



**HAL**  
open science

# Approche inverse pour l'identification des propriétés viscoélastiques de structures sandwichs amorties

Koffi Senanou Ledi

► **To cite this version:**

Koffi Senanou Ledi. Approche inverse pour l'identification des propriétés viscoélastiques de structures sandwichs amorties. Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]. Université de Lorraine, 2018. Français. NNT : 2018LORR0250 . tel-02103575

**HAL Id: tel-02103575**

**<https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02103575>**

Submitted on 18 Apr 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : [ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr](mailto:ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr)

## LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10

[http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg\\_droi.php](http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php)

<http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm>

**THESE**

Pour l'obtention du titre de :

DOCTEUR de L'UNIVERSITE DE LORRAINE

Ecole doctorale : Energie Mécanique et Matériaux (EMMA)

Domaine de Recherche : Science des Matériaux

Présentée par :

**Koffi Sénanou LEDI**

---

**Approche inverse pour l'identification des propriétés  
viscoélastiques de structures sandwichs amorties**

---

Présentée et soutenue publiquement le 12 Octobre 2018 à METZ

**Composition du jury**

M. Frédéric DRUESNE	MCF-HDR, Université Technologie Compiègne	Rapporteur
M. Loïc DARIDON	Professeur, Université de Montpellier	Rapporteur
M. Noureddine BOUHADDI	Professeur, Université de Franche-Comté	Examineur
M. Salim BELOUETTAR	Professeur, LIST	Examineur
Mme. Laetitia DUIGOU	MCF, Université de Bretagne sud	Examineur
M. El Mostafa DAYA	Professeur, Université de Lorraine	Directeur de thèse
M. Mohamed HAMD AOUI	MCF. Université de Lorraine	Co-directeur de thèse
M. Guillaume ROBIN	Ing. de recherche, Université de Lorraine	Co-encadrant de thèse

*LEM3-UMR7239**7 Rue Félix Savart-57073 METZ CEDEX 03**Université de Lorraine-Pôle M4 : matière, matériaux, métallurgie, mécanique*



## Remerciements

---

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire de thèse ont été réalisés au sein du Laboratoire d'Etude des Microstructures et de Mécanique des Matériaux (LEM3) et ont été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je tiens tout d'abord à adresser mes profonds remerciements à mon Directeur de thèse, le professeur El Mostafa DAYA, mon co-directeur de thèse, Mohamed HAMDAOUI et mon co-encadrant, Guillaume ROBIN, pour m'avoir confié ce travail de recherches, leur disponibilité, les encouragements et conseils qu'ils m'ont donnés. J'ai acquis beaucoup de connaissances avec vous tant sur le plan expérimental que numérique.

Mes remerciements iront au Maître de conférences Frédéric DRUESNE et au Professeur Loïc DARIDON pour avoir porté un intérêt à mes travaux de recherche, et accepté d'en être les rapporteurs.

Mes remerciements iront également au Maître de conférences Laetitia DUIGOU et aux Professeurs Noureddine BOUHADDI et Salim BELOUETTAR pour avoir examiné mon mémoire de thèse et pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse de soutenance de thèse.

J'adresse mes remerciements à toutes les personnes qui ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réussite de cette thèse et aussi à toute ma famille. Une pensée à mes parents qui ne sont plus de ce monde.

En fin j'adresse mes remerciements au personnel de LEM3 notamment les secrétaires et à mes collègues doctorants pour les services rendus dans le cadre de ce travail.



## Dédicace

Je dédie cette thèse

à mes parents,

à ma famille

*"Rien n'est jamais perdu tant qu'il reste quelque chose à trouver."*

**Pierre Dac**

# Table des matières

---

Introduction générale.....	2
Chapitre I. Etat de l'art sur les méthodes d'identification des structures sandwichs viscoélastiques. ....	8
I.1. Introduction.....	8
I.2. Généralités sur les sandwichs viscoélastiques .....	9
I.2.1. Notion de viscoélasticité et de matériaux amortissants (passif /actif).....	9
I.2.1.1 Notion de viscoélasticité .....	9
I.2.1.2 Matériaux amortissants:Notion d'amortissement.....	12
I.2.2. Modèles rhéologiques .....	15
I.2.2.1 Modèle réologique de base.....	16
I.2.2.2 Modèles rhéologiques composés.....	17
I.2.2.3 Modèles fractionnaires .....	20
I.2.3. Dépendance en fréquence et en température.....	23
I.3. Vibrations linéaires de structures sandwichs viscoélastiques .....	27
I.3.1. Cinématique intervenant dans la modélisation des vibrations linéaires des structures sandwichs .....	27
I.3.1.1 Modèles de type non zigzag .....	27
I.3.1.2 Modèles de type zigzag.....	28
I.3.2. Caractérisation des propriétés mécaniques de structures sandwichs viscoélastiques : Cas des vibrations linéaires avec un amortissement passif .....	29
I.3.2.1 Méthodes analytiques.....	29
I.3.2.2 Méthodes numériques .....	32
I.3.2.2.1. Méthodes approchées.....	32
I.3.2.2.2. Méthodes directes.....	33
I.3.2.3 Méthode Asymptotique Numérique.....	35
I.3.2.4 Méthode de minimisation d'erreur.....	35
I.3.2.5 Méthodes inverses.....	36
I.4. Conclusion .....	37
Chapitre II. Une nouvelle méthode d'identification inverse .....	39



II.1. Introduction.....	39
II.2. Modèles cinématiques et équations du mouvement.....	40
II.2.1. Modèle zigzag avec résolution par la MAN .....	40
II.2.2. Equations du mouvement.....	43
II.2.3. Discrétisation par la méthode des éléments finis.....	44
II.3. Identification inverse .....	47
II.3.1. Méthode d'identification inverse .....	47
II.3.2. Les équations de Ross-Kerwin-Ungar .....	49
II.3.3. Validation de la méthode d'identification inverse .....	50
II.3.3.1 Rôle des paramètres initiaux ( $G_0$ et $\eta_0$ ) .....	50
II.3.3.2 Validation de la méthode d'identification inverse .....	52
II.4. Conclusion .....	54
Chapitre III. Application aux sandwichs viscoélastiques.....	55
III.1. Introduction .....	55
III.2. Dispositif expérimental .....	56
III.3. Exploitation des résultats expérimentaux pour l'identification inverse .....	59
III.3.1. Résultats expérimentaux de la poutre sandwich.....	59
III.3.2. Résultats de l'identification.....	61
III.4. Loi de comportement du cœur viscoélastique .....	63
III.4.1. Détermination des propriétés mécaniques à partir des paramètres modaux.....	63
III.4.2. Identification des paramètres des modèles rhéologiques.....	67
III.4.2.1 Identification des paramètres d'un modèle rhéologique de type polynomial du second degré .....	67
III.4.2.2 Identification des paramètres des modèles maxwell généralisé, ADF et GHM .....	69
III.4.3. Discussion sur les lois de comportement identifiées .....	78
III.4.3.1 Cas de la poutre 1 .....	79
III.4.3.2 Cas de la poutre 2 .....	82
III.4.4. Effet de la température sur les propriétés mécaniques du cœur viscoélastique.....	86
III.4.4.1 Evolution du dispositif expérimental.....	86

III.4.4.2 Résultats de l'étude en température.....	87
III.4.4.3 Résultats de l'identification à diverses températures.....	89
III.4.4.4 Lois de comportement du cœur viscoélastique à diverses températures .....	93
III.5. Conclusion.....	97
Chapitre IV. Test de robustesse et de sensibilité.....	98
IV.1. Introduction.....	98
IV.2. Etude de reproductibilité et de reproductibilité.....	99
IV.2.1. Etude de reproductibilité sur un échantillon donné.....	99
IV.2.2. Etude de reproductibilité des résultats sur une population d'échantillon.....	105
IV.3. Essais de sensibilité.....	110
IV.3.1. Sensibilité des paramètres géométriques.....	110
IV.3.1.1 Sensibilité de la largeur $b$ de la structure sandwich viscoélastique.....	111
IV.3.1.2 Sensibilité de la longueur $L$ de la structure viscoélastique.....	113
IV.3.1.3 Sensibilité de l'épaisseur du cœur viscoélastique $hc$ avec une épaisseur totale $ht$ constante:.....	115
IV.3.1.4 Sensibilité de l'épaisseur des faces $hf$ avec une épaisseur totale $ht$ constante:.....	117
IV.3.1.5 Sensibilité sur la densité des faces élastiques.....	118
IV.3.1.6 Sensibilité sur la densité du cœur viscoélastique .....	120
IV.3.2. Sensibilité des paramètres modaux .....	122
IV.3.2.1 Sensibilité sur les paramètres modaux de la poutre sandwich .....	122
IV.3.2.2 Impact sur le module de cisaillement de la couche viscoélastique.....	124
IV.3.2.3 Impact de la sensibilité sur le facteur de perte de la couche viscoélastique .....	125
IV.4. Conclusion.....	126
Conclusions et perspectives.....	127
Références bibliographiques .....	130
Résumé.....	140

# Table des figures

---

Figure I.1.a : Exemples d'utilisation de structures sandwichs viscoélastiques .....	3
Figure I.2.a : Configuration de contrôle passif.....	4
Figure I.1 : Déphasage entre contrainte et déformation .....	14
Figure I.2 : Hystérèse contrainte-déformation en fonction de $\eta$ .....	15
Figure I.3 : Modèle ADF "Anelastic Displacement Fields" .....	19
Figure I.4 : Modèle de Golla-Hugues-McTavish (GHM) .....	20
Figure I.5 : Exemples de modèles rhéologiques de bases et composés.....	21
Figure I.6 : Composantes des modèles rhéologiques à dérivées fractionnaires. ....	21
Figure I.7 : Modèles rhéologiques à dérivées fractionnaires.....	22
Figure I.8 : Module de cisaillement et facteur de perte d'un matériau en fonction de la température ..	24
Figure I.9 : Module de cisaillement et facteur de perte d'un matériau en fonction de la fréquence et de la température.....	25
Figure I.10 : Modèles cinématiques .....	29
Figure II.1 : Structure sandwich viscoélastique.....	40
Figure II.2 : Organigramme de la méthode d'identification inverse mise en œuvre .....	49
Figure II.3 : Module de cisaillement en fonction du mode de résonance pour 10 essais avec différents couples de paramètres initiaux indiqué dans le tableau II.2 .....	51
Figure II.4 : Facteur de perte en fonction du mode de résonance pour 10 essais avec différents couples de paramètres initiaux indiqué dans le tableau II.2 .....	52
Figure II.5 : Validation du module de cisaillement du cœur viscoélastique déterminé par la méthode d'identification inverse.....	53
Figure II.6 : Validation du facteur de perte du cœur viscoélastique déterminé par la méthode d'identification inverse.....	53
Figure III.1 : Schéma du dispositif expérimental développé au sein de la plateforme « Vibration » au Laboratoire LEM3.....	56
Figure III.2 : Photographie de la poutre mise en position sur le vibreur.....	57
Figure III.3 : Spectre d'amplitude du déplacement à l'extrémité libre de la poutre 2 ayant une longueur libre de 46,2 cm .....	59
Figure III.4 : Signal de l'excitation et réponse en amplitude .....	60
Figure III.5 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique identifié.....	61
Figure III.6 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique identifié.....	62
Figure III.7: Spectre de l'amplitude déplacement mesuré à l'extrémité libre de la poutre 1 pour quatre longueurs utiles (31,8 ; 35,4 ; 40 et 47,5 cm).....	63

Figure III.8: Spectre de l'amplitude déplacement mesuré à l'extrémité libre de la poutre 2 pour quatre longueurs utiles (31,8 ; 35,4 ; 40 et 47,5 cm).....	64
Figure III.9 : Module de cisaillement du cœur viscoélastique déterminé à partir de la méthode d'indentification inverse sur les poutres 1 et 2 ainsi que la courbe de tendance obtenue par la méthode des moindres carrés .....	68
Figure III.10 : Facteur de perte du cœur viscoélastique déterminé à partir de la méthode d'indentification inverse sur les poutres 1 et 2 ainsi que la courbe de tendance obtenue par la méthode des moindres carrés .....	69
Figure III.11 : Courbe maîtresse du module de cisaillement complexe modélisé par un modèle de Maxwell généralisé.....	72
Figure III.12 : Courbe maîtresse du module de cisaillement complexe modélisé par un modèle ADF	74
Figure III.13 : Courbe maîtresse du module de cisaillement complexe modélisé par un modèle GHM	76
Figure III.14 : Erreur résiduelle en fonction du nombre de séries des modèles rhéologiques.....	77
Figure III.15 : Spectres de vibration de la poutre sandwich 1 avec des modèles de Maxwell généralisé, GHM, ADF pour le cœur viscoélastique.....	81
Figure III.16 : Spectres de vibration de la poutre sandwich 2 avec des modèles de Maxwell généralisé, GHM, ADF pour le cœur viscoélastique.....	84
Figure III.17 : Dispositif expérimental comprenant une enceinte thermo-régulée et développé au sein de la plateforme « Vibration » au Laboratoire LEM3.....	86
Figure III.18 : Photographie de la poutre sandwich 2 mise en place dans l'enceinte thermo-régulée avant le conditionnement en température et la mesure vibratoire .....	87
Figure III.19 : Spectre de l'amplitude de déplacement à l'extrémité de la poutre sandwich en fonction de la température imposée dans la chambre thermique.....	89
Figure III.20 : Module de cisaillement du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence à des températures données .....	91
Figure III.21 : Facteur de perte du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence à des températures données.....	91
Figure III.22 : Variation du module de cisaillement à chaque température suivant les quatre premiers modes. ....	92
Figure III.23 : Variation du facteur de perte à chaque température suivant les quatre premiers modes de résonance.....	93
Figure IV.1 : Spectres des amplitudes de déplacement à l'extrémité libre de la poutre dans le cas des essais de reproductibilité sur un même échantillon (type poutre 2) .....	99
Figure IV.2 : Modules de cisaillement identifiés aux modes de résonance pour le cœur viscoélastique de la poutre sandwich lors des essais de reproductibilité .....	103
Figure IV.3 : Facteurs de perte identifiés aux modes de résonance pour le cœur viscoélastique de la poutre sandwich lors des essais de reproductibilité.....	104
Figure IV.4 : Spectres des amplitudes de déplacement mesurées à l'extrémité libre de la poutre : étude de reproductibilité sur quatre échantillons de la poutre type 2.....	105

Figure IV.5 : Modules de cisaillement identifiés aux modes de résonance pour le cœur viscoélastique de la poutre sandwich lors des essais de reproductibilité .....	108
Figure IV.6 : Facteurs de perte identifiés aux modes de résonance pour le cœur viscoélastique de la poutre sandwich lors des essais de reproductibilité.....	108
Figure IV.7 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la largeur de la poutre .....	112
Figure IV.8 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la largeur de la poutre.....	112
Figure IV.9 Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la longueur de la poutre .....	114
Figure IV.10 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la longueur de la poutre.....	114
Figure IV.11 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur l'épaisseur de la couche viscoélastique de la poutre .....	115
Figure IV.12 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur l'épaisseur de la couche viscoélastique de la poutre .....	116
Figure IV.13 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur l'épaisseur des faces élastiques de la poutre.....	117
Figure IV.14 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur l'épaisseur des faces élastiques de la poutre.....	118
Figure IV.15 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la densité des faces élastiques de la poutre.....	119
Figure IV.16 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la densité des faces élastiques de la poutre.....	120
Figure IV.17 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la densité du cœur viscoélastique de la poutre .....	121
Figure IV.18 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la densité du cœur viscoélastique de la poutre .....	121
Figure IV.19 : Variation des fréquences de résonances du premier, troisième et cinquième mode de la poutre sandwich 1.....	122
Figure IV.20 : Variation des facteurs de perte du premier, troisième et cinquième mode de la poutre sandwich 1 .....	123
Figure IV.21 : Impact de la sensibilité des paramètres modaux sur le module de cisaillement de la couche viscoélastique .....	124
Figure IV.22 : Impact de la sensibilité des paramètres modaux sur le facteur de perte de la couche viscoélastique .....	125

# Table des tableaux

---

Tableau I.1 : Lois de comportement et modules opérationnels de modèles composés .....	18
Tableau I.2 : Valeurs de la fonction de cisaillement suivant les modèles non zigzag.....	28
Tableau II.1: Fréquences de résonance et facteur de perte de la poutre sandwich 1 de longueur utile de L=47.5cm .....	50
Tableau II.2 : Valeurs initiales des paramètres d'entrée de l'identification (modules de cisaillement et facteurs de perte) des 10 essais de robustesse .....	51
Tableau III.1 : Caractéristiques matériaux et dimensionnelles des poutres sandwich .....	58
Tableau III.2 : Paramètres modaux de la poutre sandwich 2.....	60
Tableau III.3 : Caractéristiques mécaniques du matériau viscoélastique déterminées par l'approche inverse .....	61
Tableau III.4 : Fréquences de résonance et facteurs de perte des deux poutres pour différentes longueurs utiles.....	65
Tableau III.5 : Modules de cisaillement et facteurs de perte du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence .....	66
Tableau III.6 : Paramètres identifiés d'un modèle rhéologique de type polynomial.....	68
Tableau III.7 : Paramètres de modules rhéologiques .....	70
Tableau III.8 : Paramètres du modèle de Maxwell généralisé identifiés pour la résine diélectrique ....	71
Tableau III.9 : Paramètres du modèle ADF identifiés pour la résine diélectrique .....	73
Tableau III.10 : Paramètres du modèle GHM identifiés pour la résine diélectrique .....	75
Tableau III.11 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 1 avec un modèle de Maxwell généralisé pour le cœur viscoélastique .....	79
Tableau III.12 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 1 avec un modèle ADF pour le cœur viscoélastique .....	80
Tableau III.13 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 1 avec un modèle GHM pour le cœur viscoélastique .....	81
Tableau III.14 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 2 avec un modèle de Maxwell généralisé pour le cœur viscoélastique .....	82
Tableau III.15 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 2 avec un modèle ADF pour le cœur viscoélastique .....	83
Tableau III.16 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 2 avec un modèle GHM pour le cœur viscoélastique .....	84
Tableau III.17 : Paramètres modaux de la poutre sandwich en fonction de la température.....	88
Tableau III.18 : Caractéristiques mécaniques de la couche viscoélastique en fonction des modes de résonance à des températures données .....	90
Tableau III.19 : Valeur des paramètres du modèle rhéologique de Maxwell généralisé à différentes températures .....	94

Tableau III.20 : Valeur des paramètres du modèle rhéologique ADF à différentes températures .....	95
Tableau III.21 : Valeur des paramètres du modèle rhéologique GHM à différentes températures .....	96
Tableau IV.1 : Fréquences de résonance et facteurs de perte pour le même échantillon .....	100
Tableau IV.2 : Variabilité de la fréquence de résonance et du facteur de perte par mode .....	101
Tableau IV.3 : Modules de cisaillement et facteurs de perte du cœur viscoélastique de la poutre sandwich identifiés par notre méthode suite aux essais de reproductibilité .....	102
Tableau IV.4 : Variabilité des paramètres du cœur viscoélastique à chaque mode de résonance .....	104
Tableau IV.5 : Fréquences de résonance et facteurs de perte des quatre échantillons .....	106
Tableau IV.6 : Variabilité des paramètres modaux identifiés lors des essais de reproductibilité .....	106
Tableau IV.7 : Modules de cisaillement et facteurs de perte du cœur viscoélastique de la poutre sandwich identifiés aux modes de résonance suite aux essais de reproductibilité .....	107
Tableau IV.8 : Variabilité du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique à chaque mode de résonance lors des essais de reproductibilité .....	109
Tableau IV.9 : Paramètres identifiés en faisant varier la largeur de la poutre de 10%.....	111
Tableau IV.10 : Paramètres identifiés en faisant varier la longueur de la poutre.....	113
Tableau IV.11 : Paramètres identifiés en faisant varier l'épaisseur de la couche viscoélastique avec une épaisseur totale de la poutre constante .....	115
Tableau IV.12 : Paramètres identifiés en faisant varier l'épaisseur des faces élastiques avec une épaisseur totale de la poutre constante .....	117
Tableau IV.13 : Paramètres identifiés en faisant varier la densité des faces élastiques de la poutre ..	119
Tableau IV.14 : Paramètres identifiés en faisant varier la densité du cœur viscoélastique.....	120





# Introduction générale

---

Afin d'assurer un confort optimum aux usagers, de protéger les structures, les édifices contre la fatigue structurale et la rupture pouvant conduire à leur ruine, il est très important de réduire les phénomènes vibratoires. L'une des causes de rupture dans les ouvrages est la fatigue structurale causée par l'ampleur des amplitudes de vibration en réponse à une excitation forcée aléatoire ou déterministe et des rayonnements induits. Face aux contraintes de conception et de dimensionnement des structures, pour que ces dernières répondent aux conditions optimales de sécurité et d'économie, une solution est l'utilisation de matériaux composites amortissants. Leur structure multifonctionnelle permet l'intégration de solution antivibratoire dans les structures dans lesquelles elles se trouvent. Ce fort intérêt se traduit dans de nombreux secteurs industriels tels que l'aéronautique, l'aérospatial, la construction navale, la construction automobile, l'électroménager, le génie civil, le génie nucléaire...

Pour réduire et contrôler l'amplitude des vibrations, trois types de solutions existent. La première solution consiste à éliminer le bruit engendré par la vibration tandis que la seconde solution consiste à une isolation du phénomène pour éviter la transmission des vibrations d'un système à un autre sans pour autant supprimer la source émettrice elle-même. Enfin, la troisième solution est une technique d'amortissement utilisée pour diminuer l'amplitude des vibrations d'un système par intégration des matériaux absorbants ou adaptatifs. Cette dernière solution est la plus répandue et se décline en trois principes d'amortissement. L'amortissement « actif » intègre dans la structure des capteurs et des actionneurs couplés à un système de contrôle. Le contrôle des vibrations s'effectue par une intégration de capteurs notamment piézo-électriques dans la structure qui vont faire vibrer l'ensemble pour neutraliser les vibrations de la structure globale. L'inconvénient de cette technique est qu'elle nécessite une énergie extérieure au système pour générer l'amortissement. Le principe de l'amortissement « passif » est d'ajouter à la structure un matériau viscoélastique pour introduire un amortissement dans la réponse vibratoire du système. En effet, ces matériaux viscoélastiques ont la capacité de dissiper de l'énergie vibratoire lors des déformations de cisaillement. Enfin, l'approche « hybride » couple les deux premiers principes « actif » et « passif » en intégrant à la fois des capteurs/actionneurs et des polymères viscoélastiques dans la structure. Son avantage est de pouvoir contrôler des vibrations dans une large gamme de fréquences.

Les polymères viscoélastiques sont des matériaux qui assurent l'amortissement des vibrations. Ainsi, les structures sandwichs viscoélastiques sont largement utilisées pour contrôler et réduire les vibrations dans l'industrie aérospatiale ou automobile [1]–[3]. Cette solution trouve une application dans les pare brises, les capots ou les ailes avant de voitures (Figure I.1.a. (a)). Dans l'industrie du génie civil, une formulation de béton intégrant des agrégats de caoutchouc (Figure I.1.a. (b)) a été développée pour la construction d'ouvrages assurant une meilleure isolation acoustique.

Grace au compromis rigidité et rapport poids/résistance, à leur bonne tenue à la fatigue, et à leur facilité de production en masse, les structures sandwichs viscoélastiques contraintes sont également utilisées dans les applications d'ingénierie comme dans le cas des éléments porteurs [4], [5]. Elles sont généralement constituées de trois couches : deux faces élastiques contraignant un cœur viscoélastique. Les couches élastiques peuvent être en fibre renforcées de plastique [6]–[8], en acier résistant à la chaleur [9] ou en alliages d'aluminium [10], [11], et elles sont liées au cœur par adhésion ou polymérisation.



Figure I.1.a : Exemples d'utilisation de structures sandwichs viscoélastiques

Associant une fine couche de polymère viscoélastique entre deux couches métalliques (Figure I.2.a), cette mise en forme de composite amortissement est largement usitée. Cette structure allie un haut pouvoir amortissant tout en conservant les caractéristiques de résistance et de rigidité liées aux faces du sandwich. L'amortissement passif est efficace en moyennes et hautes fréquences.

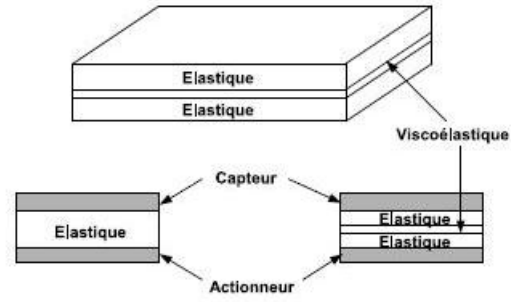


Figure I.2.a : Configuration de contrôle passif

Ce contrôle passif des vibrations est aussi utilisé dans l'industrie navale notamment pour atténuer les bruits parasites liés à l'écoulement de l'eau dans le dôme sonar [12] ou dans les pales de propulseur évitant ainsi les vibrations et le phénomène de cavitation [13]. Les techniques de contrôle du bruit et des vibrations évoluent et de ce fait la recherche de manière continue de solutions technologiques de plus en plus adéquates s'impose [14], [15]. Ainsi, des stratégies d'optimisation des traitements viscoélastiques ont été mises au point et elles sont faites généralement en trois étapes [16] à savoir le développement d'un outil numérique prédictif et efficace, l'optimisation du traitement amortissant à travers une simulation et des algorithmes d'optimisation numérique, et la validation de la méthodologie par comparaison des résultats optimaux de simulation avec les résultats expérimentaux ou analytiques.

D'un point de vue mécanique, l'amortissement passif de structures sandwichs se traduit par un cisaillement important de la couche viscoélastique dû à la différence entre les déplacements longitudinaux des couches élastiques et la faible rigidité du cœur viscoélastique, ainsi les propriétés mécaniques du matériau viscoélastique assurant la fonction amortissante dépendent généralement de la température et de la fréquence. Afin de maximiser l'amortissement des structures sandwichs, il est nécessaire de caractériser de manière robuste et efficace les propriétés mécaniques de la couche viscoélastique. En général, le matériau viscoélastique est caractérisé seul à travers les essais d'analyse mécanique dynamique (Dynamic Mechanical Analysis – DMA), de traction-compression...

Cependant, ces caractérisations ne prennent pas en compte les contraintes de fonctionnement, ni même le fait que le matériau viscoélastique est contraint entre deux couches élastiques.

Pour pallier à cela, nous proposons une nouvelle méthode d'identification inverse des propriétés mécaniques du matériau viscoélastique inclus dans une structure sandwich. L'objectif principal de cette thèse est de proposer une méthode de caractérisation des propriétés mécaniques d'une résine viscoélastique **in situ** ; c'est à dire le cœur du sandwich intercalé entre deux couches élastiques.

Nous proposons une stratégie permettant une caractérisation par une méthode d'identification inverse c'est à dire qu'à partir du comportement vibratoire global de la structure, on remonte à celui du matériau viscoélastique à l'aide de la modélisation éléments finis. A partir de cette caractérisation, un modèle de comportement du matériau viscoélastique peut être isolé. L'approche développée se limite à l'étude des effets de fréquence et de température dans le domaine de la viscoélasticité linéaire.

Dans cette thèse, nous avons divisé les travaux en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous présentons une revue de la théorie la viscoélasticité linéaire des matériaux non vieillissants et évoquons le phénomène causant l'amortissement dans ces matériaux. Les principaux modèles rhéologiques sont décrits avec les lois de comportement des matériaux viscoélastiques dépendant de la fréquence. Par la suite une étude bibliographique sur l'analyse des vibrations linéaires est menée, avec un accent particulier sur les méthodes de caractérisation des propriétés mécaniques de structures sandwichs viscoélastiques notamment les méthodes d'identification inverse. Un bilan est effectué en fin de chapitre permettant de bien définir la problématique et le cadre de notre étude ainsi que les moyens utilisés.

Dans le deuxième chapitre, nous développons la nouvelle méthode d'identification inverse des propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique. Cette méthode est basée sur un élément fini de type poutre qui a été utilisé pour formuler le problème de vibration libre linéaire des structures sandwichs viscoélastiques. Le problème de vibration linéaire a été résolu par une approche générique qui combine la méthode asymptotique numérique et les techniques de différentiation automatique. Cette méthode consiste en une procédure itérative utilisant le quotient de Rayleigh et qui permet de déterminer les caractéristiques mécaniques d'un matériau viscoélastique en fonction de la fréquence. A la fin du chapitre notre méthode sera validée par les expressions analytiques de Ross-Kerwin-Ungar.

Le troisième chapitre fait la part belle à l'application de notre méthode d'identification inverse aux sandwichs viscoélastiques. Dans un premier temps, le dispositif expérimental permettant de déterminer les paramètres modaux essentiels à la mise en œuvre de notre méthode d'identification est présenté. Les résultats expérimentaux et de l'identification y sont détaillés. Par la suite, les paramètres de certains modèles rhéologiques sont déterminés grâce aux résultats issus de l'identification ; ceci dans le but de déterminer une loi de comportement de notre matériau viscoélastique. Nous procédons à une validation numérique des lois de comportements déterminées. Pour se faire, nous mettons au point un recalage numérique/expérimental en comparant les paramètres modaux de la poutre sandwich déterminés expérimentalement avec ceux déterminés numériquement. Ces derniers sont calculés par un code numérique développé sur le logiciel MATLAB et qui prend en compte la loi de comportement du matériau viscoélastique. Pour finir, nous étudions l'effet de la température sur les propriétés mécaniques du cœur viscoélastique.

Dans le dernier chapitre, nous effectuons une étude de répétabilité et de reproductibilité sur les essais expérimentaux en vue d'étudier la variabilité des paramètres modaux de la poutre sandwich viscoélastique. L'intérêt est faire une étude de robustesse et de sensibilité de notre méthode d'identification en prenant en compte les différents paramètres physiques de la poutre sandwich viscoélastique.



# Chapitre I. Etat de l'art sur les méthodes d'identification des structures sandwichs viscoélastiques.

---

## I.1. Introduction

L'utilisation des matériaux viscoélastiques est de plus en plus fréquente dans des domaines comme l'automobile, l'aéronautique, le génie civil notamment pour l'amortissement, le contrôle passif des vibrations et l'atténuation voir l'élimination des bruits. Dans certains cas, les matériaux viscoélastiques ayant des pouvoirs amortissants, sont incorporés à la structure dès la conception ; on parle alors de contrôle passif. Sous l'effet des sollicitations et des facteurs environnementaux, ces matériaux viscoélastiques responsables de l'amortissement dans ces structures présentent un comportement non linéaire, en l'occurrence leur dépendance en fréquence et en température conduisent à des lois de comportement non linéaires et à variables complexes. Ainsi, résoudre un problème de vibrations amorties de structure en matériaux composites viscoélastiques, revient à résoudre un problème non linéaire aux valeurs propres complexes [17]. Plusieurs études de la littérature ont proposé des techniques de résolution numériques des problèmes non linéaires aux valeurs propres complexes. Dans les cas où, les pouvoirs amortissants des matériaux viscoélastiques ne sont pas connus, il convient alors de procéder à leur caractérisation. Ainsi pour les matériaux viscoélastiques homogènes et isotropes, seules deux valeurs d'élasticité sont nécessaires à caractériser. Il a été établi par [18][19] que les couples de propriétés (G, K) ou (E, K) sont les plus appropriées à mesurer. La caractérisation du matériau viscoélastique est généralement effectuée par des mesures du module de cisaillement uniaxial (G) et du module de compressibilité (K).

Dans le domaine fréquentiel, il existe des méthodes hors-résonance [20] telles que l'analyse mécanique dynamique (DMA) qui est utilisée pour la caractérisation des propriétés mécaniques de matériaux viscoélastiques. Il existe aussi des méthodes dites résonnantes [20] pour ce genre de caractérisations, parmi lesquelles la méthode d'Oberst [21]–[23] qui est utilisée pour mesurer les propriétés viscoélastiques de matériaux relativement doux et très amortissants. Cette méthode, décrite par [24], consiste en des essais de résonance sur des poutres amorties par une couche libre ou contrainte du matériau viscoélastique à caractériser.

Une fois les paramètres modaux (fréquence de résonance et facteur de perte) déterminés, le module de stockage et le facteur de perte viscoélastique sont calculés à l'aide d'expressions

analytiques développées par Ross, Ungar et Kerwin [25] pour ce genre de structures et reprises dans l'ouvrage de Nashif et Jones [26]. Pour mieux cerner la thématique des structures sandwichs viscoélastiques, nous effectuons dans ce chapitre, dans un premier temps un rappel sur les différentes techniques de résolution numérique des problèmes aux valeurs propres complexes et sur le formalisme utilisé pour la modélisation du comportement des matériaux viscoélastiques. Ensuite, le reste du chapitre sera consacré à l'étude bibliographique des différentes méthodes d'identification et de modélisation des structures sandwichs viscoélastiques. Le bilan de cette revue bibliographique sera fait à la fin du chapitre, ce qui nous permettra enfin de positionner l'ensemble de cette étude dans son contexte. Il permettra surtout de mettre en évidence l'intérêt et la pertinence de la mise en place de la méthode d'identification inverse.

## **I.2. Généralités sur les sandwichs viscoélastiques**

### **I.2.1. Notion de viscoélasticité et de matériaux amortissants (passif /actif)**

#### **I.2.1.1 Notion de viscoélasticité**

Un matériau viscoélastique est défini comme ayant un comportement à la fois visqueux et élastique. Cette dernière propriété se retrouve chez des solides et la première quant à elle est liée aux liquides. Les propriétés mécaniques observées sont généralement dépendantes du temps et des quantités qui en dérivent, ceci à cause du fait que lorsqu'une déformation est appliquée à un matériau viscoélastique ce dernier donne comme réponse un couplage entre la réponse d'un solide élastique et celle d'un fluide visqueux. La réponse du solide élastique étant une contrainte qui est proportionnelle à la déformation et celle du fluide visqueux une contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation ; et vice versa, une contrainte appliquée donne comme réponse une déformation. Ainsi on peut en déduire que les caractéristiques mécaniques d'un matériau viscoélastique sont fonction du temps et des différentes sollicitations. Pour pouvoir caractériser le comportement viscoélastique des matériaux dans le domaine temporel, plusieurs essais sont utilisés ; notamment les essais de fluage, de relaxation et de recouvrance [27].



## Matériau viscoélastique : loi de comportement

Ci-dessous, une formulation tridimensionnelle est exposée en s'inspirant de [28]–[30]. La loi mathématique qui lie la réponse d'un matériau à une sollicitation, est établie notamment grâce à la formulation fonctionnelle. Lorsqu'une contrainte est appliquée à un matériau cela entraîne comme réponse une déformation, et inversement lorsqu'une déformation est appliquée à un matériau, on a une contrainte comme réponse. Ainsi, il existe des fonctionnelles  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  qui permettent de lier les contraintes aux déformations.

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t) = \mathcal{F}[\varepsilon_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] \\ \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{G}[\sigma_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] \end{cases} \quad (1.5)$$

$\sigma_{ij}(t)$  dépend de l'histoire de la déformation  $\varepsilon_{kl}(\tau)$  et inversement  $\varepsilon_{ij}(t)$  dépend de celle de  $\sigma_{kl}(\tau)$ . Le matériau viscoélastique a un comportement dit linéaire si la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  (respectivement  $\mathcal{F}$ ) est linéaire. Cette linéarité se traduit par exemple, par le fait que pour deux états de contraintes différents  $\sigma^{(1)}$  et  $\sigma^{(2)}$ , on a :

$$\begin{cases} \mathcal{G}[\sigma_{kl}^{(1)}(\tau_{-\infty}^t) + \sigma_{kl}^{(2)}(\tau_{-\infty}^t)] = \mathcal{G}[\sigma_{kl}^{(1)}(\tau_{-\infty}^t)] + \mathcal{G}[\sigma_{kl}^{(2)}(\tau_{-\infty}^t)] \\ \mathcal{G}[\lambda\sigma_{kl}(\tau_{-\infty}^t)] = \lambda\mathcal{G}[\sigma_{kl}(\tau_{-\infty}^t)], \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.6)$$

La conséquence de cette linéarité est que pour un échelon de déformation  $\varepsilon_{kl}^0$  appliqué à l'instant  $t_0$  la fonction de relaxation  $\mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0, \varepsilon_{kl}^0)$  est indépendante de  $\varepsilon_{kl}^0$ . Inversement, la fonction de fluage  $\mathcal{J}_{ijkl}(t, t_0, \sigma_{kl}^0)$  est également indépendante de  $\sigma_{kl}^0$ . Ainsi pour la viscoélasticité linéaire les équations (1.5) deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(t, t_0)\varepsilon_{kl}^0 \\ \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(t, t_0)\sigma_{kl}^0 \end{cases} \quad (1.7)$$

A partir de la connaissance des fonctions  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{R}$ , et grâce à la linéarité du comportement on peut exprimer la réponse d'un matériau à toute histoire de sollicitation (contrainte ou déformation). Ainsi, le principe de supersposition de Boltzmann permet d'écrire les relations liant la contrainte et la déformation comme suit :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{J}_{ijkl}(t, \tau)\dot{\sigma}_{kl}(\tau)d\tau \quad (1.8)$$

$$\sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{R}_{ijkl}(t, \tau)\dot{\varepsilon}_{kl}(\tau)d\tau \quad (1.9)$$

Un matériau dont les propriétés n'évoluent pas avec le temps, est qualifié de matériau non vieillissant [31]. Ainsi pour un instant  $\tau$  antérieur à  $t$ , les fonctions de relaxation et de fluage

possèdent les propriétés suivantes :  $\mathcal{R}_{ijkl}(t - \tau) = 0$  et  $\mathcal{J}_{ijkl}(t - \tau) = 0$ . Les équations (1.8) et (1.9) sont alors réécrites sous cette forme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{J}_{ijkl}(t - \tau) \dot{\sigma}_{kl}(\tau) d\tau \\ \sigma_{ij}(t) = \int_{-\infty}^t \mathcal{R}_{ijkl}(t - \tau) \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) d\tau \end{cases} \quad (1.10)$$

Nous remarquons que les expressions de l'équation (1.10) peuvent être réécrites en terme de produit de convolution de Riemann notée  $*$ , ainsi cette équation devient :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \mathcal{J}_{ijkl}(t) * \dot{\sigma}_{kl}(\tau) \\ \sigma_{ij}(t) = \mathcal{R}_{ijkl}(t) * \dot{\varepsilon}_{kl}(\tau) \end{cases} \quad (1.11)$$

Il est donc clair que les calculs de lois de comportement pour les matériaux viscoélastiques linéaires non vieillissants se font dans une algèbre de convolution.

### Viscoélasticité dans le domaine fréquentiel :

La formulation fonctionnelle des problèmes de viscoélasticité linéaire dans le domaine fréquentiel, pour les matériaux non vieillissants s'obtient par l'usage de la transformation de Laplace et de la transformation de Carson. Les opérateurs  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{L}$  respectivement opérateur de la transformation de Carson et de Laplace pour une fonction  $f(t)$  sont définis par:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = f(s), \quad s \in \mathbb{C} \\ \mathcal{C}[f(t)] = s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = sf(s) = f^*(s) \end{cases} \quad (1.12)$$

avec  $f(s)$  transformée de Laplace de  $f(t)$  et  $f^*(s)$  transformée de Carson de  $f(t)$ .

Rappelons que la transformée de Laplace possède les propriétés suivantes concernant le produit de convolution de deux fonctions  $g(t), h(t)$  et sur la dérivée :

$$\begin{cases} \mathcal{L}[g(t) * h(t)] = \mathcal{L}[g(t)] \mathcal{L}[h(t)] = g(s)h(s) \\ \mathcal{L}[\dot{g}(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{C}[g(t)] = g^*(s) \end{cases} \quad (1.13)$$

Ainsi, nous pouvons réécrire les lois de comportement de l'équation (1.11) :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(s) = s\mathcal{J}_{ijkl}(s)\sigma_{kl}(s) \\ \sigma_{ij}(s) = s\mathcal{R}_{ijkl}(s)\varepsilon_{kl}(s) \end{cases} \quad (1.14)$$

Or,  $\mathcal{J}_{ijkl}^*(s) = s\mathcal{J}_{ijkl}(s)$  et  $\mathcal{R}_{ijkl}^*(s) = s\mathcal{R}_{ijkl}(s)$  donc l'équation (1.14) devient :

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(s) = \mathcal{J}_{ijkl}^*(s)\sigma_{kl}(s) \\ \sigma_{ij}(s) = \mathcal{R}_{ijkl}^*(s)\varepsilon_{kl}(s) \end{cases} \quad (1.15)$$

$\mathcal{J}_{ijkl}^*$  et  $\mathcal{R}_{ijkl}^*$  étant respectivement les tenseurs des complaisances opérationnelles et des modules opérationnels d'ordre 4. De part l'équation (1.15), on peut en déduire que :

$$\mathcal{J}_{ijkl}^* = (\mathcal{R}_{ijkl}^*)^{-1} \quad (1.16)$$

Remarquons que les équations (1.14) et (1.15) sont analogues à la loi de Hooke généralisée ; loi qui relie les contraintes aux déformations en élasticité linéaire :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (1.17)$$

avec  $C_{ijkl}$  le tenseur d'ordre 4 des modules élastiques.

En se basant sur cette analogie, on en déduit que la résolution d'un problème viscoélastique peut être ramenée à la résolution d'un problème élastique équivalent ; d'où **le principe de correspondance élastique-viscoélastique**.

### I.2.1.2 Matériaux amortissants:Notion d'amortissement

Dans cette partie, nous présentons le comportement d'un matériau viscoélastique soumis à des sollicitations harmoniques, en nous basant sur les lois de comportements de ces matériaux.

#### Sollicitations harmoniques de matériaux viscoélastiques:

Prenons un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant soumis à des sollicitations harmoniques de la forme suivante :

$$\sigma_{kl}(t) = R_e [\sigma_{kl}^0 e^{i\omega t}] = \sigma_{kl}^0 \cos(\omega t) \quad (1.18)$$

avec  $\sigma_{kl}^0 = \sqrt{-1}$ ,  $\omega$  la pulsation et  $R_e$  désignant la partie réelle. En mettant l'expression de  $\sigma_{kl}$  issue de l'équation (1.18) dans l'équation (1.10) et en faisant un changement de variable  $\tau = t - u$  ; on remarque que  $i\omega \int_0^{+\infty} \mathcal{J}_{ijkl}(t)e^{-i\omega t} dt = \mathcal{J}_{ijkl}^*(i\omega)$  d'après la définition de la transformée de Carson. Nous avons alors comme loi de comportement:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \sigma_{kl}^0 R_e [\mathcal{J}_{ijkl}^*(i\omega)e^{i\omega t}] \quad (1.19)$$

Le tenseur  $\mathcal{J}_{ijkl}^*$  est décomposé comme suit :

$$\mathcal{J}_{ijkl}^*(i\omega) = \mathcal{J}'_{ijkl}(\omega) + i\mathcal{J}''_{ijkl}(\omega) \quad (1.20)$$

avec  $J'_{ijkl}$  la partie réelle qui est appelée complaisance de stockage et  $J''_{ijkl}$  la partie imaginaire qui quant à elle est appelée complaisance de perte.

A l'inverse pour des sollicitations harmoniques de la forme suivante :

$$\varepsilon_{kl}(t) = R_e[\varepsilon_{kl}^0 e^{i\omega t}] = \varepsilon_{kl}^0 \cos(\omega t) \quad (1.21)$$

la loi de comportement correspondante à celle de l'équation (1.19), pour une réponse en contrainte s'écrit comme suit:

$$\sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{kl}^0 R_e[\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega) e^{i\omega t}] \quad (1.22)$$

avec  $\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega) = i\omega \int_0^{+\infty} \mathcal{R}_{ijkl}(t) e^{-i\omega t} dt$ ,  $\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega) = \mathcal{R}'_{ijkl}(\omega) + i\mathcal{R}''_{ijkl}(\omega)$ ;  $\mathcal{R}'_{ijkl}(\omega)$  et  $\mathcal{R}''_{ijkl}(\omega)$  étant respectivement les module de stockage et perte. Ces deux termes seront vus plus tard dans le chapitre II.

### Déphasage : Amortissement

Les tenseurs  $J'_{ijkl}$  et  $\mathcal{R}_{ijkl}^*$  définis précédemment, peuvent être écrits sous forme de nombre complexe. Ainsi, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega) = |\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)} \\ \tan(\varphi(\omega)) = \frac{\text{Im}(\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega))}{\text{Re}(\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega))} = \frac{\mathcal{R}''_{ijkl}(\omega)}{\mathcal{R}'_{ijkl}(\omega)} \end{array} \right. \quad (1.23)$$

**Im** et **Re** étant respectivement la partie imaginaire et la partie réelle du tenseur,  $|\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega)|$  le module complexe. Ainsi, en se basant sur cette formulation, les lois de comportement (1.21) et (1.22) peuvent être réécrites respectivement comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{kl}(t) = \varepsilon_{kl}^0 \cos(\omega t) \\ \sigma_{ij}(t) = \varepsilon_{kl}^0 |\mathcal{R}_{ijkl}^*(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \end{array} \right. \quad (1.24)$$

L'équation (1.24) montre clairement le déphasage d'angle  $\varphi(\omega)$  qui existe entre la contrainte et la déformation pour une sollicitation harmonique, ceci est illustrée sur la figure I.1 et la tangente de cet angle définit le terme amortissement du matériau noté  $\eta(\omega)$ .

### Frottement interne : Amortissement

Pour mettre en exergue la dissipation interne en rapport avec l'amortissement dans un matériau viscoélastique linéaire non vieillissant, nous considérons une sollicitation harmonique uniaxiale. La loi de comportement (1.24) se réécrit ainsi :

$$\begin{cases} \varepsilon(t) = \varepsilon^0 \cos(\omega t) \\ \sigma(t) = \varepsilon^0 |\mathcal{R}^*(i\omega)| \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \end{cases} \quad (1.25)$$

où  $\mathcal{R}^*(i\omega) = E^*(i\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega)$  représente le module d'Young complexe pour un essai de traction-compression et  $\eta(\omega) = \tan(\varphi(\omega)) = E''(\omega)/E'(\omega)$ .

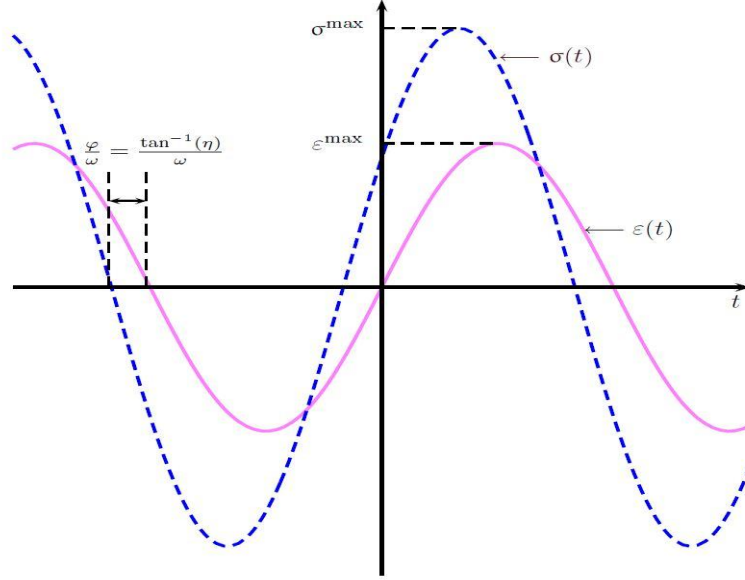


Figure I.1 : Déphasage entre contrainte et déformation

De l'équation (1.25) on peut en déduire les expressions de  $\sin(\omega t)$  et  $\cos(\omega t)$ , ainsi nous avons :

$$\begin{cases} \cos(\omega t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon^0} \\ \sin(\omega t) = \frac{1}{\eta \varepsilon^0} \left[ \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E'(\omega)} \right] \end{cases} \quad (1.26)$$

La figure I.2 illustre le déphasage  $\varphi(\omega)$  entre la sollicitation harmonique et la réponse du matériau, ce déphasage se traduit par une hystérésis dans le plan de charge ( $\sigma - \varepsilon$ ). De part les données de l'équation (1.26) nous déduisons la relation contrainte-déformation dans ce plan :

$$\left( \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon^0} \right)^2 + \left( \frac{1}{\eta \varepsilon^0} \left[ \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E'(\omega)} \right] \right)^2 = 1 \quad (1.27)$$

L'aire de l'hystérèse (figure I.2) représente le travail dissipé ( $E_d$ ) au cours d'un cycle de sollicitation :

$$E_d = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma(t) \dot{\varepsilon}(t) dt = \eta E' (\varepsilon^0)^2 \omega \int_0^{2\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt = \eta E' (\varepsilon^0)^2 \pi \quad (1.28)$$

L'énergie potentielle maximale étant égale à  $E_p = \frac{E'(\varepsilon^0)^2}{2}$ , on définit alors le facteur de perte ou facteur d'amortissement par  $\eta$ . Ce facteur correspond au rapport de l'énergie dissipée  $E_d$  sur un cycle de déformation par  $2\pi$  fois l'énergie potentielle maximale. Nous avons alors :

$$\eta = \frac{E_d}{2\pi E_p} \quad (1.29)$$

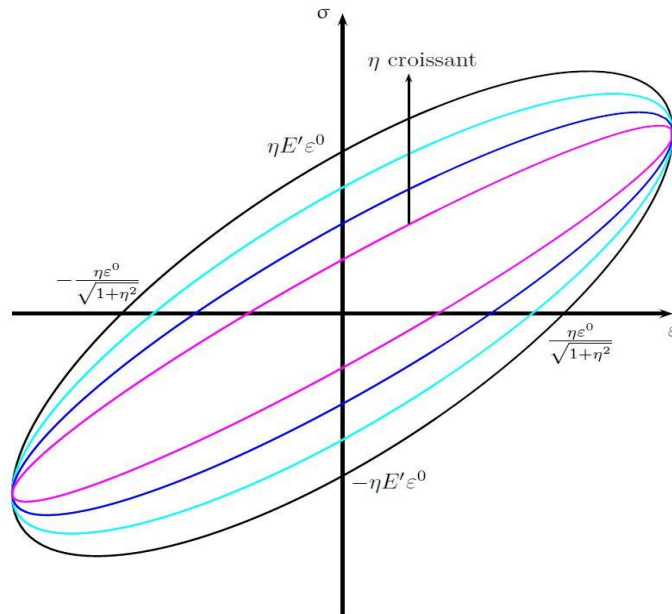


Figure I.2 : Hystérèse contrainte-déformation en fonction de  $\eta$

### I.2.2. Modèles rhéologiques

Le but de cette partie est de présenter les différents modèles viscoélastiques unidimensionnels couramment utilisés pour décrire le comportement mécanique de ces matériaux. Le comportement d'un matériau viscoélastique combine les propriétés d'un solide purement élastique et celles d'un fluide visqueux, on en déduit ainsi que cette combinaison peut simplement se faire en associant un ressort et un amortisseur. On distingue notamment les modèles rhéologiques de base et les modèles rhéologiques complexes ou généralisés.

Les modèles rhéologiques de base sont construits en associant un ressort et un amortisseur en série et/ou en parallèle. L'utilisation du ressort vient du fait qu'il représente un élément élastique et qu'il introduit un rapport de proportionnalité entre la sollicitation (déformation) et la réponse (contrainte) à travers sa raideur  $k$ :  $\sigma = k\varepsilon$ . L'amortisseur représente lui, un

élément visqueux dissipatif dont la loi de comportement est :  $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$  avec  $\eta$  la viscosité et  $\dot{\varepsilon}$  et la vitesse de déformation uniaxiale. Les modèles rhéologiques les plus simples sont le modèle de Maxwell, le modèle de Kelvin-Voigt, et le modèle de Zener.

### I.2.2.1 Modèle réologique de base

#### Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell consiste à assembler en série un ressort et un amortisseur (Figure I.5.b). On note  $\sigma_0$  et  $\varepsilon_0$  la contrainte et la déformation dans le ressort, et  $\sigma_1$ ,  $\varepsilon_1$  la contrainte et la déformation dans l'amortisseur. Lorsque deux éléments sont assemblés en série, la déformation totale  $\varepsilon$  est égale à la somme de chacune des déformations, et la contrainte totale  $\sigma$  est égale à chacune des contraintes des deux éléments :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 = \sigma_1 \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \end{cases} \quad (1.30)$$

Avec  $\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0$  et  $\sigma_1 = \eta \dot{\varepsilon}_1$ , ainsi la loi de comportement est la suivante :

$$\sigma + \frac{\eta}{E_0} \dot{\sigma} = \eta \dot{\varepsilon} \quad (1.31)$$

Le module complexe correspondant est :

$$E^*(\omega) = \frac{iE_0\omega\eta}{E_0+i\omega\eta} = E_0 \frac{i\omega\tau}{1+i\omega\tau} \quad (1.32)$$

$\tau = \frac{\eta}{E_0}$  étant le temps de relaxation.

#### Modèle de Kelvin-Voigt

Egalement appelé modèle d'amortisseur visqueux, ce modèle consiste à assembler un ressort et un amortisseur en parallèle (Figure I.5.a). Pour deux éléments en parallèle, la contrainte totale est égale à la somme des contraintes issues de chaque élément, alors que la déformation totale est la même que dans chaque élément.

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{cases} \quad (1.33)$$

avec  $\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1$  et  $\sigma_2 = \eta \dot{\varepsilon}_2$ . La loi de comportement est alors :

$$\sigma = E_1 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon} \quad (1.34)$$

Le module complexe correspondant est :

$$E^*(\omega) = E_1 + i\omega\eta \quad (1.35)$$

### Modèle de Zener

Le modèle de Zener est également appelé modèle solide linéaire standard (SLS) de type Maxwell ou Kelvin-Voigt. Il est de type Maxwell quand il est obtenu par assemblage d'un ressort en parallèle avec un modèle Maxwell et de type Kelvin-Voigt quand il s'agit d'un assemblage en série entre un modèle de Kelvin-Voigt et un ressort. Nous allons étudier ce dernier cas dans ce paragraphe (Figure I.5.c). Ainsi pour  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$  qui sont respectivement les déformations dans le ressort et dans le modèle de Kelvin-Voigt ; et pour  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  les contraintes respectives dans le ressort et dans le modèle de Kelvin-Voigt, nous avons :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 = \sigma_1 \\ \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \\ \sigma_0 = E_0\varepsilon_0 \\ \sigma_1 = E_1\varepsilon_1 + \eta\dot{\varepsilon}_1 \end{cases} \quad (1.36)$$

avec  $\sigma$  et  $\varepsilon$  respectivement les contraintes et déformations totales. En combinant, les relations de l'équation (1.36), nous obtenons comme loi de comportement :

$$(E_0 + E_1)\sigma + \eta\dot{\sigma} = E_0(E_1\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}) \quad (1.37)$$

Le module opérationnel correspondant est :

$$E^*(\omega) = \frac{E_0(E_1 + i\omega\eta)}{E_0 + E_1 + i\omega\eta} \quad (1.38)$$

Pour des sollicitations simples, comme dans les essais de fluage ou de relaxation de contrainte, les modèles précités sont représentatifs d'un comportement réel, mais le module de perte varie trop rapidement avec la fréquence pour des essais dynamiques. Ainsi, des modèles plus complexes ont été établis.

#### I.2.2.2 Modèles rhéologiques composés

Ces modèles rhéologiques complexes, notamment le modèle de Kelvin-Voigt généralisé et le modèle de Maxwell généralisé (Figure I.5.d) et (Figure I.5.e), peuvent être généralisés en prenant en compte une quelconque association d'éléments linéaires de type



ressort ou amortisseur [32]. Ainsi, nous avons comme loi de comportement, de façon générale la formule suivante:

$$\sigma(t) + \sum_{k=1}^{N_1} a_k \frac{d^k \sigma(t)}{dt^k} = b_0 \varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{N_2} b_k \frac{d^k \varepsilon(t)}{dt^k} \quad (1.39)$$

avec  $N_1$  et  $N_2$  des entiers,  $a_k$  et  $b_k$  des coefficients caractéristiques du matériau.

Les lois de comportement et les modules opérationnels de ces modèles sont montrés dans le tableau I.1.

Tableau I.1 : Lois de comportement et modules opérationnels de modèles composés

Modèle rhéologique	Loi de comportement	Module opérationnel
Kelvin-Voigt généralisé	Equation (1.47)	$[\frac{E_0 + i\omega\eta}{iE_0\omega\eta} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E_k + i\omega\eta_k}]^{-1}$
Maxwell généralisé	Equation (1.47)	$E_0 + i\omega\eta + \sum_{k=1}^n \frac{i\omega\eta_k E_k}{E_k + i\omega\eta_k}$

Cependant, il existe d'autres modèles rhéologiques complexes dans la littérature à savoir le modèle "Anelastic Displacement Fields" (ADF) et le modèle de Golla-Hugues-McTavish (GHM).

### Modèle "Anelastic Displacement Fields" (ADF)

Lesieutre et Bianchini [33], [34] ont développé le modèle "Anelastic Displacement Fields" (ADF) qui est une extension en 3D du modèle ATF [35]. Ce modèle ADF est basé sur des principes thermodynamiques et utilise la théorie des champs de déplacement anélastique vu que la déformation d'un matériau viscoélastique peut être séparée en une partie élastique instantanée et une partie anélastique qui permet de prendre en compte le caractère viscoélastique. Il est composé d'un ressort isolé et d'un assemblage en série d'éléments de Kelvin-Voigt (figure I.3) et le module complexe associé est donné par:

$$E^*(\omega) = E_0(1 + \sum_{k=1}^n \Delta_k \frac{\omega^2 + i\omega\Omega_k}{\omega^2 + \Omega_k^2}) \quad (1.40)$$

où  $E_0$  est le module relaxé,  $\Delta_k$  la résistance à la relaxation et  $\Omega_k$  l'inverse du temps caractéristique de relaxation à déformation constante. La résistance à la relaxation peut être liée à un paramètre  $C_k$  décrivant le couplage entre la relaxation et le déplacement, et définit par:

$$C_k = \frac{1 + \sum_k \Delta_k}{\Delta_k} \quad (1.41)$$

Ce modèle de viscoélasticité est basé sur la séparation du champ de déformation en une contribution élastique, instantanément proportionnelle à la contrainte et une autre contribution anélastique, représentant la relaxation du matériau. Ainsi, sur la figure I.3, le ressort isolé correspond à la partie élastique, et chaque élément de Kelvin-Voigt correspond à une composante de la partie anélastique.

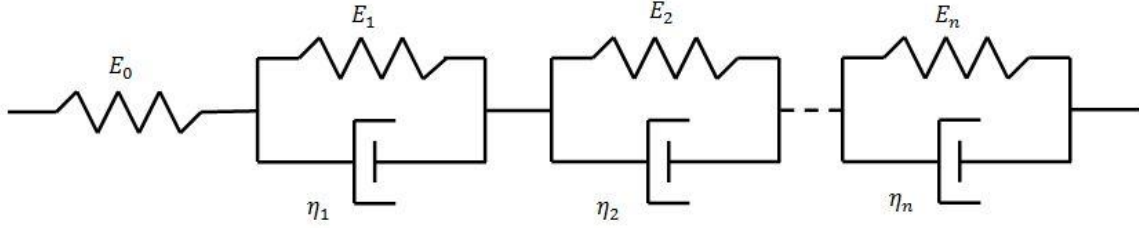


Figure I.3 : Modèle ADF ‘‘Anelastic Displacement Fields’’

### Modèle de Golla-Hugues-McTavish (GHM)

Du nom de ses concepteurs, le modèle Golla-Hughes-MacTavish ou GHM [36], [37] est constitué d’une série de mini-oscillateurs amortis montés en parallèles avec un ressort (figure I.4). Il propose de modéliser le comportement viscoélastique par le module complexe suivant:

$$E^*(\omega) = E_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{2i\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2}{2i\zeta_k \omega_k \omega + \omega_k^2 - \omega^2} \right) \quad (1.42)$$

où  $E_0$  est le module relaxé.

La viscosité de l’amortisseur  $\eta_k$ , la masse  $m_k$  de chaque mini-oscillateur, la raideur  $E_k$  et la raideur  $E_0$  du ressort isolé, relie les paramètres  $\alpha_k$ ,  $\zeta_k$  et  $\omega_k$  par les relations suivantes:

$$\begin{cases} \alpha_k = \frac{E_k}{E_0} \\ \omega_k = \sqrt{\frac{E_k}{m_k}} \\ \zeta_k = \frac{\eta_k}{2\sqrt{m_k E_k}} \end{cases} \quad (1.43)$$

D’après les travaux de [38], au moins trois mini-oscillateurs sont nécessaires pour représenter correctement le comportement viscoélastique d’une structure avec le modèle GHM.

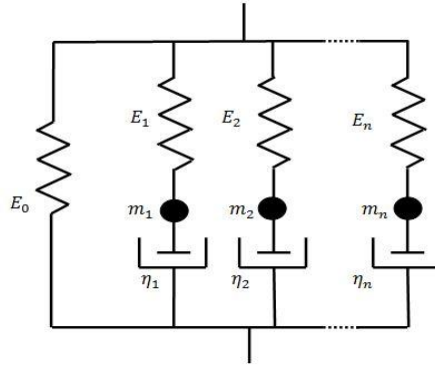


Figure I.4 : Modèle de Golla-Hugues-McTavish (GHM)

### I.2.2.3 Modèles fractionnaires

Pour pouvoir modéliser les variations fréquentielles du module complexe, une autre approche a été utilisée. Elle consiste à introduire dans les modèles standards linéaires un élément mécanique dissipatif particulier ayant un comportement rhéologique intermédiaire entre celui du ressort et celui d'un amortisseur visqueux. Ce modèle est appelé le spring-pot (figure I.6.c) et a une loi de comportement et un module complexe de la forme suivante:

$$\begin{cases} \sigma(t) = E\tau^\alpha D^\alpha \varepsilon(t) \\ \mathcal{R}^*(i\omega) = E(i\omega)^\alpha \end{cases} \quad (1.44)$$

où  $D^\alpha$  est l'opérateur différentiel d'ordre  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) et  $\tau$  le temps de relaxation. Quand  $\alpha = 0$  dans l'équation (1.44), on retrouve un ressort de module d'élasticité  $E$  (figure I.6.a) et pour  $\alpha = 1$ , on a un amortisseur visqueux  $\eta = E\tau$  (figure I.6.b). On en conclut alors que le paramètre de mémoire  $\alpha$  permet une transition entre le solide idéal (ressort) et le fluide idéal (amortisseur visqueux). On peut aussi obtenir des modèles rhéologiques fractionnaires de base en remplaçant l'amortisseur visqueux par le spring-pot.

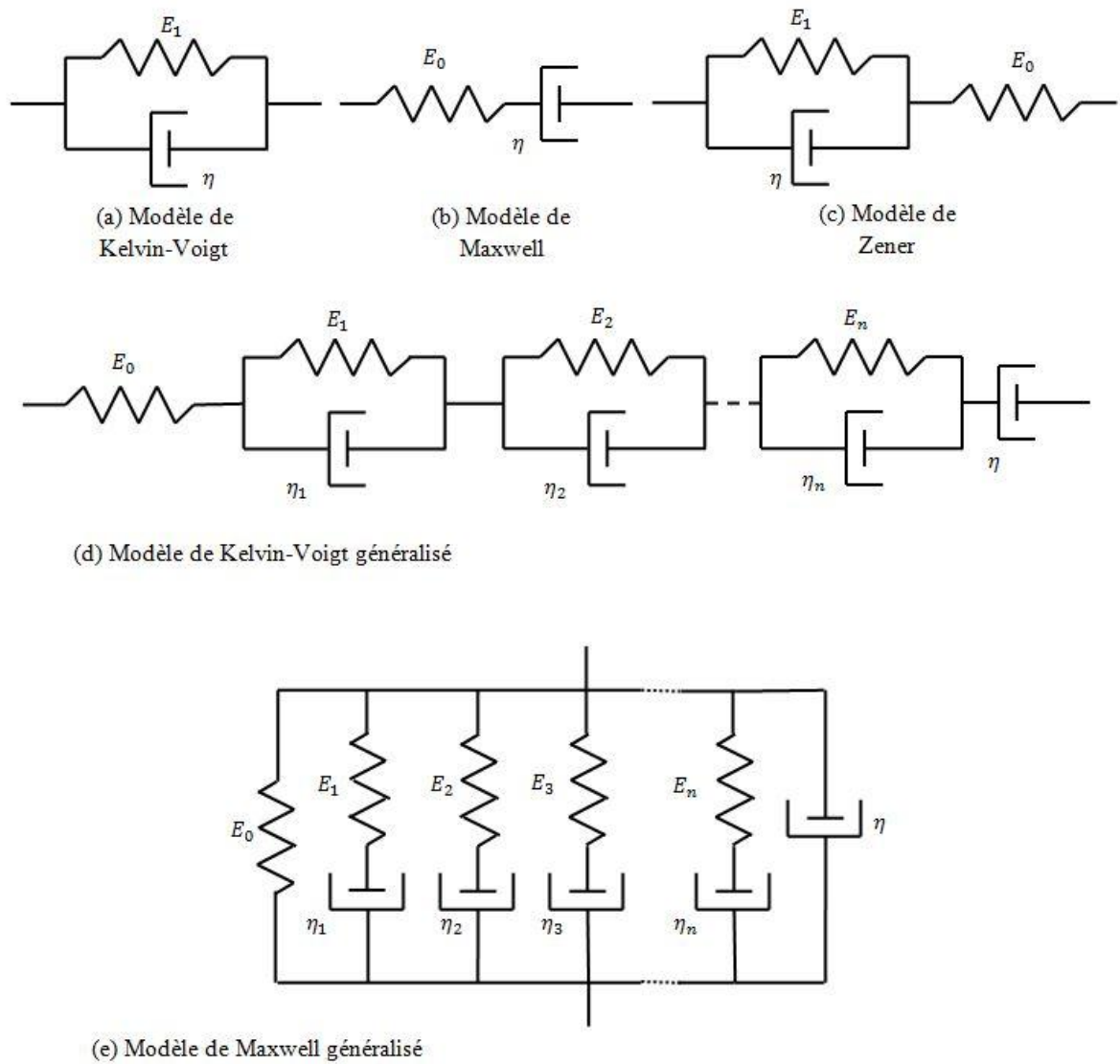


Figure I.5 : Exemples de modèles rhéologiques de bases et composés

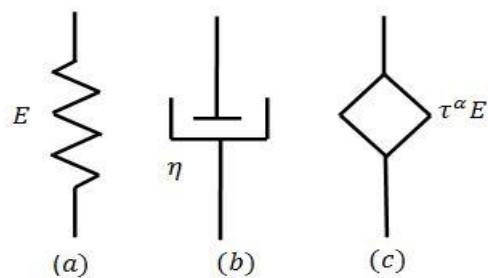


Figure I.6 : Composantes des modèles rhéologiques à dérivées fractionnaires.

Ainsi, Havriliak et Negami [39], puis Bagley et Torvik [40] ont proposé les premiers modèles viscoélastiques à dérivées fractionnaires. On a alors les modèles de Kelvin-Voigt fractionnaire, Maxwell fractionnaire, et Zener fractionnaire (figure I.7).

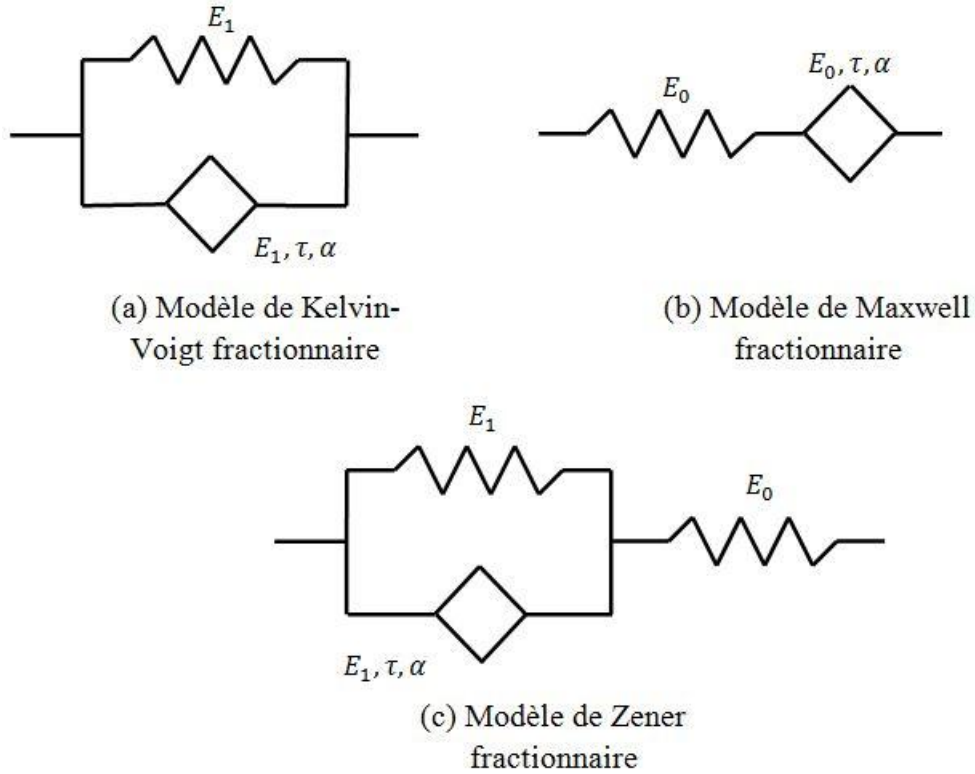


Figure I.7 : Modèles rhéologiques à dérivées fractionnaires

Les modules complexes correspondants aux modèles de la figure I.7 sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Kelvin - Voigt fractionnaire} \quad \mathcal{R}^*(i\omega) = E_1[1 + (i\omega)^\alpha] \\ \text{Maxwell fractionnaire} \quad \mathcal{R}^*(i\omega) = \frac{E_0(i\omega\tau)^\alpha}{1+(i\omega\tau)^\alpha} \\ \text{Zener fractionnaire} \quad \mathcal{R}^*(i\omega) = \frac{E[1+(i\omega\tau)^\alpha]}{1+\frac{E}{E_0}(i\omega\tau)^\alpha} \end{array} \right. \quad (1.45)$$

$$\text{où } E = \frac{E_1 E_0}{E_1 + E_0}$$

### I.2.3. Dépendance en fréquence et en température

Dans le cadre d'un essai de traction-compression sur un matériau viscoélastique linéaire homogène isotrope et non vieillissant, le module opérationnel  $\mathcal{R}^*(i\omega)$  correspond au module de Young complexe  $E^*(i\omega)$  et au module de cisaillement complexe  $G^*(i\omega)$  lorsqu'il s'agit d'un essai de cisaillement pur :

$$\begin{cases} E^*(i\omega) = E'(\omega) + iE''(\omega) \\ G^*(i\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) \end{cases} \quad (1.46)$$

En traction-compression comme en cisaillement pur, le facteur de perte est le même :  $\eta(\omega) = E''(\omega)/E'(\omega) = G''(\omega)/G'(\omega)$ , alors que le coefficient de Poisson  $\nu(\omega)$  dépend de la fréquence [41]. Le module de Young ou de cisaillement sont dans la pratique, mesurables et le coefficient de poisson est considéré constant [42] vu que sa mesure pose des difficultés d'ordres expérimentales. Rappelons que ce coefficient de Poisson est le rapport entre la déformation latérale et la déformation axiale.

Outre leurs dépendances en fréquence et en température [43], les propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques dépendent également de la pression [44], [45], de l'amplitude et du type d'excitation [46], de la structure moléculaire du polymère [47]–[50], et de la précontrainte [42]. Dans le paragraphe à venir, les effets de température et de fréquence sont évoqués et notamment le principe de superposition fréquence-température.

#### Principe de superposition fréquence-température

La température étant le facteur environnemental qui influe le plus sur les caractéristiques mécaniques des matériaux viscoélastiques [9], ces derniers se montrent sous quatre états différents à savoir l'état vitreux, l'état de transition, l'état caoutchouteux et l'état fluide. Ainsi à fréquence fixée, chaque état correspond à une gamme de température donnée (figure I.8).

- Le domaine vitreux (a) est associé aux plus faibles températures. Il est caractérisé par un module de stockage  $E'$  qui atteint sa valeur maximale et variant peu avec la température, tandis que le facteur de perte  $\eta$  y atteint sa valeur minimale et varie très rapidement en fonction de la température.

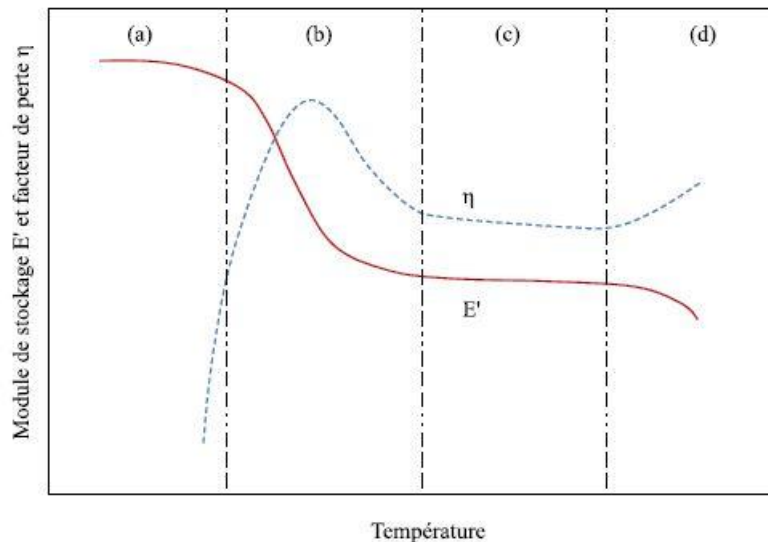
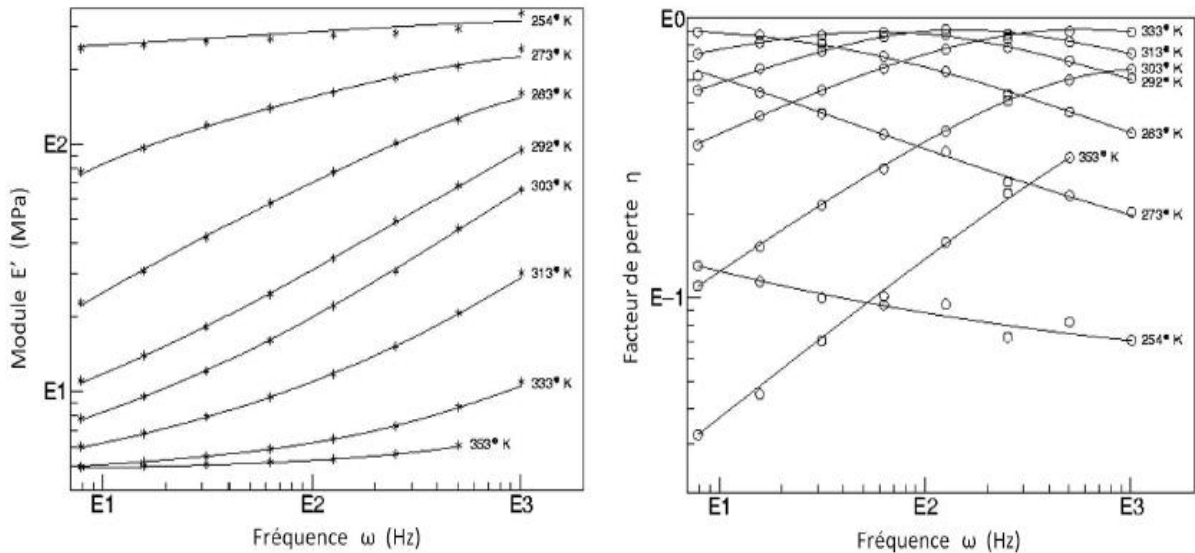


Figure I.8 : Module de cisaillement et facteur de perte d'un matériau en fonction de la température

- Le domaine de transition (b) correspond à la décroissance du module de stockage avec la température et un facteur de perte qui atteint son maximum à une température appelé température de transition vitreuse du matériau  $T_g$ .
- Dans le domaine caoutchoutique (c) le module de stockage et le facteur de perte sont relativement faibles et varient très peu avec la température.
- Le domaine fluide (d) correspond à une zone dans laquelle il existe des instabilités dans le comportement du matériau.

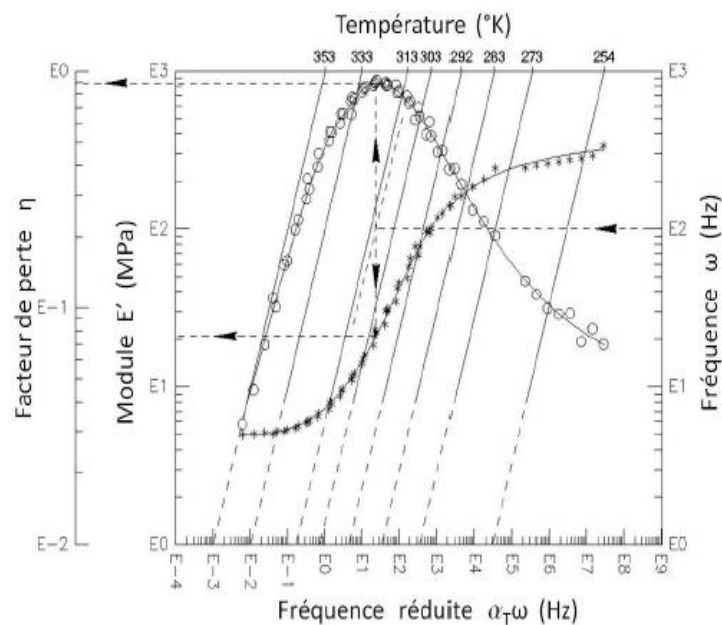
Des essais expérimentaux [9] montrent que le profil de variation du module de stockage et du facteur de perte en fonction de la fréquence (figure I.9.a et I.9.b), présente la même allure pour des essais à une température donnée à différentes fréquences que pour des essais à fréquence fixée avec des températures variantes (figure I.9). La similitude entre ces deux comportements a permis de postuler sur une équivalence fréquence/température. C'est le principe de superposition fréquence (ou temps) /température [50],[51] et il s'applique très bien aux polymères dans le domaine viscoélastique linéaire [53]. Cependant, Plazek [54] a montré qu'il n'était applicable que pour des domaines limités de temps et température. Ce principe s'applique également pour des sollicitations harmoniques et il est d'ailleurs plus utilisé dans ce cas que dans celui des sollicitations statiques, les transformées inverses permettant de calculer les caractéristiques fonctions du temps à partir des caractéristiques dynamiques.

Cette hypothèse se manifeste par la superposition des courbes à différentes températures sur une des courbes choisie comme référence (*ie* la courbe de température de référence  $T_0$ ) et cela s'effectue par une translation horizontale d'un facteur appelé facteur de décalage  $\alpha_T$  correspondant ainsi à un changement d'échelle de fréquence (dit fréquence réduite  $\alpha_T \omega$ ) sur la nouvelle courbe superposée (figure I.9.c).



(a) Module de stockage

(b) Facteur de perte



(c) Nomogramme en fréquence réduite

Figure I.9 : Module de cisaillement et facteur de perte d'un matériau en fonction de la fréquence et de la température



La résultante de ces courbes superposées est appelée courbe maîtresse ou monogramme. Elle est obtenue de manière expérimentale et permet de donner sur un seul graphique, la variation du module de stockage et du facteur de perte en fonction de la température et de la fréquence. Cette courbe maîtresse facilite la recherche des propriétés mécaniques du matériau en fonction de la fréquence et de la température. L'abaque se lit comme suit à travers la figure.

- 1.) On choisit sur l'échelle verticale à droite (échelle des fréquences) la fréquence réelle à laquelle on souhaite trouver les valeurs de  $E'$  ou  $\eta$  ;
- 2.) On projette horizontalement cette fréquence réelle sur l'isotherme correspondant à la température à laquelle la température choisie, on obtient ainsi le point P ;
- 3.) Ensuite ce point P est projeté verticalement, respectivement sur la courbe de  $E'$  ou /et sur la courbe de  $\eta$  ;
- 4.) L'ordonnée de ces projections verticales constitue la valeur recherchée de  $E'$  ou sur  $\eta$ .

Des besoins de calcul ont conduit à une modélisation de l'évolution du module de stockage et du facteur de perte sous forme de fonctions analytiques par interpolation des courbes maîtresses :

$$E^*(\omega, T) = E'(\omega, T)[1 + i\eta(\omega, T)] = E'(\alpha_T \omega)[1 + i\eta(\alpha_T \omega)] \quad (1.47)$$

avec  $\alpha_T = \alpha(T)$  une fonction dépendant de la température et permettant le passage de l'échelle des fréquences réelles à l'échelle des fréquences réduites. Il existe plusieurs lois empiriques permettant de déterminer ce facteur de décalage  $\alpha_T$  en échelle logarithmique, à savoir :

-la loi de Williams-Landel-Ferry (WLF) [52], [55] utilisée pour des températures proche de la transition vitreuse  $T_g$  ( $T_g < T < T_g + 100^\circ\text{C}$ )

$$\text{Log}(\alpha_T) = \frac{C_1^0(T-T_0)}{C_2^0+T-T_0} \quad (1.48)$$

où  $C_1^0$  et  $C_2^0$  sont des caractéristiques matériaux données en fonction de la température de référence  $T_0$ .

-Pour des températures bien inférieures ou bien supérieures à la température de transition vitreuse, nous avons la loi d'Arrhenius:

$$\text{Log}(\alpha_T) = \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \quad (1.49)$$

avec  $R$  la constante des gaz parfaits et  $E_a$  l'énergie d'activation de la relaxation.

### **I.3. Vibrations linéaires de structures sandwichs viscoélastiques**

Les structures sandwichs viscoélastiques sont dans la plupart des cas constituées par deux couches élastiques encadrant une couche viscoélastique, et elles sont notamment adaptées pour le contrôle passif des vibrations. L'amortissement dans la structure est notamment due au cisaillement important dans la couche viscoélastique qui s'explique par l'écart existant entre les déplacements longitudinaux des couches élastiques et la faible rigidité du cœur viscoélastique. La dissipation dans le cœur viscoélastique confère également un caractère amortissant à la structure.

Ainsi, le modèle cinématique choisi pour la modélisation d'une structure sandwich viscoélastique doit tenir compte du cisaillement dans la couche viscoélastique.

#### **I.3.1. Cinématique intervenant dans la modélisation des vibrations linéaires des structures sandwichs**

Dans la modélisation des structures sandwichs viscoélastiques, notamment pour l'identification de l'amortissement passif il est utilisé deux grands modèles cinématiques à savoir le modèle non zigzag et le modèle zigzag.

##### **I.3.1.1 Modèles de type non zigzag**

Il existe des modèles cinématiques dans lesquels la structure sandwich est considérée comme une seule couche, afin de faire des simplifications dans l'analyse. Ainsi, ces modèles avec une approche monocouche pour la description cinématique simultanée d'une structure à trois couches sont désignés sous le nom de modèle non zigzag (figure I.10.a). Les approximations de Kirchhoff-Love [56] ou Reissner-Mindlin [57] sont sollicitées dans ces modèles cinématiques utilisés dans l'étude des structures sandwichs viscoélastiques reposant sur la cinématique des structures classiques monocouches. Cependant, ces approximations admettent une linéarité du champ de déplacement dans toute l'ensemble de la structure considérée monocouche, mais cela n'est pas adaptée pour les structures sandwichs viscoélastiques à âme molle. Divers modèles ont été proposés pour une variation non linéaire du champ de déplacement dans l'épaisseur, enrichissant ainsi la description du cisaillement. Mindlin [58] a proposé une autre variation linéaire du champ de déplacement dans l'épaisseur qui décrit une déformation de cisaillement non nulle dans la structure. Touratier [59] et Reddy [60] ont respectivement proposé des modèles cinématiques dans lesquels les champs de déplacement dans l'épaisseur de la structure ont respectivement une description sinusoïdale et

cubique. Ces modèles ont été utilisés pour le calcul des structures sandwichs stratifiées avec une bonne estimation des caractéristiques mécaniques. Dans une structure sandwich constituée de trois couches d'épaisseur  $h_f$  pour les faces,  $h_c$  pour le cœur viscoélastique et d'épaisseur totale  $h$ , le champ de déplacement est exprimé comme suit:

$$U(x, z, t) = U^0(x, t) - z \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial x} + f(z)\beta(x, t) \quad (1.50)$$

avec  $U$  le déplacement longitudinal,  $U^0$  le déplacement de la surface médiane,  $f$  la fonction de cisaillement et  $\beta$  la rotation de la normale à la surface médiane. Selon le modèle considéré la fonction de cisaillement prend des valeurs différentes (tableau I.2).

Tableau I.2 : Valeurs de la fonction de cisaillement suivant les modèles non zigzag

Modèles	Fonction de cisaillement $f(z)$
Kirchhoff-Love	$f(z) = 0$
Mindlin	$f(z) = z$
Reddy	$f(z) = z - \frac{4z^3}{3h^2}$
Touratier	$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right)$

### I.3.1.2 Modèles de type zigzag

Pour pouvoir améliorer et rendre précise toute modélisation de structures sandwichs viscoélastiques, il est plus judicieux de décrire le champ de déplacement couche par couche, ce qui donne alors des modèles appelés modèles de type zigzag (figure I.10.b). Une continuité du champ de déplacement est imposée aux interfaces cœur viscoélastique et faces élastiques dans ces modèles. Parmi les modèles de type zigzag existants, celui de Rao [61] est selon Hu et al [62], le plus adapté pour la modélisation de structures sandwichs viscoélastiques avec les conditions suivantes :  $h_c/h_f \leq 10$  et  $E_c/E_f \leq 0.01$ .  $E_f$  et  $E_c$  étant respectivement les modules de Young des faces élastiques et du cœur viscoélastique. Dans les travaux de Carrera [63] et Brischetto et al [64], il est montré que l'introduction d'une fonction dite "fonction zigzag" [65] dans les théories classiques a l'avantage d'introduire les effets zigzag et de simples implémentation. Les champs de déplacement du modèle zigzag seront introduits dans le chapitre II.

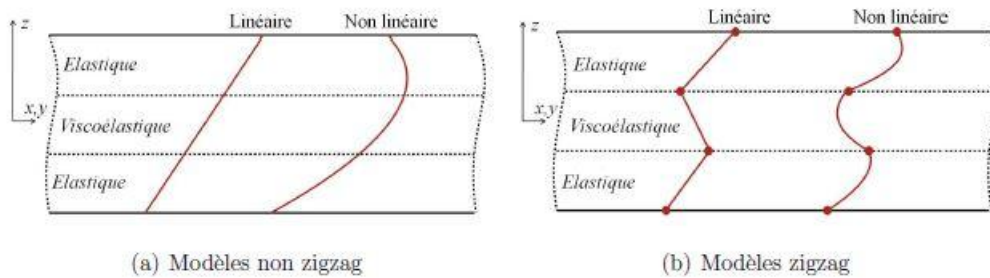


Figure I.10 : Modèles cinématiques

### I.3.2. Caractérisation des propriétés mécaniques de structures sandwich viscoélastiques : Cas des vibrations linéaires avec un amortissement passif

Outre les essais de fluage, de relaxation et les méthodes hors-résonances; d'autres méthodes ont été développées pour caractériser les propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques mais cette fois ci dans le domaine fréquentiel appelées méthodes résonantes. Il existe également dans la littérature des travaux qui ont utilisé des approches analytiques pour cette identification des propriétés mécaniques.

#### I.3.2.1 Méthodes analytiques

Dans la modélisation des structures sandwich viscoélastiques, de nombreux travaux ont porté sur l'élaboration des équations de mouvement des poutres, des plaques et des coques constituées par ces matériaux. En se basant sur des hypothèses simplificatrices, ces structures permettent d'aboutir à des équations du mouvement de flexion ou de membrane d'ordre plus ou moins élevé.

Les hypothèses communes à la plupart de ces études analytiques sont les suivantes :

- la structure sandwich est généralement constituée de trois couches dont les matériaux sont supposés homogènes, isotropes et linéaires. Les faces sont purement élastiques et la couche centrale est généralement viscoélastique.
- les hypothèses de petites déformations sont généralement adoptées et les faces ne supportent pas de déformation de cisaillement alors que le cœur est viscoélastique non vieillissant et se déforme en cisaillement. Son module d'Young ou de cisaillement est supposé complexe et constant, donc ne dépendant pas de la fréquence.
- il n'y a aucun glissement entre les interfaces des trois couches, ce qui assure la continuité du champ de déplacement.

-le déplacement transversal (la flèche) est souvent supposé le même dans les 3 couches et les déplacements axiaux sont supposés linéaires dans chaque couche.

-les inerties longitudinales et rotationnelles sont négligeables vis-à-vis des inerties transversales de flexion.

Kerwin [66] et Ross [67] ont travaillé sur l'étude d'un composite sandwich composé d'une poutre de base et d'une couche précontrainte qui encadrent une couche viscoélastique tributaire de l'amortissement. En considérant, l'effet de cisaillement uniquement dans la couche viscoélastique et des effets de membrane dans les trois couches, ils ont abouti à une équation différentielle ordinaire d'ordre 4 du mouvement transversal de flexion de type Euler-Bernoulli, dans laquelle les rigidités réelles sont remplacées par une rigidité complexe équivalente  $B^* = B_0(1 + i\eta)$  avec un facteur de perte  $\eta$ . Les auteurs ont ensuite établi des analyses paramétriques pour trouver des valeurs optimales des paramètres pour pouvoir améliorer l'amortissement global de la structure sandwich.

Pour pouvoir améliorer l'approche analogique de Kerwin et Ross, Yu [68] s'est intéressé en particulier au cas d'une structure sandwich symétrique. L'auteur n'a pas négligé les effets d'inertie et a pris en compte le cisaillement dans chaque couche. Il a également tenu compte de l'énergie cinétique due à la rotation des sections droites et a introduit des coefficients correcteurs pour pouvoir pallier à la constance des contraintes de cisaillement qu'il a supposé dans toute l'épaisseur. Il aboutit ainsi à l'établissement d'une équation de mouvement d'ordre 4 relatives à la flèche pour une poutre de longueur infinie et ne fait pas cas de l'amortissement.

DiTaranto [69] s'intéresse à la description du mouvement des poutres sandwichs soumises à des conditions aux limites quelconques. Il a établi une équation différentielle d'ordre 6 sur le déplacement axial du plan moyen des couches élastiques constituant les faces et cela pour un problème de vibration libre d'une poutre en flexion. Il a défini dans DiTaranto et Blasingame [70] indépendamment des conditions aux limites la pulsation propre complexe de la structure :

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 + i\eta) \quad (1.51)$$

DiTaranto et Blasingame [71] ont conclu d'après leurs calculs que la relation entre le facteur de perte  $\eta$  et la pulsation propre  $\omega$  est indépendante des conditions aux limites appliquées à la poutre sandwich, mais dépend plutôt de la géométrie et des propriétés de la structure.

En se basant sur les équations de DiTaranto [69], Mead et Markus [72] ont établi une équation différentielle d'ordre 6 mais cette fois-ci en fonction du déplacement transversal, ils

ont également établi des équations auxquelles obéit la flèche selon diverses conditions aux limites. Mead et Markus [73] ont combiné ces dernières équations de conditions aux limites à l'équation différentielle du mouvement et ont développé une méthode itérative basée sur la méthode de Newton-Raphson pour pouvoir déterminer les propriétés amortissantes (fréquence de résonance et facteur de perte). Ils contredisent alors DiTaranto et Blasingame [71] qui affirment que le facteur de perte et la pulsation propre ne dépendraient pas des conditions aux limites appliquées à la poutre sandwich mais juste des propriétés physiques de la structure.

En se basant sur la valeur élevée du ratio de rigidité entre le module des faces élastiques et celui du cœur viscoélastique, Yan et Dowell [74] se sont intéressés à établir des équations différentielles d'ordre 4 en fonction du déplacement transversal pour le mouvement de flexion des poutres et plaques sandwich. Les résultats (fréquence de résonance et facteur de perte) issus de leur modèle sont similaires à ceux obtenus par Mead et Markus [72] mais en les comparant avec ceux issus d'une expérience sur une poutre sandwich Aluminium/Matériau viscoélastique/Aluminium de longueur 228.6 mm en appui simple, ils ont observé des écarts de 5% sur la fréquence de résonance et de 19% sur le facteur de perte associé.

Oravsky et al. [75] ont proposé une méthode approchée pour la détermination de l'amortissement d'une poutre sandwich en utilisant l'équation différentielle de Mead et Markus [73]. En introduisant, la notion de structure conservative associée, ils ont linéarisé les équations de poutres sandwichs amorties autour de celles de poutres sandwichs non amorties ; déterminant ainsi de façon approchée les propriétés amortissantes pour une poutre sandwich encastrée-libre.

Rao [61] quant à lui a mené une étude paramétrique pour déterminer les propriétés des sandwichs en terme de propriétés mécaniques, dimensions, conditions aux limites ceci afin d'avoir une valeur maximale pour le facteur de perte de toute la structure et de fournir une base de données pour optimiser la conception des structures sandwichs. Une approche énergétique couplée au principe de Hamilton est utilisée pour établir les équations différentielles de mouvement des poutres sandwichs relatives au déplacement longitudinal et au déplacement transversal. L'équation en fonction de la flèche (déplacement transversal) est résolue de façon exacte et il en est déduit une expression analytique du facteur de perte et de la fréquence de résonance en fonction des propriétés mécaniques et géométriques de la poutre sandwich pour diverses conditions aux limites symétriques et non symétriques.

En comparant les théories de vibrations établies par DiTaranto [69], par Mead et Markus [73] à celles de Yan et Dowell [74] ; Mead [76] a prouvé que lorsque le cœur viscoélastique

est beaucoup plus épais que les faces élastiques alors les résultats de Yan et Dowell offre une bonne approximation de ceux de DiTaranto [69] et de Mead et Markus [73].

### I.3.2.2 Méthodes numériques

Généralement, l'identification des caractéristiques mécaniques d'une structure sandwich viscoélastique lors d'une vibration libre se résume à la résolution de problèmes à valeurs propres complexes non-linéaires. Ce problème aux valeurs propres, après discrétisation par éléments finis peut être écrit sous cette forme :

$$[K(\omega) - \omega^2 M]\{U\} = 0. \quad (1.52)$$

L'équation (1.52) est appelée "problème aux valeurs propres non linéaire" et son obtention sera détaillée dans le chapitre II. Les solutions propres de cette équation sont  $(U, \omega)$  et leur obtention permettent de déterminer l'amortissement  $\eta$  et la fréquence de résonance vu que la formule (1.53) a été proposé dans [70]:

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 + i\eta) \quad (1.53)$$

$\omega$  étant la pulsation.

Les méthodes de calcul de l'amortissement dans le cadre des vibrations linéaires, peuvent être scindées en deux domaines à savoir les méthodes approchées et les méthodes directes.

#### I.3.2.2.1. Méthodes approchées

##### 1.) Méthode d'énergie de déformation modale (ou Modal Strain Energy Method, MSE)

Cette méthode a été proposé par [77] et l'amortissement  $\eta$  est défini comme le rapport de l'énergie de déformation dissipée dans la couche viscoélastique sur l'énergie de déformation stockée. Selon le degré de précision souhaité, cette méthode peut s'appliquer à deux niveaux soit en utilisant les modes réels ou les modes complexes.

*MSE utilisant le mode réel (MSER)*

Cette partie repose sur l'hypothèse selon laquelle le mode propre réel du sandwich viscoélastique  $U$  est proportionnel au mode propre de la structure non-amortie  $U_r$  vérifiant le problème aux valeurs propres réelles :

$$\begin{cases} [K(0) - \omega_0^2 M]U_r = 0 \\ U_r^t K(0)U_r - \omega^2 U_r^t M U_r = 0 \end{cases} \quad (1.54)$$

$K(0)$  étant la matrice de rigidité construite en ne considérant que l'élasticité retardée pour le

matériau viscoélastique. La résolution de l'équation (1.54) permet l'obtention du couple  $(U_r, \omega_0)$  et ensuite on approxime  $K(\omega)$  par  $K(\omega_0)$ , ce qui permet la réécriture du problème initial (1.52) sous la forme :

$$[K(\omega_0) - \omega^2 M]\{U_r\} = 0 \quad (1.55)$$

On obtient alors une approximation de la fréquence de résonance et du facteur de perte (ou amortissement)  $\eta$ , à travers l'expression de la pulsation amortie :

$$\omega^2 = \frac{U_r^t K(\omega_0) U_r}{U_r^t M U_r} = \omega_0^2 (1 + i\eta) \quad (1.56)$$

Cette méthode n'est efficace que pour des structures faiblement amorties [78] et puisqu'elle permet d'estimer l'amortissement en ne calculant que des modes réels, elle a alors un coût de calcul relativement faible.

#### *MSE utilisant le mode complexe (MSEC)*

Dans cette partie, il est utilisé la même technique que dans le *MSE* sauf que le mode  $U$  est remplacé par une approximation du mode complexe  $U_c$  calculé la formule suivante:

$$[K(\omega_0) - \omega_0^2 M]\{U_c\} = \{F\} \quad (1.57)$$

$\{F\}$  étant le vecteur des amplitudes du forcing harmonique imposé. Avec les formules explicitées dans [79][80], cette méthode donne de bons résultats [81] mais n'est pas adaptée dans le cas où la matrice  $K$  dépend de  $\omega$  [82].

## **2.) Méthode de réponse en fréquence**

Dans cette méthode, il est imposé une excitation harmonique  $\{F'\}$  en utilisant l'équation (1.52) pour le calcul des courbes de réponse, de manière à exciter les modes d'intérêt à savoir les modes de résonance. Ainsi, l'équation (1.52) devient :

$$[K(\omega) - \omega^2 M]\{U\} = \{F'\} \quad (1.58)$$

Des pics de résonance sont obtenus à partir de ces courbes de réponse en fréquence. La fréquence de résonance et le facteur de perte  $\eta$  sont alors calculés par la méthode de la bande passante à -3dB. Cette méthode de la bande passante sera expliquée dans le chapitre II.

### **I.3.2.2.2. Méthodes directes**

Les méthodes directes ou méthodes quasi-exactes sont utilisées pour résoudre explicitement le problème non linéaire aux valeurs propres complexes (1.54). On distingue notamment :



### 1.) La méthode d'itération-réduction

Elle utilise une méthode de perturbation couplée à un algorithme de Lanczos et à une base réduite. Cette méthode permet d'introduire une quelconque loi viscoélastique et a été proposée par [83]. Par contre elle nécessite plusieurs itérations par fréquence, vu que c'est une variante de la méthode Newton, cela induit alors un temps de calcul très élevé pour des structures de grande taille.

### 2.) La méthode QR

Cette méthode a été notamment développée pour le calcul des valeurs propres d'une matrice complexe constante. Ainsi, la matrice est décomposée en une matrice orthogonale  $Q$  et en une matrice triangulaire supérieure  $R$  pour pouvoir faciliter le calcul des valeurs propres complexes de manière itérative [84], [85]. Néanmoins, son utilisation n'est valable que pour les structures sandwichs viscoélastiques de petite taille et dont le module complexe est indépendant de la fréquence.

### 3.) La méthode asymptotique

Développée par [86], cette méthode consiste à calculer la valeur propre et le mode sous forme de séries entières du facteur de perte par exemple. Il est considéré un module constant pour le matériau viscoélastique et la méthode est efficace pour des cas de structures faiblement amorties. En revanche, une procédure de continuation est nécessaire lorsque le module varie de manière non-linéaire avec la fréquence.

### 4.) Les méthodes de sous-espace de Krylov et d'Arnoldi non linéaires

La méthode d'Arnoldi non linéaire [87] permet de résoudre des problèmes de valeurs propres non linéaires creux et de grande taille, qui se mettent sous la forme générale :

$$T(\lambda)x = 0, T(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}, x \in \mathbb{C}^n, \lambda = \omega^2 \quad (1.59)$$

Le problème (1.61) est décomposé en un ensemble de problèmes linéaires et est résolu de manière itérative en projetant ces décompositions dans des sous-espaces de Krylov. Par des

opérations de type produit scalaire, produit matrice-vecteur entre autres ; ces sous-espaces permettent la construction de sous-espaces affines [88] afin de pouvoir chercher les approximations de la solution du système linéaire.

Ces quatre méthodes précitées sont détaillées dans [79].

### I.3.2.3 Méthode Asymptotique Numérique

C'est une méthode utilisant une procédure de continuation et qui est basée sur des techniques de perturbation et d'homotopie [89]. L'équation (1.52) peut être réécrite, en posant  $\lambda = \omega^2$  et en introduisant un paramètre de cheminement  $p$  ; elle devient :

$$[K(0) + pE(\lambda)K_v - \lambda M]\{U\} = 0, \quad p \in [0, 1] \quad (1.60)$$

$K(0)$  étant la matrice de rigidité en ne considérant que l'élasticité retardée du matériau viscoélastique,  $K_v$  la matrice purement réelle issue de la décomposition de  $K(\lambda)$ .  $E(\lambda)$  traduit la dépendance en fréquence du module de Young du matériau viscoléastique et est développée en série de Taylor du paramètre  $p$ , de même que les inconnues  $(\lambda, U)$ . En posant  $p = 0$  dans l'équation (1.62), on obtient les solutions  $(\lambda_0, U_0)$  qui sont également les valeurs de départ du développement en série de Taylor. En remplaçant ces développements dans le problème (1.52), on obtient une suite récurrente de problèmes linéaires dont la résolution permet le calcul des inconnues  $(\lambda, U)$  pour  $p = 1$ . Dans le but de réduire le nombre d'inversion de matrices dans la procédure de continuation, [90] ont proposé deux autres algorithmes itératifs d'ordre élevé basés sur la MAN. Le lecteur intéressé par plus de détails sur la MAN pourra se référer à [91], [92].

### I.3.2.4 Méthode de minimisation d'erreur

La méthode classique consistant à minimiser l'erreur entre le modèle éléments finis et les mesures expérimentales est également considérée pour la validation des résultats obtenus. Etant donné un ensemble de fréquences de résonance  $(f_1, \dots, f_p)$  et de facteurs de perte  $(\eta_1, \dots, \eta_p)$  mesurées expérimentalement, étant donnée également un modèle numérique (celui décrit dans la section II.2.), qui nous donne des paramètres  $f_i^{num}$  et  $\eta_i^{num}$  pour chaque mode  $i$  et un couple  $(G, \eta)$  de module de cisaillement et de facteur de perte, l'erreur

$$\varepsilon_i = \frac{|f_i - f_i^{num}|}{f_i} + \frac{|\eta_i - \eta_i^{num}|}{\eta_i} \quad (1.61a)$$

est minimisée pour chaque mode  $i$ . Le problème d'optimisation résolu pour chaque mode  $i$  se lit comme suit:

$$\min_{(0 \leq G \leq G_{max}, 0 \leq \eta \leq 1)} \varepsilon_i \quad (1.61b)$$

Cette procédure nous permet de retrouver le module de cisaillement  $G^i$  et le facteur de perte  $\eta^i$  du cœur viscoélastique pour chaque mode résultant en une description du couple  $(G, \eta)$  en fonction de la fréquence. Une valeur de  $G_{max} = 10^9 Pa$  est utilisée et l'erreur est minimisée pour chaque mode par rapport au couple  $(G^i, \eta^i)$  en utilisant la stratégie de **global search (gs)** de Matlab implémentée via la fonction `gs` [93]. L'algorithme quadratique séquentiel implémenté dans la fonction `fmincon` est utilisé pour l'optimisation locale avec des différences finies centrales pour le calcul de gradient. Le point de départ est choisi au hasard entre les bornes inférieure et supérieure.

### I.3.2.5 Méthodes inverses

Comme les performances des structures sandwichs viscoélastiques dépendent des propriétés matériaux des faces et du cœur, il est important de caractériser les paramètres du cœur viscoélastique [94]. Afin de caractériser les paramètres constitutifs d'un modèle de Voigt et d'un modèle à trois paramètres pour décrire les propriétés mécaniques du matériau viscoélastique, des essais de vibrations harmoniques forcées en régime permanent et de vibrations libres ont été utilisées dans [95] pour des poutres sandwichs. Ces poutres sandwichs sont constituées d'un cœur viscoélastique en mousse de PVC et de deux faces élastiques de polyester renforcé par des fibres de verre. Saito et al [11] ont utilisé un modèle de poutre de Timoshenko orthotrope pour identifier les caractéristiques mécaniques des poutres sandwich alvéolaires en aluminium, où les constantes élastiques et les amortissements modaux ont été déterminés en minimisant l'erreur entre les résultats expérimentaux et analytiques. Shi et al [94] ont proposé une méthode inverse pour l'identification des caractéristiques mécaniques d'un matériau viscoélastique dans une poutre sandwich, basée sur l'utilisation des fréquences de résonance déterminées en flexion et utilisant la théorie de poutre sandwich pour la modélisation par éléments finis.

Barbosa et Farage [96] ont utilisé une formulation de modèle d'éléments finis basée sur la méthode de Golla-Hughes-MacTavish (GHM) pour décrire le matériau viscoélastique. Les paramètres du modèle rhéologique GHM sont déterminés grâce à des tests expérimentaux basés sur les relations de Ross-Kerwin-Ungar.

Cependant, les facteurs de perte mesurés dans ces études sont soit trop faibles, constants ou seulement déterminés dans une gamme de fréquences étroite.

Barkanov et al [97] ont travaillé sur une technique inverse pour caractériser les propriétés mécaniques non linéaires des couches centrales viscoélastiques dans les poutres sandwichs. Basée sur des tests de vibration, cette technique consiste en un modèle numérique et une procédure d'identification qui utilise une méthode de surface de réponse afin de diminuer les efforts de calcul. Elkhaldi et. al [98] ont présenté une méthode d'identification des paramètres viscoélastiques pour le modèle de Maxwell généralisé. Ils ont utilisé la différenciation automatique avec un algorithme de gradient pour minimiser l'erreur des moindres carrés entre les valeurs numériques et expérimentales. Martinez-Agirre et Elejabarrieta [99] ont identifié par une méthode inverse les paramètres d'un modèle de dérivée fractionnaire pour les poutres sandwichs viscoélastiques en minimisant l'erreur entre les courbes de réponse en fréquence prédites (FRF) et celles mesurées à des fréquences de contrôle spécifiées. Wassereau et al. [100] ont identifié expérimentalement des modules de flexion et de cisaillement complexes de poutres sandwich en utilisant la technique d'analyse de force avec une théorie des poutres de Timoshenko et une homogénéisation. Sun et al. [101] ont proposé une méthode d'identification basée sur la méthodologie de la surface de réponse, une représentation FRF simplifiée et une approche d'optimisation pour identifier le paramètre mécanique dépendant de la fréquence des plaques viscoélastiques non contraintes.

#### **I.4. Conclusion**

La revue bibliographique sur les différentes techniques de résolution numérique des problèmes aux valeurs propres complexes et sur les différentes méthodes d'identification et de modélisation des structures sandwichs viscoélastiques nous a permis de mettre en évidence les limites rencontrées dans le calcul des propriétés modales (modes et valeurs propres) et dans l'identification des propriétés mécaniques de matériaux constituant les structures sandwichs viscoélastiques. En effet, il existe des techniques de caractérisation des propriétés mécaniques de matériaux viscoélastiques telles que la DMA classée dans les méthodes hors-résonance [20], la méthode d'Oberst [21-24] couplée avec l'usage des expressions analytiques de Ross, Ungar et Kerwin [25] ou de Nashif et Jones [26]. Cependant, ces techniques d'identification ne tiennent pas compte pour la plupart du caractère fonctionnel du matériau viscoélastique, c'est-à-dire que ce dernier est caractérisé soit tout seul ou soit contraint sur une face élastique. C'est pour cela que nous proposons de mettre en place une nouvelle méthode d'identification

inverse permettant ainsi de caractériser le matériau en deux faces élastiques permettant ainsi de prendre en compte toutes les contraintes auxquelles seront soumis le matériau en fonctionnement.

L'état de l'art sur les méthodes de caractérisation de structures sandwichs viscoélastiques nous a révélé le développement de nouvelles techniques numériques permettant de résoudre des problèmes de plus en plus complexes. Cependant, il existe peu de travaux sur l'identification inverse de matériaux viscoélastiques. Les quelques travaux sur l'identification inverse de matériaux viscoélastiques aboutissent à l'obtention d'amortissement soit trop faible, constant ou seulement déterminé dans une gamme de fréquences étroite [11, 94, 95, 96]. D'autres comme ceux de Martinez-Agirre et Elejabarrieta [99] et Elkhalidi et. Al [98] ont opté pour des techniques de minimisation d'erreurs entre les valeurs numériques et expérimentales, [98] mettant l'accent sur l'utilisation de la différenciation automatique avec un algorithme de gradient. Certains travaux [97,101] utilisent quant à eux des procédures d'identifications basées sur une méthodologie de surface de réponse. Des techniques d'identification basées sur des théories de poutre de Timoshenko [100] ont également été développées, mais ces théories présentent des limitations dans leurs utilisations dans les structures sandwich. Il est donc important dans l'identification inverse de prendre en compte toutes ses limitations, et c'est pourquoi nous proposons une alternative plus physique vu que la plupart de ces méthodes se basent sur l'utilisation de procédures d'optimisation. Nous proposons alors une méthode d'identification qui sera efficace dans une large gamme de fréquence, qui utilisera des techniques basées sur la différenciation automatique et sur le modèle poutre de Rao, ce dernier étant une association de la théorie d'Euler-Bernouilli et de Timoshenko.

La robustesse, la capacité de la nouvelle approche à prendre en compte diverses lois de dépendance en fréquence du module de cisaillement du cœur viscoélastique en font un bon outil de caractérisation. Une petite étude sur l'influence des caractéristiques mécaniques et géométriques des faces et du cœur en fera la démonstration.

# Chapitre II. Une nouvelle méthode d'identification inverse

---

## II.1. Introduction

Dans le chapitre bibliographique, il a été mis en exergue différentes méthodes de résolution pour l'identification des propriétés mécaniques des poutres sandwichs viscoélastiques. Ces méthodes sont notamment d'ordres numériques, expérimentales ou une combinaison expérimentale-numérique. En dépit de nombreux moyens mis en place pour ces identifications [11][94]–[101], nombreux d'entre eux ont connu moins d'enthousiasme pour leur limitation de mise en œuvre. Ainsi peu de travaux ont été conduits quant à l'identification inverse des propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique. L'objectif du présent chapitre est de développer une nouvelle méthode inverse pour pouvoir identifier les propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique (module de cisaillement  $G_0$  et facteur de perte  $\eta_c$ ) pris en sandwich entre deux couches élastiques dont les propriétés mécaniques sont considérées connues. Cette méthode inverse est notamment fondée sur des méthodes expérimentales et numériques, ces dernières s'appuyant sur l'algorithme de résolution basé sur la méthode asymptotique numérique (MAN) développé par Daya et Potier-Ferry [89] et la boîte à outil de différentiation automatique (DA) conçue par Koutsawa et al. [102] pour le calcul des séries de Taylor.

Dans un premier temps, des essais expérimentaux de vibration sont effectués sur deux spécimens de poutres sandwichs symétriques à cœur viscoélastique en vue de déterminer les fréquences de résonance et facteurs de perte pour différents modes de flexion. Ensuite, nous introduisons l'approche inverse qui consiste en une procédure itérative pour déterminer les formes de mode en fonction des paramètres du matériau puis les propriétés viscoélastiques seront déterminées à partir des formes de modes en utilisant un quotient de Rayleigh jusqu'à ce qu'une convergence soit atteinte. Il en résulte ainsi, la caractérisation de manière automatisée des propriétés mécaniques du matériau viscoélastique dépendant de la fréquence. En guise de validation, les propriétés mécaniques du matériau viscoélastique identifiées sont comparées à celles obtenues grâce aux formules de Ross-Kerwin-Ungar [96] et à une approche d'optimisation standard. Un ajustement de ces propriétés mécaniques identifiées, est effectué en fournissant des expressions analytiques pour ces quantités sur une large gamme de fréquences. La contribution de cette étude est la mise en place d'un outil qui permet de

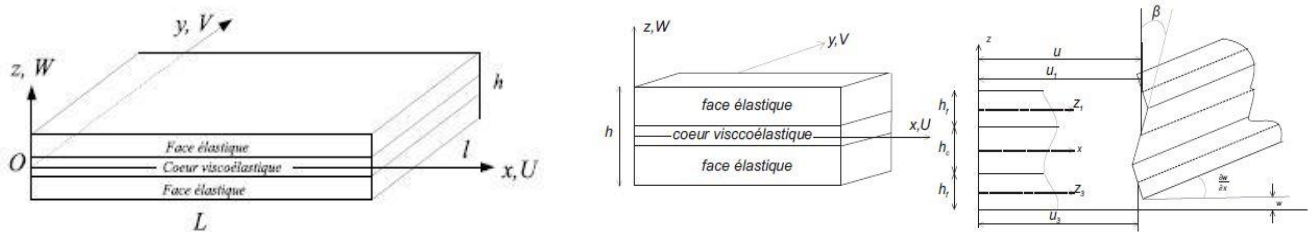
déterminer les caractéristiques mécaniques d'un matériau viscoélastique pris en sandwich entre deux couches élastiques, ce qui prend en compte les caractères en fonctionnement du matériau viscoélastique.

## II.2. Modèles cinématiques et équations du mouvement

Dans cette partie, nous souhaitons définir le modèle cinématique et les équations qui régissent la méthode d'identification. Ainsi, nous détaillerons le modèle zigzag avec la résolution du problème numérique, puis les équations de mouvement pour finir par la discrétisation par la méthode des éléments finis.

### II.2.1. Modèle zigzag avec résolution par la MAN

Nous avons choisi une structure sandwich permettant d'apporter un amortissement passif au système. Cette configuration comprend trois couches : deux faces élastiques prenant en sandwich un cœur viscoélastique (figure II.1 (a)). La sollicitation de la couche viscoélastique s'effectue par le déplacement des faces élastiques impliquant des mécanismes de cisaillement qui vont générer l'amortissement passif de la structure. Il est donc nécessaire de pouvoir modéliser la cinématique de l'ensemble des trois couches.



(a) Structure sandwich viscoélastique

(b) Modèle zigzag

Figure II.1 : Structure sandwich viscoélastique

Le système de coordonnées  $(O, x, y, z)$  de la structure sandwich exprime respectivement les coordonnées suivant la longueur, la largeur et l'épaisseur de cette structure. Le symbole  $z_i$  représente l'ordonnée du plan moyen de la couche et l'origine de l'axe  $z$  est le plan moyen du cœur viscoélastique c'est-à-dire  $z_2 = 0$ . L'indice  $i = 2$  fait référence à la couche viscoélastique qui sera indexée par la lettre  $c$  par la suite tandis que les indices  $i = 1$  et  $i = 3$  désignent respectivement les faces élastiques supérieure et inférieure et seront indexées par la lettre  $f$ .

L'étude est menée en petite perturbation et la description cinématique est basée sur le modèle zigzag de Rao [61] qui consiste en une théorie classique d'Euler-Bernoulli appliquée aux faces élastiques et en la théorie de Timoshenko pour le cœur viscoélastique. Ce modèle cinématique prend en compte les hypothèses suivantes communes à plusieurs auteurs [61][72][78][56]:

- durant la flexion, les sections planes transverses initialement normales au plan moyen demeurent planes et normales au plan moyen ceci pour chaque couche du sandwich;
- la contrainte normale transverse dans la direction  $(Oz)$  est très faible comparativement à la contrainte normale axiale dans la direction  $(Ox)$  ;
- les effets d'inertie axiale et rotationnelle sont négligeables vis-à-vis des effets d'inertie transversale pour l'étude en flexion ;
- l'effet de cisaillement est négligé dans les faces élastiques et pris en compte dans la couche viscoélastique ;
- la continuité du champ de déplacement aux interfaces est assurée par le fait que les trois couches du sandwich sont parfaitement collées entre elles ;
- le déplacement transversal  $w$  est le même dans les trois couches ;

Les faces élastiques sont identiques et parfaitement élastiques. Elles ont la même épaisseur notée  $h_f$ , la même masse volumique  $\rho_f$ , le même module de Young  $E_f$ , la même aire de section  $S_f$  et le même coefficient de poisson  $\nu_f$ . Dans cette étude, le matériau de la face est supposé être isotrope, homogène. La couche centrale a pour épaisseur  $h_c$ , pour masse volumique  $\rho_c$ ,  $S_c$  désignant l'aire de la section droite. Le matériau du cœur est également isotrope, homogène et linéairement viscoélastique avec un coefficient de Poisson réel  $\nu_c$  et un module de cisaillement complexe dépendant de la fréquence  $E_c^*$  qui est lié à la fonction de relaxation viscoélastique du matériau  $R$  par l'expression suivante :



$$E_c^*(\omega) = i\omega \int_0^+ R(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

Notons que ce modèle est valide lorsque le ratio entre les épaisseurs des couches viscoélastiques et élastique  $h_c/h_f \leq 10$  et le ratio des modules d'Young  $E_c^*/E_f \leq 0.01$  [62].

Sur la base des hypothèses précitées, les champs de déplacement et de déformation sont présentés comme suit pour les couches élastiques  $i = 1, 3$  :

$$\begin{aligned} U_i(x, z, t) &= u_i(x, t) - (z - z_i)w_{,x} \\ W_i(x, z, t) &= w(x, t) \\ \varepsilon_i(x, z, t) &= u_{i,x} - (z - z_i)w_{,xx} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $z_1 = -z_3 = \frac{h_f+h_c}{2}$ ,  $U_i$  est le déplacement axial de la  $i^{\text{ème}}$  couche,  $u_i$  et  $w$  représentent respectivement le déplacement axial de la surface médiane de la  $i^{\text{ème}}$  couche et le déplacement transversal commun dans les trois couches. La quantité  $\varepsilon_i$  est la déformation normale dans la  $i^{\text{ème}}$  couche.

Les quantités relatives pour la couche centrale  $i = 2$  sont données par :

$$\begin{aligned} U_2(x, z, t) &= u(x, t) + z\beta(x, t) \\ W_2(x, z, t) &= w(x, t) \\ \varepsilon_2(x, z, t) &= u_{,x} + z\beta_{,x} \\ \xi_2(x, z, t) &= \beta + w_{,x} \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $u$  est le déplacement axial de la surface médiane de la couche centrale,  $\beta$  la rotation de la normale à la surface médiane de la couche centrale et  $\xi_2$  est la déformation de cisaillement.

L'hypothèse de continuité du champ de déplacement aux interfaces nous donne :

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \left( \frac{h_c}{2} \beta - \frac{h_f}{2} w_{,x} \right) \\ u_3 &= u - \left( \frac{h_c}{2} \beta - \frac{h_f}{2} w_{,x} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

La loi de Hooke généralisée nous donne l'expression de l'effort normal  $N_i$  et du moment de flexion  $M_i$  des couches  $i = 1, 3$  :

$$N_i(x, t) = E_f S_f u_{i,x} \quad (2.5)$$

$$M_i(x, t) = E_f I_f w_{,xx}$$

où  $S_f$  et  $I_f$  sont respectivement l'aire et le moment quadratique de la section transversale des faces élastiques. Pour la couche centrale viscoélastique, nous avons

$$N_2(x, t) = S_c R(t) * \dot{u}_{,x} \quad (2.6)$$

$$M_2(x, t) = I_c R(t) * \dot{\beta}_{,x}$$

où  $S_c$  et  $I_c$  sont l'aire et le moment quadratique de la section transversale de la couche viscoélastique,  $R(t)$  est la fonction de relaxation viscoélastique. L'effort de cisaillement  $T$  induit par la déformation de cisaillement  $\xi_2$  dans la couche centrale est:

$$T(x, t) = \frac{S_c}{2(1+\nu_c)} R(t) * (\dot{w}_{,x} + \dot{\beta}) \quad (2.7)$$

## II.2.2. Equations du mouvement

Le principe des puissances virtuelles (PPV) appliqué à l'ensemble des trois couches en vibration libre, décrit l'état d'équilibre de la poutre sandwich. Ainsi, dans cette configuration ce principe s'écrit :

$$-\delta P_{int} + \delta P_{acc} = 0 \quad (2.8)$$

$\delta P_{int}$  et  $\delta P_{acc}$  désignant respectivement la puissance virtuelle des efforts intérieurs et d'inertie appliquées à l'ensemble des trois couches et avec comme expressions :

$$\delta P_{int} = \sum_{i=1}^3 - \iiint_{v_i} \underline{\underline{\sigma}} : \delta \underline{\underline{\epsilon}} dv \quad (2.9)$$

$$\delta P_{acc} = \sum_{i=1}^3 \iiint_{v_i} \rho \underline{\underline{\ddot{u}}} \delta \underline{\underline{u}} dv$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes,  $\underline{\underline{\epsilon}}$  le tenseur des déformations,  $\underline{\underline{u}}$  le vecteur champ de déplacement,  $\rho$  la masse volumique et  $v_i$  le domaine représentant la couche  $i$ . En négligeant les effets d'inertie longitudinale et rotationnelle dans la formulation, seuls les effets d'inertie transversaux sont pris en compte. Les relations (2.4) traduisant la continuité du champ de déplacement aux interfaces nous permettent de définir les déplacements généralisés ramenés dans la couche du cœur viscoélastique, en fonction du déplacement longitudinal  $u$ , du déplacement transversal ou flèche  $w$  et de la rotation du plan moyen de la couche centrale  $\beta$ . Ainsi le principe des puissances virtuelles (équation 2.8) peut s'écrire uniquement en fonction de ces trois déplacements généralisés du plan moyen de la couche centrale,  $\{u, w, \beta\}$  à savoir :

$$\delta P_{int} = - \int_0^L [N \delta u_{,x} + M_\beta \delta \beta_{,x} + M_w \delta w_{,xx} + T(\delta w_{,x} + \delta \beta)] dx,$$

(2.10)

$$\delta P_{acc} = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \int_0^L \ddot{w} \delta w dx,$$

avec  $\{\delta u, \delta w, \delta \beta\}$  étant les déplacements et rotations virtuels ;  $N$ ,  $M_\beta$ ,  $M_w$  qui sont respectivement l'effort normal résultant et les moments fléchissants résultants qui s'expriment en fonction des déplacements généralisés grâce aux équations (2.4), (2.5), et (2.6) :

$$\begin{aligned} N &= N_1 + N_2 + N_3 = 2E_f I_f u_{,x} + S_c R * \dot{u}_{,x} \\ M_\beta &= M_2 + (N_1 - N_3) \frac{h_c}{2} = I_c R * \dot{\beta}_{,x} + \frac{E_f S_f h_c}{2} (h_c \beta_{,x} - h_f w_{,xx}) \\ M_w &= M_1 + M_3 + (N_3 - N_1) \frac{h_f}{2} = \left( 2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2} \right) w_{,xx} - \frac{E_f S_f h_f h_c}{2} \beta_{,x} \end{aligned} \quad (2.11)$$

En assemblant les deux composantes du principe des puissances virtuelles et à partir de l'équation (2.8), nous obtenons l'équation du mouvement de la structure sandwich :

$$\int_0^L [N \delta u_{,x} + M_\beta \delta \beta_{,x} + M_w \delta w_{,xx} + T(\delta w_{,x} + \delta \beta) + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \ddot{w} \delta w] dx = 0 \quad (2.12)$$

Dans la section suivante, l'équation (2.12) sera discrétisée par une méthode d'éléments finis de type zigzag.

### II.2.3. Discrétisation par la méthode des éléments finis

L'équation (2.12) étant un couplage entre un mouvement membranaire et un mouvement de flexion et puisque nous ne nous intéressons qu'au mouvement de flexion dans nos travaux, seule l'équation du mouvement de flexion est récupérée ; ainsi nous avons :

$$\int_0^L [M_\beta \delta \beta_{,x} + M_w \delta w_{,xx} + T(\delta w_{,x} + \delta \beta) + (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) \ddot{w} \delta w] dx = 0 \quad (2.13)$$

L'équation (2.13) permettant l'analyse des vibrations libres en flexion, les fonctions de déplacement et de rotation  $\{w, \beta\}$  sont cherchées sous forme harmonique [89] :

$$\begin{cases} w(x, t) = W(x) e^{i\omega t} \\ \beta(x, t) = B(x) e^{i\omega t} \end{cases} \quad (2.14)$$

En remplaçant l'équation (2.14) dans l'équation (2.13), le problème à discrétiser est uniquement fonction de la fréquence  $\omega$  et des variables d'espace  $\{W, B\}$  ; ces derniers représentant le mode propre de vibration linéaire. On obtient alors :

$$\int_0^L \left[ I_c E_c^*(\omega) B_{,x} \delta B_{,x} + \frac{E_f S_f h_c}{2} (h_c B_{,x} - h_f W_{,xx}) \delta B_{,x} \right] dx +$$

$$\int_0^L \left[ \left( 2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2} \right) W_{,xx} \delta W_{,xx} - \frac{E_f S_f h_f h_c}{2} B_{,x} \delta W_{,xx} \right] dx + \quad (2.15)$$

$$\int_0^L \left[ \frac{S_c E_c^*(\omega)}{2(1+\nu_c)} (W_{,x} + B) (\delta W_{,xx} + \delta B) - \omega^2 (2\rho_f S_f + \rho_c S_c) W \delta W \right] dx = 0.$$

Pour discrétiser l'équation (2.15), un élément fini unidimensionnel est utilisé. Ce dernier est à deux nœuds, chacun d'eux ayant trois degrés de liberté à savoir le déplacement transversal ( $W$ ), la pente ( $W_{,x}$ ) et la rotation ( $B$ ).

Le vecteur des déplacements nodaux pour un élément délimité par les nœuds 1 et 2, s'écrit alors:

$$\{U^{(e)}\} = [W_1 \ W_{1,x} \ B_1 \ W_2 \ W_{2,x} \ B_2]^T. \quad (2.16)$$

Afin d'être remplacés par leurs expressions dans le problème (2.15), le déplacement transversal et la rotation sont exprimés en fonction du vecteur des déplacements nodaux et des matrices d'interpolation  $[N_\omega]$ ,  $[N_\beta]$ :

$$\begin{cases} W = [N_\omega]\{U^{(e)}\} \\ B = [N_\beta]\{U^{(e)}\} \end{cases} \quad (2.17.a)$$

Les matrices  $[N_\omega]$ ,  $[N_\beta]$  contiennent des fonctions de forme polynomiale classiques [103][104] tels que :

$$[N_\omega] = [N_1(\xi) \ N_2(\xi) \ 0 \ N_3(\xi) \ N_4(\xi) \ 0], \quad (2.17.b)$$

$$[N_\beta] = [0 \ 0 \ N_5(\xi) \ 0 \ 0 \ N_6(\xi)],$$

avec,

$$\begin{cases} N_1(\xi) = \frac{(1-\xi)^2(2+\xi)}{4}, N_2(\xi) = \frac{L^e(1-\xi)^2(1+\xi)}{8}, \\ N_3(\xi) = \frac{(1+\xi)^2(2-\xi)}{4}, N_4(\xi) = -\frac{L^e(1+\xi)^2(1-\xi)}{8} \\ N_5(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, N_6(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \end{cases} \quad (2.17.c)$$

Les équations (2.17.c) sont obtenues en posant :  $\xi = \frac{2x}{L^e} - 1$  avec  $L^e$  la longueur de l'élément,  $x \in [0 \ L^e]$  et  $\xi \in [-1 \ 1]$ . L'insertion des expressions (2.17) dans celle du (2.15) nous donne le problème de valeur propre élémentaire suivant:

$$([K^e(\omega)] - \omega^2[M^e]) \{U^{(e)}\} = 0, \quad (2.18)$$

$$\text{avec } [M^e] = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c)[m^e],$$

et

$$(2.19.a)$$

$$[K^e] = \left( I_c E_c^*(\omega) + \frac{E_f S_f h_c^2}{2} \right) [k_1^e] - \frac{E_f S_f h_f h_c}{2} [k_2^e] + \left( 2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2} \right) [k_3^e] + \frac{S_c E_c^*(\omega)}{2(1+\nu_c)} [k_4^e].$$

Les matrices d'intégration des fonctions de forme  $[m^e]$  et  $[k_i^e]_{1 \leq i \leq 4}$  sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} [m^e] = \int_0^{L^e} [N_\omega]^T [N_\omega] dx \\ [k_1^e] = \int_0^{L^e} [N_{\beta,x}]^T [N_{\beta,x}] dx \\ [k_2^e] = \int_0^{L^e} [N_{\beta,x}]^T [N_{\omega,xx}] + [N_{\omega,xx}]^T [N_{\beta,x}] dx \\ [k_3^e] = \int_0^{L^e} [N_{\omega,xx}]^T [N_{\omega,xx}] dx \\ [k_4^e] = \int_0^{L^e} [N_{\omega,x}]^T [N_{\omega,x}] + [N_\beta]^T [N_{\omega,x}] + [N_{\omega,x}]^T [N_\beta] + [N_\beta]^T [N_\beta] dx \end{array} \right. \quad (2.19.b)$$

$[K^e(\omega)]$  et  $[M^e]$  sont respectivement les matrices de rigidité et de masse élémentaires dont l'assemblage conduit au problème aux valeurs propres non-linéaires.

$$[K(\omega) - \omega^2 M]\{U\} = 0. \quad (2.20)$$

Dans le problème aux valeurs propres non linéaire,  $[M]$  et  $[K(\omega)]$  représentent respectivement des matrices de masse et de rigidité globales, et  $\{U\}$  le mode de vibration complexe. Généralement, dans l'analyse des vibrations libres des structures viscoélastiques [81][89][86][90][62][103] cette formulation matricielle est utilisée et lorsque  $[K(\omega)]$  dépend non linéairement de  $\omega$  l'équation (2.20) ne peut pas être résolu par des procédures classiques. De nombreux travaux ont été proposés dans la littérature pour résoudre ce problème. Dans le cas des structures viscoélastiques à rigidité constante, la méthode des valeurs propres complexes [105] et l'approche asymptotique [89] sont utilisées. Quant à la méthode d'énergie de déformation modale [83], elle est applicable aux structures dépendantes de la fréquence mais, l'erreur peut être conséquente [106] dans la pratique. La méthode de réponse en fréquence directe a un coût de calcul élevé et a été appliquée dans [103]. D'autres méthodes ont été développées notamment, la méthode d'itération inverse [107], la méthode numérique asymptotique [89], [90] (MAN), l'algorithme itératif de réduction d'ordre [83] et les méthodes de projection itérative Arnoldi / Jacobi-Davidson [87][108]. Ces dernières sont des méthodes numériques pour les problèmes de valeurs propres non linéaires, tiennent compte de la dépendance en fréquence et se sont révélées efficaces pour résoudre l'équation du problème

(2.20) ; Hamdaoui et al. [109] ont fourni une comparaison de ces techniques précitées, en termes de précision et de temps de calcul. Une boîte à outils (Diamant Toolbox) a été conçue à l'aide de techniques de différenciation automatique pour rendre la méthode numérique asymptotique générique et facile à utiliser [108][102][17]. La solution peut être réalisée facilement et de façon exacte quelle que soit la dépendance de la matrice  $[K]$  par rapport à la fréquence. Les modes propres complexes exacts sont étudiés sur la base de cette procédure.

## II.3. Identification inverse

L'identification inverse que nous proposons assure la caractérisation de la couche viscoélastique prise en sandwich entre deux couches élastiques. Cette méthode basée sur les équations précédentes nécessite des données d'entrées issues d'essais expérimentaux. Une procédure a été mise en œuvre afin de rendre la méthode automatique.

### II.3.1. Méthode d'identification inverse

Dans cette section, une méthode inverse est proposée pour l'identification d'un matériau viscoélastique pris en sandwich entre deux couches élastiques. Cette identification est basée dans un premier temps sur une réécriture de l'équation des valeurs propres non linéaires (2.20). Les matériaux des faces élastiques et viscoélastiques sont supposés être isotropes. Ainsi, la matrice de rigidité  $K(\omega)$  dépendante de la fréquence peut être écrite comme suit [104] :

$$\begin{aligned} K(\omega) &= K_0 + E(\omega)K_v \\ K(\omega) &= K' + G(\omega)K_v + E(\omega)K_v \\ K(\omega) &= K' + G(\omega)K_v + i\eta(\omega)G(\omega)K_v \end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$K(\omega) = K' + G(\omega)(1 + i\eta(\omega))K_v = K' + G(1 + i\eta)K_v \quad (2.21)$$

Supposons le couple  $(\omega_r, U_r)$  solution de l'équation (2.20), et remplaçons l'expression de la matrice de rigidité  $K(\omega)$  de l'équation (2.20) par celle issue de l'équation (2.21) ; ainsi cette équation (2.20) devient:

$$[K' + G(1 + i\eta)K_v - \omega_r^2 M]U_r = 0 \quad (2.22)$$

En multipliant l'équation (2.22) par  $U_r^H$ , l'expression du module de cisaillement complexe du cœur viscoélastique est obtenue:

$$G^* = G(1 + i\eta) = \omega_r^2 \frac{U_r^H M U_r}{U_r^H K_v U_r} - \frac{U_r^H K' U_r}{U_r^H K_v U_r} \quad (2.23)$$

Le module de cisaillement  $G$  et le facteur de perte  $\eta$  du cœur viscoélastique s'expriment en fonction de la fréquence  $\omega$  et du mode fixé  $U$ , leur identification peut se faire grâce à une procédure itérative. L'équation (2.23) établit une relation entre le module de cisaillement  $G$  et le facteur de perte  $\eta$  du cœur viscoélastique à la pulsation  $\omega_r$  d'une part et la forme du mode  $U_r$  correspondant d'autre part. Le problème est que si la pulsation  $\omega_r$  peut facilement être déterminée de manière expérimentale, la forme du mode quant à elle est plus difficile à déterminer. La méthode proposée dans ce travail repose sur une résolution itérative de l'équation (2.23) ; dans un premier temps, nous considérons que la pulsation  $\omega_r$  a été déterminée expérimentalement et est égale à  $\omega_{exp}$  tel que  $\omega_{exp}^2 = \Omega_{exp}^2(1 + i\eta_{exp})$  avec  $\Omega_{exp}$  la pulsation réelle et  $\eta_{exp}$  le facteur de perte mesuré par mode. A chaque itération  $k$ , nous supposons le module de cisaillement  $G^k$  et le facteur de perte  $\eta^k$  du cœur viscoélastique connus, ensuite nous résolvons l'équation (2.20) pour déterminer la forme du mode  $U_r^k$  en utilisant la méthode asymptotique numérique avec la méthode de différentiation automatique implémentée dans la toolbox Diamant. Nous pouvons déterminer alors les nouvelles valeurs du module de cisaillement  $G^{k+1}$  et le facteur de perte  $\eta^{k+1}$  du cœur viscoélastique, à l'itération  $k+1$  en utilisant l'équation (2.23) de laquelle les parties réelle et imaginaire sont exprimées. Un test de convergence est effectué par le calcul de  $G = \left| \frac{G^{k+1} - G^k}{G^k} \right|$  et  $\eta = \left| \frac{\eta^{k+1} - \eta^k}{\eta^k} \right|$ , ainsi les itérations sont stoppées si  $(\max(G, \eta) < \text{tolérance})$  ou si le nombre d'itérations dépasse  $N^{iter}$ .

L'organigramme de l'ensemble du processus d'identification est représenté sur la figure II.2. Le processus est répété pour chaque mode de résonance afin d'obtenir une description dépendante de la fréquence du module de cisaillement  $G$  et du facteur de perte  $\eta$  du cœur viscoélastique. Dans ce travail une tolérance de  $10^{-4}$  et un nombre d'itérations de 1500 ont été considérés.

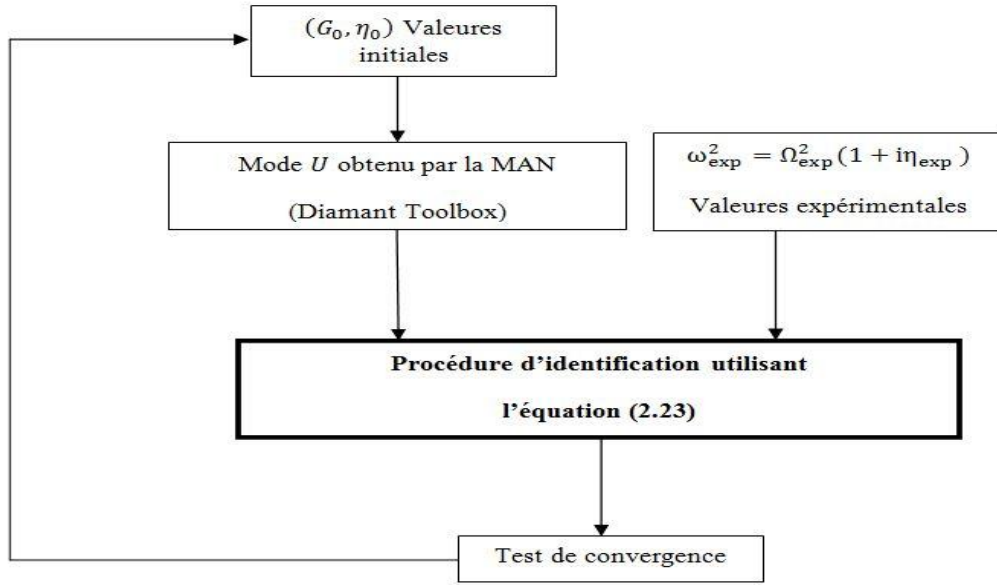


Figure II.2 : Organigramme de la méthode d'identification inverse mise en œuvre

### II.3.2. Les équations de Ross-Kerwin-Ungar

Dans ce paragraphe, les équations de Ross-Kerwin-Ungar (RKU) [96] communément utilisées pour identifier le module de cisaillement et le facteur de perte d'un matériau viscoélastique et basées sur des tests de vibration sont décrites:

$$E_{2n} = 2(1 + \nu) \frac{(A-B) - 2(A-B)^2 - 2(A\eta_n)^2}{(1-2A+2B)^2 + 4(A\eta_n)^2} \frac{E_1 H_1 H_2 a_n}{L^2} \quad (2.25.a)$$

$$\eta_{2n} = \frac{A\eta_n}{(A-B) - 2(A-B)^2 - 2(A\eta_n)^2} \quad (2.25.b)$$

$$A = \left(\frac{f_n}{f_{1n}}\right)^2 \left(2 + \rho_r h_2\right) \left(\frac{B}{2}\right) \quad (2.25.c)$$

$$B = \frac{1}{6(1+h_2)^2} \quad (2.25.d)$$

Dans les équations (2.25),  $h_2$  est le ratio entre l'épaisseur de la couche viscoélastique centrale et l'épaisseur de la couche élastique  $h_2 = h_{c1}/h_{f1}$  ; rappelons que dans ce cas nous avons une poutre symétrique c'est-à-dire que les faces élastiques ont la même épaisseur.

$f_n$  et  $\eta_n$  sont respectivement les fréquences de résonance et facteurs de perte obtenus expérimentalement de la poutre sandwich (Tableau II.1) et  $f_{1n}$  est la  $n^{\text{ième}}$  fréquence de résonance d'une poutre d'Euler Bernoulli. La quantité  $\rho_r$  est le ratio entre les masses



volumiques du matériau du cœur viscoélastique et des faces élastiques.  $L$  est la longueur de la poutre et,  $\nu$  est le coefficient de poisson du matériau viscoélastique qui est égal à 0,3.

Le module de cisaillement  $G$  et le facteur de perte  $\eta$  du cœur viscoélastique sont déduits grâce aux équations de Ross-Kerwin-Ungar:

$$G = \frac{E_{2n}}{2(1+\nu)} \quad (2.26)$$

$$\eta = \eta_{2n} \quad (2.27)$$

Tableau II.1: Fréquences de résonance et facteur de perte de la poutre sandwich 1 de longueur utile de  $L=47.5\text{cm}$

Mode	1	2	3	4	5	6	7
$f_n(\text{Hz})$	10.79	67.18	186.74	363.98	598.15	885.37	1214.99
$\eta_n$	0.061	0.070	0.082	0.041	0.041	0.049	0.015

### II.3.3. Validation de la méthode d'identification inverse

La validation de la méthode d'identification inverse que nous avons développé, consiste en deux étapes qui sont :

- Le choix des valeurs initiales des paramètres à identifier
- La comparaison des caractéristiques mécaniques identifiées par notre méthode, avec des méthodes de la littérature.

Cette étude de validation est réalisée sur la poutre sandwich type 1 avec une longueur utile de 47,5 cm avec pour condition aux limites : encastree-libre.

#### II.3.3.1 Rôle des paramètres initiaux ( $G_0$ et $\eta_0$ )

Dans les méthodes inverses, le choix des valeurs initiales peut soit induire un biais dans les résultats ou soit accroître le nombre d'itération. Le choix d'une valeur initiale pertinente permet non seulement d'économiser le temps de calcul pendant le processus d'identification, mais évite également d'évoluer vers un minimum local au lieu du minimum global souhaité. Les valeurs initiales des paramètres à caractériser, à savoir le module de cisaillement  $G_c$  et le facteur de perte  $\eta_c$  du cœur viscoélastique sont choisies proches de celles données par les relations RKU (Equations (2.25.a) et (2.25.b)).

Ainsi, différents points de départ sont testés pour pouvoir évaluer la robustesse de la méthode par rapport aux valeurs initiales, et notre méthode donne de bons résultats pour des paramètres initiaux générés aléatoirement dans les plages suivantes :  $G_0 = 2,5 \pm 2$  MPa et  $\eta_0 = 0,5 \pm 0,25$ . Ces paramètres générés sont montrés dans le tableau II.2.

Tableau II.2 : Valeurs initiales des paramètres d'entrée de l'identification (modules de cisaillement et facteurs de perte) des 10 essais de robustesse

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$G_0$ (MPa)	0.5	0.9444	1.3889	1.8333	2.2778	2.7222	3.1667	3.1611	4.0556	4.5
$\eta_0$	0.25	0.3056	0.3611	0.4167	0.4722	0.5278	0.5833	0.6389	0.6944	0.75

Cette étude est réalisée sur la poutre 1 avec une longueur utile de 0,475 m et une condition aux limites encastrée-libre lors des essais de vibration. Les figures II.3 et II.4 représentent respectivement les différents paramètres caractérisés (module de cisaillement et facteur de perte) à chaque mode de résonance ceci pour 10 essais, chaque essai représentant un couple de paramètres initiaux ( $G_0, \eta_0$ ) généré.

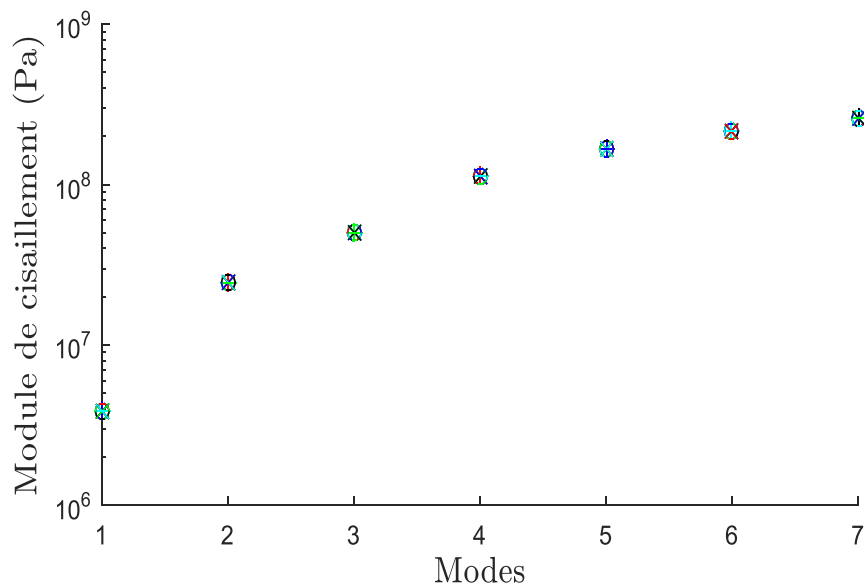


Figure II.3 : Module de cisaillement en fonction du mode de résonance pour 10 essais avec différents couples de paramètres initiaux indiqué dans le tableau II.2

Les figures II.3 et II.4 montre que pour tous les modes de flexion, le module de cisaillement et le facteur de perte sont clairement identiques quelques soient les couples de paramètres initiaux testés ( $G_0, \eta_0$ ).

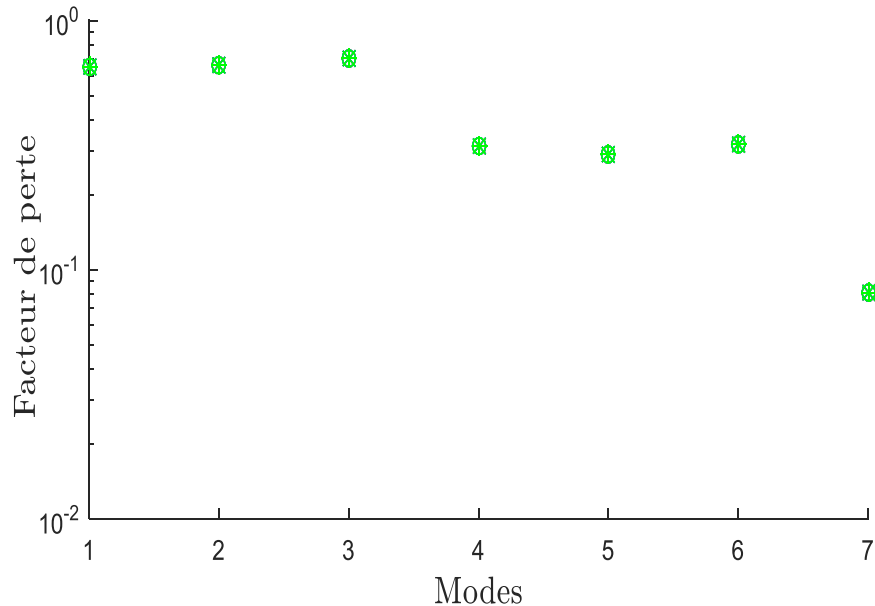


Figure II.4 : Facteur de perte en fonction du mode de résonance pour 10 essais avec différents couples de paramètres initiaux indiqué dans le tableau II.2

Dans ces cas, les erreurs relatives calculées sur les paramètres caractérisés sont respectivement inférieures à  $8 * 10^{-5}\%$  et  $8.52 * 10^{-2}\%$  pour le module de cisaillement et le facteur de perte, ceci quel que soit le mode considéré. Ces résultats attestent que les paramètres initiaux n'influencent pas sur la bonne mise au point de notre identification et que notre méthode inverse donne de bons résultats.

### II.3.3.2 Validation de la méthode d'identification inverse

Les résultats issus de notre méthode d'identification inverse sont comparés aux valeurs calculées par les équations de Ross-Kerwin-Ungar (RKU) [96] et aux valeurs déduites de la méthode de minimisation des erreurs.

Les Figures II.9 et II.10 montrent respectivement la variation du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique déterminés par les trois différentes méthodes en fonction de la fréquence de résonance de la poutre. Suivant les trois méthodes, le module de

cisaillement de la couche centrale viscoélastique croît en fonction de la fréquence jusqu'à une valeur plafond de l'ordre de 0,2 GPa à partir de la fréquence de résonance de 900Hz.

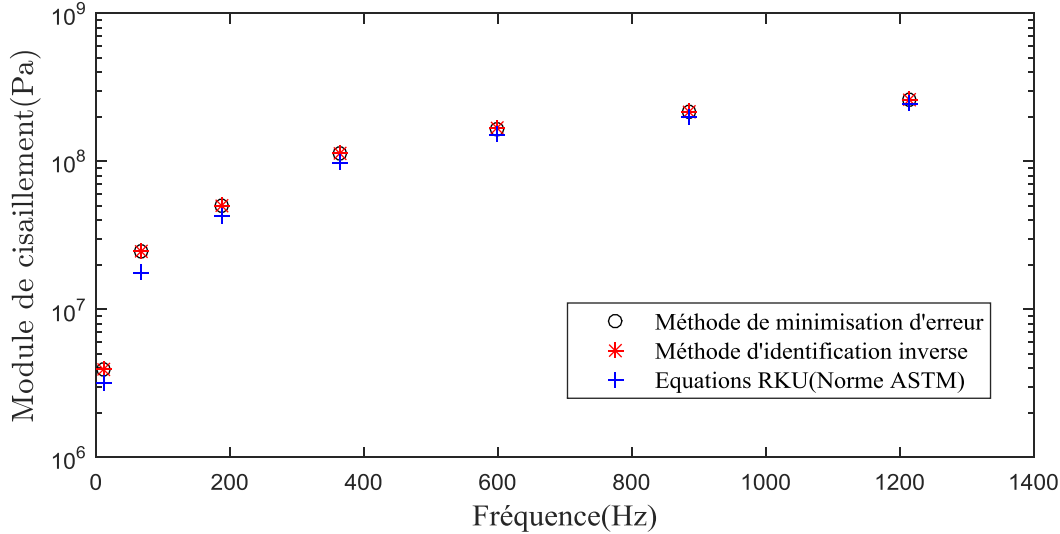


Figure II.5 : Validation du module de cisaillement du cœur viscoélastique déterminé par la méthode d'identification inverse

Quelque soit la méthode, le comportement est identique. Cependant, en comparant les valeurs numériques, nous observons une erreur relative maximale de 1,8% entre la méthode d'identification inverse et la méthode de minimisation d'erreur, et de 28% entre la méthode d'identification inverse et la méthode issue des équations de Ross-Kerwin-Ungar (RKU).

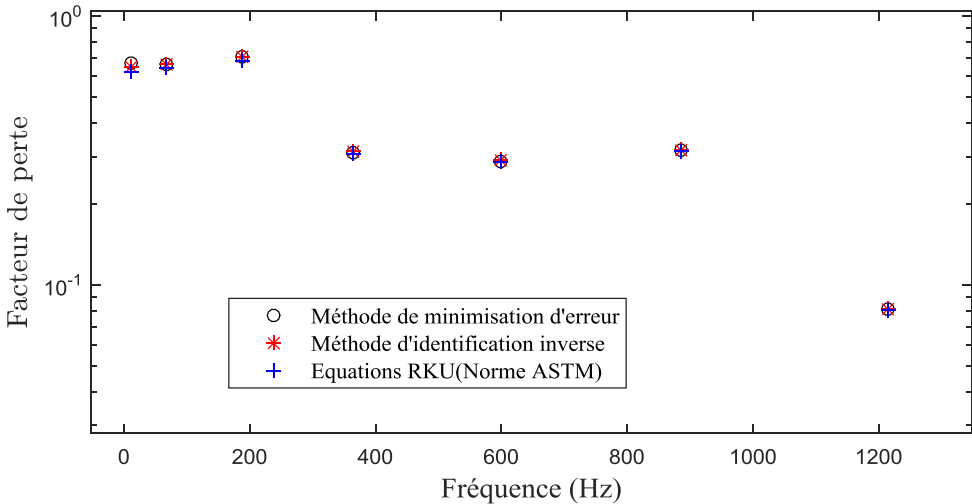


Figure II.6 : Validation du facteur de perte du cœur viscoélastique déterminé par la méthode d'identification inverse

Le facteur de perte du matériau viscoélastique décroît légèrement en fonction de la fréquence de résonance. Il apparaît que le facteur de perte a une valeur constante pour des fréquences comprises entre 0-200Hz et 200-800Hz. L'erreur relative maximale est de 3,2 % entre la méthode d'identification inverse et la méthode de minimisation d'erreur et de 4,3% entre la méthode d'identification inverse et la méthode issue des équations de Ross-Kerwin-Ungar (RKU). Dans le cas du facteur de perte, les résultats sont très proches entre l'ensemble des méthodes d'identification.

## **II.4. Conclusion**

Une nouvelle méthode d'identification inverse a été développée pour pouvoir déterminer les propriétés mécaniques d'un matériau viscoélastique au cœur d'une poutre sandwich. Cette méthode inverse est basée sur l'algorithme de résolution type méthode asymptotique numérique (MAN) développé par Daya et Potier-Ferry [89] et sur la boîte à outil de différentiation automatique (DA) conçue par Koutsawa et al. [102] qui permet le calcul des séries de Taylor. Cette méthode d'identification inverse est scindée en deux étapes. La première étape consiste à déterminer les paramètres modaux de la poutre sandwich viscoélastique par une investigation expérimentale. La seconde étape fait appel à l'approche inverse proprement dite. L'approche inverse est une procédure itérative de détermination des formes de mode de vibration en fonction des paramètres du matériau et des propriétés mécaniques du matériau viscoélastique. Elle a été validée par les résultats obtenues grâce aux formules de Ross-Kerwin-Ungar [96] et par une approche d'optimisation standard.

Cependant, les résultats obtenues en utilisant les équations de Ross-Kerwin-Ungar (RKU) s'avèrent sous estimer la valeur du module de cisaillement pour les basses et moyennes fréquences. D'où l'importance de la méthode d'identification inverse pour caractériser les propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques contraints entre deux faces élastiques.

# Chapitre III. Application aux sandwichs viscoélastiques

---

## III.1. Introduction

Les matériaux sandwichs viscoélastiques répondent aisément aux problématiques de réduction ou de contrôle des vibrations. Ces matériaux présentent l'avantage de cumuler les propriétés amortissantes apportées par le cœur viscoélastique et les propriétés de bonne tenue mécanique grâce aux faces élastiques. Avec l'exigence de plus en plus croissante de la part des consommateurs en termes de confort et de performance, il devient primordial de caractériser les caractéristiques mécaniques du matériau viscoélastique et répondre à leur performance en situation.

L'objectif est double, d'une part proposer une loi de comportement du matériau viscoélastique en fonctionnement et d'autre part éprouver notre méthodologie de caractérisation. Afin de proposer une loi de comportement pour le matériau viscoélastique, notre méthode de caractérisation est exposée du dispositif expérimental en passant par l'obtention des résultats par la méthode d'identification (section II.3.3.), jusqu'aux caractérisations mécaniques du cœur viscoélastique. A partir des caractéristiques mécaniques obtenues du cœur viscoélastique, les lois viscoélastiques sont déduites d'abord par le biais d'une méthode de "fit" basée sur la méthode des moindres carré puis en utilisant des modèles rhéologiques complexes à savoir les modèles de Maxwell généralisé, ADF et GHM. Les lois de comportements ainsi obtenues seront comparées entre elles. Elles ont aussi été implémentées dans le code direct éléments finis et les résultats comparés aux spectres des essais expérimentaux.

Pour pouvoir atteindre le second objectif de ce chapitre, qui est d'éprouver notre méthode de caractérisation, nous procédons à l'étude de l'effet de la température sur le matériau viscoélastique. Pour cela, nous avons modifié le dispositif expérimental pour assurer un conditionnement thermique des éprouvettes lors de la vibration. De la même manière que précédemment, nous caractériserons les propriétés mécaniques du matériau viscoélastique à diverses températures et pour finir nous proposons des lois de comportement à ces différentes températures.

## III.2. Dispositif expérimental

Un dispositif expérimental a été mis au point pour assurer la mesure des spectres de résonance des poutres sandwichs sous la condition limite encastree – libre (Figure III.1). Composé d'un pot vibrant pour la génération des vibrations, d'un vibromètre laser pour la mesure et d'un système d'encastrement, ce dispositif expérimental est adaptatif nous permettant notamment d'étudier plusieurs conditions limites ou type de sollicitation.

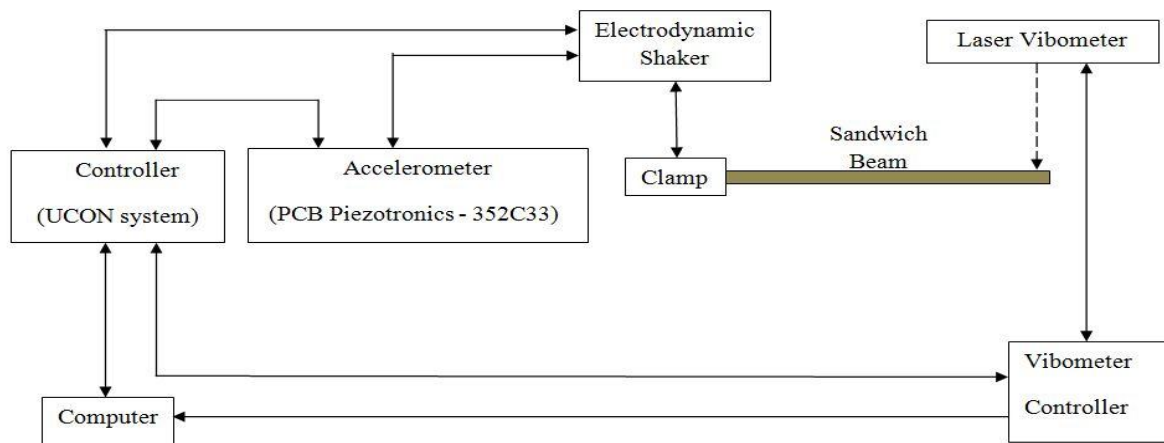


Figure III.1 : Schéma du dispositif expérimental développé au sein de la plateforme « Vibration » au Laboratoire LEM3.

Le pot vibrant génère des vibrations contrôlées par un dispositif de contrôle (système UCON) qui assure l'acquisition des signaux issus des accéléromètres et du vibromètre laser. La plage d'excitation en termes de fréquence est comprise entre 4 et 1500 Hz. L'amplitude de vibration du pot vibrant est contrôlée au centre du pot vibrant grâce à un accéléromètre (PCB Piezotronics - 352C33). L'amplitude de sollicitation du pot vibrant est choisie pour minimiser les vibrations non linéaires typiquement de 0,02 mm de déplacement entre 5 et 157,5Hz et une accélération de 1g entre 157,5 et 1500Hz. La poutre est encastree sur le pot vibrant par l'une de ses extrémités. Ainsi, les conditions aux limites utilisées sont encastrees-libres.

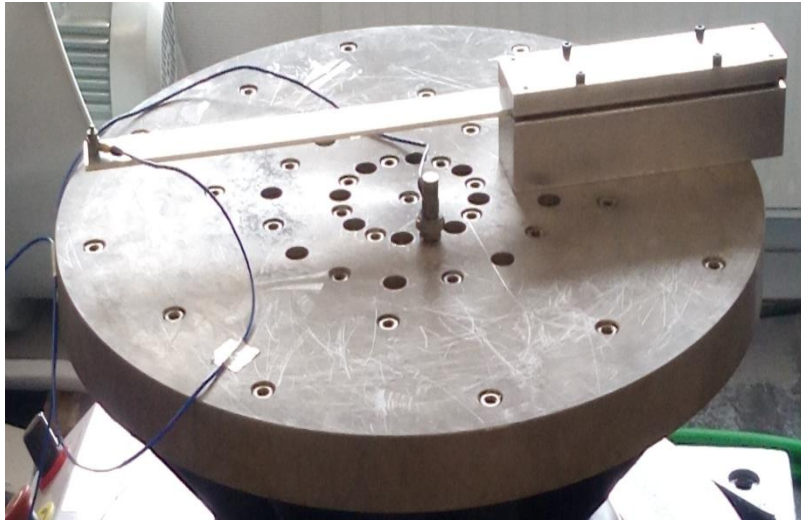


Figure III.2 : Photographie de la poutre mise en position sur le vibreur.

Concernant la mesure de l'amplitude des vibrations de la poutre sandwich, le vibromètre laser est pointé à l'extrémité de la poutre. Le choix du lieu de la mesure est prépondérant pour assurer l'étude vibratoire de l'ensemble des modes de vibration. Ici, seuls les modes de flexion sont étudiés. Dans le cas des poutres, les nœuds (minimum de déplacement) et les ventres (maximum de vibration) du système sont parfaitement identifiés. Afin de s'assurer d'obtenir le maximum de modes de résonance, la mesure s'effectuera à l'extrémité libre de la poutre.

Dans ce travail, deux spécimens de poutres sandwich (nommée respectivement poutre 1 et poutre 2) sont considérés. La distinction entre les deux poutres est l'épaisseur de la couche viscoélastique. Pour une même épaisseur totale du sandwich de 3 mm, la distribution entre les épaisseurs de la face élastique et du cœur viscoélastique est différente. Pour la poutre 1, les épaisseurs de chacune des couches est égale à 1 mm. Pour la poutre 2, les épaisseurs sont de 0,5 mm pour les faces et 2 mm pour le cœur. Les propriétés mécaniques et géométriques de ces deux poutres sandwichs sont regroupées dans le tableau III.1. Afin de compléter l'étude, quatre longueurs utiles ont été testées (318, 354, 400 et 475 mm).



Tableau III.1 : Caractéristiques matériaux et dimensionnelles des poutres sandwich

Faces élastiques	Matériau	Aluminium
	Module d'Young	$E_f = 6.9 * 10^{10} Pa$
	Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.3$
	Masse Volumique	$\rho_f = 2766 kg/m^3$
	Épaisseur	$h_{f_1} = 1 mm$ et $h_{f_2} = 0.5 mm$
Cœur viscoélastique	Matériau	Résine diélectrique
	Coefficient de Poisson	$\nu_c = 0.3$
	Masse Volumique	$\rho_f = 1550 kg/m^3$
	Épaisseur	$h_{c_1} = 1 mm$ et $h_{c_2} = 2 mm$
Dimensions de la poutre sandwich	Longueur	$L = 500 mm$
	Largueur	$b = 30 mm$
	Épaisseur	$h = 3 mm$

### III.3. Exploitation des résultats expérimentaux pour l'identification inverse

Dans cette partie, nous allons décrire étape par étape la procédure d'identification inverse sur un exemple. La poutre sandwich 2 a été choisie avec une longueur utile de 46,2 cm. Tout d'abord, nous procéderons à l'exploitation des résultats expérimentaux qui sont les données d'entrée de la méthode d'identification. Ensuite, nous développerons les résultats obtenues par de notre méthode.

#### III.3.1. Résultats expérimentaux de la poutre sandwich

Le pot vibrant génère des vibrations contrôlées par un système de contrôle qui assure l'acquisition des signaux issus des accéléromètres et du vibromètre laser. La plage d'excitation en termes de fréquence est comprise entre 5 et 1500 Hz. La poutre sandwich sera ainsi sollicitée en réponse sur ses fréquences de résonance.

La Figure III.3 montre le spectre d'amplitude du déplacement vibratoire à l'extrémité libre de la poutre 2 ayant une longueur libre de 46,2 cm.

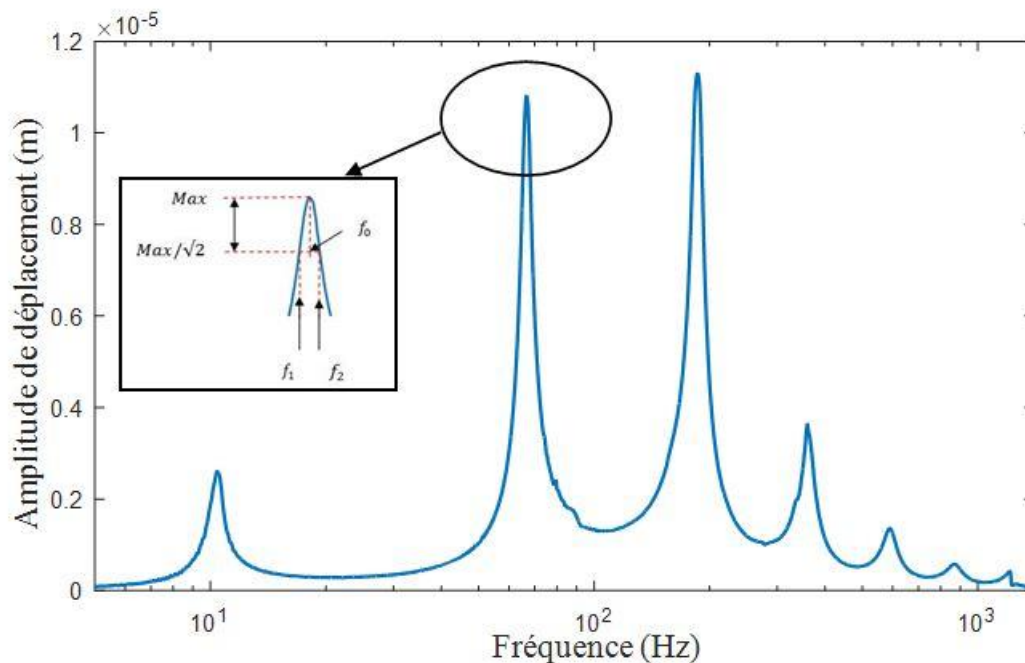


Figure III.3 : Spectre d'amplitude du déplacement à l'extrémité libre de la poutre 2 ayant une longueur libre de 46,2 cm.

Pour chaque mode de résonance du sandwich, la fréquence et le facteur de perte sont déterminés. La fréquence de résonance est identifiée comme le maximum d'amplitude des

pics et le facteur de perte est calculé par la méthode de la bande passante à -3dB. Cette méthode reste précise même pour les faibles valeurs d'amortissement [110].

Dans cet exemple, six fréquences de résonance et les facteurs de perte correspondants sont mesurés. Les résultats sont affichés dans le tableau III.2

Tableau III.2 : Paramètres modaux de la poutre sandwich 2

Modes	Fréquence de résonance de la structure (Hz)	Facteur de perte de la structure
1	10.43	0.066
2	66.90	0.064
3	187.00	0.074
4	362.48	0.068
5	591.60	0.078
6	875.68	0.091

Notons ici que la fréquence fondamentale a une amplitude plus faible que les harmoniques, ce qui n'a pas de conséquence sur la validité des résultats obtenus. Ce phénomène est directement lié à l'excitation délivrée par le pot vibrant qui est inférieure à 1g entre 5 et 157,5Hz puis égale à 1g de 157,5 à 1400Hz et est illustré sur la figure III.3, cette dernière représente le signal de l'excitation du pot vibrant et la réponse en amplitude.



Figure III.4 : Signal de l'excitation et réponse en amplitude

### III.3.2. Résultats de l'identification

Les paramètres expérimentaux que sont les fréquences de résonance et les facteurs de perte du sandwich pour tous les modes sont les valeurs d'entrées pour l'algorithme de la méthode inverse d'identification. Ils permettent ainsi d'identifier les valeurs du module de cisaillement et le facteur de perte du cœur viscoélastique. Dans ce cas, les résultats de l'identification inverse à savoir le module de cisaillement et le facteur de perte du cœur viscoélastique sont exposés dans le tableau III.3.

Tableau III.3 : Caractéristiques mécaniques du matériau viscoélastique déterminées par l'approche inverse

Modes	Paramètres d'entrée		Paramètres identifiées	
	Fréquence de résonance de la structure (Hz)	Facteur de perte de la structure	Module de cisaillement (Pa)	Facteur de perte du cœur viscoélastique
1	10.43	0.066	$3.47 * 10^{+6}$	0.458
2	66.90	0.064	$3.10 * 10^{+7}$	0.611
3	187.00	0.074	$6.78 * 10^{+7}$	0.682
4	362.48	0.068	$1.18 * 10^{+8}$	0.529
5	591.60	0.078	$1.59 * 10^{+8}$	0.518
6	875.68	0.091	$2.03 * 10^{+8}$	0.552

Les figures III.4 et III.5 représentent respectivement les variations du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique identifiés par notre méthode d'identification.

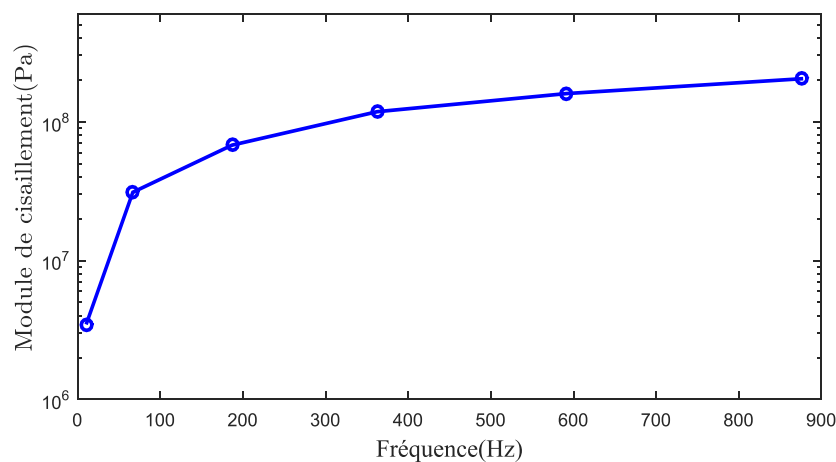


Figure III.5 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique identifié par la méthode d'identification inverse

Sur la figure III.4., le module de cisaillement de la couche centrale viscoélastique croit en fonction de la fréquence jusqu'à une valeur plafond de l'ordre de 0.203 *GPa* pour la fréquence de résonance de 875.68 Hz.

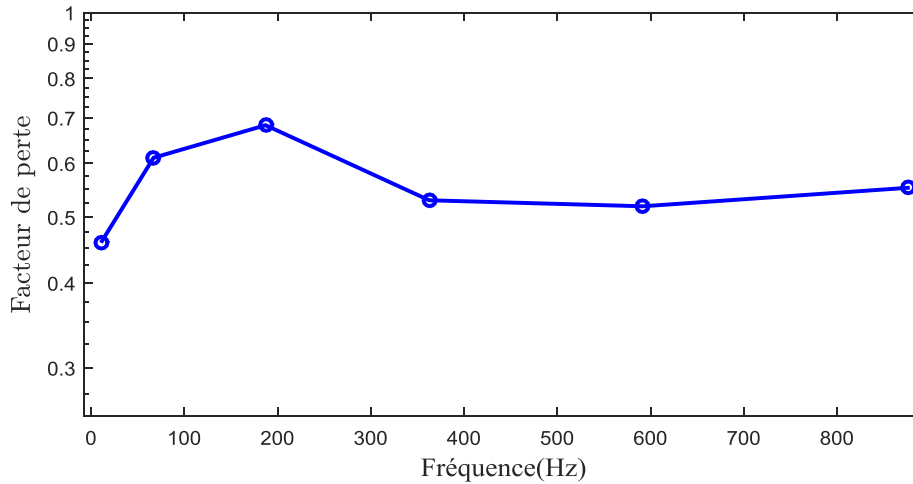


Figure III.6 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique identifié par la méthode d'identification inverse

Le facteur de perte sur la figure III.5, est relativement constant. En effet, il a une valeur constante notamment pour des fréquences comprises entre 362.5 et 875.7Hz.

Le processus de caractérisation étant alors réussi, à travers la détermination des paramètres modaux et l'identification des caractéristiques mécaniques du matériau viscoélastique, nous pouvons alors procéder à l'établissement des lois de comportements du cœur viscoélastique.

### III.4. Loi de comportement du cœur viscoélastique

Dans cette partie, nous avons souhaité déterminer les lois de comportements du matériau viscoélastique par une méthode de "fit" basée sur la méthode des moindres carré, d'une part, et par des modèles rhéologiques complexes, d'autre part, à savoir les modèles de Maxwell généralisé, ADF et GHM.

#### III.4.1. Détermination des propriétés mécaniques à partir des paramètres modaux

La fréquence de résonance de la poutre est fortement dépendante des dimensions géométriques. Celle qui influence le plus la fréquence de résonance est la longueur libre de la poutre. Ainsi, pour accroître le nombre de données pour pouvoir déterminer un modèle rhéologique du cœur viscoélastique, nous avons réalisé des mesures vibratoires avec quatre longueurs libres différentes. De plus, nous avons choisi de faire varier la répartition des épaisseurs cœur/face d'où l'utilisation de deux spécimens de poutre (notés 1 et 2).

Les figures III.6 et III.7 montrent respectivement les spectres d'amplitudes de déplacement lors des essais de vibrations sur les poutre 1 et poutre 2 avec comme condition aux limites "encasté-libre" ceci pour quatre différentes longueurs utiles (31,8 ; 35,4 ; 40 et 47,5 cm).

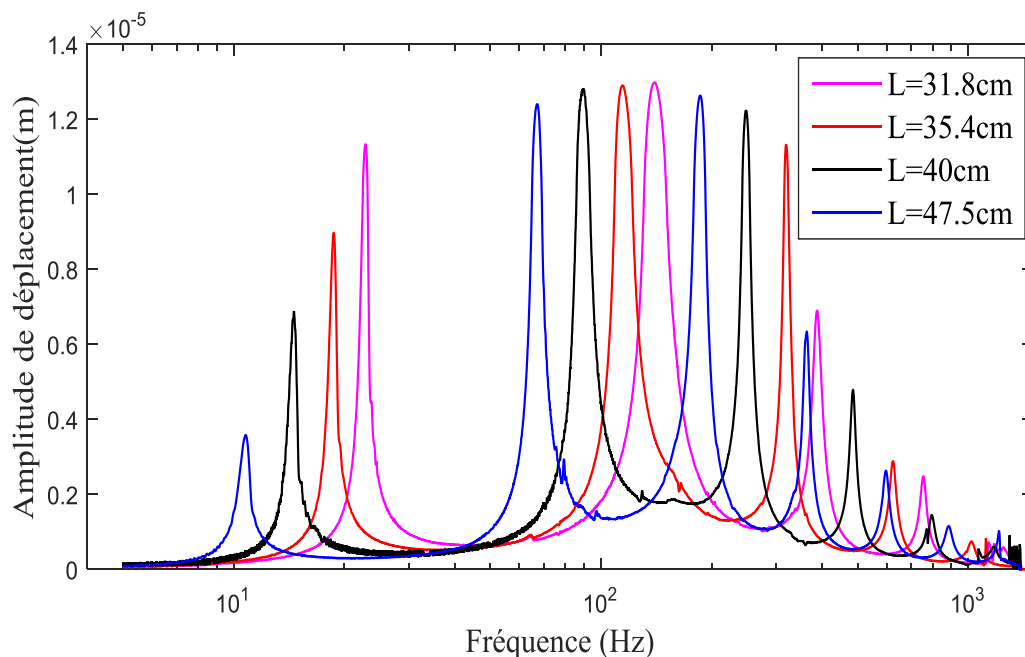


Figure III.7: Spectre de l'amplitude déplacement mesuré à l'extrémité libre de la poutre 1 pour quatre longueurs utiles (31,8 ; 35,4 ; 40 et 47,5 cm)

Sur les deux spectres, nous pouvons observer le décalage fréquentiel lié aux différentes longueurs utiles utilisées. La longueur la plus longue de la poutre produit tout naturellement la fréquence la plus basse quand la longueur la plus courte produit la fréquence la plus haute. Dans le cas du premier mode de résonance de la poutre 1, nous obtenons une fréquence de 10Hz pour la longueur utile de 47,5 cm et de 23 Hz pour la longueur utile de 31,8 cm.

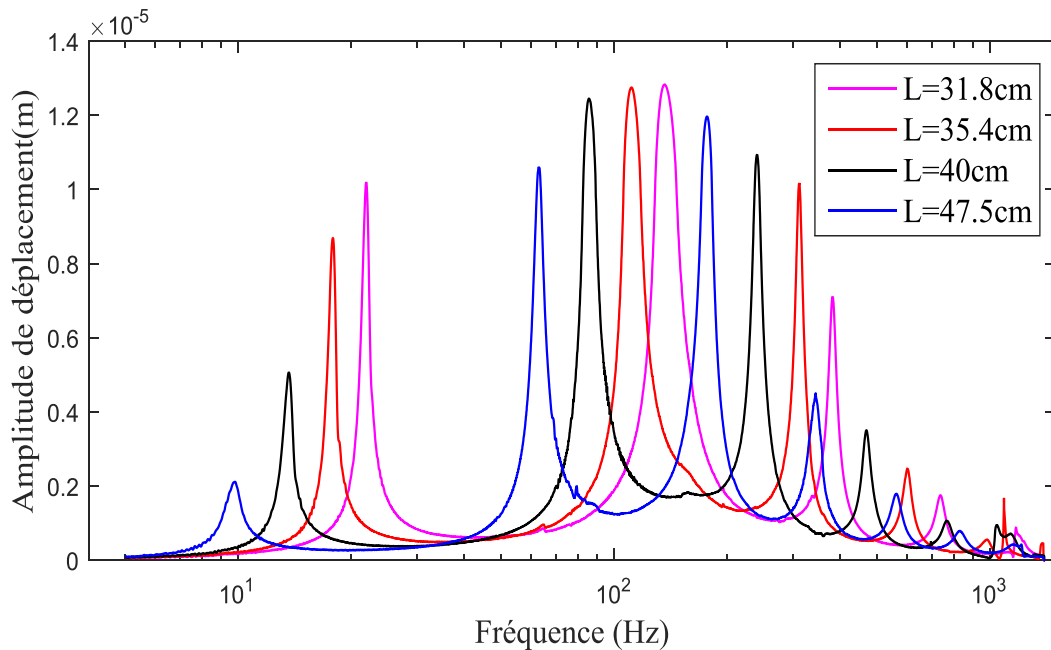


Figure III.8: Spectre de l'amplitude déplacement mesuré à l'extrémité libre de la poutre 2 pour quatre longueurs utiles (31,8 ; 35,4 ; 40 et 47,5 cm)

Suite à ces essais, les paramètres modaux ont été déterminés, le tableau III.4 concatène l'ensemble des fréquences de résonance et des facteurs de pertes en fonction du mode et de la longueur utile de la poutre considérée. Ces données expérimentales seront les données d'entrées pour l'identification inverse des paramètres des propriétés mécaniques du cœur viscoélastique.

Tableau III.4 : Fréquences de résonance et facteurs de perte des deux poutres pour différentes longueurs utiles

Essais	Longueurs utiles (cm)	Fréquences de résonance (Hz) (Facteurs de perte)						
		$f_1$ ( $\eta_1$ )	$f_2$ ( $\eta_2$ )	$f_3$ ( $\eta_3$ )	$f_4$ ( $\eta_4$ )	$f_5$ ( $\eta_5$ )	$f_6$ ( $\eta_6$ )	$f_7$ ( $\eta_7$ )
Poutre 1	31.8	22.87 (0.043)	140.26 (0.151)	387.76 (0.055)	754.75 (0.038)			
	35.4	18.74 (0.042)	114.66 (0.122)	319.77 (0.039)	624.98 (0.041)			
	40	14.62 (0.045)	89.69 (0.093)	248.62 (0.056)	485.93 (0.037)	796.36 (0.053)		
	47.5	10.79 (0.061)	67.18 (0.070)	186.74 (0.082)	363.98 (0.041)	598.15 (0.041)	885.37 (0.049)	1214.99 (0.015)
Poutre 2	31.8	21.95 (0.042)	136.45 (0.146)	381.94 (0.047)	739.33 (0.058)			
	35.4	17.88 (0.041)	111.46 (0.116)	311.99 (0.044)	603.94 (0.052)			
	40	13.65 (0.053)	85.94 (0.091)	240.54 (0.056)	470.14 (0.052)	767.32 (0.065)		
	47.5	9.82 (0.096)	63.14 (0.062)	176.99 (0.082)	344.01 (0.074)	563.78 (0.069)	833.36 (0.078)	1156.3 (0.103)

Comme nous l'avons décrit dans le chapitre II, les résultats expérimentaux permettent de calculer à partir de chaque couple de données fréquences de résonance / facteurs de perte les propriétés mécaniques c'est à dire les modules de cisaillement et les facteurs de perte du cœur viscoélastique.

Le Tableau III.5 concatène l'ensemble des résultats de l'identification inverse pour chacun des modes de résonance de la poutre et à chacune des longueurs utiles.



Tableau III.5 : Modules de cisaillement et facteurs de perte du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence

Essais	Longueur (cm)	Modules de cisaillement et facteur de perte du cœur viscoélastique en fonction de la						$G_{c_7}(MPa)$
		fréquence						
		$G_{c_1}(MPa)$	$G_{c_2}(MPa)$	$G_{c_3}(MPa)$	$G_{c_4}(MPa)$	$G_{c_5}(MPa)$	$G_{c_6}(MPa)$	
	$(\eta_{c_1})$	$(\eta_{c_2})$	$(\eta_{c_3})$	$(\eta_{c_4})$	$(\eta_{c_5})$	$(\eta_{c_6})$	$(\eta_{c_7})$	
Poutre 1	31.8	5.263 (0.244)	22.55 (0.790)	65.87 (0.242)	119.3 (0.160)			
	35.4	5.037 (0.274)	22.05 (0.682)	65.83 (0.198)	120.046 (0.200)			
	40	3.743 (0.282)	19.16 (0.499)	46.9 (0.271)	88.4 (0.173)	129.3 (0.235)		
	47.5	3.887 (0.650)	24.45 (0.659)	50.52 (0.703)	111.9 (0.312)	166.7 (0.290)	214.13 (0.316)	258.44 (0.081)
Poutre 2	31.8	7.753 (0.280)	*	116.1 (0.279)	185.3 (0.306)			
	35.4	7.042 (0.302)	*	108.4 (0.296)	171.0 (0.308)			
	40	4.004 (0.301)	25.65 (0.550)	69.15 (0.328)	126.2 (0.293)	173.6 (0.326)		
	47.5	2.718 (0.646)	29.27 (0.562)	*	111.4 (0.601)	169.2 (0.489)	214.7 (0.493)	250.5 (0.622)

Les modules de cisaillement noté par \* ont été calculés par notre méthode d'identification inverse. Dans le cas du deuxième mode de résonance pour les longueurs utiles de 31.8 cm et 35.4 cm, nous obtenons des valeurs qui sont négatives alors qu'elles doivent être positives. Il en va de même pour le troisième mode pour la longueur 47.5 cm. Nous constatons dans ce cas, une difficulté de la méthode à converger. Pour assurer un résultat pertinent, il nous faudrait un critère de convergence plus élevé. De ces faits, ces trois résultats ont été omis du tableau III.5.

### III.4.2. Identification des paramètres des modèles rhéologiques

Sur la base des résultats des essais expérimentaux des poutres sandwich (fréquence de résonance  $f_i$  et facteur de perte  $\eta_i$  à chaque mode de résonance) disponibles dans le tableau III.4 et à l'aide de notre méthode d'identification inverse développée dans la partie II.3., nous avons caractérisé le comportement du module de cisaillement  $G$  et du facteur de perte  $\eta$  du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence (tableau III.5). Ces résultats issus de l'identification vont servir à déterminer les modèles rhéologiques.

L'utilisation de modèles rhéologiques simples n'est pas adaptée pour représenter correctement le comportement réel d'un matériau viscoélastique, ainsi des modèles paramétriques plus complexes sont donc préconisés afin d'aboutir à de meilleurs résultats. Parmi eux, nous avons le modèle de Maxwell généralisé, le modèle ATF/ADF, le modèle GHM et les modèles à dérivées fractionnaires.

#### III.4.2.1 Identification des paramètres d'un modèle rhéologique de type polynomial du second degré

Dans cette section, nous identifions les paramètres d'un modèle rhéologique de type polynomial [97]. Les expressions de ce modèle rhéologique sont données par les équations (3.1) et (3.2) qui représentent respectivement le module de cisaillement et le facteur de perte du cœur viscoélastique.

$$G = a_1 + b_1\omega + c_1\omega^2 \quad (3.1)$$

$$\eta = a_2 + \frac{b_2}{\omega} + \frac{c_2}{\omega^{0.25}} \quad (3.2)$$

L'identification est faite en se basant les données du tableau III.5 et à l'aide d'une méthode des moindres carrés qui utilise la fonction *lsqnonlin* de Matlab. Les paramètres initiaux sont de l'ordre de l'unité pour les trois paramètres à déterminer que ce soit pour le module de cisaillement ou le facteur de perte, cependant une référence de  $10^6 Pa$  a été ajoutée dans le cas du module de cisaillement.

Les résultats de l'ajustement de la courbe de tendance permettent de déduire les valeurs des paramètres (Tableau III.6). Cet ajustement s'effectue sur le module de cisaillement et sur le facteur de perte.

Tableau III.6 : Paramètres identifiés d'un modèle rhéologique de type polynomial

Paramètres du Module de cisaillement		Paramètres du Facteur de perte	
$a_1$	$1 * 10^6$	$a_2$	-0.1912
$b_1$	$2.9907 * 10^4$	$b_2$	-50.2153
$c_1$	0.637	$c_2$	3.2341

Ces identifications consistent à utiliser une méthode des moindres carrés pour optimiser les paramètres afin de minimiser l'écart entre le module complexe calculé et expérimental. Pour se faire, la fonction *lsqnonlin* de Matlab, est utilisée pour résoudre le problème des moindres carrés non linéaires. Les techniques des moindres carrés nécessitant la définition de valeur initiale pour chaque paramètre à identifier, il est alors observé une sensibilité des résultats aux paramètres initiaux choisis, indiquant ainsi l'existence de plusieurs minima locaux [20].

Il devient alors important de savoir bien estimer ces coefficients initiaux. Nous avons opté pour une stratégie ms (multistart) pour la fonction *lsqnonlin* afin de s'affranchir de l'effet des paramètres initiaux.

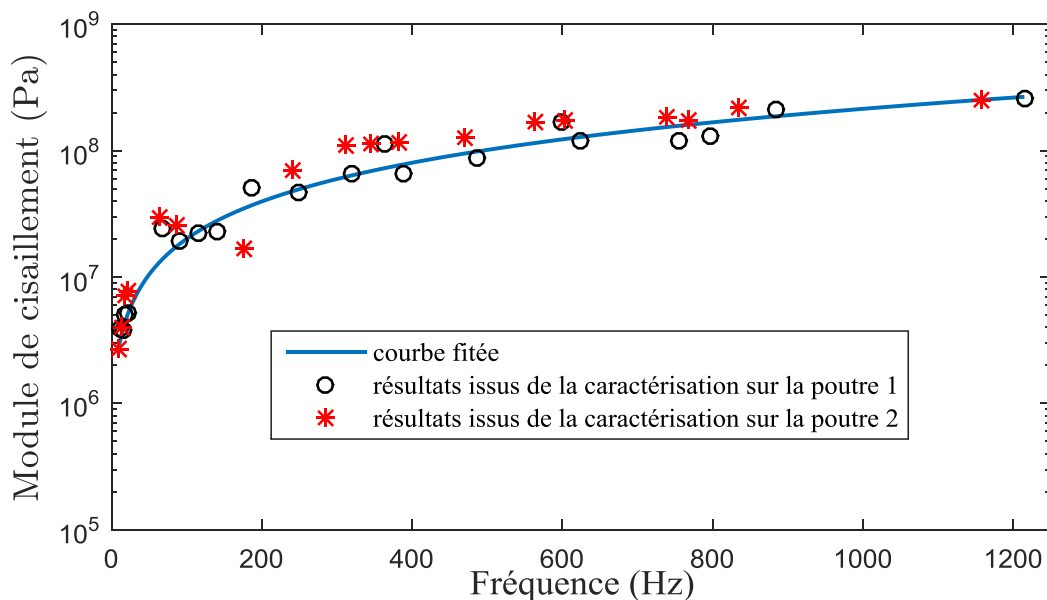


Figure III.9 : Module de cisaillement du cœur viscoélastique déterminé à partir de la méthode d'indentification inverse sur les poutres 1 et 2 ainsi que la courbe de tendance obtenue par la méthode des moindres carrées

Les Figures III.8 et III.9 montrent respectivement le module de cisaillement et le facteur de perte du cœur viscoélastique déterminés à partir de la méthode d'indentification inverse sur les poutres 1 et 2 ainsi que les courbes de tendance obtenues par la méthode des moindres carrés. Le module de cisaillement croît rapidement en fonction de la fréquence pour atteindre un palier autour de 600 Hz.

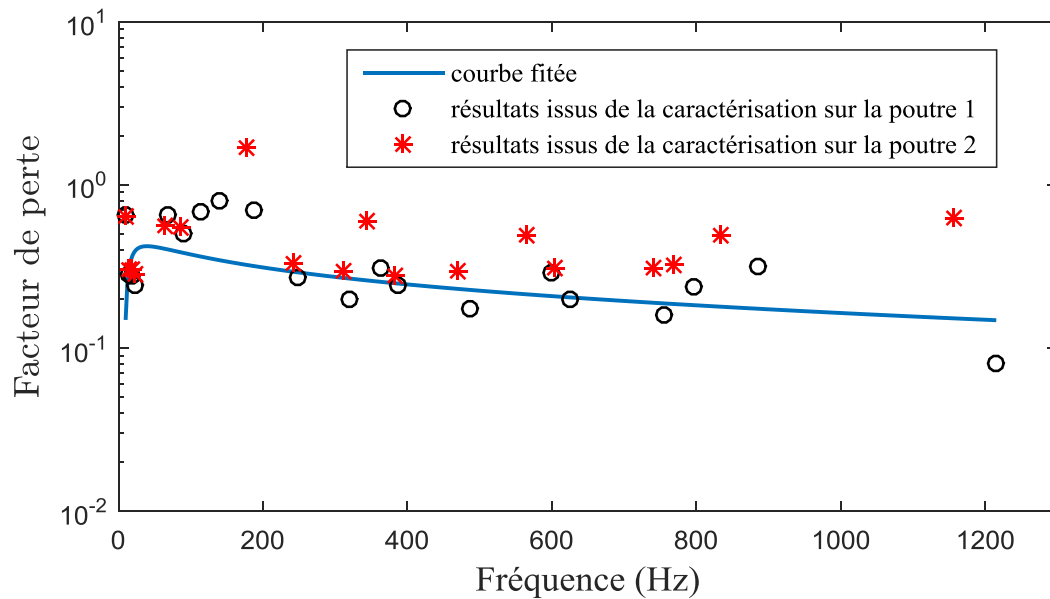


Figure III.10 : Facteur de perte du cœur viscoélastique déterminé à partir de la méthode d'indentification inverse sur les poutres 1 et 2 ainsi que la courbe de tendance obtenue par la méthode des moindres carrés

### III.4.2.2 Identification des paramètres des modèles maxwell généralisé, ADF et GHM

Nous procédons dans ce paragraphe à l'identification des paramètres de modèles rhéologiques paramétriques complexes à savoir le modèle de Maxwell généralisé, le modèle ATF/ADF et le modèle GHM. Le tableau III.7 récapitule les paramètres à identifier pour chaque modèle rhéologique ;  $G_0$  représente le module de cisaillement d'élasticité retardée,  $(\Delta_k, \Omega_k)$  et  $(\alpha_k, \zeta_k, \omega_k)$  représente respectivement les paramètres des modèles de Maxwell généralisé, ADF et du modèle GHM.

Tableau III.7 : Paramètres de modules rhéologiques

Modèle viscoélastique	Module complexe	Nombre de paramètres à identifier
Maxwell généralisé	$G_c^*(\omega) = G_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k \omega}{\omega - i\Omega_k} \right)$	2N+1
ADF	$G_c^*(\omega) = G_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^n \Delta_k \frac{\omega^2 + i\omega\Omega_k}{\omega^2 + \Omega_k^2} \right)$	2N+1
GHM	$G_c^*(\omega) = G_0 \left( 1 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{2i\zeta_k \omega_k \omega - \omega^2}{2i\zeta_k \omega_k \omega + \omega_k^2 - \omega^2} \right)$	3N+1

Les valeurs des paramètres identifiés pour les modèles rhéologiques de Maxwell généralisé, ADF et GHM sont respectivement données dans les tableaux III.8, III.9 et III.10. Les résultats de l'identification sont présentés sur :

- La Figure III.10 pour le modèle de Maxwell généralisé, le nombre de séries variant de un à cinq ;
- La Figure III.11 pour le modèle ADF, le nombre de séries variant de un à cinq ;
- La Figure III.12 pour le modèle de GHM, le nombre de séries variant de un à cinq.

Pour les modèles de Maxwell généralisé, ADF et GHM, cinq séries sont nécessaires pour l'obtention d'une bonne approximation du module de cisaillement et du facteur du cœur viscoélastique [20].

Tableau III.8 : Paramètres du modèle de Maxwell généralisé identifiés pour la résine diélectrique

	$G_0(Pa)$	$k$	$k(rad.s^{-1})$
1 série	$5.69 * 10^6$	3.01	943.02
2 séries	$3.99 * 10^6$	17.30	$-2.04 * 10^3$
		31.14	$2.73 * 10^3$
3 séries	$3.95 * 10^6$	15.46	$-1 * 10^5$
		32.70	$2.82 * 10^3$
		17.42	$-2.04 * 10^3$
4 séries	$4.40 * 10^6$	$9.03 * 10^4$	$9.21 * 10^4$
		$9.41 * 10^4$	$9.21 * 10^4$
		$-1 * 10^5$	$1 * 10^5$
		$-9.99 * 10^4$	$1 * 10^5$
5 séries	$4.24 * 10^6$	$-3.71 * 10^4$	$-6.37 * 10^3$
		$1.02 * 10^4$	$-6.89 * 10^3$
		$2.70 * 10^4$	$-6.20 * 10^3$
		157.58	$2.56 * 10^4$
		21.26	$2.56 * 10^3$

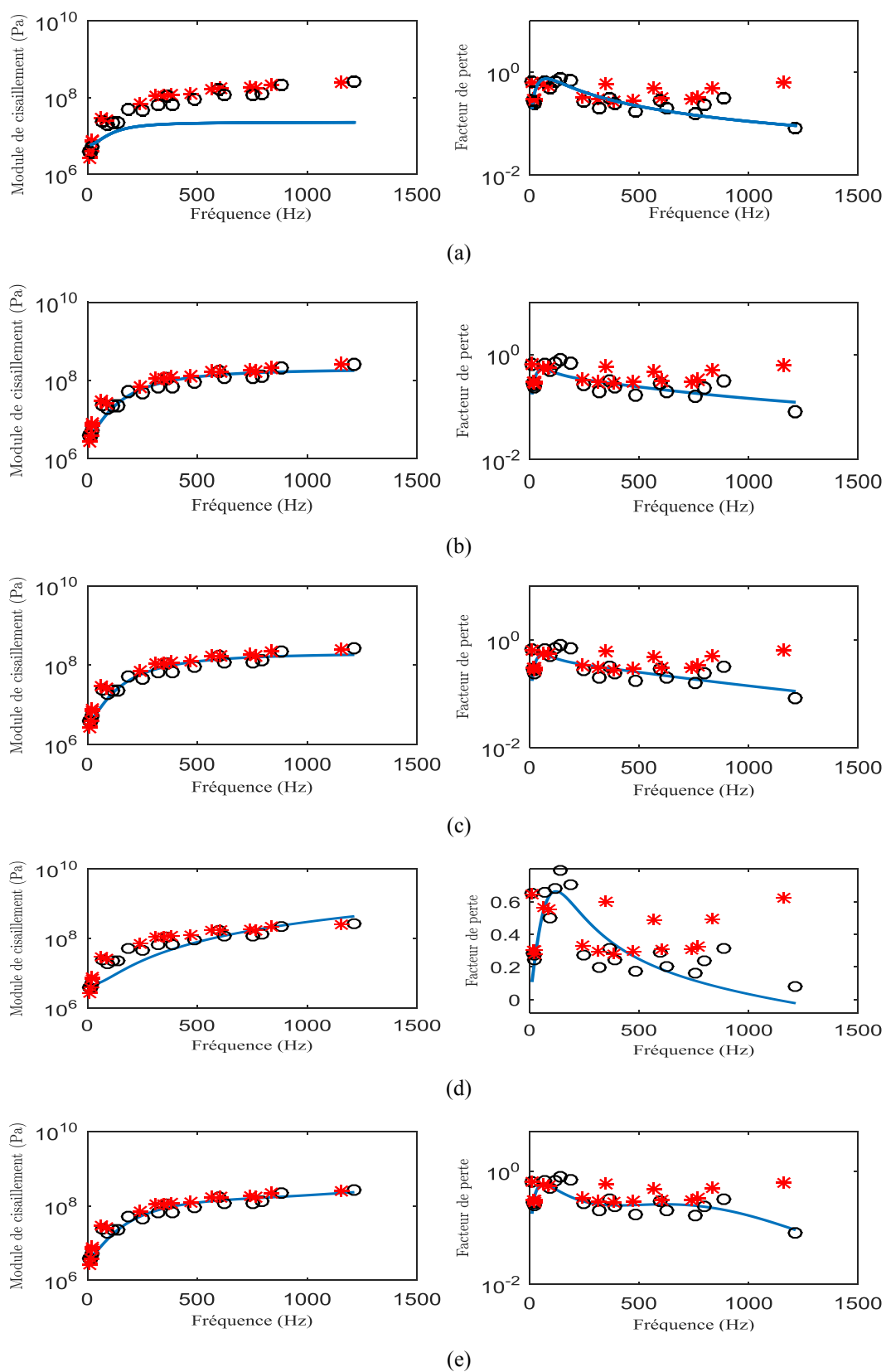
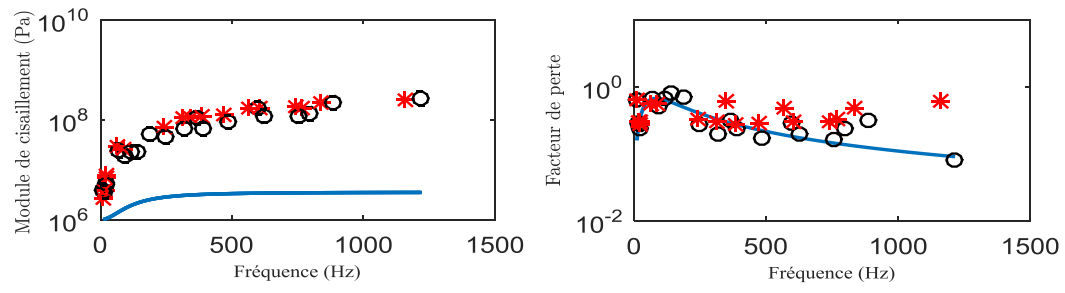


Figure III.11 : Courbe maîtresse du module de cisaillement complexe modélisé par un modèle de Maxwell généralisé

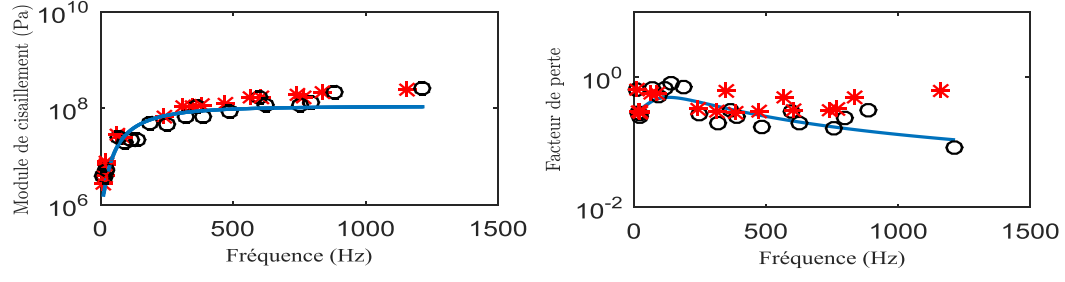
Tableau III.9 : Paramètres du modèle ADF identifiés pour la résine diélectrique

	$G_0(Pa)$	$\Delta_k$	$\Omega_k(rad. s^{-1})$
1 série	$1 * 10^6$	2.53	972.08
2 séries	$1 * 10^6$	79.19	$1.40 * 10^3$
		30.44	-600.21
3 séries	$1 * 10^6$	100.00	$2.33 * 10^3$
		52.38	$-1.55 * 10^3$
		3.17	17.16
4 séries	$1 * 10^6$	5.02	-183.15
		48.06	$-1.92 * 10^3$
		3.49	74.49
		100.00	$2.26 * 10^3$
5 séries	$1 * 10^6$	36.90	$1.41 * 10^3$
		70.34	$-2.92 * 10^3$
		7.05	-218.49
		100.00	$4.16 * 10^3$
		3.22	70.39

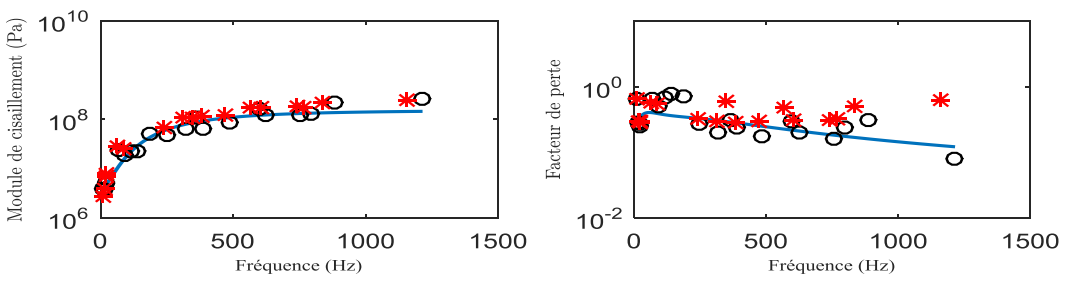




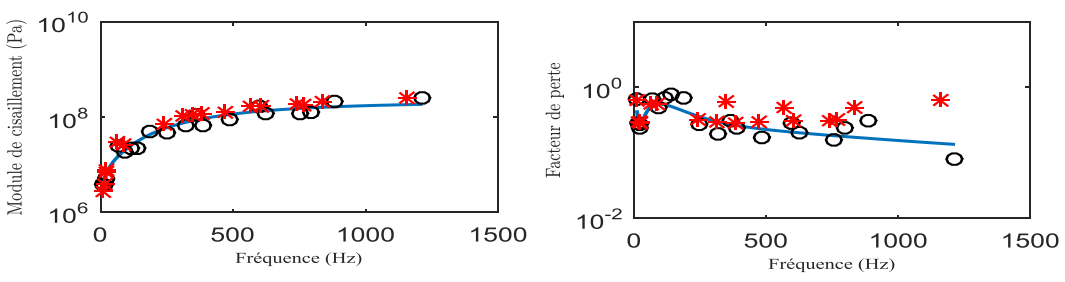
(a)



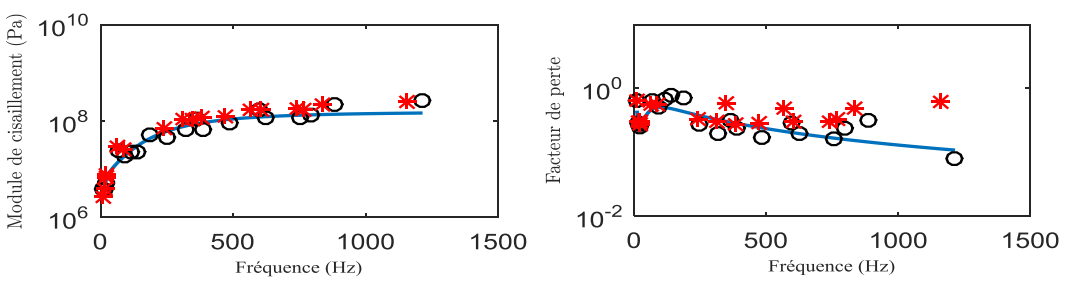
(b)



(c)



(d)



(e)

Figure III.12 : Courbe maître du module de cisaillement complexe modélisé par un modèle ADF

Tableau III.10 : Paramètres du modèle GHM identifiés pour la résine diélectrique

	$G_0(Pa)$	$\alpha_k$	$\zeta_k$	$\omega_k$
1 série	$5.69 * 10^6$	3.01	974.63	$1.83 * 10^6$
2 séries	$5.47 * 10^6$	10.00	-950.11	$-2.75 * 10^6$
		3.80	208.96	$-3.87 * 10^5$
3 séries	$4.72 * 10^6$	9.93	-612.62	$1.90 * 10^6$
		10.00	574.65	$2.04 * 10^6$
		10.00	-507.63	$-2.72 * 10^6$
4 séries	$4.70 * 10^6$	-9.98	341.05	$-3.59 * 10^6$
		10.00	-463.89	$-2.41 * 10^6$
		10.00	-306.44	$-1.10 * 10^6$
		10.00	1000.00	$-3.08 * 10^6$
5 séries	$4.69 * 10^6$	-10.00	429.04	$-8.86 * 10^8$
		10.00	-830.09	$2.56 * 10^6$
		10.00	-36.13	$-1.87 * 10^5$
		-10.00	-280.48	$5.79 * 10^8$
		10.00	-416.64	$-1.50 * 10^6$

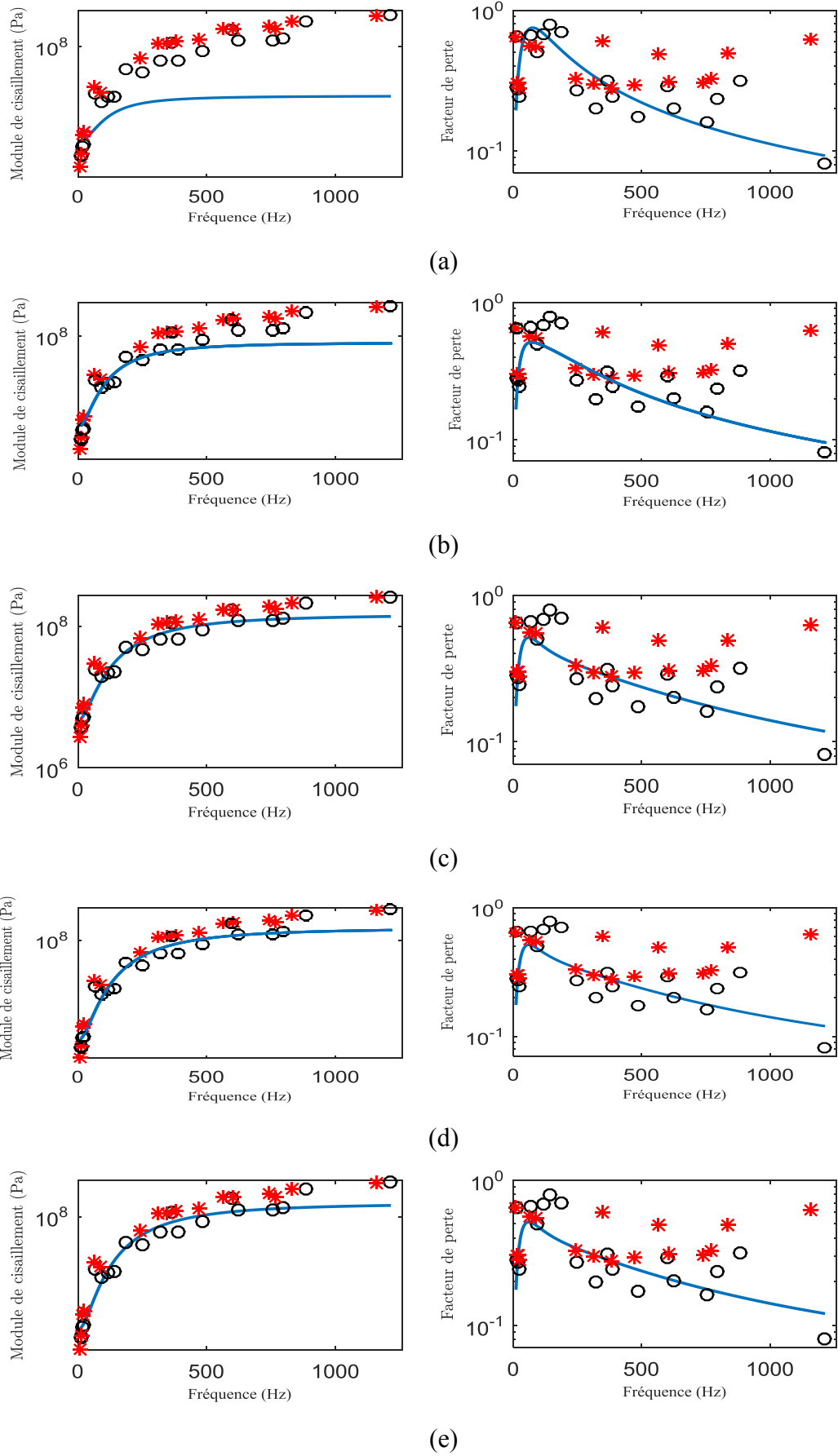


Figure III.13 : Courbe maîtresse du module de cisailment complexe modélisé par un modèle GHM

Comme le témoignent les Figures III.10 (a), III.11(a) et III.12(a) ; une seule série (N=1) ne permet pas de représenter fidèlement le module de cisaillement et le facteur de perte du cœur viscoélastique, ceci étant dû au fait que lorsque N=1 nous avons un seul temps de relaxation  $\tau_1$  et ce dernier ne peut couvrir des phénomènes de relaxation sur des temps longs que ceux observés expérimentalement. C'est pourquoi il est primordial de prendre plusieurs séries afin d'avoir des temps de relaxation correspondants aux nombres de séries, et de ce fait nous aurons une bonne représentation des phénomènes de relaxation. La figure III.13 présente les erreurs résiduelles en fonction du nombre de séries lors de la détermination des paramètres des modèles rhéologiques. On remarque que l'erreur devient quasiment constante lorsque le nombre de séries passe de N=4 à N=5 suivant les trois modèles rhéologiques, ce qui confirme une fois de plus le choix de N=5 comme nombre de séries.

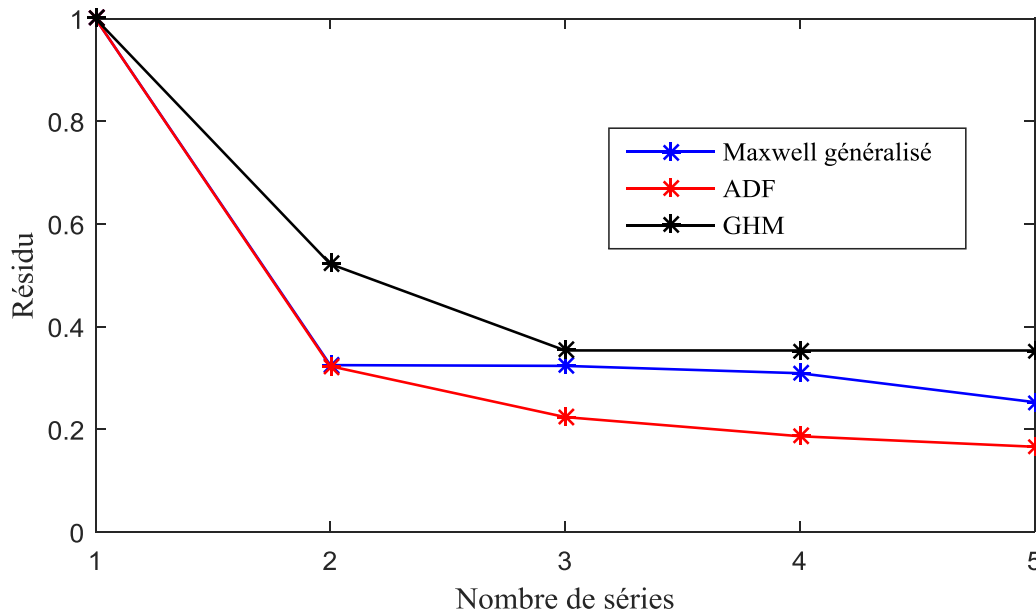


Figure III.14 : Erreur résiduelle en fonction du nombre de séries des modèles rhéologiques

### III.4.3. Discussion sur les lois de comportement identifiées

Nous avons pu précédemment identifier différentes lois de comportement du cœur viscoélastique à travers les modèles rhéologiques de Maxwell généralisé, ADF et GHM. Ici, nous souhaitons comparer leurs performances, ainsi, les propriétés amortissantes de la poutre sandwich sont calculées numériquement en utilisant les modèles rhéologiques précités. Ensuite, les résultats sont comparés à ceux déterminés expérimentalement pour la longueur utile de 31.8 cm.

Le calcul numérique des propriétés amortissantes à partir de l'équation (2.20) se fait par deux approches :

- L'approche DIAMANT,
- La méthode de réponse en fréquence.

L'approche DIAMANT, ou "Différentiation Automatique de la Méthode Asymptotique Numérique Typée" [108] est une méthode générique pour la résolution des problèmes non linéaires résiduels qui utilise la méthode asymptotique numérique (MAN) et les procédures de différentiation automatique (DA) [79]. Le problème de vibration libre aux valeurs propres non linéaires s'écrit systématiquement sous la forme de l'équation (2.20) quelque soit la structure considérée. De ce fait, la procédure de résolution de l'approche DIAMANT est indépendante du maillage élément fini et des conditions aux limites. Pour le modèle élément fini, un maillage de 100 éléments est effectué dans la direction de la longueur de la poutre sandwich.

Afin de mesurer le degré de précision de la présente approche, la norme  $r$  du résidu  $R(U, \lambda)$  est évaluée :

$$r = \|[K_1 + E_c^*(\lambda) - \lambda M]U\| \quad (3.3)$$

avec  $E_c^*(\lambda) = E_c^*(\omega^2) = G_c^*(\omega)$ ,  $G_c^*(\omega)$  étant le module de cisaillement complexe du cœur viscoélastique déterminé avec les différents modèles rhéologiques. Rappelons que le module d'Young complexe et le module de cisaillement complexe sont liés par la relation  $E_c^*(\omega) = 2(1 + \nu_c)G_c^*(\omega)$ . Les paramètres utilisés dans la méthode asymptotique numérique de l'approche DIAMANT sont  $N = 20$  pour l'ordre de troncature des séries, le nombre maximum d'itération est de 15 et le paramètre de précision pour l'estimation du rayon de convergence à  $\varepsilon = 10^{-6}$ . La solution de départ  $(U_0, \lambda_0)$  est obtenue par résolution du problème aux valeurs propres réelles de l'équation (1.56) à l'aide de la méthode d'Arnoldi [111] qui implémente la fonction *eigs* de Matlab.

La méthode de réponse en fréquence quant à elle, consiste à exciter les modes d'intérêt dans la plage de fréquences concernées, ensuite nous déduisons les fréquences de résonance et les facteurs de perte correspondant en appliquant la technique des bandes passantes à 3dB.

Que ce soit la méthode DIAMANT ou la méthode de réponse en fréquence, notre structure sandwich est discrétisée en utilisant l'élément fini poutre unidimensionnel proposé dans le chapitre II. La validation des modèles rhéologiques se fait sur les deux types de poutres énoncés dans le chapitre II.

### III.4.3.1 Cas de la poutre 1

Dans cette partie, en utilisant les lois de comportement du cœur viscoélastique, déterminées pour les différents modèles rhéologiques; nous calculons les paramètres modaux de la poutre 1.

#### Modèle de maxwell généralisé à 15 séries

Le modèle de Maxwell généralisé choisit est à 15 séries, soit 31 paramètres. Les fréquences de résonance ainsi que les facteurs de perte déterminés par l'approche *diamant* et par la méthode de réponse en fréquence sont présentés dans le tableau III.11 pour les quatre premiers modes de vibration. En considérant ces modes de résonance, l'erreur relative maximale entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode de réponse en fréquence est de 3.79% tandis que celle entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode DIAMANT est de 3.97%. Cependant, les erreurs relatives déterminées entre les facteurs de perte par les trois méthodes sont assez élevées.

Tableau III.11 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 1 avec un modèle de Maxwell généralisé pour le cœur viscoélastique

Modes	Détermination expérimentale		Méthode de réponse en fréquence		Approche DIAMANT		
	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	$r$
1	22.87	0.043	23.4	0.0256	23.78	0.0171	$4.92 * 10^{-4}$
2	140.26	0.151	142.6	0.1038	143.06	0.093	$3.72 * 10^{-4}$
3	387.76	0.055	399.4	0.0496	400.19	0.0473	$4.36 * 10^{-4}$
4	754.75	0.038	783.4	0.0546	784.21	0.053	$7.58 * 10^{-4}$

### Modèle ADF à 15 séries

Le modèle ADF choisit est à 15 séries, soit 31 paramètres. Les paramètres modaux déterminés par l'approche *diamant* et par la méthode de réponse en fréquence sont présentés dans le tableau III.12 pour les quatre premiers modes de vibration. L'erreur relative maximale entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode de réponse en fréquence est de 2.81% tandis que celle entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode DIAMANT est de 3.97%. Cependant, les erreurs relatives entre les facteurs de perte déterminées par les trois méthodes sont assez élevées.

Tableau III.12 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 1 avec un modèle ADF pour le cœur viscoélastique

Modes	Détermination expérimentale		Méthode de réponse en fréquence		Approche DIAMANT		
	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	$r$
1	22.87	0.043	23.4	0.0427	23.78	0.0248	$4.92 * 10^{-4}$
2	140.26	0.151	143.6	0.0947	143.96	0.0854	$3.70 * 10^{-4}$
3	387.76	0.055	404	0.048	404.60	0.0465	$4.79 * 10^{-4}$
4	754.75	0.038	776	0.0412	777.70	0.0401	$9.75 * 10^{-4}$

### Modèle GHM à 5 séries

Le modèle GHM choisit est à 5 séries, soit 16 paramètres. Les fréquences de résonance ainsi que les facteurs de perte déterminés par l'approche *diamant* et par la méthode de réponse en fréquence sont présentés dans le tableau III.13 pour les quatre premiers modes de vibration. L'erreur relative maximale entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode de réponse en fréquence est de 4.49% tandis que celle entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode DIAMANT est de 3.37%. Cependant, les erreurs relatives entre les facteurs de perte déterminées par les trois méthodes sont assez élevées.

Tableau III.13 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 1 avec un modèle GHM pour le cœur viscoélastique

Modes	Détermination expérimentale		Méthode de réponse en fréquence		Approche DIAMANT		
	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	$r$
1	22.87	0.043	23	0.0522	23.47	0.0335	$4.92 * 10^{-4}$
2	140.26	0.151	139.6	0.0946	140.57	0.0808	$3.58 * 10^{-4}$
3	387.76	0.055	405.2	0.0494	405.77	0.0474	$4.16 * 10^{-4}$
4	754.75	0.038	779.4	0.0411	780.26	0.0399	0.0010

La figure III.15 représente les spectres de vibration expérimentale et numérique de la poutre 1. D'une part, nous avons le spectre expérimental et d'autre part les trois spectres numériques correspondants chacun à une des lois de comportements précitées et obtenus par la méthode de réponse en fréquence. Les différences d'amplitude entre le spectre expérimental et les trois spectres numériques sont dues à la force d'excitation appliquée dans la méthode de réponse en fréquence, vu qu'il s'agissait juste d'exciter les modes d'intérêts, nous avons choisi une force d'excitation égale à l'unité. Cependant, nous avons obtenu une bonne reproductibilité du spectre. Le décalage des fréquences de résonance a déjà été cité dans les tableaux de valeurs.

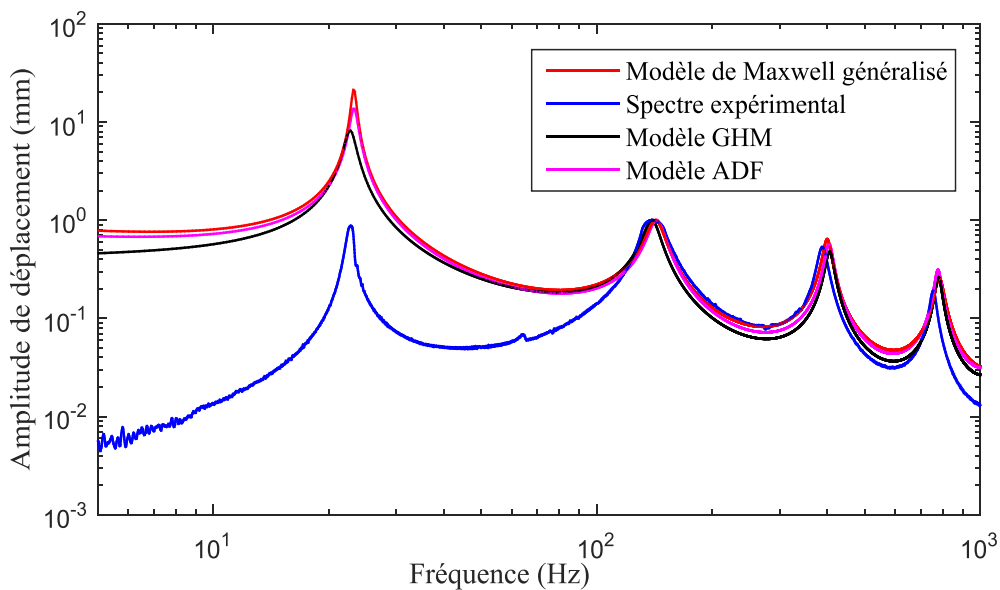


Figure III.15 : Spectres de vibration de la poutre sandwich 1 avec des modèles de Maxwell généralisé, GHM, ADF pour le cœur viscoélastique



### III.4.3.2 Cas de la poutre 2

En utilisant les lois d'évolution du module de cisaillement complexe du cœur viscoélastique, déterminées pour les modèles rhéologiques de Maxwell généralisé, ADF et GHM ; nous calculons les paramètres modaux de la poutre 2.

#### Modèle de maxwell généralisé à 15 séries

Le modèle de Maxwell généralisé choisit est à 15 séries, soit 31 paramètres. Les propriétés amortissantes déterminées par l'approche *diamant* et par la méthode de réponse en fréquence sont présentées dans le tableau III.14 pour les quatre premiers modes de vibration. En considérant ces modes de résonance, l'erreur relative maximale entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode de réponse en fréquence est de 3.99% tandis que celle entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode DIAMANT est de 3.43%. Cependant, les erreurs relatives entre les facteurs de perte déterminées par les trois méthodes sont assez élevées.

Tableau III.14 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 2 avec un modèle de Maxwell généralisé pour le cœur viscoélastique

Modes	Détermination expérimentale		Méthode de réponse en fréquence		Approche DIAMANT		
	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	$r$
1	21.95	0.042	21.6	0.0278	22.08	0.0202	$6.37 * 10^{-5}$
2	136.45	0.146	131	0.1344	131.76	0.1169	$2.63 * 10^{-4}$
3	381.94	0.047	367.8	0.0631	368.92	0.0596	$2.04 * 10^{-4}$
4	739.33	0.058	722.6	0.0662	723.80	0.0635	$8.36 * 10^{-4}$

#### Modèle ADF à 15 séries

Les fréquences de résonance ainsi que les facteurs de perte déterminés par l'approche DIAMANT et par la méthode de réponse en fréquence sont présentés dans le tableau III.15 pour les quatre premiers modes de vibration. En considérant ces modes de résonance, l'erreur relative maximale entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de

résonances obtenues par la méthode de réponse en fréquence est de 3.26% tandis que celle entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode DIAMANT est de 2.79%. Cependant, les erreurs relatives entre les facteurs de perte déterminées par les trois méthodes sont assez élevées.

Tableau III.15 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 2 avec un modèle ADF pour le cœur viscoélastique

Modes	Détermination expérimentale		Méthode de réponse en fréquence		Approche DIAMANT		
	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	$r$
1	21.95	0.042	21.6	0.0463	22.08	0.0293	$6.43 * 10^{-5}$
2	136.45	0.146	132	0.1227	132.64	0.1084	$2.72 * 10^{-4}$
3	381.94	0.047	373.6	0.0605	374.27	0.0579	$1.83 * 10^{-4}$
4	739.33	0.058	718	0.0513	719.21	0.0495	$4.65 * 10^{-4}$

### Modèle GHM à 5 séries

Les fréquences de résonance ainsi que les facteurs de perte déterminés par l'approche DIAMANT et par la méthode de réponse en fréquence sont présentés dans le tableau III.16 pour les quatre premiers modes de vibration. En considérant ces modes de résonance, l'erreur relative maximale entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode de réponse en fréquence est de 5.10% tandis que celle entre les fréquences de résonances expérimentales et les fréquences de résonances obtenues par la méthode DIAMANT est de 4.89%. Cependant, les erreurs relatives entre les facteurs de perte déterminées par les trois méthodes sont assez élevées.

Tableau III.16 : Propriétés amortissantes de la poutre sandwich 2 avec un modèle GHM pour le cœur viscoélastique

Modes	Détermination expérimentale		Méthode de réponse en fréquence		Approche DIAMANT		
	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	f (Hz)	$\eta$	$r$
1	21.95	0.042	21.6	0.0648	21.96	0.0370	$6.59 * 10^{-5}$
2	136.45	0.146	129.8	0.1233	130.77	0.1053	$2.99 * 10^{-4}$
3	381.94	0.047	372.4	0.0623	373.24	0.0594	$9.12 * 10^{-5}$
4	739.33	0.058	701.6	0.0519	703.16	0.0497	$3.40 * 10^{-4}$

La figure III.16 représente les spectres de vibrations expérimentales et numériques de la poutre 2. Les trois spectres numériques correspondent chacun à une des lois de comportement précitées et sont obtenus par la méthode de réponse en fréquence. Les différences d'amplitude entre le spectre expérimental et les spectres numériques sont dues à la force d'excitation appliquée dans la méthode de réponse en fréquence, vu qu'il s'agissait juste d'exciter les modes d'intérêts, nous avons choisis une force d'excitation égale à l'unité comme dans le cas de la poutre 1.

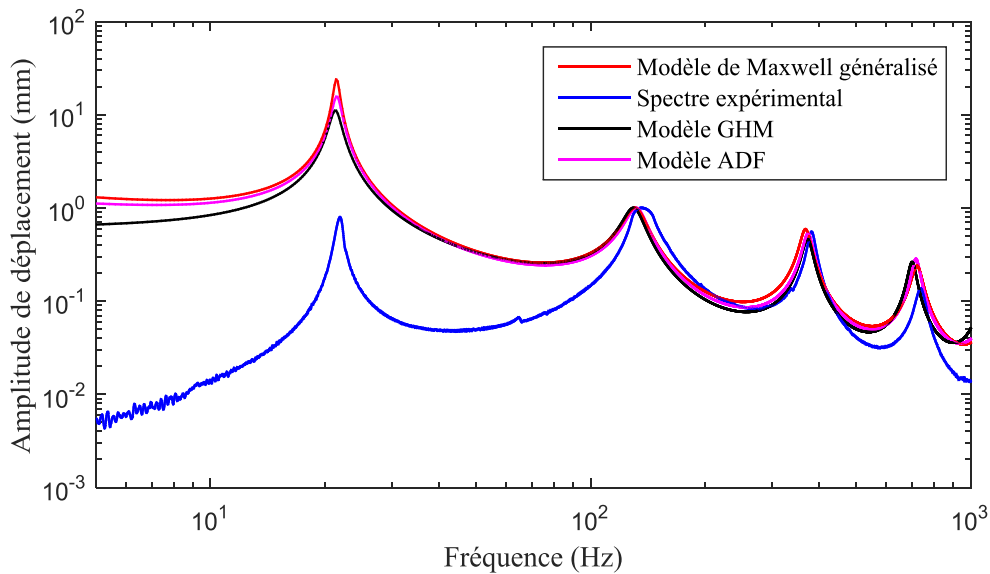


Figure III.16 : Spectres de vibration de la poutre sandwich 2 avec des modèles de Maxwell généralisé, GHM, ADF pour le cœur viscoélastique

Que ce soit dans le cas de la poutre 1 (figure III.15) et de la poutre 2 (figure III.16), il y a une bonne concordance entre les modes harmoniques des spectres numériques et expérimentaux, alors qu'il y a un décalage entre les modes fondamentaux. Cela est dû au fait que, lors des essais expérimentaux il a été appliqué une excitation inférieure à 1g de 5Hz à 157.5 Hz, là où se situe le mode fondamental, puis une excitation constante de 1 g pour les modes harmoniques ; comme nous l'avons fait noter sur la figure III.3. Les résultats obtenus par l'approche *diamant* sont en adéquation avec ceux obtenus par la méthode de réponse en fréquence. L'erreur résiduelle inférieure à  $2 \times 10^{-3}$  montre la précision de l'approche *diamant*. Les résultats présentés sont obtenus avec moins de dix itérations dans la procédure de continuation.

En se basant sur les erreurs relatives maximales entre les résultats expérimentaux et les résultats issus du calcul en réponse fréquentiel d'une part, et les erreurs relatives maximales entre les résultats expérimentaux et les résultats issus du calcul avec l'approche *diamant* ; nous remarquons que la loi de comportement issu du modèle ADF est la mieux adaptée pour le matériau du cœur viscoélastique dans les deux configurations de poutre. En effet, l'utilisation de cette loi génère des erreurs relatives minimales par rapport aux deux autres lois de comportements.

### III.4.4. Effet de la température sur les propriétés mécaniques du cœur viscoélastique

Les propriétés mécaniques du matériau amortissant, soit la couche viscoélastique, dépendent également de la température [79]. De ce fait, une étude en température est nécessaire afin d'étudier l'impact sur les caractéristiques mécaniques du cœur viscoélastique.

#### III.4.4.1 Evolution du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental mis au point pour assurer la mesure des spectres de résonance des poutres sandwichs sous la condition limite encastree – libre, est le même que celui de la section II.4.1. Il a été modifié pour permettre un conditionnement thermique de l'échantillon lors de la vibration. Pour cela une chambre thermo-régulée est placée au dessus du pot vibrant (figure III.17) qui permet un conditionnement thermique grâce à une barrière adaptée au pot vibration et aux contraintes de température.

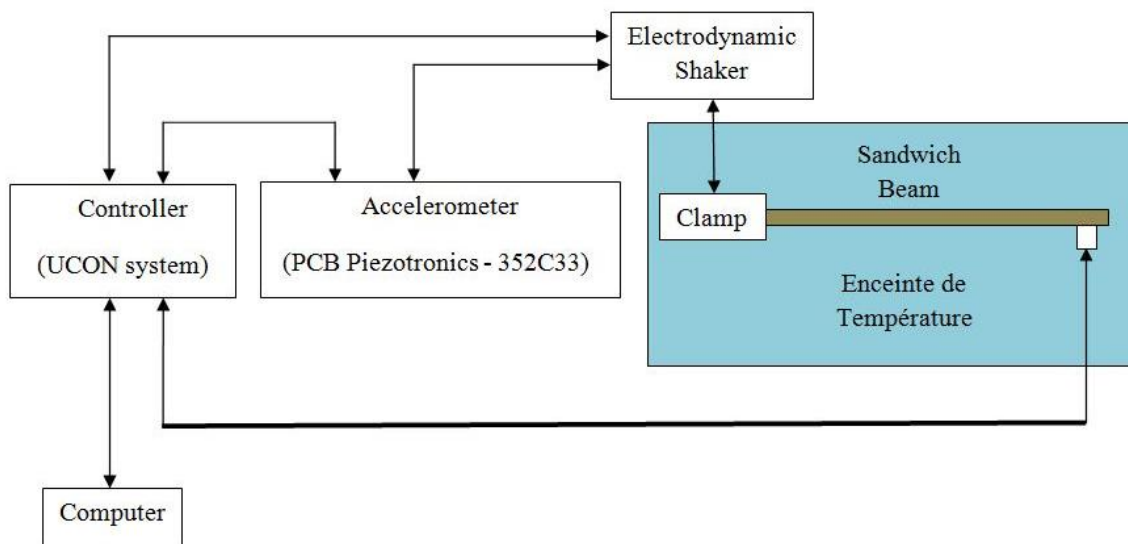


Figure III.17 : Dispositif expérimental comprenant une enceinte thermo-régulée et développé au sein de la plateforme « Vibration » au Laboratoire LEM3.

La méthodologie et les moyens expérimentaux sont identiques à ceux de la section II.4.1. Seule la mesure de l'amplitude des vibrations de la poutre sandwich est assurée par un accéléromètre placé à l'extrémité libre de la poutre 2 (figure III.18), vu qu'un vibromètre laser ne peut être utilisé dans ce cas. Le dispositif ne peut ni être inclus dans l'enceinte ni traverser la paroi transparente sans apporter un biais de mesure à cause de la variation de température dans l'enceinte.

La température a été choisie constante à chaque point de mesure vibratoire. Un temps de l'ordre de 10 minutes a été nécessaire afin que l'ensemble chambre, échantillon et porte échantillon soit considéré à une température constante. Un essai vibratoire en température est donc plus coûteux en temps.

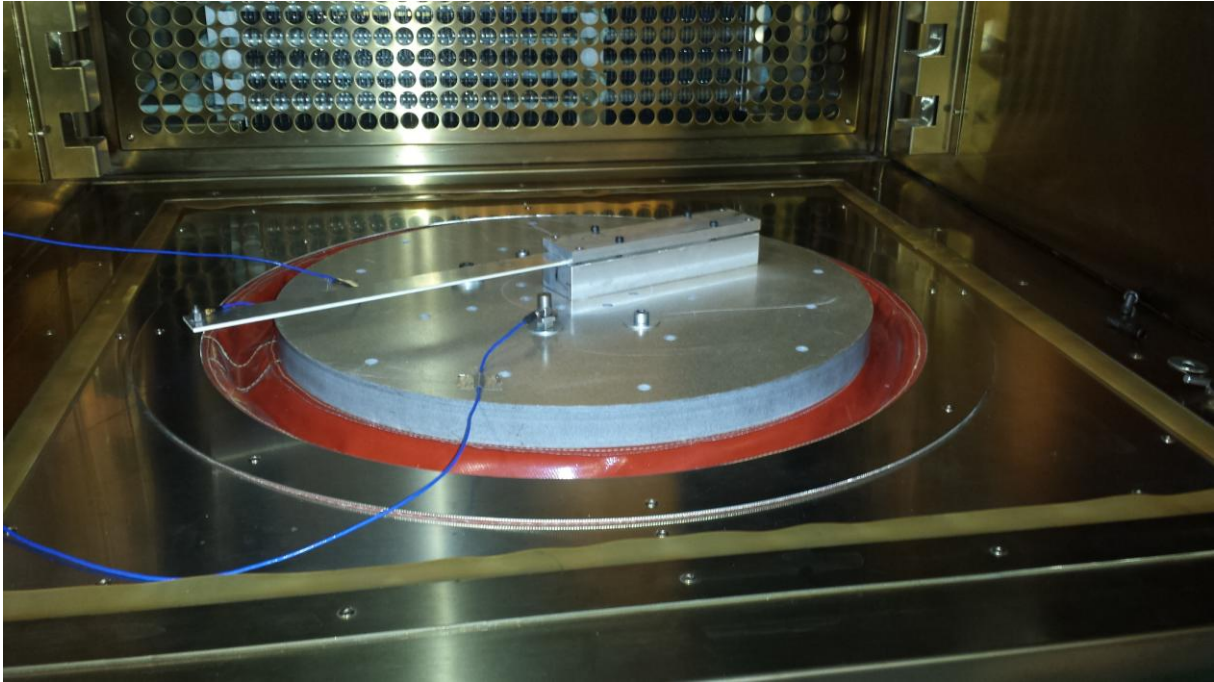


Figure III.18 : Photographie de la poutre sandwich 2 mise en place dans l'enceinte thermo-régulée avant le conditionnement en température et la mesure vibratoire

#### III.4.4.2 Résultats de l'étude en température

Les essais ont été effectués à différentes températures sur la poutre 2 avec une longueur utile de 29.9 cm. Ainsi, quatre températures d'essais ont été choisies 35°C, 20°C, 10°C et -5°C sur la poutre sandwich avec différentes mesures. Pour pouvoir fixer les différentes températures d'essais dans l'enceinte thermo-régulée, cette dernière est chauffée jusqu'à une température considérée, une période de régulation est nécessaire jusqu'à ce que la chambre se stabilise sur la température souhaitée, puis la mesure est effectuée avec la chambre en température constante. Les températures d'essais sont choisies de manière à ce que la poutre sandwich puisse conserver son intégrité dans la chambre tout au long des essais.

Le tableau III.17 regroupe les moyennes des fréquences de résonance et des facteurs de perte par mode, lors des essais à différentes températures. Ces paramètres modaux seront utilisés pour étudier l'impact de la température sur notre modèle d'identification inverse.

Tableau III.17 : Paramètres modaux de la poutre sandwich en fonction de la température

		Température 35°C			
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Moyenne sur 8 essais	Fréquence de Résonnance (Hz)	21.54	132.51	360.92	669.18
	Facteur de perte	0.058	0.191	0.300	0.260
		Température 20°C			
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Moyenne sur 6 essais	Fréquence de Résonnance (Hz)	22.98	146.41	412.89	805.18
	Facteur de perte	0.040	0.055	0.068	0.080
		Température 10°C			
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Moyenne sur 5 essais	Fréquence de Résonnance (Hz)	24.41	148.77	421.71	826.16
	Facteur de perte	0.034	0.029	0.028	0.030
		Température -5°C			
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Moyenne sur 3 essais	Fréquence de Résonnance (Hz)	25.11	152.34	431.61	848.16
	Facteur de perte	0.028	0.013	0.011	0.008

A chaque température, nous avons choisi de représenter un seul essai. Ainsi, pour étudier l'impact de la température d'essai sur l'amortissement de la structure les spectres d'amplitude de déplacement sont présentés sur la figure III.19.

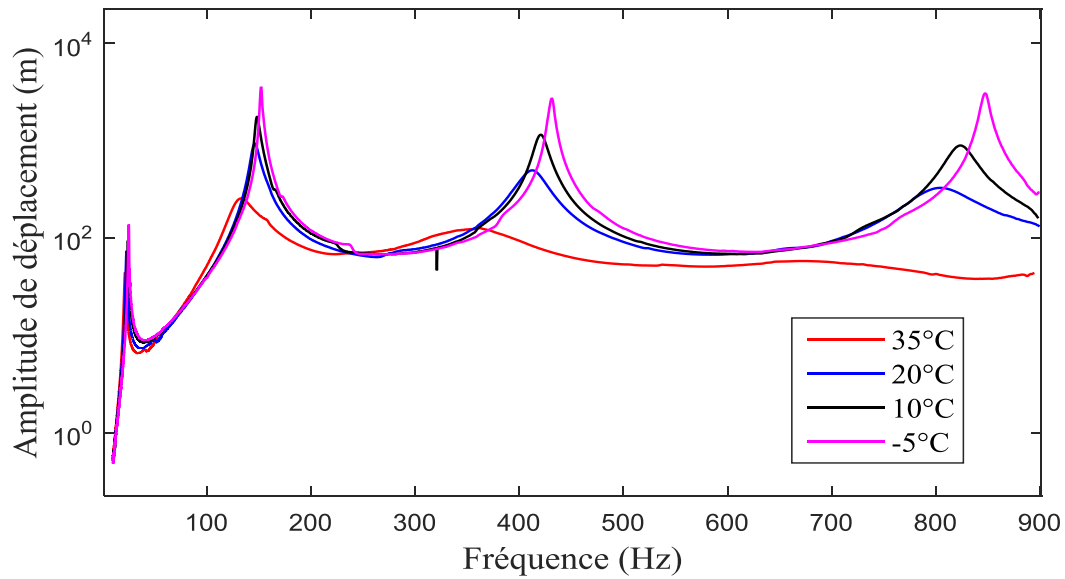


Figure III.19 : Spectre de l'amplitude de déplacement à l'extrémité de la poutre sandwich en fonction de la température imposée dans la chambre thermique

Ces courbes montrent une évolution du spectre en fonction de la température pour la poutre 2. Nous remarquons que plus la température augmente plus l'amplitude à la résonance est petite. En effet à chaque mode de vibration, la fréquence de résonance diminue lorsque la température augmente, ce qui montre clairement que le comportement vibratoire dépend de la température.

Concernant la courbe de réponse est obtenue à 35°C, la troisième résonance semble par l'effet de la température avoir disparu. Par contre à la température de -5°C, la structure est très faiblement amortie, d'où l'amplitude de la réponse devient plus importante.

#### III.4.4.3 Résultats de l'identification à diverses températures

Les paramètres modaux déterminés lors des essais sur la poutre sandwich de type 2 dans l'enceinte thermo régulée ont servis à déterminer les caractéristiques mécaniques du cœur viscoélastique en fonction de la température. Pour chaque essai de vibration, à une température donnée, les fréquences de résonance et facteurs de perte de la poutre sandwich sont déterminés ; ces paramètres sont ensuite utilisés pour trouver le module de cisaillement et le facteur de perte de la couche viscoélastique par mode de résonance. Le tableau III.18 regroupe les moyennes des modules de cisaillement et des facteurs de perte à chaque température d'essai.



Tableau III.18 : Caractéristiques mécaniques de la couche viscoélastique en fonction des modes de résonance à des températures données

		Température 35°C			
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Moyenne sur 8 essais	Module de cisaillement du cœur viscoélastique (MPa)	2.88	15.86	27.89	46.87
	Facteur de perte du cœur viscoélastique	0.166	0.549	0.877	0.619
		Température 20°C			
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Moyenne sur 6 essais	Module de cisaillement du cœur viscoélastique (MPa)	4.37	34.07	83.90	147.22
	Facteur de perte du cœur viscoélastique	0.152	0.228	0.294	0.332
		Température 10°C			
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Moyenne sur 5 essais	Module de cisaillement du cœur viscoélastique (MPa)	7.41	39.99	106.28	195.82
	Facteur de perte du cœur viscoélastique	0.191	0.129	0.139	0.143
		Température -5°C			
		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4
Moyenne sur 3 essais	Module de cisaillement du cœur viscoélastique (MPa)	10.53	50.76	137.40	261.68
	Facteur de perte du cœur viscoélastique	0.211	0.071	0.067	0.051

La figure III.23 représente le profil de variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence à des températures fixées. Plus la température augmente, plus le profil de variation du module de cisaillement décroît.

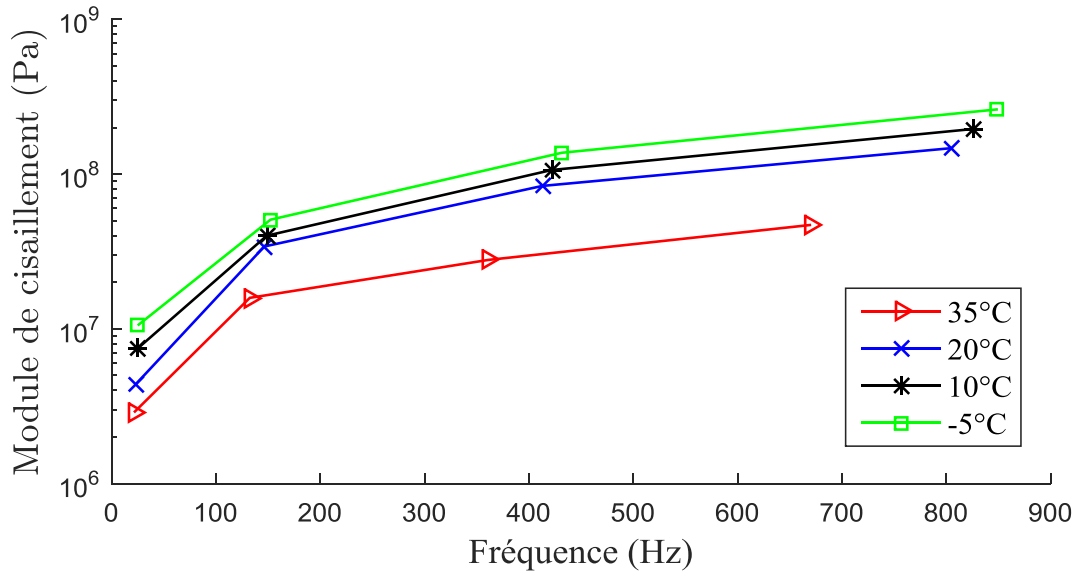


Figure III.20 : Module de cisaillement du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence à des températures données

La figure III.24 représente le profil de variation du facteur du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence à des températures fixées. Plus la température augmente, plus le profil de variation du module de cisaillement ne croit.

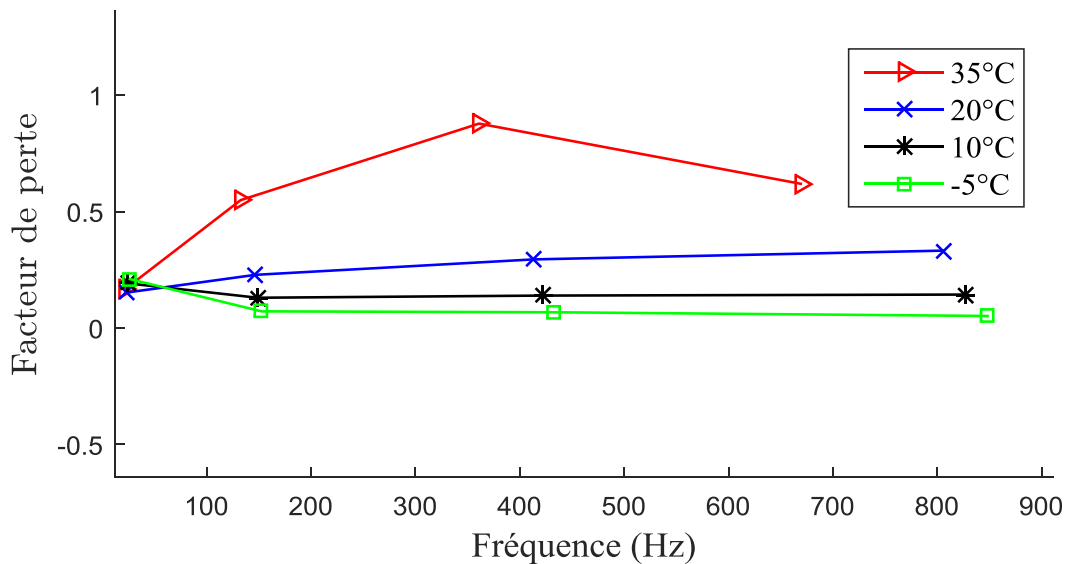


Figure III.21 : Facteur de perte du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence à des températures données

Les constatations sur les profils de variation du module de cisaillement et facteur du cœur viscoélastique sont en adéquations avec les observations expérimentales de [9] et qui sont représentés sur les figures I.9.a et I.9.b.

La figure III.25 montre que pour la résine diélectrique utilisée et pour la plage des températures considérées, le module de cisaillement de la couche viscoélastique décroît en fonction de la température peu importe le mode de résonance. Le facteur de perte du cœur viscoélastique est par contre croissant en fonctionne la température (figure III.26), peu importe le mode de résonance.

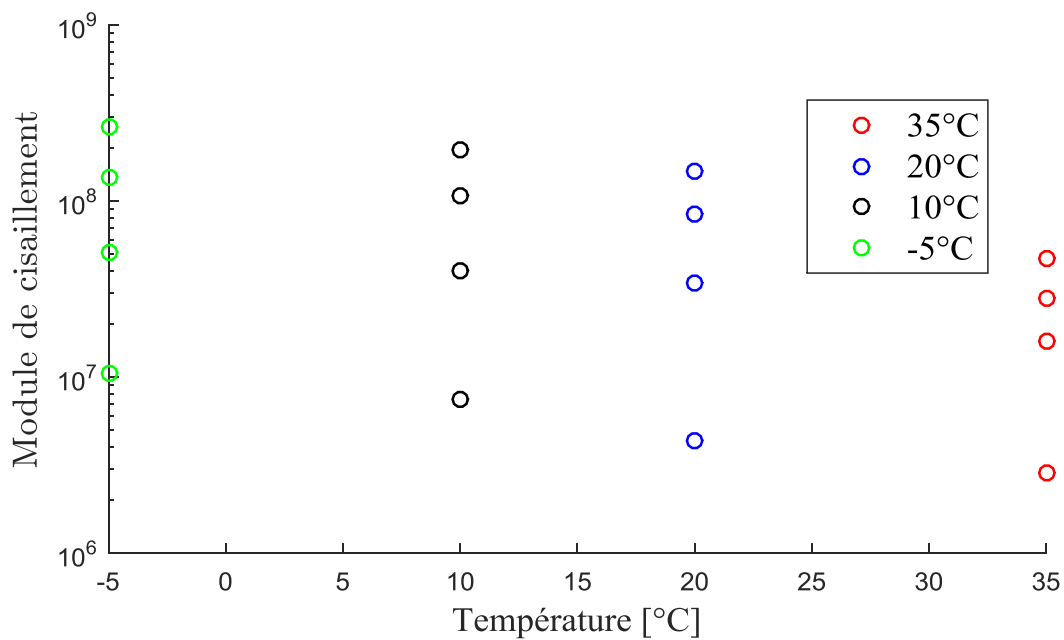


Figure III.22 : Variation du module de cisaillement à chaque température suivant les quatre premiers modes.

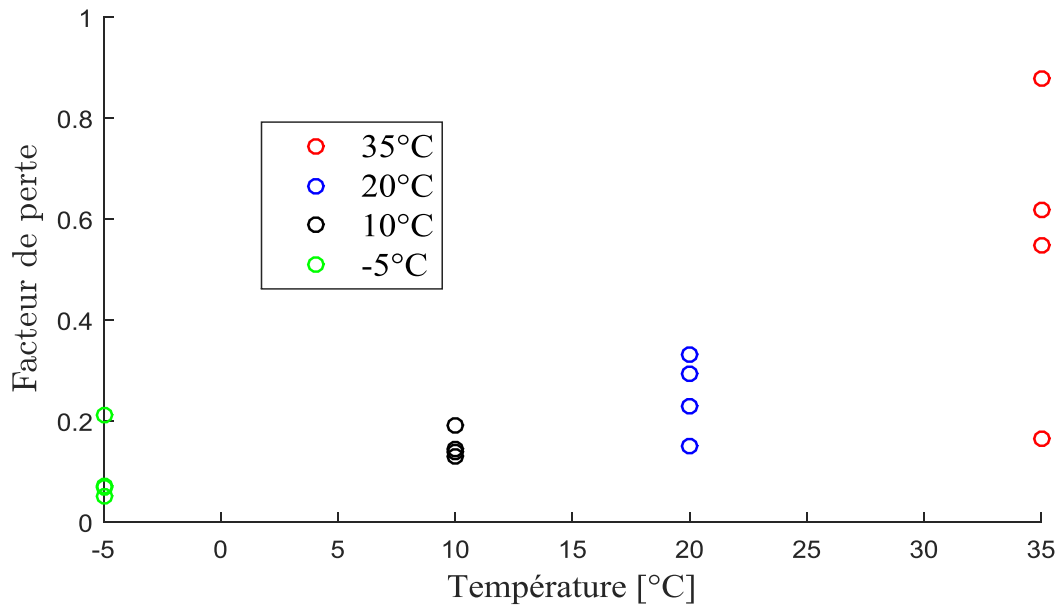


Figure III.23 : Variation du facteur de perte à chaque température suivant les quatre premiers modes de résonance

En se basant sur le profil de variation du facteur de perte en fonction de la température présenté à la figure I.8, la plage des températures considérées se situerait dans la zone de transition vitreuse. Dans cette zone le facteur de perte du matériau augmente pour atteindre sa valeur maximale et dans la configuration de notre plage de températures considérées, l'amortissement le plus élevé est obtenu à 35°C.

#### III.4.4.4 Lois de comportement du cœur viscoélastique à diverses températures

Les modules de cisaillements et facteurs de perte du cœur viscoélastique déterminés dans la section précédente ont permis à déterminer de nouvelles lois de comportements du cœur viscoélastique à différentes températures et pour les modèles de Maxwell généralisé, ADF et GHM.

- **Lois de comportement aux différentes températures**

Nous avons déterminé des lois de comportements aux différentes températures à savoir -5, 10, 20 et 35°C pour les Modèles de Maxwell généralisé, ADF et GHM. Les tableaux III.19, III.20 et III.21 représentent respectivement les lois de comportements déterminées à partir des modèles de Maxwell généralisé, ADF et GHM.

Tableau III.19 : Valeur des paramètres du modèle rhéologique de Maxwell généralisé à différentes températures

		$G_0(Pa)$	$\Delta_k$	$\Omega_k(rad. s^{-1})$
T=35°C	5 séries	$2.04 * 10^6$	$4.99 * 10^4$	$-2.33 * 10^4$
			$4.70 * 10^3$	$7.07 * 10^4$
			4.67	839.92
			$-4.68 * 10^4$	$-2.25 * 10^4$
			6.54	-631.84
T=20°C	5 séries	$3.18 * 10^6$	11.59	$-1.08 * 10^3$
			12.01	$1.27 * 10^3$
			$6.63 * 10^4$	$4.96 * 10^4$
			$-4.84 * 10^4$	$7.33 * 10^4$
			$-2.65 * 10^4$	$3.94 * 10^4$
T=10°C	5 séries	$6.07 * 10^6$	$-1.33 * 10^4$	$8.07 * 10^4$
			$1.14 * 10^4$	$6.57 * 10^4$
			8.27	$-1.47 * 10^3$
			617.32	$-1.00 * 10^5$
			6.77	$1.17 * 10^3$
T=-5°C	5 séries	$7.52 * 10^3$	$2.69 * 10^3$	251.78
			$2.90 * 10^4$	$4.89 * 10^3$
			$-7.14 * 10^3$	$6.92 * 10^4$
			$2.25 * 10^3$	-270.04
			$2.45 * 10^4$	$-4.54 * 10^3$

Tableau III.20 : Valeur des paramètres du modèle rhéologique ADF à différentes températures

		$G_0(Pa)$	$\Delta_k$	$\Omega_k(rad. s^{-1})$
T=35°C	5 séries	$1.00 * 10^6$	19.60	-549.74
			-11.79	$-1.01 * 10^3$
			3.95	248.36
			69.80	$4.60 * 10^3$
			20.22	$-1.24 * 10^4$
T=20°C	5 séries	$9.36 * 10^5$	72.89	$6.10 * 10^3$
			75.38	$-2.98 * 10^3$
			12.07	-319.13
			98.11	$6.10 * 10^3$
			18.82	521.35
T=10°C	5 séries	$1.00 * 10^6$	17.82	368.11
			41.40	$4.32 * 10^3$
			10.11	-214.68
			100.00	$-3.09 * 10^3$
			99.99	$4.32 * 10^3$
T=-5°C	5 séries	$1.00 * 10^6$	100.00	$5.75 * 10^3$
			8.81	43.65
			55.30	$-1.45 * 10^3$
			100.00	$-4.64 * 10^3$
			80.38	$1.92 * 10^3$

Tableau III.21 : Valeur des paramètres du modèle rhéologique GHM à différentes températures

		$G_0(Pa)$	$\alpha_k$	$\zeta_k$	$\omega_k$
T=35°C	5 séries	$2.49 * 10^6$	-10.00	211.05	$-1.80 * 10^8$
			10.00	-363.71	$7.24 * 10^5$
			10.00	927.80	$3.78 * 10^6$
			-8.95	-560.26	$2.47 * 10^6$
			10.00	334.56	$2.81 * 10^6$
T=20°C	5 séries	$4.51 * 10^6$	$-3.39 * 10^{-4}$	-0.0099	$-9.99 * 10^8$
			8.98	-832.03	$2.09 * 10^6$
			10.00	-413.79	$-4.39 * 10^6$
			$9.75 * 10^{-5}$	-0.0376	$9.99 * 10^8$
			10.00	-547.04	$-1.69 * 10^6$
T=10°C	5 séries	$6.90 * 10^6$	5.68	426.69	$1.01 * 10^6$
			10.00	489.27	$3.90 * 10^6$
			-5.87	-50.47	$3.84 * 10^8$
			10.00	-994.94	$3.42 * 10^6$
			-5.20	27.62	$-2.10 * 10^8$
T=-5°C	5 séries	$8.33 * 10^6$	8.90	-1000.00	$-2.30 * 10^6$
			-3.35	299.46	$-1.93 * 10^6$
			9.99	-511.12	$1.41 * 10^6$
			-0.33	-32.65	$-9.41 * 10^8$
			-0.26	26.26	$-9.99 * 10^8$

A chaque température, nous avons déterminé la loi de comportement pour 5 séries et pour chaque modèle rhéologique. Cependant le fait que les essais de vibrations aux différentes températures ont été effectués sur une unique longueur utile de 29.9 cm, implique l'obtention de peu de données pour l'obtention de lois de comportement. Ainsi, une des perspectives de cette étude de détermination des lois de comportements aux différentes températures sera d'utiliser d'autres longueurs utiles dans les essais de vibrations dans la chambre thermo régulée, permettant alors l'obtention d'un large spectre de paramètres identifiés afin que la détermination des lois de comportements aux différentes températures soit plus qualitative.

### **III.5. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons identifié les caractéristiques mécaniques du matériau viscoélastique et éprouvé les performances de ces dernières en situation ; ceci afin de mieux répondre à la nécessité de confort de plus en plus croissante de la part des consommateurs. Pour se faire, nous avons proposé dans un premier temps des lois de comportement de ce matériau viscoélastique en se basant sur les modèles rhéologiques de Maxwell généralisé, ADF et GHM. Ces lois de comportement ont ensuite été validées sur les poutres sandwichs 1 et 2, en comparant les spectres expérimentaux de vibrations et les spectres numériques obtenus en utilisant ces dernières lois.

Dans un second temps, nous avons procédé à l'étude de l'effet de la température sur le matériau viscoélastique dans le but d'éprouver notre méthode de caractérisation. Ainsi, un conditionnement thermique des éprouvettes lors de la vibration a été assuré et des caractérisations du matériau viscoélastique ont été faites à diverses températures. Pour finir des lois de comportement ont été proposées à ces différentes températures en se basant toujours sur les modèles rhéologiques de Maxwell généralisé, ADF et GHM.



## Chapitre IV. Test de robustesse et de sensibilité

---

### IV.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier la sensibilité et la robustesse des paramètres d'entrées et des paramètres géométriques de la poutre sur la détermination des propriétés mécaniques obtenues par notre méthode d'identification inverse.

Dans un premier temps, nous avons étudié la reproductibilité de la méthode expérimentale sur un même échantillon type. L'objectif est de déterminer les écarts de mesure pour un même échantillon avec une mesure effectuée en faisant varier les conditions fixation. En effet, dans ce cas, la poutre sandwich sera montée et démontée entre les différentes mesures. Puis, nous avons considéré la reproductibilité pour une même population d'échantillons. L'objectif est de pouvoir établir la répétabilité de la fabrication des échantillons. Ces variations ont été propagées sur la détermination des propriétés mécaniques obtenues par notre méthode d'identification inverse.

Dans un deuxième temps, nous avons procédé à l'étude de sensibilité des paramètres géométriques sur la détermination des propriétés mécaniques obtenues par notre méthode d'identification inverse. Les paramètres géométriques ont été perturbés à l'aide d'une loi normale. Enfin, numériquement nous avons proposé une étude de sensibilité sur les paramètres d'entrée pour établir une robustesse de notre méthode.

## IV.2. Etude de reproductibilité

Dans cette partie, nous allons étudier les variabilités des paramètres modaux issues des essais expérimentaux. Ainsi, une étude de reproductibilité a été réalisée sur un échantillon donné appartenant à la population des poutres de type 2. Puis, une étude de reproductibilité sur le même type de poutre a été réalisée avec quatre échantillons différents.

### IV.2.1. Etude de reproductibilité sur un échantillon donné

Les paramètres modaux à savoir les fréquences de résonance et les facteurs de perte ont été déterminés à sept reprises pour un même échantillon appartenant à la poutre de type 2, dans les mêmes conditions environnementales de température, et de condition d'encastrement. Ces résultats sont obtenus à l'aide du protocole et du dispositif expérimental décrit dans le chapitre III. La longueur utile de l'échantillon est de 46.2 cm, les conditions aux limites appliquées lors des essais sont l'encastree-libre. Entre les différents essais, la poutre est démontée puis remontée au niveau de la fixation d'encastrement sur le pot vibrant. Afin d'assurer un serrage reproductible, nous avons ajouté une étape dans notre protocole de mesure. En effet, le serrage est réalisé à l'aide d'une clef dynamométrique jusqu'à une valeur de 10 N.m, assurant le compromis entre un serrage efficace et un écrasement des couches du sandwich.

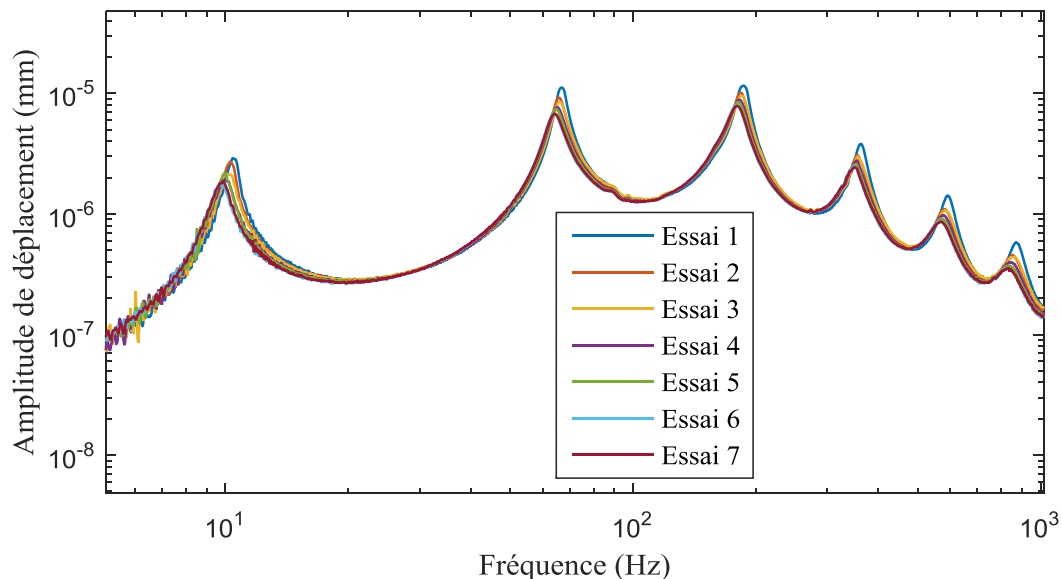


Figure IV.1 : Spectres des amplitudes de déplacement à l'extrémité libre de la poutre dans le cas des essais de reproductibilité sur un même échantillon (type poutre 2)

La figure IV.1 montre les spectres des amplitudes de déplacement à l'extrémité libre de la poutre dans le cas des essais de reproductibilité sur un même échantillon (type poutre 2). Un faible décalage en fréquence peut être observé ainsi qu'une variation de l'amplitude de déplacement. Ces variations sont directement imputables à la reproductibilité du couple montage/échantillon de poutre de l'ordre de 10.07 Hz pour le 1<sup>er</sup> mode. Le positionnement de la poutre peut produire d'infimes variations sur la longueur utile de la poutre ce qui peut expliquer les variations sur les paramètres modaux de la poutre.

Il devient alors primordial de pouvoir quantifier cette variation. Ainsi, pour les différents essais toutes les fréquences de résonance sont mesurées avec leurs facteurs de perte correspondants. Le tableau IV.1 montre les fréquences de résonance et les facteurs de perte pour les 6 premiers modes de flexion.

Tableau IV.1 : Fréquences de résonance et facteurs de perte pour le même échantillon

Essais	Longueur utile (cm)	Fréquences de résonance et facteurs de perte					
		$f_1$ (Hz) ( $\eta_1$ )	$f_2$ (Hz) ( $\eta_2$ )	$f_3$ (Hz) ( $\eta_3$ )	$f_4$ (Hz) ( $\eta_4$ )	$f_5$ (Hz) ( $\eta_5$ )	$f_6$ (Hz) ( $\eta_6$ )
1	46.2	10.43 (0.066)	66.90 (0.064)	187.00 (0.074)	362.48 (0.068)	591.60 (0.078)	875.68 (0.091)
2	46.2	10.31 (0.072)	65.98 (0.074)	183.68 (0.079)	355.07 (0.086)	580.31 (0.111)	853.08 (0.132)
3	46.2	10.14 (0.091)	66.26 (0.083)	185.20 (0.084)	357.03 (0.089)	585.12 (0.119)	850.74 (0.144)
4	46.2	10.03 (0.090)	65.26 (0.088)	182.42 (0.092)	354.10 (0.091)	577.92 (0.113)	840.27 (0.134)
5	46.2	9.97 (0.084)	64.81 (0.090)	181.17 (0.097)	353.12 (0.098)	571.60 (0.110)	833.36 (0.127)
6	46.2	9.75 (0.100)	64.37 (0.098)	179.93 (0.102)	349.74 (0.103)	567.68 (0.104)	831.07 (0.119)
7	46.2	9.85 (0.099)	64.37 (0.099)	180.42 (0.105)	348.78 (0.105)	569.24 (0.109)	835.65 (0.124)

Afin d'évaluer les variations, le rapport de l'écart entre le maximum et le minimum de ces paramètres est normalisé par la moyenne géométrique  $C_j$  ce qui conduit à l'équation (4.1) qui permet de quantifier la variabilité des résultats.

$$r_j = \frac{\max_{i=1,\dots,7} f_j^i - \min_{i=1,\dots,7} f_j^i}{\sqrt[7]{\prod_{i=1}^7 f_j^i}} = \frac{\max_{i=1,\dots,7} f_j^i - \min_{i=1,\dots,7} f_j^i}{c_j} \quad (4.1)$$

Dans l'équation (4.1),  $f_j^i$  représente la fréquence de résonance pour le mode  $j$  ceci pour le  $i^{\text{ème}}$  essai considéré. La formule est adaptée pour calculer la variation du facteur de perte.

La variabilité de la fréquence de résonance reste faible (tableau IV.2). Elle est inférieure à 7% pour le premier mode quand elle est 5% pour les modes supérieurs. L'écart pour le premier mode apparaît toujours plus grand, dû au fait de la méthode de calcul pour les faibles valeurs. Pour le facteur de perte, sa variation paraît élevée à cause de sa faible valeur, cependant cette variation semble être constante en fonction des modes de résonance.

Ces observations suggèrent que la mise en position de la poutre influe sur les fréquences de résonance et facteur de perte mesurés. Nous pouvons envisager des hypothèses simples qui seraient à confirmer dans des travaux de perspectives. L'hypothèse la plus évidente est le positionnement exact de la poutre. En effet, malgré la mesure de la distance de la poutre libre peut être entaché d'une variabilité. Une des solutions serait de reproduire nos résultats avec une autre condition limite comme encastree aux deux extrémités de la poutre. Cet encastrement a été envisagé au début de la thèse mais écarté car il réduisait l'investigation vibratoire seulement aux modes impairs. Il constituera dans une perspective de nos travaux à isoler l'impact seul des conditions de serrage sur la variabilité.

Tableau IV.2 : Variabilité de la fréquence de résonance et du facteur de perte par mode

		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Fréquence de résonance	$c_j$ (Hz)	10.07	65.41	182.82	354.31	577.58	845.57
	$r_j$ (%)	6.75	3.86	3.86	3.86	4.14	5.27
Facteur de perte	$c_j$	0.085	0.084	0.090	0.091	0.105	0.123
	$r_j$ (%)	39.72	40.64	34.88	40.60	38.37	42.62

A partir des fréquences de résonance et des facteurs de perte de la poutre obtenus pour les différents essais, nous pouvons identifier grâce à la méthode d'identification inverse, les modules de cisaillement et les facteurs de perte du cœur viscoélastique. Dans le tableau IV.3, nous avons concaténé l'ensemble des résultats issus de cette identification. Il apparaît une grande variation dans les valeurs des modules obtenus. Afin de quantifier les variations, nous calculons les variations à partir de l'équation (4.1) avec une moyenne géométrique notée  $d_j$  sur les modules de cisaillement et les facteurs de perte du cœur viscoélastique identifiés à chaque mode.

Tableau IV.3 : Modules de cisaillement et facteurs de perte du cœur viscoélastique de la poutre sandwich identifiés par notre méthode suite aux essais de reproductibilité

Essais	Longueur utile (cm)	Paramètres identifiés lors des essais de reproductibilité sur un échantillon de la poutre 2					
		$G_{c_1}(MPa)$	$G_{c_2}(MPa)$	$G_{c_3}(MPa)$	$G_{c_4}(MPa)$	$G_{c_5}(MPa)$	$G_{c_6}(MPa)$
		$(\eta_{c_1})$	$(\eta_{c_2})$	$(\eta_{c_3})$	$(\eta_{c_4})$	$(\eta_{c_5})$	$(\eta_{c_6})$
1	46.2	3.50 (0.463)	31.06 (0.612)	67.86 (0.682)	118.13 (0.529)	159.56 (0.518)	203.94 (0.552)
2	46.2	3.03 (0.446)	25.54 (0.579)	56.10 (0.578)	89.968 (0.539)	119.20 (0.539)	145.73 (0.667)
3	46.2	2.47 (0.489)	24.77 (0.702)	57.99 (0.690)	92.698 (0.590)	120.41 (0.590)	136.92 (0.723)
4	46.2	2.28 (0.444)	21.54 (0.610)	49.67 (0.625)	86.130 (0.557)	114.82 (0.557)	133.33 (0.608)
5	46.2	2.22 (0.399)	20.16 (0.584)	45.98 (0.618)	82.048 (0.584)	108.42 (0.584)	129.81 (0.546)
6	46.2	1.84 (0.411)	18.47 (0.598)	42.76 (0.613)	74.960 (0.569)	105.87 (0.569)	130.73 (0.497)
7	46.2	1.96 (0.435)	18.44 (0.600)	42.97 (0.648)	73.004 (0.568)	105.93 (0.568)	133.13 (0.540)

La figure IV.2 montre les modules de cisaillement du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence pour les différents essais de reproductibilité après obtention par notre méthode d'identification. Le module de cisaillement de la couche viscoélastique croît en fonction de la fréquence pour atteindre un palier conformément aux résultats de la section II.3.3.2.

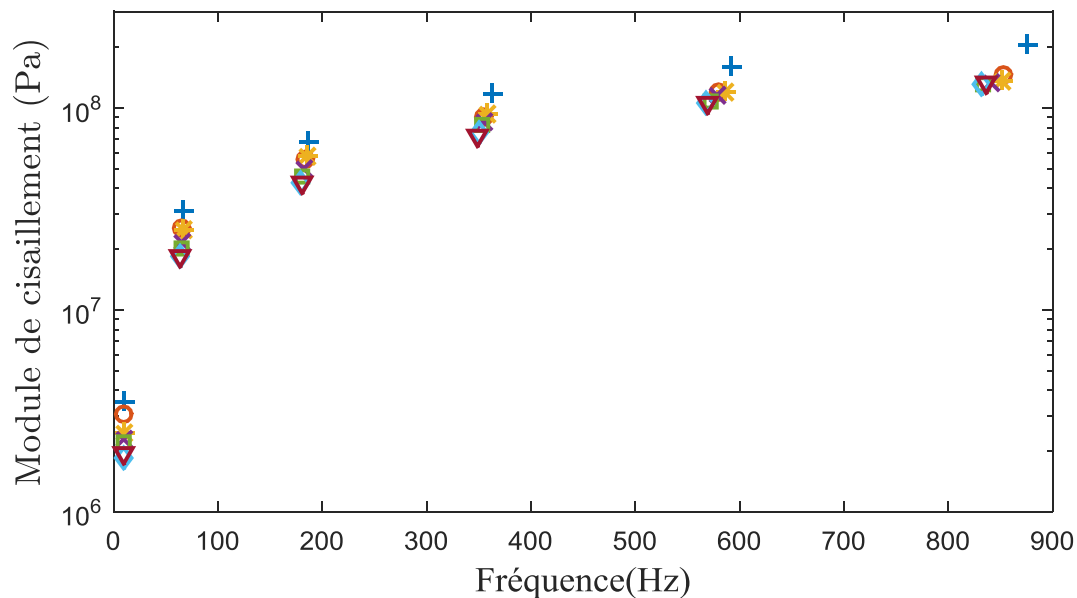


Figure IV.2 : Modules de cisaillement identifiés aux modes de résonance pour le cœur viscoélastique de la poutre sandwich lors des essais de reproductibilité

La figure IV.3 montre quant à elle les facteurs de perte du cœur viscoélastique en fonction de la fréquence pour les différents essais de reproductibilité après obtention par notre méthode d'identification. Le facteur de perte montre une rapide augmentation pour atteindre une valeur de 0,6. Cette valeur semble apparaître stable sur la gamme de fréquence de 100 à 900 Hz.

Sur ces figures, nous observons que malgré la variation, le comportement décrit dans les chapitres précédents est respecté et que le décalage se produit linéairement sur l'ensemble des valeurs d'un même échantillon. Ainsi, la variation se produisant sur les essais de reproductibilité peut s'expliquer par une fluctuation du positionnement de la poutre introduisant une longueur utile différente ou par un serrage différent même si celui-ci est contrôlé par une clef dynamométrique.

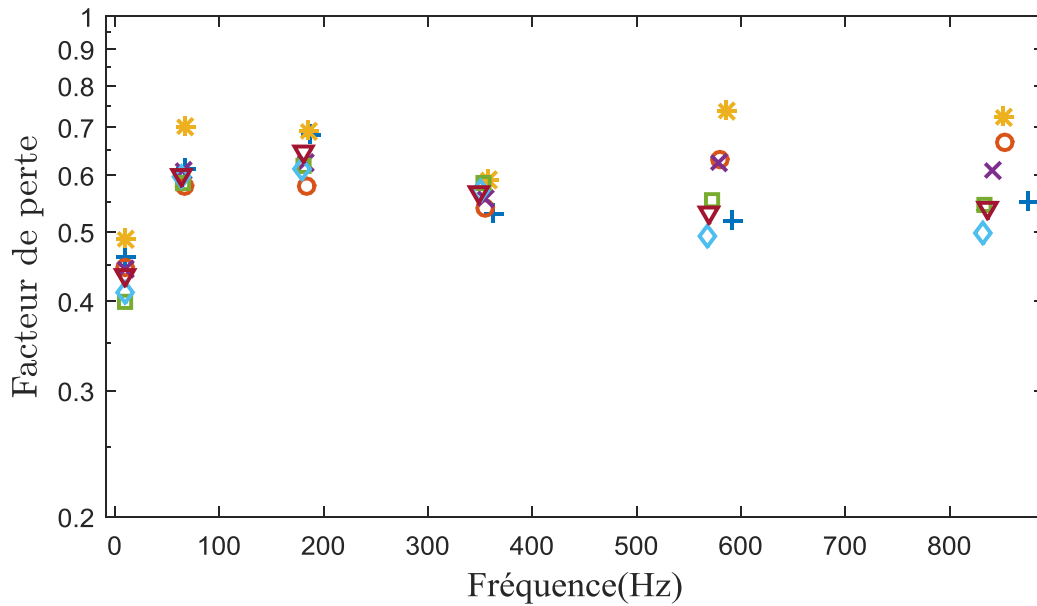


Figure IV.3 : Facteurs de perte identifiés aux modes de résonance pour le cœur viscoélastique de la poutre sandwich lors des essais de reproductibilité

Quant aux facteurs de perte du cœur viscoélastique (tableau IV.4) identifiés à partir des essais de reproductibilité, les valeurs apparaissent en fonction des modes. Ce paramètre a une variation de l'ordre de 20% quelque soit le mode considéré et cela peut expliquer que la structure sandwich soit faiblement amortissante, introduisant ainsi un fort biais sur la variabilité.

Tableau IV.4 : Variabilité des paramètres du cœur viscoélastique à chaque mode de résonance

		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Module de cisaillement	$d_j(MPa)$	2.41	22.48	51.23	87.12	118.06	143.04
	$r_j (%)$	68.75	56.12	48.99	51.79	45.47	51.82
Facteur de perte	$d_j$	0.440	0.611	0.635	0.561	0.560	0.585
	$r_j (%)$	20.44	20.13	17.63	10.85	12.85	38.56

Ainsi, nous avons démontré l'importance de l'impact de la reproductibilité. Une bonne reproductibilité sur les fréquences de résonance de l'ordre de 5% peut avoir plus d'impact sur la détermination du module de cisaillement. Il est donc important de le prendre en compte dans notre modèle.

## IV.2.2. Etude de reproductibilité des résultats sur une population d'échantillon

L'étude de reproductibilité consiste en la détermination des paramètres modaux de différents échantillons de poutres sandwichs viscoélastiques de même type dans les mêmes conditions de température et d'encastrement par exemple. Ainsi, nous avons quatre échantillons de la poutre 2 pour la réalisation des essais de vibrations. Le protocole de mesures est identique à celui de la section IV.2.1.

Les spectres expérimentaux des amplitudes de déplacement mesurées à l'extrémité libre de la poutre de quatre échantillons sont montrés sur la figure IV.4. Les amplitudes de déplacement des spectres sont plus faibles pour les modes fondamentaux alors qu'elles sont plus élevées dans les modes harmoniques dus au fait de l'excitation. Cette figure montre une bonne reproductibilité en termes d'amplitude de la réponse fréquentiel mais aussi en termes de valeurs des pics de résonance.

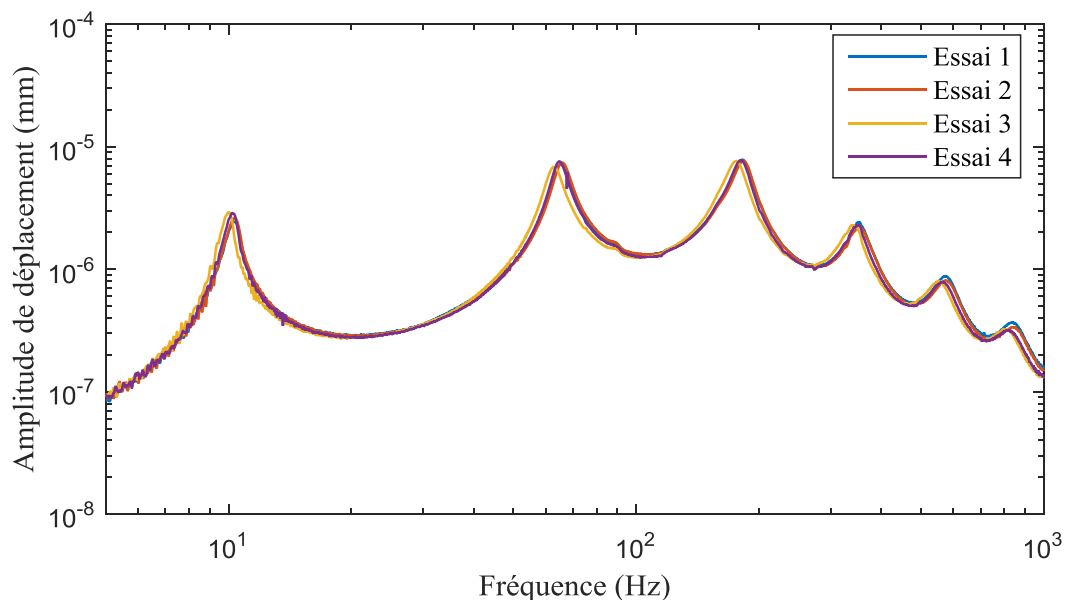


Figure IV.4 : Spectres des amplitudes de déplacement mesurées à l'extrémité libre de la poutre : étude de reproductibilité sur quatre échantillons de la poutre type 2

Le tableau IV.5 montre les fréquences de résonance et le facteur de perte déterminés pour chaque mode de résonance (6 premiers modes de flexion). Ces paramètres modaux sont calculés par la méthode de la bande passante à -3dB et leurs variations sont quantifiées par le rapport de l'écart entre la maximum et le minimum de ces paramètres, normalisé par la moyenne géométrique  $C_j$  (équation (4.1)).



Tableau IV.5 : Fréquences de résonance et facteurs de perte des quatre échantillons

	Longueur (cm)	Fréquences de résonance et facteurs de perte					
		f1	f2	f3	f4	f5	f6
		( $\eta_1$ )	( $\eta_2$ )	( $\eta_3$ )	( $\eta_4$ )	( $\eta_5$ )	( $\eta_6$ )
Poutre2_2	46	10.33 (0.082)	65.35 (0.097)	182.42 (0.107)	353.61 (0.112)	571.60 (0.122)	837.96 (0.133)
Poutre2_3	46	10.33 (0.075)	65.98 (0.096)	183.93 (0.106)	354.10 (0.116)	575.54 (0.127)	847.23 (0.140)
Poutre2_4	46	10.03 (0.067)	62.79 (0.098)	176.01 (0.113)	342.12 (0.098)	554.5 (0.087)	809.62 (0.101)
Poutre2_5	46.2	10.21 (0.068)	64.99 (0.090)	180.92 (0.104)	349.26 (0.118)	566.90 (0.107)	820.84 (0.117)

Les variations des paramètres modaux sont disponibles dans le tableau IV.6. Nous constatons que la variabilité des fréquences de résonance (inférieure à 5 %) reste plus faible que celle des facteurs de perte confirmant les conclusions tirées de l'essai de reproductibilité. Les ordres de grandeurs restent les mêmes que pour l'essai de reproductibilité. Il apparaît alors que l'utilisation d'échantillons différents induit une variation des grandeurs mesurées expérimentalement, ce qui suggère qu'une variabilité dans les propriétés géométriques et/ou matériau a un effet notable sur les propriétés modales des poutres sandwichs viscoélastiques.

Tableau IV.6 : Variabilité des paramètres modaux identifiés lors des essais de reproductibilité

		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Fréquence de résonance	Valeur moyenne (Hz)	10.23	64.77	180.80	349.74	567.09	828.78
	$r_j$ (%)	3.01	4.92	4.38	3.42	3.70	4.53
Facteur de perte	Valeur moyenne	0.073	0.095	0.107	0.111	0.109	0.122
	$r_j$ (%)	20.79	7.40	8.83	17.46	36.54	31.77

Ces observations sont à rapprocher des études de [112],[113] [114] qui font des constatations similaires dans un cadre numérique. Une fois de plus cette variabilité est propagée vers les grandeurs identifiées (à savoir le module de cisaillement et le facteur de perte du cœur viscoélastique par mode de résonance) et les résultats sont donnés sur le tableau IV.7.

Les grandeurs du tableau IV.7 sont représentées respectivement sur les figures IV.5 et IV.6. Comme dans le cas de la reproductibilité, les tendances de variation du module de cisaillement et du facteur de perte sont respectées. Ainsi, le module de cisaillement croît en fonction de la fréquence quelque soit l'essai de reproductibilité alors que le facteur de perte est globalement constant.

Tableau IV.7 : Modules de cisaillement et facteurs de perte du cœur viscoélastique de la poutre sandwich identifiés aux modes de résonance suite aux essais de reproductibilité

Essais	Longueur utile (cm)	Paramètres identifiés lors des essais de reproductibilité sur un spécimen de poutre					
		$G_{c_1}(MPa)$	$G_{c_2}(MPa)$	$G_{c_3}(MPa)$	$G_{c_4}(MPa)$	$G_{c_5}(MPa)$	$G_{c_6}(MPa)$
		$(\eta_{c_1})$	$(\eta_{c_2})$	$(\eta_{c_3})$	$(\eta_{c_4})$	$(\eta_{c_5})$	$(\eta_{c_6})$
Poutre2_2	46	2.80 (0.480)	19.56 (0.632)	43.64 (0.675)	74.12 (0.634)	99.57 (0.581)	126.75 (0.560)
Poutre2_3	46	2.87 (0.439)	21.04 (0.693)	45.99 (0.734)	73.29 (0.670)	101.71 (0.640)	131.42 (0.639)
Poutre2_4	46	2.28 (0.304)	14.78 (0.451)	33.86 (0.534)	62.24 (0.432)	89.51 (0.335)	111.02 (0.349)
Poutre2_5	46.2	2.82 (0.384)	20.56 (0.603)	44.04 (0.657)	69.87 (0.653)	103.94 (0.503)	121.93 (0.457)

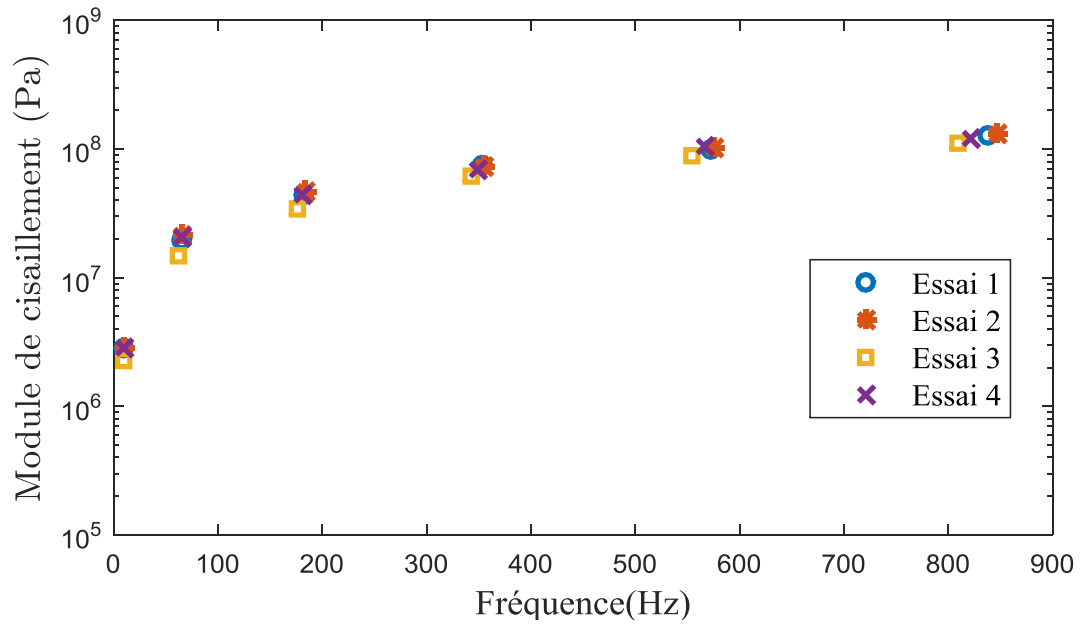


Figure IV.5 : Modules de cisaillement identifiés aux modes de résonance pour le cœur viscoélastique de la poutre sandwich lors des essais de reproductibilité

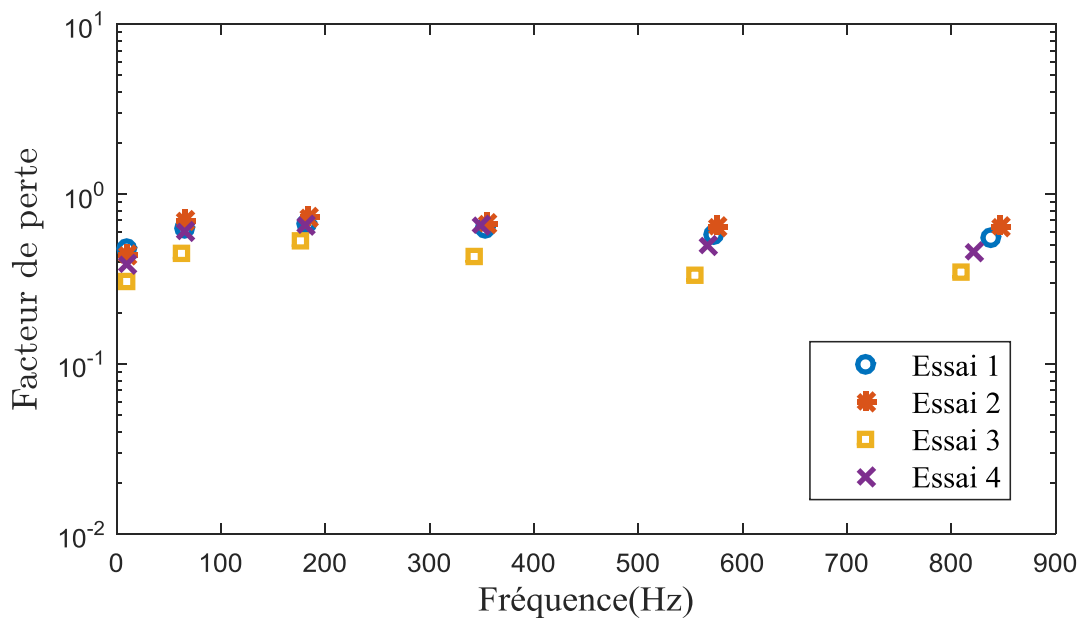


Figure IV.6 : Facteurs de perte identifiés aux modes de résonance pour le cœur viscoélastique de la poutre sandwich lors des essais de reproductibilité

Les variations des paramètres identifiés de part les essais de reproductibilité sont montrées dans le tableau IV.8. Dans ce cas, les variations sont également déterminées par la formule de l'équation (4.1). Sur l'ensemble des six premiers modes de résonance, le module de cisaillement a une variation maximale de l'ordre de 33.28% tandis que le facteur de perte a une variation maximale de l'ordre de 60.96%.

Tableau IV.8 : Variabilité du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique à chaque mode de résonance lors des essais de reproductibilité

		Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
Module de cisaillement	$d_j(MPa)$	2.68	18.80	41.59	69.71	98.52	122.54
	$r_j (%)$	22.00	33.28	29.16	17.04	14.64	16.64
Facteur de perte	$d_j$	0.396	0.587	0.645	0.588	0.500	0.488
	$r_j (%)$	44.44	41.19	30.97	40.45	60.96	59.33

Dans cette section, nous avons démontré l'impact des essais de reproductibilité sur les paramètres modaux et sur les paramètres identifiés. Une reproductibilité sur les fréquences de résonance de l'ordre de 5% a moins d'impact sur la détermination du module de cisaillement et plus d'impact sur le facteur de perte.

### IV.3. Essais de sensibilité

Dans cette partie, nous avons souhaité étudier la sensibilité des paramètres géométriques et l'impact de la sensibilité sur les données d'entrée de notre méthode d'identification. Pour cela, nous avons perturbé les paramètres à l'aide d'une loi normale. Puis, nous en avons mesuré l'impact sur la détermination des propriétés mécaniques du polymère viscoélastique à l'aide de notre méthode d'identification. Dans le cas des paramètres géométriques, nous avons choisi un écart-type de 10% avec une loi normale.

Dans le cas des paramètres d'entrée (fréquence de résonance et facteur de perte de la poutre sandwich), nous avons opté pour un écart-type de 4% pour une loi normale conforme aux résultats mesurés sur les essais expérimentaux.

#### IV.3.1. Sensibilité des paramètres géométriques

Dans le processus d'identification inverse des propriétés mécaniques du matériau viscoélastique, différents paramètres peuvent concourir à la robustesse des résultats. Parmi ces paramètres, nous avons notamment les caractéristiques géométriques des matériaux. Ainsi, dans les paragraphes à venir, en faisant varier les caractéristiques (équation 4.2) nous étudions l'impact sur les résultats.

$$a_{100} = \text{para} + (\text{écart-type} * \text{para} * \text{randn}(1,100)) \quad (4.2)$$

Dans l'équation (4.2),

- le terme “para” représente la moyenne du paramètre géométrique à varier,
- le terme “a<sub>100</sub>” représente les 100 valeurs du paramètre obtenues par la fonction *randn* de Matlab qui permet de perturber aléatoirement le paramètre en question.

### IV.3.1.1 Sensibilité de la largeur b de la structure sandwich viscoélastique

Les valeurs de la largeur de la poutre sandwich suivent une loi normale avec un nombre de valeur de 100 pour l'étude, les résultats de cette variation ont servi à l'identification du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique. Ainsi, à chaque valeur de la largeur correspond un couple de paramètres qui sera identifié, les autres données géométriques étant fixées et constantes.

Tableau IV.9 : Paramètres identifiés en faisant varier la largeur de la poutre de 10%

Module de Cisaillement du cœur viscoélastique	Moyenne (MPa)	3.88	24.45	50.52	111.91	166.7	214.13	258.44
	Ecart type	0.98	0.63	0.95	0.06	0.04	0.04	0.002
	Erreur relative (%)	$1.18 \cdot 10^{-4}$	$1.36 \cdot 10^{-5}$	$9.47 \cdot 10^{-6}$	$3.12 \cdot 10^{-7}$	$1.30 \cdot 10^{-7}$	$1.12 \cdot 10^{-7}$	$4.64 \cdot 10^{-9}$
Facteur de perte du cœur viscoélastique	Moyenne	0,65	0,65	0,70	0,31	0,29	0,31	0,08
	Ecart type	$3,02 \cdot 10^{-7}$	$2,94 \cdot 10^{-8}$	$2,16 \cdot 10^{-8}$	$1,12 \cdot 10^{-9}$	$6,1 \cdot 10^{-10}$	$4,3 \cdot 10^{-10}$	$7,1210^{-11}$
	Erreur relative (%)	$2.11 \cdot 10^{-4}$	$2,23 \cdot 10^{-5}$	$1.63 \cdot 10^{-5}$	$1.55 \cdot 10^{-6}$	$1.19 \cdot 10^{-6}$	$7,22 \cdot 10^{-7}$	$4,17 \cdot 10^{-7}$

Les résultats des paramètres identifiés sont présentés dans le tableau IV.9, ainsi les moyennes des 100 valeurs du module de cisaillement et du facteur de perte à chacun des sept premiers modes de résonance y sont affichées. Quelque soit le mode de résonance, l'erreur relative sur les valeurs du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique est comprise entre  $10^{-4}$  à  $10^{-9}$ , ce qui prouve que la variation de la largeur de la poutre n'a pas d'influence sur le processus d'identification. Cette conclusion est assez rassurante car nous avons affaire ici au mode de flexion.

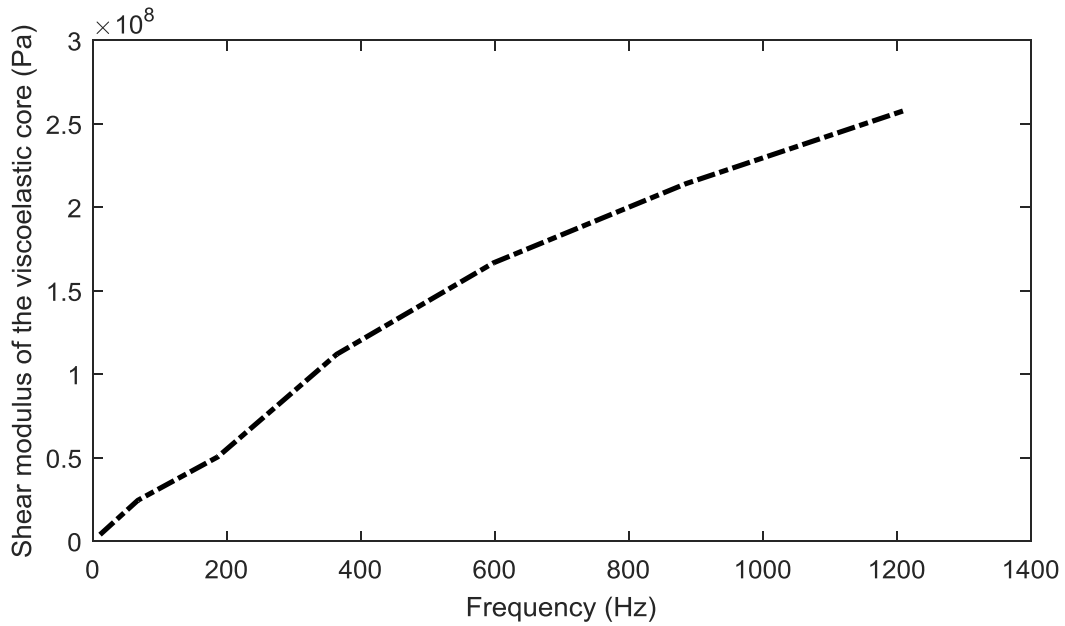


Figure IV.7 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la largeur de la poutre

Les figures IV.7 et IV.8 représentent respectivement les variations des modules de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique correspondants aux 100 valeurs de la largeur de la poutre sandwich. Toutes les courbes de variations sont pratiquement confondues, ceci étant dû au fait que la variation de la largeur n'a pas d'incidence sur l'identification comme en témoignent les erreurs relatives du tableau IV.9.

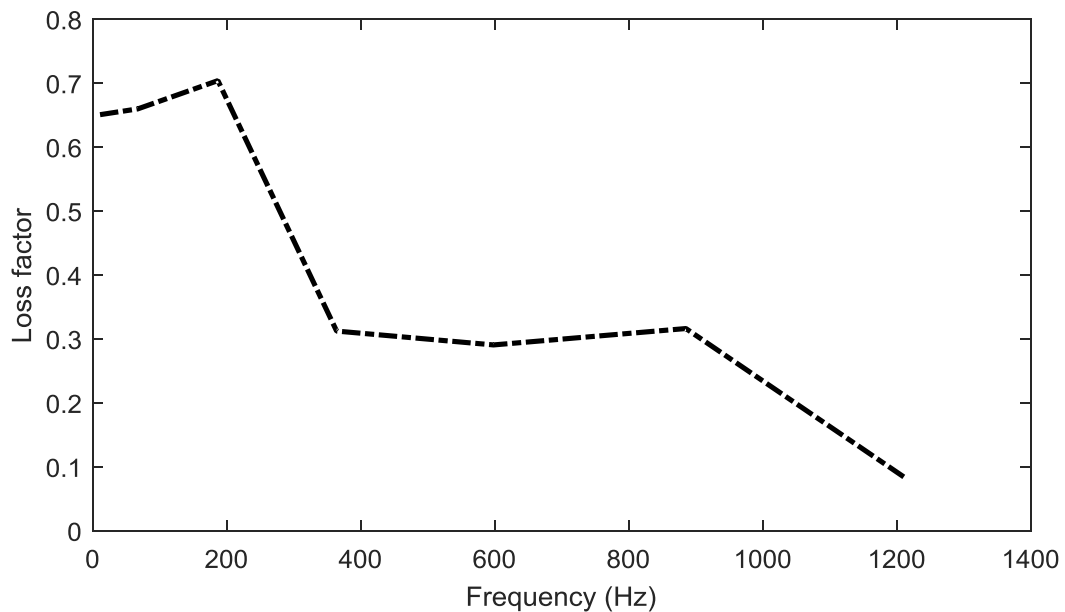


Figure IV.8 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la largeur de la poutre

### IV.3.1.2 Sensibilité de la longueur L de la structure viscoélastique

Nous procédons de la même façon pour la longueur de la poutre sandwich avec 100 valeurs d'étude. Les résultats de cette variation ont servis à l'identification du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique. En fixant, les autres données géométriques, chacune des valeurs de la longueur correspond un couple de paramètres qui sera identifié.

Tableau IV.10 : Paramètres identifiés en faisant varier la longueur de la poutre

Module de Cisaillement du cœur viscoélastique	Moyenne (MPa)	2.80	18.10	40.07	80.80	122.05	160.96	196.69
	Ecart type (*10 <sup>6</sup> )	0.90	4.72	10.92	23.46	33.77	40.47	47.08
	Erreur relative (%)	73.24	61.97	63.16	60.86	59.12	55.74	53.98
Facteur de perte du cœur viscoélastique	Moyenne	0.43	0.47	0.49	0.22	0.21	0.24	0.06
	Ecart type	0.16	0.22	0.15	0.059	0.052	0.053	0.012
	Erreur relative (%)	72.66	83.59	70.92	56.46	54.18	51.01	45.04

Le tableau IV.10 concatène la moyenne, l'écart type et l'erreur relative des valeurs de paramètres identifiés. L'écart type sur le module de cisaillement est de l'ordre de 10<sup>6</sup>, ce qui montre que la variation de longueur entraîne une grande dispersion sur ce paramètre. Les erreurs relatives sur le module de cisaillement et le facteur de perte paraissent assez élevées, ce qui montre clairement que la variation de la longueur impacte nettement le processus d'identification.



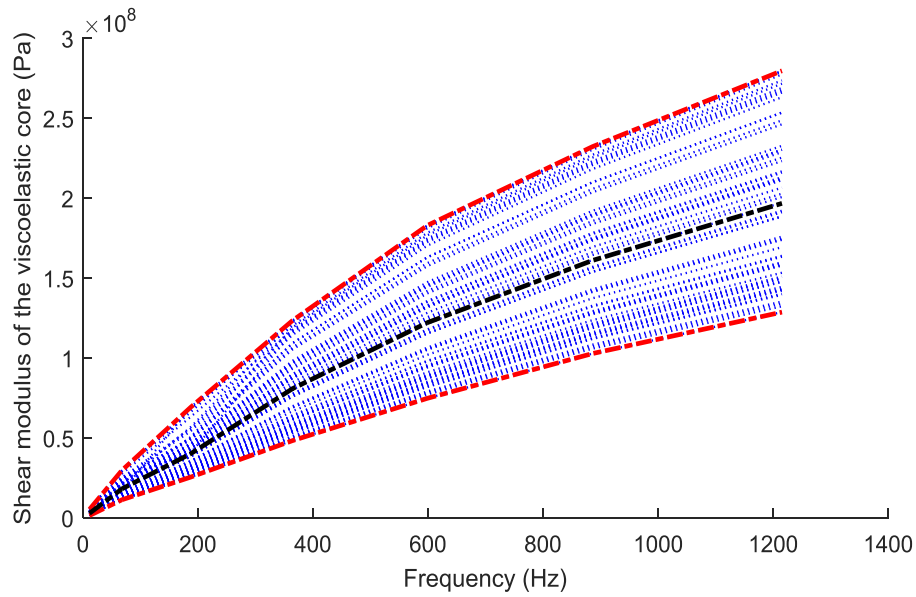


Figure IV.9 Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la longueur de la poutre

Les figures IV.9 et IV.10 représentent respectivement les variations du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique, suite aux essais de sensibilité sur la longueur de la poutre. Le module de cisaillement est croissant en fonction de la fréquence, et le facteur de perte est relativement constant, cependant il est observé une forte dispersion au niveau des courbes correspondants à chaque longueur d'étude, ce qui prouve une fois de plus que la variation de la longueur de la structure sandwich influe énormément sur les propriétés mécaniques des matériaux la composent.

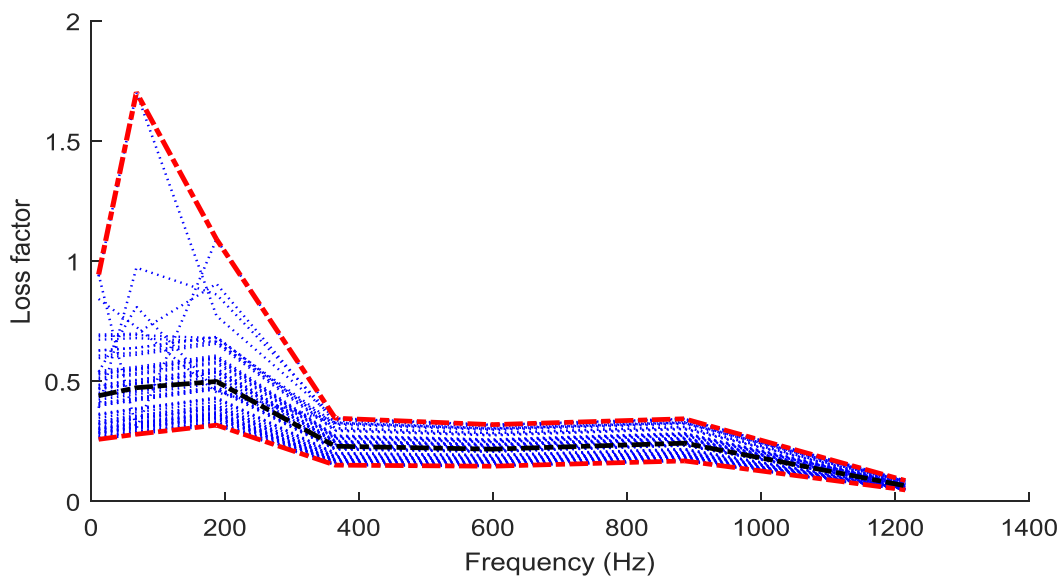


Figure IV.10 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la longueur de la poutre

### IV.3.1.3 Sensibilité de l'épaisseur du cœur viscoélastique $h_c$ avec une épaisseur totale $h_t$ constante

L'épaisseur de la couche viscoélastique de la poutre sandwich a été variée pour obtenir 100 valeurs d'étude, ceci avec une épaisseur totale constante de la poutre sandwich. Les résultats de cette variation ont servis à l'identification du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique. Pour une valeur de l'épaisseur de la couche viscoélastique correspond un couple de paramètres qui sera identifié, les autres données géométriques étant fixées.

Tableau IV.11 : Paramètres identifiés en faisant varier l'épaisseur de la couche viscoélastique avec une épaisseur totale de la poutre constante

Module de Cisaillement du cœur viscoélastique	Moyenne (MPa)	3.89	24.47	50.57	112.004	166.83	214.30	258.65
	Ecart type ( $\times 10^6$ )	0.46	0.29	0.67	0.95	1.49	2.16	2.67
	Erreur relative (%)	3,68	3,77	4,09	2,63	2,76	3,11	3,19
Facteur de perte du cœur viscoélastique	Moyenne	0,65	0,66	0,70	0,31	0,29	0,31	0,08
	Ecart type	0,010	0,009	0,009	0,0035	0,00304	0,00302	0,00064
	Erreur relative (%)	4,95	4,36	3,96	3,44	3,21	2,94	2,46

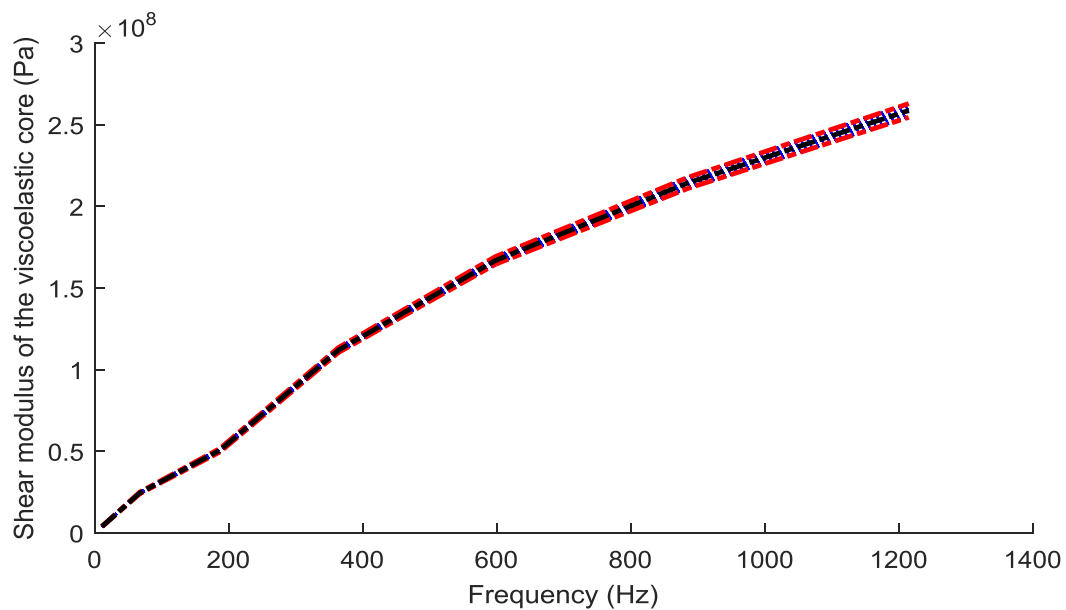


Figure IV.11 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur l'épaisseur de la couche viscoélastique de la poutre

Dans ce cas, en faisant varier l'épaisseur de la couche viscoélastique les erreurs relatives sur les modules de cisaillement et facteur de perte sont inférieures à 5% comme le témoigne le tableau IV.11. Les figures IV.11 et IV.12 représentent respectivement les variations du module de cisaillement et du facteur de perte suite aux essais de sensibilité sur l'épaisseur de la couche viscoélastique, le module de cisaillement est croissant tandis que le facteur de perte est relativement constant. Nous remarquons également le peu de dispersion sur les courbes de ces figures, ce qui est expliqué par les écarts types et erreurs relatives du tableau IV.11. Il en ressort alors que la variation de l'épaisseur de la couche viscoélastique n'impacte pas le processus d'identification inverse des propriétés mécaniques de la couche viscoélastique.

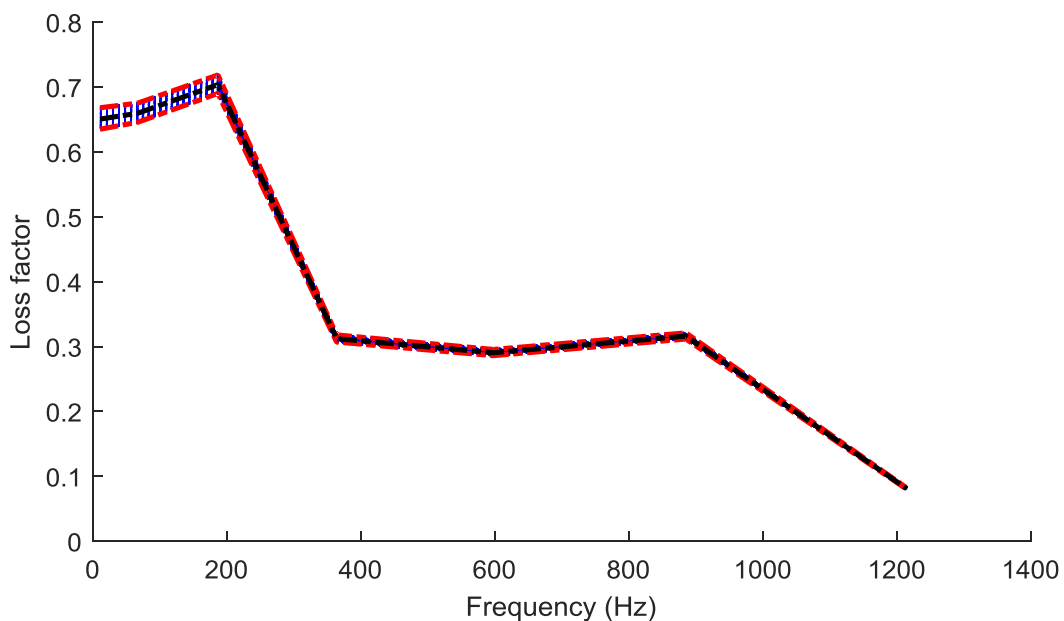


Figure IV.12 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur l'épaisseur de la couche viscoélastique de la poutre

#### IV.3.1.4 Sensibilité de l'épaisseur des faces $h_f$ avec une épaisseur totale $h_t$ constante

L'épaisseur des faces élastiques de la poutre sandwich 1 a été variée pour obtenir 100 valeurs d'étude, ceci avec une épaisseur totale constante de la poutre sandwich. Les résultats de cette variation ont servis à l'identification du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique.

Tableau IV.12 : Paramètres identifiés en faisant varier l'épaisseur des faces élastiques avec une épaisseur totale de la poutre constante

Module de Cisaillement du cœur viscoélastique	Moyenne (MPa)	3.88	24.42	50.68	111.90	166.65	214.01	258.28
	Ecart type (*10 <sup>6</sup> )	0.89	0.58	2.89	1.82	2.86	4.15	5.14
	Erreur relative (%)	7.92	7.76	36.56	5.39	5.67	6.39	6.55
Facteur de perte du cœur viscoélastique	Moyenne	0,65	0,66	0,71	0,31	0,29	0,31	0,081
	Ecart type	0,021	0,018	0,081	0,006	0,0060	0,006	0,0012
	Erreur relative (%)	10.05	9.11	54.13	7.21	6.73	6.15	5.15

En faisant varier l'épaisseur des faces élastiques, les erreurs relatives sur les modules de cisaillement et facteur de perte sont respectivement globalement de l'ordre 7% et de 10% comme le témoigne le tableau IV.12.

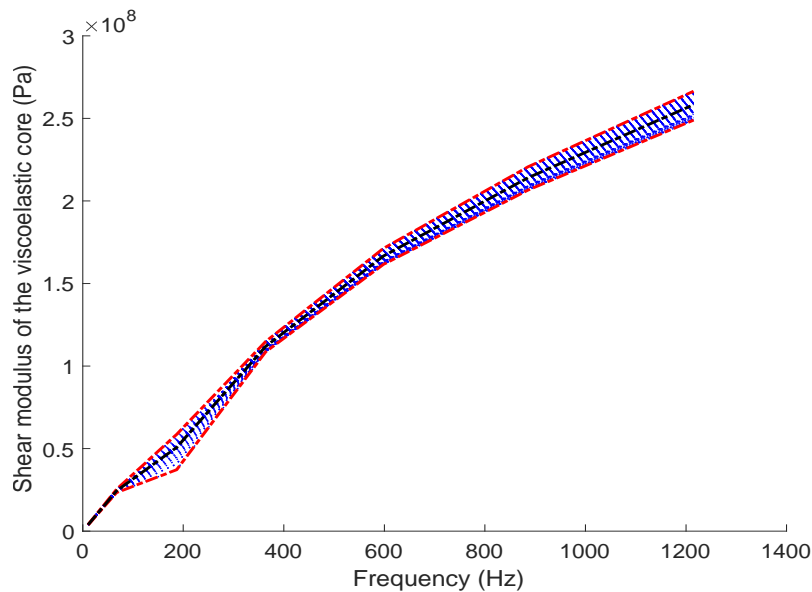


Figure IV.13 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur l'épaisseur des faces élastiques de la poutre

Les figures IV.13 et IV.14 représentent respectivement les variations du module de cisaillement et du facteur de perte suite aux essais de sensibilité sur l'épaisseur des faces élastiques, le module de cisaillement est croissant alors que le facteur de perte est relativement constant. Les erreurs relatives du tableau IV.12 prouvent l'existence de dispersion sur les courbes de ces figures.

Il en ressort alors que la variation de l'épaisseur des faces élastique impacte le processus d'identification inverse des propriétés mécaniques de la couche viscoélastique.

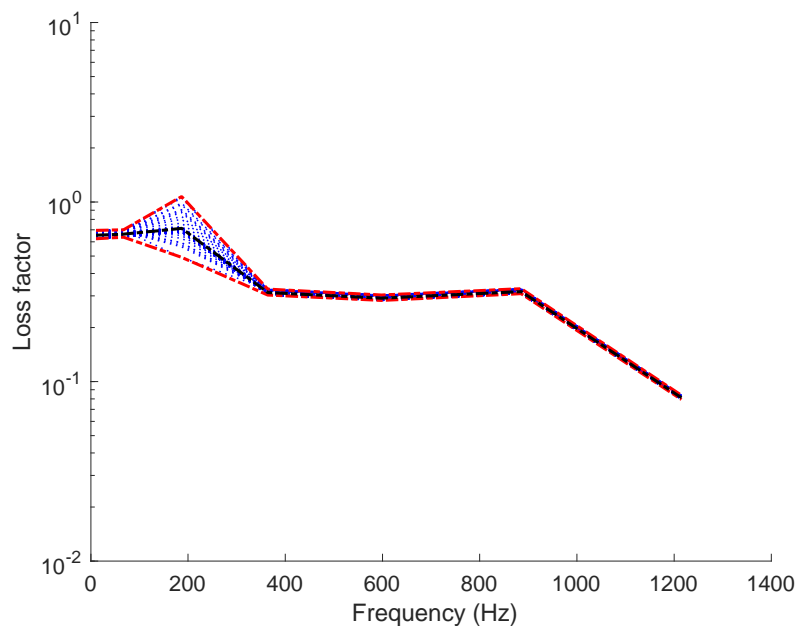


Figure IV.14 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur l'épaisseur des faces élastiques de la poutre

#### IV.3.1.5 Sensibilité sur la densité des faces élastiques

Nous avons procédé de la même façon pour la densité des faces élastiques de la poutre sandwich. Les résultats de cette variation ont servi à l'identification du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique. Pour une valeur de la densité considérée, correspond un couple de paramètres qui sera identifié, les autres données géométriques étant fixées.

Tableau IV.13 : Paramètres identifiés en faisant varier la densité des faces élastiques de la poutre

Module de Cisaillement du cœur viscoélastique	Moyenne (MPa)	3.63	22.38	47.92	108.17	161.35	207.83	251.13
	Ecart type (*10 <sup>6</sup> )	0.83	3.46	11.51	10.62	15.05	17.28	20.25
	Erreur relative (%)	84.70	63.64	102.31	28.07	26.88	24.36	23.72
Facteur de perte du cœur viscoélastique	Moyenne	0.73	0.65	0.71	0.30	0.28	0.30	0.079
	Ecart type	0.57	0.23	0.38	0.027	0.0239	0.0232	0.004
	Erreur relative (%)	93.03	91.86	102.87	26.59	24.73	22.37	18.42

Les erreurs relatives sur les modules de cisaillement et facteur de perte sont assez élevées comme le témoigne le tableau IV.13 lorsqu'on fait varier la densité des faces élastiques. Les figures IV.15 et IV.16 représentent respectivement les variations du module de cisaillement et du facteur de perte suite aux essais de sensibilité sur la densité des faces élastiques, le module de cisaillement est croissant alors que le facteur de perte est relativement constant. Les erreurs relatives du tableau IV.13 prouvent l'existence d'une forte dispersion sur les courbes de ces figures. Il en ressort alors que la variation de la densité des faces élastiques impacte le processus d'identification inverse des propriétés mécaniques de la couche viscoélastique.

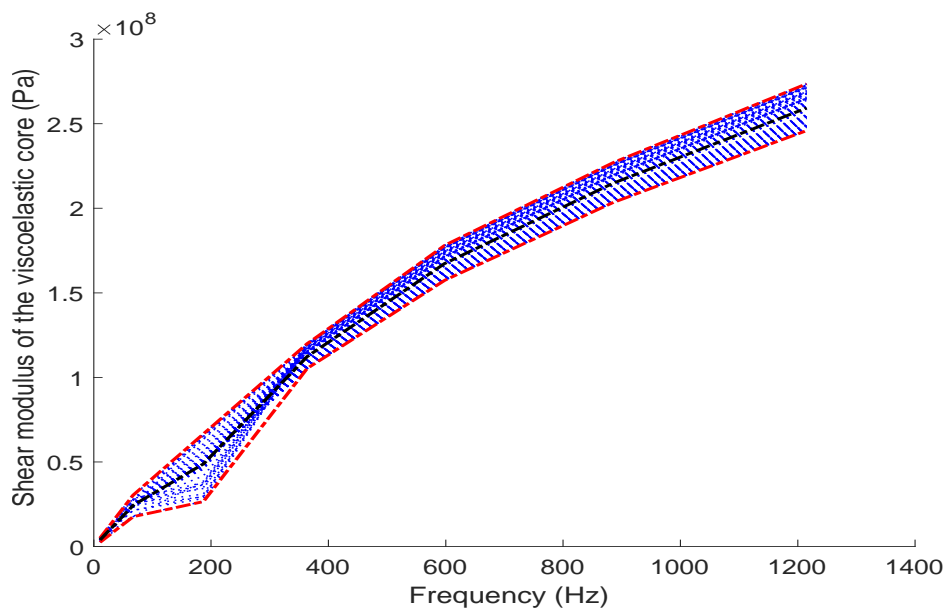


Figure IV.15 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la densité des faces élastiques de la poutre

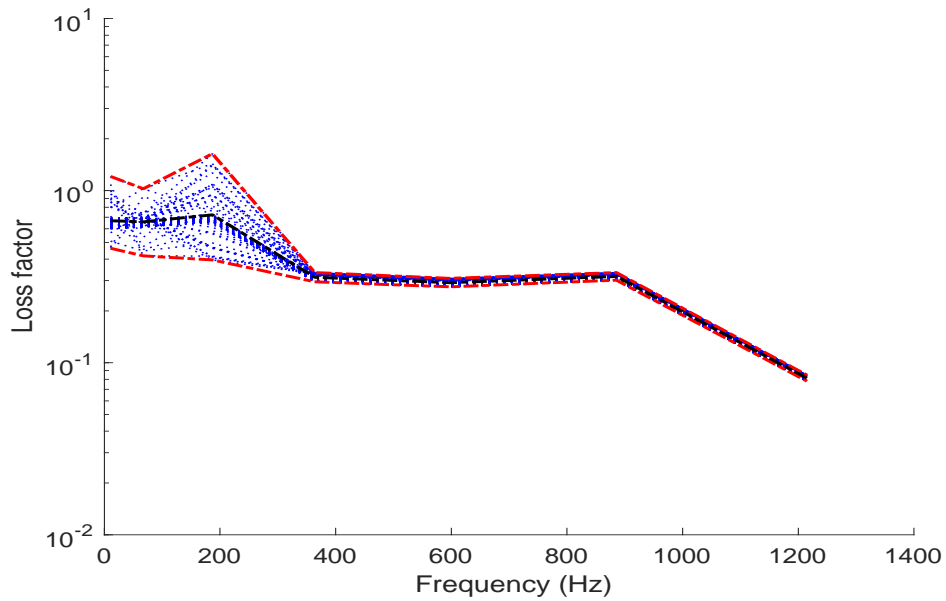


Figure IV.16 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la densité des faces élastiques de la poutre

#### IV.3.1.6 Sensibilité sur la densité du cœur viscoélastique

Concernant la densité de la couche viscoélastique de la poutre sandwich 1, les valeurs perturbées par la loi normale ont servis à l'identification du module de cisaillement et du facteur de perte du cœur viscoélastique. Pour une valeur de la densité considérée, correspond un couple de paramètres qui sera identifié, les autres données géométriques étant fixées.

Tableau IV.14 : Paramètres identifiés en faisant varier la densité du cœur viscoélastique

Module de Cisaillement du cœur viscoélastique	Moyenne (MPa)	3.89	24.40	48.81	112.37	167.34	214.82	259.27
	Ecart type (*10 <sup>6</sup> )	0.32	1.57	6.96	4.63	6.54	7.46	8.76
	Erreur relative (%)	49.34	42.00	60.11	12.18	11.60	10.37	10.10
Facteur de perte du cœur viscoélastique	Moyenne	0.66	0.65	0.72	0.31	0.29	0.31	0.081
	Ecart type	0.107	0.080	0.214	0.012	0.010	0.0101	0.002
	Erreur relative (%)	61.73	59.24	75.83	11.65	10.74	9.60	7.76

Comme dans le cas précédent, les erreurs relatives sur les modules de cisaillement et facteur de perte sont assez élevées comme le témoigne le tableau IV.14 lorsqu'on fait varier la densité de la couche viscoélastique.

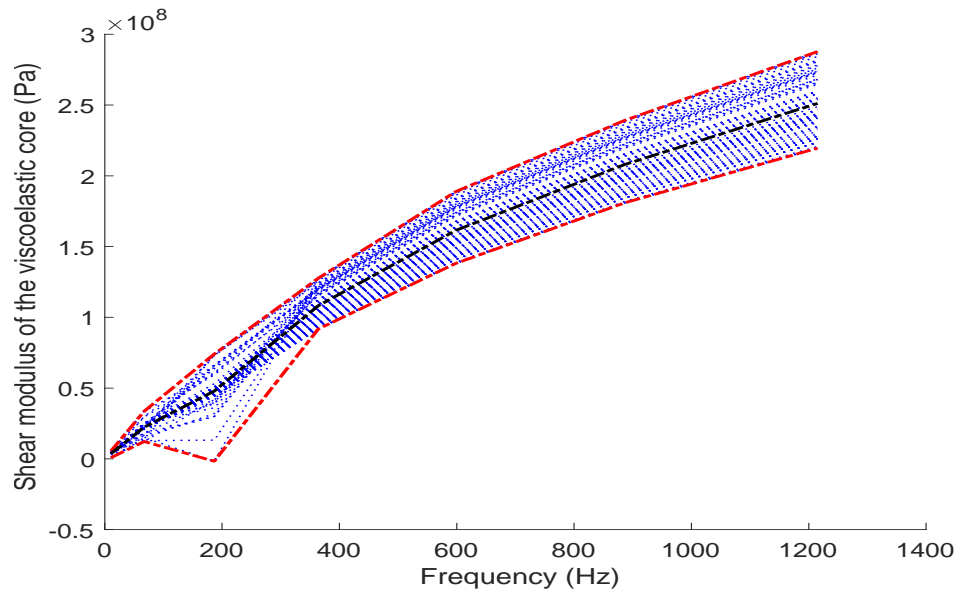


Figure IV.17 : Variation du module de cisaillement du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la densité du cœur viscoélastique de la poutre

Les figures IV.17 et IV.18 représentent respectivement les variations du module de cisaillement et du facteur de perte suite aux essais de sensibilité sur la densité des faces élastiques. Le module de cisaillement est croissant quand le facteur de perte est relativement constant. Les erreurs relatives prouvent l'existence d'une forte dispersion sur les courbes de ces figures. Ainsi, la variation de la densité de la couche viscoélastique impacte le processus d'identification inverse des propriétés mécaniques de la couche viscoélastique.

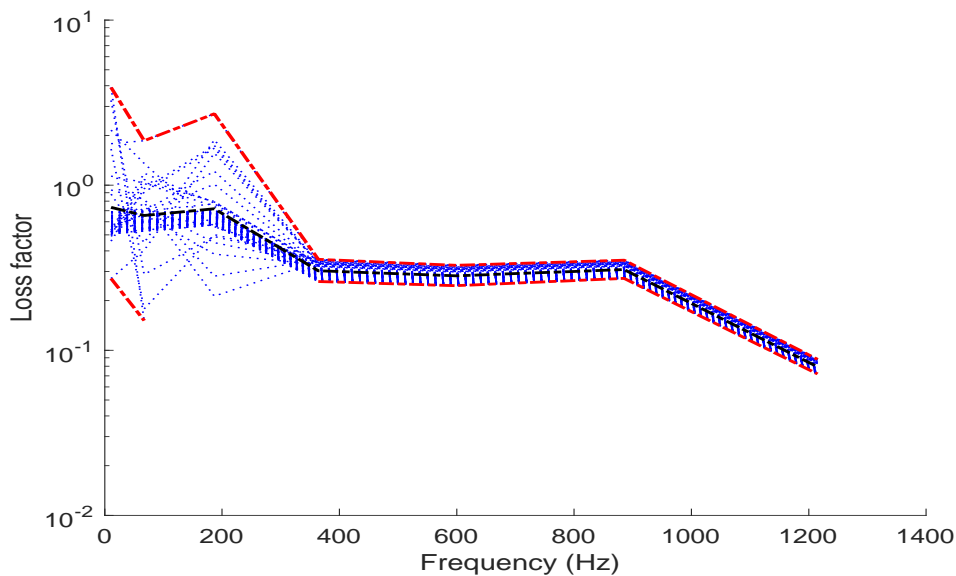


Figure IV.18 : Variation du facteur de perte du cœur viscoélastique suite aux essais de sensibilité sur la densité du cœur viscoélastique de la poutre



### IV.3.2. Sensibilité des paramètres modaux

L'objectif dans cette partie est d'éprouver une fois de plus notre méthode d'identification inverse. Nous proposons une étude de sensibilité sur les paramètres modaux (fréquence de résonance et facteur de perte). A travers une étude de sensibilité, nous perturbons nos données d'entrées par une loi normale avec un écart-type de 4%. Nous discuterons dans cette partie l'impact des variations sur les paramètres identifiés.

#### IV.3.2.1 Sensibilité sur les paramètres modaux de la poutre sandwich

La sensibilité est appliquée aux fréquences de résonance et facteur de perte de la poutre sandwich numéro 1 avec une longueur utile de 47.5 cm. Cette variabilité est basée sur l'équation (4.2)

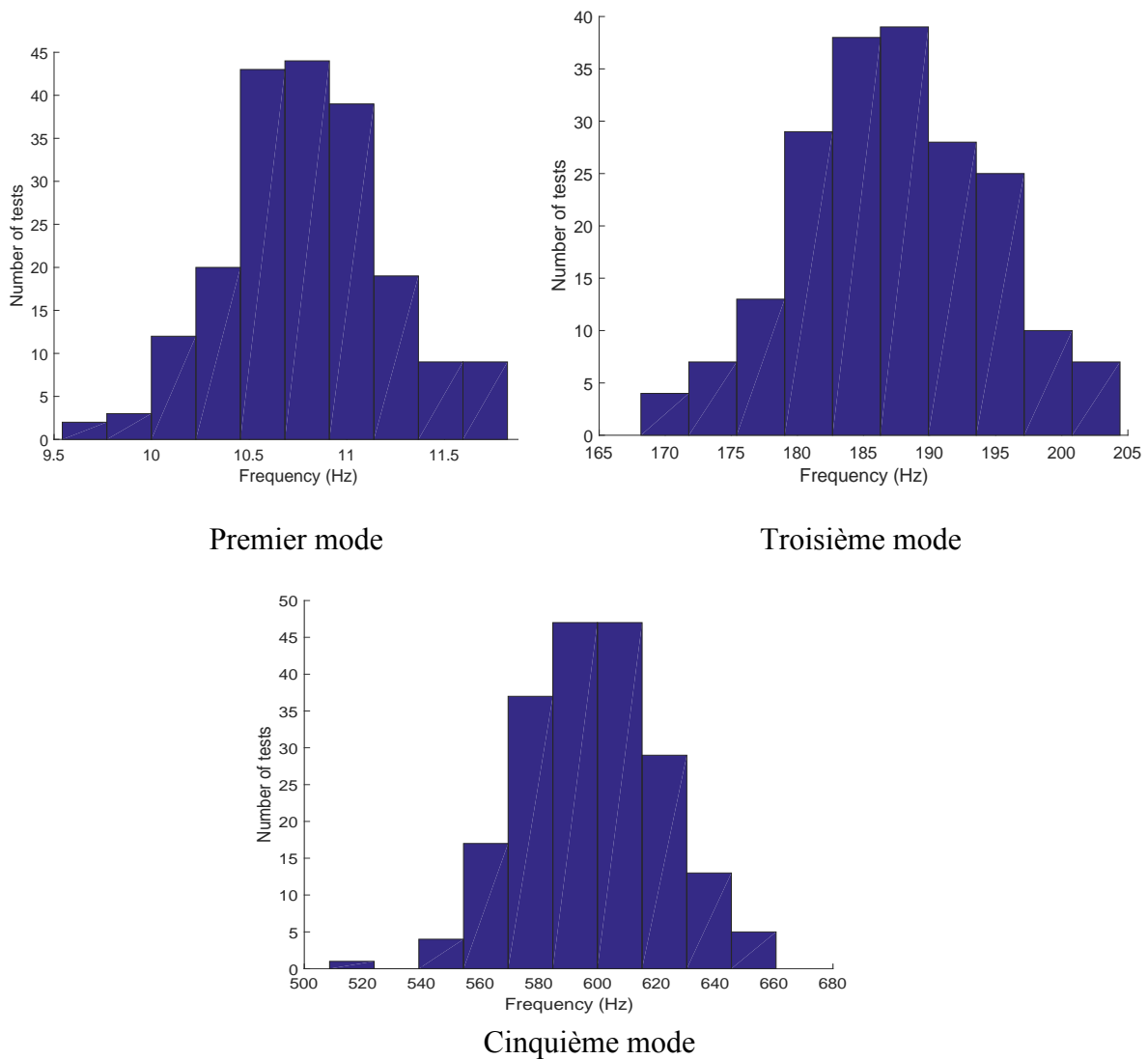


Figure IV.19 : Variation des fréquences de résonances du premier, troisième et cinquième mode de la poutre sandwich 1

Ainsi, les variations des fréquences de résonance et du facteur de perte de la poutre 1 au premier, troisième et cinquième mode sont respectivement représentées sous forme d'histogramme sur les figures IV.19 et IV.20. Les données issues de ces variations serviront comme paramètres d'entrées à notre modèle d'identification inverse.

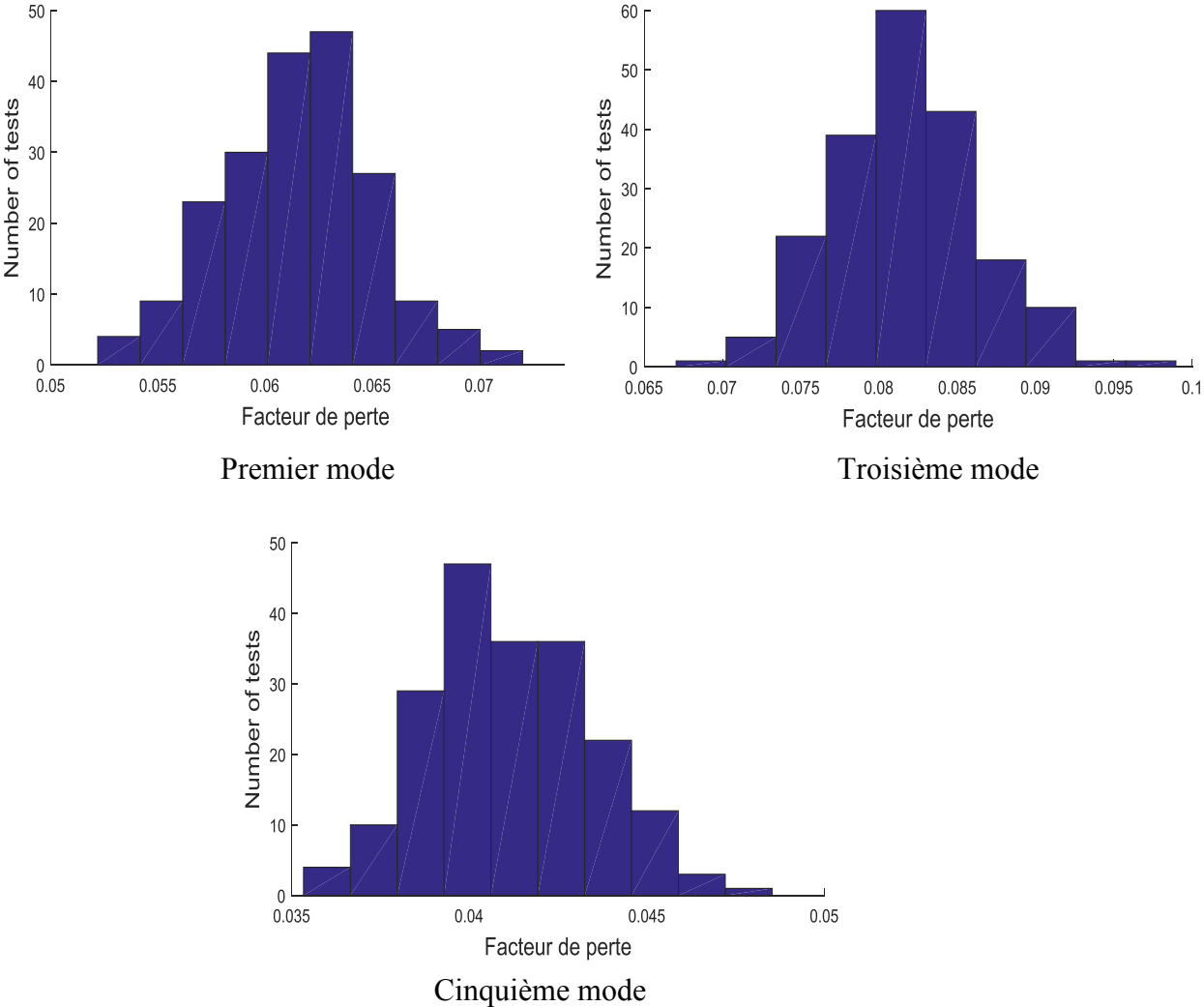


Figure IV.20 : Variation des facteurs de perte du premier, troisième et cinquième mode de la poutre sandwich 1

### IV.3.2.2 Impact sur le module de cisaillement de la couche viscoélastique

La sensibilité des paramètres modaux implique une grande variation du module de cisaillement de la couche viscoélastique. La figure IV.21 montre la variation croissante du module de cisaillement de la couche viscoélastique en fonction de la fréquence. En considérant le premier, troisième, cinquième et septième mode de résonance nous observons un écart type  $< 30\%$ , ce qui est relativement élevé mais qui est un biais constant. Il apparaît alors la perturbation des données d'entrée à savoir les paramètres modaux par une loi normale n'implique pas la détermination d'un module de cisaillement avec une variabilité en loi normale.

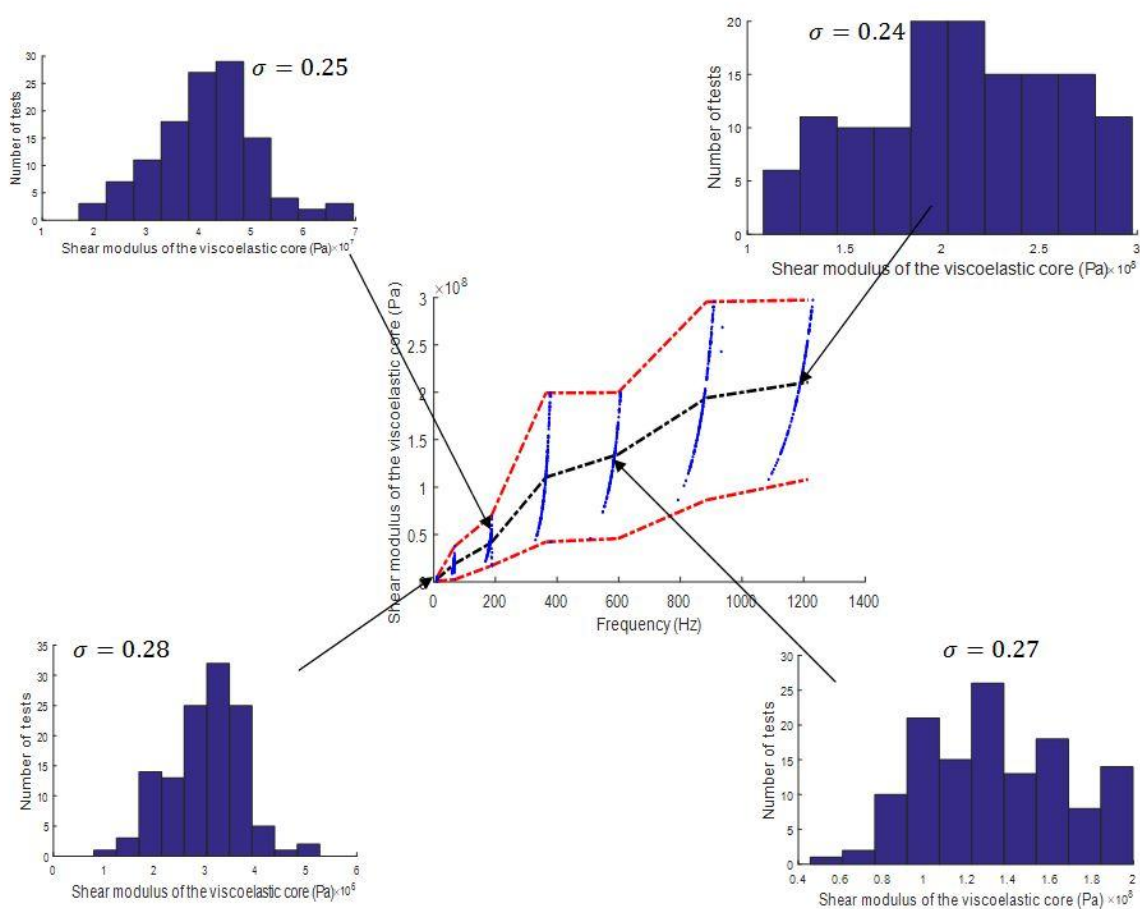


Figure IV.21 : Impact de la sensibilité des paramètres modaux sur le module de cisaillement de la couche viscoélastique

### IV.3.2.3 Impact de la sensibilité sur le facteur de perte de la couche viscoélastique

La sensibilité des paramètres modaux implique une variation du facteur de perte de la couche viscoélastique. La figure IV.22 montre la variation du facteur de perte de la couche viscoélastique en fonction de la fréquence. Comme dans la section précédente, un écart type de l'ordre de 30% est observé au premier, troisième, cinquième et septième mode de résonance. L'écart type est relativement élevé et il apparaît comme à l'instar du module de cisaillement que le facteur de perte déterminé ne varie pas comme une loi normale.

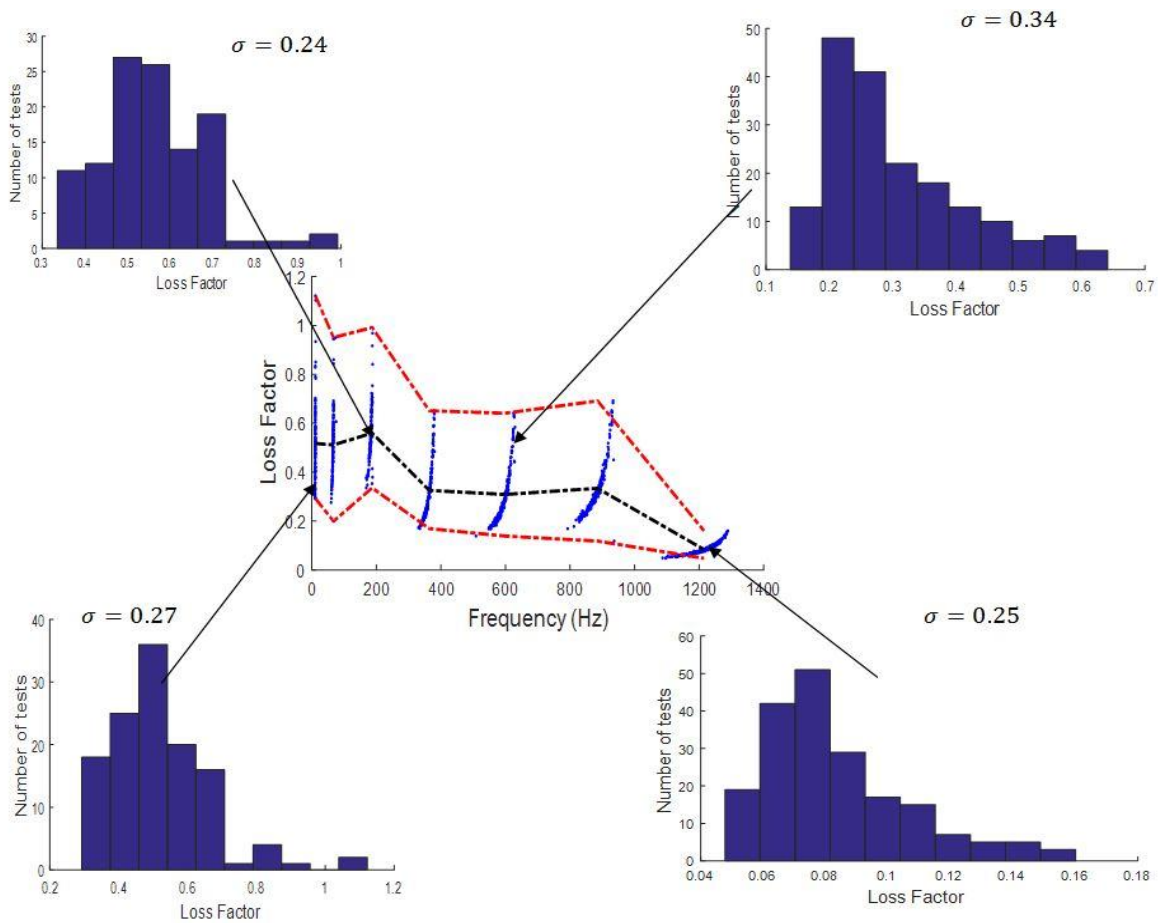


Figure IV.22 : Impact de la sensibilité des paramètres modaux sur le facteur de perte de la couche viscoélastique

#### **IV.4. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons étudié dans un premier temps, la reproductibilité de la méthode expérimentale sur un échantillon type. Nous avons pu montrer que nous avons une bonne reproductibilité sur les fréquences de résonance sur un même échantillon grâce notamment à une procédure expérimentale qui contrôle le serrage. Puis, nous avons étudié la reproductibilité dans une population d'échantillon. Ces variations sur les fréquences de résonances inférieures à 5% ont été propagées sur la détermination des propriétés mécaniques obtenues par notre méthode d'identification inverse.

Ensuite, l'impact de la sensibilité et de la robustesse des paramètres géométriques et modaux sur la détermination des propriétés mécaniques par notre méthode d'identification inverse est étudié. Les paramètres géométriques introduisent plus ou moins de variabilités sur la détermination des propriétés mécaniques en fonction de leur qualité. En effet, l'influence de la variation de 10% en loi normale de longueur de la poutre sur cette détermination est plus importante que celle de la largeur ou même des épaisseurs des couches.

Il apparaît que lorsque les paramètres modaux sont soumis à une sensibilité sous forme de distribution de loi normale, le module de cisaillement et le facteur de perte identifiés ne vérifient pas forcément cette loi normale. Il serait alors intéressant de pouvoir étudier d'autres types de lois de variation pour en mesurer l'impact. Il apparaît dans la littérature que d'autres lois de probabilité (log normale, gamma, beta, etc) estiment la variabilité des essais expérimentaux. Ce type de loi pourrait être évalué dans un travail futur avec un nombre de spécimen plus important.

## Conclusions et perspectives

---

Les matériaux composites viscoélastiques sont de plus en plus utilisés dans de nombreuses applications industrielles leurs propriétés amortissantes des vibrations. Grâce à leurs propriétés amortissantes de vibrations, les matériaux viscoélastiques sont de plus en plus utilisés dans de nombreux domaines industriels. Ces matériaux viscoélastiques sont souvent utilisés sous forme de matériaux sandwichs viscoélastiques constitués d'une fine couche viscoélastique intercalée entre deux couches élastiques, mais leurs caractérisations se sont faites soit de manière analytique, numérique et en ne considérant que la couche viscoélastique, ainsi le caractère fonctionnel du matériau n'est pas pris en compte. Dans cette thèse, nous mettons en place une nouvelle méthode d'identification inverse d'un matériau viscoélastique intercalé entre deux couches élastiques, de manière à remédier à l'insuffisance des classiques méthodes d'identification.

Dans le premier chapitre consacré à la revue bibliographique, nous avons fait un tour d'horizon de l'état de l'art des différents aspects des problèmes abordés dans ce travail. Dans un premier temps, nous avons passé en revue les différentes techniques de résolution numérique des problèmes linéaires et non linéaires aux valeurs propres complexes résultant de la formulation du problème de vibrations des structures et les différentes méthodes d'identification et de modélisation des structures sandwichs viscoélastiques. Cela nous a permis de mettre en exergue les limites rencontrées dans le calcul des propriétés modales et dans l'identification des propriétés mécaniques de matériaux constituant les structures sandwichs viscoélastiques. En effet, ces techniques de d'identification ne tiennent pas compte pour la plupart du caractère fonctionnel du matériau viscoélastique. C'est pour cela que nous proposons de mettre en place une nouvelle méthode d'identification inverse permettant de caractériser le matériau en deux faces élastiques prenant ainsi en compte toutes les contraintes auxquelles seront soumis le matériau en fonctionnement.

Dans le second chapitre, la nouvelle méthode d'identification inverse proprement dite a été développée. C'est une méthode d'identification basée sur un algorithme de résolution type méthode asymptotique numérique (MAN) développé par Daya et Potier-Ferry et sur la boîte à outil de différentiation automatique (DA) conçue par Koutsawa et al. qui permet le

calcul des séries de Taylor. Elle est scindée en deux étapes, la première étape consistant à déterminer les paramètres modaux de la poutre sandwich viscoélastique à travers un essai expérimental et la seconde étape faisant appel à l'approche inverse proprement dite. Cette approche inverse qui est une procédure itérative de détermination des propriétés mécaniques du matériau et des formes de mode de vibration en fonction des paramètres du matériau a été validée par les formules analytiques et par une approche d'optimisation standard. L'importance de la méthode d'identification inverse pour caractériser les propriétés mécaniques des matériaux viscoélastiques contraints entre deux faces élastiques a une fois de plus été prouvé par le fait que les résultats obtenues en utilisant les équations de Ross-Kerwin-Ungar (RKU) s'avèrent sous estimer la valeur du module de cisaillement pour les basses et moyennes fréquences.

Le troisième chapitre est consacré à l'identification les caractéristiques mécaniques du matériau viscoélastique et a aussi permis à éprouver les performances de ces dernières en situation ; ceci afin de répondre à la nécessité de confort de la part des consommateurs. Pour se faire, nous avons développé dans un premier temps des lois de comportement pour ce matériau viscoélastique en se basant sur les modèles rhéologiques de Maxwell généralisé, ADF et GHM. Ensuite, nous avons validé ses lois de comportement sur les poutres sandwichs 1 et 2, en comparant les spectres expérimentaux de vibrations et les spectres numériques obtenus en utilisant ces dernières lois. Enfin, il a été procédé à l'étude de l'effet de la température sur le matériau viscoélastique dans le but d'éprouver la méthode de caractérisation. Ainsi, des caractérisations du matériau viscoélastique ont été faites à diverses températures avec à la suite des lois de comportement à ces différentes températures en se basant toujours sur les modèles rhéologiques de Maxwell généralisé, ADF et GHM.

Dans le dernier chapitre, nous avons étudié dans un premier temps, la reproductibilité de la méthode expérimentale sur un échantillon type, et la reproductibilité dans une population d'échantillon. Cette variation a ensuite été propagée sur la détermination des propriétés mécaniques obtenues par notre méthode d'identification inverse. Ensuite, notre étude a porté sur l'impact de la sensibilité et de la robustesse des paramètres géométriques et modaux sur la détermination des propriétés mécaniques issues de notre méthode d'identification inverse. Il apparaît alors que les propriétés mécaniques identifiées ne vérifient pas la même loi de variation lorsque les paramètres modaux sont soumis à une sensibilité sous forme de distribution de loi normale. Il serait alors intéressant de pouvoir étudier d'autres

types de lois de variation pour en mesurer l'impact. Il apparait dans la littérature que d'autre loi de probabilité estime la variabilité des essais expérimentaux. Ce type de loi pourrait être évalué dans un travail futur avec un nombre de spécimen plus important.

Les perspectives que nous pouvons envisager à ce stade de cette étude sont de poursuivre nos investigations sur le comportement des sandwichs viscoélastiques notamment en élargissant sur les structures plaques et aussi sur la prise en compte des phénomènes non-linéarité géométriques. D'autres lois de variation peuvent aussi être appliquées aux paramètres modaux afin d'étudier leurs impacts sur les caractéristiques mécaniques déterminées.



## Références bibliographiques

---

- [1] F. Fahy and J. Walker, *Fundamentals of Noise and Vibration*. E&FN Spon, New York, 1998.
- [2] M. P. Norton and D. G. Karczub, *Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers, 2nd ed.* Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [3] A. Thumann and R. K. Miller, “Fundamentals of Noise Control Engineering,” *Fairmont Press. Atlanta, GA*, 1986.
- [4] F. J. Plantema, *Sandwich construction: The Bending and Buckling of Sandwich Beams, Plates and Shells*. Wiley, New York, 1966.
- [5] H. G. Allen and Z. N. Feng, “Classification of structural sandwich panel behaviour,” *proceeding EuroMech 360 Colloquium, Saint-Etienne, Fr.*, pp. 1–12, 1997.
- [6] E. Nilsson and A. C. Nilsson, “Prediction and measurement of some dynamic properties of sandwich structures with honeycomb and foam cores,” *J. Sound Vib.*, vol. 251, no. 3, pp. 409–430, 2002.
- [7] S. S. Tavalaelly, “Wave Propagation in Sandwich Structures,” PhD Thesis, Department of Vehicle Engineering, the Marcus Wallenberg Laboratory for Sound and Vibration Research, Stockholm, 2001.
- [8] I. M. Daniel and J. L. Abot, “Fabrication, testing and analysis of composite sandwich beams,” *Compos. Sci. Technol.*, vol. 60, pp. 2455–2463, 2000.
- [9] A. D. Nashif and D. I. G. Jones, *Vibration Damping*. Wiley, New York, 1985.
- [10] P. R. Cunningham and R. G. White, “A new measurement technique for the estimation of core shear strain in closed sandwich structures,” *Compos. Struct.*, vol. 51, pp. 319–334, 2001.
- [11] T. Saito, R. D. Parbery, S. Okuno, and S. Kawano, “Parameter identification for aluminium honeycomb sandwich panels based on orthotropic Timoshenko beam theory,” *J. Sound Vib.*, vol. 208, no. 2, pp. 271–287, 1997.
- [12] P. Parneix and D. Lucas, *Les structures composites en construction navale militaire*. Tech. Rep. AM5665, Les techniques de l’ingénieur, 2010.

- [13] A. Paul, A. Schmidt, and E. Wolf, “Acoustically optimized propeller made from composite materials,” *ThyssenKrupp techforum*, vol. 1, pp. 58–63, 2011.
- [14] C. Audoly, Y. Renou, and M. Priser, “Matériaux acoustiques pour la furtivité,” *Res. - Les avancées Sci. Technol. DCNS 1*, pp. 52–53, 2013.
- [15] C. Howard, “Recent developments in submarine vibration isolation and noise control,” in *In Proceedings of the 1st Submarine Science Technology and Engineering Conference*, 2011.
- [16] S. Subramanian, R. Surampudi, K. R. Thomson, and S. Vallurupalli, “Optimization of Damping Treatment for Structure Borne Noise Reduction,” in *In Proceedings of the SAE 2003 Noise & Vibration Conference and Exhibition*, 2003, no. 724.
- [17] M. Bilasse, I. Charpentier, E. M. Daya, and Y. Koutsawa, “A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part II: Homotopy and complex nonlinear eigenvalue method,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 198, no. 49–52, pp. 3999–4004, 2009.
- [18] F. M. Guillot and D. H. Trivett, “Complete elastic characterization of viscoelastic materials by dynamic measurements of the complex bulk and Young’s moduli as a function of temperature and hydrostatic pressure,” *J. Sound Vib.*, vol. 330, pp. 3334–3351, 2011.
- [19] T. Pritz, “Measurement methods of complex Poisson’s ratio of viscoelastic materials,” *Appl. Acoust.*, vol. 60, no. 3, pp. 279–292, 2000.
- [20] L. Rouleau, “Modélisation vibro-acoustique de structures sandwich munies de matériaux viscoélastiques,” PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers (CNAM), 2014.
- [21] D. Backström, “Vibration of sandwich beams,” PhD thesis KTH Stockholm, 2006.
- [22] C. A. Gallimore, “Passive Viscoelastic Constrained Layer Damping Application for a Small Aircraft Landing Gear System,” Master’s thesis Virginia Polytechnic Institute and State University, 2008.
- [23] J.-L. Wojtowicki, L. Jaouen, and R. Panneton, “A new approach for the measurement of damping properties of materials using the Oberst beam,” *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 75, no. 8, pp. 2569–2574, 2004.

- [24] ASTM International. ASTM E756-05, “Standard test method for measuring vibration damping properties of materials,” 2010.
- [25] D. Ross, E. E. Ungar, and E. M. Kerwin, “Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae,” *Am. Soc. Mech. Eng.*, pp. 49–87, 1959.
- [26] A. D. Nashif and D. I. G. Jones, “Vibration damping,” *Wiley-Interscience*, pp. 203–212, 1985.
- [27] J. Salençon, *Viscoélasticité pour le calcul des structures*. Les Éditions de l’École polytechnique, Presses de l’école nationale des Ponts et Chaussées (ENPC)., 2009.
- [28] J. Mandel, *Sur les corps viscoélastiques linéaires à comportement linéaire*. C.R. As. Sc.Paris, 1955.
- [29] R. M. Christensen, *Theory of viscoelasticity: An Introduction*. Academic Press, New York, 1982.
- [30] J. Salençon, *Viscoélasticité*. Presse de l’école nationale des ponts et chaussées, Paris, 1983.
- [31] B. Persoz, *La rhéologie*. Masson & Cie, 1969.
- [32] J. Mandel, *Cours de mécanique des milieux continus*. Tome II, Gauthiers-Villars, Paris, France, 1966.
- [33] G. A. Lesieutre and E. Bianchini, “Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields,” *J. Vib. Acoust.*, vol. 117, no. 4, pp. 424–430, 1995.
- [34] G. A. Lesieutre, E. Blanching, and A. Maiani, “Finite element modeling of one-dimensional viscoelastic structures using anelastic displacement fields,” *J. Guid. Control Dyn.*, vol. 19, no. 3, pp. 520–527, 1996.
- [35] G. A. Lesieutre, “Finite element for dynamic modeling of uniaxial rods with frequency dependent material properties,” *Int. J. Solids Struct.*, no. 29, pp. 1567–1579, 1992.
- [36] D. F. Golla and P. C. Hughes, “Dynamics of viscoelastic structures - A timedomain finite formulation,” *J. Appl. Mech.*, no. 52, pp. 897–906, 1985.
- [37] D. J. Mctavish and P. C. Hughes, “Modeling of linear viscoelastic space structures,” *J. Vib. Acoust.*, no. 115, pp. 103–110, 1993.
- [38] J. Salmanoff, “A finite element, reduced order, frequency dependent model of

- viscoelastic damping,” Mémoire de D.E.A., Faculty of Virginia Polytechnic Institute, 1997.
- [39] S. Havriliak and S. Negami, “A complex plane representation of dielectric and mechanical relaxation processes in some polymers,” *Polymer (Guildf)*., no. 8, pp. 161–210, 1967.
- [40] R. L. Bagley and P. J. Torvik, “A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity,” *J. Rheol. (N. Y. N. Y.)*., no. 27, 3, pp. 201–210, 1983.
- [41] T. Pritz, “Frequency dependences of complex moduli and complex Poisson’s ratio of real solid materials,” *J. Sound Vib.*, vol. 214, pp. 83–104, 1998.
- [42] G. Kergoulay, “Mesure et prédiction vibroacoustique de structures viscoélastiques: application à une enceinte acoustique,” PhD thesis, Ecole Centrale de Paris, 2004.
- [43] I. Emri, “Rheology of solid polymers,” *Rheol. Rev.*, no. 3, pp. 49–100, 2005.
- [44] E. J. Parry and D. Tabor, “Pressure dependence of the shear modulus of various polymers,” *J. Polym. Sci.*, vol. 9, pp. 289–292, 1974.
- [45] W. Moonan and N. Tschoegl, “Effect of pressure on the mechanical properties of polymers. Expansivity and compressibility measurements,” *Macromolecules*, no. 16, pp. 55–59, 1983.
- [46] K. Shaska, R. A. Ibrahim, and R. F. Gibson, “Influence of excitation amplitude on the characteristics of nonlinear butyl rubber isolators,” *Nonlinear Dyn.*, no. 47, pp. 83–104, 2007.
- [47] W. W. Graessley, “Effect of long branches on the temperature dependence of viscoelastic properties in polymer melts,” *Macromolecules*, no. 15, pp. 1164–1167, 1982.
- [48] S. Hatzikiriakos, “Long chain branching and polydiversity effects on the rheological properties of polyethylenes,” *Polym. Eng. Sci.*, vol. 40, no. 11, pp. 2279–2287, 2000.
- [49] H. Park, J. Dealy, and H. Münstedt, “Influence of long-chain branching on time-pressure and time-temperature shift factors for polystyrene and polyethylene,” *Rheol. Acta*, no. 46, pp. 153–159, 2006.
- [50] J. A. Resh, F. J. Stadler, J. Kaschta, and H. Münstedt, “Temperature dependence of the linear steady-state shear compliance of linear and long-chain branched polyethylenes,”

- Macromolecules*, no. 42, pp. 5676–5683, 2009.
- [51] J. J. Aklonis and W. J. Mac Knight, *Introduction to polymer Viscoelasticity*. E.d. Wiley, second Edition, 1983.
- [52] J. D. Ferry, *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley and Sons, 1980.
- [53] P. T. Weissman and R. P. Chartoff, “Extrapolating Viscoelastic Data in the Temperature-Frequency Domain,” in *Sound and vibration damping with polymers*, American Chemical Society, 1990, p. Chap 7.
- [54] D. Plazek, “Temperature dependence of the viscoelastic behavior of polystyrene.,” *J. Phys. Chem.*, no. 69, pp. 3480–3487, 1965.
- [55] M. L. Williams, R. F. Landel, and J. D. Ferry, “The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids,” *J. Am. Chem. Soc.*, no. 77, pp. 3701–3707, 1955.
- [56] A. E. H. Love, *The mathematical theory of elasticity*, 4th editio. Cambridge University Press, 1927.
- [57] E. Reissner, “The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates,” *J. Appl. Mech.*, vol. 12, pp. 69–76, 1945.
- [58] R. D. Mindlin, “Influence of rotatory inertia effect and shear deformation in flexural motions of isotropic elastic plates,” *J. Appl. Mech.*, vol. 18, pp. 1031–1036, 1951.
- [59] M. Touratier, “An efficient standard plate theory,” *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 29, no. 8, pp. 901–916, 1991.
- [60] J. N. Reddy, “A simple higher-order theory of laminated composite plate,” vol. 51, pp. 745–752, 1984.
- [61] D. K. Rao, “Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions,” *Mech. Eng. Sci.*, vol. 20, pp. 271–282, 1978.
- [62] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-ferry, and E. M. Daya, “Review and assessment of various theories for modeling sandwich composites,” *Compos. Struct.*, vol. 84, no. 3, pp. 282–292, 2008.
- [63] E. Carrera, “On the use of the Murakami’s zig-zag function in the modeling of layered plates and shells,” *Comput. Struct.*, vol. 82, pp. 541–554, 2004.
- [64] S. Brischetto, E. Carrera, and L. Demasi, “Improved bending analysis of sandwich

- plates using a zig-zag function,” *Compos. Struct.*, vol. 89, no. 3, pp. 408–415, 2009.
- [65] H. Murakami, “Laminated composite plate theory with improved in-plane responses,” *J. Appl. Mech.*, vol. 53, pp. 661–666, 1986.
- [66] E. M. Kerwin, “Damping of flexural waves by a constrained viscoelastic layer,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 31, no. 7, pp. 952–962, 1959.
- [67] D. R. and E. M. Kerwin, “Damping of flexural vibration in plates by free and constrained viscoelastic layers,” Technical report, BBN Report 623, 1959.
- [68] Y. Y. Yu, “Damping of flexural vibrations of sandwich plates,” *J. Aerosp. Sci.*, vol. 29, pp. 790–803, 1962.
- [69] R. A. Ditaranto, “Theory of vibratory bending for elastic and viscoelastic layered finite length beams,” *Trans. Am. Soc. Mech. Eng. J. Appl. Mech.*, vol. 87, pp. 881–886, 1965.
- [70] W. DiTaranto, R.A., Blasingame, “Composite loss factors of selected laminated beams,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 40, pp. 187–194, 1966.
- [71] W. DiTaranto, R.A., Blasingame, “Effect of end constraints on the damping of laminated beams,” *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 39, no. 2, pp. 405–413.
- [72] D. J. Mead and S. Markus, “The forced vibration of a three-layer, damped sandwich beam with arbitrary boundary conditions,” *J. Sound Vib.*, vol. 10, no. 2, pp. 163–175, 1969.
- [73] D. J. Mead and S. Markus, “Loss factors and resonant frequencies of encastred damped sandwich beams,” *J. Sound Vib.*, vol. 12, pp. 99–112, 1970.
- [74] M. J. Yan and E. H. Dowell, “Governing equations for vibrating constrained-layer damping of sandwich plates and beams,” *J. Appl. Mech.*, vol. 39, pp. 1041–1046, 1972.
- [75] V. Oravsky, S. Markus, and O. Simkova, “A new approximate method of finding the loss factors of a sandwich cantilever,” *J. Sound Vib.*, vol. 33, pp. 335–352, 1974.
- [76] D. J. Mead, “A comparison of some equations for the flexural vibration of damped sandwich beams,” *J. Sound Vib.*, vol. 83, no. 3, pp. 363–377, 1982.
- [77] C. D. Johnson and D. A. Kienholz, “Finite element prediction of damping in structures with constrained viscoelastic layers,” *Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. J.*, vol. 20, no. 9, pp. 1284–1290, 1982.

- [78] E. M. Daya and M. Potier-Ferry, “A shell finite element for viscoelastically damped sandwich structures,” *Rev. Eur. des Eléments Finis*, vol. 11, pp. 39–56, 2002.
- [79] M. Bilasse, “Modélisation numérique des vibrations linéaires et non linéaires des structures sandwichs à âme viscoélastique,” Thèse de doctorat, Université Paul Verlaine de Metz., 2010.
- [80] M. Bilasse, L. Azrar, and E. M. Daya, “Complex modes based numerical analysis of viscoelastic sandwich plates vibrations,” *Comput. Struct.*, vol. 89, no. 7–8, pp. 539–555, 2011.
- [81] M. Soni, “Finite element analysis of viscoelastically damped sandwich structures,” *Shock Vib. Bull.*, vol. 55, no. 1, pp. 1005–1015, 1981.
- [82] R. Rikards, A. Chate, and E. Barkanov, “Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites,” *Comput. Struct.*, vol. 47, no. 6, pp. 1005–1015, 1993.
- [83] X. Chen, H. L. Chen, and X. L. Hu, “Damping prediction of sandwich structures by order-reduction-iteration approach,” *J. Sound Vib.*, vol. 222, no. 5, pp. 803–812, 1999.
- [84] K. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, 1982.
- [85] M. Brezinski, C. et Redivo-Zaglia, *Méthodes numériques itératives*. 1ère édition. Ellipses., 2006.
- [86] B. A. Ma and J. F. He, “A finite element analysis of viscoelastically damped sandwich plates,” *J. Sound Vib.*, vol. 152, no. 1, pp. 107–123, 1992.
- [87] H. Voss, “An Arnoldi method for nonlinear eigenvalue problems,” *BIT Numer. Math.*, vol. 44, pp. 387–401, 2004.
- [88] G. Meurant, *Computer solution of large linear systems*. Studies in Mathematics and its Applications, 28., 1999.
- [89] E. M. Daya and M. Potier-Ferry, “A numerical method for nonlinear eigenvalue problems application to vibrations of viscoelastic structures,” *Comput. Struct.*, vol. 79, no. 5, pp. 533–541, 2001.
- [90] L. Duigou, E. M. Daya, and M. Potier-Ferry, “Iterative algorithms for non-linear eigenvalue problems. Application to vibrations of viscoelastic shells,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, no. 11–12, pp. 1323–1335, 2003.

- [91] K. S. Ledi, M. Hamdaoui, G. Robin, and E. M. Daya, “An identification method for frequency dependent material properties of viscoelastic sandwich structures,” *J. Sound Vib.*, vol. 428, pp. 13–25, 2018.
- [92] I. Elkhaldi-Mkaouar, *Application de la Différentiation Automatique pour l’identification, l’optimisation et l’étude de sensibilité dans quelques problèmes mécaniques*. Thèse de doctorat, Université de Lorraine, 2012.
- [93] U. Zsolt, L. Lasdon, J. C. Plummer, F. Glover, J. Kelly, and R. Martí, “Scatter Search and Local NLP Solvers: A Multistart Framework for Global Optimization,” *INFORMS J. Comput.*, vol. 19, no. 3, pp. 328–340, 2007.
- [94] Y. Shi, H. Sol, and H. Hua, “Material parameter identification of sandwich beams by an inverse method,” *J. Sound Vib.*, vol. 290, pp. 1234–1255, 2006.
- [95] T. Lekszycki, N. Olhoff, and J. J. Pedersen, “Modelling and identification of viscoelastic properties of vibrating sandwich beams,” *Compos. Struct.*, vol. 22, no. 1, pp. 15–31, 1992.
- [96] F. S. Barbosa and M. C. R. Farage, “A finite element model for sandwich viscoelastic beams: experimental and numerical assessment,” vol. 317, pp. 91–111, 2008.
- [97] E. Barkanov, E. Skukis, and B. Petitjean, “Characterisation of viscoelastic layers in sandwich panels via an inverse technique,” *J. Sound Vib.*, vol. 327, no. 3–5, pp. 402–412, 2009.
- [98] I. Elkhaldi, I. Charpentier, and E. M. Daya, “A gradient method for viscoelastic behaviour identification of damped sandwich structures,” *C. R. Mec.*, vol. 340, no. 8, pp. 619–623, 2012.
- [99] M. Martinez-Agirre and M. J. Elejabarrieta, “Dynamic characterization of high damping viscoelastic materials from vibration test data,” *J. Sound Vib.*, vol. 330, pp. 3930–3943, 2011.
- [100] T. Wassereau, F. Ablitzer, C. Pézerat, and J. Guyader, “Experimental identification of flexural and shear complex moduli by inverting the Timoshenko beam problem,” *J. Sound Vib.*, vol. 399, pp. 86–103, 2017.
- [101] W. Sun, Z. Wang, X. Yan, and M. Zhu, “Inverse identification of the frequency-dependent mechanical parameters of viscoelastic materials based on the measured FRFs,” *Mech. Syst. Signal Process.*, vol. 98, pp. 816–833, 2018.



- [102] Y. Koutsawa, I. Charpentier, E. M. Daya, and M. Cherkaoui, “A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. Part I : The Diamant toolbox.,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 198, no. 3–4, pp. 572–577, 2008.
- [103] M. Bilasse, E. M. Daya, and L. Azrar, “Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams,” *J. Sound Vib.*, vol. 329, no. 23, pp. 4950–4969, 2010.
- [104] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois, *Méthode des éléments finis*. Hermes Sciences., 2005.
- [105] J. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [106] R. Rickards, A. Chate, and E. Barkanov, “Finite element analysis of damping the vibrations of laminated composites,” vol. 47, no. 6, pp. 1005–1015, 1993.
- [107] K. Schreiber, “Nonlinear Eigenvalue Problems: Newton-type Methods and Nonlinear Rayleigh Functionals,” Ph.D. thesis, Technischen Universität Berlin, 2008.
- [108] I. Charpentier and M. Potier-ferry, “Différentiation automatique de la méthode asymptotique numérique typée : l’approche Diamant,” vol. 336, pp. 336–340, 2008.
- [109] M. Hamdaoui, K. Akoussan, and E. M. Daya, “Comparison of non-linear eigensolvers for modal analysis of frequency dependent laminated viscoelastic sandwich plates,” *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 121, pp. 75–85, 2016.
- [110] A. K. Chopra, *Dynamics of Structures*. third ed., Prentice Hall, New Jersey, 2007.
- [111] W. E. Arnoldi, “The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem,” *Q. Appl. Math.*, vol. 9, no. 2, pp. 17–29, 1951.
- [112] M. Hamdaoui, F. Druesne, and E. M. Daya, “Variability analysis of frequency dependent visco-elastic three-layered beams,” *Compos. Struct.*, vol. 131, pp. 238–247, 2015.
- [113] F. Druesne, M. Hamdaoui, P. Lardeur, and E. M. Daya, “Variability of dynamic responses of frequency dependent visco-elastic sandwich beams with material and physical properties modeled by spatial random fields,” *Compos. Struct.*, 2016.
- [114] F. Druesne, M. Hamdaoui, Q. Yin, and E.M.Daya, “Variability Analysis of Modal Characteristics of Frequency- Dependent Visco-Elastic Three- Layered Sandwich Beams With Spatial Random Geometrical and Material Properties,” vol. 139, no. 6, pp. 1–10, 2018.



## Résumé

---

Dans ce travail de thèse, une méthode d'identification inverse des propriétés mécaniques du matériau viscoélastique (module de cisaillement  $G_0$  et facteur de perte  $\eta_c$ ) fonctionnalisé dans une structure sandwich à trois couches symétriques est proposée. L'objectif de ce travail est de pouvoir identifier les propriétés mécaniques in situ. A travers un modèle éléments finis basé sur le modèle Zig-Zag de Rao, notre modèle assure la détermination des paramètres modaux de la poutre sandwich. L'approche inverse consiste en une procédure itérative qui détermine les formes de mode étant donné les paramètres matériaux puis calcule les propriétés viscoélastiques à partir des modes en utilisant un quotient de Rayleigh jusqu'à ce que la convergence sur les propriétés du matériau soit satisfaite. Les paramètres d'entrée du modèle inverse sont les fréquences de résonance et facteurs de perte de la poutre sandwich obtenues expérimentalement. En conséquence, la dépendance en fréquence des propriétés du matériau viscoélastique de la poutre sandwich est déterminée par une démarche automatisée. La méthode a été comparée avec succès aux formules de Ross-Kerwin-Ungar ; à une approche d'optimisation standard et à la littérature.

A partir des résultats, nous avons pu déduire les lois de comportement du cœur viscoélastique suivant des modèles rhéologique tels que le modèle de Maxwell généralisé, d'ADF, de GHM et du Zéner fractionnaire. Ce dispositif expérimental couplé à la méthode d'identification a permis l'investigation des paramètres modaux de la poutre à différentes températures pour étudier l'effet de la température sur les lois rhéologiques.

Pour étudier la robustesse de notre méthode, nous avons procédé des essais de reproductibilité, de reproductibilité sur une population d'échantillon. L'efficacité de notre méthode étant été prouvée, une étude de sensibilité a été menée sur les caractéristiques géométriques de notre structure et les paramètres d'entrée. Les résultats obtenus montrent le fort impact de certains paramètres sur l'identification.

## Abstract

In this work, an inverse identification method of the mechanical properties of the viscoelastic material (shear modulus  $G_0$  and loss factor  $\eta_c$ ) functionalized in a sandwich structure with three symmetrical layers is proposed. The objective of this work is to be able to identify the mechanical properties in situ. Through a finite element model based on Rao's Zig-Zag model, our model ensures the modal parameter determination of the sandwich beam. The inverse approach consists of an iterative procedure that determines the mode shapes given the material parameters and then calculates the viscoelastic properties from the modes using a Rayleigh quotient until convergence on the properties of the material is satisfied. The input parameters of the inverse model are the resonance frequencies and loss factors of the sandwich beam obtained experimentally. As a result, the frequency dependence of the viscoelastic properties of the sandwich beam is determined by an automated way. The method has been successfully compared to Ross-Kerwin-Ungar formulas; a standard optimization approach and the literature.

From the results, we have been able to deduce the constitutive laws of the viscoelastic heart according to rheological models such as the generalized Maxwell model, ADF, GHM and fractional Zener. This experimental device coupled to the method of identification allowed the investigation of modal parameters of the beam at different temperatures to study the effect of the temperature on the rheological laws. To study the robustness of our method, we carried out tests repeatability, reproducibility on a sample population. Since the effectiveness of our method has been proven, a sensitivity study has been carried out on the geometrical characteristics of our structure and the input parameters. The results obtained show the strong impact of certain parameters on identification.

