrightarrow \tilde{\Omega} \\ \tilde{\omega} &\longmapsto \Delta(T_x(\varpi(\phi, \tilde{\omega}))). \end{aligned}$$

Proposition 3.4. Pour tout $E \in \mathcal{F}$, pour tout $\phi \in X$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{P}_\phi(T_x(E)) = \mathbb{P}_{T_x(\phi)}(E).$$

Preuve. Soient donc de tels E , ϕ et x , par construction, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\phi(T_x(E)) &= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{1}_{T_x(E)} \circ \varpi(\phi, \tilde{\omega}) d(\nu_M)^{\otimes \mathbb{N}}(\tilde{\omega}) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{1}_E \circ T_x^{-1} \circ \varpi(\phi, \tilde{\omega}) d(\nu_M)^{\otimes \mathbb{N}}(\tilde{\omega}) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{1}_E \circ \varpi(T_{-x}(\phi), T_{-x, \phi}(\tilde{\omega})) d(\nu_M)^{\otimes \mathbb{N}}(\tilde{\omega}) \\
&= \int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{1}_E \circ \varpi(T_{-x}(\phi), \tilde{\omega}) d(\nu_M)^{\otimes \mathbb{N}}(\tilde{\omega}) \\
&= \mathbb{P}_{T_x(\phi)}(E),
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière ligne est obtenue car $T_{-x, \phi}$ agit comme une réindexation sur $\tilde{\Omega}$ or $(\nu_M)^{\otimes \mathbb{N}}$ est invariante par réindexage. Ceci achève la preuve. \square

Proposition 3.5. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la translation T_x laisse la mesure \mathbb{P} invariante.*

Preuve. Soit donc $x \in \mathbb{R}^d$ et $E \in \mathcal{F}$, d'après la proposition précédente, on a :

$$\mathbb{P}(T_x(E)) = \mathbb{E}[\mathbb{P}_\Phi(T_x(E))] = \mathbb{E}[\mathbb{P}_{T_x(\Phi)}(E)].$$

Or, d'après le *Marking Theorem*, la loi de Φ sous \mathbb{P} est celle d'un processus ponctuel de Poisson homogène de paramètre μ qui est invariante par translation. Ceci achève la preuve. \square

3.4.2 Translations temporelles

Pour $t \geq 0$, on définit l'opérateur de translation θ_t sur l'espace des mesures ponctuelles \mathcal{C} par :

$$\forall c = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{t_i}, \quad \theta_t c := \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{t_i \geq t\}} \delta_{t_i - t}.$$

La translation θ_t induit naturellement des opérateurs sur M , Ω et $\tilde{\Omega}$ encore notés θ_t . Pour $m = (c, (c_k)_{k \in \mathbb{N}}) \in M$, $\omega = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{(x_i, m_i)} \in \Omega$ et $\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{m_i} \in \tilde{\Omega}$ ces opérateurs sont respectivement définis par :

$$\theta_t(m) := (\theta_t c, (\theta_t c_k)_{k \in \mathbb{N}}), \quad \theta_t(\omega) := \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{(x_i, \theta_t(m_i))} \text{ et } \theta_t(\tilde{\omega}) := \sum_{i=1}^{+\infty} \delta_{(\theta_t(m_i))}.$$

Proposition 3.6. *Pour tout $t \geq 0$ et tout $\phi \in X$, la transformation θ_t laisse \mathbb{P} et \mathbb{P}_ϕ invariantes.*

La preuve découle de l'invariance en loi par translation de temps t des processus ponctuels de Poisson homogènes sur \mathbb{R}_+ .

3.5 Quantités d'intérêt du processus de contact

Pour toute configuration initiale $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, tout $t \geq 0$, et $x \in \mathbb{R}^d$ notons :

$$t^A(x) := \inf \{t > 0 : q(x) \in \xi_t^A\}, \quad (8)$$

$$H_t^A := \{x \in \mathbb{R}^d : t^A(x) \leq t\}, \quad (9)$$

$$\text{et } \tau^A := \inf \{t > 0 : \xi_t^A = \emptyset\}. \quad (10)$$

La quantité $t^A(x)$ désigne le temps d'atteinte de la particule $q(x)$ par le processus de contact partant de la configuration initiale A tandis que H_t^A est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ dont le point le plus proche dans C_Φ^∞ a déjà été infecté au temps t partant de la configuration A . Enfin, τ^A désigne le temps d'extinction, éventuellement infini, du processus de contact partant de la configuration A .

Remarque. • *Pour alléger les notations, on note $\xi^A := (\xi_t^A)_{t \geq 0}$ le processus de contact partant de la configuration initiale A et de manière générale, pour toutes les notations précédentes, on oublie les accolades lorsque la configuration initiale est réduite à un singleton. Si la configuration initiale n'est pas précisée, il s'agira toujours du singleton $\{q(0)\}$.*

- *On notera que $H_t \neq \bigcup_{s \leq t} \xi_s$. Ces deux ensembles se ressemblent mais on a en fait seulement :*

$$\bigcup_{s \leq t} \xi_s = H_t \cap C_\Phi^\infty.$$

4 Propriétés du modèle

4.1 Ergodicité du système aléatoire

Proposition 4.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ non nul, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, T_x)$ est un système mélangeant donc ergodique.*

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ non nul. La tribu \mathcal{F} est engendrée par la sous-algèbre \mathcal{H} engendrée par les applications :

$$\pi_{B,E} : \omega \longmapsto \omega(B \times E)$$

où B parcourt les boréliens bornés de \mathbb{R}^d et E parcourt \mathcal{F}_M .

Cette algèbre est composée des événements qui ne regardent qu'une zone bornée de l'espace. Plus précisément, si B_1, B_2 sont deux boréliens bornés de \mathbb{R}^d , $E_1, E_2 \in \mathcal{F}_M$ et $K_1, K_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T_x^{-n} \left(\pi_{B_1, E_1}^{-1} (K_1) \right) &= \{ \omega \in \Omega : T_{nx}(\omega)(B_1 \times E_1) \in K_1 \} \\ &= \{ \omega \in \Omega : \omega(T_{nx}(B_1) \times E_1) \in K_1 \} \\ &= \{ N(T_{nx}(B_1) \times E_1) \in K_1 \}. \end{aligned}$$

De même, $\pi_{B_2, E_2}^{-1} (K_2) = \{ N(B_2 \times E_2) \in K_2 \}$ mais comme B_1 et B_2 sont bornés, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T_{nx}(B_1) \times E_1$ et $B_2 \times E_2$ soient disjoints. Ainsi, on récupère de l'indépendance en vertu des propriétés du processus ponctuel de Poisson et donc pour un tel n :

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(T_x^{-n} \left(\pi_{B_1, E_1}^{-1} (K_1) \right) \cap \pi_{B_2, E_2}^{-1} (K_2) \right) &= \mathbb{P} \left(T_x^{-n} \left(\pi_{B_1, E_1}^{-1} (K_1) \right) \right) \mathbb{P} \left(\pi_{B_2, E_2}^{-1} (K_2) \right) \\ &= \mathbb{P} \left(\pi_{B_1, E_1}^{-1} (K_1) \right) \mathbb{P} \left(\pi_{B_2, E_2}^{-1} (K_2) \right). \end{aligned}$$

Ceci ne démontre la propriété de mélange que pour les générateurs de l'algèbre \mathcal{H} . Cependant, comme c'est une algèbre, un élément de \mathcal{H} est certes compliqué à écrire mais ne regarde toujours qu'une zone bornée de l'espace ce qui permet d'étendre aisément la propriété de mélange et qui achève la preuve. \square

4.2 Inégalités FKG

Définition 4.2 (Ordre partiel sur $\tilde{\Omega}$ et Ω). *On commence par définir un ordre sur les mesures de comptage localement finies sur \mathbb{R}_+ . Soient $c = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{t_i}$ et $c' = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{t'_i}$ deux telles mesures. On définit l'ordre partiel \prec par :*

$$c \prec c' \iff \{t_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \{t'_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

L'ordre \prec est donc défini sur \mathcal{C} . Ensuite, on étend cet ordre aux espaces M puis Ω en posant pour $m = (c, (c_k)_{k \in \mathbb{N}})$ et $m' = (c', (c'_k)_{k \in \mathbb{N}})$ dans M :

$$m \prec m' \iff c \succ c', \forall k \in \mathbb{N} \quad c_k \prec c'_k,$$

puis, pour $\omega = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{(x_i, m_i)}$ et $\omega' = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_{(x'_i, m'_i)}$ dans Ω :

$$\omega \prec \omega' \iff \forall i \in \mathbb{N}, \exists j \in \mathbb{N} \quad x_i = x'_j \text{ et } m_i \prec m'_j.$$

Enfin, pour $\tilde{\omega} = (m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $\tilde{\omega}' = (m'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $\tilde{\Omega}$ on note encore \prec l'ordre défini par :

$$\tilde{\omega} \prec \tilde{\omega}' \iff \forall k \in \mathbb{N} \quad m_k \prec m'_k.$$

Remarque. Dans la définition de l'ordre \prec sur M , on demande à la première coordonnée de m de majorer celle de m' alors qu'on demande à sa deuxième coordonnée d'être majorée. Cela vient du rôle que l'on attribue à chacune de ces coordonnées dans la construction graphique de T.E. Harris. L'une représente les instants de guérison et donc on en veut le moins possible pour faire survivre la maladie tandis que l'autre représente les instants d'infection et donc on en veut le plus possible.

Définition 4.3. On dit que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante au sens de \prec si :

$$\omega \prec \omega' \implies f(\omega) \leq f(\omega').$$

De même, on dit que $\tilde{f} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante au sens de \prec si :

$$\tilde{\omega} \prec \tilde{\omega}' \implies \tilde{f}(\tilde{\omega}) \leq \tilde{f}(\tilde{\omega}').$$

Proposition 4.4 (Inégalité FKG). Soit $\phi \in X$, les espaces $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_\phi)$ vérifient l'inégalité FKG. C'est-à-dire que si f, g sont deux fonctions réelles définies sur Ω , alors :

$$\mathbb{E}[fg] \geq \mathbb{E}[f]\mathbb{E}[g] \text{ et } \mathbb{E}_\phi[fg] \geq \mathbb{E}_\phi[f]\mathbb{E}_\phi[g].$$

Preuve. La preuve du théorème page 20 de la thèse d'Aurelia Deshayes (article [9]) peut facilement être adaptée pour montrer l'inégalité FKG en environnement gelé. En effet, lorsque l'on gèle l'environnement $\Phi = \phi$, on se ramène au cas des fonctions $\tilde{f}(\phi, \cdot)$ et $\tilde{g}(\phi, \cdot)$ qui sont croissantes au sens de \prec dans $\tilde{\Omega}$ et que l'on intègre contre la mesure produit $(\nu_M)^{\otimes \mathbb{N}}$ qui est à corrélations positives.

Pour traiter le cas de l'environnement aléatoire, il faut montrer que $\mathbb{E}_\phi[f]$ et $\mathbb{E}_\phi[g]$ sont des fonctions de la variable ϕ croissantes au sens de l'inclusion. Il suffit alors d'utiliser l'inégalité FKG des processus de Poisson dont on peut trouver une preuve page 31 du livre *Continuum Percolation* de R. Meester et R. Roy [36]. Cette croissance est un peu fastidieuse à démontrer mais ne présente pas de difficulté particulière. \square

4.3 Markovianité du processus de contact sous la probabilité gelée

La machinerie développée dans *Interacting Particle Systems* de T.M. Liggett [35] fonctionne parfaitement pour montrer que le processus de contact sur un graphe à degré borné est un processus de Feller et donc bénéficie de la propriété de Markov forte. Les problèmes d'existence et d'unicité des semi-groupes de Feller sont des questions très intéressantes et sont beaucoup étudiés par exemple par F. Ezanno dans sa thèse ([18]) qui donne d'ailleurs

une excellente vue d'ensemble de ces questions. Cependant, dans notre cas on doit faire un peu attention car une réalisation du graphe Booléen n'est pas à degré borné. De ce fait, nous allons directement montrer que le processus de contact en environnement gelé est un processus de Feller. Avant cela, on se propose de montrer que jusqu'à un certain temps strictement positif t_ϵ le processus de contact ξ vérifie la propriété de Markov forte. Il est difficile d'utiliser ce résultat pour montrer la propriété de Markov forte en toute généralité mais ce résultat a le mérite de donner une bonne intuition pour se convaincre que le caractère non-borné des degrés du graphe ne pose pas de réel souci. On va utiliser un argument de percolation pour montrer que pour presque toute configuration gelée $\phi \in X$, jusqu'à un temps très petit $t_\epsilon > 0$, le processus de contact sur le graphe Booléen se comporte en fait comme sur de petits graphes finis disjoints sur lesquels on sait qu'il a le comportement d'un processus de Feller.

On introduit l'espace mesurable dans lequel le processus de contact prend ses valeurs. On essaie de coller un maximum avec les notations du livre de T.M. Liggett et certains conflits peuvent apparaître avec les autres sections mais cela ne doit pas apporter de confusion car cette section peut être considérée comme indépendante du reste.

Soit $\phi \in X$, par abus, on note encore ϕ le sous-ensemble discret de \mathbb{R}^d composé des atomes de ϕ . On note ensuite $\check{X} := \{0, 1\}^\phi$ que l'on muni de sa topologie produit. On peut mesurer cette topologie sur \check{X} , une mesure étant par exemple donnée par :

$$\forall \eta, \eta' \in \check{X}, \quad d(\eta, \eta') = \sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i} \mathbb{1}_{\{\eta(x_i) \neq \eta'(x_i)\}}$$

où les x_i sont les éléments de ϕ numérotés dans l'ordre croissant de leur distances euclidiennes à 0 puis, à égalité, dans l'ordre lexicographique de leurs coordonnées. \check{X} muni de cette métrique est donc un espace métrique compact. On considère aussi \check{X} comme un espace mesurable en le munissant de sa tribu borélienne.

On note maintenant $D[0; +\infty[$ l'ensemble des applications $\zeta : [0; +\infty[\rightarrow \check{X}$ qui sont continues à droite et limitées à gauche. C'est l'espace canonique des processus de Markov à temps continu et à espace d'état \check{X} . Pour $s \geq 0$, la projection $\pi_s : D[0; +\infty[\rightarrow \check{X}$ est définie par $\pi_s(\zeta) := \zeta_s$. Soit \mathcal{A} la tribu sur $D[0; +\infty[$ engendrée par les projections π_s avec $s \geq 0$. Pour $t \geq 0$, soit aussi \mathcal{A}_t la tribu engendrée par les projections π_s avec $0 \leq s \leq t$.

Pour tout $\eta \in \check{X}$ et tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, il est clair que l'application $\xi^\eta.(\phi, \tilde{\omega})$ définie à l'aide de la construction graphique de Harris est bien dans $D[0; +\infty[$. En effet, elle est continue en tout instant qui n'est ni un instant d'infection ni un instant de guérison et en ces instants, elle est trivialement limitée à gauche et continue à droite. On définit maintenant l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^\eta : \mathcal{A} &\longrightarrow [0; 1] \\ A &\longmapsto \mathbb{P}^\eta(A) := \mathbb{P}_\phi(\xi^\eta \in A). \end{aligned}$$

C'est la mesure de probabilité sur $D[0; +\infty[$ obtenue comme mesure image de la probabilité \mathbb{P}_ϕ par le processus de contact ξ^η .

4.3.1 Argument de percolation

Pour donner une intuition du caractère Markovien du processus de contact à l'aide d'un argument de percolation, on commence par discrétiser l'espace \mathbb{R}^d en boîtes et on définit une notion de bonnes et mauvaises boîtes. Soit $\epsilon > 0$ et soit alors $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\mathbb{P}(|\Phi \cap Q_2| \geq N_\epsilon) \leq \epsilon/2.$$

Ensuite, soit $t_\epsilon > 0$ tel que :

$$P(N_\epsilon(N_\epsilon - 1), \lambda, t_\epsilon) \leq \epsilon/2$$

où $P(k, \lambda, t)$ désigne la probabilité qu'au moins l'un parmi k processus de Poisson réels de paramètre λ indépendants possède un atome avant t . Pour $z \in \mathbb{Z}^d$, on définit

$$A_z := \{|\Phi \cap Q_2(z)| > N_\epsilon\} \cup \bigcup_{(x,y) \in \Phi \cap Q_2(z)} \{c_{k(y)}(x) ([0, t_\epsilon]) \geq 1\} \text{ et } X_z := \mathbb{1}_{A_z}.$$

où l'on a utilisé les mêmes notations que pour la construction graphique de Harris. Les boîtes que nous considérons sont les boîtes $(Q_2(z))_{z \in \mathbb{Z}^d}$. La variable X_z ne regarde que les points du processus ponctuel marqué dont la coordonnée spatiale est dans $Q_2(z)$. On dira que l'une de ces boîtes est bonne si $X_z = 1$ et qu'elle est mauvaise sinon. Par choix de N_ϵ et t_ϵ , il suit que pour tout $z \in \mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_z = 1) &\leq \mathbb{P}(|\Phi \cap Q_2(z)| > N_\epsilon) \\ &\quad + \mathbb{P}_{\{|\Phi \cap Q_2(z)| \leq N_\epsilon\}} \left(\bigcup_{(x,y) \in \Phi \cap Q_2(z)} \{c_{k(y)}(x) ([0, t_\epsilon]) \geq 1\} \right) \\ &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Maintenant, on définit la notion de k -dépendance pour un processus indexé par \mathbb{Z}^d .

Définition 4.5 (k -dépendance). *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, un processus $(W_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ est dit k -dépendant si :*

$$\forall \tilde{z} \in \mathbb{Z}^d, W_{\tilde{z}} \text{ est indépendant de } (W_z)_{z \in \mathbb{Z}^d: \|z - \tilde{z}\|_\infty > k}.$$

Il est clair que le processus $(X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ définit précédemment est 2-dépendant. On utilise alors le résultat de T.M. Liggett, R.H. Schonmann et A.M. Stacey suivant.

Proposition 4.6 (LSS [34]). *Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $0 < p < 1$, il existe $0 < q(k, p) < 1$, tel que tout processus $(W_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ k -dépendant à valeur dans $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ vérifiant $\forall z \in \mathbb{Z}^d, \mathbb{P}(W_z = 1) \leq q(k, p)$, soit dominé stochastiquement par un processus de Bernoulli indépendant sur \mathbb{Z}^d de paramètre p .*

Ainsi, en choisissant $\epsilon = q(2, p)$ avec $p < p_c(d)$ où $p_c(d)$ désigne le seuil critique de percolation pour le modèle de percolation de Bernoulli standard sur les sites de \mathbb{Z}^d , alors le processus $(X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ est dominé par une percolation de Bernoulli sous-critique. Cela implique que \mathbb{P} presque sûrement, tous les amas de percolation du processus $(X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ sont finis. Notons $\{(X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d} \text{ ne percole pas}\}$ cet événement.

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{P}_\Phi \left((X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d} \text{ ne percole pas} \right) \right] = \mathbb{P} \left((X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d} \text{ ne percole pas} \right) = 1.$$

Ainsi, pour \mathbb{P} presque toute réalisation $\phi \in X$ de Φ , on a :

$$\mathbb{P}_\phi \left((X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d} \text{ ne percole pas} \right) = 1.$$

Donc pour \mathbb{P} presque-toute réalisation $\phi \in X$, \mathbb{P}_ϕ presque sûrement, le processus $(X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ ne percole pas. On peut maintenant montrer :

Proposition 4.7. *Pour presque toute réalisation $\phi \in X$, le processus de contact en environnement gelé ϕ vérifie la propriété de Markov jusqu'au temps t_ϵ .*

Preuve. Soit donc $\phi \in X$ tel que $\mathbb{P}_\phi \left((X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d} \text{ ne percole pas} \right) = 1$ et soit $\iota \leq t_\epsilon$, sur l'événement presque sûr Ω_ϕ , le processus de contact ξ se comporte jusqu'au temps t_ϵ comme l'union disjointe des processus de contact sur les amas finis du processus $(X_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ qui sont des processus de Feller. □

Remarque. *L'argument de percolation précédent montre aussi facilement que la construction graphique de Harris dans le cadre du modèle Booléen décrit bien le processus de contact au sens des sauts de transitions classiques.*

4.3.2 Processus de Feller

Montrons maintenant directement que le processus de contact standard de paramètre $\lambda > 0$ évoluant en environnement gelé sur une réalisation du modèle Booléen surcritique est un processus de Feller au sens de T.M. Liggett (page 8. dans [35]). Pour $t \geq 0$, on définit la translation $\theta_t : D[0; +\infty[\rightarrow D[0; +\infty[$ par $\theta_t(\zeta) := \zeta_{\cdot+t}$. On note $C(\check{X})$ l'espace des fonctions réelles (uniformément) continues sur $\check{X} = \{0, 1\}^\phi$ et pour $\eta \in \check{X}$, \mathbb{E}^η désigne l'opérateur espérance associé à \mathbb{P}^η .

On fixe toujours $\phi \in X$, et on se propose de vérifier que la famille de mesures de probabilité $\{\mathbb{P}^\eta, \eta \in \check{X}\}$ sur $D[0; +\infty[$ satisfait aux propriétés suivantes :

1. Pour tout $\eta \in \check{X}$, $\mathbb{P}^\eta(\zeta \in D[0; +\infty[: \zeta_0 = \eta) = 1$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, tout $t \geq 0$ et tout $\eta \in \check{X}$, $\mathbb{P}^\eta(\theta_t^{-1}(A) \mid \mathcal{A}_t) = \mathbb{P}^\eta(A) \circ \eta_t$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'application $\eta \mapsto \mathbb{P}^\eta(A)$ est mesurable de \check{X} dans $[0; 1]$.
4. Pour toute fonction $f \in C(\check{X})$ et tout $t \geq 0$, l'application $\eta \mapsto \mathbb{E}^\eta[f \circ \pi_t]$ est continue.

Le premier point découle trivialement de la définition de \mathbb{P}^η et de la construction de \mathbb{P}_ϕ . Le second point aussi est gratuit. Il découle de la définition du processus de contact à l'aide de la construction graphique de T.E. Harris et de l'indépendance des processus de Poisson réels sur des zones disjointes de l'axe temporel. Il reste donc à montrer les deux derniers points. Ceux-ci garantissent que le processus de contact vérifie bien la propriété

de Feller dans ce contexte et donc en particulier que la propriété de Markov faible implique bien la propriété de Markov forte. Les deux derniers points demandent une étude topologique plus précise.

Pour presque tout $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, commençons par montrer la continuité de l'application :

$$\begin{aligned} \xi \cdot (\phi, \tilde{\omega}) : \check{X} &\longrightarrow D[0; +\infty[\\ \eta &\longmapsto \xi^\eta(\phi, \tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Pour tout $t \geq 0$, on a la construction suivante :

$$\begin{aligned} \xi \cdot (\phi, \tilde{\omega}) : \check{X} &\longrightarrow D[0; +\infty[&\longrightarrow \check{X} \\ \eta &\longmapsto \xi^\eta(\phi, \tilde{\omega}) &\longmapsto \xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Or, $D[0; +\infty[$ est muni de la topologie engendrée par les projections $\{\pi_t : t \geq 0\}$ ainsi, pour montrer la continuité de $\xi \cdot (\phi, \tilde{\omega})$, il suffit de montrer la continuité de $\xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega})$ pour tout $t \geq 0$. Comme \check{X} est métrique, la continuité est équivalente à la continuité séquentielle. Soient donc $t \geq 0$ et $\eta \in \check{X}$ et $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \check{X}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \check{X} qui converge vers η . Soient maintenant $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i > N} 2^{-i} < \epsilon$, alors pour tout $\tilde{\eta} \in \check{X}$, on a :

$$[\forall i \leq N, \tilde{\eta}(x_i) = \xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega})(x_i)] \implies d(\tilde{\eta}, \xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega})) < \epsilon$$

où les x_i sont les éléments de ϕ numérotés dans l'ordre croissant de leur distances euclidiennes à 0 puis, à égalité, dans l'ordre lexicographique de leurs coordonnées. On fait alors les observations suivantes qui sont dues à la définition graphique du processus de contact. Soit $i \leq N$,

- si $\xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega})(x_i) = 1$, alors il existe un point $y_i \in \eta \subseteq \phi$ tel que $(y_i, 0) \longrightarrow (x_i, t)$ et dans ce cas, on choisit un tel y_i et on note $A_i := \{y_i\}$,
- si $\xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega})(x_i) = 0$, on note $A_i := \{y \in \phi : (y, 0) \longrightarrow (x_i, t)\}$. Dans ce cas, pour tout $y \in A_i$, on a $\eta(y) = 0$ obligatoirement. En revanche a priori, A_i n'est pas forcément une partie finie de ϕ . La finitude de A_i dépend de la configuration $\tilde{\omega}$. Or l'ensemble des configurations $(\phi, \tilde{\omega})$ telles que pour tous $s \geq 0$ et $x \in \phi$, $\text{Card}\{y \in \phi : (y, 0) \longrightarrow (x, s)\} < +\infty$ est de mesure 1. On se restreint donc à de telles configurations. Pour prouver que cet ensemble est de mesure 1 il faut étudier le nombre de chemins Booléens de longueur fixée partant d'un point fixé ainsi que la probabilité qu'un tel chemin soit ouvert en fonction de sa longueur. Les outils nécessaires sont prouvés plus loin et on laisse au lecteur le soin de redémontrer cette partie.

Pour achever la preuve de la continuité de $\xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega})$, il suffit de choisir $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq M$, on ait $\eta_n(y) = \eta(y)$ pour tout $y \in \bigcup_{i=1}^N A_i$. En effet, dans ce cas, en vertu des observations précédentes, on aura $\xi_t^{\eta_n}(\phi, \tilde{\omega})(x_i) = \xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega})(x_i)$ pour tout $i \leq N$ et donc :

$$d(\xi_t^{\eta_n}(\phi, \tilde{\omega}), \xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega})) < \epsilon.$$

Montrons alors le troisième point. Soit $A \in \mathcal{A}$, de la continuité de $\xi \cdot (\phi, \tilde{\omega})$ on tire en particulier sa mesurabilité et ainsi, on obtient facilement la mesurabilité de l'application :

$$\begin{aligned} (\check{X} \times \tilde{\Omega}, \mathcal{B}(\check{X}) \otimes \tilde{\mathcal{F}}) &\longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \\ (\eta, \tilde{\omega}) &\longmapsto \mathbb{1}_A(\xi^\eta(\phi, \tilde{\omega})). \end{aligned}$$

Un résultat classique de théorie de la mesure garantit alors la mesurabilité de :

$$\begin{aligned} (\check{X}, \mathcal{B}(\check{X})) &\longrightarrow (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)) \\ \eta &\longmapsto \mathbb{P}^\eta(A) := \int_{\tilde{\Omega}} \mathbb{1}_A(\xi^\eta(\phi, \tilde{\omega})) d\mathbb{P}_\phi(\tilde{\omega}), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du troisième point.

Pour la preuve du quatrième point, on prend $f \in C(\check{X})$ et $t \geq 0$ et on remarque que l'espérance $\mathbb{E}^\eta[f(\zeta_t)]$ s'écrit :

$$\mathbb{E}^\eta[f \circ \pi_t] = \int_{\tilde{\Omega}} f(\xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega})) d\mathbb{P}_\phi(\tilde{\omega}).$$

En effet cette relation est vérifiée pour les indicatrices. Comme précédemment, en vertu de la métrisabilité de \check{X} , il suffit de montrer la continuité séquentielle. Soit donc $\eta \in \check{X}$ quelconque et soit $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \check{X}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers η dans \check{X} . Comme f est continue sur un compact, elle est bornée et ainsi, en vertu du théorème de convergence dominée, il suit :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}^{\eta_n}[f \circ \pi_t] &= \int_{\tilde{\Omega}} \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_t^{\eta_n}(\phi, \tilde{\omega})) d\mathbb{P}_\phi(\tilde{\omega}) \\ &= \int_{\tilde{\Omega}} f(\xi_t^\eta(\phi, \tilde{\omega})) d\mathbb{P}_\phi(\tilde{\omega}) \\ &= \mathbb{E}^\eta[f \circ \pi_t]. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve.

Ceci montre que le processus de contact dans ce cadre est de Feller et en particulier, satisfait à la propriété de Markov forte.

5 Preuves

Remarque. On commence cette section par une remarque importante concernant un choix de rédaction. Tout le long de ce document on montre un certain nombre de contrôles exponentiels du type $\leq Ae^{-Bt}$ avec $t \geq 0$ pour diverses quantités. Les constantes A, B sont utilisées quasiment systématiquement pour les énoncés et leurs valeurs varient donc d'un endroit à un autre. Dans les preuves, on conclut la plupart du temps en mentionnant qu'une certaine quantité admet un moment ou un contrôle exponentiel en vertu de tel lemme ou telle proposition.

5.1 Premières propriétés du processus de contact

On commence par rappeler quelques propriétés du processus de contact ξ en environnement aléatoire et gelé tel que le phénomène de transition de phase.

Pour faciliter la compréhension de ce qui suit, on note temporairement $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\mu, \lambda}$ et $\mathbb{P}_\phi = \mathbb{P}_{\phi, \lambda}$ pour rendre compte de la dépendance en les paramètres du modèle. On note aussi $\{\xi \text{ survit}\}$ l'événement caractérisé par la survie de la maladie ou plus précisément :

$$\{\xi \text{ survit}\} := \{\forall t \geq 0, \xi_t \neq \emptyset\}.$$

Lemme 5.1. *La fonction*

$$\begin{aligned} \Theta(\mu, \cdot) : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow [0; 1] \\ \lambda &\longmapsto \mathbb{P}_{\mu, \lambda}(\xi \text{ survit}) \end{aligned}$$

est croissante.

Preuve. Découle immédiatement d'un couplage à l'aide de la propriété de superposition des processus ponctuels homogènes et de la représentation graphique de Harris pour le processus de contact. \square

Définition 5.2. *On définit le seuil critique du modèle pour $\mu > 0$ fixé par :*

$$\lambda_c(d, \mu) := \inf \{\lambda \geq 0 : \Theta(\mu, \lambda) > 0\}.$$

En outre, en conséquence du lemme précédent, ce seuil est caractérisé par :

- *Pour tout $\lambda < \lambda_c(d, \mu)$, $\mathbb{P}_{\mu, \lambda}(\xi \text{ survit}) = 0$*
- *et pour tout $\lambda > \lambda_c(d, \mu)$, $\mathbb{P}_{\mu, \lambda}(\xi \text{ survit}) > 0$.*

On cite maintenant un résultat de L. Ménard et A. Singh :

Théorème 5.3 (L. Ménard et A. Singh dans [\[37\]](#)). *Le seuil critique du modèle est non-trivial :*

$$0 < \lambda_c(d, \mu) < +\infty.$$

Remarque. • *Ce résultat est indépendant du travail de cette thèse dans le sens où la principale difficulté est de montrer que $\lambda_c(d, \mu)$ est strictement positif. Dans l'autre sens, il est facile de voir que $\lambda_c(d, \mu) \leq \lambda_c(\mathbb{N})$ or dans le travail de cette thèse, on se place justement dans le cadre $\lambda > \lambda_c(\mathbb{N})$.*

- La preuve est difficile et repose sur une idée de percolation inédite et très jolie (percolation by cumulative merging). C'est à ma connaissance le premier exemple de seuil critique non-trivial pour un graphe à degré non-borné.

Partant de ce résultat, il est alors assez facile de voir que le seuil de percolation $\lambda_c(d, \mu)$ est en fait encore valable pour \mathbb{P} presque toute configuration de la variable aléatoire Φ . Ce lemme est un point de départ important dans l'idée de continuer les travaux de cette thèse en étendant le théorème de forme asymptotique [5.27](#) à la zone surcritique entière.

Lemme 5.4. *Pour \mathbb{P} -presque toute réalisation $\phi \in X$ du modèle Booléen, on a :*

- Pour tout $\lambda < \lambda_c(d, \mu)$, $\mathbb{P}_{\phi, \lambda}(\xi \text{ survit}) = 0$
- et pour tout $\lambda > \lambda_c(d, \mu)$, $\mathbb{P}_{\phi, \lambda}(\xi \text{ survit}) > 0$.

Preuve. • Si $\lambda < \lambda_c(d, \mu)$, supposons par l'absurde que l'ensemble des configurations ϕ telles que $\mathbb{P}_{\phi, \lambda}(\xi \text{ survit}) \neq 0$ ne soit pas de mesure nulle. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble des ϕ telles que $\mathbb{P}_{\phi, \lambda}(\xi \text{ survit}) > \epsilon$ soit de mesure non-nulle ce qui est absurde en intégrant par rapport au modèle Booléen.

- Si $\lambda > \lambda_c(d, \mu)$, alors le théorème ergodique implique que

$$\mathbb{P}_{\mu, \lambda}(\exists x \in C_{\Phi}^{\infty}, \xi^x \text{ survit}) = 1$$

or cela se réécrit :

$$\mathbb{E}[\mathbb{P}_{\Phi, \lambda}(\exists x \in C_{\Phi}^{\infty}, \xi^x \text{ survit})] = 1$$

donc \mathbb{P} -presque sûrement,

$$\mathbb{P}_{\phi, \lambda}(\exists x \in C_{\phi}^{\infty}, \xi^x \text{ survit}) = 1.$$

Or comme C_{ϕ}^{∞} est dénombrable, il suit qu'il existe $x \in C_{\phi}^{\infty}$ tel que la probabilité de survie dans l'environnement ϕ du processus de contact partant de $\{x\}$ est strictement positive. Puis en vertu de la propriété de Markov forte, on obtient :

$$\mathbb{P}_{\phi, \lambda}(\xi \text{ survit}) > 0.$$

On achève la preuve en considérant l'intersection dénombrable des événements \mathbb{P} -presque sûrs sur les réalisations ϕ du processus Φ précédents donnés par les valeurs $\lambda_c(d, \mu) \pm \frac{1}{n}$ avec $n \geq 1$. Plus précisément, si on note :

$$Y = \bigcap_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} Y_n,$$

où pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, Y_n désigne l'événement \mathbb{P} -presque sûr des réalisations de Φ sur lequel :

- $\mathbb{P}_{\phi, \lambda_c(d, \mu) + \frac{1}{n}}(\xi \text{ survit}) = 0$ pour tout $\phi \in Y_n$ si n est négatif,
- $\mathbb{P}_{\phi, \lambda_c(d, \mu) + \frac{1}{n}}(\xi \text{ survit}) > 0$ pour tout $\phi \in Y_n$ si n est positif.

□

Alors, Y est \mathbb{P} -presque sûr en tant qu'intersection dénombrable d'événements presque sûrs et pour tout $\phi \in Y$, on a :

- pour tout $\lambda < \lambda_c(d, \mu)$, il existe $n \leq -1$ tel que $\lambda < \lambda_c(d, \mu) + \frac{1}{n}$ et ainsi par la croissance de l'application $\Theta(\mu, \cdot)$ donnée par le lemme 5.1, on obtient $\mathbb{P}_{\phi, \lambda}(\xi \text{ survit}) \leq \mathbb{P}_{\phi, \lambda_c(d, \mu) + \frac{1}{n}}(\xi \text{ survit}) = 0$ car $\phi \in Y_n$,
- pour tout $\lambda > \lambda_c(d, \mu)$, il existe $n \geq 1$ tel que $\lambda > \lambda_c(d, \mu) + \frac{1}{n}$ et ainsi par la croissance de l'application $\Theta(\mu, \cdot)$ donnée par le lemme 5.1, on obtient $\mathbb{P}_{\phi, \lambda}(\xi \text{ survit}) \geq \mathbb{P}_{\phi, \lambda_c(d, \mu) + \frac{1}{n}}(\xi \text{ survit}) > 0$ car $\phi \in Y_n$.

Ceci achève la preuve.

5.2 Contrôles de croissance sur le processus de contact

Dans cette section, on montre des contrôles sur le processus de contact sur une réalisation du modèle Booléen qui sont en quelque sorte uniformes en la configuration gelée sous-jacente. On utilise les travaux de la section 2.2 sur le modèle Booléen.

5.2.1 Croissance au plus linéaire

Montrons une première estimée de croissance pour le processus de contact. On rappelle que H_t désigne l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ dont le point le plus proche dans C_ϕ^∞ a été infecté avant le temps $t \geq 0$ et que B_ϕ^∞ désigne la boule associée à la distance de graphe d_ϕ^∞ sur C_ϕ^∞ .

Proposition 5.5 (Croissance au plus linéaire). *Il existe des constantes $A, B > 0$ et $K > 1$ telles que :*

$$\forall \phi \in \Gamma_1, \forall t \geq T_1(0), \quad \mathbb{P}_\phi \left(H_t \cap C_\phi^\infty \not\subseteq B_\phi^\infty(Kt) \right) \leq Ae^{-Bt}.$$

Remarque. *Cette proposition, comme un certain nombre de propositions ensuite, donne un contrôle sur une quantité d'intérêt du processus de contact en environnement gelé qui est uniforme en la configuration choisie. Cela peut paraître surprenant mais il faut comprendre que c'est le moment à partir duquel ce contrôle est valable qui diffère selon les configurations. On ne réussit d'ailleurs à obtenir ce genre de contrôles que pour un ensemble presque sûr de configurations qui admettent une régularité à grande échelle.*

Pour prouver cette proposition, on aura besoin d'un résultat intermédiaire :

Lemme 5.6. *Soit $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre λ sous \mathbb{P} . Soit $\delta > 0$ et $t > 0$, on peut choisir $\alpha > 0$ de sorte que, pour tout $n \geq t$:*

$$\mathbb{P} \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i < \alpha t \right) \leq \delta^n$$

Preuve. Soient donc $\delta > 0$ et $t > 0$, notons $p_\alpha = \mathbb{P}(\tau_i \geq 2\alpha)$, on remarque qu'on peut donc rendre p_α aussi proche de 1 que l'on veut en choisissant α suffisamment petit. Soit θ un réel, pour $n \geq t$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i < \alpha t\right) &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \tau_i < \alpha n\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{1}_{\{\tau_i \geq 2\alpha\}} \leq \frac{n}{2}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(n - \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{1}_{\{\tau_i \geq 2\alpha\}} \geq \frac{n}{2}\right) \\ &\leq \frac{\prod_{1 \leq i \leq n} \mathbb{E}\left[e^{\theta(1 - \mathbb{1}_{\{\tau_i \geq 2\alpha\}})}\right]}{e^{\frac{n\theta}{2}}} \\ &\leq (p_\alpha + (1 - p_\alpha)e^\theta)^n e^{-\frac{n\theta}{2}}. \end{aligned}$$

On choisit alors θ tel que $e^{-\frac{\theta}{2}} < \delta$, puis α tel que $(p_\alpha + (1 - p_\alpha)e^\theta)e^{-\frac{\theta}{2}} < \delta$. Ceci achève la preuve. □

Preuve de la proposition 5.5. Nous allons montrer une version équivalente de la proposition 5.5 :

$$\exists A, B > 0, \exists 0 < \alpha < 1, \forall \phi \in \Gamma_1, \forall t \geq T_1(0), \mathbb{P}_\phi\left(H_{\alpha t} \cap C_\phi^\infty \not\subseteq B_\phi^\infty(t)\right) \leq Ae^{-Bt}.$$

Soient donc $\phi \in \Gamma_1$ et $t \geq T_1(0)$. Pour tout chemin auto-évitant φ dans C_ϕ^∞ , notons $t_{\text{FPP}}(\varphi)$ le temps de traversée du chemin φ donné par la représentation graphique de Harris comme suit :

On ne tient pas compte des guérisons potentielles et on voyage le long du chemin φ en accédant au site suivant dès qu'apparaît une flèche de contamination.

On remarque que pour tout $n \geq 0$ et tout chemin auto-évitant φ de taille n dans C_ϕ^∞ , $t_{\text{FPP}}(\varphi)$ est une somme de n variables exponentielles indépendantes de paramètre λ .

Pour tout $n \geq 0$, on rappelle que $\hat{C}_n(q)$ désigne l'ensemble des chemins auto-évitants de taille n partant de $q(0)$ dans C_ϕ^∞ et pour $n \geq T_1(0)$, on a $|\hat{C}_n(q)| \leq \sigma^n$. Soit $\delta < \frac{1}{\sigma}$, et en vertu du lemme précédent, soit $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \geq t$ et tout $\varphi \in \hat{C}_n(q)$;

$$\mathbb{P}_\phi(t_{\text{FPP}}(\varphi) < \alpha t) \leq \delta^n.$$

On note que l'on peut choisir $\alpha < 1$. Pour ne pas compliquer inutilement la preuve,

on suppose $t > 1$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\phi \left(H_{\alpha t} \cap C_\phi^\infty \not\subseteq B_\phi^\infty(t) \right) &\leq \mathbb{P}_\phi \left(\bigcup_{n>t} \bigcup_{\varphi \in \tilde{C}_n(q)} \{t_{\text{FPP}}(\varphi) < \alpha t\} \right) \\
&\leq \sum_{n>t} \sum_{\varphi \in \tilde{C}_n(q)} \mathbb{P}_\phi(t_{\text{FPP}}(\varphi) < \alpha t) \\
&\leq \sum_{n>t} \sum_{\varphi \in \tilde{C}_n(q)} \delta^n \\
&\leq \sum_{n>t} (\sigma\delta)^n \\
&\leq \frac{(\sigma\delta)^t}{1 - \sigma\delta},
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque. On fixe dorénavant la constante $K > 1$ donnée par la proposition [5.5](#) (croissance au plus linéaire).

5.2.2 Couplage unidimensionnel

Dans la suite, on se place dans un cadre très surcritique pour le processus de contact. On note $\lambda_c(\mathbb{N})$ le seuil critique du processus de contact standard sur \mathbb{N} . Il est non-trivial et coïncide avec le seuil critique du processus de contact standard sur le graphe \mathbb{Z} (voir Durrett et Griffeath [\[12\]](#)). À partir de maintenant et pour toute la suite, nous fixons $\lambda > \lambda_c(\mathbb{N})$ et on note $\rho_\lambda(\mathbb{N}) > 0$ la probabilité de survie de processus de contact standard de paramètre λ sur le graphe \mathbb{N} partant de $\{0\}$.

Le but de cette section est de montrer que sur l'événement de survie, lorsque le processus de contact est très surcritique, il contient une sous-population qui survit sur une copie de \mathbb{N} . En outre, le long de ce chemin topologiquement identique à \mathbb{N} , le processus de contact croît avec vitesse au moins linéaire ce qui nous permettra de récupérer cette propriété pour le processus de contact évoluant sur l'amas de percolation Booléenne infini.

Remarque. Attention, on ne dit pas ici que la survie sur une copie de \mathbb{N} dans le graphe Booléen nous permettra d'avancer dans une direction de l'espace \mathbb{R}^d . On pourrait penser à cela mais si la copie de \mathbb{N} n'est pas rectiligne ce raisonnement ne fonctionne pas. La stratégie est de viser un point $q(x)$ et de contrôler son temps d'atteinte en fonction de sa distance de graphe à l'origine de l'infection $q(0)$. On fera ensuite le lien avec le déplacement dans l'espace \mathbb{R}^d à l'aide de résultats du type P. Antal et A. Pisztora.

Rappelons dans un premier temps les propriétés du processus de contact surcritique sur \mathbb{N} (voir Durrett et Griffeath [\[12\]](#)). Notons \mathbb{Q}_λ une probabilité sous laquelle vit le processus de contact standard η de paramètre $\lambda > 0$ sur \mathbb{N} .

Notons $\tau_\eta := \inf \{t > 0 : \eta_t^0 = \emptyset\}$ et pour $x \in \mathbb{N}$, notons $t_\eta(x) := \inf \{t \geq 0 : x \in \eta_t^0\}$.

Lemme 5.7 (R. Durrett and D. Griffeath [12]). *Il existe des constantes $\alpha, A, B > 0$ telles que :*

- $\mathbb{Q}_\lambda(t < \tau_\eta < \infty) \leq Ae^{-Bt}$.
- $\forall x \in \mathbb{N}, \mathbb{Q}_\lambda(t_\eta(x) > \alpha x + t, \tau_\eta = \infty) \leq Ae^{-Bt}$.

Remarque. *En fait Durrett et Griffeath montrent ces propriétés pour le processus de contact standard sur \mathbb{Z} . Néanmoins, il font la remarque que leurs travaux s'adaptent sur le graphe \mathbb{N} et qu'on peut obtenir les résultats analogues (voir page 6 point b.).*

Toutefois, il est facile d'obtenir le second point du lemme en admettant le résultat sur le graphe \mathbb{Z} . En effet, notons $\tilde{\eta}$ le processus de contact standard de paramètre $\lambda > 0$ sur \mathbb{Z} et supposons qu'il existe sous \mathbb{Q}_λ et qu'il est couplé avec η de sorte que η soit sa restriction à \mathbb{N} , c'est-à-dire que l'on construit leurs deux représentations graphiques de Harris à l'aide des mêmes processus ponctuels attachés aux points du graphe \mathbb{N} . On note $t_{\tilde{\eta}}$ et $\tau_{\tilde{\eta}}$ les temps d'atteinte et d'extinction de $\tilde{\eta}$. Il vient alors :

Sur l'événement $\{\tau_\eta = \infty\}$, pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a $t_\eta(x) = t_{\tilde{\eta}}(x)$ (grâce à la dimension 1). Il suit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_\lambda(t_\eta(x) > \alpha x + t, \tau_\eta = \infty) &= \mathbb{Q}_\lambda(t_{\tilde{\eta}}(x) > \alpha x + t, \tau_\eta = \infty) \\ &\leq \mathbb{Q}_\lambda(t_{\tilde{\eta}}(x) > \alpha x + t, \tau_{\tilde{\eta}} = \infty). \end{aligned}$$

Dans la suite de cette section, on réalise plusieurs fois un couplage qui nous permet d'exploiter ces résultats pour en déduire les équivalents pour notre modèle.

5.2.3 Vitesse d'extinction, une procédure de redémarrage

Le prochain résultat montre que s'il s'éteint alors le processus de contact s'éteint rapidement. C'est notamment ici que l'on utilise $\lambda > \lambda_c(\mathbb{N})$.

Proposition 5.8 (extinction rapide). *Il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $\phi \in \{\exists! \text{amas } \infty\}$, et pour tout $t \geq 0$:*

$$\mathbb{P}_\phi(t < \tau < \infty) \leq Ae^{-Bt}.$$

Par conséquent, pour tout $t \geq 0$:

$$\mathbb{P}(t < \tau < \infty) \leq Ae^{-Bt}.$$

Preuve. Soit donc $\phi \in \{\exists! \text{amas } \infty\}$. Pour tout x dans l'amas infini de percolation du modèle Booléen C_ϕ^∞ , on choisit un chemin infini auto-évitant $\tilde{\mathbb{N}}(x)$ (ie. une copie de \mathbb{N}) partant de x dans C_ϕ^∞ . (Un tel chemin existe toujours.)

Nous regardons le processus de contact uniquement sur le sous-graphe $\tilde{\mathbb{N}}(q(0))$. Si ce dernier survit alors *a fortiori* $\tau = \infty$, sinon à l'instant où le processus s'éteint sur $\tilde{\mathbb{N}}(q(0))$, soit le processus de contact sur C_ϕ^∞ s'éteint en même temps, soit on choisit un point vivant et on recommence ce raisonnement. À chaque étape, il y a une probabilité

strictement positive (et identique de valeur $\rho_\lambda(\mathbb{N})$) que le processus de contact survive sur une copie de \mathbb{N} . Ainsi la procédure s'arrête après un nombre géométrique d'étapes.

Comme le processus η vérifie le lemme [5.7](#), il est alors classique (argument de redémarrage, voir par exemple O. Garet et R. Marchand - théorème 2.5 de [\[22\]](#)) d'obtenir, un temps aléatoire ϑ admettant un moment exponentiel et qui, par construction, ne dépend pas de ϕ tel que sur l'événement $\{\tau < \infty\}$, on a $\vartheta \geq \tau$.

De manière plus rigoureuse, on pose $X_0 = q(0)$ puis on note τ_0 le temps d'extinction du processus de contact sur le sous-graphe $\tilde{\mathbb{N}}(X_0)$ de C_ϕ^∞ partant de la configuration initiale $\{X_0\}$. On rappelle que quand on parle du processus de contact sur un sous-graphe on pense à un couplage entre les deux processus de sorte que les constructions graphiques de Harris soient réalisées avec les mêmes processus de sauts pour les points et les arêtes communes aux deux graphes.

On suit alors la procédure récursive suivante :

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que l'on ait défini X_i et τ_i pour tout $i \leq k$.

- Si $\tau_k = \infty$, alors *a fortiori* $\tau = \infty$. On note alors $X_{k+1} = \infty$ et la procédure s'arrête.
- Si $\tau_k < \infty$, alors on distingue deux cas :

- Si $\xi \sum_{i \leq k} \tau_k = \emptyset$ alors on note $X_{k+1} = \infty$, la procédure s'arrête et on note que $\tau = \sum_{i \leq k} \tau_k$.
- Sinon, on note X_{k+1} le point le plus petit dans $\xi \sum_{i \leq k} \tau_k$ vis-à-vis de l'ordre lexicographique ainsi que τ_{k+1} le temps d'extinction du processus de contact sur le sous-graphe $\tilde{\mathbb{N}}(X_{k+1})$ partant de la configuration $\{X_{k+1}\}$ au temps $\sum_{i \leq k} \tau_k$.

Ensuite, notons

$$N = \sup \{k \in \mathbb{N} : X_k \neq \infty\}.$$

Montrons que N est dominée stochastiquement par une variable aléatoire géométrique de raison $\rho_\lambda(\mathbb{N})$. Soit $m \in \mathbb{N}$, il suit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\phi(N = m) &= \mathbb{P}_\phi \left(\{N \geq m\} \cap \left\{ \tau_m = \infty \text{ ou } \xi \sum_{i \leq k} \tau_k = \emptyset \right\} \right) \\ &\geq \mathbb{P}_\phi(\tau_m = \infty \mid N \geq m) \mathbb{P}_\phi(N \geq m) \\ &\geq \rho_\lambda(\mathbb{N}) \mathbb{P}_\phi(N \geq m). \end{aligned}$$

Posons alors :

$$\vartheta := \sum_{i \leq N} \tau_i.$$

Pour $i \leq N$, les τ_i sont des variables indépendantes identiquement distribuées de même loi que le processus de contact standard de paramètre λ sur \mathbb{N} partant de 0 et conditionné à mourrir. Aussi elles admettent un moment exponentiel. Soit alors $\beta_1 > 0$ tel qu'une loi

géométrique de paramètre $\rho_\lambda(\mathbb{N})$ admette un moment exponentiel d'ordre β_1 puis soit $\beta_2 > 0$ tel que :

$$\mathbb{E}_\phi \left[e^{\beta_2 \tau_0} \right] \leq e^{\beta_1}.$$

Il suit que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\phi \left[e^{\beta_2 \vartheta} \right] &= \mathbb{E}_\phi \left[\mathbb{E}_\phi \left[e^{\beta_2 \sum_{i \leq N} \tau_i} \mid N \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_\phi \left[\mathbb{E}_\phi \left[e^{\beta_2 \tau_0} \mathbb{1}_{\{\tau_0 < \infty\}} \right]^N \right] \leq \mathbb{E}_\phi \left[e^{\beta_1 N} \right] < \infty. \end{aligned}$$

Ainsi ϑ admet une queue de distribution qui décroît à vitesse exponentielle et sur $\{\tau < \infty\}$, on a $\tau = \vartheta$ d'où :

$$\mathbb{P}_\phi(t < \tau < \infty) \leq \mathbb{P}_\phi(\vartheta > t)$$

et on en déduit la première partie de la proposition.

Pour obtenir ceci, on n'a pas eu besoin de se placer sur Γ_1 et d'utiliser la régularité à grande échelle fournie par cet événement. Ainsi, la propriété analogue en environnement aléatoire suit trivialement en intégrant :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{P}(t < \tau < \infty) = \mathbb{E}[\mathbb{P}_\Phi(t < \tau < \infty)] \leq Ae^{-Bt}.$$

□

5.2.4 Croissance au moins linéaire

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on rappelle que l'on a noté :

$$t(x) := \inf \{t > 0 : q(x) \in \xi_t\}.$$

On montre maintenant que si le processus de contact survit alors les points sont infectés en un temps linéaire en fonction de leur distance de graphe à la configuration initiale. Notons $A_{\mathbb{N}}, B_{\mathbb{N}}$ et $\alpha_{\mathbb{N}}$ les constantes données dans le lemme [5.7](#). On rappelle que la constante $K > 0$ fixée est donnée par la proposition [5.5](#) (croissance au plus linéaire).

Pour des raisons techniques dans le prochain résultat, on introduit la constante :

$$\theta := \frac{1}{2(1 + K\alpha_{\mathbb{N}})}.$$

Proposition 5.9 (Croissance au moins linéaire). *Il existe $A, B > 0$, tels que pour tout environnement $\phi \in \Gamma$, tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $t > \frac{1}{\theta} \max(T_1(0), T_2(0))$, on a :*

$$\mathbb{P}_\phi \left(t(x) > \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0, x) + t, \tau = \infty \right) \leq Ae^{-Bt}.$$

Remarque. *La constante θ est inférieure ou égale à 1 de sorte que :*

$$t > \frac{1}{\theta} \max(T_1(0), T_2(0)) \implies t > T_2(0).$$

Ceci sera utilisé dans la preuve qui suit et de manière plus générale dans la suite pour pouvoir utiliser la proposition [5.5](#) (croissance au plus linéaire).

Preuve. Soient donc $\phi \in \Gamma$ et $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on choisit un chemin auto-évitant $\varphi(y, x)$ liant $q(y)$ à $q(x)$ dans C_ϕ^∞ et de longueur $d_\phi^\infty(x, y)$. (Un tel chemin existe toujours.) En outre, on prolonge de façon artificielle chacun des chemins précédents de façon à obtenir pour tout y un chemin infini auto-évitant (isomorphe au graphe \mathbb{N}) partant de $q(x)$ et passant par $q(y)$ de sorte que la partie entre $q(x)$ et $q(y)$ soit incluse dans C_ϕ^∞ et de longueur $d_\phi^\infty(x, y)$. On note $\bar{\varphi}(y, x)$ ce prolongement.

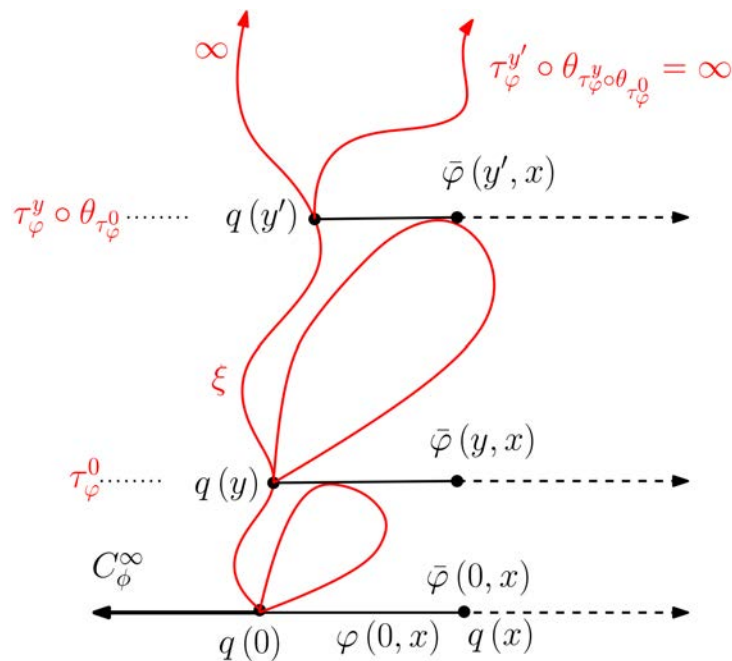
Pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, on notera $t_\varphi(y, x)$ et τ_φ^y respectivement le temps d'atteinte de $q(x)$ et le temps d'extinction du processus de contact partant de la configuration $\{q(y)\}$ dans $\bar{\varphi}(y, x)$.

On s'intéresse à l'événement $\{\tau_\varphi^y = \infty\}$. La probabilité de cet événement est indépendante de y et vaut $\rho_\lambda(\mathbb{N})$, ainsi, en testant cet événement pour $y = 0$ puis à chaque échec pour un y encore vivant du processus de contact ξ conditionné à survivre, on obtient un temps aléatoire ϑ de la forme :

$$\vartheta = \sum_{k=1}^N T_k$$

où N est une loi géométrique de raison δ et, pour tout k , T_k est un temps d'extinction du processus de contact sur une copie de \mathbb{N} conditionné à mourir.

Le schéma suivant explique la construction :



Sur ce schéma, on a tracé avec un trait plein noir le graphe C_ϕ^∞ et avec des tirets noirs les prolongements des chemins φ qui ne sont pas dans C_ϕ^∞ . On observe quelques

faits importants :

- Lorsque le processus de contact partant de la configuration $\{q(y)\}$ dans $\bar{\varphi}(y, x)$ atteint $q(x)$ pour la première fois, il a emprunté un chemin, ouvert au sens du processus de contact, **inclus** dans C_ϕ^∞ . En effet, le long d'un graphe isomorphe à \mathbb{N} , on ne peut pas atteindre un point après $q(x)$ sans passer par lui ce qui implique qu'à l'instant où $q(x)$ est atteint pour la première fois, aucun point après lui (dans le sens de l'ordre naturel sur un graphe isomorphe à \mathbb{N}) n'a été atteint et donc le chemin emprunté par l'infection est resté dans $\varphi(y, x) \subseteq C_\phi^\infty$.
- Comme le montre le deuxième redémarrage dans le schéma, on peut atteindre $q(x)$ avant de trouver un point de redémarrage à partir duquel on aura la survie sur $\bar{\varphi}(y, x)$ mais on ne s'y intéresse pas car on n'a alors pas les bons contrôles sur les temps d'infection.
- Sur le schéma $N = 2$, $T_1 = \tau_\phi^0$ et $T_2 = \tau_\phi^y \circ \theta_{\tau_\phi}$.

Les variables T_k avec $k \geq 1$ sont indépendantes entre elles et sont indépendantes de N . De plus, elles admettent toutes des moments exponentiels. Ainsi, sur l'événement $\{\tau = \infty\}$, ϑ admet un moment exponentiel qui ne dépend ni de ϕ ni de x et on a l'existence d'un point $y \in C_\phi^\infty$ tel que les événements : $\{y \in \xi_\vartheta\}$ et $\{\tau_\phi^y \circ \theta_\vartheta = \infty\}$ soient réalisés presque sûrement.

Sur $\{\tau = \infty\} \cap \{\vartheta < \theta t\} \cap \{H_{\theta t} \cap C_\phi^\infty \subseteq B_\phi^\infty(K\theta t)\}$, on a pour tout $y \in \xi_\vartheta$ et $t > \frac{1}{\theta} \max(T_1(0), T_2(0))$:

- $t(x) \leq \vartheta + t_\varphi(x, y) \leq \theta t + t_\varphi(x, y)$,
- $y \in \xi_\vartheta \subseteq H_{\theta t} \cap C_\phi^\infty \subseteq B_\phi^\infty(K\theta t)$ et par suite $d_\phi^\infty(0, y) \leq K\theta t$,
- et $d_\phi^\infty(0, x) \geq d_\phi^\infty(x, y) - d_\phi^\infty(y, 0)$.

D'où :

$$\begin{aligned} t(x) > \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0, x) + t &\implies \theta t + t_\varphi(y, x) > \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(y, x) - \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(y, 0) + t \\ &\implies t_\varphi(y, x) > \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(y, x) + (1 - \theta(1 + K\alpha_{\mathbb{N}})) t \end{aligned}$$

Comme $(1 - \theta(1 + K\alpha_{\mathbb{N}})) = 1/2$ par choix de θ , ceci nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\phi \left(t(x) > \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0, x) + t, \tau = \infty \right) &\leq \mathbb{P}_\phi \left(H_{\theta t} \cap C_\phi^\infty \not\subseteq B_\phi^\infty(K\theta t) \right) + \mathbb{P}_\phi(\vartheta \geq \theta t) \\ &\quad + \mathbb{P}_\phi \left(\bigcup_{y \in B_\phi^\infty(K\theta t)} \left\{ t_\varphi(y, x) > \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(y, x) + t/2 \right\} \right) \end{aligned}$$

Notons que $K \geq 1$ implique $K\theta t > T_1(0)$, ainsi on contrôle le premier terme de la somme grâce à la propriété [5.5](#) (croissance au plus linéaire). Le deuxième est contrôlé

par construction de ϑ en vertu des remarques précédentes ; enfin pour contrôler le dernier terme, on utilise que $B_\phi^\infty(K\theta t) \subseteq C_\phi^\infty \cap (q(0) + B(K\theta t))$ et $K\theta t > T_2(0)$ impliquent :

$$|B_\phi^\infty(K\theta t)| \leq e^{\sqrt{K\theta t}}.$$

En vertu du lemme [5.7](#), il vient :

$$\mathbb{P}_\phi \left(\bigcup_{y \in B_\phi^\infty(K\theta t)} \{t_\varphi(y, x) > \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(y, x) + t/2\} \right) \leq (K\theta t)^{d+1} A_{\mathbb{N}} e^{-B_{\mathbb{N}} t/2}.$$

Ceci achève la preuve. □

Remarque. Les constantes A et B dépendent uniquement de $K, \alpha_{\mathbb{N}}$ et $B_{\mathbb{N}}$ mais pas de la configuration $\phi \in \Gamma$ ni de $x \in \mathbb{R}^d$. Seul l'instant à partir duquel l'inégalité est vraie dépend de x et ϕ .

Corollaire 5.10. Pour tout $\phi \in \Gamma$, tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbb{P}_\phi(t^A(x) = \infty, \tau^A = \infty) = 0.$$

Preuve. La preuve est immédiate en utilisant la continuité monotone et la proposition [5.9](#) (croissance au moins linéaire). Il suffit de remarquer que $t^A(x) \leq t^y(x)$ pour tout $y \in C_\phi^\infty \cap A$ et d'écrire :

$$\mathbb{P}_\phi(t^A(x) = \infty, \tau^A = \infty) \leq \sum_{y \in C_\phi^\infty \cap A} \mathbb{P}_\phi(t^y(x) = \infty, \tau^y = \infty) = 0.$$

□

5.3 Le temps d'atteinte essentiel

5.3.1 Définition du temps d'atteinte essentiel $\sigma(x)$ et de la translation spatio-temporelle associée $\tilde{\theta}_x$

Afin de travailler avec des variables aléatoires intégrables, nous allons travailler sous $\bar{\mathbb{P}}$ qui désigne la mesure \mathbb{P} conditionnée à la survie du processus de contact. Malheureusement, ce conditionnement fait disparaître certaines propriétés comme l'indépendance et la stationnarité de nos quantités d'intérêt. Pour pallier ce phénomène, nous allons introduire le temps d'atteinte essentiel $\sigma(x)$ qui a la particularité de conserver indépendance et stationnarité sous la probabilité $\bar{\mathbb{P}}$ et qui d'autre part est très proche du temps d'atteinte $t(x)$.

Nous nous inspirons de la construction de O. Garet et R. Marchand [\[21\]](#) pour construire ce temps d'atteinte essentiel possédant les propriétés d'intégrabilité et de stationnarité sous la probabilité $\bar{\mathbb{P}}$.

On définit la probabilité $\bar{\mathbb{P}}$ par :

$$\bar{\mathbb{P}}(\cdot) := \mathbb{E} [\mathbb{P}_\Phi(\cdot \mid \tau = \infty)].$$

Il pourrait sembler plus naturel de travailler avec la mesure $\tilde{\mathbb{P}}(\cdot) := \mathbb{P}(\cdot \mid \tau = \infty)$, mais la preuve ne fonctionne pas avec cette mesure. Néanmoins, pour tout $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$, on a :

$$\mathbb{P}_\phi(\tau = \infty) > \rho_\lambda(\mathbb{N}) > 0,$$

où on rappelle que l'on a noté $\rho_\lambda(\mathbb{N}) > 0$ la probabilité de survie du processus de contact standard de paramètre λ sur \mathbb{N} partant de la configuration initiale $\{0\}$. Notons aussi $\rho_\lambda = \mathbb{P}(\tau = \infty) > 0$, il suit facilement que les probabilités $\bar{\mathbb{P}}$ et $\tilde{\mathbb{P}}(\cdot)$ sont équivalentes :

$$\rho_\lambda \tilde{\mathbb{P}}(\cdot) \leq \bar{\mathbb{P}}(\cdot) \leq \frac{\rho_\lambda}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \tilde{\mathbb{P}}(\cdot).$$

Cette remarque implique que si l'on montre un théorème de forme asymptotique pour $\bar{\mathbb{P}}$ alors il implique un théorème de forme asymptotique pour $\tilde{\mathbb{P}}(\cdot)$ qui est la probabilité naturelle.

Pour tout environnement gelé $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$, on note aussi :

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi(\cdot) := \mathbb{P}_\phi(\cdot \mid \tau = \infty).$$

On note respectivement $\bar{\mathbb{E}}$ et $\bar{\mathbb{E}}_\phi$ les opérateurs espérance associés aux mesures $\bar{\mathbb{P}}$ et $\bar{\mathbb{P}}_\phi$. On note que pour toute application mesurable positive f :

$$\bar{\mathbb{E}}[f] = \mathbb{E}[\bar{\mathbb{E}}_\Phi[f]].$$

On fixe $x \in \mathbb{R}^d$ et on pose $u_0(x) = v_0(x) = 0$. On définit alors par récurrence deux suites croissantes de temps d'arrêt $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

- Supposons que $v_k(x)$ est défini, posons :

$$u_{k+1}(x) := \inf \{t > v_k(x) : q(x) \in \xi_t\}.$$

Si $v_k(x)$ est fini, alors $u_{k+1}(x)$ est le premier instant après $v_k(x)$ où le site $q(x)$ est réinfecté ; sinon, $u_{k+1}(x) = \infty$.

- Supposons que $u_k(x)$ est défini avec $k \geq 1$ et posons :

$$v_k(x) := u_k(x) + \tau^{q(x)} \circ \theta_{u_k(x)}.$$

Si $u_k(x)$ est fini, alors le temps $\tau^{q(x)} \circ \theta_{u_k(x)}$ est le temps d'extinction (éventuellement infini) du processus démarré au temps $u_k(x)$ de la configuration $\{q(x)\}$; sinon $v_k(x) = \infty$.

On a alors :

$$u_0(x) = v_0(x) \leq u_1(x) \leq v_1(x) \leq \dots \leq u_k(x) \leq v_k(x) \dots$$

On définit maintenant $K(x)$ comme la première étape à laquelle $v_k(x)$ ou $u_{k+1}(x)$ devient infini :

$$K(x) := \min \{k \geq 0 : v_k(x) = \infty \text{ ou } u_{k+1}(x) = \infty\}.$$

Définition 5.11. On appelle temps d'atteinte essentiel de x la quantité $\sigma(x) := u_{K(x)}$.

Remarque. On définit de même les variables aléatoires : $u_k^A(x)$, $v_k^A(x)$, $\sigma^A(x)$, $K^A(x)$ lorsque la configuration initiale $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est différente du singleton $q(0)$. (Encore une fois, on omettra les accolades pour les singletons.)

Remarque. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, f une fonction de démarrage et τ un temps d'arrêt dont la queue de distribution décroît exponentiellement vite, on définit plus généralement deux suites de temps d'arrêt $(u_n(x, f, \tau))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n(x, f, \tau))_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit :

- Supposons que $v_k(x, f, \tau)$ est défini, posons :

$$u_{k+1}(x, f, \tau) := \inf \{t > v_k(x, f, \tau) : f(x) \in \xi_t\}.$$

- Supposons que $u_k(x, f, \tau)$ est défini avec $k \geq 1$ et posons :

$$v_k(x, f, \tau) := u_k(x, f, \tau) + \tau \circ \theta_{u_k(x, f, \tau)}.$$

On définit naturellement les quantités $K(x, f, \tau)$ et $\sigma(x, f, \tau)$ qui sont les équivalents de $K(x)$ et $\sigma(x)$ dans le cadre général.

Sauf exception, toutes les preuves jusqu'à la section [5.6](#) Théorème de forme asymptotique s'adaptent immédiatement dans ce cadre général mais sont rédigées dans le cas particulier de $f = q$ et $\tau = \tau^{q(x)}$ pour plus de simplicité. On prendra garde à bien préciser les preuves qui sont spécifiques à ce cadre particulier. Le cadre général est utile en section [5.7](#) Zone couplée.

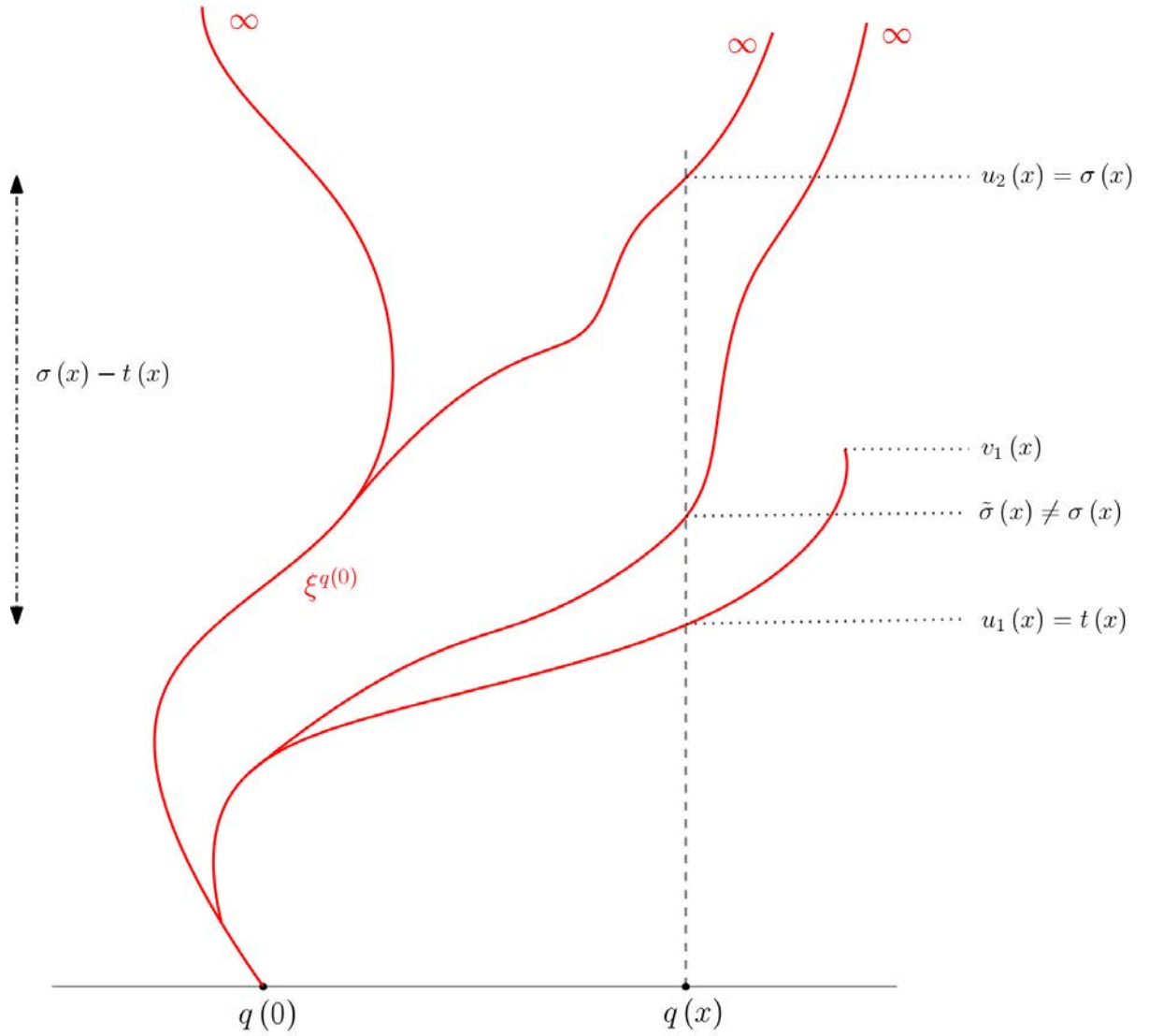
La quantité $\sigma(x)$ correspond à un temps où $q(x)$ est infecté et a une descendance infinie mais ce n'est pas le premier temps qui vérifie cette propriété! (voir Figure page [63](#) sur le temps d'atteinte essentiel)

Définissons un opérateur de translation spatio-temporel aléatoire associé au temps d'atteinte essentiel :

$$\tilde{\theta}_x = \begin{cases} T_x \circ \theta_{\sigma(x)} & \text{si } \sigma(x) < \infty \\ T_x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque.

Sous $\bar{\mathbb{P}}$, $u_k(x)$ et $u_k(-x)$ sont identiquement distribuées. C'est aussi vrai pour $v_k(x)$, $K(x)$ et $\sigma(x)$.



Le temps d'atteinte essentiel

Sur ce dessin, $K(x) = 2$ et $v_2(x) = \infty$. Le temps $\tilde{\sigma}(x)$ désigne le premier instant où le processus de contact atteint $q(x)$ et à partir duquel $q(x)$ a une descendance infinie.

5.3.2 Propriété de stationnarité et d'ergodicité de $\tilde{\theta}_x$ sous $\bar{\mathbb{P}}$

Le but de cette section est de montrer les deux résultats suivants :

Proposition 5.12. Soient x, y dans \mathbb{R}^d et soit ϕ dans $\{\exists! \text{ amas } \infty\}$.

- La transformation $\tilde{\theta}_x$ laisse $\bar{\mathbb{P}}$ invariante.
- Sous $\bar{\mathbb{P}}_\phi$, les variables aléatoires $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$ et $\sigma(x)$ sont indépendantes. En outre, la loi de $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$ sous $\bar{\mathbb{P}}_\phi$ est la même que celle de $\sigma(y)$ sous $\bar{\mathbb{P}}_{T_x(\phi)}$.
- Les variables aléatoires $\left(\sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^j\right)_{j \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes sous $\bar{\mathbb{P}}_\phi$.

Proposition 5.13. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ non-nul, le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \bar{\mathbb{P}}, \tilde{\theta}_x)$ est ergodique.*

Commençons par vérifier que $K(x)$ est fini presque sûrement. Cela impliquera que $\sigma(x)$ est bien défini. On rappelle que $\rho_\lambda(\mathbb{N})$ désigne la probabilité de survie du processus de contact de paramètre λ partant de 0 dans le graphe \mathbb{N} . Montrons alors que $K(x)$ est dominé stochastiquement par une loi géométrique de paramètre $0 < \rho_\lambda(\mathbb{N}) < 1$ sous \mathbb{P} :

Lemme 5.14. *Pour tout $\phi \in \{\exists! \text{amas } \infty\}$, tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $k \in \mathbb{N}$;*

$$\mathbb{P}_\phi(K(x) > k) \leq (1 - \rho_\lambda(\mathbb{N}))^k.$$

Preuve. Soit donc un tel environnement ϕ , $x \in \mathbb{R}^d$ et $k \in \mathbb{N}$. En utilisant la propriété de Markov forte pour ξ au temps $u_{k+1}(x)$ sous \mathbb{P}_ϕ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\phi(K(x) > k + 1) &= \mathbb{P}_\phi(u_{k+2}(x) < \infty) \\ &\leq \mathbb{P}_\phi(u_{k+1}(x) < \infty, v_{k+1}(x) < \infty) \\ &= \mathbb{P}_\phi(u_{k+1}(x) < \infty, \tau^{q(x)} \circ \theta_{u_{k+1}(x)} < \infty) \\ &= \mathbb{P}_\phi(u_{k+1}(x) < \infty) \mathbb{P}_\phi(\tau^{q(x)} < \infty). \end{aligned}$$

Or,

$$\mathbb{P}_\phi(\tau^{q(x)} < \infty) \leq (1 - \rho_\lambda(\mathbb{N})).$$

Ainsi ;

$$\mathbb{P}_\phi(K(x) > k + 1) \leq (1 - \rho_\lambda(\mathbb{N})) \mathbb{P}_\phi(K(x) > k),$$

ce qui prouve le lemme. □

L'équivalence suivante sera utile pour contrôler l'écart entre les temps d'atteinte et les temps d'atteinte essentiels :

Lemme 5.15. *Pour tout $\phi \in \Gamma$, pour tout x dans \mathbb{R}^d et pour tout k dans \mathbb{N} , \mathbb{P}_ϕ presque sûrement ;*

$$(K(x) = k \text{ et } \tau = \infty) \iff (u_k(x) < \infty \text{ et } v_k(x) = \infty).$$

Ceci implique que cette équivalence est aussi vraie \mathbb{P} presque sûrement.

Preuve. L'implication \Leftarrow est immédiate et découle des définitions.

Pour montrer \Rightarrow , on fixe $k \in \mathbb{N}$, $\phi \in \Gamma$ et on applique la propriété de Markov forte pour le processus ξ au temps d'arrêt $v_k(x)$ sous la probabilité \mathbb{P}_ϕ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\phi(\tau = \infty, v_k(x) < \infty, u_{k+1}(x) = \infty \mid \mathcal{F}_{v_k(x)}) \\ = \mathbb{1}_{\{v_k(x) < \infty\}} \mathbb{P}_\phi(\tau^\bullet = \infty, t^\bullet(x) = \infty) \circ \xi_{v_k(x)}. \end{aligned}$$

Pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, en vertu du corollaire [5.10](#) de la propriété de croissance au moins linéaire, $\mathbb{P}_\phi(\tau^A = \infty, t^A(x) = \infty) = 0$ ce qui implique :

$$\mathbb{P}_\phi(\tau = \infty, v_k(x) < \infty, u_{k+1}(x) = \infty) = 0$$

et donc aussi $\mathbb{P}(\tau = \infty, v_k(x) < \infty, u_{k+1}(x) = \infty) = 0$, ce qui achève la preuve. \square

Remarque. On peut comprendre ce résultat comme suit : conditionnellement à la survie, le procédé de redémarrage s'arrête parce qu'on a trouvé un instant $u_{K(x)}$ où la descendance de $q(x)$ est infinie et non parce que $q(x)$ n'est plus jamais infecté.

Nous allons maintenant nous intéresser à la stationnarité des transformations $\tilde{\theta}_x$ sous $\bar{\mathbb{P}}$ ainsi qu'à l'indépendance de la famille de variables $(\sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^j)_{j \in \mathbb{N}}$ sous $\bar{\mathbb{P}}_\phi$.

Remarque. Attention les résultats [5.16](#), [5.12](#), [5.13](#), [5.17](#), [5.18](#) et [5.19](#) qui suivent sont spécifiques au cadre particulier de $f = q$ et $\tau = \tau^{q(x)}$ dans la définition du temps d'atteinte essentiel $\sigma(x)$.

Lemme 5.16. Soit $\phi \in \{\exists! \text{amas } \infty\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, et $E \in \mathcal{F}$ un événement quelconque. Alors :

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi(\{\sigma(x) \in B\} \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(E)) = \bar{\mathbb{P}}_\phi(\sigma(x) \in B) \bar{\mathbb{P}}_{T_x(\phi)}(E).$$

Preuve. Soient donc ϕ , x , B et E comme dans l'énoncé. Nous allons utiliser le système complet d'événements $(\{K(x) = k\})_{k \in \mathbb{N}}$; ainsi il suffit de montrer l'égalité annoncée en remplaçant $\{\sigma(x) \in A\}$ par $\{\sigma(x) \in A\} \cap \{K(x) = k\}$ pour tout k :

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\phi(\{\tau = \infty\} \cap \{\sigma(x) \in B\} \cap \{K(x) = k\} \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(E)) \\ &= \mathbb{P}_\phi(\{u_k(x) < \infty\} \cap \{u_k(x) \in B\} \cap \{v_k(x) = \infty\} \cap (T_x \circ \theta_{\sigma(x)})^{-1}(E)) \\ &= \mathbb{P}_\phi(\{u_k(x) < \infty\} \cap \{u_k(x) \in B\} \cap \{\tau^{q(x)} \circ \theta_{u_k(x)} = \infty\} \cap (T_x \circ \theta_{u_k(x)})^{-1}(E)) \\ &= \mathbb{P}_\phi(\{u_k(x) < \infty\} \cap \{u_k(x) \in B\}) \mathbb{P}_\phi(\{\tau^{q(x)} = \infty\} \cap (T_x)^{-1}(E)) \\ &= \mathbb{P}_\phi(\{u_k(x) < \infty\} \cap \{u_k(x) \in B\}) \mathbb{P}_{T_x(\phi)}(\{\tau = \infty\} \cap E). \end{aligned}$$

La première égalité vient de l'équivalence du lemme [5.15](#), la deuxième découle des définitions des variables aléatoires $v_k(x)$ et $\sigma(x)$, la troisième est due à la propriété de Markov forte du processus de contact sous \mathbb{P}_ϕ et la dernière est juste une réécriture de la précédente à l'aide de la proposition [3.4](#).

En divisant l'égalité obtenue par $\mathbb{P}_\phi(\tau = \infty)$, on obtient :

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi(\{\sigma(x) \in B\} \cap \{K(x) = k\} \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1}(E)) = \Psi(x, \phi, k, B) \bar{\mathbb{P}}_{T_x(\phi)}(E).$$

On déduit $\Psi(x, \phi, k, B)$ en évaluant en un événement E presque sûr et cela achève la preuve. \square

On peut maintenant démontrer le premier résultat annoncé au début de la section :

Proposition 5.12. *Soient x, y dans \mathbb{R}^d et soit ϕ dans $\{\exists! \text{ amas } \infty\}$.*

- *La transformation $\tilde{\theta}_x$ laisse $\bar{\mathbb{P}}$ invariante.*
- *Sous $\bar{\mathbb{P}}_\phi$, les variables aléatoires $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$ et $\sigma(x)$ sont indépendantes. En outre, la loi de $\sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$ sous $\bar{\mathbb{P}}_\phi$ est la même que celle de $\sigma(y)$ sous $\bar{\mathbb{P}}_{T_x(\phi)}$.*
- *Les variables aléatoires $\left(\sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^j\right)_{j \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes sous $\bar{\mathbb{P}}_\phi$.*

Preuve. Pour le premier point, il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $B = \mathbb{R}_+$ (ie. de sorte que $\{\sigma(x) \in B\}$ soit de mesure 1.) puis d'intégrer l'égalité obtenue :

$$\bar{\mathbb{P}}(E) = \mathbb{E} \left[\bar{\mathbb{P}}_\Phi \left((\tilde{\theta}_x)^{-1}(B) \right) \right] = \mathbb{E} \left[\bar{\mathbb{P}}_{T_x(\Phi)}(B) \right].$$

Or la loi de Φ est invariante par translation sous \mathbb{P} .

Pour le second point, il suffit d'appliquer le lemme 5.16 en choisissant E de la forme $\{\sigma(y) \in \tilde{B}\}$ avec $\tilde{B} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.

Enfin, pour le dernier point, considère $n \in \mathbb{N}$, ainsi que B_0, \dots, B_n des éléments de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. On a :

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\bigcap_{k=0}^n \left\{ \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^k \in B_k \right\} \right) \\ &= \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\left\{ \sigma(x) \in B_0 \right\} \cap (\tilde{\theta}_x)^{-1} \left(\left\{ \left(\sigma(x), \dots, \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^{n-1} \right) \in B_1 \times \dots \times B_n \right\} \right) \right) \\ &= \bar{\mathbb{P}}_\phi(\sigma(x) \in B_0) \bar{\mathbb{P}}_{T_x(\phi)} \left(\bigcap_{k=1}^n \left\{ \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^{k-1} \in B_k \right\} \right) \\ &= \dots \\ &= \prod_{k=0}^n \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\left\{ \sigma(x) \circ (\tilde{\theta}_x)^k \in B_k \right\} \right) \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

Pour prouver la propriété d'ergodicité annoncée dans la deuxième proposition au début de la section, nous aurons besoin de trois lemmes intermédiaires. Le premier est dans l'esprit du lemme 5.16.

Il semble naturel de s'intéresser à la dépendance en m entre A et $\tilde{\theta}_x^{-m}(B)$ pour deux événements A et B où l'on a noté

$$\tilde{\theta}_x^m := T_{mx} \circ \theta_{S_m(x)} \text{ avec } S_m(x) := \sum_{j=0}^{m-1} \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x^j.$$

Lemme 5.17. Soit $t > 0$, pour tous $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$, $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{F}_t$, $B \in \mathcal{F}$ et $m \geq 1$, on a

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(A \cap \{t \leq S_m(x)\} \cap \left(\tilde{\theta}_x^m\right)^{-1}(B) \right) = \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(A \cap \{t \leq S_m(x)\} \right) \bar{\mathbb{P}}_{T_{mx}(\phi)}(B).$$

Preuve. Posons $K_m(x) := (K(x), K(x) \circ \tilde{\theta}_x, \dots, K(x) \circ \tilde{\theta}_x^{m-1})$. Il suffit de prouver que pour tout $k \in (\mathbb{N}^*)^m$, on a

Soit donc $k \in (\mathbb{N}^*)^m$. On pose $R_0(x) = 0$ et, pour $l \leq m-1$, $R_{l+1}(x) = R_l(x) + u_{k_l}(x) \circ \theta_{R_l(x)}$. Les événements suivant coïncident :

$$\{\tau = \infty\} \cap \{K_m(x) = k\} = \left[\bigcap_{j=0}^{m-1} \left\{ u_{k_j} \circ T_{jx} \circ \theta_{R_j(x)} < \infty \right\} \right] \cap \left\{ \tau \circ T_{mx} \circ \theta_{R_m(x)} = \infty \right\}.$$

En outre, sur ces événements, on a $S_m(x) = R_m(x)$. Par construction $R_m(x)$ est un temps d'arrêt. Notons Δ_m l'événement

$$A \cap \{t \leq R_m(x)\} \cap \left[\bigcap_{j=0}^{m-1} \left\{ u_{k_j} \circ T_{jx} \circ \theta_{R_j(x)} < \infty \right\} \right].$$

En remarquant que cet événement est dans $\mathcal{F}_{R_m(x)}$ et en utilisant d'abord l'égalité des événements ci-dessus puis la propriété de Markov forte, on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_\phi \left(\{\tau = \infty\} \cap A \cap \{t \leq S_m(x)\} \cap \tilde{\theta}_x^{-m}(B) \cap \{K_m(x) = k\} \right) \\ &= \mathbb{P}_\phi \left(\Delta_m \cap \left\{ \tau \circ T_{mx} \circ \theta_{R_m(x)} = \infty \right\} \cap \tilde{\theta}_x^{-m}(B) \right) \\ &= \mathbb{P}_\phi(\Delta_m) \mathbb{P}_{T_{mx}(\phi)}(\{\tau = \infty\} \cap B). \end{aligned}$$

En divisant cette égalité par $\mathbb{P}_\phi(\tau = \infty)$, on obtient une identité de la forme

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(A \cap \{t \leq S_m(x)\} \cap \tilde{\theta}_x^{-m}(B) \cap \{K_m(x) = k\} \right) = \psi(\phi, x, k, m, A) \bar{\mathbb{P}}_{T_{mx}(\phi)}(B),$$

et on identifie $\psi(\phi, x, k, m, A)$ en évaluant en $B = \Omega$. \square

Remarque. Les deux lemmes qui suivent sont spécifiques au cadre de la percolation Booléenne !

Pour $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$ et $x \in C_\phi^\infty$, notons $\text{deg}(x)$ le degré du point x dans le graphe Booléen en environnement ϕ . Nous montrons maintenant une propriété de mélange pour $\tilde{\theta}_x$. On va considérer une variable aléatoire $N_m^x(R)(\Phi)$ qui permettra de minorer le nombre de fois avant $m \geq 1$ où les itérées successives de $\tilde{\theta}_x$ n'agissent pas de façon triviale. Pour cela on s'intéresse à des événements de la forme $\{q(0) \neq q(x)\} \circ T_{jx}(\Phi)$. En outre dans $N_m^x(R)(\Phi)$, on veut pouvoir contrôler que l'effet des itérées des $\tilde{\theta}_x$ n'est pas trop négligeable. Pour cela, il apparaîtra dans la preuve que l'on a besoin d'un contrôle sur les degrés des translatés $q(jx)$.

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ non-nul, $m \in \mathbb{N}^*$, $R > 0$ et $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$, notons :

$$N_m^x(R)(\phi) := \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{1}_{\{q(0) \neq q(x)\} \cap \{\text{deg}(q(x)) \leq R^{d+2}\}} \circ T_{jx}(\phi).$$

Lemme 5.18. *Pour tout $R > 0$, tout $t > 0$ et tout $q > 1$ fixés, il existe une constante $A(t, q, R)$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ non-nul, pour tout $A \in \mathcal{F}_t$, $B \in \mathcal{F}$, $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$, et tout $m \in \mathbb{N}^*$,*

$$\left| \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(A \cap \tilde{\theta}_x^{-m}(B) \right) - \bar{\mathbb{P}}_\phi(A) \bar{\mathbb{P}}_{T_{mx}(\phi)}(B) \right| \leq A(t, q, R) q^{-N_m^x(R)(\phi)}.$$

Preuve. Soient donc R, t, q, A, B, x, ϕ et m comme dans l'énoncé. En vertu du lemme [5.17](#), on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(A \cap \tilde{\theta}_x^{-m}(B) \right) - \bar{\mathbb{P}}_\phi(A) \bar{\mathbb{P}}_{T_{mx}(\phi)}(B) \right| \\ & \leq \left| \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\{t \leq S_m(x)\} \cap A \cap \tilde{\theta}_x^{-m}(B) \right) - \bar{\mathbb{P}}_\phi(\{t \leq S_m(x)\} \cap A) \bar{\mathbb{P}}_{T_{mx}(\phi)}(B) \right| \\ & \quad + 2\bar{\mathbb{P}}_\phi(t > S_m(x)) \\ & = 2\bar{\mathbb{P}}_\phi(t > S_m(x)). \end{aligned}$$

Remarquons que si $q(0) \neq q(x)$ et si $\deg(q(x)) \leq R^{d+2}$, alors $\sigma(x)$ qui est un temps d'atteinte du point $q(x)$ partant de $q(0)$ domine stochastiquement une variable aléatoire exponentielle de paramètre R^{d+2} sous \mathbb{P}_ϕ car au moins une infection a dû se produire sur au moins l'une des arêtes incidentes à $q(x)$. Ceci implique que pour γ suffisamment grand :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}_\phi \left[e^{-\gamma\sigma(x)} \right] & \leq \frac{\mathbb{E}_\phi \left[e^{-\gamma\sigma(x)} \right]}{\mathbb{P}_\phi(\tau = \infty)} \\ & \leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \frac{R^{d+1}}{\gamma + R^{d+1}} \\ & \leq q^{-1}. \end{aligned}$$

On rappelle qu'on a noté $\rho_\lambda(\mathbb{N})$ la probabilité de survie du processus de contact de paramètre λ partant de la configuration initiale $\{0\}$ sur le graphe \mathbb{N} . Soit donc un tel $\gamma > 0$, en vertu de l'inégalité de Markov, on a

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi(t > S_m(x)) \leq e^{\gamma t} \bar{\mathbb{E}}_\phi \left[e^{-\gamma S_m(x)} \right].$$

On utilise alors les deuxième et troisième points de la proposition [5.12](#) pour obtenir

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}_\phi \left[e^{-\gamma S_m(x)} \right] & \leq \bar{\mathbb{E}}_\phi \left[e^{-\gamma \sum_{j=0}^{m-1} \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x^j} \right] \\ & \leq \prod_{j=0}^{m-1} \bar{\mathbb{E}}_\phi \left[e^{-\gamma \sigma(x) \circ \tilde{\theta}_x^j} \right] \\ & \leq \prod_{j=0}^{m-1} \bar{\mathbb{E}}_{T_{jx}(\phi)} \left[e^{-\gamma \sigma(x)} \right] \\ & \leq q^{-N_m^x(R)(\phi)}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Pour utiliser cette propriété de mélange, on aura besoin de grandes déviations pour la quantité $N_m^x(R)(\Phi)$ sous \mathbb{P} .

Lemme 5.19. *Il existe $R, A, B > 0$ tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \exists \alpha > 0, \forall m \geq 1, \mathbb{P}(N_m^x(R)(\Phi) \leq \alpha m) \leq Ae^{-Bm}.$$

Preuve. La preuve repose sur un argument de renormalisation et sur le théorème 5 de Durrett et Schonmann [10]. Nous allons démontrer le cas particulier $x = e_1$. La preuve s'adapte aisément au cas général : il faut tordre les constructions qui suivent et cela n'ajoute aucune autre difficulté que celle de la rédaction. Dans leur papier, Durrett et Schonmann traitent le cas $d = 2$. Nous allons donc utiliser une technique de renormalisation afin de pouvoir toujours se ramener au cas de la dimension 2.

Commençons par définir une notion de bon événement pour la boîte Q_R : on dit que la boîte Q_R est une bonne boîte si elle est à croisement (voir section *Un peu de Percolation*) et si $|\Phi \cap Q_{2R}| \leq R^{d+1}$. Pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, on note :

$$X_{i,j} = \mathbb{1}_{\{Q_R(iRe_1 + jRe_2) \text{ est à croisement} \cap \{|\Phi \cap Q_{2R}(iRe_1 + jRe_2)| \leq R^{d+1}\}\}}.$$

Le processus $(X_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ est un processus 4-dépendant donc, en vertu de la proposition 2.6 et de la proposition 4.6 (LSS), on peut choisir R suffisamment grand pour que le processus $(X_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ domine stochastiquement une percolation de Bernoulli indépendante surcritique sur les sites de \mathbb{Z}^2 . Or sur ce modèle, R. Durrett et R.H. Schonmann ont montré un résultat de grandes déviations pour le nombre de sites sur un segment appartenant à l'amas infini [10] (théorème 5). Ce résultat nous donne directement l'existence de $\tilde{\alpha}, A, B > 0$ tels que :

$$\mathbb{P}(\tilde{N}_m \leq \tilde{\alpha}m) \leq Ae^{-Bm},$$

où l'on a noté $\tilde{N}_m := \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{1}_{X_{i,0}=1}$.

On remarque alors que l'existence d'un chemin infini dans la percolation macroscopique $(X_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ implique que C_Φ^∞ intersecte chacune des boîtes de la forme $Q_R(iRe_1 + jRe_2)$ avec i, j dans \mathbb{Z} tels que $X_{i,j}$ soit dans l'amas infini de la percolation macroscopique. En effet, on a déjà remarqué que par définition des boîtes à croisement, les gros amas de deux boîtes à croisement voisines sont connectés (voir plus haut). De ce fait, on peut facilement déduire l'existence de $\beta > 0$ (dépendant de $x = e_1$) tel que :

$$N_m^{e_1}(R)(\Phi) \geq \beta \tilde{N}_m.$$

Et ainsi :

$$\mathbb{P}(N_m^{e_1}(R)(\Phi) \leq \tilde{\alpha}\beta m) \leq \mathbb{P}(\beta \tilde{N}_m \leq \tilde{\alpha}\beta m) \leq \mathbb{P}(\tilde{N}_m \leq \tilde{\alpha}m).$$

Ce qui achève la preuve. □

On peut passer à la preuve de la proposition :

Proposition 5.13. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ non-nul, le système dynamique $(\Omega, \mathcal{F}, \bar{\mathbb{P}}, \tilde{\theta}_x)$ est ergodique.*

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ non-nul, notons que $\mathcal{A} := \bigcup_{t>0} \mathcal{F}_t$ est une algèbre génératrice de \mathcal{F} . Il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ \tilde{\theta}_x^k \text{ converge dans } L^2(\bar{\mathbb{P}}) \text{ vers } \bar{\mathbb{P}}(A).$$

Considérons d'abord la quantité :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_\Phi(A) \circ \tilde{\theta}_x^k.$$

Premièrement, comme $\bar{\mathbb{P}}_\Phi(A)$ est Φ mesurable, en vertu du lemme 5.16 on peut remplacer $\tilde{\theta}_x^k$ par T_x^k dans chacun des termes. Deuxièmement, la somme complète étant Φ mesurable, sa loi est la même sous $\bar{\mathbb{P}}$ ou sous \mathbb{P} . Alors, comme le système $(X, \mathcal{X}, \mathbb{P}^\Phi, T_x)$ est ergodique (où \mathbb{P}^Φ désigne la mesure image de \mathbb{P} par Φ), le théorème de Von Neumann implique :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_\Phi(A) \circ \tilde{\theta}_x^k \text{ converge dans } L^2(\bar{\mathbb{P}}) \text{ vers } \mathbb{E}[\bar{\mathbb{P}}_\Phi(A)] = \bar{\mathbb{P}}(A).$$

On peut donc se ramener à montrer que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [(\mathbb{1}_A - \bar{\mathbb{P}}_\Phi(A)) \circ \tilde{\theta}_x^k] \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\bar{\mathbb{P}}).$$

Pour $k \geq 0$, notons $Y_k := (\mathbb{1}_A - \bar{\mathbb{P}}_\Phi(A)) \circ \tilde{\theta}_x^k$. De la proposition 5.12 on obtient que le processus $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire sous $\bar{\mathbb{P}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} Y_k \right)^2 \right] &= \sum_{i,j \in [0:n-1]} \bar{\mathbb{E}}[Y_i Y_j] \\ &\leq 2n \sum_{k=0}^{+\infty} |\bar{\mathbb{E}}[Y_0 Y_k]| \end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue grâce à la stationnarité des Y_k et avec une majoration assez grossière des nombres de termes $Y_0 Y_k$ apparus. Soit donc $k \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}[Y_0 Y_k] &= \bar{\mathbb{E}} \left[(\mathbb{1}_A - \bar{\mathbb{P}}_\Phi(A)) \left((\mathbb{1}_A - \bar{\mathbb{P}}_\Phi(A)) \circ \tilde{\theta}_x^k \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\bar{\mathbb{P}}_\Phi(A \cap \tilde{\theta}_x^k(A)) - 2\bar{\mathbb{P}}_\Phi(A) \bar{\mathbb{P}}_{T_x^k(\Phi)}(A) + \bar{\mathbb{P}}_\Phi(A) \bar{\mathbb{P}}_{T_x^k(\Phi)}(A) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\bar{\mathbb{P}}_\Phi(A \cap \tilde{\theta}_x^k(A)) - \bar{\mathbb{P}}_\Phi(A) \bar{\mathbb{P}}_{T_x^k(\Phi)}(A) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, en vertu des lemmes 5.18 et 5.19, pour des choix convenables de $\alpha, A, B, R > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}} \left[\left(\sum_{k=0}^{n-1} Y_k \right)^2 \right] &\leq 2n \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P} \left[A(t, 2, R) 2^{-N_k^x(R)(\Phi)} \right] \\ &\leq 2n \sum_{k=0}^{+\infty} A(t, 2, R) \left[2^{-\alpha k} + A e^{-Bk} \right] \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve car la dernière série converge. □

5.3.3 Contrôle du défaut de sous-additivité de $\sigma(x)$

Dans cette partie, nous cherchons à contrôler des quantités de la forme : $\sigma(x+y) - \sigma(x) - \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$. Plus précisément, on veut montrer le théorème :

Théorème 5.20. *Il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $\phi \in \Gamma$, tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et tout $t > \mathcal{T}(x+y)$,*

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x+y) - \left[\sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x \right] \geq t \right) \leq Ae^{-B\sqrt{t}}.$$

Pour cela, nous avons essentiellement besoin de contrôler des quantités plus simples :

- La durée de vie de la descendance de $q(x)$ dans un environnement gelé ϕ , ce qui nous permettra d'estimer les variables aléatoires du type $v_k(x) - u_k(x)$.
- Les durées de réinfection du point $q(x)$ de la forme $u_{k+1}(x) - v_k(x)$.

En outre, on aimerait avoir des contrôles uniformes en x sur ces quantités ; c'est d'ailleurs la principale difficulté ! Elle sera facilement contournée pour le premier point mais demandera plus de travail pour le second.

Remarque. *Le contrôle du théorème [5.20](#) est seulement en exponentielle de racine. Cette difficulté est déjà apparue aux auteurs O. Garet et R. Marchand dans leur papier [\[21\]](#). Elle est essentiellement due à l'étude des durées de réinfection du point $q(x)$ de la forme $u_{k+1}(x) - v_k(x)$. On pourrait essayer d'obtenir des contrôles plus fins comme O. Garet et R. Marchand l'ont fait dans [\[23\]](#) pour obtenir des résultats de grandes déviations mais nous n'en avons pas besoin ici.*

Lemme 5.21. *Il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$;*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t > 0, \quad \bar{\mathbb{P}}_\phi(\exists k < K(x) : v_k(x) - u_k(x) > t) \leq Ae^{-Bt}.$$

Preuve. Soit donc $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$. On rappelle qu'on a noté $\rho_\lambda(\mathbb{N})$ la probabilité de survie du processus de contact de paramètre λ partant de la configuration initiale $\{0\}$ sur le graphe \mathbb{N} . En utilisant le lemme [5.14](#) et la propriété de Markov forte vérifiée par ξ sous \mathbb{P}_ϕ , on obtient :

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbb{P}}_\phi(\exists k < K(x) : v_k(x) - u_k(x) > t) \\ & \leq \frac{\mathbb{P}_\phi \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{v_k(x) - u_k(x) > t\} \cap \{k < K(x)\} \right)}{\mathbb{P}_\phi(\tau = \infty)} \\ & \leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_\phi(\{t < v_k(x) - u_k(x) < \infty\} \cap \{u_k(x) < \infty\}) \\ & \leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_\phi \left(\left(\theta_{u_k(x)} \right)^{-1} \left(\{t < \tau^{q(x)} < \infty\} \right) \cap \{u_k(x) < \infty\} \right) \\ & \leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \mathbb{P}_\phi(t < \tau^{q(x)} < \infty) \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}_\phi(K(x) > k-1) \\ & \leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})^2} \mathbb{P}_\phi(t < \tau^{q(x)} < \infty). \end{aligned}$$

La proposition [5.8](#) (extinction rapide) permet de conclure. □

L'étape suivante consiste à contrôler $u_{k+1}(x) - v_k(x)$. Pour cela, nous allons introduire la notion de point de mauvaise croissance.

Heuristique : Pour traiter les temps de régénération de type $u_{k+1}(x) - v_k(x)$, l'idée est de chercher, proche du point $(x, u_k(x))$ en coordonnées spatio-temporelles, un point (y, t) , engendré par $(0, 0)$, de temps de vie infini : nous pourrons alors, avec l'estimée de croissance au moins linéaire, montrer que x est engendré, pas trop longtemps après $v_k(x)$, à partir de ce nouveau point source (y, t) . Toute la difficulté consiste à bien contrôler la distance entre $(x, u_k(x))$ et un point source (y, t) . Si la configuration autour de $(x, u_k(x))$ est *raisonnable*, ce point sera proche de $(x, u_k(x))$, ce qui donnera le contrôle souhaité entre $u_{k+1}(x)$ et $v_k(x)$.

Pour tout point $y \in \mathbb{R}^d$, on note c_y le processus ponctuel de Poisson d'intensité 1 correspondant aux temps de guérison de la particule $q(y)$ c'est-à-dire la première coordonnée de la marque associée à l'atome dont la première coordonnée est $q(y)$. Notons aussi :

$$\kappa := 3(K\alpha_{\mathbb{N}} + 1) > 3,$$

où l'on rappelle que $K > 0$ et $\alpha_{\mathbb{N}} > 0$ sont des constantes fixées qui vérifient respectivement les énoncés des propositions [5.5](#) (croissance au plus linéaire) et [5.9](#) (croissance au moins linéaire) et que l'on peut supposer supérieures à 1.

Définition 5.22. *Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$, notons :*

- $E_0^y(t) := \{c_y([0, \frac{t}{2}]) = 0\}$ (pas de mort en $q(y)$ jusqu'au temps $\frac{t}{2}$.)
- $E_1^y(t) := \{H_t^{q(y)} \cap C_{\mathbb{F}}^{\infty} \not\subseteq B_{\mathbb{F}}^{\infty}(y, Kt)\}$ (la descendance de $q(y)$ croît trop vite.)
- $E_2^y(t) := \{\frac{1}{2}t < \tau^{q(y)} < \infty\}$ (la descendance de $q(y)$ est finie mais trop longue.)
- $E_3^y(x, t) := \{\tau^{q(y)} = \infty\} \cap \{\inf\{s \geq 2t : q(x) \in \xi_s^{q(y)}\} > \kappa t\}$ ($q(y)$ a une descendance infinie mais retouche $q(x)$ trop tard.).

Notons aussi :

$$E^y(x, t) := E_0^y(t) \cup E_1^y(t) \cup E_2^y(t) \cup E_3^y(x, t).$$

Nous dirons que le point y a une mauvaise croissance (paramétrée par t) par rapport à la particule x si l'événement $E^y(x, t)$ est réalisé.

Remarque. • Si y n'est pas un point de mauvaise croissance par rapport à la particule x , alors la descendance de y ne croît pas trop vite et il vérifie un des deux cas suivants :

1. sa descendance est finie et courte
2. sa descendance est infinie et retouche vite $q(x)$.

- Si $q(y)$ est loin de $q(x)$, et que y est de bonne croissance (ie. pas de mauvaise croissance) par rapport à la particule x , alors y vérifie forcément le premier cas du deuxième point. (Car il ne peut pas toucher $q(x)$ rapidement tout en ayant une descendance qui ne croît pas trop vite.)

On rappelle que E^{Bool} désigne l'ensemble des arêtes Booléennes. Pour tout $e \in E^{\text{Bool}}$, on introduit la mesure c_e qui correspond aux infections le long de l'arête c_e dans l'un ou l'autre des sens d'infection. Ainsi, la loi de c_e est celle d'un processus ponctuel de Poisson d'intensité 2λ .

On veut vérifier qu'avec grande probabilité, il n'y a pas de point de mauvaise croissance dans une boîte autour de $q(x)$. De ce fait, on définit pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tous $L, t > 0$:

$$N_L(x, t) := \sum_{y \in B_{\mathbb{F}}^{\infty}(x, Kt+2)} \int_0^L \mathbb{1}_{E^y(x, t)} \circ \theta_s d \left(c_y + \sum_{e \in E^{\text{Bool}}: y \in e} c_e + \delta_0 \right) (s).$$

Dans $N_L(x, t)$, on compte le nombre de points (y, s) dans la boîte spatio-temporelle $B_{\mathbb{F}}^{\infty}(x, Kt+2) \times [0, L]$ tels que quelque chose se passe au contact du point y au temps s (comme une possible guérison ou infection) et que l'événement $E^y(x, t) \circ \theta_s$ ait lieu.

Commençons par vérifier que, si $N_L(x, t) \circ \theta_s = 0$ pour un certain $s > 0$ tel que $s + t \leq u_k(x) \leq s + L$, alors on peut contrôler le délai de réinfection de $q(x)$.

Lemme 5.23. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $s \geq 0$, supposons que $u_k(x) < \infty$, $N_L(x, t) \circ \theta_s = 0$ et que $s + t \leq u_k(x) \leq s + L$, alors soit $v_k(x) = \infty$, soit $u_{k+1}(x) - u_k(x) \leq \kappa t$.

Preuve. Sous les mêmes hypothèses que dans l'énoncé, par définition de $u_k(x)$, le site $q(x)$ est infecté au temps $u_k(x)$. Puis, comme $s + t \leq u_k(x) \leq s + L$ et que $u_k(x)$ est un instant de possible infection de $q(x)$, la non-réalisation de $E^x(x, t) \circ \theta_{u_k(x)}$ implique que soit $\tau^{q(x)} \circ \theta_{u_k(x)} = \infty$, soit $\tau^{q(x)} \circ \theta_{u_k(x)} \leq \frac{t}{2}$. Dans le premier cas, la preuve est achevée. Dans le deuxième, notons qu'alors $v_k(x) - u_k(x) \leq \frac{t}{2}$.

On peut toujours choisir un chemin continu par morceaux $\Upsilon : [0, u_k(x)] \rightarrow C_{\phi}^{\infty}$ tel que $((\Upsilon(t), t))_{t \in [0, u_k(x)]}$ forme un chemin ouvert de H (voir la partie construction graphique de Harris [3.2](#)) et donc :

$$\forall t \in [0, u_k(x)], \quad \Upsilon(t) \in \xi_t.$$

Considérons la portion de Υ entre $u_k(x) - t$ et $u_k(x)$. Notons $x_0 = \Upsilon(u_k(x) - t)$ et montrons qu'alors, $x_0 \in B_{\phi}^{\infty}(x, Kt+2)$. En effet, si $x_0 \notin B_{\phi}^{\infty}(x, Kt+2)$ alors il existe un point x_1 atteint par Υ à un temps $t_1 > u_k(x) - t$ tel que $Kt+2 \geq d_{\phi}^{\infty}(x_1, x) \geq Kt+1$. Or la non-réalisation de $E^{x_1}(x, t) \circ \theta_{t_1}$ assure que le délai d'infection de x partant de x_1 au temps t_1 requiert au moins un temps t ce qui est contradictoire. Nous avons donc $x_0 \in B_{\phi}^{\infty}(x, Kt+2)$ et comme $N_L(x, t) \circ \theta_s = 0$, la première guérison potentielle au site x_0 après $u_k(x) - t$ arrive à un temps t_2 avant un délai de $\frac{t}{2}$, c'est-à-dire que $t_2 \leq u_k(x) - \frac{t}{2}$. Notons alors $x_2 := \Upsilon(t_2)$ qui appartient aussi à $B_{\phi}^{\infty}(x, Kt+2)$ car $t_2 \geq u_k(x) - t$. Ainsi, on sait que $E^{x_2}(x, t) \circ \theta_{t_2}$ n'est pas réalisé. Or, $x \in \xi_t^{x_2} \circ \theta_{t_2}$, c'est-à-dire lorsque la descendance de x_2 est âgée de $u_k(x) - t_2 \geq \frac{t}{2}$ ce qui implique que la descendance de x_2 est infinie et que :

$$\inf \{s \geq 2t : q(x) \in \xi_s^{x_2}\} \circ \theta_{t_2} > \kappa t.$$

On ne pouvait pas appliquer directement ce raisonnement à x_0 au temps $u_k(x) - t$ car il ne se passe à priori rien en x_0 à cet instant donc on ne sait pas si l'événement $E^{x_0}(x, t) \circ \theta_{u_k(x)-t}$ est réalisé ou non.

La dernière minoration permet de trouver $t_3 \in [t_2 + 2t, t_2 + \kappa t]$ tel que $q(x) \in \xi_{t_3}$. En outre, comme $v_k(x) - u_k(x) \leq \frac{t}{2}$, on a :

$$t_3 \geq t_2 + 2t \geq u_k(x) + t > v_k(x)$$

et ainsi, finalement :

$$u_{k+1}(x) - u_k(x) \leq t_3 - u_k(x) \leq t_2 + \kappa t - u_k(x) \leq \kappa t.$$

□

Il reste donc maintenant à estimer la probabilité qu'une telle boîte spatio-temporelle ne contienne aucun point de mauvaise croissance.

On rappelle que $\theta > 0$ est la constante fixée qui intervient dans la proposition [5.9](#) (croissance au moins linéaire).

Lemme 5.24. *Il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $\phi \in \Gamma$, tout $L > 0$, tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t > \mathcal{T}(x)$,*

$$\mathbb{P}_\phi(N_L(x, t) \geq 1) \leq A(1 + L)e^{-Bt}.$$

Preuve. • **Partie 1 :**

Pour commencer, prouvons qu'il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $\phi \in \Gamma$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\forall t > \mathcal{T}(x), \forall y \in B_\phi^\infty(x, Kt + 2), \mathbb{P}_\phi(E^y(x, t)) \leq Ae^{-Bt}.$$

Soient donc de tels ϕ, x, t, y . On rappelle que $\mathcal{T}(x)$ a été défini en [\(6\)](#). Pour contrôler $E_0^y(t) := \{c_y([0, \frac{t}{2}]) = 0\}$, on note que $c_y([0, \frac{t}{2}])$ est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre $\frac{t}{2}$ et donc :

$$\mathbb{P}_\phi(E_0^y(t)) \leq e^{-\frac{t}{2}}.$$

D'autre part, on a $t > \frac{1}{\theta} \max(T_1(x), T_2(x))$ par définition de $\mathcal{T}(x)$ en [\(6\)](#) donc $E_1^y(t)$ et $E_2^y(t)$ sont immédiatement contrôlés par les propositions [5.5](#) (croissance au plus linéaire) et [5.8](#) (extinction rapide).

Enfin, on rappelle que

$$E_3^y(x, t) := \{\tau^{q(y)} = \infty\} \cap \{\inf\{s \geq 2t : q(x) \in \xi_s^{q(y)}\} > \kappa t\}.$$

Sur l'événement $\{\tau^{q(y)} = \infty\}$, on a l'existence de $z \in \xi_{2t}^{q(y)}$ tel que $\tau^z \circ \theta_{2t} = \infty$ et ainsi l'événement $E_3^y(x, t)$ est inclus dans :

$$\{\xi_{2t}^{q(y)} \not\subset B_\phi^\infty(y, 2Kt)\} \cup \bigcup_{z \in B_\phi^\infty(y, 2Kt)} \{t^z(x) \circ \theta_{2t} > (\kappa - 2)t, \tau^z \circ \theta_{2t} = \infty\}.$$

Or la définition de κ donne $(\kappa - 2) = 3K\alpha_{\mathbb{N}} + 1$ et on a d'autre part :

$$\alpha_{\mathbb{N}}d_{\phi}^{\infty}(x, z) \leq \alpha_{\mathbb{N}}(d_{\phi}^{\infty}(x, y) + d_{\phi}^{\infty}(y, z)) \leq \alpha_{\mathbb{N}}(3Kt + 2).$$

Ceci implique :

$$E_3^y(x, t) \subseteq \bigcup_{z \in B_{\phi}^{\infty}(y, 2Kt)} \left\{ t^z(x) \circ \theta_{2t} > \alpha_{\mathbb{N}}d_{\phi}^{\infty}(x, z) + t - 2\alpha_{\mathbb{N}}, \tau^z \circ \theta_{2t} = \infty \right\} \\ \cup \left\{ \xi_{2t}^{q(y)} \notin B_{\phi}^{\infty}(y, 2Kt) \right\}.$$

Pour contrôler la grosse union, comme $z \in B_{\phi}^{\infty}(x, 3K + 2)$, par définition de $\mathcal{T}(x)$ en (6), il vient $t \geq \frac{1}{\theta} \max(T_1(z), T_2(z))$, et ainsi on peut utiliser la proposition 5.9 (croissance au moins linéaire) partant du point z . Comme y appartient à $B_{\phi}^{\infty}(x, Kt + 2)$ alors $t > \frac{1}{\theta} \max(T_1(y), T_2(y))$ implique d'une part que $|B_{\phi}^{\infty}(y, 2Kt)| \leq (2Kt)^{d+1}$ et d'autre part que la probabilité du deuxième événement est contrôlée par la proposition 5.5 (croissance au plus linéaire). Il suit que la probabilité de la grosse union est contrôlée par :

$$(2Kt)^{d+1} Ae^{-B(t-2\alpha_{\mathbb{N}})}.$$

Ceci achève cette partie de la preuve.

• Partie 2 :

Soient A et B les constantes données par la première partie de la preuve. On choisit maintenant x, ϕ, t comme dans l'énoncé du lemme. Pour tout $y \in B_{\phi}^{\infty}(x, Kt + 2)$, notons $\omega_y := c_y + \sum_{e \in E^{\text{Bool}}: y \in e} c_e$. De $t > \mathcal{T}(x) \geq T_2(y)$ (par définition de $\mathcal{T}(x)$ en (6) et car $\theta < 1$) on obtient que, sous \mathbb{P}_{ϕ} , ω_y est un processus ponctuel de Poisson réel d'intensité inférieure à $t^{d+1}\lambda + 1$. Notons alors $S_0^y = 0$ et $(S_n^y)_{n \geq 1}$ la suite croissante des instants de saut du processus ω_y . On a :

$$\int_0^L \mathbb{1}_{E^y(x, t)} \circ \theta_s d(\omega_y + \delta_0)(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_n^y \leq L\}} \mathbb{1}_{E^y(x, t)} \circ \theta_{S_n^y}.$$

Ainsi, en vertu de la propriété de Markov forte,

$$\mathbb{E}_{\phi} \left[\int_0^L \mathbb{1}_{E^y(x, t)} \circ \theta_s d(\omega_y + \delta_0)(s) \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{\phi} \left[\mathbb{1}_{\{S_n^y \leq L\}} \mathbb{1}_{E^y(x, t)} \circ \theta_{S_n^y} \right] \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{\phi} \left[\mathbb{1}_{\{S_n^y \leq L\}} \right] \mathbb{P}_{\phi}(E^y(x, t)) \\ = (1 + \mathbb{E}_{\phi}[\omega_y([0, L]]) \mathbb{P}_{\phi}(E^y(x, t)) \\ = (1 + L(t^{d+1}\lambda + 1)) \mathbb{P}_{\phi}(E^y(x, t)).$$

On conclut la preuve en utilisant le contrôle prouvé dans la partie 1 de la preuve, puis en remarquant que $\mathbb{P}_{\phi}(N_L(x, t) \geq 1) \leq \mathbb{E}_{\phi}[N_L(x, t)]$ et que $|B_{\phi}^{\infty}(x, Kt + 2)| \leq (Kt + 2)^{d+1}$. □

Une fois que le processus est initié, les lemmes [5.21](#) et [5.23](#) peuvent être utilisés récursivement pour contrôler $\sigma(x)$. Pour initier le processus, on suppose qu'il existe un point $u \in B_\phi^\infty(x, Kt + 2)$ et un temps $s \geq 0$, tel que $u \in \xi_s$ et $\tau^u \circ \theta_s = \infty$.

Lemme 5.25. *Pour tous $s, t \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a l'inclusion :*

$$\begin{aligned} & \{\tau = \infty\} \cap \left\{ \exists u \in B_\phi^\infty(x, Kt + 2), u \in \xi_s, \tau^u \circ \theta_s = \infty \right\} \\ & \quad \cap \left\{ N_{K(x)\kappa t}(x, t) \circ \theta_s = 0 \right\} \\ & \quad \cap \bigcap_{1 \leq k \leq K(x)} \{v_k(x) - u_k(x) < t\} \\ & \subseteq \{\tau = \infty\} \cap \{\sigma(x) \leq s + K(x)\kappa t\}. \end{aligned}$$

Preuve. Si tous les $u_k(x)$ finis sont inférieurs ou égaux à $s + t$, on a fini car alors $\sigma(x) \leq s + t \leq s + K(x)\kappa t$. Posons donc :

$$k_0 := \max \{k \in \mathbb{N} : u_k(x) \leq s + t\}.$$

On a alors $v_{k_0}(x) < \infty$ et $k_0 \leq K(x)$ car on est sur $\{\tau = \infty\}$ et donc on a $v_{k_0}(x) - u_{k_0}(x) < t$ en vertu du quatrième membre de l'intersection donc $v_{k_0}(x) < s + 2t$. Maintenant, comme $\tau^u \circ \theta_s = \infty$, la non-réalisation de $E^u(x, t) \circ \theta_s$ impliquée par le troisième membre de l'intersection nous donne :

$$\inf \{r \geq 2t : q(x) \in \xi_r^u\} \circ \theta_s \leq \kappa t,$$

ce qui nous amène à $u_{k_0+1}(x) \leq s + \kappa t$. En notant que pour tout $j \geq 1$, $u_{k_0+j}(x) \geq s + t$, on prouve par utilisation récursive du lemme [5.23](#) que :

$$\forall j \in \llbracket 1 : K(x) - k_0 \rrbracket, u_{k_0+j}(x) \leq j\kappa t.$$

En particulier, pour $j = K(x) - k_0$, on obtient $\sigma(x) = u_{K(x)} \leq s + (K(x) - k_0)\kappa t \leq s + K(x)\kappa t$, ce qui achève la preuve. \square

Nous pouvons enfin contrôler le défaut de sous-additivité des quantités du type $\sigma(x + y) - [\sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x]$ en appliquant la stratégie annoncée autour du site $x + y$ en utilisant l'existence d'une descendance infinie de ce point vivant à l'instant $\sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$ pour initier le processus.

Théorème 5.20. *Il existe $A, B > 0$ tels que pour tout $\phi \in \Gamma$, tous $x, y \in \mathbb{R}^d$ et tout $t > \mathcal{T}(x + y)$,*

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x + y) - [\sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x] \geq t \right) \leq Ae^{-B\sqrt{t}}.$$

Preuve. Soient donc de tels ϕ, x, y et t . Notons $s = \sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x$, on a :

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbb{P}}_\phi(\sigma(x + y) \geq s + t) \\ & \leq \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(K(x + y) > \frac{\sqrt{t}}{\kappa} \right) + \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(K(x + y) \leq \frac{\sqrt{t}}{\kappa}, \sigma(x + y) \geq s + t \right). \end{aligned}$$

Le premier terme de la somme est contrôlé par le lemme [5.14](#) tandis que pour le deuxième, on remarque que si $K(x+y) \leq \frac{\sqrt{t}}{\kappa}$, alors $K(x+y)\kappa\sqrt{t} \leq t$, et donc :

$$\{N_{K(x+y)\kappa\sqrt{t}}(x+y, \sqrt{t}) \geq 1\} \subseteq \{N_t(x+y, \sqrt{t}) \geq 1\}.$$

On applique alors le lemme [5.25](#) autour du point $x+y$, à une échelle \sqrt{t} , au temps initial s et au point source $u = x+y$:

$$\begin{aligned} & \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(K(x+y) \leq \frac{\sqrt{t}}{\kappa}, \sigma(x+y) \geq s+t \right) \\ & \leq \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(K(x+y) \leq \frac{\sqrt{t}}{\kappa}, \sigma(x+y) \geq s + K(x+y)\kappa\sqrt{t} \right) \\ & \leq \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(N_t(x+y, \sqrt{t}) \circ \theta_s \geq 1 \right) + \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\bigcup_{k < K(x+y)} \{v_k(x+y) - u_k(x+y) > \sqrt{t}\} \right). \end{aligned}$$

Le deuxième terme de cette somme est contrôlée par le lemme [5.21](#) tandis que pour contrôler le premier, on remarque :

- $N_t(x+y, \sqrt{t}) = N_t(0, \sqrt{t}) \circ T_y \circ T_x$,
- et $\theta_s = \theta_{\sigma(y) \circ T_x \circ \theta_{\sigma(x)} + \sigma(x)} = \theta_{\sigma(y) \circ T_x} \circ \theta_{\sigma(x)} = T_{-x} \circ \theta_{\sigma(y)} \circ T_x \circ \theta_{\sigma(x)}$.

D'où on obtient

$$N_t(x+y, \sqrt{t}) \circ \theta_s = N_t(0, \sqrt{t}) \circ \tilde{\theta}_y \circ \tilde{\theta}_x.$$

Ainsi, $\bar{\mathbb{P}}_\phi(N_t(x+y, \sqrt{t}) \circ \theta_s \geq 1) = \bar{\mathbb{P}}_{T_{x+y}(\phi)}(N_t(0, \sqrt{t}) \geq 1)$, qui est contrôlé par le lemme [5.24](#).

Ceci achève la preuve. \square

Ce théorème implique le corollaire suivant pour l'énoncé duquel on introduit les notations $[\cdot]^+ := \max(\cdot, 0)$ puis $r(x, y) := [\sigma(x+y) - (\sigma(x) + \sigma(y) \circ \tilde{\theta}_x)]^+$ qui représente le défaut de sous-additivité pour le temps d'atteinte σ .

Corollaire 5.26. *Pour tout $s \geq 1$, il existe $M_s > 0$ tel que pour tout $\phi \in \Gamma$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^d$:*

$$\bar{\mathbb{E}}_\phi[r(x, y)^s] \leq \mathcal{I}(x+y)^s + M_s.$$

Il suit que :

$$\forall s \geq 1, \exists L_s > 0, \bar{\mathbb{E}}[r(x, y)^s] \leq L_s.$$

Preuve. On écrit $\bar{\mathbb{E}}_\phi[r(x, y)^s] = \int_0^{+\infty} su^{s-1} \bar{\mathbb{P}}_\phi(r(x, y) > u) du$ et on utilise le théorème [5.20](#).

Le deuxième point découle directement du lemme [2.24](#) qui implique des moments de tout ordre qui ne dépendent pas de x pour $\mathcal{I}(x)$ sous $\bar{\mathbb{P}}$. \square

5.4 Contrôle par la distance chimique de l'écart entre les temps d'atteinte

Dans cette section, on aimerait utiliser la même stratégie que précédemment mais ici, au temps $t(x)$, le point $q(x)$ n'est a priori pas le départ d'un chemin infini nous devons donc chercher un autre candidat pour être le point source qui nous permettra d'utiliser le lemme [5.25](#) puis les contrôles des lemmes [5.21](#) et [5.23](#).

Nous allons considérer ici le dernier point sur le chemin entre $q(0)$ au temps 0 et $q(x)$ au temps $t(x)$ qui possède une descendance infinie. Pour assurer que ce point soit proche de $q(x)$ spatialement, on va imposer des croissances au plus linéaires pour tous les points proches spatialement de $q(x)$ avant le temps $t(x)$. Cette condition est forte car la taille de la boîte spatio-temporelle à contrôler est de l'ordre de $d_\phi^\infty(0, x)$ ce qui impactera la qualité de l'estimée obtenue notamment vis-à-vis de l'uniformité en x .

On rappelle que $\kappa := 3(\alpha_N K + 1)$ et que α_N et K sont respectivement les constantes qui vérifient respectivement les résultats [5.5](#) (croissance au plus linéaire) et [5.9](#) (croissance au moins linéaire).

Théorème 5.27. *Il existe $A, B, \beta > 0$ tels que :*

$$\forall \phi \in \Gamma, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \geq \kappa \mathcal{T}(x), \\ \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x) \geq t(x) + K(x) \left(\beta \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right) + t \right) \right) \leq A e^{-Bt}.$$

Preuve. Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$ et $T, L > 0$, on définit :

$$\tilde{E}^y(T) := \left\{ \tau^{q(y)} < \infty, H_{\tau^{q(y)}+T}^{q(y)} \cap C_\Phi^\infty \not\subseteq B_\Phi^\infty(y, KT) \right\},$$

$$\tilde{N}_L(x, T) := \sum_{y \in B_\Phi^\infty(x, KT+1)} \int_0^L \mathbb{1}_{\tilde{E}^y(T)} \circ \theta_s d \left(\sum_{e \in E^{\text{Bool}}: y \in e} c_e \right) (s).$$

À l'aide des propriétés [5.5](#) (croissance au plus linéaire), [5.8](#) (extinction rapide) et [5.9](#) (croissance au moins linéaire), par choix de K et en procédant comme dans la preuve du lemme [5.24](#), on montre facilement l'existence de $A, B > 0$ tels que :

$$\forall \phi \in \Gamma, \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall T \geq \mathcal{T}(x), \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\tilde{N}_L(x, T) \geq 1 \right) \leq A(1+L) e^{-BT}.$$

Soient maintenant ϕ, x et t comme dans l'énoncé et considérons un chemin d'infection Υ entre le point $q(0)$ au temps 0 et $q(x)$ au temps $t(x)$. Plus précisément, par définition de $t(x)$, on a $q(x) \in \xi_{t(x)}$ donc on peut toujours choisir un chemin continu par morceaux $\Upsilon : [0, t(x)] \rightarrow C_\phi^\infty$ tel que $((\Upsilon(t), t))_{t \in [0, t(x)]}$ forme un chemin ouvert de H (voir la partie construction graphique de Harris [3.2](#)) et donc :

$$\forall t \in [0, t(x)], \quad \Upsilon(t) \in \xi_t.$$

Soit alors u le dernier point de Υ qui ait une descendance infinie et soit s le dernier instant où l'on est en u sur ce chemin, c'est-à-dire $\tau^u \circ \theta_s = \infty$. Notons que sur $\{\tau = \infty\}$ un tel point existe toujours.

On montre alors que si $\tilde{N}_{t(x)}(x, T) = 0$, alors nécessairement, $u \in B_\phi^\infty(x, KT+2)$. En

effet, si $d_\phi^\infty(x, u) > KT + 2$, on considère le premier point \tilde{u} du chemin d'infection précédent qui soit dans $B_\phi^\infty(x, KT + 1)$ et par construction, on a $d_\phi^\infty(\tilde{u}, x) > KT$ or $q(x)$ est dans la descendance de \tilde{u} et par définition de u et s , \tilde{u} a une descendance finie donc $\tilde{N}_{t(x)}(x, T) \geq 1$ ce qui donne l'implication voulue.

Posons $T = \frac{\beta \log(1+d_\phi^\infty(0,x))+t}{\kappa} \geq \frac{t}{\kappa}$ et $L = K(x) \kappa T$, comme $s \leq t(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x) \geq t(x) + K(x) \left(\beta \log(1 + d_\phi^\infty(0, x)) + t \right) \right) \\
&= \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x) \geq t(x) + K(x) \kappa T \right) \\
&\leq \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x) \geq s + L \right) \\
&\leq \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x) \geq s + L, \tilde{N}_{t(x)}(x, T) = 0 \right) + \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\tilde{N}_{t(x)}(x, T) \geq 1 \right) \\
&\leq \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(N_L(x, T) \circ \theta_s \geq 1 \right) + \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\bigcup_{k < K(x)} \{v_k(x) - u_k(x) > T\} \right) \\
&\quad + \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\tilde{N}_{t(x)}(x, T) \geq 1 \right), \tag{11}
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité correspond à l'inclusion du lemme 5.25. Le deuxième terme de (11) est bornée par le lemme 5.21 en rappelant que $T \geq \frac{t}{\kappa}$. Pour le dernier terme de (11), on écrit :

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\tilde{N}_{t(x)}(x, T) \geq 1 \right) \leq \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\tilde{N}_{\alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0,x)+t}(x, T) \geq 1 \right) + \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(t(x) > \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0, x) + t \right).$$

La propriété 5.9 (croissance au moins linéaire) permet de contrôler le second membre tandis que pour le premier on a l'existence de $A, B > 0$ tels que :

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\tilde{N}_{\alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0,x)+t}(x, T) \geq 1 \right) &\leq A \left(1 + \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0, x) + t \right) e^{-BT} \\
&\leq A \left(1 + \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0, x) + t \right) e^{-\frac{B(\beta \log(1+d_\phi^\infty(0,x))+t)}{\kappa}}.
\end{aligned}$$

Dès que β est suffisamment grand, la dernière expression peut être majorée par une expression de la forme Ae^{-Bt} avec $A, B > 0$ ne dépendant ni de x ni de ϕ .

Enfin, pour le premier terme de (11), on note que $N_L(x, T) \circ \theta_s \leq N_{t(x)+L}(x, T)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(N_L(x, T) \circ \theta_s \geq 1 \right) &\leq \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(N_{\alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0,x)+t+L}(x, T) \geq 1 \right) \\
&\quad + \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(t(x) > \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0, x) + t \right).
\end{aligned}$$

Comme précédemment, on contrôle le second membre grâce à la propriété 5.9 (croissance au moins linéaire). Pour le premier membre, on commence par découper selon les

valeurs de $K(x)$ puis on utilise l'inégalité de Hölder et enfin le lemme [5.24](#) :

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(N_{\alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0,x)+t+L}(x, T) \geq 1 \right) \\
& \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\bar{\mathbb{P}}_\phi(K(x) = k)} \sqrt{\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(N_{\alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0,x)+t+k\kappa T}(x, T) \geq 1 \right)} \\
& \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\bar{\mathbb{P}}_\phi(K(x) = k)} \sqrt{A \left(1 + \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0, x) + t + k\kappa T \right) e^{-BT}} \\
& \leq \sqrt{A \left(1 + \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0, x) \right) (1+t)(1+\kappa T) e^{-\frac{B}{2}T}} \sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{(1+k) \bar{\mathbb{P}}_\phi(K(x) = k)}.
\end{aligned}$$

Le lemme [5.14](#) assure que la dernière somme est finie de valeur indépendante de ϕ , puis quitte à augmenter β on obtient le contrôle souhaité. Ceci achève la preuve. \square

Fixons maintenant et pour toute la suite $\beta > 0$ vérifiant le résultat précédent. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et $\phi \in \Gamma$, notons :

$$V_x := \frac{|\sigma(x) - t(x)|}{K(x)} - \beta \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right).$$

Lemme 5.28. *Pour tout $q \geq 1$, il existe une constante $C(q) > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\phi \in \Gamma$,*

$$\bar{\mathbb{E}}_\phi [|V_x|^q] \leq C(q) \left(1 + \mathcal{I}(x)^q + \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right)^q \right).$$

Preuve. On écrit :

$$\bar{\mathbb{E}}_\phi [|V_x|^q] = \bar{\mathbb{E}}_\phi \left[([V_x]^+)^q \right] + \bar{\mathbb{E}}_\phi \left[([-V_x]^+)^q \right].$$

Or, $[-V_x]^+ \leq \beta \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right)$, donc :

$$\bar{\mathbb{E}}_\phi [|V_x|^q] \leq \bar{\mathbb{E}}_\phi \left[([V_x]^+)^q \right] + \left(\beta \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right) \right)^q,$$

et on achève la preuve en utilisant le théorème [5.27](#) et l'écriture de l'espérance en fonction de la queue de distribution. \square

Lemme 5.29. *Pour tout $q \geq 1$, il existe une constante $C(q) > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $\phi \in \Gamma$,*

$$\bar{\mathbb{E}}_\phi [|\sigma(x) - t(x)|^q] \leq C(q) \left(1 + \mathcal{I}(x)^q + \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right)^q \right).$$

Preuve. Soient donc $q \geq 1$, $\phi \in \Gamma$ et $x \in \mathbb{R}^d$. On rappelle que :

$$V_x := \frac{\sigma(x) - t(x)}{K(x)} - \beta \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right).$$

En vertu de l'inégalité de Minkowski puis de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathbb{E}}_\phi [|\sigma(x) - t(x)|^q]^{1/q} \\
& \leq \beta \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right) \bar{\mathbb{E}}_\phi [K(x)^q]^{1/q} + \bar{\mathbb{E}}_\phi [K(x)^q V_x^q]^{1/q} \\
& \leq \beta \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right) \bar{\mathbb{E}}_\phi [K(x)^q]^{1/q} + \left(\bar{\mathbb{E}}_\phi [K(x)^{2q}] \bar{\mathbb{E}}_\phi [V_x^{2q}] \right)^{\frac{1}{2q}}.
\end{aligned}$$

Or les lemmes [5.14](#) et [5.28](#) impliquent que V_x^{2q} , $K(x)^q$ et $K(x)^{2q}$ sont dans $\mathcal{L}_1(\bar{\mathbb{P}}_\phi)$ et on a les contrôles sur leurs intégrales :

- $\bar{\mathbb{E}}_\phi [K(x)^q]$ et $\bar{\mathbb{E}}_\phi [K(x)^{2q}]$ sont bornés par une constante qui est uniquement fonction de q ,
- $\bar{\mathbb{E}}_\phi [V_x^{2q}] \leq C(q) \left(1 + \mathcal{T}(x)^q + \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right)^q \right)$.

Ceci qui achève la preuve. \square

On prouve maintenant deux corollaires du théorème [5.27](#).

Corollaire 5.30. *Il existe $A, B > 0$ telles que pour tout $\phi \in \Gamma$, tout $x \in \mathbb{R}^d$, et tout $t \geq \kappa \mathcal{T}(x)$:*

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x) \geq (1 + \alpha_{\mathbb{N}}) d_\phi^\infty(0, x) + t \right) \leq A e^{-B\sqrt{t}}.$$

Preuve. Soient donc de tels ϕ, x et t . Notons que si $K(x) \leq \frac{1}{2\beta} \sqrt{d_\phi^\infty(0, x) + t/2}$ et si $s = \beta \sqrt{d_\phi^\infty(0, x) + t/2}$, alors comme $\log(1 + u) \leq \sqrt{u}$ pour tout $u \geq 0$, on a :

$$K(x) \left[\beta \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right) + s \right] \leq 2sK(x) \leq d_\phi^\infty(0, x) + t/2.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x) \geq (1 + \alpha_{\mathbb{N}}) d_\phi^\infty(0, x) + t \right) \\
& \leq \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(t(x) \geq \alpha_{\mathbb{N}} d_\phi^\infty(0, x) + t/2 \right) + \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(K(x) > \frac{1}{2\beta} \sqrt{d_\phi^\infty(0, x) + t/2} \right) \\
& \quad + \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x) \geq t(x) + K(x) \left[\beta \log \left(1 + d_\phi^\infty(0, x) \right) + s \right] \right).
\end{aligned}$$

Le premier terme est alors contrôlé par la proposition [5.9](#) (croissance au moins linéaire), le deuxième par le lemme [5.14](#) et le dernier par le théorème [5.27](#). Ceci achève la preuve. \square

Corollaire 5.31. *Pour tout $q \geq 1$, il existe $C(q) > 0$ telle que :*

$$\forall \phi \in \Gamma, \forall x \in \mathbb{R}^d, \bar{\mathbb{E}}_\phi [\sigma(x)^q] \leq C(q) \left(1 + d_\phi^\infty(0, x)^q + \mathcal{T}(x)^q \right).$$

Preuve. Soit $q \geq 1$ et soient $\phi \in \Gamma$ et $x \in \mathbb{R}^d$. En vertu de l'inégalité de Minkowski et du corollaire [5.30](#), on a :

$$\bar{\mathbb{E}}_\phi [\sigma(x)^q]^{1/q} \leq (1 + \alpha_{\mathbb{N}}) d_\phi^\infty(0, x) + \bar{\mathbb{E}}_\phi \left[\left(\left(\sigma(x) - (1 + \alpha_{\mathbb{N}}) d_\phi^\infty(0, x) \right)^+ \right)^q \right]^{1/q}.$$

En outre,

$$\bar{\mathbb{E}}_\phi \left[\left(\left(\sigma(x) - (1 + \alpha_{\mathbb{N}}) d_\phi^\infty(0, x) \right)^+ \right)^q \right] = \int_0^{+\infty} q u^{q-1} \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\sigma(x) - (1 + \alpha_{\mathbb{N}}) d_\phi^\infty(0, x) > u \right) du.$$

Et on achève la preuve à l'aide du corollaire [5.30](#). \square

5.5 Contrôle normé et continuité des temps d'atteinte

On commence par montrer un résultat qui complète le corollaire [5.31](#).

Lemme 5.32. *Pour tout $q \geq 1$, il existe $A(q) > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$\bar{\mathbb{E}}[\sigma(x)^q] \leq A(q) \|x\|_2^q.$$

Preuve. Soient donc $x \in \mathbb{R}^d$ et $q \geq 1$, en vertu du corollaire [5.31](#) et de la relation :

$$\bar{\mathbb{E}}[\sigma(x)^q] = \mathbb{E}[\bar{\mathbb{E}}_{\Phi}[\sigma(x)^q]],$$

il suffit de montrer que :

$$\mathbb{E}[d_{\phi}^{\infty}(0, x)^q] \leq A'(q) \|x\|_2^q \text{ et } \mathbb{E}[\mathcal{I}(x)^q] \leq A''(q).$$

La deuxième inégalité est une conséquence directe du lemme [2.24](#) qui garantit une décroissance en exponentielle de racine pour la queue de distribution de $\mathcal{I}(x)$. Soit $\varrho > 0$ donné par la proposition [2.12](#), d'après le point 4 de cette dernière, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[d_{\phi}^{\infty}(0, x)^q] &= \int_0^{\infty} qt^{q-1} \mathbb{P}(d_{\phi}^{\infty}(0, x) > t) dt \\ &= \int_0^{\varrho \|x\|_2} qt^{q-1} \mathbb{P}(d_{\phi}^{\infty}(0, x) > t) dt + \int_0^{\infty} qt^{q-1} \mathbb{P}(d_{\phi}^{\infty}(0, x) > \varrho \|x\|_2 + t) dt \\ &\leq \int_0^{\varrho \|x\|_2} q(\varrho \|x\|_2)^{q-1} dt + \int_0^{\infty} qt^{q-1} Ae^{-Bt} dt \\ &\leq A'(q) \|x\|_2^q. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve. □

Théorème 5.33. *$\bar{\mathbb{P}}$ -presque sûrement, $\lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \frac{|\sigma(x) - t(x)|}{\|x\|_2} = 0$.*

Preuve. En vertu du lemme [5.29](#), soit $C(1) > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\phi \in \Gamma$,

$$\bar{\mathbb{E}}_{\phi}[|\sigma(x) - t(x)|] \leq C(1) \left(1 + \mathcal{I}(x) + \log(1 + d_{\phi}^{\infty}(0, x))\right).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$ non-nul, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\frac{|\sigma(x) - t(x)|}{\|x\|_2}\right] &= \mathbb{E}\left[\bar{\mathbb{E}}_{\Phi}\left[\frac{|\sigma(x) - t(x)|}{\|x\|_2}\right]\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\frac{C(1)(1 + \mathcal{I}(x) + \log(1 + d_{\Phi}^{\infty}(0, x)))}{\|x\|_2}\right] \\ &\leq C(1) \left(\frac{1 + \mathbb{E}[\mathcal{I}(0)]}{\|x\|_2} + \frac{\mathbb{E}[\log(1 + d_{\Phi}^{\infty}(0, x))]}{\|x\|_2}\right), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'invariance de la loi de $\mathcal{T}(0)$ par translation. Le premier terme de la dernière ligne tend vers 0 lorsque $\|x\|_2$ tend vers 0 car $\mathcal{T}(0)$ admet un moment d'ordre 1. Pour contrôler le second terme, on écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [\log (1 + d_{\Phi}^{\infty} (0, x))] &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P} (\log (1 + d_{\Phi}^{\infty} (0, x)) > u) du \\
&\leq \log (1 + \|x\|_2) + \int_{\log (1 + \|x\|_2)}^{+\infty} \mathbb{P} (\log (1 + d_{\Phi}^{\infty} (0, x)) > u) du \\
&\leq \log (1 + \|x\|_2) + \int_0^{+\infty} \frac{\mathbb{P} (d_{\Phi}^{\infty} (0, x) > \|x\|_2 + t)}{1 + \|x\|_2 + t} dt \\
&\leq \log (1 + \|x\|_2) + \int_0^{+\infty} \frac{Ae^{-Bt}}{1 + \|x\|_2 + t} dt \\
&\leq \log (1 + \|x\|_2) + \int_0^{+\infty} \frac{Ae^{-Bt}}{1 + \|x\|_2} dt.
\end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow +\infty} \mathbb{E} \left[\frac{|\sigma(x) - t(x)|}{\|x\|_2} \right] = 0.$$

On achève la preuve en notant que l'intégrale d'une fonction positive tend vers 0 implique que cette fonction tend presque sûrement vers 0. \square

Déduisons maintenant l'uniforme continuité de $\sigma(x)$ sous $\bar{\mathbb{P}}$ du corollaire [5.30](#) sur la queue de distribution de $\sigma(x)$ et du théorème [5.20](#) sur le contrôle du défaut de sous-additivité.

Théorème 5.34. *Il existe $C > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, $\bar{\mathbb{P}}$ -presque sûrement, il existe $R > 0$ telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, (\|x\|_2 \geq R \text{ et } \|x - y\|_2 \leq \epsilon \|x\|_2) \implies |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq C\epsilon \|x\|_2.$$

Preuve. Pour commencer, rappelons que pour $r \geq 0$, $B(r)$ désigne la boule associée à la norme $\|\cdot\|_2$ centrée en $0_{\mathbb{R}^d}$. Soit $\varrho > 0$ la constante que l'on suppose supérieure à 1 vérifiant la proposition [2.12](#), on pose $C = 2\varrho(1 + \alpha_{\mathbb{N}})$ puis pour $m \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$, on définit les événements

$$A_m(\epsilon) := \left\{ \exists x, y \in \mathbb{R}^d : m \leq \|x\|_2 \leq m + 1, \|x - y\|_2 \leq \epsilon(m + 1) \text{ et } |\sigma(x) - \sigma(y)| > C\epsilon m \right\},$$

$$B_m^1(\epsilon) := \left\{ \exists x, y \in \mathbb{R}^d : \varrho(m + 1) \geq d_{\Phi}^{\infty}(0, x) \geq m/2, d_{\Phi}^{\infty}(x, y) \leq \varrho\epsilon(m + 1) \text{ et } |\sigma(x) - \sigma(y)| > C\epsilon m \right\},$$

$$B_m^2(\epsilon) := \left\{ \exists x, y \in \mathbb{R}^d, m \leq \|x\|_2 \leq m + 1, \|x - y\|_2 \leq \epsilon(m + 1) \text{ et } d_{\Phi}^{\infty}(x, y) > \varrho\epsilon(m + 1) \right\},$$

$$B_m^3 := \left\{ \exists x \in \mathbb{R}^d, m \leq \|x\|_1 \leq m + 1 \text{ et } d_{\Phi}^{\infty}(0, x) > \varrho(m + 1) \right\},$$

$$B_m^4 := \left\{ \exists x \in \mathbb{R}^d, m \leq \|x\|_1 \leq m + 1 \text{ et } d_{\Phi}^{\infty}(0, x) < m/2 \right\}.$$

Remarquons alors l'inclusion

$$A_m(\epsilon) \subseteq B_m^1(\epsilon) \cup B_m^2(\epsilon) \cup B_m^3 \cup B_m^4.$$

Il suffit alors de montrer que la probabilité de chacun des quatre événements $B_m^1(\epsilon)$, $B_m^2(\epsilon)$, B_m^3 et B_m^4 est le terme général d'une série convergente en la variable m et on pourra conclure à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

Pour contrôler $B_m^1(\epsilon)$, on remarque que :

$$\begin{aligned} |\sigma(x) - \sigma(y)| &\leq \left| \sigma(x) - \sigma(y) - \sigma(x-y) \circ \tilde{\theta}_y \right| + \sigma(x-y) \circ \tilde{\theta}_y \\ &= r(x-y, y) + \sigma(x-y) \circ \tilde{\theta}_y. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\phi \in \Gamma$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}_\phi(B_m^1(\epsilon)) &\leq \sum_{\substack{m \leq d_\phi^\infty(0,x) \leq \varrho(m+1) \\ d_\phi^\infty(x,y) \leq \varrho\epsilon(m+1)}} \bar{\mathbb{P}}_\phi\left(\sigma(x-y) \circ \tilde{\theta}_y + r(x-y, y) > C\epsilon m\right) \\ &\leq \sum_{\substack{m \leq d_\phi^\infty(0,x) \leq \varrho(m+1) \\ d_\phi^\infty(x,y) \leq \varrho\epsilon(m+1)}} \bar{\mathbb{P}}_{T_y(\phi)}\left(\sigma(x-y) > \frac{2C\epsilon m}{3}\right) \\ &\quad + \bar{\mathbb{P}}_\phi\left(r(x-y, y) > \frac{C\epsilon m}{3}\right). \end{aligned}$$

On note que pour m suffisamment grand, les valeurs de chacun des termes de la somme sont contrôlées par les résultats [5.20](#) et [5.30](#). On introduit la variable qui garantit que m est suffisamment grand :

$$\mathcal{Z} := \inf \{T \geq 0 : \forall t \geq T, \forall x \in B_\Phi^\infty(0, \varrho(1+\epsilon)t), \kappa \mathcal{T}(x) \leq t\}.$$

La queue de distribution de cette variable aléatoire décroît en exponentielle de racine sous \mathbb{P} (et $\bar{\mathbb{P}}$). On écrit alors :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(B_m^1(\epsilon)) &\leq \bar{\mathbb{P}}(|B_\Phi^\infty(0, \varrho(1+\epsilon)(m+1))| > m^{d+2}) + \bar{\mathbb{P}}(\mathcal{Z} > m) \\ &\quad + m^{2(d+2)} A e^{-B\sqrt{C\epsilon m/3}}. \end{aligned}$$

pour certaines constantes $A, B > 0$ ne dépendant pas de m . En vertu de l'inégalité de Markov, le premier terme décroît en m^{-2} ce qui montre que la probabilité de $B_m^1(\epsilon)$ est le terme général d'une série convergente en m .

Les trois probabilités restantes sont facilement contrôlées à l'aide de la proposition [2.12](#) et d'un contrôle du type :

$$\bar{\mathbb{P}}(|\Phi \cap B((1+\epsilon)(m+1))| > m^{d+2}).$$

□

5.6 Théorème de forme asymptotique

En théorie des systèmes de particules en interaction, les théorèmes de forme asymptotique sont des résultats forts et classiques qui se prouvent en s'appuyant sur des propriétés de sous-additivité et d'ergodicité notamment via des théorèmes comme celui de Kingman [32] qui s'applique très bien pour des modèles permanents comme celui de la percolation de premier passage. D'autres versions de ce théorème ont été introduites pour permettre l'étude des modèles non-permanents. C'est le cas du théorème de Kesten et Hammersley utilisé entre autres par Bramson et Griffeath [7] puis par Durrett et Griffeath [11] pour montrer le théorème de forme asymptotique du processus de contact classique.

La première étape de notre travail sera de prouver la convergence des ratios du type $\frac{\sigma(nx)}{n}$. Le corollaire 5.26 nous donne l'existence de $M > 0$ tel que pour tout $n, m \geq 1$,

$$\bar{\mathbb{E}}[\sigma((n+m)x)] \leq \bar{\mathbb{E}}[\sigma(nx)] + \bar{\mathbb{E}}[\sigma(mx)] + M.$$

Ainsi, le lemme de Fekete implique la convergence de la suite $\left(\frac{\bar{\mathbb{E}}[\sigma(nx)]}{n}\right)_{n \geq 1}$ vers une limite finie $\pi(x)$ qui est donc un candidat naturel pour la limite de $\frac{\sigma(nx)}{n}$.

Définition 5.35. On définit donc $\pi(x)$ comme la limite :

$$\pi(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{\mathbb{E}}[\sigma(nx)]}{n} = \inf_{n \geq 1} \left\{ \frac{\bar{\mathbb{E}}[\sigma(nx)]}{n} \right\}.$$

Théorème 5.36. $\bar{\mathbb{P}}$ -presque sûrement, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(nx)}{n}$ existe et vaut $\pi(x)$. En outre, la convergence a aussi lieu dans $L^q(\bar{\mathbb{P}})$ pour tout $q \geq 1$.

Pour prouver ce résultat, on aura besoin du théorème ergodique (presque) sous-additif suivant :

Théorème 5.37 (Garet O. et Marchand R. [21]). Soit $(E, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\theta_n)_{n \geq 1}$ une collection de transformations de E laissant \mathbb{P} invariante. Sur cet espace, on considère une collection $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions intégrables, une collection $(g_n)_{n \geq 1}$ d'applications mesurables positives et une collection $(r_{n,m})_{n,m \geq 1}$ d'applications mesurables réelles telles que :

$$\forall n, m \geq 1, \quad f_{n+m} \leq f_n + f_m \circ \theta_n + g_m \circ \theta_n + r_{n,m}.$$

On suppose que :

- $c := \inf_{n \geq 1} \left\{ \frac{\mathbb{E}[f_n]}{n} \right\} > -\infty$,
- g_1 est intégrable, $\left(\frac{g_n}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge presque sûrement vers 0 et $\left(\frac{\mathbb{E}[g_n]}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0,
- Il existe $\alpha > 1$ et une suite de nombres strictement positifs $(C_m)_{m \geq 1}$ tels que pour tout $n, m \geq 1$, $\mathbb{E} \left[\left((r_{n,m})^+ \right)^\alpha \right] \leq C_m$ et $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_m}{m^\alpha} < +\infty$.

Alors, $\left(\frac{\mathbb{E}[f_n]}{n}\right)_{n \geq 1}$ converge et si π désigne sa limite, on a :

$$\mathbb{E} \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n} \right] \geq \pi.$$

Enfin, si on pose $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f_n}{n}$, alors f est invariante sous l'action des θ_n .

Théorème 5.38. On conserve les hypothèses du théorème précédent et on suppose en outre que pour tout $K \geq 1$,

$$p.s. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f_{nk} - \sum_{i=0}^{n-1} f_k \circ (\theta_k)^i \right)^+ = 0,$$

alors $\frac{f_n}{n}$ converge presque sûrement vers f .

Preuve du théorème 5.36. On applique le théorème 5.37 en prenant pour choix $f_n = \sigma(nx)$, $\theta_n = \tilde{\theta}_{nx}$, $g_m = 0$, $r_{n,m} = r(nx, mx)$, et la mesure de probabilité $\mathbb{P} = \bar{\mathbb{P}}$. On prend $\alpha > 1$, le corollaire 5.31 donne l'intégrabilité de $\sigma(x)$ sous $\bar{\mathbb{P}}$. En effet la variable aléatoire $d_\phi^\infty(0, x)$ est intégrable sous \mathbb{P} d'après la proposition 2.12 et $\mathcal{T}(x)$ admet des moments de tout ordre d'après le lemme 2.24. Enfin, le corollaire 5.26 et le lemme 2.24 donnent les contrôles nécessaires sur les moments de $r_{n,m}$.

On vérifie maintenant l'hypothèse supplémentaire du théorème 5.38. Il est facile de voir que :

$$t(nkx) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(kx) \circ (\tilde{\theta}_{kx})^i,$$

ce qui implique que $\left(\sigma(nkx) - \sum_{i=0}^{n-1} \sigma(kx) \circ (\tilde{\theta}_{kx})^i \right)^+ \leq \sigma(nkx) - t(nkx)$.

Le théorème 5.33 affirme que cette quantité est $o(n)$. Ainsi, $\frac{f_n}{n}$ converge vers une variable aléatoire $\pi(x)$ de loi invariante sous l'action de $\tilde{\theta}_x$. Or la proposition 5.13 implique que $\pi(x)$ est en fait une constante ce qui achève la preuve de la convergence presque sûre.

Pour prouver qu'une suite converge dans L^q , il suffit de montrer qu'elle converge presque sûrement et qu'elle est bornée dans un certain espace $L^{\tilde{q}}$ avec $\tilde{q} > q$. Le lemme 5.32 qui affirme que $\frac{f_n}{n}$ est bornée dans tous les L^q permet donc de conclure. □

La prochaine étape est de prouver le théorème de forme asymptotique pour le temps d'atteinte essentiel $\sigma(x)$ en suivant la stratégie habituelle :

- On montre que π est en fait une norme sur \mathbb{R}^d dans le lemme 5.39. En outre les symétries du modèles impliquent que cette norme est proportionnelle à la norme euclidienne.
- On prouve que la convergence directionnelle donnée par le théorème 5.36 est en fait uniforme en la direction dans le lemme 5.40.
- On en déduit aisément le théorème de forme dans le lemme 5.41.

Pour montrer l'analogie de ce résultat pour le temps d'atteinte classique $t(x)$ (théorème [1.1](#)), on a juste besoin du contrôle sur l'écart entre les deux temps d'atteinte donné dans le théorème [5.33](#).

Finalement, le théorème de forme pour la zone couplée est démontré dans le théorème [1.2](#) en introduisant un temps d'atteinte couplé $t'(x)$ et en analysant l'écart entre $t'(x)$ et $\sigma(x)$.

Lemme 5.39. *La fonction π est une norme sur \mathbb{R}^d proportionnelle à la norme euclidienne.*

Preuve. 1. **Inégalité triangulaire**

On a $\sigma(nx + ny) = \sigma(nx) + \sigma(ny) \circ \tilde{\theta}_{nx} + r(nx, ny)$. Comme $\bar{\mathbb{P}}$ est invariante sous l'action de $\tilde{\theta}_{nx}$, on obtient :

$$\bar{\mathbb{E}}[\sigma(nx + ny)] \leq \bar{\mathbb{E}}[\sigma(nx)] + \bar{\mathbb{E}}[\sigma(ny)] + L_1,$$

où $L_1 > 0$ est donné par le corollaire [5.26](#). On en déduit l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \pi(x + y) \leq \pi(x) + \pi(y),$$

puis l'inégalité triangulaire inversée :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \pi(x + y) \geq |\pi(x) - \pi(y)|.$$

2. Homogénéité :

- Homogénéité en les entiers naturels :

En extrayant des sous-suites du résultat du théorème [5.36](#), on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \pi(kx) = k\pi(x).$$

- Homogénéité en les entiers relatifs :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\sigma(x)$ est égal en loi à $\sigma(-x)$ sous $\bar{\mathbb{P}}$. Il suit que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \pi(-kx) = k\pi(-x) = |-k|\pi(x).$$

- Homogénéité en les rationnels :

Soient $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\pi(x) = \pi\left(\frac{x}{q}\right) = q\pi\left(\frac{x}{q}\right).$$

Ainsi :

$$\pi\left(\frac{p}{q}x\right) = |p|\pi\left(\frac{x}{q}\right) = \left|\frac{p}{q}\right|\pi(x).$$

- Homogénéité en les réels :

Il suffit de montrer que π est uniformément continue. Le lemme [5.32](#) nous donne $A > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}[\sigma(x)] \leq A \|x\|_2$. Ainsi,

$$\pi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[\sigma(nx)]}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A \|nx\|_2}{n} = A \|x\|_2.$$

De l'inégalité triangulaire inversée, on tire ensuite :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad |\pi(x) - \pi(y)| \leq \pi(x - y) \leq A \|x - y\|_2.$$

Ainsi, π est homogène.

3. Positivité

On rappelle que $H_t \cap C_\Phi^\infty = \bigcup_{s \leq t} \xi_s$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ non nul et soit $n \in \mathbb{N}^*$, remarquons que si on a $\|q(0)\|_2 \leq \frac{\|nx\|_2}{3}$ et $\|nx - q(nx)\|_2 \leq \frac{\|nx\|_2}{3}$, alors :

$$\|q(0) - q(nx)\|_2 \geq \|nx\|_2 - \|q(0)\|_2 - \|nx - q(nx)\|_2 = \frac{\|nx\|_2}{3}.$$

Ceci implique que dans ce cas $d_\Phi^\infty(0, nx) \geq \frac{\|nx\|_2}{3}$ et toujours sous ces hypothèses :

$$t(nx) < \frac{\|nx\|_2}{3K} \implies H_{\frac{\|nx\|_2}{3K}} \cap C_\Phi^\infty \not\subseteq B_\Phi^\infty\left(\frac{\|nx\|_2}{3}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(t(nx) < \frac{\|nx\|_2}{3K}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\|q(0)\|_2 > \frac{\|nx\|_2}{3}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(\|nx - q(nx)\|_2 > \frac{\|nx\|_2}{3}\right) \\ &\quad + \mathbb{P}\left(H_{\frac{\|nx\|_2}{3K}} \cap C_\Phi^\infty \not\subseteq B_\Phi^\infty\left(\frac{\|nx\|_2}{3}\right)\right). \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont contrôlés par le premier point de la proposition [2.12](#) (P. Antal et A. Pisztor) et le troisième par la proposition [5.5](#) (croissance au plus linéaire).

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}\left(\sigma(nx) < \frac{\|nx\|_2}{3K}\right) &\leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \mathbb{P}\left(\sigma(nx) < \frac{\|nx\|_2}{3K}\right) \\ &\leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \mathbb{P}\left(t(nx) < \frac{\|nx\|_2}{3K}\right), \end{aligned}$$

où l'on rappelle qu'on a noté $\rho_\lambda(\mathbb{N})$ la probabilité de survie du processus de contact de paramètre λ partant de la configuration initiale $\{0\}$ sur le graphe \mathbb{N} . Le lemme de Borel-Cantelli assure alors que presque sûrement $\pi(x) \geq \frac{\|x\|_2}{3K}$.

Ceci montre que l'application π est une norme sur \mathbb{R}^d . En outre, les symétries du modèle impliquent que π est invariante par les rotations autour de l'origine. Il suit que π est proportionnelle à la norme euclidienne ce qui achève la preuve. \square

Lemme 5.40. \mathbb{P} -presque sûrement, $\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} \frac{|\sigma(x) - \pi(x)|}{\|x\|_2} = 0$.

Preuve. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ et une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{N}}$ tels que :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\|_2 = \infty$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sigma(y_n) - \pi(y_n)| > \epsilon \|y_n\|_2$.

En outre, par compacité de la sphère unité de \mathbb{R}^d , on peut supposer qu'il existe $z \in \mathbb{R}^d$ avec $\|z\|_2 = 1$ tel que $z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{\|y_n\|_2}$.

Soit $\tilde{\epsilon} > 0$ et soit $N > 0$ tel que :

$$[n \geq N] \implies [\|y_n - \|y_n\|_2 z\|_2 \leq \|y_n\|_2 \tilde{\epsilon}].$$

Quitte à augmenter la valeur de N , en vertu du théorème 5.34, on peut aussi supposer :

$$[n \geq N] \implies [|\sigma(y_n) - \sigma(\|y_n\|_2 z)| \leq C\tilde{\epsilon} \|y_n\|_2].$$

Puis, montrons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\|y_n\|_2 z)}{\|y_n\|_2} = \pi(z)$. En vertu d'une part du théorème 5.34 et d'autre part de la définition de π , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\|y_n\|_2 z) - \sigma(\lfloor \|y_n\|_2 \rfloor z)}{\|y_n\|_2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\|y_n\|_2 z)}{\|y_n\|_2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor \|y_n\|_2 \rfloor \sigma(\lfloor \|y_n\|_2 \rfloor z)}{\|y_n\|_2 \lfloor \|y_n\|_2 \rfloor} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\|y_n\|_2 z)}{\|y_n\|_2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\lfloor \|y_n\|_2 \rfloor z)}{\lfloor \|y_n\|_2 \rfloor} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(\|y_n\|_2 z)}{\|y_n\|_2} - \pi(z). \end{aligned}$$

Quitte encore à augmenter N , on peut donc supposer :

$$[n \geq N] \implies \left[\left| \frac{\sigma(\|y_n\|_2 z)}{\|y_n\|_2} - \pi(z) \right| \leq \tilde{\epsilon} \right].$$

On rappelle qu'on peut déduire du corollaire 5.31 l'existence de $A > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad |\pi(x) - \pi(y)| \leq A \|x - y\|_2.$$

Ce qui nous permet enfin d'écrire :

$$\begin{aligned} &|\sigma(y_n) - \pi(y_n)| \\ &\leq |\sigma(y_n) - \sigma(\|y_n\|_2 z)| + \|y_n\|_2 \left| \frac{\sigma(\|y_n\|_2 z)}{\|y_n\|_2} - \pi(z) \right| + |\pi(\|y_n\|_2 z) - \pi(y_n)| \\ &\leq C\tilde{\epsilon} \|y_n\|_2 + \tilde{\epsilon} \|y_n\|_2 + A\tilde{\epsilon} \|y_n\|_2. \end{aligned}$$

Or ceci est absurde pour $\tilde{\epsilon}$ suffisamment petit. Ceci achève la preuve. \square

Nous pouvons maintenant prouver le théorème de forme asymptotique pour σ , plus précisément, pour $t > 0$, notons :

$$G_t := \{x \in \mathbb{R}^d : \sigma(x) \leq t\}. \quad (12)$$

Lemme 5.41. *Il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\bar{\mathbb{P}}\left(\exists T > 0, \forall t \geq T, B(a - \epsilon) \subseteq \frac{G_t}{t} \subseteq B(a + \epsilon)\right) = 1.$$

Preuve. On rappelle que la norme π est proportionnelle à la norme euclidienne et soit donc $a > 0$ une constante telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \pi(x) = \frac{1}{a} \|x\|_2.$$

Soit $\epsilon > 0$, on montrera séparément les deux inclusions presque sûres par l'absurde.

- $\frac{G_t}{t} \subseteq B(a + \epsilon)$
Supposons donc qu'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{G_{t_n}}{t_n} \not\subseteq B(a + \epsilon)$. C'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}^d$ tel que $\sigma(x_n) \leq t_n$ et $\frac{\|x_n\|_2}{t_n} > a + \epsilon$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_2 = \infty$ et :

$$\forall n \geq 0, \quad \frac{\|x_n\|_2}{\sigma(x_n)} > a + \epsilon.$$

Or l'uniforme convergence du lemme [5.40](#) implique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma(x_n) - \pi(x_n)|}{\|x_n\|_2} = 0.$$

Mais on rappelle que $\pi(x_n) = \frac{1}{a} \|x_n\|_2$, donc il vient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sigma(x_n)}{\|x_n\|_2} - \frac{1}{a} \right| = 0,$$

ce qui est absurde.

- $B(a - \epsilon) \subseteq \frac{G_t}{t}$
Supposons donc qu'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(a - \epsilon) \not\subseteq \frac{G_{t_n}}{t_n}$. C'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|x_n\|_2 \leq (a - \epsilon) t_n$ bien que $\sigma(x_n) > t_n$. Ainsi, $\frac{\|x_n\|_2}{\sigma(x_n)} < a - \epsilon$. Or les conditions $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ et $\sigma(x_n) > t_n$ impliquent que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non-bornée donc une sous-suite contredit le lemme [5.40](#) et la preuve est achevée.

□

À l'aide du théorème [5.33](#) et d'arguments similaires à ceux utilisés pour démontrer le lemme précédent, on obtient immédiatement le théorème [1.1](#). On rappelle que $H_t := \{x \in \mathbb{R}^d : t(x) \leq t\}$. On notera que $H_t \neq \bigcup_{s \leq t} \xi_s$. Ces deux ensembles se ressemblent mais on a seulement : $\bigcup_{s \leq t} \xi_s = H_t \cap C_{\Phi}^{\infty}$.

Théorème [1.1](#). *Il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\bar{\mathbb{P}} \left(\exists T > 0, \forall t \geq T, B(a - \epsilon) \subseteq \frac{H_t}{t} \subseteq B(a + \epsilon) \right) = 1.$$

Preuve. On montre en fait trivialement que $\bar{\mathbb{P}}$ -presque sûrement,

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} \frac{|t(x) - \pi(x)|}{\|x\|_2} = 0.$$

Puis, il suffit d'appliquer mécaniquement et pas à pas la preuve précédente en remplaçant $\sigma(x)$ par $t(x)$.

En vertu du théorème [5.33](#) et du lemme [5.40](#), on a $\bar{\mathbb{P}}$ -presque sûrement :

$$\frac{|t(x) - \pi(x)|}{\|x\|_2} \leq \frac{|t(x) - \sigma(x)| + |\sigma(x) - \pi(x)|}{\|x\|_2} \rightarrow 0 \text{ lorsque } \|x\|_2 \rightarrow \infty.$$

□

5.7 Zone couplée

Prouvons maintenant le théorème de forme asymptotique pour la zone couplée. C'est un résultat important permettant notamment de donner une nouvelle caractérisation de la norme π . Pour $t \geq 0$, notons :

$$K_t := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \xi_t(q(x)) = \xi_t^{C_\Phi^\infty}(q(x)) \right\}.$$

On appelle zone couplée l'ensemble K'_t des points dont l'état à partir de l'instant $t \geq 0$ est le même pour le processus de contact partant de la configuration initiale réduite au singleton $\{q(0)\}$ et celui partant du graphe C_Φ^∞ entier :

$$K'_t := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \forall s \geq t, \xi_s(q(x)) = \xi_s^{C_\Phi^\infty}(q(x)) \right\}.$$

5.7.1 Théorème de forme

Commençons par montrer le théorème de forme pour la zone couplée en admettant le résultat suivant :

Proposition 5.42. *Il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$:*

$$\bar{\mathbb{P}}(0 \notin K'_t) \leq Ae^{-B\sqrt{t}}.$$

On donnera la preuve de cette proposition dans la sous-section Contrôles de croissance pour la zone couplée [5.7.2](#). Tournons nous maintenant vers la preuve du théorème de forme.

Théorème [1.2](#) de forme asymptotique pour la zone couplée *Il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\bar{\mathbb{P}}\left(\exists T > 0, \forall t \geq T, B(a - \epsilon) \subseteq \frac{K'_t \cap G_t}{t} \subseteq B(a + \epsilon)\right) = 1.$$

Preuve. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, notons :

$$t'(x) := \inf \{t \geq 0 : x \in K'_t \cap G_t\}$$

le temps d'atteinte de la zone couplée intersectée avec G_t . Il suffit alors comme pour le théorème [1.1](#) de montrer que $\bar{\mathbb{P}}$ -presque sûrement,

$$\lim_{\|x\|_2 \rightarrow \infty} \frac{|t'(x) - \sigma(x)|}{\|x\|_2} = 0.$$

Par définition, $t'(x) \geq \sigma(x)$ donc il est suffisant de montrer l'existence de constantes $A, B > 0$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall s \geq 0, \bar{\mathbb{P}}(t'(x) - \sigma(x) \geq t) \leq Ae^{-Bt}.$$

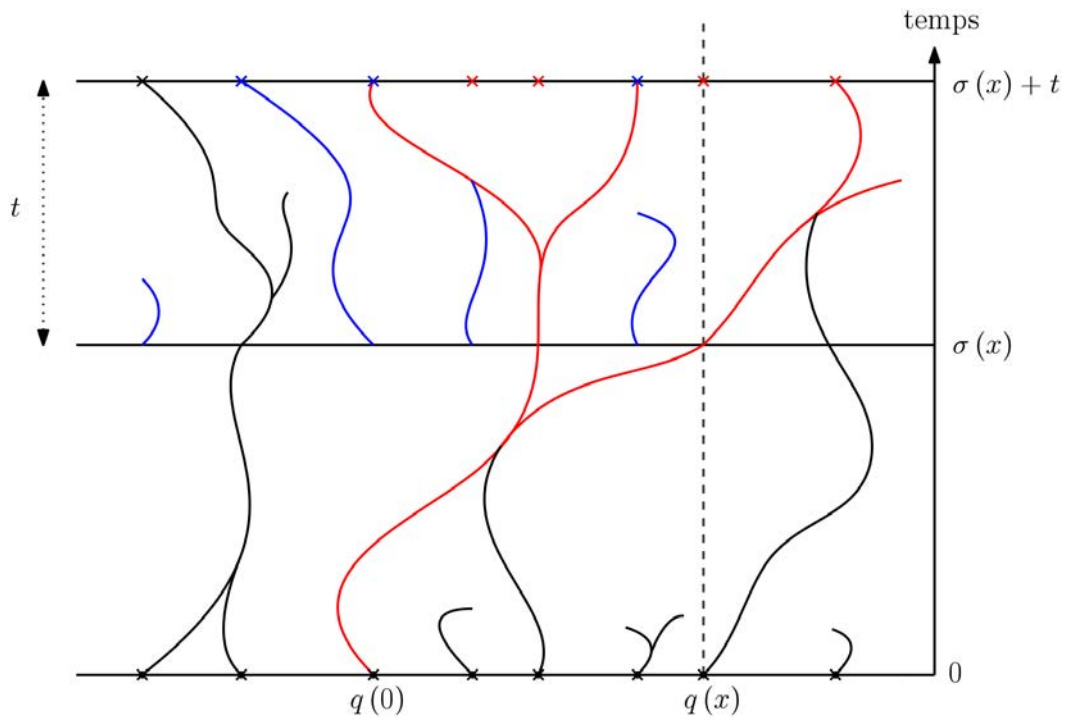
Pour cela, on remarque deux faits :

1. Pour tout $t \geq 0$, $K_{\sigma(x)+t} \supseteq x + K_t \circ \tilde{\theta}_x$.

En effet, soit $z \in x + K_t \circ \tilde{\theta}_x$. Supposons que $q(z) \notin \xi_{\sigma(x)+t}^{C_\Phi^\infty}$, alors par additivité $\xi_{\sigma(x)+t} \subseteq \xi_{\sigma(x)+t}^{C_\Phi^\infty}$ donc $q(z) \notin \xi_{\sigma(x)+t}$, et ainsi $z \in K_{\sigma(x)+t}$. Supposons maintenant que $q(z) \in \xi_{\sigma(x)+t}^{C_\Phi^\infty}$, alors $q(z-x) \in \xi_t^{C_\Phi^\infty} \circ \tilde{\theta}_x$ et comme $\xi_{\sigma(x)}^{C_\Phi^\infty} \subseteq C_\Phi^\infty$ alors $q(z-x) \in \xi_t^{C_\Phi^\infty} \circ \tilde{\theta}_x$. Mais de $z-x \in K_t \circ \tilde{\theta}_x$ et de la définition de K_t , il vient $\xi_t(q(z-x)) \circ \tilde{\theta}_x = \xi_t^{C_\Phi^\infty}(q(z-x)) \circ \tilde{\theta}_x = 1$ et ainsi :

$$\left[q(x) \in \xi_{\sigma(x)}, q(z-x) \in \xi_t \circ \tilde{\theta}_x \right] \implies q(z) = x + q(z-x) \circ T_x \in \xi_{\sigma(x)+t}.$$

D'où finalement, $z \in K_{\sigma(x)+t}$.



Sur ce dessin, les croix sont les points de C_Φ^∞ et $K_{\sigma(x)+t}$ est représenté par l'ensemble des points rouges et bleus tandis que $x + K_t \circ \tilde{\theta}_x$ est donné uniquement par les points rouges.

2. Fixons $t \geq 0$, le premier point implique :

$$\left(\bigcap_{s \geq t} K_{\sigma(x)+s} \right) \supseteq \left(x + \bigcap_{s \geq t} (K_s \circ \tilde{\theta}_x) \right)$$

et donc :

$$K'_{\sigma(x)+t} \supseteq \left(x + (K'_t \circ \tilde{\theta}_x) \right).$$

Muni de ces deux observations et sachant que $\tilde{\theta}_x$ conserve la mesure $\bar{\mathbb{P}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{P}}(t'(x) > \sigma(x) + t) &= \bar{\mathbb{P}}(x \notin K'_{\sigma(x)+t} \cap G_{\sigma(x)+t}) \\ &= \bar{\mathbb{P}}(x \notin K'_{\sigma(x)+t}) \\ &\leq \bar{\mathbb{P}}(x \notin K'_t \circ \tilde{\theta}_x) = \bar{\mathbb{P}}(0 \notin K'_t).\end{aligned}$$

On achève la preuve en utilisant la proposition [5.42](#). \square

Le théorème de forme asymptotique pour la zone couplée permet d'obtenir une nouvelle caractérisation de π qui rend mieux compte des symétries du modèle.

Corollaire 5.43. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\pi(x) = \inf \left\{ c > 0 : \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q(nx) \in \xi_{nc}) > 0 \right\}.$$

Preuve. On note $g(x) := \inf \left\{ c > 0 : \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q(nx) \in \xi_{nc}) > 0 \right\}$.

- Soit $c < \pi(x)$. Par le théorème de forme asymptotique, on a $\bar{\mathbb{P}}$ -presque sûrement :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad q(nx) \notin \xi_{nc}.$$

Ainsi, pour \mathbb{P} -presque tout $\phi \in X$, on a :

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \{q(nx) \notin \xi_{nc}\} \right) = 1.$$

Or, par continuité séquentielle croissante :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \{q(nx) \notin \xi_{nc}\} \right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\bigcap_{n \geq N} \{q(nx) \notin \xi_{nc}\} \right) \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}_\phi(q(Nx) \notin \xi_{Nc}).\end{aligned}$$

On obtient $1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}_\phi(q(nx) \notin \xi_{nc}) \leq 1$, ce qui implique que pour \mathbb{P} -presque tout $\phi \in X$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mathbb{P}}_\phi(q(nx) \in \xi_{nc}) = 0$. Puis, en vertu de l'inégalité FKG,

$$\bar{\mathbb{P}}_\phi(q(nx) \in \xi_{nc}) = \frac{\mathbb{P}_\phi(q(nx) \in \xi_{nc}, \tau = \infty)}{\mathbb{P}_\phi(\tau = \infty)} \geq \mathbb{P}_\phi(q(nx) \in \xi_{nc}).$$

Enfin, par convergence dominée, on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q(nx) \in \xi_{nc}) = 0$ et $g(x) \geq \pi(x)$.

- Soit maintenant $c > \pi(x)$. On va montrer que pour \mathbb{P} -presque tout $\phi \in X$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\phi(q(nx) \in \xi_{nc}) \geq \rho_\lambda(\mathbb{N})^2,$$

ce qui nous donnera en vertu du lemme de Fatou

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(q(nx) \in \xi_{nc}) \geq \mathbb{E} \left[\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\Phi(q(nx) \in \xi_{nc}) \right] \geq \rho_\lambda(\mathbb{N})^2.$$

Ceci permettra de conclure $\pi(x) = g(x)$.

Le théorème de forme pour la zone couplée implique que $\bar{\mathbb{P}}$ -presque sûrement :

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{t'(nx)}{n} = \pi(x) \text{ et donc } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, q(nx) \in K_{nc}.$$

Il suit facilement que pour \mathbb{P} -presque tout $\phi \in X$,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\phi \left(q(nx) \in \xi_{nc}^{C_\phi^\infty}, q(nx) \notin \xi_{nc}, \tau = \infty \right) = 0.$$

Ceci implique :

$$\begin{aligned} & \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\phi(q(nx) \in \xi_{nc}, \tau = \infty) \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\mathbb{P}_\phi \left(q(nx) \in \xi_{nc}^{C_\phi^\infty}, \tau = \infty \right) - \mathbb{P}_\phi \left(q(nx) \in \xi_{nc}^{C_\phi^\infty}, q(nx) \notin \xi_{nc}, \tau = \infty \right) \right] \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\phi \left(q(nx) \in \xi_{nc}^{C_\phi^\infty}, \tau = \infty \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant cette dernière égalité, l'inégalité FKG puis un argument classique de renversement du temps on obtient

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\phi(q(nx) \in \xi_{nc}) &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\phi(q(nx) \in \xi_{nc}, \tau = \infty) \\ &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\phi \left(q(nx) \in \xi_{nc}^{C_\phi^\infty}, \tau = \infty \right) \\ &\geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\phi \left(q(nx) \in \xi_{nc}^{C_\phi^\infty} \right) \mathbb{P}_\phi(\tau = \infty) \\ &\geq \rho_\lambda(\mathbb{N}) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\phi(\xi_{nc}^{q(nx)} \neq \emptyset) \\ &\geq \rho_\lambda(\mathbb{N})^2. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du lemme. □

5.7.2 Contrôles de croissance pour la zone couplée

On cherche à montrer la proposition [5.42](#) :

Proposition [5.42](#). *Il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$:*

$$\bar{\mathbb{P}}(0 \notin K'_t) \leq A e^{-B\sqrt{t}}.$$

On obtiendra en fait ce résultat comme corollaire de la proposition [5.5](#) (croissance au plus linéaire) et du contrôle de croissance :

Proposition 5.44. *Il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$,*

$$\bar{\mathbb{P}}(B_{\Phi}^{\infty}(ct/2) \not\subseteq K_t) \leq Ae^{-B\sqrt{t}}.$$

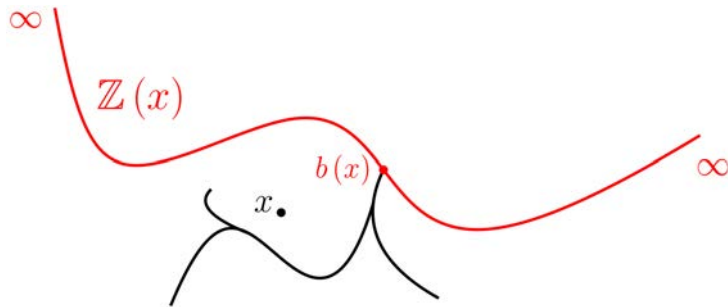
Nous allons donc commencer par montrer ce contrôle et pour cela, nous utilisons une nouvelle fois une stratégie de redémarrage en s’inspirant toujours de la construction de O. Garet et R. Marchand [21].

Cette procédure permet de coupler le système d’intérêt (ou ambiant) avec un système qu’il domine stochastiquement mais dont l’étude est plus simple (le système faible). Ensuite, il est possible de transporter certaines propriétés du système faible vers le système ambiant. On laisse les processus évoluer en même temps et à chaque fois que le système faible s’éteint, si le système ambiant reste vivant, on redémarre un système faible toujours couplé avec le système ambiant. Si à une étape de la procédure les deux systèmes s’éteignent en même temps, alors le contrôle du temps d’extinction du processus faible peut être récupéré pour le système ambiant. Si en revanche, à un certain instant, on obtient un système faible qui survit alors il en est de même pour le processus ambiant et dans ce cas, on a un contrôle exponentiel sur cet instant et on peut transporter des propriétés utiles du processus faible comme certains contrôles sur les temps d’atteintes.

Nous allons utiliser cette technique ici pour coupler le processus de contact de paramètre λ en environnement inhomogène $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$ fixé avec un processus de contact de paramètre λ évoluant sur une copie de \mathbb{Z} .

On rappelle que $\text{Bif}(C_{\phi}^{\infty})$ désigne l’ensemble des points de C_{ϕ}^{∞} qui sont une bifurcation, c’est à dire qui sont inclus dans un sous-graphe de C_{ϕ}^{∞} isomorphe à \mathbb{Z} en tant que graphe et que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $b(x)$ désigne la bifurcation la plus proche de x au sens de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$.

On note ensuite $\mathbb{Z}(x)$ le choix déterministe d’une copie de \mathbb{Z} incluse dans C_{ϕ}^{∞} passant par $b(x)$.



Dans la suite, on note ζ le processus de contact ξ restreint au sous graphe $\mathbb{Z}(x)$ (c’est-à-dire en ne regardant que les infections entre les sommets de ce sous-graphe de sorte que ζ soit égal en loi au processus de contact standard de paramètre λ sur \mathbb{Z}). On désigne aussi par τ_{ζ} le temps d’extinction du processus ζ .

On considère alors la construction de la section *Temps d'atteinte essentiel* [5.3.1](#) pour la fonction de démarrage b et le temps d'arrêt $\tau_\zeta^{b(x)}$ (dont la queue de distribution décroît exponentiellement vite). Plus précisément, on s'intéresse aux quantités $(u_k(x, b, \tau_\zeta^{b(x)}))_{k \in \mathbb{N}}$, $(v_k(x, b, \tau_\zeta^{b(x)}))_{k \in \mathbb{N}}$, $K(x, b, \tau_\zeta^{b(x)})$ et $\sigma(x, b, \tau_\zeta^{b(x)})$. Dans ce cadre, on obtient l'équivalent suivant au corollaire [5.30](#) :

Lemme 5.45. *Il existe $A, B > 0$ telles que pour tout $\phi \in \Gamma(b)$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \geq \kappa \mathcal{I}(x, b), \bar{\mathbb{P}}_\phi(\sigma(x, b, \tau_\zeta^{b(x)}) \geq (1 + \alpha_{\mathbb{N}}) d_\phi^\infty(0, b(x)) + t) \leq Ae^{-B\sqrt{t}}.$$

Remarque. *Par abus, on notera encore $(u_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$, $(v_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$, $K(x)$ et $\sigma(x)$ les quantités $(u_k(x, b, \tau_\zeta^{b(x)}))_{k \in \mathbb{N}}$, $(v_k(x, b, \tau_\zeta^{b(x)}))_{k \in \mathbb{N}}$, $K(x, b, \tau_\zeta^{b(x)})$ et $\sigma(x, b, \tau_\zeta^{b(x)})$. La section Zone couplée étant indépendante des sections précédentes, il ne doit pas y avoir de confusion.*

Le corollaire suivant suit immédiatement.

Corollaire 5.46. *Il existe $A, B, c > 0$ telles que pour tout $\phi \in \Gamma(b)$, tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t \geq \kappa \mathcal{I}(x, b)$:*

$$d_\phi^\infty(0, b(x)) \leq ct \implies \bar{\mathbb{P}}_\phi(\sigma(x) \geq t) \leq Ae^{-B\sqrt{t}}.$$

On rappelle maintenant un résultat de R. Durrett ([\[16\]](#)) obtenu comme conséquence de la construction de Bezuidenhout et Grimmett ([\[4\]](#)) :

Proposition 5.47 (Durrett). *Soient β et $\tilde{\beta}$ deux processus de contact indépendants de paramètre $\lambda > \lambda_c(\mathbb{Z})$ évoluant sur le même graphe \mathbb{Z} sous \mathbb{P} . Alors il existe des constantes $A, B, C > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{Z}$,*

$$\|x\|_1 \leq Ct \implies \mathbb{P}(\beta_t \neq \emptyset, \tilde{\beta}_t^x \neq \emptyset, \beta_t \cap \tilde{\beta}_t^x = \emptyset) \leq Ae^{-Bt}.$$

Définition 5.48. *On fixe alors $C_{\mathbb{Z}} > 0$ une telle constante et on fixe aussi $c > 0$ la constante donnée par le corollaire [5.46](#) que l'on suppose inférieure à $C_{\mathbb{Z}}/2$.*

On peut alors montrer le lemme suivant :

Lemme 5.49. *Il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $\phi \in \Gamma \cap \Gamma(b)$, tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t \geq \max(\kappa \mathcal{I}(x, b), \frac{4}{C_{\mathbb{Z}}} T_2(0, q), \frac{4}{C_{\mathbb{Z}}} T_2(x, q))$,*

$$\left[d_\phi^\infty(0, x) \leq ct \text{ et } d_\phi^\infty(0, b(x)) \leq ct \implies \mathbb{P}_\phi(\xi_t \neq \emptyset, q(x) \in \xi_t^{C_\phi^\infty} \setminus \xi_t) \leq Ae^{-B\sqrt{t}} \right].$$

Preuve. Soient donc $\phi \in \Gamma \cap \Gamma(b)$, $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $d_\phi^\infty(0, x) \leq ct$ et $d_\phi^\infty(0, b(x)) \leq ct$ et $t \geq \max(\kappa \mathcal{I}(x, b), \frac{4}{C_{\mathbb{Z}}} T_2(0, q), \frac{4}{C_{\mathbb{Z}}} T_2(x, q))$.

La preuve fera appel au lemme [5.45](#) ainsi qu'à la proposition [5.5](#) c'est pourquoi on doit prendre $\phi \in \Gamma \cap \Gamma(b)$.

La stratégie ici est de regarder la construction graphique de Harris sur l'intervalle de temps $[0; t]$ et de considérer deux processus de contact couplés d'une certaine manière avec ξ :

- le premier est en fait exactement ξ mais que l'on n'observe que jusqu'au temps $t/2$,
- tandis que l'autre correspond au processus de contact partant de la configuration $\{q(x)\}$ au temps t mais pour lequel on a renversé le temps et que l'on observe aussi pendant sur un intervalle de taille $t/2$.

Ces deux processus sont alors indépendants car ils évoluent sur des zones spatio-temporelles disjointes. On utilisera ensuite la construction précédente pour garantir qu'avec grande probabilité chacun d'eux engendre une sous-population qui survive sur $\mathbb{Z}(x)$ avant un temps $et/2$ et on sera alors en mesure d'utiliser le résultat [5.47](#) de R. Durrett qui assurera qu'avec grande probabilité, si les deux processus indépendants mentionnés précédemment survivent jusqu'au temps $t/2$, alors ils sont d'intersection non-vidé au temps $t/2$ et on verra que sur cet événement on a l'implication :

$$x \in \xi_t^{C_\phi^\infty} \implies x \in \xi_t,$$

ce qui achèvera la preuve.

Soit $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon \leq \frac{KC_{\mathbb{Z}}}{2}$. Le choix de ϵ est motivé par la suite lorsque l'on souhaite utiliser la proposition [5.5](#) (croissance au plus linéaire).

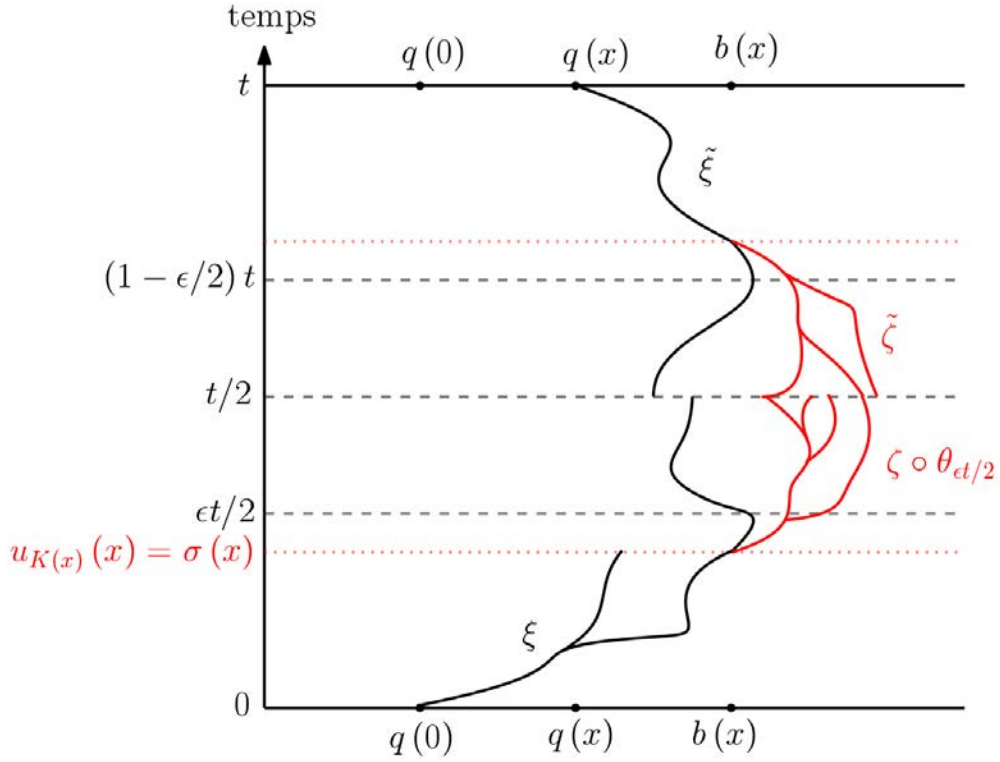
On considère les processus $(\xi_s)_{0 \leq s \leq t/2}$, $(\tilde{\xi}_s^{q(x)})_{0 \leq s \leq t/2}$ ainsi que $(\zeta_s^a \circ \theta_{et/2})_{0 \leq s \leq (1-\epsilon)t/2}$ et $(\tilde{\zeta}_s^b)_{0 \leq s \leq (1-\epsilon)t/2}$ où $a, b \in \mathbb{Z}(x)$ et où l'on a noté :

$$\tilde{\xi}_s^{q(x)} := \left\{ y \in C_\phi^\infty : q(x) \in \xi_s^y \circ \theta_{t-s} \right\}$$

$$\text{et } \tilde{\zeta}_s^b := \left\{ y \in \mathbb{Z}(x) : b \in \zeta_s^y \circ \theta_{(1-\epsilon/2)t-s} \right\}.$$

On rappelle que ζ désigne le processus de contact couplé avec ξ évoluant sur $\mathbb{Z}(x)$. Les processus $(\tilde{\xi}_s^{q(x)})_{0 \leq s \leq t/2}$ et $(\tilde{\zeta}_s^b)_{0 \leq s \leq (1-\epsilon)t/2}$ sont des processus de contact mais pour lesquels le temps a été renversé. Remarquons que :

- si $a \in \xi_{et/2} \cap \mathbb{Z}(x)$, $b \in \tilde{\xi}_{et/2}^{q(x)} \cap \mathbb{Z}(x)$ et $\zeta_{(1-\epsilon)t/2}^a \circ \theta_{et/2} \cap \tilde{\zeta}_{(1-\epsilon)t/2}^b \neq \emptyset$ alors $q(x) \in \xi_t$;
- si $q(x) \in \xi_t^{C_\phi^\infty}$, alors $\tilde{\xi}_{t/2}^{q(x)} \neq \emptyset$;
- si $\xi_t \neq \emptyset$, alors $\xi_{t/2} \neq \emptyset$.



Posons :

$$E_1 := \{ \xi_{t/2} \neq \emptyset \} \setminus \{ \exists a \in \mathbb{Z}(x) \cap \xi_{ct/2} \cap B_\phi^\infty(C_{\mathbb{Z}}t/4) : \zeta_{(1-\epsilon)t/2}^a \circ \theta_{ct/2} \neq \emptyset \},$$

Et

$$E_2 := \{ \tilde{\xi}_{t/2}^{q(x)} \neq \emptyset \} \setminus \{ \exists b \in \mathbb{Z}(x) \cap \tilde{\xi}_{ct/2}^{q(x)} \cap B_\phi^\infty(q(x), C_{\mathbb{Z}}t/4) : \tilde{\zeta}_{(1-\epsilon)t/2}^b \neq \emptyset \}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\phi \left(\xi_t \neq \emptyset, q(x) \in \xi_t^{C_\phi^\infty} \setminus \xi_t \right) &\leq \mathbb{P}_\phi \left(\xi_{t/2} \neq \emptyset, \tilde{\xi}_{t/2}^{q(x)} \neq \emptyset, \xi_{t/2} \cap \tilde{\xi}_{t/2}^{q(x)} = \emptyset \right) \\ &\leq \mathbb{P}_\phi(E_1) + \mathbb{P}_\phi(E_2) + S, \end{aligned}$$

où la somme S est égale à :

$$\sum_{\substack{a \in B_\phi^\infty(q(0), C_{\mathbb{Z}}t/4) \cap \mathbb{Z}(x) \\ b \in B_\phi^\infty(q(x), C_{\mathbb{Z}}t/4) \cap \mathbb{Z}(x)}} \mathbb{P}_\phi \left(\zeta_{(1-\epsilon)t/2}^a \circ \theta_{ct/2} \neq \emptyset, \tilde{\zeta}_{(1-\epsilon)t/2}^b \neq \emptyset, \zeta_{(1-\epsilon)t/2}^a \circ \theta_{ct/2} \cap \tilde{\zeta}_{(1-\epsilon)t/2}^b = \emptyset \right).$$

Pour tous les couples (a, b) qui apparaissent dans la somme S , comme $c \leq C_{\mathbb{Z}}/2$ (voir la définition [5.48](#)), alors $d_\phi^\infty(0, x) \leq ct$ implique :

$$\begin{aligned} d_\phi^\infty(a, b) &\leq d_\phi^\infty(a, 0) + d_\phi^\infty(0, x) + d_\phi^\infty(x, b) \\ &\leq C_{\mathbb{Z}}t/4 + C_{\mathbb{Z}}t/2 + C_{\mathbb{Z}}t/4 = C_{\mathbb{Z}}t \end{aligned}$$

ce qui nous permet d'utiliser la proposition [5.47](#) pour contrôler S . On remarque que le nombre de couple (a, b) dans S est contrôlé par définition de $T_2(x, q)$ et $T_2(0, q)$ ainsi que par choix de t .

Il reste maintenant à contrôler les probabilités des événements E_1 et E_2 . Nous avons fait une construction (procédure de renormalisation) qui nous permet de contrôler E_1 à l'aide du corollaire [5.46](#) ($\phi \in \Gamma(b)$) comme on va le voir immédiatement. E_2 lui n'a pas la même probabilité que E_1 mais lui ressemble fortement et en fait une étude similaire à celle de E_1 permet de conclure. Posons :

$$E'_1 := \{\tau = \infty\} \setminus \left\{ \exists a \in \mathbb{Z}(x) \cap \xi_{ct/2} : \zeta_{(1-\epsilon)t/2}^a \circ \theta_{ct/2} \neq \emptyset \right\}.$$

On a :

$$\mathbb{P}_\phi(E_1) \leq \mathbb{P}_\phi(E'_1) + \mathbb{P}_\phi(t/2 \leq \tau < \infty) + \mathbb{P}_\phi\left(H_{ct/2} \cap C_\phi^\infty \not\subseteq B_\phi^\infty(C_{\mathbb{Z}t}/4)\right).$$

Or par choix de ϵ , $C_{\mathbb{Z}t}/4 \geq Kct/2$ et en vertu de la proposition [5.5](#) ($\phi \in \Gamma$) :

$$\mathbb{P}_\phi\left(H_{ct/2} \cap C_\phi^\infty \not\subseteq B_\phi^\infty(C_{\mathbb{Z}t}/4)\right) \leq Ae^{-Bct/2}.$$

Enfin, par construction :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\phi(E'_1) &\leq \mathbb{P}_\phi(\tau = \infty) \bar{\mathbb{P}}_\phi\left(\left\{ \exists a \in \mathbb{Z}(x) \cap \xi_{ct/2} : \zeta_{(1-\epsilon)t/2}^a \circ \theta_{ct/2} \neq \emptyset \right\}^c\right) \\ &\leq \bar{\mathbb{P}}_\phi(\sigma(x) \geq ct/2) \end{aligned}$$

où l'exposant c désigne le complémentaire de l'événement. En effet, sur l'événement $\{\sigma(x) < ct/2\}$, au temps $\sigma(x)$, on a $b(x) \in \xi_{\sigma(x)}$ et $\tau_\zeta^{b(x)} \circ \theta_{\sigma(x)} = \infty$ ce qui implique qu'au temps $ct/2 > \sigma(x)$, il existe $a \in \mathbb{Z}(x) \cap \xi_{ct/2}$ tel que $\zeta_{(1-\epsilon)t/2}^a \circ \theta_{ct/2} \neq \emptyset$. Enfin, on remarque que si $d_\phi^\infty(0, b(x)) \leq ct$ alors la dernière probabilité est contrôlée par le corollaire [5.46](#) ($\phi \in \Gamma(b)$) ce qui achève la preuve. \square

On déduit facilement le contrôle de croissance pour la zone couplée des résultats [5.49](#) et [2.10](#) (b est une fonction de démarrage). On rappelle que sous $\bar{\mathbb{P}}$, la variable aléatoire Φ donne la réalisation de l'environnement aléatoire spatial.

Proposition [5.44](#). *Il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$,*

$$\bar{\mathbb{P}}(B_\Phi^\infty(ct/2) \not\subseteq K_t) \leq Ae^{-B\sqrt{t}}.$$

Preuve. Soit $t \geq 0$, et notons $T := \max(\kappa \mathcal{F}(x, b), 4/C_{\mathbb{Z}}T_2(0, q), 4/C_{\mathbb{Z}}T_2(x, q))$, on a :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(B_{\Phi}^{\infty}(ct/2) \not\subseteq K_t) &\leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{\rho_{\lambda}(\mathbb{N})} \mathbb{P}_{\phi} \left(B_{\phi}^{\infty}(ct/2) \not\subseteq K_t, \tau = \infty \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{\rho_{\lambda}(\mathbb{N})} \mathbb{P}_{\phi} \left(\bigcup_{x \in B_{\phi}^{\infty}(ct/2)} \{x \notin K_t, \tau = \infty\} \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{\rho_{\lambda}(\mathbb{N})} \mathbb{P}_{\phi} \left(\bigcup_{x \in B_{\phi}^{\infty}(ct/2)} \left\{ x \in \xi_t^{C_{\phi}^{\infty}} \setminus \xi_t, \xi_t \neq \emptyset \right\} \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{\rho_{\lambda}(\mathbb{N})} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{T \geq t\}} + \mathbb{1}_{\bigcup_{x \in B_{\phi}^{\infty}(ct/2)} \{d_{\phi}^{\infty}(0, b(x)) > ct\}} + \sum_{x \in B_{\phi}^{\infty}(ct/2)} Ae^{-B\sqrt{t}} \right] \end{aligned}$$

où la dernière ligne est due au lemme [5.49](#). On remarque alors que la probabilité de l'événement $\{T \geq t\}$ est contrôlée par les lemmes [2.22](#) et [2.24](#). Enfin, on a :

$$\bigcup_{x \in B_{\phi}^{\infty}(ct/2)} \{d_{\phi}^{\infty}(0, b(x)) > ct\} \subseteq \{d_{\phi}^{\infty}(0, b(0)) > ct/2\}$$

dont la probabilité est contrôlée par la proposition [2.12](#). Ceci achève la preuve. \square

On peut alors enfin faire la preuve de la proposition [5.42](#) :

Proposition [5.42](#). *Il existe des constantes $A, B > 0$ telles que pour tout $t \geq 0$:*

$$\bar{\mathbb{P}}(0 \notin K'_t) \leq Ae^{-B\sqrt{t}}.$$

Preuve. Soit $t \geq 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{P}}(0 \notin K'_t) &= \bar{\mathbb{P}}(\exists s \geq t : 0 \notin K_s) \\ &\leq \sum_{k=\lfloor t \rfloor}^{+\infty} \bar{\mathbb{P}}(B_{\Phi}^{\infty}(ck/2) \not\subseteq K_k) \\ &\quad + \sum_{k=\lfloor t \rfloor}^{+\infty} \bar{\mathbb{P}} \left(\left\{ B_{\Phi}^{\infty}(ck/2) \subseteq K_k \right\} \cap \bigcup_{s \in [k, k+1[} \{0 \notin K_s\} \right). \end{aligned}$$

La première somme est contrôlée par le contrôle de croissance pour la zone couplée [5.44](#). Pour la seconde, fixons $\phi \in \{\exists! \text{ amas } \infty\}$ et $k \geq \lfloor t \rfloor$, supposons que $B_{\phi}^{\infty}(ck/2) \subseteq K_k$ et considérons $s \in [k, k+1[$ tel que $0 \notin K_s$. Alors, il existe $x \in C_{\phi}^{\infty}$ tel que $q(0) \in \xi_s^x \setminus \xi_s$. Comme $q(0) \in \xi_s^x$ et $s \geq k$, il existe $y \in \xi_k^x$ tel que $q(0) \in \xi_{s-k}^y \circ \theta_k$. Si $y \in B_{\phi}^{\infty}(ck/2) \subseteq K_k$, alors $\xi_k(y) = \xi_k^{C_{\phi}^{\infty}}(y) = 1$, ce qui implique que $y \in \xi_k$. Maintenant, comme $q(0) \in \xi_{s-k}^y \circ \theta_k$, on obtient $q(0) \in \xi_s$, ce qui contredit l'hypothèse de choix de s . Ainsi, on a

nécessairement $y \notin B_\phi^\infty(ck/2)$, donc :

$$\begin{aligned}
& \bar{\mathbb{P}}_\phi \left(\left\{ B_\phi^\infty(ck/2) \subseteq K_k \right\} \cap \bigcup_{s \in [k, k+1[} \{0 \notin K_s\} \right) \\
& \leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \mathbb{P}_\phi \left(\theta_k^{-1} \left\{ q(0) \in \bigcup_{s \in [0, 1[} \xi_s^{C_\phi^\infty \setminus B_\phi^\infty(ck/2)} \right\} \right) \\
& \leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \mathbb{P}_\phi \left(q(0) \in \bigcup_{s \in [0, 1[} \xi_s^{C_\phi^\infty \setminus B_\phi^\infty(ck/2)} \right) \\
& \leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \mathbb{P}_\phi \left(\bigcup_{s \in [0, 1[} \{ \xi_s \not\subseteq B_\phi^\infty(ck/2) \} \right) \\
& \leq \frac{1}{\rho_\lambda(\mathbb{N})} \mathbb{P}_\phi \left(H_1 \cap C_\phi^\infty \not\subseteq B_\phi^\infty(ck/2) \right).
\end{aligned}$$

Et on contrôle ce dernier terme grâce à la proposition 5.5 (croissance au plus linéaire). Cela achève la preuve. □

6 Notations

Dans cette section, on abrège processus de contact par PC. x et y désignent des points de \mathbb{R}^d , t un réel positif et n un entier.

Symboles	Significations	Page
d	dimension de l'espace	
$\mu_c(d)$	intensité critique pour la percolation Booléenne sur \mathbb{R}^d	
$\lambda_c(d, \mu)$	intensité critique du PC sur le graphe Booléen d'intensité $\mu > \mu_c(d)$	
$\ \cdot\ _2$	norme euclidienne	
$B(x, t)$	boule associée à $\ \cdot\ _2$ de centre x et de rayon t	
$\lambda_c(\mathbb{N})$	intensité critique du PC sur \mathbb{N}	
E^{Bool}	arêtes du graphe Booléen	15
X	espaces des réalisations de Φ	15
ϕ	élément de X	
Φ	processus ponctuel de Poisson d'intensité $\mu > \mu_c(d)$	15, 36
$G_b(\Phi)$	graphe Booléen associé au processus Φ	
C_ϕ^∞	amas infini du graphe Booléen en environnement ϕ	16
$q(x)$	point de l'amas infini le plus proche de x	16
$d_\phi^\infty(x, y)$	distance de graphe dans C_ϕ^∞ entre $q(x)$ et $q(y)$	16
$B_\phi^\infty(x, t)$	points y de C_ϕ^∞ tels que $d_\phi^\infty(x, y) \leq t$	16
$b(x)$	bifurcation la plus proche de x	19
ϱ	constante vérifiant 2.12	22
σ	constante vérifiant 2.17	26
$\hat{C}_n(q)$	chemins Booléens de longueur n partant de $q(0)$	
$T_1(x)$	réel positif tel que $n \geq T_1(x)$ implique $\hat{C}_n(q) \circ T_x \leq \sigma^n$	29
K	constante satisfaisant la propriété de croissance au plus linéaire	
$\rho_\lambda(\mathbb{N})$	probabilité de survie du PC de paramètre λ sur \mathbb{N}	
$T_2(x)$	réel tel que $t \geq T_2(x)$ implique $ \Phi \cap B(q(x), t) \leq t^{d+1}$	30
Γ	configurations ϕ telles que $T_1 < \infty$ et $T_2 < \infty$	31
$\mathcal{T}(x)$	réel à partir duquel on contrôle un voisinage autour de x	31
$\tilde{\Omega}$	marques nécessaires à la construction graphique du PC	34
Ω	configurations de l'environnement aléatoire	35
\mathbb{P}	probabilité intégrée	36
ξ	processus de contact	37
\mathbb{P}_ϕ	probabilité gelée en environnement ϕ sur $\tilde{\Omega}$	40
T_x	translation spatiale de vecteur x	40
θ_t	translation temporelle de paramètre t	41
$Q_t(x)$	hypercube de centre x et de côté $2t$	
$t(x)$	temps d'atteinte de $q(x)$	42
H_t	points x de \mathbb{R}^d tels que $t(x) \leq t$	42
τ	temps d'extinction du PC	42
θ	constante technique définie en 5.2.4	57
$\alpha_{\mathbb{N}}$	constante satisfaisant la propriété de croissance au moins linéaire	57

Symboles	Significations	Page
$\bar{\mathbb{P}}_\phi$	probabilité gelée conditionnée à la survie du PC	61
$\bar{\mathbb{P}}$	probabilité $\bar{\mathbb{P}}_\phi$ intégrée en ϕ	60
$\sigma(x)$	temps d'atteinte essentiel de $q(x)$	62
$\tilde{\theta}_x$	translation spatio-temporelle de vecteur x et de temps $\sigma(x)$	62
κ	constante technique définie en 5.3.3	72
G_t	points x de \mathbb{R}^d tels que $\sigma(x) \leq t$	90
K_t	points x de \mathbb{R}^d tels que $\xi_t(q(x)) = \xi_t^{C_\phi^\infty}(q(x))$	92
K'_t	zone couplée	92
C_Z	constante satisfaisant la proposition 5.47	97
c	constante satisfaisant le corollaire 5.46	97

*<< On n'a qu'une vie et c'est celle-ci
pas de gâchis, pas de chichis >>*
Les Ogres de Barback

References

- [1] Peter Antal and Agoston Pisztor. On the chemical distance for supercritical Bernoulli percolation. *Ann. Probab.*, 24(2) :1036–1048, 1996.
- [2] Adrian Baddeley. Spatial point processes and their applications. In *Stochastic geometry*, volume 1892 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–75. Springer, Berlin, 2007.
- [3] D. Bertacchi, N. Lanchier, and F. Zucca. Contact and voter processes on the infinite percolation cluster as models of host-symbiont interactions. *Ann. Appl. Probab.*, 21(4) :1215–1252, 2011.
- [4] Carol Bezuidenhout and Geoffrey Grimmett. The critical contact process dies out. *Ann. Probab.*, 18(4) :1462–1482, 1990.
- [5] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory with applications*. American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.
- [6] Maury Bramson, Rick Durrett, and Roberto H. Schonmann. The contact process in a random environment. *Ann. Probab.*, 19(3) :960–983, 1991.
- [7] Maury Bramson and David Griffeath. On the Williams-Bjerknes tumour growth model. I. *Ann. Probab.*, 9(2) :173–185, 1981.
- [8] Xinxing Chen and Qiang Yao. The complete convergence theorem holds for contact processes on open clusters of $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^+$. *J. Stat. Phys.*, 135(4) :651–680, 2009.
- [9] Aurelia Deshayes. The contact process with aging. working paper or preprint, May 2014.
- [10] R. Durrett and R. H. Schonmann. Large deviations for the contact process and two-dimensional percolation. *Probab. Theory Related Fields*, 77(4) :583–603, 1988.
- [11] Richard Durrett and David Griffeath. Contact processes in several dimensions. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 59(4) :535–552, 1982.
- [12] Richard Durrett and David Griffeath. Supercritical contact processes on \mathbf{Z} . *Ann. Probab.*, 11(1) :1–15, 1983.
- [13] Richard Durrett and Xiu Fang Liu. The contact process on a finite set. *Ann. Probab.*, 16(3) :1158–1173, 1988.
- [14] Richard Durrett and Roberto H. Schonmann. The contact process on a finite set. II. *Ann. Probab.*, 16(4) :1570–1583, 1988.
- [15] Richard Durrett, Roberto H. Schonmann, and Nelson I. Tanaka. The contact process on a finite set. III. The critical case. *Ann. Probab.*, 17(4) :1303–1321, 1989.
- [16] Rick Durrett. The contact process, 1974–1989. In *Mathematics of random media (Blacksburg, VA, 1989)*, volume 27 of *Lectures in Appl. Math.*, pages 1–18. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

- [17] Rick Durrett. *Random graph dynamics*, volume 20 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [18] François Ezanno. *Systèmes de particules en interaction et modèles de déposition aléatoire*. PhD thesis, Aix-Marseille Université, 3 2013.
- [19] Olivier Garet and Régine Marchand. Asymptotic shape for the chemical distance and first-passage percolation on the infinite Bernoulli cluster. *ESAIM Probab. Stat.*, 8 :169–199, 2004.
- [20] Olivier Garet and Régine Marchand. Large deviations for the chemical distance in supercritical Bernoulli percolation. *Ann. Probab.*, 35(3) :833–866, 2007.
- [21] Olivier Garet and Régine Marchand. Asymptotic shape for the contact process in random environment. *Ann. Appl. Probab.*, 22(4) :1362–1410, 2012.
- [22] Olivier Garet and Régine Marchand. Growth of a population of bacteria in a dynamical hostile environment. *Adv. in Appl. Probab.*, 46(3) :661–686, 2014.
- [23] Olivier Garet and Régine Marchand. Large deviations for the contact process in random environment. *Ann. Probab.*, 42(4) :1438–1479, 2014.
- [24] David Griffeath. The basic contact processes. *Stochastic Process. Appl.*, 11(2) :151–185, 1981.
- [25] G. Grimmett. *Percolation*. Springer, Berlin, 1999.
- [26] G. R. Grimmett and J. M. Marstrand. The supercritical phase of percolation is well behaved. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 430(1879) :439–457, 1990.
- [27] T. E. Harris. Nearest-neighbor Markov interaction processes on multidimensional lattices. *Advances in Math.*, 9 :66–89, 1972.
- [28] T. E. Harris. Contact interactions on a lattice. *Ann. Probability*, 2 :969–988, 1974.
- [29] T. E. Harris. Additive set-valued Markov processes and graphical methods. *Ann. Probability*, 6(3) :355–378, 1978.
- [30] Olav Kallenberg. An informal guide to the theory of conditioning in point processes. *Internat. Statist. Rev.*, 52(2) :151–164, 1984.
- [31] J. F. C. Kingman. The ergodic theory of subadditive stochastic processes. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 30 :499–510, 1968.
- [32] J. F. C. Kingman. Subadditive ergodic theory. *Ann. Probability*, 1 :883–909, 1973. With discussion by D. L. Burkholder, Daryl Daley, H. Kesten, P. Ney, Frank Spitzer and J. M. Hammersley, and a reply by the author.
- [33] J. F. C. Kingman. *Poisson processes*, volume 3 of *Oxford Studies in Probability*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.

- [34] T. M. Liggett, R. H. Schonmann, and A. M. Stacey. Domination by product measures. *Ann. Probab.*, 25(1) :71–95, 1997.
- [35] Thomas M. Liggett. *Interacting particle systems*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reprint of the 1985 original.
- [36] Roy R. Meester R. *Continuum Percolation*. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, 1996.
- [37] Laurent Ménard and Arvind Singh. Percolation by cumulative merging and phase transition for the contact process on random graphs. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(5) :1189–1238, 2016.
- [38] Jesper Mö ller and Rasmus Plenge Waagepetersen. *Statistical inference and simulation for spatial point processes*, volume 100 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [39] Jean-Christophe Mourrat and Daniel Valesin. Phase transition of the contact process on random regular graphs. *Electron. J. Probab.*, 21 :Paper No. 31, 17, 2016.
- [40] Robin Pemantle. The contact process on trees. *Ann. Probab.*, 20(4) :2089–2116, 1992.
- [41] Mathew Penrose. *Random geometric graphs*, volume 5 of *Oxford Studies in Probability*. Oxford University Press, Oxford, 2003.
- [42] Mathew D. Penrose. On a continuum percolation model. *Adv. in Appl. Probab.*, 23(3) :536–556, 1991.
- [43] Chris Preston. *Random fields*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 534. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [44] Daniel Remenik. The contact process in a dynamic random environment. *Ann. Appl. Probab.*, 18(6) :2392–2420, 2008.
- [45] David Ruelle. *Statistical mechanics*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ; Imperial College Press, London, 1999. Rigorous results, Reprint of the 1989 edition.
- [46] F. Spitzer. *Random fields and interacting particle systems*. Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1971. Notes on lectures given at the 1971 MAA Summer Seminar, Williams College, Williamstown, Mass.
- [47] Jeffrey E. Steif and Marcus Warfheimer. The critical contact process in a randomly evolving environment dies out. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 4 :337–357, 2008.
- [48] Chang-Long Yao, Ge Chen, and Tian-De Guo. Large deviations for the graph distance in supercritical continuum percolation. *J. Appl. Probab.*, 48(1) :154–172, 2011.