

Étude expérimentale et modélisation micromécanique du comportement de composites hybrides : optimisation de la conductivité thermique

Antoine Jeancolas

▶ **To cite this version:**

Antoine Jeancolas. Étude expérimentale et modélisation micromécanique du comportement de composites hybrides : optimisation de la conductivité thermique. Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]. Université de Lorraine, 2018. Français. NNT : 2018LORR0285 . tel-02109674

HAL Id: tel-02109674
https://hal.univ-lorraine.fr/tel-02109674

Submitted on 25 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AVERTISSEMENT

Ce document est le fruit d'un long travail approuvé par le jury de soutenance et mis à disposition de l'ensemble de la communauté universitaire élargie.

Il est soumis à la propriété intellectuelle de l'auteur. Ceci implique une obligation de citation et de référencement lors de l'utilisation de ce document.

D'autre part, toute contrefaçon, plagiat, reproduction illicite encourt une poursuite pénale.

Contact : ddoc-theses-contact@univ-lorraine.fr

LIENS

Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 122. 4
Code de la Propriété Intellectuelle. articles L 335.2- L 335.10
http://www.cfcopies.com/V2/leg/leg_droi.php
http://www.culture.gouv.fr/culture/infos-pratiques/droits/protection.htm

THESE

Présentée pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université de Lorraine

Spécialiste : Sciences des Matériaux

Par

Antoine JEANCOLAS

Étude expérimentale et modélisation micromécanique du comportement de composites hybrides; optimisation de la conductivité thermique

---

Soutenue le 20 novembre 2018, devant le jury composé de :

Stefano GIORDANO	Chargé de Recherche CNRS-HDR à l'Institut d'Electronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie Villeneuve d'Ascq	Rapporteur
Yao KOUTSAWA	Chercheur-HDR au LIST	Rapporteur
Marie-Christine BAIETTO	Directeur de recherche CNRS INSA Lyon	Examinateur
Larbi SIAD	Professeur à l'Université de Reims	Examinateur
Marion MARTINY	Professeur à l'Université de Lorraine	Examinateur
Hafid SABAR	Professeur à l'Université de Lorraine	Directeur de thèse
Florence DINZART	Maître de conférences-HDR à l'Université de Lorraine	Co-directeur de thèse
Napo BONFOH	Maître de conférences-HDR à l'Université de Lorraine	Co-encadrant de thèse
Marius MIHALUTA	Ingénieur à l'Institut de Soudure	Co-encadrant industriel
Adeline AUBOUIN	Ingénieur à Esterline	Invité

RESUME

Mots-clés : Homogénéisation, conductivité thermique effective, morphologie ellipsoïdale, comportement anisotrope, schéma auto-cohérent généralisé, interface imparfaite

L'augmentation de la puissance électrique des composants électroniques pose le problème de la dissipation de la chaleur générée. Les boîtiers électriques doivent permettre la dissipation de cette chaleur en conservant une isolation électrique. La solution retenue pour évacuer la chaleur par transfert thermique consiste en matériaux composites dont les renforts par leur structuration vont améliorer la conductivité thermique. Des composites à matrice polymère ont été choisis pour leur aptitude de mise en forme. La conductivité thermique et l'isolation électrique sont assurées par des charges céramiques. Les méthodes d'homogénéisation donnent des pistes d'amélioration du comportement de composites en fonction des propriétés de leurs constituants, de leur géométrie et de leur distribution. Elles fournissent ainsi une formulation optimisée de matériaux répondant à certaines caractéristiques issues de cahiers des charges émanant du partenaire industriel (Institut de Soudure). La conductivité thermique attendue des composites impose une forte fraction volumique de charges pour compenser le caractère isolant de la matrice polymère. Des méthodes d'homogénéisation ont été développées pour prédire la conductivité thermique effective pour de forts taux de charges (supérieur à 20%) et des contrastes élevés de conductivité thermique. La présence d'une interphase provenant d'incompatibilités fortes entre les composants doit également être modélisée.

Une première approche basée sur le modèle d'assemblage de sphère composite de Hashin (1962) propose une extension dans le cas de morphologie ellipsoïdale. Le modèle d'assemblage d'ellipsoïde composite a été étendu dans le cas d'interface imparfaite décrite par une résistance interfaciale de Kapitza. Cette approche donne des résultats exacts dans le cas de conductivité thermique anisotrope. Une seconde approche a été développée pour des composites à inclusions avec des enrobages multiples, permettant une homogénéisation par un schéma auto-cohérent généralisé plus adapté aux forts taux de renforts et aux contrastes de propriétés élevés. Le cas de l'interface imparfaite constitue un cas limite de comportement d'interphase à conductivité thermique faible. Une approche par la technique des fonctions de Green conduit à des relations de localisation de l'intensité thermique. Un premier développement met en œuvre des tenseurs d'Eshelby thermique intérieur et extérieur et donne des localisations exactes dans le cas de condition de confocalité entre les ellipsoïdes décrivant les inclusions et les enrobages successifs. Un second développement donne des relations de localisation approchées basées sur une hypothèse de simplification portant sur le choix du comportement du milieu extérieur à une inclusion composite. Les tenseurs de localisation établis par ces deux méthodes ont des expressions similaires, la formulation approchée incluant la formulation exacte gérée par la condition de confocalité. Les conductivités thermiques sont obtenues dans le cas général de comportement anisotrope des phases et pour des inclusions à enrobages multiples. Les résultats obtenus sont validés par comparaison avec les solutions de la littérature obtenues pour des configurations simples (sphères, ellipsoïdes confocales, comportement isotrope) et par des simulations numériques. Des échantillons ont été réalisés après sélection d'une matrice thermoplastique et des charges permettant d'augmenter la conductivité thermique sans modification de la conductivité électrique. Le procédé de mise en forme a été optimisé afin d'éviter la formation de conglomérat, porosité et décohésion avec les charges. Ces échantillons à divers taux de charges ont fait l'objet d'une caractérisation thermique pour définir la conductivité thermique. Les essais ont mis en évidence l'existence de porosités et une dégradation relative à forts taux de charges consécutifs à l'augmentation relative de la surface entre les constituants.

ABSTRACT

Keywords : Homogenization, Effective thermal conductivity, ellipsoidal morphology, anisotropic behabior, Generalized Self-Consistent Scheme, imperfect interface

The increase of electronic components in the integrated circuits and the required electrical power set the question of the dissipation of the heat generated. The electrical box must favor the heat dissipation while maintaining electrical insulation. The solution chosen to transfer the heat is to develop composite materials whose reinforcements by their structure will improve the thermal conductivity. Polymer-based composite materials were chosen for their building ability. Thermal conductivity and electrical insulation are insured by ceramic reinforcements. The homogenization methods allow to improve the composites' design according to the properties of their constituents, their geometry and their distribution. They thus provide an optimized formulation of materials satisfying the characteristics emanating from the industrial partner ('Institut de Soudure'). The expected thermal conductivity of the composites imposes a high volume fraction of reinforcements to counterbalance the insulating polymer matrix. Homogenization methods have been developed to provide predictions of effective thermal conductivity for high (greater than 20%) reinforcement rates and high thermal conductivity contrasts. The presence of an interphase resulting from strong physico-chemical incompatibilities between the components must also be modeled.

A first approach based on the composite sphere assemblage model of Hashin (1962) is extended to ellipsoidal morphology. The composite ellipsoid assemblage model has been extended in the case of imperfect interface described by Kapitza interfacial resistance. This approach dedicated to two-phase materials gives accurate results in the case of anisotropic thermal conductivity. A second approach has been developed to determine the effective thermal conductivity of multi-coated inclusions composites, allowing homogenization by a Generalized Self-Consistent Scheme which is more suitable to high reinforcement rates and high contrast ratios. The case of the imperfect interface then constitutes a limiting case of interphase behavior with low thermal conductivity. An approach based on the Green's functions technique leads to localization relations of the thermal intensity. A first development uses internal and external thermal Eshelby tensors and gives exact localization within the confocal assumption between the ellipsoids describing the inclusions and the successive coatings. A second development gives approximate localization relations based on a hypothesis brought on the behavior of the external neighborhood of the composite inclusion. The localization tensors established by these two methods have similar expressions, the approximate formulation including the exact formulation handled by the confocality condition between the ellipsoids. The effective thermal conductivities are obtained in the general case of anisotropic behavior of the phases and for inclusions with multiple coatings of ellipsoidal shape and arbitrary distribution. The obtained results are validated by comparison with the solutions of the literature obtained for simple configurations (spheres, confocal ellipsoids, isotropic behavior) and by numerical simulations."Model" samples were made after selection of a thermoplastic matrix and fillers chosen to increase the thermal conductivity without modification of the electrical conductivity. The building process has been optimized to avoid the formation of conglomerate, porosity and separation with the fillers. These 'model' samples at various reinforcement rates were thermally characterized to define thermal conductivity and thermomechanical characterization to validate mechanical strength at different temperature levels. The tests revealed the existence of porosities and a relative deterioration at high levels of reinforcement following the relative increase in the surface area between the constituents.

0 TABLE DES MATIERES

0.1 Table des figures 11

0.2 Table des tableaux 16

1 Introduction générale 19

2 Phénomènes de transfert dans les matériaux homogènes 25

2.1 Introduction 25

2.2 Matériaux 25

2.2.1 Les métaux 26

2.2.2 Les minéraux 26

2.2.3 Les polymères 28

2.3 Transfert thermique 31

2.4 Transfert électrique 34

2.4.1 Résistance électrique 34

2.4.2 Rigidité diélectrique 35

2.5 Conclusion 36

3 Phénomènes de transfert thermique dans les matériaux hétérogènes 39

3.1 Introduction 39

3.2 Phénomènes de percolation 39

3.3 Influence des charges 40

3.3.1 Nature de la charge 40

3.3.2 Fraction volumique 41

3.3.3 Morphologie des charges 42

3.4 Influence des défauts dans les composites 47

3.4.1 La porosité 47

3.4.2 L'interface imparfaite 48

3.5 Conclusion 50

4 Modélisation de la conductivité thermique des composites à renforts particulaires 55
4.1 Introduction 55
4.2 Bases de la méthode de transition d'échelles et méthodes d'homogénéisation 55
4.2.1 Principes et représentation du milieu hétérogène 55
4.2.2 Localisation et homogénéisation 57
4.3 Modèle d'inclusion d'Eshelby 59
4.3.1 Problème d'inclusion d'Eshelby 59
4.3.2 Problème d'hétérogénéité 61
4.3.3 Schémas d'homogénéisation 62
4.3.4 Bornes 64
4.4 Applications 67
4.5 Conclusion 71
5 Modélisation de la conductivité thermique des matériaux hétérogènes par les approches d'inclusions enrobées 75
5.1 Introduction 75
5.2 Modèle assemblage de sphère composite avec interface parfaite 77
5.3 Interface faiblement conductrice 78
5.4 Modèle avec interface imparfaite dans les cas sphérique et cylindrique 78
5.5 Modèle auto-cohérent généralisé dans le cas sphérique 80
5.6 Modèle auto-cohérent généralisé dans le cas sphérique à (N+1) phases 80
5.7 Modèle d'inclusion ellipsoidale enrobée 81
5.7.1 Modèle assemblage d'ellipsoïde composite pour un comportement isotrope par phases 82
5.7.2 Modèle d'inclusion ellipsoïdale enrobée dans une matrice infinie 85
5.8 Conclusions 87
6 Conductivité thermique effective par l'approche d'assemblage d'ellipsoïde composite . 91
6.1 Introduction 91

6.2 Cas de l'interface parfaite 92
6.2.1 Equation intégrale dans le cas d'un milieu fini 92
6.2.2 Expressions analytiques des tenseurs et vecteurs $\boldsymbol{L\beta}$ et $\boldsymbol{\Lambda\beta r'}$ 97
6.2.3 Applications et comparaisons 99
6.3 Cas de l'interface imparfaite 102
6.3.1 Equation intégrale dans le cas d'un milieu fini avec interfaces imparfaites 102
6.3.2 Détermination du tenseur de polarisation extérieure 105
6.3.3 Applications et comparaisons 108
6.4 Conclusions 115
7 Conductivité thermique effective par approche auto-cohérente généralisée, cas d'inclusions multi-enrobées à morphologie confocale 119
7.1 Introduction 119
7.2 Modèle auto-cohérent généralisé à (2+1) phases 119
7.2.1 Equation intégrale 119
7.2.2 Détermination des tenseurs d'Eshelby extérieurs 124
7.3 Modèle auto-cohérent généralisé à (N+1) phases 127
7.4 Applications et comparaisons 135
7.4.1 Applications pour des composites à deux phases 135
7.4.2 Applications pour des composites à trois phases 137
7.5 Conclusions 141
8 Conductivité thermique effective par approche auto-cohérente généralisée, cas d'inclusions multi-enrobées à morphologie arbitraire 145
8.1 Introduction 145
8.2 Modèle auto-cohérent généralisé à (2+1) phases 145
8.3 Modèle auto-cohérent généralisé à (N+1) phases 150
8.4 Applications et comparaisons 155
8.4.1 Applications pour des composites à deux phases 155

8.4.2 Cas d'un composite à trois phases 157
8.5 Conclusion 160
9 Etude expérimentale du comportement thermomécanique et thermique des composites 163
9.1 Introduction 163
9.2 Choix des constituants du composite 163
9.2.1 Structure du composite 163
9.2.2 Composite dans la littérature 164
9.2.3 La matrice polymère 166
9.2.4 Renforts minéraux 167
9.2.5 Conclusion 169
9.3 Mise en forme des composites 169
9.3.1 Descriptif du procédé de mise en forme 170
9.3.2 Etude des paramètres de mise en forme 171
9.4 Analyse des caractéristiques et propriétés des composites 177
9.4.1 Porosité 177
9.4.2 Caractérisation des propriétés thermiques 180
9.4.3 Electrique 191
9.4.4 Mécanique 194
9.5 Conclusion 198
10 Conclusions générales et perspectives 203
11 Références bibliographiques 209
12 Définition des tenseurs et vecteurs de polarisations $\boldsymbol{L\beta}$ et $\boldsymbol{\Lambda\beta}$ 215
12.1 Définition des tenseurs et vecteurs de polarisation 215
12.2 Définitions des tenseurs de conduction de polarisation et des tenseurs R dans les cas particuliers 220

0.1 TABLE DES FIGURES

Figure 1 : Représentation de la répartition des différentes familles de matériaux en fonction de leur conductivité thermique et de leur résistance électrique [CES EduPack 2005]. La couleur des ellipsoïdes correspond à leur nature : polymères en vert, céramiques en rose et métaux rouge. Les autres couleurs sont des mélanges des trois matériaux cités précédemment. 25

Figure 2 : Représentation de l'effet de percolation par création de réseau dans des matériaux composites : (a) avant le seuil de percolation, (b) au seuil de percolation et (c) après le seuil de percolation 40

Figure 3 : Evolution de la conductivité thermique effective en fonction de la fraction volumique de charges pour différentes natures de charge (valeurs expérimentales extraites de (Ordonez-Miranda et al. 2014)) 42

Figure 4 : Charges avec différentes facteurs de forme : (a) cylindre, (b) prolate, (c) sphère, (d) oblate et (e) platelet. 43

Figure 5 : Conductivité thermique effective isotropie en fonction du facteur de forme pour un rapport de conductivité thermique charge/matrice de $K1/Km = 10$ et pour différentes fractions volumiques f(Li et al. 2017) 44

Figure 6 : Représentation des modèles de Lee et Kim (Lee & Kim 2010) (a) et Benveniste et Milton (Benveniste & Milton 2010) (b) 45

Figure 7 : Evolution de la conductivité thermique effective normalisée en fonction de la fraction volumique de charge pour une forme prolate, avec $K1/Km = 100$ et $\alpha = 5$. 46

Figure 8 : Représentation des différentes morphologies de porosité 47

Figure 9 : Modèle de Hasselman & Johnson (Hasselman & Johnson 1987) avec interface imparfaite pour : $K1/K2 = 100$ et $f = 0.3$ et ou $hc = \alpha K2/a$ 50

Figure 10 : Modélisation par changement d'échelle 57

Figure 11 : Bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) dans le cas d'une prolate pour $a1/a3 = 5$ et $K1/Km = 100$, dans le direction 1 66

Figure 12 : Bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) dans le cas d'une prolate pour $a1/a3 = 5$ et $K1/Km = 100$, dans le direction 3 67

Figure 13 : Comparatif des différents schémas d'homogénéisation et des bornes de Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) dans le cas de particule de forme sphérique avec un contraste $K1/Km = 10$ 68

Figure 14 : Comparatif des schémas d'homogénéisations et des bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) dans le cas de particules ellipsoïdales avec $a1/a2 = 5$ et $K1/Km = 100$ dans la direction 1 70

Figure 15 : Comparatif des schémas d'homogénéisations et des bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) dans le cas de particules ellipsoïdales avec $a1/a2 = 5$ et $K1/Km = 100$ dans la direction 3 70

Figure 16 : Représentation d'un composite à deux phases découpé en éléments composites. 75

Figure 17 : Représentation du modèle ASC. 76

Figure 18 : Représentation du modèle GSCS 76

Figure 19 : Assemblage d'ellipsoïde composite 82

Figure 20 : Comparaison des bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) et du modèle de Benveniste et Miloh (Benveniste & Miloh 1989) dans le cas d'une prolate pour $a1/a3 = 5$ et $K1/Km = 100$, dans le direction 1 84

Figure 21 : Comparaison des bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) et du modèle de Benveniste et Miloh (Benveniste & Miloh 1989) dans le cas d'une prolate pour $a1/a3 = 5$ et $K1/Km = 100$, dans le direction 3. 85

Figure 22 : Comparaison du modèle AEC aux modèles de Kushch (Kushch et al. 2015) 99

Figure 23 : Influence du facteur de forme sur la conductivité thermique effective du composite chargé de particules ellipsoïdales avec $K1/Km = 100$ 100

Figure 24 : Influence du contraste sur la conductivité thermique effective du composite chargé de particules de forme oblate avec $a1/a3 = 5$ dans la direction 1 101

Figure 25 : Influence du contraste sur la conductivité thermique effective du composite chargé de particules de forme oblate avec $a1/a3 = 5$ dans la direction 3 101

Figure 26 : Comparaison du modèle AEC avec interface imparfaite aux modèles de Kushch (Kushch et al. 2015) 108

Figure 27 : Influence du facteur de forme sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, cas oblate dans la direction 1 pour $f = 0.3$ et $K1/Km = 10$ 110

Figure 28 : Influence du facteur de forme sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, cas oblate dans la direction 3 pour $f = 0.3$ et $K1/Km = 10$ 111

Figure 29 : Influence de la fraction volumique sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 1 pour $a1/a3 = 5$ et $K1/Km = 10$ 111

Figure 30 : Influence de la fraction volumique sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 3 pour $a1/a3 = 5$ et $K1/Km = 10$ 112

Figure 31 : Influence du contraste sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 1 pour $a1/a3 = 5$, $Km = 1\ W.m-1.K-1$ et $f = 0.3$..... 112

Figure 32 : Influence du contraste sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 3 pour $a1/a3 = 5$ et $f = 0.3$ 113

Figure 33 : Influence de l'anisotropie sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 1 pour $a1/a3 = 5$, $K1/K33m = 100$ et $f = 0.3$ 114

Figure 34 : Évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 1 en fonction du contraste de la conductivité thermique Kc/Km pour différents facteurs de forme. 139

Figure 35 : Évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 1 en fonction du facteur de forme pour différents rapports de conductivités thermiques Kc/Km. 140

Figure 36 : Évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 3 en fonction du rapport $K33c/Km$ pour différents rapports de conductivités thermiques $K33c/K11c$. 141

Figure 37 : Evolution de la conductivité thermique effective en fonction de la faction volumique d'inclusion pour une inclusion sphérique et un enrobage ellipsoïdale. 156

Figure 38 : Evolution de la conductivité thermique effective en fonction de la faction volumique d'inclusion pour un enrobage sphérique et une inclusion ellipsoïdale. 157

Figure 39 : Évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 1 en fonction du rapport de la conductivité thermique de la phase 'c' et de la phase 'm' pour différents facteurs de forme pour un cas homothétique. 159

Figure 40 : Évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 1 en fonction du rapport facteur de forme pour différentes conductivités thermiques de la phase 'c' pour un cas homothétique. 160

Figure 41 : Représentation schématique d'un matériau composite 163

Figure 42 : Organigramme des différents renforts existants(Aucher 2011)..... 164

Figure 43 : Représentation des matériaux en fonction de leurs conductivités thermiques (abscisse) et de leurs résidences électriques (ordonnée) dans la plage souhaitée 167

Figure 44 : Représentation du cycle pression température 170

Figure 45 : Cycle pression température des échantillons à matrice PA11 174

Figure 46 : Cycle pression température des échantillons à matrice PEKK..... 176

Figure 47 : Fraction volumique de porosité fp en fonction de la fraction volumique de charge f pour des composite à matrice PA chargé d'alumine ou d'aluminosilicate. 178

Figure 48 : Fraction volumique de porosité fp en fonction de la fraction volumique de charge f pour des composite à matrice PEKK chargé de nitrure de bore ou d'aluminosilicate..... 179

Figure 49 : Plaque chaude gardée 180

Figure 50 : Méthode flash 182

Figure 51 : Méthode du disque chaud 182

Figure 52 : Représentation du modèle 3+1 phases avec matrice affaiblie 183

Figure 53 : Forme des particule (a) d'alumine et (b) aluminosilicate (Zhao et al. 2018) 185

Figure 54 : Modelisation de conductivité thermique effective de composite à matrice Polyamide chargée de particule d'alumine ou d'aluminosilicate en fonction de fraction volumique théorique f. 186

Figure 55 : Comparaison des conductivités thermiques de composite à matrice Polyamide mesurées par la méthode de plaque chaude gardée et des modélisations. 186

Figure 56 : Forme des particule de nitrue de bore (Hong et al. 2012) 188

Figure 57 : Comparaison des conductivités thermiques de composite à matrice PEKK mesurées par la méthode de plaque chaude gardée et des modélisations. 189

Figure 58 : Mesure de résistivité électriques (a) transversale et (b) superficielle..... 192

Figure 59 : Mesure de rigidité diélectrique (a) transversale et (b) superficielle 192

Figure 60 : Positon des points de mesures de la résistivité électrique 193

Figure 61 : Résistivité électrique de composite à matrice PA pour différents points de mesures 193

Figure 62 : Essais de compression (a) et de traction (b) 194

Figure 63 : Essais de flexion à chaud 195

Figure 64 : Contrainte à rupture en fonction de la fraction volumique de charge pour un composite à matrice PA chargé d'alumine ou d'aluminosilicate. 196

Figure 65 : Evolution de la température de flexion à chaud pour des composites à matrice PA chargé d'alumine ou d'aluminosilicate. 197

Figure 66 : Contrainte à rupture en fonction de la fraction volumique de charge pour un composite à matrice PEKK chargé de nitrure de bore ou d'aluminosilicate..... 198

0.2 TABLE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Conductivités thermiques effectives obtenues dans la littérature pour différentes configurations 165

Tableau 2 : Fraction de porosité mesurée pour pressions de mise en forme 172

Tableau 3 : Fraction de porosité mesurée pour différentes température de mise en forme ... 172

Tableau 4 : Fraction de porosité mesurée pour différentes temps de maintien 173

Tableau 5 : Fraction de porosité mesurée pour différentes température de coupe de pression 175

Tableau 6 : Fraction de porosité mesurée pour différentes température de mise en forme ... 175

Tableau 7 : Fraction de porosité mesurée pour différentes temps de maintien 176

Tableau 8 : Valeurs de conductivité thermique, mesurées est simulées, de composite à matrice Polyamide. 187

Tableau 9 : Valeurs de conductivité thermique, mesurées est simulées, de composite à matrice PEKK. 189

Chapitre 1 : Introduction générale

1 INTRODUCTION GENERALE

De nos jours, le trafic aérien représente une part significative du transport des personnes et de marchandises. En 2017, le nombre de passagers transportés par l'aviation civile a dépassé le nombre de 4 milliards, autrement dit chaque seconde 127 passagers prennent l'avion dans un des aéroports de la planète. Après comparaison au trafic en 2014, qui est de 2,97 milliards de personnes, nous avons donc une augmentation de plus de 30% en trois ans. Selon l'IATA (Association Internationale du Transport Aérien), le transport aérien va connaître une croissance forte. Le nombre de passagers transportés pourrait atteindre 7 milliards en 2033 et même 16 milliards en 2050.

Le transport aérien est responsable de 2 % à 3 % des émissions de gaz à effets de serre au niveau mondial. Il est donc nécessaire de minimiser la masse totale de ces engins afin de réduire au maximum leur consommation de carburant et, par conséquent, réduire leur impact environnemental.

Afin de réduire la consommation énergétique due au trafic aérien, il est nécessaire de diminuer la masse des appareils. Par exemple, le fait de passer d'un standard de distribution électrique de 28V DC à une valeur dix fois supérieure permet pour une même puissance transmise de réduire de façon notable la masse des câblages. L'augmentation du standard électrique induit dans le même temps, un niveau de contrainte extrême dans les domaines de l'isolation électrique et des échanges thermiques.

Le but de cette thèse consiste à rechercher et étudier un matériau ou une combinaison de matériaux alliant de bonnes qualités d'isolant électrique, tout en ayant une bonne conductivité thermique. Ce matériau doit conserver les caractéristiques indispensables à son utilisation dans le domaine de l'aviation (tenue à l'environnement et tenue au feu) et bien sûr conserver ses propriétés mécaniques et thermiques

Nous devons dans un premier temps avoir une conductivité électrique faible, les métaux sont du fait disqualifiés. Nous pouvons nous intéresser par la suite à la conductivité thermique. Il nous reste donc certains matériaux céramiques qui peuvent avoir à la fois ces deux propriétés antagonistes la conductivité thermique et l'isolation électrique.

Nous avons aussi d'autres contraintes, telles que la mise en forme de matériaux pour des formes complexes et la légèreté du matériau. Dans ce cas, ces matériaux céramiques ne sont

pas adaptés à notre problème. Nous pouvons donc associer les propriétés des céramiques avec celles des matériaux polymères afin de diminuer la masse totale et faciliter la mise en forme.

Afin de profiter au mieux des avantages des différentes matières, l'utilisation de matériaux composites peut être une solution. Le composite permet d'optimiser les caractéristiques du matériau ainsi obtenu en sélectionnant au mieux les différents produits utilisés ainsi que leur proportion. Par la suite nous allons définir de manière plus approfondie les matériaux composites.

La présentation des travaux est développée en trois parties : une partie bibliographique, une partie modélisation et une partie expérimentale.

Dans la partie bibliographique, chapitres 2 et 3, un descriptif des phénomènes de transfert est réalisé. Dans un premier temps, chapitre 2, nous nous intéressons au phénomène de transfert dans le cas de matériaux homogènes, en décrivant les mécanismes de transferts thermique et électrique dans les métaux, minéraux et céramiques. Dans un second temps, chapitre 3, nous étudions plus particulièrement le phénomène de transfert thermique dans les matériaux hétérogènes en recensant les éléments influent sur celle-ci. Cette première partie nous permet d'identifier les différents paramètres à prendre en compte pour pouvoir modéliser les transferts thermiques dans les matériaux composites de manière satisfaisante que sont : le rapport de forme, la fraction volumique des inclusions, le contraste local des conductivités thermiques, l'anisotropie des phases et l'interface imparfaite.

Dans la partie modélisation, chapitres 4 à 8, nous cherchons à déterminer la conductivité thermique effective d'un composite à renfort particulaire par des modèles de transition d'échelle. Dans le chapitre 4, les principes de la méthode par transition d'échelle sont exposés, par l'intermédiaire du développement du modèle d'Eshelby(Eshelby 1957). Dans le chapitre 5, nous présentons différents modèles permettant de déterminer la conductivité thermique de composite à matrice chargée de renforts particulaires. Ceci nous permet de mettre en évidence qu'aucun modèle ne permet de prendre en compte la totalité des paramètres influençant la conductivité thermique identifiée dans le chapitre 3.

Dans les chapitres 6 à 8, nous développons donc trois nouveaux modèles. Dans le chapitre 6, nous avons développé un nouveau modèle permettant de déterminer la conductivité thermique d'un composite chargé de particules ellipsoïdales avec des interfaces imparfaites, tout en prenant en compte l'anisotropie des phases et la forte fraction volumique de charge. Une nouvelle équation intégrale a été définie, dans le cas d'un assemblage d'ellipsoïde composite,

par l'intermédiaire des fonctions de Green, permettant de prendre en compte le cas d'une particule enrobée dans une matrice finie.

Dans le chapitre 7, nous avons développé la solution au problème d'une inclusion multi-enrobée, basée sur les fonctions de Green et l'équation intégrale, dans le cas d'un transfert thermique, en utilisant les opérateurs de Kunin (Kunin 1983), et une hypothèse de confocalité.

Dans le chapitre 8, nous avons développé un modèle dans le cas d'inclusion multi-enrobée, basée sur les fonctions de Green et l'équation intégrale. Une hypothèse sur le choix du milieu de référence permet de proposer une solution dans le cas général de morphologie d'inclusions et pour des comportements anisotropes des phases.

La partie modélisation a permis de modéliser la conductivité thermique effective de composite à matrice renforcée de particules qui sera utilisé dans la partie expérimentale.

Dans le chapitre 9 nous présentons les essais expérimentaux réalisés. Pour des raisons de confidentialité le manuscrit ne présentera pas les valeurs réelles des propriétés thermiques, mécaniques et électriques car ces travaux sont issus d'un développement industriel. Dans un premier temps nous sélectionnons les matériaux à utiliser pour la production de matériaux composites permettant de répondre aux différentes contraintes thermiques, électriques et mécaniques. Nous étudions ensuite le procédé de mise en forme et les paramètres influant sur celui-ci. Enfin nous effectuons une caractérisation thermique, électrique et mécanique des échantillons ainsi produits. Finalement une conclusion générale est faite sur l'ensemble des travaux effectués dans cette étude dans le chapitre 10.

Chapitre 2 : Phénomènes de transfert dans les matériaux homogènes

2 PHENOMENES DE TRANSFERT DANS LES MATERIAUX HOMOGENES

2.1 INTRODUCTION

Dans le but de trouver un matériau qui permet de réponde aux attentes, il nous faut identifier les matériaux existants. Dans ce chapitre nous nous intéressons au cas des matériaux homogènes. Nous avons identifié trois familles de matériaux : les métaux, les minéraux et les polymères.

Un descriptif de leurs caractéristiques va être réalisé, comprenant principalement leur structure atomique, leurs propriétés thermiques et leurs propriétés électriques, afin de les différencier.

Par la suite nous allons décrire les phénomènes régissant les transferts électriques et thermiques dans les milieux homogènes. La conductivité thermique, la résistivité et le claquage électrique étant les trois caractéristiques primordiales du matériau souhaité, nous nous focaliserons, pour le transfert thermique, sur la conductivité thermique et nous nous intéresserons particulièrement, pour le transfert électrique, aux phénomènes de résistivité électrique et de claquage électrique.

2.2 MATERIAUX

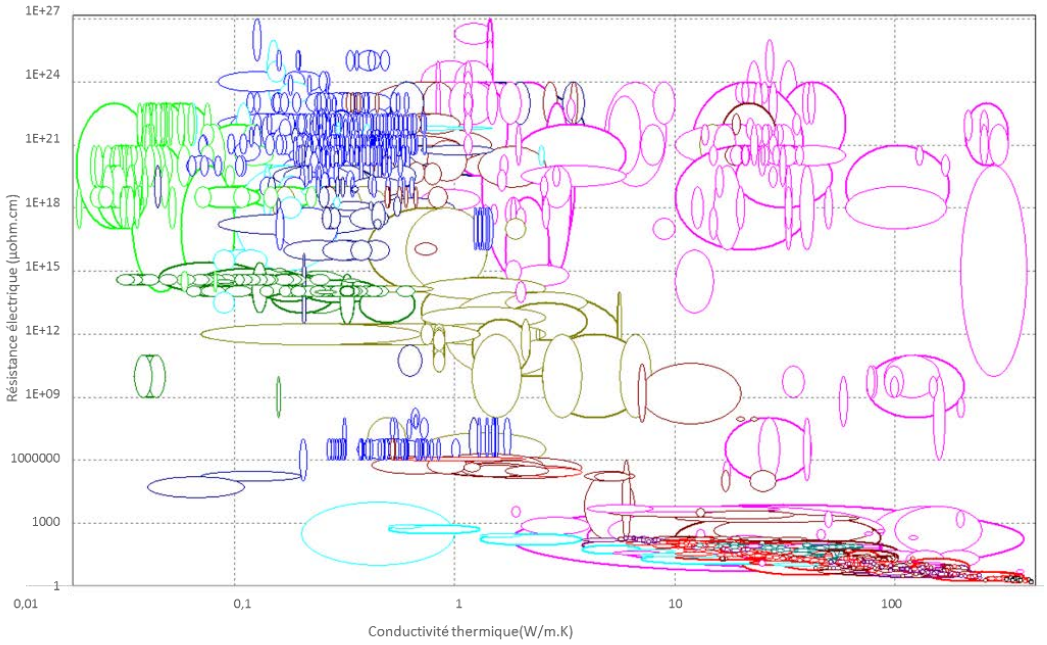


Figure 1 : Représentation de la répartition des différentes familles de matériaux en fonction de leur conductivité thermique et de leur résistance électrique [CES EduPack 2005]. La couleur des ellipsoïdes correspond à leur nature : polymères en vert, céramiques en rose et métaux rouge. Les autres couleurs sont des mélanges des trois matériaux cités précédemment.

La Figure 1 donne une représentation graphique des différentes familles de matériaux en fonction de la conductivité thermique et de leur résistance électrique. En abscisse est représenté la conductivité thermique du matériau et en ordonnée sa résistivité électrique.

Les bulles en vert clair représentent la famille des matériaux polymères, qui se retrouvent principalement dans la partie en haut à gauche du graphique, indiquant que ces matériaux sont des matériaux isolants électriques et de faibles conducteurs thermique.

Les bulles en rouge représentent la famille des métaux, qui se retrouvent dans la partie en bas à droite. L'opposé des matériaux polymères, les métaux sont donc des matériaux conducteurs électriques et thermiques.

Les minéraux et les céramiques sont quant à eux représentés par des bulles roses et sont répartis sur tout le graphique. Les bulles d'autres couleurs sont des matériaux composites constitués des phases des trois autres types de matériaux.

2.2.1 Les métaux

Les métaux ont une structure atomique faite d'assemblages d'atomes assurés par des électrons libres. Ces liaisons appelées liaisons métalliques, sont des liaisons faibles non directives qui admettent les dislocations, permettant, même à basse température, des déformations plastiques élevées. Les liaisons métalliques impliquent une résistance aux réactions chimiques limitées, une dilatation thermique élevée et une ductilité des matériaux métalliques.

Les électrons libres assurant les liaisons atomiques permettent les transferts d'énergie thermique et électrique. C'est pourquoi, les métaux sont de très bons conducteurs thermiques et électriques (Lécrivain 1987).

2.2.2 Les minéraux

Les minéraux sont des solides homogènes, à structure atomique ordonnée et à structure chimique définie. Ils possèdent une structure atomique périodique, symétrique reflétant le système cristallin.

Les céramiques sont des minéraux non organiques, non métalliques formés ou consolidés à haute température, comme par exemple le verre, le plâtre ou le ciment. Les céramiques sont des solides artificiels constitués de minéral anhydre cristallisé, associé par phase vitreuse (Lécrivain 1987).

Les matériaux céramiques peuvent présenter différents niveaux de performance. Les céramiques de performances minimes correspondent à des matériaux naturels peu ou pas

épurés et possèdent des qualités variant selon la provenance. Mais ils peuvent aussi être trouvés sous la forme de composés de qualité élevée, de grande pureté, épurés par voie physique ou chimique ou bien obtenus par synthèse, permettant de parfaitement contrôler les caractéristiques matériaux.

2.2.2.1 Propriétés des céramiques

Les atomes présents dans les céramiques sont de nature différente avec des structures complexes. Les liaisons présentes dans ce cas sont des liaisons fortes, qui enrôlent l'ensemble des électrons présents dans la matière. Ces liaisons sont mixtes, de type ionique et de type covalent, dont la proportion est définie suivant la nature électromagnétique des espèces en présence. Ces liaisons sont donc appelées des liaisons iono-covalente, ces liaisons permettent de résister de manière importante aux attaques chimiques et d'augmenter les propriétés physiques.

Avec leur structure atomique iono-covalente, les céramiques ne possèdent pratiquement aucune plasticité à basse température. En effet, ces liaisons, contrairement aux liaisons métalliques, sont des liaisons directrices qui n'autorisent pas les dislocations. Nous avons donc ici une structure de type fragile, impliquant une faible déformation à rupture et une faible tenue aux chocs. La faible tenue aux chocs s'explique par le fait que la quasi-totalité de l'énergie mécanique transmise par un choc à une céramique est disponible pour la propagation des fissures et non dissipée par la dislocation. Les céramiques possèdent donc une très grande dureté. Les céramiques sont souvent utilisées en tant qu'abrasif, outils de coupe ou comme pièce résistante à l'érosion.

Les céramiques ont de plus une très bonne tenue thermique, ayant une stabilité mécanique jusqu'à 1000°C (silicate d'alumine), voir une température supérieure à 1400°C pour des céramiques spécifiques (carbure de silicium). A 700°C les céramiques même poreuses possèdent une résistance mécanique supérieure à celle des aciers (Lécrivain 1987).

Les céramiques sont des matériaux isolants de par leur structure iono-covalente, la structure ne possédant pas d'électrons libres permettant le transfert d'énergie thermique et électrique. Le transfert d'électrons se fait uniquement par l'intermédiaire de migration de lacune au sein du réseau cristallin. Il y a donc une augmentation de la conductivité thermique et électrique avec l'augmentation de la température.

Le plus souvent, les céramiques sont des isolants thermique du fait de l'absence d'électron libre dû à leur liaison atomique.

Certaines céramiques (SiC, AlN, HBN,…) possèdent un plus grand nombre de liaisons covalentes. Les liaisons covalentes permettent une transmission de l'énergie thermique par l'intermédiaire de vibration mécanique entre atomes et molécules. Cette énergie thermique transmise par vibration mécanique est associée à une quasi-particule appelée phonon.

Par ce phénomène, ces céramiques sont nettement plus conductrices et ont une conductivité thermique de l'ordre de 10 à 100 $W.m^{-1}.K^{-1}$. En comparaison, les céramiques qui possèdent moins de liaisons covalentes ont une conductivité de l'ordre de 1 $W.m^{-1}.K^{-1}$.

Les céramiques ont une diffusivité thermique relativement faible, pouvant entraîner la formation des gradients thermiques importants entre l'intérieur et l'extérieur de la pièce. L'importance du gradient thermique rend la céramique vulnérable aux chocs thermiques biens que leur dilatation thermique soit faible.

2.2.3 Les polymères

Un polymère est une macromolécule formée de l'enchaînement d'un très grand nombre d'atomes ou groupes d'atomes, groupes d'atomes appelés monomères. Ces monomères sont principalement constitués d'atomes de carbone et d'hydrogène.

Le polymère se forme par une réaction chimique appelée la polymérisation, procédé par lequel des monomères réagissent entre eux pour former des molécules de masses molaires plus élevées. La taille des macromolécules ainsi formées est caractérisée par leur masse moléculaire ou par leur degré de polymérisation. Le degré de polymérisation est défini comme le nombre de monomères contenus dans les macromolécules.

Les caractéristiques du polymère sont étroitement liées à la longueur des chaînes macromoléculaires, comme la rigidité moléculaire. La rigidité moléculaire étant la capacité de déplacement de certaines liaisons ou groupements d'atomes. Les chaînes polymères peuvent se présenter sous différentes formes :

- Une forme linéaire où les monomères sont alignés les uns après les autres.
- Une forme ramifiée, où la chaine de molécules peut se diviser en plusieurs branches.
- Une forme réticulée, où la chaine de molécules se divise en plusieurs branches, toutes reliées entre elles.

Les polymères se classent en deux familles, les polymères thermoplastiques et les polymères thermodurcissables.

2.2.3.1 Polymères thermodurcissables

La structure réticulée est caractéristique des Thermodurcissables (TD), avec sa structure tridimensionnelle, ces polymères sont quasi infusibles et insolubles. Pour ces polymères nous avons un lien irréversible entre les différentes parties de la structure moléculaire, créant des liaisons fortes entre les macromolécules.

Les TD ont une mise en œuvre qui nécessite une polymérisation lors de la production de pièce, venant du fait de leur infusibilité. Avant la mise en forme, la matière se présente sous une forme liquide. La matière utilisée pour la polymérisation étant du monomère ou prépolymère (assemblage de monomères de faible longueur) linéaire ou ramifié, permettant d'obtenir une grande fluidité, très utile pour l'imprégnation de renfort.

2.2.3.2 Polymères thermoplastiques

Les Thermoplastiques (TP) peuvent avoir une structure linéaire ramifiée et exceptionnellement réticulée. Les liaisons entre les chaînes sont des liaisons faibles de type Van Der Waals. La mise en œuvre des TP se fait en chauffant la matière permettant le mouvement des chaînes de molécules qui rend la matière fluide, puis par refroidissement pour solidifier la matière. Le procédé de mise en œuvre ne nécessitant qu'un cycle de chauffe et refroidissement. Le temps de mise en œuvre est considérablement réduit car les temps de chauffe et de refroidissement sont plus courts (Aucher 2011).

La tenue en température des TP est réduite (<200°C) par rapport au TD du fait de la fusibilité, cependant des TP de haute gamme supportent une température assez élevée (>300°C).

Les TP se présentent sous la forme de matériau solide prêt à l'emploi, par conséquent ne possédant pas de problème de stockage, ni de problème pour les conditions de travail. De plus, les chutes de ces polymères étant fusibles, le matériau est recyclable.

Un point négatif pour ces polymères étant la viscosité, les chaînes de polymère étant plus grandes lors de l'état fondu, la viscosité est plus importante que celle des TD, dont les chaînes, avant polymérisation se présentent sous la forme de prépolymère.

2.2.3.2.1 Cristallinité des polymères

Les TP peuvent se présenter sous deux formes, une forme amorphe, où les chaînes de polymères sont totalement désorganisées et une forme semi-cristalline, avec une partie amorphe et une partie cristalline, la partie cristalline où les chaînes sont organisées.

La cristallinité dépend de la longueur de la chaîne de polymères. Plus la longueur de la chaine est importante plus le taux de cristallinité est faible et les zones cristallines créées sont

imparfaites. Le cycle thermique lors de la mise en œuvre influe sur le taux de cristallinité du polymère : un refroidissement lent permet l'obtention d'un taux de cristallinité plus élevé qu'un refroidissement rapide fait chuter la cristallinité.

2.2.3.2.2 Polymère amorphe

La phase amorphe d'un polymère, est une phase qui ne possède pas d'ordre établi dans sa structure moléculaire. Cette désorganisation lui permet de laisser plus facilement passer la lumière, lui permettant d'être transparent.

À basse température la phase amorphe est dans un état vitreux, dans ce cas les molécules présentent une faible mobilité relative. À une température plus élevée, la phase amorphe passe dans un état caoutchoutique. La température à laquelle se fait cette transition s'appelle la température de transition vitreuse notée Tg. Une fois cette Tg dépassée, il se produit une modification de la propriété mécanique, dû à l'amélioration de la mobilité des molécules en fonction de l'augmentation de la température (Aucher 2011).

La vitesse de montée et descente en température, n'influe pas sur les propriétés finales des matériaux contrairement à la phase cristalline. Les propriétés mécaniques de la phase amorphe sont plus faibles que celles de la phase cristalline, cependant, ses caractéristiques de tenue en fluage et en résistance à l'impact sont supérieures.

2.2.3.2.3 Polymère semi-cristallin

Les polymères cristallins ont des structures moléculaires très organisées et solidement enchevêtrées. Les polymères ne sont pas totalement cristallins, le pourcentage de cristallinité ne représente qu'au maximum 80% (Aucher 2011), le polymère possède obligatoirement une phase amorphe qui fait le lien entre les cristallites.

Les cristaux se forment lors du passage de l'état fondu à l'état solide. La cristallisation commence à partir d'un centre de germination et grossit de manière tridimensionnelle avec une orientation radiale, jusqu'à ce que les germes rentrent en contact. Il se forme ainsi des cristallites ou des lamelles. Les lamelles s'assemblent pour former des sphères appelées sphérolites de différentes formes et tailles.

Lorsqu'un polymère linéaire est chauffé puis lentement refroidi, les chaînes tendent à se déplier, puis à s'empiler. Cet empilement est favorisé si des liaisons intermoléculaires peuvent se créer. Cette cristallisation n'est jamais parfaite, les cristallites sont en général dispersées dans une matrice amorphe. Une cristallite est une structure formée de chaînes repliées sur

elles-mêmes et qui s'empilent. Une chaîne peut être en partie dans une cristallite et en partie dans une zone amorphe, voire faire partie de deux cristallites.

La dimension de ces cristallites est variable, elle va de 100 Å à quelques dizaines de micromètres (Avenas 1978). La formation de cristallites est influencée par différents facteurs tels que le procédé de mise en forme et la vitesse de refroidissement. La présence de charge peut elle aussi influencer la cristallisation du polymère.

Les germes primaires apparaissent la plupart du temps au niveau de la surface des corps étrangers. Une fois les germes primaires formés, des dépôts de chaine se forment autour du germe. Par conséquent, la présence de charge permet d'augmenter le nombre de surfaces de corps étrangers et donc le taux de cristallisation du polymère.

Les polymères semi-cristallins présentent deux températures caractéristiques, la température de transition vitreuse, due à la présence de phases amorphes et une température de fusion, température à laquelle les cristallites se désorganisent.

L'inconvénient de ces martiaux est qu'ils nécessitent un refroidissement contrôlé pour gérer la cristallisation des polymères, complexifiant la fabrication comparée aux matériaux amorphes. Les caractéristiques des polymères peuvent être modifiées en fonction du cycle de temps et température. Plus la vitesse de refroidissement est élevée, plus le taux de cristallinité est bas et par conséquent, plus les caractéristiques mécaniques sont faibles.

2.3 TRANSFERT THERMIQUE

Dans le but d'évaluer la quantité de chaleur d'un matériau, il est nécessaire d'étudier le phénomène de transfert de chaleur. Les transferts d'énergie thermique sont définis par l'évolution de la température dans l'espace et dans le temps. On note cette grandeur $T(\boldsymbol{r}, t)$, ou $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$ est le vecteur position et t est le temps.

La variation de température dans l'espace peut être déterminée par la dérivation spatiale de la température, la grandeur ainsi obtenue est un vecteur appelé intensité thermique :

$$e_i = -\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i} = -T_{,i}. \tag{2.1}$$

On définit aussi la densité de flux thermique $\boldsymbol{q}$, le flux de chaleur ϕ, et la quantité de chaleur Q:

$$\phi = \int_S \boldsymbol{q}.\boldsymbol{n}\, dS \quad et \quad \phi = \frac{dQ}{dt}. \tag{2.2}$$

Si l'on considère un milieu V, limité dans l'espace, nous devons définir l'ensemble des flux thermiques agissant sur le domaine. Quatre flux peuvent être identifiés :

- le flux entrant : ϕ^e
- le flux sortant : ϕ^s
- le flux généré : ϕ^g
- le flux stocké : ϕ^{st}

Grâce à la première loi de la thermodynamique, le bilan énergétique du domaine est fait :

$$\phi^e + \phi^g = \phi^s + \phi^{st}. \tag{2.3}$$

Il faut par la suite définir l'expression des différents flux thermiques puis le reporter dans le bilan énergétique afin d'arriver à une équation différentielle permettant l'obtention de la température en tout point du domaine

Le flux stocké est défini comme étant une augmentation de l'énergie interne avec le temps :

$$\phi^{st} = \rho\, V\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.4}$$

avec ρ la masse volumique, V le volume et c_p la capacité calorifique massique à pression constante.

Le flux généré correspond à la transformation d'une autre forme d'énergie (mécanique, électrique,…) en énergie thermique :

$$\phi^g = V\dot{\Phi} \tag{2.5}$$

avec $\dot{\Phi}$ la densité volumique d'énergie générée.

Les flux entrant et sortant sont définis par trois phénomènes : le rayonnement, la convection et la conduction.

Le rayonnement est un mode de transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces, le transfert est fait par des quasi-particules, les photons, qui permettent le transfert d'énergie électromagnétique. Le rayonnement ne nécessite pas de support matériel, ce transfert d'énergie peut se produire dans le vide. Ce mode de transfert a pour expression :

$$\phi = \sigma\, \varepsilon\, S\, ({T_s}^4 - {T_\infty}^4) \tag{2.6}$$

avec σ la constante de Stefan, ε le facteur d'émission de la surface, T_s la température de la surface et T_∞ la température environnant la surface.

La convection est un mode de transfert par déplacement de fluide. Le transfert de chaleur par convection est dû au déplacement de molécules de différentes températures, il se déroule dans un fluide (un liquide ou un gaz). Ces molécules se déplaçant, elles transfèrent leur chaleur à un autre endroit du système. Le mode de transfert est défini par la loi de Newton :

$$\phi = h\,S\,(T_s - T_\infty) \tag{2.7}$$

avec h le coeficent de chaleur par convection.

Et finalement, le mode de transfert thermique par conduction peut être discrétisé en deux phénomènes distincts : le transfert d'énergie thermique par transfert de charge dans le solide par le biais des électrons au sein du matériau et le transfert de chaleur par la vibration des atomes ou des molécules (Randrianalisoa 2006). Ces mouvements vibratoires peuvent être décrits par des ondes élastiques auxquelles on associe des quasi-particules : les phonons. Le transfert par conduction est décrit par la loi de Fourier, qui lie la densité de flux et du champ d'intensité thermique :

$$\phi = -\,\mathrm{S}\,K\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} \tag{2.8}$$

avec K la conductivité thermique du milieu.

Le transport d'énergie thermique dans les solides est donc assuré par les électrons, les phonons et les photons.

Dans le cas des métaux, matériaux conducteurs électriques, le transfert est assuré à la fois par les électrons, les photons et les phonons, permettant de leur octroyer des conductivités thermiques très élevées, comme le cuivre (350W/m.K) ou l'argent (420 W/m.K).

Dans le cas des matériaux isolants électriques, comme les polymères et certaines céramiques, le transfert de chaleur ne peut se faire que par l'intermédiaire des phonons et photons. Cependant, pour une température d'utilisation faible (inférieur à 200°C), le transfert par photon n'est que très peu actif et peut être négligé. Les isolants électriques sont donc limités au transfert de chaleur par phonons.

Dans le cas de certaines céramiques, leur structure atomique iono-covalente leur permettent de profiter un maximum du transfert par phonons, permettant d'atteindre des valeurs de conductivité thermique importante, comme par exemple le nitrure de bore ayant des variétés pouvant aller jusqu'à 300 W/m.K.

Pour les polymères, leur structure ne permet pas un transfert par phonons efficace, expliquant leur faible conductivité thermique variant de 0.1 à 0.45 W/m.K.

- Equation de la chaleur

Dans le cas où nous considèrerons que le transfert de chaleur se fait uniquement par conduction et sans source de chaleur interne, nous obtenons l'équation générale de la chaleur de la forme :

$$\rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -div\, \boldsymbol{q}. \tag{2.9}$$

En introduisant la loi de Fourier, on obtient l'équation de diffusivité linéaire :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\, \boldsymbol{\nabla^2} T \; avec \; \alpha = \frac{K}{\rho\, c_p} \tag{2.10}$$

où α est la diffusivité thermique, caractérisant le comportement thermique dynamique du matériau.

2.4 TRANSFERT ELECTRIQUE

2.4.1 Résistance électrique

Pour développer un composite effectivement isolant électriquement, il est nécessaire de comprendre comment le phénomène de transfert électrique fonctionne. Le transfert d'énergie électrique se fait par l'intermédiaire d'un transfert de charge, soit un mouvement d'électrons au sein du matériau. Afin de permettre ce transfert d'énergie, il est nécessaire que le matériau possède des électrons libres, un électron faiblement lié au noyau atomique, qui participe à la circulation de l'électricité (Toureille 2009). Les métaux par exemple, avec leur liaison métallique, possèdent des électrons libres, ces matériaux sont donc dit conducteurs électriques. Au contraire, les polymères ne possèdent pas de liaison avec des électrons libres, ces matériaux sont donc dit isolants électriques.

Les transferts d'énergie électrique peuvent être définis grâce au courant électrique et au potentiel électrique.

Le courant électrique *I* est un déplacement de charges électriques dans un matériau.

Le potentiel électrique *U* définit l'état électrique d'un point de l'espace. Il correspond à l'énergie potentielle électrostatique que posséderait une charge électrique unitaire située en ce point.

Le transfert électrique est décrit par la loi d'Ohm, qui lie courant électrique et potentiel électrique :

$$U = R.I \tag{2.11}$$

avec R la résistance électrique du milieu

2.4.2 Rigidité diélectrique

La rigidité diélectrique est la tension maximale que peut supporter une certaine épaisseur d'un matériau avant sa dégradation, cette tension est appliquée avec une fréquence de 50Hz et s'exprime en kV/mm.

La tension maximale s'appelle la tension de claquage, cette tension implique un fort enlèvement thermique localisé, entraînant la fusion ou la destruction du matériau. En ces points, la nature isolante électrique du matériau change et passe à un état conducteur.

Ce phénomène de claquage est initié par la présence de charges (électrons, ions,…) pouvant être libérés par une énergie apportée (énergies thermique, haute tension électrique,…).

La mécanique de rupture est différente selon l'organisation de la structure atomique des matériaux.

Dans le cas d'une structure ordonnée comme les cristaux, lorsque les électrons sont suffisamment accélérés par un champ électrique élevé, l'entrée en contact avec la matière crée une ionisation. Cette ionisation produit de nouvelles charges créant une réaction en chaine.

Les électrons ainsi reliés créent un canal conducteur électrique au sein du matériau isolant, entraînant une forte élévation de la température et une fonte ou une destruction du matériau. Ce phénomène d'emballement thermique est accentué par l'association du transfert thermique dû aux charges accélérées et à l'action des phonons.

Dans le cas des matériaux avec une structure moins ordonnée, la mécanique initiale d'accélération des électrons est similaire à celle des matériaux ordonnés, mais le déclenchement du phénomène de claquage est différent. Pour que le phénomène de claquage se produise dans le cas de matériau moins ordonné, il est nécessaire que l'énergie des charges électriques soit supérieure à l'énergie de liaison entre les molécules et macromolécules du matériau.

2.5 CONCLUSION

Nous avons observé les caractéristiques des matériaux homogènes : métaux, céramiques et polymères. Nous avons constaté que les métaux, bien que très bons conducteurs thermiques, étaient aussi des conducteurs électriques, que les polymères étaient des isolants électriques et thermiques et que seuls certaines céramiques possédaient à la fois des caractéristiques de conducteur thermique et isolant électrique.

Cependant, les céramiques ont une faible résistance aux chocs et sont complexes à mettre en forme. Afin de profiter au mieux des caractéristiques thermiques, électriques et mécaniques de ces matériaux, nous avons décidé d'utiliser des matériaux composites, des matériaux hétérogènes composés de deux ou plusieurs phases.

Par la suite, nous allons nous intéresser aux phénomènes de transferts thermiques dans les matériaux hétérogènes et dans une partie dédiée aux études expérimentales, effectuer un choix des matériaux et du procédé de mise en forme à utiliser pour le composite.

Chapitre 3 : Phénomènes de transfert thermique dans les matériaux hétérogènes

3 PHENOMENES DE TRANSFERT THERMIQUE DANS LES MATERIAUX HETEROGENES

3.1 INTRODUCTION

Dans la partie précédente, nous avons vu qu'il était nécessaire d'utiliser un composite pour avoir un matériau à la fois conducteur thermique, isolant électrique, ayant des caractéristiques mécaniques adaptées à notre objectif et commode à mettre en œuvre.

Pour déterminer la conductivité thermique dans le composite, nous nous intéressons aux phénomènes de transfert dans les matériaux hétérogènes. De nombreux paramètres viennent influencer, de manière positive ou négative, les caractéristiques thermiques du composite.

Nous nous intéressons particulièrement aux phénomènes de percolation, à l'influence de la nature des charges, leur fraction volumique et leur morphologie et aux défauts tels que la porosité et les interfaces imparfaites.

3.2 PHENOMENES DE PERCOLATION

La percolation est définie comme étant un phénomène de transmission d'une « information » entre deux points du système. Cette « information » dans le cas des transferts thermiques et électrique est une transmission d'énergie.

Dans le cas d'une matrice isolante électrique et de charge électriquement conductrice cela correspond à la création d'un réseau électrique entre les charges, permettant la circulation de l'électricité entre deux faces du matériau.

Dans le cas d'une matrice isolante thermique et de charge thermiquement conductrice la transmission d'énergie correspond à la formation d'un chemin thermique entre les charges, permettant un transfert thermique plus aisé entre deux faces du matériau.

Le seuil de percolation est introduit comme étant le taux de charge limite à partir duquel un chemin réseau de particules se forme. Pour la conductivité électrique le seuil de percolation est très net, il marque la transition entre un composite parfait isolant et un composite faiblement conducteur. Le seuil de percolation pour la conductivité thermique permet d'améliorer le transfert thermique mais il est beaucoup moins perceptible que dans le cas de transfert électrique.

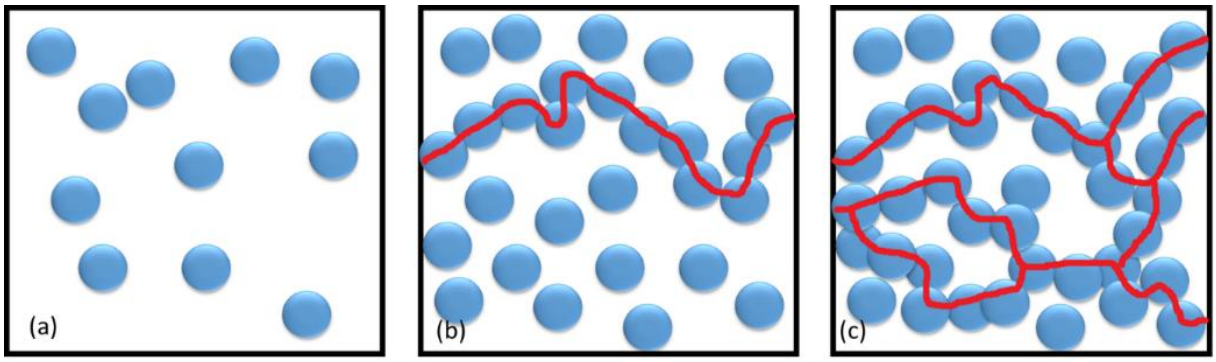


Figure 2 : Représentation de l'effet de percolation par création de réseau dans des matériaux composites : (a) avant le seuil de percolation, (b) au seuil de percolation et (c) après le seuil de percolation

Le seuil de percolation est principalement influencé par le facteur de forme des charges. La forme des charges définit leur capacité à créer des chemins préférentiels. Des charges sphériques ont de plus faibles chances d'entrer en contact, les charges devant être très proches les unes des autres. Le seuil de percolation des nanotubes de carbone est de l'ordre de 0.05% (Bonnet et al. 2007), alors que dans le cas de particules sphériques le seuil n'est atteint que pour des taux de l'ordre de 10%.

3.3 INFLUENCE DES CHARGES

L'ajout de charges conductrices thermiques dans une matrice isolante permet d'améliorer la conductivité thermique du composite. Pour optimiser la conductivité thermique du composite, le choix de la charge est primordial. La charge influe grandement sur le résultat final et plusieurs paramètres sont à étudier : la nature de la charge, sa fraction volumique et sa morphologie.

3.3.1 Nature de la charge

La conductivité thermique des charges, contrairement à celle des polymères, varie de manière très importante (calcaire : 1W/m.K, nitrure de bore : 300W/m.K). Dans une même famille de matériaux, la structure et la pureté de la charge peut faire varier la conductivité du simple au double (alumine avec impureté : 8W/m.K alumine sans impureté : 14W/m.K).

La nature de la charge utilisée est un point important à définir pour assurer un transfert thermique optimal. Généralement, l'utilisation d'une charge avec une conductivité thermique élevée permet, à taux de charge égal, d'augmenter la conductivité thermique du composite. Cependant, la conductivité thermique n'est pas le seul paramètre à prendre en compte, d'autres facteurs entrent en jeu lors de du choix de la nature des charges.

Le domaine d'application du composite est à prévoir. L'utilisation de charge métallique ou carbone pour maximiser la conductivité thermique, ne pourra se faire que dans des applications autorisant une conductivité électrique élevée. Des charges céramiques faiblement conductrices de l'électricité permettront leurs utilisations dans le cas de l'isolation électrique.

La nature des charges est corrélée à la morphologie des particules et conditionne le taux de charge atteignable. Ces deux facteurs ont des effets importants sur la conductivité effective du composite. Certaines charges céramiques ne pourront pas se présenter sous des formes spécifiques comme les fibres et les nanotubes de carbone ne peuvent être utilisés à des taux de charge élevés (Rivière 2016).

3.3.2 Fraction volumique

La fraction volumique influe de manière importante sur la conductivité thermique effective du composite. On remarque généralement qu'un taux de charge plus élevé augmente la conductivité thermique du composite. Cette augmentation n'est pourtant pas proportionnelle. Pour un taux de charge faible (<10%), les particules n'induisent qu'une faible augmentation alors que pour des taux de charge élevés (>50%) la conductivité thermique effective est très fortement impactée (Figure 3) (Ordonez-Miranda et al. 2014).

Cependant l'augmentation de la quantité de particules n'est pas toujours positive d'un point de vue thermique. L'augmentation du nombre de particules pour certaines morphologies de charges, entraîne l'accroissement du nombre d'interfaces entre charges et matrice, réduisant de fait le transfert thermique dans le composite. Un taux de charge trop élevé peut aussi induire une lacune de matrice entraînent la formation de porosités.

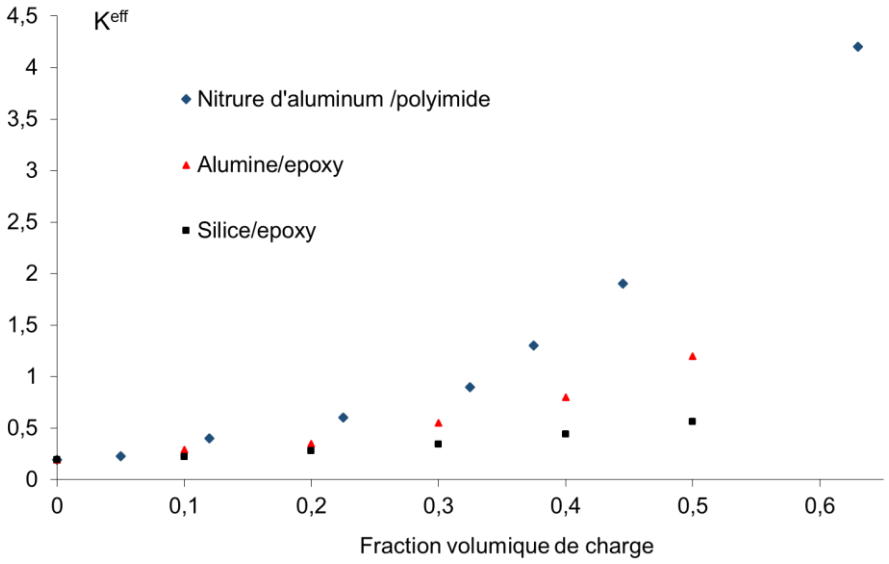


Figure 3 : Evolution de la conductivité thermique effective en fonction de la fraction volumique de charges pour différentes natures de charge (valeurs expérimentales extraites de (Ordonez-Miranda et al. 2014))

3.3.3 Morphologie des charges

La morphologie des charges est divisée en plusieurs catégories : la taille, la forme, l'orientation et la répartition des charges.

3.3.3.1 Taille des charges

La taille des charges peut influencer la conductivité thermique effective du composite suivant deux phénomènes :

- liés à la présence d'interface entre particules et matrice.

Des charges de petites dimensions ont des surfaces spécifiques importantes qui par conséquent augmentent la surface entre particules et matrice et donc la résistance à l'interface, réduisant ainsi la conductivité effective du composite. De la même manière les charges de grande dimension ont une plus faible surface spécifique ce qui minimise les interfaces. Dans ce cas nous en déduisons que des particules de taille importante permettent d'obtenir une conductivité thermique plus élevée.

- liés au seuil de percolation.

Lorsque les particules sont de petite taille, des chemins thermiques ont plus de chance de se former et inversement pour les particules de grande dimension. Nous avons donc une augmentation de la conductivité thermique pour des particules de taille réduite.

3.3.3.2 Facteur de forme

Le facteur de forme est le rapport entre la plus grande dimension et la plus faible dimension de la particule. La particule avec un facteur de forme de '1' est une sphère, ayant des dimensions identiques dans toutes les directions. Des formes d'oblate et de prolate (Figure 4) ont des facteurs des formes s'éloignant de la valeur '1'.

Si on considère une particule ellipsoïdale de demi-axes a_1, a_2 et a_3 respectivement dans les directions 1, 2 et 3, nous pouvons identifier la forme de la particule suivant les relations existantes entre les demi-axes. Dans le cas où $a_1 = a_2 = a_3$, nous avons une sphère, si $a_1 > a_2 = a_3$, nous avons un prolate, pour $a_1 < a_2 = a_3$, nous avons une oblate, avec $a_1 \ll a_2 = a_3$, nous avons un platelet et enfin, si $a_1 \to \infty$ nous avons un cylindre.

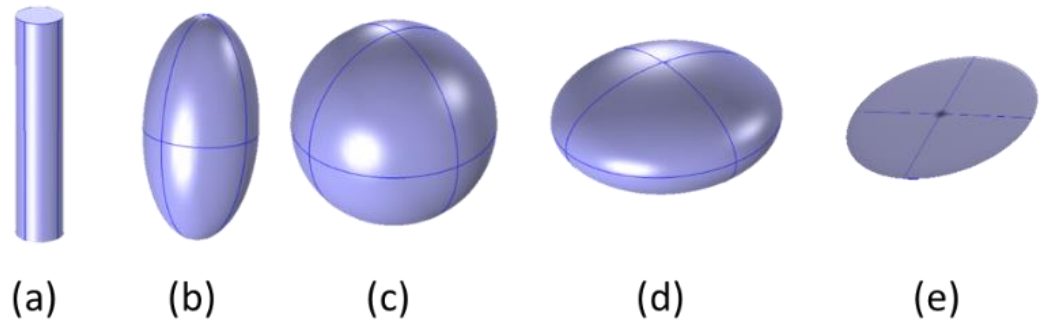


Figure 4 : Charges avec différentes facteurs de forme : (a) cylindre, (b) prolate, (c) sphère, (d) oblate et (e) platelet.

Dans le cas de facteur de forme proche de '1', les chances que les particules présentes dans le composite entrent en contact est faible et les surfaces de contact entre particules sont réduites. La sphère est donc la plus mauvaise configuration pour maximiser le transfert thermique.

Un facteur de forme plus important augmente la surface des particules et par conséquent accroit le risque de formation de résistances thermiques aux interfaces charge/matrice, ce qui peut minimiser les effets du facteur de forme.

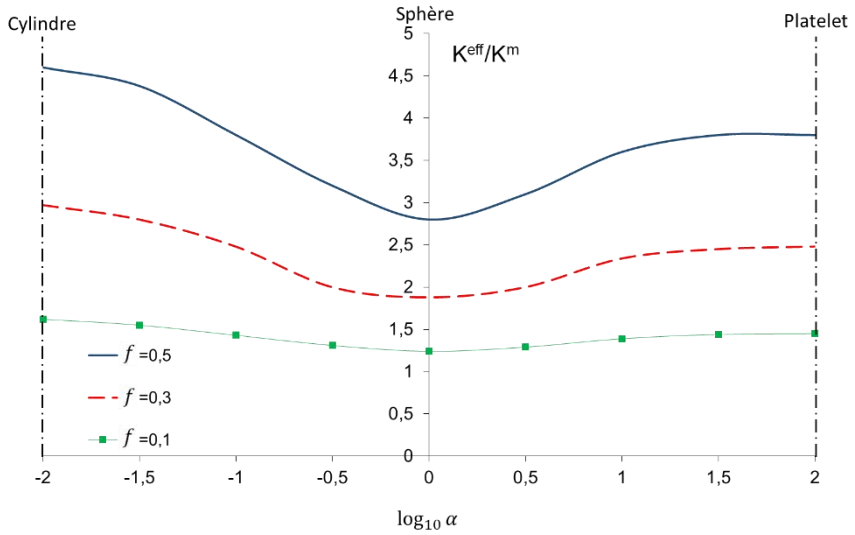


Figure 5 : Conductivité thermique effective isotropie en fonction du facteur de forme pour un rapport de conductivité thermique charge/matrice de $K^1/K^m = 10$ et pour différentes fractions volumiques f(Li et al. 2017)

Sur cette figure on observe l'influence du facteur de forme $\alpha = a_3/a_1$ et $a_1 \neq a_2 = a_3$ sur la conductivité thermique effective normalisée. On voit les formes oblate pour $\alpha > 1$, les formes prolate pour $\alpha < 1$ et pour $\alpha = 1$ la forme sphérique. Nous constatons avec ce graphique que l'utilisation de particules sphériques est le plus défavorable pour améliorer la conductivité thermique effective. Des valeurs asymptotiques sont présentes pour des facteurs formes limites, pour $\alpha \to -\infty$ et pour $\alpha \to +\infty$, la conductivité thermique ne peut donc pas être améliorée indéfiniment par l'utilisation de charges avec un fort facteur de forme.

L'effet du facteur de forme est amoindri par une dispersion importante des particules. Une dispersion trop importante peut, en éloignant les particules les unes des autres, rendre nul l'effet bénéfique du facteur de forme sur la conductivité thermique du composite.

3.3.3.3 Orientation des charges

L'orientation des charges correspond à l'orientation de l'axe principal des particules par rapport au repère du composite. Pour définir une orientation il faut que les particules ait un facteur de forme supérieur à un, dans le cas contraire, cas de la sphère, il n'y a pas d'orientation possible.

Dans un composite, lorsque les particules sont sphéroïdales avec une orientation parfaitement aléatoirement et si les différentes phases ont une conductivité thermique isotrope, les

caractéristiques thermiques sont identiques dans toutes les directions, le matériau composite a alors une conductivité thermique effective isotrope.

Lorsqu'un matériau composite possède des particules avec une orientation dans une direction particulière et quelles que soient la nature, anisotrope ou isotrope, des charges, les caractéristiques thermiques ne sont pas identiques dans toutes les directions, le matériau est alors anisotrope.

L'orientation des charges est un des paramètres les plus complexes à contrôler car il nécessite une maîtrise du procédé de mise en œuvre et de la forme des pièces à produire. La maîtrise de cette grandeur est donc possible pour la production d'éprouvettes mais beaucoup plus difficile pour des pièces complexes.

Afin d'illustrer l'influence de l'orientation des charges, nous représentons la conductivité thermique effective en fonction de la fraction volumique de charge dans deux configurations : une configuration où les particules sont toutes orientées dans la même direction (Figure 6 (a)), nous utilisons le modèle de Lee et Kim (Lee & Kim 2010) et une configuration où les particules sont orientées de manière aléatoire (Figure 6 (b)), pour laquelle nous utilisons le modèle de Benveniste & Milton (Benveniste & Milton 2010).

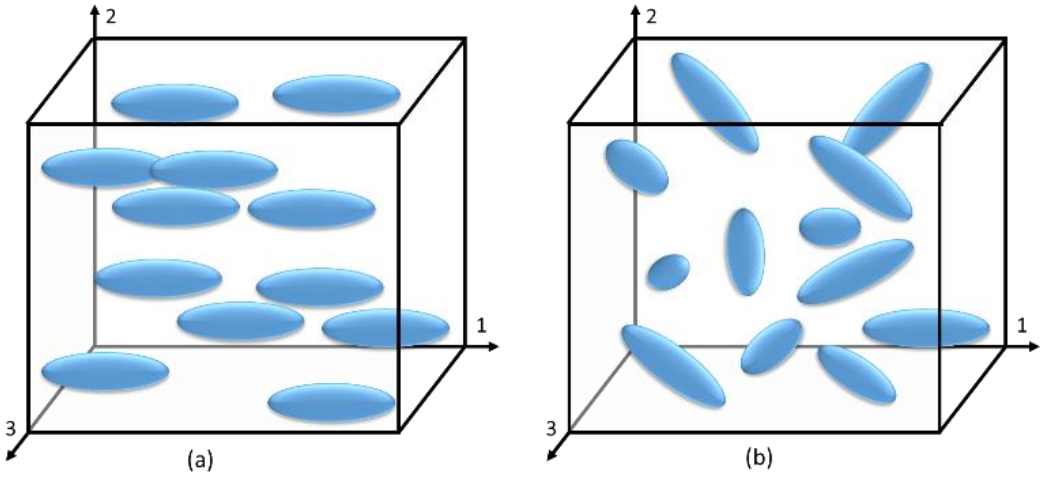


Figure 6 : Représentation des modèles de Lee et Kim (Lee & Kim 2010) (a) et Benveniste et Milton (Benveniste & Milton 2010) (b)

Pour ces modèles, on considère un composite constitué d'une matrice chargée de particules de forme prolate. Le rapport entre les demi-axes des particules est défini tel que $a_1 = \alpha\, a_2 = \alpha\, a_3$ avec $\alpha > 1$ et où α est appelé le facteur de forme. Les conductivités thermiques des phases sont supposées isotropes, la matrice a une conductivité thermique notée K^m et les charges une conductivité thermique K^1.

Dans le cas du modèle de Benveniste et Milton (Benveniste & Milton 2010), les charges sont supposées être aléatoirement orientées, la conductivité thermique effective K^{eff} du composite est donc isotrope. Dans le cas du modèle de Lee, les charges sont supposées toutes être orientées dans la même direction, bien que les phases aient une conductivité thermique isotrope, la forme des particules induit une anisotropie. La conductivité thermique effective du composite n'est donc pas identique dans les trois directions et est séparée en trois composantes K_1^{eff}, K_2^{eff} et K_3^{eff} respectivement dans la direction 1, 2 et 3. Dans le cas de phases isotropes avec des particules de forme prolate ($a_1 = \alpha\ a_2 = \alpha\ a_3$ avec > 1) et pour $K^1 > K^m$ la relation suivante est vérifiée : $K_1^{eff} > K_2^{eff} = K_3^{eff}$.

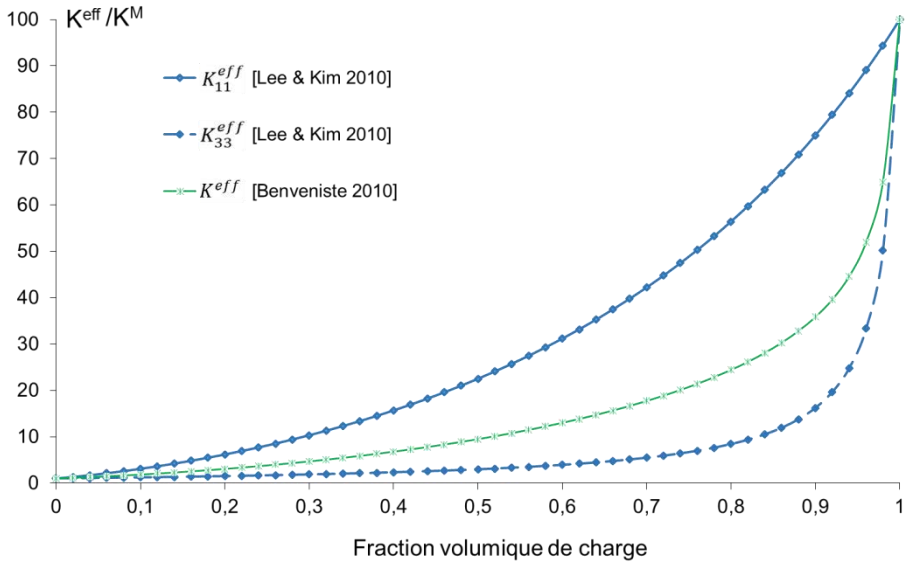


Figure 7 : Evolution de la conductivité thermique effective normalisée en fonction de la fraction volumique de charge pour une forme prolate, avec $K^1/K^m = 100$ et $\alpha = 5$.

On examine, avec le tracé de ces deux modèles, l'influence de l'orientation sur la conductivité thermique du composite. Une grande différence est observée entre les conductivités thermiques obtenues avec le modèle de Lee et Kim (Lee & Kim 2010) dans la direction 1 et les directions 2 et 3. La conductivité thermique dans la direction 1 étant nettement plus élevée que celle dans les autres directions. Le modèle de Benveniste et Milton (Benveniste & Milton 2010) donne des valeurs de conductivité plus faibles que celles obtenues dans la direction 1 par Lee mais plus élevées que les conductivités de Lee dans les directions 2 et 3. Ce modèle possède une conductivité thermique identique dans toutes les directions, venant de l'isotropisation réalisée par Benveniste et Milton (Benveniste & Milton 2010).

L'orientation des charges dans un composite permet de favoriser la conductivité thermique dans une direction au détriment des autres, cet effet peut être recherché. Cependant

l'orientation des charges est un paramètre complexe à maîtriser, dépendant de nombreux facteurs comme la forme des particules, la forme de la pièce finale, le procédé de mise en œuvre et autres, dont la modification n'est pas toujours possible.

3.4 INFLUENCE DES DEFAUTS DANS LES COMPOSITES

Plusieurs facteurs peuvent être préjudiciables aux propriétés thermiques et mécaniques du composite. Il y a principalement deux phénomènes extrêmement néfastes qui peuvent diminuer la conductivité thermique des matériaux composites, la présence de porosités et la présence d'interfaces imparfaites.

3.4.1 La porosité

La porosité est définie comme étant la présence de bulles ou de cavités contenant du vide ou du gaz dans un matériau. La définition du taux de porosité est introduite comme le rapport volumique entre le volume total des porosités et le volume du composite.

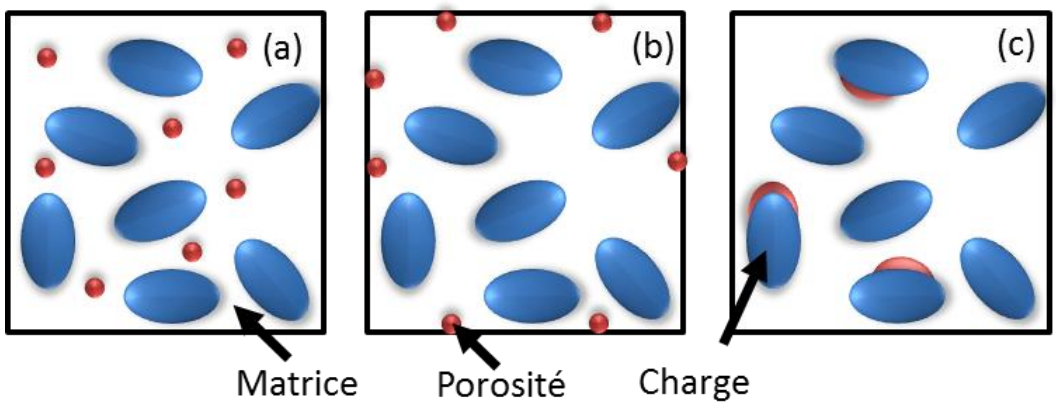


Figure 8 : Représentation des différentes morphologies de porosité

Trois morphologies de porosité peuvent être distinguées comme le montre la Figure 8 :

- La porosité fermée (a) :

Les porosités fermées sont des cavités isolées à l'intérieur de la matrice. Ce genre de porosité entraîne un affaiblissement de la matrice, d'un point de vue thermique mais aussi mécanique. Ces cavités remplies de gaz, de faible conductivité thermique, réduisent le transfert thermique au sein du matériau poreux, la conductivité effective du composite en est diminuée.

Les porosités fermées sont consécutives à une humidité trop importante dans le composite lors de la mise en forme, produisant de la vapeur d'eau lors de la chauffe. La formation de ces porosités peut aussi être causée par un emprisonnement de gaz lors de la production du composite.

- La porosité ouverte (b) :

La porosité ouverte est une cavité connectée à la partie extérieure du composite. Cette porosité crée un défaut qui se positionne principalement à la surface du composite. Ce défaut de surface introduit une résistance de contact lors d'un transfert par conduction avec une autre pièce, mais peut favoriser le transfert par convection du composite par l'augmentation de la surface.

Ce genre de porosité est produit par un emprisonnement de gaz lors de la mise en forme ou à cause d'un décollement de matière lors du démoulage de la pièce dû à un problème d'accroche. Cette porosité étant un défaut externe, elle est facilement repérée et dans certain cas réparée.

- La porosité d'interface (c) :

La porosité d'interface est une porosité s'étant développée à l'interface de la matrice et la charge. Cette porosité comme la porosité fermée contient du gaz de faible conductivité thermique. La porosité d'interface, avec ce gaz, vient limiter l'apport de la charge. Comme la charge est amplement plus conductrice que la matrice, cela entraîne une réduction significative de la conductivité thermique effective du composite.

Plusieurs facteurs peuvent introduire des porosités d'interface dans le composite. Le retrait, la réduction du volume de la matrice polymère lors du refroidissement, peut entraîner un décollement entre la matrice et la charge. L'incompatibilité entre la charge et la matrice peut empêcher la création d'une liaison mécanique et aussi entraîner un décollement entre la matrice et la charge. La porosité d'interface peut être liée à la problématique d'interface imparfaite, qui sera développée par la suite.

Ces trois morphologies de porosité sont généralement présentes en même temps dans les composite, dans des proportions variables, ceci pouvant devenir un problème primordial pour la conductivité thermique du composite.

3.4.2 L'interface imparfaite

Les interfaces, surfaces entre particules et la matrice du composite, jouent un rôle clé lors des phénomènes de transfert tels que la conductivité thermique, la conductivité électrique, la diffusivité, la perméabilité.

On parle d'interface imparfaite lorsqu'un défaut est présent au niveau de l'interface et vient faire obstacle au transfert thermique entre la charge et la matrice. Ces défauts peuvent être dus

à une mauvaise adhérence chimique, à la présence d'une rugosité relative, à la différence de dilatation thermique entre les phases locales ou encore à un retrait de la matrice polymère trop important.

Les petites charges ayant une surface spécifique importante, la surface en contact entre les charges et la matrice est plus grande que pour des charges de plus grandes dimensions, à taux de charge égal. Plus la surface entre charge et matrice est élevée plus la formation de défauts de surface est accentuée. Les charges de petite taille sont donc plus enclines à favoriser la présence d'interfaces imparfaites. De la même manière, un facteur de forme et une fraction volumique de charge élevés augmentent la taille de l'interface et par conséquent favorisent l'existence d'interfaces imparfaites.

Cette interface imparfaite est vue au niveau thermique comme une discontinuité de la température lors du passage entre la matrice et la charge, ceci étant équivalent à la présence d'une résistance thermique à l'interface.

Cette résistance thermique a l'interface à des effets néfastes sur la conductivité thermique effective du composite en limitant grandement le transfert thermique entre la charge et la matrice.

Pour illustrer l'influence de l'interface imparfaite, on utilise le modèle de Hasselman (Hasselman & Johnson 1987), dans le cas de renfort sphérique. Pour cela, nous prenons : K^1 la conductivité des renforts, K^2 la conductivité de la matrice a le rayon de l'inclusion, α la résistance interfaciale. La Figure 9 représente la conductivité thermique effective normalisée du composite en fonction du logarithme base 10 de la résistance thermique interfaciale modifié $\alpha K^2/a$.

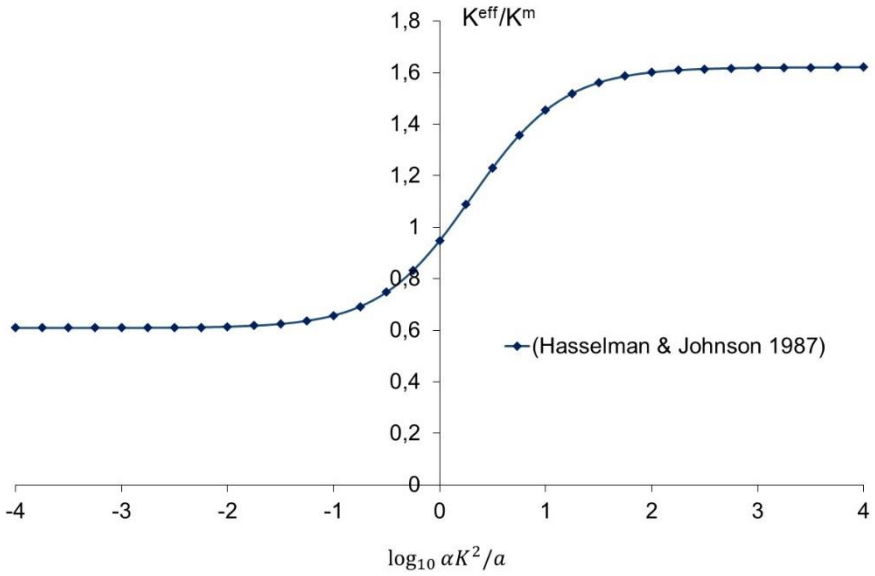


Figure 9 : Modèle de Hasselman & Johnson (Hasselman & Johnson 1987) avec interface imparfaite pour : $K^1/K^2 = 100$ et $f = 0.3$ et où $h^c = \alpha K^2/a$.

3.5 CONCLUSION

Avec cette revue des phénomènes agissant sur la conductivité thermique des matériaux hétérogènes nous avons vu que la percolation permet d'améliorer la conductivité thermique du composite par la formation de réseaux thermiques. Cependant, dans le cas d'utilisation de matériaux à la fois conducteur thermique et électrique, les réseaux facilitent aussi la circulation du courant et annule donc l'isolation électrique de la matrice. Nous pouvons donc constater que l'utilisation de matériaux conducteurs électriques est impossible.

Pour les charges, on a observé que leur conductivité thermique élevée n'était pas le seul facteur permettant d'améliorer la conductivité du composite : leur fraction volumique et leur morphologie influent grandement. Une fraction volumique importante permet d'accroître la conductivité du composite mais risque cependant, lorsqu'elle est très importante, de favoriser la formation d'interfaces imparfaites et de porosités.

Nous avons aussi montré que la taille des charges peut modifier la conductivité thermique du composite. En effet, des charges de petite taille peuvent soit améliorer la conductivité thermique du composite en augmentant l'effet de percolation soit la diminuer en amplifiant le risque de formation d'interfaces imparfaites.

L'augmentation du facteur de forme permet d'élever la conductivité thermique du composite. Cette croissance est limitée par la présence de valeurs asymptotiques et par le fait de la limitation des formes des particules par la nature de charge et leur méthode de production.

L’orientation des particules permet dans le cas d’une orientation parfaitement aléatoire d’obtenir un matériau isotrope. Dans le cas d’un matériau avec des particules orientées l’on obtient une conductivité thermique améliorée dans une direction préférentielle au détriment des autres, toutefois, l’orientation des particules est un paramètre complexe à maîtriser.

Nous avons observé l’influence, sur le transfert thermique, des défauts que l’on retrouve dans les matériaux composites, la porosité et l’interface imparfaite. Dans le cas de la porosité, nous avons montré que la porosité, avec la présence de gaz, de faible conductivité thermique, diminue grandement la conductivité thermique du composite. De même, les interfaces imparfaites créent une discontinuité à l’interface des champs de températures, charge et matrice, induisant une résistance, limitant le transfert thermique dans le matériau.

L’ensemble des paramètres micromécanique influençant la conductivité thermique du composite ont été présenté. Par la suite, notre objectif est de déterminer la conductivité thermique effective du composite en prenant en compte les fortes fractions volumiques, la morphologie des charges, l’anisotropie des phases, la porosité et l’effet des interfaces imparfaites.

Chapitre 4 : Modélisation de la conductivité thermique des composites à renforts particulaires

4 MODELISATION DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE DES COMPOSITES A RENFORTS PARTICULAIRES

4.1 INTRODUCTION

Dans le domaine des phénomènes de transfert dans des matériaux hétérogènes, l'analyse de la conductivité thermique est d'un grand intérêt pour la conception de nouveaux composites dans des applications d'ingénierie modernes telles que la protection électronique, l'isolation thermique, etc. L'optimisation de la conductivité thermique est une étape clé dans la conception et le développement de ces composites.

Les méthodes d'homogénéisation basées sur la modélisation multi-échelle sont des outils adaptés pour la détermination des propriétés effectives du composite à partir de la morphologie, de la fraction volumique, des orientations et des propriétés de chaque phase locale. Les interfaces entre les constituants jouent un rôle clé lors du transfert de phénomènes tels que la conductivité thermique, la conductivité électrique, la diffusivité, la perméabilité, etc.

Nous avons donc choisi d'utiliser méthodes d'homogénéisation par champs moyens pour modéliser la conductivité thermique du composite. Ce chapitre s'articule autour d'une présentation des bases d'homogénéisation et du problème classique de l'inclusion d'Eshelby (Eshelby 1957) en thermique. Cette première section se termine par les différents schémas d'homogénéisation qui seront appliqués dans ce travail de thèse. Le problème particulier de l'inclusion enrobée sera ensuite évoqué à travers une synthèse des travaux issus de la littérature dans une seconde section. Les résultats issus des modèles de la littérature seront exposés à des fins ultérieures de comparaison pour en fixer leurs limitations. Les résultats seront analysés par rapport aux bornes de Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962). Les dernières sections sont consacrées à la présentation des méthodes développées dans cette thèse permettant de prendre en compte l'anisotropie de comportement des phases, la géométrie des renforts et leur forte concentration.

4.2 BASES DE LA METHODE DE TRANSITION D'ECHELLES ET METHODES D'HOMOGENEISATION

4.2.1 Principes et représentation du milieu hétérogène

Dans le cadre de notre, étude nous sommes amenés à évaluer la conductivité thermique de matériaux composites. Une phase de modélisation a été effectuée afin d'estimer les

caractéristiques qu'il est possible d'atteindre en choisissant les différentes phases du composite. Cette modélisation permet de limiter la quantité d'essais à réaliser afin de déterminer quelles sont les paramètres les plus adaptés à l'obtention des propriétés thermiques attendues.

Nous avons choisi de baser notre modélisation sur une méthode analytique par transition d'échelle. Lors de la mise en œuvre de cette méthode, il est important de fixer l'ordre de grandeur de l'échelle. Prendre une échelle trop fine ou au contraire trop grande peut modifier les équations de comportement à utiliser.

Le principe de transition d'échelle repose sur le fait de substituer le Milieu Homogène Equivalent (MHE) par un milieu hétérogène. Les propriétés du MHE sont définies à partir des paramètres des constituants du milieu hétérogène et de sa morphologie.

Le but est de définir une relation entre les paramètres de l'échelle locale du milieu hétérogène et celle de l'échelle macroscopique du milieu homogène.

Les approches à transition d'échelles reposent sur la définition de différentes grandeurs : celle de l'hétérogénéité de dimension d, celle du Volume Elémentaire Représentatif (VER) de dimension l et enfin celle de la structure macroscopique notée L. Ces dimensions doivent vérifier ces conditions de séparation :

$L \gg l$: pour une structure considérée comme continue

$l \gg d$: pour avoir un comportement homogène du VER.

Le comportement effectif du milieu hétérogène est défini comme la réponse moyenne du VER à un chargement moyen.

Les méthodes d'homogénéisation s'effectuent en trois étapes :

-La représentation du matériau, qui consiste en la description des matériaux à l'échelle locale. Pour cela, les différentes phases sont décrites en définissant leurs répartitions spatiales et leur comportement local.

-La localisation, qui permet de lier le comportement locale au comportement macroscopique.

-L'homogénéisation, qui consiste en une détermination du comportement macroscopique en effectuant une opération de moyenne de l'étape précédente.

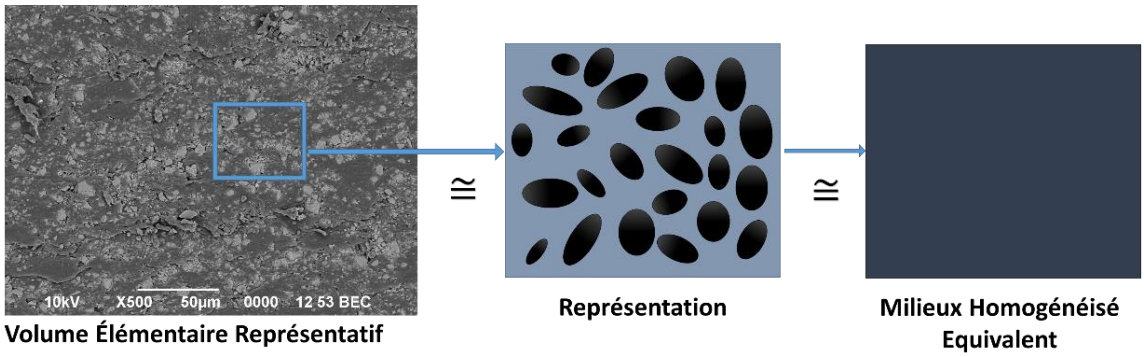


Figure 10 : Modélisation par changement d'échelle

4.2.2 Localisation et homogénéisation

Nous allons développer les méthodes de changement d'échelles dans le cadre de la conductivité thermique de matériau hétérogène.

Dans un milieu V de frontière ∂V, nous définissons un point matériel $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$ et un vecteur normal unitaire $\boldsymbol{N}$ orienté vers l'extérieur de la surface ∂V. Nous définissons la relation entre les champs locaux intensité thermique $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ et flux thermique $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$ et les valeurs macroscopiques $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{Q}$ en utilisant les relations de moyennes :

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{V}\int_{\partial V} T(\boldsymbol{r})\boldsymbol{N}(\boldsymbol{r})d\,S$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{V}\int_{\partial V} (\boldsymbol{q}.\boldsymbol{N})\boldsymbol{r}d\,S. \qquad (4.1)$$

Soit un milieu V, dans lequel est défini un flux thermique $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$ équilibré ($\boldsymbol{div}\,\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = 0$) et un champ d'intensité associé $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ avec le champ d'intensité macroscopique $\boldsymbol{E}$, tel que $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\,T(\boldsymbol{r})$ pour $\boldsymbol{r} \in V$ avec $T(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{E}.\boldsymbol{r}$ pour $\boldsymbol{r} \in \partial V$. Dans le cas des interfaces parfaites où la température $T(\boldsymbol{r})$ et le flux $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$ sont continus dans le milieu V, les équations (4.1), deviennent :

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{V}\int_{V} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})dV = \bar{\boldsymbol{e}}$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{V}\int_{V} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})dV = \bar{\boldsymbol{q}}. \qquad (4.2)$$

Nous définissons un tenseur d'ordre 2 liant les champs locaux et macroscopiques, nommé tenseur de localisation. Ces tenseurs notés $\boldsymbol{A}$ pour le tenseur de localisation du champ d'intensité et $\boldsymbol{B}$ pour le tenseur de localisation du flux thermique, sont tels que :

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{E} \;\; et \;\; \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{Q} \tag{4.3}$$

où $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ et $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ sont des tenseurs symétriques ($A_{ij} = A_{ji}$) qui vérifient les conditions :

$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I}$ et $\overline{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{I}$ où $\boldsymbol{I}$ est le tenseur d'identité d'ordre 2.

Le lemme de Hill-Mandel est formulé dans le cas du transfert thermique :

La condition de macro-homogénéité sur le volume V s'écrit :

$$\frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})dV = -\frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{\nabla}\, T(\boldsymbol{r})dV. \tag{4.4}$$

En utilisant la relation de la divergence, l'équation (4.4) devient :

$$\frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})dV = -\frac{1}{V}\int_{\partial V} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}).T(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{N}(\boldsymbol{r})dS + \frac{1}{V}\int_{\partial V} \boldsymbol{div}\, \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}).T(\boldsymbol{r})dS. \tag{4.5}$$

Nous obtenons :

$$\frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})dV = \frac{1}{V}\int_{\partial V} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{E}.\boldsymbol{r}.\boldsymbol{N}(\boldsymbol{r})dS = \boldsymbol{E}.\boldsymbol{Q}. \tag{4.6}$$

L'étape d'homogénéisation consiste à déterminer la loi de comportement macroscopique. On définit tout d'abord la loi de comportement local :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) \\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{4.7}$$

où $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ est le tenseur de conductivité thermique d'ordre 2 et $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ est le tenseur de résistivité thermique d'ordre 2.

En utilisant l'équation de comportement (4.7), les tenseurs de localisations (4.3) et les conditions de Hill-Mandel (4.4), nous pouvons écrire la loi de comportement macroscopique, permettant d'obtenir la conductivité thermique effective du MHE :

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})dV = \frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})dV.\boldsymbol{E} = \boldsymbol{K}^{eff}.\boldsymbol{E}$$

avec $\boldsymbol{K}^{eff} = \frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})dV$ (4.8)

où $\boldsymbol{K}^{eff}$ est la conductivité thermique effective du Milieu Homogène Equivalent.

De la même manière, la résistivité thermique effective du Milieu Homogène Equivalent est définie en partant le champ d'intensité macroscopique:

$$\boldsymbol{E} = \bar{\boldsymbol{e}}^V = \frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})dV = \frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})dV\,.\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{H}^{eff}.\boldsymbol{Q}$$

avec $\boldsymbol{H}^{\boldsymbol{eff}} = \frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})dV$ (4.9)

où $\boldsymbol{H}^{eff}$ est la résistivité thermique effective du MHE.

4.3 MODELE D'INCLUSION D'ESHELBY

Le problème d'inclusion a été initialement développé par d'Eshelby en élasticité (Eshelby 1957). Ce modèle permet de résoudre le problème d'une inclusion ellipsoïde plongée dans une matrice infinie. Mura (Mura 1982) a introduit le concept de l'inclusion équivalente. Ensuite, Hatta et Taya (Hatta & Taya 1986) ont étendu ces concepts au cas de la conductivité thermique.

4.3.1 Problème d'inclusion d'Eshelby

On considère un milieu V de frontière ∂V constitué d'un matériau homogène $\boldsymbol{K}^0$, dans lequel est noyée une inclusion V_1 de frontière S_1. L'inclusion V_1 est soumise à un champ d'intensité libre $\boldsymbol{e}^L(\boldsymbol{r})$. La loi de Fourier s'écrit:

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^0.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{K}^0.\boldsymbol{e}^L(\boldsymbol{r}). \tag{4.10}$$

Le champ d'intensité $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ est défini par :

$$e_i(\boldsymbol{r}) = -T_{,i}(\boldsymbol{r}) \tag{4.11}$$

où $T(\boldsymbol{r})$ est la température.

La relation de conservation de l'énergie est introduite :

$$q_{i,i}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{4.12}$$

La condition à la limite ∂V est définie par:

$$T(\boldsymbol{r}) = 0 \text{ pour } \boldsymbol{r} \in \partial V. \tag{4.13}$$

En utilisant la relation de conservation de l'énergie (4.12) avec l'équation (4.10) et l'équation (4.11), nous obtenons :

$$K^o_{i,j} T_{,ji}(\boldsymbol{r}) - K^o_{i,j} e^L_{j,i}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{4.14}$$

On introduit les fonctions de Green G^0 associées au milieu V et à $\boldsymbol{K}^0$ donnant la température au point $\boldsymbol{r}$ produite par une source de chaleur ponctuelle en un point $\boldsymbol{r}'$ dans un milieu infini :

$$K^0_{ij} G^0_{,ij}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') + \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = 0 \text{ avec } \lim_{\boldsymbol{r}\to\infty} G^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = 0 \tag{4.15}$$

où $\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ et la fonction delta de Dirac.

L'équation (4.14) se transforme en une équation intégrale définie par :

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{r}) &= \int_{V_1'} G^0_{,j}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') K^0_{jp} e^L_p(\boldsymbol{r}')\, dV_1' \\ e_i(\boldsymbol{r}) &= \int_{V_1'} \Gamma^0_{ij}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') K^0_{jp} e^L_p(\boldsymbol{r}')\, dV_1' \end{aligned} \tag{4.16}$$

avec $\boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$ le tenseur de Green modifié défini par $\Gamma^0_{ij}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = -G^0_{,ij}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$.

L'inclusion V_1 est soumise à un champ d'intensité libre $\boldsymbol{e^L}(\boldsymbol{r})$ selon:

$$\boldsymbol{e}^L(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} \boldsymbol{e}^L \text{ pour } \boldsymbol{r} \in V_1 \\ 0 \quad \text{pour } \boldsymbol{r} \notin V_1 \end{cases} \tag{4.17}$$

où $\boldsymbol{e^L}$ est un champ d'intensité libre uniforme dans l'inclusion. En remplaçant l'équation (4.17) dans l'équation (4.16), le champ intensité $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ devient:

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \int_{V_1'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, dV_1' . \boldsymbol{K}^0 . \boldsymbol{e}^L. \tag{4.18}$$

Dans le cas où l'inclusion V_1 a une forme ellipsoïdale et pour $\boldsymbol{r} \in V_1$, l'intégrale $\int_{V_1'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, dV_1'$est une fonction uniforme dans V_1 (Hatta & Taya 1986). Ainsi, le champ

d'intensité $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ est uniforme dans l'inclusion. Le tenseur de conduction de polarisation $\boldsymbol{L}_0^1$ associé à $\boldsymbol{K}^0$ et à l'inclusion V_1 est introduit tel que :

$$\boldsymbol{L}_0^1 = \int_{V_1'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, dV_1' \text{ pour } \boldsymbol{r} \in V_1. \tag{4.19}$$

Le champ d'intensité $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ dans le volume V_1, noté $\bar{\boldsymbol{e}}^1$ est donc déterminé par

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{L}_0^1.\boldsymbol{K}^0.\boldsymbol{e}^L. \tag{4.20}$$

Le tenseur d'Eshelby en conductivité dans l'inclusion V_1, $\boldsymbol{S}^1$, apparaît selon :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{S}^1.\boldsymbol{e}^L \tag{4.21}$$

avec $\boldsymbol{S}^1 = \boldsymbol{L}_0^1.\boldsymbol{K}^0$.

4.3.2 Problème d'hétérogénéité

On considère une matrice infinie V de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$ dans laquelle est noyée une inclusion V_1 de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^1$. Un chargement en champ d'intensité constant $\boldsymbol{e}^0$ est àppliqué à la frontière ∂V de V.

Pour résoudre ce problème, il est décomposé en deux sous problèmes :

Le sous-problème A :

Une matrice infinie V constituée d'un matériau homogène $\boldsymbol{K}^0$. Sur la surface extérieure de la matrice V, notée ∂V, est appliqué un champ d'intensité $\boldsymbol{e}^0$. Le champ d'intensité dans le sous problème A, $\boldsymbol{e}^A(\boldsymbol{r})$, est défini par :

$$\boldsymbol{e}^A(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^0 \; pour \; \boldsymbol{r} \in V\,. \tag{4.22}$$

Le sous-problème B :

Une matrice infinie V de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$ contient une inclusion V_1 de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$. L'inclusion V_1 est soumise à un champ d'intensité libre $\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{L}} = -\boldsymbol{H}^0.(\boldsymbol{K}^1 - \boldsymbol{K}^0).\bar{\boldsymbol{e}}^1$. Avec l'équation (4.20), on exprime le champ d'intensité dans le sous-problème B, $\boldsymbol{e}^B(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{e}^B(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{H}^0.\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^1 \text{pour } \boldsymbol{r} \in V \tag{4.23}$$

où $\Delta\boldsymbol{K}^{1/0} = \boldsymbol{K}^1 - \boldsymbol{K}^0$

En utilisant le principe de superposition, le champ d'intensité dans le milieu hétérogène est donné par :

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^{A}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{e}^{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^{0} - \boldsymbol{S}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{H}^{0}.\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^{1} \text{ pour } \boldsymbol{r} \in V. \tag{4.24}$$

En effectuant une opération de moyenne de $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ sur le volume V_1, nous obtenons :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{1} = \boldsymbol{e}^{0} - \boldsymbol{L}_{0}^{1}.\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^{1}. \tag{4.25}$$

Le tenseur de localisation de l'inclusion $\boldsymbol{A}^{1}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{e}}^{1} = \boldsymbol{A}^{1}.\boldsymbol{e}^{0} \\ &\boldsymbol{A}^{1} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{0}^{1}.\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

4.3.3 Schémas d'homogénéisation

4.3.3.1 Schéma dilué

Dans le cas du schéma dilué, on considère une représentation semblable à celle du problème d'hétérogénéité d'Eshelby. On définit un milieu hétérogène infini V constitué d'une matrice infinie V_m de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^{m}$, dans laquelle est noyée une inclusion V_1 de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^{1}$. Un chargement en champ d'intensité constant $\boldsymbol{e}^{0}$ est appliqué à la frontière ∂V. Le champ d'intensité macroscopique $\boldsymbol{E}$ est supposé égal au champ d'intensité constant $\boldsymbol{e}^{0}$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}^{0} = \boldsymbol{E} \\ &\boldsymbol{K}^{0} = \boldsymbol{K}^{m}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

En utilisant les équations (4.26) et (4.27), le champ d'intensité dans l'inclusion est défini par:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{1} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{m}^{1}.\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}\right]^{-1}.\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}^{1DD}.\boldsymbol{E} \text{ avec } \boldsymbol{A}^{1DD} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{m}^{1}.\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}\right]^{-1}. \tag{4.28}$$

Les relations de moyennes en flux et intensité s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{e}} = f\,\bar{\boldsymbol{e}}^{1} + (1-f)\bar{\boldsymbol{e}}^{m} \\ &\bar{\boldsymbol{q}} = f\,\bar{\boldsymbol{q}}^{1} + (1-f)\bar{\boldsymbol{q}}^{m} \end{aligned} \tag{4.29}$$

où f est la fraction volumique des inclusions.

Avec les relations de moyennes (4.29), la localisation dans l'inclusion (4.28) et (4.8), nous en déduisons la conductivité thermique effective du schéma dilué $\boldsymbol{K}^{effDD}$:

$$\boldsymbol{K}^{effDD} = \boldsymbol{K}^{m} + f\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}.\boldsymbol{A}^{1DD}. \tag{4.30}$$

4.3.3.2 Schéma de Mori-Tanaka

Pour ce schéma, un milieu hétérogène infini V est constitué d'une matrice infinie V_m de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^{m}$, dans laquelle est noyée une inclusion V_1 de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^{1}$. Un chargement en champ d'intensité constant $\boldsymbol{e}^{0}$ est appliqué à la frontière ∂V.

Le champ d'intensité moyen dans la matrice $\bar{\boldsymbol{e}}^{m}$ est supposé identique au champ d'intensité $\boldsymbol{e}^{0}$, se traduisant par :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}^{0} = \bar{\boldsymbol{e}}^{m} \\ &\boldsymbol{K}^{0} = \boldsymbol{K}^{m}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Nous en déduisons avec les relations (4.26) et (4.31), le champ d'intensité moyen dans l'inclusion:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{1} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{m}^{1}.\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}\right]^{-1}.\bar{\boldsymbol{e}}^{m} = \boldsymbol{A}^{1DD}.\bar{\boldsymbol{e}}^{m}. \tag{4.32}$$

En utilisant l'équation de localisation dans l'inclusion (4.32) et les relations de moyennes (4.29), on arrive à une équation liant le champ d'intensité moyenne dans le milieu V, $\bar{\boldsymbol{e}}$ et le champ d'intensité moyenne dans la matrice $\bar{\boldsymbol{e}}^{m}$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E} = (1-f)\bar{\boldsymbol{e}}^{m} + f\,\boldsymbol{A}^{1}.\bar{\boldsymbol{e}}^{m} \\ &\bar{\boldsymbol{e}}^{m} = [(1-f)\boldsymbol{I} + f\,\boldsymbol{A}^{1DD}]^{-1}.\boldsymbol{E}. \end{aligned} \tag{4.33}$$

En utilisant les expressions (4.8), (4.29), (4.32) et (4.33) on en déduit la conductivité thermique effective pour le schéma de Mori-Tanaka $\boldsymbol{K}^{effMT}$:

$$\boldsymbol{K}^{effMT} = \boldsymbol{K}^{\mathrm{m}} + f\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}.\boldsymbol{A}^{MT} \text{ avec } \boldsymbol{A}^{MT} = \left[f\,\boldsymbol{I} + (1-f)\boldsymbol{A}^{1DD\,-1}\right]^{-1}. \tag{4.34}$$

4.3.3.3 Schéma auto-cohérent (Self consistent)

Pour le schéma auto-cohérent, on définit un milieu hétérogène infini V constitué, d'un milieu fictif infini V de conductivité thermique effective $\boldsymbol{K}^{AC}$ inconnue, dans laquelle est noyée une inclusion V_1 de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^{1}$. Un chargement en champ d'intensité constant $\boldsymbol{e}^{0}$ est àppliqué à la frontière ∂V.

On suppose que le champ d'intensité macroscopique $\boldsymbol{E}$ est égal au champ d'intensité constant $\boldsymbol{e}^{0}$, le champ d'intensité moyen dans l'inclusion est donnée par :

$$\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{E} \tag{4.35}$$

$$\boldsymbol{K}^0 = \boldsymbol{K}^{AC}.$$

Nous avons donc :

$$\boldsymbol{e}^1 = \boldsymbol{A}^{AC}.\boldsymbol{E} \tag{4.36}$$

$$\boldsymbol{A}^{AC} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{AC}^1.\Delta\boldsymbol{K}^{1/AC}\right]^{-1}.$$

avec $\boldsymbol{L}_{AC}^1$, le tenseur de conduction de polarisation associé à $\boldsymbol{K}^{AC}$ et à l'inclusion V_1.

Avec les relations (4.8), (4.36) et les relations de moyennes, nous obtenons donc une équation implicite permettant de déterminer la conductivité thermique effective pour le schéma auto-cohérent:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{K}^{AC} = \boldsymbol{K}^m + f\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}.\boldsymbol{A}^{AC} \\ &\text{avec } \boldsymbol{A}^{AC} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{AC}^1.\Delta\boldsymbol{K}^{1/AC}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

4.3.4 Bornes

4.3.4.1 Bornes dans le cas sphérique

Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) ont proposé leurs fameuses bornes inférieure et supérieure, pour des composites biphasés isotropes. Pour cela, Hashin et Shtrikman déterminent la conductivité thermique d'une inclusion sphérique de conductivité thermique isotrope enrobée dans une matrice finie de conductivité thermique isotrope.

Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) présentent une méthode pour trouver la conductivité effective exacte pour le modèle d'assemblage de sphères composites(ASC). La topologie de son modèle est telle qu'une inclusion sphérique de volume V_1 de rayon r_1 et de conductivité isotrope K^1 est enrobée dans une phase de matrice sphérique concentrique de volume $V_m = V_2 - V_1$ de rayon extérieur r_2 et de conductivité isotrope K^{m} où V_2 est le volume total de l'assemblage. La solution obtenue par ce modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} K^{effHS-} &= K^m + \frac{(r_1/r_2)^3}{\dfrac{1}{K^m - K^1} + \dfrac{1-(r_1/r_2)^3}{3\,K^m}}. \\ K^{effHS+} &= K^1 + \frac{1-(r_1/r_2)^3}{\dfrac{1}{K^1 - K^3} + \dfrac{(r_1/r_2)^3}{3\,K^1}}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Dans le cas de inclusions sphériques et de phases isotropes, nous constatons que le modèle de Hashin & Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) correspond au modèle de Maxwell (Maxwell 1873).

4.3.4.2 Bornes dans le cas ellipsoïdale

Le modèle de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) est une extension des bornes de Hashin-Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) au cas ellipsoïdal. Ce modèle utilise une résolution variationnelle pour obtenir les bornes pour un composite comprenant une matrice et n différentes inclusions ellipsoïdales.

Pour présenter ce modèle nous allons nous contenter d'un matériau biphasé, constitué d'une inclusion ellipsoïdale '1' de conductivité thermique K^1 enrobée dans une phase de matrice ellipsoïdale '0' de conductivité thermique K^m. L'énergie effective W^{eff} est exprimée dans le cas d'une conductivité thermique uniforme K^c, sous la forme :

$$W^{eff}(\bar{e}) \geq (\leq) \frac{1}{2} K^c \bar{\boldsymbol{e}}.\bar{\boldsymbol{e}} + \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{e}}.\bar{\boldsymbol{\tau}}^{eff}. \tag{4.39}$$

L'énergie supérieure correspondant au cas où $K^c \leq K^m$ et inférieure au cas où $K^c \geq K^1$:

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}^{eff} = f\,\boldsymbol{\tau}^1 + (1-f)\boldsymbol{\tau}^m \tag{4.40}$$

où $\bar{\tau}^{eff}$ est le tenseur de conduction de polarisation moyen. Les $\bar{\tau}^{\alpha}$ satisfont les équations :

$$(K^m - K^c)^{-1}\boldsymbol{\tau}^m - \frac{1}{1-f}\boldsymbol{M}.(\boldsymbol{\tau}^1 - \boldsymbol{\tau}^m) = \bar{\boldsymbol{e}} \tag{4.41}$$

$$(K^1 - K^c)^{-1}\boldsymbol{\tau}^1 - \frac{1}{f}\boldsymbol{M}.(\boldsymbol{\tau}^1 - \boldsymbol{\tau}^m) = \bar{\boldsymbol{e}}$$

où $\boldsymbol{M}$ est un tenseur dépendant de la conductivité K^c et de la microstructure, écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{M} = f(\boldsymbol{L}^1 - f\boldsymbol{L}^0) \tag{4.42}$$

$\boldsymbol{L}^1$ et $\boldsymbol{L}^0$ sont les tenseurs de conduction de polarisation associés à K^c et respectivement au facteur de forme de l'inclusion ellipsoïdale et au facteur de forme de la matrice ellipsoïdale :

$$\boldsymbol{L}^1 = \int_{V_1} \boldsymbol{\Gamma}^c(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')dV_1 \text{ avec } \boldsymbol{r}' \in V_1$$
$$\boldsymbol{L}^0 = \int_{V_0} \boldsymbol{\Gamma}^c(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')dV_0 \text{ avec } \boldsymbol{r}' \in V_0. \quad (4.43)$$

Nous pouvons, après simplification, définir les bornes supérieure et inférieure :

$$\boldsymbol{K}^{eff} \leq K^c\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\tau}}^{eff}.\bar{e}^{-1} = \boldsymbol{K}^+ \text{ pour } K^c = K^1$$
$$\boldsymbol{K}^{eff} \geq K^c\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\bar{\boldsymbol{\tau}}^{eff}.\bar{e}^{-1} = \boldsymbol{K}^- \text{ pour } K^c = K^m. \quad (4.44)$$

La borne inferieure est obtenue, après avoir remplacé les termes de polarisation ($\tau^m = 0$) et la conductivité thermique $K^c = K^m$:

$$\boldsymbol{K}^{-P} = K^m\boldsymbol{I} + f((K^1 - K^m)^{-1}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}^1 - f\boldsymbol{L}^2)^{-1}. \quad (4.45)$$

La borne supérieure est obtenue, après avoir remplacé les termes de polarisation ($\tau^1 = 0$) et la de conductivité thermique $K^c = K^1$:

$$\boldsymbol{K}^{+P} = K^1\boldsymbol{I} + (1-f)\left((K^m - K^1)^{-1}\boldsymbol{I} + \frac{f}{1-f}(\boldsymbol{L}^1 - f\boldsymbol{L}^2)\right)^{-1}. \quad (4.46)$$

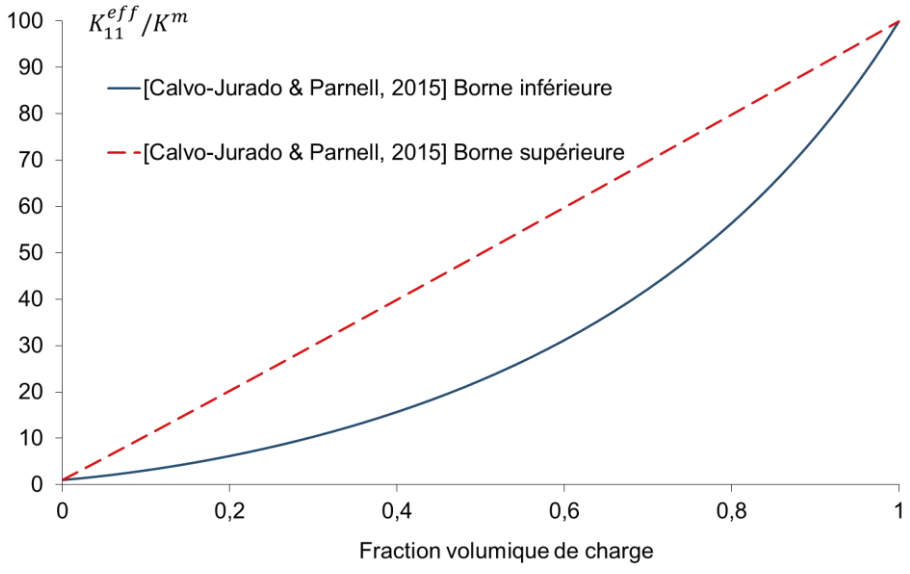


Figure 11 : Bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) dans le cas d'une prolate pour $a_1/a_3 = 5$ et $K^1/K^m = 100$, dans le direction 1

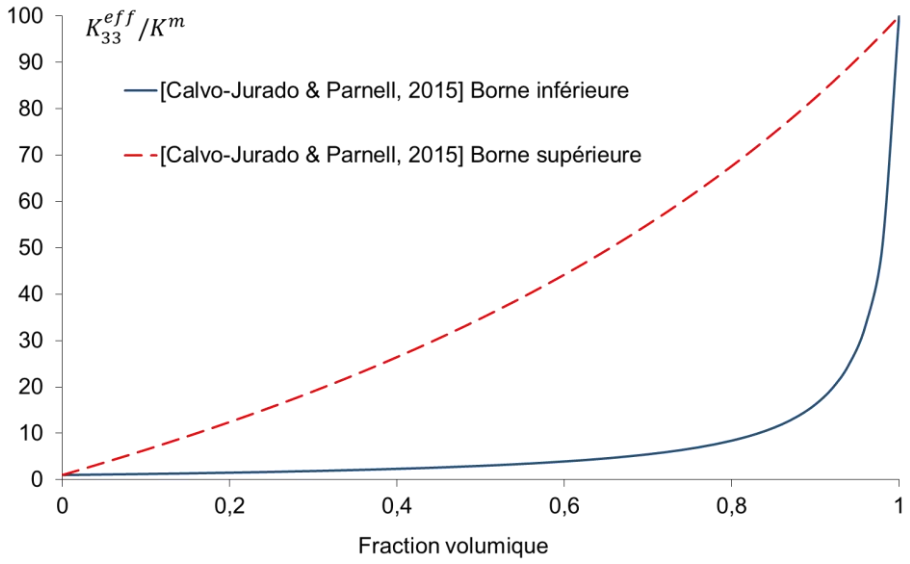


Figure 12 : Bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) dans le cas d'une prolate pour $a_1/a_3 = 5$ et $K^1/K^m = 100$, dans le direction 3

4.4 APPLICATIONS

Les différentes méthodes d'homogénéisations vont être comparées. Le cas sphérique va d'abord être traité en comparant les modèles, exposés précédemment, aux bornes inférieure et supérieure de Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962). Ensuite, les méthodes d'homogénéisation seront étudiées dans le cas de inclusions ellipsoïdes, plus efficaces pour augmenter la conductivité thermique et comparés aux bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015).

- Cas sphérique :

Nous pouvons définir les tenseurs de conduction de polarisation dans le cas des inclusions sphériques et de phases de conductivité isotrope afin d'obtenir les valeurs des conductivités thermiques effectives avec les différents schémas. Mura (Mura 1982) donne la valeur du tenseur de conduction de polarisation dans le cas sphérique sous la forme (voir annexe):

$$\boldsymbol{L}_m^1 = \int_{V_1'} \boldsymbol{\Gamma}^m(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, dV_1' = \frac{1}{3\,K^m}\boldsymbol{I}. \tag{4.47}$$

Avec ce tenseur de conduction de polarisation, on définit les conductivités thermiques effectives :

- pour le schéma dilué :

$$K^{effDD} = K^m + \frac{3f(K^1 - K^m)K^m}{K^1 + 2K^m}. \tag{4.48}$$

- pour le schéma de Mori-Tanaka :

$$K^{effMT} = K^m + \frac{3f(K^1 - K^m)K^m}{(1-f)K^1 + (2+f)K^m}. \tag{4.49}$$

- pour le schéma auto-cohérent :

$$K^{effAC} = \frac{1}{4}\left((3f-1)K^1 + (3f-2)K^m + \sqrt{8K^1K^m + \left((3f-2)K^m - (3f-1)K^1\right)^2}\right). \tag{4.50}$$

Afin d'évaluer les différents modèles d'homogénéisations, une comparaison avec les bornes de Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) est effectuée.

$$K^{supHS} = K^1 + \frac{1-f}{\frac{1}{K^m - K^1} + \frac{f}{3K^1}}$$
$$K^{infHS} = K^m + \frac{f}{\frac{1}{K^1 - K^m} + \frac{1-f}{3K^m}}. \tag{4.51}$$

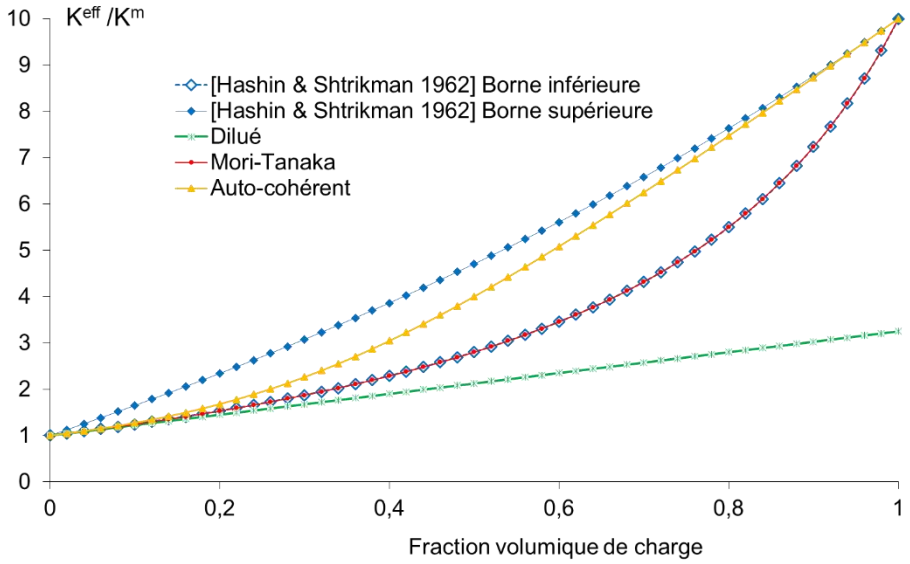


Figure 13 : Comparatif des différents schémas d'homogénéisation et des bornes de Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) dans le cas de particule de forme sphérique avec un contraste $K^1/K^m = 10$

Nous constatons que pour des fractions volumiques faibles (inférieures à 0.15), les valeurs obtenues avec les différents schémas d'homogénéisation sont très proches. Pour une fraction volumique plus importante le modèle dilué est complètement en dehors des bornes de Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962). Le schéma de Mori-Tanaka est, dans cette configuration, confondu avec la borne inférieure de Hashin et Shtrikman. Le modèle auto-cohérent pour des faibles fractions volumiques est proche de la borne inferieure de Hashin & Shtrikman mais surestime la valeur de conductivité thermique pour des fractions volumiques plus grandes.

- Cas ellipsoïdal :

Les tenseurs de conduction de polarisation sont définis dans le cas de inclusions de forme prolate de dimension a_1, a_2 et a_3 respectivement dans la direction 1, 2 et 3 telle que : $a_1 > a_2 = a_3$ et de phases de conductivité isotrope afin d'obtenir les valeurs des conductivités thermiques effectives selon les différents schémas d'homogénéisation.

Dans le cas où toutes les particules sont orientées dans la même direction, une anisotropie est induite par la forme des particules. Nous définissons, d'après la forme des particules, une relation entre les conductivités thermiques effectives dans les trois directions avec $K_{11}^{eff} \neq K_{22}^{eff} = K_{33}^{eff}$.

Nous allons valider les différentes méthodes en plaçant les conductivités thermiques estimées par rapport aux bornes. Nous avons choisi d'utiliser les bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015), qui utilisent une méthode similaire à celle utilisée par Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) appliquée au cas ellipsoïdal :

$$\boldsymbol{K}^{-P} = K^m \boldsymbol{I} + f((K^1 - K^m)^{-1}\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}^1 - f\boldsymbol{L}^2)^{-1} \tag{4.52}$$

$$\boldsymbol{K}^{+P} = K^1 \boldsymbol{I} + (1-f)\left((K^m - K^1)^{-1}\boldsymbol{I} + \frac{f}{1-f}(\boldsymbol{L}^1 - f\boldsymbol{L}^2)\right)^{-1}. \tag{4.53}$$

Mura (Mura 1982) donne les expressions du tenseur de conduction de polarisation dans le cas d'inclusion de forme prolate :

$$\begin{aligned} L_{m33}^1 = L_{m22}^1 &= \frac{a_1 {a_3}^2}{2\,K^m({a_1}^2 - {a_3}^2)^{3/2}}\left[\frac{a_1}{a_3}\left(\frac{{a_1}^2}{{a_3}^2} - 1\right)^{1/2} - cosh^{-1}\frac{a_1}{a_3}\right] \\ L_{m11}^1 &= \frac{1}{K^m} - 2\,L_{m33}^1. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Connaissant l'expression des tenseurs de localisation, il est possible de tracer les conductivités thermiques effectives dans deux directions principales en fonction de la fraction volumique Figure 15.

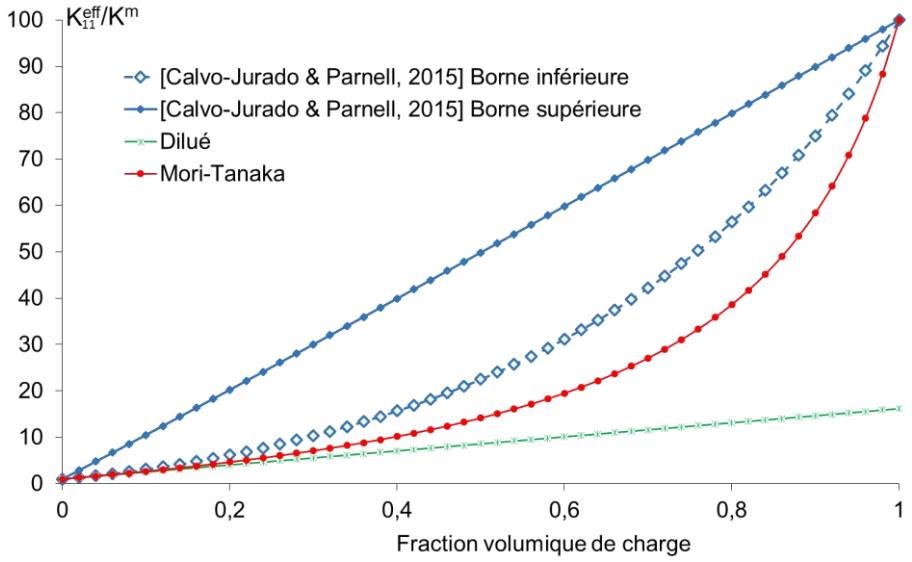


Figure 14 : Comparatif des schémas d'homogénéisations et des bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) dans le cas de particules ellipsoïdales avec $a_1/a_2 = 5$ et $K^1/K^m = 100$ dans la direction 1.

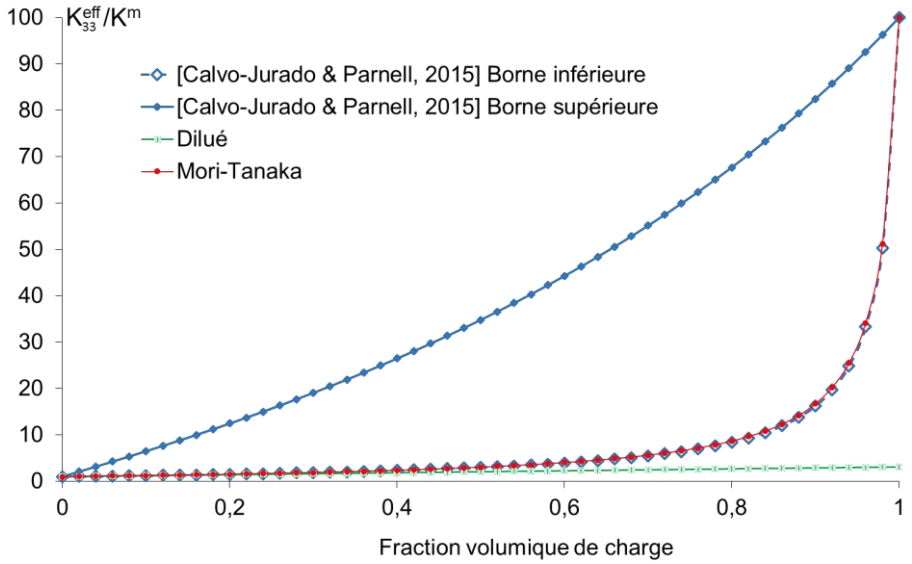


Figure 15 : Comparatif des schémas d'homogénéisations et des bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) dans le cas de particules ellipsoïdales avec $a_1/a_2 = 5$ et $K^1/K^m = 100$ dans la direction 3.

Nous constatons que dans le cas de particules ellipsoïdales, le modèle dilué est toujours en dehors des bornes. Le modèle de Mori-Tanaka dans la direction 3 est à l'intérieur des bornes

de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015). Dans la direction 1 le modèle de Mori-Tanaka sous-estime la conductivité et est nettement à l'extérieur des bornes.

4.5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons fait un descriptif de la méthode de transition d'échelle, avec les trois étapes que sont la représentation, la localisation et l'homogénéisation. Nous avons présenté le modèle d'inclusion d'Eshelby, donnant l'expression de la localisation dans le cas d'une inclusion noyée dans une phase de matrice, appliqué au cas du transfert de chaleur. Nous avons comparé les schémas d'homogénéisation en utilisant la localisation obtenue avec Eshelby.

Nous avons pu constater que les modèles basés sur la méthode d'Eshelby avec les différents schémas d'homogénéisations ne sont pas les plus adaptés aux cas des grandes fractions volumiques et des inclusions de forme ellipsoïdale. Le modèle dilué n'est valable que pour de faibles fractions volumiques, inférieures à 0.15. Le modèle de Mori-Tanaka est valable dans le cas sphérique mais sous-estime la conductivité thermique dans le cas d'inclusions ellipsoïdales. Le modèle auto-cohérent surestime la conductivité thermique dans le cas de fortes fractions volumiques supérieures à 0.3.

Afin de prendre en compte les fortes fractions volumiques et l'influence du facteur de forme, il est nécessaire d'utiliser d'autres représentations. Pour cela deux représentations seront développées dans le cadre de ce travail : une représentation basée sur une inclusion entourée d'une phase de matrice finie, appelée inclusion enrobée et une représentation basée sur le modèle auto cohérent généralisé, représentée par une inclusion enrobée dans une phase de matrice plongée dans une phase de conductivité thermique égale à celle du milieu homogène équivalent.

Chapitre 5 : Modélisation de la conductivité thermique des matériaux hétérogènes par les approches d'inclusions enrobées

5 MODELISATION DE LA CONDUCTIVITE THERMIQUE DES MATERIAUX HETEROGENES PAR LES APPROCHES D'INCLUSIONS ENROBEES

5.1 INTRODUCTION

Les modèles décrits dans le chapitre précédent sont moins adaptés dans le cas des fractions volumiques et de contrastes de conductivité thermique élevées.

Il existe d'autres classes de modèles basées sur le concept d'inclusion enrobée permettant de mieux prendre en compte les fortes fractions volumiques et les contrastes de propriétés élevés. Pour cela, on considère un corps contenant un grand nombre d'inclusion uniformément repartit. Le corps est très grand comparé aux inclusions. On suppose que si la distribution est uniforme, alors si l'on prend arbitrairement un élément composite du corps, cet élément possède une fraction volumique d'inclusion identique à celle du corps. Un champ d'intensité homogène $\boldsymbol{e}^0$ est applique à la surface extérieure du corps.

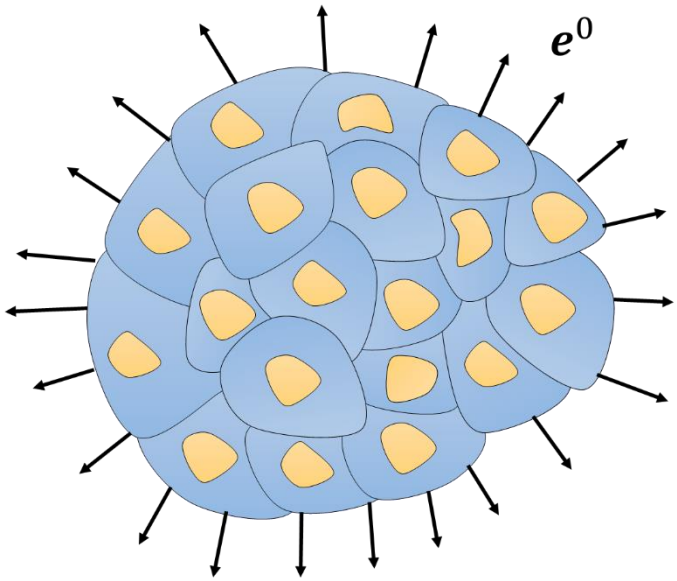


Figure 16 : Représentation d'un composite à deux phases découpé en éléments composites.

Deux approches ont été développées:

- Le modèle d'assemblage de sphère composite (ASC) de Hashin et Shtrikman (Hashin 1960; Hashin & Shtrikman 1962). La surface de chaque élément composite est supposée être soumise au champ d'intensité $\boldsymbol{e}^0$. Le comportement du corps est

supposé identique au comportement d'un élément composite. L'élément composite est approximé par deux sphères concentriques.

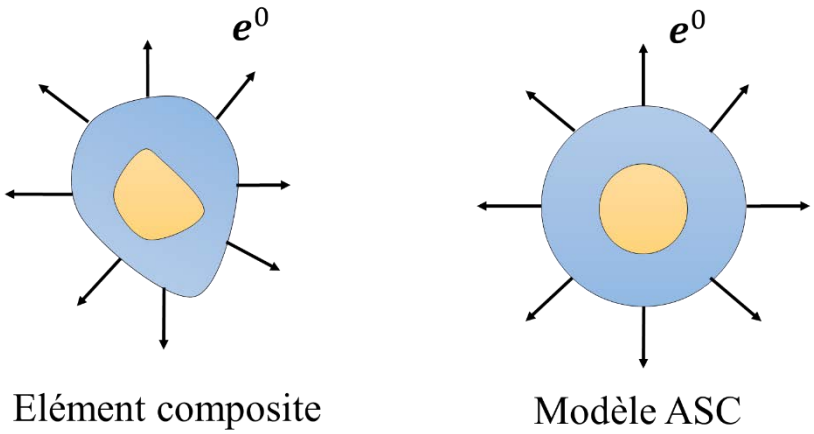


Figure 17 : Représentation du modèle ASC.

- Le modèle auto-cohérent généralisé (Generalized Self-Consistent Scheme (GSCS)) est un modèle proposé par Hashin (Hashin 1968). Ce modèle consiste à supposer que la conductivité thermique effective du composite est équivalent à un élément composite plongé dans le milieu homogène équivalent dont on cherche le comportement. L'élément composite est approximé par deux sphères concentriques plongé dans le milieu homogène équivalent infini.

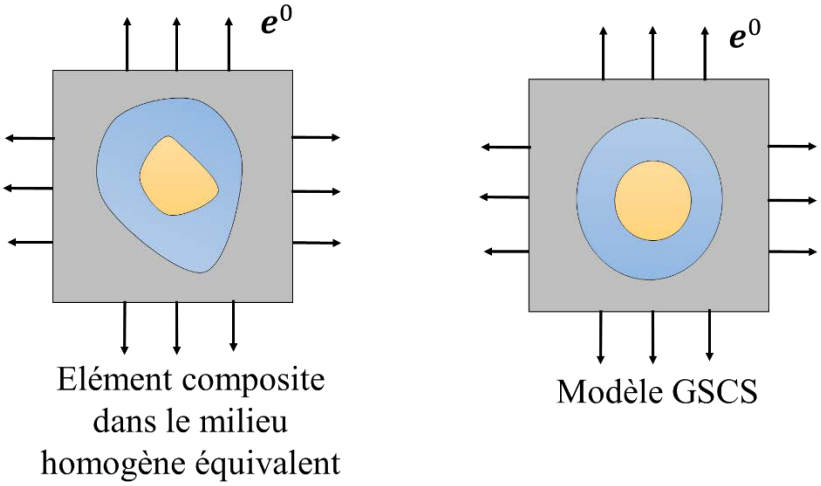


Figure 18 : Représentation du modèle GSCS.

Les modèles basés sur le concept d'inclusion composite, d'après les études de Christensen (Christensen & Lo 1979; Christensen 1990), montrent de bonnes corrélations avec les

simulations numériques des propriétés effectives, pour des fractions volumiques modérées ou élevées et des contrastes de propriétés élevées entre l'inclusion et la matrice. Nous proposons une synthèse des modèles utilisés dans la littérature dans les cas d'inclusion sphériques et ellipsoïdales avec interfaces parfaites et imparfaites.

5.2 MODELE ASSEMBLAGE DE SPHERE COMPOSITE AVEC INTERFACE PARFAITE

Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) présentent une méthode pour déterminer la conductivité effective pour le modèle ASC. La topologie de son modèle est telle qu'une inclusion sphérique de volume V_1 de rayon r_1 et de conductivité isotrope K^1 est enrobée dans une phase de matrice sphérique concentrique de volume $V_m = V_2 - V_1$ de rayon extérieur r_2 et de conductivité isotrope K^{m} où V_2 est le volume total de l'assemblage.

Par la suite, les températures sont définies pour chaque phase du modèle, dans le cas où l'on prend un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) où le centre correspond au centre de la sphère considérée. Nous écrivons :

$$T(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} C^1\, r\, cos\theta \ \text{ pour } r \le r_1 \\ (C^2\, r + C^3\, r^{-2})\, cos\theta \ \text{pour } r_1 \le r \le r_2. \\ -e^0\, r\, cos\theta \ \text{ pour } r \ge r_2 \end{cases} \tag{5.1}$$

Les constantes $C^1, C^2\ et\ C^3$ sont déterminées en utilisant les conditions de continuité de la température et du flux thermique aux interfaces :

- A la surface S^1 ou $r = r_1$ dans le cas de continuité en température :
  $$C^1\, r_1 - (C^2\, r_1 + C^3\, {r_1}^{-2}) = 0 \tag{5.2}$$
- A la surface S^1 ou $r = r_1$ dans le cas de continuité en flux :
  $$K^1 C^1\ - K^2 (C^2 - 2\, C^3\, {r_1}^{-3}) = 0 \tag{5.3}$$
- A la surface S^2 ou $r = r_2$ dans le cas de continuité en température :
  $$(C^2\, r_2 + C^3\, {r_2}^{-2}) + e^0\, r_2 = 0 \tag{5.4}$$
- A la surface S^2 ou $r = r_2$ dans le cas de continuité en flux :
  $$K^2 (C^2 - 2\, C^3\, {r_2}^{-3}) + K^{eff} e^0\ = 0 \tag{5.5}$$

Les paramètres $C^1, C^2, C^3\ et\ K^{eff}$ sont obtenus par résolution du système d'équations :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -(r_1/r_2)^3 & 0 \\ K^1 & -K^2 & 2\,K^m\,(r_1/r_2)^3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & K^m & -2\,K^m & K^{eff} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} C^1 \\ C^2 \\ C^3 \\ H^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.6}$$

La résolution du système conduit à l'expression du module effectif :

$$K^{effHS} = K^m + \frac{(r_1/r_2)^3}{\frac{1}{K^m - K^1} + \frac{1-(r_1/r_2)^3}{3\,K^m}}. \tag{5.7}$$

Dans le cas de inclusions sphériques et de phases isotropes, nous constatons que le modèle de Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) correspond au modèle de Maxwell (Maxwell 1873).

5.3 INTERFACE FAIBLEMENT CONDUCTRICE

Les imperfections peuvent induire une résistance thermique interfaciale dans le composite. Selon le modèle de résistance thermique interfaciale de Kapitza (Kapitza 1941), le saut de température à l'interface est supposé proportionnel à la composante normale du flux thermique.

$$T^1(\boldsymbol{r}) - T^2(\boldsymbol{r}) = -\alpha\, \boldsymbol{q}\,.\boldsymbol{n} \text{ pour } \boldsymbol{r} \in S_1 \tag{5.8}$$

avec α représente la résistance thermique du Kapitza.

5.4 MODELE AVEC INTERFACE IMPARFAITE DANS LES CAS SPHERIQUE ET CYLINDRIQUE

Dans le cas sphérique, Hasselman et Johnson (Hasselman & Johnson 1987) considèrent la température T^d dans une sphère de rayon a et la température T^m dans la matrice avoisinante, qui s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} T^d &= r\,A\cos\theta \\ T^m &= \delta T\, r\, \cos\theta + (B/r^2)\cos\theta \end{aligned} \tag{5.9}$$

avec δT le gradient de température à grande distance de l'inclusion, A et B sont des constantes, r et θ sont des coordonnées sphériques où θ est l'angle entre le vecteur r et le gradient thermique.

A l'interface entre l'inclusion et la matrice, c'est-à-dire pour $r = a$, nous avons les relations suivantes:

$$K^d(\partial T^d/\partial r) = K^m(\partial T^m/\partial r)$$
$$T^d - T^m = -(K^d/h^c)(\partial T^d/\partial r) \tag{5.10}$$

où h^c correspond à la résistance thermique d'interface, (l'interface est considérée parfaite pour $h^c = \infty$).

Les constantes A et B, sont estimées grâce aux conditions aux limites. Après simplification, la conductivité thermique effective peut être définie sous la forme :

$$K^{eff} = K^m \frac{\left[2\left(\frac{K^d}{K^m} - \frac{K^d}{a\,h^c} - 1\right)V^d + \frac{K^d}{K^m} + \frac{2\,K^d}{a\,h^c} + 2\right]}{\left[\left(1 - \frac{K^d}{K^m} + \frac{K^d}{a\,h^c}\right)V^d + \frac{K^d}{K^m} + \frac{2\,K^d}{a\,h^c} + 2\right]} \tag{5.11}$$

où V^d représente la fraction volumique des inclusions, soit $V^d = a^3/b^3$.

Nous pouvons remarquer que lorsque la résistance thermique d'interface est nulle, c'est-à-dire pour $h^c = \infty$, la conductivité thermique effective est similaire à celle obtenue avec le modèle de Maxwell (Maxwell 1873).

Avec la même méthode de résolution nous pouvons déterminer la conductivité thermique effective dans le cas d'une forme cylindrique. Dans ce cas nous pouvons déterminer les nouvelles définitions de températures T^d et T^m :

$$T^d = r\,A\cos\theta$$
$$T^m = \delta T\,r\,\cos\theta + (B/r)\cos\theta. \tag{5.12}$$

En utilisant les conditions d'interface (5.10), nous déterminons la conductivité thermique effective dans le cas de forme cylindrique :

$$K^{eff} = K^m \frac{\left[\left(\frac{K^d}{K^m} - \frac{K^d}{a\,h^c} - 1\right)V^d + \frac{K^d}{K^m} + \frac{K^d}{a\,h^c} + 1\right]}{\left[\left(1 - \frac{K^d}{K^m} + \frac{K^d}{a\,h^c}\right)V^d + \frac{K^d}{K^m} + \frac{K^d}{a\,h^c} + 1\right]} \tag{5.13}$$

où V^d représente la fraction volumique des inclusions, soit $V^d = a^2/b^2$.

5.5 MODELE AUTO-COHERENT GENERALISE DANS LE CAS SPHERIQUE

Le modèle GSCS de Hashin (Hashin 1968) donne la conductivité thermique effetive dans le cas sphérique et pour des phases isotropes. On considère une sphère composite de rayon r_2 constituée d'une inclusion sphérique de conductivité thermique K^1 et de rayon r_1 enrobée dans une matrice de conductivité thermique K^m, plongée dans un milieu homogène équivalent. Ce modèle est basé sur la résolution des équations du transfert de chaleur, avec pour hypothèse une continuité de température et de flux de chaleur aux interfaces.

Les températures sont définies pour chaque phase du modèle, dans le cas où l'on prend un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) où le centre correspond au centre de la sphère considérée. Nous écrivons :

$$T(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} C^1\, r\, cos\theta \ \text{ pour } r \le r_1 \\ (C^2\, r + C^3\, r^{-2})\, cos\theta \ \text{pour } r_1 \le r \le r_2. \\ (-e^0\, r \ + C^3\, r^{-2}) cos\theta \ \text{ pour } r \ge r_2 \end{cases} \tag{5.14}$$

La conductivité thermique effective est définie par:

$$K^{eff} = K^m + \frac{(r_1/r_2)^3}{\dfrac{1}{K^m - K^1} + \dfrac{1-(r_1/r_2)^3}{3\,K^m}}. \tag{5.15}$$

Nous retrouvons le résultat obtenu par le modèle de Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962).

5.6 MODELE AUTO-COHERENT GENERALISE DANS LE CAS SPHERIQUE A (N+1) PHASES

Hervé (Herve 2002) a généralisé le modèle de Hashin (1968) dans le cas de sphères multi-enrobées d'un composite à N phases isotropes. On considère une sphère composite constituée de N sphères concentriques de rayon r_i avec pour chaque phase (i) une conductivité thermique K^i associée, plongée dans le milieu homogène équivalent V. Ce modèle est basé sur la résolution des équations du transfert de chaleur, avec pour hypothèse une continuité de température et de flux de chaleur aux interfaces.

Les températures sont définies pour chaque phase (i) :

$$T^i = \left(A^i\, r + B^i\, r^{-2}\right) cos\theta$$
$$q_r^i = -K^i\left(A^i - 2\, B^i\, r^{-3}\right) cos\theta;\; q_\theta^i = K^i\left(A^i\; + B^i\, r^{-3}\right) sin\theta; q_\phi^i = 0 \tag{5.16}$$

avec A^i et B^i constantes.

Les conditions aux interfaces des phases (i) sont définies par:

$$T^i - T^{i+1} = 0 \;\text{ pour } 1 \le i \le N-1$$
$$\left(\boldsymbol{q}^i - \boldsymbol{q}^{i+1}\right).\boldsymbol{n}^i = 0 \;\text{ pour } 1 \le i \le N-1 \tag{5.17}$$

et par les conditions à la surface ∂V,de V:

$$T = -\boldsymbol{e}^0.\boldsymbol{x}. \tag{5.18}$$

La résolution du système d'équations donne la conductivité thermique effective sous forme récursive:

$$K^{eff/i} = K^i + \frac{K^i({r_{i-1}}^3/{r_i}^3)}{\dfrac{K^i}{K^{eff/i-1} - K^i} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{{r_i}^3 - {r_{i-1}}^3}{{r_i}^3}\right)}. \tag{5.19}$$

Si on considère le cas particulier d'un composite biphasé (soit *i=2*) et $K^{eff/i-1} = K^1$, nous retrouvons les résultats obtenu par les modèles de Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962; Hashin 1968).

5.7 MODELE D'INCLUSION ELLIPSOIDALE ENROBEE

Dans le cas d'inclusions ellipsoïdales, la solution de Laplace est exprimée avec des fonctions harmoniques ellipsoïdales grâce à la théorie des potentiels définis en coordonnées ellipsoïdales (Kellogg 1929). Sur la base de cette solution, des approches ont été consacrées au problème des inclusions ellipsoïdales enrobées avec des interfaces parfaites. Les modèles ASC et GSCS ont été étendus au cas ellipsoïdal.

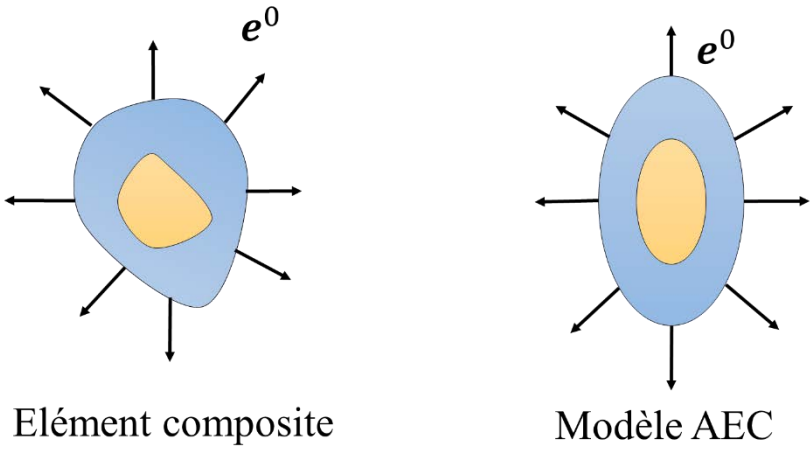


Figure 19 : Assemblage d'ellipsoïde composite

5.7.1 Modèle assemblage d'ellipsoïde composite pour un comportement isotrope par phases

Benveniste et Miloh (Benveniste & Miloh 1989) proposent une solution exacte pour un modèle AEC dans le cas d'inclusions ellipsoïdes pour un comportement isotrope par phases.

Benveniste et Miloh considèrent un ellipsoïde V_2 hétérogène de demi-axes b_1, b_2 et b_3, de frontière S_2. Cet ellipsoïde est composé d'une inclusion V_1, de demi-axes a_1, a_2 et a_3, de frontière S_1, de conductivité thermique isotrope K^1, enrobée dans une matrice V_m, de conductivité thermique isotrope K^m. Un champ d'intensité $\boldsymbol{e}^0$ est appliqué à la frontière S_2 :

$$T(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{e}^0.\boldsymbol{r} \text{ pour } \boldsymbol{r} \in \partial V. \tag{5.20}$$

Les deux surfaces, intérieure et extérieure, sont définies par :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} = 1 \text{ pour } \boldsymbol{r} \in S_1$$
$$\sum_{i=1}^{3} \frac{{x_i}^2}{{b_i}^2} = 1 \text{ pour } \boldsymbol{r} \in S_2. \tag{5.21}$$

Les deux ellipsoïdes sont liés par une relation de confocalité:

$$\alpha^2 = {a_1}^2 - {a_2}^2 = {b_1}^2 - {b_2}^2$$
$$\beta^2 = {a_1}^2 - {a_3}^2 = {b_1}^2 - {b_3}^2. \tag{5.22}$$

Les coordonnées ellipsoïdales (ρ, μ, ν) et les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) satisfont le système :

$$\begin{cases} {x_1}^2 = \rho^2\,\mu^2\,\nu^2/\alpha^2\beta^2 \\ {x_2}^2 = (\rho^2-\alpha^2)(\mu^2-\alpha^2)(\nu^2-\alpha^2)/\alpha^2(\beta^2-\alpha^2) \\ {x_3}^2 = (\rho^2-\beta^2)(\mu^2-\beta^2)(\nu^2-\beta^2)/\beta^2(\beta^2-\alpha^2) \end{cases} \quad (5.23)$$

où $\beta^2 \le \rho^2 \le \infty;\ \alpha^2 \le \mu^2 \le \beta^2; 0 \le \nu^2 \le \alpha^2.$

Les surfaces intérieure et extérieure sont caractérisées respectivement par $\rho = a_1$ et $\rho = b_1$.

La température T^a dans le domaine a est défini par :

$$T^a = T_i^a\, e_i \quad (5.24)$$

avec T_i^a le champ de température dans le domaine a dans la direction i

L'équation de Laplace admet des solutions en coordonnées ellipsoïdales, on définit donc dans l'ellipsoïde intérieure le champ de température par l'intermédiaire de la fonction de Lamé E_n^m du premier type. De même, les champs de température à l'extérieur de l'inclusion sont définis par l'intermédiaire de la fonction de Lamé E_n^m et F_1^i, où F_1^i sont les fonctions de Lamé du second type :

$$\begin{cases} T_i^1(\rho) = C_i^1\ E_1^i(\rho)E_1^i(\mu)E_1^i(\nu) \text{ pour } \rho \ge a_1 \\ T_i^m(\rho) = C_i^2\ E_1^i(\rho)E_1^i(\mu)E_1^i(\nu) + C_i^3\ F_1^i(\rho)E_1^i(\mu)E_1^i(\nu) \text{ pour } a_1 \ge \rho \ge b_1 \end{cases} \quad (5.25)$$

avec

$$E_1^1(\rho) = \rho\ ; E_1^2(\rho) = (\rho^2-\alpha^2)^{1/2}\ et\ E_1^3(\rho) = (\rho^2-\beta^2)^{1/2}$$

$$F_1^i(\rho) = 3\ E_1^i(\rho) \int_\rho^\infty \frac{ds}{\left[E_1^i(s)\right]^2[(s^2-\alpha^2)(s^2-\beta^2)]^{1/2}}. \quad (5.26)$$

Par la suite en utilisant les équations de continuité en flux thermique et en température et la condition aux limite, la conductivité thermique effective est donnée par :

$$K_i^{effMB} = K^m + \frac{W^i(b_1,b_1)K^m}{\frac{K^1}{(K^1-K^m)}W^i(a_1,a_1) - W^i(b_1,a_1)} \quad (5.27)$$

où $W^i(r,s)$ est le pseudo-Wronskian défini par :

$$W^i(r,s) = \frac{F_1^i(r)}{E_1^i(r)} - \frac{\dot{F}_1^i(r)}{\dot{E}_1^i(r)} \quad (5.28)$$

donnant dans le cas d'ellipsoïde de forme prolate avec une direction principale dans la direction 1 ($a_1 > a_2 = a_3$):

$$K_1^{eff} = K^m + \frac{f}{\frac{K^1}{(K^1 - K^m)} - \frac{a_1 {a_3}^2}{2\alpha^3}\left[ln\frac{(b_1+\alpha)(a_1-\alpha)}{(b_1-\alpha)(a_1+\alpha)} + 2\alpha\left(\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1}\right)\right] - 1}$$

$$K_3^{eff} = K^m + \frac{f}{\frac{K^1}{(K^1 - K^m)} - \frac{a_1 {a_3}^2}{4\alpha^3}\left[ln\frac{(b_1+\alpha)(a_1-\alpha)}{(b_1-\alpha)(a_1+\alpha)} + 2\alpha\left(\frac{b_1}{{b_3}^2} - \frac{a_1}{{a_3}^2}\right)\right] - 1}. \quad (5.29)$$

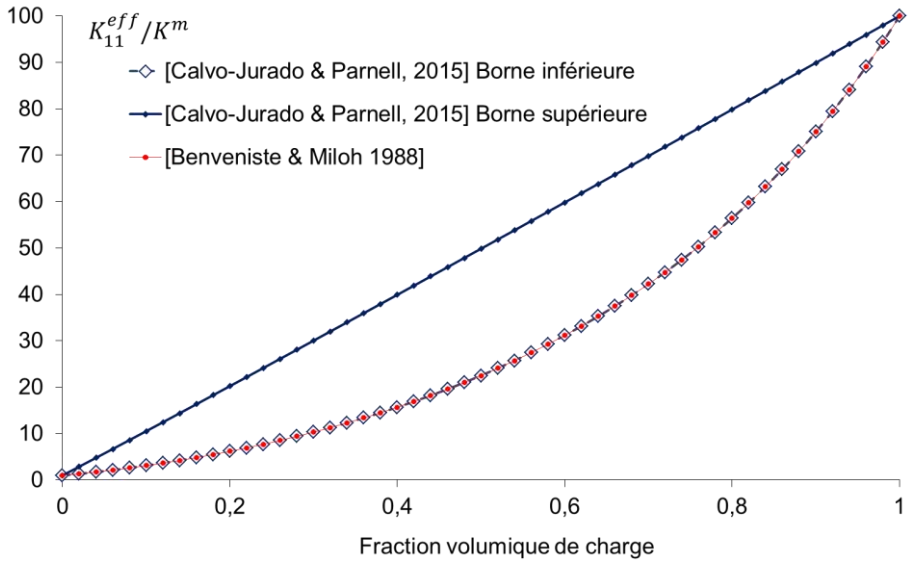


Figure 20 : Comparaison des bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) et du modèle de Benveniste et Miloh (Benveniste & Miloh 1989) dans le cas d'une prolate pour $a_1/a_3 = 5$ et $K^1/K^m = 100$, dans le direction 1

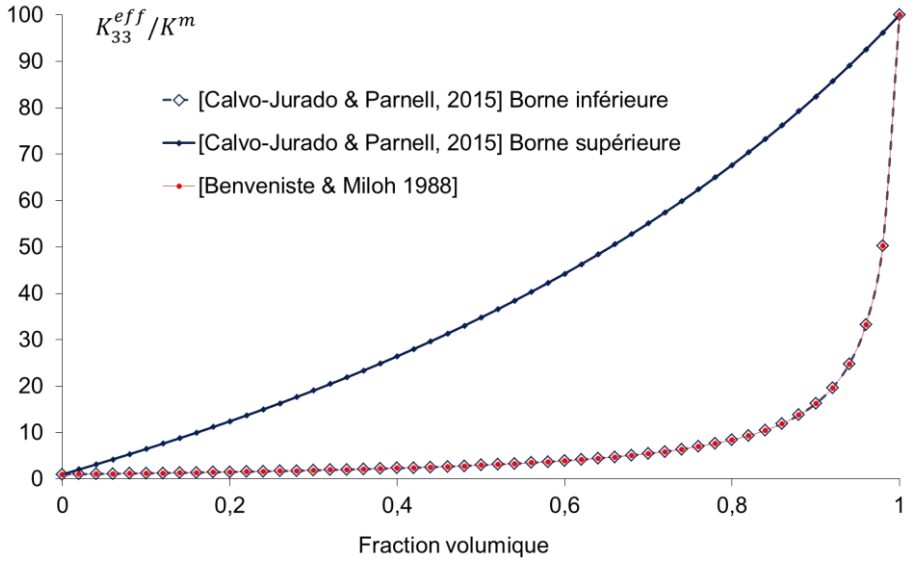


Figure 21 : Comparaison des bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) et du modèle de Benveniste et Miloh (Benveniste & Miloh 1989) dans le cas d'une prolate pour $a_1/a_3 = 5$ et $K^1/K^m = 100$, dans le direction 3.

Les conductivités thermiques effectives obtenues par Benveniste et Miloh (Benveniste & Miloh 1989) sont comparés aux bornes obtenues par Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015) pour des inclusions de forme prolate ($a_1/a_3 = 5$) dans le cas d'un contraste de propriété thermique $K^1/K^{\mathrm{m}} = 100$ selon les directions 1 et 3 (Figure 20 et Figure 21, respectivement). Les expressions obtenues de Benveniste et Miloh coïncident analytiquement avec les bornes inférieures de Calvo-Jurado et Parnell lorsque les ellipsoïdes sont liés par la relation de confocalité.

5.7.2 Modèle d'inclusion ellipsoïdale enrobée dans une matrice infinie

Giordano (Giordano 2015) donne la solution au cas d'une inclusion enrobée plongée dans une matrice infinie. Le modèle considère un volume V constituée d'une inclusion ellipsoïdale V_1 de conductivité thermique anisotrope $\boldsymbol{K}^1$ enrobée dans une phase V_c de conductivité thermique isotrope K^c. L'inclusion composite V_2 (inclusion et enrobage) est plongée dans une phase $V_0 = V - V_2$ de conductivité thermique K^0 isotrope.

On considère que les deux ellipsoïdes sont liés par une relation de confocalité, s'écrivant sous la forme :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{{x_i}^2}{{b_i}^2 + \lambda} = 1 \tag{5.30}$$

où $\lambda = 0$ décrit la surface de V_2, $r \in S_2$ et où $\lambda = \lambda_c$ décrit la surface de V_1, $r \in S_1$, avec :

$$\lambda_c = {a_1}^2 - {b_1}^2 = {a_2}^2 - {b_2}^2 = {a_3}^2 - {b_3}^2. \tag{5.31}$$

La température dans le composite est définie par des fonctions potentielles, une fonction constante à l'intérieur de l'inclusion et une variable dans la matrice :

$$T(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} C_i x_i \text{ pour } \boldsymbol{r} \in V_1 \\ P_i x_i + S_i F_i(\lambda) \text{ pour } \boldsymbol{r} \in V_c \\ -e_i^0 x_i + Q_i F_i(\lambda) \text{ pour } \boldsymbol{r} \in V_0 \end{cases} \tag{5.32}$$

où C_i, P_i, S_i et Q_i, sont des vecteurs constants et $F_i(\boldsymbol{r})$ est une fonction introduite telle que :

$$F_i(\lambda) = x_i \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\left({b_i}^2 + s\right)\Delta^b(s)} \text{ où } \Delta^b(s) = \prod_{i=1}^{3}\left({b_i}^2 + s\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.33}$$

Les facteurs de dépolarisations L_{1i} et L_{ci}, respectivement de l'inclusion et de l'enrobage, sont introduits :

$$L_{1i} = \frac{\mathrm{A}}{2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{({a_i}^2 + s)\Delta^a(s)};\ \Delta^a(s) = \prod_{i=1}^{3}({a_i}^2 + s)^{\frac{1}{2}} \text{ et } \mathrm{A} = a_1 a_2 a_3$$

$$L_{ci} = \frac{\mathrm{B}}{2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{\left({b_i}^2 + s\right)\Delta^b(s)} \text{ et } \mathrm{B} = a_1 a_2 a_3 \tag{5.34}$$

soit :

$$F_i(\lambda_c) = \frac{2}{A} x_i\ L_{1i} \text{ et } F_i(0) = \frac{2}{B}\ x_i\ L_{ci}$$

Afin de déterminer les constantes C_i, P_i, S_i et Q_i, il est nécessaire d'exprimer les équations de continuité :

- de la température à la frontière S_1 :

$$[T] = T^c - T^1 = 0. \tag{5.35}$$

- de flux à la frontière S_1 :

$$[\boldsymbol{q}].\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}^c.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{q}^1.\boldsymbol{n} = 0. \tag{5.36}$$

- de la température à la frontière S_2 :

$$[T] = T^0 - T^c = 0. \tag{5.37}$$

- de flux à la frontière S_2 :

$$[\boldsymbol{q}].\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}^0.\boldsymbol{n} - \boldsymbol{q}^{\mathbf{c}}.\boldsymbol{n} = 0. \tag{5.38}$$

Nous obtenons un système permettant de déterminer les constantes :

$$\begin{cases} P_i + \dfrac{2}{A}\ L_{1i}S_i\ - C_i\ = 0 \\ K^c\left[P_k + \dfrac{2}{A}(L_{1k} - 1)S_k\right] - K_{kj}^i C_j = 0 \\ P_i + \dfrac{2}{B}L_{ci}S_i\ + e_i^0 - \dfrac{2}{B}L_{ci}Q_i = 0 \\ K^c\left[P_k + \dfrac{2}{B}(L_{ck} - 1)S_k\right] - K^0\left[-e_k^0 + \dfrac{2}{B}(L_{ck} - 1)Q_k\right] = 0 \end{cases} . \tag{5.39}$$

Après résolution du système, la conductivité thermique effective par l'approche de Giordano (Giordano 2015) est donnée par:

$$\boldsymbol{K}^{effG} = K^c.\boldsymbol{I} + fK^c\,(\boldsymbol{K}^1 - K^c.\boldsymbol{I}).[(f\,\boldsymbol{L}_c - \boldsymbol{L}_1).(\boldsymbol{K}^1 - K^c.\boldsymbol{I}) - K^c.\boldsymbol{I}]$$

$$\text{où } \boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ 0 & L_{12} & 0 \\ 0 & 0 & L_{13} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{L}_c = \begin{pmatrix} L_{c1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{c2} & 0 \\ 0 & 0 & L_{c3} \end{pmatrix} \text{ et } f = A/B \tag{5.40}$$

Le modèle de Giordano (Giordano 2015), dans le cas où la conductivité thermique de l'inclusion est isotrope, donne des valeurs similaires à celles obtenues avec le modèle AEC de Benveniste et Miloh (Benveniste & Miloh 1989).

5.8 CONCLUSIONS

Nous avons exposé, dans ce chapitre, différents modèles permettant d'obtenir la conductivité thermique effective des composites dans le cas de fraction volumique importante avec les modèles de types ASC et GSCS. Ces modèles ont été présentés dans le cas d'inclusions de forme sphérique et ellipsoïdale, dans le cas d'interface parfaite et imparfaite, dans le cas de matériaux à deux phases et à $(N + 1)$ phases.

Dans la littérature, nous n'avons pas trouvé de modèles permettant de prendre en compte à la fois tous les paramètres de la microstructure : haute fraction volumique de charges, forme des inclusions, interfaces imparfaites, anisotropie des phases et présence de porosité. Nous développerons trois nouveaux modèles, le premier basé sur la représentation d'assemblage d'ellipsoïde composite avec interface imparfaite et phases anisotropes et les deux autres modèles basés sur une représentation auto-cohérente généralisée étendue au cas d'inclusion multi-enrobée de comportement anisotrope par phases. Ces deux derniers modèles sont traités par deux approches différentes.

Chapitre 6 : Conductivité thermique effective par l'approche d'assemblage d'ellipsoïde composite

6 CONDUCTIVITE THERMIQUE EFFECTIVE PAR L'APPROCHE D'ASSEMBLAGE D'ELLIPSOÏDE COMPOSITE

6.1 INTRODUCTION

Pour déterminer la conductivité thermique d'un matériau composite à renfort particulaire, Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) ont développé le modèle ASC. Cependant, cette méthode est restreinte aux inclusions de forme sphérique et aux faibles fractions volumiques de particules. Benveniste et Miloh (Benveniste & Miloh 1989) ont développé un modèle prenant en compte les formes ellipsoïdales des inclusions et l'influence de l'interface imparfaite mais en se limitant au cas de phases isotopes.

Dans ce chapitre, on propose un modèle d'assemblage d'ellipsoïde composite (AEC) avec une interface imparfaite dans le cas général de morphologie ellipsoïdale et de comportement thermique anisotrope par phase. Contrairement aux modèles apportant la solution de l'équation de Laplace en termes d'harmoniques ellipsoïdales, nous proposons une nouvelle formulation micromécanique du modèle AEC basée sur la technique des fonctions de Green.

Dans un premier temps, nous développons ce modèle dans le cas où l'interface entre l'inclusion et la matrice est parfaite, tout en prenant en compte l'effet de la forme et de l'anisotropie. Dans un deuxième temps, nous développons ce modèle dans le cas d'interface imparfaite, en introduisant la résistance interfaciale (Kapitza 1941) où la température est discontinue et la flux thermique reste continue à l'interface.

Des études paramétriques seront effectuées sur le rapport de forme, la fraction volumique des inclusions, le contraste local des conductivités thermiques, l'anisotropie des phases et le paramètre d'interface.

6.2 CAS DE L'INTERFACE PARFAITE

6.2.1 Equation intégrale dans le cas d'un milieu fini

Dans le cas d'un régime permanent et en l'absence de source de chaleur interne, les équations du problème dans le cas de conductivité thermique dans un milieu hétérogène s'écrivent :

- La loi de Fourier :

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}). \tag{6.1}$$

- L'équation de conservation d'énergie

$$\boldsymbol{div}\ \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{6.2}$$

- Le champ d'intensité

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}.T\ (\boldsymbol{r}). \tag{6.3}$$

Nous définissons deux équations en fluctuation : en température où T^0 est la température imposée à la frontière et T^d le terme de fluctuation et en flux où $\boldsymbol{q}^0$est le flux imposé à la frontière et $\boldsymbol{q}^d$ le terme de fluctuation.

$$T(\boldsymbol{r}) = T^0 + T^d(\boldsymbol{r}) \tag{6.4}$$

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{q}^0 + \boldsymbol{q}^d(\boldsymbol{r}). \tag{6.5}$$

Deux types de sollicitations thermiques peuvent être appliqués aux frontières extérieures, en imposant un gradient de température ou un flux thermique. Dans cette étude, on choisi d'imposer le gradient de température à la frontière ∂V :

$$T(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{e}^0.\boldsymbol{r} \ \text{ pour } \boldsymbol{r} \in \partial V. \tag{6.6}$$

Les interfaces au sein du matériau sont supposées parfaites, ce qui implique la continuité des champs de température et de flux thermique:

$$[T] = T^0 - T^1 = 0 \text{ sur } S \tag{6.7}$$

$$[q_i]n_i = (q_i^0 - q_i^1)n_i = 0 \text{ sur } S$$

où $\boldsymbol{n}$ est le vecteur normal à la surface S.

Nous considérons un milieu homogène de référence fini de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$ de sorte que le tenseur de la conductivité thermique locale $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ puisse être séparé en une partie uniforme $\boldsymbol{K}^0$ et partie de fluctuation $\delta\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$:

$$K_{ij}(\boldsymbol{r}) = K_{ij}^0 + \delta K_{ij}(\boldsymbol{r}). \tag{6.8}$$

Avec l'équation de comportement (6.1) et l'équation (6.8), nous obtenons:

$$q_i(\boldsymbol{r}) = -K_{ij}^0\, T_{,j}(\boldsymbol{r}) - \delta K_{ij}(\boldsymbol{r})\, T_{,j}(\boldsymbol{r}) \tag{6.9}$$

Puis, en utilisant l'équation de la chaleur (6.2) :

$$K_{ij}^0\, T_{,ij}^d(\boldsymbol{r}) + \left(\delta K_{ij}\, T_{,j}(\boldsymbol{r})\right)_{,i} = 0. \tag{6.10}$$

Classiquement, l'équation intégrale d'un problème hétérogène est basée sur la technique de la fonction de Green associée à un milieu infini. Ici, le milieu de référence est fini et il est difficile de déterminer la fonction de Green dans ce cas. On propose une sorte de fonction de Green $G(\boldsymbol{r})$ qui s'annule à la frontière d'un milieu infini mais non nulle sur la frontière du milieu de référence de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$ considéré.

On introduit la fonction de Green G^0 associée à $\boldsymbol{K}^0$:

$$K_{ij}^0 G_{,ij}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0 \text{ avec } \lim_{\boldsymbol{r}\to\infty} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0 \tag{6.11}$$

où $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ et la fonction delta de Dirac.

Avec les équations (6.10) et (6.9), nous obtenons :

$$T^d(\boldsymbol{r}) = -\int_{V'} G_{,i'j'}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') K_{ij}^0 T^d(\boldsymbol{r}')\, dV'. \tag{6.12}$$

Le théorème de la divergence s'écrit:

$$\int_V f(\boldsymbol{r})\, g_{,j}(\boldsymbol{r})\, dV = \int_{\partial V} f(\boldsymbol{r})\, g(\boldsymbol{r}) N_j(\boldsymbol{r})\, dS - \int_V f_{,j}(\boldsymbol{r})\, g(\boldsymbol{r})\, dV \tag{6.13}$$

où $\boldsymbol{N}$ est le vecteur normal à la surface ∂V et f et g deux fonctions.

En intégrant par partie et en appliquant le théorème de la divergence (6.13) à l'équation (6.12), on obtient :

$$T^d(\boldsymbol{r}) = -\int_{\partial V'} G_{,i'}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K_{ij}^0\, T^d(\boldsymbol{r}')\, N_j(\boldsymbol{r}')\, dS' + \int_{V'} G_{,i'}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K_{ij}^0\, T_{,j}^d(\boldsymbol{r}')\, dV'. \tag{6.14}$$

Le théorème de la divergence est de nouveau appliqué au premier terme de l'équation (6.14) :

$$\int_{V'} G^0_{,i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d_{,j}(\boldsymbol{r}')\, dV'$$

$$= \int_{\partial V'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d_{,j}(\boldsymbol{r}')\, N_i(\boldsymbol{r}')\, dS' \qquad (6.15)$$

$$- \int_{V'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d_{,ji}(\boldsymbol{r}')\, dV'.$$

Avec (6.2) et (6.10), on obtient:

$$\int_{V'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d_{,ji}(\boldsymbol{r}')\, dV'$$

$$= -\int_{\partial V'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\, T_{,j}(\boldsymbol{r}')\, N_i(\boldsymbol{r}')\, dS' \qquad (6.16)$$

$$+ \int_{V'} G^0_{,i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\, T_{,j}(\boldsymbol{r}')\, dV'.$$

Avec la propriété des fonctions de Green $G^0_{,i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -G^0_{,i}\ (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$, l'équation (6.14) s'écrit :

$$T(\boldsymbol{r}) = T^0(\boldsymbol{r}) + \int_{\partial V'} \left\{G^0_{,i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d(\boldsymbol{r}') - G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, q^d_j(\boldsymbol{r}')\right\} N_j(\boldsymbol{r}')\, dS' \qquad (6.17)$$

$$+ \int_{V'} G^0_{,i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\, T_{,j}(\boldsymbol{r}')\, dV'.$$

Comme sur la surface extérieure ∂V la température $T(\boldsymbol{r})$ est imposée à T^0, nous en déduisons que $T^d = 0$, l'expression précédente devient donc :

$$T(\boldsymbol{r}) = T^0(\boldsymbol{r}) + \int_{V'} G^0_{,i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\, T_{,j}(\boldsymbol{r}')\, dV' \qquad (6.18)$$

$$- \int_{\partial V'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, q^d_j(\boldsymbol{r}')\, N_j(\boldsymbol{r}')\, dS'.$$

Finalement, nous obtenons le champ d'intensité suivant:

$$e_m(\boldsymbol{r}) = e_m^0 + \int_{V'} G_{,im}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\,e_j(\boldsymbol{r}')\,dV' + \int_{\partial V'} G_{,m}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,q_j^d(\boldsymbol{r}')\,N_j(\boldsymbol{r}')\;dS'. \tag{6.19}$$

L'équation ainsi obtenue est composée de deux intégrales :

- la première intégrale est classique et est relative à un problème thermique hétérogène,
- la seconde intégrale est un nouveau terme relatif aux conditions introduit par l'utilisation d'un milieu de référence fini.

On considère une ellipsoïde V_2 hétérogène de demi-axes b_1, b_2 et b_3, de frontière S_2. Cette ellipsoïde est composée d'une inclusion V_1, de demi-axes a_1, a_2 et a_3, de frontière S_1, de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^1$, enrobée dans une matrice V_c, de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$. Les deux surfaces, intérieure et extérieure, sont définies respectivement par :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{{x_i}^2}{{a_i}^2} = 1 \text{ pour r} \in S_1 \tag{6.20}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{{x_i}^2}{{b_i}^2} = 1 \text{ pour r} \in S_2. \tag{6.21}$$

Les valeurs moyennes du champ intensité dans V_2 et V_1 sont données par :

$$\bar{e}_p^2 = e_p^0 + \frac{1}{V_2}\int_{V_2}\int_{{V_1}'} G_{,pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\Delta K_{ij}^{1/0} e_j(\boldsymbol{r}')dV'dV + \frac{1}{V_2}\int_{V_2}\int_{{S_2}'} G_{,p}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,q_j^d(\boldsymbol{r}')N_j(\boldsymbol{r}')dV'\,dV \tag{6.22}$$

$$\bar{e}_p^1 = e_p^0 + \frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{{V_1}'} G_{,pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\Delta K_{ij}^{1/0} e_j(\boldsymbol{r}')dV'dV + \frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{{S_2}'} G_{,p}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,q_j^d(\boldsymbol{r}')N_j dS'\,dV. \tag{6.23}$$

Comme l'intégrale de volume est constant à l'intérieure de l'inclusion composite V_2 quand $\boldsymbol{r'} \in V_2$, le tenseur de polarisation intérieur $\boldsymbol{L}^2$ associé à $\boldsymbol{K}^0$ et à la morphologie de

l'ellipsoïde V_2 peut être introduit. De plus, l'intégrale de volume dans l'inclusion V_1 est uniforme pour $\boldsymbol{r'} \in V_1$, ainsi on introduit le tenseur de polarisation intérieur $\boldsymbol{L}^1$ associé à $\boldsymbol{K}^0$ pour l'ellipsoïde V_1. Les tenseurs $\boldsymbol{L}^1$ et $\boldsymbol{L}^2$ s'écrivent:

$$L_{pi}^2 = -\int_{V_2} G_{,pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dV \text{ pour } \boldsymbol{r}' \in V_2'$$
$$L_{pi}^1 = -\int_{V_1} G_{,pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dV \text{ pour } \boldsymbol{r}' \in V_1'\,. \tag{6.24}$$

Pour $\boldsymbol{r} \in V_2$et $\boldsymbol{r}' \in S_2'$, il n'y a pas de singularité pour $G_{,p}^0$ de sorte que l'on peut permuter l'intégrale de surface et l'intégrale de volume. On définit un vecteur intérieur $\boldsymbol{\Lambda}^2(\boldsymbol{r}')$ associé à $\boldsymbol{K}^0$ et pour l'ellipsoïde V_2. De même, quand $\boldsymbol{r} \in V_1$et $\boldsymbol{r}' \in S_2$, on peut permuter l'intégrale de surface et l'intégrale de volume. Comme $\boldsymbol{r}' \in S_2$ est à extérieur de V_1, on introduit le vecteur extérieur $\boldsymbol{\Lambda}^{Ext/1}(\boldsymbol{r}')$ associé à $\boldsymbol{K}^0$ et pour l'ellipsoïde V_1. Les vecteurs $\boldsymbol{\Lambda}^{Ext/1}(\boldsymbol{r}')$ et $\boldsymbol{\Lambda}^2(\boldsymbol{r}')$ s'écrivent:

$$\Lambda_p^2(\boldsymbol{r}') = -\int_{V_2} G_{,p}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dV \text{ pour } \boldsymbol{r}' \in S_2'.$$
$$\Lambda_p^{Ext/1}(\boldsymbol{r}') = -\int_{V_1} G_{,p}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dV \text{ pour } \boldsymbol{r}' \in S_2'. \tag{6.25}$$

Les équations sont donc réécrites sous la forme :

$$\bar{e}_p^2 = e_p^0 - \frac{V_1}{V_2} L_{pi}^2 \Delta K_{ij}^{1/0} \bar{e}_j^1 - \frac{1}{V_2}\int_{S_2'} \Lambda_p^2(\boldsymbol{r}') q_j^d(\boldsymbol{r}') N_j(\boldsymbol{r}') dV' \tag{6.26}$$

$$\bar{e}_p^1 = e_p^0 - L_{pi}^1 \Delta K_{ij}^{1/0} \bar{e}_j^1 - \frac{1}{V_1}\int_{S_2'} \Lambda_p^{Ext/1}(\boldsymbol{r}') q_j^d(\boldsymbol{r}') N_j dS'\, dV. \tag{6.27}$$

Dans le suite, nous proposons une méthode de détermination exacte de $\boldsymbol{\Lambda}^{Ext/1}$ et $\boldsymbol{\Lambda}^2$.

6.2.2 Expressions analytiques des tenseurs et vecteurs $\boldsymbol{L^{\beta}}$ et $\boldsymbol{\Lambda^{\beta}(r')}$

L'objectif de cette section est de déterminer les tenseurs et vecteurs $\boldsymbol{L^{\beta}(r')}$ et $\boldsymbol{\Lambda^{\beta}(r')}$ afin de pouvoir exprimer les équations (6.22) et (6.23).

Dans le cas où $\boldsymbol{K^0}$ est anisotrope, les fonctions de Green ne sont pas explicites. Un changement de variable est appliqué aux fonctions de Green données en (6.11), ce qui permettra de calculer des tenseurs et vecteurs de polarisations L^{β} et $\Lambda^{\beta}(r')$.

Ce changement de variable repose sur une transformation linéaire des coordonnées cartésiennes comme suggéré dans les travaux de Weiglhofer (Weiglhofer et al. 1997) et Giordano (Giordano & Palla 2008).(Les calculs sont présentés en annexe 12.1)

On obtient l'expression des tenseurs de polarisations :

- $\boldsymbol{L^2(r')}$ pour $\boldsymbol{r'} \in {V_2}'$, et relatif à la conductivité thermique $\boldsymbol{K^0}$ et V_2:

$$L_{pj}^2 = \frac{\tilde{I}_j^2(0)\ {K_{pj}^0}^{-1}}{4\pi}. \tag{6.28}$$

- $\boldsymbol{\Lambda^2(r')}$ pour $\boldsymbol{r'} \in {S_2}'$, et relatif à la conductivité thermique $\boldsymbol{K^0}$ et V_2:

$$\Lambda_p^2(\boldsymbol{r'}) = {x_j}' L_{pj}^2. \tag{6.29}$$

- $\boldsymbol{L^1(r')}$ pour $\boldsymbol{r'} \in {V_1}'$, et relatif à la conductivité thermique $\boldsymbol{K^0}$ et V_1:

$$L_{pj}^1 = \frac{\tilde{I}_j^1(0)\ {K_{pj}^0}^{-1}}{4\pi}. \tag{6.30}$$

- $\boldsymbol{\Lambda^{Ext/1}(r')}$ pour $\boldsymbol{r'} \in {S_2}'$, et relatif à la conductivité thermique $\boldsymbol{K^0}$ et V_2:

$$\Lambda_p^{Ext/1}(\boldsymbol{r'}) = \frac{{x_j}'\delta_{ji}\tilde{I}_j^2(0)}{4\pi\ \alpha_p\alpha_j K_1^0} = f\,\frac{{x_j}'\tilde{I}_j^2(0)\ {K_{pj}^0}^{-1}}{4\pi} = x_j'\frac{V_1}{V_2}L_{pj}^2 \text{pour } \boldsymbol{r'} \in S_2'. \tag{6.31}$$

Avec les équations (6.28), (6.29), (6.30) et (6.31), les équations de localisation de l'intensité s'obtiennent par:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^2 = \boldsymbol{e}^0 - \frac{V_1}{V_2}\boldsymbol{L}^2.\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^1 + \boldsymbol{L}^2.\bar{\boldsymbol{q}}^{d2} \tag{6.32}$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{e}^0 - \boldsymbol{L}^1.\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^1 + \boldsymbol{L}^2.\bar{\boldsymbol{q}}^{d2}. \tag{6.33}$$

où $\bar{\boldsymbol{q}}^{d2}$ et $\bar{\boldsymbol{e}}^1$ sont définis par :

$$\bar{q}_j^{d2} = \frac{1}{V_2} \int_{V_2'} q_j^d(\boldsymbol{r}')\, dV' \text{ et } \bar{e}_j^1 = \frac{1}{V_1} \int_{V_1'} e_j(\boldsymbol{r}')\, dV'. \tag{6.34}$$

Nous définissons la relation entre les champs moyens d'intensités $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ et de flux thermique $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$ et les valeurs macroscopiques $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{Q}$ en utilisant les relations de moyennes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{1}{V_2} \int_{S_2} T(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{N}(\boldsymbol{r}) d\, S = f\, \bar{\boldsymbol{e}}^1 + (1-f)\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{Q} &= \frac{1}{V_2} \int_{S_2} (\boldsymbol{q}.\boldsymbol{N}).\boldsymbol{r} d\, S = f\, \bar{\boldsymbol{q}}^1 + (1-f)\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{c}} \end{aligned} \tag{6.35}$$

avec: $f = V_1/V_2$

Dans le cas du modèle AEC : $\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{K}^0 = \boldsymbol{K}^{\mathbf{m}}$, les équations (6.32) et (6.33) se simplifient, permettant ainsi l'obtention de l'équation de localisation de l'intensité dans l'inclusion V_1:

$$\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{A}^1.\boldsymbol{E} \\ &\text{avec } \boldsymbol{A}^1 = \left[\mathbf{I} + (\boldsymbol{L}_m^1 - f\boldsymbol{L}_m^2).\Delta\boldsymbol{K}^{1/\mathrm{m}}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Les tenseurs $\boldsymbol{L}^1$ et $\boldsymbol{L}^2$ deviennent donc relatif à $\boldsymbol{K}^m$

La conductivité thermique effective dans le cas d'un comportement anisotrope est donnée par:

$$\boldsymbol{K}^{eff} = \boldsymbol{K}^m + f\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}.\left[\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{L}_m^1 - f\boldsymbol{L}_m^2).\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}\right]^{-1}. \tag{6.37}$$

La conductivité thermique ainsi obtenue permet de prendre en compte à la fois la forme de l'inclusion par l'intermédiaire des tenseurs de conduction de polarisation $\boldsymbol{L}^1$ et $\boldsymbol{L}^2$ et de l'anisotropie de la conductivité thermique de l'inclusion et de la matrice. Dans le cas d'inclusion sphérique et de phases isotropes, nous obtenons des résultats en tout point identique au modèle de Hashin et Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) (équation (5.7)). Dans le cas où l'on prend une inclusion ellipsoïdale et des phases isotropes, le modèle AEC donne une expression similaires à celle obtenue avec la méthode développée par Giordano (Giordano 2015) et Benveniste et Miloh (Benveniste & Miloh 1989).

6.2.3 Applications et comparaisons

6.2.3.1 Comparaison du modèle

Pour valider notre modèle, nos résultats sont comparés à ceux obtenus par Kushch (Kushch et al. 2015) dans le cas d'interface parfaite. Nous considérons donc des inclusions de forme oblate ($a_1 = a_2 > a_3$) telle que $a_1/a_3 = 3$ et un contraste de propriétés $K^1/K^{\mathrm{m}} = 1000$.

Kushch développe une approche basée sur une homogénéisation de Rayleigh combinée avec le modèle de cellule unitaire représentatif, permettant de modéliser les composite hautement chargé ou avec une forte hétérogénéité. Ces modèles prennent en compte la microstructure du composite, pour des arrangements aléatoires le modèle est appelée RND et pour un arrangement à face centrée proportionnelle FCP. Kushch propose une comparaison avec l'homogénéisation de Maxwell, prenant en compte les interfaces imparfaites mais étant limité à des fractions volumiques faibles de charges (<0.2).

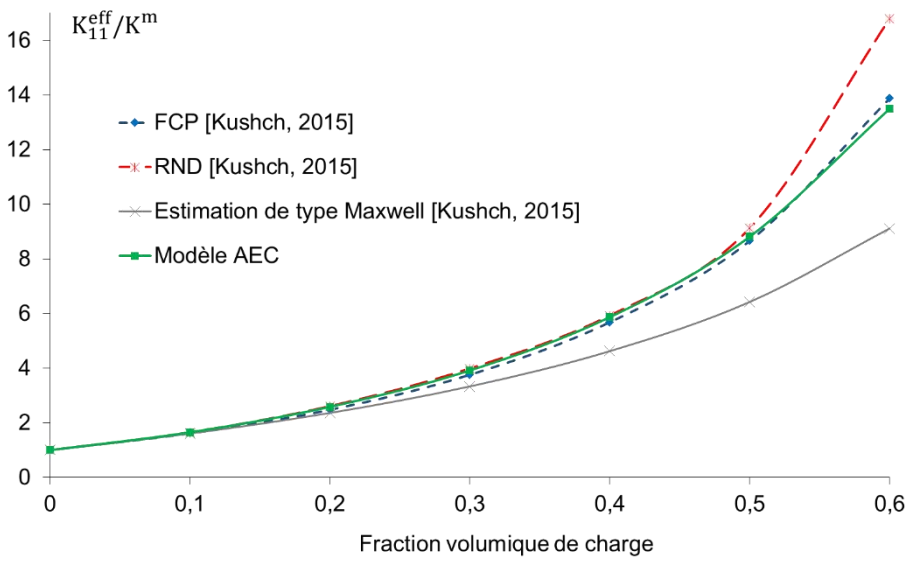


Figure 22 : Comparaison du modèle AEC aux modèles de Kushch (Kushch et al. 2015)

L'approche ACE donne des résultats cohérents avec ceux obtenus par Kushch pour l'arrangement FCP pour des fractions volumiques supérieures à 0.2 (Figure 22). Les prédictions issues du modèle de Maxwell sont disqualifiées pour les fractions volumiques supérieures à 0.2.

6.2.3.2 *Influence du facteur de forme de l'inclusion*

L'effet du facteur de forme, défini par α, où $\alpha = a_3/a_1$ et $a_1 \neq a_2 = a_3$, sur la conductivité thermique effective normalisée par celle de la matrice est représenté sur la Figure 23.

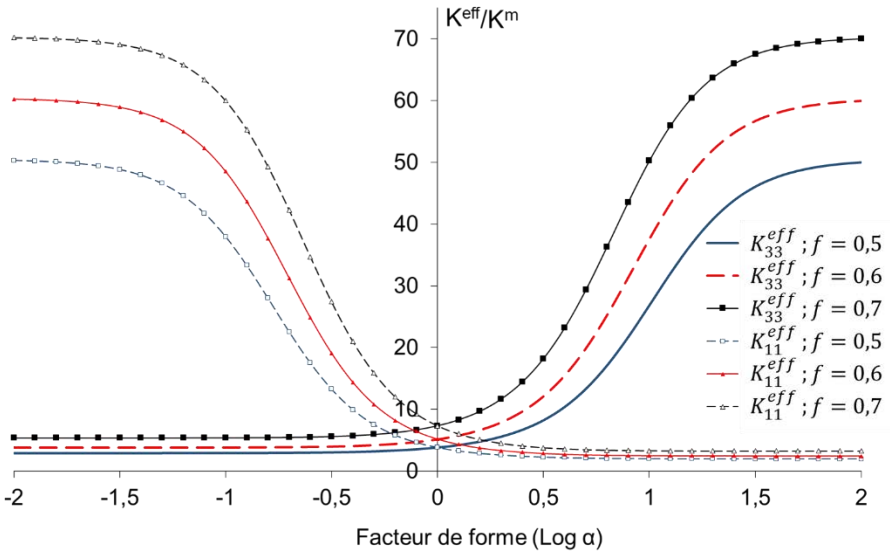


Figure 23 : Influence du facteur de forme sur la conductivité thermique effective du composite chargé de particules ellipsoïdales avec $K^1/K^m = 100$

L'influence du facteur de forme sur la conductivité thermique effective est analysée pour différentes fractions volumiques de charge (0.5, 0.6, 0.7) selon deux directions principales 1 et 3 (Figure 23). On constate une augmentation de la conductivité thermique effective selon le plus grand axe des ellipsoïdes. La forme sphérique minimise la conductivité thermique effective. On choisira donc d'orienter les charges selon leur plus grand axe pour augmenter la conductivité thermique selon cette direction. En effet, l'amélioration de la conductivité thermique effective dans cette direction préférentielle atteint un facteur 10 par rapport à la géométrie sphérique lorsque le facteur de forme est supérieur à 30 ($\log_{10} \alpha > 1.5$) et pour une fraction volumique de 0.5.

6.2.3.3 *Influence du contraste*

L'effet du contraste des propriétés thermiques entre l'inclusion et la matrice sur la conductivité thermique effective est analysé pour une inclusion de forme oblate ($a_1 = a_2 = 5\, a_3$) selon les directions principales 3 et 1 (Figures 24 et 25 respectivement). Les phases sont considérées isotropes et les fractions volumiques de charge varient de 0.3 à 0.6. On montre que la conductivité thermique effective est améliorée dans la direction de plus grand axe quand les inclusions sont plus conductrices que la matrice. Un seuil de saturation apparaît toutefois : l'amélioration de la conductivité thermique effective est limitée pour un

contraste de propriétés. Cette remarque s'applique à toutes les fractions volumiques considérées.

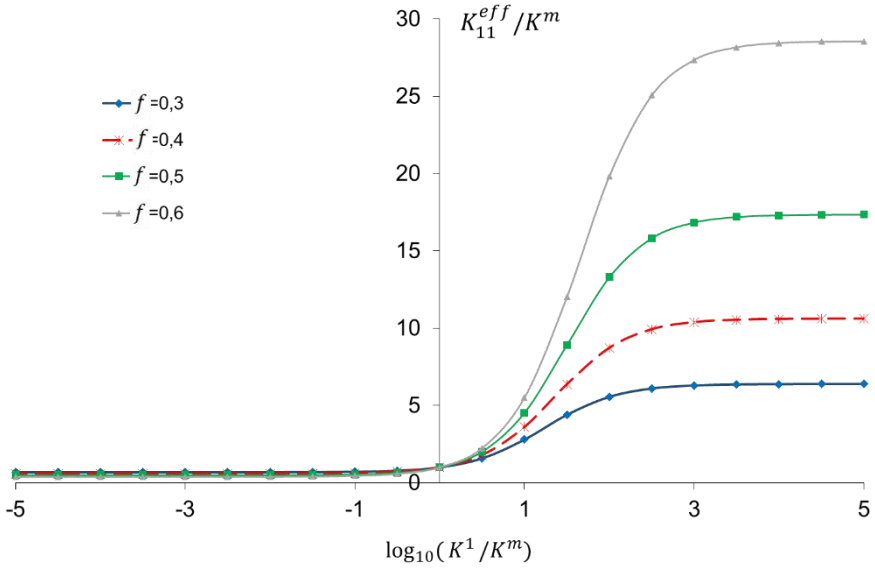


Figure 24 : Influence du contraste sur la conductivité thermique effective du composite chargé de particules de forme oblate avec $a_1/a_3 = 5$ dans la direction 1

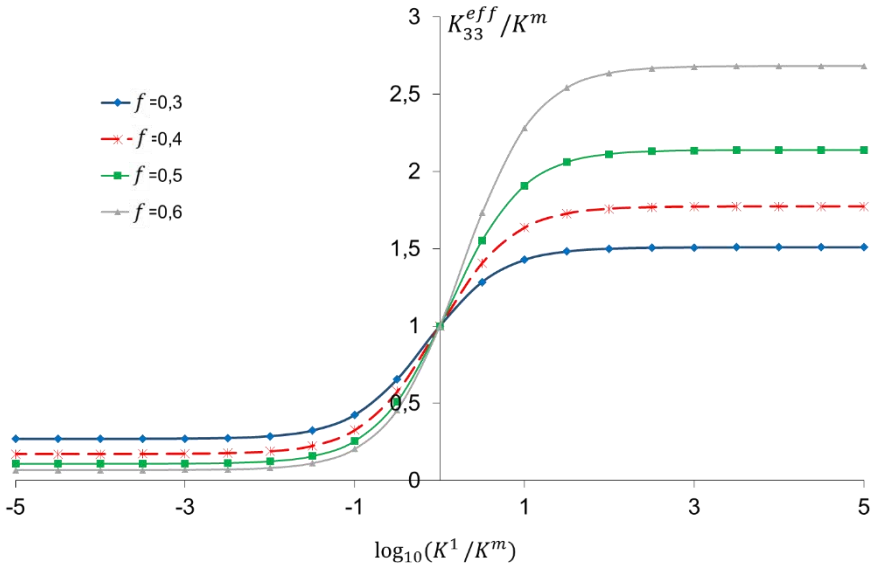


Figure 25 : Influence du contraste sur la conductivité thermique effective du composite chargé de particules de forme oblate avec $a_1/a_3 = 5$ dans la direction 3

6.3 CAS DE L'INTERFACE IMPARFAITE

6.3.1 Equation intégrale dans le cas d'un milieu fini avec interfaces imparfaites

Benveniste et Miloh (1986) ont développé le seul modèle permettant de prendre en compte à la fois la forme ellipsoïdale des inclusions et l'influence de l'interface imparfaite mais en se limitant au cas de phases isotopes. Dans le cadre du modèle d'inclusion plongée dans une matrice infini, ce modèle est valable uniquement dans le cas de faible fraction volumique.

Dans cette section, nous proposons d'étendre le modèle AEC au cas de l'interface imparfaite. Nous définissons l'interface entre l'inclusion et l'enrobage comme étant imparfaite, se traduisant par une discontinuité de la température et une continuité du flux thermique sur S :

$$\begin{aligned} &[T] = T^{\mathrm{c}} - T^{1} \neq 0 \text{ sur } S \\ &[q_i] n_i = (q_i^{\mathrm{c}} - q_i^{1}) n_i = 0 \text{ sur } S. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Une nouvelle équation intégrale est formulée en tenant compte des conditions d'interface imparfaite entre l'inclusion et la matrice. L'équation (6.12) donnant le champ de température $T^d(\boldsymbol{r})$ va être modifiée en faisant apparaître les discontinuités lors de l'intégration par partie. Puisque le milieu hétérogène V contient une interface S imparfaite, le champ de température est discontinu sur S. Selon le théorème de Gauss, l'intégrale sur le volume V d'une fonction $f(\boldsymbol{r})$ se fait comme suit:

$$\int_V f_{,j}(\boldsymbol{r})\, dV = \int_{\partial V} f(\boldsymbol{r})\, N_j(\boldsymbol{r})\, dS - \int_S [f(\boldsymbol{r})]\, n_j(\boldsymbol{r})\, dS \tag{6.39}$$

où $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{n}$ sont respectivement les vecteurs normaux aux surfaces ∂V et S.

En appliquant le théorème de la divergence sur l'équation (6.12), on obtient l'expression du champ de température:

$$\begin{aligned} T^d(\boldsymbol{r}) = &- \int_{\partial V'} G^0_{,i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d(\boldsymbol{r}')\, N_j(\boldsymbol{r}')\, dS' \\ &+ \int_{V'} G^0_{,i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d_{,j}(\boldsymbol{r}')\, dV' \\ &+ \int_{S'} G^0_{,i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, [T(\boldsymbol{r}')]\, n_j(\boldsymbol{r}')\, dS'. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Le deuxieme terme de l'équation (6.40) est isolé et le théorème de la divergence est de nouveau appliqué:

$$\int_{V'} G^0_{,i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d_{,j}(\boldsymbol{r}')\, dV' = \int_{\partial V'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d_{,j}(\boldsymbol{r}')\, N_i(\boldsymbol{r}')\, dS'$$
$$- \int_{V'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d_{,ji}(\boldsymbol{r}')\, dV' \qquad (6.41)$$
$$- \int_{S'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, \left[\, T^d_{,j}(\boldsymbol{r}')\right] n_i(\boldsymbol{r}')\, dS'.$$

Avec (6.2) et (6.10), on obtient:

$$\int_{V'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d_{,ji}(\boldsymbol{r}')\, dV' = -\int_{\partial V'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\, T_{,j}(\boldsymbol{r}')\, N_i(\boldsymbol{r}')\, dS'$$
$$+ \int_{S'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \left[\delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\, T_{,j}(\boldsymbol{r}')\right] n_i(\boldsymbol{r}')\, dS' \qquad (6.42)$$
$$+ \int_{V'} G^0_{,i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\, T_{,j}(\boldsymbol{r}')\, dV'.$$

Avec la propriété $G^0_{,i'}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -G^0_{,i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$, l'équation (6.40) s'écrit :

$$T(\boldsymbol{r}) = T^0 + \int_{\partial V'} \left\{G^0_{,i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, T^d(\boldsymbol{r}') - G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, q^d_j(\boldsymbol{r}')\right\} N_j(\boldsymbol{r}')\, dS'$$
$$+ \int_{V'} G^0_{,i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, \delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\, T_{,j}(\boldsymbol{r}')\, dV' \qquad (6.43)$$
$$- \int_{S'} G^0_{,i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\, K^0_{ij}\, [T(\boldsymbol{r}')]\, n_j(\boldsymbol{r}')\, dS'.$$

Comme sur la surface extérieure ∂V la température $T(\boldsymbol{r})$ est fixée à T^0, nous en déduisons que $T^d = 0$, l'expression précédente devient donc :

$$T(\boldsymbol{r}) = T^0 + \int_{V'} G^0_{,i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ \delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\ T_{,j}(\boldsymbol{r}')\ dV' - \int_{\partial V'} G^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ q^d_j(\boldsymbol{r}')\ N_j(\boldsymbol{r}')\ dS' - \int_{S'} G^0_{,i}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ K^0_{ij}\ [T(\boldsymbol{r}')]\ n_j(\boldsymbol{r}')\ dS'. \quad (6.44)$$

Le champ d'intensité $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ s'exprime en tenant compte des discontinuités de surface S :

$$e_m(\boldsymbol{r}) = e^0_m + \int_{V'} G^0_{,im}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ \delta K_{ij}(\boldsymbol{r}')\ e_j(\boldsymbol{r}')\ dV' + \int_{\partial V'} G^0_{,m}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ q^d_j(\boldsymbol{r}')\ N_j(\boldsymbol{r}')\ \ dS' + \int_{S'} G^0_{,im}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\ K^0_{ij}\ [T(\boldsymbol{r}')]\ n_j(\boldsymbol{r}')\ \ dS'. \quad (6.45)$$

L'équation ainsi obtenue est composée de trois intégrales :

- la première intégrale est classique et est relative à la conductivité thermique d'un milieu hétérogène.
- la deuxième intégrale, comme vue dans le cas parfait, est relative aux conditions introduit par l'utilisation d'un milieu fini.
- la troisième intégrale est le nouveau terme relatif à la présence d'interface imparfaite.

On considère une ellipsoïde V_2 hétérogène de demi-axes b_1, b_2 et b_3, de frontière S_2. Cette ellipsoïde est composée d'une inclusion V_1, de demi-axes a_1, a_2 et a_3, de frontière S_1, de conductivité thermique $\boldsymbol{K^1}$, enrobée dans une matrice V_c, de conductivité thermique $\boldsymbol{K^0}$.

On définit la moyenne du champ intensité dans V_1:

$$\bar{e}_p^1 = e_p^0 + \frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{V_1'} G_{,pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\Delta K_{ij}^{1/0} e_j(\boldsymbol{r}')dV'dV$$

$$+\frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{S_2'} G_{,p}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,q_j^d(\boldsymbol{r}')N_j dS'\,dV \qquad (6.46)$$

$$+\frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{S_1'} G_{,pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,K_{ij}^0\,[T(\boldsymbol{r}')]\,n_j(\boldsymbol{r}')dS'dV.$$

Comme dans le cas d'interface parfaite ((6.30) et (6.31)), les deux premières intégrales de l'équation (6.46) peuvent être explicitées sous la forme :

$$\bar{e}_p^1 = e_p^0 - L_{pi}^1 \Delta K_{ij}^{1/0}\bar{e}_j^1 + L_{pi}^2\bar{q}_i^{d2}$$

$$+\frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{S_1'} G_{,pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,K_{ij}^0\,[T(\boldsymbol{r}')]\,n_j(\boldsymbol{r}')dS'dV. \qquad (6.47)$$

Il nous faut donc définir la dernière intégrale de l'équation (6.46).

6.3.2 Détermination du tenseur de polarisation extérieure

Dans le cas où $\boldsymbol{r}' \in {S_1}'$, le tenseur $\boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{r}')$ est plus complexe à obtenir. D'après (Bonfoh et al. 2017; Jost 2005), le théorème de la différenciation sous le signe intégral ne permet de permuter les intégrales de volume et de surface que si le volume d'intégration est libre de toute singularité (refs voir Bonfoh). Dans le troisième terme intégral de l'équation (6.46), $\boldsymbol{r} \in V_1$ et $\boldsymbol{r}' \in S_1$ de sorte que la singularité se produit pour $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'^-$ ($\boldsymbol{r}'^-$ est sur le côté intérieur S_1^- de l'interface, par exemple à l'intérieur de l'inclusion). Mais, en considérant $\boldsymbol{r}'$ sur la face externe S_1^+ ($\boldsymbol{r}'^+$) de l'interface, on peut éviter cette singularité et ensuite permuter les deux intégrales comme:

$$\frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{S_1'} G_{,pi}^0\big(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'^+\big)K_{ij}^0[T(\boldsymbol{r}')]n_j\,{S_1}'\,dV_1$$

$$= \frac{1}{V_1}\int_{S_1'}\int_{V_1} G_{,pi}^0\big(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'^+\big)K_{ij}^0\big[T\big(\boldsymbol{r}'^+\big)\big]n_j\,dV_1\,dS_1'. \qquad (6.48)$$

On définit le tenseur le tenseur $\boldsymbol{L}^1\big(\boldsymbol{r}'^+\big)$:

$$L_{pj}^{1}\left(\boldsymbol{r}'^{+}\right) = -\frac{1}{4\,\pi\,\alpha_p \alpha_j K_1^0}\,\tilde{\varphi}^{1}{}_{,\mathrm{pj}}(\boldsymbol{y}^{+\prime})\,. \tag{6.49}$$

La fonction harmonique $\tilde{\varphi}^{1}{}_{,\mathrm{pj}}$ est définie par :

$$\tilde{\varphi}^{1}{}_{,\mathrm{pj}}(\boldsymbol{y}^{+\prime}) = -\delta_{ij}\tilde{I}_i^1(0) - y_i\tilde{I}_{i,j}^1(0) \text{ avec } \boldsymbol{y}^{+\prime} \in \tilde{S}_1^{+\prime}. \tag{6.50}$$

L'équation (6.49) peut être réécrite sous la forme :

$$L_{pj}^{1}\left(\boldsymbol{r}'^{+}\right) = L_{pi}^{1} + \frac{y_j I_{j,\mathrm{i}}(0)}{4\,\pi\,\alpha_p \alpha_j K_1^0}\,. \tag{6.51}$$

En remplaçant l'équation (6.51) dans l'équation (6.48) nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{V_1}\int\limits_{\tilde{S}_1'} L_{pj}^{1}(\boldsymbol{r}'^{+})K_{ij}^{0}\left[T(\boldsymbol{r}'^{+})\right]n_j\,dS_1' \\ &= \frac{1}{\tilde{V}_1}\int\limits_{\tilde{S}_1'} L_{pi}^{1}K_{ij}^{0}\left[T(\boldsymbol{r}'^{+})\right]n_j\,dS_1' + \frac{1}{V_1}\int\limits_{\tilde{S}_1'} \frac{y_j\tilde{I}_{j,\mathrm{i}}(0)}{4\,\pi\,\alpha_p \alpha_j K_1^0}K_{ij}^{0}\left[T(\boldsymbol{r}'^{+})\right]n_j\,dS_1'.\end{aligned} \tag{6.52}$$

De plus, nous pouvons simplifier le second terme (Giordano 2015) :

$$\frac{y_j\tilde{I}_{j,\mathrm{i}}(0)}{4\,\pi\,\alpha_p \alpha_j K_1^0}K_{ij}^{0}n_j = -n_p. \tag{6.53}$$

L'équation (6.52) devient donc :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{V_1}L_{pi}^{1}\tilde{K}_{ij}^{0}\int\limits_{S_1'}\left[T(\boldsymbol{r}'^{+})\right]n_j\,dS_1' - \frac{1}{V_1}\int\limits_{S_1'}\left[T\left(\boldsymbol{r}'^{+}\right)\right]n_p\,dS_1' \\ &\qquad = \frac{1}{V_1}\left(L_{pi}^{1}K_{ij}^{0} - \delta_{pj}\right)\int\limits_{\tilde{S}_1'}\left[T\left(\boldsymbol{r}'^{+}\right)\right]n_j\,dS_1'.\end{aligned} \tag{6.54}$$

Dans cette étude, nous considérons le modèle de résistance thermique de l'interface de Kapitza (Kapitza 1941), qui suppose une proportionnalité entre le saut de température et la composante normale du flux, tel que:

$$[T(\boldsymbol{r}')] = -\alpha\; q_p\; n_p \tag{6.55}$$

où α représente la résistance thermique du Kapitza de sorte que:

$$\frac{1}{V_1}\int_{S_1'}[T]n_j\,dS_1' = -\frac{1}{V_1}\alpha\bar{q}_m^I\int_{S_1'}n_j n_m\,dS_1' = -\alpha R_{jm}\bar{q}_m^1 \tag{6.56}$$

où le tenseur $\boldsymbol{R}$ est défini par:

$$R_{jm} = \frac{1}{V_1}\int_{S_1} n_j n_m\,dS_1. \tag{6.57}$$

En replaçant les équations (6.30), (6.31), et (6.56) dans les équations de localisation (6.46), on obtient:

$$\bar{e}_p^1 = e_p^0 - L_{pi}^1\Delta K_{ij}^{1/0}\bar{e}_j^1 + L_{pi}^2\bar{q}_i^{d2} + \alpha\left(L_{pi}^1K_{ij}^0 - \delta_{pj}\right)R_{jm}\bar{q}_m^1. \tag{6.58}$$

Le champ moyen d'intensité $\bar{e}_p^1$ dans l'inclusion s'exprime en fonction du champ extérieur imposé par la relation de localisation:

$$\bar{e}_i^1 = A_{ip}^1\,e_p^0$$

$$A_{ip}^1 = \left[\delta_{pi} + \left(L_{ij}^1 - fL_{ij}^2\right)\,\Delta k_{jp}^1 + \alpha\left(\delta_{ik} - L_{ij}^1K_{jk}^0 + fL_{ij}^2K_{jk}^0\right)R_{km}\,K_{mp}^1\right]^{-1}. \tag{6.59}$$

Une opération d'homogénéisation est effectuée afin de déterminer la conductivité thermique effective du composite. Le champ d'intensité extérieur $\boldsymbol{e^0}$ est posé identique au champ d'intensité macroscopique $\bar{\boldsymbol{e}}^2$: $\boldsymbol{e^0 = E}$ et nous considérons que la conductivité $\boldsymbol{K^0}$ est identique à la conductivité thermique de la matrice $\boldsymbol{K}^m$: $\boldsymbol{K^0 = K}^m$

En utilisant la relation de localisation (6.59) nous pouvons écrire :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{A}^1.\boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{A^1} = \left[\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{L}_m^1 - f\boldsymbol{L}_m^2).\boldsymbol{\Delta K}^{1/\mathrm{m}} + \alpha(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{L}_m^1.\boldsymbol{K}^{\mathrm{m}} + f\boldsymbol{L}_m^2.\boldsymbol{K}^{\mathrm{m}}).\boldsymbol{R}.\boldsymbol{K}^1\right]^{-1} \tag{6.60}$$

où on considère : $\boldsymbol{L^1 = L}_m^1$ et $\boldsymbol{L^2 = L}_m^2$ car $\boldsymbol{K^0 = K}^m$.

La relation décrivant les moyennes en flux conduit à :

$$\boldsymbol{Q} = (1-f)\bar{\boldsymbol{q}}^m + f\bar{\boldsymbol{q}}^1. \tag{6.61}$$

De la même façon, on obtient la relation liant les moyennes des champs d'intensité :

$$\boldsymbol{E} = (1-f)\bar{\boldsymbol{e}}^m + f\bar{\boldsymbol{e}}^1 + f\,\alpha\,\boldsymbol{R}.\boldsymbol{K}^1.\bar{\boldsymbol{e}}^1. \tag{6.62}$$

La conductivité thermique effective $\boldsymbol{K}^{eff}$ dans le cas d'une interface imparfaite s'écrit sous la forme :

$$\boldsymbol{K}^{eff} = \boldsymbol{K}^{m} + f(\boldsymbol{K}^{1} - \boldsymbol{K}^{m} - \alpha\, \boldsymbol{R}.\boldsymbol{K}^{1}.\boldsymbol{K}^{m}).\boldsymbol{A}^{1}. \tag{6.63}$$

La conductivité thermique ainsi obtenue permet de prendre en compte à la fois la forme de l'inclusion par l'intermédiaire des tenseurs de conduction de polarisation $\boldsymbol{L}^{1}$ et $\boldsymbol{L}^{2}$, l'anisotropie de la conductivité thermique de l'inclusion et de la matrice et l'interface imparfaite.

6.3.3 Applications et comparaisons

6.3.3.1 Comparaison du modèle

6.3.3.1.1 Cas d'inclusion ellipsoïdale

Le modèle ACE avec interface imparfaite est comparé aux résultats numériques fournis par Kushch (Kushch et al. 2015). De nouveau, nous reprenons les mêmes paramètres de comparaison : des particules oblates ($a_1 = a_2 > a_3$ avec $a_1/a_3 = 3$), un contraste de propriétés $K^1/K^{\mathrm{m}} = 1000$ et une interface imparfaite décrite par le paramètre de conductance $\bar{\beta} = a_1/\alpha\, K^{\mathrm{m}} = 10$.

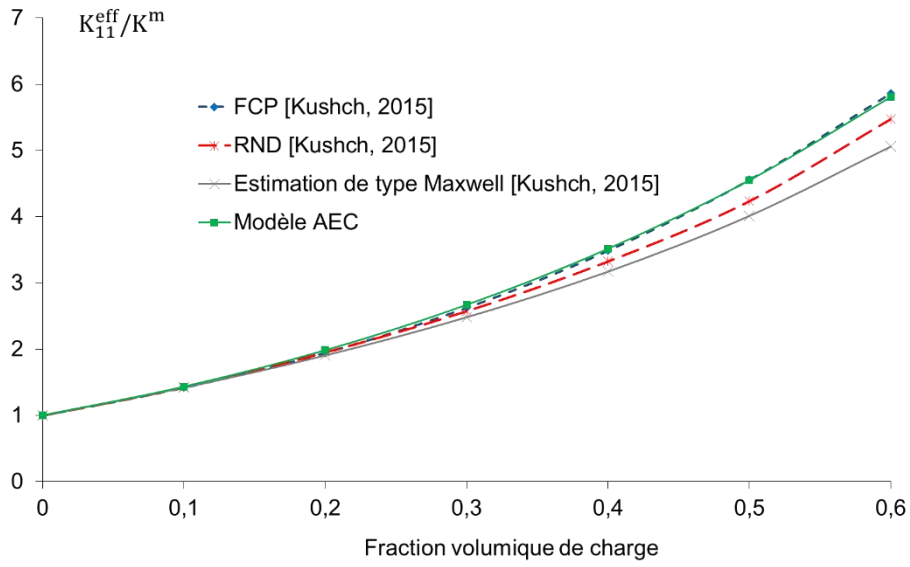


Figure 26 : Comparaison du modèle AEC avec interface imparfaite aux modèles de Kushch (Kushch et al. 2015)

L'approche ACE donne des résultats cohérents avec les résultats obtenus par Kushch pour l'arrangement FCP pour des fractions volumiques supérieures à 0.2 (Figure 26). Les prédictions issues du modèle de Maxwell sont disqualifiées pour les fractions volumiques supérieures à 0.2.

6.3.3.1.2 Cas d'inclusion sphérique et cylindrique

La conductivité thermique du composite à interfaces imparfaites a été étudiée par Hasselman et Johnson (Hasselman & Johnson 1987) pour les cas particulier d'inclusions sphériques et cylindriques et en supposant une conductivité thermique isotrope par phase. Dans la suite, nous avons fourni l'expression de la conductivité thermique effective des assemblages de sphères composites et de cylindres composites, comme prédit par le présent modèle.

- Inclusion sphérique

D'après l'équation (6.63), pour une inclusion sphérique de rayon a, la conductivité thermique isotrope est la suivante:

$$K^{eff} = K^m + \frac{3\,f\,(K^1 - K^m - \frac{\alpha}{a}\,K^m K^1)}{(1-f)\,K^1 + (2+f)\,K^m + (2+f)\,\alpha\,K^m\,K^1/a}K^m \tag{6.64}$$

L'équations (6.64) est en accord avec l'expression fournie par Hasselman et Johnson (Hasselman & Johnson 1987).

- Inclusion cylindrique circulaire

Pour une inclusion cylindrique de rayon a alignée dans la direction 1, la conductivité thermique effective est transversalement isotrope:

$$K_{11}^{eff} = K^m + f(k_1 - K^m)$$

$$K_{22}^{eff} = K_{33}^{eff} = K^m + \frac{2\,f\,(K^1 - K^m - \frac{3\,\pi\,\alpha}{8\,a}\,K^m K^1)\,K^m}{(1-f)\,K^1 + (1+f)\,K^m + \frac{3\,\pi\,\alpha}{8\,a}(1+f)\;K^m\,K^1} \tag{6.65}$$

Dans les directions transversales (2 et 3), les expressions obtenues sont similaires mais non identiques à celles suggérées par Hasselman et Johnson (Hasselman & Johnson 1987):

$$K_{11}^{eff} = K^m + f(k_1 - K^m)$$

$$K_{22}^{eff} = K_{33}^{eff} = K^m + \frac{2\,f\,(K^1 - K^m - \frac{\alpha}{a}\,K^m K^1)\,K^m}{(1-f)\,K^1 + (1+f)\,K^m + \frac{\alpha}{a}(1+f)\;K^m\,K^1}k_M \tag{6.66}$$

Il n'y a qu'une mince différence entre les prédictions des deux approches. Dans Hasselman et Johnson (Hasselman & Johnson 1987), les auteurs ont fourni des résultats approximatifs.

Dans l'équation (6.66), la valeur exacte $3\,\pi/8$ semble avoir été remplacée par 1. L'équation (6.65) est obtenue sans cette approximation brute.

6.3.3.2 Influence du l'effet forme

La conductivité thermique effective dans les directions principales 1 et 3 (Figure 27 et Figure 28) est analysée en fonction de la conductance thermique interfaciale normalisée $\bar{\beta} = a_3/\alpha K^0$, pour différentes valeurs du facteur de forme de l'inclusion a_1/a_3. On montre que la conductivité thermique effective augmente avec le facteur de forme dans la direction de plus grand axe (longitudinal pour l'oblate et transversal pour le prolate). La géométrie sphérique minimise à nouveau la conductivité thermique effective.

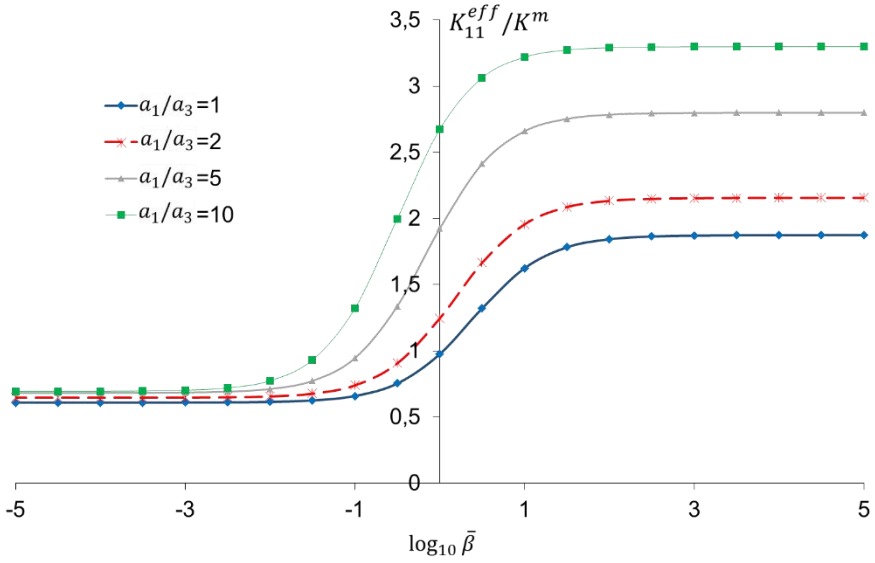


Figure 27 : Influence du facteur de forme sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, cas oblate dans la direction 1 pour $f = 0.3$ et $K^1/K^m = 10$

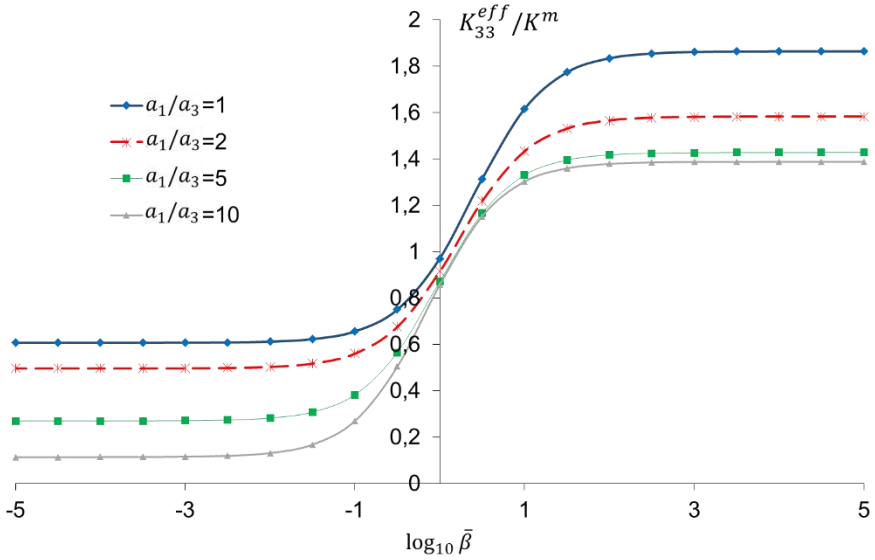


Figure 28 : Influence du facteur de forme sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, cas oblate dans la direction 3 pour $f = 0.3$ et $K^1/K^m = 10$

6.3.3.3 Influence de la fraction volumique

L'effet de la fraction volumique de charge est analysé de nouveau sur des configurations pour lesquelles le facteur de forme, le contraste de propriétés sont définis. La conductivité thermique effective dans les directions 1 et 3 (Figure 29 et Figure 30) est analysée en fonction de la conductance thermique interfaciale normalisée $\bar{\beta} = a_3/\alpha K^m$ pour différentes fractions volumiques. La conductivité effective augmente avec la fraction volumique de charge lorsque la résistance thermique d'interface est faible. Cependant lorsque cette résistance thermique de l'interface augmente, l'efficacité de la conductivité diminue avec la fraction volumique des inclusions car la surface d'interface augmente.

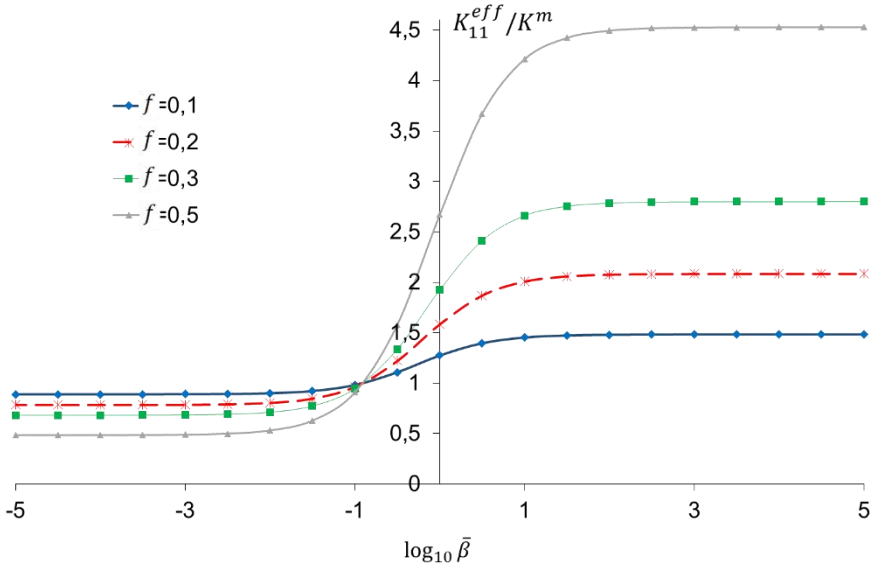


Figure 29 : Influence de la fraction volumique sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 1 pour $a_1/a_3 = 5$ et $K^1/K^m = 10$

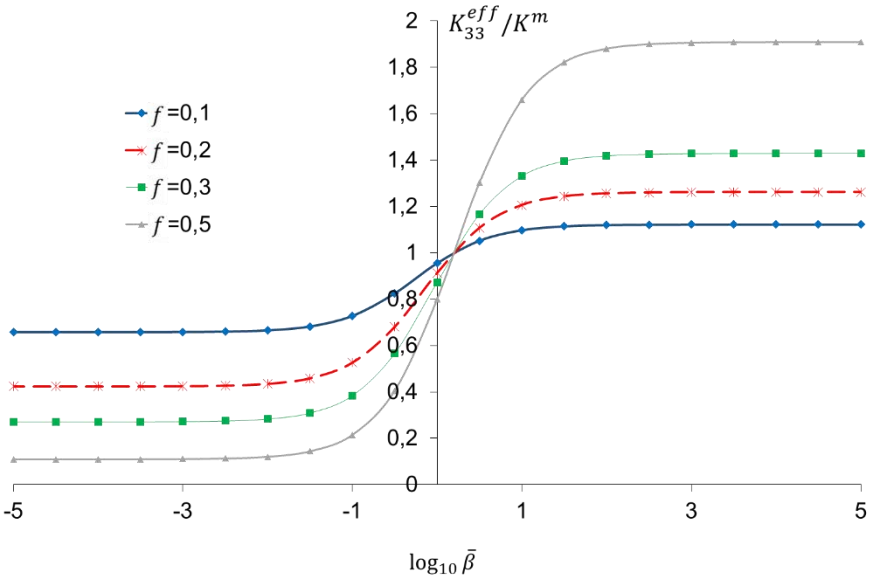


Figure 30 : Influence de la fraction volumique sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 3 pour $a_1/a_3 = 5$ et $K^1/K^m = 10$

6.3.3.4 Influence du contraste

La conductivité thermique effective selon les directions 1 et 3 (Figure 31 et Figure 32) est analysée en fonction de la conductance normalisée pour différents contrastes de propriétés entre l'inclusion et la matrice K^1/K^m. Les inclusions sont de forme oblate ($a_1 = a_2 = 5\ a_3$) et on choisit une fraction volumique de 0.3.

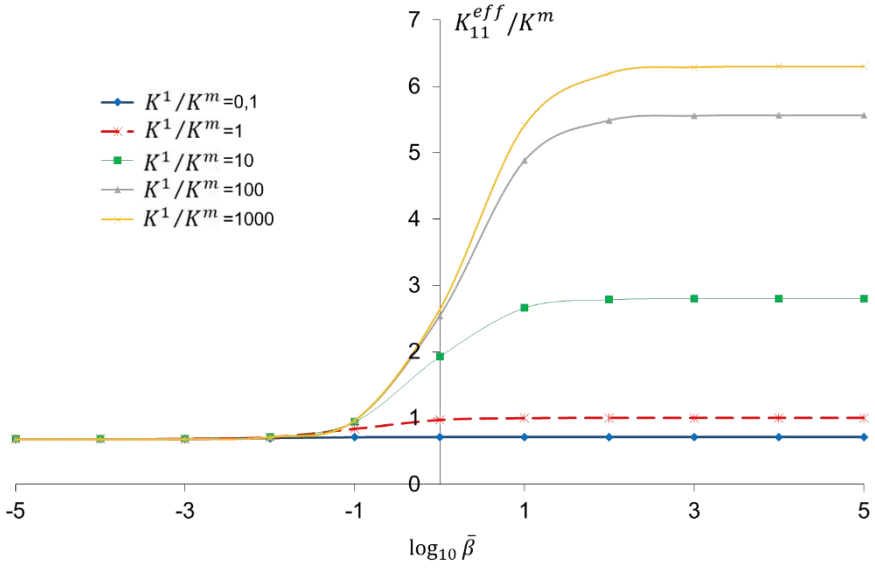


Figure 31 : Influence du contraste sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 1 pour $a_1/a_3 = 5$, $K^m = 1\ W.m^{-1}.K^{-1}$ et $f = 0.3$

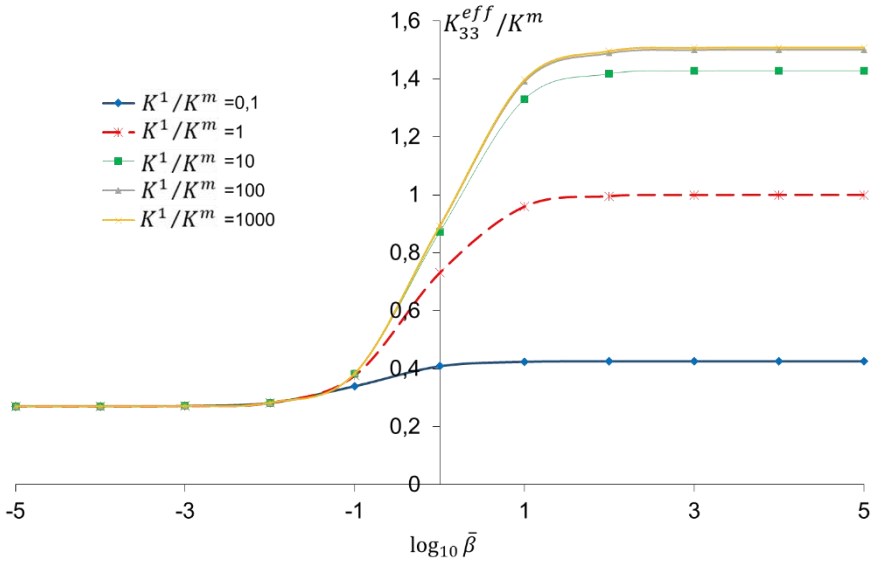


Figure 32 : Influence du contraste sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 3 pour $a_1/a_3 = 5$ et $f = 0.3$

Les conductivités thermiques effectives augmentent avec la conductance thermique normalisée $\bar{\beta} = a_3/\alpha K^m$, donc quand la résistance thermique diminue et que le rayon des particules augmente. Pour une résistance thermique élevée à l'interface ($\bar{\beta} \to 0$), l'effet du contraste K^1/K^{m} sur la conductivité thermique effective est difficilement perceptible. Lorsque la résistance thermique interfaciale diminue ($\bar{\beta} \to \infty$), la conductivité thermique effective est grandement améliorée par l'augmentation de la conductivité thermique de l'inclusion K^1.

6.3.3.5 Influence de l'anisotropie :

La présence de porosités dans la matrice induit une anisotropie de comportement liée à la répartition non uniforme des porosités. Le modèle ACE permet d'analyser l'effet de l'anisotropie de la conductivité thermique des différentes phases. Nous considérons des inclusions ellipsoïdales de forme oblate ($a_1 = a_2 = 5\, a_3$). La conductivité thermique de la matrice est définie par $K_{33}^m = 1W.m^{-1}.K^{-1}$ et nous analysons la variation du contraste K_{11}^m/K_{33}^m variant de 0.1 à 10. La conductivité thermique effective transversale est présentée en fonction de la conductance thermique normalisée $\bar{\beta} = a_3/\alpha K_{33}^m$ pour différents rapports d'anisotropie de la matrice (Figure 33).

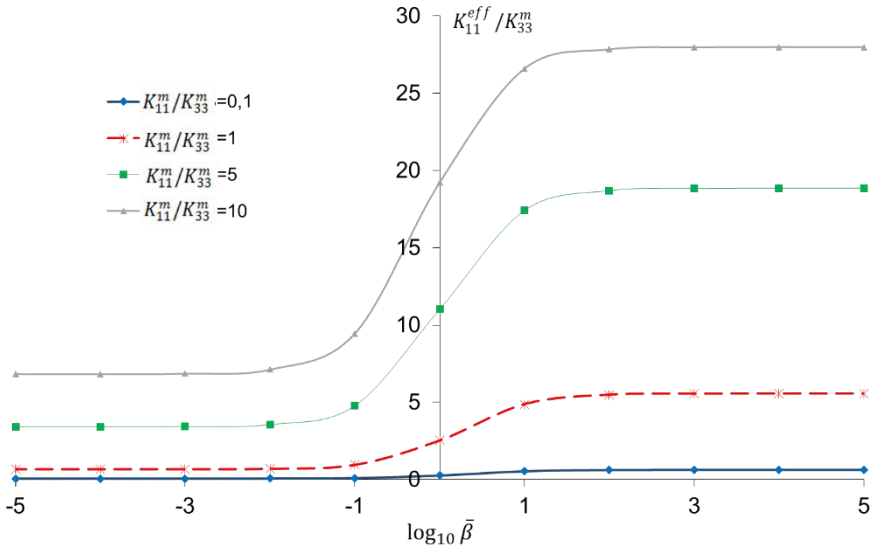


Figure 33 : Influence de l'anisotropie sur la conductivité thermique avec interfaces imparfaites, oblate dans la direction 1 pour $a_1/a_3 = 5$, $K^1/K_{33}^m = 100$ et $f = 0.3$

6.4 CONCLUSIONS

Dans ce chapitre, nous avons développé un nouveau modèle permettant de déterminer la conductivité thermique d'un composite chargé de particules ellipsoïdales avec des interfaces imparfaites, tout en prenant en compte l'anisotropie des phases et la forte fraction volumique de charge.

Une nouvelle équation intégrale a été définie, par l'intermédiaire des fonctions de Green, permettant de prendre en compte le cas d'une particule enrobée dans une matrice finie. La solution a été obtenue dans le cas d'un assemblage d'ellipsoïde composite, avec l'utilisation de tenseur de conduction de polarisation intérieur et extérieur, pour des phases anisotropes et des interfaces imparfaites.

Les expressions ainsi obtenues ont été comparées aux modèles de la littérature (Giordano 2015; Benveniste & Miloh 1989; Lee & Kim 2010) et se sont trouvées être en accord avec celles-ci. Des études paramétriques ont été réalisées afin d'identifier les paramètres les mieux adaptés à l'optimisation de la conductivité thermique des composites. Le modèle ACE, permettant de tenir compte à la fois de la forme des particules, de l'anisotropie des phases, de l'interface imparfaite et des grandes fractions volumiques, est aussi utilisable pour des phénomènes de transfert électrique et magnétique.

Chapitre 7 : Conductivité thermique effective par approche auto-cohérente généralisée, cas d'inclusions multi-enrobées à morphologie confocale

7 CONDUCTIVITE THERMIQUE EFFECTIVE PAR APPROCHE AUTO-COHERENTE GENERALISEE, CAS D'INCLUSIONS MULTI-ENROBEES A MORPHOLOGIE CONFOCALE

7.1 INTRODUCTION

Dans cette section, nous établirons la conductivité thermique effective d'un composite chargé de particules ellipsoïdales dans le cas général du comportement anisotrope des phases pour de la forte fraction volumique de charges.

Pour développer ce modèle, nous nous proposons de généraliser le modèle de Hashin (Hashin 1968) au cas général de morphologie ellipsoïdale d'inclusions. La méthodologie est basée sur une formulation de l'équation intégrale du problème hétérogène en utilisant la technique des fonctions de Green.

Dans la première partie, le modèle est développé dans le cas d'un matériau biphasé, une inclusion enrobée dans une matrice plongée dans le milieu homogène équivalent. Dans une seconde partie, le modèle est étendu au cas des inclusions à enrobages multiples.

7.2 MODÈLE AUTO-COHÉRENT GÉNÉRALISÉ À (2+1) PHASES

7.2.1 Equation intégrale

Nous considérons un domaine hétérogène de volume V, de conductivité thermique $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ dépend de la position $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$. Ce matériau est constitué d'une inclusion composite de volume V_2 constituée d'une inclusion ellipsoïdale de volume V_1 entourée d'un enrobage de volume V_c intégré dans le milieu homogène de référence (MHR) noté ' 0 ' de volume $V_0 = V - V_2$.

La conductivité thermique des phases est notée $\boldsymbol{K}^P$ pour la phase 'P', l'exposant '0' fait référence au MHR.

Dans le cas d'un régime permanent et en l'absence de source de chaleur interne, les équations du problème dans le cas de conductivité thermique dans un milieu hétérogène s'écrivent :

- La loi de Fourier :

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}). \tag{7.1}$$

- L’équation de conservation d’énergie

$$\boldsymbol{div}\, \boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{7.2}$$

- Le champ d’intensité

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla} T\,(\boldsymbol{r}). \tag{7.3}$$

Dans cette étude, on choisit d’imposer le gradient de température à la frontière ∂V :

$$T(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{e}^0.\boldsymbol{r} \text{ pour } \mathbf{r} \in \partial V. \tag{7.4}$$

L’interface entre l’inclusion et l’enrobage est supposée parfaite, ce qui implique la continuité des champs de température et de flux:

$$\begin{aligned} &[T] = T^c - T^1 = 0 \text{ sur } S_1 \\ &[q_i]n_i = (q_i^c - q_i^1)n_i = 0 \text{ sur } S_1. \end{aligned} \tag{7.5}$$

La conductivité thermique locale est décomposée en une partie uniforme et une partie de fluctuation :

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^0 + \delta\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$$

$$\text{avec } \delta\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \Delta\boldsymbol{K}^{1/0}\theta_1(\boldsymbol{r}) + \Delta\boldsymbol{K}^{c/0}\theta_c(\boldsymbol{r})$$

$$\text{où } \Delta\boldsymbol{K}^{1/0} = \boldsymbol{K}^1 - \boldsymbol{K}^0 \text{ et } \Delta\boldsymbol{K}^{c/0} = \boldsymbol{K}^c - \boldsymbol{K}^1 \tag{7.6}$$

$$\text{et } \theta_P(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \boldsymbol{r} \in V_P \\ 0 \text{ pour } \boldsymbol{r} \notin V_P \end{cases} \text{ avec } P = 1 \text{ ou } c.$$

On propose d’utiliser, dans le cadre de la conductivité thermique, le concept d'opérateurs de projection initialement promu par Kunin (Kunin 1983) pour le comportement élastique. On définit l'opérateur de projection $\boldsymbol{\Pi}^0$associé au MRH de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$:

$$\boldsymbol{\Pi}^0 = \boldsymbol{\Gamma}^0.\boldsymbol{K}^0 \tag{7.7}$$

où $\boldsymbol{\Gamma}^0$est le tenseur de Green modifié en conductivité donné par:

$$\boldsymbol{\Gamma}^0 = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} G^0. \tag{7.8}$$

L'opérateur de projection présente les propriétés suivantes:

$$\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{\nabla} T \Leftrightarrow \boldsymbol{\Pi}^0 * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^0 \tag{7.9}$$

$$div\, \boldsymbol{q} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\Pi^0} * \boldsymbol{H}^0 . \boldsymbol{q} = 0 \text{ avec } \boldsymbol{H}^0 = \boldsymbol{K}^{0^{-1}} \tag{7.10}$$

où le symbole '$*$' désigne la convolution spatiale définie par :

$$f * g = \int_{V'} f(r - r') g(r')\, dV'. \tag{7.11}$$

L'application de l'opérateur de projection sur les équations (7.3) et (7.6), donne :

$$\boldsymbol{\Pi}^0 * \boldsymbol{H}^0 . \boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Pi}^0 * \boldsymbol{e} + \boldsymbol{\Pi}^0 * \boldsymbol{H}^0 . \left(\Delta \boldsymbol{K}^{1/0} . \boldsymbol{e}\, \theta_1 + \Delta \boldsymbol{K}^{c/0} . \boldsymbol{e}\, \theta_c\right). \tag{7.12}$$

Puis en utilisant les équations (7.9) (7.10) dans l'équation (7.12), on obtient :

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^0 - \boldsymbol{\Pi}^0 * \boldsymbol{H}^0 . \left(\Delta \boldsymbol{K}^{1/0} . \boldsymbol{e}\theta_1 + \Delta \boldsymbol{K}^{c/0} . \boldsymbol{e}\, \theta_c\right). \tag{7.13}$$

Enfin l'équation (7.13) est écrite sous forme intégrale :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^0 \; & - \int_{V_1'} \boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') . \boldsymbol{H}^0 . \Delta \boldsymbol{K}^{1/0} . \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}') dV_1' \\ & - \int_{V_c'} \boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') . \boldsymbol{H}^0 . \Delta \boldsymbol{K}^{c/0} . \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}') dV_c'. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Dans un premier temps, on détermine le champ intensité moyen dans V_2 pour définir le lien entre $\bar{\boldsymbol{e}}^0, \bar{\boldsymbol{e}}^1, \bar{\boldsymbol{e}}^2$:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{e}}^2 = \boldsymbol{e}^0 & - \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \int_{V_1'} \boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') . \boldsymbol{H}^0 . \Delta \boldsymbol{K}^{1/0} . \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_1'\, dV_2 \\ & - \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \int_{V_c'} \boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') . \boldsymbol{H}^0 . \Delta \boldsymbol{K}^{c/0} . \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_c'\, dV_2. \end{aligned} \tag{7.15}$$

En permutant les intégrales, l'équation (7.15) s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^2 = \boldsymbol{e}^0 - \frac{1}{V_2}\int_{V_1'}\left\{\int_{V_2}\boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^0 dV_2\right\}\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')dV_1' - \frac{1}{V_2}\int_{V_c'}\left\{\int_{V_2}\boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^0 dV_2\right\}\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')dV_c'. \tag{7.16}$$

On introduit le tenseur d'Eshelby relatif à V_2 et à la conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$:

$$\boldsymbol{S}_0^2 = \frac{1}{V_2}\int_{V_2}\boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^0\, dV_2 \text{ pour } \boldsymbol{r}' \in V_2\,. \tag{7.17}$$

Après simplification nous obtenons:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^2 = \boldsymbol{e}^0 - \frac{V_1}{V_2}\,\boldsymbol{S}_0^2.\boldsymbol{H}^0.\Delta\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{1/0}}.\ \bar{\boldsymbol{e}}^1 - \frac{V_c}{V_2}\boldsymbol{S}_0^2.\boldsymbol{H}^0.\Delta\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{c/0}}\ .\bar{\boldsymbol{e}}^c. \tag{7.18}$$

De la même manière, le champ d'intensité dans V_1 est donné par :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{e}^0 - \frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{V_1'}\boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^0.\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\,dV_1'\,dV_1 - \frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{V_2'}\boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^0.\Delta\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{c/0}}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\,dV_2'\,dV_1. \tag{7.19}$$

Dans l'équation (7.19) la première intégrale sur V_1 est uniforme. La seconde intégrale sur V_1 n'est pas uniforme en dehors de V_1 avec ($\boldsymbol{r}' \notin V_1$) :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{e}^0 - \boldsymbol{S}_0^1.\boldsymbol{H}^0.\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\ \bar{\boldsymbol{e}}^1 - \frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{V_2'}\boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^0.\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\,dV_2'\,dV_1. \tag{7.20}$$

Nous proposons ici une méthode exacte d'évaluation de cette intégrale dans le cas d'une morphologie confocale des ellipsoïdes.

L'équation intégrale d'un problème hétérogène est généralement basée sur la technique des fonctions de Green associée à un milieu infini. Toutefois, une fonction de Green G^c associée à $\boldsymbol{K}^c$ est introduite, s'annulant à la frontière d'un milieu infini mais non nulle sur la frontière du milieu de référence de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^c$ considéré.

Cette fonction de Green satisfait :

$$K_{ij}^{c} G_{,ij}^{c}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0 \text{ avec } \lim_{\boldsymbol{r}\to\infty} G^{c}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0. \tag{7.21}$$

La conductivité thermique locale est décomposée d'une nouvelle manière :

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^{c} + \Delta\boldsymbol{K}^{1/c}\theta_1(\boldsymbol{r}) - \Delta\boldsymbol{K}^{c/0}\theta_0(\boldsymbol{r})$$

$$\text{où } \theta_0(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1 \; pour \; r \in V_0 \\ 0 \; pour \; r \notin V_0 \end{cases}. \tag{7.22}$$

On introduit l'operateur $\boldsymbol{\Pi}^{c}$**,** associé à $\boldsymbol{K}^{c}$, défini par :

$$\boldsymbol{\Pi}^{c} = \boldsymbol{\Gamma}^{c}.\boldsymbol{K}^{c} \tag{7.23}$$

où $\boldsymbol{\Gamma}^{c}$est le tenseur de Green modifié en conductivité donné par:

$$\boldsymbol{\Gamma}^{c} = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}G^{c}. \tag{7.24}$$

Les tenseurs $\boldsymbol{\Pi}^{c}$ permettent les propriétés suivantes

$$\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{\nabla}T \Leftrightarrow \boldsymbol{\Pi}^{c} * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^{0} \tag{7.25}$$

$$div\, \boldsymbol{q} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\Pi}^{\boldsymbol{c}} * \boldsymbol{H}^{c}.\boldsymbol{q} = 0 \text{ avec } \boldsymbol{H}^{c} = \boldsymbol{K}^{c^{-1}}. \tag{7.26}$$

En tenant compte des équations (7.25) et (7.26), l'équation (7.14) devient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^{0} &- \int_{V_1'} \boldsymbol{\Pi}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^{c}.\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')dV' \\ &+ \int_{V_0'} \boldsymbol{\Pi}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^{c}.\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')dV'. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Les champs d'intensités $\bar{\boldsymbol{e}}^{2}$ et $\bar{\boldsymbol{e}}^{1}$ s'écrivent :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{2} = \boldsymbol{e}^{0} - \frac{V_1}{V_2}\boldsymbol{S}_{c}^{2}.\boldsymbol{H}^{c}.\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}.\bar{\boldsymbol{e}}^{1} + \frac{1}{V_2}\int_{V_0'}\int_{V_2} \boldsymbol{\Pi}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^{c}.\Delta\boldsymbol{K}^{\boldsymbol{c}/0}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dVdV' \tag{7.28}$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{e}^0 - \boldsymbol{S}_{\mathrm{c}}^1 . \boldsymbol{H}^c . \Delta \boldsymbol{K}^{1/\mathrm{c}} . \bar{\boldsymbol{e}}^1 + \frac{1}{V_1} \int_{V_0{}'} \int_{\mathrm{V}_1} \boldsymbol{\Pi}^{\mathbf{c}}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') . \boldsymbol{H}^{\mathrm{c}} . \Delta \boldsymbol{K}^{\mathbf{c}/0} . \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}') \, dV dV' . \tag{7.29}$$

Les intégrales exprimées dans les équations (7.28) et (7.29) ne sont pas uniformes dans le volume $V_0{}'$ à l'extérieur à l'inclusion, les tenseurs d'Eshelby extérieur $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{c}}^{Ext/\beta}$ sont introduits pour fournir les expressions exactes des intensités $\bar{\boldsymbol{e}}^2$ et $\bar{\boldsymbol{e}}^1$:

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{c}}^{Ext/\beta}(\boldsymbol{r}') = \int_{V_\beta} \boldsymbol{\Pi}^c(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') . \boldsymbol{H}^c dV \ \text{ pour } \boldsymbol{r}' \in V_0 \tag{7.30}$$

avec $\beta = 1$ ou 2 .

7.2.2 Détermination des tenseurs d'Eshelby extérieurs

La détermination du tenseur $\boldsymbol{S}_c^{Ext/\beta}$ repose sur des développements similaires à ceux effectués dans la partie 6.2.2, on obtient :

$$S_c^{Ext/\beta}{}_{,pj}(\boldsymbol{r}') = \frac{\delta_{ij} \tilde{I}_i^{\beta}(\tilde{\lambda}_\beta)}{4\pi \, \alpha_p \alpha_j K_1^c} + \frac{y_i \, \tilde{I}_{i,j}^{\beta}(\tilde{\lambda}_\beta)}{4\pi \, \alpha_p \alpha_j K_1^c} . \tag{7.31}$$

Les deux surfaces, intérieure et extérieure, sont définies respectivement par :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{{y_i}^2}{\tilde{a}_i{}^2} = 1 \text{ avec } \boldsymbol{y} \in \tilde{S}_1 \tag{7.32}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{{y_i}^2}{\tilde{b}_i{}^2} = 1 \text{ avec } \boldsymbol{y} \in \tilde{S}_2 . \tag{7.33}$$

Les deux ellipsoïdes sont liées par une relation de confocalité, on en déduit donc :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{{y_i}^2}{\tilde{a}_i{}^2 + \tilde{\lambda}_1} = 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{3} \frac{{y_i}^2}{\tilde{b}_i{}^2 + \tilde{\lambda}_2} = 1 . \tag{7.34}$$

La relation de confocalité permet d'établir une relation entre $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\lambda}_2$:

$$\tilde{b}_i^2 + \tilde{\lambda}_2 = \tilde{a}_i^2 + \tilde{\lambda}_1 . \tag{7.35}$$

On cherche à définir un lien entre les premiers termes de $\boldsymbol{S}_c^{Ext/1}$ et $\boldsymbol{S}_c^{Ext/2}$ donnés en (7.31). Pour cela, on pose :

$$\tilde{I}_j^1(\tilde{\lambda}_1) = 2\,\pi\,\tilde{a}_1\,\tilde{a}_2\,\tilde{a}_3 \int_{\tilde{\lambda}_1}^{\infty} \frac{ds}{(\tilde{b}_j^2 - \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + s)\widetilde{\Delta}_1(s)} \tag{7.36}$$

avec : $\widetilde{\Delta}_1(s) = \sqrt{(\tilde{b}_1^2 - \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + s)(\tilde{b}_2^2 - \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + s)(\tilde{b}_3^2 - \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + s)}$.

Nous faisons un changement de variable $u = -\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 + s$:

$$\tilde{I}_j^1(\tilde{\lambda}_1) = 2\,\pi\,\tilde{a}_1\,\tilde{a}_2\,\tilde{a}_3 \int_{\tilde{\lambda}_2}^{\infty} \frac{du}{(\tilde{b}_j^2 + u)\sqrt{(\tilde{b}_1^2 + u)(\tilde{b}_2^2 + u)(\tilde{b}_3^2 + u)}}. \tag{7.37}$$

On obtient la relation :

$$\tilde{I}_j^1(\tilde{\lambda}_1) = \frac{V_1}{V_2}\,\tilde{I}_j^2(\tilde{\lambda}_2)$$

avec :

$$\tilde{I}_j^2(\tilde{\lambda}_2) = 2\pi\ \tilde{b}_1\tilde{b}_2\tilde{b}_3 \int_{\tilde{\lambda}_2}^{\infty} \frac{ds}{(\tilde{b}_j^2 + s)\sqrt{(\tilde{b}_1^2 + s)(\tilde{b}_2^2 + s)(\tilde{b}_3^2 + s)}} \tag{7.38}$$

et $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\tilde{V}_1}{\tilde{V}_2} = \frac{\tilde{a}_1\,\tilde{a}_2\,\tilde{a}_3}{\tilde{b}_1\,\tilde{b}_2\,\tilde{b}_3}$.

De même, nous cherchons à définir une relation entre les seconds termes de $\boldsymbol{S}_c^{Ext/1}$ et $\boldsymbol{S}_c^{Ext/2}$:

$$\tilde{I}_{i,j}^1(\tilde{\lambda}_1) = \frac{\dfrac{-2\pi\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3}{(\tilde{a}_i{}^2 + \tilde{\lambda}_1)(\tilde{a}_j{}^2 + \tilde{\lambda}_1)\tilde{\Delta}_1(\tilde{\lambda}_1)}\dfrac{2y_i}{\tilde{a}_j{}^2 + \tilde{\lambda}_1}}{\dfrac{y_i y_i}{(\tilde{a}_i{}^2 + \tilde{\lambda}_1)^2}}. \tag{7.39}$$

Avec la relation de confocalité (7.35) nous pouvons écrire :

$$\tilde{I}_{i,j}^1(\tilde{\lambda}_1) = \frac{\dfrac{-2\pi\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3}{(\tilde{b}_i^2 + \tilde{\lambda}_2)(\tilde{b}_j^2 + \tilde{\lambda}_2)\tilde{\Delta}_2(\tilde{\lambda}_2)}\dfrac{2y_i}{\tilde{b}_i^2 + \tilde{\lambda}_2}}{\dfrac{y_i y_i}{(\tilde{b}_i^2 + \tilde{\lambda}_2)^2}}. \tag{7.40}$$

On obtient la relation :

$$\tilde{I}^1_{i,j}(\tilde{\lambda}_1) = \frac{V_1}{V_2}\,\tilde{I}^2_{i,j}(\tilde{\lambda}_2). \tag{7.41}$$

Nous pouvons donc en déduire avec les équations (7.31), (7.38) et (7.41) :

$$\frac{1}{V_1}\int_{V_1} \boldsymbol{\Pi}^c(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^c dV = \frac{1}{V_2}\int_{V_2} \boldsymbol{\Pi}^c(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^c dV \text{ avec } \boldsymbol{r}' \in V_0 \tag{7.42}$$

La différence entre les équations (7.28) et (7.29) donne:

$$\begin{aligned} &\bar{\boldsymbol{e}}^2 - \bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{S}^1_{\mathrm{c}}.\boldsymbol{H}^c.\Delta\boldsymbol{K}^{1/\mathrm{c}}.\bar{\boldsymbol{e}}^1 - \frac{V_1}{V_2}\boldsymbol{S}^2_{\mathrm{c}}.\boldsymbol{H}^c.\Delta\boldsymbol{K}^{1/\mathrm{c}}.\bar{\boldsymbol{e}}^1 \\ &\text{Soit: } \bar{\boldsymbol{e}}^1 = \left[\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{S}^1_{\mathrm{c}} - \frac{V_1}{V_2}\boldsymbol{S}^2_{\mathrm{c}}\right).\boldsymbol{H}^c.\Delta\boldsymbol{K}^{1/\mathrm{c}}\right]^{-1}.\bar{\boldsymbol{e}}^2 = \boldsymbol{A}^{1/2}.\bar{\boldsymbol{e}}^2 \end{aligned} \tag{7.43}$$

avec :

$$\boldsymbol{A}^{1/2} = \left[\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{S}^1_{\mathrm{c}}. - \frac{V_1}{V_2}\boldsymbol{S}^2_{\mathrm{c}}\right).\boldsymbol{H}^c.\Delta\boldsymbol{K}^{1/\mathrm{c}}\right]^{-1}. \tag{7.44}$$

A l'aide des équations (7.18), (7.44) et la relation de moyenne, le tenseur de localisation de l'inclusion composite V_2, $\boldsymbol{A}^{2/0}$, s'écrit :

$$\boldsymbol{A}^{2/0} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}^2_0.\boldsymbol{H}^0.\left(\frac{V_1}{V_2}\,\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\left[\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{S}^1_c - \frac{V_1}{V_2}\boldsymbol{S}^2_c\right).\boldsymbol{H}^c.\Delta\boldsymbol{K}^{1/\mathrm{c}}\right]^{-1} + \Delta\boldsymbol{K}^{\mathrm{c}/0}\right)\right]^{-1}. \tag{7.45}$$

Avec les équations (7.44) et (7.45) nous pouvons obtenir la localisation :

$$\boldsymbol{A}^{1/0} = \boldsymbol{A}^{1/2}.\boldsymbol{A}^{2/0}. \tag{7.46}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{A}^{1/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^0$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^0$$

avec :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{1/0} = \Big[&\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}^2_0.\boldsymbol{H}^0.\left(\frac{V_1}{V_2}\Delta\boldsymbol{K}^{1/0} + \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}\right) \\ &+ \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}^2_0.\boldsymbol{H}^0.\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}\right).\left(\boldsymbol{S}^1_c - \frac{V_1}{V_2}\boldsymbol{S}^2_c\right).\boldsymbol{H}^c.\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}\Big]^{-1} \end{aligned} \tag{7.47}$$

$$\boldsymbol{A}^{c/0} = \left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{1 - \frac{V_1}{V_2}} \left(\boldsymbol{S}_c^1 - \frac{V_1}{V_2} \boldsymbol{S}_c^2 \right) . \boldsymbol{H}^c . \Delta \boldsymbol{K}^{1/c} \right) . \boldsymbol{A}^{1/0} .$$

L'équation (7.43) représente la solution exacte au problème d'inclusion enrobée dans le cas d'inclusion de forme ellipsoïdale et de phases de conductivités thermiques anisotropes.

Nous définissons la relation entre les champs moyens d'intensités $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ et de flux thermique $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$ et les valeurs macroscopiques $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{Q}$ en utilisant les relations de moyennes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \frac{1}{V_2} \int_{S_2} T(\boldsymbol{r}) . \boldsymbol{N}(\boldsymbol{r}) d\, S = f\, \overline{\boldsymbol{e}}^1 + (1-f) \overline{\boldsymbol{e}}^c \\ \boldsymbol{Q} &= \frac{1}{V_2} \int_{S_2} (\boldsymbol{q} . \boldsymbol{N}) . \boldsymbol{r} d\, S = f\, \overline{\boldsymbol{q}}^1 + (1-f) \overline{\boldsymbol{q}}^c \end{aligned} \tag{7.48}$$

avec $f = V_1/V_2$.

Nous utilisons un schéma d'homogénéisation auto-cohérent généralisé, avec $\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{K}^0 = \boldsymbol{K}^{eff}$. On obtient la conductivité thermique effective s'exprime sous la forme :

$$\boldsymbol{K}^{eff} = \boldsymbol{K}^c + f \Delta \boldsymbol{K}^{1/c} . \boldsymbol{A}^{1/eff} \tag{7.49}$$

avec:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}^{1/0} = \big[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}_{eff}^2 . \boldsymbol{H}^{eff} . \left(f \Delta \boldsymbol{K}^{1/eff} + (1-f) \Delta \boldsymbol{K}^{c/eff} \right) \\ + \left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{S}_{eff}^2 . \boldsymbol{H}^{eff} . \Delta \boldsymbol{K}^{c/eff} \right) . \left(\boldsymbol{S}_c^1 - f \boldsymbol{S}_c^2 \right) . \boldsymbol{H}^c . \Delta \boldsymbol{K}^{1/c} \big]^{-1} . \end{aligned}$$

La conductivité thermique ainsi obtenue permet de prendre en compte à la fois la forme de l'inclusion par l'intermédiaire des tenseurs de conduction de polarisation $\boldsymbol{L}^1$ et $\boldsymbol{L}^2$ et de l'anisotropie de la conductivité thermique de l'inclusion et de la matrice.

7.3 MODELE AUTO-COHERENT GENERALISE A (N+1) PHASES

Nous avons étendu le modèle auto-cohérent généralisé dans un cas à $(N+1)$ phases. Nous considérons un volume hétérogène de volume V, dont la conductivité thermique $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ dépend de la position $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$. Ce matériau est constitué d'une inclusion ellipsoïdale de volume V_1 entourée de $N-1$ enrobages d'autres phases intégrées dans le milieu homogène de référence(MHR) noté '0'.

La conductivité thermique de chaque phase est décrite par le module $\boldsymbol{K}^P$ pour chaque phase $P \in \{1,2,\dots,N\}$ et $\boldsymbol{K}^0$ pour le MHR.

Nous considérons un champ d'intensité $\boldsymbol{e}^0$ imposé à la surface extérieure ∂V du MHR.

La conductivité thermique locale est décomposée en une partie uniforme et une partie de fluctuation :

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^0 + \sum_{P=1}^{N} \Delta\boldsymbol{K}^{P/0}\, \theta_P(\boldsymbol{r}) \text{ où } \boldsymbol{K}^{P/0} = \boldsymbol{K}^P - \boldsymbol{K}^0 \tag{7.50}$$

avec $\theta_P(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \boldsymbol{r} \in V_P \\ 0 \text{ pour } \boldsymbol{r} \notin V_P \end{cases}$

où V_P est le volume de la phase P.

Comme dans le cas précédent, on applique dans le cadre de la conductivité thermique, le concept d'opérateurs de projection de Kunin (Kunin 1983). L'opérateur de projection $\boldsymbol{\Pi}^0$ associé au MRH de la conductivité $\boldsymbol{K}^0$ est défini par les équations (7.7) à (7.10). En utilisant l'opérateur de projection sur les équations (7.3) et (7.50), on arrive à :

$$\boldsymbol{\Pi}^0 * \boldsymbol{H}^0.\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Pi}^0 * \boldsymbol{e} + \boldsymbol{\Pi}^0 * \boldsymbol{H}^0.\sum_{P=1}^{N} \Delta\boldsymbol{K}^{P/0}\,.\boldsymbol{e}\,\theta_P \tag{7.51}$$

on obtient :

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^0 - \boldsymbol{\Pi}^0 * \boldsymbol{H}^0.\sum_{P=1}^{N} \Delta\boldsymbol{K}^{P/0}\,.\boldsymbol{e}\,\theta_P. \tag{7.52}$$

Enfin l'équation (7.52) est écrite sous forme intégrale :

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^0 + \sum_{P=1}^{N} \int_{V_P{}'} \boldsymbol{\Pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^0.\Delta\boldsymbol{K}^{P/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_P{}'. \tag{7.53}$$

Nous considérons le domaine de l'inclusion composite Ω_J constitué par les phases P pour $P \in \{1,2,\dots,J\}$ pour $J \in \{1,2,\dots,N\}$. Les relations entre les différents volumes sont données par:

$$\Omega_N = \sum_{P=1}^{N} V_P \;\; ; \;\; \Omega_j = \sum_{P=1}^{J} V_P \;\; ; \;\; V_P = \Omega_P - \Omega_{P-1}. \tag{7.54}$$

Les champs d'intensités sont déterminés dans les différentes phases :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_N} = \sum_{P=1}^{N} \phi_P \, \bar{\boldsymbol{e}}^P \quad ; \; \frac{\Omega_J}{\Omega_N} \, \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \sum_{P=1}^{J} \phi_P \, \bar{\boldsymbol{e}}^P \tag{7.55}$$

où $\phi_P$représente la fraction volumique de la phase P telle que : $\phi_P = V_P/\Omega_N$.

Les opérations de moyennes sont définies par :

$$\bar{F}^P = \frac{1}{V_P} \int_{V_P} F(\boldsymbol{r}) dV_P \quad et \;\; \bar{F}^{\Omega_p} = \frac{1}{\Omega_p} \int_{\Omega_p} F(\boldsymbol{r}) dV_{\Omega_p}. \tag{7.56}$$

Les champs intensités $\bar{\boldsymbol{e}}^P$et $\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_p}$ satisfont la relation de moyenne :

$$\phi_P \bar{\boldsymbol{e}}^P = \frac{\Omega_P}{\Omega_N} \, \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_P} - \frac{\Omega_{P-1}}{\Omega_N} \, \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{P-1}}. \tag{7.57}$$

Afin de déterminer la conductivité thermique effective du composite, il est nécessaire de déterminer les tenseurs de localisation thermique $\boldsymbol{A}^{P/0}$ reliant le champ intensité moyen dans la phase P et le champ homogène $\boldsymbol{e}^0$.

Le champ intensité moyen est déterminé dans l'enrobage N par :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_N} = \boldsymbol{e}^0 - \boldsymbol{L}_0^{\Omega_N} \sum_{P=1}^{N} \phi_P \, \Delta \boldsymbol{K}^{P/0} . \bar{\boldsymbol{e}}^P \tag{7.58}$$

où $\boldsymbol{L}_0^{\Omega_N}$ est le tenseur de conduction de polarisation associé à $\boldsymbol{K}^0$et à le volume Ω_N,

$$\text{avec :} \;\; \boldsymbol{L}_0^{\Omega_N} = \int_{\Omega_N} \boldsymbol{\Gamma}^0 \;\; (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') d\Omega_N \;\; \text{pour} \;\; \boldsymbol{r}' \in \Omega_N. \tag{7.59}$$

Les relations entre les intensités $\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_j}, \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{j+1}} \; et \; \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_N}$ sont définies, pour $J \in \{1,2,\dots,N-1\}$:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \boldsymbol{A}^{\Omega_J/\Omega_{J+1}} . \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{J+1}} \;\; et \quad \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \boldsymbol{A}^{\Omega_J/\Omega_N} . \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_N}. \tag{7.60}$$

En combinant les relations (7.57) et (7.15), on obtient :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_N} = \boldsymbol{A}^{\Omega_N/0} . \bar{\boldsymbol{e}}^0 \tag{7.61}$$

avec :

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_N/0} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_0^{\Omega_N} \sum_{P=1}^{N} \Delta\boldsymbol{K}^{P/0}.\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_N}\right]^{-1}$$

où :

$\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_N} = \frac{\Omega_P}{\Omega_N}\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_N} - \frac{\Omega_{P-1}}{\Omega_N}\boldsymbol{A}^{\Omega_{P-1}/\Omega_N}$ et $\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_1/\Omega_N} = \frac{\Omega_1}{\Omega_N}\boldsymbol{A}^{\Omega_1/\Omega_N}$.

Le tenseur de localisation thermique $\boldsymbol{A}^{P/0}$ de la phase P relatif au milieu homogène de référence a pour expression :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^P = \boldsymbol{A}^{P/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^0$$
$$\text{avec } \boldsymbol{A}^{P/0} = \frac{\Omega_N}{\Omega_P}\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_N}.\boldsymbol{A}^{\Omega_N/0}. \tag{7.62}$$

L'équation de localisation thermique (7.58) donne de manière exacte le champ d'intensité dans l'inclusion composite Ω_N. Des équations complémentaires écrites jusqu'à l'avant dernier enrobage (d'ordre $N-1$) lient le champ d'intensité $\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J}$ dans l'inclusion composite à celui l'entourant immédiatement d'ordre $J+1$ avec J variant de 1 à $N-1$.

L'équation (7.50) est décomposée sous la forme :

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^{J+1} + (\boldsymbol{K}^0 - \boldsymbol{K}^{J+1}) + \sum_{P=1}^{N}(\boldsymbol{K}^P - \boldsymbol{K}^0)\theta_P(\boldsymbol{r}). \tag{7.63}$$

Le terme de sommation est séparé en deux parties une de 1 à J et une autre de $J+1$ à N :

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^{J+1} + (\boldsymbol{K}^0 - \boldsymbol{K}^{J+1}) + \sum_{P=1}^{J}(\boldsymbol{K}^P - \boldsymbol{K}^0)\theta_P(\boldsymbol{r}) + \sum_{P=J+1}^{N}(\boldsymbol{K}^P - \boldsymbol{K}^0)\theta_P(\boldsymbol{r}). \tag{7.64}$$

Le terme issu de la deuxième sommation est réécrit :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^{J+1} + (\boldsymbol{K}^0 - \boldsymbol{K}^{J+1}) + \sum_{P=1}^{J}(\boldsymbol{K}^P - \boldsymbol{K}^0)\theta_P(\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{K}^{J+1} - \boldsymbol{K}^0)\theta_{J+1}(\boldsymbol{r}) \\ + \sum_{P=J+2}^{N}(\boldsymbol{K}^P - \boldsymbol{K}^0)\theta_P(\boldsymbol{r}).\end{aligned} \tag{7.65}$$

Les termes en $(\boldsymbol{K}^{J+1} - \boldsymbol{K}^0)$ sont factorisés:

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^{J+1} + \sum_{P=1}^{J} (\boldsymbol{K}^{P} - \boldsymbol{K}^{0})\theta_P(\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{K}^{J+1} - \boldsymbol{K}^{0})\big(\theta_{J+1}(\boldsymbol{r}) - 1\big) + \sum_{P=J+2}^{N} (\boldsymbol{K}^{P} - \boldsymbol{K}^{0})\theta_P(\boldsymbol{r}). \tag{7.66}$$

La somme des θ_P de 0 à N est égale à 1 nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \theta_{J+1}(\boldsymbol{r}) - 1 &= \theta_{J+1}(\boldsymbol{r}) - \sum_{P=1}^{N} \theta_P(\boldsymbol{r}) - \theta_0(\boldsymbol{r}) \\ &= \theta_{J+1}(\boldsymbol{r}) - \sum_{P=1}^{J} \theta_P(\boldsymbol{r}) - \sum_{P=J+2}^{N} \theta_P(\boldsymbol{r}) - \theta_{J+1}(\boldsymbol{r}) - \theta_0(\boldsymbol{r}) \\ &= \sum_{P=1}^{J} \theta_P(\boldsymbol{r}) - \sum_{P=J+2}^{N} \theta_P(\boldsymbol{r}) - \theta_0(\boldsymbol{r}). \end{aligned} \tag{7.67}$$

La conductivité thermique $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ s'exprime finalement par:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^{J+1} &+ \sum_{P=1}^{J} (\boldsymbol{K}^{P} - \boldsymbol{K}^{0})\theta_P(\boldsymbol{r}) - \sum_{P=1}^{J} (\boldsymbol{K}^{J+1} - \boldsymbol{K}^{0})\theta_P(\boldsymbol{r}) \\ &- \sum_{P=J+2}^{N} (\boldsymbol{K}^{J+1} - \boldsymbol{K}^{0})\theta_P(\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{K}^{J+1} - \boldsymbol{K}^{0})\theta_0(\boldsymbol{r}) \\ &+ \sum_{P=J+2}^{N} (\boldsymbol{K}^{P} - \boldsymbol{K}^{0})\theta_P(\boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{7.68}$$

soit après simplification :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^{J+1} &+ \sum_{P=1}^{J} (\boldsymbol{K}^{P} - \boldsymbol{K}^{J+1})\theta_P(\boldsymbol{r}) + \sum_{P=J+2}^{N} (\boldsymbol{K}^{P} - \boldsymbol{K}^{J+1})\theta_P(\boldsymbol{r}) \\ &- (\boldsymbol{K}^{J+1} - \boldsymbol{K}^{0})\theta_0(\boldsymbol{r}). \end{aligned} \tag{7.69}$$

L'équation intégrale d'un problème hétérogène est généralement basée sur la technique des fonctions de Green associée à un milieu infini. Toutefois, on considère ici une fonction de Green G^{J+1} associée à $\boldsymbol{K}^{J+1}$ définie par :

$$K_{ij}^{J+1} G_{,ij}^{J+1}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') + \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = 0 \;\; avec \;\; \lim_{\boldsymbol{r}\to\infty} G^{J+1}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = 0. \tag{7.70}$$

L'opérateur de projection associé à $J + 1$ s'écrit:

$$\boldsymbol{\Pi}^{J+1} = \boldsymbol{\Gamma}^{J+1}.\boldsymbol{K}^{J+1} \tag{7.71}$$

où $\boldsymbol{\Gamma}^{J+1}$ le tenseur de Green modifié en conductivité donné par:

$$\boldsymbol{\Gamma}^{J+1} = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}G^{J+1}. \tag{7.72}$$

Les propriétés $\boldsymbol{\Pi}^{J+1}$ sont définies par :

$$\boldsymbol{e} = -\boldsymbol{\nabla}T \Leftrightarrow \boldsymbol{\Pi}^{J+1} * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} - \boldsymbol{e}^0 \tag{7.73}$$

$$div\ \boldsymbol{q} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\Pi}^{J+1} * \boldsymbol{H}^{J+1}.\boldsymbol{q} = 0 \text{ avec } \boldsymbol{H}^{J+1} = \boldsymbol{K}^{J+1^{-1}}. \tag{7.74}$$

L'équation intégrale (7.53) est ainsi reformulée:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^0 &- \sum_{P=1}^{J} \int_{V_P{}'} \boldsymbol{\Pi}^{J+1}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^{J+1}.\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_P{}' \\ &- \sum_{P=J+2}^{N} \int_{V_P{}'} \boldsymbol{\Pi}^{J+1}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^{J+1}.\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_P{}' \\ &+ \int_{V_0{}'} \boldsymbol{\Pi}^{J+1}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\boldsymbol{H}^{J+1}.\Delta\boldsymbol{K}^{J+1/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_0{}'.\end{aligned} \tag{7.75}$$

Le champ intensité moyen dans Ω_J s'écrit :

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \boldsymbol{e}^0 &- \frac{\Omega_N}{\Omega_J}\boldsymbol{L}_{J+1}^{\Omega_J}.\sum_{P=1}^{J}\phi_P\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\bar{\boldsymbol{e}}^P \\ &- \frac{1}{\Omega_J}\sum_{P=J+2}^{N}\int_{V_P{}'}\boldsymbol{L}_{J+1}^{Ext/\Omega_J}.\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_P{}' \\ &+ \frac{1}{\Omega_J}\int_{V_0{}'}\boldsymbol{L}_{J+1}^{Ext/\Omega_J}.\Delta\boldsymbol{K}^{J+1/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_0{}'.\end{aligned} \tag{7.76}$$

où $\boldsymbol{L}_{\beta}^{\Omega_\alpha}$ est le tenseur de conduction de polarisation associé à $\boldsymbol{K}^{\beta}$et au volume Ω_α :

$$\boldsymbol{L}_{\beta}^{\Omega_\alpha} = \int_{\Omega_\alpha} \boldsymbol{\Gamma}^{\beta}\ \ (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\Omega_\alpha \ \text{ pour } \boldsymbol{r}' \in \Omega_\alpha \tag{7.77}$$

et $\boldsymbol{L}_{\beta}^{Ext/\Omega_\alpha}$ est le tenseur de conduction de polarisation extérieur associé à $\boldsymbol{K}^{\beta}$et à l'extérieur de Ω_α :

$$\boldsymbol{L}_{\beta}^{Ext/\Omega_\alpha} = \int_{\Omega_\alpha} \boldsymbol{\Gamma}^{\beta} \ \ (\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\Omega_\alpha \ \ \text{pour} \ \ \boldsymbol{r}' \notin \Omega_\alpha. \tag{7.78}$$

La différence entre les champs d'intensités moyens $\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{J+1}}$ et $\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J}$ est exprimée par:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{J+1}} - \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = &-\frac{\Omega_N}{\Omega_{J+1}}\boldsymbol{L}_{J+1}^{\Omega_{J+1}}.\sum_{P=1}^{J}\phi_P\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\bar{\boldsymbol{e}}^{P} + \frac{\Omega_N}{\Omega_J}\boldsymbol{L}_{J+1}^{\Omega_J}.\sum_{P=1}^{J}\phi_P\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\bar{\boldsymbol{e}}^{P} \\ &-\frac{1}{\Omega_{J+1}}\sum_{P=J+2}^{N}\int_{V_P{}'}\boldsymbol{L}_{J+1}^{Ext/\Omega_{J+1}}.\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\,dV_P{}' \\ &+\frac{1}{\Omega_J}\sum_{P=J+2}^{N}\int_{V_P{}'}\boldsymbol{L}_{J+1}^{Ext/\Omega_J}.\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\,dV_P{}' \\ &+\frac{1}{\Omega_{J+1}}\int_{V_0{}'}\boldsymbol{L}_{J+1}^{Ext/\Omega_{J+1}}.\Delta\boldsymbol{K}^{J+1/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\,dV_0{}' \\ &-\frac{1}{\Omega_J}\int_{V_0{}'}\boldsymbol{L}_{J+1}^{Ext/\Omega_J}.\Delta\boldsymbol{K}^{J+1/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\,dV_0{}'\end{aligned} \tag{7.79}$$

La dernière étape consiste à relier les champs d'intensité entre deux phases successives en utilisant la relation de confocalité entre les ellipsoïdes. Les relations entre les intensités intermédiaires $\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_j}$ et $\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{j+1}}$ sont obtenues en utilisant les relations de confocalité entre les ellipsoïdes Ω_J et Ω_{J+1} (voir démonstration (7.31) à (7.42)):

$$\frac{1}{\Omega_J}\boldsymbol{L}_{J+1}^{Ext/\Omega_J} = \frac{1}{\Omega_{J+1}}\boldsymbol{L}_{J+1}^{Ext/\Omega_{J+1}}. \tag{7.80}$$

En utilisant l'équation (7.80), l'équation (7.79) se simplifie en :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{J+1}} - \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \frac{V_{J+1}}{\Omega_J}\frac{\Omega_N}{\Omega_{J+1}}\boldsymbol{L}_{J+1}^{J+1}.\sum_{P=1}^{J}\phi_P\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\bar{\boldsymbol{e}}^{P} \tag{7.81}$$

avec $\boldsymbol{L}_{J+1}^{J+1} = \boldsymbol{L}_{J+1}^{\Omega_{J+1}} - \frac{\Omega_{J+1}}{V_{J+1}}\left(\boldsymbol{L}_{J+1}^{\Omega_{J+1}} - \boldsymbol{L}_{J+1}^{\Omega_J}\right)$.

Le tenseur $\boldsymbol{A}^{\Omega_J/\Omega_{J+1}}$ lie les champs intensité dans deux ellipsoïdes successifs par :

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_J/\Omega_{J+1}} = \left[\boldsymbol{I} + \frac{V_{J+1}}{\Omega_{J+1}}\boldsymbol{L}_{J+1}^{J+1}.\sum_{P=1}^{J}\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_J}\right]^{-1} \tag{7.82}$$

avec : $\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_J} = \frac{\Omega_P}{\Omega_J}\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_J} - \frac{\Omega_P-1}{\Omega_J}\boldsymbol{A}^{\Omega_{P-1}/\Omega_J}$ et $\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_1/\Omega_J} = \frac{\Omega_1}{\Omega_J}\boldsymbol{A}^{\Omega_1/\Omega_J}$.

Le tenseur de localisation thermique $\boldsymbol{A}^{P/0}$ de la phase *'P'* est obtenu par la relation de récurrence :

$$\boldsymbol{A}^{P/0} = \frac{\Omega_N}{\Omega_P}\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_N}.\boldsymbol{A}^{N/0}. \tag{7.83}$$

Les tenseurs de localisations $\boldsymbol{A}^{P/0}$ constituent la solution au problème d'inclusion multi-enrobée. Nous obtenons une expression compacte dépendant des tenseurs de conduction de polarisation $\boldsymbol{L}_{J+1}^{\Omega_J}$ donnés dans le cas de comportement anisotrope et d'inclusions de formes ellipsoïdales.

En utilisant la généralisation du modèle à un cas multi-enrobé, nous considérons un composite à trois phases (3+1 phases) constitué d'une inclusion, de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^1$ enrobée dans une phase de conductivité $\boldsymbol{K}^2$, enrobé dans une phase de matrice, de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^m$ et l'ensemble plongé dans une phase infinie de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$.

Nous définissons la relation entre les champs moyens d'intensités $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ et de flux thermique $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$ et les valeurs macroscopiques $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{Q}$ en utilisant les relations de moyennes :

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\Omega_3}\int_{S_3} T(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{N}(\boldsymbol{r})dS = \phi_1\,\bar{\boldsymbol{e}}^1 + \phi_2\bar{\boldsymbol{e}}^2 + \phi_3\bar{\boldsymbol{e}}^3$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\Omega_3}\int_{S_3} (\boldsymbol{q}.\boldsymbol{N}).\boldsymbol{r}dS = \phi_1\,\bar{\boldsymbol{q}}^1 + \phi_2\bar{\boldsymbol{q}}^2 + \phi_3\bar{\boldsymbol{q}}^3 \tag{7.84}$$

En considérant une homogénéisation auto-cohérente généralisée, avec $\boldsymbol{K}^0 = \boldsymbol{K}^{eff}$ et $\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{E}$, nous définissons la conductivité thermique effective par :

$$\boldsymbol{K}^{eff} = \phi_1\boldsymbol{K}^1.\boldsymbol{A}^{1/eff} + \phi_2\boldsymbol{K}^2.\boldsymbol{A}^{2/eff} + \phi_3\boldsymbol{K}^3.\boldsymbol{A}^{3/eff} \tag{7.85}$$

où :

$$\boldsymbol{A}^{1/eff} = \boldsymbol{A}^{1/\Omega_2}.\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3}.\boldsymbol{A}^{\Omega_3/eff} \tag{7.86}$$

$$\boldsymbol{A}^{2/eff} = \left(\frac{\Omega_2}{V_2}\boldsymbol{I} - \frac{V_1}{V_2}\boldsymbol{A}^{1/\Omega_2}\right).\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3}.\boldsymbol{A}^{\Omega_3/eff}$$

$$\boldsymbol{A}^{3/eff} = \left(\frac{\Omega_3}{V_3}\boldsymbol{I} - \frac{V_2}{V_3}\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3}\right).\boldsymbol{A}^{\Omega_3/eff}$$

avec :

$$\boldsymbol{A}^{1/\Omega_2} = \left[\boldsymbol{I} + \frac{\phi_2}{\phi_1+\phi_2}\boldsymbol{L}_2^2.\Delta\boldsymbol{K}^{1/2}\right]^{-\mathbf{1}}$$

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3} = \left[\boldsymbol{I} + \phi_3\boldsymbol{L}_3^3\left(\Delta\boldsymbol{K}^{2/3} + \frac{\phi_1}{\phi_1+\phi_2}\Delta\boldsymbol{K}^{1/2}.\boldsymbol{A}^{1/\Omega_2}\right)\right]^{-\mathbf{1}}$$

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_3/eff} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^{\Omega_3}\left(\Delta\boldsymbol{K}^{3/eff} + \phi_1\Delta\boldsymbol{K}^{1/2}.\boldsymbol{A}^{1/\Omega_3} + (\phi_1 + \phi_2)\Delta\boldsymbol{K}^{2/3}.\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3}\right)\right]^{-\mathbf{1}}$$

$$\boldsymbol{A}^{1/\Omega_3} = \boldsymbol{A}^{1/\Omega_2}.\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3}$$

7.4 APPLICATIONS ET COMPARAISONS

7.4.1 Applications pour des composites à deux phases

Dans la suite, on considère un composite biphasé constitué d'une inclusion ellipsoïdale de volume V_1 de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^1$ entourée d'un enrobage de volume V_c de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^c$ intégré dans le milieu homogène de référence noté ' 0 ' de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^{eff}$ (la conductivité thermique recherché).

7.4.1.1 Cas ellipsoïdal

On considère une inclusion ellipsoïdale de demi-axes (a_1, a_2, a_3) de conductivité thermique isotrope $\boldsymbol{K}^1 = K^1\boldsymbol{I}$, entouré dans un enrobage ellipsoïdale de demi-axes (b_1, b_2, b_3) de conductivité thermique isotrope $\boldsymbol{K}^c = K^c\boldsymbol{I}$. La condition de confocalité est défini par : $b_3^2 - a_3^2 = b_1^2 - a_1^2$. Nous notons les facteurs de forme de l'inclusion α et de l'enrobage γ avec : $\alpha = a_3/a_1 = a_3/a_2$ et $\gamma = b_3/b_1 = b_3/b_2$. la fraction volumique de l'inclusion est : $f = \beta\, a_1^3/\alpha\, b_1^3$. Les facteurs de formes α et γ peuvent donc être liés à f par l'équation non linéaire suivante

$$\gamma^{6} - 3\ \gamma^{4} + \left(3 + \frac{(1-\alpha^2)^3}{\alpha^2} {f_1}^2\right) \gamma^{2} - 1 = 0 \tag{7.87}$$

En résolvant les équations implicites (7.49), les conductivités thermiques transversales et longitudinales effectives peuvent être exprimées comme:

$$K_1^{eff} = K_2^{eff} = K^c + \frac{f\, K^c (K^1 - K^c)}{K^c + (K^1 - K^c)\big(g_1(\alpha) - f g_1(\beta)\big)}$$

$$K_3^{eff} = K^c + \frac{f\, K^c (K^1 - K^c)}{K^c + (K^1 - K^c)\big(g_3(\alpha) - f g_3(\beta)\big)} \tag{7.88}$$

avec:

$$g_1(x) = \frac{x\big(cos^{-1}(x) - x\sqrt{1-x^2}\big)}{2(1-x^2)^{3/2}} \text{ et } g_3(x) = 1 - 2g_1(x) \text{ pour } x < 1$$

$$g_1(x) = \frac{x\big(x\sqrt{x^2-1} - cosh^{-1}(x)\big)}{2(x^2-1)^{3/2}} \text{ et } g_3(x) = 1 - 2g_1(x) \text{ pour } x > 1.$$

Les expressions sont identiques à celles obtenue par les modèles de Lee et Kim (Lee & Kim 2013; Lee & Kim 2010).

7.4.1.2 Cas sphérique

D'après l'équation (7.49), la conductivité thermique effective s'écrit :

$$K^{eff} = K^c + \frac{3f\ (K^1 - K^c)}{(1-f)\ K^1 + (2+f)\ K^c} K^c. \tag{7.89}$$

L'expression est identique à celles obtenue par les modèles exactes de Hashin (Hashin 1968) et Hervé (Herve 2002).

7.4.1.3 Cas cylindrique

On considère maintenant le cas de particule cylindrique aligné avec la direction 3 et de phases de conductivités thermiques isotopes avec $\boldsymbol{K}^1 = K^1 \boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{K}^c = K^c \boldsymbol{I}$. D'après l'équation (7.49), la conductivité thermique effective s'écrit :

$$K_1^{eff} = K_2^{eff} = K^c + \frac{2\,f_1\,(K^1 - K^c)K^c}{(1-f_1)\,K^1 + (1+f_1)K^c}$$
$$K_3^{eff} = K^c + f_1(K^1 - K^c) \tag{7.90}$$

On obtient des relations identiques à celle de Lee et Kim (Lee & Kim 2013; Lee & Kim 2010)

7.4.2 Applications pour des composites à trois phases

On considère un cas sphérique à 3+1 phases isotropes, constitué d'une inclusion '1' enrobée dans une phase 'c', enrobée dans une phase de matrice 'm', plongée dans le milieu homogène équivalent 'eff'. Dans le cas de 3+1 phases, nous pouvons écrire:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{A}^{1/eff}.\boldsymbol{E}$$
$$\bar{\boldsymbol{e}}^c = \boldsymbol{A}^{c/eff}.\boldsymbol{E}. \tag{7.91}$$

Soit :

$$\boldsymbol{K}^{eff} = \boldsymbol{K}^m + f_1(\boldsymbol{K}^1 - \boldsymbol{K}^m).\boldsymbol{A}^{1/eff} + f_c(\boldsymbol{K}^c - \boldsymbol{K}^m).\boldsymbol{A}^{c/eff} \tag{7.92}$$

avec:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{1/eff} = \Bigg[& f_1 \Bigg(\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^{\Omega_m}.\Delta\boldsymbol{K}^{1/eff}\right) + \frac{1}{f_1+f_c}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^{\Omega_m}.\Delta\boldsymbol{K}^{m/eff}\right) \\ & \times \left((1-f_1-f_c)\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{L}_m^{\Omega_c} - (f_1+f_c)\boldsymbol{L}_m^{\Omega_m}\right).\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}\right)\Bigg) \\ & + f_c \Bigg(\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^{\Omega_m}.\Delta\boldsymbol{K}^{c/eff}\right) + \frac{1}{f_1+f_c}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^{\Omega_m}.\Delta\boldsymbol{K}^{m/eff}\right) \\ & \times \left((1-f_1-f_c)\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{L}_m^{\Omega_c} - (f_1+f_c)\boldsymbol{L}_m^{\Omega_m}\right).\Delta\boldsymbol{K}^{c/m}\right)\Bigg) \\ & \times \left(\boldsymbol{I} + \left(\frac{f_c}{f_1+f_c}\boldsymbol{L}_c^1 - \frac{f_1}{f_1+f_c}\boldsymbol{L}_c^{\Omega_c}\right).\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}\right)\Bigg]^{-1}\end{aligned} \tag{7.93}$$

$$\boldsymbol{A}^{c/eff} = \left(\boldsymbol{I} + \left(\frac{f_c}{f_1+f_c}\boldsymbol{L}_c^1 - \frac{f_1}{f_1+f_c}\boldsymbol{L}_c^{\Omega_c}\right).\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}\right).\boldsymbol{A}^{1/eff}.$$

Dans le cas d'un comportement isotrope des phases et d'une morphologie sphérique, la conductivité thermique effective se réduit à :

$$K^{eff} = K^m \frac{N_{K^{eff}}}{D_{K^{eff}}}$$

avec

$$\begin{aligned} N_{K^{eff}} &= 2f_c(1 + 2f_1 + 2f_c){K^c}^2 + 2f_3 K^1 K^m \\ &+ K^c \Big((3f_1 + 6f_1^2 + f_c + 8f_1 f_c + f_c^2)K^1 \\ &+ 2\big(3f_1^2 + 2(-1 + f_c)f_c + f_1(-3 + f_c)\big)K^m\Big) \end{aligned} \tag{7.94}$$

$$\begin{aligned} D_{K^{eff}} &= 2f_c f_m {K^c}^2 + f_c(2 + f_1 + f_c)K^1 K^m \\ &+ K^c \Big((3f_1 - 3f_1^2 + f_c - 4f_1 f_c - f_c^2)K^1 \\ &+ \big(3f_1^2 + 2(2 + f_c)f_c + f_1(6 + 5f_c)\big)K^m\Big) \end{aligned}$$

Nous obtenons une expression identique à celle obtenue par Hervé (Herve 2002).

Dans le cas d'un comportement isotrope des phases et d'une morphologie ellipsoidale, Le modèle GSCS donne des résultats en accord avec les résultats obtenus par Kushch (Kushch et al. 2015) pour l'arrangement FCP pour des fractions volumiques supérieures à 0.2.

7.4.2.1 Influence du contraste de propriétés entre l'enrobage et la matrice

La conductivité thermique effective dans la direction de plus grand axe est analysée en fonction du contraste de propriétés entre l'enrobage et la matrice pour différents facteurs de forme (Figure 34). La condition de confocalité est respectée entre l'inclusion et l'enrobage et entre l'enrobage et la matrice. Le contraste de conductivité thermique entre l'inclusion et la matrice est $K^1/K^m = 100$ et des fractions volumiques $f_1 = 0.4$ et $f_c = 0.08$.

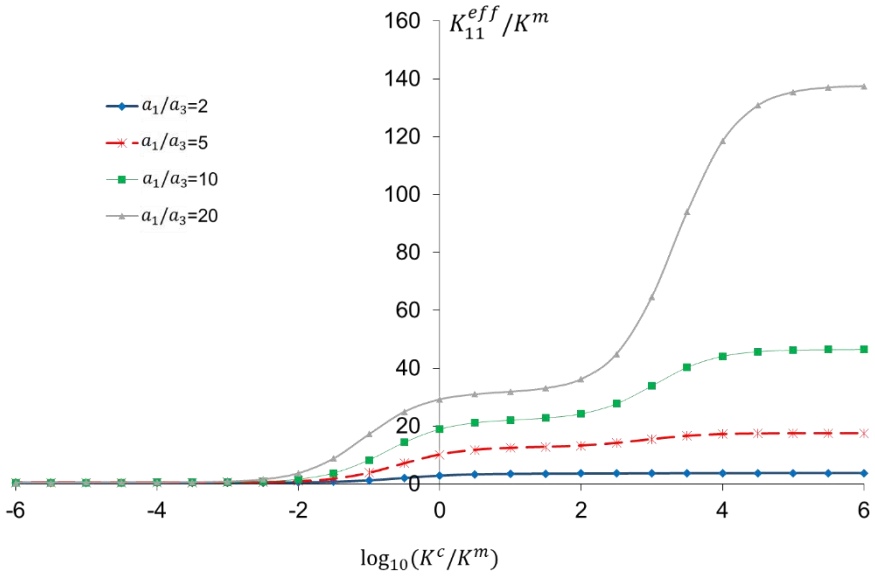


Figure 34 : Évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 1 en fonction du contraste de la conductivité thermique K^c/K^m pour différents facteurs de forme.

On observe une évolution sigmoïdale de la conductivité thermique effective en fonction du contraste de propriétés entre l'enrobage et la matrice comme déjà mis en évidence par Benveniste (Benveniste 2013). Deux plateaux correspondent aux cas limites d'un enrobage très faiblement $K^c \ll K^m$ ou hautement $K^c \gg K^m$ conducteur. Le plateau intermédiaire montre que la conductivité thermique effective est également fortement influencée par le facteur de forme.

7.4.2.2 Influence du facteur de forme sur la conductivité thermique effective pour différents contrastes

Dans les mêmes conditions, l'effet de l'évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 1 en fonction du $\log_{10} a_3/a_1$ est étudié pour différents contrastes K^c/K^m.

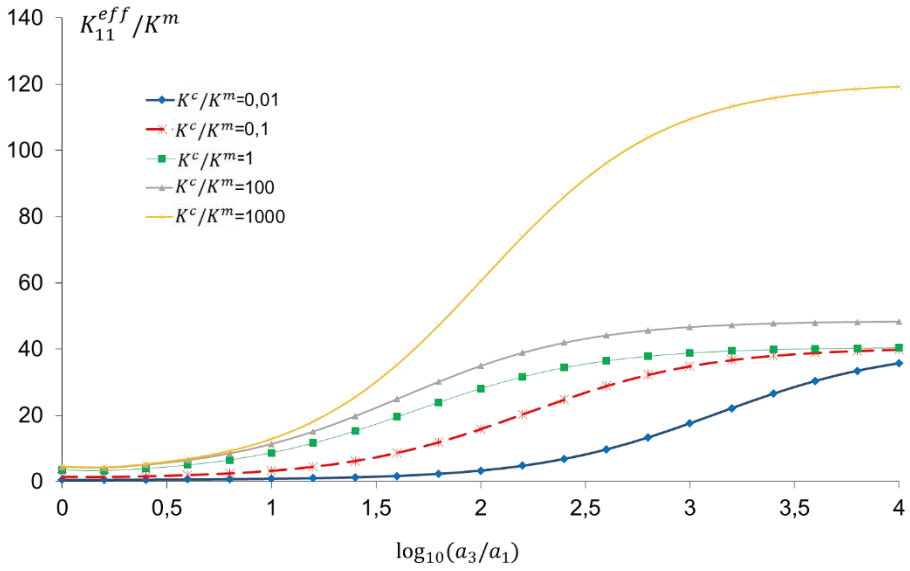


Figure 35 : Évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 1 en fonction du facteur de forme pour différents rapports de conductivités thermiques K^c/K^m.

De nouveau, la géométrie sphérique minimise la conductivité thermique effective. Lorsque l'ellipsoïde tend vers une forme cylindrique, la conductivité thermique effective selon le plus grand axe tend vers une valeur asymptotique qui dépend du contraste K^c/K^m .

7.4.2.3 Influence de l'anisotropie

Les porosités affaiblissant la matrice dans les composites ne se répartissent pas de façon homogène autour des inclusions. Le comportement de l'enrobage dont les propriétés dérivent de celle de la matrice par un facteur d'affaiblissement doit donc être considéré anisotrope. Le modèle permet de rendre compte de l'anisotropie de comportement de l'enrobage qui est décrit par le contraste K_{33}^c/K^m avec K_{33}^c/K_{11}^c fixé à différentes valeurs (Figure 36). Le contraste de conductivité thermique entre l'inclusion et la matrice est $K^1/K^m = 100$ et des fractions volumiques $f_1 = 0.4$ et $f_c = 0.08$. L'anisotropie de la phase 'c' induit un décalage du plateau entourant les valeurs de plateau asymptotiques obtenues pour une interphase faiblement et fortement conductrice. Lorsque le rapport de conductivité K_{33}^c/K_{11}^c augmente, la largeur du plateau diminue. Ce phénomène est cohérent avec un meilleur transfert de chaleur induit par une conductivité plus élevée.

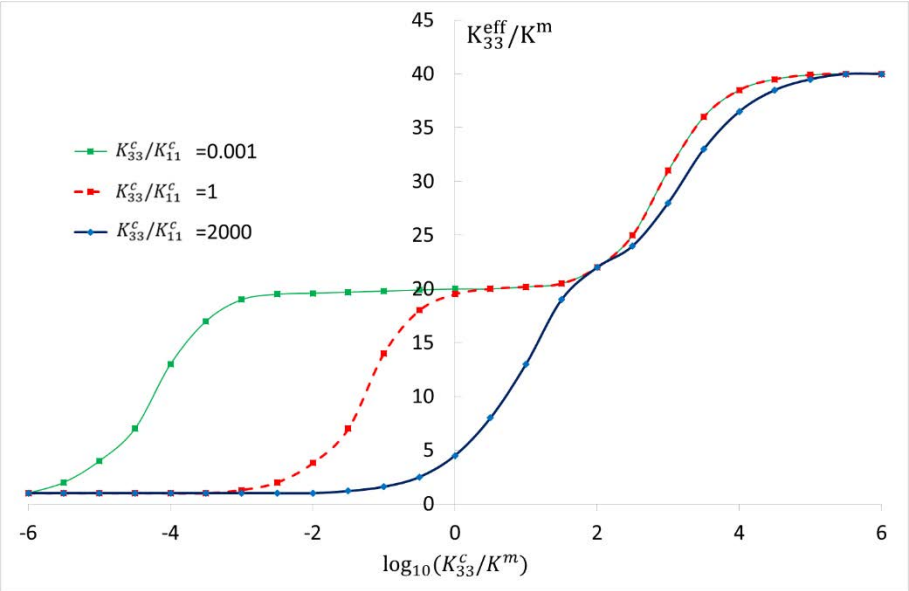


Figure 36 : Évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 3 en fonction du rapport K_{33}^c/K^m pour différents rapports de conductivités thermiques K_{33}^c/K_{11}^c.

7.5 CONCLUSIONS

Dans cette partie, nous avons proposé la solution du problème d'une inclusion multi-enrobée, basée sur les fonctions de Green et l'application des opérateurs de Kunin. L'hypothèse de confocalité a permis la simplification des équations intégrales liant les champs d'intensité entre des enrobages successifs de l'inclusion composite. A travers le modèle auto-cohérent généralisé, nous avons estimé la conductivité thermique effective de composites renforcés de particules ellipsoïdales et de comportement thermique anisotrope par phase et pour une fraction volumique de charges élevée.

Dans le cas d'un composite biphasé, notre modèle a été validé par le modèle de Lee et Kim (Lee & Kim 2013; Lee & Kim 2010) et par les résultats numériques fournis par Kushch (Kushch et al. 2015) dans le cas de grande fraction volumique de renforts.

Une étude paramétrique a été faite dans le cas d'un composite à trois phases, avec une particule ellipsoïdale enrobée dans une phase 'c' plongée dans la matrice. Nous avons montré l'influence de la conductivité thermique de la phase 'c' et du facteur de forme des particules sur la conductivité thermique effective du composite.

Dans le chapitre suivant, nous proposons une autre approche pour résoudre le problème d'une inclusion multi-enrobée. Pour simplifier l'équation de récursivité, on pose une hypothèse sur le comportement du milieu dans lequel est plongé l'inclusion composite, permettant de s'affranchir de l'hypothèse de confocalité.

Chapitre 8 : Conductivité thermique effective par approche auto-cohérente généralisée, cas d'inclusions multi-enrobées à morphologie arbitraire

8 CONDUCTIVITE THERMIQUE EFFECTIVE PAR APPROCHE AUTO-COHERENTE GENERALISEE, CAS D'INCLUSIONS MULTI-ENROBEES A MORPHOLOGIE ARBITRAIRE

8.1 INTRODUCTION

Comme dans le chapitre précédent, nous nous intéressons à la résolution du problème d'une inclusion multi-enrobée à morphologie arbitraire plongée dans une matrice infinie. Nous proposons la résolution de ce problème d'hétérogénéités en thermique par la formulation d'une équation intégrale établie par l'introduction de fonctions de Green thermique.

Le modèle sera développé dans un premier temps dans le cas d'un matériau biphasé et dans un second temps dans le cas d'une inclusion multi-enrobée. L'objectif de cette section est d'appliquer ce modèle aux matériaux composites présentant une interphase entre les inclusions et la matrice. Dans ce cas le comportement de l'interphase est assimilé à celui de la matrice avec une dégradation des propriétés due à la présence des porosités.

8.2 MODELE AUTO-COHERENT GENERALISE A (2+1) PHASES

Nous considérons un volume hétérogène de volume V, dont la conductivité thermique $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ dépend de la position $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$. Ce matériau est constitué d'une inclusion composite de volume V_2 constituée d'une inclusion ellipsoïdale de volume V_1 entourée d'un enrobage ellipsoïdal de volume V_c intégré dans une matrice infinie (MHR noté '0').

La conductivité thermique de chaque phase P est décrite par le module $\boldsymbol{K}^P$, où $\boldsymbol{K}^1$ représente la conductivité thermique de l'inclusion, $\boldsymbol{K}^c$ la conductivité de la phase d'enrobage et $\boldsymbol{K}^0$ pour le VER.

Le flux thermique $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$ et l'intensité $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ sont décomposés comme suit:

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{e}^d(\boldsymbol{r}) \tag{8.1}$$

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{q}^0 + \boldsymbol{q}^d(\boldsymbol{r}) \tag{8.2}$$

Les équations du problème dans le cas de conductivité thermique dans un milieu hétérogène s'écrivent :

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) \text{ avec } \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^0 + \boldsymbol{\delta K}(\boldsymbol{r}) \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{8.4}$$

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}.T\,(\boldsymbol{r}) \tag{8.5}$$

$$T(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^0.\boldsymbol{r} \text{ pour } \boldsymbol{r} \in \partial V \tag{8.6}$$

Avec ce système nous pouvons écrire :

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{K}^0.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{\delta K}(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$$

$$K_{ij}^0 e_{j,i}(\boldsymbol{r}) + \left(\delta K_{ij}(\boldsymbol{r}) e_j(\boldsymbol{r})\right)_{,i} = 0. \tag{8.7}$$

L'équation différentielle est résolue par l'intermédiaire des fonctions de Green G^0 associées au MHR, définit par :

$$K_{ij}^0 G_{,ij}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}) - \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'}) = 0 \text{ avec } \lim_{\boldsymbol{r}\to\infty} G^0\,(\boldsymbol{r}) = 0\,. \tag{8.8}$$

La température et le champ d'intensité sont définis par Hatta et Taya (Hatta & Taya 1986), tels que :

$$T^d(\boldsymbol{r}) = -\int_{V'} G_{,j}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})\delta K_{jk}(\boldsymbol{r'}) e_k(\boldsymbol{r'})\, dV' \tag{8.9}$$

$$e_i^d(\boldsymbol{r}) = \int_{V'} G_{,ji}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})\delta K_{jk}(\boldsymbol{r'}) e_k(\boldsymbol{r'})\, dV'. \tag{8.10}$$

On obtient donc le champ d'intensité sous la forme :

$$e_i(\boldsymbol{r}) = e_i^0 + \int_{V'} G_{,ji}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r'})\delta K_{jk}(\boldsymbol{r}) e_k(\boldsymbol{r})\, dV'. \tag{8.11}$$

Avec notre morphologie, nous pouvons écrire :

$$\delta \boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \Delta \boldsymbol{K}^{1/0}\, \theta_1(\boldsymbol{r}) + \Delta \boldsymbol{K}^{c/0} \theta_c(\boldsymbol{r}) \tag{8.12}$$

avec $\theta_1(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } r \in V_1 \\ 0 \text{ pour } r \notin V_1 \end{cases}$ et $\theta_c(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } r \in V_c \\ 0 \text{ pour } r \notin V_c \end{cases}$.

L'équation intégrale (8.11) devient:

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^0 - \int_{V_1'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_1' - \int_{V_c'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_c' \qquad (8.13)$$

où $\boldsymbol{\Gamma^0}$ est le tenseur de Green modifié tel que : $\Gamma^0_{ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = -\mathrm{G}^0_{,ij}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$

Les opérations de moyenne peuvent donc être définies, telles que :

$$\bar{F}^P = \frac{1}{V_P}\int_{V_P} F(\boldsymbol{r})dV_P. \qquad (8.14)$$

Afin de déterminer la conductivité thermique effective du composite, il est nécessaire de déterminer les tenseurs de localisations thermiques $\boldsymbol{A}^{1/0}$ et $\boldsymbol{A}^{c/0}$ reliant le champ intensité moyen V_1 et V_c au champ homogène $\boldsymbol{e}^0$.

Nous pouvons dans un premier temps déterminer le champ intensité moyen dans l'inclusion composite V_2 :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^2 = \boldsymbol{e}^0 - \phi_1\boldsymbol{L}_0^2\,.\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^1 - \phi_c\boldsymbol{L}_0^2.\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^c \qquad (8.15)$$

On note ϕ_1 et ϕ_c respectivement les fractions volumiques de l'inclusion V_1 : $\phi_1 = V_1/V_2$et de l'enrobage V_c : $\phi_c = V_c/V_2$.

$\boldsymbol{L}_0^2$ est le tenseur de polarisation associé à $\boldsymbol{K}^0$et au volume V_2 :

$$\boldsymbol{L}_0^2 = \int_{\mathrm{V}_2} \boldsymbol{\Gamma}^0\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')d\mathrm{V}_2 \quad \text{pour } \boldsymbol{r}' \in \mathrm{V}_2. \qquad (8.16)$$

L'intensité $\bar{\boldsymbol{e}}^2$ peut être liée aux intensités $\bar{\boldsymbol{e}}^1$ et $\bar{\boldsymbol{e}}^c$ par la relation :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^2 = \phi_1\,\bar{\boldsymbol{e}}^1 + \phi_c\bar{\boldsymbol{e}}^c. \qquad (8.17)$$

On définit la relation entre l'intensité de l'inclusion V_1 et l'intensité de V_2 par:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{A}^{1/2}.\bar{\boldsymbol{e}}^2. \tag{8.18}$$

En combinant les relations (8.15), (8.17) et (8.18), on obtient :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^2 = \boldsymbol{A}^{2/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^0$$

avec : (8.19)

$$\boldsymbol{A}^{2/0} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_0^2.(\phi_1 \Delta \boldsymbol{K}^{1/c}.\boldsymbol{A}^{1/2} + \Delta \boldsymbol{K}^{c/0})\right]^{-1}.$$

Le tenseur de localisation thermique de l'inclusion relatif au milieu homogène de référence est noté $\boldsymbol{A}^{1/0}$:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{A}^{1/0}.\boldsymbol{e}^0$$

avec : (8.20)

$$\boldsymbol{A}^{1/0} = \boldsymbol{A}^{1/2}.\boldsymbol{A}^{2/0}.$$

Pour obtenir $\boldsymbol{A}^{1/0}$ et $\boldsymbol{A}^{c/0}$ nous devons déterminer $\boldsymbol{A}^{1/2}$. Nous reprenons l'équation intégrale (8.13) et nous déterminons le champ intensité moyen dans l'inclusion :

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{e}^0 &- \frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{V_1'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\,dV_1'\,dV_1 \\ &- \frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{V_c'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\,dV_c'\,dV_1.\end{aligned} \tag{8.21}$$

L'équation peut donc se réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{e}^0 &- \boldsymbol{L}_0^1.\Delta\boldsymbol{K}^{1/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^1 \\ &- \frac{1}{V_1}\int_{V_1}\int_{V_c'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\,dV_c'\,dV_1\end{aligned} \tag{8.22}$$

où $\boldsymbol{L}_0^1$ est le tenseur de polarisation associé à $\boldsymbol{K}^0$et à l'ellipsoïde de volume V_1 :

$$\boldsymbol{L}_0^1 = \int_{V_1} \boldsymbol{\Gamma}^0 \ \ (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')dV_1 \ \ \text{pour} \ \ \boldsymbol{r}' \in V_1. \tag{8.23}$$

Le second terme de l'équation est plus compliqué à déterminer, car $\int_{V_1} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, dV_1$ n'est pas uniforme car $\boldsymbol{r}$ appartient à V_1et $\boldsymbol{r}'$ appartient à $V_c{}'$qui est extérieur à V_1.

Les champs d'intensité moyens dans l'inclusion V_1 et dans l'inclusion composite V_2 sont établis pour une matrice infinie homogène. La différence entre $\bar{\boldsymbol{e}}^1$ et $\bar{\boldsymbol{e}}^2$ est écrite :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^2 - \bar{\boldsymbol{e}}^1 = -\phi_1 \boldsymbol{L}_0^2 \,.\, \Delta \boldsymbol{K}^{1/0}.\, \bar{\boldsymbol{e}}^1 - \phi_c \boldsymbol{L}_0^2.\, \Delta \boldsymbol{K}^{c/0}.\, \bar{\boldsymbol{e}}^c + \boldsymbol{L}_0^1.\, \Delta \boldsymbol{K}^{1/0}.\, \bar{\boldsymbol{e}}^1$$
$$+ \frac{1}{V_1} \int_{V_1} \int_{V_c{}'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}').\, \Delta \boldsymbol{K}^{c/0}.\, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_c{}'\, dV_1. \tag{8.24}$$

L'équation (8.24) peut être simplifiée en considérant que l'enrobage a la même conductivité thermique que le milieu homogène de référence : $\boldsymbol{K}^c = \boldsymbol{K}^0$. La différence entre la conductivité thermique de l'enrobage et du MHR s'annule : $\Delta \boldsymbol{K}^{c/0} = 0$. Nous obtenons :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \left[\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{L}_c^1 - \phi_1 \boldsymbol{L}_c^2).\, \Delta \boldsymbol{K}^{1/c}\right]^{-1}.\, \bar{\boldsymbol{e}}^2 = \boldsymbol{A}^{1/2}.\, \bar{\boldsymbol{e}}^2$$
$$\text{avec : } \boldsymbol{A}^{1/2} = \left[\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{L}_c^1 - \phi_1 \boldsymbol{L}_c^2).\, \Delta \boldsymbol{K}^{1/c}\right]^{-1} \tag{8.25}$$

où $\boldsymbol{L}_c^1$est le tenseur de polarisation associé au module de conductivité $\boldsymbol{K}^c$ et à la morphologie de l'ellipsoïde V_1:

$$\boldsymbol{L}_c^1 = \int_{\mathrm{V}_1} \boldsymbol{\Gamma}^c\, (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')d\mathrm{V}_1 \ \ \text{pour} \ \ \boldsymbol{r}' \in \mathrm{V}_1. \tag{8.26}$$

Finalement, le tenseur de localisation $\boldsymbol{A}^{1/0}$ est donné par :

$$\boldsymbol{A}^{1/0} = \boldsymbol{A}^{1/2}.\, \boldsymbol{A}^{2/0}$$
$$= \left[\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{L}_c^1 - \phi_1 \boldsymbol{L}_c^2).\, \Delta \boldsymbol{K}^{1/c}\right]^{-1}.\, \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_0^2(\phi_1 \Delta \boldsymbol{K}^{1/c}.\, \left[\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{L}_c^1 - \phi_1 \boldsymbol{L}_c^2).\, \Delta \boldsymbol{K}^{1/c}\right]^{-1}\right.$$
$$\left. + \Delta \boldsymbol{K}^{c/0})\right]^{-1}. \tag{8.27}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{A}^{1/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^0$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{c}/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^0$$

avec :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{1/0} = \big[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_0^2.\big(\phi_1\Delta\boldsymbol{K}^{1/0} + (1-\phi_1)\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}\big) \\ + \big(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_0^2.\Delta\boldsymbol{K}^{c/0}\big).(\boldsymbol{L}_c^1 - \phi_1\boldsymbol{L}_c^2).\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}\big]^{-1}\end{aligned} \tag{8.28}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{c}/0} = \left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{1-\phi_1}(\boldsymbol{L}_c^1 - \phi_1\boldsymbol{L}_c^2).\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}\right).\boldsymbol{A}^{1/0}$$

Nous définissons la relation entre les champs moyens d'intensités $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ et de flux thermique $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$ et les valeurs macroscopiques $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{Q}$ en utilisant les relations de moyennes :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} &= \frac{1}{\mathrm{V}_2}\int_{S_2} T(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{N}(\boldsymbol{r})dS = \phi_1\,\bar{\boldsymbol{e}}^1 + \phi_c\bar{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{Q} &= \frac{1}{\mathrm{V}_2}\int_{S_2} (\boldsymbol{q}.\boldsymbol{N})\boldsymbol{r}dS = \phi_1\,\bar{\boldsymbol{q}}^1 + \phi_c\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{c}}\end{aligned} \tag{8.29}$$

Nous utilisons un schéma d'homogénéisation auto-cohérent généralisé, avec $\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{K}^0 = \boldsymbol{K}^{eff}$. On obtient la conductivité thermique effective s'exprime sous la forme :

$$\boldsymbol{K}^{eff} = \boldsymbol{K}^c + \phi_1\Delta\boldsymbol{K}^{1/\mathrm{c}}.\boldsymbol{A}^{1/eff} \tag{8.30}$$

avec:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{1/eff} = \big[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^2.\big(\phi_1\Delta\boldsymbol{K}^{1/eff} + (1-\phi_1)\Delta\boldsymbol{K}^{c/eff}\big) \\ + \big(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^2.\Delta\boldsymbol{K}^{c/eff}\big).(\boldsymbol{L}_c^1 - \phi_1\boldsymbol{L}_c^2).\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}\big]^{-1}.\end{aligned}$$

La conductivité thermique ainsi obtenue permet de prendre en compte la forme de l'inclusion par l'intermédiaire des tenseurs de conduction de polarisation sans être limité par l'hypothèse de confocalité.

8.3 MODÈLE AUTO-COHÉRENT GÉNÉRALISÉ À (N+1) PHASES

Nous considérons un volume hétérogène de volume V, dont la conductivité thermique $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ dépend de la position $\boldsymbol{r}(x_1, x_2, x_3)$. Ce matériau est constitué d'une inclusion ellipsoïdale de volume V_1 enrobée de $N-1$ phases plongé dans le milieu homogène de référence (MHR) noté '0'.

La conductivité thermique de chaque phase est décrite par le module $\boldsymbol{K}^P$ pour chaque phase $P \in \{1,2,\dots,N\}$ et $\boldsymbol{K}^0$ pour le MHR.

Nous considérons un champ d'intensité $\boldsymbol{e}^0$ appliqué à la surface extérieure ∂V du MHR.

On note la fluctuation $\delta\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r})$ sous la forme :

$$\delta\boldsymbol{K}(\boldsymbol{r}) = \sum_{P=1}^{N} \Delta\boldsymbol{K}^{P/0}\ \theta_P(\boldsymbol{r}) \text{ avec } \theta_P(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} 1 \text{ pour } \boldsymbol{r} \in V_P \\ 0 \text{ pour } \boldsymbol{r} \notin V_P \end{cases} \text{ et } P \in \{1,2,\dots,N\}. \tag{8.31}$$

Avec l'équation et (8.31), on obtient :

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^0 - \sum_{P=1}^{N} \int_{V_P{}'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\Delta\boldsymbol{K}^{P/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_P{}'. \tag{8.32}$$

Nous considérons l'inclusion composite Ω_J constitué par la somme des volumes V_P pour $P \in \{1,2,\dots,J\}$ pour $J \in \{1,2,\dots,N\}$. Nous obtenons les relations permettant de lier les différents volumes :

$$\Omega_N = \sum_{P=1}^{N} V_P \ ;\ \Omega_J = \sum_{P=1}^{J} V_P \ ;\ V_P = \Omega_P - \Omega_{P-1}. \tag{8.33}$$

Les opérations de moyennes peuvent donc être définies telles que :

$$\bar{F}^P = \frac{1}{V_P} \int_{V_P} F(\boldsymbol{r}) dV_P \quad et\ \ \bar{F}^{\Omega_p} = \frac{1}{\Omega_P} \int_{\Omega_P} F(\boldsymbol{r}) dV_{\Omega_P}. \tag{8.34}$$

Les champs intensité sont déterminés dans les différentes phases :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_N} = \sum_{P=1}^{N} \phi_P\, \bar{\boldsymbol{e}}^P;\ \frac{\Omega_J}{\Omega_N}\, \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \sum_{P=1}^{J} \phi_P\, \bar{\boldsymbol{e}}^P \tag{8.35}$$

où $\phi_P$représente la fraction volumique de la phase P telle que : $\phi_P = V_P/\Omega_N$.

Les champs intensité $\bar{\boldsymbol{e}}^P$et $\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_p}$ satisfont la relation de moyenne :

$$\phi_P \bar{\boldsymbol{e}}^P = \frac{\Omega_P}{\Omega_N}\, \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_P} - \frac{\Omega_{P-1}}{\Omega_N}\, \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{P-1}}. \tag{8.36}$$

Afin de déterminer la conductivité thermique effective du composite, il est nécessaire de déterminer les tenseurs de localisation thermique $\boldsymbol{A}^{P/0}$ reliant le champ intensité moyen dans la phase P et le champ homogène $\boldsymbol{e}^0$.

Le champ intensité moyen est déterminé dans Ω_N par :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_N} = \boldsymbol{e}^0 - \boldsymbol{L}_0^{\Omega_N}.\sum_{P=1}^{N} \phi_P\, \Delta \boldsymbol{K}^{P/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^P \tag{8.37}$$

où $\boldsymbol{L}_0^{\Omega_N}$ est le tenseur de polarisation associé à $\boldsymbol{K}^0$et au volume Ω_N :

$$\boldsymbol{L}_0^{\Omega_N} = \int_{\Omega_N} \boldsymbol{\Gamma}^0 \;\; (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')d\Omega_N \;\; pour \;\; \boldsymbol{r}' \in \Omega_N. \tag{8.38}$$

Les relations entre les intensités $\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_j}, \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{j+1}}\; et\; \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_N}$ sont définies, avec $J \in \{1,2,\dots,N-1\}$

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \boldsymbol{A}^{\Omega_J/\Omega_{J+1}}.\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{J+1}} \;\; et \;\;\; \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \boldsymbol{A}^{\Omega_J/\Omega_N}.\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_N}. \tag{8.39}$$

En combinant les relations (8.37) et (8.39), on obtient donc :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_N} = \boldsymbol{A}^{\Omega_N/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^0$$

avec :

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_N/0} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_0^{\Omega_N}.\sum_{P=1}^{N} \Delta \boldsymbol{K}^{P/0}.\Delta \boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_N}\right]^{-1} \tag{8.40}$$

où :

$\Delta \boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_N} = \frac{\Omega_P}{\Omega_N}\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_N} - \frac{\Omega_{P-1}}{\Omega_N}\boldsymbol{A}^{\Omega_{P-1}/\Omega_N}$ et $\Delta \boldsymbol{A}^{\Omega_1/\Omega_N} = \frac{\Omega_1}{\Omega_N}\boldsymbol{A}^{\Omega_1/\Omega_N}$.

Le tenseur de localisation thermique $\boldsymbol{A}^{P/0}$ de la phase *'P'* relatif au milieu homogène de référence s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^P = \boldsymbol{A}^{P/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^0$$

$$\boldsymbol{A}^{P/0} = \frac{\Omega_N}{\Omega_P}\Delta \boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_N}.\boldsymbol{A}^{\Omega_N/0}. \tag{8.41}$$

L'équation de localisation thermique (8.37) donne de manière exacte le champ d'intensité de l'inclusion composite Ω_N. Des équations complémentaires écrites jusqu'à l'avant dernier enrobage (d'ordre $N-1$) lient le champ d'intensité e^{Ω_J} dans l'inclusion composite à celui l'entourant immédiatement d'ordre $J+1$ avec J variant de 1 à $N-1$.

L'équation (8.31) est décomposée de la sorte :

$$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}^0 - \sum_{P=1}^{J} \int_{V_P{}'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\Delta\boldsymbol{K}^{P/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_P{}' - \sum_{P=J+1}^{N} \int_{V_P{}'} \boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\Delta\boldsymbol{K}^{P/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_P{}' . \tag{8.42}$$

Le champ intensité moyen dans Ω_J s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \boldsymbol{e}^0 - \frac{\Omega_N}{\Omega_J}\boldsymbol{L}^0_{\Omega_J}.\sum_{P=1}^{J}\phi_P\Delta\boldsymbol{K}^{P/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^P - \frac{1}{\Omega_J}\sum_{P=J+1}^{N}\int_{\Omega_J}\int_{V_P{}'}\boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\Delta\boldsymbol{K}^{P/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_P{}' d\Omega_J. \tag{8.43}$$

La différence entre les champs moyen dans $\boldsymbol{e}^{\Omega_{J+1}}$ et $\boldsymbol{e}^{\Omega_J}$ est exprimée par:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{J+1}} - \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \frac{V_{J+1}}{\Omega_J}\frac{\Omega_N}{\Omega_{J+1}}\boldsymbol{L}^0_{J+1}.\sum_{P=1}^{J}\phi_P\Delta\boldsymbol{K}^{P/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{P}} - \frac{\Omega_N}{\Omega_{J+1}}\phi_{J+1}\boldsymbol{L}^0_{\Omega_{J+1}}.\Delta\boldsymbol{K}^{J+1/0}.\bar{\boldsymbol{e}}^{J+1} - \frac{1}{\Omega_{J+1}}\sum_{P=J+2}^{N}\int_{\Omega_{J+1}}\int_{V_P{}'}\boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,.\Delta\boldsymbol{K}^{P/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_P{}' d\Omega_{J+1} + \frac{1}{\Omega_J}\sum_{P=J+1}^{N}\int_{\Omega_J}\int_{V_P{}'}\boldsymbol{\Gamma}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}').\Delta\boldsymbol{K}^{P/0}.\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r}')\, dV_P{}' d\Omega_J \tag{8.44}$$

avec : $\boldsymbol{L}^0_{J+1} = \boldsymbol{L}^0_{\Omega_{J+1}} - \frac{\Omega_{J+1}}{V_{J+1}}\left(\boldsymbol{L}^0_{\Omega_{J+1}} - \boldsymbol{L}^0_{\Omega_J}\right)$.

On suppose que chaque enrobage de '$J+1$' à *'N'* entourant l'inclusion composite Ω_J a la même conductivité que le MRH : $\boldsymbol{K}^{J+1} = \boldsymbol{K}^0$. L'équation (8.44) devient en considérant cette hypothèse $\Delta\boldsymbol{K}^{P/0} = 0$ pour $P \in \{J, J+1, \dots, N\}$:

$$\bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_{J+1}} - \bar{\boldsymbol{e}}^{\Omega_J} = \frac{V_{J+1}}{\Omega_J}\frac{\Omega_N}{\Omega_{J+1}}\boldsymbol{L}^{J+1}_{J+1}.\sum_{P=1}^{J}\phi_P\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\bar{\boldsymbol{e}}^P \tag{8.45}$$

avec $\boldsymbol{L}^{J+1}_{J+1} = \boldsymbol{L}^{\Omega_{J+1}}_{J+1} - \frac{\Omega_{J+1}}{V_{J+1}}\left(\boldsymbol{L}^{\Omega_{J+1}}_{J+1} - \boldsymbol{L}^{\Omega_J}_{J+1}\right)$.

Le tenseur de localisation du champ d'intensité s'écrit :

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_J/\Omega_{J+1}} = \left[\boldsymbol{I} + \frac{V_{J+1}}{\Omega_{J+1}}\boldsymbol{L}_{J+1}^{J+1}.\sum_{P=1}^{J}\Delta\boldsymbol{K}^{P/J+1}.\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_J}\right]^{-1} \tag{8.46}$$

avec : $\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_J} = \frac{\Omega_P}{\Omega_J}\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_J} - \frac{\Omega_P-1}{\Omega_J}\boldsymbol{A}^{\Omega_{P-1}/\Omega_J}$ et $\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_1/\Omega_J} = \frac{\Omega_1}{\Omega_J}\boldsymbol{A}^{\Omega_1/\Omega_J}$.

Le tenseur de localisation du champ d'intensité $\boldsymbol{A}^{P/0}$est obtenu par la relation de récurrence :

$$\boldsymbol{A}^{P/0} = \frac{\Omega_N}{\Omega_P}\Delta\boldsymbol{A}^{\Omega_P/\Omega_N}.\boldsymbol{A}^{N/0}. \tag{8.47}$$

$\boldsymbol{A}^{P/0}$ constitue la solution du problème d'inclusion multi-enrobée dans le cas de conductivité thermique anisotrope par phase et de morphologie ellipsoïdale arbitraire.

Nous considérons un composite à trois phases (3+1 phases) constitué d'une inclusion, de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^1$, enrobée dans une phase de conductivité $\boldsymbol{K}^2$, enrobé dans une phase de matrice, de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^3$ et l'ensemble plongé dans une phase infinie de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$.

Les tenseurs de localisation sont donnés par :

$$\boldsymbol{A}^{1/0} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{1}/\Omega_2}.\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3}.\boldsymbol{A}^{\Omega_3/0}$$

$$\boldsymbol{A}^{2/0} = \left(\frac{\Omega_2}{V_2}\boldsymbol{I} - \frac{V_1}{V_2}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{1}/\Omega_2}\right).\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3}.\boldsymbol{A}^{\Omega_3/0} \tag{8.48}$$

$$\boldsymbol{A}^{3/0} = \left(\frac{\Omega_3}{V_3}\boldsymbol{I} - \frac{V_2}{V_3}\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3}\right).\boldsymbol{A}^{\Omega_3/0}$$

avec :

$$\boldsymbol{A}^{1/\Omega_2} = \left[\boldsymbol{I} + \frac{\phi_2}{\phi_1+\phi_2}\boldsymbol{L}_2^2.\Delta\boldsymbol{K}^{1/2}\right]^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3} = \left[\boldsymbol{I} + \phi_3\boldsymbol{L}_3^3.\left(\Delta\boldsymbol{K}^{2/3} + \frac{\phi_1}{\phi_1+\phi_2}\Delta\boldsymbol{K}^{1/2}.\boldsymbol{A}^{1/\Omega_2}\right)\right]^{\boldsymbol{-1}} \tag{8.49}$$

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_3/0} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_0^{\Omega_3}.\left(\Delta\boldsymbol{K}^{3/eff} + \phi_1\Delta\boldsymbol{K}^{1/2}.\boldsymbol{A}^{1/\Omega_3} + (\phi_1+\phi_2)\Delta\boldsymbol{K}^{2/3}.\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3}\right)\right]^{\boldsymbol{-1}}$$

$$\boldsymbol{A}^{1/\Omega_3} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{1}/\Omega_2}.\boldsymbol{A}^{\Omega_2/\Omega_3}$$

Nous définissons la relation entre les champs moyens d'intensités $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r})$ et flux thermique $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r})$ et les valeurs macroscopiques $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{Q}$ en utilisant les relations de moyennes :

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\Omega_3} \int_{S_3} T(\boldsymbol{r}).\boldsymbol{N}(\boldsymbol{r}) d\, S = \phi_1\, \overline{\boldsymbol{e}}^1 + \phi_2 \overline{\boldsymbol{e}}^2 + \phi_3 \overline{\boldsymbol{e}}^3$$

$$\boldsymbol{Q} = \frac{1}{\Omega_3} \int_{S_3} (\boldsymbol{q}.\boldsymbol{N})\boldsymbol{r} d\, S = \phi_1\, \overline{\boldsymbol{q}}^1 + \phi_2 \overline{\boldsymbol{q}}^2 + \phi_3 \overline{\boldsymbol{q}}^3 \tag{8.50}$$

En considérant une homogénéisation auto-cohérente généralisée, avec $\boldsymbol{K}^0 = \boldsymbol{K}^{eff}$ et $\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{E}$, nous définissons la conductivité thermique effective par :

$$\boldsymbol{K}^{eff} = \phi_1 \boldsymbol{K}^1.\boldsymbol{A}^{1/eff} + \phi_2 \boldsymbol{K}^2.\boldsymbol{A}^{2/eff} + \phi_3 \boldsymbol{K}^3.\boldsymbol{A}^{3/eff} \tag{8.51}$$

Les équations de localisation formulées par cette approche basée sur une hypothèse simplificatrice portant sur les propriétés du milieu entourant chaque inclusion composite à chaque étape de localisation de l'intensité ont la même structure que celles écrites dans le chapitre précèdent. En appliquant une condition de confocalité sur les enrobages successifs, ce nouveau modèle donne les mêmes expressions de localisation que celles obtenues précédemment. Cette nouvelle approche inclut la formulation exacte reposant sur les conditions de confocalité et permet de plus de proposer une solution pour les autres morphologies d'assemblage (homothétique ou non).

8.4 APPLICATIONS ET COMPARAISONS

8.4.1 Applications pour des composites à deux phases

Dans la suite, on considère un composite V_2 à deux phases, constituée d'une inclusion ellipsoïdale de volume V_1 de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^1$ entourée d'un enrobage de volume V_m de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^m$ intégré dans le milieu homogène de référence noté '0' de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^{eff}$ (la conductivité thermique est recherché).

Nous utilisons un schéma d'homogénéisation auto-cohérent généralisé, avec $\boldsymbol{e}^0 = \boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{K}^0 = \boldsymbol{K}^{eff}$. On obtient la conductivité thermique effective s'exprime sous la forme :

$$\boldsymbol{K}^{eff} = \boldsymbol{K}^m + f\Delta\boldsymbol{K}^{1/\mathrm{m}}.\boldsymbol{A}^{1/eff} \tag{8.52}$$

avec :

$$\boldsymbol{A}^{1/eff} = \left[\boldsymbol{I} + (\boldsymbol{L}_m^1 - \phi_1 \boldsymbol{L}_m^2).\left(\Delta\boldsymbol{K}^{1/eff} + (1-\phi_1)(\boldsymbol{L}_m^1 - \phi_1 \boldsymbol{L}_m^2).\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}.\Delta\boldsymbol{K}^{m/eff}\right)\right]^{-1}.$$

8.4.1.1 Influence des facteurs de forme de l'inclusion et de l'enrobage

Notre modèle GSCS à morphologie arbitraire (GSCS-II) est appliqué au cas d'un composite à deux phases constitué d'une inclusion ellipsoïdale de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^1$ et de demi-axes a_1, a_2 et a_3, avec un rapport de forme : $\alpha = a_3/a_1 = a_3/a_2$, enrobée dans une matrice ellipsoïdale de conductivité thermique $\boldsymbol{K}^m$ et de demi-axes b_1, b_2 et b_3, avec un rapport de forme : $\rho = b_3/b_1 = b_3/b_2$. Le modèle GSCS à morphologie arbitraire est comparé aux bornes de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015). On considère donc un composite avec des inclusions ellipsoïdales d'alumine de conductivité thermique isotrope $K^1 = 20\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ enrobé dans une matrice d'aluminium de conductivité thermique isotrope $K^m = 247\mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ avec une fraction volumique d'inclusion f.

Lorsque les facteurs de forme de l'inclusion et de l'enrobage sont différents, on retrouve la conductivité effective donnée par la borne supérieure de Calvo-Jurado et Parnell (Calvo-Jurado & Parnell 2015): pour les inclusions sphériques $\alpha = 1$ et un enrobage avec un facteur de forme oblate et prolate de respectivement $\rho = \sqrt{f}$, $\rho = 1/f$ (Figure 37) et pour l'inclusion ellipsoïdale avec un facteur de forme oblates et prolate de respectivement $\alpha = f$, $\alpha = 1/\sqrt{f}$ dans le cas d'un enrobage de forme sphérique $\rho = 1$ (Figure 38).

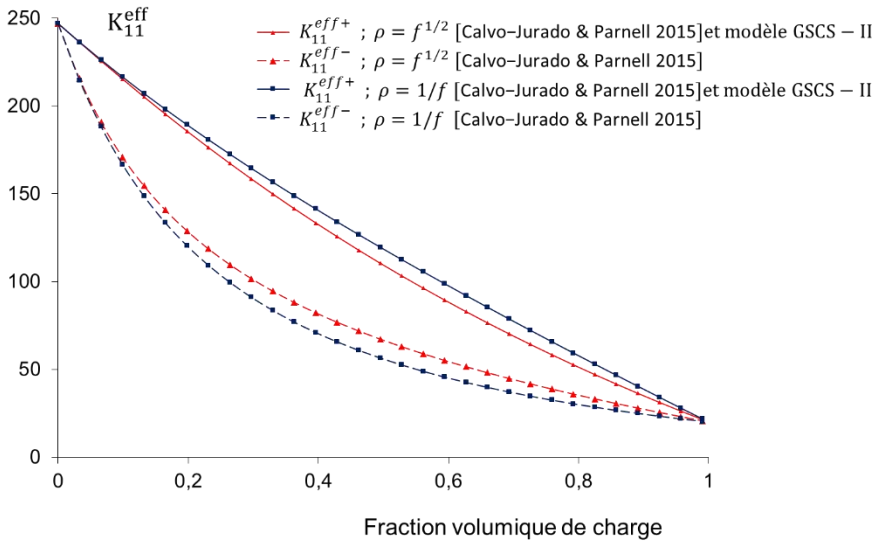


Figure 37 : Evolution de la conductivité thermique effective en fonction de la faction volumique d'inclusion pour une inclusion sphérique et un enrobage ellipsoïdale.

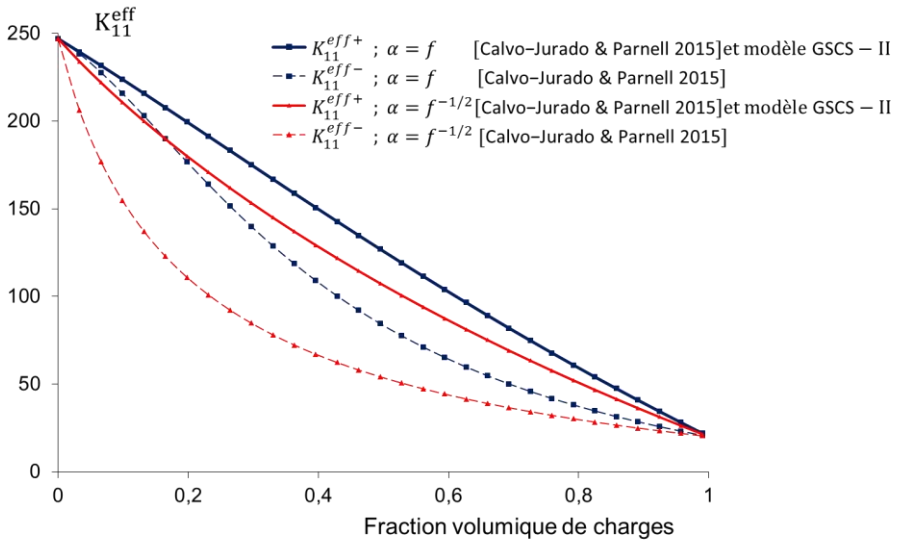


Figure 38 : Evolution de la conductivité thermique effective en fonction de la faction volumique d'inclusion pour un enrobage sphérique et une inclusion ellipsoïdale.

8.4.2 Cas d'un composite à trois phases

On considère le cas de composites à 3 phases constitué d'une inclusion '1' entourée d'un enrobage 'c', plongé dans une phase de matrice 'm'. On notera les fractions volumiques par f_1 et f_c pour les phases '1' et 'c' respectivement.

Les champs d'intensité dans les différentes phases satisfont les relations de localisation :

$$\bar{\boldsymbol{e}}^1 = \boldsymbol{A}^{1/eff}.\boldsymbol{E}$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}^c = \boldsymbol{A}^{c/eff}.\boldsymbol{E} \qquad (8.53)$$

$$\bar{\boldsymbol{e}}^m = \boldsymbol{A}^{m/eff}.\boldsymbol{E}.$$

La conductivité thermique effective $\boldsymbol{K}^{eff}$ associée au schéma auto-cohérent généralisé est décrite par :

$$\boldsymbol{K}^{eff} = \boldsymbol{K}^m + f_1\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}.\boldsymbol{A}^{1/eff} + f_c\Delta\boldsymbol{K}^{c/m}.\boldsymbol{A}^{c/eff}. \qquad (8.54)$$

avec

$$\boldsymbol{A}^{1/eff} = \boldsymbol{A}^{1/\Omega_c}.\boldsymbol{A}^{\Omega_c/\Omega_m}.\boldsymbol{A}^{\Omega_m/eff}$$

$$\boldsymbol{A}^{c/eff} = \frac{1}{V_c}\left(\Omega_c\boldsymbol{I} - \Omega_1\boldsymbol{A}^{1/\Omega_c}\right).\boldsymbol{A}^{\Omega_c/\Omega_m}.\boldsymbol{A}^{\Omega_m/eff}$$

$$\boldsymbol{A}^{m/eff} = \frac{1}{V_m}\left(\Omega_m\boldsymbol{I} - \Omega_c\boldsymbol{A}^{\Omega_c/\Omega_m}\right).\boldsymbol{A}^{\Omega_m/eff}$$

et

$$\boldsymbol{A}^{1/\Omega_c} = \left[\boldsymbol{I} + \frac{\phi_c}{\phi_1 + \phi_c}\boldsymbol{L}_c^c.\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}\right]^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_c/\Omega_m} = \left[\boldsymbol{I} + \phi_m\boldsymbol{L}_m^m.\left(\Delta\boldsymbol{K}^{c/m} + \frac{\phi_1}{\phi_1 + \phi_c}\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}.\boldsymbol{A}^{1/\Omega_c}\right)\right]^{-1} \quad (8.55)$$

$$\boldsymbol{A}^{\Omega_m/eff} = \left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^{\Omega_m}.\left(\Delta\boldsymbol{K}^{m/eff} + \phi_1\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}.\boldsymbol{A}^{1/\Omega_m} + (\phi_1 + \phi_2)\Delta\boldsymbol{K}^{c/m}.\boldsymbol{A}^{\Omega_c/\Omega_m}\right)\right]^{-1}$$

$\phi_c\boldsymbol{L}_c^c = \boldsymbol{L}_c^{\Omega_1} - \phi_1\boldsymbol{L}_c^{\Omega_c}$ et $\phi_m\boldsymbol{L}_m^m = \boldsymbol{L}_m^{\Omega_c} - \phi_c\boldsymbol{L}_m^{\Omega_m}$.

Dans le cas de morphologie sphérique pour les inclusions, l'enrobage et la matrice, nous retrouvons la solution exacte de Hervé (Herve 2002).

8.4.2.1 Influence du contraste de propriétés entre l'enrobage et la matrice

On considère le cas de composites à 3 phases constitué d'une inclusion '1' entourée d'un enrobage 'c', plongé dans une phase de matrice 'm'. On notera les fractions volumiques par f_1 et f_c pour les phases '1' et 'c' respectivement. On se place dans le cas d'une homothétie de forme entre l'inclusion, l'enrobage et la matrice. Le schéma d'homogénéisation est auto-cohérent généralisé.

L'évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 3 est analysée en fonction du contraste de propriétés entre l'enrobage et la matrice K^c/K^m pour différents facteurs de forme a_1/a_3fixés.

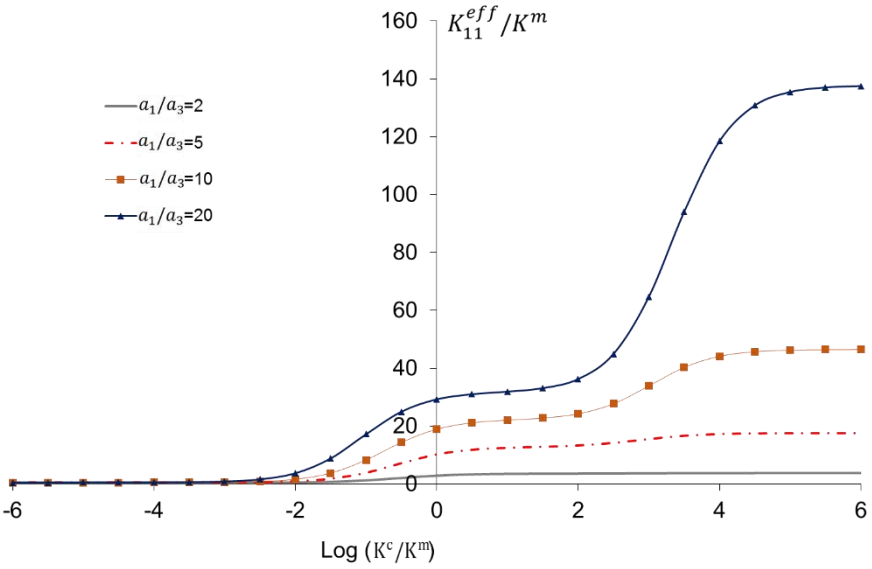


Figure 39 : Évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 1 en fonction du rapport de la conductivité thermique de la phase 'c' et de la phase 'm' pour différents facteurs de forme pour un cas homothétique.

De nouveau, la conductivité thermique effective présente l'évolution caractéristique en fonction du contraste de propriétés K^c/K^m présentée par Benveniste (Benveniste 2013) : deux asymptotes sont mises en évidence pour une interphase entre les inclusions et la matrice très faiblement conductrice $K^c \ll K^m$ ou très fortement conductrice $K^c \gg K^m$. Le plateau intermédiaire présente une conductivité thermique effective dont la valeur dépend fortement du facteur de forme. La conductivité thermique effective est toujours améliorée dans la direction de plus grand axe des ellipsoïdes.

8.4.2.2 Influence du facteur de forme

La conductivité thermique effective est analysée en fonction du facteur de forme a_1/a_3 pour des contrastes de propriétés entre l'enrobage et la matrice K^c/K^m. Le contraste de conductivité thermique entre l'inclusion et la matrice est $K^1/K^m = 100$ et des fractions volumiques $f_1 = 0.4$ et $f_c = 0.08$ (Figure 35).

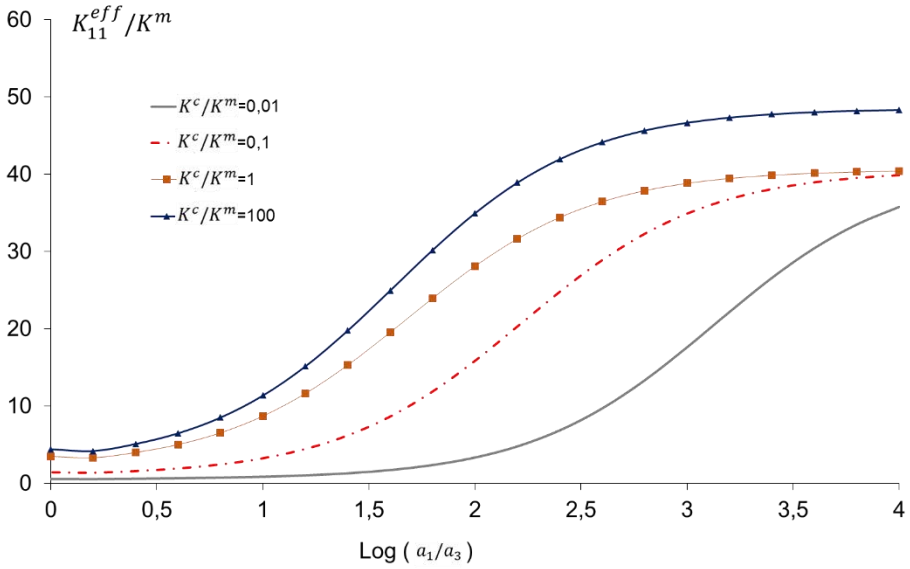


Figure 40 : Évolution de la conductivité thermique effective dans la direction 1 en fonction du rapport facteur de forme pour différentes conductivités thermiques de la phase ‘c’ pour un cas homothétique.

On constate comme dans le chapitre précédent que la conductivité thermique effective augmente selon le plus grand axe des ellipsoïdes homothétiques et tend vers une valeur asymptotique qui dépend du contraste K^c/K^m .

8.5 CONCLUSION

Nous avons présenté la solution du problème de l’inclusion multi-enrobée à morphologie arbitraire dans le cas général de morphologie ellipsoïdale et de comportement anisotrope par phase. Nous avons évalué l’influence du facteur de forme des enrobages entourant l’inclusion sur la conductivité thermique effective. L’enrobage de l’inclusion peut décrire une phase réelle de comportement dégradé par la présence de porosités, un compatibilisant ajouté pour favoriser l’adhésion entre la particule et la matrice, et l’effet de la distribution des inclusions dans la matrice (Ponte-Castañeda & Willis 1995).

Ce modèle permettra l’interprétation de résultats expérimentaux développés dans le chapitre suivant.

Chapitre 9 : Etude expérimentale du comportement thermomécanique et thermique des composites

9 ETUDE EXPERIMENTALE DU COMPORTEMENT THERMOMECANIQUE ET THERMIQUE DES COMPOSITES

9.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous nous intéressons à la partie expérimentale. La solution retenue pour satisfaire le cahier des charges est un matériau composite à renforts particulaires dont la formulation s'appuie sur les conclusions issues de la modélisation développée dans les chapitres 2 et 3.

Par la suite, nous allons décrire le procédé de mise en forme utilisé pour la réalisation des échantillons ainsi que l'étude faite sur l'optimisation des paramètres de mise en forme.

Enfin, nous allons effectuer la caractérisation des échantillons réalisés, par l'intermédiaire d'essais thermiques, électriques et mécaniques.

9.2 CHOIX DES CONSTITUANTS DU COMPOSITE

9.2.1 Structure du composite

Un composite est un matériau hétérogène composé d'au moins deux matériaux non miscibles, dont l'association confère à l'ensemble des propriétés qu'aucun des composants ne possède séparément. Deux phases principales sont définies : les renforts et la matrice. Des compatibilisants peuvent être ajoutés pour améliorer l'adhésion des renforts à la matrice. Des additifs peuvent aussi être incorporés à la matrice afin de modifier les propriétés du composite (couleur, résistance aux UV, …).

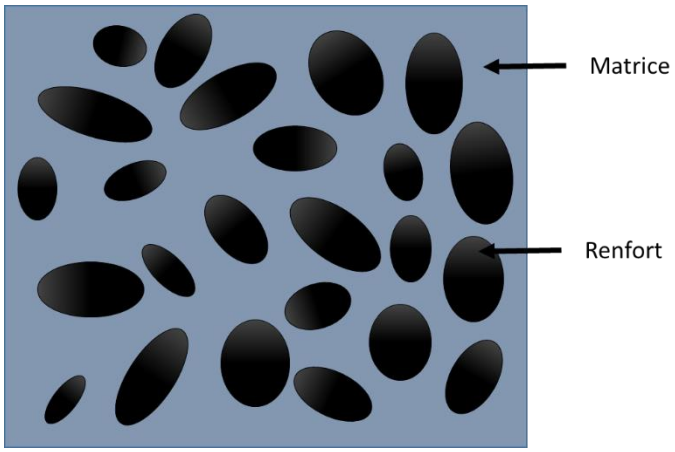


Figure 41 : Représentation schématique d'un matériau composite

Les composites se divisent en plusieurs catégories suivant la nature de leur renforts et matrice. La matrice est une phase de matériau solide enrobant les renforts. Cette phase est de trois natures différentes : métallique, céramique ou organique. Différentes familles de composites sont définies en fonction de la nature des renforts utilisés (Figure 42) :

- les composite à renforts particulaires
- les composite à renforts fibreux
- les composite à renforts structuraux

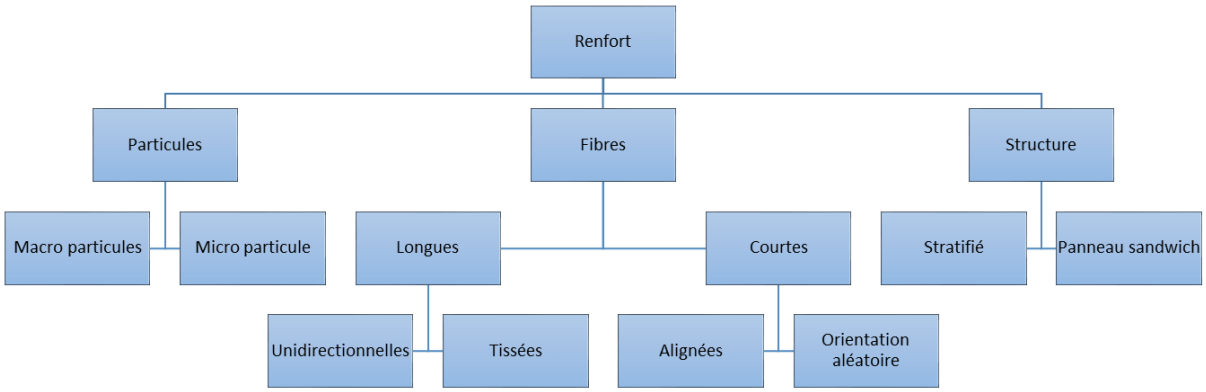


Figure 42 : Organigramme des différents renforts existants(Aucher 2011)

Les parties suivantes sont dédiées à la description de la matrice et des charges céramiques choisies pour optimiser le composite selon le cahier des charges fixé par le partenaire industriel.

9.2.2 Composite dans la littérature

De nombreuses études ont déjà été faites sur l'augmentation de la conductivité thermique des matériaux composites, avec des charges et des polymères de natures différentes mais aussi avec des procédés d'obtention variés. Le tableau suivant présente les conductivités thermiques effectives obtenues dans la littérature, dans différentes configurations.

Nature	Charge	Conductivité thermique des charge (W/(m.K))	Matrice	Taux volumique de charge %	Conductivité thermique effective (W/(m.K))	Référence
Métal	Cuivre	386	PEHD	10	0,7	(Tavman 1996)
	Cuivre	380	PVC	40	1,8	(Mamunya et al. 2002)
	Cuivre	384	PA 6	60	11,5	(Tekce & Kumlutas 2016)
Carbone	Nanoplatelet de graphite	230	PP	25	1,2	(Kalaitzidou et al. 2007)
	Graphite de synthèse	600	PP	60	28	(King et al. 2010)
Céramique	Quartz	10	PP	80	2	(Agari et al. 1990)
	Alumine	35	Epoxy	80	4,5	(Bujard et al. 1994)
	Nitrure d'alumine	180	PE	30	1,2	(Gu et al. 2009)
	Nitrure de bore	60	PI	25	1,2	(Li & Hsu 2010)
	Nitrure de bore	100	PI	60	7	(Sato et al. 2010)
	Nitrure de bore	100	Epoxy	78,5	32,5	(Ishida & Rimdusit 1998)

Tableau 1 : Conductivités thermiques effectives obtenues dans la littérature pour différentes configurations

On constate, avec le Tableau 1 que dans le cas de chargement avec de particules métalliques, une conductivité thermique supérieure à 10W/(m.K) est atteignable mais nécessite des taux de charge élevés (60%). Cependant, l'utilisation de particules métalliques avec un taux de charge aussi important annule l'isolation électrique du composite. De la même manière, l'utilisation de carbone permet une augmentation plus grande de la conductivité thermique du composite mais rend le composite conducteur électrique. L'utilisation de charge céramique conductrice thermique et isolante électrique est la seule solution permettant d'obtenir à la fois une isolation électrique et une conductivité thermique élevée.

Dans les travaux présentés dans le Tableau 1, deux méthodes pour la mise en forme des composite ont été décrites : un mélange à chaud suivi d'une injection et un mélange de poudre suivi d'une compression à chaud.

Pour la réalisation des composites dans les travaux de (Kalaitzidou et al. 2007; King et al. 2010; Tekce & Kumlutas 2016), la réalisation des échantillons est faite par un mélange à chaud suivi d'une injection. Le procédé consiste à mélanger les charges, sous forme de poudre, et un polymère, sous forme de poudre ou de granulé, à une température supérieur à la température de fusion du polymère jusqu'à l'obtention d'un mélange homogène. Le mélange est ensuite injecté dans un outillage ou extrudé. (Tekce & Kumlutas 2016), (Kalaitzidou et al. 2007), (King et al. 2010)

Pour la réalisation des composites dans les travaux de (Agari et al. 1990; Tavman 1996; Ishida & Rimdusit 1998; Mamunya et al. 2002; Li & Hsu 2010), la réalisation des échantillons est faite par un mélange de poudre suivi d'une compression à chaud. Le procède consiste à mélanger les charges et le polymère, tous deux sous forme de poudre. Les

composant sont portés à température de fusion du polymère et comprimés à haute pression (>20MPa) dans un outillage de mise en forme.

9.2.3 La matrice polymère

Nous devons choisir un polymère capable d'apporter des tenues en température et mécanique suffisantes pour notre application. Un polymère thermodurcissable serait envisageable, ayant l'avantage d'avoir une très bonne tenue en température. Cependant, la forme liquide des thermodurcissables n'est pas bien adaptée aux mélanges à haut taux de charge, nécessaire pour maximiser la conductivité thermique, du fait de l'augmentation exponentielle de la viscosité pour des taux de charge importants (Dupuis 2008).

Nous nous sommes donc dirigé vers des thermoplastiques, qui bien qu'ayant une tenue en température en moyenne plus faible, disposent de polymères hautes performances pouvant rivaliser avec les thermodurcissables. Nous avons choisi des thermoplastiques ayant les caractéristiques thermiques et mécaniques les plus intéressantes : le PPS (Polyphényle sulfone), le PBT (Polytéréphtalate de butylène) et la famille des PEEK/PEKK (Polyétheréthercétone/ Polyéthercétonecétone). Du fait du coût non négligeable de ces matériaux, nous avons défini un autre polymère, plus abordable, qui sera utilisé pour effectuer les essais préliminaires, le PA11 (Polyamide 11).

- Polyphényle sulfone (PPS)

Le PPS est un polymère thermoplastique semi-cristallin linéaire à faible ramification, permettant un taux de cristallinité élevé. Ce polymère possède une température de service élevée, une résistant au feu et présentant un faible dégagement de fumées. Le PPS étant très peu visqueux au-delà du point de fusion, il est possible d'ajouter une grande proportion de charge, jusqu'à 65%.

- Polytéréphtalate de butylène (PBT).

Le PBT est un polymère semi-cristallin dont le niveau de cristallinité est nettement supérieur (60%) à celui de son homologue le polyéthylène téréphtalate (PET). Il possède une température d'utilisation élevée et une bonne stabilité dimensionne avec son faible coefficient de dilatation.

- Polyéthercétonecétone (PEKK)

Une structure quasi linéaire et aromatique confère au PEKK une excellente stabilité thermique, y compris à long terme. Sa température de service en continu est importante, il se situe ainsi immédiatement après le polyamideimide et les polyimides.

- Polyamide 11 (PA 11)

Le PA 11 est un polymère thermoplastique semi cristallin bioplastique fait à partir d'huile de ricin. Ce polymère possède des caractéristiques thermiques et mécaniques moyennes, une densité très faible et une bonne résistance à tout type de solvant.

Le tableau suivant représente les différentes propriétés qui nous intéressent pour les polymères qui peuvent être utilisées comme matrice. Nous y retrouvons les températures caractéristiques, température de transition vitreuse, température de fusion et température d'utilisation. Nous y voyons aussi les aspects au feu et fumées, le module d'Young, la densité et la conductivité thermique.

9.2.4 Renforts minéraux

Afin d'affiner le choix de la nature des renforts, nous avons réalisé un zoom de la Figure 1, où figure le détail des matériaux. Les ellipsoïdes de petites tailles représentent des dérivés du même matériau indiqué, nous pouvons donc en conclure que le choix des renforts répondant au cahier des charges est limité. De plus, certains matériaux présents dans cette liste ne sont pas utilisables, pour leur masse volumique trop élevée ou pour leur toxicité. La famille de renfort retenue est donc celle des céramiques.

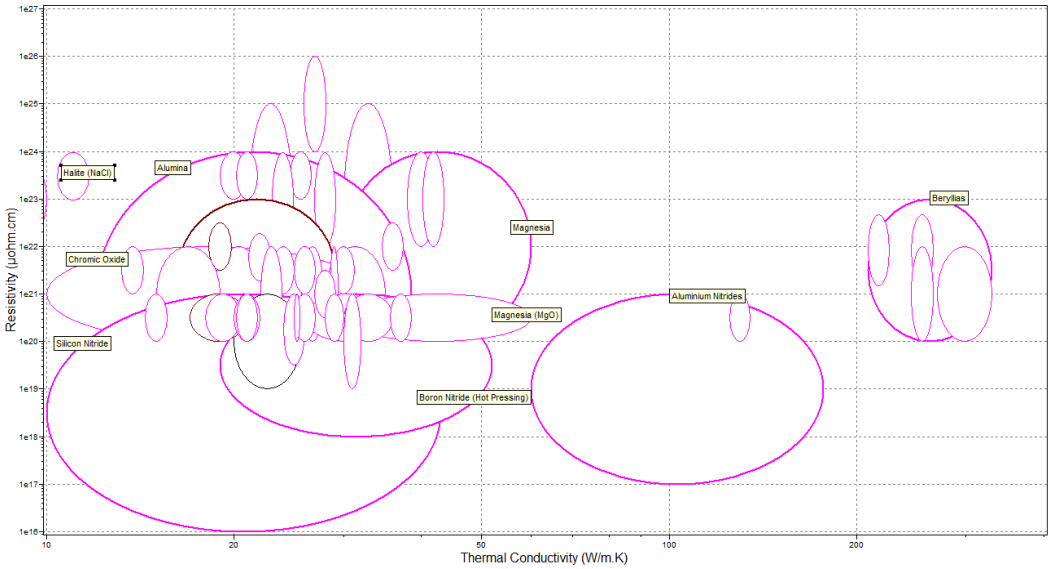


Figure 43 : Représentation des matériaux en fonction de leurs conductivités thermiques (abscisse) et de leurs résidences électriques (ordonnée) dans la plage souhaitée

Nous nous intéressons donc plus particulièrement à deux types de charges céramiques, le nitrure de bore et le nitrure d'aluminium. Du fait du coût non négligeable de ces matériaux, nous avons défini deux autres minéraux, plus abordables, qui seront utilisées dans un premier temps pour effectuer les essais préliminaires, l'aluminosilicate et l'alumine.

- Nitrure de bore hexagonal

Le nitrure de bore est connu sous le nom de ‘graphite blanc’, il possède une structure hexagonale. C’est une substance avec des propriétés anisotropes, de bonne résistance à la chaleur et de haute conductivité thermique (allant jusqu’à 300 $Wm^{-1}K^{-1}$). Cette dernière propriété, combinée à une faible dilatation thermique, produit une excellente résistance aux chocs thermiques.

Le nitrure de bore se diffère du graphite par sa résistivité diélectrique et sa haute résistivité electrique (10^{13} Ohm.cm). Ainsi, il est souvent utilisé comme isolant électrique à très hautes températures. Inerte chimiquement, le nitrure de bore est utilisé dans la fabrication creusets pour fondre les métaux. Ces caractéristiques tribologiques lui permettent d’être utilisé comme lubrifiant à haute température. Le nitrure de bore est non toxique et transparent aux microondes.

- Nitrure d’aluminium

Le nitrure d'aluminium (symbole chimique : AlN) est un semi-conducteur. C'est un matériau réfractaire et isolant électrique possédant une très grande conductivité thermique (allant jusqu’à 180W/(m.K)) et présentant une grande résistance à l'oxydation et l'abrasion.

- Alumine

L’alumine ou oxyde d’aluminium, de formule chimique Al_2O_3, est un composé chimique qui existe à l'état naturel dans la bauxite, sous forme d'alumine hydratée mélangée avec de l'oxyde de fer. L'alumine est aussi utilisée comme matériau réfractaire et peut être également utilisée sous forme de corindon pour fabriquer des abrasifs.

- Aluminosilicate

Les aluminosilicates sont des minéraux du groupe des silicates dans lesquels certains atomes de silicium Si sont remplacés par des atomes d'aluminium Al.

L’aluminosilicate est principalement utilisé en tant que céramique réfractaire et abrasive, mais il est aussi utilisé en tant qu’isolant électrique. Il est aussi utilisé pour la fabrication de porcelaine et d’accessoires de plomberie.

Le tableau suivant représente les différentes propriétés qui nous intéressent pour les charges céramiques qui peuvent être utilisées comme charge pour notre cas. Nous y retrouvons les deux caractéristiques les plus importantes pour cette étude, la conductivité thermique et la résistivité électrique. Nous voyons aussi la résistance mécanique à la compression, une

propriété à ne pas négliger pour garder une tenue mécanique suffisante pour le composite et la densité qui doit être la plus faible possible pour ne pas pénaliser la masse finale du matériau. Il a été ajouté dans cette synthèse, la dilatation thermique qui ne doit pas être trop élevée pour ne pas créer trop de décohésion lors du cycle thermique chauffe/refroidissement subi lors de la mise en forme et lors de l'utilisation du composite.

9.2.5 Conclusion

Nous avons choisi les matériaux permettant de répondre au mieux aux attentes, avec des polymères à haute tenue en température (PPS, PBT et PEKK) et des minéraux isolantes électriques et à hautes conductivités thermiques (nitrure d'alumine et nitrure de bore). Ces matériaux ayant un coût élevé, nous avons sélectionné des matériaux modèles, à un prix plus abordable, pour réaliser des essais préliminaires.

Les matériaux modèles ont été choisis comme étant proches des comportements des matériaux performants afin de pouvoir réaliser un plus grand nombre de tests. Nous avons donc choisi comme matrice du Polyamide 11 (PA11) et comme charges, deux matériaux, de l'Alumine et de l'Aluminosilicate.

9.3 MISE EN FORME DES COMPOSITES

Les essais expérimentaux sont faits en deux campagnes, une campagne d'essais avec les matériaux modèle et une campagne d'essais avec les matériaux plus performants.

La première campagne est faite avec des composites à matrice en PA11 chargée d'Alumine ou d'Aluminosilicate, que l'on notera respectivement PAAlO et PAAlS.

Les composites réalisés durant la deuxième campagne sont faits des matériaux plus performants. Du PEKK a été choisi pour la matrice et du nitrure de bore a été sélectionné pour la charge. Pour effectuer une comparaison avec la campagne d'essais précédente, nous avons aussi réalisé un échantillon en PEKK chargé avec de l'Aluminosilicate. On notera respectivement ces composites PEKKNB et PEKKAlS.

Un procédé de mise en forme par compression de poudre à chaud a été choisi, pour plusieurs raisons : la possibilité de mettre en œuvre des composites hautement chargés, la possibilité de faire de faible quantité d'échantillons et pour sa simplicité de mise en œuvre.

Le fait d'utiliser des matrices et des charges sous forme de poudre permet de s'affranchir des problèmes d'augmentation de la viscosité lors du mélange à haut taux de charge,

contrairement au mélange à chaud. De plus, le système de mélange de poudre, de par sa simplicité, permet de réaliser de faible quantité de mélange.

9.3.1 Descriptif du procédé de mise en forme

Les renforts et la matrice, sous forme de poudres, sont étuvés à une température de 80°C durant 8h. Les constituants sont placés dans un récipient fermé dans les proportions souhaitées et mélangées avec un mélangeur TURBULA® pendant quinze minutes à 50 tr/min pour homogénéiser le mélange.

Le moule subit un traitement avec un agent démoulant, pour faciliter la sortie de la pièce une fois terminé le cycle de mise sous pression et de température.

Après mélange, la poudre est conditionnée dans l'outillage et est placée sous la machine de traction-compression pour appliquer une pression lors de la chauffe de l'outillage. Une pression de 1bar est appliquée durant la phase de chauffe jusqu'à atteindre une température supérieure à la température de fusion. Une fois la température atteinte, une pression est appliquée afin de maximiser la compacité de la poudre tout en faisant fondre la poudre de matrice pour obtenir le matériau le plus compact avec une porosité minimale. La température et la pression sont maintenues pour s'assurer de l'homogénéité de la température de la matrice. Ensuite, la pression est gardée, jusqu'à ce que la température atteigne un certain seuil, puis réduite progressivement.

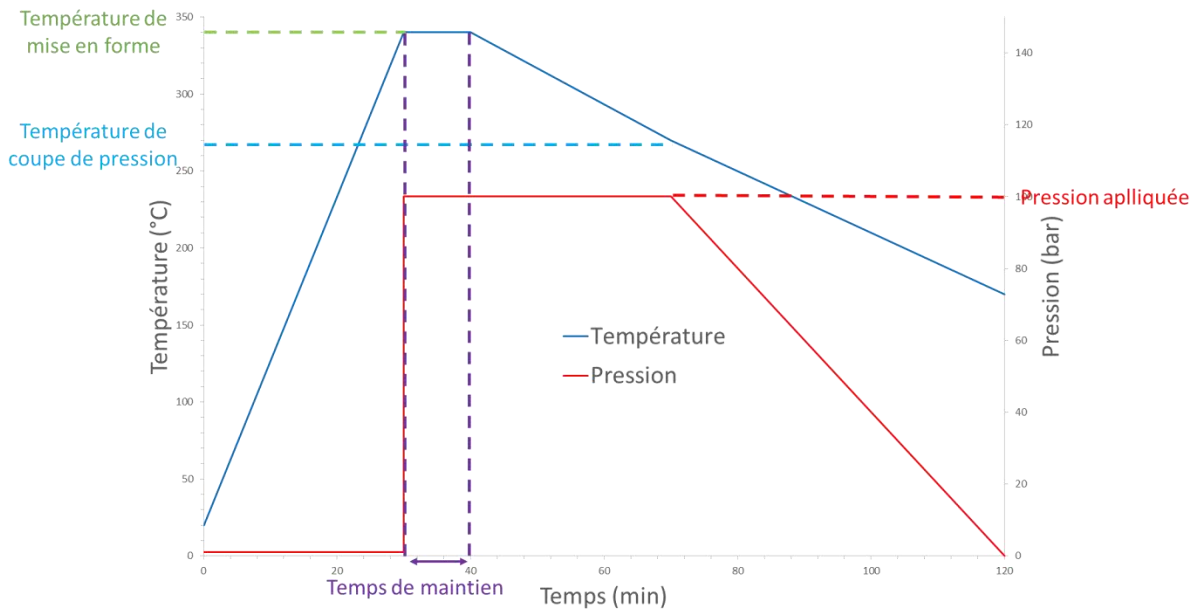


Figure 44 : Représentation du cycle pression température

9.3.2 Etude des paramètres de mise en forme

Pour optimiser les paramètres procédés, plusieurs essais sont faits pour définir l'influence sur les caractéristiques du composite. Les effets sont évalués par l'intermédiaire de mesures de densité, afin de mesurer la fraction de porosité. L'état de surface des pièces et la présence de fissurations sont également analysés.

Les essais expérimentaux sont faits en deux campagnes, une campagne d'essais avec les matériaux modèle et une campagne d'essais avec les matériaux plus performants. La première campagne est faite avec des composites à matrice en PA11 chargée d'Alumine ou d'Aluminosilicate et la deuxième campagne avec une matrice en PEKK chargé de de nitrure de bore.

Pour des raisons de confidentialité, les valeurs des fractions volumiques de charges utilisées pour la réalisation des échantillons ne seront pas données de façon explicites. Pour cela, nous introduisons des fractions volumiques de charge notées Fi, avec $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, tels que : $Fi<Fi+1$ et $Fi+1-Fi= Fi+2-Fi+1$

9.3.2.1 Première campagne

Nous avons tout d'abord étudié l'influence des paramètres procédés avec les matériaux modèle dans le but de déterminer les conditions optimales pour mettre en forme les composites. L'influence de la pression, de la température de mise en forme et le temps de maintien ont été évalués

9.3.2.1.1 Influence de la pression

L'influence de la pression appliquée à la pièce lors de la mise en forme a été étudiée. La pression appliquée au composite lors du procédé influe sur la fraction de porosité finale du matériau. L'utilisation d'une faible pression augmente le risque de présence de porosités, une haute pression quant à elle réduit la proportion de porosité mais risque de dégrader les charges et nécessite un outillage plus performant.

Pour les essais nous avons utilisé quatre valeurs de pression 25, 50, 75 et 100 bar, nous avons utilisé deux matériaux : du PA11 soit d'aluminosilicate soit d'alumine avec une fraction volumique de charge F3. Pour chaque pression, nous avons réalisé trois échantillons et six mesures de porosité par échantillons. Une fois les matériaux mis en forme, nous avons mesuré leurs fraction de porosité afin d'évaluer l'influence de la pression.

Matrice	Charge	Température °C	Temps de maintient min	Pression bar	Fraction volumique de pores
PA11	Aluminosilicate	220	30	25	0,2
PA11	Aluminosilicate	220	30	50	0,16
PA11	Aluminosilicate	220	30	75	0,15
PA11	Aluminosilicate	220	30	100	0,14
PA11	Alumine	220	30	25	0,23
PA11	Alumine	220	30	50	0,19
PA11	Alumine	220	30	75	0,17
PA11	Alumine	220	30	100	0,17

Tableau 2 : Fraction de porosité mesurée pour pressions de mise en forme

On constate que pour une faible pression (25bar) la porosité est élevé, pour une pression de 50 bar on obtient une porosité moins importante. Pour des pressions plus grandes (>50%) on n'observe pas de variation significative de la porosité. Pour la réalisation des échantillons à caractériser nous choisissons donc une pression de 50 bar.

9.3.2.1.2 Influence de la température de mise en forme.

Ce palier a pour but de permettre la fusion de la matrice polymère, il doit donc être supérieur à la température de fusion. Plus cette température est haute plus la fluidité du polymère est élevée, mais une température trop élevée peut entraîner une dégradation du polymère. La température de fusion du PA11 étant de 190°C, nous choisissons donc de tester les températures de 200, 220, 240 et 260°C. Nous avons utilisé deux matériaux : du PA11 soit d'aluminosilicate soit d'alumine avec une fraction volumique de charge F3. Pour chaque température, nous avons réalisé trois échantillons et six mesures de porosité par échantillons. Une fois les matériaux mis en forme, nous avons mesuré leurs fraction de porosité afin d'évaluer l'influence de la pression.

Matrice	Charge	Température °C	Temps de maintient min	Pression bar	Fraction volumique de pores
PA11	Aluminosilicate	200	30	50	0,19
PA11	Aluminosilicate	220	30	50	0,16
PA11	Aluminosilicate	240	30	50	0,11
PA11	Aluminosilicate	260	30	50	0,1
PA11	Alumine	200	30	50	0,2
PA11	Alumine	220	30	50	0,19
PA11	Alumine	240	30	50	0,16
PA11	Alumine	260	30	50	0,16

Tableau 3 : Fraction de porosité mesurée pour différentes température de mise en forme

la fraction de porosité diminue avec l'élévation de la température de mise en forme, cependant la diminution de la porosité devient moins importante après 240°C. En tenant compte des

résultats obtenus et pour limiter le temps de chauffe nous avons choisi d'utiliser une température de 240°C pour la mise en forme des échantillons.

9.3.2.1.3 Influence du temps de maintien

Le temps de maintien peut influencer l'homogénéité de la température dans l'outillage et la fraction de porosité de la pièce finale. Nous choisissons donc de tester un temps de maintien de 0, 15 et 30min. Nous utilisions deux matériaux composés d'une matrice PA11 chargées d'aluminosilicate ou d'alumine avec une fraction volumique de charge F3. Pour chaque temps, nous avons réalisé trois échantillons et six mesures de porosité par échantillons. Une fois les matériaux mis en forme, nous avons mesuré leurs fraction de porosité afin d'évaluer l'influence de la pression.

Matrice	Charge	Température °C	Temps de maintient min	Pression bar	Fraction volumique de pores
PA11	Aluminosilicate	240	0	50	0,13
PA11	Aluminosilicate	240	15	50	0,12
PA11	Aluminosilicate	240	30	50	0,1
PA11	Alumine	240	0	50	0,17
PA11	Alumine	240	15	50	0,17
PA11	Alumine	240	30	50	0,16

Tableau 4 : Fraction de porosité mesurée pour différentes temps de maintien

Sur ces essais nous ne constatons quasi-aucune variation de la porosité pour des temps de maintien de 0 et 15 min. On observe une légère diminution de la fraction de porosité pour un temps de maintien de 30 min. Nous choisissions donc un temps de maintien de 30 min pour la réalisation des échantillons

9.3.2.1.4 Choix des paramètres de mise en forme

Avec ces études, nous avons choisi les paramètres de mise en forme les plus adaptés, avec une pression de 50 bar, une température de mise en forme de 240°C et un temps de maintien de 30min.

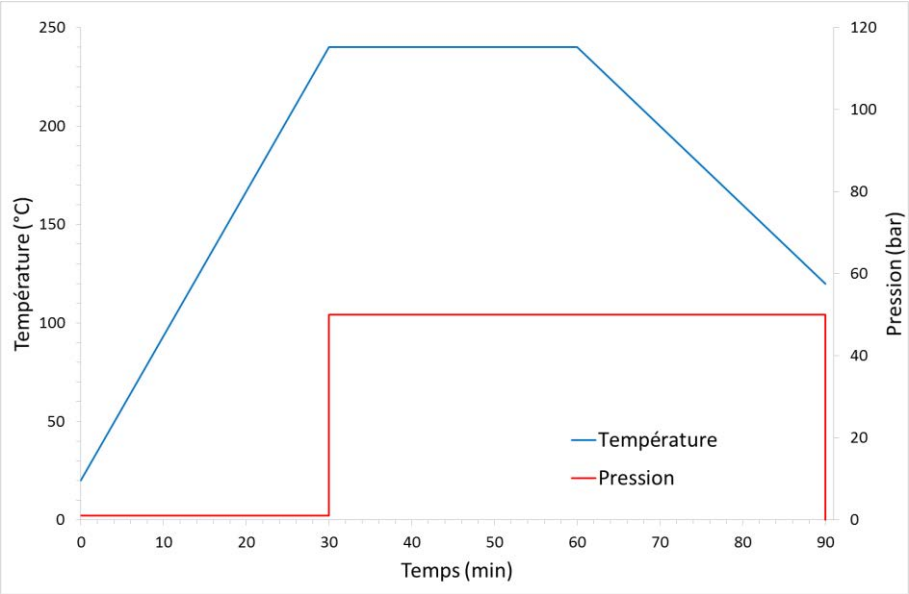


Figure 45 : Cycle pression température des échantillons à matrice PA11

9.3.2.2 Deuxième campagne

Nous avons ensuite étudié l'influence des paramètres procédés avec les matériaux plus performants pour valider les résultats obtenue avec les matériaux modèles. L'influence du demoulant, de température de coupe de pression, de la température de mise en forme et le temps de maintien ont été évalués.

9.3.2.2.1 Démoulant

Le moule subit un traitement avec un agent démoulant, pour faciliter la sortie de la pièce une fois le cycle de pression et température fini. Nous avons utilisé deux démoulant pouvant être employés en conditions de hautes températures, un démoulant de la marque Chemlease® et le Zyvax®.

Avec ces deux démoulants nous avons évalué le nombre de pièces réalisables avant application d'une nouvelle couche de démoulant. Nous avons pu constater que pour les deux démoulants il était seulement possible de faire une seule pièce avant que des points d'accroche n'apparaissent. Cependant le démoulant Zyvax® permet de refaire des pièces sans point d'accroche avec le passage d'une seule nouvelle couche de démoulant alors que le traitement au Chemlease® nécessite de refaire le traitement complet. Nous choisissions donc d'utiliser le démoulant Zyvax®.

9.3.2.2.2 Influence de la température de coupe de pression

La coupe de la pression peut influencer le démoulage de la pièce, une coupe de la pression à trop haute température entraîne une fraction de porosité plus importante et une coupe de la

pression à trop basse température entraîne une détérioration de la pièce. Nous choisissons donc de tester les températures de coupe de pression à 340, 270 et 160°C. Pour chaque température nous faisons 2 échantillons et 6 mesures de porosité par échantillons.

Matrice	Charge	Température °C	Temps de maintient min	Temperatrue de coupe de pression °C	Fraction volumique de pores
PEKK	Nitrure de bore	340	30	340	0,1
PEKK	Nitrure de bore	340	10	270	0,08
PEKK	Nitrure de bore	340	0	160	0,07

Tableau 5 : Fraction de porosité mesurée pour différentes température de coupe de pression

Nous constatons que sur les échantillons avec une température de coupe de pression de 340°C une augmentation de la fraction de porosité significative et un problème d'accroche de la matière sur l'outillage sont constatés.

Sur les échantillons avec une coupe de pression à 160°C il y a une présence de fissurations sur la pièce. Avec une coupe de la pression à 270°C, nous constatons une fraction de porosité acceptable et aucune fissure. La température de coupe de pression la plus adaptée est donc définie à une température de l'ordre de 270°C pour éviter les risques d'accroches dus à une coupe de pression à une trop haute température et la formation de fissuration à trop basse température.

9.3.2.2.3 Influence de la température de mise en forme.

Ce palier a pour but de permettre la fusion de la matrice polymère, il doit donc être supérieur à la température de fusion. Plus cette température est haute plus la fluidité du polymère est élevée, mais une température trop élevée peut entraîner une dégradation du polymère. Nous choisissons donc de tester les températures de 10, 40 et 60°C au-dessus de la température de fusion. Pour chaque température, nous faisons 2 échantillons et 6 mesures de porosité par échantillons.

Matrice	Charge	Température °C	Temps de maintient min	Temperatrue de coupe de pression °C	Fraction volumique de pores
PEKK	Nitrure de bore	310	30	270	0,1
PEKK	Nitrure de bore	340	10	270	0,08
PEKK	Nitrure de bore	360	0	270	0,07

Tableau 6 : Fraction de porosité mesurée pour différentes température de mise en forme

On constate une légère diminution de la porosité lors du passage de 310 à 340°C et une variation non significative entre les températures 340 et 360°C. Nous pouvons donc choisir la

température de 340°C ou 360°C sans influencer la porosité, cependant nous choisissons de prendre la température de 340°C étant plus faible et donc plus facilement atteignable.

9.3.2.2.4 Influence du temps de maintien

Le temps de maintien peut influencer la fraction de porosité de la pièce finale. Nous choisissons donc de tester un temps de maintien de 0, 10 et 30min. Pour chaque température nous faisons 2 échantillons et 6 mesures de porosité par échantillons.

Matrice	Charge	Température °C	Temps de maintient min	Temperatrue de coupe de pression °C	Fraction volumique de porosité
PEKK	Nitrure de bore	340	30	270	0,07
PEKK	Nitrure de bore	340	10	270	0,08
PEKK	Nitrure de bore	340	0	270	0,07

Tableau 7 : Fraction de porosité mesurée pour différentes temps de maintien

Sur ces essais nous ne constatons aucune influence notable du temps de maintien sur la fraction de porosité. Nous choisissions donc un temps de maintien de 10min, afin de limiter le temps de cyc en assurant une homogénéisation de la température de l'outillage.

9.3.2.2.5 Choix des paramètres de mise en forme

Avec ces études, nous avons choisi les paramètres de mise en forme les plus adaptés, avec une pression de 50 bar, une température de mise en forme de 340°C et un temps de maintien de 10 min une coupe de la pression à 270°C.

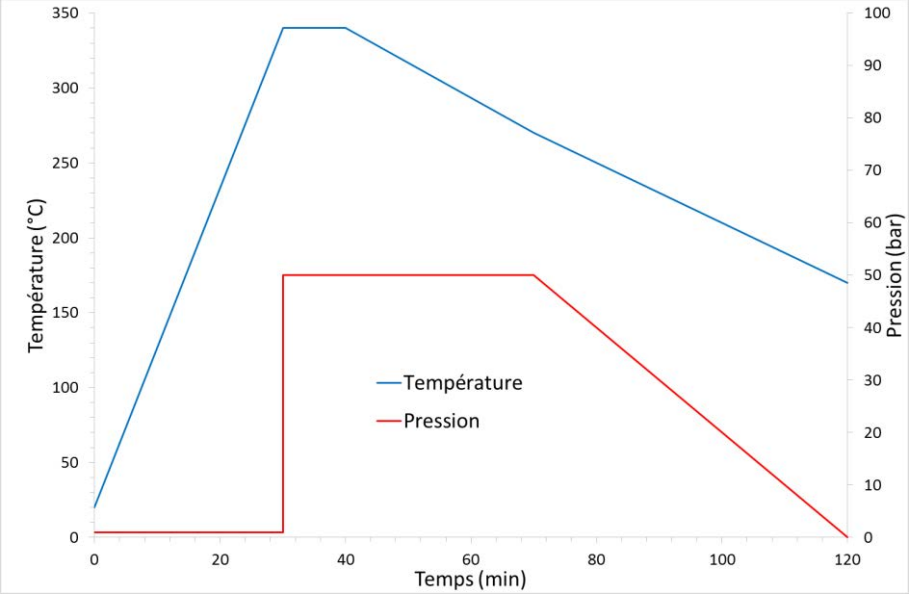


Figure 46 : Cycle pression température des échantillons à matrice PEKK

9.4 ANALYSE DES CARACTERISTIQUES ET PROPRIETES DES COMPOSITES

9.4.1 Porosité

9.4.1.1 Méthode de mesure

La porosité est très dommageable pour les différentes caractéristiques thermiques et mécaniques. Pour l'estimer nous nous basons sur la comparaison de la densité théorique avec la densité mesurée.

Lors de la préparation du composite nous considérons que le matériau est biphasé, une phase de matrice et une phase de charge. Nous choisissons la proportion de chaque phase, nous pouvons donc en déduire la fraction volumique de charge théorique f. Avec la densité de chaque composant, nous pouvons en déduire la densité théorique du matériau ρ^{th}

$$\rho^{th} = (1 - f)\,\rho^{M} + f\,\rho^{C} \tag{9.1}$$

où ρ^{M} la densité de la matrice et ρ^{C} la densité des charges.

La densité expérimentale ρ^{exp}, est mesurée avec deux mesures de masse successive, une mesure effectuée dans l'air M^{air} et une dans l'eau M^{eau}.

$$\rho^{exp} = \frac{M^{air}}{M^{air} - M^{eau}}. \tag{9.2}$$

Nous supposons que la densité expérimentale plus faible que la densité théorique est due à la présence de porosité dans le composite.

$$f_p = \frac{\rho^{th} - \rho^{exp}}{\rho^{th}}. \tag{9.3}$$

Nous obtenons la fraction volumique de porosité f_p. Cette méthode ne prend en compte que les porosités volumiques, les porosités ouvertes ne sont donc pas évaluées.

Lorsqu'il y a présence de porosité, le composite supposé biphasé devient un composite triphasé avec une phase de matrice, une phase de charge et une phase de porosité. Nous pouvons donc redéfinir les fractions volumiques de chaque phase à l'aide de la fraction volumique de porosité :

$$f_1 = \big(1 - f_p\big)f \text{ et } f_M = \big(1 - f_p\big)(1 - f) \tag{9.4}$$

où f_1 et f_M sont les fractions volumiques dans un composite poreux de respectivement la charge et la matrice.

9.4.1.2 Résultats

Les essais ont été réalisés sur des échantillons de dimensions 10x10x3mm, avec pour chaque spécimen six mesures.

- Première campagne d'essais :

Les essais ont été réalisés sur des échantillons composites à matrice PA chargée d'alumine et d'aluminosilicate.

On observe, sur la Figure 47, que la fraction volumique de porosité augmente avec l'élévation de la fraction volumique de charge et que les charges d'alumine induisent une fraction de porosité plus importante que les charges d'aluminosilicate. Les charges ayant des dimensions proches, une surface spécifique et une dilatation thermique semblable, nous en concluons que les écarts entre les fractions volumiques de porosités sont imputables à une différence de compatibilité entre la matrice PA et les deux natures de charges.

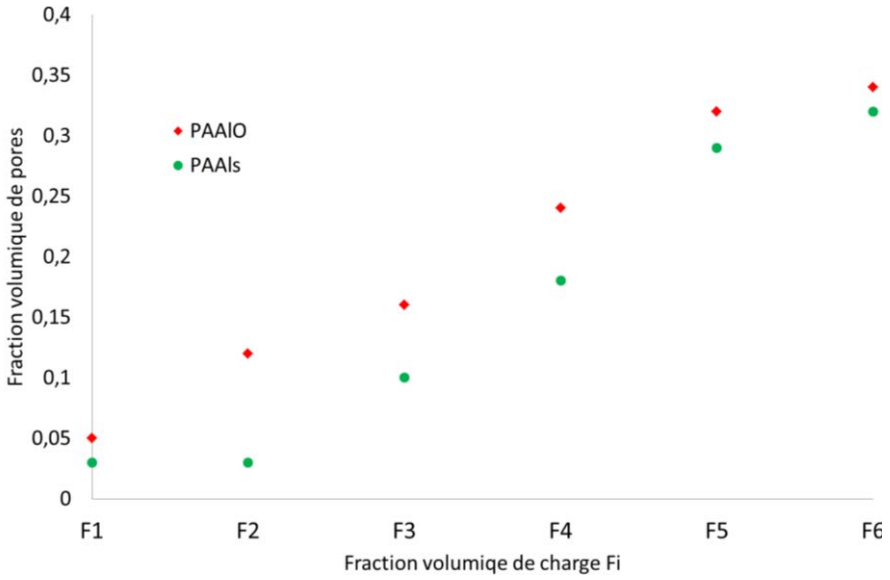


Figure 47 : Fraction volumique de porosité f_p en fonction de la fraction volumique de charge f pour des composite à matrice PA chargé d'alumine ou d'aluminosilicate.

Nous utilisons les valeurs de fraction volumique de porosité mesurées f_p pour déterminer la fraction volumique de charge dans un composite poreux f_1 en fonction des fractions volumique de charge dans un composite non poreux f (équation (9.4)). On constate que malgré l'ajout de charge, la fraction volumique de charge souhaitée f reste inférieur à la fraction de charge réelle f_1. L'ajout de charge dans le composite est donc compensé par la formation de porosité. Pour remédier à cela, nous devons réduire la quantité de porosité.

- Deuxième campagne d'essais :

Pour la deuxième campagne d'essais, l'utilisation d'une matrice PEKK et de nitrure de bore a permis de diminuer grandement la fraction de porosité, de plus, nous avons optimisé le procédé de mise en forme afin de réduire au maximum la fraction de porosité des échantillons.

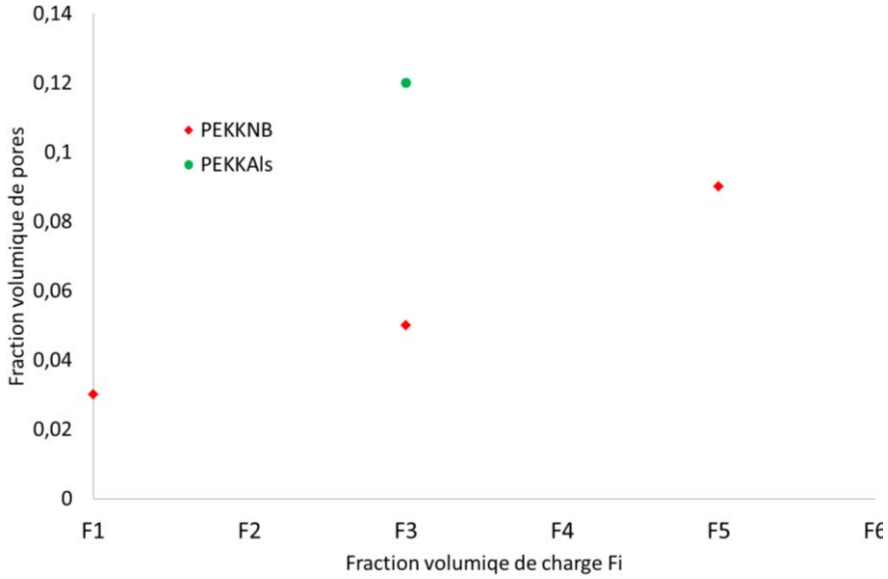


Figure 48 : Fraction volumique de porosité f_p en fonction de la fraction volumique de charge f pour des composite à matrice PEKK chargé de nitrure de bore ou d'aluminosilicate.

On observe, sur la Figure 48, que nous obtenons une fraction volumique de porosité nettement plus faible avec les composites PEKKNB qu'avec des composites PAAlS. Les valeurs ainsi obtenues ne dépassent pas une fraction volumique de porosité de 0.1 pour une fraction volumique de charge F5, contrairement aux résultats obtenus précédemment de 0,32 pour une même fraction volumique de charge. Ces variations peuvent être dues à une surface spécifique plus importante des particules de nitrure de bore, par rapport à celles des particules d'alumine et d'aluminosilicate, ou à ses propriétés tribologiques, permettant de faciliter la phase de compression.

Comme précédemment, nous utilisons les valeurs de fraction volumique de porosité mesurées f_p pour déterminer la fraction volumique de charge dans un composite poreux f_1 en fonction des fractions volumique de charge dans un composite non poreux f (équation (9.4)). Avec une fraction volumique de porosité plus faible, la fraction volumique réelle de charge f_1 augmente avec la fraction volumique théorique de charge f. Cependant bien que diminuée, la porosité reste présente et affecte les propriétés thermiques et mécaniques du composite.

9.4.2 Caractérisation des propriétés thermiques

9.4.2.1 Méthode de mesure

Nous cherchons à déterminer la valeur de conductivité thermique du matériau composite. Deux régimes de mesure peuvent être utilisés pour la caractérisation de la conductivité thermique. Le régime stationnaire attend la stabilisation du transfert thermique dans le spécimen pour la mesure des valeurs thermiques. Le régime transitoire est basé sur la mesure des valeurs thermiques en fonction du temps après une stimulation thermique de l'échantillon. Une loi de comportement est ensuite utilisée pour déterminer la conductivité thermique du matériau.

Pour ces méthodes, on suppose que le matériau a une conductivité thermique identique en tout point et qu'il a une conductivité similaire dans toutes les directions.

- Méthode de la plaque chaude gardée

La méthode des plaques chaudes gardées est une méthode stationnaire. Elle est basée sur le fait de reproduire le phénomène de transfert thermique à travers une plaque infinie limitée par deux plans parallèles isothermes.

On prend un échantillon de la forme d'une plaque, de faible épaisseur, pour limiter les effets des transferts thermiques à ses bords, qui peuvent modifier le champ de température.

Afin de limiter les déperditions thermiques latérales, une zone de garde est ajoutée autour de la zone de mesure, séparé par un espace.

On place l'éprouvette entre deux plaques : une plaque, dite plaque chaude et une autre plaque, dite plaque froide. La plaque chaude est chauffée par effet Joule et la plaque froide refroidie par un système de refroidissement par fluide.

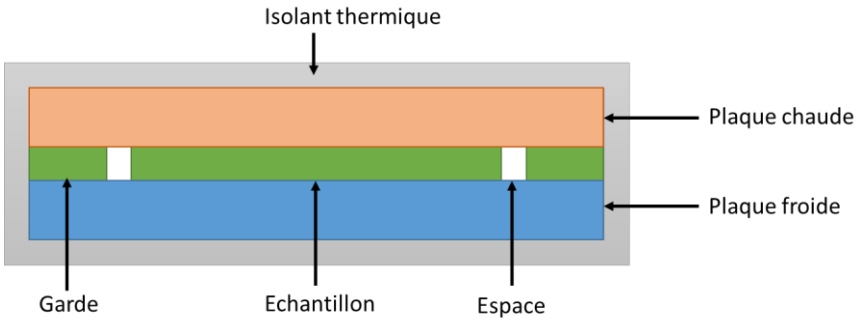


Figure 49 : Plaque chaude gardée

Des capteurs sont placés sur la partie centrale et sur la garde des échantillons pour mesurer la température et pour s'assurer de l'équilibre thermique entre la plaque et la garde.

Si l'on est capable de mesurer la quantité de chaleur transmise par la zone centrale de l'éprouvette, on se retrouve proche des conditions théoriques.

Une fois l'état stationnaire établi, le flux de chaleur traversant l'échantillon est mesuré, ainsi la densité du flux thermique est déterminée. La différence de températures entre les faces opposées de l'échantillon est aussi mesurée. Une fois l'épaisseur, la densité de flux thermique et la différence de températures connue, la conductivité thermique est déterminée.

Lors de la mise en contact entre l'éprouvette et l'outillage, une résistance thermique peut se former par la présence de défauts de forme de l'échantillon. Ces défauts peuvent être de différentes natures : une imperfection de parallélisme entre les faces de l'éprouvette, un défaut de planéité ou encore une rugosité trop importante. Le flux de chaleur transmis est hétérogène sur l'ensemble de la pièce et induit une incertitude de mesure. Cette valeur peut être négligée lorsqu'elle est nettement plus faible que la conductivité thermique de l'échantillon.

- Méthode flash

La mesure de conductivité thermique par méthode flash est une mesure en régime transitoire. Cet essai consiste à stimuler thermiquement à l'aide d'un flash une face du matériau et à mesurer la réponse en température sur l'autre face. Ceci permet d'évaluer la diffusivité du matériau en comparant l'évolution de la température en fonction du temps au modèle théorique.

Afin de limiter les déperditions thermiques latérales, des isolants thermiques sont ajoutés sur les côtés de l'échantillon.

En mesurant la capacité thermique du matériau à l'aide d'une DSC et sa masse volumique, nous obtenons la valeur de conductivité thermique de l'échantillon.

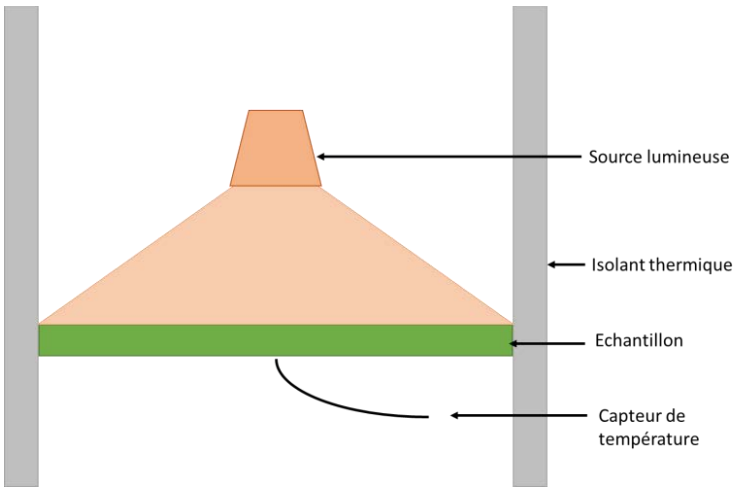


Figure 50 : Méthode flash

La méthode de mesure de diffusivité par flash est limitée par la capacité d'absorption du matériau caractérisé. Dans le cas où une partie de l'énergie lumineuse n'est pas transmise à la surface du matériau mais pénètre à l'intérieur, le modèle de transfert utilisé est faux et les résultats sont biaisés. Cette méthode est à écarter pour les matériaux poreux.

- Disque chaud

La méthode du disque chaud est une méthode transitoire. Pour cet essai, un combiné capteur de température et source chaude résistive en forme de disque est placé entre deux échantillons à caractériser. La source chaude est mise sous tension et la température est mesurée.

Les données de température en fonction du temps sont comparées à un modèle théorique dépendant des conditions aux limites appliquées à l'échantillon, permettant de déterminer la conductivité thermique effective du matériau.

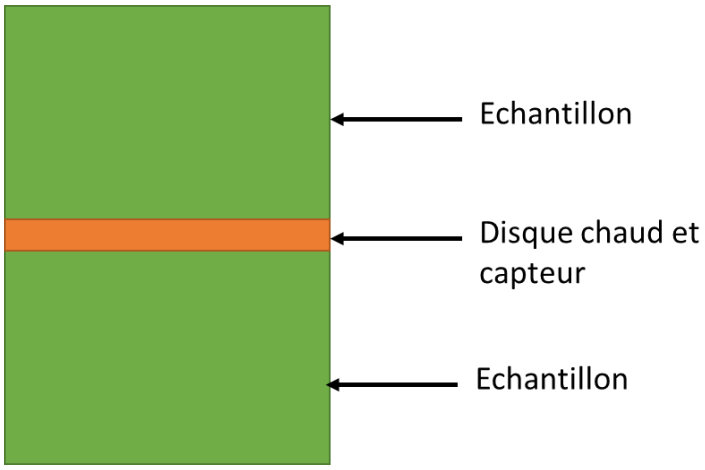


Figure 51 : Méthode du disque chaud

- Limite des méthodes

Ces méthodes de mesure sont limitées par deux facteurs, l'hétérogénéité et l'anisotropie du matériau.

La présence d'hétérogénéités dans le spécimen peut induire une variation de flux thermique sur la surface de l'échantillon. Les capteurs présents au niveau des hétérogénéités peuvent induire une variation non négligeable de la conductivité thermique mesurée. Lorsque le matériau est anisotrope avec une conductivité thermique plus importante dans la direction perpendiculaire à la mesure, le flux de chaleur est canalisé vers le coté de l'échantillon et diminue le flux traversant la pièce, réduisant la valeur de conductivité thermique mesurée.

9.4.2.2 Résultats

Pour des raisons de confidentialité, toutes les valeurs de conductivité thermique seront normalisées par rapport à la valeur de conductivité thermique mesuré sur un composite PAAlO chargé à une fraction volumique de charge F1.

- Première campagne

Les essais ont été réalisés sur des échantillons composites PAAlO et PAAlS. Nous avons modélisé la conductivité thermique du composite en utilisant le modèle basé sur l'approche GSCS à N+1 phases développée précédemment (chapitre 8). Pour cela, nous avons utilisé le cas à 3+1 phases, constitué d'une inclusion '1' enrobée dans une phase de matrice affaiblie 'c', enrobée dans une phase de matrice 'm', plongée dans le milieu homogène équivalent.

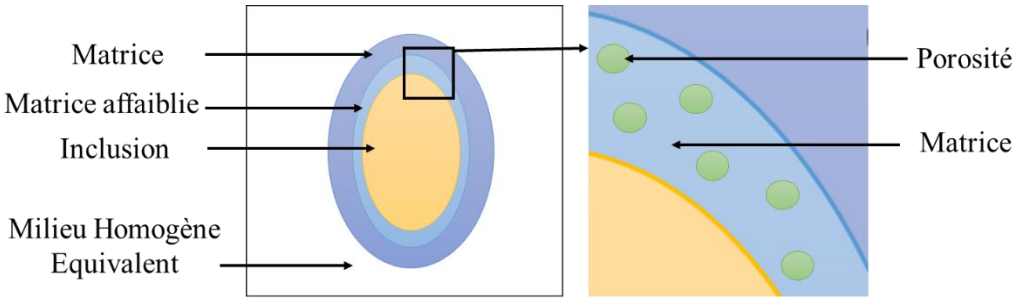


Figure 52 : Représentation du modèle 3+1 phases avec matrice affaiblie

Avec le modèle GSCS à 3+1 phases, nous pouvons écrire la conductivité thermique effective ainsi :

$$\boldsymbol{K}^{eff} = \boldsymbol{K}^{m} + f_1(\boldsymbol{K}^{1} - \boldsymbol{K}^{m}).\boldsymbol{A}^{1/eff} + f_c(\boldsymbol{K}^{c} - \boldsymbol{K}^{m}).\boldsymbol{A}^{c/eff} \quad (9.5)$$

avec:

$$\boldsymbol{A}^{1/eff} = \Bigg[f_1 \Bigg(\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^{\Omega_m}.\Delta\boldsymbol{K}^{1/eff}\right) + \frac{1}{f_1+f_c}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^{\Omega_m}.\Delta\boldsymbol{K}^{m/eff}\right) \times \left((1-f_1-f_c)\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{L}_{m}^{\Omega_c} - (f_1+f_c)\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{m}}^{\Omega_m}\right).\Delta\boldsymbol{K}^{1/m}\right)\Bigg) + f_c \Bigg(\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^{\Omega_m}.\Delta\boldsymbol{K}^{c/eff}\right) + \frac{1}{f_1+f_c}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{L}_{eff}^{\Omega_m}.\Delta\boldsymbol{K}^{m/eff}\right) \times \left((1-f_1-f_c)\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{m}}^{\Omega_c} - (f_1+f_c)\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{m}}^{\Omega_m}\right).\Delta\boldsymbol{K}^{c/m}\right)\Bigg) \times \left(\boldsymbol{I} + \left(\frac{f_c}{f_1+f_c}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{c}}^{1} - \frac{f_1}{f_1+f_c}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{c}}^{\Omega_c}\right).\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}\right)\Bigg]^{-\mathbf{1}} \tag{9.6}$$

$$\boldsymbol{A}^{c/eff} = \left(\boldsymbol{I} + \left(\frac{f_c}{f_1+f_c}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{c}}^{1} - \frac{f_1}{f_1+f_c}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{c}}^{\Omega_c}\right).\Delta\boldsymbol{K}^{1/c}\right).\boldsymbol{A}^{1/eff}.$$

Pour pouvoir utiliser cette expression, il nous faut déterminer les différents paramètres : la conductivité thermique de chaque phases : K^1 pour la charge, K^c pour la matrice affaiblie et K^m pour la matrice, le facteur de forme de l'inclusion et les fraction volumique de chaque phases.

Nous donnons les contrastes de conductivité thermique utilisé pour chaque composite :

Pour le composite PAAlO, un contraste $K^1/K^m = 46$ est utilisé.

Pour le composite PAAls, un contraste $K^1/K^m = 56$ est utilisé.

La conductivité thermique K^c de la matrice affaiblie est défini comme étant la conductivité thermique effective d'un composite constitué de sphère de vide plongée dans une matrice. Pour déterminer cette valeur, nous utilisons le modèle de Maxwell (Maxwell 1873) :

$$K^{effM} = K^2 \frac{K^1 + 2K^2 + 2f(K^1 - K^2)}{K^1 + 2K^2 + f(K^2 - K^1)}. \tag{9.7}$$

Pour déterminer K^c nous remplaçons, dans le modèle précédent, K^2 par la conductivité de la matrice K^m, la conductivité thermique K^1par zéro et la fraction volumique f par la fraction volumique de porosité dans la matrice affaiblie f_{pc}. On obtient donc :

$$K^c = K^m \frac{2(1 - f_{pc})}{2 - f_{pc}}. \quad (9.8)$$

La fraction volumique f_{pc} est déterminé par : $f_{pc} = f_p / f_c$, avec f_p la fraction volumique de porosité mesuré et f_c la fraction volumique de la phase de matrice affaiblie. f_c est définie arbitraient mais doit respecter certaines relations : la somme des fraction volumique doit être égal à 1 : $f_c + f_m + f_1 = 1$ (où f_1 est la fraction volumique réelle de la charge (9.4) et f_m la fraction volumique de la phase 'm') et la fraction volumique de matrice affaiblie f_c doit être supérieur à la fraction volumique de porosité mesuréef_p : $f_c > f_p$.

Pour définir le facteur de forme des particules, nous faisons une mesure du facteur de forme moyen sur des micrographies des charges utilisées, pour cela nous utilisons les micrographies tiré des travaux de Zhao (Zhao et al. 2018) (Figure 53). Les particules d'alumine ont une forme sphérique et les particules d'aluminosilicate ont une forme oblate avec facteur de forme de l'ordre de 4.

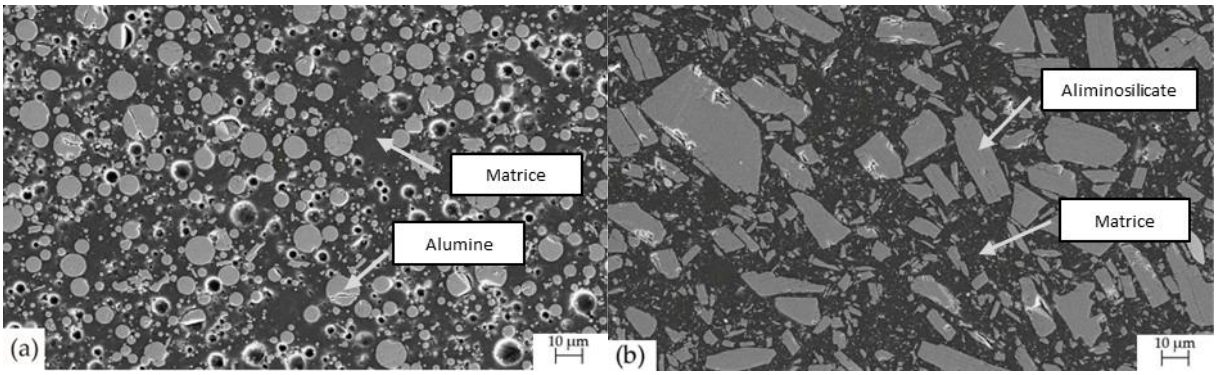


Figure 53 : Forme des particule (a) d'alumine et (b) aluminosilicate (Zhao et al. 2018)

Nous avons tracé la conductivité thermique effective du composite en fonction de la fraction volumique de charge théorique f. Ce modèle permet de prendre en compte les fortes fractions volumiques, la forme des charges et la présence de porosités.

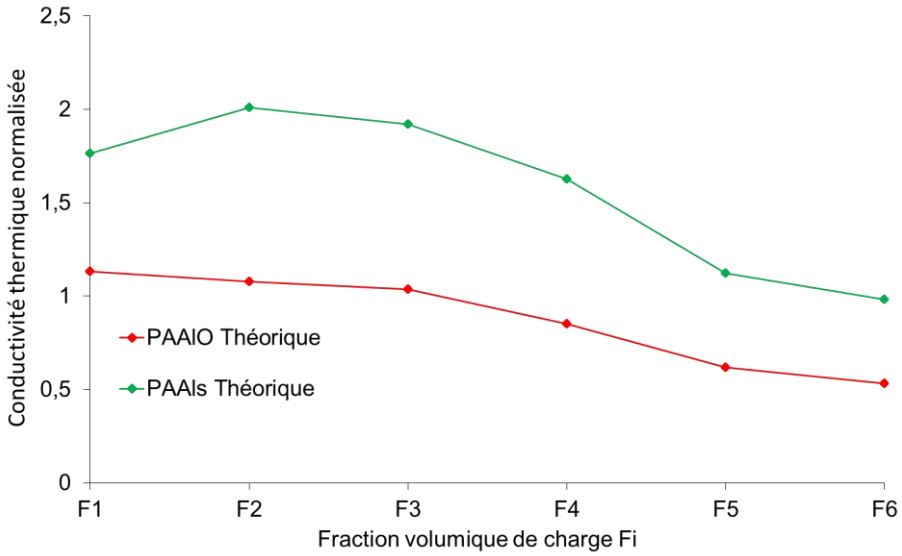


Figure 54 : Modelisation de conductivité thermique effective de composite à matrice Polyamide chargée de particule d'alumine ou d'aluminosilicate en fonction de fraction volumique théorique f.

Expérimentale pour caractériser thermiquement ces matériaux, nous avons utilisé la méthode des plaques chaudes gardées adaptée aux échantillons de petites dimensions. Les essais ont été réalisés sur des échantillons de dimension 15x15mm avec une garde de 40x40mm extérieur et 30x30mm intérieur. Les mesures de conductivité thermique ont été faites deux fois par échantillons pour chaque fraction volumique de charge.

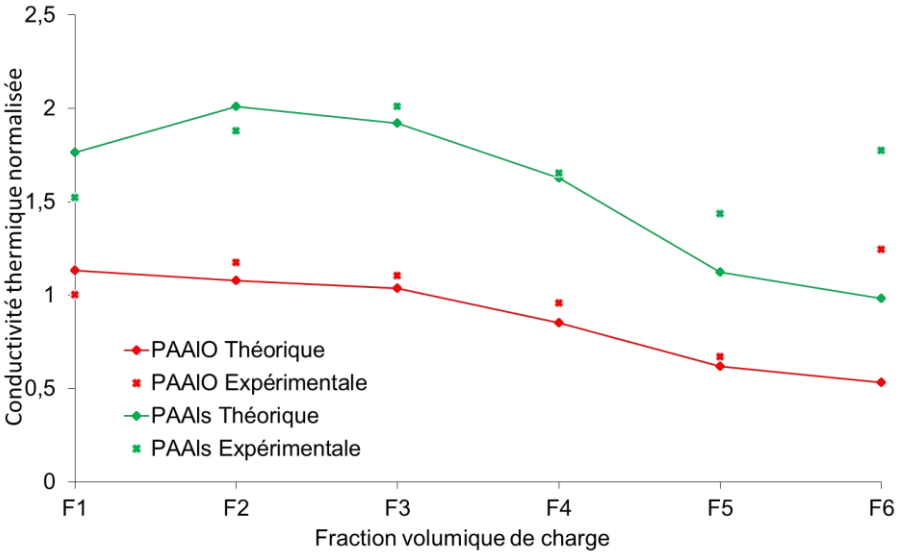


Figure 55 : Comparaison des conductivités thermiques de composite à matrice Polyamide mesurées par la méthode de plaque chaude gardée et des modélisations.

Matière	Fraction volumique de charge	Conductivité thermique mesurée normalisée	Conductivité thermique modélisée norlamisée	Ecart %
PAAlO	F1	1,00	1,13	13%
	F2	1,17	1,08	-8%
	F3	1,10	1,03	-6%
	F4	0,96	0,85	-11%
	F5	0,67	0,62	-8%
	F6	1,24	0,53	-57%
PAAls	F1	1,52	1,77	16%
	F2	1,88	2,01	7%
	F3	2,01	1,92	-4%
	F4	1,65	1,63	-2%
	F5	1,43	1,12	-22%
	F6	1,77	0,98	-45%

Tableau 8 : Valeurs de conductivité thermique, mesurées est simulées, de composite à matrice Polyamide.

On constate que le modèle est proche des mesures effectuées pour les fractions volumiques de charge de F1 à F6, seul les deniers points mesurés, à F6, sont très éloigné des prédictions. Nous remarquons que les valeurs de conductivité thermique obtenues avec les PAAlO sont nettement plus faibles que celles obtenues avec les PAAlS. Dans le cas d'un chargement à une fraction volumique de charge F3, le rapport entre les conductivités thermiques des deux matériaux est proche de 2, alors que la différence de conductivité thermique entre les charges pures n'est que de 17%. Cette différence est due, en partie, à la présence d'une fraction volumique de porosité quasiment deux fois plus importante dans les composites chargés d'alumine que dans les composites chargés d'aluminosilicate, dans le cas d'un chargement à une fraction volumique de charge F3, mais aussi à la différence de forme des particules.

On constate une évolution de la conductivité thermique similaire pour les deux composites. Une augmentation de la conductivité thermique pour une fraction volumique de charge entre F1 à F3 est suivie d'une diminution pour des chargements plus importants. L'explication peut aussi venir de la présence de porosités. Pour des fractions volumiques de charge inferieures à F3 les fractions de porosité sont assez faibles pour permettre de discerner l'augmentation de la conductivité thermique induit par une quantité de charges conductrices plus importantes. Dans le cas de fractions volumiques de charge plus élevées, les résistances thermiques produites par les porosités sont dominantes par rapport aux effets bénéfiques dus à l'augmentation des charges, nous constatons donc une diminution de la conductivité thermique.

- Deuxième campagne

Les essais réalisés par la suite ont été faits avec des matériaux plus performants. Le PEKK, choisi pour la matrice, possède une tenue en température élevée. Les renforts en Nitrure de Bore (NB) ont été sélectionnés en raison de leur conductivité thermique élevée (4.3 fois plus importante que celle de l'alumine). Pour effectuer une comparaison avec la campagne d'essais précédente, nous avons aussi réalisé un échantillon en PEKKAls.

Nous avons également estimé la conductivité thermique effective des composites de cette seconde campagne en utilisant le modèle GSCS à 3+1 phases. Pour cela, nous avons utilisé un contraste $K^1/K^m = 200$.

Pour définir le facteur de forme des particules, comme pour la première campagne d'essais, nous faisons une mesure du facteur de forme moyen sur des micrographies des charges utilisées, pour cela nous utilisons les micrographies tirées des travaux de Hong (Hong et al. 2012) (Figure 56). Les particules de nitrure de bore ont une forme oblate avec facteur de forme de l'ordre de 6.

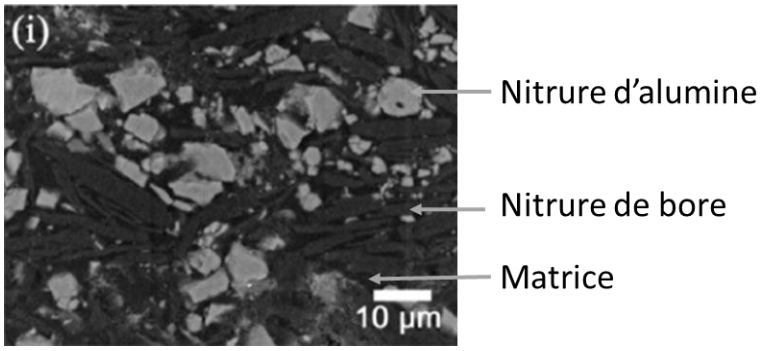


Figure 56 : Forme des particule de nitrue de bore (Hong et al. 2012)

Nous avons pris pour fraction volumique f_c une valeur de 0,4. Nous avons tracé la conductivité thermique effective du composite en fonction de la fraction volumique théorique f. Ce modèle permet de prendre en compte les fortes fractions volumiques, la forme des charge et la présence de porosités.

Pour effectuer les mesures, nous avons utilisé la méthode de la plaque chaude gardée. Les essais sont faits avec deux points de mesure par échantillons pour évaluer l'homogénéité de la conductivité thermique des échantillons.

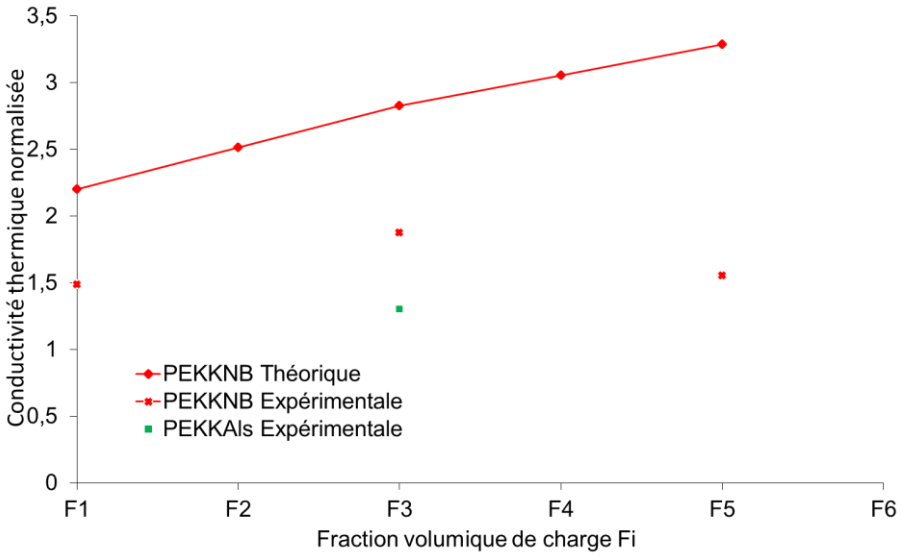


Figure 57 : Comparaison des conductivités thermiques de composite à matrice PEKK mesurées par la méthode de plaque chaude gardée et des modélisations.

Matière	Fraction volumique de charge	Conductivité thermique mesurée normalisée	Conductivité thermique modélisée norlamisée	Ecart %
PEKKNB	F1	1,49	2,20	48%
	F3	1,87	2,83	51%
	F6	1,55	3,29	112%

Tableau 9 : Valeurs de conductivité thermique, mesurées est simulées, de composite à matrice PEKK.

Contrairement à la campagne précédente, on remarque que le modèle n'est pas en adéquation avec les résultats expérimentaux, le modèle surestime grandement les valeurs de conductivités thermiques du composite. On constate, dans le cas de composite PEKKNB que la tendance est la même que précédemment, une augmentation de la conductivité thermique suivie d'une diminution. Cependant, ceci ne peut pas être totalement imputé à la présence de porosités, étant donné que dans le cas de composite PEKKNB la fraction de porosité a été grandement diminuée, atteignant une valeur maximale de 9% de porosité dans le cas d'une fraction volumique de charge de F5. La présence d'interfaces imparfaites peut en être la cause. En effet, plus la surface entre les charges et la matrice est importante, plus le risque de formation d'interfaces imparfaites est augmenté. Les particules de nitrure de bore utilisées possèdent une surface spécifique dix fois plus importante que celles des particules d'Aluminosilicate.

La valeur maximale de conductivité thermique obtenue avec le composite PEKKNB est plus faible que celle obtenue avec le composite PAAlS de la première campagne. Cette valeur pourrait s'expliquer par la présence d'une plus grande quantité d'interface imparfaite dans le

cas de particule de nitrure de bore. Cependant, le nitrure de bore possède une conductivité thermique presque quatre fois supérieures à celle de l'aluminosilicate et le composite chargé de NB a une fraction volumique de porosité deux fois plus faible que celle obtenue avec des composites chargés en aluminosilicate. De plus, la valeur obtenue avec le composite PEKKAlS chargé à une fraction de charge de F6 a une conductivité thermique 50% plus faible que celle obtenue avec les composite PAAlS de la première campagne.

Pour évaluer la justesse des résultats obtenus, nous avons effectué plusieurs essais complémentaires. Deux autres méthodes ont été testées, la mesure par flash et la méthode du disque chaud. Les méthodes ont été calibrées à l'aide d'un matériau de conductivité thermique connue.

Après mesure, nous avons obtenu avec les méthodes par flash et par disque chaud des valeurs de conductivtié thermique normalisée de respectivement de 1.84 et de 1.90 sur des composites PEKKNB chargés à une fraction de charge de F3, qui sont des valeurs très proches de celles obtenues avec la méthode de plaque chaude gardée. Les mesures de conductivités thermiques faites sur un matériau de conductivité thermique connue ont donné des valeurs éloignées d'un maximum de 5%. Les moyens de mesures peuvent donc être considérés comme fiables, d'un point de vue de la répétition et de la justesse.

La différence de mesure peut être due à une différence de préparation des échantillons lors des deux campagnes. Lors de la première campagne d'essais, les échantillons réalisés avaient un défaut de parallélisme. Afin de pouvoir utiliser la méthode de plaque chaude gardée, un surfaçage a été effectué afin de supprimer ce défaut. Pour la deuxième campagne, suite à l'ajout d'un système de guidage sur l'outillage de mise en forme, le parallélisme des plaques était acceptable pour l'utilisation de la méthode de plaque chaude gardée, il n'y a donc pas eu de surfaçage.

Pour les composites, la partie qui était en contact avec l'outillage, appelée la peau, est une partie constituée d'une plus grande quantité de polymère. Cette peau à une conductivité thermique plus faible que le reste du composite et par conséquent, restreint sa capacité à transférer la chaleur. Dans le cas d'un surfaçage cette peau est supprimée, ce qui peut expliqué que, dans le cas de la première campagne d'essais, les entaillons ayant subi un surfaçage ont une conductivité thermique plus importante que ceux de la deuxième campagne, qui n'ont pas subi de surfaçage.

9.4.3 Electrique

9.4.3.1 Méthode de mesure

Nous cherchons à déterminer principalement deux caractéristiques électriques : la résistivité électrique du matériau et la rigidité diélectrique du matériau.

- Résistivité électrique

La résistivité électrique d'un matériau est sa capacité à s'opposer au passage du courant. Elle est définie par la résistance d'une partie de matériau d'un mètre de longueur et d'un mètre carré de section et s'exprime en ohms mètres (Ω·m).

Les mesures de résistivité électrique sont faites suivant la norme NF EN 62631-3. Pour cet essai, une tension est appliquée au matériau et le courant le traversant est mesuré. Dans le cas d'isolants électriques, les matériaux se comportent comme des condensateurs, ce qui leur permet de stocker les charges électriques. Lors de leur mise sous tension, avec les phénomènes de polarisation, il y a formation d'un courant de transition. Le courant traversant la pièce lorsque la stabilisation est atteinte est appelé courant de conduction. Cette stabilisation peut se produire au bout de plusieurs heures ou ne pas se produire à faible température. Après la suppression de la tension, un courant inverse est mesuré aux bornes du matériau, ce courant est appelé courant de décharge. Le courant de conduction est utilisé pour définir la résistivité du matériau, associé au temps de mesure correspondant.

Deux résistivités sont mesurées, la résistivité transversale définie comme la résistivité entre deux faces opposées du matériau et la résistivité superficielle définie comme la résistivité sur la même face du matériau. Ces essais sont réalisés sur des éprouvettes en forme de plaque de quelques millimètres.

Pour la mesure transversale, des électrodes sont placées de chaque côté de la plaque et une tension leur est appliquée. Pour éviter les fuites de courant pouvant passer par la tranche de la plaque, une garde reliée à la masse est ajoutée sur une des faces autour de l'électrode.

Pour la mesure superficielle, la tension est appliquée entre l'électrode et la garde de la même face.

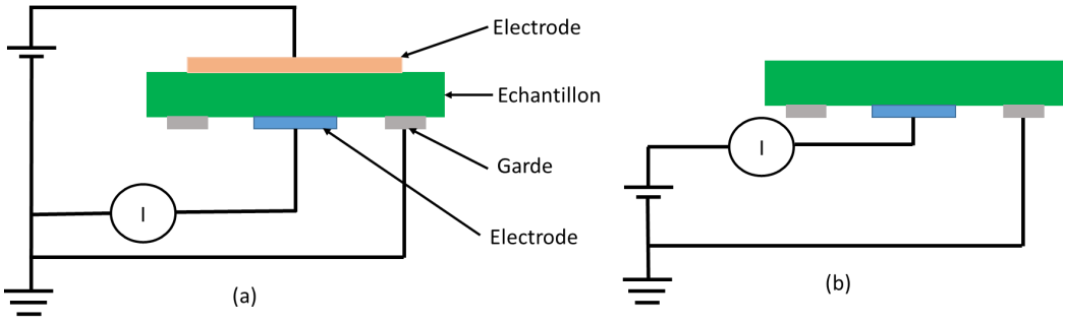


Figure 58 : Mesure de résistivité électriques (a) transversale et (b) superficielle

- Rigidité diélectrique

La mesure de la rigidité diélectrique est réalisée suivant la norme NF EN 6043. Le montage est similaire à celui utilisé pour la détermination de la résistivité électrique. Les électrodes utilisées sont sans bords vifs pour éviter la formation d'arcs électriques. Nous avons donc deux types d'essais, les essais transversaux et les essais superficiels, qui utilisent tous deux des éprouvettes sous forme de plaque. Pour ces essais, la tension est augmentée progressivement par paliers jusqu'à atteindre la tension de claquage. Le claquage est déterminé lorsqu'il y a une augmentation du courant dans le circuit et une diminution de tension aux bornes de l'éprouvette.

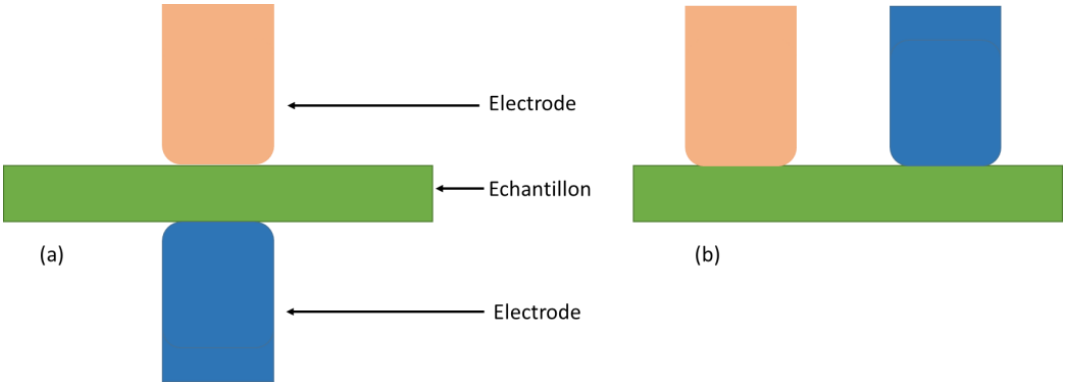


Figure 59 : Mesure de rigidité diélectrique (a) transversale et (b) superficielle

9.4.3.2 Résultats

Pour des raisons de confidentialité, toutes les valeurs seront normalisées par rapport à la valeur mesurée sur un composite PAAlO chargé à une fraction volumique de charge F1.

Les essais ont été réalisés seulement sur les échantillons de la première campagne, composite PAAlO et PAAlS dans le but de s'assurer du caractère isolant pour l'électricité du composite formulé. La présence d'un grand nombre de porosités pourrait, avec la présence d'humidité, créer une chaine conductrice au sein du composite.

Les essais ont été réalisés sur des échantillons de dimension de 40x20x3mm, avec pour chaque spécimen quatre points de mesures, trois volumiques ((a),(b) et (c)) et un surfacique (d) (Figure 60).

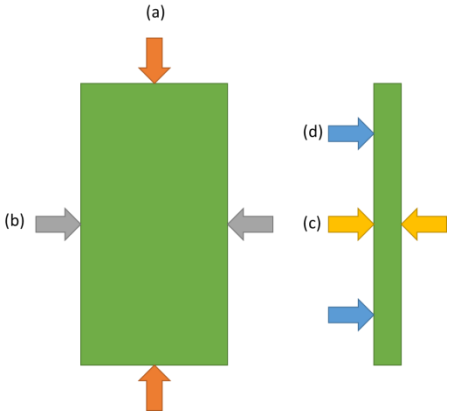


Figure 60 : Positon des points de mesures de la résistivité électrique

Ces mesures permettent de déterminer si la résistance électrique du composite est bien supérieure à la valeur seuil qui est de 0.1GΩ.cm. Toutes les configurations des échantillons dépassent grandement le seuil minimal souhaité, allant jusqu'à des valeurs plus que mille fois supérieures. Il ne semble pas y avoir de tendance particulière quant à l'évolution de la résistivité électrique en fonction de la fraction volumique de charge.

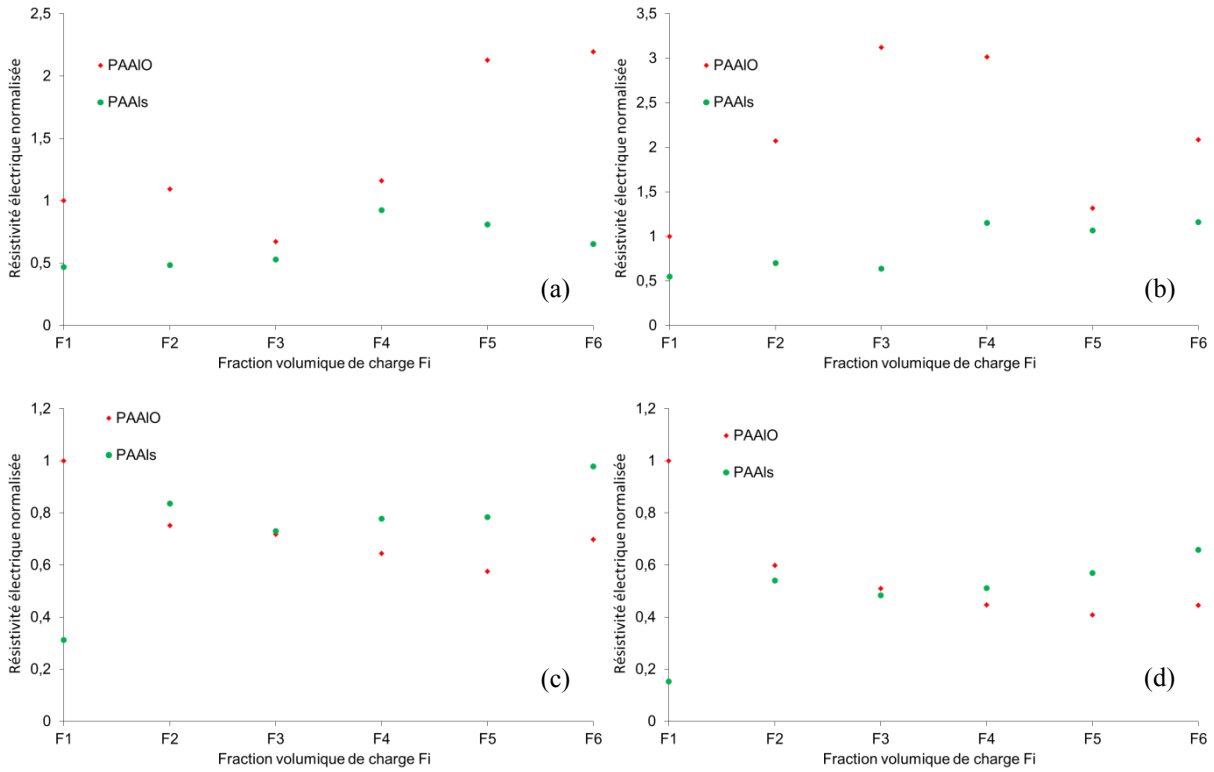


Figure 61 : Résistivité électrique de composite à matrice PA pour différents points de mesures

Des mesures ont été faites pour déterminer la tension de claquage des composites. Des paliers de tension ont été mis en différents points de l'éprouvette (points identiques aux points de mesures de la résistivité électrique Figure 60). Six paliers ont été appliqués : 500V, 1000V, 1500V, 2000V, 2500V et 2900V, en courant alternatif de 50Hz. Le courant traversant l'éprouvette est mesuré, s'il est inférieur à une valeur 1mA, la tension mise aux bornes de l'échantillon est inférieure à la tension de claquage.

La tension appliquée aux bornes de l'éprouvette s'est révélée inférieure à la tension de claquage pour tous les échantillons testés. En effet, dans le cas le plus défavorable d'une tension de 2900Vac, le courant mesuré, le plus important, n'était que de 0.03mA, bien inférieur à la limite de 1mA.

Nous pouvons donc affirmer que l'isolation électrique est assurée quels que soient les couples de matériaux choisis pour la matrice polymère et les charges minérales.

9.4.4 Mécanique

9.4.4.1 Méthodes de mesure

- Compression/Traction

Les essais de compression ont été réalisés suivant la norme ISO 604 et les essais de traction suivant la norme ISO 527. Pour ces essais, l'éprouvette a été soumise à une traction ou à une compression à une vitesse constante, jusqu'à la rupture ou jusqu'à une contrainte prédéfinie. Durant ces essais les valeurs de charge et de déformation ont été enregistrées dans le but de déterminer la contrainte maximum à rupture, le module d'Young et la déformation maximale.

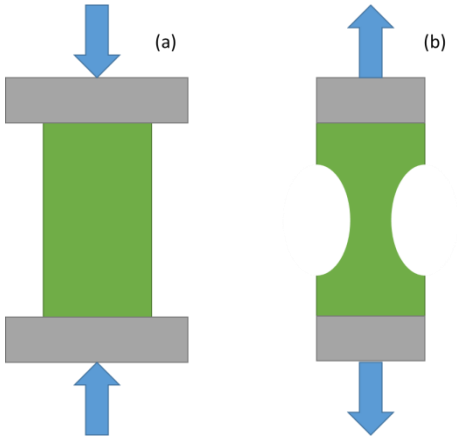


Figure 62 : Essais de compression (a) et de traction (b)

- Flexion à chaud

Les mesures de flexion à chaud sont utilisées afin de déterminer la température à laquelle le matériau se déforme de manière excessive. Les essais sont réalisés suivant la norme ISO 75 relative à la détermination de la température de fléchissement sous charge. Un chargement fixe de 0.45 ou 1.80 MPa est appliqué à une éprouvette de flexion, le tout est placé dans un bain d'huile et est chauffé à une vitesse uniforme. La température est relevée lorsque la flèche atteint une valeur imposée par la norme par les dimensions de l'éprouvette et de la norme.

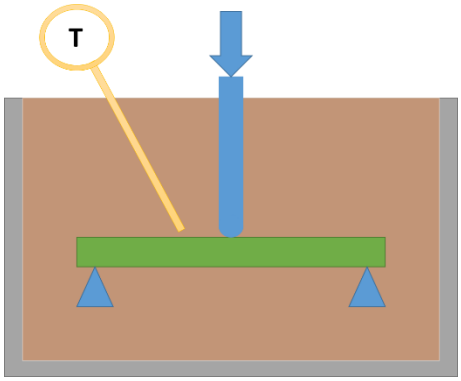


Figure 63 : Essais de flexion à chaud

9.4.4.2 Résultats

Pour des raisons de confidentialité, toutes les valeurs mécanique seront normalisées par rapport à la valeur mesuré sur un composite PAAlO chargé à une fraction volumique de charge F1.

Des essais mécaniques ont été faits durant les deux campagnes de mesures afin de déterminer la tenue des composites. Des essais de compression et de flexion à chaud ont été fait pour la première campagne et la deuxième campagne à quant à elle été caractérisé seulement par des essais de compression.

- Première campagne d'essais

La première campagne à était fait avec des composites PAAlO et PAAlS avec des fractions volumiques de charge allant de F1 à F6. Les essais ont été réalisés sur des échantillons de dimension de 10x10x3mm, avec pour chaque configuration six mesures.

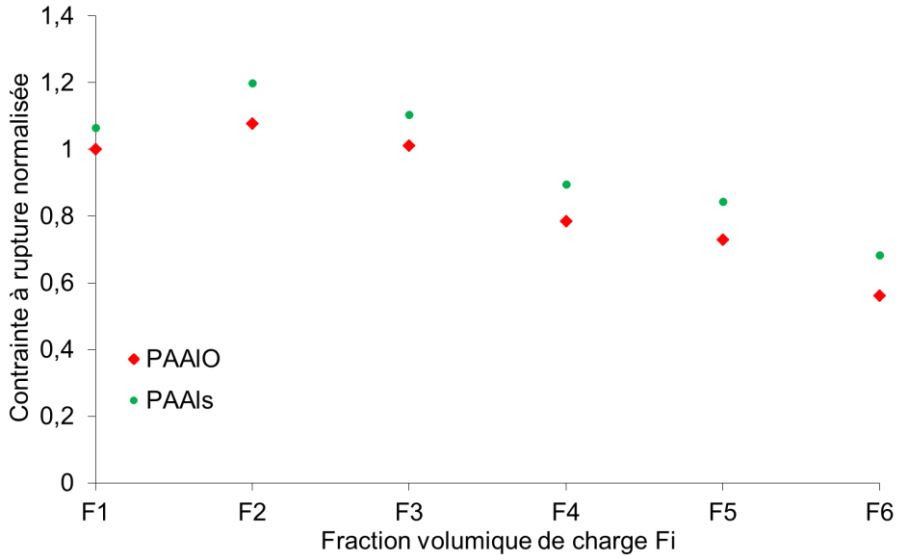


Figure 64 : Contrainte à rupture en fonction de la fraction volumique de charge pour un composite à matrice PA chargé d'alumine ou d'aluminosilicate.

Sur le graphique (Figure 64) est observée la contrainte à rupture obtenue pour des composites PAAlO et PAAlS en fonction de la fraction volumique de charge. Pour des fractions volumiques de charge de F1 et F2 on constate que la contrainte à rupture augmente et dans le cas de fractions volumiques de charge supérieure à F3 la contrainte à rupture tend à diminuer avec l'élévation de la fraction volumique de charge. Cette chute de la contrainte avec l'accroissement de la fraction de charge peut s'expliquer d'une part par l'élévation de la quantité de porosité produit par l'augmentation de la fraction de charge comme montré dans la partie (9.4.1) mais aussi par la diminution de la quantité de matrice présente dans le composite, seule phase responsable de la tenue mécanique du composite.

Les essais ont été faits sur des échantillons de dimension 80x10x3, chaque matière est testée deux fois. La contrainte de flexion appliquée est une contrainte de 1.8MPa.

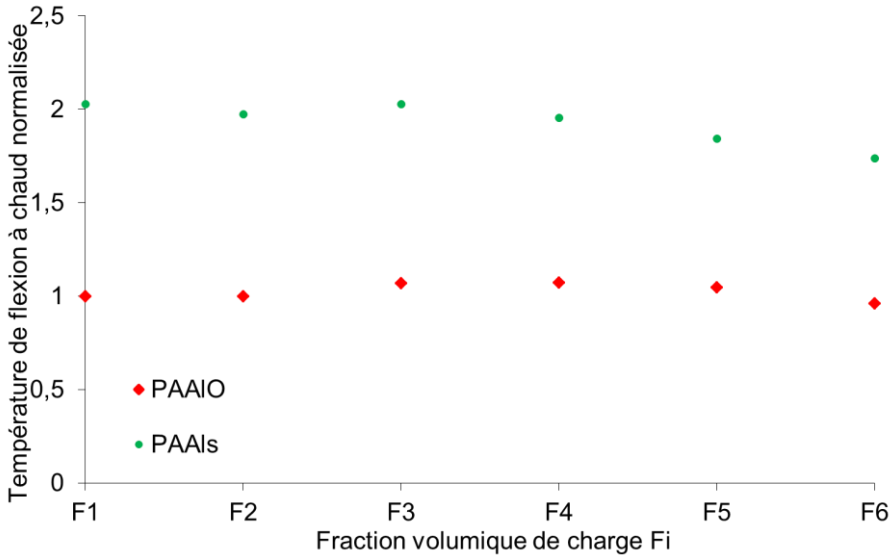


Figure 65 : Evolution de la température de flexion à chaud pour des composites à matrice PA chargé d'alumine ou d'aluminosilicate.

Sur le graphique (Figure 65) on observe la variation de la température de flexion à chaud pour des composites PAAlO et PAAlS et de polyamide non chargé représenté par droite noire. Pour les deux type de charges, on constate une variation quasi-inexistante de la température de flexion à chaud avec la fraction volumique de charge, seule une légère diminution est remarquable pour les fractions les plus élevées. Cependant, on distingue une grande disparité entre les valeurs obtenues. Les composite PAAlO qui possèdent une HDT plus importante que celle du PA pure mais deux fois plus faible que celle des composites PAAlS, une différence s'expliquant par une disparité de la fraction de porosité des deux matériaux mais aussi par la variation de compatibilité entre la matrice et les deux natures de charges.

- Deuxième campagne d'essais

La deuxième campagne a été faite avec des composites PEKKNB avec des fractions de charge de F1, F3 et F5. Des échantillons en PEKKAlS chargé à F3 ont été réalisés afin de faire une comparaison avec les résultats précèdent. Les essais ont été réalisés en compression sur des échantillons de dimension de 10x10x3mm, avec pour chaque configuration six mesures.

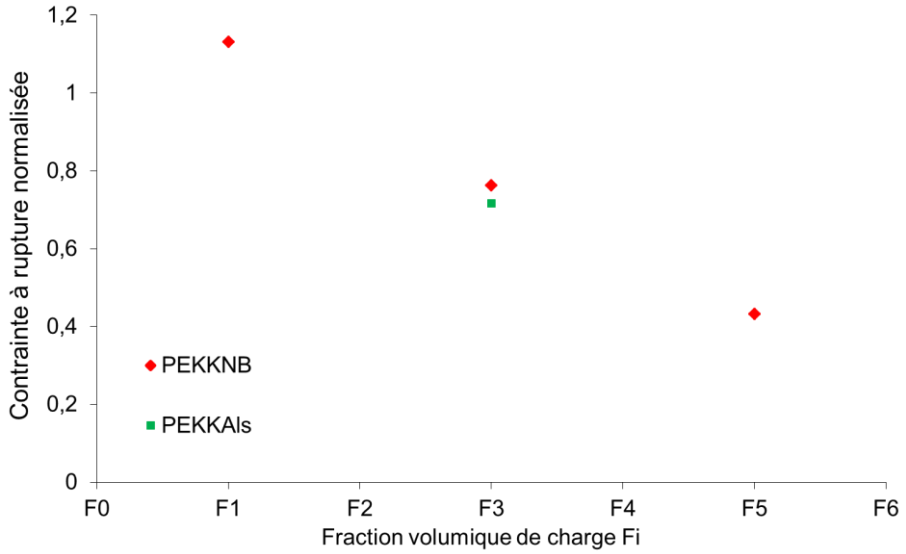


Figure 66 : Contrainte à rupture en fonction de la fraction volumique de charge pour un composite à matrice PEKK chargé de nitrure de bore ou d'aluminosilicate.

On constate comme pour la première campagne d'essais que nous avons une diminution de la contrainte à rupture avec l'augmentation de la fraction de renfort dans le composite. Les valeurs de contrainte obtenues avec les échantillons de composite à matrice PEKK sont plus faibles que celles obtenues avec les composites à matrice PA, ceci peut sembler contradictoire du faut que la contrainte à rupture du PA pure est plus basse que celle du PEKK pur. Cette réduction des caractéristiques mécaniques est produite comme dit dans la partie sur la mesure de la conductivité thermique à un problème de compatibilité entre les charges et la matrice.

9.5 CONCLUSION

Pour le choix des matériaux, nous avons choisi d'utiliser comme matrice des polymères thermoplastiques à haute tenue en température (PPS, PBT, PEKK) et comme charge des minéraux à la fois isolants électrique et conducteurs thermique (nitrure de bore, nitre l'aluminium et autres). Pour faire des essais préliminaires moins couteux, nous avons utilisé dans un premier temps une matrice polyamide chargée d'alumine ou d'aluminosilicate. Dans un second temps, nous avons utilisé des matériaux plus performants, une matrice de PEKK et des charges de nitrure de bore.

Pour la mise en forme nous nous sommes basés sur un procédé ne nécessitant que peu de matériel, nous avons opté pour un procédé par compression de poudre à chaud. Ce procédé ayant comme avantage de permettre un mélange à froid, sous forme de poudre, lui permettant de ne pas être limité par la viscosité induite par de fortes fractions volumiques de charges.

Pour la caractérisation, dans la première campagne d'essais, nous avons constaté la présence d'une grande quantité de porosité augmentant avec la fraction volumique de charge dans les échantillons. Ces porosités ont affecté de manière néfaste les caractéristiques thermiques et mécaniques du composite en les faisant diminuer. Les caractéristiques thermiques devant, d'après les simulations, augmenter avec les fractions de charge ont chuté dans le cas de fraction de charges trop imposante, à cause des porosités.

Dans la seconde campagne, le changement de matrice, de charge et l'optimisation des paramètres procédés ont permis de faire drastiquement chuter la fraction de porosité, ce qui aurait dû permettre d'obtenir des composites avec de meilleures propriétés. Cependant, bien que la fraction de porosité ait baissée, un autre type de défaut a affecté les caractéristiques du composite, des interfaces imparfaites. Les caractéristiques de composite n'ont donc pu être franchement améliorées par l'utilisation de matériaux plus performants.

Chapitre 10 : Conclusions générales et perspectives

10 CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES

L'objectif de cette thèse était d'optimiser la conductivité thermique de composites à renforts particulaires et à matrice thermoplastique pour permettre la dissipation de la chaleur en gardant comme contrainte principale une bonne isolation électrique.

L'analyse bibliographique a montré que la solution technologique passait par la formulation de composites : les matériaux homogènes ne pouvaient pas seuls répondre aux exigences thermiques et électriques. Une étude approfondie des mécanismes de transfert de la chaleur et de la conductivité électrique nous a permis de cerner les problématiques à résoudre, aussi bien sous l'angle expérimental que dans l'approche prédictive du comportement.

Nous avons privilégié une modélisation de la conductivité thermique de matériaux hétérogènes à phases particulaires par une approche à transition d'échelles accompagnées de calculs d'homogénéisation. Une transposition du problème de l'inclusion d'Eshelby a été réalisée en thermique (cette approche peut s'appliquer à tout phénomène de transport). Cette approche a permis la mise en évidence d'équations décrivant les relations entre les différents champs lors des changements d'échelle et a conduit à la détermination du comportement effectif à travers les schémas d'homogénéisation classiques (Mori-Tanaka, Auto-cohérent …).

Les modèles existants dans la littérature sont souvent dédiés à des géométries simples (sphère ou cylindre) et limités à des conductivités thermiques isotropes des différentes phases. Les cas traitant des inclusions à forme ellipsoïdale se trouvant souvent limité par des hypothèses sur le comportement des phases.

Un problème supplémentaire à traiter dans cette thèse était la forte concentration de charges nécessaires à garantir une conductivité thermique répondant au cahier des charges de l'industriel qui souhaitait un composite à matrice polymère (fortement isolante thermiquement). L'anisotropie induite par la présence d'inclusions ellipsoïdales impliquait le développement de modèles originaux suffisamment robustes pour traiter de taux de charges élevés, de contraste de propriétés importantes et de géométries ellipsoïdales pour prédire le comportement pour des charges minérales s'apparentant à des platelets et de conductivité thermique élevée (par rapport à celle de la matrice). Les premiers échantillons modèles ayant montré que l'interface entre les charges et la matrice avait également une influence importante sur la conductivité thermique effective, les modèles ont donc été étendus en considérant la présence d'une interface imparfaite ou d'une interphase à conductivité thermique dégradée par la présence de porosités.

Pour développer le modèle à interface imparfaite, nous nous sommes basés sur une représentation similaire au modèle d'Assemblage de Sphères Composites développé par Hashin & Shtrikman (Hashin & Shtrikman 1962) que nous avons étendu au cas de particules ellipsoïdales, avec des phases anisotropes en utilisant une méthode de résolution basée sur les fonctions de Green. Les résultats se sont montrés en adéquation avec les modèles existants dans des cas particuliers de phases isotropes et d'interface parfaite. Nous avons pu faire des études paramétriques dans le but d'évaluer l'influence des différents paramètres.

Pour développer un modèle à interphase, nous nous sommes basés sur le problème de l'inclusion à enrobages multiples dans le cas de particules ellipsoïdales multi-enrobées et pour des phases anisotropes. La conductivité thermique effective a été évaluée par un schéma auto-cohérent généralisé plus adapté aux grandes fractions volumiques et aux forts contrastes de propriétés. Une première version exacte du modèle a été mise en évidence en utilisant des tenseurs d'Eshelby intérieur et extérieur pour des ellipsoïdes à enrobages satisfaisant la condition de confocalité. Les résultats se sont montrés en adéquation avec les modèles existants dans des cas particuliers de phases isotropes et d'interface parfaite. Les résultats ont rejoints ceux obtenus par l'Assemblage d'Ellipsoïde Composite dans le cas d'une interface parfaite. Une seconde version approchée du modèle a permis de s'affranchir de la condition de confocalité en simplifiant la démarche par un choix du milieu de référence lors de l'établissement de l'équation de localisation des inclusions composites. Cette dernière version du modèle, bien qu'approchée dans sa démarche, donne une formulation similaire des équations de localisation : le calcul des tenseurs de polarisation combinés aux conditions de polarisation donnant les mêmes résultats que la première version exacte. Cette dernière version du modèle d'inclusions à enrobages multiples permet de traiter des applications avec des composites pour des charges de nature différentes mais également permet de quantifier l'effet induit par la présence de porosité corrélative aux fortes fractions volumiques de charge. Il resterait à identifier plus finement la nature de l'interface imparfaite afin d'améliorer la prédiction de la conductivité thermique. Le modèle décrivant l'interface imparfaite reposant sur le concept de résistance interfaciale de Kapitza, il serait intéressant de proposer une modélisation du comportement de l'interface plus fine.

Avec les résultats obtenus par la modélisation et l'étude de la littérature, nous avons déterminé les meilleurs composants et le procédé de mise en forme adapté à la réalisation d'un composite thermiquement conducteur et électriquement isolant. Des échantillons ont été réalisés et caractérisés.

Pour les choix de la matrice, des thermoplastiques semi-cristallins à hautes tenues en température ont été sélectionnés, PPS, PBT et PEKK. Pour les renforts, nous avons choisi des matériaux céramiques à la fois conducteurs thermique et isolants électrique : nitrure de bore et nitrure d'alumine. Pour le procédé de mise en forme, nous avons choisi une mise en œuvre par compression de poudre à chaud, un procédé adapté aux contraintes et caractéristiques des matériaux de base.

Une première campagne d'essais a été réalisée avec des matériaux modèles, des matériaux plus abordables mais avec de performances moindres. Pour cela, nous avons utilisé une matrice en polyamide 11 et des renforts d'alumine et d'aluminosilicate. Les composites ont été réalisés et caractérisés thermiquement, mécaniquement et électriquement. Nous avons constaté la présence d'une quantité non négligeable de porosité pouvant nuire aux performances du composite. Avec la prise en compte de ces porosités dans nos modèles nous avons obtenu des valeurs théoriques très proches des résultats expérimentaux. Les essais électriques ont montré, comme attendu, une isolation satisfaisante des composites. Avec les essais mécaniques nous avons observé que les caractéristiques du composite permettaient d'obtenir une résistance supérieure à celle du polymère pur.

Pour la seconde campagne, nous avons utilisé des matériaux plus performants, une matrice en PEKK et des renforts en nitrure de bore. Avec la première campagne d'essais nous avons pu améliorer le procédé de mise en forme. Les modifications du procédé et l'utilisation d'autres composants nous ont permis de réduire de manière importante le taux de porosité au sein du composite. Nous avons caractérisé le composite thermiquement et mécaniquement. Les résultats obtenus avec les essais thermiques ont montré, malgré une diminution de la porosité et l'utilisation de renforts plus conducteurs thermique, une diminution de la conductivité thermique effective des composites. Nous avons identifié deux facteurs pouvant être à l'origine de cette réduction : la modification des conditions de mesure et une incompatibilité entre la matrice et les renforts. En effet, un surfaçage a été fait sur les échantillons lors de la première campagne d'essais qui n'a pas été fait sur la seconde, ajoutant un effet de peau sur les échantillons de la seconde campagne réduisant la conductivité thermique.

Durant cette étude, nous avons développé trois nouveaux modèles permettant d'estimer la conductivité thermique effective des composites avec une forte fraction volumique de charge dans le cas de particules ellipsoïdales pouvant prendre en compte l'anisotropie des phases, les interfaces imparfaites et le cas de particules multi-enrobées.

Bien que nous n'ayons pas pu atteindre les valeurs souhaitées, les essais réalisés ont permis d'identifier les paramètres à améliorer pour maximiser la conductivité thermique du composite, tout en gardant une isolation électrique satisfaisante. Par la suite, plusieurs points pourraient permettre l'obtention d'un composite voulu. L'utilisation d'un compatibilisant ou d'un traitement des charges permettrait d'améliorer les liaisons entre la matrice et les renforts, permettant une meilleure circulation de la chaleur au sein du composite et une teneur mécanique accrue. L'utilisation de polymère avec une tenue mécanique plus élevée permettrait au composite une résistance plus importante. Des renforts de même nature mais de gamme supérieure pourrait accroitre la conductivité thermique effective du composite. Enfin l'utilisation d'un procédé de mise en forme plus performant pourrait améliorer le mélange et accroître l'homogénéité du composite.

Références bibliographiques

11 REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Agari, Y. et al., 1990. Thermal Conductivity of a Polymer Filled with Particles in the Wide Range from Low to Super-High Volume Content. , 40, pp.929–941.

Aucher, J., 2011. *Etude comparative du comportement composites à matrice thermoplastique ou thermodurcissable*.

Avenas, P., 1978. Le rôle de la cristallinité dans la mise en forme des polymères. *Journal de Physique colloques*, (6).

Benveniste, Y., 2013. Models of thin interphases and the effective medium approximation in composite media with curvilinearly anisotropic coated inclusions. *International Journal of Engineering Science*, 72, pp.140–154.

Benveniste, Y. & Miloh, T., 1989. An exact solution for the effective thermal conductivity of cracked bodies with oriented elliptical cracks. *Journal of Applied Physics*, 66(1), pp.176–180.

Benveniste, Y. & Milton, G.W., 2010. The effective medium and the average field approximations vis-à-vis the Hashin–Shtrikman bounds. I. The self-consistent scheme in matrix-based composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 58(7), pp.1026–1038.

Bonfoh, N., Dreistadt, C. & Sabar, H., 2017. Micromechanical modeling of the anisotropic thermal conductivity of ellipsoidal inclusion-reinforced composite materials with weakly conducting interfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 108, pp.1727–1739.

Bonnet, P. et al., 2007. Thermal properties and percolation in carbon nanotube-polymer composites. *Applied Physics Letters*, 91(20), pp.1–4.

Calvo-Jurado, C. & Parnell, W.J., 2015. Hashin – Shtrikman bounds on the effective thermal conductivity of a transversely isotropic two-phase composite material. , pp.828–843.

Christensen, R.M., 1990. A critical evaluation for a class of micromechanics models. , 38(3), pp.379–404.

Christensen, R.M. & Lo, K.H., 1979. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27(4),

pp.315–330.

Dupuis, D., 2008. Mesure de la viscosité - Viscosimètres et rhéomètres Mesure de la viscosité Viscosimètres et rhéomètres. , 33(0).

Eshelby, J.., 1957. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems.

Giordano, S., 2015. Nonlinear effective behavior of a dispersion of randomly oriented coated ellipsoids with arbitrary temporal dispersion. *International Journal of Engineering Science*, 33, pp.1–22.

Giordano, S. & Palla, P.L., 2008. Dielectric behavior of anisotropic inhomogeneities: interior and exterior point Eshelby tensors. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(41), p.415205.

Hashin, Z., 1968. Assessment of the Self Consistent Scheme Approximation: Conductivity of Particulate Composites. *Journal of Composite Materials*, 2(3), pp.284–300.

Hashin, Z., 1960. *The elastic moduli of heterogeneous materials*,

Hashin, Z. & Shtrikman, S., 1962. A Variational Approach to the Theory of the Effective Magnetic Permeability of Multiphase Materials. *Journal of Applied Physics*, 33(10), p.3125.

Hasselman, D.P.. & Johnson, F., 1987. Effective thermal conductivity of composites with interfacial thermal barrier resistance. *Journal of Composite Materials*.

Hatta, H. & Taya, M., 1986. Equivalent inclusion method for steady state heat conduction in composites. , 24(7).

Herve, E., 2002. Thermal and thermoelastic behaviour of multiply coated inclusion-reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures*, 39, pp.1041–1058.

Hong, J.-P. et al., 2012. High thermal conductivity epoxy composites with bimodal distribution of aluminum nitride and boron nitride fillers. *Thermochimica Acta*, 537, pp.70–75.

Ishida, H. & Rimdusit, S., 1998. Very high thermal conductivity obtained by boron nitride-filled polybenzoxazine. *Thermochimica Acta*, 320, pp.177–186.

Jost, J., 2005. *Postmodern Analysis*,

Kalaitzidou, K., Fukushima, H. & Drzal, L.T., 2007. Multifunctional polypropylene

composites produced by incorporation of exfoliated graphite nanoplatelets. *Carbon*, 45(7), pp.1446–1452.

Kapitza, P.L., 1941. Heat transfer and superfluidity of helium II. *Physical Review*.

Kellogg, O.D., 1929. *Foundations of Potential Theory*,

King, J.A. et al., 2010. Effects of Carbon Fillers in Thermally Conductive Polypropylene Based Resins.

Kunin, I.A., 1983. Elastic Media with Microstructure II: Three Dimensionnal Models (Springer S).

Kushch, V.I., Sevostianov, I. & Belyaev, A.S., 2015. Effective conductivity of spheroidal particle composite with imperfect interfaces: Complete solutions for periodic and random micro structures. *Mechanics of Materials*, 89, pp.1–11.

Lécrivain, L., 1987. Céramiques. Généralités. *Techniques de l'Ingénieur*, 33(0).

Lee, J.-K. & Kim, J.-G., 2010. Generalized Self-Consistent Model for Predicting Thermal Conductivity of Composites with Aligned Short Fibers. *Materials Transactions*, 51(11), pp.2039–2044.

Lee, J.-K. & Kim, J.-G., 2013. Governing equations for effective thermal conductivity of composites with coated short fibers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 67, pp.654–658. Available at: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931013007370.

Li, H., Zeng, Q. & Xu, S., 2017. Effect of pore shape on the thermal conductivity of partially saturated cement-based porous composites. *Cement and Concrete Composites*, 81, pp.87–96.

Li, T. & Hsu, S.L., 2010. Enhanced Thermal Conductivity of Polyimide Films via a Hybrid of Micro- and Nano-Sized Boron Nitride. , (2 L), pp.6825–6829.

Mamunya, Y.P. et al., 2002. Electrical and thermal conductivity of polymers filled with metal powders. *European Polymer Journal*, 38(9), pp.1887–1897.

Maxwell, 1873. *A treatise on electicity and magnetism*,

Mura, T., 1982. Micromechanics of Defects in Solids.

Ordonez-Miranda, J., Yang, R. & Alvarado-gil, J.J., 2014. *Nanoscale Thermoelectrics* X. Wang & Z. M. Wang, eds., Cham: Springer International Publishing.

Ponte-Castañeda, P. & Willis, J.R., 1995. The effect of spatial distribution on the effective behavior of composite materials and cracked media. , 43(12), pp.1919–1951.

Randrianalisoa, J.H., 2006. *Transfert thermique par rayonnement et conduction dans les matériaux poreux micro et nanostructurés . Analogie transfert de phonons et de photons*.

Rivière, L., 2016. Analyse des mécanismes de conduction thermique dans les composites structuraux PEEK/particules submicroniques d'argent.

Tavman, I.H., 1996. Thermal and mechanical properties of copper powder filled poly (ethylene) composites. *Powder Technology*, 91, pp.63–67.

Tekce, H.S. & Kumlutas, D., 2016. Effect of Particle Shape on Thermal Conductivity of Copper Reinforced Polymer Composites. *Journal of reinforced plastics and composites*, 26(1), pp.113–121.

Toureille, A., 2009. Mesures électriques des matériaux diélectriques solides Mesures électriques des matériaux diélectriques solides. , 33(0).

Weiglhofer, W.S., Lakhtakia, A. & Michel, B., 1997. Maxwell garnett and bruggeman formalisms for a particulate composite with bianisotropic host medium. , 15(4), pp.263–266.

Zhao, Y., Zhai, Z. & Drummer, D., 2018. Thermal Conductivity of Aluminosilicate- and Aluminum Oxide-Filled Thermosets for Injection Molding : Effect of Filler Content , Filler Size and Filler Geometry.

Annexes

12 DEFINITION DES TENSEURS ET VECTEURS DE POLARISATIONS $\boldsymbol{L^{\beta}}$ ET $\boldsymbol{\Lambda^{\beta}}$

12.1 DEFINITION DES TENSEURS ET VECTEURS DE POLARISATION

L'objectif de cette annexe est de déterminer les tenseurs et vecteurs de polarisation $\boldsymbol{L}^{\beta}$ et $\boldsymbol{\Lambda}^{\beta}$ afin de pouvoir exprimer les équations de localisation dans les différents modèles développés. Les tenseurs $\boldsymbol{L}^{\beta}$ et $\boldsymbol{\Lambda}^{\beta}$ sont définis comme :

$$\Lambda_p^{\beta}(\boldsymbol{r}') = -\int_{V_{\beta}} G_{,p}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dV$$
$$\text{où } \beta = 1 \text{ ou } 2. \qquad (12.1)$$
$$L_{pi}^{\beta}(\boldsymbol{r}') = -\int_{V_{\beta}} G_{,pi}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,dV$$

Nous cherchons à déterminer les intégrales des fonction de Green dans le cas de matériaux anisotrope, cependant, pour une conductivité thermique anisotrope $\boldsymbol{K}^0$, l'expression des fonctions Green (12.2) n'est pas explicite.

$$K_{ij}^0 G_{,ij}^0(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0 \qquad (12.2)$$

Pour résoudre ce problème, on applique un changement de variable permettant un calcul explicite des fonctions de Green (12.2). Le changement de variable repose sur une transformation linéaire des coordonnées cartésiennes comme suggéré dans les travaux de Weiglhofer (Weiglhofer et al. 1997) et Giordano (Giordano & Palla 2008).

L'équation (12.2) est décomposée:

$$K_1^0 G_{,11}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + K_2^0 G_{,22}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + K_3^0 G_{,33}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') = 0. \qquad (12.3)$$

Nous proposons le changement de variable $K_i^0 = K_1^0\,\alpha_i^2$ avec $\alpha_i^2 = K_i^0/K_1^0$ qui permet de réécrire (12.3) sous la forme :

$$K_1^0\left(\alpha_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\alpha_2^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\alpha_3^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')+\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=0. \tag{12.4}$$

On considéré le changement de variables défini par :

$$x_i=\alpha_i\,y_i\;;\;r_i=\alpha_i\,y_i\;;\;\alpha_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial y_i}. \tag{12.5}$$

Nous pouvons introduire les fonctions de Green et de Dirac transformées :

$$G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rightarrow\tilde{G}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}')\;;\;\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\rightarrow\tilde{\delta}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'). \tag{12.6}$$

L'équation (6.11) devient donc :

$$K_1^0\tilde{G}_{,pp}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}')+\tilde{\delta}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}')=0. \tag{12.7}$$

La solution de l'équation (12.7) est donnée par :

$$\tilde{G}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}')=\frac{1}{4\pi\,K_1^0}\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'|}. \tag{12.8}$$

Les vecteurs et tenseurs $\boldsymbol{\Lambda^{\beta}}(\boldsymbol{r}')$ et $\boldsymbol{L^{\beta}}(\boldsymbol{r}')$ deviennent :

$$\begin{aligned}\Lambda_p^{\beta}(\boldsymbol{r}')&=-\frac{1}{4\pi\,\alpha_p K_1^0}\frac{\partial}{\partial y_p'}\int_{\tilde{V}_{\beta}}\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'|}d\tilde{V}\\ L_{pj}^{\beta}(\boldsymbol{r}')&=-\frac{1}{4\pi\,\alpha_p\alpha_j K_1^0}\frac{\partial}{\partial y_p'\partial y_j'}\int_{\tilde{V}_{\beta}}\frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'|}d\tilde{V}.\end{aligned} \tag{12.9}$$

Les volumes et surfaces transformés sont décrits après le changement de variable sous la forme

$$\begin{aligned}&V_1:\sum_{i=1}^{3}\frac{{x_i}^2}{{a_i}^2}=1\;;\;\boldsymbol{r}\in S_1\rightarrow\;\tilde{V}_1:\sum_{i=1}^{3}\frac{{y_i}^2}{{\tilde{a}_i}^2}=1\;;\;\boldsymbol{y}\in\tilde{S}_1\text{ avec }\tilde{a}_i=\frac{a_i}{\alpha_i}\\ &V_2:\sum_{i=1}^{3}\frac{{x_i}^2}{{b_i}^2}=1\;;\;\boldsymbol{r}\in S_2\rightarrow\tilde{V}_2:\sum_{i=1}^{3}\frac{{y_i}^2}{{\tilde{b}_i}^2}=1\;;\;\boldsymbol{y}\in\tilde{S}_2\text{ avec }\tilde{b}_i=\frac{b_i}{\alpha_i}.\end{aligned} \tag{12.10}$$

D'après Mura (Mura 1982), on introduit la fonction harmonique $\tilde{\varphi}^{\beta}$, défini par:

$$\tilde{\varphi}^{\beta}(\boldsymbol{y}') = \int_{\tilde{V}_{\beta}} \frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}'|}\, d\tilde{V} \tag{12.11}$$

avec : $\tilde{\varphi}^{\beta}(\boldsymbol{y}') = \frac{1}{2}\left(\tilde{I}^{\beta}(\tilde{\lambda}_{\beta}) - y_{\mathrm{n}}'\, y_n'\, \tilde{I}_n^{\beta}(\tilde{\lambda}_{\beta})\right)$

où:

$$\tilde{I}^1(\tilde{\lambda}_1) = 2\,\pi\,\tilde{a}_1\,\tilde{a}_2\,\tilde{a}_3 \int_{\tilde{\lambda}_1}^{\infty} \frac{ds}{\tilde{\Delta}_1(s)}\,, \qquad \tilde{I}_n^1(\tilde{\lambda}_1) = 2\,\pi\,\tilde{a}_1\,\tilde{a}_2\,\tilde{a}_3 \int_{\tilde{\lambda}_1}^{\infty} \frac{ds}{(\tilde{a}_n^2+s)\tilde{\Delta}_1(s)}$$

$$\tilde{I}^2(\tilde{\lambda}_2) = 2\,\pi\,\tilde{b}_1\,\tilde{b}_2\,\tilde{b}_3 \int_{\tilde{\lambda}_2}^{\infty} \frac{ds}{\tilde{\Delta}_2(s)}\,, \qquad \tilde{I}_n^2(\tilde{\lambda}_2) = 2\,\pi\,\tilde{b}_1\,\tilde{b}_2\,\tilde{b}_3 \int_{\tilde{\lambda}_2}^{\infty} \frac{ds}{(\tilde{b}_n^2+s)\tilde{\Delta}_2(s)} \tag{12.12}$$

$$\tilde{\Delta}_1(s) = \sqrt{(\tilde{a}_1^2+s)(\tilde{a}_2^2+s)(\tilde{a}_3^2+s)} \text{ et } \tilde{\Delta}_2(s) = \sqrt{(\tilde{b}_1^2+s)(\tilde{b}_2^2+s)(\tilde{b}_3^2+s)}.$$

Avec $\tilde{\lambda}_{\beta}$ définie comme suit :

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{{y_i}^2}{{\tilde{a}_i}^2+\tilde{\lambda}_1} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{{y_i}^2}{{\tilde{b}_i}^2+\tilde{\lambda}_2} = 1 \text{ où } \tilde{\lambda}_{\beta} = 0 \text{ pour } \boldsymbol{y}' \in V_{\beta}'. \tag{12.13}$$

Les vecteurs et tenseurs transformés (12.9) nécessitent les calculs des dérivées de la fonction harmonique:

$$\tilde{\varphi}^{\beta}{}_{,i}(\boldsymbol{y}') = -{y_j}'\delta_{ji}\tilde{I}_j^{\beta}(\tilde{\lambda}_{\beta}) \text{ et } \tilde{\varphi}^{\beta}{}_{,ij}(\boldsymbol{y}') = -\delta_{ij}\tilde{I}_i^{\beta}(\tilde{\lambda}_{\beta}) - y_i\tilde{I}_{i,j}^{\beta}(\tilde{\lambda}_{\beta}) \tag{12.14}$$

avec :

$$\tilde{I}_{i,j}^1(\tilde{\lambda}_1) = \frac{-2\pi\tilde{a}_1\tilde{a}_2\tilde{a}_3}{({\tilde{a}_i}^2+\tilde{\lambda}_1)({\tilde{a}_j}^2+\tilde{\lambda}_1)\tilde{\Delta}(\tilde{\lambda}_1)}\tilde{\lambda}_{,j}^1 \text{ où } \tilde{I}_{i,j}^1(\tilde{\lambda}_1) = 0 \text{ pour } \boldsymbol{y}' \in {\tilde{V}_1}'$$

$$\tilde{I}_{i,j}^2(\tilde{\lambda}_2) = \frac{-2\pi\tilde{b}_1\tilde{b}_2\tilde{b}_3}{\left({\tilde{b}_i}^2+\tilde{\lambda}_2\right)\left({\tilde{b}_j}^2+\tilde{\lambda}_2\right)\tilde{\Delta}(\tilde{\lambda}_2)}\tilde{\lambda}_{,j}^2 \text{ où } \tilde{I}_{i,j}^2(\tilde{\lambda}_2) = 0 \text{ pour } \boldsymbol{y}' \in {\tilde{V}_2}'$$

$$\text{et } \tilde{\lambda}_{,j}^1 = \frac{2y_i}{{\tilde{a}_j}^2+\tilde{\lambda}_1} \Big/ \frac{y_i y_i}{\left({\tilde{a}_i}^2+\tilde{\lambda}_1\right)^2} \quad ; \quad \tilde{\lambda}_{,j}^2 = \frac{2y_i}{{\tilde{b}_j}^2+\tilde{\lambda}_2} \Big/ \frac{y_i y_i}{\left({\tilde{b}_i}^2+\tilde{\lambda}_2\right)^2}.$$

Pour $\boldsymbol{r}' \in {V_2}'$, le tenseur $\boldsymbol{L^2}(\boldsymbol{r}')$ devient donc:

$$L_{pj}^{2}(\boldsymbol{r'}) = \frac{\delta_{ij}\tilde{I}_{i}^{2}(0)}{4\pi\ \alpha_p\alpha_j K_1^0} = \frac{\tilde{I}_{i}^{2}(0){K_{pj}^{0}}^{-1}}{4\pi} = L_{pj}^{2} \text{ pour } \boldsymbol{r'} \in V_2'. \quad (12.15)$$

Finalement, on obtient l'expression du tenseur de polarisation $\boldsymbol{L^2(r')}$ pour $\boldsymbol{r'} \in {V_2}'$ relatif à la conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$ et V_2:

$$L_{pj}^{2} = \frac{\tilde{I}_{j}^{2}(0)\ {K_{pj}^{0}}^{-1}}{4\pi}. \quad (12.16)$$

Dans le cas où $\boldsymbol{r'} \in {S_2}'$, le vecteur $\boldsymbol{\Lambda^2(r')}$ devient:

$$\Lambda_{p}^{2}(\boldsymbol{r'}) = \frac{{x_j}'\delta_{ji}\tilde{I}_{j}^{2}(0)}{4\pi\ \alpha_p\alpha_j K_1^0} = \frac{{x_j}'\tilde{I}_{j}^{2}(0)\ {K_{pj}^{0}}^{-1}}{4\pi} = x_j' L_{pj}^{2} \text{ pour } \boldsymbol{r'} \in S_2'. \quad (12.17)$$

On obtient l'expression du tenseur de polarisation $\boldsymbol{\Lambda^2(r')}$ pour $\boldsymbol{r'} \in {S_2}'$ relatif à la conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$ et V_2:

$\Lambda_p^2 = {x_j}' L_{pj}^2$.

Pour $\boldsymbol{r'} \in {V_1}'$, le tenseur $\boldsymbol{L^1(r')}$ devient:

$$L_{pj}^{1}(\boldsymbol{r'}) = \frac{\delta_{ij}\tilde{I}_{i}^{1}(0)}{4\pi\ \alpha_p\alpha_j K_1^0} = \frac{\tilde{I}_{j}^{1}(0){K_{pj}^{0}}^{-1}}{4\pi} = L_{pj}^{1} \text{ pour } \boldsymbol{r'} \in V_1'. \quad (12.18)$$

On obtient l'expression du tenseur de polarisation $\boldsymbol{L^2(r')}$ pour $\boldsymbol{r'} \in {V_1}'$, et relatif à la conductivité thermique $\boldsymbol{K^0}$ et V_1:

$$L_{pj}^{1} = \frac{\tilde{I}_{j}^{1}(0)\ {K_{pj}^{0}}^{-1}}{4\pi}. \quad (12.19)$$

Dans le cas où $\boldsymbol{r'} \in S_2'$, soit $\boldsymbol{r'}$ à l'extérieur de V_1, nous définissons le vecteur de polarisation extérieur $\boldsymbol{\Lambda}^{Ext/1}(\boldsymbol{r'})$.

Pour le déterminer, nous utilisons la relation de confocalité :

$$\tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_{1c} \text{ pour } \boldsymbol{y'} \in {\tilde{S}_2}', \text{ avec :}$$
$$\tilde{\lambda}_{1c} = {\tilde{b}_1}^2 - {\tilde{a}_1}^2 = {\tilde{b}_2}^2 - {\tilde{a}_2}^2 = {\tilde{b}_3}^2 - {\tilde{a}_3}^2 > 0. \quad (12.20)$$

L'équation (12.9) devient donc :

$$\Lambda_p^{Ext/1}(\boldsymbol{r}') = -\frac{x_j{}'\delta_{jp}}{4\pi\,\alpha_j\alpha_p K_1^0}\tilde{I}_j^1\left(\tilde{\lambda}_{1c}\right) \text{ pour } \boldsymbol{r}' \in S_2. \tag{12.21}$$

En posant :

$$\tilde{I}_j^1\left(\tilde{\lambda}_{1c}\right)$$

$$= 2\,\pi\,\tilde{a}_1\,\tilde{a}_2\,\tilde{a}_3 \int_{\tilde{\lambda}_{1c}}^{\infty} \frac{ds}{\left(\tilde{b}_j^2 - \tilde{\lambda}_{1c} + s\right)\sqrt{(\tilde{b}_1^2 - \tilde{\lambda}_{1c} + s)(\tilde{b}_2^2 - \tilde{\lambda}_{1c} + s)(\tilde{b}_3^2 - \tilde{\lambda}_{1c} + s)}}. \tag{12.22}$$

Nous faisons un changement de variable, telle que $u = -\tilde{\lambda}_{1c} + s$:

$$\tilde{I}_j^1\left(\tilde{\lambda}_{1c}\right) = 2\,\pi\,\tilde{a}_1\,\tilde{a}_2\,\tilde{a}_3 \int_0^{\infty} \frac{du}{\left(\tilde{b}_j^2 + u\right)\sqrt{\left(\tilde{b}_1^2 + u\right)\left(\tilde{b}_2^2 + u\right)\left(\tilde{b}_3^2 + u\right)}}$$

soit: $\tilde{I}_j^1\left(\tilde{\lambda}_{1c}\right) = f\tilde{I}_j^2(0)$ (12.23)

avec :

$$\tilde{I}_j^2(0) = 2\pi\, f\, \tilde{b}_1\tilde{b}_2\tilde{b}_3 \int_0^{\infty} \frac{ds}{\left(\tilde{b}_j^2 + s\right)\sqrt{\left(\tilde{b}_1^2 + s\right)\left(\tilde{b}_2^2 + s\right)\left(\tilde{b}_3^2 + s\right)}} \text{ et } f = \frac{\tilde{a}_1\,\tilde{a}_2\,\tilde{a}_3}{\tilde{b}_1\tilde{b}_2\tilde{b}_3}.$$

Enfin, on obtient l'expression du vecteur de polarisation extérieur $\boldsymbol{\Lambda^{Ext/1}}(\boldsymbol{r}')$ pour $\boldsymbol{r}' \in S_2{}'$ relatif à la conductivité thermique $\boldsymbol{K}^0$ et V_2:

$$\Lambda_p^{Ext/1}(\boldsymbol{r}') = \frac{x_j{}'\delta_{ji}\tilde{I}_j^2(0)}{4\pi\,\alpha_p\alpha_j K_1^0} = f\,\frac{x_j{}'\tilde{I}_j^2(0)\,K_{pj}^{0\,-1}}{4\pi} = x_j' f L_{pj}^2 \text{pour } \boldsymbol{r}' \in S_2'. \tag{12.24}$$

12.2 DEFINITIONS DES TENSEURS DE CONDUCTION DE POLARISATION ET DES TENSEURS R DANS LES CAS PARTICULIERS

Dans cette partie, on définit les tenseurs de conduction de polarisations et les tenseur $\boldsymbol{R}$ des cas spécifiques : sphérique, oblate et prolate (Mura 1982; Bonfoh et al. 2017). Ces tenseurs seront définis pour le cas d'une conductivité thermique isotrope K^0 et d'une ellipsoïde V_1 de demi-axes a_1, a_2 et a_3

Dans le cas de particule de forme sphérique avec $a_1 = a_2 = a_3$,

- Le tenseur de conduction de polarisation s'écrit :

$$\boldsymbol{L}_0^1 = \int_{V_1'} \boldsymbol{\Gamma^0}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, dV_1' = -\frac{1}{4\pi K^0}\boldsymbol{\nabla}^2\varphi(0) = \frac{1}{3\,K^0}\boldsymbol{I}\ pour\ \boldsymbol{r} \in V_1 \tag{12.25}$$

- Le tenseur $\boldsymbol{R}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{a_3}\boldsymbol{I}\ pour\ \boldsymbol{r} \in V_1 \tag{12.26}$$

Dans le cas de particule de forme oblate avec $a_1 = a_2 > a_3$,

- Le tenseur de conduction de polarisation s'écrit :

$$L_{0\,11}^1 = L_{0\,22}^2 = -\frac{{a_1}^2 a_3}{K^0({a_1}^2 - {a_3}^2)}\left(cos^{-1}\frac{a_3}{a_1} - \frac{a_3}{a_1}\left(1 - \frac{{a_3}^2}{{a_1}^2}\right)^{1/2}\right)$$
$$L_{0\,33}^3 = \frac{1}{K^0} - 2\,L_{0\,11}^1 \tag{12.27}$$

- Le tenseur $\boldsymbol{R}$ s'écrit :

$$R_{11} = R_{22} = \frac{3a_3\left((2{a_1}^2 - {a_3}^2)tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{{a_1}^2 - {a_3}^2}}{a_1}\right) - a_1\sqrt{{a_1}^2 - {a_3}^2}\right)}{4a_1({a_1}^2 - {a_3}^2)^{3/2}}$$
$$R_{33} = \frac{3a_3\left(a_1\sqrt{{a_1}^2 - {a_3}^2} - {a_3}^2 tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{{a_1}^2 - {a_3}^2}}{a_1}\right)\right)}{2a_1({a_1}^2 - {a_3}^2)^{3/2}} \tag{12.28}$$

Dans le cas de particule de forme prolate avec $a_1 > a_2 = a_3$,

- Le tenseur de conduction de polarisation s'écrit :

$$L^2_{011} = L^3_{022} = -\frac{a_1 {a_3}^2}{K^0({a_1}^2 - {a_3}^2)}\left(\frac{a_1}{a_3}\left(\frac{{a_1}^2}{{a_3}^2} - 1\right)^{1/2} - cosh^{-1}\frac{a_1}{a_3}\right)$$

$$L^1_{033} = \frac{1}{K^0} - 2\,L^3_{011} \tag{12.29}$$

- Le tenseur $\boldsymbol{R}$ s'écrit :

$$R_{11} = R_{22} = \frac{3a_1\left(a_3\sqrt{{a_1}^2 - {a_3}^2} - ({a_1}^2 - 2{a_3}^2)sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{{a_1}^2 - {a_3}^2}}{a_1}\right)\right)}{4a_3({a_1}^2 - {a_3}^2)^{3/2}}$$

$$R_{33} = \frac{3a_3\left({a_1}^2 cos^{-1}\left(\frac{a_3}{a_1}\right) - a_3\sqrt{{a_1}^2 - {a_3}^2}\right)}{2a_1({a_1}^2 - {a_3}^2)^{3/2}} \tag{12.30}$$