HAL
open science

Étude des phénomènes d'instabilités, bifurcation et endommagement en mise en forme des matériaux

Yasser Bouktir

To cite this version:

Yasser Bouktir. Étude des phénomènes d'instabilités, bifurcation et endommagement en mise en forme des matériaux. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Lorraine; École Militaire Polytechnique (Alger), 2018. Français. NNT : 2018LORR0217 . tel-02096987

HAL Id: tel-02096987

https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02096987

Submitted on 11 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

THESE DE DOCTORAT

Pour l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE LORRAINE

Science des Matériaux: Mécanique des Matériaux

Présentée par :

Yasser BOUKTIR

ETUDE DES PHENOMENES D'INSTABILITES, BIFURCATION ET ENDOMMAGEMENT EN MISE EN FORME DES MATERIAUX

Directeur de thèse : Farid ABED-MERAIM

Co-Directeur de thèse : Moussa HADDAD

Thèse soutenue publiquement le 28 octobre 2018 à Alger
devant le jury composé de :

El Hadj OUAKDI	Professeur, LPM3, Université Ferhat Abbes de Sétif, Algérie	Rapporteur
Mohand OULD OUALI	Professeur, LEC2M, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Algérie	Rapporteur
Foudil MOHRI	Maître de Conférences HDR, LEM3, Université de Lorraine, France	Examinateur
Abdelghani MAY	Maître de Conférences 'A', LGM, École Militaire Polytechnique, Algérie	Examinateur
Hocine CHALAL	Maître de Conférences, LEM3, Arts et Métiers ParisTech, France	Examinateur
Farid ABED-MERAIM	Professeur, LEM3, Arts & Métiers ParisTech, France	Directeur de Thèse
Moussa HADDAD	Professeur, LMS, École Militaire Polytechnique, Algérie	Co-Directeur de Thèse

Thèse préparée en cotutelle entre
l'Université de Lorraine (LEM3 - Metz) et l'École Militaire Polytechnique (LMS)

DÉDICACES

A mes très chers parents

A ma chère femme et mes chers enfants
Ilyes et Meriem

A toute ma famille et mes amis

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé en grande partie dans l'équipe MEcanique NUmérique (MENU) du Laboratoire des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3) à Arts & Métiers ParisTech à Metz. Je remercie Monsieur El Mostafa DAYA, le Directeur du LEM3 et Monsieur Mikhail Lebedkin, l'ancien Directeur du LEM3, ainsi que Monsieur Michel Potier-Ferry, responsable de l'équipe MENU pour l'intérêt porté à ce travail.

Je tiens à remercier mes directeurs de thèse, M. Farid ABED-MERAIM et M. Moussa HADDAD, pour avoir dirigé cette thèse. Je tiens particulièrement à les remercier pour leur grande et constante disponibilité, la qualité de leurs conseils et leurs qualités humaines.

Je remercie profondément M. Hocine CHALAL, pour sa présence, sa sympathie, pour sa qualité humaine, et pour tous ses conseils et discussions que nous avons eues durant toute la durée de cette thèse.

Mes vifs et chaleureux remerciements vont à M. OUAKDI, M. OULD OUALI pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteur. Je remercie aussi M. MOHRI et M. May pour avoir accepté d'examiner ce travail de thèse.

Un grand merci à M. Karim ZENNADI, Chef de l'UER-CFM ; M. Nasreddine ZEROUDI, Chef du LATFC ; M. Yacine BENABID ; Chef du LCSM ; M. Yassine SAADOUNI, Chef du CRM, ainsi qu'à tout le Personnel du l'UER-CFM, pour leur soutien.

Je tiens, aussi, à remercier M. Halim El Amine LEHTIHET, M. Taha CHETTIBI et M. Amar BOUHERROU pour leurs conseils, leur soutien durant toute la durée de ma formation.

Une grande pensée à ma grande et ma petite famille, sans qui je n'aurais pas accompli ce travail et pour qui je représente un exemple de réussite. Ce travail leur est dédié.

Je remercie l'ensemble des doctorants, chercheurs et amis avec qui j'ai partagé d'excellents moments au LEM3 et à Metz, particulièrement Abdé, Boris, Mohammed et Nabil.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'accomplissement de ce modeste travail.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS i
SOMMAIRE ii
LISTE DES FIGURES iv
LISTE DES TABLEAUX vi
INTRODUCTION GÉNÉRALE 1

Chapitre I: État de l'art sur la mise en forme des tôles minces 5

I.1. Introduction 5
I.2. Mise en forme des matériaux et défauts rencontrés 5
I.2.1. Modes de déformation 6
I.2.2. Défauts de mise en forme 7
I.3. Formabilité des matériaux et concept de Courbe Limite de Formage 10
I.3.1. Concept de Courbe Limite de Formage 11
I.3.2. Détermination expérimentale des CLF 13
I.3.3. Prédiction des courbes limite de formage 17
I.4. Ingrédients nécessaires pour la prédiction numérique des CLF 20
I.4.1. Modélisation du comportement mécanique 21
I.4.2. Identification des paramètres matériaux 24
I.5. Conclusion 24

Chapitre II: Modélisation du comportement 27

II.1. Introduction 27
II.2. Cinématique des grandes déformations 27
II.3. Modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement ductile 29
II.3.1. Endommagement ductile continu 31
II.3.2. Cadre thermodynamique 32
II.3.3. Principe d'équivalence en déformation 39
II.3.4. Principe d'équivalence en énergie totale 41
II.4. Implémentation numérique des équations constitutives et validation 43
II.4.1. Schéma d'intégration explicite 43
II.4.2. Validation numérique 45
II.5. Conclusion 52

Chapitre III: Modélisation des instabilités plastiques basée sur l'analyse de bifurcation 55

III.1. Introduction 55
III.2. Modélisation des critères de bifurcation 55
III.2.1. Critère de bifurcation générale 56
III.2.2. Critère de bifurcation par point limite 57
III.2.3. Critère de perte d'ellipticité 58
III.2.4. Critère de perte d'ellipticité forte 59
III.2.5. Cas particuliers 60
III.3. Classification théorique des critères de bifurcation 62
III.4. Application à la prédiction des instabilités plastiques 64
III.4.1. Formulation en petites déformations 65
III.4.2. Formulation en grandes déformations 68

III.4.3. Effet des termes convectifs 73
III.4.4. Effet d'une pré-déformation 75
III.4.5. Classification numérique des critères de bifurcation 75
III.5. Conclusion 81
CONCLUSION GÉNÉRALE 83
ANNEXE A 87
ANNEXE B 91
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES 97

LISTE DES FIGURES

Figure I.1 Les étapes d'emboutissage double-effet 6

Figure I.2 Modes de déformation dans le cas de l'emboutissage d'un carter de chaine de distribution (Col, 2011) 7

Figure I.3 Modes de déformation induits par emboutissage d'un caisson de porte d'automobile (Col, 2011) ; R : retreint, TP : traction plane et E : expansion. 7

Figure I.4 Exemple d'ouverture d'une pièce en U après retour élastique (Carbonniere, 2009). 9

Figure I.5 Modes de striction dans le cas (a) d'une tôle épaisse, et (b) d'une tôle très mince (Col, 2011). 10

Figure I.6 Répartition des différents trajets de déformation rencontrés en mise en forme des tôles minces. 11

Figure I.7 Concept de Courbes limites de formage (CLF) à striction localisée et à rupture (Banabic, 2010). 11

Figure I.8 Courbe limite de formage de Keeler-Goodwin (Keeler, 1978). 12

Figure I.9 Illustration de l'essai Marciniak. 13

Figure I.10 Illustration de l'essai Nakazima. 14

Figure I.11 Géométrie des éprouvettes utilisées dans l'essai Nakazima selon la norme ISO 12004-2 (2008) : (1) longueur de la partie centrale, (2) largeur du flan et (3) rayon de raccordement. 14

Figure I.12 Illustration du test de gonflement hydraulique avec des matrices elliptiques (Banabic, 2010) : (1) Matrice elliptique, (2) serre-flan, (3) système hydraulique. 15

Figure I.13 Trajets de déformation issus de tractions simples sur différentes géométries d'éprouvettes (Schwindt et al., 2015). 15

Figure I.14 Exemples de grilles utilisées pour le marquage des éprouvettes (ISO 12004-1). 16

Figure I.15 Forme approchée des CLF proposée par Keeler et Brazier (Altmeyer, 2011). 18

Figure I.16 Description de la procédure de couplage entre modèle de comportement et critère de striction pour la prédiction des CLF. 21

Figure II.1 Schématisation d'une section partiellement endommagée. 31

Figure II.2 Illustration des concepts de contrainte effective (à gauche) et de déformation effective (à droite). 32

Figure II.3 Comparaison des courbes contrainte–déformation en traction uniaxiale obtenues avec la UMAT développée et le modèle existant dans ABAQUS. 47

Figure II.4 Comparaison des surfaces de charge normalisées de Hill'48 obtenues avec la UMAT développée et le modèle d'ABAQUS. 48

Figure II.5 Comparaison des courbes contrainte de cisaillement–déformation de cisaillement des essais Bauschinger simulés avec la UMAT développée et le modèle d'ABAQUS. 48

Figure II.6 Essai de traction uniaxiale hétérogène basé sur une éprouvette rantangulaire ayant deux trous de diamètres différents. 49

Figure II.7 Comparaison des courbes force–déplacement obtenues avec la UMAT développée et le modèle d'ABAQUS pour l'éprouvette rectangulaire avec deux trous. 49

Figure II.8 Distribution de la déformation plastique équivalente obtenue avec la UMAT développée (à gauche) et le modèle d'ABAQUS (à droite) pour l'éprouvette rectangulaire avec deux trous. 50

Figure II.9 Comparison de la réponse contrainte–déformation vraie en traction uniaxiale, obtenue avec la UMAT basée sur le principe d'équivalence en énergie totale, et la réponse de référence prise des travaux de Badreddine et al. (2010). 51

Figure II.10 Comparison entre les résultats obtenus par la UMAT et les solutions de référence prises des travaux de Doghri et Billardon (1995) en termes de simulation de l'essai de traction uniaxiale pour les trois matériaux étudiés : (à gauche) réponse contrainte–déformation vraie, et (à droite) évolution de l'endommagement. 52

Figure III.1 Schématisation de la bande de localisation et de son orientation. 59

Figure III.2 Illustration de la classification théorique des critères de bifurcation selon leur ordre de prédiction des instabilités plastiques. 64

Figure III.3 Description du modèle élément fini utilisé dans les simulations. 65

Figure III.4 Prédictions de la striction diffuse avec les critères de bifurcation et la condition du module d'écrouissage critique $h^* = 0$, pour (a) le matériau M1 et (b) le matériau M2. 66

Figure III.5 CLF prédites avec les critères PE et PEF et comparaison avec les résultats de référence pour (a) le matériaux M1 et (b) le matériau M2. 67

Figure III.6 Comparaison des prédictions de la striction avec les critères BG et PEF pour (a) le matériaux M1 et (b) le matériau M2. 68

Figure III.7 Déformations critiques de striction diffuse prédites par les critères de BG, BPL et Swift'52 pour différentes lois d'écrouissage isotrope. 71

Figure III.8 CLF prédites avec les critères de PEF et PE pour l'acier doux DC06. 72

Figure III.9 Orientation de la bande de localisation prédite par les critères PEF, PE et Hill'52 pour l'acier doux DC06. 73

Figure III.10 Effet des termes convectifs sur la prédiction des déformations limites de striction pour l'acier doux DC06 en utilisant (a) le critère de BG, (b) le critère de BPL, (c) le critère de PEF, et (d) le critère de PE. 74

Figure III.11 Effet de la pré-déformation (5% en TU et 5% en TEB) sur la prédiction des CLF pour l'acier doux DC06, en utilisant (a) critère de PEF et (b) critère de PE. 75

Figure III.12 Comparaison de la courbe contrainte–déformation en TU obtenue avec la UMAT développée et celle obtenue expérimentalement par Wu et al. (2003) pour l'alliage AA5182-0. 77

Figure III.13 Ordre de prédiction des déformations limites de striction diffuse et striction localisée par les critères de bifurcation, pour l'alliage d'aluminium AA5182-0, dans le cas d'une loi de plasticité associée. 78

Figure III.14 Points de bifurcation pour les trajets de déformation en (a) TU et (b) TEB dans le cas d'une loi de plasticité associée. 79

Figure III.15 Ordre de prédiction des déformations limites de striction diffuse et striction localisée par les critères de bifurcation, pour l'alliage d'aluminium AA5182-0, dans le cas d'une loi de plasticité non-associée. 80

Figure III.16 Points de bifurcation pour les trajets de déformation en (a) TU et (b) TEB dans le cas d'une loi de plasticité non-associée. 80

LISTE DES TABLEAUX

Tableau II.1 Algorithme d'intégration par un schéma explicite (Bouktir et al., 2017). 45

Tableau II.2 Paramètres matériaux associés à la loi de comportement utilisant le principe d'équivalence en déformation. 46

Tableau II.3 Paramètres matériaux associés à la loi de comportement utilisant le principe d'équivalence en énergie totale (Badreddine et al., 2010)..... 46

Tableau II.4 Paramètres d'endommagement de l'acier AISI 304 (Badreddine et al., 2010)..... 50

Tableau II.5 Paramètres d'élasticité, d'écrouissage et d'endommagement des trois matériaux fictifs étudiés (Doghri et Billardon, 1995)..... 52

Tableau III.1 Résumé des critères de bifurcation étudiés..... 63

Tableau III.2 Paramètres d'élasticité, écrouissage et endommagement des matériaux étudiés (Doghri et Billardon, 1995)..... 66

Tableau III.3 Expressions analytiques de la déformation équivalente critique $\overline{\varepsilon}_c$ obtenue avec le critère de striction diffuse de Swift'52 pour différentes lois d'écrouissage isotrope..... 70

Tableau III.4 Paramètres d'écrouissage isotrope utilisés pour la prédiction de la striction diffuse. 70

Tableau III.5 Paramètres d'élasticité, d'anistropie plastique, d'écrouissage et d'endommagement pour l'acier doux DC06 (Haddadi et al., 2006; Haddag et al., 2009). 72

Tableau III.6 Coefficients de Lankford et limites élastiques pour l'alliage d'aluminium AA5181-0 (Wu et al., 2003)..... 76

Tableau III.7 Coefficients d'anisotropie de l'alliage AA5181-0..... 76

Tableau III.8 Paramètres d'endommagement fictifs pour l'alliage AA5182-0. 77

Tableau B.1 Expressions analytiques de la déformation équivalente critique $\overline{\varepsilon}_c$ obtenue avec le critère de striction diffuse de Swift'52 pour différentes lois d'écrouissage isotrope..... 96

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'emboutissage est le procédé de mise en forme des tôles métalliques le plus utilisé pour la fabrication des produits plats dans différents secteurs industriels, notamment en industrie automobile, aéronautique, emballage, électroménager, etc. Sa popularité est due au fait qu'il permet de réaliser des pièces de formes complexes à des cadences de production très élevées. Depuis plusieurs décennies, les emboutisseurs ont capitalisé un savoir faire important dans la mise en forme des tôles surtout celles en acier et en aluminium, ce qui leurs permet de réaliser des pièces finies sans défauts (striction, plissement, fissures,…). Toutefois, ils font occasionnellement appel à des connaissances empiriques basées sur l'expérience, vu que ce procédé n'est pas encore parfaitement maitrisé.

Avec les nouvelles réglementations et directives visant la réduction des émissions de dioxyde de carbone (CO_2) et compte tenu de l'augmentation des prix de la matière première, de nouvelles nuances des matériaux possédant des caractéristiques améliorées (ductilité, résistance à la rupture, résistance à la corrosion, …) ont été élaborées. En effet, des aciers « Dual Phase » (DP), aciers « Transformation Induced Plasticity » (TRIP) et autres nuances à haute résistance et à hautes caractéristiques mécaniques, ont été élaborés dans cette optique de réduction des gaz à effet de serre et d'optimisation de la matière première à travers l'allègement des structures.

L'amélioration des caractéristiques mécaniques de ces matériaux se fait, sans aucun doute, au détriment d'autres caractéristiques. De plus, cette amélioration des matériaux, par rapport aux nuances traditionnelles, est obtenue par l'ajout de certains additifs non-métalliques qui engendrent parfois des ruptures brutales et localisées de ces matériaux. Ainsi, la compréhension des différents mécanismes physiques mis en jeu lors de la mise en forme de ces matériaux est incontournable, si on souhaite minimiser le rebut des pièces embouties. Afin d'atteindre cet objectif, expérimentalement, les emboutisseurs doivent revoir leur savoir faire acquis durant ces dernières décennies afin d'améliorer les procédés d'emboutissage, ce qui peut engendrer des coûts très élevés.

Afin de prédire les défauts de mise en forme des tôles minces, et améliorer ainsi les précédés de mise en forme, le besoin de développer des outils théoriques te numériques d'aide à la conception fiable est grandissant. Ceci est possible grâce aux développements de modèles de comportement avancés pour les nouveaux matériaux pour la simulation numérique de leur mise forme. En effet, ce travail de développement en amont permet de minimiser les délais de mise sur le marché des nouveaux produits en réduisant les cycles de conception ainsi que les coûts de mise en point des nouveaux outillages.

En mise en forme des tôles minces, la simulation numérique, et plus précisément la prédiction de l'apparition des défauts (retour élastique, striction, rupture, …) nécessite l'introduction de plusieurs facteurs, à savoir : une modélisation qui permet une reproduction fidèle du comportement réel des nouveaux matériaux et des différents phénomènes physiques rencontrés, accompagnée d'une identification rigoureuse des différents paramètres associés ;

utilisation de critères théoriques et/ou numériques fiables pour la prédiction des différents phénomènes limitant la formabilité de ces matériaux. Il est à noter que ces critères prédictifs de la formabilité des tôles métalliques ont constitué un champ de recherche important durant les dernières décennies. Dans ce contexte, différents modèles théoriques et critères prédictifs ont été développés dans la littérature. Ce regain d'intérêt à ces développement est dû à différentes raisons, parmi lesquelles le progrès exponentiel des moyens de calcul numériques à travers le développement de codes et logiciels de calcul de structure par la méthode des éléments finis.

C'est dans ce contexte que s'inscrit la présente thèse. En effet, l'objectif fixé ici est de prédire l'apparition des instabilités matérielles de types striction diffuse et striction localisée dans les matériaux métalliques. Ces matériaux seront modélisés par des lois de comportement élasto-plastique couplées à l'endommagement. L'approche de Lemaitre, reliant l'endommagement à la déformation plastique équivalente et au taux de restitution de la densité d'énergie élastique, sera adoptée. Parmi les différents critères d'apparition de la striction dans les tôles minces developpés dans la littérature, les critères basés sur la théorie de la bifurcation et sur le principe de force maximum seront tout particulièrement analysés dans ce travail. Un objectif important de cette étude consiste à déterminer les mécanismes déstabilisants associés à cette modélisation du comportement, ainsi que l'impact des différents paramètres matériaux sur l'apparition de la striction. Les développements résultants seront appliqués à une sélection représentative de matériaux afin d'évaluer leurs capacités prédictives de la striction en mise forme des tôles mince.

Une fois cette approche validée, elle servira plus tard comme un outil d'aide à la conception de nouveaux matériaux ayant une ductilité améliorée. En effet, cette approche pourra être utilisée en amont de l'élaboration de nouveaux matériaux, afin de concevoir de nouvelles nuances de matériaux métalliques avec des propriétés mécaniques améliorées (e.g., résistance, ductilité), tout en respectant les nouvelles réglementations et directives visant l'allègement des structures.

Organisation du manuscrit

Ce manuscrit de thèse est organisé en trois chapitres, qui sont les suivants :

Dans le **premier chapitre**, un aperçu général des procédés de mise en forme des tôles minces sera présenté, et en particulier, le procédé d'emboutissage. Les principaux défauts rencontrés lors de la réalisation de structures minces avec ce procédé et limitant la formabilité des tôles, seront aussi rappelés. Par la suite, nous évoquons le concept de Courbe Limite de Formage (CLF), qui a été proposé dans la littérature pour caractériser la formabilité des tôles minces. Enfin, nous présentons un état de l'art des différentes approches utilisées pour la détermination des Courbes Limite de Formage ainsi que les ingrédients nécessaires pour la prédiction numérique des limites de formabilité, à savoir la modélisation du comportement du matériau et l'identification des paramètres asscociés.

Le **deuxième chapitre** est consacré entièrement à la modélisation du comportement des matériaux, qui est une phase importante dans la simulation numérique de problèmes industriels en général, et en particulier des procédés de mise en forme. En premier lieu, nous

donnons un rappel sur la cinématique des grandes déformations rencontrées en emboutissage. Ensuite, les équations constitutives du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement seront décrites. L'endommagement est introduit par une variable scalaire isotrope décrivant la dégradation des propriétés élastiques du matériau. Un cadre thermodynamique général est utilisé pour déduire les équations constitutives couplées selon les principes d'équivalence en déformation et en énergie. Enfin, les modèles adoptés sont implémentés dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS / Standard. La performance de l'implémentation est évaluée à travers une série de simulations numériques.

Le **troisième** et **dernier chapitre** est consacré à la prédiction de l'apparition de la striction diffuse et la striction localisée par des critères basés sur l'analyse de bifurcation. Quatre critères prédictifs de l'apparition des instabilités plastiques sont présentés dans ce chapitre : deux critères de striction diffuse basés sur la bifurcation générale (BG) et la bifurcation par point limite (BPL), et deux critères de striction localisée basés sur la perte d'ellipticité (PE) et la perte d'ellipticité forte (PEF). Ces critères seront présentés, en premier lieu, dans un cadre théorique général. Ensuite, ils seront donnés dans le cadre des différentes formulations : en contraintes planes, en petites et grandes déformations. Aussi, une classification théorique des ces quatre critères, selon leur ordre de prédiction des instabilités plastiques, est établie. Finalement, ces critères seront implantés dans le code ABAQUS / Standard et combinés avec le modèle constitutif développé dans le deuxième chapitre dans le but de confirmer les prédictions et classifications théorique précédemment établies.

En fin, les différents travaux réalisés et présentés dans les trois chapitres seront synthétisés dans une **conclusion générale**, suivie de quelques perspectives de développements futurs.

Chapitre I: État de l'art sur la mise en forme des tôles minces

I.1. Introduction

L'emboutissage des tôles métalliques est l'un des procédés de mise en forme les plus utilisés dans différents secteurs industriels, notamment dans l'industrie de l'automobile, l'aéronautique, l'emballage, l'électroménager, etc. Son succès est dû au fait que presque la totalité du matériau est utilisée, avec des cadences de production très élevées. Cependant, l'apparition de défauts lors de la mise en forme par emboutissage est la principale cause de rebut des pièces formées. Afin de comprendre les mécanismes responsables de l'apparition de ces défauts, et dans le but de minimiser (voire éliminer) les pertes engendrées, des investigations fines, que ce soit sur le plan expérimental ou théorique, sont menées jusqu'à nos jours. Ceci a permis et permettra de développer des modèles de comportement et des critères fiables afin de reproduire les mécanismes physiques observés, et ainsi mieux prédire l'apparition des défauts et phénomènes indésirables en mise en forme.

Dans ce chapitre, nous présentons un aperçu général des procédés de mise en forme des tôles minces et en particulier, le procédé d'emboutissage avec les différents défauts rencontrés. Par la suite, nous évoquons le concept de Courbe Limite de Formage (CLF), qui a été proposé dans la littérature pour caractériser la formabilité des tôles minces. Enfin, nous présentons un état de l'art des différentes approches utilisées pour la détermination des Courbes limite de Formage ainsi que les ingrédients nécessaires pour la prédiction numérique des limites de formabilité.

I.2. Mise en forme des matériaux et défauts rencontrés

Plusieurs procédés de fabrication dédiés à la mise en forme des tôles minces existent dans la littérature. Parmi ces procédés, nous citons de manière non exhaustive l'emboutissage, l'hydroformage, le repoussage, le fluotournage, le pliage, le formage incrémental, etc. L'emboutissage reste l'un des procédés les plus utilisés pour la fabrication de pièces à partir de produits plats, du fait qu'il permet d'obtenir des pièces complexes à des cadences très élevées, tout en minimisant les pertes de matières.

Le principe de l'emboutissage est simple. Après le positionnement de la tôle (souvent appelée flan en mise en forme), préalablement graissée, entre le poinçon et la matrice (voir Figure I.1a), le flan est pincé sur ses bords contre la matrice par le serre-flan en appliquant un effort de serrage (voir Figure I.1b). Ce serrage est maintenu pendant toute l'opération d'emboutissage afin d'empêcher l'apparition du plissement sur le contour de la tôle. Ensuite, le poinçon sera animé d'un mouvement de descente entrainant avec lui le flan jusqu'à ce qu'il épouse la forme de la matrice (voir Figure I.1c). Le flan subira des déformations plastiques importantes, qui lui permettront d'avoir une forme finale proche de la forme souhaitée. À la fin, le poinçon et le serre-flan sont retirés pour permettre la récupération de la pièce formée, après qu'elle ait effectué un relâchement (retour) élastique (voir Figure I.1d). Une opération de détourage de la pièce peut être nécessaire pour éliminer les parties devenues inutiles de la tôle, notamment celles saisies par le serre-flan. Ces étapes, telles que décrites ci-dessus,

représentent une opération d'emboutissage double effet. Elles sont valables aussi pour un emboutissage simple effet, sauf qu'il n'est pas nécessaire de serrer le flan contre la matrice durant l'opération.

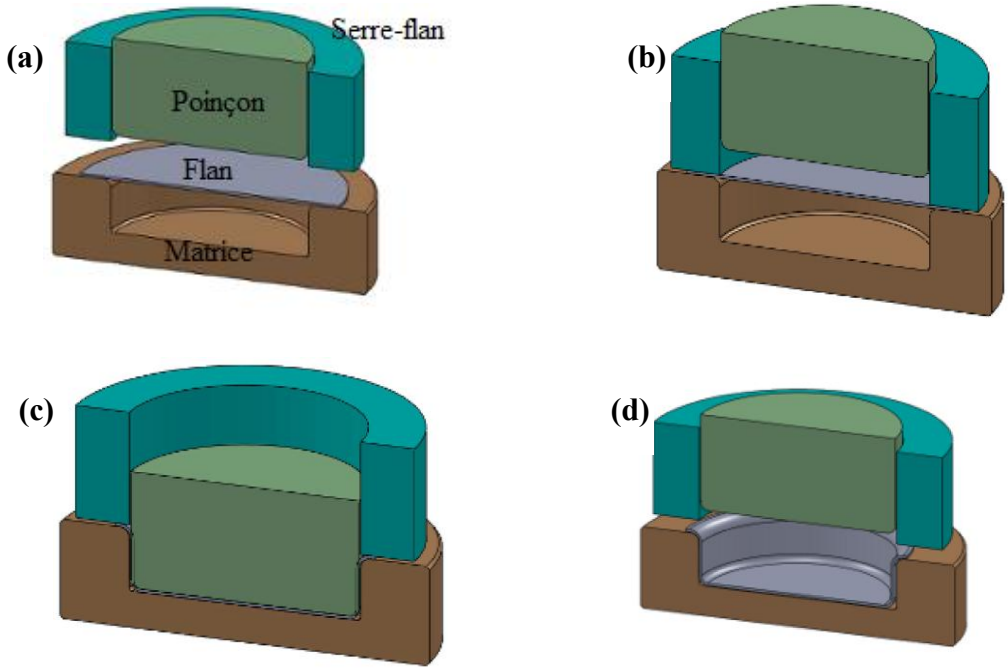

Figure I.1 Les étapes d'emboutissage double-effet

I.2.1. Modes de déformation

Lors de l'emboutissage d'une tôle mince selon une certaine forme, les différentes parties du flan subissent des sollicitations complexes induisant un état de déformation et de contrainte hétérogène dans la pièce. Afin d'identifier les différents modes de déformation, nous donnons l'exemple d'une pièce emboutie sur la Figure I.2 représentant un carter d'une chaine de distribution (Col, 2011). Sur cette figure, l'extrémité de la pièce repérée par *R* résulte de l'**avalement de la tôle** à travers une partie semi-circulaire de la matrice dont les éléments convergent vers le centre. En comparant la bordure initiale du flan (en points discontinus) et celle de la pièce emboutie, cette partie de la tôle a subi une compression circonférentielle ; le segment R_1 s'est raccourci pour donner lieu à un nouveau segment R_2. La déformation dans la collerette est dite, alors, en **rétreint pur**. Le côté repéré par *TP* a subi un allongement dans la direction verticale sans l'effet de rétreint observé sur la zone *R*, et le segment TP_1 se déforme en TP_2 sans que sa longueur initiale ne change. Ce mode de déformation est appelé **traction plane** ou encore **traction large**. La partie supérieure de la pièce formée, appelée « dôme » et repérée par la zone *E* sur la Figure I.2, a été déformée par le poinçon alors que le flan était retenu de toutes parts ; la surface du dôme a donc augmenté au détriment de son épaisseur (conservation du volume). Le cercle initial E_1 tracé sur le flan est devenu un cercle E_2 dont le rayon est plus grand. Le dôme est une **zone dite en expansion**. Nous donnons sur la figure I.3 un deuxième exemple d'emboutissage d'un caisson de porte d'automobile afin d'illustrer les différents modes de déformation possibles.

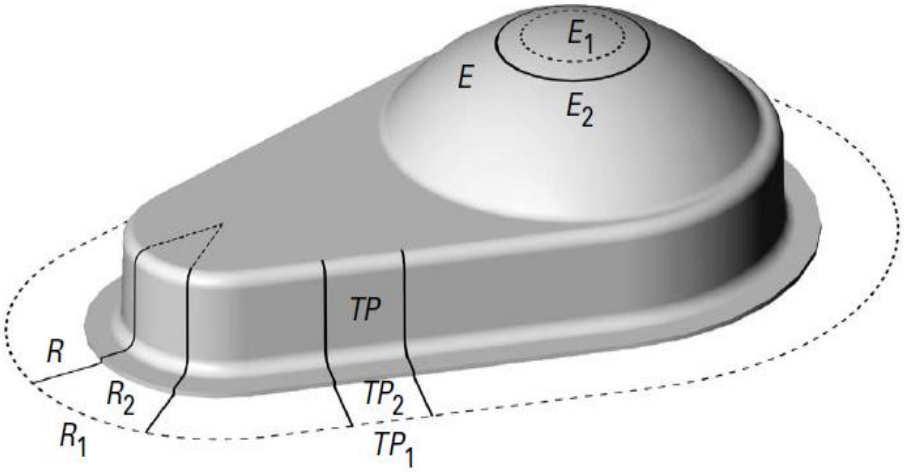

Figure I.2 Modes de déformation dans le cas de l'emboutissage d'un carter de chaine de distribution (Col, 2011).

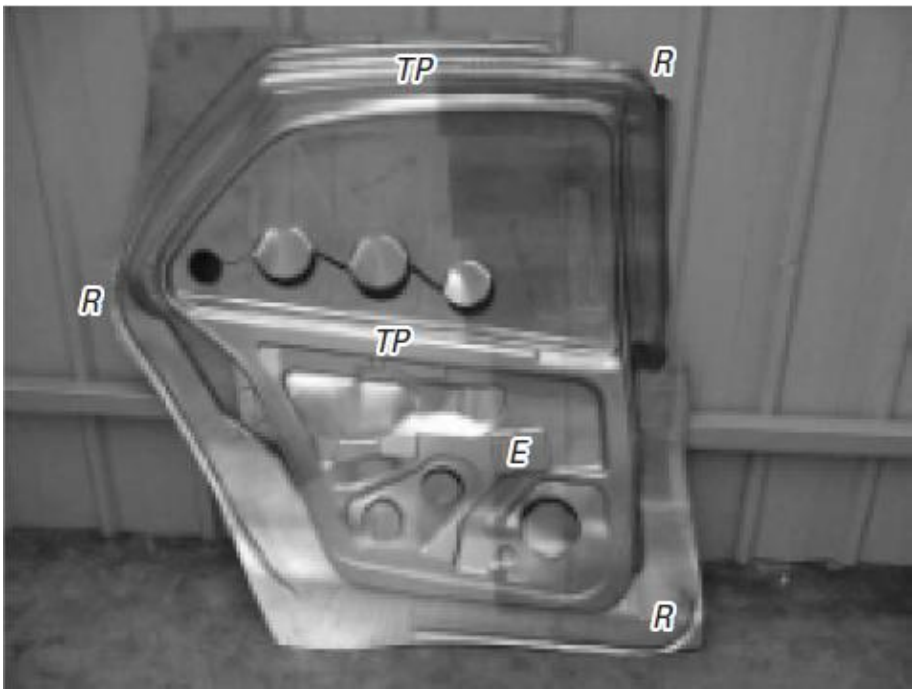

Figure I.3 Modes de déformation induits par emboutissage d'un caisson de porte d'automobile (Col, 2011) ; R : retreint, TP : traction plane et E : expansion.

I.2.2. Défauts de mise en forme

Durant les opérations de mise en forme des tôles minces, plusieurs types de défauts peuvent apparaitre. Ces défauts peuvent être classés selon leur origine (Altmeyer, 2011 ; Banabic, 2010), ou selon leur nature (Haddag, 2007).

Selon la première classification, les défauts rencontrés en mise en forme des tôles minces peuvent être de différentes origines :

- Défauts métallurgiques : on trouve dans cette catégorie les vermiculures liées au vieillissement du matériau, la peau d'orange relative aux matériaux présentant des tailles de grains assez importantes, les déchirures et exfoliations superficielles causées par la présence d'inclusions dans la tôle, les rayures engendrées par la présence d'impuretés ou de défauts de surface sur les poinçons, etc. ;

- Défauts structurels : ces défauts peuvent être provoqués par une non-homogénéité de lubrification qui peut perturber l'écoulement de la matière lors de la mise en forme. D'autres défauts peuvent être classés dans cette catégorie. On peut citer, à titre d'exemple, le plissement de la collerette ou la jupe de la pièce emboutie, le voilage des pièces planes, et le retour élastique ;

- Défauts matériels : les défauts de cette catégorie sont liés aux propriétés du matériau constituant la tôle. Ils sont présents sous forme d'une réduction non homogène de l'épaisseur de la tôle (striction diffuse), ou d'une concentration de déformation, à un niveau de chargement plus important, conduisant à un amincissement local sous forme d'une bande étroite (striction localisée).

Selon la classification donnée par Haddag (2007), les défauts rencontrés en mise en forme sont classés en deux catégories : les défauts globaux et les défauts locaux.

- Un défaut global concerne la géométrie finale de la pièce. A l'issue de l'opération de mise en forme d'une tôle, par exemple par emboutissage, la géométrie finale obtenue après enlèvement des outils peut ne pas correspondre exactement à la forme recherchée. Deux phénomènes sont essentiellement à l'origine de ces défauts : le retour élastique et le plissement.
- Un défaut local concerne des zones plus ou moins réduites de la pièce, où une diminution nette de l'épaisseur, voire rupture localisée, peut apparaître. La striction localisée en est un exemple.

Parmi l'ensemble des défauts cités précédemment, le retour élastique et la striction constituent les deux principaux axes de recherche sur la mise en forme des tôles minces depuis de nombreuses années.

I.2.2.1. Retour élastique

Après les opérations de détourage du flan embouti, il est rare que la pièce conserve exactement la forme et les dimensions données par le montage d'emboutissage (ensemble poinçon-matrice-serre flan). Malgré les grandes déformations plastiques qu'a subies le flan, celui-ci n'est pas entièrement plastifié. Un état de contraintes résiduelles dans le matériau provoque un retour élastique de la matière vers un état relâché. Selon le degré du retour élastique de la pièce emboutie, ce phénomène peut représenter un défaut de forme majeur, qui conduit à la mise au rebut de la pièce. La Figure I.4 d'ouverture d'une pièce en U après retour élastique.

De nombreux travaux expérimentaux et numériques ont été menés dans la littérature pour étudier ce phénomène. Ces travaux de recherche ont montré que le niveau du retour élastique est sensible à différents facteurs, qui sont liés, d'une part, au procédé de mise en forme (e.g., effort de serrage, rayons des outils, coefficient de frottement, etc.) et, d'autre part,

à la tôle elle-même (composition chimique du matériau, taille des grains, texture, épaisseur de la tôle, etc.).

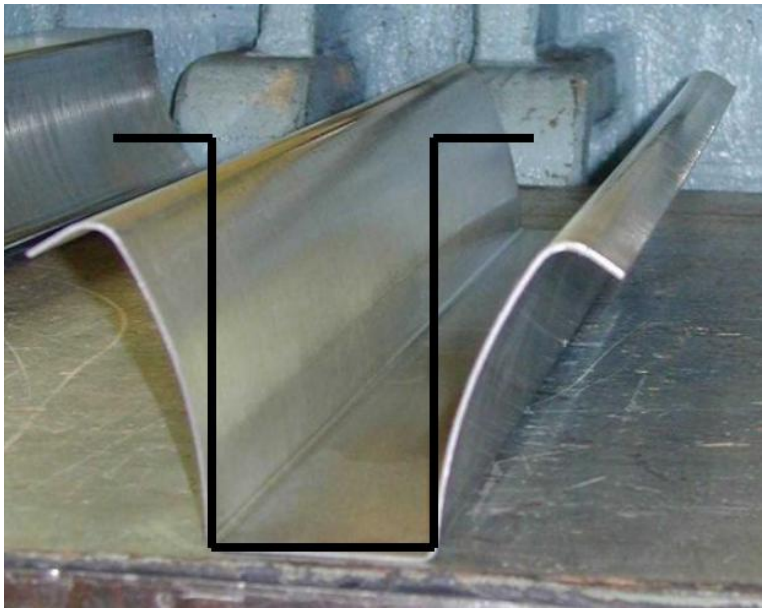

Figure I.4 Exemple d'ouverture d'une pièce en U après retour élastique (Carbonniere, 2009).

I.2.2.2. Striction

Lors des opérations de mise en forme, les tôles minces peuvent subir des diminutions importantes de leurs épaisseurs. À un certain niveau de chargement, cette diminution est plus remarquable sur une zone de la tôle, plus ou moins large, et est caractérisée par une distribution quasi-homogène des déformations au sein de cette zone. Il s'agit d'une instabilité plastique dite 'striction diffuse'. À un niveau de chargement plus élevé, les déformations se concentrent dans une zone étroite, sous forme de bandes serrées, où la diminution de l'épaisseur de la tôle est plus prononcée, c'est la striction localisée. Cette bande étroite est généralement le lieu de rupture par fissuration lors de la mise en forme. La striction localisée, qui est généralement précédée par une striction diffuse, indique le risque d'une rupture imminente. Néanmoins, dans certains cas, une localisation sous forme d'une bande étroite peut avoir lieu sans percevoir un rétrécissement préalable (striction diffuse) dans la tôle. C'est le cas des tôles très minces par exemple (Col, 2011). La figure I.5 montre les différents modes de striction dans le cas d'une tôle épaisse et une tôle très mince. On peut observer dans cette figure, dans le cas d'une tôle épaisse, l'apparition d'une striction diffuse, caractérisée par une diminution de la section centrale, avant l'apparition de la striction localisée.

Dans l'ensemble des chapitres suivants, nous nous intéresserons à l'étude des instabilités plastiques de type striction diffuse et striction localisée des tôles minces lors de leur mise en forme.

(a)

(b)

Figure I.5 Modes de striction dans le cas (a) d'une tôle épaisse, et (b) d'une tôle très mince (Col, 2011).

I.3. Formabilité des matériaux et concept de Courbe Limite de Formage

La réussite d'une pièce emboutie est conditionnée par de nombreux paramètres, en plus de la tolérance géométrique sur la forme finale. Ces paramètres sont liés soit aux conditions opératoires du procédé lui-même, telles que le réglage du serrage pendant le formage, la lubrification entre les outils et le flan, la vitesse d'emboutissage ; soit aux caractéristiques matérielles de la tôle et de son degré de formabilité (Col, 2011). La quantification de cette dernière a souvent été liée à des mesures de déformations sur la surface des tôles, notamment la déformation majeure, notée ε_1, et mineure, notée ε_2 (déformations suivant les directions principales). Pour une meilleure interprétation, ces mesures sont portées sur un graphique dont l'axe des abscisses représente les déformations mineures, et l'axe des ordonnées représente les déformations majeures. La figure I.6 montre la répartition des différents modes de déformation dans le plan $(\varepsilon_2, \varepsilon_1)$. Selon ce diagramme, les tôles peuvent subir des trajets de déformation allant du cisaillement ($\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$) jusqu'à l'expansion (traction) équi-biaxiale ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$), en passant par la traction plane ($\varepsilon_2 = 0$), et d'autres modes intermédiaires comme l'expansion biaxiale ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$) et la traction uniaxiale ($\varepsilon_1 > 0 > \varepsilon_2$). Dans cet intervalle de trajets de déformations, la tôle subit un amincissement dans la direction de l'épaisseur (i.e., ε_3 est toujours négative). Concernant la zone située sous la première bissectrice, elle est éliminée en considérant la convention que $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ (Col, 2011). D'autre part, dans la zone de trajets de déformation située en dessous de la deuxième bissectrice et au-dessus de la première bissectrice ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 0$), les tôles épaisses s'épaississent, alors que les tôles minces ont tendance à plisser, compte tenu de leurs faibles moments quadratiques suivant leurs directions principales. En pratique, le domaine utile inclut les trajets de déformation allant de la traction uniaxiale jusqu'à l'expansion équi-biaxiale, pour lesquels le rapport entre la déformation majeure et la déformation mineure dépend du coefficient d'anisotropie r ($\varepsilon_1 = -\frac{1+r}{r}\varepsilon_2$).

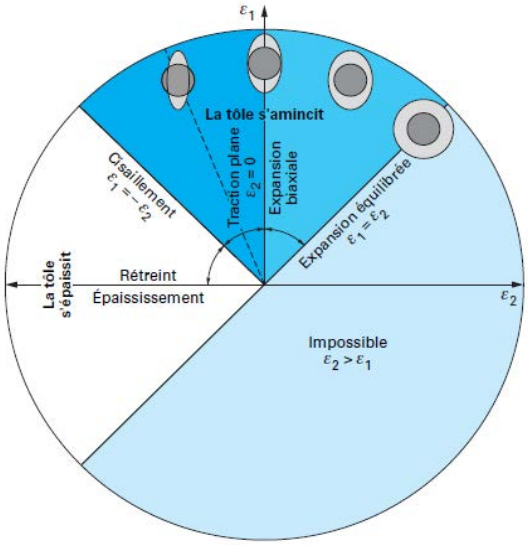

Figure I.6 Répartition des différents trajets de déformation rencontrés en mise en forme des tôles minces.

I.3.1. Concept de Courbe Limite de Formage

Afin de quantifier les limites de formabilité des tôles minces, les valeurs des déformations principales, mesurées au moment de l'apparition d'une striction sont reportées sur le diagramme présenté dans la section précédente. L'ensemble de ces points limites constitue ce que l'on appelle une ***Courbe Limite de Formage*** (CLF). La Figure I.7 illustre un exemple d'une CLF à striction localisée et à rupture (i.e., première apparition d'une fissure dans la tôle). Les points de ces CLF représentent les déformations limites dans le plan de la tôle pour différents trajets de chargement, allant du cisaillement (trajet 1 sur la Figure I.7) à la traction équi-biaxiale (trajet 4), en passant par la traction uniaxiale (trajet 2) et la traction plane (trajet 3).

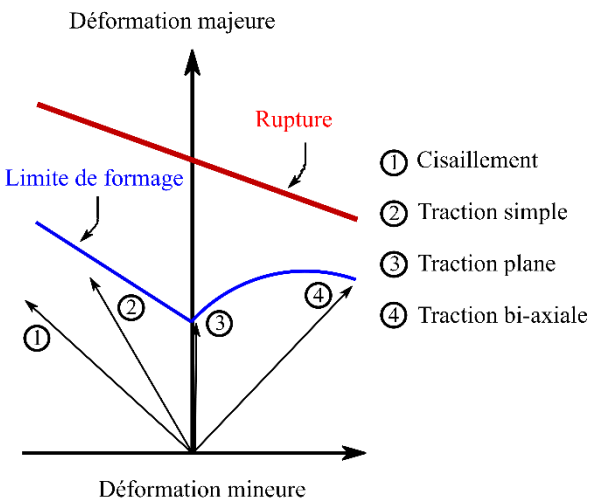

Figure I.7 Concept de Courbes limites de formage (CLF) à striction localisée et à rupture (Banabic, 2010).

Ce concept a été proposé initialement par Keeler et Backofen (1963) pour déterminer les déformations principales maximales pour des tôles de différents matériaux dans le domaine d'expansion, correspondant à l'apparition d'un amincissement (striction) localisé. Plus tard, Goodwin (1968) a étendu la courbe de Keeler et Backofen au domaine de retreint en faisant des essais d'emboutissage profond. L'utilisation des deux courbes, celle de Keeler et Backofen (dans le domaine de l'expansion) et celle de Goodwin (dans le domaine du retreint), constitue la courbe limite de formage de Keeler-Goodwin (voir Figure I.8). Les déformations limites sont comprises dans une bande, ayant une largeur qui dépend de la dispersion des mesures expérimentales. Cette bande divise l'espace des déformations en deux zones : une zone dite « de succès », située en dessous de la bande, correspondant à la réussite des pièces embouties (i.e., sans défaut de striction), et une zone dite « d'échec », située au-dessus de la CLF, où les pièces formées présentent des défauts (de type striction ou rupture).

Parmi les exigences du tracé des CLF, les trajets de déformation doivent être directs (Decultot, 2009). Or, en réalité, les pièces embouties sont soumises à des trajets de déformation complexes ou présentent une certaine pré-déformation avant formage, ce qui est le cas de l'emboutissage multi passes. Il a été montré, expérimentalement et numériquement, que les trajets de déformation indirects (e.g., pré-déformation, changement de trajet) affectent significativement les limites de formage des tôles minces (voir, e.g., Laukonis et Ghosh, 1978 ; Graf et Hosford, 1993, 1994 ; Zhao et al., 1996 ; Hiwatashi et al., 1998 ; Wu et al., 1998 ; Kuroda et Tvergaard, 2000). Cet effet de trajet de déformation indirect sur les CLF a été aussi étudié par Arrieux (1982, 1990) qui a proposé de tracer des CLF dans l'espace des contraintes principales (appelées σ-CLF ou SFLC ''Stress-based Forming Limit Curve''). Il a été montré que ce type de CLF est peu sensible (voire indépendant) du changement de trajet de déformation (voir, e.g., Arrieux, 1995 ; Zhao et al., 1996 ; Haddad et al., 2000 ; Stoughton, 2000 ; Zimniak, 2000 ; Stoughton et Zhu, 2004). Dans le but d'étendre l'application de ces CLF en contraintes au cas de problèmes tridimensionnels, Simha et al. (2006, 2007, 2008) ont introduit un nouveau concept, nommé XSFLC ''eXtended Stress-based Forming Limit Curve'', et l'ont appliqué à la prédiction de l'apparition de la striction lors de l'hydroformage de tubes droits et pré-pliés.

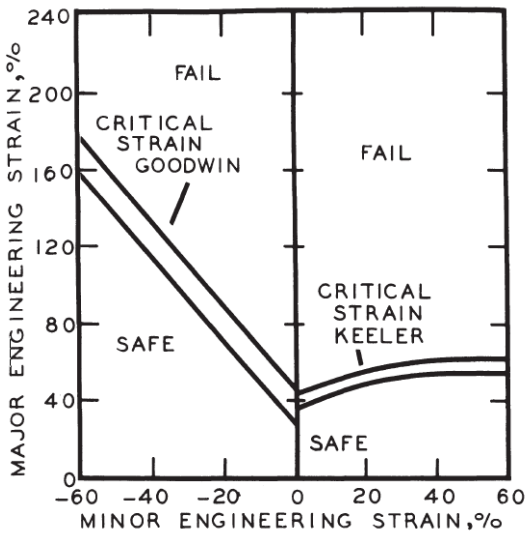

Figure I.8 Courbe limite de formage de Keeler-Goodwin (Keeler, 1978).

I.3.2. Détermination expérimentale des CLF

Depuis l'introduction des CLF par Keeler et Goodwin, plusieurs travaux théoriques et expérimentaux ont été menés jusqu'à nos jours dans le but d'obtention de CLF représentatives de la formabilité des tôles minces.

Du point de vue expérimental, les travaux ont concerné trois points essentiels : les montages utilisés pour déformer la tôle, ce qui conditionne directement les types de trajets de déformation ; les outils utilisés pour mesurer les déformations, et finalement les techniques employées pour détecter l'apparition de la striction localisée. Différents montages mécaniques ont été mis au point pour permettre de reproduire différents trajets de chargement en jouant sur la géométrie de l'outillage utilisé et celle des éprouvettes embouties. Nous citons à titre d'exemple l'essai de Marciniak, l'essai de Nakazima, le test du gonflement hydraulique, etc.

Marciniak (Marciniak et Kuczyński, 1967 ; Marciniak et al., 1973) s'est inspiré des essais d'emboutissage profond et a proposé l'utilisation d'un poinçon creux avec un contre-flan présentant un trou circulaire, positionné entre le poinçon et le flan, dans le but de favoriser la rupture dans la partie centrale (plate) de la tôle (voir figure I.9). Afin d'obtenir différents trajets de chargement (seulement dans le domaine de l'expansion), des poinçons de différentes sections (circulaire, elliptique, rectangulaire) ont été utilisés. Cet essai a été amélioré par la suite pour prendre en considération les trajets de déformation dans le domaine de retreint, et cela en utilisant un seul poinçon à fond plat évidé avec des flans circulaires présentant des échancrures de différents rayons (Gronostajski et Dolny, 1980), ou alors des flans rectangulaires avec différentes largeurs (Arrieux et al., 1984). L'avantage de cet essai est qu'il n'introduit pas de courbure supplémentaire (poinçon plat), et l'absence de contact direct entre le flan et le poinçon dans la zone critique permet d'avoir une mesure de déformation intrinsèque au matériau étudié.

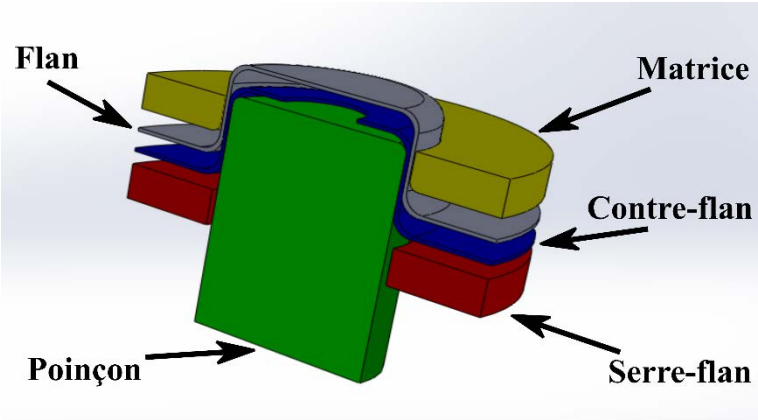

Figure I.9 Illustration de l'essai Marciniak.

Un autre type d'essai a été introduit par Nakazima (Nakazima et al., 1968) en proposant l'utilisation d'un poinçon hémisphérique et des flans de différentes largeurs maintenus entre une matrice et un serre-flan circulaire (voir Figure I.10). La géométrie des flans, comme le recommande la norme ISO 12004-2 (2008), est présentée dans la Figure I.11. Les avantages de cet essai sont la simplicité des outils et des flans utilisés, qui permettent d'obtenir l'ensemble des trajets de chargement nécessaires pour construire une CLF.

Cependant, la courbure des flans après formage, due à la forme hémisphérique du poinçon, et le frottement entre le flan et le poinçon peuvent biaiser les mesures de déformation dans la zone critique.

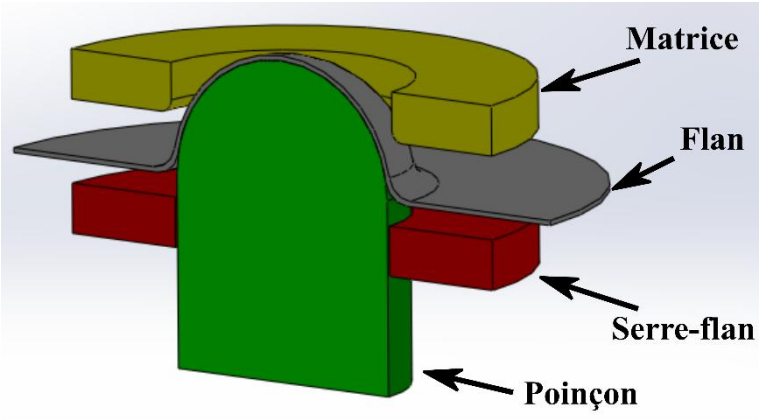

Figure I.10 Illustration de l'essai Nakazima.

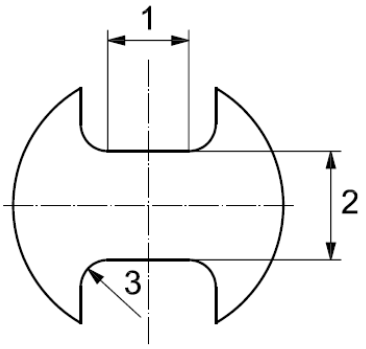

Figure I.11 Géométrie des éprouvettes utilisées dans l'essai Nakazima selon la norme ISO 12004-2 (2008) : (1) longueur de la partie centrale, (2) largeur du flan et (3) rayon de raccordement.

Dans le test de gonflement hydraulique (Figure I.12), appelé aussi le test de Jovignot, les flans sont déformés par l'action d'une pression hydraulique à travers des matrices elliptiques. La variation du rapport entre le grand rayon et le petit rayon de l'ellipse permet de faire varier les trajets de déformation dans le domaine de l'expansion seulement. Cependant, et contrairement aux deux essais précédents, le problème de frottement est éliminé vu que le test de gonflement hydraulique ne nécessite pas l'utilisation d'un poinçon pour déformer les flans.

Des essais de traction simple avec différentes géométries d'éprouvettes peuvent aussi être utilisés pour la détermination des CLF. En effet, Rozzo et al. (1972) ont proposé d'utiliser des éprouvettes rectangulaires de différentes dimensions, présentant des entailles spécifiques, pour reproduire certains trajets de déformation (Figure I.13). L'avantage de ces essais est que les éprouvettes sont simples et faciles à réaliser. Durant l'essai de traction, ces éprouvettes restent planes, ce qui facilite la mesure des déformations. Cependant, ce type d'essai de traction simple ne permet de reproduire que des trajets de chargement dans le domaine du retreint.

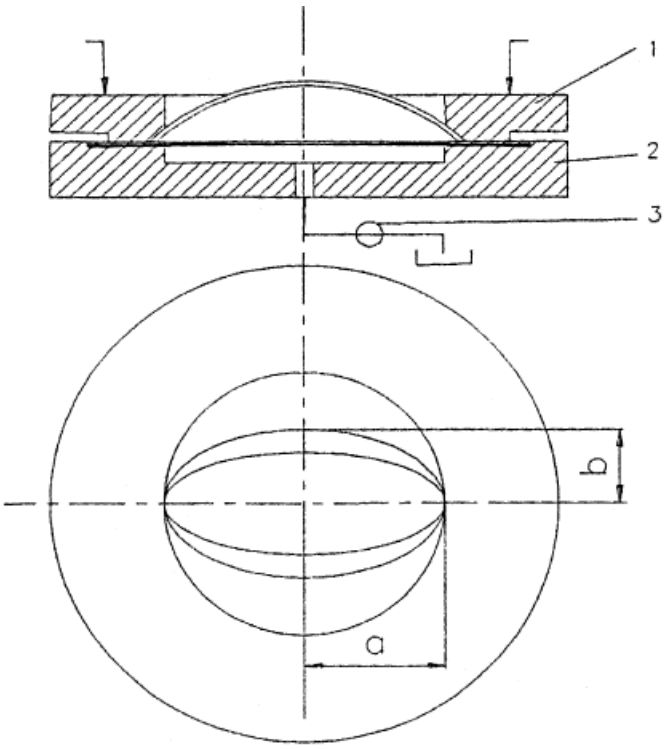

Figure I.12 Illustration du test de gonflement hydraulique avec des matrices elliptiques (Banabic, 2010) : (1) Matrice elliptique, (2) serre-flan, (3) système hydraulique.

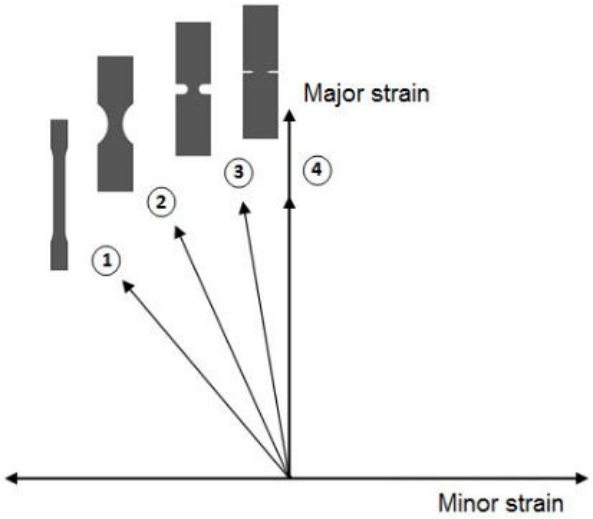

Figure I.13 Trajets de déformation issus de tractions simples sur différentes géométries d'éprouvettes (Schwindt et al., 2015).

Avant d'effectuer les essais expérimentaux pour la détermination des CLF, les éprouvettes utilisées doivent être marquées avec des grilles de motifs bien déterminés (circulaires, carrés, etc.). La Figure I.14 présente quelques exemples de grilles utilisées pour la mesure des déformations dans le plan. Ce marquage des éprouvettes permettra d'évaluer les valeurs des déformations majeure et mineure durant le chargement jusqu'à la localisation (voire la rupture). Les grilles à motif carré sont généralement utilisées lorsque les directions principales des déformations sont connues par rapport à la géométrie initiale de la tôle. Au contraire, les grilles à motif circulaire sont utilisées lorsqu'on ne connait pas les directions principales de déformation. En effet, le cercle se déforme en une ellipse dont le grand

diamètre et le petit diamètre permettront d'évaluer, respectivement, les déformations majeure et mineure sur la surface de la tôle.

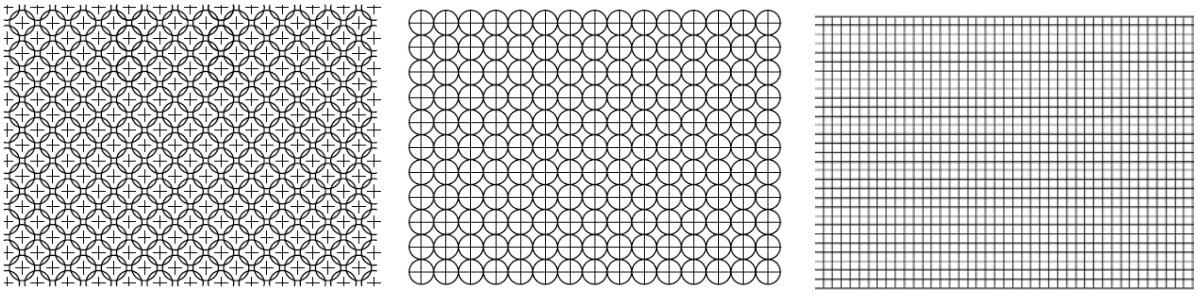

Figure I.14 Exemples de grilles utilisées pour le marquage des éprouvettes (ISO 12004-1).

Différentes méthodes ont été proposées dans le but de détecter l'apparition de la striction. Hecker (1972, 1975) a proposé une méthode de détection de l'apparition de la striction basée sur l'analyse des cercles de la grille déposée sur la surface de la tôle. Après formage, les cercles se déforment et deviennent des ellipses. Hecker (1975) a classifié trois types d'ellipses autour de la zone de rupture : ellipses cassées, ellipses affectées par la striction et ellipses acceptables. Les déformations majeures et mineures des différents types d'ellipses sont déterminées et reportées sur le diagramme des déformations. La CLF à striction est ensuite tracée en utilisant les mesures de déformations associées aux ellipses affectées par la striction et celles acceptables. Une autre méthode, basée sur la mesure de la rugosité dans la zone de striction, a été proposée par Kobayashi (1972). Cette méthode nécessite beaucoup d'essais et induit des dispersions importantes des mesures (Col, 2011). Dans le but de réduire le temps nécessaire pour l'élaboration d'une CLF, Bragard (1972) et d'Haeyer et Bragard (1975) ont proposé une méthode basée sur la détermination des déformations limites par interpolation des déformations mesurées à partir des ellipses entourant la rupture. Cependant, cette méthode s'avère sensible au nombre de points utilisés dans la zone critique.

Avec le développement des moyens d'acquisition d'images, de leur numérisation et traitement, plusieurs méthodes optiques ont été développées dans la littérature pour la détermination des déformations limites dans les tôles minces. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode SOLLAC (Marron et al., 1997) basée sur l'analyse du taux de déformation pour la détermination du début de la striction. Dans ce même contexte, le groupe de travail IDDRG (International Deep Drawing Research Group) a grandement contribué dans le développement de méthodes numériques et expérimentales pour la détection de l'apparition de la striction et de la rupture dans les tôles minces (voir, e.g., Hotz, 2006). Ce groupe de travail a proposé une amélioration de la méthode de Bragard pour la mesure des déformations limites. Cette méthode a été implantée dans plusieurs systèmes de mesure des déformations limites, dont le système ARAMIS, qui est commercialisé par la société GOM (Friebe et al., 2006).

Malgré les efforts liés au développement de techniques expérimentales pour la détermination des CLF, ces dernières restent peu utilisables de nos jours dans le milieu industriel à cause des inconvénients qu'elles présentent (e.g., coût élevé des essais

mécaniques, reproductibilité des résultats, absence de norme unique, etc.). Cependant, ces méthodes sont très utilisées dans les laboratoires de recherche dans le but de validation de nouvelles approches théoriques et numériques pour la détermination des CLF, qui seront présentées dans la section suivante.

I.3.3. Prédiction des courbes limite de formage

Pour faire face aux inconvénients de la détermination expérimentale des CLF, de nombreux travaux de recherche, sur la prédiction de l'apparition de la striction diffuse et localisée, ont donné naissance à des approches et critères statistiques (empiriques) et théoriques. La première famille des critères a été développée dans le but de rendre les résultats de recherche exploitables directement dans l'industrie, et cela en se basant sur des analyses statistiques des résultats expérimentaux. En effet, Keeler et Brasier (1977) ont montré que, pour une nuance d'acier donnée, la forme des CLF est relativement simple, ce qui peut être modélisé par deux droites qui se coupent sur l'axe des déformations majeures en un point commun FLD_0. Ce point représente la valeur de la déformation limite en traction plane (voir Figure I.15). Keeler et Brasier (1977) ont montré que la valeur de FLD_0 varie linéairement avec l'épaisseur initiale de la tôle e_0, et est proportionnelle à son coefficient d'écrouissage n. Le groupe de recherche nord-américain sur l'emboutissage *NADDRG* (North Americain Deep Drawing Research Group) a complété les travaux de Keeler et Brazier (1977) et a proposé une formule empirique pour la détermination de la valeur de FLD_0 sous la forme suivante :

$$FLD_0(\%) = (23{,}3 + 14{,}14\, e_0)\frac{n}{0{,}21}, \tag{I.1}$$

où l'épaisseur e_0 (mm) ne doit pas dépasser 3 mm (tôles minces).

La Bethlehem Steel Corporation a proposé une autre formule pour la valeur de FLD_0, qui est basée sur la valeur de l'allongement à la rupture 'A' au lieu du coefficient d'écrouissage du matériau (Raghavan et al., 1992). Cette formule est donnée par la relation suivante :

$$FLD_0(\%) = 2{,}78 + 3{,}244\, e_0 + 0{,}892\, A. \tag{I.2}$$

Une autre formule pour la prédiction de la valeur de FLD_0 a été proposée récemment par Paul (2016). Cette formule dépend de cinq paramètres, comme le montre l'équation (I.3), à savoir : la contrainte ultime en traction R_m, le coefficient d'anisotropie r, l'allongement à la rupture A, le coefficient d'écrouissage n, et l'épaisseur initiale de la tôle e_0.

$$FLD_0(\%) = 7{,}702\, e^{-0{,}0122 R_m} - 0{,}1124\, r - 0{,}6908\, e^{-12{,}4187 A} + 0{,}1149\, n + 0{,}0823\, e_0 + 0{,}3011. \tag{I.3}$$

La deuxième famille de critères prédictifs des instabilités plastiques regroupe un ensemble de critères théoriques, qui peuvent être classifiés en quatre approches (Altmeyer, 2011) : une approche basée sur le principe de force maximum, méthodes multizones, approches basées sur l'analyse de bifurcation, et enfin les méthodes d'analyse de stabilité par perturbation linéarisée.

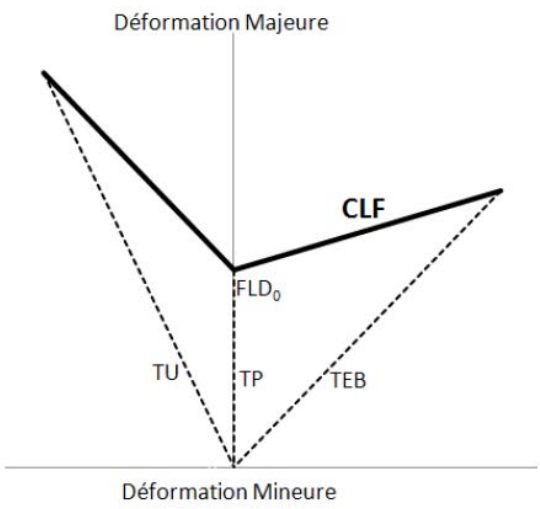

Figure I.15 Forme approchée des CLF proposée par Keeler et Brazier (Altmeyer, 2011).

I.3.3.1. Principe de force maximum

Les critères de prédiction des instabilités plastiques regroupés dans cette famille se basent sur les observations expérimentales de Considère (1885), qui a constaté que pour un essai de traction uniaxiale monotone sur une barre en acier, la striction diffuse apparait au moment où l'effort de traction atteint sa valeur maximale. Swift (1952) a proposé un critère, appelé CFM (Critère de Force Maximum), pour la prédiction de la striction diffuse, qui est une extension du critère de Considère aux chargements plans bi-axiaux. En effet, Swift a associé l'apparition de la striction diffuse à la simultanéité de la stationnarité des efforts dans les deux directions principales de chargement. Plus tard, ce critère a été modifié par Hora et ses collaborateurs (Hora et al., 1994, 1996) pour la prédiction de la striction localisée. Le critère résultant est appelé 'Critère de Force Maximum Modifié' (CFMM). Un avantage de ce critère CFMM est qu'il peut être implanté facilement dans un code de calcul par éléments finis pour la prédiction de la striction localisée. Cependant, ce critère ne considère pas l'évolution du trajet de chargement, défini par le rapport $\beta = d\varepsilon_{\text{mineure}} / d\varepsilon_{\text{majeure}}$, après la détection de la striction diffuse par le critère CFM. Mattiasson et ses coauteurs (Mattiasson et al., 2006) ont proposé un version modifiée du critère CFMM, appelée Critère de Force Maximum Étendu (CFME), dans laquelle le rapport de déformation β devient variable au cours du chargement à partir de l'apparition de la striction diffuse prédite par le critère CFM.

I.3.3.2. Méthodes multizones

Dans cette famille de critères, quelques approches ont été développées pour la prédiction de la striction localisée. Ces approches considèrent l'évolution des états de déformation, en particulier, dans deux zones de la tôle présentant initialement des propriétés géométriques ou mécaniques différentes. Marciniak et Kuczyński (1967) ont proposé le modèle M–K dans lequel un défaut initial (géométrique) a été introduit sous la forme d'une bande inclinée d'épaisseur réduite. Lors du chargement, la localisation est prédite lorsque les déformations à l'intérieur de la zone d'épaisseur réduite tendent à évoluer plus rapidement que celles à l'extérieur de la zone d'épaisseur réduite. Ce modèle a été amélioré plus tard par Hutchinson et Neale (1978), qui ont montré que le niveau de la localisation prédit est affecté

par l'orientation initiale de la bande. En effet, Hutchinson et Neale ont montré que l'orientation initiale de la normale à la bande n'est pas forcément celle de la direction principale de chargement, en particulier dans le domaine du retreint. Cette version du modèle M–K est plus conservative que la version initiale vu que, pour chaque trajet de chargement, les déformations limites sont minimisées par rapport à l'orientation initiale de la bande. Par conséquent, cette approche nécessite des temps de calculs importants pour tracer la CLF complète. Un autre modèle de cette famille de critères a été proposé par Yamamoto (1978), qui a considéré l'existence d'un défaut initial de type matériau (fraction volumique initiale de porosité). Dans ce modèle, la fraction volumique de porosité dans une bande étroite est légèrement supérieure à celle dans le reste du solide.

I.3.3.3. Analyse de bifurcation

Cette famille de critères découle de la théorie de bifurcation (ou perte d'unicité de la solution). Les critères de cette famille reposent sur des fondements théoriques rigoureux vu qu'ils n'ont pas besoin d'introduire des paramètres arbitraires définis par l'utilisateur, comme la taille du défaut initial dans l'approche M–K (Marciniak et Kuczyński, 1967 ; Hutchinson et Neale, 1978 ; Yamamoto, 1978).

Concernant la striction diffuse, elle est interprétée expérimentalement comme étant le passage d'un état de déformation homogène d'une structure à un état quasi-homogène ou hétérogène. D'un point de vue de la théorie de bifurcation, la striction diffuse est considérée comme un problème de bifurcation à partir de la solution du problème aux limites formulé en vitesses. Drucker (1950, 1956) et Hill (1958) ont introduit le critère de « Bifurcation Générale » (BG) comme une condition d'exclusion de toute bifurcation (géométrique ou matérielle) pour le problème considéré. Une formulation locale de ce critère BG, correspondant à la perte de positivité du travail de second ordre, peut être utilisée pour la prédiction de la striction diffuse en mise en forme des matériaux. Dans ce même contexte de prédiction de la striction diffuse, Valanis (1989) a proposé un critère alternatif désigné par « critère de Bifurcation par Point Limite » (BPL). Ce critère, moins conservatif que le critère de BG, prédit la perte d'unicité de solutions du problème d'équilibre associé à un état de contrainte nominale stationnaire.

En suivant les travaux de Hill (1952, 1958), Rice et ses collaborateurs (Rice, 1976 ; Rudnicki et Rice, 1975 ; Stören et Rice, 1975) ont proposé un critère de bifurcation pour la prédiction de la localisation de la déformation sous forme d'une bande de cisaillement. Ce critère, nommé critère de Perte d'Ellipticité (PE), correspond à la perte d'ellipticité des équations aux dérivées partielles gouvernant le problème aux limites. Ce critère repose sur la présence d'une discontinuité du gradient des vitesses à travers la bande de localisation dans un milieu homogène. Un critère de localisation alternatif, plus conservatif que le critère PE, a été proposé par Bigoni et Hueckel (1991). Ce critère correspond à la perte d'ellipticité forte (PEF) des équations aux dérivées partielles gouvernant le problème aux limites.

D'autres variantes des critères de bifurcation discutés ci-dessus méritent également d'être mentionnés ainsi que d'autres développements analytiques en vue d'établir des rapprochements théoriques entre les critères cités précédemment (Doghri et Billardon, 1995 ;

Loret et Rizzi, 1997a, 1997b ; Rizzi et Loret, 1997 ; Sánchez et al., 2008 ; Abed-Meraim et al., 2014a, 2014b).

Il est à noter que dans le cadre d'une modélisation phénoménologique de la plasticité incrémentale associée, la perte d'ellipticité des équations du problème considéré n'est possible qu'à travers l'introduction d'un régime adoucissant. Ce dernier peut être modélisé par le couplage de lois de comportement avec de l'endommagement ductile (voir, e.g., Doghri et Billardon, 1995 ; Haddag, 2007 ; Haddag et al., 2009 ; Mansouri et al., 2014).

I.3.3.4. Analyse de stabilité par perturbation linéarisée

La quatrième et dernière catégorie de critères d'instabilités plastiques repose sur la théorie de la stabilité et l'analyse de perturbation associée pour la prédiction de la striction diffuse ou localisée. L'analyse de stabilité consiste à étudier le taux de croissance d'une perturbation introduite dans les équations d'équilibre, et tant que la solution du système perturbé reste proche de la solution du système non-perturbé, on peut dire que la solution conserve sa stabilité. Cette approche a été initialement proposée par Clifton et ses collaborateurs (Clifton et al., 1984 ; Shawki et Clifton, 1989) pour la prédiction des conditions critiques de l'apparition d'un mode instable en cisaillement des matériaux thermo-viscoplastiques. Cette méthode a été appliquée par Fressengeas et Molinari (1987) pour étudier la formation de bandes de cisaillement dans un matériau thermo-viscoplastique modélisé par des lois phénoménologiques en cisaillement simple. Dudzinski et Molinari (1991) ont ensuite appliqué cette méthode pour déterminer les limites de formage de tôles métalliques thermo-viscoplastiques soumises à des chargements plans bi-axiaux. Aussi, dans les travaux de Tóth et al. (1996) et Boudeau et al. (1998), l'analyse linéaire de stabilité par perturbation a été combinée avec des modèles polycristallins pour la prédiction de CLF.

Cette classe de critères représente une alternative intéressante à l'approche de bifurcation, en particulier dans le cas de matériaux dépendant de la vitesse de déformation. Cependant, elle est moins utilisée dans la littérature, comparée à l'analyse M–K ou à la théorie de bifurcation, vu les difficultés de mise en œuvre tant sur le plan théorique que numérique.

I.4. Ingrédients nécessaires pour la prédiction numérique des CLF

Bien que les critères théoriques, discutés ci-dessus, puissent paraître différents vu les fondements théoriques sur lesquels ils sont basés, ils ont été tous développés pour la prédiction de l'apparition des instabilités plastiques à savoir la striction diffuse et la striction localisée. Toutefois, leur implantation et mise en œuvre numérique présente des similitudes importantes. La figure I.16 montre un schéma commun suivant lequel ces critères peuvent être implantés pour la prédiction numérique des instabilités plastiques. Après avoir choisi le modèle de comportement approprié pour le matériau d'étude, et identifié préalablement les paramètres associés, un calcul élasto-plastique est effectué suivant un trajet de chargement donné. En partant d'un état de déformation–contrainte connu au début de chaque incrément de chargement, l'état de déformation–contrainte à la fin de l'incrément est calculé en utilisant le modèle de comportement retenu. Par la suite, si la condition critique du critère de striction (diffuse ou localisée) est atteinte, alors les valeurs de déformation à ce niveau de chargement

sont considérées comme les déformations limites à striction. Dans ce cas, la simulation est arrêtée. Sinon, le chargement est incrémenté de nouveau, et le critère de striction est testé à la fin de l'incrément courant. En suivant cette procédure, plusieurs trajets de chargement sont simulés afin de reproduire les différentes sollicitations rencontrées en mise en forme des tôles minces (i.e., allant de la traction uniaxiale jusqu'à la traction équi-biaxiale, en passant par la traction plane). Les valeurs enregistrées des déformations critiques permettront de tracer la CLF du matériau étudié.

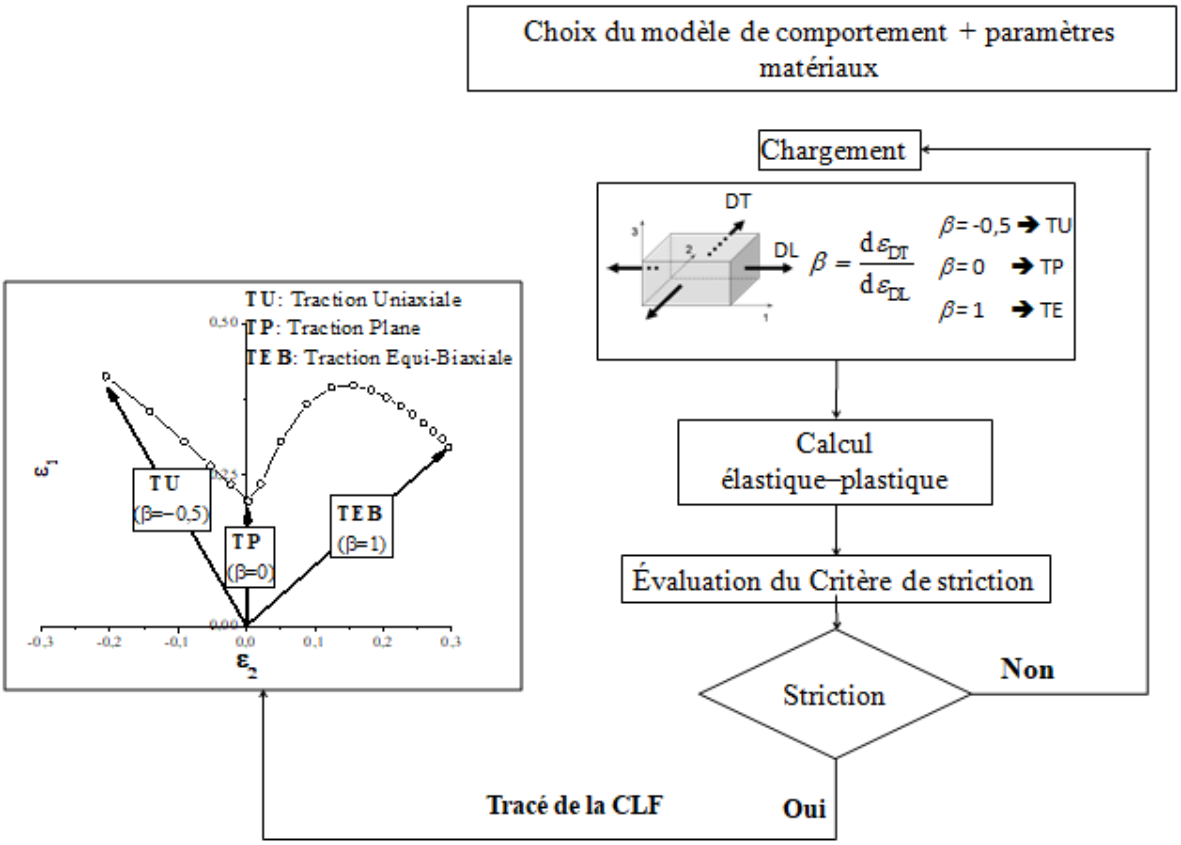

Figure I.16 Description de la procédure de couplage entre modèle de comportement et critère de striction pour la prédiction des CLF.

I.4.1. Modélisation du comportement mécanique

Le modèle de comportement à adopter doit reproduire au mieux le comportement réel du matériau étudié. En effet, il doit modéliser avec précision l'ensemble des mécanismes physiques observés lors de la mise en forme des tôles minces (e.g., écrouissage, anisotropie, endommagement, etc.).

Considérant l'histoire mécanique initiale de la tôle avant sa mise en forme par emboutissage (e.g., laminage à froid ou à chaud), les grains sont pré-déformés suivant une direction privilégiée, appelée direction de laminage, procurant ainsi une anisotropie initiale à la tôle. La caractérisation de cette anisotropie se fait généralement à partir de plusieurs essais mécaniques simples (e.g., traction uniaxiale, expansion biaxiale) afin d'identifier les coefficients d'anisotropie du matériau (voir, e.g., Lankford et al., 1950 ; Pöhlandt et al., 2002 ; Barlat et al., 2003). Lors des opérations d'emboutissage, la déformation plastique induit

l'écrouissage de la tôle, qui se traduit par l'évolution de la limite élastique suivant une direction donnée. Cet écrouissage, qualifié d'isotrope dans le cas où la limite élastique en compression est égale à celle en traction, a été modélisé par plusieurs lois phénoménologiques dans la littérature, dont les paramètres peuvent être identifiés via des trajets monotones simples (Haddag, 2007). Nous citons à titre d'exemple les modèles d'Hollomon, Ludwig, Swift, Voce, etc. Cependant, en mise en forme, les changements de trajet de déformation impliquent des mécanismes d'écrouissage plus complexes. Bauschinger a observé, lors d'un essai de traction d'une éprouvette métallique, que la limite élastique a été atteinte en compression pour une valeur inférieure à celle en traction. Cette diminution de la contrainte lors d'un trajet inverse de chargement, définie comme une contrainte de rappel **X**, représente l'écrouissage cinématique du matériau. Quelques modèles ont été proposés pour la modélisation de cet écrouissage cinématique, comme le modèle linéaire de Prager (1956), et le modèle d'Armstrong-Frederick (1966). Ce dernier modèle a été amélioré par la suite dans plusieurs travaux de la littérature pour décrire l'effet Bauschinger et l'effet rochet en fatigue.

La modélisation de l'écrouissage décrivant l'évolution de la surface de charge est l'un des trois éléments nécessaires pour la description du comportement plastique des matériaux métalliques (Banabic, 2010). Les deux autres éléments sont le critère de plasticité et la loi d'écoulement plastique. La transition de l'état élastique à l'état plastique se produit quand la contrainte atteint la limite d'élasticité du matériau. Dans le cas uniaxial, la valeur de la contrainte suivant cette direction est comparée à la valeur de la limite élastique pour vérifier la transition vers le domaine plastique. Dans le cas d'un état de contraintes multiaxial, il est difficile de définir le point de cette transition. Le concept de contrainte équivalente a été introduit dans le but de considérer l'ensemble des composantes du tenseur de contrainte dans le calcul du critère de plasticité. Plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature pour l'évaluation de cette contrainte équivalente. Ces modèles sont regroupés en deux classes ; une classe dédiée aux matériaux isotropes (Tresca, 1864 ; Mises, 1913 ; Drucker, 1949 ; Hershey, 1954), et une deuxième classe dédiée aux matériaux anisotropes (Banabic et al., 2000 ; Barlat et al., 1991, 1997a, 1997b ; Barlat et Lian, 1989 ; Hill, 1948, 1979, 1990, 1993 ; Hosford, 1979 ; Karafillis et Boyce, 1993, etc.). Tous ces modèles définissent des surfaces de charge différentes. Ces surfaces de charge sont toutes fermées, convexes et lisses.

Une fois la surface de charge choisie (i.e., critère de plasticité), deux types de directions d'écoulement plastique sont possibles : une direction normale à la surface de charge, et une direction non-normale à cette surface. Ces directions dépendent du choix de la règle d'écoulement plastique adoptée. La direction d'écoulement plastique est normale à la surface de charge dans le cas d'une loi de plasticité associée, pour laquelle un seul potentiel plastique est défini pour évaluer à la fois le critère de plasticité et la direction d'écoulement plastique. Dans le cas d'une loi plastique non-associée, deux potentiels plastiques sont définis : le premier permet de modéliser la surface de charge, et le deuxième permet de définir la direction d'écoulement plastique, cette dernière étant non-normale à la surface de charge. En mise en forme des tôles métalliques, un modèle de plasticité associée est celui le plus utilisé dans la littérature, puisqu'il nécessite la définition d'un seul potentiel plastique. Cependant, une loi de plasticité non-associée permet une meilleure description du comportement plastique de certains matériaux métalliques (e.g., Badreddine et al., 2010 ; Bigoni et Hueckel, 1991 ; Cvitanić et al., 2008 ; Mohr et al., 2010 ; Qian et al., 2017 ; Safaei

et al., 2014 ; Stoughton, 2002 ; Stoughton et Yoon, 2009 ; Taherizadeh et al., 2010, 2015 ; Wali et al., 2016).

En plus de la plasticité des matériaux métalliques, le phénomène d'endommagement (i.e., dégradation des propriétés mécaniques des matériaux) joue un rôle très important dans l'apparition de la striction dans les tôles minces. L'introduction de ce phénomène dans le comportement des matériaux métalliques est rendu possible à travers le couplage du modèle de comportement élasto-plastique à l'endommagement ductile. Dans ce contexte, deux théories bien établies de l'endommagement ductile ont été développées au cours des dernières décennies. La première théorie, initiée par les travaux de Gurson (1977) et modifiée plus tard par Tvergaard et Needleman (Tvergaard, 1981 ; Tvergaard et Needleman, 1984), est basée sur une analyse micromécanique de la croissance du vide (ou porosité), ce qui permet de décrire les mécanismes complexes de l'endommagement ductile dans les matériaux poreux. Dans cette approche, la fraction volumique de vide est introduite en tant que variable d'endommagement, tenant ainsi compte de la dépendance de la réponse du matériau à la pression hydrostatique. Plusieurs améliorations ont été apportées dans la littérature à ce type de théorie de l'endommagement ductile, mais au prix d'un grand nombre de paramètres matériau à identifier (voir, e.g., Benzerga et Besson, 2001 ; Gologanu et al., 1997 ; Monchiet et al., 2008 ; Pardoen et al., 1998 ; Rousselier, 1987). La seconde théorie, connue sous le nom de la ''Mécanique de l'endommagement continu'', ou en anglais ''continuum damage mechanics'' (CDM), est basée sur la thermodynamique des processus irréversibles, et est largement utilisée pour modéliser l'endommagement ductile dans les matériaux métalliques (voir, e.g., Chaboche, 1999 ; Saanouni et al., 1994 ; Voyiadjis et Kattan, 1992). Dans cette approche, la variable d'endommagement représente la densité surfacique des microfissures dans un plan donné, et peut être modélisée comme une variable scalaire isotrope (voir, e.g., Chaboche et al., 2006 ; Lemaitre, 1992, 1985), ou une variable tensorielle dans le cas d'un endommagement anisotrope (Abu Al-Rub et Voyiadjis, 2003 ; Brünig, 2003 ; Chaboche, 1993 ; Chow et Lu, 1989 ; Chow et Wang, 1987 ; Zhu et Cescotto, 1995). Trois variantes principales de la théorie CDM ont été développées dans la littérature. Elles sont basées sur les trois hypothèses fondamentales suivantes : le principe d'équivalence en déformation, le principe d'équivalence en contrainte et le principe d'équivalence en énergie. Le principe d'équivalence en déformation utilise le concept de la contrainte effective, tel que proposé par Lemaitre (Lemaitre, 1971), puis utilisé par Simo et Ju (1987a, 1987b), Chaboche (1988) et Ju (1989). Contrairement au principe d'équivalence en déformation, le principe d'équivalence en contrainte repose sur le concept de déformation effective, comme proposé par Simo et Ju (1987a, 1987b). Quant à la troisième variante de la théorie CDM, elle est basée sur le principe d'équivalence en énergie (voir, e.g., Cordebois et Sidoroff, 1979), en considérant l'équivalence de la partie élastique de l'énergie seulement. Ensuite, elle a été étendue par Saanouni et ses collaborateurs durant les dernières décennies à l'équivalence en énergie totale (Badreddine et al., 2010, 2016, 2017 ; Ghozzi et al., 2014 ; Rajhi et al., 2014 ; Saanouni, 2008, 2012 ; Saanouni et al., 1994, 2011 ; Saanouni et Chaboche, 2003 ; Saanouni et Hamed, 2013 ; Yue et al., 2015). Ce principe d'équivalence en énergie totale définit l'état du matériau sain et les variables de contrainte et de déformation effectives associées, de sorte que l'énergie totale (élastique et inélastique) impliquée soit égale à celle de l'état du matériau endommagé.

I.4.2. Identification des paramètres matériaux

L'identification des paramètres matériaux est une étape cruciale pour la simulation des phénomènes physiques, en général, et pour la prédiction des limites de formabilité en emboutissage, en particulier. Afin de reproduire, d'une façon précise, les phénomènes physiques rencontrés dans les problèmes traités, un choix judicieux des lois de comportement est nécessaire, mais qui doit être accompagné d'une identification précise des paramètres associés. Pour cela, différentes méthodes ont été développées dans la littérature pour l'identification des paramètres matériaux. Les paramètres élasto-plastiques (module de Young, coefficient de Poisson, coefficients d'anisotropie, paramètres d'écrouissage isotrope et cinématique) sont généralement identifiés à partir d'essais classiques (essai de traction uniaxiale dans différentes orientations par rapport la direction de laminage, essai de traction équi-biaxiale, essai de cisaillement, essai de torsion cyclique, etc.). Cependant, ce type d'identification nécessite l'utilisation d'éprouvettes à forme simple, induisant ainsi un état de déformation–contrainte homogène jusqu'à l'apparition de la striction diffuse. Dans cette phase de réponse mécanique homogène, ce sont les paramètres d'écrouissage qui sont identifiés en premier. Une autre approche dite « approche inverse » a été développée pour l'identification des paramètres matériaux à partir de formes géométriques complexes, induisant un état de déformation–contrainte hétérogène. Cette approche consiste à comparer une réponse mécanique (par exemple la courbe Force–déplacement d'un essai de traction uniaxiale), obtenue par une simulation éléments finis (EF) et par l'expérience, et d'ajuster les paramètres matériau du modèle EF de manière à minimiser l'écart entre les deux réponses (voir, e.g., Roux, 2011). Plusieurs méthodes basées sur cette approche inverse ont été proposées pour l'identification des paramètres matériaux de différentes lois constitutives (Bonora, 1999 ; Bouchard et al., 2011 ; Cao et al., 2013a, 2013b ; Eggertsen et Mattiasson, 2010 ; Yoshida, 2003 ; Yoshida et al., 1998 ; Yue et al., 2015). Il est à noter que la précision de ce type de méthodes d'identification est fortement liée à la précision du modèle éléments finis (Roux, 2011). Aussi, ce type d'approche inverse présente un inconvénient majeur, qui est celui de la non-unicité de la solution. Autrement dit, plusieurs jeux de paramètres peuvent conduire à la même réponse mécanique. Dans cette même catégorie, et avec le développement des moyens de capture vidéo (caméra CCD) et des techniques de traitement d'image, des mesures de champs (champs de déplacement, par exemple) sur la surface des éprouvettes et dans leur volume, sont utilisées de nos jours dans les procédures d'identification inverse. L'intérêt d'une telle utilisation de mesures de champs mécaniques dans l'identification des paramètres matériaux est d'offrir une richesse d'information locale et globale très importante comparée aux techniques utilisant une seule information globale (voir, e.g., Mahnken et Stein, 1996 ; Meuwissen, 1998 ; Meuwissen et al., 1998 ; Hoc et al., 2003 ; Kajberg et al., 2004).

I.5. Conclusion

Après avoir donné un aperçu général des procédés de mise en forme des tôles métalliques, et en particulier le procédé d'emboutissage, ainsi que les différents types de défauts rencontrés, nous avons développé le concept de Courbe Limite de Formage (CLF) introduit pour la caractérisation de la formabilité. Nous avons dressé une liste des différentes approches utilisées pour la détermination de ces courbes limites de formage, à savoir, l'approche expérimentale, l'approche statistique ou empirique, et l'approche

théorique/numérique. Cette dernière catégorie d'approches contient plusieurs critères développés pour la prédiction de la striction diffuse et la striction localisée. Ces critères sont groupés dans quatre grandes familles : les méthodes basées sur le principe de force maximum, les méthodes multizones, celles basées sur l'analyse de bifurcation et les méthodes d'analyse linéaire de stabilité par perturbation. Enfin, ce chapitre a été conclu par le rappel des différents ingrédients nécessaires pour la prédiction des instabilités plastiques. Ces ingrédients se résument dans l'adoption d'un critère d'instabilité pertinent et le choix d'un modèle de comportement permettant la meilleure description des phénomènes physiques rencontrés en mise en forme. Aussi, l'identification des paramètres du modèle de comportement retenu est une étape importante dans la prédiction de la formabilité des tôles métalliques.

Le chapitre suivant présentera les équations constitutives du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement ductile de Lemaitre. Ce modèle sera combiné avec les critères de striction, qui seront présentés dans le troisième chapitre, dans le but de prédire les limites de formabilité des matériaux métalliques.

Chapitre II: Modélisation du comportement

II.1. Introduction

La modélisation du comportement des matériaux métalliques est une phase importante dans la simulation numérique de problèmes industriels en général, et en particulier des procédés de mise en forme. Afin de réaliser des simulations numériques fiables, il est nécessaire de développer des modèles de comportement qui permettent de reproduire convenablement les différents phénomènes physiques mis en jeu (e.g., anisotropie plastique, écrouissage, endommagement, etc.). Ces modèles de comportement sont souvent écrits sous une forme incrémentale, ce qui permet de faciliter leur implantation numérique dans les codes de calcul par éléments finis. Des schémas d'intégration explicites ou implicites sont alors nécessaires pour retrouver les solutions recherchées. Ce chapitre sera consacré au développement du modèle de comportement retenu et de son implantation numérique, dans le but de l'utiliser par la suite pour la prédiction des instabilités plastiques en mise en forme des tôles minces.

Nous commençons ce chapitre par un rappel sur la cinématique des grandes déformations rencontrées en emboutissage. Les équations constitutives du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement ductile sont décrites par la suite. Cette modélisation est développée dans le cadre de lois de comportement phénoménologique à plasticité indépendante du temps physique. L'endommagement est d'abord introduit par une variable scalaire isotrope décrivant la dégradation des propriétés élastiques du matériau. Ensuite, un cadre thermodynamique général est utilisé pour déduire les équations constitutives couplées selon les principes d'équivalence en déformation et en énergie. Enfin, la performance de l'implantation numérique du modèle résultant dans le code ABAQUS / Standard est évaluée via une série de simulations numériques.

II.2. Cinématique des grandes déformations

La mise en forme des matériaux métalliques induit des déformations plastiques importantes, ce qui nécessite l'introduction d'une cinématique des grandes déformations et rotations. La décomposition multiplicative du tenseur gradient de transformation $\mathbf{F}$ en une partie élastique $\mathbf{F}^e$ et une partie plastique $\mathbf{F}^p$, dite décomposition de Lee (Lee, 1969), est communément adoptée pour modéliser la cinématique des grandes déformations. Elle introduit la notion de configuration intermédiaire relâchée :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p . \tag{II.1}$$

L'expression du tenseur gradient de vitesse $\mathbf{G}$ est donnée par :

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} . \tag{II.2}$$

En utilisant la décomposition multiplicative de $\mathbf{F}$ (voir équation II.1), l'expression du tenseur gradient de vitesse $\mathbf{G}$ devient :

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{F}}^e \cdot \left(\mathbf{F}^e\right)^{-1} + \mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \left(\mathbf{F}^p\right)^{-1} \cdot \left(\mathbf{F}^e\right)^{-1}. \tag{II.3}$$

En considérant la décomposition polaire gauche, le tenseur gradient de transformation élastique $\mathbf{F}^e$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{E}^e \cdot \mathbf{R}, \tag{II.4}$$

où $\mathbf{E}^e$ est le tenseur d'élongation gauche issu de la décomposition polaire, et $\mathbf{R}$ est le tenseur de rotation élastique.

En mise en forme à froid des matériaux métalliques, la partie élastique $\mathbf{F}^e$ du tenseur gradient de transformation fait intervenir de faibles déformations élastiques, mais éventuellement de grandes rotations. Ceci revient à dire que la configuration actuelle et celle relâchée élastiquement restent voisines en termes de déformations (voir, e.g., Abed-Meraim, 2009). Dans ce cas, le tenseur $\mathbf{F}^e$ peut s'écrire :

$$\mathbf{F}^e = \left(\mathbf{I} + \mathbf{e}\right) \cdot \mathbf{R}, \tag{II.5}$$

où $\mathbf{e}$ représente le tenseur des déformations élastiques ($|\mathbf{e}| \ll 1$), et $\mathbf{I}$ est le tenseur identité d'ordre 2.

En substituant l'équation (II.5) dans (II.3), et en négligeant les termes d'ordre 2 en $\mathbf{e}$, le gradient de vitesse $\mathbf{G}$ devient :

$$\mathbf{G} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \overset{\nabla}{\mathbf{e}} + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \left(\mathbf{F}^p\right)^{-1} \cdot \mathbf{R}^T, \tag{II.6}$$

où

$$\overset{\nabla}{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T - \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{e}, \tag{II.7}$$

représente la dérivée co-rotationnelle objective de $\mathbf{e}$ associée au spin élastique $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$.

Le tenseur gradient de vitesse $\mathbf{G}$ n'étant pas un tenseur symétrique, il est additivement décomposé en une partie symétrique $\mathbf{D}$ et une partie antisymétrique $\mathbf{W}$ comme suit :

$$\mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \tag{II.8}$$

avec

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{G} + \mathbf{G}^T\right) = \overset{\nabla}{\mathbf{e}} + \mathbf{D}^p, \tag{II.9}$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{G} - \mathbf{G}^T\right) = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{W}^p, \tag{II.10}$$

où $\mathbf{D}^p$ et $\mathbf{W}^p$ sont les taux de déformation plastique et de rotation plastique, respectivement. Leurs expressions sont données par les relations suivantes :

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{D}}^p \cdot \mathbf{R}^T \text{ et } \mathbf{W}^p = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{W}}^p \cdot \mathbf{R}^T, \tag{II.11}$$

où $\hat{\mathbf{D}}^p$ et $\hat{\mathbf{W}}^p$ sont, respectivement, la partie symétrique et antisymétrique de $\dot{\mathbf{F}}^p \cdot \left(\mathbf{F}^p\right)^{-1}$.

La formulation des équations constitutives dans le cadre des grandes déformations et grandes rotations nécessite l'utilisation de dérivées objectives telles que celle donnée dans l'équation (II.7). L'utilisation d'un repère co-rotationnel adéquat (ou un repère objectif local) permet de simplifier l'implantation numérique des lois de comportement dans les codes de calcul par éléments finis. Dans de tels repères, les taux des variables internes se réduisent à de simples dérivées temporelles. En effet, si $\mathbf{A}$ est un tenseur d'ordre 2, avec $\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{A}$ sa dérivée objective (co-rotationnelle) associée à la rotation $\Re$ générée par le tenseur antisymétrique $\mathbf{\Omega} = \dot{\Re} \cdot \Re^T$. Dans ce cas, la dérivée temporelle du tenseur $\hat{\mathbf{A}} = \Re^T \cdot \mathbf{A} \cdot \Re$, tourné par la rotation $\Re$, est donnée par :

$$\dot{\hat{\mathbf{A}}} = \dot{\Re}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \Re + \Re^T \cdot \dot{\mathbf{A}} \cdot \Re + \Re^T \cdot \mathbf{A} \cdot \dot{\Re} = \Re^T \cdot \overset{\nabla}{\mathbf{A}} \cdot \Re. \tag{II.12}$$

En d'autres termes, la dérivée objective du tenseur $\mathbf{A}$ s'écrit simplement :

$$\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \Re \cdot \dot{\hat{\mathbf{A}}} \cdot \Re^T. \tag{II.13}$$

Cette propriété est valable aussi pour les tenseurs d'ordre 4 (voir, e.g., Abed-Meraim, 2009). Ainsi, en travaillant dans un repère tournant, les dérivées objectives des variables considérées dans la formulation des équations constitutives se réduisent à de simples dérivées temporelles, et la formulation des lois de comportement ressemble à une formulation dans le cadre des petites perturbations. Plusieurs dérivées objectives ont été proposées dans la littérature. Elles dépendent du choix de la rotation $\Re$ et de la décomposition multiplicative de $\mathbf{F}$. Un choix possible est le repère co-rotationnel associé à la partie antisymétrique $\mathbf{W}$ du tenseur gradient de vitesse $\mathbf{G}$. Il en résulte la dérivée objective connue sous le nom de « dérivée de Jaumann ». Une autre dérivée objective, connue sous le nom de « dérivée de Green–Naghdi », peut être utilisée en considérant que la rotation $\Re$ est la même que celle de la rotation élastique $\mathbf{R}$, issue de la décomposition polaire du gradient de la transformation $\mathbf{F}$.

Dans la section suivante, nous considérons le repère tournant associé à la dérivée de Jaumann pour calculer toutes les dérivées objectives du modèle. Pour des raisons de simplicité d'écriture, l'exposant (^) indiquant des quantités tournées sera omis, sauf mention contraire.

II.3. Modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement ductile

Comme nous l'avons évoqué dans le premier chapitre, certains critères nécessitent la présence d'un régime adoucissant pour pouvoir prédire, en plasticité associée, l'apparition des instabilités plastiques de type striction localisée. L'endommagement, accompagnant les

grandes déformations, peut être à l'origine de ce régime adoucissant. En effet, ce régime adoucissant est reproduit en couplant les lois constitutives à l'endommagement. Dans ce contexte, deux grandes théories ont été développées durant ces dernières décennies : la théorie de l'endommagement basée sur l'approche de Gurson, et la théorie de l'endommagement continu.

La première approche, initiée par Gurson (1977) pour décrire l'endommagement dans des milieux poreux présentant un comportement élasto-plastique ductile, puis modifiée par Tvergaard et Needleman (Tvergaard, 1981 ; Tvergaard et Needleman, 1984), est basée sur l'analyse micromécanique de la croissance du vide dans une matrice dense. Cette modélisation permet de décrire les mécanismes complexes de l'endommagement ductile dans les matériaux poreux. Dans cette approche, la fraction volumique du vide est introduite en tant que variable d'endommagement, tenant ainsi compte de la dépendance de la réponse du matériau à la pression hydrostatique. Ce modèle a été largement utilisé en mise en forme pour la modélisation des matériaux métalliques ductiles (voir, e.g., Kami et al., 2015 ; Mansouri et al., 2014 ; Msolli et al., 2016 ; Uthaisangsuk et al., 2008).

La deuxième approche, dite approche CDM (Continuum Damage Mechanics), a été largement utilisée dans la littérature pour décrire la dégradation des propriétés mécaniques du matériau pendant le chargement. La théorie CDM a été introduite par Kachanov (1958) pour modéliser la rupture par fluage des matériaux métalliques ductiles. Par la suite, elle a été développée et formulée dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles pour modéliser principalement trois types d'endommagement ductile : endommagement par fatigue (Chaboche, 1974), endommagement par fluage (Hult, 1974 ; Rabotnov, 1963) et endommagement ductile (Lemaitre, 1985 ; Lemaitre et Dufailly, 1977). Dans cette approche, la variable d'endommagement est représentée par la densité surfacique de microfissures dans un plan donné, et peut être modélisée comme une variable scalaire isotrope (voir, e.g., Chaboche et al., 2006 ; Lemaitre, 1985, 1992), ou une variable tensorielle dans le cas d'un endommagement anisotrope (Abu Al-Rub et Voyiadjis, 2003; Brünig, 2003; Chaboche, 1993; Chow and Lu, 1989; Chow et Wang, 1987; Zhu et Cescotto, 1995). Trois hypothèses principales ont été proposées pour le couplage des lois constitutives avec la théorie CDM : le principe d'équivalence en déformation (Lemaitre, 1971), basé sur le concept de la contrainte équivalente, le principe d'équivalence en contraintes (Simo et Ju, 1987a, 1987b), basé sur le concept de la déformation équivalente, et le principe d'équivalence en énergie (Cordebois et Sidoroff, 1979 ; Saanouni et al., 1994).

Dans cette section, nous présentons les équations constitutives du modèle élasto-plastique couplée à l'endommagement ductile en suivant l'approche CDM. Cette modélisation sera formulée dans un cadre thermodynamique pouvant prendre en compte les trois principes d'équivalence cités ci-dessus. Ensuite, les équations constitutives issues des principes d'équivalence en déformation et d'équivalence en énergie seront présentées en particulier. En préambule, nous rappelons les concepts de base de la mécanique de l'endommagement continu, et notamment la variable d'endommagement et les variables d'état effectives.

II.3.1. Endommagement ductile continu

Considérons un volume élémentaire représentatif (VER), dont la section S est définie par sa normale **n**, et soit S_d la surface occupée par les microfissures et cavités de la surface S (voir figure II.1). La surface $\tilde{S} = S - S_d$, ou surface résistante aux fissures, permet de définir la surface résistance effective. L'aire relative D_n de ces microfissures et cavités, par rapport à la surface S, définie par la relation suivante :

$$D_n = \frac{S_d}{S} = 1 - \frac{\tilde{S}}{S}, \tag{II.14}$$

représente la densité surfacique de ces microfissures et cavités dans le VER, et donne une mesure de l'endommagement local dans la direction **n**.

À partir de cette équation, D_n peut prendre des valeurs allant de 0 (état non endommagé ou vierge) jusqu'à 1 (état complètement endommagé).

Dans le cas où D_n dépend de l'orientation de la normale **n** (endommagement anisotrope), l'état d'endommagement du VER peut être représenté par un tenseur d'ordre 2 ou d'ordre 4 (voir, e.g., Abu Al-Rub et Voyiadjis, 2003). Sinon, les microfissures et cavités sont uniformément distribuées dans toutes les directions (endommagement isotrope), et D_n prend une valeur unique d dans ce cas. Ce scalaire d peut caractériser complètement l'état endommagé du VER, c'est à dire :

$$D_n = d \qquad \forall \mathbf{n}\,. \tag{II.15}$$

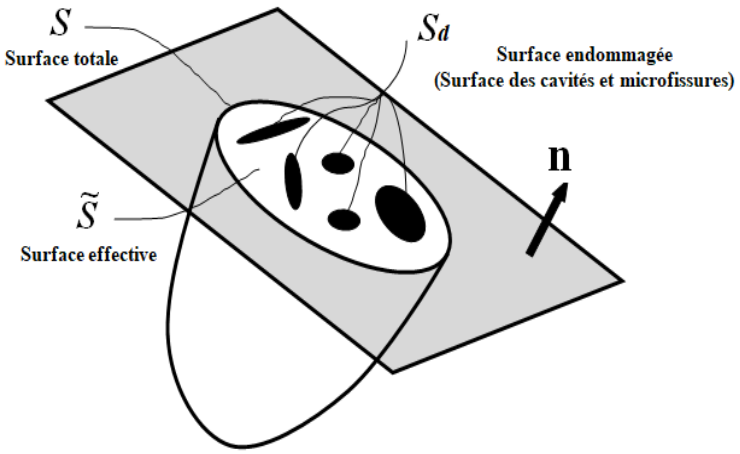

Figure II.1 Schématisation d'une section partiellement endommagée.

La notion de variable effective (contrainte, déformation, écrouissage, etc.) devient nécessaire pour établir les équations constitutives des matériaux endommageables. Le choix de cette variable effective dépend des hypothèses considérées pour la prise en compte de l'endommagement lors de la modélisation du comportement. Concernant la théorie CDM, et comme nous l'avons mentionné précédemment, trois hypothèses ont été proposées dans la

littérature pour le couplage des lois élasto-plastiques avec l'endommagement à savoir : le principe d'équivalence en déformation, le principe d'équivalence en contrainte, et le principe d'équivalence en énergie. En adoptant le principe d'équivalence en déformation, le comportement du matériau n'est affecté par l'endommagement que sous la forme de la contrainte effective. Autrement dit, le comportement en déformation d'un matériau endommagé n'est autre que celui d'un matériau vierge en remplaçant le tenseur de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ par le tenseur de contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ définie par :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-d} . \tag{II.16}$$

Contrairement au principe d'équivalence en déformation, la notion de déformation effective est adoptée dans le principe d'équivalence en contrainte, qui suppose qu'un état de contraintes d'un matériau endommagé n'est autre que celui d'un matériau vierge subissant une déformation effective $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ définie par :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d)\boldsymbol{\varepsilon} , \tag{II.17}$$

La figure II.2 montre une illustration des concepts de contrainte effective (à gauche) et de déformation effective (à droite) adoptés par l'utilisation du principe d'équivalence en déformation et le principe d'équivalence en contrainte, respectivement.

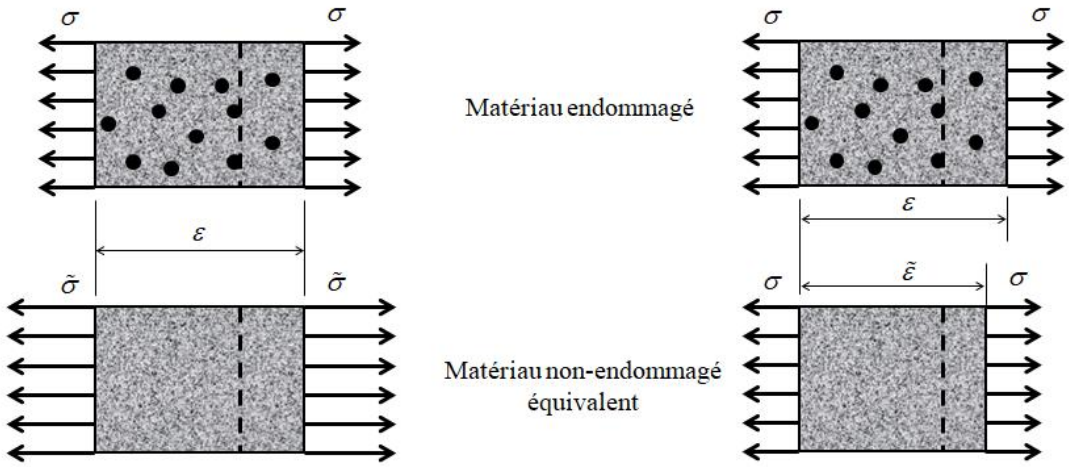

Figure II.2 Illustration des concepts de contrainte effective (à gauche) et de déformation effective (à droite).

II.3.2. Cadre thermodynamique

Dans cette section, le modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement isotrope de Lemaitre est formulé dans le cadre des processus thermodynamiques irréversibles. Une formulation unifiée pour les deux principes d'équivalence en déformation et en énergie sera d'abord présentée et ensuite détaillée pour chaque principe d'équivalence dans les sections suivantes. Cette formulation nécessite d'abord la définition des variables d'état, représentant les variables internes du modèle, et leurs forces thermodynamiques associées. Les couples

variable interne–force thermodynamique associée considérés par le modèle sont : $\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{\sigma}\right)$ les tenseurs de contraintes de Cauchy et de déformations élastiques ; $\left(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{X}\right)$ représentant l'écrouissage cinématique ; $\left(r,R\right)$ représentant l'écrouissage isotrope et $\left(d,Y\right)$ représentant l'endommagement ductile isotrope. En utilisant le concept de variables effectives d'état, les couples $\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}},\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\right)$, $\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}},\tilde{\mathbf{X}}\right)$ et $\left(\tilde{r},\tilde{R}\right)$ relatifs à la configuration non-endommagée équivalente sont définis par :

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{e}} = \chi_e\left(d\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} \quad \text{et} \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\zeta_e\left(d\right)}, \tag{II.18}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = \chi_\alpha\left(d\right)\boldsymbol{\alpha} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X}}{\zeta_\alpha\left(d\right)}, \tag{II.19}$$

$$\tilde{r} = \chi_r\left(d\right)r \quad \text{et} \quad \tilde{R} = \frac{R}{\zeta_r\left(d\right)}, \tag{II.20}$$

où les fonctions χ_i et ζ_i $\left(i = e,\alpha,r\right)$ dépendent uniquement de la variable d'endommagement d. Le choix de ces fonctions dépend du principe d'équivalence adopté pour le couplage avec l'endommagement.

En supposant des conditions isothermes, l'énergie libre de Helmholtz ψ est considérée comme un potentiel d'état qui peut être décomposé de manière additive comme suit :

$$\rho\psi = \underbrace{\frac{1}{2}\left(1-d\right)\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}:\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}}_{\text{contribution élastique}} + \underbrace{\rho\psi^{\alpha}\left(\boldsymbol{\alpha},d\right)+\rho\psi^{r}\left(r,d\right)}_{\text{contribution plastique}}, \tag{II.21}$$

où ρ est la densité volumique du matériau, $\mathbf{C}$ est le tenseur d'élasticité d'ordre 4. Les potentiels ψ^{α} et ψ^{r} sont, respectivement, les contributions de l'écrouissage cinématique et isotrope à l'énergie totale.

Les forces thermodynamiques associées aux variables internes, i.e. $\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{\alpha},r,d\right)$, sont obtenues par dérivation du potentiel d'état (voir équation II.21) comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}},d\right) = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}} = \left(1-d\right)\ \mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}, \tag{II.22}$$

$$\mathbf{X}\left(\boldsymbol{\alpha},d\right) = \rho\frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}} = \rho\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial\boldsymbol{\alpha}}, \tag{II.23}$$

$$R\left(r,d\right) = \rho\frac{\partial\psi}{\partial r} = \rho\frac{\partial\psi^{r}}{\partial r}, \tag{II.24}$$

$$Y\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}},\boldsymbol{\alpha},r\right) = -\rho\frac{\partial\psi}{\partial d} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}}:\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{e}} - \rho\frac{\partial\psi^{\alpha}}{\partial d} - \rho\frac{\partial\psi^{r}}{\partial d} \tag{II.25}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy, $\mathbf{X}$ est le tenseur des contraintes de rappel (écrouissage cinématique), R est la contrainte d'écrouissage isotrope et Y est la force

motrice associée à l'endommagement. Le terme $Y^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^e$ est communément appelé « taux de restitution de la densité d'énergie élastique ». Il représente la variation de la densité d'énergie interne due à la croissance de l'endommagement à contrainte constante (Lemaitre, 1992 ; Lemaitre et al., 2000). On peut facilement montrer que dans le cas de l'élasticité isotrope linéaire, l'expression de Y^e se réduit à :

$$Y^e = \frac{J_2^2}{2E}\left[\frac{2}{3}(1+\upsilon) + 3(1-2\upsilon)\left(\frac{\tilde{\sigma}^H}{J_2}\right)^2\right], \tag{II.26}$$

où $J_2 = \sqrt{\frac{3}{2}\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}'}$ est la contrainte effective équivalente au sens de von Mises, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} - \tilde{\sigma}^H \mathbf{1}$ est la partie déviatorique du tenseur des contraintes effectives et $\tilde{\sigma}^H = \frac{1}{3}\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{1}$ est la contrainte effective hydrostatique. Les constantes élastiques E et υ désignent le module de Young et le coefficient de Poisson, respectivement.

Afin d'assurer la validité du modèle, le deuxième principe de la thermodynamique, écrit sous la forme de l'inégalité de Clausius–Duhem, doit être toujours satisfait. Dans le cas des processus isothermes, l'inégalité de Clausius–Duhem est écrite comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho\dot{\psi} \geq 0, \tag{II.27}$$

où le tenseur de second ordre $\mathbf{D}$ représente le tenseur taux de déformation, qui est décomposé d'une manière additive en deux tenseurs de second ordre $\mathbf{D}^e$ et $\mathbf{D}^p$, représentant le tenseur taux de déformation élastique et le tenseur taux de déformation plastique, respectivement (i.e., $\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$).

Le taux de l'énergie libre de Helmholtz dans l'équation (II.27) s'écrit :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^e} : \mathbf{D}^e + \frac{\partial\psi}{\partial\boldsymbol{\alpha}} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \frac{\partial\psi}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial\psi}{\partial d}\dot{d}. \tag{II.28}$$

En substituant cette équation dans l'équation (II.27), et utilisant la définition des forces thermodynamiques associées, l'inégalité de Clausius–Duhem devient :

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^P - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\alpha}} - R\dot{r} + Y\dot{d} \geq 0. \tag{II.29}$$

Une fois les forces thermodynamiques définies (voir équations II.22–25), l'évolution des variables d'état $\mathbf{D}^P$, $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$, $\dot{r}$ et $\dot{d}$ doit satisfaire l'inégalité précédente. Les lois d'évolution des variables d'état sont déduites d'un potentiel dissipatif F, qui est une fonction convexe des forces thermodynamiques associées. La forme générale du potentiel F est donnée par l'expression suivante :

$$F = F_p\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{R}\right) + F_\alpha\left(\mathbf{X}\right) + F_r\left(R\right) + F_d\left(Y^e\right), \tag{II.30}$$

où F_p représente le potentiel plastique, F_α et F_r représentent, respectivement, les contributions de l'écrouissage cinématique et isotrope dans le potentiel dissipatif F, et $F_d = \frac{1}{(1-d)^{\beta_d}} \frac{S_d}{s_d+1} \left\langle \frac{Y^e - Y_0}{S_d} \right\rangle^{s_d+1}$ représente le potentiel d'endommagement. Les paramètres S_d, s_d, β_d et Y_0 sont des paramètres matériaux caractérisant l'évolution de l'endommagement isotrope ductile. L'opérateur $\langle x \rangle$ désigne la partie positive de x (i.e., $\langle x \rangle = 0$ si $x \leq 0$ et $\langle x \rangle = x$ si $x > 0$).

Les lois d'évolution des variables d'état sont obtenues en appliquant la loi de normalité classique par rapport au potentiel F, comme suit :

$$\mathbf{D}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \tag{II.31}$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}}, \tag{II.32}$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial R}, \tag{II.33}$$

$$\dot{d} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y^e} = \dot{\lambda} \frac{1}{(1-d)^{\beta_d}} \left\langle \frac{Y^e - Y_0}{S_d} \right\rangle^{s_d}, \tag{II.34}$$

où $\dot{\lambda}$ est le multiplicateur plastique.

Le potentiel plastique F_p dans l'équation (II.30) peut être écrit sous la forme générique suivante :

$$F_p = \tilde{\bar{\sigma}}_p \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}', \tilde{\mathbf{X}} \right) - \tilde{R} - \sigma_y, \tag{II.35}$$

où $\tilde{\bar{\sigma}}_p$ est la contrainte effective équivalente associée au potentiel plastique F_p, $\tilde{R}$ est la contrainte effective de l'écrouissage isotrope, et σ_y est la limite élastique initiale du matériau.

Le critère de plasticité peut être exprimé sous la forme de Kuhn–Tucker suivante :

$$\begin{cases} f_y = \tilde{\bar{\sigma}} \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}', \tilde{\mathbf{X}} \right) - \tilde{R} - \sigma_y \leq 0 \\ \dot{\lambda} \geq 0 \\ \dot{\lambda} f_y = 0 \end{cases}, \tag{II.36}$$

avec $\tilde{\bar{\sigma}}$ est la contrainte effective équivalente associée à la surface de charge f_y. Plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature pour la modélisation de l'anisotropie initiale (Banabic et al., 2003 ; Barlat et al., 1991, 1997 ; Barlat et Lian, 1989 ; Hill, 1948, 1979, 1990, 1993 ; Karafillis et Boyce, 1993). Dans ce travail, nous adoptons le critère quadratique de Hill (1948) pour modéliser l'anisotropie initiale des matériaux métalliques. Ce critère nécessite l'identification expérimentale de six paramètres d'anisotropie plastique $(F, G, H, L, M$ et $N)$.

En conséquence, les contraintes effectives équivalentes $\tilde{\bar{\sigma}}$ et $\tilde{\bar{\sigma}}_p$ associées à la surface de charge et à la surface d'écoulement plastique, respectivement, sont données par les expressions suivantes :

$$\tilde{\bar{\sigma}}\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}',\tilde{\mathbf{X}}\right)=\sqrt{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'-\tilde{\mathbf{X}}\right):\mathbf{M}:\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'-\tilde{\mathbf{X}}\right)}, \tag{II.37}$$

$$\tilde{\bar{\sigma}}_p\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}',\tilde{\mathbf{X}}\right)=\sqrt{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'-\tilde{\mathbf{X}}\right):\mathbf{M}':\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'-\tilde{\mathbf{X}}\right)}, \tag{II.38}$$

où $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ sont deux tenseurs d'ordre 4 contenant chacun six coefficients d'anisotropie. Dans le cas de la plasticité non-associée, les potentiels F_p et f_y sont différents. Cette différence est due aux expressions des deux contraintes effectives équivalentes $\tilde{\bar{\sigma}}$ et $\tilde{\bar{\sigma}}_p$, qui sont obtenues en utilisant deux jeux de paramètres d'anisotropie différents. Les paramètres d'anisotropie de la surface de charge $\left(\text{i.e., } F,G,H,L,M \text{ et } N\right)$ sont souvent obtenus à partir des coefficients de Lankford r_0, r_{45} et r_{90}. Ces derniers sont identifiés expérimentalement à partir d'essais de traction uniaxiale suivant les directions 0°, 45° et 90° par rapport à la direction de laminage de la tôle. Les formules qui permettent d'obtenir les coefficients F,G,H,L,M et N à partir des coefficients de Lankford r_0, r_{45} et r_{90} sont (voir, e.g., Altmeyer, 2011 ; Park et Chung, 2012) :

$$\begin{cases} F=\dfrac{r_0}{r_{90}\left(1+r_0\right)} \\ G=\dfrac{1}{1+r_0} \\ H=\dfrac{r_0}{1+r_0} \\ L=M=N=\left(\dfrac{r_0+r_{90}}{r_{90}\left(1+r_0\right)}\right)\left(\dfrac{1+2r_{45}}{2}\right) \end{cases}. \tag{II.39}$$

Concernant les paramètres d'anisotropie de la surface d'écoulement plastique $\left(\text{i.e., } F',G',H',L',M' \text{ et } N'\right)$, ils sont calculés à partir des valeurs identifiées des limites élastiques σ_0, σ_{45} et σ_{90} suivant les directions 0°, 45° et 90° par rapport à la direction du laminage, ainsi que la limite élastique en traction équi-biaxiale σ_b. Les expressions de ces paramètres d'anisotropie sont données par les formules suivantes (voir, e.g., Park et Chung, 2012) :

$$\begin{cases} F' = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{\sigma_0}{\sigma_{90}}\right)^2 - 1 + \left(\dfrac{\sigma_0}{\sigma_b}\right)^2\right) \\ G' = \dfrac{1}{2}\left(1 - \left(\dfrac{\sigma_0}{\sigma_{90}}\right)^2 + \left(\dfrac{\sigma_0}{\sigma_b}\right)^2\right) \\ H' = \dfrac{1}{2}\left(1 + \left(\dfrac{\sigma_0}{\sigma_{90}}\right)^2 - \left(\dfrac{\sigma_0}{\sigma_b}\right)^2\right) \\ L' = M' = N' = \dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{2\sigma_0}{\sigma_{45}}\right)^2 - \left(\dfrac{\sigma_0}{\sigma_b}\right)^2\right) \end{cases} . \tag{II.40}$$

En adoptant la surface de charge de Hill'48, le tenseur taux de déformation plastique $\mathbf{D}^P$ peut être exprimé comme suit :

$$\mathbf{D}^P = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\,\tilde{\mathbf{V}}_p . \tag{II.41}$$

avec $\tilde{\mathbf{V}}_p = \dfrac{1}{\zeta_e(d)}\dfrac{\mathbf{M}' : \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \tilde{\mathbf{X}}\right)}{\tilde{\bar{\sigma}}}$ est la direction de l'écoulement plastique.

II.3.2.1. Condition de cohérence

Afin de déterminer l'expression du multiplicateur plastique dans le cas d'un chargement élasto-plastique, la condition de cohérence est appliquée à la surface de charge f_y (i.e., $\dot{f}_y = 0$ et $f_y = 0$). Cette condition s'écrit :

$$\dot{f}_y = \frac{\partial f_y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f_y}{\partial \mathbf{X}} : \dot{\mathbf{X}} + \frac{\partial f_y}{\partial R}\dot{R} + \frac{\partial f_y}{\partial d}\dot{d} = 0 . \tag{II.42}$$

L'évolution de l'écrouissage cinématique et l'écrouissage isotrope, définis par les équations (II.23) et (II.24), respectivement, ainsi que l'évolution de l'endommagement ductile isotrope (voir équation II.34), peuvent être écrites sous la forme compacte d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{H}_X \dot{\lambda} \\ \dot{R} = H_R \dot{\lambda} \\ \dot{d} = H_d \dot{\lambda} \end{cases} , \tag{II.43}$$

avec $H_d = \dfrac{1}{(1-d)^{\beta_d}}\left\langle \dfrac{Y^e - Y_0}{S_d} \right\rangle^{s_d}$. Cette écriture compacte des équations d'évolution des variables internes permet d'incorporer facilement différentes formes de lois d'écrouissage, d'endommagement et de surfaces de charge plus complexes (Bouktir et al., 2016).

Le taux de contrainte de Cauchy $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ est obtenu par différentiation de l'équation (II.22) comme suit :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\mathbf{C}:\mathbf{D}^{\mathbf{e}} - \dot{d}\,\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}, \tag{II.44}$$

ou encore :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\mathbf{C}:\left(\mathbf{D}-\mathbf{D}^{p}\right) - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1-d)}\dot{d}\,. \tag{II.45}$$

En substituant les équations (II.41), (II.43) et (II.45) dans la condition de cohérence (II.42), l'expression du multiplicateur plastique se déduit :

$$\dot{\lambda} = \frac{(1-d)\tilde{\mathbf{V}}:\mathbf{C}:\mathbf{D}}{H_{\lambda}}, \tag{II.46}$$

avec :

$$H_{\lambda} = (1-d)\tilde{\mathbf{V}}:\mathbf{C}:\tilde{\mathbf{V}}_{p} - \frac{\partial f_{y}}{\partial \mathbf{X}}:\mathbf{H}_{\mathbf{X}} - \frac{\partial f_{y}}{\partial R}H_{R} + H_{d}\left(\frac{\tilde{\mathbf{V}}:\boldsymbol{\sigma}}{1-d} - \frac{\partial f_{y}}{\partial d}\right), \tag{II.47}$$

et $\tilde{\mathbf{V}} = \dfrac{1}{\zeta_{e}(d)}\dfrac{\mathbf{M}:\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'-\tilde{\mathbf{X}}\right)}{\tilde{\bar{\sigma}}}$ est la normale à la surface de charge.

II.3.2.2. Module tangent élasto-plastique

Le module tangent élasto-plastique est un tenseur d'ordre 4 qui permet de relier le taux de déformation au taux de contrainte de Cauchy. Afin de déterminer son expression, le taux de contrainte de Cauchy $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$, défini par l'équation (II.45), doit être écrit sous la forme compacte suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\mathbf{ep}}:\mathbf{D}, \tag{II.48}$$

où $\mathbf{C}^{\mathbf{ep}}$ est le module tangent élasto-plastique à déterminer.

En utilisant les équations (II.41), (II.43), (II.45) et (II.46), l'expression du taux de contrainte de Cauchy $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ devient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left((1-d)\mathbf{C} - \frac{\left((1-d)^{2}\mathbf{C}:\tilde{\mathbf{V}}_{p} + H_{d}\boldsymbol{\sigma}\right)\otimes\left(\tilde{\mathbf{V}}:\mathbf{C}\right)}{H_{\lambda}}\right):\mathbf{D}. \tag{II.49}$$

Le module tangent élasto-plastique se déduit donc comme :

$$\mathbf{C}^{\mathbf{ep}} = (1-d)\mathbf{C} - \frac{\left((1-d)^{2}\mathbf{C}:\tilde{\mathbf{V}}_{p} + H_{d}\boldsymbol{\sigma}\right)\otimes\left(\tilde{\mathbf{V}}:\mathbf{C}\right)}{H_{\lambda}}. \tag{II.50}$$

Notons que dans le cas d'une plasticité associée, les potentiels F_{p} et f_{y} définis par les équations (II.35) et (II.36), respectivement, sont identiques, i.e. $f_{y} = F_{p} = f$. Il en découle

que la direction de l'écoulement plastique $\tilde{\mathbf{V}}_p$ coïncide avec la normale à la surface de charge $\tilde{\mathbf{V}}$ (i.e., $\tilde{\mathbf{V}}_p = \tilde{\mathbf{V}}$). Les expressions du multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ et du module tangent élasto-plastique deviennent alors comme suit :

$$\dot{\lambda} = \frac{(1-d)\tilde{\mathbf{V}} : \mathbf{C} : \mathbf{D}}{H_\lambda}, \tag{II.51}$$

avec $H_\lambda = (1-d)\tilde{\mathbf{V}} : \mathbf{C} : \tilde{\mathbf{V}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} : \mathbf{H}_\mathbf{X} - \frac{\partial f}{\partial R} H_R + H_d \left(\frac{\tilde{\mathbf{V}} : \boldsymbol{\sigma}}{1-d} - \frac{\partial f}{\partial d} \right)$;

et

$$\mathbf{C}^{\mathbf{ep}} = (1-d)\mathbf{C} - \frac{\left((1-d)^2 \mathbf{C} : \tilde{\mathbf{V}} + H_d \boldsymbol{\sigma}\right) \otimes \left(\tilde{\mathbf{V}} : \mathbf{C}\right)}{H_\lambda}. \tag{II.52}$$

Dans les deux sections suivantes, la théorie de plasticité associée sera adoptée, et la formulation du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement sera traitée dans les cas des principes d'équivalence en déformation et en énergie, séparément. Cela est réalisé en adoptant un choix adéquat des fonctions de couplage χ_i et ζ_i $(i = e, \alpha, r)$ utilisées dans les équations (II.18–20). La contribution de l'écrouissage cinématique et isotrope dans l'énergie libre de Helmholtz ψ et dans le potentiel dissipatif F est choisie, dans ce qui suit, de manière à adopter la loi d'écrouissage cinématique d'Armstrong–Frederick (voir Armstrong et Frederick, 1966) et la loi d'écrouissage isotrope de Voce dans le modèle non-couplé. Ce choix est motivé par la possibilité de valider l'implantation numérique des modèles présentés dans ce chapitre avec ceux existants dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS.

II.3.3. Principe d'équivalence en déformation

En adoptant le principe d'équivalence en déformation pour le couplage à l'endommagement ductile (Lemaitre, 1971, 1985), les équations constitutives du matériau endommagé sont déduites de celles du matériau non endommagé (vierge) en remplaçant le tenseur de contraintes de Cauchy usuel $\boldsymbol{\sigma}$ par le tenseur de contraintes effectives $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, comme suit :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1-d}. \tag{II.53}$$

Cette approche suppose que les variables internes $(\boldsymbol{\alpha}, r)$ et les forces thermodynamiques associées $(\mathbf{X}, R)$ ne sont pas affectées par l'endommagement. Ainsi, les fonctions de couplage χ_i et ζ_i pour cette approche deviennent :

$$\begin{cases} \zeta_e(d) = 1-d \\ \chi_e(d) = \chi_\alpha(d) = \chi_r(d) = \zeta_\alpha(d) = \zeta_r(d) = 1 \end{cases}. \tag{II.54}$$

La contribution plastique dans l'énergie libre de Helmholtz (voir équation II.21) est donnée par :

$$\rho\psi^{p} = \rho\psi^{\alpha} + \rho\psi^{r}, \tag{II.55}$$

où

$$\rho\psi^{\alpha} = \frac{1}{3} C_X X_{sat}\, \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\alpha}, \tag{II.56}$$

$$\rho\psi^{r} = \frac{R_{sat}}{C_R}\left(r\, C_R + e^{-C_R\, r}\right). \tag{II.57}$$

En adoptant l'énergie libre de Helmholtz, définie par les équations (II.21), (II.56) et (II.57), les forces thermodynamiques $\mathbf{X}$, R et Y ont les expressions données par (voir expressions générales données par les équations (II.23-25)) :

$$\mathbf{X} = \frac{2}{3} C_X X_{sat}\, \boldsymbol{\alpha}, \tag{II.58}$$

$$R = R_{sat}\left(1 - e^{-C_R\, r}\right), \tag{II.59}$$

$$Y = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}} = Y^{e}. \tag{II.60}$$

L'écrouissage isotrope R ne contribue dans le potentiel dissipatif F que via le potentiel plastique F_p (Bouktir et al., 2017). Par conséquent, le potentiel dissipatif F a la forme suivante :

$$F = F_p\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{X}, R\right) + F_{\alpha}\left(\mathbf{X}\right) + F_d\left(Y^{e}\right), \tag{II.61}$$

où

$$\begin{cases} F_p = \sqrt{\left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X}\right) : \mathbf{M} : \left(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X}\right)} - R - \sigma_y \\ F_{\alpha} = \dfrac{3}{4X_{sat}} \mathbf{X} : \mathbf{X} \\ F_d = \dfrac{1}{\left(1-d\right)^{\beta_d}} \dfrac{S_d}{s_d + 1} \left\langle \dfrac{Y^{e} - Y_0}{S_d} \right\rangle^{s_d + 1} \end{cases}. \tag{II.62}$$

Le taux de déformation plastique $\mathbf{D}^{P}$, obtenu à partir de la loi d'écoulement normal au potentiel F, s'écrit comme suit :

$$\mathbf{D}^{P} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda}\, \tilde{\mathbf{V}}, \tag{II.63}$$

avec $\tilde{\mathbf{V}} = \dfrac{1}{(1-d)} \dfrac{\mathbf{M} : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}' - \mathbf{X})}{\tilde{\bar{\sigma}}}$.

L'évolution des variables internes $\boldsymbol{\alpha}$ et r, définies respectivement par les équations (II.32) et (II.33), est donnée par les expressions suivantes :

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \left((1-d)\tilde{\mathbf{V}} - \frac{3}{2X_{sat}} \mathbf{X} \right) \dot{\lambda}, \tag{II.64}$$

$$\dot{r} = \dot{\lambda}. \tag{II.65}$$

En substituant les deux équations précédentes dans la forme différentielle des équations (II.58) et (II.59), les évolutions de l'écrouissage cinématique $\dot{\mathbf{X}}$ et l'écrouissage isotrope $\dot{R}$ sont données par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = C_X \left(\dfrac{2}{3} X_{sat} (1-d) \tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{X} \right) \dot{\lambda} \\ \dot{R} = C_R (R_{sat} - R) \dot{\lambda} \end{cases}, \tag{II.66}$$

ou sous la forme compacte (voir équation II.43) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \dot{\lambda} \\ \dot{R} = H_R \dot{\lambda} \end{cases}, \tag{II.67}$$

avec $\mathbf{H}_{\mathbf{X}} = C_X \left(\dfrac{2}{3} X_{sat} (1-d) \tilde{\mathbf{V}} - \mathbf{X} \right)$ et $H_R = C_R (R_{sat} - R)$.

Finalement, le multiplicateur plastiquer $\dot{\lambda}$ et le module tangent élasto-plastique $\mathbf{C}^{\mathbf{ep}}$, définis respectivement par les équations (II.46) et (II.50), sont donnés par les expression suivantes :

$$\dot{\lambda} = \frac{(1-d)\tilde{\mathbf{V}} : \mathbf{C} : \mathbf{D}}{H_\lambda}, \tag{II.68}$$

$$\mathbf{C}^{\mathbf{ep}} = (1-d)\mathbf{C} - \frac{\left((1-d)^2 \mathbf{C} : \tilde{\mathbf{V}} + H_d \boldsymbol{\sigma} \right) \otimes \left(\tilde{\mathbf{V}} : \mathbf{C} \right)}{H_\lambda}, \tag{II.69}$$

avec $H_\lambda = (1-d)\left(\tilde{\mathbf{V}} : \mathbf{C} : \tilde{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{V}} : \mathbf{H}_{\mathbf{X}} \right) + H_R$.

II.3.4. Principe d'équivalence en énergie totale

En adoptant le principe d'équivalence en énergie totale (voir, e.g., Saanouni et al., 1994; Saanouni et Chaboche, 2003), toutes les variables internes et les forces

thermodynamiques associées sont affectées par l'endommagement. Dans ce cas, les fonctions de couplage χ_i et ζ_i sont définies par les expressions suivantes (Badreddine et al., 2010) :

$$\chi_e(d)=\chi_\alpha(d)=\chi_r(d)=\zeta_e(d)=\zeta_\alpha(d)=\zeta_r(d)=\sqrt{1-d}\,. \tag{II.70}$$

La contribution plastique à l'énergie libre de Helmholtz est représentée par la somme des deux termes suivants :

$$\begin{cases}\rho\psi^\alpha=\dfrac{1}{3}(1-d)A\boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{\alpha}\\ \rho\psi^r=\dfrac{1}{2}(1-d)Br^2\end{cases}, \tag{II.71}$$

où A et B sont les paramètres d'écrouissage cinématique et isotrope, respectivement. Par conséquent, les forces thermodynamiques $\mathbf{X}$, R et Y auront les expressions suivantes (voir expressions générales données par les équations (II.23-25)) :

$$\begin{cases}\mathbf{X}=\dfrac{2}{3}(1-d)A\boldsymbol{\alpha}\\ R=(1-d)Br\\ Y=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}:\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}}+\dfrac{1}{3}A\boldsymbol{\alpha}:\boldsymbol{\alpha}+\dfrac{1}{2}Br^2\end{cases}. \tag{II.72}$$

Le potentiel dissipatif F, dans le cas du principe d'équivalence en énergie totale, a la forme suivante :

$$F=F_p+\frac{3a}{4(1-d)A}\mathbf{X}:\mathbf{X}+\frac{b}{2(1-d)B}R^2+\frac{1}{(1-d)^{\beta_d}}\frac{S_d}{s_d+1}\left\langle\frac{Y^e-Y_0}{S_d}\right\rangle^{s_d+1}. \tag{II.73}$$

avec $F_p=\sqrt{(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'-\tilde{\mathbf{X}}):\mathbf{M}:(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'-\tilde{\mathbf{X}})}-\tilde{R}-\sigma_y$. Les paramètres matériaux a et b permettent de décrire une évolution non-linéaire de l'écrouissage cinématique et isotrope, respectivement.

Le taux de déformation plastique $\mathbf{D}^P$ devient :

$$\mathbf{D}^P=\frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{1-d}}\frac{\mathbf{M}:(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'-\tilde{\mathbf{X}})}{\tilde{\bar{\sigma}}}=\dot{\lambda}\tilde{\mathbf{V}}, \tag{II.74}$$

avec $\tilde{\mathbf{V}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-d}}\dfrac{\mathbf{M}:(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'-\tilde{\mathbf{X}})}{\tilde{\bar{\sigma}}}$.

En suivant les mêmes étapes que dans la section précédente, le multiplicateur plastique $\dot{\lambda}$ et le module tangent élasto-plastique $\mathbf{C}^{\mathbf{ep}}$ sont donnés, respectivement, par :

$$\dot{\lambda}=\frac{(1-d)\tilde{\mathbf{V}}:\mathbf{C}:\mathbf{D}}{H_\lambda}, \tag{II.75}$$

et

$$\mathbf{C}^{\mathbf{ep}} = (1-d)\mathbf{C} - \frac{\left((1-d)^2 \mathbf{C}:\tilde{\mathbf{V}} + H_d \boldsymbol{\sigma}\right) \otimes \left(\tilde{\mathbf{V}}:\mathbf{C}\right)}{H_\lambda}, \tag{II.76}$$

avec

$$H_\lambda = (1-d)\tilde{\mathbf{V}}:\mathbf{C}:\tilde{\mathbf{V}} + \tilde{\mathbf{V}}:\mathbf{H}_\mathbf{X} + \frac{H_R}{\sqrt{1-d}} + \frac{H_d}{(1-d)}\left(\tilde{\mathbf{V}}:\boldsymbol{\sigma} - \frac{\sigma_y}{2}\right), \tag{II.77}$$

et

$$\begin{cases} \mathbf{H}_\mathbf{X} = \frac{2}{3}A(1-d)\tilde{\mathbf{V}} - \left(a + \frac{H_d}{(1-d)}\right)\mathbf{X} \\ H_R = \sqrt{1-d}\,B - \left(b + \frac{H_d}{(1-d)}\right)R \\ H_d = \frac{1}{(1-d)^{\beta_d}}\left\langle \frac{Y^e - Y_0}{S_d} \right\rangle^{s_d} \end{cases}. \tag{II.78}$$

II.4. Implémentation numérique des équations constitutives et validation

Le modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement ductile de Lemaitre, développé dans la section précédente, a été implémenté dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS/Standard via une routine utilisateur UMAT. L'implémentation numérique résultante sera combinée dans le chapitre suivant à des critères d'instabilités plastiques, basés sur l'analyse de bifurcation, pour la prédiction de la striction diffuse et localisée en mise en forme des tôles minces. Cependant, une étape de validation et de vérification est nécessaire afin de tester la performance et la robustesse de l'implémentation numérique.

II.4.1. Schéma d'intégration explicite

Le modèle élasto-plastique couplé à l'endommagent, développé dans la section précédente, a été implémenté dans le code ce calcul par éléments finis ABAQUS/Standard. Cela permet de résoudre les problèmes aux limites dans le cadre des processus isothermes et de l'analyse quasi-statique, qui sont gouvernés par les équations d'équilibre sur un domaine donné Ω sous la forme forte suivante :

$$\begin{cases} div(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = \mathbf{0} & \text{sur } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{sur } \partial\Omega_t \\ \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} & \text{sur } \partial\Omega_u \end{cases}, \tag{II.79}$$

où $\partial\Omega_t$ et $\partial\Omega_u$ sont les deux surfaces complémentaires de la surface globale $\partial\Omega$ (i.e., $\partial\Omega = \partial\Omega_t \cup \partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = \varnothing$), $\mathbf{b}$ est le vecteur de forces volumiques appliquées sur Ω, $\mathbf{t}$ est le vecteur de forces extérieures appliquées sur $\partial\Omega_t$, $\mathbf{n}$ est un vecteur unitaire

normal à la surface $\partial\Omega_t$, $\mathbf{u}$ est le champ de déplacements, et $\hat{\mathbf{u}}$ est le champ de déplacement imposé sur la surface $\partial\Omega_u$.

Dans le contexte de la méthode des éléments finis, une alternative à l'équation d'équilibre sous la forme forte (équation II.79) est la formulation variationnelle du problème aux limites (forme faible), qui est communément appelée le principe des travaux virtuels (PTV). En combinant le PTV avec les équations constitutives développées dans la section précédente, la formulation quasi-statique du problème par la méthode des éléments finis est exprimée par le système d'équations suivant :

$$\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{f}, \tag{II.80}$$

où $\mathbf{K}$ est la matrice de rigidité, dont le calcul nécessite le module tangent cohérent, tandis que $\mathbf{f}$ est le vecteur de forces généralisées.

Pour chaque incrément de chargement, ABAQUS/Standard résout itérativement le système d'équations ci-dessus en utilisant la méthode de Newton–Raphson afin d'obtenir le vecteur de déplacement nodal $\mathbf{u}$ de la structure étudiée. D'autre part, l'état de contraintes ainsi que le module tangent cohérent, requis pour la mise en place du système d'équilibre global (voir équation (II.80)), doivent être calculés et mis à jour à chaque point d'intégration. Pour ce faire, le schéma d'intégration explicite de Runge–Kutta d'ordre 4 (RK4) est utilisé dans ce travail. Ce choix est un compromis raisonnable en termes d'efficacité, de précision et de convergence. Cependant, ce schéma d'intégration explicite nécessite l'utilisation de petits incréments de chargement pour assurer la précision et la stabilité de la solution (Kojić, 2002 ; Li et Nemat-Nasser, 1993).

Dans le cas du modèle de comportement décrit dans la section précédente, il est à noter que l'évolution de toutes les variables internes peut s'écrire sous la forme différentielle compacte suivante :

$$\dot{\mathbf{y}}=\mathbf{H}_y(\mathbf{y})\dot{\lambda}, \tag{II.81}$$

où $\mathbf{y}$ est un vecteur contenant toutes les variables internes du présent modèle. Ainsi, l'implémentation numérique de cette forme compacte, en utilisant le schéma d'intégration explicite RK4, devient très simple et permet d'incorporer très facilement différentes lois d'écrouissage et de surfaces de charge (voir, e.g., Mansouri et al., 2014).

Le schéma d'intégration consiste à calculer l'état de contraintes et les variables internes à l'instant t_{n+1} en partant d'un état connu à l'instant t_n et un incrément de déformation donné $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$. L'état d'équilibre est atteint à la fin de chaque incrément de chargement après l'actualisation de l'état des contraintes, des variables internes et du module tangent cohérent (algorithmique) $\mathbf{C}^{alg}$. L'algorithme résultant du schéma d'intégration explicite RK4 est résumé dans le tableau II.1.

Tableau II.1 Algorithme d'intégration par un schéma explicite (Bouktir et al., 2017).

Pour $t=0$**, initialisation des variables d'état** $\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$

Données d'entrée : $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ et $\mathbf{y}_n\left(\boldsymbol{\sigma}_n, \mathbf{X}_n, R_n, d_n\right)$

Initialisation des sous incréments $\Delta\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{0}$ **et** $\Delta\mathbf{y}_0 = \mathbf{0}$

Pour $i = 1,\ldots,N$ **(avec** $N = 4$ **pour la méthode RK4)**

Calculer $\boldsymbol{\sigma}_i = \boldsymbol{\sigma}_n + a_i \Delta\boldsymbol{\sigma}_{i-1}$ et $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_n + a_i \Delta\mathbf{y}_{i-1}$ avec $\mathbf{a} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

- **Critère de plasticité** :

si $F_{P_i}\left(\tilde{\sigma}'_i, \tilde{X}_i, \tilde{R}_i\right) < 0$ alors (chargement élastique)

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_i = \left(1-d_i\right)\mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \ \Delta\mathbf{y}_i = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{C}_i^{alg} = \left(1-d_i\right)\mathbf{C}$$

sinon, **si** $\Delta\boldsymbol{\varepsilon} : \tilde{\mathbf{V}}_i < 0$ alors (décharge élastique)

Appliquer les mêmes traitements que dans l'opération précédente

autrement (chargement plastique)

$$\Delta\lambda_i = \frac{\left(1-d_i\right)\tilde{\mathbf{V}}_i : \mathbf{C} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}}{H_{\lambda_i}},$$

$$\Delta\mathbf{y}_i = \mathbf{H}_y\left(\mathbf{y}_i\right)\Delta\lambda_i,$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_i = \left(1-d_i\right)\mathbf{C} : \left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_i^p\right) - \frac{\boldsymbol{\sigma}_i}{1-d_i}\Delta d_i$$

$$\mathbf{C}_i^{alg} = \left(1-d_i\right)\mathbf{C} - \frac{\left(\left(1-d_i\right)^2 \mathbf{C} : \tilde{\mathbf{V}}_i + H_{d_i}\boldsymbol{\sigma}_i\right) \otimes \left(\tilde{\mathbf{V}}_i : \mathbf{C}\right)}{H_{\lambda_i}}$$

Fin boucle sur N

Actualisation de l'état des contraintes et les variables d'état

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \sum_{i=1}^{N} b_i \Delta\boldsymbol{\sigma}_i, \ \mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^{N} b_i \Delta\mathbf{y}_i, \text{ avec } \mathbf{b} = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right\}$$

Calcul du module tangent cohérent (algorithmique)

$$\mathbf{C}^{alg} = \sum_{i=1}^{N} b_i \mathbf{C}_i^{alg}$$

Retourner $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ **et** $\mathbf{C}^{alg}$ **pour vérifier l'équilibre.**

II.4.2. Validation numérique

Les deux variantes du modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement ductile de Lemaitre, développées dans la section précédente (i.e., selon les deux principes d'équivalence en déformation et en énergie totale), ont été implémentées dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS/Standard dans le cadre des grandes déformations. La validation numérique de cette implémentation est réalisée en suivant deux étapes. Une première validation du modèle élasto-plastique seul (i.e., sans couplage à l'endommagement) est effectuée à travers la simulation numérique de plusieurs essais classiques (essais de traction uniaxiale à différentes

orientations par rapport à la direction de laminage, essais de traction biaxiale, et essais de cisaillement de Bauschinger à différents niveaux de déformation). Les simulations ont été réalisées pour un acier inoxydable AISI 304 (Badreddine et al., 2010), dont le comportement est décrit par la loi de Voce pour l'écrouissage isotrope, la loi d'Armstrong-Frederick pour l'écrouissage cinématique, et la surface de charge de Hill'48 pour l'anisotropie plastique initiale. Les paramètres matériaux associés aux deux variantes de comportement (i.e., principe d'équivalence en déformation et principe d'équivalence en énergie totale) sont présentés dans les tableaux II.2 et II.3, respectivement. À noter que, en absence d'endommagement (i.e. comportement élasto-plastique sans couplage à l'endommagement), les équations constitutives des deux variantes modélisent le même comportement élasto-plastique. Dans ce cas, les paramètres d'élasticité et d'anisotropie plastique sont les mêmes entre les deux variantes, seuls les paramètres d'écrouissage diffèrent (la correspondance des paramètres d'écrouissage entre les deux variantes est très facile à identifier). Par conséquent, seuls les résultats numériques obtenus avec la loi élasto-plastique basée sur l'équivalence en déformation sont montrés pour cette première étape de validation.

Afin de valider l'implémentation numérique du comportement anisotrope, trois essais de traction uniaxiale classiques à 0 °, 45 ° et 90 ° par rapport à la direction de laminage ont été simulés à l'aide de la UMAT développée, et comparés à ceux obtenus par le modèle élasto-plastique disponible dans le logiciel ABAQUS. Il est à noter que la description de l'anisotropie plastique disponible dans ABAQUS, qui est basée sur le critère quadratique de Hill'48, ne peut être combinée qu'avec un écrouissage isotrope. En conséquence, la loi d'écrouissage isotrope de Voce a été utilisée dans ces simulations avec le critère de plasticité de Hill'48 pour permettre une comparaison cohérente. Les paramètres d'élasticité et ceux de la loi d'écrouissage de Voce, en plus des coefficients d'anisotropie, sont listés dans les tableaux II.2 et II.3.

Tableau II.2 Paramètres matériaux associés à la loi de comportement utilisant le principe d'équivalence en déformation.

$E(\text{MPa})$	υ	$\sigma_y(\text{MPa})$	$R_{Sat}(\text{MPa})$	C_r	$X_{sat}(\text{MPa})$	C_x
195000	0,3	300	1733,33	1,5	27,451	170
F	G	H	N	$L=M$		
0,510	0,447	0,553	1,805	1,5		

Tableau II.3 Paramètres matériaux associés à la loi de comportement utilisant le principe d'équivalence en énergie totale (Badreddine et al., 2010).

$E(MPa)$	υ	$\sigma_y(\text{MPa})$	$B(\text{MPa})$	b	$A(\text{MPa})$	a
195000	0,3	300	2600	1,5	7,000	170
F	G	H	N	$L=M$		
0,510	0,447	0,553	1,805	1,5		

Les courbes contrainte–déformation simulées, pour les essais de traction uniaxiale selon les trois orientations considérés, sont reportées sur la figure II.3. Il est bien clair que les courbes obtenues en utilisant la routine UMAT sont en excellent accord avec celles fournies par le modèle existant d'ABAQUS, et ce pour toutes les orientations considérées. De plus, la surface de charge de Hill'48 est tracée ici afin d'évaluer la performance de l'implémentation numérique vis-à-vis de l'anisotropie plastique. La figure II.4 montre que la surface de charge de Hill'48, normalisée par rapport à la limite élastique initiale, simulée par la UMAT coïncide parfaitement avec celle donnée par le modèle intégré dans ABAQUS.

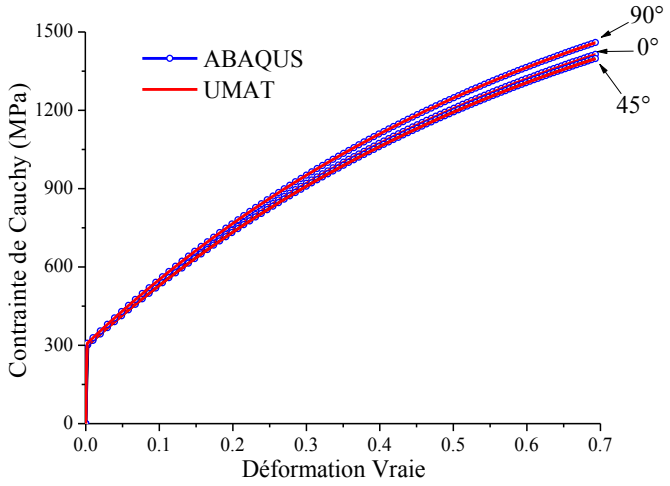

Figure II.3 Comparaison des courbes contrainte–déformation en traction uniaxiale obtenues avec la UMAT développée et le modèle existant dans ABAQUS.

La deuxième validation numérique est consacrée à l'évaluation du modèle élasto-plastique dans le cas d'un écrouissage combiné isotrope et cinématique. Cette validation est réalisée à travers la simulation des essais de cisaillement Bauschinger, dans lesquels le modèle d'écrouissage mixte, basé sur la loi d'écrouissage isotrope de Voce et la loi d'écrouissage cinématique d'Armstrong-Frederick, est combiné avec la surface de charge isotrope de von Mises. Ce modèle adopté permet de comparer les résultats obtenus par la UMAT avec ceux obtenus en utilisant le même modèle d'écrouissage mixte disponible dans ABAQUS. Les paramètres d'élasticité et d'écrouissage du matériau sont pris à partir des tableaux II.2 et II.3. Trois essais de cisaillement Bauschinger sont simulés selon les étapes suivantes : d'abord trois niveaux de déformation de cisaillement, i.e. 10%, 20% et 30%, sont imposés, suivis ensuite par un trajet de cisaillement inverse jusqu'à une déformation de cisaillement de -10%. Les courbes contrainte–déformation de cisaillement obtenues sont reportées sur la figure II.5. On peut voir que les résultats obtenus avec la UMAT, dans le cas d'un modèle d'écrouissage mixte, coïncident avec ceux obtenus avec le modèle d'ABAQUS, ce qui révèle la bonne précision de l'algorithme d'intégration développé.

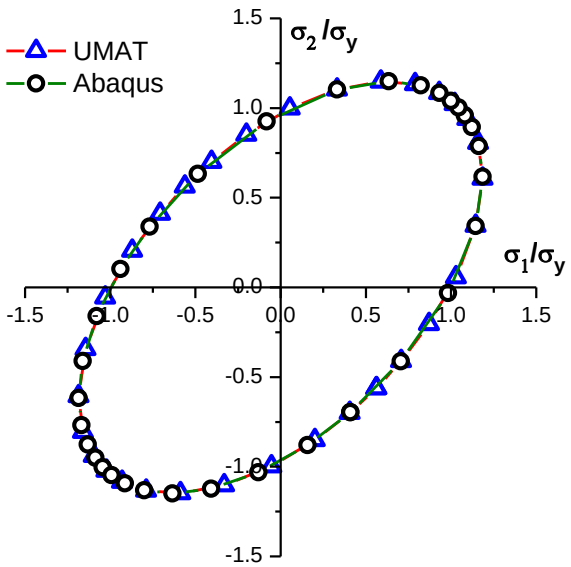

Figure II.4 Comparaison des surfaces de charge normalisées de Hill'48 obtenues avec la UMAT développée et le modèle d'ABAQUS.

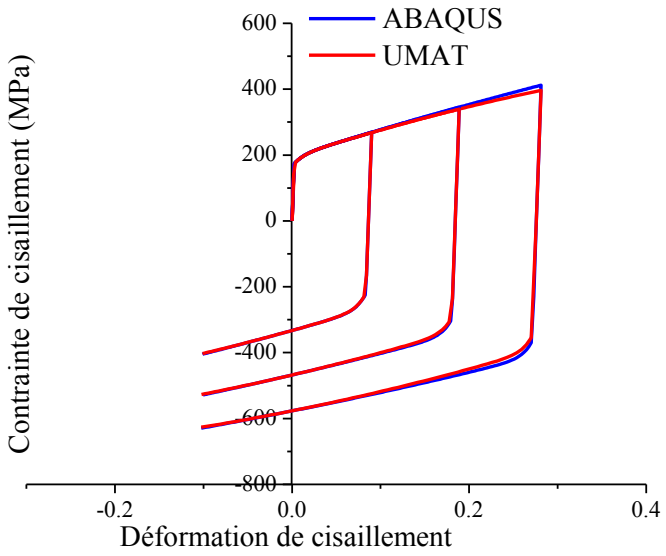

Figure II.5 Comparaison des courbes contrainte de cisaillement–déformation de cisaillement des essais Bauschinger simulés avec la UMAT développée et le modèle d'ABAQUS.

La troisième validation porte sur l'aspect tensoriel du modèle développé. La simulation est basée sur un essai de traction uniaxiale d'une éprouvette rectangulaire ayant deux trous de diamètres différents, induisant ainsi un état de contrainte / déformation hétérogène au sein de l'éprouvette. Les dimensions géométriques de l'éprouvette, ainsi que les conditions de chargement, sont reportées sur la figure II.6. Le modèle élasto-plastique adopté et les paramètres associés sont similaires à ceux utilisés dans les essais de cisaillement de Bauschinger ci-dessus (i.e. loi d'écrouissage mixte avec une surface de charge isotrope de von Mises). Les courbes force–déplacement, obtenues avec la UMAT et le modèle

d'ABAQUS, sont montrées sur la figure II.7. Cette dernière révèle un excellent accord entre la prédiction donnée par la UMAT et celle d'ABAQUS. De plus, la figure II.8 présente la distribution de la déformation plastique équivalente dans l'éprouvette telle que prédite par la UMAT et le modèle d'ABAQUS. Dans cette figure II.8, on peut voir que la distribution de la déformation plastique équivalente est très bien reproduite par le modèle implémenté dans la UMAT comparée à celle donnée par le modèle d'ABAQUS.

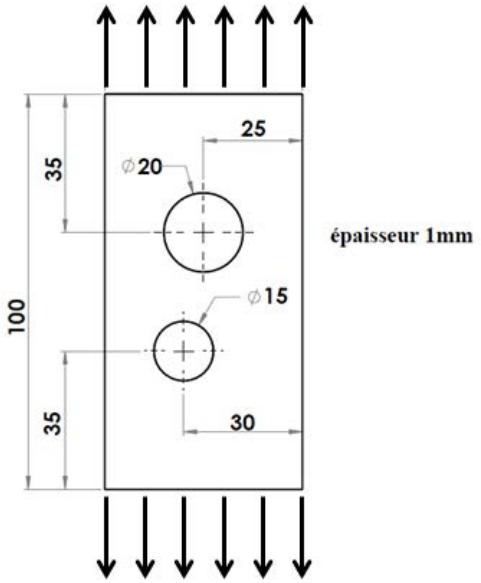

Figure II.6 Essai de traction uniaxiale hétérogène basé sur une éprouvette rantangulaire ayant deux trous de diamètres différents.

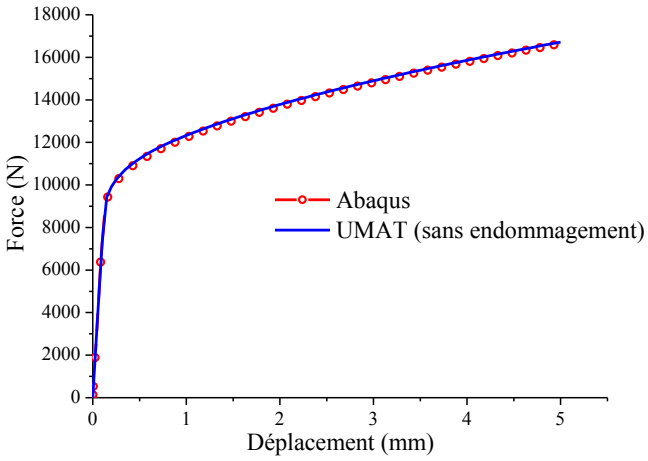

Figure II.7 Comparaison des courbes force–déplacement obtenues avec la UMAT développée et le modèle d'ABAQUS pour l'éprouvette rectangulaire avec deux trous.

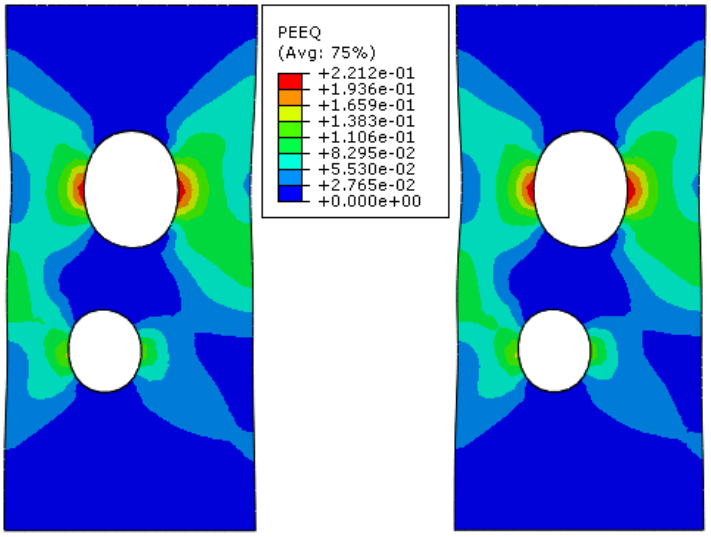

Figure II.8 Distribution de la déformation plastique équivalente obtenue avec la UMAT développée (à gauche) et le modèle d'ABAQUS (à droite) pour l'éprouvette rectangulaire avec deux trous.

Maintenant que l'implémentation numérique du modèle élasto-plastique sans endommagement a bien été validée à travers les simulations numériques ci-dessus, l'introduction du phénomène d'endommagement par le biais des deux principes d'équivalence adoptés sera traitée dans ce qui suit. Il est à noter que le modèle couplé (i.e. élasto-plastique couplé à l'endommagement ductile de Lemaitre) n'est pas disponible dans le logiciel ABAQUS. Par conséquent, les résultats numériques obtenus par la UMAT seront comparés à ceux issus de références bibliographiques, afin de valider l'implémentation numérique du modèle couplé à l'endommagement.

Dans les travaux de Badreddine et al. (2010), un modèle élasto-plastique avec une surface de charge de Hill'48 et un écrouissage mixte non-linéaire a été développé. Basé sur le principe d'équivalence en énergie totale, ce modèle a été couplé à l'endommagement ductile de Lemaitre. Après avoir identifié l'ensemble des paramètres de ce modèle couplé, Badreddine et al. (2010) l'ont appliqué pour la simulation de procédés de mise en forme de tôles minces (i.e. emboutissage et hydroformage). Les paramètres d'élasticité, d'écrouissage et d'anisotropie sont résumés dans le tableau II.4, tandis que les paramètres d'endommagement ductile de Lemaitre sont donnés dans le tableau II.5.

Tableau II.4 Paramètres d'endommagement de l'acier AISI 304 (Badreddine et al., 2010).

$S(\text{MPa})$	s	β	$Y_0(\text{MPa})$
530	1	22	10

Les paramètres précédents ont été utilisés pour simuler un essai de traction uniaxiale classique suivant la direction de laminage, en utilisant la UMAT basée sur le principe d'équivalence en énergie totale. La figure II.9 compare les résultats numériques en termes de courbes contrainte–déformation vraie obtenues par la UMAT développée à ceux des travaux de Badreddine et al. (2010). On peut observer que les courbes simulées par la UMAT sont en très bon accord avec les courbes de référence de Badreddine et al. (2010), ce qui permet de valider l'implémentation numérique du modèle couplé (élasto-plastique couplé à l'endommagement selon le principe d'équivalence en énergie totale).

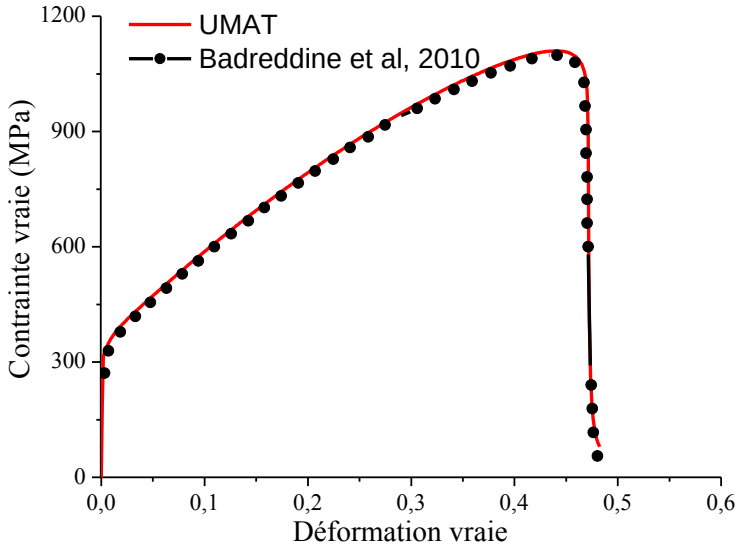

Figure II.9 Comparison de la réponse contrainte–déformation vraie en traction uniaxiale, obtenue avec la UMAT basée sur le principe d'équivalence en énergie totale, et la réponse de référence prise des travaux de Badreddine et al. (2010).

Concernant le modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement de Lemaitre selon le principe d'équivalence en déformation, la performance de l'implémentation numérique de la UMAT associée sera évaluée à travers la comparaison avec le modèle développé par Doghri et Billardon (1995). Dans ces derniers travaux, un modèle élasto-plastique, avec une surface de charge isotrope de von Mises et une loi d'écrouissage isotrope de Ludwig, a été couplé à l'endommagement ductile de Lemaitre en utilisant le principe d'équivalence en déformation. Trois matériaux fictifs ont été utilisés dans les travaux de Doghri et Billardon (1995), dont les paramètres d'élasticité, d'écrouissage isotrope et d'endommagement sont résumés dans le tableau II.5

La figure II.10 compare les prédictions fournies par la UMAT développée, dans le cas d'un essai de traction uniaxiale, avec les solutions de référence prises des travaux de Doghri et Billardon (1995). Ces comparaisons portent sur l'évolution de la contrainte de Cauchy et de l'endommagement en fonction de la déformation vraie pour différentes valeurs de l'exposant d'écrouissage n (voir Tableau II.5). On peut observer que les courbes simulées d'évolution de la contrainte de Cauchy et de la variable d'endommagement coïncident avec leurs

contreparties issues des travaux de Doghri et Billardon (1995) pour les trois matériaux étudiés, ce qui permet la validation de l'implémentation numérique du modèle couplé à l'endommagement selon le principe d'équivalence en déformation.

Tableau II.5 Paramètres d'élasticité, d'écrouissage et d'endommagement des trois matériaux fictifs étudiés (Doghri et Billardon, 1995).

Matériau	$E(\text{MPa})$	υ	$\sigma_y(\text{MPa})$	$K(\text{MPa})$	n	$S(\text{MPa})$	s	β	$Y_0(\text{MPa})$
M1	200000	0,3	200	10000	0,3	0,5	1	1	0
M2	200000	0,3	200	10000	0,6	0,5	1	1	0
M3	200000	0,3	200	10000	1,0	0,5	1	1	0

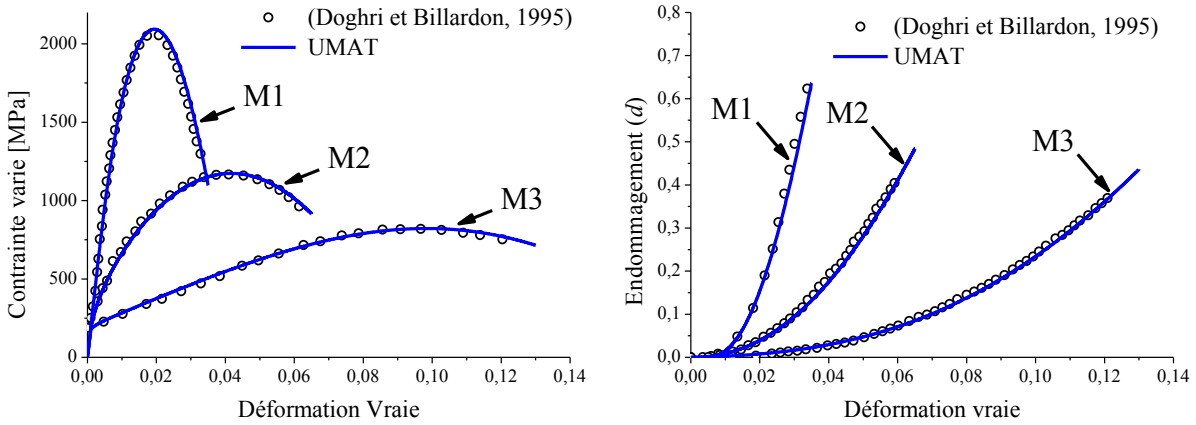

Figure II.10 Comparison entre les résultats obtenus par la UMAT et les solutions de référence prises des travaux de Doghri et Billardon (1995) en termes de simulation de l'essai de traction uniaxiale pour les trois matériaux étudiés : (à gauche) réponse contrainte–déformation vraie, et (à droite) évolution de l'endommagement.

II.5. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des équations constitutives du modèle de comportement retenu. En effet, un modèle élasto-plastique anisotrope couplé à l'endommagement ductile de Lemaitre a été développé dans le cadre des processus thermodynamiques irréversibles en proposant une formulation unifiée valable pour deux principes d'équivalence pour le couplage de l'endommagement ductile à savoir : le principe d'équivalence en déformation et le principe d'équivalence en énergie totale. La formulation du modèle résultant a été établie dans un repère tournant (co-rotationnel) associé à la dérivée de Jaumann afin d'assurer l'objectivité de la loi de comportement. Dans un tel repère, les équations constitutives sont formellement identiques à celles écrites dans le cadre des petites transformations, ce qui permet de faciliter leurs implémentations numériques dans les codes de calcul par éléments finis. L'intégration locale des lois d'évolution des variables internes a

été réalisée en adoptant un schéma d'intégration explicite utilisant la méthode de Runge–Kutta d'ordre 4. Une fois que le modèle résultant a été implémenté dans le code de calcul ABAQUS, une validation numérique a été menée à travers la comparaison des résultats numériques de simulation d'essais mécaniques classiques issus de la UMAT développée avec ceux obtenus par le modèle existant dans ABAQUS, ainsi que des résultats de référence extraits de la littérature. Ce modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement, dont l'implémentation numérique a été validée, peut à présent être combiné à des critères d'apparition d'instabilités plastiques dans les matériaux métalliques, afin de prédire les limites de formabilité des tôles minces.

Chapitre III: Modélisation des instabilités plastiques basée sur l'analyse de bifurcation

III.1. Introduction

Afin de prédire l'apparition de la striction diffuse et la striction localisée, plusieurs critères théoriques ont été développés dans la littérature. La majorité de ces critères est basée sur le principe de force maximum, l'analyse de bifurcation et les méthodes multi-zones. Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la prédiction de la striction diffuse et la striction localisée par des critères basés sur l'analyse de bifurcation. Quatre critères prédictifs de l'apparition des instabilités plastiques sont présentés dans ce chapitre : deux critères de striction diffuse basés sur la bifurcation générale (BG) et la bifurcation par point limite (BPL), respectivement, et deux critères de striction localisée basés sur la perte d'ellipticité (PE) et la perte d'ellipticité forte (PEF), respectivement. Ces critères seront, tout d'abord, présentés dans leur cadre théorique général. Ensuite, ils seront traités dans le cadre de différentes formulations : en contraintes planes, en petites déformations, ainsi qu'en grandes déformations. Des liens théoriques entre ces critères seront établis dans le but de les classifier selon leur ordre de prédiction des instabilités plastiques. Finalement, ces critères seront combinés avec les équations constitutives développées dans le chapitre précédent dans le but de confirmer les prédictions et classifications théoriques précédemment établies.

III.2. Modélisation des critères de bifurcation

Avant de présenter les quatre critères de bifurcation utilisés dans ce travail, certaines variables tensorielles nécessaires pour leur formulation théorique seront définies dans ce qui suit.

Les critères seront développés dans le cadre général d'une formulation élasto-plastique en grandes déformation. L'état de contraintes peut être défini en utilisant l'un des cinq tenseurs de contraintes ci-après : le tenseur des contraintes de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$, le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, le tenseur des contraintes nominales $\mathbf{N}$, le 1er tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff $\mathbf{B}$ (connu aussi comme le tenseur des contraintes de Boussinesq), et le 2ème tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff $\boldsymbol{\Pi}$. Le passage de l'un de ces cinq tenseurs à un autre est donné par les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{B}^T = \mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\Pi}\cdot\mathbf{F}^T . \qquad \text{(III.1)}$$

Dans le cadre d'une formulation Lagrangienne actualisée, c'est-à-dire que la configuration de référence est celle courante à l'instant t (i.e, $\mathbf{F}=\mathbf{I}$ et $J=1$), ces cinq tenseurs de contraintes deviennent égaux, mais ce n'est pas le cas de leurs dérivées temporelles.

Dans le cadre des grandes déformations, le tenseur des contraintes nominales $\mathbf{N}$ peut être relié au tenseur de gradient de vitesse $\mathbf{G}$, par la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{L} : \mathbf{G}, \tag{III.2}$$

où $\mathbf{L}$ est le module tangent déterminé dans le cadre d'une approche Lagrangienne actualisée, dont l'expression est donnée par la relation suivante (Abed-Meraim et al., 2014a; Haddag et al., 2009) :

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}^{\mathrm{ep}} + \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3, \text{ avec } \begin{cases} \mathrm{T}_{1ijkl} = \sigma_{ij}\delta_{kl} \\ \mathrm{T}_{2ijkl} = \dfrac{1}{2}\left(\delta_{ik}\sigma_{jl} + \delta_{il}\sigma_{jk}\right), \\ \mathrm{T}_{3ijkl} = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\delta_{jl} - \sigma_{il}\delta_{jk}\right) \end{cases} \tag{III.3}$$

et $\mathbf{C}^{\mathrm{ep}}$ est le module tangent élasto-plastique donné par les équations (II.50) et (II.52) dans le cadre d'une plasticité non-associée et d'une plasticité associée, respectivement. Les détails concernant la détermination du module tangent $\mathbf{L}$ sont donnés en annexe A.

Le 1er tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff $\mathbf{B}$, qui est le tenseur conjugué du tenseur gradient de transformation $\mathbf{F}$, est défini en termes du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ par :

$$\mathbf{B} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{F}^{-1}\right)^T, \tag{III.4}$$

avec J le Jacobien de la transformation (c.-à-d., le déterminant de $\mathbf{F}$). Ce tenseur $\mathbf{B}$ est lié au tenseur gradient de transformation $\mathbf{F}$ par la relation incrémentale suivante :

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{L}^B : \dot{\mathbf{F}}, \tag{III.5}$$

où $\mathbf{L}^B$ est le module tangent reliant le taux de contraintes du 1er Piola–Kirchhoff $\mathbf{B}$ au taux du gradient de la transformation $\mathbf{F}$.

En considérant que le tenseur des contraintes nominales $\mathbf{N}$ est défini comme la transposée du 1er tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff $\mathbf{B}$ (c.-à-d., $\mathbf{N} = \mathbf{B}^T$), le module tangent $\mathbf{L}^{\mathrm{B}}$ (voir équation (III.5)) peut être facilement exprimé en fonction du module tangent $\mathbf{L}$ en utilisant la formule indicielle suivante :

$$\mathrm{L}^{\mathrm{B}}_{ijkl} = \mathrm{L}_{jikl}. \tag{III.6}$$

III.2.1. Critère de bifurcation générale

La striction diffuse peut être interprétée comme une évolution progressive d'un état de déformation homogène vers un état de déformation quasi-homogène ou hétérogène. Elle est

vue comme un problème de bifurcation de la solution du problème aux limites exprimé en vitesses. La recherche des conditions qui permettent l'apparition de cette instabilité revient à l'étude de la perte d'unicité de la solution de ce problème.

Introduit par Drucker (1950, 1956), puis Hill (1958), le critère de bifurcation générale (BG) est une condition nécessaire pour la perte d'unicité de la solution des problèmes aux limites pour les solides indépendants du temps physique. La condition pour laquelle toute bifurcation du problème aux limites exprimé en vitesses est exclue correspond à la positivité du travail du second ordre, défini sur toute la structure dans sa configuration de référence non-déformée, comme suit :

$$\int_{\Omega_0} \Delta\dot{\mathbf{F}} : \mathbf{L}^{\mathrm{B}} : \Delta\dot{\mathbf{F}}\, d\Omega_0 > 0\,, \tag{III.7}$$

où Ω_0 représente le volume de la structure dans sa configuration de référence non-déformée.

La condition donnée par l'équation ci-dessus est une condition de non-bifurcation qui exclut tous les types de bifurcation, telles que les instabilités géométriques ou les instabilités matérielles. Cette condition dépend de la géométrie de la structure et des conditions aux limites. En mise en forme, afin de prédire les instabilités plastiques matérielles, en les découplant des effets structurels (e.g., géométrie, conditions aux limites), une formulation locale du critère donné par l'équation (III.7) peut être utilisée comme suit :

$$\Delta\dot{\mathbf{F}} : \mathbf{L}^{\mathrm{B}} : \Delta\dot{\mathbf{F}} > 0\,. \tag{III.8}$$

Cette condition suffisante d'unicité de la solution du problème aux limites revient donc à la définie positivité de la forme quadratique $\Delta\dot{\mathbf{F}} : \mathbf{L}^{\mathrm{B}} : \Delta\dot{\mathbf{F}}$. Elle est généralement plus restrictive que celle donnée dans l'équation (III.7). Par conséquent, elle peut être considérée comme une limite inférieure de l'apparition de la striction diffuse ou de la striction localisée. En pratique, la satisfaction de la définie positivité de la forme quadratique donnée par l'équation (III.8) nécessite la vérification de la positivité de toutes la valeurs propres de la partie symétrique du module tangent $\mathbf{L}^{\mathrm{B}}$. Ainsi, l'apparition de la striction diffuse est liée à l'annulation de la plus petite des valeurs propres.

III.2.2. Critère de bifurcation par point limite

Le critère de bifurcation par point limite (BPL) est un cas particulier du critère de BG, selon lequel l'instabilité plastique est associée à un état stationnaire du 1er tenseur des contraintes de Piola–Kirchhoff. Cette stationnarité mène à la condition suivante (Valanis, 1989; Neilsen et Schreyer, 1993) :

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathbf{0}\,. \tag{III.9}$$

En combinant cette équation avec celle donnée par l'équation (III.5), on obtient :

$$\mathbf{L}^{\mathrm{B}} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}\,. \tag{III.10}$$

La condition précédente est atteinte lorsque le module tangent $\mathbf{L}^{B}$ devient singulier, ou en d'autres termes, lorsque l'une de ses valeurs propres s'annule. Il est à noter que dans le cadre d'une formulation en petites déformations, plasticité associée et sans couplage à l'endommagement, les deux critères de bifurcation BG et BPL mènent à la même prédiction de la striction, à cause de la symétrie du module tangent $\mathbf{L}^{B}$ résultant (Abed-Meraim et al., 2014a).

III.2.3. Critère de perte d'ellipticité

Rice (1976) et Rudnicki et Rice (1975) ont proposé un critère de localisation de la déformation basé sur la perte d'ellipticité des équations aux dérivées partielles gouvernant le problème aux limites. Dans une telle approche, la localisation de la déformation sous forme d'une bande définie par sa normale $\mathbf{n}$ (voir Figure III.1) est vue comme une transition d'un état homogène de déformation vers un état hétérogène correspondant à une discontinuité du tenseur gradient de vitesse. Nous avons, d'une part, la condition d'équilibre qui exprime la continuité du vecteur contrainte à travers les deux plans de discontinuité, qui s'écrit :

$$\mathbf{n}\cdot\left[\!\left[\dot{\mathbf{N}}\right]\!\right]=\mathbf{0}, \tag{III.11}$$

où $\left[\!\left[\dot{\mathbf{N}}\right]\!\right]=\dot{\mathbf{N}}^{+}-\dot{\mathbf{N}}^{-}$ représente le saut du tenseur taux de contrainte nominale à travers les deux plans de la bande de localisation. En utilisant les conditions de compatibilité de Maxwell, le saut du tenseur gradient de vitesse peut être écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{G}=\dot{\mathbf{c}}\otimes\mathbf{n}, \tag{III.12}$$

où le vecteur amplitude du saut $\dot{\mathbf{c}}=\mathbf{G}\cdot\mathbf{n}$ caractérise le mode la bifurcation (par exemple, en mode de cisaillement lorsque $\dot{\mathbf{c}}\perp\mathbf{n}$).

En introduisant l'expression de $\dot{\mathbf{N}}$ (voir équation (III.2)), la condition d'équilibre (III.11) devient :

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}:\mathbf{G}=\mathbf{0}. \tag{III.13}$$

En supposant la continuité du module tangent $\mathbf{L}$ dans le solide et à travers la bande de localisation au moment de l'apparition de la localisation, la relation (III.13) peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{L}:\mathbf{G}\right)=\mathbf{0}. \tag{III.14}$$

En tenant compte de l'équation (III.12), il est possible d'écrire :

$$\mathbf{n}\cdot\left(\mathbf{L}:\left(\dot{\mathbf{c}}\otimes\mathbf{n}\right)\right)=\mathbf{0}, \tag{III.15}$$

ou encore sous la forme équivalente :

$$\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\dot{\mathbf{c}}=\mathbf{0}\,. \tag{III.16}$$

En excluant la solution triviale $\dot{\mathbf{c}}=\mathbf{0}$, correspondant à une absence de discontinuité du gradient des vitesses, la condition nécessaire d'apparition de la bande de localisation est donnée par :

$$\det\mathbf{Q}=\det(\mathbf{n}\cdot\mathbf{L}\cdot\mathbf{n})=0\,, \tag{III.17}$$

où $\mathbf{Q}$ est appelé le tenseur acoustique. L'expression complète du module tangent est donnée par l'équation (III.3). La condition ci-dessus correspond à la perte d'ellipticité du problème aux limites associé.

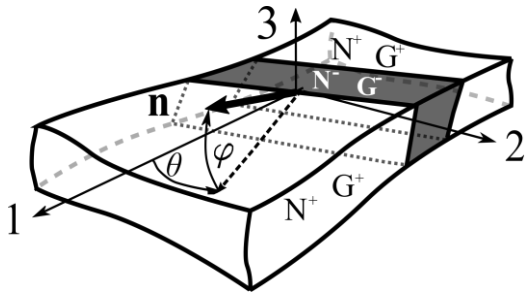

Figure III.1 Schématisation de la bande de localisation et de son orientation.

Numériquement, cette condition de perte d'ellipticité est résolue en calculant le déterminant du tenseur acoustique **Q** pour chaque incrément de chargement et pour toutes les orientations possibles de la bande. La détection numérique de la striction localisée est vérifiée lorsque le minimum du déterminant du tenseur acoustique **Q**, dans toutes les directions possibles de la bande de localisation, devient non-positif.

III.2.4. Critère de perte d'ellipticité forte

Dans cette même famille de critères basés sur l'analyse de bifurcation, Bigoni et Hueckel (1991), Bigoni et Zaccaria (1992) et Bigoni (1996) ont proposé le critère de perte d'ellipticité forte (PEF) pour la prédiction de la striction localisée. Cette condition est un cas particulier de la perte de positivité du travail de second ordre, donné par le critère BG (Hill, 1958). Dans ce dernier, aucune restriction n'est imposée à la forme du gradient de vitesse $\dot{\mathbf{F}}$ dans l'équation (III.8). Ainsi, tous les types de modes de bifurcation (i.e., mode diffus ou localisé) peuvent être prédits. Si on limite le mode du gradient de vitesse $\Delta\dot{\mathbf{F}}$, dans l'équation (III.8), à prendre une forme compatible (voir équation (III.12)), on peut retrouver le critère PEF à partir du critère BG. Par conséquent, pour des modes de localisation restreints respectant la condition de compatibilité cinématique (Neilsen et Schreyer, 1993), la condition de perte d'ellipticité forte peut être écrite sous la forme suivante :

$$\left(\dot{\mathbf{c}}\otimes\mathbf{n}\right):\mathbf{L}^{\mathrm{B}}:\left(\dot{\mathbf{c}}\otimes\mathbf{n}\right)>0\quad\forall\ \dot{\mathbf{c}}\neq\mathbf{0},\ \|\mathbf{n}\|=1\,, \tag{III.18}$$

ou encore :

$$\dot{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{c}} > 0 \quad \forall\ \dot{\mathbf{c}} \neq \mathbf{0},\ \|\mathbf{n}\| = 1\,, \tag{III.19}$$

où le tenseur acoustique $\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ est le même tenseur utilisé dans la section précédente (voir équation (III.17)). En pratique, la satisfaction de la condition d'ellipticité forte est équivalente à la condition de définie positivité du tenseur acoustique $\mathbf{Q}$ (Bigoni et Hueckel, 1991; Neilsen et Schreyer, 1993). Il est à noter que dans le cadre d'une formulation en petites déformations, plasticité associée et sans couplage à l'endommagement, les deux critères de bifurcation PEF et PE mènent à la même prédiction de striction localisée, due à la symétrie du tenseur acoustique $\mathbf{Q}$ résultant.

III.2.5. Cas particuliers

Les critères de bifurcation développés ci-dessus sont formulés dans le cadre général de problèmes tridimensionnels en grandes déformations. Deux cas particuliers seront traités dans cette section : le cas d'une formulation en contraintes planes, qui généralement correspond au cas de la mise en forme des tôles minces, et le cas d'une formulation en petites déformations.

III.2.5.1. Formulation en contraintes planes

Vu que le présent travail est relatif à la prédiction de la striction diffuse et striction localisée en mise en forme des tôles minces, le module tangent nécessaire pour l'ensemble des critères de bifurcation (voir équation (III.3)) est développé ici dans le cadre d'une formulation en contraintes planes. Dans ce cas, le tenseur taux de contrainte nominale, défini par l'équation (III.2), est réécrit sous la forme indicielle suivante :

$$\dot{N}_{\alpha\beta} = L^{CP}_{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta} \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2\,, \tag{III.20}$$

Pour ce tenseur, les conditions d'un état de contraintes planes s'écrivent :

$$N_{i3} = N_{3i} = 0 \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, 3\,, \tag{III.21}$$

$$G_{\alpha 3} = G_{3\alpha} = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = 1, 2\,. \tag{III.22}$$

En partant de l'équation (III.2) et en considérant les conditions d'un état de contraintes planes (voir équations ci-dessus), on obtient les composantes non-nulles du tenseur de contrainte nominale :

$$\dot{N}_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta\gamma\delta} G_{\gamma\delta} + L_{\alpha\beta 33} G_{33} \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2\,. \tag{III.23}$$

La composante $\dot{N}_{33}$ du tenseur de contrainte nominale est donnée par :

$$\dot{N}_{33} = L_{33\gamma\delta} G_{\gamma\delta} + L_{3333} G_{33} \quad \text{avec} \quad \gamma, \delta = 1, 2\,. \tag{III.24}$$

Conformément à la condition des contraintes planes, cette composante $\dot{N}_{33}$ est nulle. Par conséquent, on peut déduire la valeur de G_{33} comme suit :

$$G_{33} = -\frac{L_{33\gamma\delta}}{L_{3333}} G_{\gamma\delta} \quad \text{avec} \quad \gamma, \delta = 1, 2. \tag{III.25}$$

En remplaçant cette dernière expression dans l'équation (III.23), les composantes du tenseur de contrainte nominale dans le cas d'une formulation en contraintes planes sont données par l'expression suivante :

$$\dot{N}_{\alpha\beta} = \left(L_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{L_{\alpha\beta 33} L_{33\gamma\delta}}{L_{3333}} \right) G_{\gamma\delta} \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2. \tag{III.26}$$

En utilisant la forme donnée par l'équation III.20, les composantes $L^{CP}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ du module tangent en contraintes planes sont obtenues en fonction des composantes du module tangent tridimensionnel par la règle de condensation suivante :

$$L^{CP}_{\alpha\beta\gamma\delta} = L_{\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{L_{\alpha\beta 33} L_{33\gamma\delta}}{L_{3333}} \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2. \tag{III.27}$$

Il est à noter que dans le cadre de cette formulation en contraintes planes, la bande de localisation ne peut apparaitre que dans le plan de la tôle. En d'autres termes, la normale à la bande n'est définie que par un seul angle ($\varphi = 0$ dans la Figure III.1).

III.2.5.2. Formulation en petites déformations

Dans cette section, nous allons considérer l'hypothèse des petites déformations et analyser son effet sur la prédiction de la striction en utilisant les critères de bifurcation formulés dans les paragraphes § III.2.1-4. La conséquence directe de cette hypothèse est que les termes convectifs $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ et $\mathbf{T}_3$, entrant dans le calcul du module tangent $\mathbf{L}$ (voir équation (III.3)), sont nuls. Ces termes découlent de la formulation des équations constitutives en grandes déformations. Dans le cas de cette hypothèse des petites déformations, le module tangent $\mathbf{L}$ se réduit au module tangent analytique $\mathbf{C}^{\text{ep}}$:

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}^{\text{ep}}. \tag{III.28}$$

Doghri et Billardon (1995) ont étudié l'apparition de la striction dans le cadre d'une formulation en contraintes planes et en petites déformations. Dans leurs travaux, ils ont proposé un concept de module d'écrouissage scalaire critique pour la détection de la singularité du module tangent analytique. Ce module scalaire est équivalent au critère BPL lorsque l'on se place dans la cadre des petites déformations. Il a été développé en appliquant le lemme suivant (Doghri et Billardon, 1995) :

Soit $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux tenseurs du second-ordre et $\mathbf{I}$ le tenseur identité du 4ème ordre. Le tenseur du 4ème ordre suivant $\mathbf{m} = \mathbf{I} - (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})/h$ est inversible si et seulement si $h \neq \mathbf{a} : \mathbf{b}$, et dans ce cas son inverse $\mathbf{m}^{-1}$ s'écrit :

$$\mathbf{m}^{-1} = \mathbf{I} + \frac{(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})}{h^*}, \tag{III.29}$$

où $h^* = h - \mathbf{a} : \mathbf{b}$ est le module d'écrouissage scalaire critique.

Dans le cas d'une formulation en petites déformations de notre modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement ductile de Lemaitre, le module tangent analytique $\mathbf{C}^{\text{ep}}$, définie par l'équation (II.52), est équivalent au module tangent $\mathbf{L}$ (voir équation (III.28)). La singularité du module tangent analytique $\mathbf{C}^{\text{ep}}$ revient à la singularité du tenseur $\mathbf{C}^{\text{ep}} : \mathbf{C}^{-1}/(1-d)$ donné par l'expression suivante :

$$\frac{\mathbf{C}^{\text{ep}} : \mathbf{C}^{-1}}{(1-d)} = \mathbf{I} - \frac{\left((1-d)^2 \mathbf{C} : \tilde{\mathbf{V}} + H_d \boldsymbol{\sigma}\right) \otimes \tilde{\mathbf{V}}}{(1-d) H_\lambda}. \tag{III.30}$$

En appliquant le lemme précédent (i.e., $\mathbf{a} = (1-d)^2 \mathbf{C} : \tilde{\mathbf{V}} + H_d \boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{b} = \tilde{\mathbf{V}}$, $h = (1-d) H_\lambda$ et $\mathbf{m} = \dfrac{\mathbf{C}^{\text{ep}} : \mathbf{C}^{-1}}{(1-d)}$), le module d'écrouissage scalaire critique h^*, correspondant à la singularité du tenseur $\dfrac{\mathbf{C}^{\text{ep}} : \mathbf{C}^{-1}}{(1-d)}$ et donc du module tangent analytique $\mathbf{C}^{\text{ep}}$, peut être facilement obtenu comme suit :

$$h^* = (1-d) H_\lambda - \left((1-d)^2 \mathbf{C} : \tilde{\mathbf{V}} + H_d \boldsymbol{\sigma}\right) : \tilde{\mathbf{V}}. \tag{III.31}$$

L'utilisation du module d'écrouissage scalaire critique précédent pour l'analyse des déformations critiques de striction dans le cadre des petites déformations est un outil très utile, surtout qu'il est très facile à implémenter et il ne nécessite ni minimisation d'un déterminant à travers toutes les directions normales à la bande de localisation, ni analyse de valeurs propres.

Il est à noter que les équations (III.20) et (III.27), découlant de la formulation des problèmes en contraintes planes, restent valables dans le cadre de la formulation en petites déformation où l'équation (III.28) est à prendre en considération.

III.3. Classification théorique des critères de bifurcation

Dans cette section, les critères de bifurcation discutés précédemment et résumés dans le Tableau (III.1), seront classifiés selon leur ordre de prédiction des instabilités plastiques. Cette classification est établie en considérant la propriété mathématique introduite dans ce qui suit.

Soit $\mathbf{A}$ une matrice donnée et $\mathbf{A}^{sym}$ sa partie symétrique (i.e., $\mathbf{A}^{sym} = \left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right)/2$, avec $\mathbf{A}^T$ la matrice transposée de $\mathbf{A}$). Les parties réelles des valeurs propres $\eta_i^{\mathbf{A}}$ de la matrice $\mathbf{A}$ sont bornées par la plus petite et la plus grande des valeurs propres $\eta_i^{\mathbf{A}^{sym}}$ de sa partie symétrique. Cette classification mathématique s'écrit (voir Abed-Meraim, 1999) :

$$\min_{Sp\left(\mathbf{A}^{sym}\right)} \left(\eta_i^{\mathbf{A}^{sym}}\right) \leq \underset{Sp(\mathbf{A})}{Re}\left(\eta_i^{\mathbf{A}}\right) \leq \max_{Sp\left(\mathbf{A}^{sym}\right)} \left(\eta_i^{\mathbf{A}^{sym}}\right), \tag{III.32}$$

où $Re\left(\eta_i^{\mathbf{A}}\right)$ désigne la partie réelle de la valeur propre $\eta_i^{\mathbf{A}}$, et $Sp\left(\mathbf{A}^{sym}\right)$ est le spectre de la matrice $\mathbf{A}^{sym}$.

En appliquant cette propriété mathématique au module tangent $\mathbf{L}^{\mathrm{B}}$ et le tenseur acoustique $\mathbf{Q}$, il en découle les inégalités suivantes :

$$\min_{Sp\left(\mathbf{L}^{\mathrm{B}^{sym}}\right)} \left(\eta_i^{\mathbf{L}^{\mathrm{B}^{sym}}}\right) \leq \underset{Sp\left(\mathbf{L}^{\mathrm{B}}\right)}{Re}\left(\eta_i^{\mathbf{L}^{\mathrm{B}}}\right), \tag{III.33}$$

$$\min_{Sp\left(\mathbf{Q}^{sym}\right)} \left(\eta_i^{\mathbf{Q}^{sym}}\right) \leq \underset{Sp(\mathbf{Q})}{Re}\left(\eta_i^{\mathbf{Q}}\right), \tag{III.34}$$

En analysant l'équation (III.33), la singularité du module tangent $\mathbf{L}^{\mathrm{B}}$ ne peut pas avoir lieu avant la perte de définie positivité de sa partie symétrique (i.e., $\mathbf{L}^{\mathrm{B}^{sym}}$). Par conséquent, le critère BG est plus conservatif que le critère BPL (Abed-Meraim et al., 2014a; Franz et al., 2013).

En adoptant le même raisonnement mathématique ci-dessus, on peut démontrer que le critère PEF est plus conservatif que le critère PE. En d'autres termes, la singularité du tenseur acoustique $\mathbf{Q}$ ne peut avoir lieu avant la perte de définie positivité de sa partie symétrique $\mathbf{Q}^{sym}$ (voir équation III.34).

Tableau III.1 Résumé des critères de bifurcation étudiés.

Critère	Condition	Mode
Bifurcation générale (BG)	$\Delta\dot{\mathbf{F}} : \mathbf{L}^{\mathrm{B}} : \Delta\dot{\mathbf{F}} = 0$	Striction diffuse ou localisée
Bifurcation par point limite (BPL)	$\mathbf{L}^{\mathrm{B}} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{0}$	Striction diffuse ou localisée
Perte d'ellipticité forte (PEF)	$\dot{\mathbf{c}} \cdot \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}\right) \cdot \dot{\mathbf{c}} = 0$	Striction localisée
Perte d'ellipticité (PE)	$\det\left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}\right) = 0$	Striction localisée

Une autre classification hiérarchique, relative aux critères BG et PEF, peut être établie. En effet, le critère BG nécessite la définie positivité de la forme quadratique donnée par l'équation (III.8) à travers un espace large, alors que le critère PEF, étant un cas particulier du

critère BG, est restreint à un sous-espace de modes de déformation localisée (i.e., ceux satisfaisant la condition de compatibilité cinématique). Par conséquent, le critère BG est plus conservatif que le critère PEF.

Les discussions précédentes, relatives aux liens théoriques entre les différents critères de bifurcation, nous permettent d'établir la classification théorique générale suivante, en termes d'ordre de prédiction des instabilités plastiques : le critère BG est interprété comme une borne inférieure de la striction diffuse ou localisée, alors que le critère PE est considéré comme une borne supérieure de l'apparition de la striction localisée. Des modes intermédiaires, balayant l'espace entre ces deux bornes, sont fournis par les critères BPL et PEF. La Figure (III.2) illustre l'ordre attendu de la prédiction de l'apparition de la striction, en utilisant les différents critères de bifurcation, et en se basant sur la classification théorique établie ci-dessus. Il est à noter qu'il n'existe pas de rapprochement théorique entre le critère BPL et le critère PEF.

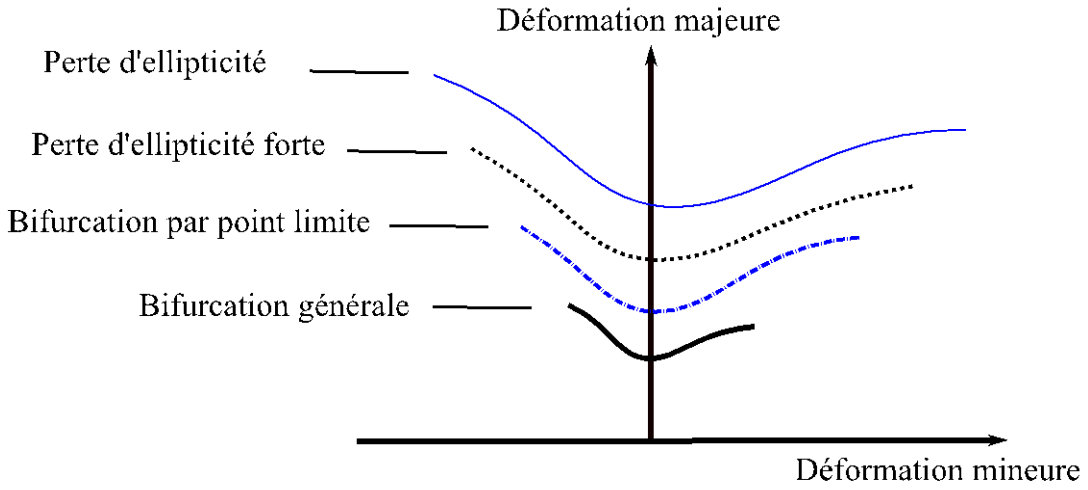

Figure III.2 Illustration de la classification théorique des critères de bifurcation selon leur ordre de prédiction des instabilités plastiques.

III.4. Application à la prédiction des instabilités plastiques

Dans le but de prédire l'apparition de la striction dans les tôles métalliques minces, les équations constitutives développées dans le chapitre précédent ont été combinées avec les critères de bifurcation décrits précédemment. L'approche résultante a été implémentée dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS/Standard. Afin de reproduire des états de déformation homogène avant la bifurcation, les simulations ont été réalisées sur un seul élément fini ayant un seul point d'intégration (élément C3D8R dans ABAQUS). Ce dernier est soumis aux différents trajets linéaires de chargement typiquement appliqués aux tôles métalliques sous chargements plans bi-axiaux. La motivation principale derrière ce choix de configuration basique de chargement, correspondant à un simple problème aux limites, est d'étudier l'apparition de la striction sous des conditions émanant seulement du comportement du matériau sans interférence avec l'effet de la structure (effet géométrique). En effet, ces

effets structurels (ou géométriques) peuvent mener à des états non-homogènes de contraintes ou générer des décharges élastiques lorsque l'adoucissement induit par l'endommagement est considéré (Lemaitre et al., 2009), ce qui remet en cause l'applicabilité des critères de bifurcation discutés précédemment. La géométrie et les conditions aux limites du modèle élément fini adopté dans les simulations sont illustrées dans la Figure III.3. Les directions 1 et 2 représentent les directions principales majeure et mineure, respectivement. Les trajets linéaires de chargement sont obtenus en variant le paramètre du trajet de chargement $\beta = \dot{\varepsilon}_2 / \dot{\varepsilon}_1$ de $-0,5$ (traction uniaxiale) à 1 (traction équi-biaxiale).

Dans les sections suivantes, le cadre des contraintes planes, comme décrit précédemment, a été adopté pour la prédiction des déformations limites en striction des tôles métalliques minces. Le comportement mécanique est modélisé par une loi élasto-plastique couplée à l'endommagement suivant le principe d'équivalence en déformation. Plusieurs aspects numériques ont été étudiés dans le but de valider tous les résultats théoriques discutés précédemment.

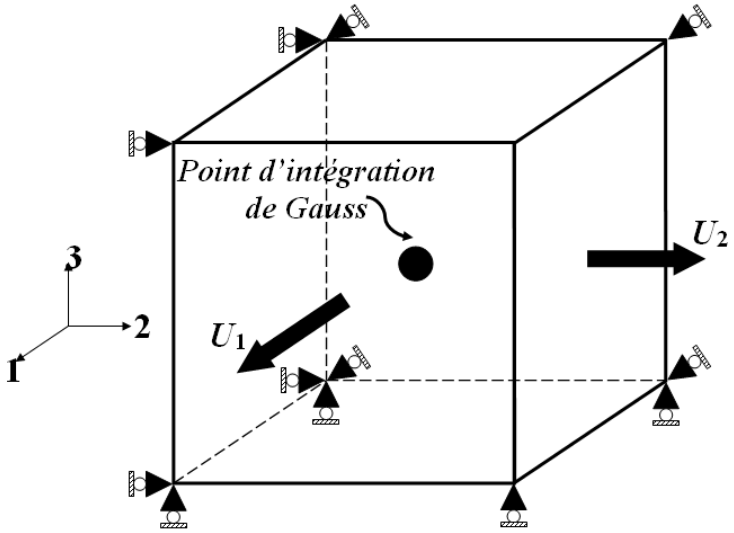

Figure III.3 Description du modèle élément fini utilisé dans les simulations.

III.4.1. Formulation en petites déformations

Dans le cadre d'une formulation en petites déformations, Doghri et Billardon (1995) ont étudié l'apparition de la striction localisée en utilisant des critères de bifurcation en contraintes planes. Ils ont considéré un modèle élasto-plastique isotrope couplé à l'endommagement de Lemaitre, en adoptant le principe d'équivalence en déformation, dont l'évolution de la taille de la surface de charge, i.e. écrouissage isotrope, a été modélisée par la loi de Ludwig. L'étude a été réalisée pour deux matériaux fictifs M1 et M2 dont les paramètres sont reportés dans le Tableau II.5 et rappelés dans le Tableau III.2.

Tableau III.2 Paramètres d'élasticité, écrouissage et endommagement des matériaux étudiés (Doghri et Billardon, 1995).

Matériau	$E(GPa)$	ν	$\sigma_y(MPa)$	$k(MPa)$	n	$S_d(MPa)$	s_d	β_d	$Y_0(MPa)$
M1	200	0,3	200	10000	0,3	0,5	1	1	0
M2	200	0,3	200	10000	0,6	0,5	1	1	0

La Figure III.4 montre les prédictions de la striction diffuse obtenues avec les critères de bifurcation générale (BG) et bifurcation par point limite (BPL), ainsi qu'avec le critère utilisant le module d'écrouissage scalaire critique ($h^* = 0$), pour les matériaux M1 et M2. Il est à noter que bien que ces prédictions soient associées à l'apparition de la striction diffuse, qui précède la striction localisée, leurs niveaux sont inhabituellement bas (inférieurs à 0,02 et 0,04 pour les matériaux M1 et M2, respectivement), et elles ne représentent pas des déformations limites réalistes, comme observé expérimentalement. Cela est dû aux paramètres fictifs utilisés dans le travail de Doghri et Billardon (1995), et qui sont utilisés dans ce travail pour des fins de validation.

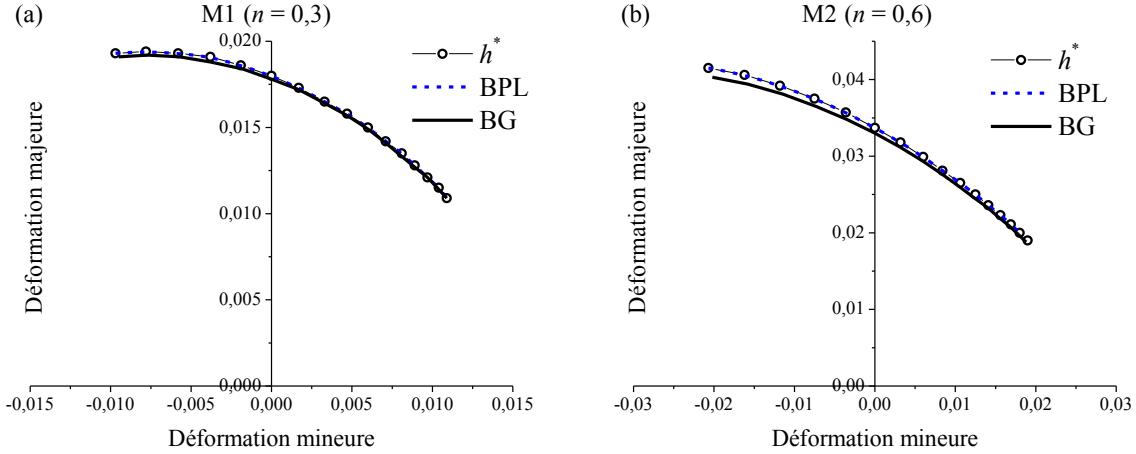

Figure III.4 Prédictions de la striction diffuse avec les critères de bifurcation et la condition du module d'écrouissage critique $h^* = 0$, pour (a) le matériau M1 et (b) le matériau M2.

On peut observer à partir de la Figure III.4 que pour les trajets de déformation proches du trajet de la traction uniaxiale (i.e., la partie extrême gauche de la courbe prédite de striction diffuse), les déformations limites prédites par le critère BG sont légèrement inférieures à celles prédites par le critère BPL. Cette différence est plus perceptible pour le matériau M2 pour lequel le coefficient d'écrouissage n est supérieur à celui du matériau M1 (voir Figure III.4(b)). Cependant, les deux critères BG et BPL prévoient des déformations limites quasi équivalentes pour des trajets de déformation proches du trajet de la traction équi-biaxiale (i.e., la partie extrême droite de la courbe prédite de striction diffuse). Ces résultats sont totalement cohérents avec la classification théorique présentée dans le paragraphe § III.3, où il a été montré que le critère de bifurcation générale (BG) est plus conservatif que le critère de bifurcation par point limite (BPL).

Par rapport aux prédictions de la striction diffuse données par le module d'écrouissage scalaire critique h^*, les résultats associés coïncident exactement avec ceux prédits par le critère BPL, pour les deux matériaux étudiés (voir Figure III.4). Ce résultat est totalement cohérent vu que les deux critères sont basés sur la même condition de singularité du module tangent analytique $\mathbf{C}^{ep}$. Bien que ces deux critères soient implémentés comme deux indicateurs de striction diffuse différents, les résultats numériques obtenus révèlent qu'ils sont bien équivalents.

Concernant la striction localisée, les CLF prédites par les critères PE et PEF sont comparées, dans la Figure III.5, avec la CLF prise du travail de Doghri et Billardon (1995), où le critère PE a été utilisé. On peut observer que les prédictions obtenues avec le critère PE sont en bon accord avec celles de référence, ce qui permet de valider l'approche théorique adoptée ainsi que son implémentation numérique dans le code ABAQUS/Standard. Aussi, la CLF prédite par le critère PEF est légèrement inférieure à celle prédite par le critère PE. Cet ordre de prédiction est, encore une fois, cohérent avec la classification théorique reportée dans le paragraphe § III.3, où il a été montré que le critère PEF est généralement plus conservatif que le critère PE.

Comme discuté précédemment, le lien hiérarchique théorique établi entre le critère BG et le critère PEF peut aussi être vérifié numériquement. La Figure III.6 montre une comparaison entre le critère BG et le critère PEF en termes de prédiction des déformations limites pour les deux matériaux M1 et M2. Au voisinage du trajet de chargement de traction uniaxiale, le critère BG prévoit des déformations critiques de striction légèrement inférieures à celles prédites par le critère PEF. Dans le cas des trajets de déformation avoisinant le trajet de la traction équi-biaxiale, les niveaux des déformations critiques obtenus avec le critère PEF sont nettement supérieurs à ceux obtenus avec le critère BG. Cette comparaison numérique est totalement conforme à la classification théorique établie dans le paragraphe § III.3, qui révèle que le critère BG représente une borne inférieure de tous les critères de bifurcation et est donc, en particulier, plus conservatif que le critère PEF.

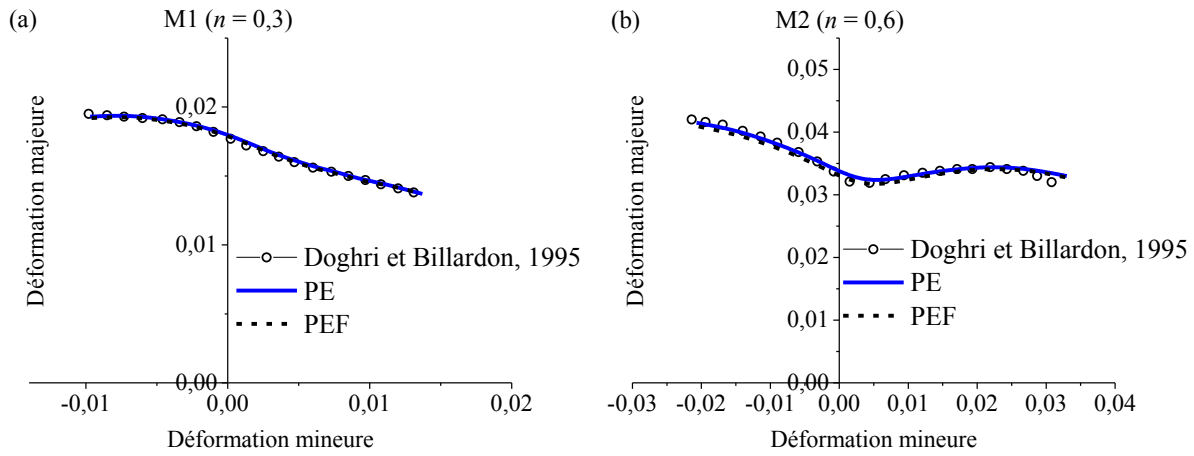

Figure III.5 CLF prédites avec les critères PE et PEF et comparaison avec les résultats de référence pour (a) le matériaux M1 et (b) le matériau M2.

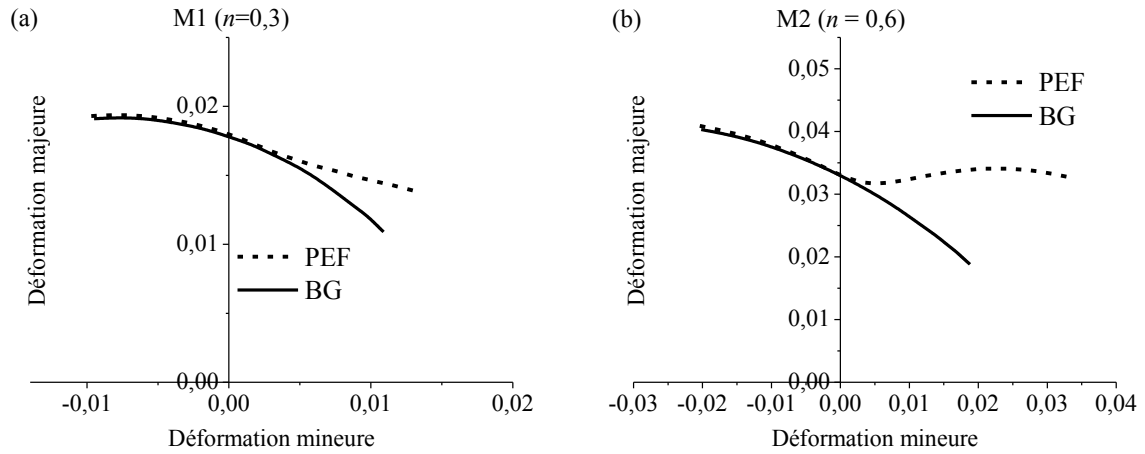

Figure III.6 Comparaison des prédictions de la striction avec les critères BG et PEF pour (a) le matériaux M1 et (b) le matériau M2.

III.4.2. Formulation en grandes déformations

Dans cette section, l'approche adoptée, combinant le modèle de comportement avec les critères de bifurcation, est appliquée dans le cadre d'une formulation en contraintes planes et en grandes déformations. Pour des fins de validation, le critère BG et le critère BPL seront d'abord comparés au critère de force maximum (CFM) proposé par Swift (1952). Ce dernier permet d'obtenir des expressions analytiques pour les déformations limites de striction dans le cas d'un modèle de comportement simplifié, à savoir, le modèle rigide–plastique (sans couplage à l'endommagement) avec une surface de charge isotrope de von Mises et écrouissage isotrope. Ensuite, les critères PEF et PE seront utilisés pour la prédiction des CLF pour l'acier doux anisotrope DC06.

III.4.2.1. Prédiction de la striction diffuse

Avant d'utiliser les critères BG et BPL pour la prédiction de l'apparition de la striction diffuse dans le cas des problèmes en grandes déformation, et pour des fins de validation, nous allons rappeler d'abord le principe du critère de force maximum (Swift'52) utilisé pour la prédiction de la striction diffuse. Aussi, différentes expressions analytiques des déformations critiques associées à l'apparition de la striction diffuse obtenues avec ce critère dans le cas du comportement simplifié seront développées.

Le critère de striction diffuse de Swift (Swift, 1952), connu sous le nom de Critère de Force Maximum (CFM), est une extension du critère de Considère (1885) dans le cas de chargements plans bi-axiaux, en considérant que la striction diffuse aura lieu lorsque les deux forces principales F_1 et F_2 atteignent leurs maxima simultanément. Ce critère peut être exprimé comme suit :

$$\dot{F}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{F}_2 = 0\,, \tag{III.35}$$

où les directions 1 et 2 correspondent, respectivement, à la direction majeure et la direction mineure (voir Figure III.3).

Dans le cas d'un comportement rigide–plastique (sans couplage à l'endommagement) avec écrouissage isotrope, et en considérant l'incompressibilité du matériau ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$), la condition d'apparition de la striction diffuse précédente (voir équation III.35) mène à la forme générale suivante du critère de Swift'52 (voir Annexe B pour le détail des développements) :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}\, d\bar{\varepsilon}} = \frac{\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1}\right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2}\right)^2 \sigma_2}{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_1}\sigma_1 + \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_2}\sigma_2}, \tag{III.36}$$

où σ_1 et σ_2 sont les composantes principales du tenseur de contraintes de Cauchy associées aux forces plane F_1 et F_2, respectivement.

Dans le cas d'un chargement proportionnel avec une surface de charge isotrope de von Mises, l'expression du critère CFM peut être exprimée comme suit :

$$\frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}} = g(\alpha) = \frac{\left(4 - 3\alpha - 3\alpha^2 + 4\alpha^3\right)}{4\left(1 - \alpha + \alpha^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{III.37}$$

où le rapport des contraintes $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ varie entre 0 (pour un trajet de chargement en traction uniaxiale) et 1 (pour un trajet de chargement en traction équi-biaxiale).

Dans le cas de lois d'écrouissage isotrope simples, la déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$, associée à l'apparition de la striction diffuse, peut être obtenue analytiquement à partir de l'équation III.37. Les déformations critiques majeure ε_{1c} et mineure ε_{2c} correspondantes sont obtenues à partir de la loi d'écoulement plastique classique. Elles peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_{1c} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_1}\bar{\varepsilon}_c = \frac{\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}}\bar{\varepsilon}_c \\ \varepsilon_{2c} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_2}\bar{\varepsilon}_c = \frac{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}}\bar{\varepsilon}_c \end{cases}, \tag{III.38}$$

Le Tableau III.3 résume les expressions analytiques de la déformation équivalente critique obtenue avec le critère de striction diffuse de Swift'52 pour quatre lois d'écrouissage isotrope couramment utilisées dans la littérature ; à savoir la loi d'Hollomon, la loi de Swift, la loi de Voce et la loi de Ludwig (voir Annexe B pour les détails des développements). Les déformations critiques majeure et mineure, pour chaque loi d'écrouissage isotrope, peuvent

être déduites de l'équation (III.38). On rappelle que les expressions des déformations critiques sont obtenues dans le cadre d'un comportement rigide–plastique non-couplé à l'endommagement, avec une surface de charge isotrope de von Mises et des trajets de chargement plans proportionnels.

De nouvelles simulations ont été effectuées pour la prédiction des déformations critiques de striction diffuse avec les critères BG et BPL, en adoptant les différentes lois d'écrouissage isotrope citées dans le Tableau III.3. Les paramètres correspondant sont reportés dans le Tableau III.4. Pour toutes ces lois d'écrouissage isotrope, les prédictions de la striction diffuse données par les critères de BG, de BPL et de Swift'52 sont reportées dans la Figure III.7. Les résultats de simulation montrent que les critères BG et BPL prédisent les mêmes déformations critiques de striction diffuse. De plus, les déformations limites de striction données par les solutions analytiques du critère de Swift'52 sont équivalentes à celles obtenues avec les critères de BG et de BPL. Ces résultats sont cohérents avec ceux reportés dans (Abed-Meraim et al., 2014b), où des liens théoriques ont été établis entre le critère de striction diffuse de Swift'52 et le critère de bifurcation générale BG.

Tableau III.3 Expressions analytiques de la déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$ obtenue avec le critère de striction diffuse de Swift'52 pour différentes lois d'écrouissage isotrope.

Loi d'écrouissage isotrope	**Expression**	**Déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$**
Hollomon	$Y = k\bar{\varepsilon}^n$	$\dfrac{n}{g(\alpha)}$
Swift	$Y = k(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon})^n$	$\dfrac{n}{g(\alpha)} - \varepsilon_0$
Voce	$Y = \sigma_y + R_{sat}\left(1 - e^{-C_R\bar{\varepsilon}}\right)$	$\dfrac{1}{C_R} ln\left(\dfrac{R_{sat}\left(C_R + g(\alpha)\right)}{g(\alpha)\left(R_{sat} + \sigma_y\right)}\right)$
Ludwig	$Y = \sigma_y + k\bar{\varepsilon}^n$	Racine de $\left[k\bar{\varepsilon}^n - \dfrac{nk}{g(\alpha)}\bar{\varepsilon}^{n-1} + \sigma_y = 0\right]$

Tableau III.4 Paramètres d'écrouissage isotrope utilisés pour la prédiction de la striction diffuse.

Isotropic hardening law	σ_y (MPa)	k (MPa)	ε_0	n	R_{sat} (MPa)	C_R
Hollomon	–	580	–	0,2	–	–
Ludwig	200	580	–	0,2	–	–
Swift	–	580	$4{,}875\ 10^{-3}$	0,2	–	–
Voce	200	–	–	–	350	10

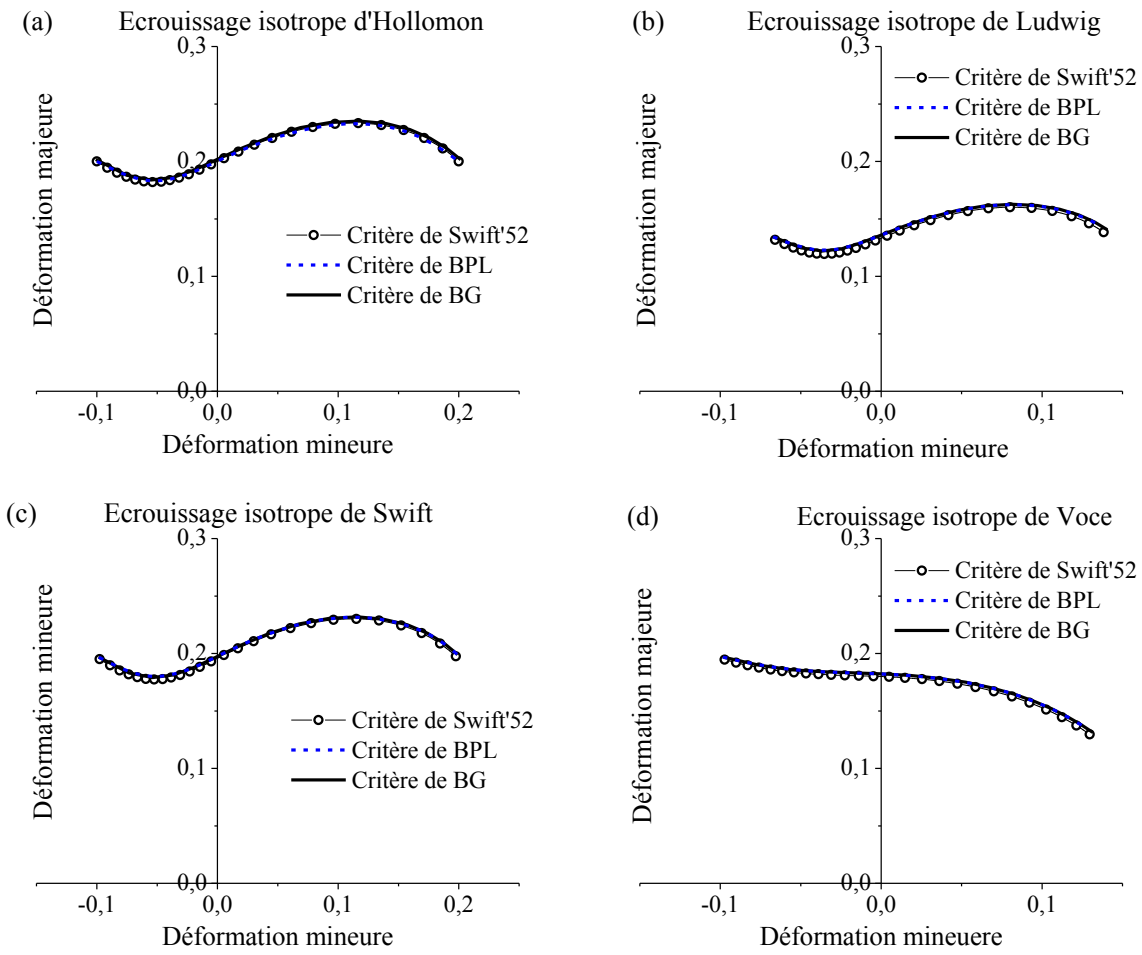

Figure III.7 Déformations critiques de striction diffuse prédites par les critères de BG, BPL et Swift'52 pour différentes lois d'écrouissage isotrope.

III.4.2.2. Prédiction de la striction localisée

Dans cette section, les critères de PE et de PEF sont utilisés pour la prédiction de la striction localisée pour un acier doux DC06. Le comportement de ce matériau est décrit par un modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement de Lemaitre. La surface de charge anisotrope de Hill'48 avec un modèle d'écrouissage mixte isotrope–cinématique est adoptée. L'écrouissage isotrope est décrit par la loi de Swift, tandis que l'écrouissage cinématique est modélisé par la loi d'Armstrong–Frederick. Les paramètres d'élasticité, d'anisotropie plastique et d'écrouissage ont été identifiés expérimentalement par Haddadi et al. (2006). Concernant l'endommagement, il n'a pas été considéré dans la procédure d'identification des paramètres du modèle de comportement élasto-plastique. Ainsi, les paramètres d'endommagement utilisés dans les simulations suivantes ne reflètent pas le comportement en endommagement de l'acier doux DC06, vu qu'ils n'ont pas été identifiés expérimentalement. Les valeurs de ces paramètres d'endommagement ont été tirées des travaux de Haddag et al. (2009), où des paramètres fictifs ont été utilisés pour l'acier doux DC06. Tous les paramètres utilisés dans les simulations sont résumés dans le Tableau III.5.

Tableau III.5 Paramètres d'élasticité, d'anistropie plastique, d'écrouissage et d'endommagement pour l'acier doux DC06 (Haddadi et al., 2006; Haddag et al., 2009).

$E(\text{GPa})$	ν	F	G	H	L	M	N	
200	0,3	0,251	0,297	0,703	1,5	1,5	1,29	
ε_0	$k(\text{MPa})$	n	C_X	$X_{sat}(\text{MPa})$	β_d	s_d	$S_d(\text{MPa})$	Y_0 (MPa)
0,00308	433,59	0,219	1,45	116,7	5	1	2	0

La Figure III.8 montre les CLF prédites avec les critères PEF et PE pour l'acier doux DC06 étudié. On peut observer que ces deux critères de bifurcation prédisent les mêmes déformations limites à striction localisée pour ce matériau étudié. Ce résultat est aussi cohérent avec la classification théorique reportée dans le paragraphe § III.3, selon laquelle le critère PEF est généralement plus conservatif que le critère de PE. En d'autres termes, les déformations limites à striction localisée obtenues avec le critère de PE ne peuvent pas se situer en dessous de leurs homologues obtenues avec le critère de PEF, et cela pour n'importe quel trajet de chargement considéré.

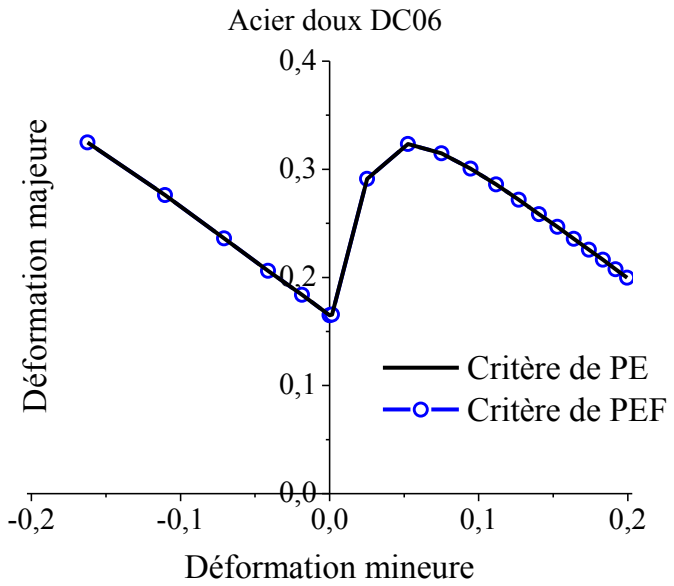

Figure III.8 CLF prédites avec les critères de PEF et PE pour l'acier doux DC06.

L'orientation de la bande de localisation est aussi étudiée, en utilisant les deux critères de bifurcation PEF et PE. Notons que l'orientation de cette bande est définie par un seul angle θ dans le plan de la tôle, vu que la formulation en contraintes planes est adoptée dans ce travail. La Figure III.9 montre les orientations de la bande de localisation obtenues avec les critères PEF et PE pour les différents trajets de chargement allant de la traction uniaxiale (TU) jusqu'à la traction équi-biaxiale (TEB). Ces orientations sont comparées, dans la même figure, avec l'orientation analytique de la bande donnée par le critère de striction localisée de Hill'52

(Hill, 1952). Les orientations obtenues avec les deux critères de bifurcation sont identiques. De plus, elles sont en bon accord avec la formule analytique de Hill'52 ($\theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{-\beta}\right)$) dans la zone des déformations mineures négatives (partie gauche de la CLF).

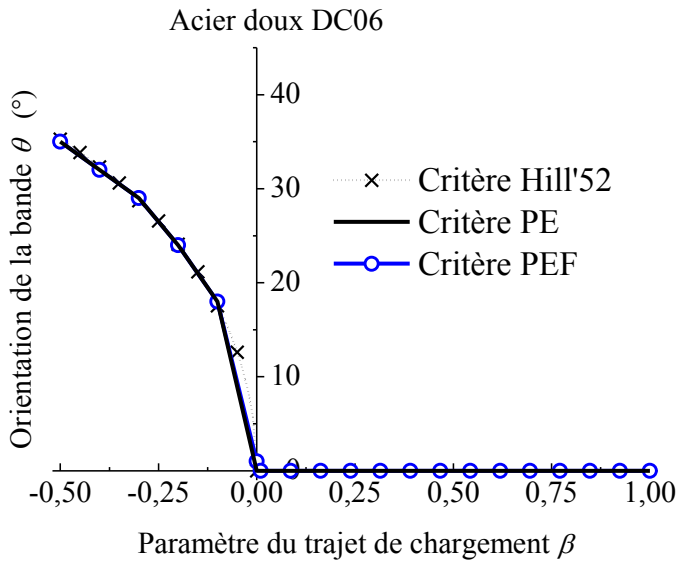

Figure III.9 Orientation de la bande de localisation prédite par les critères PEF, PE et Hill'52 pour l'acier doux DC06.

III.4.3. Effet des termes convectifs

Dans cette section, l'effet des termes convectifs sur la prédiction des déformations critiques de striction est analysé pour l'acier doux DC06. Les paramètres liés à ce matériau sont donnés dans le Tableau III.5. Ces termes convectifs découlent de la formulation des équations constitutives en grandes déformations, et ils interviennent dans l'expression du module tangent $\mathbf{L}$ (voir les tenseurs $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ et $\mathbf{T}_3$ impliqués dans l'équation (III.3)). Comme nous l'avons discuté dans le paragraphe § III.2.5.2, lorsque ces termes convectifs sont négligés, ce qui correspond au cas d'une formulation en petites déformations, le module tangent $\mathbf{L}$ se réduit au module tangent élasto-plastique (ou analytique) $\mathbf{C}^{ep}$ (voir équations (II.52) et (III.28)).

La Figure III.10 montre l'effet des termes convectifs sur la prédiction des déformations limites de striction pour l'acier doux DC06. Les résultats de simulation révèlent que, pour les critères de BG et de BPL (voir Figure III.10(a) et (b)), les termes convectifs jouent un rôle significatif dans la prédiction de la striction diffuse dans toute la plage des trajets de déformation considérée. En effet, ces termes convectifs ont un effet déstabilisant majeur, précipitant ainsi une apparition précoce de la striction diffuse. Cet effet déstabilisant s'avère plus important pour les trajets de déformation avoisinant le trajet en TU.

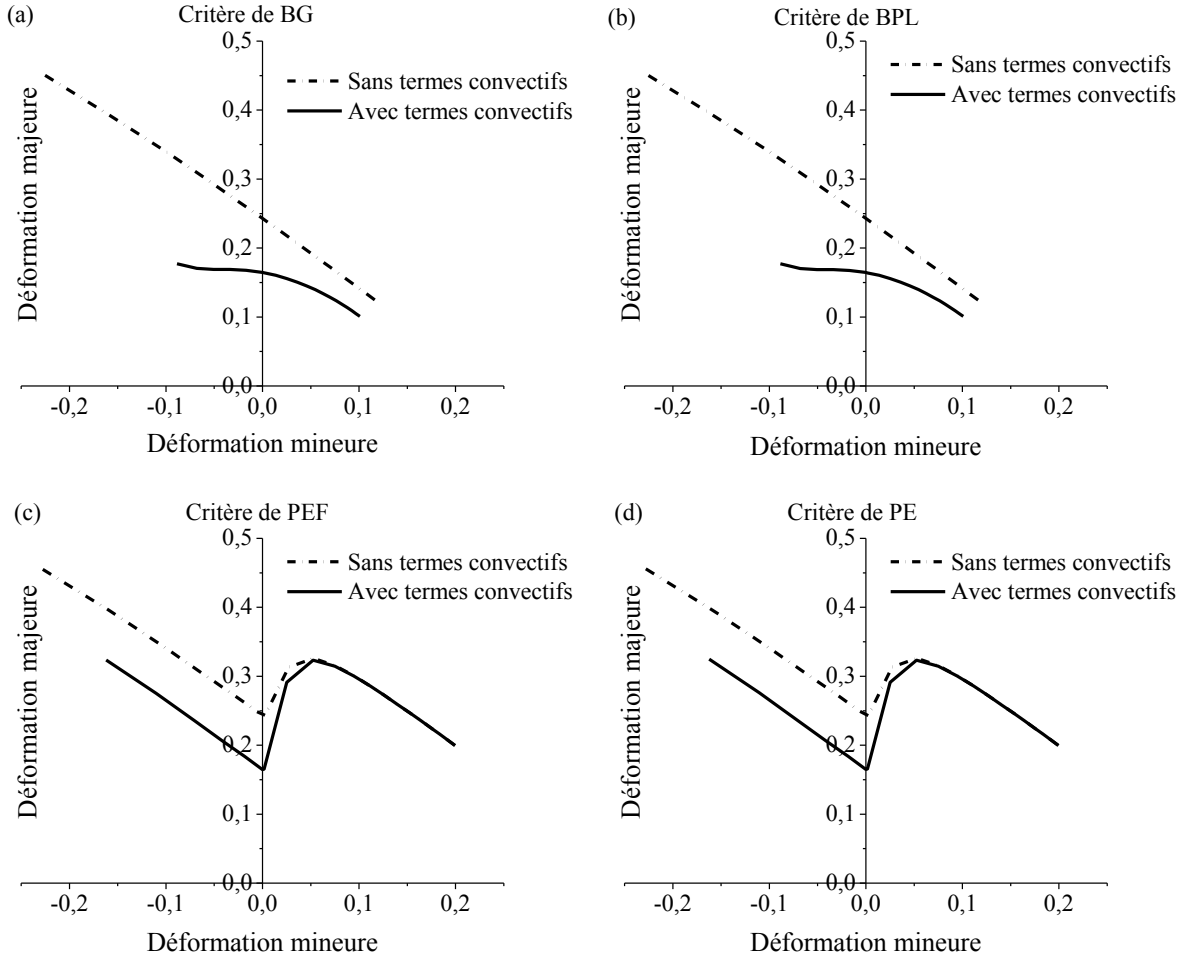

Figure III.10 Effet des termes convectifs sur la prédiction des déformations limites de striction pour l'acier doux DC06 en utilisant (a) le critère de BG, (b) le critère de BPL, (c) le critère de PEF, et (d) le critère de PE.

En ce qui concerne les critères de PE et de PEF, les termes convectifs révèlent aussi un effet considérable sur la prédiction de la striction localisée (voir Figure III.10(c) et (d)). Plus précisément, lorsque les termes convectifs sont pris en compte, les niveaux des déformations limites à la localisation sont plus bas par rapport au cas inverse. Cette diminution dans les déformations prédites est plus significative dans la partie gauche de la CLF, alors qu'un effet plus faible est observable pour les trajets d'expansion biaxiale autour de la traction plane (i.e. $\beta \in [0,\ 0{,}18]$). Concernant les trajets de chargement se situant au voisinage de la traction équi-biaxiale (i.e. β proche de 1), l'effet des termes convectifs est négligeable pour les deux critères de localisation.

Il est à noter que dans un travail récent (voir Mansouri et al., 2014), une étude similaire a été menée en utilisant le modèle d'endommagement de Gurson–Tvergaard–Needleman combiné avec le critère de PE dans le cadre d'une formulation tridimensionnelle en grandes déformations. Dans cette dernière étude, l'effet des termes convectifs sur la prédiction de la localisation a été trouvé négligeable pour tous les trajets de chargement considérés. Ces différences observées entre les deux études, en termes

d'impact des termes convectifs sur la prédiction de la localisation, sont clairement attribuées à la formulation tridimensionnelle utilisée dans l'étude menée par Mansouri et al. (2014), par rapport à l'approche en contraintes planes adoptée dans le présent travail.

III.4.4. Effet d'une pré-déformation

Dans cette section, l'impact des changements du trajet de chargement sur la prédiction de la striction est analysé en considérant deux types de pré-déformations : 5% de pré-déformation en TU et 5% en TEB. Les CLF directes (sans pré-déformation) obtenues avec les critères PEF et PF sont comparées aux CLF séquentielles obtenues après application des pré-déformations en TU et en TEB. Les CLF numériques pour l'acier doux DC06, étudié dans les sections précédentes, sont reportées dans la Figure III.11. Les résultats obtenus montrent que, par rapport à des CLF avec trajets directs, les CLF avec trajets séquentiels sont translatées vers la gauche, dans le cas de la pré-déformation en TU, et vers la droite, dans le cas de la pré-déformation en TEB. L'effet de la pré-déformation sur la prédiction des CLF est cohérent avec des études reportées antérieurement (Franz et al., 2009; Haddag et al., 2009; Mansouri et al., 2014), où différents modèles constitutifs ont été combinés avec le critère PE. Des effets similaires ont été également observés expérimentalement dans la littérature (voir, e.g., Graf et Hosford (1993, 1994)).

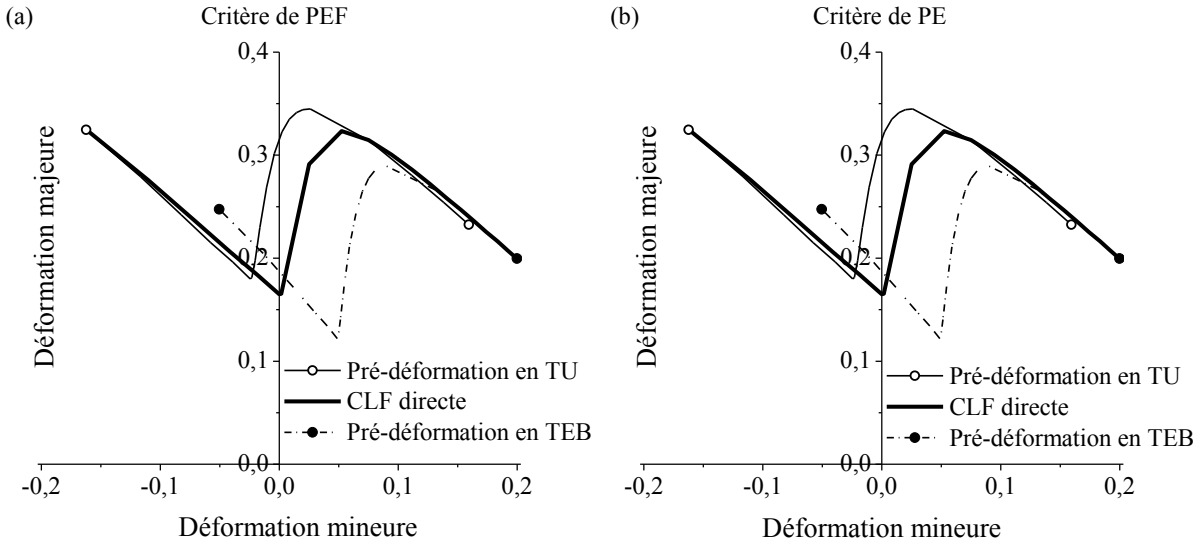

Figure III.11 Effet de la pré-déformation (5% en TU et 5% en TEB) sur la prédiction des CLF pour l'acier doux DC06, en utilisant (a) critère de PEF et (b) critère de PE.

III.4.5. Classification numérique des critères de bifurcation

Pour des fins de comparaison avec la classification théorique établie précédemment (voir paragraphe § III.3), une classification numérique des critères de bifurcation, en termes de leur ordre de prédiction des instabilités plastiques, est réalisée dans cette section. Deux cas de modèles de comportement sont considérés : i) un modèle de plasticité associée utilisant la loi de normalité pour l'écoulement plastique, et ii) un modèle de plasticité non-associée utilisant deux potentiels plastiques différents (un potentiel pour la définition de la surface de charge, et un potentiel pour la définition de la direction de l'écoulement plastique). Pour cette

classification, le principe d'équivalence en déformation a été adopté pour le couplage du modèle élasto-plastique à l'endommagement. Les simulations ont été réalisées dans le cadre d'une formulation en grandes déformations et en contraintes planes. Le matériau utilisé est un alliage d'aluminium AA5182-0 dont les coefficients de Lankford r_0, r_{45} et r_{90} et limites élastiques σ_0, σ_{45}, σ_{90} et σ_b ont été identifiés expérimentalement par Wu et al. (2003). L'ensemble de ces paramètres est reporté dans le Tableau III.6.

Les coefficients d'anisotropie $(F, G, H, L, M \text{ et } N)$ et $(F', G', H', L', M' \text{ et } N')$ déduits des coefficients de Lankford (voir équation (II.39)) et des limites élastiques (voir équation (II.40)), respectivement, sont reportés dans le Tableau III.7.

Tableau III.6 Coefficients de Lankford et limites élastiques pour l'alliage d'aluminium AA5181-0 (Wu et al., 2003).

Paramètre	r_0	r_{45}	r_{90}	σ_0 (MPa)	σ_{45} (MPa)	σ_{90} (MPa)	σ_b (MPa)
Valeur	0,72	0,90	0,84	120,00	116,41	118,26	118,31

Tableau III.7 Coefficients d'anisotropie de l'alliage AA5181-0.

F	G	H	L	M	N
0,498	0,581	0,419	1,512	1,512	1,512
F'	G'	H	L'	M'	N'
0,529	0,500	0,500	1,611	1,611	1,611

L'écrouissage de l'alliage AA5182-0 a été modélisé, sur la base d'un essai de traction uniaxiale, par la loi d'écrouissage isotrope suivante (donnée sous une forme incrémentale) :

$$d\sigma = K_2 \left(1 - \frac{\sigma}{K_1}\right)^n d\varepsilon \,, \tag{III.39}$$

où $K_1 = 385\,\text{MPa}$, $K_2 = 4100\,\text{MPa}$ et $n = 1,2$ (voir Wu et al. (2003)).

Avant d'aborder la classification des critères de bifurcation, il est nécessaire de valider le modèle d'écrouissage précédent. L'essai de traction uniaxiale a été simulé avec le modèle d'écrouissage adopté. La courbe contrainte–déformation obtenue présente un très bon accord avec la courbe expérimentale donnée par Wu et al. (2003) comme le montre la Figure III.12.

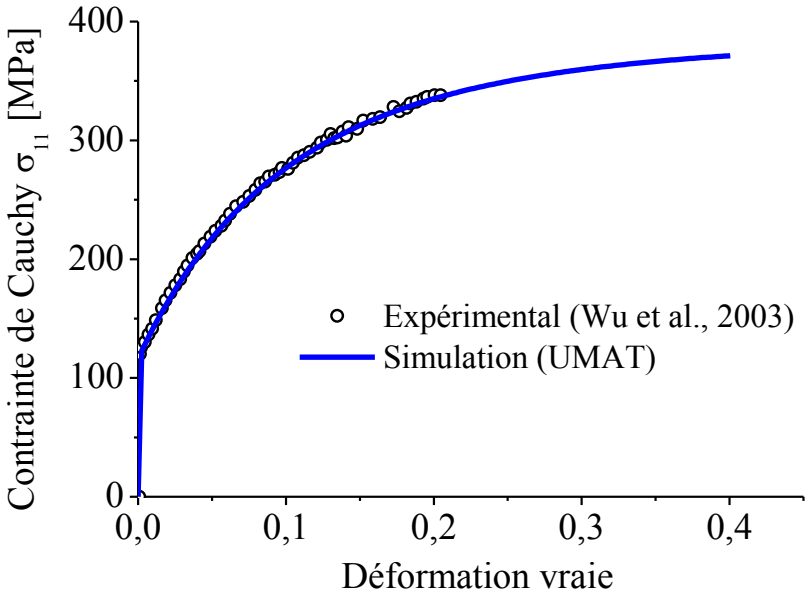

Figure III.12 Comparaison de la courbe contrainte–déformation en TU obtenue avec la UMAT développée et celle obtenue expérimentalement par Wu et al. (2003) pour l'alliage AA5182-0.

L'utilisation des critères de bifurcation pour la prédiction de la striction diffuse et, en particulier, de la striction localisée nécessite l'introduction de l'endommagement dans le modèle de comportement. Étant donné que l'endommagement n'a pas été traité par Wu et al. (2003), des paramètres d'endommagement fictifs sont utilisés dans les simulations suivantes pour l'alliage d'aluminium AA5182-0. Les valeurs de ces paramètres d'endommagement, utilisés dans le cas des deux modèles de plasticité associée et non-associée, sont résumées dans le Tableau III.7.

Tableau III.8 Paramètres d'endommagement fictifs pour l'alliage AA5182-0.

β_d	s_d	S_d (MPa)	Y_0 (MPa)
5	1	2	0

III.4.5.1. Cas d'un modèle de plasticité associée

adoptant la loi de normalité, i.e. le modèle de plasticité associée, le modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement ductile de Lemaitre est combiné aux critères de bifurcation pour prédire l'apparition de la striction diffuse et localisée pour l'alliage d'aluminium AA5182-0. Il est à rappeler que dans le cas de ce modèle de plasticité associée, la surface de charge f_y et la surface d'écoulement plastique F_p sont identiques, et donc les coefficients d'anisotropie déduits des coefficients de Lankford (i.e., *F*, *G*, *H*, *L*, *M* et *N*) sont considérés pour les deux potentiels plastiques f_y et F_p.

Les déformations limites prédites par les critères étudiés sont reportées dans la Figure III.13. Bien que les déformations limites à striction diffuse prédites par les critères de BG et de BPL coïncident pour le matériau étudié, ce qui est aussi le cas entre les critères de striction localisée PEF et de PE, la classification théorique établie dans le paragraphe § III.3 reste bien respectée. Plus précisément, le critère de BG donne une borne inférieure de tous les critères de bifurcation, en termes de prédiction de la striction, alors que le critère de PE fournit la borne supérieure. Des résultats similaires ont été obtenus par Abed-Meraim et al. (2014a), où une formulation tridimensionnelle des critères de bifurcation a été utilisée.

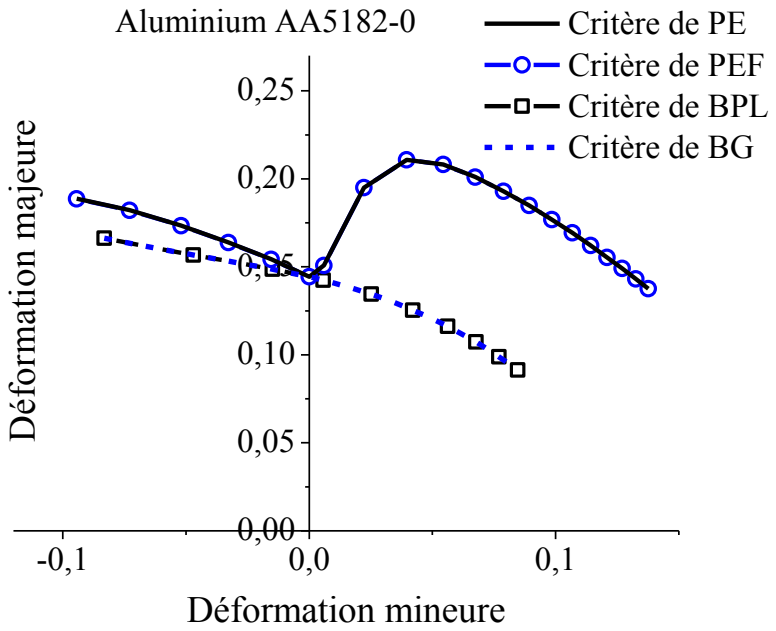

Figure III.13 Ordre de prédiction des déformations limites de striction diffuse et striction localisée par les critères de bifurcation, pour l'alliage d'aluminium AA5182-0, dans le cas d'une loi de plasticité associée.

La Figure III.14 illustre, pour les trajets de chargement : (a) en TU et (b) en TEB, l'évolution de la contrainte de Cauchy durant le chargement. Sur ces courbes sont reportés les points de bifurcation correspondant à l'apparition de la striction diffuse et localisée selon les quatre critères. En traction uniaxiale, on remarque que les points de striction localisée, prédits par les critères PEF et PE, sont confondu et ont lieu juste après l'apparition de la striction diffuse (voir Figure III.14a). Pour le trajet de chargement en TEB (voir Figure III.14b), les points de striction localisée ont lieu bien après l'apparition de la striction diffuse, où le niveau d'endommagement du matériau approche la valeur maximale de 1 (i.e., rupture finale du matériau).

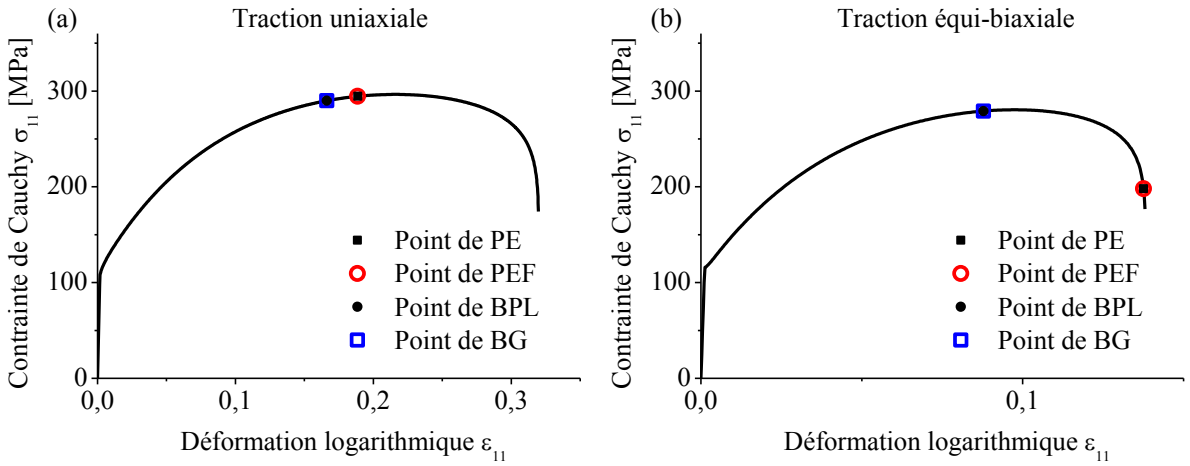

Figure III.14 Points de bifurcation pour les trajets de déformation en (a) TU et (b) TEB dans le cas d'une loi de plasticité associée.

III.4.5.2. Cas d'un modèle de plasticité non-associée

Dans cette section, un modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement de Lemaitre avec une loi de plasticité non-associée est combiné avec les quatre critères de bifurcation adoptés dans ce travail pour des fins de classification. Les coefficients d'anisotropie déduits des coefficients de Lankford (i.e., *F*, *G*, *H*, *L*, *M* et *N*) sont considérés pour la modélisation de la surface de charge f_y, alors que ceux déduits des limites élastiques $\left(i.e., F', G', H', L', M' \text{ et } N'\right)$ sont utilisés pour la modélisation de la surface d'écoulement plastique F_p.

Les déformations limites prédites par les critères étudiés sont montrées dans la Figure III.15. Dans ce cas d'une loi plastique non-associée, la classification théorique des critères de bifurcation est bien respectée pour l'ensemble des trajets de chargement, et en particulier dans la partie des déformations mineures négatives (partie gauche de la CLF). En effet, on peut observer clairement que, proche du trajet de chargement en TU, le critère de BG est celui qui fournit la borne inférieure de tous les critères de bifurcation, en termes de prédiction de la striction, alors que le critère de PE correspond à la borne supérieure. Concernant les critères de BPL et PEF, ces derniers prédisent des déformations limites comprises entre les deux bornes inférieure et supérieure. Dans la partie des déformations mineures positives (partie droite de la CLF), les critères de PEF et PE prédisent les mêmes points de localisation pour le matériau étudié, ce qui est également le cas entre les critères de BG et BPL. Cependant, une légère différence au voisinage du trajet de chargement en TEB est observée entre les prédictions des deux critères BG et BPL sans que l'ordre théorique de prédiction ne soit violé.

La Figure III.16 illustre, pour les trajets de chargement : (a) en TU et (b) en TEB, l'évolution de la contrainte de Cauchy durant le chargement. Sur ces mêmes courbes sont reportés les points de bifurcation correspondant à l'apparition de la striction diffuse et localisée selon les quatre critères. En traction uniaxiale, les points de bifurcation prédits par les critères PEF et PE ne sont pas confondus, ce qui n'est pas le cas en utilisant une loi de

plasticité associée (voir Figures III.13 et 14). Cette observation est également valable entre les deux critères BG et BPL dans le cas des deux trajets particuliers TU et TEB. Cette différence de prédictions entre les deux variantes du modèle de comportement (i.e., loi avec plasticité associée et loi avec plasticité non-associée) est principalement attribuée à la non-symétrie du module tangent analytique $\mathbf{C}^{ep}$ lorsque la plasticité non-associée est considérée, ce qui apporte un effet déstabilisant plus important dans ce cas.

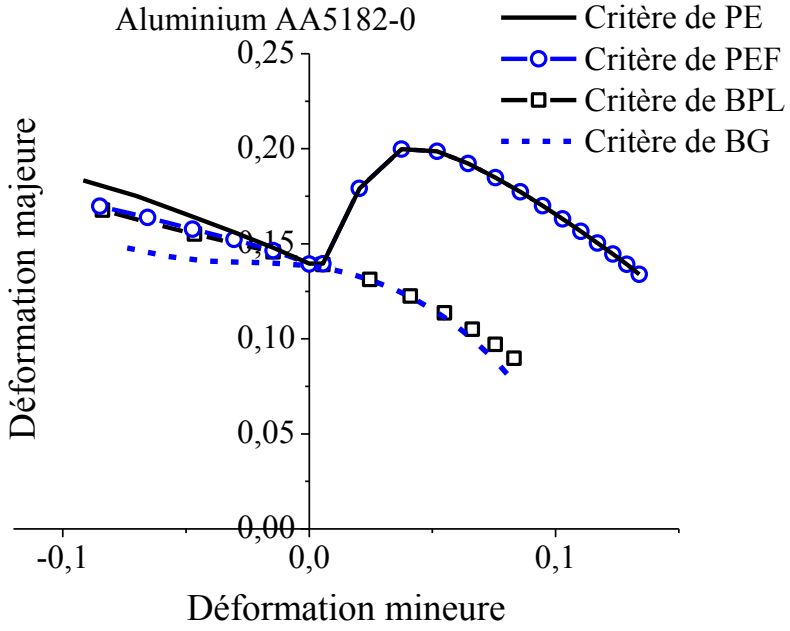

Figure III.15 Ordre de prédiction des déformations limites de striction diffuse et striction localisée par les critères de bifurcation, pour l'alliage d'aluminium AA5182-0, dans le cas d'une loi de plasticité non-associée.

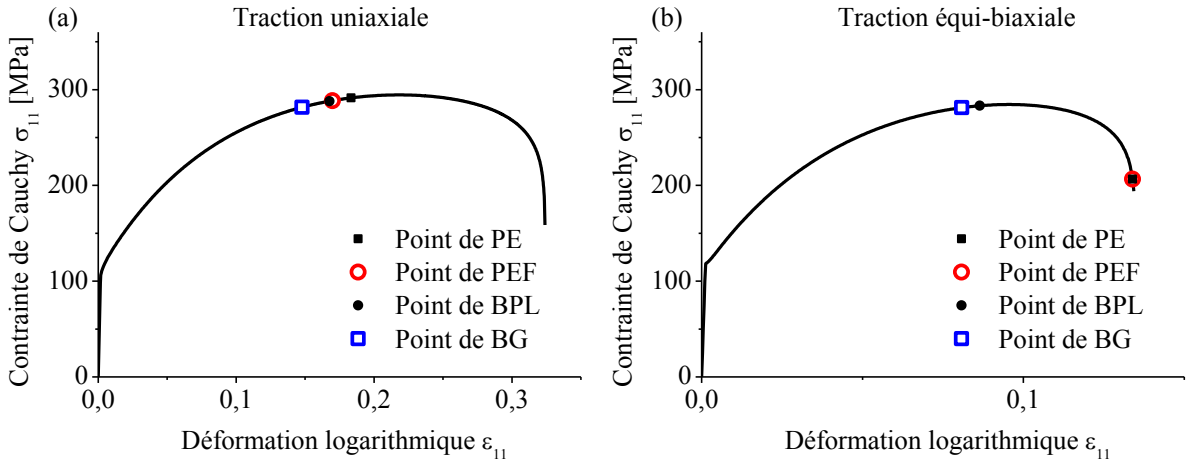

Figure III.16 Points de bifurcation pour les trajets de déformation en (a) TU et (b) TEB dans le cas d'une loi de plasticité non-associée.

III.5. Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation des quatre critères de bifurcation utilisés pour la prédiction de la striction diffuse (critère de BG et de BPL) et la striction localisée (critères de PEF et de PE). D'abord, ces critères ont été développés dans le cadre général d'une formulation tridimensionnelle en grandes déformations, ensuite dans les cadres particuliers d'une formulation en contraintes planes et d'une formulation en petites déformations. Une classification théorique a été établie pour ces critères de bifurcation selon leur ordre de prédiction des instabilités plastiques, en se basant sur les liens théoriques existants entre eux. Avant d'utiliser ces critères pour la prédiction de l'apparition de la striction diffuse et localisée, une étape de validation de ces critères a été réalisée dans le cas d'une formulation en petites et en grandes déformations. Une fois ces critères validés, certains aspects liés à l'effet de la pré-déformation et des termes convectifs sur la prédiction de la striction diffuse et localisée ont été analysés. Finalement, la classification théorique de ces critères a été vérifiée numériquement, dans le cadre d'une plasticité associée et non-associée, en les combinant à un modèle élasto-plastique couplé à l'endommagement pour un alliage d'aluminium AA5182-0 utilisant des paramètres d'endommagement fictifs. Dans le chapitre suivant, cette approche complète sera utilisée pour la prédiction des CLF d'un matériau réel dont les paramètres de plasticité et d'endommagement seront identifiés à partir de mesures expérimentales issues de la littérature.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le travail présenté dans ce manuscrit de thèse s'inscrit dans le cadre de la prédiction des instabilités plastiques, de type striction diffuse et striction localisée, lors de la mise en forme des tôles minces. Dans la littérature, plusieurs approches ont été développées pour la caractérisation la formabilité des tôles minces en utilisant le concept des courbes limites de formage (CLF). Parmi ces approches, nous citons par exemple : méthodes expérimentales pour la détermination des CLF, approches numériques basées sur la méthode des éléments finis, critères théoriques d'apparition de la striction diffuse et localisée (méthode multizones, analyse de bifurcation, etc). Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la prédiction des CLF de matériaux métalliques en s'appuyant sur l'analyse de bifurcation où deux ingrédients sont nécessaires en plus des critères prédictifs adoptés.

- Concernant la modélisation du comportement, un modèle phénoménologique, à plasticité indépendante du temps physique, a été adopté. Il prend en considération les différents phénomènes physiques rencontrés en mise en forme des tôles métalliques, notamment l'anisotropie initiale du matériau, l'adoucissement et l'endommagement accompagnant les grandes déformations. La théorie de l'endommagement continue a été considérée dans ce travail. L'endommagement est introduit à travers une variable scalaire isotrope décrivant la dégradation des propriétés élastiques du matériau. Un cadre thermodynamique général a été utilisé pour déduire les équations constitutives couplées à l'endommagement selon les principes d'équivalence en déformation et d'équivalence en énergie. De plus, les cas de lois d'écoulement plastique associée et non-associée ont été considérés. les équations constitutives résultantes ont été écrites sous une forme incrémentale dans le but de simplifier leurs implémentations numérique dans les codes de calcul par éléments finis. Concernant l'intégration numérique des variables internes du modèle, un schéma d'intégration explicite utilisant la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 (RK4) a été adopté. Le modèle numérique résultant a été implémenté dans le code de calcul par éléments finis ABAQUS / Standard et validé avant d'être utilisé pour la prédiction des instabilités plastiques.

- Afin de prédire l'apparition des instabilités plastiques de type striction diffuse et striction localisée, quatre critères basés sur l'analyse de bifurcation ont été adoptés : deux critères de striction diffuse basés sur la bifurcation générale (BG) et la bifurcation par point limite (BPL), et deux critères de striction localisée basés sur la perte d'ellipticité (PE) et la perte d'ellipticité forte (PEF). Ces critères ont été développés dans le cadre général d'une formulation élasto-plastique tridimensionnelle et en grandes déformation. Ensuite, ils ont été écrits dans les cas particuliers des problèmes en contraintes planes et en petites déformations. Étant donné que ces quatre critères sont basés sur la même théorie de bifurcation, des liens théoriques ont été établis entre eux dans le but de les classifier selon leur ordre de prédiction des instabilités plastiques. Ces critères ont été combinés avec les équations constitutives développées afin de prédire l'apparition des instabilités plastiques pour une sélection de matériaux, et de valider numériquement leur classification théorique dans les deux cas de

plasticité associée et non-associée. Dans le cas particulier de comportement élastique–plastique sans endommagement avec des lois d'écrouissage isotropes (e.g., loi d'Hollomon, loi de Swift, loi de Voce et loi de Ludwig), les critères BG et BPL ont été comparés au critère de force maximum (CFM), qui permet, dans ce cas particulier de comportement, d'obtenir des expressions analytiques des déformations limites associées à l'apparition de la striction diffuse. D'autres effets ont été analysés notamment l'effet des termes convectifs issus de la formulation en grandes déformations sur l'apparition de la striction, ainsi que l'effet d'une pré-déformation sur la prédiction des CLFs. Par rapport à la littérature, des résultats similaires ont été obtenus avec la présente approche combinant des équations constitutives à l'analyse de bifurcation.

- **Perspectives**

- A l'issu des travaux de recherche présentés dans cette thèse, plusieurs perspectives sont envisageables :

- Concernant la modélisation, le modèle de comportement développé dans de manuscrit prend en considération les différents phénomènes physiques rencontrés en mise en forme. Pour la modélisation de l'anisotropie initiale, seulement deux surfaces de charge ont été considérées (von Mises et Hill'48). La considération d'autres surfaces de charge non-quadratiques (Banabic et al., 2003; Barlat et al., 1991, 1997, Karafillis and Boyce, 1993, …) s'avère intéressante. En effet, la forme de la surface de charge peut affecter les limites de ductilité du matériau. Aussi, la considération d'un endommagement anisotrope (variable d'endommagement tensorielle) peut être une voie intéressante afin de mieux comprendre l'interaction entre endommagement et la localisation des déformations dans les différentes directions. Cependant, un travail d'identification important basé sur des mesures tridimensionnelles doit accompagner ce type de modèle de comportement avancé ;

- Par rapport à l'identification des paramètres matériaux, et plus précisément les paramètres gouvernant l'évolution de l'endommagement, le choix d'une observable expérimentale basée sur une mesure globale de type force–déplacement en traction uniaxiale ne permet pas d'identifier un jeu unique de paramètres matériau, ce qui affecte directement les limites de formabilité prédites. L'utilisation d'observables plus riches en termes de mesures ou une combinaison d'observables issues de différents essais (e.g., traction uniaxiale, traction équi-biaxiale, cisaillement,, etc.) peut améliorer les résultats d'identification en particulier en grandes déformations. Dans ce contexte, une autre voie peut être explorée, qui consiste à utiliser des mesures des champs de déplacement surfaciques/volumiques à partir d'essais mécanique à géométries complexe. En effet, cette approche constitue une source de données locales beaucoup plus riche que celle basée sur des essais homogènes avec des jauges de déformations.

- Deux approches ont été développées dans la littérature pour modéliser l'endommagement accompagnant les grandes déformations et induisant le régime adoucissant en le couplant aux lois constitutives ; l'approche CDM (adopté dans le présent travail) et l'approche basée sur des modèles d'endommagement de type Gurson (e.g., modèle de Gurson–Tvergaard–Needleman). Une confrontation de ces deux modèles pour différents

matériaux s'avère aussi intéressante afin de déterminer l'approche la plus adaptée pour la détermination des CLFs tôles minces. Cette confrontation devra être aussi accompagnée d'une étape d'identification des paramètres de chaque modèle sur la base des mêmes données expérimentales.

ANNEXE A

DÉTERMINATION DU MODULE TANGENT ANALYTIQUE

Le module tangent analytique $\mathbf{L}$ est un tenseur d'ordre 4 reliant le taux de la contrainte nominale $\dot{\mathbf{N}}$ au gradient de vitesse $\mathbf{G}$, par la relation suivante :

$$\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{L} : \mathbf{G} . \tag{A.1}$$

Dans le cadre d'une formulation Lagrangienne actualisée, Le module tangent analytique $\mathbf{L}$ est donné par l'expression suivante :

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}^{\mathrm{ep}} + \mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_3 , \text{ avec } \begin{cases} \mathrm{T}_{1ijkl} = \sigma_{ij}\delta_{kl} \\ \mathrm{T}_{2ijkl} = \dfrac{1}{2}\left(\delta_{ik}\sigma_{lj} + \delta_{il}\sigma_{kj}\right) \\ \mathrm{T}_{3ijkl} = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\delta_{jl} - \sigma_{il}\delta_{jk}\right) \end{cases} . \tag{A.2}$$

Dans cette annexe, nous développons les expressions des différents termes convectifs $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ et $\mathbf{T}_3$, intervenant dans le module tangent $\mathbf{L}$.

Rappelons d'abord, le lien entre le tenseur des contraintes nominales $\mathbf{N}$ et le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$. Ce lien est donné par la relation suivante :

$$J\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} , \tag{A.3}$$

où $\mathbf{F}$ est le tenseur gradient de transformation et J son Jacobien (i.e., le déterminant de $\mathbf{F}$). En description Lagrangienne actualisée (i.e, $\mathbf{F} = \mathbf{I}$ et $J = 1$), les deux tenseurs $\mathbf{N}$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont égaux $\mathbf{N} = \boldsymbol{\sigma}$, mais leurs taux ne le sont pas. La relation entre le taux de contraintes nominale $\dot{\mathbf{N}}$ et le taux de contraintes de Cauchy $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ est donnée dans la configuration de référence par :

$$\dot{\mathbf{N}} = J\mathbf{F}^{-1}\left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{D}\right)\right). \tag{A.4}$$

Dans la configuration actuelle, elle est donnée par :

$$\dot{\mathbf{N}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}\left(\mathbf{D}\right). \tag{A.5}$$

La loi hypo-élastique couplée à l'endommagement peut être écrite dans le repère tournant en utilisant le relation suivante :

$$\overset{\nabla}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{C}:\left(\mathbf{D}-\mathbf{D}^{\mathrm{P}}\right), \tag{A.6}$$

où $\overset{\nabla}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}$ désigne la dérivée de Jaumann de la contrainte effective de Cauchy. Elle est définie par :

$$\overset{\nabla}{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{W} - \mathbf{W}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \tag{A.7}$$

où $\mathbf{W}$ est le tenseur taux de rotation, donnée par la partie anty-symétrique du gradient de vitesse $\mathbf{G}$.En combinant les deux équations précédentes (A.6) et (A.7), la dérivée temporelle de la contrainte effective de Cauchy est donnée par :

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = \mathbf{C}:\left(\mathbf{D}-\mathbf{D}^{\mathrm{P}}\right) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{W} + \mathbf{W}\cdot\tilde{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{A.8}$$

En introduisant la relation entre la contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et la contrainte effective $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, donnée par $\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$, dans l'équation (A.8), on obtient :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{d}\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (1-d)\mathbf{C}:\left(\mathbf{D}-\mathbf{D}^{\mathrm{P}}\right) - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W} + \mathbf{W}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \dot{d}\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}. \tag{A.9}$$

En remplaçant cette équation dans (A.5) et en considérant la composition additive du tenseur $\mathbf{G}$ (i.e, $\mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$), le taux de la contrainte nominale sera donné par :

$$\dot{\mathbf{N}} = \underbrace{(1-d)\mathbf{C}:\left(\mathbf{D}-\mathbf{D}^{\mathrm{P}}\right) - \dot{d}\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}}}_{\mathbf{E}_1} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D})}_{\mathbf{E}_2} - \underbrace{\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{E}_3} - \underbrace{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W}}_{\mathbf{E}_4}. \tag{A.10}$$

1- Détermination de $\mathbf{E}_1$

En considérant les équations (II.45) et (II.48), l'expression de $\mathbf{E}_1$ est donnée par :

$$\mathbf{E}_1 = (1-d)\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} - \dot{d}\,\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\mathbf{ep}}:\mathbf{D}, \tag{A.11}$$

avec $\mathbf{C}^{\mathbf{ep}}$ est le module tangent élasto-plastique donnée par l'équation (II.52).

Sous une forme matricielle, l'équation précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{ep}\, D_{kl} &= C_{ijkl}^{ep}\left(\frac{G_{kl}+G_{lk}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}C_{ijkl}^{ep}\, G_{kl} + \frac{1}{2}C_{ijkl}^{ep} G_{lk}\ . \\ &= C_{ijkl}^{ep}\, G_{kl} \end{aligned} \tag{A.12}$$

Donc, l'expression de $\mathbf{E}_1$ peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{C}^{\mathbf{ep}} : \mathbf{D} = \mathbf{C}^{\mathbf{ep}} : \mathbf{G}\ . \tag{A.13}$$

2- Détermination de $\mathbf{E}_2$

Le terme $\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D})$ peut s'écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{tr}(\mathbf{D}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{I}:\mathbf{D}) = (\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{I}):\mathbf{D}\,. \tag{A.14}$$

Sous une forme matricielle, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}\, D_{kk} &= \sigma_{ij}\,\delta_{kl} D_{kl} \\ &= \sigma_{ij}\,\delta_{kl}\left(\frac{G_{kl}+G_{lk}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\delta_{kl} G_{kl} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\delta_{kl} G_{lk} \\ &= \sigma_{ij}\,\delta_{kl} G_{kl} \end{aligned} \quad . \tag{A.15}$$

Donc, l'expression de $\mathbf{E}_2$ peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{E}_2 = (\boldsymbol{\sigma}\otimes\mathbf{I}):\mathbf{G} = \mathbf{T}_1 : \mathbf{G}\,, \tag{A.16}$$

avec $\mathrm{T}_{1ijkl} = \sigma_{ij}\delta_{kl}$.

3- Détermination de $\mathbf{E}_3$

Le terme $\mathbf{D}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$D_{ik}\sigma_{kj} = D_{lk}\delta_{il}\sigma_{kj}\,, \tag{A.17}$$

$$D_{il}\sigma_{lj} = D_{kl}\delta_{ik}\sigma_{lj} \ . \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned} D_{im}\sigma_{mj} &= \frac{1}{2}\left(D_{kl}\delta_{ik}\sigma_{lj} + D_{lk}\delta_{il}\sigma_{kj}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\sigma_{lj} + \delta_{il}\sigma_{kj}\right)D_{kl} \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\sigma_{lj} + \delta_{il}\sigma_{kj}\right)G_{kl} \end{aligned} \tag{A.19}$$

Donc, l'expression de $\mathbf{E}_3$ peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{T}_2 : \mathbf{G} \ , \tag{A.20}$$

avec $\mathrm{T}_{2ijkl} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\sigma_{lj} + \delta_{il}\sigma_{kj}\right)$

4- Détermination de $\mathbf{E}_4$

Le terme $\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{W}$ peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\sigma_{ik}W_{kj} = \sigma_{ik}\delta_{jl}W_{kl} \ , \tag{A.21}$$

$$\sigma_{il}W_{lj} = -\sigma_{il}W_{jl} = -\sigma_{il}\delta_{jk}W_{kl} \ , \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{il}W_{lj} &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\delta_{jl}W_{kl} - \sigma_{il}\delta_{jk}W_{kl}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\delta_{jl} - \sigma_{il}\delta_{jk}\right)W_{kl} \ . \\ &= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\delta_{jl} - \sigma_{il}\delta_{jk}\right)G_{kl} \end{aligned} \tag{A.23}$$

Donc, l'expression de $\mathbf{E}_4$ peut être écrite comme suit :

$$\mathbf{E}_4 = \mathbf{T}_3 : \mathbf{G} \ , \tag{A.24}$$

avec $\mathrm{T}_{3ijkl} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ik}\delta_{jl} - \sigma_{il}\delta_{jk}\right)$.

ANNEXE B

DÉVELOPPEMENT DU CRITÈRE DE FORCE MAXIMUM

Des observations expérimentales ont montré que la striction diffuse apparait, dans le cas particulier de la traction uni-axiale, lorsque la force dans la direction du chargement atteint son maximum (Considère, 1885). Un critère basé sur cette observation a été développé pour la prédiction de la striction diffuse dans le cas d'un chargement uniaxial. Ensuite, il a été étendu au cas des chargements bi-axiaux pour la prédiction de la striction diffuse (Swift, 1952). Dans ce qui suit, ce critère, nommé Critère de Force Maximum (CFM), sera développé dans les cas d'un chargement uniaxial et des chargements bi-axiaux. Aussi, les expressions des déformations limites (en striction diffuse) seront données pour différentes lois d'écrouissage isotrope dans le cas de comportement plastique simplifié.

1- Striction en chargement uniaxial (Considère, 1885)

Dans le cas d'un essai de traction uni-axiale en chargement monotone sur une éprouvette, la condition d'effort maximum se traduit par :

$$\dot{F}_1 = 0\,, \tag{B.1}$$

où F_1 est la force appliquée sur l'éprouvette, et l'indice 1 indique la direction du chargement principal.

En introduisant la contrainte de Cauchy ($F_1 = \sigma_1 S$), l'équation (B.1) peut s'écrire :

$$\dot{F}_1 = \dot{\sigma}_1 S + \sigma_1 \dot{S} = 0\,, \tag{B.2}$$

avec S la section de l'éprouvette et σ_1 la composante principale majeure du tenseur de contraintes de Cauchy. L'équation (B.2) peut s'écrire aussi sous la forme :

$$\frac{\dot{F}_1}{F_1} = \frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} + \frac{\dot{S}}{S} = 0\,. \tag{B.3}$$

En considérant la condition d'incompressibilité plastique ($\dot{\varepsilon}_1 = -\frac{\dot{S}}{S}$), la condition d'effort maximum (B.3) devient :

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} - \dot{\varepsilon}_1 = 0\,, \tag{B.4}$$

où ε_1 est la composante principale majeure du tenseur des déformations logarithmiques.

Dans le cas de tôles métalliques homogènes, isotrope, soumise à un chargement plan, et avec un comportement simplifié (surface de charge de von Mises et écrouissage isotrope d'Hollomon $Y = k\bar{\varepsilon}^n$), la contrainte équivalente de von Mises est donnée par :

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 . \tag{B.5}$$

De plus, la loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \dot{\lambda} . \tag{B.6}$$

L'évolution de la loi d'écrouissage s'écrit :

$$\frac{\dot{Y}}{\dot{\bar{\varepsilon}}} = nk\bar{\varepsilon}^{n-1} = \frac{nY}{\bar{\varepsilon}} , \tag{B.7}$$

où Y représente la taille de la surface de charge.

En l'absence de l'écrouissage cinématique ($\bar{\sigma} = Y$), la condition d'effort maximum au moment de l'apparition de la striction diffuse est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{n}{\bar{\varepsilon}_c} = 1 , \tag{B.8}$$

avec $\bar{\varepsilon}_c$ est la déformation plastique critique. Il est à noter que dans le cas particulier du comportement simplifié décrit ci-dessus (i.e., surface de charge de von Mises et écrouissage isotrope d'Hollomon), cette déformation critique correspond à l'exposant d'écrouissage n.

2- Striction en chargement bi-axial (Swift, 1952)

Dans le cas de chargements plans bi-axiaux, le critère de force maximum est basé sur l'hypothèse selon laquelle la striction diffuse se produit lorsque les deux efforts principaux atteignent leurs valeurs maximales simultanément. Cette simultanéité se traduit par :

$$\dot{F}_1 = 0 \text{ et } \dot{F}_2 = 0 . \tag{B.9}$$

La condition précédente peut être exprimée en fonction des contraintes de Cauchy comme suit :

$$\frac{\dot{\sigma}_1}{\sigma_1} = \dot{\varepsilon}_1 \text{ et } \frac{\dot{\sigma}_2}{\sigma_2} = \dot{\varepsilon}_2 . \tag{B.10}$$

La dérivation de la contrainte équivalente mène à :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \dot{\sigma}_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \dot{\sigma}_2 . \tag{B.11}$$

En considérant la condition d'effort maximum (B.10) dans le cas d'un chargement bi-axiale, l'équation précédente devient :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2 . \tag{B.12}$$

En remplaçant les exprissions de $\dot{\varepsilon}_1$ et $\dot{\varepsilon}_2$ à partir de la loi d'écoulement plastique (i.e. $\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \dot{\bar{\varepsilon}}$ et $\dot{\varepsilon}_2 = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \dot{\bar{\varepsilon}}$), l'équation (B.12) devient :

$$\dot{\bar{\sigma}} = \left(\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \right)^2 \sigma_2 \right) \dot{\bar{\varepsilon}} . \tag{B.13}$$

D'autre part, le travail plastique $\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}$ s'écrit :

$$\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}} = \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2 = \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \sigma_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \sigma_2 \right) \dot{\bar{\varepsilon}} . \tag{B.14}$$

En combinant les équations (B.13) et (B.14), la condition du critère de force maximum s'écrit :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \right)^2 \sigma_1 + \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \right)^2 \sigma_2}{\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \sigma_1 + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \sigma_2} . \tag{B.15}$$

Dans le cas d'une plasticité isotrope de von Mises ($\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma' : \sigma'} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$), et des condition de contraintes planes avec chargement bi-axial proportionnel (σ_1, $\sigma_2 = \alpha \sigma_1$ et $\sigma_3 = 0$), les dérivées partielles de la contrainte équivalente sont données en fonction de α comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}} = \frac{2 - \alpha}{2\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}} \\ \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1}{2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}} = \frac{(2\alpha - 1)}{2\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}} \end{cases} . \tag{B.16}$$

La condition de Force Maximum (B.15), devient alors :

$$\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\sigma} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}}} = \left(1 - \frac{3}{4}\alpha - \frac{3}{4}\alpha^2 + \alpha^3 \right) \left(1 - \alpha + \alpha^2 \right)^{-3/2} = g(\alpha) . \tag{B.17}$$

Les déformations critiques principales au point de la striction diffuse sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{1c} = \dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_1} \bar{\varepsilon}_c \\ \varepsilon_{2c} = \dfrac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_2} \bar{\varepsilon}_c \end{cases} . \tag{B.18}$$

Des expressions analytiques de la déformation plastique critique $\bar{\varepsilon}_c$ sont données ci-dessous pour des lois classiques d'écrouissage isotrope (loi d'Hollomon, loi de Swift, loi de Voce et loi de Ludwig).

a- Loi d'écrouissage d'Hollomon

En utilisant la loi puissance d'Hollomon pour l'écrouissage isotrope, l'évolution de la taille de la surface de charge est donnée par la relation suivante :

$$Y = K\bar{\varepsilon}^n . \tag{B.19}$$

La condition de force maximum s'écrit dans ce cas comme :

$$\frac{\dot{Y}}{Y\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{nK\bar{\varepsilon}_c^{\,n-1}}{K\bar{\varepsilon}_c^{\,n}} = \frac{n}{\bar{\varepsilon}_c} . \tag{B.20}$$

En utilisant l'équation (B.17) avec le résultat de l'équation ci-dessus, la déformation critique $\bar{\varepsilon}_c$ à striction diffuse est donnée par :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{n}{g(\alpha)} , \tag{B.21}$$

où $g(\alpha) = \left(1 - \frac{3}{4}\alpha - \frac{3}{4}\alpha^2 + \alpha^3\right)\left(1 - \alpha + \alpha^2\right)^{-3/2}$

b- Loi d'écrouissage de Swift

La condition de force maximum dans le cas de l'écrouissage de Swift (i.e. $Y = K\left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}\right)^n$) est donnée par :

$$\frac{\dot{Y}}{Y\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{nK\left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_c\right)^{n-1}}{K\left(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_c\right)^n} = \frac{n}{\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon}_c} . \tag{B.22}$$

En utilisant l'équation (B.17) avec le résultat de l'équation ci-dessus, la déformation critique $\bar{\varepsilon}_c$ à striction diffuse est donnée par :

$$\varepsilon_c = \left(\frac{n}{g(\alpha)} - \varepsilon_0 \right). \tag{B.23}$$

c- Loi d'écrouissage de Voce

En considérant cette loi d'écrouissage de Voce, l'évolution de la taille de la surface de charge est donnée par :

$$Y = Y_0 + R_{sat}\left(1 - e^{-C_r \bar{\varepsilon}}\right). \tag{B.24}$$

La condition de force maximum est donnée par :

$$\frac{\dot{Y}}{Y\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{C_r R_{sat} e^{-C_r \bar{\varepsilon}_c}}{Y_0 + R_{sat} - R_{sat} e^{-C_r \bar{\varepsilon}_c}} = g(\alpha). \tag{B.25}$$

Avec la condition ci-dessus, la déformation critique $\bar{\varepsilon}_c$ à striction diffuse dans le cas de l'écrouissage de Voce est donnée par l'expression suivante :

$$\bar{\varepsilon}_c = \frac{1}{C_r} \ln\left[\frac{R_{sat}\left(C_r + g(\alpha)\right)}{g(\alpha)\left(R_{sat} + Y_0\right)} \right]. \tag{B.26}$$

d- Loi d'écrouissage de Ludwig

En considérant la loi d'écrouissage de Ludwig (i.e. $Y = Y_0 + K\bar{\varepsilon}^n$), la condition de force maximum est donnée par :

$$\frac{\dot{Y}}{Y\dot{\bar{\varepsilon}}} = \frac{nK\varepsilon_c^{\,n-1}}{Y_0 + K\varepsilon_c^{\,n}} = g(\alpha). \tag{B.27}$$

La déformation critique $\bar{\varepsilon}_c$ à striction diffuse est la solution de l'équation suivante :

$$K\varepsilon_c^{\,n} - \frac{nK}{g(\alpha)} \bar{\varepsilon}_c^{\,n-1} + Y_0 = 0. \tag{B.28}$$

Le tableau suivant résume les expressions analytiques de la déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$ obtenue avec le critère de striction diffuse de Swift'52 pour les différentes lois d'écrouissage isotrope précédentes. Les déformations critiques principales ε_{1c} et ε_{2c} sont déduites à partir de l'équation (B.18).

Tableau B.1 Expressions analytiques de la déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$ obtenue avec le critère de striction diffuse de Swift'52 pour différentes lois d'écrouissage isotrope.

Loi d'écrouissage isotrope	**Expression**	**Déformation équivalente critique $\bar{\varepsilon}_c$**
Hollomon	$Y = k\bar{\varepsilon}^n$	$\dfrac{n}{g(\alpha)}$
Swift	$Y = k(\varepsilon_0 + \bar{\varepsilon})^n$	$\dfrac{n}{g(\alpha)} - \varepsilon_0$
Voce	$Y = Y_0 + R_{sat}\left(1 - e^{-C_R\bar{\varepsilon}}\right)$	$\dfrac{1}{C_R} ln\left(\dfrac{R_{sat}\left(C_R + g(\alpha)\right)}{g(\alpha)\left(R_{sat} + Y_0\right)}\right)$
Ludwig	$Y = Y_0 + k\bar{\varepsilon}^n$	Racine de $\left[k\bar{\varepsilon}^n - \dfrac{nk}{g(\alpha)}\bar{\varepsilon}^{n-1} + Y_0 = 0\right]$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Abed-Meraim, F. (1999). Quelques problèmes de stabilité et de bifurcation des solides visqueux. PhD Thesis. Ecole Polytechnique, Palaiseau.

Abed-Meraim, F., Balan, T., Altmeyer, G., 2014a. Investigation and comparative analysis of plastic instability criteria: application to forming limit diagrams. International Journal Advanced Manufacturing Technology 71, 1247–1262. DOI: 10.1007/s00170-013-5530-8.

Abed-Meraim, F., Peerlings, R.H.J., Geers, M.G.D., 2014b. Bifurcation analysis versus maximum force criteria in formability limit assessment of stretched metal sheets. International Journal of Applied Mechanics 6, DOI: 10.1142/S1758825114500641.

Abu Al-Rub, R.K., Voyiadjis, G.Z., 2003. On the coupling of anisotropic damage and plasticity models for ductile materials. International Journal of Solids and Structures 40, 2611–2643. DOI: 10.1016/S0020-7683(03)00109-4.

Altmeyer, G., 2011. Modélisation théorique et numérique des critères d'instabilité plastique. Application à la prédiction des phénomènes de striction et de localisation lors d'opérations de mise en forme par emboutissage. (PhD Thesis). Arts et Métiers ParisTech, Metz.

Armstrong, P.J., Frederick, C.O., 1966. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect (G.E.G.B. Report RD/B/N731).

Arrieux, R., 1990. Détermination théorique et expérimentale des courbes limites de formage en contraintes (PhD Thesis). INSA, Lyon.

Arrieux, R., 1995. Determination and use of the forming limit stress diagrams in sheet metal forming. Journal of Materials Processing Technology, Advanced Materials and Technologies 53, 47–56. DOI: 10.1016/0924-0136(95)01960-M.

Arrieux, R., Bedrin, C., Boivin, M., 1982. Determination of an intrinsic forming limit stress diagram for isotropic metal sheets, in: Proceedings of the 12th Biennial Congress IDDRG. pp. 61–71.

Arrieux, R., Chalons, J.M., Bedrin, C., Boivin, M., Le Maître, F., 1984. Computer Aided Measurement of Grid Network Deformation, for the Determination of Forming Limit Diagrams. CIRP Annals 33, 171–174. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)61403-6.

Badreddine, H., Labergère, C., Saanouni, K., 2016. Ductile damage prediction in sheet and bulk metal forming. Comptes Rendus Mécanique 344, 296–318. DOI: 10.1016/j.crme.2015.11.006.

Badreddine, H., Saanouni, K., Dogui, A., 2010. On non-associative anisotropic finite plasticity fully coupled with isotropic ductile damage for metal forming. International Journal of Plasticity 26, 1541–1575. DOI: 10.1016/j.ijplas.2010.01.008.

Badreddine, H., Yue, Z.M., Saanouni, K., 2017. Modeling of the induced plastic anisotropy fully coupled with ductile damage under finite strains. International Journal of Solids and Structures 108, 49–62. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2016.10.028.

Banabic, D., 2010. Sheet metal forming processes. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-540-88113-1.

Banabic, D., Balan, T., Comsa, D.S., 2000. A new yield criterion for orthotropic sheet metals

under plane-stress conditions, in: Proceedings of the 7th Conference 'TPR2000.' Cluj Napoca, Romania, pp. 217–224.

Banabic, D., Kuwabara, T., Balan, T., Comsa, D.S., Julean, D., 2003. Non-quadratic yield criterion for orthotropic sheet metals under plane-stress conditions. International Journal of Mechanical Sciences 45, 797–811. DOI: 10.1016/S0020-7403(03)00139-5.

Barlat, F., Becker, R.C., Hayashida, Y., Maeda, Y., Yanagawa, M., Chung, K., Brem, J.C., Lege, D.J., Matsui, K., Murtha, S.J., Hattori, S., 1997a. Yielding description for solution strengthened aluminum alloys. International Journal of Plasticity 13, 385–401. DOI: 10.1016/S0749-6419(97)80005-8.

Barlat, F., Lian, K., 1989. Plastic behavior and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions. International Journal of Plasticity 5, 51–66. DOI: 10.1016/0749-6419(89)90019-3.

Barlat, F., Brem, J.C., Yoon, J.W., Chung, K., Dick, R.E., Lege, D.J., Pourboghrat, F., Choi, S.-H., Chu, E., 2003. Plane stress yield function for aluminum alloy sheets—part 1: theory. International Journal of Plasticity 19, 1297–1319. DOI: 10.1016/S0749-6419(02)00019-0.

Barlat, F., Lege, D.J., Brem, J.C., 1991. A six-component yield function for anisotropic materials. International Journal of Plasticity 7, 693–712. DOI: 10.1016/0749-6419(91)90052-Z.

Barlat, F., Maeda, Y., Chung, K., Yanagawa, M., Brem, J.C., Hayashida, Y., Lege, D.J., Matsui, K., Murtha, S.J., Hattori, S., Becker, R.C., Makosey, S., 1997b. Yield function development for aluminum alloy sheets. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 45, 1727–1763. DOI: 10.1016/S0022-5096(97)00034-3.

Benzerga, A.A., Besson, J., 2001. Plastic potentials for anisotropic porous solids. European Journal of Mechanics - A/Solids 20, 397–434. DOI: 10.1016/S0997-7538(01)01147-0.

Bigoni, D., 1996. On smooth bifurcations in non-associative elastoplasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 44, 1337–1351.

Bigoni, D., Hueckel, T., 1991. Uniqueness and localization—I. Associative and non-associative elastoplasticity. International Journal of Solids and Structures 28, 197–213. DOI: 10.1016/0020-7683(91)90205-T.

Bigoni, D., and Zaccaria, D., 1992. Loss of strong ellipticity in non-associative elastoplasticity. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 40, 1313–1331.

Bonora, N., 1999. Identification and measurement of ductile damage parameters. Journal of Strain Analysis for Engineering Design 34, 463–478. DOI: 10.1243/0309324991513894.

Bouchard, P.-O., Gachet, J.-M., Roux, E., 2011. Ductile damage parameters identification for cold metal forming applications. In The 14th International Esaform Conference on Material Forming: ESAFORM 2011, Apr 2011, pp. 47–52. DOI: 10.1063/1.3589490.

Boudeau, N., Gelin, J.C., Salhi, S., 1998. Computational prediction of the localized necking in sheet forming based on microstructural material aspects. Computational Materials Science 11, 45–64. DOI: 10.1016/S0927-0256(97)00153-5.

Bouktir, Y., Chalal, H., Abed-Meraim, F., 2017. Prediction of necking in thin sheet metals using an elastic–plastic model coupled with ductile damage and bifurcation criteria. International Journal of Damage Mechanics 105678951770403.

DOI: 10.1177/1056789517704030.

Bouktir, Y., Chalal, H., Haddad, M., Abed-Meraim, F., 2016. Investigation of ductility limits based on bifurcation theory coupled with continuum damage mechanics. Materials & Design. 90, 969–978. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.11.052.

Bragard, A., Baret, J.C., Bonnarens, H., 1972. simplified technique to determine the FLD at onset of necking. Centre for Research in Metallurgy 33, 53–63.

Brünig, M., 2003. An anisotropic ductile damage model based on irreversible thermodynamics. International Journal of Plasticity 19, 1679–1713. DOI: 10.1016/S0749-6419(02)00114-6.

Cao, T.S., Bobadilla, C., Montmitonnet, P., Bouchard, P.O., 2013a. On the development and identification of phenomenological damage models - Application to industrial wire drawing and rolling processes. Key Engineering Materials 554–557, 213–226. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.554-557.213.

Cao, T.S., Gaillac, A., Montmitonnet, P., Bouchard, P.O., 2013b. Identification methodology and comparison of phenomenological ductile damage models via hybrid numerical–experimental analysis of fracture experiments conducted on a zirconium alloy. International Journal of Solids and Structures 50, 3984–3999. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.08.011.

Chaboche, J.L., 1974. Une loi différentielle d'endommagement de fatigue avec cumulation non linéaire. Revue. Française de Mécanique 50–51.

Hult, J., 1974. Creep in Continua and Structures, in: Zeman, J.L., Ziegler, F. (Eds.), Topics in Applied Continuum Mechanics. Springer Vienna, Vienna, pp. 137–155. DOI: 10.1007/978-3-7091-4188-5_7.

Chaboche, J.L., 1988. Continuum damage mechanics: Part I—General concepts. Journal of Applied Mechanics 55, 59. DOI: 10.1115/1.3173661.

Chaboche, J.-L., 1993. Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage. International Journal of Damage Mechanics 2, 311–329. DOI: 10.1177/105678959300200401.

Chaboche, J.-L., 1999. Thermodynamically founded CDM models for creep and other conditions, in: Altenbach, H., Skrzypek, J.J. (Eds.), Creep and Damage in Materials and Structures. Springer Vienna, Vienna, pp. 209–283. DOI: 10.1007/978-3-7091-2506-9_5.

Chaboche, J.L., Boudifa, M., Saanouni, K., 2006. A CDM approach of ductile damage with plastic compressibility. International Journal of Fracture 137, 51–75. DOI: 10.1007/s10704-005-3061-5.

Chow, C.L., Lu, T.J., 1989. On evolution laws of anisotropic damage. Engineering Fracture Mechanics 34, 679–701. DOI: 10.1016/0013-7944(89)90130-6.

Chow, C.L., Wang, J., 1987. An anisotropic theory of continuum damage mechanics for ductile fracture. Engineering Fracture Mechanics 27, 547–558. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90108-1.

Clifton, R.J., Duffy, J., Hartley, K.A., Shawki, T.G., 1984. On critical conditions for shear band formation at high strain rates. Scripta Metallurgica 18, 443–448. DOI: 10.1016/0036-9748(84)90418-6.

Col, A., 2011. Emboutissage des tôles - Importance des modes de déformation. Techniques de

l'ingénieur BM 7510.

Considère, A., 1885. Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions. Annales des Ponts et Chaussées 9, 574.

Cordebois, J.L., Sidoroff, F., 1979. Damage induced elastic anisotropy. In: Colloque Euromech 115. Villard de Lans, France.

Cvitanić, V., Vlak, F., Lozina, Ž., 2008. A finite element formulation based on non-associated plasticity for sheet metal forming. International Journal of Plasticity 24, 646–687. DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.07.003.

d'Hayer, R., Bragard, A., 1975. Determination of the limiting strains at the onset of necking. Centre for Research in Metallurgy 42, 33–35.

Decultot, N., 2009. Formage incrémental de tôle d'aluminium : étude du procédé à l'aide de la mesure de champs et identification de modèles de comportement (PhD Thesis). Université Paul Sabatier - Toulouse III.

Doghri, I., Billardon, R., 1995. Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials. Mechanics of Materials 19, 129–149. DOI: 10.1016/0167-6636(94)00011-5.

Drucker, D.C., 1949. Relations of experiments to mathematical theories of plasticity. Journal of Applied Mechanics 349–357.

Drucker, D.C., 1950. Some implications of work hardening and ideal plasticity. Quarterly of Applied Mathmatics 7, 411–418.

Drucker, D.C., 1956. On uniqueness in the theory of plasticity. Quarterly of Applied Mathmatics 14, 35–42.

Dudzinski, D., Molinari, A., 1991. Perturbation analysis of thermoviscoplastic instabilities in biaxial loading. International Journal of Solids and Structures 27, 601–628. DOI: 10.1016/0020-7683(91)90216-3.

Eggertsen, P.-A., Mattiasson, K., 2010. An efficient inverse approach for material hardening parameter identification from a three-point bending test. Engineering with Computers 26, 159–170. DOI: 10.1007/s00366-009-0149-y.

Franz, G., Abed-Meraim, F., and Berveiller, M., 2013. Strain localization analysis for single crystals and polycrystals: Towards microstructure-ductility linkage. International Journal of Plasticity 48, 1–33. DOI: 10.1016/j.ijplas.2013.02.001

Franz, G., Abed-Meraim, F., Lorrain, J.P., Ben Zineb, T., Lemoine, X., and Berveiller, M., 2009. Ellipticity loss analysis for tangent moduli deduced from a large strain elastic–plastic self-consistent model. International Journal of Plasticity 25, 205–238. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.02.006

Fressengeas, C., Molinari, A., 1987. Instability and localization of plastic flow in shear at high strain rates. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 35, 185–211. DOI: 10.1016/0022-5096(87)90035-4.

Friebe, H., Galanulis, K., Erne, O., Müller, E., 2006. FLC determination and forming analysis by optical measurement system, in: Hora P (Ed) Numerical and Experimental Methods in Prediction of Forming Limits in Sheet Forming and Tube Hydroforming Processes. ETH Zürich, Zürich, pp. 74–81.

Ghozzi, Y., Labergere, C., Saanouni, K., Parrico, A., 2014. Modelling and numerical simulation of thick sheet double slitting process using continuum damage mechanics.

International Journal of Damage Mechanics 23, 1150–1167. DOI: 10.1177/1056789514520799.

Gologanu, M., Leblond, J.-B., Perrin, G., Devaux, J., 1997. Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals, in: Suquet, P. (Ed.), Continuum Micromechanics. Springer Vienna, Vienna, pp. 61–130. DOI: 10.1007/978-3-7091-2662-2_2.

Goodwin, G.M., 1968. Application of strain analysis to sheet metal forming problems in the press shop (SAE Technical Paper No. 680093). SAE International, Warrendale, PA. DOI: 10.4271/680093.

Graf, A., Hosford, W., 1993. Effect of changing strain paths on Forming Limit Diagrams of AI 2008-T4. Metallurgical Transactions A 24, 2503. DOI: 10.1007/BF02646529.

Graf, A., Hosford, W., 1994. The influence of strain-path changes on forming limit diagrams of A1 6111 T4. International Journal of Mechanical Sciences 36, 897–910. DOI: 10.1016/0020-7403(94)90053-1.

Gronostajski, J., Dolny, A., 1980. Determination of the forming limit curves by means of Marciniak's punch. Mémoires Scientifiques de la Revue de Métallurgie 4, 570–578.

Gurson, A.L., 1977. Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I—Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media. Journal of Engineering Materials and Technology 99, 2. DOI: 10.1115/1.3443401.

Haddad, A., Arrieux, R., Vacher, P., 2000. Use of two behaviour laws for the determination of the forming-limit stress diagram of a thin steel sheet: results and comparisons. Journal of Materials Processing Technology 106, 49–53. DOI: 10.1016/S0924-0136(00)00637-3.

Haddadi, H., Bouvier, S., Banu, M., Maier, C., and Teodosiu, C., 2006. Towards an accurate description of the anisotropic behaviour of sheet metals under large plastic deformations: Modelling, numerical analysis and identification. International Journal of Plasticity 22, 2226–2271.

Haddag, B., 2007. Contribution à la mise en forme des tôles métalliques : application au retour élastique et à la localisation (PhD Thesis). ENSAM, Metz.

Haddag, B., Abed-Meraim, F., Balan, T., 2009. Strain localization analysis using a large deformation anisotropic elastic–plastic model coupled with damage. International Journal of Plasticity 25, 1970–1996. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.12.013.

Hecker, S., 1972. A simple forming limit curve technique and results on aluminum alloys. Proceedings of the IDDRG Congress, Amsterdam, 5.1 – 5.8.

Hecker, S., 1975. Simple Technique For Determining Forming Limit Curves. Sheet Metal Industries 52, 671–676.

Hershey, A.V., 1954. The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face centred cubic crystals. Journal of Applied Mechanics 241–249.

Hill, R., 1948. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 193, 281–297. DOI: 10.1098/rspa.1948.0045.

Hill, R., 1952. On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1, 19–30. DOI: 10.1016/0022-5096(52)90003-3.

Hill, R., 1958. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 6, 236–249. DOI: 10.1016/0022-5096(58)90029-2.

Hill, R., 1979. Theoretical plasticity of textured aggregates. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 85, 179–191. DOI: 10.1017/S0305004100055596.

Hill, R., 1990. Constitutive modelling of orthotropic plasticity in sheet metals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 38, 405–417. DOI: 10.1016/0022-5096(90)90006-P.

Hill, R., 1993. A user-friendly theory of orthotropic plasticity in sheet metals. International Journal of Mechanical Sciences 35, 19–25. DOI: 10.1016/0020-7403(93)90061-X.

Hiwatashi, S., Van Bael, A., Van Houtte, P., Teodosiu, C., 1998. Prediction of forming limit strains under strain-path changes: Application of an anisotropic model based on texture and dislocation structure. International Journal of Plasticity 14, 647–669. DOI: 10.1016/S0749-6419(98)00031-X.

Hoc, T., Crépin, J., Gélébart, L., Zaoui, A., 2003. A procedure for identifying the plastic behavior of single crystals from the local response of polycrystals. Acta Materialia 51, 5477–5488. DOI: 10.1016/S1359-6454(03)00413-0.

Hora, P., Longchang, T., Reissner, J., 1994. Prediction methods for ductile sheet metal failure using FE-simulation, in: Proceedings of IDDRG'94. Lisbon, Portugal.

Hora, P., Tong, L., Reissner, J., 1996. A prediction method of ductile sheet metal failure in FE simulation, in: Proceedings of Numisheet. Dearborn, Michigan, pp. 252–256.

Hosford, W.F., 1979. On yield loci of anisotropic cubic metals, in: Proceedings of the 7th North American Metalworking Conference (NMRC). SME, Dearborn, MI, pp. 191–197.

Hotz, W., 2006. European efforts in standardization of FLC, in: Hora P (Ed) Numerical and Experimental Methods in Prediction of Forming Limits in Sheet Forming and Tube Hydroforming Processes. ETH Zürich, Zürich, pp. 24–25.

Hutchinson, J.W., Neale, K.W., 1978. Sheet Necking-II. Time-Independent Behavior, in: Koistinen, D.P., Wang, N.-M. (Eds.), Mechanics of Sheet Metal Forming. Springer US, Boston, MA, pp. 127–153. DOI: 10.1007/978-1-4613-2880-3_6.

ISO 12004-1 (2008). International Organization for Standardization, Metallic Materials – Sheet and Strip – Determination of Forming-Limit Curves, Part 1: Measurement and application of forming-limit diagrams in the press shop, Switzerland.

ISO 12004-2 (2008). International Organization for Standardization, Metallic Materials – Sheet and Strip – Determination of Forming-Limit Curves, Part 2: Determination of Forming-Limit Curves in the Laboratory, Switzerland.

Ju, J.W., 1989. On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects. International Journal of Solids and Structures 25, 803–833. DOI: 10.1016/0020-7683(89)90015-2.

Kachanov, L.M., 1958. On Creep Rupture Time. Izv. Akad. Nauk SSSR Otd. Tekhnicheskich Nauk 26–31.

Kajberg, J., Sundin, K.G., Melin, L.G., Ståhle, P., 2004. High strain-rate tensile testing and viscoplastic parameter identification using microscopic high-speed photography. International Journal of Plasticity 20, 561–575. DOI: 10.1016/S0749-6419(03)00041-X.

Kami, A., Dariani, B.M., Vanini, A.S., Comsa, D.S., Banabic, D., 2015. Numerical

determination of the forming limit curves of anisotropic sheet metals using GTN damage model. Journal of Materials Processing Technology 216, 472–483. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2014.10.017.

Karafillis, A.P., Boyce, M.C., 1993. A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 41, 1859–1886. DOI: 10.1016/0022-5096(93)90073-O.

Keeler, S.P., 1978. Forming Limit Criteria — Sheets, in: Advances in Deformation Processing. Springer, Boston, MA, pp. 127–157. DOI: 10.1007/978-1-4613-4024-9_4.

Keeler, S.P., Backofen, W.A., 1963. Plastic instability and fracture in sheets stretched over rigid punches, ASM Transactions Quarterly 56, pp. 25–48.

Keeler, S.P., Brazier, W.G., 1977. Relationship between laboratory material characterization and press-shop formability. International Symposium on High Strength, Low Alloy Steels 517–528.

Kobayashi, T., Ishigaki, H., Tadayuki, A., 1972. Effect of strain ratios on the deforming limit of steel sheet and its application to the actual press forming, in: Proceedings of the IDDRG Congress. Amsterdam, pp. 8.1–8.4

Kojić, M., 2002. Stress integration procedures for inelastic material models within the Finite Element Method. Applied Mechanics Reviews 55, 389. DOI: 10.1115/1.1482088.

Kuroda, M., Tvergaard, V., 2000. Effect of strain path change on limits to ductility of anisotropic metal sheets. International Journal of Mechanical Sciences 42, 867–887. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00029-6.

Lankford, W.I., Snyder, S.C., Bauscher, J.A., 1950. New criteria for predicting the press performance of deep-drawing sheets, Transactions of the American Society of Metals 42, 1197–1232.

Laukonis, J.V., Ghosh, A.K., 1978. Effects of strain path changes on the formability of sheet metals. Metallurgical Transactions A 9, 1849–1856. DOI: 10.1007/BF02663419.

Lee, E.H., 1969. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. Journal of Applied Mechanics 36, 1. DOI: 10.1115/1.3564580.

Abed-Meraim, F., 2009. Contributions à la prédiction d'instabilités de type structure et matériau : modélisation de critères et formulation d'éléments finis adaptés à la simulation des structures minces (Mémoire HDR). Université Paul Verlaine de Metz, Metz - France.

Carbonniere, J., 2009. Contribution a l'analyse du retour élastique en emboutissage. (Phd thesis), INSA de Lyon, Lyon - France.

Lemaitre, J., 1971. Evaluation of dissipation and damage in metals, in: Mechanical Behavior of Materials, Proceedings of the International Conference on Mechanical Behavior. Kyoto, Japan.

Lemaitre, J., 1985. A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture. Journal of Engineering Materials and Technology 107, 83. DOI: 10.1115/1.3225775.

Lemaitre, J., Chaboche, J.-L., Benallal, A., and Desmorat, R. (2009). Mécanique des matériaux solides (Paris: Dunod).

Lemaitre, J., 1992. A Course on Damage Mechanics. Springer Berlin Heidelberg, Berlin,

Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-662-02761-5.

Lemaitre, J., Desmorat, R., Sauzay, M., 2000. Anisotropic damage law of evolution. European Journal of Mechanics - A/Solids 19, 187–208. DOI: 10.1016/S0997-7538(00)00161-3.

Lemaitre, J., Dufailly, J., 1977. Modélisation et identification de l'endommagement plastique des métaux. Presented at the 3ème Congrés Français de Mécanique, Grenoble, France.

Li, Y.-F., Nemat-Nasser, S., 1993. An explicit integration scheme for finite-deformation plasticity in finite-element methods. Finite Elements in Analysis and Design 15, 93–102. DOI: 10.1016/0168-874X(93)90073-Y.

Loret, B., Rizzi, E., 1997a. Anisotropic stiffness degradation triggers onset of strain localization. International Journal of Plasticity 13, 447–459. DOI: 10.1016/S0749-6419(97)00019-3.

Loret, B., Rizzi, E., 1997b. Qualitative analysis of strain localization. Part II: Transversely isotropic elasticity and plasticity. International Journal of Plasticity 13, 501–519. DOI: 10.1016/S0749-6419(97)00022-3.

Mahnken, R., Stein, E., 1996. A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 136, 225–258. DOI: 10.1016/0045-7825(96)00991-7.

Mansouri, L.Z., Chalal, H., Abed-Meraim, F., 2014. Ductility limit prediction using a GTN damage model coupled with localization bifurcation analysis. Mechanics of Materials 76, 64–92. DOI: 10.1016/j.mechmat.2014.06.005.

Marciniak, Z., Kuczynski, K. 1967. Limit strains in the processes of stretch-forming sheet metal. International Journal of Mechanical Science, 9, 609–620, 1967.

Marciniak, Z., Kuczyński, K., Pokora, T., 1973. Influence of the plastic properties of a material on the forming limit diagram for sheet metal in tension. International Journal of Mechanical Sciences 15, 789–800. DOI: 10.1016/0020-7403(73)90068-4.

Marron, G., Moinier, L., Patou, P., 1997. A new necking criterion for the forming limit diagrams, in: Proceeding of the IDDRG WG Meeting 1997. Haugesund, Norway.

Mattiasson, K., Sigvant, M., Larsson, M., 2006. Methods for forming limit prediction in ductile metal sheets, in: Proceedings of IDDRG'06. Eds: Santos and Barata da Rocha, Porto, Portugal, pp. 1–9.

Meuwissen, M.H., 1998. An inverse method for the mechanical characterisation of metals. (PhD Thesis). TUE Eindhoven, The Netherlands. DOI: 10.6100/IR508723.

Meuwissen, M.H., Oomens, C.W., Baaijens, F.P., Petterson, R., Janssen, J., 1998. Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical–experimental method. Journal of Materials Processing Technology 75, 204–211. DOI: 10.1016/S0924-0136(97)00366-X.

Mises, R., 1913. Mechanics of solids in plastic state. Göttinger Nachrichten Mathematical Physics 582–592.

Mohr, D., Dunand, M., Kim, K.-H., 2010. Evaluation of associated and non-associated quadratic plasticity models for advanced high strength steel sheets under multi-axial loading. International Journal of Plasticity 26, 939–956.

DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.11.006.

Monchiet, V., Cazacu, O., Charkaluk, E., Kondo, D., 2008. Macroscopic yield criteria for plastic anisotropic materials containing spheroidal voids. International Journal of Plasticity 24, 1158–1189. DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.08.008.

Msolli, S., Ben Bettaieb, M., Abed-Meraim, F., 2016. Combined effect of damage and plastic anisotropy on the ductility limit of thin metal sheets. Procedia Structural Integrity 2, 3577–3584. DOI: 10.1016/j.prostr.2016.06.446.

Uthaisangsuk, V., Prahl, U., Münstermann, S., Bleck, W., 2008. Experimental and numerical failure criterion for formability prediction in sheet metal forming. Computational Materials Science 43, 43–50. DOI: 10.1016/j.commatsci.2007.07.036.

Nakazima, K., Kikuma, T., Hasuka, K., 1968. Study on the formability of steel sheets. Yawata Technical Report 264, 141–154.

Neilsen, M.K., and Schreyer, H.L., 1993. Bifurcations in elastic-plastic materials. International Journal of Solids and Structures. 30, 521–544.

Pardoen, T., Doghri, I., Delannay, F., 1998. Experimental and numerical comparison of void growth models and void coalescence criteria for the prediction of ductile fracture in copper bars. Acta Materialia 46, 541–552. DOI: 10.1016/S1359-6454(97)00247-4.

Park, T., Chung, K., 2012. Non-associated flow rule with symmetric stiffness modulus for isotropic-kinematic hardening and its application for earing in circular cup drawing. International Journal of Solids and Structures. 49, 3582–3593. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2012.02.015.

Paul, S.K., 2016. Prediction of complete forming limit diagram from tensile properties of various steel sheets by a nonlinear regression based approach. Journal of Manufacturing Processes 23, 192–200. DOI: 10.1016/j.jmapro.2016.06.005.

Pöhlandt, K., Banabic, D., Lange, K., 2002. Equi-biaxial anisotropy coefficient used to describe the plastic behavior of sheet metal. Proceedings of the ESAFORM Conference, Krakow, 723–727.

Prager, W., 1956. A new method of analyzing stresses and strains in work-hardening plastic solids. Journal of Applied Mechanics, ASME 23, 493–496.

Qian, L.-Y., Fang, G., Zeng, P., 2017. Modeling of the ductile fracture during the sheet forming of aluminum alloy considering non-associated constitutive characteristic. International Journal of Mechanical Sciences 126, 55–66. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2017.03.013.

Rabotnov, Y.N., 1963. On the Equation of State of Creep. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1, 307–315. DOI: 10.1243/PIME_CONF_1963_178_030_02.

Raghavan, K.S., Van Kuren, R.C., Darlington, H., 1992. Recent progress in the development of forming limit curves for automotive sheet steels. SAE Technical Paper 920437. DOI: 10.4271/920437.

Rajhi, W., Saanouni, K., Sidhom, H., 2014. Anisotropic ductile damage fully coupled with anisotropic plastic flow: Modeling, experimental validation, and application to metal forming simulation. International Journal of Damage Mechanics 23, 1211–1256. DOI: 10.1177/1056789514524076.

Rice, J.R., 1976. The localization of plastic deformation, in: Koiter WT (Ed.). Presented at the 14th IUTAM congress of theoretical and applied mechanics, Koiter WT, Delft,

Netherlands, pp. 207–220.

Rizzi, E., Loret, B., 1997. Qualitative analysis of strain localization. Part I: Transversely isotropic elasticity and isotropic plasticity. International Journal of Plasticity 13, 461–499. DOI: 10.1016/S0749-6419(97)00021-1.

Rousselier, G., 1987. Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture. Nuclear Engineering and Design 105, 97–111. DOI: 10.1016/0029-5493(87)90234-2.

Roux, É., 2011. Assemblage mécanique : stratégies d'optimisation des procédés et d'identification des comportements mécaniques des matériaux (PhD Thesis). École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Rozzo, P., Deluca, B., Rendina, R., 1972. A new method for the prediction of formability limits in metal sheets, Sheet Metal Forming and Formability, in: Proceedings of the 7th Biennial Congress of the IDDRG. Amsterdam.

Rudnicki, J.W., Rice, J.R., 1975. Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 23, 371–394. DOI: 10.1016/0022-5096(75)90001-0.

Saanouni, K., 2008. On the numerical prediction of the ductile fracture in metal forming. Engineering Fracture Mechanics 75, 3545–3559. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2007.02.023.

Saanouni, K., 2012. Damage mechanics in metal forming: advanced modeling and numerical simulation. ISTE Ltd ; John Wiley & Sons, London : Hoboken, NJ.

Saanouni, K., Chaboche, J.L., 2003. Computational damage mechanics. Application to metal forming, Chapter 3.06, pp.321–376 of the Volume 3: 'Numerical and Computational methods,' in: Milne I, Ritchie RO and Karihaloo B (Eds) Comprehensive Structural Integrity. Elsevier Ltd, Oxford.

Saanouni, K., Forster, C., Hatira, F.B., 1994. On the anelastic flow with damage. International Journal of Damage Mechanics 3, 140–169. DOI: 10.1177/105678959400300203.

Saanouni, K., Hamed, M., 2013. Micromorphic approach for finite gradient-elastoplasticity fully coupled with ductile damage: Formulation and computational aspects. International Journal of Solids and Structures 50, 2289–2309. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.03.027.

Saanouni, K., Lestriez, P., Labergère, C., 2011. 2D Adaptive FE Simulations in Finite Thermo-Elasto-Viscoplasticity with Ductile Damage: Application to Orthogonal Metal Cutting by Chip Formation and Breaking. International Journal of Damage Mechanics 20, 23–61. DOI: 10.1177/1056789509343688.

Safaei, M., Lee, M.-G., Zang, S., De Waele, W., 2014. An evolutionary anisotropic model for sheet metals based on non-associated flow rule approach. Computational Materials Science 81, 15–29. DOI: 10.1016/j.commatsci.2013.05.035.

Sánchez, P.J., Huespe, A.E., Oliver, J., 2008. On some topics for the numerical simulation of ductile fracture. International Journal of Plasticity 24, 1008–1038. DOI: 10.1016/j.ijplas.2007.08.004.

Schwindt, C.D., Stout, M., Iurman, L., Signorelli, J.W., 2015. Forming Limit Curve Determination of a DP-780 Steel Sheet. Procedia Materials Science 8, 978–985. DOI: 10.1016/j.mspro.2015.04.159.

Shawki, T.G., Clifton, R.J., 1989. Shear band formation in thermal viscoplastic materials.

Mechanics of Materials 8, 13–43. DOI: 10.1016/0167-6636(89)90003-3.

Simha, C.H.M., Grantab, R., Worswick, M.J., 2007. Computational analysis of stress-based forming limit curves. International Journal of Solids and Structures 44, 8663–8684. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.07.001.

Simha, C.H.M., Grantab, R., Worswick, M.J., 2008. Application of an extended stress-based forming limit curve to predict necking in stretch flange forming. Journal of Manufacturing Science and Engineering 130, 051007. DOI: 10.1115/1.2844593.

Simo, J.C., Ju, J.W., 1987a. Strain- and stress-based continuum damage models—I. Formulation. International Journal of Solids and Structures 23, 821–840. DOI: 10.1016/0020-7683(87)90083-7.

Simo, J.C., Ju, J.W., 1987b. Strain- and stress-based continuum damage models—II. Computational aspects. International Journal of Solids and Structures 23, 841–869. DOI: 10.1016/0020-7683(87)90084-9.

Stören, S., Rice, J.R., 1975. Localized necking in thin sheets. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 23, 421–441. DOI: 10.1016/0022-5096(75)90004-6.

Stoughton, T.B., 2000. A general forming limit criterion for sheet metal forming. International Journal of Mechanical Sciences 42, 1–27. DOI: 10.1016/S0020-7403(98)00113-1.

Stoughton, T.B., Zhu, X., 2004. Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD. International Journal of Plasticity 20, 1463–1486. DOI: 10.1016/j.ijplas.2003.11.004.

Zimniak, Z., 2000. Implementation of the forming limit stress diagram in FEM simulations. Journal of Materials Processing Technology 106, 261–266. DOI: 10.1016/S0924-0136(00)00627-0.

Simha, C.H.M., Gholipour, J., Bardelcik, A., Worswick, M.J., 2006. Prediction of Necking in Tubular Hydroforming Using an Extended Stress-Based Forming Limit Curve. Journal of Engineering Material Technolgy 129, 36–47. DOI: 10.1115/1.2400269.

Stoughton, T.B., 2002. A non-associated flow rule for sheet metal forming. International Journal of Plasticity 18, 687–714. DOI: 10.1016/S0749-6419(01)00053-5.

Stoughton, T.B., Yoon, J.W., 2009. Anisotropic hardening and non-associated flow in proportional loading of sheet metals. International Journal of Plasticity 25, 1777–1817. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.02.003.

Swift, H.W., 1952. Plastic instability under plane stress. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1, 1–18. DOI: 10.1016/0022-5096(52)90002-1.

Taherizadeh, A., Green, D.E., Ghaei, A., Yoon, J.-W., 2010. A non-associated constitutive model with mixed iso-kinematic hardening for finite element simulation of sheet metal forming. International Journal of Plasticity 26, 288–309. DOI: 10.1016/j.ijplas.2009.07.003.

Taherizadeh, A., Green, D.E., Yoon, J.W., 2015. A non-associated plasticity model with anisotropic and nonlinear kinematic hardening for simulation of sheet metal forming. International Journal of Solids and Structures 69–70, 370–382. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2015.05.013.

Tóth, L.S., Dudzinski, D., Molinari, A., 1996. Forming limit predictions with the perturbation method using stress potential functions of polycrystal viscoplasticity. International

Journal of Mechanical Sciences 38, 805–824. DOI: 10.1016/0020-7403(95)00109-3.

Tresca, H., 1864. On the yield of solids at high pressures. Comptes Rendus Académie des Sciences 754.

Tvergaard, V., 1981. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. International Journal of Fracture 17, 389–407. DOI: 10.1007/BF00036191.

Tvergaard, V., Needleman, A., 1984. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. Acta Metallurgica 32, 157–169. DOI: 10.1016/0001-6160(84)90213-X.

Valanis, K.C., 1989. Banding and stability in plastic materials. Acta Mechanica 79, 113–141. DOI: 10.1007/BF01181483.

Voyiadjis, G.Z., Kattan, P.I., 1992. A plasticity-damage theory for large deformation of solids—I. Theoretical formulation. International Journal of Engineering Science 30, 1089–1108. DOI: 10.1016/0020-7225(92)90059-P.

Wali, M., Autay, R., Mars, J., Dammak, F., 2016. A simple integration algorithm for a non-associated anisotropic plasticity model for sheet metal forming: a non-associated anisotropic plasticity mode for sheet metal forming. International Journal for Numerical Methods in Engineering 107, 183–204. DOI: 10.1002/nme.5158.

Wu, P.D., Neale, K.W., Van der Giessen, E., Jain, M., MacEwen, S.R., Makinde, A., 1998. Crystal plasticity forming limit diagram analysis of rolled aluminum sheets. Metallurgical and Materials Transactions A 29, 527–535. DOI: 10.1007/s11661-998-0134-x.

Wu, P.D., Jain, M., Savoie, J., MacEwen, S.R., Tuğcu, P., and Neale, K.W., 2003. Evaluation of anisotropic yield functions for aluminum sheets. International Journal of Plasticity 19, 121–138.

Yamamoto, H., 1978. Conditions for shear localization in the ductile fracture of void-containing materials. International Journal of Fracture 14, 347–365. DOI: 10.1007/BF00015989.

Yoshida, F., 2003. Inverse approach to identification of material parameters of cyclic elasto-plasticity for component layers of a bimetallic sheet. International Journal of Plasticity 19, 2149–2170. DOI: 10.1016/S0749-6419(03)00063-9.

Yoshida, F., Urabe, M., Toropov, V.V., 1998. Identification of material parameters in constitutive model for sheet metals from cyclic bending tests. International Journal of Mechanical Sciences 40, 237–249. DOI: 10.1016/S0020-7403(97)00052-0.

Yue, Z., Soyarslan, C., Badreddine, H., Saanouni, K., Tekkaya, A., 2015. Identification of fully coupled anisotropic plasticity and damage constitutive equations using a hybrid experimental–numerical methodology with various triaxialities. International Journal of Damage Mechanics 24, 683–710. DOI: 10.1177/1056789514546578.

Zhao, L., Sowerby, R., Sklad, M.P., 1996. A theoretical and experimental investigation of limit strains in sheet metal forming. International Journal of Mechanical Sciences 38, 1307–1317. DOI: 10.1016/0020-7403(96)00014-8.

Zhu, Y.Y., Cescotto, S., 1995. A fully coupled elasto-visco-plastic damage theory for anisotropic materials. International Journal of Solids and Structures 32, 1607–1641. DOI: 10.1016/0020-7683(94)00195-3.

Étude des phénomènes d'instabilité, bifurcation et endommagement en mise en forme des matériaux

Résumé : L'objectif de ce sujet de thèse est de prédire l'apparition des instabilités plastiques (striction diffuse et striction localisée) dans les matériaux métalliques. Ces matériaux sont décrits par des modèles de comportement élasto-plastique couplés à l'endommagement. L'approche de Lemaitre, reliant l'endommagement à la déformation plastique équivalente et au taux de restitution de la densité d'énergie élastique, est adoptée. Parmi les différents critères et indicateurs qui sont considérés pour la prédiction des instabilités matériau, la théorie de bifurcation et les critères de type force maximum sont tout particulièrement analysés et comparés. Un objectif important de cette étude consiste à déterminer les mécanismes déstabilisants clés associés à cette modélisation du comportement, ainsi que l'impact des différents aspects physiques et des paramètres matériau sur l'apparition de la striction. Les développements résultants sont appliqués à une sélection représentative de matériaux métalliques afin prédire leurs limites de formabilités. Cette approche combinant des lois de comportement et critères de striction peut être utilisée comme outil théorique et numérique d'aide à la conception de nouveaux matériaux à ductilité améliorée.

Mots clés : Bifurcation, Instabilités plastiques, Striction diffuse, Striction localisée, Endommagement ductile, Tôles minces, Mise en forme des matériaux, Courbes limites de formage.

Investigation of instability, bifurcation and damage phenomena in sheet metal forming

Abstract: The aim of the present work is to predict the occurrence of plastic instabilities (diffuse and localized necking) in thin sheet metals. The prediction of these plastic instabilities is undertaken using an elastic–plastic model coupled with ductile damage, which is then combined with various plastic instability criteria theory. The bifurcation-based criteria and the maximum force criterion used in this work are formulated within a general three-dimensional modeling framework, and then applied for the particular case of plane-stress conditions for sheet metals. Some theoretical relationships or links between the different investigated necking criteria are established, which allows a hierarchical classification in terms of their conservative character in predicting critical necking strains. The resulting numerical tool is implemented into the finite element code ABAQUS/Standard to predict forming limit diagrams, in both situations of a fully three-dimensional formulation and a plane-stress framework. This approach, that combines constitutive equations to necking criteria, serves as a useful tool in the design of new materials with improved ductility.

Key words: Bifurcation, Bifurcation, Plastic instabilities, Diffuse necking, Localized necking, Ductile damage, Thin sheet metals, Sheet metal forming, Forming limit diagrams.